



UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA U
NOVOM SADU



Milorad Tatomirović

**DEJSTVA USKLADIŠTENOG ZRNASTOG
MATERIJALA NA ARMIRANOBETONSKE
CILINDRIČNE ĆELIJE SILOSA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 2015. godina

Tiani, Miljani i Aleksandru



КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР :	
Идентификациони број, ИБР :	
Тип документације, ТД :	Монографска документација
Тип записа, ТЗ :	Текстуални штампани материјал
Врста рада, ВР :	Докторска дисертација
Аутор, АУ :	мр Милорад Татомировић, дипл. грађ. инж.
Ментор, МН :	Проф. др Радомир Фолић, емеритус
Наслов рада, НР :	ДЕЈСТВА УСКЛАДИШТЕНОГ ЗРНАСТОГ МАТЕРИЈАЛА НА АРМИРАНОБЕТОНСКЕ ЦИЛИНДРИЧНЕ ЋЕЛИЈЕ СИЛОСА
Језик публикације, ЈП :	Српски
Језик извода, ЈИ :	Срп. / енг.
Земља публикавања, ЗП :	Република Србија
Уже географско подручје, УГП :	Војводина
Година, ГО :	2015.
Издавач, ИЗ :	Ауторски репринт
Место и адреса, МА :	21000 Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, ФО : (поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога)	7/544/-/67/225/-/-
Научна област, НО :	Грађевинско инжењерство.
Научна дисциплина, НД :	Конструкције у грађевинарству.
Предметна одредница/Кључне речи, ПО :	Силос, конструкције, зрнасти материјал, ћелија
УДК	
Чува се, ЧУ :	У библиотеци Факултета техничких наука у Новом Саду, Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад, Република Србија
Важна напомена, ВН :	
Извод, ИЗ :	У раду се анализирају аналитички поступци за одређивање оптерећења у силосима, према теоријским поступцима и техничкој регулативи. Метода интегралних релација је примењена код формирања поступака анализе стања напона у силосима са правоугаоним ћелијама и силоса са кружним ћелијама. У анализама је уведено гранично стање равнотеже и асимптотско стање напона материјала у силосу. На примерима је дато упоређење резултата анализе стања напона у силосима, као и код анализе статичких утицаја код кружних ћелија од дејства додатног локалног оптерећења и несиметричног оптерећења при пражњењу са великим ексцентрицитетом.
Датум прихватања теме, ДП :	
Датум одбране, ДО :	
Чланови комисије, КО :	Председник: Проф. др Ђорђе Лађиновић
	Члан: Проф. др Александар Прокић
	Члан: Проф. др Снежана Маринковић
	Члан: Доцент др Зоран Брујић
	Члан, ментор: Проф. др Радомир Фолић, емеритус
	Потпис



KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :		
Identification number, INO :		
Document type, DT :	Monograph documentation	
Type of record, TR :	Textual printed material	
Contents code, CC :	PhD Thesis	
Author, AU :	Milorad Tatomirović, MSc, civ.eng.	
Mentor, MN :	Radimir Folić, Ph.D., Full Professor, emeritus	
Title, TI :	ACTIONS OF A STORED GRANULAR MATERIAL ON REINFORCED CONCRETE CYLINDRICAL SILO CELLS	
Language of text, LT :	Serbian	
Language of abstract, LA :	Eng. / srp.	
Country of publication, CP :	Republic of Serbia	
Locality of publication, LP :	Vojvodina	
Publication year, PY :	2015.	
Publisher, PB :	Author's reprint	
Publication place, PP :	21000 Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 6	
Physical description, PD : <small>(chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)</small>	7/544/-/67/225/-/-	
Scientific field, SF :	Civil Engineering.	
Scientific discipline, SD :	Civil Engineering Structures.	
Subject/Key words, S/KW :	Silos, Construction, Granular materials, Silo cell	
UC		
Holding data, HD :	In the library of the Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad, Republic of Serbia	
Note, N :		
Abstract, AB :	<p>This paper analyzes the analytical procedures for the determination of loads in silos, according to theoretical procedures and technical regulations. The method of integral relations was applied for the establishment of procedures for analyzing the stress state in silos with rectangular cells and silos with circular cells. The analysis is introduced limit state of equilibrium and asymptotic stress state of the material in the silo. The examples given comparison of the results of the analysis of stress state in silos, as well as in the analysis of static forces of circular cells from the effects of patch load and discharge loads for circular silos with large outlet eccentricities.</p>	
Accepted by the Scientific Board on, ASB :		
Defended on, DE :		
Defended Board, DB :	President: Dorđe Lađinović, Ph.D., Full Professor	
	Member: Aleksandar Prokić, Ph.D., Full Professor	
	Member: Snežana Marinković, Ph.D., Full	Menthor's sign
	Member: Zoran Brujić, Ph.D., Professor	
	Member, Mentor: Radimir Folić, Ph.D., Full Professor, emeritus	

SADRŽAJ

1	Uvodna razmatranja	1
1.1	Predmet istraživanja	2
1.2	Cilj istraživanja i uvedene hipoteze	4
1.3	Kratak sadržaj rada	5
2	Pregled teorije i istraživanja u oblasti opterećenja kod silosa	9
2.1	Uvod	9
2.2	Silos i - istorijski pregled	10
2.3	Podela silosa i forme silosnih ćelija	15
2.4	Vrste protoka materijala pri pražnjenju	20
2.4.1	Masovni protok	24
2.4.2	Unutrašnji protok	25
2.4.3	Mešoviti protok	26
2.4.4	Prošireni protok	27
2.5	Problemi pri skladištenju i proticanju materijala	27
2.6	Dimenzionisanje silosa prema načinu proticanju materijala	30
2.6.1	Karte za ocenu vrste protoka materijala	31
2.6.2	Kritična širina otvora za pražnjenje	37
2.7	Karakteristike zrnastih materijala	44
2.7.1	Zapreminska masa i težina	44
2.7.2	Poroznost i zbijenost	45
2.7.3	Dilatancija	47
2.7.4	Ugao prirodnog nagiba	48
2.7.5	Granično stanje zrnastih materijala	49
2.7.5.1	Uređaji i postupci za određivanje graničnih stanja	50
2.7.5.2	Granična stanja loma materijala pri smicanju i pri trenju o zid	57
2.7.6	Koeficijent bočnog pritiska K	61
2.7.6.1	Granične vrednosti koeficijenta K u materijalu do zida ćelije	68
2.7.6.2	Opitno određivanje koeficijenta K	71
2.7.7	Proračunske vrednosti karakteristika materijala	73
2.7.7.1	– SRPS ISO 11697:1996	74
2.7.7.2	– AS 3774:1996	75

2.7.7.3	– EN 1991-4:2006.....	77
2.8	Pregled istraživanja i oštećenja kod silosa	80
2.8.1	<i>Prva istraživanja u vezi opterećenja kod silosa</i>	80
2.8.1.1	<i>Doprinos mehanike tla analizi silosnog problema</i>	84
2.8.1.2	<i>Doprinos procesnog, hemijskog i mašinskog inženjerstva</i>	86
2.8.2	<i>Silosu u domaćoj stručnoj praksi.....</i>	86
2.8.3	<i>Problemi kod silosa od opterećenja materijalom i drugih dejstava</i>	89
2.8.3.1	<i>Problemi kod betonskih silosa od opterećenja zrnastim materijalom</i>	89
2.8.3.2	<i>Problemi kod metalnih silosa od opterećenja zrnastim materijalom</i>	93
2.8.3.3	<i>Fundiranje silosa</i>	94
2.8.3.4	<i>Seizmička dejstva</i>	95
2.8.3.5	<i>Požari i ekspozije</i>	96
2.8.3.6	<i>Termička dejstva</i>	98
2.9	Metode i postupci proračuna opterećenja u silosima	100
2.9.1	<i>Pregled teorijskih postupaka proračuna opterećenja u silosima</i>	100
2.9.2	<i>Primena metode konačnih elemenata i metode diskretnih elemenata</i>	113
2.9.2.1	<i>Upoređenje MKE i MDE kod silosnog problema</i>	121
2.9.2.2	<i>Sagledavanje Janssen-ove teorije i rezultata MKE i MDE</i>	124
2.9.3	<i>Podela metoda proračuna opterećenja u silosima</i>	126
2.10	Opterećenja od zrnastih materijala u tehničkim propisima za proračun silosa 129	
2.10.1	<i>Tehnički propisi i koncepti pri definisanju opterećenja kod silosa</i>	129
2.10.2	<i>Opterećenja u silosima od zrnastih materijala prema EN 1991-4</i>	134
2.10.2.1	<i>Opterećenja na vertikalne zidove silosa</i>	137
2.10.2.2	<i>Simetrična opterećenja po visini silosa</i>	138
2.10.2.3	<i>Nesimetrična opterećenja na zidovima silosa</i>	139
2.10.2.3.1	<i>Silosu kružne osnove sa debljim zidovima (betonski silosi)</i>	142
2.10.2.3.2	<i>Silosu kružne osnove sa tanjim zidovima (metalni silosi).....</i>	143
2.10.2.3.3	<i>Silosu koji nisu kružne osnove</i>	144
2.10.2.4	<i>Zamena lokalnog opterećenja sa uniformnim povećanjem pritiska</i>	144
2.10.2.5	<i>Opterećenja pri pražnjenju kružnih ćelija sa velikim ekscentricitetom.....</i>	145
2.10.2.5.1	<i>Metoda proračuna za silose proračunske klase 2.....</i>	145
2.10.2.5.2	<i>Metoda proračuna za silose proračunske klase 3.....</i>	146
2.10.2.6	<i>Opterećenje levka i dna silosa</i>	148
2.10.2.6.1	<i>Ravna dna</i>	150
2.10.2.6.2	<i>Strmi levci</i>	150
2.10.2.6.2.1	<i>Opterećenja pri punjenju</i>	150
2.10.2.6.2.2	<i>Opterećenja pri pražnjenju</i>	151
2.10.2.6.3	<i>Plitki levci.....</i>	152
2.10.2.6.3.1	<i>Opterećenje pri punjenju</i>	152
2.10.2.6.3.2	<i>Opterećenje pri pražnjenju</i>	152
2.10.2.6.4	<i>Alternativna pravila za opterećenja na levku ili ravnom dnu</i>	152

2.10.2.6.4.1	Alternativni postupak za određivanje opterećenja na levku ili ravnom dnu	153
2.10.2.6.4.2	Alternativni izraz za odnos napona F kod levka pri pražnjenju.....	155
2.10.3	Faktor uvećanja opterećenja C.....	155
2.10.3.1	– SRPS ISO 11697:1996.....	155
2.10.3.2	– ENV 1991-4:1995 i EN 1991-4:2006.....	156
2.10.3.3	– AS 3774:1996	157
2.10.4	Opterećenje levka (poluempirijska metoda).....	160
2.10.5	Dodatno lokalno opterećenje	163
2.10.5.1	– CHuII 2.10.05-85	163
2.10.5.2	– DIN 1055-6:1987	167
2.10.5.3	– SRPS ISO 11697:1996.....	171
2.10.5.4	– ENV 1991-4:1995 i EN 1991-4:2006.....	171
2.10.5.5	– Određivanje statičkih uticaja	172
2.10.6	Opterećenje pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom	181
2.10.6.1	– CHuII 2.10.05-85	182
2.10.6.2	– AS 3774:1996	183
2.10.6.3	– DIN 1055-6:2005 i EN 1991-4:2006.....	185
2.10.6.4	– Određivanje statičkih uticaja	192

3 Analitički postupci za određivanje opterećenja u silosima 197

3.1	Janssen-ov postupak.....	198
3.1.1	Osnove Janssen-ovog postupka.....	198
3.1.2	Nasipni deo materijala i nadopterećenje na površini materijala.....	205
3.1.2.1	Analiza sa nadopterećenjem od nasipnog dela materijala.....	205
3.1.2.2	Analiza sa fiktivnim poravnanjem nasipnog dela materijala	208
3.1.3	Aproksimativno uvođenje promenljivih horizontalnih napona	211
3.2	Postupak Гутьяр-а.....	216
3.3	Postupak Reimbert-ovih	219
3.4	Postupak Pipatrongsa-a i Heng-a	231
3.4.1	Formiranje generalisanog Jáky-evog postupka	232
3.4.2	Analiza preseka opšteg oblika.....	244
3.4.3	Aproksimativna analiza stanja napona kod 2D silosa	245
3.4.4	Analiza nadopterećenja.....	247
3.5	Primena graničnog stanja ravnoteže	248
3.5.1	Osnove analize stanja napona prema Ohde-u i Nanninga-u	248
3.5.1.1	Asimptotsko stanje napona kod 2D silosa	249
3.5.1.2	Asimptotsko stanje napona kod 3Dr silosa	255

3.5.2	<i>Polazne pretpostavke kod analize stanja napona</i>	257
3.5.3	<i>Stanja napona kod uskladištenog materijala u silosu</i>	261
3.5.3.1	<i>Podela stanja napona kod uskladištenog materijala u silosu</i>	263
3.5.3.2	<i>Komparacija računskih i eksperimentalnih vrednosti koeficijenta K</i>	264
3.5.4	<i>Koeficijent K pri mirovanju materijala</i>	270
3.5.5	<i>Koeficijent K pri pražnjenju materijala u ćeliji</i>	278
3.5.6	<i>Primena koeficijenta K kod postupaka proračuna stanja napona</i>	288
3.5.6.1	<i>– Postupci sa konstantnim vertikalnim naponima u preseku ćelije</i>	288
3.5.6.2	<i>– Postupci sa promenljivim vertikalnim naponima u preseku ćelije</i>	288
3.5.6.3	<i>– Analiza skokovitog opterećenja (switch load)</i>	295
3.5.6.3.1	<i>Modifikovana teorijska analiza skokovitog opterećenja</i>	297
3.5.6.3.2	<i>Analiza faktora natpritiska i promene skokovitih pritisaka</i>	300
3.5.6.3.3	<i>Uporedna analiza pritisaka materijala na zid ćelije AB silosa prema EC1-4 i modifikovanom teorijskom postupku</i>	311
3.6	<i>Postupak Walker-a i Walters-a</i>	318
3.6.1	<i>Analiza stanja napona materijala u 3D silosu</i>	318
3.6.2	<i>Analiza stanja napona materijala u 2D silosu - novi pristup</i>	322
3.6.3	<i>Analiza stanja napona materijala u 2D silosu - primena metode integralnih relacija</i>	329
3.6.4	<i>Analiza stanja napona materijala u 2D silosu - aproksimativno uvođenje promenljivih horizontalnih napona</i>	333
3.7	<i>Postupak Li-a i Aubertin-a (analogna analiza 2D silosa)</i>	337
3.7.1	<i>Formiranje modifikovanog Marston-ovog postupka</i>	338
3.7.2	<i>Prikaz i diskusija numeričkih i analitičkih rezultata</i>	341
3.7.3	<i>Određivanje koeficijenta trenja o zid za Walker-ov postupak</i>	346
3.8	<i>Proračun opterećenja u levku</i>	348
4	<i>Primena metode integralnih relacija kod analize opterećenja u silosima</i>	353
4.1	<i>Postavka unapredene primene metode integralnih relacija u analizi stanja napona uskladištenog materijala u silosu</i>	354
4.2	<i>Primena metode integralnih relacija kod 2D silosa</i>	360
4.2.1	<i>I-2D postupak – primena konturnih funkcija raspodele i parabolične promene horizontalnih napona sa tačnim oblikom za $K(x)$</i>	361
4.2.2	<i>II-2D postupak - primena konturnih funkcija raspodele i elipsaste promene horizontalnih napona sa tačnim oblikom za $K(x)$</i>	373
4.2.3	<i>Opšti izrazi za napone kod postupaka I-2D i II-2D - uvođenje interpolacione funkcije $f_x(x)$</i>	380
4.2.4	<i>III-2D postupak - primena konturnih funkcija raspodele i elipsaste promene svih normalnih napona</i>	382

4.2.5	<i>IV-2D postupak - primena konturnih funkcija raspodele i elipsaste promene horizontalnih napona sa aproksimativnim oblikom za $K(x)$</i>	390
4.3	Primena metode integralnih relacija kod 3Dr silosa	395
4.3.1	<i>Jednačine ravnoteže diferencijalnog elementa u cilindričnim koordinatama</i>	395
4.3.2	<i>Postavke za određivanje stanja napona kod 3Dr silosa kružnih ćelija</i>	397
4.3.2.1	<i>Alternativni oblik odnosa napona $K(z,r)$</i>	401
4.3.2.2	<i>Asimptotsko stanje radijalnih napona kod 3Dr silosa</i>	402
4.3.2.3	<i>Aproksimativno određivanje stanja asimptotskih radijalnih napona</i>	404
4.3.2.4	<i>Interpolaciona stepena funkcija za asimptotske radijalne napone</i>	407
4.3.2.5	<i>Određivanje eksponenta a kod stepene funkcije radijalnih napona</i>	409
4.3.2.6	<i>Pregled proračunskih izraza prema postavkama u analizi 3Dr silosa</i>	412
4.3.2.7	<i>Primer analize asimptotskog stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu</i>	413
4.3.3	<i>I-3Dr postupak - primena konturnih funkcija raspodele i stepene promene svih normalnih napona</i>	416
4.3.3.1	<i>Početni uslovi za određivanje konturnih funkcija raspodele napona</i>	420
4.3.3.2	<i>Rekapitulacija I-3Dr postupka proračuna stanja napona</i>	426
4.3.3.3	<i>Primer 4.1 – Analiza stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu prema I-3Dr postupku</i>	428
4.3.4	<i>II-3Dr postupak - primena jedne funkcije raspodele i promenljivih radijalnih napona u preseku ćelije</i>	429
4.3.4.1	<i>Primer 4.2 – Analiza stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu prema II-3Dr postupku</i>	434
4.3.4.2	<i>Iia-3Dr postupak – aproksimacija postupka sa uvođenjem $a = 2$</i>	435
4.3.4.3	<i>Primer 4.3 – Analiza stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu prema Iia-3Dr postupku</i>	436
4.3.5	<i>III-3Dr postupak - primena jedne funkcije raspodele i konstantnih radijalnih napona u preseku ćelije (Walker/Walters-ov postupak)</i>	437
4.3.5.1	<i>Rekapitulacija postupka proračuna (Walker/Walters-ov postupak)</i>	441
4.3.5.2	<i>Primer 4.4 – Analiza stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu prema III-3Dr postupku (Walker/Walters-ov postupak)</i>	442
5	Primeri i analize	445
5.1	Primer 5.1 – određivanje statičkih uticaja od delovanja dodatnog lokalnog opterećenja na zidu kružne ćelije	447
5.2	Primer 5.2 – određivanje statičkih uticaja od delovanja opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala	460
5.3	Primer 5.3 - analiza stanja napona materijala u analognom 2D silosu - zasuti rudarski iskop (Li i Aubertin (2008) [168])	469

5.4	Primer 5.4 - analiza stanja napona materijala u 3Dr silosu - ispitni silos sa pšenicom (<i>Couto, Ruiz i Aguado</i> (2013) [53])	479
5.5	Primer 5.5 - parametarska analiza stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu	500

6	<i>Završne napomene i zaključci</i>	515
----------	--	------------

6.1	Opšte napomene	515
6.2	Zaključci	520
6.3	Pravci daljih istraživanja	522

7	<i>Literatura</i>	523
----------	--------------------------------	------------

LISTA SLIKA

Sl. 1	(a) Silo-jama (Malta); (b) Silos u <i>Megiddo</i> -u; (c) Podna silo-jama (<i>Tel Kedesh</i>); (d) i (e) keramičke posude za žitarice, i (f) podzemni silos (Stari Egipat); (g) sabirno mesto za vršenje žita, (h) kuća i silosne ćelije i (i) arheološke iskopine ostataka silonih ćelija (<i>Amarna</i>).	11
Sl. 2	Rekonstrukcija jedne podrumske prostorije za skladištenje žita (prema <i>Patrich J.</i>).....	13
Sl. 3	(a) Stari koš za žito (<i>Kikinda</i>); (b) Stari koš za kukuruz (<i>Sauk Country, USA</i>).	13
Sl. 4	(a) Kupasti silosi (<i>Santa Mónica, Meksiko</i>); (b) Model <i>Dart</i> -ovog elevatora (<i>USA</i>). ...	14
Sl. 5	Primeri silosa od različitog materijala: (a) drveni [148]; (b) betonski i (c) čelični [262].	15
Sl. 6	(a) Betonski silosi sa "obrnutim" konusnim levkom tipa <i>IBAU HAMBURG</i> [124]. (b) Izgradnja silosa od montažnih elemenata (<i>Rusija</i>).....	16
Sl. 7	Savremeni silosi: (a) Silosi u <i>Ulm</i> -u vrlo vitkih ćelija; (b) i (c) Izgled i presek udvojenog <i>Eurosilo</i> -sa kao primer kratkog silosa; (d) Silos tipa potpornog zida (<i>USA</i>).	18
Sl. 8	Osnovni oblici ćelija i dispozicione kombinacije silosa.....	20
Sl. 9	Vrste protoka uskladištenog materijala, prema <i>ISO 11697</i> [125] i [291].	21
Sl. 10	Načini pražnjenja materijala: (a) protok masom; (b) protok jezgrom; (c) mešoviti protok, prema <i>EN 1991-4 (2006)</i> [38] i <i>DIN 1055-6 (2005)</i> [62].	21
Sl. 11	Primeri ekscentričnog pražnjenja: (a) eksc. levak - protok jezgrom, (b) eksc. levak - eksc. mešoviti protok i (c) eksc. protok usled eksc. punjenja i nehomogenosti materijala.	22
Sl. 12	Vrste simetričnog protoka materijal: (a) protok masom; (b) protok kroz efektivni levak; (c) protok centralnim kanalom i (d) prošireni protok, prema <i>AS 3774 (1996)</i> [14].	22
Sl. 13	Slučajevi protoka sa ekscen. protočnim kanalom: (a) kvazi masovni protok; (b) kanalni protok; (c) usled segregacije i (d) usled nesimetričnog levka, prema <i>AS 3774 (1996)</i> [14].	23
Sl. 14	Uticajni faktori za opterećenja i moguće probleme pri korišćenju silosa.....	29
Sl. 15	(a) Formiranje nasipne kupe pri punjenju potokom materijala; (b) Segregacije materijala prema veličini zrna; i (c) Primer stabilnog neprotočnog kanala.	29
Sl. 16	Geometrija silosnih ćelija sa konusnim i rogljastim levkom.....	32
Sl. 17	Granice za masovni protok (protok ukupnom masom, slobodni protok, <i>mass flow</i>) i unutrašnji protok (protok jezgrom, suženi protok, <i>funnel flow</i>).	34
Sl. 18	Granice za masovni protok i unutrašnji protok, prema <i>DIN 1055-6 (2005)</i> [62], <i>EN 1991-4 (2006)</i> [38] i <i>AS 3774 (1996)</i> [14].	36
Sl. 19	Kvalitativni prikaz režima protoka prema <i>Benink</i> -u (slučaj rogljastog levka).	37
Sl. 20	Intermedijalni protok [247].	37
Sl. 21	Jenike-ov model formiranja zaustavnog luka.....	38
Sl. 22	Tragovi na levku kao posledica "rešavanja" problema protoka, prema [276].	38

Sl. 23	Postupak za određivanje jednoaksialne čvrstoće f_c	39
Sl. 24	Funkcija $H(\beta)$, prema [248].	40
Sl. 25	Funkcija protoka – FF : trenutna i u vremenu t_1 ; glavni napon u stabilnom luku – σ_{1a}	41
Sl. 26	<i>Jenike</i> -ovi dijagrami faktora proticanja ff za (a) konusne levke i (b) rogljaste levke, prema <i>Schulze</i> -u [276]	42
Sl. 27	Dilatancija pri smicanju diskova u ravni: (a) stanje pre i (b) stanje posle pomeranja. ...	47
Sl. 28	Primer formirane nasipne kupe materijala.	48
Sl. 29	Dijagram stanja kohezivnog zrnastog materijala.	49
Sl. 30	Dijagrami smičuće sile u funkciji smičućeg pomeranja.	51
Sl. 31	(a) <i>Jenike</i> -ov smičući uređaj [249]; (b) smicanje zrnastog materijala [276]; i (c) smicanje po uzorku zidnog materijala.	52
Sl. 32	(a) <i>Schulze</i> -ov smičući uređaj [275]; (b) smicanje zrnastog materijala [276]; i (c) smicanje po uzorku zidnog materijala.	52
Sl. 33	Dijagram odnosa smičuće sile i smičućeg pomeranja	53
Sl. 34	Određivanje linije loma (<i>yield locus</i>) pri primeni <i>Jenike</i> -ovog uređaja.....	55
Sl. 35	Određivanje linije loma (<i>yield locus</i>) pri primeni <i>Schulze</i> -ovog uređaja.....	55
Sl. 36	Linije loma i efektivna linija loma pri različitoj poroznosti materijala.	56
Sl. 37	Određivanje linije loma pri trenju materijala o zid/podlogu.....	56
Sl. 38	Zakoni loma pri konstantnoj poroznosti materijala.	57
Sl. 39	Linija loma za nevezani zrnasti materijal.	59
Sl. 40	Linija loma za nevezani zrnasti materijal i granična linija trenja o zid.	60
Sl. 41	Koeficijent K u zavisnosti od ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i , prema [276].	63
Sl. 42	Koeficijent K u zavisnosti od ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i , prema [231].	67
Sl. 43	<i>Mohr</i> -ov krug napona za tačku A do zida ćelije.	68
Sl. 44	Ispitna metoda za direktno određivanje koeficijenta K_0 , prema EN 1991-4:2006.....	72
Sl. 45	Dijagrami smicanja pri određivanju uglova ϕ_i i ϕ_c , prema EN 1991-4:2006.	72
Sl. 46	(a) Prikaz <i>Janssen</i> -ove postavke ispitivanja silosa sa zrnastim materijalom, prema [130], i (b) upoređenje izmerenih i sračunatih rezultata, prema [290].	82
Sl. 47	(a) do (c) - <i>Janssen</i> -ov model diferencijalnog sloja prema <i>Ketchum</i> -u [145]; <i>Airy</i> -ev model sa kliznom ravni prema <i>Ketchum</i> -u [145] za (d) plitke ćelije i (e) duboke ćelije.	83
Sl. 48	Dijagrami napona u zatrpanom rovu prema <i>Voellmy</i> -u (1937).	85
Sl. 49	Rušenje zida ćelije: (a) silos u <i>Korneuburg</i> -u (27.03.1961) [254]; (b) silos u <i>Harburg</i> -u (09.07.1995) [254]; (c) tipičan izgled loma zida ćelije (primer jednog silosa u USA).	91
Sl. 50	Rušenje metalnog silosa sa uskladištenim kukuruzom (USA) (a). Primeri rušenja levka kod metalnih silosa (primeri iz UK (b), Nemačke (c) i Australije (d)) [262].	93

Sl. 51	Oštećenja metalnih silosa pri izbočavanju lima usled: (a) ravnomernog vertikalnog pritiska, (b) nesimetričnog pritiska, i (c) - (d) ekscentričnog pražnjenja [262].	93
Sl. 52	Primeri obrtanja silosa usled loma tla.	94
Sl. 53	Oštećenja izazvana zemljotresom na silosu u <i>Qixin Cement Plant (Tangshan)</i> .	95
Sl. 54	Požar u silosu u <i>Esbjerg</i> -u (Danska) (a); rušenje silosa nakon požara (b), prema [155].	96
Sl. 55	Posledice eksplozije prašine u silosima: silos u <i>Blaye</i> -u (a) pre i (b) nakon akcidenta; Oštećenja krovne ploče: (c) lokalni slučaj kod silosa u <i>Stavanger</i> -u [72] i (d) globalni slučaj.	97
Sl. 56	Geometrija silosnih ćelija sa klinastim i konusnim levkom.	102
Sl. 57	Upoređenje različitih metoda proračuna pritisaka pri stanju punjenja, prema [11].	104
Sl. 58	Upoređenje <i>Janssen</i> -ove teorije i eksp. rezultata, adapt. prema [216].	110
Sl. 59	Upoređenje <i>Janssen</i> -ove teorije i 3D elastične analize pri primeni MKE kod cilindrične ćelije – modela, adapt. prema [215].	111
Sl. 60	Postupci za uvođenje postepenog punjenja materijala kod primene MKE.	115
Sl. 61	Normalni pritisci na zidove ćelije i levka pri pražnjenju silosa, prema [100].	116
Sl. 62	Pritisci pri punjenju na zidu cilindrične ćelije pri primeni programa ANSYS i SILO, adapt. prema [92].	118
Sl. 63	Primena MDE na primeru 2D nasipa: (a) slaganje zrna u nasipu, (b) vizuelizacija lanaca kontaktnih sila, i (c) foto-snimak lanaca sila pri primeni naponsko-optičke metode; apapt. prema [273] i [314].	120
Sl. 64	Primer analize silosnog problema sa MDE, prema [273].	121
Sl. 65	Upoređenje stanja napona na proračunskom primeru 2D silosa prema MDE, MKE i <i>Janssen</i> -ovoj teoriji, prema <i>Masson</i> -u (1996).	122
Sl. 66	Teorijska raspodela pitisaka pri punjenju (a) i pražnjenju silosa (b) sa anvelopom pritisaka pri pražnjenju (analiza skokovitog pritiska), adapt. prema [31].	132
Sl. 67	Raspodela pritisaka na zidu AB ćelije za stanja: (a) punjenja, (b) centričnog pražnjenja i (c) ekscentričnog pražnjenja, prema [212].	134
Sl. 68	Forme silosa sa prikazanim dimenzijama i oznakama napona prema EC 1-4.	135
Sl. 69	Simetrični horizontalni pritisci pri punjenju na vertikalne zidove vitkih silosa.	138
Sl. 70	Horizontalni pritisci kod kratkih i srednje vitkih silosa.	139
Sl. 71	Shema proračuna simetričnog opterećenja na vertikalni zid silosa pri pražnjenju.	140
Sl. 72	Lokalno opterećenje vertikalnog zida silosa - bočni izgled i izgled u osnovi (<i>patch load</i>). Lokalno opterećenje pri punjenju (indeks <i>f</i>) i pri pražnjenju (indeks <i>e</i>) silosa.	141
Sl. 73	Ekscentrično pražnjenje sa protočnim kanalom i raspodelom opterećenja u poprečnom preseku.	147
Sl. 74	Geometrija protočnog kanala (a) i raspodela horizontalnih pritisaka kod kružne ćelije silosa u horizontalnom preseku ćelije (b).	147
Sl. 75	Granice između strmih i plitkih levaka, prema EC1-4.	149
Sl. 76	Raspodela pritisaka pri punjenju silosa sa strmim i plitkim levkom.	151
Sl. 77	Raspodela pritisaka pri pražnjenju silosa sa strmim i plitkim levkom.	151

Sl. 78	Alternativni oblik raspodele opterećenja na levku silosa.	154
Sl. 79	Faktor uvećanja opterećenja C_h prema AS 3774:1996.	157
Sl. 80	Opterećenje levka prema DIN 1055-6 (1987).	160
Sl. 81	Dijagram pritisaka na zidove pri masovnom protoku materijala, adapt. prema [36]....	162
Sl. 82	Preseci silosnih ćelija, prema [369] i za (c_1) [375].	163
Sl. 83	Vrednosti koeficijenta α_1	166
Sl. 84	Vrednosti koeficijenta α_2	166
Sl. 85	Dodatno lokalno opterećenje prema DIN 1055-6:1987.	170
Sl. 86	Dodatni pritisak na zidu ćelije prema ISO 11697.	171
Sl. 87	Dodatno opterećenje na zidu ćelije prema ENV 1991-4:1995.	172
Sl. 88	Cilindrična ljuska sa koordinatama i opterećenjem (a), i element ljuske sa presečnim silama i pomeranjima (b), prema [337].	173
Sl. 89	Koeficijenti a , b i c za momente savijanja m_x i m_φ u centrima lokalnih površina, [337].	174
Sl. 90	Cilindrična ljuska sa koordinatama i opterećenjem i element ljuske sa pozitivnim presečnim silama i pomeranjem w , adap. prema [308].	177
Sl. 91	Dekompozicija dodatnog lokalnog opterećenja.	180
Sl. 92	Skica isticanja zrnastog materijala kroz otvor uz zid ćelije i odgovarajući dijagram pritisaka materijala u horizontalnom preseku ćelije.	183
Sl. 93	Raspodela promene pritisaka pri ekscentričnom pražnjenju: (a) zone proticanja; (b) promene pritisaka po obimu zida; (c) promene pritisaka po visini zida, prema AS 3774.	184
Sl. 94	Opterećenja kod razdvojenih polovina ćelije u horizontalnom preseku pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala.	188
Sl. 95	Aproksimacija asimetričnog opterećenja za procenu statičkih uticaja u tački 0.	193
Sl. 96	Dekompozicija asimetričnog opterećenja na parcijalna opterećenja p_1 , p_2 i p_3	193
Sl. 97	Nasipna kupa sa ekvivalentnim nivoom zaravnjene površine.	199
Sl. 98	Opterećenja u ćeliji silosa (a) i na diferencijalnom sloju materijala (b).	199
Sl. 99	Dijagrami opterećenja po visini ćelije.	202
Sl. 100	<i>Janssen</i> -ova teorija – Primeri 3.1a i 3.1b - Stanje napona pri variranju K , uz $h_0 = 0$ m (bez nasipne kupe). Podaci: $D = 5$ m; $\gamma = 10$ kN/m ³ ; $K = 0.4, 0.5$ i 0.6 ; za $\mu_w = 0.3$ i 0.4	204
Sl. 101	<i>Janssen</i> -ova teorija – Primeri 3.1c i 3.1d - Stanje napona pri variranju μ_w , uz $h_0 = 0$ m (bez nasipne kupe). Podaci: $D = 5$ m; $\gamma = 10$ kN/m ³ ; za $K = 0.5$ i 0.4 ; i $\mu_w = 0.3, 0.4$ i 0.5	204
Sl. 102	Nasipna kupa sa ekvivalentnim nivoom zaravnjene površine.	205
Sl. 103	<i>Janssen</i> -ova teorija – Primeri 3.2a i 3.2b - Stanje napona pri variranju $h_0 = 0.0, 2.5, 5.0, z_0$, i 11.0 m. Podaci: $D = 5$ m; $\gamma = 10$ kN/m ³ ; $K = 0.5$; $\mu_w = 0.3$ i $z_0 = 8.333$ m (za pr. 3.2a), i $\mu_w = 0.4$ i $z_0 = 6.250$ m (za pr. 3.2b).	207

Sl. 104	Upoređenje početnih pritisaka kod analize uticaja nasipnog dela u slučajevima fiktivnog poravnanja nasipa i direktnog uvođenja nadopterećenja od nasipa.....	209
Sl. 105	<i>Janssen</i> -ova teorija – Primeri 3.3a i 3.3b – Uticaj nasipne kupe na stanje napona, pri uvođenju nadopterećenja i pri uvođenju fiktivnog poravnanja nasipne kupe. Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $K = 0.5$, $\mu_w = 0.4$; i $\phi_r = 30^\circ$; $D = 5 \text{ m}$ (za pr. 3.3a), i $D = 10 \text{ m}$ (za pr. 3.3b).....	210
Sl. 106	Diferencijalni sloj uskladištenog materijala.	217
Sl. 107	Promena pritisaka od uskladištenog materijala sa dubinom z : 1 - kriva za $B > 1/\sigma_{G0}$; 2 - prava za $B = 1/\sigma_{G0}$; 3 - kriva za $B < 1/\sigma_{G0}$; i 4 - kriva za $B = 0$	218
Sl. 108	Raspodela težine materijala u silosu prema analizi <i>Reimert</i> -ovih.	219
Sl. 109	Teorija <i>Reimbert</i> -ovih – Primer 3.4a - $D = 5 \text{ m}$ - stanje napona i odnos pritisaka $K(z)$; variranje K , uz $h_0 = 0 \text{ m}$ (bez nasipne kupe). (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $K = 0.4$, 0.5 i 0.6 ; i $\mu_w = 0.3$)	226
Sl. 110	Teorija <i>Reimbert</i> -ovih – Primer 3.4b - $D = 5 \text{ m}$ - stanje napona i odnos pritisaka $K(z)$; variranje K , uz $h_0 = 0 \text{ m}$ (bez nasipne kupe). (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $K = 0.4$, 0.5 i 0.6 ; i $\mu_w = 0.4$)	226
Sl. 111	Teorija <i>Reimbert</i> -ovih – Primer 3.4c - $D = 5 \text{ m}$ - stanje napona i odnos pritisaka $K(z)$; variranje μ_w , uz $h_0 = 0 \text{ m}$ (bez nasipne kupe). (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $K = 0.5$; i $\mu_w = 0.3, 0.4$ i 0.5).....	227
Sl. 112	Teorija <i>Reimbert</i> -ovih – Primer 3.4d - $D = 5 \text{ m}$ - stanje napona i odnos pritisaka $K(z)$; variranje μ_w , uz $h_0 = 0 \text{ m}$ (bez nasipne kupe). (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; i $K = 0.4$; $\mu_w = 0.3, 0.4$ i 0.5).....	227
Sl. 113	Teorija <i>Reimbert</i> -ovih – Primer 3.5a - $D = 5 \text{ m}$ - stanje napona i odnos pritisaka $K(z)$; variranje K , uz $\phi_r = 30^\circ$; $h_0 = 0.4811 \text{ m}$ (sa nasipnom kupom). (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $K = 0.4, 0.5$ i 0.6 ; i $\mu_w = 0.3$)	228
Sl. 114	Teorija <i>Reimbert</i> -ovih – Primer 3.5b - $D = 5 \text{ m}$ - stanje napona i odnos pritisaka $K(z)$; variranje K , uz $\phi_r = 30^\circ$; $h_0 = 0.4811 \text{ m}$ (sa nasipnom kupom). (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $K = 0.4, 0.5$ i 0.6 ; i $\mu_w = 0.4$)	228
Sl. 115	Teorija <i>Reimbert</i> -ovih – Primer 3.5c - $D = 5 \text{ m}$ - stanje napona i odnos pritisaka $K(z)$; variranje μ_w , uz $\phi_r = 30^\circ$; $h_0 = 0.4811 \text{ m}$ (sa nasipnom kupom). (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $K = 0.5$; $\mu_w = 0.3, 0.4$ i 0.5).....	229
Sl. 116	Teorija <i>Reimbert</i> -ovih – Primer 3.5d - $D = 5 \text{ m}$ - stanje napona i odnos pritisaka $K(z)$; variranje μ_w , uz $\phi_r = 30^\circ$; $h_0 = 0.4811 \text{ m}$ (sa nasipnom kupom). (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $K = 0.4$; $\mu_w = 0.3, 0.4$ i 0.5)	229
Sl. 117	Uporedni pregled teorija <i>Janssen</i> -a i <i>Reimbert</i> -ovih – Primer 3.6 – $D = 5 \text{ m}$ - stanje napona pri variranju $h_0 = 0.0, 0.4811, 2.5$ i 5.0 m . (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $K = 0.5$; $\mu_w = 0.3$).....	230
Sl. 118	Generalisani <i>Jáky</i> -ev postupak – Primer 3.7a - Korekcija dijagrama smičućih napona i radijalni naponi. (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $D = 10 \text{ m}$; $K = 0.5$; $\mu_w = 0.3$; $h_0 = 0.0 \text{ m}$)	237
Sl. 119	Generalisani <i>Jáky</i> -ev postupak – Primer 3.7b - Korekcija dijagrama smičućih napona i radijalni naponi. (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $D = 10 \text{ m}$; $K = 0.5$; $\mu_w = 0.3$; $h_0 = 2.0 \text{ m}$)	237

Sl. 120	Generalisani <i>Jáky</i> -ev postupak – Primer 3.8a – 3Dr silos – Dijagrami napona i upoređenje sa <i>Jenssen</i> -ovom teorijom; slučaj analize sa $h_0 = 0.0$ m.....	240
Sl. 121	Generalisani <i>Jáky</i> -ev postupak– Primer 3.8b – 3Dr silos – Dijagrami napona i upoređenje sa <i>Jenssen</i> -ovom teorijom; slučaj analize sa $h_0 = 2.0$ m.....	241
Sl. 122	Generalisani <i>Jáky</i> -ev postupak– Primer 3.8c – 3Dr silos – Dijagrami napona i upoređenje sa <i>Jenssen</i> -ovom teorijom; slučaj analize sa $h_0 = 5.0$ m.....	241
Sl. 123	Generalisani <i>Jáky</i> -ev postupak– Primer 3.8d – 3Dr silos – Dijagrami napona i upoređenje sa <i>Jenssen</i> -ovom teorijom; slučaj analize sa $h_0 = z_0 = 16.667$ m.....	242
Sl. 124	Generalisani <i>Jáky</i> -ev postupak– Primer 3.8e – 3Dr silos – Dijagrami napona i upoređenje sa <i>Jenssen</i> -ovom teorijom; slučaj analize sa $h_0 = 20.0$ m.....	242
Sl. 125	Upoređenje odnosa radialnog i vertikalnog napona kod 3Dr silosa prema gen. <i>Jáky</i> -evom postupku, postupku <i>Reimbert</i> -ovih i <i>Janssen</i> -ovom postupku.	243
Sl. 126	Generalisani <i>Jáky</i> -ev postupak– Primer 3.9a – 2D silos (aproks. analiza) – Dijagrami napona i upoređenje sa <i>Jenssen</i> -ovom teorijom; slučaj sa $h_0 = 0.0$ m.	246
Sl. 127	Generalisani <i>Jáky</i> -ev postupak– Primer 3.9b – 2D silos (aproks. analiza) – Dijagrami napona i upoređenje sa <i>Jenssen</i> -ovom teorijom; slučaj sa $h_0 = h_{0\Delta} = 0.7217$ m.....	246
Sl. 128	Diferencijalni sloj materijala na dubini z_∞	250
Sl. 129	Dif. element sa komponentalnim naponima (2D analiza – ravno stanje napona).....	250
Sl. 130	Ravnoteža diferencijalnog sloja materijala kod 2D silosa.	250
Sl. 131	Karakteristične veličine kod <i>Mohr</i> -ovog kruga napona i linija loma.	251
Sl. 132	Dijagrami odnosa napona $p_{v\infty}/p_{h\infty}$ za aktivno i pasivno stanje ($\phi_i = 30^\circ$ i $\phi_w = 30^\circ$).	253
Sl. 133	Dijagrami odnosa napona $p_{v\infty}/p_{h\infty}$ za aktivno i pasivno stanje ($\phi_i = 30^\circ$ i $\phi_w = 15^\circ$).	254
Sl. 134	Klizne površine i dijagrami napona za (a) aktivno i (b) pasivno stanje ($\phi_i = 30^\circ$ i $\phi_w = 30^\circ$), prema <i>Peschl</i> -u [227].	254
Sl. 135	Klizne površine i dijagrami napona za (a) aktivno i (b) pasivno stanje ($\phi_i = 30^\circ$ i $\phi_w = 15^\circ$), prema <i>Peschl</i> -u [227].	254
Sl. 136	Rezultati numeričke analize prikazane u ref. [170] primenom programa FLAC na razmatranom primeru zasute galerije za date dubine materijala.	259
Sl. 137	Dijagrami $K(x)$ i numerički određene vrednosti za analizirani primer u [170]	261
Sl. 138	Rezultati ispitivanja silosa sa usutom pšenicom u toku perioda punjenja, mirovanja i pražnjenja materijala: normalni pritisci na zid ćelije i zid levka, i prosečni vertikalni pritisak p_{vt} u materijalu, prema [53].	266
Sl. 139	Prosečne vrednosti koeficijenta trenja, koeficijenta K i vertikalne sile po obimu zida ćelije u nivou prelaza na levak, prema ispitivanju silosa sa usutom pšenicom u toku perioda punjenja, mirovanja i pražnjenja, prema [53]. Prikazane su proračunske vrednosti za K_f i K_e prema izrazima (3.323) i (3.325).	266
Sl. 140	Rezultati ispitivanja silosa sa usutom pšenicom u toku perioda punjenja, I mirovanja, I pražnjenja (2% mase), II mirovanja i II pražnjenja materijala: normalni pritisci na zid ćelije i zid levka, i prosečni vertikalni pritisak p_{vt} u materijalu, prema [53].	267
Sl. 141	Prosečne vrednosti koeficijenta trenja, koeficijenta K i vertikalne sile po obimu zida ćelije u nivou prelaza na levak, prema ispitivanju silosa sa usutom pšenicom u	

	toku perioda punjenja, I mirovanja, I pražnjenja (2% mase), II mirovanja i II pražnjenja, prema [53]. Prikazane su proračunske vrednosti za K_f , K_0 i K_e prema izrazima (3.323), (3.324) i (3.325).....	267
Sl. 142	Rezultati ispitivanja silosa sa usutim kukuruzom u toku perioda punjenja, mirovanja i pražnjenja materijala: normalni pritisci na zid ćelije i zid levka, i prosečni vertikalni pritisak p_{vt} u materijalu, prema [54].	268
Sl. 143	Prosečne vrednosti koeficijenta trenja, koeficijenta K i vertikalne sile po obimu zida ćelije u nivou prelaza na levak, prema ispitivanju silosa sa usutim kukuruzom u toku perioda punjenja, mirovanja i pražnjenja, prema [54]. Prikazane su očitana vrednost za K_f i proračunska vrednost za K_e prema izrazu (3.327).....	268
Sl. 144	<i>Mohr</i> -ovi krugovi napona za tlo u stanju graničnog aktivnog loma i pod uslovom jednosksialne kompresije normalno konsolidovanog tla.	270
Sl. 145	Upoređenje izraza za K_0 u funkciji ugla ϕ_i i eksper. vrednosti navedenih u [79].	273
Sl. 146	Upoređenje odnosa ϕ_{i0}/ϕ_i u funkciji ugla ϕ_i za različite formulacije K_0 u tabeli 24.	274
Sl. 147	Upoređenje odnosa μ_{i0}/μ_i u funkciji ugla ϕ_i za različite formulacije K_0 u tabeli 24.	274
Sl. 148	Upoređenje odnosa K_a/K_0 u funkciji ugla ϕ_i za različite formulacije K_0 u tabeli 24.....	275
Sl. 149	Upoređenje odnosa K_0/K_a u funkciji ugla ϕ_i za različite formulacije K_0 u tabeli 24.....	275
Sl. 150	Geometrija <i>Mohr</i> -ovog kruga napona i linija loma materijala po smicanju.....	279
Sl. 151	Ilustracija za stanja napona u materijalu (slučaj $\phi_i = 30^\circ$).	280
Sl. 152	Koeficijenti K za stanje napona pri punjenju - K_f , pri mirovanju - K_0 i pri pražnjenju - K_e , u funkciji ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i	283
Sl. 153	Uporedni pregled koeficijenata K pri punjenju, mirovanju i pražnjenju (K_0 prema <i>Jáky</i> -u i <i>Evesque</i> -u i drugim izrazima).	284
Sl. 154	Asimptotsko stanje napona materijala u preseku ćelije silosa za stanje nakon punjenja (primenjen je <i>I oblik koeficijenta K</i>).	291
Sl. 155	Asimptotsko stanje napona materijala u preseku ćelije silosa za stanje pri mirovanju materijala (primenjen je <i>II oblik koeficijenta K</i>).	293
Sl. 156	Koncepti analize skokovitog opterećenja: (a) klasičan i (b) modifikovani koncept. ...	295
Sl. 157	Dijagrami odnosa skokovitog i asimptotskog horiz. pritiska pri variranju nivoa prelazne ravni stanja materijala pri punjenju na stanje pri pražnjenju (prema relativnoj dubini z_s/z_{0f}); primer odgovara primeni izraza (3.436) za $\phi_i = 30^\circ$	302
Sl. 158	Dijagrami odnosa skokovitog i asimptotskog horiz. pritiska pri variranju nivoa prelazne ravni stanja materijala pri punjenju (odnosno mirovanju) na stanje pri mirovanju (odnosno pražnjenju) (prema relativnoj dubini z_s/z_{0f} , odnosno prema z_s/z_{00}); primer odgovara primeni izraza (3.437), odnosno (3.438), za $\phi_i = 30^\circ$	302
Sl. 159	Uporedni prikaz faktora natpritiska C_h prema: teorijskim izrazima (3.446), (3.447) i (3.448), preporučenom izrazu u SRPS ISO 11697:1996 [291] (isto i u ENV 1991-4:1995 [220]), i sračunate vrednosti C_h (prema EC1-4 za silose klase AAC 1 i $e = 0$) za 24 vrste materijala sa vrednostima ϕ_{im} i C_{op} prema tabeli E.1 u EN 1991-4:2006 [38].....	308
Sl. 160	Uporedni dijagrami horizontalnih pritisaka na zidu cilindrične AB ćelije određeni prema EC1-4 i predloženom teorijskom postupku, u primeru sa uskladištenom pšenicom.	313

Sl. 161	Uporedni dijagrami horizontalnih pritisaka na zidu cilindrične AB ćelije određeni prema EC1-4 i predloženom teorijskom postupku, u primeru sa uskladištenim kukuruzom.	314
Sl. 162	Uporedni dijagrami horizontalnih pritisaka na zidu cilindrične AB ćelije određeni prema EC1-4 i predloženom teorijskom postupku, u primeru sa uskladištenom sojom.	315
Sl. 163	Ravnoteža diferencijalnog sloja materijala kod 3Dr silosa.....	318
Sl. 164	Faktor distribucije \mathcal{D} kao funkcija uglova ϕ_i i ϕ_w za granično aktivno i granično pasivno stanje napona, prema Walters-u (1973) [328].	322
Sl. 165	Ravnoteža diferencijalnog sloja materijala kod 2D silosa.	325
Sl. 166	Shematski prikaz vertikalnog zatrpanog rova sa delujućim silama na elementarnom horizontalnom sloju materijala, adapt. prema [167].	339
Sl. 167	Proračunski rezultati za pritiske, σ_h i σ_v (Podaci: $H = 45$ m, $B = 18$ m, i $\phi_i = 30^\circ$): (a) σ_h duž centralne ose; (b) σ_v duž centralne ose; (c) σ_h duž zida; (d) σ_v duž zida; (e) dijagrami σ_h po širini osnove; (f) dijagrami σ_{vx} po širini osnove, prema Li-u i Aubertin-u (2008) [168].	344
Sl. 168	Proračunski rezultati za pritiske, σ_h i σ_v (Podaci: $H = 45$ m, $B = 3$ m, i $\phi_i = 20^\circ$): (a) σ_h duž centralne ose; (b) σ_v duž centralne ose; (c) σ_h duž zida; (d) σ_v duž zida; (e) dijagrami σ_h po širini osnove; (f) dijagrami σ_{vx} po širini osnove, prema Li-u i Aubertin-u (2008) [168].	344
Sl. 169	Dijagrami vertikalnih napona σ_{vx} po širini osnove na različitim dubinama materijala, prema Li-u i Aubertin-u (2008) [168].	345
Sl. 170	Analiza sloja levka, koordinantni sistem i lokalna ravnoteža, adapt. prema [260].	349
Sl. 171	Naponi na diferencijalnom elementu materijala (osna simetrija).	396
Sl. 172	Dijagrami radijalnih napona u preseku za $z \rightarrow \infty$, prema numeričkom rešenju i prema aproksimativnom rešenju.	405
Sl. 173	Dijagrami vertikalnih, radijalnih i prstenastih napona za $0 \leq r/R \leq 1$, prema numeričkom postupku i pri primeni interpolacionih funkcija.	415
Sl. 174	Analiza stanja napona prema I-3Dr postupku: (a) 3D prikaz napona σ_z , σ_r , σ_θ i τ_{zr} u funkciji koordinata r i z ; i (b) uvećani prikaz napona σ_r , σ_θ i τ_{zr}	428
Sl. 175	Analiza stanja napona prema I-3Dr postupku: (a) 2D prikaz - dijagrami konturnih napona u funkciji z ; i (b) 2D prikaz – dijagrami napona u preseku na dubini $z = 50$ m.	428
Sl. 176	Analiza stanja napona prema II-3Dr postupku: (a) 3D prikaz napona σ_z , σ_r , σ_θ i τ_{zr} u funkciji koordinata r i z ; i (b) uvećani 3D prikaz napona σ_r , σ_θ i τ_{zr}	434
Sl. 177	Analiza stanja napona prema II-3Dr postupku: (a) 2D prikaz - dijagrami konturnih napona u funkciji z ; i (b) 2D prikaz – dijagrami napona u preseku na dubini $z = 50$ m.	434
Sl. 178	Analiza stanja napona prema IIa-3Dr postupku: (a) 3D prikaz napona σ_z , σ_r , σ_θ i τ_{zr} u funkciji koordinata r i z ; i (b) uvećani 3D prikaz napona σ_r , σ_θ i τ_{zr}	436
Sl. 179	Analiza stanja napona prema IIa-3Dr postupku: (a) 2D prikaz - dijagrami konturnih napona u funkciji z ; i (b) 2D prikaz – dijagrami napona u preseku na dubini $z = 50$ m.	436

Sl. 180	Analiza stanja napona prema <i>Walker/Walters</i> -ovom postupku: (a) 3D prikaz napona σ_z , σ_r , σ_θ i τ_{rz} u funkciji koordinata r i z; i (b) uvećani 3D prikaz napona σ_r , σ_θ i τ_{rz}	442
Sl. 181	Analiza stanja napona prema <i>Walker/Walters</i> -ovom postupku: (a) 2D prikaz - dijagrami konturnih napona u funkciji z; i (b) dijagrami napona na dubini z = 50 m..	442
Sl. 182	Dodatno lokalno opterećenje prema EC1-4 i dekompozicija na opterećenja p_1 i p_2	448
Sl. 183	(a) Statički sistem silosa i (b) 3D prikaz opterećenja p_1 i p_2 (Tower).	448
Sl. 184	Momenti savijanja u prstenastom i vertikalnom pravcu u 3D prikazu i na razvijenoj površini cilindrične ljuske, za opterećenje p_1 i gustinu mreže KE "8" (Tower).	452
Sl. 185	Momenti savijanja u prstenastom i vertikalnom pravcu u 3D prikazu i na površini cilindrične ljuske, za opterećenje p_1 i gustinu mreže KE "8" (SAP).	453
Sl. 186	Lokalno opterećenje p_1 : (a) 3D prikaz dispozicije opterećenja p_1 (SAP) i (b) 3D prikaz deformacija silosa od opterećenja p_1 (Tower).....	454
Sl. 187	3D prikazi prstenaste i vertikalne normalne sile (n_ϕ i n_z) na cilindričnoj ljusci, za opterećenje p_1 i gustinu mreže KE "8" (SAP).....	454
Sl. 188	Dopunsko prstenasto opterećenje p_2 : (a) 3D prikaz dispozicije opterećenja p_2 (SAP) i (b) 3D prikaz deformacija silosa od opterećenja p_2 (SAP).	456
Sl. 189	3D prikazi prstenastog momenta savijanja i normalne sile (m_ϕ i n_ϕ) na cilindričnoj ljusci, za opterećenje p_2 i gustinu mreže KE "8" (SAP).....	457
Sl. 190	Momenti savijanja u vertikalnom pravcu, m_z , u 3D prikazu i na razvijenoj površini cilindrične ljuske, za opterećenje p_2 i gustinu mreže KE "8" (Tower).	457
Sl. 191	(a) Statički sistem silosa i (b) 3D prikaz deformacija silosa od nesimetričnog opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom (Tower).....	460
Sl. 192	Raspodela horizontalnih pritisaka u preseku kružne ćelije pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala.	462
Sl. 193	Opterećenja p_{hse} , p_{hce} i p_{hae} pri ekscentričnom pražnjenju (SAP).....	464
Sl. 194	Uticaji od opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom: momenti m_ϕ i normalne sile n_ϕ u 3D prikazu i na razvijenoj površini cilindrične ljuske (Tower).	465
Sl. 195	Uticaji od opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom: momenti m_ϕ i normalne sile n_ϕ u 3D prikazu i u frontalnom prikazu cilindrične ljuske (SAP).	466
Sl. 196	Rezultati analize prema I-2D postupku (za I slučaj početnih uslova), postupku <i>Li</i> -a i <i>Aubertin</i> -a (2008) [168] i numeričkom postupku (FLAC-2D) [168]: (a) horizontalni naponi i (b) vertikalni naponi.	472
Sl. 197	Rezultati analize prema II-2D postupku (za I slučaj početnih uslova), postupku <i>Li</i> -a i <i>Aubertin</i> -a (2008) [168] i numeričkom postupku (FLAC-2D) [168]: (a) horizontalni naponi i (b) vertikalni naponi.	473
Sl. 198	Rezultati analize prema III-2D postupku, postupku <i>Li</i> -a i <i>Aubertin</i> -a (2008) [168] i numeričkom postupku (FLAC-2D) [168]: (a) horizontalni naponi i (b) vertikalni naponi.	475
Sl. 199	Rezultati analize prema IV-2D postupku, postupku <i>Li</i> -a i <i>Aubertin</i> -a (2008) [168] i numeričkom postupku (FLAC-2D) [168]: (a) horizontalni naponi i (b) vertikalni naponi.	475

Sl. 200	Rezultati analize prema V-2D postupku (<i>Walker/Walters</i> -ov postupak), postupku <i>Li</i> -a i <i>Aubertin</i> -a (2008) [168] i numeričkom postupku (FLAC-2D) [168]: (a) horizontalni naponi i (b) vertikalni naponi.....	475
Sl. 201	Rezultati analize prema VI-2D postupku – postupku <i>Li</i> -a i <i>Aubertin</i> -a (2008) [168] i numeričkom postupku (FLAC-2D) [168]: (a) horizontalni naponi i (b) vertikalni naponi.....	476
Sl. 202	Rezultati prema VII-2D postupku – <i>Janssen</i> -ovom postupku (1895) [130], postupku <i>Li</i> -a i <i>Aubertin</i> -a (2008) [168] i numeričkom postupku (FLAC-2D) [168]: (a) horizontalni naponi i (b) vertikalni naponi.....	476
Sl. 203	Uporedni dijagrami horizontalnih i vertikalnih napona u proračunskom primeru.	477
Sl. 204	Oznake, dimenzije i raspored mernih mesta (<i>Couto, Ruiz</i> i <i>Aguado</i> (2013) [53]).....	480
Sl. 205	Foto snimak ispitnog silosa (<i>Couto, Ruiz</i> i <i>Aguado</i> (2013) [53]).	480
Sl. 206	I-3Dr postupak – primena metode integralnih relacija: dijagrami vertikalnih, radijalnih, prstenastih i smičućih napona za $z \rightarrow \infty$ i $z = 2.0$ m.	484
Sl. 207	II-3Dr postupak – primena metode integralnih relacija: dijagrami vertikalnih, radijalnih, prstenastih i smičućih napona za $z \rightarrow \infty$ i $z = 2.0$ m.	486
Sl. 208	III-3Dr postupak – postupak <i>Walker</i> -a i <i>Walters</i> -a: dijagrami vertikalnih, radijalnih, prstenastih i smičućih napona za $z \rightarrow \infty$ i $z = 2.0$ m.	488
Sl. 209	IV-3Dr postupak – postupak <i>Pipatpongsa</i> -a i <i>Heng</i> -a: dijagrami vertikalnih, radijalnih, prstenastih i smičućih napona za $z \rightarrow \infty$ i $z = 2.0$ m.	489
Sl. 210	V-3Dr postupak – <i>Janssen</i> -ov postupak: dijagrami vertikalnih, radijalnih, prstenastih i smičućih napona za $z \rightarrow \infty$ i $z = 2.0$ m.	490
Sl. 211	Uporedni dijagrami vertikalnih napona $z \rightarrow \infty$ i $z = 2.0$ m, prema prikazanim teorijskim postupcima.	493
Sl. 212	Uporedni dijagrami radijalnih napona $z \rightarrow \infty$ i $z = 2.0$ m, prema prikazanim teorijskim postupcima.	494
Sl. 213	Eksperimentani rezultati ispitivanja za stanje pri punjenju silosa u testovima 1 do 7, prema [53], i dijagrami pritisaka na zid $p_h = \sigma_r(R)$ prema <i>Janssen</i> -ovom postupku i EC1-4.	496
Sl. 214	Eksperimentani rezultati ispitivanja za kratak period mirovanja materijala nakon punjenja u testovima 1 do 7, prema [53], sa min. i max. vrednostima, i dijagrami pritisaka na zid $p_h = \sigma_r(R)$ prema <i>Janssen</i> -ovom postupku i EC1-4.	497
Sl. 215	Eksperimentani rezultati ispitivanja pri pražnjenju materijala u testovima 1 do 7, prema [53], i dijagrami pritisaka na zid $p_h = \sigma_r(R)$ prema <i>Janssen</i> -ovom postupku i EC1-4.	498
Sl. 216	Dijagrami napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu: $\mu_i = 0.80$ konstantno uz variranje vrednosti $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (primena <i>Walker/Walters</i> -ovog postupka).....	502
Sl. 217	Dijagrami napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu: $\mu_i = 0.80$ konstantno uz variranje vrednosti $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (primena II-3Dr postupka).	503
Sl. 218	Dijagrami napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu: $\mu_i = 0.70$ konstantno uz variranje vrednosti $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (primena <i>Walker/Walters</i> -ovog postupka).....	504

Sl. 219	Dijagrami napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu: $\mu_i = 0.70$ konstantno uz variranje vrednosti $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (primena II-3Dr postupka).....	505
Sl. 220	Dijagrami napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu: $\mu_i = 0.60$ konstantno uz variranje vrednosti $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (primena <i>Walker/Walters</i> -ovog postupka).....	506
Sl. 221	Dijagrami napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu: $\mu_i = 0.60$ konstantno uz variranje vrednosti $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (primena II-3Dr postupka).....	507
Sl. 222	Dijagrami odnosa vertikalnih napona $\sigma_{zR}/\sigma_{zR\text{ ref}}$ i $\sigma_{z0}/\sigma_{z0\text{ ref}}$, u funkciji parametara μ_i i μ_w (parametri referentnih napona su $\mu_i = 0.8$ i $\mu_w = 0.4$).	511
Sl. 223	Dijagrami odnosa radijalnih napona $\sigma_{rR}/\sigma_{rR\text{ ref}}$ i $\sigma_{r0}/\sigma_{r0\text{ ref}}$, u funkciji parametara μ_i i μ_w (parametri referentnih napona su $\mu_i = 0.6$ i $\mu_w = 0.4$).	512
Sl. 224	3D prikaz radijalnih napona σ_{rR} do zida ćelije u funkciji z i μ_w , sa variranjem μ_i (primena II-3Dr postupka).	513
Sl. 225	3D prikaz radijalnih napona σ_{r0} u osi silosa u funkciji z i μ_w , sa variranjem μ_i (primena II-3Dr postupka).	513

LISTA TABELA

Tabela 1.	Klasifikacija silosa prema odnosu h/d . _____	17
Tabela 2.	Uporedni pregled karakteristika protoka masom i protoka jezgrom. _____	25
Tabela 3.	Zapreminska masa, poroznost i specifična težina za neke zrnaste materijale, prema standardu ASAE D241.4. _____	44
Tabela 4.	Zbijenost za različite tipova pakovanja jednakih sfera. _____	47
Tabela 5.	Uporedni pregled koeficijenta K u propisima za proračun silosa. _____	64
Tabela 6.	Karakteristike materijala preporučene u SRPS ISO 11697 (1996). _____	75
Tabela 7.	Karakteristike nekih materijala prema AS 3774 (1996). _____	76
Tabela 8.	Kombinacije parametara pri proceni opterećenja prema AS 3774 (1996). _____	76
Tabela 9.	Karakteristike nekih materijala prema EN 1991-4:2006 (I deo). _____	78
Tabela 10.	Karakteristike nekih materijala prema EN 1991-4:2006 (II deo). _____	78
Tabela 11.	Kombinacije parametara pri proceni opterećenja prema EN 1991-4:2006. _____	79
Tabela 12.	Proračunske klase silosa prema pouzdanosti procene dejstva. _____	136
Tabela 13.	Izrazi za određivanje simetričnog opterećenja na zidove ćelije pri punjenju. _____	140
Tabela 14.	Pritisaci na zid levka prema različitim normama. _____	161
Tabela 15.	Koeficijenti lokalnog povećanja pritiska, a_1 i a_2 . _____	165
Tabela 16.	Nominalna debljina zida prema prečniku silosa. _____	166
Tabela 17.	Karakteristike nekih materijala prema DIN 1055-6:1987. _____	167
Tabela 18.	Faktor neravnomernosti β . _____	169
Tabela 19.	Koeficijenti a , b , c i izrazi za presečne sile u težištima lokalnih površina, za $c_x = c_\varphi = 0.2$, $\nu = 0.2$ i $10 \leq (r/t) \leq 500$, prema <i>Windels</i> -u [337]. _____	175
Tabela 20.	Koeficijenti a i b i izrazi za presečne sile u težištima lokalnih površina, za područje $10 \leq (r/t) \leq 30$, prema <i>Timm</i> -u i <i>Windels</i> -u [308]. _____	177
Tabela 21.	Bezdimenzionalni koeficijenti za određivanja uticaja od opterećenja p_p prema <i>Windels</i> -u [337] i <i>Timm</i> -u i <i>Windels</i> -u [308], u oblasti $10 \leq (r/t) \leq 30$. _____	178
Tabela 22.	Pregled korigovanih izraza u DIN 1055-6:2005 (2006) [62] kod proračuna opterećenja pri ekscentričnom pražnjenju. _____	187
Tabela 23.	Primena odgovarajuće teorije kod određivanja nesimetričnog opterećenja pri velikom ekscentricitetu protočnog kanala. _____	191
Tabela 24.	Pregled teorijskih i empirijskih izraza za koeficijent K_0 i ugao ϕ_0 . _____	272
Tabela 25.	Koeficijenti K za stanje napona pri punjenju - K_f , pri mirovanju - K_0 i pri pražnjenju - K_e , i uglovi unutrašnjeg trenja ϕ_f , ϕ_0 i ϕ_e . _____	283
Tabela 26.	Uporedni rezultati horiz. pritisaka na zidu ćelije (uskladištena pšenica) prema predloženom teorijskom postupku i EC1-4 za silose klase AAC 1, 2 i 3. _____	313
Tabela 27.	Uporedni rezultati horiz. pritisaka na zidu ćelije (uskladišten kukuruz) prema predloženom teorijskom postupku i EC1-4 za silose klase AAC 1, 2 i 3. _____	314

Tabela 28.	Uporedni rezultati horiz. pritisaka na zidu ćelije (uskладиštena soja) prema predloženom teorijskom postupku i EC1-4 za silose klase AAC 1, 2 i 3. _____	315
Tabela 29.	Određivanje koeficijenta trenja materijala o zid za koeficijent K u Walkerovom postupku iz kalibrisanog oblika koeficijenta K prema Li -u i $Aubertinu$ -u. _____	348
Tabela 30.	Izrazi za određivanje opterećenja u levku za stanja posle punjenja i tokom pražnjenja materijala (formulacije za strme i plitke levke prema EC1-4). _____	351
Tabela 31.	Uporedni pregled rezultata konturnih asimptotskih radijalnih napona prema numeričkom postupku i aproksimativnom rešenju (4.494). _____	406
Tabela 32.	Vrednosti eksponenta a u zavisnosti od koeficijenata trenja μ_i i μ_w (za aktivno stanje napona) - primena numeričke integracije za određivanje radijalnih napona. _____	411
Tabela 33.	Vrednosti eksponenta a u zavisnosti od koeficijenata trenja μ_i i μ_w (za aktivno stanje napona) - primena aproks. izraza (4.494) za određivanje radijalnih napona. _____	411
Tabela 34.	Uporedni pregled rezultata konturnih vrednosti asimptotskih normalnih napona pri primeni numeričkog postupka i primeni interpolacionih funkcija. _	416
Tabela 35.	Vrednosti konturnih napona u zavisnosti od dubine z (I-3Dr postupak). _____	428
Tabela 36.	Vrednosti konturnih napona u zavisnosti od dubine z (II-3Dr postupak). _____	434
Tabela 37.	Vrednosti konturnih napona u zavisnosti od dubine z (IIa-3Dr postupak). _____	436
Tabela 38.	Vrednosti konturnih napona u zavisnosti od z (Walker/Walters-ov postupak). _	442
Tabela 39.	Uporedni pregled rezultata analiza za 3Dr silos u primerima 4.1 do 4.4. _____	443
Tabela 40.	Uticaji od $p_1 = 10 \text{ kN/m}^2$ u težištu lokalne površine, prema teorijskim izrazima i prema MKE (program Tower) sa variranjem gustine mreže KE. ____	455
Tabela 41.	Uticaji od $p_1 = 10 \text{ kN/m}^2$ u težištu lokalne površine, prema teorijskim izrazima i MKE za gustinu mreže KE "8" pri primeni programa Tower i SAP. _____	456
Tabela 42.	Uticaji od $p_2 = -1.25 \text{ kN/m}^2$, na polovini visine prstena na kojoj deluje prstenasto opterećenje, prema teorijskim izrazima i prema MKE (program Tower) sa variranjem gustine mreže KE. _____	458
Tabela 43.	Uticaji $p_2 = -1.25 \text{ kN/m}^2$, na polovini visine površine pod prstenastim opterećenjem, prema teorijskim izrazima i MKE za gustinu mreže KE "8" pri primeni programa Tower i SAP. _____	458
Tabela 44.	Proračunski pritisci na zid kružne ćelije pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala, prema EC1-4 za analizirani primer AB silosa. _____	463
Tabela 45.	Uticaji od velikog ekscentriciteta protočnog kanala pri pražnjenju, prema teorijskom rešenju i prema MKE sa variranjem gustine mreže KE (Tower). _	467
Tabela 46.	Uticaji od velikog ekscentriciteta protočnog kanala pri pražnjenju, prema teorijskom rešenju i prema MKE za gustinu mreže KE "8" (Tower i SAP). ____	467
Tabela 47.	Rezultati analize prema I-2D postupku – primena metode integralnih relacija (dijagram horizontalnih napona u obliku kvadratne parabole). _____	472

Tabela 48.	Rezultati analize prema II-2D postupku – primena metode integralnih relacija (dijagram horizontalnih napona u obliku segmenta elipse). _____	473
Tabela 49.	Rezultati analize prema III-2D postupku – primena metode integralnih relacija (dijagrami normalnih napona u obliku segmenta elipse; uvođenje aproksimativnog oblika za odnos napona K). _____	474
Tabela 50.	Rezultati analize prema IV-2D postupku – primena metode integralnih relacija (dijagram horizontalnih napona u obliku segmenta elipse; uvođenje aproksimativnog oblika za odnos napona K). _____	474
Tabela 51.	Rezultati analize prema V-2D postupku – <i>Walker/Walters</i> -ov postupak (horizontalni naponi konstantni u preseku; primena faktora distribucije \mathcal{D}_{2D}).__	474
Tabela 52.	Rezultati analize prema VI-2D postupku – postupak <i>Li</i> -a i <i>Aubertin</i> -a. _____	476
Tabela 53.	Rezultati analize prema VII-2D postupku – <i>Janssen</i> -ov postupak. _____	476
Tabela 54.	Uporedni pregled rezultata za konturne napone na dubini materijala $H/2$ prema analiziranim postupcima proračuna. _____	477
Tabela 55.	Uporedni pregled odstupanja konturnih napona na dubini materijala $H/2$ prema analiziranim postupcima proračuna u odnosu na rezultate II-2D postupka. _____	477
Tabela 56.	I-3Dr postupak – primena konturnih funkcija raspodele. _____	483
Tabela 57.	II-3Dr postupak – primena jedne funkcije raspodele. _____	485
Tabela 58.	III-3Dr postupak – postupak <i>Walker</i> -a i <i>Walters</i> -a sa fakt. distribucije \mathcal{D}_{3Dr} . ____	487
Tabela 59.	IV-3Dr postupak – postupak <i>Pipatpongsa</i> -a i <i>Heng</i> -a. _____	487
Tabela 60.	V-3Dr postupak – <i>Janssen</i> -ov postupak _____	487
Tabela 61.	Uporedni pregled rezultata prema razmatranim postupcima proračuna. _____	491
Tabela 62.	Odstupanja rezultata u odnosu na rezultate prema I-3Dr postupku proračuna. __	492
Tabela 63.	<i>Walker/Walters</i> -ov postupak - vrednosti konturnih vertikalnih napona u zavisnosti od dubine z , pri variranju parametara μ_i i μ_w . _____	508
Tabela 64.	<i>Walker/Walters</i> -ov postupak - vrednosti konturnih radijalnih napona u zavisnosti od dubine z , pri variranju parametara μ_i i μ_w . _____	508
Tabela 65.	II-3Dr postupak - vrednosti konturnih vertikalnih napona u zavisnosti od dubine z , pri variranju parametara μ_i i μ_w . _____	509
Tabela 66.	II-3Dr postupak - vrednosti konturnih radijalnih napona u zavisnosti od dubine z , pri variranju parametara μ_i i μ_w . _____	509
Tabela 67.	Odstupanja <i>Walker/Walters</i> -ovog postupka od II-3Dr postupaka za radijalne i vertikalne napone u zavisnosti od dubine z pri variranju parametara μ_i i μ_w . __	510

1 UVODNA RAZMATRANJA

Prema sadašnjem stanju stvari, postoje relativno velike mogućnosti pri samoj analizi statičkih uticaja silosnih konstrukcija, na primer primenom savremenih programa za statičku analizu konstrukcija. Na drugoj strani stoji činjenica, da je malo poznata priroda i karakter opterećenja koje uskladišteni zrnasti materijali proizvode u ćelijama silosa, a prema kojima se sprovodi statička analiza. Opterećenje zrnastih materijala na zidove ćelija, i dalje se uzima prema *Janssen*-ovoj teoriji iz 1895. godine uz odgovarajuće korekcije proračunskih izraza. Tokom eksploatacije silosa, dolazilo je do brojnih slučajeva oštećenja armiranobetonskih (AB) zidova ćelija, što je stalno pokretalo interes za detaljnije sagledavanje procene opterećenja u ćelijama silosa. Razlog za pojavu oštećenja je pronađen u povećanju opterećenja pri pražnjenju ćelija, što je za posledicu imalo uvođenje korekcionih faktora za povećanje opterećenja. Kasnije je primećeno, da kod pražnjenja ćelija postoje različiti tipovi proticanja materijala u ćeliji i levku silosa. U ovoj oblasti, *Jenike*-ova teorija proticanja je fundamentalna u razmatranju uticaja zrnastih materijala, i na osnovu ove teorije uspostavljena je veza između tipa proticanja materijala pri pražnjenju na veličinu i raspodelu opterećenja od zrnastog materijala.

Analiza zrnastih materijala, koja se ovde razmatra na primeru uskladištenja materijala u ćelijama silosa, spada u mehaniku zrnaste (granularne) sredine, koja ima brojne srodne oblasti izučavanja, kao što su na primer: mehanika tla, mehanika fluida, geotektonika, i druge. Interakcija zrnaste sredine sa objektom skladištenja se uzima kao opterećenje od dejstva zrnaste mase na zidove ćelija.

Neregularnosti kod procesa pražnjenja, izazvane prolamanjem uslojenih svodova/kupola uskladištenog zrnastog materijala pri otpočinjanju i u toku pražnjenja, javljaju se kao nesimetrična opterećenja, koja odstupaju od uobičajene kontinualne krive opterećenja po visini silosa. S druge strane, na mikro nivou, opterećenje se javlja kao zbir koncentrisanih međusila pojedinačnih zrna na kontaktnim površinama zrna oslonjenih na unutrašnju stranu zidova ćelija silosa. Reakcije između samih zrna koji sačinjavaju zrnastu masu i reakcije spoljnih zrna u kontaktu sa zidovima, čine prostorni poligon sila, koji se razlikuje od uobičajene predstave o kontinualnom opterećenju na zidu ćelija i zrnastom materijalu kao elastičnoj sredini.

Uticaj geometrije ćelije na veličinu opterećenja je vrlo važan. Oblik ćelije utiče i na vrstu toka materijala pri pražnjenju. Kod većih osnova ćelija i veće visine uskladištenog materijala povećava se i opterećenje na zidove ćelije od zrnastog materijala. U svetskoj praksi, gotovo bez izuzetka se projektuju, grade i koriste silosi sa vertikalnim stranama

zidova ćelija, a vrlo retko se izvode silosi sa kosim ili zakrivljenim zidovima po visini ćelije. Ćelije se uobičajeno izvode sa osnovom pravilnog oblika, kao kružne, kvadratne ili pravougaone ćelije, a u manjem broju slučajeva osnove ćelija su u obliku šestougaonog i osmougaonog pravilnog poligona.

Sadašnje stanje izvedenih silosnih objekata, i kontinualna pojava oštećenja, kao i rušenja zidova i ćelija silosa, upućuju na važnost teme i na potrebu proučavanja ponašanja zrnastog materijala u silosima.

1.1 Predmet istraživanja

Silosne konstrukcije su praktično nezamenljive u pogledu skladištenja zrnastih materijala na relativno malom prostoru. Za razliku od ostalih konstrukcija (izuzev rezervoara), silosi se odlikuju time što su izloženi punom opterećenju od uskladištenog materijala u najvećem delu eksploatacionog veka. U svetu, kao i kod nas postoje posebna tehnička uputstva i regulativa, koja se odnose na analizu ovih objekata i opterećenja od zrnastih materijala. Veliki broj izvedenih objekata silosnih konstrukcija i brojni problemi koji su se pojavili u njihovoj eksploataciji, zahtevaju detaljniju analizu problema pri određivanju veličine i raspodele opterećenja od zrnastih materijala u ćelijama silosa.

Predmet istraživanja je delovanje i raspodela opterećenja od težine uskladištenog zrnastog materijala, u armiranobetonskim (AB) cilindričnim ćelijama silosa, uključujući dejstva na zidove ćelije silosa pri punjenju, mirovanju i pražnjenja rastresitog materijala. Pored analize stanja u kružnim ćelijama, razmatra se i ravno stanje napona kod ćelija sa izduženom pravougaonom osnovom. Ovaj slučaj je relativno jednostavniji za analizu, tako da se uzima kao polazište pri formiranju i verifikaciji predloženih proračunskih postupaka.

Predmet istraživanja je formiranje relativno jednostavnih postupaka proračuna stanja napona u ćelijama silosa, bez primene ekstremnih simulacionih postupaka, kao i određivanje relevantnih faktora opterećenja, na osnovu kojih se mogu dobiti odgovarajuće preporuke i potrebni zaključci za postupanje u pojedinim proračunskim i praktičnim projektantskim situacijama. U ovoj disertaciji razmatraju se proračunski postupci sa kojima se na relevantan način obuhvataju fenomeni kod silosa sa kružnim ćelijama i sa izduženim pravougaonim ćelijama.

Kod nas je *Centar za unapređenje građenja* doneo prva *Privremena uputstva* 1960. godine, koja su dugo upotrebljavana u praksi, kao i uporedna primena stranih tehničkih propisa (namačke DIN norme, ruski СНиП i američki ACI standardi), sve do objavljivanja standarda SRPS-ISO 11697 iz 1996. godine, koji se odnosio na opterećenja rastresitim materijalima. Poslednje u nizu normi iz ove oblasti su evropske norme EN 1991-4: *Dejstva u silosima i rezervoarima* (Evrokod 1 deo 4) iz 2006. godine. Ove norme se u osnovi odnosi na uticaje zrnastog materijala unutar jedne ćelije silosa, pri čemu se ne razmatra problematika opterećenja kod baterije ćelija. Prema EN 1991-4, silos se definiše kao objekat koji se koristi za skladištenje zrnastih materijala, gde se ćelija silosa sastoji od cilindričnog dela sa vertikalnim zidovima i dna ćelije sa nagibom (levak) ili bez nagiba (ravno dno).

Sa aspekta raspodele i veličine opterećenja od zrnastog materijala, bitno je razlikovati stanje punjenja i mirovanja mase, od stanja pražnjenja. Kod stanja pražnjenja, početni period odgovara neustaljenom protoku materijala sa postepenim povećanjem prosečne brzine proticanja. Kada brzina proticanja dostigne neku konačnu konstantnu vrednost radi

se o ustaljenom protoku materijala (efekat peščanog sata - peščanika). U svakom trenutku vremena mogu se zbog heterogenosti zrnaste sredine i neujednačenosti karakteristika zidnih površina (npr. usled neujednačenog trenja o zidove ćelije) pojaviti nestacionarni uticaji koji rezultuju u promeni opterećenja zidova ćelije. Ovi uticaji se u propisima uzimaju kao lokalno opterećenje na relativno ograničenoj površini i mogu se pojaviti na bilo kojem delu zida ćelije.

Prvu formulaciju zakona pritisaka od zrnastih materijala u stanju mirovanja na zidove ćelija silosa je postavio *Janssen* 1895. godine. U osnovi *Janssen*-ove teorije deo težine zrnastog materijala se prenosi na zidove trenjem zrna o zidove ćelije. Sa većom dubinom, bočni pritisak na zidove ćelije se povećava, kao i odgovarajuće opterećenje od trenja. Ovo dovodi do toga, da se pri daljem povećanju dubine, relativni porast ukupne težine uskladištenog materijala u potpunosti prihvata trenjem o zidove ćelije, pri čemu vertikalni pritisak p_v , i bočni horizontalni pritisak p_h , teže odgovarajućim graničnim (asimptotskim) vrednostima. *Janssen* je 1895. godine za odnos pritisaka $K = p_h/p_v$ uveo konstantnu vrednost, u saglasnosti sa svojim eksperimentalnim rezultatima, a *Könen* je 1896. godine za ovaj odnos pritisaka preporučio primenu koeficijenta aktivnog pritiska.

Pored *Janssen*-a i *Könen*-a, analizom opterećenja od zrnastih materijala u ćelijama silosa bavili su se *Kötter*, *Гутьяр*, *Jáky*, braća *Reimbert*, *Гячев*, *Jenike*, *Walker*, *Walters*, *Negi*, *Enstad*, *Nedderman*, *Ravenet*, *Safarian* i *Harris*, *Hampe*, *Benink*, *Drescher*, *Pipatpongsa* i *Heng*, *Rotter* i mnogi drugi, a *Бернштейн*, *Jenike* i *Nedderman* formama protoka zrnaste mase. Kod nas su se opterećenjima u silosima bavili *Bruk*, *Jerotijević*, *Jovanović*, *Romić*, *Debeljković* i drugi. Širi pregled istraživanja u ovoj oblasti, sa navođenjem odgovarajućih referenci, prikazan je u § 2.8 i § 2.9.

Silosu su u prvo vreme bili projektovani prema stanju mirovanja zrnaste mase saglasno *Janssen*-ovoj teoriji. Pojave opštećenja na silosima, u vidu prslina i pukotina, dovele su do detaljnijeg preispitivanje ovih uticaja i korigovanja *Janssen*-ove teorije.

U tom pravcu su, na primer, u normama DIN 1055 list 6 od 1964. godine, propisane različite krive pritisaka za punjenje i pražnjenja silosa, pri čemu je za stanje punjenja odnosno mirovanje materijala uveden koeficijent bočnog pritiska $K = 0.5$, a za stanje pražnjenja ćelije $K = 1.0$, tj. dva puta veća vrednost.

Realna slika kod procesa pražnjenja zrnastih materijala iz silosa je još složenija. U osnovi, po otvaranju ispusta, započinje isticanje materijala iznad samog otvora, sa premeštanjem gornjih zrna naniže u pravcu izlaza. U zoni proticanja, zrnasti materijal makroskopski posmatrano postaje rastresitiji, a još nepokrenuta zona materijala iznad rastresenog materijala se zasvođuje u obliku fiktivne naponske kupole kod ćelije sa kružnom ili sličnom osnovom. Zrnasti materijal iz ove kupole se prolama i urušava, pri čemu se savladavaju sile trenja o zidove ćelije, a gornji deo zrnaste mase uskladištenog materijala se pritom spušta za neki mm prema otvoru za pražnjenje.

Veličina i raspored proračunskog opterećenja zavisi od vrste konstrukcije silosa, osobina uskladištenog materijala i tipa proticanja koji se javlja pri pražnjenju. Analiza uticaja uskladištenog zrnastog materijala se može tretirati primenom analitičkih, numeričkih ili simulacionih metoda. Pored osnovnih teorijskih postupaka koji su formirani na osnovu metode diferencijalnog sloja ili metode integralnih relacija, u primeni su metoda konačnih elemenata - MKE (*Finite Element Method* - FEM), i metoda diskretnih elemenata - MDE (*Discrete Element Method* - DEM).

Poslednje dve navedene metode se koriste za ispitivanje različitih efekata koji se mogu pojaviti u praksi, ali ne pružaju jasne zakonitosti ponašanja materijala i ne vode dobijanju

jednostavnih izraza za primenu kod konkretnih proračunskih situacija. Pored toga, za njihovu primenu koristi se specijalizovani softver, a kod primene MDE za realne analize stanja napona potrebna je primena moćnih računara. U poslednje vreme veća pažnja se posvećuje simulacijama punjenja i protoka zrnastih materijala primenom MDE, gde analizirani model predstavlja skup brojnih pojedinačnih zrna u ćeliji silosa, odnosno razmatranom prostoru. Pri ovim analizama, karakteristike pojedinih zrna i parametri sa kojima se određuju kontaktne sile između zrna su veličine koje se usvajaju polu-empirijski. Kvalitet izbora ovih parametara koje se koriste u simulacionim analizama, se indirektno utvrđuje preko sličnosti simulacionog protoka sa stvarnim protokom materijala.

Gravitaciono pražnjenje materijala se može odvijati na više načina, što ima poseban značaj kod eksploatacije silosa, i neposredan uticaj na raspored i veličinu opterećenja na zidove silosa. Silosi se na osnovu oblika protoka uskladištenog materijala, u osnovi dele na silose kod kojih se protok mase javlja u sledećim oblicima:

- protok ukupnom masom (*mass flow*, pri čemu se sav uskladišteni materijal pokreće);
- protok jezgrom (*funnel flow*, suženi protok kod kojeg se formira stub pokrenutog materijala u ograničenoj zoni iznad ispusta, pri čemu je ostali materijal uz zidove ćelije nepokretan); i
- mešoviti protok (*mixed flow*, u koji ulaze razni slučajevi kombinovanja protoka ukupnom masom i jezgrom po visini ćelije silosa).

Pritisци pri punjenju ćelija zrnastim materijalom uglavnom zavise od svojstava materijala i geometrije silosa. Međutim, pritisci pri pražnjenju zavise od tipa protoka materijala za vreme pražnjenja, tako da je potrebno već kod samog projektovanja proceniti tip protoka materijala u silosu.

Prema sadašnjem stanju stvari, pritisci na zidove su veći kod silosa sa masovnim protokom materijala, u odnosu na slučaj gde je proticanje materijala po jezgru. Silosi se uobičajeno projektuju na osnovu relativno većih opterećenja koja odgovaraju proticanju ukupnom masom, a u posebnim slučajevima kod kojih je zagarantovan protok materijala po jezgru, računa se sa relativno manjim pritiscima na zidovima ćelije.

1.2 Cilj istraživanja i uvedene hipoteze

Osnovni cilj istraživanja u ovoj disertaciji je formiranje analitičkih postupaka proračuna sa kojima se obuhvata što realnija analiza i procena opterećenja silosnih ćelija od dejstva uskladištenog zrnastog materijala za stanje punjenja, mirovanja i pražnjenja materijala iz silosa.

Postupci proračuna opterećenja se zasnivaju na primeni analitičkih metoda, kao što su metoda diferencijalnog sloja i metoda integralnih relacija. Stanja napona u uskladištenom materijalu se razmatraju kod cilindričnih silosa sa kružnim ćelijama i prizmatičnih silosa sa izduženim pravougaonim ćelijama. Kod ovih analiza se obuhvataju uticaji geometrijskih parametara silosa, visine punjenja ćelije sa zrnastim materijalom, kao i relevantne karakteristike uskladištenog materijala i zidova ćelije.

Teorijskim analizama je potrebno odrediti zavisnost uticaja pojedinih parametara na veličinu i raspored opterećenja od zrnastih materijala. Predloženi postupci proračuna se verifikuju na osnovu:

- komparativne analize rezultata dobijenih primenom u ovom radu predloženih postupaka i postupaka proračuna prema drugim autorima, kao i rezultata eksperimentalnih ispitivanja, i
- parametarske analize postupaka proračuna, pri variranju relevantnih parametara.

Primenljivost rezultata istraživanja se ogleda u tome, što detaljnija analiza opterećenja treba da doprinese racionalnijem i ekonomičnijem projektovanju silosnih konstrukcija, i realnijoj proceni sugurnosti konstrukcije silosa.

Osnovne postavke - hipoteze u ovom radu su:

- Stanja napona uskladištenog materijala u silosu, se mogu preciznije analizirati na osnovu graničnog stanja ravnoteže sa uvođenjem *Mohr-Coulomb*-ovog uslova loma materijala smicanjem. Kod ovih analiza se uvode promenljivi dijagrami za vertikalni pritisak u preseku ćelije, što je razlika u odnosu na *Janssen*-ov postupak i slične postupke gde se uvode konstantni vertikalni pritisci.
- Kod analize napona pri pražnjenju materijala iz ćelije uvodi se aktivno stanje napona pri pražnjenju, što je bitna razlika u odnosu na tradicionalni pristup gde se ovo stanje tretira kao granično pasivno stanje napona.
- Stanje napona u uskladištenom materijalu sa povećanjem dubine materijala u ćeliji silosa teži konačnom asimptotskom stanju napona. Na ovaj način, opterećenje po površini zida ćelije, koje odgovara kontaktnim naponima zida i materijala, se povećava sa dubinom materijala, ali trend povećanja opterećenja opada i opterećenje teži na velikim dubinama svojim asimptotskim vrednostima.
- Primena metode integralnih relacija vodi ka tačnijem određivanju stanja napona materijala u silosu, s obzirom da se analiza zasniva na ispunjenju dva uslova ravnoteže, za razliku od metode diferencijalnog sloja gde je u analizi zadovoljen samo uslov ravnoteže vertikalnih sila.

Osnovni parametri zrnaste sredine su: zapreminska težina, ugao unutrašnjeg trenja, ugao prirodnog nagiba, geometrijsko slaganje zrna, dilatancija - promena zapremine pri smicanju, odnosno pri međusobnom pokretanju zrnaste mase, poroznost sredine uskladištenog materijala, veličina zrna i njihov oblik.

Osnovni parametri geometrije silosne ćelije su: geometrija levka i silosnih ćelija (dimenzije i oblik), kao i geometrijska odstupanja - imperfekcije, deformabilnost zidova, a sa tim i deformabilnost konstruktivnog sistema.

Međusobni parametri zrnaste mase i silosnih ćelija su: ugao trenja materijala o zidove ćelija, te promena ovog parametra tokom vremena usled izlizanosti površina, i forme protoka zrnaste mase u skladu sa geometrijom ćelije i karakteristikama zrnaste sredine.

1.3 Kratak sadržaj rada

Rad je podeljen na sedam poglavlja. Kratak opis sadržaja rada po poglavljima je sledeći:

1. U prvom poglavlju sa naslovom *Uvodna razmatranja*, definisan je predmet i postavljen okvir istraživanja. Navedeni su cilj istraživanja i primenljivost rezultata istraživanja, kao i uvedene hipoteze u ovom radu. Na kraju je prikazan kratak sadržaj rada.

2. U drugom poglavlju doktorske disertacije sa naslovom *Pregled teorije i istraživanja u oblasti opterećenja kod silosa*, daje se širi pregled stanja u predmetnoj oblasti sa aspekta teorijskih i eksperimentalnih istraživanja, kao i opšti pregled formi silosnih ćelija, vrsta protoka i isticanja zrnastih materijala, uz razmatranje relevantnih svojstva uskladištenih zrnastih materijala. Pored toga, razmatra se granično stanje zrnastih materijala, sa posebnim osvrtom na koeficijent bočnog pritiska K i određivanje koeficijenta unutrašnjeg trenja i koeficijenta trenja materijala o zid. Prikazan je pregled i kritička analiza prvih istraživanja, kao i problemi vezani za pojavu oštećenja kod silosa od opterećenja uskladištenim materijalom i drugih dejstava. Dat je pregled metoda i postupaka proračuna opterećenja u silosima, gde su opisane i primene metode konačnih elemenata i metode diskretnih elemenata. Uz to je prikazana podela metoda proračuna opterećenja u silosima. Detaljnije je opisano opterećenje u silosima prema EN 1991-4:2006 (EC1-4), a kod pojedinih tematskih pitanja, kao što su: faktor uvećanja opterećenja, opterećenje levka prema poluempirijskoj metodi, dodatno lokalno opterećenje i opterećenje pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom, razmatrani su i drugi propisi. Kod ovih pitanja uporedno su analizirani sledeći propisi: AS 3774:1996, СНиП 2.10.05-85, SRPS ISO 11697:1996, ENV 1991-4:1995 i EN 1991-4:2006, DIN 1055-6:1987 i DIN 1055-6:2005. Određivanje statičkih uticaja u zidu kružne ćelije (primena aproksimativnih postupaka), razmatrano je za delovanje dodatnog lokalnog opterećenja, kao i za slučaj posebnog nesimetričnog opterećenja koje se javlja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom.
3. U trećem poglavlju ove disertacije, sa naslovom *Analitički postupci za određivanje opterećenja u silosima*, detaljno se analiziraju analitički postupci za određivanje opterećenja u silosima, odnosno stanja napona u uskladištenom materijalu, koji su formulisani od strane sledećih istraživača: *Janssen-a* (1895) [130], *Гутьяр-a* (1935) prema ref. [82] i [358], braće *Reimbert* (1962) [244], *Pipatpongsa-a* i *Heng-a* (2010) [230], *Walker-a* (1966) [325] i *Walters-a* (1973) [328], *Li-a* i *Aubetrin-a* (2008) [168]. Ovi postupci se u osnovi odnose na analizu stanja napona u ćeliji silosa, odnosno određivanje opterećenja na zidovima ćelije. Proračun opterećenja u levku je prikazan prema *Rotter-u* (2008) [260], gde je razmatrana interpretacija analize stanja napona u levku prema *Dabrowski-om*, s obzirom da je upravo ovaj postupak primenjen u EN 1991-4:2006. U ovom poglavlju se šire analizira primena graničnog stanja ravnoteže, na osnovama analize stanja napona prema *Ohde-u* (1951) [210] i *Nanninga-u* (1956) prema ref. [227], koji su analizirali problem asimptotskog stanja napona uskladištenog materijala kod 2D silosa (silosi izdužene pravougaone osnove), i na osnovu primene ove analize kod 3Dr silosa (silosi kružne osnove) uz uvođenje *Walker-ovih* pretpostavki. Kod ovih analiza se koristi *Mohr-Coulomb-ov* zakon loma materijala pri smicanju. U analizi stanja napona su definisane polazne pretpostavke, i uvedena je podela stanja napona materijala u silosu na stanja pri punjenju, mirovanju i pražnjenju. Ovim stanjima odgovaraju koeficijenti bočnog pritiska K , koji su definisani kao koeficijenti aktivnog pritiska pri punjenju, mirovanju i pražnjenju materijala. Uvedeni analitički oblici za ove koeficijente su upoređeni sa eksperimentalnim rezultatima na jednom ispitnom silosu (ispitivani su pšenica i kukuruz kao uskladišteni materijali). Primena koeficijenta K je data posebno za postupke sa konstantnim vertikalnim naponima i posebno za postupke sa promenljivim vertikalnim naponima u preseku ćelije. Pored toga, razmatrana je primena koeficijenta K , kod modifikovane analize pojave skokovitog opterećenja

(switch load). Faktori natpritiska C_h koji slede iz ove analize su upoređeni sa faktorom C_h koji je uveden u EN 1991-4:2006 (EC1-4), pri čemu su na primeru AB silosa upoređeni pritisci na zid ćelije prema predloženom teorijskom postupku i prema EC1-4. Provera pretpostavki kod primene graničnog stanja ravnoteže, koja je data u ovom poglavlju, je od velikog značaja, kako se ove pretpostavke koriste kod primene metode integralnih relacija. Pokazni primer za primenu ove metode je prikazan kod analize stanja napona materijala u 2D silosu u okviru Walker-ovog postupka, gde je potvrđena osnovanost uvedenih polaznih pretpostavki u metodi integralnih relacija.

4. U četvrtom poglavlju doktorske disertacije, sa naslovom *Primena metode integralnih relacija kod analize opterećenja u silosima*, uvodi se mehanika neprekidne sredine u analizi pritiska na zidove silosa sa primenom teorije plastičnosti pri definisanju ponašanja zrnastog materijala. Stanja napona uskladištenog materijala u silosu, se analiziraju na osnovu graničnog stanja ravnoteže sa uvođenjem *Mohr-Coulomb*-ovog uslova loma materijala smicanjem. Primenom metode integralnih relacija, formiraju se proračunski postupci za određivanje stanja napona u uskladištenom materijalu kod 2D silosa sa ćelijama pravougaone osnove, i kod 3Dr silosa sa ćelijama kružne osnove. Kod izbora oblika interpolacionih funkcija napona u prikazanoj analizi vodilo se računa da stanje napona u uskladištenom materijalu sa povećanjem dubine materijala u ćeliji silosa teži konačnom asimptotskom stanju napona. Kod analize 2D silosa je formirano ukupno četiri nova postupka proračuna stanja napona, a kod analize 3Dr silosa je formirano dva nova postupka proračuna. Postupci analize 2D silosa su poslužili za istraživanje primene polaznih pretpostavki, s obzirom da je problem stanja napona kod 3Dr silosa mnogo složeniji nego kod 2D silosa. Treći postupak kod 2D silosa se odnosi na primenu alternativnog oblika koeficijenta K , i jedinstvenog oblika interpolacione funkcije svih normalnih napona u materijalu. Ovaj postupak analize 2D silosa je razvijen na analognim pretpostavkama koje su uvedene u prvom postupku analize stanja napona materijala kod 3Dr silosa. U tom smislu, treći proračunski postupak kod 2D silosa, analogan je prvom proračunskom postupku kod 3Dr silosa.

U odnosu na prvi postupak proračuna stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu, gde se uvode konturne funkcije raspodele $Y_R(z)$ i $Y_0(z)$, kod drugog postupka se uvodi jedna funkcija raspodele $Y(z)$, kako se postupak zasniva samo na uslovu ravnoteže vertikalnih sila na isečku diferencijalnog sloja materijala. Drugi postupak proračuna stanja napona kod 3Dr silosa sa kružnim ćelijama, je skoro jednake tačnosti sa prvim postupkom, a po jednostavnosti je na nivou Walker/Walters-ovog postupka. Međutim, za razliku od Walker/Walters-ovog postupka, gde se koristi aproksimacija da su radijalni naponi konstantni na dubini materijala z , kod drugog proračunskog postupka su uvedeni promenljivi radijalni naponi u preseku ćelije.

Za asimptotsko stanje napona materijala u 2D silosu, teorijski egzaktno rešenje je prikazao *Ohde*, sa uvođenjem *Mohr-Coulomb*-ovog loma materijala smicanjem. U odgovarajućoj analizi asimptotskog stanja napona materijala u 3Dr silosu, još nije određeno egzaktno analitičko rešenje. Zbog toga je analiza stanja napona kod 3Dr silosa relativno složenija, a asimptotsko stanje napona se određuje putem numeričke integracije ili približnim postupkom na osnovu aproksimativnog rešenja za promenljive radijalne napone. Formiranje postupaka proračuna, u ovoj disertaciji, na osnovu primene metode integralnih relacija, predstavlja teorijski doprinos analizi

stanja napona u uskladištenom materijalu, odnosno određivanju opterećenja kod 2D i 3Dr silosa.

5. U petom poglavlju ove disertacije, sa naslovom *Primeri i analize*, prikazani su karakteristični primeri analize iz oblasti razmatrane problematike u ovoj disertaciji. Prva dva primera se odnose na analize uticaja kod kružne ćelije AB cilindričnog silosa od dejstva dodatnog lokalnog opterećenja i nesimetričnog opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom, respektivno. U ovim primerima rezultati su određeni pri variranju gustine mreže konačnih elemenata kod primene MKE i prema predloženim približnim teorijskim rešenjima. U druga dva primera analizirano je stanje napona materijala u ćeliji 2D i 3Dr silosa prema predloženim postupcima proračuna, koji su formirani sa metodom integralnih relacija, i prema poznatim postupcima drugih autora. Analiza stanja napona kod 2D silosa se odnosi na jedan primer koji su detaljno obradili *Li i Aubertin* (2008) [168], i za koji su prikazani numerički rezultati pri primeni programa FLAC-2D. Stanje pritisaka kod 3Dr silosa, analizirano je na primeru jednog ispitnog silosa sa nasutom pšenicom, prema eksperimentalnim ispitivanjima koja su sprovedeli *Couto, Ruiz i Aguado* (2013) [53]. Pritisaci na zid 3Dr silosa su određeni za stanja punjenja, mirovanja i pražnjenja materijala iz ćelije, prema predloženim teorijskim postupcima i prema postupcima drugih autora, i upoređeni su sa eksperimentalnim rezultatima pri ispitivanju. U petom primeru je data parametrska analiza pritisaka kod 3Dr silosa, gde je ispitan uticaj koeficijenta unutrašnjeg trenja i koeficijenta trenja materijala o zid ćelije.
6. Šesto poglavlje doktorske disertacije je sa naslovom *Završne napomene i zaključci*, i u ovom poglavlju su na osnovu sprovedenih teorijskih i numeričkih analiza prema razmatranim postupcima proračuna, formulisani zaključci i preporuke o dejstvu uskladištenog materijala u ćelijama silosa. S obzirom na veći broj teorijskih doprinosa kod analiziranog problema stanja napona kod 2D i 3Dr silosa, kao i uvođenje nekoliko modifikacija konceptualnih postavki kod pojedinih teorijskih analiza, u sklopu ovog poglavlja se navode svi relativno značajni doprinosi analizi sa stanovišta teorijskih razmatranja u ovoj disertaciji. Na kraju se ukazuje na moguće pravce za dalja istraživanja u ovoj oblasti.
7. Sedmo poglavlje ove disertacije je *Literatura*. U ovom poslednjem poglavlju se daje spisak korišćene i citirane literature, kao i drugih stručnih referenci.

Napomene

Porebno je napomenuti da se u literaturi primenjuju različite oznake za razne posmatrane veličine, parametare i promenljive. U literaturi ima primera da se ista veličina definiše sa različitim terminima, kao i da se isti termin koristiti za definisanje sličnih ili različitih veličina. Pored toga, u literaturi se sreću različite forme matematičkih izraza za pojedine proračunske veličine, što sve zajedno može predstavljati veći problem pri upoređivanju teorijskih postupaka različitih autora, i postupaka proračuna iz tehničke regulative.

Kako bi se omogućilo lakše poređenje postupaka proračuna, potrebno ih je dovesti u istu ravan formalnog prikaza. U tom pravcu, u ovoj disertaciji je primenjen *Ohde*-ov formalni pristup kod analize stanja napona, gde se kod proračunskih izraza koriste koeficijenti unutrašnjeg trenja i trenja o zid silosa (μ_i i μ_w). Primenjeni sistem oznaka u principu odgovara oznakama uvedenim u EC1-4. Pored toga, kod prikaza brojnih vrednosti, u ovom radu, koristi se decimalna tačka.

2 PREGLED TEORIJE I ISTRAŽIVANJA U OBLASTI OPTEREĆENJA KOD SILOSA

2.1 Uvod

Silosu su objekti namenjeni za smeštaj i čuvanje zrnastih i prašiniastih materijala, koji mogu biti organskog ili neorganskog porekla (rastresiti materijali). Ovi materijali se lako osipaju i obično im opada kvalitet pod direktnim uticajem nepovoljnih klimatskih uslova. U građevinskom pogledu silosu su specijalne inženjerske konstrukcije koje se uobičajeno grade u vidu visokih cilindričnih ili prizmatičnih armiranobetonskih i prednapregnutih konstrukcija (za veće prečnike kružnih ćelija) ili metalnih konstrukcija.

Zidovi silosa obrazuju vertikalni prostor za skladištenje materijala, praktično proizvoljnog oblika, ali uobičajeno pravilnog poprečnog preseka. Ovaj prostor namenjen skladištenju se naziva *ćelija* silosa. Sastavljanjem zidova više ćelija na mestima njihovog međusobnog dodira formira se silosna *baterija*. Gornji deo se izvodi ili kao krovna ploča ili kao nadćelijska galerija-hala, gde su postavljeni otvori za punjenje, a donji deo ćelije se izvodi u obliku levka ili ravnog dna na kojem se nalazi obično samo jedan otvor za pražnjenje. Pored ovih otvora kod ćelija, postavljaju se i revizioni otvori na gornjoj ploči ćelije i na levku ili ravnom dnu. Gornji revizioni otvor je obavezan, dok je donji opcioni. Revizioni otvori su zatvoreni i osigurani poklopcima odnosno vratima. Na ispusnom otvoru levka postavlja se zatvarač ili posebni izuzimač materijala, čijim se otvaranjem ili uključenjem, masa gravitaciono, odnosno mehanički prazni iz silosnog prostora.

Prostor ispod ćelija može biti otvoren, ako se ćelije oslanjaju na stubove, ali se obično izvodi kao podćelijska galerija koja je zatvorena sa obimnim zidovima, produženjem zidova ćelija. U galerijama su smeštene transportne trake ili redleri za horizontalni transport materijala do otvora za punjenje, odnosno od ispusta za pražnjenje. Za vertikalni transport zrnastog materijala služi elevator, koji može biti smešten kao samonoseća konstrukcija pored silosne ćelije ili se vodi u okviru *mašinske kuće* koja je postavljena uz samu bateriju ili pored baterije silosnih ćelija. Ako je mašinska kuća odvojena od baterije silosa, trake se vode preko prelaznih mostova, koji spajaju mašinsku kuću i bateriju silosa. Prelazni mostovi povezuju uzajamno i susedne baterije silosa, kada su one postavljene u nizu na čijem kraju se nalazi mašinska kuća, sve u cilju racionalnog iskorišćenja i povezivanja horizontalnog i vertikalnog transporta materijala.

Pri projektovanju silosa, od najvećeg značaja je realno određivanje opterećenja koja deluju na zidove ćelije. U tom pogledu analiza opterećenja silosa od težine uskladištenog zrnastog materijala, je predmet kojem naučna i stručna javnost posvećuje veliku pažnju. Nekoliko istraživačkih grupa u raznim zemljama sveta je usmerilo svoja istraživanja u pravcu definisanja opterećenja na zidovima silosa koristeći odgovarajuće analitičke i numeričke metode, uključujući i analize bazirane na *metodi konačnih elemenata* (MKE) i *metodi diskretnih elemenata* (MDE). I pored ovog velikog angažovanja, problem opterećenja kod silosnih konstrukcija, i dan danas nije u svim aspektima dovoljno razjašnjen.

U ovom poglavlju se daje pregled formi silosnih ćelija i levaka, kao i detaljan pregled svojstva rastresitih materijala (zrnaste sredine). Pored toga opisuju se vrste protoka zrnastih materijala, kao i opšti oblici protoka zrnastih materijala u ćelijama silosa.

Razmatraju se poznati teorijski postupci i metode za određivanje pritisaka na zidove ćelija usled dejstva uskladištene mase, kao i načini proračuna uticaja u zidovima ćelija, prema našem tehničkom uputstvu TU 60 (1960) [310], i tehničkim propisima ISO 11697:1990 [125] i SRPS (JUS) ISO 11697:1996 [291], ACI 313-77:1977 [3], ACI 313-97:1997 [5], AS 3774:1996 [14], EN 1991-4:2006 [38], DIN 1055-6:1987 [61], DIN 1055-6:2005 [62], SNBATI (1986) [288] i СНиП 2.10.05-85:1985 [370].

Pritisci pri punjenju ćelija rastresitim materijalom uglavnom zavise od svojstava materijala i geometrije silosa. Međutim, pritisci pri pražnjenju zavise i od vrste protoka koji se javlja za vreme pražnjenja uskladištenog materijala.

2.2 Silosi - istorijski pregled

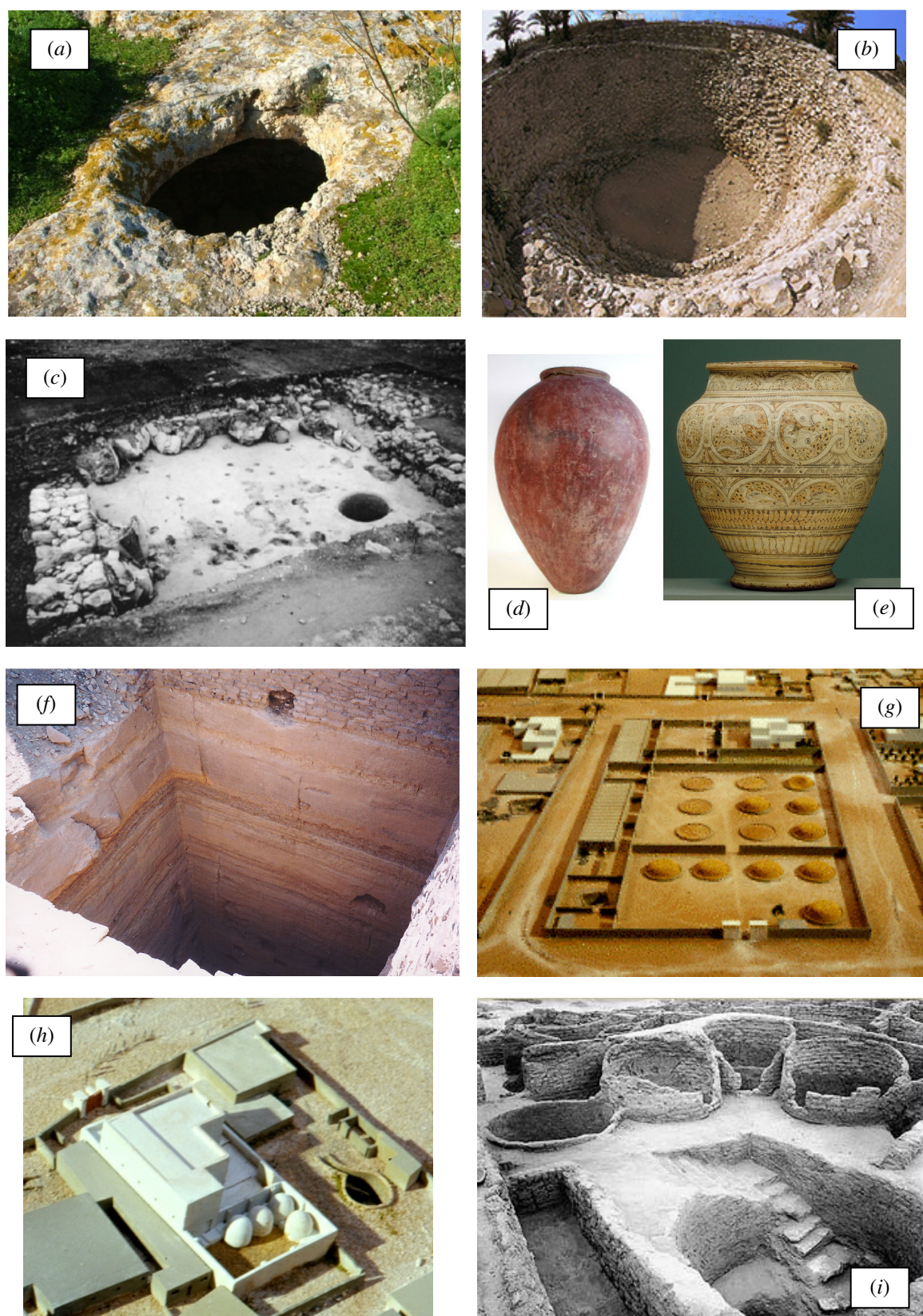
Skladištenje žitarica je poznato od najranijih vremena, tako da su i prvi silosi bili namenjeni za čuvanje žitarica. Čuvanje žitarica je bilo potrebno zbog osiguranja kontinualne potrošnje, osiguranja zrna za sadnju, kao i osiguranja rezerve usled varijacija u prinosu žetve od sezone do sezone. Za smeštaj zrnastih materijala su, u davnoj prošlosti, bile korišće silo-jame, pletene košare i glinene posude.

Reč *silos* je starokeltskog porekla, na grčkom je *siros*, na španskom *silo*, i označava jamu za smeštaj žita. Prvi silosi su, u stvari, bile iskopane ili izdubljene jame u tlu, najbolje u stenskoj masi. Iako je njihova pojava u istoriji široko rasprostranjena, uzima se da su ih prvi primenili narodi na Bliskom istoku, zatim Egipćani, Grci, pa Rimljani.

Preliminarna faza agrokulture se vezuje za Bliski istok, oko IX-VII milenijuma pre n.e., i vezana je za plemensku kulturu *Natufian*, gde su se primenjivali srpovi pri žetvi useva (Sirija IX milenijum pre n.e., iskopine u *Mureybet-u*). Tehnike za čuvanje hrane, su bile silosne jame i ambari-spremници od potpuno prirodnog materijala.

U kontinentalnoj Evropi, kultivacija žitarica je tekla uz obale Dunava, i za razliku od Srednjeg istoka, ovde je bilo potrebno prvo primeniti postupak krčenja i paljenja šuma iz postglacijalnog perioda. U dolini Nila, u prvoj četvrtini V milenijuma pre n.e. u *al-Fayyum-u*, postojala su naselja gde se kultivisala pšenica, ječam, pamuk i lan. U ovom suvom klimatu, žito se čuvao u silo-jamama i pletenim košarama.

Na sl. 1(a) prikazana je silo-jama iz bronzanog doba (silo-jama na Malti) sa otvorom koji se pokriva kamenom pločom, unutrašnjeg prečnika oko 2 m, izdubljenoj u stenskoj masi. Ove silo-jame su uobičajeno locirane na pogodnim uzvisinama, i često je više jama grupisano na jednom lokalitetu. U takvim jamama pšenica se mogla održati u dobrom stanju i preko četiri godine.



Sl. 1 (a) Silo-jama (Malta); (b) Silos u Megiddo-u; (c) Podna silo-jama (Tel Kedesh); (d) i (e) keramičke posude za žitarice, i (f) podzemni silos (Stari Egipat); (g) sabirno mesto za vršenje žita, (h) kuća i silosne ćelije i (i) arheološke iskopine ostataka silonih ćelija (Amarna).

Veliki silos u *Meggido*-u (Izrael), IX ili VIII vek pre n.e. (panoramski snimak na sl. 1(b)), ima dva zavojna stepeništa, po svoj prilici jedno za silaženje, a drugo za penjanje, za nesmetani prolaz pri punjenju odnosno pražnjenju silosa. Dimenzije jame su: po dubini oko 6.5 m i širini – prečniku pri vrhu oko 10 m. Pretpostavlja se da je silos bio pokriven kupolom od čerpića.

Na sl. 1 (c) prikazan je arheološki lokalitet u *Tel Kedesh*-u (Izrael), odnosno prostorija sa silo-jamom pored ostatka zida u seoskom naselju napuštenom od sredine II veka pre n.e..¹ Na sl. 1 (d) i (e), prikazane su keramičke posude korišćene u starom Egiptu: (d) posuda iz *Tarkan* regiona kod Kaira iz perioda 2900-2600 god. pre n.e., i (e) posuda iz vizantijskog perioda oko 600-700 god. n.e..

Agrokultura je od IV dinastije, u starom Egiptu, bila vrlo razvijena i na visokom nivou. Usevi su ubirani zakrivljenim srpovima. Urod se čuvao u zidanim magacinima, zidanim pojedinačnim silosima, a u okviru hramova postojali su i rezervni magacini i silosi većeg kapaciteta. Takav primer je prikazan na sl. 1 (f), i to je uklesana silo-jama u stenskoj masi kvadratne osnove, sa ispuštom na dnu ćelije prema pomoćnom podzemnom prilazu.

Pri žetvi, korišćeno je privremeno otvoreno skladištenje žitarica (prikazano na sl. 1 (g)), u obliku nasipanih hrpa na kružnoj podnoj površini sa podignutim ivičnim vencem, kako bi se osigurala letina do preraspodele u mnogobrojne magacine i silose u gradu. Na ovom prostoru se vršilo žito, a okolo prikupljena plevica koristila kao dodatak pri izradi čerpića.

Tipična kuća sa ograđenom okućnicom u Amarni (period XVIII dinastije, XIV vek pre n.e.) sadržavala je i ekonomski deo (sl. 1 (h)), u kojem su se nalazili podužni magacini i/ili silosi. Pored kuća su smeštani tipični silosi, zidani čerpićem, u obliku manjih cilindričnih ćelija, koji u gornjem delu prelaze u zidanu kupolu. Silosi su obično bili u paru, ili u grupi od nekoliko ćelija, sa stepenicama (opciono), koje su vodile prema gornjem otvoru kroz koji se punilo žito. Na donjem delu silosa se nalazio kvadratni otvor radi pražnjenja. Pored ovih silosa, za veće količine su se koristili magacini, koji su bili posebni zidani objekti obično izdužene pravougaone osnove.

Prikazi rekonstrukcije grada Amarna (kombinovana fotomontaža snimaka iz vazduha i prostornih modela-maketa)² su dati na sl. 1 (g) i (h), a snimak arheološkog lokaliteta sa ostacima silosnih ćelija i osnovom pravougaonog magacina u Amarni na sl. 1 (i). Silosne ćelije su bile oblikovane kao košnice i u belo okrečene, i u njima se skladištila pšenica ili ječam. Ovaj tip silosne ćelije se nije zadržao u tradicionalnoj gradnji u Egiptu, ali je nasleđen u drugim delovima Afrike u raznim formama ruralne arhitekture.

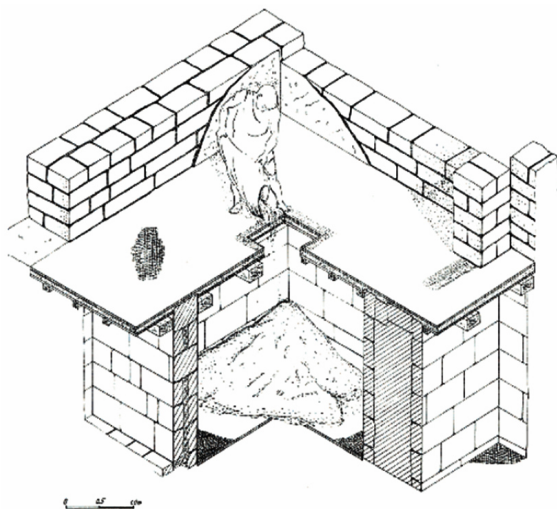
Kod starih Grka, komercijalni objekat namenjen skladištenju materijala, i u druge svrhe, je nazivan *stoa*. Rimljani su ovu vrstu objekta za skladištenje transformisali u oblik *porticus*. U Rimu, skladište kao posebna zgrada se prvi put pojavilo na kraju II veka pre n.e. Ove zgrade u svojoj osnovi sadrže niz dubokih manjih prostorija za skladištenje raznih materijala. U rimsko-vizantijsko vreme, u cilju organizovanog snabdevanja po svim provincijama, gradili su se objekti za skladištenje žita. Neki od ovih objekata su se potom koristili i preko 1000 godina. Na sl. 2 prikazana je skica rekonstrukcije takvog skladišta za žito u luci *Caesarea Maritima* (danas na teritoriji Izraela)³. Pri zidanju

¹ Berlin A., Ball T., Thompson R. and Herbert C.S. (2002): "Ptolemaic Agriculture, 'Syrian Wheat,' and *Triticum aestivum*". *Journal of Archaeological Science* 30.1., pp.115-121.

² <http://www.mcdonald.cam.ac.uk/Projects/Amarna/>

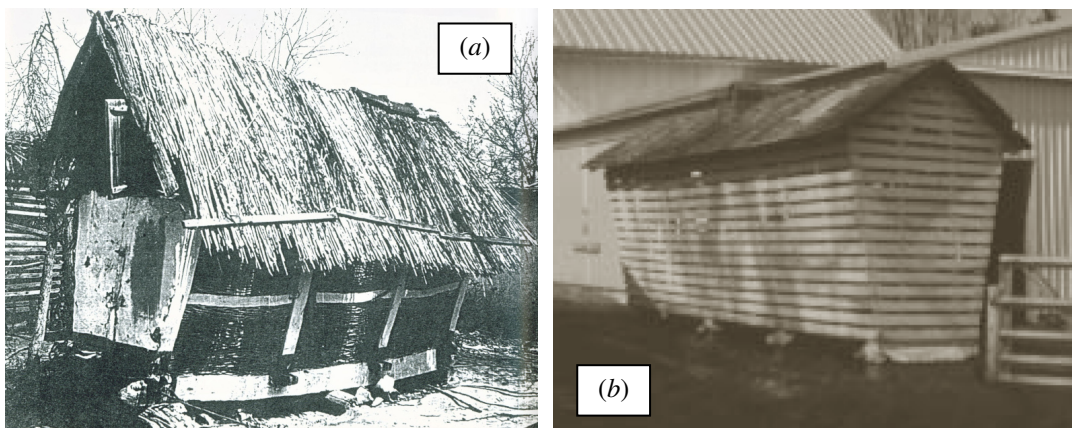
³ Patrich J. (1996): "Warehouses and Granaries in Caesarea Maritima". University of Haifa. pp.146-176., Chapter 10 in *Caesarea Maritima: A Retrospective After Two Millennia*, A. Rabbān and K.G. Holum (eds.), Leiden, Brill, The Netherlands.

magacinskog prostora se, što odgovara pisanju *Pliny*-a, primenjivao krečni malter sa dodatkom komine od maslina, koja je služila kao prevencija protiv insekata. Zidovi skladišta, su izvedeni u kamenu i u kombinaciji kamena i betonske ispune (sl. 2).



Sl. 2 Rekonstrukcija jedne podrumске prostorije za skladištenje žita (prema *Patrich J.*).

Među najstarije silose u Evropi spadaju objekti za skladištenje podignuti u Francuskoj 1134. god. i u Italiji 1336. god. Prema dnevniku *S. Pepys*-a, zabeleženo je da su pri velikom požaru 1666. god. u Londonu, uništeni pšenični magacini, koji su tu postojali od vremena vladavine *Henry*-a *VIII* (vladao 1509-47). U Pruskoj su se, u toku XVII i XVIII veka, gradile zgrade namenjene za smeštaj hrane i drugih materijala, koje su bile namenjene isključivo za vojne potrebe.



Sl. 3 (a) Stari koš za žito (Kikinda); (b) Stari koš za kukuruz (Sauk Country, USA).

Za vreme Prvog srpskog ustanka u svim opštinama su organizovano podizani sabirni koševi, koji su se postavljali na kamenu ili drvenu podlogu na stubovima, a bili su izvedeni od opletenog vrbovog ili leskovog pruća. U ove koševe su se smeštali viškovi kukuruza, koji su poslužili u oskudnim ratnim godinama narodu i ustanicima. Sličan tip starog koša (ambar od pletera), ali za smeštanje žita, sačuvan je u Kikindi¹, i zaštićen do

¹ Ilijašev B. (1999): *Suvača u Kikindi – mlin ravnice*, Tiski cvet (Kikinda: LitoStudio), Novi Sad, 86 str. [fotografije *Sretenović V.*]

danas (sl. 3 a). Sam pleter umetnut je u drvenu okvirnu konstrukciju, iznutra i spolja oblepljen blatom i zaštićen krečenjem. Ovakvih koševa za žito je bilo mnogo sve do kraja XIX veka. Uočljiva je sličnost ovih starih koševa sa relativno novijim tipom od drvenih letvi, za smeštaj kukuruza, tzv. "čardaka". Stari američki koš u *Sauk Country*, na sl. 3 (b) ima elemente i formu koji u potpunosti odgovaraju kako našem nasleđu, kao i ruralnoj arhitekturi drugih evropskih zemalja.

Po jedinstvenom kupastom obliku izdvajaju se zidani silosi u *Santa Mónica*-i (Meksiko), izgrađeni 1835. god. na haciendi *San Juan de Trancoso*, a koji su zaštićeni i sačuvani do danas (sl. 4 (a)).¹ Silosi ovog oblika se nalaze samo na nekoliko lokacija u Meksiku.



Sl. 4 (a) Kupasti silosi (*Santa Mónica*, Meksiko); (b) Model Dart-ovog elevatora (USA).

Silos za skladištenje zrna na američkom području se nazivaju *elevatori za zrno* (*grain elevator*), i obično su to visoke zgrade u čeličnoj ili betonskoj konstrukcije. Sa istim imenom se označava i mašinsko postrojenje kojim se podiže zrno u objekat.

Prvi elevator, u sadašnjem smislu tehnologije skladištenja i eksploatacije, izgradio je *J. Dart* 1842. god. (*Buffalo*, Filadelfija, USA), na parni pogon, za koji je elevatorski sistem konstruisao maš. inženjer *R. Dunbar*. Model ovog elevatora je prikazan na sl. 4 (b).² Pražnjenje i tok zrna od vrha objekta je gravitaciono, a visina objekta je omogućavala direktno pražnjenje u vozila, vagone i drugo.

Na američkom području, u agrokulturi, *silos* je naziv za nepropusne konstrukcije u kojima se drži i čuva *silaza* (delimično fermentisana stočna hrana biljnog porekla). Uobičajeni silosi za silazu imaju prečnike oko 3 do 5 m i visinu od 9 do 15 m, i izvode se najčešće od čelika sa posebnim unutrašnjim antikorozijskim zaštitnim slojem, a mogu biti i od drugih vrsta materijala, npr. zidani od specijalnih blokova ojačanih armaturom, ili od vertikalnih drvenih duga utegnutih prstenastim čeličnim zategama (tradicionalni tip građenja, tzv. "*stave*" *silos*), ali i od armiranog betona. Pored ovih varijanti građenja, u ranijem periodu silosi za silazu su se zidali u opeci, ili u kamenu.

Od početka XX veka silosi (elevatori) se grade kao veliki betonski silosi sadašnjeg prepoznatljivog oblika.

U mašinskim delu su ugrađene mašine za odvajanje zrna po težini i veličini (trijaža), za čišćenje i drugo. Kod silosa se koriste uređaji za regulisanje vlage i uređaji za punjenje i pražnjenje, kao i transportni uređaji (trakasti i elevatori).

¹ <http://www.mexicodesconocido.com.mx/>

² <http://ah.bfn.org/h/histindex.html> A History of Buffalo's Grain Elevators.

2.3 Podela silosa i forme silosnih ćelija

Prema nameni silosi za zrnaste materijale se dele na:

- *lokacione (sabrne)* koji se grade na području proizvodnje i prikupljanja zrnastih materijala;
- *tranzitne (pretovarne)* u lukama, kod željezničkih stanica, ili kod saobraćajnih čvorišta gde se menja tip prevoznih sredstava; i
- *pogonske (industrijske)* gde se materijal prerađuje.

Postoje i posebni silosi za čuvanje mineralnih sirovina, hemijskih proizvoda i sl. Kapacitet skladištenja silosa je obično od 5 000 do 20 000 tona kod silosa namenjenih čuvanju zrnastog materijala biljnog porekla.

Prema osnovnom primenjenom materijalu pri gradnji silosa, oni se mogu podeliti na:

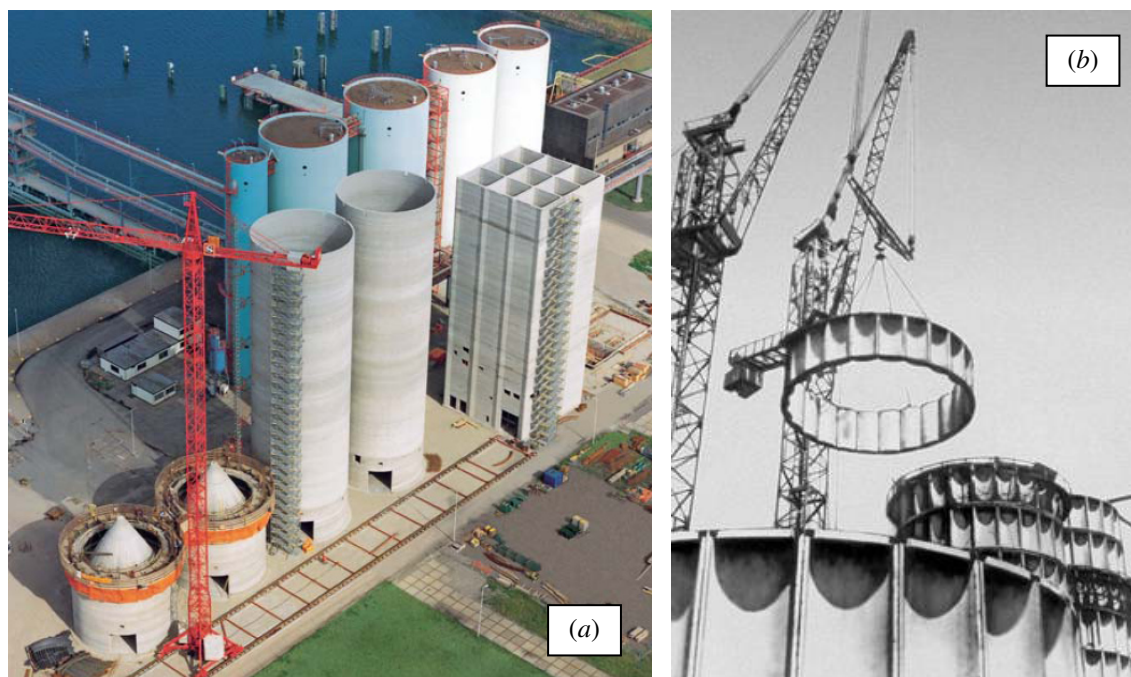
- *betonske* silose,
- *metalne* silose (čelične ili aluminijumske konstrukcije),
- *drvene* silose, i
- *zidane* silose.

Savremeni silosi (sl. 5), su obično napravljeni od betona ili metala (čelik, aluminijum), a ranije se za izgradnju manjih silosnih ćelija koristilo drvo, ili su bili zidani u opeci ili kamenu. Pri izgradnji silosa često se mogu pojaviti i odgovarajuće kombinovane varijante građenja sa primenom betonskih i čeličnih sekcija, npr. zidovi izvedeni od betona, a levak u čeliku, ili donja konstrukcija od betona, a gornja od čelika, i slično.



Sl. 5 Primeri silosa od različitog materijala: (a) drveni [148]; (b) betonski i (c) čelični [262].

Drveni i zidani silosi su tokom proteklog vremena praktično potpuno potisnuti u okviru izgradnje inženjerskih objekata. Jedan primer novog drvenog silosa sa cilindričnim zidom i konusnim levkom, koji je utegnut prstenastim zategama je prikazan na sl. 5 a. U novije vreme, silosi se izvode i u formi aluminijumske konstrukcije, a manji silosi od veštačkih materijala prikladnih za čuvanje odgovarajućeg sadržaja, npr. od poliesterske smole ojačane vlaknima ili od impregnirane tkanine fiksirane u lakoj nosećoj konstrukciji (za primene u proizvodnim pogonima), itd.



Sl. 6 (a) Betonski silosi sa "obrnutim" konusnim levkom tipa IBAU HAMBURG [124].
(b) Izgradnja silosa od montažnih elemenata (Rusija).

Danas su armirani i prednapregnuti beton materijali koji prevladavaju pri izgradnji srednjih i velikih silosa, usled toga što su ovi materijali vrlo pogodni za izvođenje različitih oblika silosnih konstrukcija. Prednost primene betona je u tome što štiti armaturu od korozije, sa čime se povećava trajnost silosnih konstrukcija koje su obično u nepovoljnim uslovima industrijske sredine. Pored toga, u karakteristike betona spadaju značajna otpornost na udar, relativno manja provodljivost toplote u odnosu na čelik, adekvatna otpornost na dejstvo visoke temperature, požar i drugo.

Betonski silosi se prema načinu izvođenja dele na:

- *monolitne* betonske silose, gde se betonski radovi izvode sa primenom prenosne, ili posebne "klizne" oplate (sl. 6 a) na samom mestu građenja, i
- *montažne* betonske silose (sl. 6 b) od posebnih prefabrikovanih elemenata.

Prema tipu betonske konstrukcije silosi se dele na:

- *armiranobetonske* (AB) silose, i
- *prednapregnute betonske* (PB) silose.

Može se uzeti da je već kod silosa prečnika većih od 12 m, racionalno sa AB tipa preći na PB tip silosa. Po pitanju stepena prednaprezanja, kod PB silosa se obično primenjuje *potpuno* i *ograničeno* (za ekstremne kombinacije opterećenja) *prednaprezanje*. *Parcijalno prednaprezanje* se može primeniti kod većih objekata u cilju racionalnije potrošnje visokokvalitetnog čelika, ali to znači da je dopuštena pojava prslina na zidovima ćelije, sa širinama prslina koje treba da su, naravno, u zadatim propisanim granicama. Kod velikih silosa, kod kojih se skladišti zagrejan materijal (npr. u cementnoj industriji, gde cement, kao i cementni klinker, dolaze u silosni prostor sa temperaturama od 100 do 150 °C), termička dejstva na zidove ćelije su toliko velika, da sigurno dolazi do pojave prslina u zidovima ćelije. Kod ovih PB silosa, jedino je racionalno i efikasno parcijalno prednaprezanje, koje se obično izvodi u formi radijalnog utezanja zidova.

Silosu se mogu podeliti na osnovu mnogih karakteristika vezanih za oblik i geometrijske karakteristike ćelije, vrste i karakteristike materijala koji se skladišti, primenjene procesne tehnologije, i drugo.

Od interesa za građevinsko projektovanje silosa, značajno je klasifikovanje i podela silosa prema sledećim relevantnim faktorima:

- oblik silosne ćelije (kružna, kvadratna, poligonalna forma i sl.),
- relativna vitkost silosne ćelije (npr. kratki, srednje vitki i vitki silosi i sl.), i
- tip protoka uskladištenog materijala u silosnoj ćeliji.

U odnosu na geometrijske karakteristike ćelijskog prostora, silosi se klasifikuju prema odnosu visine uskladištenog materijala (h) i upisanog prečnika ćelije (d). Standardi i norme se razlikuju u svrstavanju silosa u određeni tip prema ovoj klasifikaciji, kako je prikazano u tabeli 1.

Tabela 1. Klasifikacija silosa prema odnosu h/d .

Standard - norma	Klasifikacija silosa		
	Kratak	Srednje vitak	Vitak
ACI 313-77 (1977) [3]	$h/d < 1.5$	—	$h/d > 1.5$
СНП 2.10.05-85 (1985) [370]	$h/d < 1.33$	—	$h/d > 1.33$
SRPS ISO 11697 (1996) [291]	$h/d < 1.5$	—	$h/d > 1.5$
AS 3774 (1996) [14]	$h/d < 1.0$	$1.0 < h/d < 3.0$	$h/d > 3.0$
DIN 1055-6 (2005) [62]	$h/d < 1.0$	$1.0 < h/d < 2.0$	$h/d > 2.0$
EN 1991-4 (2006) [38]	$h/d < 1.0$	$1.0 < h/d < 2.0$	$h/d > 2.0$

Prema američkom standardu ACI 313-77 (1977) [3], na osnovu datog kriterijuma za odnos h/d , određuje se da li se konkretni skladišni prostor definiše kao silos ili kao bunker. Internacionalni standard ISO 11697:1990 [125] (*Loads due to bulk materials*), prihvaćen kod nas, u prevodu, kao SRPS ISO 11697:1996 [291] (*Opterećenja rastresitim materijalima*), prema kriterijumu razlikuju silose i kratke zatvorene posude. Ovi standardi za granicu odnosa h/d imaju 1.5.

Ruske norme СНП 2.10.05-85 (1985) [370], prema [363] i [82], se pri formulisanju ovog kriterijuma oslanjaju na uopštenu *Dishinger*-ovu empirijsku formulaciju:

$$h > 1.5 \cdot \sqrt{A} \quad (\text{kriterijum za silos}) \quad (2.1)$$

$$h < 1.5 \cdot \sqrt{A} \quad (\text{kriterijum za bunker}) \quad (2.2)$$

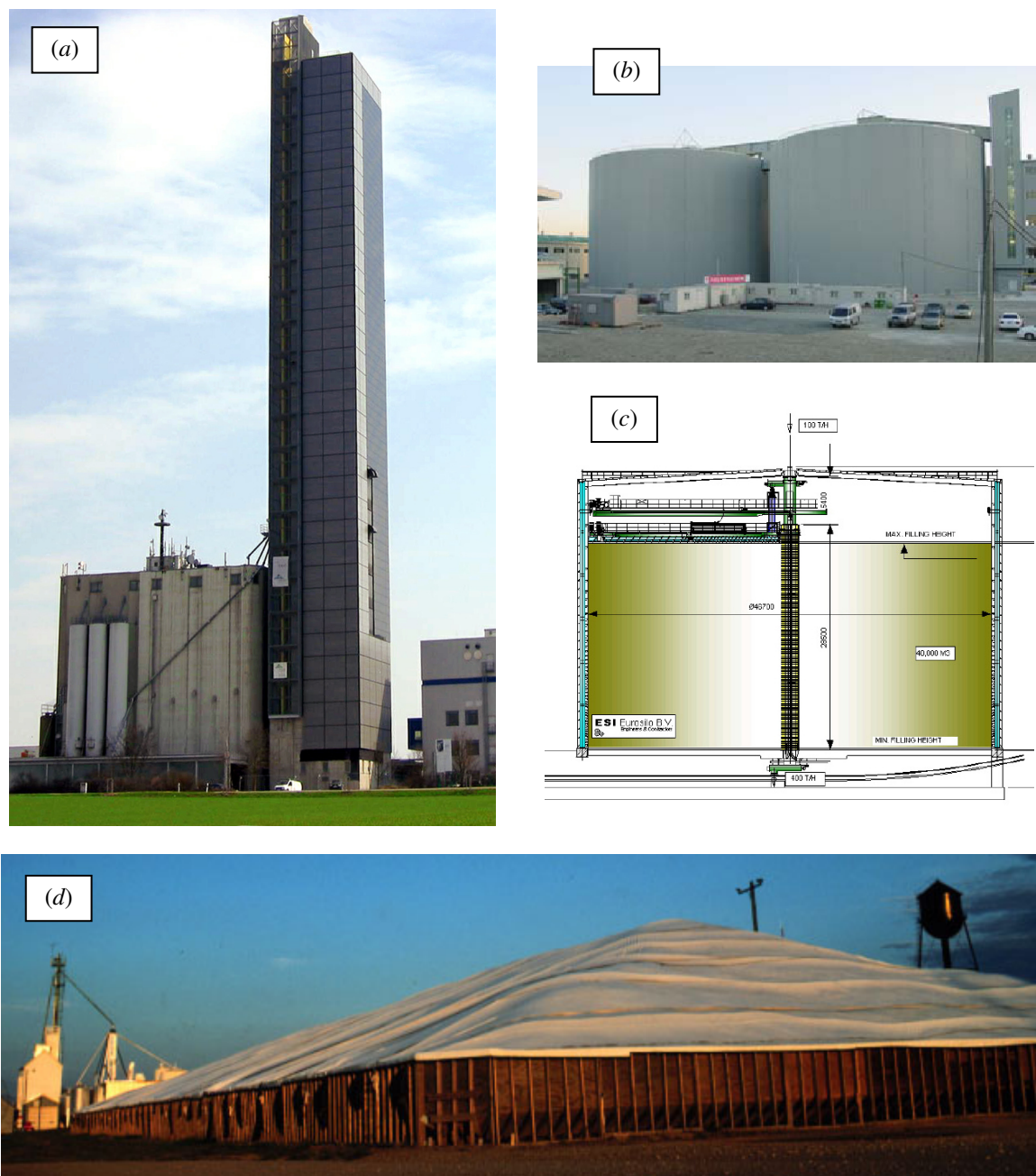
gde je A površina poprečnog preseka ćelijskog prostora u osnovi. Kod cilindričnih ćelija kružne osnove, dati izrazi se svode na prikazani odnos u tabeli 1 (granica 1.33), a kod kvadratnih ćelija se dobija da je $h/d > 1.5$ za silose i $h/d < 1.5$ za bunkere, gde je d prečnik upisanog kruga u kvadratnu osnovu ćelije.

Prema *Safarian*-u i *Harris*-u (1985) [269] i [270], kriterijum za određivanje granice između bunkera i silosa, se u principu zasniva na *Coulomb*-ovoj i *Airy*-evoj analizi klizne ravni kod aktivnog stanja rastresitog materijala, i odgovara sledećoj formulaciji:

$$h/d > \tan(45^\circ + \phi/2) \quad (\text{kriterijum za silos}) \quad (2.3)$$

$$h/d < \tan(45^\circ + \phi/2) \quad (\text{kriterijum za bunker}) \quad (2.4)$$

gde ϕ treba da odgovara uglu unutrašnjeg trenja rastresitog materijala.



Sl. 7 Savremeni silosi: (a) Silosi u Ulm-u vrlo vitkih ćelija; (b) i (c) Izgled i presek udvojenog Eurosilosa kao primer kratkog silosa; (d) Silos tipa potpornog zida (USA).

Kod novih standarda i normi za projektovanje i određivanje opterećenja kod silosa, kao što su australijski AS 3774 (1996) [14], nemačke norme DIN 1055-6 (2005) [62], koje odgovaraju novim evropskim normama EN 1991-4 (2006) [38], silosi se klasifikuju na kratke, srednje vitke i vitke silose. Pored toga, kod navedenih normi DIN i EN, stoji precizniji odnos za kratke silose u obliku $0.4 < h/d < 1.0$, jer je u klasifikaciju uveden i silos tipa potpornog zida sa ravnim dnom kod kojeg je odnos $h/d < 0.4$.

Kada se upoređuju različiti standardi i norme za silosne konstrukcije, čini se da po pitanju klasifikacije silosa australijski AS 3774 (1996) [14], sveobuhvatno gledano, stoji ispred

drugih standarda. Prema AS 3774, silosi se klasifikuju prema sledećim relevantnim karakteristikama:

- (a) geometriji silosa,
- (b) načinu proticanja materijala pri pražnjenju,
- (c) geometriji proticajnog profila,
- (d) hrapavosti unutrašnje površine zida,
- (e) fleksibilnosti zidova u pravcu zatežućih sila,
- (f) tipa kontinuiteta zidova u vertikalnom pravcu,
- (g) oblika poprečnog preseka,
- (h) konfiguracije otvora za pražnjenje i
- (i) načina promocije protoka materijala.

Kod klasifikacije silosa, u svim standardima, u osnovi se pravi razlika između bunkera i silosa, gde se bunker mogu uzeti kao skladišta rastresitih materijala sa plitkim ćelijskim prostorom, a silosi kao skladišta sa dubokim ćelijskim prostorom. Ova podela proističe iz načina proračuna opterećenja kod ovih konstrukcija, odnosno primene odgovarajuće teorije za sračunavanje opterećenja. Kod bunkera je ranije uobičajeno zanemarivan uticaj trenja materijala o zidove, dok je postojanje ovog trenja kod silosa fundamentalna postavka za određivanje opterećenja. Na ovaj način, s obzirom na različito razmatranje uloge trenja na zidovima skladišnog prostora, između bunkera i silosa postoje razlike kako u obliku dijagrama opterećenja, tako i u stepenu povećanja opterećenja prilikom pražnjenja, u odnosu na početno opterećenje pri punjenju. Data klasifikacija je bitna sa stanovišta određivanja opterećenja prema navedenim propisima i standardima.

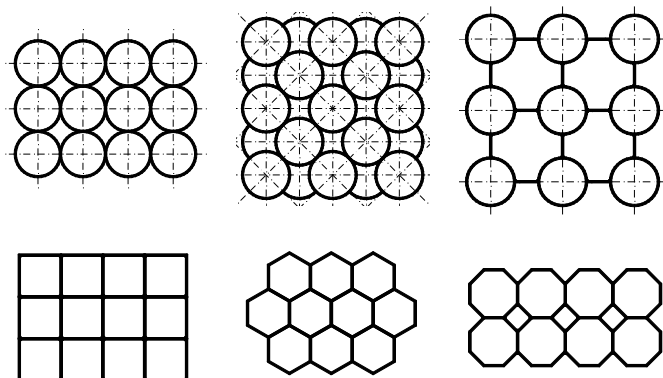
U sklopu opšteg prikaza tipova silosa prema odnosu h/d , na sl. 7 su prikazana tri različita tipa silosa: (a) - svi silosi su vitkih ćelija (silosi u *Ulm*-u; gde je onaj najviši otvoren 2005. god. i rekordne je visine od 115 m); (b) i (c) - prikazan je izgled i podužni presek *Eurosilos*-a (udvojeni silosi za smeštaj uglja pri termoelektrani, sa unutrašnjim protokom uglja kroz centralni sistem za pražnjenje), koji po klasifikaciji predstavljaju kratke silose – bunkere, pri čemu unutrašnji prečnik iznosi 46.7 m, a kapacitet jednog silosa 40000 t uglja; i (d) - dat je foto snimak silosa (*USA*) vrlo velike osnove, a sa tim i kapaciteta, koji potpada u silos tipa potpornog zida (slučaj gde je $h/a < 0.4$ prema EN 1991-4, gde je a manja stranica u osnovi silosa).

U praksi se najčešće koriste jednostavne forme silosnih ćelija sa *kružnim, kvadratnim, pravougaonim, šestougaonim* ili *osmougaonim* poprečnim presekom u osnovi (sl. 8). Silosi mogu biti jednoćelijski, obično tipa kružne ćelije, ili se više ćelija može postaviti u jedan ili više (max. do 5) redova, čime se formira odgovarajuća silosna baterija. Međućelijski prostor se može iskoristiti kao međućelija za skladištenje materijala.

Pojedinačne kružne ćelije su najjednostavnije u statičkom pogledu. Pri delovanju ravnomernog dela opterećenja pri punjenju i pražnjenju ćelije, u principu su zanemarljivi uticaji relativno malih momenata savijanja po slobodnim površinama zida. U ovom slučaju, zatezanje u zidu se javlja usled prstenastih membranskih sila, a momenti se pojavljuju samo na rubnim zonama usled sprečenog deformisanja sistema, npr. pri spoju zida ćelije sa levkom ili spoja sa ravnim dnom ćelije.

Kod silosne baterije, kružne ćelije se mogu međusobno razmaknuti u osnovi i spojiti vertikalnim ravnim zidovima (ovu formu su razvili *Reimbert*-ovi). Statički, a i u praksi, silosi sa povezanim razmaknutim kružnim ćelijama su se pokazali kao vrlo nepovoljni, zbog pojave velikih momenata savijanja na sastavima cilindričnih zidova kružnih ćelija i

vertikalnih zidova međućelija. Kružne ćelije se kod silosne baterije mogu postaviti u redovima ili u šahovskom rasporedu. Prečnik kružnih ćelija se kreće obično od 4 do 25 m, zavisno od vrste uskladištenog materijala, a kod silosnih baterija prečnik se uzima do 8 m.



Sl. 8 Osnovni oblici ćelija i dispozicione kombinacije silosa.

Osmouglaone i šestouglaone ćelije su relativno nepovoljnije od kružnih, zbog pojave momenata savijanja u zidovima, ali pri izvođenju imaju relativno jednostavniju oplatu. Preporuka je da prečnik upisanog kruga u ove ćelije iznosi max. 6 m.

Od kvadratnih ili pravougaonih ćelija može se formirati jednoćelijski silos, jednorodni korpus ćelija ili baterija od više redova. Dimenzije stranica ovih ćelija se uzimaju obično u granicama od 4 do 5 m.

2.4 Vrste protoka materijala pri pražnjenju

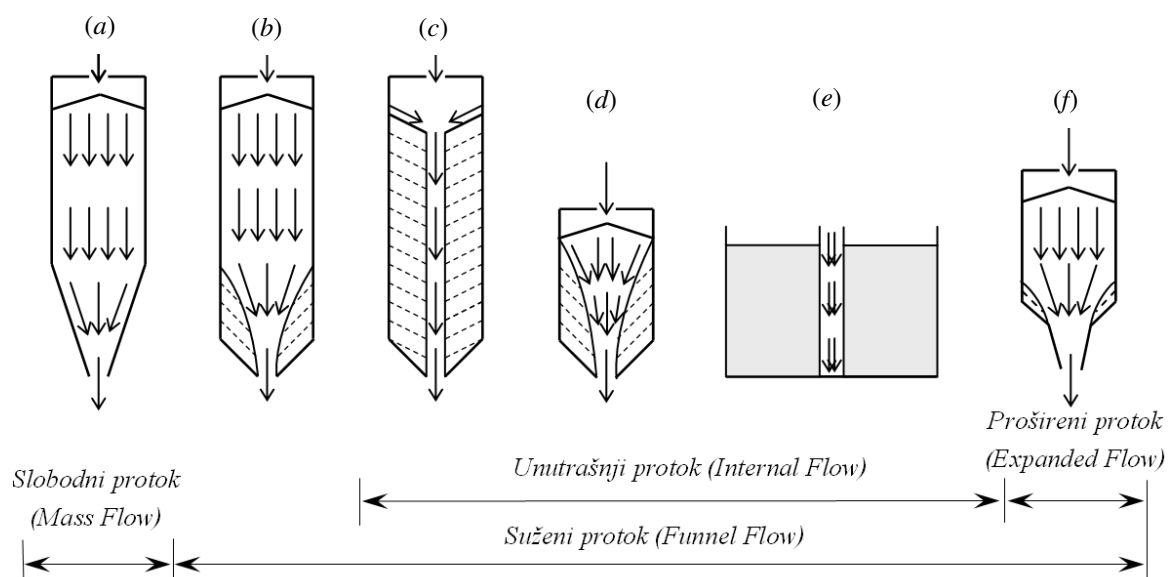
Prema standardu ISO 11697:1990 [125], kod nas usvojenog kao SRPS ISO 11697:1996 [291], pri proceni protoka rastresitog materijala neophodno je praviti razliku između tri glavne vrste protoka, i to su:

- Slobodni protok (*mass flow*) (sl. 9 a).
- Suženi protok (*funnel flow*) (ili protok kroz levak/jezgro (*core flow*)) (sl. 9 b-f).
- Prošireni protok (*expanded flow*) (sl. 9 f).

Na sl. 9 su prikazane sledeće vrste protoka (izmenjena terminologija):

- (a) Masovni protok (*mass flow*),
- (b) Mešoviti protok (*mixed flow*),
- (c) Unutrašnji protok (*internal flow*) kao protok cevastim kanalom (*parallel pipe flow*),
- (d) Unutrašnji protok (*internal flow*) kao protok sužavajućim kanalom (*taper pipe flow*)¹,
- (e) Unutrašnji protok (*internal flow*) kao protok kroz centralnu cev pri mehaničkom pražnjenju sa gornje površine materijala, i
- (f) Prošireni protok (*expanded flow*) sa strmim donjim delom levka.

¹ Skica na sl.Sl. 9 (d) je data u ISO 11697 [125]. Kod SRPS ISO 11697 [291], na istom mestu je prikazana izmenjena skica, gde se nepokretni deo materijala uz zidove ćelije, ne pruža do gornje površine nasutog materijala. Sa ovom omaškom, skice protoka (d) i (b) u ref. [291] prikazuju istu vrstu protoka, što je pogrešno.

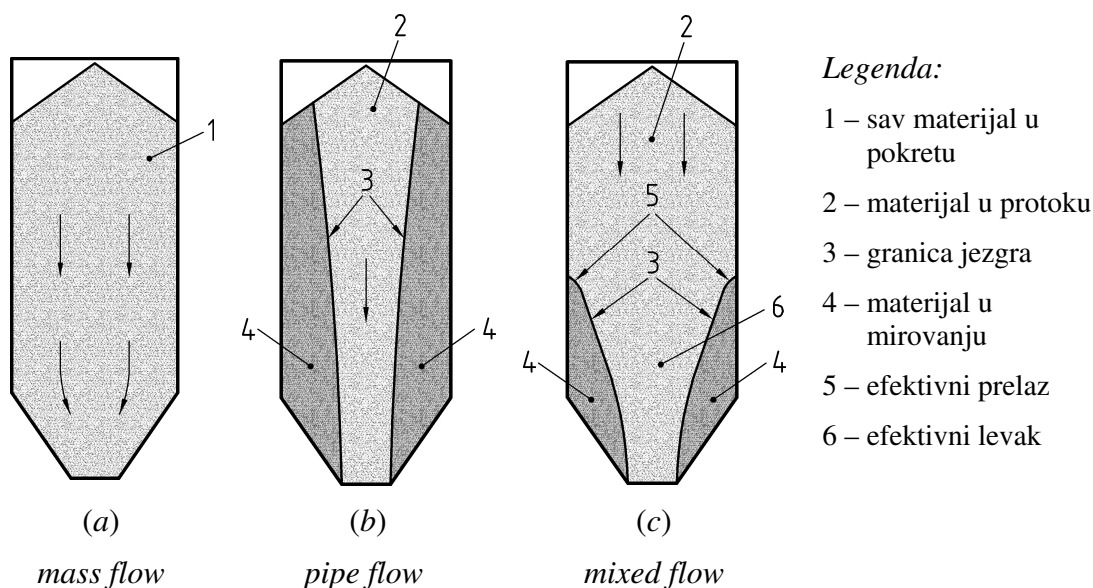


Sl. 9 Vrste protoka uskladištenog materijala, prema ISO 11697 [125] i [291].

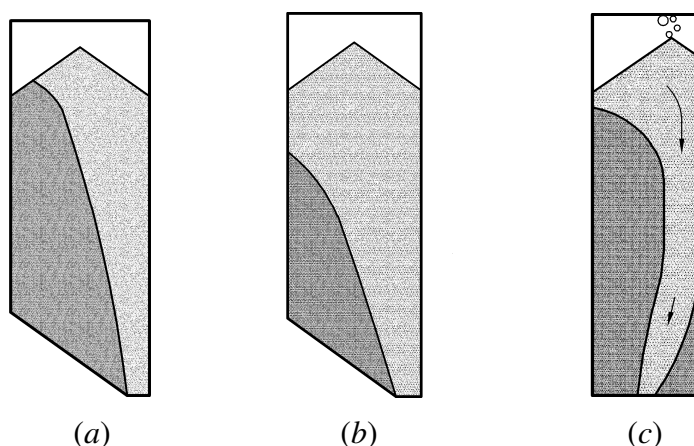
U evropskim normama EN 1991-4 (2006) [38] i nemačkim normama DIN 1055-6 (2005) [62], razlikuju se sledeće dve glavne vrste protoka:

- *Masovni protok (mass flow)* (sl. 10 a), i
- *Suženi protok (funnel flow)* sa dve podvrste:
 - *Unutrašnji protok (pipe flow)* (sl. 10 b), i
 - *Mešoviti protok (mixed flow)* (sl. 10 c).

Poseban oblik pražnjenja, koji može biti u obliku protoka jezgrom (sl. 11 a) ili mešovitim protokom (sl. 11 b), je *ekscentrično pražnjenje*, koje izaziva pojavu nesimetričnog opterećenja. Ovakvo pražnjenje se javlja kod ekscentričnog položaja otvora, kao i kod vanrednog pražnjenja materijala kroz interventni otvor na zidu ćelije.

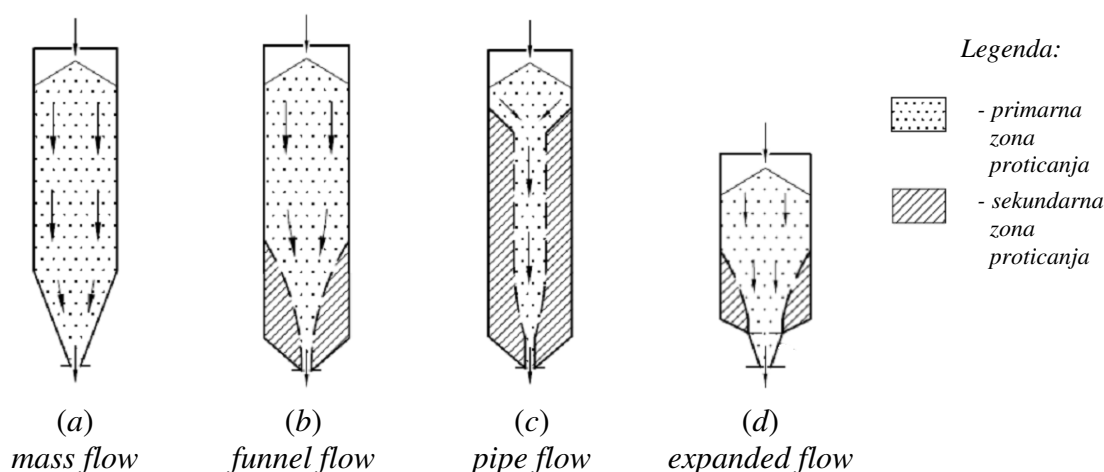


Sl. 10 Načini pražnjenja materijala: (a) protok masom; (b) protok jezgrom; (c) mešoviti protok, prema EN 1991-4 (2006) [38] i DIN 1055-6 (2005) [62].



Sl. 11 Primeri ekscentričnog pražnjenja: (a) ekscc. levak - protok jezgrom, (b) ekscc. levak - ekscc. mešoviti protok i (c) ekscc. protok usled ekscc. punjenja i nehomogenosti materijala.

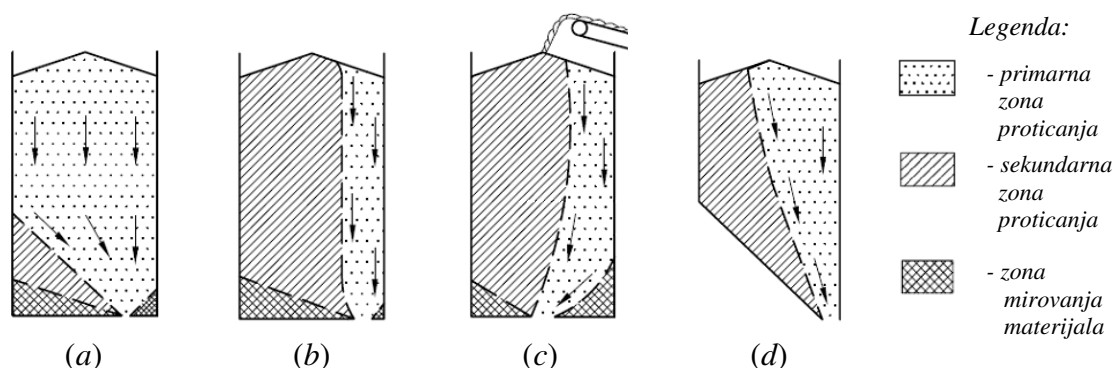
U australijskom standardu AS 3774 (1996) [14] se, slično kao u EN 1991-4, definišu različiti tipovi protoka, koji zavise od tzv. "polu-ugla" levka (odgovara uglu koji zaklapa vertikalna osa silosa i zid levka; ugao otklona zida levka), hrapavosti zidova levka, svojstava uskladištenog materijala, kao i drugih faktora. Protoci materijala se mogu razvrstati na slučajeve prikazane na sl. 12.



Sl. 12 Vrste simetričnog protoka materijal: (a) protok masom; (b) protok kroz efektivni levak; (c) protok centralnim kanalom i (d) prošireni protok, prema AS 3774 (1996) [14].

Ekscentričnost protočnog kanala pri pražnjenju se može javiti i usled ekscentričnog punjenja materijala, kada se javlja segregacija materijala pri punjenju, usled kotrljanja krupnijih zrna materijala prema nižim delovima nasipne kupe materijala. Pored toga, postoje mnogi uzroci za pojavu nehomogenosti uskladištenog materijala, koja može biti promeljiva u prostoru i u vremenu skladištenja, što dovodi u pitanje potpuno centrični tip protoka jezgrom materijala, čak i u idealnom slučaju sa centrično postavljenim otvorom za pražnjenje, simetričnim levkom, i centričnim punjenjem ćelije. Usled nehomogenosti materijala, promenljivih karakteristika zidova, imperfekcija kod zidova ćelije i levka, ekscentričnog punjenja materijala, nesimetrične konstrukcije levka, te ekscentrično postavljenog otvora za pražnjenje, dolazi pri pražnjenju do pojave ekscentričnog protoka materijala.

Razni slučajevi ekscentričnog pražnjenja su prikazani prema EN 1991-4 (2006) [38] na sl. 11, i prema AS 3774 (1996) [14] na sl. 13.



Sl. 13 Slučajevi protoka sa ekscen. protočnim kanalom: (a) kvazi masovni protok; (b) kanalni protok; (c) usled segregacije i (d) usled nesimetričnog levka, prema AS 3774 (1996) [14].

Na osnovu pregleda navedenih normi, može se uzeti da se uskladišteni materijal iz ćelija silosa prazni na sledeća tri osnovna načina, i to su:

- *masovni protok* - pražnjenje ukupnom masom pri čemu se pokreće čitava masa materijala u ćeliji (koriste se i drugi nazivi: *slobodni protok*; *protok ukupnom masom*; *protok masom*; *protok u obliku stuba*, *mass flow*);
- *unutrašnji protok* - pražnjenje po jezgru na čitavoj visini, pri čemu miruje najveći deo uskladištene mase uz zidove ćelije silosa (koriste se i drugi nazivi: *suženi kanalni protok*; *protok jezgrom*; *protok kanalom*; *protok u obliku jezgra*, *protok u obliku levka*, *funnel flow*, *internal flow*, *pipe flow*); i
- *mešoviti protok* - pražnjenje po jezgru u donjem delu, pri čemu miruje donji deo uskladištene mase uz zidove ćelije silosa (koriste se i drugi nazivi: *suženi levkasti protok*; *protok levkom*; *protok u obliku levka*, *funnel flow*, *mixed flow*).

Prošireni protok se može smatrati za varijantu *mešovitog protoka*. Ako je kod običnog mešovitog protoka u pitanju sistem proticanja "slobodni+suženi" protok, onda je prošireni protok u formi opšteg mešovitog protoka u sistemu "slobodni+suženi+slobodni" protok. Ako je kod ćelijskog dela suženi protok, a kod donjeg proširenja levka slobodni protok, formira se sistem "suženi+slobodni", što je varijanta mešovitog protoka.

Proticanje može biti u obliku *centričnog protoka* i *ekscentričnog protoka* kod svih osnovnih vrsta protoka. Na slikama (sl. 9 do sl. 13) su prikazane vrste protoka, trajektorije protoka i proticajne zone materijala. Prikazane vrste protoka materijala u silosima su samo tipizirane idealizovane predstave realnog proticanja materijala, koje je po formi vrlo složeno i promenljive konfiguracije u toku pražnjenja. Različite raspodele pritiska u materijalu, vezane su za navedene vrste protoka.

Vrste protoka kod silosa su često opisivane i analizirane u literaturi, npr. u [21], [28], [31], [42], [120], [134], [138], [186], [241], [246], [276], [350] i [352].

Prvi prikaz vrsta protoka je dao *Бернштейн* (1947) u ref. [350], gde su prikazani rezultati istraživanja proticanja na modelu AB cilindričnog silosa, iz 1941. godine, snimanjem kroz staklenu pregradu koja je zatvarala vertikalnu polovinu modela. Određena su dva osnovna tipa protoka materijala, označeni sa I i II, koji odgovaraju unutrašnjem i masovnom protoku materijala. Materijali pri ispitivanju proticanja su bili raž i pesak. Pored oblika protoka, određeno je: da masovni protok tokom pražnjenja pri smanjenju visine materijala

može preći u unutrašnji; te da je horizontalno opterećenje izmereno na zidu modela, manje kod unutrašnjeg nego kod masovnog protoka; i da je kapacitet pražnjenja veći kod unutrašnjeg nego kod masovnog protoka. U radu je navedeno da je Тахтамышев (1940)¹, prvi ukazao na vezu između intenziteta opterećenja i forme proticanja materijala u silosima, pri ispitivanju opterećenja na silosima u Баку-у 1938-39. godine.

2.4.1 Masovni protok

Kod *masovnog protoka* (*protok ukupnom masom*) iz ćelije, podrazumeva se da je ukupna zapremina uskladištenog materijala pri pražnjenju u pokretu (sl. 9 a, sl. 10 a, sl. 12 a). Protok masom se javlja kod dovoljno strmog levka što omogućuje pokretanje zrnastog materijala niz unutrašnju površinu zida levka. Činjenica da je pri protoku ukupnom masom sav materijal u pokretu ne znači da je i brzina protoka jednako raspoređena u horizontalnom preseku materijala ćelijskog dela silosa, a pogotovo to nije slučaj u oblasti levka. Brzina protoka različitih tačaka u preseku je približno jednaka samo u gornjim zonama silosa. U opštem slučaju, kod posmatranog preseka materijala brzina proticanja materijala raste postepeno od zidova prema sredini silosa gde je njena vrednost najveća. Ovaj način pražnjenja je većinom karakterističan za kružne ćelije, ali i za druge oblike ćelija kada su one za to podešene, bilo povoljnim oblikovanjem konstrukcije levka ili primenom sistema ili uređaja za pražnjenje sa kojim se inicira ovaj tip protoka.

Karakteristike protoka masom su sledeće:

- Materijal koji prvi uđe pri punjenju, prvi i izlazi iz silosa pri pražnjenju (pravilo "prvo unutra – prvo napolje" – "*first in – first out*").
- Nema neaktivnih ili mrtvih regiona materijala.
- Kod finih puderastih materijala odstranjuje se uvučeni vazduh.
- Segregacija materijala je minimalna.
- Bez rizika za kvarenje, propadanje, ili kontaminaciju materijala.
- Ustaljeni protok i dobro kontrolisan kapacitet pri pražnjenju.

Ćelije sa masovnim protokom se koriste za kohezivne materijale, materijale koji degradiraju tokom vremena i za materijale kod kojih je potrebno redukovati segregaciju materijala na apsolutni minimum.

Nedostaci pri protoku ukupnom masom su u izvesnim slučajevima pojava podrhtavanja silosa – "*silotresa*" (*silquake*) koje obično prati zvuk nalik zvuku brodske trube. Pojave silotresa i prateće "*silosne muzike*" su vezane za metalne silose, i to na primere jednoćelijskih silosa izvedenih od aluminijuma. Silosi se u ovim slučajevima saniraju, npr. pojačavanjem zida ćelije u cilju promene frekvencije vibracija zida pri proticanju materijala. I kod AB silosa, kao i kod silosa izvedenih u čeličnoj konstrukciji, se pri proticanju materijala javljaju podrhtavanja konstrukcije (manjeg intenziteta) i silosni "zvuk", ali je to obično praćeno vibracijama zida ispod praga čujnosti. Primeri ispitivanja i sanacija silosa kod kojih se javlja silotres i silosni zvuk (jačine i do 100 dB) su prikazani detaljno u knjizi *Tejchman-a* (2013) [303].

Kod mnogih primera silosa u praksi, pravi izbor predstavlja masovni protok materijala. Tada se pri projektovanju moraju preduzeti mere sa kojima će ovaj tip protoka biti

¹ Тахтамышев С.Г. (1940): *Опытное исследование давления в силосах элеватора при Госмукзаводе в г. Баку*. Научно-технический отчет, ЦНИПС.

garantovan pri pražnjenju poznatog uskladištenog materijala. U osnovi, protok ukupnom masom se postiže sa strmijim i glađim zidovima levka. Pregled karakteristika protoka masom je dat u tabeli 2.

Tabela 2. Uporedni pregled karakteristika protoka masom i protoka jezgrom.

Tip protoka	Protok masom	Protok jezgrom
Prednosti	<ul style="list-style-type: none"> Sva masa u pokretu, nema "mirnih" zona materijala u ćeliji. Mogući su manji otvori ispusta. Pouzdana odvijanje protoka materijala. Segregacija pri punjenju se smanjuje remiksovanjem materijala u levku tokom pražnjenja. 	<ul style="list-style-type: none"> Maksimalni kapacitet za date gabarite. Ne troši se površina zida pri radu sa abrazivnim materijalom. Minimalni pritisci na zidove ćelije za vreme pražnjenja. Niža cena po jedinici uskladištenog materijala.
Nedostaci	<ul style="list-style-type: none"> Veći gabariti zbog visokih levaka. Veliki pritisci na prelazu zida u levak. Potencijalno trošenje zidne površine usled abrazije. Veća cena po jedinici uskladištenog materijala. 	<ul style="list-style-type: none"> Raspodela opterećenja promenljiva. Materijal u ćeliji ima različita vremena zadržavanja. "Mrtvi džepovi" materijala pri završenom pražnjenju. Veći uslovi za segregaciju i degradaciju.
Pogodno za	<ul style="list-style-type: none"> Organske zrnaste materijale, hemijske materijale, farmaceutske proizvode, kohezivne materijale, degradabilne proizvode. Proizvode sa slabim proticanjem. Proizvode osetljive na promene uslova u periodu skladištenja. Materijale sklone formiranju protočnih talasa. 	<ul style="list-style-type: none"> Mineralne materijale. Materijale sa plastičnim ponašanjem. Hrapave pudere i granule. Suve pudere. Nekohezivne materijale. Dobro protočne materijale. Abrazivne materijale.
Nije pogodno za	<ul style="list-style-type: none"> Ograničene gabarite objekta. Jednostavne sisteme i za male investicije. Neodređene proizvodne uslove. Hrapave abrazivne materijale. 	<ul style="list-style-type: none"> Kohezivne, degradabilne ili hidroskopne materijale. Materijale koji su skloni postepenom slepljivanju. Materijale koji su skloni segregaciji ili kvarenju tokom vremena.

2.4.2 Unutrašnji protok

Unutrašnji protok (protok jezgrom) se najbolje može razumeti kada se posmatra protok kroz ćeliju sa ravnim dnom ili dnom sa malim nagibom. U ovim slučajevima, materijal sa vrha uskladištenog materijala utiče u centralni protični kanal u ćeliji (sl. 9 c-d, sl. 10 b, sl. 12 c). U toku proticanja materijala kroz kanal, ostale zone materijala su, u principu, nepokretne. Mogući nedostaci ovog tipa protoka su pojava preplavlivanja, degradacije i vremenske konsolidacije materijala.

Protok jezgrom se javlja kada levak nije dovoljno strm, tako da nije obezbeđeno klizanje materijala direktno niz njegovu površinu.

Karakteristike protoka jezgrom su sledeće:

- Važi pravilo "prvo unutra – poslednje napolje" – "*first in – last out*", pri kretanju materijala kroz unutrašnji kanal.
- U pokretu je samo materijal u kanalu/jezgru, dok preostali veći deo materijala uz zidove miruje.
- Ako nisu dovoljno velike dimenzije otvora za pražnjenje, može se formirati stabilna forma praznog proticajnog kanala, tako da prestaje proticanje materijala.
- Proticanje može biti neujednačeno usled bočnog uklizavanja većih masa materijala u proticajni kanal (ovo može izazvati pojavu bujice materijala na izlazu).
- Problemi usled segregacije materijala se povećavaju.

Silos i sa proticanjem jezgrom se koriste za krupnozrnaste materijale, materijale sa slobodnim proticanjem, materijale koji se ne degradiraju tokom vremena, i materijale kod kojih segregacija ne predstavlja poseban problem.

Kod protoka jezgrom, materijal depresira na dole kroz centralni deo – jezgro u obliku unutrašnje cevi u uskladištenom materijalu, ostavljajući mirnu zonu materijala bez kretanja na bočnim stranama. Ovaj protok je karakterističan za kvadratne i pravougaone ćelije, međućelije (zvezdice), ali se može usled raznih faktora pojaviti i kod kružnih i drugih ćelija.

Uporedni pregled prednosti i nedostataka osnovnih vrsta protoka materijala – protoka ukupnom masom i protoka jezgrom, dat je u tabeli 2. Izbor tipa protoka pri projektovanju silosa zavisi od mnogobrojnih faktora. Sa tehnološke strane, relativno je povoljniji slučaj protoka ukupnom masom. Sa statičke strane, zbog relativno manjeg opterećenja na zidove ćelije, kao i sa ekonomske strane, zbog relativno manje visine levka, povoljniji je slučaj protoka jezgrom.

Pitanje izbora tipa protoka je interdisciplinarnog karaktera, a početna polazišta se mogu pronaći u datom tabelarnom pregledu relativnih prednosti i nedostataka razmatranih protoka materijala. Prilikom izbora tipa proticanja, najbitniji podatak je vrsta materijala koji se skladišti i njegove karakteristike. U svakom slučaju, potrebno je obezbediti da otvor ispusta bude takvih dimenzija da je osigurano nesmetano i neprekidno pražnjenje ćelije, bez obzira na to koji je tip protoka materijala u pitanju.

2.4.3 Mešoviti protok

Mešoviti protok – (sl. 9 b, sl. 10 c, sl. 12 b)) – predstavlja kombinaciju prve dve vrste protoka, pri čemu se u gornjem delu ćelije materijal kreće ukupnom masom, a u donjem delu ćelije se odvija protok jezgrom.

Kod AS 3774 [14], ovaj tip protoka je naznačen kao *protok kroz efektivni levak (funnel flow)* i prikazan je na sl. 12 b, dok je kod evropskih normi EN 1991-4 [38] prema sl. 10 c, naznačen kao mešoviti protok (*mixed flow*).

Prema ISO 11697 [125] i SRPS ISO 11697 [291], ovaj protok nije posebno imenovan i spada, prema našem prevodu, pod vrstu *suženog protoka* (sl. 9 b).

Kod mešovitog protoka, protočni profil se oblikuje kroz efektivni levak u ograničenoj zoni iznad ispusta, dok nepokretni materijal priljubljen uz zidove pri ispustu formira "zid" efektivnog levka po kojem klizi unutrašnji materijal. Kada efektivni levak od mirnog materijala seče zid ćelije u pitanju je *mešoviti protok*. Međutim, ako se efektivni levak

uzdiže do gornje površine materijala, u tom slučaju dolazi do *unutrašnjeg protoka*, tj. protoka jezgrom odnosno unutrašnjim kanalom.

Forma unutrašnjeg protoka sa mirnim zonama materijala uz zidove ćelije je vrlo nestabilna, i često se delovi mirnih zona materijala uz zidove ćelije urušavaju i uklizavaju u unutrašnji protočni kanal materijala. Uklizavanje materijala iz mirne zone pri zidovima ćelije, mogu biti lokalna na delovima površine zida ili prstenasta po obimu cilindrične ćelije, odnosno pojasnog tipa kod drugih oblika ćelije. Urušavanje ovih delova mirnog materijala koji stoje uz zid ćelije, dovodi do promene u naponima zrnastog materijala, a sa tim i do povećanja opterećenja na zidove. Ovo povećanje opterećenja se uzima kao dodatno opterećenje na zidove ćelije, i obično se u propisima uvodi u obliku dodatnog lokalnog i prstenastog (ili pojasnog) opterećenja.

Mešoviti protok se može posebnim izvođenjem levka u dve sekcije prebaciti u *prošireni protok*, gde se masovni protok formira u donjoj strmoj sekciji levka. Na taj način postiže se povoljniji slučaj sa ujednačenim proticanjem materijala iz levka. Prošireni protok je u osnovi varijetet mešovitog protoka, dobijen konstrukcijskim rešenjem levka sa različitim nagibima kod donje i gornje sekcije levka. Ovo rešenje se sve više primenjuje u praksi, posebno kod prijemnih ćelija za razne rude, uglj i slično. Isto se primenjuje kod silosa, velikog kapaciteta, za držanje slabo protočnih materijala. Ovi silosi se prazne kroz jedan ili češće kroz više širih otvora na ravnom dnu, a svi otvori se opremaju sa posebnim levkastim nastavkom.

2.4.4 Prošireni protok

Prošireni protok se dobija kod silosa kod kojih se levak formira iz dve sekcije: gornje manje strme sekcije, i donje strmije sekcije levka. Ovaj tip protoka je prikazan na sl. 9 f i sl. 12 d. Naziv za *prošireni protok* se može objasniti sa sledećim: suženi protok u gornjoj sekciji levka, u donjoj strmoj sekciji levka se *proširuje* na masovni protok. Donji deo levka se projektuje tako da u njemu dolazi do masovnog protoka materijala, a kod gornjeg, manje strmog dela levka, formira se mirna zona nepokretnog materijala. Na ovaj način postiže se povoljniji slučaj protoka (u odnosu na mešoviti protok) sa ujednačenim proticanjem materijala iz levka. Prošireni protok je u osnovi varijetet mešovitog protoka, dobijen konstrukcijskim rešenjem levka sa različitim nagibima kod donje i gornje sekcije levka. Ovo rešenje se sve više primenjuje u praksi, posebno kod prijemnih ćelija za razne rude, uglj i slično. Isto se primenjuje kod silosa, velikog kapaciteta, za držanje slabo protočnih materijala. Kod ovih silosa, u slučaju primene ravnog dna, pražnjenje ide kroz više širih otvora raspoređenih po površini dna silosa, pri čemu se svaki otvor nastavlja sa zasebnim strmim levkom. U svim ovim slučajevima, pražnjenje materijala iz silosa je ravnomernije, jer je materijal iznad otvora u režimu masovnog proticanja.

2.5 Problemi pri skladištenju i proticanju materijala

Silosi su konstrukcije kod kojih se vrlo često javljaju problemi u funkcionisanju, a pojava oštećenja je posledica nedovoljnog poznavanja ponašanja materijala pri eksploataciji silosa, a posebno pri njegovom pražnjenju, što je povezano sa raspodelom i veličinom opterećenja u silosnim ćelijama.

Na tri načina se javlja problem zaustavljanja/prestanka proticanja materijala iz silosa:

- *kohezivno zasvođenje* materijala (*arching*), pri kojem se blokira pražnjenje u levku zbog stvaranja stabilnog svoda ili kupole od kohezivnog materijala u levku,
- *mehaničko premošćenje* materijala (*bridging*), pri kojem se blokira pražnjenja iznad ispusta zbog stvaranja stabilne forme u vidu svoda ili kupole od krupnozrnih komada materijala u levku, i
- formiranje postojanog praznog proticajnog kanala (*rat-holing*).

Sa tehnološke strane, mogu biti postavljeni razni zahtevi po pitanju rada silosnog postrojenja, koji su obično vezani za karakteristike izlaznog materijala i zahtevani kapacitet pri pražnjenju.

Problemi u vezi neadekvatnog rada silosa po pitanju tehnoloških zahteva su:

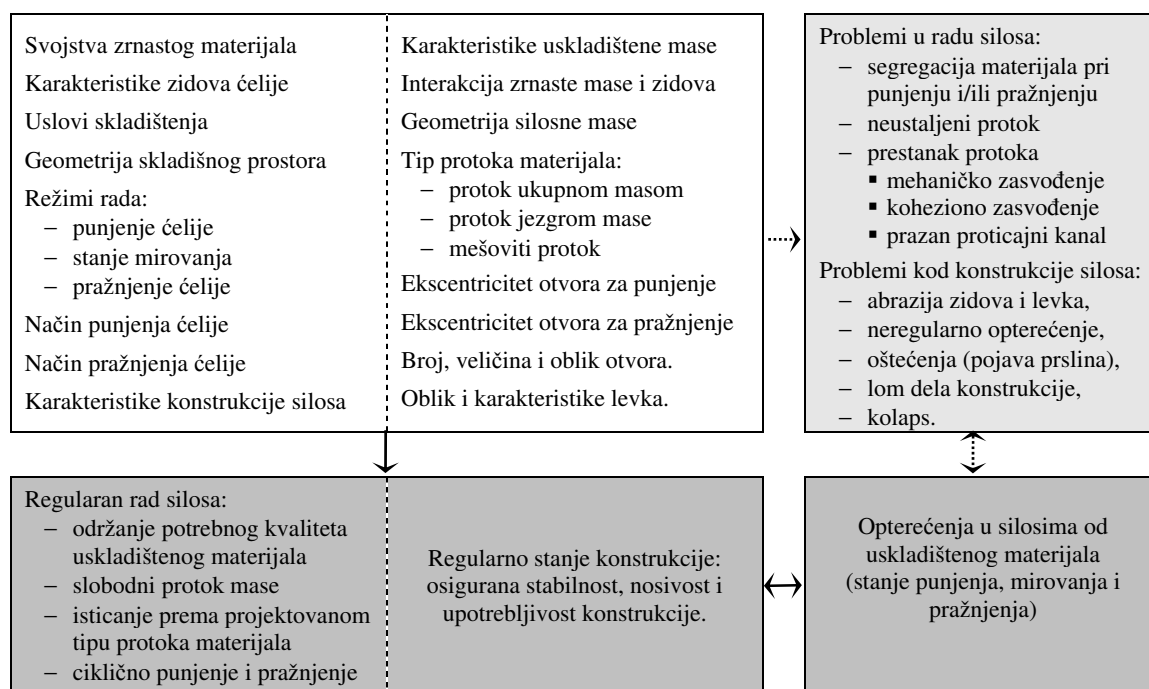
- pojava segregacije materijala pri punjenju i pražnjenju,
- pojava nepotpunog pražnjenja (*clinging*), odnosno zaostalog materijala na krajevima strana levka i donjem delu zidova ćelija po završenom pražnjenju, i
- pojava protoka jezgrom materijala umesto zahtevanog protoka ukupnom masom.

Problemi vezani za konstrukciju silosa pri nepovoljnim eksploatacionim uslovima su:

- abrazija unutrašnjih površina zidova ćelije i levka,
- pojava neregularnih opterećenja pri promenljivom protoku materijala, ili usled neodgovarajućeg stanja materijala (bubrenje materijala pri povećanoj vlažnosti sredine, ili usled kvarenja materijala, pojave samozagrevanja, i drugo),
- pojava oštećenja konstrukcije silosa (npr. pojava prslina na AB zidovima sa širinama većim od graničnih vrednosti),
- lom jednog dela konstrukcije, ili
- kolaps konstrukcije (kod AB silosa potpuni lom zida ćelije ili lom konstrukcije levka).

Na sl. 14 prikazan je pregled uticajnih faktora na stanje rada silosa. Silosi se projektuju prema uslovima koji odgovaraju regularnom radu silosa, za opterećenja od uskladištenih materijala u stanju punjenja, mirovanja i pražnjenja. Ako se pojavi neregularnost kod rada silosa, kada se kod bitnih faktora prekorače predviđene granične vrednosti, ili oni izađu iz okvira postavljenih radnih kriterijuma, onda dolazi do problema kako u radu silosa, tako i kod konstrukcije silosa. Kako bi se izbegli problemi vezani za kvarenje ili degradaciju materijala, silosi se projektuju tako da se kod proticanja materijala garantuje protok ukupnom masom. U ovom slučaju, bitni faktori su trenje materijala o zid levka, unutrašnje trenje materijala, dimenzija otvora za pražnjenje koja treba da bude veća od minimalne radi sprečavanja mogućeg zasvođenja materijala, kao i izbor ugla nagiba levka.

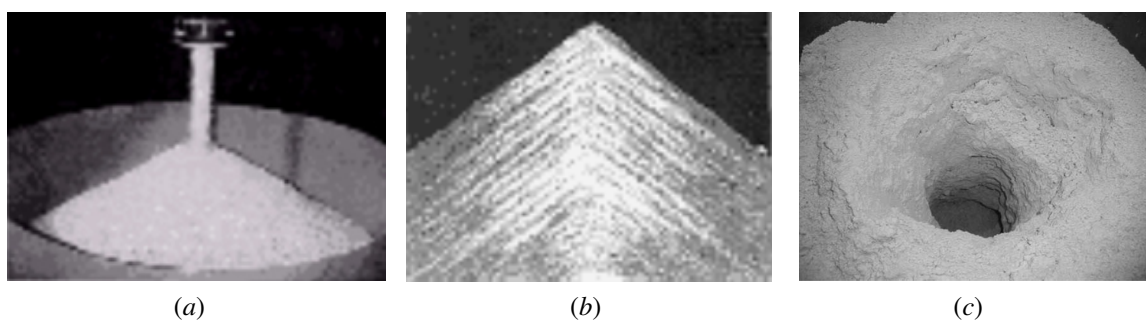
Zasvođenje materijala dolazi usled lučnog dejstva, kada se formira stabilna forma svoda ili kupole od kohezivnog materijala u levku ili zaustavnog mosta od krupnozrnog materijala iznad samog otvora na dnu levka. Neprotočni kanal se karakteriše formiranjem stabilnog praznog kanala u kohezivnoj masi uskladištenog materijala. Svi ovi problemi se u osnovi pojavljuju usled nekorektnosti pri izboru ugla levka i nedovoljno širokog otvora za pražnjenje. Potrebno je napomenuti da se ovi problemi javljaju kod materijala sa izraženom kohezijom. Kod zrnastih slobodno protočnih (rastresitih; nevezanih) materijala ovo se nikada ne dešava pri regularnim uslovima skladištenja. Međutim, u neregularnom slučaju, kao što je npr. značajno povećanje vlažnosti materijala u ćeliji, mogu se i kod ovih materijala pojaviti navedeni problemi. Za ilustraciju prethodnog stava, kao primer, može se navesti poznata razlika u proticanju između suvog i vlažnog peska.



Sl. 14 Uticajni faktori za opterećenja i moguće probleme pri korišćenju silosa.

Mnoge materije koje se skladište deluju abrazivno, ili sadrže delove koji nagrízaju unutrašnje površine zidova silosa. U nekim slučajevima se kod takvih silosa mora predvideti površinska obrada ili površinska obloga, radi zaštite zidova silosa od uticaja prisutnih agresivnih materija.

Segregacija materijala se javlja pri punjenju koncentrisanim potokom materijala kroz usipni otvor ili cev kružnog (ili kvadratnog) oblika, kako je prikazano na sl. 15 a. Kod lokalnog usipanja materijala, pri punjenju se formira nasipna kupa materijala, a kod linijskih otvora i silosa paralelnih strana (2D silosa), pri linijskom usipanju materijala, pri punjenju se formira nasipna trougaona prizma. U osnovi problema segregacije materijala, je odvajanje sitnijih zrna materijala koja ostaju na mestu pada, i krupnijih zrna koja se kotrljaju niz strane nasipne kupe/prizme i odvajaju po periferiji. Na primeru centričnog usipanja dvofrakcijskog materijala u uski prostor između dva vertikalna staklena zida (slučaj 2D silosa), kroz stakleni zid je snimljen efekat segregacije materijala, kod kojeg su svetlija manja zrna, i tamnija veća zrna materijala (sl. 15 b).



Sl. 15 (a) Formiranje nasipne kupe pri punjenju potokom materijala; (b) Segregacije materijala prema veličini zrna; i (c) Primer stabilnog neprotočnog kanala.

Pojava segregacije nije vezana samo za razlike u veličini zrna, nego pored toga može biti izazvana razlikama u težini, obliku, hrapavosti zrna itd., i to usled jedne prevlađujuće ili više bitnih razlika između zrna jednog materijala.

Segregacija pri punjenju se može izbeći pri usipanju materijala u vidu kiše. Pri pražnjenju već segregiranog materijala, ako je u pitanju slučaj proticanja materijala po jezgru prvo bi se praznio sitniji materijal, a ako je u pitanju protok materijala po ukupnoj masi usled povoljnog remiksovanja u levku, praktično bi se eliminisao prethodni efekat segregacije.

Foto snimak stabilnog *praznog proticajnog kanala* i obrazovanog kratera, na jednom primeru skladištenja titanijum-dioksida¹, prikazan je na sl. 15 (c). Problem formiranja praznih kanala kod nasutog zrnastog materijala razmatrao je Cox (2001) [56].

Dinamička opterećenja koja se pojavljuju pri proticanju materijala protočnim kanalom (unutrašnji protok) mogu, u nekim slučajevima, proizvesti konstrukcijske probleme i oštećenja silosa. Kada je protočni kanal prazan, ovaj oblik može biti vrlo stabilan i potrebna je pomoćna intervencija za ponovno uspostavljanje protoka. Sa druge strane, pri urušavanju okolnog materijala u prazan kanal, može se desiti da dođe do kolapsa konstrukcije. Ima mnogo primera gde se urušavanjem kanala proizveo vakum, sa efektom usisavanja tavanice ćelije (kod metalnih silosa), i vrlo velikim pritiscima na levak, koji su u nekim slučajevima izazvali oštećenja na donjoj konstrukciji silosa. Ovaj problem se obično rešava sa prevođenjem proticanja materijala, npr. u masovni protok ili u prošireni protok.

2.6 Dimenzionisanje silosa prema načinu proticanju materijala

Protok zrnastih materijala iz skladišnih ćelija je složen problem, koji je postavio Jenike-a sa pionirskim radom od sredine 1950-tih godina. Originalna istraživanja Jenika-a i Johanson-a su objavljena u tri publikacije *Biltena* Univerziteta u Utah-u (*bilteni* pod brojem 108, 116 i 123² - citirano preko [246], [247], [248] i [276]). Značajni teorijski i praktični rezultati, koji su proistekli iz ovih radova, su sledeći:

- Ustanovljena su dva glavna modela protoka zrnastih materijala: protok ukupnom masom (masovni protok) i protok jezgrom (unutrašnji protok) - Jenike (1961).
- Teorija radijalnih napona kod masovnog protoka materijala u levku; i određivanje granice za pojavu masovnog protoka u levku.
- Kriterijum za ocenu "proticanja /ne-proticanja" materijala ("*flow/no-flow*" kriterijum).
- Uređaj za laboratorijsko ispitivanje direktnog smicanja zrnastog materijala (Jenike-ov smičući aparat) za određivanje proticajnih karakteristika zrnastog materijala.

Silosi se projektuju tako da se spreči pojava problema kod protoka materijala, kao što su formiranje praznog kanala, kohezivnog svoda ili mehaničkog svoda. Na osnovu merenja karakteristika proticanja za dati skladišni materijal, mogu se uz potrebne proračunske

¹ Matchett, *Powder Techn.*

² Jenike A.W. (1961): "*Gravity flow of bulk solids*", *Bulletin No. 108*, Utah Eng. Experiment Station, Univ. of Utah, Salt Lake City.

Johanson A.R., Jenike A.W. (1962): "*Stress and velocity fields in gravity flow of bulk solids*", *Bulletin No. 116*, Utah Eng. Experiment Station, Univ. of Utah, Salt Lake City.

Jenike A.W. (1964, 1970): "*Storage and flow of solids*", *Bulletin No. 123*, Utah Eng. Experiment Station, Univ. of Utah, Salt Lake City, 1964 (revised edition 1970).

analize odrediti potrebni ugao levka, dimenzije otvora i tip obrade unutrašnjih površina zidova, kako bi se osiguralo slobodno pražnjenje silosa bez navedenih problema.

Sa aspekta procesnog inženjerstva, u vezi sa razmatranim proticanjem uskladištenog materijala, izdvajaju se tri osnovna zadatka pri projektovanju silosa:

- Određivanje potrebnog ugla otklona zida levka β , ili nagibnog ugla zida levka α , ($\alpha = 90^\circ - \beta$), sa kojim se garantuje masovni protok materijala iz levka.
- Određivanje kritične, tj. minimalne dimenzije otvora d_{min} (ili d_{cr}) ispusta na levku, pri kojoj ne dolazi do pojave zaustavnih svodova/kupola i mostova iznad otvora.
- Određivanje kapaciteta isticanja materijala.

Prvi zadatak je bitan sa građevinske strane, jer se preko nagibnog ugla, određuje visina levka, a sa tim i ukupna visina silosa, odnosno kompletna geometrija konstrukcije. Pored toga, otvoreno pitanje kod projektovanja silosa je izbor tipa protoka kod levka. Pri izboru masivnog protoka, potrebna je dosta velika visina levka, što kod manjih investicija nije ekonomski opravdano. Kod izbora unutrašnjeg protoka, javljaju se relativno manji pritisci u silosima od uskladištenog materijala. Međutim, relevantni faktori protoka materijala su često u oblasti proticanja gde je moguća pojava i masovnog i unutrašnjeg protoka, tako da bi projektovanje silosa uzimajući u obzir samo uticaje od unutrašnjeg protoka, bilo na strani nesigurnosti pri mogućoj pojavi masovnog protoka. Ovde može biti od interesa obrnuti tip zadatka - određivanje potrebnog ugla levka sa kojim se apsolutno garantuje unutrašnji protok u materijalu, kako bi se u proračun uveli relativno manji uticaji. Prethodni stavovi se u principu odnose na slučaj gravitacionog pražnjenja materijala. Postoje razni sistemi pražnjenja kod kojih je pitanje protoka rešeno na drugi način; npr. materijal može da se prazni putem aero-slojnog sistema na dnu ćelije, sa izazvanim masovnim protokom materijala u silosu, pri čemu kod silosa uopšte ne mora postojati levak, već se razvod za aeraciju može postaviti na ravnom dnu ćelije. Kao drugi primer, koji odgovara garantovanom unutrašnjem protoku, kod silosa se može postaviti protočna samonoseća centralna cev (AB konstrukcije) i kroz nju materijal mašinski prazniti sa vrha. U ovom slučaju u silosnom materijalu su uvek pritisci koji odgovaraju stanju punjenja, odnosno stanju mirovanja materijala. Pri određivanju tipa protoka materijala, koriste se, u okviru normi i standarda, karte za ocenu vrste protoka materijala, kao pomoćno sredstvo pri određivanju vrste protoka.

Drugi zadatak, sa građevinske strane nije posebno bitan, ali je potreban u obliku informacije. Za uobičajene materijale koji se skladište, postoje preporuke za usvajanje dimenzija otvora, kao i preporučene iskustvene vrednosti na osnovu ranijih ispitivanja.

Treći zadatak je od značaja za mašinsko procesno inženjerstvo pri projektovanju silosnog postrojenja, i rešava se obično putem brojnih empirijskih izraza koji se mogu naći u specijalizovanoj literaturi (npr. u [186]). Dobijeni rezultati služe pri daljem projektovanju sistema za pražnjenje i unutrašnji transport materijala.

Ovi zadaci su detaljno proučavani kod konusnih i rogljastih levaka. Kod ostalih oblika levaka, koriste se rešenja za prethodne oblike uz iskustvene aproksimacije radnih parametara problema.

2.6.1 Karte za ocenu vrste protoka materijala

Kao pomoć pri preliminarnom projektovanju geometrije levka, koriste se tzv. karte protoka materijala (sl. 17 i sl. 18), na kojima su date granice za masovni i unutrašnji protok. Kako karakteristike materijala i hrapavost zidova imaju odstupanja u poznatim

granicama, na slikama su prikazane aproksimativna gornja i donja granica za navedene protoke.

Granice za protok masom zavise od: ugla trenja materijala o zid levka ϕ_{wh} , polu-ugla levka β (ugao otklona zida levka), i efektivnog ugla unutrašnjeg trenja ϕ_e zrnastog materijala. Kod nevezanih rastresitih materijala (zrnasti materijali bez kohezije), efektivni ugao unutrašnjeg trenja ϕ_e , jednak je graničnom uglu unutrašnjeg trenja ϕ_i . Granice protoka takođe zavise od oblika levka, pri čemu su bitni, sa teorijske strane, uobičajeni oblici levaka, tj. konusni i rogljasti levci (sl. 16).

Granicu između protoka masom i protoka jezgrom je definisao *Jenike* sa analizom proticanja materijala uz pretpostavku da kod materijala u levku postoji radijalno polje napona. Kada su poznati uglovi trenja ϕ_{wh} i ϕ_e (npr. preko ispitivanja na *Jenike*-ovom smičućem uređaju), ugao otklona zida levka β (kao granična vrednost pri promeni vrste protoka) se može odrediti za osno-simetrični (konusni) levak u sledećem obliku:

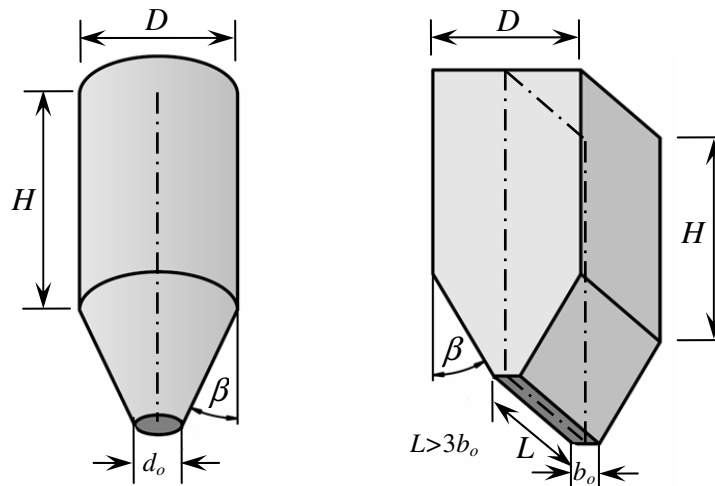
$$\beta = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \left[\phi_e + \arcsin\left(\frac{\sin \phi_{wh}}{\sin \phi_e}\right) + \arccos\left(\frac{1 - \cos \phi_e}{2 \cdot \sin \phi_e}\right) \right] \quad (2.5)$$

gde je ϕ_{wh} ugao trenja materijala o zid levka.

Za rogljasti (koritasti) levak se primenjuje sledeća empirijska relacija:

$$\beta = \frac{1}{0.725 \cdot (\tan \phi_e)^{0.2}} \cdot \left[\exp(3.75 \cdot 1.01^{\frac{\phi_e - 30}{10}}) - \phi_{wh} \right] \quad (2.6)$$

Izraz (2.6) se primenjuje za $\phi_{wh} < \phi_e - 3^\circ$, a uglovi su računaju u stepenima.



(a) ćelija sa konusnim levkom (b) ćelija sa rogljastim levkom

Sl. 16 Geometrija silosnih ćelija sa konusnim i rogljastim levkom.

Prema *Jenike*-ovoj teoriji, granične linije prelaza masovnog protoka u unutrašnji protok, za konusne i rogljaste levke, su prikazane na sl. 17. Za rogljaste levke, granica između masovnog i unutrašnjeg protoka je manje kritična nego kod konusnih levaka. U slučaju konusnih ili osno-simetričnih levaka, preporučuje se da ugao otklona levka bude za oko 3° manji od dobijene granične vrednosti. Za ravansko isticanje kod rogljastog levka, može se usvojiti data granična vrednost ugla, a u slučaju da je prelaz između ćelijskog dela i levka zaobljen, ugao otklona levka se može uzeti za 3° do 4° veći od granične vrednosti.

Kod dijagrama graničnih linija prema *Jenike*-ovoj teoriji (sl. 17), jasno se uočava značajna uloga ugla trenja o zid levka na tip protoka materijala. Za datu geometriju levka, relativno malo povećanje ugla ϕ_{wh} , može da promeni režim proticanja materijala sa masovnog protoka na unutrašnji protok. Kod rogljastog levka, granica za masovni protok nije toliko stroga kao kod konusnog levka. To znači da je ugao β na granici promene tipa protoka, veće vrednosti kod rogljastog levka u odnosu na konusni levak, pri istim relevantnim parametrima.

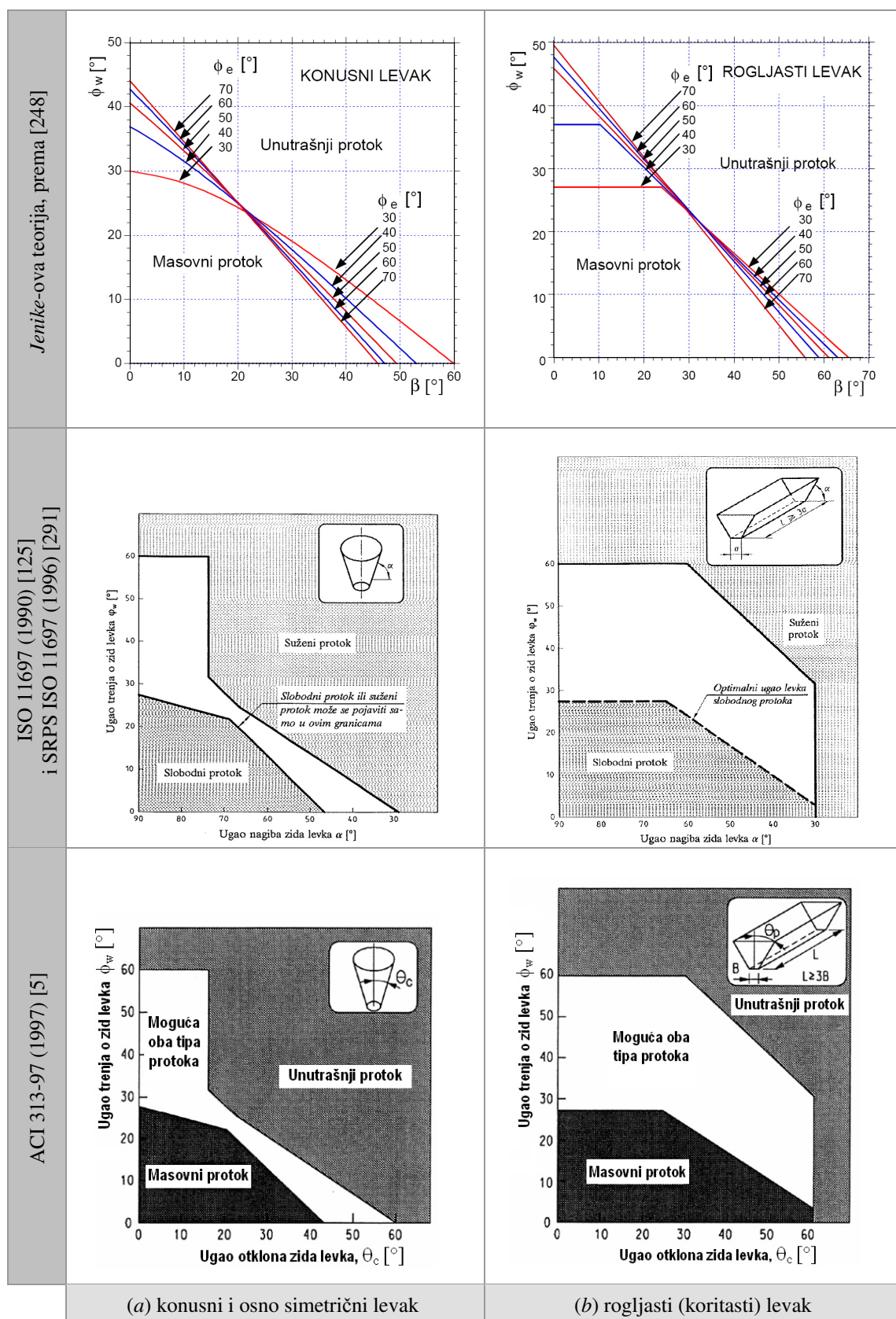
Objedinjavanjem graničnih linija, koje odgovaraju različitim uglovima ϕ_e , formira se prelazna oblast koja razdvaja, sa donjom i gornjom aproksimativnom granicom, slučajeve masovnog i unutrašnjeg protoka. Na ovaj način su izrađene karte za ocenu vrste protoka materijala, sa postavljenim granicama za određivanje vrste protoka (ukupnom masom ili jezgrom). Pri izradi ovih karti vodilo se računa o nepouzdanosti teorijskih pretpostavki i odstupanjima ulaznih podataka koji se odnose na relevantne karakteristike materijala.

Na sl. 17, prikazane su karte protoka sa granicama za masovni i unutrašnji protok materijala kod konusnih i rogljastih levaka, prema *Jenike*-ovoj teoriji (*Roberts* [248]), te ISO 11697 (1990) [125] i SRPS ISO 11697 (1996) [291], kao i prema novom američkom standardu ACI 313-97 (1997) [5]. Dijagrami kod ISO 11697 i ACI 313-97 su praktično isti, uz različito uzimanje referentnog ugla zida levka. Kod ISO 11697, na apscisi je data promena ugla nagiba zida levka α , dok je kod ACI 313-97 na apscisi data promena ugla otklona zida levka $\theta = 90^\circ - \alpha$. Oznaka θ_c se odnosi na dati ugao kod konusnog levka, a θ_p kod rogljastog levka. Za oznake uglova ϕ_w i ϕ_w , koje se koriste uz karte, preciznija je oznaka ϕ_{wh} , jer se ugao odnosi na trenje o zid levka (indeks h za levak – *hopper*).

Na sl. 18, tabelarno su prikazane karte protoka prema evrposkoj normi EC1-4, tj. EN 1991-4 (2006) [38] i DIN-u 1055-6 (2005) [62] (prema aneksu F i osnovnom delu normi), i prema australijskom AS 3774 (1996) [14], koje odgovaraju slučajevima konusnih i rogljastih levaka. Granične linije prema EN 1991-4 i DIN 1055-6 su nešto drugačije po izgledu od linija u prethodnim dijagramima prema ISO 11697 i ACI 313-97 prikazanih na sl. 17, usled promene ordinate, koja je predstavljena kao koeficijent trenja materijala o zid levka $\mu_h = \tan \phi_{wh}$, umesto prethodno korišćene ordinate predstavljene sa uglom trenja o zid levka ϕ_{wh} . Karte protoka prema Aneksu F u DIN-u 1055-6, su praktično prenete iz prEN 1991-4 (2003)¹, i odgovaraju prethodno prikazanim kartama na sl. 17 za standarde ISO 11697 i ACI 313-97.

Karte protoka prema aneksu F u EN 1991-4, razlikuju se po redukciji gornje granice protoka na gornjem delu dijagrama, u odnosu na karte date u aneksu F DIN-a 1055-6. Redukcija maksimalne vrednosti gornje granice protoka, kod rogljastog levka, ide sa $\mu_h = 1.732$ (= $\tan 60^\circ$) prema DIN 1055-6, na $\mu_h = 1.0$ prema EC1-4. Slično je urađeno i pri redukciji gornje granice kod konusnog levka, gde je u ovom delu dijagrama uvedena nagnuta linija koja vodi u donju tačku skokovite promene gornje granice u DIN 1055-6 karti. U slučaju da se preko ovih karti ustanovi slučaj, ili mogućnost pojave, masovnog protoka materijala, uvodi se dodatno skretno opterećenje na levku ("*kick load*"). Ovo sledi iz alternativnih pravila za određivanje opterećenja na levku, uvedenih u aneksu H za DIN 1055-6, i u aneksu G za EN 1991-4. Alternativna analiza opterećenja kod levka, prikazana u ovim aneksima, preuzeta je iz ranije važeće norme DIN 1055-6 (1987) [61].

¹ CEN (2003): prEN 1991-4, *Eurocode 1: Actions on structures - Part 4: Silos and tanks*, Final PT draft (Stage 34), 5 March 2003, CEN/TC250/SC1/N390, 110 p.



Sl. 17 Granice za masovni protok (protok ukupnom masom, slobodni protok, mass flow) i unutrašnji protok (protok jezgrom, suženi protok, funnel flow).

U trećem redu tabelarnog pregleda karti protoka na sl. 18, prikazana je gornja granica razdvajanja protoka materijala iz osnovnog dela normi EN 1991-4 (2006) i DIN 1055-6 (2005). Ove karte prikazuju uslove za moguću pojavu (relativno većih) pritisaka pri masovnom protoku.

Primena ovih karti je sledeća: ako levak po parametrima odgovara slučaju ispod granične linije, moguća je pojava masovnog protoka materijala i njemu odgovarajućih opterećenja na zidu ćelije i levka; a ako levak po datim uslovima odgovara slučaju iznad granične linije, u levku je osiguran unutrašnji protok materijala. Prikazana granica se potpuno slaže sa gornjom granicom protoka iz aneksa F kod norme EN 1991-4 (2006) [38]. Pri upoređenju ovih granica kod norme DIN 1055-6 (2005) [62], prema osnovnom delu norme i prema aneksu F, može se uočiti da slaganje nije potpuno, a razlika se pojavljuje u gornjem delu granične linije.

Na sl. 18, u donjem redu tabelarnog pregleda, prikazane su karte protoka prema australijskom AS 3774 (1996) [14], sa koordinatama i oznakama kao u kartama u EC1-4.

Granice protoka ograničavaju šrafiranu oblast kod koje se mogu pojaviti obe vrste protoka, tj. nestabilno proticanje materijala. Kod ovih granica, uočljiva je razlika u odnosu na granice prikazane kod prethodnih karti protoka.

Navedene razlike su posledica različitih stepena mogućih odstupanja vrednosti ugla trenja o zid levka, uvedenih pri izradi ovih karti, kao i činjenice da su sve prethodne karte protoka bile bazirane na *Jenike*-ovoj teoriji, a pri izradi karti kod AS 3774 su korišćena i druga istraživanja.

Rad *Jenike*-a i *Johanson*-a nije bio bez kritike, posebno za teoriju radijalnog naponskog polja, za koju se ispostavilo da daje dobru aproksimaciju stanja napona samo u donjem delu levka, kao i za preteranu sigurnost kod određivanja kritične širine otvora za pražnjenje. Argumentovanu kritiku po ovim pitanjima, uz koncizan pregled *Jenike*-ove inovirane teorije iz 1987. god. objavljene u ref. [131], dao je *Kruyt* (1993) u ref. [156].

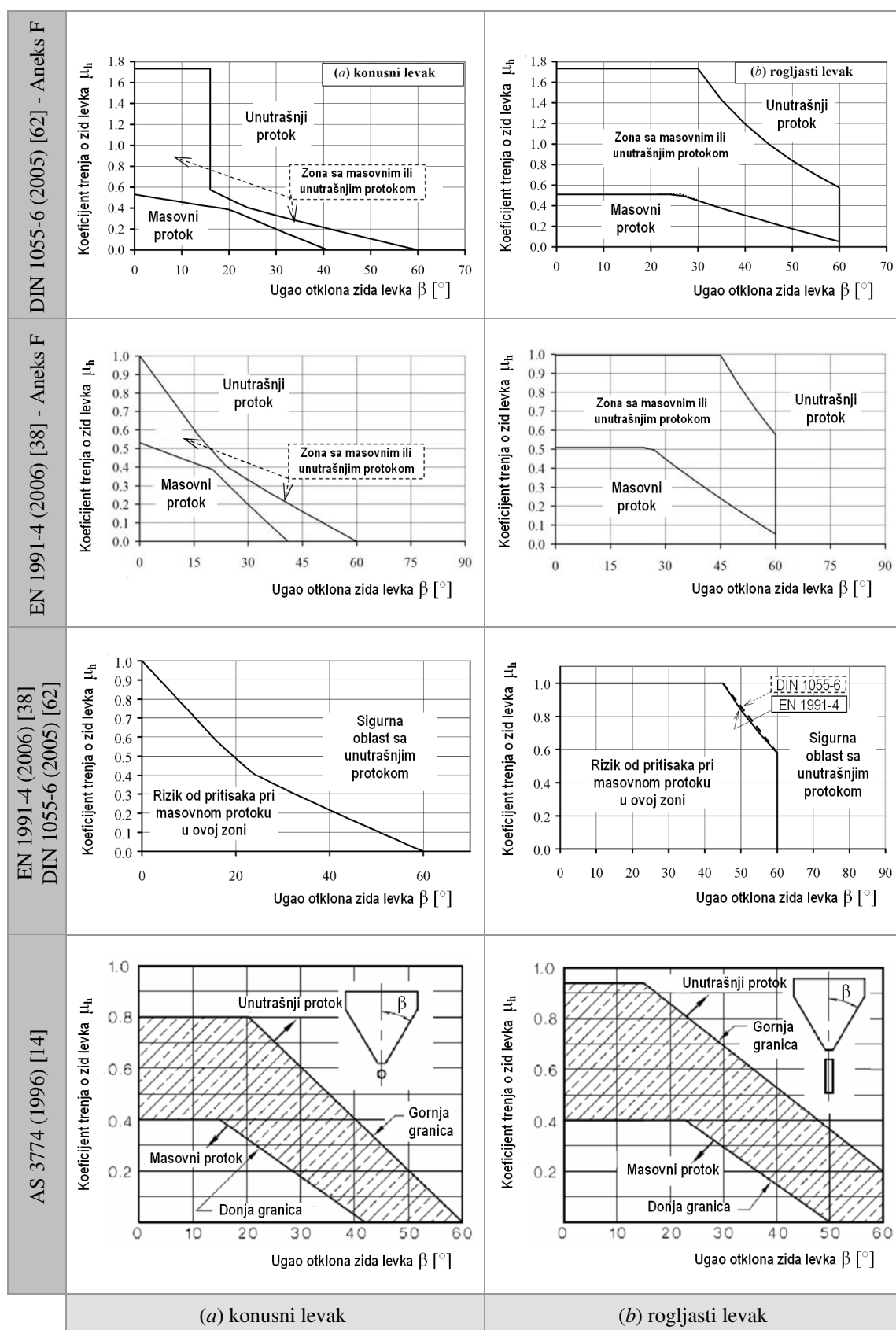
Protok materijala u levku, prema *Jenike*-ovoj teoriji, analizira se i sagledava samo na izdvojenom levku. Iz ovog razloga, pri generalisanju *Jenike*-ove analize na slučaj proticanja kod sklopa silosne ćelije i levka, ne obuhvata se uticaj opterećenja od materijala gornjeg ćelijskog dela na donji deo materijala u levku. Opterećenje u nivou prelaza ćelije u levak, deluje kao nadopterećenje na donji materijal u levku, i kao takvo utiče na formiranje tipa protoka materijala levka.

Kasnija istraživanja su pokazala da masovni protok u levku može biti uslovljen nadopterećenjem iznad levka, i da je za protok masom neophodna minimalna visina H_{cr} materijala u ćelijskom delu (H_{cr} iznosi od $0.75 \cdot D$ do $1.0 \cdot D$, prema [247]). U detaljnoj studiji protoka materijala u silosu, *Benink* (1989)¹ (citirano prema ref. [247]) je identifikovao tri tipa režima protoka materijala, i to su: *masovni protok*, *unutrašnji protok* i *intermedijalni protok*.

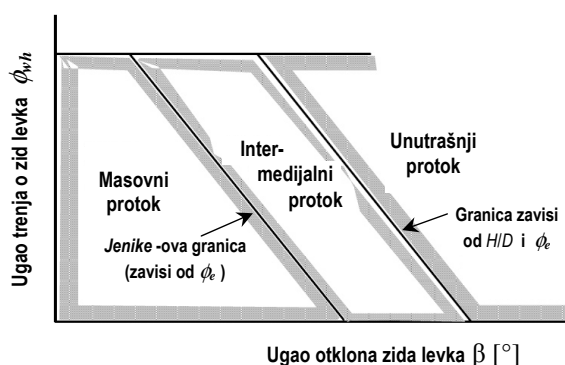
Za razliku od *Jenike*-ove teorije, *Benink* je pokazao da nadopterećenje na levku ima izraziti uticaj na generisanje tipa protoka. Pored toga, postavljen je odnos za određivanje kritične visine materijala, H_{cr} , u funkciji odnosa H/D (odnos visine i prečnika/širine silosa sa prikazom oznaka na sl. 16) i efektivnog ugla unutrašnjeg trenja ϕ_e .

Kvalitativni prikaz režima protoka materijala kod proticanja kroz rogljasti levak, prema *Benink*-u, dat je na sl. 19.

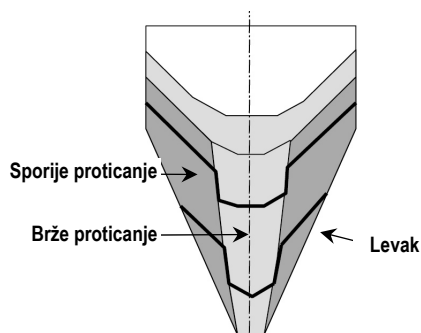
¹ Benink E.J. (1989): *Flow and stress analysis of cohesionless bulk materials in silos related to codes*. Doctoral Thesis, The University of Twente, Enschede, The Netherlands.



Sl. 18 Granice za masovni protok i unutrašnji protok, prema DIN 1055-6 (2005) [62], EN 1991-4 (2006) [38] i AS 3774 (1996) [14].



Sl. 19 Kvalitativni prikaz režima protoka prema Benink-u (slučaj rogljastog levka).



Sl. 20 Intermedijalni protok [247].

Intermedijalni protok se pojavljuje kod isticanja materijala u silosima tipa masovnog protoka, pri relativno malim vrednostima nadopterećenju kod levka. Prema ilustraciji ovog slučaja protoka, na sl. 20, materijal brže protiče kroz centralnu protočnu zonu, a sporije u okolnom preostalom delu uz zidove.

2.6.2 Kritična širina otvora za pražnjenje

Kritična dimenzija otvora za pražnjenje je istraživana od mnogih autora, a prvi je teorijski postavio *Jenike*. Dalji teorijski doprinos su dali u svojim radovima *Walker* (1966) [325] i (1967) [326], te *Walters* (1973) [327] i (1973) [328], koji je proširio i dopunio *Walker*-ov postupak, i *Enstad* (1975) [75] i (1977) [76], koji je uveo zakrivljeni elementarni sloj pri analizi zaustavnog svoda/kupole materijala iznad otvora levka, kao i drugi istraživači. Ovaj problem se analizira kod *Nedderman*-a (1992) u knjizi o statici i kinematici granularnog materijala [200], *Tardos*-a (1999) u *e*-članku [295], gde je prikazana *Jenike*-ove metode proračuna opterećenja u levku i kritične širine otvora (teorijski i praktično kroz računski primer), te *Holdich*-a (2002) [120] u okviru knjige o osnovama tehnologije zrnastih materijala, kao i u ref. [246], [247], [248] i [276]. Računski primeri proračuna kritične širine otvora se mogu naći u ref. [42], [248], [276] i [295].

Pregled postupaka proračuna i komparaciju teorijskih i eksperimentalnih rezultata, kod određivanja potrebne širine otvora za pražnjenje su prikazali *Drescher*, *Waters* i *Rhoades* (1995) u dvodelnom radu [67] i [68]. Komparacija rezultata je data prema različitim postupcima od sledećih autora: *Jenike*-a, *Walker*-a [326], *Mróz*-a i *Szymański*-og, *Arnold*-a i *McLean*-a, i *Enstad*-a. U dodatku rada [68], dat je pregled proračunskih izraza koji su potrebni kod navedenih postupaka analize.

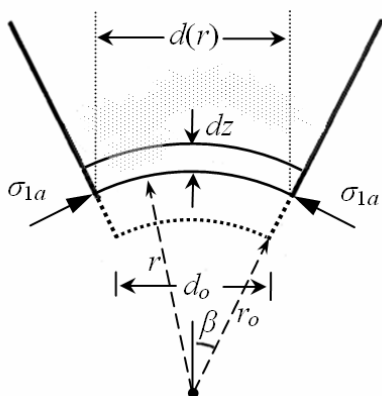
Na osnovu dobijenih proračunskih i eksperimentalnih rezultata, zaključeno je da se pri primeni analiziranih "lučnih" teorija određuju kritične širine otvora za pražnjenje koje su 2 do 4 puta veće od izmerenih eksperimentalnih vrednosti. Preporučeno je, da se u praktičnim primenama, proračunski rezultati uzmu sa potrebnim redukcionim faktorom (npr. 2 do 4). Analize su se odnosile na određivanje potrebne širine otvora kod osnosimetričnih, konusnih i rogljastih levaka.

Problem pojave zaustavnog svoda/kupole materijala se, u principu, javlja samo kod kohezivnih materijala. Može se pojaviti i kod nazivno nekohezivnih (nevezanih, rastresitih) materijala, ako su izloženi nekim nepovoljnim (neregularnim) uslovima pri kojima dolazi do vezivanja zrna materijala, odnosno pojave kohezije.

Teorijska analiza formiranja zaustavnog svoda materijala u levcima se razmatra kod masovnog protoka materijala. Prema Jenike-u na formiranje zaustavnog svoda, pored opšteg uticaja samog tipa levka i njegove geometrije, direktno utiču sledeći faktori:

- zapreminska težina uskladištenog materijala γ ,
- efektivni ugao unutrašnjeg trenja materijala ϕ_e ,
- ugao trenja materijala o zidove levka ϕ_{wh} , i
- jednoaksialna čvrstoća materijala f_c pri pritisku (*unconfined yield strength* - čvrstoća "neutegnutog" materijala).

Za određivanje karakteristika ponašanja materijala neophodno je merenje svojstava materijala na pripremljenim uzorcima pod posebnim uslovima nanošenja napona. Pri ispitivanju ovih karakteristika, može se koristiti translaciona opitna ćelija (npr. pomoću Jenike-ovog smičućeg uređaja¹) ili prstenasta opitna ćelija (npr. pomoću Schulze-ovog smičućeg uređaja²). Protok materijala u silosu je posledica kontinualnog rušenja/proloma lukova/svodova/kupola materijala (sl. 21). Premošćavanje postaje problem kada se mostovi materijala ne urušavaju. Kod sila koje deluju na ovaj most obično se uzima samo uticaj od sopstvene težine materijala zaustavnog mosta, ili se uvodi i uticaj od dela opterećenja materijala iznad ovog mosta.



Sl. 21 Jenike-ov model formiranja zaustavnog luka.



Sl. 22 Tragovi na levku kao posledica "rešavanja" problema protoka, prema [276].

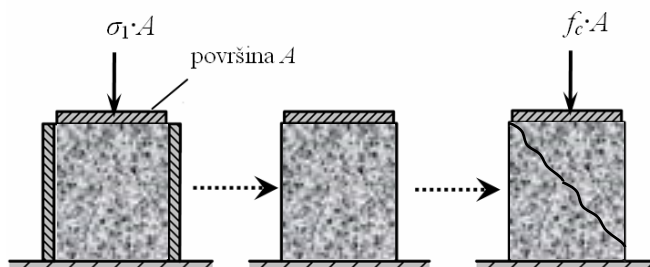
Materijal u silosu prilikom pražnjenja izložen je pritisku od gornjeg materijala koji leži na njemu. U ovom slučaju glavni napon u materijalu do zida levka je σ_1 . Po prestanku pražnjenja, materijal usled napona σ_1 dobija odgovarajuću čvrstoću. Pri ponovnom otpočinjanju pražnjenja, neposredno iznad otvora materijal može formirati zaustavni svod/kupolu, sa slobodnom donjom površinom materijala.

Prikaz ispitivanja prethodno konsolidovanog uzorka sa naponom σ_1 u "utegnutom" stanju je dat na sl. 23. Nakon uklanjanja bočnih strana vrši se ispitivanje uzorka materijala do loma, pri čemu se određuje čvrstoća f_c neutegnutog uzorka materijala. Čvrstoća f_c se javlja kod kohezivnih materijala i zavisi od mnogih faktora, kao što su: kompozicija materijala, granulometrijska raspodela, dimenzije zrna, konsolidacioni pritisak σ_1 pod kojim je prethodno podvrgnut materijal, vlažnost i temperatura materijala, i proteklo vreme sa

¹ Jenike & Johanson Inc. Tyngsborough, MA, USA. www.jenike.com

² Schulze D. (2001-9) [275]: "The automatic Ring Shear Tester RST-01.pc", 2 p. www.dietmar-schulze.de

neporemećenim stanjem mirovanja materijala – vreme konsolidacije materijala. Uticaj poslednjeg faktora je posebno značajan u praksi, kako je često uzrok problema pri otpočinjanju rada silosnog postrojenja (npr. pri prvoj upotrebi silosa nakon vikenda).



Sl. 23 Postupak za određivanje jednoaksialne čvrstoće f_c .

Da bi se odredila čvrstoća materijala u zaustavnom svodu/kupoli f_c , neutegnuta čvrstoća materijala se mora izmeriti u funkciji prethodnog konsolidacionog napona σ_1 . Stabilni zaustavni most se neće pojaviti toliko dugo koliko se formirani mostovi u sužavajućem delu silosa urušavaju prema otvorenom ispustu. Lučni mostovi materijala se ruše kada su naponi od težine materijala σ_{1a} veći od čvrstoće materijala f_c . Kada su ove veličine poznate, tada se može sračunati kritični prečnik/širina potrebnog otvora. Dimenzija otvora mora biti veća od kritične vrednosti, kako bi se predupredilo zasvođenje materijala. Ako je određeno da je kritični prečnik veći od otvora koji se koristi kod razmatranog levka, problem se prevazilazi primenom raznih tehničkih rešenja, npr. putem mehaničkih uređaja (tipa "lomioaca mostova"), vibriranjem dna levka, primenom aeracije, itd. U praksi se u pogonima kod metalnih levaka, kod kojih se javlja problem zasvođenje materijala, često može naići na priručni alat sa kojim se pokušava otkloniti ovaj problem (primer na sl. 22 prema [276]).

Maksimalni napon na zidu levka kod zaustavnog svoda materijala (prikazanog u preseku kao segment cilindričnog sloja materijala kod rogljastog levka na sl. 21) od sopstvene težine materijala, na udaljenosti r od temene tačke levka iznosi:

$$\sigma_{1a}(r) = 2 r \cdot \sin \beta \cdot \gamma = \gamma \cdot d(r) \quad (2.7)$$

Ovu jednačinu je uopštio *Shamlou* (1990) (prema [295]) za konusni i rogljasti levak sa sledećom:

$$\sigma_{1a}(r) = 2 r \cdot \sin \beta \cdot \gamma / m_H = \gamma \cdot d(r) / m_H \quad (2.8)$$

gde je $m_H = 1$ za rogljasti levak, a $m_H = 2$ za konusni levak.

Rešenja ovog problema, koja je prikazao *Nedderman* (1992) u knjizi [200], su:

$$d_{crit} = 2 \frac{f_c}{\gamma} \quad (\text{za konusni levak}) \quad (2.9)$$

$$d_{crit} = \frac{f_c}{\gamma} \quad (\text{za rogljasti levak}) \quad (2.10)$$

a sa empirijskim modifikacijama dobijaju se sledeći izrazi:

$$d_{crit} = (2 + 0.0137 \cdot \beta) \cdot \frac{f_c}{\gamma} \quad (\text{za konusni levak}) \quad (2.11)$$

$$d_{crit} = (1 + 0.00467 \cdot \beta) \cdot \frac{f_c}{\gamma} \quad (\text{za rogljasti levak}) \quad (2.12)$$

Pri izrazima (2.11) i (2.12) ugao β se uzima u stepenima ($^\circ$). Kritična dimenzija otvora d_{crit} , kod konusnih i rogljastih levaka, može se prikazati u opštem obliku kao:

$$d_{crit} = \frac{\sigma_{1a}}{\gamma} \cdot H(\beta) \quad (2.13)$$

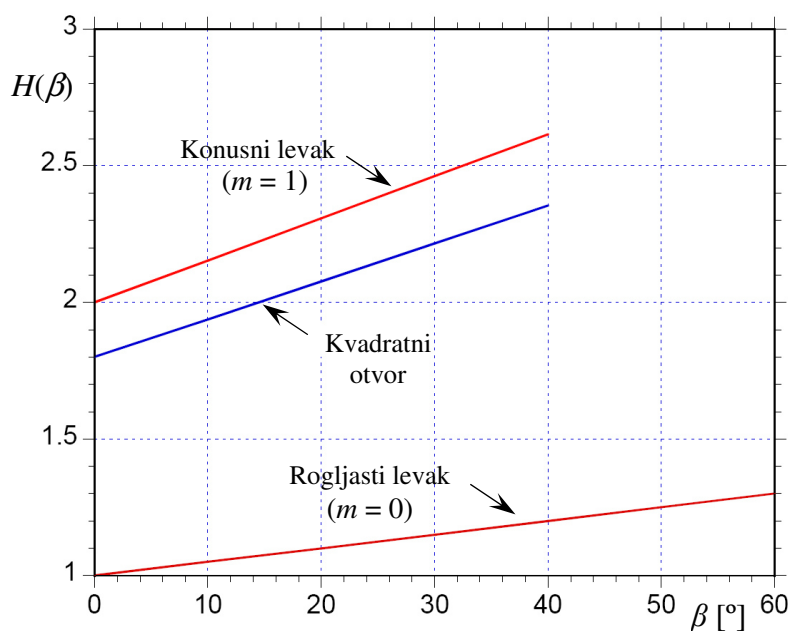
Sa funkcijom $H(\beta)$ se uvodi korekcija kritične dimenzije otvora, prema veličini ugla otklona zida levka β , u zavisnosti od tipa levka. Prema Jenike-u i Leser-u (1963)¹, funkcija $H(\beta)$ se može prikazati u sledećem empirijskom obliku:

$$H(\beta) = \left(\frac{130 + \beta}{65} \right)^m \cdot \left(\frac{200 + \beta}{200} \right)^{1-m} \quad (2.14)$$

gde je m indeksni broj za odgovarajuću vrstu levka:

$m = 1$ (za konusne levke), i

$m = 0$ (za rogljaste levke).



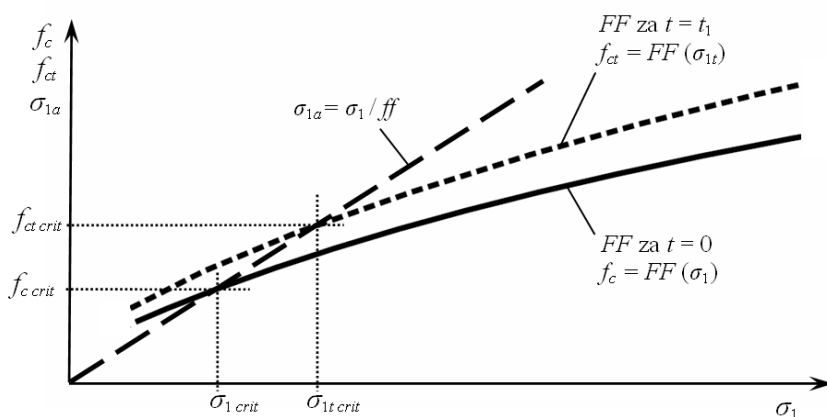
Sl. 24 Funkcija $H(\beta)$, prema [248].

Funkcija $H(\beta)$ prikazana je na sl. 24. Za kvadratne otvore na levku, $H(\beta)$ se uzima kao $0.9 \cdot H(\beta)$ za konusni levak (slučaj $m = 1$). Na ovaj način, izraz (2.13) zamenjuje oba izraza (2.11) i (2.12), prema Roberts-u (2005) [248]. Prema ovim izrazima, određuju se približno iste vrednosti, kod konusnog levka $0.0137 \approx 1/65 = 0.0154$, a kod rogljastog levka $0.00467 \approx 1/200 = 0.005$. Funkcija $H(\beta)$ zamenjuje m_H u izrazu (2.8).

Pri određivanju čvrstoće f_c potrebno je napraviti nekoliko ispitivanja sa različitim vrednostima konsolidacionog pritiska σ_1 . Grafički prikaz ovih vrednosti, uz jednostavne

¹ Jenike A.W. and Leser T. (1963): "A Flow No-Flow Criterion in the Gravity Flow of Powders in Converging Channels", *Proc. 4th Intl. Congress on Rheology*, Pt.3, 125 p. (Citirano prema [248].)

interpolacije između opitnih vrednosti za f_c , dobija se ne-eksplicitan oblik dijagrama, koji se prema Jenike-u naziva *funkcija protoka FF (Flow Function)*.



Sl. 25 Funkcija protoka – FF: trenutna i u vremenu t_1 ; glavni napon u stabilnom luku – σ_{1a} .

Funkcija protoka FF reprezentuje karakteristiku ispitivanog zrnastog materijala (sl. 25):

$$f_c = FF(\sigma_1) \quad (2.15)$$

Kod analize zaustavnog svoda u levku, FF je vezana za r preko napona, u obliku:

$$f_c(r) = FF(\sigma_1(r)) \quad (2.16)$$

Funkcija protoka je prikazana na sl. 25, i dobija se interpolacijom rezultata za nekoliko ispitivanja čvrstoće f_c , sa prethodnim kratkotrajnim opterećenjem uzoraka pod različitim konsolidacionim naponom σ_1 . Ako se napon σ_1 pri ispitivanju drži do vremena t_1 , te nakon toga uzorak ispita do loma, određuje se čvrstoća f_{ct} pri vremenskoj konsolidaciji materijala. Vrednosti čvrstoće f_{ct} su uvek veće od odgovarajućih kod f_c , za isti materijal ispitivan pod istim naponom σ_1 , što vodi povećanju problema usled pojave zaustavnih svodova zbog efekta konsolidacije materijala tokom vremena.

Kako bi se urušavali mogući zaustavni svodovi materijala, glavni napon σ_{1a} u svodu mora biti veći od čvrstoće f_c , tj.:

$$\sigma_{1a}(r) \geq f_c(r) \quad (2.17)$$

Prema Jenike-ovoj teoriji radijalnog naponskog polja materijala u levku, naponi σ_1 su linearni sa r , a prema (2.7) to isto važi i za naponi σ_{1a} . Na osnovu toga, odnos ovih napona predstavlja konstantu za date karakteristike levka i materijala u levku:

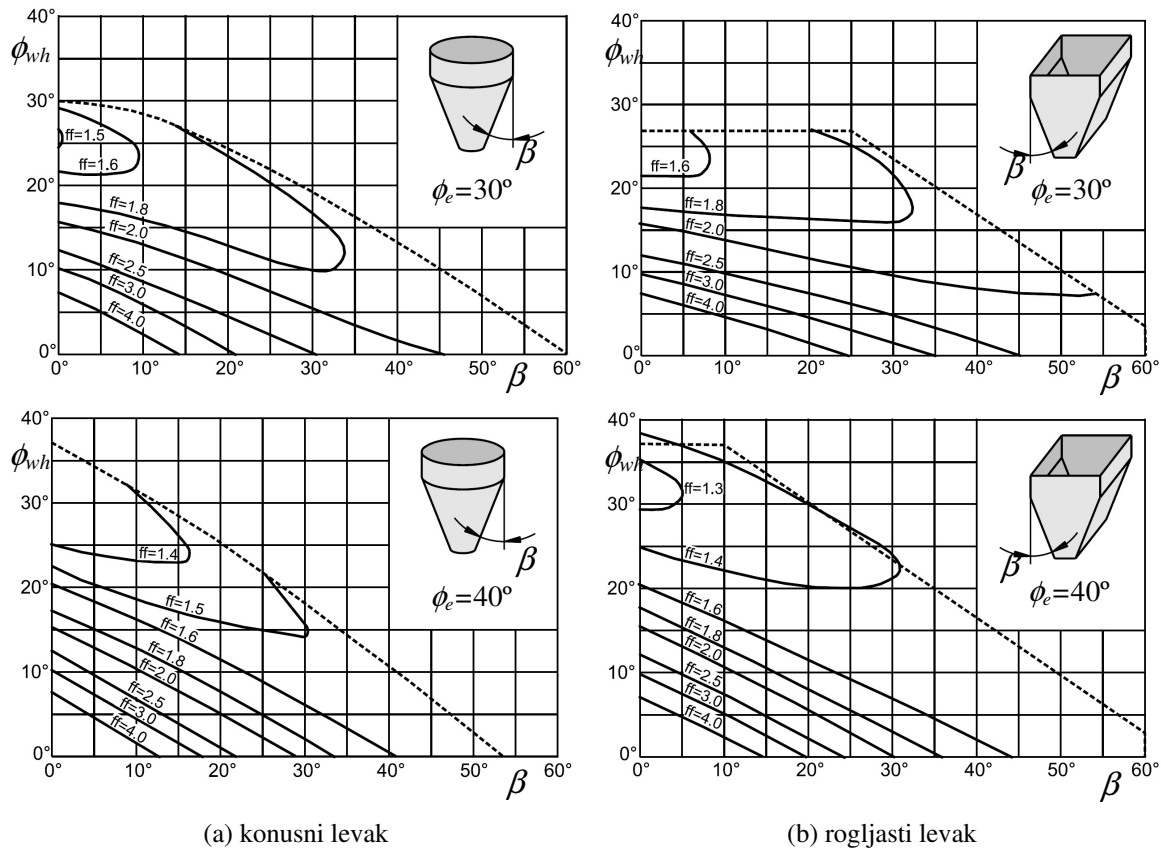
$$\sigma_1(r) = k_{\sigma_1} \cdot r \quad (2.18)$$

$$\sigma_{1a}(r) = k_{\sigma_{1a}} \cdot r \quad (2.19)$$

$$ff = \sigma_1(r) / \sigma_{1a}(r) = \text{const} = \sigma_1 / \sigma_{1a} \quad (2.20)$$

Dati odnos napona ff se naziva *faktor proticanja (flow factor)*, kako je to definisao Jenike u *Bulletin No.108* (1961). Dijagrami faktora proticanja ff , prikazani su u navedenim *Bulletin*-ima, i više puta su reprodukovani na drugim mestima (Röck (2004) [249]).

Dijagrami su određeni za određene oblike levaka (npr. konusne, rogljaste, asimetrične poluklinaste levke) i za odgovarajuće vrednosti efektivnog ugla unutrašnjeg trenja materijala ϕ_e (od 30° do 60°).



Sl. 26 Jenike-ovi dijagrami faktora proticanja ff za (a) konusne levke i (b) rogljaste levke, prema Schulze-u [276].

Dijagrami su određeni za određene oblike levaka (npr. konusne, rogljaste, asimetrične poluklinaste levke) i za odgovarajuće vrednosti efektivnog ugla unutrašnjeg trenja materijala ϕ_e (od 30° do 60° , sa korakom od 10°).

Konkretno vrednosti za ff zavise od veličine ugla otklona zida levka β , i ugla trenja materijala o zid levka ϕ_{wh} . Faktor ff je prikazan na sl. 26, u oblasti koja odgovara masovnom protoku materijala u levku, a koja se prostire do crtkaste linije koja prema Jenike-u predstavlja granicu za masovni protok materijala.

Prikazani dijagrami se odnose na konusne i rogljaste levke, i za uglove $\phi_e = 30^\circ$ i $\phi_e = 40^\circ$ (prerađeno iz ref. [276]). Faktor proticanja ff za rogljaste levke, se odnosi na slučajeve sa linijskim otvorom kod kojih je $L > 3 b_o$ (videti sl. 16).

Na osnovu faktora protoka ff koji se određuje pomoću dijagrama na sl. 26, i na osnovu opitno određene funkcije protoka FF , preko preseka linija $f_c = FF(\sigma_1)$ i $\sigma_{1a} = \sigma_1 / ff$ (kako je prikazano na sl. 25), određuje se kritična vrednost glavnog napona u zaustavnom luku i neutegnuta čvrstoće materijala.

Sa ovim se određuje i kritična dimenzija d_{crit} otvora levka, prema sledećim izrazima:

$$\sigma_{1a,crit} = f_{c,crit} \quad (2.21)$$

$$d_{crit} = \frac{\sigma_{1a,crit}}{\gamma} \cdot H(\beta) = \frac{f_{c,crit}}{\gamma} \cdot H(\beta) \quad (2.22)$$

U slučaju konsolidacije u vremenu t_1 , u gornji izraz treba, umesto $f_{c,crit}$, uvesti $f_{ct,crit}$.

Zapreminska težina materijala γ se može uvesti u obliku u kojem zavisi od veličine konsolidacionog napona σ_1 , a koji u nivou zaustavnog luka materijala odgovara kritičnom konsolidacionom naponu $\sigma_{1,crit}$.

U ovom slučaju prethodni izraz prelazi u sledeći:

$$d_{crit} = \frac{f_{c,crit}}{\gamma_{crit}} \cdot H(\beta) \quad (2.23)$$

Nakon određivanja kritične dimenzije otvora d_{crit} prema izrazu (2.22), potrebno je usvojiti projektnu dimenziju otvora levka, jednaku ili veću od kritične:

$$d_o \geq d_{crit} \quad (\text{kod kružnih i kvadratnih otvora}) \quad (2.24)$$

$$b_o \geq d_{crit} \quad (\text{kod linijskih otvora rogljastih levaka}) \quad (2.25)$$

Ovde je sa d_o označen prečnik kružnog otvora, odnosno dužina stranice kvadratnog otvora kod konusnih i osno-simetričnih levaka, a sa b_o je označena širina linijskog otvora kod rogljastih levaka (videti sl. 16).

Pri prikazanoj analizi i dalje ostaje otvoreno pitanje konzervativnosti pri određivanju kritične dimenzije otvora levka d_{crit} , što iziskuje uvođenje odgovarajućih redukcionih faktora, u skladu sa razmatranjima na početku poglavlja kod prikaza komparacije rezultata prema ref. [67] i [68].

U ovde prikazanom *Jenike*-ovom postupku primenjuje se grafičko određivanje faktora protoka ff . Ovaj faktor može da se sračuna primenom odgovarajućih izraza kod *Jenike*-ovog postupka.

Pored *Jenike*-ovog postupka, poznati su i drugi postupci za određivanje faktora proticanja materijala ff . Tako je *Walker* (1966) [325] i (1967) [326] razvio postupak proračuna napona u levku preko ravnoteže na diferencijalnom ravnom sloju materijala i preko toga odredio analitičke izraze za faktor protoka ff .

Posle njega, *Enstad* (1975) [75] i (1977) [76] je razvio teoriju gde je u analizu uveden konveksni diferencijalni sloj materijala. Na osnovu razmatranja uslova ravnoteže na ovom sloju, *Enstad* je formulisao odgovarajuće izraze za faktor ff .

Proračunski postupci *Walker*-a i *Enstad*-a su prihvaćeni u EC1-4 (2006) [38], kod analize opterećenja u levku.

Ako su u pitanju nevezani rastresiti materijali (materijali bez kohezije, ili sa vrlo malom kohezijom), kod kojih je čvrstoća $f_c = 0$, jer se materijal prilikom uklanjanja bočnih zidova odmah raspe pre ispitivanja (sl. 23), dobija se da je prema (2.22) potrebna širina otvora 0, odnosno po logici, da d_{crit} odgovara samo veličini jednog zrna.

Međutim, umesto kohezivnog svoda, ovde se može pojaviti mehanički zaustavni svod kada više zrna – komada materijala obrazuju stabilan prostorni sistem sila na mestima međusobnog kontakta i pri oslanjanju na zidove levka iznad otvora.

Na osnovu analize empirijskih izraza pri pražnjenju materijala kroz otvor rogljastog levka, gde je ustanovljeno smanjenje brzine proticanja materijala pri povećanju veličine zrna, *Гячев* (1968) [352] je ustanovio da je potrebno da širina otvora iznosi najmanje 4 do 6 dimenzija zrna materijala kako ne bi došlo do problema mehaničkog zasvođenja.

Skoro isto navodi *Roberts* (2005) [248], da za osiguranje rizika od pojave mehaničkog zasvođenja, dimenzija otvora levka treba da bude najmanje 4 puta veća od najveće dimenzije zrna.

2.7 Karakteristike zrnastih materijala

Za proračun silosa bitan je pritisak na zidove ćelije silosa od uskladištenog materijala, koji zavisi od njegove zapreminske težine, ugla unutrašnjeg trenja i ugla trenja o zid ćelije, a kod kohezivnih materijala i od kohezije između zrna materijala.

Prema veličini zrna i koheziji razlikuju se:

- *prašinski materijali* sa veličinom zrna manjom od 0.1 mm
- *sitnozrni materijali* sa veličinom zrna do 10 mm
- *srednjzrni materijali* sa veličinom zrna do 30 mm
- *krupnozrni materijali* sa veličinom zrna preko 30 mm
- *kohezivni materijali* koji nastaju obradom biljnog zrnastog materijala (npr. sačma i stočna hrana).

Za razliku od prašinskih materijala kod kojih se javlja kohezija između zrna materijala, kod zrnastih materijala se uobičajeno ne ispoljava kohezija između zrna ili je ona po svojoj veličini zanemarljivo mala.

2.7.1 Zapreminska masa i težina

Zapreminska masa ρ (gustina materijala - *density*) je masa materijala podeljena sa zapreminom koju ovaj zauzima (uključujući i prazan prostor između zrna materijala). Predstavlja jedan od tri osnovna parametra zrnastih materijala, pored koeficijenta trenja i koeficijenta bočnog pritiska, koji se koriste pri određivanju pritiska od uskladištenog materijala u bunkerima i silosima. Pri određivanju kapaciteta nekog skladišnog prostora potrebno je poznavati zapreminsku masu materijala koji treba da se skladišti.

Prema zapreminskoj masi zrnasti materijali se dele na:

- *lake* (treset, piljevina, mekinje, brašno žitarica) $\rho < 600 \text{ kg/m}^3$,
- *srednje teške* (zrna žitarica, veštačka đubriva) $600 < \rho \leq 1100 \text{ kg/m}^3$,
- *teške* (pesak, šljunak) $1100 < \rho \leq 2000 \text{ kg/m}^3$, i
- *vrlo teške* (rude, kameni materijal) $\rho > 2000 \text{ kg/m}^3$.

Tabela 3. Zapreminska masa, poroznost i specifična težina za neke zrnaste materijale, prema standardu ASAE D241.4.

Zrnasti materijal	Zapreminska masa [kg/m^3]	Vlažnost [%]	Poroznost [%]	Specifična težina [kN/m^3]
Ječam	618	9.7-10.7	39.5-57.6	12.1-13.3
Uljana repica	669	6.5-6.7	38.4-38.9	11.0-11.5
Kukuruz	721	9-15	40.0-44.0	11.9-13.0
Laneno seme	721	5.8	34.6	11.0
Ovas	412	9.4-10.3	47.6-55.5	9.5-10.6
Pirinač	579	11.9-12.4	46.5-50.4	11.1-11.2
Raž	721	9.7	41.2	12.3
Soja	772	6.9-7.0	33.8-36.1	11.3-11.8
Pšenica	772	9.8	39.6-42.6	12.9-13.2

Zapreminska masa, vlažnost, poroznost i specifična težina zrna kod zrnastog materijala prikazane su u tabeli 3, za neke agrokulture prema standardu ASAE D241.4¹.

Uobičajena metoda za određivanje usipne zapreminske mase se zasniva na merenju mase zrnastog materijala koji se slobodno sipa u cilindričnu posudu konstantne zapremine, npr. od 1 dm³. Ove vrednosti, kao i vrednosti zapreminske mase prikazane u tabeli 3, se razlikuju od proračunskih vrednosti zapreminske mase ovih materijala u silosima (kod proračuna opterećenja u silosima računa se sa gornjim karakterističnim vrednostima zapreminske mase, odnosno zapreminske težine).

Kod materijala u silosima, zapreminska masa je u funkciji radnih pritisaka, vlažnosti materijala, načina i brzine punjenja ćelija, kao i visine pada materijala prilikom punjenja. Pored toga, zapreminska masa može biti različita kod različitih vrsta za jedan isti zrnasti materijala (različite vrste pšenice, i slično). Kod određivanja kapaciteta skladištenja, potrebno je odrediti zapreminsku masu koja realno odgovara zbijenosti materijala u silosu. Preporučuje se da se zapreminska masa u ovom slučaju uzme kao srednja vrednost povećanoj za 6%, u odnosu na merenje zapreminske mase materijala u posudi zapremine od 1 hl, prema Britton-u i Moysey-u (1986)².

Postoje ispitivanja zapreminske mase pri konstantnom potresanju posude sa poznatom masom materijala. U ovom slučaju određuje se najmanja zapremina materijala pri zadatim vibracijama sa konstantnom amplitudom i frekvencijom. Ovako određena zapreminska masa materijala je veća od proste usipne zapreminske mase za nekoliko procenata, a u nekim slučajevima može biti veća i preko 20%.

Mnogi istraživači su upoređivali zapreminsku masu pri punjenju materijala u vidu raspršenog usipanja (u obliku "kiše" materijala) i u vidu centričnog usipanja materijala (u obliku "potoka" materijala). Zaključeno je da punjenje u vidu "kiše" materijala, odgovara relativnom povećanju zapreminske mase reda veličine od 8 do 10%.

Zapreminska težina γ zrnastog materijala kod proračuna silosnih opterećenja, treba da odgovara najvećoj zapreminskoj težini koja se može postići pri normalnim uslovima eksploatacije. Kako se sva opterećenja povećavaju sa povećanjem zapreminske težine, proračun silosa treba zasnivati na najvećoj očekivanoj vrednosti. Faktor koji direktno utiče na težinu γ su konsolidacija materijala, kako pod naponom, tako i sa vremenom. Proračunska vrednost treba da obuhvati moguća odstupanja usled različitih uslova pri laboratorijskim merenjima i stvarnih radnih uslova kod skladištenja materijala.

2.7.2 Poroznost i zbijenost

Poroznost ε , je udeo zapremine fluidnog dela kod ukupne zapremine zrnastog materijala. Kod običnih materijala koji se skladište u silosima međuprostor između zrna ispunjen je vazduhom.

Zapreminska masa ρ_b (*bulk density*) zrnastog materijala, posmatranog kao sklop čvrste i fluidne frakcije, se može prikazati u sledećem obliku::

$$\rho_b = (1 - \varepsilon) \cdot \rho_s + \varepsilon \cdot \rho_f \cong (1 - \varepsilon) \cdot \rho_s = \eta \cdot \rho_s = \gamma / g \quad (2.26)$$

¹ ASAE Standards (1999): D241.4 - *Density, specific gravity, and mass-moisture relationships of grain for storage*. St. Joseph, MI, ASAE. (Citirano prema [191].)

² Britton M.G., Moysey E.B. (1986): "Grain properties in the proposed new engineering practice on bin loads." *ASAE Paper No. 86-4502*, St. Joseph, MI. (Citirano prema [191].)

gde su:

ρ_s - specifična masa zrnastog materijala;

ρ_f - specifična masa fluida (obično je u pitanju vazduh, a može biti i tečnost);

$\varepsilon = \frac{V_f}{V_{tot}}$ - poroznost ili udeo zapremine fluidnog dela u ukupnoj zapremini:

$$\varepsilon = \frac{\rho_s - \rho_b}{\rho_s - \rho_f} \cong 1 - \frac{\rho_b}{\rho_s} \quad (2.27)$$

$\eta = 1 - \varepsilon$ - udeo čvrste frakcije – gustina pakovanja zrnastog materijala;

$\gamma = \rho_b \cdot g$ - zapreminska težina zrnastog materijala; i

g - ubrzanje sile zemljine teže ($\sim 9.81 \text{ m/s}^2$).

U izrazima (2.26) i (2.27), udeo mase vazduha se može zanemariti, s obzirom na to da je masa vazduha u odnosu na masu uobičajenih zrnastih materijala manja oko 1000 puta.

Veličina pornog prostora oko zrna materijala može se izraziti i sa odnosom e , koji se definiše kao odnos zapremine pornog prostora i zapremine čvrstih zrna:

$$e = \frac{V_p}{V_s} \quad (2.28)$$

U nekim zemljama ovaj količnik se koristi češće od poroznosti definisane sa ε , kako je e odnos zapremine pora prema fiksnoj zapremini čvrstih čestica. Budući da je totalna zapremina uskladištenog materijala jednaka sumi zapremine pora i zapremine čestica, $V_{tot} = V_f + V_s$, ovi koeficijenti stoje u sledećim odnosima:

$$e = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \quad (2.29)$$

$$\varepsilon = \frac{e}{1 + e} \quad (2.30)$$

Zbijenost pakovanja zrna η je komplement poroznosti materijala. Predstavlja odnos zapremine čvrstih čestica prema ukupnoj zapremini materijala:

$$\eta = 1 - \varepsilon = \frac{V_s}{V_{tot}} \quad (2.31)$$

Zrnasti materijal se u nekim analizama razmatra kao zamenjujući slog (pakovanje) jednakih sfera, gde jedna sfera odgovara jednom zrnu materijala. U okviru analize pakovanja jednakih sfera, *Kepler* je 1611. god. postavio hipotezu da je blisko kubno (odnosno heksagonalno) pakovanje, najzbijenije moguće pakovanje jednakih sfera. Ovo tvrđenje je od tada poznato kao *Kepler-ova konjunktura* (nagađanje). Blisko kubno i blisko heksagonalno pakovanja su jednake zbijenosti, i ona iznosi $\eta = 0.7405 = 74.05\%$.

Vrlo složeni matematički dokaz *Kepler-ove* konjunktore je dao *Hales* u 1998. god. Najveća zbijenost pakovanja jednakih elipsoida je bila dokazana ranije nego za jednake sfere, pri čemu je zanimljivo to da je najveća zbijenost kod ovih veća nego kod sfera. Zbijenost za nekoliko tipova pakovanja sfera je prikazana u okviru tabele 4. Zbijenost pri slučajnom pakovanju jednakih sfera su analizirali *Jaeger* i *Nagel* (1992).

Tabela 4. Zbijenost za različite tipova pakovanja jednakih sfera.

Tip pakovanja	η	aprosk. η
tetraedalna rešetka	$\pi\sqrt{3}/16$	0.3401
kubna rešetka	$\pi/6$	0.5236
heksagonalna rešetka	$\pi/(3\sqrt{3})$	0.6046
slučajno pakovanje	-	0.6400
blisko kubno pakovanje	$\pi/(3\sqrt{2})$	0.7405
blisko heksagonalno pakovanje	$\pi/(3\sqrt{2})$	0.7405

Može se smatrati da je poroznost ε , kod uskladištenih rastresitih materijala sličnih vrednosti kao kod poroznosti zemljišta, i da je reda veličine između 0.30 i 0.45; ili kako se poroznost uobičajeno izražava u procentima, između 30% i 45%. Ovo odgovara zbijenosti pakovanja η između 0.55 i 0.70, odnosno između 55% i 70%. Poroznost za neke zrnaste materijale je prikazana u tabeli 3.

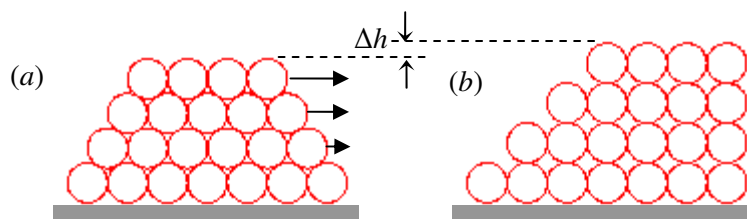
2.7.3 Dilatancija

Dilatancija je fenomen koji se javlja pri smicanju zrnastog materijala i najjednostavnije se može opisati kao pojava ekspanzije (povećanja zapremine) kod zbijenog materijala pri njegovom smicanju, pri čemu materijal postaje manje zbijen.

Kod dilatancije manje zbijenih materijala, pri smicanju dolazi do kontrakcije, odnosno smanjenja zapremine materijala. Dilatanciju pri smičućim deformacijama peska je otkrio *Lord Reynolds* (1885)¹.

Ekspanzija zbijenog materijala prilikom smicanja je prikazana na sl. 27, na primeru poređanih jednakih diskova u vertikalnoj ravni, gde se prostor između prikazanih diskova povećava posle zadatog pomeranja diskova usled smicanja, uz relativno povećanje visine redova Δh .

Povećanje zapremine zrnastog materijala pri smicanju, koje se ogleda kroz povećanje visne Δh , kako je prikazano na sl. 27, kod protoka materijala u silosu izaziva povećanje horizontalnih pritisaka koji deluju na zidove ćelije.



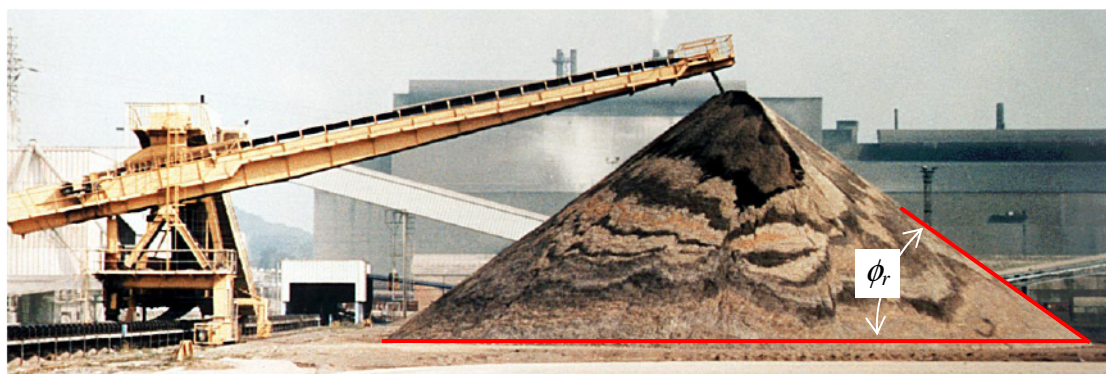
Sl. 27 Dilatancija pri smicanju diskova u ravni: (a) stanje pre i (b) stanje posle pomeranja.

¹ Reynolds O. (1885): On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. *Philosophical Magazine*, 20, 468. (Citirano prema [319].)

2.7.4 Ugao prirodnog nagiba

Ugao prirodnog nagiba ϕ_r (angle of repose) je ugao nagiba nasipne kupe, koja se formira centričnim nasipanjem materijala iznad ravne osnove. Pri laboratorijskom ispitivanju, nasipanje materijala ide obično putem levka, koji stoji na potrebnoj visini ili se pomera nagore pri formiranju nasipne kupe uz držanje konstantnog razmaka između nasipnog vrha i ispusta levka. Da bi se pri ispitivanju otklonio uticaj trenja materijala po površini ravnog dna, obično se dno nasipne kupe uokviri uzdignutim kružnim vencem, kako bi se zadržali donji slojevi materijala pri podnožju nasipne kupe. U slučaju nasipanja kroz linijski otvor, od nasutog materijala se formira položena traougaona nasipna prizma. U ovom slučaju, kao i u drugim raznim varijantama nasipanja materijala u praksi, ugao prirodnog nagiba se neznatno razlikuje od ugla određenog pri formiranju nasipne kupe. Uobičajeno se koristi ista vrednost ugla za sve forme nasipa.

Na sl. 28 prikazan je jedan primer otvorenog skladištenja materijala¹, gde je označen ugao prirodnog nagiba ϕ_r kod formirane nasipne kupe.



Sl. 28 Primer formirane nasipne kupe materijala.

U proračunima se obično koristi srednja vrednost rezultata ispitivanja ovog ugla, i to najčešće za određivanje visine nasipne kupe koja se formira na vrhu uskladištenog materijala u silosu pri punjenju ćelije. U nekim analizama se ovaj ugao uzima i za ugao pada depresione površine kratera koji može da nastane pri pražnjenju materijala iz ćelije. U ovom slučaju ugao ϕ_r služi za određivanje dubine depresionog kratera. Pri centričnom pražnjenju materijala kod kružnih ćelija, krater se formira u obliku obrnute kupe.

Postojanje kratera na gornjoj površini materijala pri pražnjenju ćelije, ukazuje na *unutrašnji protok* materijala u ćeliji.

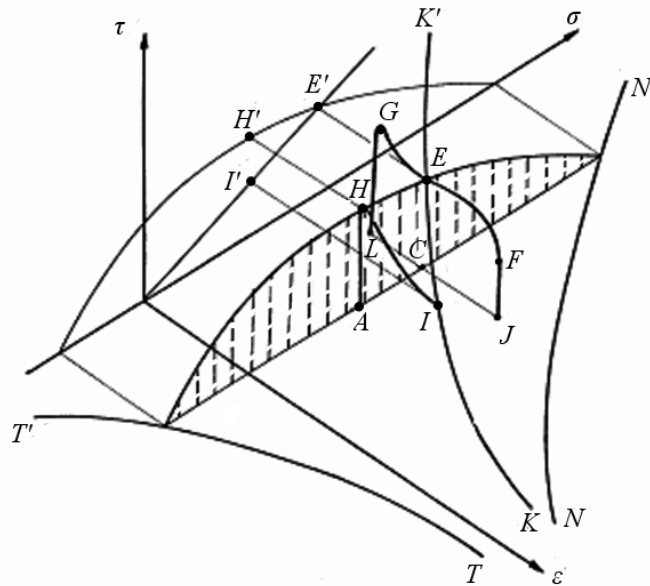
U slučaju *masovnog protoka* materijala pri pražnjenju, kada se materijal postepeno spušta po visini ćelije, nasipna kupa se rastresa, a gornja površina materijala se vremenom zaobljava, pri čemu se visina konveksnog nasipnog dela postepeno smanjuje u odnosu na prvobitnu visinu nasipne kupe.

Kod nevezanih materijala ugao prirodnog nagiba je manji od ugla unutrašnjeg trenja. Kada u fazi projektovanja nije poznata konkretna vrednost za ugao prirodnog nagiba, kao proračunska vrednost se obično uzima srednja ili, kao još bolja aproksimacija, donja karakteristična vrednost ugla unutrašnjeg trenja materijala.

¹ Na slici je skiciran ugao prirodnog nagiba nasipne kupe materijala na foto-snimku nasipne kupe kod industrijskog postrojenja Shiva Prasad Pudosaini.

2.7.5 Granično stanje zrnastih materijala

Lom zrnastih materijala sličan je lomu drugih materijala, i javlja se u obliku povećanja relativne deformacije bez daljeg prirasta opterećenja. Za zrnaste materijale koji se skladište, pod lomom se podrazumeva povećanje relativnih smičućih deformacija, pri čemu zrna materijala menjaju svoj međusobni položaj u promenljivoj prostornoj rešetki kontaktnih veza. Pri ovim pomeranjima zrna proklizavaju jedno preko drugog, uz moguću pojavu rotacije zrna materijala i translatorno pomeranje koje može biti promenljivo u prostoru i vremenu. Relativne deformacije smicanja pri lomu se mere smičućim uređajima, i na osnovu ovih merenja se određuju *linije loma - zakoni loma materijala (yield loci)*. Linija loma zrnastog materijala zavisi od prethodno ostvarene konsolidacije materijala pod zadatim normalnim naponom i, za neke slučajeve bitne u praksi, od proteklog vremena pri skladištenju, odnosno prethodnog perioda mirovanja materijala pod zadatim (ili u praksi radnim) stanjem napona. Da bi se zrnasti materijal stavio u pokret, npr. pri isticanju iz ćelije silosa, stanje napona zrnastog materijala mora biti takvo da odgovarajući *Mohr-ov krug napona* dodiruje liniju loma zrnastog materijala.



Sl. 29 Dijagram stanja kohezivnog zrnastog materijala.

Većina karakteristika zrnastih materijala zavise od gustine pakovanja zrna, odnosno od poroznosti zrnastog materijala ε . Pri konstantnoj temperaturi, vlažnosti i podjednako trajanju prethodne konsolidacije materijala, može se odrediti veza između karakteristika zrnastog materijala pri određenom stanju naponu i poroznosti ε . Ovi naponi proizvode klizanje međuslojeva zrnastog materijala. Klizanje zavisi od napona koji deluju na smičuću kliznu površinu, odnosno od delujućeg normalnog napona σ i smičućeg napona τ u zrnastom materijalu, kao i od poroznosti ε . Na ovaj način lom zrnastog materijala se može prikazati kao funkcija $f(\varepsilon, \sigma, \tau) = 0$ u sistemu $\varepsilon - \sigma - \tau$. Grafički prikaz ove funkcije predstavlja dijagram stanja zrnastog materijala, i ovaj je kvalitativno prikazan na sl. 29 za opšti slučaj kohezivnog zrnastog materijala, prema *Hartge-u* (1997) [111] i *Vogt-u* (2000) [322].

Do loma smicanjem zrnastog materijala može doći sa relativnim povećanjem ili sa relativnim smanjenjem zapremine u odnosu na prvobitnu zapreminu materijala. Ovo

odgovara slučajevima sa povećanjem poroznosti i smanjenjem poroznosti materijala. Između ova dva slučaja, postoji kritična linija loma koja odgovara ustaljenom stanju smicanja materijala, pri čemu materijal pri daljem deformisanju ne menja svoju zapreminu, odnosno poroznost. U ovom slučaju, napon smicanja koji prouzrokuje ustaljeno smicanje materijala na ovaj način je nezavisan od prethodne istorije smičuće deformacije materijala. Lom materijala pri ovom kritičnom stanju je prikazan sa krivom KK' na sl. 29.

Sposobnost materijala da se odupire zatezanju je karakteristična za kohezivne zrnaste materijale, i ovaj slučaj je prikazan na sl. 29 sa TT' linijom. Ova linija, kao i NN' linija koja odgovara konsolidaciji zrnastog materijala, postavljene su u ravni $\tau = 0$, i odgovaraju stanju izostatičkog napreznja. Sve tačke sa definisanim vrednostima ($\varepsilon, \sigma, \tau$), koje opisuju stanje loma pri smicanju zrnastog materijala, proizvode jednu površinu na dijagramu stanja, koja se naziva *površina loma pri smicanju*. Kritična linija stanja KK' , na kojoj su postavljena sva ustaljena stanja deformisanja, dele površinu na smičući lom sa povećanjem zapremine (između linija TT' i KK') i smičući lom sa smanjenjem zapremine (između KK' i NN').

Projekcijom linije kritičnog stanja KK' na ravan $\varepsilon = 0$, dobija se linearna zavisnost smičućeg napona τ i normalnog napona σ , koji odgovaraju kritičnoj konsolidaciji zrnastog materijala. Na sl. 29, projekcije tačaka I i E su prikazane kao tačke I' i E' na datoj liniji. Ova linija se naziva *efektivna linija loma – popuštanja* (*effective yield locus*).

Presek vertikalne ravni za posmatranu poroznost ε sa površinom loma predstavlja krivu loma koja odgovara početnom (inicijalnom) stanju loma materijala (gornja kriva šrafirane površine na sl. 29). Deo krive sa ekspanzijom zapremine (između linija TT' i KK') se naziva *linija popuštanja* (*yield locus*), a drugi deo krive se naziva *linija konsolidacije* (*consolidation locus*).

2.7.5.1 Uređaji i postupci za određivanje graničnih stanja

Na osnovu eksperimentalnih ispitivanja je poznato da konsolidacija uzorka materijala pod početnim delovanjem napona pritiska σ_1 , povećava prag pojave potpune plastične deformacije pri smicanju uzorka. Za realno određivanje ponašanja materijala potrebno je poznavati prethodnu istoriju prekonsolidacije materijala. Procena ostvarene konsolidacije se može odmeriti preko zbijenosti pakovanja (ili preko poroznosti ε), s obzirom na to da se zbijenost pakovanja povećava sa prethodnom konsolidacijom.

Linija loma zrnastog materijala se ne određuje direktno na osnovu eksperimentalnih ispitivanja putem posebnog smičućeg uređaja, nego sa kod ovih ispitivanja određuju dijagrami smičuće sile u funkciji ukupne smičuće deformacije - smičućeg puta ili proteklog vremena od otpočinjanja smicanja. Uzorak materijala se prethodno konsoliduje pod naponom σ_1 , kao kod prve skice na sl. 23, a pre nego što počne postupak smicanja uzorka. Tokom ispitivanja materijal se drži pod konstantnim normalnim naponom $\sigma \leq \sigma_1$. Pri smicanju uzorka materijala određuje se zavisnost između smičuće sile F_S i pređenog puta pri deformaciji uzorka Δx . Ova zavisnost je kvalitativno prikazana na sl. 30, prema Hartge-u (1997) [111].

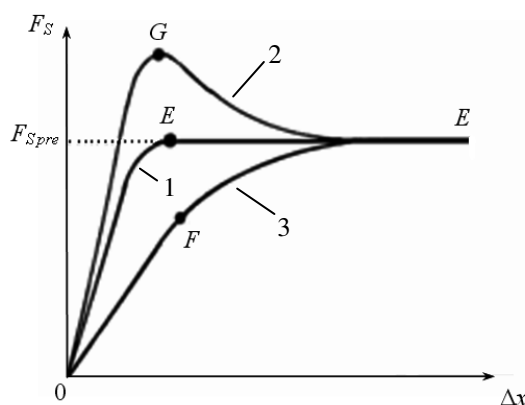
Kriva 1 na sl. 30, prikazuje zavisnost smičuće sile i napredak puta smicanja za *kritično konsolidovani* uzorak zrnastog materijala. U početku materijal se deformiše elastično, nakon čega dostiže prag plastičnog nivoa u tački E . Plastična deformacija počinje od tačke E , i odvija se pod konstantnom zapreminom materijala, odnosno pri konstantnoj

poroznosti ε . Od ove tačke nema promene kod smičuće sile $F_S = F_{Spre}$ (kritična sila smicanja, sila "presmicanja"). Ovaj slučaj smicanja odgovara liniji CE kod dijagrama stanja na sl. 29. Smičući napon se dobija kao odnos sile smicanja i površine smicanja uzorka A :

$$\tau = F_S / A \quad (2.32)$$

Normalni napon σ , koji deluje upravno na smičuću površinu uzorka, je odnos normalne sile pritiska F_N i smičuće površine uzorka A koja odgovara unutrašnjoj površini ispitne ćelije:

$$\sigma = F_N / A \quad (2.33)$$



Konsolidacije: kriva 1 (0-EE) – kritična; kriva 2 (0-GE) – nadkritična; i kriva 3 (0-FE) – podkritična.

Sl. 30 Dijagrami smičuće sile u funkciji smičućeg pomeranja.

Kriva 2 na sl. 30, prikazuje zavisnost $F_S - \Delta x$ za *nadkritično konsolidovan* uzorak zrnastog materijala. Nakon dostizanja praga plastičnosti (tačka G), smičuća sila dostiže svoj maksimum. Nakon tačke G odvija se plastična deformacija sa povećanjem zapremine, tj. dolazi do povećanja poroznosti, pri čemu sila smicanja opada. Na sl. 29 ovaj slučaj je prikazan sa linijom LGE .

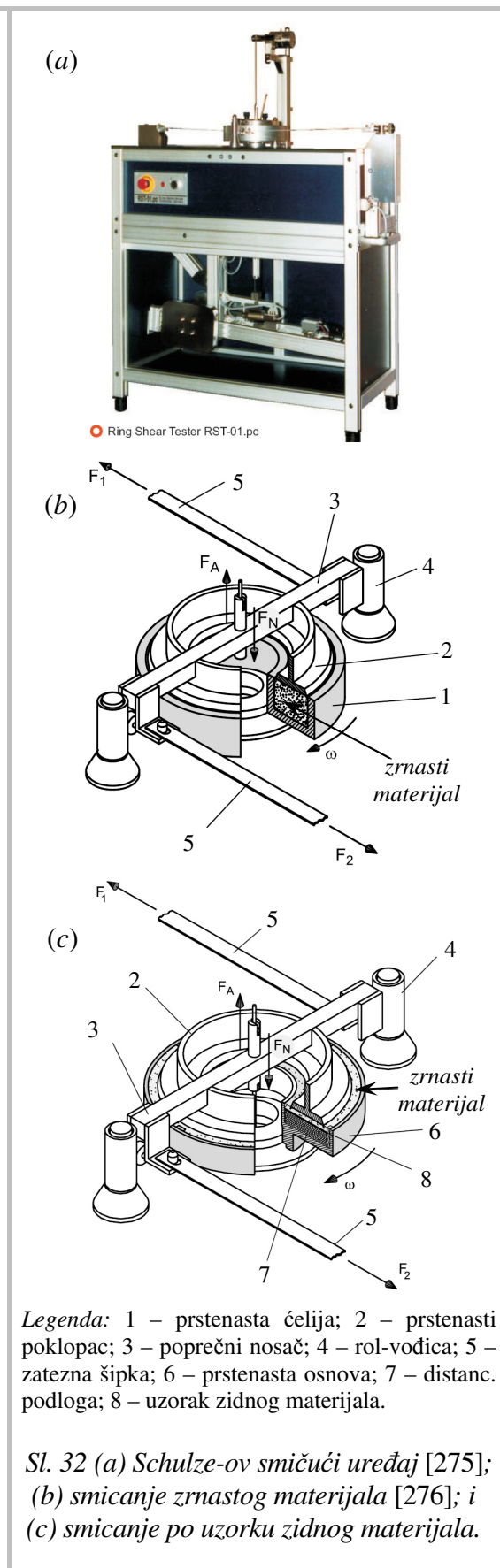
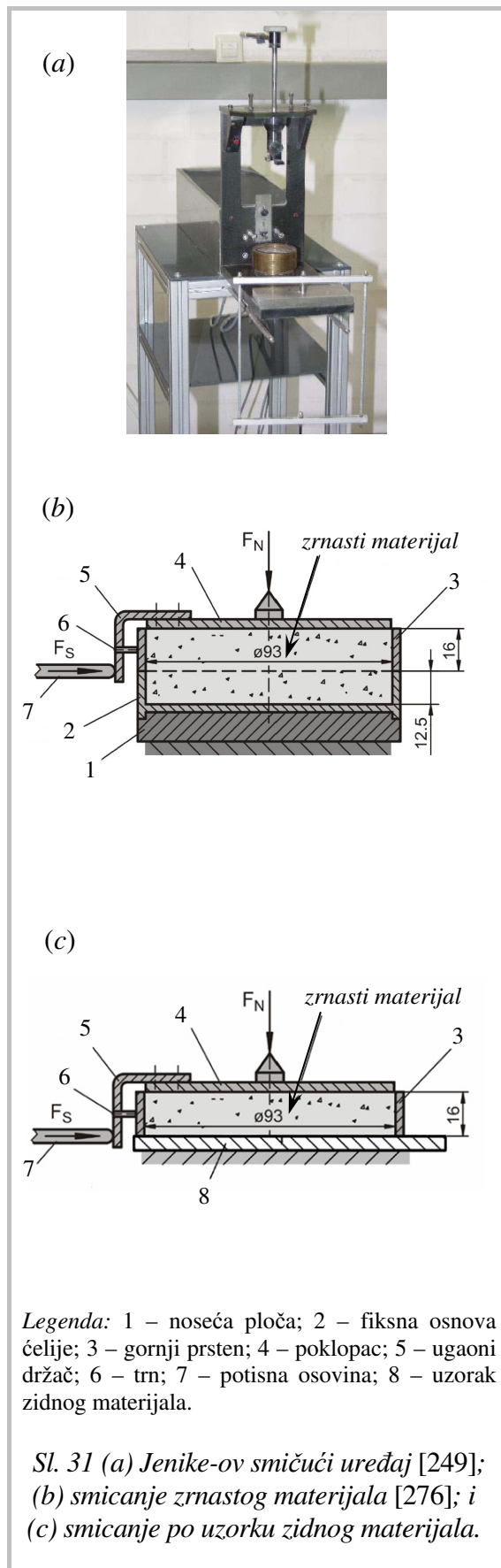
Kriva 3 na sl. 30, prikazuje zavisnost $F_S - \Delta x$ za *podkritično konsolidovan* uzorak zrnastog materijala. U ovom slučaju normalni napon $\sigma > \sigma_1 = \sigma_{pre}$ ($F_N > F_{Npre}$). Ovde se odvija elastična deformacije do tačke F , a dalje počinje plastična deformacija sa smanjenjem zapremine materijala, odnosno sa smanjenjem poroznosti materijala. Odgovarajuća kriva na sl. 29 je prikazana kao kriva JFE .

Standardni uređaji za ispitivanje smicanja materijala su: *Jenike*-ov smičući uređaj koji je prikazan na sl. 31 (a) (*Röck* (2004) [249]), i *Schulze*-ov smičući uređaj koji je prikazan na sl. 32 (a) (*Schulze* (2001-9) [275]).

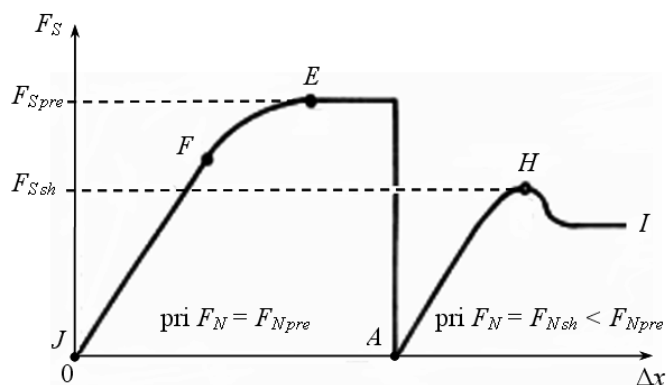
Kod *Jenike*-ovog uređaja, oblik smičuće ćelije je u osnovi kružan, a pri ispitivanju smicanja, kako je prikazano na sl. 31 (b), prema [276], gornji deo smičuće ćelije translatorno se pomera pri smicanju uzorka (*translaciona smičuća ćelija*).

Kod *Schulze*-ovog uređaja smičuća ćelija je u osnovi prstenastog oblika, a kod ispitivanja smicanja materijala, što je prikazano na sl. 32 (b) prema [276], donji deo ćelije se u osnovi rotira pri ravnomernom povećanju centralnog ugla ω (*torziona/prstenasta smičuća ćelija*).

Jenike je modifikovao smičući uređaj koji se koristi pri ispitivanju smičuće otpornosti u mehanici tla, i razvio standardnu metodu ispitivanja zrnastih materijala.



Smičući uređaj se sastoji od pogonskog dela i smičuće ćelije. Na sl. 31 (b) prikazana je smičuća ćelija postavljena za određivanje unutrašnjeg trenja zrnastog materijala, a na sl. 31 (c), prema [276], prikazan je shematski raspored elemenata ćelije pri merenju ugla trenja materijala o uzorak zida silosa.



Sl. 33 Dijagram odnosa smičuće sile i smičućeg pomeranja

Priprema uzorka pre ispitivanja odgovara podkritičnoj konsolidaciji materijala, koja je neznatno manja od kritične konsolidacije. Standardni postupak ispitivanja smičućeg loma materijala se može opisati pomoću dijagrama promene smičuće sile u odnosu na povećanje pređenog puta pri smicanju uzorka materijala, kako je to kvalitativno prikazano na sl. 33, prema Hartge-u (1997) [111]. Uzorak zrnastog materijala se prvo optereti sa normalnom silom F_N , uz koju se postepeno uvodi delovanje smičuće sile F_S . Tokom procesa smicanja, elastična deformacija se pruža do tačke F na dijagramu. Tokom daljeg smicanja uzorak se konsoliduje sve do tačke E gde smičuća sila dostiže konstantni nivo. U tački E počinje stanje ustaljenog smicanja. Zrnasti materijal je kritično konsolidovan prema sili F_{Npre} i odgovara mu maksimalna sila smicanja F_{Spre} . Prema ispitivanju ove sile (F_{Npre} , F_{Spre}) su vezane za odgovarajuću poroznost zrnastog materijala. Pri određivanju linije loma jednako prekonsolidovanog uzorka, nanosi se konstantna normalna sila $F_N = F_{Npre}$. Smičuća sila se povećava sve dok se ne dostigne ustaljeno stanje smicanja ($F_S = F_{Spre} = const.$). Ponavljanjem smičućih testova pod različitim normalnim opterećenjem F_N ($F_N < F_{Npre}$) dobijaju se maksimalne smičuće sile za varirane vrednosti normalne sile F_N . Deljenjem normalnih i smičućih sila sa površinom poprečnog preseka A smičuće ćelije, određuju se normalni napon σ i smičući napon τ .

Jenike-ov smičuća ćelija se sastoji od zatvorenog prstena na dnu, prstena sa istim prečnikom (gornji prsten) koji leži preko donjeg prstena, i poklopca. Uzorak zrnastog materijala se usipa u smičuću ćeliju (sl. 31). Poklopac se centrično opterećuje sa normalnom silom F_N . U dodatku, držač se fiksira za poklopac, i gornji deo smičuće ćelije se pomera horizontalno po osnovi fiksiranog donjeg prstena sa motornim potiskivanjem osovine koja gura držač gornjeg prstena. Pri tome se meri veličina sile F_S (smičuća sila) koja deluje na osovinu. Usled pomeranja gornjeg prstena sa poklopcem nasuprot fiksnom donjem prstenu, dolazi do smicanja zrnastog materijala. Normalni napon σ i smičući napon τ se određuju delenjem normalne sile F_N i smičuće sile F_S sa površinom poprečnog preseka A smičuće ćelije (smičuća površina) respektivno.

Raspored na sl. 31 (c), prema [276], se koristi za merenje naprezanja na zidu i razlikuje se od rasporeda na sl. 31 (b) u sledećim detaljima: donji prsten 2 je zamenjen sa uzorkom zidnog materijala 8. U ovom slučaju se određuje smičuća sila F_{Sw} , koja je potrebna kako

bi se savladala sila trenja između uzorka zrnastog materijala i uzorka zidne površine silosa, uz variranje veličine normalne sile F_{Nw} .

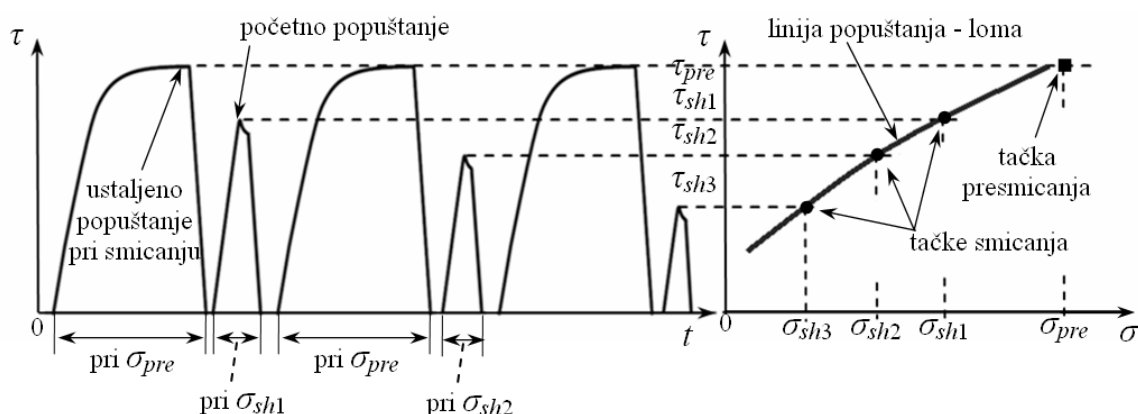
Smičući uređaj, prikazan na sl. 31, može se koristiti za određivanje zakona tečenja (*yield loci*) i za određivanje vremenskog zakona tečenja (*time yield loci*).

Pri smicanju uzorka zrnastog materijala primenom *Schulze*-ovog smičućeg uređaja (sl. 32) sa prstenastom/torzionom smičućom ćelijom, preko uzorka materijala se postavlja poklopac podesnog oblika sa hrapavom donjom stranom. Normalni napon σ se nanosi preko poklopca delovanjem normalne sile F_N . Pri smicanju poklopac i donji prsten smičuće ćelije rotiraju jedan nasuprot drugog, usled dejstva obrtnog momenta M . Obrtni moment u osnovi se meri preko sila u zateznim šipkama i konvertuje u smičući napon τ . Pri primeni prstenastog smičućeg uređaja nije potrebno sprovesti složenu ručnu pripremu uzorka zrnastog materijala, koja iziskuje određeno vreme rada operatera i potrebni nivo prakse. Zbog toga je prstenasti smičući uređaj sa svojim automatskim radom pogodniji od *Jenike*-ovog uređaja.

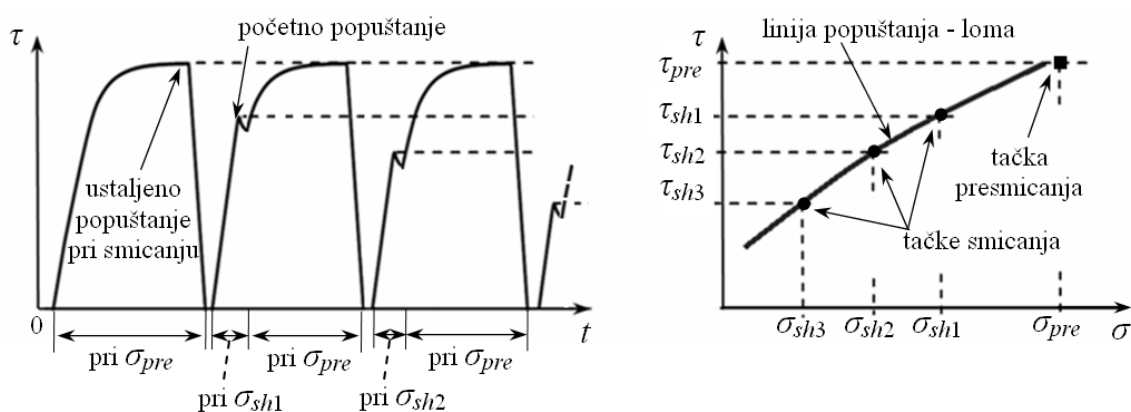
Kod primene *Jenike*-ovog uređaja, uzorak se napreže sa normalnim naponom σ_{pre} koji se postiže zadavanjem normalne sile F_N . Uzorak se zatim izlaže smicanju delovanjem sile F_S , pri čemu se povećava smičući napon. Pri tome, povećava se zapreminska masa uzorka. Nakon izvesnog vremena, pri smicanju prevladavaju konstantna zapreminska masa i konstantni smičući napon τ_{pre} . Obe ove vrednosti su u funkciji normalnog napona σ_{pre} kao parametra ispitivanja smicanja uzorka materijala. Ovo znači da svakom normalnom naponu σ_{pre} odgovaraju posebne vrednosti konstantne zapreminske mase i smičućeg napona.

Deformacija zrnastog materijala pri konstantnim normalnim i smičućim naponima se naziva ustaljeno stanje proticanja (*steady-state flow*), a celokupan proces koji dovodi do ustaljenog proticanja se naziva "presmicanje" ("*preshear*"). Presmicanje se zaustavlja kada se postigne ustaljeno stanje smicanja povlačenjem potisne osovine nazad sve dok nije $F_S = 0$ (odnosno $\tau = 0$). Vrednosti normalnog napona σ_{pre} i smičućeg napona τ_{pre} formiraju tačku presmicanja sa ustaljenim stanjem smicanja kod σ - τ dijagrama (sl. 34, desni dijagram). Nakon toga, uzorak se izlaže ponovo smicanju sa redukovanim normalnim naponom $\sigma_{sh} < \sigma_{pre}$. Ovaj proces se naziva "smicanje" ("*shear*"). Kako se uzorak pri tome smiče pod manjim normalnim opterećenjem nego kod presmicanja, materijal će početi da popušta pod smičućim naponom τ_{sh} (sl. 34). Zrnasti materijal počinje da popušta kada *Mohr*-ov krug napona, koji reprezentuje aktuelno naponsko stanje u zrnastom materijalu, dodirne graničnu liniju loma. Maksimalna vrednost smičućeg napona odgovara početku plastičnog smicanja. Odgovarajući normalni i smičući naponi daju tačku smicanja na liniji loma kod σ - τ dijagramu. Ispitivanje istog uzorka zrnastog materijala se ponavlja, uz presmicanje pod istim normalnim naponom σ_{pre} , i potom sa smicanjem pod različitim naponima $\sigma_{sh} < \sigma_{pre}$. Na osnovu rezultata ispitivanja se formira linija loma u obliku σ - τ dijagrama, kako je prikazano na sl. 34 i sl. 35, prema *Schulze*-u (2008) [276], gde apscisa odgovara vremenu od početka ispitivanja t .

Na sl. 35 prikazano je ispitivanje smicanja pri primeni *Schulze*-ovog smičućeg uređaja. U ovom slučaju zahvaljujući rotacionom smicanju uzorka, smicanje se može kombinovati sa presmicanjem, i ispitivanje izvršiti bez prekidanja ispitivanja zbog ponovnog pripremanja uzorka sa ponavljanjem presmicanja (ovo je potrebno kod primene *Jenike*-ove smičuće ćelije kako je prikazano na sl. 34). Pri jednom ispitivanju određuje se tačka presmicanja i nekoliko tačaka smicanja na dijagramu linije loma. Linija loma, u području ispitivanja, se može aproksimirati pogodnom linijom, a konkretno u ovoj oblasti sa pravom linijom.



Sl. 34 Određivanje linije loma (yield locus) pri primeni Jenike-ovog uređaja.



Sl. 35 Određivanje linije loma (yield locus) pri primeni Schulze-ovog uređaja.

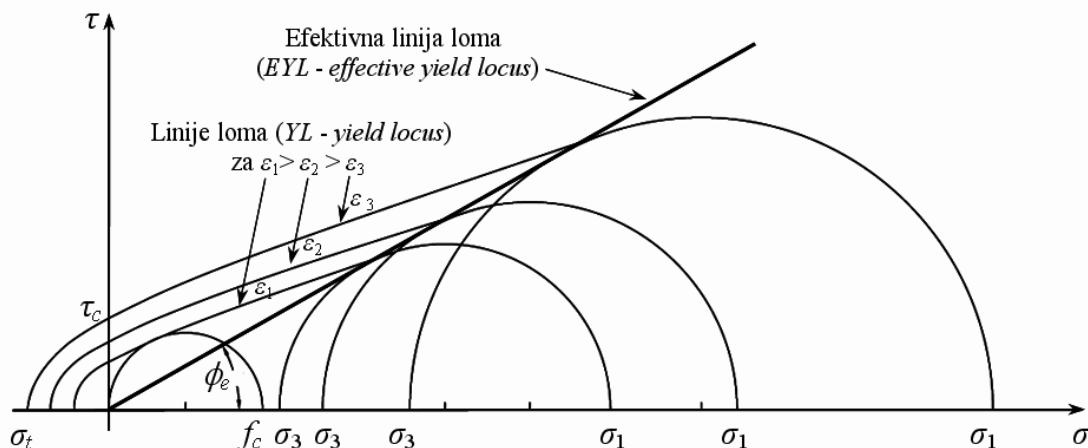
Ako se ispitivanje smicanja ponavlja nekoliko puta, pri čemu se kod svake serije varira normalni napon σ_{pre} pri presmicanju, a uz njega varira normalni napon $\sigma_{sh} < \sigma_{pre}$ pri smicanju, može se odrediti familija linija loma u obliku σ - τ dijagrama.

Ns sl. 36 prikazane su linije loma koje su određene za različite napone σ_{pre} pri presmicanju istog materijala. Ove linije su određene za napone $\sigma_{pre1} < \sigma_{pre2} < \sigma_{pre3}$ pri presmicanju, kojima odgovaraju respektivno zapreminske mase $\rho_{b1} < \rho_{b2} < \rho_{b3}$, kao i poroznosti materijala $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$. Ako je za dati materijal zapreminske mase ρ_b , poznata vrednost specifične mase ρ_s može se sračunati poroznost ε kao $\varepsilon = 1 - \rho_b / \rho_s$.

Svakoj liniji loma odgovara konkretno stanje konsolidacije, konkretna zapreminska masa i konkretna poroznost materijala. Kod svake linije loma se može nacrtati krajnji Mohr-ov krug napona. Na ovom krugu se nalazi tačka presmicanja; tangenta na krug je linija loma, a centar kruga je na σ osi. Presečne tačke Mohr-ovog kruga i σ ose odgovaraju glavnim naponima σ_1 i σ_3 , pri čemu je $\sigma_1 > \sigma_3$. Kod svake linije loma (yield locus) stoje posebne vrednosti za glavni konsolidacioni napon σ_1 , pritisnu čvrstoću f_c neutegnutog materijala, koheziju τ_c , i zateznu čvrstoću σ_t zrnastog materijala.

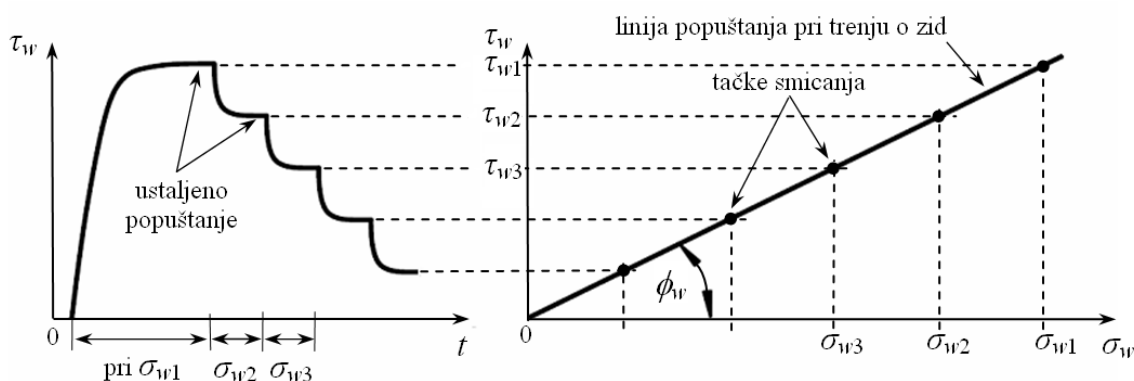
Za mnoge zrnaste materijale krajnji Mohr-ovi naponski krugovi imaju zajedničku tangentu (ili u opštem slučaju krivu anvelopu) koja prolazi kroz koordinantni početak. Ova tangenta (anvelopa) se naziva *efektivna linija loma* (effective yield locus), a ugao koji

zaklapa sa σ osom je *efektivni ugao unutrašnjeg trenja* ϕ_e (*effective angle of internal friction*), kako je to prikazano na sl. 36, prema *Hartge-u* (1997) [111], *Vogt-u* (2000) [322], *Röck-u* (2004) [249] i *Schulze-u* (2008) [276]. Kako najveći *Mohr-ov krug* napona ukazuje na stanje ustaljenog popuštanja materijala, ugao ϕ_e se može upotrebiti kao mera unutrašnjeg trenja pri ustaljenom stanju popuštanja – lomu materijala.



Sl. 36 Linije loma i efektivna linija loma pri različitoj poroznosti materijala.

Trenje materijala o zid se lako može odrediti primenom *Jenike*-ovog ili *Schulze*-ovog uređaja. I u ovom slučaju smičuća sila i normalna sila naneta na uzorak zida deluju po preseku smičuće ćelije površine A . Odgovarajući dijagram se može prikazati sa pravom linijom usled linearne zavisnosti smičućeg napona τ_w od normalnog napona σ_w . Ova linija je *granična linija trenja o zid* (*wall yield locus*). Pri određivanju trenja materijala o zidnu površinu ne treba da dođe do rotacije zrna materijala, već samo do klizanja zrnastog tela po zidu.



Sl. 37 Određivanje linije loma pri trenju materijala o zid/podlogu.

Sklop smičuće ćelije *Jenike*-ovog smičućeg uređaja pri ispitivanju trenja materijala o zid je prikazan na sl. 31 (c). Osnova ćelije 2 je zamenjena sa uzorkom zidne površine 8. Pri određivanju linije popuštanja pri trenju meri se smičuća sila F_{Sw} koja deluje na uzorak zrnastog materijala preko gornjeg prstena 3. Smičuća sila zavisi od normalne sile F_{Nw} . Na osnovu sile F_{Sw} i F_{Nw} , koje deluju na površinu poprečnog preseka smičuće ćelije, određuju se normalni napon σ_w i smičući napon τ_w . Granična linija trenja materijala o zidnu

površinu je uobičajeno prava linija koja prolazi kroz koordinatni početak (sl. 37, prema Schulze-u (2008) [276]).

Ugao trenja materijala o zid ϕ_w se određuje prema izrazu:

$$\phi_w = \arctan(\tau_w / \sigma_w) \quad (2.34)$$

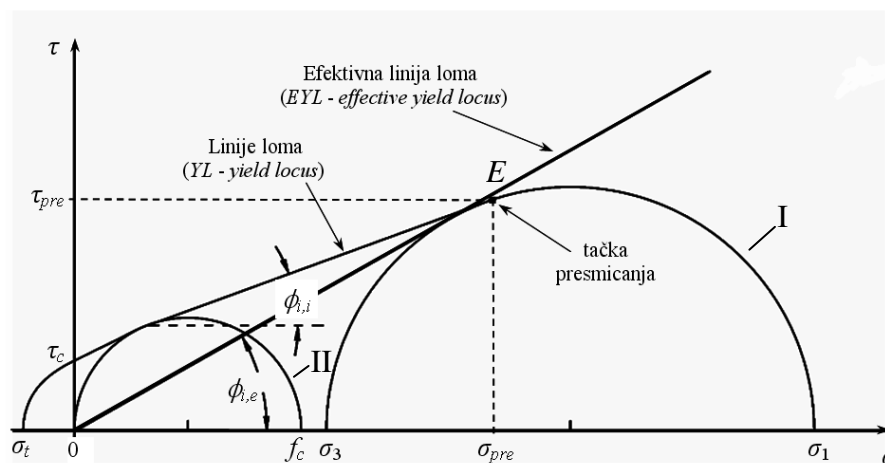
Kod primene Schulze-ovog uređaja, pri ispitivanju trenja materijala o zid, koristi se praktično isti postupak kao kod primene Jenike-ovog uređaja, uz napomenu da se smičuća sila određuje preko obrtnog momenta. Prstenasti donji deo ćelije 1 se zamenjuje sa odgovarajućom osnovom 6, u koju se postavlja distanciona podloga 7 koja drži uzorak zida materijala 8, kako je to prikazano na sl. 32 (c). Kod prstenaste ćelije rotira se osnova ćelije sa uzorkom materijala zida.

Kod primene oba uređaja, pri ispitivanju trenja o uzorak zida, normalna sila, odnosno normalni napon na smičućoj površini, postupno se redukuje korak po korak, i na taj način određuje nekoliko tačaka na graničnoj liniji trenja materijala o površinu zida (sl. 37).

Oba uređaja su namenjena za potrebe analize materijala koji se koriste u hemijskom i procesnom inženjerstvu, tako da su smičuće ćelije relativno malih dimenzija i koriste se za prašinate i sitnozrne materijale koji su obično kohezivne prirode. Kod ispitivanja nevezanih sitnozrnih materijala upotreba ovih uređaja je sasvim odgovarajuća, dok je za analize srednjezrnih ili krupnozrnih materijala potrebno primeniti uređaje za ispitivanje iz oblasti mehanike tla, ili se prave posebni uređaji sa većim dimenzijama ispitnih ćelija.

2.7.5.2 Granična stanja loma materijala pri smicanju i pri trenju o zid

Parametri koji opisuju karakteristike deformisanja zrnastih materijala pri protoku kroz ćeliju se mogu odrediti preko linije loma pri smicanju i linije loma pri trenju materijala o zidove silosa.



Sl. 38 Zakoni loma pri konstantnoj poroznosti materijala.

Linija loma (yield locus) je definisana sa maksimalnim smičućim naponom τ koji uzorak može da podnese pod određenim normalnim naponom σ (sl. 38). Tačka E je tačka koja odgovara stanju napona pri ustaljenom smicanju materijala, pri čemu dalje povećanje deformacije smicanja uzorka ne dovodi do povećanja već dostignutog napona smicanja i gde ne dolazi do promene u poroznosti materijala. U mehanici zrnastih materijala uobičajeno se linija loma aproksimira sa linearnim odnosom između smičućih i normalnih

napona. U stvarnosti, zrnasti materijali imaju liniju popuštanja koja je vrlo bliska pravoj liniji u opsegu radnih napona koji se u ovom slučaju ispituju preko *Jenike*-ovog ili *Schulze*-ovog smičućeg uređaja.

Dva *Mohr*-ova naponska kruga su prikazana na sl. 38, prema *Hartge*-u (1997) [111] i *Vogt*-u (2000) [322]. Linija loma je tangenta na veći *Mohr*-ov krug napona (I) i prolazi kroz inicijalno konsolidaciono stanje napona (tačka *E*), koje stoji na ovom naponskom krugu. Ova tangencijalna tačka se definiše kao krajnja tačka linije loma. Ovaj naponski krug predstavlja napone u uzorku na kraju konsolidacionog postupka. Veći glavni napon pri ustaljenom smicanju se naziva glavni konsolidacioni napon σ_1 (*major consolidation stress*). Linija loma je tangenta i na manji *Mohr*-ov krug napona (I) koji prolazi kroz koordinatni početak. Manji glavni napon kod ovog naponskog kruga je $\sigma_2 = 0$. Veći glavni napon na ovom krugu je čvrstoća pri pritisku f_c neutegnutog materijala (*unconfined yield stress*). Čvrstoća f_c se može odrediti na osnovu geometrije manjeg *Mohr*-ovog kruga, tako da za određivanje čvrstoće f_c nije neophodno sprovesti posebno ispitivanje uzorka materijala pri jednoaksialnoj kompresiji.

Efektivna linija loma (*effective yield locus*) polazi iz koordinatnog početka i tangenta je na veći *Mohr*-ovog krug napona (I). Vrste problema u skladištenju materijala u silosima se odnose kako na stanje ustaljenog proticanja, gde je za analizu bitna efektivna linija loma, tako i na otpočinjanje protoka materijala, gde je bitna inicijalna linija loma. Efektivna linija loma ne zavisi od konkretne vrednosti poroznosti materijala.

Inicijalni ugao unutrašnjeg trenja $\phi_{i,i}$ (*incipient angle of internal friction*) se definiše kao lokalni ugao nagiba na liniju loma. Linearizovana linija loma se najjednostavnije određuje kao zajednička tangenta za oba *Mohr*-ova naponska kruga prikazana na sl. 38. U ovom slučaju je $\phi_{i,i}$ ugao između granice popuštanja – linije loma i σ - ose. Zbog kretanja materijala pri smicanju ovaj ugao se ponekad navodi kao *kinetički ugao unutrašnjeg trenja*. Saglasno prvom nazivu ovog ugla, može se primetiti da bi za *liniju loma* (*yield locus*) preciznije stajao naziv *inicijalna linija loma* (*incipient yield locus*). U propisima i stručnoj literaturi se za ovaj ugao koriste različite oznake: sa ϕ u ACI 313-97 [5], kod AS 3774-1996 [14] nema posebne oznake za ovaj ugao, sa ϕ_c kod EN 1991-4:2006 [38], a u nekim referencama i sa ϕ_i ili φ_i ili φ .

Efektivni ugao unutrašnjeg trenja $\phi_{i,e}$ (*effective angle of internal friction*) je ugao između σ - ose i efektivne granice popuštanja – efektivne linije loma. Ovaj ugao¹ je mera unutrašnjeg trenja pri ustaljenom stanju smicanja i vrlo je bitan proračunski parametar. U ovom radu se u daljem tekstu, koristi oznaka ϕ_i za ovaj ugao, i on se navodi kao *ugao unutrašnjeg trenja*, što je u skladu sa EN 1991-4:2006 [38].

Kod nevezanih materijala obično ne dolazi do problema kod proticanja materijala. U slučaju prašinstih materijala, atehzione sile između pojedinačnih zrna, tj. *van den Waals*-ove sile, postaju sve značajnije i zrnasti materijal postaje sve više kohezivan sa smanjenjem dimenzije zrna (npr. kod brašna). Ovo važi i pri povećanju sadržaja vlage u zrnastom materijalu, pri čemu formirani vodeni svodovi između zrna povećavaju atehzione sile.

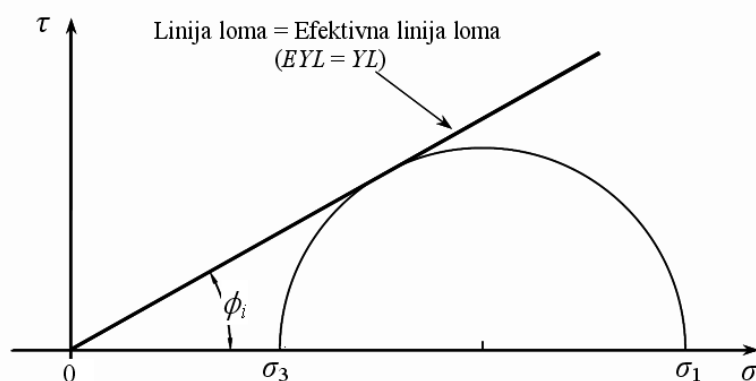
Kod nevezanih materijala nema kohezije ili je ona vrlo mala veličina koja se može zanemariti. U ovom slučaju sledi da je čvrstoća nevezanog materijala $f_c = 0$, odakle se II

¹ U propisima i stručnoj literaturi se ovaj ugao različito označava: sa δ u ACI 313-97 [5], sa ϕ_e ili φ_e u raznim referencama, i sa ϕ_i kod AS 3774-1996 [14] i EN 1991-4:2006 [38]. U EN 1991-4, ugao ϕ_i se navodi kao *ugao unutrašnjeg trenja*, a kod AS 3774 kao *efektivni ugao unutrašnjeg trenja*.

Mohr-ov krug napona (sl. 38) svodi na tačku koja odgovara koordinatnom početku. Linije loma koincidiraju, odnosno prelaze u jednu liniju loma (sl. 39). Uglovi linija loma su u ovom slučaju jednaki ($\phi_{i,i} = \phi_{i,e}$) i odgovaraju uglu unutrašnjeg trenja ϕ_i kod nevezanog materijala. Ovo se isto nalazi i u Aneksu C Evrokoda EC1-4 [38], gde se navodi da je kod nevezanih materijala $\phi_i = \phi_c$, odnosno da je ugao unutrašnjeg trenja jednak inicijalnom uglu unutrašnjeg trenja. Kod kohezivnih materijala (gde je $c > 0$), ugao unutrašnjeg trenja ϕ_i (odgovara uglu $\phi_{i,e}$ na sl. 38) veći je od inicijalnog ugla unutrašnjeg trenja ϕ_c (odgovara uglu $\phi_{i,i}$ na sl. 38).

Koeficijent ugla unutrašnjeg trenja μ_i (kod nevezanih materijala) je:

$$\mu_i = \tan \phi_i \quad (2.35)$$



Sl. 39 Linija loma za nevezani zrnasti materijal.

Za neku posmatranu tačku materijala, stanje napona može da odgovara *Mohr*-ovom krugu napona koji je ispod linije loma. U ovom slučaju stanje napona odgovara slučaju materijala u miru. Ako naponski krug dodiruje liniju loma, onda je posmatrana tačka materijala u pokretu – materijal protiče. Nije moguće stanje napona kod kojeg bi linija loma presecala krug napona. Na ovaj način je definisan zakon loma zrnastog materijala. Ako je sav materijal u pokretu pri pražnjenju ćelije, stanje napona u bilo kojoj tački materijala u ćeliji odgovara poseban krug napona koji dodiruje liniju loma zrnastog materijala, kao što je to prikazano na sl. 39 za jednu posmatranu tačku materijala.

Na sl. 40 su prikazane granične linije loma i trenja materijala o zid ćelije silosa. Za proizvoljnu tačku u materijalu uz sam zid ćelije nacrtan je *Mohr*-ov krug napona, gde τ_w odgovara smičućem naponu u materijalu pri samom zidu. Ovaj napon odgovara površinskom opterećenju od trenja materijala koje deluju na zid ćelije. $(\sigma_v)_w$ i $(\sigma_h)_w$ su vertikalni i horizontalni napon u materijalu do zida ćelije. *Mohr*-ov krug napona dodiruje liniju loma materijala, a presečna tačka kruga i granične linije trenja po ordinati odgovara smičućem naponu τ_w , a po apscisi horizontalnom naponu $(\sigma_h)_w$ (slika odgovara aktivnom stanju u materijalu). *Mohr*-ovi krugovi napona su na prethodnim slikama prikazani samo preko gornjih polukrugova radi jednostanijeg sagledavanja.

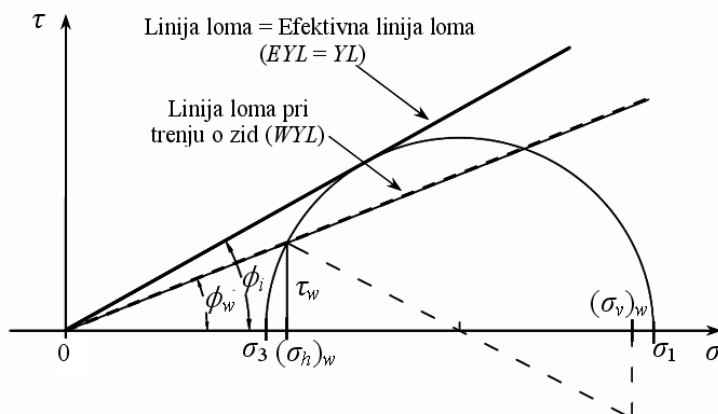
Primena ovih krugova je detaljno obrađena u tematskoj knjizi *Parry*-a (2004) [223], gde se analiziraju teorijski problemi iz oblasti geotehnike. Primena linija loma i *Mohr*-ovih krugova kod analize stanja napona u zrnastom materijalu u silosima je prikazana u knjizi *Nedderman*-a (1992) [200].

Koeficijent trenja materijala o zid/podlogu (npr. zid levka ili zid ćelije) je:

$$\mu_w = \tan \phi_w \quad (2.36)$$

gde je ϕ_w ugao trenja materijala o zid/podlogu, koji se određuje prema (2.34).

Trenje između zrnastog materijala i zida, važno je kod projektovanja silosa. Na jednoj strani trenje o zidove je potrebno pri statičkom proračunu silosa kod određivanja opterećenja od uskladištenog materijala, a sa druge strane je neophodno pri projektovanju nagiba levka. Ako granična linija trenja o zid nije prava linija ili ne prolazi kroz osni početak (usled athezije), ugao ϕ_w je u funkciji normalnog napona σ_w .



Sl. 40 Linija loma za nevezani zrnasti materijal i granična linija trenja o zid.

Athezija zrna materijala za levke i transportere je rezultat interakcije između zrnastog materijala i granične površine. Prema eksperimentalnim ispitivanjima, ustanovljen je trend pada vrednosti ugla trenja ϕ_w pri povećanju normalnog pritiska σ_w . Kod nevezanih materijala, u pricipu, ne dolazi do pojave athezije između materijala i površine zida.

Od svih parametara koji utiču na gravitaciono pražnjenje materijala iz ćelije, osnovni uticaj ima trenje materijala o zidove. Trenje na graničnoj površini, prema Roberts-u (1991) [246], zavisi od interakcije tri osnovne grupe uticajnih faktora, a koje se odnose na: zrnasti materijal, graničnu površinu zida, i uslove opterećenja i spoljašnje faktore.

Parametri zrnastog materijala su dimenzije zrna, granulometrija, oblik zrna, čvrstoća i gustina zrnastog materijala, sadržina vlage i hemijske površinske karakteristike zrna materijala. Karakteristike površine zida su hrapavost i spektar hrapavosti površine zida, tvrdoća i hemijska kompozicija površine zida.

Uslovi opterećenja i spoljašnji faktori se odnose na veličinu normalnog pritiska, relativno trošenje koje je u odnosu sa brzinom klizanja materijala po zidu, temperaturu i uslove vlažnosti, vibracija zida, i trajanje neporemećenog kontakta materijala sa zidom.

Hrapavost zida ne mora biti konstantna u toku eksploatacije silosa, i u ovim slučajevima se uzima kao promenljiva veličina. Na primer, kod čeličnih silosa, relativno mala korozija ugljeničnog čelika po površini može izazvati površinska mikro-udubljenja koja uzrokuju veće vrednosti trenja materijala o zidnu površinu. Na drugoj strani, u nekim slučajevima površine zidova od nerđajućeg čelika se tokom eksploatacije u silosima mogu uglačati, kao da su polirane, čime se smanjuje trenje.

Kod betonskih silosa, pri skladištenju i proticanju biljnih zrnastih materijala, površine zidova se mogu tokom vremena uglačati sa zaostalim biljnim mastima i uljima od

depozita biljnog materijala koji zaostaje u mikro neravninama površine zidova. U ovom slučaju dobija se manje trenje pri skladištenju materijala, u odnosu na prethodno stanje.

Granične linije loma materijala i trenja materijala o zid ne zavise od poroznosti materijala, što je bitna karakteristika ovih graničnih linija. Na ovaj način, ove linije loma se mogu primeniti pri određivanju stanja napona u zrnastom materijalu, gde poroznost varira kod materijala u ćeliji silosa, kao i u toku vremena (pri punjenju, mirovanju i pražnjenju materijala).

2.7.6 Koeficijent bočnog pritiska K

Janssen-ov postupak za određivanje opterećenja u silosima predstavlja, već decenijama, osnovu za projektovanje silosa u prethodnim decenijama. Kod ove teorije, horizontalni i vertikalni pritisak, na posmatranoj dubini z od gornje površine uskladištenog materijala, se određuju na osnovu sledećih izraza:

$$p_h = \sigma_h = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left(1 - e^{-\frac{K \cdot \mu_w \cdot z}{r_h}}\right) \quad (2.37)$$

$$p_v = \sigma_v = \frac{\gamma \cdot r_h}{K \cdot \mu_w} \cdot \left(1 - e^{-\frac{K \cdot \mu_w \cdot z}{r_h}}\right) \quad (2.38)$$

U ovim izrazima sa r_h je označen hidraulički radijus, koji se definiše kao odnos A/U , gde su A površina ćelije u osnovi, i U unutrašnji obim zidova ćelije u osnovi. Koeficijent trenja materijala o zid ćelije μ_w je definisan sa (2.36).

K je odnos horizontalnog (bočnog) i vertikalnog pritiska uskladištene mase, odnosno *koeficijent bočnog pritiska*. *Janssen* je na osnovu ispitivanja na drvenim silo-modelima pri punjenju pšenicom, odredio da je ovaj koeficijent oko 0.67, odnosno da je $K \cong 0.7$, prema [130].

Prema EN 1991-4 (2006) [38] srednja vrednost koeficijenta K za pšenicu je $K_m = 0.54$, a po ruskim normama СНиП 2.10.05-85 (1985) [369], za grupu zrnastih materijala u kojoj je pšenica, preporučuje se primena konkretne vrednosti $K = 0.44$.

Veća vrednost za K kod *Janssen*-a je verovatno izazvana usled sukcesivnog pridizanja zidova modela posle svakog parcijalnog punjenja materijala, kako je to naveo *Janssen* u opisu procedure ispitivanja u ref. [130].

Prema *Könen*-ovom predlogu¹ iz 1896. godine, K se uzima u obliku koji odgovara *Rankine*-ovom koeficijentu aktivnog pritiska:

$$K = K_{a \text{ Rankine}} \quad (2.39)$$

$$K = \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i} = \tan^2(45^\circ - \phi_i / 2) \quad (2.40)$$

gde je ϕ_i ugao unutrašnjeg trenja zrnastog materijala.

Potrebno je napomenuti da je *Könen*, u stvari, kod ovog izraza koristio ugao prirodnog nagiba ϕ_r umesto ugla ϕ_i , što se može uzeti kao aproksimacija, ali kod nekih materijala kod kojih je razlika između ovih uglova veća, određuje se i veća greška pri sračunavanju koeficijenta K .

¹ Könen M. (1896): "Berechnung des Seiten- und Bodendrucks in Silozellen". *Centralblatt der Bauverwaltung* 16, S.446-449. (Citirano prema *Fischer*-u (1966) [82] i *Gurfinkel*-u (1979) [104].)

U propisima i normama nekih zemalja, izraz (2.40) se i dalje koristi za određivanje koeficijenta bočnog pritiska K pri analizi silosnih opterećenja. Od ovih normi najpoznatiji je СНиП 2.10.05-85 [370].

Prema eksperimentalnim ispitivanjima na vitkim silosima, *Pieper* i *Wenzel* (1978) [229] su pokazali da *Janssen*-ova silosna teorija daje bolje rezultate kada se koeficijent K uzme prema *Jáky*-evom izrazu za koeficijent bočnog pritiska pri mirovanju materijala.

Jáky je 1944. godine objavio teorijski rad¹ u časopisu udruženja mađarskih arhitekata i inženjera, u kojem je analizirao stanje napona u linijskom nasipu trougaonog poprečnog preseka (slučaj ravnog stanja deformacija). Pri ovoj analizi, određena je formulacija za koeficijent bočnog pritiska pri mirovanju nasutog materijala, kao odnos horizontalnog i vertikalnog napona na vrhu trougaonog nasipa, u sledećem obliku:

$$K = \left(1 + \frac{2}{3} \sin \phi_i \right) \cdot \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i} \quad (= K_{0 \text{ Jáky I}}) \quad (2.41)$$

Primena ovog koeficijenta proizvodi veće računске pritiske na zidovima ćelije, od koeficijenta aktivnog pritiska prema izrazu (2.40). Kao aproksimacija je dat sledeći izraz za K :

$$K \cong 0.9(1 - \sin \phi_i) \quad (= K_{0 \text{ Jáky II}}) \quad (2.42)$$

Kako se navodi u ref. [231], za vrednosti ugla ϕ_i u oblasti od 10° do 40°, prethodni izraz predstavlja vrlo dobru aproksimaciju teorijski izvedenog izraza (2.41). *Jáky* (1944, 1949) je u svojoj knjizi *Mehanika tla* [129], pri analizi krutog i nepomerljivog potpornog zida na dejstvo prirodnog potiska tla, prikazao K u aproksimativnom obliku (2.42).

Još jednostavniju aproksimaciju za koeficijent K , *Jáky* je 1948. god., primenio pri analizi pritiska zrnastog materijala u silosima, u sledećem opšte poznatom obliku²:

$$K = 1 - \sin \phi_i \quad (= K_{0 \text{ Jáky}}) \quad (2.43)$$

Prema ISO 11697 [125] i [291], kao i prema EN 1991-4:2006 [38] i DIN 1055-6:2005 [62], odnos horizontalnog i vertikalnog pritiska K , koji odgovara stanju napona u silosu pri punjenju i uskladištenju, odnosno mirovanju materijala, kod silosa sa krutim zidovima, uzima se uvećan sa faktorom 1.1 u odnosu na prethodni izraz:

$$K = 1.1(1 - \sin \phi_i) \quad (= K_w) \quad (2.44)$$

U prethodno važećim normama DIN 1055-6 (1987) [61] sugerisana je primena korigovanog izraza (2.43) u sledećem obliku:

$$K = 1.2(1 - \sin \phi_i) \quad (= K_w) \quad (2.45)$$

¹ Jáky J. (1944): "A nyugalmi nyomás tényezője". *Magyar Mérnök és Építész Egylet Közlönye* ("The coefficient of earth pressure at rest". *Journal of the Society of Hungarian Architects and Engineers*), Vol.7, Budapest, pp.355-358 (in Hungarian).

(Citirano prema *Michalowski*-om (2005) [190], *Heng-u*, *Pipatpongsa-u* i *Ohta-i* (2008) [115], *Pipatpongsa-u*, *Heng-u*, *Izuka-i* i *Ohta-i* (2009) [231] i *Pipatpongsa-u* i *Vardhanabhuti-u* (2009) [234]. *Jáky*-evo određivanje koeficijenta K u okviru analize stanja napona u linijskom nasipu je detaljno prikazano u ref. [190] i [115].)

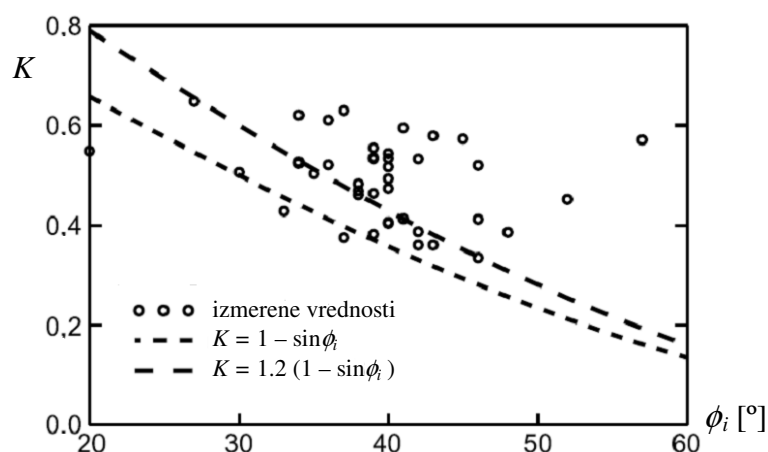
² Jáky J. (1948): "Pressure in silos". *Proceedings of the 2nd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Vol. I, June 21-30 1948, Rotterdam, pp.103-107.

(Citirano prema *Michalowski*-om (2005) [190], *Heng-u*, *Pipatpongsa-u* i *Ohta-i* (2008) [115], *Pipatpongsa-u* i *Heng-u* (2010) [230], i *Pipatpongsa-u*, *Khosravi*, i *Heng-u* (2009) [233]. *Jáky*-eva analiza stanja napona zrnastog materijala u silosu je detaljno prikazana u ref. [115].)

Dijagrami koeficijenta K u zavisnosti od ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i predstavljeni su na sl. 41, prema Kwade-u, Schulze-u i Schwedes-u (1994)¹ preko ref. [276] i [279].

Oznake K i ϕ_i na sl. 41 su u skladu sa EC1-4 [38], i odgovaraju respektivno oznakama λ i φ_e (efektivni ugao unutrašnjeg trenja) u ref. [279].

Dijagram koeficijenta K prema Jáky-u, $K = 1 - \sin\phi_i$, i prema DIN-u 1055-6 (1987), $K = 1.2 (1 - \sin\phi_i)$, se ovde mogu uporediti sa vrednostima izmerenim na 41-om uzorku materijala. Pri merenju je primenjen poseban merni uređaj – *lambdametar*, koji je opisan u ref. [279], a predstavlja odgovarajuću modifikaciju *edometra* (uređaj za ispitivanja u mehanici tla).



Sl. 41 Koeficijent K u zavisnosti od ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i , prema [276].

Kineski istraživači, Zhang, Huang, Jiang i Wu (1999) [342], koeficijent K su prikazali u obliku sličnom prethodnim izrazima:

$$K = \lambda_k \cdot (1 - \sin\phi_i) \quad (= K_w) \quad (2.46)$$

gde je faktor λ_k određen na osnovu sprovedenih ispitivanja na dva modela silosa. Određeno je da λ_k stoji u oblasti vrednosti od 1.00÷1.15. Korekcionni faktor je dobijen primenom iterativnog postupka u okviru Janssen-ove formulacije za pritiske u zrnastom materijalu koji su određeni ispitivanjem na modelima silosa.

Kod američkih normi ACI 313-97 [5] za koeficijent K se koristi sledeći izraz:

$$k = 1 - \sin\phi \quad (\text{formulacija u ACI 313-97}) \quad (2.47)$$

$$K = 1 - \sin\phi_c \quad (\text{uvedene oznake u saglasnosti sa EN 1991-4}) \quad (2.48)$$

gde je ϕ_c inicijalni ugao unutrašnjeg trenja u skladu sa EN 1991-4 [38].

Za ovaj ugao u ACI 313-97 [5] stoji oznaka ϕ i definiše se kao *ugao unutrašnjeg trenja*. Kod zrnastih materijala, ugao ϕ_c je uobičajeno nešto manji od ugla ϕ_i , te se pri primeni izraza (2.48), u odnosu na (2.43), dobijaju nešto veće vrednosti za koeficijent K .

¹ Kwade A., Schulze D. and Schwedes J. (1994): "Determination of the stress ratio in uniaxial compression tests", Part 1 and 2. *Powder Handling & Processing*, 6, pp.61–65 and pp.199–203; *Beton-Stahlbetonbau*, 89, 1994., pp.58–63 and pp.117–119.

(Ovde citirano prema Schwedes-u (2003) [279] - *IFRI report* i prema Schulze-u (2008) [276]. U ovim referencama Jáky-ev koef. K , se navodi kao *Kézdi-ev*, a trebalo bi da se citira preko *Kézdi-a*. Videti npr. knjigu od *Kézdi-a* (1970) [146].)

U tabeli 5 prikazani su izrazi za koeficijent bočnog pritiska K prema hronološkim redu objavljivanja normi i propisa za proračun silosnih opterećenja. Upotrebljene oznake odgovaraju oznakama prema EN 1991-4 (2006) [38]. Većina propisa definiše samo koeficijent K za stanje nakon punjenja, odnosno za stanje mirovanja materijala.

Tabela 5. Uporedni pregled koeficijenta K u propisima za proračun silosa.

Standard - norma	Koeficijent K
TU (1960) [310]	$K = 0.50$
DIN 1055-6 (1962, 1964, 1977) [61]	$K_f = 0.50$; $K_e = 1.00$
ACI 313-77 (1977) [3]	$\frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i} \quad \left(\cong \frac{1 - \sin \phi_r}{1 + \sin \phi_r} \right)$
СННП 2.10.05-85 (1985) [370]	$\frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i}$
SNBATI (1986) [288]	$K_f = \frac{1 - m \cdot \sin \phi_i}{1 + m \cdot \sin \phi_i} \cdot \cos^2 \phi_w$; $m = \sqrt{1 - (\mu_w / \mu_i)^2}$ $K_e = \cos^2 \phi_w$
DIN 1055-6 (1987) [61]	$1.2 \cdot (1 - \sin \phi_i)$
ISO 11697 (1990) [125] SRPS ISO 11697 (1996) [291]	$1.1 \cdot (1 - \sin \phi_i)$
AS 3774 (1996) [14]	$\frac{1 + \sin^2 \phi_i - 2 \sqrt{\sin^2 \phi_i - \mu_w^2 \cdot \cos^2 \phi_i}}{4 \mu_w^2 + \cos^2 \phi_i} \quad (\geq 0.35)$
ACI 313-97 (1997) [5]	$1 - \sin \phi_e$
DIN 1055-6 (2005) [62]	$K_m = 1.1 \cdot (1 - \sin \phi_{im})$
EN 1991-4 (2006) [38]	$K_m = 1.1 \cdot (1 - \sin \phi_{im})$

Ranije važeće norme DIN 1055-6 (1962, 1964, 1977) [61] i prethodni francuski propisi SNBATI (1986) [288], definisali su K za stanje punjenja, kao K_f (indeks f od eng. *filling* - punjenje), i za stanje pražnjenja silosa, kao K_e (indeks e od eng. *emptying-discharge* - pražnjenje). Svi propisi u osnovi koriste Janssen-ovu teoriju, odnosno izraze (2.37) i (2.38) za određivanje pritisaka u rastresitom materijalu.

Kod naših tehničkih uputstava za proračun silosnih ćelija za žito, TU (1960) [310], ovi izrazi su simplifikovani u bilinearnu formu, koja se može predstaviti sa sledećim:

$$p_h = \sigma_h = \min \left\{ p_{h\infty} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} ; \gamma \cdot z \right\} \quad (2.49)$$

$$p_v = \sigma_v = \min \left\{ p_{v\infty} = \frac{\gamma \cdot r_h}{K \cdot \mu_w} ; \gamma \cdot z \right\} \quad (2.50)$$

Prema izrazima (2.49) i (2.50), u gornjem delu silosa pritisci se menjaju linearno sa dubinom z , i to u obliku hidrostatičkog pritiska, sve do karakteristične dubine materijala:

$$z_{0h} = r_h / \mu_w \quad (\text{za } p_h) \quad \text{i} \quad z_{0v} = r_h / (K \cdot \mu_w) \quad (\text{za } p_v). \quad (2.51)$$

Pri dubinama materijala z većim od z_{0h} , odnosno z_{0v} , ovi pritisci su konstantni i odgovaraju asimptotskim vrednostima pritisaka materijala $p_{h\infty}$, odnosno $p_{v\infty}$ respektivno.

Raniji francuski propisi *SNBATI* (1986) [288], specifični su po tome što daju analitički oblik koeficijenta K za stanje pražnjenja (K_e). Ovaj koeficijent se odnosi na analizu tzv. stanja 2 u [288], prema kojem se dimenzionišu zidovi ćelija. U ovim propisima direktno su date vrednosti ugla ϕ_i za razne materijale koji se skladište u silosima. Ugao ϕ_w se definiše posredno preko predefinisanih tabelarnih vrednosti odnosa koeficijenata trenja $\mu_w/\mu_i = \tan \phi_w / \tan \phi_i$. Za slučaj ćelija sa betonskim zidovima, u zavisnosti od tipa uskladištenog materijala, odnos μ_w/μ_i se nalazi u granicama od 0.65 do 0.80. Kod tzv. stanja 1, koje se odnosi na dimenzionisanje dna silosa, odnosno levka, što odgovara stanju punjenja i mirovanja materijala, koeficijent K_f je dat u obliku posebnog empirijskog izraza u tabeli 5. Ovaj oblik koeficijenta K_f , za $\phi_w = 0$, se svodi na *Rankine-ov koeficijent aktivnog pritiska* K_a , tj. na oblik (2.40). Za slučaj da je $\phi_w = \phi_i$, koeficijent K_f se svodi na $\cos^2 \phi_i (= \cos^2 \phi_w)$, što odgovara koeficijentu pri pražnjenju K_e . Kako K_f treba po vrednostima da bude manje od K_e , može se protumačiti da je iz ovog razloga uvedeno ograničenje vrednosti kod odnosa μ_w/μ_i , u empirijskom izrazu za K_f .

Koeficijent K koji se koristi u AS 3774 (1996) [14] prikazan je u tabeli 5. U sličnoj formi, prema komentarima u AS 3774, ovaj koeficijent je prvi odredio *Walker* (1966) [325]. *Walker-ova* analiza se zasniva na primeni teorije plastičnosti, a K odgovara aktivnom stanju granične ravnoteže zrnastog materijala. Pri poređenju *Walker-ove* i *Janssen-ov* analize, može se ustanoviti da *Janssen-ova* konstanta ($\mu_w \cdot K$) u *Walker-ovoj* analizi odgovara proizvodu faktora $(B \cdot D)_{\text{Walker}}$. *Walker-ova* aproksimacija, da je faktor distribucije $D_{\text{Walker}}=1$, odgovara *Janssen-ovoj* pretpostavci o konstantnim vertikalnim naponima u horizontalnim presecima materijala. U skladu sa tim, *Walker-ov* koeficijent K , pri uvođenju matematički preciznije formulacije za B_{Walker} prema *Walters-u* (1973) [328], može se odrediti na osnovu sledeće relacije:

$$B_{\text{Walker}} = \frac{\sin \phi_i \cdot \sin 2\varepsilon}{1 - \sin \phi_i \cdot \cos 2\varepsilon} \quad (= \mu_w \cdot K) \quad (2.52)$$

gde se, prema *Walters-u* za aktivno stanje (punjenje i mirovanje materijala), 2ε određuje preko izraza:

$$2\varepsilon = \pi/2 + \phi_w + \arccos(\sin \phi_w / \sin \phi_i) \quad (2.53)$$

U ovom izrazu uglovi se uvode u [rad]-ima, a u slučaju da se računaju u [°]-ima, prvi član izraza, $(\pi/2)$, treba zameniti sa (90°) .

Analizirajući *Walker-ov* doprinos *Janssen-ovoj* teoriji silosnih pritisaka, *Nedderman* (1992) [200] je postavio pregledniju formulaciju koeficijenta K u obliku:

$$K = \frac{1 - \sin \phi_i \cdot \cos(\omega - \phi_w)}{1 + \sin \phi_i \cdot \cos(\omega - \phi_w)} \quad (2.54)$$

$$\omega = \arcsin(\sin \phi_w / \sin \phi_i) \quad (2.55)$$

Na osnovu teorije plastičnosti, koeficijent K u ovom obliku je prvi odredio *Ohde* (1951, 1958) [210], kod analize silosnog problema, sa sledećom formulacijom:

$$K = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \quad (2.56)$$

gde su koeficijenti unutrašnjeg trenja (pri trenju zrna unutar materijala) i spoljašnjeg trenja (pri trenju zrnastog materijala o zid silosa), μ_i i μ_w , dati respektivno sa (2.35) i (2.36).

Svi ovde navedeni oblici za koeficijent K se odnose na stanje napona do zida ($K=K_w$), i to su koeficijenti prema izrazima (2.52), (2.54) i (2.56), kao i prema izrazu kod AS 3774 (1996) [14] (tabela 5). Sva četiri navedena oblika predstavljaju matematički ekvivalentne izraze. Ovo znači da se matematičkim transformacijama jedan oblik može svesti na drugi oblik koeficijenta K . Prema tome, izvorni oblik koeficijenta K je (2.56), prema *Ohde*-u (1951) [210], a ne prema *Walker*-u. Za kontrolu može da posluži i prost primer: u slučaju da je $\phi_w = 25^\circ$ i $\phi_i = 30^\circ$, preko sva četiri izraza se određuje da je $K = 0.408$. Ograničenje da je $K \geq 0.35$ kod AS 3774 (tabela 5), predstavlja empirijsku korekciju koja ima efekta tek pri većim vrednostima ugla ϕ_i .

U ovom radu će se pri teorijskim analizama većinom koristiti koeficijent K u obliku (2.56), prema *Ohde*-u, s obzirom da je jednostavniji za primenu u odnosu na druge ekvivalentne oblike. *Ohde*-ovu analizu (1951) [210] su koristili *Nanninga* (1956)¹, *Peschl* (1969) [227] i drugi.

U slučaju da je $\mu_w = 0$, tj. $\phi_w = 0$, ovi izrazi se redukuju na:

$$K = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} = \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i} = \tan^2(45^\circ - \phi_i/2) \quad (= K_a) \quad (2.57)$$

što predstavlja *Rankine*-ov koeficijent aktivnog pritiska.

U slučaju da je $\phi_w = \phi_i$, odnosno $\mu_w = \mu_i$, ovi izrazi se redukuju na:

$$K = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2} = \frac{1 - \sin^2 \phi_i}{1 + \sin^2 \phi_i} \quad (= K_w) \quad (2.58)$$

što predstavlja *Krynine*-ov koeficijent bočnog pritiska². Prema *Handy*-u (1985) [109], kao i ref. [312], ovaj oblik je odredio *Kraynine* 1945. god., kod analize pritisaka na idealno hrapav potporni zid. U komentarima AS 3774 (1997) [14], navodi se da je ovaj oblik prvi odredio *Hartmann* 1966. god.³, ali verovatno je u pitanju samo prva primena kod analize stanja napona u silosima.

Pri primeni teorije plastičnosti koeficijent K je promenljiv u horizontalnom preseku. U osnovi se nameću dve vrednosti za K , jedna koja odgovara odnosu napona u materijalu do zida ćelije $K = K_w$, i druga vrednost za $K = K_0$ koja odgovara sredini materijala u ćeliji.

Usled trenja o zid ćelije u zrnastom materijalu dolazi do pojave napona smicanja, što utiče i na veličinu koeficijenta K . Normalni naponi i smičući napon do zida ćelije su prikazani kod *Mohr*-ovog kruga napona na sl. 40. Koeficijent K u materijalu do zida, $K = K_w$, je:

¹ Nanninga N. (1956): "Gibt die übliche Berechnungsart der Drucke auf die Wände und den Boden von Silobauten sichere Ergebnisse?", *Der Ingenieur*, Vol.68, Nov., No.44. (Citirano prema *Peschl*-u (1969) [227].)

² Kraynine D.P. (1945): Discussion of "Stability and Stiffness of Cellular Coferdams", by K. Terzaghi. *Transactions*, ASCE, Vol. 110, pp.1175–1178.

³ Hartmann F. (1966): "Berechnung des Fulldruckes in Einem Silo". *Beton und Stahlbetonbau*, No.7, pp.177-183.

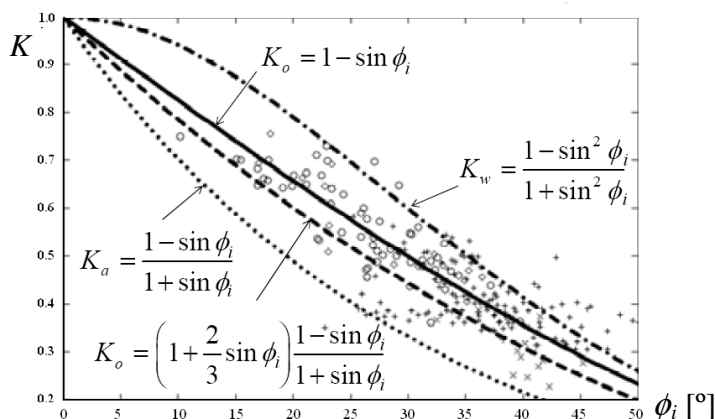
$$K = K_w = \frac{(\sigma_h)_w}{(\sigma_v)_w} \quad (2.59)$$

U sredini materijala u ćeliji, anuliran je uticaj trenja materijala o zid ćelije, kako su zbog simetrije naponi smicanja u sredini ćelije 0, tako da su normalni naponi ujedno i glavni naponi. Koeficijent K u sredini ćelije, $K = K_0$, je:

$$K = K_0 = \frac{(\sigma_h)_0}{(\sigma_v)_0} = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \quad (2.60)$$

Prema *Janssen*-ovoj teoriji, koeficijent K , koji se koristi kod izraza (2.37) i (2.38), odgovara koeficijentu do zida ćelije K_w ; i kao veličina je konstantna po visini ćelije. Kod *Janssen*-a, ovaj koeficijent je određen na ispitnim ćelijama.

Zavisnost koeficijenta bočnog pritiska K od ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i , prema teorijskim izrazima i izmerenim vrednostima, prikazana je na sl. 42, prema *Pipatpongsa*-u, *Heng*-u, *Iizuka*-i i *Ohta*-i. (2009) [231]. Dijagram koeficijenta K prema *Jáky*-u, $K_0 = 1 - \sin\phi_i$, na ovoj slici daje bolje slaganje sa izmerenim vrednostima, nego što je to bilo kod sl. 41.



Sl. 42 Koeficijent K u zavisnosti od ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i , prema [231].

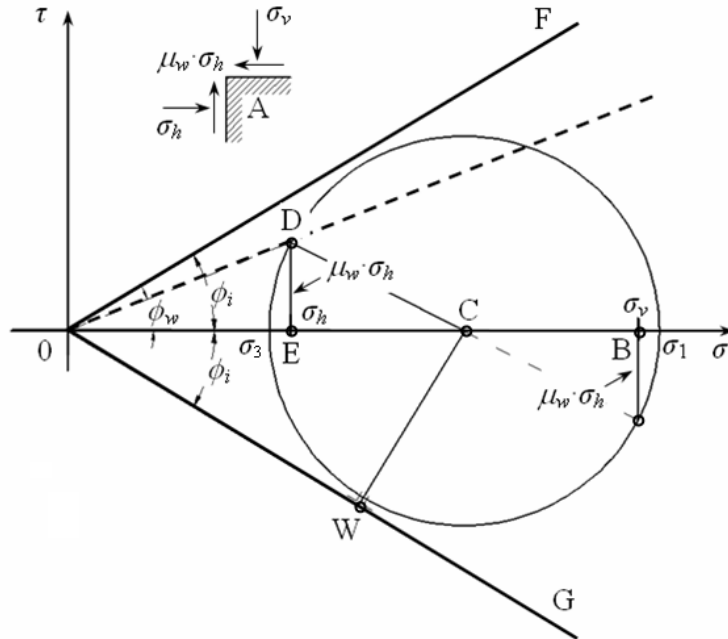
Pri izradi evropskih normi, koje su objavljane kao EN 1991-4:2006 [38], dogovorene su odgovarajuće početne postavke. Članovi *CEN*-ovog projektnog tima (*PT8*), *Nielsen*, *Eibl* i *Rotter* (1992) [206], prikazali su neke od ovih postavki, gde je jedno od važnih pitanja bilo određivanje koeficijenta K , koji se odnosi na stanje napona pri punjenju i pri mirovanju materijala. K je, u ovom slučaju, manje od 1.0, a tipična vrednost za K je 0.5. Na koeficijent K najveći uticaj ima ugao unutrašnjeg trenja, ali isto tako K zavisi i od trenja materijala o zid ćelije.

Prema projektnom timu *PT8*, pri određivanju bočnih pritisaka koji deluju na krute zidove (npr. na AB ili PB zidove), primenjuju se dve formule za koeficijent K , za koje se smatra da daju dovoljno tačne rezultate. Jedna od njih je *Jáky*-eva formula (2.43), a druga *Krynine*-ova formula (2.58). Prva se odnosi na idealno glatke zidove, a druga na idealno hrapave zidove.

Odnos koeficijenata $K_{Krynine}/K_{Jáky}$, u rangi vrednosti ugla ϕ_i , za uobičajene materijale koji se skladište u silosima, iznosi oko 1.20. Ovo znači da ugao ϕ_w , utiče na povećanje koeficijenta K , do najviše 20%. U vezi s tim, kod EC1-4 [38], uvedena je korekcija za K u obliku $1.1 \cdot K_{Jáky}$, odnosno u obliku (2.44), po mišljenju projektnog tima *PT8*, kao dovoljno tačno i jednostavno srednje rešenje.

2.7.6.1 Granične vrednosti koeficijenta K u materijalu do zida ćelije

Da bi se odredile granične vrednosti koeficijenta bočnog pritiska K , posmatra se stanje napona kod diferencijalnog elementa oko tačke A u zrnastom materijalu do zida ćelije, kako je prikazano na sl. 43, prema Vandepitte-u (1979) [313].



Sl. 43 Mohr-ov krug napona za tačku A do zida ćelije.

Kod tačke A po vertikalnoj strani do zida deluje bočni pritisak σ_h i smičući napon usled trenja $\mu_w \cdot \sigma_h$ (sl. 43), dok po gornjoj horizontalnoj strani deluje vertikalni pritisak σ_v sa konjugovanim smičućim naponom, $\mu_w \cdot \sigma_h$. Na sl. 43 prikazan je Mohr-ov krug napona za moguće stanje napona u tački A. Ravnoteža elementa nije narušena sve dok Mohr-ov krug napona ne dodirne granične linije OF i OG ($\tau = \pm \sigma \cdot \tan \phi_i = \pm \sigma \cdot \mu_i$) prema Coulomb-u. Dodir kruga sa graničnim linijama OF i OG, odražava se relativnim pomeranjem tačke A niz površinu zida. Ravnoteža elementa nije narušena sve dok potencijalna tačka dodira W, dobijena u peseku linije OG i normale provučene iz centra Mohr-ovog kruga, stoji van kruga napona. Geometrijski posmatrano, ovo odgovara uslovu pri kojem je duž CD (poluprečnik Mohr-ovog kruga), manja od duži CW. Iz ovoga sledi da je $\overline{CD}^2 \leq \overline{CW}^2$, a to odgovara izrazu $\overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 \leq \overline{OC}^2 \cdot \sin^2 \phi_i$, koji se dalje razvija u sledeći oblik:

$$\frac{1}{4}(\sigma_v - \sigma_h)^2 + \mu_w^2 \cdot \sigma_h^2 \leq \frac{1}{4}(\sigma_v + \sigma_h)^2 \cdot \sin^2 \phi_i \quad (2.61)$$

Pri uvođenju odnosa napona $K = \sigma_h / \sigma_v$, u ovu nejednačinu određuje se:

$$(1 - K)^2 + 4K^2 \cdot \mu_w^2 \leq (1 + K)^2 \cdot \sin^2 \phi_i$$

Sređivanjem ove nejednačine dobija se kvadratna nejednačina po K :

$$K^2 \cdot (\cos^2 \phi_i + 4\mu_w^2) - 2K \cdot (1 + \sin^2 \phi_i) + \cos^2 \phi_i \leq 0 \quad (2.62)$$

Diskriminanta pri određivanju rešenja ove kvadratne nejednačine po K , može se svesti na sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
 4 \left[(1 + \sin^2 \phi_i)^2 - \cos^4 \phi_i - 4\mu_w^2 \cdot \cos^2 \phi_i \right] &= \\
 = 4 (1 + 2\sin^2 \phi_i + \sin^4 \phi_i - \cos^4 \phi_i - 4\mu_w^2 \cdot \cos^2 \phi_i) &= \\
 = 16 (\sin^2 \phi_i - \mu_w^2 \cdot \cos^2 \phi_i) &
 \end{aligned} \tag{2.63}$$

Vrednost ovoga izraza je uvek pozitivna, s obzirom da ugao ϕ_w nije veći od ugla ϕ_i , odakle sledi da je $\mu_w = \tan \phi_w \leq \tan \phi_i$. Nejednačina (2.62) je zadovoljena za one vrednosti odnosa napona K , koje se nalaze u okviru zatvorenog intervala, odnosno između dva realna pozitivna rešenja jednačine (2.62):

$$\frac{1 + \sin^2 \phi_i - 2\sqrt{\sin^2 \phi_i - \mu_w^2 \cdot \cos^2 \phi_i}}{\cos^2 \phi_i + 4\mu_w^2} \leq K \leq \frac{1 + \sin^2 \phi_i + 2\sqrt{\sin^2 \phi_i - \mu_w^2 \cdot \cos^2 \phi_i}}{\cos^2 \phi_i + 4\mu_w^2} \tag{2.64}$$

$$\frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \leq K \leq \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 - 2\sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \tag{2.65}$$

$$K_a \leq K \leq K_p \tag{2.66}$$

Kada tačka W na sl. 43 dodirne *Mohr*-ov krug napona, dolazi do aktiviranja jednog od dva granična stanja, i to su *aktivno stanje* i *pasivno stanje* napona. Ovim stanjima napona odgovaraju granične vrednosti za K u okviru (2.64) prema *Vandepitte*-u (1979) [313], odnosno u okviru (2.65) prema *Ohde*-u (1951) [210], gde donja granica K_a odgovara *aktivnom stanju* napona, a gornja granica K_p *pasivnom stanju*. Donja granična vrednost ($K = K_a$) u okviru (2.64), u potpunosti odgovara obliku za K prema AS 3774 (1996) [14], prikazanom u tabeli 5.

U izrazima su prisutani koeficijent trenja materijala o zid $\mu_w = \tan \phi_w$, i koeficijent unutrašnjeg trenja $\mu_i = \tan \phi_i$. Koeficijenti K se mogu odrediti za neke posebne slučajeve vrednosti koeficijenata μ_i i μ_w . Prikaz izvođenja se daje preko izraza u (2.64).

*Aktivno stanje (idealno gladak zid - slučaj sa $\mu_w = 0$, tj. $\phi_w = 0$)*¹:

$$K_a = K_{a \text{ Rankine}} = \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i} = \tan^2(45^\circ - \phi_i/2) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} \tag{2.67}$$

*Pasivno stanje (idealno gladak zid - slučaj sa $\mu_w = 0$, tj. $\phi_w = 0$)*²:

$$K_p = K_{p \text{ Rankine}} = \frac{1 + \sin \phi_i}{1 - \sin \phi_i} = \tan^2(45^\circ + \phi_i/2) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 - 2\sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} \tag{2.68}$$

U slučaju idealno hrapavog zida važi da je $\phi_w = \phi_i$, odnosno $\mu_w = \tan \phi_w = \tan \phi_i$, kako ugao ϕ_w ne može biti veći od ugla ϕ_i , jer bi u suprotnom došlo do klizanja zrna u sloju zrnastog materijala do samog zida. Kod *Rankine*-ovih koeficijenata važi $K_a = 1/K_p$.

¹ $\frac{1 + \sin^2 \phi_i - 2\sin \phi_i}{\cos^2 \phi_i} = \frac{(1 - \sin \phi_i)^2}{\cos^2 \phi_i} = \frac{1 - \sin \phi_i}{\cos \phi_i} \cdot \frac{1 - \sin \phi_i}{\cos \phi_i} = \frac{1 - \sin \phi_i}{\cos \phi_i} \cdot \frac{\cos \phi_i}{1 + \sin \phi_i} = \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i}$

² $\frac{1 + \sin^2 \phi_i + 2\sin \phi_i}{\cos^2 \phi_i} = \frac{(1 + \sin \phi_i)^2}{\cos^2 \phi_i} = \frac{1 + \sin \phi_i}{\cos \phi_i} \cdot \frac{1 + \sin \phi_i}{\cos \phi_i} = \frac{1 + \sin \phi_i}{\cos \phi_i} \cdot \frac{\cos \phi_i}{1 - \sin \phi_i} = \frac{1 + \sin \phi_i}{1 - \sin \phi_i}$

Aktivno i pasivno stanje (idealno hrapav zid - slučaj sa $\mu_w = \tan \phi_i$, tj. $\phi_w = \phi_i$)¹:

$$K_a = K_p = K_{\text{Kraynine}} = \frac{1 - \sin^2 \phi_i}{1 + \sin^2 \phi_i} = \frac{\cos^2 \phi_i}{1 + \sin^2 \phi_i} = \frac{\cos^2 \phi_i}{2 - \cos^2 \phi_i} = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2} \quad (2.69)$$

Kod oblika koeficijenta K u (2.69) data su četiri ekvivalentna oblika koja se koriste u stručnoj literaturi. Od ovih oblika, prvi je najpoznatiji, i navodi se kao *Kraynine*-ov ili *Hartmann*-ov koeficijent. Četvrti oblik je u skladu sa *Ohde*-ovom analizom.

Kod idealno glatkog zida donja i gornja granica koeficijenta K odgovara *Rankine*-ovim koeficijentima za slučajeve aktivnog i pasivnog stanja, a kod idealno hrapavog zida se dobija *Kraynine*-ov koeficijent K do zida sa istim vrednostima za aktivno i pasivno stanje. *Nedderman* (1992) [200] je na sličan način odredio K u obliku (2.69), sa konstatacijom da idealno hrapav zid u realnosti kao takav ne postoji.

U teorijskim analizama, korisno je uopštavanje oblika koeficijenta K , na način da se sa istim izrazom obuhvate oba granična stanja, tj. i aktivno i pasivno stanje:

- opšti slučaj ($\mu_w \leq \mu_i$, tj. $\phi_w \leq \phi_i$)

$$K = \frac{1 + \sin^2 \phi_i - 2\kappa \cdot \sqrt{\sin^2 \phi_i - \mu_w^2} \cdot \cos^2 \phi_i}{\cos^2 \phi_i + 4\mu_w^2} \quad (2.70)$$

$$K = \frac{1 - \kappa \cdot \sin \phi_i \cdot \cos(\omega - \kappa \cdot \phi_w)}{1 + \kappa \cdot \sin \phi_i \cdot \cos(\omega - \kappa \cdot \phi_w)} \quad ; \quad \omega = \arcsin(\sin \phi_w / \sin \phi_i) \quad (2.71)$$

$$K = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \quad (2.72)$$

- *Rankine*-ov slučaj ($\mu_w = 0$, tj. $\phi_w = 0$)

$$K_{\text{Rankine}} = \frac{1 - \kappa \cdot \sin \phi_i}{1 + \kappa \cdot \sin \phi_i} \quad (2.73)$$

$$K_{\text{Rankine}} = \tan^2(45^\circ - \kappa \cdot \phi_i / 2) \quad (2.74)$$

$$K_{\text{Rankine}} = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} = \frac{1}{(\sqrt{1 + \mu_i^2} + \kappa \cdot \mu_i)^2} \quad (2.75)$$

Kod izraza (2.70) do (2.75) uveden je parametar κ :

$\kappa = +1$, za aktivno stanje; i

$\kappa = -1$, za pasivno stanje.

Formulacije za koeficijent K , u obliku izraza (2.70), (2.71) i (2.72), su date prema odgovarajućim formulacijama kod *Vandepitte*-a, *Nedderman*-a i *Ohde*-a, respektivno.

$$\begin{aligned} 1 \quad & \frac{1 + \sin^2 \phi_i \mp 2\sqrt{\sin^2 \phi_i - \tan^2 \phi_i} \cdot \cos^2 \phi_i}{\cos^2 \phi_i + 4 \tan^2 \phi_i} = \frac{1 + \sin^2 \phi_i}{\cos^2 \phi_i + 4 \tan^2 \phi_i} = \frac{1 + \sin^2 \phi_i}{\cos^2 \phi_i \cdot (1 + 4 \frac{\sin^2 \phi_i}{\cos^4 \phi_i})} = \\ & = \frac{1 + \sin^2 \phi_i}{\cos^4 \phi_i + 4 \sin^2 \phi_i} = \frac{1 + \sin^2 \phi_i}{(1 - \sin^2 \phi_i)^2 + 4 \sin^2 \phi_i} = \frac{1 + \sin^2 \phi_i}{(1 + \sin^2 \phi_i)^2} = \frac{\cos^2 \phi_i}{1 + \sin^2 \phi_i} = \frac{1 - \sin^2 \phi_i}{1 + \sin^2 \phi_i} \end{aligned}$$

Uvedena konvencija o znaku kod κ odgovara slučaju koji je primenio *Negi* u ref. [202] i [203]. *Nedderman* je u ref. [200], primenio obrnutu konvenciju za znak kod κ (pri primeni obrnute konvencije za vrednost parametra κ , potrebno je promeniti i znak ispred svih članova sa faktorom κ u gornjim izrazima).

Donja granica koeficijenta K se u stručnim krugovima uzima kao vrednost koja odgovara *aktivnom stanju* pritiska materijala u ćeliji ($K = K_a$), i odgovara stanju pri *punjenjenju*, i potom *stanju mirovanja* materijala. Gornja granica za K se usvaja da odgovara slučaju *pasivnog stanja* ($K = K_p$), i prema nekim mišljenjima odgovara stanju pri *pražnjenju* materijala iz ćelije (*Ohde* (1951) [210], *Walters* (1973) [328], *Negi* (1974) [202], *Vivancos* (1976-8)¹, *Nedderman* (1992) [200]).

S druge strane, kod normi se, kod analize stanja pri pražnjenju, ne uvodi pasivno stanje, odnosno ne uvodi se koeficijent K_p . Stanje pri pražnjenju se obično obuhvata povećanjem pritiska pri punjenju (aktivno stanje) sa *faktorom natpritiska* C (naziv korišćen u SRPS ISO 11697 (1996) [291]), odnosno sa *faktorom uvećanja opterećenja* C (naziv korišćen u našem prevodu evropskog predstandarda ENV 1991-4:1995 (1996) [220]). Norme koje ne primenjuju faktor natpritiska, uvode koeficijent K_e pri pražnjenju, i prema tabeli 5, to su ranije važeće nemačke norme DIN 1055-6 (1962, 1964, 1977) [61], gde se za stanje pražnjenja zrnastih materijala koristio $K_e = 1$, i prethodno važeći francuski propisi *SNBATI* (1986) [288], gde se koristio $K_e = \cos^2 \phi_w$ (kako je $\phi_w \geq 0$, sledi da je $K_e \leq 1$).

Uopšte se može konstatovati da aktivnom polju napona odgovara slučaj kada je $K < 1$ (pri čemu je $\sigma_h < \sigma_v$), a kod pasivnog polja napona odgovara $K > 1$ (pri čemu je $\sigma_h > \sigma_v$). Izostatično polje napona, kao što je npr. hidrostatički pritisak, kod stanja napona u silosu odgovara slučaju $K = 1$ (pri čemu je $\sigma_h = \sigma_v$). Kod analize levka pri pražnjenju opšte je prihvaćeno postojanje pasivnog naponskog polja, za razliku od analize ćelijskog dela za koji postoje različita mišljenja. Prevladao je stav, na osnovu analize teorijskih, numeričkih i eksperimentalnih rezultata, da u ćelijskom delu pri pražnjenju deluje aktivno polje napona, sa koeficijentom K , koji je orijentaciono reda veličine od 0.7 do 0.9. U ovom pravcu se dobija slaganje sa oblikom za K_e prema *SNBATI* [288].

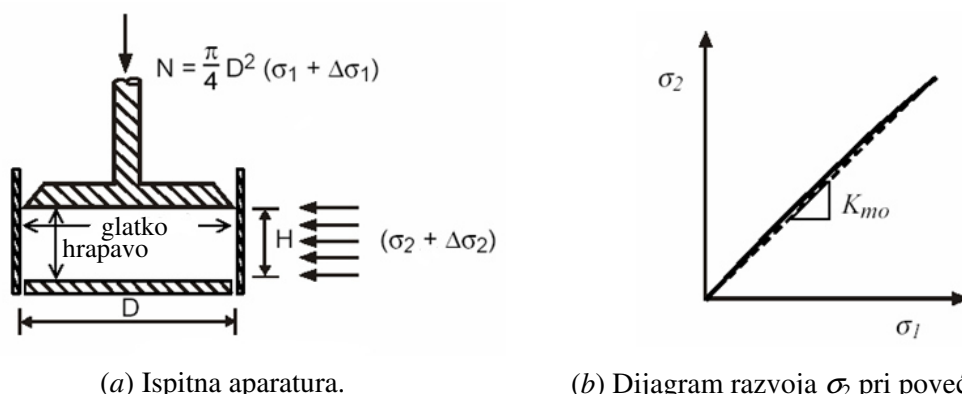
2.7.6.2 Opitno određivanje koeficijenta K

Prema EN 1991-4:2006 [38], kao i kod SRPS ISO 11697 (1996) [291], preporučene su tabelisane vrednosti koeficijenta bočnog pritiska K za materijale koji se uobičajeno skladište u slosima. Za materijale koji nisu navedeni, K se određuje na bazi *direktnog* ili, opciono, preko *indirektnog laboratorijskog ispitivanja*.

Pri direktnom ispitivanju, prema EN 1991-4:2006 [38] (slično i kod SRPS ISO 11697 [291]), na uzorak materijala koji je nasut u ispitnu aparaturu (sl. 44 (a)), nanosi se vertikalni napon σ_1 pri uslovu sprečene bočne deformacije materijala (odnosno zida aparata). U postupku ispitivanja meri se indukovani bočni napon σ_2 i odavde se određuje sekantna vrednost koeficijenta bočnog pritiska K_0 . Direktna metoda ispitivanja daje aproksimaciju za realnu vrednost koeficijenta K_0 , s obzirom da se bazira na delovanju glavnih napona u uzorku materijalu, što ne mora biti slučaj kod stvarnog stanja napona u silosu; i da se pri ispitivanju dopušta relativno mala deformacija bočnih zidova aparata (do oko 100 mikrodilatacija), radi određivanja bočnog napona σ_2 , preko merenja dilatacija

¹ Vivancos J. (1978): "Calculation of the loads produced in a high silo during the emptying process", *ACI Journal*, Vol.75, No.1, pp.13-21. (Citirano prema *Herzog*-u (1978) [116], gde je analiziran *Vivancos*-ov predlog za proračun silosa pri pražnjenju pri primeni silosne teorije braće *M.* i *A. Reimbert.*)

na mernim trakama. Dno aparata je odvojeno od bočnih strana zidova kako ne bi došlo do savijanja između dna i zida aparata.



(a) Ispitna aparatura.

(b) Dijagram razvoja σ_2 pri povećanju σ_1 .

Sl. 44 Ispitna metoda za direktno određivanje koeficijenta K_0 , prema EN 1991-4:2006.

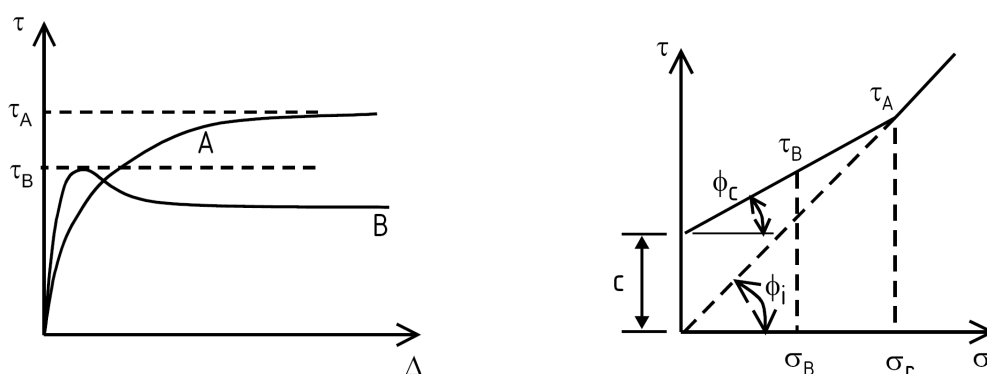
U postupku ispitivanja, vertikalni napon σ_1 se uzima da odgovara referentnom naponu σ_r koji odgovara najvećem vertikalnom naponu uskladištene mase u silosu nakon punjenja ćelije. Koeficijent K_0 se računa prema odnosu napona, sl. 44 (b), kao:

$$K_0 = \sigma_2 / \sigma_1 \quad (2.76)$$

Koeficijent bočnog pritiska K do zida silosa, određuje se korekcijom koeficijenta K_0 :

$$K = 1.1 K_0 \quad (2.77)$$

Sa faktorom 1.1 u okviru izraza (2.77), uvodi se razliku između ispitnih uslova (glavni naponi kod uzorka, i praktično zanemarljivo trenje na glatkom zidu aparata) i realnih uslova kod silosa, gde postoji trenje kod zidova ćelije.



(a) Tipični dijagrami smičućih napona u odnosu na translaciono pomeranje ($\tau - \Delta$).

(b) Tipični dijagrami smičućih napona u odnosu na normalne napone pri ispitivanju.

Sl. 45 Dijagrami smicanja pri određivanju uglova ϕ_i i ϕ_c , prema EN 1991-4:2006.

Indirektno određivanje koeficijenta bočnog pritiska K , prema EN 1991-4:2006 [38] (slično i kod SRPS ISO 11697 [291]), se zasniva na određivanju ugla unutrašnjeg trenja pri opterećenju ϕ_i , na osnovu ispitivanja na smičućim uređajima ili na osnovu triaksnalnog ispitivanja. Aproximativno se za određivanje K preko ϕ_i koristi izraz (2.78), gde se indeks m odnosi na srednju vrednost date veličine (ϕ_{im} je srednja vrednost ugla unutrašnjeg trenja pri opterećenju):

$$K_m = 1.1(1 - \sin \phi_m) \quad (2.78)$$

Sa faktorom 1.1, u izrazu (2.78), pokriva se uticaj trenja kod zidova ćelija.

Postupak određivanja ϕ_i se bazira na ispitivanju dva uzorka istog materijala (prikaz ovog ispitivanja u EN 1991-4:2006 [38], kao i u SRPS ISO 11697 [291], po opisu odgovara primeni translacione smičuće ćelije, tj. Jenike-ovom smičućem uređaju). Kod prvog uzorka (test br.1) smicanje se određuje pri delovanju prethodno nanetog referentnog normalnog napona σ_r . Na ovaj način se dobija dijagram A na sl. 45 (a) i merna tačka sa smičućim naponom τ_A na sl. 45 (b). Drugi uzorak materijala se izlaže istom ispitivanju smicanja kao i prvi (test br.2), pri delovanju referentnog normalnog napona σ_r , do dostizanja smičućeg napona τ_A , kada se smicanje obustavlja. Uzorak na koji deluje opterećenje koje izaziva normalni napon σ_r , postepeno se rasterećuje do nivoa normalnog napona σ_B , koji iznosi oko polovine referentnog napona ($\sigma_B \cong \sigma_r/2$). Ovaj normalni napon se zadržava u daljem toku ispitivanja, a uzorak se opet izlaže smicanju, odakle se dobija dijagram B na sl. 45 (a) i merna tačka sa maksimalnim smičućim naponom τ_B na sl. 45 (b). Dobijeni dijagrami A i B, odgovaraju smicanju normalno konsolidovanog i prekonsolidovanog uzorka, respektivno.

Prema prethodno opisanom ispitivanju smičuće otpornosti zrnastog materijala, može se u potpunosti konstruisati skica prikazana na sl. 45 (b), i računski odrediti sledeći parametri materijala:

$$\phi_i = \arctan(\tau_A / \sigma_r) \quad (2.79)$$

$$\phi_c = \arctan\left(\frac{\tau_A - \tau_B}{\sigma_r - \sigma_B}\right) \quad (2.80)$$

$$c = \tau_A - \sigma_r \cdot \tan \phi_c \quad (2.81)$$

gde su:

- ϕ_i – ugao unutrašnjeg trenja pri opterećenju,
- ϕ_c – ugao unutrašnjeg trenja pri rasterećenju prekonsolidovanog materijala, i
- c – kohezija ispitivanog materijala.

Ugao ϕ_c , koji se razlikuje od ϕ_i kod kohezivnih materijala, u osnovi, odgovara uglu koji se primenjuje kod ACI 313-97 [5], pri određivanju koeficijenta K prema izrazu (2.48).

Kod nevezanih materijala, kod kojih je kohezija $c = 0$, otpornost na smicanje se izražava samo preko ugla ϕ_i , s obzirom da je u ovom slučaju $\phi_c = \phi_i$.

2.7.7 Proračunske vrednosti karakteristika materijala

U tehničkim propisima se daju preporučene vrednosti za fizičke karakteristike materijala koje su potrebne pri sračunavanju opterećenja kod silosa. Obično su to sledeće karakteristike materijala: zapreminska težina γ , ugao unutrašnjeg trenja ϕ , kojem odgovara koeficijent unutrašnjeg trenja μ_i , ugao trenja o zidove silosa ϕ_w , kojem odgovara koeficijent trenja o zid μ_w , ugao prirodnog nagiba ϕ_r , koeficijent bočnog pritiska K , i drugi. Po ovom pitanju pažnja će se usmeriti na aktuelne norme EN 1991-4:2006 [38], SRPS ISO 11697 (1996) [291], koji je kao ISO 11697, poslužio kao polazna osnova za dokument EC1-4, i na AS 3774 (1996) [14], koji je stalno služio za proračunske komparacije sa EC1-4. Radi jednoobraznosti, koristiće se, u načelu, oznake iz EC1-4 za

sve navedene standarde. Ukoliko, materijal koji se skladišti u silosu, nije obuhvaćen u propisima, karakteristike datog materijala treba odrediti ispitivanjem u skladu sa odgovarajućim uputstvima u standardima. U ovom slučaju, ispitivanje se sprovodi na reprezentativnim uzorcima rastresitog materijala, kod kojih se određuje pouzdana prosečna vrednost za svaku karakteristiku materijala pod ispitivanjem. Prethodno definisane vrednosti karakteristika materijala, koje stoje u propisima, obično predstavljaju očekivane srednje vrednosti, ili donju i gornju karakterističnu vrednost (saglasno odgovarajućim fraktilima). Moguće promene svojstava rastresitog materijala, se uvode sa uvećanjem ili umanjnjem koeficijenta K (ili opciono μ_i), kao i μ_w , primenom odgovarajućeg faktora konverzije. Dobijene donje i gornje vrednosti karakteristika materijala se kombinuju pri određivanju opterećenja, u cilju određivanja merodavnih stanja napona kod konstrukcije silosa, koja su nepovoljnija od stanja napona određenih sa srednjim vrednostima karakteristika materijala. Kako karakteristike materijala odgovaraju log-normalnoj raspodeli, mogu se koristiti sledeće odnosi:

$$K_m = \sqrt{K_u \cdot K_l} \quad \text{i} \quad a_K = \sqrt{K_u / K_l} , \quad (2.82)$$

$$\mu_{wm} = \sqrt{\mu_{wu} \cdot \mu_{wl}} \quad \text{i} \quad a_\mu = \sqrt{\mu_{wu} / \mu_{wl}} . \quad (2.83)$$

gde su K_m , K_u , K_l , μ_{wm} , μ_{wu} , μ_{wl} , srednja, gornja i donja vrednost koeficijent bočnog pritiska i koeficijenta trenja o zid, respektivno (sa indeksima m , u i l od eng. *mean*, *upper*, i *lower*, respektivno). Ovde su sa a_K i a_μ označeni faktori konverzije za koeficijente K i μ_w , respektivno. Kod EC1-4 faktori konverzije su određeni prema fraktilima karakteristika materijala od 10% i 90%, a prema AS 3774, fraktili su 5% i 95%. Veličine fraktila kod EC1-4, smatraju se odgovarajućim, kako se u ovim propisima ne uvodi korelacija između vrednosti različitih karakteristika materijala, te bi oštriji uslov bio suviše konzervativan u odnosu na realne situacije kod silosa.

2.7.7.1 – SRPS ISO 11697:1996

Kod SRPS ISO 11697 (1996) [291], karakteristike za neke materijale koji se skladište u silosima, date su tabelarno, preko ponderisanih vrednosti, podeljenih u 5 klasa za svaku karakteristiku materijala. Međutim, sem potrebe da se koriste dve tabele u ovom slučaju, uvedene klase karakteristika nemaju faktički poseban značaj u ovom standardu, i dalje se u ovom standardu ne pominju ili koriste. Ove dve tabele iz ISO 11697, ovde su zamenjene sa jednom, i to je tabela 6, koja je jednostavnija za upotrebu, a kod koje su uvedene i vrednosti koeficijenta trenja μ_w kod hrapavih zidova (u koje spadaju i betonski zidovi silosa).

U tabeli 6, svi navedeni materijali su predstavljeni sa γ , K i μ_w . Koeficijent trenja o zid μ_w , za silose glatkih zidova (tj. za zavarene ili presavijene čelične i aluminijske limove, sintetičke materijale itd.) je direktno prikazan u tabelama kod ISO 11697. Kod silosa kod kojih su zidovi hrapavi (tj. za beton, malter, drvo itd.), koeficijent trenja o zid μ_w , može se povećati za 0.1 u odnosu na datu vrednost kod glatkog zida (prema ISO 11697).

Navedene vrednosti parametara K i μ_w u tabeli 6, predstavljaju srednje vrednosti, a vrednosti date za γ predstavljaju gornje granice. Kako bi se uzele u obzir poznate bitne promene svojstava rastresitog materijala i dobile vrednosti koje predstavljaju prave ekstreme sa kojima silos može biti izložen, parametri K i μ_w se uvećavaju faktorom konverzije 1.15, ili se umanjuju faktorom 0.90, na taj način da se dobija rezultat koji predstavlja nepovoljniju kombinaciju opterećenja.

Pri izračunavanju maksimalnih projektnih opterećenja kod silosa, prema ISO 11697, uzimaju se u obzir sledeće kombinacije parametra K i μ_w :

- za najveću vrednost p_h : $1.15 \cdot K$ i $0.90 \cdot \mu_w$
- za najveću vrednost p_v : $0.90 \cdot K$ i $0.90 \cdot \mu_w$
- za najveću vrednost p_w : $1.15 \cdot K$ i $1.15 \cdot \mu_w$

Ovde su p_h , p_v i p_w opterećenja od bočnog (horizontalnog) pritiska na zid ćelije, vertikalni pritisci u materijalu, i opterećenje od trenja materijala na zidu ćelije, respektivno.

Tabela 6. Karakteristike materijala preporučene u SRPS ISO 11697 (1996).

Tip materijala	Zapreminska masa, γ [kN/m ³]	Odnos napona, K	Koef. trenja o zid, μ_w (glatki zidovi)	Koef. trenja o zid, μ_w (hrapavi zid.)
Ječam	8.50	0.60	0.30	0.40
Cement	16.00	0.60	0.40	0.50
Cementni klinker	16.00	0.50	0.40	0.50
Suvi pesak	16.00	0.50	0.40	0.50
Brašno	7.50	0.40	0.30	0.40
Leteći pepeo	13.00	0.50	0.50	0.60
Kukuruz	8.50	0.60	0.30	0.40
Šećer	10.00	0.60	0.50	0.60
Pšenica	8.50	0.60	0.30	0.40
Ugalj	10.00	0.60	0.50	0.60

2.7.7.2 – AS 3774:1996

Kod AS 3774 (1996) [14] definišu se gornja i donja karakteristična vrednost za svojstva materijala koji se uobičajeno skladište u silosima. Kod zapreminske težine γ , umesto donje vrednosti stoji srednja vrednost, sa kojom se određuje kapacitet silosa. Za neke materijale koji su obuhvaćeni u AS 3774, karakteristične vrednosti su ovde prikazane u okviru tabele 7.

Kod ovih propisa, za razliku od EC1-4 i ISO 11697, koeficijent bočnog pritiska K , definiše se u skladu sa *Ohde/Walker*-ovom analizom. Za materijal se usvaja da je u stanju granične ravnoteže, i da prati *Mohr-Coulomb*-ov zakon loma. Izraz za K prema AS 3774 je prikazan u tabeli 5, i sračunava se na osnovu datih vrednosti za uglove trenja ϕ_i i ϕ_w . Prema tome, u tabeli 7, prikazane su donje i gornje vrednosti za uglove trenja ϕ_i i ϕ_w , a ne vrednosti za koeficijent K . Ugao unutrašnjeg trenja ϕ_i , u AS 3774 se naziva *efektivni* ugao unutrašnjeg trenja. U EC1-4, pridev *efektivni* kod ovog ugla je izostavljen, kako se uobičajeno koristi kod termina u geomehanici.

Uvedena su četiri tipa zidnih površina, od D1 do D4, sa podelom koja je praktično preuzeta u EC1-4 (zidova tipa D4 su obrađeni u posebnom aneksu normi). Betonski zidovi i ovde spadaju u zidove tipa D3 po pitanju hrapavosti površine.

Tabela 7. Karakteristike nekih materijala prema AS 3774 (1996).

Tip materijala	Zapreminska težina, γ [kN/m ³]		Ugao prirodnog nagiba, ϕ_r [°]	Efektivni ugao unutrašnjeg trenja, ϕ_t [°]		Ugao trenja o zid, ϕ_w [°]					
						Tip D1		Tip D2		Tip D3	
	srednja	gornja	srednja	donja	gornja	donja	gornja	donja	gornja	donja	gornja
Cement	13.0	16.0	28	40	50	20	25	23	28	28	33
Cem.klinker	15.0	18.0	33	42	52	20	25	25	30	30	35
Brašno (pšenično)	6.5	7.5	40	23	30	15	23	25	28	25	35
Kukuruz	7.0	8.5	30	28	33	15	25	20	30	25	32
Pšenica	7.5	9.0	23	26	32	15	25	18	30	25	32

Kod silosa sa zidnom oblogom, uvedeno je posebno pravilo u AS 3774, koje se ne sreće kod drugih normi, a to je da se karakteristična vrednost ugla trenja o zid ϕ_w određuje prema dva uslova, i to su:

- kada obloga postoji; i
- kada nema obloge.

Ovo pravilo je uvedeno u AS 3774, kako se tokom eksploatacije silosa, obloga može oštetiti ili ukloniti pri upotrebi silosa. Po ovom pitanju stav je u AS 3774, da integritet konstrukcije silosa ne sme da zavisi od prisustva obloge i njenih karakteristika.

U proračunima se ugao trenja o zid ϕ_w uzima da nije veći od *efektivnog* ugla unutrašnjeg trenja ϕ_t , kako materijal pri hrapavom zidu može da klizi unutar sloja uz sam zid. Kod određivanja koeficijenta K , ovaj fizički uslov je ujedno i matematički potreban uslov za dobijanje odgovarajućih brojnih vrednosti. Ovaj problem se uopšte ne razmatra u EC1-4 kod proračuna zidova ćelija, ali se kod proračuna opterećenja na levku prema Walker-ovom ili Enstad-ovom postupku i u EC1-4 za levak postavlja uslov da je $\phi_{wh} \leq \phi_{ih}$ (kod uglova je dodatni indeks h oznaka za levak - hopper).

Kombinacije parametara pri proceni opterećenja prema AS 3774, su prikazane u tabeli 8, i u principu odgovaraju kombinacijama parametara prema EC1-4.

Tabela 8. Kombinacije parametara pri proceni opterećenja prema AS 3774 (1996).

Svrha procene	Karakteristična vrednost		
	Koeficijent trenja o zid μ_w	Koeficijent bočnog pritiska K	Efektivni ugao unutrašnjeg trenja ϕ_t
max. normalni pritisak na zid	donja	gornja	donja
max. opt. od trenja o zid ćelije	gornja	gornja	donja
max. vert. opt. na levku	donja	donja	gornja
max. pritisci na levku	donja (za levak)	—	gornja

Kod kombinacije parametara koja daje maksimalni pritisak na vertikalni zid ćelije, koriste se donja vrednost za $\mu_w (= \mu_{wl})$, gornja vrednost za $K (= K_u)$, i donja vrednost za $\phi_i (= \phi_{il})$. Za ovaj slučaj opterećenja, u skladu sa stavovima u AS 3774, kod vitkih silosa (za koje je prema ovom standardu $h/d > 3.0$), primenjuje se sledeći postupak proračuna:

$$\phi_{wl} = \min(\phi_{wltabela}, \phi_{il}) \quad (2.84)$$

$$\mu_{wl} = \tan \phi_{wl} \quad (2.85)$$

$$K_u = \max\left(\frac{1 + \sin^2 \phi_{il} - 2\sqrt{\sin^2 \phi_{il} - \mu_{wl}^2 \cdot \cos^2 \phi_{il}}}{4\mu_{wl}^2 + \cos^2 \phi_{il}}, 0.35\right) \quad (2.86)$$

Kod izraza (2.84), oznaka $\phi_{wltabela}$ se odnosi na donju vrednost ugla ϕ_w , koji se uzima za odgovarajući tip zida iz tabele 7.

Proračunski izrazi za stanje punjenja i mirovanja materijala u ćeliji, i kod AS 3774, odgovaraju *Janssen*-ovoj teoriji, tako da se i ovde, kao i kod EC1-4, koriste izrazi (2.89), (2.90) i (2.91). Primenom ovih izraza, određen je slučaj opterećenja sa max. p_h , a na sličan način se određuju i drugi slučajevi opterećenja.

2.7.7.3 – EN 1991-4:2006

Kod EN 1991-4:2006 [38], vrednosti karakteristika najčešće uskladištenih materijala u silosima su date tabelarno u aneksu E u EN 1991-4:2006 [38]. U tabelama 9 i 10, ovog rada, dati su podaci samo za nekoliko ovih materijala. Sa donjom vrednošću zapreminske težine γ_ℓ , sračunava se projektovani kapacitet silosa, a svi proračuni opterećenja se rade na osnovu gornje vrednosti zapreminske težine γ_u . Vrednosti za μ_{wm} , K_m i ϕ_{im} prikazane u tabelama, su preporučene srednje vrednosti. Ako materijal nije naveden u okviru tabela u EC 1-4, potrebno je sprovesti neophodna ispitivanja karakteristika materijala kako bi se utvrdili potrebni podaci za projektovanje. Novina u EC 1-4 je uvođenje surogatnog materijala (*default material*), koji velikim opsegom karakteristika pokriva neodređenosti pri projektovanju silosa za skladištenje nedovoljno poznatog materijala. Ovo se može primeniti kod manjih silosa ako je ispitivanje karakteristika materijala skupo, ali je potpuno neracionalno za primenu kod projektovanja srednjih i većih silosa.

Za određivanje opterećenja od uskladištenog materijala u silosnim ćelijama, koriste se gornje i donje karakteristične vrednosti za K , μ_w i ϕ_i , koje se dobijaju tako što se srednje vrednosti K_m , μ_{wm} i ϕ_{im} množe, odnosno dele sa odgovarajućim konverzionim faktorom a (tabele 9 i 10), prema sledećem:

– gornje karakteristične vrednosti:

$$K = a_K \cdot K_m; \quad \mu_w = a_\mu \cdot \mu_{wm}; \quad \phi_i = a_\phi \cdot \phi_{im}, \quad (2.87)$$

– donje karakteristične vrednosti:

$$K = K_m / a_K; \quad \mu_w = \mu_{wm} / a_\mu; \quad \phi_i = \phi_{im} / a_\phi. \quad (2.88)$$

U tabeli 10, uvedena je klasifikacija za tipove zidova, prema materijalu od kojeg je zid napravljen, odnosno hrapavosti površine u kontaktu sa uskladištenim materijalom, i to su:

- D1 – zidovi sa malim trenjem (*klizavi zidovi*; npr. zidovi od hladno-valjanog ili poliranog nerđajućeg čelika),
- D2 – zidovi sa umerenim trenjem (*glatki zidovi*; npr. od običnog konstrukcijskog čelika),
- D3 – zidovi sa velikim trenjem (*hrapavi zidovi*; npr. betonski zidovi), i

- D4 – neregularni slučaj trenja o zidova (npr. zidovi od valovitog lima i slično).

Koeficijenta trenja za nekoliko zrnastih materijala i zidove tipa D1, D2 i D3, su dati u tabeli 10. Trenje kod zidovi tipa D4 se posebno obrađuje u prilogu D u EC 1-4.

Tabela 9. Karakteristike nekih materijala prema EN 1991-4:2006 (I deo).

Tip zrnastog materijala	Zapreminska težina, γ [kN/m ³]		Ugao prirodnog nagiba	Ugao unutrašnjeg trenja ϕ_i		Koef. bočnog pritiska K	
	γ_ℓ	γ_u	ϕ_r [°]	ϕ_{im} [°]	a_ϕ	K_m	a_K
	donja	gornja	srednja	srednja	faktor	srednja	faktor
Surogatni materijal	6.0	22.0	40	35	1.30	0.50	1.50
Cement	13.0	16.0	36	30	1.22	0.54	1.20
Cementi klinker	15.0	18.0	47	40	1.20	0.38	1.31
Brašno	6.5	7.0	45	42	1.06	0.36	1.11
Kukuruz	7.0	8.0	35	31	1.14	0.53	1.14
Pšenica	7.5	9.0	34	30	1.12	0.54	1.11

Tabela 10. Karakteristike nekih materijala prema EN 1991-4:2006 (II deo).

Tip zrnastog materijala	Koeficijent trenja materijala o zid silosa $\mu_w = \tan \phi_w$				Faktor ref. materijala za lokalno (patch) opterećenje C_{op}
	Tip zida D1	Tip zida D2	Tip zida D3	a_μ	
	srednja	srednja	srednja	faktor	
Proizvoljni materijal	0.32	0.39	0.50	1.40	1.0
Cement	0.41	0.46	0.51	1.07	0.5
Cementi klinker	0.46	0.56	0.62	1.07	0.7
Brašno	0.24	0.33	0.48	1.16	0.6
Kukuruz	0.22	0.36	0.53	1.24	0.9
Pšenica	0.24	0.38	0.57	1.16	0.5

Opterećenja od uskladištenog materijala se razmatraju na sasvim punom silosu, i to su opterećenja od punjenja i pražnjenja materijala, koja se uzimaju kod analize graničnih stanja nosivosti i upotrebljivosti. Opterećenja pri punjenju i pražnjenju materijala za silosnu konstrukciju predstavljaju glavne slučajeve opterećenja pri kombinacijama različitih opterećenja, sa kojima se određuju različita granična stanja elemenata konstrukcije. Pri tome se posebno analiziraju:

- maksimalni normalni pritisak na vertikalne zidove;
- maksimalno vertikalno opterećenje od trenja o zidove ćelija;
- maksimalni vertikalni pritisak na dno silosa; i
- maksimalno opterećenje na levak silosa.

Tabela 11. Kombinacije parametara pri proceni opterećenja prema EN 1991-4:2006.

Svrha procene	Karakteristična vrednost koja se primenjuje		
Za vertikalni zid:	Koeficijent trenja o zid μ_w	Koeficijent bočnog pritiska K	Ugao unutrašnjeg trenja ϕ_i
max. normalni pritisak na vert. zid	donja	gornja	donja
max. opt. od trenja o zid ćelije	gornja	gornja	donja
max. vert. opt. na levku ili dno silosa	donja	donja	gornja
Za zid levka:	Koeficijent trenja o levak μ_w	Odnos pritisaka na levku F	Ugao unutrašnjeg trenja ϕ_i
max. pritisak na levku pri punjenju	gornja (za levak)	donja	donja
max. pritisak na levku pri pražnjenju	donja (za levak)	gornja	gornja

Proračunska procena opterećenja se pravi korišćenjem pojedinačnog seta odgovarajućih vrednosti karakteristika materijala μ_w , K i ϕ_i , tako da se odgovarajuće granično stanje zasniva na primeni predefinisano seta karakteristika uskladištenog materijala (tabela 11). Gornja karakteristična vrednost zapreminske težine zrnastog materijala se koristiti u svim ovim slučajevima određivanja opterećenja.

Praktično, potrebno je praviti analize prema datim setovima, odnosno kombinacijama karakteristika materijala. Na ovaj način jedno opterećenje se pojavljuje u varijetetima prema primenjenom setu karakteristika materijala. Kod silosa *proračunske klase 2* (silosi kapaciteta od 100 do 1000 tona sa umerenim ekscentricitetom materijala pri punjenju i pražnjenju) i *proračunske klase 3* (silosi većeg kapaciteta od 10000 tona i silosi sa kapacitetom većim od 1000 t sa većim ekscentricitetom pri punjenju i pražnjenju), na ovaj način, značajno se umnožava broj kombinacija opterećenja (za 3 puta) u ukupnoj analizi konstrukcije, na osnovu uvođenja pojedinačnih setova podataka za karakteristike uskladištenih materijala. Kod silosa *proračunske klase 1* (silosi kapaciteta manjeg od 100 t), dopušta se smanjenje stepena analize, i dovoljno je razmatrati samo jedan set karakterističnih vrednosti uskladištenog materijala, i to prema srednjim vrednostima za μ_{wm} , K_m i ϕ_{im} . Ovo predstavlja značajno pojednostavljenje kod analize silosa kapaciteta manjeg od 100 t, prema EC1-4.

Na primeru kombinacije koja daje maksimalni pritisak na vertikalni zid ćelije, gde se koristi donja vrednost za μ_w ($=\mu_{wl}$), i gornja vrednost za K ($=K_u$), proračunski izrazi za stanje punjenja i mirovanja materijala u ćeliji, prema *Janssen-u*, prelaze u sledeći oblik:

$$p_w = \tau_w = \gamma \cdot r_h \cdot \left(1 - e^{-\frac{K_u \cdot \mu_{wl} \cdot z}{r_h}}\right) \quad (\text{odgovarajuće } p_w \text{ pri max. } p_h) \quad (2.89)$$

$$p_h = \sigma_h = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_{wl}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{K_u \cdot \mu_{wl} \cdot z}{r_h}}\right) \quad (\text{max. } p_h) \quad (2.90)$$

$$p_v = \sigma_v = \frac{\gamma \cdot r_h}{K_u \cdot \mu_{wl}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{K_u \cdot \mu_{wl} \cdot z}{r_h}}\right) \quad (\text{odgovarajuće } p_v \text{ pri max. } p_h) \quad (2.91)$$

Pri statičkoj analizi, primenom ovih izraza, određen je jedan slučaj opterećenja. Na sličan način se određuju i druge kombinacije koje su navedene u tabeli 11.

2.8 Pregled istraživanja i oštećenja kod silosa

2.8.1 Prva istraživanja u vezi opterećenja kod silosa

U prva izučavanja ponašanja zrnastih materijala ulaze radovi *Coulomb*-a¹ na izučavanju trenja materijala, i opterećenja na potporne zidove, *Rankine*-a² koji je proučavao trenje kod peska i raspodele pritisaka, i *Reynolds*-a³ koji je otkrio efekat dilatancije kod peska pri njegovoj deformaciji.

Prva značajna istraživanja o opterećenjima u silosima izvršena su u periodu od 1882. do 1919. god., iako su silosi bili i mnogo ranije u upotrebi u mnogim zemljama, prema *Roberts*-u (1998) [247]. Pregled koji je dao *Roberts* za ovaj period je u stvari skraćeni prikaz mnogo šireg pregleda istraživanja koji je prikazao *Ketchum* u knjizi o silosima iz 1919. god. [145]. Opterećenja u bunkerima su detaljno razmatrana u knjizi *Cain*-a (1916) [33]. Iz ovog perioda je i knjiga o postupcima i metodama izgradnje AB silosa od *Hanson*-a (1916) [110]. Ove tri knjige koje su izašle na američkom području, pratile su i ubrzale široku primenu AB silosa i bunkera u tamošnjoj praksi.

Na evropskom prostoru bunker i silosi su, u to vreme, obrađivani u stručnoj literaturi zajedno sa drugim AB konstrukcijama, kao što je npr. *Saliger*-ova knjiga iz 1911. god. [272], ili u vidu stručnih članaka, od kojih se kao primeri navode *Lindner*-ov rad (1912) [172], gde je opisana primena *Janssen*-ove teorije za kružne i kvadratne ćelije, i *Kellner*-ov rad (1938) [143], koji se odnosi na proračun i dimezionisanje AB silosa.

U vezi karakteristika zrnastih materijala, kao i određivanja opterećenja kod silosa, u svetu se sve više poklanja pažnja prvim referencama iz ove oblasti. U tom pravcu, ovde se daje spisak bitnih radova objavljenih do 1900. god., na osnovu izvora navedenih kod *Ketchum*-a (1919) [145], *Voellmy*-a (1937) [321], *Гячев*-a (1968) [352] i *Sperl*-a (2006) [290]:

1. *Huber-Burnand* (1829). *Ann. d. Phys.* 92, 316. (prema [290])
2. *Hagen G.H.L.* (1852): "Über den Druck und die Bewegung des trocknen Sandes". *Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. S.35-42. (prema [290])
3. *Roberts I.* (1882): "On the pressure of wheat stored in elongated cells or bins". *Engineering*, 34, 27 October, 399. (prema [145])
4. *Фрид М.* (1890): "Результаты опытов давления зерна на дно и стены глубоких сосудов". *Журнал МПС*, апрель-май, стр.921-933. (prema [352])
5. *Надеждеин В.* (1891): "Распределение давлений в сыпучих телах". *Журнал МПС*, январь, стр.109-131. (prema [352])
6. *Карчевский И.С.* (1894): "Опыт исчисления давления зерна на дно и стенки закромов". *Журнал МПС*, Кн. 3, стр.291-344. (prema [352])
7. *Делакроа А.Е.* (1894): "Опыт непосредственного определения давления зерна в закромах элеваторов". *Журнал МПС*, Кн. 3, стр.280-290. (prema [352])
8. *Janssen H.A.* (1895): "Versuche über Getreidedruck in Silozellen". *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, Vol.39, No.35, August 31, S.1045-1049. (prema [145])

¹ *Coulomb C.A.* (1773): "Application des règles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture". *Mémoires de savants étrangers de l'Académie des Sciences de Paris*.

² *Rankine W.* (1857): "On the stability of loose earth". *Phil. Trans.* (Izrazi za pritiske na potporni zid i za odgovarajuće analize prema *Coulomb*-u i *Rankine*-u su prikazane u ref. [33], [145], [146], [178], [200], [305], [319], [358].)

³ *Reynolds O.* (1885): "On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact". *Philosophical Magazine*, 20, 468. (Citirano prema [319].)

9. Prante (1896): "Messungen des Getreidedruckes in Silozellen". *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, S.1192. (prema [145])
10. Könen M. (1896): "Berechnung des Seiten- und Bodendruckes in Silozellen". *Centralblatt der Bauverwaltung*, 16, S.446-449. (prema [321])
11. Airy W. (1897): "The pressure of grain". *Proc. of Inst. of Civil Eng.*, CXXXI. (prema [145])
12. Kötter F. (1899): "Der Bodendruck von Sand in verticalen cylindrischen Gefässen". *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. 120, S.189-241. (prema [321])

Sve reference, osim ref. Könen-a i ref. Kötter-a [153], odnose se na eksperimentalna ispitivanja, a sa teorijskog aspekta za analizu opterećenja silosa, od navedenih su bitne ref. Janssen-a, Könen-a, Airy-a i Kötter-a. Dve ref. su nedavno objavljene u prevodu na engleski jezik, i to su: Hagen-ov rad iz 1852. god., sa pridodatom diskusijom od strane Tighe-a i Sperl-a (2007) [306], i Janssen-ov rad iz 1895. god. [130], koji je preveden i diskutovan od strane Sperl-a (2006) [290]. Za navedene ruske ref., neki od bitnih rezultata istraživanja prikazani su u knjizi Гячев-a (1968) [352].

Pri opisu prvih eksp. istraživanja iz oblasti opterećenja kod silosa, Roberts (1998) [247] navodi doprinose sledećih istraživača: I. Roberts (1882-4), Janssen (1895), Airy (1897), Prante (1896), Toltz (1903), Jamieson (1900-4), Ketchum (1902-9), Lufft (1902-4), Pleissner (1902-5), Bovey (1904), Phillips (1910), i Shaxby i Evans (1922-3).

Ovi prvi radovi su značajni po tome što su u njima prikazani osnovni parametri, kao što su unutrašnje trenje materijala i trenje materijala o zidove, koji određuju veličinu opterećenja na dno i zidove silosa. Pored toga, Janssen-ova analiza se i dalje koristi u skoro svim svetskim propisima za proračune opterećenja kod silosa.

Könen je uveo Rankine-ov koeficijent aktivnog pritiska za koeficijent bočnog pritiska K , koji predstavlja odnos horizontalnog i vertikalnog pritiska u materijalu pri zidu ćelije. Na ovaj način je Könen afirmisao Janssen-ov rad.

Airy-eva analiza se sada retko koristi, ali u nekim slučajevima analize opterećenja kod bunkera i opterećenja na trakastim transporterima, i dalje je aktuelna. Kod ove analize, pritisci u materijalu zavise, pored zapreminske težine i geometrijskih veličina, od ugla unutrašnjeg trenja i ugla trenja materijala o zid, i kod ove analize, što je bitno, uopšte ne figuriše koeficijent K . Na ovaj način, upoređujući Airy-ovu i Janssen-ovu formulaciju za pritiske koje se koriste kod istog silosnog problema, može se zaključiti da koeficijent K , koji se koristi kod Janssen-ove analize, zavisi od navedenih uglova trenja materijala, te da K nije "samo" svojstvena karakteristika materijala koja se eksperimentalno određuje za razmatrani zrnasti materijal.

Kötter-ova analiza (1899) [153], za koju se uobičajeno navodi da je vrlo složena, je otvorila put uvođenju graničnog stanja ravnoteže kod razmatranja stanja napona u zrnastom materijalu.

Roberts I. (1882-4) je konstruisao četiri ispitne silosne ćelije sa kvadratnim i heksagonalnim poprečnim presekom. Zidovi ćelije su bili oslonjeni na pomoćne oslonce, a dno na težinski most preko kojeg je meren pritisak materijala na dno ćelije. Na osnovu analize rezultata, zaključeno je da su pritisci na osnovu ograničeni usled efekata unutrašnjeg trenja i trenja o zidove ćelije. Nalazi su publikovani u dva rada, prvi u časopisu 'Engineering' od 27 okt. 1882., i drugi u 'Proceedings of the Royal Society of London', od 31 jan. 1884.god., prema Ketchum-u [145], Roberts-u [247] i Sperl-u [290].

Janssen H.A. (1895) je prvi formulisao teoriju koja obuhvata fenomen saturacije pritisaka (pojava asimptotskih vrednosti pritisaka) kod zrnastih materijala, u radu iz 1895. god. [130], na osnovu koje se mogu objasniti zapažanja pri eksperimentima I. Roberts-a,

Hagen-a, i Huber-Burnand-a. Janssen je sproveo ispitivanja na četiri ispitne silosne ćelije napravljene od drveta, sa kvadratnim poprečnim presekom i stranama od 20, 30, 40, i 60 cm. Postavka ispitivanja, reprodukovana prema originalu iz [130], je prikazana na sl. 46 (a). Kod ćelije je dno bilo odvojeno od zidova, i oslanjalo se na mernu vagu (ispitivani materijal je bila pšenica). Određivani su pritisci na dno ćelije pri različitim količinama zrna u svakoj ispitnoj ćeliji.

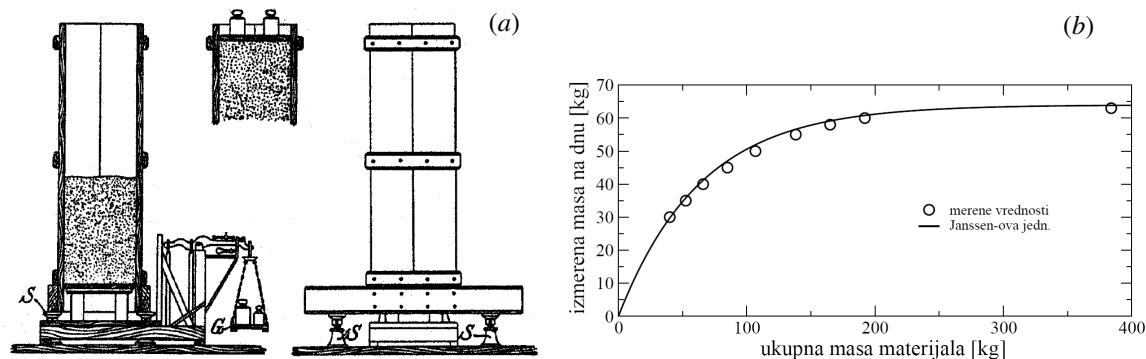
Na osnovu usvojenih pretpostavki, uz primenu diferencijalnog računa, Janssen je odredio poznate jednačine za silosne pritiske, gde je vertikalni pritisak u sledećem obliku:

$$p_v = \frac{\gamma \cdot a}{4K \cdot \mu_w} (1 - e^{-4K \cdot \mu_w \cdot z/a}) \quad (2.92)$$

gde su:

- p_v = vertikalni pritisak zrnastog materijala ;
- z = visina materijala u ćeliji ;
- K = odnos pritisaka (p_h/p_v) ;
- μ_w = koeficijent trenja o zid ;
- a = dužina stranice kvadratne ćelije ;
- γ = zapreminska težina zrnastog materijala ; i
- p_h = bočni pritisak.

Prikaz izmerenih i proračunskih vrednosti iz Janssen-ovog rada (za test br. 4) je dat na sl. 46 (b), kao adaptacija prikaza kod prevoda Janssen-ovog rada prema Sperl-u [290].



Sl. 46 (a) Prikaz Janssen-ove postavke ispitivanja silosa sa zrnastim materijalom, prema [130], i (b) upoređenje izmerenih i sračunatih rezultata, prema [290].

Milo S. Ketchum je sproveo istraživanja opterećenja na zidovima ćelija 1902-3. god. na University of Illinois, ali je njegov glavni doprinos u oblasti projektovanja silosa sa publikovanjem, u 1907. god., knjige *The Design of Bins, Walls and Grain Elevators*. Naknadna izdanja ove knjige su sledila u 1911 i 1919 [145]. U glavi XVI ove knjige, uključeni su detaljni prikazi Janssen-ove analize i Airy-ove analize (originalne ilustracije kod ovih analiza iz [145], sa uvedenim manjim izmenama, prikazane su na sl. 47).

Ketchum je zaključio da su vertikalni i bočni pritisci pri nekoj lokaciji konstantni na površini kupole/svoda pre nego na horizontalnom sloju, sl. 47 (b). I pored ove konstatacije, on se vratio na pretpostavku o konstantnim pritisacima na diferencijalnom sloju materijala (sl. 47 (c)) i odredio Janssen-ovu jednačinu za vertikalne pritiske, u sledećoj formi:

$$p_v = \frac{\gamma \cdot r_h}{K \cdot \mu_w} (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot z / r_h}) \quad (2.93)$$

gde su:

$r_h = A/U =$ hidraulički radijus;

$A =$ površina unutrašnjeg poprečnog preseka ćelija; i

$U =$ unutrašnji obim ćelije.

Sa uvođenjem hidrauličkog radijusa, *Ketchum* je generalizovao *Janssen*-ovu jednačinu, koja se sada može primeniti na silose sa opštim oblikom poprečnog preseka.

Kod kružne ćelije sa unutrašnjim prečnikom ćelije d , sledi da je $A = \pi d^2 / 4$ i $U = \pi d$, odakle se određuje da je kod kružnih ćelija $r_h = d / 4$.

Za kvadratne ćelije sa stranicom a , $A = a^2$ i $U = 4 a$, odakle se određuje da je kod kvadratnih ćelija $r_h = a / 4$.

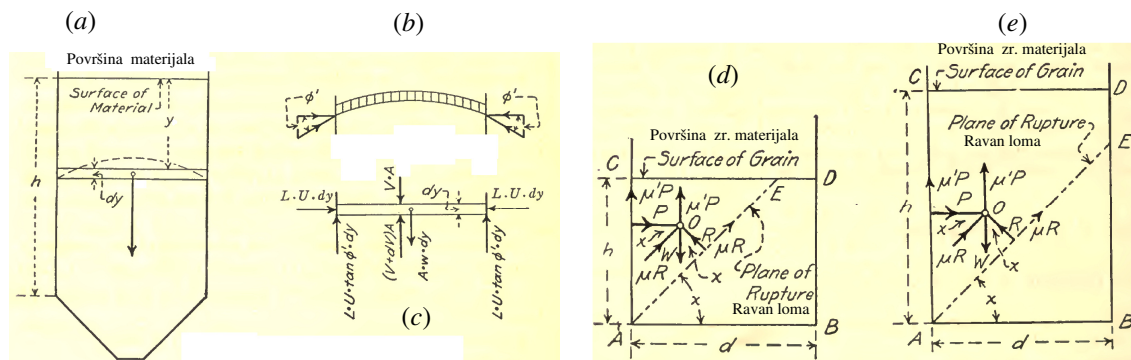
Ketchum-ovih eksperimenti su izvedeni na ispitnim silosima $30\text{cm} \times 30\text{cm} \times 2.6\text{m}$, koji su bili napravljeni od drveta. Za pšenicu kao usipni materijal, rezultati su pokazali da K iznosi oko 0.4. Ovo je manja vrednost za K od vrednosti 0.67 koju je odredio *Janssen* pri svojim eksperimentima.

Činjenica je da je *Janssen* u toku svojih ispitivanja, sukcesivno pre svakog novog nasipanja sloja materijala u ćeliju na sl. 46 (a), malo podizao zidove modela preko oslonaca S (verovatno radi vertikalnog balansiranja ćelije), i na ovaj način doprineo većim vrednostima koeficijenta K .

U literaturi se ovo pitanje u vezi sa veličinom koeficijenta K ne komentariše, a *Janssen*-ovo sukcesivno podizanje zidova se objašnjava tobožnjom potrebom za punom mobilizacijom trenja materijala o zidove ćelije. Međutim, podizanje zida ima sličan efekat kao kretanje materijala pri pražnjenju, a u tom slučaju se javlja povećanje koeficijenta K .

Airy W. (1897) je uspostavio teoriju za određivanje pritisaka zrnastog materijala u silosima, gde je uključio eksperimentalne rezultate svojih merenja za vrednosti ugla prirodnog nagiba zrnastog materijala i koeficijenta trenja zrna o zidove ćelije.

Njegov model, koji je prikazan na sl. 47, razmatra krilno oblikovani segment materijala, ograničen prelomnom ravni sa nagibom x , koji izaziva maksimalni pritisak na zid sa leve strane, i sa tačkom O , koja odgovara težištu materijala ovog segmenta. Segment je jedinične debljine u ravni upravnoj na prikazani vertikalni presek modela.



Sl. 47 (a) do (c) - *Janssen*-ov model diferencijalnog sloja prema *Ketchum*-u [145]; *Airy*-ev model sa kliznom ravni prema *Ketchum*-u [145] za (d) plitke ćelije i (e) duboke ćelije.

Razmatrana su dva slučaja, jedan za plitke ćelije prema sl. 47 (d), gde ravan loma ne preseca zid ćelije nego prolazi kroz gornju površinu materijala, i drugi za duboke ćelije prema sl. 47 (e), gde ravan loma preseca zid ćelije na suprotnoj strani.

Airy je koristio uslove ravnoteže spoljnih sila, kako bi odredio silu P , a koja je određena kao funkcija dubine h . Dalje je odredio horizontalni potisak p_s pomoću diferenciranja, kako je $p_s = dP/dh$. Ova analiza ima nedostatak u zanemarenju spoljnih sila na delu zida ED na sl. 47 (e), kako je *Airy* pretpostavio da se pri klizanju segment materijala odvaja od ovog dela zida. Analiza je ipak prihvatljiva kod ravanskog problema, ali pri tome su pritisci na strani surnosti (iz ovog razloga se u jednostavnim slučajevima ovaj postupak i zadržao u praksi). Korektniji postupak analize pritisaka kod modela ćelije sa uvođenjem klizne ravni materijala je prikazao *Nedderman* (1992) u § 4.8 ref. [200], za slučaj ravnog stanja napona u silosu (materijal između dva vertikalna zida).

Određivanje pritiska na zidu silosa sa cilindričnom ćelijom kružne osnove, pri uvođenju klizne ravni u zrnastom materijalu, razmatrali su *Bagster* i *Nedderman* (1985) [19], a postupak je formulisan kao primena *Coulomb*-ove metode proračuna pritisaka na zid cilindričnih silosa. Odgovarajući postupak proračuna sa kliznom ravni/površinom kod silosa u slučaju ravanskog problema i kod cilindričnih silosa sa kružnim poprečnim presekom ćelija su prikazali *Peter* i *Lochner* (1977) [228].

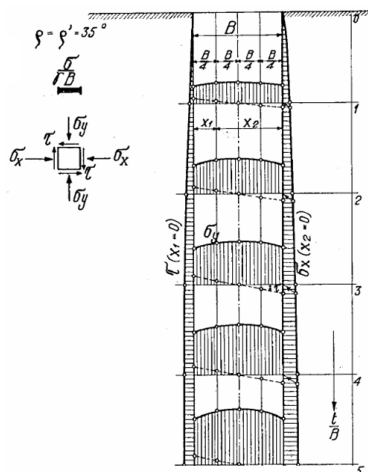
2.8.1.1 Doprinos mehanike tla analizi silosnog problema

Mehanika tla kao oblast nauke je bila razvijenija ranije, u odnosu na mehaniku zrnastih materijala. S obzirom na sličnost oblasti istraživanja, nije iznenađenje da je mehanika tla imala i ima značajan uticaj na istraživanje različitih aspekata ponašanja zrnastih materijala kod silosnog problema. Isto tako, *Janssen*-ova teorija se proteže kroz brojne slučajeve analiza u mehanici tla. Zbog velike sličnosti problema kod ovih oblasti i isprepletenosti metoda, termina i formulacija, korisno je uočiti i razlike između ovih oblasti. Kod mehanike tla (u oblastima kao što su analize stanja kod potpornih zidova, temelja, podgrada u rudnicima, obloga u tunelima) obično su pritisci u tlu relativno većeg intenziteta od pritisaka zrnastih materijala u silosnim ćelijama. Pored toga, osnovni zadaci u mehanici tla su vezani za stanja i uslove u tlu pre samog loma tla, dok su kod zrnastih materijala u silosima od primarnog interesa stanja i uslovi koji dovode do loma i pojave tečenja – proticanja materijala.

Pored opštih sličnosti postoje i jednake metode proračuna kod nekih problema. Tako se u mehanici tla vertikalni pritisci na cevne zatrpave instalacije postavljene u linijskim kanalima, računaju prema *Marston*-ovom (1930)¹ postupku, koji predstavlja primenu *Janssen*-ove formulacije silosnog problema, pri čemu su uzima da su jednaki ugao unutrašnjeg trenja materijala sa kojim se zatrpava instalacioni rov i ugao trenja ovog materijala o zidove-strane rova od postojećeg tla. Na osnovu brojnih ispitivanja potvrđeno je da ovakav proračun predstavlja zadovoljavajuću aproksimaciju. U predstandardu za proračun ukopanih instalacionih linija prCEN/TR 1295-3 (2005), koji je prikazan u tehničkom izveštaju EC CEN/TR (2006) [41], uveden je *Marston*-ov postupak kod analize opterećenja na instalacione linije. Napone u zatrpanom rovu sa vertikalnim stranama je analizirao *Voellmy* (1937) [321], na osnovu složene matematičke analize, a rezultati su prikazani na sl. 48 u grafičkom obliku, za analizirani ravanski problem i slučaj

¹ *Marston* (1930): *The Theory of External Loads on Closed Conduits in the Light of the latest Experiments*. Iowa Eng. Exp. Stat., Bull. 96. (Citirano prema *Voellmy*-u (1937) [321].)

$\phi_i = \phi_w = 35^\circ$. Problem napona u zatrpanom rovu-kanalu sa nagnutim stranama, odgovara proračunu stanja pritiska kod klinasto oblikovanog levka. Formulacija prikazana za ovaj slučaj kod Voellmy-a, odgovara po obliku kasnije primenjenoj formulaciji kod proračuna opterećenja kod levka silosa, npr. u ref. [48], a velika sličnost je i sa formulacijama za pritiske u levku prema EC1-4.



Sl. 48 Dijagrami napona u zatrpanom rovu prema Voellmy-u (1937).

Kod mehanike tla, novi jednostavni postupak proračuna napona u zatrpanom rovu su prikazali Li i Aubertin (2007-10) u ref. [167], [168] i [169]. Njihov postupak se zasniva na Marston-ovoj, odnosno Janssen-ovoj analizi stanja napona (metoda diferencijalnog sloja materijala), kao i na uvođenju odgovarajućeg oblika za faktor distribucije kod dijagrama vertikalnih napona. Faktor distribucije, je prvo bio uveden kod silosnog problema, od strane Walker-a ((1966) [325] i (1967) [326]), a dalje ga je primenio u odgovarajućim analizama Walters (1973) u ref. [327] i [328]. Dijagrami napona, prema novom postupku Li-a i Aubertin-a, po obliku odgovaraju dijagramima na sl. 48, prikazanim kod Voellmy-a. Ovaj postupak se ne može direktno primeniti kod opšteg silosnog problema, kako je uvedeni faktor distribucije empirijski kalibrisan prema numeričkim analizama stanja napona u zatrpanom rovu. Međutim, silosni problem predstavlja opštiji slučaj u analizi stanja napona, tako da se može primeniti za određivanje stanja napona u zatrpanom rovu.

Od posebnog je značaja za obe oblasti istraživanja, rad Jáky-a (1944)¹, gde je određen izraz za koeficijent bočnog pritiska pri mirovanju K_0 . Koeficijent K_0 , u poznatom obliku (2.43), prvi put je primenjen upravo kod problema analize stanja napona materijala u silosu, prema Jáky-u (1948)².

U mehanici tla se analizira "silosni efekat" odnosno "lučno dejstvo" kod tla, koje se može pojaviti u brojnim slučajevima problema stanja napona, prema Handy-u (1985) [109]. Specifične analize ovog efekta kod potpornih zidova, tunela, kanala, i slično, su predmet razmatranja u relevantnoj stručnoj literaturi: Terzaghi (1972) [305], Jáky (1949) [129], Ohde (1958) [210], Kézdi (1969) [146], Maksimović (2001) [178], Murthy (2003) [196], Kleijn (1977) [358], Соколовский (1960) [371], Verruijt (2001) [319], i drugi.

¹ Jáky J. (1944): "A nyugalmi nyomás tényezője". *Magyar Mérnök és Építész Egylet Közlönye*, Vol.7, Budapest, pp.355-358 (in Hungarian).

² Jáky J. (1948): "Pressure in silos". *Proceedings of the 2nd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Vol. I, June 21-30 1948, Rotterdam, pp.103-107.

2.8.1.2 Doprinis procesnog, hemijskog i mašinskog inženjerstva

U cilju približavanja oblasti raznih struka, uključujući i građevinsku struku, a u svrhu opšteg sagledavanja problema kod silosa, sa bližim prilaženjem građevinskom pogledu, urađene su knjige: *McGlinchey* (ed.) (2008) [186], o radu sa granularnim materijalima u okviru silosne problematike, i *Brown* i *Nielsen* (ed.) (1998) [31], kao rezultat dugotrajnog rada na evropskom *CA-Silo* projektu, koja predstavlja pregled stanja iz svih oblasti vezanih za građevinsko sagledavanje silosnog rada, i ispitivanja granularnih materijala. Ova poslednja predstavlja *state-of-the-art* za sledeće oblasti: probleme protoka materijala u silosima i ispitivanje karakteristika silosnih materijala, betonske i metalne konstrukcije silosa, numeričke simulacije granularnog materijala, eksperimentalnu tehniku i ispitivanje silosa, određivanje stanja napona, protoka, vibracija, izbočavanja u silosima, i specifična istraživanja za industrijske potrebe.

Manipulacije i transport granularnih materijala su predmet procesnog, hemijskog i mašinskog inženjerstva i spadaju u okvir mehanike zrnastih materijala. Ovi problemi se razmatraju u okviru kurseva hemijskog i procesnog inženjerstva, npr. *Hartge* (1997) [111], *Chase* (2002) [42], *Tomas* (2009) [309], preglednog udžbeničkog tipa o osnovama tehnologije zrnastog materijala kao *Holdich* (2002) [120], vrlo specijalizovane literature o protoku granularnog materijala kao *Kesava Rao* i *Nott* (2008) [144], sagledavanja problema sa gledišta mašinskog inženjerstva na problemima protoka materijala i projektovanja odgovarajućeg izuzimača materijala iz silosa kao *Bates* (1999) [20]. Pitanjem tipa protoka kod silosa bave se *Roberts* (2005) [248], *Tardos* (1999) [295], kao i *Schulze* (2008) [276]. U ovim referencama su dati primeri proračuna vezani za probleme proticanja materijala u levku silosa. *Schulze*-ova knjiga predstavlja bitnu referencu sa stanovišta ispitivanja karakteristika silosnih materijala, problema protoka materijala u silosima, rada izuzimača pri isticanju materijala iz levka, i proračuna stanja napona u silosnom materijalu. *Schulze* (2009) [275] je autor posebnog automatskog uređaja za ispitivanje karakteristika granularnog materijala, tzv. prstenastog smičućeg uređaja, koji predstavlja unapređenje u odnosu na prvi standardni *Jenike*-ov smičući uređaj. Šire o ovim uređajima i postupcima rada sa njima se može naći u knjizi *Schulze*-a (2008) [276], kao i u knjizi *Brown*-a i *Nielsen*-a (1998) [31], a u pogledu upoređenja rada i karakteristika različitih ispitnih uređaja granularnih materijala vrlo kompetentan je *IFPRI* izveštaj od *Schwedes*-a (2003) [279].

Pitanje kapaciteta pri isticanju mase materijala, je obrađeno po jedinstvenoj teoriji zrnastog materijala od strane *Гячев*-a (1968) [352] i (1986) [353], kao i u ref. [186].

O interdisciplinarnom pristupu kod projektovanja silosa pri kojem je potrebna saradnja i komunikacija stručnjaka iz različitih oblasti problema kod silosa, detaljan pregled stanja je dao *Arnold* (2008) [9].

Po pitanju analize problema kod isticanja materijala i definisanja opterećenja koja deluju na izuzimače mase, od standarda je najdetaljniji AS 3774:1996.

2.8.2 Silosi u domaćoj stručnoj praksi

Kod nas se, u prvo vreme, pri projektovanju silosa i bunkera uobičajeno koristila *Janssen*-ova teorija preko dostupne evropske stručne literature, npr. prema knjizi *Der Eisenbeton in Theorie und Konstruktion*, od *Saliger*-a (1911) [272], koja je u to vreme bila vrlo bitna jer je sadržavala i prve propise za betonske konstrukcije (Pruski propisi). Kasnije su veliki uticaj imali prevodi knjiga *Sahnovskog* (1962) [271] (*Armirono betonske konstrukcije*) i

braće Reimbert (1962) [244] (*Silos. Teorijska i praktična razmatranja*), kao i knjiga Fischer-a (1966) [82] o AB silosima i bunkerima. Uticaj na projektante su imale i prevodi nemačkih knjiga, kao Schleicher-ovog priručnika za građevinske inženjere iz 1954 god., u kojem su silosi bili obrađeni u poglavlju *Masivne konstrukcije* od Dischinger-a i Mehmela (prevod 1960) [64], kao i Franc-ova knjiga iz 1969 god. o teoriji AB konstrukcija (prevod 1979) [89].

Kada su se pri intenzivnoj izgradnji brojnih silosa kod nas, 60-tih godina prošlog veka, počela pojavljivati prva oštećenja na silosnim ćelijama, doneta su prva domaća *Tehnička uputstva za proračun silosnih ćelija za žito* - TU 60 (1960) [310]. U to vreme od velikog značaja u ovoj oblasti je bio rad inž. Jerotijevića, kako kroz izradu ovih uputstava tako i sa publikovanjem radova iz oblasti problematike izgradnje, projektovanja i proračuna AB silosnih konstrukcija: Jerotijević (1968) [132], (1969) [133] i (1981) [134]. Romić (1963) [255] je izveo tačniju metodu za određivanje opterećenja na levcima ćelijskih silosa. Slična formulacija za pritiske u levku silosa, se pojavila u poglavlju o silosima u II tomu knjige o AB konstrukcijama od Kobiak-a i Stachurski-og (1969) [151], kao i u čuvenoj knjizi o AB inženjerskim objektima, gde su posebno obrađeni bunker i silosi, od grupe autora - Ciesielski, Mitzel, Stachurski, Suwalski i Źmudziński iz 1966 god. i u nemačkom izdanju iz 1970 god. [48].

Pored prethodne literature, korišćena je i ruska stručna literatura, od koje se ovde navode poznate knjige koje se direktno bave projektovanjem silosa, kao što su knjige Лунницкий-og i Абрамович-а (1967) [363] i od Латышев-а (I izdanje 1973, II izdanje 1985) [361]; ili u jednom delu, kao knjiga Байков-а (1974) [347] koja predstavlja specijalni kurs iz AB konstrukcija.

Od svetskih propisa, na domaću stručnu javnost, najveći uticaj su imale permanentno inovirane nemačke norme za proračun opterećenja kod silosa DIN 1055-6 (1962, 1964, 1977, 1987) [61], kao i prethodna verzija američkog ACI 313-77 (1977, 1983) [3].

Primena DIN normi kod nas je bila poduprta i sa ovde opšte prihvaćenom edicijom *Beton-Kalender*, u kojoj je stalno obnavljano poglavlje o silosima, kao npr. Nakonz (1965) [197], Koznietzski (1968 i 1971) [154], i Timm i Windels (1977) [307] i (1989) [308].

Po objavljivanju standarda ISO 11697 *Loads due to bulk materials* od ISO (1990) [125], završna verzija ovog standarda je prihvaćena i kod nas kao SRPS ISO 11697 (1996) [291] (*Opterećenja rastresitim materijalima*), tako da je ovaj standard zamenio ranije uvedena privremena tehnička uputstava iz 1960. god., TU 60 [310].

Proračun i izvođenje silosa i bunkera u čeličnoj konstrukciji je, kod nas, detaljno obradio Debeljković u ref. (1987) [58] i u knjizi *Bunker i silosi u čeličnoj konstrukciji* (2000) [60], gde se prikazane osnove projektovanja i analize opterećenja odnose jednako na sve tipove silosnih konstrukcija. Projektovanje silosnih konstrukcija i pregled nekoliko, u to vreme aktuelnih normi za određivanje opterećenja je prikazano u knjizi Hasanović-a (2001) [114] u izdanju GF iz Sarajeva.

U vreme pripreme evropskih Evrokodova za konstrukcije, kao novog sistema jedinstvenih usklađenih tehničkih propisa i odgovarajućih evropskih standarda za projektovanje i građenje svih vrsta građevinskih konstrukcija od različitih materijala, i s obzirom na inicijativu da i naša zemlja prihvati Evrokodove kao naše standarde, organizovana su savetovanja *Evrokodovi i jug. građevinsko konstrukterstvo*, prvo 1995., te drugo 1997. god. u Beogradu (Perišić (2006) [225]).

U sklopu ovde razmatrane problematike opterećenja u silosima, od interesa su pregled osnova proračuna konstrukcija prema Evrokodu 0 (EN 1990) (Pakvor (2006) [219]), kao i

pregled osnova proračuna i dejstava na konstrukcije prema Evrokodu 1 (EN 1991) (*Pakvor* (1997) [218]). Pored toga, objavljen je prevod Evrokoda 1, deo 4, koji se odnosi na dejstva u silosima i rezervoarima 1997. god. [220]. U radu *Pakvora, Alendara i Pecića* (1997) [221], detaljno je prikazan pregled stanja po pitanju dejstva u silosima i bunkerima prema Evrokodu 1, prema prevodu normi [220]. Analizom opterećenja od uskladištenih zrnastih materijala u ćelijama silosa prema novim evropskim normama, bavio se *Tatomirović* (2006) [298], (2007) [299] i (2008) [300].

U sklopu domaće prakse u periodu pre II svetskog rata, kod nas su se najviše gradili AB silosi sa kvadratnim i pravougaonim ćelijama, dok je u novijoj izgradnji najčešći oblik kod silosa bio slučaj sa kružnim ćelijama, kako pojedinačnim, tako i u sklopu baterija silosa, sa blisko spojenim ćelijama, ili u manjem broju primera sa razmaknutim ćelijama koje su povezane vertikalnim zidovima. Ovi silosi su bili pre svega namenjeni za držanje žitarica i uljarica, a kod mlinske industrije, gde se obično zahteva veći broj manjih ćelija, zadržani su većinom oblici ćelija sa kvadratnom i pravougaonom osnovom.

U sklopu domaće prakse pri izgradnji silosa, mogu se pomenuti: razvijanje domaće hidrauličnog sistema za podizanje sistema klizne oplata pri izgradnji silosa; razvijanje tipiziranih varijanti AB silosa sa kružnim ćelijama od strane preduzeća *Rad*; razvijanje gradnje silosa od montažnih AB elemenata, sa ćelijama kvadratne osnove od strane *Instituta za mehanizaciju poljoprivrede* – Beograd; kao i izgradnja jednoćelijskih silosa sa kružnim ćelijama od prefabrikovanih betonskih "steave" elemenata dimenzija 76×25×9 (u cm), sa suvom montažom elemenata, kod kojih se zid ćelije naknadno uteže po spoljnom obimu pocinkovanim čeličnim prstenastim zategama *GK Beton* – Novi Sad.

Kod izgradnje silosa klizanje zidova je otpočinjalo od gornje kote temeljne konstrukcije, što je u inostranoj praksi vrlo pozitivno ocenjeno, tako da je to i delom zahvaljujući našoj praksi, preuzeto dalje u okruženju. S druge strane, uočeno je da naknadna izgradnja AB levaka u već isklizanim ćelijama, oduzima mnogo vremena pri građenju silosa, pa se prešlo na ubacivanje čeličnih levaka kod AB silosa, koji se povezuju sa AB prstenom levka oslonjenim obično na unutrašnje AB stubove ili pilastre ili na dodatni isklizani donji deo AB zidova. Zaključeno je da je statički povoljnije odvajanje levka od konstrukcije zida ćelije, konkretno AB prstena levka od zida ćelije, jer se na taj način smanjuju "parazitni" momenti savijanja, kao i odgovarajuće smičuće sile kod zidova ćelija, na spoju levka i zidova ćelije, pri čemu se kod AB prstena javlja normalna sila pritiska od delovanja zatežućih meridijalnih sila iz ljuske levka.

Radi ilustracije značaja ovog problema, ukazuje se na sličan problem kod veze zida ćelije i ravnog dna ćelije, koji je analizirao *Tarran* (1984) [296], gde se kod veze donjeg i gornjeg dela zida ćelije sa ravnim dnom kod analiziranih silosa za cement, javlja problem usled delovanja velikih momenata savijanja i smičućih sila od dejstva uskladištenog materijala i termičkog dejstva. Kod ovog primera je *Tarran* uveo niz vertikalnih prosecanja zida na malom razmaku na donjem delu zida neposredno ispod veze sa ravnim dnom (primena kod postojećih ili novih silosa), ili ubacivanje čestih uzanih vertikalnih otvora na ovom mestu (za nove silose u izgradnji), kako bi umanjio date statičke uticaje. Smanjenjem krutosti kod ovog dela cilindrične ljuske zida ćelije, proizvedeno je značajno smanjenje potrebne količine armature u ovom delu ćelije.

Pimenjena koncepcija statičkog sistema sa odvajanjem AB prstena od zida ćelije, ili samo oslanjanje AB prstena na proširenje donjeg dela zida, kako je to bilo u našoj praksi, se i danas primenjuje kod savremenih silosa, pa i u slučaju primene obrnutog konusnog levka kod velikih ("mamut") silosa prema ref. [57] i [124].

Kako je naše građevinarstvo bilo vrlo razvijeno, pored uobičajenih formi silosnih konstrukcija, postoje i "egzotične" forme ovih konstrukcija, kao što je npr. "kockasti" silos inž. B. Budića, gde je oblik silosa kocka koja kao da stoji na jednoj temenoj tački, tako da je unutrašnja dijagonala kocke vertikalna osa silosa.

2.8.3 Problemi kod silosa od opterećenja materijalom i drugih dejstava

2.8.3.1 Problemi kod betonskih silosa od opterećenja zrnastim materijalom

Projektovanje i proračun silosa spada u složenije probleme građevinskog konstrukterstva, s obzirom na problem tačnog određivanja pritisaka u ćelijama silosa od uskladištenih materijala. Ako se pregledaju propisi i preporuke različitih zemalja i sagledaju mišljenja naučnih i stručnih krugova, može se utvrditi da još nema jedinstvenog rešenja po pitanju raspodele i veličine opterećenja od delovanja uskladištenog materijala.

Teorija *Janssen*-a se uspešno primenjivala godinama za projektovanje silosa, a da se dugo godina nisu uočavali posebni nedostaci pri primeni ove teorije. Dugo vremena je bila u upotrebi *Können*-ova preporuka iz 1896. god. da se koeficijent K uzima kao koeficijent aktivnog pritiska tla K_a . Pored toga, u prvo vreme nije bilo poznato da su opterećenja povećana pri pražnjenju silosa. Postepeno, od slučaja do slučaja, primećeni su problemi kod silosa u vezi sa njihovih oštećenjem, a neki silosi koji su se dugo vremena regularno ponašali, su se srušili. Nakon tih slučajeva, postalo je jasno da *Janssen*-ova teorija daje podcenjene vrednosti opterećenja u silosima. Najvažniji razlog usled kojih dolazi do tih problema je to da nije potpuno opravdano za sve slučajeve koristiti vrednost $K = K_a$.

Kod ovih konstrukcija, što se pokazalo kako kod nas tako i kod drugih u svetu, postoji velik rizik od pojave manjih ili većih oštećenja, koja se obično javljaju u vidu pojave prslina na zidovima AB ili PB ćelija, ili izbočavanja limova kod metalnih silosa. Prsline kod betonskih zidova, propuštaju vlagu i vodu od spoljnih atmosferilija u ćelije, što vodi neujednačenosti karakteristika materijala u ćeliji, koja može izazvati neregularnosti pri pražnjenju, i pojavu neravnomernog opterećenja na zidove ćelije, kao i kvarenje zrnastog materijala. Pored toga, kod većih oštećenja, progresivno povećanje širina prslina vodi do potpunog loma zida ćelije kod AB silosa. Kod metalnih silosa, oštećenja u vidu izbočavanja lima obično dovode do rušenja takvih konstrukcija. U cilju rešavanja ovog problema, sprovedena su brojna ispitivanja i merenja pritisaka na zidovima ćelija silosa, kako na postojećim konstrukcijama, tako i na ispitnim silosima.

Na probleme oštećenja kod silosa su ukazivali mnogi istraživači, kao *Jerotijević* (1968) [132], *Theimer* (1969)¹, *Ravenet* (1981) [242], *Carson* (2000) [34], *Пухонто* (2004) [367], *Dogangun*, *Karaca*, *Durmus* i *Sezen* (2009) [65], i mnogi drugi; pa čak i posle usvajanja i primene novih evropskih normi, *Knödel* (*Knoedel*) (2008) [149] je opet postavio isto pitanje o nivou pouzdanosti proračunskih analiza, s obzirom na uočena oštećenja - izbočavanja kod novih aluminijumskih silosa.

Prema *Jerotijeviću* (1968) [132], preduzeće "Rad" je u periodu 1958÷68. god. izvelo 52 silosa ukupnog kapaciteta 640.000 tona (od toga 42 silosa samo u periodu 1958÷61. god.). Prva pojava oštećenja, u vidu pojave prslina na 1/3 do 1/2 visine ćelije od levka, je primećena na silosu u Bačkoj Topoli nakon 2 godine ekspoatacije silosa (tip-A silosa preduzeća "Rad"), koji je prečnika ćelije $\varnothing 5.50$ m i visine $h_c = 20$ m. Kod ove ćelije je

¹ Theimer O.F. (1969): "Failure of reinforced concrete grain silos", *Trans. ASME, J. of Engng. for Industry*, Series B, 91(2): 460. (Citirano prema [247].)

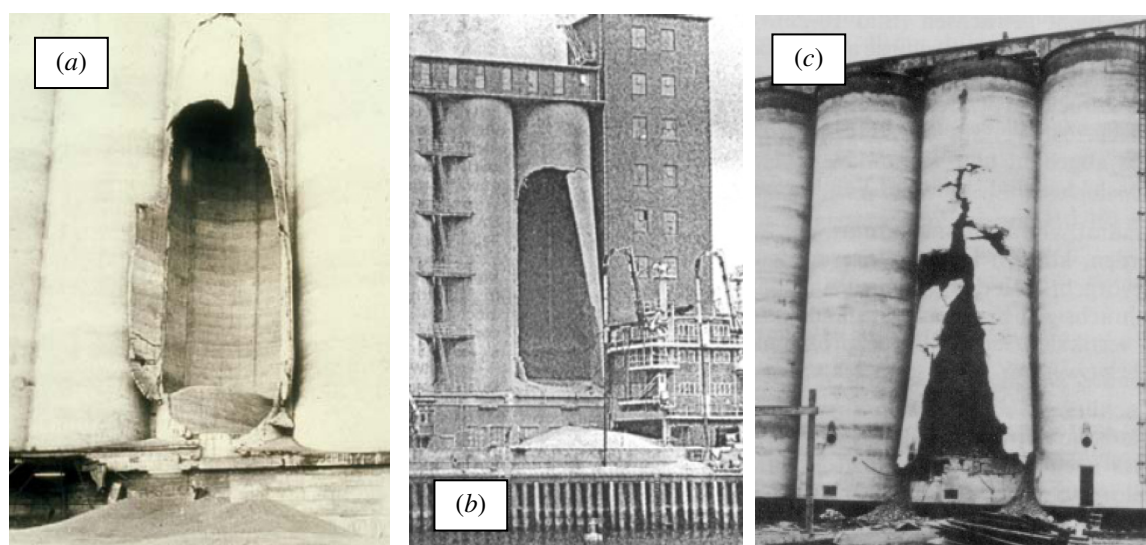
utvrđeno da prilikom pražnjenja dolazi do isticanja u "obliku stuba" (masovni protok). Na ostalim izvedenim silosima ovog tipa nisu primećene prsline (izvedeno i u upotrebi do tog vremena 20 silosa tipa-A). Silos u Valpovu, prečnika ćelije $\varnothing 7.00$ m i visine $h_c = 28$ m, je prvi silos tipa-B, kod kojeg je došlo do pojave većih prslina na zidu ćelije. Kod ovih ćelija je bio ugrađen uređaj za pražnjenje na levku, tako da je pražnjenje ćelije bilo u "obliku stuba" (masovni protok), a ne u "obliku levka" (unutrašnji protok). Prsline su nastale prilikom pravog punjenja, odnosno pražnjenja silosa. Nakon toga, pojavile su se prsline na još 3 silosa ovog tipa, te se u dogovoru sa odgovarajućom direkcijom i zajednicom pristupilo sanaciji svih silosa tipa-B, tako što su zidovi ćelija pojačani sa unutrašnje strane uklizavanjem dodatnog AB omotača. Prema *Jerotijeviću*, glavni razlog za pojavu prslina kod ovih ćelija je masovni protok materijala u ćelijama. Do tog vremena prsline su se pojavile na silosima u Bačkoj Topoli, Valpovu, Batajnici, Bogatiću, Beogradu i Obrenovcu, a svi ovi silosi su bili sa okruglim ćelijama.

U isto vreme izvršena su i ispitivanja napona pri pražnjenju ćelija kod silosa u Batajnici, sa centrično ugrađenim depresionim metalnim perforiranim cevima tipa "Utva" kod tri ćelije, odnosno "Goša" kod jedne ćelije, sa kojima je pokušano da se eliminišu dinamički uticaji u toku pražnjenja ćelija, prema *Jovanoviću* (1963) [137]. U okviru dodatka – brojnog primera pri TU 60 (1960) [310], koji je sastavio *Jerotijević*, navedeno je da su u to vreme rađena ispitivanja primene depresione perforirane cevi na modelima u Pančevu i kod silosa na Ubu kod Beograda. Primena depresione cevi je trebala da osigura unutrašnji protok u ćeliji, ali ova prva ispitivanja, nisu nastavljena i primena ovih cevi nije ušla u domaću praksu.

Pojave prslina kod ovih silosa u našoj zemlji, iniciralo je izradu prvih *Tehničkih uputstava za proračun silosnih ćelija za žito*, TU 60 (1960) [310]. Kod ovih uputstava, koeficijent trenja žita (pšenice) je uzet pri proračunu opterećenja da iznosi $\mu_w = 0.22$, što odgovara uglu trenja materijala o zid ćelije $\phi_w = 12.4^\circ$, što je vrlo mala vrednost za ugao trenja o betonsku površinu zida. Sa ovim izborom za μ_w , prećutno je uveden faktor uvećanja horizontalnog opterećenja reda veličine oko 2.

Primeri rušenja AB zidova kod cilindričnih ćelija silosa su pikazani na sl. 49. Lom zida se obično inicira povećanim i neravnomernim opterećenjem od uskladištenog materijala, pri čemu se formiraju prsline na zidovima ćelije. Ove prsline se obično pružaju vertikalno po visini zida, i njihove širine otvora se tokom vremena povećavaju pri eksploataciji silosa, tj. pri ciklusima punjenja i pražnjenja ćelije. Ako su oštećenja takva, da pritisci materijala proizvode značajne bočne deformacije zida, može doći do plastifikacije armature, i formiranja inicijalne linije loma u zidu ćelije. Ova linija ide obično vertikalno po zidu, i obično stoji na sredini obima spoljnog zida koji je na bočnim stranama ukrućen kod pojačanja sa drugom ćelijom ili zidom mašinske kuće. Dalje povećanje bočnih deformacija kod centralne linije loma, vodi formiranju negativnih linija loma kod bočnih ukrućenja i može biti vezano sa lomom zida u osnovi kod levka usled smicanja i/ili savijanja.

Pri otpočinjanju loma prstenaste armature zida na mestu centralne linije loma, dolazi do procurivanja materijala kroz formirani rasep u zidu, i sa time do pojave neravnomernih pritisaka koji će povećati opterećenja na "krilima" zida i izazvati dalje obrtanje ovih delova zida oko linija loma pri bočnim ukrućenjima. Mogući su sledeći scenariji kolapsa zida: sa formiranjem preloma zida usled smicanja kod levka ili dna ćelije, sl. 49 (b) i (c), i/ili dodatnih preloma usled savijanja po visini formiranih krila zida, sl. 49 (a). Kod loma zida ugaone ćelije, rušenje može nastupiti na jednom delu zida uz jednu ukrućenu bočnu stranu zida (slučaj pri lomu zida ćelije kod silosa prikazanog u ref. [84]).



Sl. 49 Rušenje zida ćelije: (a) silos u Korneuburg -u (27.03.1961) [254]; (b) silos u Harburg-u (09.07.1995) [254]; (c) tipičan izgled loma zida ćelije (primer jednog silosa u USA).

Na primeru jednog AB silosa na kojem su se pojavila oštećenja u vidu vertikalnih prslina veće širine otvora, Reimbert-ovi (1976) [243] su prikazali metodologiju snimanja stanja prslina i sanaciju oštećenih zidnih površina.

Pojava oštećenja na ćelijama silosa, kao i popravke i sanacije silosnih objekata pokazano je na više primera u 10. poglavlju knjige o projektovanju i građenju silosa i bunkera od Safarian-a i Harris-a (1985) [270].

Više radova iz oblasti snimanja stanja oštećenja, rekonstrukcije, revitalizacije, popravki i sanacija postojećih silosnih konstrukcija je objavljeno od strane tima građevinskog instituta FTN-a u Novom Sadu, kao npr. (1998) [84], (1997) [85], (1996) [86], (1995, 1997) [224], i (1996) [317]. Radovi se većinom odnose na probleme oštećenja, ispitivanje i sanacije AB silosa, a u dva rada su razmatrani i problemi čeličnih silosnih konstrukcija, odnosno čelične podkonstrukcije.

U radu Folić, Radonjanin, Malešev i Tatomirović (1997) [85], prikazana su sprovedena ispitivanja i sanacija AB silosa za soju i žitarice, kapaciteta 70 000 tona, koji se sastoji od 4 baterije sa ukupno 80 ćelija i 48 međućelija. Ćelije su sa unutrašnjim prečnikom 7.0 m, i visine cilindričnog dela 28 m, sa zidovima debljine 15 cm. Pored opisa stanja oštećenja ćelija (širine, dužine, lokacije i pravca pružanja prslina, kao i drugih obično lokalnih oštećenja), prikazani su rezultati nedestruktivnih i destruktivnih ispitivanja ugrađenog materijala. Analizirani su karakteristični rezultati ispitivanja merenja dilatacija na betonu i spoljnoj prstenastoj armaturi, pod probnim opterećenjem pri programiranom punjenju i pražnjenju ćelija (zrnasti materijal – soja), kao i komparacija izmerenih i računskih vrednosti stanja napona i dilatacija u betonu i armaturi zida ćelije. Na osnovu svih rezultata ispitivanja silosnih ćelija, prema projektu je izvedena sanacija konstrukcije. Prijemne ćelije i ćelije sa bočnim (ekscentričnim) interventnim pražnjenjem, koje su pri eksploataciji bile najviše opterećene, i kod kojih se pokazao relativno najveći stepen oštećenja po pitanju stanja prslina, sanirane su dodavanjem novog AB sloja od torkret betona. Kod drugih oštećenih spoljnih ćelija izvršeno je popunjavanje vertikalnih ošupljenja u zidovima nastalih u fazi izvođenja ćelija na mestima nosećih šipki klizne oplote, kao i injektiranje postojećih prslina, uz izvođenje završnog površinskog zaštitnog

sloja spoljnih zidova ćelija. Ispitivanja sprovedena na ovom silosu su detaljno prikazana u ref. [86].

U radu *Pavlović, Folić, Radonjanin i Tatomirović* (1995, 1997) [224], prikazana je procena stanja oštećenja, ispitivanje konstrukcije i sanacija čeličnih ćelija silosa za sojine flekice. U ovom slučaju oštećenja su nastupila usled neregularnog naleganja prelaznog dela čelične ćelije i levka na AB podkonstrukciju, što je proizvelo oštećenja kako na AB podkonstrukciji (u vidu brojnih prslina na AB prstenastom nosaču), tako i na osnovnom čeličnom delu (u vidu izvijanja limova za ukrućenje tranzicionog pojasa čelične silosne konstrukcije – pojačanja kod donjeg dela cilindričnog zida kod veze sa levkom).

U okviru nacionalnog raporta, na *XIII FIP*-ovom kongresu, prikazan je rad o snimanju stanja oštećenja, analizi uzroka havarije jedne ćelije i sanacije AB silosne baterije sa cilindričnim ćelijama, ukupnog kapaciteta skladištenja 5400 tona sojine sačme (*Folić, Pavlović, Tatomirović i Radonjanin* (1998) [84]). Prikazane su dve projektovane varijante sanacije: prve, u formi AB pojačanja zidova ćelija, i druge, u vidu pojačanja putem prednaprezanja spoljnih zidova kablovima.

Ovaj silos je razmatran za jedan od dva referentna primera kod analize relevantnih faktora na trajnost konstrukcije silosa u knjizi *Психомо*-a (2004) [367]. Analiza trajnosti konstrukcija je nova oblast, koja je za silosne konstrukcije i druge inženjerske objekte prvi put detaljnije razmatrana u knjizi *Dugotrajnost armiranobetonskih konstrukcija inženjerskih objekata*, od *Психомо*-a (2004) [367]. Ova knjiga se većim delom odnosi na oštećenja i analize direktno vezane za silose i bunkere, pri čemu su u nešto manjem obimu razmatrani i rezervoari, bazeni i potporni zidovi.

Procenu stanja kod AB silosa kružnih ćelija pri dugotrajnoj eksploataciji, analizirali su *Elghazouli i Rotter* (1996) [74], na dva primera AB silosa (u *UK*) kod kojih je došlo do kolapsa zida, odnosno do oštećenja zida ćelije u vidu prslina velikih širina otvora (preko 1mm). Zaključeno je da se vremenom povredivost konstrukcije silosa povećava, s obzirom na razvoj prslina i pojavu većeg stepena korozije armature na mestima prslina u betonskom zidu, kao i da postoje uticaji izazvani tehnologijom izvođenja objekata, usled uočenih nedostataka pri izvođenju silosa (deficit ugrađene armature, imperfekcije pri klizanju oplata, zaostale vertikalne šupljine od nosećih šipki klizne oplata pri građenju silosa, promenljivost debljine zaštitnog sloja betona).

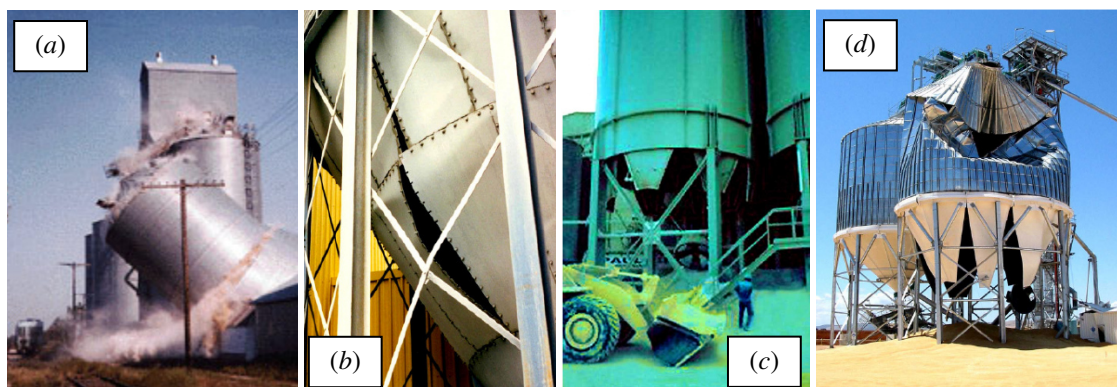
Proračunska analiza je pokazala značajnu disperziju rezultata kod primene različitih propisa pri određivanju opterećenja od uskladištenih materijala, s obzirom na različite preporučene vrednosti u propisima za karakteristika materijala. Naglašeno je da je pitanje proračunskih vrednosti i varijabilnosti karakteristika materijala od velike važnosti kod projektovanja silosa. Zaključeno je da neadekvatna analiza stanja prslina ili proračunske kontrole prslina, kao i neadekvatno ispunjenje zahteva trajnosti konstrukcije, vodi ka naknadnoj pojavi oštećenja i loma konstrukcije, a posebno pri njenom dužem veku eksploatacije.

Sanaciju AB silosa usled oštećenja izazvanih pojavom brojnih prslina na zidu ćelije usled nesimetričnog opterećenja pri pražnjenju kroz ekscentrični protočni kanal su prikazali *Kaldenhoff, Schütte i Hauser* (2007) [140]. Kod ovog silosa je sprovedeno ispitivanje pri punjenju i programiranom pražnjenju materijala sa merenjem dilatacija na zidu ćelije mernim trakama. Na osnovu proračunskih i teorijskih analiza koje su nakon ovog ispitivanja usledile, unete su korekcije kod proračunskih izraza za ovaj tip opterećenja u *DIN 1055-6* (2006) [62].

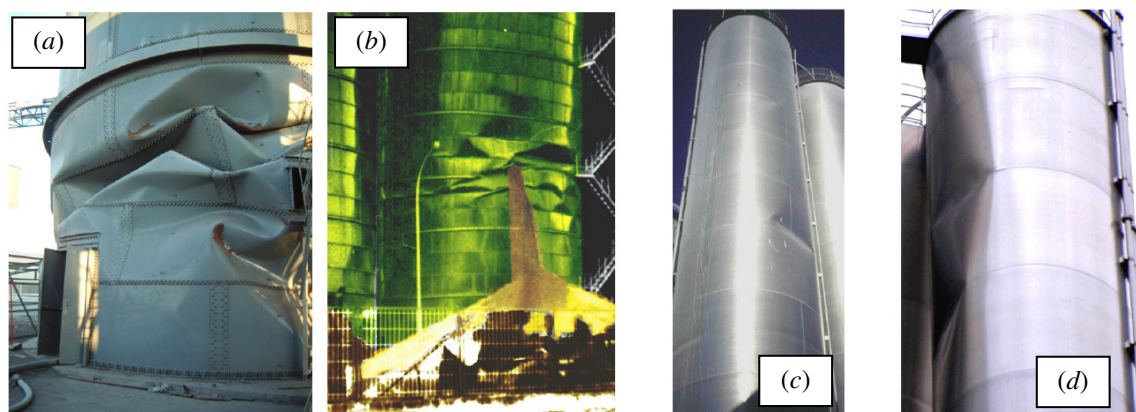
2.8.3.2 Problemi kod metalnih silosa od opterećenja zrnastim materijalom

U sklopu evropskih propisa čelični silosi su posebno razmatrani u EN 1993-4-1:2007 [40]. Primer analize silosa prema ovim normama je prikazao *Knödel* (2009) [150].

Upoređenje konstrukcionih karakteristika i rada čeličnih i betonskih silosa je dato u radu *Đurića i Dimitrijevića* prikazanom na simpozijumu SDGKJ (1976) [71]. U ovom radu je zaključeno da čelični silosi, s obzirom na njihove karakteristike, nisu u principu predodređeni za primenu u obliku vitkih čelija, kao što je to slučaj kod betonskih silosa.



Sl. 50 Rušenje metalnog silosa sa uskladištenim kukuruzom (USA) (a). Primeri rušenja levka kod metalnih silosa (primeri iz UK (b), Nemačke (c) i Australije (d)) [262].



Sl. 51 Oštećenja metalnih silosa pri izbočavanju lima usled: (a) ravnomernog vertikalnog pritiska, (b) nesimetričnog pritiska, i (c) - (d) ekscentričnog pražnjenja [262].

Kod metalnih silosa, javlja se poseban problem izbočavanja tankozidnih metalnih zidova čelija. Ovaj problem je detaljno obrađen u tematskoj knjizi *Teng-a i Rotter-a* (2004) [304], a odgovarajući proračunski kriterijumi izbočavanja zidova silosa su dati u EC3-4-1 [40]. Značajan doprinos analizi problema kod čeličnih silosa je, kroz brojne radove koji se odnose na probleme analize sistema, i posebno problema stabilnosti konstrukcije i izbočavanje limenih zidova čelija, dao *Rotter* (2001) [259], (2008) [260], (2008) [261], kao i sa izradom III poglavlja (*Metalne konstrukcije*) knjige o silosima koja predstavlja krunski rad u evropskom *CA-Silo* projektu (1998) [31].

Snimak trenutka rušenja čeličnog silosa sa uskladištenim kukuruzom prikazan je na sl. 50 (a). Na sl. 50 (b) do (d), prikazana su rušenja levka kod čeličnih silosa, prema [262].

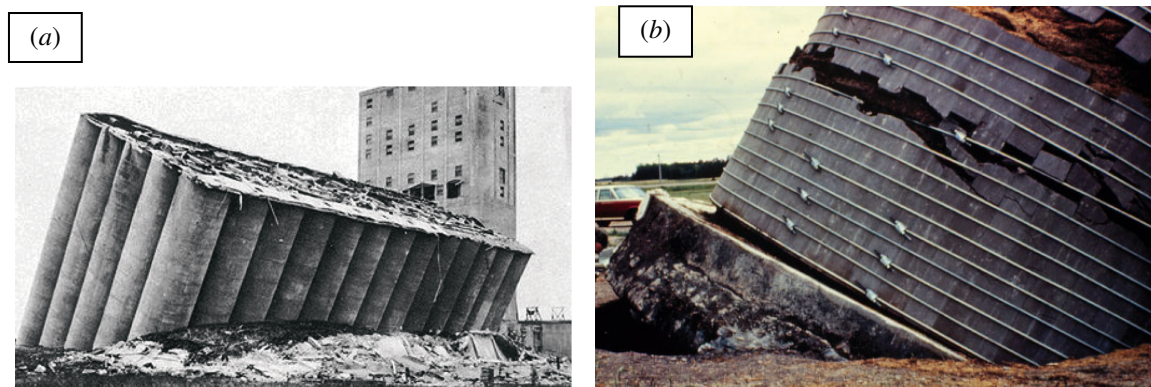
Na sl. 51 prikazani su razni slučajevi izbočavanja limova metalnih silosa, prema *Rotter* -u (2009) [262] (izvori slika su navedeni u datoj referenci).

Analizu čeličnih silosa kružne osnove u problemu izbočavanja zida ćelije, na četiri primera silosa različitih odnosa visine i prečnika silosa (obuhvaćene sve oblasti vitkosti silosa), prikazali su *Sadowski i Rotter* (2011) u ref. [267] za slučaj centričnog pražnjenja, i u ref. [268] za slučaj ekscentričnog pražnjenja. Upoređujući rezultate pri primeni proračunskih formulacija iz EC1-4 [38] i EC3-4-1 [40], i MKE (primena programa ABAQUS¹), zaključeno je da je proračun silosa prema EC u pogledu izbočavanja tankozidne ćelije, za slučaj centričnog pražnjenja znatno na strani sigurnosti, a za slučaj ekscentričnog pražnjenja znatno na strani nesigurnosti.

U radu *Iwicki-og, Wójcik-a i Tejchman-a* (2011) [127] razmatrane su varijante sanacionih metoda uz ocenu njihove tehničke podobnosti prema posebnoj "senzitivnoj analizi", na primeru silosa sa zidom od horizontalno naboranih limova sa vertikalnim ukrućenjima po obimu ćelije, kod kojeg je došlo do problema izvijanja obimnih vertikalnih ukrućenja. Analizirane su tri varijante sanacije: sa pojačanjem obimnih vertikalnih ukrućenja, sa povećanjem broja vertikalnih ukrućenja, i sa pojačanjem putem dodavanja spoljnih prstenastih ukrućenja po visini ćelije, u cilju smanjenja dužine izvijanja vertikalnih ukrućenja. Prema datim analizama u [127], koje su se odnosile na konkretni primer silosa, kao najbolja je ocenjena poslednja navedena varijanta sanacije.

2.8.3.3 Fundiranje silosa

Kod fundiranja AB silosa se mogu javiti različiti problemi pri eksploataciji, usled rotacije temelja, prevelikog sleganja ili diferencijalnih sleganja. Temeljna konstrukcija treba da je adekvatnih dimenzija za date karakteristike tla i opterećenja, kako bi se izbegle ekscenčne situacije sa prekoračenjem nosivosti tla. U običnim situacijama problemi se javljaju usled prevelikog diferencijalnog sleganja kod temeljne konstrukcije, koje se manifestuje sa pojavom većeg ili manjeg broja kosih prslina koje mogu biti i veće širine otvora, posebno kod ugaonih ćelija baterije silosa.



Sl. 52 Primeri obrtanja silosa usled loma tla.

Jedan od najpoznatijih slučajeva loma tla kod fundiranja silosa je slučaj *Transcona* silosa (*Nort Transcona, Manitoba, Canada*), koji se desio u oktobru 1913. god. (sl. 52 (a)²), prema *Murthy-u* (2003) [196]. Nakon prvog punjenja, silos je nagnuo za 26.9° u odnosu na vertikalnu. AB konstrukcija silosnih ćelija, sem nekoliko prslina, nije imala posebna oštećenja. Silos je ispravljen i stavljen u funkciju 1916. god.

¹ ABAQUS (2009): ABAQUS version 6.9. Providence, RI, USA: Dassault Systèmes Simulia Corp.

² Foto snimak: *UMA Engineering Ltd., Manitoba, Canada*.

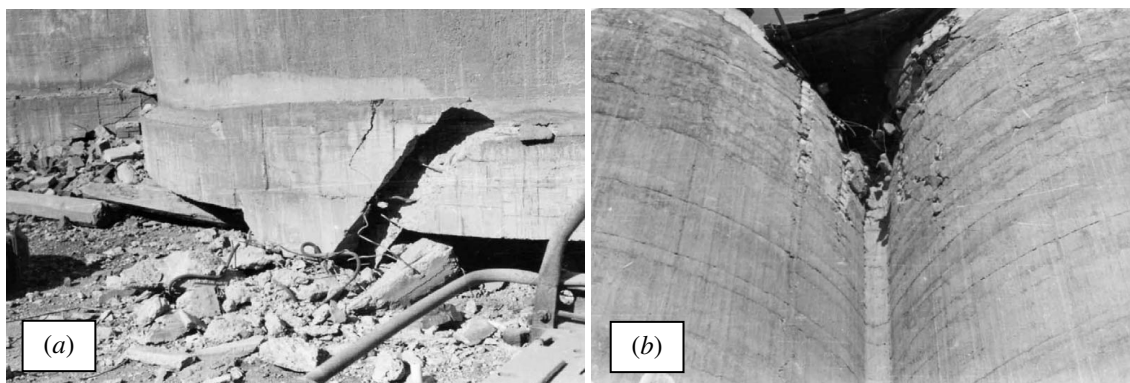
Za razliku od AB silosne baterije, obrtanje jednočelijskog cilindričnog silosa, vodi ka rušenju konstrukcije, kao kod primera preturanja "steve" silosa za silažu, prikazanog na sl. 52 (b), usled loma tla pri obrtanju kružnog temelja.

2.8.3.4 Seizmička dejstva

Seizmička dejstva koja se javljaju pri seizmičkim pokretima tla kod silosnih konstrukcija se uzimaju u skladu sa odgovarajućim propisima, kao npr. prema evropskim normama EC 8 deo 4, EN 1998-4 (2006) [39]. AB silosi spadaju u krute objekte, i pri određivanju seizmičkih uticaja se uzimaju da su puni sa materijalom, a efektivna masa uskladištenog materijala se uvodi kao 80% proračunske mase materijala (pri analizi se koristi gornja vrednost zapreminske težine materijale).

Proračun silosa na seizmička dejstva prema EN 1998-4 i drugim normama, je prikazao *Folić* (2005) u ref. [83]. Pritisci materijala na zid ćelije se uzimaju prema vrednostima za stanje punjenja – mirovanja materijala, a dodatni deo od seizmičkog dejstva pri pretpostavljenom zajedničkom pomeranju uskladištene mase i zidova ćelije, se uvodi kao dodatno antimetrično opterećenje po zidu ćelije, prema EC8-4 [39].

Pri globalnoj analizi, konstrukcija silosa pri seizmičkom dejstvu treba da ima dovoljan stepen sigurnosti kako ne bi došlo do preturanja, ili klizanja objekta po tlu, odnosno do loma tla kod ovih objekata. Seizmička dejstva kod silosa, s obzirom na kompleksnost ponašanja objekata sa uskladištenim zrnastim materijalom pri seizmičkoj pobudi tla, su predmet koji zahteva dodatna teorijska i eksperimentalna istraživanja (npr. istraživanja uticaja u silosima pri seizmičkoj pobudi prema *Foti, Ivorra, Trombetti, Silvestri, Gasparini* i *Di Chiacchio* (2013) [87] u okviru evropskog istraživanja *SERIES*).



Sl. 53 Oštećenja izazvana zemljotresom na silosu u *Qixin Cement Plant (Tangshan)*.

Pri prihvatanju seizmičkih uticaja, posebno su osetljivi sistemi silosa kod kojih se kruti skladišni deo silosa oslanja preko stubova u podčelijskom delu na temeljnu konstrukciju. Pojava plastičnih zglobova kod ovih stubova, može kod jakih zemljotresa da dovede do rušenja konstrukcije, kao u slučaju silosa za cement u *Tangshan*-u (Kina) na sl. 53. Kod ovih silosa su pri zemljotresu potpuno zdrobljeni AB stubovi visine 5.0 m, pri čemu su povezane ćelije u nizu pale na donju osnovu. Prelom AB prstenastog nosača, koji se pre zemljotresa oslanjao na AB stubove, prikazan je na sl. 53¹ (a). Oštećenja na gornjem delu ćelija prikazana su na sl. 53 (b), i nalikuju "sudaru" ćelija, a posledica su rastresanja silosa

¹ Foto dokumentacija oštećenja nakon zemljotresa u gradu *Tangshan* u Kini. Snimci silosa u *Qixin Cement Plant (Earthquake Research Institute, State Seismological Bureau and Han J.)*.

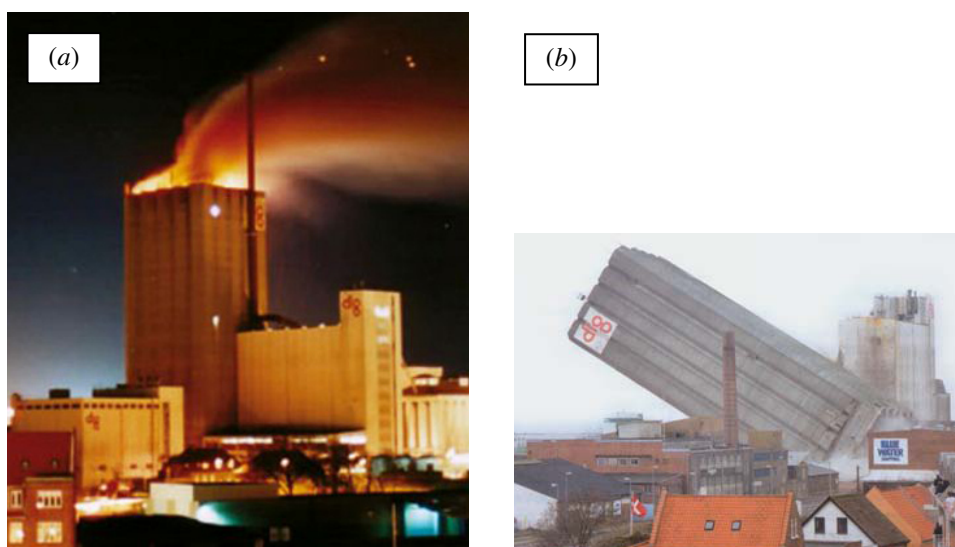
pri padu krutog skladišnog dela na donju osnovu. Nakon zemljotresa, gornja pokrivna ploča je ostala smaknuta za oko 2 m.

Povećanje pritisaka na zidu, koje se dobija na jednoj od strana ćelije, pri pomeranju osnove modela silosa koje simulira seizmičko pomeranje tla, je eksperimentalno i numerički ispitivano u disertaciji *Wagner-a* (2002) [324]. Upoređeni su rezultati merenja na modelu ćelije sa proračunskim rezultatima analize kod primene MKE. U MKE su upotrebljeni zapreminski elementi za uskladišteni materijal sa 27 čvornih tačaka, uz primenu hipoplastičnog modela ponašanja zrnastog materijala. Veza između zida silosa je modelovana posebnim zapreminskim kontaktnim elementima, a zid modela površinskim elementima u MKE. U ovoj analizi je dobijeno vrlo dobro slaganje izmerenih i računskih vrednosti, imajući u vidu veliku složenost analiziranog problema.

2.8.3.5 Požari i eksplozije

Pojava požara i problemi vezani za požare, uz opis i razmatranje nekih slučajeva požara kod silosa, su direktno obrađeni u tematskoj knjizi *Krause-a* (2009) [155].

Na sl. 54 prikazan je foto-snimak požara kod silosa za drveni pelet u naseljenom mestu *Esbjerg-u* (Danska), koji je trajao 287 dana, od 05.11.1998.god. do 24.08.1999. god. Nakon šest meseci čišćenja po prestanku požara silos je razrušen u aprilu 2000. god., prema *Krause-u* (2009) [155].

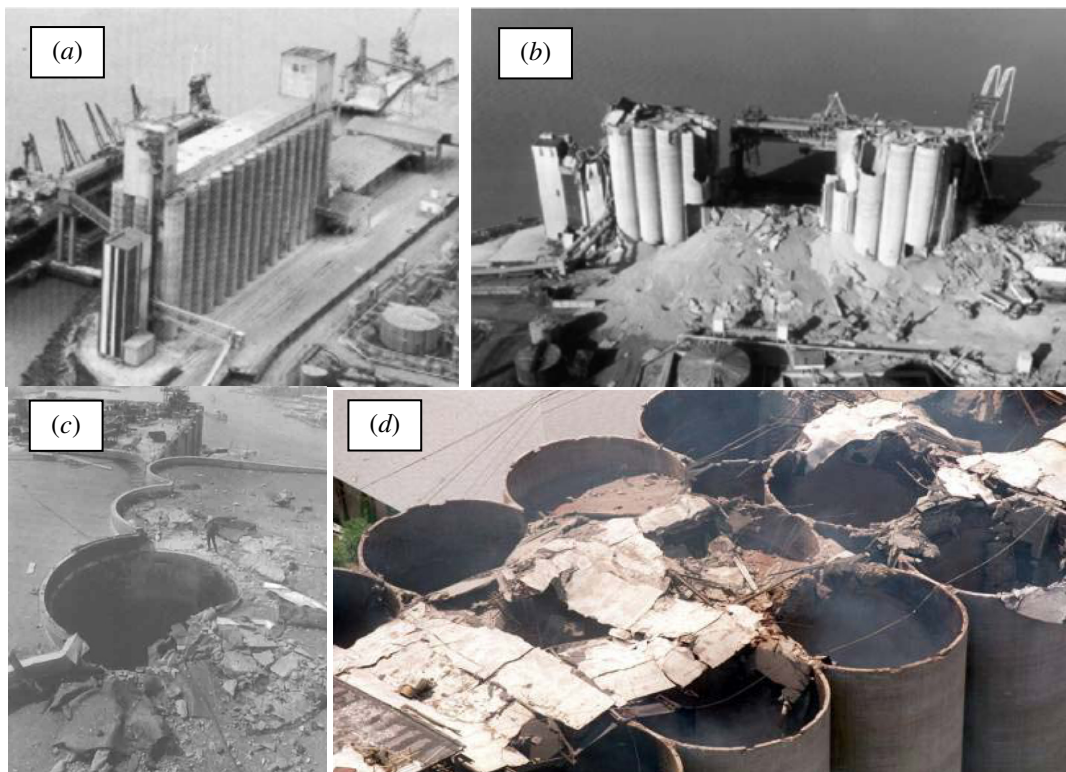


Sl. 54 Požar u silosu u *Esbjerg-u* (Danska) (a); rušenje silosa nakon požara (b), prema [155].

Požari mogu biti, i obično jesu, praćeni sa naknadnim pojavama eksplozija. U tom pravcu je potrebno preduzeti odgovarajuće mere da do eksplozija i širenja požara ne dođe, npr. ubacivanjem zaleđenog CO_2 u silosne ćelije, i puštanjem odgovarajućeg inertnog gasa u silos, kako bi se smanjila koncentracija kiseonika koji sa prašinom može formirati vazдушnu bombu.

Vrlo značajan problem kod silosa je mogućnost pojave eksplozije u objektima koji su u eksploataciji, kao i kod napuštenih objekata. Fina prašina od zrnastog materijala, koja se akumulira u vazдушnom prostoru silosa, može kod pojedinih vrsta materijala imati eksplozivno dejstvo. Pojava plamena ili varnice, ili samozapaljenje mase nekih uljarica i tome sklonih zrnastih materijala, mogu kod povećane koncentracije prašine u vazduhu izazvati pojavu vazdušne bombe.

Ovaj problem se ilustruje sa katastrofalnom eksplozijom silosa u *Blaye-u* kod *Bordeaux-a* (Francuska), gde je u 1997. god. došlo do snažne eksplozije koja je potpuno uništila 29, od ukupno 45 ćelija baterije silosa. Snimak silosa u vremenu pre i nakon akcidenta je dat na sl. 55 (a) i (b)¹, respektivno.



Sl. 55 Posledice eksplozije prašine u silosima: silos u *Blaye-u* (a) pre i (b) nakon akcidenta; Oštećenja krovne ploče: (c) lokalni slučaj kod silosa u *Stavanger-u* [72] i (d) globalni slučaj.

Sama eksplozija može biti relativno lokalnog karaktera nastalih oštećenja, kao kod slučaja silosa u *Stavanger-u* (Norveška), gde je pri eksploziji prašine od pšenice u junu 1970. god., raznet deo krovne ploče iznad jedne ćelije, kako je prikazano na sl. 55 (c)², prema [72]; ili globalnog karaktera, kada se eksplozijom obuhvata širi prostor u silosu, kao na sl. 55 (d)³ kod silosa u *Wichita-i*, gde je razoren kompletan krovni deo baterije silosa.

Najbolja preventiva od eksplozije je permanentno uklanjanje slobodne prašine iz postrojenja i uopšte silosnog prostora, kao i primena propisanih mera zaštite pri radu u silosima. Količina prašine kod obrade i skladištenja nekih zrnastih materijala može biti vrlo velika, i kontinualno se oslobađa pri radu trakastih i dugih transportera, tako da veći deo radnika koji su stalno angažovani u silosnom postrojenju rade upravo na uklanjanju ovih nečistoća.

Zbog mogućnosti stvaranja eksplozivne smeše prašine i vazduha pri skladištenju žita, mahunarki, brašna, uljarica i sličnog materijala, u silosima se predviđaju odgovarajući otvori (*odušci*), kako bi se ublažile posledice od eventualne pojave eksplozije.

¹ Mavrot G., Sochet I., Bailly P., and Moisescot M. (2003): "Silo vulnerability: Structural aspects". *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, Vol.16, Elsevier, pp.165-172.

² Prema *Eckhoff-u* (2003) [72] (foto *E. Eriksson*).

³ "DeBruce Grain Explosion", *OSHA Report*. (Foiles R. (2006): "Dust Explosion Venting of Silos", Process Protection Inc.).

Kod same eksplozije se obično javlja primarna i sekundarna eksplozija. Primarna je vezana za prostor u kojem je došlo do iniciranja eksplozije, a sekundarna može uslediti usled dizanja prašine pri primarnom vazдушnom talasu u ostalom delu prostora silosa. Ako ima zaostale prašine u većoj količini u silosnom prostoru (pri neodgovarajućem održavanju objekta), dolazi do sekundarne eksplozija koja je po intenzitetu mnogo jača od primarne.

Vrlo detaljan prikaz teorijske analize i proračuna opterećenja koja se formiraju pri eksploziji u silosima, prema *VDI-Richtlinie 2293* (1995), prikazao je *Eibl* (1998) [73], u referentnoj knjizi o silosnoj problematici [31]. Problemi vezani za pojavu eksplozija od prašinih materijala u silosima i drugim industrijskim objektima, su šire razmatrani u tematskoj knjizi *Eckhoff-a* (2003) [72].

2.8.3.6 Termička dejstva

Sažet pregled proračuna uticaja od temperaturnih promena i razlika kod silosa, uz pregled oblika ovih dejstava je prikazao *Яковлев* (1980) [378], kao i *Bölskei* i *Orosz* (1981) [28].

Određivanje temperaturnog polja u samom uskladištenom materijalu od uticaja promene spoljne temperature sredine su analizirali *Jia, Sun* i *Cao* (2000) [135], pri čemu je kod analize cilindričnog metalnog silosa sa uskladištenim materijalom korišćena MKE, a rezultati su upoređeni sa izmerenim temperaturama u posmatranim tačkama u masi materijala, na realnom silosu koji je poslužio za date analize.

Sa građevinske strane, u prvom redu je od interesa određivanje statičkih uticaja u zidu ćelije od termičkog dejstva, kao i u drugim delovima silosa. Dejstvo temperature se kod zidova silosa uvodi u vidu temperaturne promene u srednjoj površini zida, i kao temperaturna razlika po debljini zida. Ove veličine su obično uniformne po površinama zidova, ali postoje slučajevi, kao lokalni uticaj osunčanja jedne strane silosa, i slični, gde raspodela temperaturnih veličina ne mora biti simetrična u osnovi, već je nesimetrična, odnosno nejednaka po površini zidova. Pored uticaja spoljne temperature vazduha (sredine), koja dnevno varira u ciklusima dan - noć, ali i sezonski po dobima leto - zima, kod silosa problem termičkih uticaja može biti posebno naglašen kada se materijal koji se skladišti u prostoru silosne ćelije samozagreva ili već zagrejan dolazi u skladišni prostor.

Samozagrevanje je pojava koja se javlja usled odvijanja biološkog ili hemijskog procesa kod nekih materijala pri skladištenju, koja u nekim ekstremnim slučajevima može dovesti do samopaljenja materijala. Ovaj problem se mora držati pod kontrolom sa primenom odgovarajućih tehnoloških mera (npr. sa prođuvavanjem materijala vazduhom ili eleviranjem materijala), a temperature u masi uskladištenog materijala treba redovno pratiti putem očitavanja preko ugrađenih elektro-termometara u ćelijama silosa.

Kod industrijskih silosa za skladištenje cementa, cementnog klinkera (ili drugih već zagrejanih materijala) kod punjenja ćelije, u skladišni prostor se usipa već zagrejan materijal sa temperaturama od 100°C do 150°C, tako da silos služi i u svrhu postepenog hlađenja ovih materijala. U ovom slučaju pri određivanju temperature u zidovima ćelije potrebno je napraviti složeni proračun toplotne ravnoteže kod ukupnog objekta sa zagrejanom masom materijala. Toplota materijala se provodi kroz zidove, dno ćelije i krovnu konstrukciju, a temperature u zidovima silosa zavise od veličine ukupne mase uskladištenog materijala u ćeliji, koja se sa vremenom povećava pri punjenju i u funkciji je brzine punjenja ćelije zagrejanim materijalom (u [m³/h]). Materijal na gornjoj nasipnoj površini pri punjenju je najzagrejaniji, a temperatura u masi opada sa povećanjem dubine usled njenog postepenog hlađenja pri odavanju toplote kroz konstrukciju silosa. Najveći

temperaturni uticaji u zidu ćelije, odgovaraju zoni zida pri gornjoj površini nasutog zagrejanog materijala, a ispod tog nivoa, pri povećanju dubine materijala, temperaturni uticaji u zidu opadaju po eksponencijalnom zakonu. Kako se temperaturni režim menja u vremenu pri procesu punjenja ćelije, potrebno je napraviti odgovarajući inkrementalni proračun gde se određuju temperature u zidu pri povećanju nivoa usutog materijala. Ovaj složeni problem je detaljno analizirao *Sindel* (1985) [285], a razmatran je i od strane *Peter-a* i *Lochner-a* (1977) [228] (u II delu ref.), gde su prikazani neki rezultati određeni pri merenjima na izvedenim silosima za cement.

Detaljnu analizu temičkih uticaja sa analizom ustaljenog i neustaljenog temperaturnog režima je prikazana od strane *Smith-a* i *Simmonds-a* (1983) [287], gde je priložen i otvoreni listing računarskog programa za proračun promene temperature u zidu ćelije pri navedenim režimima. Proračun temperaturnog dijagrama u zidu pri ustaljenom režimu toplotne provodljivosti, pripada standardnim proračunima u propisima, a kao takav se nalazi i u odgovarajućem delu evropskih propisa EC 1. U principu, proračun se sprovodi za maksimalnu i za minimalnu proračunsku temperaturu spoljne sredine (što odgovara letnjoj i zimskoj temperaturi respektivno), i odgovarajućim temperaturama u unutrašnjosti silosa.

Kod analize provođenja toplote kroz zid ćelije, sa uskladištenim zagrejanim materijalom, deo materijala uz sam zid se ponaša kao izolator za unutrašnju zagrejanu masu materijala, što je povoljno pri određivanju temperaturnih promena u zidu, te se efekat ovog sloja uvodi u proračune na odgovarajući način (za cement se uzima da je debljina ovog sloja 20 cm). Kada se uporede internacionalne norme, najviše informacija o proračunu silosa sa zagrejanim materijalom je sadržano u ranije važećim francuskim propisima za silose *SNBATI* [288].

Analiza provođenja toplote i vlage kroz zidove je razmatrana u radu *Nikitin-a* i *Lapko-a* (2006) [208]. U nizu radova *Lapko* (1996) [158] i (2005) [159], *Lapko*, *Gnatowski* i *Prusiel* (2003) [160], *Lapko* i *Prusiel* (1997) [161] i (2001) [162], analizirana je interakcija između uskladištenog materijala i zidova ćelije silosa kod određivanja pritisaka na zidove ćelije i stanja napona, odnosno presečnih sila u cilindričnom zidu ćelije.

U radovima [159] do [162], analize su se odnosile na određivanje ukupnih pritisaka od težine uskladištenog materijala i od dela izazvanog termičkim uticajem na zid ćelija pri promeni temperature spoljne sredine. Ukazano je da se povećani pritisci materijala na zid ćelije, u slučaju pada temperature zida, mogu odrediti jedino uz primenu odgovarajuće interakcije uskladištenog materijala i zidova ćelije (povećanje pritisaka iznosi od 10% do 35% kod predmetnih analiza). Uticaj materijala je zamenjen sa odgovarajućim radijalnim oprugama u čvorovima elemenata zida kod primene MKE. Kod razmatranja problema primenjena je i analitička metoda, gde je analizirana diferencijalna jednačina pomeranja zida prema postupku prikazanom u ref. [158]. Proračunski rezultati su upoređeni sa rezultatima ispitivanja na jednoj AB ćeliji postojećeg silosa na otvorenom prostoru (merjenja sprovedena u zimskim i letnjim uslovima), u okviru različitih analiza u ref. [159], [161] i [162], i u laboratorijskim uslovima na velikom modelu AB silosa od ferocementa, u ref. [160] i [162].

Odgovarajuća simplifikovana proračunska formula za sračunavanje povećanja normalnog pritiska materijala pri smanjenju temperature zida ćelije pri padu temperature spoljne sredine je uvedena u § 5.6.2 u EN 1991-4:2006 [38]. Povećanje pritisaka u silosima, usled pada spoljne temperature kod analize AB kružnih i pravougaonih ćelija je detaljno razmatrao *Orosz* (1978) [213].

Određivanje statičkih uticaja i napona u zidu kružne cilindrične ćelije kod AB silosa, za temperaturna dejstva u zidu ćelije, u okviru rotaciono simetričnog problema kod analize cilindrične ljske, detaljno su analizirali *Kordina i Eibl* (1964) u ref. [152].

Određivanje statičkih uticaja kod kružne cilindrične ljske, pri delovanju različitih oblika temperaturnih dejstava, uključujući i analizu temperaturnog uticaja od nesimetričnog temperaturnog dejstva usled osunčanosti jedne strane ćelije (na primeru betonske ljske), analizirali su *Duddeck i Niemann* (1976) [69].

Analizu uticaja tečenja i skupljanja betona, u kombinaciji sa termičkim uticajima kod AB konstrukcija, je razmatrao *Кричевский* (1984) u knjizi [360], gde je prikazan proračunski primer određivanja stanja napona i stanja prslina kod AB zida silosa kružne osnove.

Analiza uticaja temperaturne promene u zidu prednapregnutog betonskog (PNB) silosa kružne osnove, na primeru jednog silosa za skladištenje uglja, sa proračunom stanja napona i stanja prslina, je prikazana od strane *van den Veen* (1993) u ref. [318].

Postoje primeri da se silos iznenada sruši u toku noći, ili ranog jutra, a da je materijal u ćeliji bio u stanju mirovanja, kao i u periodu od nekoliko ili više dana pre rušenja silosa. Kod ovih primera potrebno je analizirati uticaj naglog pada temperature spoljne sredine. Pri naglim temperaturnim promenama, kod AB silosa se može inicirati pojava prslina i povećanja napona u armaturi, što može dovesti do ozbiljnih oštećenja na zidu AB ćelije, a kod metalnih silosa se može izazvati kolaps ukupne konstrukcije.

Rušenja ovog tipa, događala su se kod čeličnih silosa, prema *Carson-u* (2000) [34].

Pojava stezanja zidova je vezana za sezonske i dnevne promene spoljne temperature. Preko dana zidovi se zagrevaju i pri tome šire, a uskladišteni materijal to prati sa svojim sleganjem. Noću, pri manjim spoljnim temperaturama, dolazi do stezanja zidova, ali se tome suprotstavlja uskladišteni materijal sa povećanjem pritisaka na zid ćelije. Pri sledećoj ekspanziji zidova, naponi u materijalu se ne smanjuju, tako da se pri sledećoj kontrakciji zidova naponi ponovo povećavaju.

Ovaj fenomen rezultuje u progresivnom povećavanju normalnih pritisaka na zidove ćelije, i poznat je kao *postupno termičko naprezanje zidova (thermal racking)*.

2.9 Metode i postupci proračuna opterećenja u silosima

2.9.1 Pregled teorijskih postupaka proračuna opterećenja u silosima

Opterećenje od težine uskladištenog materijala pri stanju mirovanja, punjenja i pražnjenja materijala u silosima je bilo i jeste predmet razmatranja velikog broja istraživača. U ovoj oblasti prve značajne rezultate su dali *Janssen* (1895), *Könen* (1896), *Airy* (1897), *Kötter* (1899) i *Ketchum* (1907), koji je uopštio *Janssen*-ovo rešenje za prizvoljni oblik poprečnog preseka ćelije.

Ova prva istraživanja su prikazana u okviru § 2.8.1. Uticaj nadopterećenja na gornjoj površini materijala je sigurno već bio poznat *Shaxby-u* i *Evans-u* (1922-3) prema [247], kao i *Сорокин-u* (1934-6) prema [358].

Proračuni opterećenja kod silosa su se zasnivali na konstantnoj težini uskladištenog materijala, što u načelu ne odgovara realnom stanju pri uskladištenju materijala u ćelijama silosa kako se pri većim dubinama povećava zapreminska težina materijala zbog kompresije materijala pri većim pritiscima.

Ovaj efekat je kod određivanja opterećenja koja deluju u ćeliji silosa, prvi uveo Гутъяр (1935)¹. Svi postupci su se odnosili na stanje materijala pri punjenju, odnosno mirovanju materijala u ćeliji, pri čemu se koeficijent bočnog pritiska K uzimao kao eksperimentalno određena vrednost ili prema Könen-ovom predlogu kao Rankine-ov koeficijent aktivnog pritiska za tlo u obliku:

$$K = \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i} \quad (2.94)$$

gde je ϕ_i ugao unutrašnjeg trenja zrnastog materijala.

Kod Гутъяр-a je primenjena teorija elastičnosti gde je koeficijent bočnog pritiska u poznatom obliku:

$$K = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (2.95)$$

gde je ν Poisson-ov koeficijent bočne deformacije zrnastog materijala.

Sledeći doprinos analizi opterećenja kod silosa je dao Jáky (1948)², koji je analizirao opterećenje u silosima na osnovu diferencijalnih uslova ravnoteže. Pri rešavanju ovog problema materijal u ćeliji je podelio na dve zone po visini, gornju zonu materijala gde se materijal ponaša plastično, i donju zonu materijala u ćeliji do dna, gde se materijal ponaša elastično. Kod ovog postupka je prvi put uveden koeficijent bočnog pritiska K_0 , u obliku (2.43) (u § 2.7.6):

$$K = 1 - \sin \phi_i \quad (2.96)$$

Jáky-eva analiza opterećenja u silosima je sistematski i vrlo pregledno prikazana od strane Heng-a, Pipatpongsa-a i Ohta-e (2008) [115], što predstavlja još jedan primer velikog interesovanja za prve radove iz oblasti proračuna silosa i ponašanja zrnastih materijala, kako je to konstatovano u § 2.8.1, a s obzirom na skoro objavljene prevode rada Hagen-a (1852) i rada Janssen-a (1895), respektivno u ref. [306] i [290].

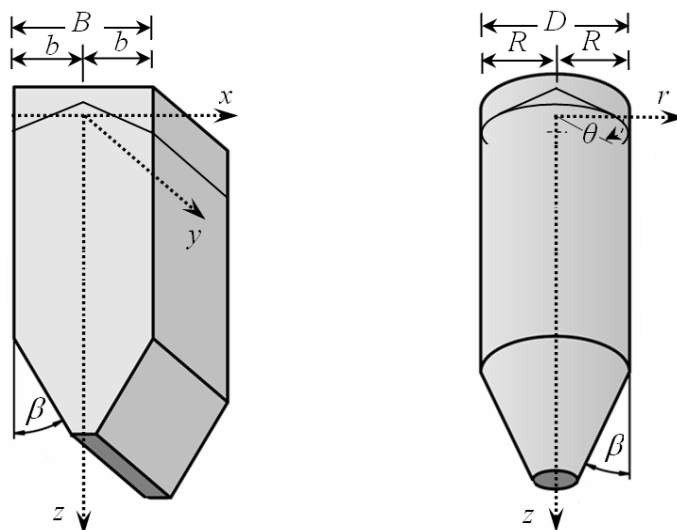
Kao doprinos mehanike tla problemu silosnih opterećenja (prema § 2.8.1.1), preko analize opterećenja kod ukupanih cevovoda i sličnih problema, mogu se navesti postupci Marston-a (1930), kao slučaj primene Janssen-ovog postupka analize na ovom problemu, Voellmy-a (1937), Terzaghi-a (1943), Ohde-a (1951), Соколовский-ог (1960), kao i novi postupak Li-a i Aubertin-a (2007-10) prema ref. [167], [168] i [169], gde je to u osnovi analizirano na problemu nasipanja rudarskih galerija i jama.

Tek posle ispitivanja izvedenih silosa u Баку-у 1938-39. god. od strane Тахтaмышев-a, i ispitivanja protoka materijala u malim ćelijama sa staklenim zidom, iz 1941. god. od Бернштейн-a, prema ref. [350], ustanovljeno je da pri pražnjenju materijala iz silosa dolazi do povećanih opterećenja u ćeliji silosa, i da materijal u ćeliji može da protiče u vidu unutrašnjeg protoka i masovnog protoka (opisano u okviru § 2.4). Povećane horizontalne pritiske pri pražnjenju materijala su odredili i braća M. i A. Reimbert 1953-4. god. na osnovu merenja na jednom čeličnom silosu sa kvadratnim ćelijama (Francuska), pri čemu su odredili neravnomerno povećanje po visini zida pri dva ispitivanja sa maksimalnim faktorom uvećanja pritiska pri pražnjenju od 1.76 i 2.39, respektivno kod

¹ Гутъяр Е.М. (1935): "Распределение давления на стенке силосной башни". Труды Московского автодорожного института. Сб. 2, М., с.182-184. (Гутъяр-ов поступак је приказан у књигама Fischer-a (1966) [82] i Клейн-a (1977) [358].)

² Jáky J. (1948): "Pressure in silos". Proceedings of the 2nd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. I, June 21-30 1948, Rotterdam, pp.103-107.

navedena dva ispitivanja. Ovi rezultati su publikovani u njihovim knjigama o silosima (1962) [244] i (1976) [243], u okviru kojih je formulisan poseban postupak za određivanje opterećenja u silosnim ćelijama, koji se navodi kao tzv. teorija *Reimbert*-ovih. Interesantno je da na formulisanje francuskih propisa za proračune silosa, nije imala toliko uticaja teorija *Reimbert*-ovih, već teorija *Caquot*-a (1957)¹.



(a) ćelija sa klinastim levkom (b) ćelija sa konusnim levkom

Sl. 56 Geometrija silosnih ćelija sa klinastim i konusnim levkom.

Rasprava o aktivnom i pasivnom stanju je već bila u okviru matematičke analize silosnog problema kod *Kötter*-a (1899) [153], ali je prvo eksplicitno uvođenje aktivnog i pasivnog pritiska kod opisa stanja u silosima dato kod *Ohde*-a (1951, 1958) [210], gde je uvedeno granično stanje ravnoteže kod popustljivih zidova silosa za ravanski problem na većim dubinama materijala (matematički za $z \rightarrow \infty$).

Ovu analizu je dalje produbio *Nanninga* (1956)², koji je sugerisao da je zrnasti materijal u aktivnom *Rankine*-ovom stanju nakon punjenja (odgovara većim vertikalnim pritiscima u odnosu na horizontalne pritiske u materijalu), a da je tokom pražnjenja, materijal u pasivnom stanju (pri čemu opadaju vertikalni pritisci, a horizontalni ostaju na nivou). Prelaz između ova dva stanja vodi naglom povećanju vrednosti odnosa pritisaka K , dok se vertikalni pritisak uzima kao konstantan pri određivanju ravnoteže kod prelaza stanja.

U skladu sa ovim pristupom, pri uvođenju *Mohr-Coulomb*-ovih uslova granične ravnoteže prema sl. 40, za ravanski problem (koji odgovara analizi silosne ćelije sa klinastim levkom na sl. 56 (a), gde je koeficijent trenja $\mu_w = 0$ kod vertikalnih užih bočnih zidova ćelije) za $z \rightarrow \infty$, određuje se da koeficijent bočnog pritiska K nije konstantna veličina u horizontalnom preseku, već je promenljiva veličina $K(x)$ u funkciji koordinate x .

Pri analizi ravanskog problema egzaktno se određuje $K(x)$, kod aktivnog i pasivnog stanja uskladištenog materijala (za $z \rightarrow \infty$) u obliku:

¹ Caquot A. (1957): "La pression dans les silos". *Proceedings of the Fourth International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Vol.2, pp.191-195. (Citirano prema *Butterfield*-u [32].)

² Nanninga N. (1956): "Gibt die übliche Berechnungsart der Drucke auf die Wände und den Boden von Silobauten sichere Ergebnisse?". *Der Ingenieur*, Vol.68, Nov., No.44. (Da li uobičajena metoda proračuna pritiska na zidove i dno silosa daje sigurne rezultate?). Citirano prema *Peschl*-u (1969) [227] i *Rotter*-u (2008) [260].

$$K(x) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot x^2 / b^2} \quad (2.97)$$

gde se dvojni znak u (2.97), uzima kao "+" za *aktivno* stanje, a kao "-" za *pasivno* stanje. Ovde je širina ćelije $B = 2b$, kako je prikazano na sl. 56 (a), i uveden je pravougli koordinatni sistem (z, x, y) , gde se dubina materijala z uzima od sredine visine nasipne prizme materijala (što odgovara nivou pri poravnanju materijala nasipne prizme).

Kod analize osnosimetričnog problema koji odgovara cilindričnim ćelijama silosa sa kružnom osnovom prema sl. 56 (b), i primeni cilindričnog koordinatnog sistema (z, r, θ) , gde je prečnik ćelije $D = 2R$, određuje se $K(r)$ kao približno rešenje, pri primeni pretpostavke da su horizontalni naponi $\sigma_h(r)$ konstantni u preseku pri $z \rightarrow \infty$, u sledećem ekvivalentnom obliku:

$$K(r) \cong \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot r^2 / R^2} \quad (2.98)$$

Uloga dvoznaka u gornjem izrazu je kao kod izraza (2.97), a dubina materijala z se uzima od nivoa 1/3 visine nasipne kupe materijala (što odgovara nivou pri poravnanju materijala nasipne kupe). Pri proračunskim formalizacijama, pretpostavlja se da koeficijenti K , u obliku izraza (2.97) i (2.98) koji su određeni za $z \rightarrow \infty$, ostaju da važe u ovim oblicima za svaku dubinu z .

Dalje unapređenje analize pritisaka kod silosa je dao *Львин* (1969-70)¹ (*Lvin* (1970)), koji je ukazao da vertikalni pritisci nisu uniformni u poprečnom preseku ćelije. Kod analize kružnih ćelija, razmatrana je ravnoteža na diferencijalnom prstenastom elementu (kod *Janssen*-a je korišćen diferencijalni sloj materijala). *Lvin*-ov rad je, u svoje vreme, izazvao veliko interesovanje na zapadu, gde je njegov pristup u opštem kao i u aproksimativnom obliku razmatran u ref. [11], [102], [286] i [287]. Pritisci pri pražnjenju silosa se obuhvataju kao uvećani pritisci pri punjenju, u obliku empirijskog izraza, kako je to prikazano u pregledu *Lvin*-ovog postupka kod *Singh*-a i *Moysey*-a (1985) [286]. Kod aproks. oblika rešenja, uvode se dve oblasti za definisanje raspodele pritisaka kod kružne ćelije, gde je gornja oblast ćelije izložena parabolichnoj raspodeli pritisaka, koji na početku druge oblasti prelazi u vertikalnu tangentu, i odgovara maksimalnom horizontalnom pritisku koji je konstantan u donjoj oblasti. Parabolichni deo dijagrama horizontalnih pritisaka na zid ćelije u gornjem delu, za stanje punjenja ćelije (tj. za stanje mirovanja materijala), dat je sa izrazom:

$$p_h(z) = \gamma \cdot K \cdot z \cdot \left(1 - \frac{\mu_w \cdot K}{D} \cdot z \right) \quad \text{za} \quad z \leq z_c = \frac{D}{2\mu_w \cdot K} \quad (2.99)$$

Donja oblast ćelije sa konstantnim pritiscima počinje od dubine z_c , i ovi pritisci iznose:

¹ *Клейн* (1977) [358] navodi rešenje *Львин*-a, i pri tome citira referencu:

"ЦИНТИ Госкомзага СССР. Давление сыпучих материалов в силосах и бункерах, 1969".

Латышев (1985) [361], pri opisu rešenja *Львин*-a, citira referencu:

Львин Я.Б. (1970): "Давление сыпучего тела на стенку силоса". В сб.: «Расчет пространственных конструкций». Вып. XIII. Стройиздат, Москва.

Askari i *Elwi* (1986) [11], *Gumbe* (1987) [102], *Singh* i *Moysey* (1985) [286], kao i *Smith* i *Simmonds* (1983) [287], navode rešenje *Lvin*-a (ili *Lavin*-a), i citiraju referencu:

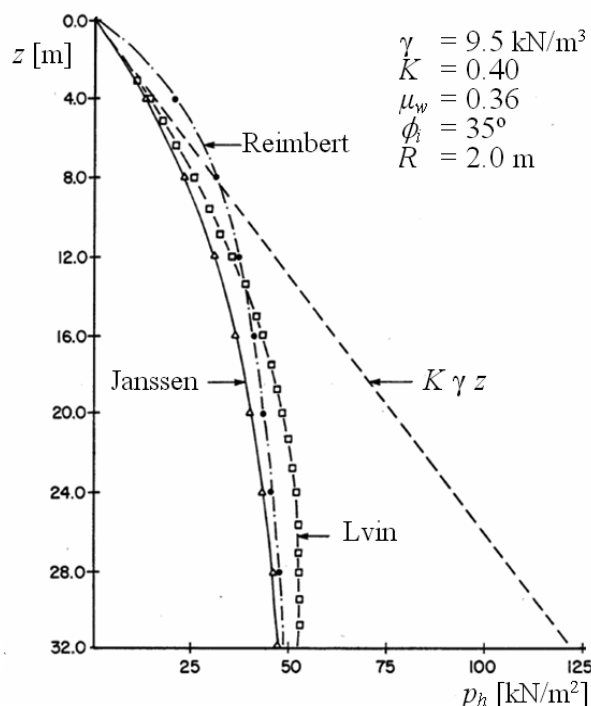
Lvin J.B. (1970): "Analytical Evaluation of Pressures of Granular Materials on Silo Walls". *Powder Technology*, Vol. 4, pp. 280-285.

$$p_h(z) = \frac{\gamma \cdot D}{4\mu_w} \quad \text{za } z \geq z_c = \frac{D}{2\mu_w \cdot K} \quad (2.100)$$

gde je D unutrašnji prečnik ćelije.

Izrazi (2.99) i (2.100), određuju pritiske na zid ćelije u bilinearnoj formi, kao dijagram "parabola+prava", što je kao bilinearno rešenje slično dijagramu "prava+prava", prema izrazu (2.49), kod našeg uputstva TU (1960) [310]. U ref. [358] i [361], izrazi *Львин*-a su u izmenjenoj formi u odnosu na ovde dati prikaz.

Primer upoređenja različitih metoda proračuna pritisaka je prikazan na slici sl. 57, za zadatu geometriju i karakteristike materijala, prema *Askari*-u i *Elwi*-u (1986) [11].



Sl. 57 Upoređenje različitih metoda proračuna pritisaka pri stanju punjenja, prema [11].

U pogledu analize stanja napona u silosnom materijalu ističe se rad *Johanson*-a i *Jenike*-a (1962)¹, kao i formiranje energetske metode (*Jenike*, *Johanson* i *Carson* (1973)²) kod određivanja faktora uvećanja opterećenja pri pražnjenju, na osnovu analize *skokovitog opterećenja* koje se javlja pri prelazu iz stanja mirovanja u kretanje materijala u levku i ćeliji silosa (*switch load*). Ova metoda se bazira na minimumu unutrašnje energije pri deformacijama materijala ispod nivoa preskoka (primena II zakona termodinamike).

¹ Johanson A.R., Jenike A.W. (1962): "Stress and velocity fields in gravity flow of bulk solids", *Bulletin No. 116*, Utah Eng. Experiment Station, Univ. of Utah, Salt Lake City. (Citirano preko [246], [247], [248] i [276].)

² Jenike A.W., Johanson J.R. and Carson J.W. (1973): "Bin Loads – Part 3: Mass – Flow Bins", *Journ. Engineering for Industry, Transactions, ASME, Vol.95, Series B, No.1*, pp.6-12.

(Citirano prema *Smith*-u i *Simmonds*-u (1983) [287], gde je analizirana *Jenike*-ova energetska metoda. U dodatku B, na str. 222-235 u ref. [287], prikazano je teorijsko izvođenje energetske metode kroz pregled navedenog *Jenike*-ovog rada, kao i otvoreni listing računarskog programa za određivanje skokovitog opterećenja prema ovoj metodi. Analiza metoda i primeri kod analize preskočnog opterećenja prema *Walters*-u i *Jeniku*-u, detaljno su prikazani u disertaciji *Nortje*-ove (2002) [209].)

Metoda je poslužila za kalibraciju faktora uvećanja opterećenja u AS 3774. U *Jenike*-ov doprinos se svrstava i teorija radijalnih napona kod masovnog protoka materijala kroz levak. Prema ovoj teoriji, donji deo u dužini od približno $2/3$ zidova levka ima manja opterećenja pri pražnjenju nego pri mirovanju, a gornja $1/3$ levka veća opterećenja (od povećanja pritisaka pri prelazu ćelije u levak). Doprinos *Jenike*-a u oblasti analize protoka materijala je opisan u § 2.6.

Dalji teorijski doprinos kod analize silosnog problema su dali *Walker* (1966) [325] i (1967) [326], *Walters* (1973) [327] i (1973) [328] i *Enstad* (1975) [75] i (1977) [76]. *Walker* je dao osnovni doprinos analizi silosnog problema kod cilindrične ćelije i konusnog levka, pri čemu je uveo neuniformno vertikalno opterećenje na horizontalni diferencijalni sloj materijala. Postavljajući uslov vertikalne ravnoteže na diferencijalnom sloju materijala, odredio je stanje napona kod ćelije silosa i levka, pri čemu je uveo *faktor distribucije* (originalna oznaka faktora je D u ref. [325]) vertikalnih pritisaka u materijalu, kao odnos vertikalnog pritiska pri zidu ćelije i prosečnog vertikalnog pritiska u horizontalnom preseku. Analiza pritisaka u ćeliji se bazirala u osnovi na aktivnom stanju materijala, a slučaj pražnjenja materijala iz levka, na pasivnom stanju. *Walker* nije dao eksplicitan prikaz izraza za faktor distribucije, ali je neke vrednosti faktora dao tabelarno. Kod *Walker*-a je težište rada bilo na analizi pojave zaustavnog svoda/kupole materijala, tako da je on kod ovih analiza uveo pojednostavljenje uzimajući da je faktor $D = 1$. U ref. [326], dati su eksperimentalni rezultati ispitivanja pritisaka kod bunkera uz upoređenje sa teorijski određenim pritiscima na levku silosa (bunkera).

Walters je detaljnije analizirao *Walker*-ov pristup kod analize levka u ref. [327] i ćelije silosa u ref. [328]. Ekspicitno je odredio faktor distribucije vertikalnih pritisaka kod kružnih preseka kako za aktivno stanje tako i za pasivno stanje. Proširio je *Walker*-ovu analizu tako što je ćeliju razmatrao i u pasivnom stanju, a levak i u aktivnom stanju. Na ovaj način, formulirano je aktivno i pasivno stanje kod ćelije i levka silosa, za slučaj kružne cilindrične ćelije i konusnog levka. Za razliku od *Walker*-a, kod *Walters*-a je težište rada bilo na analizi preskočnog opterećenja (*switch load*), kod levka i ćelijskog dela silosa. Budući da se *Walters*-ova analiza odnosila na prelaz aktivnog stanja u puno pasivno stanje pri prelasku materijala iz stanja mirovanja u kretanje materijala pri pražnjenju, određeni su previsoki vršni pritisci kod preskočnog opterećenja na zidu ćelije, dok su vertikalni pritisci u materijalu kod stanja pražnjenja u ćeliji nerealno malih vrednosti. Ne umanjujući značaj ove analize sa teorijskog aspekta, mora se konstatovati da analiza skokovitog opterećenja u ćeliji ne daje kvantitativno realne rezultate. Opšte je mišljenje da se puno pasivno stanje u ćeliji silosa ne formira pri pražnjenju materijala, ali da se pasivno stanje formira u levka pri pražnjenju materijala. Puno pasivno stanje se kod ćelije može pojaviti pri ekstremnom bubrenju materijala, kao i npr. kod rada drobilica materijala i slično. U osnovi, vertikalni napon je i pri punjenju i pri pražnjenju materijala u ćeliji, veći od horizontalnog napona, te je ćelija u normalnim uslovima eksploatacije uvek u režimu aktivnog stanja napona.

Za razliku od *Walters*-ove analize skokovitog opterećenja u formulaciji prelaska aktivnog stanja u pasivno stanje pritisaka u materijalu, *Jenike*-ova analiza skokovitog opterećenja kod silosne ćelije se zasniva na elastičnom ponašanju materijala ispod nivoa preskoka. Proračun pritisaka u silosnim ćelijama pri primeni aktivnog i pasivnog stanja je prvi primenio *Nanninga* (1956), prema *Rotter*-u (2008) [260], a osnovnu formulaciju u tom pravcu je već bio postavio *Ohde* (1951) [210].

Nanninga je analizirao pojavu povećanih pritisaka na zid ćelije kod prelaza materijala iz stanja mirovanja u kretanje pri pražnjenju, i kod ove analize ovaj prelaz nije vezan za

posmatrani nivo horizontalnog preseka i skokovitu promenu kao kod pristupa *Jenike*-a i *Walters*-a, već se prema *Nanninga*-u odvija kontinualno po visini posmatrane prelazne zone kod zidova ćelije.

I kod jednog i kod drugog postupka, nivo sa skokovitom promenom pritisaka, odnosno zona kontinualne promene stanja materijala, prate pokretanje materijala u levku i ćeliji od početka pražnjenja, i pri tome menjaju položaj po celoj visini silosa, od dna levka do vrha nasutog materijala. Pri ovom kretanju, vršni pritisci pri preskočnom opterećenju formiraju anvelopu pritisaka na zid ćelije, koja se uzima kao povećano opterećenje pri pražnjenju. Ovo opterećenje zavisi od nivoa preskoka z , a po obimu ćelije je uniformno (rotaciono simetrično opterećenje).

Enstad je analizirao stanje pritisaka u levku silosa, pri primeni zakrivljenih diferencijalnih slojeva, u obliku kružnog svoda kod analize ravanskog protoka materijala u levku (slučaj protoka kod klinastog levka) u ref. [75], i u obliku kupole kod osnosimetričnog protoka materijala (slučaj protoka kod konusnog levka) u ref. [76]. *Walker*-ova i *Enstad*-ova analiza stanja pritisaka u levku su našle mesto kod analize levka u EN 1991-4 (2006) [38], i to kod definisanja parametra F_e prema izrazu (2.158) prema *Walker*-ovoj teoriji, i prema izrazu (2.173) prema *Enstad*-ovoj teoriji. Parametar F_e koji je uveden u EC1-4, se odnosi na stanje pražnjenja materijala, i predstavlja odnos normalnog pritiska na zid levka i vertikalnog pritiska u materijalu uz zid levka.

Primenu *metode karakteristika*, kod određivanja skokovitog pritiska (*switch pressure*) kod prelaza (tranzicije) vertikalnog ćelijskog dela u klinasti levak pri pražnjenju silosa, su prikazali *Horne* i *Nedderman* (1978) [122]. Analiza se odnosila na 2D bunker, odnosno na ravanski slučaj protoka materijala kod silosa, tj. na primer silosa kao na sl. 56 (a). Pri upoređenju normalnih pritisaka na zid levka, određenih po metodi karakteristika i pri primeni postupaka *Walker*-a, *Walters*-a, *Enstad*-a, i postupka *Jenike*-a i *Johanson*-a, zaključeno je da je *Walters*-ov postupak, po dobijenim rezultatima, najbliža aproksimacija u odnosu na metodu karakteristika, kada se "testerasti" dijagram pritisaka kod metode karakteristika posmatra kao glatka kriva sa osrednjenim vrednostima pritisaka.

Analiza opterećenja u levku, pri aktivnom i pri pasivnom stanju materijala u levku, pri primeni metode karakteristika, prikazana je u radu *Horne*-a i *Nedderman*-a (1978) [123]. Ova analiza se takođe odnosi na 2D problem, odnosno levak u obliku klina. Rezultati proračuna normalnih pritisaka na zidove levka, određenih po metodi karakteristika su upoređeni sa odgovarajućim rezultatima pri primeni postupaka prema *Walker*-u, *Walters*-u, *Enstad*-u, i prema *Jenike*-ovoj teoriji radijalnog polja napona (*RSF* metoda).

Metoda karakteristika kod analize aktivnog stanja (materijal u levku miruje) daje rešenja u obliku kontinualnog dijagrama pritisaka na zid levka, dok se pri analizi pasivnog stanja (pražnjenje materijala iz levka) dobija diskontinualni dijagram pritisaka. Kod aktivnog stanja, zaključeno je da između svih postupaka postoji relativno dobro slaganje rezultata, a kod *Jenike*-ove *RSF* metode se to odnosi na donji deo levka. Kod pasivnog stanja, postoje veća odstupanja rezultata ostalih metoda u odnosu na metodu karakteristika, ali se opet procenjuje da je *Walters*-ova metoda dobra aproksimacija za metodu karakteristika. *Jenike*-ova metoda stoji kao srednja vrednost za "testerasti" dijagram pritisaka dobijen kod metode karakteristika, i to u oblasti levka koja je bliža otvoru. Kako su *Walker*-ova i *Walters*-ova metoda analize opterećenja u levku vrlo slične, faktor distribucije je kod *Walker*-ovog postupka uzet da je $D = 1$ (kako je to uradio *Walker* u izvornoj ref. [325]), a konkretna teorijska vrednost za faktor D je korišćena kod *Walters*-ovog postupka (kako je to *Walters* primenio u izvornoj ref. [327]). Analiza se odnosila na opterećenja samo od mase materijala u levku (bez uvođenja nadopterećenja).

Metoda karakteristika, primenjena u ref. [122] i [123], je razmatrana u okviru teorije plastičnosti (linija loma materijala po smicanju), i bazirana je na metodologiji prikazanoj u knjizi *Statika zrnaste sredine* od Соколовский-ог (1960) [371]. Primena metode karakteristika pri rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina, prikazana je isto i u knjigama kao što su *Teorija plastičnosti* od Соколовский-ог (1969) [372], i *Математичка теорија пластиčnosti* od Hill-a (1998) [119]. Kod ove metode veći problemi se javljaju pri pokušaju rešavanja 3D problema, tako da je primena kod silosnog problema praktično ostala u okviru analize 2D silosnog problema. Širi prikaz primene kod silosnog problema je dat u knjizi *Statika i kinematika granularnih materijala* od Nedderman-a (1992) [200]. Ova metoda je našla punu primenu kod analize raznih problema u okviru mehanike tla. Kod silosnog problema, metoda karakteristika je praktično postavila put za primenu metode integralnih relacija.

Mikromehanički model zrnastog materijala bazira, u osnovnoj jednostavnoj varijanti, na analizi pravilnog slaganja jednakih sfernih zrna (diskova). Na osnovu analize ravnoteže sila kod pravilnog rasporeda sfernih zrna, gde se svaka sfera iz gornjeg reda oslanja pod uglom β u odnosu na vertikalnu osu, na dve susedne sfere u nižem redu, Гячев (1968) [352] je formirao jedinstvenu teoriju isticanja zrnastog materijala iz bunkera i silosa. U drugoj knjizi¹ sa naslovom *Osnovi teorije bunkera i silosa*, od Гячев-а (1986) [353], data teorija je u jednom manjem delu izmenjena, pri čemu je dodat novi način analize nekih problema (uvedena je razlika između analize sitnozrnastog i krupnozrnastog materijala). Kod teorijske analize u [352], uspostavljena je diferencijalna jednačina između uniformnog vertikalnog pritiska u materijalu s jedne strane i zakona proticanja materijala s druge strane (preko promena količine izdatog materijala na otvoru tokom vremena). Pri poznavanju oblika jedne strane jednačine, moguće je odrediti vremenske promene na drugoj strani. Kod pritisaka u materijalu uspostavljena je diferencijalna jednačina slična Janssen-ovoj, gde je uveden koeficijent suprotstavljanja k , a kod uslova ravnoteže uveden je i uticaj ubrzanja mase zrna a , pri proticanju materijala.

Prema rezultatima analiza, pri otpočinjanju isticanja materijala iz levka, dolazi do početnog pada vertikalnih pritisaka u materijalu po ukupnoj visini, a pri daljem proticanju materijala ovi pritisci unekoliko rastu sve do uspostavljanja stacionarnog dijagrama pritisaka pri pražnjenju. Konačni vertikalni pritisci pri pražnjenju su nešto manji od pritisaka materijala pri mirovanju (orijentaciono oko 10 do 20%). Nedostatak kod ove teorije je prevelika osetljivost koeficijenta k od konkretnih vrednosti ulaznih proračunskih veličina (manja odtupanja ulaznih podataka mogu proizvesti velike razlike kod vrednosti koeficijenta k), ali se ovaj problem ne javlja kod inovirane analize za sitnozrnaste materijale u [353]. Pored prethodnog, ugao slaganja zrna β se određuje samo putem posebne opitne procedure na modelima silosa. Ipak se mora primetiti da se ugao β kod prikaza istih eksperimenata, značajno razlikuje po datim vrednostima u [352] i [353], tako da je za isti ispitani materijal odeđeno orijentaciono oko dva puta veća vrednost za ugao β u ref. [353], u odnosu na vrednost kod ref. [352]. Ovo je posledica uvedene podele teorijske analize prema tipu materijala u [353], odnosno za sitnozrnaste i krupnozrnaste materijale, pri čemu su eksperimentalno ispitani materijali u pogledu teorijske analize uzeti kao sitnozrnasti materijali, a postupak analize koji je primenjen u [352] se prema

¹ Pored ovde direktno citiranih knjiga [352] i [353], prema pregledu dostupne literature, Гячев je objavio još jednu knjigu iz ove oblasti 1992. god., a prema stručnoj literaturi koja iz nje navodi neke stavove i formulacije, evidentno je da su tu date i neke dodatne inovacije kod analize silosnog problema:

Гячев Л.В. (1992): *Основы теории бункеров*. Изд. Новосибирского университета, Новосибирск, 312 с. (Citirano prema Федосеев-у (2007) [374] i Банников-у (2008) [349].)

novoj podeli odnosi na krupnozrnaste materijale. Određene "nove" vrednosti ugla β pri slaganju zrna materijala prema [353] (npr. za pšenicu je $\beta = 43^\circ$), deluju "realnije" od prethodnih vrednosti prema [352] (za pšenicu je bilo određeno $\beta = 18^\circ$). Prikazane analize pritisaka kod silosa i bunkera su slične metodi diferencijalnog sloja, gde se uspostavlja ravnoteža vertikalnih sila na horizontalnom sloju materijala od tri reda pravilno složenih sfera (slučaj 1D analize silosnog problema). *Гячев*-a teorija obuhvata analize raznih oblika bunkera i silosa, kao i proizvoljne oblike kod rotaciono simetričnog ćelijskog dela i levka (zidovi mogu biti promenljivog nagiba po visini levka ili ćelije). Uspostavljanje jednačine dinamičke ravnoteže diferencijalnog sloja materijala, sa uvođenjem ubrzanja mase zrna a pri proticanja materijala, predstavlja značajan iskorak u odnosu na druge teorije, što je od posebnog značaja kod analize protoka i stanja pritisaka u levku.

Sistem pravilno složenih sfera (odnosno kružnih diskova u ravanskom sistemu) je razmatran i od strane drugih istraživača. Na ovaj način su analizani pritisci u silosima kod *Butterfield*-a (1969) [32] (ravanski problem), *Xu*-a, *Zhang*-a i *Britton*-a (1996) [340] (pritisci pri mirovanju), te *Zhang*-a i *Britton*-a (2003) [343] (pritisci pri pražnjenju). Kod ovih radova razmatran je heksagonalni sistem pravilno složenih diskova (ili sfera u ravni), gde je jedan kružni disk u kontaktu sa 6 njemu susednih diskova (kontaktni broj, odnosno *Newton*-ov broj je 6), i gde se disk iz gornjeg reda oslanja na dva diska u donjem redu pod uglom $\beta = 60^\circ$. Kod *Гячев*-a je razmatrana "kvadratna" rešetka pri slaganju sfera, gde se jedna sfera dodiruje sa 4 susedne sfere (*Newton*-ov broj je 4), a ugao β nema unapred zadatu vrednost, već se određuje na osnovu eksperimenta. U mehanici tla model pravilno složenih sfera ili diskova je korišćen pri brojnim teorijskim analizama stanja napona u tlu i kod drugih problema, a ovde se navodi analiza uticaja poroznosti na dilatanciju kod nevezanog materijala tla, koju su obradili *Li* i *Dafalias* (2000) [171], gde su prikazane četiri sheme pravilnog rasporeda sfera (diskova) u ravanskom problemu.

Kod *metode integralnih relacija* uspostavlja se ravnoteža horizontalnih i vertikalnih sila na elementarnom isečku diferencijalnog sloja. Uobičajeno je namenjena za rešavanje 2D (ravanski problem) i 3Dr silosnog problema (kružne ćelije), gde se jednačine ravnoteže u integralnom obliku svode na sistem dve diferencijalne jednačine. Prema dostupnoj literaturi, prva primena metode integralnih relacija kod analize stanja napona u silosnom materijalu je data u disertaciji *Negi*-a (1974) [202], kao i u radu *Negi*-a i *Ogilvie*-a (1977) [203], a dalje je razmatrana od strane *Drescher*-a (1991)¹.

U radovima *Heng*-a, *Pipatpongsa*-a i *Ohta*-e (2008) [115], *Pipatpongsa*-a, *Khosravi*-e, i *Heng*-a (2009) [233], i *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a (2010) [230], prikazana je nova metoda proračuna pritisaka u silosima za stanje mirovanja materijala, gde je korišćen *Jáky*-ev koeficijent bočnog pritiska $K = 1 - \sin\phi$, koji je uzet kao konstantna vrednost po srednjoj osi silosa. Postupak je baziran na ispunjenju dva uslova ravnoteže, i prema autorima predstavlja kvazi-elastično rešenje problema, a zbog uvedene pretpostavke o koeficijentu K , postupak je naslovljen kao *generalisani Jáky*-ev postupak. Originalni *Jáky*-ev postupak proračuna stanja napona kod silosa je u osnovi složeniji po svojoj matematičkoj formi u

¹ Drescher A. (1991): *Analytical Methods in Bin-Load Analysis*. Elsevier, Amsterdam, 255 p. (Videti ref. [168].)

Tejchman (2013) u III poglavlju njegove knjige *Confined Granular Flow in Silos* [303], pri razmatranju analitičkih postupaka kod proračuna pritisaka u silosima navodi kao skoro jedini izvor ranije objavljenu knjigu *Drescher*-a na poljskom jeziku:

Drescher A. (1983): *Metode proračuna opterećenja i protoka granularnih materijala u silosima*. Warszawa – Poznań, Poljska akademija nauka. (na poljskom).

odnosu na navedeni generalisani postupak, a pretpostavka za koeficijent K se odnosila na donju zonu materijala u silosu kod *Jáky*-eve analize (detaljno razmatrane u ref. [115]).

Dalji doprinos kod analize stanja napona materijala u silosu, u okviru primene analitičke metode, su dali: *Dresher* sa knjigom *Analitičke metode kod analize opterećenja u silo-ćelijama* i kroz dalje radove; *Benink* (1989)¹ u svojoj disertaciji i u daljim radovima; i *Rotter* kod analize nesimetričnog opterećenja pri pražnjenju ekscentričnim protočnim kanalom (detaljnije opisano u [259]), i sa formulisanjem modifikovane teorije *Reimbert*-ovih za proračune srednje vitkih i kratkih silosa²; kao i drugi autori. Navedeni *Rotter*-ovi postupci proračuna su uvedeni u evropske norme EC1-4, a posebno se mora ceniti njegov rad kao rukovodioca komiteta za izradu EN 1991-4 (2006) [38] (EC1-4).

Kod silosnog problema u mehanici tla (analiza stanja napona kod zatrpanog rova), *Li* i *Aubertin* (2007-10) su formirali novi postupak analize prema ref. [167], [168] i [169], gde se analiza zasnivala na *Marston*-ovoj (u osnovi na *Janssen*-ovoj) metodi diferencijalnog sloja, ali sa uvođenjem promenljivog dijagrama vertikalnih napona u horizontalnom preseku materijala.

Viši matematički pristup problemu određivanja pritisaka u zrnastom materijalu u ćelijama silosa je analiziran od strane *Rahmoun*-ove (2006-9) u disertaciji [236] i sa koautorima u radovima [237], [238] i [239].

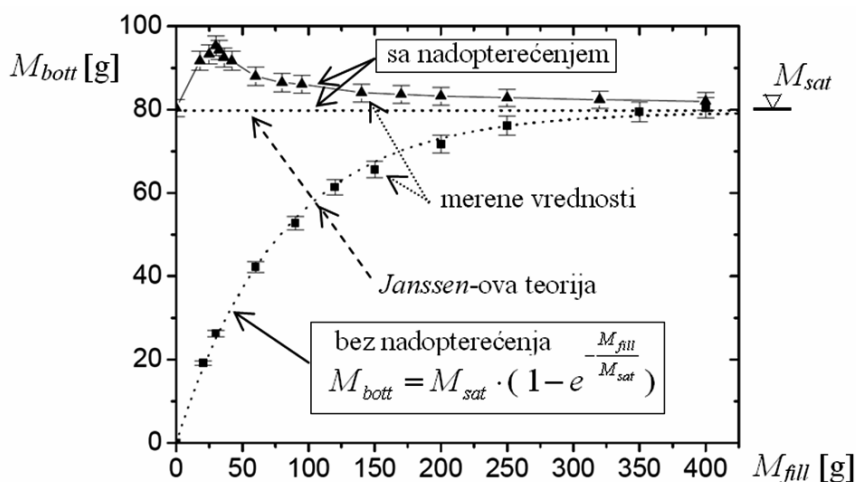
Kod ove analize korišćena je pretpostavka o uniformnim vertikalnim naponima kod diferencijalnog sloja materijala, sa uvođenjem *Mohr-Coulomb*-ovog modela za lom zrnastog materijala po smicanju. Kod analize kružnih silosnih ćelija, dodatno je primenjena pretpostavka da su radijalni pritisci konstantni kod diferencijalnog sloja materijala. Interesantno je primetiti, da kod postupka *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a (2010) [230], nije uvedena ova dodatna pretpostavka koja simplifikuje problem kod analize kružnih ćelija, a u istom slučaju rešenje stanja napona je daleko jednostavnije od rešenja prikazanog u [236]. U referenci [236] analiza stanja napona se odnosila na nevezane i vezane (kohezivne) zrnaste materijale, a kod rešenja pritisaka u silosima sa nasutim nevezanim materijalom, morala se uvesti zanemarljivo mala vrednost kod kohezije materijala, kako bi se održala egzistencija matematičkog postupka. Analiza se odnosila na puno aktivno i puno pasivno stanje pritisaka u materijalu, ali je teorijski određeno i specifično "srednje" (intermedijalno) rešenje stanja pritisaka, ali za to stanje nije dato fizičko objašnjenje.

Viši matematički pristup kod analize jednačina ravnoteže u obliku sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina pri određivanju opterećenja u levku, prikazan je od strane *Gremaud*-a i *Matthews*-a (2001) [97] kod levka konusnog oblika za *Mohr-Coulomb*-ov model plastičnog ponašanja materijala; te u radu *Gremaud*-a, *Matthews*-a i *O'Malley*-a (2004) [98] za *von Mises*-ov model materijala kod levaka različite geometrije uključujući "piramidalni" oblik levka. Upoređenje rezultata pri primeni *von Mises*-ovog i *Matsuoka-Nakai* modela plastičnog ponašanja materijala kod analize osno nesimetričnih levaka u toku pražnjenja, dato je u radu *Gremaud*-a, *Matthews*-a i *Schaeffer*-a (2006) [99]. Na osnovu eksperimentalnih ispitivanja, navedenih u radu [99], i sprovedenih analiza sa primenom razmatranih modela materijala, zaključeno je da se bolje slaganje rezultata dobija pri primeni *Matsuoka-Nakai* modela u odnosu na klasični *von Mises*-ov model.

¹ Benink E.J. (1989): *Flow and stress analysis of cohesionless bulk materials in silos related to codes*. Doctoral Thesis, The University of Twente, Enschede, The Netherlands.

² Rotter J.M. (2002): "*Pressures in Squat Silos*". Note presented to CEN TC250/SC1/PT4 for EN 1991-4, Edinburgh, August 2002.

U sklopu analize silosnog problema, Vanel (1999) [314], a zatim Ovarlez (2002) [215], su u okviru svojih disertacija inovirali Janssen-ov eksperiment na malom opitnom silosu, sa vrlo preciznim sistemom merenja opterećenja koje pada na pokretno dno opitnog silosa. Dno silosa je odvojeno od zidova i pri ispitivanju ne dodiruje zidove. Silos je u sekvencama punjen posebnim materijalom za ispitivanje i posle svake sekvence punjenja, dno je polagano spuštano do male konačne vrednosti vertikalnog pomeranja. Preko mernog uređaja je registrovana masa, odnosno težina materijala koju nosi dno silosa. U osnovi je pri ispitivanju određivan uticaj zbijenosti nasutog materijala na opterećenje dna, kao i uticaj nadopterećenja na gornjoj površini materijala (u eksperimentu je precizno postavljana dodatna masa u obliku tega na gornjoj površini materijala). Dno silosa i dodatni teg na gornjoj površini materijala su vrlo velike krutosti u odnosu na zrnasti materijal, tako da se mogu uzeti kao apsolutno kruti. Dodatne informacije i analize o ovim eksperimentalnim istraživanjima su date za Vanel-ova istraživanja u ref. [315] i [316], a za Ovarlez-evu u ref. [216] i [217]. Na sl. 58 su prikazani rezultati merenja na opitnom silosu i odgovarajući Janssen-ovi dijagrami (kao tačkaste linije), prema Ovarlez-evoj i Clément-u (2005) [216]. Na apscisi je prikazana promena nasute mase materijala u silosu M_{fill} , a na ordinati deo mase koja se prenosi preko dna M_{bott} . Razlika između ukupne mase i dela mase materijala koju nosi dno, $M_{fill} - M_{bott}$, prenosi se preko zidova putem trenja. Masa koju nosi dno M_{bott} se, pri povećanju ukupne mase M_{fill} u silosu, postepeno povećava i teži ka asimptotskoj (saturacionoj) vrednosti M_{sat} . Prema sl. 58, Janssen-ova kriva sledi vrlo dobro izmerene podatke, i preko nje je određena asimptotska vrednost mase $M_{sat} = 80.5$ g. Podaci pri opitu su: opitni silos - čelični cilindar prečnika $d = 38$ mm, usipni materijal - staklene perle $\varnothing 1.5$ mm (sa malom disperzijom u veličini zrna), koeficijent trenja o zid $\mu_w = 0.25$. Za analizirani slučaj sa uvođenjem nadopterećenja, u obliku dodatne mase $M_{sat} = 80.5$ g na gornjoj površini materijala, prema Janssen-ovoj teoriji sledi da je masa M_{bott} konstantne vrednosti za sve visine punjenja ćelije, odnosno u ovom slučaju sledi da je $M_{bott} = M_{sat}$. Međutim, pri uvođenju nadopterećenja pri opitu (merene vrednosti označene trougaonim markama na sl. 58), konstatovana je pojava efekta "povećanja" opterećenja ("overshoot effect" prema Vanel-u (1999) [314]). Prema rezultatima merenja, pri povećanju visine usutog materijala (pri povećanju mase M_{fill}), uticaj ovog efekta opada, i pri velikim visinama usutog materijala (velikoj masi M_{fill}) ovaj uticaj se praktično anulira, tako da deo mase koji nosi dno silosa M_{bott} teži ka M_{sat} .

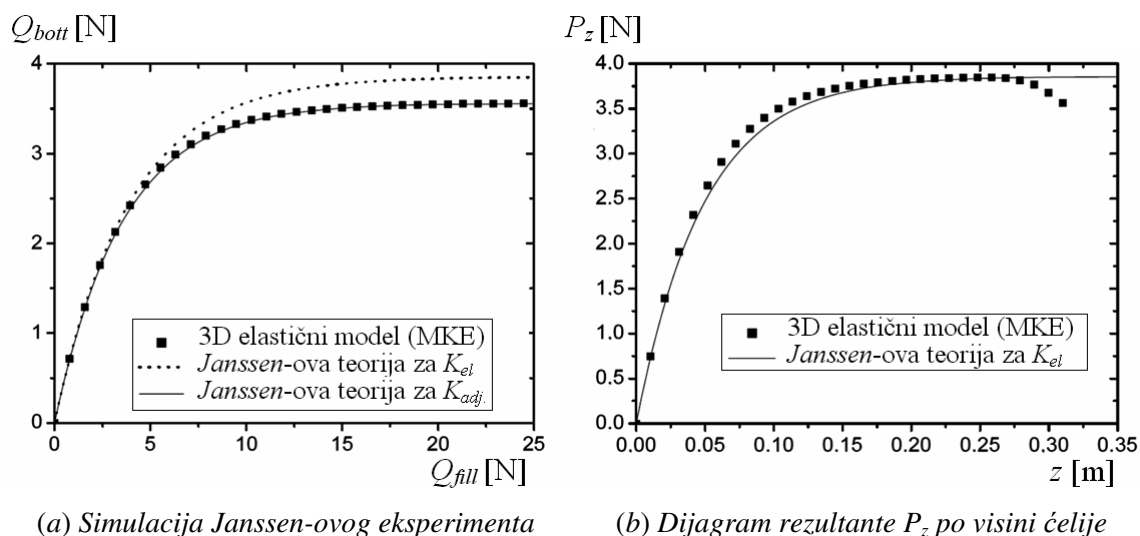


Sl. 58 Upoređenje Janssen-ove teorije i eksp. rezultata, adapt. prema [216].

Nadopterećenje je koristio pri testovima i *Janssen* (1895) [130], sa postavljanjem tegova na daščanoj podlozi na vrhu nasutog materijala, kako je prikazano na sl. 46 (a), ali samo za određivanje dodatnih mernih tačaka pri ispitivanju već punog modela silosa. U ovom slučaju, uticaj efekta prebačaja opterećenja na dno silosa je vrlo mali i kao takav se može zanemariti.

Pri daljem ispitivanju *Janssen*-ovog eksperimenta, *Ovarlez*-eva (2002) [215] je primenila 3D numeričku simulaciju sa primenom MKE (materijal tretiran kao izotropna elastična sredina), pri određivanju stanja pritisaka pri punjenju modela silosa. Za ovaj proračun korišćeni su sledeći podaci: zapreminska masa materijala $\rho = 1.6 \text{ g/cm}^3$ (što odgovara slogu staklenih perli sa zbijenošću od 64%), *Young*-ov modul elastičnosti 100 MPa, *Poisson*-ov koeficijent $\nu_p = 0.45$, i trenje o zid $\mu_w = 0.5$, za materijal; a model silosa uzet je u obliku čeličnog cilindra poluprečnika $R = 4 \text{ cm}$ i debljine zida 3 mm, sa *Poisson*-ovim koeficijentom $\nu = 0.3$, i *Young*-ovim modulom 210 GPa. Za ove podatke, rezultati simulacione 3D elastične analize su prikazani na sl. 59 (prema [215], isto i u [217]).

Na osnovu 3D simulacije *Janssen*-ovog eksperimenta, rezultati za ukupnu silu Q_{bott} koja deluje na dno modela su prikazani na sl. 59 (a), sa oznakama u obliku kvadrata. Ove proračunske vrednosti su fitovane sa *Janssen*-ovom krivom (puna linija), pri čemu je određen koeficijent $K = K_{adj} = 0.89$. *Janssen*-ova kriva sa koeficijentom K , koji teorijski odgovara elastičnoj sredini, $K = K_{el} = \nu_p / (1 - \nu_p) = 0.82$, prikazana je sa tačkastom linijom na sl. 59 (a). Razlika između datih vrednosti za koeficijent K je oko 9 %.

(a) Simulacija *Janssen*-ovog eksperimenta(b) Dijagram rezultante P_z po visini ćelije

Sl. 59 Upoređenje *Janssen*-ove teorije i 3D elastične analize pri primeni MKE kod cilindrične ćelije – modela, adapt. prema [215].

Pri 3D simulaciji stanja napona kod elastičnog materijala koji ispunjava model u visini od 31 cm, dijagram rezultujuće vertikalne sile P_z , po visini modela je prikazan na sl. 59 (b). Nivo $z = 0 \text{ cm}$ odgovara vrhu materijala u modelu, a $z = 31 \text{ cm}$ odgovara nivou dna modela. Sila P_z je određena kao integral vertikalnih napona po površini horizontalnog preseka materijala na datom nivou z . Podaci za P_z su upoređeni sa *Janssen*-ovom krivom za koeficijent $K = K_{el} = 0.82$, sa punom linijom na sl. 59 (b). Prema ovoj slici, *Janssen*-ova kriva dobro aproksimira vrednosti rezultujuće vertikalne sile po visini modela, a relativno veće odstupanje stoji samo kod dela dijagrama u zoni pri dnu modela ($z = 31 \text{ cm}$), gde vrednosti opadaju blizu dna ćelije. Vrednosti na dijagramima prema 3D elastičnoj analizi su jednaki samo u koordinatnom početku ($z = 0$) i za nivo $z = 31 \text{ cm}$, gde

je $Q_{bott} = P_z$, kako se obe vrednosti odnose na dno modela (aktuelna vrednost kod *Janssen*-ovog eksperimenta). Prosečni vertikalni pritisak na dnu modela je $p_{bott} = Q_{bott}/A$, a prosečan vertikalni napon u nivou z je $p_v = F_z/A$, gde je A unutrašnja površina horizontalnog presaka modela. Na ovaj način, dijagrami na sl. 59, predstavljaju skalirane vrednosti prosečnih vertikalnih napona, i to za dno modela prema sl. 59 (a), i za posmatrani nivo materijala z , koji se meri od vrha materijala do dubine punjenja od 31 cm, prema sl. 59 (b).

Opadanje vertikalnih pritisaka pri dnu modela se uzima kao *efekat dna*, a razlog za ovu pojavu je prelazak stanja vertikalnih deformacija zrnastog materijala, iz gornje zone sa promenljivim osnosimetričnim dijagramom deformacija u funkciji radijalne koordinate r , u donju zonu do krutog dna sa ravnomernim stanjem deformacija.

Napominje se da uobičajeni *Janssen*-ov eksperiment, pri kojem se meri stanje vertikalnih napona na dnu modela, i preko toga određuje koeficijent K i ukupni dijagram pritisaka po visini silosa, nije ekvivalentan merenju profila pritisaka preko mernih mesta na različitim visinama ćelije ili modela. Iz *Janssen*-ovog eksperimenta se određuju manji asimptotski pritisci u materijalu, odnosno veća vrednost koeficijenta bočnog pritiska K od realne vrednosti.

Ovo ukazuje na potrebu preispitivanja tipa ispitivanja na kojima se bazira određivanje koeficijenta K , ili preispitivanja vrednosti za K ako se ispitivanje baziraju na *Janssen*-ovom eksperimentu gde je evidentan efekat dna ćelije. U tom smislu, celishodno je određivanje K preko rezultata horizontalnih pritisaka po visini silosa, gde ne doseže uticaj ovog efekta.

Na potrebu za preispitivanje procene dobijenih proračunskih veličina, određenih prema pritiscima izmerenim pri eksperimentalnim ispitivanjima, ukazano je još ranije od strane *Sundaram*-a i *Cowin*-a (1979) [293].

Isto tako, *Tejchman* (2013) [303], preporučuje kod primene metode diferencijalnog sloja (npr. *Janssen*-ove teorije), da koeficijente K i μ_w treba odrediti na osnovu ispitivanja, a za neophodni minimum je navedena primena jednog mernog mesta na polovini visine silosa.

Sami eksperimenti kod *Vanel*-a (1999) [314], i *Ovarlez*-eve (2002) [215], gde je korišćena elastična analiza između ostalih modela, su potaknuti razmatranjima o stanju pritisaka u silosima od *Evesque*-a i *de Gennes*-a (1998) [78], gde je problem posmatran na nivou elastičnog ponašanja materijala. Ovo razmatranje, u nešto širem kontekstu, je prikazao *de Gennes* (1999) [93] i (2008) [94]¹. U navedenim referencama, pored ukazivanja na stanje promenljivih deformacija po visini silosa u okviru elastične analize silosnog problema, što je kasnije iskorišćeno pri objašnjenju smanjenja vertikalnih pritisaka kod krutog dna ćelije usled efekta dna (kako je navedeno kod *Ovarlez*-eve (2002) [215] i u ref. [217]), razmatran je i problem mobilizacije trenja materijala o zid ćelije. Ukazano je na činjenicu da je trenje delimično mobilisano u gornjoj zoni pri nasutoj površini zrnastog materijala, a da je potpuno mobilisano na većim dubinama materijala. Dubina od gornje površine materijala do koje nije ostvarena ukupna mobilizacija trenja se može odrediti proračunom lokalnih deformacija zrna pri trenju o zid. Ako je ova deformacija veća od 1-og mikrona, trenje se uzima da je potpuno mobilisano. Informacije radi, potrebna dubina materijala za potpunu mobilizaciju trenja može biti npr. 30 cm, što nije problem kod realnih silosa gde su dubine nasutog materijala mnogo veće, ali u laboratorijskim uslovima kod modela

¹ Pierre-Gilles de Gennes (1932–2007) je dobitnik Nobelove nagrade za fiziku 1991. god. Navedena ref. [94] iz 2008. god. je objavljena prema *de Gennes*-ovom predavanju na Univerzitetu u Tokiju od 3. aprila 1998. god.

silosa sa malim visinama nasutog materijala ovo može biti problem prilikom analize i tumačenja rezultata ispitivanja.

U prethodno navedenim referencama, korišćen je *elastični model* materijala kod analize stanja pritisaka u silosu. Pored ovog modela, kod analize pritisaka se uobičajeno koriste *elasto-plastični model* i *hipoplastični model* za opis stanja napona i deformacija zrnastog materijala. U elasto-plastične modele ulaze praktično svi klasični modeli koji definišu površinu loma materijala (kod zrnastog materijala lom usled velikih smičućih deformacija), u koje ulazi i najčešće korišćeni *Mohr-Coulomb*-ov uslov loma kod zrnastih materijala. Hipoplastični model ne uvodi direktno površinu loma materijala, i predstavlja hipotetičnu matematičku postavku nelinearnog ponašanja materijala, sa kojom je moguće opisati povratne i nepovratne deformacije zrnastog materijala. Hipoplastični model, je u njegovoj posebnoj varijanti namenski razvijan za analizu silosnog problema, prema *Gudehus-u*, *Kolymbas-u* i *Tejchman-u* (1986) [101]. 3D formulacija ovog modela je u tenzorskom obliku i primenjuje se kod analize silosnog problema pri primeni metode konačnih elemenata (MKE).

Svođenje 3D modela na jednostavniji nivo, konkretno na 1D model za primenu kod metode diferencijalnog sloja, prikazao je *Wensrich* (2002) [333], gde je formulisana jednačina ravnoteže na diferencijalnom sloju silosnog materijala, koja po svom obliku odgovara *Janssen*-ovoj formulaciji, ali sa uvedenim hipoplastičnim modelom za zrnasti materijal.

Jedna od osnovnih karakteristika zrnastog materijala je da pokazuje izvesne nepovratne deformacije pri naponima većim od određene granice elastičnosti. Pri naponima ispod ove granice, deformacije materijala su povratne. Formulisani su mnogi *elasto-plastični modeli* za zrnaste materijale, kao npr. *Drucker-Prager*-ov model (1952), i *Lade*-ov model (1977). Elasto-plastični modeli obuhvataju fenomene koji se javljaju kod zrnastih materijala, kao što su dilatancija i plastična deformacija. Prema *Tejchman-u* (2013) [303], pri analizama silosnog problema sada se sve više koriste *hipoplastični modeli* zrnastog materijala.

2.9.2 Primena metode konačnih elemenata i metode diskretnih elemenata

Primena *metode konačnih elemenata* (MKE, ili na engl. FEM), šire je prikazana u tematskoj knjizi *The Finite Element Method* od *Zienkiewicz-a* i *Taylor-a* (2005) (Vol.1 - [344], Vol.2 - [345] i Vol.3 - [346]), kao i u knjigama *Hartmann-a* i *Katz-a* (2007) [113], *Rombach-a* (2004) [250] (prikazana primena MKE kod analize uticaja od lokalnog opterećenja na cilindričnom zidu silosa), te *Ghali-a* (2000) [95] u okviru jednog poglavlja kod analiza silosa i rezervoara. Pregled stanja stvari kod primene MKE kod silosnog problema je prikazan u referentnoj knjizi *Brown-a* i *Nielsen-a* (1998) [31], a detaljan prikaz primene MKE, a posebno primene hipoplastičnog modela materijala, kao i prikaz drugih numeričkih metoda kod raznih vrsta analiza silosnog problema, sa pregledom eksperimentalnih metoda i ispitivanja na silosima, dao je *Tejchman* (2013) [303].

Prema *Rombach-u* i *Martinez-u* (1998) (§ 24 u [31]) zrnasti materijali se odlikuju vrlo kompleksnim mehaničkim ponašanjem kao što su anizotropija, nelinearna zavisnost napona i dilatacija, plastičnost, dilatancija i drugo. Za svako od ovih svojstava materijala potrebno je izgraditi složeni matematički model. Modelovanje interakcije između zida i zrnastog materijala je posebno složeno, s obzirom na to da je međuveza između ova dva materijala, koji su u osnovi vrlo različiti, potpuno kompleksna. Kod glatkih zidova duž kojih se može razviti klizna površina, pretpostavka o konstantnom koeficijentu trenja između zidova i zrnastog materijala može biti sasvim zadovoljavajuća. U slučaju hrapavih

zidova, proces pražnjenja može proizvesti smičući zrnasti sloj konačne debljine koji ograničava velike smičuće dilatacije, i dilatanciju. Ovaj fenomen može povećati napone u ovoj zoni i zahteva sofisticirano modelovanje. Pri punjenju i pražnjenju silosa formiraju se heterogene oblasti materijala različite zbijenosti zrnaste mase, što proizvodi nesimetrične pritiske po površini zidova i sa tim krajnje ekstremne ravnotežne uslove za konstrukciju silosa. Kao istraživački alat, primena numeričkih simulacija vodi ka boljem razumevanju i tačnijem opisu fizičkih fenomena koji se javljaju u silosima.

MKE je vrlo pogodna za analizu stanja napona u silosima, kao što su interakcija između zidova silosa i uskladištenog materijala, problem pojave skretnog opterećenja na prelazu zida u levak ćelije, ili ekscentričnosti kod geometrije silosa i skladištenja i pražnjenja materijala (ova pitanja su analizirana npr. u referencama *Rombach*-a i koautora (1998) [252], (2003) [254], (2004) [253] i (2005) [251]).

MKE se primenjuje na dva osnovna načina kod analize silosa:

- prvi, uobičajeni inženjerski način, je primene MKE kod analize uticaja u konstrukciji silosa bez uvođenja interakcije sa zrnastim materijalom u silosu, a opterećenja od zrnastog materijala se uzimaju prema propisima ili odgovarajućim teorijama (analize kod ovog slučaja su prikazali npr. *Abdel-Fattah*, *Moore* i *Abdel-Fattah* (2006) u ref. [1] i [2], gde su analizirani betonski silosi direktno oslonjeni na temeljnu podlogu i silosi sa levcima uzdignutim na noseću podkonstrukciju); i
- drugi, specijalizovani način, gde se pri primeni MKE uvodi interakcija konstrukcije silosa i nasutog zrnastog materijala, pri čemu se konačnim elementima obuhvata kako konstrukcija, tako i materijal u silosnom prostoru.

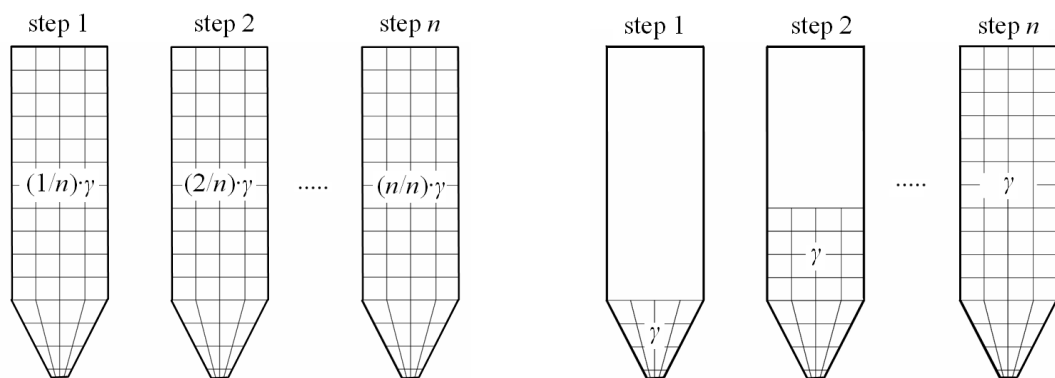
Prvi način se koristi pri projektovanju složenijih silosnih konstrukcija, ili pri obuhvatanju raznih nesimetričnih opterećenja koja se navode u propisima za opterećenja silosa. Drugi način je više namenjen za istraživanja i realniju procenu stanja naprezanja i deformacija u silosima usled raznih vrsta i kombinacije dejstava, kao i za analize uticaja geometrijskih i mehaničkih karakteristika silosne konstrukcije i uskladištenog materijala pri punjenju, mirovanju i pražnjenju materijala. Prvi način primene je dobro poznat u inženjerskoj praksi, dok je manje poznat drugi specijalizovani način primene MKE kod analize stanja napona u silosima. Iako postoji brojna literature iz ove šire oblasti, vrlo malo radova je objavljeno o konkretnim praktičnim postupcima, kao i o detaljima analize, pri primeni MKE sa obuhvatanjem interakcije materijala u silosu i silosne konstrukcije.

Prve primene MKE kod analize bočnih pritisaka na zid silosa pri punjenju materijalom, su razvijene od strane *Mahmoud*-a (1975) i *Jofriet*-a, *Lelievre*-a i *Fwa*-a (1977). Dalja poboljšanja su napravljena od strane posebnih istraživačkih grupa; npr. *Häußler* i *Eibl* (1984) su razvili prvi model sa primenom MKE koji je mogao da simulira pražnjenje materijala, a *Ooi* i *Rotter* (1990) su upotrebili 2D osnosimetrični model pri analizi punjenja materijala.

Među prve studije koje se bave formulisanjem MKE kod silosnog problema ulaze istraživačke studije od *Askari*-a i *Elwi*-a (1988) [11] (analiza prema MKE prikazana i u ref. [12]) i *Link*-a i *Elwi*-a (1987) [173], koje su se odnosile na stanja pri punjenju i pri pražnjenju silosa. Zrnasti materijal u ovim studijama je tretiran sa elasto-plastičnim modelom, a kontakt zrnaste mase sa zidom je u prvo navedenoj studiji definisan preko opruga u kontaktnim čvorovima u posebnoj interpretaciji *Coulomb*-ovog trenja, a u drugoj studiji sa uvođenjem tankih međuslojnih kontaktnih elementa. Proračunske formulacije u ovim studijama, su date u inkrementalnoj formi radi obuhvatanja materijalne nelinearnosti zrnaste sredine i zavisnosti trenja materijala o zid silosa od veličine normalnog napona.

U primeni MKE, poseban doprinos je dao prof. *Joffriet* sa Univerziteta u *Guelph*-u sa svojim timom saradnika, pri čemu je razvijen model MKE koji može obuhvatiti pražnjenje materijala (*Meng* (1994); *Meng, Jofriet i Negi* (1997) [187] i [188]); te sa uvođenjem metode diskretnih elemenata – MDE, kod analize stanja napona u silosima (*Discrete Element Method - DEM*) (*Rong, Negi i Jofriet* (1995), ref. [256] i [257]); kao i sa formiranjem prvog *hibridnog modela* (jedновременna primena MKE i MDE) kod analize silosnog problema, pri čemu se MKE koristi za analizu konstrukcije i materijala u silosu, izuzev u dve manje zone, i to na prelazu zida ćelije u levak, i pri samom otvoru na levku, koje su obuhvaćene MDE analizom (*Lu, Negi i Jofriet* (1997), ref. [175], [204] i [136]). Pri ovoj kombinaciji metoda MKE i MDE, bilo je neophodno uspostaviti prelazne homogenizacione relacije, sa mikro sistema MDE, na makro sistem MKE.

Kod primene MKE, najjednostavnije obuhvatanje punjenja materijala u silosu odgovara pretpostavci da je ukupna masa materijala prisutna u celini na početku analize. Međutim, realno se masa pri punjenju postepeno povećava tokom procesa punjenja silosa, što utiče na raspored normalnih napona na zidove silosa. *Progresivno punjenje silosa* se može obuhvatiti sa dva uobičajena postupka, kako je prikazano na sl. 60. Kod prvog postupka, shematski prikazanog na sl. 60 (a), ukupan materijal je uveden sa KE u silosu, ali se njegova zapreminska težina γ povećava u koracima proračuna za iznos $(1/n)\cdot\gamma$, gde je n broj koraka uvođenja zapreminske težine γ , a kod drugog postupka, prikazanog na sl. 60 (b), postepeno se dodaju gornji slojevi materijala sa punim iznosom za γ , gde je n broj slojeva koji formiraju ukupnu masu materijala, prema *Gallego*-u (2006) [92]. Kod prvog postupka se ne obuhvata konsolidacija materijala u nižim slojevima pri nanošenju novog dodatog nedeformisanog sloja. Prvi postupak se može definisati kao *postepeno aktiviranje težine materijala*, a drugi kao *postepeno uvođenje slojeva materijala*.

(a) *postepena aktivacija zapreminske težine*(b) *postepeno uvođenje slojeva materijala*

Sl. 60 Postupci za uvođenje postepenog punjenja materijala kod primene MKE.

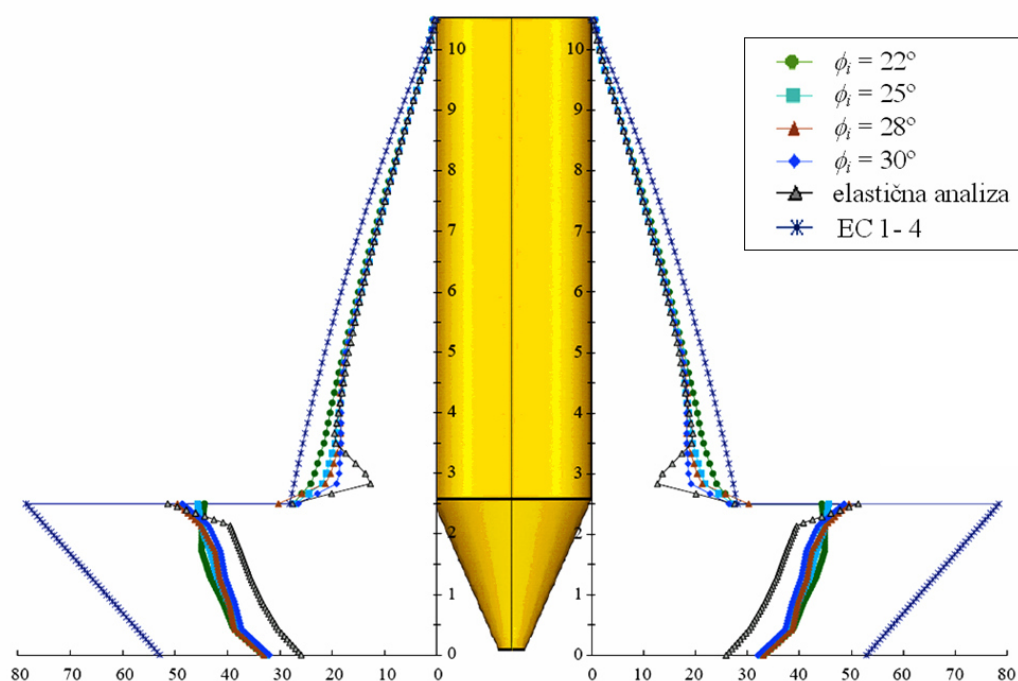
Prema *Rombach*-u i *Neumann*-u (2004) [253], postepeno punjenje materijala u silosni prostor treba uzeti kod MKE, kao punjenje materijala u slojevima, odnosno sloj po sloj. Opis postepenog punjenja materijala u levku, kao i opis kombinovanog postupka punjenja kod levka, prikazan je u radu *Rombach*-a i *Neumann*-a (2003) [254]. U stručnoj literaturi, sada se pod postepenim punjenjem kod primene MKE u osnovi podrazumeva primena drugog postupka, odnosno uslojenog punjenja. Međutim, kod ovog postupka postoje moguća ograničenja pri primeni kod postojećih programa, u vidu nemogućnosti promene mreže elemenata, odnosno povećanja broja elemenata kod aktiviranja novog sloja materijala, tako da tu postoje posebne tehnike pri implementaciji u MKE.

Upoređenje analiza prema dva poznata programa, i to programa ANSYS, kao programa opšte namene za proračun konstrukcija (primena elasto-plastičnog modela materijala, i površinskog kontaktnog modela za interakciju između zida i zrnastog materijala), i specijalizovanog programa SILO za analizu silosa (primena hipoplastičnog modela materijala, i kontaktnog modela kao tankoslojnog međupovršinskog elementa), na primerima analize stanja napona 3D cilindričnog silosa pri punjenju i pražnjenju materijala, prikazali su *Rombach, Ayuga, Neumann i Gallego* (2005) [251].

Rezultati dobijeni pri analizi postepenog punjenja materijala po slojevima u cilindričnom silosu, pokazuju u nekim delovima kod prikazanih dijagrama pritisaka na zidu ćelije ozbiljnije nedostatke. Pri primeni programa SILO, u gornjoj zoni materijala se dobijaju neočekivane velike vrednosti pritisaka na zid silosa, a kod primene programa ANSYS kod analiziranog cilindričnog silosa se određuju nerealno velike promene napona u okviru slojeva materijala, i to od sloja do sloja nasutog materijala. Ove analize se prikazane u ref. [251], gde je zaključeno da treba dalje istraživati probleme vezane za progresivno punjenje materijala i njegovu implementaciju u programima koji baziraju na primeni MKE.

Dijagrami pritisaka pri punjenju materijala, koji se mogu naći u stručnoj literaturi, uobičajeno nemaju ove navedene nedostatke, ali po svemu sudeći takvi dijagrami su određeni na najjednostavniji način analize pritisaka pri punjenju materijala u samo jednom koraku, pri čemu se uvode svi KE materijala sa ukupnom težinom u prvom koraku proračuna. Potrebno je ovde napomenuti, da se u stručnoj literaturi kod prikaza odgovarajućih dijagrama pri punjenju, vrlo retko precizira način sa koji se u MKE pri analizi uvodi punjenje materijala u silos.

3D analiza cilindrične silosne ćelije sa konusnim levkom je prikazana u radu *Guaita-a, Couto-a i Ayuga-a* (2003) [100]. Istraživani su pritisci pri pražnjenju materijala kod silosa sa centričnim i ekscentričnim konusnim levkom. Kod analiza je variran ekscentricitet levka od 0 % do 100 %, i ugao unutrašnjeg trenja materijala ϕ_i od 22° do 30°.



Sl. 61 Normalni pritisci na zidove ćelije i levka pri pražnjenju silosa, prema [100].

Numeričke analize pri primeni MKE su sprovedene primenom programa ANSYS 5.5 (1999)¹, uz uvođenje elasto-plastičnog modela (*Drucker-Prager*-ov kriterijum loma) za zrnasti materijal, uz diskretizaciju materijala zapreminskim konačnim elementima tipa "SOLID-45". Kao ilustracija primene MKE, na sl. 61 prikazani su dijagrami normalnih pritisaka na zidove i levak silosa sa centričnim levkom pri pražnjenju, prema ref. [100], za elasto-plastični model zrnastog materijala sa variranim vrednostima ugla unutrašnjeg trenja, kao i za elastični model zrnastog materijala pri primeni programa ANSYS, i prema normi EC1-4. Potrebne proračunske veličine, geometrija silosa i opis modela dati su u ref. [100], gde su prikazani rezultati za slučajeve centričnog i ekscentričnog pražnjenja.

MKE se koristi pri određivanju stanja materijala pri punjenju, mirovanju i pražnjenju, kod silosa i levaka različite geometrije i karakteristika, ali je vrlo mali broj radova posvećen specifičnim problemima kod projektovanja silosa. Kao primer primene MKE kod analize specifičnih problema silosa, navodi se rad *Keiter*-a i *Rombach*-a (2001) [142], gde je analizirana raspodela pritisaka kod prelaza ćelije u levak pri pražnjenju materijala, pri primeni različitih tipova KE, kao i pri variranju dimenzija (odnosno broja) konačnih elemenata. Ispitivan je uticaj zaobljenja prelomnog ugla kod veze ćelije i levka. Manji vršni pritisci, prema ovim analizama, se određuju kada je zaobljenje izvedeno postepeno, odnosno pri povećanju ukupne visine zone po kojoj se izvodi zaobljenje. Primena MKE, u ovom slučaju se odnosila na analizu 2D silosa u okviru ravnog stanja napona.

U disertaciji *Wu*-a (1990) [339] analizirana je primena MKE kod analize stanja napona u silosima, kao i prva primena metode graničnih elemenata – MGE kod silosa, za koju je ocenjeno da daje kvalitetne rezultate za stanje punjenja i početno pražnjenje materijala.

U disertaciji *Böhrnsen*-a (2002) [26] primenjen je hipoplastični model zrnastog materijala prema *von Wolffersdorff*-u (1996), pri inkrementalnoj analizi stanja kod punjenja i pražnjenja 2D silosa. U analizama je korišćena MKE sa primenom programa SILO, kod kojeg je implementiran navedeni model zrnastog materijala. Rezultati sprovedenih analiza su upoređeni sa ispitivanjima na modelima, što je prikazano i u ref. [27] i [214].

U disertaciji *Wagner*-a (2002) [324] upoređeni su rezultati pri merenju pritisaka na modelu ćelije sa proračunskim rezultatima analize pri primeni MKE za dinamičku pobudu silosa pri simuliranju seizmičkih pokreta tla. Upotrebljeni su zapreminski elementi uz primenu hipoplastičnog modela ponašanja zrnastog materijala. Veza između zida silosa i zrnastog materijala je modelovana zapreminskim kontaktnim elementima.

U disertaciji *Gallego*-a (2006) [92] detaljno je analizirana primena programa ANSYS kod analize stanja napona u zrnastom materijalu pri punjenju i pražnjenju, pri čemu su kod cilindrične ćelije razmatrani slučajevi centričnog i ekscentričnog punjenja materijala, a kod cilindričnih silosa sa centričnim i ekscentričnim konusnim levkom je ispitivan uticaj ekscentriciteta pri pražnjenju materijala. U radu je data komparativna analiza pri primeni programa ANSYS² i ABAQUS³, kod kojih je uveden isti elasto-plastični model zrnastog materijala, ali su korišćeni različiti kontaktni modeli interakcije zida i nasutog materijala. Kada se koristi linearno elastični model zrnastog materijala, kod primene ovih programa dobijaju se slični dijagrami horizontalnih pritiska na zid ćelije, prema prikazanom primeru analizirane cilindrične ćelije u [92]. Kod istog primera, ali pri uvođenju istog elasto-plastičnog modela za zrnasti materijal, pritisci na zid ćelije su veći i oko 70 % pri primeni

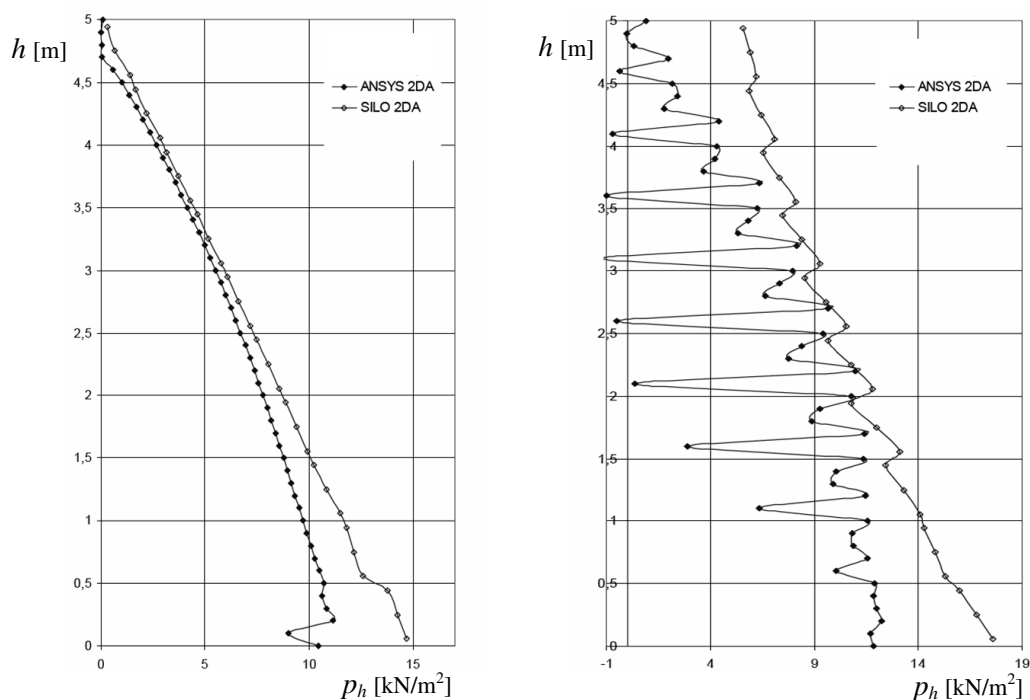
¹ ANSYS (1999): User's Manuals for Revision 5.5. I, II, III, IV and V. Swanson Analysis Systems, Inc., Houston, USA.

² ANSYS (2004): ANSYS User's Manual. Ver. 8.1. Swanson Analysis Systems, Inc., Houston, USA.

³ ABAQUS (1993): User's Manual, Ver. 5.2. Hibbit, Karlsson and Sorensen Inc., USA.

programa ABAQUS, u odnosu na analizu prema programu ANSYS, što je ocenjeno kao posledica primene različitih kontaktnih modela kod ovih programa. Kod kontaktnog modela u programu ANSYS, koristi se *faktor krutosti kontakta* (faktor *FKN*), za koji postoji predefinisana programska vrednost 1. Na osnovu analiza u radu [92], preporučeno je da se faktor *FKN* uzima sa vrednošću koja je veća od 5. Za simulaciju postepenog punjenja materijala kod programa ANSYS se koristi opcija deaktivacije i aktivacije konačnih elemenata. Priključenje sloja materijala se uvodi aktiviranjem zapreminskih konačnih elemenata iz tog sloja. U radu [92], postepeno punjenje je analizirano sa ukupnim uvođenjem 5, 10 ili 15 slojeva materijala, a za praktičnu primenu je preporučena analiza sa više od 10 slojeva.

Na sl. 62 prikazani su, prema [92], dijagrami normalnih pritisaka na zid cilindrične ćelije, pri primeni programa ANSYS i SILO, za slučajeve analize: (a) jednovremeno punjenje sa inicijalnim uvođenjem svog materijala po ukupnoj visini punjenja h , i (b) postepeno punjenje sa 10 slojeva materijala. Pritisci na zid ćelije u njenoj donjoj zoni, pri analizi jednovremenog punjenja prema sl. 62 (a), su veći za oko 30 %, pri primeni programa SILO u odnosu na ANSYS. Dijagrami prikazani na sl. 62 (b), su u osnovi neregularni. Kod primene programa ANSYS na dijagramima su prisutne indukovane "oscilatorne" promene pritisaka kod samih slojeva, što se ne može posmatrati kao neistraženi fenomen kod dijagrama pritisaka, već kao numerički problem koji se smanjuje pri većem broju analiziranih slojeva. Kod primene programa SILO, kao što je već napomenuto kod opisa ref. [251], kod analize cilindričnog silosa, javlja se problem pojave nerealno velikih proračunskih pritisaka u gornjoj zoni materijala. Prema sl. 62 (b), na vrhu nasutog materijala pritisak iznosi oko 5 kPa, umesto očekivanih 0 kPa. Može se napomenuti da bi regularnija situacija kod dijagrama pritisaka pri primeni programa ANSYS, bila u slučaju uvođenja svakog reda zapreminskih KE kao posebnog nasipnog sloja materijala.



(a) analiza jednovremenog punjenja (b) analiza postepenog punjenje sa 10 slojeva

Sl. 62 Pritisci pri punjenju na zidu cilindrične ćelije pri primeni programa ANSYS i SILO, adapt. prema [92].

U prvom slučaju analize sa jednovremenim punjenjem materijala po ukupnoj visini silosa, situacija kod dijagrama pritisaka je regularna. Može se konstatovati da je kod ovih programa ovo bolji način analize punjenja materijala kod analize cilindričnih ćelija, a s obzirom na rezultate i jedini ispravan, sve dok se ne izvrše potrebne softverske korekcije kako bi se otklonili nedostaci uočeni pri analizi postepenog punjenja materijala. U ovoj situaciji, deo analiza i zaključaka koji se odnose na dijagrame pri postepenom punjenju, prikazanih u [92], treba uzeti sa velikom rezervom.

Interesantno je da se u knjizi *Tejchman*-a (2013) [303], koja se detaljno bavi primenom MKE kod analize silosnog problema, od računarskih programa navodi samo ABAQUS¹, a da kod analize postepenog punjenja materijala nije primećen ni jedan od prethodno navedenih problema.

U radu *Madrona-eve* (2008) [177] analizirani su uticaji pri centričnom i ekscentričnom pražnjenju materijala kod vitkih silosa. Detaljno je elaborirana primena programa ANSYS kod analize silosa pri primeni MKE, na primerima silosa sa ravnim dnom, silosa sa centričnim konusnim levkom i silosa sa ekscentričnim konusnim levkom, pri punjenju i pražnjenju za dve vrste zrnastog materijala, konkretno za pšenicu i soju. Ispitan je uticaj faktora *FKN*, koji se koristi pri definisanju kontaktnog modela u programu ANSYS, pri čemu su analizirani slučajevi sa elastičnim modelom i elasto-plastičnim modelom za zrnasti materijal.

U disertaciji *Pernich-eve* (2010) [226] detaljno je analizirana primena MKE kod silosnog problema na brojnim primerima uz poređenje sa eksperimentalnim rezultatima. Primenjen je u osnovi *Drucker-Prager*-ov model elasto-plastičnog ponašanja materijala kod analize cilindričnih silosa.

U disertaciji *Ai*-a (2010) [8] analizirane su primene MKE i MDE kod određivanja stanja napona u nasipnoj kupi materijala, kao i kod analize stanja napona u silosima. Kod silosnog problema dodatno je razmatran uticaj anizotropije materijala. Detaljniji pregled metoda KE i DE, kao i njihova primene pri analizi pražnjenja materijala iz silosa su prikazani u radu *Coetzee*-a, *Basson*-a i *Vermeest*-a (2006) [51].

Deformacije granularnog materijala se mogu numerički simulirati sa primenom metode diskretnih elemenata – MDE (*Discrete Element Method* - DEM). Ova metoda bazira na određivanju pomeranja svih pojedinačnih zrna materijala, kao i njihovih međusobnih interakcija i interakcija sa graničnom okolinom zrnastog materijala.

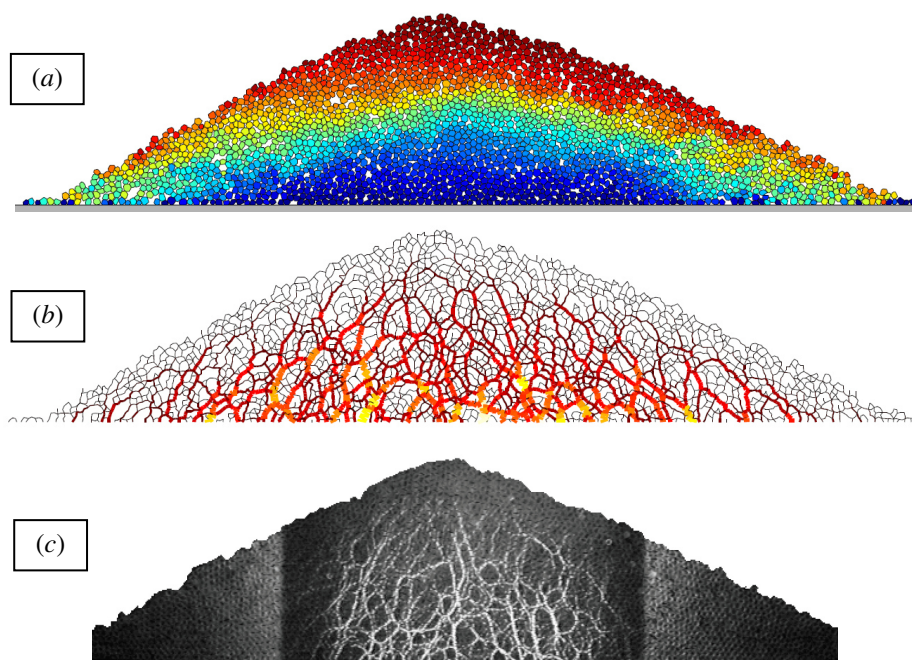
Sa MDE obuhvataju se jednačine kretanja zrna materijala sa trajektorijom, obrtanjem i orijentacijom svakog zrna materijala, uz analizu svakog međusobnog klizanja i sudaranja između zrna materijala, kao i između zrna i granične konstrukcije u kojoj se nalazi zrnasti materijal. Uobičajena varijanta MDE, koja se koristi kod silosnih problema, je tzv. metoda mekih zrna (*soft particle method*), gde se kontakt pri koliziji zrna materijala, pri kojem realno dolazi do deformisanja pojedinačnih zrna i obrazovanja dodirne površine između zrna, rešava indirektno preko veličine fiktivnog preklopa nedeformisanih zrna materijala.

Primena MDE, kod analize silosnog problema prvi put su uveli *Cundall* i *Strack* (1979). Konkretnu formalizaciju MDE kod analize stanja napona u silosima su prikazali *Rong*, *Negi* i *Jofriet* (1995) u ref. [256] i [257]. Proširenje primene i dalje poboljšanje nekih proračunskih opcija MDE je prikazano u disertacijama *Müller*-a (1996) [194], *Ferrez*-a (2001) [81] i *Schinner*-a (2001) [273].

¹ ABAQUS (2004): User's Manual, Ver. 6.4. Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., USA.

Iako je u prvo vreme, MDE bila ograničena na analize 2D ravanskog problema, kasnije je razvijena i odgovarajuća 3D analiza (Cleary i Sawley (2002) [49]). Kod primene MDE pri analizi silosnog problema, postoje veliki tehnički zahtevi po pitanju brzine i memorije računara, usled velikog broja proračuna velikog sistema jednačina, pri čemu se vreme punjenja ili pražnjenja silosa deli na intervale od oko 0.001 s. Pored toga, poseban problem predstavlja izbor vrednosti parametara proračunskog modela materijala, koje se uvode pri analizama, a koje su još uvek nedovoljno poznate i predmet raznih teorijskih analiza. Po pitanju tehničkih resursa, stalni napredak računarske tehnologije je omogućio sve veću primenu MDE kod analize silosnog problema, kao i kod drugih industrijskih problema vezanih za manipulaciju granularnim materijalima (Masson i Martinez (2000) [184] i (2002) [185]). Međutim, primena MDE je i dalje ograničena u analizama na relativno manji broj zrna materijala, tako da se interakcija do 10000 zrna materijala, što je u osnovi vrlo mali broj u odnosu na broj zrna u realnim silosima, sprovodi putem super-računara, kao što je Cray T3D uz primenu paralelnog programiranja, prema [81].

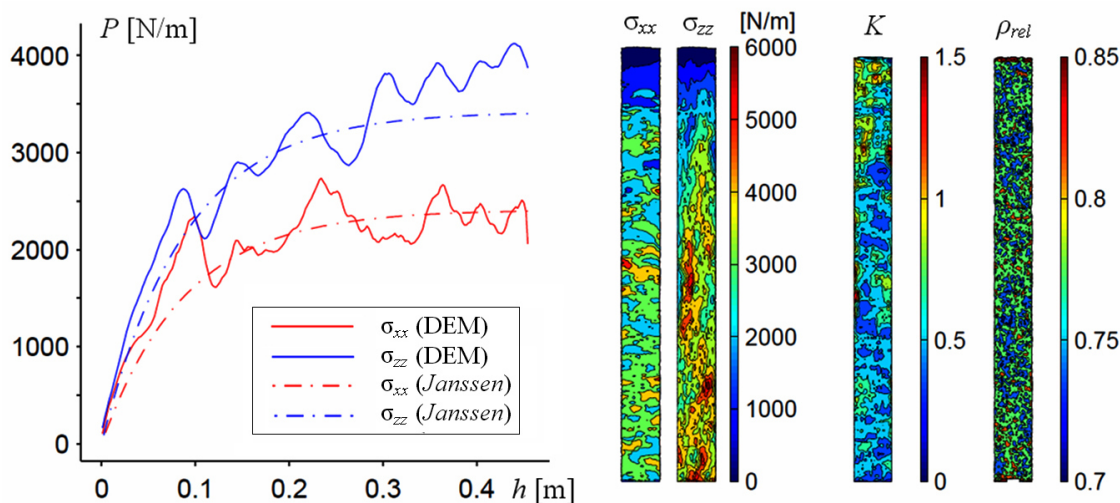
Kao ilustracija primene MDE prikazan je primer formiranog 2D nasipa pri centričnom nasipanju zrna materijala, sa prikazom "lanaca sila" između zrna u nasipu (debljina linija u srazmeri sa veličinom kontaktne sile između zrna) respektivno na sl. 63 (a) i (b), prema Schinner-u (2001) [273]. Na sl. 63 (c), prikazan je foto-snimak lanaca sila kod sličnog 2D nasipa od providnih zrna materijala, pri primeni naponsko-optičke metode, prema Howell-u, Miller-u, O'Hern-u i Behringer-u (1997) (Vanel (1999) [314]).



Sl. 63 Primena MDE na primeru 2D nasipa: (a) slaganje zrna u nasipu, (b) vizuelizacija lanaca kontaktnih sila, i (c) foto-snimak lanaca sila pri primeni naponsko-optičke metode; apapt. prema [273] i [314].

Rezultati analize za jedan primer 2D silosa su prikazani na sl. 64, prema Schinner-u (2001) [273], gde su dati dijagrami horizontalnih pritisaka σ_{xx} i vertikalnih pritisaka σ_{zz} prema Janssen-ovoj teoriji i pri primeni MDE (DEM) (primer sa 10000 kružnih zrna – diskova kod 2D analize). Na vertikalnim presecima, prikazane su izo-linije pritisaka σ_{xx} i σ_{zz} , kao i koeficijenta bočnog pritiska K i zbijenosti materijala ρ_{rel} . Može se primetiti da

pri primeni MDE postoji evidentan uticaj lokalne heterogenosti materijala. Konkretni podaci za ovaj analizirani primer su prikazani u radu Schinner-a (2001) [273].



Sl. 64 Primer analize silosnog problema sa MDE, prema [273].

2.9.2.1 Upoređenje MKE i MDE kod silosnog problema

Martinez i Masson (1998) su u okviru § 34 u ref. [31], uporedili rezultate pri primeni MKE i MDE, na primeru određivanja napona u silosu sa ravanskim protokom materijala (2D analiza - ravno stanje napona). Stanje napona u 2D silosu je analizirano sa obe metode, a parametri za zrnasti materijal pri primeni MDE, su bili sledeći:

- srednji prečnik zrna: 10 mm;
- krutosti linearno elastičnih opruga između zrna (respektivno za određivanje normalne i smičuće sile kod kontakta dva zrna materijala): $k_N = 1 \text{ MN/m}$; $k_T = 0.1 \text{ MN/m}$; i
- ugao trenja zrna o zrno materijala: $\psi = 23^\circ$.

Parametri materijala koji se koriste kod MKE, određeni su na osnovu primene MDE (program PFC2D) uz prethodno date vrednosti parametara mikro nivoa. Sa MDE je simulirano ispitivanje uzorka materijala u opitu biaksialne kompresije pri opterećenju i rasterećenju materijala (numerički eksperiment je sproveden na "uzorku" od 400 zrna materijala u obliku diskova na nivou 2D analize). Na osnovu sprovedenih simulacija sa mikro nivoa pri primeni MDE, primenom postupka numeričke homogenizacije, određeni su sledeći parametri materijala za primenu kod MKE (makro nivo analize):

- parametri elastičnosti materijala: $E = 0.125 \text{ MPa}$; $\nu = 0.37$; i
- ugao unutrašnjeg trenja materijala: $\phi_i = 11^\circ$.

Simulacione analize i formalni postupak kod homogenizacije rezultata, pri prevođenju parametara mikro analize na relevantne parametre makro analize je opisan i formulisan u ref. [31] i [184]. Proračunavanje unutrašnjih napona u materijalu i pritisaka na zidove nakon potpunog punjenja silosa, sprovedeno je sa programom PFC2D (MDE analiza) i sa programom Cesar (MKE analiza).

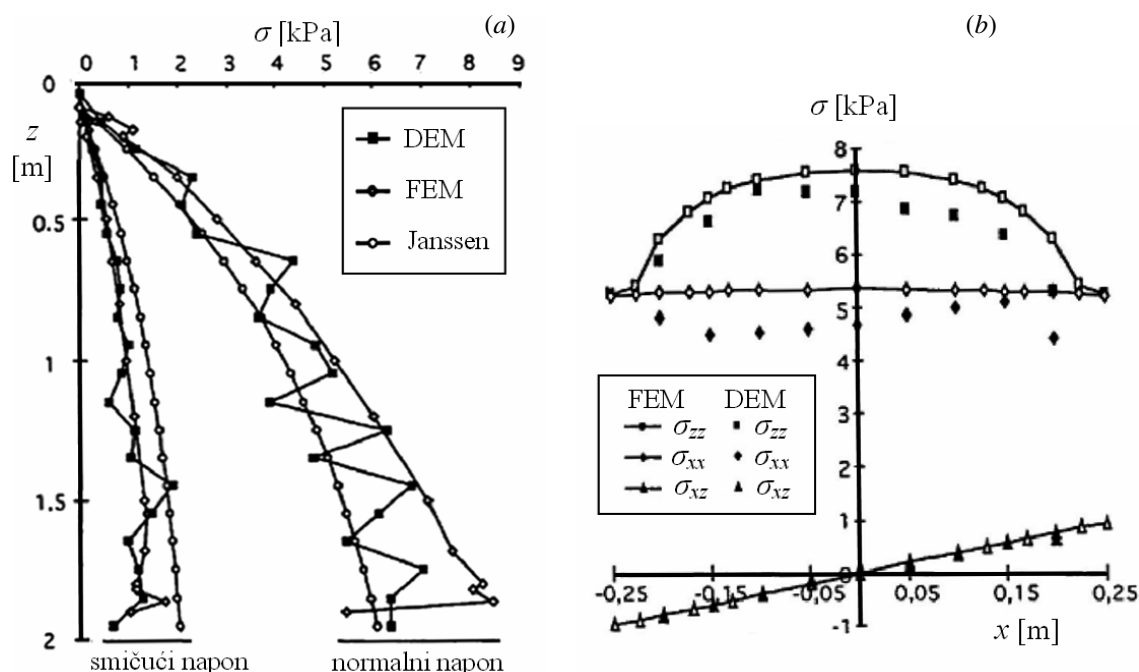
Neki od rezultata komparativne analize su prikazani na sl. 65 (a), pri čemu se može primetiti da je "izlomljenost" dijagrama veća pri primeni MDE (DEM), u odnosu na primenu MKE (FEM). "Testerasti" dijagrami su karakteristični pri primeni MDE, iako je

sprovedena proračunski vrlo zahtevna analiza sa 10000 zrna nasutih u 2D silos. Po tom pitanju realnija situacija kod oblika dijagrama bi se dobila pri analizi većeg broja manjih zrna materijala. Na osnovu dijagrama prikazanih na sl. 65, obe metode daju rezultate bliskih vrednosti.

Prikaz na sl. 65, je ovde dat iz rada *Martinez-a* i *Masson-a* (1998) (§ 34 u [31]), gde je preuzet iz disertacije *Masson-a* (1996)¹.

U radu *Masson-a* i *Martinez-a* (2000) [184] prikazan je praktično isti primer 2D silosa sa ravnim dnom, ali uz više podataka o parametrima modela kod MDE i MKE analize². Rezultati su slični sa prethodnim i prikazuju još bolje slaganje kod dijagrama pritisaka i smičućih napona, kao i za *Janssen-ovu* teoriju sa parametrima kalibrisanim prema MDE (npr. koeficijent bočnog pritiska $K = 0.9$).

U radu *Masson-a* i *Martinez-a* (2002) [185], komparativna analiza je proširena na primer cilindričnog silosa sa levkom, pri čemu je isto ustanovljeno vrlo dobro slaganje uporednih rezultata.



Sl. 65 Upoređenje stanja napona na proračunskom primeru 2D silosa prema MDE, MKE i Janssen-ovoj teoriji, prema Masson-u (1996).

¹ Rezultati analiza su ovde prikazane prema [31], a iste su preuzete iz disertacije *Masson-a*:

Masson S. (1996): *Simulations numériques discrètes de l'écoulement de matériaux granulaires dans les silos. Utilisation de la méthode des éléments distincts. Elaboration de modèles de grains sur réseau*. These de doctorat, INSA Rennes, France.

U razmatranoj analizi stanja pritiska u 2D silosu, MKE analiza je urađena sa primenom programa *Cesar*, koji je razvijen u *Ecole Centrale de Lyon* (prema [31]), dok je kod MDE analize korišćen program PFC2D: PFC2D (1995): *Particle Flow Code in 2 Dimensions*. Itasca, Minneapolis.

² Kod komparativne analize u ref. *Masson-a* i *Martinez-a* (2000) [184], korišćeni su programi PFC2D pri MDE analizi, i program PLAXIS sa elasto-plastičnim modelom za materijal *Mohr-Coulomb*-ovog tipa pri MKE analizi, prema sledećim izvorima:

PFC2D (1996): Version 1.1, *User Manual*, ITASCA Consulting Group, Minneapolis, MN, USA.

Vermeer P.A. (1993): *Plaxis, Finite Element Code for Soil and Rock Plasticity*, Balkema, Rotterdam.

Na sl. 65 (b), prikazani su uporedni rezultati pri primeni MKE i MDE kod dijagrama napona u horizontalnom preseku silosa na nivou z , koji odgovara nivou oko polovine visine silosa. Vertikalni pritisci $\sigma_{zz}(x)$ su promenljivi po koordinati x , i simetrični po srednjoj vertikalnoj osi silosa prema MKE analizi, i opadaju po vrednostima idući ka zidovima silosa. Slično pokazuju i vrednosti određene prema MDE, uz relativna odstupanja i blagu nesimetriju u odnosu na srednju vertikalnu osu, usled nejednakog rasporeda zrna materijala u prostoru silosa, što je posledica slobodnog slaganja zrna pri punjenju silosa sa diskretnim elementima. Horizontalni pritisci u preseku $\sigma_{xx}(x)$ su neznatno promenljivi pri variranju koordinate x , tako da su skoro konstantne vrednosti i simetrični su po srednjoj vertikalnoj osi silosa, prema MKE analizi. Kod ovih pritisaka kod primene MDE javljaju se relativno veća odstupanja, u odnosu na odstupanja kod vertikalnih pritisaka, zbog nehomogenosti materijala usled slobodnog rasporeda diskretnih elemenata u prostoru silosa. Kod dijagrama smičućih napona $\sigma_{xz}(x)$, postoji vrlo dobro slaganje rezultata prema MKE i MDE analizama, i ovaj dijagram je linearno promenljiv po koordinati x , u formi trougaonog zakona. Smičući naponi u sredini silosa za $x = 0$ su $\sigma_{xz}(0) = 0$, što sledi iz simetrije stanja napona kod simetričnog silosa po srednjoj vertikalnoj osi, kako je i određeno kod primene MKE i u osnovi kod MDE analiza.

U radu *Rotter-a, Holst-a, Ooi-a i Sanad-a* (1998) [263] prikazana je komparativna analiza rezultata dobijenih primenom MKE i MDE na zadatim slučajevima silosnih problema pri punjenju i pražnjenju silosa, koji su bili postavljeni u okviru internacionalne studije pod evropskim CA-Silo programom istraživanja. Za zadate podatke kod silosa sa ravnim dnom trebalo je odrediti stanje pritisaka u materijalu pri procesu punjenja silosa, a kod silosa sa ravnim dnom i silosa sa levkom trebalo je odrediti stanje pritisaka kao i karakteristike toka pražnjenja, na osnovu dve numeričke metode. Na ove zadatke su svoje priloge u obliku analiza pri primeni MKE dali ukupno 11, a kod primene MDE ukupno 17 istraživačkih grupa i samostalnih istraživača. U ref. [263] data je šira analiza dobijenih rezultata pri primeni ovih metoda kod zadatih silosnih problema. O rezultatima uporedne analize metoda KE i DE u okviru CA-Silo programa, više podataka je dato u knjizi *Brown-a i Nielsen-a* (1998) [31], u okviru pojedinačnih poglavlja od više autora. Pregled računarskih programa, koji su korišćeni kod ovih analiza, prikazao je *Rombach* (1998) (§ 25 u [31]), gde je navedeno da su 16 istraživačkih grupa i samostalnih istraživača koristili ukupno 14 različitih računarskih programa pri analizi zadatih silosnih problema (sa primenom MKE ili MDE). Od ovih programa, ABAQUS je korišćen kod tri istraživanja, program SILO kod dva, a ostali programi samo jednom od jedne istraživačke grupe ili istraživača.

U pogledu zaključaka iznetih u ref. [263], po pitanju primene MKE i MDE i njihove komparativne analize prema rezultatima kod navedenih primera silosnih problema, mogu se navesti sledeće konstatacije:

- Pri primeni MKE i MDE određuju se relativno veće razlike vrednosti pritisaka na zidu silosa.
- Značajan problem predstavlja prevođenje rezultata analiza određenih pri primeni MDE, koji su diskretnog karaktera, u homogeni oblik koji odgovara rezultatima analiza u MKE (problem homogenizacionog prevođenja). Ovaj problem je još izraženiji, kako se kod MDE obuhvata ipak nedovoljno veliki broj zrna materijala, što se u analizama kompenzuje sa uvođenjem relativno većih diskretnih elemenata u odnosu na "realno" manja zrna materijala. U tom smislu, ujednačenost pritiska u

materijalu bi bila bolja pri uvođenju većeg broja po dimenzijama manjih diskretnih elemenata u analizi.

- MDE daje najbolje kvantitativno predviđanje protoka materijala u silosu, kao i vrlo prihvatljiva kvalitativna predviđanja za neke dinamičke fenomene koji se javljaju u silosima.
- MKE daje najbolje kvantitativno određivanje silosnih pritisaka.
- Problemi u primeni MKE se javljaju u sledećim slučajevima: u analizi postepenog punjenja silosa, kada se primenjuje relativno jednostavni model materijala, u analizi procesa pražnjenja, u analizi graničnih uslova, i u analizi stanja napona kod prelaza ćelije u levak.

2.9.2.2 Sagledavanje Janssen-ove teorije i rezultata MKE i MDE

Konstatacije o obliku dijagrama napona date kod sl. 65 (b), koji su dobijeni na osnovu primene MKE i MDE, su vrlo bitne, kako se iste mogu uzeti za pretpostavke pri formulisanju analitičkih postupaka proračuna stanja napona u silosima. Kod *Janssen*-ove teorije, uzima se da su pritisci konstantni u preseku na nivou z , što je kod pritisaka σ_{zz} eksplicitno uvedena pretpostavka, a kod σ_{xx} se može uzeti kao implicitno uvedena pretpostavka u *Janssen*-ovoj analizi. U *Janssen*-ovoj analizi smičući napon σ_{xz} se razmatra samo kao trenje materijala o zid ćelije $(\sigma_{xz})_w$, tako da nije uvedena posebna pretpostavka o obliku smičućih napona u horizontalnom preseku. U ovoj analizi se uvodi da je $\sigma_{zz} = \text{const.}$ i $\sigma_{xx} = \text{const.}$, odakle sledi da je odnos $K = \sigma_{xx} / \sigma_{zz} = \text{const.}$ Kako se kod *Janssen*-ove analize (1D silosni problem), koja se zasniva samo na ravnoteži vertikalnih sila na diferencijalnom sloju materijala, pri formulisanju postupka, uopšte ne uvodi i ne definiše dijagram smičućih napona, od interesa je odrediti ovaj dijagram koji upravo odgovara *Janssen*-ovim pretpostavkama.

Iz uslova $\sigma_{zz} = \text{const.}$ i $\sigma_{xx} = \text{const.}$ sledi da je $\sigma_{xz} = 0$ za $0 \leq x < b$, a iz uslova da je mobilisano trenje materijala o zid ćelije sledi da je $\sigma_{xz} = (\sigma_{xz})_w = \mu_w \cdot \sigma_{xx}$ za $x = b$. Širina silosa (rastojanje između vertikalnih zidova) je $B = 2b$. Ovo daje nulti dijagram smicanja po x u materijalu sa diskontinualnom promenom smicanja samo pri zidovima ćelije. Ovaj diskontinualni oblik dijagrama smicanja je izveden na osnovu uvedenih *Janssen*-ovih pretpostavki, ali nije u saglasnosti sa kontinualnim oblikom promena smičućih napona u uskladištenom materijalu, koji odgovara ovom problemu prema mehanici neprekidne sredine. Međutim, oblik dijagrama smicanja nije relevantan u formalizaciji *Janssen*-ove aproksimativne analize. Dolazi do prividnog paradoksa, da *Janssen*-ovo rešenje pritisaka kod silosnog problema, tačno odgovara slučaju kada se anulira trenje o zid ćelije $\mu_w = 0$, tj. u slučaju anuliranja smicanja o zid silosa $(\sigma_{xz})_w = 0$, kako bi se otklonio diskontinuitet kod napona smicanja (dijagram smicanja je u ovom slučaju 0), ali to više nije u pitanju silosni problem pri kojem postoji trenje materijala o zid silosa.

S druge strane, od interesa je razmatranje obrnutog problema, koji odgovara *Janssen*-ovom pristupu analizi stanja pritisaka, u kojem se za zadati oblik dijagrama napona smicanja σ_{xz} , formalno analiziraju pritisci σ_{xx} i σ_{zz} , kao i njihov odnos K . Kod ovog problema može se pretpostaviti da je ja dijagram napona smicanja linearnan, kao na sl. 65 (b), koji sledi zakon trougla $\sigma_{xz} = (\sigma_{xz})_w \cdot x/b = \mu_w \cdot (\sigma_{xx})_w \cdot x/b \neq \text{const.}$, gde je $(\sigma_{xz})_w$ napon smicanja do zida silosa, i $(\sigma_{xx})_w$ horizontalni pritisak na zid silosa. Iz uslova ravnoteže horizontalnih sila kod diferencijalnog elementa sledi da su horizontalni pritisci $\sigma_{xx} \neq \text{const.}$, a odnos pritisaka $K = \sigma_{xx} / \sigma_{zz}$, može biti ili $K \neq \text{const.}$ ili $K = \text{const.}$ Za ova dva slučaja formalnog oblika odnosa pritiska K i za $\sigma_{xx} \neq \text{const.}$ određuje se:

1. U slučaju da je $K \neq \text{const.}$ i $\sigma_{xx} \neq \text{const.}$, vertikalni pritisci mogu biti u formalnom obliku ili $\sigma_{zz} = \sigma_{xx}/K = \text{const.}$ ili $\sigma_{zz} = \sigma_{xx}/K \neq \text{const.}$, odakle dalje sledi:

- 1.1. Ako je $\sigma_{zz} = \sigma_{xx}/K = \text{const.}$, to znači da su promene napona σ_{xx} i koeficijenta K kolinearne. U ovom slučaju važe sledeće jednakosti:

$$\frac{\sigma_{xx}(x)}{K(x)} = \frac{(\sigma_{xx})_0}{K_0} = \frac{(\sigma_{xx})_w}{K_w} = \text{const.} \quad (2.101)$$

- 1.2. Ako je $\sigma_{zz} = \sigma_{xx}/K \neq \text{const.}$, to znači da promene napona σ_{xx} i koeficijenta K nisu kolinearne.

2. U slučaju da je $K = \text{const.}$ može biti samo da je $\sigma_{zz} = \sigma_{xx}/K \neq \text{const.}$

Prethodna formalna analiza se može prikazati u obliku razgranatog preglednog izraza:

$$\sigma_{zz} \neq \text{const.} \Rightarrow \sigma_{xx} \neq \text{const.} \Rightarrow \begin{cases} K \neq \text{const.} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{zz} = \text{const.} \Leftrightarrow \frac{\sigma_{xx}(x)}{K(x)} = \text{const.} \\ \sigma_{zz} \neq \text{const.} \Leftrightarrow \frac{\sigma_{xx}(x)}{K(x)} \neq \text{const.} \end{cases} \\ K = \text{const.} \Rightarrow \sigma_{zz} \neq \text{const.} \end{cases} \quad (2.102)$$

Kod ovog izraza jedino kod gornje grane se javlja slučaj da je $\sigma_{zz} = \sigma_{xx}/K = \text{const.}$, a to odgovara kolinearnosti dijagrama napona σ_{xx} i odnosa K . Pretpostavka da je $\sigma_{zz} = \text{const.}$ je polazna pretpostavka kod *Janssen*-ove analize, tako da je ovaj slučaj formalne analize u osnovi konzistentan sa početnom formalizacijom *Janssen*-ovog postupka. Kod navedene kolinearnosti važe jednakosti (2.101). *Janssen*-ova formulacija problema se dobija kada se kod gornje grane izraza, u reverznom postupku, uvede aproksimacija da je ili $K(x) = \text{const.}$ (direktno sledi da je i $\sigma_{xx}(x) = \text{const.}$), ili da je $\sigma_{xx}(x) = \text{const.}$ (direktno sledi da je i $K(x) = \text{const.}$). Međutim, kako kod izraza (2.101), K_0 i K_w nisu jednaki, pri *Janssen*-ovom postupku se ovde kroz aproksimaciju problema uvodi greška, na taj način što se mora izabrati aproksimativna vrednost za koeficijent K . U osnovi vrednost koeficijenta K se uzima da je ili K_0 ili K_w ili neka međuvrednost između koeficijenata K_0 i K_w . Prema *Könen*-ovom predlogu K odgovara *Rankine*-ovom koeficijentu aktivnog pritiska tla K_a (za stanje punjenja materijala) prema izrazu (2.94). Postoje razni predlozi, npr. da ovaj koeficijent odgovara *Jáky*-evom koeficijentu pri mirovanju tla K_0 prema izrazu (2.43), ili *Kraynine*-ovom ili *Hartmann*-ov koeficijentu K_w prema izrazu (2.69), ili koeficijentu K_w u obliku izraza (2.70), (2.71) i (2.72), koji se razlikuju samo po formalnom matematičkom obliku izraza prema *Vandepitte*-u, *Nedderman*-u i *Ohde*-u, respektivno. Koeficijent K u obliku izraza (2.70), uveden je u AS 3774 (1996) [14] (tabela 5). Ovaj oblik za K je prvi odredio *Ohde*-e (1951) [210], međutim, u stručnoj literaturi iz oblasti analize silosnog problema, navodi se da je prema *Walker*-u (1966) [325].

Bez obzira koji je oblik uveden za koeficijent K , mora se konstatovati da se unosi greška kod proračuna pritiska u silosu, zbog uvedene aproksimacije da je K konstantne vrednosti. U ovom slučaju aproksimacije, za $\sigma_{xx}(x) = \text{const.}$ izraz (2.101) se može posmatrati da je razdvojen na dva dela, a pri tome K ne može jednovremeno biti i K_0 i K_w . Pri kolinearnosti članova kod izraza (2.101), isti se može prikazati u sledećem obliku:

$$\frac{\sigma_{xx}(x)}{K(x)} = \frac{[(\sigma_{xx})_0 + (\sigma_{xx})_w]/2}{(K_0 + K_w)/2} = \text{const.} \quad (2.103)$$

Za $\sigma_{xx}(x) = \text{const.}$, kao i pri uvođenju postavki pri izradi EC1-4, prikazanih od strane *Nielsen*-a, *Eibl*-a i *Rotter*-a (1992) [206], pri čemu je pretpostavljeno da je $K_0 = K_{\text{Jáky}}$

prema (2.43), i $K_w = K_{Krynine}$ prema (2.69), uz konstataciju da je $K_{Krynine} \approx 1.2 \cdot K_{Jáky}$ za uobičajene vrednosti ugla ϕ_i ; na osnovu izraza (2.103), u koji se uvode ove postavke, određuje se:

$$K(x) = K = \frac{K_0 + K_w}{2} = \frac{K_{Jáky} + K_{Krynine}}{2} = 1.1 \cdot K_{Jáky} = 1.1 \cdot (1 - \sin \phi_i) = \text{const.} \quad (2.104)$$

što odgovara izrazu za koeficijent bočnog pritiska K u EN 1991-4:2006 [38].

O izboru koeficijenta K , koji se uvodi u *Janssen*-ovu teoriju, među prvima je diskutovao *Bagster* (1970/71) [18], gde je data preporuka da se koeficijent K uzima u obliku koji odgovara izrazu (2.70). U okviru ref. [18], za koeficijent K nije data matematička formulacija u obliku (2.70), već je K određivano grafički kao odnos horizontalnog i vertikalnog napona σ_h/σ_v do zida ćelije sa slike koja ovde odgovara sl. 40. U osnovi, *Bagster* je preporučio da se K , kod *Janssen*-ove teorije, uzima kao vrednost do zida ćelije K_w u formi izraza (2.70).

Može se konstatovati da je najveća razlika između *Janssen*-ove teorije kod silosnog problema u odnosu na rezultate analiza prema MKE i MDE, prva i osnovna *Janssen*-ova pretpostavka prema kojoj se vertikalni pritisci u preseku uzimaju kao konstantni u preseku, što se kod primene navedenih metoda ne potvrđuje. Prema analizama konstantni pritisci mnogo bolje odgovaraju kod dijagrama horizontalnih pritisaka u horizontalnom preseku materijala. Na ovaj način, koeficijent K kod *Janssen*-ove analize se definiše kao konstantna vrednost na celom prostoru silosnog materijala, što je posledica uvedene aproksimacije da je $\sigma_{zz}(x) = \text{const.}$

Kako su vertikalni pritisci promenljivi u horizontalnom preseku silosa, pretpostavka da je $\sigma_{zz}(x) = \text{const.}$, praktično odgovara uvođenju prosečnog vertikalnog pritiska u *Janssen*-ovoj analizi. Koeficijent K u principu treba da odgovara mestu na kome vertikalni napon kod promenljivog dijagrama napona odgovara prosečnom vertikalnom naponu, a ne vrednosti do zida ili sredini silosa. U tom pravcu, uvođenje prosečne vrednosti za K prema izrazu (2.104) deluje promišljeno, međutim, uvođenje koeficijenata $K_{Jáky}$ i $K_{Krynine}$, daje dosta visoke vrednosti koeficijenta K . Uopšte je poznato, da mnogi propisi teže maksimiziranju vrednosti koeficijenta K , kako bi se dobio puniji dijagram funkcije raspodele pritisaka po visini silosa, a sa tim i veći horizontalni pritisci u gornjim zonama silosa, u odnosu na slučaj sa relativno manjom vrednošću za K . Ipak, povećanje koeficijenta K , u osnovi vodi ka manjim vrednostima proračunskih vertikalnih pritisaka, što može biti problem jer se podcenjuju vrednosti vertikalnih pritisaka u materijalu kod analize levka ili ravnog dna (ovo se u propisima može kompenzovati sa uvođenjem koeficijenta uvećanja vertikalnih pritisaka).

2.9.3 Podela metoda proračuna opterećenja u silosima

Problem određivanja stanja napona u uskladištenom materijalu u silosnim ćelijama ili bunkerima se može pojednostavljeno predstaviti kao:

- 1D (jednodimenzionalna) analiza stanja napona (analiza 1D silosa)
- 2D (dvodimenzionalna) analiza stanja napona (analiza 2D silosa)
- 3Dr (trodimen. rotac./osno simetrična) analiza stanja napona (analiza 3Dr silosa)
- 3D (trodimenzionalna) analiza stanja napona (analiza 3D silosa)

Pri analizi 1D silosnog problema stanja napona koristi se samo jedan uslov ravnoteže, i to je uslov ravnoteže vertikalnih sila na posmatranom delu silosnog materijala.

Na posmatranoj visini materijala normalni naponi su konstantni i imaju odgovarajuće pojedinačne vrednosti. Normalni naponi zavise samo od koordinate z .

Kod 2D silosnog problema koriste se dva uslova ravnoteže, tj. ravnoteža vertikalnih i horizontalnih sila. Stanje normalnih napona zavisi u principu od dve koordinate - od z i x . Kod rotaciono simetričnog silosa - 3Dr silosa, stanje napona zavisi od z i radijalne koordinate r . Pri ovom tipu analize potrebno je da opterećenje bude rotaciono simetrično, kako bi se iskoristile pogodnosti sistema na svođenje problema na 2D sistem. 3Dr silosni problem je analogan sa 2D silosnim problemom, ali je analiza 3Dr problema ipak nešto složenija.

3D silosni problem je najopštiji slučaj u kojem analiza stanje napona zavisi od koordinata z , y , x , odnosno od z , r , θ , u skladu sa referentnim koordinatnim sistemom.

Ove skraćene oznake za silosne probleme (1D, 2D, 3Dr i 3D) odnose se i na broj zadovoljenih uslova ravnoteže, odnosno na broj uslova ravnoteže koji se simultano rešavaju pri određivanju stanja napona u uskladištenom materijalu. Jedino se kod 3Dr silosa problem u slučaju opšte rotacione simetrije može svesti na analogan 2D problem.

Metode proračuna napona u silosnom materijalu su:

- analitičke metode,
- numeričke metode, i
- empirijske metode.

Analiitičke metode proračuna napona u silosnom materijalu se mogu podeliti prema broju zadovoljenih uslova ravnoteže, s tim da se primena odnosi na 1D, 2D i 3Dr silosni problem. U odnosu na oblik elementa na kojem se primenjuje uslovi ravnoteže, razlikuju se sledeće analitičke metode:

- metoda diferencijalnog sloja,
- metoda konačnog odsečka, i
- metoda isečka diferencijalnog sloja.

Kod *metode diferencijalnog sloja* uspostavlja se uslov ravnoteže vertikalnih sila. Ova metoda se primenjuje kod 1D problema, i predstavlja najjednostavniji oblik analize stanja napona u silosnom materijalu. Ova metoda se može pri uvođenju odgovarajućih pretpostavki, primeniti i kao aproksimativan postupak za analizu 2D silosnog problema. Upravo zbog jednostavnog matematičkog modela koji se primenjuje u ovoj metodi, može se primeniti kod silosnih ćelija sa različitim oblicima u osnovi. Metodu je prvi postavio *Janssen* (1895) [130], da bi posle bila najčešće korišćena metoda kod silosnog problema stanja napona, sa posebnim referencama na radove *Гутъяр-а* (1935)¹, *Walker-а* (1966) [325] i (1967) [326], *Гячев-а* (1968) [352] i (1986) [353], *Walters-а* (1973) [327] i [328], i *Enstad-а* (1975) [75] i (1977) [76].

Kod *metode konačnog odsečka*, odsečak materijala može biti horizontalan kao kod *Reimbert-ovih* (1962) [244] i (1976) [243], gde se određuje ravnoteža vertikalnih sila na konačnom elementu uskladištenog materijala od gornje nasute površine do posmatrane dubine z , ili kos, kao kod *Airy-а* (1897)², gde se razmatra ravnoteža nagnutog krila

¹ Гутъяр Е.М. (1935): "Распределение давления на стенки силосной башни". *Труды Московского автотранспортного института*. Сб. 2, М., стр.182-184. (*Гутъяр-ов* postupak je prikazan u knjigama *Fischer-а* (1966) [82] i *Клейн-а* (1977) [358].)

² Airy W. (1897): "The pressure of grain". *Proc. of Inst. of Civil Eng.*, CXXXI. (*Airy-ев* postupak je detaljno prikazan u knjizi *Ketchum-а* (1919) [145].)

materijala kod silosa. U svojoj osnovi, *Airy*-eva analiza pritisaka u silosima, vodi od analize pritisaka tla na potporne zidove, koju je formulisao *Coulomb* (1773), a dalje razvio *Rankine* (1857). Primena ove metode kod nekih slučajeva analize silosnog problema pri čemu su navedene izvorne reference iz ove oblasti, već je razmatrana u okviru § 2.8.1, kod opisa *Airy*-eva analize.

Metoda isečka diferencijalnog sloja, se odnosi na primenu *metode integralnih relacija*. Pri ovome se ravnoteža horizontalnih i vertikalnih sila uspostavlja na elementarnom isečku diferencijalnog sloja. Uobičajeno je namenjena za rešavanje 2D i 3Dr silosnog problema, gde se jednačine ravnoteže u integralnom obliku svode na sistem dve diferencijalne jednačine. Isto tako, ova metoda se može primeniti i na 1D problem, pri uspostavljanju samo jednog uslova ravnoteže (ravnoteže vertikalnih sila), gde se integralni oblik uslova ravnoteže svodi na jednu diferencijalnu jednačinu. Metoda integralnih relacija je ovde prikazana kod analize postupaka proračuna prema *Walker*-u i *Walters*-u (1D silosni problem), a šire je primenjena pri analizi 2D i 3Dr silosnog problema. Prva primena metode integralnih relacija kod analize stanja napona u silosnom materijalu je data u disertaciji *Negi*-a (1974) [202], kao i u radu *Negi*-a i *Ogilvie*-a (1977) [203], a dalje je razmatrao *Dresher* (1991)¹.

Numeričke metode u osnovi se dele na:

- metoda konačnih elemenata,
- metoda diskretnih elemenata,
- metoda konačnih razlika,
- metoda karakteristika, i
- metoda ćelijskog automata.

Od numeričkih metoda, osnovne metode koje se koriste u analizi silosnog problema su *metoda konačnih elemenata* (MKE), koja se koristi za analize stanja napona u zrnastom materijalu i opterećenja na zidove silosa, i *metoda diskretnih elemenata* (MDE) koja se koristi pri simulacijama proticanja zrnastih materijala. Modelovanje metodom diskretnih elemenata se dokazalo kao neprocenjivo u analizi i simulaciji širokog ranga procesa i radnih operacija sa zrnastim materijalima. Dok je metoda MDE trenutno limitirana sa brojem, dimenzijom oblasti i oblikom zrna materijala, metoda je posebno korisna kod analize lokalnog ponašanja pri proticanju, kao što su zone sa izuzimačem, pražnjenje materijala iz kofičastih elevatora, lokalni problemi u silosima i drugo. MKE i MDE su ovde detaljnije opisane u okviru § 2.9.2.

Metoda konačnih razlika (diferencna metoda) predstavlja jednu od prvih numeričkih metoda, i koristi se više u okviru analize 2D problema stanja napona. Iako je ovu metodu potisnula primena i razvoj metode konačnih elemenata, ne treba je isključiti iz teorijskih razmatranja, jer je u suštini ekvivalentna drugim metodama, i predstavlja pravi reper za primenu drugih metoda. Program FLAC se zasniva na primeni diferencne metode.

Metoda karakteristika se koristi uopšte pri rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina, a kod silosnog problema to su jednačine ravnoteže na diferencijalnom elementu uskladištenog materijala. Metoda je kod problema stanja napona korišćena više u oblasti mehanike tla, a za pregled primene ove metode mogu poslužiti knjige *Соколовский*-og (*Statika zrnaste sredine* (1960) [371] i knjiga *Teorija plastičnosti* (1969) [372]), kao i knjiga *Matematička teorija plastičnosti* od *Hill*-a (1998) [119]. Kod silosnog problema

¹ Dresher A. (1991): *Analytical Methods in Bin-Load Analysis*. Elsevier, Amsterdam, 255 p. (Videti ref. [168])

primena metode karakteristika je razmatrana u knjizi *Statika i kinematika granularnih materijala* od Nedderman-a (1992) [200], a nešto detaljnije je opisana ovde u okviru § 2.9.2. U osnovi, ova metoda je dala početni impuls za formiranje metode integralnih relacija.

Metoda ćelijskog automata se koristi u mnogim oblastima analize zrnastih materijala, a kod silosnog problema njena osnovna namena je pri analizi brzog protoka zrnastog materijala. Ćelije se zadaju u obliku pravilnih struktura koje grade mrežu ćelija, i svaka ćelija može biti prazna ili u njoj može biti zrno materijala. Pri gravitacionom pražnjenju, kada zrno napusti posmatranu ćeliju, oslobađa se prostor u koji iz neke višlje susedne ćelije, prema raspodeljenoj verovatnoći događaja, ulazi zrno materijala. Algoritam procesa je matematičke prirode i pokazuje se vrlo efikasnim kod programskih analiza. Detaljan opis i primenu ove metode je prikazao *Tejchman* (2013) u 9-tom poglavlju u knjizi [303]. Kod silosnog problema, metoda se koristi isključivo za analize protoka materijala.

Empirijske metode se uobičajeno koriste kod složenih problema radi uspostavljanja matematičkog modela za posmatranu veličinu koja se istražuje, u obliku relativno jednostavne funkcijske zavisnosti od niza relevantnih faktora. Kod ove metode, primenjuje se teorija sličnosti i dimenzionalna analiza, pri čemu se sprovode opsežna eksperimentalna ispitivanja uticaja raznih relevantnih faktora. Kod silosnih problema, ova metoda se više primenjuje kod analize protoka materijala, npr. za određivanje kapaciteta pri pražnjenju materijala iz silosa. Ali, isto tako, sa ovom metodom se može analizirati stanje napona u silosnim ćelijama. Empirijsku metodu je primenio *Gumbe* (1987) [102], u okviru analize opterećenja kod cilindričnih silosa. Pri tome su primenjeni principi teorije sličnosti i dimenzione analize, koji su upotrebljeni pri formulisanju, organizaciji i analizi dobijenih eksperimentalnih podataka. Eksperimenti su sprovedeni u cilju ispitivanja *Janssen*-ovog koeficijenta bočnog pritiska K , za koji je ustanovljeno da ne predstavlja nezavisnu materijalnu karakteristiku. Pored ovog slučaja primene, empirijska metoda je primenjena pri analizi deformacija zidova ćelije, kod armiranobetonskih silosa pri stanju pražnjenja, u radu *Ocunov*-a (1981) [366].

2.10 Opterećenja od zrnastih materijala u tehničkim propisima za proračun silosa

U daljem delu se prikazuje pregled preporuka najznačajnijih internacionalnih normi za projektovanje silosa u okviru određenih tema iz ovih propisa. Kod nas je u primeni aktuelni standard SRPS ISO 11697 iz 1996. god. [291], a pre su se koristila tehnička uputstva TU 60 iz 1960. god. [310]. U cilju opšteg pregleda i radi poređenja sa drugim normama, prikazuje se detaljan pregled određivanja opterećenja kod zidova ćelije, kao i opterećenja na levku i ravnom dnu prema evropskim normama EN 1991-4:2006 [38].

2.10.1 Tehnički propisi i koncepti pri definisanju opterećenja kod silosa

Kod tehničkih propisa iz oblasti projektovanja silosa, kao što su australijski AS 3774 (1996) [14], američki ACI 313-97 (1997) [5] i prethodna verzija ACI 313-77 (1977, 1983) [3], ruski СНиП 2.10.05-85 (1985) [370], prethodne francuske norme SNBATI (1986) [288], prethodne nemačke norme DIN 1055 (1962, 1964, 1977, 1987) [61], te nove nemačke norme u skladu sa evropskim normama DIN 1055-6 (2005) [62], kao i ISO

11697 [125] i [291], i evropske norme EN 1991-4 (2006) [38], i dalje se u osnovi koristi *Janssen*-ova teorija iz 1895 godine [130], uz odgovarajuće korekcije pri obuhvatanju stanja pražnjenja, i druge manje korekcije.

Napredak kod novih normi je učinjen u pogledu analize opterećenja na levku (npr. kod EN 1991-4), odnosno analize opterećenja koje deluje na ravno dno (npr. kod AS 3774). Opterećenja pri pražnjenju ćelije, uključujući različite oblike protoka materijala u ćeliji, i dalje su predmet stručnih procena formulisanih u stavovima navedenih standarda. S druge strane može se primetiti da i pored uloženi velikih istraživačkih napora i postignutih rezultata u ovoj oblasti, opterećenje na zid ćelije pri pražnjenju, i dalje se određuje na osnovu konzervativnog pristupa množenjem vrednosti opterećenja pri punjenju sa empirijskim faktorom povećanja opterećenja.

U ranijoj verziji standarda ACI 313-77, kod proračuna pritisaka u silosnim ćelijama bile su ravnopravno upotrebljavane *Janssen*-ova teorija i teorija *Reimbert*-ovih, tako da se za projektovanje slobodno mogla koristiti jedna od ove dve teorije. Kod verzije ACI 313-97, ovaj dualitet kod primene teorija je ukinut. S obzirom da su teorijske analize *Briassoulis*-a (u ref. [30] i njegovim drugim ref.) pokazale da teorija *Reimbert*-ovih u nekim slučajevima daje značajna odstupanja u odnosu na *Janssen*-ovu teoriju, kao i u odnosu na rezultate eksperimentalnih ispitivanja, kod ACI 313-97 je na kraju ostala u upotrebi samo *Janssen*-ova teorija za određivanje pritisaka na zidove ćelija silosa.

Na drugoj strani, kod evropskih normi EN 1991-4 (2006) [38] (EC1-4), u odnosu na prvobitne verzije ovih normi gde je kod proračuna silosa figurisala samo *Janssen*-ova teorija, u konačnoj verziji su uvedene dve teorije, i to su *Janssen*-ova za proračune vitkih silosa, i modifikovana teorija *Reimbert*-ovih za proračune kratkih i srednje vitkih silosa.

Nemačke norme DIN 1055-6 (2005) [62], odgovaraju završnoj verziji EN 1991-4, i donete su godinu dana pre izlaska konačne verzije EC1-4. U odnosu na konačnu verziju EC1-4 razlike su praktično zanemarljive. Ipak, sa uvedenim korekcijama u DIN 1055-6 (2006) [62], promenjene su formulacije kod proračuna pritisaka pri ekscentričnom pražnjenju kroz unutrašnji kanal uz sam zid ćelije (asimetrično opterećenje na zidove). Ove korekcije su specifične za DIN 1055-6, i kao takve se ne nalaze u sklopu naknadne korekcije kod EC1-4, koja je objavljena kao EN 1991-4:2006/AC (2012) [38].

Potrebno je napomenuti da nove norme DIN 1055-6 i EC1-4, predstavljaju norme za određivanje opterećenja, odnosno za dejstva u silosima (i rezervoarima), što je svakako potrebno pri projektovanju, ali to ipak nisu "prave" norme za projektovanje konstrukcije silosa. U tom pravcu, kod normi EC3, čelični silosi su posebno razmatrani u EN 1993-4-1:2007 [40] na 114 stranica. Odgovarajući deo EC2, koji bi se odnosio na konstrukciju i proračun betonskih (AB i PB) silosa, za sada ne postoji. Predmetni EC1-4 se, u ovoj situaciji, može shvatiti "kao dovoljan" za projektovanje jednoćelijskih AB i PB silosa, u sklopu sa drugim delovima EC. Prema dostupnoj literaturi, jedini prikaz analize uticaja lokalnog opterećenja na bateriji silosa je dat u radu *Lapko*-a i *Prusiel*-a (2004) [163], ali to je proizvoljna dispozicija opterećenja, koja u suštini odstupa od logike primenjene kod lokalnog opterećenja u EC1-4. Baterija silosa, se pominje samo tri puta u EC1-4; dva puta da se skrene pažnja na potrebu analize uticaja diferencijalnog sleganja kod temelja, i jednom kod definisanja proračunskih klasa silosa. Čak je i skica međućelije koja asocira na bateriju silosa, "nestala" iz konačne verzije normi EC1-4 (skica međućelije na sl. 68 je data prema završnoj verziji EC1-4, a ista je prikazana i u normama DIN 1055-6:2005).

U radu *Nielsen*-a, *Rotter*-a i *Sørensen*-a (2012) [207], u okviru rasprave o dejstvima i o proračunskim kombinacijama uticaja od opterećenja kod silosa, gde bi odgovarajući faktori kod opterećenja trebalo da budu određeni po metodama pouzdanosti prema EN

1990 (2002), zaključeno je da se vrednosti faktora opterećenja, u ovom trenutku, mogu odrediti jedino na osnovu dobre inženjerske procene. "U prevodu": tako je uradio i tim za izradu EC1-4.

Holický i *Marková* (2009) [121] su, u okviru 8-og poglavlja poznatog priručnika koji se odnosi na osnove projektovanja i dejstva na objekte prema novim normama EC, pri pregledu kombinacija opterećenja koje su preporučene u EC1-4, zaključili da kod ovog dela EC1-4 nije ostvarena konzistencija sa osnovama projektovanja prema normi EN 1990 (EC0). Konstatovano je da bi tabele u kojima se prikazuju kombinacije opterećenja za silose u EC1-4 trebalo korigovati, ili izmeniti u okviru tzv. *NAD*-a, tj. nacionalnog dokumenta za primenu norme EC1-4.

U ref. [121] je analiziran primer silosa klase AAC 2, u kojem se skladišti pšenica, pri čemu je kod proračuna opterećenja varirana vrednost koeficijenta K , ali nije variran koeficijent trenja o zid μ_w , što nije u skladu sa EC1-4, odnosno ovde prikazanom tabelom 11. Prema ovoj tabeli, prvi set vrednosti karakteristika materijala (donja vrednost za μ_w i gornja vrednost za K) se koristi pri sračunavanju $\max p_h$ i pratećih opterećenja p_w i p_v . Drugi set vrednosti (gornja vrednost za μ_w i gornja vrednost za K) se koristi za određivanje opterećenja $\max p_w$ i njemu pratećih opterećenja p_h i p_v . U sledu stvari, koristi se i treći set vrednosti. Kako ovo nije bilo jasno kod primene u ref. [121], može se zaključiti da ovaj deo u normi EC1-4 sadrži moguće nejasnoće. Prema diskusijama u projektnom timu (PT) za izradu EC1-4, prof. *Rotter* je postavio isto pitanje (u vezi eksplicitnog definisanja slučajeva opterećenja pri primeni tabele 11), ali je stanje u EC1-4 ostalo kakvo jeste.

Na osnovu prethodnih napomena, može se zaključiti da norme EC1-4 imaju određene nedostatke u okviru integralne primene sa ostalim delovima normi EC, kao i da nedostaje poseban deo o proračunu konstrukcije betonskih silosa u kojem bi se ti nedostaci mogli otkloniti. S druge strane, pri analizi normi EC1-4 sa aspekta definisanja opterećenja u silosima od mase uskladištenog materijala, može se konstatovati da je ovo pitanje detaljno obrađeno u EC1-4.

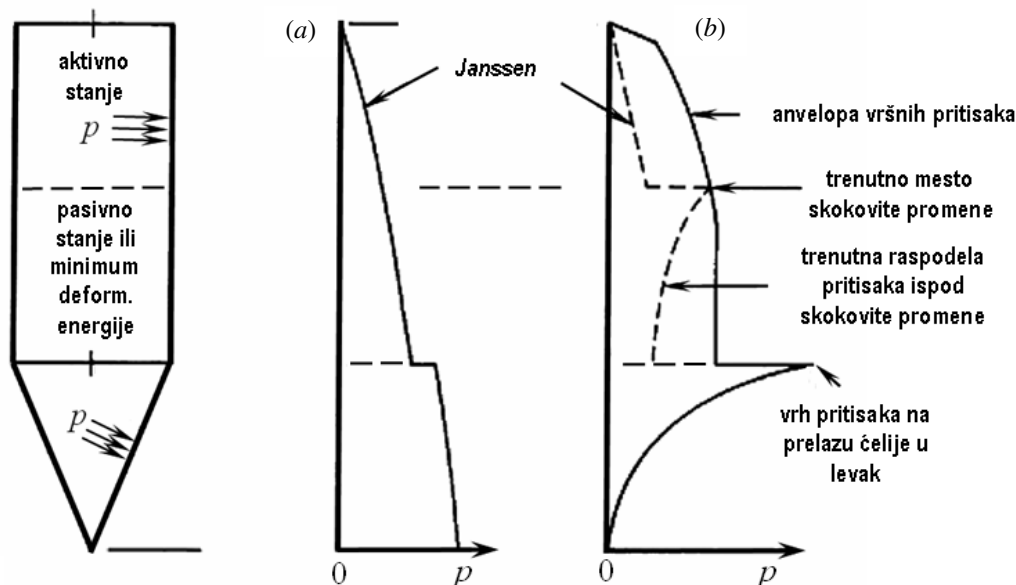
Pri upoređenju normi za proračun opterećenja u silosima, mogu se izdvojiti *dva osnovna koncepta kod definisanja opterećenja pri pražnjenju materijala*:

- *prvi koncept* – gde se uvode relativno visoke vrednosti koeficijenta za povećanje simetričnog opterećenja pri punjenju, tako da se opterećenje pri pražnjenju uzima u celini kao simetrično opterećenje kod kojeg je uveden faktor uvećanja opterećenja; i
- *drugi koncept* – gde se uvode relativno niski koeficijenti za povećanje simetričnog opterećenja pri punjenju, što predstavlja samo jedan deo opterećenja pri pražnjenju, a drugi deo se uvodi kao nesimetrično opterećenje u obliku dodatnog lokalnog opterećenja, koje se može pojaviti na bilo kojoj površini zida ćelije.

Prvi koncept se u početku bazirao na iskustvenoj proceni, kao i na analizi slučajeva oštećenih ćelija, kao i prema prvim i kasnijim ispitivanjima ćelija silosa ili modela silosa pri punjenju i pražnjenju.

Slučajevi sprovedenih ispitivanja na ćelijama i modelima ćelija pri pražnjenju, prikazani su u stručnoj literaturi o silosima, kao što su na primer knjige sledećih autora: *Reimbert M.* i *A.* (1962) [244] i (1976) [243], *Липницкий* i *Абрамович* (1967) [363], *Ravenet* (1977) [241], *Латышев* (1985) [361], *Safarian* i *Harris* (1985) [270], i drugi. Ispitivanja iz istočnih izvora je sumirao *Молодченко* (2001) [365], i prema 6 različitih ispitivanja na modelima silosa od raznih autora, gde je pri ispitivanju određen odnos pritisaka pri pražnjenju i pri mirovanju materijala, ovaj faktor se kreće od 1.5 do 2.5, s tim da je kod

jednog ispitivanja K_{um} odredio faktor u granicama od 5 do 6 (što je kao ekstrem isključeno iz razmatranja).



Sl. 66 Teorijska raspodela pritiska pri punjenju (a) i pražnjenju silosa (b) sa anvelopom pritiska pri pražnjenju (analiza skokovitog pritiska), adapt. prema [31].

Faktor uvećanja opterećenja se prema ACI 313-97 [5] uzima da iznosi minimum 1.5, ali opcionalno se može uzeti i dokazana manja vrednost, koja opet, ne može biti manja od 1.35. Treba imati u vidu, da je u ACI 313-97, uvedeno variranje vrednosti karakteristika materijala pri proračunu, tako da se navedeni faktor može posmatrati kao relativno manji, u odnosu na odgovarajući veći faktor koji bi se koristio u proračunima koji baziraju na srednjim vrednostima karakteristika materijala. Prema СНиП 2.09.03-85 [369] za faktor uvećanja pritiska na zidove ćelije je data vrednost 2. Kod AS 3774 (1996) [14], gde se variraju vrednosti karakteristika materijala pri proračunu, faktor uvećanja horizontalnih pritisaka na zidove ćelija, kod silosa sa osno simetričnim protokom materijala, iznosi od 1.2 do 2.2, u zavisnosti od odnosa visine silosa i prečnika ćelije (sl. 79).

U prilog prvom konceptu, ide teorija skokovitog opterećenja (*switch load*), prema kojoj se pri prelasku materijala iz stanja mirovanja u stanje kretanja pri pražnjenju (mesto skokovite promene), javlja povećano lokalno opterećenje koje brzo opada po dubini materijala. Na početku pražnjenja, mesto skokovite promene je kod otvora levka, i materijal počinje da se kreće, što prati u kontinualnom sledu svaki sledeći višnji sloj materijala. Na ovaj način mesto skokovite promene se pomera od donjeg otvora, do gornje površine nasutog materijala, a sa tim i vrh skokovitog pritiska. Anvelopa maksimalnih vrednosti skokovitih pritisaka, se uzima da odgovara dijagramu pritisaka na zid pri pražnjenju silosa, i može se uzeti da odgovara dijagramu pritisaka pri mirovanju multiplikovanim sa faktorom uvećanja opterećenja. Prikaz raspodele normalnih pritisaka na zidove silosa pri punjenju ili mirovanju materijala, kao i prikaz skokovitog opterećenja i anvelope maksimalnih pritisaka pri pomeranju mesta skokovite promene pritiska, prema vrhu materijala je prikazano na sl. 66.

Walters (1973) [328] je postavio osnove teorije pojave skokovitog opterećenja kod pražnjenja silosa, gde je odredio skokoviti pritisak koji se javlja kod levka i kod zidova ćelije. Kod ovog rešavanja koristio je za materijal u stanju mirovanju koeficijent K za aktivni pritisak, i K za pasivni pritisak kod materijala koji se kreće. Kao rezultati dobijaju

se vrlo velike vrednosti skokovitog pritiska, dok su vertikalni naponi kod materijala koji je u pokretu vrlo mali. Ovaj postupak se razmatra, zbog ovih rezultata, samo u kvalitativnom pogledu.

Drugu metodu su postavili *Jenike, Johanson i Carson (1973)*¹, i to je energetska metoda, koja bazira na minimumu energije pri deformacijama materijala ispod nivoa skokovite promene, i koja je poslužila za kalibraciju faktora uvećanja opterećenja u AS 3774. Kod EN 1991-4 (2006) [38] i DIN 1055-6 (2005) [62], silosi manjeg kapaciteta, ispod 100 tona zrnastog materijala, pripadaju proračunskoj klasi 1 (AAC 1), i za njih se primenjuje prvi koncept sa većim faktorom uvećanja opterećenja (faktori C_h kod silosa AAC 1 klase su prikazani na sl. 71). Kod ovih normi za silose većeg kapaciteta, koji spadaju u proračunske klase 2 i 3 (AAC 2 i 3), prema opisu klasa u tabeli 12, koristi se ovde navedeni drugi koncept za definisanje opterećenja pri pražnjenju.

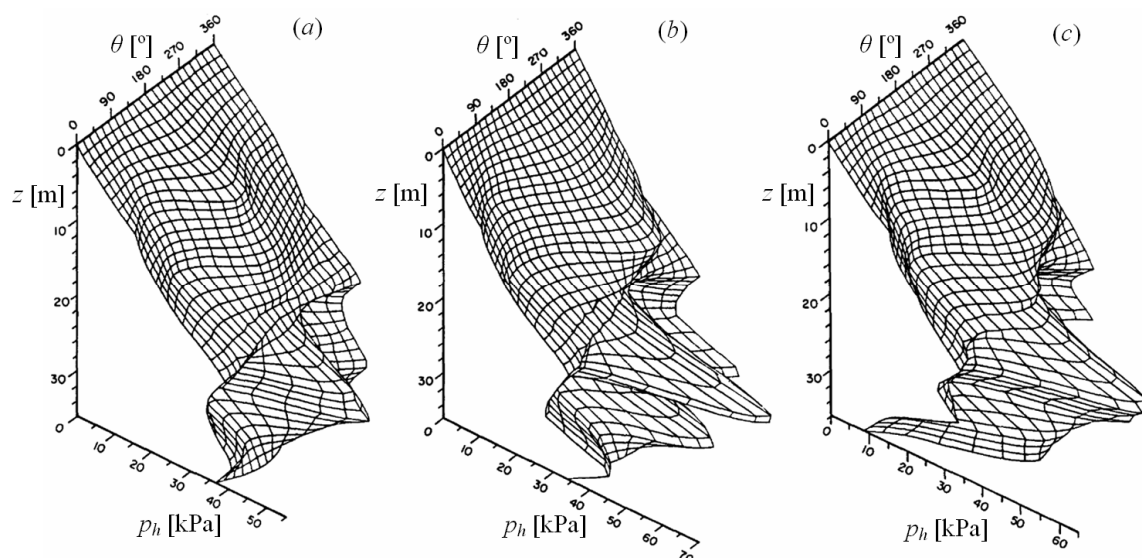
Drugi koncept je baziran na detaljnim istraživanjima raspodele pritisaka u silosima na modelima i izvedenim ćelijama.

Na sl. 67 prikazane su raspodele pritisaka na zidu kružne cilindrične AB ćelije (na razvijenoj površini zida preko ugaone koordinate θ), koji su određeni na osnovu detaljnih merenja i harmonijske analize pritisaka, prema *Ooi-u, Pham-u i Rotter-u (1990)* [212]. Svi rezultati se odnose na horizontalne pritiske na cilindričnom zidu ćelije. AB ćelija je prototip ćelija (skala dimenzija je 1:1) kod silosa u *Karpalund-u* (Švedska), prečnika $d = 7.0$ m, i visine $h_b = 46.0$ m. Ispitana ćelija je ugaona ćelija kod baterije od $2 \times 3 = 6$ ćelija. Merne ispitne jedinice/ćelije (*pressure cell*) su postavljene po visini ćelije na 7 nivoa, po 4 jedinice u jednom nivou jednako raspoređenih po obimu (na po 90°), pri čemu su po vertikali držane na četiri generatriše, tako da je ostvarena vertikalnost mernih jedinica u svim nivoima. Ugao $\theta = 0^\circ$ (odnosno $\theta = 360^\circ$), definiše početnu poziciju na zidu ćelije i odgovara lokaciji bočnog otvora za pražnjenje. Ulazna cev za punjenje na vrhu ćelije, je pod nagibnim uglom od 45° u vertikalnoj ravni sa $\theta = 0^\circ$, tako da je pri punjenju ekscentricitet vrha nasipne kupe materijala promenljiv po visini ćelije, kako sledi trajektoriju pada zrna pri punjenju ćelije. U ćeliji je držan ječam, i eleviranjem istog materijala je određivano stanje pritisaka pri punjenju (pri mirovanju kod pune ćelije), centričnom i ekscentričnom pražnjenju.

Rezultati prikazani na sl. 67, su dobijeni na osnovu naknadne analize srednjih vrednosti pri merenju na $7 \times 4 = 28$ mernih mesta (+ dodatnih 8 mesta na jednom nivou), pri čemu je upotrebljena statistička obrada podataka i regresiona analiza pri pretpostavljenom harmonijskom obliku dijagrama pritisaka po obimu ćelije. Ova ćelija je po broju ispitivanja pri raznim uslovima usipanja i pražnjenja materijala, kao i sa pratećom mernom tehnikom i broju mernih mesta na zoni zida visine 28 m, najdetaljnije i najviše puta ispitivana silosna ćelija, u razmeri 1:1.

U ref. [212] citirani su brojni radovi u vezi sa ovom ćelijom, primenjenoj mernoj tehnici, postupcima ispitivanja i rezultatima ispitivanja. Predmetna ispitivanja su uradili eksperti iz Danske i Švedske. Jedino što bi se moglo dovesti u pitanje je izbor ječma kao zrnastog materijala u ćeliji. Zrna ječma su izdužena, te njihovo preslaganje i orijentisanje pri pražnjenju i konsolidaciji materijala, prouzrokuje izraženu anizotropiju. U ovom smislu, povoljniji su za ispitivanje materijali sa sferičnim zrnima, kao što su na primer proso i soja, kao i pšenica ako se poredi sa ječmom.

¹ Jenike A.W., Johanson J.R. and Carson J.W. (1973): "Bin Loads – Part 3: Mass – Flow Bins", *Journ. Engineering for Industry, Transactions, ASME, Vol.95, Series B, No.1, pp.6-12.* (Citirano prema *Smith-u i Simmonds-u (1983)* [287].)



Sl. 67 Raspodela pritiska na zidu AB ćelije za stanja: (a) punjenja, (b) centričnog pražnjenja i (c) ekscentričnog pražnjenja, prema [212].

Primenjena analiza u ref. [212] se bazira na pretpostavci da pritisak u nekoj tački na zidu ćelije ima dve komponente: prvu sistematičnu i drugu slučajnu. Sistematična komponenta zavisi od vrste uskladištenog materijala, geometrije silosa, geometrijskih imperfekcija kod zida silosa, ekscentriciteta pri punjenju i pražnjenju, i tipa protoka. U osnovi, ova komponenta je proizvod nekog uzročnog fenomena. Slučajna komponenta se uzima kao promene kod pritiska na zidu, koje nisu u međusobnoj relaciji i obično se zanemaruju u projektovanju. Kod analize je uzeto da forma sistematične komponente i slučajnih promena pritiska stoje u relaciji sa horizontalnim pritiscima prema *Janssen*-ovoj formulaciji. Sistematična komponenta pritiska je prikazana na sl. 67, za stanja mirovanja materijala i centričnog i ekscentričnog pražnjenja. Opterećenje je nesimetrično. Kako je u radu navedeno, data analiza i dijagrami pritiska u ćeliji silosa, se mogu iskoristiti kao jedna tačnija osnova pri definisanju propisa. Na osnovu ovih dijagrama i analiza, proističe uvođenje dodatnog lokalnog opterećenje, kako kod pražnjenja tako i kod punjenja sa ekscentričnim usipnim otvorom. U celini gledano, kod ovog rada se mogu uočiti sve konceptualne osnove na kojima se zasniva EC1-4 pri definisanju opterećenja kod kružnih ćelija za silosa klase AAC 2 i 3.

Interesantno je da ovaj koncept nije primenjen kod AS 3774 (1996) [14], a primenjen je kod EC1-4, dok je pri izboru kod AS 3774 bio usvojen jednostavniji prvi koncept. Drugi koncept je bio u upotrebi i ranije, a primenjen je u normama: СНиП 2.10.05-85 [370], DIN 1055-6 (1987) [61] i ISO 11697 [125] i [291].

2.10.2 Opterećenja u silosima od zrnastih materijala prema EN 1991-4

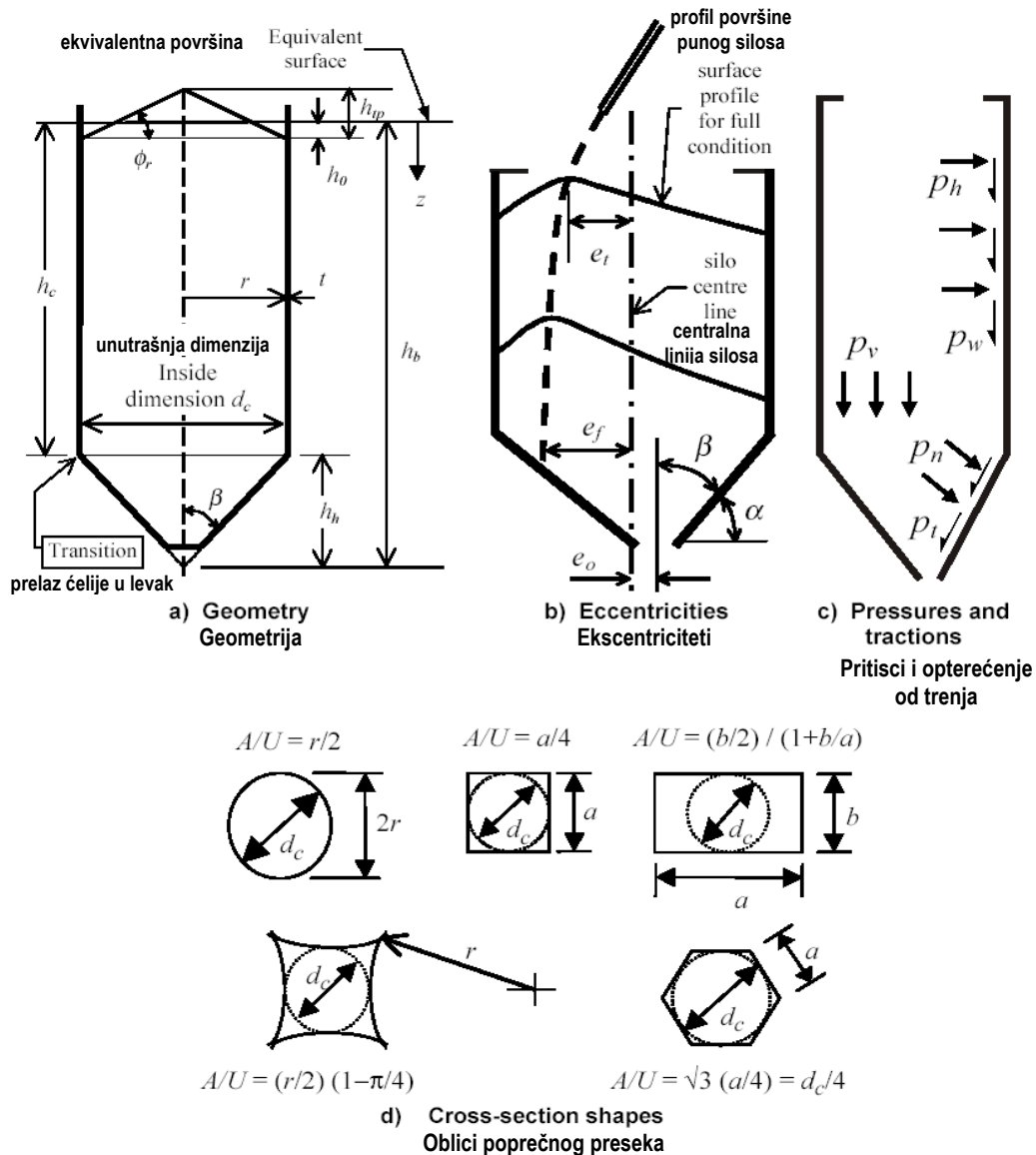
Evropske norme za proračun silosa i rezervoara EN 1991-4:2006 [38] (ili kraće EC1-4) se najvećim delom odnose na proračun i analizu silosa. Usvojeni završni oblik ovih normi iz 2006. god. [38], mnogo je obimniji od prednormi¹ iz 1993. god., koji je preveden na

¹ ENV 1991-4: "EUROCODE 1: Basis of Design and Actions on Structures, Part 4: Actions on Silos and Tanks", CEN/TC250/SC1, April 1993, 40 pp. (Komitetom za izradu normi je rukovodio prof. M. Rotter.)

srpski jezik, kao *Evrokod 1* deo 4 (1997) [220]. EN 1991-4:2006 [38] je u principu identičan sa DIN 1055-6:2005 [62]. Razlika je neznatna u okviru osnovnog tekstualnog dela, a veća je kod pojedinih priloga, kako po njihovom broju tako i po sadržaju nekih priloga. Osnovni prilozi su isti u ovim normama.

Proračun silosa prema EN 1991-4:2006, odnosi se na silose sa sledećim karakteristikama:

- oblici poprečnih preseka ćelija silosa se ograničavaju na preseke prikazane na sl. 68, a samo manje promene u oblicima se dopuštaju s obzirom na rezultujuće promene u pritiscima;
- geometrijska ograničenja su data sa $h_b/d_c < 10$, $h_b < 100$ m i $d_c < 60$ m (sl. 68);
- prelaz vertikalnog dela ćelije na levak leži u horizontalnoj ravni;
- silos ne sadrži umetnute unutrašnje elemente, kao npr. konusne ili piramidalne umetnute elemente u prostoru levka, poprečne grede, i slično; ali se dopušta primena unutrašnjih zatega kod pravougaonih silosa.



Sl. 68 Forme silosa sa prikazanim dimenzijama i oznakama napona prema EC 1-4.

Pri projektovanju silosa prema pravilima u EC1-4 važe sledeća ograničenja za zrnasti materijal:

- silosi se projektuju na definisani rang karakteristika usipnih materijala;
- zrnasti materijal je tip slobodno protočnog materijala, ili se garantuje da može slobodno da protiče unutar silosa;
- maksimalni prečnik zrna materijala nije veći od $0.03 d_c$ (sl. 68).

U ovim normama, obuhvata se proračun za levke konusnog tipa (osno simetrični) i za linijske levke (izduženi levci sa vertikalnim krajnjim bočnim stranama). Silosi se definišu kao konstrukcije za skladištenje zrnastog materijala, i pod silosima se podrazumevaju bunker, koševi i uobičajeni ćelijski silosi. Podela silosa u EC 1-4 je data prema načina proračuna vertikalnih zidova silosa, pri čemu se uvodi vitkost silosa (odnos visine ćelije prema prečniku upisanog kruga u osnovi ćelije).

Klase silosa prema vitkosti i prema postupku proračuna su:

- silosi velike vitkosti sa odnosom $2.0 \leq h_c/d_c$ (vitki silosi),
- silosi srednje vitkosti sa $1.0 < h_c/d_c < 2.0$ (umereno vitki silosi),
- silosi male vitkosti sa $0.4 < h_c/d_c \leq 1.0$ (kratki silosi),
- silosi tipa potpornog zida (retaining silos), sa ravnim dnom i odnosom $h_c/d_c \leq 0.4$,
- silosi sa aerisanim materijalom.

U slučajevima silosnih baterija, gde je više silosnih ćelija konstrukcijski međusobno spojeno, klasa silosa se uzima prema pojedinačnoj ćeliji, a ne prema ukupnoj bateriji silosa. U tabeli 12 je prikazano razvrstavanje silosa po *proračunskim klasama* (klasa procene dejstva - *Action Assessment Class* - AAC), u cilju da se sa različitim stepenom procene dejstava/opterećenja (primena jednostavnih/grubih ili rafiniranih/detaljnijih procena opterećenja), dobije u principu jednaka pouzdanost konstrukcije silosa sa jednakim malim rizikom od mogućeg loma konstrukcije. Kod silosa *proračunske klase 1*, mogu se koristiti uprošćene procedure ovoga standarda za tu klasu, i pri njihovoj analizi dovoljno je uzeti samo jednu kombinaciju karakterističnih vrednosti uskladištenog materijala, i to su srednje vrednosti za μ_m , K_m i ϕ_{im} . Kod silosa *proračunske klase 2 i 3*, koriste se kombinacije karakterističnih vrednosti parametara materijala, što povećava broj potrebnih analiza pri određivanju merodavnih opterećenja.

Tabela 12. Proračunske klase silosa prema pouzdanosti procene dejstva.

Klasa procene dejstva (Action Assessment Class)	Opis slučaja
Proračunska klasa 1 (AAC 1)	Silosi sa kapacitetom ispod 100 tona.
Proračunska klasa 2 (AAC 2)	Silosi koji se ne vode pod klasama 1 i 3.
Proračunska klasa 3 (AAC 3)	Silosi sa kapacitetom iznad 10000 tona. Silosi sa kapacitetom preko 1000 tona u slučajevima: a) ekscentrično pražnjenje $e_o/d_c > 0.25$; i b) kratki silosi sa eksc. vrha nasipne kupe $e_r/d_c > 0.25$.

Vrednosti karakteristika najčešće skladištenih materijala u silosima su date tabelarno u aneksu E u EN 1991-4 [38], tj. EC 1-4, gde vrednosti za μ_m , K_m i ϕ_{im} predstavljaju preporučene srednje vrednosti. U tabelama 9 i 10, prikazanim u ovom radu, dati su podaci za nekoliko ovih zrnastih materijala. U § 2.7.7.3, opisane su karakteristične vrednosti

parametara materijala sa primenom konverzionih faktora a , i njihovo korišćenje pri određivanju merodavnih opterećenja u silosima, preko kombinacija parametara materijala prikazanih u tabeli 11.

2.10.2.1 Opterećenja na vertikalne zidove silosa

Opterećenja na vertikalnim zidovima silosa od uskladištenog materijala sa malim ekscentricitetom pri punjenja i pražnjenju se predstavlja kao *simetrično opterećenje* i kao *nesimetrično opterećenje*, koje se uvedi kao *dodatno lokalno opterećenje (patch load)*. Simetrična opterećenja su u vidu horizontalnih pritisaka p_h na unutrašnjoj strani vertikalnih zidova silosa, normalnih pritisaka p_n na kose zidove levka, tangencijalnih opterećenja usled trenja p_w i p_t , i vertikalnih pritisaka p_v u uskladištenom materijalu.

Pored ovih opterećenja, kod silosa kod kojih se može pojaviti protočni kanal koji jednim delom kontaktira sam zid ćelije po ukupnoj visini ili samo na jednom delu visine zida, uvodi se *nesimetrično opterećenje pri velikom ekscentricitetu* protočnog kanala (analizira se p_h i p_w), i to predstavlja posebnu analizu opterećenja koja deluju na zidove ćelije, koja se sprovodi odvojeno od uobičajene analize simetričnog i nesimetričnog opterećenja u običnim slučajevima protoka materijala.

Ovde se neće šire razmatrati opterećenja u silosima sa aerisanim materijalom i silosima tipa potpornog zida, kao i opterećenja kod kratkih i srednje vitkih silosa pri velikom ekscentricitetu nasutog materijala pri punjenju silosa. Za analize ovih posebnih slučajeva upućuje se na EC1-4.

Prema vrsti protoka materijala u ćeliji silosa i levku, definišu se i delujuća opterećenja na zidove ćelija. Prema EC1-4, vrste protoka materijala pri pražnjenju su ovde prikazane u § 2.4, gde su osnovne vrste protoka, kao *masovni protok*, protok jezgrom (*unutrašnji protok*) i *mešoviti protok* prikazani na sl. 10, a primeri protoka materijala pri nekim slučajevima ekscentričnog pražnjenja prikazani na sl. 11. Kod silosa sa centričnim ili ravanskim pražnjenjem, koriste se *karte protoka* sa granicama za vrste protoka. Prema osnovnom delu normi EN 1991-4 (2006) i DIN 1055-6 (2005), na sl. 18, prikazana je *gornja granica razdvajanja protoka* materijala u trećem redu tabelarnog pregleda karti protoka. Primenom ovih karti, određuje se da li silos u oblasti sigurnog unutrašnjeg protoka, kada se mogu zanemariti povećanja pritisaka pri pražnjenju, i silosi računati samo na uticaje pri njihovom punjenju.

Za sve vitkosti silosa, pri unutrašnjem protoku (primena karte protoka), kada protočni kanal ide kroz unutrašnjost uskladištenog materijala, ne računa se sa povećanjem pritisaka pri pražnjenju. Ovi uslovi su sigurno zadovoljeni kod kratkih silosa sa centričnim gravitacionim pražnjenjem, kao i kod silosa sa mehaničkim uređajem za pražnjenje sa vrha materijala u unutrašnju protočnu cev. Silosi kod kojih se primenjuje ugrađena anti-dinamička depresiona cev, takođe spadaju pod ovaj slučaj. Kod svih ovih silosa, uzima se da je opterećenje na zidove pri pražnjenju identično opterećenju pri punjenju. Prema tome, kod osiguranog slučaja unutrašnjeg protoka, zidovi se proveravaju na dejstvo *simetričnog opterećenja pri punjenju* i odgovarajućeg *nesimetričnog opterećenja pri punjenju* (dodatno lokalno opterećenje).

Za sve vitkosti silosa, pri masovnom protoku ili pri mešovitom protoku, gde je u pitanju simetrično ili ekscentrično pražnjenje materijala, treba zidove silosa proveriti i na dejstvo *simetričnog* i *nesimetričnog opterećenja pri pražnjenju* (dodatno lokalno opterećenje).

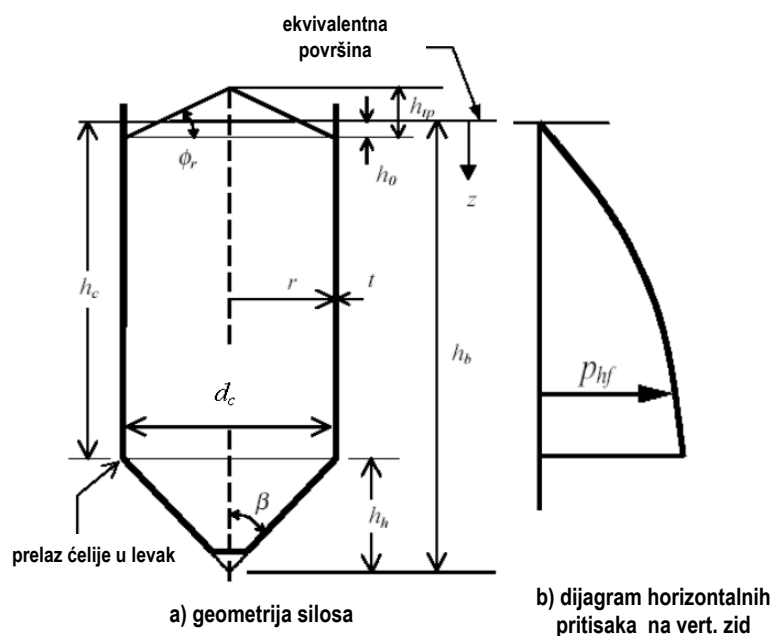
Za sve vitkosti silosa, pri unutrašnjem protoku ili pri mešovitom protoku, u slučajevima gde se silos puni sa velikim ekscentricitetom usipne mase ili se silos prazni sa velikim

ekscentricitetom otvora za pražnjenje, odnosno u svim slučajevima gde protočni kanal jednim delom svog obima dodiruje zid ćelije po ukupnoj visini ili samo na delu visine ćelije, treba zidove silosa proveriti na dejstvo *nesimetričnog opterećenja pri velikom ekscentricitetu* (kroz posebnu analizu nesimetrične raspodele opterećenja, koja se ne kombinuje sa prethodnim simetričnim i nesimetričnim opterećenjem).

2.10.2.2 Simetrična opterećenja po visini silosa

Veličine horizontalnih pritisaka na zidove pri punjenju p_{hf} , opterećenja od trenja na zidovima p_{wf} i vertikalnih pritisaka p_{vf} na posmatranoj dubini uskladištene mase nakon punjenja ili pri stanju mirovanja se određuje na osnovu izraza datih u tabeli 13, prema modifikovanoj teoriji *Reimbert-ovih* i *Janssen-ovoj* teoriji u formi koji odgovara EC 1-4.

Na sl. 71 je data shema proračuna opterećenja pri pražnjenju za različite klase i vitkosti silosa. Kratki i umereno vitki silosi se sračunavaju prema modifikovanoj teoriji¹ *Reimbert-ovih*, a vrlo vitki silosi prema teoriji *Janssen-a*.



Sl. 69 Simetrični horizontalni pritisci pri punjenju na vertikalne zidove vitkih silosa.

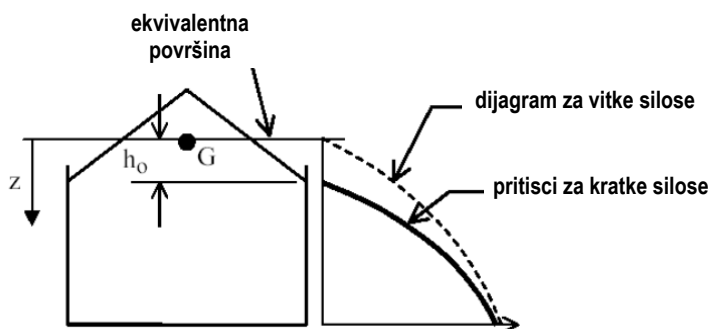
¹ Teorijske osnove i odgovarajuće analize modifikovane teorije *Reimbert-ovih*, koja je uvedena u EN 1991-4, se praktično ne mogu pronaći u dostupnoj stručnoj literaturi. Prema *Ruckenbrod-u* i *Schlüter-u* (2006) [264], opterećenja kod umereno vitkih i kratkih silosa uvedenih u EN 1991-4, određuju se prema *Rotter-ovoj* modifikaciji teorije *Reimbert-ovih*. Pri tome, citirana je *Rotter-ova* nota prezentovana projektom timu PT4 za izradu normi EN 1991-4:

Rotter J.M. (2002): "Pressures in Squat Silos". Note presented to CEN TC250/SC1/PT4 for EN 1991-4, Edinburgh, August 2002.

Na osnovu pregleda dostupnih diskusija sa sastanaka tima za izradu EN 1991-4 do marta 2002., može se jasno zaključiti, da je kod kratkih silosa, prvo bila razmatrana generalisana teorija *Reimbert-ovih*, u jednostavnijoj formi u odnosu na konačnu modifikovanu verziju, koja je prema [264], tek prvi put prezentovana u *Rotter-ovoj* noti iz avgusta 2002. Navedena diskusija je objavljena u sledećem dokumentu:

Rotter J.M. (2002): "Background discussion document for EN 1991-4 (June 2001 - March 2002)", CEN TC250/SC1/PT4, prepared by *Rotter J.M.*, University of Edinburgh, 33 p.

U ovim izrazima sa A i U su označene unutrašnja površina i unutrašnji obim poprečnog preseka ćelije, respektivno. Geometrijske veličine se mogu sagledati na sl. 68, sl. 69 i sl. 70. Dubina z odgovara dubini ispod ekvivalentne površine zrnastog materijala (nivo ove površine odgovara nivou izravnate kupe nasutog materijala u ćeliji).



Sl. 70 Horizontalni pritisci kod kratkih i srednje vitkih silosa.

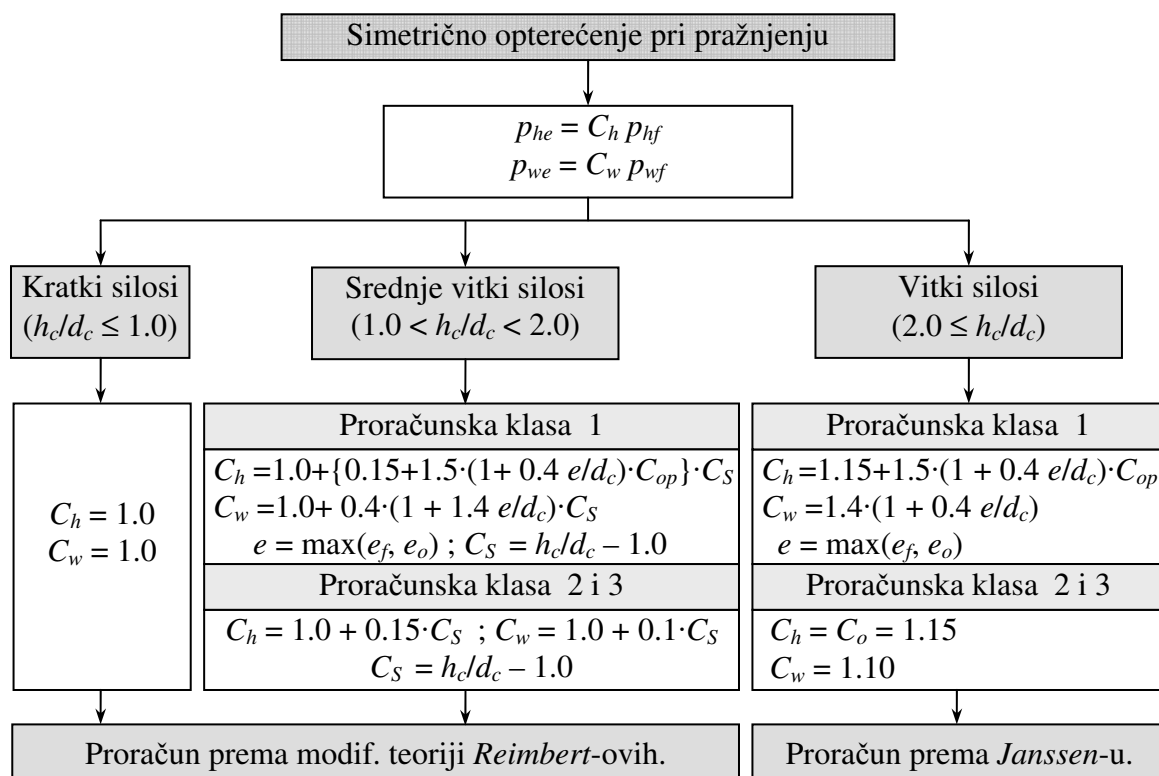
Faktori povećanja simetričnih opterećenja pri pražnjenju, C_h i C_w , prikazani su na sl. 71, a njihove vrednosti zavise od klase i vitkosti silosa. Kod silosa *proračunske klase 1*, povećane vrednosti ovih koeficijenata treba da obuhvate i uticaje od nesimetričnih opterećenja pri pražnjenju silosa, kako se kod ove klase taj proračun isključuje iz analize. Kod srednje vitkih i vitkih silosa kod faktora povećanja C_h i C_w , uvodi se uticaj ekscentričnosti uskladištene mase, koja se uzima kao veća vrednost između ekscentriciteta pri punjenju e_f i ekscentriciteta pri pražnjenju e_o (e_f i e_o su prikazani na sl. 68).

2.10.2.3 Nesimetrična opterećenja na zidovima silosa

Nesimetrična opterećenja na vertikalne zidove silosa sa malim ekscentricitetom pri punjenju i pražnjenju materijala se predstavljaju sa **lokalnim opterećenjem** (*patch load*), sl. 72. Ova opterećenja se predstavljaju u obliku lokalnog horizontalnog opterećenja p_p na unutrašnjoj površini zidova silosa. Antimetrično opterećenje, prikazano na sl. 72 (a), se primenjuje kod tankozidnih ćelija (čelični silosi), a opterećenje na sl. 72 (b) kod drugih tipova silosa (betonski silosi). Opterećenje na sl. 72 (b) je slobodno opterećenje koje može biti na bilo kojoj poziciji po visini i obimu vertikalnog zida silosa. Ova opterećenja su istog oblika i za stanje punjenja i za stanje pražnjenja silosa. Lokalno opterećenje deluje na delu površine zida, koji u razvijenom obliku predstavlja kvadratnu površinu sa stranicama dužine s (koja iznosi $0.2 d_c$). Na sl. 72 su prikazana **lokalna opterećenja pri punjenju silosa** (sadrže indeks f), a ista slika odgovara i za **lokalna opterećenja pri pražnjenju** (samo se indeks f zamenjuje sa indeksom e kod opterećenja na sl. 72).

Za silose *proračunske klase 1*, nesimetrična opterećenja se uvode kroz povećanje simetričnog opterećenja sa faktorom povećanja C . Kod silosa *proračunske klase 2*, nesimetrična opterećenja se mogu alternativno predstaviti sa uvećanim simetričnim opterećenjem sa povećanjem koje zavisi od veličine lokalnog nesimetričnog opterećenja.

Lokalno opterećenje pri punjenju silosa, oblika prema sl. 72, predstavlja slučajno asimetrično dodatno opterećenje koje je povezano sa ekscentricitetom i imperfekcijama pri punjenju i pražnjenju silosne ćelije.



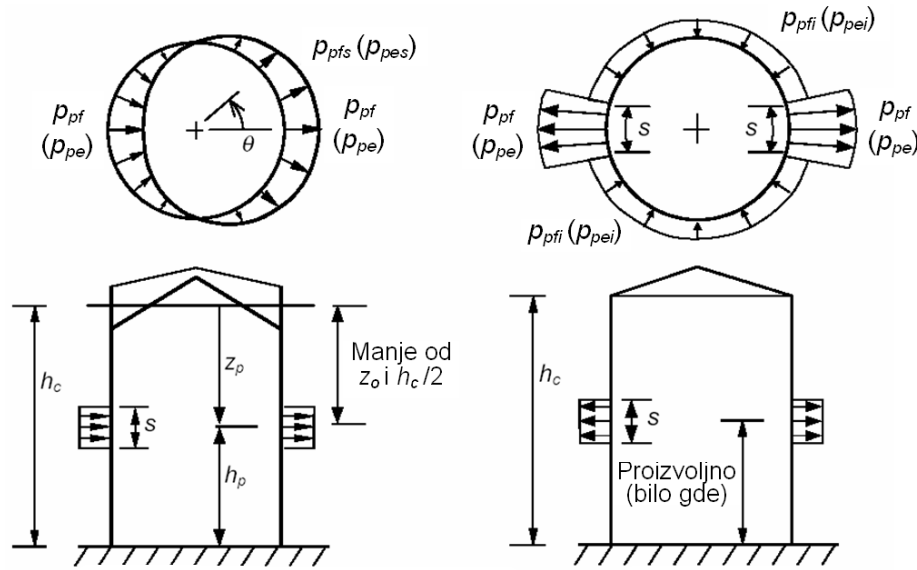
Sl. 71 Shema proračuna simetričnog opterećenja na vertikalni zid silosa pri pražnjenju.

Tabela 13. Izrazi za određivanje simetričnog opterećenja na zidove ćelije pri punjenju.

Izrazi za opterećenje prema modif. teoriji <i>Reimbert</i> -ovih:	Izrazi prema <i>Janssen</i> -u:
$p_{hf}(z) = p_{ho} Y_R(z)$ (2.105) _R	$p_{hf}(z) = p_{ho} Y_J(z)$ (2.105) _J
$p_{wf}(z) = \mu_w p_{hf}(z) = \mu_w p_{ho} Y_R(z)$ (2.106) _R	$p_{wf}(z) = \mu_w p_{hf}(z)$ (2.106) _J
$p_{vf}(z) = \gamma z_V$ (2.107) _R	$p_{vf}(z) = \frac{p_{hf}(z)}{K} = \frac{p_{ho}}{K} Y_J(z)$ (2.107) _J
$p_{ho} = \gamma K z_o = \gamma \frac{1}{\mu_w} \frac{A}{U}$ (2.108) _R	$p_{ho} = \gamma K z_o$ (2.108) _J
$z_o = \frac{1}{K} \frac{A}{\mu_w U}$ (2.109) _R	$z_o = \frac{1}{K} \frac{A}{\mu_w U}$ (2.109) _J
$Y_R(z) = \left(1 - \left\{ \left(\frac{z-h_o}{z_o-h_o} \right) + 1 \right\}^n \right)$ (2.110) _R	$Y_J(z) = 1 - e^{-z/z_o}$ (2.110) _J
$z_V = h_o - \frac{1}{(n+1)} \left(z_o - h_o - \frac{(z+z_o-2h_o)^{n+1}}{(z-h_o)^n} \right)$ (2.111) _R	
$n = -(1 + \tan \phi_r) \cdot (1 - h_o / z_o)$ (2.112) _R	
$h_o = \frac{r}{3} \tan \phi_r$ za kružnu ćeliju poluprečnika r (2.113) _R	
$h_o = \frac{d_c}{4} \tan \phi_r$ za pravougaonu ćeliju (2.114) _R	

Ovo opterećenje je predmet analize kod silosa *proračunske klase 2 i 3*, a kod silosa *proračunske klase 1*, ovaj oblik opterećenja silosa se ne razmatra. Veličina lokalnog opterećenja pri punjenju p_{pf} se određuje prema maksimalnom ekscentricitetu vrha nasipne kupe materijala pri punjenju ćelije, koji je označen sa e_f , a kod pražnjenja silosa opterećenje p_{pe} zavisi i od ekscentričnosti otvora za pražnjenje e_o (sl. 68 (b)). Referentna vrednost lokalnog opterećenja pri punjenju, odnosno pražnjenju, p_{pf} tj. p_{pe} , se uzima u proračunima u obliku:

$$p_{pf} = C_{pf} p_{hf} \quad \text{i} \quad p_{pe} = C_{pe} p_{he} \quad (2.115)$$



a) silos sa tankim zidom (metalni silos)

b) silos sa debljim zidom (betonski silos)

Sl. 72 Lokalno opterećenje vertikalnog zida silosa - bočni izgled i izgled u osnovi (patch load). Lokalno opterećenje pri punjenju (indeks f) i pri pražnjenju (indeks e) silosa.

$$C_{pf} = \max \left\{ \begin{array}{l} 0.21 \cdot C_{op} \cdot [1 + 2 E_f^2] \cdot (1 - e^{-1.5[(h_c/d_c)-1]}) \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2.116)$$

$$C_{pe} = \left\{ \begin{array}{l} 0.42 \cdot C_{op} \cdot [1 + 2 E_e^2] \cdot (1 - e^{-1.5[(h_c/d_c)-1]}) \dots \dots \dots \text{za } h_c/d_c > 1.2 \\ \max \left\{ \begin{array}{l} 0.42 \cdot C_{op} \cdot [1 + 2 E_e^2] \cdot (1 - e^{-1.5[(h_c/d_c)-1]}) \\ 0.272 \cdot C_{op} \cdot [(h_c/d_c) - 1 + E_e] \\ 0 \end{array} \right\} \dots \dots \dots \text{za } h_c/d_c \leq 1.2 \end{array} \right\} \quad (2.117)$$

gde su:

$$E_f = 2 e_f / d_c \quad (2.118)$$

$$E_e = 2 e / d_c \quad (2.119)$$

$$e = \max(e_f, e_o) \quad (2.120)$$

e_f = maksimalni ekscentricitet površine nasipne kupe tokom punjenja ćelije (sl. 68 (b));

- e_o = ekscentricitet centra ispusta – otvora za pražnjenje (sl. 68 (b));
 p_{hf} i p_{he} = lokalna vrednost bočnog pritiska pri punjenju, tj. pražnjenju, prema izrazima u (2.115), na visini na kojoj se nanosi lokalno opterećenje;
 C_{op} = referentni faktor materijala za lokalno opterećenje (ovde u tabeli 10, a u EC 1-4 u tabeli E1 aneksa E).

U gornjim izrazima uvedeni su parametri E_f (E za stanje punjenja) i E_e (E za stanje pražnjenja), koji su u EC1-4 obuhvaćeni samo sa jednom oznakom E , ali su posebno definisani za stanje punjenja i stanje pražnjenja. Ovde prikazani izrazi za C_{pf} i C_{pe} su matematička interpretacija relevantnih odredbi iz EC1-4.

Potrebno je napomenuti da se kod pražnjenja silosa sa relativno velikim ekscentricitetom otvora za pražnjenje, pored ove analize lokalnog opterećenja, koristi i komplikovaniji slučaj nesimetričnog opterećenja koji se definiše kao poseban slučaj opterećenja pri analizi silosne konstrukcije. Prelaz na kompleksniju analizu asimetričnog opterećenja pri velikom ekscentričnom pražnjenju se posebno zahteva kod *vitkih silosa proračunske klase 2 i 3*, i to ako je ispunjen bar jedan od sledeća dva uslova:

- ekscentricitet ispusta e_o prelazi kritičnu vrednost $e_{o,cr} = 0.25 d_c$;
- maksimalni ekscentricitet pri punjenju e_f prelazi kritičnu vrednost $e_{f,cr} = 0.25 d_c$ za silose vitkosti veće od granične vrednosti $(h_c/d_c)_{lim} = 4.0$.

Visina pojasa (s) na koju se nanosi lokalno opterećenje (sl. 72), uzima se da iznosi:

$$s = \pi d_c / 16 \cong 0.2 \cdot d_c \quad (2.121)$$

Lokalno opterećenje se dosledno odnosi samo na normalni (bočni) pritisak uskladištenog materijala. Pri projektovanju se ne razmatra promena opterećenja od trenja materijala uzrokovana promenom normalnog pritiska usled dodatnog lokalnog opterećenja. Oblik lokalnog opterećenja pri punjenju i pražnjenju zavisi od forme silosne konstrukcije. U EC 1-4, razmatraju se sledeće forme silosnih konstrukcija za koje se daju detaljnija uputstva za određivanje lokalnog opterećenja:

- silosi kružne osnove sa debljim zidovima, prema § 2.10.2.3.1 (*betonski silosi*);
- silosi kružne osnove sa tankim zidovima, prema § 2.10.2.3.2 (*metalni silosi*);
- silosi koji nisu kružne osnove, prema § 2.10.2.3.3.

2.10.2.3.1 Silosi kružne osnove sa debljim zidovima (betonski silosi)

Za kružne ćelije sa relativno debljim zidovima (*betonski silosi*), dodatno lokalno opterećenja pri punjenju i pražnjenju, p_{pf} i p_{pe} , se uzima da deluje na dve suprotne kvadratne površine na zidu silosa sa dužinom strane s , prema izrazu (2.121) (horizontalna dužina s se lučno meri kod zakrivljene površine zida) (sl. 72 (b)).

Kao dopuna dodatnog lokalnog opterećenja p_{pf} (tj. p_{pe}), preostali deo obima silosa, na istom pojasu po visini zida (sl. 72 (b)), treba izložiti delovanju dopunskog lokalnog opterećenja p_{pfi} (tj. p_{pei}), sa intenzitetom prema sledećem izrazu:

$$p_{pfi} = p_{pf}^{1/7} \quad \text{i} \quad p_{pei} = p_{pe}^{1/7} \quad (2.122)$$

Lokalno opterećenje kod betonskih silosa (sl. 72 (b)) se definiše sa:

- p_{pf} i p_{pe} = dodatnim lokalnim pritiscima pri punjenju, odnosno pri pražnjenju; i
- p_{pfi} i p_{pei} = dopunskim lokalnim pritiscima pri punjenju, odnosno pri pražnjenju.

Veličina i opseg delovanja dopunskog lokalnog opterećenja, koje je upravno na površinu zida i usmereno prema unutrašnjosti silosa, p_{pfi} (tj. p_{pei}), su izabrani tako da prosečan pritisak po ukupnom obimu ćelije na datom pojasu lokalnog opterećenja ostaje nepromenjen.

Lokalno opterećenje pri punjenju i pražnjenju, može da deluje na bilo kojem delu zida silosa. U nekim posebnim slučajevima uticaji od ovog opterećenja se mogu obuhvatiti sa nešto jednostavnijim postupkom. U vezi s tim, prema EC1-4, kod (betonskih) silosa sa debljim zidovima *proračunske klase 2* može se koristiti uprošćeni postupak, koji se može opisati na sledeći način.

Za referentni najnepovoljniji raspored opterećenja se uzima delovanje lokalnog opterećenja na sredini visine silosa i ovi rezultati se koriste za dalje određivanje aproksimativnih vrednosti rezultujućih napona po ukupnoj visini vertikalnog zida. Procentualno povećanje membranskih (prstenastih) napona u zidu na referentnom nivou se uzima za skaliranje svih rezultujućih membranskih (prstenastih) napona po vertikalnom zidu. Proračun rezultujućih napona od savijanja na nekom posmatranom nivou se može odrediti skaliranjem vrednosti napona od savijanja na referentnom nivou sa odnosom pritisaka pri punjenju na posmatranom nivou naspram pritisaka pri punjenju na referentnom nivou. Skaliranje rezultujućih napona od savijanja se uzima sa odnosom $p_{hf}(z) / p_{hf}(z = h_c / 2)$.

2.10.2.3.2 Silosi kružne osnove sa tanjim zidovima (metalni silosi)

Za tankozidne silose kružne osnove ($d_c / t > 200$), lokalno opterećenje pri punjenju ili pražnjenju treba uzeti da deluje preko ukupne visine s , date sa izrazom (2.121), ali sa pružanjem od maksimalnog povećanja pritiska na jednoj strani, p_{pf} (tj. p_{pe}), do maksimalnog smanjenja pritiska, p_{pf} (tj. p_{pe}), na drugoj strani silosnog zida (sl. 72 (a)). Promenu po obimu zida treba uzeti u obliku:

$$p_{pfs} = p_{pf} \cos \theta \quad \text{i} \quad p_{pes} = p_{pe} \cos \theta \quad (2.123)$$

gde su:

p_{pf} i p_{pe} = lokalni pritisak kod punjenja i pražnjenja, prema (2.115),

θ = posmatrani ugao kao obimna koordinata (sl. 72 (a)).

Ukupna horizontalna sila F_{pf} (tj. F_{pe}) od lokalnog opterećenja pri punjenju ili pražnjenju kod kružnih ćelija se određuje kao:

$$F_{pf} = \frac{\pi}{2} s d_c p_{pf} \quad \text{i} \quad F_{pe} = \frac{\pi}{2} s \cdot d_c \cdot p_{pe} \quad (2.124)$$

Kod zavarenih silosa *proračunske klase 2*, lokalno opterećenje se može uzeti da deluje na dubini z_p ispod ekvivalentne površine uskladištenog materijala, gde se za z_p uzima manja vrednost od sledeće dve:

$$z_p = z_o \quad \text{i} \quad z_p = 0.5 h_c \quad (2.125)$$

gde je h_c visina vertikalnog zidnog segmenta (sl. 68 (a)).

Kod metalnih silosa, koji su izvedeni sa zakivcima ili sa zavrtnjevima, *proračunske klase 2*, lokalno opterećenje treba razmatrati tako da može da deluje na bilo kojoj dubini po visini silosa. Pri tome, može se pojednostaviti proračun sa tim da se normalni pritisci od uskladištenog materijala na zidove silosa, uzimaju sa istim procentualnim povećanjem po ukupnoj visini silosa (opisano kao *postupak zamenjujućeg povećanja pritiska*).

2.10.2.3.3 Silosi koji nisu kružne osnove

Za silose *proračunske klase 2 i 3*, koji nisu kružne osnove, lokalno opterećenje pri punjenju ili pražnjenju koje reprezentuje nesimetrično opterećenje, može se predstaviti kao uvećano simetrično opterećenje. Lokalno opterećenje (pojasno opterećenje), deluje na bilo kojem nivou zida, a raspoređeno je po zidu na pojasu visine s (sl. 72 (b)), koja je data sa izrazom (2.121).

Veličina uniformnog lokalnog opterećenja $p_{pf,nc}$ i $p_{pe,nc}$, respektivno pri punjenju, odnosno pražnjenju, kod silosa koji nisu kružne osnove, je:

$$p_{pf,nc} = 0.36 p_{pf} \quad \text{i} \quad p_{pe,nc} = 0.36 p_{pe} \quad (2.126)$$

gde su p_{pf} i p_{pe} referentna lokalna opterećenja, respektivno pri punjenju i pražnjenju prema (2.115).

Veličina i raspored uniformnog opterećenja $p_{pf,nc}$ i $p_{pe,nc}$, izabrani su tako da momenti savijanja proizvedeni kod pravougaonog silosa, aproksimativno odgovaraju momentima savijanja od delovanja lokalnog opterećenja (*patch load*), kada je ono postavljeno u sredini zida.

2.10.2.4 Zamena lokalnog opterećenja sa uniformnim povećanjem pritisaka

Za silose *proračunske klase 2*, dejstvo dodatnog lokalnog opterećenja, sa kojim se uvode asimetrična opterećenja pri punjenju i pražnjenju silosa (opisano u prethodnom poglavlju), može se zameniti uniformnim povećanjem simetričnog opterećenja.

Ova supstitucija opterećenja, kod kružnih ćelija, sprovodi se sa sledećim postupkom pod uslovom da su vertikalni zidovi ukrućeni pri dnu i na vrhu, sa odgovarajućom nosećom konstrukcijom ili krutim prstenom.

Uključujući i ovo zamenjujuće opterećenje, kod silosa sa debljim zidovima (*betonski silosi*), rezultujući *ukupni* simetrični horizontalni pritisci pri punjenju ($p_{hf,u}$) i pražnjenju ($p_{he,u}$) se mogu odrediti kao:

$$p_{hf,u} = p_{hf} (1 + \zeta \cdot C_{pf}) \quad \text{i} \quad p_{he,u} = p_{he} (1 + \zeta \cdot C_{pe}) \quad (2.127)$$

$$\zeta = 0.5 + 0.01 (d_c / t) \geq 1.0 \quad (2.128)$$

gde su:

p_{hf} i p_{he} = horizontalni pritisci pri punjenju i pražnjenju prema *Janssen*-ovoj teoriji,

C_{pf} i C_{pe} = faktori lokalnog opterećenja pri punjenju i pražnjenju, (2.116) i (2.117).

Za tankozidne silose kružne osnove (*metalni silosi*), rezultujući *ukupni* simetrični horizontalni pritisci pri punjenju ($p_{hf,u}$) i pražnjenju ($p_{he,u}$), i rezultujuća opterećenja usled trenja materijala o zidove silosa pri punjenju ($p_{wf,u}$) i pražnjenju ($p_{we,u}$) silosa, se mogu odrediti kao:

$$p_{hf,u} = p_{hf} (1 + 0.5 \cdot C_{pf}) \quad \text{i} \quad p_{wf,u} = p_{wf} (1 + C_{pf}) \quad (2.129)$$

$$p_{he,u} = p_{he} (1 + 0.5 \cdot C_{pe}) \quad \text{i} \quad p_{we,u} = p_{we} (1 + C_{pe}) \quad (2.130)$$

gde su p_{wf} i p_{we} opterećenja od trenja materijale o zidove silosa pri punjenju i pražnjenju silosa (tabela 13 - izrazi prema *Janssen*-u).

2.10.2.5 Opterećenja pri pražnjenju kružnih ćelija sa velikim ekscentricitetom

Nesimetrična opterećenja na vertikalne zidove silosa pri pražnjenju kod silosa sa velikim ekscentricitetom ispusta – otvora za pražnjenje, predstavljaju se sa posebno definisanim nesimetričnim rasporedom horizontalnih pritisaka p_h i opterećenja od trenja p_w koji deluju po celoj visini ćelije silosa.

Prelaz na kompleksniju analizu asimetričnog opterećenja pri velikom ekscentričnom pražnjenju (isticanje ekscentričnim protočnim kanalom - *eccentric pipe flow channel*) se zahteva kod vitkih silosa *proračunske klase 2 i 3*, i to ako je ekscentricitet ispusta e_o veći od kritične vrednosti $e_{o,cr} = 0.25d_c$.

Pored toga, za iste klase silosa, ovaj slučaj opterećenja treba analizirati i kod silosa sa velikim ekscentricitetom usipne mase, kada je maksimalni ekscentricitet pri punjenju e_f veći od kritične vrednosti $e_{f,cr} = 0.25d_c$ pri čemu je vitkost silosa veća od granične vrednosti $(h_c/d_c)_{lim} = 4.0$. I kod ovih silosa se može javiti isticanje ekscentričnim protočnim kanalom, pa je potrebno analizirati ovaj posebni slučaj nesimetričnog opterećenja.

Nesimetrično opterećenje ove vrste, se za silose *proračunske klase 2 i 3* razmatra kao poseban slučaj opterećenja, odvojeno od uobičajenog slučaja analize simetričnog fiksnog i dodatnog lokalnog slobodnog opterećenja pri pražnjenju silosa.

Ova posebna analiza se zahteva i kod kratkih i srednje vitkih silosa *proračunske klase 2 i 3*, ako je ekscentricitet ispusta e_o veći od kritične vrednosti $e_{o,cr} = 0.25d_c$.

Pri analizi silosa *proračunske klase 2*, dozvoljen je uprošćeni postupak određivanja ovog opterećenja, u odnosu na postupak proračuna pri analizi silosa *proračunske klase 3*.

2.10.2.5.1 Metoda proračuna za silose proračunske klase 2

Kod ovog slučaja proračunskog opterećenja potrebno je odrediti geometriju protočnog kanala (*flow channel geometry*), a potom opterećenja na zidove silosa (sl. 73 i sl. 74). Geometrija protočnog kanala za silose *proračunske klase 2*, sračunava se samo za jednu dimenziju protočnog kanala u kontaktu sa zidom silosa, koja se određuje sa uglom $\theta_c = 35^\circ$ (prema sl. 74).

Pritisci na vertikalnim zidovima pri ekscentričnom pražnjenju se određuju na sledeći način. U zoni protoka materijala (sl. 74) horizontalni pritisci na zid silosa su:

$$p_{hce} = 0 \quad (2.131)$$

Horizontalni pritisci na dubini z na vertikalnom zidu u zoni statičnog materijala i opterećenje od trenja o zidove na dubini z (po obimu zida izvan zone protočnog kanala, sl. 74), određuju se prema sledećim izrazima u odnosu na p_{hf} (pritisak pri punjenju silosa) i p_{wf} (opterećenje od trenja o zidove pri punjenju silosa):

$$p_{hse} = p_{hf} \quad \text{i} \quad p_{hae} = 2 p_{hf} \quad (2.132)$$

$$p_{wse} = p_{wf} \quad \text{i} \quad p_{wae} = 2 p_{wf} \quad (2.133)$$

Ova uprošćena metoda se zasniva na analizi modela tzv. praznog “pacovskog” kanala, i daje konzervativne uticaje. Prikazana metoda proračuna se može zameniti složenijom metodom koja se primenjuje kod silosa *proračunske klase 3*.

2.10.2.5.2 Metoda proračuna za silose proračunske klase 3

Geometrija protočnog kanala i njegova lokacija se određuje na osnovu geometrije silosa, položaja materijala pri pražnjenju i svojstava uskladištenog materijala.

Kada materijal protiče kroz protočni kanal za koji je poznata geometrija i lokacija, pri proračunu treba uvesti ove poznate podatke. Međutim, kada nije poznat položaj protočnog kanala pri pražnjenju, potrebno je uvesti u proračun najmanje tri vrednosti odnosa poluprečnika protočnog kanala r_c i poluprečnika r kružne ćelije silosa ($r = d_c/2$), kako bi se obuhvatile moguće varijacije dimenzije protočnog kanala u toku vremena.

Ove tri preporučene vrednosti u EC1-4 su:

$$r_c = 0.25 r \quad ; \quad r_c = 0.40 r \quad \text{i} \quad r_c = 0.60 r . \quad (2.134)$$

Lokacija protočnog kanala se određuje preko njegovog ekscentriciteta e_c (sl. 74), u odnosu na osu silosa, koji se određuje prema sledećem izrazu:

$$e_c = r \cdot \left[\eta \cdot (1 - G) + (1 - \eta) \cdot \sqrt{1 - G} \right] \quad (2.135)$$

gde su:

$$G = \frac{r_c}{r} \quad (2.136)$$

$$\eta = \frac{\mu_w}{\tan \phi_i} \quad (2.137)$$

μ_w = donja vrednost koeficijenta trenja za vertikalni zid,

ϕ_i = gornja vrednost ugla unutrašnjeg trenja uskladištenog materijala,

r_c = proračunski poluprečnik protočnog kanala, prema (2.134).

Pri primeni gornjih izraza, mora biti ispunjen fizički uslov da je $\phi_w \leq \phi_i$, jer bi u suprotnom slučaju, materijal klizio unutar sloja materijala uz sam zid. Odavde sledi uslov da je $\eta \leq 1$.

Lučna dužina zida ćelije u kontaktu sa protočnim kanalom, određuje se kao dužina koja se obuhvata na zidu sa uglom $\theta = \pm \theta_c$. Ugao θ_c se određuje prema izrazu:

$$\cos \theta_c = \frac{r^2 + e_c^2 - r_c^2}{2 r e_c} \quad (2.138)$$

Lučna dužina zida ćelija u kontaktu sa protočnim kanalom, U_{wc} , iznosi:

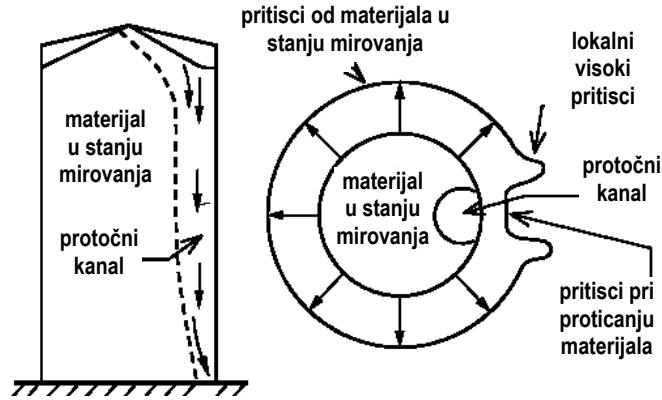
$$U_{wc} = 2 \theta_c r \quad (2.139)$$

Lučna dužina kontakta između protočnog kanala i statičnog dela mirnog materijala u ćeliji, U_{sc} , iznosi:

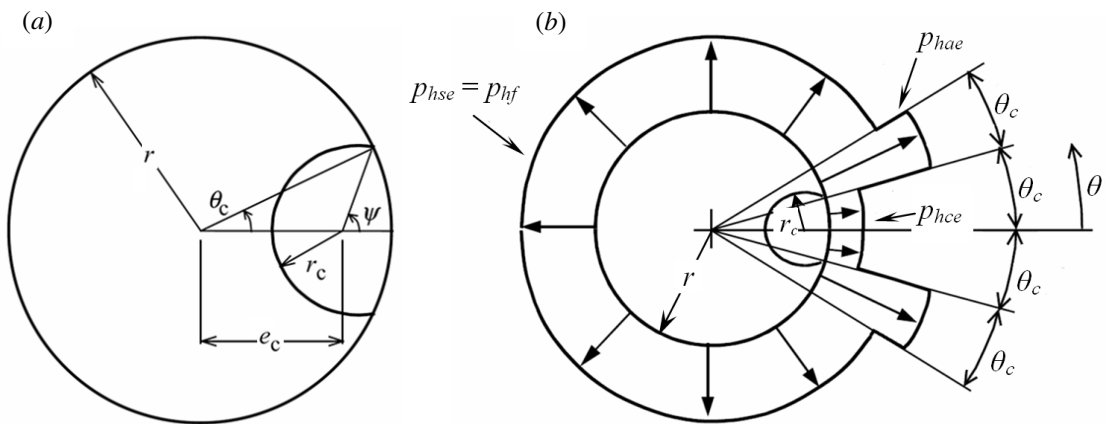
$$U_{sc} = 2 r_c (\pi - \psi) \quad (2.140)$$

gde se ugao ψ određuje na osnovu izraza:

$$\sin \psi = \frac{r_c}{r} \sin \theta_c \quad (2.141)$$



Sl. 73 Ekscentrično pražnjenje sa protočnim kanalom i raspodelom opterećenja u poprečnom preseku.



Sl. 74 Geometrija protočnog kanala (a) i raspodela horizontalnih pritisaka kod kružne ćelije silosa u horizontalnom preseku ćelije (b).

Površina poprečnog preseka protočnog kanala A_c , određuje se kao:

$$A_c = (\pi - \psi) r_c^2 + \theta_c r^2 - r r_c \sin(\psi - \theta_c) \quad (2.142)$$

U prethodnim izrazima, uglovi θ_c i ψ se mere u [rad]-ima.

Horizontalni pritisci materijala na vertikalne zidove u zoni protoka materijala (sl. 74), zavise od dubine z od ekvivalentne površine uskladištenog materijala, i određuju se na osnovu izraza:

$$p_{hce} = p_{hco} (1 - e^{-z/z_{oc}}) \quad (2.143)$$

a opterećenje od trenja materijala o zid na nivou z prema izrazu:

$$p_{wce} = \mu_w \cdot p_{hce} = \mu_w \cdot p_{hco} (1 - e^{-z/z_{oc}}) \quad (2.144)$$

pri čemu je:

$$p_{hco} = \gamma \cdot K \cdot z_{oc} \quad (2.145)$$

$$z_{oc} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{A_c}{U_{wc} \cdot \mu_w + U_{sc} \cdot \tan \phi_i} \right) \quad (2.146)$$

gde je:

- μ_w = koeficijent trenja za vertikalni zid,
 K = odnos bočnog pritiska za dati materijal.

Pritisaci na dubini z , na vertikalnom delu zida dalje od protočnog kanala, kao i opterećenje od trenja materijala o zid na nivou z , u zoni gde uskladišteni materijal ostaje statičan (sl. 74) treba uzeti kao odgovarajuće vrednosti ovih opterećenja pri punjenju silosa:

$$p_{hse} = p_{hf} \quad \text{i} \quad p_{wse} = p_{wff} \quad (2.147)$$

Povećani pritisak p_{hae} se javlja na delovima vertikalnog zida uz samu zonu isticanja materijala kroz protočni kanal (sl. 74). Horizontalni pritisak p_{hae} , i opterećenje trenjem p_{wae} se menjaju po dubini materijala z , i uzimaju se u obliku izraza:

$$p_{hae} = 2 p_{hf} - p_{hce} \quad \text{i} \quad p_{wae} = \mu_w \cdot p_{hae} \quad (2.148)$$

2.10.2.6 Opterećenje levka i dna silosa

Razmatraju se opterećenja za sledeće tipove silosnih levaka: ravna dna (*flat bottoms*), strme levke (*steep hoppers*) i plitke levke (*shallow hoppers*).

Opterećenja na zidove levaka se određuju u zavisnosti od strmosti levka, koje su definisane sledećim klasama:

- *ravna dna* su dna sa uglom nagiba, α , u odnosu na horizontalu manjim od 5° ,
- *strmi levci* su levci koji nisu klasifikovani kao ravna dna i plitki levci,
- *plitki levci* su levci kod kojih je zadovoljen sledeći kriterijum (videti i sl. 75):

$$\tan \beta < \frac{1-K}{2\mu_{wh}} \quad (2.149)$$

gde je :

- K = donja karakteristična vrednost odnosa bočnog pritiska za vertikalni zid,
 β = polovina centralnog ugla levka ($= 90^\circ - \alpha$),
 μ_{wh} = donja karakteristična vrednost koeficijenta trenja o levak.

Srednji vertikalni pritisak na prelazu vertikalnog zida u levak ili kod silosnog dna se određuje primenom izraza:

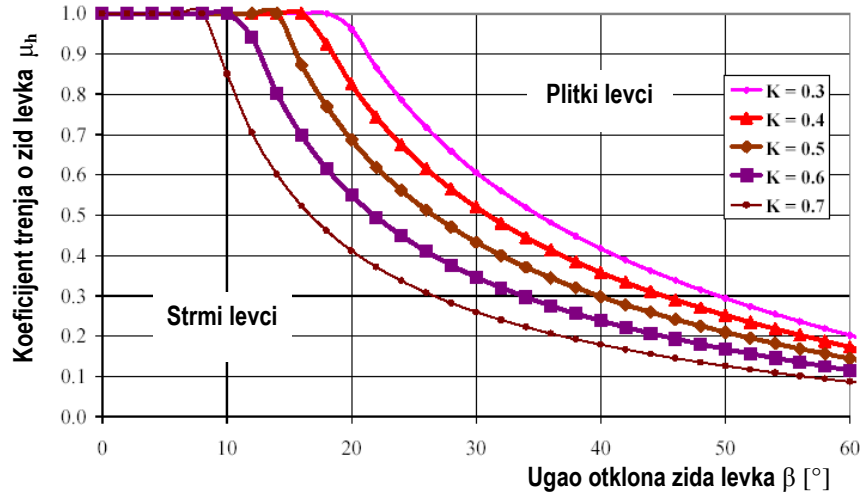
$$p_{vft} = C_b \cdot p_{vf} \quad (2.150)$$

gde je:

- p_{vf} = vertikalni pritisak pri punjenju silosa prema odgovarajućem izrazu u tabeli 13, saglasno sa primenjenom teorijom proračuna, za nivo $z = h_c$, pri čemu se koriste karakteristične vrednosti materijala koje proizvode računski maksimalno opterećenje u levku,
 C_b = faktor uvećanja opterećenja dna.

Za silose *proračunske klase 2 i 3*, uzima se vrednost $C_b = 1.0$, a za silose *proračunske klase 1*, uzima se $C_b = 1.3$. U slučajevima da uskladišteni materijal može proizvesti uslove koji odgovaraju stanju dinamičkog opterećenja, uzima se $C_b = 1.2$ za silose *proračunske klase 2 i 3*, odnosno $C_b = 1.6$ za silose *proračunske klase 1*.

Uslovi za pojavu dinamičkog opterećenja se mogu pojaviti kod materijala sa većom kohezijom ili materijala kod kojeg se javlja fizičko povezivanje materijala (npr. kod skladištenja cementnog klinkera).



Sl. 75 Granice između strmih i plitkih levaka, prema EC1-4.

Za sve uslove u levku, prosečan vertikalni napon u uskladištenom materijalu na visini x iznad temena levka (sl. 76) se određuje na osnovu izraza:

$$p_v = \left(\frac{\gamma h_h}{n-1} \right) \left\{ \left(\frac{x}{h_h} \right) - \left(\frac{x}{h_h} \right)^n \right\} + p_{vft} \left(\frac{x}{h_h} \right)^n \quad (2.151)$$

pri čemu je:

$$n = S \cdot (F \cdot \mu_{wh\text{eff}} \cdot \cot \beta + F) - 2 \quad (2.152)$$

$S = 2$ za konusne i piramidalne levke,

$S = 1$ za linijske levke sa vertikalnim krilnim zidovima,

$S = (1 + b/a)$ za levke sa pravougaonom osnovom,

gde je:

γ = gornja karakteristična vrednost zapreminske težine uskladištenog materijala (γ_u),

h_h = visina između temena levka i nivoa tranzicije,

x = vertikalna koordinata od temena levka naviše,

$\mu_{wh\text{eff}}$ = koeficijent efektivnog ili mobilisanog trenja o levak koji zavisi od tipa levka,

S = koeficijent oblika levka,

F = karakteristična vrednost odnosa pritisaka na levku,

β = polovina centralnog ugla levka ($= 90^\circ - \alpha$), ili ugao najvećeg nagiba kod piramidalnih levaka kvadratne ili pravougaone osnove,

p_{vft} = prosečni vertikalni napon u uskladištenom materijalu u nivou tranzicije pri punjenju,

a = dužina levka pravougaone osnove (sl. 68 (d)),

b = širina levka pravougaone osnove (sl. 68 (d)).

Određivanje vrednosti odnosa pritiska na levku F se uzima u odgovarajućem obliku u zavisnosti od tipa levka, kao i toga da li se posmatra stanje punjenja ili stanje pražnjenja silosa.

2.10.2.6.1 Ravna dna

Vertikalni pritisci na ravno dno kod *vitkih silosa* (nagib $\alpha \leq 5^\circ$) se mogu uzeti kao uniformno opterećenje kod *vitkih silosa*. Ovo nije slučaj kod *kratkih i srednje vitkih silosa* (za ove silose pritisci se određuju po posebnoj proceduri).

Vertikalni pritisak kod *vitkih silosa* na ravno dno iznosi:

$$P_v = P_{vft} \quad (2.153)$$

gde je p_{vft} određen prema izrazu (2.150).

Vertikalni pritisak koji deluje na ravno dno u toku pražnjenja silosa se uzima da odgovara vertikalnom pritisku na kraju punjenju silosa (pun silos).

Kod *srednje vitkih i kratkih silosa*, vertikalni pritisak na ravno dno se određuje prema posebnom empirijskom postupku datom u EC1-4.

2.10.2.6.2 Strmi levci

Pri određivanju vertikalnog opterećenja primenom izraza (2.151) i (2.152) za slučajeve punjenja i pražnjenja silosa sa strmim levkom, za koeficijent efektivnog trenja se uzima vrednost:

$$\mu_{wh\text{eff}} = \mu_{wh} \quad (2.154)$$

gde je μ_{wh} donja karakteristična vrednost koeficijenta trenja o levak.

2.10.2.6.2.1 Opterećenja pri punjenju

Za određivanja vertikalnog opterećenja primenom izraza (2.151) i (2.152) za stanje punjenja silosa sa strmim levkom, koristi se parametar F prema sledećem izrazu:

$$F_f = 1 - \frac{b}{1 + \frac{\tan \beta}{\mu_{wh}}} \quad (2.155)$$

Parametar n u jednačini (2.151) se uzima u obliku:

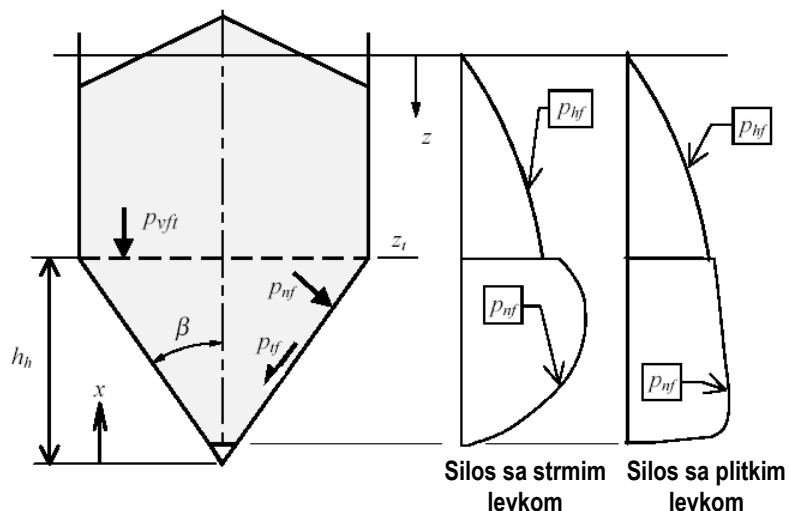
$$n = S \cdot (1 - b) \cdot \mu_{wh} \cdot \cot \beta \quad (2.156)$$

gde je b označen empirijski koeficijent, koji se uzima da iznosi $b = 0.2$.

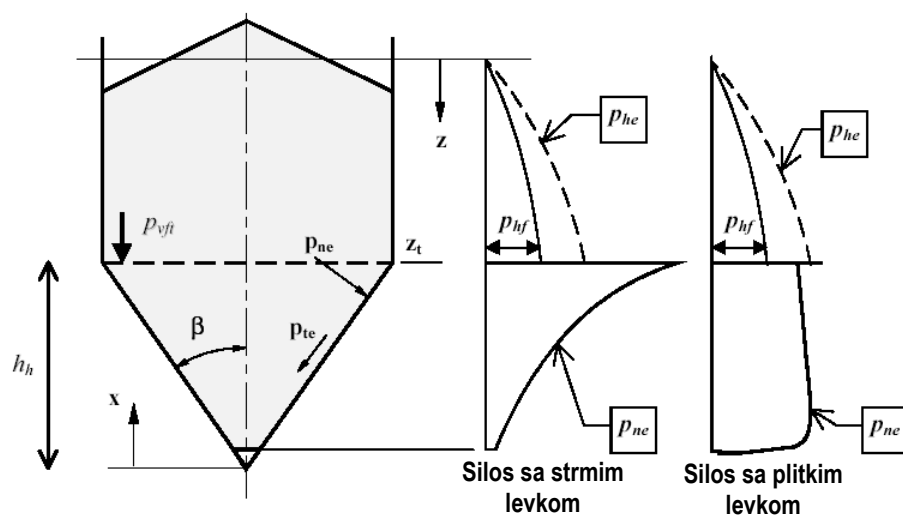
Normalni pritisak i opterećenje od trenja u posmatranoj tački strmog levka nakon punjenja silosa (sl. 76) se određuju na osnovu izraza:

$$p_{nf} = F_f \cdot p_v \quad \text{i} \quad p_{tf} = \mu_{wh} \cdot F_f \cdot p_v \quad (2.157)$$

gde je F_f dato izrazom (2.155).



Sl. 76 Raspodela pritiska pri punjenju silosa sa strmim i plitkim levkom.



Sl. 77 Raspodela pritiska pri pražnjenju silosa sa strmim i plitkim levkom.

2.10.2.6.2 Opterećenja pri pražnjenju

Pri pražnjenju silosa sa strmim levkom, pri primeni izraza (2.151) i (2.152), koristi se parametar F prema sledećem izrazu:

$$F_e = \frac{1 + \sin \phi_i \cos \varepsilon}{1 - \sin \phi_i \cos(2\beta + \varepsilon)} \quad (2.158)$$

kod kojeg je:

$$\varepsilon = \phi_{wh} + \arcsin \left\{ \frac{\sin \phi_{wh}}{\sin \phi_i} \right\} \quad (2.159)$$

$$\phi_{wh} = \arctan \mu_{wh} \quad (2.160)$$

gde je μ_{wh} donja karakteristična vrednost koeficijenta trenja o levak, a ϕ_i ugao unutrašnjeg trenja uskladištenog materijala. Napominje se da mora biti ispunjen uslov da je $\phi_{wh} \leq \phi_i$, kako materijal u drugom slučaju klizi unutar sloja uz zid levka.

Izraz za F_e (2.158), zasnovan je na uprošćenoj teoriji Walker-a za pritiske na levak pri pražnjenju silosa, koja je data u ref. [325] i [326]. Alternativni izraz za F_e , u ovom slučaju, može se uzeti prema kompleksnijoj teoriji Enstad-a, u obliku izraza (2.173).

Normalni pritisak i opterećenje od trenja u posmatranoj tački strmog levka pri pražnjenju silosa (sl. 77) se određuju na osnovu izraza:

$$p_{ne} = F_e \cdot p_v \quad \text{i} \quad p_{te} = \mu_{wh} \cdot F_e \cdot p_v \quad (2.161)$$

gde je F_e dato sa izrazom (2.158).

2.10.2.6.3 *Plitki levci*

Kod izraza (2.151) i (2.152), za slučajeve punjenja i pražnjenja silosa sa plitkim levkom, koeficijent trenja nije potpuno mobilisan, tako da se efektivni koeficijent trenja levka određuje prema izrazu:

$$\mu_{wh\text{eff}} = \frac{1-K}{2 \tan \beta} \quad (2.162)$$

gde je K donja karakteristična vrednost odnosa bočnog pritiska za vertikalni deo, izabran za određivanje maksimalnog opterećenja u levku (tabela 11), a β je polovina centralnog ugla levka.

2.10.2.6.3.1 *Opterećenje pri punjenju*

Pri određivanju vertikalnog opterećenja primenom izraza (2.151) i (2.152) za stanje punjenja silosa sa plitkim levkom, koristi se parametar F prema sledećem izrazu:

$$F_f = 1 - \frac{b}{1 + \frac{\tan \beta}{\mu_{wh\text{eff}}}} \quad (2.163)$$

Parametar n u jednačini (2.151) se uzima u obliku:

$$n = S \cdot (1-b) \cdot \mu_{wh\text{eff}} \cdot \cot \beta \quad (2.164)$$

gde je b empirijski koeficijent, koji iznosi $b = 0.2$.

Normalni pritisak i opterećenje od trenja u posmatranoj tački na zidu plitkog levka nakon punjenja silosa (sl. 76) se određuju na osnovu izraza:

$$p_{nf} = F_f \cdot p_v \quad \text{i} \quad p_{tf} = \mu_{wh\text{eff}} \cdot F_f \cdot p_v \quad (2.165)$$

gde je F_f dato izrazom (2.163).

2.10.2.6.3.2 *Opterećenje pri pražnjenju*

Kod plitkih levaka pri pražnjenju silosa (sl. 77), veličine normalnog pritiska i opterećenja od trenja se mogu uzeti da su indentični vrednostima pri punjenju silosa, prema (2.165).

2.10.2.6.4 *Alternativna pravila za opterećenja na levku ili ravnom dnu*

U okviru aneksa G u EC1-4 [38], date su alternativna pravila za određivanje opterećenja u levku. Sa ovim pravilima se uvodi kompletan alternativni postupak za određivanje opterećenja u levku pri punjenju i pražnjenju materijala, kao i jedno pravilo za zamenu parametra F_e kod proračuna opterećenja pri pražnjenju iz strmog levka.

Alternativni postupak propačuna opterećenja koja deluju na levak ili ravno dno, vodi poreklo od empirijskog postupka proračuna opterećenja iz prethodno važećih nemačkih normi DIN 1055-6 (1987) [61].

Napominje se da kod ovog empirijskog postupka nije zadovoljen uslov ravnoteže vertikalnih sila u levku (integracija opterećenja naspram težine materijala u levku), te o tome pri statičkoj analizi treba voditi računa.

2.10.2.6.4.1 Alternativni postupak za određivanje opterećenja na levku ili ravnom dnu

Alternativni postupak se odnosi na sračunavanje opterećenja na levku ili na ravno dno, pri stanju punjenja ili pražnjenja materijala. *Koeficijent povećanja opterećenja* dna silosa C_b , se uzima da u običnom proračunskom slučaju iznosi $C_b = 1.3$, dok u slučaju da uskladišteni materijal može proizvesti uslove koji odgovaraju pojavi dinamičkog opterećenja, uzima se da je $C_b = 1.6$.

Dinamička dejstva se mogu javiti pri problemima pojave kohezionog ili mehaničkog zasvođenja materijala u levku, odnosno kod materijala sa većom kohezijom, ili kod materijala koji su skloni samozaglavlivanju, kao što je npr. cementni klinker.

Vertikalno opterećenje pri punjenju kod ravnog i približno ravnog dna silosa (ugao nagiba dna $\alpha \leq 20^\circ$) sračunava se prema izrazu:

$$p_{vfb} = C_b \cdot p_{vf} \quad (2.166)$$

Normalni pritisci p_n na zid levka pri punjenju, pri uglu nagiba levka u odnosu na horizontalnu ravan veći od 20° , sračunavaju se prema izrazima:

$$p_n = p_{n3} + p_{n2} + (p_{n1} - p_{n2}) \frac{x}{l_h} \quad (2.167)$$

$$p_{n1} = p_{vft} \cdot (C_b \cdot \sin^2 \beta + \cos^2 \beta) \quad (2.168)$$

$$p_{n2} = p_{vft} \cdot C_b \cdot \sin^2 \beta \quad (2.169)$$

$$p_{n3} = 3.0 \frac{A}{U} \cdot \frac{\gamma \cdot K}{\sqrt{\mu_{wh}}} \cdot \cos^2 \beta \quad (2.170)$$

gde je:

β = ugao odklona zida levka od vertikale (sl. 78),

x = koordinata duž zida levka - dužina između 0 i l_h (sl. 78),

p_{n1} i p_{n2} = pritisci na levak od materijala (u ćeliji) iznad nivoa tranzicije,¹

p_{n3} = pritisak na levak od materijala u samom levku,

C_b = koeficijent povećanja opterećenja,

p_{vft} = vertikalni pritisak u nivou tranzicije nakon punjenja silosa, i

μ_{wh} = koeficijent trenja o levak (donja karakteristična vrednost).

K = koeficijent bočnog pritiska (u principu donja karakteristična vrednost, ali može biti i gornja)¹.

¹ Napomena: U prednactu EC 1-4 (u eng. verziji teksta) su obrnuto bile date definicije kod pritisaka p_{n1} i p_{n2} , i p_{n3} , što je bila greška, koja je ispravljena u konačnoj verziji [38].

Opisani alternativni postupak, je gotovo isti sa postupkom proračuna opterećenja na levku u našem standardu SRPS ISO 11697 od 1996 godine [291]; a odgovara i odredbama normi za silose DIN 1055-6 (1987) [61], gde je dodatno fiksno opterećenje p_s (*kick load*), bilo definisano na nešto drugačiji način - sa trougaonim opterećenjem na delu zida i levka u nivou tranzicije. U navedenim standardima (SRPS ISO 11697, odnosno ISO 11697 i DIN 1055-6 iz 1987. god.), kao i kod ranije verzije EC1-4 [220], ovde prikazani alternativni postupak za određivanje opterećenja u levku prema EN 1991-4:2006 [38], predstavlja osnovni i jedini postupak proračuna opterećenja na levak silosa.

2.10.2.6.4.2 Alternativni izraz za odnos napona F kod levka pri pražnjenju

Pri pražnjenju materijala iz *strmog levka*, prosečni vertikalni napon u materijalu se može odrediti koristeći alternativni izraz za parametar F_e , u sledećem obliku:

$$F_e = \frac{1}{1 + \mu_{wh} \cdot \cot \beta} \cdot \left[1 + 2 \cdot \left(1 + \frac{\sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i} \cdot \frac{\cos \varepsilon \cdot \sin(\varepsilon - \beta)}{\sin \beta} \right) \right] \quad (2.173)$$

pri čemu je:

$$\varepsilon = \beta + \frac{1}{2} \cdot \left[\phi_{wh} + \arcsin \left(\frac{\sin \phi_{wh}}{\sin \phi_i} \right) \right] \quad (2.174)$$

$$\phi_{wh} = \arctan \mu_{wh} \quad (2.175)$$

gde je μ_{wh} donja karakteristična vrednost za koeficijent trenja u levku, a ϕ_i je ugao unutrašnjeg trenja uskladištenog materijala.

Primena izraza (2.173) kod određivanja pritisaka u levku, se zasniva na primeni *Enstad*-ove teorije, objavljene u ref. [75] i [76], koja je mnogo kompleksnija od teorije *Walker*-a, date u ref. [325] i [326], kod koje se koristi izraz za F_e prema obliku (2.158) u § 2.10.2.6.2.2.

2.10.3 Faktor uvećanja opterećenja C

Stanje pri pražnjenju se obično obuhvata povećanjem pritisaka pri punjenju (koje se uzima kao aktivno stanje ili stanje mirovanja materijala) sa *faktorom natpritiska C* (naziv korišćen u SRPS ISO 11697 (1996) [291]), odnosno sa *faktorom uvećanja opterećenja C* (naziv korišćen u našem prevodu evropskog predstandarda ENV 1991-4:1995 (1996) [220]). Većina važećih normi koristi ovaj oblik za generalizaciju opterećenja, odnosno *dinamički pritisci pri pražnjenju* se uobičajeno određuju uvećanjem *statičkih pritisaka pri mirovanju* sa koeficijentom *preopterećenja C* .

2.10.3.1 – SRPS ISO 11697:1996

Konačna verzija ISO 11697 je objavljena 1995. god., a kod nas je pri prevodu korišćena u početku radna verzija iz 1990. god [125]. Kod nas je ovaj standard objavljen kao SRPS ISO 11697 (1996) [291]. Prema ovom standardu, za silose sa *masovnim protokom* materijala, pritisci pri pražnjenju se dobijaju multiplikujući pritiske pri mirovanju (određene prema *Janssen*-ovoj teoriji) sa koeficijentom *natpritiska C* . Ovo se primenjuje pri određivanju horizontalnih pritisaka i opterećenja od trenja na vertikalnim zidovima ćelije, odnosno za određivanje p_h i p_w , pri pražnjenju silosa.

U silosu gde se protočna zona seče sa zidom silosa (osnosno za sve vrste protoka sem unutrašnjeg protoka), računski pritisci pri pražnjenju moraju se dobiti množenjem opterećenja pri punjenju koeficijentom natpritiska C . Vrednost C se vezuje za odnos h/d silosa:

$$\begin{aligned} \text{za } h/d \leq 1.0 & \quad C = 1.0 \\ \text{za } 1.0 < h/d < 1.5 & \quad C = 1.0 + 0.7 (h/d - 1.0) \\ \text{za } h/d \geq 1.5 & \quad C = 1.35 \end{aligned} \quad (2.176)$$

Ove vrednosti se primenjuju samo za materijale navedene u tabeli 6. Za ostale materijale koristi se jednačina (2.177) (Priloga A u [291]).

U silosu sa *unutrašnjim protokom* materijala, računski pritisci prilikom pražnjenja uzimaju se da su jednaki pritiscima pri punjenju i uskladištenju.

Kod vitkih silosa sa *masovnim protokom* materijala ($h/d > 1.5$), uzima se da je $C = 1.35$. Za ostale proizvode koji nisu tabelarno navedeni, C se može odrediti prema sledećem izrazu¹:

$$C = 1.35 + 0.02 \cdot (\phi_i - 30^\circ) \not\leq 1.35 \quad (\geq 1.35) \quad (2.177)$$

gde se ugao unutrašnjeg trenja ϕ_i računa u [°]-ima.

U preciznijoj matematičkoj interpretaciji ovaj koeficijent se može prikazati kao:

$$C = \max\{1.35 + 0.02 \cdot (\phi_i - 30^\circ), 1.35\} \quad (2.178)$$

Opterećenje na ravno dno ili blago zakošeno dno silosa (sa uglom nagiba $\alpha \leq 20^\circ$), određuje se na osnovu izraza za vertikalni pritisak pri punjenju p_{vf} , koji se množi sa empirijskim faktorom 1.35. Ovako određeno vertikalno opterećenje na dno silosa se uzima kako za stanje punjenja, tako i za stanje pražnjenja silosa. Opterećenja na levku silosa, prema ISO 11697, prikazana su u okviru § 2.10.4.

2.10.3.2 – ENV 1991-4:1995 i EN 1991-4:2006

U ranijoj verziji evropskih normi, prema našem prevodu evropskog predstandarda ENV 1991-4:1995 (1996) [220], pritisci pri pražnjenju su se dobijali multiplikovanjem pritisaka pri mirovanju sa faktorima uvećanja opterećenja C_w i C_h :

$$p_{we} = C_w \cdot p_{wf} \quad (2.179)$$

$$p_{he} = C_h \cdot p_{hf} \quad (2.180)$$

gde su:

$C_w = C_h = 1.0$ (za silose sa garantovanim unutrašnjim protokom materijala), i

$C_w = 1.1$ i $C_h = C_o$ (za sve druge slučajeve vitkih silosa).

Koeficijenti uvećanja opterećenja C_o su dati tabelarno u zavisnosti od vrste uskladištenog materijala. Za materijale koji nisu uvedeni tabelarno u [220], maksimalni faktor uvećanja opterećenja C_o ($= C$), može se odrediti preko izraza:

$$\begin{aligned} C = 1.35 & \quad \text{za } \phi_i < 30^\circ \\ C = 1.35 + 0.02 \cdot (\phi_i - 30^\circ) & \quad \text{za } \phi_i \geq 30^\circ \end{aligned} \quad (2.181)$$

¹ Kod izraza za C , u SRPS ISO 11697 (1996) [291], stoji znak "manje od" ($<$), umesto oznake za "nije manje od" ($\not\leq$). Ovo bi nužno trebalo ispraviti u našem aktuelnom standardu.

gde se ugao ϕ_i uvodi u [°]-ima. C u potpunosti odgovara obliku datom u ISO 11697.

Prema EN 1991-4:2006 [38], odgovarajući faktori uvećanja opterećenja su ovde prikazani na sl. 71, a ova problematika je detaljnije obrađena u § 2.10.2. Kod određivanja faktora C_h , prema shemi na sl. 71, kod silosa *proračunske klase 1*, koristi se *faktor referentnog materijala za dodatno opterećenje* C_{op} , čije su vrednosti za neke materijale ovde prikazane u tabeli 10. Ako materijal nije u okviru spiska materijala koji su navedeni tabelarno u Aneksu E norme [38], faktor C_{op} se može odrediti kao:

$$C_{op} = 3.5 \cdot a_\mu + 2.5 \cdot a_K - 6.2 \quad (2.182)$$

gde su a_μ i a_K faktori *promenljivosti (faktori konverzije)*, respektivno za koeficijent trenja o zid μ_w i koeficijent bočnog pritiska K . Ove faktore treba za dati materijal odrediti na osnovu ispitivanja. Opciono, C_{op} se može odrediti preko ispitivanja na realnim silosima. Određivanje faktora C u EN 1991-4:2006 [38] je isto kao u DIN 1055-6 (2005) [62].

2.10.3.3 – AS 3774:1996

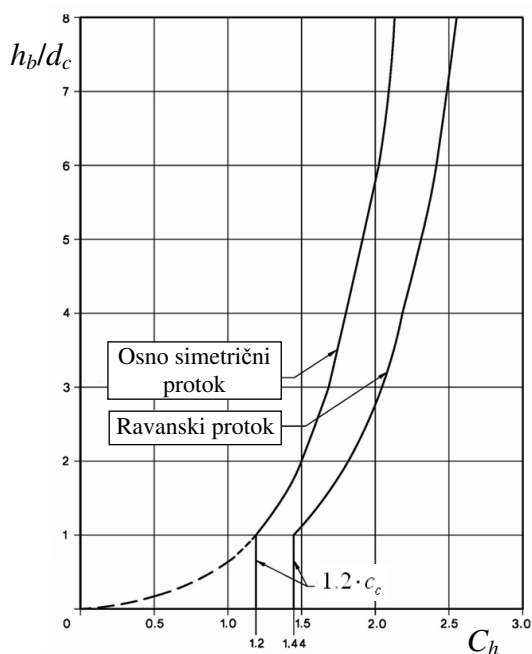
Prema AS 3774 (1996) [14], horizontalni pritisak na zid ćelije pri pražnjenju p_{he} , određuju se prema sledećoj jednačini (oznake promenjene i u skladu sa EC1-4):

$$p_{he} = C_h \cdot p_{hf} \quad (2.183)$$

u kojoj se C_h uzima kao veća vrednost dobijena iz sledećih izraza:

$$C_h = \left[7.6 \cdot \left(\frac{h_b}{d_c} \right)^{0.06} - 6.4 \right] \cdot c_c \quad (2.184)$$

$$C_h = 1.2 \cdot c_c \quad (2.185)$$



Sl. 79 Faktor uvećanja opterećenja C_h prema AS 3774:1996.

U gornjim izrazima za C_h su:

p_{hf} = horizontalni (*inicijalni*) pritisak pri punjenju i mirovanju (primena *Janssen*-ove teorije prema § 2.7.7.2);

- h_b = ukupna efektivna visina uskladištenog materijala, prikazano na sl. 68 (a),
 d_c = karakteristični dijametar (prečnik upisanog kruga u osnovu ćelije), i
 c_c = koeficijent oblika protoka:
 $c_c = 1.0$ za silose sa rotaciono simetričnim protokom (osnosimetrični protok); i
 $c_c = 1.2$ za silose sa ravanskim protokom.

Dijagrami faktora C_h , u zavisnosti od relativne vitkosti silosa (h_b/d_c), prikazani su na sl. 79, za silose sa geometrijom proticanja u vidu rotaciono simetričnog i ravnanskog protoka materijala. Izraz za C_h u AS 3774 je empirijski izraz, koji je kalibrisan prema Jenike-ovoj energetskej metodi¹ pri analizi pojave *skokovitog opterećenja* (*switch load*), kod prelaska materijala iz stanja mirovanja u stanje kretanja pri pražnjenju silosa, koja bazira na minimumu energije pri reverzibilnim (elastičnim) deformacijama zrnastog materijala u silosu ispod nivoa preskoka.

Kako bi se uporedili faktori C_h , prema AS 3774:1996 i EN 1991-4:2006, uvedene su sledeće pretpostavke i uprošćenja:

- Upoređenje se odnosi na silose *proračunske klase 1* (AAC 1) prema EC1-4, pri čemu se ne uvodi ekscentricitet pri punjenju i pražnjenju (tj. razmatra se slučaj centričnog punjenja i pražnjenja sa $e = 0$), kako se e ne obuhvata kod faktora C_h prema AS 3774, gde se to uzima kao poseban slučaj opterećenja.
- C_{op} se uzima da je $C_{op} = 1.0$ za predefinisani proizvoljni materijal prema tabeli 10. Kod nepredefinisano proizvoljnog materijala, odnosno kod materijala koji nije tabelarno naveden u EC1-4, pri $C_{op} = 1.0$ na osnovu izraza (2.182), u slučaju jednakih faktora varijabilnosti $a_K = a_\mu$, sledi da je $a_K = a_\mu = 1.20$.
- Pretpostavlja se visina levka $h_h = d_c$, odakle za $h_c/d_c = 2$ (granica između srednje vitkih i vitkih silosa kod EC1-4) sledi da je $h_b/d_c = 3$ (za primenu kod AS 3774), i slično tome, za $h_c/d_c = 7$ sledi da je $h_b/d_c = 8$.
- Pretpostavlja se da odnos $h_b/d_c = 8$ odgovara graničnoj relativnoj vitkosti silosa² od koje se dalje ne povećava vrednost faktora C_h kod AS 3774, prema sl. 79. Ovu granicu možemo shvatiti i kao maksimalni odnos h_b/d_c kod silosa u AS 3774, ali ovde se koristi samo za utvrđivanje maksimalne vrednosti faktora C_h .
- Pri proračunu opterećenja p_h , kod EC1-4 za silose *proračunske klase 1* (AAC 1), koriste se srednje vrednosti karakteristika materijala, za razliku od AS 3774, gde se koriste varirane karakteristične vrednosti materijala. Zbog navedene razlike pri primeni faktora C_h , uvodi se oznaka faktora $C_h^{AAC 1}$ kod analize prema EC1-4 za silose u klasi AAC 1, a zadržava se oznaka C_h kod analize prema AS 3774.

Prema EC1-4, kod silosa klase AAC 1, faktor $C_h^{AAC 1}$ je u obliku:

¹ Jenike A.W., Johanson J.R. and Carson J.W. (1973): "Bin Loads – Part 3: Mass – Flow Bins", *Journ. Engineering for Industry, Transactions, ASME*, Vol.95, Series B, No.1, pp.6-12. (Citirano prema Smith-u i Simmonds-u (1983) [287].)

² Kod EN 1991-4:2006, granica za odnos efektivne visine uskladištenog materijala u silosu i karakterističnog prečnika je $(h_b/d_c)=10$. Kod AS 3774:1996, nije postavljena geometrijska granica za silose, preko limitiranog odnosa ukupne efektivne visine silosa ($h_b=h_c+h_h$) i karakterističnog prečnika ćelije d_c , tj. za (h_b/d_c) . Uz to, nije eksplicitno postavljena ni posebna granica za (h_b/d_c) pri primeni izraza (2.184). Zbog matematičkog oblika (2.184), radi ograničenja faktora C_h , treba postaviti granica za (h_b/d_c) . Dijagrami na sl. 79, prikazuju uticaj faktora C_h kao promenljivu veličinu do $(h_b/d_c)=8$, tako da je ova vrednost ovde usvojena za graničnu.

$$C_h^{AAC1} = 1.15 + 1.5 \cdot (1 + 0.4 \cdot e/d_c) \cdot C_{op} \quad \text{za } h_c/d_c \geq 2 \quad (2.186)$$

C_h^{AAC1} se određuje pri uslovu da je $C_{op} = 1.0$ i $e/d_c = 0$, za sledeće slučajeve:

- za $h_c/d_c = 2$, kao i
- za $h_c/d_c = 7$ (Napomena: C_h^{AAC1} je iste vrednosti jer je u oba slučaja $h_c/d_c \geq 2$)

$$C_h^{AAC1} = 1.15 + 1.5 \cdot (1 + 0.4 \cdot 0.0) \cdot 1.0 = 2.65 \text{ prema EC1-4.}$$

Sada treba faktor C_h^{AAC1} prevesti u oblik C_h (kako bi bio u istoj ravni sa C_h prema AS 3774), koji se koristi kod određivanja pritiska p_h na zid ćelije pri njenom pražnjenju, pri primeni varijabilnih karakteristika materijala. Kod opterećenja p_h pri pražnjenju (p_{he}), za silose u klasi AAC 1 (EC1-4), primenjuju se srednje vrednosti karakteristika materijala (indeks m). Opterećenje p_{he} , u razvijenom obliku je:

$$p_{he} = \sigma_{he} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_{wm}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{K_m \cdot \mu_{wm} \cdot z}{r_h}}\right) \cdot C_h^{AAC1} \quad (2.187)$$

Pri velikoj dubini materijala u ćeliji, anulira se eksponencijalni član u gornjem izrazu, tako da pritisci p_{he} teže konačnoj asimptotskoj vrednosti. Kako prema EC1-4 silosi treba jednako pouzdano da prihvate opterećenja bez obira na proračunsku klasu, uvodi se faktor C_h , koji se kod p_h primenjuje uz donju vrednost koeficijenta trenja o zid μ_{wl} :

$$p_{he\infty} = \sigma_{he\infty} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_{wm}} \cdot C_h^{AAC1} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_{wl}} \cdot C_h \quad (2.188)$$

gde je:

$$\mu_{wl} = \mu_{wm} / a_\mu \quad (2.189)$$

Na osnovu (2.188) i (2.189), određuje se uporedni faktor C_h u ovoj analizi prema EC1-4:

$$C_h = C_h^{AAC1} / a_\mu \quad (2.190)$$

Sledi da je faktor C_h , prema EC1-4 $C_h = C_h^{AAC1} / a_\mu = 2.65 / 1.20 = 2.21$.

Prema AS 3774, faktor C_h se određuje preko izraza:

$$C_h = \max \left\{ \left[7.6 \cdot (h_b/d_c)^{0.06} - 6.4 \right] \cdot c_c, 1.2 \cdot c_c \right\} \quad (2.191)$$

C_h se određuje uz pretpostavku da je $h_h = d_c$, za sledeće slučajeve, prema AS 3774:

- za osnosimetrični protok $c_c = 1.0$; za odnose $h_b/d_c = 3$ i $h_b/d_c = 8$

$$h_b/d_c = 3 \quad \dots \quad C_h = \max \left\{ \left[7.6 \cdot 3.0^{0.06} - 6.4 \right] \cdot 1.0, 1.2 \cdot 1.0 \right\} = \max \{ 1.72, 1.20 \} = 1.72$$

$$h_b/d_c = 8 \quad \dots \quad C_h = \max \left\{ \left[7.6 \cdot 8.0^{0.06} - 6.4 \right] \cdot 1.0, 1.2 \cdot 1.0 \right\} = \max \{ 2.21, 1.20 \} = 2.21$$

- za ravanski protok $c_c = 1.2$; za odnose $h_b/d_c = 3$ i $h_b/d_c = 8$

$$h_b/d_c = 3 \quad \dots \quad C_h = \max \left\{ \left[7.6 \cdot 3.0^{0.06} - 6.4 \right] \cdot 1.2, 1.2 \cdot 1.2 \right\} = \max \{ 2.06, 1.44 \} = 2.06$$

$$h_b/d_c = 8 \quad \dots \quad C_h = \max \left\{ \left[7.6 \cdot 8.0^{0.06} - 6.4 \right] \cdot 1.2, 1.2 \cdot 1.2 \right\} = \max \{ 2.65, 1.44 \} = 2.65$$

Prema prikazanoj aproksimativnoj analizi, stoji samo jedna vrednost za C_h prema EC1-4, i to je $C_h = 2.21$, za poređenje sa četiri vrednosti za C_h prema AS 3774. Analiza je

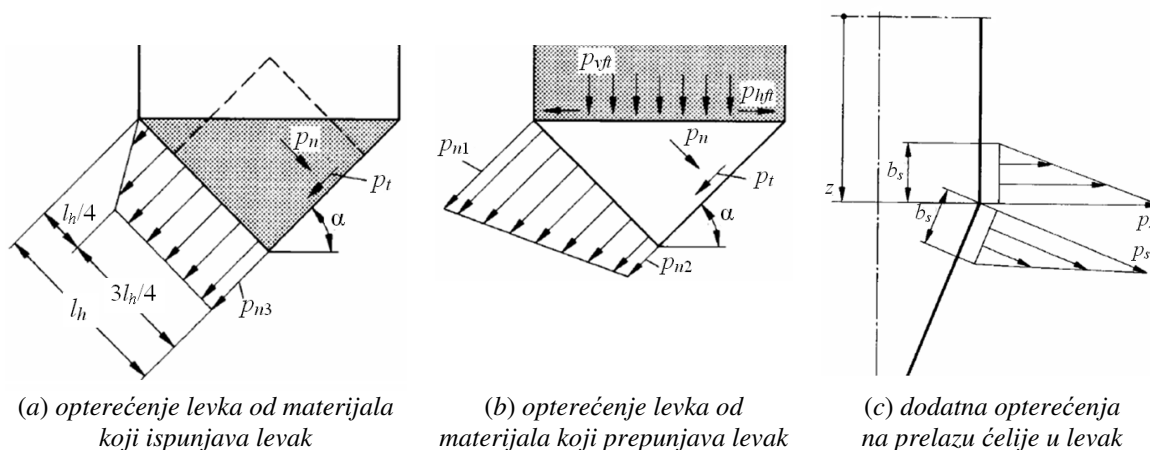
ograničena na silose sa centričnim punjenjem i pražnjenjem. Komparacija rezultata je merodavna kod vrlo vitkih silosa, a orijentaciona kod manje vitkih silosa.

Faktor C_h kod manje vitkih silosa, kao u analizi za $h_b/d_c = 3$ (odnosno $h_c/d_c = 2$) koja odgovara gornjoj granici umereno vitkih silosa, prema AS 3774, iznosi 1.72 i 2.06, respektivno kod osnosimetričnog i ravanskog protoka materijala, što je manje od faktora $C_h = 2.21$ prema EC1-4. Kod manje vitkosti silosa, za tačniju analizu treba uvesti uticaj eksponencijalnog člana u (2.187), što ne mora proizvesti jednake efekte kod određivanja faktora C_h prema EC1-4 i AS 3774, tako da se prethodno dato upoređenje faktora C_h , kod silosa manje vitkosti uzima samo kao orijentaciono. Ipak se može konstatovati da je EC1-4 ovde na strani sigurnosti u odnosu na AS 3774.

Kod vrlo vitkih silosa faktor uvećanja opterećenja C_h je jednake vrednosti ($C_h = 2.21$) za EC1-4 i AS 3774, u slučaju osnosimetričnog protoka (kod kružnih, kvadratnih i sličnih osnova ćelija). Za ove silose, u slučaju ravanskog protoka prema AS 3774, određuje se veća vrednost $C_h = 2.65$, u odnosu na $C_h = 2.21$ kod EC1-4, ali treba napomenuti da se vrlo vitki silosi sa ovom geometrijskom formom proticanja i ne koriste u praksi (tip silosa na sl. 16 (b) se koristi za silose manje vitkosti - bunkere). Jednaka vrednost za faktor C_h kod vrlo vitkih silosa sa osnosimetričnim protokom (uobičajeni slučaj protoka kod realnih silosa) ukazuje na relativno dobru saglasnost ovih propisa (treba imati na umu da je pri izradi EC1-4, referentni standard za proračunska poređenja bio upravo AS 3774).

2.10.4 Opterećenje levka (poluempirijska metoda)

Opterećenja kod levka su u EN 1991-4:2006 [38], razmatrana sa tri metode proračuna, koje odgovaraju modifikacijama Walker-ove teorije, Enstad-ove teorije (samo se menja oblik izraza kod parametra F kod primene Walker-ove teorije) i poluempirijskoj metodi proračuna koja vodi poreklo iz postupka prikazanog u ranije važećim normama DIN 1055-6 (1987) [61] (sl. 80). Ova poluempirijska metoda je kod EN 1991-4:2006 [38] navedena kao alternativna metoda za sračunavanje opterećenja kod levka (prikazano u § 2.10.2.6.4.1).



Sl. 80 Opterećenje levka prema DIN 1055-6 (1987).

Izrazi za pritiske na zidove levka prema različitim normama su prikazani u tabeli 14 (oznake promenjene i u skladu sa EC1-4). U ovoj tabeli su obuhvaćeni izrazi prema postupcima proračuna opterećenja na levku prema DIN 1055-6 (1987) [61], SRPS ISO

11697 (1996) [291] i EN 1991-4:2006 [38]. Postupak za ovu metodu je jednak u DIN 1055-6 (2005) [62] i u EN 1991-4:2006.

Opterećenje koje deluje na levak silosa može se podeliti na dva dela: opterećenje od dela sadržaja koji se nalazi u levku i opterećenje od dela sadržaja iznad levka. Izrazi za izračunavanje opterećenja koja deluju na levak primenjuju se za nagib stranica levka $\alpha \geq 20^\circ$. Izrazi za opterećenje su izvedeni iz rezultata eksperimentalnih ispitivanja, ne vodeći računa o uslovima ravnoteže, tj. izvedeni su poluempirijski. U slučaju kada je $\alpha < 20^\circ$ primenjuju se izrazi za vertikalno opterećenje kao za horizontalno dno ćelije silosa p_b . Kod silosa sa masovnim protokom javlja se posebno *skretno (udarno)* opterećenje p_s (*kick load*), na prelazu vertikalnog dela ćelije u levak.

Kod opterećenja levka, u ovoj metodi se ne pravi razlika između vrednosti opterećenja pri punjenju i pražnjenju, pošto su na osnovu ispitivanja u formulama uključena oba slučaja (kao anvelopa različitih pritisaka). Dato rešenje se primenjuje na kose površine levaka uz uključivanje odgovarajućeg ugla α u račun. Upotrebljene su oznake prema EC1-4, a konkretne vrednosti proračunskih parametara se uzimaju prema odgovarajućoj normi. Uglovi α i β su respektivno uglovi nagiba i otklona zida levka (sl. 78 i sl. 80). Kako je $\alpha = 90^\circ - \beta$, izrazi u tabeli su konzistentni po pitanju ovih uglova (kako je $\sin \alpha = \cos \beta$).

Tabela 14. Pritisaci na zid levka prema različitim normama.

	DIN 1055-6 (1987) [61]	SRPS ISO 11697 (1996) [291] ISO 11697 (1990) [125]	EN 1991-4:2006 [38]
p_{n1}	$(p_{vft} \cdot C_b \cdot \cos^2 \alpha + p_{hft} \cdot \sin^2 \alpha) \cdot \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{4\mu_{wh}}\right)$	$1.5 p_{hft} \cdot \left(\frac{1}{K} \cdot \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha\right)$	$p_{vft} \cdot (C_b \cdot \sin^2 \beta + \cos^2 \beta)$
p_{n2}	$p_{vft} \cdot C_b \cdot \cos^2 \alpha$	$1.5 \frac{p_{hft}}{K} \cdot \cos^2 \alpha$	$p_{vft} \cdot C_b \cdot \sin^2 \beta$
p_{n3}	$2.4 \frac{A}{U} \cdot \frac{\gamma \cdot K}{\sqrt{\mu_{wh}}} \cdot \sin^2 \alpha$	$3.0 \frac{A}{U} \cdot \frac{\gamma \cdot K}{\sqrt{\mu_{wh}}} \cdot \sin^2 \alpha$	$3.0 \frac{A}{U} \cdot \frac{\gamma \cdot K}{\sqrt{\mu_{wh}}} \cdot \cos^2 \beta$
p_n	$p_{n3}(x) + p_{n2} + (p_{n1} - p_{n2}) \cdot \frac{x}{l_h}$	$p_{n3} + p_{n2} + (p_{n1} - p_{n2}) \cdot \frac{x}{l_h}$	$p_{n3} + p_{n2} + (p_{n1} - p_{n2}) \cdot \frac{x}{l_h}$
p_t	$p_n / 2$	$\mu_{wh} \cdot p_n$	$\mu_{wh} \cdot p_n$
p_s	$\min(\gamma \cdot z, \gamma \cdot d_c)$	$2 p_{hft}$	$2K p_{vft}$

Prema DIN 1055-6 (1987) [61], za silose čiji je nagib stranica levka veći od 20° ($\alpha > 20^\circ$), opterećenja nastala od materijala koji se nalazi u levku data su na sl. 80 (a) i odgovaraju dijagramu pritisaka $p_{n3}(x)$, s obzirom na linearnu promenu pritisaka u gornjoj četvrtini levka. Kod EN 1991-4 i ISO 11697, ovi pritisci na levak su konstantni i iznose p_{n3} , kako je prikazano na sl. 78. Izrazi za p_{n3} važe za izravnat sadržaj napunjenog levka, kao i za kupasti nasip materijala iste zapremine u levku. Opterećenja p_{n1} i p_{n2} , od prekomerne napunjenosti levka, tj. od težine dela materijala iznad levka, kao i opterećenja od trenja p_t i skretno opterećenje p_s , prikazana su na sl. 78 i sl. 80 (b) i (c). Varijantni aproksimativni oblici za ova opterećenja su dati u tabeli 14, prema navedenim normama.

U osnovi, razlika se pojavljuje kod definisanja oblika, pozicije delovanja i veličine skretnog opterećenje p_s , prema navedenim normama. Ovo dodatno opterećenje se javlja samo u slučaju da se silos prazni ukupnom masom (*protok masom*), na prelazu zida ćelije

u levak, i ono se superponira sa ostalim postojećim opterećenjima na zidu ćelije i levka (prema DIN 1055-6 (1987) [61], sl. 80 (c)), odnosno samo na delu levka (prema ISO 11697 i EN 1991-4:2006, sl. 78). Prema DIN 1055-6 (1987) [61], skretno opterećenje je trougaonog oblika na delu zida ćelije i delu zida levka, i rasprostire se po celom obimu zidova, na pojasevima širine:

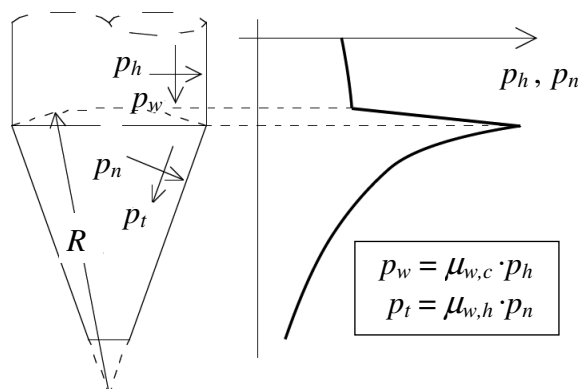
$$b_s = 0.3 \cdot d_c \quad (2.192)$$

Prema ISO 11697 i EN 1991-4:2006, dodatno skretno opterećenje se uzima da je konstantno (kao aproksimacija za prethodno opisani trougaoni dijagram), i da se pruža samo na gornjem delu levka u širini pojasa:

$$b_s = 0.2 \cdot d_c \quad (2.193)$$

Na ovaj način zanemarena je moguća pojava ovog dodatnog opterećenja na donjem delu zida ćelije kod prelaza zida ćelije u levak. Oblik opterećenja prema ISO 11697 i EN 1991-4:2006, sa delovanjem samo na gornjem delu levka, kao aproksimacija, više odgovara pojavi vršnih pritisaka kod opterećenja strmih levaka pri pražnjenju, prema *Walker*-ovoj teoriji (kao što je to slučaj prikazan na sl. 77 za strmi levak).

Razmatrana poluempirijska metoda se može shvatiti kao pokušaj obuhvatanja pritisaka anvelopom koja pokriva dijagrame pritisaka pri punjenju i pražnjenju prema *Walker*-ovoj teoriji, tj. kao zajedničko obuhvatanje dijagrama pritisaka na levku prikazanih na sl. 76 i sl. 77, sa odvajanjem dodatnog skretnog opterećenja p_s , kao posebnog dodatnog opterećenja koje se javlja jedino u slučaju masovnog pražnjenja materijala kod strmih levaka.



Sl. 81 Dijagram pritisaka na zidove pri masovnom protoku materijala, adapt. prema [36].

Uz prethodna razmatranja, ostaje ipak otvoreno pitanje o postojanju dodatnog opterećenja na delu zida ćelije pri prelazu ćelije u levak (predstavljeno sa gornjim trougaonim dijagramom na sl. 80 (c)). Ovaj deo dodatnog skretnog opterećenja, praktično ne postoji prema odredbama ISO 11697 i EN 1991-4:2006, ali se prema eksperimentalnim i numeričkim ispitivanjima u ovoj zoni zida može pojaviti povećano opterećenje pri masovnom pražnjenju, tako da ovaj problem ostaje otvoren.

Prema *Carson*-u i *Jenkyn*-u (1993) [36], kako je to kvalitativno prikazano na sl. 81, pri pražnjenju se javlja ovaj deo skretnog opterećenja. S druge strane, deo skretnog opterećenja na zidu ćelije, se ne obuhvata sa *Walker*-ovom teorijom, kako se ova teorija odnosi na analizu opterećenja na izdvojenom levku sa opcionim uvođenjem nadopterećenja, a ne na analizu opterećenja kod levka u integralnom sklopu sa vertikalnim delom ćelije. Na ovaj način, prisutna formalna konzistencija pri analizi opterećenja prema EC1-4 i *Walker*-ovoj teoriji, ne isključuje postojanje razmatranog dela skretnog opterećenja.

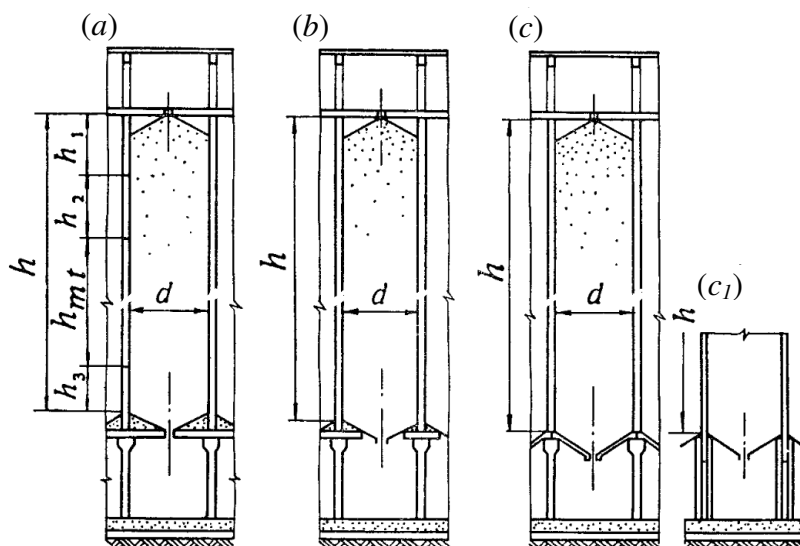
2.10.5 Dodatno lokalno opterećenje

Dodatno lokalno opterećenje se uvodi kod silosa, kako bi se obuhvatile pojave nesimetričnih pritisaka, koji se mogu pojaviti ne samo kod ekscentričnog uskladištenja ili ekscentričnog proticanja materijala, već i kod silosa sa koncentričnim punjenjem, kao i za slučaj centričnog pražnjenja kroz simetrični otvor za pražnjenje. Ovo opterećenje zavisi od karakteristika uskladištenog materijala i imperfekcija u geometriji zidova levka i ćelije. Na sličan način, pojave probabilističke heterogenosti kod uskladištenog materijala mogu dovesti do poremećaja, kako po pitanju oblika, tako i po pitanju ravnomernosti proticanja u protočnoj zoni. Ovi uticaji se moraju obuhvatiti u projektovanju silosa, posebno zbog pojave momenata savijanja izazvanih delovanjem lokalnog opterećenja.

Prema EN 1991-4:2006 [38], dodatno lokalno opterećenje (*patch load*) je ovde opisano u § 2.10.2.3, kao nesimetrično opterećenje na zidovima ćelije (ista analiza ovog opterećenja je i u DIN 1055-6:2005 [62]). U nešto jednostavnijem obliku dopunsko opterećenje je dato u ISO 11697 (1990) [125], odnosno SRPS ISO 11697 (1996) [291]. Kod standarda AS 3774 (1996) [14], ovaj tip opterećenja se uopšte ne razmatra, već se odmah u analizi opterećenja prelazi na asimetrično opterećenje pri ekscentričnom pražnjenju silosa. Kod ACI 313-97 (1997) [5], ne razmatra se lokalno opterećenje, već se analiza oslanja na faktor uvećanja osnovnog opterećenja $C = 1.5$. Nemačke norme DIN 1055-6 (1987) [61], su poslužile kao osnova pri formulisanju dodatnog lokalnog opterećenja¹ u EN 1991-4:2006. Prvi propisi koji su uveli ovaj tip opterećenja su СНиП 2.10.05-85 (1985) [370].

2.10.5.1 – СНиП 2.10.05-85

Prema ruskim normama СНиП 2.10.05-85 (1985) [370], pri određivanju horizontalnog pritiska od usipnog materijala na zidove silosa pri punjenju i pražnjenju sadržaja, a takođe u procesu skladištenja, uvode se po obimu ravnomerno raspoređeni pritisci, zajedno sa lokalno povećanim pritiscima - *prstenastim*, *lokalnim* i *pojasnim*, koji se definišu kod pojedinih tipova silosa.



Sl. 82 7 Preseci silosnih ćelija, prema [370] i za (c₁) [375].

¹ Rotter J.M. (2002): "New draft patch load rule: March 2002 (Background to new patch load)", CEN TC250/SC1/PT4, Edinburgh, 25 March 2002, 3 p.

Na sl. 82, prema СНиП 2.10.05-85 [370], prikazani su preseki silosnih ćelija: (a) – sa ravnim dnom i dobetoniranom ispunom; (b) – sa ravnim dnom, čeličnim levkom i dobetoniranom ispunom, (c) – sa betonskim levkom bez ispune, i prema [375], presek silosa (c_1) – sa čeličnim levkom bez ispune i zidovima u osnovi; kao i geometrijske veličine ćelija: h – visina zida silosa, h_1 – visina gornje zone; h_2 – visina druge zone; h_3 – visina donje zone; h_{mi} – visina srednje zone; d – unutrašnji prečnik ćelije. Pri $h \geq 30$ m, visine iznose $h_1 = h_2 = h_3 = 5$ m, dok pri manjim vrednostima h visine zona h_1 , h_2 i h_3 treba uzeti da iznose po $h/6$.

Neke oznake iz ovih normi ($\rho, f, \lambda, \varphi$), zamenjene su sa oznakama u ovom radu (r_h, μ_w, K, ϕ_i). Kod pritiska materijala, ostavljen je gornji indeks n koji označava pritiske kao normativne veličine, prema СНиП 2.10.05-85.

Po obimu ćelije *ravnomerno raspodeljeni horizontalni pritisak* usipnog materijala p_h^n na zidove silosa na dubini z od nasipnog vrha se određuje prema *Janssen*-ovoj formuli:

$$p_h^n = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot z / r_h}) \quad (2.194)$$

gde je: r_h – hidraulički radijus poprečnog preseka silosa ($r_h = A/U$), μ_w – koeficijent trenja materijala o zid, K – koeficijent bočnog pritiska, koji se određuje kao $K = \tan^2(45^\circ - \phi_i/2)$, a za zrnasti materijal biljnog porekla, se dopušta primena fiksne vrednosti $K = 0.44$, i ϕ_i – ugao unutrašnjeg trenja.

Prstenasti horizontalni pritisak usipnog materijala na zid kružne ćelije se primenjuje kao ravnomerno raspodeljen po celom obimu zida ćelije sa visinom zone prstenastog opterećenja, koja iznosi 1/4 prečnika silosa. Zona može zauzimati bilo koju poziciju po visini. Normativna veličina prstenastog horizontalnog pritiska p_{h1}^n je:

$$p_{h1}^n = a_1 \cdot p_h^n \quad (2.195)$$

gde je a_1 koeficijent lokalnog povećanja pritiska, prema tabeli 15.

Lokalni horizontalni pritisak na zid kružne ćelije deluje kao ravnomerno raspodeljeni pritisak na dve površine, koje su locirane na dve dijametralno suprotne strane. Lokalno pritisak deluje na odgovarajućim "kvadratnim" površinama zida, visine ($\pi d / 12$) i lučne širine ($\pi d / 12$). Površina na kojoj deluju lokalni pritisci iznosi $(\pi d / 12) \cdot (\pi d / 12)$, gde je d unutrašnji prečnik silosa. Lokalni pritisak deluje na ovakve dve površine zida koje su na dijametralno suprotnim stranama silosa. Slično je i u EC1-4, ali se "kvadratne" površine zida na kojima deluju lokalni pritisci uzimaju da iznose po $(\pi d / 16) \cdot (\pi d / 16)$.

Tandem pritisnutih površina može zauzimati bilo koju lokaciju po visini i obimu ćelije. Normativna vrednost lokalnog horizontalnog pritiska p_{h2}^n je određena formulom:

$$p_{h2}^n = a_2 \cdot p_h^n \quad (2.196)$$

gde je a_2 koeficijent lokalnog povećanja pritiska, prema tabeli 15.

Horizontalni pritisak usipnog materijala na zidove *armiranobetonskih silosa* sa kružnim ćelijama i *čeličnih silosa sa krutim rebrima* koji rade na savijanje, uzima se da je jednak sumi ravnomernog pritiska (prema (2.194)), i lokalnog pritiska (prema (2.196)).

Horizontalni pritisak usipnog materijala na zidove *čeličnih silosa* sa kružnom ćelijom, neukrućenih rebrima, uzima se kao ravnomerno raspoređen po obimu i jednak je sumi pritiska, određenih po izrazima (2.194) i (2.195). U ovom slučaju pražnjenje iz silosa usipnog materijala treba da odgovara osnosimetričnom protoku kroz centralni ispušt.

Tabela 15. Koeficijenti lokalnog povećanja pritiska, a_1 i a_2 .

Koeficijent	Odnos visine silosa i prečnika (h/d)						
	10	5	2.5	1.67	1.25	0.83	0.625
a_1	1.8	1.5	1.2	0.9	0.70	0.50	0.30
a_2	1.25	1.00	0.50	0.25	0.12	0.06	0.03

Numeričke vrednosti koeficijenata a_1 i a_2 u izrazima (2.195) i (2.196), se uzimaju prema tabeli 15. U tabeli je d spoljašnji prečnik ćelije, a h je visina od vrha silosa do vrha levka ili levkasto oblikovane ispune. Za međuvrednosti odnosa h/d vrednosti koeficijenata a_1 i a_2 se mogu odrediti interpolacijom.

Pojasni horizontalni pritisak na zidove kvadratnih i pravougaonih silosa i na zidove međućelija uzima se kao ranomerno raspodeljen po celom obimu zida i na bilo kojem mestu po visini. Normativna vrednost pojasnog pritiska p_{h3}^n , određuje se po formuli:

$$p_{h3}^n = a_3 \cdot p_h^n \quad (2.197)$$

gde je a_3 koeficijent lokalnog povećanja pritiska usipnog materijala, ravnomerno raspodeljenog po ukupnom obimu kvadratnog silosa ili zvezdice (vrednosti date u [370]).

Računska podužna sila zatezanja N i računski moment savijanja M po jediničnoj visini u vertikalnom preseku zidova kružnih armiranobetonskih ćelija, koji na krajevima imaju zglobne i horizontalno nepomerljive veze, od dejstva horizontalnog pritiska usutog materijala (raspodeljenog p_h^n i lokalnog p_{h2}^n), u srednjoj zoni visine silosa h_{mt} (videti sl. 82), mogu se odrediti po formulama:

$$N = \frac{\gamma_f}{\gamma_c} \cdot (1 + \alpha_1) \cdot p_h^n \cdot \frac{d}{2} \quad (2.198)$$

$$M = \frac{\gamma_f}{\gamma_c} \cdot \alpha_2 \cdot p_h^n \cdot \frac{d^2}{4} \quad (2.199)$$

gde su:

γ_f = koeficijent sigurnosti za opterećenje:
= 1.3 pri proračunu nosivosti i pojave prslina, i
= 1.0 pri proračunu deformacija, otvaranja i zatvaranja prslina;

γ_c = koeficijent uslova rada; uzeti da je 1.0;

α_1 i α_2 = koeficijenti sa kojima se uvodi uticaj lokalnih pritisaka usutog materijala:

$$\alpha_1 = 0.4 \cdot a_2 \cdot \xi_1 \cdot c_1 \quad \text{i} \quad \alpha_2 = 0.02 \cdot a_2 \cdot \xi_2 \cdot c_1 \quad (2.200)$$

ξ_1 i ξ_2 = koeficijenti koji se odnose na uticaj relativne debljine zidova:

$$\xi_1 = 1.25 \cdot (1.8 - t/t_{nom}) \quad \text{i} \quad \xi_2 = 0.40 \cdot (1.5 + t/t_{nom}) \quad (2.201)$$

t = debljina zida ćelije, ili zamenjujuća debljina zida (po jednakosti momenata inercije za slučaj zidova sa rebrima);

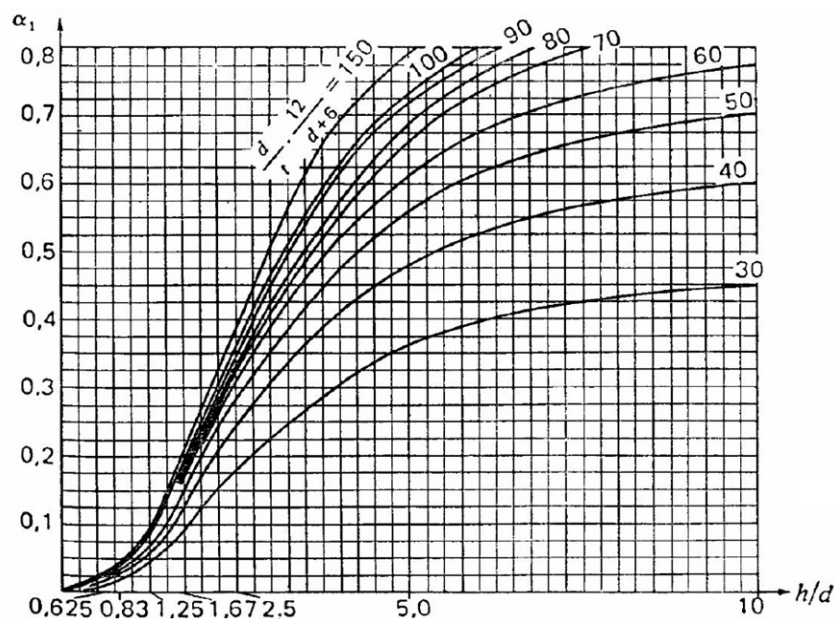
t_{nom} = nominalna debljina zida (prema tabeli 16);

c_1 = koeficijent sa kojim se uvodi efekat trajanja pritiska i koji se uzima da:

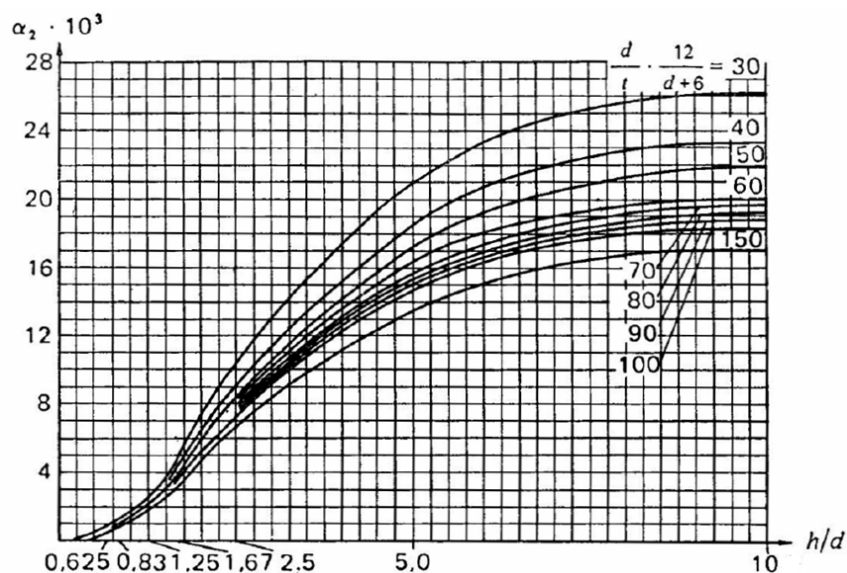
- = 1.0 pod dejstvom totalnog pritiska;
- = 0.7 pri dejstvu kratkotrajnog pritiska, i
- = 0.3 pri dejstvu dugotrajnog pritiska.

Tabela 16. Nominalna debljina zida prema prečniku silosa.

Prečnik silosa, d [m]	3.0	6.0	12	18	24
Nominalna debljina zida, t_{nom} [cm]	16	18	24	27	30



Sl. 83 Vrednosti koeficijenta α_1 .



Sl. 84 Vrednosti koeficijenta α_2 .

Kada se uzme da je koeficijent $c_1 = 1$, vrednosti koeficijenata α_1 i α_2 se mogu odrediti prema dijagramima, koji su respektivno dati na sl. 83 i sl. 84. Kod izraza (2.198) i

(2.199), koristi se unutrašnji prečnik ćelije d , a kod tabele 16 i kod dijagrama na sl. 83 i sl. 84, spoljašnji prečnik ćelije d .

Primeri proračuna silosa i uputstva za korišćenje normi СНиП 2.10.05-85 [370], dati su u priručniku za primenu ovih propisa [375], kao i u ref. [354].

Prema СНиП 2.09.03-85 [369], uvodi se koeficijent a sa kojim se direktno povećava horizontalni pritisak materijala dobijenog prema izrazu (2.194), kako bi se obuhvatilo i povećanje opterećenja pri pražnjenju ćelija. Na primer, za proračun horizontalne armature kod ćelija kružnih zidova, uzima se $a = 2$, i koristi kotlovska formula za određivanje horizontalne sile zatezanja N od ukupnog pritiska ($a \cdot p_h^n$).

2.10.5.2 – DIN 1055-6:1987

Ranije važeće nemačke norme DIN 1055-6 (1987) [61] su se odnosile na skladištenje materijala u silosima, tipa rastresitih materijala (zrnastih i praškastih) i na fermentisanu stočnu hranu. Karakteristike materijala su bile date tabelarno, a ovde su u tabeli 17, prikazane karakteristike samo nekih usipnih materijala. Kod ovih propisa korišćene su oznake za pojedine veličine, kao λ , e_h , β_G , φ , koje se u EC1-4 sada uzimaju kao K , C_h , C_{op} , ϕ_i . Pojedine oznake su u ovom tekstu izmenjene kako bi odgovarale oznakama u EC1-4, a neke su zadržane, kao e_h (u EC1-4 ovo je faktor uvećanja horizontalnog opterećenja C_h) i β_G (u EC1-4 ovo je faktor referentnog materijala za dodatno lokalno opterećenje C_{op}). Iz ovih normi, DIN 1055-6 (1987) [61], faktor β_G ($\equiv C_{op}$), je preuzet u nove evropske norme EN 1991-4:2006 [38], gde svi materijali koji su navedeni u obe norme, imaju jednake vrednosti za $\beta_G \equiv C_{op}$. Pored toga, kalibrisanje dodatnog lokalnog opterećenja p_p na zidove ćelija u EC1-4 (ovde prikazano u § 2.10.2.3), gde se uvode faktori lokalnog opterećenja pri punjenju i pražnjenju, C_{pf} i C_{pe} respektivno sa izrazima (2.116) i (2.117), izvršeno je na osnovu faktora neravnomernosti β , koji je prvi put uveden u normi DIN 1055-6:1987. Na ovaj način, osnova pri formulisanju dodatnog lokalnog opterećenja¹ u EC1-4, je upravo bila norma DIN 1055-6 iz 1987. god.

Tabela 17. Karakteristike nekih materijala prema DIN 1055-6:1987.

Tip zrnastog materijala	Zapreminska težina, γ [kN/m ³]	Koef. bočnog pritiska K	Koeficijent trenja materijala o zid silosa $\mu_w = \tan \phi_w$			Faktor opterećenja pri pražnjenju e_h	Faktor ref. materijala β_G
			μ_{w1}	μ_{w2}	μ_{w3}		
Cement	16.0	0.65	0.50	0.45	0.40	1.20	0.5
Cementni klinker	18.0	0.50	0.60	0.55	0.45	1.20	0.7
Pšenično brašno	7.0	0.40	0.50	0.35	0.25	1.40	0.6
Kukuruz	8.0	0.60	0.60	0.40	0.25	1.60	0.9
Pšenica	9.0	0.60	0.60	0.40	0.25	1.40	0.5

¹ Rotter J.M. (2002): "New draft patch load rule: March 2002 (Background to new patch load)", CEN TC250/SC1/PT4, Edinburgh, 25 March 2002, 3 p.

Sličnu komparativnu analizu dodatnog lokalnog opterećenja prema EC1-4 i DIN 1955-6:1987, prikazali su Ruckenbrod i Schlüter (2006) u ref. [264].

Karakteristike uskladištenog materijala su uvedene sa računskim vrednostima iz tabele 17, i uzima se da su ove vrednosti konstantne po dubini z .

Koeficijenti trenja materijala o zid, μ_w prema tabeli 17, se dele prema vrsti unutrašnje površine zida u tri grupe:

$\mu_w = \mu_{w1}$ - za hrapave zidove gde do trenja dolazi u velikoj meri u samom materijalu (valoviti i falcovani lim);

$\mu_w = \mu_{w2}$ - za srednje glatke zidove (beton, drvo, čelični lim sa zakivcima ili sa zavrtanjima); i

$\mu_w = \mu_{w3}$ - za glatke zidove (čelični i alu-limovi ili veštački materijali).

Opterećenja zidova ćelija pri punjenju silosa se baziraju na *Janssen*-ovoj teoriji, tako da se mogu primeniti već prikazane formule kod EC1-4, od (2.105)_J do (2.110)_J. Kod ovih izraza sa $Y_f(z)$ je označena funkcija raspodele opterećenja po visini silosa (*Janssen*-ova teorija), koja je kod DIN 1055-6:1987 bila označena u poznatom obliku kao $\Phi(z)$.

Pri pražnjenju ćelija silosa, na zidove deluju ravnomerno i neravnomerno opterećenje, koje pri proračunu treba uzeti u obzir. Prema DIN 1055-6:1987, smatra se da je silos izložen ravnomernom opterećenju pri pražnjenju celom masom, a u slučaju mešovitog protoka, silos je izložen ravnomernom i neravnomernom opterećenju. Prema sadašnjim shvatanjima uloge protoka kod pojave opterećenja, na primer prema EC1-4, smatra se da kod masovnog protoka, kao i kod mešovitog protoka, dolazi do pojave simetričnog (ravnomernog) i nesimetričnog (neravnomernog) opterećenja, a da kod osiguranog unutrašnjeg protoka ne dolazi do povećanja uticaja prilikom pražnjenja ćelije. Stav, da pri protoku ukupnom masom materijala dolazi do povećanih opterećenja u vidu skretnog opterećenja kod prelaza ćelije u levak, i dalje stoji. Ovde se mogu uočiti promene u shvatanju uloge protoka kod pojave opterećenja, od ranijih normi DIN 1055-6 (1987) [61] ka novijim normama EN 1991-4:2006 [38] i DIN 1055-6:2005 [62].

Ravnomerno opterećenje zidova ćelija pri pražnjenju silosa se uzima prema izrazima:

$$p_{we}(z) = 1.10 \cdot p_{wf}(z) \quad (2.202)$$

$$p_{he}(z) = e_h \cdot p_{hf}(z) \quad (2.203)$$

$$p_{ve}(z) < p_{vf}(z) \quad (2.204)$$

Ovde su uvedeni faktor korekcije 1.10, kod opterećenja usled trenja materijala o zidove, i faktor pražnjenja e_h (prema tabeli 17), kod horizontalnog opterećenja na zidove ćelije pri pražnjenju. Za ćelije sa $h/d > 5.0 \cdot \mu_w$, oba faktora treba uzeti sa punim vrednostima, a za ćelije silose sa $h/d < 2.5 \cdot \mu_w$, ovi faktori se uzimaju da iznose 1.0. Između ovih graničnih slučajeva, treba koristiti linearnu interpolaciju, prema odnosu h/d . Vertikalno opterećenje pri pražnjenju je nešto manje od opterećenja pri punjenju, tako da se za proračune uzima da su ova opterećenja jednaka.

Neravnomerno opterećenje zidova ćelija pri pražnjenju silosa, se uzimaju samo kao horizontalna opterećenja na zidove silosa, i uticaje od ovih opterećenja treba superponirati sa uticajima od ravnomernog horizontalnog opterećenja p_{he} .

Neravnomerno opterećenje se uzima u obliku odgovarajućeg zamenjujućeg opterećenja (kao dodatno lokalno opterećenje ili kao zamenjujuće povećanje opterećenja po celoj visini ćelije). Veće koncentracije opterećenja, koje bi trebalo obuhvatiti neravnomernim opterećenjem, nisu ravnomerno podeljene po obimu i visini ćelija, već se javljaju manje ili veće nepravilnosti i odstupanja. Kod ovog opterećenja treba obuhvatiti uticajne faktore,

kao što su vitkost ćelija (preko odnosa h/d), ekscentricitet pri pražnjenju (preko odnosa a/r), krutost konstrukcije (preko odnosa r/t), i specifične osobine uskladištenog materijala (povoljne ili nepovoljne). Ovi uticaji se obuhvataju preko faktora β_h , β_a , β_r , i β_G .

Faktor neravnomernosti β je definisan sa više uticajnih koeficijenata:

$$\beta = \beta_h \cdot \beta_a \cdot \beta_r \cdot \beta_G \quad (2.205)$$

Ovi koeficijenti su navedeni u tabeli 18, gde su prikazani potrebni izrazi za njihovo određivanje. Koeficijent β_G je koeficijent referentnog materijala (vrednosti date u tabeli 17). U tabeli 17 su korišćene sledeće oznake: h za visinu ćelije, d za unutrašnji prečnik ćelije, a za ekscentricitet otvora za pražnjenje (e_o oznaka u EC1-4), r za unutrašnji poluprečnik ćelije, i t za debljinu zida ćelije.

Tabela 18. Faktor neravnomernosti β .

Faktor neravnomernosti β	$\beta = \beta_h \cdot \beta_a \cdot \beta_r \cdot \beta_G$		
β_h (koef. vitkosti)	$\beta_h = 1.0$	za	$(h/d) < 1.0$
	$\beta_h = 0.2 \cdot (h/d) + 0.8$	za	$1.0 \leq (h/d) \leq 4.0$
	$\beta_h = 1.6$	za	$(h/d) > 4.0$
β_a (koef. ekscentričnosti)	$\beta_a = 1.0$	za	$(a/r) < 1/3$
	$\beta_a = 3 \cdot (a/r)$	za	$(a/r) \geq 1/3$
β_r (koef. krutosti)	$\beta_r = 0.30$	za	$(r/t) \leq 70$
	$\beta_r = 0.05$	za	$(r/t) \geq 100$
	Interpolacija za β_r	za	$70 < (r/t) < 100$
β_G (koef. materijala)	Prema tabeli 17.		

Kod silosa sa kružnim presekom, primenjuje se lokalno dodatno opterećenje prikazano na sl. 85 (sl. 85 je adaptacija slike prikazane u radu *Kaldenhoff-a*, *Schütte-a* i *Hauser-a* (2007) [140], koja prikazuje ovo opterećenje prema DIN 1055-6:1987). Ako silosi pri vrhu i dnu ćelije imaju horizontalna ukrućenja i zidove koji mogu prihvatiti horizontalne uticaje od opterećenja, tada se može analizirati zamenjujuće povećano raspodeljeno opterećenje u ćeliji, umesto analize dodatnog lokalnog opterećenja. Kod silosa u grupi, odnosno kod ćelija u silosnoj bateriji, međusobni uticaji neravnomernog dejstva se ne moraju uzeti u obzir.

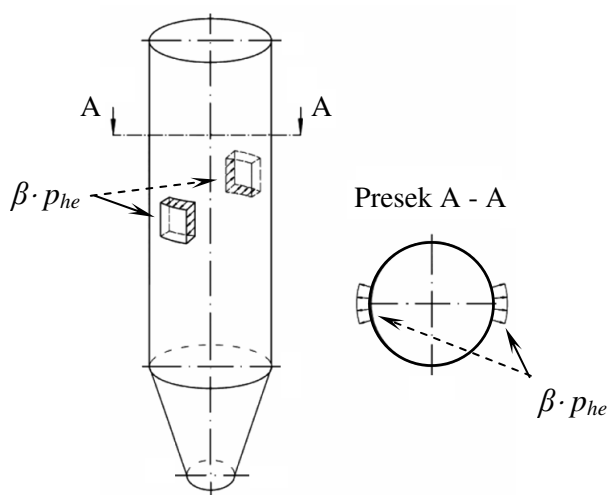
Uticaji neravnomernog opterećenja kod silosa sa kružnim presekom, uvode se u obliku dodatnog lokalnog opterećenja (sl. 85), koje deluje na kvadratnoj površini sa stranama $s = 0.8 \cdot A/U$. Intenzitet ovog opterećenja iznosi $\beta \cdot p_{he}$, a rezultujuća sila na lokalnoj površini je:

$$P = s^2 \cdot \beta \cdot p_{he} \quad (2.206)$$

Ovo opterećenje treba uzeti na polovini plašta ćelije, a dobijeno procentualno povećanje uticaja usvojiti za celu visinu silosa.

Za približan proračun pretpostavlja se da opterećenje deluje na polovini visine ćelije i da je raspoređeno na dve dijametralno suprotne strane. Procentualno povećanje horizontalnih pritisaka usled uticaja lokalnog opterećenja se uzima u obzir po čitavoj visini ćelije.

Presečne sile dobijene od lokalnog opterećenja mogu se uzeti u račun samo u pravcu obima, a u pravcu plašta se mogu zanemariti. Kada se kod armiranobetonskih silosa koristi ovo pojednostavljeno pri računu, potrebno je da se vertikalna armatura na obe strane zida uzme u iznosu od minimum 20% od horizontalne, ali zid mora biti armiran sa najmanje 4Ø10 po dužnom metru obima, sa armaturom kod koje je granica razvlačenja σ_v 420 ili 500 MPa.



Sl. 85 Dodatno lokalno opterećenje prema DIN 1055-6:1987.

Povećano ravnomerno horizontalno opterećenje se može u nekim slučajevima analize uzeti kao zamenjujuće opterećenje umesto lokalnog opterećenja. Ovo povećano opterećenje se uzima sa faktorom povećanja horizontalnih opterećenja u obliku $\kappa \cdot p_{he}$:

- za silose kružnih poprečnih preseka ćelija:

$$\kappa = 1 + 0.50 \cdot \beta + 0.02 \cdot \beta \cdot r/t \quad \text{za } r/t \leq 70 \quad (2.207)$$

$$\kappa = 1 + 3.0 \cdot \beta \cdot \sqrt{h/d} \quad \text{za } r/t \geq 100 \quad (2.208)$$

gde su:

- t – debljina ravnog zida ćelije, ili zamenjujuća debljina sa jednakim momentom inercije kod naboranih zidova ćelije,
- r (ili r_u) – poluprečnik upisanog kruga ćelije,
- β – faktor neravnomernosti (tabela 18).

Za vrednosti $70 < r/t < 100$ potrebno je faktor povećanja κ odrediti primenom linearne interpolacije za sračunate vrednosti pri odnosima $r/t = 70$ i $r/t = 100$.

- za silose sa kvadratnim ili poligonalnim poprečnim presekom:

$$\kappa = 1 + 0.8 \cdot \beta \quad (2.209)$$

Zamenjujuće povećano opterećenje se može primeniti kod okruglih ćelija kada je zid ćelije horizontalno ukrućen pri vrhu i dnu ćelije, ili se na odgovarajući način poprečno raspodeljuje preko zidova. Pri tome se podrazumeva, da je prstenasta sila zatezanja od zamenjujućeg povećanog opterećenja, po svom dejstvu kod dimenzionisanja zida ćelije,

analogna dejstvu momenta savijanja i prstenastoj sili zatezanja od neravnomernog opterećenja.

Kod silosa kružnih ćelija od armiranog ili prednapregnutog betona, koji se dimenzionišu na povećano ravnomerno podeljeno horizontalno opterećenje, treba po pravilu raspodeliti armaturu u odnosu 60% prema 40%, kao odnos površine spoljne i unutrašnje armature u odnosu na ukupnu armaturu zida.

Kod asimetričnog punjenja ćelije (sa strane), treba posebno analizirati stanje opterećenja i uticaje usled kosog položaja nasutog materijala pri punjenju i pri pražnjenju. Analiza se može sprovesti analogno analizi kod slučaja ekscentričnog pražnjenja.

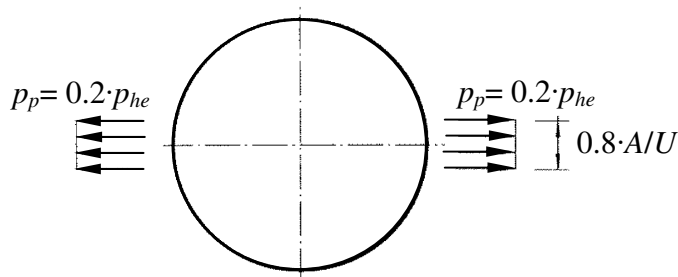
2.10.5.3 – SRPS ISO 11697:1996

Kod SRPS ISO 11697:1996 [291], dodatno lokalno opterećenje je nazvano *dopunsko opterećenje*, i predstavljeno je kao dodatni unutrašnji pritisak na zidu kružne ćelije, koji deluje na dve dijametralno suprotne površine (sl. 86), kvadratnog oblika sa stranicom s :

$$s = 0.8 \cdot \frac{A}{U} \quad (2.210)$$

$$p_p = 0.2 \cdot p_{he} \quad (2.211)$$

gde je p_{he} horizontalni pritisak pri pražnjenju. Tandem pritisnutih površina, sa dodatnim opterećenjem p_p , može zauzimati bilo koji položaj po visini i obimu ćelije.



Sl. 86 Dodatni pritisak na zidu ćelije prema ISO 11697.

U slučajevima pražnjenja ćelije, gde je ekscentricitet ispusnog otvora e , manji od $0.25d$ za cilindrične ćelije (d je unutrašnji prečnik ćelije), ili manji od $0.25a$ za pravougaone silosne ćelije (a je manja strana pravougaone ćelije), dodatno opterećenje, definisano preko jednačine (2.211) treba uvećati sa faktorom β , prema sledećem izrazu:

$$\beta = 1.0 + 4.0 \cdot \frac{e}{d} \quad (2.212)$$

Jednačina (2.212) je validna samo za silose kod kojih je ekscentricitet (e) manji ili jednak $0.25d$. Prema SRPS ISO 11697, standard se ne odnosi na silose, kod kojih je ekscentricitet pri pražnjenju veći od prethodno navedene granice.

2.10.5.4 – ENV 1991-4:1995 i EN 1991-4:2006

Prema ENV 1991-4:1995 [220], lokalno dodatno opterećenje se uzima da deluje na bilo kojem delu ćelije silosa, kako pri punjenju, tako i pri pražnjenju, i određuje se prema sledećim izrazima:

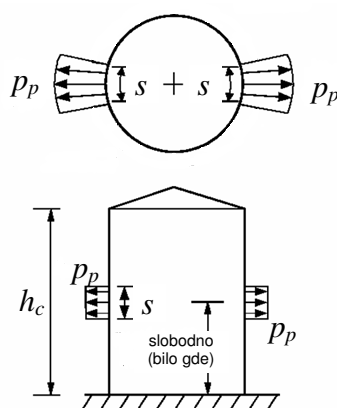
$$p_p = 0.2 \cdot \beta \cdot p_{hf} \quad (\text{za punjenje}) \quad (2.213)$$

$$p_p = 0.2 \cdot \beta \cdot p_{he} \quad (\text{za pražnjenje}) \quad (2.214)$$

$$\beta = 1.0 + 4.0 \cdot \frac{e}{d_c} \quad (2.215)$$

gde je sa β označen faktor sa kojim se uvodi uticaj ekscentričnosti pri punjenju ($e = e_f$), i pri pražnjenju ($e = \max\{e_f, e_o\}$). Ekscentriciteti pri punjenju i pražnjenju su označeni respektivno sa e_f i e_o . Tandem pritisnutih površina, može zauzeti bilo koji položaj po visini i obimu ćelije, prema obliku prikazanom na sl. 87. Dodatno opterećenje¹ deluje na dve naspramne kvadratno oblikovane površine sa stranicom s :

$$s = 0.2 \cdot d_c \quad (2.216)$$



Sl. 87 Dodatno opterećenje na zidu ćelije pema ENV 1991-4:1995.

Prema EN 1991-4:2006, dodatno lokalno opterećenje je složenije po formulaciji od prethodne i definisano je sa preko dve vrednosti po celom obimu ćelije u visini pojasa s (sl. 72, i opis opterećenja u § 2.10.2.3). Na sl. 72, lokalno opterećenje je sastavljeno od pritiska usmerenim ka spolja p_p (kao nadpritisak) koji po napadnoj površini odgovara situaciji na sl. 87, a preostali deo površine pojasa na visini s , opterećen je sa pritiskom usmerenim ka unutra p_{pi} (kao podpritisak).

2.10.5.5 – Određivanje statičkih uticaja

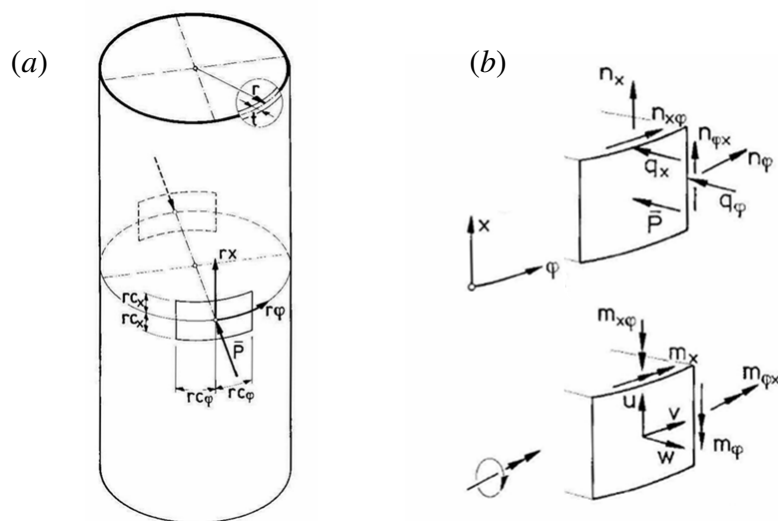
Kako opterećenja p_p lokalno deluje na cilindričnu ljusku – zid ćelije, dolazi do pojave svih presečnih sila, a od posebnog su interesa vrednosti momenata savijanja i normalnih sila. Složena statička analiza se u ovakvim slučajevima obično sprovodi sa primenom

¹ Ovo opterećenje je analizirano u knjizi *Bunker i silosi u čeličnoj konstrukciji* (u Aneksu II) od *Debeljkovića* (2000) [60]. Međutim, primenjeni analitički izrazi za određivanje statičkih uticaja, koji su korišćeni u Aneksu II ref. [60], odnose se na ravanski problem deformacija, tako da se mogu uzeti samo kao gruba aproksimacija pri određivanju uticaja od delovanja lokalnog dodatnog opterećenja. Ovi izrazi kod prostornog problema odgovaraju uticajima od radijalnog opterećenja koje deluje na dve dijametralno suprotne trake širine s , koje se vode po visini beskonačno duge cilindrične ljuske, kod koje je *Poisson*-ov koeficijent $\nu = 0$. Kako dodatno opterećenje deluje na lokalnim površinama kvadratnog oblika, a ne na vertikalnim trakama po visini ćelije, dobijeni rezultati za statičke uticaje (koji zbog primenjenih iraza odgovaraju slučaju opterećenja na trakama) vode predimenzionisanju zidova ćelije. U tom smislu je u ref. [60], skrenuta pažnja na ovaj problem, i zaključeno da propise i standarde treba da prate odgovarajuća objašnjenja i komentari, kako ne bi došlo do pogrešnih interpretacija u proračunima.

metode konačnih elemenata (MKE). Pored toga, p_p po lokaciji može biti na bilo kojoj realnoj visini silosa, pa bi trebalo napraviti više analiza radi boljeg sagledavanja uticaja, i konkretno zbog dimenzionisanja konstrukcije. U inženjerskoj praksi, uobičajeno se koriste aproksimativni postupci, radi supstitucije dugih i složenih postupaka proračuna, naročito u početnoj fazi projektovanja. Ovo opterećenje je mera za moguću pojavu nesimetričnog opterećenja kod silosa, a njegova kvantifikacija je više stvar kompromisne procene, pri kojoj se uzima da p_p opterećenje proizvodi uticaje koji treba da pokriju uticaje pri nepravilnim i nedovoljno poznatim oblicima nesimetričnog opterećenja. Na ovaj način, aproksimativni proračun uticaja od p_p opterećenja je ovde sigurno manje aproksimativan od samog određivanja opterećenja.

Približan postupak za određivanje veličina presečnih sila u cilindričnoj ljusci, pri delovanju lokalnog opterećenja p , prikazao je *Windels* (1988) u ref. [337], gde je ovaj problem analiziran kod beskonačno duge, kružne cilindrične ljuske (sl. 88), od homogenog izotropnog materijala, sa radijusom r i konstantnom debljinom ljuske t . Dve lokalne površine pravougaonog oblika su postavljena na ljusci dijametralno jedna naspram druge, visine $2r \cdot c_x$ u pravcu ose cilindra, i širine $2r \cdot c_\varphi$ po kružnom luku u pravcu prstena. Ove površine su opterećene konstantnim površinskim opterećenjem p , usmerenim radijalno prema osi cilindra. Prostom integracijom opterećenja p po površini određuje se sila:

$$P = 4 \cdot p \cdot r^2 \cdot c_x \cdot c_\varphi \quad (2.217)$$



Sl. 88 Cilindrična ljuska sa koordinatama i opterećenjem (a), i element ljuske sa presečnim silama i pomeranjima (b), prema [337].

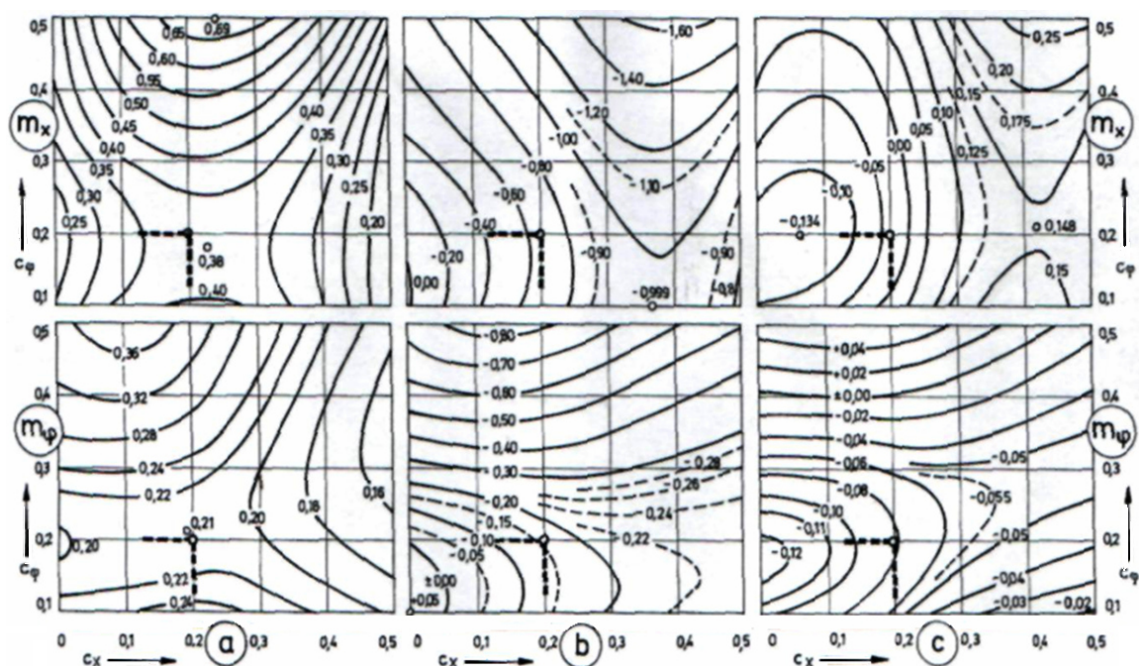
Rezultujuća sila od opterećenja p deluje u centru površine, a zbog zakrivljenosti ljuske, u ovom slučaju odgovara rezultujućoj skretnoj sili od opterećenja p na lokalnoj površini:

$$\bar{P} = P \cdot \sin c_\varphi / c_\varphi \quad (2.218)$$

Bezdimenzionalna veličina c_φ u gornjem izrazu predstavlja polovinu centralnog ugla sa kojim se zaklapaju bočne strane lokalne površine, i u ovom slučaju c_φ je u [rad]-ijanima. Za uobičajene male vrednosti c_φ (npr. za $c_\varphi = 0.2$ sledi da je $\sin c_\varphi / c_\varphi = 0.993 \approx 1$), dobija se da je skretna sila približno jednaka sili P , te se sila P koristi u daljoj analizi u radu [337]. Da je opterećenje p oblika kao na sl. 86, prema ISO 11697, onda bi rezultujuća sila bila sila P ; međutim, kod normi koje su usledili posle ovoga standarda, išlo se u pravcu

uvođenja radijalnog opterećenja koje se jednostavnije unosi u analizu kod primene MKE (videti sl. 87 kod ENV 1991-4:1995, kao i sl. 72 kod EN 1991-4:2006).

Prema *Windels*-u, konstantno opterećenje p koje deluje na lokalnoj površini, zamenjuje se sa linijskim opterećenjem intenziteta $2p \cdot r \cdot c_\varphi$, koje deluje po visini $2r \cdot c_x$ kružnog prstena u sredini lokalne površine, a nakon toga se razvija u *Fourier*-ov red po koordinati φ . Za svaki član opterećenja u *Fourier*-ovom redu određuje se rešenje jednačina ravnoteže na diferencijalnom elementu ljuske. Sumiranjem ovih rešenja (u radu je analizirano $n = 50$ članova reda, što u ovom slučaju daje vrlo precizno određivanje sumarnog rešenja problema), određuje se naponsko-deformacijsko stanje (polja napona i deformacija u ljusci) pri delovanju linijskog opterećenja $2p \cdot r \cdot c_\varphi$. U osnovi, polja napona i deformacija usled delovanja linijskog opterećenja, predstavljaju uticajne površine za lokalno površinsko opterećenje p . Integracija se obavlja numerički, primenom *Simpson*-ovog pravila, gde se dužina koju daje c_x deli na četiri jednaka dela.



Sl. 89 Koeficijenti a , b i c za momente savijanja m_x i m_φ u centrima lokalnih površina, [337].

Pri konstantnom *Poisson*-ovom koeficijentu ν za materijal cilindrične ljuske, naponske i deformacione veličine se mogu predstaviti u sledećem uopštenom bezdimenzionalnom obliku (s_S je zajednička oznaka za bezdimenzionalne veličine presečnih sila i pomeranja):

$$s_S = S / K_S \quad (2.219)$$

gde S odgovara posmatranoj presečnoj sili ili pomeranju (ovde u tabeli 19, S odgovara redom m_φ , m_x , n_φ i n_x), a K_S je dimenzioni faktor za posmatranu veličinu. Generalisana veličina s_S , je funkcija tri bezdimenzionalna parametra, i to su odnos (r/t) , c_x i c_φ . Prema dobijenom obliku veličine S/K_S , u logaritamskom sistemu sa koordinatama $\log(s_S)$ i $\log(r/t)$, *Windels* je zaključio da se za krive može uzeti aproksimacija u obliku kvadratne parabole:

$$\log s_S = \log a_S + [b_S + c_S \cdot \log(r/t)] \cdot \log(r/t) \quad (2.220)$$

gde su a_S , b_S i c_S koeficijenti koji zavise od c_x i c_φ , a određeni su sa primenom metode najmanjih kvadrata radi dobre aproksimacije usvojene parabolične zavisnosti sa krivama

S/K_S . Vrednosti za koeficijente a_s , b_s i c_s su dobijeni kvadratnom regresijom u okviru područja $15 \leq (r/t) \leq 300$, a uz zadovoljavajuću tačnost, aproksimacija se može primeniti i na šire područje $10 \leq (r/t) \leq 500$. Koeficijenti a_s , b_s i c_s , preko kojih se određuje $S = m_\varphi, m_x, n_\varphi, n_x$ i pomeranje w , prikazani su putem serije dijagrama u ref. [337]. Ostale presečne sile i pomeranja u centrima lokalnih površina pri delovanju opterećenja p su 0. Ovde su prikazani, ilustracije radi, samo dijagrami za m_x i m_φ , na sl. 89. Pri izradi dijagrama za ljusku je uzeto da je $\nu = 0.2$, što odgovara slučaju betonskog zida ljuske.

Zavisnost koeficijenata se može prikazati u jednostavnijem obliku:

$$s_s = a_s \cdot (r/t)^{d_s} \quad (2.221)$$

$$d_s = b_s + c_s \cdot \log(r/t) \quad (2.222)$$

a sa time se određuje:

$$S = s_s \cdot K_S = a_s \cdot (r/t)^{d_s} \cdot K_S = a_s \cdot (r/t)^{b_s + c_s \cdot \log(r/t)} \cdot K_S \quad (2.223)$$

Konkretno, pri analizi dodatnog lokalnog opterećenja p_p , lokalne površine su definisane kao kvadrate površine sa stranama:

$$s = 0.8 \frac{A}{U} = 0.8 \cdot \frac{d_c}{4} = 0.2 \cdot d_c = 0.4 \cdot r \quad (2.224)$$

Oдавde sledi da je $c_x = c_\varphi = 0.20$, i imajući u vidu da je $p_p = -p$, rezultujuća sila P , preko izraza (2.217), u ovom slučaju prelazi u oblik:

$$P = 0.16 \cdot p \cdot r^2 = -0.16 \cdot p_p \cdot r^2 \quad (2.225)$$

Za ovaj slučaj, na sl. 89 su posebno naznačene tačke sa $c_x = c_\varphi = 0.20$. Očitane vrednosti su prebačene na odgovarajuća mesta u tabeli 19, gde su primenjene kod određivanja odgovarajuće presečne sile u centrima lokalnih površina.

Tabela 19. Koeficijenti a, b, c i izrazi za presečne sile u težištima lokalnih površina, za $c_x = c_\varphi = 0.2$, $\nu = 0.2$ i $10 \leq (r/t) \leq 500$, prema Windels-u [337].

Presečna sila S	a_s	b_s	c_s	K_S	Izrazi za presečne sile S
m_φ	0.21	- 0.16	- 0.082	P	$m_\varphi = 0.21 \cdot (r/t)^{[-0.16 - 0.082 \cdot \log(r/t)]} \cdot P$
m_x	0.38	- 0.66	- 0.030	P	$m_x = 0.38 \cdot (r/t)^{[-0.66 - 0.030 \cdot \log(r/t)]} \cdot P$
n_φ	- 0.16	1.31	- 0.280	P/r	$n_\varphi = -0.16 \cdot (r/t)^{[1.31 - 0.280 \cdot \log(r/t)]} \cdot P/r$
n_x	- 0.10	1.31	- 0.142	P/r	$n_x = -0.10 \cdot (r/t)^{[1.31 - 0.142 \cdot \log(r/t)]} \cdot P/r$

Sređeni izrazi za presečne sile su date u poslednjoj koloni ove tabele. Kod ovih izraza treba još uvesti silu P prema (2.225). Pre konačnih izraza za presečne sile, ovde ćemo promeniti konvenciju o znaku za momente savijanja, koju je primenio Windels. Uz to promenimo i koordinatu x u z .

Sa ovim napomenama, izrazi za presečne sile u težištima lokalnih površina pri dejstvu dodatnog lokalnog opterećenja p_p (dodatno radialno opterećenje usmereno ka spolja kao

na sl. 87), kod beskonačno duge, kružne cilindrične ljske sa $\nu = 0.2$, u području $10 \leq (r/t) \leq 500$, određuju se u obliku:

$$m_{\varphi} = 0.0336 \cdot p_p \cdot r^2 \cdot (r/t)^{-0.16-0.082 \cdot \log(r/t)} \quad (2.226)$$

$$m_z = 0.0608 \cdot p_p \cdot r^2 \cdot (r/t)^{-0.66-0.030 \cdot \log(r/t)} \quad (2.227)$$

$$n_{\varphi} = 0.0256 \cdot p_p \cdot r \cdot (r/t)^{1.31-0.280 \cdot \log(r/t)} \quad (2.228)$$

$$n_z = 0.0160 \cdot p_p \cdot r \cdot (r/t)^{1.31-0.142 \cdot \log(r/t)} \quad (2.229)$$

Dodatni izraz za pomeranje w u težištima lokalnih površina je:

$$w = -0.582 \cdot (r/t)^{2.44+0.009 \cdot \log(r/t)} \cdot P / (r \cdot E) \quad (2.230)$$

Kada se kod ovog izraza uvede sila P prema (2.225), određuje se:

$$w = 0.09312 \cdot \frac{P_p \cdot r}{E} \cdot (r/t)^{2.44+0.009 \cdot \log(r/t)} \quad (2.231)$$

gde je sa E označen modul elastičnosti materijala ljske.

Za pozitivne vrednosti opterećenja p_p (deluje upravno ka spolja), momenti savijanja m_{φ} i m_z imaju pozitivne vrednosti (po konvenciji o znaku: *pozitivni momenti zatežu spoljnu stranu ljske*), a normalne sile n_{φ} i n_z imaju isto pozitivne vrednosti, odnosno određuju se kao sile zatezanja (po konvenciji o znaku: *pozitivna je sila zatezanja*). Momenti savijanja su u [kNm/m], a normalne sile u [kN/m].

Primena aproksimativne zavisnosti koeficijenata u obliku (2.220), koja je omogućila uspostavljanje ovakvog rešenja za presečne sile, proizvodi malu grešku prema ref. [337]. Kod primene rešenja presečnih sila za odnos $(r/t) = 20$, najveća greška je kod određivanja m_z i iznosi oko 3%, dok je za ostale veličine do 1%. Za odnos $(r/t) = 300$, greška za pri određivanju m_z je oko 4%, a za ostale uticaje manja od 2%. Ovde se može napomenuti, da odnos $r/t = 300$ odgovara metalnim silosima za koje se u EC1-4 propisuje drugačiji oblik lokalnog opterećenja (prikazano na sl. 72).

Izrazi za presečne sile od (2.226) do (2.229), i pomeranje w prema (2.231), sada odgovaraju situaciji prikazanoj na sl. 90, koja je primenjena kod odgovarajuće analize prema *Timm*-u i *Windels*-u (1989) [308].

Na isti način kao u prethodnoj analizi, *Timm* i *Windels* (1989) [308] su u poglavlju o silosima u okviru *Beton-kalendar*a za 1989. god., prikazali rešenja za presečne sile od delovanja dodatnog lokalnog opterećenja p_p , kod cilindričnog silosa kružne osnove, ali je posmatrano uže područje odnosa (r/t) , odnosno oblast $10 \leq (r/t) \leq 30$, što predstavlja područje u kojem se nalaze AB i PB silosi. Jedina referenca na koju su se pri datoj analizi pozvali je upravo prethodno razmatrani rad *Windels*-a (1988) [337]. Međutim, postoji mala razlika u okviru rešavanja problema prema ref. [308] i [337]. U ref. [308], problem određivanja presečnih sila se odnosi na uže područje odnosa (r/t) , tako da je u ovoj oblasti usvojena aproksimacija u obliku linearne zavisnosti koeficijenata, umesto prethodno korišćene parabolične zavisnosti u obliku (2.220). Prema linearnoj aproksimaciji, određuje se:

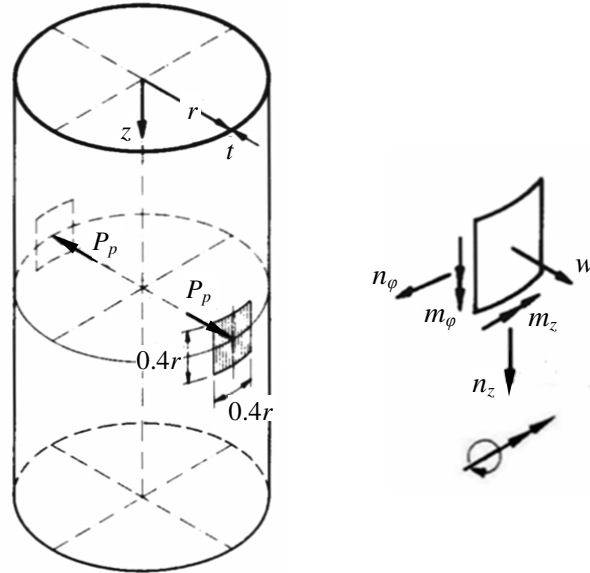
$$s_s = a_s \cdot (r/t)^{b_s} \quad (2.232)$$

$$S = s_s \cdot K_s = a_s \cdot (r/t)^{b_s} \cdot K_s \quad (2.233)$$

gde su koeficijenti a_s i b_s , predstavljeni sa novim vrednostima (saglasno primeni linearne aproksimacije) na odgovarajućim mestima u tabeli 20.

Za konstantno raspodeljeno radijalno opterećenje koje je usmerena ka spolja, p_p rezultujuća sila P_p , kako je prikazano na sl. 90, u ovom slučaju prelazi u oblik:

$$P_p = 0.16 \cdot p_p \cdot r^2 \quad (2.234)$$



Sl. 90 Cilindrična ljuska sa koordinatama i opterećenjem i element ljuske sa pozitivnim presečnim silama i pomeranjem w , adap. prema [308].

Tabela 20. Koeficijenti a i b i izrazi za presečne sile u težištima lokalnih površina, za područje $10 \leq (r/t) \leq 30$, prema Timm-u i Windels-u [308].

Presečna sila S	a_s	b_s	K_s	Izrazi za preseče sile S
m_ϕ	0.25	- 0.34	P_p	$m_\phi = 0.25 \cdot (r/t)^{-0.34} \cdot P_p$
m_z	0.28	- 0.60	P_p	$m_z = 0.28 \cdot (r/t)^{-0.60} \cdot P_p$
n_ϕ	0.32	0.69	P_p/r	$n_\phi = 0.32 \cdot (r/t)^{0.69} \cdot P_p / r$
n_z	0.11	1.05	P_p/r	$n_z = 0.11 \cdot (r/t)^{1.05} \cdot P_p / r$

Vrednosti koeficijenata prikazanih u tabeli 20, primenjene su u okviru poslednje kolone u tabeli, kod određivanja odgovarajuće presečne sile u težištima lokalnih površina. Kod ove tabele sila P_p se odnosi na oblik (2.234). U ovom slučaju, presečne sile u centrima lokalnih površina pri dejstvu opterećenja p_p (prema sl. 90) kod beskonačno duge, kružne cilindrične ljuske, u području $10 \leq (r/t) \leq 30$, određuju se u obliku:

$$m_\phi = 0.0400 \cdot p_p \cdot r^2 \cdot (r/t)^{-0.34} \quad (2.235)$$

$$m_z = 0.0448 \cdot p_p \cdot r^2 \cdot (r/t)^{-0.60} \quad (2.236)$$

$$n_\phi = 0.0512 \cdot p_p \cdot r \cdot (r/t)^{0.69} \quad (2.237)$$

$$n_z = 0.0176 \cdot p_p \cdot r \cdot (r/t)^{1.05} \quad (2.238)$$

Dodatni izraz za pomeranje w u težištima lokalnih površina je:

$$w = 0.67 \cdot (r/t)^{2.50} \cdot P_p / (r \cdot E) \quad (2.239)$$

Kada se kod ovog izraza uvede sila P_p prema (2.234), određuje se:

$$w = 0.1072 \cdot \frac{P_p \cdot r}{E} \cdot (r/t)^{2.50} \quad (2.240)$$

gde je E modul elastičnosti materijala ljuske.

U tabeli 21, prikazane su vrednosti bezdimenzionalnih koeficijenata za momente savijanja, normalne sile i pomeranje w , u težištima lokalnih površina opterećenih sa dodatnim lokalnim opterećenjem p_p (sl. 90), uporedo za rešenja problema prema Windels-u (1988) [337], i prikaza rešenja prema Timm-u i Windels-u (1989) [308], u oblasti geometrijskog parametra ljuske silosa $10 \leq (r/t) \leq 30$. Svi izrazi su svedeni na slučaj na sl. 90, sa pozitivnim veličinama presečnih sila i pomeranja (pozitivni su momenti savijanja koji izazivaju zatezanje spoljne strane ljuske, i pozitivne su sile zatezanja). Odstupanja su veća kod pomeranja w , dok su do cca. 5% za momente i do cca. 10% za normalne sile u prstenastom pravcu. Razlika u vrednostima nastaje zbog primene različitih aproksimacija generalisanih veličina u analiziranom problemu (u ref. [337] primenjena je parabolična, a u ref. [308] linarna aproksimacija).

Tabela 21. Bezdimenzionalni koeficijenti za određivanja uticaja od opterećenja p_p prema Windels-u [337] i Timm-u i Windels-u [308], u oblasti $10 \leq (r/t) \leq 30$.

Bezdimenz. veličina	ref.	Izrazi za bezdimenz. veličine	(r/t)				
			10	15	20	25	30
$\frac{m_\varphi}{P_p \cdot r^2}$	[337]	$0.0336 \cdot (r/t)^{-0.16-0.082 \cdot \log(r/t)}$	0.01925	0.01678	0.01511	0.01388	0.01291
	[308]	$0.0400 \cdot (r/t)^{-0.34}$	0.01828	0.01593	0.01444	0.01339	0.01258
$\frac{m_z}{P_p \cdot r^2}$	[337]	$0.0608 \cdot (r/t)^{-0.66-0.030 \cdot \log(r/t)}$	0.01241	0.00925	0.00749	0.00635	0.00554
	[308]	$0.0448 \cdot (r/t)^{-0.60}$	0.01125	0.00882	0.00742	0.00649	0.00582
$\frac{n_\varphi}{P_p \cdot r}$	[337]	$0.0256 \cdot (r/t)^{1.31-0.280 \cdot \log(r/t)}$	0.2743	0.3644	0.4352	0.4924	0.5399
	[308]	$0.0512 \cdot (r/t)^{0.69}$	0.2508	0.3317	0.4046	0.4719	0.5352
$\frac{n_z}{P_p \cdot r}$	[337]	$0.0160 \cdot (r/t)^{1.31-0.142 \cdot \log(r/t)}$	0.2356	0.3535	0.4657	0.5727	0.6750
	[308]	$0.0176 \cdot (r/t)^{1.05}$	0.1975	0.3023	0.4089	0.5168	0.6259
$\frac{w}{P_p \cdot r / E}$	[337]	$0.09312 \cdot (r/t)^{2.44+0.009 \cdot \log(r/t)}$	26.18	70.98	144.1	249.8	391.6
	[308]	$0.1072 \cdot (r/t)^{2.50}$	33.90	93.42	191.8	335.0	528.4

AB i PB silosi su obično po geometriji u oblasti $10 \leq (r/t) \leq 30$ (maksimalno do 70). Može se primetiti da su bezdimenzionalne veličine za n_φ i m_φ , prikazane u tabeli 21, u osnovi pokrivene, respektivno sa normalizovanim vrednostima koeficijenta α_1 i α_2 , prema normi СНИП 2.10.05-85 [370]. Ove normalizovane vrednosti su $\alpha_1 = 0.40$ i $\alpha_2 = 0.02$ (odgovaraju za $h/d = 5$, i debljini AB zida koja je jednaka nominalnoj debljini $t = t_{nom}$), i uvode se u izraze za ukupnu normalnu silu (2.198) i ukupne momente savijanja (2.199),

radi obuhvatanja doprinosa od lokalnog opterećenja p_p ukupnim statičkim uticajima. Dato poređenje je, samo ilustrativno, s obzirom na to, da lokalno opterećenje p_p , prema normi СНИП deluje na relativno većoj površini zida ćelije u obliku razvijenog kvadrata sa stranama $\pi d / 12 \cong 0.52 r$, u odnosu na ovde analizirani slučaj, gde strane lokalne opterećene površine iznose $\pi d / 16 \cong 0.393 r (\cong 0.4 r)$, što odgovara opisu opterećenja p_p u EC1-4, prema prikazu na sl. 72 kod betonskih silosa.

Data rešenja su, u principu, dovoljna pri proračunu uticaja od delovanja p_p opterećenja kod ENV 1991-4:1995 [220] (prema sl. 87), kao i za dobru aproksimaciju opterećenja kod SRPS ISO 11697:1996 [291] (prema sl. 86).

Kod EN 1991-4:2006 [38] (sl. 72) i DIN 1055-6:2005 [62] za betonske silose (silosi sa debljim zidovima), dodatno lokalno opterećenje se odnosi kako na stanje nakon punjenja, tako i na stanje tokom pražnjenja materijala iz ćelije. Opis ovog opterećenja je prikazan u § 2.10.2.3, i ono se kod betonskih silosa sastoji od dela sa povećanim pritiscima materijala na delu zida ćelije, na tandemu od dijametralno suprotnih kvadratnih površina sa stranama $0.4 r$ (opterećenja p_{pf} i p_{pe} , pri punjenju i pražnjenju respektivno), i od dela sa smanjenim pritiscima na okolnom komplementarnom delu površine prstena van tandem opterećenih kvadratnih površina (opterećenja p_{pfi} i p_{pei} , pri punjenju i pražnjenju respektivno, koja deluju radialno prema osi ćelije). Intenziteti p_{pfi} i p_{pei} , odgovaraju $1/7$ od p_{pf} i p_{pe} , respektivno.

Dodatno lokalno opterećenje prema EN 1991-4:2006 [38] je prikazano na sl. 91 (a), sa delovima pod opterećenjima p_{pf} i p_{pfi} (za stanje nakon punjenja), i isto tako za p_{pe} i p_{pei} (za stanje tokom pražnjenja). Ova opterećenja se mogu razložiti na opterećenja pod (b) i (c) na sl. 91, tako da se uticaji od lokalnog opterećenja, mogu odrediti kao superpozicija pojedinačnih uticaja za opterećenja prikazana pod (b) i (c) na sl. 91.

Na sl. 91 (b) prikazano opterećenje odgovara ovde analiziranom lokalnom opterećenju p_p :

$$(p_p)_f = p_{pf} + p_{pfi} \Rightarrow (p_p)_f = 8/7 \cdot p_{pf} \quad (\text{pri punjenju}) \quad (2.241)$$

$$(p_p)_e = p_{pe} + p_{pei} \Rightarrow (p_p)_e = 8/7 \cdot p_{pe} \quad (\text{pri pražnjenju}) \quad (2.242)$$

Uticaji od ovih opterećenja (prikaz opterećenja na sl. 91 (b)), u težištima lokalnih pritisnutih površina (prikaz na sl. 90), dobijaju se primenom odgovarajućih izraza ili datih vrednosti u tabeli 21.

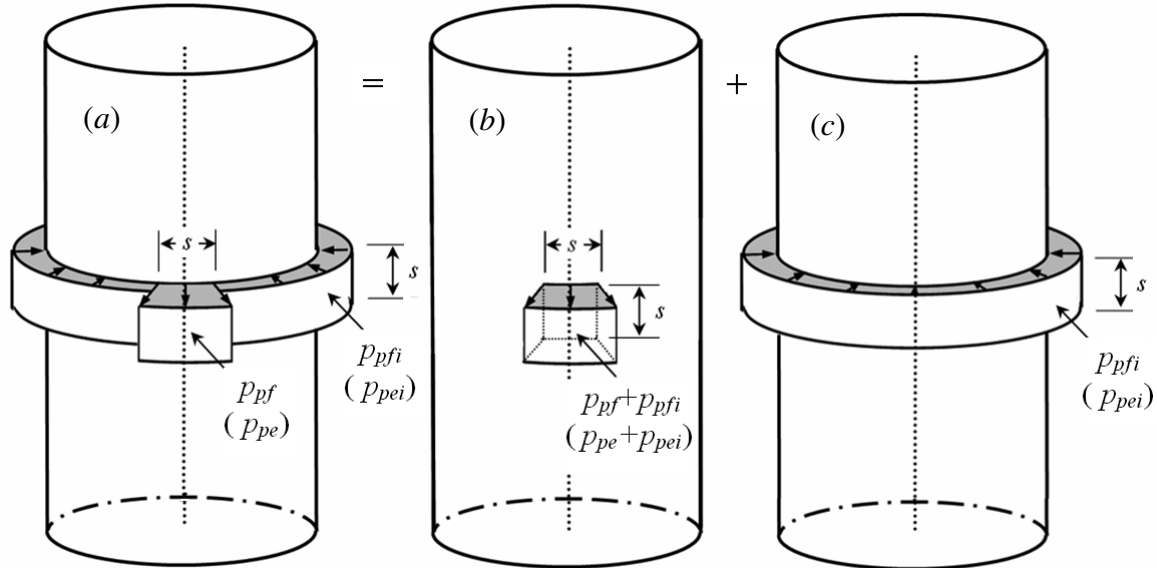
Na sl. 91 (c), prikazano je prstenasto opterećenje, koje se uzima kao:

$$p_{pfi} = p_{pf} / 7 \Rightarrow p_{pfi} = (p_p)_f / 8 \quad (\text{pri punjenju}) \quad (2.243)$$

$$p_{pei} = p_{pe} / 7 \Rightarrow p_{pei} = (p_p)_e / 8 \quad (\text{pri pražnjenju}) \quad (2.244)$$

Analiza statičkih uticaj za prstenasto opterećenje prikazano na sl. 91 (c), se može sprovesti na uobičajeni način, primenom fleksione teorije cilindrične ljske, gde je u sklopu ovde analiziranog problema, potrebno odrediti samo vrednosti presečnih sila na polovini visine prstena, kako bi se ti uticaji superponirali sa uticajima u težištima lokalnih površina sa tandem opterećenjem prikazanim na sl. 91 (b). Ovde analizirano prstenasto opterećenje, kao radialni pritisci usmereni prema osi silosa, intenziteta p_{pfi} i p_{pei} za stanja pri punjenju i pražnjenju, su relativno malih vrednosti. Prema izrazima (2.243) i (2.244), ova opterećenja su po intenzitetu $1/7$ -na od lokalnih opterećenja na slici sl. 91 (a), odnosno $1/8$ -na od lokalnog opterećenja na sl. 91 (b). Pored toga, ovo opterećenje deluje u suprotnom pravcu od prethodnih, pa na taj način neznatno smanjuje uticaje od prethodnih opterećenja. Zbog toga, u stručnoj praksi, kao aproksimacija, na strani

sigrnosti po pitanju uticaja u centrima lokalne površine od delovanja ukupnog opterećenja prikazanog na sl. 91 (a), se može uzeti u analizu samo opterećenje prikazano na sl. 91 (b), pri čemu se potpuno zanemaruje mali doprinos opterećenja prikazanog na sl. 91 (c).



Sl. 91 Dekompozicija dodatnog lokalnog opterećenja.

Pri analizi uticaja u sredini visine prstena od opterećenja prikazanog na sl. 91 (c), koristi se princip superpozicije kod opterećenja i pratećih uticaja. Ljuska se u osnovi razmatra razdvojena u nivou gornje ivice prstenastog opterećenja sa uvođenjem statički nepoznatih veličina X_H i X_M , kako sledi u fleksionoj teoriji cilindričnih ljuski, sa pretpostavljenim opterećenjem p_{pi} koje deluje na ukupnoj površini donje ljuske u koju je uključena i površina prstena (prvi korak analize). Ovde se pri analizi dobija da je $X_M = 0$, a X_H daje uticaje. Drugi korak je u stvari identičan prvom (identični rezultati), ali se ljuska posmatra obrnuto, kao i prateće opterećenje. U osnovi, kod drugog koraka ljuska se razdvaja na dva dela u nivou donje ivice prstenaste površine, a opterećenje p_{pi} uzima da deluje na ukupnoj površini gornje ljuske. Superpozicija opterećenja iz prva dva koraka daje opterećenje od $2 \times p_{pi}$ na površini prstena, a površine van ovog prstena su opterećene sa $1 \times p_{pi}$. Kako se na ukupnoj površini ljuske beskonačne dužine, prema koraku 1 i 2, javlja kao prekobrojno $1 \times p_{pi}$ opterećenje, u trećem koraku analize, oduzimaju se uticaji od delovanja ovog opterećenja po celoj ljusci, a to su, u ovom slučaju analize sveukupne ljuske, samo membranski uticaji. Superpozicijom uticaja iz ova tri koraka dobija se konačno rešenje, a uticaji u sredini visine prstena od delovanja opterećenja prikazanog na sl. 91 (c), mogu se formulisati u sledećem obliku:

$$m_z = -\frac{p_{pi}}{2k^2} \cdot e^{-k \cdot s/2} \cdot \sin(k s / 2) \quad (2.245)$$

$$n_\varphi = -p_{pi} \cdot r \cdot [1 - e^{-k \cdot s/2} \cdot \cos(k s / 2)] \quad (2.246)$$

$$m_\varphi = \nu \cdot m_z \quad (2.247)$$

$$n_z = 0 \quad (2.248)$$

gde je:

$$k = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{(r \cdot t)^2}} \quad (2.249)$$

k = "koeficijent prigušenja" kod cilindrične ljske (dimenzionalna veličina, u $[m^{-1}]$).

Kod ovih izraza p_{pi} se uzima kao p_{pfi} ili p_{pei} , respektivno pri slučajevima analize uticaja pri punjenju, odnosno pri pražnjenju materijala kod silosa.

U opštem slučaju, kada bi visina prstena s , bilo relativno velika, došlo bi do "gašenja" člana sa eksponencijalnom funkcijom, odakle bi m_z težilo ka 0 u sredini visine prstena, a n_φ bi prilazilo izrazu za kotlovsku formulu kod membranskih uticaja.

Prikazana rešenja se za praktičnu primenu uzimaju kao približna rešenja, kako se odnose na slučaj beskonačno duge cilindrične ljske. Kod realnih konstrukcija, kod ljski dolazi do ivičnih poremećaja u blizini kontura, gde je ljska obično kruto ili elastično vezana za neki drugi element konstrukcije. U EC1-4, nije posebno definisano nanošenje lokalnog opterećenja na površinu ljske u ivičnim zonama. Prema СНиП 2.10.05-85 [370], lokalno opterećenje se nanosi samo kod srednje zone silosa, u okviru visine h_{mt} (sl. 82).

Superpozicijom uticaja od lokalnog opterećenja p_p (prikazanog na sl. 91 (b) i definisanog izrazima (2.241) i (2.242)) koji se određuju primenom tabele 21, i uticaja od dopunskog prstenastog opterećenja p_{pi} (prikazanog na sl. 91 (c) i definisanog izrazima (2.243) i (2.244)) koji se određuju primenom izraza (2.245) do (2.248), dobijaju se ukupni uticaji od dodatnog lokalnog opterećenja definisanog u EC1-4.

Opisani postupak za određivanje uticaja od dodatnog lokalnog opterećenja, je za primenu vrlo jednostavan, i može se uvesti u programe za tabelarne proračune, kao što je npr. *Excel*, uz variranje položaja težišta lokalno opterećene površine po visini silosa. U ovom slučaju, proračun je jednostavniji, a preglednost rezultata je mnogo bolja nego pri primeni programa za konstrukcijske analize (sa primenom MKE). Kod navedenog postupka, dobija se greška manja od 5% pri određivanju relevantnih statičkih uticaja (u težištima lokalnih površina) od delovanja lokalnog opterećenja.

Postupak se može još više uprostiti, ako se zanemare uticaji od p_{pi} opterećenja (ovo se već može primetiti u evropskoj stručnoj praksi). U ovom slučaju, inovacija pri definisanju lokalnog opterećenja p_p sa uvođenjem dopunskog opterećenja p_{pi} , kako je to uvedeno u EC1-4, u praksi je svedena na poznatu analizu uticaja od opterećenja p_p , pri čemu se opterećenje uvećava sa faktorom $8/7 \cong 1.143$.

Približni proračun ne može zameniti tačniji proračun, koji je potreban kada je lokalno opterećenje u blizini ivičnih poremećaja cilindrične ljske. U ovim slučajevima se preporučuje primena MKE za određivanje statičkih uticaja, kao i za detaljnije analize konstrukcije silosa.

2.10.6 Opterećenje pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom

Ovaj poseban oblik nesimetričnog opterećenja, se uvodi kod analize silosa sa velikim ekscentricitetom otvora za pražnjenje, odnosno pri ekscentričnom proticanju materijala u ćeliji silosa. Ovi uticaji se moraju obuhvatiti u projektovanju silosa, posebno zbog pojave momenata savijanja izazvanih delovanjem lokalnog opterećenja. U nekim slučajevima proticanja materijala, formira se u jednom delu preseka ćelije ekscentrična zona kroz koju materijal protiče, dok u preostalom delu preseka materijal miruje. Ova pojava kod protoka materijala se naziva ekscentrični proticanje. Uobičajena pojava ekscentričnog protoka se javlja u slučajevima:

- isticanja kroz ekscentrično postavljeni otvor, kod silosa sa unutrašnjim protokom materijala, pri čemu se formira asimetrična protočna zona materijala u ćeliji;
- isticanja materijala pomoću izuzimača za slučaj nepravilnog rada izuzimača, kada se zrnasta masa povlači samo iz jednog dela podužnog ispusta na izuzimaču;
- kod silosa sa asimetričnim levkom; i
- kod silosi sa više otvora za pražnjenje na dnu ćelije (ili opciono na levku), u slučaju da nisu svi otvori u jednovremenoj upotrebi (obično se projektuje rotaciono simetričan raspored za više otvora na dnu ćelije).

Poseban slučaj predstavlja pražnjenje kroz bočne ispusne cevi (za interventno pražnjenje), na jednoćelijskim silosima ili na spoljnim ćelijama kod silosne baterije, gde se izdavanje materijala može izvršiti bez potrebe za aktiviranje mašinskog pogona, već samo putem gravitacionog pražnjenja kroz bočne otvore putem ispusne cevne "lule" u transportna sredstva. Isticanje materijala kroz ove otvore stvara nepoželjan oblik protoka u ćeliji, što dovodi do pojave neregularnih opterećenja kod zida ćelije, što se obično manifestuje sa opciono relativno većim stepenom oštećenja kod delova zida pri otvoru (veličina i broj prslina na AB zidu ćelije) i ubrzanog habanja zida ćelije u regionu uvođenja cevi, u odnosu na regularno stanje kod ćelija bez ovog otvora.

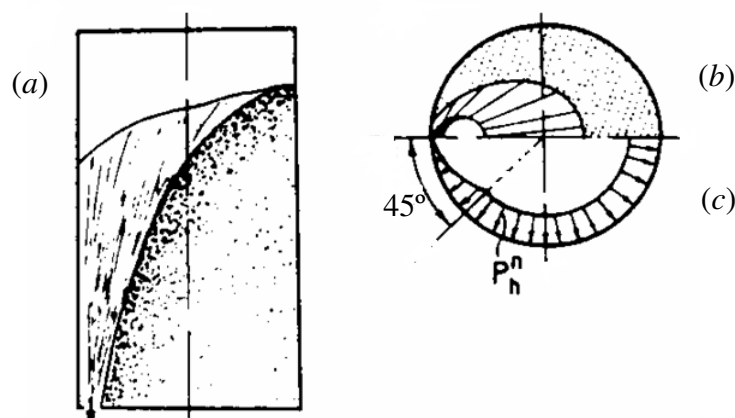
U osnovi, ekscentrično pražnjenje indukuje neravnomernu raspodelu pritisaka po unutrašnjem obimu zida ćelije. Usled ovih neravnomernih opterećenja na zidovima ćelija, dolazi do pojave momenta savijanja u zidovima (kao i njima odgovarajućih normalnih sila), koji se ne javljaju pri regularnom centričnom pražnjenju ćelije. Ove uticaje treba obezbediti odgovarajućim armiranjem kod AB silosa.

Prema EN 1991-4:2006 [38], opterećenja pri ekscentričnom pražnjenju se uzimaju kao poseban slučaj analize opterećenja kod silosa, i ovde su opisana u okviru § 2.10.2.5. Ovaj slučaj opterećenja u potpunosti odgovara originalnoj verziji prema normi DIN 1055-6:2005 [62]. Međutim, na osnovu odgovarajućih dodatnih analiza objavljene su korekcije normi DIN 1055-6 (2006) [62], gde su kod analize opterećenja pri ekscentričnom pražnjenju, date odgovarajuće proračunske izmene, tako da se u tom obliku ovaj deo normi DIN, razlikuje od odgovarajućeg dela u EC1-4. Kod ISO 11697 (1990) [125], odnosno SRPS ISO 11697 (1996) [291], ovaj slučaj opterećenja je van okvira primene standarda, a slično je i kod ACI 313-97 (1997) [5], gde se posebno ne razmatra ovaj problem.

Kod standarda AS 3774 (1996) [14], ovaj tip opterećenja se uzima za osnovni tip opterećenja pri ekscentričnom pražnjenju i razmatra se u svim slučajevima gde je ekscentricitet otvora veći od $0.1 d_c$. Kod EC1-4, ovo opterećenje se uvodi specijalno za silose proračunskih klasa 2 i 3 (AAC 2 i 3) i to u slučaju da je ekscentricitet otvora za pražnjenje veći od $0.25 d_c$. Norme СНИП 2.10.05-85 (1985) [370], su prve norme u kojima je ovo opterećenje uvedeno kao poseban slučaj opterećenja.

2.10.6.1 – СНИП 2.10.05-85

Prema СНИП 2.10.05-85 (1985) [370], za silose prečnika 12 m i sa većim prečnikom, pri slučaju protoka materijala kroz samoformirani protočni kanal materijala uz sam zid silosa, treba po celoj visini silosa iznad otvora za pražnjenje, smanjiti horizontalne pritiske od zrnastog materijala (linearno smanjenje prema promeni centralnog ugla), pri čemu se dijagram raspodele horizontalnih pritisaka uzima prema sl. 92.



Sl. 92 Skica isticanja zrnastog materijala kroz otvor uz zid ćelije i odgovarajući dijagram pritisaka materijala u horizontalnom preseku ćelije.

Pri pražnjenju ćelije kroz otvor u blizini zida ćelije, formira se protočni kanal u zrnastom materijalu pri čemu dolazi do lokalnog smanjenja horizontalnih pritiska. U ovom slučaju treba napraviti proveru da li je dovoljna količina postojeće armature (ili prethodno usvojene, u fazi projektovanja), za prihvatanje ovih lokalnih uticaja u zidu ćelije. Analizu treba sprovesti za različite nivoe zrnastog materijala u ćeliji, kao i za različite oblike gornje površine materijala (npr. sa padom prema vertikalnoj poziciji otvora). Na sl. 92 prikazani su presek silosa sa otvorom na ravnom dnu (a), pogled na osnovu ćelije (b), i razmatrani dijagram horizontalnih pritiska (c).

2.10.6.2 – AS 3774:1996

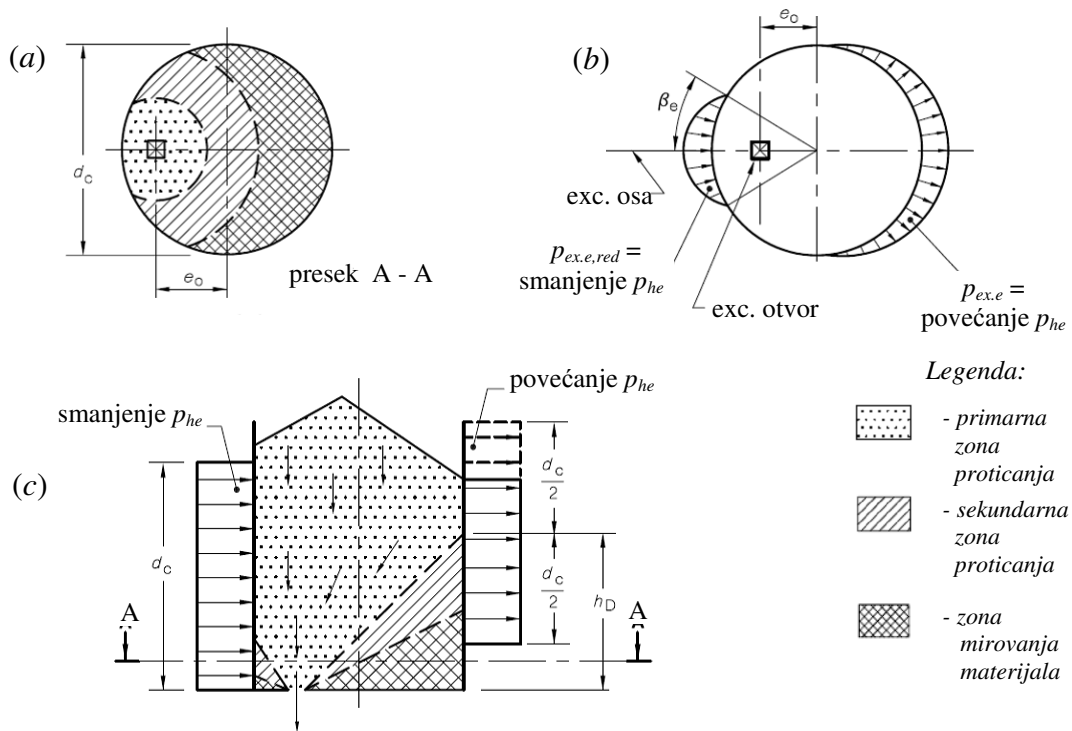
Prema AS 3774 (1996) [14], kada se silos projektuje za pražnjenje preko otvora koji je ekscentričan u odnosu na vertikalnu osu (sl. 93), treba uvesti dodatne nesimetrične pritiske na zidove ćelije kod analize silosa pri stanju pražnjenja. Ovi dodatni pritisci mogu povećati ili smanjiti pritiske, koji su određeni prema analizi silosa pri stanju centričnog pražnjenja. Pritisci zavise od odnosa između ekscentriciteta otvora (e_o) i prečnika silosa (d_c). Ekscentričnost, koja je manja od $0.1d_c$, se uzima da ne proizvodi posebne efekte, i kao takva se može zanemariti.

Horizontalna linija koja spaja centre silosa i otvora se uzima za osu ekscentriciteta. Tačke na zidu do otvora, se uzimaju za bližu stranu, a dijametralno od ovoga za dalju stranu zida u odnosu na otvor za pražnjenje. Opterećenja pri ekscentričnom pražnjenju, u AS 3774, su formulisana kao odgovarajuća generalizacija prema rezultatima merenja objavljenih u literaturi (u AS 3774 se navodi da su korišćeni rezultati *Pieper-a*, *Ravenet-a*, *Hartlen-a*, *Gale-a*, kao i iz drugih izvora). Kod proračunskih izraza oznake su delom izmenjene i prilagođene oznakama u EC1-4.

Povećanje pritisaka se uzima na daljoj strani zida (dijametralno od otvora), prema referentnoj visini h_D merenoj od visine otvora, kao na sl. 93 (c), pri čemu se povećani pritisci uzimaju na delu zida koji odgovara pojasnoj zoni visine d_c , sa sredinom pojasne zone u nivou referentne visine h_D . Visina h_D se određuje prema izrazu:

$$h_D = (0.5 \cdot d_c + e_o) \cdot \tan \phi_i \quad (2.250)$$

gde je ϕ_i gornja vrednost ugla unutrašnjeg trenja (u AS 3774 naznačeno je da je u pitanju efektivni ugao unutrašnjeg trenja), u [°]-ima.



Sl. 93 Raspodela promene pritiska pri ekscentričnom pražnjenju: (a) zone proticanja; (b) promene pritiska po obimu zida; (c) promene pritiska po visini zida, prema AS 3774.

Maksimalno povećanje pritiska pri ekscentričnom isticanju ($p_{ex.e,max.}$) se određuje kao:

$$p_{ex.e,max} = p_{he} \cdot \left(\frac{e_o}{d_c} - 0.1 \right) \geq 0 \quad (2.251)$$

gde je p_{he} normalni (horizontalni) pritisak na vertikalne zidove pri pražnjenju (odgovara pritisku pri centričnom pražnjenju).

Za silose kružne osnove, povećanje opterećenja $p_{ex.e}$ se uzima u skladu sa raspodelom prikazanom na sl. 93 (b), sa promenom u obliku izraza:

$$\text{za ugao } \beta \text{ između } 90^\circ \text{ i } 270^\circ \Rightarrow p_{ex.e} = p_{ex.e,max} \cdot (-\cos \beta) \quad (2.252)$$

$$\text{za ugao } \beta \text{ između } -90^\circ \text{ i } 90^\circ \Rightarrow p_{ex.e} = 0 \quad (2.253)$$

gde je β kružna koordinata, kao centralni ugao od exc. ose do posmatrane tačke na zidu.

Za pravougaone silose, povećanje opterećenja je konstantno na najviše udaljenoj strani od ekscentričnog ispusta za pražnjenje i iznosi $p_{ex.e,max}$.

Smanjenje pritiska se uzima na bližoj strani zida (na strani otvora), u obliku redukcije pritiska na visini jednakoj karakterističnom prečniku silosne ćelije d_c , prema sl. 93 (c).

Za silose kružne osnove, redukcija pritiska se uzima da je konstantna veličina¹ i deluje po obimu zida, na jednu i na drugu stranu od ekscentrične ose na lučnoj dužini od po $d_e/2$. Ukupna lučna dužina d_e na kojoj se redukuju pritisci, iznosi:

¹ Na Sl. 93 (b) nije prikazana konstantna veličina kod dijagrama za redukciju pritiska, već promenljiva u funkciji centralnog ugla. Propis je jasan, u tekstu, da je u pitanju konstantna veličina, i tako se primenjuje u praksi. Crtež bi eventualno trebalo korigovati, da bi potpuno odgovarao opisu u tekstu propisa.

$$d_e = 1.83 d_c \cdot \left(1 - 1.43 \cdot \frac{e_o}{d_c} \right) \quad (2.254)$$

Redukcija pritiska se određuje prema sledećoj jednačini:

$$p_{ex.e.red} = 1.5 p_{he} \cdot \left(\frac{e_o}{d_c} - 0.1 \right) \quad (2.255)$$

Ako se u ovom izrazu uzme da je max. ekcentricitet 0.5, određuje se redukcija pritiska 0.6 p_{he} , što znači, da pri ekscentričnom pražnjenju u ovoj oblasti pritisci mogu ići do najmanje 0.4 p_{he} (tj. iznose najmanje 40% vrednosti pritisaka pri centričnom pražnjenju).

Oblast sa redukujućim pritiskom kod kružnog preseka ćelije se opciono može odrediti (bez sračunavanja lučne dužine d_e) preko zahvatnog centralnog ugla β_e , koji se određuje sa primenom sledeće formule:

$$\beta_e = 105 - 150 \cdot \frac{e_o}{d_c} \quad (2.256)$$

gde se ugao β_e računski dobija u [°]-ima, i prikazan je na sl. 93 (b).

Potrebno je napomenuti da se u izrazima (2.251) i (2.255), horizontalni pritisci p_{he} , uzimaju u funkciji vertikalne koordinate z , odnosno uvode se kao promenljivi pritisci po visini ćelije $p_{he}(z)$. Odavde sledi da su i povećanja i smanjenja pritisaka, koji se određuju primenom ovih izraza, u funkciji od z , odnosno određuju se kao $p_{ex.e,max}(z)$ i $p_{ex.e,red}(z)$. Prema tome, na sl. 93 (c) je dat prikaz zone po visini zida gde se ostvaruje povećanje pritiska (sa "aktivnim" dijagramom povećanja pritisaka do visine nasutog materijala), odnosno zone sa smanjenjem pritiska, a ne kvantitativan prikaz dijagrama sa povećanjem i smanjenjem pritisaka. Prikaz na sl. 93 (c), bi eventualno trebalo korigovati da dijagrami povećanja i smanjenja pritisaka prate funkciju raspodele pritisaka po dubini materijala z (ovo sledi iz AS 3774, a tako se i primenjuje u praksi).

2.10.6.3 – DIN 1055-6:2005 i EN 1991-4:2006

Opterećenja pri ekscentričnom pražnjenju, prema EN 1991-4:2006 [38], su ovde opisana u § 2.10.2.5. Proračun opterećenja kod ovog slučaja ekscentričnog unutrašnjeg pražnjenja je baziran na *Rotter*-ovoj analizi ekscentričnog protoka materijala. Kompleksnija analiza opterećenja pri ekscentričnom protoku¹, na osnovu koje je formirana aproksimativna metoda analize primenjenoj u EC1-4 i DIN, prikazana je u široj formi u radu *Rotter*-a (2001) [259]. U osnovi ove analize, posmatra se ćelija sa mirnim (statičnim) materijalom, u kojoj se pojavljuje proticanje materijala kroz protočni kanal uz sam zid ćelije. Ravnoteža horizontalnog diferencijalnog sloja materijala u ćeliji, se uspostavlja integralno na mirnom delu materijala i na materijalu u protočnom kanalu. Kod materijala koji je u protočnom kanalu, deluju pritisci pri protoku (pražnjenju) materijala, koji se uzimaju prema *Janssen*-ovoj teoriji posmatrajući protočni kanal kao unutrašnji silos koji je ograđen "zidom" od mirnog materijala u ćeliji i realnim zidom silosa na delu koji prileže protočnom kanalu. Kao jednostavna aproksimacija uzima se da pritisci u mirnom delu materijala u ćeliji odgovaraju pritiscima materijala u ukupnoj ćeliji, odnosno stanju

¹ Originalna *Rotter*-ova teorija za određivanje opterećenja pri velikom ekscentričnom pražnjenju, prema pregledu ove teorije koju je dao sam *Rotter* (2001) u ref. [259], formulisana je u radu:

Rotter J.M. (1986): "The Analysis of Steel Bins Subject to Eccentric Discharge", *Proc. of Second Int. Conf. Bulk Materials Storage Handling and Transportation*, IEAust., Wollongong, pp 264-271.

napona pre pojave protočnog kanala. Kako je protočni kanal relativno manjeg prečnika u odnosu na realne dimenzije ćelije, proračun pritisaka u protočnom kanalu se određuje na ekvivalentnom vitkom silosu prema *Janssen*-ovoj teoriji. Horizontalni pritisci na zid ćelije u okviru protočnog kanala su manji od pritisaka na drugim delovima zida ćelije.

Kako bi se uravnotežilo stanje pritisaka na zidu ćelije, na površine zida uz sam protočni kanal uvodi se relativno veće horizontalno opterećenje, kao rezultat horizontalnog lučnog dejstva mirnog materijala ispred protočnog kanala.

Proračun opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom, prema normama DIN 1055-6:2005 [62] i EN 1991-4:2006 [38] je bio isti. U ispravku DIN 1055-6 (2006) [62], uvedene su izmene kod pojedinih članova vezanih za proračun ovog opterećenja, u skladu sa dodatnim teorijskim analizama nemačkih istraživača¹.

Ove korekcije su date u tabeli 22, pri čemu su prikazani i prvobitni izrazi iz normi DIN 1055-6, odnosno EC1-4. U tabeli 22, prvo se može primetiti velika promena u izabranim vrednostima odnosa r_c/r , kod normi DIN 1055-6, koje u korigovanoj verziji više odgovaraju vrednostima u EC1-4.

U osnovnoj verziji normi DIN 1055-6, kod odnosa radijusa protočnog kanala r_c i radijusa ćelije silosa r , bio je uveden i slučaj $r_c/r = 0.9$. Kako je materijal van protočnog kanala u stanju mirovanja, pri analiziranom slučaju sa velikom vrednošću za odnos r_c/r , dobija se da je u ćeliji samo mali deo od ukupnog materijala u stanju mirovanja, te je ovaj deo materijala nestabilan, tako da se počinje pokretati sav materijal pri pražnjenju ćelije. Prema tome, usvojene relativno niže vrednosti za odnos r_c/r , prema datoj korekciji u DIN 1055-6:2005 (2006), prema tabeli 22, više odgovaraju realnim situacijama u okviru predmetne analize.

Kod *Rotter*-ove analize pritisaka pri ekscentričnom pražnjenju, koja je uvedena u EC1-4, povećani pritisak pri stranama protočnog kanala p_{hae} , određuje se iz uslova jednakih algebarskih rezultanti opterećenja dobijenih prostom integracijom pritisaka po obimu zida, pre pojave i nakon pojave protočnog kanala. Iz ovoga sledi, da se ne menja prosečni napon po obimu zida pri nesimetričnom opterećenju, i on odgovara prvobitnom pritisku materijala pri mirovanju $p_{hse} = p_{hf}$. U skladu sa ovim opisom, uspostavlja se sledeća jednačina:

¹ Ruckenbrod C., Kaldenhoff M. (2005): "Fließkanalradien", Unveröffentlichtes Arbeitspapier des Unterausschusses SILOS des NA 005-51-02 AA „Einwirkungen auf Bauten“, Braunschweig, Karlsruhe 2005. (Nepublikovani radni materijal sa skupa. Citirano prema *Kaldenhoff*-u (2009) [139] i *Ruckenbrod*-u i *Schlüter*-u (2006) [264].)

Kaldenhoff M. und Schütte J. (2004): "Schäden an Silos mit großen Entleerungsexzentrizitäten". *Bauingenieur*, 79 (12), S. 560–567. (Citirano prema *Kaldenhoff*-u, *Schütte*-u i *Hauser*-u (2007) [140].)

Teorijsku analizu, na osnovu koje su uvedene korekcije kod problema velikog ekscentričnog pražnjenja u normama DIN 1055-6:2005, prikazali su *Ruckenbrod* i *Schlüter* (2006) [264] i *Kaldenhoff* (2008) [138].

Analiza ovog opterećenja je prikazana na primeru jednog ispitnog silosa (proračunske klase 3, tj. AAC 3), koji se prazni posebnim sistemom za pražnjenje putem aero-sloja, u ref. *Kaldenhoff* (2009) [139], a detalji sanacije istog silosa na dejstvo ekscentričnog pražnjenja su prikazani u radu *Kaldenhoff*-a, *Schütte*-a i *Hauser*-a (2007) [140]. Problematika ovog posebnog tipa pražnjenja, može se sagledati u informativnim referencama [57] i [124]. Kod ovog pražnjenja, protočni kanal nije vertikalni, već nalikuje spirali koja se pruža uz zid ćelije po visini silosa (srednja osa kanala je prostorna kriva i odgovara zavojnici). Spiralni oblik protočnog kanala je izazvan promenom mesta izdavanja materijala na dnu silosa, usled kružnog redosleda aktiviranja pojedinačnih sekcija sa aero-slojem (npr. svakih pola sata se aktivira naredna sekcija za pražnjenje u kružnom rasporedu ovih sekcija, i u tom periodu je samo ta sekcija aktivna). Ovaj tip pražnjenja se koristi kod silosa velikog kapaciteta, uključujući i silose za skladištenje materijala kao što su cement i cementni klinker sa visokim temperaturama pri punjenju.

$$p_{hse} \cdot (2\pi \cdot r) = p_{hse} \cdot (2\pi - 4\theta_c) \cdot r + 2p_{hae} \cdot \theta_c \cdot r + 2p_{hce} \cdot \theta_c \cdot r, \quad (2.257)$$

odakle se određuje pritisak p_{hae} koji je primenjen kod EC1-4 u obliku izraza (2.148):

$$0 = -2p_{hse} + p_{hae} + p_{hce} \Rightarrow p_{hae} = 2p_{hse} - p_{hce} = 2p_{hf} - p_{hce} \quad (2.258)$$

Prikazana analiza je jednostavna i odgovara usvojenim pretpostavkama.

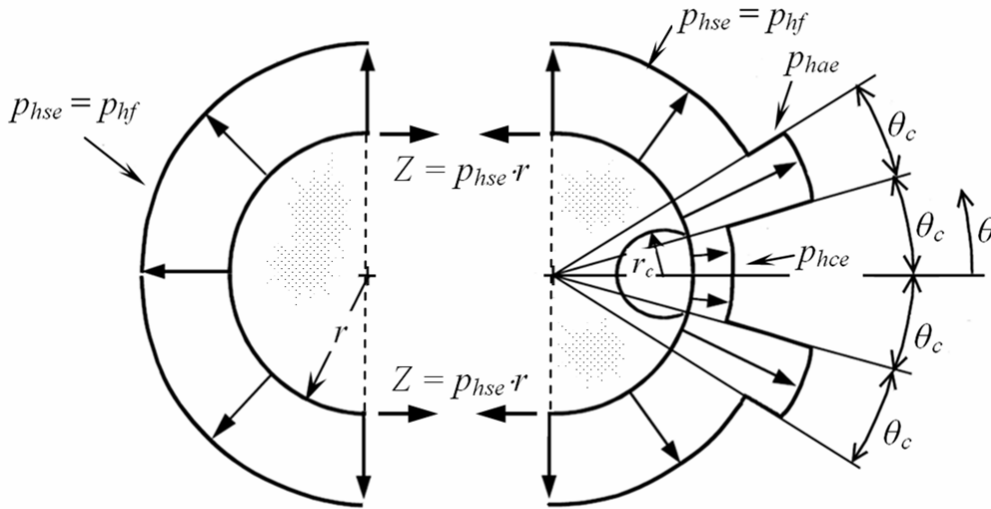
Tabela 22. Pregled korigovanih izraza u DIN 1055-6:2005 (2006) [62] kod proračuna opterećenja pri ekscentričnom pražnjenju.

Izrazi u DIN 1055-6:2005 [62] i EN 1991-4:2006 [38]		Korekcija DIN 1055-6:2005 (2006) [62]
prema EN 1991-4	prema DIN 1055-6	
$r_c = 0.25 r$	$r_c = 0.50 r$	$r_c = 0.35 r$
$r_c = 0.40 r$	$r_c = 0.75 r$	$r_c = 0.50 r$
$r_c = 0.60 r$	$r_c = 0.90 r$	$r_c = 0.65 r$
$\eta = \frac{\mu_w}{\tan \phi_i} \quad (2.137)$	$\eta = \frac{\mu_w}{\tan \phi_i} \leq 0.8 \quad (2.260)$	
gde je $\phi_i =$ <i>gornja</i> vrednost ugla unutrašnjeg trenja uskladištenog materijala $\mu_w =$ donja vrednost koeficijenta trenja za vertikalni zid	gde je $\phi_i =$ <i>donja</i> vrednost ugla unutrašnjeg trenja uskladištenog materijala $\mu_w =$ donja vrednost koeficijenta trenja za vertikalni zid	
$z_{oc} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{A_c}{U_{wc} \mu_w + U_{sc} \tan \phi_i} \right) \quad (2.146)$	$z_{oc} = \frac{1}{K \cdot \mu_w} \cdot \left(\frac{A_c}{U_{wc} + U_{sc} / \eta} \right) \quad (2.261)$	
$p_{hae} = 2 p_{hf} - p_{hce} \quad (2.148)$	$p_{hae} = \frac{\sin 2\theta_c - \beta \cdot \sin \theta_c}{\sin 2\theta_c - \sin \theta} p_{hf} \quad (2.262)$	
	gde je $\beta = \frac{(\pi - \psi) \cdot G^2 + \theta_c - G \cdot \sin(\psi - \theta_c)}{\theta_c + G \cdot (\pi - \psi) \cdot \frac{1}{\eta}}$	

Pretpostavlja se da je profil proticajnog kanala konstantnog preseka po visini ćelije, kao i da se kružni zidovi ćelije vode vertikalno u odnosu na osnovu ćelije. Raspodela pritisaka po obimu zida ćelije je prikazana na sl. 74 (b) u okviru § 2.10.2.5.2, a na sl. 94 je prikazana raspodela ovih pritisaka kod ćelije koja je podeljena po vertikali na dve jednake polovine, i gde je uvedena prstenasta membranska sila zatezanja u zidu Z, na mestima razdvajanja zida ćelije, na način koji u osnovi odgovara analizi prikazanoj u ref. [264] i [138].

Prema *Kaldenhoff*-u (2008) [138], korekcije prikazane u obliku izraza (2.260) i (2.261), posledica su teorijskih analiza nove formulacije za povećano opterećenje na delovima zida uz obe strane protočnog kanala p_{hae} , prema izrazu (2.262). U osnovi, ova nova

formulacija povećanih pritisaka uz protočni kanal je najznačajnija promena kod DIN 1055-6:2005. U ovom slučaju, opterećenje p_{hae} , određuje se iz analize ravnoteže horizontalnih sila u horizontalnom preseku ćelije, pri beskonačnoj dubini zrnastog materijala. Kada $z \rightarrow \infty$, kod *Janssen*-ove teorije za funkciju raspodele opterećenja u obliku izraza (2.110)_J, određuje se da $Y_J|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 1$, a kod modifikovane teorije *Reimbert*-ovih na osnovu izraza (2.110)_R, dobija se isto tako da $Y_R|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 1$. Dalja analiza pri određivanju korigovanog oblika za opterećenje p_{hae} , se u osnovi bazira na prikazanim analizama u radovima *Ruckenbrod*-a i *Schlüter*-a (2006) [264] i *Kaldenhoff*-a (2008) [138]. Ovde će biti prikazana nešto složenija analiza, preko koje se određuju povećani pritisci pri stranama protočnog kanala p_{hae} , u obliku koji je uveden kod korekcije u DIN 1055-6:2005 (2006).



Sl. 94 Opterećenja kod razdvojenih polovina ćelije u horizontalnom preseku pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala.

Pritisak na zidove od materijala u stanju mirovanja p_{hse} (indeks s – od *static*), odgovara pritisku koji je ostvaren pri punjenju ukupne ćelije, tako da se radi pojednostavljenja ne uzima njegova promena usled interakcije pritisaka pri pojavi proticanja materijala kroz protočni kanal:

$$p_{hse} = p_{hse}(z) = p_{hf} = p_{hfo} (1 - e^{-z/z_o}) = p_{hfo} Y_J(z) \quad (\text{vitki silosi}) \quad (2.263)$$

$$p_{hse} = p_{hf} = p_{hfo} \left(1 - \left[\left(\frac{z - h_o}{z_o - h_o} \right) + 1 \right]^n \right) = p_{hfo} Y_R(z) \quad (\text{kratki i sred. vitki silosi}) \quad (2.264)$$

$$p_{hfo} = \gamma \cdot K \cdot z_o \quad (2.265)$$

gde je

$$z_o = \frac{r_h}{K \cdot \mu_w} = \frac{A/U}{K \cdot \mu_w} \quad (2.266)$$

Na ovaj način, po obimu zida ćelije van zone uticaja protočnog kanala, pritisci su:

$$p_{hse} = p_{hse}(z) = p_{hf}(z) \quad (2.267)$$

Kod pritiska u protočnom kanalu, usled uskog proticajnog profila koji odgovara vitkom ekvivalentnom silosu u ovoj analizi prema EC1-4, primenjuje se *Janssen*-ova teorija:

$$p_{hce} = p_{hcf} \cdot C_h = p_{hco} (1 - e^{-z/z_{oc}}) \cdot C_h \quad (2.268)$$

$$p_{hco} = \gamma \cdot K \cdot z_{oc} \quad (2.269)$$

$$z_{oc} = \frac{1}{K} \cdot \left(\frac{A_c}{U_{wc} \cdot \mu_w + U_{sc} \cdot \tan \phi_i} \right) \quad (2.270)$$

$$p_{hce} = p_{hce}(z) \quad (2.271)$$

Ovde se može primetiti da je uveden faktor uvećanja pritiska C_h (C_h je maksimalne vrednosti 1.15 u EC1-4, za silose klase AAC 2 i AAC 3), kako je u pitanju stanje pražnjenja kroz protočni kanal.

Ovaj faktor nije uveden kod razmatranja opterećenja protočnog kanala u EC1-4 i u DIN 1055-6, kao ni kod *Ruckenbrod*-a i *Schlüter*-a (2006) [264], *Kaldenhoff*-a (2008) [138], i *Rotter*-a (2001) [259]. Ovde je to korektno uvođenje jer se prikazuje opštija analiza kod ovih opterećenja.

Kod analize prikazane u referencama [264] i [138], pritisci p_{hae} se određuju iz ravnoteže horizontalnih sila uspostavljenih kod opterećenja i sila na jednoj četvrtini ćelije (ovde bi to odgovaralo dodatnoj podeli po horizontalnoj osi desne strane ćelije prikazane na sl. 94), u posebnom slučaju kada $z \rightarrow \infty$. Pri tome je komentarisano da izraz (2.262), sa kojim se određuju pritisci p_{hae} , odgovaraju ovom posebnom slučaju analize, ali da za konkretne vrednosti z , primena ovog izraza daje približne vrednosti za pritiske p_{hae} , s obzirom na to da su pritisci p_{hae} određeni preko uslova ravnoteže horizontalnih sila pri $z \rightarrow \infty$, a ne pri proizvoljnoj dubini materijala z .

U opštem slučaju, pri ravnoteži horizontalnih sila na delovima polusilosa prikazanih na sl. 94, pri proizvoljnoj dubini materijala z , određuje se jednačine ravnoteže, i u daljoj analizi pritisci p_{hae} , saglasno sledećim izvođenjima:

$$Z(z) = p_{hf}(z) \cdot r \quad (2.272)$$

$$Z(z) = r \cdot \int_0^{\theta_c} \cos \theta \cdot p_{hce}(z) \cdot d\theta + r \cdot \int_{\theta_c}^{2\theta_c} \cos \theta \cdot p_{hae}(z) \cdot d\theta + r \cdot \int_{2\theta_c}^{\pi/2} \cos \theta \cdot p_{hse}(z) \cdot d\theta \quad (2.273)$$

$$\frac{Z(z)}{r} = [p_{hce}(z) \cdot \sin \theta]_0^{\theta_c} + [p_{hae}(z) \cdot \sin \theta]_{\theta_c}^{2\theta_c} + [p_{hse}(z) \cdot \sin \theta]_{2\theta_c}^{\pi/2} \quad (2.274)$$

$$p_{hf}(z) = p_{hce}(z) \cdot \sin \theta_c + p_{hae}(z) \cdot (\sin 2\theta_c - \sin \theta_c) + p_{hf}(z) \cdot (1 - \sin 2\theta_c) \quad (2.275)$$

$$p_{hae}(z) = \frac{p_{hf}(z) \cdot \sin 2\theta_c - p_{hce}(z) \cdot \sin \theta_c}{\sin 2\theta_c - \sin \theta_c} \quad (2.276)$$

Sa izrazom (2.276) određuju se pritisci p_{hae} , pri posmatranoj dubini materijala z , u opštem slučaju analize sa zadovoljenim uslovom ravnoteže horizontalnih sila. U ovom smislu, sa izrazom (2.276), određuju se tačnije vrednosti za p_{hae} u odnosu na primenu korigovanog izraza (2.262) u normama DIN 1055-6. Pritisci p_{hae} formulisani izrazom (2.276), mogu se jednostavno transformisati na sledeća dva oblika, pri čemu je prvi oblik sličan izrazu (2.148) koji odgovara EC1-4, a drugi oblik izrazu (2.262) koji odgovara korekciji u DIN 1055-6:

$$p_{hae}(z) = \frac{\sin 2\theta_c}{\sin 2\theta_c - \sin \theta_c} p_{hf}(z) - \frac{\sin \theta_c}{\sin 2\theta_c - \sin \theta_c} p_{hce}(z) \quad (2.277)$$

$$p_{hae}(z) = \frac{\sin 2\theta_c - \frac{p_{hce}(z)}{p_{hf}(z)} \cdot \sin \theta_c}{\sin 2\theta_c - \sin \theta_c} \cdot p_{hf}(z) \quad (2.278)$$

Prethodni izraz je doveden u formu koja odgovara obliku izraza prema korekciji u DIN 1055-6. Kada se ovaj izraz uzme za slučaj da $z \rightarrow \infty$, što odgovara opisu analize u ref. [264] i [138], određuje se:

$$p_{hao} = \frac{\sin 2\theta_c - \frac{p_{hco} \cdot C_h}{p_{ho}} \cdot \sin \theta_c}{\sin 2\theta_c - \sin \theta_c} \cdot p_{ho} = \frac{\sin 2\theta_c - \frac{z_{co} \cdot C_h}{z_o} \cdot \sin \theta_c}{\sin 2\theta_c - \sin \theta_c} \cdot p_{ho} \quad (2.279)$$

Pretpostavlja se da je $C_h = 1$, što se prema EC1-4 može jedino opravdati na taj način, da propisani koeficijent $C_h > 1$ (maks. do 1.15 za ovaj slučaj analize i silose klase AAC 2 i AAC 3) deluje povoljno na naponska stanja u zidu (pri većem C_h smanjuju se momenti savijanja u zidu). U razmatranom slučaju kada se uzima da je $C_h = 1$, ne dolazi do povećanja pritisa pri pražnjenju kroz protočni kanal, što u ovoj analizi predstavlja nepovoljniji slučaj pri kojem se određuju veći momenti savijanja u zidu ćelije (analiza je u ovom slučaju na strani sigurnosti). Sledi da je:

$$p_{hao} = \frac{\sin 2\theta_c - \frac{z_{co}}{z_o} \cdot \sin \theta_c}{\sin 2\theta_c - \sin \theta_c} \cdot p_{ho} = \frac{\sin 2\theta_c - \beta_\infty \cdot \sin \theta_c}{\sin 2\theta_c - \sin \theta_c} \cdot p_{ho} \quad (2.280)$$

gde je:

$$\beta_\infty = z_{co} / z_o \quad (2.281)$$

U DIN je uvedena generalizacija primene prethodna dva izraza za svako z , prema ref. [264] i [138], na osnovu koje p_{hao} i p_{ho} prelaze respektivno u $p_{hae}(z)$ i $p_{hf}(z)$, pri čemu se dobija:

$$p_{hae}(z) = \frac{\sin 2\theta_c - \beta \cdot \sin \theta_c}{\sin 2\theta_c - \sin \theta_c} \cdot p_{hf}(z) \quad (2.282)$$

$$\beta = \beta_\infty = z_{co} / z_o \quad (2.283)$$

Kada se kod izraza za β uvedu z_{co} i z_o prema (2.261) i (2.266), a zatim geometrijske veličine ukupne ćelije $A = \pi r^2$ i $U = 2\pi r$, kao i geometrijske veličine protočnog kanala A_c , U_{wc} , U_{sc} , respektivno prema izrazima (2.142), (2.139) i (2.140), određuje se β prema korekcijama u DIN 1055-6 (2006) [62] (prikazano kod izraza (2.262) u tabeli 22). Na ovaj način, u prikazanoj analizi, određen je opštiji oblik (2.276) za pritiske p_{hae} , iz kojeg je dedukcijom određen oblik koji odgovara korekcijama u DIN 1055-6 (2006).

Rekapitulacija izraza za povećane pritiske pri protočnom kanalu p_{hae} je sledeća:

$$p_{hae}(z) = 2 p_{hf}(z) - p_{hce}(z) \quad (\text{prema EN 1991-4:2006 [38]}) \quad (2.284)$$

$$p_{hae}(z) = \frac{\sin 2\theta_c - \beta \cdot \sin \theta_c}{\sin 2\theta_c - \sin \theta_c} \cdot p_{hf}(z) \quad (\text{prema korekciji u DIN 1055-6:2005}) \quad (2.285)$$

$$p_{hae}(z) = \frac{p_{hf}(z) \cdot \sin 2\theta_c - p_{hce}(z) \cdot \sin \theta_c}{\sin 2\theta_c - \sin \theta_c} \quad (\text{prema ovde prikazanoj analizi}) \quad (2.286)$$

Kod primene izraza (2.286), nije potrebno posebno određivanje koeficijenta β , kao kod primene izraza (2.285). Kod sve tri analize pritisaka u ćeliji sa velikim ekscentricitetom, određuju se po visini zida vrednosti za pritiske $p_{hf}(z)$ koji odgovaraju pritislima u ukupnoj ćeliji pri mirovanju materijala, i pritisci $p_{hce}(z)$ koji odgovaraju pritislima na delu zida koji dodiruje protočni kanal. Kod ovih poslednjih, kod EC1-4 i korekcija u DIN 1055-6 ne uvodi se faktor uvećanja opterećenja C_h (zbog povoljnog delovanja na pojavu momenata savijanja u zidu ćelije), odnosno uzima se $C_h = 1$. U normama EC1-4 i DIN 1055-6, kao ni u ref. iz ove oblasti [138], [259] i [264], nije navedeno da se kod određivanja ovih opterećenja uzima da je $C_h = 1$.

Pritisci p_{hae} formulisani u obliku (2.286), se mogu direktno uneti u EC1-4 i DIN 1055-6, kroz jednostavnu zamenu odgovarajućih izraza za p_{hae} (tabela 22), pri čemu je sačuvana konzistencija postupaka proračuna u ovim normama.

Tabela 23. Primena odgovarajuće teorije kod određivanja nesimetričnog opterećenja pri velikom ekscentricitetu protočnog kanala.

Primena za određivanje pritisaka	Primena odgovarajuće teorije kod određivanja opterećenja pri velikom ekscentricitetu	
	Vitki silosi	Kratki i srednje vitki silosi
Pritisci na zidove od mirnog materijala $p_{hse} = p_{hf}(z)$	teorija <i>Janssen-a</i>	modif. teorija <i>Reimbert-ovih</i>
Pritisci na delu zida sa protočnim kanalom $p_{hce} = p_{hce}(z)$	teorija <i>Janssen-a</i>	teorija <i>Janssen-a</i>
Povećani pritisci pri stranama protočnog kanala (prema EN 1991-4:2006) $p_{hae}(z) = 2 p_{hf}(z) - p_{hce}(z)$	teorija <i>Janssen-a</i>	<i>mešovita</i> primena = modif. teorija <i>Reimbert-ovih</i> za p_{hf} i teorija <i>Janssen-a</i> za p_{hce}
Povećani pritisci pri stranama protočnog kanala (prema korekciji u DIN 1055-6:2005) $p_{hae}(z) = \frac{\sin 2\theta_c - \beta \cdot \sin \theta_c}{\sin 2\theta_c - \sin \theta_c} \cdot p_{hf}(z)$	teorija <i>Janssen-a</i>	modif. teorija <i>Reimbert-ovih</i>
Povećani pritisci pri stranama protočnog kanala (prema ovde prikazanoj analizi) $p_{hae}(z) = \frac{p_{hf}(z) \cdot \sin 2\theta_c - p_{hce}(z) \cdot \sin \theta_c}{\sin 2\theta_c - \sin \theta_c}$	teorija <i>Janssen-a</i>	<i>mešovita</i> primena = modif. teorija <i>Reimbert-ovih</i> za p_{hf} i teorija <i>Janssen-a</i> za p_{hce}

Kod korekcija u normi DIN 1055-6 prikazanih u tabeli 22, opravdana je primena za ϕ_i donje vrednosti ugla unutrašnjeg trenja uskladištenog materijala, na mestu gornje vrednosti uvedene u EC1-4. Imajući u vidu da se C_h uzima da je 1, već je smanjen uticaj kod horizontalnih pritisaka u protočnom kanalu, te je nepotrebno uvoditi i gornju vrednost za ϕ_i , kod određivanja odnosa kako bi se proizveo manji horizontalni pritisak. Primena gornje vrednosti na ovom mestu i ovako u EC1-4 nije konzistentna, jer prema sadašnjem stanju u EC1-4, u okviru istog proračuna pritisaka kod velikog ekscentriciteta pri pražnjenju se koriste: gornja vrednost za K , donja vrednost za μ_w , i donja vrednost za ϕ_i ,

kod određivanja z_{oc} ; a pri određivanju odnosa η , koristi se gornja vrednost za ϕ_t . U ovom slučaju je data korektna ispravka u DIN 1055-6, i trebalo bi je očekivati i u EC1-4.

Analiza pritisaka pri pražnjenju kroz protočni kanal sa velikim ekscentricitetom, kod normi EC1-4 i DIN 1055-6 opisana je direktno kod proračuna vitkih silosa. Kod kratkih i srednje vitkih silosa pri uvođenju ovog opterećenja, upućuje se na odgovarajući proračun prikazan kod vitkih silosa. Potrebno je napomenuti da se pritisci p_{hf} pri stanju mirovanja materijala u ćeliji, kod kratkih i srednje vitkih silosa određuju prema modifikovanoj teoriji Reimbert-ovih, a ne na osnovu Janssen-ove teorije prikazane kod vitkih silosa. U skladu sa tim treba primeniti odgovarajuću teoriju pri određivanju pojedinih pritisaka kod ovog slučaja pražnjenja, prema prikazu u tabeli 23. Pritisci u protočnom kanalu se uvek uzimaju prema Janssen-ovoj teoriji, a kod pritisaka u mirnom delu ćelije uzima se odgovarajuća teorija prema vitkosti silosa. Povećani pritisci p_{hae} uz protočni kanal kod EC1-4 i u opštem slučaju, kod analize kratkih i srednje vitkih silosa, se određuju sa mešovitom primenom datih teorija saglasno odgovarajućem pritisku u datim izrazima. Kod ovih silosa, pri primeni korigovanog izraza prema normi DIN 1055-6, zbog aproksimacija koje su uvedene pri formulisanju p_{hae} , koristi se samo modifikovana teorija Reimbert-ovih.

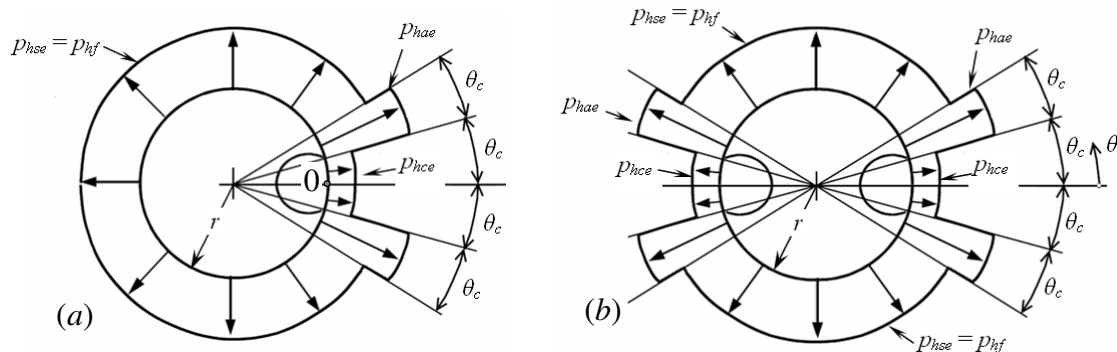
Potrebno je napomenuti, da postoji suštinska razlika kod ovog opterećenja prema EN 1991-4:2006 [38] i DIN 1055-6:2005 [62], s jedne strane, i kod AS 3774 (1996) [14], s druge strane. Kod AS 3774 ovo opterećenje obuhvata ekscentrično pražnjenje gde je masa cele ćelije u pokretu (slučaj masovnog protoka), pri čemu se uvode faktori povećanja opterećenja pri pražnjenju C_h . Kod EC1-4 i DIN 1055-6, ovo je specijalan slučaj analize unutrašnjeg pražnjenja kroz ekscentrični protočni kanal, dok ostali deo materijala u ćeliji miruje (slučaj unutrašnjeg protoka). Slučaj ekscentričnog pražnjenja pri masovnom protoku materijala, koji se obuhvata u predmetnoj analizi u AS 3774, kod EC1-4 i DIN 1055-6 se obuhvata uvođenjem nesimetričnog opterećenja u vidu slobodnog dodatnog lokalnog opterećenja, prema opisu u § 2.10.2.3 i prema pregledu u § 2.10.5.4.

2.10.6.4 – Određivanje statičkih uticaja

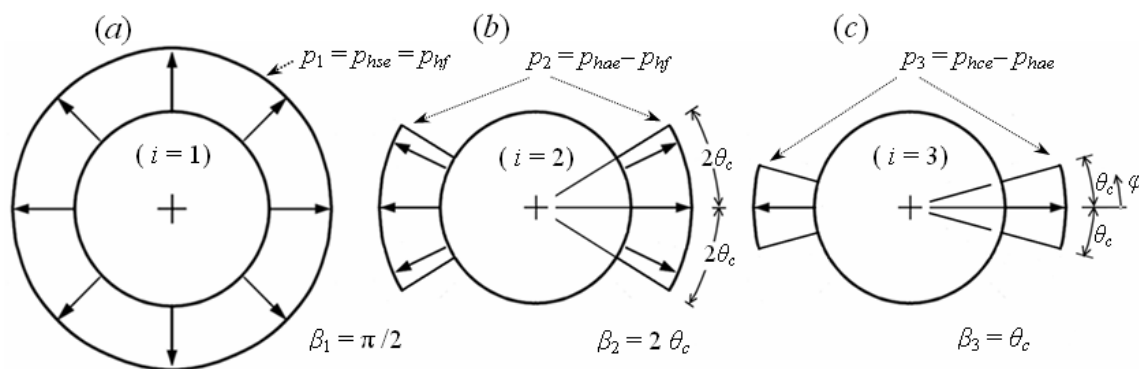
Pri analizi uticaja od nesimetričnog opterećenje usled pražnjenja kroz ekscentrični protočni kanal u osnovi horizontalnog preseka na visini z , potrebno je primeniti metodu konačnih elemenata (MKE) ili neku drugu numeričku metodu za određivanje statičkih uticaja u zidu ćelije. U literaturi nisu poznati aproksimativni postupci za određivanje uticaja od delovanja asimetričnog opterećenja prikazanog na sl. 95 (a).

Svakako je od interesa mogućnost formiranja aproksimativnog rešenja i u ovom slučaju. U tom pravcu, ako se analiziraju vitki silosi, sa dugom cilindričnom ljuskom, može se uzeti u obzir da je promena opterećenja po visini silosa kontinualna i u obliku eksponencijalne funkcije, bez diskontinualnih promena opterećenja po visini z . Pretpostavlja se da je srednja zona visine zidova dovoljno udaljena od uticaja ivičnih poremećaja na krajevima cilindrične ljuske. Uticaj nesimetričnog opterećenje u osnovi se može aproksimativno analizirati u okviru ravanskog problema savijanja prstenastog dela zida jedinične visine. Sa ovim se zanemaruju naponi smicanja u srednjoj površini ljuske zida. Nesimetrično opterećenje koje deluje na prsten, proizvodi maksimalni moment savijanja u zidu, za ugao $\theta = 0$, koji zateže unutrašnju stranu zida. Momenat savijanja na suprotnoj strani zida, za $\theta = \pi$ [rad] = 180° , pri delovanju asimetričnog opterećenja je obično značajno manji u odnosu na moment savijanja u tački 0, i kod analize betonskih silosa je orijentaciono reda veličine do 10% od momenta savijanja za ugao $\theta = \varphi = 0$. Na ovaj način, može se

napraviti aproksimacija za određivanje uticaja od delovanja nesimetričnog opterećenja, uvodeći simetriju i po vertikalnoj osi, odnosno aproksimacija opterećenja prikazanog na sl. 95 (a), se uzima u obliku zamenjujućeg opterećenja prema sl. 95 (b). Ovo odgovara situaciji u kojoj postoje dva protočna kanala koji su postavljeni jedan prema drugom na dijametralno suprotnim stranama ćelije, ali ovde se takav slučaj ne analizira, nego se samo koristi opterećenje prikazano na sl. 95 (b), kako bi se jednostavno odredile aproksimativne vrednosti za statičke uticaje u tački 0, koje proizvodi asimetrično opterećenje. Data aproksimativna analiza ima za cilj procenu presečnih uticaja: momenta m_φ i sile n_φ za ugao $\theta = \varphi = 0$. Konvencija o znaku je: m_φ je pozitivno kad zateže spoljnu stranu ljuske (zid ćelije), a sila n_φ je pozitivna kao sila zatezanja. Uvedeno zamenjujuće opterećenja na sl. 95, se može razložiti na tri parcijalna slučaja opterećenja, koja imaju jednostavno analitičko rešenje statičkih uticaja. Na sl. 96 je prikazana dekompozicija ukupnog opterećenja sa sl. 95 (b), na tri parcijalna opterećenja p_1 , p_2 i p_3 koji zahvataju odgovarajuće uglove β_1 , β_2 i β_3 . Superpozicijom uticaja ovih opterećenja određuju se uticaji od opterećenja prikazanog na sl. 95 (b).



Sl. 95 Aproksimacija asimetričnog opterećenja za procenu statičkih uticaja u tački 0.



Sl. 96 Dekompozicija asimetričnog opterećenja na parcijalna opterećenja p_1 , p_2 i p_3 .

Veličina i -tog opterećenja i zahvatni poluugao radijalnog opterećenja su redom:

$$p_1 = p_{hse} = p_{hf} \quad i \quad \beta_1 = \pi/2 \quad (2.287)$$

$$p_2 = p_{hae} - p_{hf} \quad i \quad \beta_2 = 2\theta_c \quad (2.288)$$

$$p_3 = p_{hce} - p_{hae} \quad i \quad \beta_3 = \theta_c \quad (2.289)$$

Ukupno opterećenje predstavljeno na sl. 95 (b) se dobija superpozicijom:

$$p = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3 \quad (2.290)$$

gde znak \oplus predstavlja operatorsko sabiranje p_i opterećenja po obimu zida ćelije (u funkciji ugla φ), u skladu sa njihovim raspodelama po obimu zida ćelije. Pri uobičajenim vrednostima za odnos r_c/r (tabela 22), sledi da je ugao $\theta_c \leq 45^\circ = \pi/4$ [rad] ≈ 0.785 [rad], te uglovi β_i stoje u sledećem redu po veličini $\beta_1 \geq \beta_2 > \beta_3$. Na sl. 96 (b) i sl. 96 (c), uglovi β_2 i β_3 su kotirani kao uglovi $2\theta_c$ i θ_c , respektivno. Kada se ukupno opterećenje posmatra u funkciji ugaone koordinate φ , može se proveriti prikazana dekompozicija opterećenja sa sledećom kontrolom:

$$\text{za } 0 \leq \varphi \leq \theta_c \quad \Rightarrow \quad p = p_1 + p_2 + p_3 = p_{hf} + (p_{hae} - p_{hf}) + (p_{hce} - p_{hae}) = p_{hce} \quad (2.291)$$

$$\text{za } \theta_c \leq \varphi \leq 2\theta_c \quad \Rightarrow \quad p = p_1 + p_2 = p_{hf} + (p_{hae} - p_{hf}) = p_{hae} \quad (2.292)$$

$$\text{za } 2\theta_c \leq \varphi \leq \pi/2 \Rightarrow p = p_1 = p_{hf} \quad (2.293)$$

Ovi izrazi odgovaraju opterećenju prikazanom na sl. 95 (b), u domenu I kvadranta ortogonalnog koordinantnog sistema, gde uglovi $\varphi = 0$ i $\varphi = \pi/2$ dafinišu respektivno horizontalnu i vertikalnu osu. Po ostalom delu obima prstena, na osnovu dvostruke osne simetrije opterećenja (po horizontalnoj i vertikalnoj osi), u potpunosti se određuje opterećenje koje je prikazano na sl. 95 (b). Sa ovim je potvrđena prikazana dekompozicija opterećenja.

Analitički izrazi za statičke uticaje u prstenastom nosaču, od opterećenja p_i , mogu se pronaći u već gotovoj formi u specijalizovanoj literaturi, kao npr. u knjizi o bunkerima i silosima od *Debeljkovića* (2000) [60]¹. Pri primeni ovih izraza za opterećenja prikazana na sl. 96, uz promenu nekih korišćenih oznaka, kao i promenu konvencije kod momenata savijanja, statički uticaji u prstenu se mogu formalizovati na sledeći način:

– prstenasti momenti savijanja $m_{\varphi i}$ (za $i = 1, 2, 3$)

$$m_{\varphi i} = p_i \cdot r^2 \cdot (2\beta_i / \pi - 1 + \cos \beta_i \cdot \cos \varphi) \quad \text{za} \quad 0 \leq \varphi \leq \beta_i \quad (2.294)$$

$$m_{\varphi i} = p_i \cdot r^2 \cdot (2\beta_i / \pi - \sin \beta_i \cdot \sin \varphi) \quad \text{za} \quad \beta_i \leq \varphi \leq (\pi - \beta_i) \quad (2.295)$$

$$m_{\varphi i} = p_i \cdot r^2 \cdot (2\beta_i / \pi - 1 - \cos \beta_i \cdot \cos \varphi) \quad \text{za} \quad (\pi - \beta_i) \leq \varphi \leq \pi \quad (2.296)$$

– prstenaste normalne sile $n_{\varphi i}$ (za $i = 1, 2, 3$)

$$n_{\varphi i} = p_i \cdot r \cdot (1 - \cos \beta_i \cdot \cos \varphi) \quad \text{za} \quad 0 \leq \varphi \leq \beta_i \quad (2.297)$$

$$n_{\varphi i} = p_i \cdot r \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \varphi \quad \text{za} \quad \beta_i \leq \varphi \leq (\pi - \beta_i) \quad (2.298)$$

$$n_{\varphi i} = p_i \cdot r \cdot (1 + \cos \beta_i \cdot \cos \varphi) \quad \text{za} \quad (\pi - \beta_i) \leq \varphi \leq \pi \quad (2.299)$$

– prstenaste transverzalne sile $q_{\varphi i}$ (za $i = 1, 2, 3$)

$$q_{\varphi i} = p_i \cdot r \cdot \cos \beta_i \cdot \sin \varphi \quad \text{za} \quad 0 \leq \varphi \leq \beta_i \quad (2.300)$$

¹ Prof. *Debeljković* je u knjizi *Bunker i silosi u čeličnoj konstrukciji*, koristio analitičke izraze za uticaje od parcijalnog opterećenja na prstenu (izrazi na str. 335 u [60]), za koje se navodi da su preuzeti iz knjige koja je citirana kao: *Справочник проектировщика* (Москва, 1962). Proverom izdanja objavljenih u Moskvi 1962. god., zaključeno je da citirana knjiga odgovara priručniku izdatom od grupe autora pod redakcijom *Мельников-а* (1962) [364]. Rešenja za ovo i druga opterećenja kod prsten. nosača se isto mogu naći u II dop. izdanju ovog priručnika (1980) [364], kao i u knjizi *Лизин-а* i *Пяткин-а* (1994) [362].

$$q_{\varphi i} = p_i \cdot r \cdot \sin \beta_i \cdot \cos \varphi \quad \text{za} \quad \beta_i \leq \varphi \leq (\pi - \beta_i) \quad (2.301)$$

$$q_{\varphi i} = -p_i \cdot r \cdot \cos \beta_i \cdot \sin \varphi \quad \text{za} \quad (\pi - \beta_i) \leq \varphi \leq \pi \quad (2.302)$$

Ukupni uticaji se dobijaju superpozicijom sva tri uticaja od pojedinačnih opterećenja prikazanih na sl. 96, kod dekompozicije ukupnog opterećenja:

$$m_{\varphi} = \Sigma m_{\varphi i} = m_{\varphi 1} + m_{\varphi 2} + m_{\varphi 3} \quad (2.303)$$

$$n_{\varphi} = \Sigma n_{\varphi i} = n_{\varphi 1} + n_{\varphi 2} + n_{\varphi 3} \quad (2.304)$$

Ako se problem sagledava samo u I kvadrantu (gde se ugao φ menja od 0 do $\pi/2$), jer postoji dvojna simetrija opterećenja i sistema, mogu se koristiti izrazi (2.294) i (2.295), odnosno (2.297) i (2.298), respektivno kod određivanja ukupnih uticaja od parcijalnih opterećenja p_i ($i = 1, 2, 3$), za momente savijanja i normalnu silu u prstenu:

$$m_{\varphi} = \sum_{i=1}^3 \left\{ \begin{array}{ll} p_i r^2 \cdot (2\beta_i / \pi - 1 + \cos \beta_i \cdot \cos \varphi) & \text{koristi se ako je } 0 \leq \varphi < \beta_i \\ p_i r^2 \cdot (2\beta_i / \pi - \sin \beta_i \cdot \sin \varphi) & \text{koristi se ako je } \beta_i \leq \varphi \leq \pi/2 \end{array} \right\} \quad (2.305)$$

$$n_{\varphi} = \sum_{i=1}^3 \left\{ \begin{array}{ll} p_i \cdot r \cdot (1 - \cos \beta_i \cdot \cos \varphi) & \text{koristi se ako je } 0 \leq \varphi < \beta_i \\ p_i \cdot r \cdot \sin \beta_i \cdot \sin \varphi & \text{koristi se ako je } \beta_i \leq \varphi \leq \pi/2 \end{array} \right\} \quad (2.306)$$

U gornjim izrazima koristi se pri sumiranju za i -to opterećenja samo jedan od dva izraza u vrstama prema datom uslovu za ugao φ , tako da velike zgrade ne treba shvatiti kao oznaku za vektor kolonu. Uticaji prema ovim izrazima, definisani su samo za ugao φ u oblasti od 0 do $\pi/2$, odnosno za I kvadrant, a na ostalim delovima prstena uticaji se dobijaju preko simetrije dijagrama po horizontalnoj i vertikalnoj osi u ravni prstena. Najjednostavnije određivanje ukupnih uticaja, je ipak naknadna superpozicija direktno sračunatih parcijalnih uticaja od pojedinačnih opterećenja p_i . Slučaj opterećenja p_1 ($i = 1$), koji je prikazan na sl. 96 (a), kod kojeg je $\beta_1 = \pi/2$, po uticajima odgovara membranskom slučaju zatezanja prstena (kotlovska formula), tako da su momenti savijanja u prstenu 0.

Kada se opšti izrazi za uticaje primene za određivanje presečnih sila u preseku prstena koji odgovara tački 0 (uveden je gornji indeks 0 kod ovih uticaja), odnosno za slučaj da je $\theta = \varphi = 0$, određuju se parcijalni uticaji od i -tih opterećenja ($i = 1, 2, 3$), kako sledi:

$$m_{\varphi 1}^0 = 0 \quad (2.307)$$

$$m_{\varphi 2}^0 = (p_{hae} - p_{hf}) \cdot r^2 \cdot [4\theta_c / \pi - 1 + \cos(2\theta_c)] \quad (2.308)$$

$$m_{\varphi 3}^0 = (p_{hce} - p_{hae}) \cdot r^2 \cdot (2\theta_c / \pi - 1 + \cos \theta_c) \quad (2.309)$$

$$n_{\varphi 1}^0 = p_{hf} \cdot r \quad (2.310)$$

$$n_{\varphi 2}^0 = (p_{hae} - p_{hf}) \cdot r \cdot [1 - \cos(2\theta_c)] \quad (2.311)$$

$$n_{\varphi 3}^0 = (p_{hce} - p_{hae}) \cdot r \cdot (1 - \cos \theta_c) \quad (2.312)$$

Normalna sila i moment savijanja u tački 0 prstena, predstavljaju ekstremne uticaje u prstenu, i mogu se dobiti superpozicijom prethodno formulisanih parcijalnih uticaja:

$$m_{\varphi}^0 = \{(p_{hae} - p_{hf})[4\theta_c / \pi - 1 + \cos(2\theta_c)] + (p_{hce} - p_{hae})(2\theta_c / \pi - 1 + \cos \theta_c)\} \cdot r^2 \quad (2.313)$$

$$n_{\varphi}^0 = \{ p_{hf} + (p_{hae} - p_{hf})[1 - \cos(2\theta_c)] + (p_{hce} - p_{hae})(1 - \cos\theta_c) \} \cdot r \quad (2.314)$$

Pritisici od zrnastih materijala za slučaj pražnjenja ćelije kroz ekscentrični protočni kanal, koji se uvode u gornje izraze su p_{hf} , p_{hae} i p_{hce} , i opisani su u okviru § 2.10.2.5 i § 2.10.6.3, prema normama EC1-4 i DIN 1055-6.

Prema tabeli 23, dati su tri izraza za pritiske p_{hae} , koji su definisani u zavisnosti od pritisaka p_{hf} i p_{hce} . U vezi s tim, mogu se ove formulacije za pritiske p_{hae} , uvesti u izraze (2.313) i (2.314), tako da se ovi mogu prikazati samo u funkciji pritisaka p_{hf} i p_{hce} . Pri ovoj zameni, od interesa je dobijanje jednostavnijih oblika za proračunske izraze, a ovde se prikazuje slučaj zamene p_{hae} u formi koja odgovara normi EC1-4 (pri primeni drugih izraza za p_{hae} , ne dobija se značajnije pojednostavljenje datih izraza). Radi celovitosti prikaza ponavlja se izraz za p_{hae} prema EC1-4, i daju sređeni izrazi za statičke uticaje u tački 0, koji su određeni nakon uvođenja p_{hae} u izraze (2.313) i (2.314):

$$p_{hae} = 2 p_{hf} - p_{hce} \quad (\text{prema EN 1991-4:2006 [38]}) \quad (2.315)$$

$$m_{\varphi}^0 = (p_{hf} - p_{hce}) \cdot r^2 \cdot [1 - 2 \cos\theta_c + \cos(2\theta_c)] \quad (2.316)$$

$$n_{\varphi}^0 = p_{hf} \cdot r \cdot \left\{ 1 - \frac{p_{hf} - p_{hce}}{p_{hf}} \cdot [1 - 2 \cos\theta_c + \cos(2\theta_c)] \right\} \quad (2.317)$$

Sa prethodnim izrazima određeni su prstenasti uticaji u tački 0 (koja odgovara uglovima $\varphi = 0$ za uticaje, odnosno $\theta = 0$ za opterećenje). Deo uokviren u srednje zgrade kod ovih izraza zavisi od kosinusa datih uglova, i za $\theta_c = 0$ (slučaj kada se anulira protočni kanal) određuje se za moment savijanja 0, a za normalnu silu zatezanja vrednost $p_{hf} \cdot r$ (kotlovsko formula za silu zatezanja). U slučaju da je ugao u oblasti $0 < \theta_c \leq \pi/4$, dobija se za deo izraza u srednjim zgradama negativna vrednost. Kako su pritisci u odnosu $p_{hf} > p_{hce}$, sledi da je $(p_{hf} - p_{hce}) > 0$, pri čemu se određuje negativna vrednost kod proračuna momenta savijanja u tački 0 zida ćelije (zateže se unutrašnja strana zida ćelije), a normalna sila određena prema izrazu (2.317), se povećava u odnosu na silu zatezanja prema kotlovskoj formuli $p_{hf} \cdot r$.

S obzirom na nivo aproksimacija kod ovog približnog postupka, i teorijske postavke pri određivanju opterećenja od ekscentričnog pražnjenja (prstenasta sila zatezanja u zidu ljske se određuje prema kotlovskoj formuli $p_{hf} \cdot r$), od praktičnog interesa je samo primena aproksimativnog izraza (2.316) za određivanje momenta savijanja u zidu ćelije.

Za proračunsku procenu normalne sile i momenta savijanja u tački 0, gde je najveće zatezanje unutrašnje strane zida po obimu ćelije, od dejstva nesimetričnog opterećenja pri pražnjenju materijala kroz ekscentrični protočni kanal, preporučuje se primena sledećih izraza:

$$n_{\varphi}^0 \text{ approx.} \cong p_{hf} \cdot r \quad (2.318)$$

$$m_{\varphi}^0 \text{ approx.} \cong k_{m\varphi} \cdot m_{\varphi}^0 = k_{m\varphi} \cdot (p_{hf} - p_{hce}) \cdot r^2 \cdot [1 - 2 \cos\theta_c + \cos(2\theta_c)] \quad (2.319)$$

gde je $k_{m\varphi}$ korekcionni faktor, koji se određuje na osnovu upoređenja približnih rešenja sa rešenjima tačnije metode analize primenom MKE. U ovom radu, na jednom analiziranom primeru cilindričnog silosa, upređenjem rezultata dobijenih primenom MKE i izraza (2.316), određen je korekcionni faktor $k_{m\varphi} \cong 0.7$.

3 ANALITIČKI POSTUPCI ZA ODREĐIVANJE OPTEREĆENJA U SILOSIMA

U ovom poglavlju se analiziraju poznati proračunski postupci za određivanje opterećenja u silosima, odnosno stanja napona u uskladištenom materijalu, koji se većinom zasnivaju na metodi diferencijalnog sloja. Analitički postupci za određivanje opterećenja u silosima se mogu podeliti prema broju zadovoljenih uslova ravnoteže u analizi stanja napona (1D, 2D i 3Dr silosni problem), ili prema obliku elementa na kojem se primenjuju uslovi ravnoteže kao što su metoda diferencijalnog sloja, metoda konačnog odsečka i metoda isečka diferencijalnog sloja, kao i na drugi način (detaljnije u § 2.9.3).

Metoda integralnih relacija je primenjena kod postupka *Walker*-a i *Walters*-a, kako bi se ilustrovala primena ove metode na relativno jednostavnom teorijskom primeru analize (1D silosni problem - analiza stanja napona na osnovu jednog uslova ravnoteže). U izvornoj verziji ovaj postupak je formiran sa metodom diferencijalnog sloja. Upotreba metode integralnih relacija se detaljno razmatra u § 4 ovog rada, gde se ona koristi kod rešavanja složenih analiza 2D i 3Dr silosnih problema.

Metodu diferencijalnog sloja sačinjava niz aproksimativnih analiza koje su se zasnovale na metodi koju je uveo *Janssen* u 1895. god. [130]. Ova metoda je veoma značajna jer predstavlja osnovu za preporučene postupke u mnogim propisima za proračune bunkera i silosa. Kasnije razvijeni postupci analize stanja napona u silosima, kao što je npr. *Walker*-ov postupak (1966) [325], su formirani u cilju popravljivanja rezultata analize dobijenih na osnovu *Janssen*-ovih aproksimacija.

Postupci proračuna stanja napona materijala u silosu, se u osnovi dele na dve grupe:

- kod prve grupe u analizu se uvodi pretpostavka da su vertikalni naponi u poprečnom preseku konstantni, i
- kod druge grupe u analizu se uvodi pretpostavka da su vertikalni naponi u poprečnom preseku promenljivi.

U prvu grupu spadaju postupci npr. *Janssen*-a, *Гутъяр*-a, *Reimbert*-ovih, *Jáky*-a, *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a, i drugih; dok u drugu grupu ulaze postupci *Ohde*-a, *Nanning*-a, *Walker*-a, *Walters*-a, *Negi*-a, *Li*-a i *Aubertin*-a (ovaj postupak se odnosi na silosni problem u mehanici tla), i drugih. U načelu, prva grupa proračuna se zasniva na kvazi-elastičnoj analizi, a druga grupa postupaka na kvazi-plastičnoj analizi, gde se obično koristi *Mohr-Coulomb*-ov kriterijum za lom materijala smicanjem.

3.1 Janssen-ov postupak

Janssen je u 1895. god. [130] predložio teoriju zasnovanu na metodi diferencijalnog sloja gde se uspostavlja ravnoteža vertikalnih sila koje deluju na sloj materijala pri punjenju i mirovanju. Teorija se koristi do danas u mnogim propisima za stanje napona pri mirovanju materijala ili inicijalnog stanja pri punjenju silosa. Pritisaci tokom pražnjenja materijala iz silosa se uobičajeno određuju multiplikovanjem pritisaka pri mirovanju materijala sa faktorom uvećanja opterećenja.

Velika prednost *Janssen*-ovog postupka je jednostavnost, a slaba tačka je ta da konačno rešenje sadrži jedan parametar, *Janssen*-ovu konstantu K_J , koju je potrebno odrediti eksperimentalnim ispitivanjem ili sračunati iz neke druge naprednije teorije.

3.1.1 Osnove Janssen-ovog postupka

Teorija *Janssen*-a se zasniva na sledećim pretpostavkama:

- (1) Trenje materijala o zid ćelije, koje se javlja kada se materijal sleže tokom punjenja ćelije, ostaje da deluje i nakon punjenja.
- (2) Ugao trenja materijala o zid ϕ_w i koeficijent trenja o zid $\mu_w = \tan \phi_w$, zavise samo od karakteristika zidne površine i prirode materijala i uzimaju se za konstante.
- (3) Vertikalni pritisak p_v u zrnastom materijalu i horizontalni potisak p_h na zid ćelije su konstantne veličine na posmatranoj dubini materijala z .
- (4) Važi linearnost između horizontalnih i vertikalnih pritisaka u posmatranoj tački materijala, tako da je odnos između pritisaka p_h i p_v konstantan u ukupnom prostoru materijala u ćeliji. Između horizontalnog i vertikalnog pritiska stoji faktor proporcionalnosti K , koji je nezavisan od z :

$$p_h = K \cdot p_v \quad (3.1)$$

- (5) Težina materijala se uzima da je konstantna (ne zavisi od dubine materijala z).

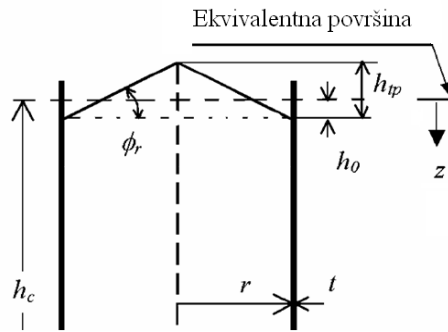
Pri naknadnim tumačenjima *Janssen*-ovog postupka, dodate su pretpostavke da su zidovi silosa potpuno kruti, te da su horizontalni naponi ravnomeni u horizontalnom preseku materijala (ovo je implicitna pretpostavka u [130]), i da su vertikalni i horizontalni naponi ujedno glavni naponi (glavni naponi se ne pominju u [130]).

Odnos između horizontalnih i vertikalnih pritisaka, K , je konstanta po celoj visini silosa, tako da je:

$$K = p_h / p_v \quad (3.2)$$

Prema ovoj analizi, horizontalni i vertikalni pritisci materijala u ćeliji silosa ne rastu linearno sa dubinom, kao kod pritisaka tečnosti i tla, nego se sa povećanjem dubine prirast pritiska u ćeliji postepeno smanjuje.

Janssen-ova analiza se najbolje ilustruje razmatranjem raspodele napona u cilindričnom silosu koji sadrži rastresiti uskladišteni materijal. U ovom slučaju postavlja se sistem osa (r, z) sa koordinantnim početkom u centru zaravnjene gornje površine uskladištenog materijala. Iz ćelije beskonačne visine izdvaja se sa dve horizontalne ravni diferencijalni sloj visine dz , na dubini z . Dubina materijala z se uzima od nivoa zaravnjene nasipne kupe rastresitog materijala.

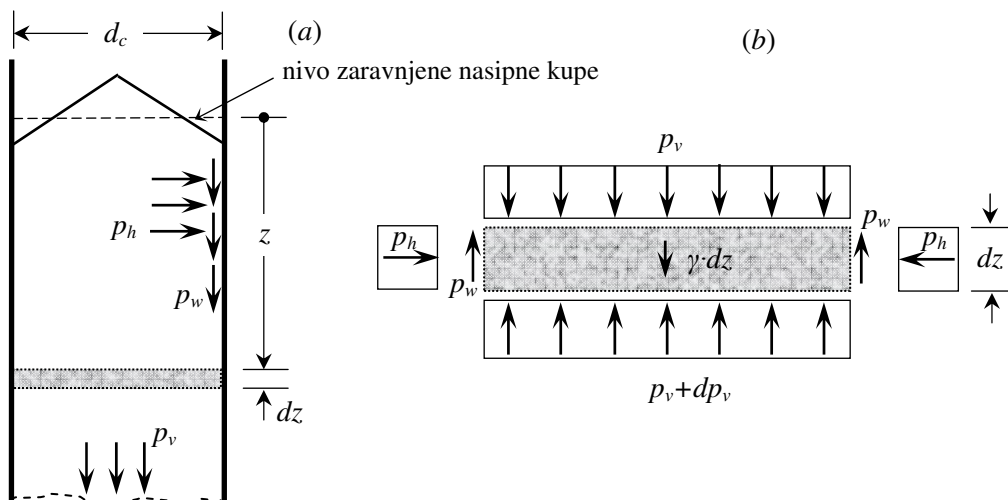


Sl. 97 Nasipna kupa sa ekvivalentnim nivoom zaravnjene površine.

Oblik gornjeg nasipnog dela zrnastog materijala zavisi od oblika ćelije, i načina na koji je usipan materijal. Koordinatni početak $z = 0$ za z koordinatu se postavlja na visinu $h_0 = V/A$ iznad podnožja nasipnog dela materijala, gde A odgovara površini preseka kružne ćelije, a V je zapremina nasipne kupe materijala (sl. 97). Kod uskladištenog materijala ugao prirodnog nagiba je ϕ_r .

Na zidove silosa i na materijal u ćeliji deluju:

- p_v - vertikalni pritisak od uskladištenog materijala,
- p_h - horizontalni pritisak na materijal (horiz. bočni potisak na zid ćelije) i
- p_w - površinsko opterećenje usled trenja materijala o zid ćelije.



Sl. 98 Opterećenja u ćeliji silosa (a) i na diferencijalnom sloju materijala (b).

Janssen-ov postupak se zasniva na ravnoteži diferencijalnog sloja materijala visine dz sa težinom materijala γ , koji je izložen vertikalnim pritiscima p_v i $p_v + dp_v$ i trenju po obimu zida koje izaziva horizontalni pritisak p_h prema izrazu (3.1). Izdvaja se diferencijalni sloj materijala debljine dz na dubini z (unutrašnja površina preseka ćelije se označava sa A , a unutrašnji obim zida ćelije sa U). Na ovaj sloj deluju sledeće sile (sl. 98):

- $p_v \cdot A$ - vertikalna sila na gornjoj površini materijala,
- $\gamma \cdot A \cdot dz$ - sopstvena težina zrnastog materijala zapreminske težine γ ,

- $(p_v + dp_v) \cdot A$ - vertikalna reakcija na donjoj površini materijala,
 $p_h \cdot U \cdot dz$ - horizontalna reakcija od zidova po obimu ćelije,
 $p_w \cdot U \cdot dz$ - sila trenja koju primaju zidovi po obimu usled trenja koje se javlja između zrnastog materijala i zidova silosa.

Za izdvojeni sloj materijala možemo napisati uslov ravnoteže, $\Sigma V = 0$:

$$p_v(z) \cdot A + \gamma \cdot A \cdot dz - [p_v(z) + dp_v] \cdot A - p_w(z) \cdot U \cdot dz = 0 \quad (3.3)$$

U gornjoj jednačini su dve nepoznate: p_v i p_w .

Janssen je uveo sledeće dve proračunske pretpostavke pri rešavanju gornje jednačine, gde je sa prvom pretpostavkom, trenje p_w izrazio preko horizontalnog pritiska p_h , a sa drugom, uvedeno p_h izrazio preko vertikalnog pritiska p_v u uskladištenom materijalu:

I pretpostavka: da trenje materijala o zidove ćelije odgovara tzv. suvom trenju sa konstantnom vrednošću koeficijenta trenja μ_w po visini zida:

$$\mu_w = \tan \phi_w = \frac{p_w(z)}{p_h(z)} = \text{const.} \quad (3.4)$$

gde je ϕ_w ugao trenja uskladištenog materijala o površinu zida ćelije (često se ovaj ugao označava sa δ).

II pretpostavka: da je odnos vertikalnog i horizontalnog pritiska K konstantan:

$$K = \frac{p_h(z)}{p_v(z)} = \text{const.} \quad (3.5)$$

Sa ove dve pretpostavke jednačina (3.3) se svodi na diferencijalnu jednačinu samo po p_v , i to prvo uvodeći prvu pretpostavku:

$$p_w(z) = p_h(z) \cdot \mu_w \quad (3.6)$$

$$\gamma \cdot A \cdot dz - A \cdot dp_v - p_h(z) \cdot U \cdot \mu_w \cdot dz = 0 \quad (3.7)$$

a nakon toga i drugu:

$$p_h(z) = K \cdot p_v(z) \quad (3.8)$$

$$A \cdot dp_v + K \cdot p_v(z) \cdot U \cdot \mu_w - A \cdot \gamma \cdot dz = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{dp_v(z)}{dz} = \gamma - \frac{K \cdot \mu_w}{A/U} \cdot p_v(z) = \gamma - \frac{1}{z_0} \cdot p_v(z) \quad (3.10)$$

Uvodi se sledeća oznaka (*Janssen*-ova karakteristična dubina uskladištenog materijala) :

$$z_0 = \frac{A}{K \cdot \mu_w \cdot U} \quad (3.11)$$

$$\frac{dp_v(z)}{dz} = \gamma - \frac{p_v(z)}{z_0} \Rightarrow \frac{1}{\gamma} \cdot \int \frac{dp_v}{\left(1 - \frac{1}{z_0 \gamma} p_v\right)} = \int dz \Rightarrow -z_0 \cdot \ln \left(1 - \frac{1}{z_0 \gamma} p_v\right) = z + C$$

Konstanta integracije C se određuje iz početnog uslova da je gornja površina materijala ravna i bez nadopterećenja pri $z = 0$, odnosno da je:

$$p_v|_{z=0} = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow p_v(z) = \gamma z_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{z_0}}\right)$$

koji je poznata formulacija *Janssen*-a za proračun vertikalnog pritiska.

Vertikalni pritisak [kN/m²]:

$$p_v(z) = \gamma z_0 \cdot (1 - e^{-\frac{z}{z_0}}) = \frac{\gamma \cdot r_h}{K \cdot \mu_w} \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{r_h}}) \quad (3.12)$$

Horizontalni pritisak [kN/m²]:

$$p_h(z) = K \cdot p_v(z) = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{r_h}}) \quad (3.13)$$

Opterećenje usled trenja [kN/m²]:

$$p_w(z) = \mu_w \cdot p_h(z) = \gamma \cdot r_h \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{r_h}}) \quad (3.14)$$

Izrazi se često daju u obliku gde se uvodi funkcija oblika dijagrama - raspodele opterećenja Φ (oznaka Y se koristi u EC1-4):

$$Y(z) = 1 - e^{-\frac{z}{z_0}} \quad (3.15)$$

Ako se povećava posmatrana dubina uskladištenog materija z , opterećenja rastu i teže konačnim asimptotskim vrednostima. Za $z \rightarrow \infty$, sledi da je $Y = 1$, a opterećenja dobijaju maksimalne teorijske vrednosti:

$$p_{v\max} = p_{v\infty} = z_0 \gamma = \frac{\gamma A}{K \cdot \mu_w \cdot U} = \frac{\gamma \cdot r_h}{K \cdot \mu_w} \quad (3.16)$$

$$p_{h\max} = p_{h\infty} = K \cdot z_0 \gamma = \frac{\gamma A}{\mu_w \cdot U} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \quad (3.17)$$

$$p_{w\max} = p_{w\infty} = K z_0 \gamma \cdot \mu_w = \frac{\gamma A}{U} = \gamma \cdot r_h \quad (3.18)$$

Ovi izrazi takođe direktno slede iz činjenice da dp_v ne menja veličinu p_v pri velikim dubinama. Na taj način, diferencijalni sloj materijala je u ravnoteži preko sile trenja po obimu $\mu_w \cdot p_h \cdot U \cdot dz$ i težine sloja $\gamma \cdot A \cdot dz$:

$$\mu_w \cdot p_h \cdot U = \gamma \cdot A \quad \Rightarrow \quad p_h = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \quad (3.19)$$

U gornjim izrazima je uvedena oznaka r_h – *hidraulički radijus* poprečnog preseka ćelije silosa, koji predstavlja odnos površine ćelije silosa u osnovi A , i unutrašnjeg obima zida ćelije U :

$$r_h = \frac{A}{U} \quad (3.20)$$

Pregled izraza klasične teorije pritisaka u silosnim ćelijama (stanje punjenja i stanje mirovanja rastresitog materijala):

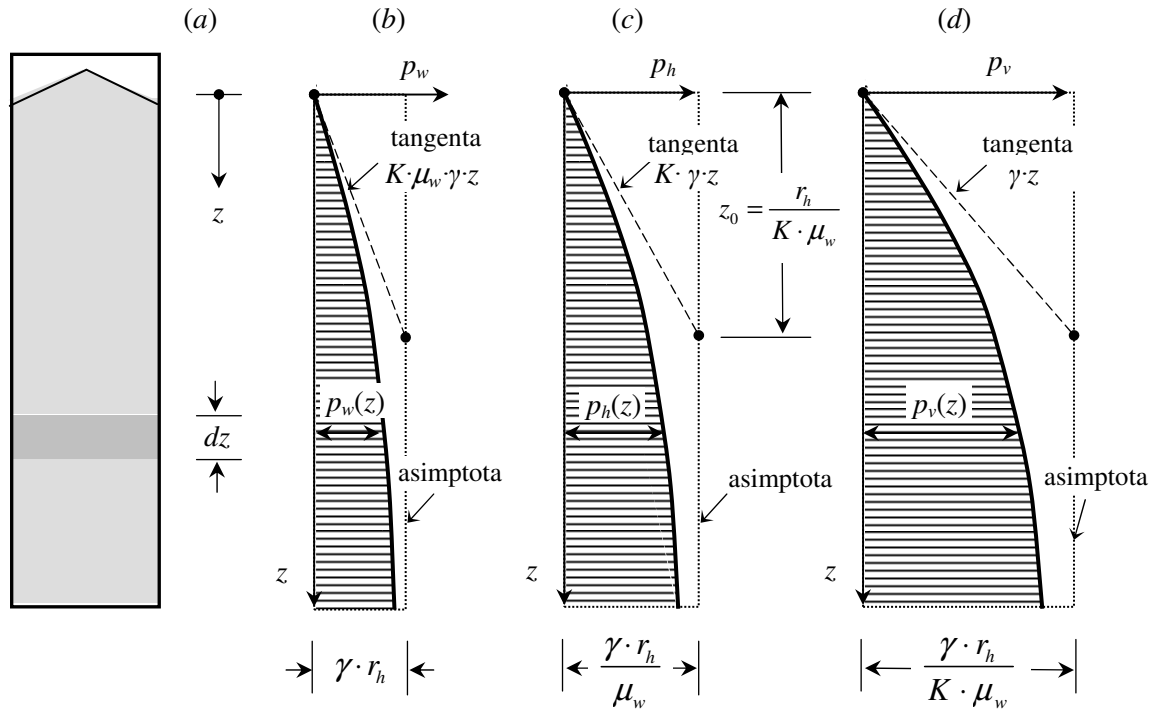
$$r_h = \frac{A}{U} \quad ; \quad z_0 = \frac{r_h}{K \cdot \mu_w} \quad ; \quad Y(z) = 1 - e^{-\frac{z}{z_0}} \quad (3.21)$$

$$p_v \Big|_{z \rightarrow \infty} = p_{v\infty} = \gamma \cdot z_0 \quad (3.22)$$

$$p_h|_{z \rightarrow \infty} = p_{h\infty} = K \cdot p_{v\infty} \quad (3.23)$$

$$p_w|_{z \rightarrow \infty} = p_{w\infty} = \mu_w \cdot p_{h\infty} \quad (3.24)$$

$$p_v(z) = p_{v\infty} \cdot Y(z) ; p_h(z) = p_{h\infty} \cdot Y(z) ; p_w(z) = p_{w\infty} \cdot Y(z) \quad (3.25)$$



Sl. 99 Dijagrami opterećenja po visini ćelije.

Horizontalno opterećenje, na zidove ćelije, deluje po celom unutrašnjem obimu ćelije, kao normalno opterećenje na površinu vertikalnih zidova.

Opterećenje od trenja o zid p_w proizvodi silu pritiska u zidu i može se integraliti vertikalno kako bi se sračunala rezultanta. Vertikalna sila pritiska po jedinici obima zida, $P_w(z)$, koja deluje na dubini z , se dobija u sledećem obliku:

$$P_w(z) = \int_0^z p_w \cdot dz = \mu_w \cdot \int_0^z p_h \cdot dz = \gamma \cdot r_h \cdot \left[z - z_0 \cdot \left(1 - e^{-z/z_0} \right) \right] = r_h \cdot (\gamma \cdot z - p_v) \quad (3.26)$$

Ova vrednost se može odrediti i na drugi jednostavniji način – na osnovu ravnoteže vertikalnih sila u posmatranom horizontalnom preseku ćelije. Sila pritiska po jedinici obima zida, $P_w(z)$, jednaka je ukupnoj težini materijala iznad posmatrane visine umanjenoj za rezultantu silu od vertikalnih pritisaka p_v , podeljeno sa obimom ćelije. Suma trenja koju zid prihvata na delu visine od 0 do z i na jediničnoj širini po obimu zida iznosi:

$$U \cdot P_w(z) + A \cdot p_v = \gamma \cdot A \cdot z \quad (3.27)$$

odakle se direktno određuje:

$$P_w(z) = \frac{\gamma \cdot A \cdot z - A \cdot p_v}{U} \quad (3.28)$$

što u potpunosti odgovara izrazu (3.26).

Ukupna sila trenja $U \cdot P_w(z)$ na nivou z i vertikalna sila $A \cdot p_v$ na dubini z jednaka je težini dela materijala $\gamma A \cdot z$ iznad nivoa z . Za veliko z , odnosno od $z = 5 \cdot z_0$, dugi član na levoj strani izraza (3.27), se praktično više ne povećava, i ukupni materijal se dalje prihvata samo povećanjem ukupne sile trenja.

Krive p_v i p_h su u funkciji od z i imaju odgovarajuće asimptote. Tangente na krive opterećenja u osnom početku 0, se određuju kao izvodi opterećenja po z osi, i imaju sledeće koeficijente prave:

$$p'_v \Big|_{z=0} = \frac{dp_v}{dz} \Big|_{z=0} = \gamma \quad (3.29)$$

$$p'_h \Big|_{z=0} = \frac{dp_h}{dz} \Big|_{z=0} = K \cdot \gamma \quad (3.30)$$

$$p'_w \Big|_{z=0} = \frac{dp_w}{dz} \Big|_{z=0} = K \cdot \mu_w \cdot \gamma \quad (3.31)$$

Tangentna linija za vertikalni pritisak preseca asimptotu na dubini z_0 . Ova linija odgovara vertikalnom pritisku pri odsustvu silosnog efekta, kao hidrostatički pritisak $p_v = \gamma \cdot z$. Može se uočiti da prema prikazu na sl. 99, vertikalni napon materijala na manjim dubinama z , sledi hidrostatički pritisak, ali odstupa od ovih vrednosti sa povećanjem dubine ispod površine materijala, i dalje teži maksimalnoj vrednosti $p_{z \max}$. Ovo je jedno specifično svojstvo zrnastog materijala koje je izazvano trenjem između zrna i između zrna i zidova silosa. Kod fluida, ukupna težina se oslanja na donju ploču date posude. Zrnasti materijali, sa druge strane, pokazuju trenje i odatle se jedan deo težine oslanja na zidove. Krajnja implikacija je da se ispod određene dubine zrnastog materijala, ukupna težina prenosi na zidove putem trenja.

Tangente na p_h krivu i p_w krivu takođe presecaju odgovarajuće asimptote na dubini z_0 , kako je prikazano na sl. 99.

Primer 3.1 - analiza stanja napona u 3Dr silosu prema Janssen-ovom postupku

U primerima se koriste sledeći osnovni podaci 3Dr silosa i materijala:

- $D = 5$ m (unutrašnji prečnik ćelije),
- $\gamma = 10$ kN/m³ (zapreminska težina uskladištenog materijala), i
- $h_0 = 0$ m (slučaj analize sa ravnom gornjom površinom materijala - bez nasipne kupe)
- analiza *a*: konstantno $\mu_w = 0.3$ sa variranjem vrednosti $K = 0.4, 0.5$ i 0.6 ;
- analiza *b*: konstantno $\mu_w = 0.4$ sa variranjem vrednosti $K = 0.4, 0.5$ i 0.6 ;
- analiza *c*: konstantno $K = 0.5$ sa variranjem vrednosti $\mu_w = 0.3, 0.4$ i 0.5 ; i
- analiza *d*: konstantno $K = 0.4$ sa variranjem vrednosti $\mu_w = 0.3, 0.4$ i 0.5 .

Pritisci p_h i p_v , i opterećenje usled trenja p_w se određuju prema izrazima (3.12), (3.13) i (3.14), gde je hidraulički radijus za kružnu ćeliju $r_h = A/U = D/4 = 1.25$ m.

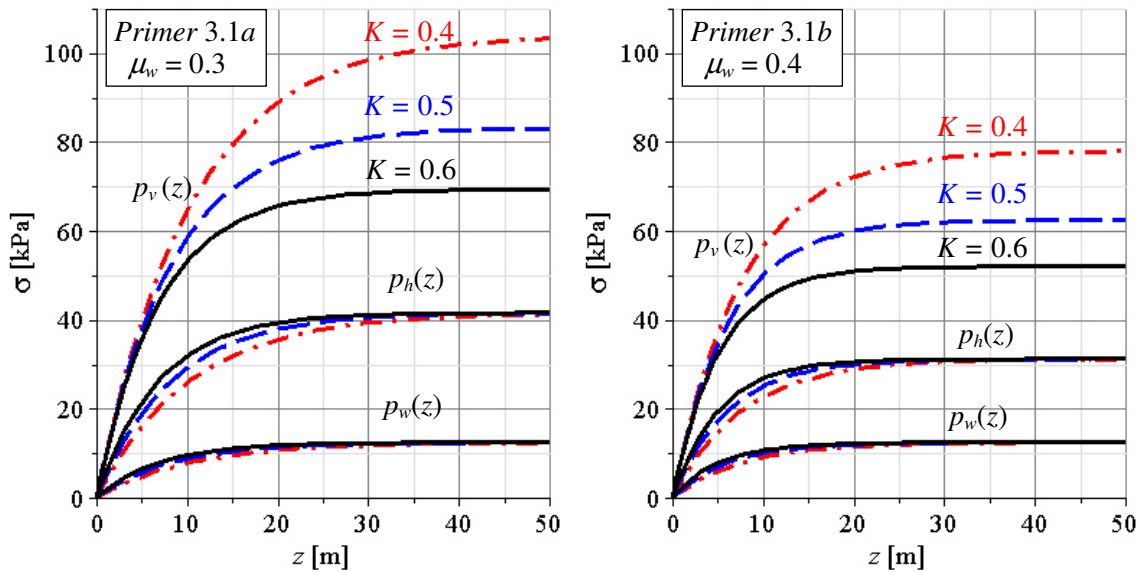
Za sve primere su prikazani dijagrami p_h , p_v i p_w , u funkciji dubine materijala z (do dubine $z = 50$ m), na sl. 100 i sl. 101.

Pri analizi rezultata na sl. 100 i sl. 101, može se zaključiti da opterećenje usled trenja p_w bez obzira na variranje vrednosti za K i μ_w , asimptotski teži istoj vrednosti. Po dubini z , opterećenje p_w je veće pri povećanju parametra K (za konstantno μ_w) i povećanju μ_w (za konstantno K).

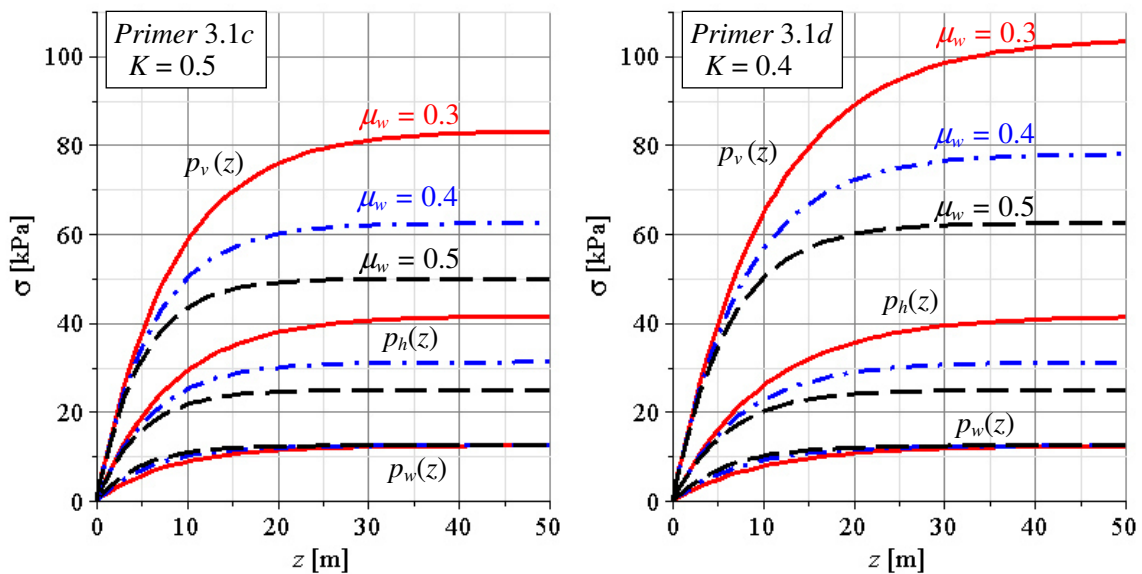
Horizontalni pritisci p_h teže istoj asimptotskoj vrednosti pri konstantnom μ_w i variranju K , a p_h ima veće asimptotske vrednosti pri smanjenju koeficijenta trenja μ_w . Po dubini z , pritisci p_h su veći pri povećanju K (za konstantno μ_w) i smanjenju μ_w (za konstantno K).

Vertikalni pritisci p_v teže različitim asimptotskim vrednostima, pri variranju jednog ili oba parametra K i μ_w , ako se pri variranju menja vrednost proizvoda $K \cdot \mu_w$. Po dubini z , pritisci p_v su veći pri smanjenju K (za konstantno μ_w) i smanjenju μ_w (za konstantno K).

Po pitanju razvoja p_h , p_v i p_w sa dubinom z , ova opterećenja se brže razvijaju za veće vrednosti K (za konstantno μ_w) i veće vrednosti μ_w (za konstantno K).



Sl. 100 Janssen-ova teorija – Primeri 3.1a i 3.1b - Stanje napona pri variranju K , uz $h_0 = 0$ m (bez nasipne kupe). Podaci: $D = 5$ m; $\gamma = 10$ kN/m³; $K = 0.4, 0.5$ i 0.6 ; za $\mu_w = 0.3$ i 0.4 .



Sl. 101 Janssen-ova teorija – Primeri 3.1c i 3.1d - Stanje napona pri variranju μ_w , uz $h_0 = 0$ m (bez nasipne kupe). Podaci: $D = 5$ m; $\gamma = 10$ kN/m³; za $K = 0.5$ i 0.4 ; i $\mu_w = 0.3, 0.4$ i 0.5 .

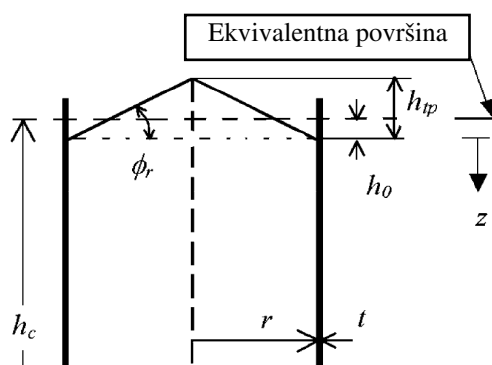
3.1.2 Nasipni deo materijala i nadopterećenje na površini materijala

Cilindrični silosi se obično pune usipanjem materijala kroz centralni otvor na tavanici. Gornja površina materijala je konusna i pod uglom nasipanja, tj. uglom prirodnog nagiba ϕ_r u odnosu na horizontalnu ravan. Kada se materijal skladišti između paralelnih zidova, nasipni deo je u obliku izdužene trougaone prizme, a dve bočne strane su nagnute pod uglom nasipanja. Sa druge strane, tokom pražnjenja u obliku isticanja jezgrom, centralno ulegnuće (depresija) se formira na gornjoj površini, opet sa uglom prirodnog nagiba. Težina ovih nasipnih delova materijala se obično određuju primenom jedne od dve aproksimativne analize koje se razmatraju dalje u tekstu.

Nivo kontaktne ravni gornje površine nasipnog dela sa zidom ćelije se uzima u analizi za početak vertikalne koordinate z , kako je to prikazano na sl. 102.

U praksi se najčešće koristi jednostavnija metoda analize, u kojoj se uzima da je gornja površina nasipnog dela materijala poravnata, tako da se materijal u ćeliji uzima od gornje ekvivalentne površine koja je na rastojanju h_0 od kontaktne ravni $z = 0$. Rastojanje h_0 će biti negativno u slučaju centralne depresije materijala.

3.1.2.1 Analiza sa nadopterećenjem od nasipnog dela materijala



Sl. 102 Nasipna kupa sa ekvivalentnim nivoom zaravnjene površine.

U slučaju kružnih ćelija ($r_h = A/U = d/4$, gde je d unutrašnji prečnik ćelije) i centričnog punjenja, materijal na vrhu obrazuje nasipni deo u vidu nasipne kupe. U vertikalnom preseku površina nasutog materijala stoji pod uglom ϕ_r u odnosu na horizontalnu ravan. Ovaj ugao se naziva ugao prirodnog nagiba za dati materijal. Obično je oko 10% manji od ugla unutrašnjeg trenja materijala ϕ . Ako nije poznata konkretna vrednost ovog ugla, može se uzeti, radi jednostavnosti da je $\phi_r = \phi$. Pojedini autori i tvrde da je ovo teorijski tačno (Nedderman (1992) [200]), iako se u tehničkim propisima nalaze posebne vrednosti za ovaj ugao. U vezi s tim, ovde će se pri određivanju geometrije nasipne kupe uvesti ugao prirodnog nagiba ϕ_r , a njegova vrednost može biti poznata za dati materijal ili ne, ali nikako unapred predefinisana kao ϕ . Težina nasipne kupe materijala kod kružnih ćelija iznosi:

$$Q_0 = \gamma \cdot V_0 = \gamma \cdot A \cdot \frac{h_{tp}}{3} = \gamma \cdot A \cdot h_0 \quad (3.32)$$

gde je V_0 zapremina nasipne kupe, h_{tp} visina nasipne kupe materijala u kružnoj silosnoj ćeliji sa prečnikom d , i h_0 visina ekvivalentne površine koja odgovara nivou poravnate nasipne kupe. Visina nasipne kupe materijala se određuje prema izrazu:

$$h_{tp} = \frac{d}{2} \cdot \tan \phi_r \quad (3.33)$$

Visina ekvivalentne površine poravnatog materijala nasipne kupe je:

$$h_0 = \frac{h_{tp}}{3} = \frac{d}{6} \cdot \tan \phi_r \quad (3.34)$$

a u opštem slučaju nasipne hrpe drugog oblika se određuje na osnovu izraza:

$$h_0 = V_0 / A. \quad (3.35)$$

Vertikalno zamenjujuće nadopterećenje p_{v0} , s kojim se zamenjuje težina nasipne hrpe u opštem obliku, iznosi:

$$p_{v0} = Q_0 / A = \gamma \cdot h_0, \quad (3.36)$$

a u slučaju nasipne kupe se određuje:

$$p_{v0} = \gamma \cdot \frac{h_{tp}}{3} = \gamma \cdot h_0 = \gamma \cdot \frac{d}{6} \cdot \tan \phi_r. \quad (3.37)$$

Dalje se u izvođenju pritisaka u uskladištenom materijalu ćelije, uzima ordinata z od nivoa kontaktne linije nasipne kupe sa zidom ćelije (nivo $z=0$), sa ravnom gornjom površinom materijala na kojoj deluje ravnomerno raspoređeno vertikalno opterećenje p_{v0} , koje je zamenjujuće nadopterećenje za uticaj težine materijala nasipne hrpe iznad nivoa $z=0$. Ovakav način tretiranja težine kupe formirane pri punjenju ćelije materijalom, uvođenjem u proračun zamenjujućeg opterećenja je uobičajen, a ujedno i najjednostavniji po pitanju rešavanja ovog problema.

Konstanta integracije C se određuje iz početnog uslova da na gornjoj ravnoj površini materijala deluje vertikalno ravnomerno raspodeljeno opterećenje $p_v(z=0) = p_{v0}$, koje zamenjuje uticaj težine nasipne kupe.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Za } z=0 \\ p_v = p_{v0} \end{array} \right\} \Rightarrow C = -z_0 \cdot \ln \left(1 - \frac{p_{v0}}{z_0 \gamma} \right) \Rightarrow -z_0 \cdot \ln \left(1 - \frac{p_v}{z_0 \gamma} \right) = z - z_0 \cdot \ln \left(1 - \frac{p_{v0}}{z_0 \gamma} \right)$$

$$\Rightarrow p_v(z) = \gamma z_0 \cdot (1 - e^{-\frac{z}{z_0}}) + p_{v0} \cdot e^{-\frac{z}{z_0}}$$

U ovom slučaju *Janssen*-ova formulacija za pritiske dobija sledeće oblike:

Vertikalni pritisak [kN/m²):

$$p_v(z) = \gamma z_0 \cdot (1 - e^{-\frac{z}{z_0}}) + p_{v0} \cdot e^{-\frac{z}{z_0}} = \gamma \cdot \frac{r_h}{K \cdot \mu_w} \cdot (1 - e^{-\frac{K \cdot \mu_w \cdot z}{r_h}}) + p_{v0} \cdot e^{-\frac{K \cdot \mu_w \cdot z}{r_h}} \quad (3.38)$$

Horizontalni pritisak [kN/m²):

$$p_h(z) = K \cdot p_v(z) = K \cdot \gamma z_0 \cdot (1 - e^{-\frac{z}{z_0}}) + K \cdot p_{v0} \cdot e^{-\frac{z}{z_0}} =$$

$$= \gamma \cdot \frac{r_h}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-\frac{K \cdot \mu_w \cdot z}{r_h}}) + K \cdot p_{v0} \cdot e^{-\frac{K \cdot \mu_w \cdot z}{r_h}} \quad (3.39)$$

Opterećenje usled trenja [kN/m²]:

$$\begin{aligned}
 p_w(z) &= \mu_w \cdot p_h(z) = \mu_w \cdot K \cdot \gamma z_0 \cdot (1 - e^{-\frac{z}{z_0}}) + \mu_w \cdot K \cdot p_{v0} \cdot e^{-\frac{z}{z_0}} = \\
 &= \gamma \cdot r_h \cdot (1 - e^{-\frac{K \cdot \mu_w \cdot z}{r_h}}) + \mu_w \cdot K \cdot p_{v0} \cdot e^{-\frac{K \cdot \mu_w \cdot z}{r_h}}
 \end{aligned}
 \quad (3.40)$$

Nadopterećenje p_{v0} može biti proračunska veličina u teorijskim analizama, tako da nije isključivo vezano za proračun uticaja nasipnog dela materijala (koje može biti u obliku nasipne kupe, prizme ili drugog oblika). Koriste se isti izrazi za određivanje opterećenja (3.38) do (3.40). U analogiji sa nasipnim delom, proračunsko nadopterećenje p_{v0} se može uvesti u analizu, na osnovu izraza (3.36), sa zamenjujućom visinom materijala $h_0 = p_{v0}/\gamma$.

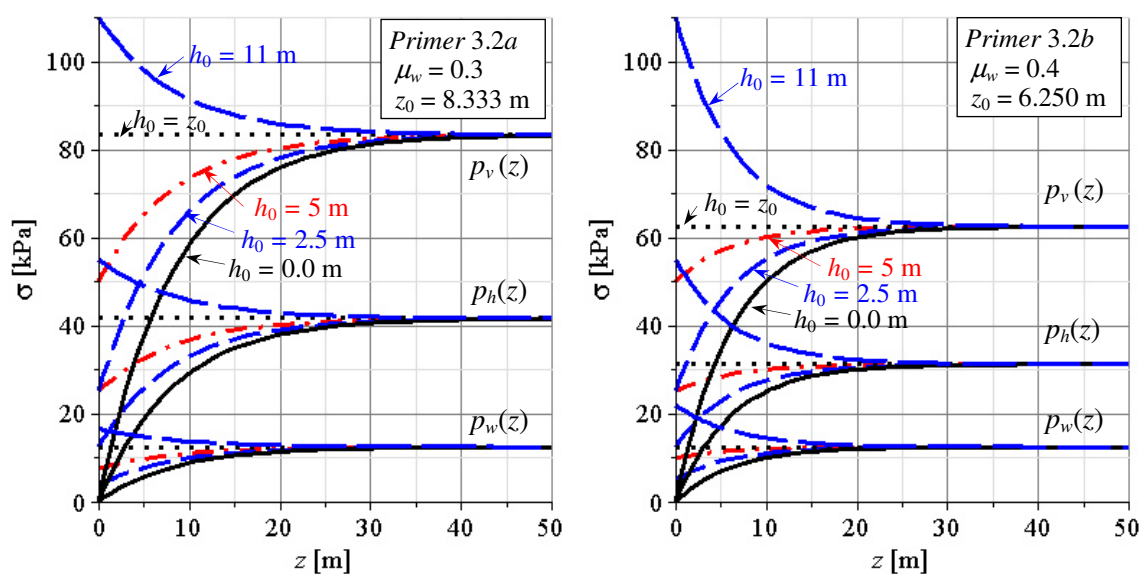
Primer 3.2 - uticaj nadopterećenja kod 3Dr silosa prema Janssen-ovom postupku

U primerima se koriste sledeći osnovni podaci 3Dr silosa i materijala:

- $D = 5$ m i $\gamma = 10$ kN/m³
- $h_0 = 0.0, 2.5, 5.0, z_0$ i 11.0 m (variranje p_{v0} preko variranja zamenjujuće visine h_0)
- analiza a: slučaj analize sa $K = 0.5$ i $\mu_w = 0.3 \Rightarrow z_0 = r_h/(K \cdot \mu_w) = 8.333$ m
- analiza b: slučaj analize sa $K = 0.5$ i $\mu_w = 0.4 \Rightarrow z_0 = r_h/(K \cdot \mu_w) = 6.250$ m

Pritisaci p_h i p_v , i opterećenje usled trenja p_w se određuju prema izrazima (3.38) do (3.40), gde je hidraulički radijus za kružnu ćeliju $r_h = A/U = D/4 = 1.25$ m.

Za sve primere su prikazani dijagrami p_h , p_v i p_w , u funkciji dubine materijala z (do dubine $z = 50$ m), na sl. 103, pri variranju zamenjujuće visine h_0 .



Sl. 103 Janssen-ova teorija – Primeri 3.2a i 3.2b - Stanje napona pri variranju $h_0 = 0.0, 2.5, 5.0, z_0$, i 11.0 m. Podaci: $D = 5$ m; $\gamma = 10$ kN/m³; $K = 0.5$; $\mu_w = 0.3$ i $z_0 = 8.333$ m (za pr. 3.2a), i $\mu_w = 0.4$ i $z_0 = 6.250$ m (za pr. 3.2b).

Na osnovu analize rezultata prikazanih na sl. 103, prema dijagramima promene pritiska p_h i p_v i opterećenja usled trenja p_w pri povećanju dubine z , od uticaja nadopterećenja i težine uskladištenog materijala, mogu se dati sledeći zaključci:

- p_h , p_v i p_w se povećavaju sa dubinom z , u slučaju da je $h_0 < z_0$;
- p_h , p_v i p_w su konstantni pri promeni dubine z , u slučaju da je $h_0 = z_0$; i

- p_h, p_v i p_w se smanjuju sa dubinom z , u slučaju da je $h_0 > z_0$.

Pri variranju h_0 , svi dijagrami teže istim asimptotskim vrednostima koje odgovaraju običnom slučaju analize bez uvođenja nadopterećenja. Početne vrednosti na dijagramima vertikalnih pritisaka p_v , odgovaraju nadopterećenju $p_{v0} = \gamma \cdot h_0$.

3.1.2.2 Analiza sa fiktivnim poravnanjem nasipnog dela materijala

Prema *Janssen*-u klasično rešenje sa uvođenjem nadopterećenja od težine nasipne kupe je dato sa izrazima (3.38) do (3.40).

Drugi tip rešenja, koji se često koristi u praksi i propisima za proračun silosa, je da se ordinata z uzima od nivoa težišta nasipne kupe (kao da je nasipna kupa poravnata). Ispod kontaktne linije nasipne kupe i zida ćelije ovo rešenje je u osnovi realno, a po visini h_0 nasipne kupe ovo rešenje je fiktivno. Uzima se da pri većim dubinama ovo ne proizvodi nikakve posledice po veličinu opterećenja od uskladištene mase.

Ovde se upoređuju ova dva načina uvođenja težine nasipne kupe na veličinu pritiska od uskladištenog materijala. Ordinata z se uzima od kontaktnog nivoa nasipne kupe sa zidom ćelije, što odgovara primenjenom slučaju kod uvođenja nadopterećenja kod nasipne kupe. U ovom slučaju *Janssen*-ov izraz za horizontalno opterećenje od nivoa poravnanja nasipne kupe je u obliku:

$$p_h = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z+h_0}{z_0}}\right) = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{z_0}} \cdot e^{-\frac{h_0}{z_0}}\right) \quad (3.41)$$

Ovaj oblik se može preurediti u sledeći:

$$p_h = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{z_0}}\right) + \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left(1 - e^{-\frac{h_0}{z_0}}\right) \cdot e^{-\frac{z}{z_0}} \quad (3.42)$$

Prva dva člana u drugom delu gornjeg izraza predstavlja *Janssen*-ov horizontalni pritisak na visini h_0 , odnosno $p_h|_{z=h_0}$. Sa ovim izraz (3.42) prelazi u oblik dat sa izrazom (3.44), a na isti način mogu se odrediti i izrazi za p_v i p_w :

$$p_v = \frac{\gamma \cdot r_h}{K \cdot \mu_w} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{z_0}}\right) + p_v|_{z=h_0} \cdot e^{-\frac{z}{z_0}} \quad (3.43)$$

$$p_h = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{z_0}}\right) + p_h|_{z=h_0} \cdot e^{-\frac{z}{z_0}} \quad (3.44)$$

$$p_w = \gamma \cdot r_h \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{z_0}}\right) + p_w|_{z=h_0} \cdot e^{-\frac{z}{z_0}} \quad (3.45)$$

gde su pritisci na dubini $z = h_0$, definisani sa:

$$p_v|_{z=h_0} = \frac{\gamma \cdot r_h}{K \cdot \mu_w} \cdot \left(1 - e^{-\frac{h_0}{z_0}}\right) \quad (3.46)$$

$$p_h|_{z=h_0} = K \cdot p_v|_{z=h_0} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left(1 - e^{-\frac{h_0}{z_0}}\right) \quad (3.47)$$

$$p_w|_{z=h_0} = \mu_w \cdot p_h|_{z=h_0} = \mu_w \cdot K \cdot p_v|_{z=h_0} = \gamma \cdot r_h \cdot \left(1 - e^{-\frac{h_0}{z_0}}\right) \quad (3.48)$$

Izrazi sa uvedenim nadopterećenjem su (3.38) do (3.40), i mogu se prikazati u obliku:

$$p_v(z) = \frac{\gamma \cdot r_h}{K \cdot \mu_w} \cdot (1 - e^{-\frac{z}{z_0}}) + p_{v0} \cdot e^{-\frac{z}{z_0}} \quad (3.49)$$

$$p_h(z) = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-\frac{z}{z_0}}) + p_{h0} \cdot e^{-\frac{z}{z_0}} \quad (3.50)$$

$$p_w(z) = \gamma \cdot r_h \cdot (1 - e^{-\frac{z}{z_0}}) + p_{w0} \cdot e^{-\frac{z}{z_0}} \quad (3.51)$$

gde su su pritisci na dubini $z = 0^+$, definisani sa sledećim:

$$p_{v0} = \gamma \cdot h_0 \quad (= \gamma \cdot \frac{d}{6} \cdot \tan \phi_r \text{ pri analizi nasipne kupe}) \quad (3.52)$$

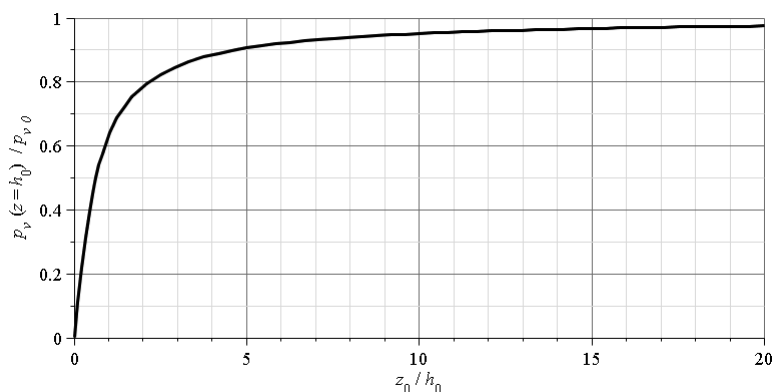
$$p_{h0} = K \cdot p_{v0} \quad (3.53)$$

$$p_{w0} = \mu_w \cdot p_{h0} = \mu_w \cdot K \cdot p_{v0} \quad (3.54)$$

Imajući u vidu iste linearizacije koje stoje između veličina definisanih kod izraza (3.46) do (3.48), odnosno kod izraza (3.52) do (3.54), određuje se sledeći odnos:

$$\frac{p_v|_{z=h_0}}{p_{v0}} = \frac{p_h|_{z=h_0}}{p_{h0}} = \frac{p_w|_{z=h_0}}{p_{w0}} = \frac{z_0}{h_0} \cdot (1 - e^{-\frac{h_0}{z_0}}) \quad (3.55)$$

Gornji izraz predstavlja odnos početnih pritisaka, na nivou kontaktne linije nasipne kupe (ili drugog oblika nasipnog dela) za zidom ćelije, za slučajeve sa fiktivnim poravnanjem nasipnog dela materijala i sa direktnim uvođenjem nadopterećenja.



Sl. 104 Upoređenje početnih pritisaka kod analize uticaja nasipnog dela u slučajevima fiktivnog poravnanja nasipa i direktnog uvođenja nadopterećenja od nasipa.

Kod kružnih ćelija, sa nasipnim delom materijala u obliku nasipne kupe, može se direktno odrediti odnos z_0/h_0 prema izrazu:

$$\frac{z_0}{h_0} = \frac{1.5}{K \cdot \mu_w \cdot \tan \phi_r} \quad (3.56)$$

Na sl. 104, prikazan je dijagram koji odgovara izrazu (3.55) pri variranju odnosa z_0/h_0 . Vrednosti odnosa početnih vertikalnih napona (na nivou $z = 0^+$) kod postupaka sa fiktivnim poravnanjem nasipnog dela materijala i postupka sa uvođenjem zamenjujućeg nadopterećenja, su manje od 1, za sve odnose promenljive z_0/h_0 . Na ovaj način, veći

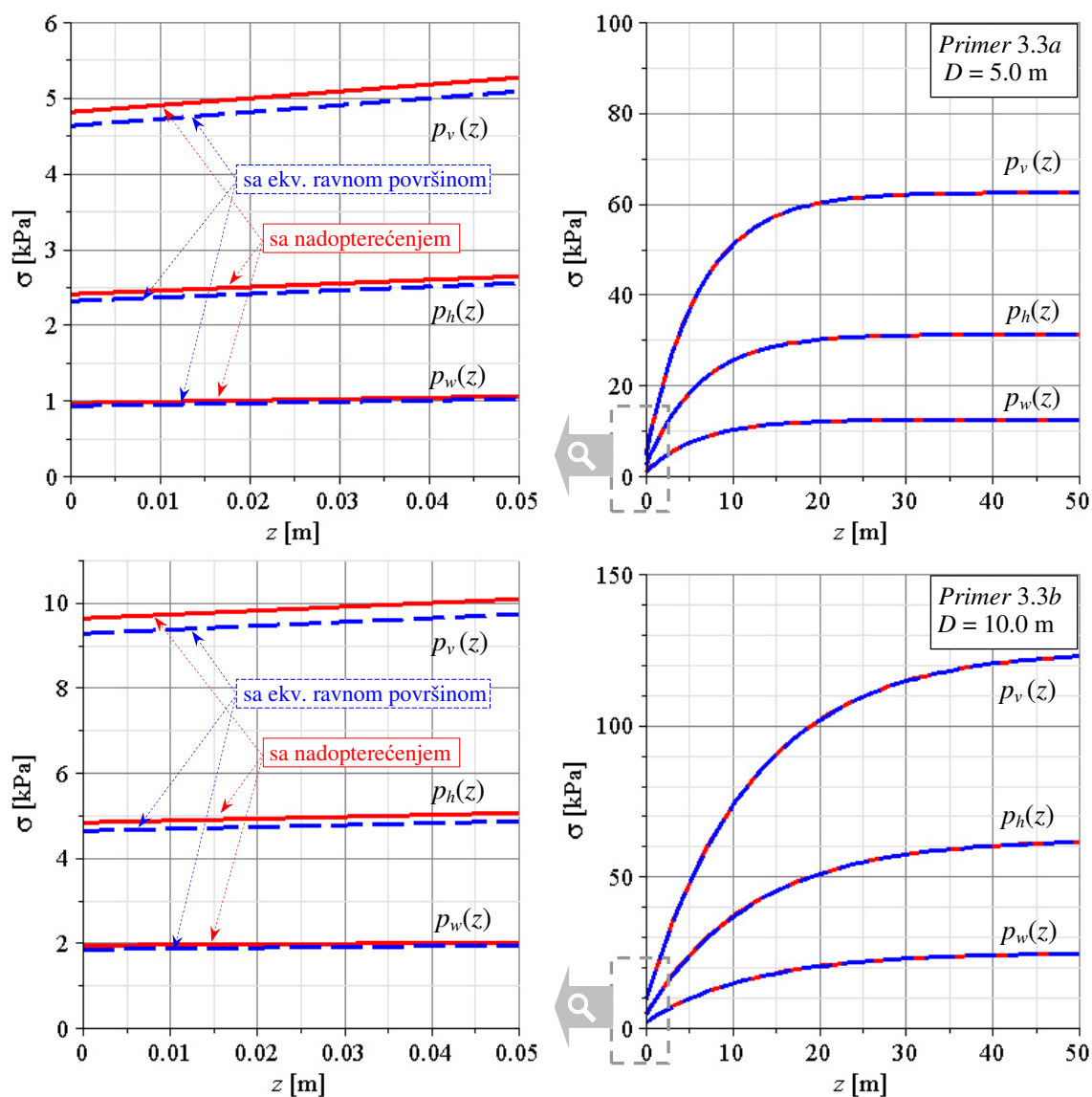
pritisци se dobijaju kod primene postupka sa uvođenjem nadopterećenja na nivou $z = 0$. Ovo je sasvim logično, kako se u slučaju fiktivnog poravnjanja materijala, od nivoa ekvivalentne zaravnjene površine do nivoa $z = 0$, deo težine materijala po visini h_0 , putem trenja prebacuje na zidove (fiktivan prenos opterećenja).

Primer 3.3 - uticaj nasipne kupe kod 3Dr silosa prema Janssen-ovom postupku

U primerima se koriste sledeći osnovni podaci 3Dr silosa i materijala:

- $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $K = 0.5$; $\mu_w = 0.4$ i $\phi_r = 30^\circ$.
- za nasipni deo u obliku nasipne kupe je $z_0/h_0 = 1.5/(K \cdot \mu_w \cdot \tan \phi_r) = 12.990$.
- analiza a: za $D = 5.0 \text{ m}$ \Rightarrow prema (3.34) je $h_0 = 0.4811 \text{ m}$ $\Rightarrow p_{v0} = \gamma \cdot h_0 = 4.811 \text{ kN/m}^2$
- analiza b: za $D = 10.0 \text{ m}$ \Rightarrow prema (3.34) je $h_0 = 0.9623 \text{ m}$ $\Rightarrow p_{v0} = 9.623 \text{ kN/m}^2$

U ovim primerima, prema (3.55) je $p_v(h_0)/p_{v0} = 0.9625$ (odnos ne zavisi od D).



Sl. 105 Janssen-ova teorija – Primeri 3.3a i 3.3b – Uticaj nasipne kupe na stanje napona, pri uvođenju nadopterećenja i pri uvođenju fiktivnog poravnjanja nasipne kupe. Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $K = 0.5$, $\mu_w = 0.4$; i $\phi_r = 30^\circ$; $D = 5 \text{ m}$ (za pr. 3.3a), i $D = 10 \text{ m}$ (za pr. 3.3b).

Kod oba slučaja prečnika ćelije, određeno je da su početni pritisci za 3.75% manji u slučaju analize sa fiktivnim poravnanjem materijalom u odnosu na slučaj sa direktnim uvođenjem nadopterećenja.

Pritisci p_h i p_v , i opterećenje usled trenja p_w su za ove primere prikazani na sl. 105, prema postupcima analize sa ekvivalentnom ravnom površinom materijala i sa uvođenjem nadopterećenja. Na slici levo, prikazan je uvećani deo dijagrama pritisaka pri samom nivou kontakta nasipne kupe i zida ćelije, tako da se mogu uočiti sračunate vrednosti nadopterećenja p_{v0} . Početne vrednosti kod primene ekvivalentne ravne površine su za 3.75% manje od prethodnih. Na slici desno, dijagrami se praktično poklapaju kod ove dve analize, kako su proračunske razlike početnih vrednosti pritisaka vrlo male.

3.1.3 Aproksimativno uvođenje promenljivih horizontalnih napona

Kod analiza izduženih koritastih preseka silosa i bunkera, gde se pretpostavlja neograničena dužina pravougaone silosne ćelije sa dva paralelna zida na razmaku $B=2b$, hidraulički radijus je $r_h = B/2 = b$. Stanje napona prema *Janssen*-ovim jednačinama (3.12) do (3.14), uz ovu vrednost za r_h , daje rešenje ravnog stanja napona. S obzirom na pretpostavku o uniformnosti vertikalnih napona u poprečnom preseku ćelije, i rešenja ostalih napona u skladu sa ovom pretpostavkom, označićemo napone prema *Janssen*-ovoj teoriji kao nadvučene vrednosti:

Vertikalni pritisak u materijalu [kN/m²]:

$$\bar{\sigma}_z(z) = \gamma z_0 \cdot (1 - e^{-\frac{z}{z_0}}) = \gamma \cdot \frac{b}{K \cdot \mu_w} \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}}) \quad (3.57)$$

Horizontalni pritisak na zidove [kN/m²]:

$$\bar{\sigma}_x(z) = K \cdot \bar{\sigma}_z(z) = \gamma \cdot \frac{b}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}}) \quad (3.58)$$

Oopterećenje od trenja materijala o zid [kN/m²]:

$$\bar{\tau}_w(z) = \mu_w \cdot \bar{\sigma}_x(z) = \gamma \cdot b \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}}) \quad (3.59)$$

gde *Janssen*-ova karakteristična dubina ima oblik:

$$z_0 = \frac{r_h}{K \cdot \mu_w} = \frac{b}{K \cdot \mu_w} \quad (3.60)$$

Ova opterećenja su naponi kod silosnog materijala. Vertikalni napon je prema *Janssen*-u konstantan u poprečnom preseku silosne ćelije po celoj površini preseka prema (3.57). Horizontalni pritisak i smičuće opterećenje na zidovima odgovaraju naponima u materijalu do samog zida. Može se postaviti pitanje kakva je promena ovih napona u uskladištenom materijalu, kako se to ne vidi direktno iz *Janssen*-ove analize u kojoj se ravnoteža određuje na diferencijalnom sloju.

U pravouglom koordinatnom sistemu (x, y, z), jednačine ravnoteže na diferencijalnom zapreminskom elementu u opštem slučaju se dobijaju u sledećem obliku:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (= f_x) \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (= f_y) \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma \quad (= f_z) \quad (3.63)$$

Zapreminske sile su f_x , f_y , i f_z . Ako se z osa poklapa sa pravcem gravitacije, kod analize uticaja samo sopstvene težine materijala dobija se da je $f_z = \gamma$, gde je γ zapreminska težina materijala u silosu. Za ravanske probleme u koordinatnom sistemu (x, z) , izvodi po y osi su nula, a ravnoteža elementa se određuje samo u pravcu koordinata x i z . U ovom slučaju opšti oblik jednačina ravnoteže prelazi u ravansku formu:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma \quad (3.65)$$

Pri rešavanju ovog sistema diferencijalnih jednačina, u drugu jednačinu (3.65), uvodi se vertikalni napon prema (3.57), i određuje sledeća diferencijalna jednačina sa za sada nepoznatim naponom τ_{xz} :

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \gamma - \frac{\partial \bar{\sigma}_z}{\partial z} = \gamma - \frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma \cdot \frac{b}{K \cdot \mu_w} \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}}) \right] = \gamma \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}}) \quad (3.66)$$

Zbog simetrije problema početna (u sredini ćelije) i granična vrednost (do zida ćelije) smičućih napona su:

$$\tau_{xz}(z, x)|_{x=0} = \tau_{xz}(z, 0) = 0 \quad (3.67)$$

$$\tau_{xz}(z, x)|_{x=b} = \tau_{xz}(z, b) = \bar{\tau}_w(z) \quad (3.68)$$

Integracija se vrši preko promenljive x , u granicama 0 do x ili u granicama x do b [napominje se da već dobijeno rešenje (3.59) kod analize diferencijalnog sloja, ovde odgovara integraciji od 0 do b jednačine (3.66)]:

$$\int_0^x \frac{\partial \tau_{xz}(z, x)}{\partial x} dx = \int_0^x \gamma \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}}) \cdot dx \quad (3.69)$$

$$\tau_{xz}(z, x) - \tau_{xz}(z, 0) = \gamma \cdot x \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}}) \quad (3.70)$$

$$\tau_{xz}(z, x) = \gamma \cdot x \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}}) \quad (3.71)$$

Kada se u ovaj izraz stavi da je $x = b$, dobija se da smičući napon odgovara smičućem opterećenju do zida ćelije (3.59), a odatle se može uspostaviti linearnost napona smicanja kojoj odgovara trougaoni oblik dijagrama napona smicanja u silosnom materijalu:

$$\tau_{xz}(z, x) = \bar{\tau}_w(z) \cdot \frac{x}{b} \quad (3.72)$$

Nakon dobijanja rešenja za napone smicanja, prema izrazu (3.71) ili (3.72), dalje se određuju horizontalni naponi iz jednačine (3.64):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xz}(z, x)}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left[\gamma \cdot x \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}}) \right] = -\gamma \cdot \frac{x}{b} \cdot K \cdot \mu_w \cdot e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \quad (3.73)$$

Integraciju vršimo preko promenljive x , u granicama od x do b [napominje se da je *Janssen*-ovo rešenje horizontalnog napona do zida dato sa (3.58)]:

$$\int_x^b \frac{\partial \sigma_x(z, x)}{\partial x} dx = - \int_x^b \gamma \cdot \frac{x}{b} \cdot K \cdot \mu_w \cdot e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \cdot dx \quad (3.74)$$

$$\sigma_x(z, b) - \sigma_x(z, x) = -\gamma \cdot K \cdot \mu_w \cdot e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \cdot \frac{x^2}{2b} \Bigg|_{x=x}^{x=b} = -\gamma \cdot K \cdot \mu_w \cdot e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \cdot \left(\frac{b}{2} - \frac{x^2}{2b} \right) \quad (3.75)$$

$$\bar{\sigma}_x(z) - \sigma_x(z, x) = -\gamma \cdot K \cdot \mu_w \cdot e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \cdot \frac{b^2 - x^2}{2b} \quad (3.76)$$

odakle se po uvođenju *Janssen*-ovog horizontalnog napona prema izrazu (3.58) dobija:

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{K \cdot \mu_w^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \right) \cdot e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] \quad (3.77)$$

Prema *Janssen*-ovim pretpostavkama i dobijenim rešenjima primenom ravnoteže na diferencijalnom sloju silosnog materijala, primenom mehanike kontinuuma, u obliku diferencijalnih jednačina ravnoteže na diferencijalnom elementu, određene su funkcije napona u silosnom materijalu kod ravanskog problema (2D silos):

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_z(z) = \gamma \cdot \frac{\gamma \cdot b}{K \cdot \mu_w} \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}}) \quad (= \bar{\sigma}_z(z)) \quad (3.78)$$

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{K \cdot \mu_w^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \right) \cdot e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] \quad (3.79)$$

$$\tau_{xz}(z, x) = \bar{\tau}_w(z) \cdot \frac{x}{b} = \gamma \cdot x \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}}) \quad (3.80)$$

Izrazi (3.79) i (3.80) predstavljaju modifikaciju u *Janssen*-ovoj teoriji.

Stavljajući u izraz (3.79) da je $x = b$, odnosno da je $x = 0$, određuju se horizontalni naponi u silosnom materijalu pri ivici zida i u sredini silosa:

$$\sigma_x(z, x) \Big|_{x=b} = \sigma_x(z, b) = \sigma_{xw}(z) = \gamma \cdot \frac{b}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}}) = \bar{\sigma}_x(z) \quad (3.81)$$

$$\sigma_x(z, x) \Big|_{x=0} = \sigma_x(z, 0) = \sigma_{x0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{K \cdot \mu_w^2}{2} \right) \cdot e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] \quad (3.82)$$

Pretpostavka uvedena od strane *Janssen*-a je da je odnos horizontalnih i vertikalnih napona konstantan po visini silosa. Ovo će se ispitati za dobijene napone u silosnom materijalu pri ivici zida i u sredini silosa. Teorijski, za napone prema izrazima (3.79) i (3.78) i posmatranu tačku u uskladištenom materijalu, ovaj odnos je u opštem obliku u funkciji koordinata x i z :

$$K(z, x) = \sigma_x(z, x) / \sigma_z(z, x) \quad (3.83)$$

Posmatramo tačku materijala do ivice zida, sa odnosom potrebnih članova izraza (3.81) i (3.78):

$$K(z, x) \Big|_{x=b} = K(z, 0) = \frac{\sigma_x(z, b)}{\sigma_z(z, b)} = K_w(z) = \frac{\bar{\sigma}_x(z)}{\bar{\sigma}_z(z)} = K = K_w = const. \quad (3.84)$$

Na ivici zida određeno je da odnos napona odgovara *Janssen*-ovoj konstanti K .

Posmatramo tačku materijala u sredini 2D silosa, odnosno za $x = 0$, sa odnosom napona datih sa izrazima (3.82) i (3.78):

$$K(z, x)|_{x=0} = K(z, 0) = \frac{\sigma_x(z, 0)}{\sigma_z(z, 0)} = \frac{\sigma_{x0}(z)}{\bar{\sigma}_z(z)} = \frac{1 - \left(1 - \frac{K \cdot \mu_w^2}{2}\right) \cdot e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}}}{1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}}} \cdot K = K_0(z) \quad (3.85)$$

Analizom izraza (3.85), jednostavno se dobija da pri velikim dubinama z , odnos napona teži ka *Janssen*-ovoj konstanti, odnosno $K_0(z)|_{z \rightarrow \infty} = K$, a isto sledi i za odnos napona $K(z, x)|_{z \rightarrow \infty} = K$. U slučaju da je koeficijent trenja nula, gubi se egzistencija izraza, odnos napona postaje neodređen.

Koeficijent K se odnosi na ivicu zida, prema *Janssen*-u, gde je njegova vrednost konstantna.

U radovima *Pipatpongsa*-a, *Heng*-a, *Wattanachai*-a i *Likitlersuang*-a (2009) [232], i *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a (2010) [230], prikazana je slična analiza za *Janssen*-ov postupak, s tim da se rešenje odnosi na silose sa kružnim poprečnim presekom ćelije. Uz uvedenu pretpostavku da su radijalni naponi jednaki prstenastim naponima u materijalu, tj. da je $\sigma_r = \sigma_\theta$, na osnovu uslova ravnoteže vertikalnih sila na diferencijalnom elementu u cilindričnom koordinatnom sistemu (z, r, θ) , određena je *Janssen*-ova diferencijalna jednačina za vertikalni napon (3.167). Uvodi se pretpostavka za radijalne napone do zida ćelije u sledećem obliku:

$$\sigma_{rw} = \sigma_r|_{r=R} = K \cdot \sigma_z \quad (3.86)$$

i određuje vertikalni napon u obliku izraza:

$$\sigma_z = \frac{\gamma R / 2}{K \cdot \mu_w} \cdot \left(1 - e^{-2K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{R}}\right) \quad (3.87)$$

Na osnovu (3.164) određuje se:

$$\tau_{rz} = \frac{\gamma r}{2} \cdot \left(1 - e^{-2K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{R}}\right) \quad (3.88)$$

Kao u analizi generalisanog *Jáky*-evog postupka, određuje se iz prvog uslova ravnoteže radijalnih sila da su radijalni naponi u sledećem obliku:

$$\sigma_r = -\int_R^r \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dr + K \cdot \sigma_z = \frac{\gamma R}{2 \mu_w} \cdot \left[1 - e^{-2K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{R}} \cdot \left(1 - K \cdot \mu_w^2 \cdot (1 - r^2 / R^2)\right)\right] \quad (3.89)$$

Izrazi za karakteristične proračunske veličine, koji su određeni prema *Janssen*-ovoj teoriji uz aproksimativno uvođenje ravnoteže horizontalnih sila, su prikazani u sledećem uporednom pregledu za 2D (ravanski silos, prema ovde prikazanoj analizi) i 3Dr silos (osno simetrični silos sa kružnom ćelijom, prema analizi prikazanoj u ref. [230] i [232]):

<u>za 3Dr silos</u>	<u>za 2D silos</u>
$\sigma_z _{z \rightarrow \infty} = \gamma z_0 = \gamma \frac{R}{2} / (K \mu_w)$	$\sigma_z _{z \rightarrow \infty} = \gamma z_0 = \gamma b / (K \mu_w)$

$\sigma_r _{z \rightarrow \infty} = K \cdot \gamma z_0 = \gamma \frac{R}{2} / \mu_w$	$\sigma_x _{z \rightarrow \infty} = K \cdot \gamma z_0 = \gamma b / \mu_w$
--	--

$$\tau_{rz}|_{z \rightarrow \infty} = K \mu_w \cdot \gamma z_0 \cdot \frac{r}{R} = \frac{\gamma r}{2} \quad \tau_{xz}|_{z \rightarrow \infty} = K \mu_w \cdot \gamma z_0 \cdot \frac{x}{b} = \gamma x \quad (3.92)$$

$$\tau_w|_{z \rightarrow \infty} = \gamma \frac{R}{2} \quad \tau_w|_{z \rightarrow \infty} = \gamma b \quad (3.93)$$

$$z_0 = \frac{R/2}{K \mu_w} \quad z_0 = \frac{b}{K \mu_w} \quad (3.94)$$

$$\sigma_z|_{z=0} = 0 \quad \sigma_z|_{z=0} = 0 \quad (3.95)$$

$$\sigma_r|_{z=0} = \gamma z_0 \cdot K^2 \mu_w^2 \cdot (1 - r^2 / R^2) \quad \sigma_x|_{z=0} = \gamma z_0 \cdot \frac{K^2 \mu_w^2}{2} \cdot (1 - x^2 / b^2) \quad (3.96)$$

$$\tau_{rz}|_{z=0} = 0 \quad \tau_{xz}|_{z=0} = 0 \quad (3.97)$$

$$\sigma_{r0}|_{z=0} = \gamma z_0 \cdot K^2 \mu_w^2 = \gamma \frac{R}{2} \cdot K \mu_w \quad \sigma_{x0}|_{z=0} = \gamma z_0 \cdot \frac{K^2 \mu_w^2}{2} = \gamma \frac{b}{2} \cdot K \mu_w \quad (3.98)$$

$$\sigma_{rw}|_{z=0} = 0 \quad \sigma_{xw}|_{z=0} = 0 \quad (3.99)$$

$$K_{03Dr}(z) = \frac{1 - (1 - K \mu_w^2) \cdot e^{-2K \mu_w \frac{z}{R}}}{1 - e^{-2K \mu_w \frac{z}{R}}} \cdot K \quad K_{02D}(z) = \frac{1 - (1 - K \mu_w^2 / 2) \cdot e^{-K \mu_w \frac{z}{b}}}{1 - e^{-K \mu_w \frac{z}{b}}} \cdot K \quad (3.100)$$

$$K_{w3Dr}(z) = K \quad K_{w2D}(z) = K \quad (3.101)$$

$$K_{3Dr}(z, r)|_{z \rightarrow \infty} = K \quad K_{2D}(z, x)|_{z \rightarrow \infty} = K \quad (3.102)$$

$$K_{3Dr}|_{z \rightarrow \infty} = K \quad K_{2D}|_{z \rightarrow \infty} = K \quad (3.103)$$

Za proizvoljnu tačku u materijalu odnos horizontalnog i vertikalnog napona je:

$$K_{3Dr}(z, r) = \frac{\sigma_r(z, r)}{\sigma_z(z)} = \frac{1 - e^{-2K \mu_w \frac{z}{R}} \cdot (1 - K \mu_w^2 \cdot (1 - r^2 / R^2))}{1 - e^{-2K \mu_w \frac{z}{R}}} \cdot K \quad (3.104)$$

$$K_{2D}(z, x) = \frac{\sigma_x(z, x)}{\sigma_z(z)} = \frac{1 - e^{-K \mu_w \frac{z}{b}} \cdot (1 - K \mu_w^2 / 2 \cdot (1 - x^2 / b^2))}{1 - e^{-K \mu_w \frac{z}{b}}} \cdot K \quad (3.105)$$

Za velike dubine materijala, odnosno kada $z \rightarrow \infty$, svi naponi prema gornjim izrazima odgovaraju teorijskim asimptotskim vrednostima napona. Koeficijent K je konstantan u materijalu do zida ćelije, ali u srednjoj osi silosa je promenljiv po visini i tu se dobijaju nešto malo veće vrednosti za odnos napona u odnosu na osnovnu vrednost K . U slučaju da $z \rightarrow \infty$, odnos napona $K(z, r)$ teži ka osnovnoj vrednosti K . U sklopu svih izraza postoji dobro analogno slaganje kod proračunskih veličina za 2D i 3Dr silose. Vertikalni naponi na gornjoj površini materijala su 0, kako i odgovara postavljenom početnom uslovu. Međutim, kod gornje površine materijala, dobija se da horizontalni (odnosno radijalni) pritisci na sredini silosa prema izrazu (3.96) nisu 0. Ovi pritisci se anuliraju tek kod materijala do zida ćelije. Pojava pritisaka na gornjoj površini neopterećenog materijala nije teorijski opravdana. Na ovaj način je analiza pod pitanjem u oba slučaja (za 2D i 3Dr silos), ali ovde se radi o aproksimativnoj analizi, sa naknadnim separatnim uvođenjem ravnoteže horizontalnih sila. Bez obzira na prethodni rezultat, mogu se posmatrati

relativni odnosi proračunskih veličina. Može se zaključiti da su koeficijenti bočnog pritiska u osi silosa veći od koeficijenta K do zida silosa. Ovaj rezultat je određen i kod generalisanog Jáky-evog postupaka, koji su formulisali Pipatpongsa i Heng (2010) [230], a kod kojeg se ne javlja problem kod početnih uslova na gornjoj površini materijala. Kod Jáky-evog postupaka je pretpostavljeno da je K konstantno u osi silosa, a da je K do zida ćelije relativno manjih vrednosti i da tu zavisi od dubine z .

Kod oba postupka, za $z \rightarrow \infty$, odnosi horizontalnih i vertikalnih napona teže osnovnom koeficijentu K . Oba postupka se zasnivaju na pretpostavci da su vertikalni naponi u preseku konstantni, i kod oba se određuje da je K u preseku ćelije promenljivo po horizontalnoj osi, pri čemu je najveća vrednost koeficijenta K u osi silosa.

3.2 Postupak Гутьяр-а

Za određivanje statičkih pritisaka od zrnastog materijala na telo i zidove prizmatičnih i cilindričnih ćelija obično je u upotrebi Janssen-ova formulacija (3.13). Ova formula je izvedena na osnovu ravnoteže vertikalnih sila na horizontalnom diferencijalnom sloju uskladištenog materijala. Kod određivanja uslova ravnoteže na sloju materijala, uvedene su rezultujuće sile od dejstva pritisaka na donjoj i gornjoj površini sloja, sopstvena težina materijala i sile trenja koje deluju na zidovima ćelije (sl. 106). Koriste se sledeće oznake:

γ	zapreminska težina materijala,
$\mu_w = \tan \phi_w$	koeficijent trenja materijala o zidove ćelije,
A	površina horizontalnog preseka ćelije,
U	unutrašnji obim ćelije,
$r_h = A/U$	hidraulički radijus horizontalnog preseka ćelije,
p_v	vertikalni pritisak uskladištenog materijala na dubini z ,
p_h	horizontalni pritisak uskladištenog materijala na dubini z .

U sledećim izvođenjima uveden je drugačiji pristup od prethodno prikazanog Janssen-ovog pristupa. Promena težine uskladištenog materijala sa dubinom je razmatrao Гутьяр (1935)¹, pri čemu se u analizu stanja pritisaka u materijalu, uvode koeficijent bočne deformacije ν i modul elastičnosti E uskladištenog materijala. Veza horizontalnog i vertikalnog pritiska se može prikazati preko sledećeg izraza:

$$p_h = \frac{\nu}{1-\nu} \cdot p_v = K \cdot p_v \quad (3.106)$$

Dilatacija elementarnog sloja u vertikalnom pravcu se dobija u obliku:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (p_v - 2\nu \cdot p_h) = \frac{p_v}{E} \cdot \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) \quad (3.107)$$

Zavisnost zapreminske težine uskladištenog materijala na posmatranoj dubini materijala u ćeliji i delujućeg pritiska na ovaj materijal se određuje u obliku:

¹ Гутьяр Е.М. (1935): "Распределение давления на стенки силосной башни". Труды Московского автотранспортного института. Сб. 2, М., с.182-184. (Гутьяр-ов поступак је приказан у knjigama Fischer-a (1966) [82] i Клейн-а (1977) [358].)

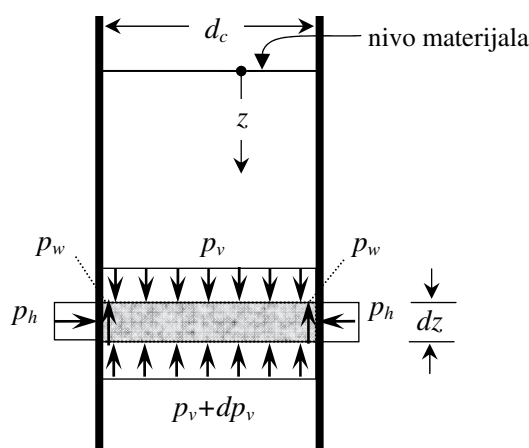
$$\gamma_z = \frac{\gamma_0}{1 - \frac{p_v}{E} \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right)} \quad (3.108)$$

Kako je drugi član u imenitelju mala veličina u odnosu na 1, gornji izraz se može aproksimativno konvertovati u sledeći oblik:

$$\gamma_z \cong \gamma_0 \cdot \left[1 + \frac{p_v}{E} \cdot \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) \right] = \gamma_0 \cdot (1 + G \cdot p_v) \quad (3.109)$$

gde je uveden koeficijent G :

$$G = \frac{1}{E} \cdot \left(1 - \frac{2\nu^2}{1-\nu} \right) \quad (3.110)$$



Sl. 106 Diferencijalni sloj uskladištenog materijala.

Postavlja se uslov vertikalne ravnoteže kod diferencijalnog sloja materijala, prikazanog na sl. 106, sa sledećim:

$$A \cdot p_v + dp_v \cdot A - p_v \cdot A - \gamma_z \cdot A \cdot dz + p_h \cdot \mu_w \cdot U \cdot dz = 0 \quad (3.111)$$

Za γ_0 i p_h , koji se uvode prema izrazima (3.106) i (3.109), gornji uslov ravnoteže prelazi u sledeći oblik:

$$dp_v - \gamma_0 \cdot (1 + G \cdot p_v) \cdot dz + \frac{K \cdot \mu_w}{r_h} \cdot p_v \cdot dz = 0 \quad (3.112)$$

Na osnovu transformacije ovog izraza, određuje se jednačina:

$$dz = \frac{dp_v}{\frac{K \cdot \mu_w}{r_h} \cdot p_v - \gamma_0 \cdot (1 + G \cdot p_v)} \quad (3.113)$$

Integracijom ove jednačine uz početni uslov, da je $p_v = 0$ za $z = 0$, određuje se vertikalni pritisak u sledećem obliku:

$$p_v = \frac{\gamma_0 \cdot r_h}{K \cdot \mu_w - G \cdot \gamma_0 \cdot r_h} \cdot \left[1 - e^{-\gamma_0 \cdot z \cdot \left(\frac{K \cdot \mu_w}{\gamma_0 \cdot r_h} - G \right)} \right] \quad (3.114)$$

Kao funkcionalna zavisnost veličina G i $(K \cdot \mu_w)/(\gamma_0 \cdot r_h)$ mogu se formirati sledeći oblici promene pritiska:

(1) za $G > (K \cdot \mu_w)/(\gamma_0 \cdot r_h)$, pritisak teži beskonačnosti za $z \rightarrow \infty$ (kriva 1 na sl. 107);

(2) za $G = (K \cdot \mu_w)/(\gamma_0 \cdot r_h)$, nakon razlaganja neodređenog izraza određuje se

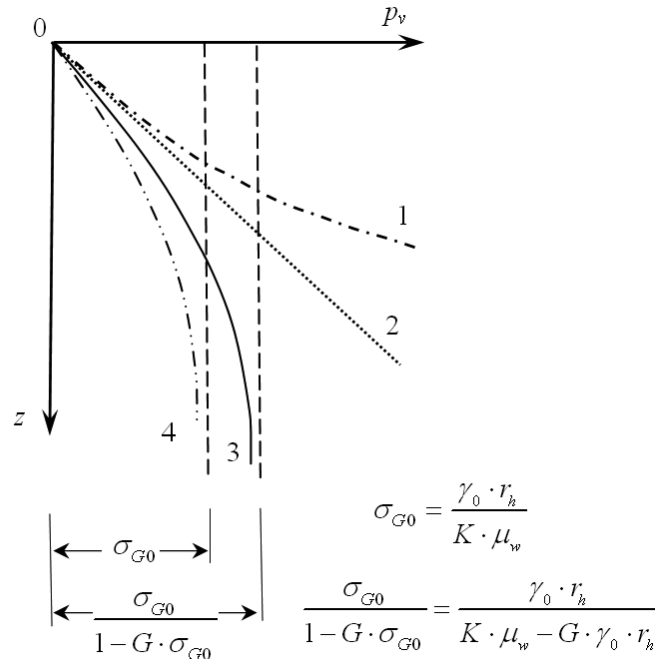
$$p_v = K \cdot \gamma_0 \cdot z, \quad (3.115)$$

pri čemu pritisak raste proporcionalno sa dubinom z (prava 2 na sl. 107);

(3) za $G < (K \cdot \mu_w)/(\gamma_0 \cdot r_h)$, pritisak raste prema zakonu eksponencijalne krive i dostiže graničnu vrednost pri $z \rightarrow \infty$ (kriva 3 na sl. 107):

$$p_{v\infty} = \frac{\gamma_0 \cdot r_h}{K \cdot \mu_w - G \cdot \gamma_0 \cdot r_h} \quad (3.116)$$

(4) za $G = 0$ (odgovara slučaju kada $E \rightarrow \infty$), vertikalni pritisci prema izrazu (3.114), prelaze u *Janssen*-ovu formulaciju, a rezultujuće vrednosti pritiska su manje nego u prethodna tri slučaja (kriva 4 na sl. 107).



Sl. 107 Promena pritiska od uskladištenog materijala sa dubinom z : 1 - kriva za $B > 1/\sigma_{G0}$; 2 - prava za $B = 1/\sigma_{G0}$; 3 - kriva za $B < 1/\sigma_{G0}$; i 4 - kriva za $B = 0$.

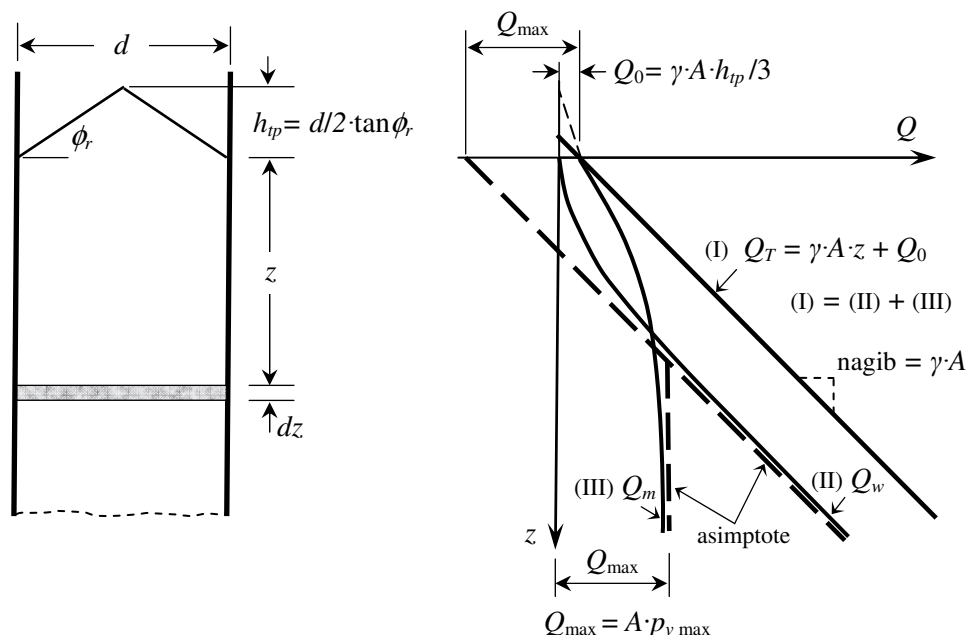
Pritisci prema izrazu (3.114), su prikazani u obliku dijagrama na sl. 107, gde se mogu uočiti različiti slučajevi promene pritiska po dubini uskladištenog materijala.

Prava linija 2, je tangenta na krive 1, 3 i 4 u koordinatnom početku.

Kriva 3 predstavlja slučaj čiji su rezultati validni za praksu (uvedena je promenljiva težina γ_z po dubini materijala) i kod kojih vrednosti pritiska prevazilaze vrednosti dobijene prema *Janssen*-ovoj formuli (u slučaju da se kod *Janssen*-ove formule uvodi početna zapreminska težina materijala γ_0).

3.3 Postupak Reimbert-ovih

Analiza pritisaka od uskladištenog materijala pri punjenju i mirovanju mase prema Reimbert-ovima (1955) se zasniva na empirijskoj osnovi i uvođenju odgovarajućih pretpostavki kod teorijskog određivanja, koje su grafički prikazane na sl. 108.



Sl. 108 Raspodela težine materijala u silosu prema analizi Reimert-ovih.

Ukupna težina materijala u ćeliji iznad neke posmatrane dubine z se uzima kao vertikalna sila Q_T . Ovo je prikazano na sl. 108 sa linijom (I), gde je težina nasipne kupe materijala označena sa Q_0 . Dalje se određuje Q_w kao komponenta vertikalne sile trenja koja se prenosi na zid ćelije usled trenja materijala. Ova sila ima početnu nultu vrednost na visini koja odgovara nivou kontaktne linije nasipne površine i zida ćelije, i dalje raste sa povećanjem dubine materijala pri čemu teži svojoj kosoj asimptoti koja je paralelna sa linijom (I). Paralelnost ove asimptote sa linijom (I), sledi iz poznatog stava da je na velikim dubinama dodatna težina materijala balansirana samo trenjem materijala o zid ćelije. Ukupan teret od uskladištene mase se razlaže na komponentu koja se nosi preko zida putem trenja Q_w i komponente vertikalne sile od pritisaka u masi Q_m :

$$Q_T = Q_m + Q_w \quad (3.117)$$

Posmatra se promena ovih sila pri velikoj dubini, tj. za $z \rightarrow \infty$, pri čemu je $dQ_m = dQ_{\max} = 0$ usled konstantne vrednosti napona $p_{v\max}$.

Pri tome su $dQ_T = \gamma \cdot A \cdot dz$, i $dQ_w = U \cdot \mu_w \cdot K \cdot p_{v\max} \cdot dz$, odakle sledi:

$$dQ_T = dQ_{\max} + dQ_w \Rightarrow \gamma \cdot A \cdot dz = 0 + U \cdot \mu_w \cdot K \cdot p_{v\max} \cdot dz \Rightarrow$$

$$p_{v\max} = \frac{\gamma \cdot A}{K \cdot \mu_w \cdot U} = \frac{\gamma \cdot r_h}{K \cdot \mu_w} \quad (3.118)$$

Ovde su primenjene obe pretpostavke (definisane sa izrazima (3.4) i (3.5)) koje je prvi uveo Janssen u analizi pritisaka materijala u silosnim ćelijama, a ovde se odnose na slučaj u kojem $z \rightarrow \infty$. Na osnovu prethodnog, Q_{\max} se može direktno odrediti u obliku:

$$Q_{\max} = p_{v \max} \cdot A = \frac{\gamma \cdot r_h}{K \cdot \mu_w} \cdot A \quad (3.119)$$

U slučaju kružnih ćelija ($r_h = A/U = d/4$, gde je d unutrašnji prečnik ćelije) i centričnog punjenja materijal na vrhu se obrazuje nasipna kupa. Težina materijala nasipne kupe kod kružnih ćelija iznosi:

$$Q_0 = \gamma \cdot A \cdot \frac{h_{tp}}{3} \quad (3.120)$$

gde je h_{tp} visina nasipne kupe materijala u kružnoj silosnoj ćeliji sa prečnikom d :

$$h_{tp} = \frac{d}{2} \cdot \tan \phi_r \quad (3.121)$$

Kriva koja pokazuje promenu sile Q_w sa dubinom materijala je označena kao linija II. Imajući u vidu eksperimentalne rezultate dobijene merenjem na modelima silosa, *Reimbert*-ovi su zaključili da se Q_w može empirijski izraziti u zavisnosti od dubine z , u obliku sledeće hiperbolične funkcije:

$$Q_w = \frac{a \cdot z^2 + b \cdot z + c}{e \cdot z + f} \quad (3.122)$$

U ovoj pretpostavljenoj funkciji sa a , b , c , e i f su uvedeni koeficijenti koji se određuju na osnovu analize sledećih uslova:

- Pri $z = 0$, stoji da je $Q_w = 0$, odakle sledi da je $c = 0$.
- Pri $z = 0$, stoji da je $\frac{dQ_w}{dz} = 0$, odakle sledi da je $\frac{b}{f} = 0$, tj. $b = 0$.
- Pri $z \rightarrow \infty$, važi da $\frac{dQ_w}{dz} \rightarrow \gamma \cdot A$, odakle sledi da je $a = e \cdot \gamma \cdot A$.

Na osnovu ova tri uslova izraz (3.122) prelazi u oblik:

$$Q_w = \frac{e \cdot \gamma \cdot A \cdot z^2}{e \cdot z + f} = \frac{\gamma \cdot A \cdot z^2}{z + f/e} \quad (3.123)$$

Na obe strane gornje jednačine se oduzima $\gamma \cdot A \cdot z$, a odatle dobija izraz:

$$Q_w - \gamma \cdot A \cdot z = -\frac{f \cdot \gamma \cdot A \cdot z}{e \cdot z + f} \quad (3.124)$$

Konačni granični uslov je posledica vertikalne ravnoteže ($Q_w = Q_T - Q_m$) i asimptote kojoj teži Q_w . Ova asimptota je funkcija od Q_{\max} , odnosno maksimalne vertikalne sile u materijalu.

- Pri $z \rightarrow \infty$, važi da $Q_w \rightarrow Q_T - Q_{\max} = \gamma \cdot A \cdot z - (Q_{\max} - Q_0)$, odakle sledi da je

$$Q_w - \gamma \cdot A \cdot z \rightarrow Q_0 - Q_{\max} = -\frac{f \cdot \gamma \cdot A}{e}, \text{ a odatle je } \frac{f}{e} = \frac{Q_{\max} - Q_0}{\gamma \cdot A}$$

Zamenjujući ovu vrednost koeficijenta f u izraz (3.123) dobija se novi oblik za Q_w :

$$Q_w = \frac{\gamma \cdot A \cdot z^2}{z + \frac{Q_{\max} - Q_0}{\gamma \cdot A}} = \frac{\gamma \cdot A \cdot z^2}{z + z_R} \quad (3.125)$$

Uvedena oznaka z_R (karakteristična visina) se može odrediti sa sledećim:

$$z_R = \frac{Q_{\max} - Q_0}{\gamma \cdot A} = \frac{\frac{\gamma \cdot r_h}{K \cdot \mu_w} \cdot A - \gamma \cdot V_0}{\gamma \cdot A} = \frac{r_h}{K \cdot \mu_w} - V_0 / A \quad (3.126)$$

što odgovara opštem slučaju preseka ćelije i nasipnoj hrpi materijala na vrhu (V_0 je zapremina nasipne hrpe).

U slučaju kružnih ćelija ($r_h = A/U = d/4$, gde je d prečnik ćelije), nasipni deo je u obliku prirodne nasipne kupe ($V_0 / A = h_0 = h_p / 3 = d / 6 \cdot \tan \phi_r$), i za z_R se dobija:

$$z_R = \frac{d/4}{K \cdot \mu_w} - h_0 \quad (3.127)$$

Diferencirajući izraz (3.125) određuje se:

$$dQ_w = \frac{\gamma \cdot A \cdot (z^2 + 2z_R \cdot z)}{(z + z_R)^2} dz = \gamma \cdot A \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{z_R} + 1 \right)^{-2} \right] \cdot dz \quad (3.128)$$

Po ukupnom obimu ćelije priraštaj od težine materijala koji se nosi trenjem zidova je:

$$dQ_w = p_h \cdot \mu_w \cdot U \cdot dz \quad (3.129)$$

Izjednačavajući jednačine (3.128) i (3.129) određuje se horizontalni pritisak p_h :

$$p_h = \frac{\gamma \cdot A}{\mu_w \cdot U} \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{z_R} + 1 \right)^{-2} \right] = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{z_R} + 1 \right)^{-2} \right] \quad (3.130)$$

koji se koristi sa z_R prema (3.126), u smislu opšteg rešenja.

Kako je $p_w = p_h \cdot \mu_w$, to je smičuće opterećenje po površini zida ćelije:

$$p_w = \frac{\gamma \cdot A}{U} \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{z_R} + 1 \right)^{-2} \right] = \gamma \cdot r_h \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{z_R} + 1 \right)^{-2} \right] \quad (3.131)$$

Ukupna vertikalna sila po obimu zida ćelije od smičućeg opterećenja je:

$$P_w = \int_0^z p_w \cdot dz = \frac{Q_w}{U} = \gamma \cdot \frac{A}{U} \cdot z^2 \cdot \frac{1}{z + z_R} = \gamma \cdot r_h \cdot z^2 \cdot \frac{1}{z + z_R} \quad (3.132)$$

Vertikalni pritisak u materijalu pri visini z , se određuje iz uslova ravnoteže vertikalnih sila:

$$p_v \cdot A + P_w \cdot U = \gamma \cdot (z + h_0) \cdot A \quad (3.133)$$

Ovde je $P_w \cdot U = Q_w$, komponenta vertikalne sile koja se prenosi preko trenja na zid ćelije. U uslov ravnoteže se uvodi Q_w , ranije definisano sa izrazom (3.125) i određuje vertikalno opterećenje:

$$p_v = \gamma \cdot (z + h_0) - \gamma \cdot z^2 \cdot \frac{1}{z + z_R} = \gamma \cdot \left[z - z^2 \cdot \frac{1}{z + z_R} + h_0 \right] = \gamma \cdot \left[z \cdot \left(\frac{z}{z_R} + 1 \right)^{-1} + h_0 \right] \quad (3.134)$$

Pregled dobijenih izraza prema postupku *Reimbert*-ovih, se daje u sledećem obliku:

$$p_h = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{z_R} + 1 \right)^{-2} \right] \quad (3.135)$$

$$p_v = \gamma \cdot \left[z \cdot \left(\frac{z}{z_R} + 1 \right)^{-1} + h_0 \right] \quad (3.136)$$

$$p_w = \gamma \cdot r_h \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{z_R} + 1 \right)^{-2} \right] \quad (3.137)$$

$$P_w = \gamma \cdot r_h \cdot z^2 \cdot \frac{1}{z + z_R} \quad (3.138)$$

$$z_R = \frac{r_h}{K \cdot \mu_w} - h_0 \quad (3.139)$$

U konkretnom slučaju, za kružnu ćeliju, bočni pritisak na zidove ćelije p_h iznosi:

$$p_h = \frac{\gamma \cdot d}{4\mu_w} \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{z_R} + 1 \right)^{-2} \right] \quad (3.140)$$

gde se vrednost za z_R , uzima prema izrazu (3.127).

Ako je gornja površina materijala ravna (nema nasipne kupe), dubina z se uzima od nivoa ove površine, a određivanje z_R se pojednostavljuje, s obzirom da je $V_0 = 0$, odnosno $h_0 = 0$. Isti efekat na z_R se dobija, i u slučaju da se pri proračunu izraza (3.121) uvede $\phi_r = 0$.

Za slučaj gornje ravne površine materijala, tj. bez nasipne kupe materijala, pritisak p_h prema formulaciji *Reimbert*-ovih dobija sledeći oblik:

$$p_h = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{z}{z_0} \right)^{-2} \right] \quad (3.141)$$

gde je uvedena *Janssen*-ova karakteristična dubina $z_0 = r_h / (K \cdot \mu_w)$ za slučaj $h_0 = 0$.

Primena postupka sa uvođenjem proračunskog nadopterećenja p_{v0}

U analizi stanja napona zrnastog materijala u silosu, kada se uvodi *uticaj proračunskog nadopterećenja* p_{v0} na gornjoj ravnoj površini materijala, koriste se sledeći izrazi:

$$h_0 = \frac{p_{v0}}{\gamma} \quad (3.142)$$

$$z_{R0} = \frac{r_h}{K \cdot \mu_w} - \frac{p_{v0}}{\gamma} \quad (3.143)$$

$$p_h = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{z_{R0}} + 1 \right)^{-2} \right] \quad (3.144)$$

$$p_v = \gamma \cdot \left[z \cdot \left(\frac{z}{z_{R0}} + 1 \right)^{-1} + \frac{p_{v0}}{\gamma} \right] \quad (3.145)$$

$$p_w = \gamma \cdot r_h \cdot \left[1 - \left(\frac{z}{z_{R0}} + 1 \right)^{-2} \right] \quad (3.146)$$

$$P_w = \gamma \cdot r_h \cdot z^2 \cdot \frac{1}{z + z_{R0}} \quad (3.147)$$

U ovom slučaju h_0 je visina zamenjujućeg sloja materijala, sa kojim se analogno analizi nadopterećenja od nasipne kupe, uvodi proračunsko nadopterećenje na gornjoj ravnoj površini materijala. Karakteristična dubina z_{R0} data izrazom (3.143), odgovara dubini z_R , prema izrazu (3.139) u koji se uvodi zamenjujuća visina h_0 u obliku (3.142).

Na ovaj jednostavan način, primenom izraza (3.142) do (3.147), proširena je primena postupka *Reimbert*-ovih na slučaj sa uvođenjem nadopterećenja, što nije bila opcija kod originalnog postupka.

U slučaju da je $p_{v0} = 0$, analiza odgovara slučaju bez uvođenja nadopterećenja. U slučaju $p_{v0} = \gamma \cdot h_0$, u proračun se vraća uticaj težine nasipne kupe, ili proračunskog nadopterećenja. Ako se proračunsko nadopterećenje povećava, može se odrediti vrednost p_{v0} za koju je karakteristična visina $z_{R0} = 0$, prema izrazu (3.143). U ovom posebnom slučaju, na osnovu izraza (3.145), određuju se konstantni vertikalni naponi po dubini z , koji odgovaraju asimptomskom vertikalnom naponu:

$$p_{v0}|_{z_{R0}=0} = \gamma \cdot \frac{r_h}{K \cdot \mu_w} \quad (3.148)$$

Dalje povećanje nadopterećenje, preko vrednosti p_{v0} za koju je karakteristična visina $z_{R0} = 0$, nije podržano matematičkim oblikom proračunskih izraza, gde je funkcija raspodele pritiska uvedena u obliku jedne grane hiperbole.

Primena postupka kod ćelija sa opštim oblikom preseka

Reimbert-ovi su proširili primenu njihove teorije i na *opšti oblik preseka ćelije silosa*.

Kod analize opšteg slučaja preseka ćelije, uzima se da funkcija vertikalne raspodele $Y(z)$, odgovara slučaju ekvivalentnog silosa sa kružnom osnovom, za uslov jednakih obima stvarnog poligonog preseka ćelije i ekvivalentne (zamenjujuće) kružne ćelije. Kod stvarne ćelije je $r_h = A/U$, a kod ekvivalentne kružne ćelije je $r_{heq} = A_{eq}/U_{eq} = d_{eq}/4$, gde je d_{eq} prečnik ekvivalentne kružne silosa. Prema uslovu da je $U = U_{eq}$, i kako je $U_{eq} = \pi \cdot d_{eq}$, određuje se da je $d_{eq} = U/\pi$, a odatle je:

$$r_{heq} = \frac{d_{eq}}{4} = \frac{U}{4\pi} \quad (3.149)$$

Prema *Reimbert*-ovima (1976) [243] i (1962) [244] za ćeliju kružnog poprečnog preseka je $r_h = A/U = d/4 = R/2$, i $r_{heq} = d/4 = R/2$, a za ćeliju pravilnog poligonalnog oblika je $r_h = A/U$ i $r_{heq} = U/(4\pi)$. Kod kružnih ćelija isti su hidraulički radijusi $r_h = r_{heq}$. Kod poligonálnih ćelija, r_{heq} predstavlja hidraulički radijus ekvivalentne kružne ćelije, koja je jednakog obima sa stvarnim obimom poligonálne ćelije.

Kod analize silosa sa opštim oblikom preseka ćelije, u proračunu se samo kod određivanja dubine z_R u okviru izraza (3.139), smenjuje r_h sa r_{heq} (dok u drugim izrazima ostaje r_h), tako da je z_R :

$$z_R = \frac{r_{heq}}{K \cdot \mu_w} - h_0 \quad (3.150)$$

Ostali izrazi, od (3.135) do (3.138) ostaju nepromenjeni, a z_R se uzima prema prethodnom izrazu. Kod ovih izraza, $h_0 = V_0/A$ se odnosi na zamenjujuću visinu nasipnog dela. Neki detalji u vezi određivanja h_0 kod kvadratne i pravougaone ćelije su prikazani u knjigama¹ [243] i [244].

Na osnovu analiza *Reimbert*-ovi kod kvadratnih ćelija je $r_h = a/4$ i $r_{heq} = a/\pi$, gde je a dužina stranice kvadratne ćelije. Kod izduženih ćelija silosa formiranih sa dva paralelna vertikalna zida na razmaku $B = 2b$, koji odgovara teorijskom slučaju ravanskog silosa, određeno je $r_h = b$ i $r_{heq} = 4b/\pi$.

U teoriji *Reimbert*-ovih, kod analize opšteg preseka uvodi se izmena kod karakteristične dubine z_R , gde se smenjuje r_h sa r_{heq} . U *Janssen*-ovoj teoriji, takvih izmena nema (koristi se samo r_h).

Razlike između postupka Reimbert-ovih i Janssen-ovog postupka

U osnovi se mogu dati tri bitne razlike između ovih postupaka, i to su:

1. Dijagrami opterećenja prema *Janssen*-u su u obliku eksponencijalne funkcije, a kod *Reimbert*-ovih odgovaraju jednoj grani hiperbole. Kod *Janssen*-a je funkcija raspodele jedinstvena, a kod *Reimbert*-ovih je različita za vertikalne i horizontalne pritiske. Zbog toga, odnos horizontalnih i vertikalnih pritisaka $K(z)$, kod postupka *Reimbert*-ovih nije konstantan, već se menja sa promenom dubine materijala z , dok je kod *Janssen*-ovog postupka $K = \text{const.}$ za ukupno polje napona.
2. Horizontalni pritisci p_h se brže razvijaju po dubini z , prema formulaciji *Reimbert*-ovih u odnosu na pritiske prema *Janssen*-u. Ovo znači da se, pri istim relevantnim parametrima proračuna, prema *Reimbert*-ovima određuju veći horizontalni pritisci na zidu ćelije, u odnosu na pritiske određene prema *Janssen*-ovom postupku.
3. Kod uvođenja uticaja nadopterećenja p_{v0} , kao zamenjujućeg pritiska od nasipnog dela materijala ili kao proračunskog nadopterećenja gornje površine materijala, kod primene postupka *Reimbert*-ovih, inicira se samo vertikalni pritisak p_{v0} , dok su $p_{h0} = 0$ i $p_{w0} = 0$. Kod *Janssen*-ovog postupka, sa uvođenjem nadopterećenja p_{v0} , simultano se uvode početne vrednosti $p_{h0} = K \cdot p_{v0}$ i $p_{w0} = \mu_w \cdot p_{h0}$.

Odnos napona $K(z)$ je promenljiv sa dubinom z , prema postupku *Reimbert*-ovih, usled različitih oblika funkcije raspodele u izrazima za horizontalne i vertikalne napona, prema (3.135) i (3.136).

Kod postupka *Reimbert*-ovih, u slučaju analize stanja napona u materijalu sa gornjom ravnom površinom (bez nasipne kupe kod kružne ćelija), odnos horizontalnog i vertikalnog pritiska na dubini z , se može prikazati u sledećem obliku:

$$\frac{p_h(z)}{p_v(z)} = K(z) = K \cdot \frac{z + 2z_0}{z + z_0} \quad (3.151)$$

Kada $z \rightarrow 0$, odnosno kada $z \rightarrow \infty$, $K(z)$ uzima sledeće vrednosti:

$$K(z) \Big|_{z \rightarrow 0} = 2K \quad (3.152)$$

$$K(z) \Big|_{z \rightarrow \infty} = K \quad (3.153)$$

Prema (3.153), odnos napona K , odgovara odnosu asimptotskih napona $p_{h\infty}/p_{v\infty}$.

¹ U ovim knjigama, pogrešno je prikazan gotov izraz za određivanje h_0 kod ravanskog silosa, za nasipni deo u obliku izdužene trougaone prizme, tako da se ovde preporučuje primena opšteg izraza $h_0 = V_0/A$.

Početna vrednost odnosa napona je $2K$ (u slučaju analize bez nadopterećenja). Prikazani odnos napona $K(z)$ sa izrazima (3.151) do (3.153), odgovara analizi odnosa napona u primeru 3.4, gde su dijagrami $K(z) = p_h/p_v$ prikazani na sl. 109 do sl. 112.

Kod *Janssen*-ovog rešenja za p_h , eksponencijalna funkcija u izrazu (3.25), se može razviti u red, pri čemu se uzimaju u obzir samo prva dva člana, na sledeći način:

$$p_h = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-\frac{z}{z_0}}) = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot [1 - (e^{-\frac{z}{2z_0}})^{-2}] = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{z}{2z_0} + \dots \right)^{-2} \right] \quad (3.154)$$

Ovaj oblik odgovara *Janssen*-ovom rešenju, prikazanom u formulaciji *Reimbert*-ovih:

$$p_{hJ} \cong \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{z}{2z_0} \right)^{-2} \right] \quad (3.155)$$

Na sličan način, uzevši da član u malim zagradama u izraza (3.141), predstavlja prva dva člana reda odgovarajuće eksponencijalne funkcije, određuje se sledeća aproksimacija formule *Reimbert*-ovih u *Janssen*-ovom obliku:

$$p_{hR} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{z}{z_0} \right)^{-2} \right] \cong \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{z}{z_0} + \dots \right)^{-2} \right] = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left(1 - e^{-\frac{2z}{z_0}} \right) \quad (3.156)$$

Na osnovu ove aproksimativne analize, horizontalni pritisci na dubini z , prema *Reimbert*-ovima, odgovaraju *Janssen*-ovim pritiscima određenim pri dvostruko većoj dubini ($2z$) uskladištenog materijala. Ovaj stav se ilustruje u primeru 3.6 (sl. 117 - slučaj $h_0 = 0.0$ m), sa dijagramima horizontalnih pritisaka p_h pri manjim dubinama z . Pri istim relevantnim parametrima, kriva horizontalnih pritisaka $p_h(z)$, prema *Reimbert*-ovima je "punija" i brže prilazi asimptotskoj vrednosti, u odnosu na *Janssen*-ovu krivu. Početna vrednost odnosa napona $2K$ je u saglasnosti sa (3.156).

Razlike kod uvođenja nadopterećenja p_{v0} , po pitanju početnih vrednosti p_{h0} i p_{w0} , kod postupka *Reimbert*-ovih i *Janssen*-ovog postupka, su posledica uvedenih pretpostavki pri formiranju ovih postupaka. Navedene razlike kod primene ovih postupaka, se mogu uočiti na uporednim dijagramima u primeru 3.6, na sl. 117.

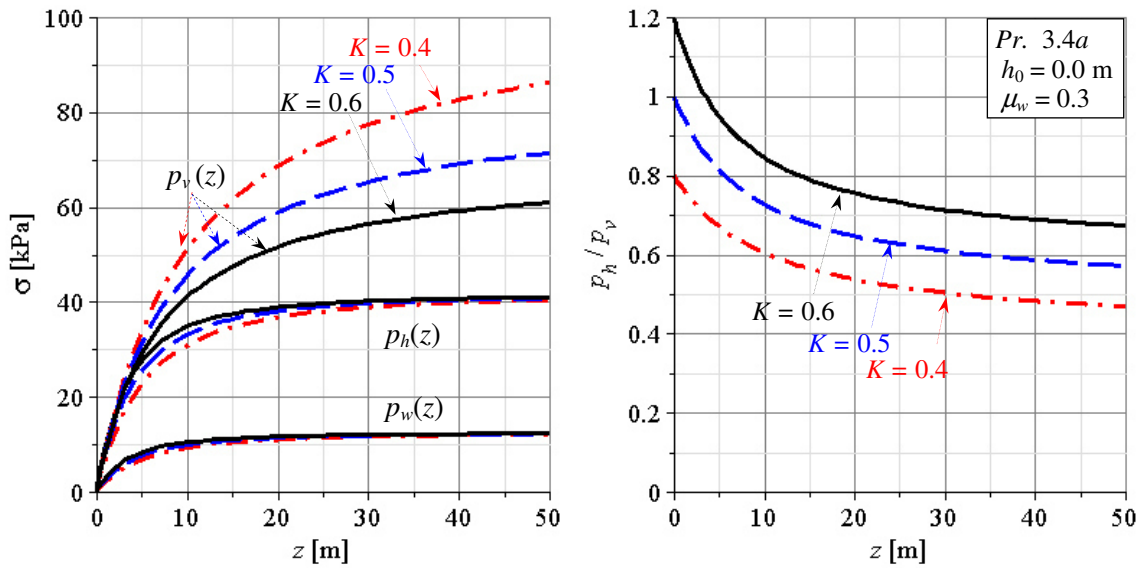
Primeri analize stanja napona i odnosa pritisaka p_h/p_v prema postupku *Reimbert*-ovih

Primer 3.4 – slučaj analize 3Dr silosa sa ravnom gornjom površinom materijala

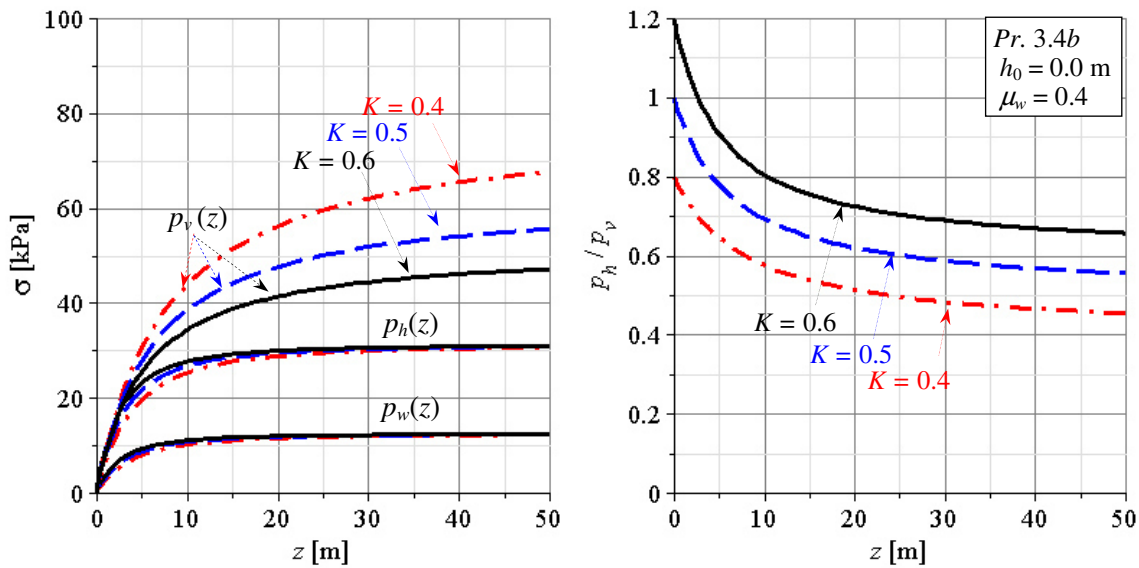
Primer 3.5 – slučaj analize 3Dr silosa sa formiranom nasipnom kupom

U primerima se koriste sledeći osnovni podaci 3Dr silosa i materijala:

- $D = 5$ m ; $\gamma = 10$ kN/m³ i $\phi_r = 30^\circ$ (za nasipnu kupu).
- h_0 se uvodi sa sledećim vrednostima:
 - u primeru 3.4: slučaj sa ravnom gornjom površinom materijala $\Rightarrow h_0 = 0.0$ m
 - u primeru 3.5: slučaj sa nasipnom kupom; na osnovu (3.34) $\Rightarrow h_0 = 0.4811$ m
- K i μ_w se variraju, u primerima 3.4 i 3.5, sa sledećim kombinacijama:
 - analiza a: $\mu_w = 0.3$ konstantno pri variranju vrednosti $K = 0.4, 0.5$ i 0.6 ;
 - analiza b: $\mu_w = 0.4$ konstantno pri variranju vrednosti $K = 0.4, 0.5$ i 0.6 ;
 - analiza c: $K = 0.5$ konstantno pri variranju vrednosti $\mu_w = 0.3, 0.4$ i 0.5 ; i
 - analiza d: $K = 0.4$ konstantno pri variranju vrednosti $\mu_w = 0.3, 0.4$ i 0.5 .



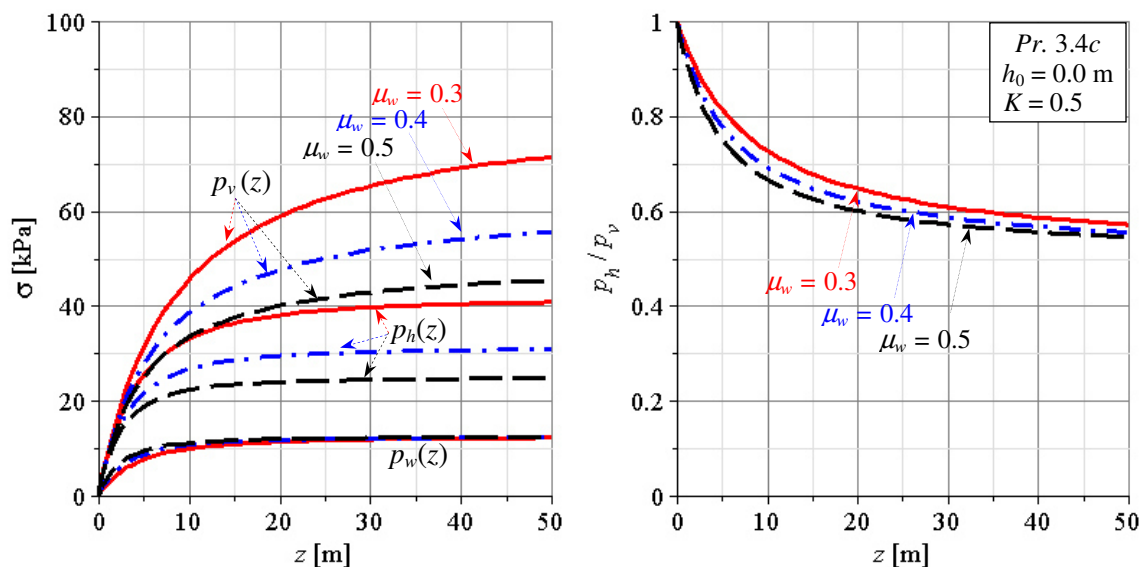
Sl. 109 Teorija Reimbert-ovih – Primer 3.4a - $D = 5$ m - stanje napona i odnos pritiska $K(z)$; variranje K , uz $h_0 = 0$ m (bez nasipne kupe). (Podaci: $\gamma = 10$ kN/m³; $K = 0.4, 0.5$ i 0.6 ; $\mu_w = 0.3$).



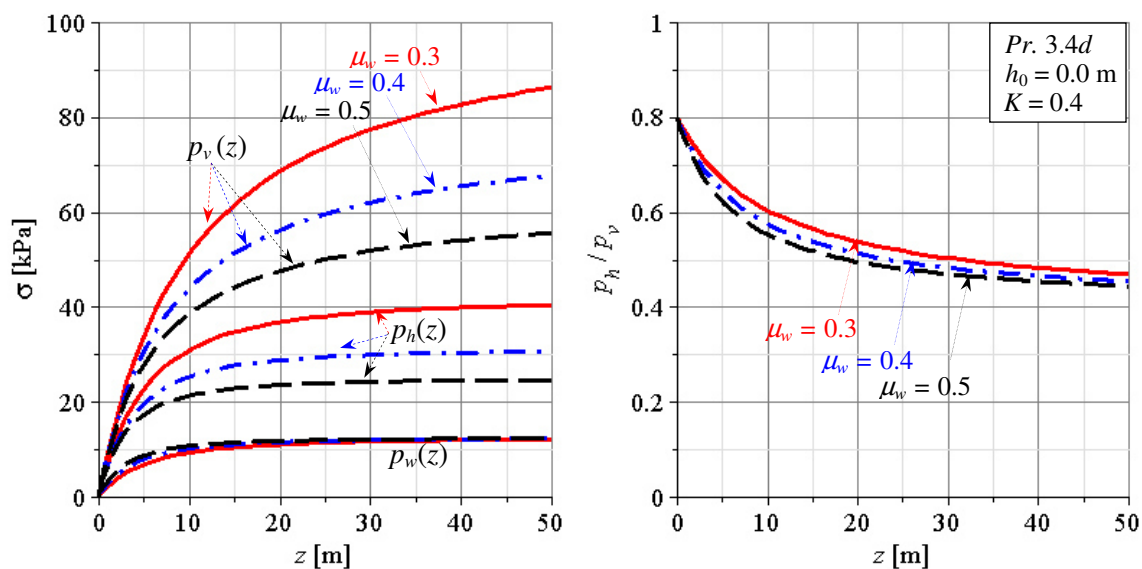
Sl. 110 Teorija Reimbert-ovih – Primer 3.4b - $D = 5$ m - stanje napona i odnos pritiska $K(z)$; variranje K , uz $h_0 = 0$ m (bez nasipne kupe). (Podaci: $\gamma = 10$ kN/m³; $K = 0.4, 0.5$ i 0.6 ; $\mu_w = 0.4$).

Hidraulički radijus kružne ćelije je $r_h = A/U = D/4 = 1.25$ m. Pritisci p_h i p_v , i opterećenje usled trenja p_w se određuju prema izrazima (3.135) do (3.137), uz primenu izraza (3.139). Za ova dva primera, sa po četiri analize (a do d), prikazani su dijagrami p_h , p_v i p_w , i dijagrami odnosa napona $K(z) = p_h/p_v$ u funkciji dubine materijala z (do dubine $z = 50$ m), na sledećim slikama:

- na sl. 109 do sl. 112, redom za analize a do d u primeru 3.4, sa ravnom gornjom površinom materijala ($h_0 = 0.0$ m), i
- na sl. 113 do sl. 116, redom za analize a do d u primeru 3.5, sa nasipnom kupom materijala ($h_0 = 0.4811$ m).



Sl. 111 Teorija Reimbert-ovih – Primer 3.4c - $D = 5 \text{ m}$ - stanje napona i odnos pritiska $K(z)$; variranje μ_w , uz $h_0 = 0 \text{ m}$ (bez nasipne kupe). (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $K = 0.5$; $i \mu_w = 0.3, 0.4$ i 0.5).

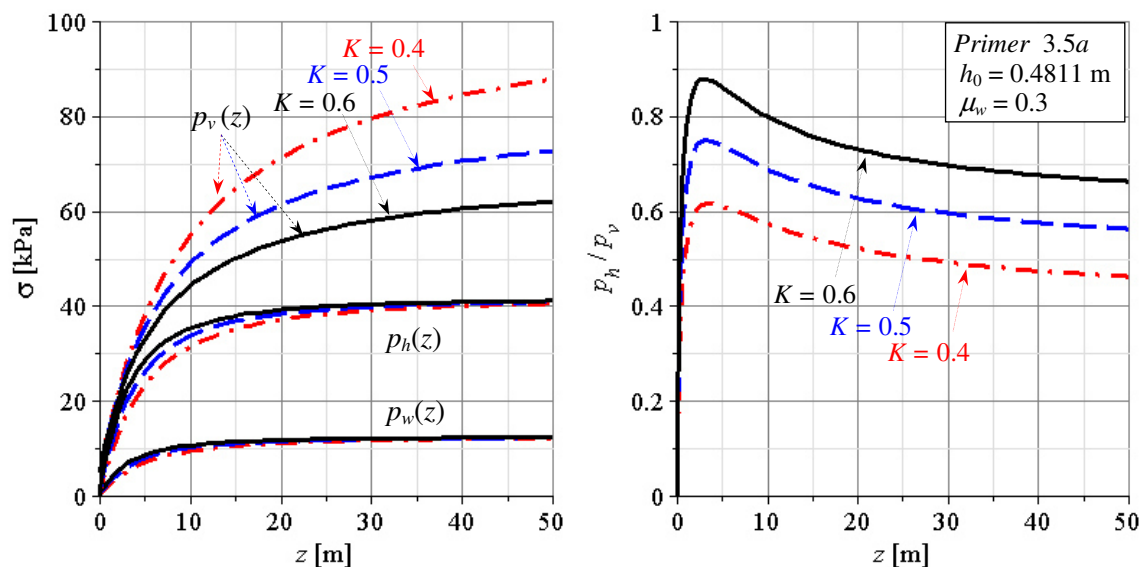


Sl. 112 Teorija Reimbert-ovih – Primer 3.4d - $D = 5 \text{ m}$ - stanje napona i odnos pritiska $K(z)$; variranje μ_w , uz $h_0 = 0 \text{ m}$ (bez nasipne kupe). (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $i K = 0.4$; $\mu_w = 0.3, 0.4$ i 0.5).

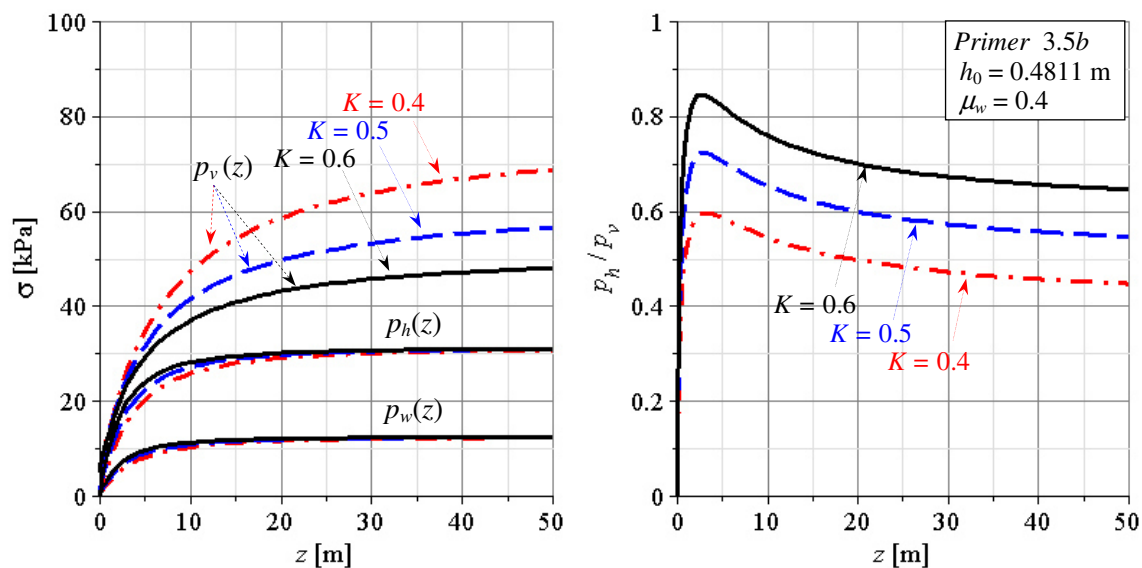
Na osnovu analize rezultata prikazanih na sl. 109 do sl. 112 (primer 3.4) i na sl. 113 do sl. 116 (primer 3.5), može se zaključiti da opterećenje usled trenja p_w bez obzira na variranje vrednosti za K i μ_w , asimptotski teži istoj vrednosti. Po dubini z , opterećenje p_w je veće pri povećanju parametra K (za konstantno μ_w) i povećanju μ_w (za konstantno K).

Horizontalni pritisci p_h teže istoj asimptotskoj vrednosti pri konstantnom μ_w i variranju K , a p_h ima veće asimptotske vrednosti pri smanjenju koeficijenta trenja μ_w . Po dubini z , pritisci p_h su veći pri povećanju K (za konstantno μ_w) i smanjenju μ_w (za konstantno K).

Vertikalni pritisci p_v teže različitim asimptotskim vrednostima, pri variranju jednog ili oba parametra K i μ_w , pri promeni vrednosti proizvoda $K \cdot \mu_w$.



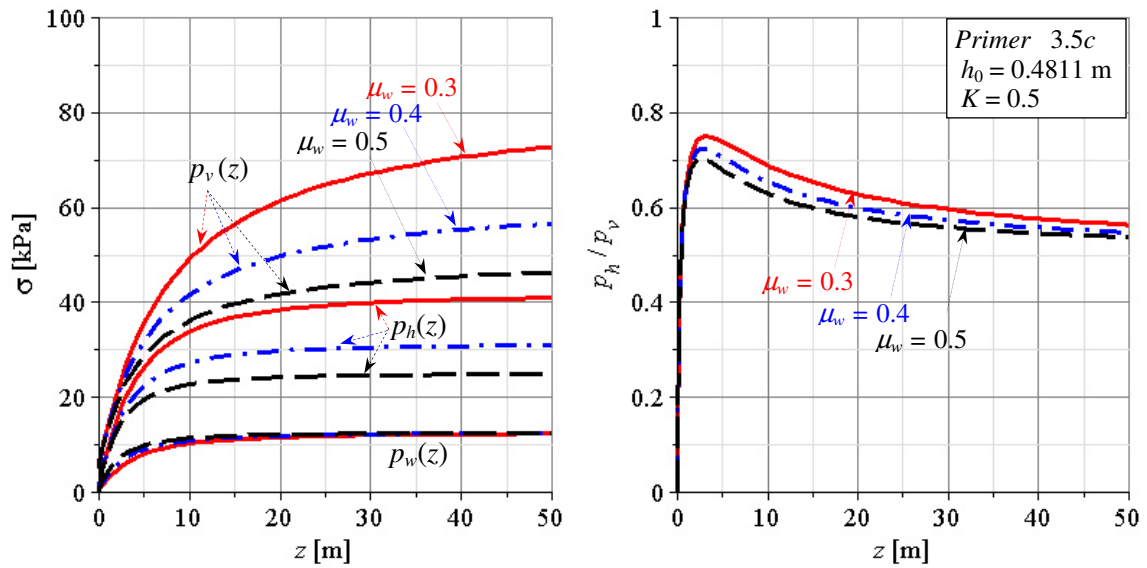
Sl. 113 Teorija Reimbert-ovih – Primer 3.5a - $D = 5$ m - stanje napona i odnos pritiska $K(z)$; variranje K , uz $\phi_r = 30^\circ$; $h_0 = 0.4811$ m (sa nasipnom kupom). (Podaci: $\gamma = 10$ kN/m³; $K = 0.4, 0.5$ i 0.6 ; $i \mu_w = 0.3$).



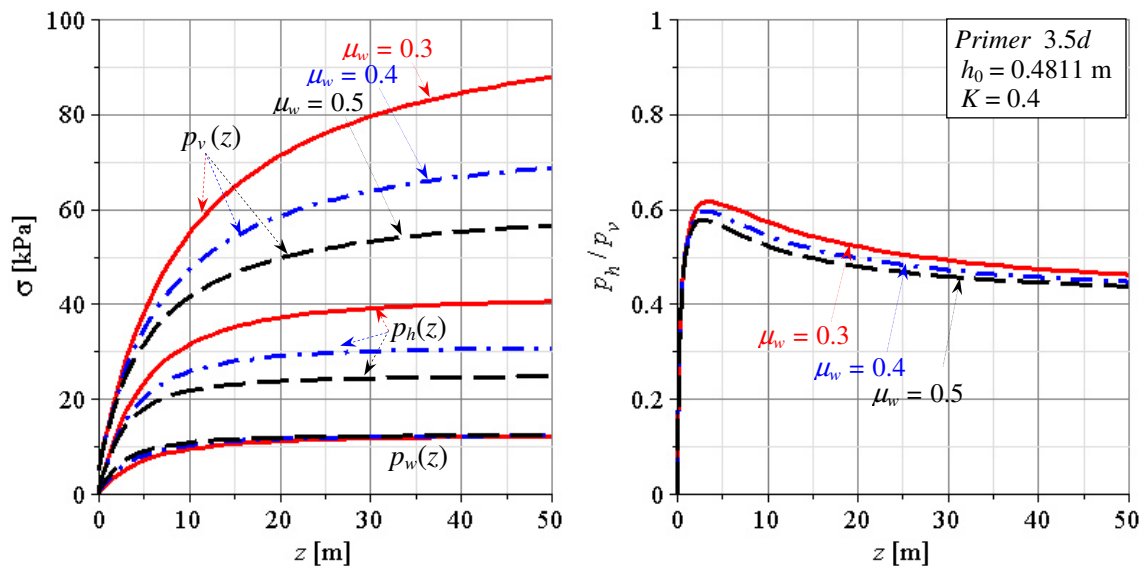
Sl. 114 Teorija Reimbert-ovih – Primer 3.5b - $D = 5$ m - stanje napona i odnos pritiska $K(z)$; variranje K , uz $\phi_r = 30^\circ$; $h_0 = 0.4811$ m (sa nasipnom kupom). (Podaci: $\gamma = 10$ kN/m³; $K = 0.4, 0.5$ i 0.6 ; $i \mu_w = 0.4$).

Po dubini z , pritisci p_v su veći pri smanjenju K (za konstantno μ_w) i smanjenju μ_w (za konstantno K). Po pitanju razvoja p_h , p_v i p_w sa dubinom z , brži razvoj je za veće vrednosti K (za konstantno μ_w) i veće vrednosti μ_w (za konstantno K). Razlika kod ovih primera je u kvantitativnim vrednostima opterećenja. Kod uvođenja uticaja nadopterećenja p_{v0} od težine nasipne kupe, u primeru 3.5, vertikalni pritisci se razvijaju od početnih vrednosti $p_{v0} = \gamma h_0 = 4.811$ kN/m².

Odnos napona $K(z) = p_h / p_v$, kod postupka Reimbert-ovih, nije konstantan, već se menja sa promenom dubine materijala z . Na sl. 109 do sl. 112, dijagrami $K(z)$ su prikazani za slučaj analize bez uvođenja uticaja nasipne kupe ($h_0 = 0.0$ m). Ovi dijagrami odgovaraju primeni



Sl. 115 Teorija Reimbert-ovih – Primer 3.5c - $D = 5$ m - stanje napona i odnos pritisaka $K(z)$; variranje μ_w , uz $\phi_r = 30^\circ$; $h_0 = 0.4811$ m (sa nasipnom kupom). (Podaci: $\gamma = 10$ kN/m³; $K = 0.5$; $\mu_w = 0.3, 0.4$ i 0.5).



Sl. 116 Teorija Reimbert-ovih – Primer 3.5d - $D = 5$ m - stanje napona i odnos pritisaka $K(z)$; variranje μ_w , uz $\phi_r = 30^\circ$; $h_0 = 0.4811$ m (sa nasipnom kupom). (Podaci: $\gamma = 10$ kN/m³; $K = 0.4$; $\mu_w = 0.3, 0.4$ i 0.5).

izraza (3.151) do (3.153), gde $K(z)$ od početne vrednosti $2K$, sa povećanjem dubine z , opada i teži asimptotskoj vrednosti $K = p_{h\infty}/p_{v\infty}$. Relativno veće vrednosti za $K(z)$, ovde odgovaraju većim koeficijentima bočnog pritiska K , i manjim vrednostima μ_w . Na sl. 113 do sl. 116, dijagrami $K(z)$ se odnose na slučaj analize sa uvođenjem uticaja nasipne kupe ($h_0 = 0.4811$ m). Relativno veće vrednosti za $K(z)$, se određuju za veće K i manje μ_w . Početne vrednosti su nula, ali $K(z)$ brzo raste pri malim dubinama z , i dostiže maksimum na dubini od oko 2.5 m. Sa daljim povećanjem dubine z , odnos napona $K(z)$ postepeno opada i teži asimptotskoj vrednosti $K = p_{h\infty}/p_{v\infty}$. Za uobičajene dubine materijala, izuzev male oblasti ispod osnove nasipne kupe, odnos napona $K(z)$ je uvek veći od K .

Primer 3.6 – Uporedna analiza napona prema Janssen-u i Reimbert-ovima

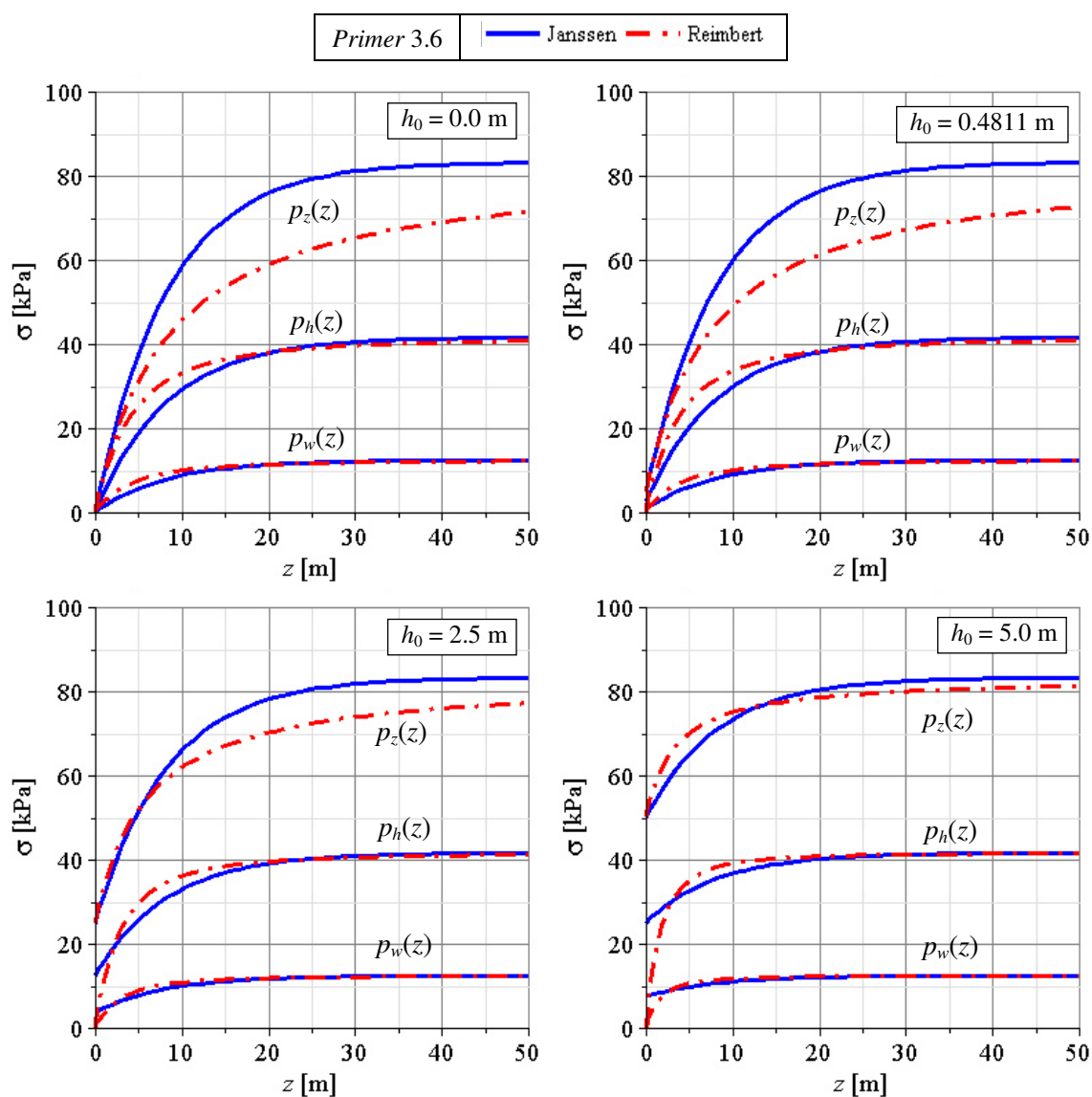
U primeru se koriste sledeći osnovni podaci 3Dr silosa i materijala:

- $D = 5$ m ; $\gamma = 10$ kN/m³ ; $K = 0.5$ i $\mu_w = 0.3$.

Varira se $p_{v0} = \gamma \cdot h_0$, sa variranjem zamenjujuće visine $h_0 = 0.0$; 0.4811; 2.5 i 5.0 m.

Vrednost $h_0 = 0.4811$ m, odgovara nasipnoj kupi sa uglom prirodnog nagiba $\phi_r = 30^\circ$.

Pritisci p_h i p_v , i opterećenje usled trenja p_w se određuju sa izrazima (3.49) do (3.51) i (3.21) prema Janssen-ovom postupku, i sa izrazima (3.143) do (3.146) prema postupku Reimbert-ovih. Hidraulički radijus za kružnu ćeliju je $r_h = A/U = D/4 = 1.25$ m.



Sl. 117 Uporedni pregled teorija Janssen-a i Reimbert-ovih – Primer 3.6 – $D = 5$ m - stanje napona pri variranju $h_0 = 0.0, 0.4811, 2.5$ i 5.0 m. (Podaci: $\gamma = 10$ kN/m³; $K = 0.5$; $\mu_w = 0.3$).

Dijagrami p_h , p_v i p_w , u funkciji dubine materijala z (do dubine $z = 50$ m), prema Janssen-u i Reimbert-ovima su prikazani na sl. 117, pri variranju zamenjujuće visine h_0 .

Prema analizi rezultata na sl. 117, može se zaključiti da opterećenja prema Janssen-u i prema Reimbert-ovima imaju iste asimptote pri $z \rightarrow \infty$. Janssen-ovo rešenje dolazi do

ovih asimptota sa eksponencijalnom funkcijom, dok rešenje *Reimbert*-ovih odgovara jednoj grani hiperbole. Ovo predstavlja osnovnu razliku između ovih teorija.

U originalnoj analizi *Reimbert*-ovih, nije se posebno uvodilo nadopterećenje, već je u izrazima direktno uveden uticaj od nasipnog dela materijala.

U ovom radu je kod postupka *Reimbert*-ovih, uveden uticaj nadopterećenja p_{v0} preko jednostavnog uvođenja zamenjujuće nasipne visine h_0 u obliku izraza (3.142). Napominje se da je zbog matematičke forme proračunskih izraza kod *Reimbert*-ovih (funkcije u obliku hiperbole), nadopterećenje ograničeno na veličinu $\gamma \cdot z_0$. Kod *Janssen*-ove analize, takvog ograničenja nema.

Horizontalni pritisci p_h se brže razvijaju pri manjim dubinama z , tako da su do dubine od oko $5D$, pritisci prema *Reimbert*-ovima veći od pritisaka prema *Janssen*-u (odgovara slučaju gde je $h_0 = 0.0$ m). U slučajevima gde je $h_0 > 0$, situacija je promenljiva, jer horizontalni pritisci kod *Reimbert*-ovih, polaze od koordinantnog početka, a kod *Janssen*-a od početne vrednosti $p_{h0} = K \cdot p_{v0}$.

Kvalitativno posmatrano, analiza prema *Reimbert*-ovima pruža bolji opis opterećenja u silosu od *Janssen*-ove analize, ali to ne slede konkretni proračunski rezultati. *Janssen*-ova analiza je relativno jednostava, više je uopštena, lako se adaptira kod raznih teorijskih analiza silosnih problema, a uz to je zadovoljavajuće tačnosti rezultata u odnosu na rezultate ispitivanja. S obzirom na to, *Janssen*-ov postupak je skoro potpuno potisnuo postupak *Reimbert*-ovih, i dominira kako u praksi tako i u teoriji.

3.4 Postupak Pipatpongsa-a i Heng-a

U radovima Heng-a, Pipatpongsa-a i Ohta-e (2008) [115], Pipatpongsa-a, Khosravi-a, i Heng-a (2009) [233], Pipatpongsa-a, Heng-a, Wattanachai-a i Likitlersuang-a (2009) [232], i Pipatpongsa-a i Heng-a (2010) [230], prikazana je nova metoda proračuna pritisaka u silosima za stanje mirovanja materijala.

Kod ovog postupka, koristi se *Jáky*-ev koeficijent bočnog pritiska $K = 1 - \sin\phi$, koji je uzet kao konstantna vrednost po srednjoj osi silosa. Postupak je baziran na ispunjenju dva uslova ravnoteže, i prema autorima predstavlja kvazi-stratično rešenje problema, a zbog uvedene pretpostavke o koeficijentu K , postupak je naslovljen kao *generalisani Jáky*-ev postupak.

Originalni *Jáky*-ev postupak proračuna stanja napona kod silosa, u osnovi je složeniji po svojoj matematičkoj formi u odnosu na navedeni generalisani postupak. *Jáky*-eva originalna analiza opterećenja u silosima je sistematski i vrlo detaljno analizirana od strane Heng-a, Pipatpongsa-a i Ohta-e (2008) u ref. [115], što predstavlja još jedan primer velikog interesovanja za prve radove iz oblasti proračuna silosa i ponašanja zrnastih materijala.

Kod ove analize su uvedene pretpostavke o uniformnosti vertikalnih napona kod diferencijalnog sloja materijala, i da važi *Coulomb*-ov zakon za trenje nasutog materijala o zid ćelije.

Od interesa je napomenuti, da u okviru postupka *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a (2010) [230], nije uvedena dodatna pretpostavka, kod analize kružnih silosnih ćelija, da su radijalni pritisci konstantni u diferencijalnom sloju materijala. Ova pretpostavka je bila uvedena u postupak prikazan u disertaciji *Rahmoun*-ove (2006) [236], a pri tome nije dobijeno jednostavnije rešenje od prikazanog u postupku *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a.

Stanje napona u silosu je određeno u okviru kvazi-statičke analize pod ravnomernim vertikalnim pritiskom.

3.4.1 Formiranje generalisanog Jáky-evog postupka

Usled simetrije kod problema uskladištenog materijala, radijalni naponi σ_r , prstenasti naponi σ_θ i smičući naponi τ_{rz} , ne zavise od ugaone koordinate θ .

Jednačine ravnoteže u okviru 3D cilindričnog koordinatnog sistema (r, z, θ) se mogu prikazati u radijalnom i vertikalnom pravcu u obliku:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} = 0 \quad (3.157)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \gamma \quad (3.158)$$

gde je γ zapreminska težina materijala i $\tau_{zr} = \tau_{rz}$.

Prema Ragneau-u i Aribert-u (1992)¹, razlika $\sigma_r - \sigma_\theta$ u naponima iznosi oko 10% do 15% od σ_r , tako da se odnos $(\sigma_r - \sigma_\theta)/r$ u jedn. (3.157) može zanemariti (uzeti da je 0) u okviru analize stanja napona u silosima, navode Pipatpongsa i Heng (2010) [230].

Isto tako, Nedderman (1992) [200] navodi da se kod analize napona u uskladištenom materijalu u cilindričnim ćelijama, može usvojiti pretpostavka da je $\sigma_r = \sigma_\theta$.

Na osnovu prethodnih napomena, Pipatpongsa i Heng su usvojili da je $\sigma_r = \sigma_\theta$, kao jednostavnu pretpostavku koja je kompatibilna sa simetrijom problema kod cilindričnih sistema.

Određuje se parcijalni izvod po r jednačine (3.158):

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{rz}}{\partial^2 r} + \frac{\partial(\tau_{rz}/r)}{\partial r} = 0 \quad (3.159)$$

Pri uvođenju Janssen-ove pretpostavke o konstantnom naponu σ_z na nivou z , sledi da je $\partial^2 \sigma_z / \partial r \partial z = 0$, tako da se gornja jednačina može svesti na jednostavniji oblik:

$$\frac{\partial^2 \tau_{rz}}{\partial^2 r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} - \frac{\tau_{rz}}{r^2} = 0 \quad (3.160)$$

Jednačina (3.160) je po obliku tipična Euler-ova diferencijalna jednačina koja se može transformisati uvođenjem smene $r = e^t$, pri čemu jednačina postaje linearna homogena diferencijalna jednačina 2-og reda:

$$\frac{\partial^2 \tau_{rz}}{\partial^2 t} - \tau_{rz} = 0 \quad (3.161)$$

Opšte rešenje jednačine sa transformacijom unazad ka promenljivoj r je u obliku:

$$\tau_{rz} = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-t} = c_1 \cdot r + \frac{c_2}{r} \quad (3.162)$$

gde su c_1 i c_2 funkcije od z usled parcijalnog diferenciranja.

¹ Ragneau E. and Aribert J. (1992): "Solutions analytiques `a divers ordres d'approximation pour le calcul des actions dans les silos cylindriques en phase de remplissage". *Revue de construction m'etallique*, Vol.1 (1992), pp.23-41. (Citirano prema Pipatpongsa-u i Heng-u (2010) [230].)

Prema *Janssen*-u (1895), smičući napon $\tau_w = \tau_{rz}(r, z)|_{r=R} = \tau_w(z)$ do zida je mobilisan, i odatle je u odnosu sa μ_w i σ_{rw} gde je μ_w statički koeficijent trenja između zrnastog materijala i zida silosa:

$$\tau_w = \mu_w \cdot \sigma_{rw} \text{ gde su } \tau_w = \tau_w(z), \text{ i } \sigma_{rw} = \sigma_{rw}(z) \quad (3.163)$$

gde su: $\mu_w = \tan \phi_w$; $\phi_w \leq \phi_i$ je ugao trenja između zida i granularnog materijala koji ima ugao unutrašnjeg trenja ϕ_i ; i $\sigma_{rw} = \sigma_{rw}(z)$ je radijalni napon koji deluje na zid pri posmatranoj dubini z .

Usled simetrije silosa, smičući naponi se anuliraju u centralnoj osi silosa, odakle je $\tau_w = \tau_{rz}(r, z)|_{r=0} = 0$.

Pri uvođenju oba granična uslova smičućih napona za $r = 0$ i $r = R$, u jedn. (3.162), određuje se $c_1(z) = \tau_w(z)/R$ i $c_2(z) = 0$. Sa ovim, $\tau_{rz}(r, z)$ se transformiše u sledeći oblik:

$$\tau_{rz} = \frac{r}{R} \cdot \tau_w \quad (3.164)$$

Smičući napon, prikazan sa jedn. (3.164), je po obliku identičan *Jáky*-evoj pretpostavci o promeni napona smicanja u uskladištenom materijalu. *Jáky* je pretpostavio da smičući naponi u okviru granularnog materijala nisu potpuno mobilisani, odnosno da se smičući napon $\tau_{rz} = \tau_{rz}(r, z)$ linearno menja sa koordinatom r , redukujući se od τ_w kod zida gde je $r = R$, ka nuli u osi silosa $r = 0$. Parcijalnim diferenciranjem po r i z , određuje se:

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} = \frac{\tau_w}{R} \quad (3.165)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = \frac{r}{R} \cdot \frac{d\tau_w}{dz} \quad (3.166)$$

Uvođenjem izraza (3.164) i (3.165) u jedn. (3.158) određuje se parcijalni izvod $\partial \sigma_z / \partial z$. Kako je τ_w samo u funkciji od z , sledi da je $\partial \sigma_z / \partial z = d\sigma_z / dz$. Jedn. (3.158) prelazi u oblik:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma - \frac{2\tau_w}{R} = \frac{d\sigma_z}{dz} \quad (3.167)$$

Ovde su nepoznati vertikalni naponi σ_z , koji su u funkciji samo od promenljive z . Naponi σ_z se određuju integracijom uz početni uslov $\sigma_z|_{z=0} = 0$, tj. $\tau_w|_{z=0} = 0$, u sledećem obliku:

$$\sigma_z = \int_0^z \left(\gamma - \frac{2\tau_w}{R} \right) dz \quad (3.168)$$

Kako su naponi σ_z u funkciji samo od promenljive z , sledi da je $\partial \sigma_z / \partial r = 0$, tj. vertikalni naponi su konstantni u horizontalnom preseku na posmatranoj dubini z . Ovo odgovara *Janssen*-ovoj pretpostavci o uniformnim vertikalnim naponima u horizontalnom preseku materijala.

U *Jáky*-evom originalnom postupku analize stanja napona, donji deo materijala u silosu se uvodi sa elastičnom analizom, a gornji deo silosnog materijala sa plastičnom analizom. Generalizacija *Jáky*-evog postupka se bazira na uopštavanju analize donjeg dela silosa. *Jáky* je pretpostavio da je koeficijent bočnog napona K konstantan po visini centralne linije silosa, što je različito od *Janssen*-ove pretpostavke da je K konstanta u celom prostoru zrnastog materijala. Prema *Jáky*-evom postupku K je promenljivo u prostoru uskladištenog materijala, a konstanta je u tačkama na centralnoj osi simetrije silosa, pri čemu se K uzima da je $K_0 = 1 - \sin \phi_i$. Sa ovim su radijalni naponi u centralnoj liniji silosa σ_{r0} proporcionalni sa σ_z , odnosno stoji da je:

$$\sigma_{r0} = \sigma_r|_{r=0} = K \cdot \sigma_z \quad (3.169)$$

Jedn. (3.167) se prikazuje u obliku:

$$\tau_w = \frac{R}{2} \cdot \left(\gamma - \frac{d\sigma_z}{dz} \right) \quad (3.170)$$

U jedn. (3.157) uvode se izrazi (3.166) i (3.170), pri čemu se određuje:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} = -\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = -\frac{r}{R} \cdot \frac{d\tau_w}{dz} = \frac{r}{2} \cdot \frac{d^2 \sigma_z}{dz^2} \quad (3.171)$$

Direktnom integracijom ove jednačine određuje se radijalni napon do zida ćelije σ_{rw} :

$$\sigma_{rw} = \int_0^R \frac{r}{2} \cdot \frac{d^2 \sigma_z}{dz^2} dr + \sigma_{r0} = \frac{R^2}{4} \cdot \frac{d^2 \sigma_z}{dz^2} + K \cdot \sigma_z \quad (3.172)$$

S druge strane, primenom *Coulomb*-ovog uslova za trenje materijala, uz uvođenje izraza (3.170), određuje se drugi oblik za radijalni napon σ_{rw} :

$$\sigma_{rw} = \frac{\tau_w}{\mu_w} = \frac{R}{2\mu_w} \cdot \left(\gamma - \frac{d\sigma_z}{dz} \right) \quad (3.173)$$

Kombinujući prethodne dve jednačine, formira se linearna nehomogena diferencijalna jednačina 2.-og reda po vertikalnim naponima σ_z :

$$\frac{d^2 \sigma_z}{dz^2} + \frac{2}{\mu_w \cdot R} \cdot \frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{4K}{R^2} \cdot \sigma_z - \frac{2\gamma}{\mu_w \cdot R} = 0 \quad (3.174)$$

Zatvoreno rešenje za σ_z se određuje uz dva granična uslova na gornjoj površini materijala, i to su $\sigma_z|_{z=0} = 0$, i uslov $\tau_w|_{z=0} = 0$, pri čijem se uvođenju u jedn. (3.170) određuje da je $d\sigma_z/dz|_{z=0} = \gamma$ (u ref. [230] i [232] pogrešno se navodi da je ovaj izvod 0!). Na osnovu prethodnog prikaza, σ_z se određuje integracijom jedn. (3.174); σ_r se određuje uvođenjem rešenja za σ_z u (3.171); i τ_{rz} se određuje na osnovu izraza (3.163), (3.164) i (3.172). Izrazi za napone u zrnastom materijalu, prema ref. [230] i [232], u analiziranom slučaju bez nadopterećenja na gornjoj površini materijala su:

$$\sigma_z = \gamma z_0 \cdot \left[1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left(\cosh \left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R} \right) + \frac{1+m^2}{2m} \sinh \left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R} \right) \right) \right] \quad (3.175)$$

$$\sigma_r = K \cdot \gamma z_0 \cdot \left[1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left(\cosh \left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R} \right) + \frac{1}{m} \cdot \left(1 - \frac{1-m^2}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \right) \cdot \sinh \left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R} \right) \right) \right] \quad (3.176)$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} \gamma r \cdot \left[1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left(\cosh \left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R} \right) + \frac{1+m^2}{2m} \sinh \left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R} \right) \right) \right] \quad (3.177)$$

gde je:

$$m = \sqrt{1 - 4K \cdot \mu_w^2} \quad (3.178)$$

Dobijena rešenja za napone u zrnastom materijalu, razlikuju se od *Jáky*-evog originalnog rešenja, kao i rešenja prema *Janssen*-ovom postupku, a pri velikim dubinama materijala, odnosno za $z \rightarrow \infty$, sva tri rešenja vode u principu ka istim asimptotskim vrednostima:

$$\sigma_z|_{z \rightarrow \infty} = \gamma z_0, \quad \sigma_r|_{z \rightarrow \infty} = K \cdot \gamma z_0, \quad \text{i} \quad \tau_{rz}|_{z \rightarrow \infty} = \gamma r / 2. \quad (3.179)$$

Na gornjoj površini materijala, ispunjeni su uslovi da je površina bez opterećenja:

$$\sigma_z|_{z=0} = 0, \quad \sigma_r|_{z=0} = 0, \quad \text{i} \quad \tau_{rz}|_{z=0} = 0. \quad (3.180)$$

Kako je prema Jáky-u uvedena pretpostavka da je K konstanta samo u centralnoj osi silosa, to znači da odnos napona do zida ćelije σ_r/σ_z , za $r = R$, nije konstantan, već se menja sa dubinom z . Na osnovu (3.175) i (3.176), određuje se:

$$\left(\frac{\sigma_r}{\sigma_z} \right)_{r=R} = \frac{1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left(\cosh\left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R}\right) + \frac{1}{m} \cdot \sinh\left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R}\right) \right)}{1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left(\cosh\left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R}\right) + \frac{1+m^2}{2m} \sinh\left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R}\right) \right)} \cdot K \quad (3.181)$$

U slučaju ravnomernog nadopterećenja na gornjoj površini materijala, uvode se granični uslovi $\sigma_z|_{z=0} = q_0$ i $\tau_w|_{z=0} = 0$. Na osnovu integracije jednačine (3.174) uz primenu datih graničnih uslova, na sličan način kao u osnovnom slučaju analize bez nadopterećenja na gornjoj površini materijala, prema ref. [230] i [233], određena su rešenja za stanje napona u zrnastom materijalu:

$$\sigma_z = \gamma z_0 \cdot (1 - \xi|_{r=0}), \quad \sigma_r = K \cdot \gamma z_0 \cdot (1 - \xi), \quad \tau_{rz} = \frac{1}{2} \gamma r \cdot (1 - \xi|_{r=0}) \quad (3.182)$$

$$\xi = \exp\left(\frac{-z}{\mu_w R}\right) \cdot \left(\left[1 - \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \cdot \frac{q_0}{\gamma z_0} \right] \cdot \cosh\left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R}\right) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{m} \cdot \left[1 - \frac{1-m^2}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) - \left(1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \cdot \frac{q_0}{\gamma z_0} \right] \cdot \sinh\left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R}\right) \right) \quad (3.183)$$

$$m = \sqrt{1 - 4K \cdot \mu_w^2}, \quad z_0 = (R/2) / (K \cdot \mu_w) \quad (3.184)$$

Prethodna rešenja se u slučaju da je $q_0 = 0$, svode na osnovna rešenja u obliku izraza (3.175), (3.176) i (3.177).

Međutim, analizom prikazanog postupka u okviru ovog rada, odnosno formulisanih rešenja stanja napona prema (3.182), zaključeno je da izraz za smičući napon ne zadovoljava početni uslov $\tau_w|_{z=0} = 0$. Konkretno, pri postojanju nadopterećenja funkcija ξ za $r = 0$ i $z = 0$, nije jednaka 1, tako da se dobijaju konkretne vrednosti napona smicanja za nivo $z = 0$, sem u centralnoj osi gde usled simetrije problema smicanje iznosi 0. Na ovaj način nije ispunjen početni uslov da je $\tau_w|_{z=0} = 0$.

Izraz za smičuće napone posle korekcije je:

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} \gamma r \cdot (1 - \xi|_{r=R}) \quad (\text{modifikovano}) \quad (3.185)$$

Mala razlika kod ovih izraza, je posledica greške pri izvođenju izraza (3.182) za smičuće napone. Ova greška je isto tako evidentna i kod izraza za smičuće napone (3.177), koji se odnosi na slučaj analize sa neopterećenom gornjom površinom materijala. Kako bi se ovo dokazalo, određuje se funkcija ξ na osnovu izraza (3.183) za $r = R$:

$$\xi|_{r=R} = \exp\left(\frac{-z}{\mu_w R}\right) \cdot \left[\cosh\left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R}\right) + \frac{1}{m} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{q_0}{\gamma z_0}\right) \cdot \sinh\left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R}\right) \right] \quad (3.186)$$

Za $z = 0$, iz gornjeg izraza se određuje da je $\xi(z=0)|_{r=R} = 1$, tako da se prema (3.185) potvrđuje da je kompletan dijagram smičućih napona jednak 0, za $z = 0$, odnosno da je $\tau_{rz}|_{z=0} \equiv 0$, a s tim je i napon do zida $\tau_w|_{z=0} = 0$, što je bilo zadato kao početni uslov.

U slučaju silosa bez nadopterećenja gornje površine materijala, tj. za $q_0 = 0$, izraz (3.186) se svodi na:

$$\xi|_{\substack{r=R \\ z=0}} = \exp\left(\frac{-z}{\mu_w R}\right) \cdot \left[\cosh\left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R}\right) + \frac{1}{m} \cdot \sinh\left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R}\right) \right] \quad (3.187)$$

Uvođenjem ove funkcije u korigovani opšti izraz za smičući napon (3.185), određuje se:

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} \gamma r \cdot \left[1 - \exp\left(\frac{-z}{\mu_w R}\right) \cdot \left(\cosh\left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R}\right) + \frac{1}{m} \cdot \sinh\left(\frac{m \cdot z}{\mu_w R}\right) \right) \right] \quad (\text{modifikovano}) \quad (3.188)$$

Ovaj izraz za smičuće napone je odgovarajuća korekcija izraza (3.177). Na kraju dokaza, određuje se odnos smičućeg napona i normalnog napona do zida, kod oba slučaja analize (sa i bez nadopterećenja na gornjoj površini materijala):

$$\left(\frac{\tau_{rz}}{\sigma_r} \right)_{r=R} = \frac{\tau_w}{\sigma_{rw}} = \frac{K \mu_w \cdot \gamma z_0 \cdot (1 - \xi|_{r=R})}{K \cdot \gamma z_0 \cdot (1 - \xi|_{r=R})} = \mu_w \quad (\text{sa modifikovanim izrazom za } \tau_w) \quad (3.189)$$

$$\left(\frac{\tau_{rz}}{\sigma_r} \right)_{r=R} = \frac{\tau_w}{\sigma_{rw}} = \frac{1 - \xi|_{r=0}}{1 - \xi|_{r=R}} \cdot \mu_w \neq \mu_w \quad (\text{sa originalnim izrazom za } \tau_w) \quad (3.190)$$

Pri korigovanoj analizi potvrđen je *Coulomb*-ov kriterijum za potpuno mobilisano trenje na zidu ćelije, što je bila uvedena pretpostavka u proračunu. Prema originalnoj analizi uvedena pretpostavka nije potvrđena. U originalnoj analizi smičući naponi su linearni sa radijalnim naponom u sredini silosa $\sigma_{r0} = \sigma_r|_{r=0}$, a treba da su linearni sa radijalnim naponima do zida ćelije $\sigma_{rw} = \sigma_r|_{r=R}$.

U osnovi, pri izvođenju postupka, izraz za smičuće napone je trebalo direktno odrediti na osnovu izraza (3.163) i (3.164), kako sledi:

$$\tau_{rz} = \frac{r}{R} \cdot \tau_w = \frac{r}{R} \cdot (\mu_w \cdot \sigma_{rw}) = \frac{r}{R} \cdot \mu_w \cdot K \cdot \gamma z_0 \cdot (1 - \xi|_{r=R}) = \frac{1}{2} \gamma r \cdot (1 - \xi|_{r=R}) \quad (3.191)$$

Kod postupka *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a, i navedenim korekcijama, svi izvedeni izrazi u principu važe, a jedino se zamenjuju izrazi za smičuće napone, i to su: izraz (3.177), koji se zamenjuje sa (3.188); i izraz za smičući napon (3.182), koji se zamenjuje sa izrazom (3.185).

Primer 3.7 – uporedni dijagrami smičućih napona kod generalisanog Jáky-evog postupka

U primeru se koriste sledeći osnovni podaci 3Dr silosa i materijala:

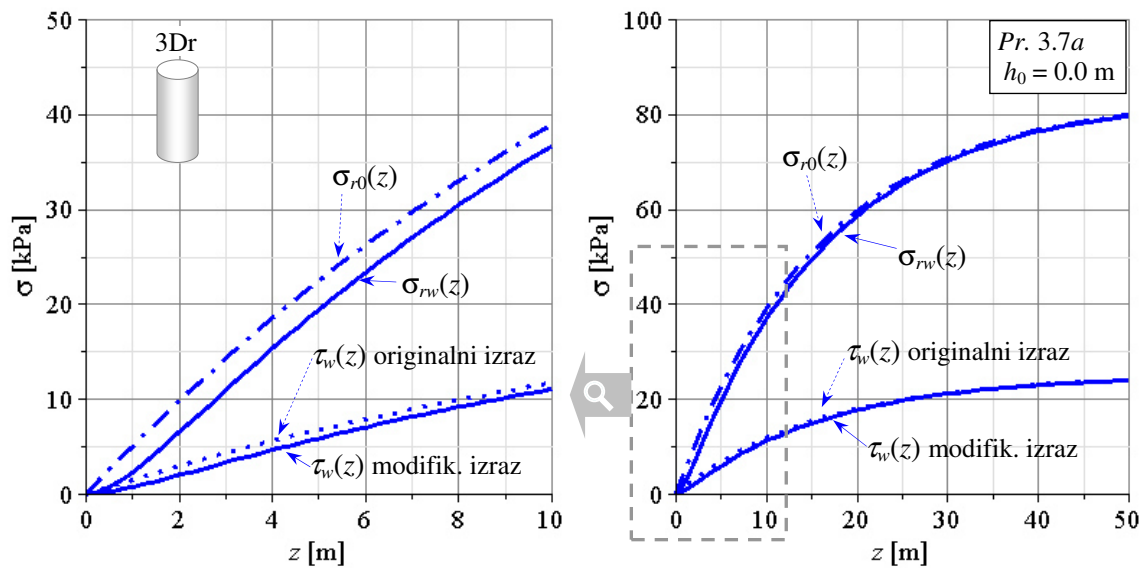
- $D = 10$ m; ($R = D/2 = 5.0$ m); $\gamma = 10$ kN/m³; $K = 0.5$ i $\mu_w = 0.3$.

Varira se nadopterećenje $q_0 = \gamma \cdot h_0$, preko variranja zamenjujuće visine h_0 :

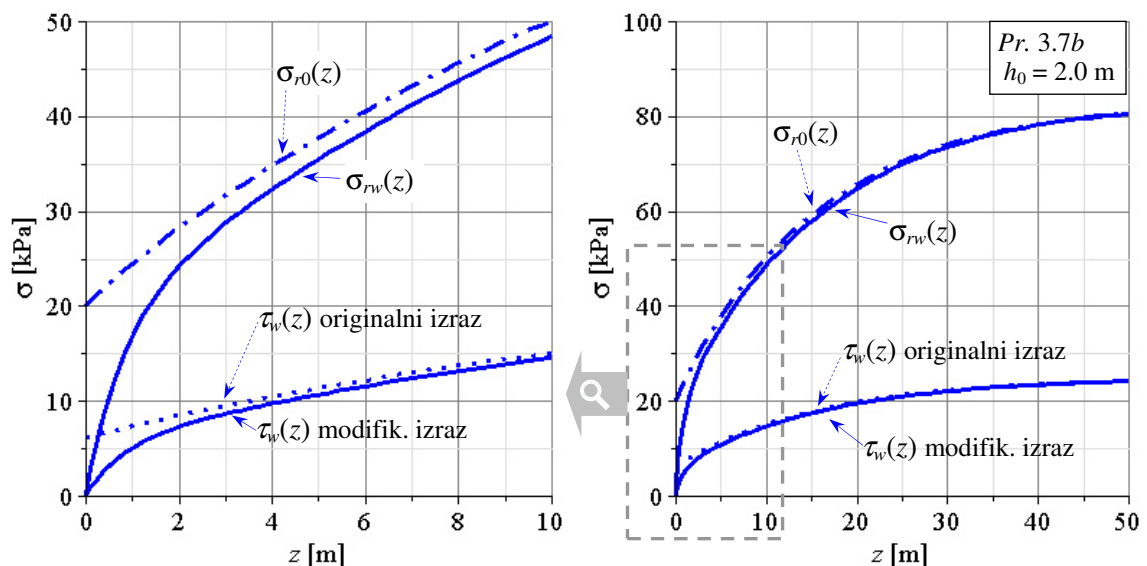
- analiza a: ravna gornja površina materijala bez nadopterećenja $\Rightarrow h_0 = 0.0$ m; i
- analiza b: ravna gornja površina materijala sa nadopterećenjem $\Rightarrow h_0 = 2.0$ m.

Naponi σ_r i τ_{rz} , se određuju izrazima (3.182) do (3.184), prema originalnoj analizi, a smičući naponi τ_{rz} u modifikovanoj analizi sa izrazima (3.185) i (3.186).

Hidraulički radijus za kružnu ćeliju je $r_h = A/U = D/4 = R/2 = 2.50$ m.



Sl. 118 Generalisani Jáky-ev postupak – Primer 3.7a - Korekcija dijagrama smičućih napona i radijalni naponi. (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $D = 10 \text{ m}$; $K = 0.5$; $\mu_w = 0.3$; $h_0 = 0.0 \text{ m}$).



Sl. 119 Generalisani Jáky-ev postupak – Primer 3.7b - Korekcija dijagrama smičućih napona i radijalni naponi. (Podaci: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $D = 10 \text{ m}$; $K = 0.5$; $\mu_w = 0.3$; $h_0 = 2.0 \text{ m}$).

Dijagrami σ_r i τ_{rz} , prema generalisanom Jáky-evom postupku (postupak Pipatpongsa-a i Heng-a) su prikazani na sl. 118 i sl. 119, za analize *a* i *b* respektivno, u funkciji dubine materijala z (do $z = 50 \text{ m}$). Radijalni naponi σ_r su prikazani sa dijagramima konturnih napona σ_{r0} i σ_{rw} , kao naponi u centralnoj osi silosa i do zida ćelije ($r = 0$ i $r = R$), a smičući napon τ_{rz} je predstavljen sa dijagramom konturnih napona smicanja τ_w do zida ćelije ($r = R$). Smičući naponi do zida τ_w su prikazani sa dijagramima, koji odgovaraju primeni originalnog i modifikovanog izraza za napone smicanja. Na slikama su na levoj strani dati uvećani dijagrami napona. Sa slika je evidentno, da je τ_w u modifikovanom obliku proporcionalan sa σ_{rw} , a τ_w u originalnom obliku sa σ_{r0} . Na ovaj način, pri uvođenju nadopterećenja $q_0 = \gamma \cdot h_0$, kod modifikacije napona smicanja, početni napon τ_w je anuliran, kao što je anuliran radijalni napon do zida ćelije σ_{rw} .

Rekapitulacija postupka sa korigovanim izrazima za smičuće napone

Opšti izrazi za proizvoljnu tačku u materijalu:

$$\sigma_z(z, r) = \sigma_z(z) = \sigma_{zf} \cdot (1 - \xi(z, 0)) = \sigma_{zf} \cdot (1 - \xi_0(z)) \quad (3.192)$$

$$\sigma_r(z, r) = \sigma_{rf} \cdot (1 - \xi(z, r)) \quad (3.193)$$

$$\tau_{rz}(z, r) = \tau_{rzf}(r) \cdot (1 - \xi(z, R)) = \tau_{rzf}(r) \cdot (1 - \xi_w(z)) \quad (3.194)$$

Funkcije ξ :

- slučaj sa nadopterećenjem q_0

$$h_0 = q_0 / \gamma \quad (3.195)$$

$$\xi(z, r) = e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\left[1 - \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \cdot \frac{h_0}{z_0} \right] \cdot \cosh \left(\frac{m z}{\mu_w R} \right) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{m} \cdot \left[1 - \frac{1 - m^2}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) - \left(1 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \cdot \frac{h_0}{z_0} \right] \cdot \sinh \left(\frac{m z}{\mu_w R} \right) \right] \quad (3.196)$$

$$\xi_0(z) = e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\left(1 - \frac{h_0}{z_0} \right) \cdot \cosh \left(\frac{m z}{\mu_w R} \right) + \frac{1}{m} \cdot \left(1 - \frac{1 - m^2}{2} - \frac{h_0}{z_0} \right) \cdot \sinh \left(\frac{m z}{\mu_w R} \right) \right] \quad (3.197)$$

$$\xi_w(z) = e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\cosh \left(\frac{m z}{\mu_w R} \right) + \frac{1}{m} \cdot \left(1 - 2 \frac{h_0}{z_0} \right) \cdot \sinh \left(\frac{m z}{\mu_w R} \right) \right] \quad (3.198)$$

- slučaj bez nadopterećenja ($q_0 = 0$)

$$h_0 = 0 \quad (3.199)$$

$$\xi(z, r)|_{q_0=0} = e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\cosh \left(\frac{m z}{\mu_w R} \right) + \frac{1}{m} \cdot \left(1 - \frac{1 - m^2}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \right) \cdot \sinh \left(\frac{m z}{\mu_w R} \right) \right] \quad (3.200)$$

$$\xi_0(z)|_{q_0=0} = e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\cosh \left(\frac{m z}{\mu_w R} \right) + \frac{1 + m^2}{2 m} \cdot \sinh \left(\frac{m z}{\mu_w R} \right) \right] \quad (3.201)$$

$$\xi_w(z)|_{q_0=0} = e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\cosh \left(\frac{m z}{\mu_w R} \right) + \frac{1}{m} \cdot \sinh \left(\frac{m z}{\mu_w R} \right) \right] \quad (3.202)$$

gde su:

$$m = \sqrt{1 - 4K \cdot \mu_w^2} \quad (3.203)$$

$$z_0 = r_h / (K \mu_w) \quad (\text{za opšti presek: } r_h = A / U ; R = 2 r_h) \quad (3.204)$$

$$z_0 = (R / 2) / (K \mu_w) \quad (\text{za kružni presek: } r_h = R / 2 ; R = D / 2) \quad (3.205)$$

Asimptotske vrednosti napona:

$$\tau_{rzf}(r) = \tau_{wf} \cdot \frac{r}{R} = \gamma r_h \cdot \frac{r}{R} \quad (3.206)$$

$$p_{wf} = \tau_{wf} = \gamma \cdot r_h \quad (\text{za opšti presek: } r_h = A/U ; R = 2r_h) \quad (3.207)$$

$$p_{wf} = \tau_{wf} = \gamma \cdot \frac{R}{2} \quad (\text{za kružni presek: } r_h = R/2 ; R = D/2) \quad (3.208)$$

$$p_{wf} = \tau_{wf} = \gamma \cdot b \quad (\text{za 2D silos: } r_h = B/2 = b ; R = B = 2b) \quad (3.209)$$

$$p_{hf} = \sigma_{rf} = \tau_{wf} / \mu_w \quad (3.210)$$

$$p_{vf} = \sigma_{zf} = \sigma_{rf} / K \quad (3.211)$$

Konturni naponi za $r = 0$ (u osi silosa) i $r = R$ (do zida silosa)

$$\sigma_r(z, 0) = \sigma_{r0}(z) = \sigma_{rf} \cdot (1 - \xi(z, 0)) \Leftrightarrow \sigma_{r0}(z) = \sigma_{rf} \cdot (1 - \xi_0(z)) \quad (3.212)$$

$$\sigma_r(z, R) = \sigma_{rR}(z) = \sigma_{rf} \cdot (1 - \xi(z, R)) \Leftrightarrow \sigma_{rR}(z) = \sigma_{rf} \cdot (1 - \xi_w(z)) \quad (3.213)$$

$$\sigma_z(z) = \sigma_{zf} \cdot (1 - \xi(z, 0)) \Leftrightarrow \sigma_z(z) = \sigma_{zf} \cdot (1 - \xi_0(z)) \quad (3.214)$$

$$\tau_{rz}(z, R) = \tau_{zRf} \cdot (1 - \xi(z, R)) \Leftrightarrow \tau_w(z) = \tau_{wf} \cdot (1 - \xi_w(z)) \quad (3.215)$$

$$\tau_{rz}(z, 0) = 0 \Leftrightarrow \tau_0(z) = 0 \quad (3.216)$$

Opterećenje zida ćelije:

$$p_v = p_v(z) = \sigma_z(z) = \sigma_{zf} \cdot (1 - \xi_0(z)) = p_{zf} \cdot (1 - \xi_0(z)) \quad (3.217)$$

$$p_h = p_h(z) = \sigma_{rR}(z) = \sigma_{rf} \cdot (1 - \xi_w(z)) = p_{hf} \cdot (1 - \xi_w(z)) \quad (3.218)$$

$$p_w = p_w(z) = \tau_w(z) = \tau_{wf} \cdot (1 - \xi_w(z)) = p_{wf} \cdot (1 - \xi_w(z)) \quad (3.219)$$

Horizontalni pritisci u sredini silosa:

$$p_{h0} = p_{h0}(z) = \sigma_{r0}(z) = \sigma_{rf} \cdot (1 - \xi_0(z)) = p_{hf} \cdot (1 - \xi_0(z)) \quad (3.220)$$

Ovi pritisci se mogu odrediti jednostavnije preko sračunatih p_v napona:

$$p_{h0} = p_{h0}(z) = \sigma_z(z) \cdot K = p_v(z) \cdot K = p_v \cdot K \quad (3.221)$$

Razvijeni izrazi za određivanje opterećenja na zidu ćelije:

- slučaj bez nadopterećenja ($q_0 = 0$, odnosno $h_0 = 0$)

$$\sigma_z = p_v = p_{vf} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\cosh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) + \frac{1+m^2}{2m} \cdot \sinh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) \right] \right) \quad (3.222)$$

$$\sigma_{rR} = p_h = p_{hf} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\cosh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) + \frac{1}{m} \cdot \sinh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) \right] \right) = p_w / \mu_w \quad (3.223)$$

$$\tau_w = p_w = p_{wf} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\cosh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) + \frac{1}{m} \cdot \sinh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) \right] \right) = p_h \cdot \mu_w \quad (3.224)$$

i dodatno za sredinu silosa:

$$\sigma_{r0} = p_{h0} = p_{hf} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\cosh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) + \frac{1+m^2}{2m} \cdot \sinh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) \right] \right) = p_v \cdot K \quad (3.225)$$

- slučaj sa nadopterećenjem q_0 (uvodi se $h_0 = q_0 / \gamma$)

$$\sigma_z = p_v = p_{vf} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\left(1 - \frac{h_0}{z_0}\right) \cdot \cosh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) + \frac{1}{m} \cdot \left(1 - \frac{1-m^2}{2} - \frac{h_0}{z_0}\right) \cdot \sinh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) \right] \right) \quad (3.226)$$

$$\sigma_{rw} = p_h = p_{hf} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\cosh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) + \frac{1}{m} \cdot \left(1 - 2\frac{h_0}{z_0}\right) \cdot \sinh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) \right] \right) = p_w / \mu_w \quad (3.227)$$

$$\tau_w = p_w = p_{wf} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\cosh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) + \frac{1}{m} \cdot \left(1 - 2\frac{h_0}{z_0}\right) \cdot \sinh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) \right] \right) = p_h \cdot \mu_w \quad (3.228)$$

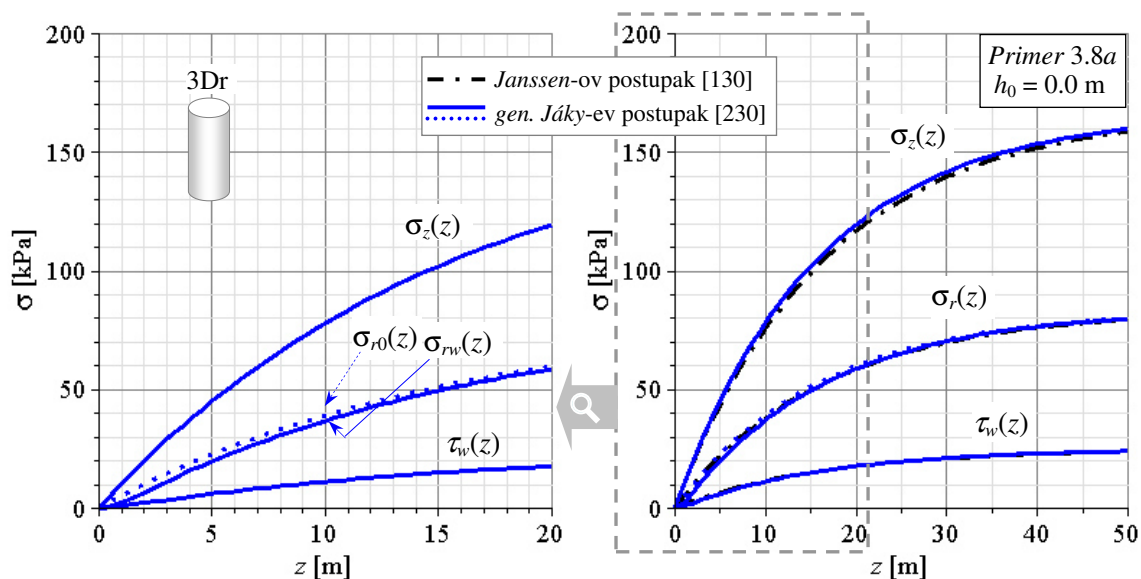
i dodatno za sredinu silosa:

$$\sigma_{r0} = p_{h0} = p_{hf} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\left(1 - \frac{h_0}{z_0}\right) \cdot \cosh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) + \frac{1}{m} \cdot \left(1 - \frac{1-m^2}{2} - \frac{h_0}{z_0}\right) \cdot \sinh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) \right] \right) = p_v \cdot K \quad (3.229)$$

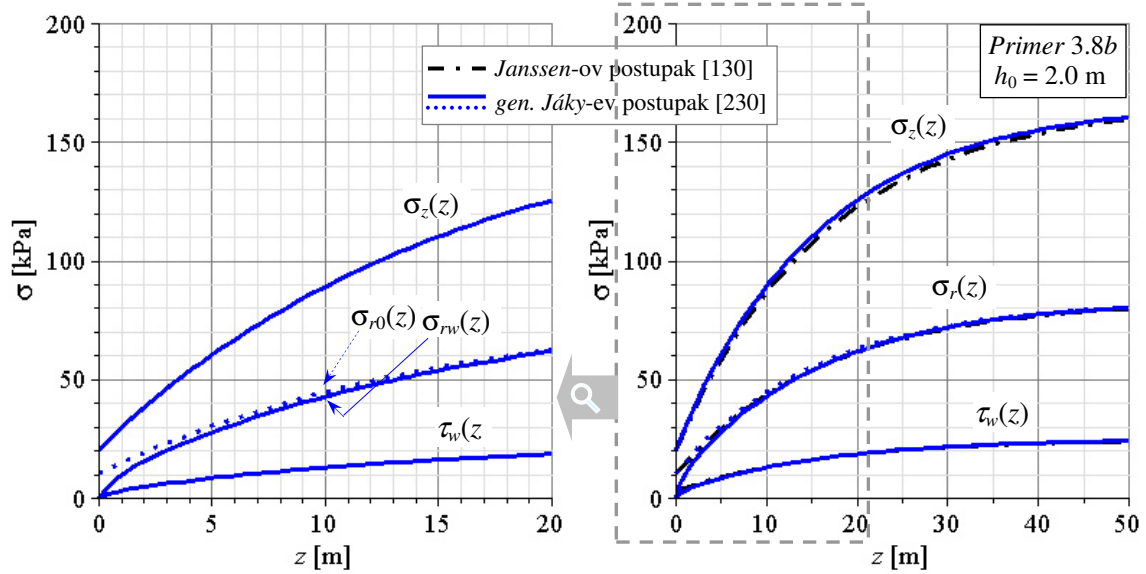
Primer 3.8 – uporedna analiza napona prema gen. Jáky-evom i Janssen-ovom postupku

U primeru se koriste sledeći osnovni podaci 3Dr silosa i materijala:

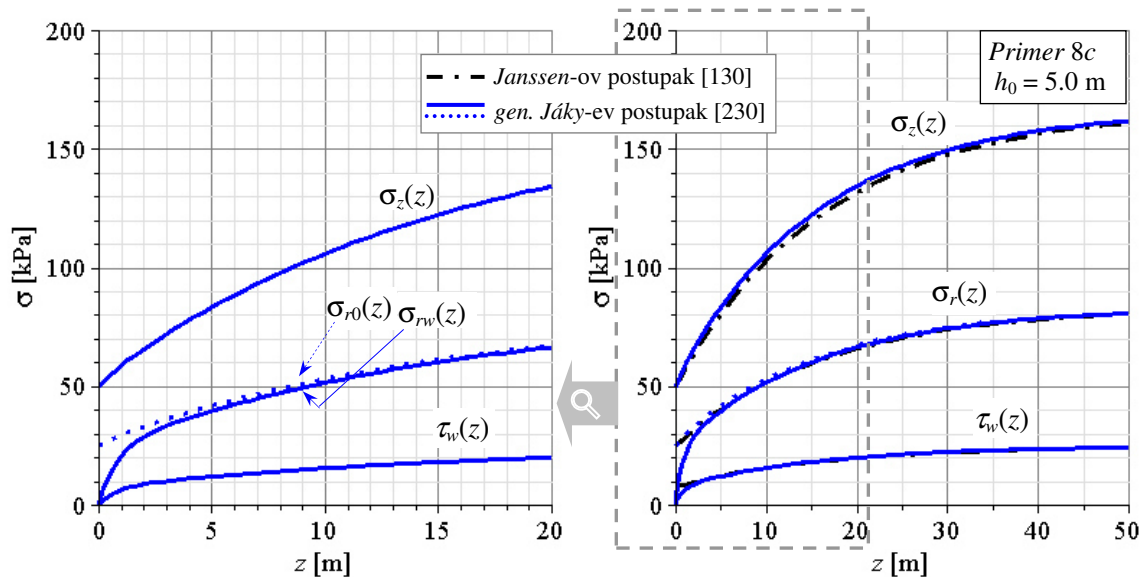
- $D = 10$ m; ($R = D / 2 = 5.0$ m); $\gamma = 10$ kN/m³; $K = 0.5$ i $\mu_w = 0.3$.
- Varira se nadopterećenje $q_0 = \gamma \cdot h_0$, preko variranja zamenjujuće visine h_0 :
 $h_0 = 0.0; 2.0; 5.0; z_0$ i 20 m (redom u analizama *a, b, c, d* i *e*).
- Hidraulički radijus za kružnu ćeliju je $r_h = A/U = D/4 = R/2 = 2.50$ m.
- Karakteristična Janssen-ova dubina materijala je $z_0 = r_h / (K \cdot \mu_w) = 16.667$ m.



Sl. 120 Generalisani Jáky-ev postupak – Primer 3.8a – 3Dr silos – Dijagrami napona i upoređenje sa Janssen-ovom teorijom; slučaj analize sa $h_0 = 0.0$ m.



Sl. 121 Generalisani Jáky-ev postupak– Primer 3.8b – 3Dr silos – Dijagrami napona i upoređenje sa Janssen-ovom teorijom; slučaj analize sa $h_0 = 2.0$ m.

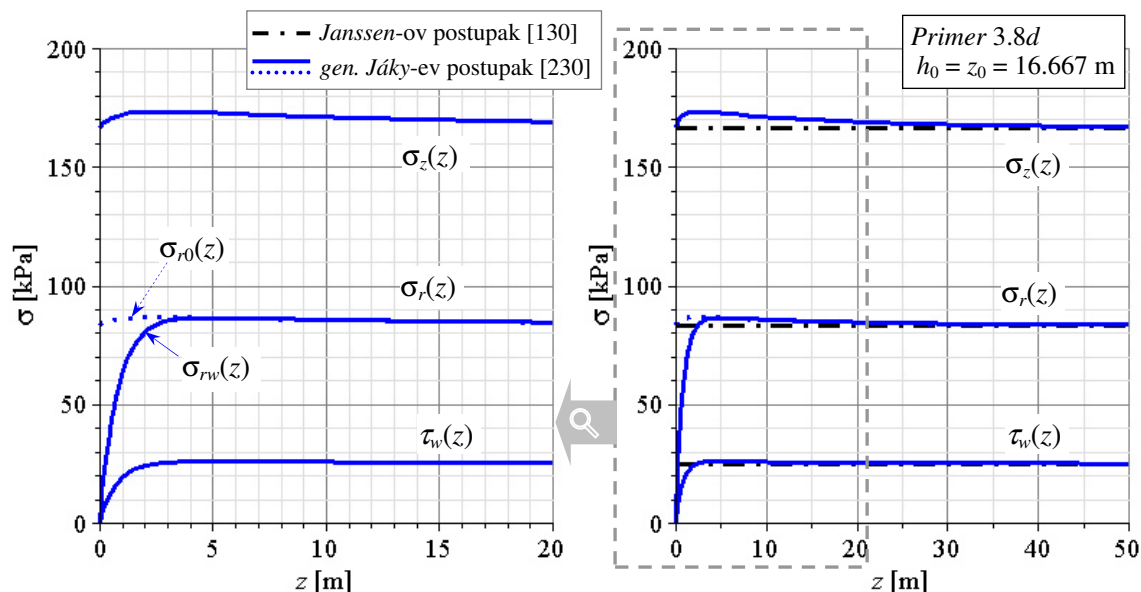


Sl. 122 Generalisani Jáky-ev postupak– Primer 3.8c – 3Dr silos – Dijagrami napona i upoređenje sa Janssen-ovom teorijom; slučaj analize sa $h_0 = 5.0$ m.

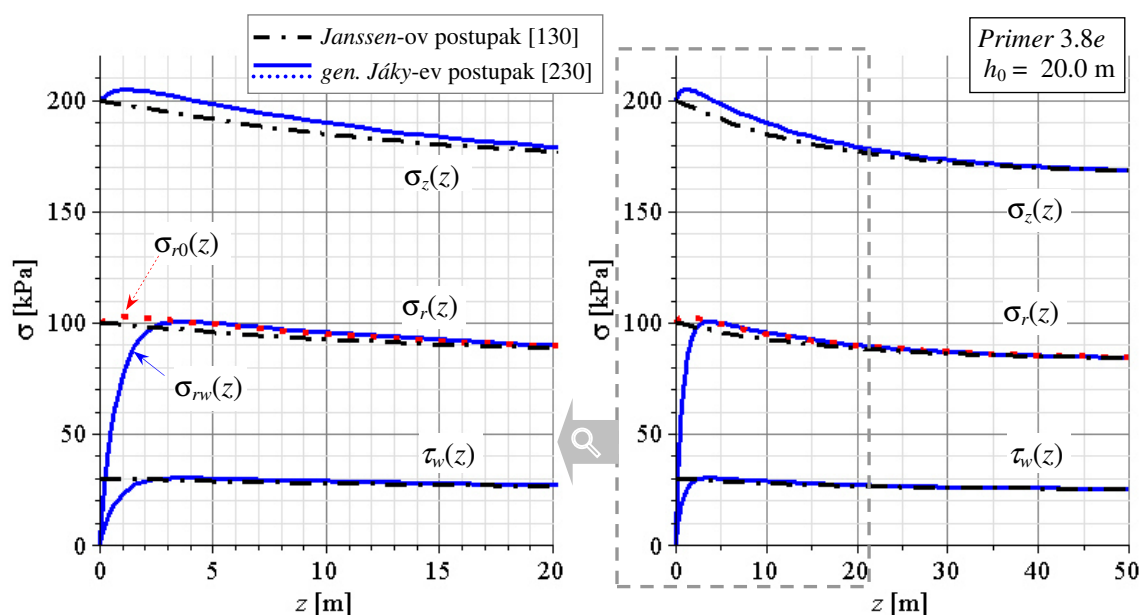
Prema generalisanom Jáky-evom postupku, naponi σ_z , σ_{rw} , σ_{r0} i τ_w , se određuju primenom izraza (3.226) do (3.229) i izraza (3.203) do (3.211), za kružnu ćeliju silosa. Naponi prema Janssen-ovom postupku, σ_z , σ_r i τ_w , se određuju kao opterećenja p_v , p_h i p_w prema izrazima (3.49) do (3.51) i (3.21).

Za ukupno pet analiza (od *a* do *e*), kod kojih je varirana visina h_0 , prikazani su dijagrami napona σ_z , σ_r i τ_w , prema generalisanom Jáky-evom postupku i Janssen-ovom postupku, u funkciji dubine z (do $z = 50$ m), na sl. 120 do sl. 124, respektivno. Kod ovih slika na levoj strani su prikazani uvećani dijagrami napona prema generalisanom Jáky-evom postupku.

Prema analizi dijagrama prikazanim na ovim slikama, može se zaključiti da naponi prema Janssen-u i prema Jáky-u imaju iste asimptote pri $z \rightarrow \infty$. Vrednosti vertikalnog napona prema Janssen-u su neznatno manje od odgovarajućih vrednosti prema Jáky-u.



Sl. 123 Generalisani Jáky-ev postupak– Primer 3.8d – 3Dr silos – Dijagrami napona i upoređenje sa Janssen-ovom teorijom; slučaj analize sa $h_0 = z_0 = 16.667$ m.



Sl. 124 Generalisani Jáky-ev postupak– Primer 3.8e – 3Dr silos – Dijagrami napona i upoređenje sa Janssen-ovom teorijom; slučaj analize sa $h_0 = 20.0$ m.

Početne i asimptotske vrednosti vertikalnog napona su jednake prema ovim postupcima. Kod dijagrama radijalnih (horizontalnih) napona, kao i kod napona smicanja do zida ćelije, prema ova dva postupka postoji veliko slaganje. Kod ovih dijagrama pri manjim dubinama (orijentaciono do 5 m), radijalni naponi σ_r prema Janssen-u, slede Jáky-eve radijalne napone u osi silosa σ_{r0} , a u vezi s tim, naponi smicanja prema Janssen-u proporcionalno prate Jáky-eve radijalne napone σ_{r0} . Pri manjim dubinama, razlikuju se naponi smicanja prema Janssen-u i Jáky-u.

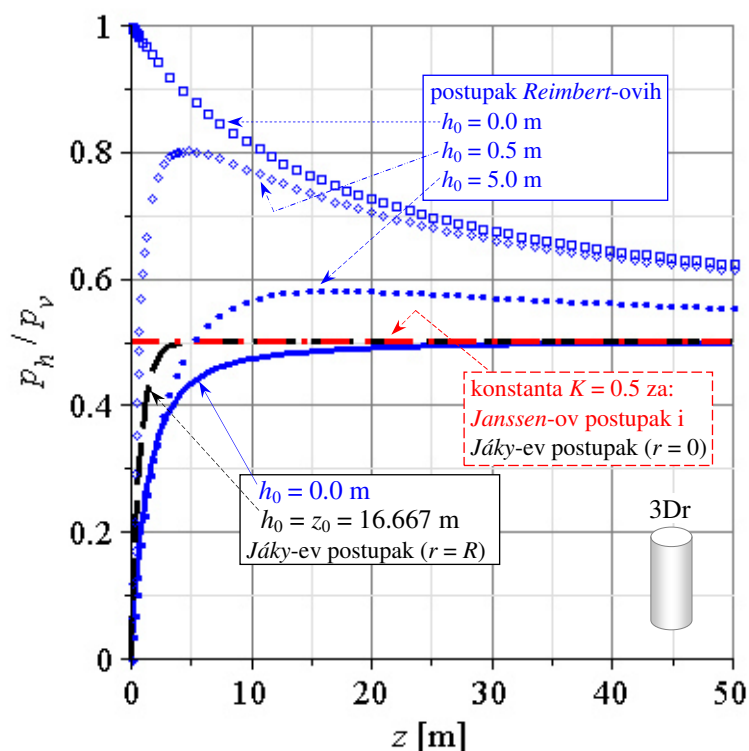
U posebnom slučaju gde je $h_0 = z_0$, kada je nadopterećenje q_0 , jednako po vrednosti sa asimptotskim vertikalnim naponom $\sigma_z(\infty) = \sigma_{zf} = p_{vf}$, kod Janssen-ove analize su svi naponi konstantni i ne menjaju se po dubini, što nije slučaj kod Jáky-eve analize (sl. 123).

Na sl. 124, prikazani su dijagrami koji odgovaraju slučaju gde je $h_0 > z_0$. Oba postupka daju odgovarajuća rešenja u ovom slučaju, za razliku od postupka *Reimbert-ovih*, kod kojeg ovo nije bilo moguće.

Dijagrami napona smicanja prema *Jáky-u*, su prikazani u modifikovanom obliku na ovim slikama. Može se konstatovati da je postupak *Pipatpongsa-a* i *Heng-a* (generalisani *Jáky-ev* postupak), do sada najsavršeniji u grupi postupaka, kod kojih su dijagrami vertikalnih napona u preseku ćelije konstantni. Rešenja su vrlo bliska *Janssen-ovim* rešenjima, izuzev pri manjim dubinama materijala, a poseduje kvalitete postupka *Reimbert-ovih*. Međutim, u odnosu na *Janssen-ov* postupak, primena postupka *Pipatpongsa-a* i *Heng-a* je relativno složenija.

Odnos napona $K(z)$ prema generalisanom *Jáky-evom* postupku

Prema gener. *Jáky-evom* postupku, odnos napona $K(z) = p_h/p_v = \sigma_r/\sigma_z$ je konstantan u centralnoj osi silosa, ali je van ove ose promenljiv u obliku $K(z,r) = \sigma_r(z,r)/\sigma_z(z)$, kako su kod ovog postupka promenljivi radijalni naponi $\sigma_r(z,r)$ po koordinatama z i r . Kako u asimptotskom slučaju radijalni naponi teže konstantnoj vrednosti, u tom slučaju je $K(z \rightarrow \infty, r) = K$. Kada se radijalni naponi posmatraju na konturama, određuju se i odgovarajući odnosi napona $K_0 = \sigma_{r0}(z)/\sigma_z(z) = K$ i $K_w(z) = \sigma_{rw}(z)/\sigma_z(z)$. Kod *Jáky-evog* postupka vertikalni napon $\sigma_z(z)$, je konstantan u preseku ćelije.



Sl. 125 Upoređenje odnosa radijalnog i vertikalnog napona kod 3Dr silosa prema gen. *Jáky-evom* postupku, postupku *Reimbert-ovih* i *Janssen-ovom* postupku.

Na sl. 125, prikazan je odnos napona: K_0 i $K_w(z)$, prema generalisanom *Jáky-evom* postupku (za odnos napona do zida i u osi silosa, u slučajevima analize sa $h_0 = 0$ i $h_0 = z_0 = 16.667$ m); $K(z)$ prema postupku *Reimbert-ovih* (u slučajevima analize sa $h_0 = 0, 0.5$ i 5.0 m); i konstantno K prema *Janssen-ovom* postupku. Ostali podaci u ovim analizama

su: $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$; $D = 10 \text{ m}$; $K = 0.5$ i $\mu_w = 0.3$. Može se uočiti da su kod generalisanog Jáky-evog postupka, vrednosti $K_w(z) < K_0$, a da se ovi odnosi napona sa povećanjem dubine z , brzo približavaju asimptotskoj vrednosti odnosa napona $K_0 = K$. Pri većem intenzitetu nadopterećenja q_0 , odnos napona $K_w(z)$, relativno brže prilazi asimptotskoj vrednosti $K_0 = K$.

3.4.2 Analiza preseka opšteg oblika

U ovom delu se razmatra mogućnost primene postupka za opšti oblik preseka, kao i uvođenje funkcija raspodele pritiska po visini Y_0 i Y_w , u sredini silosa i do zida ćelije. Najjednostavniji postupak određivanja opterećenja u slučaju analize stanja napona kod silosa opšteg oblika preseka ćelije, u principu odgovara primeni sledećih izraza po redosledu prikazivanja:

$$r_h = A/U \quad (\text{hidraulički radijus}) \quad (3.230)$$

$$R = 2r_h \quad (\text{srednji hidraulički radijus}) \quad (3.231)$$

$$p_w = p_{wf} \cdot Y_w(z) \quad (= p_h \cdot \mu_w) \quad (3.232)$$

$$p_h = p_{hf} \cdot Y_w(z) = p_w / \mu_w \quad (3.233)$$

$$p_v = p_{vf} \cdot Y_0(z) \quad (3.234)$$

i dodatno za sredinu silosa:

$$p_{h0} = p_{hf} \cdot Y_0(z) = p_v \cdot K \quad (3.235)$$

$$p_{wf} = \gamma \cdot r_h \quad (3.236)$$

$$p_{hf} = p_{wf} / \mu_w \quad (3.237)$$

$$p_{vf} = p_{hf} / K \quad (3.238)$$

$$m = \sqrt{1 - 4K \cdot \mu_w^2} \quad (3.239)$$

- za nadopterećenje $q_0 = 0$, odnosno $h_0 = 0$

$$Y_0(z) = 1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\cosh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) + \frac{1+m^2}{2m} \cdot \sinh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) \right] \quad (3.240)$$

$$Y_w(z) = 1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\cosh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) + \frac{1}{m} \cdot \sinh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) \right] \quad (3.241)$$

- za nadopterećenje q_0 , odnosno $h_0 = q_0 / \gamma$

$$z_0 = r_h / (K\mu_w) \quad (3.242)$$

$$Y_0(z) = 1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\left(1 - \frac{h_0}{z_0}\right) \cdot \cosh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) + \frac{1}{m} \cdot \left(1 - \frac{1-m^2}{2} - \frac{h_0}{z_0}\right) \cdot \sinh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) \right] \quad (3.243)$$

$$Y_w(z) = 1 - e^{-\frac{z}{\mu_w R}} \cdot \left[\cosh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) + \frac{1}{m} \cdot \left(1 - 2\frac{h_0}{z_0}\right) \cdot \sinh\left(\frac{mz}{\mu_w R}\right) \right] \quad (3.244)$$

Rešenja stanja napona su određena za ćelije kružne osnove, a mogu se primeniti na slične preseke ćelije (pravilni poligoni preseki). U ovom pravcu analiziraju se sledeći slučajevi:

$$z_0 = r_h / (K\mu_w) \quad (\text{za opšti presek: } r_h = A/U ; R = 2r_h) \quad (3.245)$$

$$z_0 = (R/2) / (K\mu_w) \quad (\text{za kružni presek: } r_h = R/2 ; R = D/2) \quad (3.246)$$

$$\tau_{wf} = \gamma \cdot r_h \quad (\text{za opšti presek: } r_h = A/U ; R = 2r_h) \quad (3.247)$$

$$\tau_{wf} = \gamma \cdot \frac{R}{2} \quad (\text{za kružni presek: } r_h = R/2 ; R = D/2) \quad (3.248)$$

$$\tau_{rf}(r) = \tau_{wf} \cdot \frac{r}{R} = \gamma r_h \cdot \frac{r}{R} \quad (\text{za opšti presek}) \quad (3.249)$$

$$\tau_{rf}(r) = \tau_{wf} \cdot \frac{r}{R} = \gamma \cdot \frac{r}{2} \quad (\text{za kružni presek}) \quad (3.250)$$

Kod silosa sa horizontalnim presekom u obliku pravilnog poligona, problem određivanja napona se svodi na analognu situaciju kao kod *Janssen*-a, da se rešenje stanja napona određuju na cilindričnom silosu, gde prečnik kružne osnove cilindričnog silosa, odgovara upisanom prečniku u pravilni poligoni presek ćelije. Ostali podaci se koriste kao kod realne ćelije.

3.4.3 Aproksimativna analiza stanja napona kod 2D silosa

Horizontalni presek ćelije u obliku vrlo izduženog pravougaonog preseka, odgovara ravnom problemu analize stanja napona, odnosno analizi 2D silosa. Ovaj slučaj preseka ne spada u preseke "slične" kružnim presecima, ali se slično uopštavanju kod *Janssen*-ove teorije, i u ovom slučaju može približno odrediti stanje napona uz primenu sledećih transformacija: koordinata r se smenjuje sa koordinatom x , relativna koordinata (r/R) se smenjuje sa (x/b) , hidraulički radijus r_h se uzima kao polurazmak između zidova b , a srednji hidraulički radijus R je $2b$. Opterećenja kod 2D silosa se određuju primenom opštih izraza od (3.230) do (3.244), a stanje napona se u potpunosti definiše uvođenjem sledećih izraza:

$$z_0 = b / (K\mu_w) \quad (\text{za 2D silos: } r_h = \frac{B \cdot L}{2(B+L)} \Big|_{L \rightarrow \infty} = B/2 = b ; R = B = 2b) \quad (3.251)$$

$$\tau_{wf} = \gamma \cdot b \quad (\text{za 2D silos: } r_h = B/2 = b ; R = B = 2b) \quad (3.252)$$

$$\tau_{xf}(x) = \tau_{wf} \cdot \frac{x}{b} = \gamma r_h \cdot \frac{x}{b} = \gamma b \cdot \frac{x}{b} = \gamma x \quad (\text{za 2D silos: } r/R \text{ se smenjuje sa } x/b) \quad (3.253)$$

$$p_h(z, x) = \sigma_x(z, x) = \sigma_{xf} \cdot (1 - \xi(z, x)) = p_{hf} \cdot (1 - \xi(z, x)) \quad (3.254)$$

$$\xi(z, x) = e^{-\frac{z}{\mu_w 2b}} \cdot \left(\left[1 - \left(1 - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right) \cdot \frac{h_0}{z_0} \right] \cdot \cosh \left(\frac{mz}{\mu_w 2b} \right) + \dots \right. \\ \left. + \frac{1}{m} \cdot \left[1 - \frac{1-m^2}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right) - \left(1 + \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right) \cdot \frac{h_0}{z_0} \right] \cdot \sinh \left(\frac{mz}{\mu_w 2b} \right) \right) \quad (3.255)$$

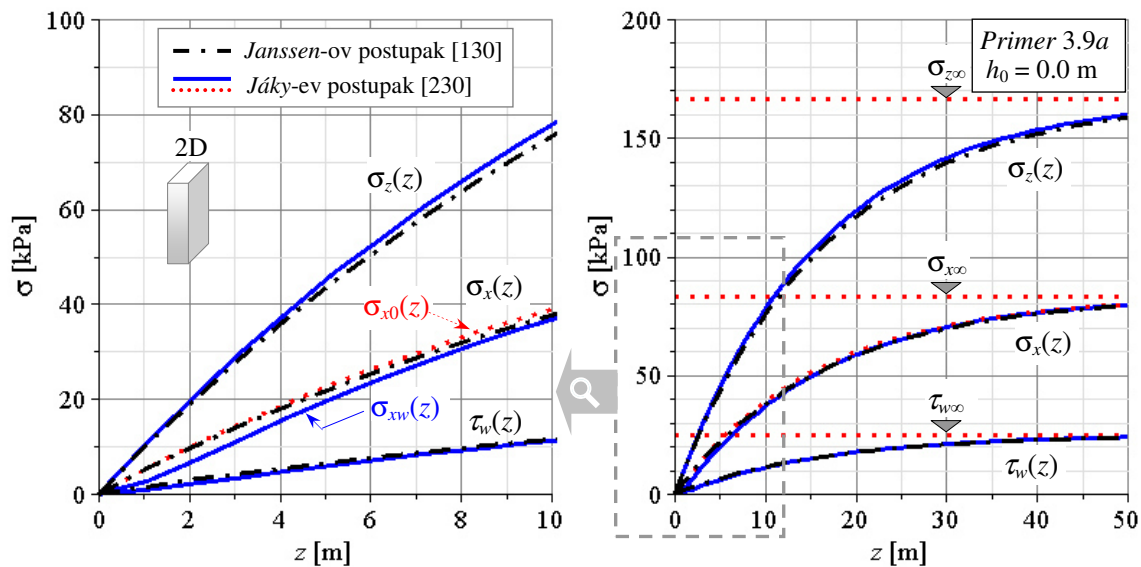
$$\xi(z, x) \Big|_{Q=0} = e^{-\frac{z}{\mu_w 2b}} \cdot \left[\cosh \left(\frac{mz}{\mu_w 2b} \right) + \frac{1}{m} \cdot \left(1 - \frac{1-m^2}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{b} \right)^2 \right) \right) \cdot \sinh \left(\frac{mz}{\mu_w 2b} \right) \right] \quad (3.256)$$

Kako ovo predstavlja specifični pristup analizi stanja napona za 2D silos, potrebno je uporediti rešenja sa *Janssen*-ovom analizom kod ovog slučaja silosa. Kod kružnih silosnih ćelija primenom opisanog generalisanog *Jáky*-evog postupka, određeni su rezultati bliski *Janssen*-ovoj analizi.

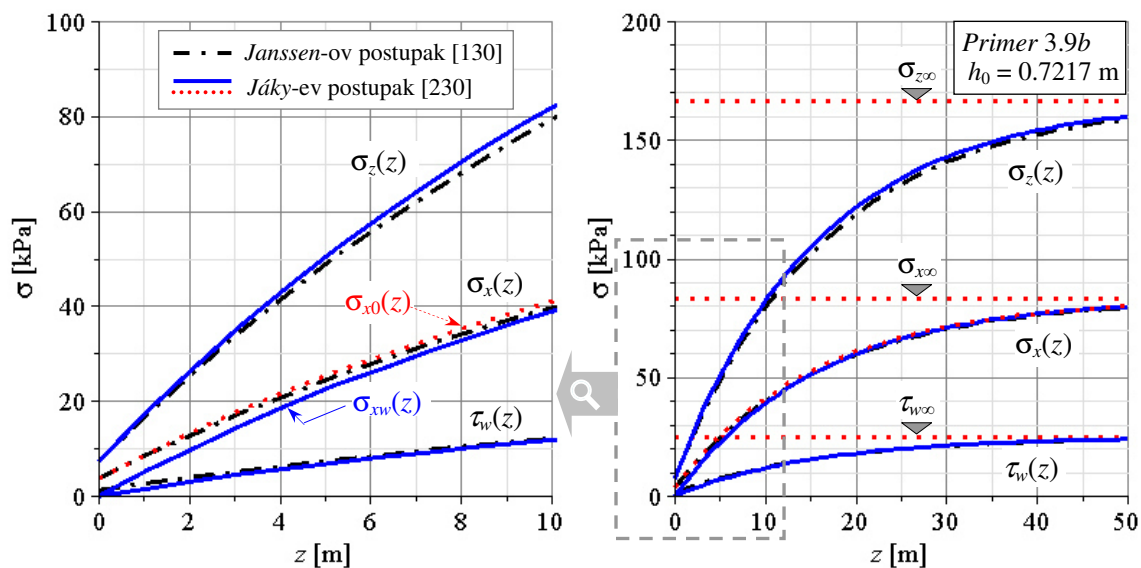
Primer 3.9 – analiza napona u 2D silosu prema gen. *Jáky*-evom i *Janssen*-ovom postupku

U primeru se koriste sledeći osnovni podaci 2D silosa i materijala:

- $B = 5$ m; ($b = B/2 = 2.5$ m); $\gamma = 10$ kN/m³; $K = 0.5$; $\mu_w = 0.3$ i $\phi_r = 30^\circ$.
- Visina poravnanja trougaone nasipne prizme je $h_{0\Delta} = b/2 \cdot \tan \phi_r = 0.7217$ m.
- analiza *a*: ravna gornja površina materijala, bez nasipne prizme $\Rightarrow h_0 = 0.0$ m; i
- analiza *b*: uvodi se nadopterećenje $q_0 = \gamma \cdot h_0$ od nasipne prizme $\Rightarrow h_0 = 0.7217$ m.



Sl. 126 Generalisani *Jáky*-ev postupak– Primer 3.9a – 2D silos (aprox. analiza) – Dijagrami napona i upoređenje sa *Janssen*-ovom teorijom; slučaj sa $h_0 = 0.0$ m.



Sl. 127 Generalisani *Jáky*-ev postupak– Primer 3.9b – 2D silos (aprox. analiza) – Dijagrami napona i upoređenje sa *Janssen*-ovom teorijom; slučaj sa $h_0 = h_{0\Delta} = 0.7217$ m.

Hidraulički radijus za izduženu pravougaonu ćeliju je $r_h = A/U = b = 2.5$ m.

Karakteristična *Janssen*-ova dubina materijala je $z_0 = r_h/(K \cdot \mu_w) = 16.667$ m.

Kod aproksimativne analize stanja napona kod 2D silosa prema generalisanom *Jáky*-evom postupku, koriste se opšti izrazi od (3.230) do (3.244), i izrazi od (3.251) do (3.256). Pri primeni *Janssen*-ovog postupka, σ_z , σ_r i τ_w , se određuju kao opterećenja p_v , p_h i p_w prema izrazima (3.49) do (3.51), a z_0 i r_h se mogu uzeti sa sređenim oblicima za 2D silos, prema (3.251).

Kod primene *Janssen*-ovog postupka, određuju se jednaki dijagrami kod analize 3Dr silosa sa prečnikom $D = 10$ m (na sl. 120), i kod 2D silosa sa razmakom zidova $B = 5$ m (na sl. 126), u analizi sa istim h_0 (u primerima je $h_0 = 0.0$ m), i sa istim ostalim podacima. Napominje se da pri uvođenju nadopterećenja $p_{v0} = q_0$, sa kojim se zamenjuje uticaj nasipne prizme, treba uvesti zamenjujuću visina h_0 , koja odgovara visini poravnanja nasipne prizme. Može se konstatovati da je slaganje rezultata prema ovim postupcima, kod analize 2D silosa, jednako dobro kao kod 3Dr silosa u primeru 3.8.

3.4.4 Analiza nadopterećenja

Razmatra se uvođenje težine nasipnog dela materijala u obliku nadopterećenja q_0 na površinu osnove u ravni podnožja slobodno stojećeg nasipnog dela materijala.

Težina nasipne kupe, odnosno položene nasipne trougaone prizme materijala iznosi:

$$Q_0 = \gamma \cdot V_0 = \left(\gamma \cdot A \cdot \frac{h_{tp}}{3} \right)_{\substack{\text{za nasipni deo} \\ \text{u obliku kupe}}} = \left(\gamma \cdot A \cdot \frac{h_{tp}}{2} \right)_{\substack{\text{za nasipni deo} \\ \text{u obliku prizme}}} = \gamma \cdot A \cdot h_0 \quad (3.257)$$

gde je V_0 zapremina nasipne kupe/prizme, h_{tp} visina nasipne kupe/prizme materijala sa poluprečnikom kružne osnove R , odnosno polurazmakom vertikalnih zidova b , i h_0 visina ekvivalentne površine koja odgovara nivou poravnatog nasipnog dela materijala u odnosu na nivo osnove nasipnog dela.

Visina h_0 se određuje prema izrazima:

$$h_0 = \left(\frac{h_{tp}}{3} \right)_{\substack{\text{za nasipni deo} \\ \text{u obliku kupe}}} = \left(\frac{h_{tp}}{2} \right)_{\substack{\text{za nasipni deo} \\ \text{u obliku prizme}}} \quad (3.258)$$

$$h_0 = h_{tp} / 3 = R / 3 \cdot \tan \phi_r \quad (\text{nasipna kupa formirana sa centričnim nasipanjem}) \quad (3.259)$$

$$h_0 = h_{tp} / 2 = b / 2 \cdot \tan \phi_r \quad (\text{nasipna prizma formirana linijskim nasipanjem}) \quad (3.260)$$

Zamenjujuće vertikalno ravnomerno raspoređeno opterećenje q_0 (kao nadopterećenje), se određuje prema izrazu:

$$q_0 = p_{v0} = Q_0 / A = \gamma \cdot h_0 \quad (3.261)$$

gde $h_0 = q_0 / \gamma$ predstavlja zamenjujuću visinu slobodno stojećeg materijala.

Za slučaj $h_0 = 0$, nadopterećenje je $q_0 = 0$ na ravnoj gornjoj površini nasutog materijala. Pri obuhvatanju nadopterećenja od težine formiranog nasipnog dela na vrhu materijala, visina h_0 se uzima prema odgovarajućem izrazu (3.259), odnosno (3.260), zavisno od oblika nasipnog dela.

Zamenom nadopterećenja prema izrazu (3.261), u analizu stanja napona u silosima, uvodi se zamenjujuća visina h_0 .

3.5 Primena graničnog stanja ravnoteže

3.5.1 Osnove analize stanja napona prema Ohde-u i Nanninga-u

Prethodno prikazani postupci proračuna stanja napona zrnastog materijala uskladištenog u silosu, zasnivali su se na zajedničkoj pretpostavci da su vertikalni naponi konstantni u poprečnom preseku. Data pretpostavka je omogućila formiranje relativno jednostavnih proračunskih formulacija pri uspostavljanju uslova ravnoteže vertikalnih sila na diferencijalnom sloju materijala. Tu spadaju postupci *Janssen-a*, *Гутьяр-a*, braće *Reimbert*, *Pipatpongsa-a* i *Heng-a*, te *Lvin-a*, *Rahmoun-ove* i mnogi drugi. Od nabrojanih postupaka, samo postupci *Pipatpongsa-a* i *Heng-a*, i *Rahmoun-ove* se odnose na 2D analizu stanja napona u zrnastom materijalu, dok su ostali postupci bazirani na 1D analizi. *Ohde* (1951) [210] je odredio u nekim posebnim slučajevima rešenje stanja napona materijala uskladištenog u 2D silosu. Prema *Peschl-u* (1969) [227], koji je razmatrao formulaciju *Ohde-a*, tačno rešenje za problem napona u silosnom materijalu je dao *Kötter* (1899) [153], ali je konstatovao da je ono previše složeno za praktičnu primenu. Analize se odnose na 2D silosni problem.

Određivanje stanja napona u uskladištenom materijalu u silosu se zasniva na sledećim pretpostavkama:

- Nakon postizanja određene dubine, u svim delovima materijala deluju jednaki horizontalni naponi.
- Verikalni naponi u poprečnom preseku materijala su promenljivi.
- Zidovi silosa su kruti, a zrnasti materijal je rastresit (bez kohezije), homogen i konstantne zapreminske težine.
- Trenje materijala o zidove je potpuno mobilisano *Coulomb-ovo* trenje.
- Razmatraju se granična stanja napona u materijalu.
- U osi silosa, zbog simetrije, horizontalni i vertikalni pritisci su glavni naponi.

Pri punjenju ćelije zrnastim materijalom javlja se trenje na zidu ćelije (koeficijent trenja $\mu_w = \tan \phi_w$), koje je pri većim dubinama dovoljno da potpuno prihvati težinu zrnastog materijala. Ovo se određuje i u analizama *Janssen-a* i *Reimbert-ovih*, a isto potvrđuju i eksperimentalni rezultati. Prema *Janssen-u*, na primer, za diferencijalni sloj na velikoj dubini materijala, može se uspostaviti uslov ravnoteže vertikalnih sila sa sledećim:

$$\mu_w \cdot p_{h\infty} \cdot U \cdot dz = \gamma \cdot A \cdot dz \quad (3.262)$$

odnosno:

$$p_{h\infty} = \sigma_{x\infty} = \frac{\gamma \cdot A}{\mu_w \cdot U} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \quad (3.263)$$

što odgovara datoj asimptotskoj vrednosti prema *Janssen-ovoj* teoriji. Kako je odnos A/U , hidraulički radijus r_h , gornji izraz kod kružnih ćelija (sa prečnikom D) prelazi u oblik $p_{h\infty} = \gamma \cdot D / (4\mu_w)$, a kod ravanskog problema (gde su ćelije izduženog pravougaonog preseka sa vertikalnim paralelnim zidovima na odstojanju – širini ćelije B) određuje se da je $p_{h\infty} = \gamma \cdot B / (2\mu_w)$. Ovoj graničnoj vrednosti, teži bočni pritisak posle početnog pravolinijskog porasta $p'_h|_{z=0} = K \cdot \gamma$.

Prema *Janssen*-u promenljivo područje pritiska je definisano sa:

$$p_h = \sigma_h = \sigma_x = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot \left(1 - e^{-\frac{K \cdot \mu_w}{r_h} z}\right) \quad (3.264)$$

pri čemu je između bočnog i vertikalnog pritiska usvojen konstantan odnos $K = p_h/p_v$ sa dubinom z .

Prema *Ohde*-u (1951) [210], u slučaju krutih zidova silosa važi $K = \nu/(1-\nu)$, gde je ν *Poisson*-ov koeficijent. U slučaju popustljivih zidova (popustljivih pri punjenju silosnog materijala) postoji *aktivni* bočni pritisak, a kod (aktivnog) popustljivog materijala, u slučaju pražnjenja materijala iz silosne ćelije, *pasivni* bočni pritisak.

3.5.1.1 Asimptotsko stanje napona kod 2D silosa

Dalje se posmatra granično stanje ravnoteže silosnog materijala na većim dubinama za ravanski problem (2D analiza), prema *Ohde*-u (1951) [210] i *Nanninga*-u (1956)¹. Uslovi ravnoteže na diferencijalnom elementu na dubini materijala z su:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (3.265)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma \quad (3.266)$$

Kada $z \rightarrow \infty$, svi naponi u materijalu teže svojim asimptotskim vrednostima (asimptotske vrednosti napona se obeležavaju sa dodatnim indeksom ∞) Za diferencijalni sloj materijala pri velikoj dubini z u preseku silosne ćelije (sl. 128), odnosno za $z \rightarrow \infty$, važi da naponi više ne zavise od dubine z , tako da izvodi napona po promenljivoj z postaju nula:

$$\frac{d\sigma_{z\infty}}{dz} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{d\tau_{xz\infty}}{dz} = 0 \quad (3.267)$$

Sa ovim, uslovi ravnoteže, za $z \rightarrow \infty$, prelaze u sledeću jednostavniju formu:

$$\frac{\partial \sigma_{x\infty}}{\partial x} = 0 \quad (3.268)$$

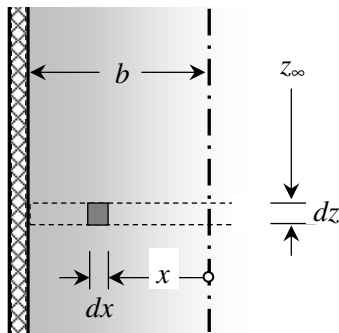
$$\frac{\partial \tau_{xz\infty}}{\partial x} = \gamma \quad (3.269)$$

Iz prvog uslova se određuje da je horizontalni napon $\sigma_{x\infty}(x) = \sigma_{x\infty}$ konstantan u okviru horizontalnog preseka ćelije. Prostom integracijom drugog uslova ravnoteže u granicama od 0 do x , uz uslov da je smičući napon u sredini preseka $\tau_{xz\infty}(0) = 0$ usled simetrije problema, određuje se da je $\tau_{xz\infty}(x)$ linearna funkcija od promenljive x . Na osnovu sprovedene analize jednačina ravnoteže na diferencijalnom elementu zapremine $dx \cdot dz \cdot 1$ (analiza 2D silosa), koji je prikazan na sl. 129, u oblasti asimptotskog stanja napona na dubini z_∞ ($z \rightarrow \infty$), određuju se asimptotsko stanje horizontalnih i smičućih napona:

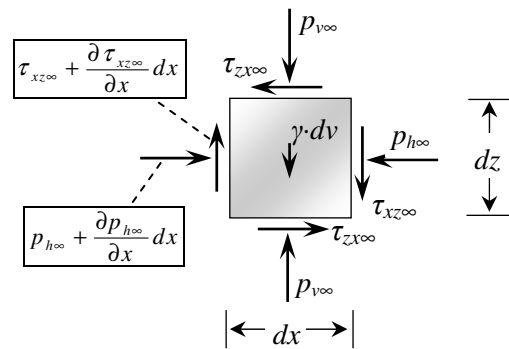
$$p_{h\infty}(x) = \sigma_{x\infty}(x) = \sigma_{x\infty} = \text{const.} \quad (3.270)$$

¹ *Nanninga N.* (1956): "Gibt die übliche Berechnungsart der Drucke auf die Wände und den Boden von Silobauten sichere Ergebnisse?". *Der Ingenieur*, Vol.68, Nov., No.44. (Da li uobičajena metoda proračuna pritiska na zidove i dno silosa daje sigurne rezultate?). Citirano prema *Peschl*-u (1969) [227] i *Rotter*-u (2008) [260].

$$\tau_{xz\infty}(x) = \gamma \cdot x \quad (3.271)$$



Sl. 128 Diferencijalni sloj materijala na dubini z_{∞}

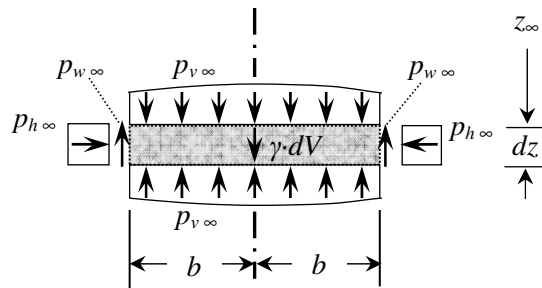


Sl. 129 Dif. element sa komponentalnim naponima (2D analiza – ravno stanje napona)

Za $x = b$, na osnovu (3.271), odeđuje se smičući napon u materijalu do zida ćelije kao $\tau_{xz\infty}(b) = \tau_{w\infty} = \gamma \cdot b$. Isto se može odrediti na osnovu uslova ravnoteže vertikalnih sila koje deluju na diferencijalni sloj materijala elementarne zapremine $dV = 2b \cdot dz \cdot 1$, kako je to prikazano na sl. 130. Određuje se opterećenje zida od trenja materijala, $p_{w\infty} = \tau_{w\infty}$, koje je jednako smičućim naponima u materijalu do zida ćelije ($x = b$), prema sledećim izrazima:

$$2\tau_{w\infty} \cdot (dz \cdot 1) = \gamma \cdot dV = \gamma \cdot (2b \cdot dz \cdot 1) \quad (3.272)$$

$$p_{w\infty} = \tau_{w\infty} = \gamma \cdot b = \gamma \cdot B / 2 \quad (3.273)$$



Sl. 130 Ravnoteža diferencijalnog sloja materijala kod 2D silosa.

Uvodi se koeficijent trenja materijala o zid ćelije μ_w

$$\frac{p_w(z)}{p_h(z)} = \frac{\tau_w(z)}{\sigma_x(z)} = \tan \phi_w = \mu_w \Rightarrow \frac{\tau_{w\infty}(z)}{\sigma_{x\infty}(z)} = \mu_w \quad (3.274)$$

gde je ϕ_w ugao trenja materijala o zid ćelije, a $\mu_w = \tan \phi_w$ je koeficijent trenja materijala o zid. Sa ovim se određuje konstantna vrednost za horizontalni pritisak $p_{h\infty} = \sigma_{x\infty}$ u obliku:

$$\sigma_{x\infty} = p_{h\infty} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} = \frac{\gamma \cdot B / 2}{\mu_w} \quad (3.275)$$

Zamenjujući (3.275) u (3.271), određuje se:

$$\tau_{xz\infty}(x) = \sigma_{x\infty} \cdot \mu_w \cdot \frac{x}{b} = \tau_{w\infty} \cdot \frac{x}{b} \quad (3.276)$$

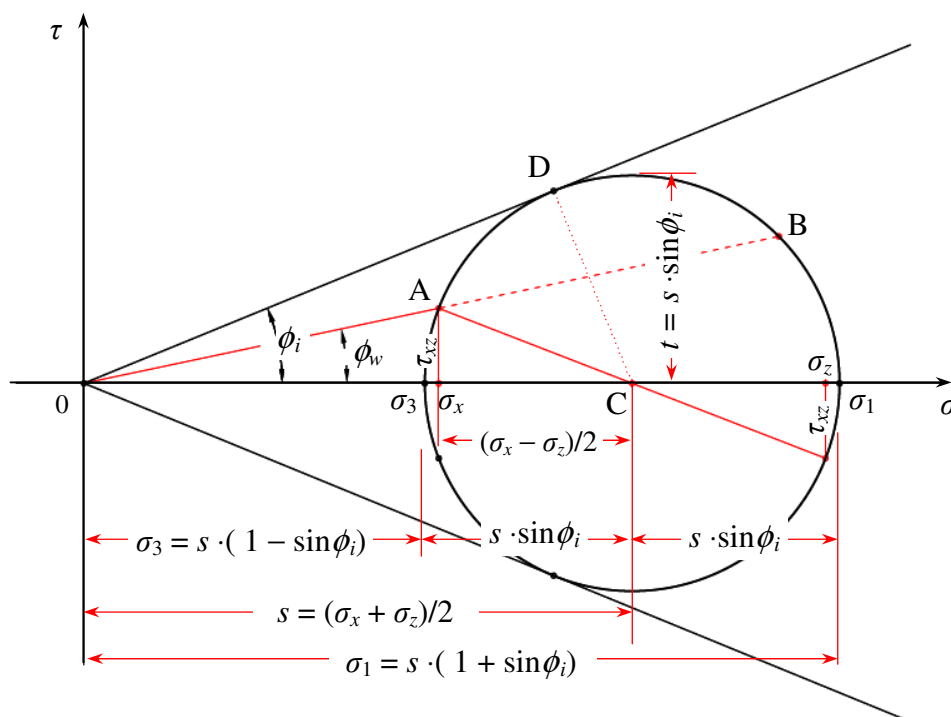
Na osnovu izraza (3.276) može se odrediti odnos smičućeg i horizontalnog napona u zrnastom materijalu u funkciji koordinate x :

$$\frac{\tau_{xz\infty}}{\sigma_{x\infty}} = \mu_w \cdot \frac{x}{b} = \mu_w \cdot \frac{x}{B/2} \quad (3.277)$$

Uz pretpostavku da u svakoj tački materijala u silosu glavni naponi σ_1 i σ_3 dostižu kritični odnos σ_1/σ_3 (Mohr-ov krug napona tangira liniju popuštanja – klizanja materijala), primjenjuju se poznata jednačina mehanike tla - zrnaste sredine, prema kojoj je odnos glavnih napona σ_1/σ_3 konstantna veličina, čija vrednost zavisi od ugla unutrašnjeg trenja materijala ϕ_i :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \sin \phi_i}{1 - \sin \phi_i} = \frac{\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}}{\frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}} \quad (3.278)$$

Gornji izraz važi za sve dubine z , a u predmetnom slučaju analize za $z \rightarrow \infty$, svi naponi se uvode u izraz kao asimptotske veličine sa dodatnim indeksom ∞ . U literaturi, kao i u tehničkoj regulativi za proračune silosa, često se ugao unutrašnjeg trenja ϕ_i označava sa φ ili kao ϕ , bez uvođenja indeksa i (od *internal* - unutrašnji).



Sl. 131 Karakteristične veličine kod Mohr-ovog kruga napona i linija loma.

U teoriji silosnih pritisaka od velikog značaja je odnos bočnog i vertikalnog pritiska $K = p_h / p_v = \sigma_x / \sigma_z$ (umesto K koriste se i oznake λ ili k), ili kao recipročna veličina:

$$\frac{\sigma_z(z, x)}{\sigma_x(z, x)} = \frac{1}{K(z, x)} \quad \text{ili u sažetijem obliku} \quad \frac{\sigma_z}{\sigma_x} = \frac{1}{K} \quad (3.279)$$

Kod stanja napona u 2D silosu, u slučaju da $z \rightarrow \infty$, odnos napona se uzima u obliku:

$$\frac{\sigma_{z\infty}(x)}{\sigma_{x\infty}(x)} = \frac{\sigma_{z\infty}(x)}{\sigma_{x\infty}(x)} = \frac{1}{K_\infty(x)} \quad \text{ili u sažetijem obliku} \quad \frac{\sigma_{z\infty}}{\sigma_{x\infty}} = \frac{1}{K_\infty} \quad (3.280)$$

Svi naponi se odnose na diferencijalni sloj materijala, na dubini $z \rightarrow \infty$, pri promenljivoj x u granicama između vertikalnih zidova $-b \leq x \leq b$, i to su:

$$\sigma_z(z, x)|_{z \rightarrow \infty} = \sigma_z(x)|_{z \rightarrow \infty} = \sigma_{z\infty}(x) = \sigma_{z\infty} \quad (\text{dijagram u funkciji od } x) \quad (3.281)$$

$$\sigma_x(z, x)|_{z \rightarrow \infty} = \sigma_x(x)|_{z \rightarrow \infty} = \sigma_{x\infty}(x) = \sigma_{x\infty} \quad (\text{dijagram konstantan}) \quad (3.282)$$

$$\tau_{xz}(z, x)|_{z \rightarrow \infty} = \tau_{xz}(x)|_{z \rightarrow \infty} = \tau_{xz\infty}(x) = \tau_{xz\infty} \quad (\text{dijagram u funkciji od } x) \quad (3.283)$$

$$\tau_{zx}(z, x)|_{z \rightarrow \infty} = \tau_w|_{x=b} = \tau_{w\infty} \quad (\text{konstanta}) \quad (3.284)$$

U jednačinu (3.278), uz uslov da $z \rightarrow \infty$, uvode se odgovarajući odnosi napona prema izrazima (3.277) i (3.279). Određuje se sledeći oblik jednačine (3.278):

$$\frac{1 + \sin \phi_i}{1 - \sin \phi_i} = \frac{\frac{1 + 1/K_\infty}{2} + \sqrt{\left(\frac{1/K_\infty - 1}{2}\right)^2 + \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{\frac{1 + 1/K_\infty}{2} - \sqrt{\left(\frac{1/K_\infty - 1}{2}\right)^2 + \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}}} \quad (3.285)$$

Rešavanje ove jednačine se može sagledati preko uprošćenog prikaza sledećih jednakosti $(1+c)/(1-c) = (1+b/a)/(1-b/a) = (a+b)/(a-b)$, gde je $c = b/a$, odnosno $a \cdot c = b$. Jednačina (3.285) sa svojim članovima odgovara prethodnom elementarnom razmatranju, tako da se svodi na jednostavniji oblik:

$$\frac{1 + 1/K_\infty}{2} \cdot \sin \phi_i = \sqrt{\left(\frac{1/K_\infty - 1}{2}\right)^2 + \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}} \quad (3.286)$$

Razvijanjem ove jednačine određuje se kvadratna jednačina po nepoznatoj $(1/K_\infty)$:

$$(1 - \sin^2 \phi_i) \cdot \left(\frac{1}{K_\infty}\right)^2 - 2(1 + \sin^2 \phi_i) \cdot \left(\frac{1}{K_\infty}\right) + (1 - \sin^2 \phi_i) + 4\mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2} = 0 \quad (3.287)$$

Rešenja ove jednačine su:

$$\left(\frac{1}{K_\infty}\right)_1 = \frac{2(1 + \sin^2 \phi_i) \pm \sqrt{4(1 + \sin^2 \phi_i)^2 - 4(1 - \sin^2 \phi_i) \cdot (1 - \sin^2 \phi_i + 4\mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2})}}{2(1 - \sin^2 \phi_i)} \quad (3.288)$$

Kvadratna jednačina i njena rešenja su data u osnovnom obliku, a sa daljim sređivanjem izraz (3.288) se može prikazati u obliku:

$$\frac{\sigma_z|_{z \rightarrow \infty}}{\sigma_x|_{z \rightarrow \infty}} = \frac{\sigma_{z\infty}}{\sigma_{x\infty}} = \frac{p_{v\infty}}{p_{h\infty}} = \frac{1}{K_\infty} = 1 + 2 \tan^2 \phi_i \pm 2 \sqrt{1 + \tan^2 \phi_i} \cdot \sqrt{\tan^2 \phi_i - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2} \quad (3.289)$$

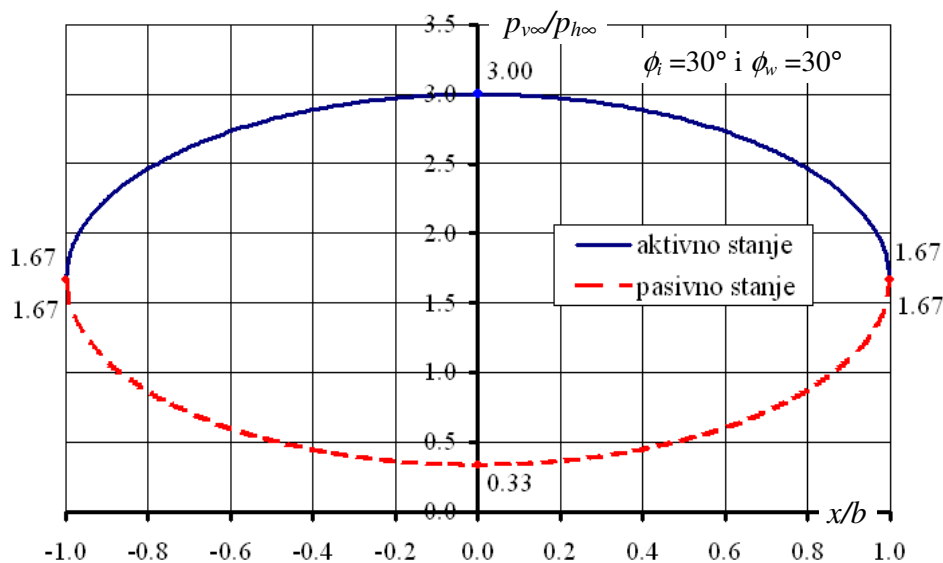
Kod ovog odnosa napona uvodi se koeficijent unutrašnjeg trenja materijala μ_i :

$$\mu_i = \tan \phi_i \quad (3.290)$$

gde je sa ϕ_i označen ugao unutrašnjeg trenja materijala. Sa uvođenjem koeficijenta μ_i u izraz (3.289), dobija se sažetija forma za odnos vertikalnih i horizontalnih napona:

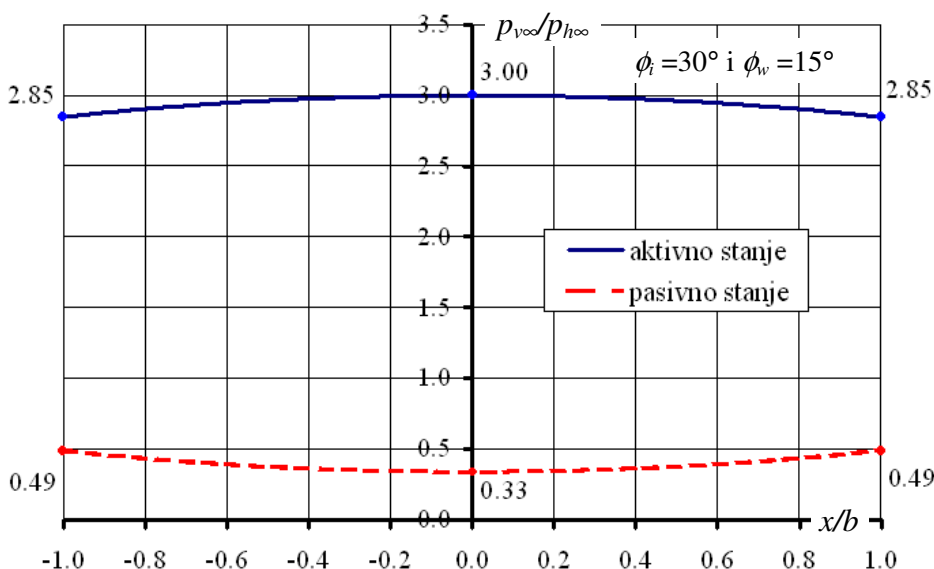
$$\frac{p_{v\infty}}{p_{h\infty}} = \frac{\sigma_{z\infty}}{\sigma_{x\infty}} = \frac{1}{K_\infty(x)} = 1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2} \quad (3.291)$$

Jednačina (3.291) ima realna rešenja kada je $\mu_w \leq \mu_i$, odnosno za $\phi_w \leq \phi_i$. Ako to nije slučaj, pri sračunavanju (3.291), treba usvojiti da je $\mu_w \leftarrow \mu_{w\text{eff}} = \mu_i$, tj. $\phi_w = \phi_i$. U ovom posebnom slučaju, klizanje materijala po zidu ćelije se praktično odvija kao klizanje u okviru zrnastog materijalu, u tankoj "ljusci" materijala uz sam zid ćelije. Zrna materijala direktno oslonjena na zid ćelije se rotiraju pri pomeranju susednih zrna materijala unutar silosne mase, i na taj način se trenje između materijala i zida ćelije smanjuje. U izrazu (3.291), gornji znak "+" se odnosi na *aktivno* stanje, a donji znak "-" na *pasivno* stanje napona pri graničnoj ravnoteži uskladištenog materijala. Izraz (3.291) se odnosi na materijale koji nisu kohezivni (nevezani ili nekoherentni materijali), ili imaju zanemarljivo malu koheziju. Sagledavajući funkcionalni oblik dijagrama odnosa napona (3.291), koji se odnosi na veću dubinu silosnog materijala z , može se uočiti da dijagram vertikalnih pritisaka p_v sledi funkciju elipse.

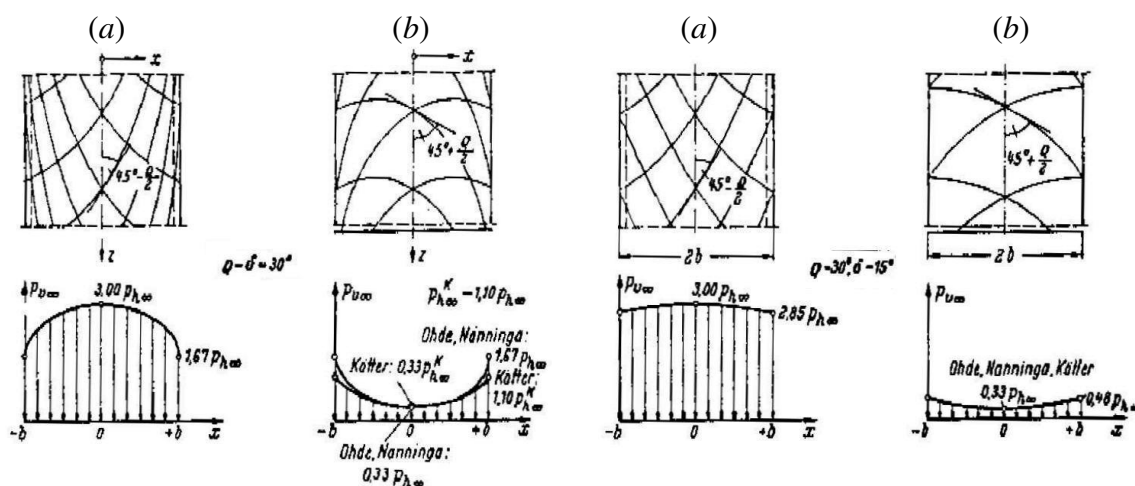


Sl. 132 Dijagrami odnosa napona $p_{v\infty}/p_{h\infty}$ za aktivno i pasivno stanje ($\phi_i = 30^\circ$ i $\phi_w = 30^\circ$).

Promena odnosa horizontalnih i vertikalnih napona na velikim dubinama u silosnoj ćeliji, za aktivno i pasivno stanje napona su prikazani na sl. 132 i sl. 133. Podaci na osnovu kojih su određeni dijagrami na slikama su: $\phi_i = 30^\circ$ i $\phi_w = 30^\circ$ za sl. 132, i $\phi_i = 30^\circ$ i $\phi_w = 15^\circ$ za sl. 133. Dijagrami su dobijeni primenom izraza (3.291), s tim što se gornji znak "+" odnosi na *aktivno* stanje napona, a donji znak "-" na *pasivno* stanje napona. Na ovim slikama su prikazana rešenja za tzv. aktivno stanje i pasivno stanje silosnog materijala. Slično stavovima u mehanici tla, ova stanja se mogu opisati kod silosa kao stanje napona i deformacije silosnog materijala pri bočnom pomeranju zidova ćelije – aktivno stanje, i kao stanje koje odgovara spuštanju osnove koja drži materijal – pasivno stanje, prema *Peschl*-u (1969) [227].



Sl. 133 Dijagrami odnosa napona $p_{v\infty}/p_{h\infty}$ za aktivno i pasivno stanje ($\phi_i = 30^\circ$ i $\phi_w = 15^\circ$).



Sl. 134 Klizne površine i dijagrami napona za (a) aktivno i (b) pasivno stanje ($\phi_i = 30^\circ$ i $\phi_w = 30^\circ$), prema Peschl-u [227].

Sl. 135 Klizne površine i dijagrami napona za (a) aktivno i (b) pasivno stanje ($\phi_i = 30^\circ$ i $\phi_w = 15^\circ$), prema Peschl-u [227].

Na sl. 134 i sl. 135, prikazani su dijagrami vertikalnog napona i klizne površine u materijalu, prema Peschl-u (1969) [227], za iste podatke kao na sl. 132 i sl. 133, respektivno. Dijagrami napona na slikama se odnose na (a) aktivno i (b) pasivno stanje, i dati su prema formulacijama Ohde-a (1951), Nanninga-a (1956) i Kötter-a (1899). Dijagrami kod ovih primera prema različitim formulacijama su jednaki, izuzev dijagrama napona za pasivno stanje u slučaju $\phi_i = \phi_w$. U ovom slučaju, na dijagramima na sl. 134 (b) vertikalni napon je jednak u sredini silosa, a pri promeni x od sredine silosa ka zidu prema Kötter-ovom rešenju, pokazuje manje vrednosti u odnosu na rešenje prema Ohde-u i Nanninga-u. Do zida ćelije u ovom slučaju je $p_{v\infty} = 1.67 p_{h\infty}$, a prema Kötter-u se određuje $p_{v\infty} = 1.10 p_{h\infty}$.

Peschl (1969) [227], koji je razmatrao formulacije *Ohde*-a i *Kötter*-a, navodi da je tačno rešenje problema stanja napona u silosnom materijalu dao *Kötter* (1899) [153].

Za relativno male vrednosti koeficijenta trenja μ_w , promene u veličini vertikalnog pritiska u horizontalnom preseku materijala su manje izražene i teorija *Janssen*-a, u ovom slučaju, predstavlja relativno dobru aproksimaciju. U praksi, zidovi silosa su često vrlo hrapavi i u tom slučaju pogodnije je primeniti teoriju *Ohde*-a i *Nanninga*-a.

3.5.1.2 Asimptotsko stanje napona kod 3Dr silosa

Kod određivanje stanja napona kod 3Dr cilindričnog silosa kružnih ćelija potrebno je uspostaviti formulaciju za koeficijent K . Kao jednostavno rešenje, koristi se analogija kod određivanja koeficijenta K za 3Dr silos prema sličnom izvođenju egzaktnog rešenja kod 2D silosa. Zbog pretpostavki koje se uvode pri određivanju koeficijenta K kod 3Dr silosa, formulacija za K je aproksimativna.

U cilindričnom koordinatnom sistemu jednačine ravnoteže u opštem slučaju se dobijaju u sledećem obliku:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (= f_r) \quad (3.292)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (= f_\theta) \quad (3.293)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \gamma \quad (= f_z) \quad (3.294)$$

gde su f_r, f_θ i f_z komponente zapreminskih sila u datom pravcu.

Ove jednačine se pri rotacionoj simetriji sistema i polja napona svode na sledeće (z osa pozitivna na dole):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (3.295)$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (3.296)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \gamma \quad (3.297)$$

Za diferencijalni sloj materijala pri velikoj dubini z u preseku kružne silosne ćelije, odnosno za z_∞ , važi nezavisnost napona u odnosu na koordinatu z :

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0 \quad (3.298)$$

Kod diferencijalnog elementa (slučaj 3D analize – rotaciona simetrija), sa elementarnom zapreminom ($r \cdot dr \cdot d\theta \cdot dz$), na dubini z_∞ , jednačine ravnoteže (3.295) do (3.297), uz date uslove (3.298), prelaze u sledeći oblik:

$$\frac{\partial \sigma_{r_\infty}}{\partial r} + \frac{\sigma_{r_\infty} - \sigma_{\theta_\infty}}{r} = 0 \quad (3.299)$$

$$\frac{\partial \sigma_{\theta_\infty}}{\partial \theta} = 0 \quad (3.300)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz\infty}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz\infty}}{r} = \gamma \quad (3.301)$$

Naponi ne zavise u ovom slučaju od koordinata z i θ , ali zavise od koordinate r :

$$\sigma_{r\infty} = \sigma_{r\infty}(r) \quad ; \quad \sigma_{\theta\infty} = \sigma_{\theta\infty}(r) \quad ; \quad \tau_{rz\infty} = \tau_{rz\infty}(r). \quad (3.302)$$

Preko analogije sa rezultatom za horizontalne pritiske kod 2D silosa, prema (3.270), gde je pokazano da je horizontalni napon σ_x konstantan na velikim dubinama z , Walker (1966) [325] usvaja da je radijalni napon σ_r , konstanta s obzirom na r kod cilindričnog silosa na velikoj dubini z . U stvari, ovo predstavlja aproksimaciju problema, tj. Walker-ova pretpostavka nije tačna, što će biti pokazano kroz sledeću analizu problema. Iz jednačine (3.299), koja odgovara ravnoteži sila u radijalnom pravcu na velikim dubinama silosa, jedino u slučaju da je $\sigma_r - \sigma_\theta = 0$, odnosno za jednake napone $\sigma_r = \sigma_\theta$, dobija se da je $\partial \sigma_r / \partial r = 0$, odakle bi sledilo da je $\sigma_r = const$. Prstenasti naponi σ_θ , u slučaju rotacione simetrije sistema i stanja napona u silosima, prema Haar – von Karman-ovoj hipotezi odgovaraju glavnom naponu σ_2 (za pasivno stanje napona je $\sigma_\theta = \sigma_2 = \sigma_1$, a za aktivno stanje napona je $\sigma_\theta = \sigma_2 = \sigma_3$). Pošto je prstenasti napon σ_θ glavni napon (σ_2), a σ_r to nije, ova dva napona u opštem slučaju nisu jednakih vrednosti, odakle sledi da je $\partial \sigma_r / \partial r \neq 0$ i radijalni naponi σ_r su zbog toga funkcija od r .

Primena Haar – von Karman-ove hipoteze (1909)¹ je šire opisana u knjizi Kesava Rao-a i Nott-a (2008) [144], na problemu proticanja materijala kroz levak pri primeni sfernog koordinantnog sistema. Ova hipoteza je primenjena kod primene metode integralnih relacija pri analizi stanja napona u silosnom materijalu u disertaciji Negi-a (1974) [202], kao i u radu Negi-a i Ogilvie-a (1977) [203].

Iz trećeg uslova ravnoteže, tj. jednačine (3.301) koja je obična diferencijalna jednačina 1-og reda, uz početni uslov da je $\tau_{rz\infty} = 0$ za $r = 0$, određuje se:

$$\frac{\partial \tau_{rz\infty}(r)}{\partial r} = \gamma - \frac{\tau_{rz\infty}(r)}{r} \quad i \quad \tau_{rz\infty}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{rz\infty}(r) = \frac{1}{2} \gamma \cdot r \quad (3.303)$$

Na osnovu ovog izraza, za $r = R = D/2$, gde je R poluprečnik ćelije silosa, a D njen prečnik, dobija se smičući napon τ_w do zida:

$$\tau_{rz\infty}(R) = \frac{1}{2} \gamma \cdot R = \tau_{w\infty} \quad (3.304)$$

Na osnovu prethodna dva izraza, dobija se linearna funkcija napona smicanja:

$$\tau_{rz\infty}(r) = \tau_{w\infty} \cdot \frac{r}{R} \quad (3.305),$$

Koriste se sledeći izrazi:

$$p_{h\infty} = \sigma_{r\infty} = const. \quad (3.306)$$

$$\tau_{rz\infty}(r) = \mu_w \cdot \sigma_{r\infty}(r) \cdot \frac{r}{R} \quad (3.307)$$

¹ Haar A., von Karman T. (1909): "Zur theorie der spannungszustaende in plastischen und sandartigen medien". (On the theory of stress states in plastic and sand-like media). *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen Math. Phys. Klasse 2*, 204–218. (Citirano prema Kesava Rao-u i Nott-u (2008) [144] i Negi-u (1974) [202].)

Na isti način kao kod pokazanog postupka rešavanja kod 2D silosa pri iznalaženju $K_\infty(x)$, određuje se koeficijent bočnog pritiska kod 3Dr silosa u aproksimativnom obliku:

$$\frac{p_{v\infty}}{p_{h\infty}} = \frac{\sigma_{z\infty}}{\sigma_{r\infty}} = \frac{1}{K_\infty(r)} = 1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot r^2 / R^2} \quad (3.308)$$

Pri uopštavanju rešenja za proizvoljnu visinu z , određuje se:

$$K(r) = \frac{\sigma_r(z, r)}{\sigma_z(z, r)} = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot r^2 / R^2}} \quad (3.309)$$

3.5.2 Polazne pretpostavke kod analize stanja napona

Kod analize stanja napona u uskladištenom materijalu u silosima, uvodi se pretpostavka da koeficijent bočnog pritiska K nije promenljiv po visini materijala, odnosno, da ne zavisi od koordinate z . Na osnovu ove pretpostavke, sledi da K odgovara K_∞ , koje je određeno na velikim dubinama materijala, odnosno za $z \rightarrow \infty$:

$$K(z, x) = K(x) = K_\infty(x) \quad (3.310)$$

Opšti oblik za odnos horizontalnih i vertikalnih napona u uskladištenom materijalu, tzv. "koeficijent" bočnog pritiska, prema izrazima (3.291) i (3.310), $K(x)$ je:

$$K = K(x) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2}} \quad (3.311)$$

U ovom izrazu gornji znak "+" se odnosi na *aktivno* stanje napona, a donji znak "-" na *pasivno* stanje napona.

Sa uvedenim pretpostavkama da je koeficijent K u obliku (3.310), vrlo je logična primena pretpostavke da su i naponi u horizontalnom preseku na visini z , afini sa dijagramima asimptotskih napona za $z \rightarrow \infty$. Ova aproksimacija vodi ka sledećoj pretpostavci o obliku dijagrama horizontalnih napona na dubini z :

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_x(z) \quad (3.312)$$

Kada se sagleda koeficijent K po definiciji kao odnos datih napona, uz primenu pretpostavke o uniformnosti horizontalnih napona u preseku na visini z , sledi:

$$K(z, x) = \frac{\sigma_x(z, x)}{\sigma_z(z, x)} \cong \frac{\sigma_x(z)}{\sigma_z(z, x)} \Rightarrow K(x) = \frac{\sigma_{x\infty} \cdot Y(z)}{\sigma_{z\infty}(x) \cdot Y(z)} \Leftarrow K_\infty(x) = \frac{\sigma_{x\infty}}{\sigma_{z\infty}(x)} \quad (3.313)$$

Uvedena je funkcija afinog preslikavanja za napone, $Y(z)$, koja u teoriji predstavlja funkciju raspodela pritisaka po visini silosa (dubini materijala) z . Sledi da su naponi u materijalu na dubini z , uz uvedene pretpostavke (3.310) i (3.312), u sledećem obliku:

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_x(z) = \sigma_{x\infty} \cdot Y(z) \quad (3.314)$$

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_{z\infty}(x) \cdot Y(z) \quad (3.315)$$

Ovde su naponi predstavljeni u obliku proizvoda funkcija razdvojenih varijabli, a pored toga, horizontalni naponi ne zavise od promenljive x .

Izrazi od (3.312) do (3.315), predstavljaju suštinu teorijskih aproksimativnih postupaka pri analizi stanja napona u silosima, koji formalno odgovaraju postupku Walker-a (1966) [325] i (1967) [326] i Walters-a (1973) [327] i (1973) [328].

Primena dodatne pretpostavke u obliku (3.312), nije neophodna pri određivanju stanja napona, ali pojednostavljuje analizu problema. Kada se ne uvodi ova pretpostavka, slučaj analize je za jedan stepen složeniji, i tada je korisno primeniti metodu integralnih relacija u analizi stanja napona u silosima, a koju je primenio *Negi* (1974) [202], i *Negi* i *Ogilvie* (1977) [203].

U teoriji se postavlja pitanje validnosti primene izraza (3.311) za koeficijent K , odnosno valjanosti pretpostavke (3.310). Pored toga, K_∞ u formi izraza (3.291), je teorijski egzaktno rešenje kod analize 2D silosa za aktivna stanja napona u materijalu kod primene *Mohr-Coulomb*-ovog graničnog stanja za lom materijala po smicanju. Ovde se priključuje i pasivno stanje napona, kada se izuzme uža oblast pasivnog stanja napona, u kojoj prema *Kötter*-u (1899) [153] važi drugo rešenje.

U ovom radu je od interesa aktivno stanje napona, tako da se analizira validnost izraza (3.311), u slučaju sa gornjim znakom "+".

Prema sadašnjem stanju stvari, sa postojećom mernom tehnikom i postupcima ispitivanja još uvek se ne može direktno odrediti stanje napona u zrnastom materijalu, a da se pri tome ne poremeti naponsko stanje koje treba da se izmeri. Prema tome, još uvek nije moguće konkretno određivanje koeficijenta K u funkciji koordinata z i x . Zbog toga je uputno upotrebiti numeričke simulacije, odnosno neki drugi teorijski postupak, kao što je npr. numerički postupak određivanja stanja napona.

Kao primer numeričke analize kod silosnog problema, ovde se navodi analiza stanja napona u zasutoj podzemnoj galeriji u rudniku, koju su prikazali *Li*, *Aubertin*, *Simon*, *Bussièere* i *Belem* (2003) [170]. U navedenom radu je dato upoređenje rezultata analize prema *Marston*-ovom postupku i pri primeni programa *FLAC*¹ kod analize stanja napona u podzemnoj galeriji od težine materijala sa kojim je zasuta. *Marston*-ov postupak je modifikovan *Janssen*-ov postupak u kojem se usvaja da je $\phi_w = \phi_i$, što je uobičajeno kod ovog problema u mehanici tla.

Program *FLAC* je razvijen za 2D i 3D analize, a ovde je primenjen *FLAC-2D* za ravanski problem stanja napona. U pitanju je specijalizovani program za proračune stanja napona i deformacija u kontinualnoj sredini, za probleme iz oblasti mehanike tla, i zasniva se na metodi konačnih razlika.

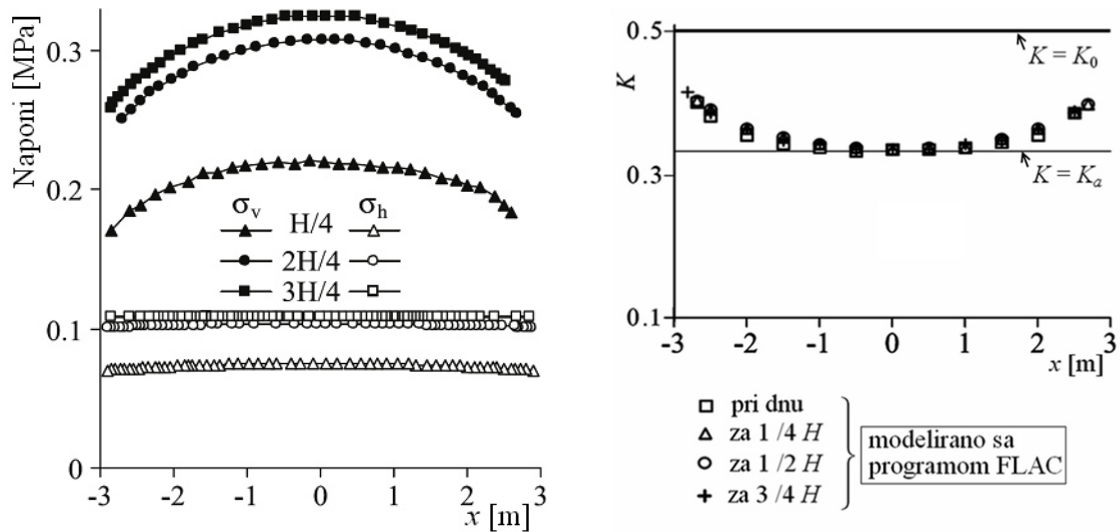
Podaci za podzemnu galeriju u stenskoj masi, sa vertikalnim zidovima i ravnim dnom, su: širina $B = 6$ m, dubina zatrpavanja $H = 45$ m, prazan prostor iznad zatrpanog dela u visini od 0.5 m. Nivo ravnog dna galerije je na dubini od 250 m u osnovnom materijalu (stenska masa).

Analiza primenom programa *FLAC* je sprovedena prema sledećim podacima za materijal sa kojim je zasuta galerija: $E = 300$ MPa, $\nu = 0.2$, $\gamma = 18.0$ kN/m³, $\phi_i = 30^\circ$, $c = 0$ kPa (elasto-plastičan materijal), i stenske mase u kojoj je galerija: $E = 30$ GPa, $\nu = 0.3$, $\gamma = 27.0$ kN/m³. Stenska masa se u program *FLAC* uvodi kao homogen, izotropan i linearno elastičan materijal.

Zasuta galerija može da se posmatra kao analogni 2D silos sa vertikalnim zidovima i ravnim dnom, gde se ubačeni materijal posmatra kao zrnasti materijal u ćeliji silosa.

Zidovi silosa su u ovoj analogiji nepomerljivi, s obzirom na to da je podzemna galerija izvedena u krutoj stenskoj masi.

¹ Itasca (2002): *FLAC – Fast Lagrangian Analysis of Continua, User's Guide*. Itasca Consulting Group, Inc., Minneapolis, MN.



(a) Raspodela vertikalnih i horizontalnih napona prema numeričkoj analizi, prema [169].

(b) Dijagrami koeficijenta bočnog pritiska K , adapt. prema [170].

Sl. 136 Rezultati numeričke analize prikazane u ref. [170] primenom programa FLAC na razmatranom primeru zasute galerije za date dubine materijala.

Kod primene programa FLAC-2D, materijal u galeriji je uveden u jednom proračunskom koraku, tj. nije analizirano postepeno punjenje materijala po slojevima. Rezultati analize su prikazani u obliku raspodele horizontalnih σ_h i vertikalnih σ_v napona na sl. 136 (a), po širini galerije x za nekoliko dubina materijala z .

Detalji analize su prikazani u ref. [170], a slika (a) je preuzeta iz rada Li-a i Aubertin-a (2010) [169]. Za ove rezultate prikazan je i odnos napona σ_h/σ_v , kao dijagram koeficijenta K na sl. 136 (b), za iste dubine z , kao na slici pod (a), prema [170].

Kako je prikazano na sl. 136 (b), praktično se poklapaju tačke koeficijenta K koje su određene za različite dubine z , a na istoj poziciji x . Ovo potvrđuje valjanost pretpostavke da je odnos napona $K = \sigma_h/\sigma_v$, nezavisan od dubine materijala z , i da zavisi od horizontalne promenljive x , tako da se odnos napona K može uzeti u obliku $K = K(x)$.

Pored toga, dijagrami horizontalnih napona σ_h , su skoro jednakih vrednosti po x , a sa povećanjem dubine z , teže ravnom dijagramu napona, što odgovara teorijskoj pretpostavci da je $\sigma_h = \sigma_h(z)$. U ovom slučaju, na većoj dubini z , naponi su praktično konstantni, tj. nezavisni od promenljive x .

Vertikalni naponi su promenljivi po obe koordinate, x i z , tako da je $\sigma_v = \sigma_v(z, x)$. Na ovaj način, analizom rezultata stanja napona kod analognog silosnog problema, potvrđene su pretpostavke date sa (3.310) i (3.312).

Na sl. 136 (b), prikazane su prave linije za K_a i K_0 , i ovi koeficijenti su Rankine-ov koeficijent aktivnog pritiska i Jáky-ev koeficijent mirovanja, respektivno (u primeru je $\phi_i = 30^\circ$, odakle sledi da je $K_a = 0.333$ i $K_0 = 0.500$).

Materijal je u aktivnom stanju napona ($K < 1$), a vrednosti za $K(x)$ su manje od K_0 , dok su u centralnoj osi, za $x = 0$, praktično jednake koeficijentu K_a .

Izraz za određivanje $K(x)$, prema Li-a i Aubertin-a (2008) [168] je $K_{LA}(x)$, a prema Ohde-u (Walker-u) za aktivno stanje napona $K_a(x)$, u obliku (3.311), tj. ovi izrazi su:

$$K_{LA}(x) = \frac{K_{a \text{ Rankine}}}{1 - 2^{(1-0.01 \cdot H/b)} \cdot [\tan(50^\circ + \phi_i)]^{-0.1} \cdot \left(\frac{|x|}{2b}\right)^3} \quad (\text{empirijski izraz}) \quad (3.316)$$

$$K_a(x) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2}} \quad (\text{teorijski izraz}) \quad (3.317)$$

Poračunski podaci u primeru su:

$$H = 45.0 \text{ m}; b = B/2 = 6.0/2 = 3.0 \text{ m}; \phi_i = 30^\circ$$

$$K_{a \text{ Rankine}} = (1 - \sin \phi_i) / (1 + \sin \phi_i) = 1/3 \quad \text{za } \phi_i = 30^\circ.$$

$$\mu_i = \tan \phi_i = 0.5774$$

$$\mu_w = \tan \phi_w$$

$$= \mu_w \text{ korig.} = 0.5261 \quad (\text{korigovano prema uslovu: } K_a|_{x=b} \cdot \mu_w = K_{LA}|_{x=b} \cdot \tan \phi_i; \text{ tabela 29})$$

$$= \mu_w \text{ Jáky} = \tan(0.9 \cdot \phi_i) = 0.5095 \quad \text{za } \phi_i = 30^\circ \quad (\phi_w = 0.9 \cdot \phi_i, \text{ prema Jáky-u [129]).}$$

U empirijskom izrazu (3.316), delilac je po funkcionalnom obliku kubna parabola, koja se ne menja sve do ugla $\phi_i = 40^\circ$. Za ugao $\phi_i = 40^\circ$ kriva K_{LA} se svodi na pravu, i rešenje odgovara *Marston*-ovom ravnom dijagramu za vertikalne napone. Primena izraza (3.316) je ograničena na vrednosti ugla $\phi_i < 40^\circ$, a u slučaju da je ugao $\phi_i \geq 40^\circ$, potrebno je uzeti da je $K_{LA} = K_{a \text{ Rankine}}$, i pri tome, modifikovani *Marston*-ov postupak se svodi na običan *Marston*-ov postupak.

Za $\phi_i = 40^\circ$ kriva K_{LA} se degeneriše u pravu, što nije slučaj kod krive K_a prema (3.317). Parametri u K_{LA} su određeni uz pretpostavku da je $\phi_w = \phi_i$, što je u osnovi pojednostavilo vrlo složen kalibracioni postupak, ali predefiniše vrednost koeficijenta trenja o zid μ_w . U ref. [168] nisu opisani uslovi na osnovu kojih su kalibrisani parametri. Iz ovih razloga, ovde je indirektno upotrebljena empirijska kalibracija parametara za određivanje korigovane vrednosti μ_w iz uslova jednakosti vertikalnih napona do zida galerije pri $z \rightarrow \infty$, odakle se dobija uslov da je $K_a|_{x=b} \cdot \mu_w = K_{LA}|_{x=b} \cdot \tan \phi_i$. Kod oba postupka analize stanja napona, povoljnije rešenje je određivanje μ_w iz analize rezultata dobijenih preko FLAC programa. Kod analize u ref. [168], takav pristup nije uveden, zbog konzistencije sa *Marston*-ovim postupkom gde se obično predefiniše da je $\phi_w = \phi_i$. U ovom pravcu, kao dobra procena za određivanje μ_w kod vrlo hrapavog zida, može se primeniti *Jáky*-eva preporuka¹ da je $\phi_w = 0.9 \cdot \phi_i$.

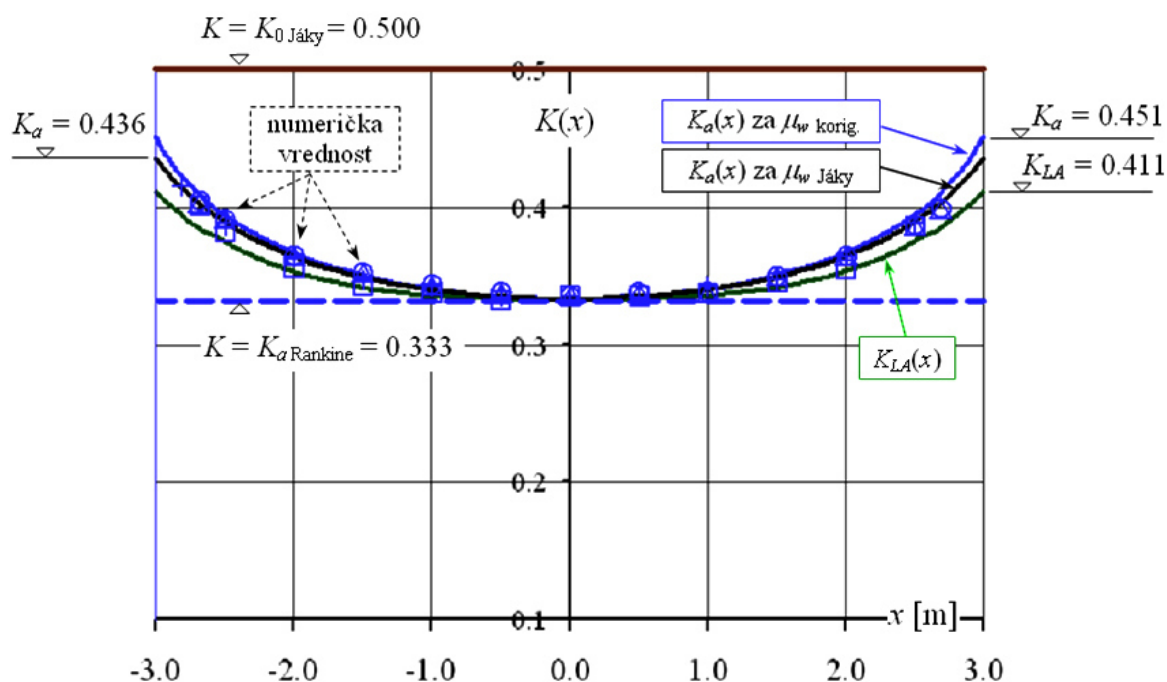
Na sl. 137 prikazani su dijagrami koeficijenta $K(x)$, određeni prema *Li*-u i *Aubertin*-u - izraz (3.316); i prema izvornom *Ohde*-ovom obliku - izraz (3.317) (odgovara *Walker*-ovoj analizi) za koji su prikazane dve krive sa različitim vrednostima za μ_w :

- jedna kriva $K_a(x)$ sa korigovanom vrednošću koeficijenta trenja o zid $\mu_w = 0.5261$ (korigovano preko $K_{LA} \cdot \tan \phi_i$), i
- druga kriva $K_a(x)$ sa $\mu_w = 0.5095$ (prema *Jáky*-u, gde je $\phi_w = 0.9 \cdot \phi_i$).

¹ Kod analize potiska zemljane mase bez kohezije na potporni zid, *Jáky* (1944, 1949) (str. 89 u [129]) je naveo da se, prema njegovim teorijskim izvođenjima, ugao trenja materijala o zid može proceniti kao $\phi_w \cong 0.9 \cdot \phi_i$, i ocenio da je za određivanje potiska na zid ova pretpostavka povoljnija od *Müller-Breslau*-ove preporuke da je $\phi_w = 3/4 \cdot \phi_i$. Navedena teorijska izvođenja su, prema *Jáky*-u [129], data u referenci:

Jáky J. (1938): "Die klassische Erddrucktheorie mit besonderer Rücksicht auf die Stützwandbewegung". 5. Bd. *Abhandlungen d. Intern. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau*, Zürich.

Pored krivih $K(x)$, na slici su prikazane numeričke vrednosti određene prema programu FLAC-2D (vrednosti sa sl. 136).



Sl. 137 Dijagrami $K(x)$ i numerički određene vrednosti za analizirani primer u [170].

Može se zaključiti da najbolje slaganje sa numeričkim vrednostima stoji kod primene izraza (3.317) sa *Jáky*-evom procenom za μ_w , zatim kod izraza (3.317) sa korigovanim μ_w , i na kraju kod krive koeficijenta K_{LA} . Kod K_{LA} vrednosti su obično nešto manje, a kod $K_\alpha(x)$ su samo malo veće od prosečnih numeričkih vrednosti. Sve krive, za $x=0$, odgovaraju $K_{\alpha \text{ Rankine}}$ (u primeru = $1/3 = 0.333$). Primetne su razlike u vrednostima na krajevima krivih $K(x)$, za $x = \pm b$, i posledica su uvođenja različitih vrednosti za koeficijent trenja μ_w , odnosno vrednosti ugla ϕ_w . Kod krive K_{LA} , ugao ϕ_w se ne uvodi direktno u izraz (3.316), već je ϕ_w indirektno uvedeno u postupku kalibracije parametara. Prema ref. [168], u empirijski izraz (3.316), uveden je korekcionni parametar za ugao trenja $\phi_0 = 50^\circ$. Vrednosti na krajevima krive K_{LA} , se dobro slažu sa najbližim numeričkim podacima do zidova, ali to nisu numerički podaci za tačke na samom zidu ($x = \pm b$), za koje je trebalo primeniti ekstrapolaciju numeričkih vrednosti.

3.5.3 Stanja napona kod uskladištenog materijala u silosu

Kada se analizira *idealno gladak zid*, gde je $\mu_w = 0$, i kod izraza (3.311) uvede $\mu_i = \tan \phi_i$, sređivanjem se dobijaju poznati oblici za koeficijente odnosa pritisaka pri graničnom aktivnom i pasivnom stanju:

$$K_a = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}} \equiv \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i} \quad (3.318)$$

$$K_p = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 - 2\mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}} \equiv \frac{1 + \sin \phi_i}{1 - \sin \phi_i} \quad (3.319)$$

Ove vrednosti su konstante u naponskom polju materijala, jer ne zavise od koordinate x . Na ovaj način, za $\phi_w = 0$, tj. $\mu_w = 0$, dijagram vertikalnog pritiska u horizontalnom preseku ćelije, prelazi u horizontalne prave linije za aktivno i pasivno stanje. Ovim stanjima odgovaraju koeficijenti K_a i K_p , koji su dati respektivno sa izrazima (3.318) i (3.319).

Za *idealno hrapav zid*, uzima se da je $\phi_w = \phi_i$, tj. $\mu_w = \mu_i$, i sa ovim izraz (3.311) prelazi u sledeći oblik:

$$K_{a/p} = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 \pm 2\mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{1 - x^2/b^2}} \quad (3.320)$$

Odnosi napona u ovom slučaju zavise od koordinate x , i promenljivi su po ukupnoj širini 2D silosa. U ovom slučaju dijagrami odnosa vertikalnog i horizontalnog napona u horizontalnom preseku za aktivno i pasivno stanje odgovaraju po obliku polovini elipse, a grafički zajedno grade punu elipsu, kao u primeru prikazanom na sl. 132.

Za *materijal u sredini ćelije*, tj. za $x = 0$, koeficijenti K_a i K_p , odgovaraju respektivno koeficijentima prema izrazima (3.318) i (3.319). Veličine koeficijenata K_a i K_p u sredini ćelije ne zavise od hrapavosti zida ćelije, tj. ne zavise od μ_w .

Za *materijal do zida ćelije*, i *idealno hrapav zid* ($\phi_w = \phi_i$, tj. $\mu_w = \mu_i$), za $x = \pm b$, koeficijent K je jedinstven za aktivno i pasivno stanje napona:

$$K_{a,p} = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2} \equiv \frac{1 - \sin^2 \phi_i}{1 + \sin^2 \phi_i} \quad (3.321)$$

Za *materijal do zida ćelije*, i *hrapav zid* ($\phi_w < \phi_i$, tj. $\mu_w < \mu_i$), za $x = \pm b$, koeficijent K za aktivno i pasivno stanje napona dobija sledeći oblik:

$$K_{a/p} = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \equiv \frac{1 + \sin^2 \phi_i \mp 2\sqrt{\sin^2 \phi_i - \mu_w^2 \cdot \cos^2 \phi_i}}{\cos^2 \phi_i + 4\mu_w^2} \quad (3.322)$$

Ovaj izraz odgovara graničnim koeficijentima K , $K_a \leq K \leq K_p$, prema izrazu (2.64). Kako se dva prikazana oblika koeficijenta K po formi dosta razlikuju, da bi se dokazala njihova ekvivalencija, u prvi oblik izraza treba uvesti da je $\mu_i = \tan \phi_i$, i u daljem izvođenju slediti elementarne jednakosti $1/(a \pm b) = 1/(a \pm b) \cdot (a \mp b)/(a \mp b) = (a \mp b)/(a^2 - b^2)$.

Kod drugog oblika za koeficijent K u (3.322), gornji znak "-" se odnosi na slučaj aktivnog stanja, i taj slučaj koeficijent K_a odgovara koeficijentu K u AS 3774 (1996) [14], kod proračunskih izraza za stanje punjenja i mirovanja materijala u ćeliji.

Könen-ovog predlog iz 1986.god., je bio da se u analizi stanja napona pri punjenju materijala u ćeliju, koristi koeficijent K_a , za aktivno stanje napona u obliku izraza (3.318), koji predstavlja *Rankine*-ov koeficijent aktivnog pritiska u materijalu. Ovaj predlog se koristio više od 100 godina u analizama opterećenja u ćelijama.

Uvođenje aktivnog i pasivnog stanja kod određivanja stanja napona u uskladištenom materijalu, izvorno potiče od *Ohde*-a (1951, 1958) [210], a prema *Rotter*-u (2008) [260] u analizu stanja napona u silosima pasivno stanje je prvi uveo *Nanninga*, na osnovu sledeće konstatacije: ako se punjenja uzima kao aktivno stanje, kao solucija za stanje pražnjenja uzma se pasivno stanje.

Primena pasivnog stanja, kod analize napona pri pražnjenju, proizvodi veće horizontalne pritiske u materijalu (u osnovi je ovo korektno), ali značajno smanjuje vertikalne pritiske (smatra se da je ovo nije korektno). Na primer, za ugao $\phi_i = 30^\circ$, prema izrazima (3.318) i (3.319), određuje se $K_a = 0.333$ i $K_p = 3.0$, a sa tim je $K_p / K_a = 9.0$. Vrednost za K nema

uticaj na veličinu asimptotskih horizontalnih pritiska $\sigma_{h\infty} = \gamma \cdot r_h / \mu_w$, koji dominiraju pri većim dubinama materijala z . Međutim, veće vrednosti za K , poizvode brže približavanje σ_h - krive njenoj asimptoti, tako da su pritisci na zid ćelije u ovom slučaju relativno veći u gornjem delu silosa. Vertikalni naponi su obrnuto proporcionalni sa koeficijentom K , i kod većih dubina materijala u razmatranom primeru, u fazi pražnjenja ovi naponi su 9 puta manji od napona pri mirovanju/punjenju materijala.

Drugi tip analize se odnosi na pojavu skokovitog opterećenja (*switch load*) pri otpočinjanju kretanja materijala pri pražnjenju ćelije. Kada se otvori ispust na levku, počinje pražnjenje i materijal u levku počinje da se pokreće, dok materijal u gornjim delovima još miruje. Pelazni nivo promene stanja materijala, koji deli gornji deo materijala u mirovanju od donjeg dela materijala u pokretu, se postepeno podiže, i prateća skokovita promena horizontalnih pritisaka se uzdiže po visini zida ćelije. Horizontalni naponi, na mestu skokovite promene, se uzimaju sa faktorom uvećanja horizontalnih pritisaka $C_h = K_p / K_a$ (u analizi je uvedeno pasivno stanje). U ovom slučaju, za $\phi_i = 30^\circ$, skokoviti horizontalni pritisak je 9 puta veći kod stanja pražnjenja u odnosu na pritiske pri mirovanju materijala. Veličine skokovitog horizontalnog pritiska i vertikalnih napona su takvog reda, da se primena pasivnog stanja kod analize pritisaka pri pražnjenju materijala smatra neodgovarajućom.

Ipak su mnogi istraživači kod analize stanja napona pri pražnjenju, bazirali formulacije na pasivnom stanju (uzimajući u obzir rešenje za horizontalne napone), koje je u analize stanja napona u silosima uvedeno od strane *Ohde*-a i *Nanninga*-a, kao na primer *Walker*, *Walters*, *Nedderman*, *Hampe* i drugi. Međutim, prema eksperimentalnim ispitivanjima, pasivno stanje (stanje pri kome je $p_v < p_h$) se javlja kod pražnjenja - protoka materijala u levku, a ne kod protoka materijala u ćeliji silosa, gde je $p_v > p_h$.

Koliko je autoru poznato, ni u jednom propisu za proračune silosa, pasivno stanje napona se ne uvodi u analizu pri pražnjenju materijala u ćeliji. Prema tome, kod analize pritisaka u ćeliji, za regularna stanja pražnjenja, ne treba koristiti pasivno stanje, već aktivno stanje pri pražnjenju sa $K < 1$.

S druge strane, pasivno stanje odgovara slučaju pri pražnjenju materijala u levku. Na prelazu ćelije u levak pri pražnjenju materijala, aktivno stanje u ćeliji prelazi u pasivno stanje u levku. Pri pražnjenju materijala, kod materijala u ćeliji je $K < 1$, a u levku je $K > 1$. Ovde se isto tako nalazi i prelazna zona u masi materijala gde je $K = 1$. Numerička i eksperimentalna ispitivanja stanja napona pri pražnjenju materijala iz silosa, ukazuju na to da u ćeliji pri pražnjenju vlada posebno aktivno stanje napona ($K < 1$). Pod ovim se ne podrazumeva granično aktivno stanje, gde se koristi *Rankine*-ov koeficijent aktivnog pritiska. Kod pražnjenja materijala, stoji da je $\sigma_h < \sigma_v$, i koeficijent K u ovom slučaju odgovara aktivnom stanju pri pražnjenju K_e .

3.5.3.1 Podela stanja napona kod uskladištenog materijala u silosu

Pitanje stanja napona kod analize pražnjenja materijala, posebno je naglašeno u drugom delu disertacije *van den Bergh*-a (1994) [22]. U ovom radu je analizirano stanje napona sa obuhvatanjem efekta povećanja koeficijenta μ_w u funkciji dubine uskladištenog materijala z . Kod primera razmatranog u ref. [22], koeficijent trenja materijala o zid μ_w se povećava sa dubinom materijala usled zalomljavanja krtih zrna uskladištenog materijala u silosu. Pri ovoj analizi, *van den Bergh* je aktivno stanje napona koje odgovara stanju punjenja ćelije, kao takvo ostavio i za analizu napona pri fazi pražnjenja ćelije. Iako to nije sasvim adekvatno za ovu analizu, navedena solucija je primenjena jer je procenjeno, prema *van*

den Bergh-u i ekspertima iz posebnog udruženja sa kojima se konsultovao, da takav pristup proizvodi manju grešku u odnosu na primenu pasivnog stanja napona.

Primena koeficijenta K u okviru analize van den Bergh-a (1994) [22] je sledeća:

- za stanje punjenja i mirovanja materijala

- u ćeliji: *aktivno* stanje napona ($K_f = K_{af}$)
- u levku: *aktivno* stanje napona

- za stanje pražnjenja materijala

- u ćeliji: *aktivno* stanje napona ($K_e = K_{ae} \Leftarrow K_{af}$)
- u levku: *pasivno* stanje napona

Korišćeni su sledeći indeksi za K : punjenje f – od eng. *filling*; pražnjenje e – od eng. *emptying*; 0 – mirovanje, i a – aktivno.

Podela stanja napona u ovom radu je nešto šira od prethodne, i ova stanja prati primena odgovarajućih koeficijenta K , u zavisnosti od uslova u kojem se nalazi zrnasti materijal:

- za stanje punjenje (nekonsolidovan materijal, prvo punjenje, inicijalno stanje)

- u ćeliji: *aktivno* stanje napona ($K_f = K_{af}$)
- u levku: *aktivno* stanje napona

- za stanje mirovanja (konsolidovan materijal, u EC1-4 stanje posle punjenja)

- u ćeliji: *aktivno* stanje napona ($K_0 = K_{a0}$)
- u levku: *aktivno/pasivno* stanje napona

- za stanje pražnjenja (nakon prvog punjenja ili perioda mirovanja materijala)

- u ćeliji: *aktivno* stanje napona ($K_e = K_{ae}$)
- u levku: *pasivno* stanje napona

Za stanje mirovanja u levku je uzeto da naponi odgovaraju aktivnom stanju ako u toku skladištenja materijala posle prvog punjenja nije bilo delimičnog pražnjenja sa ili bez dopunjavanja materijala u ćeliji (u EC1-4, ovde uvedeno stanje mirovanja je inicijalno stanje materijala – nakon punjenja i odgovara mu aktivno stanje napona). Smatra se da nakon pojave pasivnog stanja napona u levku, to naponsko stanje u levku ostaje tokom daljeg vremena.

Stanje mirovanja je uvedeno u podelu, kao jedno "međustanje" između stanja nakon prvog punjenja i stanja tokom pražnjenja silosa, u cilju konzistencije sa postavkama u EC1-4, gde ovo stanje u principu predstavlja inicijalno (početno) stanje umesto stanja nakon prvog punjenja materijala.

3.5.3.2 Komparacija računskih i eksperimentalnih vrednosti koeficijenta K

Podela stanja napona se može oceniti na osnovu sagledavanja dobijenih rezultata ispitivanja pritisaka od uskladištenog materijala pri punjenju, mirovanju i pražnjenju, na opitnoj silo-stanici, koje su sproveli Couto, Ruiz i Aguado (2013) [53] i Couto, Ruiz, Herráez, Moran i Aguado (2013) [54]. Ispitivanje se odnosilo na zrnasti materijal u silosu sa centričnim punjenjem i centričnim pražnjenjem materijala: u ref [53] ispitivana je pšenica, a u ref. [54] – kukuruz. Rezultati ispitivanja silosa sa usutom pšenicom, prema ref. [53], prikazani su na sl. 138 i sl. 139 (sa redosledom faza ispitivanja: punjenje, mirovanje i pražnjenje), i na sl. 140 i sl. 141 (faze ispitivanja: punjenje, mirovanje 1, pražnjenje 1 (oko 2% mase), mirovanje 2, i pražnjenje 2). Rezultati ispitivanja silosa sa

usutim kukuruzom, prema ref. [54], prikazani su na sl. 142 i sl. 143 (faze: punjenje, mirovanje i pražnjenje).

Detaljan opis ispitnog silosa, načina punjenja i pražnjenja, merne tehnike i postupaka određivanja prosečnih vrednosti koeficijenata K ($= K_m$) i μ_w ($= \mu_m$), kao i prosečne vrednosti presečne vertikalne sile po obimu zida u horizontalnom preseku ćelije (n_{zSk} [kN/m]) od trenja materijala o zid ćelije, prosečnog vertikalnog napona u materijalu p_v ($= p_{vt}$), su dati u ref. [265] i [266]. Vrednosti presečne sile n_{zSk} i pritiska p_v se odnose na prelaz ćelije u levak. Kod silosa su odvojeni zid ćelije i levak, sa zazorom u nivou prelaza ćelije u konusni levak, a isto tako su odvojeni ispust levka i prijemni koš pužastog transportera u nivou zasuna koji zatvara otvor na levku. Kod silosa su ugrađene merne jedinice za određivanje težine i merne jedinice za određivanje normalnih pritisaka na zid (7 mernih mesta po visini ćelije: od GA1 do GA7, i 1 merno mesto na levku GA0). Silo-stanica je opremljena sa kompletnim sistemom za automatsku akviziciju i formiranje baze podataka i vremenskih zapisa, od kojih su na slikama prikazani: pritisci p_h i p_v , težina materijala u silosu W , koeficijenti K i μ_w , i presečna sila n_{zSk} .

Ovde će se uporediti zapisi promene koeficijenta K u vremenu ispitivanja sa vrednostima koeficijenata prema analitičkim izrazima: K_f za stanje punjenja odgovara Rankine-ovom koeficijentu aktivnog pritiska, K_0 za stanje mirovanja odgovara Jáky-evom izrazu za koeficijent mirovanja, i K_e odgovara koeficijentu aktivnog pritiska pri pražnjenju prema ovom radu. Upoređuju se približno jednaki koeficijenti po svom značenju, kako se vremenski zapisi koeficijenta K odnose na prosečnu vrednost vertikalnog napona, a ne na vertikalni napon u materijalu do zida ćelije, a sa druge strane, analitički izrazi se odnose na Janssen-ov postupak (konstantni naponi u preseku, i koeficijenti K prema odnosu napona p_h/p_v u osi silosa). Pored toga, pri ispitivanju su urađene serije ispitivanja sa različitim brzinom pražnjenja, a ovde se upoređenje daje samo na osnovu pojedinačnih ispitivanja koja su detaljno grafički prikazana u navedenim ref. [53] i [54].

U sklopu Janssen-ovog i sličnih postupka za analizu stanja napona, koriste se koeficijenti K , respektivno za stanje punjenja, stanje mirovanja i stanje pražnjenja, gde je sa ϕ_i označen ugao unutrašnjeg trenja zrnastog materijala, prema izrazima iz § 3.5.5:

$$K_f = \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i} \quad (3.323)$$

$$K_0 = 1 - \sin \phi_i \quad (3.324)$$

$$K_e = \cos^2 \phi_i \quad (3.325)$$

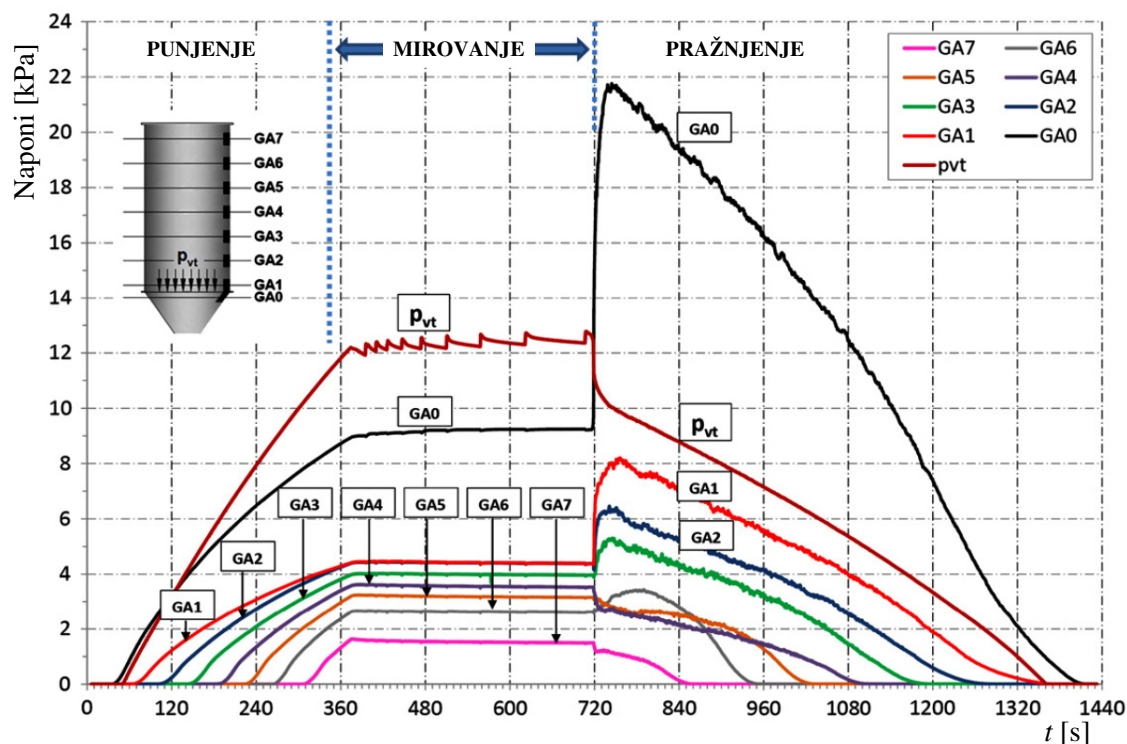
Između ovih koeficijenata mogu se uspostaviti sledeće relacije:

$$K_0 = \frac{2}{1 + K_f} K_f \quad (3.326)$$

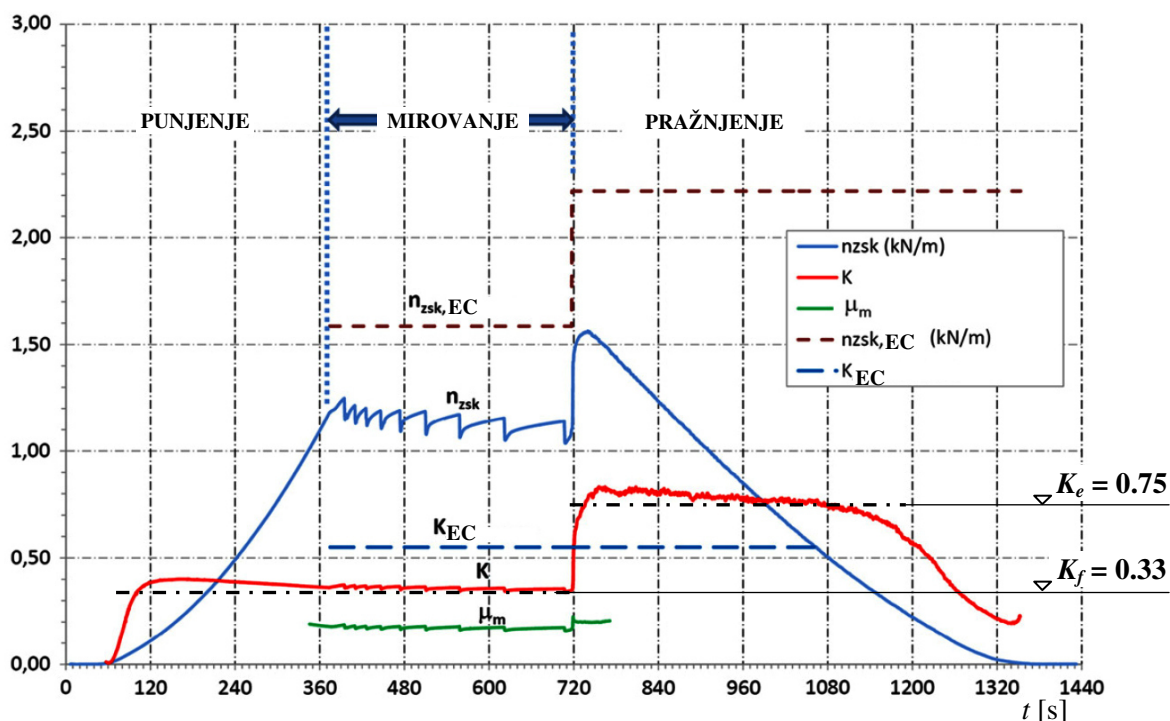
$$K_e = K_0 \cdot (2 - K_0) = \left(\frac{2}{1 + K_f} \right)^2 \cdot K_f \quad (3.327)$$

Na sl. 138, sl. 140 i sl. 142 prikazani su dijagrami promene horizontalnih napona na zidu ćelije neposredno iznad levka (merno mesto GA1), i dijagrami promene prosečnih vertikalnih napona p_{vt} u horizontalnom preseku na prelazu ćelije u levak.

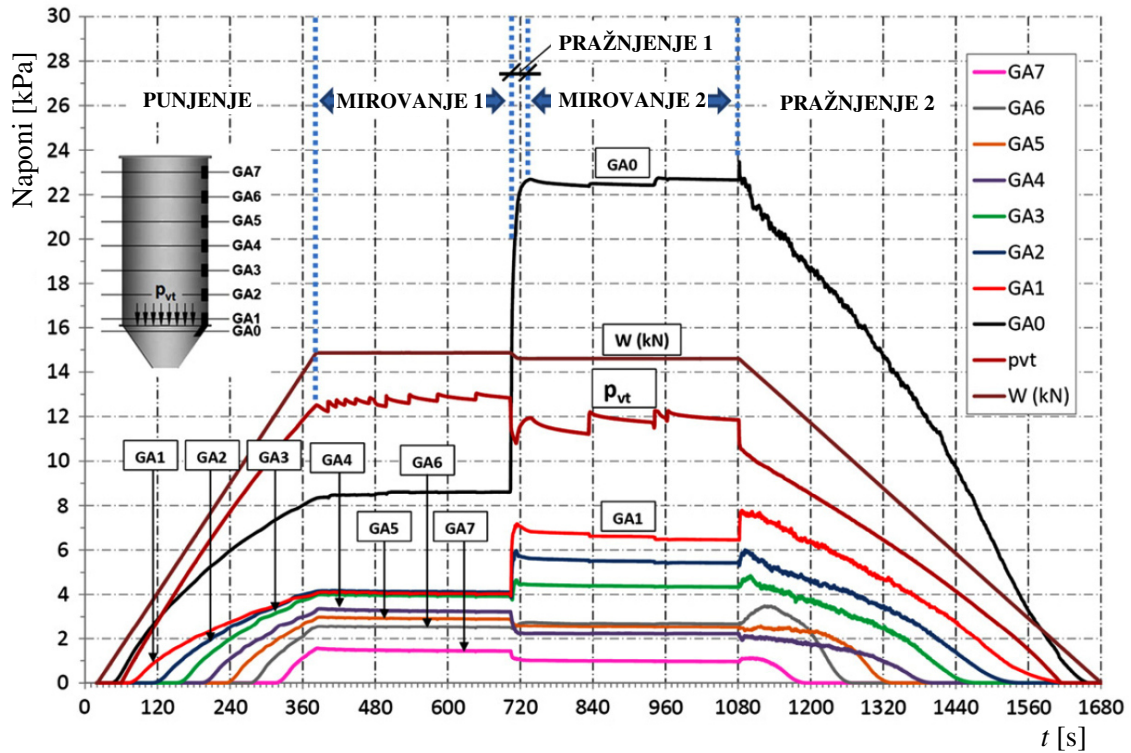
Tokom ova tri perioda vremena pod ispitivanjem, u svim fazama rada silosa (punjenje, mirovanje i pražnjenje) vertikalni napon je veći od horizontalnog ($p_{vt} > p_{hGA1}$), tako da je i tokom pražnjenja silosa u pitanju aktivno stanje napona gde je $K = p_{hGA1}/p_{vt} < 1$.



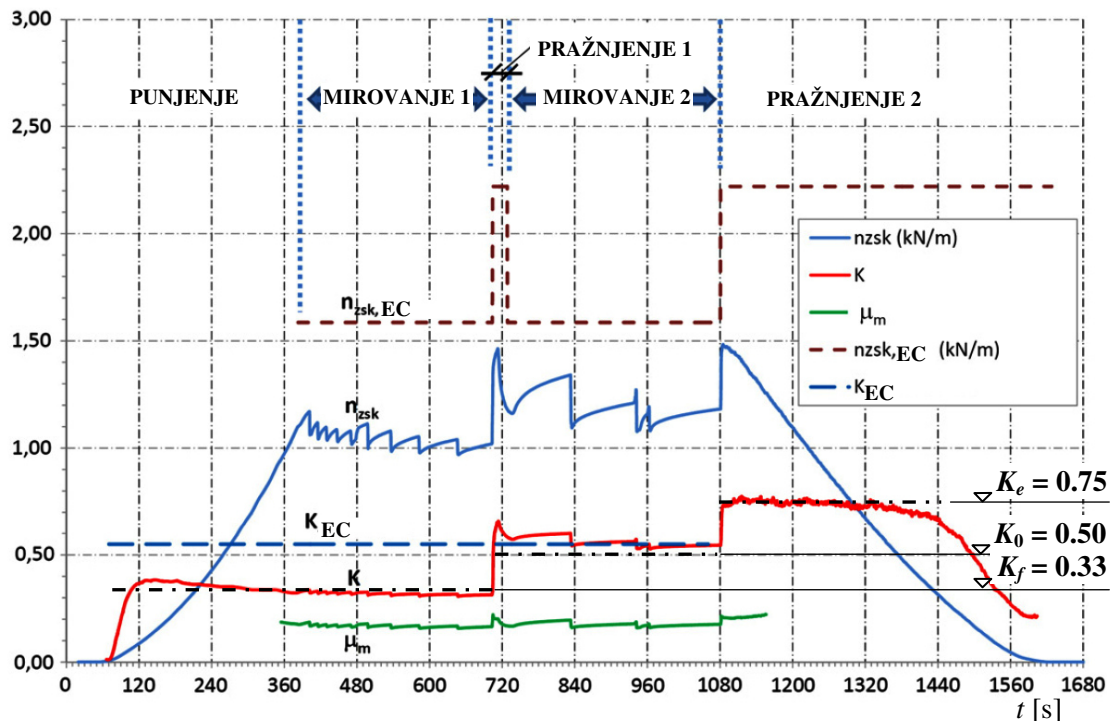
Sl. 138 Rezultati ispitivanja silosa sa usutom pšenicom u toku perioda punjenja, mirovanja i pražnjenja materijala: normalni pritisci na zid ćelije i zid levka, i prosečni vertikalni pritisak p_{vt} u materijalu, prema [53].



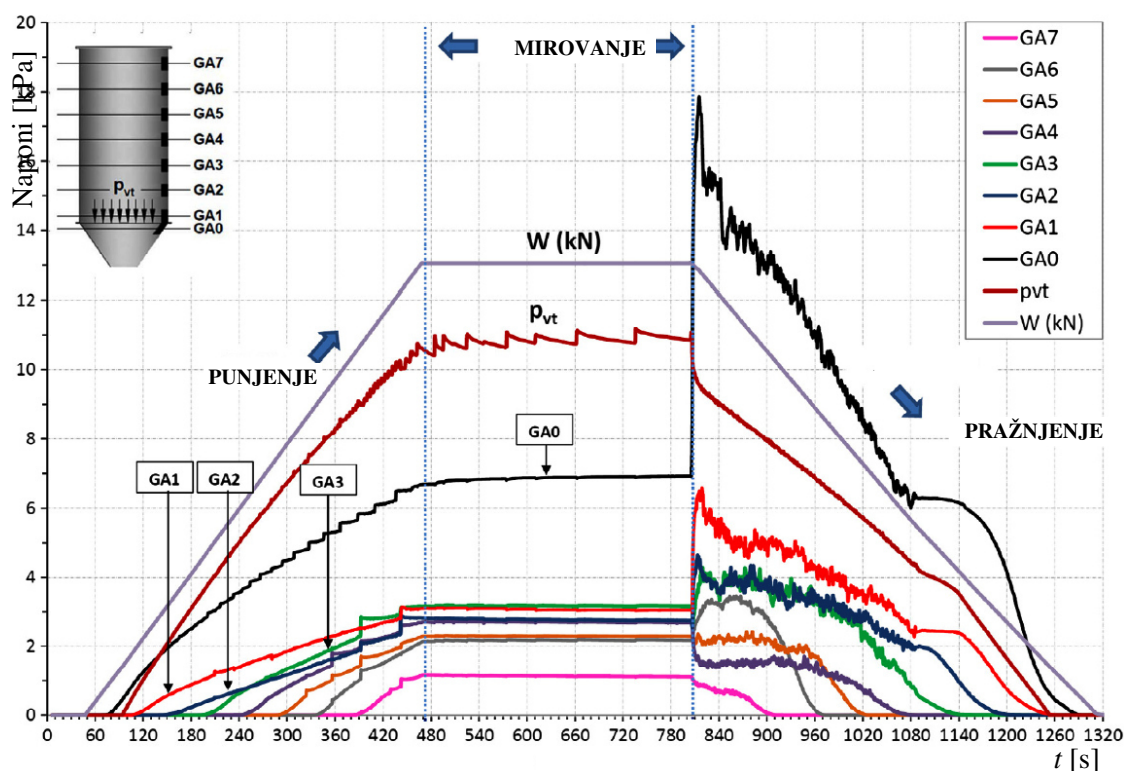
Sl. 139 Prosečne vrednosti koeficijenta trenja, koeficijenta K i vertikalne sile po obimu zida ćelije u nivou prelaza na levak, prema ispitivanju silosa sa usutom pšenicom u toku perioda punjenja, mirovanja i pražnjenja, prema [53]. Prikazane su proračunske vrednosti za K_f i K_e prema izrazima (3.323) i (3.325).



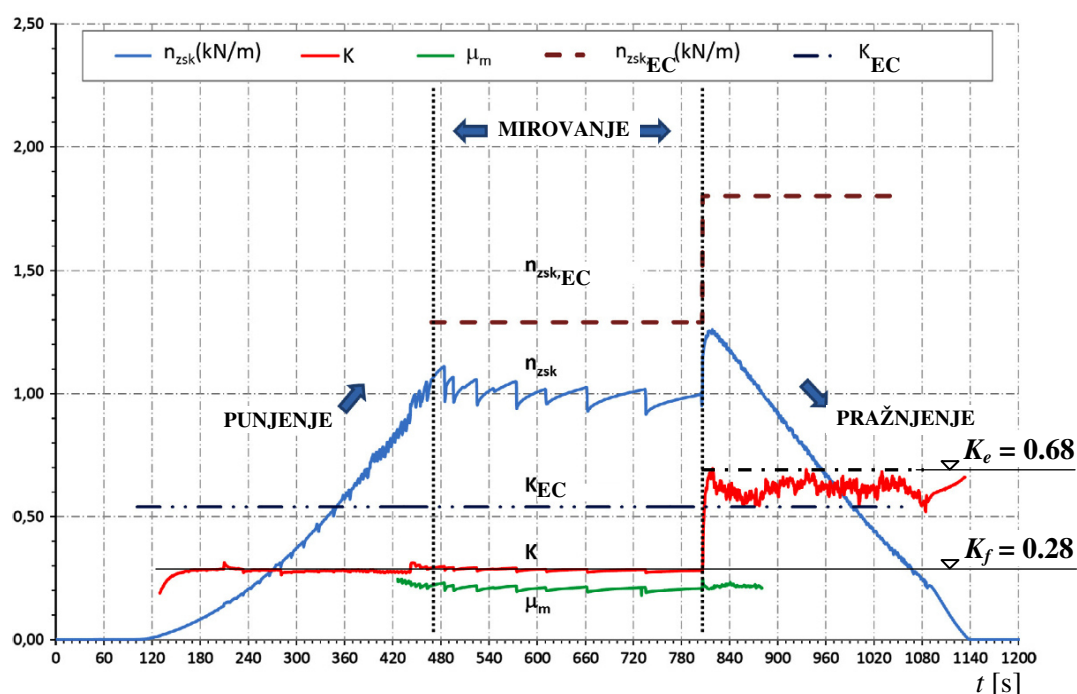
Sl. 140 Rezultati ispitivanja silosa sa usutom pšenicom u toku perioda punjenja, I mirovanja, I pražnjenja (2% mase), II mirovanja i II pražnjenja materijala: normalni pritisci na zid ćelije i zid levka, i prosečni vertikalni pritisak p_{vt} u materijalu, prema [53].



Sl. 141 Prosečne vrednosti koeficijenta trenja, koeficijenta K i vertikalne sile po obimu zida ćelije u nivou prelaza na levak, prema ispitivanju silosa sa usutom pšenicom u toku perioda punjenja, I mirovanja, I pražnjenja (2% mase), II mirovanja i II pražnjenja, prema [53]. Prikazane su proračunske vrednosti za K_f , K_0 i K_e prema izrazima (3.323), (3.324) i (3.325).



Sl. 142 Rezultati ispitivanja silosa sa usutim kukuruzom u toku perioda punjenja, mirovanja i pražnjenja materijala: normalni pritisci na zid ćelije i zid levka, i prosečni vertikalni pritisak p_{vt} u materijalu, prema [54].



Sl. 143 Prosečne vrednosti koeficijenta trenja, koeficijenta K i vertikalne sile po obimu zida ćelije u nivou prelaza na levak, prema ispitivanju silosa sa usutim kukuruzom u toku perioda punjenja, mirovanja i pražnjenja, prema [54]. Prikazane su očitana vrednost za K_f i proračunska vrednost za K_e prema izrazu (3.327).

Promene koeficijenta K su prikazane za ova ispitivanja na sl. 139, sl. 141 i sl. 143. Mogu se uočiti vrednosti u toku punjenja i mirovanja, i u toku pražnjenja materijala. Na ovim slikama su uvedene i proračunske vrednosti koeficijenata K , koje su određene prema navedenim izrazima (3.323) do (3.327).

Na sl. 139, prikazan je dijagram koeficijenta K prema ispitivanju, gde je materijal u silosu pšenica. Ova slika je vezana sa sl. 138 gde su prikazani dijagrami vremenske promene pritiska u materijalu pri istom ispitivanju silosa. Prema ref. [53], za pšenicu koja se koristi kod ispitivanja pritiska u silosu, na osnovu standardnog opita određena je vrednost ugla unutrašnjeg trenja $\phi_i = 30.17^\circ$. Za ovu vrednost, na osnovu izraza (3.323), (3.324) i (3.325), određuje se: $K_f = 0.331 \cong 0.33$, $K_0 = 0.497 \cong 0.50$, i $K_e = 0.747 \cong 0.75$.

Prema EC1-4 ispitni silos spada u proračunsku klasu 1 (AAC 1), pa se za pšenicu uzimaju date srednje vrednosti: $\phi_m = 30^\circ$ i $K_m = 0.54$ (K_{EC} na slici). Ove vrednosti se koriste pri projektovanju silosa. Može se konstatovati da se naznačene vrednosti na slikama K_f i K_e dobro slažu sa odgovarajućim delom dijagrama koeficijenta K po periodima ispitivanja.

Period kada materijal posle punjenja miruje, prate pojava sleganja materijala i promena zbijenosti, tako da materijal nije konsolidovan i u stanju potpunog mirovanja. Na slici nema područja gde se javlja period ispitivanja koji odgovara koeficijentu K_{EC} . Periodi punjenja i mirovanja materijala kod ispitivanja, odgovaraju ovde navedenom stanju punjenja sa $K_f = 0.33$, a period pražnjenja odgovara stanju pražnjenja sa $K_e = 0.75$.

Na sl. 141, koja se prati sa sl. 140, prikazano je ispitivanje silosa sa pšenicom, gde je posle prvog perioda mirovanja, izdato oko 2 % ukupne mase materijala u koš ispod levka. Nakon toga sledi drugi period mirovanja i potpuno pražnjenje silosa. Rezultati ispitivanja se u ovom primeru još bolje slažu po pitanju veličine koeficijenata K_f i K_e . Ispuštanje male količine materijala je proizvelo značajno povećanje horizontalnih pritisaka na zidu ćelije prema sl. 140. Povećanje horizontalnih pritisaka kod materijala omogućuje veću zbijenost usled boljeg preslaganja zrna, tako da je povećana konsolidacija materijala.

U periodu posle delimičnog pražnjenja, horizontalni pritisci ne pokazuju tendenciju ka potpunom povratku na stanje pre delimičnog pražnjenja, tako da se stanje mirovanja nakon delimičnog pražnjenja ovde uzima kao stanje mirovanja konsolidovanog materijala. Na kraju perioda mirovanja stoji $K_0 = 0.50$. Prema EC1-4, ovaj period se vezuje za stanje nakon punjenja sa $K_{EC} = 0.54$.

Na sl. 143, koju prati sl. 142, prikazani su rezultati ispitivanja silosa sa kukuruzom kao uskladištenim materijalom. Procedura ispitivanja je ista kao kod ispitivanja prikazanog na sl. 138 i sl. 139. Stanja pri ispitivanju su punjenje i pražnjenje. Mogu se doneti isti zaključci kao u prvom slučaju, jedino se kod pražnjenja kukuruza može primetiti dinamičniji razvoj pritisaka nego pri pražnjenju pšenice.

Kako u ref. [54] nije navedena veličina ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i za kukuruz (prema laboratorijskim ispitivanjima), koeficijent K je očitao sa dijagrama kao prosečna vrednost pri punjenju: $K_f = 0.28$. Primenom izraza (3.327) određuje se $K_e = 0.684 \cong 0.68$, što odgovara gornjim vrednostima za K pri ispitivanju u periodu pražnjenja silosa.

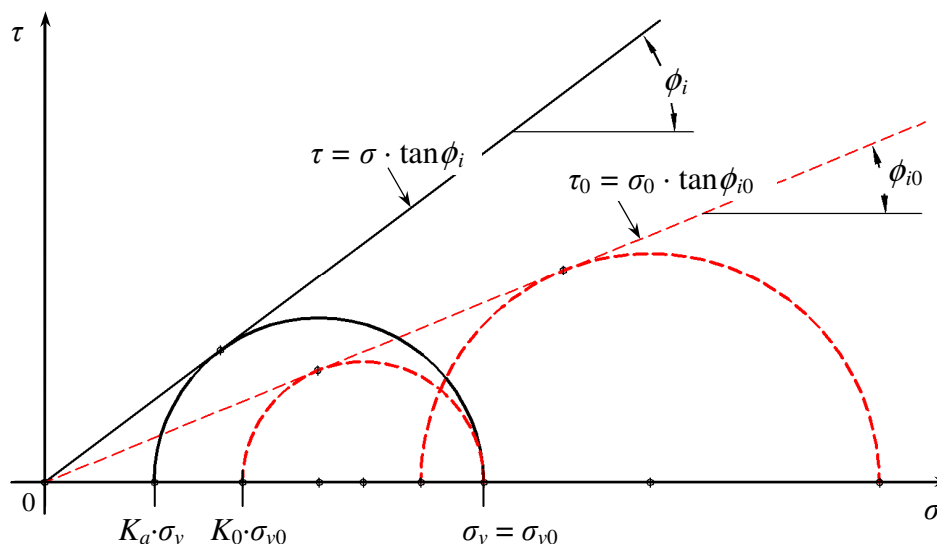
Sračunate vrednosti prosečne vertikalne sile po obimu zida ćelije u nivou prelaza, $n_{zSk EC}$ prema EC1-4, prikazane su na sl. 139, sl. 141 i sl. 143. Pri poređenju sa izmerenim vrednostima n_{zSk} , može se konstatovati da su vertikalne presečne sile $n_{zSk EC}$, određene prema EC1-4, orijentaciono za oko 50% većih vrednosti. Imajući u vidu da se proračun opterećenja u silosu prema EC1-4, za proračunsku klasu AAC 1, kojoj pripada ispitni silos, zasniva na srednjim vrednostima karakteristika materijala, proračunske vrednosti vertikalne presečne sile po obimu zida, $n_{zSk EC}$, su na strani veće sugurnosti.

3.5.4 Koeficijent K pri mirovanju materijala

U oblasti mehanike tla kod određenih teorijskih analiza uvodi se koeficijent bočnog pritiska za materijal (tlo) u stanju mirovanja, K_0 , u sledećem obliku:

$$K_0 = \frac{1 - \sin \phi_{i0}}{1 + \sin \phi_{i0}} = \tan^2 \left(45^\circ - \frac{\phi_{i0}}{2} \right) \quad (3.328)$$

gde ϕ_{i0} predstavlja ugao unutrašnjeg trenja pri mirovanju.



Sl. 144 Mohr-ovi krugovi napona za tlo u stanju graničnog aktivnog loma i pod uslovom jednosksialne kompresije normalno konsolidovanog tla.

Ugao ϕ_{i0} nije moguće odrediti eksperimentalnim putem, već samo indirektnim putem, uz primenu datog izraza.

U osnovi, uvođenjem ovog oblika za koeficijent K_0 , stvara se mogućnost za primenu graničnog stanja ravnoteže kod određivanja stanja napona pri mirovanju materijala, sa jednostavnom substitucijom ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i sa uglom ϕ_{i0} , u okviru postojećih proračunskih izraza za aktivno stanje napona. Kako je K_0 veće od K_a , sledi da je ugao ϕ_{i0} manji od ugla ϕ_i .

U radu *Federico-a, Elia-e i Germano-a* (2008) [79], navodi se da je jednačinu (3.328) prvi u teoriju uveo *Terzaghi* (1923)¹. Pri tome, *Terzaghi* je pod uglom ϕ_{i0} podrazumevao ugao unutrašnjeg trenja u materijalu (tlu) koji stoji kod krutog potpornog zida, i koji je manji od ugla ϕ_i koji se odnosi na smičuću otpornost po definisanoj ravni smicanja.

Ilustracija stanja napona koji opisuju aktivno stanje i stanje pri mirovanju je data sa *Mohr-ovih* krugovima i tangentama na sl. 144. Koeficijent K_0 pri mirovanju materijala se uzima kao koeficijent bočnog pritiska kod ispitivanja normalno (tj. kritično) konsolidovanog materijala (tla) u opitu jednosksialne kompresije (na edometru ili triaksialnom aparatu).

Više istraživača je tražilo korelaciju između uglova ϕ_i i ϕ_{i0} , prema tabeli 24, a najviše u obliku $\phi_{i0} = k \cdot \phi_i$, gde k predstavlja koeficijent redukcije, $k < 1$.

¹ Terzaghi C. (1923): "Discussion of lateral earth pressure: the accurate experimental determination of the lateral earth pressure, together with a resume of previous experiments". *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 86, pp.1525-1543. (Citirano prema *Federico-u, Elia-i i Germano-u* (2008) [79]).

U okviru tabele 24, uključeni su izrazi prikazani u ref. [79]¹, teorijski i aproksimativni izrazi prema *Jáky*-u (1944), teorijski izraz prema *Evesque*-u (1999) [77], empirijski izraz određen u ref. [79] i direktni postupak. Tabela sadrži izraze za koeficijent K_0 i/ili ugao ϕ_{i0} . Od prikazanih izraza za koeficijent K_0 , tri izraza su teorijski izvedena, i to su izrazi prema *Jáky*-u (1944), *Wierzbicki*-om (1958 i 1963) i *Evesque*-u (1999) [77]. *Simpson*-ov (1992) izraz je formiran sa uvođenjem hipoteze (3.342). Ostali izrazi su određeni empirijskom metodom, ili su aproksimacije u okviru nekog opsega promene ugla ϕ . Najpoznatiji od svih, je *Jáky*-ev (1948) izraz, koji predstavlja svojevrsnu aproksimaciju teorijski određenog izraza (3.334).

Ugao ϕ_{i0} se određuje na osnovu izjednačavanja koeficijenta K_0 u datom empirijskom ili teorijskom obliku, sa oblikom koji odgovara aktivnom stanju pri mirovanju materijala:

$$K_0 = K_{a\text{Rankine}} \Big|_{\phi_i = \phi_{i0}} = \frac{1 - \sin \phi_{i0}}{1 + \sin \phi_{i0}} \quad (3.329)$$

Iz ove jednačine se direktno određuje ϕ_{i0} , u sledećem obliku:

$$\phi_{i0} = \arcsin \left(\frac{1 - K_0}{1 + K_0} \right) \quad (3.330)$$

Na primer, pri uvođenju *Jáky*-evog (1948) izraza (3.336) za koeficijent K_0 u (3.330), određuje se:

$$\phi_{i0} = \arcsin \left(\frac{1 - K_{0\text{Jáky}}}{1 + K_{0\text{Jáky}}} \right) = \arcsin \left(\frac{\sin \phi_i}{2 - \sin \phi_i} \right) \quad (3.331)$$

U slučaju da se uvodi *Simpson*-ov (1992) oblik za K_0 , dobija se:

$$\phi_{i0} = \arcsin \left(\frac{1 - K_{0\text{Simpson}}}{1 + K_{0\text{Simpson}}} \right) = \arcsin \left(\frac{\sin \phi_i}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.332)$$

Kod složenijih izraza za K_0 , kao što su teorijski izrazi *Evesque*-a (1999), i *Jáky*-a (1944), koristi se direktna primena izraza (3.330). Na primer, za *Evesque*-ov (1999) oblik K_0 :

$$\phi_{i0} = \arcsin \left(\frac{1 - K_{0\text{Evesque}}}{1 + K_{0\text{Evesque}}} \right) \quad (3.333)$$

U okviru tabele 24, ϕ_{i0} je u nekim primerima prikazano u eksplicitnom obliku.

Evesque-ov (1999) [77] izraz predstavlja najnoviji teorijski i najsloženiji oblik za K_0 . Po rezultatima, prikazanim na sl. 145, ovaj izraz je vrlo blizak po dobijenim vrednostima empirijskom izrazu *Federico*-a, *Elia*-e i *Germano*-a (2008) [79], i pokazuje odlično slaganje sa ranije izvedenim teorijskim izrazom *Wierzbicki*-og (1958 i 1963).

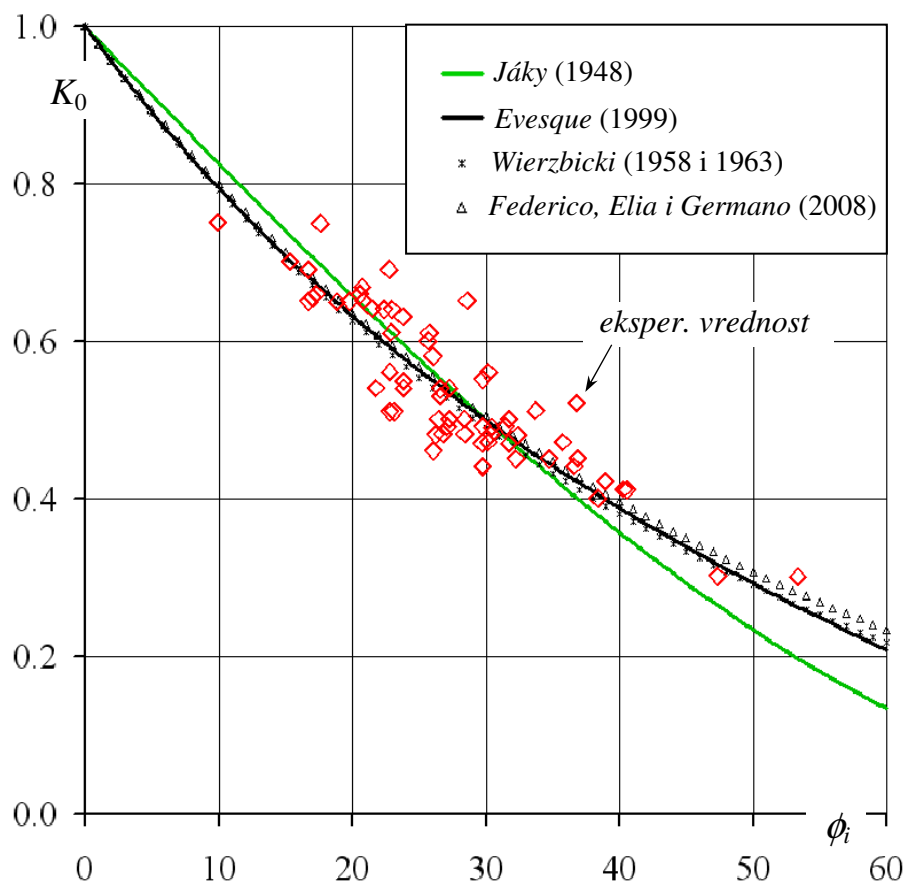
Na sl. 145, prikazane su i eksperimentalne vrednosti koeficijenta K_0 , koje su pronađene u stučnoj literaturi, i tabelarno sabrane u ref. [79]. Primena *Jáky*-evog aproksimativnog izraza za K_0 , u oblasti uobičajenih vrednosti ugla ϕ_i kod zrnastih materijala, može odstupati i do 10% u odnosu na vrednosti prema drugim razmatranim izrazima. Za ugao $\phi_i = 30^\circ$, određuje se primenom navedenih izraza praktično ista vrednost $K_0 = 0.5$.

¹ Potrebno je napomenuti da se u ref. [79], koristi druga terminologija i oznake: ugao ϕ_{i0} se kvalifikuje kao mobilisani ugao sa oznakom $\phi_{i\text{mob}}$; ugao ϕ_i se naziva efektivni ugao i označava sa ϕ_e (u EC1-4 se izbegava naziv efektivni ugao za ϕ_i , a sa tim i oznaka ϕ_e); i K_0 se odnosi na koeficijent K normalno konsolidovanog materijala u opitu jednodimenzionalne kompresije, sa oznakom $K_{0\text{NC}}$.

Tabela 24. Pregled teorijskih i empirijskih izraza za koeficijent K_0 i ugao ϕ_{i0} .

Autor i referenca (komentar)	Koeficijent K_0 i/ili ugao ϕ_{i0}
Jáky (1944) (teorijski izraz; kao odnos napona na vrhu nasipa u obliku položene trougaone prizme; matematički korektno; prema [115] i [190] smičući naponi pod pitanjem)	$K_0 = K_{0\text{Jáky I}} = \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \sin \phi_i\right) \quad (3.334)$
Jáky (1944, 1949) [129] (I apoks. oblik za (3.334); za proračune potpornih zidova; prema [231] preporučeno za oblast $10^\circ < \phi_i < 40^\circ$)	$K_0 = K_{0\text{Jáky II}} = 0.9 \cdot (1 - \sin \phi_i) \quad (3.335)$
Jáky (1948) (II apoks. oblik izraza (3.334); prvi put se pojavio kod proračuna pritiska u silosima)	$K_0 = K_{0\text{Jáky}} = 1 - \sin \phi_i \quad (3.336)$
Wierzbicki (1958 i 1963) ¹ (teorijski izraz; prema [79] pojedina usvajanja pod pitanjem)	$K_0 = \frac{1 - \sin(2/3 \cdot \phi_i)}{1 + \sin(2/3 \cdot \phi_i)} \quad (3.337)$
	$\phi_{i0} = 2/3 \cdot \phi_i \quad (3.338)$
Abdelhamid i Krizek (1976) ¹	$\phi_{i0} = 1.15 \cdot (\phi_i - 9^\circ) \quad (3.339)$
Bolton (1991) ¹ (aprosk. za (3.336) za $30^\circ < \phi_i < 45^\circ$)	$\phi_{i0} = \phi_i - 11.5^\circ \quad (3.340)$
Simpson (1992) ¹ (hipotetični oblik; aproksimacija za $20^\circ < \phi_i < 35^\circ$)	$K_0 = \frac{1 - \sin \phi_i / \sqrt{2}}{1 + \sin \phi_i / \sqrt{2}} \quad (3.341)$
	$\sin \phi_{i0} = \sin \phi_i / \sqrt{2} \quad (\text{hipoteza}) \quad (3.342)$
	$\phi_{i0} \cong 0.69 \phi_i \quad (\text{aprosk.}) \quad (3.343)$
Hayat (1992) ¹ (za pesak na osnovu podataka iz literature)	$\phi_{i0} = 0.67 \phi_i \quad (3.344)$
Federico, Elia i Germano (2008) [79] (empirijski izraz; na osnovu regresione analize sa 59 eksper. podataka iz literature; malo bolji rezultati u odnosu na (3.336))	$K_0 = \frac{1 - \sin(0.64 \phi_i)}{1 + \sin(0.64 \phi_i)} \quad (3.345)$
	$\phi_{i0} = 0.64 \phi_i \quad (3.346)$
Evesque (1999) [77] (teorijski izraz; analiza stanja napona kod edometarskog ispitivanja)	$K_0 = K_{0\text{Evesque}} = \frac{1 + (9 + 8M)^{1/2}}{4(1 + M)} \quad (3.347)$
	gde je: $M = 2 \sin \phi_i / (1 - \sin \phi_i) \quad (3.348)$
Direktna primena (u ovom radu): $K_0 = K_{a\text{Rankine}} \Big _{\phi_i \leftarrow \phi_{i0}}$ (ϕ_{i0} se određuje iz (3.350) sa unošenjem brojne vrednosti za K_0 ili sa uvođenjem posmatranog izraza za K_0)	$K_0 = \frac{1 - \sin \phi_{i0}}{1 + \sin \phi_{i0}} \quad (\text{osnovni izraz}) \quad (3.349)$
	$\phi_{i0} = \arcsin \left(\frac{1 - K_0}{1 + K_0} \right) \quad (3.350)$

Napomena: ¹ Izvorni radovi su citirani u ref. [79].



Sl. 145 Upoređenje izraza za K_0 u funkciji ugla ϕ_i i eksper. vrednosti navedenih u [79].

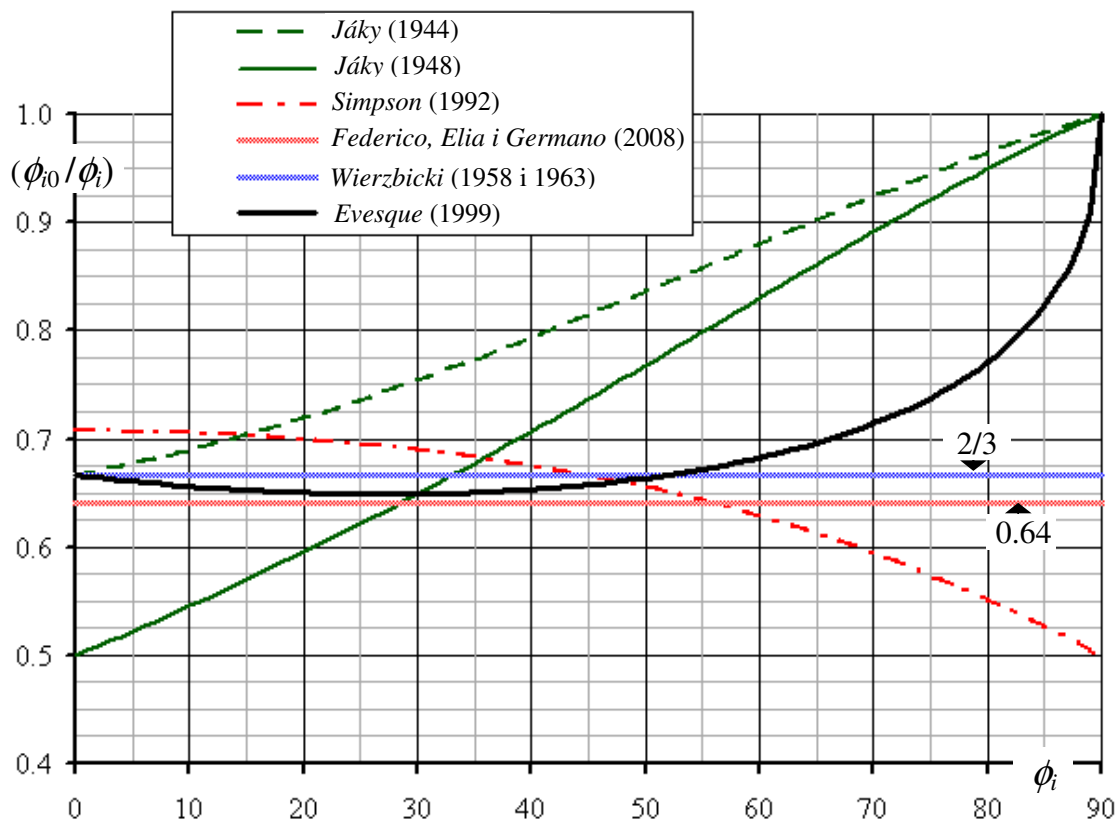
U cilju detaljnije analize relativnih odnosa pojedinih proračunskih veličina, ugao ϕ_{i0} se određuje na osnovu opšteg izraza (3.350), sa variranjem ugla ϕ_i od 0 do 90°. Analiza je sprovedena za šest različitih formulacija koeficijenta K_0 , koje su date u tabeli 24.

Rezultati analiza su predstavljeni u obliku dijagrama relativnih odnosa posmatranih veličina, i to su:

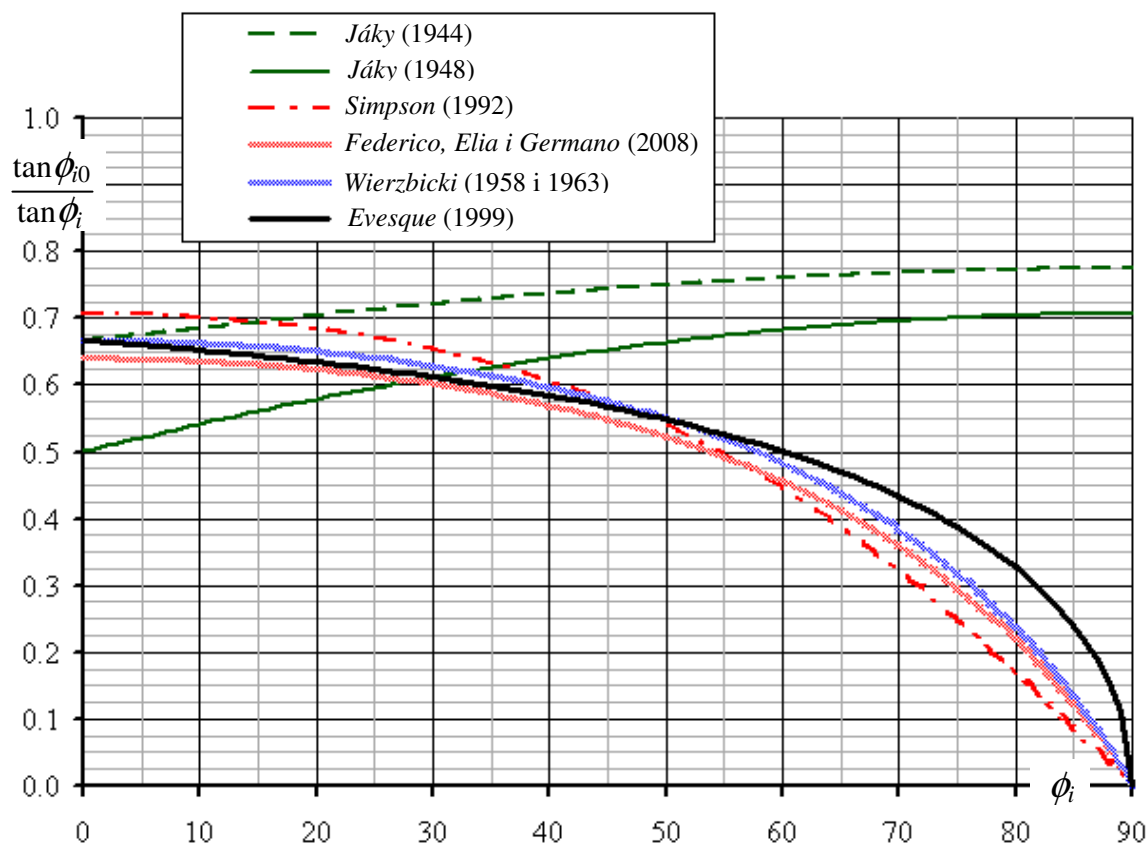
- ϕ_{i0} / ϕ_i – relativni odnos ugla unutrašnjeg trenja pri mirovanju materijala i graničnog ugla unutrašnjeg trenja (dijagrami na sl. 146);
- $\mu_{i0} / \mu_i = \tan \phi_{i0} / \tan \phi_i$ – relativni odnos koeficijenta unutrašnjeg trenja pri mirovanju i koeficijenta unutrašnjeg trenja materijala u graničnom aktivnom stanju (dijagrami na sl. 147);
- K_a / K_0 – relativni odnos koeficijenata bočnog pritiska u aktivnom stanju napona i koeficijenata bočnog pritiska pri mirovanju (dijagrami na sl. 148); i
- K_0 / K_a – recipročni oblik prethodnog odnosa koeficijenata K (dijagrami na sl. 149).

Odnosi uglova ϕ_{i0} / ϕ_i , na sl. 146, koji odgovaraju Jáky-evim formulacijama koeficijenta K_0 , prema izrazima (3.334) i (3.336), se mogu aproksimativno uzeti za prave linije, tako da se prelazak jednog oblika na drugi oblik odnosa datih uglova, može posmatrati kao linearna transformacija ovih aproksimativnih pravih linija.

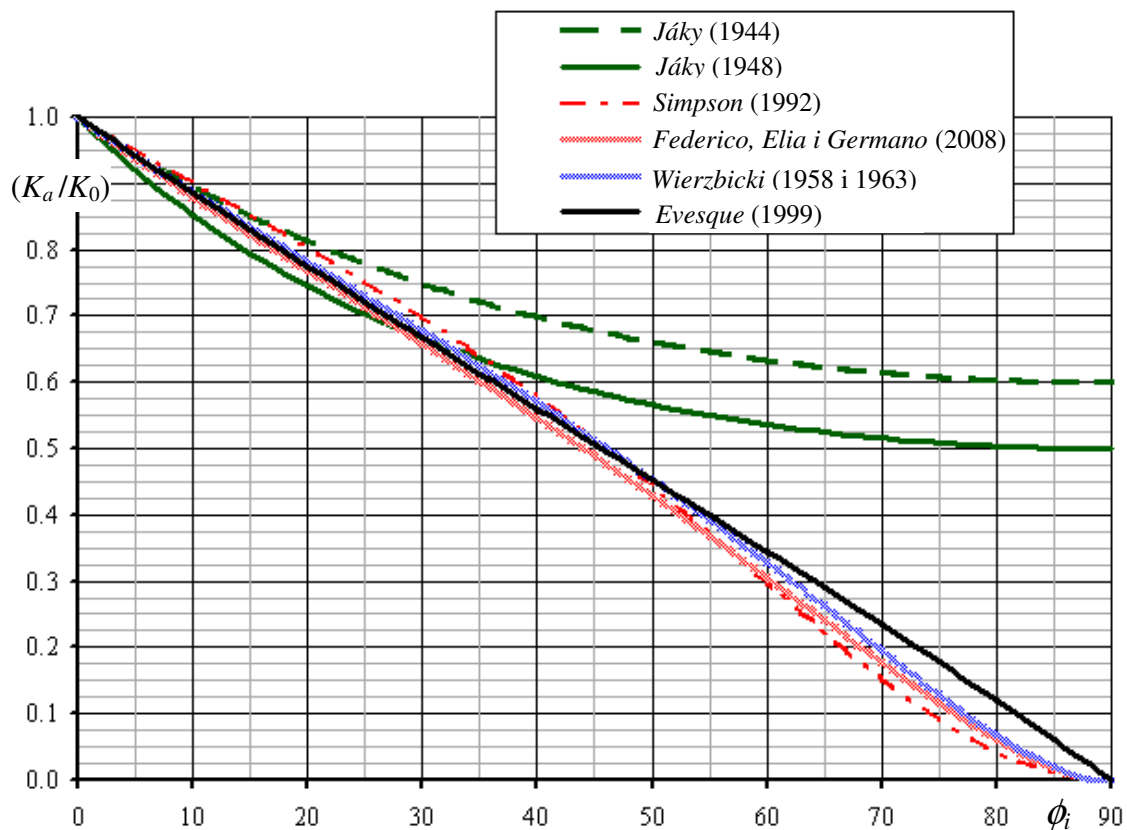
Proračunski izrazi za koeficijent K_0 , na osnovu kojih su formirani dijagrami na slikama (od sl. 145 do sl. 149) su prikazani u tabeli 24, a navode se prema autorima izraza u legendama uz slike i u tabeli 24.



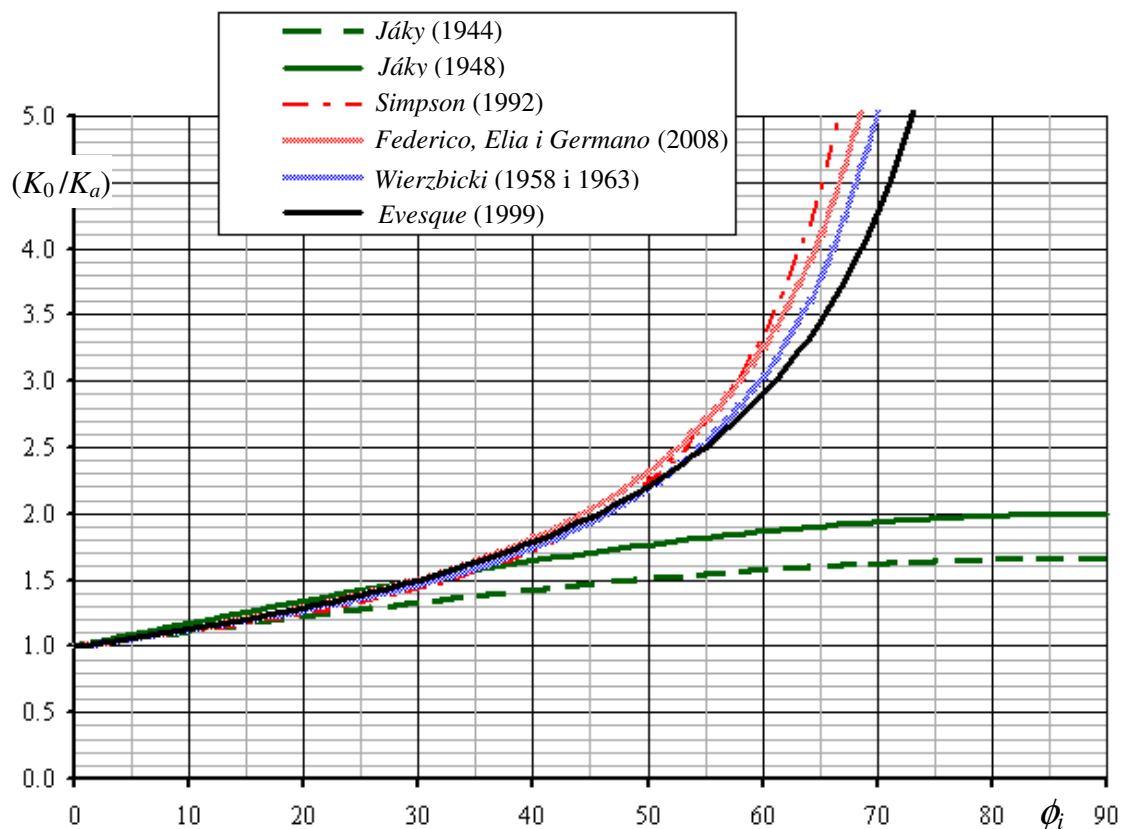
Sl. 146 Upoređenje odnosa ϕ_0/ϕ_i u funkciji ugla ϕ_i za različite formulacije K_0 u tabeli 24.



Sl. 147 Upoređenje odnosa μ_0/μ_i u funkciji ugla ϕ_i za različite formulacije K_0 u tabeli 24.



Sl. 148 Upoređenje odnosa K_a/K_0 u funkciji ugla ϕ_i za različite formulacije K_0 u tabeli 24.



Sl. 149 Upoređenje odnosa K_0/K_a u funkciji ugla ϕ_i za različite formulacije K_0 u tabeli 24.

Aproksimativni izrazi za ove odnose se mogu predstaviti u sledećim oblicima, gde se uglovi uzimaju u [°]:

$$\phi_{i0} \text{ (Jáky1)} \cong \frac{2 + \phi_i / 90}{3} \cdot \phi_i \quad (\text{za Jáky-ev teorijski izraz za } K_0 \text{ iz 1944. god.}) \quad (3.351)$$

$$\phi_{i0} \text{ (Jáky)} \cong \frac{1 + \phi_i / 90}{2} \cdot \phi_i \quad (\text{za Jáky-ev aproks. izraz za } K_0 \text{ iz 1948. god.}) \quad (3.352)$$

Odnosi ϕ_{i0} / ϕ_i , prema formulaciji *Evesque*-a za K_0 , u oblasti ugla ϕ_i od 0 do 50°, su skoro konstantni i može se proceniti da je:

$$\phi_{i0} \text{ (Evesque)} \cong 0.65 \cdot \phi_i \quad (\text{aproks. za oblast } 0^\circ < \phi_i < 50^\circ) \quad (3.353)$$

Relativni odnosi koeficijenata unutrašnjeg trenja pri mirovanju i u aktivnom graničnom stanju, $\mu_{i0} / \mu_i = \tan \phi_{i0} / \tan \phi_i$ su prikazani na sl. 147. Ovde se može uočiti da pri izuzimanju krivih dobijenih primenom *Jáky*-evih izraza, dijagrami bazirani na izrazima za K_0 od drugih autora, prave grupu krivih linija sličnog oblika.

Na sl. 148 prikazani su dijagrami relativnog odnosa K_a / K_0 prema formulacijama navedenih autora. Dijagrami prema *Jáky*-evim formulacijama su ovde različitog oblika od drugih dijagrama, koji se aproksimativno mogu predstaviti u obliku prave linije:

$$\frac{K_a}{K_{0 \text{ (Evesque)}}} \cong 1 - \phi_i / 90 \Rightarrow K_{0 \text{ (Evesque)}} \cong \frac{K_a}{1 - \phi_i / 90} \quad (3.354)$$

Na sl. 149 su prikazani dijagrami koji imaju recipročne vrednosti od onih prikazanih na sl. 148.

Sa stanovišta formiranja aproksimativnih izraza u nekom opsegu ugla ϕ_i , može se iskoristiti prikaz relativnih odnosa na sl. 149, i kao aproksimaciju uzeti pravu liniju koja spaja tačke na dijagramu sa koordinatama ($\phi_i = 0^\circ$; $K_0 / K_a = 1.0$) i ($\phi_i = 30^\circ$; $K_0 / K_a = 1.5$). U ovom slučaju se određuje aproksimacija za K_0 :

$$\frac{K_0}{K_a} \cong 1 + 0.5 \cdot \phi_i / 30 = 1 + \phi_i / 60 \Rightarrow K_0 \cong K_a \cdot (1 + \phi_i / 60) \quad (3.355)$$

Ovaj aproksimativni izraz za K_0 , nije više direktno vezan za *Jáky*-evu ili *Evesque*-evu formulaciju koeficijenta K_0 , predstavlja nezavisan oblik, koji ima karakteristiku *Jáky*-evog izraza da se za $\phi_i = 90^\circ$ određuje konkretna vrednost za K_0 , što nije slučaj kod primene aproksimacije *Evesque*-ovog izraza u obliku (3.354). Aproksimativni izraz (3.355) daje nezatne promene kod vrednosti koeficijenta K_0 u odnosu na *Jáky*-ev aproksimativni izraz. Karakteristično je to, da ove relativno male promene vrednosti idu bliže ka vrednostima prema *Evesque*-ovom izrazu.

Kod prikazanih aproksimativnih izraza uglovi se mere u [°].

Ovde nije cilj da se uspostavi novi oblik za koeficijent bočnog pritiska pri mirovanju materijala, u obliku aproksimativnog izraza (3.355), već da se ukaže na činjenicu da je *Jáky*-ev izraz aproksimativan. U literaturi, kao i u EC1-4, primena *Jáky*-evog izraza za određivanje koeficijenta K_0 , se "podiže" na nivo "ekvivalentan" egzaktnom rešenju.

Kada se sagledaju izrazi koji prate opitno određivanje koeficijenta K_0 , kod postupaka direktnog i indirektnog ispitivanja vrednosti koeficijenta K u EC1-4 (ovde razmatrano u § 2.7.6.2), proizilazi da odnos glavnih napona odgovara *Jáky*-evom izrazu:

$$\sigma_2 / \sigma_1 = 1 - \sin \phi_{im} \quad (3.356)$$

gde je ϕ_{im} srednja vrednost ugla unutrašnjeg trenja (za samo jedno ispitivanje to je ϕ_i). Na ovaj posredan način, koeficijent K_0 , koji se određuje direktnim ispitivanjem na ispitnoj aparaturi kao na sl. 44, izjednačen je sa *Jáky*-evim koeficijentom K_0 *Jáky*.

Međutim, može se uočiti na sl. 44 (u § 2.7.6.2), da su površine dna i poklopca ispitnog aparata, koje naležu na materijal, naznačene kao hrapave površine. Trenje koje se javlja na ovim površinama, menja stanje napona u materijalu koji se ispituje, a to ne odgovara uslovu za određivanje odnosa glavnih napona. U centralnoj osi silosa, gde vertikalni i horizontalni naponi u materijalu odgovaraju glavnim naponima, smičući naponi su nula. Kod ispitne aparature nije dovoljno da bočne strane budu glatke, već kompletna površina aparature koja dodiruje materijal treba da je glatka.

Sličan fenomen se javlja pri ispitivanju čvrstoće betona pri pritisku, gde se relativno manja čvrstoća betona određuje pri eliminisanju trenja, ubacivanjem tankog sloja kliznog materijala, između pritisnih ploča prese i uzorka betona, u odnosu na čvrstoću betona u standardnom slučaju sa direktnim naleganjem ploča na uzorak. Kod stanja granularnog materijala u ispitnom aparatu, sprečene su bočne deformacije, i zato se tu javlja inverzan rezultat u vidu "promene" koeficijenta K u odnosu na "realnu" vrednost.

Na drugoj strani, *Jáky*-ev prvi aproks. izraz (3.335), u obliku $0.9 \cdot (1 - \sin \phi_i)$, koristi se za određivanje pritisaka na potporne zidova, dok je *Jáky*-ev drugi aproks. izraz (3.336) u obliku $(1 - \sin \phi_i)$, namenjen za proračune pritisaka u silosima.

Lako je primetiti da se uvećanjem prvog koeficijenta, tj. množenjem sa $1.1 \cong 1/0.9$, dobija drugi aproks. koeficijent. Kako nije objašnjeno povećanje koeficijenta K_0 , istraživači koji su razmatrali ovaj problem i upotrebu koeficijenta $(1 - \sin \phi_i)$ su postavljali pitanje u vezi povećanja koeficijenta K_0 (kao npr. u ref. [115] i [190]), ili su bili iznenađeni sa činjenicom da ovaj aproksimativni izraz daje dobro slaganje sa rezultatima ispitivanja (kao što je to slučaj u ref. [79]).

Stvar je u tome, da se kod *Jáky*-evog postupka analize napona u silosima, ovaj koeficijent uzima kao konstantna vrednost po srednjoj osi silosa. Kod primene *Jáky*-evog postupka, koeficijent K , kao odnos horizontalnog i vertikalnog napona, opada pri promeni x koordinate idući od sredine silosa ka zidovima. Ovo se može uočiti i kod generalisanog *Jáky*-evog postupka za analizu stanja napona materijala u silosu, koji su formulisali *Pipatpongsa* i *Heng* (2010) [230], gde su horizontalni (radijalni) naponi kod samog zida manji od napona u centralnoj osi (odgovarajući primeri su prikazani na sl. 118 i sl. 119 u § 3.4). Može se pretpostaviti, da povećanje od oko 10% za K_0 u centralnoj osi silosa, predstavlja *Jáky*-evu meru za kompenzaciju pada koeficijenta K u materijalu do zida.

Nakon ovih komentara o levoj i desnoj strani kod izraza (3.356), znak "=", se može uzeti kao oznaka za koincidenciju.

U EC1-4 (EN 1991-4:2006 [38]), koeficijent K_0 se uzima u obliku:

$$K_m = 1.1 (1 - \sin \phi_{im}) \quad (3.357)$$

gde se indeks m odnosi na srednju vrednost date veličine. Faktor 1.1, prema EC1-4, pokriva uticaj trenja kod zidova čelija.

U ovom radu, K_0 predstavlja koeficijent K pri mirovanju konsolidovanog materijala u silosu, i uzima se u sledećem obliku:

$$K_0 = 1 - \sin \phi_i \quad (3.358)$$

što odgovara izvornom *Jáky*-evom aproksimativnom izrazu (3.336) iz 1948. god., dok je faktor 1.1 već primenjen, od strane *Jáky*-a, pri formiranju ove aproksimacije.

3.5.5 Koeficijent K pri pražnjenju materijala u ćeliji

Granično aktivno stanje napona odgovara stanju pri punjenju materijala u ćeliju.

Kod materijala u stanju mirovanja, uveden je ugao unutrašnjeg trenja pri mirovanju ϕ_{i0} , koji se uvodi u *Rankine*-ov izraz za koeficijent K_a , gde se smenom ugla ϕ_i , sa uglom ϕ_{i0} , formira izraz za koeficijent K_0 . U stvari, kako je prikazano na sl. 144, pri ovoj promeni gornja granična linija loma se rotira oko koordinatnog početka, tako da se ugao smanjuje od maksimalne vrednosti ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i do prirodne vrednosti ugla unutrašnjeg trenja ϕ_{i0} pri mirovanju materijala. Na isti način se uvodi i ϕ_{ie} , kao ugao unutrašnjeg trenja pri pražnjenju, gde se smenom ugla ϕ_i , sa uglom ϕ_{ie} , formira izraz za koeficijent K_e .

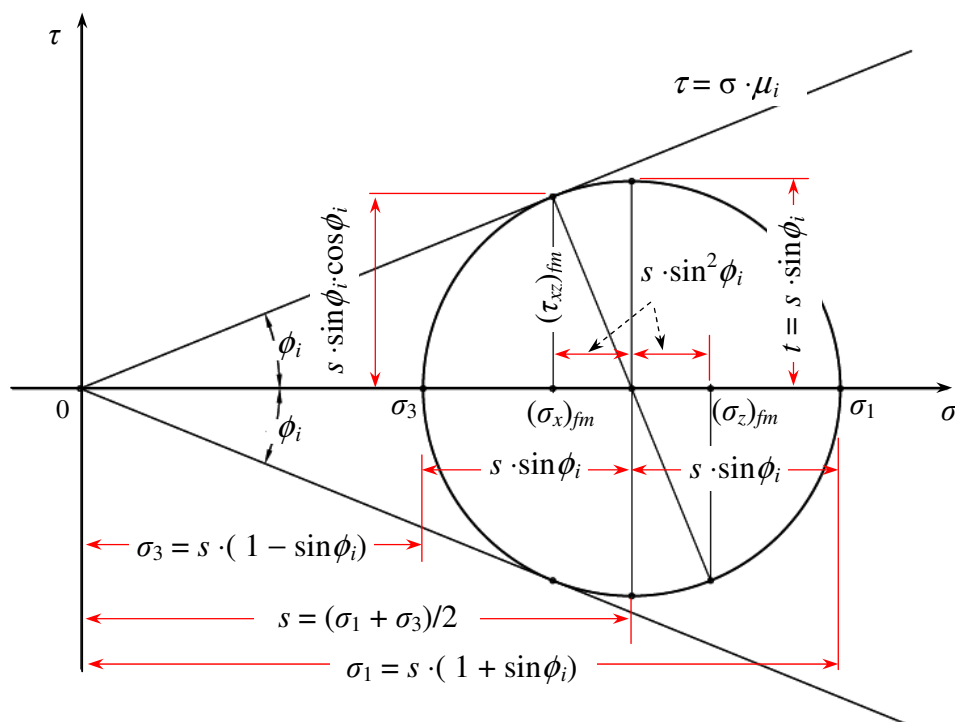
Uglovi ϕ_{i0} i ϕ_{ie} , su fiktivne veličine, i kao takve ne mogu da se direktno izmere. Ovi uglovi su fenomenološki povezani sa zbijenošću, dilatancijom i pokretljivošću zrna u zrnastom materijalu. Zbog povezanosti mogu se sagledati korelacije vezane za promene ovih relativnih veličina. Na primer, pri isticanju materijala iz levka, u nekim slučajevima dolazi do zaustavljanja protoka materijala, odnosno formiranja zaustavnog svoda ili kupole materijala (kod 2D ili 3Dr silosa respektivno). Kako bi se nastavio proces pražnjenja primenjuje se rastresanje materijala, a najefikasnije rastresanje je pri primeni vibracionih uređaja na levku. Ugao unutrašnjeg trenja koji odlikuje zaustavni svod, se usled rastresanja zrna materijala smanjuje, i dolazi do proloma zaustavnog svoda, tako da materijal počinje ponovo da protiče.

Drugi primer je nesmetano proticanje materijala u levku, sa određenim prirodnim kapacitetom izdavanja – izdašnošću kod otvora levka. Kada se kod ustaljenog proticanja materijala, uvede povećanje rastresanja materijala uključenjem vibracionih uređaja na levku, dolazi do smanjenja kapaciteta izdavanja materijala, što nalikuje na "sporije" pražnjenje iz levka. Rastresanjem materijala koji je u pokretu, odgovara smanjuju ugla unutrašnjeg trenja između zrna materijala. Zrna su pokretljivija nego pre toga, ali u svim pravcima a ne samo prema otvoru na levku. Usled bolje pokretljivosti zrna, ona se međusobno bolje preslažu, i dolazi do relativnog povećanja zbijenosti materijala, a sa tim i do pojave dilatancije sa povećanjem horizontalnih pritisaka u materijalu. Kumulativan otpor između zrna se povećava i na taj način se smanjuje kapacitet proticanja.

Na sl. 150 prikazani su elementi kod *Mohr*-ovog kruga napona, i granične linije loma materijala po smicanju. Posmatra se aktivno stanje napona, tako da je $\sigma_3 < \sigma_1$, odnosno koeficijent bočnog pritiska je $K_a < 1$. Kod aktivnog stanja napona, veći glavni napon σ_1 je vertikalni napon, a manji glavni napon je $\sigma_3 = K_a \cdot \sigma_1$ je horizontalni ili radijalni napon (kod 2D ili 3Dr silosa respektivno). Kod rastresitih zrnastih materijala normalni naponi odgovaraju pritisacima.

Materijal je u stanju granične ravnoteže kada *Mohr*-ov krug napona tangira liniju loma, koja stoji pod uglom unutrašnjeg trenja ϕ_i . Na sl. 150 su kotirane elementarne veličine preko geometrije sistema uz uvođenje referentnog napona, kao srednjeg napona s , koji odgovara centru *Mohr*-ovog kruga. Naponi se obično uvode u analizu preko njihovog odnosa K_a , tako da je potrebno odrediti relacije između koeficijenta K_a i geometrijskih veličina na slici. Dalje su prikazana elementarna izvođenja, gde se preko prikazanih geometrijskih veličina određuju:

- koeficijent K_a u *Rankine*-ovom obliku za aktivno stanje napona,
- koeficijent unutrašnjeg trenja materijala μ_i , i
- veza koeficijenta trenja μ_i sa koeficijentom aktivnog pritiska K_a .



Sl. 150 Geometrija Mohr-ovog kruga napona i linija loma materijala po smicanju.

Iz geometrijskih odnosa odgovarajućih veličina na sl. 150, određuje se:

$$\tau = \sigma \cdot \mu_i \quad (3.359)$$

$$\phi_i = \arctan \mu_i \quad (3.360)$$

$$\mu_i = \tan \phi_i \quad (3.361)$$

$$K_a = K_{a\text{Rankine}} = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i} \quad (3.362)$$

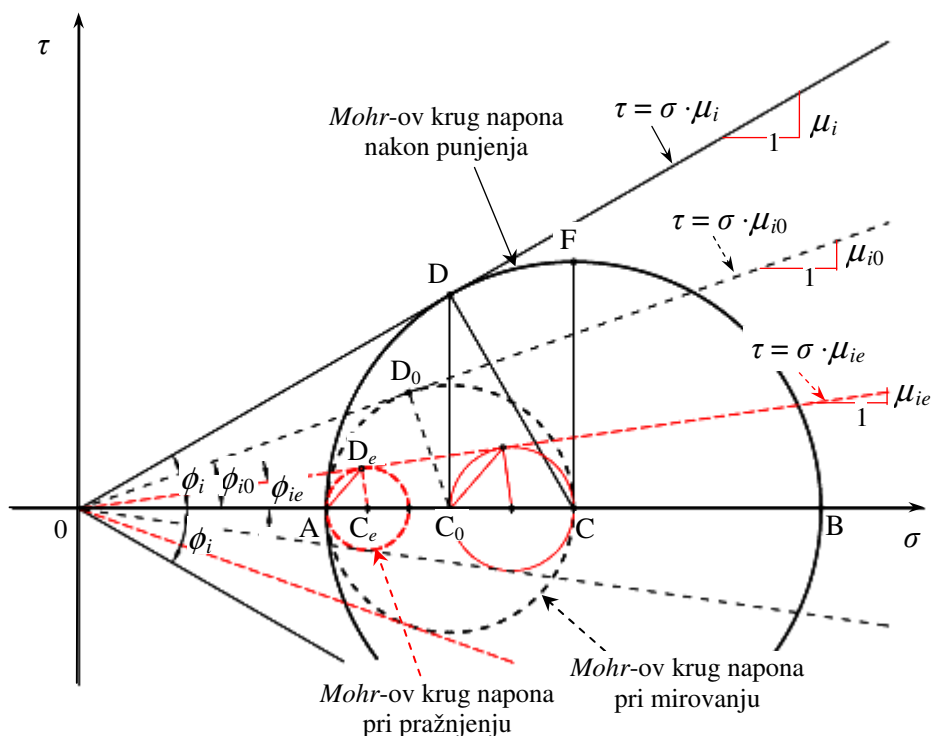
$$\sin \phi_i = \frac{1 - K_a}{1 + K_a} \quad (3.363)$$

$$\cos \phi_i = \sqrt{1 - \sin^2 \phi_i} = \frac{2\sqrt{K_a}}{1 + K_a} \quad (3.364)$$

$$\mu_i = \tan \phi_i = \frac{\sin \phi_i}{\cos \phi_i} = \frac{1 - K_a}{2\sqrt{K_a}} \quad (3.365)$$

Posle uvođenja ovih odnosa, kotirane veličine na sl. 150, mogu da se izraze i na drugi način. Zamenom srednjeg napona s , i veličina $\sin \phi_i$ i $\cos \phi_i$, uvođenjem prethodnih izraza, kod kotiranih veličina, sve one mogu da se predstavje samo u funkciji jednog glavnog napona, recimo napona σ_3 , i koeficijenta K_a . Kada se u ovom novoj formi kotiranih veličina, napon σ_3 uvede kao $\sigma_3 = K_a \cdot \sigma_1$, onda sve kotirane veličine postaju funkcija od napona σ_1 i koeficijenta K_a . Kod analize napona u silosima, interesantan je prvi slučaj, gde se pri definisanju veličina koriste σ_3 i K_a , kako σ_3 odgovara horizontalnom naponu σ_h u silosu, koji je u uobičajenim analizama stanja napona konstantan na posmatranom nivou materijala z . Drugi sistem, odgovara mehanici tla, gde kod prirodnog geostatičkog opterećenja u tlu, σ_1 odgovara vertikalnom naponu $\sigma_v = \gamma \cdot z$, koji je za posmatrani nivo z

konstantan. Na ovaj način predstavljanja veličina kod *Mohr*-ovog kruga napona, mogu se jednostavnije uvoditi analogije između analize napona kod silosa i npr. potpornog zida (ili udvojenih zidova između kojih je nasut materijal).



Sl. 151 Ilustracija za stanja napona u materijalu (slučaj $\phi_i = 30^\circ$).

Na sl. 151 prikazni su *Mohr*-ovi krugovi kod aktivnog stanja napona, gde krug sa centrom C, odgovara punom aktivnom stanju, krug sa centrom C_0 stanju napona pri mirovanju, i krug sa centrom C_e stanju napona pri pražnjenju. Tri kruga koji imaju zajedničku tačku A, odgovaraju stanjima sa konstantnim horizontalnim naponom $\sigma_h = \text{const}$. Isto tako, mogu se nacrtati tri kruga koji imaju zajedničku tačku B, a koji odgovaraju uslovu konstantnog vertikalnog napona $\sigma_v = \text{const}$. Pri tome bi krug sa centrom C odgovarao stanju graničnog aktivnog pritiska, krug sa prečnikom C_0 -B odgovara stanju mirovanja, i krug sa tačkom B i tangentom iz koordinatnog početka 0 pod uglom ϕ_{ie} , odgovara slučaju sleganja tla (analogija sa fiktivnim slučajem silosa sa zidovima bez trenja, koji se ravnomerno prazni).

Tačka A sa pripadajućim krugovima odgovara stanju napona u srednjoj/centralnoj osi silosa, za beskonačnu dubinu materijala kada $z \rightarrow \infty$. U ovom slučaju horizontalni naponi kod 2D silosa su $\sigma_h = \text{const}$. i jednake su vrednosti za sva tri slučaja stanja napona (pri punjenju, mirovanju i pražnjenju). Kod 3Dr silosa (sa kružnim ćelijama), radijalni naponi se mogu uzeti da su $\sigma_r = \text{const}$. (ovo je uobičajena aproksimacija za σ_r naponi, koja je uvedena kod *Walker*-ovog postupka) i istih su vrednosti za tri navedena slučaja stanja napona. Kada se razmatraju stanja napona na dubini z u ćeliji silosa (dubina z se menja od 0 do visine nasipanja h_c), u centralnoj osi silosa ($x = 0$ ili $r = 0$), odgovarajući krugovi napona su manji od prikazanih na sl. 151, i nemaju više zajedničku tačku, kao što je to bila tačka A. Naponi σ_h (odnosno σ_r) zavise od funkcije raspodele napona $Y(z)$ po dubini z , tako da horizontalni/radijalni naponi nisu više jednaki za različita stanja materijala.

U osnovi, za neku dubinu z , tri kruga napona prilaze koordinatnom početku 0, i dodiruju prikazane tangente. Naponi u ovim slučajevima su uvek manji od odgovarajućih napona

za $z \rightarrow \infty$. Translacija krugova po osi σ i linearnost prečnika krugova sa udaljenjem od osnog početka 0 (radi održanja dodirne tačke sa odgovarajućom tangentom), predstavlja linearnu transformaciju kruga iz jedne pozicije u drugu, gde stoji proporcija između relativne promene udaljenosti od početka 0 i relativne promene prečnika. Ovde je u pitanju kolinearnost prečnika i udaljenosti kruga od početne tačke 0.

Na osnovu prvog elementarnog izvođenja, određuju se koeficijenti unutrašnjeg trenja, i koeficijenti K za stanja punjenja, mirovanja i pražnjenja, pri čemu su svi koeficijenti K u obliku koji odgovara aktivnom stanju napona:

$$\mu_{if} = \frac{1 - K_f}{2\sqrt{K_f}} = \mu_i \quad (\mu_{if} = \tan \phi_{if} = \tan \phi_i) \quad (3.366)$$

$$\mu_{i0} = \frac{1 - K_0}{2\sqrt{K_0}} \quad (\mu_{i0} = \tan \phi_{i0}) \quad (3.367)$$

$$\mu_{ie} = \frac{1 - K_e}{2\sqrt{K_e}} \quad (\mu_{ie} = \tan \phi_{ie}) \quad (3.368)$$

$$\phi_{if} = \arcsin\left(\frac{1 - K_f}{1 + K_f}\right) = \phi_i \quad (\phi_{if} = \arctan \mu_{if} = \phi_i) \quad (3.369)$$

$$\phi_{i0} = \arcsin\left(\frac{1 - K_0}{1 + K_0}\right) \quad (\phi_{i0} = \arctan \mu_{i0}) \quad (3.370)$$

$$\phi_{ie} = \arcsin\left(\frac{1 - K_e}{1 + K_e}\right) \quad (\phi_{ie} = \arctan \mu_{ie}) \quad (3.371)$$

$$K_f = \frac{1 - \sin \phi_{if}}{1 + \sin \phi_{if}} = \frac{1}{1 + 2\mu_{if}^2 + 2\sqrt{1 + \mu_{if}^2} \cdot \mu_{if}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \mu_{if}^2} + \mu_{if}\right)^2} \quad (3.372)$$

$$K_0 = \frac{1 - \sin \phi_{i0}}{1 + \sin \phi_{i0}} = \frac{1}{1 + 2\mu_{i0}^2 + 2\sqrt{1 + \mu_{i0}^2} \cdot \mu_{i0}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \mu_{i0}^2} + \mu_{i0}\right)^2} \quad (3.373)$$

$$K_e = \frac{1 - \sin \phi_{ie}}{1 + \sin \phi_{ie}} = \frac{1}{1 + 2\mu_{ie}^2 + 2\sqrt{1 + \mu_{ie}^2} \cdot \mu_{ie}} = \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \mu_{ie}^2} + \mu_{ie}\right)^2} \quad (3.374)$$

Za koeficijente bočnog pritiska u ćeliji, stoji međusobni poredak veličina:

$$K_f < K_0 < K_e < 1 \quad (3.375)$$

Uvodi se hipoteza da se koeficijenti K menjaju sa geometrijskom progresijom, odnosno da je K_0 geometrijska sredina koeficijenata K za stanja punjenja i pražnjenja. U skladu sa postavljenom hipotezom, pri određivanju K_e od velike je važnosti izbor koeficijenta K_0 . Kod primene poznate Jáky-eve (1948) formulacije za K_0 prema izrazu (3.336), sledi:

$$K_f = \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i} = K_a = K_{a \text{ Rankine}} \quad (3.376)$$

$$K_0 = K_f \cdot (1 + \sin \phi_i) = 1 - \sin \phi_i = K_{0 \text{ Jáky}} \quad (3.377)$$

$$K_e = K_0 \cdot (1 + \sin \phi_i) = 1 - \sin^2 \phi_i = \cos^2 \phi_i \quad (3.378)$$

U ovoj analizi se praktično pod pretpostavkom poznatih koeficijenata K_a i K_0 određuje koeficijent K_e za stanje pražnjenja. Koeficijent K_e je izveden na bazi Jáky-eve formulacije za K_0 , pri čemu je koeficijent progresije:

$$q = 1 + \sin \phi_i \quad (3.379)$$

Mogu se uspostaviti sledeće veze između koeficijenata K :

$$K_f = K_0 / (2 - K_0) \quad (3.380)$$

$$K_0 = \sqrt{K_f \cdot K_e} \quad (3.381)$$

$$K_e = K_0 \cdot (2 - K_0) \quad (3.382)$$

Važe i sledeće veze ovih koeficijenata koje mogu biti od interesa:

$$K_0 = \frac{2}{1 + K_f} K_f \quad (3.383)$$

$$K_e = \left(\frac{2}{1 + K_f} \right)^2 K_f = \frac{4}{(1 + K_f)^2} K_f \quad (3.384)$$

Na sl. 152, prikazani su dijagrami koeficijenata K pri punjenju, mirovanju i pražnjenju, koji su određeni prema izrazima (3.376), (3.377) i (3.378), pri variranju ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i od 0° do 90° .

Vrednosti koeficijenta K (za K_0 prema Jáky-u) su date u tabeli 25, za izabrane vrednosti ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i . U tabelu su uvedene i prateće vrednosti uglova unutrašnjeg trenja pri mirovanju (ϕ_{i0}) i pražnjenju (ϕ_{ie}), prema izrazima (3.370) i (3.371).

Na primer, *Mohr*-ovi krugovi napona za $z \rightarrow \infty$, prikazani na sl. 151, tačno odgovaraju slučaju gde je ugao unutrašnjeg trenja $\phi_i = 30^\circ$. Osnova crteža na sl. 151, dobijena je samo na osnovu geometrijske konstrukcije u *AutoCAD*-u, tako da su na crtežu prikazane i pomoćne linije pri konstruisanju *Mohr*-ovih krugova. U ovom slučaju, za $\phi_i = \phi_{if} = 30^\circ$ (stanje pri punjenju), prema tabeli 25, ostali uglovi unutrašnjeg trenja su $\phi_{i0} = 19.47^\circ$ (za mirovanje) i $\phi_{ie} = 8.21^\circ$ (za pražnjenje). Odgovarajući koeficijenti odnosa horizontalnog i vertikalnog napona su: $K_f = 0.333$ (za stanje punjenja), $K_0 = 0.500$ (za mirovanje) i $K_e = 0.750$ (za pražnjenje).

U cilju ispitivanja moguće promenljivosti veličine koeficijenta K_e , prikazani su uporedni dijagrami koeficijenata K , na sl. 153, prema sledećim slučajevima analize:

- K_e *Evesque* (na osnovu afinosti razlika $(K_0 - K_a)$ i $(K_e - K_0)$ za koef. K_0 prema *Evesque*-u)

Postupak: Za koeficijent odnosa navedenih razlika je uzeta vrednost koja odgovara referentnom uglu $\phi_i = 30^\circ$ (za ovaj ugao je K_0 Jáky = K_0 *Evesque*), i to je 1.5.

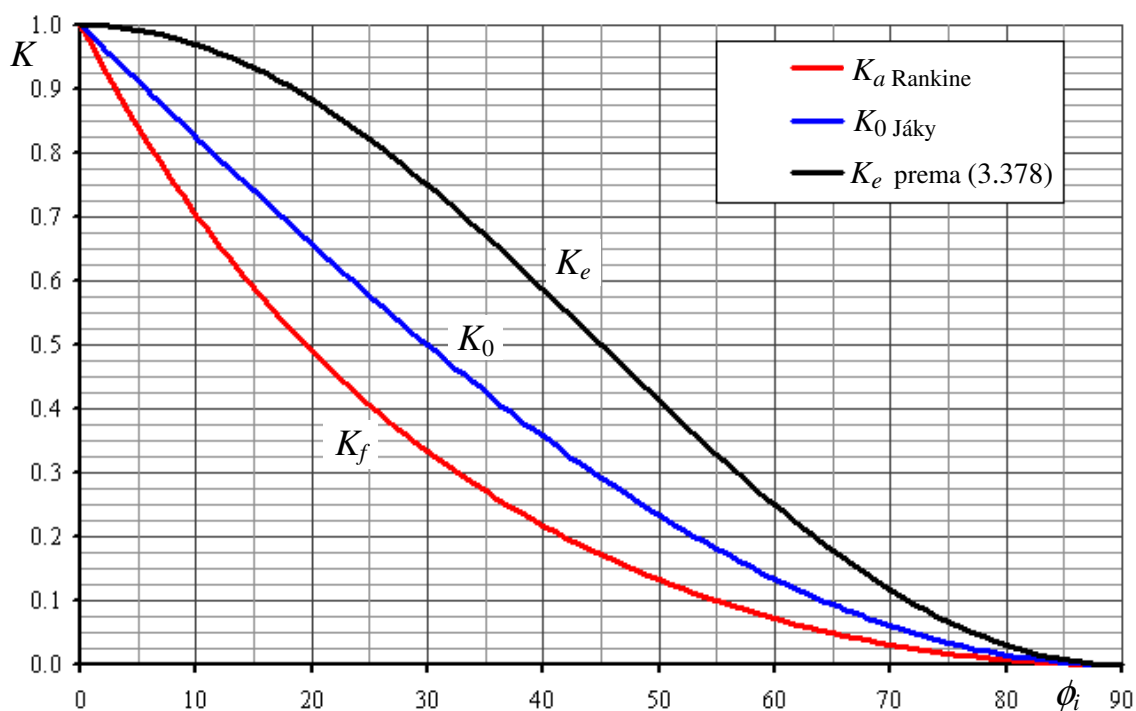
$$K_{e \text{ Evesque}} = K_{0 \text{ Evesque}} + 1.5 \cdot (K_{0 \text{ Evesque}} - K_a) \quad (3.385)$$

- K_e *GS Jáky* i *Evesque* (na osnovu geometrijske sredine K_0 prema Jáky-u i *Evesque*-u)

Postupak: K_0 se određuje kao geometrijska sredina koeficijenata K_0 Jáky i K_0 *Evesque*; i ova vrednost kao K_0 se uzima za geometrijsku sredinu koeficijenata K_a i K_e :

$$K_{0 \text{ GS Jáky i Evesque}} = \sqrt{K_{0 \text{ Jáky}} \cdot K_{0 \text{ Evesque}}} \quad (3.386)$$

$$K_{e \text{ GS Jáky i Evesque}} = (K_{0 \text{ GS Jáky i Evesque}})^2 / K_a = K_{0 \text{ Jáky}} \cdot K_{0 \text{ Evesque}} / K_a \quad (3.387)$$



Sl. 152 Koeficijenti K za stanje napona pri punjenju - K_f pri mirovanju - K_0 i pri pražnjenju - K_e , u funkciji ugla unutrašnjeg trenja ϕ .

Tabela 25. Koeficijenti K za stanje napona pri punjenju - K_f pri mirovanju - K_0 i pri pražnjenju - K_e , i uglovi unutrašnjeg trenja ϕ_{if} , ϕ_{i0} i ϕ_{ie} .

$\phi_i (= \phi_{if}) [^\circ]$	$K_f (= K_a)$	K_0	$\phi_{i0} [^\circ]$	K_e	$\phi_{ie} [^\circ]$
0	1.000	1.000	0.00	1.000	0.00
5	0.840	0.913	2.61	0.992	0.22
10	0.704	0.826	5.46	0.970	0.88
15	0.589	0.741	8.55	0.933	1.99
20	0.490	0.658	11.90	0.883	3.56
25	0.406	0.577	15.54	0.821	5.63
30	0.333	0.500	19.47	0.750	8.21
35	0.271	0.426	23.71	0.671	11.35
40	0.217	0.357	28.27	0.587	15.09
45	0.172	0.293	33.16	0.500	19.47
55	0.099	0.181	43.92	0.329	30.32
60	0.072	0.134	49.79	0.250	36.87
65	0.049	0.094	55.96	0.179	44.18
70	0.031	0.060	62.41	0.117	52.24

- $K_{e \text{ aproks.}}$ (na osnovu aproksimativnog izraza (3.355) za K_0)

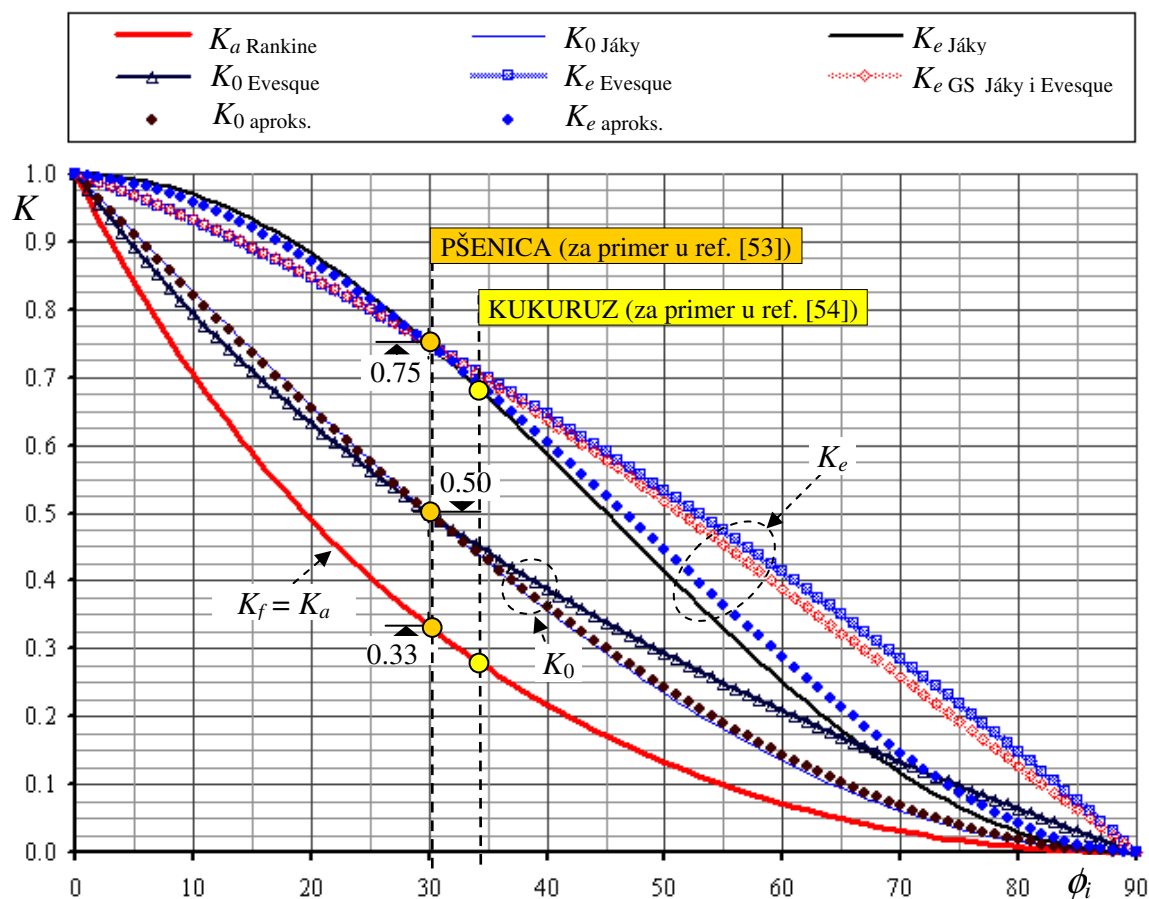
Postupak: K_0 se uzima u obliku aproksimativnog izraza (3.355); koeficijent progresije q se određuje kao odnos K_0/K_a , i odatle koeficijent K_e :

$$K_{0 \text{ aproks.}} = K_a \cdot (1 + \phi_i / 60) \quad (3.388)$$

$$q = K_{0 \text{ aproks.}} / K_a = 1 + \phi_i / 60 \quad (3.389)$$

$$K_{e \text{ aproks.}} = K_a \cdot q^2 = K_a \cdot (1 + \phi_i / 60)^2 \quad (3.390)$$

U osnovi, koeficijent K_e se može proceniti primenom analognih slučajeva kod relativnih odnosa stanja napona na *Mohr*-ovim krugovima, preko odnosa koeficijenata K_e/K_0 (odgovara koeficijentu uvećanja horizontalnih opterećenja C_{h0} kod analize skokovitog opterećenja), preko K_e/K_a (odgovara koeficijentu C_{ha} kod analize skokovitog opterećenja), preko $(K_e - K_0)/(K_0 - K_a)$ koji uvodi afinost kod promene koeficijenata, i na druge načine. Međutim, sa ovim se dobijaju ipak samo teorijske procene za veličinu ovog koeficijenta, koje je neophodno proveriti putem eksperimentalnih ispitivanja na silosima.



Sl. 153 Uporedni pregled koeficijenata K pri punjenju, mirovanju i pražnjenju (K_0 prema Jáky-u i Evesque-u i drugim izrazima).

Rezultati ispitivanja na jednom ispitnom silosu – modelu (sa novom koncepcijom kod ispitivanja), pri kojima je obuhvaćeno i određivanje koeficijenta K_e pri stanju pražnjenja, prikazani su na sl. 138 do sl. 143 (prema ref. Couto, Ruiz i Aguado (2013) [53] i Couto, Ruiz, Herráez, Moran i Aguado (2013) [54]). Kod ovog ispitnog silosa na dnu ćelije je postavljen odvojeni konusni levak, tako da je izbegnuta pojava efekta ravnog dna. Izvesni

manji efekat "dna" ćelije kod levka postoji, ali je faktički zanemarljive veličine. Rezultati određeni pri ispitivanju na ovom ispitnom silosu su upoređeni, u okviru ovog rada (detaljnije prikazano u § 3.5.3.2), sa izrazima za koeficijente K pri punjenju, mirovanju i pražnjenju, pri čemu je utvrđeno dobro slaganje primenjenih teorijskih izraza pri upoređenju sa vrednostima dobijenim na osnovu ispitivanja. Proračunske vrednosti koeficijenata K su uvedene u dijagrame na sl. 139 i sl. 141 kao $K_f = 0.33$, $K_0 = 0.50$, i $K_e = 0.75$, za ispitivani materijal u silosu - pšenicu; kao i u dijagram na sl. 143, pri ispitivanju silosa sa nasutim kukuruzom, gde je na osnovu ispitivanja određen koeficijent $K_f = 0.28$, i na osnovu ove vrednosti proračunski određen $K_e = 0.68$ za stanje pražnjenja silosa (prikazano u § 3.5.3.2). Vrednosti koeficijenata u ovim primerima su naznačene kod dijagrama na sl. 153.

Ispitivanja ovog tipa su vrlo retka, ali su neophodna radi kontrole i usavršavanja teorijskih pretpostavki i postupaka analize stanja napona u silosima. Opis tehnike i postupka ispitivanja, detalji kod silosne konstrukcije, kao i prezentacija drugih serija ispitivanja sa rezultatima ispitivanja na ovom silosu, prikazani su u referencama [52], [53], [54], [55], [265] i [266].

Mora se konstatovati da je u pitanju mali broj eksperimentalnih rezultata za K_e , pri čemu se podaci odnose na ispitivanje pšenice i kukuruza, kod kojih je ugao ϕ_i oko 30° (bliske vrednosti uglova i bliske odgovarajuće tačke za pšenicu i kukuruz na sl. 153). U tom pravcu, ispitana je promenljivost rezultata za K_e , s obzirom na promene koje mogu nastupiti kod koeficijenta K_0 . Pri analizi su varirane forme za K_0 i K_e prema izrazima (3.385), (3.387) i (3.390), u cilju da se K_0 , od oblika $K_0^{\text{Jáky}}$ promeni u oblik koji je nešto bliže obliku K_0^{Evesque} . Na sl. 153 su prikazani dijagrami za K prema datim izrazima.

Na osnovu uporednih dijagrama koeficijenata, prikazanih na sl. 153, može se proceniti da vrednosti koeficijenta K_e , pri datom variranju koeficijenta K_0 , imaju trend rasta u oblasti ugla $\phi_i > 30^\circ$, i trend smanjenja vrednosti u oblasti $\phi_i < 30^\circ$, pod uslovom da se zadrže relativni odnosi koeficijenata koji stoje za $\phi_i = 30^\circ$. Prema ovim uporednim dijagramima, u oblasti ugla ϕ_i od 20° do 40° , koja odgovara uobičajenim vrednostima kod zrnastih materijala, moguće maksimalne promene u vrednosti K_e su od 5% do 10%.

U literaturi su pronađena dva slična primera za koeficijent K , koji odgovaraju ovoj oblasti analize, i to su koeficijent K_e prema francuskim propisima *SNBATI* [288] i koeficijent bočnog pritiska pri mirovanju prema *Nissen*-u (prema ref. [228]).

Prvi primer je koeficijent K , koji se koristio u ranijim francuskim propisima¹ za proračun AB i PNB silosa, *SNBATI* (1986) [288]. Za određivanje pritisaka na zid ćelije (kao stanje 2 u francuskim propisima, što u principu, ovde odgovara stanju pražnjenja), koristi se K u obliku $\cos^2 \phi_w$. U odnosu na ovde uveden oblik $\cos^2 \phi_i$, formalna razlika je samo u posmatranim uglovima trenja. Prema *SNBATI*, koeficijent trenja o zid se uzima u odnosu na koeficijent prirodnog nagiba materijala sa faktorom ρ . Na primer, za pšenicu je: $\rho = 0.75$, $\phi_r = 26^\circ$; na osnovu $\mu_w = \tan \phi_w = \rho \cdot \tan \phi_r$, određuje se $\mu_w = 0.366$, i odatle sledi da je $K_{\text{SNBATI}} = \cos^2 \phi_w = 0.88$. Prema EC1-4, ugao unutrašnjeg trenja za pšenicu je $\phi_i = 30^\circ$, odakle se određuje da je $K_e = \cos^2 \phi_i = 0.75$.

¹ Stručni pregled ovih propisa za silose je prikazao *Ahmed* (2006-7) [7], gde je obrađen jedan proračunski primer AB silosa. Teorijske hipoteze i osnove na kojima se zasnivaju formulacije u propisima *SNBATI* (1986) [288], prikazali su *Lebègue* i *Boudakian* (1989) u radu:

Lebègue Y. et *Boudakian* A. (1989): *Bases des règles "Silos" du SNBATI* - Essais sur les produits et principes des formules "Silos". *Annales ITBTP*, août sept. 1989. (Citirano prema *Ahmed*-u (2006-7) [7].)

Drugi primer je *Nissen*-ov izraz (prema pregledu koeficijenata pri mirovanju od *Peter*-a i *Lochner*-a (1977) u ref. [228]), za koeficijent bočnog pritiska pri mirovanju kod analize pritisaka na potporni zid, sa tlom nagnutim pod uglom β . Ako se ovo prenese na analognu analizu vertikalnog zida kod bunkera izdužene osnove, gde materijal formira nasipni deo preko ivice zida, tada ugao β odgovara uglu prirodnog nagiba ϕ_r nasutog materijala (veličina ugla ϕ_r za rastresite materijale je $\phi_r \cong \phi_i$). U ovom slučaju *Nissen*-ov izraz prelazi u sledeći oblik:

$$K_0 = (1 - \sin \phi_i) \cdot (1 + \sin \beta) \xrightarrow{\text{za } \beta = \phi_r \cong \phi_i} K_0 = \cos^2 \phi_i \quad (3.391)$$

Izraz je formalno isti, ali se *Nissen*-ov izraz odnosi na koeficijent bočnog pritiska pri mirovanju sa uticajem od nasipa, kod analize pritisaka na vertikalne zidove bunkera, pri zanemarenju uticaja trenja o zid. Suštinska razlika je u tome, što se K_0 prema *Nissen*-ovom izrazu odnosi na stanje pri mirovanju, a ne na stanje pri pražnjenju.

I jedan i drugi primer izraza su slični sa K_e , a oba se baziraju na tzv. efektu svoda, gde je taj uticaj eksplicitno uveden u postavku propisa *SNBATI*, a kod analogije sa *Nissen*-ovim oblikom, implicitno je uveden kroz dejstvo nasipnog dela materijala.

Analogija sa *Nissen*-ovim oblikom za K_0 , se može posmatrati i na sledeći način: ako je ugao $\beta = 0$, koeficijent K_0 prema *Nissen*-u, se svodi tačno na poznati *Jáky*-ev izraz $K_0 \text{ Jáky} = 1 - \sin \phi_i$; i u drugom analognom slučaju, ako je ugao $\beta = \phi_i$, *Nissen*-ov izraz se svodi tačno na oblik $K_e = \cos^2 \phi_i$. Analogija je potpuna.

Pri ispitivanjima silosa sa ravnim dnom, vertikalni pritisci rastu sa povećanjem dubine materijala, a u jednom manjem delu iznad dna prestaju da rastu i dalje prema dnu opadaju (orijentaciono za oko 10 do 20% u odnosu na najveću vrednost vertikalnih pritisaka). Ovaj efekat faktički proizvodi uvećanje koeficijenta K za oko 10 do 20%, koji kao takav ne odgovara ćelijском delu iznad male zone pod uticajem ravnog dna (efekat ravnog dna prikazan je na sl. 59, prema radu *Ovarlez*-eve (2002), ref. [215] i [217]).

U tom pravcu, navode se ispitivanja koeficijenta K za stanje po punjenju ispitnog silosa prema analizama *Nascimento*-ve (2008) [198] i *Nascimento*-ve i *Calil*-a (2009) [199]. U radu *Nascimento*-ve (2008) [198], analizirana je cilindrična ispitna ćelija sa ravnim dnom, koja na ploči dna ima instalisane 4 merne ćelije za merenje vertikalnih pritisaka, a na prvom segmentu zida ćelije iznad dna, određuje se horizontalni pritisak.

Na osnovu analize rezultata ispitivanja, koja je sprovedena u ref. [198], zaključeno je da koeficijent K za stanje nakon punjenja silosa, ima najbolje slaganje sa osnovnim *Jáky*-evim (1944) teorijskim izrazom $K_0 \text{ Jáky I}$ (tabela 24). Ovaj koeficijent daje, za isti ugao ϕ_i , veće vrednosti u odnosu na K_a , a manje vrednosti u odnosu koeficijent $K_0 \text{ Jáky}$ (tabela 24).

Konkretne vrednosti za K prema sprovedenim ispitivanjima, su korektno određene za ispitano mesto, ali ovaj koeficijent se ne može uopštiti kao vrednost koeficijenta K po ukupnoj visini silosa. Realna su očekivanja da koeficijent K pri punjenju iznosi $K_a (=K_f)$, i da dejstvuje na većem delu silosa iznad ravnog dna.

Na osnovu izvedenih zaključaka u ref. [198] i [199], da koeficijent K na mernom mestu odgovara koeficijentu $K_0 \text{ Jáky I}$, može se napraviti korisna procena o tome, koliko se smanjuju vertikalni pritisci kod ravnog dna. U tom pravcu, ako se pretpostavi da se kod predmetnih ispitivanja pojavio efekat ravnog dna, i ako se usvoji zaključak iz istraživanja da koeficijent $K_0 \text{ Jáky I}$ predstavlja dobru procenu za stanje na ispitanom mestu, određuje se korelacija procenjenog koeficijenta K na ravnom dnu (prema ispitivanju) i koeficijenta aktivnog pritiska $K_a (=K_f)$, u sledećem obliku:

$$(K_f)_{\text{ravno dno}} \cong K_f \cdot \left(1 + \frac{2}{3} \sin \phi_i\right) \quad (3.392)$$

U ovom izrazu koeficijent K_f predstavlja odnos horizontalnih i vertikalnih napona po visini ćelije iznad zone uticaja ravnog dna.

Na ovaj način, se sada preko koeficijenta K_f koji deluje u ćeliji, određuje vrednost kod ravnog dna primenom izraza (3.392), sa kojom se može bolje proceniti vertikalno opterećenje na dnu silosa. Efekat ravnog dna na veličinu koeficijenta K nije razmatran u ref. [198].

Imajući u vidu prethodno opisani problem kod procene koeficijenta K_f , jasno je da bi kod sličnih ispitivanja silosa sa ravnim dnom, u cilju određivanja koeficijenta K_e za stanje napona pri pražnjenju, situacija kod ocene rezultata mogla biti jednako nepovoljna.

Kod ispitivanja silosa, u cilju određivanja koeficijenta K , potrebno je ispuniti posebne uslove¹, kako bi rezultati što više odgovarali realnim vrednostima koeficijenta K u ćeliji.

¹ Značajan broj ispitivanja na silosima se odnosi uglavnom na određivanje horizontalnih pritisaka na jednoj ili nekoliko lokacija na zidu ćelije silosa.

Za određivanje koeficijenta K , potrebno je odrediti, kako horizontalni tako i vertikalni napon, kod datog mesta ispitivanja, pri čemu je najveći problem određivanje vertikalnog napona. Kod realnih silosa, gotovo je nemoguće odrediti vertikalni napon sa postojećom ispitnom tehnikom, a da se ne poremeti stanje napona koje je predmet ispitivanja. Zbog toga se ispitivanja sprovode na modelima – ispitnim silosima, i to u zatvorenom prostoru, kako bi se eliminisali promenljivi temperaturni uticaji spoljne sredine.

Da bi se realnije odredio vertikalni napon u nekom poprečnom preseku, kao prosečni vertikalni napon, najbolje je silos potpuno odvojiti (u horizontalnoj ravni), na gornji i donji deo sa malim zazorom, kako bi se težinski mogao meriti gornji i donji deo silosa zajedno sa materijalom u njemu. Model silosa se drži sa stabilnom okvirnom konstrukcijom, tako da gornji deo praktično "lebdi" nad donjim delom. Zazor treba da je što manji, kako se ne bi zaglavljivala zrna materijala, i remetio njihov prirodni raspored. Na opisani način, može se odvojiti i ćelija od levka, pri čemu levak treba da bude izveden kao strm levak. Kod primene plitkog levka inicira se efekat sličan efektu ravnog dna, što treba izbeći pri ispitivanju.

Često se ispitivanja vrše na cilindričnoj ćeliji sa ravnim dnom. Bez obzira na to, da li se vertikalni pritisci mere na dnu preko ugrađenih mernih ćelija (lokalno merenje) ili težinski, kada je odvojeno dno od ćelije (globalno merenje), ispitivanja nisu opšteg karaktera za ćelijski deo. U ovom slučaju se javlja efekat ravnog dna, pri kojem se određuje veći koeficijent K , koji je lokalnog karaktera, od vrednosti ovog koeficijenta na ostalom delu ćelije. Tako je i *Janssen* (1895) [130], odredio pri svojim merenjima, da je u stanju punjenja $K \cong 0.67$, za pšenicu i drveni model ćelije, što je prevelika vrednost za ovaj koeficijent.

Skladišni materijal koji se ispituje, treba da zadovolji osnovne uslove po pitanju kvaliteta i ujednačenosti; da je po svojoj prirodi rastresit materijal (bez kohezije); treba izbegavati materijale sa zrnima izduženog oblika (dolazi do pojave anizotropije); zrna materijala najbolje da su približno sferična (u ovom smislu povoljna je i pšenica); izbegavati pesak za ispitni materijal i slične sitnozrnaste materijale (kvarcni pesak koji se obično koristi kod nekih ispitnih silosa, pravi probleme sa zaglavljivanjem zrna kod mernih ćelija i abrazivno deluje na površine zidova ćelije).

Ovo su, u principu, uslovi pod kojima bi se moglo sprovesti odgovarajuće ispitivanje za određivanje koeficijenta K , za sva stanja napona, uključujući i stanje pri pražnjenju.

U oblasti ispitivanja silosa, referenca u kojoj je opisana strategija i taktika ispitivanja u cilju određivanja opterećenja je rad *Nielsen*-a (2008) [205]. Potpuni pregled problematike pri ispitivanju je dat u knjizi o silosima *Brown*-a i *Nielsen*-a (1998) [31]. U knjizi *Tejchman*-a (2013) [303], prikazani su najnoviji rezultati kod raznih ispitivanja silosa i opisi brojnih tehnika ispitivanja.

Rezultati ispitivanja silosa i modela silosa u cilju određivanja opterećenja od delovanja uskladištenog materijala, prikazani su u ref. [47], [52], [53], [54], [55], [90], [91], [96], [137], [139], [198], [199], [209], [342] i [358]. Ispitna tehnika, koncepcija ispitivanja i silosni modeli su razmatrani u radovima [13], [44], [47], [90], [91], [192], [265] i [266]. Određivanje koeficijenta K , na osnovu ispitivanja materijala na laboratorijskim uređajima pri primeni direktne i indirektna metode ispitivanja, prikazano je u ref. [191], [276], [279] i [294].

3.5.6 Primena koeficijenta K kod postupaka proračuna stanja napona

Pri analizi odnosa napona K obično se ispituju njegove veličine za stanje napona u materijalu do zida i u sredini ćelije.

U ovom radu je uvedena podela stanja napona na tri slučaja, i to su stanja napona pri punjenju, mirovanju, i pražnjenju. Kod ovih stanja primenjuje se odgovarajući oblik koeficijenta K , i to su K_f , K_0 i K_e respektivno za navedena stanja. Na ovaj način se proširuje primena postojećih postupaka proračuna.

Postupci proračuna prema uvedenoj pretpostavci o obliku dijagrama vertikalnih napona, se dele na dve grupe, i to su postupci sa konstantnim ili promenljivim dijagramom vertikalnih napona u poprečnom preseku ćelije.

Postupci sa konstantnim vertikalnim naponima, su jednostavniji za primenu i imaju široku primenu u praksi, u odnosu na postupake sa promenljivim vertikalnim naponima, koji su relativno složeniji za primenu, ali se prema njima određuju referentne analize stanja napona materijala u silosu.

3.5.6.1 – Postupci sa konstantnim vertikalnim naponima u preseku ćelije

Kod *prve grupe postupaka*, uvode se *konstantni vertikalni naponi* u poprečnom preseku na posmatranoj dubini z , kao i primena koeficijenata K_f , K_0 i K_e , prema izrazima (3.376), (3.377) i (3.378), za stanja punjenja, mirovanja i pražnjenja respektivno.

U ove postupke spadaju *Janssen-ov* postupak, postupak *Reimbert-ovih*, kao i generalisani *Jáky-ev* postupak *Pipatpongsa-a* i *Heng-a*. Postupak *Janssen-a* i postupak *Reimbert-ovih* se koristio za analize stanja napona pri punjenju, a u skorije vreme se *Janssen-a* postupak koristi i kod analize stanja napona pri mirovanju (npr. u EC1-4 se koristi kod analize inicijalnog stanja koje odgovara stanju mirovanja materijala). Generalisani *Jáky-ev* postupak je u osnovi namenjen za analizu stanja napona pri mirovanju materijala.

Uvođenjem koeficijenata K_f , K_0 i K_e , na mesto koeficijenta K u ovim postupcima, u tri separatne analize stanja napona, odeđuju se sva tri stanja napona uključujući i stanje napona pri pražnjenju.

Na ovaj način proširena je primena navedenih postupaka proračuna iz prve grupe.

3.5.6.2 – Postupci sa promenljivim vertikalnim naponima u preseku ćelije

Kod *druge grupe postupaka*, uvode se *promenljivi vertikalni naponi* u poprečnom preseku ćelije na posmatranoj dubini z , i kod ovih postupaka u analizu se obično uvodi granično stanje ravnoteže sa primenom *Mohr-Coulomb-ovog* uslova za lom materijala smicanjem.

U drugu grupu postupaka ulaze postupci *Nanninga-a*, *Walker-a* i *Walters-a* i drugih, kao i postupci predloženi u ovom radu primenom metode integralnih relacija. Kod ovih postupaka se koriste oblici koeficijenata K koji se odnose na aktivno stanje napona materijala u ćeliji silosa za analize napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju. Ovo je razlika u odnosu na raniji teorijski pristup kod postupaka *Ohde-a*, *Nanninga-a*, *Walker-a*, *Walters-a*, *Negi-a* i drugih, gde se koristilo aktivno i pasivno stanje napona u materijalu (aktivno stanje za analizu napona pri punjenju, a pasivno za analizu napona pri pražnjenju). Upravo je ranija primena pasivnog stanja za analizu stanja pri pražnjenju materijala, u teoriji negativno ocenjena, s obzirom na rezultate kod analize vertikalnih napona u materijalu i posebno kod *Walters-ove* analize pojave skokovite promene

normalnih pritisaka na zidovima ćelije, prema *Nedderman*-u (1992) [200] i *Rotter*-u (2008) [260].

Primena parametra κ , koji se kod izraza za koeficijent K , uzimao kao +1 za aktivno stanje, odnosno -1 za pasivno stanje, na ovaj način gubi na značaju, jer se kod primene samo aktivnog stanja uvek uzima da je +1. U izrazima se ipak zadržava primena ovog parametra zbog konzistencije sa postojećim teorijama. Kod analiza u ovom radu, koje se odnose na stanja napona materijala u ćeliji silosa, vrednost parametara κ je +1. U ovom poglavlju se κ direktno uvodi kao +1, kako bi se naglasilo da je u pitanju aktivno stanje napona materijala u ćeliji.

Kod ovih postupaka uvodi se odnos napona K u funkcionalnom obliku $K(x)$ prema *Ohde*-u za 2D silose, odnosno u aproksimativnom obliku $K(r)$ prema *Walker*-u za 3Dr silose (ovaj oblik odgovara *Ohde*-ovom izrazu za K , uz smenu r sa x i smenu R sa b). Ovi koeficijenti, u centralnoj osi silosa, za $x = 0$, odnosno za $r = 0$, su po obliku i veličini jednaki i odgovaraju *Rankine*-ovom koeficijentu aktivnog pritiska:

$$K(0) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} = \frac{1}{(\sqrt{1 + \mu_i^2} + \mu_i)^2} = \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i} \quad (3.393)$$

Koeficijent $K(0)$ odgovara koeficijentima K_f , K_0 i K_e , prema izrazima (3.376), (3.377) i (3.378), za stanja punjenja, mirovanja i pražnjenja respektivno. Sa ovim uslovom se određuju uglovi unutrašnjeg trenja ϕ_{if} , ϕ_{i0} i ϕ_{ie} , prema izrazima (3.369), (3.370) i (3.371), a preko ovih uglova ili preko koeficijenata K_f , K_0 i K_e , primenom izraza (3.366), (3.367) i (3.368), određuju se koeficijenti unutrašnjeg trenja μ_{if} , μ_{i0} i μ_{ie} , respektivno.

U cilju jednostavnog određivanja koeficijenata μ_{if} , μ_{i0} i μ_{ie} , navode se izrazi po redosledu sračunavanja:

$$K_0 = 1 - \sin \phi_i \quad (\phi_i \text{ je ugao unutrašnjeg trenja uskladištenog materijala}) \quad (3.394)$$

$$K_e = K_0 \cdot (2 - K_0) \quad (3.395)$$

$$\mu_{if} = \mu_i = \tan \phi_i \quad (3.396)$$

$$\mu_{i0} = \frac{1 - K_0}{2\sqrt{K_0}} \quad \text{ili} \quad \mu_{i0} = \tan \left[\arcsin \left(\frac{1 - K_0}{1 + K_0} \right) \right] \quad (3.397)$$

$$\mu_{ie} = \frac{1 - K_e}{2\sqrt{K_e}} \quad \text{ili} \quad \mu_{ie} = \tan \left[\arcsin \left(\frac{1 - K_e}{1 + K_e} \right) \right] \quad (3.398)$$

Primenom ovih izraza određuju se koeficijenati unutrašnjeg trenja μ_{if} , μ_{i0} i μ_{ie} , za stanja punjenja, mirovanja i pražnjenja respektivno. Ovi koeficijenti unutrašnjeg trenja se uvode u formulacije odnosa napona $K(x)$, tj. $K(r)$, kod 2D i 3Dr silosa respektivno.

Kod 2D silosa, uvode se koeficijenti unutrašnjeg trenja μ_{if} , μ_{i0} i μ_{ie} , prema stanju punjenja, mirovanja i pražnjenja, i za svaki od njih se određuje odgovarajući funkcionalni oblik koeficijenta K :

$$K_k(x) = \frac{1}{1 + 2\mu_{ik}^2 + 2\sqrt{1 + \mu_{ik}^2} \cdot \sqrt{\mu_{ik}^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2}} \quad k = f, 0, e \quad \text{za 2D silos} \quad (3.399)$$

Slični izrazi važe kao približno rešenje u analizi 3Dr silosa, gde u gornjem izrazu treba zameniti horizontalnu promenljivu x sa radijalnom koordinatom r , i polurazmak zidova b kod 2D silosa, sa poluprečnikom ćelije R kod 3Dr silosa:

$$K_k(r) = \frac{1}{1 + 2\mu_{ik}^2 + 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_{ik}^2} \cdot \sqrt{\mu_{ik}^2 - \mu_w^2} \cdot r^2 / R^2} \quad k = f, 0, e \quad \text{za 3Dr silos} \quad (3.400)$$

Prikazani izrazi za $K(x)$ i $K(r)$ su u obliku jedinstvene glatke krive za promenljivu x u granicama $-b$ do b , i promenljivu r u granicama od 0 do R , respektivno.

Koeficijenti K prema izrazima (3.399) i (3.400) se uzimaju kao *prvi oblik koeficijenta K*. To znači da su rešenja za K realna u celoj oblasti promenljive x , odnosno r . U stvari, *prvi oblik* odgovarajućeg koeficijenta K se primenjuje ako je ispunjen uslov da je:

$$\mu_i \geq \mu_w \quad (\Rightarrow \text{primenjuje se I oblik koeficijenta K}) \quad (3.401)$$

Ako ovaj uslov nije ispunjen, kod primene *I oblika* koeficijenta K ne dobijaju se realna rešenja u jednoj oblasti promenljive x ili r . Tada se primenjuje *II oblik koeficijenta K*, tj. u slučaju da je:

$$\mu_i < \mu_w \quad (\Rightarrow \text{primenjuje se II oblik koeficijenta K}) \quad (3.402)$$

U pravcu sa postavljenom hipotezom da veličina ugla unutrašnjeg trenja pri punjenju, tokom vremena pri konsolidaciji materijala, mirovanju, odnosno pri pražnjenju, opada po svojoj vrednosti, može se pojaviti slučaj gde se ne određuju realna rešenja za K , kada se koristi *prvi oblik* koeficijenta K . Ovaj slučaj se može pojaviti kada je promenljiva x ili r u oblasti uz zid ćelije, za 2D i 3Dr silose respektivno.

Kako manjim uglovima trenja odgovara manja vrednost tangensa tih uglova (koeficijenti trenja), uglovi unutrašnjeg trenja i koeficijenti unutrašnjeg trenja stoje uvek u sledećem poretku:

$$\phi_{if} > \phi_{i0} > \phi_{ie} \quad (3.403)$$

$$\mu_{if} > \mu_{i0} > \mu_{ie} \quad (3.404)$$

Na osnovu ovog poretka koeficijenata μ_i , ako je npr. μ_{i0} po veličini $\mu_{i0} < \mu_w$, sledi da je i $\mu_{ie} < \mu_w$ za relativno manji koeficijent μ_{ie} u odnosu na μ_{i0} . U vezi s tim, mogu se pojaviti različite kombinacije slučajeva primene K , gde se u zavisnosti od veličine koeficijenata trenja uvodi primena odgovarajućeg oblika koeficijenta K .

Moguće su sledeće kombinacije primene odgovarajućeg oblika koeficijenta K :

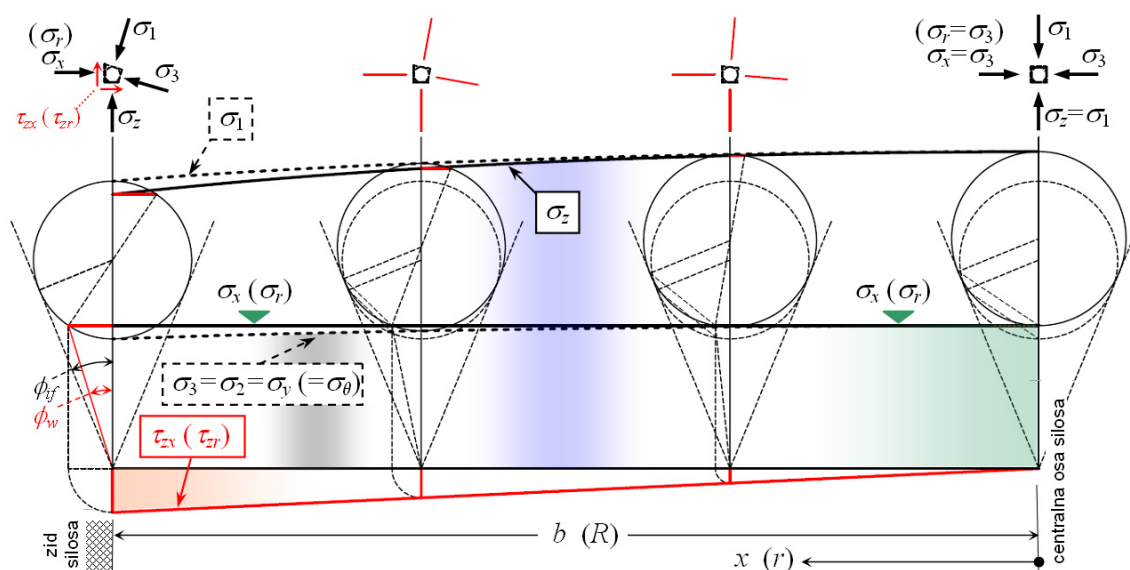
- (a) $\mu_{if} \geq \mu_w$ (*I oblik* za K_f), $\mu_{i0} \geq \mu_w$ (*I oblik* za K_0), i $\mu_{ie} \geq \mu_w$ (*I oblik* za K_e);
- (b) $\mu_{if} \geq \mu_w$ (*I oblik* za K_f), $\mu_{i0} \geq \mu_w$ (*I oblik* za K_0), i $\mu_{ie} < \mu_w$ (*II oblik* za K_e);
- (c) $\mu_{if} \geq \mu_w$ (*I oblik* za K_f), $\mu_{i0} < \mu_w$ (*II oblik* za K_0), i $\mu_{ie} < \mu_w$ (*II oblik* za K_e); i
- (d) $\mu_{if} < \mu_w$ (redukuje se μ_w na $\mu_{wred.} = \mu_{if}$), i ova kombinacija prelazi u komb. (c).

I oblik koeficijenta K se uvek koristi kod analize stanja napona pri punjenja materijala, i predstavlja osnovni slučaj analize kod svih proračunskih postupaka.

Ako se pri ispitivanju trenja materijala o zid dobija veća vrednost za μ_w , u odnosu na μ_i , za μ_w treba usvoji vrednost koeficijenta μ_i . Ovo odgovara slučaju vrlo hrapavog zida, a smicanje se u ovom slučaju može razviti u materijalu uz sam zid ćelije, tako da je to razlog za ovu redukciju koeficijenta trenja materijala o zid (opisani slučaj odgovara navedenoj kombinaciji (d)).

Asimptotska stanja napona (stanje napona za $z \rightarrow \infty$) sa *Mohr*-ovim krugovima napona, prikazana su na sl. 154 sa primenom *I oblika* koeficijenta K , i na sl. 155 sa primenom *II oblika* koeficijenta K . Slike se odnose ujedno na stanje napona kod 2D silosa i na stanje

kod 3Dr silosa, i primenu *Ohde/Nanninga/Walker*-ove postavke problema. Na slikama, leva strana odgovara preseku do zida, a desna centralnoj osi silosa. Oznake veličina su date i za 2D i 3Dr silose, a kod 3Dr silosa, po potrebi su postavljene u male zagrade, kao npr. (R), kako bi se razlikovale od oznaka veličina 2D silosa. Dijagrami napona na sl. 154 i sl. 155, su određeni *grafičkim postupkom*, primenom programa *AutoCAD*, za izabrane uglove unutrašnjeg trenja i trenja o zid. Sa crteža nisu uklonjene pomoćne linije, kao i pomoćni *Mohr*-ovi krugovi pri konstruisanju rešenja za asimptotska stanja napona. Iznad naponskih krugova prikazani su komponentalni naponi i glavni naponi sa pravcima njihovog delovanja. Slike predstavljaju grafičko rešenje formulacija i stavova za stanje nakon punjenja i mirovanja materijala (u okviru *Walker*-ove postavke problema i ovde prikazanih analiza).



Sl. 154 Asimptotsko stanje napona materijala u preseku ćelije silosa za stanje nakon punjenja (primenjen je I oblik koeficijenta K).

Kod asimptotskog stanja napona na sl. 154, prikazani su dijagrami za sledeće napone:

- horizontalni napon σ_x (radijalni napon σ_r), sa dijagramom u obliku horizontalne linije (konstantni naponi u preseku);
- vertikalni napon σ_z , sa dijagramom u obliku segmenta elipse;
- smičući napon τ_{zx} (tj. τ_{zr}), sa dijagramom u obliku nagnute linije (trougao oblik);
- veći glavni napon σ_1 , sa dijagramom u obliku segmenta elipse; i
- manji glavni napon σ_3 , koji je jednak srednjem glavnom naponu σ_2 kod aktivnog stanja napona i koji odgovara transverzalnom naponu σ_y kod 2D silosa (odnosno prstenastom naponu σ_θ kod 3Dr silosa), sa dijagramom u obliku segmenta elipse.

Naponi prikazani na sl. 154, odnose se na asimptotsko stanje napona ($z \rightarrow \infty$), i na *Walker*-ovu postavku problema. Stanje napona na dubini materijala z , određuje se množenjem asimptotskih vrednosti stanja napona sa funkcijom raspodele napona $Y(z) = Y_I(z)$.

I oblik koeficijenta K se uvek koristi kod analize stanja napona pri punjenja materijala, i predstavlja osnovni slučaj analize kod svih proračunskih postupaka.

Kako bi rešenja bila realna, kod izraza (3.399) i (3.400), funkcija pod korenom treba da je ne-negativna, odnosno treba da je zadovoljen uslov:

$$\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2 \geq 0 \quad \text{za 2D silos; i} \quad (3.405)$$

$$\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot r^2 / R^2 \geq 0 \quad \text{za 3Dr silos.} \quad (3.406)$$

Sledi da treba da budu ispunjeni sledeći uslovi kako bi rešenja za K bila realna:

$$|x| \leq b_{Ik} = \frac{\mu_{ik}}{\mu_w} \cdot b \quad (k = f, 0, e) \quad \text{za 2D silos; i} \quad (3.407)$$

$$r \leq R_{Ik} = \frac{\mu_{ik}}{\mu_w} \cdot R \quad (k = f, 0, e) \quad \text{za 3Dr silos.} \quad (3.408)$$

gde su u ove izraze uvedene geometrijske veličine b_{Ik} i R_{Ik} (sl. 155).

U skladu sa postavljenom hipotezom da ugao unutrašnjeg trenja od početne vrednosti pri punjenju opada tokom vremena sa konsolidacijom materijala, ili pri pražnjenju, može doći do slučaja da funkcija pod korenom, u oblasti gde horizontalna koordinata prilazi zidu ćelije, ne daje realna rešenja za K .

II oblik koeficijenta K se primenjuje, kada nije ispunjen uslov (3.407) ili (3.408), kod 2D i 3Dr silosa respektivno, što se javlja u nekim slučajevima kod kojih je veliko trenja o zid ćelije, kao npr. pri pražnjenju, kada se dobije manja vrednost koeficijenta unutrašnjeg trenja, od koeficijenta trenja materijala o zid ćelije. U takvim slučajevima izrazi prema *I obliku* važe samo na delu preseka ćelije gde je ispunjen relevantni uslov (3.407), odnosno (3.408).

U delu preseka materijala, koji odgovara promenljivoj x od b do b_{Ik} ili za r od R do R_{Ik} , pri promeni stanja napona nakon punjenja na stanje pri mirovanju ili direktno na stanje pri pražnjenju, ili od stanja pri mirovanja na stanje pri pražnjenju, dolazi do smanjenja ugla unutrašnjeg trenja. Ovo smanjenje ugla unutrašnjeg trenja je do veličine za koju je koeficijent unutrašnjeg trenja jednak efektivnom koeficijentu trenja kod napona smicanja:

$$\mu_{ik}^2(x) - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2 = 0 \quad \text{za } b \geq |x| \geq b_{Ik} \quad \text{za 2D silos; i} \quad (3.409)$$

$$\mu_{ik}^2(r) - \mu_w^2 \cdot r^2 / R^2 = 0 \quad \text{za } R \geq r \geq R_{Ik} \quad \text{za 3Dr silos,} \quad (3.410)$$

ili

$$\mu_{ik}(x) = \mu_w \cdot |x| / b \quad \text{za } b \geq |x| \geq b_{Ik} \quad \text{za 2D silos; i} \quad (3.411)$$

$$\mu_{ik}(r) = \mu_w \cdot r / R \quad \text{za } R \geq r \geq R_{Ik} \quad \text{za 3Dr silos.} \quad (3.412)$$

Zamenom ovih vrednosti u opšte izraze za odnos napona K , određuje se za dve oblasti funkcionalni oblici koeficijenta K .

Ako je unutrašnje trenje manje od trenja materijala o zid, koeficijent K se dobija, u matematičkom obliku kao razlomljena funkcija za 2D silos:

$$K_k(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1 + 2\mu_{ik}^2 + 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_{ik}^2} \cdot \sqrt{\mu_{ik}^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2}} & \text{za } 0 \leq |x| \leq b_{Ik} \\ \frac{1}{1 + 2\mu_w^2 \cdot x^2 / b^2} & \text{za } b_{Ik} \leq |x| \leq b \end{array} \right\} \quad k = f, 0, e \quad (3.413)$$

odnosno sa uvođenjem b_{Ik} u izraze za K :

$$K_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 2\mu_{ik}^2 + 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_{ik}^2 \cdot \mu_{ik} \cdot \sqrt{1 - x^2 / b_{IIk}^2}}} & \text{za } 0 \leq |x| \leq b_{IIk} \\ \frac{1}{1 + 2\mu_{ik}^2 \cdot x^2 / b_{IIk}^2} & \text{za } b_{IIk} \leq |x| \leq b \end{cases} \quad k = f, 0, e \quad (3.414)$$

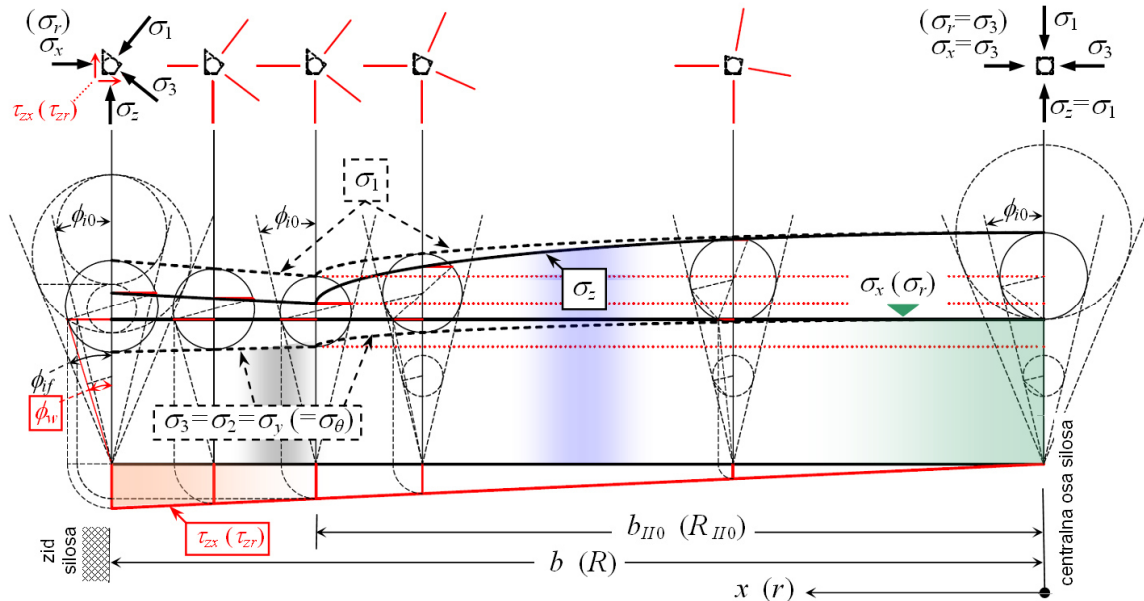
Slični izrazi za koeficijent K se određuju kod 3Dr silosa:

$$K_k(r) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 2\mu_{ik}^2 + 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_{ik}^2 \cdot \mu_{ik} \cdot \sqrt{\mu_{ik}^2 - \mu_w^2 \cdot r^2 / R^2}}} & \text{za } 0 \leq r \leq R_{IIk} \\ \frac{1}{1 + 2\mu_w^2 \cdot r^2 / R^2} & \text{za } R_{IIk} \leq r \leq R \end{cases} \quad k = f, 0, e \quad (3.415)$$

odnosno sa uvođenjem R_{IIk} u same izraze za K :

$$K_k(r) = \begin{cases} \frac{1}{1 + 2\mu_{ik}^2 + 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_{ik}^2 \cdot \mu_{ik} \cdot \sqrt{1 - r^2 / R_{IIk}^2}}} & \text{za } 0 \leq r \leq R_{IIk} \\ \frac{1}{1 + 2\mu_{ik}^2 \cdot r^2 / R_{IIk}^2} & \text{za } R_{IIk} \leq r \leq R \end{cases} \quad k = f, 0, e \quad (3.416)$$

Dati izrazi sa razlomljenim funkcijama su formulacije za II oblik koeficijenta K .



Sl. 155 Asimptotsko stanje napona materijala u preseku ćelije silosa za stanje pri mirovanju materijala (primenjen je II oblik koeficijenta K).

Na sl. 155, prikazani su dijagrami kod asimptotskog stanja napona koji odgovaraju stanju mirovanja materijala. Osnova crteža na sl. 155, je geometrijska konstrukcija urađena u AutoCAD-u, i grafički sledi stanje napona nakon punjenja prikazano na sl. 154.

Prikazani su smičući naponi (donji trougaoni dijagram), horizontalni i vertikalni (donja i gornja puna linija na slikama) i glavni naponi (crtkaste linije). Kod dijagrama na sl. 155 uočava se oblast do zida ćelije, gde su uglovi unutrašnjeg trenja izjednačeni sa efektivnim uglom trenja u materijalu.

Na sl. 155, može se uočiti da *Mohr*-ov krug za stanje napona pri mirovanju u centralnoj osi, ima prečnik koji iznosi tačno polovinu prečnika *Mohr*-ovog kruga za stanje napona pri punjenju. Ova je direktna posledica uvedene *Jaky*-eve formulacije za koeficijent K_0 , a na sl. 155 su, radi ilustracije, prikazana oba *Mohr*-ova kruga u centralnoj osi silosa.

Dijagrami kod asimptotskog stanja napona pri pražnjenju su slični dijagramima prikazanim na sl. 155, jedino je b_{IIe} , odnosno R_{IIe} , relativno manje od b_{II0} , odnosno R_{II0} , respektivno. U ovom slučaju prelomna tačka na dijagramu vertikalnih napona je nešto bliže sredini silosa, pri čemu se područje vertikalnih napona sa paraboličnom promenom napona proširuje prema centralnoj osi silosa.

Iznad *Mohr*-ovih krugova su, na fiktivnim malim elementima od zrnastog materijala, prikazani komponentalni i glavni naponi sa pravcima njihovog delovanja. Može se konstatovati da se ugao pravca delovanja većeg glavnog napona σ_1 postepeno smanjuje, idući od zida do prelomne tačke na dijagramu vertikalnih napona, a od navedene prelomne tačke do centralne ose, ovaj ugao se povećava i u centralnoj osi iznosi 90° .

Dijagram vertikalnih napona, na sl. 155, je prikazan sa dve krive, koje se spajaju u tački preloma dijagrama. Prva kriva dijagrama je u području promenljive x od b do b_{II0} , odnosno promenljive r od R do R_{II0} , i u obliku je kvadratne parabole, a druga kriva, koja se vodi kroz područje od b_{II0} do 0, odnosno od R_{II0} do 0, je u obliku gornje polovine elipse (simetrija po centralnoj osi).

U teoriji postoje slični slučajevi oblika dijagrama vertikalnih napona, npr. u delu preseka ćelije kroz koji materijal protiče po jezgru uskladištenog materijala u ćeliji, uzima se jedna vrednost za konstantni vertikalni napon, a na preostalom delu preseka gde materijal miruje uvodi se druga vrednost za vertikalni napon. Ovde je u pitanju diskontinualna promena vertikalnog napona na mestu prelaza mirnog dela materijala u protočno jezgro. Ovom slučaju odgovara i primer pražnjenja materijala sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala, koji je uveden u EC1-4.

Može se konstatovati da je oblik dijagrama vertikalnih napona na sl. 155, u osnovi sličan dijagramu napona kod ćelija kvadratnog preseka. Kada se dijagram na sl. 155 posmatra u 3D sistemu sa rotacionom simetrijom, formira se površina sastavljena od rotacionog paraboloida i rotacionog elipsoida. Postavljanjem ovog 3D dijagrama na kvadratnu osnovu, dijagram vertikalnih napona nalikuje stanju vertikalnih napona kod analize silosa primenom MKE kod kvadratnih ćelija.

Dalje unupređenje analize uz primenu *II* oblika koeficijenta K , bi moglo da usledi na osnovu proširenja analize stanja napona na ćelije sa kvadratnim presekom i upoređenjem rezultata sa numeričkim analizama.

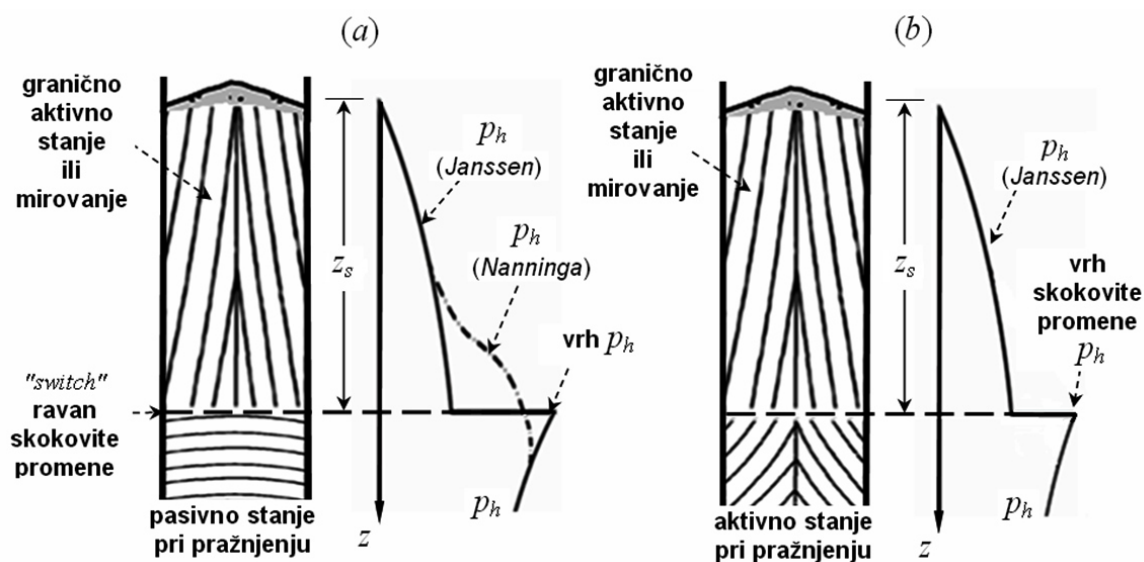
Kako se dijagrami napona odnose na asimptotsko stanje ($z \rightarrow \infty$), i u osnovi su formirani pod pretpostavkama koje odgovaraju *Walker*-ovoj postavci problema, sledi da se stanje napona na nivou z , može odrediti množenjem asimptotskih vrednosti na dijagramima napona sa funkcijom raspodele napona $Y(z) = Y_{II}(z)$. Ova funkcija se razlikuje od poznatog rešenja za *Walker*-ovu funkciju raspodele napona $Y(z) = Y_I(z)$, jer se zasniva na specifičnom obliku dijagrama vertikalnih napona.

U slučaju da vrednost ugla unutrašnjeg trenja nastavi da opada i da teži ka nuli, proširuje se oblast sa paraboličnim delom dijagrama, a dijagram u obliku polovine elipse deluje na sve manjoj površini. Kako se ugao trenja približava nuli, elipsa teži da se svede na tačku u centralnoj osi silosa. U ovom slučaju u osi silosa odnos napona postaje $K = 1$, što u principu odgovara stanju napona pri pražnjenju materijala iz silosa na prelazu ćelije u levak.

3.5.6.3 – Analiza skokovitog opterećenja (switch load)

Već je u prvim eksperimentima na silosima otkriveno da pritisci materijala na zidove ćelije rastu kada silos počne da se prazni. *Rotter* (2008) [260] navodi da se može uzeti kao stalna vrednost povećanje pritisaka pri pražnjenju od 10% do 30%, i da su vrednosti kratkotrajnog lokalnog pritiska obično oko 2 do 3 puta veće od pritiska nakon punjenja, određenih prema *Janssen*-ovoj teoriji.

Analizu povećanja skokovitog opterećenja (*switch load*) pri pražnjenju materijala u teoriju je uveo *Nanninga* (1956)¹. Kod ove analize uskladišteni materijal je u aktivnom stanju napona nakon punjenja (veći su vertikalni pritisci od horizontalnih), a tokom pražnjenja u pasivnom stanju (povećavaju se horizontalni, a značajno smanjuju vertikalni pritisci). Prelaz materijala iz jednog u drugo stanje proizvodi povećanje koeficijenta K , što dovodi do pojave lokalnog povećanja horizontalnih pritisaka na zid ćelije, kako je prikazano na sl. 156 a. Ovaj slučaj analize odgovara prvom konceptu za definisanje propisa za opterećenje silosa, koji je opisan u § 2.10.1.



Sl. 156 Koncepti analize skokovitog opterećenja: (a) klasičan i (b) modifikovani koncept.

Nanninga je pretpostavio da se promena stanja napona odvija kroz prelazno područje materijala konačne visine, koje se pomera iz donjeg dela silosa prema vrhu materijala, što dovodi do "zaobljavanja" dijagrama povećanih pritisaka na zidu ćelije (sl. 156 a). U kasnijim analizama drugih istraživača, kao što su *Walters* (1973) [328], *Jenike, Johanson i Carson* (1973)², *Arnold i McLean* (1976)³, uvedena je diskontinualna promena stanja u prelaznoj ravni, što je proizvelo pojavu skokovite promene opterećenja odmah ispod ove ravni. Promena stanja napona na nivou prelazne ravni je nazvana "switch".

¹ *Nanninga N.* (1956): "Gibt die übliche Berechnungsart der Drucke auf die Wände und den Boden von Silobauten sichere Ergebnisse?". *Der Ingenieur*, Vol.68, Nov., No.44. (Citirano prema *Peschl*-u (1969) [227] i *Rotter*-u (2008) [260].)

² *Jenike A.W., Johanson J.R. and Carson J.W.* (1973): "Bin loads – Parts 2, 3 and 4: concepts, mass flow bins, funnel flow bins". *Journ. Engineering for Industry, Transactions ASME, Series B*, Vol.95, No.1, pp.1–5, 6–12, 13–16. (Citirano prema *Smith*-u i *Simmonds*-u (1983) [287] i *Rotter*-u (2008) [260].)

³ *Arnold P.C. and McLean A.G.* (1976): "Prediction of cylinder flow pressures in mass-flow bins using minimum strain energy". *Journ. Engineering for Industry, Transactions ASME, Series B*, Vol.98, No.4, pp.1370–1374. (Citirano prema *Rotter*-u (2008) [260].)

U ovim analizama, formira se odgovarajuća anvelopa maksimalnih horizontalnih pritisaka sa podizanjem nivoa prelaza po visini silosa, u fazi pokretanja materijala pri pražnjenju. Na ovaj način faktor uvećanja pritisaka C_h (odnos maksimalnih horizontalnih pritisaka pri skokovitoj promeni i horizontalnih pritisaka pri punjenju) je relativno manjih vrednosti kod primene *Nanninga*-ove analize, u odnosu na vrednosti u drugim analizama.

Međutim, kako se kod ovih analiza uvodi pasivno stanje napona pri pražnjenju (izuzev *Jenike*-ove analize gde se primenjuje energetska metoda), dobijeni rezultati odgovaraju vrlo velikom povećanju horizontalnih pritisaka na zidovima ćelije, koji prema *Rotter*-u (2008) [260] ne odgovaraju realnom stanju napona materijala u silosu.

Walters (1973) je u ref. [327] i [328], prvo ovu analizu proširio na određivanje stanja napona u levku, a kod analize skokovitog opterećenja u ćeliji silosa, uveo je uticaj promenljivih vertikalnih napona u poprečnom preseku ćelije. Zbog primene pasivnog stanja napona pri pražnjenju, kod ovog postupka se određuju vrlo velike vrednosti horizontalnih pritisaka, dok su vertikalni pritisci materijala koji je u pokretu unutar ćelije vrlo mali.

U teoriji su ovi rezultati negativno ocenjeni, uopšte kod primene ovih postupaka, a ne samo kod *Walters*-ovog postupka, prema *Rotter*-u (2008) [260]. Ipak, i pored negativne ocene o kvantitativnoj strani analize, ovi postupci su indirektno podržani sa primenom prvog koncepta za definisanje propisa, gde se uvodi faktor uvećanja opterećenja C_h . Ovo je slučaj i kod novih normi EN 1991-4:2006 [38] i DIN 1055-6:2005 [62], gde silosi manjeg kapaciteta od 100 tona zrnastog materijala, ulaze u proračunsku klasi 1 (AAC 1), i kod njih se primenjuje faktor C_h (za silose klase AAC 1 prikazan je na sl. 71). Uvedene empirijske vrednosti faktora su značajno manje u odnosu na vrednosti prema *Walters*-ovoj analizi sa pasivnim stanjem napona pri pražnjenju. Silosi klase AAC 1 su i ispitni silosi, kako su uobičajeno vrlo malog kapaciteta, tako da ovaj faktor dobija još više na važnosti.

Postupak analize skokovitog opterećenja koji su formirali *Jenike*, *Johanson* i *Carson* (1973), se zasniva na tzv. energetskoj metodi, gde se određuje minimum energije pri deformaciji materijala ispod nivoa skokovite promene. Ovaj postupak je poslužio za određivanje faktora uvećanja opterećenja C_h u AS 3774:1996 [14].

U ovom radu se predlaže modifikovani koncept za analizu skokovite promene opterećenja pri pražnjenju, koji je u osnovi predstavljen na sl. 156 *b*. U ovoj analizi se uvodi aktivno stanje napona pri pražnjenju materijala, sa uvođenjem odnosa napona K_e , prema § 3.5.5. Na ovaj način se kod primene modifikovanog koncepta, u analizu uvode relativno manje vrednosti koeficijenta $K = K_e$. Pri primeni ovog koeficijenta, za faktor C_h se određuju relativno manje vrednosti za proračune povećanih pritisaka pri pražnjenju materijala. Ovo je značajna razlika u odnosu na klasičan koncept analize skokovitog opterećenja u ćeliji silosa.

Na sl. 156 *b*, trajektorije većeg glavnog napona materijala imaju manji nagib u delu materijala ispod prelazne ravni, nego u delu materijala iznad ove ravni, gde se uvodi aktivno stanje napona pri punjenju. Na sl. 156 *a*, trajektorije u donjem delu ispod nivoa prelazne ravni odgovaraju pasivnom stanju napona.

Nedderman (1992) [200] je prikazao analizu ovog opterećenja u okviru *Janssen*-ove teorije, ali je napravio pojednostavljenje na taj način što je analiziran samo slučaj gde se prelazna ravan nalazi na vrlo velikoj dubini materijala (praktično na dubini $z \rightarrow \infty$), a uz to je primenjen klasični koncept analize skokovite promene opterećenja sa pasivnim stanjem napona pri pražnjenju materijala.

3.5.6.3.1 Modifikovana teorijska analiza skokovitog opterećenja

U ovom radu se razmatra modifikovana analiza skokovite promene pritisaka na zid ćelije u okviru *Janssen*-ove teorije, sa podizanjem nivoa prelazne ravni od dna silosa ka gornjoj površini materijala (odnosno po ukupnoj visini uskladištenog materijala), uz uvođenje aktivnog stanja napona materijala pri pražnjenju. Najbitniji rezultat kod primene ove analize je određivanje faktora uvećanja horizontalnih pritisaka C_h .

Pri izvođenju se koriste izrazi za horizontalne i vertikalne pritiske prema *Janssen*-ovom postupku, za slučajeve bez i sa nadopterećenjem na gornjem delu materijala. Uvode se koeficijenti K_f , K_0 i K_e , prema izrazima (3.376), (3.377) i (3.378), za stanja punjenja, mirovanja i pražnjenja respektivno, kako je to navedeno u § 3.5.6.1.

Pri punjenju silosa, prema *Janssen*-ovom postupku određuju se vertikalni i horizontalni pritisci prema izrazima (3.12) i (3.13). Ovde se ti pritisci odnose na stanje napona pri punjenju tako da se uvodi koeficijent K_f , odakle sledi da su pritisci u sledećem obliku:

$$p_{vf}(z) = \frac{\gamma \cdot r_h}{K_f \cdot \mu_w} \cdot (1 - e^{-K_f \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{r_h}}) \quad (3.417)$$

$$p_{hf}(z) = K_f \cdot p_{vf}(z) = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-K_f \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{r_h}}) \quad (3.418)$$

Na dubini z_s neposredno iznad prelazne ravni (sl. 156), ovi pritisci iznose:

$$p_{vf}(z_s^-) = \frac{\gamma \cdot r_h}{K_f \cdot \mu_w} \cdot (1 - e^{-K_f \cdot \mu_w \cdot \frac{z_s}{r_h}}) \quad (3.419)$$

$$p_{hf}(z_s^-) = K_f \cdot p_{vf}(z_s^-) = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-K_f \cdot \mu_w \cdot \frac{z_s}{r_h}}) \quad (3.420)$$

Prema *Janssen*-ovom postupku kod uvođenja nadopterećenja $p_v(z=0) = p_{v0}$ na nivou $z=0$, određuju se vertikalni i horizontalni pritisci prema izrazima (3.38) i (3.39). Ovde se ti pritisci odnose na stanje napona pri pražnjenju, te se uvodi koeficijent K_e , odakle sledi da su navedeni pritisci u sledećem obliku sa nadopterećenjem na nivou $z=0$:

$$p_{ve}(z) = \frac{\gamma \cdot r_h}{K_e \cdot \mu_w} \cdot (1 - e^{-K_e \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{r_h}}) + p_v(z=0) \cdot e^{-K_e \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{r_h}} \quad (3.421)$$

$$p_{he}(z) = K_e \cdot p_{ve}(z) = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-K_e \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{r_h}}) + K_e \cdot p_v(z=0) \cdot e^{-K_e \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{r_h}} \quad (3.422)$$

Gornji izrazi odgovaraju ustaljenom stanju pražnjenja materijala iz silosa sa uvedenim nadopterećenjem u nivou gornje površine materijala. U analizi skokovitog opterećenja na nivou prelazne ravni z_s , deo ispod prelazne ravni je u stanju pražnjenja, kako je prikazano na sl. 156 b, a uticaj gornjeg dela materijala koji je statičan nakon inicijalnog punjenja se uzima kao nadopterećenje na nivou prelazne ravni z_s . U daljem izvođenju zadržava se ordinata z kod definisanja dijagrama pritisaka, a u ovom slučaju kod eksponencijalne funkcije u gornjim izrazima, ordinatu z treba zameniti sa promenom dubine $(z - z_s)$ od nivoa prelazne ravni. Pored toga, nadopterećenje se uvodi na nivou z_s , tako da se ono uzima kao vertikalni pritisak u materijalu neposredno iznad prelazne ravni (odgovara stanju napona nakon punjenja). U ovom slučaju analize, nadopterećenje iznad prelazne ravni iznosi:

$$p_v(z = z_s^-) = p_{vf}(z_s^-) = p_{hf}(z_s^-) / K_f \quad (3.423)$$

Sa uvođenjem nadopterećenja na nivou prelazne ravni z_s , u obliku izraza (3.423), i zamenom kod eksponencijalnih funkcija ordinate z sa $(z - z_s)$, izrazi (3.421) i (3.422), prelaze u sledeće oblike, koji odgovaraju stanju napona pri pražnjenju ispod nivoa prelazne ravni:

$$p_{ve}(z) = \frac{\gamma \cdot r_h}{K_e \cdot \mu_w} \cdot (1 - e^{-K_e \cdot \mu_w \cdot \frac{z - z_s}{r_h}}) + p_{vf}(z_s^-) \cdot e^{-K_e \cdot \mu_w \cdot \frac{z - z_s}{r_h}} \quad \text{za } z \geq z_s \quad (3.424)$$

$$p_{he}(z) = K_e \cdot p_{ve}(z) = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-K_e \cdot \mu_w \cdot \frac{z - z_s}{r_h}}) + K_e \cdot p_{vf}(z_s^-) \cdot e^{-K_e \cdot \mu_w \cdot \frac{z - z_s}{r_h}} \quad \text{za } z \geq z_s \quad (3.425)$$

Na osnovu uslova jednakosti vertikalnih pritisaka u preseccima koji odgovaraju nivou neposredno iznad i neposredno ispod prelazne ravni, određuju se horizontalni pritisci sa uvedenom skokovitom promenom (za $z = z_s^+$), uz primenu izraza (3.423), na sledeći način:

$$p_{ve}(z_s^+) = p_{vf}(z_s^-) = p_{hf}(z_s) / K_f \quad (3.426)$$

$$p_{he}(z_s^+) = K_e \cdot p_{ve}(z_s^+) = K_e \cdot p_{vf}(z_s^-) = \frac{K_e}{K_f} \cdot p_{hf}(z_s) \quad (3.427)$$

Uvođenjem izraza (3.426) u (3.425) određuje se:

$$p_{he}(z) = K_e \cdot p_{ve}(z) = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-K_e \cdot \mu_w \cdot \frac{z - z_s}{r_h}}) + \frac{K_e}{K_f} \cdot p_{hf}(z_s) \cdot e^{-K_e \cdot \mu_w \cdot \frac{z - z_s}{r_h}} \quad \text{za } z \geq z_s \quad (3.428)$$

Kako je položaj prelazne ravni promenljiv, od donjeg položaja u silosu do gornje površine materijala, izraz (3.427) praktično važi za sve dubine $z_s = z$, tako da vršni horizontalni pritisci p_{hsfle} formiraju anvelopu maksimalnih horiz. pritisaka p_{hefle} na zidu ćelije:

$$p_{hsfle}(z) = \frac{K_e}{K_f} \cdot p_{hf}(z) \quad (3.429)$$

$$p_{hsfle} = \frac{K_e}{K_f} \cdot p_{hf} = (p_{hefle})_{anvelope} \quad (3.430)$$

gde je kod p_{hsfle} uveden indeks s (od *switch*) za oznaku skokovite promene.

Odnos maksimalnog horizontalnog pritiska sa horizontalnim pritiskom pre skokovite promene, koji u aktuelnoj analizi odgovara pritisku pri punjenju, se definiše kao faktor uvećanja horizontalnih pritisaka C_h :

$$C_{hsfle} = p_{hsfle} / p_{hf} = K_e / K_f \quad (3.431)$$

Kod prikaza dijagrama promene pritisaka u funkciji dubine materijala z , pogodno je koristiti relativne odnose horizontalnih pritisaka i relativne odnose dubine materijala, tako da se dijagrami dobijaju u bezdimenzionalnom obliku. U tom pravcu uvode se asimptotska vrednost horizontalnog pritiska i karakteristične dubine kod *Janssen*-ovog postupka za stanje punjenja i stanje mirovanja materijala, prema sledećim izrazima:

$$p_{h\infty} = p_{h\infty f} = p_{h\infty 0} = p_{h\infty e} = \gamma \cdot r_h / \mu_w \quad (3.432)$$

$$z_{0f} = \frac{r_h}{K_f \cdot \mu_w} \quad \text{i} \quad z_{00} = \frac{r_h}{K_0 \cdot \mu_w} \quad (3.433)$$

Ove veličine se uvode u izraze (3.417) i (3.428), u cilju određivanja dijagrama promene odnosa horizontalnih pritisaka sa uvedenom skokovitom promenom. Određuju se sledeći izrazi:

$$\frac{P_{hf}}{P_{h\infty}} = 1 - e^{-\frac{z}{z_{0f}}} \quad \text{za } z < z_s \quad (3.434)$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{he}}{P_{h\infty}} = \frac{P_{hef/e}}{P_{h\infty}} &= 1 - e^{-\frac{K_e \cdot z - z_s}{K_f \cdot z_{0f}}} + \frac{K_e}{K_f} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z_s}{z_{0f}}}\right) \cdot e^{-\frac{K_e \cdot z - z_s}{K_f \cdot z_{0f}}} = \\ &= 1 - \left[1 - \frac{K_e}{K_f} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z_s}{z_{0f}}}\right)\right] \cdot e^{-\frac{K_e \cdot z - z_s}{K_f \cdot z_{0f}}} \quad \text{za } z \geq z_s \end{aligned} \quad (3.435)$$

Prethodni izrazi se mogu prikazati zajedno u obliku razlomljene funkcije:

$$\frac{P_{hf/e}}{P_{h\infty}} = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{z}{z_{0f}}} & \text{za } z / z_{0f} < z_s / z_{0f} \\ 1 - \left[1 - \frac{K_e}{K_f} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z_s}{z_{0f}}}\right)\right] \cdot e^{-\frac{K_e \cdot z - z_s}{K_f \cdot z_{0f}}} & \text{za } z / z_{0f} \geq z_s / z_{0f} \end{cases} \quad (3.436)$$

Prema ovom izrazu određuje se dijagram odnosa horizontalnih pritisaka po celoj visini silosa sa obuhvatanjem promene stanja pri punjenju u stanje pri pražnjenju na nivou prelazne ravni (indeks f/e), gde pritisci odgovaraju stanju napona pri punjenju do nivoa prelazne ravni (primenjuje se gornja funkcije u izrazu (3.436)).

Ispod prelazne ravni se uvodi uticaj skokovite promene pritisaka koji odgovaraju stanju napona pri pražnjenju (primena donje funkcija u izrazu (3.436)).

U odnosu na klasičan koncept gde se analizira samo jedan slučaj skokovitog opterećenja, kod modifikovanog koncepta se uvode tri slučaja skokovitog opterećenja, i to su:

- skokovito opterećenje pri prelazu stanja napona nakon punjenja u stanje napona pri pražnjenju (odgovara primeni izraza (3.436) i premeru prikazanom na sl. 157);
- skokovito opterećenje pri prelazu stanja napona nakon punjenja u stanje napona pri mirovanju (odgovara primeni izraza (3.437) i premeru na sl. 158); i
- skokovito opterećenje pri prelazu stanja napona pri mirovanju u stanje napona pri pražnjenju (odgovara primeni izraza (3.438) i premeru na sl. 158).

U slučaju da se određuje promena horizontalnih pritisaka iz stanja pri punjenju u stanje mirovanja (indeks $f/0$) svi indeksi e u gornjem izrazu prelaze u indeks 0, a u slučaju da se određuje promena horizontalnih pritisaka iz stanja mirovanja u stanje pri pražnjenju (indeks $0/e$), svi indeksi f u gornjem izrazu se smenjuju indeksom 0. Navedene promene indeksa se odnose i na karakterističnu dubinu z_{0f} .

Na ovaj način se određuju sledeći odnosi horizontalnih pritisaka:

$$\frac{P_{hf/0}}{P_{h\infty}} = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{z}{z_{0f}}} & \text{za } z / z_{0f} < z_s / z_{0f} \\ 1 - \left[1 - \frac{K_0}{K_f} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z_s}{z_{0f}}}\right)\right] \cdot e^{-\frac{K_0 \cdot z - z_s}{K_f \cdot z_{0f}}} & \text{za } z / z_{0f} \geq z_s / z_{0f} \end{cases} \quad (3.437)$$

$$\frac{p_{h0/e}}{p_{h\infty}} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 - e^{-\frac{z}{z_{00}}} & \text{za } z/z_{00} < z_s/z_{00} \\ 1 - \left[1 - \frac{K_e}{K_0} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z_s}{z_{00}}} \right) \right] \cdot e^{-\frac{K_e}{K_0} \frac{z-z_s}{z_{00}}} & \text{za } z/z_{00} \geq z_s/z_{00} \end{array} \right\} \quad (3.438)$$

Kada se na osnovu izraza (3.436) određuju pritisci upravo na nivou prelazne ravni, za $z = z_s$, gornji deo izraza daje relativni odnos pritiska $p_{hf}/p_{h\infty}$ (neposredno pre skokovite promene), a donji deo izraza daje maksimalni pritisak pri skokovitoj promeni kao $p_{hsf/e}/p_{h\infty}$. Ovi odnosi pritiska važe za $z = z_s$, tako da se može izvršiti zamena z_s sa z u izvedenim izrazima:

$$\frac{p_{hf}(z)}{p_{h\infty}} = 1 - e^{-\frac{z}{z_{0f}}} \quad (3.439)$$

$$\frac{p_{hsf/e}(z)}{p_{h\infty}} = \frac{K_e}{K_f} \cdot \left(1 - e^{-\frac{z}{z_{0f}}} \right) \quad (3.440)$$

Na osnovu ovih izraza određuje se faktor uvećanja pritiska (faktor natpritiska) C_h :

$$C_{h f/e} = p_{hsf/e} / p_{hf} = K_e / K_f \quad (3.441)$$

koji je već bio formiran u (3.431), ali je u ovoj analizi izveden preko ukupnog dijagrama napona koji uvodi pojavu skokovitog opterećenja na dubini materijala z_s . Horizontalni pritisci $p_{hsf/e}(z)$ odgovaraju maksimalnim pritisima na mestu skokovite promene opterećenja na nivou z . U ovom slučaju pritisci $p_{hsf/e}(z)$ formiraju anvelopu maksimalnih pritiska pri pražnjenju, $p_{hsf/e}(z) = p_{he \max}(z) = (p_{he})_{anvelope}$. Ova anvelopa obuhvata vrhove uskog zašiljenog dela dijagrama koji se pomera po visini zida na početku pražnjenja, i koji prati povećanje nivoa prelazne ravni sa skokovitom promenom opterećenja.

Ako se oznake simplifikuju na nivo propisa i uobičajenih teorijskih analiza, može se izraz (3.441) prikazati na sledeći način:

$$p_{he}(z) = C_h \cdot p_{hf}(z), \text{ ili u jednostavnijem obliku kao } p_{he} = C_h \cdot p_{hf}. \quad (3.442)$$

Odnos p_{he}/p_{hf} je toliko značajan u projektovanju silosa da mu je dodeljen simbol C_h i naziva se faktor uvećanja opterećenja, faktor natpritiska, ili faktor pražnjenja (u EC1-4).

3.5.6.3.2 Analiza faktora natpritiska i promene skokovitih pritiska

U ovom radu je uvedena podela na stanje punjenja, mirovanja i pražnjenja, tako da se na isti način kao kod određivanja izraza (3.441), mogu odrediti još dva faktora natpritiska pri promeni navedenih stanja. Radi pregleda navode se sva tri faktora natpritiska C_h (indeks kod pritiska p_h je oznaka za vršni pritisak koji formira anvelopu pritiska):

$$C_{h f/e} = p_{hsf/e} / p_{hf} = K_e / K_f \text{ (za promenu iz stanja punjenja u stanje pražnjenje)} \quad (3.443)$$

$$C_{h f/0} = p_{hsf/0} / p_{hf} = K_0 / K_f \text{ (za promenu iz stanja punjenja u stanje mirovanja)} \quad (3.444)$$

$$C_{h 0/e} = p_{hs0/e} / p_{h0} = K_e / K_0 \text{ (za promenu iz stanja mirovanja u stanje pražnjenje)} \quad (3.445)$$

Kada se uvedu koeficijenti K , koji su u ovom radu predloženi za primenu kod Janssenovog postupka, a to su koeficijenti K_f , K_0 i K_e prema izrazima (3.376), (3.377) i (3.378) respektivno (u § 3.5.6.1), prikazani koeficijenti C_h se dobijaju u obliku sledećih izraza:

$$C_{h f/e} = K_e / K_f = (1 + \sin \phi_i)^2 \quad (3.446)$$

$$C_{hf/0} = K_0 / K_f = 1 + \sin \phi_i \quad (3.447)$$

$$C_{h0/e} = K_e / K_0 = 1 + \sin \phi_i \quad (3.448)$$

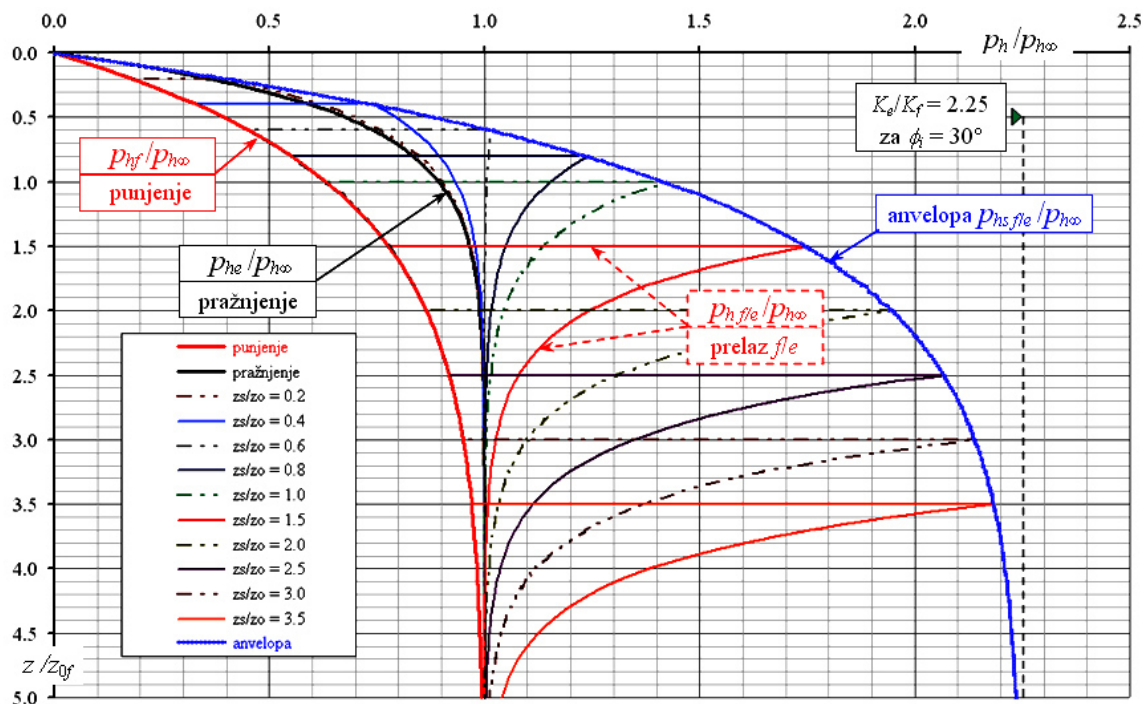
U primeru gde je ugao unutrašnjeg trenja materijala $\phi_i = 30^\circ$, prema izrazima (3.376), (3.377) i (3.378), određuju se koeficijenti $K_f = 1/3 = 0.333$, $K_0 = 0.500$, i $K_e = 0.750$. Sa ovim vrednostima sračunavaju se sledeći odnosi $K_e/K_f = 2.25$, $K_0/K_f = 1.50$ i $K_e/K_0 = 1.50$, koji redom odgovaraju faktorima C_h prema izrazima (3.446), (3.447) i (3.448).

Na sl. 157 i sl. 158 su prikazani dijagrami promene horizontalnih pritisaka pri skokovitoj promeni opterećenja pri prelazu u stanje napona pri pražnjenju ili mirovanja, za različiti nivo prelazne ravni. Dijagrami na sl. 157 su formirani na osnovu izraza (3.436), a kod sl. 158 dati dijagrami su određeni na osnovu izraza (3.437) i (3.438). Dijagrami odgovaraju primeru za $\phi_i = 30^\circ$, tako da su odnosi koeficijenata $K_e/K_f = 2.25$, $K_0/K_f = 1.50$ i $K_e/K_0 = 1.50$.

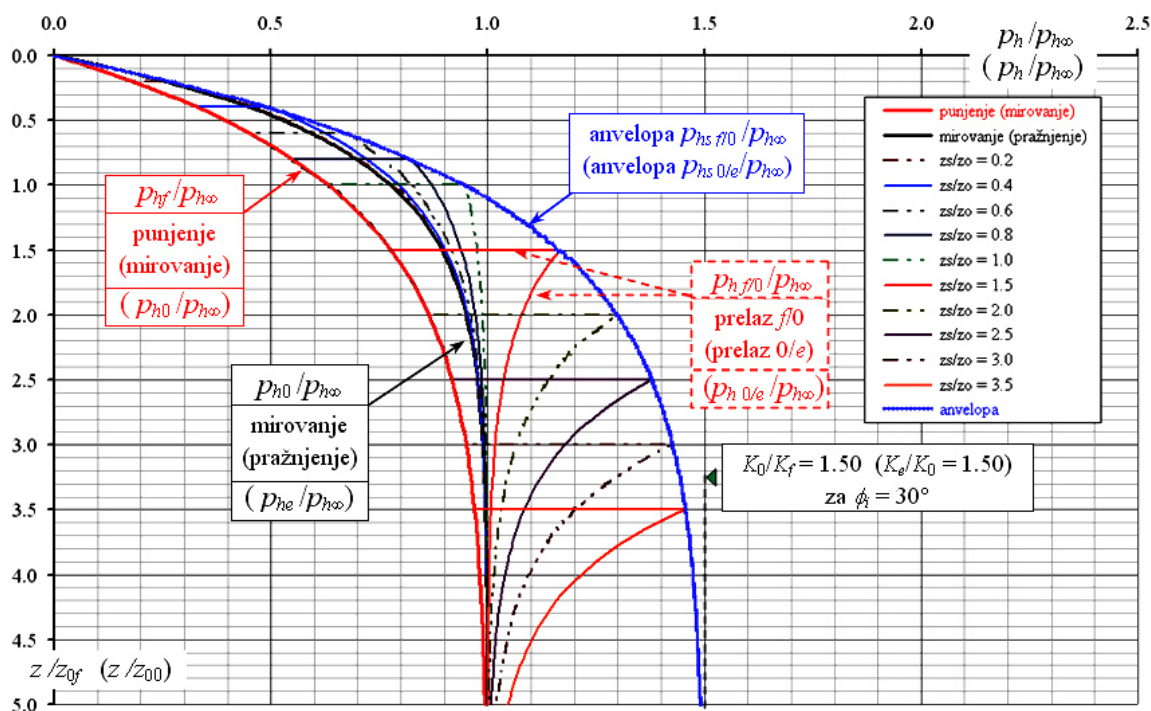
Dijagrami su prikazani u bezdimenzionalnom obliku, gde je relativna dubina materijala predstavljena sa z/z_{0f} ili z/z_{00} , što predstavlja odnos dubine materijala z i karakteristične dubine z_{0f} ili z_{00} , respektivno. Kod dijagrama odnosa skokovitog i asimptotskog horizontalnog pritiska variran je nivo prelazne ravni preko odnosa z_s/z_{0f} odnosno z_s/z_{00} . Ovde je sa z_s označena dubina materijala na kojoj se uvodi skokovito opterećenje, tj. nivo prelazne ravni (sl. 156). Kod dijagrama je varirano z_s/z_0 od 0.2 do 3.5, gde z_0 odgovara karakterističnoj dubini z_{0f} ili z_{00} (primena izraza (3.433)).

Na sl. 157 prikazani su dijagrami promene horizontalnih pritisaka preko odnosa $p_h/p_{h\infty}$ gde je $p_{h\infty}$ asimptotska vrednost horizontalnog pritiska na zid ćelije, i to su:

- dijagram $p_{hf}/p_{h\infty}$, koji se odnosi se na horiz. pritisak p_{hf} nakon punjenja (U odnosu na druge dijagrame ovde se određuju najmanje vrednosti pritisaka. Za velike dubine, pritisak p_{hf} teži asimptotskoj vrednosti $p_{h\infty}$, tj. $p_{hf}/p_{h\infty} \rightarrow 1$ kada $z/z_{0f} \rightarrow \infty$.);
- dijagram $p_{hfe}/p_{h\infty}$ sa skokovitom promenom pritiska na nivou prelazne ravni (Do prelazne ravni na dubini z_s/z_{0f} , pritisci odgovaraju stanju nakon punjenja p_{hf} ; u prelaznoj ravni javlja se skokoviti pritisak p_{hfe} , a nakon toga se približavaju asimptotskom pritisku sa povećanjem dubine materijala ispod prelazne ravni.);
- dijagram $p_{hse}/p_{h\infty}$ odgovara anvelopi maksimalnih pritisaka p_{hs} pri skokovitoj promeni pritiska na nivou prelazne ravni gde materijal počinje da protiče (Tokom uzdizanja prelazne ravni razvija se početno proticanje materijala, i materijal ispod prelazne ravni je u stanju pražnjenja. Ovaj prelaz stanja prati skokovita promena pritisaka koja se pomera prema gornjoj površini po visini zida, tako da zašiljeni deo dijagrama sa svojim vrhom opisuje anvelopu maksimalnih pritisaka. Anvelopa pritisaka je $p_{hse} = K_e/K_f \cdot p_{hf}$, gde odnos K_e/K_f , u ovom slučaju, odgovara faktoru natpritiska C_h prema izrazu (3.446). Na velikim dubinama z , tj. za $z/z_{0f} \rightarrow \infty$, sledi da $p_{hse}/p_{h\infty} \rightarrow K_e/K_f$, što u radnom primeru iznosi 2.25. Kada se prelazna ravan bliži gornjoj površini materijala, tj. u slučaju da $z_s/z_{0f} \rightarrow 0$, dijagram sa skokovitom promenom pritiska $p_{hfe}/p_{h\infty}$ prelazi u dijagram $p_{he}/p_{h\infty}$, koji odgovara ustaljenom pražnjenju materijala u ćeliji silosa.)
- dijagram $p_{he}/p_{h\infty}$ se odnosi se na horiz. pritisak p_{he} tokom pražnjenja kada je sav materijal u pokretu (Kod dijagrama sa skokovitim naponom je samo deo materijala koji je ispod prelazne ravni u pokretu. Po podizanju prelazne ravni na gornju površinu materijala, otpočinje ustaljeno stanje pražnjenja materijala.)



Sl. 157 Dijagrami odnosa skokovitog i asimptotskog horiz. pritiska pri variranju nivoa prelazne ravni stanja materijala pri punjenju na stanje pri pražnjenju (prema relativnoj dubini z_s/z_{0f}); primer odgovara primeni izraza (3.436) za $\phi_i = 30^\circ$.



Sl. 158 Dijagrami odnosa skokovitog i asimptotskog horiz. pritiska pri variranju nivoa prelazne ravni stanja materijala pri punjenju (odnosno mirovanju) na stanje pri mirovanju (odnosno pražnjenju) (prema relativnoj dubini z_s/z_{0f} , odnosno prema z_s/z_{00}); primer odgovara primeni izraza (3.437), odnosno (3.438), za $\phi_i = 30^\circ$.

Na sl. 158 prikazani su dijagrami promene horizontalnih pritisaka pri prelazu iz stanja punjenja u stanje mirovanja (odnosno iz stanja mirovanja u stanje pražnjenja).

Dijagrami su formirani uz variranje parametra z_s/z_0 , koji predstavlja odnos dubine na kojoj je prelazna ravan z_s i karakteristične dubine materijala z_0 . Na sl. 158, dijagrami se odnose na dva slična slučaja analize. Za jedan slučaj analize (prelazak stanja mirovanja u stanje pražnjenja), odgovarajuće veličine na sl. 158 su naznačene postavljanjem u male zgrade, kako bi se razlikovale od veličina koje se koriste kod drugog slučaja analize. Dualan prikaz je omogućen zbog sličnih matematičkih formi izraza (3.437) i (3.438), gde odgovarajućom smenom indeksa jedan izraz prelazi u drugi. Uz to i odnosi K_0/K_f i K_e/K_0 prema izrazima (3.447) i (3.448), su jednake analitičke formulacije. Diskusija ovih dijagrama odgovara prethodnoj, a relativna promena skokovitih pritisaka je manje izražna, jer su odnosi K_0/K_f i K_e/K_0 relativno manji u ovom primeru, i iznose 1.50 (za $\phi_i = 30^\circ$).

Dijagrami, prikazani na sl. 157 i sl. 158, formirani su na osnovu modifikovane analize skokovitog opterećenja, koja je prikazana u teorijskom delu ovog poglavlja. Prikazana analiza je formulisana na osnovama *Janssen*-ove teorije. Pojavu skokovitog opterećenja je na sličan način analizirao *Walters* (1973) [328], a ta analiza je formulisana na osnovama *Walker*-ove teorije (1966) [325].

Prema dijagramima na sl. 157 i sl. 158, može se zaključiti da su skokoviti pritisci kratkotrajnog karaktera, i da se isti smanjuju pri podizanju prelazne ravni, kako napreduje razvoj protoka materijala u ćeliji. Po završetku početne faza pražnjenja, kada prelazna ravan stigne do vrha materijala, dalji tok pražnjenja se može smatrati ustaljenim, sa kvazi stalnim horizontalnim pritiscima p_{he} pri pražnjenju.

Poredak maksimalnih horizontalnih pritisaka na zid ćelije prema anvelopama skokovitih pritisaka je $p_{hs\ f/e} > p_{hs\ 0/e} > p_{hs\ f/0}$. Poredak horiz. pritisaka pri običnim stanjima napona u materijalu je $p_{he} > p_{h0} > p_{hf}$.

Kako su koeficijenti K po veličini u redu $K_f < K_0 < K_e$, a funkcija raspodele pritisaka $Y(z)$ je relativno "punija" za veće vrednosti koeficijenta K , kod primene *Janssen*-ove teorije važi sledeći poredak: $p_{he} > p_{h0} > p_{hf}$. Faktori C_h , prema izrazima (3.447) i (3.448) su jednaki, te kako je $p_{h0} > p_{hf}$, sledi da je $p_{hs\ 0/e} > p_{hs\ f/0}$.

Kod poretka skokovitih pritisaka treba još dokazati da je $p_{hs\ f/e} > p_{hs\ 0/e}$, i odrediti redosled pritisaka $p_{hs\ f/0}$ i p_{he} .

Ako je $p_{hs\ f/e} > p_{hs\ 0/e} \Rightarrow p_{hf} \cdot (1 + \sin\phi_i)^2 > p_{h0} \cdot (1 + \sin\phi_i) \Rightarrow p_{hf} \cdot (1 + \sin\phi_i) > p_{h0} \Rightarrow p_{hs\ f/0} > p_{h0}$, što je tačan stav za veličine posmatranih napona. S obzirom da je ovde moguć postupak izvođenja unazad, dokazan je početni stav.

Za relativno male dubine z , sledi da je $p_{he} > p_{hs\ f/0}$ (za $z \rightarrow 0$ limes odnosa p_{he}/p_{hf} iznosi $(1 + \sin\phi_i)^2$, tako da je $p_{hs\ f/0} = p_{hf} \cdot (1 + \sin\phi_i) = p_{he} / (1 + \sin\phi_i)$, što je manje od p_{he}), dok je na većim dubinama $p_{hs\ f/0} > p_{he}$ (na velikim dubinama z , pritisci p_{he} i p_{h0} teže istoj asimptoti $p_{h\infty}$, tako da je $p_{hs\ f/0} = p_{hf} \cdot (1 + \sin\phi_i) > p_{he}$).

Sa ovim je potvrđen poredak horizontalnih pritisaka, koji može da se prikaže na sledeći način:

$$p_{hs\ f/e} > p_{hs\ 0/e} > \left\{ \begin{array}{ll} p_{he} > p_{hs\ f/0} & \text{za rel. manje dubine } z \\ p_{hs\ f/0} > p_{he} & \text{za rel. veće dubine } z \end{array} \right\} > p_{h0} > p_{hf} \quad (3.449)$$

Prikazani postupak određivanja skokovitog opterećenja, sa predloženim **modifikovanim konceptom analize**, može da se razmatra sa eksperimentalnog, teorijskog i proračunskog

aspekta. Ovde je od posebnog značaja analiza i određivanje veličine faktora natpritiska, kao i pritisaka prema izrazu (3.442), u odnosu na eksperimentalne rezultate, ovde prikazana teorijska rešenja, i propisane postupke u normama za proračun opterećenja u silosima.

Kada se primena izraza (3.442) sagledava sa aspekta eksperimentalnih ispitivanja, mogu se dati sledeće napomene:

- Kod eksperimentalnih ispitivanja silosa nisu primećeni takvi pritisci koji po obliku i intenzitetu odgovaraju pritiscima u *Walters*-ovoj teoriji skokovitog opterećenja pri pražnjenju (po intenzitetu se ne slažu rezultati kada se primenjuje klasični koncept analize, a po obliku je pretpostavljeno da su opterećenja simetrična po obimu zida). Prema ispitivanjima se obično određuju povećani horizontalni pritisci na lokalnim površinama zidova (kao nesimetrično opterećenje) reda veličine oko 2 do 3 puta većih od pritiska nakon punjenja, koja su obično kratkorajnog dejstva. Ova povećanja pritisaka su povezana sa nizom faktora vezanih za neujednačenost materijala (svojsvena nehomogenost materijala u uskladištenoj masi, pojava segregacije materijala, nejednaka vlažnost u različitim delovima materijala u ćeliji i druge razlike fizičko mehaničkih karakteristika) i neujednačenost karakteristika zidnih površina (npr. po pitanju trenja, imperfekcija zida i slično).
- Kada se izraz (3.442) koristi za eksperimentalno određivanje faktora natpritiska C_h kao odnos p_{he}/p_{hf} , koriste se lokalne vrednosti pritisaka na površini zida koje se registruju mernim ćelijama, i tu se za p_{he} uzimaju maksimalne vrednosti koje se javljaju u toku pražnjenja. Pritisak p_{hf} je izmeren nakon punjenja silosa na istom mernom mestu. Problem kod određivanja C_h se javlja kada postoji relativno mali broj mernih mesta (nekada samo jedno) po visini i po obimu ćelije, gde dobijeni rezultati mogu biti izrazito lokalnog karaktera, i u tom slučaju nije pouzdana procena faktora natpritiska za ostale površine zidova u ćeliji. Kao ilustracija može poslužiti primer, gde se pri lokalnom ispitivanju određuje relativno manji pritisak nakon punjenja p_{hf} u odnosu na druge površine zidova. Faktor C_h određen kao odnos p_{he}/p_{hf} u ovom slučaju daje prevelike vrednosti. Pri eksperimentima sa manjim brojem mernih mesta, što je čest slučaj kod ispitivanja silosa, manja je pouzdanost kod određivanja faktora C_h . Kada se suma takvih ili preciznije određenih rezultata iz raznih ispitivanja iskoristi za procenu faktora C_h ili sličnih faktora (kao što je npr. referentni faktor materijala C_{op} u EC1-4, koji se uvodi u empirijski izraz za dodatno lokalno opterećenje i u izraz za faktor natpritiska C_h), procena je manje-više približna, te se koristi "iskustvo" i usvaja vrednost koja je na strani sigurnosti. Po ovom scenariju, vrednosti za C_h koje se određuju prema propisima su relativno veće od "realnih". Orijentaciona procena vrednosti za C_h je od 1.5 do 3.0.
- Faktor C_h se u nekim analizama koristi za određivanje trajnih pritisaka nakon pražnjenja ili stabilnih prosečnih pritisaka pri pražnjenju (bez uticaja ekstremnih lokalnih povećanja). Prema eksperimentima se određuje izvesno povećanje ovih pritisaka, a procenjuje se da su oni oko 10% do 35% veći u odnosu na pritiske pri punjenju. U ovom slučaju može se proceniti da je C_h od 1.10 do 1.35.

Kod teorijske analize skokovitog opterećenja mogu se dati sledeće napomene:

- Kada se analizira pojava skokovitog opterećenja pri otpočinjanju pražnjenja, maksimalni pritisci p_{he} odgovaraju anvelopi p_{hs} , tako da je faktor natpritiska C_h relativno visokih vrednosti. U ovom radu se prema prikazanoj analizi u okviru

Janssen-ove teorije, faktor C_h može odrediti u analitičkoj formi, sa uvođenjem koeficijenata K prema izrazima (3.376) i (3.378), u obliku izraza:

$$C_h = p_{hs} / p_{hf} = K_e / K_f = (1 + \sin \phi_i)^2 \quad (3.450)$$

Primer: Za $\phi_i = 30^\circ$, na indirektan način primenom izraza (3.376) i (3.378), prvo se određuje da je $K_f = 1/3$, $K_e = 0.750$, tako da je $K_e/K_f = 2.25$, ili se uvođenjem vrednosti za ϕ_i u gornji izraz direktno sračunava faktor $C_h = 2.25$.

- Kod analize skokovitog pritisaka pri pražnjenju, pretpostavlja se da opterećenje deluje ravnomerno po obimu kružne ćelije, i da naponski vrh sa delom dijagrama menja položaj po visini silosa, pri čemu se uski zašiljeni deo dijagrama pomera iz donjeg dela silosa prema vrhu materijala. Od početnih pritisaka pri punjenju (p_{hf}), pritisci se skokovito povećavaju na nivou prelazne ravni (p_{hs}). Kada prelazna ravan stigne do vrha materijala, završena je početna faza pražnjenja, dijagram pritiska je stabilizovan i horizontalni pritisci odgovaraju ustaljenom stanju pražnjenja (p_{he}) u sledećem obliku:

$$p_{he} = p_{h\infty} \cdot (1 - e^{-\frac{K_e \cdot \mu_w \cdot z}{r_h}}) \quad (3.451)$$

Za ustaljeno proticanje materijala faktor natpritiska C_h je:

$$C_h = p_{he} / p_{hf} = (1 - e^{-\frac{K_e \cdot z}{K_f \cdot z_{0f}}}) / (1 - e^{-\frac{z}{z_{0f}}}) \quad (3.452)$$

Primer: Za $\phi_i = 30^\circ$, i slučaj da je $z/z_{0f} = 2$, dobija se $K_e/K_f = 2.25$ (iz prethodnog primera), i sračunava $C_h = 1.14$. Ako je $z/z_{0f} < 2$, određuju se veće vrednosti od prethodne, ali te vrednosti ne mogu biti veće od $(1 + \sin \phi_i)^2$, a ako $z/z_{0f} \rightarrow \infty$, faktor $C_h \rightarrow 1.00$.

- Kada se uvedu *Walker*-ove pretpostavke (da su vertikalni pritisci promenljivi, a horizontalni pritisci konstantni u poprečnom preseku) u analizu skokovitog opterećenja pri pražnjenju, ona se neznatno razlikuje od prikazane analize sa uvedenim *Janssen*-ovim pretpostavkama. Sa *Walker*-ovim pretpostavkama analiza odgovara *Walters*-ovoj teoriji pojave skokovitog opterećenja pri pražnjenju silosa, prema ref. [328]. Kada bi se na ovoj teoriji primenio predloženi modifikovani koncept kod analize skokovitog opterećenja, faktor C_h bi odgovarao odnosu $(BD)_e/(BD)_f$ saglasno primenjenim oznakama kod *Walters*-a (1973) [328]. Prema *Nedderman*-u (1992) [200], ovaj odnos se može prikazati u obliku $(\mathcal{D}K_w)_e/(\mathcal{D}K_w)_f$, a sa oznakama u ovom radu kao odnos $[K(\bar{x})]_e/[K(\bar{x})]_f$.

Brojna vrednost faktora C_h u *Walters*-ovoj formulaciji uz primenu modifikovanog koncepta, je nešto manja u odnosu na K_e/K_f . Međutim, *Walters* je koristio klasičan koncept sa pasivnim stanjem napona pri pražnjenju, gde se uvodi odnos K_p/K_a kod *Janssen*-ove teorije, odnosno $(BD)_p/(BD)_a$ ili $(\mathcal{D}K_w)_p/(\mathcal{D}K_w)_a$ pri upotrebi *Walters*-ove teorije. U slučaju da se koristi klasični koncept u okviru *Janssen*-ove teorije, faktor C_h se određuje kao odnos koeficijenata pasivnog i aktivnog pritiska K_p/K_a :

$$C_h = K_p / K_a \quad (= 1 / K_a^2 = 1 / K_f^2) \quad (\text{primena klasičnog koncepta}) \quad (3.453)$$

Primer: Za $\phi_i = 30^\circ$, određuje se $K_a = K_f = 1/3$, i sračunava $C_h = 3.0^2 = 9.00$, što je očigledno prevelika vrednost za faktor natpritiska (primena klasičnog koncepta). Slične vrednosti se određuju i za izvorni oblika faktor natpritiska C_h u *Walters*-ovoj teoriji, a rezultati odgovaraju preterano velikim horizontalnim pritisacima pri pražnjenju, dok su vertikalni pritisci u materijalu izrazito mali.

U ovom radu je uveden modifikovani koncept, čime je prevaziđen navedeni problem. Primenom ovog koncepta, određuje se faktor natpritiska C_h u obliku K_e/K_f (odnos koeficijenata aktivnog pritiska pri pražnjenju i punjenju). U ovom slučaju se za ugao $\phi_i = 30^\circ$ određuje $C_h = 2.25$, što je značajno manja vrednost od prethodne ($C_h = 9.00$).

Kada se izraz (3.442), razmatra sa aspekta propisa i projektovanja silosa, a posebno u cilju preispitivanja evropskih normi EC1-4, od interesa su sledeća pitanja:

- Može se postaviti pitanje: Šta predstavljaju i čemu odgovaraju pritisci p_{hf} i p_{he} u EC1-4? Prema tački 5.2.1(2) u EC1-4, p_{hf} je *horizontalni pritisak* na nekoj dubini materijala, *posle punjenja i tokom skladištenja* materijala i uzima se za simetrično opterećenje po obimu zida ćelije. Pri proračunu p_{hf} koristi se koeficijent bočnog pritiska $K_m = 1.1 \cdot (1 - \sin\phi_i)$ za silose klase AAC 1. Kod silose klase AAC 2 i 3 uzima se gornja karakteristična vrednost za K kao $K_m \cdot a_K$, a koeficijent trenja μ_w kao donja karakteristična vrednost μ_{wm}/a_μ . Faktori a_K , a_μ i druge veličine su opisane u § 2.7.7.3, gde su za neke materijale tabelarno prikazane proračunske vrednosti. Podela silosa na klase prema EC1-4, prikazana je u tabeli 12 (§ 2.10.2).

Pritisak p_{he} je *horizontalni pritisak tokom pražnjenja* i uzima se kao simetrično opterećenje. Kod silosa klase AAC 1, p_{he} predstavlja ukupni pritisak na zidu ćelije, a za klase AAC 2 i 3, pored pritiska p_{hf} i p_{he} , koji se uzimaju kao simetrična opterećenja, uvode se i nesimetrični pritisci p_{hp} kao dodatno lokalno opterećenje, što je posebno bitno kod analize opterećenja pri pražnjenju.

Pritisci p_{hf} , kod silosa klase AAC 2 i 3, su približno jednaki pritiscima p_{hf} , kod silosa klase AAC 1, pomnoženih sa a_μ (kod aproksimacije je uzeto da je $a_\mu \cong a_K$). Sagledavanje pritiska prema EC1-4 (za vitke silose) u odnosu na pritiske prema teorijskim analizama u ovom radu je prikazano sa sledećim izrazima:

$$p_{hf\text{ AAC1}} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_{wm}} \cdot (1 - e^{-K_m \cdot \mu_{wm} \cdot \frac{z}{r_h}}) = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_{wm}} \cdot (1 - e^{-1.1 \cdot (1 - \sin\phi_{im}) \cdot \mu_{wm} \cdot \frac{z}{r_h}}) \quad (\approx p_{h0}) \quad (3.454)$$

$$p_{hf\text{ AAC2i3}} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_{wm} / a_\mu} \cdot (1 - e^{-K_m \cdot a_K \cdot \frac{\mu_{wm} \cdot z}{a_\mu \cdot r_h}}) \cong a_\mu \cdot p_{hf\text{ AAC1}} \quad (\cong a_\mu \cdot p_{h0}) \quad (3.455)$$

$$p_{he\text{ AAC1}} = C_{h\text{ AAC1}} \cdot p_{hf\text{ AAC1}} \quad (\cong C_{h\text{ AAC1}} \cdot p_{h0} \xrightarrow{\text{daje skokoviti } p_h \text{ (switch)}} p_{hs}) \quad (3.456)$$

$$p_{he\text{ AAC2i3}} = 1.15 \cdot p_{hf\text{ AAC2i3}} \cong 1.15 \cdot a_\mu \cdot p_{hf\text{ AAC1}} \quad (\cong 1.15 \cdot a_\mu \cdot p_{h0}) \quad (3.457)$$

Pritisci označeni kao p_{hf} , p_{h0} , p_{he} i p_{hs} se odnose na proračune u ovom radu, i određuju se preko srednjih vrednosti parametara materijala (kao što su npr. K , ϕ_i , i μ_w). U EC1-4, srednje vrednosti ovih parametara (kod oznaka se dodaje indeks m) se isto koriste kod proračuna opterećenja silosa klase AAC 1. Kod silosa klase AAC 2 i 3, uvode se odgovarajuća donja i gornja vrednost parametara materijala prema slučaju analize opterećenja (tabela 11 u § 2.7.7.3). Prema datim izrazima, ustanovljeno je da se simetrični pritisci prema EC1-4 u osnovi vezuju za pritisak pri mirovanju materijala p_{h0} . Kod EC1-4, p_{hf} se odnosi u isto vreme na dva stanja (punjenje i mirovanje) te je u formalnom smislu uvedeno kao merodavno stanje mirovanja, jer se za to stanje javljaju veći pritisci. Jedino se kod ovog dualnog pristupa po pitanju definisanja p_{hf} može postaviti pitanje kod silosa klase AAC 1, koji se faktor pražnjenja $C_{h\text{ AAC1}}$ koristi u EC1-4, s obzirom na to da se ovaj faktor

može uzeti prema stanju punjenja ili stanju mirovanja materijala (a ta stanja su formalno objedinjena kod p_{hf}). Ovo pitanje se razmatra u daljoj analizi.

- U EN 1991-4:2006 [38], za vitke silose proračunske klase 1 (AAC 1), horizontalni pritisci na zid ćelije se uzimaju sa faktorom pražnjenja C_h , u obliku izraza:

$$C_{h \text{ EC1-4}} = 1.15 + 1.5 \cdot (1 + 0.4 \cdot e / d_c) \cdot C_{op} \quad (\text{za silose klase AAC 1}) \quad (3.458)$$

gde je e maksimalni ekscentricitet tokom punjenja i pražnjenja, tj. $\max(e_f, e_o)$. Sa d_c je označen unutrašnji prečnik kod kružnih ćelija, a C_{op} je referentni faktor materijala za lokalno opterećenje (ovde prikazan u tabeli 10, a u EC 1-4 u tabeli E.1 aneksa E). Faktor C_{op} , koji je uveden u EC1-4, praktično je preuzet iz normi DIN 1055-6:1987 [61], gde je ovaj faktor označen sa β_G . Kod svih materijala koji su navedeni u obe norme, jednake su vrednosti ovih faktora, tj. $\beta_G \equiv C_{op}$.

Za vitke silose proračunske klase 2 i 3 (AAC 2 i AAC 3) u EC1-4, faktor C_h je:

$$C_{h \text{ EC1-4}} = 1.15 \quad (\text{za silose klase AAC 2 i AAC 3}) \quad (3.459)$$

Kod silosa klase AAC 1 primenjen je prvi koncept, a kod silosa klase AAC 2 i 3, drugi koncept za definisanje opterećenje kod silosa, prema § 2.10.1.

- Prema SRPS ISO 11697:1996 [291], kod vitkih silosa sa *masovnim protokom* materijala za materijale koji nisu tabelarno navedeni, faktor natpritiska C se može odrediti prema sledećem izrazu:

$$C_{h \text{ ISO}} = 1.35 + 0.02 \cdot (\phi_i - 30^\circ) \leq 1.35 \quad (\geq 1.35) \quad (3.460)$$

gde se ugao unutrašnjeg trenja ϕ_i računa u stepenima.

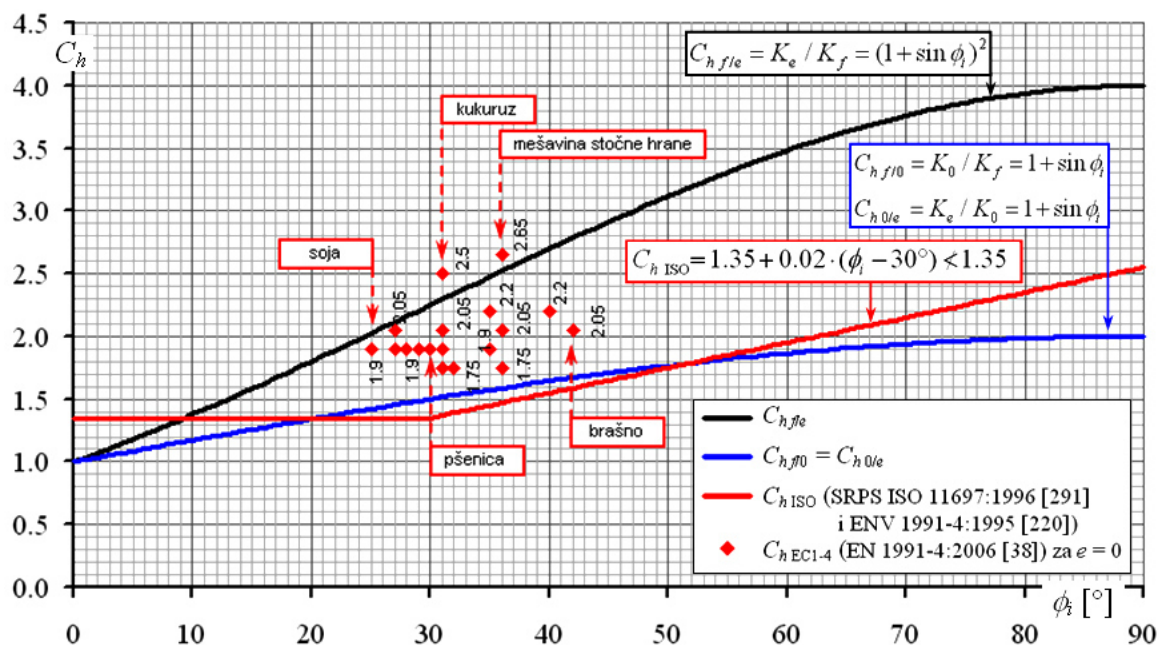
Isti izraz za C_h , kao u ISO 11697, bio je primenjen u evropskom predstandardu ENV 1991-4:1995 [220], ali je u EC1-4 [38] to promenjeno u oblik prikazan u prethodnoj alineji.

Kod EN 1991-4 (2006) [38] i DIN 1055-6 (2005) [62], silosi manjeg kapaciteta (ispod 100 tona materijala) pripadaju proračunskoj klasi 1 (AAC 1), i za njih se primenjuje prvi koncept kod definisanja opterećenja sa relativno većim faktorom uvećanja opterećenja (izrazi za faktore C_h su prikazani na sl. 71).

Na sl. 159 prikazani su dijagrami za faktor C_h prema SRPS ISO 11697:1996 [291] (isti su i u ENV 1991-4:1995 [220]), te ovde predloženim teorijskim izrazima (3.446), (3.447) i (3.448), kao i proračunate vrednosti C_h prema EC1-4 kod silosa proračunske klase AAC 1 sa ekscentricitetom $e = 0$ (odgovara slučaju centričnog punjenja i pražnjenja materijala), za 24 navedena materijala sa preporučenim vrednostima ϕ_{im} i C_{op} (tabela E.1 u [38]). Kod teorijskih izraza se uvode tri vrste faktora C_h u zavisnosti od slučaja promene stanja u materijalu. Ovi faktori, kao i faktor $C_{h \text{ ISO}}$ jedino zavise od veličine ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i . Dijagrami su prikazani uz variranje ugla ϕ_i od 0° do 90° , iako je evidentno da je "radno" područje ugla (i standardna odstupanja) za navedene materijale od 20° do 45° .

Kod prikazanih vrednosti faktora C_h prema EC1-4, uočava se da nekoliko materijala sa istim uglom $\phi_i = \phi_{im}$, mogu imati različite vrednosti faktora pražnjenja $C_{h \text{ EC1-4}}$, što je razlika u odnosu na $C_{h \text{ ISO}}$ i faktore prema teorijskim izrazima, koji mogu imati samo jednu vrednost C_h za dati ugao unutrašnjeg trenja ϕ_i . Kod faktora natpritiska $C_{h \text{ EC1-4}}$, uveden je referentni faktor materijala C_{op} sa kojim se uvodi uticaj pojave neravnomernih opterećenja i preuzet je iz ranijih normi DIN 1055-6:1987 [61]. Kod procene faktora C_{op} koriste se rezultati ispitivanja na silosima, ali sa izvesnom rezervom kako nije poznat postupak ispitivanja za određivanje ovog faktora, a s druge strane se koriste iskustva

proistekla iz analiza slučajeva pojave oštećenja i rušenja silosa. Kod značajnog broja silosa kod kojih se pojavilo oštećenje ili su se srušili bio je uskladišten kukuruz, tako da je njemu dodeljen faktor $C_{op} = 0.9$. Kao umerena vrednost faktora se može uzeti da je $C_{op} = 0.5$, koja se odnosi na veći broj materijala navedenih u EC1-4, među kojima je i pšenica.



Sl. 159 Uporedni prikaz faktora natpritiska C_h prema: teorijskim izrazima (3.446), (3.447) i (3.448), preporučenom izrazu u SRPS ISO 11697:1996 [291] (isto i u ENV 1991-4:1995 [220]), i sračunate vrednosti C_h (prema EC1-4 za silose klase AAC 1 i $e = 0$) za 24 vrste materijala sa vrednostima ϕ_{im} i C_{op} prema tabeli E.1 u EN 1991-4:2006 [38].

Veličine C_{hEC1-4} na sl. 159, su 1.75, 1.90, 2.05, 2.20, 2.50 i 2.65, za navedene materijale, prema vrednostima za ref. faktor C_{op} u nizu 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.9 i 1.0 respektivno (slučaj sa $e = 0$). Praktično se sve vrednosti faktora C_{hEC1-4} nalaze između linija koje odgovaraju teorijskim izrazima za koeficijent C_h . Vrednosti C_{hEC1-4} se odnose na silose klase AAC 1, $C_{hEC1-4} \equiv C_{hAAC1}$, i nalaze se između vrednosti faktora $C_{h0/e}$ ($=C_{hff0}$) i faktora C_{hffe} , što predstavlja određenu konzistenciju sa ovde prikazanim teorijskim analizama.

U osnovi, dualizam kod definisanja pritiska p_{hf} u EC1-4, da se oni odnose na pritiske nakon punjenja i tokom skladištenja materijala, preneo se i na vrednosti faktora natpritiska C_h . Kako se proračuni odnose na konkretne vrednosti, u EC1-4 je za p_{hfAAC1} uveden pritisak p_{h0} (a ne p_{hf}), prema izrazu (3.454), koji odgovara stanju pri mirovanju materijala (što je na strani sigurnosti). Kod pritiska p_{h0} se primenjuje faktor natpritiska $C_{h0/e}$ (sa manjim vrednostima u odnosu na C_{hffe} prema sl. 159), što proizvodi relativno manje pritiske pri pražnjenju $p_{hs0/e}$ (što nije na strani sigurnosti), u odnosu na pritiske p_{hsffe} prema poretku pritiska (3.449). Prema tome kod pritiska p_{heAAC1} kod primene izraza (3.456), treba koristiti faktor natpritiska $C_{hAAC1} > C_{h0/e}$ (prema ovom uslovu vrednosti C_{hEC1-4} na sl. 159 su iznad dijagrama faktora $C_{h0/e}$). Pored ovog uslova, kako su pritisci $p_{hsffe} = p_{hf} \cdot C_{hffe}$ veći od $p_{hs0/e} = p_{h0} \cdot C_{h0/e}$, na osnovu izraza (3.456), sledi da treba ispuniti uslov $C_{hAAC1} < C_{hffe}$ (u ovom slučaju vrednosti C_{hEC1-4} na sl. 159 su ispod dijagrama faktora C_{hffe}). Konkretna vrednost faktora pražnjenja C_{hAAC1} , treba da je u okviru sledećih granica $C_{h0/e} < C_{hAAC1} < C_{hffe}$.

Kada bi se kod ove teorijske analize uveo faktor 1.1 kod koeficijenta K_0 , kako bi potpuno odgovarao koeficijentu K_m u EC1-4, tada bi se faktori natpritiska povećali, $C_{h0/e}$ i $C_{h\beta/0}$ za 10%, a $C_{h\beta/e}$ za 21%. Faktor pražnjenja C_{hAAC1} , treba da je u okviru sledećih granica $1.1 \cdot C_{h0/e} < C_{hAAC1} < 1.21 \cdot C_{h\beta/e}$. U ovom slučaju sve vrednosti faktora C_{hEC1-4} za 24 materijala na sl. 159, bi bila između tih povećanih dijagrama (koji bi u tom slučaju bili u skladu sa postavkom u EC1-4 da se K_0 poveća za 10%). Ovo se navodi, jer je lakše prevođenje teorijskih faktora bliže faktoru u EC1-4, nego to uraditi u obnutom slučaju.

Prema prethodnoj analizi, ustanovljen je problem kod određivanja faktora pražnjenja C_{hAAC1} u EC1-4, jer bi trebao da zadovolji dva uslova, prema prvom da odgovara faktoru $C_{h0/e}$ (što je sa teorijske strane korektno jer se p_{hf} posmatra kao p_{h0}), a prema drugom da u principu odgovara faktoru $C_{h\beta/e}$ (ili još preciznije da odgovara $1.21 \cdot C_{h\beta/e} \cdot p_{hf}/p_{h0}$) kako bi pritisci p_{heAAC1} bili na strani sigurnosti. Prethodne velične faktora su približne jer se u EC1-4 uvodi koeficijent K_m koji je za 10% veći od koeficijenta K_0 , a kod drugog uslova je p_{hf} zamenjeno sa p_{h0} , što bi kod strogog poređenja uvelo i uticaj dubine materijala z .

Dualni pristup pri definisanju p_{hf} u EC1-4, je proizveo problem kod određivanja faktora pražnjenja C_h , što je tehnički rešeno sa izrazom (3.458), gde je uveden referentni faktor materijala C_{op} , koji reprezentuje svojstvenu karakteristiku materijala da pri pražnjenju izaziva veća ili manja nesimetrična opterećenja. Na ovaj način uvedena vrednost za C_{op} usmerava vrednost faktora C_h da je bliža ili faktoru $C_{h0/e}$ ili faktoru $C_{h\beta/e}$.

Faktor C_{op} se direktno odnosi na dodatno lokalno opterećenje na zidu silosa (nesimetrično opterećenje), a u analizi silosa klase AAC 1, uveden je kod C_h kao uticajni faktor za određivanje simetričnog opterećenja.

Ako se uporede teorijski izrazi za C_h sa faktorom C_{hISO} , na sl. 159, uočava se dobro slaganje C_{hISO} sa faktorom $C_{h0/e}$ ($=C_{h\beta/0}$), što u sklopu postavki u SRPS ISO 11697:1996 [291] odgovara teorijskom rešenju (nema dualnog pristupa kao u EC1-4). Kod ovog standarda se, kao u EC1-4, pritisak p_{hf} posmatra kao p_{h0} , i K uzima da je za 10% veći od K_0 , ali se kod određivanja karakteristika materijala uvode donja i gornja vrednost (što je razlika u odnosu na analizu silosa klase AAC 1 u EC1-4 gde se koriste srednje vrednosti karakteristika materijala). U skladu sa ovom postavkom, ako se rezultati uporede za primer da je $\phi_i = 30^\circ$, određuje se $C_{h0/e} = 1.50$ i $C_{hISO} = 1.35$. Sada se može korigovati C_{hISO} u pravcu postavki u EC1-4, kao $1.35/0.9 = 1.50$ (faktor konverzije za trenje je 0.9). Kod korekcije C_{hISO} u pravcu teorijskih postavki u ovom radu određuje se $C_h = 1.90$ (tj. $1.35 \cdot 1.10 \cdot 1.15/0.9 = 1.90$, pri čemu se uvodi 1.10 zbog razlike u odnosu na K_0 , 1.15 za konverziju K na gornju vrednost, i 0.9 za konverziju μ_w na donju vrednost). Ova vrednost približno odgovara srednjoj vrednosti faktora $(C_{h0/e} + C_{h\beta/e})/2 = (1.50 + 2.25)/2 = 1.875$ i deluje primereno imajući u vidu da pritisci povećani sa ovim faktorom predstavljaju simetričan deo opterećenja pri pražnjenju, a da se drugi deo opterećenja uvodi kao dodatno lokalno opterećenje p_p , kako je to uvedeno u ISO 11697.

Međutim, u EC1-4 nije uveden pristup primenjen u ISO 11697, iako je isti bio uveden u predstandardu ENV 1991-4:1995 [220]. Na ovom mestu u propisima, prevladao je stav da se primene postavke iz ranijih nemačkih normi DIN 1055-6:1987 [61]. Na taj način, vrednosti C_h su u funkciji faktora C_{op} , i veće su od C_{hISO} , tako da se određuju veći pritisci pri pražnjenju. U principu je ovo korektno postavljeno, kako se kod proračuna silosa klase AAC 1 u EC1-4, simetrični pritisci pri pražnjenju ne povećavaju sa dodatnim lokalnim opterećenjem p_p , kao u ISO 11697. Povećanje simetričnih pritisaka pri pražnjenju, treba da zameni dejstvo dodatnog lokalnog opterećenja p_p , na taj način da dimenzionisanje na uticaje od povećanih simetričnih opterećenja, odgovara dimenzionisanju na uticaje od

simetričnog i nesimetričnog dela opterećenja. Ovo znači da silosi, bez obzira na to u kojoj su klasi AAC 1, 2 ili 3, u načelu, treba da imaju jednaku pouzdanost i sa tim jednako armiranje za isti kvalitet betona i armature, pri istim dimenzijama preseka.

Kod ovde prikazane teorijske analize koristi se podela stanja materijala na punjenje, mirovanje i pražnjenje, tako da se analiziraju tri osnovna horizontalna pritiska pri ovim stanjima, kao i tri slučaja pojave skokovitih pritisaka u slučaju promene stanja (sa punjenja na mirovanje; sa mirovanja na pražnjenje; i sa punjenja na pražnjenje). Ukupno to čini šest dijagrama pritisaka koji su u funkciji dubine materijala z , a po obimu ćelije pritisci na dubini z su ravnomerni, tako da su ovi pritisci u obliku rotaciono simetričnog opterećenja po zidu ćelije.

Prema EC1-4 silosi se dele na klase AAC 1 i AAC 2 i 3. Kod klase AAC 1 razmatra se samo rotaciono simetrično opterećenje, a kod klase AAC 2 i 3 opterećenje se deli na deo u obliku rotaciono simetričnog opterećenja i deo nesimetričnog opterećenja na lokalnim površinama ćelije. Pored toga, u EC1-4 se analiziraju samo dva proračunska stanja materijala. Objedinjeno je stanje pri punjenju i mirovanju materijala, u jedno stanje koje obuhvata pritiske nakon punjenja i tokom skladištenja. Na ovaj način se kod EC1-4 razmatraju četiri dijagrama pritisaka koji se uzimaju za rotaciono simetrična opterećenja: dva dijagrama za silose klase AAC 1 (punjenje i pražnjenje) i dva dijagrama za silose klase AAC 2 i 3 (punjenje i pražnjenje). Dijagrami kod silosa klase AAC 2 i 3, su od interesa jer, u principu, predstavljaju izvesnu meru stalnih vrednosti pritisaka pri punjenju i pražnjenju.

Po pitanju karakteristika materijala, u prikazanoj teorijskoj analizi, kao i za silose klase AAC 1 prema EC1-4, pri određivanju pritisaka koriste se srednje vrednosti. Kod silosa klase AAC 2 i 3 koriste se odgovarajuća gornja i donja vrednost za karakteristike materijala. Zapreminska težina materijala se u svim slučajevima uzima da je jednaka i da odgovara propisanoj vrednosti.

Na sl. 159, prikazane su vrednosti za faktore natpritiska prema predloženim teorijskim izrazima, kao i sračunate vrednosti prema izrazu za faktor pražnjenja u EC1-4 za sve materijale navedene u posebnoj tabeli u ovom standardu. U analizi je zaključeno da se kod određivanja C_h prema EC1-4, uvodi refer. faktor materijala C_{op} , koji bitno utiče na veličinu C_h koja se nalazi u granicama prema ovde prikazanoj teorijskoj analizi. Međutim, zbog posebnog pristupa u EC1-4, gde inicijalno stanje pritisaka odgovara stanju u toku skladištenja (mirovanja) materijala, pritisci pri pražnjenju su relativno veći, jer su početni proračunski pritisci veći od pritisaka koji odgovaraju inicijalnom punjenju. Pored toga, koeficijent odnosa napona K_m koji se uvodi kod funkcije raspodele pritisaka po dubini $Y(z)$, je prema EC1-4 veći od koeficijenta K_f pri punjenju, tako da je anvelopa pritisaka pri pražnjenju punija kod primene K_m . Usled toga u gornjoj zoni materijala pritisci se relativno još više povećavaju. Na velikim dubinama materijala z , pritisci se približavaju svojim vertikalnim asimptotama, tako da uticaj koeficijenta K kod horizontalnih pritisaka prema izrazima u EC1-4 praktično isčezava. Kod teorijskih izraza, uticaj kod osnovnih horizontalnih pritisaka takođe isčezava na velikim dubinama z , pri čemu sva tri pritiska teže jednoj vertikalnoj asimptoti. U ovom slučaju, kod anvelopa skokovitih pritisaka, uticaj koeficijenata K je konstantan, gde odnos ovih koeficijenata predstavlja faktor natpritiska.

Imajući u vidu posebnu ulogu faktora C_{op} kod faktora pražnjenja C_h u EC1-4, kao i sve prethodne konstatacije vezane za veličine koje određuju horizontalne pritiske u silosu prema EC1-4, nadalje se prikazuje analiza horizontalnih pritisaka na primeru betonskog silosa prema postupku u EC1-4 i prikazanoj teorijskoj analizi.

3.5.6.3.3 Uporedna analiza pritisaka materijala na zid ćelije AB silosa prema EC1-4 i modifikovanom teorijskom postupku

Proračun prema teorijskoj analizi predstavlja proširenje primene Janssen-ove teorije (određuju se stanja pri punjenju, mirovanju i pražnjenju), a proračun anvelope maksimalnih pritisaka pri pražnjenju se zasniva na prikazanoj adaptaciji Walters-ovog postupka u okviru Janssen-ove teorije, sa primenom modifikovanog koncepta analize skokovitog opterećenja predloženim u ovom radu.

Određivanje horizontalnih pritisaka od uskladištenog materijala na zidove ćelije silosa se sprovodi na osnovu izraza prikazanih u sledećoj rekapitulaciji.

Rekapitulacija proračunskih izraza za određivanje horizontalnih pritisaka

Proračunski izrazi prema EC1-4:

- silosi klase AAC 1 (za stanja punjenja i pražnjenja)

$$p_{hf\text{ AAC1}} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-K_m \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{r_h}}) \quad (3.461)$$

$$p_{he\text{ AAC1}} = p_{hf\text{ AAC1}} \cdot C_{h\text{ AAC1}} = p_{hf\text{ AAC1}} \cdot [1.15 + 1.5 \cdot (1 + 0.4 \cdot e/d_c) \cdot C_{op}] \quad (3.462)$$

- silosi klase AAC 2 i AAC 3 (za stanja punjenja i pražnjenja)

$$p_{hf\text{ AAC2i3}} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w / a_\mu} \cdot (1 - e^{-K_m \cdot a_\mu \cdot \frac{\mu_w \cdot z}{a_\mu \cdot r_h}}) \quad (3.463)$$

$$p_{he\text{ AAC2i3}} = p_{hf\text{ AAC2i3}} \cdot C_{h\text{ AAC2i3}} = p_{hf\text{ AAC2i3}} \cdot 1.15 \quad (3.464)$$

Predloženi teorijski izrazi prema ovom radu:

(proširena primena Janssen-ove teorije i modifikacija analize skokovitog opterećenja)

- osnovni horizontalni pritisci (za stanja punjenja, mirovanja i pražnjenja)

$$p_{hf} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-K_f \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{r_h}}) \quad (3.465)$$

$$p_{h0} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-K_0 \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{r_h}}) \quad (3.466)$$

$$p_{he} = \frac{\gamma \cdot r_h}{\mu_w} \cdot (1 - e^{-K_e \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{r_h}}) \quad (3.467)$$

- anvelope horiz. pritisaka pri skokovitom opterećenju (switch load):

$$p_{hsf10} = p_{hf} \cdot C_{hsf10} = p_{hf} \cdot \frac{K_0}{K_f} \quad (\text{za promenu iz stanja punjenja u stanje mirovanja}) \quad (3.468)$$

$$p_{hs0le} = p_{h0} \cdot C_{hs0le} = p_{h0} \cdot \frac{K_e}{K_0} \quad (\text{za promenu iz stanja mirovanja u stanje pražnjenje}) \quad (3.469)$$

$$p_{hsfle} = p_{hf} \cdot C_{hsfle} = p_{hf} \cdot \frac{K_e}{K_f} \quad (\text{za promenu iz stanja punjenja u stanje pražnjenje}) \quad (3.470)$$

Dodatni izrazi za proračun:

$$r_h = A/U \quad (3.471)$$

$$K_m = 1.1 \cdot (1 - \sin \phi_{im}) \quad (3.472)$$

$$K_f = \frac{1 - \sin \phi_i}{1 + \sin \phi_i}, \quad K_0 = 1 - \sin \phi_i, \quad K_e = \cos^2 \phi_i. \quad (3.473)$$

U primeru se određuju horizontalni pritisci na zid ćelija prema prethodno prikazanim izrazima. Analizira se *cilindrični AB silos* (betonski zidovi – tip zida D3 prema EC1-4), sa sledećom geometrijom:

$H = h_c = 50$ m – visina ćelije (ujedno i visina punjenja materijala sa gornjom ravnom površinom); i

$D = d_c = 10$ m – unutrašnji prečnik ćelije, i

$e = 0$ m – ekscentricitet pri punjenju i pražnjenju (centrični slučaj u primeru).

Ispituju se pritisci za skladištenje sledećih materijala u silosu: *pšenica, kukuruz i soja*.

Karakteristike materijala se uzimaju prema preporučenim vrednostima u EN 1991-4:2006 [38]. Kod srednjih vrednosti za koeficijent trenja i ugao unutrašnjeg trenja ne unosi se dodatni indeks m kao u EC1-4, tako da se oznake μ_w i ϕ_i uzimaju kao srednje vrednosti ovih veličina. Zadržava se indeks m kod srednje vrednosti koeficijenta bočnog pritiska K_m prema EC1-4. Na ovaj način je usklađeno označavanje veličina u izrazima prema EC1-4 i teorijskom postupku, što je već primenjeno u prikazanoj rekapitulaciji.

Rezultati proračuna su prikazani u ovom radu, po redu za *pšenicu, kukuruz i soju* kao uskladišteni materijal, a organizovani su na sledeći način:

- Podaci za analizirani uskladišteni materijal prema EC1-4 su prikazani tabelarno. Za zapreminsku težinu materijala γ uzima se u proračunima gornja vrednost γ_u . Svi navedeni faktori se koriste u proračunu prema EC1-4. Ugao unutrašnjeg trenja ϕ_i se upotrebljava za određivanje koeficijenata K_f , K_0 i K_e .
- Sledi prikaz proračunskih vrednosti koeficijenta K_m i faktora pražnjenja C_{hAAC1} i $C_{hAAC2+3}$ (primenjuju se prema EC1-4), te vrednosti koeficijenata K_f , K_0 i K_e i faktora natpritiska $C_{h,f0}$, $C_{h,0/e}$ i $C_{h,f/e}$ (za predloženi teorijski postupak).
- Sa sračunatim vrednostima navedenih koeficijenata i faktora, i hidraulički radijus $r_h = D/4$ za kružnu ćeliju (u primeru $r_h = 2.50$ m), određuju se horizontalni pritisci prema prvih 10 izraza u prethodno prikazanoj rekapitulaciji. Prva dva izraza se odnose na pritiske kod silosa klase AAC 1 prema EC1-4, a sledeća dva za silose klase AAC 2 i AAC 3, dok se narednih šest izraza odnose na pritiske prema predloženom teorijskom postupku (tri izraza za osnovne pritiske, i tri za anvelopu skokovitih pritisaka).
- Rezultati proračuna su prikazani u obliku dijagrama horizontalnih pritisaka koji deluju na zid kružne ćelije (po 10 dijagrama na sl. 160, sl. 161 i sl. 162) u funkciji dubine materijala z , redom za navedene uskladištene materijale.
- U tabelama su prikazani proračunski rezultati horizontalnih pritisaka, za pojedine dubine materijala u silosu z , a u donjoj vrsti kod ovih tabela su date asimptotske vrednosti za deset analiziranih horizontalnih pritisaka.

Primer 3.10a - Rezultati proračunske analize za AB silos sa uskladištenom pšenicom

Geometrijski podaci o silosu: $D = d_c = 10 \text{ m}$, $H = h_c = 50 \text{ m}$; $h_c/d_c = 5 \Rightarrow$ vitak silos.

Karakteristike materijala (PŠENICA) i trenje o betonski zid (tip D3) prema EC1-4:

Materijal	$\gamma (= \gamma_u)$ [kN/m ³]	$\phi_i (= \phi_{im})$ srednja vr. [°]	a_ϕ faktor	K_m srednja vrednost	a_K faktor	$\mu_w (= \mu_{wm})$ srednja vrednost	a_μ faktor	C_{op} faktor
PŠENICA	9.0	30	1.12	0.54	1.11	0.57	1.16	0.5

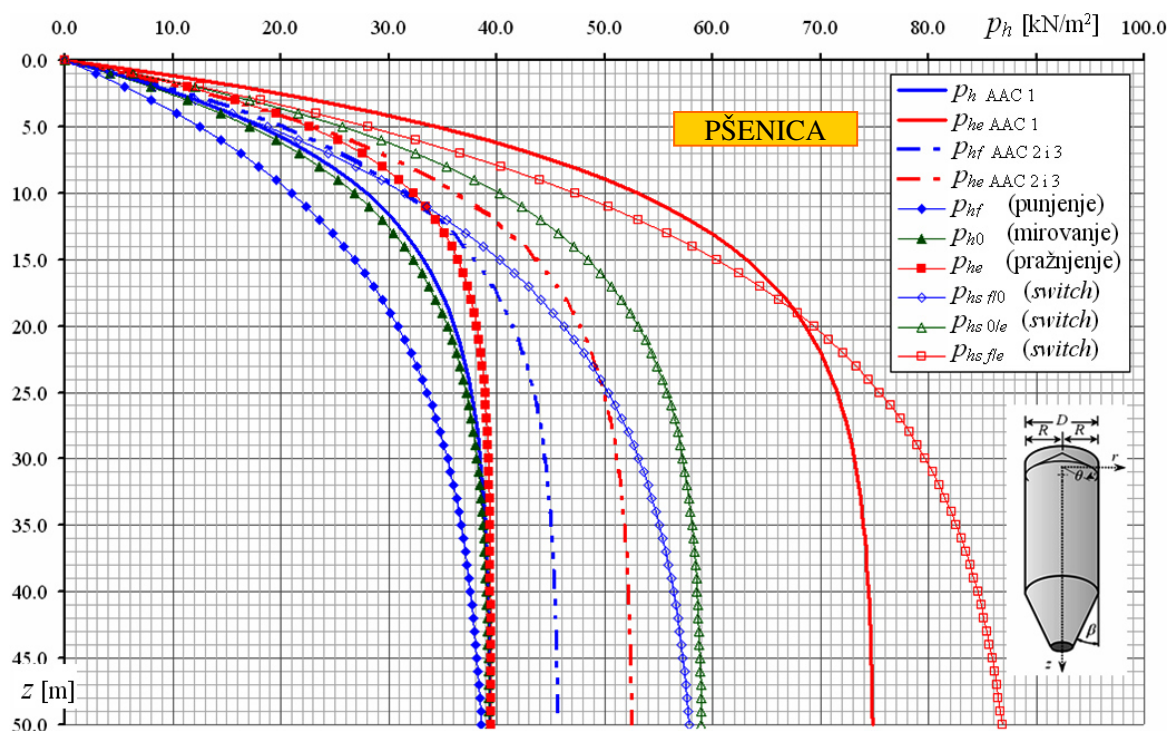
Koeficijenti bočnog pritiska K i faktori natpritisaka C_h :

$$K_m = 0.54 \quad C_{h \text{ AAC } 1} = 1.90 \quad C_{h \text{ AAC } 2 \text{ i } 3} = 1.15$$

$$K_f = 0.33333 \quad C_{h \text{ f}0} = K_0 / K_f = 1.50000$$

$$K_0 = 0.50000 \quad C_{h \text{ 0}e} = K_e / K_0 = 1.50000$$

$$K_e = 0.75000 \quad C_{h \text{ f}e} = K_e / K_f = 2.25000$$



Sl. 160 Uporedni dijagrami horizontalnih pritisaka na zidu cilindrične AB ćelije određeni prema EC1-4 i predloženom teorijskom postupku, u primeru sa uskladištenom pšenicom.

Tabela 26. Uporedni rezultati horiz. pritisaka na zidu ćelije (uskladištena pšenica) prema predloženom teorijskom postupku i EC1-4 za silose klase AAC 1, 2 i 3.

PŠENICA	EC1-4 (AAC 1)		EC1-4 (AAC 2 i 3)		Predloženi teorijski postupak					
	p_{hf} [kN/m ²]	p_{he} [kN/m ²]	p_{hf} [kN/m ²]	p_{he} [kN/m ²]	p_{hf} [kN/m ²]	p_{h0} [kN/m ²]	p_{he} [kN/m ²]	$p_{hs \text{ f}0}$ [kN/m ²]	$p_{hs \text{ 0}e}$ [kN/m ²]	$p_{hs \text{ f}e}$ [kN/m ²]
10.0	27.950	53.104	31.693	36.447	21.013	26.849	32.334	31.520	40.274	47.280
20.0	36.109	68.608	41.450	47.667	30.840	35.436	38.182	46.260	53.154	69.391
$H = 50$	39.390	74.841	45.663	52.512	38.591	39.342	39.466	57.886	59.012	86.829
$z \rightarrow \infty$	39.474	75.000	45.789	52.658	39.474	39.474	39.474	59.211	59.211	88.816

Primer 3.10b - Rezultati proračunske analize za AB silos sa uskladištenim kukuruzom

Geometrijski podaci o silosu: $D = d_c = 10$ m, $H = h_c = 50$ m; $h_c/d_c = 5 \Rightarrow$ vitak silos.

Karakteristike materijala (KUKURUZ) i trenje o betonski zid (tip D3) prema EC1-4:

Materijal	γ ($=\gamma_u$) [kN/m ³]	ϕ_i ($=\phi_{im}$) srednja vr. [°]	a_ϕ faktor	K_m srednja vrednost	a_K faktor	μ_w ($=\mu_{wm}$) srednja vrednost	a_μ faktor	C_{op} faktor
KUKURUZ	8.0	31	1.14	0.53	1.14	0.53	1.24	0.9

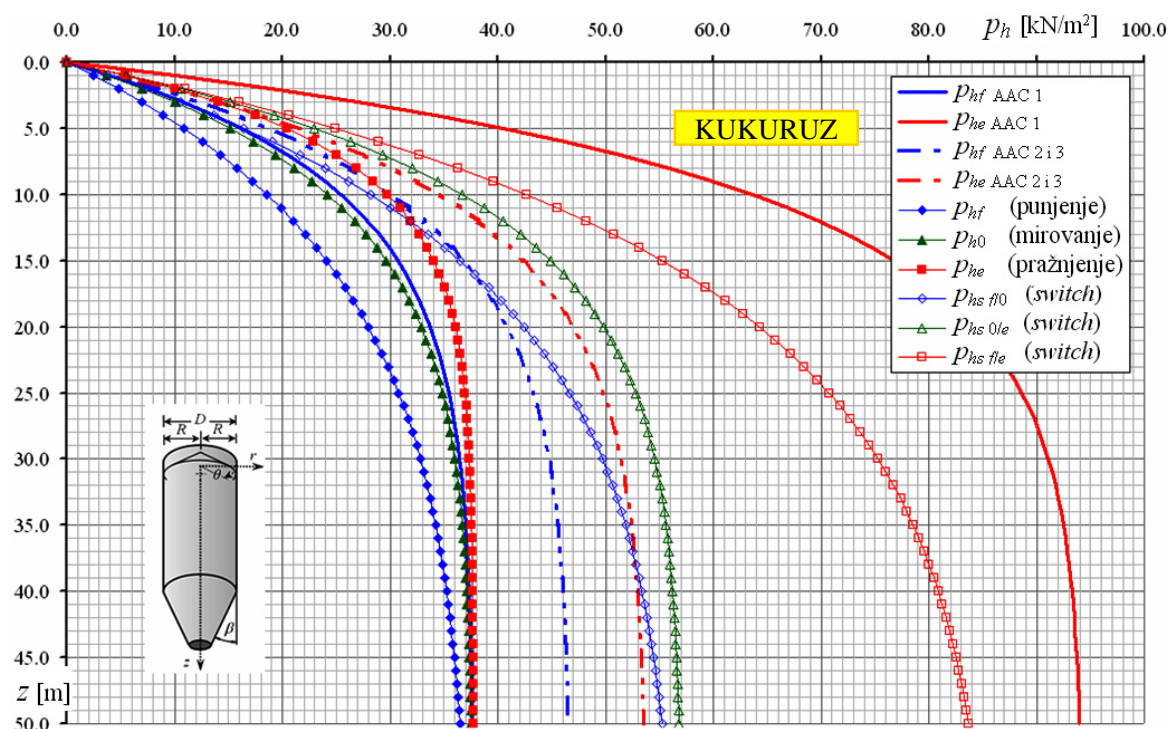
Koeficijenti bočnog pritiska K i faktori natpritiska C_h :

$$K_m = 0.53 \quad C_{h\text{ AAC }1} = 2.50 \quad C_{h\text{ AAC }2\text{ i }3} = 1.15$$

$$K_f = 0.32010 \quad C_{h\text{ f}0} = K_0 / K_f = 1.51504$$

$$K_0 = 0.48496 \quad C_{h\text{ 0}e} = K_e / K_0 = 1.51504$$

$$K_e = 0.73474 \quad C_{h\text{ f}e} = K_e / K_f = 2.29534$$



Sl. 161 Uporedni dijagrami horizontalnih pritisaka na zidu cilindrične AB ćelije određeni prema EC1-4 i predloženom teorijskom postupku, u primeru sa uskladištenim kukuruzom.

Tabela 27. Uporedni rezultati horiz. pritisaka na zidu ćelije (uskladišten kukuruz) prema predloženom teorijskom postupku i EC1-4 za silose klase AAC 1, 2 i 3.

KUKURUZ	EC1-4 (AAC 1)		EC1-4 (AAC 2 i 3)		Predloženi teorijski postupak					
	p_{hf} [kN/m ²]	p_{he} [kN/m ²]	p_{hf} [kN/m ²]	p_{he} [kN/m ²]	p_{hf} [kN/m ²]	p_{h0} [kN/m ²]	p_{he} [kN/m ²]	$p_{hs\text{ f}0}$ [kN/m ²]	$p_{hs\text{ 0}e}$ [kN/m ²]	$p_{hs\text{ f}e}$ [kN/m ²]
z = 10.0	25.468	63.669	30.137	34.658	18.592	24.239	29.787	28.167	36.722	42.674
z = 20.0	33.747	84.368	40.864	46.994	28.024	32.908	36.062	42.457	49.857	64.324
H = 50	37.599	93.997	46.525	53.504	36.468	37.515	37.720	55.250	56.837	83.706
z → ∞	37.736	94.340	46.792	53.811	37.736	37.736	37.736	57.171	57.171	86.617

Primer 3.10c - Rezultati proračunske analize za AB silos sa uskladištenom sojom

Geometrijski podaci o silosu: $D = d_c = 10 \text{ m}$, $H = h_c = 50 \text{ m}$; $h_c/d_c = 5 \Rightarrow$ vitak silos.

Karakteristike materijala (SOJA) i trenje o betonski zid (tip D3) prema EC1-4:

Materijal	$\gamma (= \gamma_u)$ [kN/m ³]	$\phi_i (= \phi_{im})$ srednja vr. [°]	a_ϕ faktor	K_m srednja vrednost	a_K faktor	$\mu_w (= \mu_{wm})$ srednja vrednost	a_μ faktor	C_{op} faktor
SOJA	8.0	25	1.16	0.63	1.11	0.48	1.16	0.5

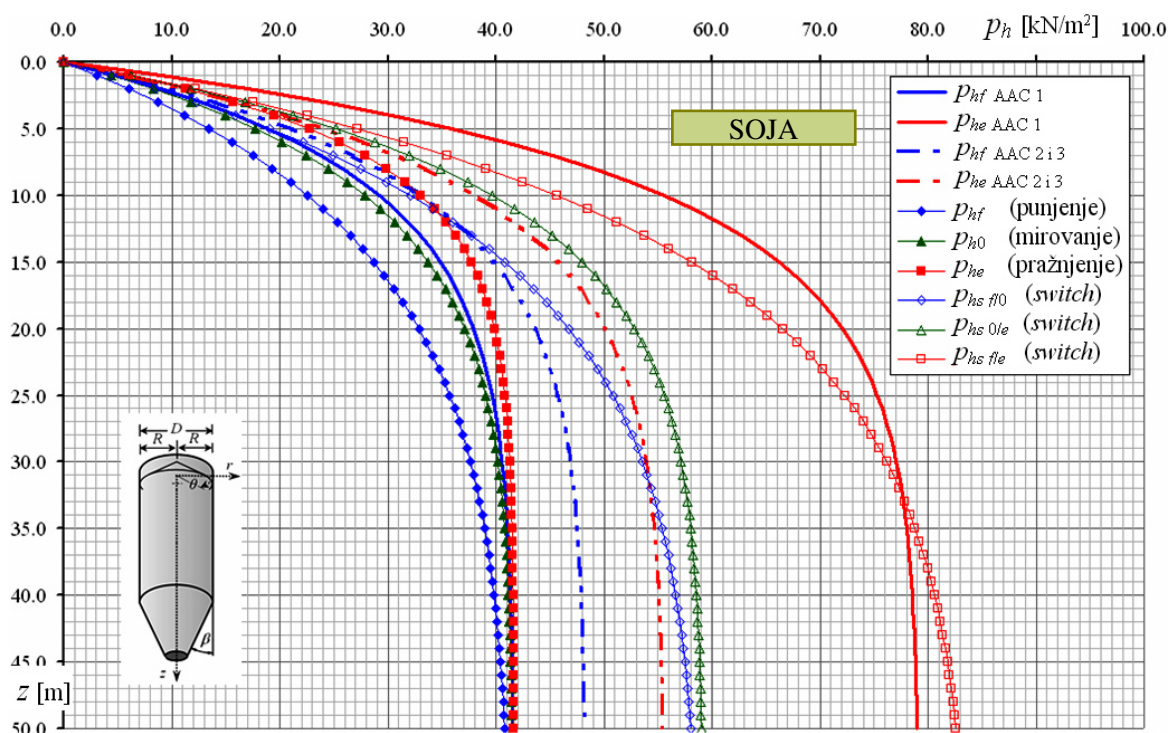
Koeficijenti bočnog pritiska K i faktori natpritiska C_h :

$$K_m = 0.63 \quad C_{h \text{ AAC } 1} = 1.90 \quad C_{h \text{ AAC } 2 \text{ i } 3} = 1.15$$

$$K_f = 0.40586 \quad C_{h \text{ f}0} = K_0 / K_f = 1.42262$$

$$K_0 = 0.57738 \quad C_{h \text{ 0}e} = K_e / K_0 = 1.42262$$

$$K_e = 0.82139 \quad C_{h \text{ f}e} = K_e / K_f = 2.02384$$



Sl. 162 Uporedni dijagrami horizontalnih pritisaka na zidu cilindrične AB ćelije određeni prema EC1-4 i predloženom teorijskom postupku, u primeru sa uskladištenom sojom.

Tabela 28. Uporedni rezultati horiz. pritisaka na zidu ćelije (uskladištena soja) prema predloženom teorijskom postupku i EC1-4 za silose klase AAC 1, 2 i 3.

SOJA	EC1-4 (AAC 1)		EC1-4 (AAC 2 i 3)		Predloženi teorijski postupak					
	p_{hf} [kN/m ²]	p_{he} [kN/m ²]	p_{hf} [kN/m ²]	p_{he} [kN/m ²]	p_{hf} [kN/m ²]	p_{h0} [kN/m ²]	p_{he} [kN/m ²]	$p_{hs \text{ f}0}$ [kN/m ²]	$p_{hs \text{ 0}e}$ [kN/m ²]	$p_{hs \text{ f}e}$ [kN/m ²]
z										
[m]										
10.0	29.237	55.550	33.143	38.114	22.552	27.915	33.059	32.083	39.713	45.642
20.0	37.959	72.121	43.559	50.093	32.898	37.128	39.889	46.801	52.819	66.580
H = 50	41.568	78.980	48.185	55.413	40.820	41.504	41.651	58.071	59.044	82.613
z → ∞	41.667	79.167	48.333	55.583	41.667	41.667	41.667	59.276	59.276	84.327

Analiza rezultata

Prema prikazanim rezultatima i njihovom upoređenju mogu se dati sledeći zaključci:

- Potvrđen je redosled veličine pritisaka prema teorijskim izrazima.
- Potvrđen je veliki uticaj faktora C_{op} na pritiske pri pražnjenju.
- Potvrđena je sličnost po vrednostima između stanja pri mirovanju (teorijski izraz) i stanja pri punjenju prema EC1-4.
- Potvrđena je relativno veća punoća dijagrama kod pražnjenja prema EC1-4, što je glavni razlog za relativno veće pritiske u gornjim zonama silosa, tj. pri manjim dubinama materijala u odnosu na teorijsku vrednost. Čak i u slučaju da su asimptotski pritisci pri pražnjenju veći kod teorijskih vrednosti, u gornjim zonama su veći pritisci prema EC1-4. Na ovaj način, evidentno je da kod EC1-4 stoji veća vrednost kod koeficijenta K , za slučaj analize skokovitog opterećenja. U principu, rezultati su globalno posmatrano konzistentni. Kod nižih tj. kratkih silosa bi proračun pritisaka prema EC1-4 bio na strani sigurnosti, dok kod viših silosa u nižim zonama, tj. pri većim dubinama materijala z , EC1-4 ne mora biti na strani sigurnosti u odnosu na teorijske vrednosti pritisaka. Ovo sledi iz veličine faktora natpritiska. Ako se pretpostavi da su jednaki faktori prema EC1-4 i teorijskoj analizi, određuju se veći pritisci kod EC1-4 na svim visinama, tj. dubinama materijala, a izjednačuju se teorijska vrednost i prema EC1-4 u asimptotskom slučaju. Ako je C_h prema EC1-4 veće od teorijske vrednosti, EC1-4 je za sve dubine i kod asimptotske vrednosti na strani sigurnosti, samo ima veću sigurnost pri relativno manjim dubinama. Ovo je slučaj za vrednosti kod uskladištenog kukuruza u analiziranom primeru AB silosa.
- Kod skokovitog pritiska pri prelazu sa punjenja na mirovanje, podrazumeva se da je izazvano malim delimičnim pražnjenjem materijala iz silosa, gde se sa povećanim pritiscima izazvana konsolidacija materijala. Ovo je prelazak iz mirnog stanja u još mirnije pa se ne očekuje pojava skokovitih pritisaka, međutim kod materijala se pojavljuje sleganje pri mirovanju, koje se javlja kao relativno trenutno diferencijalno sleganje pri postepenom popuštanju trenja o zid silosa kao trenutnog malog sleganja materijala. U tom smislu povećanje pritisaka pri prelazu sa stanja punjenja na stanje mirovanja, može biti relativno manjih vrednosti u odnosu na ovde prikazanu analizu.
- Kod skladištenja *pšenice* i *soje* pritisci na velikim dubinama su veći od pritisaka prema EC1-4, usled većeg faktora natpritiska kod teorijskog postupka, pri čemu su zbog većeg koeficijenta K pritisci pri manjim dubinama veći kod EC1-4. Ovo jednostavno upućuje na to, da postavka u EC1-4 za proračun ne može u ovom obliku da izbalansira sigurnost na celoj visini podjednako, već relativno veću sigurnost određuje kog manjih dubina, što odgovara slučaju relativno nižih silosa. Ovaj problem je nasleđen iz ranijih propisa, gde se smatralo da *Janssen*-ova teorija ne daje dovoljno velike pritiske na manjim dubinama, pa se povećavao koeficijent K kako bi kriva pritisaka bila punija u gornjoj zoni. Sada kada je uveden poseban proračunski postupak kod kratkih silosa, čini se da je ovde moglo doći do balansiranja veličine koeficijenta K , ali nije.
- Pritisci pri punjenju prema EC1-4 su samo malo veći od teorijskih pri mirovanju, a razlika se javlja zbog 10% većih vrednosti koeficijenta K_m u odnosu na K_0 .
- Pritisci prema EC1-4, za silose klase 2 i 3 su ispod skokovitih pritisaka pri prelazu iz stanja mirovanja u stanje pražnjenja prema teorijskom izrazu, što se može

tumačiti da je logično u ovoj komparativnoj analizi, jer ti pritisci predstavljaju neku vrstu maksimalnog stabilnog pritiska pri pražnjenju, te ne bi trebali da prekorače teorijske skokovite pritiske.

- U osnovi, iako je uticaj faktora C_{op} taj koji određuje relativne veličine kod ovih poređenja, može se konstatovati, kako propis treba da je uvek na strani sigurnosti, da to nije slučaj kod pražnjenja na velikim dubinama, gde su pri upoređenju rezultata, kod skladištenja *pšenice* i *soje*, određeni veći pritisci kod primene predloženog teorijskog postupka. S druge strane, u isto vreme se određuju veći pritisci kod manjih dubina prema EC1-4, u odnosu na teorijske pritiske, što ukazuje na neizbalansiranu sigurnost pri određivanju pritisaka prema EC1-4, gde se veća sigurnost dobija pri manji visinama, a relativno manja sigurnost pri većim, bilo da su oba na strani sigurnosti ili samo u gornjoj zoni.

Diskusija rezultata

Prva dva izraza se odnose na pritiske kod silosa klase AAC 1 prema EC1-4, a sledeća dva za silose klase AAC 2 i AAC 3, dok se narednih šest izraza odnose na pritiske prema predloženom teorijskom postupku (tri izraza za osnovne pritiske, i tri za anvelopu skokovitih pritisaka). Već je na ranije prikazanim slikama eksperimentalnog ispitivanja prikazano da uvođenje takvog koeficijenta K_m ne odgovara početnom stanju punjenja silosa. Na ovaj način se u EC1-4 osigurala veća sigurnost u gornjoj zoni silosa zbog punijeg dijagrama pritisaka usled većeg koeficijenta K .

Rezultati proračuna su prikazani u obliku dijagrama horizontalnih pritisaka koji deluju na zid kružne ćelije (po 10 dijagrama na sl. 160, sl. 161 i sl. 162) u funkciji dubine materijala z , redom za navedene uskladištene materijale.

Prema *Nanninga*-u, usled zaobljavanja dijagrama, dolazi do redukcije skokovitog pritiska. Međutim, takva redukcija se ne radi jer se uzima da ovako povećani skokoviti pritisci predstavljaju sa relativnom većom prstenastim zatezanjem u ljusti zidova, odgovarajuću meru za kompenzaciju uticaja od momenata savijanja koji se javljaju kod lokalnog opterećenja.

Kako se ova skokovita promena horizontalnih pritisaka na zidove sa svojim vrhom premešta iz donjih delova ka gornjoj površini materijala, u toku pražnjenja materijala, potrebno je obuhvatiti proračunom anvelopu vršnih pritisaka.

U vezi koncepcije teorijskog postupka, može se konstatovati da u propisima deklarativno ne definiše stanje pražnjenja preko aktivnog stanja, kao što se kod C_h ne navodi poreklo iz teorije skokovitog povećanja opterećenja, a koriste se ovi koeficijenti. Ovde se navodi slučaj proračuna stanja u levku, gde se pri analizi stanja pritisaka pri pražnjenju (što odgovara pasivnom stanju napona u levku), za nadopterećenje, kao vertikalni pritisak materijala iz ćelije uzima pritisak koji odgovara stanju nakon punjenja prema EC1-4. Na ovaj način indirektno se može zaključiti, da se pri pražnjenju materijala iz silosa, u ćeliji uzima aktivno stanje. U ovom radu to stanje se ne uzima kao granično aktivno stanje, već aktivno stanje napona pri pražnjenju.

Na osnovu prethodne analize, može se zaključiti da je ostvarena konzistencija teorijskog pristupa kod određivanja faktora C_h i globalno posmatrano pristupa u EC1-4.

3.6 Postupak Walker-a i Walters-a

Walker-ov postupak je osnovni aproksimativni postupak za određivanje stanja napona u uskladištenom materijalu kod analize 2D i 3Dr silosa. Walker, a potom i Walters su rešenje bazirali na analizi stanja napona kod 3Dr silosa. Odgovarajuću analizu 2D silosa u okviru Walker-ovog postupka, prikazao je Clague (1973), prema Cheung-u (2007) [47].

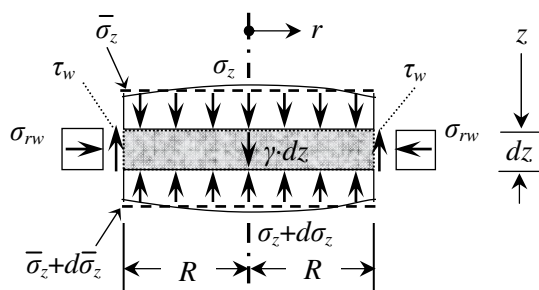
Rešenje stanja napona se formira samo na jednom uslovu ravnoteže (ravnoteža vertikalnih sila). Kod vertikalnih napona se uvodi promenljivi dijagram napona u horizontalnom preseku materijala. Sama analiza napona se sprovodi preko prosečnih vertikalnih napona u poprečnom preseku ćelije. Kod horizontalnih (odnosno radijalnih) napona uvodi se pretpostavka da su ovi naponi konstantni u horizontalnom preseku materijala. Veza horizontalnih i vertikalnih napona se uzima prema Mohr-Coulomb-ovom uslovu loma po smicanju materijala, gde se za odnos horizontalnih i vertikalnih napona uvodi koeficijent $K(x)$ u analizi 2D silosa i $K(r)$ u analizi 3Dr silosa.

Na ovaj način se analiza stanja napona u uskladištenom materijalu koriguje u odnosu na klasičan Janssen-ov postupak analize stanja napona gde je bila uvedena pretpostavka o konstantnim vertikalnim naponima u preseku ćelije.

3.6.1 Analiza stanja napona materijala u 3Dr silosu

U Walker-ovoj analizi [325], koriguje se Janssen-ova pretpostavka da je koeficijent K konstanta na celom polju napona materijala u silosu. Isto tako, prva Janssen-ova pretpostavka, da su naponi nezavisni od radijalne koordinate r u poprečnom preseku, ne može biti tačna. Ovo se može odmah utvrditi preko analize smičućih napona, koji su promenljivi po r , kako je za $r=R$, $\tau_{rz}(R) = \tau_w \neq 0$, ali se za $r=0$, dobija da je $\tau_{rz}(0) = 0$ zbog simetrije stanja napona. Usled promenljivih smičućih napona, radijalni naponi ne mogu biti nezavisni od r osim u trivijalnom slučaju za $\mu_w = 0$.

U cilju predstavljanja ovog postupka, ovde će se u skraćenom obliku prikazati rafinirana verzija prema Nedderman-u (1992) [200]. Postupak je formulisao Walker (1966) [325], a detaljniju verziju postupka je prikazao Walters (1973) u ref. [328], gde je razvijena analitička formulacija faktora distribucije \mathcal{D} .



Sl. 163 Ravnoteža diferencijalnog sloja materijala kod 3Dr silosa.

Vertikalni naponi, u poprečnom preseku materijala u ćeliji, nisu nezavisni od r , tako da se rezultujuća vertikalna sila određuje preko integrala $\int \sigma_z \cdot dA$.

U ovom slučaju se može definisati prosečni vertikalni napon $\bar{\sigma}_z$ iz uslova ravnoteže:

$$\pi R^2 \cdot \bar{\sigma}_z = \int \sigma_z \cdot dA \quad (3.474)$$

Jednačina vertikalne ravnoteže na diferencijalnom sloju materijala, koji je prikazan na sl. 163, može se prikazati u obliku:

$$\frac{d\bar{\sigma}_z}{dz} + \frac{\tau_w}{R/2} = \gamma \quad (3.475)$$

gde je sa τ_w označen napon smicanja u materijalu do zida ćelije. U *Walker*-ovom postupku ovaj smičući napon se prikazuje u opštem obliku preko uobičajenih pretpostavki *Janssen*-ovog postupka:

$$\tau_w = \mu_w \cdot \sigma_r = \mu_w \cdot K_w \cdot \sigma_z \quad (3.476)$$

gde se naponi σ_r i σ_z odnose na tačku materijala do zida, pa se striktno pišu u obliku σ_{rw} i σ_{zw} :

$$\tau_w = \mu_w \cdot \sigma_{rw} = \mu_w \cdot K_w \cdot \sigma_{zw} \quad (3.477)$$

U ovom izrazu uveden je koeficijent bočnog pritiska K_w , kao odnos radijalnog i vertikalnog pritiska u materijalu do zida. Na ovom mestu se prema *Walker*-ovom (1966) postupku prikazanom u ref. [325], u analizu uvodi faktor distribucije \mathcal{D} , kao odnos verikalnog napona do zida σ_{zw} i prosečnog vertikalnog napona u poprečnom preseku materijala:

$$\mathcal{D} = \frac{\sigma_{zw}}{\bar{\sigma}_z} \quad (3.478)$$

Kada ovo zamenimo u jednačinu (3.475) dobija se diferencijalna jednačina:

$$\frac{d\bar{\sigma}_z}{dz} + \frac{\mathcal{D} K_w \mu_w \cdot \bar{\sigma}_z}{R/2} = \gamma \quad (3.479)$$

Ova jednačina odgovara *Janssen*-ovoj jednačini, samo je umesto vertikalnog napona ovde uveden prosečan vertikalni napon, a umesto konstantnog koeficijenta K kod *Janssen*-ove analize, ovde stoji $\mathcal{D} \cdot K_w$. Pretpostavlja se da faktor distribucije \mathcal{D} , nije promenljiv sa z , tako da se ova jednačina može integraliti i odrediti prosečni vertikalni napon:

$$\bar{\sigma}_z = \frac{\gamma \cdot R/2}{\mathcal{D} K_w \cdot \mu_w} \cdot \left[1 - e^{-\mathcal{D} K_w \mu_w \frac{z}{R/2}} \right] + \bar{\sigma}_z \Big|_{z=0} \cdot e^{-\mathcal{D} K_w \mu_w \frac{z}{R/2}} \quad (3.480)$$

U ovoj jednačini uveden je početni prosečni vertikalni napon $\bar{\sigma}_z \Big|_{z=0}$ na gornjoj površini materijala, za $z = 0$. Ako gornja površina nije opterećena, ovaj početni napon je 0. Sa poznatim prosečnim vertikalnim naponom koji se određuje primenom jednačine (3.480), određuju se daljim postupkom i drugi naponi; σ_{zw} se određuje preko (3.478), σ_{rw} i τ_w se određuju iz jednačine (3.477), prema sledećim izrazima:

$$\sigma_{zw} = \mathcal{D} \cdot \bar{\sigma}_z \quad (3.481)$$

$$\sigma_{rw} = K_w \cdot \sigma_{zw} \quad (3.482)$$

$$\tau_w = \mu_w \cdot \sigma_{rw} \quad (3.483)$$

Prethodna analiza je korektna u potpunosti sve do jednačine (3.479). Ovde se postavlja pitanje o faktoru distribucije \mathcal{D} i njegovoj promenljivosti po z osi. Pri rešavanju jednačine (3.479), uvedena je pretpostavka da \mathcal{D} nije promenljivo sa z , iako faktor \mathcal{D} još nije

poznat. Na ovom mestu *Walker* je pretpostavio da \mathcal{D} odgovara vrednosti ovog faktora koju ima u slučaju kada $z \rightarrow \infty$, i da je ova vrednost nezavisna od z .

Ova pretpostavka je usledila iz analize istog problema kod 2D silosa. Kod 2D silosa, uz primenu pravouglog koordinantnog sistema sa osama x i z , uslov ravnoteže u pravcu z ose glasi:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (3.484)$$

Kada $z \rightarrow \infty$, svi izvodi s obzirom na z su 0, i prehodni uslov ravnoteže prelazi u oblik:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad (3.485)$$

Iz ovog oblika sledi da su horizontalni naponi σ_x konstantni u preseku, odnosno da nisu promenljivi po x .

Walker (1966) [325] je pretpostavio kod cilindričnih silosa sa ćelijama kružne osnove, preko analogije sa rezultatom kod analize 2D silosa, da su radijalni naponi σ_r konstantni u preseku materijala pri velikoj dubini, kada $z \rightarrow \infty$, tj. da naponi σ_r nisu promenljivi po r . U stvari, ova pretpostavka nije potpuno tačna, što se može sagledati analizirajući uslov ravnoteže diferencijalnog elementa u cilindričnom koordinantnom sistemu.

Pri ispitivanju ovog teorijskog problema, *Walters* i *Nedderman* (1973) [329] su pokazali da je greška uvedena sa pretpostavkom da su naponi σ_r konstantni u preseku, nezatna u slučaju aktivnog stanja napona. Prema tome, može se koristiti aproksimacija kod određivanja faktora distribucije \mathcal{D} pri $z \rightarrow \infty$, u vidu pretpostavke da je radijalni napon σ_r u preseku konstantan, tj. nezavisan od r .

U cilju određivanja faktora distribucije \mathcal{D} , posmatra se diferencijalni sloj materijala, pri $z \rightarrow \infty$, sa radijusom r i debljinom dz , gde svi naponi dostižu svoje asimptotske vrednosti. Kako nema promene kod vertikalnih napona pri $z \rightarrow \infty$, ravnoteža sila na diferencijalnom sloju daje rezultat samo preko težine sloja i smičućih napona po obimu sloja:

$$2\pi r \cdot \tau_{rz} \cdot dz = \pi r^2 \cdot \gamma \cdot dz \quad (3.486)$$

Odavde se određuje da je smičući napon:

$$\tau_{rz} = \frac{\gamma r}{2} \quad (3.487)$$

Kada se posmatra tačka materijala do zida, određuje se:

$$\tau_w = \frac{\gamma R}{2} \quad (3.488)$$

$$\sigma_{rw} = \frac{\gamma R}{2\mu_w} \quad (3.489)$$

Kako je prema uvedenoj pretpostavci, radijalni napon σ_r , konstantan u preseku, određuje se za neku posmatranu tačku materijala u sloju:

$$\sigma_r = \frac{\gamma \cdot R}{2\mu_w} ; \quad \tau_{rz} = \frac{\gamma \cdot r}{2} = \mu_w \cdot \sigma_r \cdot r / R \quad (3.490)$$

Sa uvedenom pretpostavkom da su radijalni naponi konstantni u poprečnom preseku, sada se može koristiti izraz za koeficijent $K(r)$ kod analize 3Dr silosa, prema izrazu (3.309). Na

sličan način *Nedderman* (1992) [200], je odredio relaciju između vertikalnih i radijalnih napona (izrazi su ekvivalentni) u sledećem obliku:

$$\sigma_z = \sigma_r \cdot \frac{(1 + \sin^2 \phi_i) \pm 2 \sin \phi_i \cdot \sqrt{1 - c \cdot (r/R)^2}}{\cos^2 \phi_i} \quad (3.491)$$

gde je $c = \tan^2 \phi_w / \tan^2 \phi_i = \mu_w^2 / \mu_i^2$.

Dva rešenja u jednačini (3.491) odgovaraju aktivnom i pasivnom stanju napona, tako da ovu jednačinu možemo pisati u pogodnijem obliku

$$\sigma_z = \sigma_r \cdot \frac{(1 + \sin^2 \phi_i) + 2\kappa \sin \phi_i \cdot \sqrt{1 - c \cdot (r/R)^2}}{\cos^2 \phi_i} \quad (3.492)$$

gde je κ parametar koji se uvodi sa $\kappa = +1$ za aktivno stanje, i sa $\kappa = -1$ za pasivno stanje napona.

Prosečna vrednost vertikalnog napona σ_z u poprečnom preseku, $\bar{\sigma}_z$ je data sa

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_z &= \frac{1}{\pi R^2} \int 2\pi r \cdot \sigma_z \cdot dr = \int \sigma_z \cdot d((r/R)^2) = \\ &= \sigma_r \cdot \frac{1 + \sin^2 \phi_i + \kappa(4/3c) \cdot \sin \phi_i \cdot [1 - (1-c)^{3/2}]}{\cos^2 \phi_i} \end{aligned} \quad (3.493)$$

Vertikalni napon u materijalu do zida σ_{z_w} , se određuje iz (3.492) kada je $(r/R) = 1$. Odatle sledi da je:

$$\sigma_{z_w} = \sigma_r \cdot \frac{1 + \sin^2 \phi_i + 2\kappa \cdot \sin \phi_i \cdot \sqrt{1 - c}}{\cos^2 \phi_i} \quad (3.494)$$

Pri uvođenju izraza (3.494) i (3.493) u (3.478), određuje se faktor distribucije:

$$\mathcal{D} = \frac{1 + \sin^2 \phi_i + 2\kappa \cdot \sin \phi_i \cdot \sqrt{1 - c}}{1 + \sin^2 \phi_i + (4/3c) \cdot \kappa \cdot \sin \phi_i \cdot [1 - (1-c)^{3/2}]} \quad (3.495)$$

Faktor \mathcal{D} se može prikazati, pri smeni parametra c , u razvijenom obliku:

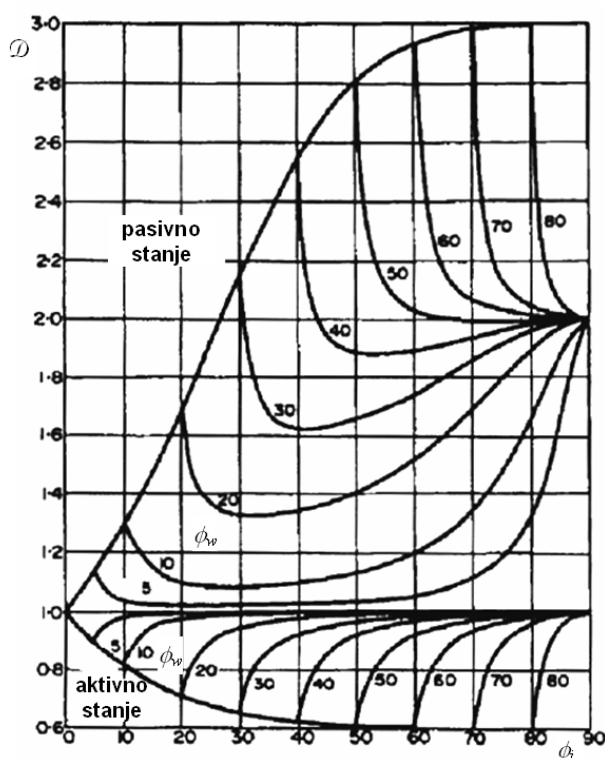
$$\mathcal{D}_{3Dr} = \frac{1 + \sin^2 \phi_i + 2\kappa \cdot \sin \phi_i \cdot \sqrt{1 - \mu_w^2 / \mu_i^2}}{1 + \sin^2 \phi_i + 4/3 \cdot \kappa \cdot \sin \phi_i \cdot \mu_i^2 / \mu_w^2 \cdot [1 - (1 - \mu_w^2 / \mu_i^2)^{3/2}]} \quad (3.496)$$

Faktor distribucije \mathcal{D} , u obliku izraza (3.496), odnosi se na stanje napona u silosima sa osno simetričnim protokom materijala (3Dr silos), odnosno na analizu cilindričnih silosa sa ćelijama kružnog poprečnog preseka. Ovaj oblik se može transformisati u sledeći:

$$\mathcal{D}_{3Dr} = \frac{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{1 + 2\mu_i^2 + \frac{4}{3} \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i \cdot \left(\frac{\mu_i}{\mu_w}\right)^2 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}\right)^{3/2}\right]} \quad (3.497)$$

gde u izrazu figurišu samo koeficijenti trenja μ_i i μ_w (formulacija prema § 4.3.5).

Kompletno rešenje stanja napona kod 3Dr silosa, sa faktorom distribucije \mathcal{D} , se dobija uz primenu izraza (3.480) do (3.483).



Sl. 164 Faktor distribucije \mathcal{D} kao funkcija uglova ϕ_i i ϕ_w za granično aktivno i granično pasivno stanje napona, prema Walters-u (1973) [328].

Na sl. 164 su prikazani dijagrami faktora distribucije \mathcal{D} u zavisnosti od uglova trenja ϕ_i i ϕ_w , prema Walters-u (1973) [328] za aktivno i pasivno stanje napona u materijalu. U originalnoj Walters-ovoj analizi ova stanja se imenuju kao statičko i dinamičko stanje materijala (za punjenje/mirovanje i za pražnjenje respektivno).

Pregledom dijagrama na sl. 164, može se uočiti da se faktor \mathcal{D} , za granično aktivno stanje napona, nalazi u oblasti vrednosti od 0.6 do 1.0. Prema Nedderman-u (1992) [200], ako se postavi uslov da je $\phi_w < \phi_i - 5^\circ$, faktor \mathcal{D} se nalazi u granicama između 0.9 i 1.0. Kako su ovo relativno male promene vrednosti za \mathcal{D} , može se zaključiti da je uticaj faktora distribucije \mathcal{D} relativno mali, tako da se stanje napona određeno prema Walker/Walters-ovom postupku ne razlikuje mnogo od rešenja prema Janssen-ovoj teoriji.

Walker-ov postupak sa primenom prosečnog napona predstavlja izvesno unapređenje u odnosu na Janssen-ov postupak kod koga je pretpostavljeno da su vertikalni naponi konstantni u poprečnom preseku materijala.

3.6.2 Analiza stanja napona materijala u 2D silosu - novi pristup

Walker i Walters su analizirali stanje napona kod 3Dr silosa, a odgovarajuću analizu u skladu sa Walker-ovom postavkom kod 2D silosa je prikazao Clague (1973).

Ovde će se analizirati stanje napona kod 2D silosa prema Walker-ovom pristupu, ali uz sledeće postavke:

- primenjuje se Ohde-ova formulacija za koeficijent K i odgovarajuće asimptotsko stanje napona prema Ohde-u i Nanninga-u,

- horizontalni naponi se uzimaju da su konstantni, a vertikalni naponi da su promenljivi u poprečnom preseku materijala, ali se proračunski izrazi ne prikazuju preko prosečnih vertikalnih napona kao kod *Walker*-a i *Walters*-a, i
- u proračun se uvodi koeficijent $K(\bar{x})$ koji odgovara odnosu horizontalnog napona i prosečnog vertikalnog napona u preseku materijala, što je jednostavnije od uvođenja u proračunski postupak faktora distribucije napona \mathcal{D} , kako su to uradili *Walker* i *Walters*.

Za ravno stanje napona kod analize 2D silosa, na osnovu *Mohr-Coulomb*-ovog uslova loma materijala smicanjem, odnos horizontalnih i verikalnih napona u posmatranoj tački silosnog materijala, za slučaj velike dubine silosnog materijala, teorijski je određen u strogoj formi sa izrazom (3.291) u § 3.5.1.1.

Smičući naponi u sredini ćelije (simetrija problema) i granična vrednost do zida ćelije (pretpostavlja se potpuno mobilisano trenje materijala o zid ćelije) su:

$$\tau_{xz}(z, 0) = 0 \quad (3.498)$$

$$\tau_{xz}(z, b) = \mu_w \cdot \sigma_x(z, b) \quad (3.499)$$

Smičući naponi su i dalje pod pretpostavkom trougaonog zakona raspodele, kao i kod (3.277), odnosno:

$$\tau_{xz}(z, x) = \tau_{xz}(z, b) \cdot \frac{x}{b} \quad (3.500)$$

Horizontalni naponi su na jednom nivou koordinate z konstantni, odnosno nezavisni su od promene koordinate x :

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_x(z, b) = \sigma_x(z, 0) = \sigma_x(z) \quad (3.501)$$

Pretpostvalja se da je odnos napona nezavisan od dubine silosnog materijala, tako da se mogu iskoristiti dobijene teorijske vrednosti pri velikim dubinama kao opšte rešenje za odnos napona:

$$K(z, x) = \frac{\sigma_x(z, x)}{\sigma_z(z, x)} \cong \frac{\sigma_x(z_\infty, x)}{\sigma_z(z_\infty, x)} = K(x) \quad (3.502)$$

Prvi je *Janssen* uveo da je ovaj odnos konstanta (1895), *Negi* (1974) da je u pitanju kvadratna parabola, *Li* i *Aubertin* (2008) da je u pitanju kubna parabola. Kod navedenih postupaka u literaturi, dati odnos napona K važi za sve dubine ćelije z , a s tim i u slučaju velike dubine z_∞ . Kod svih ovih dubina, nezavisno od koordinate z , u pitanju je isti funkcionalni oblik odnosa K . Za razliku od ovih postupaka, matematička formulacija za K je ovde uzeta prema teorijskom obliku ovog odnosa pri velikoj dubini silosa $K(z_\infty, x)$. U ovom slučaju, $1/K$ matematički odgovara funkciji segmentnog luka elipse, sa opštim oblikom za K prema (3.291):

$$K(x) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2}} \quad (3.503)$$

Dvojni znak u izrazu (3.291) se uzima kao "+" za *aktivno* stanje, sa čime se određuje odnos $K_a(x)$, a donji znak "-" za *pasivno* stanje napona, sa čime se određuje odnos $K_p(x)$.

U sredini silosa, pri $x = 0$, koeficijenti K_a i K_p , odgovaraju respektivno koeficijentima prema izrazima (3.318) i (3.319) za granično aktivno i granično pasivno stanje.

Imajući u vidu prethodne izraze, odnos vertikalnog i horizontalnog napona u nekoj tački silosnog materijala se može dati u sledećem obliku:

$$\frac{\sigma_z(z, x)}{\sigma_x(z, x)} = \frac{1}{K(x)} = 1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2} \quad (3.504)$$

Ovaj odnos za sredinu silosa, stavljajući da je $x = 0$, postaje:

$$\frac{\sigma_z(z, 0)}{\sigma_x(z, 0)} = \frac{1}{K(0)} = 1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \quad (3.505)$$

Pri zidovima ćelije, za $x = \pm b$, odnos dobija oblik:

$$\frac{\sigma_z(z, b)}{\sigma_x(z, b)} = \frac{1}{K(b)} = 1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \quad (3.506)$$

Između ovih vrednosti određenih za sredinu silosa i ivicu zida, stoji opšte rešenje dato sa (3.504). U gornjim izrazima dati su koeficijenti unutrašnjeg trenja i trenja o zid ćelije, kao $\mu_i = \tan \phi_i$ i $\mu_w = \tan \phi_w$.

Ako se nadalje uzme da je horizontalni pritisak u preseku konstantan pri datoj visini z , odnosno da je $\sigma_x(z, x) = \sigma_x(z, 0) = \sigma_x(z, b) = \text{const.}$, međusobnim deljenjem levih i desnih strana izraza (3.506) i (3.505), određuje se:

$$\frac{\sigma_z(b)}{\sigma_z(0)} = \frac{K(0)}{K(b)} = \frac{1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}} \quad (3.507)$$

Kod označavanja napona izostavljena je koordinata z radi jednostavnosti prikaza. Na osnovu ovog izraza, određuje se vertikalni napon u sredini silosa u relaciji sa vertikalnim naponom do zida ćelije na istoj dubini materijala z :

$$\sigma_z(0) = \sigma_z(b) \cdot \frac{K(b)}{K(0)} \quad (3.508)$$

Horizontalni napon u materijalu do zida iznosi:

$$\sigma_x(b) = K(b) \cdot \sigma_z(b) \quad (3.509)$$

Opštiji slučaj se dobija kada se posmatraju naponi za koordinatu x , a određivanje je slično sa prethodnim, jedino se sada umesto izraza (3.505) koristi izraz (3.504):

$$\frac{\sigma_z(b)}{\sigma_z(x)} = \frac{K(x)}{K(b)} = \frac{1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2}} \quad (3.510)$$

odakle se određuje:

$$\sigma_z(x) = \sigma_z(b) \cdot \frac{K(b)}{K(x)} = \sigma_z(b) \cdot K(b) \cdot (1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2}) \quad (3.511)$$

Sila smicanja (sl. 165 b), kao rezultujuća vertikalna sila od delovanja smičućih napona na jednoj strani diferencijalnog sloja debljine dz (sl. 165 a), iznosi:

$$S = \mu_w \cdot \sigma_x(b) \cdot dz = \mu_w \cdot K(b) \cdot \sigma_z(b) \cdot dz \quad (3.512)$$

Sa ovim je uvedena pretpostavka o potpuno mobilisanom trenju materijala o zid ćelije. Horizontalni napon je konstantan na datom nivou z .

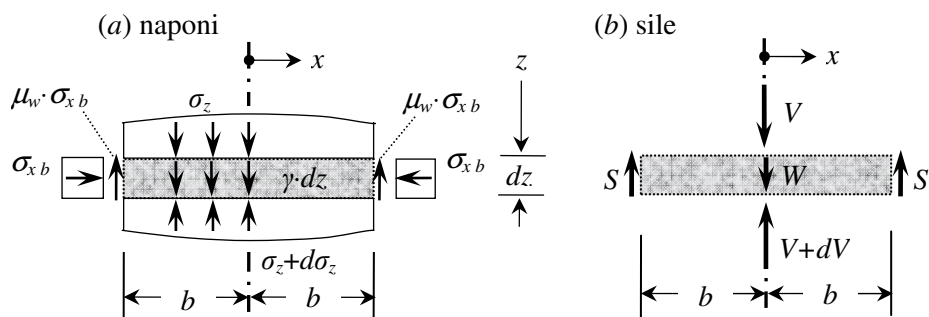
Težina materijala W (sl. 165 b) u diferencijalnom sloju je:

$$W = \gamma \cdot B \cdot dz \quad (3.513)$$

Uslov ravnoteže vertikalnih sila na diferencijalnom sloju (sl. 165 b) je:

$$W = dV + 2 \cdot S \quad (3.514)$$

gde je dV priraštaj vertikalne sile od vertikalnih napona na površini ćelije, pri promeni dubine dz .



Sl. 165 Ravnoteža diferencijalnog sloja materijala kod 2D silosa.

Vertikalna rezultujuća sila V od vertikalnih napona na površini ćelije, na posmatranoj dubini preseka z , iznosi (iskorišćena simetrija dijagrama napona):

$$V = 2 \cdot \int_0^b \sigma_z(x) dx \quad (3.515)$$

i može se prikazati u sledećem obliku:

$$V = 2 \cdot \int_0^b \sigma_z(x) dx = 2b \cdot \bar{\sigma}_z = 2b \cdot \frac{\sigma_z(b)}{\mathcal{D}} \quad (3.516)$$

gde je uveden faktor distribucije \mathcal{D} , koji je prvi uveo Walker (1966) pri sličnim analizama integracije napona (kod Walker-a je oznaka bila D). U skladu sa Walker-ovim pristupom faktor distribucije \mathcal{D} je:

$$\mathcal{D} = \frac{\sigma_z(b)}{\bar{\sigma}_z} = \frac{\sigma_z(b)}{\int_0^b \sigma_z(x) dx / b} = \frac{\sigma_z(b) \cdot b}{\int_0^b \sigma_z(x) dx} \quad (3.517)$$

Uvođenjem funkcionalnog oblika vertikalnog napona prema (3.511), u prethodni izraz, određuje se:

$$\mathcal{D} = \frac{\sigma_z(b) \cdot b}{\sigma_z(b) \cdot K(b) \cdot \int_0^b \left(1 + 2\mu_i^2 \pm 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot x^2 / b^2\right) \cdot dx} \quad (3.518)$$

koji posle integracije i sređivanja dobija oblik:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{K(b) \cdot \left[1 + 2\mu_i^2 \pm \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left[\frac{\mu_i}{\mu_w} \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}\right]\right]} \quad (3.519)$$

$$\mathcal{D}_{2D} = \frac{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{1 + 2\mu_i^2 + \kappa \cdot \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left[\frac{\mu_i}{\mu_w} \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}\right]} \quad (3.520)$$

gde je κ parametar, koji se uvodi sa $\kappa = +1$ za aktivno stanje, i sa $\kappa = -1$ za pasivno stanje napona.

Ovde se vidi da faktor distribucije \mathcal{D} ne zavisi od koordinata x i z , već je konstanta čija vrednost, prema izrazu (3.519), zavisi od koeficijenata trenja μ_i i μ_w . Odnos napona do zida silosa, $K(b)$, koji se uvodi pri određivanju faktora \mathcal{D} , prema izrazu (3.506) je nezavisan od koordinata x i z . Ovde je od interesa pomenuti nezavisnost ovih veličina od z koordinate.

U vezi sa oblikom faktora distribucije \mathcal{D} , može se izraz (3.516), napisati u funkciji prosečnog vertikalnog napona, koji odgovara vertikalnom naponu pri nekoj koordinati $x = \bar{x}$, koja je tako izabrana da daje isti koeficijent distribucije ($x = \bar{x}$, odgovara mestu prosečnog napona na dijagramu napona). Iz ovoga se dobija sledeće:

$$\mathcal{D} = \frac{\sigma_z(b) \cdot b}{\int_0^b \sigma_z(\bar{x}) dx} = \frac{\sigma_z(b) \cdot b}{\sigma_z(\bar{x}) \cdot \int_0^b dx} = \frac{\sigma_z(b) \cdot b}{\sigma_z(\bar{x}) \cdot b} = \frac{\sigma_z(b)}{\sigma_z(\bar{x})} = \frac{\sigma_z(b)}{\sigma_z(b) \cdot \frac{K(b)}{K(\bar{x})}} = \frac{K(\bar{x})}{K(b)} \quad (3.521)$$

$$K(\bar{x}) = \mathcal{D} \cdot K(b) \quad (3.522)$$

a odatle se saglasno rešenju za faktor distribucije \mathcal{D} , prema (3.519), određuje direktno:

$$\frac{1}{K(\bar{x})} = 1 + 2\mu_i^2 \pm \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left[\frac{\mu_i}{\mu_w} \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}} \right] \quad (3.523)$$

Koordinata \bar{x} , se određuje na osnovu jednakosti izraza (3.523) i (3.504) za $x = \bar{x}$, pri čemu se prvo dobija da je:

$$\sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \bar{x}^2 / b^2} = \frac{\mu_i}{2} \cdot \left[\frac{\mu_i}{\mu_w} \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}} \right] \quad (3.524)$$

a odatle je:

$$\bar{x} = \pm b \cdot \frac{\mu_i}{\mu_w} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\mu_i}{\mu_w} \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}} \right]^2} \quad (3.525)$$

Dvojnost rešenja sledi iz toga što prosečni napon seče, i levo i desno od koordinatnog početka $x = 0$, simetrični dijagram napona.

Pri proračunu, posebno određivanje vrednosti $x = \bar{x}$, nije neophodno, jer se u ovoj analizi koristi već dobijeno rešenje za $K(\bar{x})$, prema izrazu (3.523).

Uvodeći oblik za koeficijent distribucije prema (3.521) u izraz (3.516), određuje se:

$$V = 2 \cdot \int_0^b \sigma_z(x) dx = 2b \cdot \sigma_z(b) \cdot \frac{K(b)}{K(\bar{x})} = 2b \cdot \frac{\sigma_z(b)}{\mathcal{D}} \quad (3.526)$$

Na ovaj način iz izraza je dalje izostao faktor distribucije \mathcal{D} , a $K(\bar{x})$ se direktno određuje prema (3.523). Prethodno teorijsko razmatranje je poslužilo za uspostavljanje veze ovde razmatrane analize sa analizama drugih autora, i radi kasnijeg lakšeg uočavanja sličnosti i razlika sa drugim postupcima analize.

Difirencijalni priraštaj rezultante napona na površini silosnog materijala u horizontalnom preseku ćelije, dV , pri promeni dubine dz , se određuje diferenciranjem (3.526), pri čemu su odnosi napona K konstante u odnosu na promeljivu z :

$$dV = 2b \cdot \frac{K(b)}{K(\bar{x})} \cdot d\sigma_z(b) = 2b \cdot \frac{1}{\mathcal{D}} \cdot d\sigma_z(b) \quad (3.527)$$

Sada se uslov ravnoteže vertikalnih sila (3.514), sa definisanim članovima prema (3.513), (3.527) i (3.512) (analiza se odnosi na 2D silos), određuje u obliku diferencijalne jednačine po vertikalnom naponu uz zid ćelije:

$$\gamma \cdot 2b \cdot dz = 2b \cdot \frac{K(b)}{K(\bar{x})} \cdot d\sigma_z(b) + 2\mu_w \cdot K(b) \cdot \sigma_z(b) \cdot dz \quad (3.528)$$

$$\gamma \cdot 2b \cdot dz = 2b \cdot \frac{1}{\mathcal{D}} \cdot d\sigma_z(b) + 2\mu_w \cdot K(b) \cdot \sigma_z(b) \cdot dz \quad (3.529)$$

koja posle sređivanja prelazi u oblik:

$$\frac{d\sigma_z(z,b)}{dz} + \frac{\mu_w \cdot K(\bar{x})}{b} \cdot \sigma_z(z,b) - \frac{K(\bar{x})}{K(b)} \cdot \gamma = 0 \quad (3.530)$$

$$\frac{d\sigma_z(z,b)}{dz} + \frac{\mu_w \cdot \mathcal{D} \cdot K(b)}{b} \cdot \sigma_z(z,b) - \mathcal{D} \cdot \gamma = 0 \quad (3.531)$$

$$K(\bar{x}) = \mathcal{D} \cdot K(b) \quad (3.532)$$

U gornjoj jednačini vraćena je koordinata z , kod vertikalnog napona u materijalu uz sam zid, $\sigma_z(z,b)$, u cilju prikazivanja potpunog oblika zavisnosti.

Rešenje jednačine (3.530), se određuje u obliku (3.540), uz početni uslov da na vrhu silosnog materijala nema opterećenja pri $z = 0$, napon $\sigma_z(z,b) = \sigma_z(0,b) = 0$. Horizontalni i smičući napon u silosnom materijalu pri zidu se određuju na osnovu izraza:

$$\sigma_x(z,b) = K(b) \cdot \sigma_z(z,b) \quad (3.533)$$

$$\tau_{xz}(z,b) = \mu_w \cdot \sigma_x(z,b) \quad (3.534)$$

Rešenja za napone u sredini silosa se dobijaju na osnovu izraza za napone do zida, i na osnovu (3.508), sa podsećanjem na simetriju naponskog polja prema kojoj su naponi smicanja u sredini silosa nula. Koriste se pomoćni izrazi za normalne napone:

$$\sigma_z(z,0) = \sigma_z(z,b) \cdot \frac{K(b)}{K(0)} \quad (3.535)$$

$$\sigma_x(z,0) = K(0) \cdot \sigma_z(z,0) = \sigma_x(z,b) = \sigma_x(z) \quad (3.536)$$

Za proizvoljnu tačku u silosnom materijalu sa koordinatama (z, x) , normalni naponi se određuju na sličan način, kao i u prethodnom slučaju, a kod napona smicanja se koristi izraz (3.500). Radi celovitosti prikazuju se izrazi:

$$\sigma_z(z,x) = \sigma_z(z,b) \cdot \frac{K(b)}{K(x)} \quad (3.537)$$

$$\sigma_x(z,x) = K(x) \cdot \sigma_z(z,x) = \sigma_x(z,b) = \sigma_x(z,0) = \sigma_x(z) \quad (3.538)$$

$$\tau_{xz}(z,x) = \tau_{xz}(z,b) \cdot \frac{x}{b} \quad (3.539)$$

Rešenja za napone do zida su:

$$\sigma_z(z,b) = \frac{\gamma \cdot b}{K(b) \cdot \mu_w} \cdot \left[1 - e^{-K(\bar{x})\mu_w \frac{z}{b}} \right] \quad (3.540)$$

$$\sigma_x(z,b) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - e^{-K(\bar{x})\mu_w \frac{z}{b}} \right] \quad (3.541)$$

$$\tau_{xz}(z, b) = \gamma \cdot b \cdot \left[1 - e^{-K(\bar{x})\mu_w \frac{z}{b}} \right] \quad (3.542)$$

Rešenja za napone u sredini ćelije silosa su:

$$\sigma_z(z, 0) = \frac{\gamma \cdot b}{K(0) \cdot \mu_w} \cdot \left[1 - e^{-K(\bar{x})\mu_w \frac{z}{b}} \right] \quad (3.543)$$

$$\sigma_x(z, 0) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - e^{-K(\bar{x})\mu_w \frac{z}{b}} \right] \quad (3.544)$$

$$\tau_{xz}(z, 0) = 0 \quad (3.545)$$

Rešenja za napone u posmatranoj tački sa koordinatama (z, x) u ćeliji 2D silosa su:

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{K(x) \cdot \mu_w} \cdot \left[1 - e^{-K(\bar{x})\mu_w \frac{z}{b}} \right] \quad (3.546)$$

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - e^{-K(\bar{x})\mu_w \frac{z}{b}} \right] = \sigma_x(z) \quad (3.547)$$

$$\tau_{xz}(z, x) = \gamma \cdot x \cdot \left[1 - e^{-K(\bar{x})\mu_w \frac{z}{b}} \right] \quad (3.548)$$

Odnosi normalnih napona $K(x)$, $K(0)$, $K(b)$ i $K(\bar{x})$ su definisani sa izrazima (3.504), (3.505), (3.506) i (3.523), respektivno.

Kod svih izraza za napone figuriše jedinstveni oblik *funkcije raspodele napona* po dubini materijala u silosu, koja je u funkciji samo koordinate z :

$$Y(z) = Y_{2D}(z) = 1 - e^{-K(\bar{x})\mu_w \frac{z}{b}} \quad (3.549)$$

Ranije se uobičajeno koristila oznaka $\Phi(z)$ za ovu funkciju, a uvedena oznaka sa Y odgovara oznaci primenjenoj u EC1-4. Ovde se indeks 2D odnosi na oblik ove funkcije pri predmetnoj analizi 2D silosa – ravanski problem napona.

Sa ovom funkcijom naponi u proizvoljnoj tački se mogu prikazati na jednostavniji način:

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{K(x) \cdot \mu_w} \cdot Y(z) \quad (3.550)$$

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot Y(z) = \sigma_x(z) \quad (3.551)$$

$$\tau_{xz}(z, x) = \gamma \cdot x \cdot Y(z) \quad (3.552)$$

Ako se uvede faktor distribucije \mathcal{D} prema izrazu (3.521), u izraz (3.549), za funkciju vertikalne raspodele napona se određuje ekvivalentni oblik:

$$Y(z) = Y_{2D}(z) = 1 - e^{-\mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \quad (3.553)$$

$$Y(z) = Y_{2D}(z) = 1 - e^{-\frac{\mu_w \frac{z}{b}}{1 + 2\mu_i^2 \pm \mu_i \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left[\frac{\mu_i}{\mu_w} \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}} \right]}} \quad (3.554)$$

Ovi oblici se prikazuju u cilju lakšeg poređenja sa drugim postupcima.

Kada $z \rightarrow \infty$, funkcija $Y(z)|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow Y(\infty) = 1$, a komponentalni naponi u materijalu teže svaki svojoj asimptoti sa povećanjem dubine i prilaze svojim odgovarajućim graničnim vrednostima. Granične vrednosti napona u ovom slučaju su:

$$\sigma_z(z, x)|_{z \rightarrow \infty} = \frac{\gamma \cdot b}{K(x) \cdot \mu_w} \quad (3.555)$$

$$\sigma_x(z, x)|_{z \rightarrow \infty} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} = \sigma_x|_{z \rightarrow \infty} \quad (3.556)$$

$$\tau_{xz}(z, x)|_{z \rightarrow \infty} = \gamma \cdot x \quad (3.557)$$

Ovi izrazi respektivno odgovaraju izrazima (3.291), (3.275) i (3.271), kod *Ohde*-ove analize stanja napona u silosnom materijalu velike dubine z , a koja je bila i polazište za ovde prikazanu analizu naponskog polja u silosnom materijalu kod 2D silosa, odnosno ravanskog problema napona.

U horizontalnom preseku dijagrami graničnih vrednosti napona imaju sledeće oblike:

- dijagram vertikalnih napona odgovara segmentu elipse,
- dijagram horizontalnih napona odgovara pravoj horizontalnoj liniji, i
- dijagram napona smicanja odgovara nagnutoj pravoj liniji zbog promene napona smicanja po zakonu trougla.

Ovi zakoni promene dijagrama napona se odnose i na preseke na proizvoljnoj dubini z , pri čemu se konkretne vrednosti skaliraju sa funkcijom vertikalne raspodele Y .

Svi naponi na vrhu silosnog materijala (ovde nije razmatrano nadopterećenje materijala, tako da je gornja površina materijala neopterećena), za $z = 0$, su nula, tako da je u ovom slučaju $Y = 0$.

3.6.3 Analiza stanja napona materijala u 2D silosu - primena metode integralnih relacija

U § 4 ovog rada detaljno se obrađuje primena metode integralnih relacija kod određivanja stanja napona u skladištenom materijalu u ćeliji silosa. Ovde će ta metoda biti primenjena za određivanje stanja napona kod 2D silosa u obliku koji odgovara *Walker*-ovom postupku, odnosno pretpostavkama koje su uvedene kod ovog postupka analize stanja napona. Odgovarajući *Walker*-ov postupak za analizu stanja napona kod 3Dr silosa, koji se formira primenom metode integralnih relacija prikazan je u poglavlju § 4.3.5.

Metoda integralnih relacija je namenjena za rešavanje složenijih postavki problema kod analize stanja napona u silosu, kod 2D i 3Dr silosnog problema, gde se rešenje stanja napona dobija integralnom analizom dva uslova ravnoteže kod diferencijalnog elementa materijala. U slučaju primene ove metode, kod *Walker*-ove postavke problema, analizira se samo jedan uslov ravnoteže (1D silosni problem; ravnoteža vertikalnih sila) na diferencijalnom elementu, tako da primena ove metode odgovara formiranju jedne integralne relacije. U ovom slučaju se primenjuju:

- jednostavnija formulacija postupka sa svodenjem svih izraza za napone na odgovarajuće izraze sa horizontalnim naponom kod uslova vertikalne ravnoteže,
- uvođenje jedinstvene funkcije raspodele $Y(z)$ za sve napone, kako je u pitanju 1D silosni problem, i
- postavke koje odgovaraju Walker-ovom postupku (da su horizontalni naponi konstantni na posmatranoj dubini materijala z u poprečnom preseku materijala; da je odnos horizontalnog i vertikalnog napona $K(x)$ u obliku izraza (3.564) prema Ohde-ovoj formulaciji; i da je stanje napona za $z \rightarrow \infty$, asimptotsko stanje napona u formulaciji Ohde-a i Nanninga-a).

Polje stanja napona je definisano preko odgovarajućih proizvoda funkcija sa razdvojenim varijablama x i z . Prva funkcija je dimenzionalna veličina koja odgovara asimptotskom dijagramu napona i zavisi od promenljive x , a druga funkcija je bezdimenzionalna i odgovara funkciji raspodele napona $Y(z)$ po koordinati z . Uvodi se dodatni indeks f kod napona za označavanje asimptotske vrednosti.

Polje napona se formalno definiše u obliku izraza:

$$\tau_{zx}(z, x) = \tau_{zx}(z \rightarrow \infty, x) \cdot Y(z) = \tau_{zf}(x) \cdot Y(z) \quad (3.558)$$

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_x(z \rightarrow \infty, x) \cdot Y(z) = \sigma_{xf}(x) \cdot Y(z) \quad (3.559)$$

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_z(z \rightarrow \infty, x) \cdot Y(z) = \sigma_{zf}(x) \cdot Y(z) \quad (3.560)$$

Svi naponi se prikazuju u zavisnosti od asimptotske vrednosti referentnog horizontalnog napona (uveden je horiz. napon σ_{xfb} do zida, da bi se sledio opšti slučaj primene metode integralnih relacija, što u principu nije potrebno posebno precizirati, jer su horiz. naponi konstantni kod asimptotskog stanja napona):

$$\tau_{zx}(z, x) = \left(\mu_w \cdot \sigma_{xfb} \cdot \frac{x}{b} \right) \cdot Y(z) \quad (3.561)$$

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{xfb} \cdot Y(z) \quad (3.562)$$

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\sigma_{zf}(x)}{K(x)} \cdot Y(z) = \sigma_{xfb} \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}} \right) \cdot Y(z) \quad (3.563)$$

gde je odnos horizontalnih i vertikalnih napona u obliku izraza:

$$K(x) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2}} \quad (3.564)$$

Uslov ravnožeže vertikalnih sila na diferencijalnom elementu materijala je:

$$\frac{\partial}{\partial x} \tau_{zx}(z, x) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_z(z, x) = \gamma \quad (3.565)$$

Kod leve strane jednačine (3.565), uvode se izrazi za napon smicanja i vertikalni napon prema (3.561) i (3.563) respektivno, i vrši diferenciranje uvedenih izraza za napone, kako sledi:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\mu_w \cdot \sigma_{xfb} \cdot \frac{x}{b} \right) \cdot Y(z) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma_{xfb} \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}} \right) \cdot Y(z) \right) = \quad (3.566)$$

$$= \mu_w \cdot \sigma_{xfb} \cdot \frac{Y(z)}{b} + \sigma_{xfb} \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \cdot \frac{d}{dz} Y(z)$$

Uslov ravnoteže se integriše po x u granicama od 0 do b , tako da se formira uslov ravnoteže na isečku diferencijalnog sloja (jedinичne širine po y osi kod analize 2D silosa):

$$\int_0^b \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{zx}(z, x) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_z(z, x) \right) \cdot dx = \int_0^b \gamma \cdot dx \quad (3.567)$$

Smenom podintegralne funkcije sa izrazom (3.566), određuje se integralna relacija koja se rešava direktnom integracijom po promenljivoj x :

$$\int_0^b \left(\mu_w \cdot \sigma_{xfb} \cdot \frac{Y(z)}{b} + \sigma_{xfb} \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \cdot \frac{d}{dz} Y(z) \right) \cdot dx = \gamma \cdot b \quad (3.568)$$

Rešenje ovog integrala je diferencijalna jednačina 1-od reda po funkciji raspodele napona $Y(z)$, koja se dobija u obliku:

$$\frac{d}{dz} Y(z) = \frac{\frac{\gamma}{\sigma_{xfb}} - \frac{\mu_w}{b} \cdot Y(z)}{1 + 2\mu_i^2 + \kappa \cdot \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left[\frac{\mu_i}{\mu_w} \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}} \right]} \quad (3.569)$$

Kod ove jednačine se uvodi asimptotska vrednost horizontalnog napona σ_{xfb} , pri čemu se jednačina oslobađa od uticaja konkretne vrednosti zapreminske težine materijala:

$$\sigma_{xfb} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \quad (3.570)$$

$$\frac{d}{dz} Y(z) = \frac{\mu_w}{b} \cdot \frac{1 - Y(z)}{1 + 2\mu_i^2 + \kappa \cdot \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left[\frac{\mu_i}{\mu_w} \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}} \right]} \quad (3.571)$$

Dobijena diferencijalna jednačina se rešava uz početni uslov da je gornja površina materijala neopterećena, što kod funkcije raspodele odgovara uslovu da je $Y(0) = 0$. Rešenje ove jednačine, uz dati početni uslov je:

$$Y(z) = Y_{2D}(z) = 1 - e^{-\frac{\mu_w \cdot z}{b} \cdot \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + \kappa \cdot \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left[\frac{\mu_i}{\mu_w} \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}} \right]}} \quad (3.572)$$

Uz ovu funkciju raspodele napona $Y(z)$ po promenljivoj z , i asimptotsko stanje napona definisano sa izrazima:

$$\tau_{zxf}(x) = \gamma \cdot x \quad (3.573)$$

$$\sigma_{xf}(x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} = \sigma_{xfb} \quad (3.574)$$

$$\sigma_{zf}(x) = \frac{\gamma \cdot b}{K(x) \cdot \mu_w} \quad (3.575)$$

određuje se stanje napona u ukupnom 2D silosu:

$$\tau_{zx}(z, x) = \gamma \cdot x \cdot Y(z) \quad (3.576)$$

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot Y(z) \quad (3.577)$$

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}} \right) \cdot Y(z) \quad (3.578)$$

Primenom metode integralnih relacija određeni su isti izrazi, za stanje napona i funkciju raspodele napona $Y(z)$, kao u prethodnom poglavlju. Ovaj primer služi za ilustraciju primene metode integralnih relacija.

Kao dodatni primer, razmatra se *Janssen*-ov postupak kod određivanja stanja napona u silosima. U odnosu na prethodno prikazanu *Walker*-ovu postavku problema, kod *Janssen*-ovog postupka je jedina razlika u tome što se odnos horizontalnih i vertikalnih napona uzima konstantnim na celom polju napona u uskladištenom materijalu. U ovom slučaju umesto izraza (3.564) uvodi se:

$$K(x) = K = const. \quad (3.579)$$

Iz ovog uslova sledi da je dijagram vertikalnih napona konstantan u poprečnom preseku, što je osnovna *Janssen*-ova pretpostavka. Prikazaće se samo izmene u odnosu na prethodno prikazanu analizu *Walker*-ovog pristupa, kod koje se uvodi da je K konstantno.

U ovom slučaju, integralna relacija (3.568) se transformiše u sledeći oblik:

$$\int_0^b \left(\mu_w \cdot \sigma_{x/b} \cdot \frac{Y(z)}{b} + \sigma_{x/b} \cdot \frac{1}{K} \cdot \frac{d}{dz} Y(z) \right) \cdot dx = \gamma \cdot b \quad (3.580)$$

Rešenje ove jednačine je diferencijalna jednačina 1-og reda po funkciji $Y(z)$:

$$\frac{d}{dz} Y(z) = \frac{K \cdot \mu_w}{b} \cdot [1 - Y(z)] = \frac{1}{z_0} \cdot [1 - Y(z)] \quad (3.581)$$

što odgovara diferencijalnoj jednačini (3.10) kod primene metode diferencijalnog sloja u *Janssen*-ovom postupku za 2D silos sa karakterističnom dubinom $z_0 = b/(K \cdot \mu_w)$. Ova jednačina je prikazana u novom obliku u zavisnosti od funkcije raspodele $Y(z)$, a ne u funkciji promene vertikalnih napona $\sigma_z(z)$, tj. preko vertikalnih pritisaka $p_v(z)$ kao u *Janssen*-ovom postupku.

Negi (1974) [202] je kod prve primena metode integralnih relacija za određivanje stanja napona materijala u silosu, za nepoznatu funkciju u jednačini koristio vertikalne napone $\sigma_z(z)$. Međutim, pri analizama relativno složenih problema u ovom radu (§ 4), gde se razmatra integracija dva uslova ravnoteže, i kojima odgovara rešenje u obliku sistema dve diferencijalne jednačine, zaključeno je da je matematički postupak rešavanja jednostavniji kada se umesto nepoznate funkcije vertikalnih napona, razmatra nepoznata funkcija horizontalnih napona, čime se dobija jednostavniji oblik rešavanja sa nepoznatom funkcijom raspodele napona $Y(z)$. U suštini, na ovaj način je konkretna matematička obrada složenih slučajeva problema stanja napona u silosima svedena na relativno jednostavniji oblik, pri čemu se, naravno, dobijaju jednaka rešenja za stanje napona materijala u silosu.

Na primeru *Janssen*-ovog postupka, diferencijalna jednačina (3.581), uz početni uslov da je $Y(0) = 0$, ima rešenje u obliku:

$$Y(z) = Y_{J_{2D}}(z) = 1 - e^{-K \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \quad (3.582)$$

Sa ovom funkcijom raspodele, vertikalni napon na dubini z se određuju prema izrazu:

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_{zf} \cdot Y(z) = \frac{\gamma \cdot b}{K \cdot \mu_w} \cdot Y(z) \quad (3.583)$$

Na ovaj način je prikazano svođenje *Walker*-ovog postupka na *Janssen*-ov postupak, kada se kod *Walker*-ovog postupka pretpostavi da je $K(z) = K = \text{const}$.

Kod *Janssen*-ovog postupka, nije neophodno uvoditi napone smicanja u obliku izraza (3.561) kao trougaonog oblika dijagrama napona smicanja, jer je *Janssen* smicanje uveo samo na kontaktu materijala i zida ćelije. U suštini kod *Janssen*-ovog postupka su zanemareni naponi smicanja u materijalu, na osnovu čega su horizontalni i vertikalni naponi konstantni u poprečnim presecima materijala, odakle je konstantan i njihov odnos K . Smicanje se uvodi samo u tačkama materijala do zida ćelije, a na ostalim mestima su naponi smicanja 0. I ovaj slučaj napona smicanja se može uvesti u metodu integralnih relacija, pri čemu se određuje isto rešenje kao i kod svođenja *Walker*-ovog postupka na *Janssen*-ov postupak. Pretpostavka o zanemarenju napona smicanja nije uvedena u *Janssen*-ovom radu, a u vezi s tim, u tom radu se ni na jednom mestu ne spominju naponi smicanja, kao ni glavni naponi u materijalu. Pretpostavka da su zanemareni naponi smicanja u materijalu, odgovara stavu da su horizontalni i vertikalni naponi ujedno glavni naponi u materijalu. Svi kasniji prigovori *Janssen*-ovoj teoriji, da je pretpostavio da su normalni naponi u materijalu glavni naponi, da je uveo *Rankine*-ov koeficijent aktivnog pritiska za K (a pri pražnjenju se dobijaju veći pritisci od proračunskih), jednostavno ne stoje direktno kod *Janssen*-ovog rada, već se to odnosi na interpretacije *Janssen*-ovog postupka od strane drugih istraživača. *Janssen* (1895) [130] je za K naveo da se ovaj koeficijent eksperimentalno određuje, a u samom radu nije spomenuo glavne napone, kao što nije razmatrao ni napone smicanja u materijalu, jer su u sklopu uvedenih *Janssen*-ovih pretpostavki, ovi naponi irelevantni kod postupka određivanja stanja napona pri primeni metode diferencijalnog sloja.

3.6.4 Analiza stanja napona materijala u 2D silosu - aproksimativno uvođenje promenljivih horizontalnih napona

U prethodnim poglavljima prikazan je *Walker*-ov postupak sa uvođenjem faktora distribucije napona \mathcal{D} i postupak sa uvođenjem koeficijenta K na mestu prosečnog vertikalnog napona $K(\bar{x}) = \mathcal{D} \cdot K(b)$. Ovi postupci su formirani samo iz uslova ravnoteže vertikalnih sila na diferencijalnom sloju materijala (1D silosni problem).

Uslov ravnoteže horizontalnih sila nije zadovoljen, jer su naponi smicanja promenjivi po koordinati z .

Kod *Walker*-ove analize se može uzeti da su dovoljno tačno određeni vertikalni naponi, i na osnovu naknadnog uključivanja napona smicanja u uslov ravnoteže horizontalnih sila na diferencijalnom sloju materijala, napraviti korekcija za vrednosti horizontalnih napona u uskladištenom materijalu. Kod prethodnih rešenja, ovo odgovara samo korigovanju horizontalnih napona kod 2D silosa (odnosno radijalnih napona kod 3Dr silosa).

Kod *Walker*-ovog postupka, kako je to prikazano u prethodnim poglavljima, horizontalni naponi i naponi smicanja za posmatranu tačku u materijalu, sa koordinatama x i z (analiza se odnosi na 2D silose), se određuju sa izrazima:

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot Y(z) \quad (3.584)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \gamma \cdot x \cdot Y(z) \quad (3.585)$$

U ovim izrazima je $Y(z)$ funkcija raspodele napona po koordinati z . Ova funkcija se može odrediti na osnovu sledećih izraza kod analize 2D silosa:

$$Y(z) = Y_{2D}(z) = 1 - e^{-\mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \quad (3.586)$$

$$Y(z) = Y_{2D}(z) = 1 - e^{-K(\bar{x}) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \quad (3.587)$$

$$Y(z) = Y_{2D}(z) = 1 - e^{-\frac{\mu_w \cdot \frac{z}{b}}{1 + 2\mu_i^2 + \kappa \cdot \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left[\frac{\mu_i}{\mu_w} \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}} \right]}} \quad (3.588)$$

Ova tri izraza za funkciju raspodele $Y(z)$ su ekvivalentni izrazi, gde prvi izraz odgovara Walker-ovom osnovnom postupku, drugi izraz odgovara novom pristupu u § 3.6.2, a treći izraz predstavlja razvijenu formu drugog izraza, koji je direktno određen u § 3.6.3. Kod funkcije $Y(z)$ uvodi se koeficijent $K(\bar{x})$ i faktor distribucije napona \mathcal{D} , koji se definišu sa izrazima:

$$K(\bar{x}) = \mathcal{D} \cdot K(b) \quad (3.589)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{1 + 2\mu_i^2 + \kappa \cdot \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left[\frac{\mu_i}{\mu_w} \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}} \right]} \quad (3.590)$$

$$K(b) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \quad (3.591)$$

$$K(\bar{x}) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + \kappa \cdot \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left[\frac{\mu_i}{\mu_w} \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}} \right]} \quad (3.592)$$

Napominje se da su Walker i Walters analizirali stanje napona kod 3Dr silosa, pri čemu je Walters odredio faktor distribucije napona \mathcal{D}_{3Dr} , u obliku koji odgovara izrazu (3.496), a za analize 2D silosa koristi se faktor \mathcal{D}_{2D} koji je odredio Clague (1973), prema Cheung-u (2007) [47], u obliku (3.590).

Parametar κ kod ovih izraza se uzima da je $\kappa = +1$ za aktivno stanje napona, i $\kappa = -1$ za pasivno stanje napona.

Drugi uslov ravnoteže horizontalnih sila na diferencijalnom elementu, koji se uzima da je potpuno nezavisan od prvog uslova ravnoteže, se prikazuje u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_x(z, x) + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zx}(z, x) = 0 \quad (3.593)$$

Smičući naponi τ_{zx} se prevode u oblik, koji je u funkciji napona smicanja do zida ćelije τ_{zxb} , prema sledećim izrazima:

$$\tau_{zx}(z, x)|_{x=b} = \tau_{zx}(z, b) = \gamma \cdot b \cdot Y(z) = \tau_{zxb}(z) \quad (3.594)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \tau_{zx}(z, b) \cdot \frac{x}{b} = \tau_{zxb}(z) \cdot \frac{x}{b} \quad (3.595)$$

Uvođenjem ovog izraza za napone smicanja u uslov ravnoteže horiz. sila, određuje se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_x(z, x) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\tau_{zx}(z, b) \cdot \frac{x}{b} \right) = 0 \quad (3.596)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_x(z, x) + \frac{x}{b} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \tau_{zxb}(z) = 0 \quad (3.597)$$

Integracijom datog uslova ravnoteže po koordinati x , u granicama od \bar{x} do b , određuje se

$$\int_{\bar{x}}^b \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_x(z, x) \right) \cdot dx + \int_{\bar{x}}^b \left(\frac{x}{b} \cdot \frac{d}{dz} \tau_{zxb}(z) \right) \cdot dx = 0 \quad (3.598)$$

$$\int_{\bar{x}}^b d\sigma_x(z, x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - \bar{x}^2}{b} \cdot \frac{d}{dz} \tau_{zxb}(z) \quad (3.599)$$

$$\sigma_x(z, b) - \sigma_x(z, \bar{x}) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - \bar{x}^2}{b} \cdot \frac{d}{dz} \tau_{zxb}(z) \quad (3.600)$$

Kod ovog izraza, uvode se smičući naponi do zida ćelije $\tau_{zxb}(z)$, i horizontalni pritisci $\sigma_x(z)$ u materijalu na dubini z . Horizontalni pritisak na zid ćelije, $\sigma_x(z, b)$, određuje se na osnovu sledećih izraza:

$$\tau_{zxb}(z) = \gamma \cdot b \cdot Y(z) = \gamma \cdot b \cdot \left[1 - e^{-\mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] \quad (3.601)$$

$$\frac{d}{dz} \tau_{zxb}(z) = \gamma \cdot \mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot e^{-\mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \quad (3.602)$$

$$\sigma_x(z, \bar{x}) = \sigma_x(z, x)_{\text{prethodna analiza}} = \sigma_x(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - e^{-\mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] \quad (3.603)$$

$$\sigma_x(z, b) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - e^{-\mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - \bar{x}^2}{b} \cdot \gamma \cdot \mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot e^{-\mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \quad (3.604)$$

$$\sigma_x(z, b) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - \bar{x}^2}{b^2} \cdot \mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w^2 \right) \cdot e^{-\mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] \quad (3.605)$$

Sa prethodnim izrazom se određuje vrednost horizontalnog pritiska materijala na zid ćelije, $\sigma_x(z, b)$, pri čemu se koordinata $x = \bar{x}$, koja odgovara mestu prosečnog vertikalnog pritiska u poprečnom preseku materijala, uzima u obliku izraza (3.525) koji odgovara analizi 2D silosa.

Ako se određuje dijagram horizontalnih pritisaka, potrebno je uslov ravnoteže integraliti u granicama od \bar{x} do x , pri čemu se određuje:

$$\int_{\bar{x}}^x \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma_x(z, x) \right) \cdot dx + \int_{\bar{x}}^x \left(\frac{x}{b} \cdot \frac{d}{dz} \tau_{zxb}(z) \right) \cdot dx = 0 \quad (3.606)$$

$$\int_{\bar{x}}^x d\sigma_x(z, x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - \bar{x}^2}{b} \cdot \frac{d}{dz} \tau_{zxb}(z) \quad (3.607)$$

$$\sigma_x(z, x) - \sigma_x(z, \bar{x}) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - \bar{x}^2}{b} \cdot \frac{d}{dz} \tau_{zxb}(z) \quad (3.608)$$

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - e^{-\mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - \bar{x}^2}{b} \cdot \gamma \cdot \mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot e^{-\mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \quad (3.609)$$

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 - \bar{x}^2}{b^2} \cdot \mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w^2 \right) \cdot e^{-\mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] \quad (3.610)$$

Ovaj izraz se može prikazati i u sledećem obliku:

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{x^2 - \bar{x}^2}{b^2} \cdot \frac{K(\bar{x}) \cdot \mu_w^2}{2} \right) \cdot e^{-K(\bar{x}) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] \quad (3.611)$$

Na osnovu prethodnog izraza određuje se, za $x = b$, rešenje za napon u materijalu do zida:

$$\sigma_x(z, b) = \sigma_{xb}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 - \bar{x}^2}{b^2} \cdot \mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w^2 \right) \cdot e^{-\mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] \quad (3.612)$$

a za sredinu ćelije silosa, za $x = 0$, određuje se horizontalni napon:

$$\sigma_x(z, 0) = \sigma_{x0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{x}^2}{b^2} \cdot \mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w^2 \right) \cdot e^{-\mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] \quad (3.613)$$

Poslednja tri izraza predstavljaju korekciju vrednosti za horizontalne napone koja je dobijena separatnom analizom uslova ravnoteže horizontalnih sila kod diferencijalnog sloja materijala. Analiza je slična ranije prikazanoj analizi kod *Janssen*-ove postavke problema (u § 3.1.3), gde je bilo određeno:

$$\sigma_x(z, x) \Big|_{\substack{\text{Janssen} \\ \text{korigovano}}} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left\{ 1 - \left[1 + \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \cdot \frac{\bar{K} \cdot \mu_w^2}{2} \right] \cdot e^{-\bar{K} \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right\} \quad (3.614)$$

$$\sigma_x(z, b) \Big|_{\substack{\text{Janssen} \\ \text{referentni napon}}} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - e^{-\bar{K} \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] \quad (3.615)$$

$$\sigma_x(z, 0) \Big|_{\substack{\text{Janssen} \\ \text{korigovano}}} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\bar{K} \cdot \mu_w^2}{2} \right) \cdot e^{-\bar{K} \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] \quad (3.616)$$

U ovde razmatranoj *Walker*-ovoj postavci problema, određuju se korigovane vrednosti za horizontalne napone sa izrazima:

$$\sigma_x(z, b) \Big|_{\substack{\text{Walker} \\ \text{korigovano}}} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left\{ 1 - \left[1 + \left(1 - \frac{\bar{x}^2}{b^2} \right) \cdot \frac{K(\bar{x}) \cdot \mu_w^2}{2} \right] \cdot e^{-K(\bar{x}) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right\} \quad (3.617)$$

$$\sigma_x(z, \bar{x}) \Big|_{\substack{\text{Walker} \\ \text{referentni napon}}} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - e^{-K(\bar{x}) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] \quad (3.618)$$

$$\sigma_x(z, 0) \Big|_{\substack{\text{Walker} \\ \text{korigovano}}} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\bar{x}^2}{b^2} \cdot \frac{K(\bar{x}) \cdot \mu_w^2}{2} \right) \cdot e^{-K(\bar{x}) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \right] \quad (3.619)$$

Razlika kod ovih korekcija horizontalnih pritisaka je u izboru referentnog horizontalnog pritiska na osnovu kojeg se sprovodi korekcija, gde kod *Janssen*-ovog postupka referentni pritisak odgovara pritisku na zidu ćelije, a kod *Walker*-ovog postupka je uzet prema mestu gde prosečni vertikalni napon preseca dijagram vertikalnih napona (presečna tačka sa jednakim vrednostima prosečnog i promenljivog napona na dijagramu vertikalnih napona).

Korigovani izrazi za horizontalne napone u materijalu, prema *Walker*-ovom postupku, odgovaraju izrazima u formi *Janssen*-ove interpretacije, u slučaju da je:

$$\mathcal{D} = 1 \quad (3.620)$$

$$K(\bar{x}) = \mathcal{D} \cdot K(b) = \bar{K} \quad (3.621)$$

$$\bar{x} = b \quad (3.622)$$

što odgovara pretpostavkama o konstantnoj vrednosti koeficijenta \bar{K} i o konstantnom horizontalnom naponu na posmatranom nivou materijala z (*Janssen*-ove pretpostavke).

Kod korekcije horizontalnih pritisaka u *Walker*-ovom postupku, koordinata $x = \bar{x}$ se određuje prema izrazu (3.525), ili se u ove izraze, što je jednostavnije, uvodi preko sledećeg odnosa:

$$\left(\frac{\bar{x}}{b}\right)^2 = \left(\frac{\mu_i}{\mu_w}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{\mu_i}{\mu_w} \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}\right]^2\right) \quad (3.623)$$

3.7 Postupak *Li-a* i *Aubertin-a* (analogna analiza 2D silosa)

Ovaj postupak odgovara analognoj analizi 2D silosa, u oblasti mehanike tla. Postupak je relativno nov i vrlo je jednostavan, a odnosi se na analizu napona u zasutom rovu, kao i zasutim izduženim rudarskim galerijama i jamama. Postupak su formulisali *Li* i *Aubertin* (2007-10) u ref. [167], [168] i [169], pri čemu je najdetaljniji opis ovog postupka sa većim brojem analiza prikazan u ref. [168].

Postupak se zasniva na primeni metode diferencijalnog sloja materijala, i predstavlja modifikaciju *Marston*-ovog postupka, koji predstavlja direktnu primenu *Janssen*-ove teorije na ovom problemu u mehanici tla.

Kod ovog postupka je uveden faktor distribucije napona (oznaka *DF*), na osnovu matematičke empirijske generalizacije rezultata iz simulacionih analiza. Sa faktorom *DF* omogućeno je uvođenje neuniformne raspodele vertikalnih napona u preseku zatrpanog rova.

Faktor distribucije, pri analizi stanja vertikalnih napona u silosnoj ćeliji i levku je prvi uveo *Walker* ((1966) [325] i (1966) [326]), a na osnovu ovog teorijskog rada, detaljniju formulaciju kod analize stanja pritisaka je prikazao *Walters* (1973) u ref. [327] i [328].

Dijagrami napona, prema novom postupku *Li-a* i *Aubertin-a*, po obliku odgovaraju dijagramima na sl. 48 (u § 2.8.1.1), prikazanim kod *Voellmy-a* (1937) [321]. Međutim, kao i u *Janssen*-ovoj analizi, uopšte nije razmatran dijagram napona smicanja u nasutom materijalu, već je razmatrano samo smicanje usled trenja nasutog materijala o zid rova.

Kalibracija parametara za faktor *DF*, je urađena na osnovu simulacionih analiza kod problema zatrane izdužene podzemne galerije, kao problema iz oblasti mehanike tla, gde se trenje materijala o zid uzima obično kao "potpuno mobilisano" unutrašnje trenje materijala (*Marston*-ov postupak). Zbog toga, postupak *Li-a* i *Aubertin-a*, sa kalibrisanim faktorom *DF*, nije direktno primenljiv kod analize stanja napona u silosima, gde trenje materijala o zid ćelije može biti znatno manje od unutrašnjeg trenja materijala.

Međutim, kako silosni problem predstavlja opštiji slučaj analize stanja napona, "silosna" analiza se može primeniti na analizu napona u zatrpanom rovu, a rezultati uporediti sa rezultatima *Li-a* i *Aubertin-a*.

3.7.1 Formiranje modifikovanog Marston-ovog postupka

Na sl. 136 (u § 3.5.2), prikazani su neki od rezultata numeričkih analiza stanja napona u zasutoj podzemnoj galeriji pri primeni programa FLAC, prema ref. [170]. Na osnovu ovih rezultata, može se zaključiti da je odnos napona $K = \sigma_h/\sigma_v$, nezavisan od z , i da se može uzeti u obliku $K = K(x)$. Isto tako, dijagrami horizontalnih napona σ_h , su skoro konstantni u preseku, tj. nezavisni su od x , tako da se pri aproksimaciji dijagrama σ_h , može uzeti da je $\sigma_h (= \sigma_x) = \sigma_x(z)$. Na osnovu ovih usvajanja, mogu se formulirati sledeći izrazi za vertikalne napone:

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\sigma_x(z)}{K(x)} \xrightarrow{za\ x=0} \sigma_{z0}(z) = \frac{\sigma_{x0}(z)}{K(0)} \quad (3.624)$$

gde su $\sigma_{x0}(z)$ i $\sigma_{z0}(z)$ horizontalni i vertikalni naponi u centralnoj osi ($x = 0$). Deljenjem odgovarajućih levih i desnih strana ovih izraza, uz pretpostavku da je horizontalni napon konstantan u preseku materijala, na posmatranoj visini z , određuje se odnos vertikalnog napona na odstojanju x , sa vertikalnim naponom u centralnoj osi:

$$\frac{\sigma_z(z, x)}{\sigma_{z0}(z)} = \frac{1/K(x)}{1/K(0)} \quad (3.625)$$

Prema gornjem izrazu, funkcionalni odnos datih vertikalnih napona ne zavisi od z , već od odnosa recipročnih vrednosti koeficijenta $K(x)$ i $K(0)$ (koeficijenti K na odstojanju x od centralne ose i u centralnoj osi, respektivno). Ovaj odnos se može pretpostaviti u obliku odgovarajuće empirijske funkcije u zavisnosti od promenljive x . *Li i Aubertin* (2008) [168] su za ovaj odnos vertikalnih napona, usvojili sledeći oblik:

$$\frac{\sigma_z(z, x)}{\sigma_{z0}(z)} = 1 - a_{LA} \cdot \left(\frac{|x|}{B}\right)^{b_{LA}} \quad (3.626)$$

gde su a_{LA} i b_{LA} , parametri koji se određuju kalibrisanjem sa rezultatima proračuna, a sa B je označena širina rova u osnovi (sl. 166). Na osnovu ovog izraza, određuje se dijagram za vertikalne napone, a preko izraza (3.625), određuje se izraz za $K(x)$:

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_{z0}(z) \cdot \left[1 - a_{LA} \cdot \left(\frac{|x|}{B}\right)^{b_{LA}} \right] \quad (3.627)$$

$$K(x) = \frac{K(0)}{1 - a_{LA} \cdot \left(\frac{|x|}{B}\right)^{b_{LA}}} = K_{LA}(x) \quad (3.628)$$

Koeficijent bočnog pritiska $K(0)$, se odnosi na centralnu osu ($x = 0$), i *Li i Aubertin* [168] su usvojili da ovaj koeficijent odgovara *Rankine*-ovom koeficijentu aktivnog pritiska $K_a = (1 - \sin\phi_i)/(1 + \sin\phi_i)$. Međusobnim množenjem istih strana kod prethodna dva izraza, određuju se horizontalni naponi u materijalu:

$$\sigma_x(z, x) = K(x) \cdot \sigma_z(z, x) = K(0) \cdot \sigma_{z0}(z) = \sigma_{x0}(z) \quad (3.629)$$

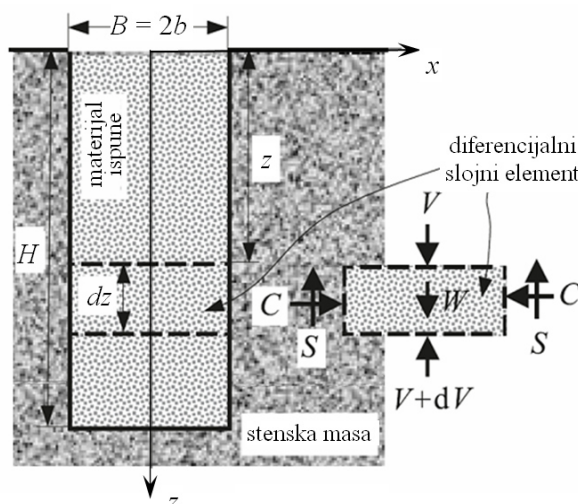
pri čemu horizontalni naponi zavise samo od promenljive z , tako da je dijagram napona u horizontalnom preseku materijala konstantan za posmatranu dubinu z .

Smičući naponi do zida su određeni kao *Coulomb*-ovo trenje, pri čemu je pretpostavljeno da je $\phi_w = \phi_i$, u obliku:

$$\tau_{zx}(z, b) = \mu_{wLA} \cdot \sigma_{x0}(z) \quad (3.630)$$

U prethodnom izrazu je uveden koeficijent trenja o zid $\mu_{wLA} = \tan \phi_w$, gde je kod indeksa dodata oznaka LA za postupak Li -a i $Aubertin$ -a, s obzirom da je u postupku usvojeno da je $\phi_w = \phi_i$. U mehanici tla, vrlo često se uvodi pretpostavka da se ugao trenja materijala o vrlo hrapav zid uzima jednakim sa uglom unutrašnjeg trenja materijala; međutim, poznato je da je vrednost ovog ugla nešto manja. Na primer, *Jáky* (1949) [129] za trenje materijala o potporni zid preporučuje primenu ugla $\phi_w \approx 0.9\phi_i$. S druge strane, uvođenje pretpostavke da je $\phi_w = \phi_i$, u ovoj analizi prema ref. [168], reflektuje se na kalibraciju parametara a_{LA} i b_{LA} u izrazu (3.626), kako μ_w utiče na "punoću" funkcije vertikalne raspodele napona $Y(z)$. Izvođenje postupka Li -a i $Aubertina$ -a se zasniva na metodi diferencijalnog sloja, prema skici prikazanoj na sl. 166, koja odgovara primeru jednog vertikalnog zasutog rova, sa visinom nasutog materijala H i širinom $B = 2b$. Na posmatranoj dubini z , diferencijalni horizontalni sloj materijala je izložen bočnim silama pritiska C , smičućim silama S , i vertikalnim silama V i $V + dV$. Težina materijala u ovom sloju je:

$$W = \gamma \cdot B \cdot dz \quad (3.631)$$



Sl. 166 Shematski prikaz vertikalnog zasutog rova sa delujućim silama na elementarnom horizontalnom sloju materijala, adapt. prema [167].

gde je γ jedinična zapreminska težina nasutog materijala, a dz debljina diferencijalnog sloja. Uslov ravnoteže vertikalnih sila na diferencijalnom sloju materijala daje:

$$W = dV + 2S \quad (3.632)$$

Na osnovu analize numeričkih rezultata zaključeno je da se vertikalni naponi $\sigma_z(z, x)$ mogu predstaviti sa jednačinom koja sledi oblik luka, u obliku jedn. (3.627), gde je $\sigma_{z0}(z)$ vertikalni napon u centralnoj osi (za $x = 0$, gde je x udaljenost posmatrane tačke od vertikalne ose, u oblasti $-b \leq x \leq b$). Kod ove jednačine uključeni su parametri a_{LA} i b_{LA} koji kontrolišu krivinu dijagrama vertikalnih napona. U ovom slučaju, vertikalna sila koja deluje na diferencijalni sloj prikazan na sl. 166, se određuje kao:

$$V = 2 \cdot \int_0^b \sigma_z(z, x) dx = 2b \cdot (1 - DF) \cdot \sigma_{z0}(z) \quad (3.633)$$

Kod integracije gornjeg izraza, po uvođenju vertikalnih napona prema (3.627), određuje se faktor distribucije vertikalnih napona DF , u obliku:

$$DF = \frac{a_{LA}}{2^{b_{LA}} \cdot (b_{LA} + 1)} \quad (3.634)$$

Diferenciranjem izraza (3.633), određuje se promena vertikalne sile na sloju materijala:

$$dV = 2b \cdot (1 - DF) \cdot d\sigma_{z0}(z) \quad (3.635)$$

Horizontalni napon u materijalu se uzima kao konstanta po širini B , pri datoj dubini z , i proporcionalan je vertikalnom naponu u centralnoj osi:

$$\sigma_x(z, x) = K(0) \cdot \sigma_{z0}(z) = \sigma_{x0}(z) = \sigma_x(z) \quad (3.636)$$

Smičuća sila koja deluje na slojni element se određuje preko *Coulomb*-ovog trenja:

$$S = \sigma_x(z) \cdot \mu_{wLA} \cdot dz = K(0) \cdot \sigma_{z0}(z) \cdot \mu_{wLA} \cdot dz \quad (3.637)$$

Na osnovu opisa članova izraza, jedn. ravnoteže (3.632), prelazi u oblik diferencijalne jednačine

$$\frac{d\sigma_{z0}(z)}{dz} + \frac{K(0) \cdot \mu_{wLA}}{b \cdot (1 - DF)} \cdot \sigma_{z0}(z) - \frac{\gamma}{1 - DF} = 0 \quad (3.638)$$

Rešavajući ovu jednačinu (sa početnim uslovom $\sigma_{z0} = 0$ za $z = 0$), određuje se:

$$\sigma_{z0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{K(0) \cdot \mu_{wLA}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{K(0)}{1 - DF} \cdot \mu_{wLA} \cdot \frac{z}{b}} \right) \quad (3.639)$$

Horizontalni naponi su:

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_{wLA}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{K(0)}{1 - DF} \cdot \mu_{wLA} \cdot \frac{z}{b}} \right) = \sigma_x(z) \quad (3.640)$$

Vertikalni normalni naponi u posmatranoj tački u ukupnom polju materijala se mogu prikazati sa sledećim formulacijama:

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{K_{LA}(x) \cdot \mu_{wLA}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{K(0)}{1 - DF} \cdot \mu_{wLA} \cdot \frac{z}{b}} \right) \quad (3.641)$$

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{K(0) \cdot \mu_{wLA}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{K(0)}{1 - DF} \cdot \mu_{wLA} \cdot \frac{z}{b}} \right) \cdot \left[1 - a_{LA} \cdot \left(\frac{|x|}{2b} \right)^{b_{LA}} \right] \quad (3.642)$$

Pri uvođenju funkcije raspodele napona $Y(z)$, mogu se ovi naponi predstaviti u sledećim sažetijim formama:

$$Y_{LA}(z) = 1 - e^{-\frac{K(0)}{1 - DF} \cdot \mu_{wLA} \cdot \frac{z}{b}} \quad (3.643)$$

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{K_{LA}(x) \cdot \mu_{wLA}} \cdot Y_{LA}(z) \quad (3.644)$$

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_{wLA}} \cdot Y_{LA}(z) = \sigma_x(z) \quad (3.645)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \gamma \cdot x \cdot Y_{LA}(z) \quad (3.646)$$

Smičući naponi, koji nisu posebno razmatrani u ref. [168], ovde su predstavljeni sa izrazom (3.646), u formi koja odgovara trougaonom dijagramu napona smicanja.

Prikazano stanje napona se svodi na *Marston*-ovo rešenje, odnosno *Janssen*-ovo rešenje, ako je $DF = 0$, tj. ako je $a_{LA} = 0$. Za male vrednosti a_{LA} , pri čemu je $a_{LA} > 0$, rešenja prema *Li*-u i *Aubertin*-u su vrlo bliska *Janssen*-ovom rešenju stanja napona. Kod prikazanog postupka uvedeni su kod faktora distribucije DF parametri a_{LA} i b_{LA} . Promena vertikalnih napona i koeficijent $K_{LA}(x)$ zavise od veličine ovih parametara. Kod ispitivanja

ovih parametara uzeti su u obzir uticaj geometrije rova (visina punjenja materijala H i širina $B = 2b$) i ugao trenja nasutog materijala ϕ . Sprovedeno je nekoliko analiza sa programom FLAC-2D, koje su opisane i navedene u ref. [168], a primenjena procedura kod numeričkih proračuna odgovara opisanoj proceduri u ref. [170]. Primenjeno je 15 koraka pri postepenom punjenju rova materijalom (odgovara uvođenju 15 slojeva materijala), za razliku od postupka u ref. [170], gde je primenjen samo jedan korak proračuna (ukupan materijal uveden kao jedan sloj). Na osnovu sprovedenih analiza i obrade proračunskih rezultata određeni su parametri a_{LA} i b_{LA} u sledećim oblicima:

$$a_{LA} = 2^{\left(1-\lambda_1 \frac{H}{2b}\right)} \cdot \tan^{-\lambda_2}(\phi_0 + \phi_i) \quad (3.647)$$

$$b_{LA} = 3 \quad (3.648)$$

Za proračunske analize se može uzeti da je $\phi_0 = 50^\circ$, $\lambda_1 = 0.02$, i $\lambda_2 = 0.1$, pri čemu je ϕ_0 korekcionni parametar za ugao trenja materijala, a λ_1 i λ_2 su dva dodatna parametra modela. Uvodeći ove vrednosti, određuju su izrazi za parametre a_{LA} i b_{LA} :

$$a_{LA} = 2^{(1-0.01 \cdot H/b)} \cdot [\tan(50^\circ + \phi_i)]^{-0.1} \quad i \quad b_{LA} = 3. \quad (3.649)$$

Upoređenje odnosa horizontalnog i vertikalnog napona $K_{LA}(x)$, prema *Li-u* i *Aubertin-u* (2010) [168] i *Ohde-u* (*Walker-u*) za aktivno stanje napona $K_a(x)$, je prikazano u § 3.5.2.

3.7.2 Prikaz i diskusija numeričkih i analitičkih rezultata

Modifikovani *Marston-ov* postupak, formulisan od strane *Li-a* i *Aubertin-a* (2008) [168], za određivanje stanja napona u materijalu u zasutim iskopima pod uslovom ravnog stanja napona, predstavlja jednostavan i pogodan metod, kada je dužina osnove velika pri poređenju sa širinom osnove. Ovo odgovara analognom silosnom problemu, gde se prostor iskopa posmatra kao analogna ćelija silosa, a strane iskopa kao kruti zidovi analognog 2D silosa. Kod ovog postupka analizira se samo aktivno stanje napona, kao stanje nakon nasipanja iskopa.

Na sl. 167 i sl. 168, prikazani su rezultati određeni prema postupcima sa neuniformnom raspodelom vertikalnog napona po širini osnove, prema *Li-u* i *Aubertinu-u* (2008) [168] (ovde razmatrani postupak), i prema *Dresher-ovom* (1991)¹ analitičkom postupku sa primenom *Mohr-Coulomb-ovog* uslova za lom materijala smicanjem. Prikazani su i dijagrami prema klasičnom *Marston-ovom* postupku (primena *Janssen-ove* teorije) sa uniformnim dijagramima napona, kao i stanje napona pri običnom aktivnom pritisku tla (analiza poluprostora bez lučnog, tj. silosnog dejstva; u principu analiza sa $\mu_w = 0$).

Svi postupci proračuna sa uvedenim silosnim efektom, pokazuju relativno dobro slaganje sa numeričkim rezultatima pritisaka u materijalu određenih primenom programa FLAC-2D (analizira se aktivno stanje napona). Ovde prikazani dijagrami na sl. 167, sl. 168 i sl. 169, reprezentuju rezultate analiza prikazanih u [168]. Numeričke analize istog problema i prikaz većeg broja rezultata za tri posebna slučaja podataka su prikazani u ref. [167].

Pri upoređenju dijagrama napona prema *Dresher-ovom* postupku i prema postupku *Li-a* i *Aubertinu-a*, sa numeričkim rezultatima određenih sa programom FLAC-2D, može se konstatovati da je relativno bolje predviđanje veličine horizontalnih napona kod postupka

¹ Drescher A. (1991): *Analytical Methods in Bin-Load Analysis*. Elsevier, Amsterdam, 255 p. (Videti ref. [168].)

Drescher-a, a da je bolje predviđanje veličine vertikalnog napona do zida kod postupka *Li*-a i *Aubertin*-a.

Prednost analitičkog postupka *Li*-a i *Aubertin*-a je jednostavnost u odnosu na *Drescher*-ov postupak, a nedostatak je ograničenost primene na probleme u mehanici tla, usled kalibrisanja parametara proračuna sa uslovom da je $\phi_w = \phi_i$.

Numerički proračuni su sprovedeni za različite visine i širine preseka iskopa, i za različita svojstva materijala ispune. Kod primene programa FLAC-2D u numeričkim simulacijama ovog problema, korišćena je procedura opisana u ref. [170], ali je punjenje simulirano u 15 koraka nasipanja materijala (umesto jednog koraka kao u ref. [170]), kako bi se redukovao efekat nestatičkih opterećenja u programu FLAC-2D. Na ovaj način svaki korak analize pri postepenom punjenju materijala, odgovara uvođenju jednog nasipnog sloja materijala.

Ukupno je sprovedeno šest serija analiza, sa sledećim podacima (slike sa rezultatima analiza su date po redosledu navođenja podataka):

- (1) $H = 45$ m, $B = 1, 6, \text{ i } 18$ m, $\phi_i = 30^\circ$ (za $B = 1$ m nema slike; sl. 169 a; sl. 167);
- (2) $H = 45$ m, $B = 18$ m, $\phi_i = 20^\circ$ i 40° (sl. 169 b i c);
- (3) $H = 45$ m, $B = 3$ m, $\phi_i = 20^\circ$ i 40° (sl. 168; za $\phi_i = 40^\circ$ nema slike sa rezultatima);
- (4) $H = 45$ m, $B = 18$ m, $\phi_i = 35^\circ$ (sl. 169 d);
- (5) $H = 45$ m, $B = 3$ i 36 m, $\phi_i = 30^\circ$ (sl. 169 e i f); i
- (6) $H = 25$ i 75 m, $B = 6$ m, $\phi_i = 30^\circ$ (sl. 169 g i h).

Rezultati iz serija 1 i 2 su upotrebljeni za određivanje faktora distribucije DF i procenu empirijskih parametara a_{LA} i b_{LA} za ovaj faktor.

Ostale serije analiza su korišćene za utvrđivanje prediktivne sposobnosti prikazanog modifikovanog *Marston*-ovog postupka. Kod ovih poslednjih serija, uključene su analize pri kojima je varirana veličina ugla trenja (serija 3 i 4), širina osnove iskopa (serija 5), i visina nasutog materijala (serija 6).

Dijagrami vertikalnih i horizontalnih pritisaka određenih prema numeričkim simulacijama i modifikovanom analitičkom rešenju (jedn. (3.639) ÷ (3.642)), prikazani su na sl. 167, za primenjene podatke pri analizi: $H = 45$ m, $B = 18$ m i $\phi_i = 30^\circ$. Na sl. 167 su prikazani i rezultati prema *Marston*-ovom postupku i prema rešenju *Drescher*-a (1991).

Može se uočiti da analitička rešenja za vertikalne pritiske daju vrlo dobro slaganje sa numeričkim rezultatima u centralnoj osi (sl. 167 b), kao i za horizontalne napone u centralnoj osi i do zida (sl. 167 a, c). Poboljšanje slaganja sa rezultatima numeričkih simulacija je određeno kod modifikovanog *Marston*-ovog postupka za vertikalne pritiske do zida (sl. 167 d) i poprečno po širini osnove (sl. 167 f).

Dijagrami na sl. 168 (a, b, c) pokazuju još bolje slaganje rezultata između različitih analitičkih postupaka, kao i slaganje sa numeričkim rezultatima.

Isto se može uočiti i u drugim slučajevima u serijama 1 i 2, kako je prikazano na sl. 169 a, b i c (gde su prikazane samo raspodele vertikalnih pritisaka poprečno po širini osnove). Ovi rezultati ukazuju da predloženo rešenje relativno dobro opisuje raspodelu pritisaka u poređenju sa drugim rešenjima. Pri povećanju ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i , rezultati prema modifikovanom *Marston*-ovom postupku se približavaju rezultatima *Marston/Janssen*-ovog postupka, i odatle sledi da opada uticaj faktora DF pri povećanju ugla ϕ_i .

Na sl. 168 i sl. 169 *d* do *h*, prikazani su rezultati numeričkih proračuna (za serije 3 do 6) koje su bile vođene radi ispitivanja sposobnosti predviđanja sa predloženim rešenjima za varirane uglove trenja (sl. 168 i sl. 169 *d*), širine osnove (sl. 169 *e* i *f*), i visine nasutog materijala (sl. 169 *g* i *h*). Na sl. 168 su prikazani horizontalni i vertikalni pritisci za podatke: $H = 45$ m, $B = 3$ m, i $\phi_i = 20^\circ$, dok su na sl. 169 *d* do *h*, ilustrovani samo rezultati za horizontalnu raspodelu vertikalnih pritisaka za navedene dubine materijala. Na sl. 168, se opet može uočiti da sva tri analitička rešenja daju dobro slaganje za vertikalne pritiske u centralnoj osi, kao i za horizontalne pritiske u osnovi. U svim slučajevima, sračunati pritisci su manji od pritisaka pri aktivnom stanju bez silosnog efekta ($\sigma_h = K_a \cdot \gamma \cdot z$ i $\sigma_v = \gamma \cdot z$; gde je K_a Rankine-ov koeficijent aktivnog pritiska).

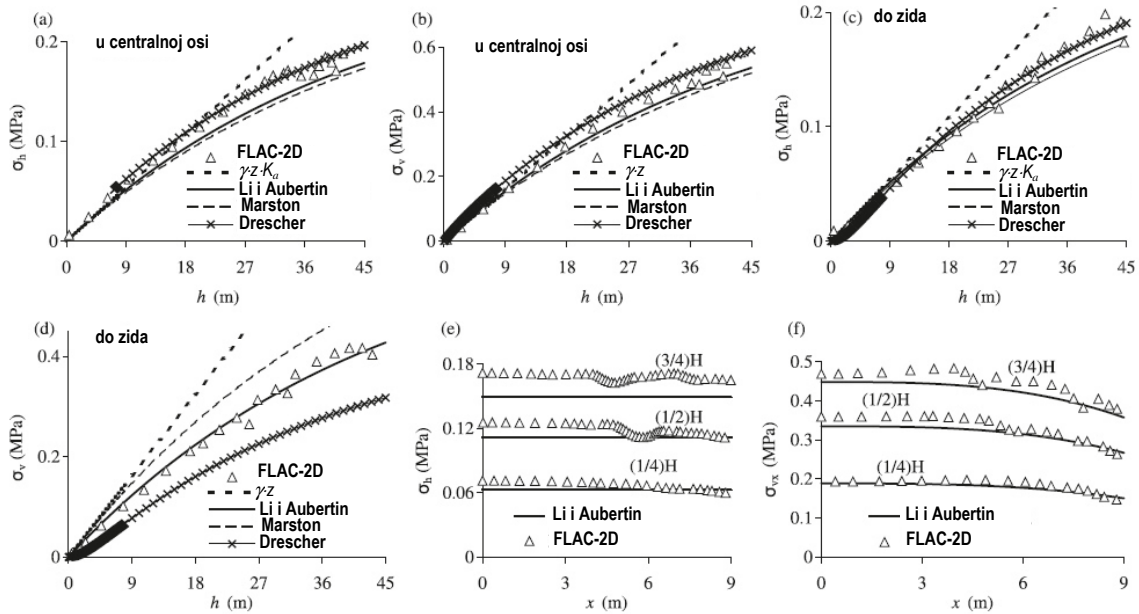
Primena modifikovanog *Marston*-ovog postupka, gde je koeficijent bočnog pritiska K_{LA} definisan izrazima (3.628) i (3.649), ograničena je na vrednosti ugla unutrašnjeg trenja $\phi_i < 40^\circ$, što nije navedeno u radovima *Li*-a i *Aubertin*-a. U slučaju da je $\phi_i = 40^\circ$, sledi da je koeficijent $a_{LA} = 0$, odakle je $DF = 0$, i modifikovani *Marston*-ov postupak se svodi na običan *Marston*-ov (*Janssen*-ov) postupak. Na ovaj način, za vrednosti ugla $\phi_i \geq 40^\circ$, analiza se sprovodi sa običnim *Marston*-ovim postupkom, a ne sa modifikovanim postupkom prema *Li*-u i *Aubertin*-u. Za $\phi_i = 40^\circ$, vertikalni naponi su u ovom slučaju konstantne vrednosti u preseku, što se može uočiti i kod primera prikazanog na sl. 169 *c*.

Procena pritisaka σ_h i σ_v u centralnoj osi (prikazano na sl. 167 *a* i *b*, i na sl. 168 *a* i *b*, respektivno) i pritisaka σ_h do zida (sl. 167 *c*, i sl. 168 *c*), je bolja kod primene *Drescher*-ovog postupka, ili je jednaka sa postupkom *Li*-a i *Aubertin*-a. Prema sl. 167 *d* i sl. 168 *d*, rezultati za pritiske σ_v prema postupku *Li*-a i *Aubertin*-a pokazuju bolje slaganje sa numeričkim vrednostima u odnosu na *Drescher*-ov postupak (gde se dobijaju relativno manje vrednosti), i u odnosu na *Marston*-ov postupak (gde se određuju relativno veće vrednosti). Međutim, ovde je potrebno ukazati na to da numeričke vrednosti vertikalnih pritisaka prikazane na sl. 167 *d* i sl. 168 *d*, u stvari ne odgovaraju vrednostima pritisaka σ_v do zida, već su prikazane vrednosti numeričke analize u tačkama koje su relativno najbliže do zida. Na sl. 167 *f*, sl. 168 *f* i sl. 169 (od *a* do *h*), prikazani su dijagrami vertikalnih pritisaka σ_v u preseku, i evidentno je da se krive analitičkih rešenja za σ_v vode do zida (do $x = B/2 = b$), a da to ne prate numeričke vrednosti, koje bi zbog toga trebalo ekstrapolovati do zida kako bi se odredile uporedne vrednosti sa drugim postupcima.

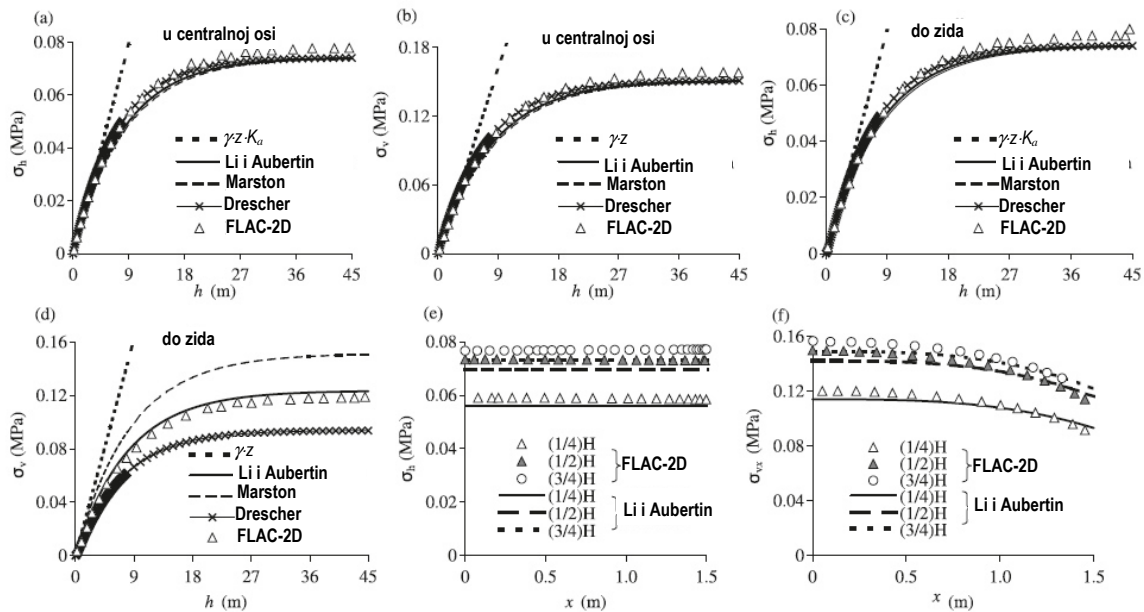
Pored toga, naponinje se da *Drescher*-ov postupak odgovara 2D silosnom problemu, a da postupak *Li*-a i *Aubertin*-a pripada 1D silosnom problemu. Prema tome, sasvim je jasno da je postupak *Li*-a i *Aubertin*-a relativno jednostavniji u odnosu na *Drescher*-ov, kako se prvi postupak zasniva na analizi samo jednog uslova ravnoteže, za razliku od *Drescher*-ov postupka gde se analiziraju dva uslova ravnoteže kod diferencijalnog elementa materijala. Imajući to u vidu, *Walker*-ov postupak (pripada 1D silosnom problemu) je, u osnovi, odgovarajući postupak za poređenje sa postupkom *Li*-a i *Aubertin*-a, kako su ovi postupci jednake složenosti.

Walker-ov postupak, kao relativno jednostavan postupak analize stanja napona u uskladištenom materijalu, ima praktično iste pretpostavke kao i ovde razmatrani postupak, ali je izraz za $K(x)$ teorijski određen prema *Mohr-Coulomb*-ovom kriterijumu za lom materijala smicanjem, u odnosu na ovde empirijsko određivanje izraza kod postupka *Li*-a i *Aubertin*-a. Osnovni *Walker*-ov postupak (*Walker* (1966) [325] i detaljnija formulacija kod *Walters*-a (1973) u ref. [328]) se odnosi na analizu rotaciono-simetričnog problema, odnosno na analizu 3Dr silosa. Odgovarajuću analizu 2D silosa u okviru *Walker*-ove analize, prikazao je *Clague* (1973), prema *Cheung*-u (2007) [47].

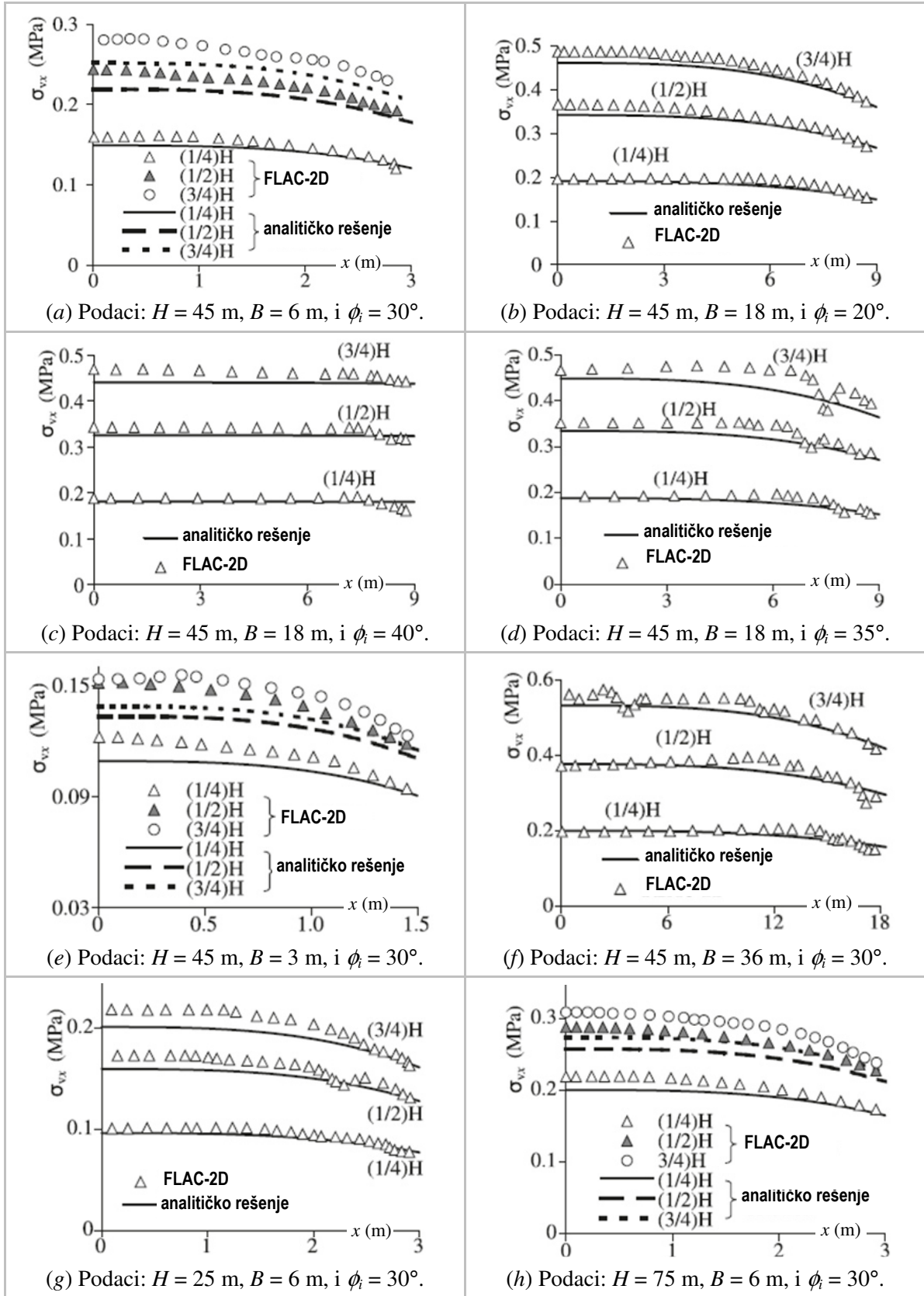
Analiza 2D silosa koja odgovara Walker-ovom postupku, prikazana je u § 3.6.2, sa novim pristupom Walker-ovoj analizi gde je uvedena Ohde-ova formulacija za odnos napona K . Kod ove analize je dobijeno rešenje za stanje napona koje zavisi od odnosa napona K na mestu prosečnog vertikalnog napona u preseku ćelije, u odnosu na Walker-ovu analizu gde je to indirektno definisano preko faktora distribucije vertikalnog napona \mathcal{D} . Isti postupak je izveden i u § 3.6.3 ovog radu, primenom metode integralnih relacija.



Sl. 167 Proračunski rezultati za pritiske, σ_h i σ_v (Podaci: $H = 45$ m, $B = 18$ m, i $\phi_i = 30^\circ$): (a) σ_h duž centralne ose; (b) σ_v duž centralne ose; (c) σ_h duž zida; (d) σ_v duž zida; (e) dijagrami σ_h po širini osnove; (f) dijagrami σ_{vx} po širini osnove, prema Li-u i Aubertin-u (2008) [168].



Sl. 168 Proračunski rezultati za pritiske, σ_h i σ_v (Podaci: $H = 45$ m, $B = 3$ m, i $\phi_i = 20^\circ$): (a) σ_h duž centralne ose; (b) σ_v duž centralne ose; (c) σ_h duž zida; (d) σ_v duž zida; (e) dijagrami σ_h po širini osnove; (f) dijagrami σ_{vx} po širini osnove, prema Li-u i Aubertin-u (2008) [168].



Sl. 169 Dijagrami vertikalnih napona σ_{vx} po širini osnove na različitim dubinama materijala, prema Li-u i Aubertin-u (2008) [168].

Za razliku od Walker-ovog faktora distribucije napona \mathcal{D} , u analizi Li-a i Aubertin-a (2008) [168], upotrebljen je faktor distribucije u nešto drugačijem obliku. Ovaj faktor se može prikazati kao $\mathcal{D}_{LA} = 1/(1-DF)$, i predstavlja odnos vertikalnog napona u centralnoj osi i prosečnog vertikalnog napona, gde je sa DF označen "faktor distribucije napona". Ovo se može shvatiti kao nedoslednost pri definisanju termina. U naknadno objavljenom radu, Li i Aubertin (2010) [169] su prikazali rearanžirane proračunske izraze, pri čemu je promenjen oblik i definicija faktora DF korišćenog u ref. [168]. U novoj varijanti je $DF = [\sigma_{z0}(z) - \sigma_z(z,b)]/\sigma_{z0}(z)$, što predstavlja odnos razlike vertikalnih napona u sredini preseka i napona do zida, naspram vertikalnog napona u sredini preseka ($x = 0$). U ovde razmatranoj analizi, korišćena je prvobitna formulacija postupka proračuna, a napominje se da je razlika između prvobirne i nove analize samo u jednom delu matematičkih formulacija, a obe analize su matematički korektne i daju jednake rezultate za napone u nasutom materijalu.

Ako bi se uporedili \mathcal{D}_{LA} i \mathcal{D} u Walker-ovoj formulaciji, određuje se sledeći odnos:

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}_{LA}} = \frac{\sigma_z(b)/\bar{\sigma}_z}{\sigma_z(0)/\bar{\sigma}_z} = \frac{\sigma_z(b)}{\sigma_z(0)} = \frac{\sigma_h/K(b)}{\sigma_h/K(0)} = \frac{K(0)}{K(b)} \quad (3.650)$$

gde je sa $\bar{\sigma}_z$ označen prosečni vertikalni napon u horizontalnom preseku materijala.

Izraz (3.650) je formalnog teorijskog karaktera, i služi samo za uspostavljanje odnosa različito definisanih faktora distribucije vertikalnih napona, prema Walker-u i prema Li-u i Aubertin-u. U kvantitativnom pogledu ne važi jednakost u izrazu (3.650), kako vrednost prosečnog vertikalnog napona nije jednaka kod Walker-ove teorijske analize, i kod empirijski kalibrisane analize Li-a i Aubertin-a. Na osnovu izraza (3.650) određuje se:

$$\mathcal{D} \cdot K(b) = \mathcal{D}_{LA} \cdot K(0) \quad (3.651)$$

što se može prikazati kod funkcija raspodele napona u oba postupka:

$$Y_{LA}(z) = 1 - e^{-\frac{K(0)}{1-DF} \cdot \mu_{wLA} \cdot \frac{z}{b}} = 1 - e^{-\mathcal{D}_{LA} \cdot K(0) \cdot \mu_{wLA} \cdot \frac{z}{b}} \quad (3.652)$$

$$Y_{Walker}(z) = 1 - e^{-\mathcal{D} \cdot K(b) \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{b}} \quad (3.653)$$

Primena ovih izraza se odnose na postupak Li-a i Aubertin-a, i na postupak Walker-a za 2D silose, respektivno.

3.7.3 Određivanje koeficijenta trenja o zid za Walker-ov postupak

Kod postupka Li-a i Aubertin-a uvedena je pretpostavka da je $\phi_w = \phi_i$, što odgovara potpunom mobilisanju unutrašnjeg trenja materijala o zid, i predstavlja uobičajenu pretpostavku kod primene Marston-ovog postupka. Na ovaj način može biti precenjen silosni lučni efekat, pri čemu se podcenjuju vertikalni naponi u osnovi nasutog materijala.

Kod modifikovanog Marston-ovog postupka, koji su formulisali Li i Aubertin, ovaj problem je u jednom delu prevaziđen sa uvođenjem kalibrisanih parametara u faktor distribucije DF , kako je navodeno u ref. [168]. Ovo se može uočiti na dijagramima, gde postoji vrlo dobro slaganje analitičkih i numeričkih rezultata za vertikalne napone do zida, dok su vertikalni naponi u centralnoj osi i horizontalni naponi obično nešto manjih vrednosti (u nekim slučajevima razlika ide do 15%) u odnosu na numerička rešenja.

Radi poređenja postupka Li-a i Aubertin-a sa postupkom Walker-a, koriste se vrednosti za vertikalne napone do zida iz navedenog prvog postupka. Kod ovih analiza, vertikalni

napon do zida ($x = b$) pri $z \rightarrow \infty$, dostižu svoju asimptotsku vrednost σ_{zfb} , kako su funkcije vertikalne raspodele u ovom slučaju $Y_{Walker} = 1$ i $Y_{LA} = 1$. Postavlja se jednakost asimptotskih vrednosti napona σ_{zfb} kod ova dva postupka:

$$\sigma_z(z \rightarrow \infty, x = b) = \sigma_{zfb} = \frac{\gamma \cdot b}{K_{LA}(b) \cdot \mu_{wLA}} = \frac{\gamma \cdot b}{K(b) \cdot \mu_w} \quad (3.654)$$

Nakon skraćivanja izraza u gornjoj jednakosti određuje se koeficijent C_{LA} :

$$C_{LA} = \frac{1}{K_{LA}(b) \cdot \mu_{wLA}} = \frac{1}{K(b) \cdot \mu_w} \quad (3.655)$$

Na osnovu koeficijenata K prema izrazima (3.503) i (3.628), određuje se:

$$K(0) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2 \cdot \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}} \quad (\text{aktivno stanje}) \quad (3.656)$$

$$K(b) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \quad (\text{aktivno stanje}) \quad (3.657)$$

$$K_{LA}(b) = \frac{K(0)}{1 - a_{LA}/8} \quad (\text{uveden parametar } b_{LA} = 3) \quad (3.658)$$

Kod postupka *Li-a* i *Aubertin-a* usvojeno je $\phi_w = \phi_i$, tako da koeficijent trenja o zid iznosi:

$$\mu_{wLA} = \mu_i \quad (3.659)$$

Uvođenjem prethodnih izraza u jednakosti (3.655), određuje se koeficijent C_{LA} :

$$C_{LA} = (1 - a_{LA}/8) \cdot (1 + 2\mu_i^2 + 2 \cdot \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}) / \mu_i \quad (\text{za postupak } Li\text{-a i } Aubertin\text{-a}) \quad (3.660)$$

$$C_{LA} = (1 + 2\mu_i^2 + 2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}) / \mu_w \quad (\text{za postupak } Walker\text{-a}) \quad (3.661)$$

Za poznate podatke u analizi zasutog rova, H , b i ϕ_i , određuje se parametar a_{LA} prema izrazu (3.649), i koeficijent unutrašnjeg trenja $\mu_i = \tan \phi_i$, te se na osnovu izraza (3.660) određuje konkretna vrednost za koeficijent C_{LA} .

Za ovaj slučaj, izraz (3.661) se prevodi u kvadratnu jednačinu po nepoznatoj μ_w , sa čijim rešenjem se određuje koeficijent μ_w koji je po vrednosti bliži koeficijentu unutrašnjeg trenja μ_i .

Koeficijent trenja o zid μ_w se određuje u obliku:

$$\mu_w = \frac{C_{LA} \cdot (1 + 2\mu_i^2) + 2 \sqrt{(C_{LA}^2 \cdot \mu_i^2 - 1) \cdot (1 + \mu_i^2)}}{C_{LA}^2 + 4(1 + \mu_i^2)} \quad (3.662)$$

Dobijena vrednost koeficijenta trenja materijala o zid rova μ_w , predstavlja vrednost koja se uvodi u *Walker-ovu* analizu u analognom problemu stanja napona u silosu, pri čemu je iskorišćena kalibracija parametara prema postupku *Li-a* i *Aubertin-a*.

Na osnovu prethodno opisane procedure, određeni su odgovarajući koeficijenti trenja o zid μ_w , i prikazani u tabeli 29.

Kalibrisana vrednost za μ_w se uvodi u koeficijent K u *Walker-ovom* postupku, radi komparativne analize sa postupkom *Li-a* i *Aubertinu-a*. Detaljnija diskusija ove komparacije je data u § 3.5.2.

Tabela 29. Određivanje koeficijenta trenja materijala o zid za koeficijent K u Walker-ovom postupku iz kalibrisanog oblika koeficijenta K prema Li-u i Aubertinu-u.

H [m]	$b=B/2$ [m]	ϕ_i [°]	$\mu_{wLA}=\mu_i$	a_{LA}	C_{LA}	μ_w	μ_w/μ_i	ϕ_w/ϕ_i	$K(b)\cdot\mu_w$
45	0.5	30	0.57735	0.90102	4.61092	0.50322	0.87160	0.89041	0.21688
45	3.0	30	0.57735	1.51533	4.21192	0.52610	0.91123	0.92496	0.23742
45	9.0	30	0.57735	1.62409	4.14127	0.53006	0.91810	0.93088	0.24147
45	9.0	20	0.36397	1.74616	4.38063	0.34504	0.94800	0.95183	0.22828
45	9.0	40	0.83910	0.00000	5.48077	0.67611	0.80576	0.85158	0.18246
45	1.5	20	0.36397	1.46834	4.57524	0.33859	0.93028	0.93529	0.21857
45	1.5	40	0.83910	0.00000	5.48077	0.67611	0.80576	0.85158	0.18246
45	9.0	35	0.70021	1.51417	4.27263	0.63372	0.90505	0.92467	0.23405
45	1.5	30	0.57735	1.36569	4.30911	0.52058	0.90167	0.91669	0.23207
45	18.0	30	0.57735	1.65248	4.12284	0.53109	0.91988	0.93241	0.24255
25	3.0	30	0.57735	1.58700	4.16537	0.52872	0.91576	0.92887	0.24007
75	3.0	30	0.57735	1.41385	4.27783	0.52236	0.90476	0.91936	0.23376

Potrebno je napomenuti da se empirijski izraz (3.628), za ugao $\phi_i \geq 40^\circ$ svodi na konstantu, i rešenje stanja napona odgovara *Marston*-ovom ravnom dijagramu napona. Ovo se može sagledati i u tabeli 29, gde je za $\phi_i = 40^\circ$, koeficijent $a_{LA} = 0$. U osnovi, za vrednosti ugla $\phi_i \geq 40^\circ$, ne koristi se modifikovani *Marston*-ov postupak *Li*-a i *Aubertin*-a, već se analiza sprovodi sa običnim *Marston*-ovim postupkom.

3.8 Proračun opterećenja u levku

Primena *Janssen*-ove teorije se odnosi na vertikalne zidove ćelije. Odgovarajuća teorija koja se odnosi na analizu stanja napona u levku je formirana kasnije u odnosu na *Janssen*-ovu teoriju. Na osnovu pregleda literature, koja je korišćena u ovom radu, odgovarajući proračun opterećenja je prvi put prikazan u disertaciji *Voellmy-a* (1937) [321], gde je razmatrano stanje napona u zasutom rovu sa nagnutim bočnim stranama. Formulacije kod ovog problema odgovaraju proračunu opterećenja u levku silosa, i skoro su jednake formulacijama prikazanim u EC1-4. Vrlo detaljnu analizu opterećenja kod piramidalnih levaka, prikazao je *Romić* (1963) [255]. Ova tačnija metoda za određivanje pritisaka u levku ćelijskih silosa, odgovara proračunskim izrazima prikazanim u EC1-4. Međutim, kako navodi *Rotter* (2008) u ref. [260], smatra se da je proračun opterećenja u levku prvi obradio *Dabrowski* (1957)¹, a uobičajeno se pripisuje *Walker*-u (1964)² i (1966) [325].

Od postupaka proračuna levka poznati su postupci *Walker*-a, *Walters*-a, *Enstad*-a, i *Jenike*-a i *Johanson*-a, kao i drugi postupci koji su navedeni kod pregleda teorijskih postupaka proračuna opterećenja u § 2.9.1.

Enstad je analizirao stanje pritisaka u levku silosa, pri primeni zakrivljenog diferencijalnog sloja, u obliku kružnog svoda kod analize ravanskog protoka materijala u

¹ Dabrowski A. (1957): "Parcie Materialow Sypkich w Leju". (Pressures from Bulk Solids in Hoppers). Archiwum Inzynierii Ladowej, Warszawa, pp.325–328. (Citirano prema *Rotter*-u (2008) [260].)

² Walker D.M. (1964): *A Theory of Gravity Flow of Cohesive Powders*. Central Electricity Generating Board, UK, SW Region, R&D Dept, Report No 22. (Citirano prema *Rotter*-u (2008) [260].)

levku, u ref. [75], i u obliku kupole kod osno simetričnog protoka materijala kod konusnog levka, u ref. [76].

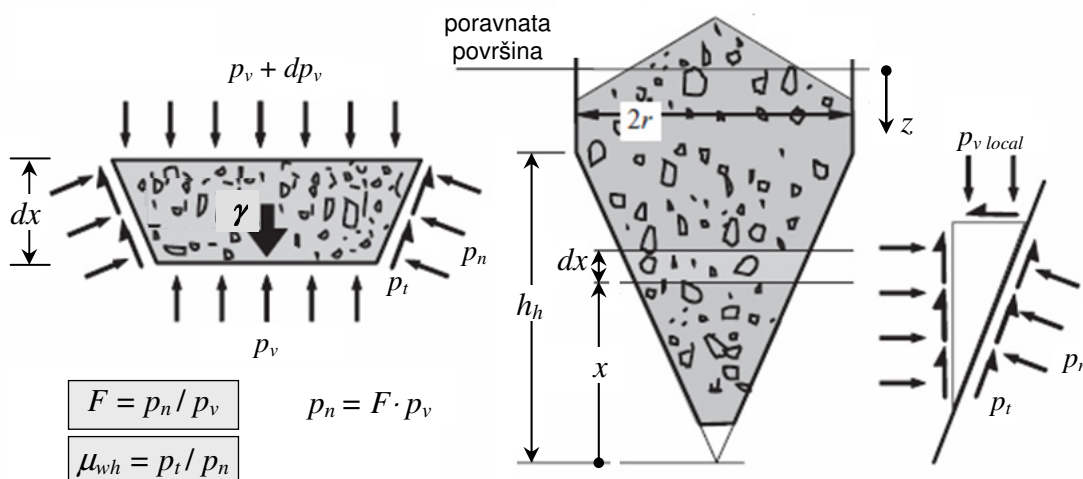
Moreea i Nedderman (1996) [193] su analizirali raspodelu pritisaka i brzine proticanja pri pražnjenju rastresitog zrnastog materijala iz konusnog levka. Schulze i Schwedes (1994) [277] su analizirali stanje inicijalnih napona u levku, teorijski uz primenu metode diferencijalnog sloja i eksperimentalno na ispitnom levku sa ravanskim protokom materijala. U dodatku ref. [277], prikazan je postupak proračuna opterećenja u levku iz disertacije Motzkus-a (1974).

Han, Huang i Drescher (1989) [108] su prikazali aproksimativnu analizu stanja napona i pritisaka materijala na zidove, kod proticanja materijala kroz integrisani sistem ćelije i levka, što se razlikuje od uobičajenog tipa analize stanja napona u izdvojenom levku, ili samo u ćeliji. U okviru šire analize problema stanja napona u levku, bitne su prikazane teorijske analize kao i navedene reference u § 2.6.2, gde je razmatrana kritična širina otvora za pražnjenje.

U evropskoj normi EN 1991-4 (2006) [38], navode se Walker-ova i Enstad-ova analiza stanja pritisaka u levku, kod definisanja parametra F_e . Ove formulacije parametra F_e , prikazane su u tabeli 30, kod pregleda izraza za određivanje opterećenja u levku za stanja posle punjenja i tokom pražnjenja materijala prema EC1-4. Parametar F_e koji je uveden u EC1-4, se odnosi na stanje pražnjenja materijala, i predstavlja odnos normalnog pritiska na zid levka i vertikalnog pritiska u materijalu uz zid levka.

Walker-ova i Walters-ova metode analize opterećenja u levku su najpoznatije i vrlo su slične, a faktor distribucije kod Walker-ovog postupka se obično uzima da je $\mathcal{D} = 1$ (kako je to uradio Walker u ref. [325]), a konkretna teorijska vrednost za faktor \mathcal{D} se koristi kod Walters-ovog postupka, kao u ref. [327].

U ovom poglavlju se prikazuje proračunski postupak određivanja opterećenja u levku, u obliku koji je prikazao Rotter (2008) u ref. [260], s obzirom na to da ovaj postupak direktno odgovara postupku primenjenom u EC1-4.



Sl. 170 Analiza sloja levka, koordinantni sistem i lokalna ravnoteža, adapt. prema [260].

Visina levka je h_h , a vertikalna koordinata x se uzima da počinje od konvergentne tačke levka, koja stoji nešto niže od otvora na levku, kako je prikazano na sl. 170. Linija nagiba levka je pod uglom β sa vertikalom.

Za konusne i piramidalne levke, horizontalna koordinata tačke na zidu levka je $r = x \tan \beta$, a površina diferencijalnog sloja iznosi:

$$A = k_1 \cdot r^2 = k_1 \cdot x^2 \cdot \tan^2 \beta \quad (3.663)$$

gde je $k_1 = \pi$ za konusni levak i $k_1 = 4$ za piramidalni levak kvadratnog preseka sa polustranom r . Obim sloja materijala je:

$$U = k_1 \cdot r^2 = k_1 \cdot x^2 \cdot \tan^2 \beta \quad (3.664)$$

gde je $k_2 = 2\pi$ za konusni levak i $k_2 = 8$ za piramidalni levak kvadratnog preseka sa polustranom r .

Vertikalna ravnoteža sila koje deluju na diferencijalni sloj materijala, kako je prikazano na sl. 170, se određuje u obliku jednačine:

$$\begin{aligned} (p_v + dp_v) \cdot k_1 \cdot (x + dx)^2 \cdot \tan^2 \beta - p_v \cdot k_1 \cdot x^2 \cdot \tan^2 \beta + \gamma \cdot k_1 \cdot x^2 \cdot \tan^2 \beta \cdot dx = \\ = (p_v \cdot \sin \beta + p_t \cdot \cos \beta) \cdot k_2 \cdot x \cdot \tan \beta \cdot dx / \cos \beta \end{aligned} \quad (3.665)$$

Skraćivanjem izraza, i eliminacijom malih veličina višeg reda, te smenom $(k_2/k_1) = 2$, što važi za obe geometrije levka, određuje se sledeća jednačina:

$$x \cdot \frac{dp_v}{dx} = 2 \left(p_n + \frac{p_t}{\tan \beta} - p_v \right) - \gamma \cdot x \quad (3.666)$$

u kojoj je p_n normalni pritisak koji deluje na zid levka, p_v je vertikalni napon u materijalu, p_t je smičući napon usled trenja o zid levka, a γ je zapreminska težina materijala u levku.

Koriste se dve poznate *Janssen*-ove pretpostavke na sledeći način:

- Smičući napon od trenja p_t se uzima da je proporcionalan sa lokalnim normalnim pritiskom p_n , gde je faktor proporcionalnosti - koeficijent trenja o zid levka μ_{wh} , u slučaju da materijal klizi niz zid levka. U suprotnom slučaju, uzima se nešto manja veličina za koeficijent trenja, kao efektivno trenje $\mu_{wh \text{ eff}}$ kada nema klizanja:

$$p_t = \mu_{wh} \cdot p_n \quad (3.667)$$

- Normalni pritisci na nagnuti zid levka p_n se uzimaju da su u relaciji sa vertikalnim naponom p_v preko faktora pritiska na levku F :

$$p_n = F \cdot p_v \quad (3.668)$$

Uvođenjem ove dve pretpostavke u jednačinu (3.666), određuje se:

$$x \cdot \frac{dp_v}{dx} - 2 p_v \cdot [F + F \cdot \mu_{wh} \cdot \cot \beta - 1] = -\gamma \cdot x \quad (3.669)$$

$$x \cdot \frac{dp_v}{dx} - n \cdot p_v = -\gamma \cdot x \quad (3.670)$$

U ovoj jednačini je uveden parametar n u obliku:

$$n = 2 [F + F \cdot \mu_{wh} \cdot \cot \beta - 1] \quad (3.671)$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine, uz postavljanje početnog uslova na vrhu materijala, da je $p_v = p_{vt}$ za $x = h_h$, dobija se u sledećem obliku:

$$p_v = p_{vt} \cdot \left(\frac{x}{h_h} \right)^n + \frac{\gamma \cdot h_h}{n-1} \cdot \left\{ \left(\frac{x}{h_h} \right) - \left(\frac{x}{h_h} \right)^n \right\} \quad (3.672)$$

gde je p_{vt} vertikalni napon u materijalu na nivou prelaza ćelije u levak.

Tabela 30. Izrazi za određivanje opterećenja u levku za stanja posle punjenja i tokom pražnjenja materijala (formulacije za strme i plitke levke prema EC1-4).

Izraz	Strmi levci	Plitki levci	Jedn.
i za punjenje i za pražnjenje	$\mu_{wheff} = \mu_{wh}$	$\mu_{wheff} = \frac{1-K}{2 \tan \beta}$	(3.673)
	$p_v = \frac{\gamma h_h}{n-1} \cdot \left\{ \left(\frac{x}{h_h} \right) - \left(\frac{x}{h_h} \right)^n \right\} + p_{vft} \left(\frac{x}{h_h} \right)^n$ <p> $S = 2$ za konusne i piramidalne levke $S = 1$ za linijske levke sa vertikalnim bočnim zidovima $S = (1 + b/a)$ za levke sa pravougaonom osnovom $b \times a$, ($a > b$). </p>		(3.674)
za punjenje	$n = S \cdot 0.8 \cdot \mu_{wheff} \cdot \cot \beta$		(3.675)
	$F_f = 1 - \frac{0.2}{1 + \frac{\tan \beta}{\mu_{wheff}}}$		(3.676)
	$p_{nf} = F_f \cdot p_v$ i $p_{tf} = \mu_{wheff} \cdot F_f \cdot p_v$		(3.677)
za pražnjenje	$n = S \cdot [F_e \cdot \mu_{wh} \cdot \cot \beta + F_e] - 2$	$F_e = F_f$ <p>Pri pražnjenju materijala iz silosa kroz levak, opterećenje se može uzeti da je jednako opterećenju nakon punjenja, tako da važe sledeći izrazi:</p> $p_{ne} = p_{nf}$ $p_{te} = p_{tf}$	(3.678)
	<p>Prema Walker-u (osnovni postupak)</p> $F_e = \frac{1 + \sin \phi_i \cos \varepsilon}{1 - \sin \phi_i \cos(2\beta + \varepsilon)}$ $\varepsilon = \phi_{wh} + \arcsin \left(\frac{\sin \phi_{wh}}{\sin \phi_i} \right)$ $\phi_{wh} = \min \{ \arctan \mu_{wh}; \phi_i \}$ <p>Prema Enstad-u (alternativni postupak)</p> $F_e = \frac{1}{1 + \mu_{wh} \cdot \cot \beta} \cdot \left[1 + 2 \cdot \left(1 + \frac{\sin \phi_i \cdot \cos \varepsilon \cdot \sin(\varepsilon - \beta)}{1 + \sin \phi_i \cdot \sin \beta} \right) \right]$ $\varepsilon = \beta + \frac{1}{2} \cdot \left[\phi_{wh} + \arcsin \left(\frac{\sin \phi_{wh}}{\sin \phi_i} \right) \right]$ $\phi_{wh} = \min \{ \arctan \mu_{wh}; \phi_i \}$		
	$p_{ne} = F_e \cdot p_v$ i $p_{te} = \mu_{wheff} \cdot F_e \cdot p_v$		(3.679)

Veličina F zavisi od geometrije i karakteristika materijala, na sličan način kako koeficijent K zavisi od karakteristika materijala u analizi pritisaka na verikalne zidove ćelije. Normalni pritisci se mogu odrediti preko jednačine (3.672) u obliku:

$$p_n = F \cdot \left[p_{vt} \cdot \left(\frac{x}{h_h} \right)^n + \frac{\gamma \cdot h_h}{n-1} \cdot \left\{ \left(\frac{x}{h_h} \right) - \left(\frac{x}{h_h} \right)^n \right\} \right] \quad (3.680)$$

Jednačina (3.680) daje različite forme raspodele pritisaka na levku, u zavisnosti od veličine parametra F . Dve komponente opterećenja su odvojene u jednačini (3.680), i to su: težina materijala u levku (član u izrazu uz $\gamma \cdot h_h$), i vertikalni pritisak p_{vt} od težine materijala u ćeliji (kao nadopterećenje na nivou prelaza ćelije u levak).

Na osnovu ove jednačine, određuju se visoki lokalni pritisci u gornjem delu levka ispod prelaza ćelije u levak, pri čemu se oni povećavaju za relativno veće visine ćelije i za veće vrednosti parametra F .

Pojava izraženog špicastog dela kod dijagrama pritisaka na prelazu ćelije u levak, se dobija pri većim vrednostima parametra n , što odgovara slučaju kada je F veće vrednosti, a levak strm i hrapav.

Prema *Rotter*-u (2008) [260], prikazani teorijski postupak se koristi u EC1-4. U analizi se svi naponi i pritisci uzimaju kao srednje vrednosti, kako navodi *Rotter*, ali je jasno da ove veličine treba posmatrati kao prosečne vrednosti.

Alternativan postupak proračuna opterećenja u levku, prikazan je u okviru jednog dodatka u EC1-4, i predstavlja empirijsku aproksimaciju pritisaka na levak. Poluempirijske metode za određivanje opterećenja u levku su prikazane u okviru § 2.10.4.

U analizi je ostalo otvoreno pitanje u kojim slučajevima je trenje potpuno mobilisano u levku. Ovo pre svega zavisi od nagiba i hrapavosti zida levka. Levak se uzima kao strm, ako materijal u njemu klizi po zidovima, i ovo se određuje preko kriterijuma strmosti levka (prikazano na sl. 75), koji je u EC1-4 definisan sa sledećim izrazom za strm levak:

$$\tan \beta < (1 - K) / (2 \mu_{wh}) \quad (3.681)$$

gde je μ_{wh} koeficijent trenja o levak, gde se uzima u obzir i završni sloj ili obloga na unutrašnjim površinama levka.

Opterećenje levka, prema EN 1991-4:2006 [38], je ovde već opisano u okviru § 2.10.2.6, gde su definisane i sve oznake kod ovog proračuna prema EC1-4. U tom pravcu, radi što jednostavnijeg pregleda potrebnih proračunskih izraza, sa kojima se definišu parametar F , koeficijent trenja o zid levka, i druge relevantne veličine, formirana je tabela 30.

U tabeli 30 su raspoređeni izrazi za određivanje opterećenja u levku za stanja posle punjenja i tokom pražnjenja materijala, za varijante strmog i plitkog levka, prema EC1-4.

Pri pražnjenju materijala kroz strmi levak, prosečni vertikalni napon u materijalu se može odrediti koristeći osnovni izraz za F_e prema *Walker*-u (ref. [325] i [326]) ili alternativni izraz za parametar F_e , prema *Enstad*-u (ref. [75] i [76]), kako je to definisano u EC1-4.

Kod ugla trenja materijala o zid levka, mora biti ispunjen uslov da je $\phi_{wh} \leq \phi_i$.

Kod plitkih levaka pri pražnjenju silosa, veličine normalnog pritiska i opterećenja od trenja se mogu uzeti da su indentični vrednostima pri punjenju silosa.

Za određivanja normalnog opterećenja p_n i tangencijalnog opterećenja p_t na levku, koriste se odgovarajući izraz za F prema tabeli 30.

4 PRIMENA METODE INTEGRALNIH RELACIJA KOD ANALIZE OPTEREĆENJA U SILOSIMA

U ovom delu rada, detaljno se obrađuje primena metode integralnih relacija kod određivanja stanja napona materijala u ćeliji silosa. Postupak primene metode integralnih relacija, u ovom problemu analize stanja napona, prikazan je u disertaciji *Negi-a* (1974) [202], gde je analizirano stanje napona kod kružnih ćelija cilindričnih silosa, na primeru skladištenja silažnog materijala. Kod silaže (fermentisana stočna hrana) je izražena promena zapreminske težine po dubini materijala, tako da je metoda integralnih relacija primenjena na ovom specijalnom slučaju analize uvođenjem zapreminske težine materijala $\gamma(z)$ u funkciji dubine z . Kod ovog teorijskog rešenja stanja napona, koje odgovara složenom slučaju analize u [202], može se uvesti da je $\gamma = \text{const.}$, tako da se analiza svodi na uobičajeni oblik sa konstantnom zapreminskom težinom. Ova teorijska analiza je prikazana i u radu *Negi-a* i *Ogilvie-a* (1977) [203].

Negi (1974) [202] navodi kod opisa metode integralnih relacija, da ona proizilazi iz rada *Dorodnitsyn-a* (1962)¹, a da su je šire primenili *Belotserkovskii* i *Chuskin* (1965)² kod analize raznih problema iz oblasti gasne dinamike. *Savage* i *Yong* (1970)³ su prvi upotreбили ovu metodu za određivanje stanja napona koje se razvija tokom kontinualnog masovnog protoka materijala u klinastom levku i bunkeru sa vertikalnim paralelnim zidovima (analiza 2D silosa - ravno stanje napona).

Negi (1974) je analizirao stanje napona kod 3Dr silosa, a *Drescher* (1991)⁴ je prikazao analizu kod 2D silosa. Kod obe analize pretpostavljano je da su dijagrami vertikalnih napona σ_z u preseku ćelije, u obliku kvadratne parabole sa temenom parabole u srednjoj osi silosa. Kod primene metode integralnih relacija, u ovim analizama stanja napona materijala u silosu, koristi se promenljivi dijagram vertikalnih napona u preseku ćelije i

¹ Dorodnitsyn A.A. (1962): "General method of integral relations and its application to boundary layer theory". pp. 207-219 in *von Karman T. et al. (eds.): Advances in aeronautical sciences, 3*. Pergamon Press, New York, N.Y.

² Belotserkovskii O.M. and Chushkin P.I. (1965): "The numerical solution of problems in gas dynamics". pp. 34-89 in: *Holt M. (ed.): Basic developments in fluid dynamics*. Academic Press, New York, N.Y.

³ Savage S.B. and Yong R.N. (1970): "Stresses developed by cohesionless granular materials in bins". *Int. J. Mech. Sci.* 12, pp.675-693. (Citirano prema *Negi-u* (1974) [202].)

⁴ *Drescher A.* (1991): *Analytical methods in bin-load analysis*, Elsevier, Amsterdam. (Citirano prema *Li-u* i *Aubertin-u* (2008) [168].)

granično stanje ravnoteže za uskladišteni materijal, gde se uvodi *Mohr-Coulomb*-ov uslov za lom materijala smicanjem. U osnovi, metoda se koristi pri rešavanju složenih slučajeva analize stanja napona, na osnovu dva uslova ravnoteže sila kod diferencijalnog elementa zrnastog materijala. Prvi uslov je ravnoteža vertikalnih sila, a drugi uslov odgovara ravnoteži horizontalnih sila (u pravcu x ose kod 2D silosa, i u radijalnom pravcu r koordinate kod 3Dr silosa).

4.1 Postavka unapređene primene metode integralnih relacija u analizi stanja napona uskladištenog materijala u silosu

U ovom radu su na osnovu primene metode integralnih relacija, formirana četiri postupka analize stanja napona 2D silosa i dva postupka analize 3Dr silosa, različitog stepena složenosti usled primene različitih početnih pretpostavki. Variranje pretpostavki kod analize 2D silosa je poslužilo kao probno ispitivanje primene datih pretpostavki, koje su u odgovarajućem analognom obliku uvedene kod formiranja postupaka složenijeg problema analize 3Dr silosa. Primena pretpostavki primenjenih kod prva dva formirana postupka analize 2D silosa, u odgovarajućem obliku kod analize stanja napona 3Dr silosa, ne odgovara po pitanju oblika dijagrama napona smicanja u asimptotskom stanju napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu. Analogna primena pretpostavki uvedenih u četvrtom postupku analize 2D silosa, kod analize stanja napona 3Dr silosa, vodi ka vrlo složenom obliku izraza za radijalne napone, koji nije prihvatljiv za praktičnu primenu. Treći postupak analize stanja napona 2D silosa je formiran u obliku koji se analogno može primeniti kod analize 3Dr silosa.

Postupci analize stanja napona materijala u silosima su formirani na osnovu uvođenja različitih pretpostavki o obliku dijagrama komponentalnih napona materijala, i uz obuhvatanje dva uslova ravnoteže sila, na koje se problem svodi kod 2D silosa i 3Dr silosa. Kod svih analiza uveden je *Mohr-Coulomb*-ov uslov loma materijala smicanjem. U toku razvijanja ovih postupaka proračuna, uvedena su određena unapređenja kod primene metode integralnih relacija. Na ovaj način, analiza u ovom radu, se u nekim postavkama i elementima primene metode razlikuje od primene kod *Negi*-a (1974) i *Drescher*-a (1991), pri čemu je osnova metode ostala nepromenjena.

Pored formiranja novih proračunskih postupaka, unapređeni oblik metode je primenjen u cilju verifikacije i prikaza jednostavne primene na primeru *Walker*-ove i *Walters*-ove analize 2D i 3Dr silosa. Ova dva slučaja analize spadaju u 1D silosni problem, gde se pri određivanju stanja napona koristi samo uslov ravnoteže vertikalnih sila. Dobijena rešenja su potpuno jednaka teorijskom rešenju *Walker*-a i *Walters*-a, pod istim pretpostavkama proračuna (primena metode integralnih relacija kod analize 2D silosa je prikazana u § 3.6.3, a kod analize 3Dr silosa u § 4.3.5). Kod unapređene primene metode integralnih relacija uvode se pretpostavke koje su konzistentne sa teorijskim postavkama, i zbog toga se i u ovim jednostavnim primerima analize stanja napona dobijaju postojeća teorijska rešenja. S obzirom da je metoda integralnih relacija na višem teorijskom nivou od metode diferencijalnog sloja, kada se kod ove metode uvedu pretpostavke primenjene kod metode diferencijalnog sloja, pri čemu se razmatra samo uslov ravnoteže vertikalnih sila, sa ovom metodom se određuju teorijska rešenja jednaka rešenjima metode diferencijalnog sloja. U ovom pravcu je prikazana primena metode integralnih relacija kod uvođenja *Janssen*-ovih pretpostavki u § 3.6.3, kada se kod diferencijalne jednačine zasnovane na *Walker*-ovim

postavkama, uvede da je $K(z) = K = const.$, što predstavlja osnovnu pretpostavku u *Janssen*-ovom postupku.

Postupak primene metode integralnih relacija kod problema određivanja stanja napona materijala uskladištenog u silosu, se može prikazati sa sledećim koracima analize (pregled je napravljen na osnovu sagledavanja postupka *Negi*-a (1974) [202], gde se analizira stanje napona kod 3Dr silosa, a ovde se u opisu obuhvata primena i za analizu 2D silosa):

- (1) Postavljanje uslova ravnoteže na diferencijalnom elementu materijala u silosu:

– kod 2D silosa:

$$\frac{\partial \sigma_x(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial z} = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z(z, x)}{\partial z} = \gamma \quad (4.2)$$

– kod 3Dr silosa:

$$\frac{\partial \sigma_r(z, r)}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}(z, r)}{\partial z} + \frac{\sigma_r(z, r) - \sigma_\theta(z, r)}{r} = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \sigma_z(z, r)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}(z, r)}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}(z, r)}{r} = \gamma \quad (4.4)$$

- (2) Uvode se funkcije za promene komponentalnih napona u poprečnom preseku (obično se primenjuju sasvim jednostavni oblici funkcija), kao interpolacionih funkcija između konturnih vrednosti napona. Na primer, vertikalni naponi se mogu predstaviti sa parabolikom funkcijom, a smičući naponi kao linearna promena u obliku trougaonog dijagrama kako je napon smicanje u sredini nula (ovo su primenili i *Negi* i *Drescher*). Promena horizontalnih, odnosno radijalnih i prstenastih napona se može uzeti npr. kao linearna funkcija. U teoriji su poznati odnosi kod konturnih napona. Npr. za konturne horizontalne i vertikalne napone preko *Mohr-Coulomb*-ovog uslova loma, odnos napona je K (za konturne napone do zida odnos napona je $K(b)$ kod 2D silosa, odnosno $K(R)$ kod 3Dr silosa, a za odnos napona u centru silosa je $K(0)$); a veza konturnih horizontalnih napona, odnosno konturnih radijalnih napona i smičućih napona je poznata kao *Coulomb*-ov uslov trenja materijala o zid čelije. Kao primer, navode se sledeće funkcije:

– kod 2D silosa:

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_{z0}(z) + [\sigma_{zb}(z) - \sigma_{z0}(z)] \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 \quad (4.5)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \tau_{zb}(z) \cdot \frac{x}{b} = \mu_w \cdot \sigma_{zb}(z) \cdot \frac{x}{b} = \mu_w \cdot K(b) \cdot \sigma_{zb}(z) \cdot \frac{x}{b} \quad (4.6)$$

– kod 3Dr silosa:

$$\sigma_z(z, r) = \sigma_{z0}(z) + [\sigma_{zR}(z) - \sigma_{z0}(z)] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (4.7)$$

$$\tau_{zr}(z, r) = \tau_{zR}(z) \cdot \frac{r}{R} = \mu_w \cdot \sigma_{zR}(z) \cdot \frac{r}{R} = \mu_w \cdot K(R) \cdot \sigma_{zR}(z) \cdot \frac{r}{R} \quad (4.8)$$

- (3) Inperpolacione funkcije za napone se uvode u uslove ravnoteže, i sprovodi se integracija na isečku diferencijalnog sloja u obliku sledećih integralnih relacija:

– kod 2D silosa:

$$\int_0^b \left(\frac{\partial \sigma_x(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}(z, x)}{\partial z} \right) \cdot dx = 0 \quad (4.9)$$

$$\int_0^b \left(\frac{\partial \tau_{xz}(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z(z, x)}{\partial z} \right) \cdot dx = \int_0^b \gamma \cdot dx \quad (4.10)$$

– kod 3Dr silosa:

$$\int_0^R \left(\frac{\partial \sigma_r(z, r)}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}(z, r)}{\partial z} + \frac{\sigma_r(z, r) - \sigma_\theta(z, r)}{r} \right) \cdot r \cdot dr = 0 \quad (4.11)$$

$$\int_0^R \left(\frac{\partial \sigma_z(z, r)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}(z, r)}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}(z, r)}{r} \right) \cdot r \cdot dr = \int_0^R \gamma \cdot r \cdot dr \quad (4.12)$$

- (4) Rešenje ovih integralnih relacija je sistem dve diferencijalne jednačine prvog reda (u opštem obliku kao jednačine L_1 i L_2) po nepoznatim konturnim naponima (ovde je to prikazano sa nepoznatim vertikalnim konturnim naponima):

– kod 2D silosa:

$$L_1(\sigma'_{z0}(z), \sigma'_{zb}(z), \sigma_{z0}(z), \sigma_{zb}(z), z) = 0 \quad (4.13)$$

$$L_2(\sigma'_{z0}(z), \sigma'_{zb}(z), \sigma_{z0}(z), \sigma_{zb}(z), z) = 0 \quad (4.14)$$

– kod 3Dr silosa:

$$L_1(\sigma'_{z0}(z), \sigma'_{zR}(z), \sigma_{z0}(z), \sigma_{zR}(z), z) = 0 \quad (4.15)$$

$$L_2(\sigma'_{z0}(z), \sigma'_{zR}(z), \sigma_{z0}(z), \sigma_{zR}(z), z) = 0 \quad (4.16)$$

- (5) Rešenjem ovog sistema diferencijalnih jednačina (svodenjem sistema na jednu diferencijalnu jednačinu 2-og reda), uz postavljanje početnih uslova za konturne napone, određuju se nepoznati konturni naponi, npr. konturni vertikalni naponi $\sigma_{z0}(z)$ i $\sigma_{zb}(z)$ kod analize 2D silosa, odnosno $\sigma_{z0}(z)$ i $\sigma_{zR}(z)$ kod 3Dr silosa.
- (6) Preko veza komponentalnih napona određuju se svi konturni naponi, a pomoću izraza tipa (4.5) do (4.8), za analizu 2D ili 3Dr silosa, određuje se kompletno stanje napona uskladištenog materijala u silosu.

Pri sagledavanju koraka kod primene metode integralnih relacija, uočava se da predmet razmatranja može biti izbor konturnih napona (vertikalni, horizontalni ili neki drugi napon) na koje se svode svi drugi konturni naponi. *Negi* i *Drescher* su koristili konturne vertikalne napone, tako da su ovi naponi nepoznate u sistemu diferencijalnih jednačina. Ovo je logičan i uobičajen izbor, ako se ima na umu da je vertikalni napon nepoznata funkcija u diferencijalnoj jednačini uslova ravnoteže vrtikalnih sila kako kod *Janssen*-a, tako i kod *Walker*-a. Međutim, kod svih ovih postupaka je moguće uvesti kao nepoznate napone horizontalne, ili radijalne, ili smičuće napone. Kod metode integralnih relacija, odmah se na početku primene može uočiti da je jednostavnije uvesti kao nepoznate u postupku analize, horizontalne, odnosno radijalne napone, umesto korišćenih vertikalnih napona. Rešavanje integracije u ovom slučaju je jednostavnije. Kod ovog uvođenja, rezultat analize se ne menja, ali put do rešenja je jednostavniji.

Drugi predmet koji se kod primene metode integralnih relacija može razmatrati je izbor interpolacionih funkcija. Prema prikazanim primerima koriste se jednostavne matematičke funkcije i dosta je slobodan izbor funkcija, kao da su ove funkcije nezavisne,

ali u osnovi to ne mora biti tako. Kod analize 3Dr silosa, prema *Negi*-u koriste se izrazi za komponentalne napone (4.7) i (4.8), a izrazi za prstenaste i radijalne napone su:

$$\sigma_{\theta}(z, r) = \sigma_{\theta 0}(z) + \frac{\sigma_{\theta R}(z) - \sigma_{\theta 0}(z)}{2} \cdot \frac{r}{R} \quad (\text{izraz naveden u [202] i [203]}) \quad (4.17)$$

$$\sigma_r(z, r) = \sigma_{r 0}(z) + [\sigma_{r R}(z) - \sigma_{r 0}(z)] \cdot \frac{r}{R} \quad (\text{nije navedeno u [202] i [203]}) \quad (4.18)$$

Izraz za radijalne napone (4.18), nije naveden u [202] i [203], tako da je ovde njegov oblik pretpostavljen. Uvođenjem izraza (4.18), u rešavanja integralnih relacija, određuju se diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima, koje u potpunosti odgovaraju rešenju prikazanom u *Negi*-evoj disertaciji [202]. Na osnovu kontrolnih analiza, zaključeno je da uvođenje izraza (4.7), (4.8), (4.17) i (4.18), odgovara *Negi*-evoj analizi i vodi do sistema diferencijalnih jednačina L_1 i L_2 , koje su prikazane u ref. [202]. Na osnovu detaljne analize *Negi*-eve primene metode integralnih relacija pri formiranju postupka za analizu stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu, formulisani su sledeći zaključci:

- Kod izbora referentnih nepoznatih konturnih napona, nije neophodno da su to konturni vertikalni naponi σ_z . Sa matematičke strane jednostavnije je u analizu uvesti nepoznate konturne radijalne napone σ_r .
- Izraz za prstenaste napone σ_{θ} u obliku (4.17), nije teorijski korektno postavljen, jer se ne potvrđuje da ovaj napon za $r = R$ po definiciji odgovara konturnom naponu do zida $\sigma_{\theta R}$. Ipak, u metodi integralnih relacija i ovaj oblik može da se uvede u postupak formiranja rešenja, kao svojevrsna aproksimacija, ali to nije navedeno niti elaborirano u [202] i [203]. Zbog toga se *Negi*-evo rešenje stanja napona materijala u silosu, u ovom radu analizira sa teorijske strane, a ne kroz praktičnu komparaciju rezultata proračuna.
- Promena zapreminske težine γ po dubini materijala z , jednostavno se uvodi sa $\gamma(z)$ u jednačinu uslova ravnoteže i relativno jednostavno primenjuje u metodi integralnih relacija. Potrebno je uvesti empirijski oblik za $\gamma(z)$ koji je u [202], za silažu kao uskladišteni materijal, prikazan u obliku eksponencijalne funkcije u zavisnosti od dubine z :

$$\gamma(z) = \gamma_0 + a_N \cdot (1 - e^{-b_N \cdot z}) \quad (4.19)$$

gde su empirijski koeficijenti a_N i b_N određeni prema eksperimentalnim podacima na osnovu regresione analize, a γ_0 je nasipna zapreminska težina pri $z = 0$. Za silažu je $\gamma_0 = 5.196 \text{ kN/m}^3$, $a_N = 5.064 \text{ kN/m}^3$ i $b_N = 0.181$, prema ref. [202].

- Interpolacione funkcije za dijagrame napona u preseku ćelije silosa, se uzimaju da su praktično nezavisne jedna od druge, pri čemu su samo naponi na konturama povezani preko *Mohr-Coulomb*-ovog uslova.
- Sa formalne strane, trigonometrijske funkcije koje se uvode sa *Walker*-ovom formulacijom za odnos napona K , daju takve oblike konstantnih koeficijenata u diferencijalnim jednačinama, da je potrebno dosta posla da se ovi koeficijenti svedu na jednostavnu matematičku formu, u cilju dobijanja sažetih izraza.
- Kod izvođenja postupka ne vodi se računa o tome da rešenje stanja napona za $z \rightarrow \infty$, treba da odgovara teorijskom rešenju asimptotskog stanja napona. U ovom slučaju asimptotske vrednosti se dobijaju samo kod konturnih napona.

Na osnovu navedenih zaključaka, uvedene su sledeće *modifikacije i unapređenja kod primene metode integralnih relacija*:

- Kod izbora nepoznatih konturnih napona, za referentne napone se uzimaju radijalni naponi (kod 3Dr silosa), odnosno horizontalni naponi (kod 2D silosa). U ovom slučaju, svi drugi naponi se prikazuju preko ovih referentnih napona, odnosno u funkciji su konturnih vrednosti σ_{rR} i σ_{r0} (kod 3Dr silosa), odnosno σ_{xb} i σ_{x0} (kod 2D silosa). Sa ovim izborom nepoznatih, integracija uslova ravnoteže je relativno jednostavnija nego u prethodnom slučaju.
- Kod izraza se umesto trigonometrijskih funkcija ugla unutrašnjeg trenja ϕ_i , uvodi u proračun koeficijent unutrašnjeg trenja μ_i . Ovo odgovara *Ohde*-ovoj formulaciji za odnos napona K , koji se uvodi u obliku $K(x)$ kod 2D silosa i odgovarajućem obliku $K(r)$ kod analize 3Dr silosa. Na ovaj način funkcije koje se integrale su obično u obliku algebarskih funkcija, a ne u obliku trigonometrijskih funkcija kao kod *Negi*-a. Matematičke operacije u ovom slučaju analize su jednostavnije.
- Komponentalni naponi se prikazuju u zavisnosti od referentnih konturnih horizontalnih napona (kod 2D silosa), odnosno konturnih radijalnih napona (kod 3Dr silosa). Kod horizontalnih, odnosno radijalnih napona, uvodi se pretpostavka o obliku interpolacione funkcije, a ostali naponi se određuju preko teorijskih veza sa ovim naponima. Na ovaj način izbor interpolacionih funkcija nije slabo uslovljen kao u prethodnom slučaju, već su funkcije povezane na osnovu *Mohr-Coulomb*-ovog uslova loma, pri čemu se vodi računa da za $z \rightarrow \infty$, stanje napona odgovara teorijskom asimptotskom stanju napona. Komponentalni naponi se uvode u metodu integralnih relacija pomoću sledećih izraza, pri čemu prikazane interpolacione funkcije horizontalnih, odnosno radijalnih napona, predstavljaju primere za oblike ovih funkcija:

– kod 2D silosa:

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{x0}(z) + [\sigma_{xb}(z) - \sigma_{x0}(z)] \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 \quad (4.20)$$

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\sigma_x(z, x)}{K(z, x)} \quad (4.21)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \mu_w \cdot \sigma_{xb}(z) \cdot \frac{x}{b} \quad (4.22)$$

$$\sigma_y(z, x) = \sigma_x(z, x) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(z, x)}}{1 + \frac{1}{K(z, 0)}} = \sigma_x(z, x) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(z, x)}}{1 + \frac{1}{K_0}} \quad (4.23)$$

– kod 3Dr silosa:

$$\sigma_r(z, r) = \sigma_{r0}(z) + [\sigma_{rR}(z) - \sigma_{r0}(z)] \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^a \quad (4.24)$$

$$\sigma_z(z, r) = \frac{\sigma_r(z, r)}{K(z, r)} \quad (4.25)$$

$$\tau_{zr}(z, r) = \mu_w \cdot \sigma_{rR}(z) \cdot \frac{r}{R} \quad (4.26)$$

$$\sigma_{\theta}(z, r) = \sigma_r(z, r) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(z, r)}}{1 + \frac{1}{K(z, 0)}} = \sigma_r(z, r) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(z, r)}}{1 + \frac{1}{K_0}} \quad (4.27)$$

Interolaciona funkcija (4.20) kod 2D silosa je u obliku kvadratne parabole, a kod 3Dr silosa se uvodi u obliku stepene funkcije (4.24) sa eksponentom a , koji se određuje numeričkim postupkom ili na drugi način, pri čemu je $a > 1$. Ovi primeri funkcija imaju horizontalnu tangentu u centralnoj osi silosa ($x = 0$, tj. $r = 0$). Postojanje ove tangente na dijagramu radijalnog, odnosno horizontalnog napona u osi silosa, sledi iz simetrije stanja napona i sistema, kako su dijagrami vertikalnih napona i odnosa napona K u obliku glatkih krivih linija. Ovaj uslov nije ispunjen u prethodnoj analizi, gde se koristi izraz (4.18), pri čemu dijagram radijalnih napona ima prelom u centralnoj osi silosa.

Prema datim izrazima vertikalni i prstenasti/transverzalni naponi se prikazuju u funkciji radijalnih/horizontalnih napona i opšteg oblika odnosa napona K . Smičući naponi su uvedeni u obliku linearne funkcije i zavise od konturnog horizontalnog, odnosno radijalnog napona do zida ćelije, prema izrazima (4.22) i (4.26), respektivno. Kod 2D silosa dijagram vertikalnih napona se može prikazati, na osnovu izraza (4.20) i (4.21), gde se uvodi odnos napona K prema izrazu (3.564) u § 3.6.3, u sledećem obliku:

$$\sigma_z(z, x) = \left[\sigma_{x0}(z) + [\sigma_{xb}(z) - \sigma_{x0}(z)] \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 \right] \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 \right) \quad (4.28)$$

U odnosu na prethodnu analizu gde je vertikalni napon opisan izrazom (4.5), gornji izraz (4.28) je u sasvim drugom obliku. Kada $z \rightarrow \infty$, horizontalni naponi su konstantni u asimptotskom stanju napona 2D silosa, i u tom slučaju izraz (4.28) prelazi u egzaktan oblik asimptotskog dijagrama vertikalnih napona (dijagram odgovara segmentu elipse). U prethodnoj analizi, izraz (4.5) je u obliku kvadratne parabole što ne odgovara asimptotskom stanju dijagrama vertikalnih napona.

Kod unapređene primene metode integralnih relacija uvođenje datih interpolacionih funkcija je najvažnije unapređenje kod primene metode, jer se kod njihovog formulisanja vodi računa o asimptotskom stanju napona. Nepoznate referentne veličine konturnih napona se mogu prikazati u obliku proizvoda asimptotskih vrednosti konturnih napona i konturnih funkcija raspodele napona po dubini materijala $Y(z)$. Za 2D i 3Dr silose konturni referentni naponi su:

– kod 2D silosa:

$$\sigma_{xb}(z) = \sigma_{xfb} \cdot Y_b(z) \quad (4.29)$$

$$\sigma_{x0}(z) = \sigma_{xf0} \cdot Y_0(z) \quad (4.30)$$

– kod 3Dr silosa:

$$\sigma_{rR}(z) = \sigma_{rfR} \cdot Y_R(z) \quad (4.31)$$

$$\sigma_{r0}(z) = \sigma_{rf0} \cdot Y_0(z) \quad (4.32)$$

Kada se ovi izrazi uvrste u interpolacione funkcije za horizontalne, odnosno radijalne napone, postaje jasno da su nepoznate funkcije u stvari konturne funkcije raspodele $Y_b(z)$ i $Y_0(z)$ kod 2D silosa, odnosno $Y_R(z)$ i $Y_0(z)$ kod 3Dr silosa. Na ovaj način, kod sistema diferencijalnih jednačina L_1 i L_2 , nepoznate veličine su navedene funkcije raspodele $Y(z)$.

Polje stanja napona je definisano preko odgovarajućih proizvoda funkcija sa razdvojenim variablama x i z kod 2D silosa, odnosno r i z kod 3Dr silosa. Prva funkcija je dimenzionalna veličina koja odgovara asimptotskom dijagramu napona i zavisi od promenljive x , odnosno r , a druga funkcija je bezdimenzionalna i to je funkcija raspodele napona $Y(z)$ po koordinati z . Uvodi se dodatni indeks f kod napona za označavanje asimptotske vrednosti odgovarajuće veličine.

Sistem se svodi na dve integralne relacije sa odvojenim nepoznatim. Pod integralima figurišu funkcije i izvodi funkcija koji ne zavise od integracione promenljive.

Na ovaj način, rešenjem integralnih relacija, integracijom podintegralnih funkcija, dobija se rešenje u obliku diferencijalnih jednačina. S obzirom da se analiziraju dva uslova ravnoteže, rešenje se dobija u obliku dve diferencijalne jednačine, koje čine sistem sa nepoznatim funkcijama Y_0 i Y_b kod 2D silosa, odnosno Y_0 i Y_R kod 3Dr silosa.

Poređenje rezultata analize za 3Dr silose je u ovom radu indirektno, jer odgovarajuća teorijska rešenja nisu pronađena u dostupnoj literaturi. U ovom pogledu, poznato je samo jedno rešenje kod analize 3Dr silosa, gde je primenjena metoda integralnih relacija, koje je formulisano u disertaciji *Negi-a* (1974) [202]. Međutim, *Negi*-evo rešenje stanja napona u materijalu 3Dr silosa, koje je prikazano i u radu *Negi-a* i *Ogilvie-a* (1977) [203], odnosi se na silažu kao materijal u silosu, kod koje je promenljiva težina materijala po dubini. Pored toga, kod teorijskog rešavanja stanja napona materijala uskladištenog u 3Dr silos, *Negi* je upotrebio *Mohr-Coulomb*-ove uslov loma materijala smicanjem na način koji se koristi kod analize 2D silosa. U osnovi, takav pristup odgovara *Walker*-ovoj pretpostavci da su horizontalni naponi σ_x konstantni u preseku kod 2D silosa, odnosno kod 3Dr silosa da su radijalni naponi σ_r konstantni u poprečnom preseku materijala.

Kod 3Dr silosnog problem, uveden je modifikovani oblik za *Ohde*-ov odnos napona K (kao alternativni oblik za odnos napona K), jer je problem određivanja integrala kod metode integralnih relacija postao vrlo složen pri direktnom korišćenju funkcije u *Ohde*-ovoj formulaciji. Kod primene alternativnog oblika odnosa napona K , može se primeniti jedinstvena interpolaciona funkcija za sve normalne napone, pri čemu se iz postupka izostavlja direktno funkcionalno uvođenje odnosa napona K . Alternativni oblik odnosa napona K je primenjen i u analizi 2D silosa, kod formiranja III-2D postupka (u § 4.2.4), kako bi se ispitala njegova primena pri upoređenju rešenja stanja napona sa drugim postupcima analize stanja napona u 2D silosu. Pri razvijanju postupaka proračuna stanja napona materijala u silosima, ustanovilo se da je rešavanje stanja napona kod 3Dr silosa mnogo složenije nego kod 2D silosa.

4.2 Primena metode integralnih relacija kod 2D silosa

Kod metode integralnih relacije koriste se uslovi ravnoteže na diferencijalnom elementu uskladištenog materijala u silosu. U pravouglom koordinatnom sistemu (x, y, z) jednačine ravnoteže na diferencijalnom zapreminskom elementu se dobijaju u sledećem obliku:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (= f_x) \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad (= f_y) \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma \quad (= f_z) \quad (4.35)$$

Ovde su f_x , f_y i f_z zapreminske sile. Kod silosa sa vertikalnim zidovima, z osa se poklapa sa pravcem gravitacije, tako da je $f_z = \gamma$, gde je γ zapreminska težina uskladištenog materijala.

Za ravan problem napona, što odgovara analizi 2D silosa, koristi se koordinatni sistem (x , z). U ovom slučaju kod uslova ravnoteže izvodi napona po y osi su nula, tako da se uslovi ravnoteže elementa određuju samo u pravcu koordinata x i z . Opšti oblik diferencijalnih jednačina ravnoteže u analizi 2D silosa prelazi u ravansku formu:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma \quad (4.37)$$

Ovi uslovi ravnoteže na diferencijalnom elementu za ravno stanje napona predstavljaju sistem dve parcijalne diferencijalne jednačine, gde su nepoznate funkcije komponentalni naponi uskladištenog materijala u posmatranoj tački sa koordinatama x i z .

4.2.1 I-2D postupak – primena konturnih funkcija raspodele i parabolične promene horizontalnih napona sa tačnim oblikom za $K(x)$

Odnos horizontalnog i vertikalnog napona K se može prikazati na sledeće načine:

$$K(z, x) = \frac{\sigma_x(z, x)}{\sigma_z(z, x)} \quad (4.38)$$

$$K(z, x) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \left(\frac{\tau_{zx}(z, x)}{\sigma_x(z, x)} \right)^2}} \quad (4.39)$$

gde je $\kappa = 1$ za aktivno stanje, a $\kappa = -1$ za pasivno stanje napona.

Kada se uvede pretpostavka da je dijagram napona smicanja u obliku trougla, određuje se sledeći oblik odnosa napona K :

$$\tau_{zx}(z, x) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \sigma_x(z, b) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \sigma_{xb}(z) \quad (4.40)$$

$$K(z, x) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \left(\mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \frac{\sigma_x(z, b)}{\sigma_x(z, x)} \right)^2}} \quad (4.41)$$

gde je $\sigma_x(z, b) = \sigma_{xb}(z)$ konturni horizontalni napon do zida ćelije,

Pri uvođenju pretpostavke da su horizontalni naponi konstantni u preseku ćelije na datoj visini z , odnosno za $\sigma_x(z, x) = \sigma_x(z)$, odnos napona K prelazi u sledeći oblik:

$$K(z, x) = K(x) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2}} \quad (4.42)$$

U ovom slučaju K je nezavisno od promenljive z . Oblik odnosa napona (4.42) je formiran na osnovu uvođenja napona smicanja u obliku (4.40). Ovo je klasičan oblik odnosa napona K u *Ohde*-ovoj formulaciji kod analize 2D silosa.

Uvodi se novi oblik pretpostavke za napone smicanja kod 2D silosa:

$$\tau_{zx}(z, x) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \sigma_x(z, x) \quad (4.43)$$

U ovom slučaju i bez uvođenja dodatne pretpostavke o konstantnim horizontalnim naponima u preseku ćelije, direktno se određuje iz opšteg izraza (4.39), da je odnos napona K u obliku (4.42).

Konturne vrednosti odnosa napona K za $x = 0$ i $x = b$, određuju se iz opšteg ili iz *Ohde*-ovog izraza za odnos napona K , u sledećim oblicima:

$$K(b) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \quad (4.44)$$

$$K(0) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} \quad (4.45)$$

Vertikalni napon se određuje iz (4.38), i uvodi odnos napona K prema (4.42), kako sledi:

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\sigma_x(z, x)}{K(x)} \quad (4.46)$$

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_x(z, x) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}\right) \quad (4.47)$$

Konturni horizontalni naponi u sredini silosa i do zida su:

$$\sigma_x(z, 0) = \sigma_{x0}(z) \quad (4.48)$$

$$\sigma_x(z, b) = \sigma_{xb}(z) \quad (4.49)$$

Usvaje se pretpostavka o paraboličnoj promeni napona $\sigma_x(z, x)$ po x osi, u obliku:

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{x0}(z) - (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 \quad (4.50)$$

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{x0}(z) \cdot \left(1 - \left(\frac{x}{b}\right)^2\right) + \sigma_{xb}(z) \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 \quad (4.51)$$

Vertikalni napon se određuje uvođenjem izraza (4.50) u (4.46), odakle se dobija:

$$\begin{aligned} \sigma_z(z, x) &= \frac{\sigma_x(z, x)}{K(x)} = \\ &= \left(\sigma_{x0}(z) - (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2\right) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (4.52)$$

Smičući naponi se određuju uvođenjem (4.50) u (4.43).

Na ovaj način, sva tri komponentalna napona se mogu prikazati preko konturnih horizontalnih napona i odnosa napona $K(x)$, u formi proizvoda razdvojenih funkcija po varijablama z i x , prema sledećim izrazima:

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{x0}(z) - (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 \quad (4.53)$$

$$\sigma_z(z, x) = \left(\sigma_{x0}(z) - (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 \right) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 \right) \quad (4.54)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \left(\sigma_{x0}(z) - (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 \right) \quad (4.55)$$

Kada se u ove izraze uvede da je $x = 0$, odnosno $x = b$, oni se svode na poznate oblike konturnih napona:

$$\sigma_x(z, 0) = \sigma_{x0}(z) \quad (4.56)$$

$$\sigma_z(z, 0) = \sigma_{z0}(z) = \sigma_{x0}(z) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i \right) = \frac{\sigma_{x0}(z)}{K(0)} \quad (4.57)$$

$$\tau_{zx}(z, 0) = \tau_{zx0}(z) = 0 \quad (4.58)$$

$$\sigma_x(z, b) = \sigma_{xb}(z) \quad (4.59)$$

$$\sigma_z(z, b) = \sigma_{zb}(z) = \sigma_{xb}(z) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \right) = \frac{\sigma_{xb}(z)}{K(b)} \quad (4.60)$$

$$\tau_{zx}(z, b) = \tau_{zxb}(z) = \mu_w \cdot \sigma_{xb}(z) \quad (4.61)$$

Diferencijalne jednačine ravnoteže kod 2D silosa su:

$$\frac{\partial \sigma_x(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial z} = 0 \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z(z, x)}{\partial z} = \gamma \quad (4.63)$$

Kada $z \rightarrow \infty$, svi komponentalni naponi teže svojim asimptotskim vrednostima, tako da izvodi napona po z , u ovom slučaju, teže nuli.

Diferencijalne jednačine ravnoteže za $z \rightarrow \infty$ prelaze u sledeći oblik:

$$\frac{\partial \sigma_x(z \rightarrow \infty, x)}{\partial x} = 0 \quad (4.64)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}(z \rightarrow \infty, x)}{\partial x} = \gamma \quad (4.65)$$

Ako se uvede indeks f kao dodatna oznaka za finalnu (asimptotsku) vrednost napona, uslovi ravnoteže se mogu prikazati na sledeći način:

$$\frac{\partial \sigma_{xf}(x)}{\partial x} = 0 \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial \tau_{zxf}(x)}{\partial x} = \gamma \quad (4.67)$$

Iz ovih jednačina integracijom se određuju asimptotske vrednosti horizontalnih i smičućih napona:

$$\sigma_{xf}(x) = const. = \sigma_{xf0} = \sigma_{xfb} = \sigma_{xf} \quad (4.68)$$

$$\tau_{zxf}(x) = \gamma \cdot x \quad (4.69)$$

Za $x = 0$, smičući napon $\tau_{zxf}(0) = 0$, s obzirom na vertikalnu osu simetrije silosa. Smičući naponi se mogu prikazati na sledeći način:

$$\tau_{zf}(b) = \gamma \cdot b \quad (4.70)$$

$$\tau_{zf}(b) = \tau_{zfb} = \gamma \cdot b \quad (4.71)$$

$$\tau_{zf}(x) = \tau_{zfb} \cdot \frac{x}{b} \quad (4.72)$$

Uvodi se *Coulomb*-ovo trenje materijala o zid ćelije, tako da je:

$$\tau_{zfb} = \mu_w \cdot \sigma_{zfb} = \mu_w \cdot \sigma_{zf}, \quad (4.73)$$

odakle sledi da su asimptotski naponi smicanja u obliku:

$$\tau_{zf}(x) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \sigma_{zf} \quad (4.74)$$

Rekapitulacija izraza za asimptotske napone kod 2D silosa, kada $z \rightarrow \infty$, je sledeća:

$$\sigma_{zf}(x) = const. = \sigma_{zf} \quad (4.75)$$

$$\sigma_{zf}(x) = \frac{\sigma_{zf}(x)}{K(x)} = \sigma_{zf} \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2} \right) \quad (4.76)$$

$$\tau_{zf}(x) = \gamma \cdot x = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \sigma_{zf} \quad (4.77)$$

Ovi izrazi se mogu odrediti i iz opštih izraza za napone (4.53) do (4.55), kada se ovi izrazi razmatraju u asimptotskom slučaju za $z \rightarrow \infty$.

Početni uslov za napone, za $z = 0$, se može odrediti iz uslova da gornja površina nasutog materijala nije opterećena, odnosno da su naponi nula. U ovom slučaju su horizontalni naponi $\sigma_x(z=0, x) = \sigma_x(0, x) = 0$, pri čemu su i konturni naponi $\sigma_{x0}(0) = 0$ i $\sigma_{xb}(0) = 0$. Sa ovim su i svi drugi naponi anulirani, u ovom slučaju početnih uslova.

Kod metode integralnih relacija, diferencijalne jednačine ravnoteže se integrale u sledećem obliku:

$$\int_0^b \left(\frac{\partial \sigma_x(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial z} \right) \cdot dx = 0 \quad (4.78)$$

$$\int_0^b \left(\frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z(z, x)}{\partial z} \right) \cdot dx = \int_0^b \gamma \cdot dx \quad (4.79)$$

Kada posmatramo samo podintegralne funkcije, i kod njih uvedemo komponentalne napone u opštem obliku prema izrazima (4.53) do (4.55), može se izvršiti parcijalno diferenciranje napona po odgovarajućoj promenljivoj x odnosno z . Postupak se dalje prikazuje odvojeno prema uslovima ravnoteže.

I uslov ravnoteže (horizontalne sile)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \sigma_x(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial z} = \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_{x0}(z) - (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \left(\sigma_{x0}(z) - (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^2 \right) \right) = \quad (4.80) \\ & = -2(\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \frac{x}{b^2} + \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \left(\frac{d}{dz} \sigma_{x0}(z) - \left(\frac{d}{dz} \sigma_{x0}(z) - \frac{d}{dz} \sigma_{xb}(z) \right) \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \end{aligned}$$

$$\int_0^b \left(-2(\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \frac{x}{b^2} + \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \left(\frac{d}{dz} \sigma_{x0}(z) - \left(\frac{d}{dz} \sigma_{x0}(z) - \frac{d}{dz} \sigma_{xb}(z) \right) \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \right) \cdot dx = 0 \quad (4.81)$$

Kod integracije se uzima da je $\mu_i > \mu_w$, $\mu_i > 0$, $\mu_w > 0$ i $b > 0$. Nakon integracije i sređivanja izraza, određuje se rešenje u obliku sledeće diferencijalne jednačine:

$$\frac{1}{4} \cdot \mu_w \cdot b \cdot \left(\frac{d}{dz} \sigma_{x0}(z) + \frac{d}{dz} \sigma_{xb}(z) \right) - \sigma_{x0}(z) + \sigma_{xb}(z) = 0 \quad (4.82)$$

II uslov ravnoteže (vertikalne sile)

$$\begin{aligned} & \int_0^b \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \left(\sigma_{x0}(z) - (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \right) + \dots \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(\left(\sigma_{x0}(z) - (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \right) \right] \cdot dx = \quad (4.83) \\ & = \int_0^b \gamma \cdot dx = \gamma \cdot b \end{aligned}$$

Kod integracije se uzima da je $\mu_i > \mu_w$, $\mu_i > 0$, $\mu_w > 0$ i $b > 0$. Nakon integracije i sređivanja izraza, određuje se sledeća diferencijalna jednačina:

$$k_{2d0} \cdot \frac{d}{dz} \sigma_{x0}(z) \cdot b + k_{2db} \cdot \frac{d}{dz} \sigma_{xb}(z) \cdot b + \mu_w \cdot \sigma_{xb}(z) = \gamma \cdot b \quad (4.84)$$

Koeficijenti uz prve izvode konturnih horizontalnih napona su:

$$k_{2d0} = \frac{1}{4} \cdot \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left(\sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \left(2 + \frac{\mu_i^2}{\mu_w^2} \right) + \frac{\mu_i^2}{\mu_w} \cdot \arcsin \left(\frac{\mu_w}{\mu_i} \right) \cdot \left(4 - \frac{\mu_i^2}{\mu_w^2} \right) \right) + \frac{2}{3} (1 + 2\mu_i^2) \quad (4.85)$$

$$k_{2db} = \frac{1}{4} \cdot \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left(\sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \left(2 - \frac{\mu_i^2}{\mu_w^2} \right) + \frac{\mu_i^4}{\mu_w^3} \cdot \arcsin \left(\frac{\mu_w}{\mu_i} \right) \right) + \frac{1}{3} (1 + 2\mu_i^2) \quad (4.86)$$

Dobijen je sistem od dve diferencijalne jednačine, gde je potrebno odrediti nepoznate funkcije $\sigma_{x0}(z)$ i $\sigma_{xb}(z)$:

$$\frac{\mu_w}{4} \cdot \frac{d}{dz} \sigma_{x0}(z) \cdot b + \frac{\mu_w}{4} \cdot \frac{d}{dz} \sigma_{xb}(z) \cdot b - \sigma_{x0}(z) + \sigma_{xb}(z) = 0 \quad (4.87)$$

$$k_{2d0} \cdot \frac{d}{dz} \sigma_{x0}(z) \cdot b + k_{2db} \cdot \frac{d}{dz} \sigma_{xb}(z) \cdot b + \mu_w \cdot \sigma_{xb}(z) = \gamma \cdot b \quad (4.88)$$

Rešavanje sistema diferencijalnih jednačina

Prvo se eliminiše izvod $d\sigma_{x0}(z)/dz$ iz sistema, na taj način što se iz prve jednačine odredi $d\sigma_{x0}(z)/dz$ i zameni u drugu jednačinu koja se odredi po $\sigma_{x0}(z)$, prema sledećem:

$$\sigma'_{x0}(z) \cdot \frac{\mu_w}{4} \cdot b + \sigma'_{xb}(z) \cdot \frac{\mu_w}{4} \cdot b - \sigma_{x0}(z) + \sigma_{xb}(z) = 0 \quad (4.89)$$

$$\sigma'_{x0}(z) \cdot k_{2d0} \cdot b + \sigma'_{xb}(z) \cdot k_{2db} \cdot b + \sigma_{xb}(z) \cdot \mu_w = \gamma \cdot b \quad (4.90)$$

$$\sigma'_{x0}(z) = -\sigma'_{xb}(z) + \frac{4}{\mu_w \cdot b} (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \quad (4.91)$$

$$\sigma_{x0}(z) = \sigma'_{xb}(z) \cdot b \cdot \mu_w \cdot \frac{k_{2d0} - k_{2db}}{4k_{2d0}} + \sigma_{xb}(z) \cdot \frac{4k_{2d0} - \mu_w^2}{4k_{2d0}} + \gamma \cdot b \cdot \frac{\mu_w}{4k_{2d0}} \quad (4.92)$$

Gornja jednačina se diferencira po z :

$$\sigma'_{x0}(z) = \sigma''_{xb}(z) \cdot b \cdot \mu_w \cdot \frac{k_{2d0} - k_{2db}}{4k_{2d0}} + \sigma'_{xb}(z) \cdot \frac{4k_{2d0} - \mu_w^2}{4k_{2d0}} \quad (4.93)$$

Ovaj izvod se zamenjuje u diferencijalnu jednačinu (4.90) i posle sređivanja se dobija diferencijalna jednačina drugog reda po nepoznatoj funkciji napona $\sigma_{xb}(z)$:

$$a_2 \cdot b^2 \cdot \sigma''_{xb}(z) + a_1 \cdot b \cdot \sigma'_{xb}(z) + \mu_w \cdot \sigma_{xb}(z) = \gamma \cdot b \quad (4.94)$$

gde su koeficijenti a_1 i a_2 :

$$a_2 = \frac{\mu_w}{4} \cdot (k_{2d0} - k_{2db}) \quad (4.95)$$

$$a_1 = k_{2d0} + k_{2db} - \frac{\mu_w^2}{4} \quad (4.96)$$

Rešenje diferencijalne jednačine 2-og reda (4.94) je u obliku:

$$\sigma_{xb}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.97)$$

gde su C_1 i C_2 konstante integracije, koje se određuju uvođenjem početnih uslova, a k_1 i k_2 su bezdimenzionalni karakteristični koeficijenti integracije:

$$k_1 = \frac{1}{2} \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4\mu_w \cdot a_2}}{a_2} \quad (4.98)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4\mu_w \cdot a_2}}{a_2} \quad (4.99)$$

Određuje se konturni napona u vertikalnoj osi silosa $\sigma_{x0}(z)$ na osnovu (4.92):

$$\sigma_{x0}(z) = \sigma'_{xb}(z) \cdot b \cdot \mu_w \cdot \frac{k_{2d0} - k_{2db}}{4k_{2d0}} + \sigma_{xb}(z) \cdot \frac{4k_{2d0} - \mu_w^2}{4k_{2d0}} + \gamma \cdot b \cdot \frac{\mu_w}{4k_{2d0}} \quad (4.100)$$

Određuje se izvod po dobijenom rešenju napona $\sigma_{xb}(z)$ prema (4.97):

$$\sigma'_{xb}(z) = -C_1 \cdot \frac{k_1}{b} \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - C_2 \cdot \frac{k_2}{b} \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.101)$$

Uvode se izrazi (4.101) i (4.97), u izraz (4.100), odakle se određuje $\sigma_{x0}(z)$, kako sledi:

$$\begin{aligned} \sigma_{x0}(z) = & \left(-C_1 \cdot \frac{k_1}{b} \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - C_2 \cdot \frac{k_2}{b} \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \right) \cdot b \cdot \mu_w \cdot \frac{k_{2d0} - k_{2db}}{4k_{2d0}} + \\ & + \left(\frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \right) \cdot \frac{4k_{2d0} - \mu_w^2}{4k_{2d0}} + \gamma \cdot b \cdot \frac{\mu_w}{4k_{2d0}} \end{aligned} \quad (4.102)$$

$$\sigma_{x_0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} \cdot \left(1 - \frac{\mu_w^2}{4k_{2d0}} - k_1 \cdot \mu_w \cdot \frac{k_{2d0} - k_{2db}}{4k_{2d0}} \right) + C_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \cdot \left(1 - \frac{\mu_w^2}{4k_{2d0}} - k_2 \cdot \mu_w \cdot \frac{k_{2d0} - k_{2db}}{4k_{2d0}} \right) \quad (4.103)$$

$$\sigma_{x_0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.104)$$

$$c_1 = 1 - \frac{\mu_w^2}{4k_{2d0}} - k_1 \cdot \mu_w \cdot \frac{k_{2d0} - k_{2db}}{4k_{2d0}} \quad (4.105)$$

$$c_2 = 1 - \frac{\mu_w^2}{4k_{2d0}} - k_2 \cdot \mu_w \cdot \frac{k_{2d0} - k_{2db}}{4k_{2d0}} \quad (4.106)$$

Određivanje $\sigma_{x_0}(z)$ na drugi način: odrede se izvodi $\sigma'_{xb}(z)$ i $\sigma''_{xb}(z)$, smeni se (4.93) u (4.89), odakle se odredi $\sigma_{x_0}(z)$ i posle uvođenja opšteg rešenja za napon $\sigma_{xb}(z)$ i izvoda $\sigma'_{xb}(z)$ i $\sigma''_{xb}(z)$, dobija se isti oblik rešenja:

$$\sigma_{x_0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.107)$$

gde su koeficijenti:

$$c_1 = 1 - a_{01} \cdot k_1 + a_{02} \cdot k_1^2 \quad (4.108)$$

$$c_2 = 1 - a_{01} \cdot k_2 + a_{02} \cdot k_2^2 \quad (4.109)$$

$$a_{01} = \frac{1}{16} \cdot \mu_w \cdot \frac{8k_{2d0} - \mu_w^2}{k_{2d0}} \quad (4.110)$$

$$a_{02} = \frac{1}{16} \cdot \mu_w^2 \cdot \frac{k_{2d0} - k_{2db}}{k_{2d0}} \quad (4.111)$$

Rešenje je proračunski jednako, ali se preporučuje primena jednostavnijih izraza za koeficijente c_1 i c_2 prema (4.105) i (4.106).

Integracione konstante C_1 i C_2 se određuju iz početnih uslova za horizontalne napone:

$$\sigma_{xb}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.112)$$

$$\sigma_{x_0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.113)$$

Početni uslovi

Početni uslovi za određivanje integracionih konstanti se odnose na naponske uslove na nivou $z = 0$. Uobičajeni slučaj je neopterećena gornja površina materijala. U pitanju je ravno nasut ili poravnat materijal u ćeliji na nivou $z = 0$.

I slučaj početnih uslova

Za ravnu gornju površinu materijala, svi vertikalni naponi u materijalu na ovom nivou su nula, tj. $\sigma_z(0, x) = \sigma_{z_0}(0) = \sigma_{zb}(0) = 0$.

Kako su vertikalni i horizontalni naponi u vezi preko odnosa K , sledi da su i svi horizontalni naponi $\sigma_x(0, x) = 0$.

U ovom slučaju je za $z = 0$:

$$\sigma_{x0}(0) = 0 \quad (4.114)$$

$$\sigma_{xb}(0) = 0 \quad (4.115)$$

Primena ovih uslova na (4.112) i (4.113), daje sistem od dve linearne jednačine:

$$\frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 + C_2 = 0 \quad (4.116)$$

$$\frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot c_1 + C_2 \cdot c_2 = 0 \quad (4.117)$$

iz kojeg se određuju integracione konstante:

$$C_1 = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \frac{c_2 - 1}{c_1 - c_2} \quad (4.118)$$

$$C_2 = -\frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \frac{c_1 - 1}{c_1 - c_2} \quad (4.119)$$

Za ovaj slučaj početnih uslova, konturni naponi se dobijaju u konačnom obliku:

$$\sigma_{xb}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left(1 + \frac{c_2 - 1}{c_1 - c_2} \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{b}} - \frac{c_1 - 1}{c_1 - c_2} \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{b}} \right) \quad (4.120)$$

$$\sigma_{x0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left(1 + \frac{c_2 - 1}{c_1 - c_2} \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{b}} - \frac{c_1 - 1}{c_1 - c_2} \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{b}} \right) \quad (4.121)$$

Kako nema nasipnog dela materijala, jer je materijal ravan, u ovom slučaju sledi da je:

$$\sigma_{x0N} = 0 \quad (4.122)$$

$$h_0 = 0 \quad (4.123)$$

$$h_N = 0 \quad (4.124)$$

gde su: σ_{x0N} horizontalni pritisak od nasipnog dela u sredini silosa na nivou $z = 0$; h_0 ekvivalentna visina poravnanja nasipnog dela i h_N visina nasipne prizme kod 2D silosa.

II slučaj početnih uslova

U ovom slučaju je za $z = 0$ (parcijalna nasipna prizma):

$$\sigma_{xb}(0) = 0 \quad (4.125)$$

$$\left. \frac{d}{dz} \sigma_{xb}(z) \right|_{z=0} = 0 \quad (4.126)$$

Drugi slučaj je uzet u skladu sa razmatranjem *Evesque*-a i *de Gennes*-a (1998) [78] i *de Gennes*-a (2008) [94], da se do zida u gornjem sloju materijala, tj. na nivou $z = 0$, ne aktivira trenje materijala o zid ćelije. S obzirom da je u samom gornjem uglu kod spajanja materijala sa zidom ćelije horizontalni napon nula, uslov da je i prvi izvod ovog napona nula, odgovara pretpostavci o neaktiviranom trenju materijala o zid ćelije. S druge strane, primena *I slučaja početnih uslova*, kod stanja napona u gornjem delu materijala u

ugaonim zonama pokazuje pojavu napona zatezanja, što ne odgovara fizičkom problemu opterećenja rastresitog materijala (isto se pojavljuje kod primene MKE u ovoj zoni, ako u fizičkom modelu materijala nije uvedena opcija isključenja pojave napona zatezanja). Kod primene *II slučaja početnih uslova* prethodni problem je eliminisan.

Na osnovu izraza (4.97) i (4.101), i zadate početne uslove (4.125) i (4.126), određuje se:

$$\sigma_{xb}(0) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 + C_2 = 0 \quad (4.127)$$

$$\left. \frac{d}{dz} \sigma_{xb}(z) \right|_{z=0} = -\frac{k_1}{b} \cdot C_1 - \frac{k_2}{b} \cdot C_2 = 0 \quad (4.128)$$

Iz ovog sistema se određuju integracione konstante:

$$C_1 = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \frac{k_2}{k_1 - k_2} \quad (4.129)$$

$$C_2 = -\frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \frac{k_1}{k_1 - k_2} \quad (4.130)$$

U ovom slučaju početnih uslova konturni naponi se dobijaju u konačnom obliku:

$$\sigma_{xb}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left(1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \right) \quad (4.131)$$

$$\sigma_{x0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left(1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \right) \quad (4.132)$$

Horizontalni napon u sredini gornje površine ($z = 0$) iznosi:

$$\sigma_{x0}(0) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left(1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot c_1 - \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot c_2 \right) = \sigma_{x0N} \quad (4.133)$$

Ovaj napon odgovara horizontalnom naponu koji proizvodi gornji nasipni deo materijala, dok je odgovarajući vertikalni napon:

$$\sigma_{z0}(0) = \frac{\sigma_{x0}(0)}{K(0)} = \frac{\sigma_{x0N}}{K(0)} = \sigma_{z0N} \quad (4.134)$$

Vertikalni napon σ_{z0N} i horizontalni napon σ_{x0N} se sračunavaju iz prethodno datih izraza. Na osnovu ovih napona, može se odrediti težina nasipnog dela materijala (kao težina fiktivne parcijalne nasipne prizme), kao i visina trogaonog nasipa materijala h_N , i visina h_0 ekvivalentne površine poravnatog materijala trougaonog nasipa kod 2D silosa u odnosu na referentnu ravan $z = 0$.

U tom pravcu se određuje ravnoteža između težine nasipa materijala iznad nivoa $z = 0$ i integrala vertikalnog napona $\sigma_z(0, x)$ po površini preseka materijala u ćeliji.

U opšti izraz za vertikalni napon (4.54), uvodi se horizontalni napon $\sigma_{xb}(0) = 0$ za $z = 0$, odakle se dobija dijagram vertikalnog opterećenja na gornjoj površini materijala:

$$\sigma_z(0, x) = \sigma_{x0}(0) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2K \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}} \right) \quad (4.135)$$

Integracijom vertikalnog napona po površini preseka, odnosno po promenljivoj x (u y pravcu se uzima da je presek jedinične dužine), određuje se ukupna težina Q_N nasipnog dela materijala iznad nivoa $z = 0$, na sledeći način:

$$Q_N = 2 \cdot \int_0^b \sigma_z(0, x) \cdot dx = 2 \cdot \sigma_{x0}(0) \cdot \int_0^b \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}}\right) \cdot dx \quad (4.136)$$

Težina parcijalne nasipne prizme se dobija u obliku:

$$Q_N = 2b \cdot k_{2d0} \cdot \sigma_{x0}(0) \quad (4.137)$$

Težina poravnate parcijalne nasipne prizme je:

$$Q_N = 2b \cdot h_0 \cdot \gamma \quad (4.138)$$

Na osnovu (4.137) i (4.138), određuje se visina ekv. površine poravnatog materijala:

$$h_0 = \frac{k_{2d0} \cdot \sigma_{x0}(0)}{\gamma} \quad (4.139)$$

Horizontalni napon u sredini silosa, na nivou $z = 0$, je:

$$\sigma_{x0}(0) = \sigma_{z0}(0) \cdot K(0) = \sigma_{z0N} \cdot K(0) = \sigma_{x0N} \quad (4.140)$$

U slučaju početnih uslova koji odgovaraju uvođenju parcijalnog nasipa, sledi da je:

$$\sigma_{x0N} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left(1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot c_1 - \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot c_2\right) \quad (4.141)$$

$$h_0 = \frac{k_{2d0} \cdot \sigma_{x0N}}{\gamma} \quad (4.142)$$

$$h_N = 2h_0 \quad (4.143)$$

III slučaj početnih uslova

U ovom slučaju je za $z = 0$ (prirodna nasipna prizma)

$$\sigma_{xb}(0) = 0 \quad (4.144)$$

$$\sigma_{x0}(0) = \sigma_{x0N} \quad (4.145)$$

Ovde se razmatra napon od trougaone nasipne prizme iznad nivoa $z = 0$.

Visina trougaonog nasipa je:

$$h_N = b \cdot \tan \phi_r \quad (4.146)$$

gde je ϕ_r ugao prirodnog nagiba zrnastog materijala.

Kao aproksimaciju možemo uzeti da je ovaj ugao:

$$\phi_r \cong 0.9 \cdot \phi_i \quad (4.147)$$

gde je ϕ_r ugao unutrašnjeg trenja zrnastog materijala. U ovom slučaju je visina nasipa:

$$h_N = b \cdot \tan(0.9 \cdot \arctan \mu_i) \quad (4.148)$$

Kao u analizi kod prethodnog slučaja početnih uslova, određuje se :

$$h_0 = \frac{1}{2} h_N \quad (4.149)$$

$$Q_N = 2b \cdot k_{2d0} \cdot \sigma_{x0N} = 2b \cdot h_0 \cdot \gamma \quad (4.150)$$

$$\sigma_{x0N} = \frac{\gamma \cdot h_0}{k_{2d0}} \quad (4.151)$$

Početni uslovi se odnose na nivo $z = 0$, tako da se na osnovu (4.112) i (4.113), određuje:

$$\frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 + C_2 = 0 \quad (4.152)$$

$$\frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot c_1 + C_2 \cdot c_2 = \sigma_{x0N} \quad (4.153)$$

Iz ovog sistema se određuju integracione konstante:

$$C_1 = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \frac{c_2 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \quad (4.154)$$

$$C_2 = -\frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \frac{c_1 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \quad (4.155)$$

U ovom slučaju početnih uslova konturni naponi se dobijaju u konačnom obliku:

$$\sigma_{xb}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left(1 + \frac{c_2 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{b}} - \frac{c_1 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{b}} \right) \quad (4.156)$$

$$\sigma_{x0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left(1 + \frac{c_2 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{b}} - \frac{c_1 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{b}} \right) \quad (4.157)$$

Rekapitulacija postupka proračuna

Na osnovu prethodnih izvođenja mogu se i *I* i *II slučaj* početnih uslova obuhvatiti preko *III* slučaja početnih uslova tako da izrazi ovog opštijeg slučaja, tj. izrazi (4.156) i (4.157), važe za sva tri slučaja početnih uslova, uz sledeće postavke:

- kod *I slučaja* početnih uslova (bez nasipa)

Kako nema nasipnog dela materijala, jer je gornja površina materijala ravna, to je:

$$\sigma_{x0N} = 0 \quad (4.158)$$

$$h_0 = 0 \quad (4.159)$$

$$h_N = 0 \quad (4.160)$$

- kod *II slučaja* početnih uslova (parcijalni nasip)

$$\sigma_{x0N} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left(1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot c_1 - \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot c_2 \right) \quad (4.161)$$

$$h_0 = \frac{k_{2d0} \cdot \sigma_{x0N}}{\gamma} \quad (4.162)$$

$$h_N = 2h_0 \quad (4.163)$$

- kod III slučaja početnih uslova (prirodni nasip)

$$h_N = b \cdot \tan \phi_r \quad \text{ili} \quad (4.164)$$

$$h_N = b \cdot \tan(0.9 \cdot \arctan \mu_i) \quad (4.165)$$

$$h_0 = \frac{1}{2} h_N \quad (4.166)$$

$$\sigma_{x0N} = \frac{\gamma \cdot h_0}{k_{2d0}} \quad (4.167)$$

Konturni naponi i funkcije raspodele su:

$$\sigma_{xb}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot Y_b(z) \quad (4.168)$$

$$\sigma_{x0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot Y_0(z) \quad (4.169)$$

$$\sigma_{zb}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{K_b \cdot \mu_w} \cdot Y_b(z) \quad (4.170)$$

$$\sigma_{z0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{K_0 \cdot \mu_w} \cdot Y_0(z) \quad (4.171)$$

$$\tau_{zxb}(z) = \mu_w \cdot \sigma_{xb}(z) \quad (4.172)$$

$$\tau_{zx0}(z) = 0 \quad (4.173)$$

$$Y_b(z) = 1 + \frac{c_2 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - \frac{c_1 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.174)$$

$$Y_0(z) = 1 + \frac{c_2 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - \frac{c_1 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.175)$$

Opšti izrazi za stanje napona (sa konturnim funkcijama horizontalnih napona):

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{x0}(z) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) + \sigma_{xb}(z) \cdot \frac{x^2}{b^2} \quad (4.176)$$

$$\sigma_z(z, x) = \left(\sigma_{x0}(z) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) + \sigma_{xb}(z) \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \quad (4.177)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \left(\sigma_{x0}(z) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) + \sigma_{xb}(z) \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \quad (4.178)$$

Opšti izrazi za napone sa uvođenjem funkcija raspodele:

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left(Y_0(z) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) + Y_b(z) \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \quad (4.179)$$

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left(Y_0(z) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) + Y_b(z) \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \quad (4.180)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \gamma \cdot x \cdot \left(Y_0(z) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{b^2} \right) + Y_b(z) \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \quad (4.181)$$

U postupku se primenjuju sledeći pomoćni koeficijenti (po redosledu sračunavanja):

$$k_{2d0} = \frac{1}{4} \cdot \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left(\sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \left(2 + \frac{\mu_i^2}{\mu_w^2} \right) + \frac{\mu_i^2}{\mu_w} \cdot \arcsin \left(\frac{\mu_w}{\mu_i} \right) \cdot \left(4 - \frac{\mu_i^2}{\mu_w^2} \right) \right) + \frac{2}{3} (1 + 2\mu_i^2) \quad (4.182)$$

$$k_{2db} = \frac{1}{4} \cdot \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left(\sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \left(2 - \frac{\mu_i^2}{\mu_w^2} \right) + \frac{\mu_i^4}{\mu_w^3} \cdot \arcsin \left(\frac{\mu_w}{\mu_i} \right) \right) + \frac{1}{3} (1 + 2\mu_i^2) \quad (4.183)$$

$$a_1 = k_{2d0} + k_{2db} - \frac{\mu_w^2}{4} \quad (4.184)$$

$$a_2 = \frac{\mu_w}{4} \cdot (k_{2d0} - k_{2db}) \quad (4.185)$$

$$k_1 = \frac{1}{2} \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4\mu_w \cdot a_2}}{a_2} \quad (4.186)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4\mu_w \cdot a_2}}{a_2} \quad (4.187)$$

$$c_1 = 1 - \frac{\mu_w^2}{4k_{2d0}} - k_1 \cdot \mu_w \cdot \frac{k_{2d0} - k_{2db}}{4k_{2d0}} \quad (4.188)$$

$$c_2 = 1 - \frac{\mu_w^2}{4k_{2d0}} - k_2 \cdot \mu_w \cdot \frac{k_{2d0} - k_{2db}}{4k_{2d0}} \quad (4.189)$$

Potrebno je napomenuti da su u postupku formiranja rešenja za stanje napona kod 2D silosa, kao referentni naponi uvedeni horizontalni naponi. Pored toga upotrebljen je poseban oblik za napone smicanja prema izrazu (4.43). Kod asimptotskog stanja napona, kada $z \rightarrow \infty$, funkcije raspodele Y_b i Y_0 teže ka jedinici. U ovom slučaju horizontalni naponi prema (4.179) postaju konstantni, a smičući naponi prema (4.181) dobijaju trougaonu formu (γx), dok vertikalni naponi prema (4.180) dobijaju oblik segmenta elipse. Ovo u potpunosti odgovara *Ohde*-ovoj analizi asimptotskog stanja napona materijala u 2D silosu.

4.2.2 II-2D postupak - primena konturnih funkcija raspodele i elipsaste promene horizontalnih napona sa tačnim oblikom za $K(x)$

Primena elipsaste promene napona $\sigma_x(z, x)$ po koordinati x kod 2D silosa, može se uvesti na isti način kao u prethodnom poglavlju gde je primenjena parabolična promena napona. Za datu pretpostavku o obliku smičućih napona:

$$\tau_{zx}(z, x) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \sigma_x(z, x) \quad (4.190)$$

Sledi da odnos napona K ne zavisi od koordinate z , i tačno se dobija u obliku ovog odnosa za beskonačnu dubinu materijala:

$$K(z, x) = K(x) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2}} \quad (4.191)$$

Određuje se vertikalni napon u obliku:

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\sigma_x(z, x)}{K(x)} \quad (4.192)$$

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_x(z, x) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2}\right) \quad (4.193)$$

Usvaje se pretpostavka o elipsastoj promeni napona $\sigma_x(z, x)$ po koordinati x

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{x0}(z) - (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_w \cdot x}{\mu_i \cdot b}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right)^2}} \quad (4.194)$$

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{x0}(z) \cdot \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_w \cdot x}{\mu_i \cdot b}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right)^2}}\right) + \sigma_{xb}(z) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_w \cdot x}{\mu_i \cdot b}\right)^2}}{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right)^2}} \quad (4.195)$$

Na sličan način kao u prethodnom poglavlju, određuju se vertikalni i smičući naponi:

$$\begin{aligned} \sigma_z(z, x) &= \frac{\sigma_x(z, x)}{K(x)} = \\ &= \left(\sigma_{x0}(z) - (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2 \cdot x^2}{\mu_i^2 \cdot b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}}\right) \end{aligned} \quad (4.196)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \left(\sigma_{x0}(z) - (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2 \cdot x^2}{\mu_i^2 \cdot b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) \quad (4.197)$$

Važe izrazi (4.56) do (4.79) iz prethodnog poglavlja, uz data objašnjenja. Potrebni parcijalni izvodi napona se određuju prema sledećim izrazima:

$$\frac{\partial \sigma_x(z, x)}{\partial x} = - \frac{(\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}\right)} \quad (4.198)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial z} = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \left(\sigma'_{x0}(z) - (\sigma'_{x0}(z) - \sigma'_{xb}(z)) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) \quad (4.199)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial x} = \frac{\mu_w}{b} \cdot \left(\sigma_{x0}(z) - (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) - \frac{(\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \cdot \frac{\mu_w^3}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^3}}{\sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}\right)} \quad (4.200)$$

$$\frac{\partial \sigma_z(z, x)}{\partial z} = \left(\sigma'_{x0}(z) - (\sigma'_{x0}(z) - \sigma'_{xb}(z)) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{x^2}{b^2} \right) \quad (4.201)$$

Dati parcijalni izvodi se uvode u integralne uslove ravnoteže:

$$\int_0^b \left(\frac{\partial \sigma_x(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial z} \right) \cdot dx = 0 \quad (4.202)$$

$$\int_0^b \left(\frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z(z, x)}{\partial z} \right) \cdot dx = \int_0^b \gamma \cdot dx \quad (4.203)$$

Rešenjem ovih integrala, formira se sistem od dve diferencijalne jednačine, kod kojih je potrebno odrediti nepoznate funkcije $\sigma_{x0}(z)$ i $\sigma_{xb}(z)$:

$$k_{1d0} \cdot \sigma'_{x0}(z) \cdot b + k_{1db} \cdot \sigma'_{xb}(z) \cdot b - \sigma_{x0}(z) + \sigma_{xb}(z) = 0 \quad (4.204)$$

$$k_{2d0} \cdot \sigma'_{x0}(z) \cdot b + k_{2db} \cdot \sigma'_{xb}(z) \cdot b + \mu_w \cdot \sigma_{xb}(z) = \gamma \cdot b \quad (4.205)$$

Koeficijenti kod ovih jednačina su:

$$k_{1d0} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2\mu_i^3 - (2\mu_i^2 + \mu_w^2) \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{\mu_w \cdot (\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2})} \quad (4.206)$$

$$k_{1db} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3\mu_i \cdot \mu_w^2 - 2\mu_i^3 + 2(\mu_i^2 - \mu_w^2) \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{\mu_w \cdot (\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2})} \quad (4.207)$$

$$k_{2d0} = \frac{\mu_w \cdot \left(\mu_i^2 + \frac{1}{3} \mu_w^2 \right) \cdot \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} - \left(\frac{1}{2} \cdot \mu_w + \mu_w \cdot \mu_i^2 + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i^2 \cdot \arcsin \left(\frac{\mu_w}{\mu_i} \right) \right) \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} + \left(\frac{1}{2} + \mu_i^2 \right) \cdot \mu_i^2 \cdot \arcsin \left(\frac{\mu_w}{\mu_i} \right)}{\mu_w \cdot (\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2})} \quad (4.208)$$

$$k_{2db} = \frac{\left(\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i - \frac{1}{2} - \mu_i^2 \right) \cdot \mu_w \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} + \left(\frac{2}{3} \mu_w^3 - 2\mu_w \cdot \mu_i^2 + \mu_i^3 \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) \right) \cdot \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} - \mu_i \cdot \left(\frac{1}{2} + \mu_i^2 \right) \cdot \left(\mu_i \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) - 2\mu_w \right)}{\mu_w \cdot (\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2})} \quad (4.209)$$

Rešavanje sistema diferencijalnih jednačina

Prvo se eliminiše izvod $d\sigma_{x0}(z)/dz$ iz sistema, na taj način što se iz prve jednačine odredi $d\sigma_{x0}(z)/dz$ i zameni u drugu jednačinu koja se odredi po $\sigma_{x0}(z)$, prema sledećem:

$$\sigma'_{x0}(z) = -\frac{k_{1db}}{k_{1d0}} \cdot \sigma'_{xb}(z) + \frac{1}{k_{1d0} \cdot b} (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \quad (4.210)$$

$$\begin{aligned} k_{2d0} \cdot \left(-\frac{k_{1db}}{k_{1d0}} \cdot \sigma'_{xb}(z) + \frac{1}{k_{1d0} \cdot b} (\sigma_{x0}(z) - \sigma_{xb}(z)) \right) \cdot b + k_{2db} \cdot \sigma'_{xb}(z) \cdot b + \mu_w \cdot \sigma_{xb}(z) &= \gamma \cdot b \\ -\frac{k_{2d0} \cdot k_{1db}}{k_{1d0}} \cdot b \cdot \sigma'_{xb}(z) + \frac{k_{2d0}}{k_{1d0}} \cdot \sigma_{x0}(z) - \frac{k_{2d0}}{k_{1d0}} \cdot \sigma_{xb}(z) + k_{2db} \cdot \sigma'_{xb}(z) \cdot b + \mu_w \cdot \sigma_{xb}(z) &= \gamma \cdot b \\ \frac{k_{2d0}}{k_{1d0}} \cdot \sigma_{x0}(z) &= +\frac{k_{2d0}}{k_{1d0}} \cdot \sigma_{xb}(z) + \frac{k_{2d0} \cdot k_{1db}}{k_{1d0}} \cdot b \cdot \sigma'_{xb}(z) - k_{2db} \cdot \sigma'_{xb}(z) \cdot b - \mu_w \cdot \sigma_{xb}(z) + \gamma \cdot b \\ \sigma_{x0}(z) &= \sigma'_{xb}(z) \cdot b \cdot \left(k_{1db} - k_{2db} \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} \right) + \sigma_{xb}(z) \cdot \left(1 - \mu_w \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} \right) + \gamma \cdot b \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} \end{aligned} \quad (4.211)$$

Gornja jednačina se diferencira po z :

$$\sigma'_{x0}(z) = \sigma''_{xb}(z) \cdot b \cdot \left(k_{1db} - k_{2db} \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} \right) + \sigma'_{xb}(z) \cdot \left(1 - \mu_w \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} \right) \quad (4.212)$$

Ovaj izvod se uvodi u diferencijalnu jednačinu (4.205) i posle sređivanja se dobija diferencijalna jednačina drugog reda po nepoznatoj funkciji napona $\sigma_{xb}(z)$, kako sledi:

$$k_{2d0} \cdot \left(\sigma''_{xb}(z) \cdot b \cdot \left(k_{1db} - k_{2db} \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} \right) + \sigma'_{xb}(z) \cdot \left(1 - \mu_w \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} \right) \right) \cdot b + k_{2db} \cdot \sigma'_{xb}(z) \cdot b + \mu_w \cdot \sigma_{xb}(z) = \gamma \cdot b \quad (4.213)$$

$$\sigma''_{xb}(z) \cdot b^2 \cdot (k_{2d0} \cdot k_{1db} - k_{2db} \cdot k_{1d0}) + \sigma'_{xb}(z) \cdot b \cdot (k_{2d0} + k_{2db} - \mu_w \cdot k_{1d0}) + \mu_w \cdot \sigma_{xb}(z) = \gamma \cdot b \quad (4.214)$$

$$a_2 \cdot b^2 \cdot \sigma''_{xb}(z) + a_1 \cdot b \cdot \sigma'_{xb}(z) + \mu_w \cdot \sigma_{xb}(z) = \gamma \cdot b \quad (4.215)$$

gde su koeficijenti a_1 i a_2 :

$$a_2 = k_{2d0} \cdot k_{1db} - k_{2db} \cdot k_{1d0} \quad (4.216)$$

$$a_1 = k_{2d0} + k_{2db} - \mu_w \cdot k_{1d0} \quad (4.217)$$

Rešenje diferencijalne jednačine 2 reda je u obliku:

$$\sigma_{xb}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.218)$$

gde su C_1 i C_2 neodređene konstante integracije i potrebno ih je odrediti iz početnih uslova, a k_1 i k_2 karakteristični koeficijenti integracije:

$$k_1 = \frac{1}{2} \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4\mu_w \cdot a_2}}{a_2} \quad (4.219)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4\mu_w \cdot a_2}}{a_2} \quad (4.220)$$

Sada se određuje promena napona u sredini silosa $\sigma_{x0}(z)$ na osnovu (4.211).

Određuje se izvod po dobijenom rešenju napona $\sigma_{xb}(z)$ prema (4.218):

$$\sigma'_{xb}(z) = -C_1 \cdot \frac{k_1}{b} \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - C_2 \cdot \frac{k_2}{b} \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.221)$$

Određuju se konturni horizontalni napon u vertikalnoj osi silosa $\sigma_{x0}(z)$ na osnovu izraza (4.211), sa uvođenjem izraza (4.218) i (4.221), kako sledi:

$$\begin{aligned} \sigma_{x0}(z) = & \left(-C_1 \cdot \frac{k_1}{b} \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - C_2 \cdot \frac{k_2}{b} \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \right) \cdot b \cdot \left(k_{1db} - k_{2db} \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} \right) + \\ & + \left(\frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \right) \cdot \left(1 - \mu_w \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} \right) + \gamma \cdot b \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} \end{aligned} \quad (4.222)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{x0}(z) = & \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + \\ & + C_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} \cdot \left(1 - \mu_w \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} - k_1 \cdot \frac{k_{2d0} \cdot k_{1db} - k_{2db} \cdot k_{1d0}}{k_{2d0}} \right) + \\ & + C_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \cdot \left(1 - \mu_w \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} - k_2 \cdot \frac{k_{2d0} \cdot k_{1db} - k_{2db} \cdot k_{1d0}}{k_{2d0}} \right) \end{aligned} \quad (4.223)$$

$$\sigma_{x0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.224)$$

$$c_1 = 1 - \mu_w \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} - k_1 \cdot \frac{k_{2d0} \cdot k_{1db} - k_{2db} \cdot k_{1d0}}{k_{2d0}} \quad (4.225)$$

$$c_2 = 1 - \mu_w \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} - k_2 \cdot \frac{k_{2d0} \cdot k_{1db} - k_{2db} \cdot k_{1d0}}{k_{2d0}} \quad (4.226)$$

Na drugi način: odrede se izvodi $\sigma'_{xb}(z)$ i $\sigma''_{xb}(z)$, smeni se (4.212) u (4.204) odakle se odredi $\sigma_{x0}(z)$ i posle uvođenja opšteg rešenja za napon $\sigma_{xb}(z)$ i izvode $\sigma'_{xb}(z)$ i $\sigma''_{xb}(z)$, dobija se isti oblik rešenja:

$$\sigma_{x0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.227)$$

gde su koeficijenti:

$$c_1 = 1 - a_{01} \cdot k_1 + a_{02} \cdot k_1^2 \quad (4.228)$$

$$c_2 = 1 - a_{01} \cdot k_2 + a_{02} \cdot k_2^2 \quad (4.229)$$

$$a_{01} = k_{1d0} + k_{1db} - \mu_w \cdot \frac{k_{1d0}^2}{k_{2d0}} \quad (4.230)$$

$$a_{02} = (k_{2d0} \cdot k_{1db} - k_{2db} \cdot k_{1d0}) \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} \quad (4.231)$$

Rešenje je jednako, ali se preporučuje primena jednostavnijih izraza za koeficijente c_1 i c_2 prema (4.225) i (4.226).

Integracione konstante C_1 i C_2 se određuju iz početnih uslova za horizontalne napone:

$$\sigma_{xb}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.232)$$

$$\sigma_{x0}(z) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} + C_1 \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.233)$$

Početni uslovi

Razmatraju se tri slučaja početnih uslova, kao kod pretpostavke o paraboličnoj promeni horizontalnog napona. Svi izrazi od (4.114) do (4.175) ostaju važeći kao i objašnjenja kod ovih izraza, izuzev određivanja kod *III slučaja* početnih uslova, gde se umesto izraza (4.135) i (4.136), treba da odrede izrazi koji odgovaraju elipsastoj promeni horizontalnog napona. U ovom slučaju, u izraz za vertikalni napon (4.196), uvodi se uslov $\sigma_{xb}(0) = 0$ za $z = 0$ i dalje određuje:

$$\sigma_z(0, x) = \sigma_{x0}(0) \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}} \right) \quad (4.234)$$

$$\begin{aligned} Q_N &= 2 \cdot \int_0^b \sigma_z(0, x) \cdot dx = \\ &= 2 \cdot \sigma_{x0}(0) \cdot \int_0^b \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}} \right) \cdot dx \end{aligned} \quad (4.235)$$

Rešenje se dobija u obliku:

$$Q_N = 2b \cdot k_{2d0} \cdot \sigma_{x0}(0) = 2b \cdot k_{2d0} \cdot \sigma_{x0N} \quad (4.236)$$

gde koeficijent k_{2d0} odgovara obliku za elipsastu funkciju interpolacije.

Rekapitulacija postupka proračuna

Napomena: Izrazi od (4.158) do (4.175) i stavovi uz ove izraze koji su bili dati kod opisa primene parabolične interpolacione funkcije, važe i kod primene razmatrane elipsaste interpolacione funkcije, uz nove vrednosti posmatranih parametara koji se daju na kraju rekapitulacije izraza. Razmatraju se tri slučaja početnih uslova:

- *I slučaj* početnih uslova (gde je $h_N = 0$; tj. iznad $z = 0$ nema nasipa),

- II slučaj početnih uslova (gde visina delimičnog nasipa h_N odgovara posebno zadatim početnim uslovima sa kojim se eliminiše pojava napona zatezanja u gornjoj zoni materijala uz zidove čelije), i
- III slučaj početnih uslova (gde visina h_N odgovara prirodnom nasipu materijala).

Funkcije vertikalne raspodele konturnih napona su:

$$Y_b(z) = 1 + \frac{c_2 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{b}} - \frac{c_1 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{b}} \quad (4.237)$$

$$Y_0(z) = 1 + \frac{c_2 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{b}} - \frac{c_1 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{b}} \quad (4.238)$$

Opšti izrazi za stanje napona (sa konturnim funkcijama horizontalnih napona):

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{x0}(z) \cdot \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2 \cdot x^2}{\mu_i^2 \cdot b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) + \sigma_{xb}(z) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2 \cdot x^2}{\mu_i^2 \cdot b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \quad (4.239)$$

$$\sigma_z(z, x) = \left(\sigma_{x0}(z) \cdot \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2 \cdot x^2}{\mu_i^2 \cdot b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) + \sigma_{xb}(z) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2 \cdot x^2}{\mu_i^2 \cdot b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}} \right) \quad (4.240)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \left(\sigma_{x0}(z) \cdot \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2 \cdot x^2}{\mu_i^2 \cdot b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) + \sigma_{xb}(z) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2 \cdot x^2}{\mu_i^2 \cdot b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) \quad (4.241)$$

Opšti izrazi za napone sa uvođenjem funkcija raspodele:

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left(Y_0(z) \cdot \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2 \cdot x^2}{\mu_i^2 \cdot b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) + Y_b(z) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2 \cdot x^2}{\mu_i^2 \cdot b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) \quad (4.242)$$

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left(Y_0(z) \cdot \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2 \cdot x^2}{\mu_i^2 \cdot b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) + Y_b(z) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2 \cdot x^2}{\mu_i^2 \cdot b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}} \right) \quad (4.243)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \gamma \cdot x \cdot \left(Y_0(z) \cdot \left(1 - \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) + Y_b(z) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \right) \quad (4.244)$$

U postupku se primenjuju sledeći pomoćni koeficijenti (po redosledu sračunavanja):

$$k_{1d0} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2\mu_i^3 - (2\mu_i^2 + \mu_w^2) \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{\mu_w \cdot (\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2})} \quad (4.245)$$

$$k_{1db} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3\mu_i \cdot \mu_w^2 - 2\mu_i^3 + 2(\mu_i^2 - \mu_w^2) \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{\mu_w \cdot (\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2})} \quad (4.246)$$

$$k_{2d0} = \frac{\mu_w \cdot \left(\mu_i^2 + \frac{1}{3} \mu_w^2 \right) \cdot \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} - \left(\frac{1}{2} \cdot \mu_w + \mu_w \cdot \mu_i^2 + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i^2 \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) \right) \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} + \left(\frac{1}{2} + \mu_i^2 \right) \cdot \mu_i^2 \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right)}{\mu_w \cdot (\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2})} \quad (4.247)$$

$$k_{2db} = \frac{\left(\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i - \frac{1}{2} - \mu_i^2 \right) \cdot \mu_w \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} + \left(\frac{2}{3} \mu_w^3 - 2\mu_w \cdot \mu_i^2 + \mu_i^3 \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) \right) \cdot \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} - \mu_i \cdot \left(\frac{1}{2} + \mu_i^2 \right) \cdot \left(\mu_i \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) - 2\mu_w \right)}{\mu_w \cdot (\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2})} \quad (4.248)$$

$$a_1 = k_{2d0} + k_{2db} - \mu_w \cdot k_{1d0} \quad (4.249)$$

$$a_2 = k_{2d0} \cdot k_{1db} - k_{2db} \cdot k_{1d0} \quad (4.250)$$

$$k_1 = \frac{1}{2} \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4\mu_w \cdot a_2}}{a_2} \quad (4.251)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4\mu_w \cdot a_2}}{a_2} \quad (4.252)$$

$$c_1 = 1 - \mu_w \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} - k_1 \cdot \frac{k_{2d0} \cdot k_{1db} - k_{2db} \cdot k_{1d0}}{k_{2d0}} \quad (4.253)$$

$$c_2 = 1 - \mu_w \cdot \frac{k_{1d0}}{k_{2d0}} - k_2 \cdot \frac{k_{2d0} \cdot k_{1db} - k_{2db} \cdot k_{1d0}}{k_{2d0}} \quad (4.254)$$

I kod ovog postupka, opšte stanje napona, za $z \rightarrow \infty$, teži asimptotskom stanju napona, koje u potpunosti odgovara *Ohde*-ovoj analizi asimptotskog stanja napona u 2D silosu.

4.2.3 Opšti izrazi za napone kod postupaka I-2D i II-2D - uvođenje interpolacione funkcije $f_x(x)$

I-2D i II-2D postupak se mogu prikazati zajedno u generalisanom obliku, gde se uvodi interpolaciona funkcija $f_x(x)$, koja se razlikuje kod navedenih postupaka. Dalje se daje pregled proračunskih izraza pri ovom uopštavanju postupaka proračuna.

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{x0}(z) \cdot (1 - f_x(x)) + \sigma_{xb}(z) \cdot f_x(x) \quad (4.255)$$

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\sigma_x(z, x)}{K(z, x)} = \left[\sigma_{x0}(z) \cdot (1 - f_x(x)) + \sigma_{xb}(z) \cdot f_x(x) \right] \cdot \frac{1}{K(x)} \quad (4.256)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \sigma_x(z, x) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot [\sigma_{x0}(z) \cdot (1 - f_x(x)) + \sigma_{xb}(z) \cdot f_x(x)] \quad (4.257)$$

$$\frac{1}{K(z, x)} \equiv \frac{1}{K(x)} = 1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2} \quad (4.258)$$

Konturni naponi:

$$\sigma_{x0}(z) = \sigma_{xf0} \cdot Y_0(z) \quad (4.259)$$

$$\sigma_{z0}(z) = \sigma_{zf0} \cdot Y_0(z) \quad (4.260)$$

$$\sigma_{y0}(z) = \sigma_{yf0} \cdot Y_0(z) \quad (4.261)$$

$$\tau_{zx0}(z) = 0 \quad (4.262)$$

$$\sigma_{xb}(z) = \sigma_{xfb} \cdot Y_b(z) \quad (4.263)$$

$$\sigma_{zb}(z) = \sigma_{zfb} \cdot Y_b(z) \quad (4.264)$$

$$\sigma_{yb}(z) = \sigma_{yfb} \cdot Y_b(z) \quad (4.265)$$

$$\tau_{zxb}(z) = \tau_{zxfb} \cdot Y_b(z) \quad (4.266)$$

Opšti izrazi za napone sa uvođenjem funkcija raspodele:

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot [Y_0(z) \cdot (1 - f_x(x)) + Y_b(z) \cdot f_x(x)] \quad (4.267)$$

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot [Y_0(z) \cdot (1 - f_x(x)) + Y_b(z) \cdot f_x(x)] \cdot \frac{1}{K(x)} \quad (4.268)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \gamma \cdot x \cdot [Y_0(z) \cdot (1 - f_x(x)) + Y_b(z) \cdot f_x(x)] \quad (4.269)$$

Kod ovih izraza se koristi interpolaciona funkcija $f_x(x)$:

- u obliku paraboličnog luka (kod I-2D postupka)

$$f_x(x) = \frac{x^2}{b^2} \quad (4.270)$$

- u obliku segmenta elipse (kod II-2D postupka)

$$f_x(x) = \frac{\frac{1}{K(0)} - \frac{1}{K(x)}}{\frac{1}{K(0)} - \frac{1}{K(b)}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \quad (4.271)$$

Funkcija vertikalne raspodele konturnih napona (istog su oblika za oba postupka, ali se razlikuju pomoćni koeficijenti):

$$Y_b(z) = 1 + \frac{c_2 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{b}} - \frac{c_1 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{b}} \quad (4.272)$$

$$Y_0(z) = 1 + \frac{c_2 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{b}} - \frac{c_1 - 1 + \frac{\sigma_{x0N}}{\gamma \cdot b}}{c_1 - c_2} \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{b}} \quad (4.273)$$

Potrebni pomoćni koeficijenti za određivanje funkcija raspodele, razlikuju se s obzirom na primenjenu interpolacionu funkciju, i priloženi su kod rekapitulacije izraza pri primeni parabolične, odnosno elipsaste interpolacione funkcije (kod I-2D i II-2D postupka).

Karakteristični koeficijenti k_1 i k_2 , koji se uvode kod funkcija raspodele konturnih napona, su pozitivnih vrednosti. Ovo sledi iz teorijskog uslova, da stanje napona materijala u silosu, teži asimptotskom stanju napona kada $z \rightarrow \infty$.

4.2.4 III-2D postupak - primena konturnih funkcija raspodele i elipsaste promene svih normalnih napona

Kod ovog postupka se uvodi jedinstvena interpolaciona funkcija za sve normalne napone. U analizu se uvode i transverzalni naponi, iako nisu neophodni kod rešavanja stanja napona materijala u 2D silosu. Ovo je učinjeno zbog postavljanja podloga za analizu stanja napona kod 3Dr silosa, gde su ovi naponi analogni sa prstenastim naponima. Na početku se pretpostavlja da su interpolacione funkcije kod normalnih napona različite.

Komponentalni naponi se mogu prikazati sa sledećim izrazima gde su uvedeni konturni komponentalni naponi:

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{x0}(z) \cdot (1 - f_x(x)) + \sigma_{xb}(z) \cdot f_x(x) \quad (4.274)$$

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_{z0}(z) \cdot (1 - f_z(x)) + \sigma_{zb}(z) \cdot f_z(x) \quad (4.275)$$

$$\sigma_y(z, x) = \sigma_{y0}(z) \cdot (1 - f_y(x)) + \sigma_{yb}(z) \cdot f_y(x) \quad (4.276)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \sigma_x(z, b) = \tau_{zxb}(z) \cdot \frac{x}{b} \quad (4.277)$$

U ovim izrazima su uvedene tri interpolacione funkcije za različite normalne napone. Naponi smicanja su pretpostavljeni u linearnom obliku (trougaooni oblik dijagrama napona), što predstavlja uobičajeni slučaj pretpostavke u analizama problema stanja napona uskladištenog materijala u silosu. U izraze za komponentalne napone uvode se asimptotski normalni naponi i konturne funkcije raspodele, kako sledi:

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{xf0} \cdot (1 - f_x(x)) \cdot Y_0(z) + \sigma_{xfb} \cdot f_x(x) \cdot Y_b(z) \quad (4.278)$$

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_{zf0} \cdot (1 - f_z(x)) \cdot Y_0(z) + \sigma_{zfb} \cdot f_z(x) \cdot Y_b(z) \quad (4.279)$$

$$\sigma_y(z, x) = \sigma_{yf0} \cdot (1 - f_y(x)) \cdot Y_0(z) + \sigma_{yfb} \cdot f_y(x) \cdot Y_b(z) \quad (4.280)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \tau_{zxfb} \cdot Y_b(z) \cdot \frac{x}{b} = \mu_w \cdot \sigma_{xfb} \cdot \frac{x}{b} \cdot Y_b(z) \quad (4.281)$$

Kako dati izrazi važe za svako z , važe i za $z \rightarrow \infty$, gde se određuju izrazi za promenu asimptotskih vrednosti napona po x , pri čemu su limitne vrednosti funkcije raspodele $Y_0(z \rightarrow \infty) = 1$ i $Y_b(z \rightarrow \infty) = 1$. Asimptotsko stanje komponentalnih napona za $z \rightarrow \infty$, određuje se na osnovu prethodno datih izraza u sledećem obliku:

$$\sigma_{xf}(x) = \sigma_{xf0} \cdot (1 - f_x(x)) + \sigma_{xfb} \cdot f_x(x) = const. \quad (4.282)$$

$$\sigma_{zf}(x) = \sigma_{zf0} \cdot (1 - f_z(x)) + \sigma_{zfb} \cdot f_z(x) \quad (4.283)$$

$$\sigma_{yf}(x) = \sigma_{yf0} \cdot (1 - f_y(x)) + \sigma_{yfb} \cdot f_y(x) \quad (4.284)$$

$$\tau_{zxf}(x) = \tau_{zxfb} \cdot \frac{x}{b} \quad (4.285)$$

Asimptotske vrednosti konturnih napona, za $x = 0$ u vertikalnoj osi 2D silosa, i do zida ćelije za $x = b$, se mogu prikazati sa sledećim izrazima:

$$\tau_{zxf0} = 0 \quad (4.286)$$

$$\tau_{zxfb} = \gamma \cdot b \quad (4.287)$$

$$\sigma_{zfb} = \sigma_{zfb0} = \frac{\tau_{zxfb}}{\mu_w} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \quad (4.288)$$

$$\sigma_{zf0} = \frac{\sigma_{zfb0}}{K_0} = \frac{\gamma \cdot b}{K_0 \cdot \mu_w} \quad (4.289)$$

$$\sigma_{zfb} = \frac{\sigma_{zfb}}{K_b} = \frac{\gamma \cdot b}{K_b \cdot \mu_w} \quad (4.290)$$

$$\sigma_{yf0} = \sigma_{yf0} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \quad (4.291)$$

$$\sigma_{yfb} = \sigma_{yfb} \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_b}}{1 + \frac{1}{K_0}} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_b}}{1 + \frac{1}{K_0}} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \frac{1 + \mu_i^2 + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{1 + \mu_i^2 + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} \quad (4.292)$$

$$\frac{1}{K_0} \equiv \frac{1}{K(z,0)} = \frac{1}{K(\infty,0)} = \frac{1}{K(0)} = 1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i \quad (4.293)$$

$$\frac{1}{K_b} \equiv \frac{1}{K(z,b)} = \frac{1}{K(\infty,b)} = \frac{1}{K(b)} = 1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \quad (4.294)$$

U sredini silosa, za $x = 0$, kako su smičući naponi nula, naponi $\sigma_{z0}(z)$, $\sigma_{x0}(z)$ i $\sigma_{y0}(z)$, odgovaraju glavnim naponima $\sigma_1(z,0)$, $\sigma_2(z,0)$ i $\sigma_3(z,0)$, respektivno. Prema *Haar-von Karman*-ovoj hipotezi je $\sigma_3(z,0) = \sigma_2(z,0)$, te za $z \rightarrow \infty$ sledi da je $\sigma_{yf0} = \sigma_{zf0}$.

U opštem slučaju kod *Morh*-ovog kruga napona (sl. 131 u § 3.5.1.1), može da se odredi napon koji odgovara centra kruga na sledeći način:

$$\frac{\sigma_x(z,x) + \sigma_z(z,x)}{2} = \frac{\sigma_y(z,x) + \sigma_1(z,x)}{2} \quad (4.295)$$

Napon $\sigma_y(z,x)$ je glavni napon $\sigma_2(z,x)$. Uvode se sledeće veze odgovarajućih napona:

$$\sigma_y(z,x) = \sigma_1(z,x) \cdot K_0 \quad (4.296)$$

$$\sigma_x(z,x) = \sigma_z(z,x) \cdot K(z,x) \quad (4.297)$$

Kada se kod veze napona (4.297) uzme da $z \rightarrow \infty$, određuje se:

$$\sigma_{zf}(x) = \frac{\sigma_{zf}(x)}{K(x)} \quad (4.298)$$

Na osnovu ovog odnosa, dobijaju se veze asimptotskih normalnih napona na konturama, za $x = 0$ i $x = b$, koje su date sa izrazima (4.289) i (4.290).

Transverzalni napon se određuje sa uvođenjem veza normalnih napona (4.296) i (4.297) u izraz (4.295), u sledećem obliku:

$$\sigma_y(z, x) = \sigma_x(z, x) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(z, x)}}{1 + \frac{1}{K(z, 0)}} = \sigma_x(z, x) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(z, x)}}{1 + \frac{1}{K_0}} \quad (4.299)$$

Kada se ovaj izraz posmatra u slučaju kada $z \rightarrow \infty$, određuje se:

$$\sigma_{yf}(x) = \sigma_{yf}(x) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(x)}}{1 + \frac{1}{K_0}} \quad (4.300)$$

Na osnovu (4.299), određuju se veze odgovarajućih normalnih napona na konturama, za $x = 0$ i $x = b$:

$$\sigma_y(z, 0) = \sigma_x(z, 0) \Rightarrow \sigma_{y0}(z) = \sigma_{x0}(z) \quad (4.301)$$

$$\sigma_y(z, b) = \sigma_x(z, b) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(z, b)}}{1 + \frac{1}{K(z, 0)}} \Rightarrow \sigma_{yb}(z) = \sigma_{xb}(z) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_b}}{1 + \frac{1}{K_0}} \quad (4.302)$$

Kada se prethodna dva izraza posmatraju u slučaju kada $z \rightarrow \infty$, određuju se asimptotski konturni naponi (4.291) i (4.292).

Veza vertikalnog i horizontalnog napona se uobičajeno prikazuje u obliku izraza:

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\sigma_x(z, x)}{K(z, x)} \quad (4.303)$$

Može se primetiti da odnos horizontalnog i vertikalnog napona $K(z, x)$, učestvuje i kod veze horizontalnog i transverzalnog napona prema izrazu (4.299).

Izjednačavanjem odnosa napona $K(z, x)$, koji se određuju preko izraza (4.299) i (4.303), određuje se vertikalni napon u sledećem obliku:

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_y(z, x) \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_x(z, x) \quad (4.304)$$

Pomoću ovog izraza određuju se veze normalnih napona na konturama, za $x = 0$ i $x = b$:

$$\sigma_{z0}(z) = \sigma_{y0}(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_{x0}(z) = \sigma_{x0}(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_{x0}(z) = \frac{\sigma_{x0}(z)}{K_0} \quad (4.305)$$

$$\sigma_{zb}(z) = \sigma_{yb}(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_{xb}(z) = \sigma_{xb}(z) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_b}}{1 + \frac{1}{K_0}} \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_{xb}(z) = \frac{\sigma_{xb}(z)}{K_b} \quad (4.306)$$

Kada se u prethodna dva izraza uzme da $z \rightarrow \infty$, određuju se asimptotski konturni naponi (4.289) i (4.290).

Na osnovu izaraza (4.303) i (4.304) za vertikalni napon $\sigma_z(z, x)$, odnos napona $K(z, x)$ se može prikazati preko horizontalnih i transverzalnih napona u sledećem obliku:

$$K(z, x) = \frac{1}{\frac{\sigma_y(z, x)}{\sigma_x(z, x)} \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - 1} = \frac{1}{\frac{\sigma_y(z, x)}{\sigma_x(z, x)} \cdot 2\left(1 + \mu_i^2 + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i\right) - 1} \quad (4.307)$$

Ovaj oblik odnosa napona se uzima za *alternativni oblik odnosa napona* $K(z, x)$. Na osnovu ovog odnosa napona, umesto izraza (4.303), može da se koristi izraz (4.304).

Osnovni oblik za odnos napona $K(z, x)$, prema *Mohr*-ovom krugu napona je:

$$K(z, x) = \frac{\sigma_x(z, x)}{\sigma_z(z, x)} \quad (4.308)$$

Ovaj odnos se kod 2D silosa može prikazati u sledećem opštem obliku:

$$K(z, x) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \left(\frac{\tau_{zx}(z, x)}{\sigma_x(z, x)}\right)^2}} \quad (4.309)$$

gde je $\kappa = 1$ za aktivno stanje napona, i $\kappa = -1$ za pasivno stanje napona.

U ovom postupku analize stanja napona, uvedena je pretpostavka da su smičući naponi u obliku izraza (4.277), odnosno da je dijagram smičućih napona u obliku trougla sa referencom na horizontalni napon do zida ćelije. U ovom slučaju, nakon uvođenja smičućih napona prema izrazu (4.277) u izraz (4.309), određuje se odnos napona:

$$K(z, x) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \left(\mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \frac{\sigma_x(z, b)}{\sigma_x(z, x)}\right)^2}} \quad (4.310)$$

Ovaj oblik odnosa napona, u slučaju da $z \rightarrow \infty$, prelazi u poznati *Ohde*-ov oblik:

$$\frac{1}{K(z \rightarrow \infty, x)} = \frac{1}{K(\infty, x)} = \frac{1}{K(x)} = 1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}} \quad (4.311)$$

Kod I-2D i II-2D postupka analize stanja napona, gde su uvedeni dijagrami horizontalnih napona u obliku kvadratne parabole, odnosno segmenta elipse, uvedena je posebna pretpostavka o obliku smičućih napona. Kod ovih postupaka je usled takve pretpostavke o obliku smičućih napona sledilo da je $K(z, x) \equiv K(x)$. U ovde razmatranom postupku, na osnovu prikazanih oblika odnosa napona (4.310) i (4.311), sledi da je odnos napona $K(z, x) \equiv K(x)$.

U daljem postupku analize koristi se pretpostavka da je $K(z, x) \equiv K(x)$, tj. da je K nezavisno od koordinate z , tako da se u analizi pojavljuje odnos napona K prema (4.311). Ovaj oblik tačno odgovara opštem odnosu napona (4.310) kada $z \rightarrow \infty$, i tačno odgovara odnosu napona na konturama za bilo koje z , prema (4.293) i (4.294) za $x = 0$ i $x = b$, respektivno.

Dalja izvođenja idu u pravcu dokaza da se sve interpolacione funkcije normalnih napona mogu prikazati u istom obliku. Pri tome se koristi odnos napona $K(x)$ u obliku koji

odgovara asimptotskom stanju napona. Određivanje opšte interpolacione funkcije za normalne napone određiće se na asimptotskom stanju napona za $z \rightarrow \infty$.

Na osnovu izraza (4.284) za normalni napon $\sigma_{yf}(x)$, u koji se uvodi izraz (4.300) za $\sigma_{yf}(x)$, i konturne vrednosti napona σ_{yf0} i σ_{yfb} prema izrazima (4.291) i (4.292), određuje se sledeća razvijena forma izraza:

$$\sigma_{yf}(x) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(x)}}{1 + \frac{1}{K_0}} = \sigma_{yf0} \cdot (1 - f_y(x)) + \sigma_{yfb} \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_b}}{1 + \frac{1}{K_0}} \cdot f_y(x) \quad (4.312)$$

S obzirom na to, da su u asimptotskom stanju napona uskladištenog materijala u 2D silosu, konstantni horizontalni naponi $\sigma_{xf}(x) = \sigma_{xf0} = \sigma_{xfb}$, iz prethodnog izraza se određuje funkcija interpolacije:

$$f_y(x) = \frac{\frac{1}{K(0)} - \frac{1}{K(x)}}{\frac{1}{K(0)} - \frac{1}{K(b)}} = \frac{\frac{1}{K_0} - \frac{1}{K(x)}}{\frac{1}{K_0} - \frac{1}{K_b}} \quad (4.313)$$

Na osnovu izraza (4.283) za normalni napon $\sigma_{zf}(x)$, u koju se uvodi izraz (4.298) za $\sigma_{zf}(x)$, i konturne vrednosti napona σ_{zf0} i σ_{zfb} prema (4.289) i (4.290), određuje se:

$$\frac{\sigma_{zf}(x)}{K(x)} = \frac{\sigma_{zf0}}{K(0)} \cdot (1 - f_z(x)) + \frac{\sigma_{zfb}}{K(b)} \cdot f_z(x) \quad (4.314)$$

Kako je $\sigma_{xf}(x) = \sigma_{xf0} = \sigma_{xfb}$, određuje se da funkcija $f_z(x)$ ima isti oblik kao i funkcija $f_y(x)$, koja je data sa izrazom (4.313).

Izraz za horizontalni napon (4.282) je zadovoljen za opšti oblik funkcije interpolacije $f(x)$. Na ovaj način, kod normalnih napona se može primeniti jedinstvena funkcija interpolacije u obliku:

$$f(x) = f_y(x) = f_x(x) = f_z(x) = \frac{\frac{1}{K_0} - \frac{1}{K(x)}}{\frac{1}{K_0} - \frac{1}{K_b}}, \quad (4.315)$$

Kada se uvede *Ohde*-ov oblik za odnos napona K prema (4.311), određuje se:

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} = \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \quad (4.316)$$

U skladu sa uvedenom jedinstvenom interpolacionom funkcijom za normalne napone, kod asimptotskog stanja napona važe sledeći izrazi za normalne napone:

$$\sigma_{xf}(x) = \sigma_{xf0} \cdot (1 - f(x)) + \sigma_{xfb} \cdot f(x) \quad (4.317)$$

$$\sigma_{zf}(x) = \sigma_{zf0} \cdot (1 - f(x)) + \sigma_{zfb} \cdot f(x) \quad (4.318)$$

$$\sigma_{yf}(x) = \sigma_{yf0} \cdot (1 - f(x)) + \sigma_{yfb} \cdot f(x) \quad (4.319)$$

Na osnovu oblika dijagrama napona u asimptotskom slučaju, generalizuju se oblici dijagrama napona na konkretnoj dubini z , sa sledećim izrazima:

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{x0}(z) \cdot (1 - f(x)) + \sigma_{xb}(z) \cdot f(x) \quad (4.320)$$

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_{z0}(z) \cdot (1 - f(x)) + \sigma_{zb}(z) \cdot f(x) \quad (4.321)$$

$$\sigma_y(z, x) = \sigma_{y0}(z) \cdot (1 - f(x)) + \sigma_{yb}(z) \cdot f(x) \quad (4.322)$$

U ove izraze, uvode se konturni naponi prema izrazima (4.259) do (4.266), gde se uvode funkcije raspodele napona $Y(z)$. Na ovaj način, mogu se prikazati svi komponentalni naponi u sledećem obliku:

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{xf0} \cdot (1 - f(x)) \cdot Y_0(z) + \sigma_{xfb} \cdot f(x) \cdot Y_b(z) \quad (4.323)$$

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_{zf0} \cdot (1 - f(x)) \cdot Y_0(z) + \sigma_{zfb} \cdot f(x) \cdot Y_b(z) \quad (4.324)$$

$$\sigma_y(z, x) = \sigma_{yf0} \cdot (1 - f(x)) \cdot Y_0(z) + \sigma_{yfb} \cdot f(x) \cdot Y_b(z) \quad (4.325)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \tau_{zxfb} \cdot Y_b(z) \cdot \frac{x}{b} = \mu_w \cdot \sigma_{xfb} \cdot \frac{x}{b} \cdot Y_b(z) \quad (4.326)$$

Kada se u ove izraze uvede funkcija interpolacije $f(x)$ u obliku (4.315), odnosno u konkretnom obliku (4.316), određuju se opšti izrazi za napone u 2D silosu:

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{xf0} \cdot \left(1 - \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \right) \cdot Y_0(z) + \sigma_{xfb} \cdot \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \cdot Y_b(z) \quad (4.327)$$

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_{zf0} \cdot \left(1 - \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \right) \cdot Y_0(z) + \sigma_{zfb} \cdot \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \cdot Y_b(z) \quad (4.328)$$

$$\sigma_y(z, x) = \sigma_{yf0} \cdot \left(1 - \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \right) \cdot Y_0(z) + \sigma_{yfb} \cdot \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \cdot Y_b(z) \quad (4.329)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \mu_w \cdot \sigma_{xfb} \cdot \frac{x}{b} \cdot Y_b(z) \quad (4.330)$$

U ovim izrazima se koriste asimptotske vrednosti konturnih napona:

$$\sigma_{xfb} = \sigma_{xf0} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \quad (4.331)$$

$$\sigma_{zf0} = \frac{\sigma_{xf0}}{K_0} \quad (4.332)$$

$$\sigma_{zfb} = \frac{\sigma_{xfb}}{K_b} \quad (4.333)$$

$$\sigma_{yf0} = \sigma_{xf0} \quad (4.334)$$

$$\sigma_{yfb} = \sigma_{xfb} \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_b}}{1 + \frac{1}{K_0}} \quad (4.335)$$

Za formiranje integralnih relacija uslova ravnoteže potrebno je odrediti sedeće parcijalne izvode napona:

$$\frac{\partial \sigma_x(z, x)}{\partial x} = - \frac{\sigma_{xf0} \cdot Y_0(z) - \sigma_{xfb} \cdot Y_b(z)}{(\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}) \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}} \cdot \mu_w^2 \cdot \frac{x}{b^2} \quad (4.336)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial z} = \mu_w \cdot \sigma_{xfb} \cdot \frac{x}{b} \cdot Y'_b(z) \quad (4.337)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial x} = \mu_w \cdot \sigma_{xfb} \cdot \frac{1}{b} \cdot Y_b(z) \quad (4.338)$$

$$\frac{\partial \sigma_z(z, x)}{\partial z} = \frac{\sigma_{xf0}}{K_0} \cdot \left(1 - \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}}{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \right) \cdot Y'_0(z) + \frac{\sigma_{xfb}}{K_b} \cdot \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}}{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \cdot Y'_b(z) \quad (4.339)$$

Ovi parcijalni izvodi napona se uvode u integralne uslove ravnoteže:

$$\int_0^b \left(\frac{\partial \sigma_x(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial z} \right) \cdot dx = 0 \quad (4.340)$$

$$\int_0^b \left(\frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z(z, x)}{\partial z} \right) \cdot dx = \int_0^b \gamma \cdot dx \quad (4.341)$$

Rešenjem ovih integralnih relacija, dobija se sistem od dve diferencijalne jednačine gde je potrebno odrediti nepoznate funkcije raspodele napona $Y_0(z)$ i $Y_b(z)$. Uz primenu jednakosti (4.331), dobija se sređeni sistem od 2 diferencijalne jednačine:

$$k_{1db} \cdot Y'_b(z) \cdot b - Y_0(z) + Y_b(z) = 0 \quad (4.342)$$

$$k_{2d0} \cdot Y'_0(z) \cdot b + k_{2db} \cdot Y'_b(z) \cdot b + Y_b(z) = 1 \quad (4.343)$$

gde su uvedeni sledeći koeficijenti:

$$k_{1db} = \frac{\mu_w}{2} \quad (4.344)$$

$$k_{2d0} = \frac{1}{2K_0} \frac{-\sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \mu_w + \mu_i^2 \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right)}{\mu_w^2 \cdot (\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2})} \quad (4.345)$$

$$k_{2db} = \frac{1}{2K_b} \frac{2\mu_i \cdot \mu_w - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \mu_w - \mu_i^2 \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right)}{\mu_w^2 \cdot (\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2})} \quad (4.346)$$

Rešavanje sistema diferencijalnih jednačina je u potpunosti isto kao u prethodnom slučaju kod postupka II-2D, s tim što se ovde koriste nove veličine za konstantne koeficijente diferencijalnih jednačina k_{2d0} i k_{2db} , prema izrazima (4.345) i (4.346), respektivno. Može se primetiti da su izrazi kod ovih koeficijenata jednostavniji nego u prethodnom slučaju. Izostavljaju se izvođenja koja su prikazana u prethodnom postupku. Razmatra se samo slučaj početnih uslova sa ravnom gornjom površinom materijala, a ponavljaju se radi celovitosti odgovarajući izrazi uz rekapitulaciju postupka proračuna.

Rekapitulacija postupka

Kako je $\sigma_{x/b} = \sigma_{x/0}$, stanje napona se može dati u sažetijem obliku:

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot [Y_0(z) \cdot (1 - f(x)) + Y_b(z) \cdot f(x)] \quad (4.347)$$

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[\frac{1}{K_0} \cdot Y_0(z) \cdot (1 - f(x)) + \frac{1}{K_b} \cdot Y_b(z) \cdot f(x) \right] \quad (4.348)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \gamma \cdot x \cdot Y_b(z) \quad (4.349)$$

$$\sigma_y(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot \left[Y_0(z) \cdot (1 - f(x)) + \frac{1 + \frac{1}{K_b}}{1 + \frac{1}{K_0}} \cdot Y_b(z) \cdot f(x) \right] \quad (4.350)$$

$$Y_b(z) = 1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.351)$$

$$Y_0(z) = 1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.352)$$

$$f(x) = \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \quad (4.353)$$

Primenjuju se sledeći pomoćni koeficijenti:

$$k_{1db} = \frac{\mu_w}{2} \quad (4.354)$$

$$k_{2d0} = \frac{1}{2K_0} \frac{-\sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \mu_w + \mu_i^2 \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right)}{\mu_w^2 \cdot (\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2})} \quad (4.355)$$

$$k_{2db} = \frac{1}{2K_b} \frac{2\mu_i \cdot \mu_w - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \mu_w - \mu_i^2 \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right)}{\mu_w^2 \cdot (\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2})} \quad (4.356)$$

$$a_2 = k_{2d0} \cdot k_{1db} \quad (4.357)$$

$$a_1 = k_{2d0} + k_{2db} \quad (4.358)$$

$$k_1 = \frac{1}{2} \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{a_2} \quad (4.359)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{a_2} \quad (4.360)$$

$$c_1 = 1 - k_{ldb} \cdot k_1 \quad (4.361)$$

$$c_2 = 1 - k_{ldb} \cdot k_2 \quad (4.362)$$

$$\frac{1}{K_0} = 1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i \quad (4.363)$$

$$\frac{1}{K_b} = 1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \quad (4.364)$$

4.2.5 IV-2D postupak - primena konturnih funkcija raspodele i elipsaste promene horizontalnih napona sa aproksimativnim oblikom za $K(x)$

Koriste se opšti izrazi iz prethodnih postupaka:

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{x0}(z) \cdot (1 - f_x(x)) + \sigma_{xb}(z) \cdot f_x(x) \quad (4.365)$$

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\sigma_x(z, x)}{K(z, x)} = \left[\sigma_{x0}(z) \cdot (1 - f_x(x)) + \sigma_{xb}(z) \cdot f_x(x) \right] \cdot \frac{1}{K(x)} \quad (4.366)$$

$$\sigma_y(z, x) = \sigma_x(z, x) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(z, x)}}{1 + \frac{1}{K(z, 0)}} = \left[\sigma_{x0}(z) \cdot (1 - f_x(x)) + \sigma_{xb}(z) \cdot f_x(x) \right] \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(x)}}{1 + \frac{1}{K_0}} \quad (4.367)$$

Dijagram smičućih napona se uzima kao trougaoni dijagram, koji zavisi od konturne vrednosti horizontalnog napona $\sigma_x(z, b)$, što je najčešća pretpostavka za napone smicanja u analizama stanja napona materijala u silosu:

$$\tau_{zx}(z, x) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \sigma_x(z, b) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \sigma_{xb}(z) \quad (4.368)$$

Pri ovom obliku napona smicanja, tačan oblik odnosa napona $K(z, x)$ je u formi izraza (4.41), ali je u ovom postupku iskorišćen aproksimativni oblik za K prema Ohde-u:

$$\frac{1}{K(z, x)} \cong \frac{1}{K(x)} = 1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot x^2 / b^2} \quad (4.369)$$

Ovaj oblik, je kod postupaka I-2D i II-2D predstavljao tačan oblik odnosa napona, tako da u ovom postupku odnos napona (4.369) predstavlja vrlo blisku proračunsku aproksimaciju.

Za razliku od postupka prikazanog u poglavlju § 4.2.2 ovde će se primeniti izvođenje sa određivanjem nepoznatih funkcija raspodele $Y_0(z)$ i $Y_b(z)$, a ne napona $\sigma_{x0}(z)$ i $\sigma_{xb}(z)$, kao direktni pristup rešavanja problema. Veza funkcija raspodele i konturnih vrednosti horizontalnih napona je data sa (4.259) do (4.266). U ovom slučaju su nepoznate u okviru rešenja integralnih relacija, funkcije raspodele $Y_0(z)$ i $Y_b(z)$, kako su već uvedena

asimptotska rešenja za komponentalne napone. Kod ovog pristupa, rešavanje sistema diferencijalnih jednačina je relativno jednostavnije. Ovo predstavlja unapređenje kod primene metode integralnih relacija. Isto tako, u jednostavniji pristup spada i uvođenje rešenja po horizontalnim naponima, a ne po vertikalnim, na osnovu čega je postupak jednostavniji po pitanju integracije uslova ravnoteže. Iako je kod 2D silosnog problema $\sigma_{xf0} = \sigma_{xfb}$, radi opšteg prikaza rešavanja, naknadno će se uvesti ovaj indentitet u rešavanje problema. Sa uvođenjem funkcija raspodele napona, stanje napona je u obliku:

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{xf0} \cdot (1 - f_x(x)) \cdot Y_0(z) + \sigma_{xfb} \cdot f_x(x) \cdot Y_b(z) \quad (4.370)$$

$$\sigma_z(z, x) = \left[\sigma_{xf0} \cdot (1 - f_x(x)) \cdot Y_0(z) + \sigma_{xfb} \cdot f_x(x) \cdot Y_b(z) \right] \cdot \frac{1}{K(x)} \quad (4.371)$$

$$\sigma_y(z, x) = \left[\sigma_{xf0} \cdot (1 - f_x(x)) \cdot Y_0(z) + \sigma_{xfb} \cdot f_x(x) \cdot Y_b(z) \right] \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(x)}}{1 + \frac{1}{K_0}} \quad (4.372)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \sigma_{xfb} \cdot Y_b(z) \quad (4.373)$$

Ako se uvede da je $\sigma_{xf0} = \sigma_{xfb}$, gornji izrazi prelaze u sledeće:

$$\sigma_x(z, x) = \sigma_{xfb} \cdot Y(z, x) \quad (4.374)$$

$$\sigma_z(z, x) = \sigma_{xfb} \cdot \frac{1}{K(x)} \cdot Y(z, x) \quad (4.375)$$

$$\sigma_y(z, x) = \sigma_{xfb} \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(x)}}{1 + \frac{1}{K_0}} \cdot Y(z, x) \quad (4.376)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \sigma_{xfb} \cdot Y(z, b) \quad (4.377)$$

$$\sigma_{xfb} = \sigma_{xf0} = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \quad (4.378)$$

U ovom slučaju formira se opšta funkcija raspodele napona u obliku:

$$Y(z, x) = (1 - f_x(x)) \cdot Y_0(z) + f_x(x) \cdot Y_b(z) = Y_0(z) - (Y_0(z) - Y_b(z)) \cdot f_x(x) \quad (4.379)$$

Kada se uvede elipsasta funkcija interpolacije $f_x(x)$ u obliku (4.316), određuje se:

$$Y(z, x) = Y_0(z) - (Y_0(z) - Y_b(z)) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \quad (4.380)$$

Postupak se izvodi kao u poglavlju § 4.2.2, uz primenu (4.378) i izmena koje odgovaraju uvedenoj pretpostavci o obliku dijagrama napona smicanja:

$$\frac{\partial \sigma_x(z, x)}{\partial x} = - \frac{\sigma_{yfb} \cdot (Y_0(z) - Y_b(z)) \cdot \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x}{b^2}}{\sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}\right)} \quad (4.381)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial z} = \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot \sigma_{yfb} \cdot Y'_b(z) \quad (4.382)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial x} = \mu_w \cdot \frac{1}{b} \cdot \sigma_{yfb} \cdot Y_b(z) \quad (4.383)$$

$$\frac{\partial \sigma_z(z, x)}{\partial z} = \sigma_{yfb} \cdot \left(Y'_0(z) - (Y'_0(z) - Y'_b(z)) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \cdot \left(1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}\right) \right) \quad (4.384)$$

Prcijalni izvodi napona se uvode u integralne uslove ravnoteže:

$$\int_0^b \left(\frac{\partial \sigma_x(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial z} \right) \cdot dx = 0 \quad (4.385)$$

$$\int_0^b \left(\frac{\partial \tau_{zx}(z, x)}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z(z, x)}{\partial z} \right) \cdot dx = \int_0^b \gamma \cdot dx \quad (4.386)$$

Sa uvedenim parcijalnim izvodima u prvi uslov ravnoteže, određuje se sledeći integral:

$$\sigma_{yfb} \cdot \int_0^b \left(\frac{Y_b(z) - Y_0(z)}{\sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}\right)} \cdot \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x}{b^2} + \mu_w \cdot \frac{x}{b} \cdot Y'_b(z) \right) \cdot dx = 0 \quad (4.387)$$

Na isti način se dobija i integral drugog uslova ravnoteže. Rešenjem ovih integralnih relacija, dobija se sistem od dve diferencijalne jednačine sa nepoznatim funkcijama raspodele napona $Y_0(z)$ i $Y_b(z)$. Rešavanjem integralnih relacija, dobija se sledeći sistem od dve diferencijalne jednačine:

$$k_{1db} \cdot Y'_b(z) \cdot b - Y_0(z) + Y_b(z) = 0 \quad (4.388)$$

$$k_{2d0} \cdot Y'_0(z) \cdot b + k_{2db} \cdot Y'_b(z) \cdot b + Y_b(z) = 1 \quad (4.389)$$

U ovim jednačinama su uvedeni sledeći koeficijenti:

$$k_{1db} = \frac{\mu_w}{2} \quad (4.390)$$

$$k_{2d0} = \frac{\mu_i^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \mu_i^2\right) \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right) - \left(\frac{\mu_w}{2} + \mu_w \cdot \mu_i^2 + \kappa \cdot \mu_i^2 \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right)\right) \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} + \kappa \cdot \mu_w \cdot \left(\mu_i^2 + \frac{\mu_w^2}{3}\right) \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}}{\mu_w^2 \cdot (\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2})} \quad (4.391)$$

$$k_{2db} = \frac{\mu_i \cdot \left(\frac{1}{2} + \mu_i^2\right) \cdot \left(2\mu_w - \mu_i \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right)\right) - \mu_w \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \mu_i^2 - \kappa \cdot \mu_i \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}\right) + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left(2\mu_w \cdot \left(\frac{1}{3} \mu_i^2 - \mu_i^2\right) + \mu_i^3 \cdot \arcsin\left(\frac{\mu_w}{\mu_i}\right)\right)}{\mu_w^2 \cdot (\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2})} \quad (4.392)$$

Rešavanje sistema diferencijalnih jednačina

Iz prve jednačine (4.388), određuje se $Y_0(z)$, pa potom izvod ove funkcije po z :

$$Y_0(z) = k_{1db} \cdot Y'_b(z) \cdot b + Y_b(z) \quad (4.393)$$

$$Y'_0(z) = k_{1db} \cdot Y''_b(z) \cdot b + Y'_b(z) \quad (4.394)$$

Ovaj izvod se zamenjuje u drugu jednačinu (4.389):

$$k_{2d0} \cdot [k_{1db} \cdot Y''_b(z) \cdot b + Y'_b(z)] \cdot b + k_{2db} \cdot Y'_b(z) \cdot b + Y_b(z) = 1 \quad (4.395)$$

Na ovaj način je određena diferencijalna jednačina 2-og reda po $Y_b(z)$:

$$a_2 \cdot b^2 \cdot Y''_b(z) + a_1 \cdot b \cdot Y'_b(z) + Y_b(z) = 1 \quad (4.396)$$

sa sledećim konstantnim koeficijentima:

$$a_2 = k_{2d0} \cdot k_{1db} \quad (4.397)$$

$$a_1 = k_{2d0} + k_{2db} \quad (4.398)$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine je u obliku:

$$Y_b(z) = 1 + C_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.399)$$

gde su C_1 i C_2 neodređene konstante integracije i potrebno ih je odrediti iz početnih uslova, a k_1 i k_2 su karakteristični koeficijenti integracije:

$$k_1 = \frac{1}{2} \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{a_2} \quad (4.400)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{a_2} \quad (4.401)$$

Određuje se izvod po z funkcije raspodele napona (4.399):

$$Y'_b(z) = -C_1 \cdot \frac{k_1}{b} \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - C_2 \cdot \frac{k_2}{b} \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.402)$$

Funkcija $Y_b(z)$ i njen izvod se uvode u (4.389), sa čime se određuje funkcija raspodele napona $Y_0(z)$:

$$Y_0(z) = k_{1db} \cdot \left[-C_1 \cdot \frac{k_1}{b} \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - C_2 \cdot \frac{k_2}{b} \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \right] \cdot b + 1 + C_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.403)$$

$$Y_0(z) = 1 + C_1 \cdot (1 - k_{1db} \cdot k_1) \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot (1 - k_{1db} \cdot k_2) \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.404)$$

$$Y_0(z) = 1 + C_1 \cdot \left(1 - \frac{\mu_w}{2} \cdot k_1 \right) \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot \left(1 - \frac{\mu_w}{2} \cdot k_2 \right) \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.405)$$

$$Y_0(z) = 1 + C_1 \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} + C_2 \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.406)$$

gde su uvedeni koeficijenti:

$$c_1 = 1 - k_{1db} \cdot k_1 = 1 - \frac{\mu_w}{2} \cdot k_1 \quad (4.407)$$

$$c_2 = 1 - k_{1db} \cdot k_2 = 1 - \frac{\mu_w}{2} \cdot k_2 \quad (4.408)$$

Kada se uzme da gornji sloj silosnog materijala nije opterećen, početni uslovi za $z = 0$ odgovaraju uslovima $Y_b(0) = 0$ i $Y_0(0) = 0$.

Na osnovu ovih uslova, određuju se integracione konstante C_1 i C_2 , kako sledi:

$$Y_b(0) = 1 + C_1 + C_2 = 0 \quad (4.409)$$

$$Y_0(0) = 1 + C_1 \cdot c_1 + C_2 \cdot c_2 = 0 \quad (4.410)$$

Iz ovog sistema određuju se C_1 i C_2 :

$$C_1 = \frac{k_2}{k_1 - k_2} \quad (4.411)$$

$$C_2 = -\frac{k_1}{k_1 - k_2} \quad (4.412)$$

Konačna rešenja funkcija raspodele su:

$$Y_b(z) = 1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.413)$$

$$Y_0(z) = 1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.414)$$

$$Y_0(z) = 1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot \left(1 - \frac{\mu_w}{2} \cdot k_1\right) \cdot e^{-k_1 \frac{z}{b}} - \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot \left(1 - \frac{\mu_w}{2} \cdot k_2\right) \cdot e^{-k_2 \frac{z}{b}} \quad (4.415)$$

Sa dobijenim funkcijama $Y_b(z)$ i $Y_0(z)$, koje se uvode u opšte izraze komponentalnih napona (4.370) do (4.373), određeno je u celini stanje napona u silosnom materijalu.

U ovom postupku je pri određivanju polja napona najjednostavnije koristiti sledeće izraze, koji slede jedan iza drugog radi određivanja stanja napona u uskladištenom materijalu:

$$Y(z, x) = Y_0(z) - (Y_0(z) - Y_b(z)) \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{x^2}{b^2}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \quad (4.416)$$

$$\sigma_x(z, x) = \frac{\gamma \cdot b}{\mu_w} \cdot Y(z, x) \quad (4.417)$$

$$\sigma_z(z, x) = \frac{\sigma_x(z, x)}{K(x)} \quad (4.418)$$

$$\sigma_y(z, x) = \sigma_x(z, x) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(x)}}{1 + \frac{1}{K_0}} = \frac{\sigma_x(z, x) + \sigma_z(z, x)}{1 + \frac{1}{K_0}} \quad (4.419)$$

$$\tau_{zx}(z, x) = \gamma \cdot x \cdot Y_b(z) \quad (4.420)$$

U ovom postupku korišćena je funkcija interpolacije samo kod horizontalnih napona.

4.3 Primena metode integralnih relacija kod 3Dr silosa

4.3.1 Jednačine ravnoteže diferencijalnog elementa u cilindričnim koordinatama

Posmatra se element diferencijalne zapremine, koji je ograničen sa po dve koncentrične cilindrične površine, dve horizontalne ravni i dve vertikalne ravni (sl. 171). Na slici je prikazana promena pritisaka koji deluju na strane zapreminskog elementa, a koji se odnose na ravnotežu u r i z pravcima, kako se to definiše kod cilindričnog sistema koordinata. Za zrnasti materijal se pretpostavlja da je kompresibilan, sa trenjem, nekohezivan, izotropan, i tretira se kao kontinuum. Komponente napona se uzimaju da su nezavisne od ugaone koordinate θ . Sa τ_{rz} se označava napon smicanja koji deluje po unutrašnjoj cilindričnoj površini zapreminskog elementa u z pravcu. Radi jednostavnijeg opisa, sa τ se predstavlja napon smicanja τ_{rz} odnosno τ_{zr} . Smičući naponi se menjaju sa promenom koordinate r i pri promeni rastojanja dr , promena smičućih napona iznosi $(\partial\tau/\partial r)dr$. Smičući napon na spoljnoj cilindričnoj površini zapreminskog elementa iznosi:

$$\tau + \frac{\partial\tau}{\partial r} dr$$

Na isti način, ako je σ_z vertikalni napon u silosnom materijalu na gornjoj površini zapreminskog elementa, na donjoj površini deluje napon:

$$\sigma_z + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} dz$$

Kako je prikazano na sl. 171, ukupno je šest komponenti površinskih sila i jedna komponenta zapreminske sile u z pravcu. Sumirajući sile kod zapreminskog elementa u z pravcu (z osa pozitivna na dole), i zanemarujući male članove višeg reda, određuje se sledeća jednačina ravnoteže vertikalnih sila:

$$-\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} dz \cdot (r d\theta dr) + \tau_{rz} \cdot (r d\theta) dz - (\tau_{rz} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}) \cdot (r + dr) \cdot d\theta dz + \gamma \cdot r d\theta dr dz = 0 \quad (4.421)$$

Sređivanjem prethodne, određuje se sledeća jednačina:

$$-\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} r \cdot dr d\theta dz - (\tau_{rz} + r \cdot \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}) \cdot dr d\theta dz + \gamma \cdot r \cdot dr d\theta dz = 0 \quad (4.422)$$

Deljenjem ove jednačine sa $(r \cdot dr d\theta dz)$ određuje se:

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \gamma \quad (4.423)$$

Na sličan način za r - pravac, sa uvođenjem aproksimacija za male uglove i zanemarujući članove višeg reda, dobija se druga jednačina ravnoteže:

$$\frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (4.424)$$

gde su σ_r i σ_θ radijalni i prstenasti naponi respektivno. Konjugovani naponi su jednaki $\tau_{rz} = \tau_{zr}$. Usled rotacione simetrije sistema i polja napona sledi da su smičući naponi $\tau_{\theta z} = \tau_{z\theta} = 0$ i $\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = 0$.

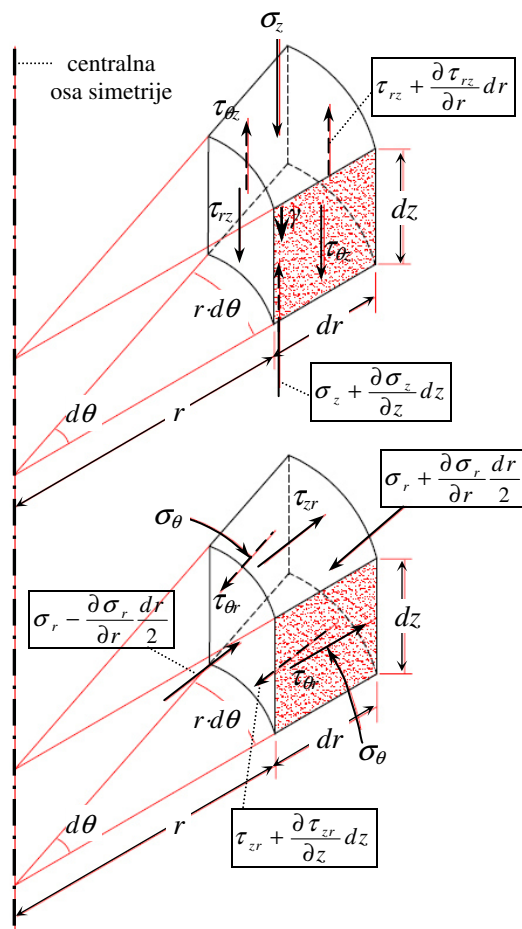
U cilindričnom koordinatnom sistemu jednačine ravnoteže su:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (= f_r) \quad (4.425)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (= f_\theta) \quad (4.426)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \gamma \quad (= f_z) \quad (4.427)$$

gde su f_r, f_θ i f_z komponente zapreminskih sila u datom pravcu.



Sl. 171 Naponi na diferencijalnom elementu materijala (osna simetrija).

Jednačine ravnoteže za slučaj rotacione simetrije sistema i stanja napona, svode se na sledeće jednačine (z osa pozitivna na dole):

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (4.428)$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (4.429)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = \gamma \quad (4.430)$$

Dalje pojednostavljenje se dobija u slučajevima gde koordinatne ose koincidiraju sa pravicima glavnih napona. Ovo može biti slučaj, npr. kod cilindra izloženom jednakom

pritisku ili jednakoj temperaturnoj promeni. U takvim slučajevima, uz odsustvo zapreminskih sila, u analizi uslova ravnoteže se ne javljaju naponi smicanja, i jednačine ravnoteže se redukuju na sledeće:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (4.431)$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (4.432)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \quad (4.433)$$

4.3.2 Postavke za određivanje stanja napona kod 3Dr silosa kružnih ćelija

Analizira se stanje napona zrnastog materijala uskladištenom u 3D silosu sa kružnom ćelijom (slučaj rotacione simetrije sistema i stanja napona), tako da su jednačine ravnoteže date sa izrazima (4.428) do (4.430).

Za diferencijalni sloj materijala na velikoj dubini z u preseku ćelije, odnosno za $z \rightarrow \infty$, naponi dostižu svoje asimptotske vrednosti, i postaju nezavisni od promene koordinate z :

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial z} = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} = 0 \quad (\text{za } z \rightarrow \infty) \quad (4.434)$$

U ovom slučaju su svi izvodi napona po z koordinati nula. Za oznaku asimptotskih napona dodaje se indeks f . Kod diferencijalnog elementa (slučaj 3Dr analize – rotaciona simetrija), sa elementarnom zapreminom ($r \cdot dr \, d\theta \, dz$), na dubini z_∞ , jednačine ravnoteže (4.428) do (4.430), uz date uslove (4.434), prelaze u sledeći oblik:

$$\frac{d\sigma_{rf}(r)}{dr} + \frac{\sigma_{rf}(r) - \sigma_{\theta f}(r)}{r} = 0 \quad (4.435)$$

$$\frac{d\sigma_{\theta f}(r)}{d\theta} = 0 \quad (4.436)$$

$$\frac{d\tau_{zrf}(r)}{dr} + \frac{\tau_{zrf}(r)}{r} = \gamma \quad (4.437)$$

Naponi ne zavise u ovom slučaju od koordinata z i θ , ali zavise od koordinate r :

$$\sigma_{rf} = \sigma_{rf}(r) \quad ; \quad \sigma_{\theta f} = \sigma_{\theta f}(r) \quad ; \quad \tau_{zrf} = \tau_{zrf}(r). \quad (4.438)$$

Iz trećeg uslova ravnoteže, tj. jednačine (4.437), uz početni uslov da je $\tau_{zrf} = 0$ za $r = 0$, određuje se:

$$\frac{\partial \tau_{zrf}(r)}{\partial r} = \gamma - \frac{\tau_{zrf}(r)}{r} \quad \text{i} \quad \tau_{zrf}(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{zrf}(r) = \frac{1}{2} \gamma \cdot r \quad (4.439)$$

Na osnovu (4.439), za $r = R = D/2$, gde je R poluprečnik ćelije silosa, a D njen prečnik, dobija se smičući napon $\tau_{wf} = \tau_{zrfR}$ do zida:

$$\tau_{zrf}(R) = \frac{1}{2} \gamma \cdot R = \tau_{zrfR} \quad (4.440)$$

Na osnovu prethodna dva izraza, dobija se linearna funkcija smičućih napona:

$$\tau_{zr}(r) = \tau_{zrR} \cdot \frac{r}{R} \quad (4.441)$$

Iz drugog uslova ravnoteže se određuje prstenasti napon:

$$\sigma_{\theta f} = \sigma_{\theta f}(r) \quad (4.442)$$

Drugi uslov ravnoteže i za konkretnu dubinu z , je istog oblika:

$$\frac{\partial \sigma_{\theta}(z, r, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (4.443)$$

Prstenasti naponi su u funkciji samo koordinata z i r , i ne menjaju se sa promenom ugla θ :

$$\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta}(z, r) \quad (4.444)$$

Ovaj napon, prema *Haar – von Karman*-ovoj hipotezi (1909), predstavlja glavni napon σ_2 (videti § 3.5.1.2).

Od uslova ravnoteže, ostao je za rešavanje prvi uslov ravnoteže, odnosno ravnoteža sila u radijalnom pravcu na diferencijalnom elementu:

$$\frac{\partial \sigma_{rf}(r)}{\partial r} + \frac{\sigma_{rf}(r) - \sigma_{\theta f}(r)}{r} = 0 \quad (4.445)$$

Iz *Morh*-ovog kruga napona određuje se odnos radijalnog i vertikalnog napona, koji može da se prikaže u sledećim oblicima:

$$K(z, r) = \frac{\sigma_r(z, r)}{\sigma_z(z, r)} \quad (4.446)$$

$$K(z, r) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \left(\frac{\tau_{zr}(z, r)}{\sigma_r(z, r)}\right)^2}} \quad (4.447)$$

gde je $\kappa = 1$ za aktivno stanje, a $\kappa = -1$ za pasivno stanje napona materijala u ćeliji.

Sa uvedenom pretpostavkom da su smičući naponi u obliku trougaonog dijagrama, odnos napona K se određuje na sledeći način:

$$\tau_{zr}(z, r) = \mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \sigma_r(z, R) = \mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \sigma_{rR}(z) \quad (4.448)$$

$$K(z, r) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \left(\mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{\sigma_r(z, R)}{\sigma_r(z, r)}\right)^2}} \quad (4.449)$$

Pri aproksimaciji stanja radijalnih napona, sa uvođenjem pretpostavke da se promeljivi radijalni naponi u preseku uzimaju kao konstantni na posmatranoj dubini z , odnosno kada je $\sigma_r(z, r) = \sigma_r(z)$, sledi da K prelazi u poznati *Ohde*-ov oblik (u analogiji sa 2D stanjem napona):

$$K(z, r) = K(r) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot r^2 / R^2}} \quad (4.450)$$

Isti oblik odnosa K prema (4.450), se direktno dobija iz opšteg izraza (4.447), kada se uvede složenija pretpostavka o obliku smičućeg napona, koji je analogan obliku (4.43) primenjenog kod 2D silosa, sa sledećim:

$$\tau_{zr}(z, r) = \mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \sigma_r(z, r) \quad (4.451)$$

Primenom smičućih napona u obliku (4.451), nije neophodna primena pretpostavke o konstantnoj vrednosti radilanog napona $\sigma_r(z, r) = \sigma_r(z)$ po radijalnoj koordinati r , ali u ovom slučaju nije ispunjen asimptotski uslov o trougaonom obliku dijagrama smicanja u asimptotskom slučaju stanja napona, za $z \rightarrow \infty$. Zbog toga se ne razmatra pretpostavka o naponima smicanja u obliku (4.451), već se uzima uobičajeni oblik trougaonog dijagrama napona smicanja prema (4.448).

U asimptotskom stanju napona, za $z \rightarrow \infty$, izraz (4.451) prelazi u sledeći oblik:

$$\tau_{zrf}(r) = \mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \sigma_{rf}(r) \quad (4.452)$$

Za $z \rightarrow \infty$, naponi smicanja prema (4.448), uzimaju sledeći oblik:

$$\tau_{zrf}(r) = \mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \sigma_{rf}(R) = \mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \sigma_{rfR} \quad (4.453)$$

U ovom slučaju direktna primena odnosa napona K u obliku (4.449), kod analize stanja napona materijala u 3Dr silosu je vrlo složena. Kao pojednostavljene problema može se uvesti pretpostavka o konstantnim radijalnim naponima po koordinati r , tako da K uzima oblik (4.450), kao što je to uradio Walker (1966) [325]. Drugi način je da se oblik odnosa napona K prema izrazu (4.450), uzme kao dovoljno dobra aproksimacija problema stanja napona, a da se radijalni naponi smatraju promenljivim sa koordinatom r za dato z . Ovo je svakako realnija postavka problema od prethodnog slučaja sa pretpostavkom o konstantnim radijalnim naponima. Na drugoj strani, kod 3Dr stanja napona, u uslovima ravnoteže učestvuju i prstenasti naponi $\sigma_\theta(z, r)$. Ovim naponima, u analogiji sa analizom kod 2D silosa, odgovaraju bočni horizontalni naponi $\sigma_y(z, x)$, koji nisu bili relevantni kod uslova ravnoteže u analizi 2D silosa.

Rešavanja stanja napona kod 3Dr silosa, uz direktnu primenu odnosa K , prema opštem izrazu (4.447), ili u posebnim slučajevima prema pretpostavci o obliku napona smicanja, prema izrazu (4.449) odnosno (4.450), predstavlja vrlo složen zadatak. Upravo je iz tog razloga, analogni problem kod 2D silosa rešavan na više načina, kako bi se ispitala mogućnosti primene ovih postupaka na složenijem 3Dr problemu. Kod primene metode integralnih relacija za određivanje uslova ravnoteže kod 3Dr silosa, uveden je postupak sa jedinstvenom interpolacionom funkcijom normalnih napona. Analogan postupak je primenjen kod 2D silosa u § 4.2.4. U tom pravcu razmatra se alternativni oblik za odnos napona K kod stanja napona materijala u 3Dr silosu.

U opštem slučaju Mohr-ovog kruga napona može da se odredi koordinata centra kruga sa sledećim:

$$\frac{\sigma_r(z, r) + \sigma_z(z, r)}{2} = \frac{\sigma_\theta(z, r) + \sigma_1(z, r)}{2} \quad (4.454)$$

Kako je $\sigma_\theta(z, r)$ glavni napon to sledi da je:

$$\sigma_\theta(z, r) = \sigma_1(z, r) \cdot K_0 \quad (4.455)$$

$$\sigma_r(z, r) = \sigma_z(z, r) \cdot K(z, r) \quad (4.456)$$

Kada se u (4.446) uzme da $z \rightarrow \infty$, određuje se:

$$\sigma_{zf}(r) = \frac{\sigma_{rf}(r)}{K_f(r)} \quad (4.457)$$

U ovom slučaju su veze normalnih napona na konturama, za $r = 0$ i $r = R$, u obliku:

$$\sigma_{zf}(0) = \frac{\sigma_{rf}(0)}{K_f(0)}, \text{ odnosno } \sigma_{zf0} = \frac{\sigma_{rf0}}{K_{f0}} = \frac{\sigma_{rf0}}{K_0} \quad (4.458)$$

$$\sigma_{zf}(R) = \frac{\sigma_{rf}(R)}{K_f(R)}, \text{ odnosno } \sigma_{zfr} = \frac{\sigma_{rfR}}{K_{fR}} = \frac{\sigma_{rfR}}{K_R} \quad (4.459)$$

Na osnovu (4.454), uvodeći (4.455) i (4.456) određuje se prstenasti napon:

$$\sigma_{\theta}(z, r) = \sigma_r(z, r) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(z, r)}}{1 + \frac{1}{K(z, 0)}} = \sigma_r(z, r) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(z, r)}}{1 + \frac{1}{K_0}} \quad (4.460)$$

Kada se prethodni izraz uzme za $z \rightarrow \infty$, određuje se:

$$\sigma_{\theta f}(r) = \sigma_{rf}(r) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_f(r)}}{1 + \frac{1}{K_f(0)}} = \sigma_{rf}(r) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_f(r)}}{1 + \frac{1}{K_0}} \quad (4.461)$$

Iz izraza (4.460) se dobijaju veze normalnih napona na konturama, za $r = 0$ i $r = R$:

$$\sigma_{\theta}(z, 0) = \sigma_r(z, 0) \Rightarrow \sigma_{\theta 0}(z) = \sigma_{r0}(z) \quad (4.462)$$

$$\sigma_{\theta}(z, R) = \sigma_r(z, R) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K(z, R)}}{1 + \frac{1}{K(z, 0)}} \Rightarrow \sigma_{\theta R}(z) = \sigma_{rR}(z) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_R}}{1 + \frac{1}{K_0}} \quad (4.463)$$

Kada se ova dva izraza uzmu za $z \rightarrow \infty$, određuju se prstenasti naponi na konturama:

$$\sigma_{\theta f}(0) = \sigma_{rf}(0) \Rightarrow \sigma_{\theta f0} = \sigma_{rf0} \quad (4.464)$$

$$\sigma_{\theta f}(R) = \sigma_{rf}(R) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_f(R)}}{1 + \frac{1}{K_f(0)}} \Rightarrow \sigma_{\theta fR} = \sigma_{rfR} \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_{fR}}}{1 + \frac{1}{K_{f0}}} = \sigma_{rfR} \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_R}}{1 + \frac{1}{K_0}} \quad (4.465)$$

Na osnovu izraza (4.454), može se odrediti sledeća veza vertikalnih, prstenastih i radijalnih normalnih napona kod 3Dr silosa:

$$\sigma_z(z, r) = \sigma_{\theta}(z, r) \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_r(z, r) \quad (4.466)$$

Ovaj izraz može biti korisna zamena za uobičajeni odnos napona:

$$\sigma_z(z, r) = \frac{\sigma_r(z, r)}{K(z, r)} \quad (4.467)$$

Odavde se dobijaju veze normalnih napona na konturama, za $r = 0$ i $r = R$:

$$\sigma_{z0}(z) = \sigma_{\theta0}(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_{r0}(z) = \sigma_{r0}(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_{r0}(z) = \frac{\sigma_{r0}(z)}{K_0} \quad (4.468)$$

$$\sigma_{zR}(z) = \sigma_{\theta R}(z) \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_{rR}(z) = \sigma_{rR}(z) \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_R}}{1 + \frac{1}{K_0}} \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_{rR}(z) = \frac{\sigma_{rR}(z)}{K_R} \quad (4.469)$$

Kada se prethodna dva izraza uzmu za $z \rightarrow \infty$, određuju se:

$$\sigma_{zf0} = \sigma_{\theta f0} \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_{rf0} = \sigma_{rf0} \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_{rf0} = \frac{\sigma_{rf0}}{K_0} \quad (4.470)$$

$$\sigma_{zFR} = \sigma_{\theta FR} \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_{rFR} = \sigma_{rFR} \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_R}}{1 + \frac{1}{K_0}} \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_{rFR} = \frac{\sigma_{rFR}}{K_R} \quad (4.471)$$

4.3.2.1 Alternativni oblik odnosa napona $K(z,r)$

Na osnovu dva alternativna oblika za vertikalni napon $\sigma_z(z,r)$, prema (4.467) i (4.466), koeficijent bočnog pritiska $K(z,r)$, može se prikazati preko radialnih napona sa sledećim oblikom:

$$K(z,r) = \frac{1}{\frac{\sigma_\theta(z,r)}{\sigma_r(z,r)} \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - 1} = \frac{1}{2 \left(1 + \mu_i^2 + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i\right) \cdot \frac{\sigma_\theta(z,r)}{\sigma_r(z,r)} - 1} \quad (4.472)$$

Opšti oblik za koeficijent bočnog pritiska K , na osnovu *Mohr*-ovog kruga napona je:

$$K(z,r) = \frac{\sigma_r(z,r)}{\sigma_z(z,r)} \quad (4.473)$$

koji kod 3Dr silosa ima oblik:

$$K(z,r) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \left(\frac{\tau_{zr}(z,r)}{\sigma_r(z,r)}\right)^2}} \quad (4.474)$$

gde se uvodi $\kappa = 1$ za aktivno stanje, i $\kappa = -1$ za pasivno stanje napona.

Za asimptotski slučaj stanja napona, kada $z \rightarrow \infty$, ovaj odnos prelazi u sledeći oblik:

$$\frac{1}{K(z \rightarrow \infty, r)} = \frac{1}{K(\infty, r)} = \frac{1}{K_f(r)} = 1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \frac{\tau_{zrf}(r)^2}{\sigma_{rf}(r)^2}} \quad (4.475)$$

Kada se uvede pretpostavka da je dijagram smičućih napona u obliku trougaonog dijagrama sa referencom na radialni napon do zida ćelije, prema (4.448), dobija se:

$$K(z,r) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \left(\mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{\sigma_r(z,R)}{\sigma_r(z,r)}\right)^2}} \quad (4.476)$$

Kada $z \rightarrow \infty$, ovaj izraz prelazi u sledeći oblik:

$$\frac{1}{K(z \rightarrow \infty, r)} = \frac{1}{K(\infty, r)} = \frac{1}{K_f(r)} = 1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \left(\mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{\sigma_{rR}}{\sigma_{rf}(r)} \right)^2} \quad (4.477)$$

Bez obzira na pretpostavku o obliku smičućeg napona, za $r = 0$ i $r = R$, iz gornjih izraza se određuju da je:

$$K(z, R) = K_R = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \quad (4.478)$$

$$K(z, 0) = K_0 = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} \quad (4.479)$$

Kako K_R i K_0 ne zavise od koordinate z , jer K ima konstantne vrednosti na konturama silosa, to su vrednosti i za slučaj kada $z \rightarrow \infty$:

$$K_{fR} = K_R \quad (4.480)$$

$$K_{f0} = K_0 \quad (4.481)$$

U postupku analize stanja napona kod 3Dr silosa, alternativni odnos napona K prema (4.472), se implicitno sadrži u izrazu (4.466). Na osnovu ovog izraza, sledi zaključak da u slučaju istih interpolacionih funkcija kod prstenastog i radijalnog napona, istu interpolacionu funkciju ima i vertikalni napon. Na ovaj način je postupak proračuna oslobođen od direktnog uvođenja funkcijskog oblika odnosa napona K . Glavnu ulogu preuzima jedinstvena interpolaciona funkcija normalnih napona, kao što je to bio slučaj kod analognog III-2D postupka analize stanja napona u 2D silosu. U ovom radu je kod analize stanja napona materijala u 3Dr silosu, uvedena interpolaciona funkcija u obliku stepene funkcije sa eksponentom a . Na ovaj način, odnos napona K je u ovom slučaju aproksimativan, i zavisi od tačnosti određivanja eksponenta a . Napominje se da je prema sprovedenim analizama u ovom radu, utvrđeno da su relativna odstupanja u veličini napona mnogo manja u odnosu na moguća odstupanja kod izbora vrednosti eksponenta a . Upravo je ovo omogućilo formiranje aproksimativnog IIa-3Dr postupka analize stanja napona, gde se za a uzima 2. Slično ovom postupku, *Negi* (1974) [202] je, kod primene metode integralnih relacija u analizi stanja napona materijala u 3Dr silosu, uveo da je $a = 2$, ali samo za interpolacionu funkciju vertikalnih napona, dok su za ostale normalne napone uvedene jednostavne linearne interpolacione funkcije.

4.3.2.2 Asimptotsko stanje radijalnih napona kod 3Dr silosa

U teoriji, za sada, nema egzaktnog rešenja diferencijalne jednačine po asimptotskim radijalnim naponima kod analize 3Dr silosu. U ovom slučaju se može primeniti numeričko ili aproksimativno rešavanje diferencijalne jednačine. Ovde su primenjena oba postupka. Numeričko rešenje se bazira na graničnim vrednostima, a aproksimativno rešenje se određuje kao prvi korak u postupku primene sukcesivnih aproksimacija.

U prethodnom poglavlju već su rešena dva uslova ravnoteže diferencijalnog elementa iz kojih sledi da je:

$$\tau_{zrf}(r) = \frac{1}{2} \gamma \cdot r \quad (4.482)$$

$$\sigma_{\theta_f} = \sigma_{\theta_f}(r) \quad (4.483)$$

Odnos napona K_f , kod asimptotskog stanja napona, se može predstaviti sa sledećim izrazima:

$$K_f(r) = \frac{\sigma_{rf}(r)}{\sigma_{zf}(r)} \quad (4.484)$$

$$\frac{1}{K_f(r)} = 1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \left(\mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \frac{\sigma_{rfR}}{\sigma_{rf}(r)} \right)^2} \quad (4.485)$$

$$\frac{1}{K_f(r)} = \frac{\sigma_{\theta_f}(r)}{\sigma_{rf}(r)} \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0} \right) - 1 \quad (4.486)$$

Iz uslova ravnoteže u radialnom pravcu na diferencijalnom elementu se određuje:

$$\frac{d\sigma_{rf}(r)}{dr} + \frac{\sigma_{rf}(r) - \sigma_{\theta_f}(r)}{r} = 0 \quad (4.487)$$

S obzirom da u ovoj diferencijalnoj jednačini figurišu dve nepoznate funkcije napona, potrebno je uvesti vezu između radialnih i prstenastih napona prema (4.461), odakle se uz uvođenje odnosa napona $K_f(r)$, prema (4.453), određuje:

$$\sigma_{\theta_f}(r) = \sigma_{rf}(r) \cdot \frac{1 + \mu_i^2 + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \frac{\tau_{zrf}(r)^2}{\sigma_{rf}(r)^2}}}{1 + \mu_i^2 + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} \quad (4.488)$$

Smenom ove jednačine u uslov ravnoteže (4.487), određuje se diferencijalna jednačina samo u funkciji radialnog napona uz poznatu funkciju napona smicanja:

$$\frac{d\sigma_{rf}(r)}{dr} + \frac{\sigma_{rf}(r)}{r} \cdot \frac{\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left(\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \frac{\tau_{zrf}(r)^2}{\sigma_{rf}(r)^2}} \right)}{1 + \mu_i^2 + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} = 0 \quad (4.489)$$

Smičući naponi za $z \rightarrow \infty$ su određeni prema (4.482), odnosno (4.453), gde je uveden radialni napon u materijalu do zida ćelije. Smenom (4.453) u prethodnu jednačinu (4.489) određuje se:

$$\frac{d\sigma_{rf}(r)}{dr} + \frac{\sigma_{rf}(r)}{r} \cdot \frac{\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left(\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{r^2}{R^2} \cdot \frac{\sigma_{rfR}^2}{\sigma_{rf}(r)^2}} \right)}{1 + \mu_i^2 + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} = 0 \quad (4.490)$$

Radialni napon za $z \rightarrow \infty$, do zida ćelije silosa, je:

$$\sigma_{rfR} = \frac{\tau_{zrfR}}{\mu_w} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \quad (4.491)$$

Ako se ovaj izraz uvede u (4.490), određuje se:

$$\frac{d\sigma_{rf}(r)}{dr} + \frac{\sigma_{rf}(r)}{r} \cdot \frac{\kappa \cdot \sqrt{1+\mu_i^2} \cdot \left(\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \frac{\gamma^2 \cdot r^2}{4\sigma_{rf}(r)^2}} \right)}{1+\mu_i^2 + \kappa \cdot \sqrt{1+\mu_i^2} \cdot \mu_i} = 0 \quad (4.492)$$

Ovo je diferencijalna jednačinu koju treba rešiti po $\sigma_{rf}(r)$, kako bi se odredio dijagram radijalnog napona kada $z \rightarrow \infty$, za slučaj *Mohr-Coulomb*-ovog stanja loma po smicanju uskladištenog materijala. Zapreminska težina materijala je γ .

Granični uslov za određivanje diferencijalne jednačine (4.492), je vrednost asimptotskog radijalnog napona u materijalu do zida ćelije prema (4.491), tj. granični uslov je $\sigma_{rf}(r) = \sigma_{rfR}$ za $r = R$.

Diferencijalna jednačina (4.490), odnosno (4.492), predstavlja nelinearnu jednačinu, koja je vrlo složena za rešavanje. Egzaktno analitičko rešenje ove jednačine nije poznato. U ovom radu se pod "tačnim" rešenjem jednačine (4.492), u razmatranim primerima i analizama, podrazumeva rešenje određeno postupkom numeričke integracije.

4.3.2.3 Aproksimativno određivanje stanja asimptotskih radijalnih napona

Kao ilustracija složenosti rešenja stanja radijalnih napona, odrediće se rešenje za $\sigma_{rf}(r)$ primenom opšteg oblika jednačine (4.489), uz pretpostavljeni oblik smičućeg napona prema izrazu (4.452). U ovom slučaju diferencijalna jednačina je:

$$\frac{d\sigma_{rf}(r)}{dr} + \frac{\sigma_{rf}(r)}{r} \cdot \frac{\kappa \cdot \sqrt{1+\mu_i^2} \cdot \left(\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot \frac{r^2}{R^2}} \right)}{1+\mu_i^2 + \kappa \cdot \sqrt{1+\mu_i^2} \cdot \mu_i} = 0 \quad (4.493)$$

Ova jednačina je aproksimacija tačnog oblika jednačine, jer pretpostavljeni smičući napon prema (4.452), ne odgovara linearnoj promeni smičućeg napona u obliku (4.453).

Diferencijalna jednačina (4.493), se isto može odrediti i preko jednačine (4.490), kada se kod potkorenog dela izraza pretpostavi da su asimptotski radijalni naponi konstantni, tj. da je $\sigma_{rf}(r) = \sigma_{rfR}$, što se može posmatrati kao početni korak pri rešavanju jednačine metodom sukcesivnih aproksimacija.

Na ovaj način, uvođenjem odgovarajuće aproksimacije za smičući ili za radijalni napon u okviru potkorenog dela jednačine (4.489), određuje se aproksimativna diferencijalna jednačina (4.493). Ovaj oblik je aproksimacija jednačine (4.490), odnosno (4.492). Kod rešavanje egzaktog oblika diferencijalne jednačine (4.490), odnosno (4.492), koristi se postupak numeričke integracije. Pri rešavanju aproksimativnog oblika diferencijalne jednačine (4.493), može se odrediti analitičko rešenje za asimptotske radijalne napone.

Uz granični uslov (4.491), prema kojem se radijalni naponi u materijalu do zida ćelije, odnosno za $r = R$, definišu kao konturni naponi $\sigma_{rf}(r) = \sigma_{rfR}$, rešenje diferencijalne jednačine (4.493), se određuje u sledećem obliku:

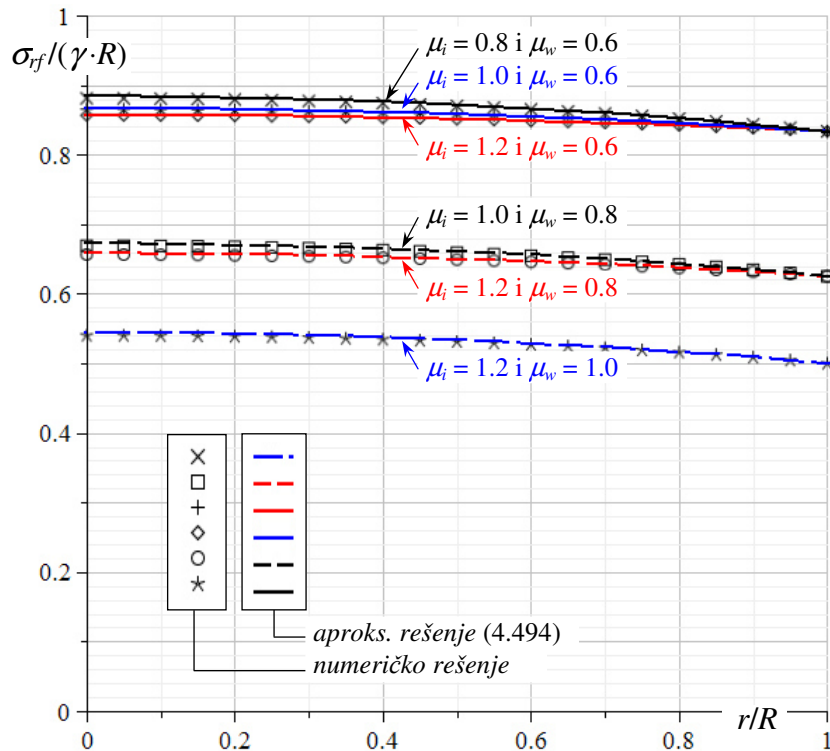
$$\sigma_{rf}(r) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \cdot \left[\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{r^2}{R^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \cdot e^{\sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}} - \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{r^2}{R^2}}} \right] - \frac{\mu_i}{\mu_i + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}} \quad (4.494)$$

Uvođenjem vrednosti za promenljivu $r = R$ i $r = 0$, u ovu jednačinu, određuju se konturni radijalni napon do zida, koji odgovara graničnom uslovu integracije napona, i radijalni napon u centralnoj osi silosa, respektivno prema izrazima:

$$\sigma_{rf}(R) = \sigma_{rfR} = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \quad (4.495)$$

$$\sigma_{rf}(0) = \sigma_{rf0} = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \cdot \left[\frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}}} \cdot e^{\sqrt{1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}} - 1} \right]^{\frac{\mu_i}{\mu_i + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}}} \quad (4.496)$$

Numeričkom integracijom diferencijalne jednačine (4.492), određene su diskretne vrednosti radijalnih napona na sl. 172, za tačke sa koordinatom r u 20-tinama poluprečnika ćelije R , u primeru analize gde su varirane vrednosti koeficijenata trenja μ_i i μ_w , kao parametara proračuna. Kod numeričkih vrednosti tačnost je postavljena na 10 značajnih cifara. Na ovoj slici su numeričke vrednosti i dijagrami asimptotskih radijalnih napona prikazani u bezdimenzionalnom obliku kao veličine $\sigma_{rf}/(\gamma \cdot R)$, u zavisnosti od relativne promenljive r/R . To znači da su asimptotske vrednosti radijalnih napona linearne sa zapreminskom težinom materijala γ i prečnikom ćelije R , odnosno sa konturnim naponom do zida ćelije σ_{rfR} . Ova linearnost je u teoriji uobičajena, a jasno se uočava pri sagledavanju oblika asimptotskog rešenja (4.494), ili izraza za konturne napone (4.495) i (4.496). Međutim, kod egzaktne forme diferencijalne jednačine (4.490), odnosno (4.492), navedena linearnost nije odmah, samo po sebi, prepoznatljiva.



Sl. 172 Dijagrami radijalnih napona u preseku za $z \rightarrow \infty$, prema numeričkom rešenju i prema aproksimativnom rešenju.

Na sl. 172 prikazane su numeričke vrednosti asimptotskih radijalnih napona $\sigma_{rf}(r)$, koje su dobijene numeričkom integracijom diferencijalne jednačine (4.492), kao i dijagrami radijalnih napona prema aproksimativnom rešenju (4.494). Razlike između odgovarajućih vrednosti ovih rešenja su vrlo male i praktično se na slici ne primećuju. Za iste vrednosti parametara proračuna koji su upotrebljeni pri formiranju dijagrama na sl. 172, prikazane su bezdimenzionalne vrednosti za radijalne napone u tabeli 31, za konturne napone σ_{rf0} (u centralnoj osi silosa) i σ_{rfR} (do zida ćelije), koje su određene numeričkim postupkom i pomoću aproksimativnog teorijskog rešenja (4.494).

Tabela 31. Uporedni pregled rezultata konturnih asimptotskih radijalnih napona prema numeričkom postupku i aproksimativnom rešenju (4.494).

Parametri proračuna	$\sigma_{rf0}/(\gamma \cdot R)$		$\sigma_{rfR}/(\gamma \cdot R)$
	numerički postupak	apros. rešenje	numerički postupak i aproks. rešenje
$\mu_i = 0.8$ i $\mu_w = 0.6$	0.88086 (0.00%)	0.88386 (0.34%)	0.83333 (-5.40%)
$\mu_i = 1.0$ i $\mu_w = 0.6$	0.86534 (0.00%)	0.86665 (0.15%)	0.83333 (-3.70%)
$\mu_i = 1.2$ i $\mu_w = 0.6$	0.85640 (0.00%)	0.85707 (0.08%)	0.83333 (-2.69%)
$\mu_i = 1.0$ i $\mu_w = 0.8$	0.66900 (0.00%)	0.67250 (0.52%)	0.62500 (-6.58%)
$\mu_i = 1.2$ i $\mu_w = 0.8$	0.65631 (0.00%)	0.65801 (0.26%)	0.62500 (-4.77%)
$\mu_i = 1.2$ i $\mu_w = 1.0$	0.54026 (0.00%)	0.54400 (0.69%)	0.50000 (-7.45%)

Vrednosti konturnih asimptotskih radijalnih napona do zida ćelije su jednake pri istom koeficijentu trenja o zid μ_w , što je evidentno na sl. 172 (vrednosti za $r/R = 1$), kao i prema tabeli 31 (vrednosti za σ_{rfR}). Vrednosti napona u osi silosa σ_{rf0} , određene prema numeričkom postupku i aproksimativnom rešenju, se relativno malo razlikuju. Kod tabelarnih podataka u okviru malih zagrada iskazana je procentualna razlika posmatrane vrednosti u odnosu na numerički određenu vrednost $\sigma_{rf0}/(\gamma \cdot R)$. Prema tabeli 31, u prikazanim analizama sa datim parametrima proračuna, aproksimativne vrednosti σ_{rf0} se razlikuju do najviše 0.7% u odnosu na odgovarajuće vrednosti određene numeričkim postupkom. Pri konstantnoj vrednosti za μ_w (na primer $\mu_w = 0.6$ u analizi), pri relativnom smanjenju vrednosti za μ_i (u analizi je μ_i varirano sa vrednostima 1.2, 1.0 i 0.8), najveća razlika aproksimativne vrednosti u odnosu na numeričku vrednost za $\sigma_{rf0}/(\gamma \cdot R)$ iznosi 0.34% (za $\mu_i = 0.8$), i određena je za vrednost μ_i koja je najbliža konstantnoj vrednosti μ_w . Prema rezultatima analize, veće odstupanje aproksimativne od numeričke vrednosti za asimptotske radijalne napone u centralnoj osi silosa (do 0.7%), kao i veća razlika radijalnih napona do zida ćelije u odnosu na napone u osi silosa (do -7.5%), se određuju za relativno veće vrednosti koeficijenata, kada se ove vrednosti međusobno sve više približavaju. U prikazanoj analizi su uvedene visoke vrednosti koeficijenata trenja μ_i i μ_w , kod kojih se određuju relativno veće razlike u proračunskim vrednostima.

Kod analiza nije razmatran primer idealno hrapavog zida, odnosno slučaj gde je $\mu_i = \mu_w$, s obzirom da numerički postupak u ovom slučaju ne konvergira (ovo je poznat numerički problem u analizi stanja napona materijala uskladištenog u silosu). Ovaj problem se ne javlja kod aproksimativnog rešenja, tako da se i u ovom posebnom slučaju može odrediti aproksimativna vrednost asimptotskih radijalnih napona.

Kod aktivnog stanja napona ($\kappa = +1$), najveći radijalni naponi su u centralnoj osi silosa, a na drugim mestima u preseku ćelije radijalni naponi se postepeno smanjuju kako se posmatrana tačka materijala približava zidu ćelije.

Pri smanjenju vrednosti koeficijenata trenja μ_i i μ_w , dolazi do povećanja asimptotskih vrednosti radijalnih napona (važi i obrnuto). Za konstantnu vrednost μ_w , sa smanjenjem μ_i povećavaju se asimptotski radijalni naponi u unutrašnjem preseku ćelije, a u ovom slučaju radijalni naponi do zida su konstantne vrednosti.

U osi silosa, aproksimativne vrednosti asimptotskih radijalnih napona su neznatno veće, do 0.7% prema prikazanim analizama, od tačnih numeričkih vrednosti.

4.3.2.4 Interpolaciona stepena funkcija za asimptotske radijalne napone

Aproksimativni izraz za radijalne napone (4.494), se u ovom radu ne koristi za rešavanje stanja napona kod primene metode integralnih relacija, usled velike složenosti integracije integralnih uslova ravnoteže kod uvođenja ovog izraza.

U ovom radu se koristi jednostavnija interpolaciona funkcije za određivanje asimptotskog radijalnog napona $\sigma_{rf}(r)$, u sledećem obliku:

$$\sigma_{rf}(r) = \sigma_{rf0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R}\right)^a\right) + \sigma_{rfR} \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a = \sigma_{rf0} - (\sigma_{rf0} - \sigma_{rfR}) \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \quad (4.497)$$

Kod aproksimativnih analiza stanja napona, eksponent a se može uzeti da je 2, tako da u ovom slučaju interpolaciona funkcija po obliku odgovara kvadratnoj paraboli.

U ovom radu, eksponent a se određuje numeričkim rešavanjem diferencijalne jednačine (4.492), i u skladu sa dalje prikazanom analizom koja se odnosi na prstenaste napone u uskladištenom materijalu.

Apsolutna vrednost kod promenljive r je uvedena da bi se izraz (4.497) mogao koristiti i kod uvođenja negativnih vrednosti za r , iako ovo nije matematički neophodno kod rotaciono simetričnog problema stanja napona. U vezi s tim, proračun se može sprovoditi radi jednostavnijeg prikaza i bez uvedene apsolutne vrednosti, a kasnije samo uvesti u gotova rešenja.

Diferenciranjem izraza (4.497), dobija se:

$$\sigma'_{rf}(r) = -\frac{\sigma_{rf0} - \sigma_{rfR}}{R} \cdot a \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^{a-1} = -\frac{\sigma_{rf0} - \sigma_{rfR}}{r} \cdot a \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \quad (4.498)$$

Prostom smenom (4.497) i (4.498) u opšti diferencijalni oblik ravnoteže radijalnih napona (4.487), u posmatranom slučaju za $z \rightarrow \infty$, određuje se:

$$-\frac{\sigma_{rf0} - \sigma_{rfR}}{r} \cdot a \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a + \frac{\sigma_{rf0} - (\sigma_{rf0} - \sigma_{rfR}) \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a - \sigma_{\theta f}(r)}{r} = 0 \quad (4.499)$$

Iz ove jednačine direktno se određuje asimptotski prstenasti napon u obliku:

$$\sigma_{\theta f}(r) = \sigma_{rf0} - (\sigma_{rf0} - \sigma_{rfR}) \cdot (a+1) \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \quad (4.500)$$

Na osnovu ovog izraza, u graničnim slučajevima za $r = R$ i $r = 0$, određuje se:

$$\sigma_{\theta f}(R) = \sigma_{\theta fR} = \sigma_{rf0} - (\sigma_{rf0} - \sigma_{rfR}) \cdot (a+1) \quad (4.501)$$

$$\sigma_{\theta f}(0) = \sigma_{\theta f 0} = \sigma_{r f 0} \quad (4.502)$$

Prema poslednjem izrazu, određeno je da su jednaki radijalni i prstenasti naponi u osi silosa, kako i sledi u problemu rotacione simetrije napona.

Smičući naponi su nula u sredini silosa, te su prethodno navedeni naponi jednaki glavnim naponima, $\sigma_2 = \sigma_3$, a vertikalni napon u centralnoj osi silosa odgovara najvećem glavnom naponu σ_1 (aktivno stanje napona). U pasivnom stanju napona je $\sigma_1 = \sigma_2$, a vertikalni napon je σ_3 .

Kada se na osnovu numeričkog postupka odredi asimptotski radijalni napon u osi silosa, eksponent a se može odrediti na osnovu primene izraza (4.501).

Određivanje asimptotskih prstenastih napona

Prstenasti naponi su u (4.500) dati u zavisnosti od konturnih vrednosti radijalnih napona. Za konturne vrednosti prstenastih napona, prema (4.501) i (4.502), funkcija radijalnih napona se može dati u sledećem obliku:

$$\sigma_{\theta f}(r) = \sigma_{\theta f 0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R}\right)^a\right) + \sigma_{\theta f R} \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a = \sigma_{\theta f 0} - (\sigma_{\theta f 0} - \sigma_{\theta f R}) \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \quad (4.503)$$

Na osnovu izraza (4.497) i (4.503), sledi da je ista interpolaciona funkcija određena i za prstenaste napone.

Ovde se može sprovesti kontrola uslova ravnoteže na odvojenoj polovini sloja uskladištenog materijala jedinične visine, za $z \rightarrow \infty$, sa uvođenjem izraza (4.497) i (4.503).

Ravnoteža sila u radijalnom pravcu se određuje u sledećem obliku:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{r f}(R) \cdot R \cdot \cos \theta \cdot d\theta - 2 \cdot \int_0^R \sigma_{\theta f}(r) \cdot dr = 0 \quad (4.504)$$

Posle uvođenja izraza za prstenasti napon (4.500) u jednačinu (4.504), dobija se:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{r f}(R) \cdot R \cdot \cos \theta \cdot d\theta - 2 \cdot \int_0^R \left(\sigma_{r f 0} - (\sigma_{r f 0} - \sigma_{r f R}) \cdot (a+1) \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \right) \cdot dr = 0 \quad (4.505)$$

Integracijom ove jednačine, pri čemu je $\sigma_{r f}(R) \equiv \sigma_{r f R}$, potvrđuje se uslov ravnoteže sila u radijalnom pravcu na polovini jediničnog sloja uskladištenog materijala. Pri integraciji se ne razmatra slučaj sa $a = -1$, jer se kod interpolacione funkcije očekuje da je $a > 1$.

Određivanje asimptotskih vertikalnih napona

Asimptotski vertikalni napon za $z \rightarrow \infty$ se određuje iz (4.466) u sledećem obliku:

$$\sigma_{z f}(r) = \sigma_{\theta f}(r) \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \sigma_{r f}(r) \quad (4.506)$$

U ovaj izraz se uvode pretpostavljeni oblici za radijalni i prstenasti napon:

$$\sigma_{z f}(r) = \left(\sigma_{\theta f 0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \right) + \sigma_{\theta f R} \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{K_0}\right) - \left(\sigma_{r f 0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \right) + \sigma_{r f R} \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \right) \quad (4.507)$$

S obzirom na izvođenje kod izraza (4.470) i (4.471), prethodni izraz se može napisati u sledećem obliku:

$$\sigma_{\mathcal{J}}(r) = \frac{\sigma_{\mathcal{J}0}}{K_0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) + \frac{\sigma_{\mathcal{J}R}}{K_R} \cdot \left(\frac{|r|}{R} \right)^a = \sigma_{\mathcal{J}0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) + \sigma_{\mathcal{J}R} \cdot \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \quad (4.508)$$

Na ovaj način i asimptotski vertikalni naponi imaju istu funkciju interpolacije u r pravcu, kao kod asimptotskih radijalnih i prstenastih napona.

4.3.2.5 Određivanje eksponenta a kod stepene funkcije radijalnih napona

Opšti oblik diferencijalne jednačine po asimptotskim radijalnim naponima (4.492), može se odrediti postupkom numeričke integracije, uz primenu graničnog uslova za radijalni napon do zida ćelije. Konturni asimptotski radijalni naponi, kod 3Dr silosa, su:

$$\sigma_{\mathcal{J}R}(R) = \sigma_{\mathcal{J}R} = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \quad (4.509)$$

$$\sigma_{\mathcal{J}}(0) = \sigma_{\mathcal{J}0} \quad (4.510)$$

Ovde je potrebno odrediti napon u sredini silosa $\sigma_{\mathcal{J}0}$, numeričkom integracijom diferencijalne jednačine (4.492). Kod numeričke integracije veličine napona linearno zavise od zapreminske težine uskladištenog materijala γ , kao i od poluprečnika silosa R , tako da se može uzeti da su ove vrednosti jedinične.

Na ovaj način, numerička integracija se sprovodi samo u zavisnosti od parametara trenja, tj. u zavisnosti od zadatih vrednosti koeficijenata μ_i i μ_w .

Dvoznak κ se uzima da je +1 pri analizi aktivnog stanja, odnosno -1 kod analize pasivnog stanja napona.

Jednačina (4.492), se u skladu sa prethodnim razmatranjem, određuje za $\gamma = 1$, $R = 1$, $\sigma_{\mathcal{J}R} = 1/(2 \cdot \mu_w)$, $r = 0 \dots 1$, $\kappa = 1$ (aktivno stanje napona), i može da se prikaže u sledećem obliku:

$$\frac{d\sigma_{\mathcal{J}}(r)}{dr} + \frac{\sigma_{\mathcal{J}}(r)}{r} \cdot \frac{\sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left(\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2 \cdot r^2} \cdot \frac{\sigma_{\mathcal{J}R}^2}{\sigma_{\mathcal{J}}(r)^2} \right)}{1 + \mu_i^2 + \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} = 0 \quad (4.511)$$

Ova diferencijalna jednačina se odnosi na silos jediničnog poluprečnika i jedinične zapreminske težine, i koristi se za određivanje asimptotskog radijalnog napona u centralnoj osi silosa, u cilju određivanja veličine eksponenta a .

Izjednačavanjem dva alternativna oblika koeficijenta K , data sa izrazima (4.485) i (4.486), pri određivanju vrednosti odnosa napona do zida ćelije, tj. za $r = R$, određuje se veza između asimptotskih prstenastih i radijalnih napona do ivice zida. Iz veze navedenih napona, može se odrediti eksponent a .

U ovom pravcu, koristi se veza navedenih napona (4.465) i izraz za prstenaste napone do zida ćelije (4.501):

$$\sigma_{\theta \mathcal{J}R} = \sigma_{\mathcal{J}R} \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_R}}{1 + \frac{1}{K_0}} = \sigma_{\mathcal{J}0} - (\sigma_{\mathcal{J}0} - \sigma_{\mathcal{J}R}) \cdot (a + 1) \quad (4.512)$$

$$\chi = \frac{\sigma_{\theta f}(r)}{\sigma_{r f}(r)} \Rightarrow \chi_R = \frac{\sigma_{\theta f R}}{\sigma_{r f R}} = \frac{1 + \frac{1}{K_R}}{1 + \frac{1}{K_0}} \quad \text{i} \quad \chi_0 = \frac{\sigma_{\theta f 0}}{\sigma_{r f 0}} = 1 \quad (4.513)$$

$$\sigma_{\theta f R} = \sigma_{r f R} \cdot \chi_R = \sigma_{r f 0} - (\sigma_{r f 0} - \sigma_{r f R}) \cdot (a+1) \quad (4.514)$$

Iz prethodnog izraza se određuje eksponent a :

$$a = \frac{\sigma_{r f R}}{\sigma_{r f 0} - \sigma_{r f R}} \cdot \left(1 - \frac{1 + \frac{1}{K_R}}{1 + \frac{1}{K_0}} \right) = \frac{\sigma_{r f R}}{\sigma_{r f 0} - \sigma_{r f R}} \cdot \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{\mu_i + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}} \quad (4.515)$$

Isti izraz se može prikazati u sledećem obliku:

$$a = \frac{\sigma_{r f R}}{\sigma_{r f 0} - \sigma_{r f R}} \cdot (1 - \chi_R) \quad \text{gde je} \quad (1 - \chi_R) = \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{\mu_i + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}}. \quad (4.516)$$

Kako je a bezdimenzioni koeficijent, a $\sigma_{r f R}$ linearno zavisi od dimenzionalnih veličina γ i R , sledi da i $\sigma_{r f 0}$ linearno zavisi od istih dimenzionalnih veličina.

Na ovaj način, primenom izraza (4.515), određuje se a nezavisno od konkretne vrednosti zapreminske težine γ i poluprečnika silosa R .

Vrednosti koeficijenta a , se mogu tabelarno prikazati sa variranjem parametara μ_i i μ_w , kada su poznate vrednosti napona $\sigma_{r f R}$ i $\sigma_{r f 0}$.

Na osnovu izraza (4.515), određuje se radijalni napon u centralnoj osi silosa:

$$\sigma_{r f 0} = \sigma_{r f R} \cdot \left[1 + \frac{1}{a} \cdot \left(1 - \frac{1 + \frac{1}{K_R}}{1 + \frac{1}{K_0}} \right) \right] = \sigma_{r f R} \cdot \left[1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{\mu_i + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}} \right] \quad (4.517)$$

$$\sigma_{r f 0} = \sigma_{r f R} \cdot \left[1 + \frac{1}{a} \cdot (1 - \chi_R) \right] \quad (4.518)$$

Kada se koriste tabelarne vrednosti koeficijenta a , kod proračuna se ne koristi direktna primena numeričke analize.

U slučaju da je vrednost eksponenta a poznata (primena tabele 32 ili 33), primenom izraza (4.517), određuje se vrednost asimptotskog napona u centralnoj osi silosa $\sigma_{r f 0}$. Sa ovim naponom se mogu odrediti i ostali nepoznati asimptotski naponi u preseku ćelije.

Za određivanje koeficijenta a , pri numeričkoj integraciji diferencijalne jednačine (4.492) sračunava se napon $\sigma_{r f 0}$. Pri tome se koristi napon $\sigma_{r f R} = 1/(2 \cdot \mu_w)$. Sa ovim se određuje a za zadate vrednosti μ_i i μ_w , a posao vezan za numeričku integraciju se može obaviti jednom za svagda (tabela 32).

Pri numeričkoj integraciji zahtevana je visoka tačnost rezultata kod određivanja asimptotskih radijalnih napona sa 10 značajnih cifara (numerička integracija sa poznatim graničnim vrednostima).

Na osnovu numeričke integracije određuje se konturni napon σ_{r0} , a zatim se eksponent a dobija primenom izraza (4.515). Za manje vrednosti μ_w određuju se vrednosti eksponenta a oko 2.0.

Za određivanje radijalnih napona σ_{r0} može se upotrebiti aproksimativno teorijsko rešenje za radijalne napone (4.494). Na osnovu ovog izraza, određeni su odgovarajući konturni naponi izrazima (4.495) i (4.496). Eksponent a se sračunava pri uvođenju ovih vrednosti konturnih napona u izraz (4.515).

Pri primeni aproksimativnog teorijskog rešenja za radijalne napone (4.494), određene su vrednosti eksponenta a , koje su prikazane u tabeli 33.

Tabela 32. Vrednosti eksponenta a u zavisnosti od koeficijenta trenja μ_i i μ_w (za aktivno stanje napona) - **primena numeričke integracije** za određivanje radijalnih napona.

		μ_i																			
		1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1										
μ_w	1.0	–																			
	0.9	2.55990	–																		
	0.8	2.35366	2.52490	–																	
	0.7	2.23541	2.31979	2.48558	–																
	0.6	2.15677	2.20413	2.28255	2.44101	–															
	0.5	2.10133	2.12867	2.17048	2.24145	2.38998	–														
	0.4	2.06151	2.07688	2.09930	2.13440	2.19600	2.33098	–													
	0.3	2.03331	2.04120	2.05239	2.06914	2.09623	2.14589	2.26197	–												
	0.2	2.01443	2.01773	2.02233	2.02904	2.03944	2.05707	2.09150	2.18034	–											
	0.1	2.00355	2.00435	2.00545	2.00703	2.00943	2.01336	2.02051	2.03607	2.08411	–										

Tabela 33. Vrednosti eksponenta a u zavisnosti od koeficijenta trenja μ_i i μ_w (za aktivno stanje napona) - **primena aproks. izraza** (4.494) za određivanje radijalnih napona.

		μ_i																			
		1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1										
μ_w	1.0	3.05617																			
	0.9	2.30874	3.06259																		
	0.8	2.17989	2.29200	3.07042																	
	0.7	2.11312	2.16414	2.27347	3.08006																
	0.6	2.07213	2.09907	2.14695	2.25263	3.09198															
	0.5	2.04506	2.05990	2.08399	2.12799	2.22871	3.10682														
	0.4	2.02664	2.03467	2.04704	2.06769	2.10674	2.20048	3.12536													
	0.3	2.01414	2.01814	2.02412	2.03360	2.05001	2.08253	2.16588	3.14856												
	0.2	2.00604	2.00768	2.01008	2.01378	2.01988	2.03101	2.05460	2.12141	3.17760											
	0.1	2.00148	2.00187	2.00243	2.00329	2.00468	2.00710	2.01188	2.02321	2.06172	3.21385										

4.3.2.6 Pregled proračunskih izraza prema postavkama u analizi 3Dr silosa

Pregled izraza za dijagrame asimptotskih napona materijala u kružnoj ćeliji

$$\tau_{zrf}(r) = \tau_{zrfR} \cdot \frac{r}{R} = \mu_w \cdot \sigma_{rfr} \cdot \frac{r}{R} = \frac{\gamma \cdot r}{2} \quad (4.519)$$

$$\sigma_{rf}(r) = \sigma_{rf0} - (\sigma_{rf0} - \sigma_{rfr}) \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \quad (4.520)$$

$$\sigma_{\theta f}(r) = \sigma_{\theta f0} - (\sigma_{\theta f0} - \sigma_{\theta fr}) \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \quad (4.521)$$

$$\sigma_{zf}(r) = \sigma_{zf0} - (\sigma_{zf0} - \sigma_{zfr}) \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \quad (4.522)$$

gde su:

$$\tau_{zfr} = \mu_w \cdot \sigma_{rfr} = \gamma \cdot \frac{R}{2} \quad (4.523)$$

$$\tau_{zfr0} = 0 \quad (4.524)$$

$$\sigma_{rfr} = \frac{\tau_{zfr}}{\mu_w} = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \quad (4.525)$$

$$\sigma_{rf0} = \sigma_{rfr} \cdot \left[1 + \frac{1}{a} \cdot \left(1 - \frac{1 + \frac{1}{K_R}}{1 + \frac{1}{K_0}} \right) \right] = \sigma_{rfr} \cdot \left[1 + \frac{1}{a} \cdot (1 - \chi_R) \right] = \sigma_{rfr} \cdot \left[1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{\mu_i + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}} \right] \quad (4.526)$$

$$\sigma_{\theta fr} = \sigma_{rfr} \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_R}}{1 + \frac{1}{K_0}} = \sigma_{rfr} \cdot \chi_R = \sigma_{rf0} - (\sigma_{rf0} - \sigma_{rfr}) \cdot (a+1) \quad (4.527)$$

$$\sigma_{\theta f0} = \sigma_{rf0} \quad (4.528)$$

$$\sigma_{zfr} = \frac{\sigma_{rfr}}{K_R} \quad (4.529)$$

$$\sigma_{zf0} = \frac{\sigma_{rf0}}{K_0} \quad (4.530)$$

Prema pregledu proračunskih izraza za određivanje stanja asimptotskih napona, normalni naponi zavise od konturnih napona i interpolacione stepene funkcije. Radijalni, prstenasti i vertikalni naponi (σ_{rf} , $\sigma_{\theta f}$ i σ_{zf}) su određeni izrazima (4.520), (4.521) i (4.522), respektivno. Oblik dijagrama napona zavisi od eksponenta a . Konturni naponi do zida ćelije σ_{rfr} , $\sigma_{\theta fr}$ i σ_{zfr} , ne zavise od vrednosti eksponenta a , i određuju se primenom izraza (4.525), (4.527) i (4.529), respektivno. Konturni naponi u centralnoj osi silosa σ_{rf0} , $\sigma_{\theta f0}$ i σ_{zf0} , zavise od vrednosti eksponenta a , i određuju se primenom izraza (4.526), (4.528) i (4.530), respektivno.

4.3.2.7 Primer analize asimptotskog stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu

U primeru se određuje asimptotsko stanje normalnih napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu prema numeričkom postupku i primenom interpolacione stepene funkcije za slučajeve konturnih napona prema numeričkom postupku i prema aproksimativnom teorijskom rešenju (4.494).

U analizi je za koeficijent unutrašnjeg trenja materijala uvedena vrednost $\mu_i = 0.8$, a za koeficijent trenja uskladištenog materijala o zid ćelije $\mu_w = 0.6$.

Vrednosti za konturne radijalne napone su prikazane u tabeli 31, u prvoj vrsti sa rezultatima analize ($\mu_i = 0.8$ i $\mu_w = 0.6$), koji su određeni pri primeni numeričkog postupka i aproksimativnog rešenja za radijalne napone prema jednačini (4.494). Rezultati analize su sledeći:

- za konturni napon u osi silosa
 $\sigma_{r\theta}/(\gamma \cdot R) = 0.88086$ (primena numeričkog postupka)
 $\sigma_{r\theta}/(\gamma \cdot R) = 0.88386$ (primena aproks. rešenja prema jedn. (4.494))
- za konturni napon do zida ćelije
 $\sigma_{rR}/(\gamma \cdot R) = 0.83333$ (teorijski početni uslov – jednaka teorijska vrednost za numeričko i aproks. rešenje)

Primenjuju se sledeće vrednosti eksponenta a :

- $a = 2.28255$ (prema tabeli 32 za $\mu_i = 0.8$ i $\mu_w = 0.6$; predstavlja "tačnu" vrednost eksponenta a , koja je određena primenom numeričkog postupka; uvođenjem ove vrednosti u proračun asimptotskih napona sa primenom interpolacione funkcije određuju se "tačne" vrednosti za napone u osi silosa), i
- $a = 2.14695$ (prema tabeli 33 za $\mu_i = 0.8$ i $\mu_w = 0.6$; približna vrednost eksponenta a , koja je određena sa uvođenjem aproks. rešenja za radijalne napone prema jedn. (4.494); uvođenjem ove vrednosti određuju se približne vrednosti napona u osi silosa).

Druga vrednost eksponenta a je manja za oko 6% od prve numeričke vrednosti, ali su u proračunima razlike asimptotskih napona, pri primeni ovih različitih vrednosti za a , relativno mnogo manje. Asimptotske vrednosti napona do zida ćelije ne zavise direktno od a .

Analizira se aktivno stanje napona, tako da je $\kappa = +1$. U analizi se određuju dijagrami svih normalnih napona u asimptotskom stanju napona. Pored određivanja dijagrama napona u obliku aproksimativne interpolacione stepene funkcije, za slučajeve uvođenja tačne i približne vrednosti eksponenta a , određuju se i vrednosti prema numeričkom postupku u 20-tinama poluprečnika ćelije za sve normalne napone.

U prethodno prikazanoj analizi asimptotskih radijalnih napona, na sl. 172 su prikazani dijagrami radijalnih napona koji su određeni prema aproksimativnom teorijskom rešenju u analitičkom obliku, i numeričkim postupkom. Ova dva rešenja za radijalne napone su poslužila za određivanje već navedenih vrednosti eksponenta a , koji se u aktuelnoj analizi koriste kod određivanja dijagrama normalnih napona $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta r}$ i σ_{rz} , prema izrazima (4.520), (4.521) i (4.522), respektivno. Eksponent a se uvodi u interpolacionu stepenu funkciju, kao i kod određivanja konturnih napona u centralnoj osi silosa (direktno kod radijalnih napona).

U analizi se uvode dve vrednosti za eksponent a , jedna vrednost koja predstavlja tačnu numeričku vrednost, i druga približna vrednost, koja je određena prema aproksimativnom teorijskom rešenju dijagrama radijalnih napona. Za obe vrednosti se određuju dijagrami normalnih napona u obliku interpolacione stepene funkcije.

Interpolaciona stepena funkcija dijagrama napona je pogodna za upotrebu kod primene metode integralnih relacija pri određivanju stanja napona materijala u silosu, jer se ove funkcije relativno lako diferenciraju i integrale. Za razliku od stepene funkcije, primena aproksimativnog rešenja za radijalne napone u obliku (4.494), vodi ka vrlo složenoj integraciji rešenja kod primene metode integralnih relacija. Tačne vrednosti asimptotskih napona se, u principu, dobijaju samo primenom numeričkog postupka, budući da u teoriji nije poznato analitičko rešenje asimptotskog stanja radijalnih napona.

U ovoj analizi se određuju dijagrami asimptotskih normalnih napona:

- primenom numeričkog postupka:
 - σ_{rf} – prema izrazu (4.490),
 - $\sigma_{\theta f}$ – prema izrazu (4.461) uz uvođenje izraza (4.477), i
 - σ_{zf} – prema izrazu (4.457) uz uvođenje izraza (4.477); i
- primenom interpolacione stepene funkcije sa eksponentom a (za numeričku vrednost $a = 2.28255$, i za približnu vrednost $a = 2.14695$):
 - σ_{rf} – prema izrazu (4.520),
 - $\sigma_{\theta f}$ – prema izrazu (4.521), i
 - σ_{zf} – prema izrazu (4.522).

Analiza stanja napona se sprovodi u bezdimenzionalnom obliku odnosa $\sigma_f/(\gamma \cdot R)$, gde je σ_f odgovarajući asimptotski normalni napon. Uvodi se relativna radijalna koordinata $\rho = r/R$, tako da su naponi u funkciji od ρ , tj. $\sigma_f = \sigma_f(\rho)$. Analiza se sprovodi za pozitivne vrednosti r koordinate, tako da nije potrebno uvođenje apsolutnih vrednosti za r , odnosno za ρ . Kod primene proračunskih izraza za asimptotske napone $\sigma_f(r)$, s obzirom da su izrazi dati u dimenzionalnom obliku, u proračunske izraze za kružni silos se uvodi poluprečnik $R = 1.0$ m, i zapreminska težina materijala $\gamma = 1.0$ kN/m³. Na ovaj način, naponi $\sigma_f(r)$, koji su određeni kao dimenzionalne veličine sa jediničnim vrednostima za R i γ u ovoj analizi odgovaraju bezdimenzionalnim veličinama u obliku $\sigma_f(\rho)/(\gamma \cdot R)$.

U skladu sa prethodnim postavkama, kod primene postupka sa interpolacionom stepenom funkcijom određuju se dijagrami bezdimenzionalne veličine napona:

- za numeričku vrednost eksponenta $a = 2.28255$

$$\sigma_{rf}(\rho)/(\gamma \cdot R) = 0.88086 - 0.04753 \cdot \rho^{2.28255}$$

$$\sigma_{\theta f}(\rho)/(\gamma \cdot R) = 0.88086 - 0.15601 \cdot \rho^{2.28255}$$

$$\sigma_{zf}(\rho)/(\gamma \cdot R) = 3.81324 - 0.78384 \cdot \rho^{2.28255}$$
- za približnu vrednost eksponenta $a = 2.14695$

$$\sigma_{rf}(\rho)/(\gamma \cdot R) = 0.88386 - 0.05053 \cdot \rho^{2.14695}$$

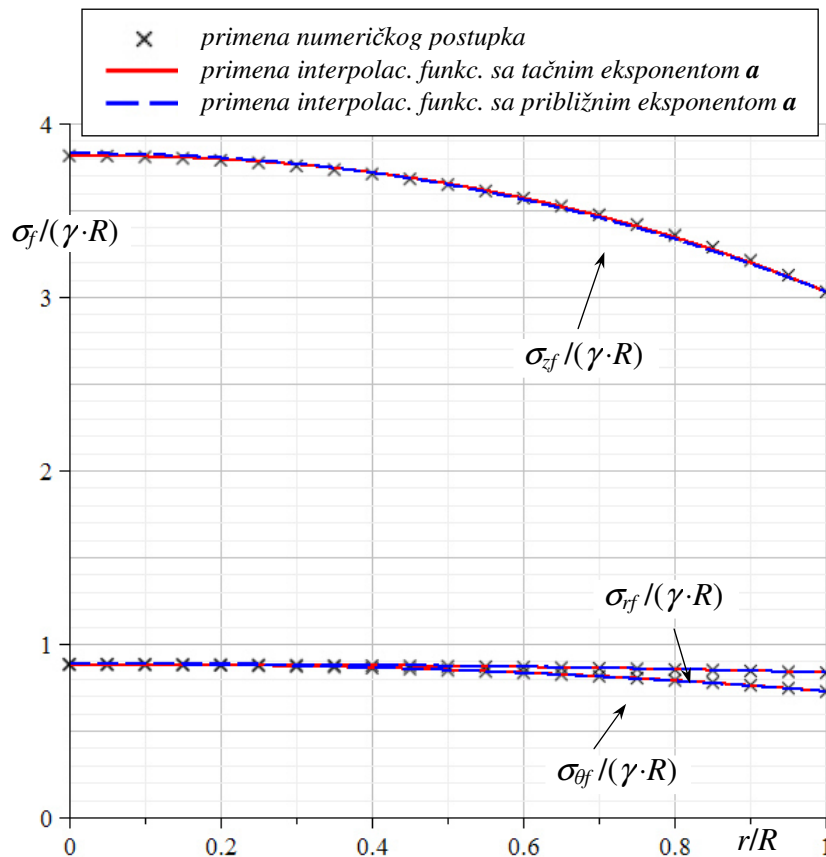
$$\sigma_{\theta f}(\rho)/(\gamma \cdot R) = 0.88386 - 0.15900 \cdot \rho^{2.14695}$$

$$\sigma_{zf}(\rho)/(\gamma \cdot R) = 3.82623 - 0.79681 \cdot \rho^{2.14695}$$

Kada se prvi izraz prevede u dimenzionalnu formu, određuje se sledeći oblik izraza za asimptotske radijalne napone:

$$\sigma_{rf} = \gamma \cdot R \cdot \left[0.88086 - 0.04753 \cdot (r/R)^{2.28255} \right]$$

Na osnovu prikazanih izraza formirani su dijagrami napona na sl. 173. Kada se u ove izraze uvede $\rho = 0$, određuju se bezdim. veličine odgovarajućih konturnih napona u osi silosa, a za $\rho = 1$ određuju se navedene veličine konturnih napona do zida ćelije. Na sl. 173 su prikazane numeričke vrednosti normalnih napona u 20-tinama poluprečnika, kao i dijagrami napona u obliku interpolacione stepene funkcije pri uvođenju numeričke i približne vrednosti eksponenta a .



Sl. 173 Dijagrami vertikalnih, radijalnih i prstenastih napona za $0 \leq r/R \leq 1$, prema numeričkom postupku i pri primeni interpolacionih funkcija.

Numerički određene vrednosti napona i dijagrami na sl. 173, pokazuju vrlo dobro slaganje rezultata analize. Asimptotske vrednosti konturnih napona u ovoj analizi, su prikazane u tabeli 34. Konturni naponi do zida, su jednaki kod svih navedenih postupaka proračuna, kako i sledi iz teorijske analize asimptotskog stanja napona. Vrednosti napona u centralnoj osi silosa su jednake kod numeričkog postupka i pri primeni interpolacione stepene funkcije kod koje se koristi vrednost eksponenta a prema numeričkom postupku. U odnosu na ove vrednosti napona, za 0.34% su veće odgovarajuće vrednosti napona u centralnoj osi silosa, kod uvođenja približne vrednosti eksponenta a . Razlika u veličini eksponenta je -6% , a razlika u bezdimenz. naponima u sredini silosa samo 0.34%.

Tabela 34. Uporedni pregled rezultata konturnih vrednosti asimptotskih normalnih napona pri primeni numeričkog postupka i primeni interpolacionih funkcija.

Bezdimenzionalni asimptotski naponi	numerički postupak	primena interpolacione funkcije (za tačno a)	primena interpolacione funkc. (za približno a)
$\sigma_{r0}/(\gamma \cdot R)$	0.8809		0.8839 (0.34%)
$\sigma_{\theta0}/(\gamma \cdot R)$	0.8809		0.8839 (0.34%)
$\sigma_{z0}/(\gamma \cdot R)$	3.8132		3.8262 (0.34%)
$\sigma_{rfR}/(\gamma \cdot R)$		0.8333	
$\sigma_{\theta fR}/(\gamma \cdot R)$		0.7249	
$\sigma_{zfR}/(\gamma \cdot R)$		3.0294	

Dijagrami napona sa interpolacionom stepenom funkcijom se relativno lako uvode u analizu stanja napona kod primene metode integralnih relacija. Stepene funkcija je integrabilna i diferencijabilna, i ne dolazi do većih problema pri integraciji. Tačno analitičko rešenje dijagrama radijalnih napona nije poznato, već se tačna rešenja određuju postupkom numeričke integracije.

U prikazanoj analizi, ustanovljeno je vrlo dobro slaganje dijagrama asimptotskih napona u obliku primenjene interpolacione stepene funkcije, sa vrednostima napona prema numeričkom postupku. Pored toga, ako se za eksponent a u proračunima uvede vrednost koja odstupa od tačne vrednosti, procentualno odstupanje napona je relativno mnogo manje u poređenju sa odstupanjem kod samog eksponenta a . Na ovaj način, u aproksimativnim analizama stanja napona uskladištenog materijala u silosu, može se usvojiti vrednost eksponenta a . Na primer, u analizama se obično usvaja da je $a = 2$, tako da dijagrami napona po obliku odgovaraju kvadratnoj paraboli (Negi (1974) [202] i Negi i Ogilvie (1977) [203] za 3Dr silos, Drescher (1991) prema [168] za 2D silos).

4.3.3 I-3Dr postupak - primena konturnih funkcija raspodele i stepene promene svih normalnih napona

U metodi integralnih relacija određuju se konturni naponi do zida i u osi silosa u funkciji promenljive koordinate z . Svi konturni naponi linearno zavise od radijalnih konturnih napona, što je prikazano u izrazima (4.523) do (4.530). U ovom slučaju sistem diferencijalnih uslova ravnoteže prelazi u sistem dve parcijalne diferencijalne jednačine kod kojih nepoznate predstavljaju radijalni naponi na konturama. Kako radijalni naponi zavise od funkcija raspodele $Y_0(z)$ i $Y_R(z)$ na konturama, a imaju maksimalne vrednosti prema asimptotskim vrednostima posmatranog radijalnog napona na konturi, sledi da se ove funkcije raspodele isto tako odnose i na druge konturne napone, zbog njihove linearnosti sa radijalnim naponima. Imajući ovo u vidu, jednostavnije je problem stanja napona rešavati po funkcijama raspodele kao nepoznatim, a ne po promenljivim konturnim naponima. Svi konturni naponi se mogu predstaviti kao proizvod asimptotske vrednosti posmatranog napona i odgovarajuće funkcije raspodele:

$$\sigma_{r0}(z) = \sigma_{rf0} \cdot Y_0(z) \quad (4.531)$$

$$\sigma_{z0}(z) = \sigma_{zf0} \cdot Y_0(z) \quad (4.532)$$

$$\sigma_{\theta 0}(z) = \sigma_{\theta f 0} \cdot Y_0(z) \quad (4.533)$$

$$\tau_{zr 0}(z) = 0 \quad (4.534)$$

$$\sigma_{rR}(z) = \sigma_{rfR} \cdot Y_R(z) \quad (4.535)$$

$$\sigma_{zR}(z) = \sigma_{zfR} \cdot Y_R(z) \quad (4.536)$$

$$\sigma_{\theta R}(z) = \sigma_{\theta fR} \cdot Y_R(z) \quad (4.537)$$

$$\tau_{zrR}(z) = \tau_{zfR} \cdot Y_R(z) \quad (4.538)$$

U analizu se uvodi afinost stanja napona na beskonačnoj dubini silosa i konkretnoj dubini z , što odgovara pretpostavci da je $K(z, r) = K_f(z) = K(z)$, i pretpostavci da su isti funkcionalni oblici dijagrama napona na konkretnoj dubini z i u asimptotskom slučaju za $z \rightarrow \infty$. Na ovaj način koriste se izrazi za promene napona na konkretnoj dubini z , slični izrazima (4.519) do (4.522), u sledećem obliku:

$$\tau_{zr}(z, r) = \tau_{zrR}(z) \cdot \frac{r}{R} = \mu_w \cdot \sigma_{rR}(z) \cdot \frac{r}{R} \quad (4.539)$$

$$\sigma_{rf}(z, r) = \sigma_{r0}(z) - (\sigma_{r0}(z) - \sigma_{rR}(z)) \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \quad (4.540)$$

$$\sigma_{\theta}(z, r) = \sigma_{\theta 0}(z) - (\sigma_{\theta 0}(z) - \sigma_{\theta R}(z)) \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \quad (4.541)$$

$$\sigma_z(z, r) = \sigma_{z0}(z) - (\sigma_{z0}(z) - \sigma_{zR}(z)) \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \quad (4.542)$$

Ako se uvedu funkcije raspodele u prethodne izraze, dobija se:

$$\tau_{zr}(z, r) = \mu_w \cdot \sigma_{rfR} \cdot \frac{r}{R} \cdot Y_R(z) \quad (4.543)$$

$$\sigma_r(z, r) = \sigma_{rf0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R}\right)^a\right) \cdot Y_0(z) + \sigma_{rfR} \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \cdot Y_R(z) \quad (4.544)$$

$$\sigma_{\theta}(z, r) = \sigma_{\theta f 0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R}\right)^a\right) \cdot Y_0(z) + \sigma_{\theta fR} \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \cdot Y_R(z) \quad (4.545)$$

$$\sigma_z(z, r) = \sigma_{zf0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R}\right)^a\right) \cdot Y_0(z) + \sigma_{zfR} \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \cdot Y_R(z) \quad (4.546)$$

Ovako postavljen problem odgovara slučaju analize sa jedinstvenom interpolacionom funkcijom za sve normalne napone (već razmatrano kod 2D silosa). Kod primene ovih izraza u integralnim relacijama uslova ravnoteže, prstenasti i vertikalni napone se prvo uvode preko svojih konturnih napona, a zatim se ovi konturni naponi prikazuju u funkciji konturnih radialnih napona. U izraze za prstenaste i vertikalne napone (4.545) i (4.546), uvode se odgovarajući konturni asimptotski naponi prema izrazima (4.527) do (4.530), pri čemu se određuju sledeći oblici prstenastih i vertikalnih napona:

$$\sigma_{\theta}(z, r) = \sigma_{rf0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R}\right)^a\right) \cdot Y_0(z) + (\sigma_{rf0} - (\sigma_{rf0} - \sigma_{rfR})) \cdot (a+1) \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \cdot Y_R(z) \quad (4.547)$$

$$\sigma_z(z, r) = \frac{\sigma_{rf0}}{K_0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R}\right)^a\right) \cdot Y_0(z) + \frac{\sigma_{rfR}}{K_R} \cdot \left(\frac{|r|}{R}\right)^a \cdot Y_R(z) \quad (4.548)$$

Rešavanje uslova ravnoteže

Diferencijalni oblici uslova ravnoteže se množe sa r i integrale u granicama od 0 do R :

$$\int_0^R \left(\frac{\partial \sigma_r(z, r)}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zr}(z, r)}{\partial z} + \frac{\sigma_r(z, r) - \sigma_\theta(z, r)}{r} \right) \cdot r \cdot dr = 0 \quad (4.549)$$

$$\int_0^R \left(\frac{\partial \sigma_z(z, r)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}(z, r)}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}(z, r)}{r} \right) \cdot r \cdot dr = \int_0^R \gamma \cdot r \cdot dr \quad (4.550)$$

Ovo odgovara uslovima ravnoteže radijalnih i vertikalnih sila, respektivno, na kružnom isečku diferencijalnog sloja sa visinom dz i centralnim uglom od $\theta=1$ radijan. U ove integralne uslove ulaze izrazi za napone (4.543), (4.544), (4.547) i (4.548). Parcijalni izvodi u ovim jednačinama se određuju kako sledi:

$$\frac{\partial}{\partial r} \sigma_r(z, r) = [-\sigma_{rf0} \cdot Y_0(z) + \sigma_{rfR} \cdot Y_R(z)] \cdot \frac{a}{r} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^a \quad (4.551)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \tau_{zr}(z, r) = \mu_w \cdot \sigma_{rfR} \cdot \frac{r}{R} \cdot Y'_R(z) \quad (4.552)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \tau_{zr}(z, r) = \mu_w \cdot \sigma_{rfR} \cdot \frac{1}{R} \cdot Y_R(z) \quad (4.553)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_z(z, r) = \frac{\sigma_{rf0}}{K_0} \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^a\right) \cdot Y'_0(z) + \frac{\sigma_{rfR}}{K_R} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^a \cdot Y'_R(z) \quad (4.554)$$

Uvođenjem odgovarajućih parcijalnih izvoda u gornje jednačine uslova ravnoteže, kao i izraza za smičuće, radijalne, i prstenaste napone respektivno prema (4.543), (4.544) i (4.547), određuju se integralne relacije. Nakon sređivanja podintegralne funkcije kod prvog uslova ravnoteže određuje se sledeća integralna relacija:

$$\int_0^R \left(\mu_w \cdot \sigma_{rfR} \cdot \frac{r^2}{R} \cdot Y'_R(z) - \sigma_{rf0} \cdot [(Y_0(z) - Y_R(z))] \cdot a \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^a \right) \cdot dr = 0 \quad (4.555)$$

Rešenje ovog integrala u neodređenom obliku je:

$$\left[\frac{1}{3} \mu_w \cdot \sigma_{rfR} \cdot \frac{r^3}{R} \cdot Y'_R(z) - \sigma_{rf0} \cdot [(Y_0(z) - Y_R(z))] \cdot R \cdot \frac{a}{a+1} \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^a \right]_0^R = 0 \quad (4.556)$$

Posle određivanja razlike primitivne funkcije sa uvedenom gornjom i donjom granicom integracije, i nakon sređivanja dobijenog izraza, rešenje integrala se formira u obliku diferencijalne jednačine po funkcijama raspodele napona koje su promenljive po z :

$$k_{1dR} \cdot Y'_R(z) \cdot R - Y_0(z) + Y_R(z) = 0 \quad (4.557)$$

gde je uveden koeficijent u obliku izraza:

$$k_{1dR} = \frac{1}{3} \frac{a+1}{a} \cdot \mu_w \cdot \frac{\sigma_{rfR}}{\sigma_{rf0}} \quad (4.558)$$

Drugi uslov ravnoteže posle uvođenja odgovarajućih parcijalnih izvoda i funkcija napona dobija sledeći oblik:

$$\int_0^R \left(\frac{\sigma_{rf0}}{K_0} \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^a \right) \cdot Y_0'(z) + \frac{\sigma_{rfR}}{K_R} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^a \cdot Y_R'(z) + 2\mu_w \cdot \frac{\sigma_{rfR}}{R} \cdot Y_R(z) \right) \cdot r \cdot dr = \frac{\gamma \cdot R^2}{2} \quad (4.559)$$

Nakon određivanja datog integrala i sređivanja dobijenog izraza, formira se sledeća diferencijalna jednačina:

$$k_{2d0} \cdot R \cdot Y_0'(z) + k_{2dR} \cdot R \cdot Y_R'(z) + Y_R(z) = 1 \quad (4.560)$$

gde su bezdimenzionalni koeficijenti u ovoj jednačini dati sa sledećim izrazima:

$$k_{2d0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2+a} \cdot \frac{1}{K_0 \cdot \mu_w} \cdot \frac{\sigma_{rf0}}{\sigma_{rfR}} \quad (4.561)$$

$$k_{2dR} = \frac{1}{2+a} \cdot \frac{1}{K_R \cdot \mu_w} \quad (4.562)$$

Rešavanje sistema diferencijalnih jednačina

Iz prve jednačine (4.557) se određuje $Y_0(z)$, pa potom izvod ove funkcije po z :

$$Y_0(z) = k_{1dR} \cdot R \cdot Y_R'(z) + Y_R(z) \quad (4.563)$$

$$Y_0'(z) = k_{1dR} \cdot R \cdot Y_R''(z) + Y_R'(z) \quad (4.564)$$

Izvod se zamenjuje u drugu jednačinu (4.560):

$$k_{2d0} \cdot [k_{1dR} \cdot Y_R''(z) \cdot R + Y_R'(z)] \cdot R + k_{2dR} \cdot Y_R'(z) \cdot R + Y_R(z) = 1 \quad (4.565)$$

i određuje diferencijalna jednačina 2-og reda po $Y_R(z)$:

$$a_2 \cdot R^2 \cdot Y_R''(z) + a_1 \cdot R \cdot Y_R'(z) + Y_R(z) = 1 \quad (4.566)$$

sa sledećim konstantnim koeficijentima:

$$a_2 = k_{2d0} \cdot k_{1dR} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1+a}{2+a} \cdot \frac{1}{K_0} \quad (4.567)$$

$$a_1 = k_{2d0} + k_{2dR} = \frac{1}{\mu_w} \cdot \frac{1}{2+a} \cdot \left(\frac{1}{K_R} + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{K_0} \cdot \frac{\sigma_{rf0}}{\sigma_{rfR}} \right) \quad (4.568)$$

Rešenje diferencijalne jednačine 2-og reda je u obliku:

$$Y_R(z) = 1 + C_1 \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{R}} + C_2 \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.569)$$

gde su C_1 i C_2 neodređene konstante integracije i potrebno ih je odrediti iz početnih uslova, a k_1 i k_2 su bezdimenzionalni karakteristični koeficijenti integracije:

$$k_1 = \frac{1}{2} \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{a_2} \quad (4.570)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{a_2} \quad (4.571)$$

Određuje se izvod po z funkcije raspodele napona:

$$Y'_R(z) = -C_1 \cdot \frac{k_1}{R} \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{R}} - C_2 \cdot \frac{k_2}{R} \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.572)$$

Funkcija $Y_R(z)$ i njen izvod se uvode u (4.563), sa čime se određuje funkcija raspodele napona $Y_0(z)$:

$$Y_0(z) = k_{1dR} \cdot \left[-C_1 \cdot \frac{k_1}{R} \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{R}} - C_2 \cdot \frac{k_2}{R} \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{R}} \right] \cdot R + 1 + C_1 \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{R}} + C_2 \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.573)$$

$$Y_0(z) = 1 + C_1 \cdot (1 - k_{1dR} \cdot k_1) \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{R}} + C_2 \cdot (1 - k_{1dR} \cdot k_2) \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.574)$$

$$c_1 = 1 - k_{1dR} \cdot k_1 \quad (4.575)$$

$$c_2 = 1 - k_{1dR} \cdot k_2 \quad (4.576)$$

$$Y_0(z) = 1 + C_1 \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{R}} + C_2 \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.577)$$

4.3.3.1 Početni uslovi za određivanje konturnih funkcija raspodele napona

Trivijalan slučaj početnih uslova

Kada gornji sloj silosnog materijala nije opterećen, početni uslovi za $z = 0$ odgovaraju uslovima $Y_R(0) = 0$ i $Y_0(0) = 0$.

Na osnovu ovih početnih uslova, određuju se integracione konstante C_1 i C_2 , kako sledi:

$$Y_R(0) = 1 + C_1 + C_2 = 0 \quad (4.578)$$

$$Y_0(0) = 1 + C_1 \cdot c_1 + C_2 \cdot c_2 = 0 \quad (4.579)$$

Iz ovog sistema određuju se C_1 i C_2 :

$$C_1 = \frac{k_2}{k_1 - k_2} \quad (4.580)$$

$$C_2 = -\frac{k_1}{k_1 - k_2} \quad (4.581)$$

Konačna rešenja funkcija raspodele su:

$$Y_R(z) = 1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{R}} - \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.582)$$

$$Y_0(z) = 1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{R}} - \frac{k_1}{k_1 - k_2} \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.583)$$

Sa dobijenim funkcijama $Y_R(z)$ i $Y_0(z)$, koje se uvode u opšte izraze komponentalnih napona (4.543) do (4.546), u celini je određeno stanje napona u silosnom materijalu.

Opšti slučaj početnih uslova

Kako se integracione konstante određuju za funkcije raspodele $Y_R(z)$ i $Y_0(z)$, opšti oblik početnih uslova za gornju opterećenu površinu silosa za $z = 0$, odgovaraju konkretnim brojnim vrednostima funkcija raspodele na vrhu materijala:

$$Y_R(0) = Y_R^\Delta \quad (4.584)$$

$$Y_0(0) = Y_0^\Delta \quad (4.585)$$

Za date početne uslove, na osnovu jednačina funkcija raspodele (4.569) i (4.577), za $z = 0$, dobija se sistem od dve jednačine sa nepoznatim koeficijentima integracije C_1 i C_2 :

$$Y_R(0) = 1 + C_1 + C_2 = Y_R^\Delta \quad (4.586)$$

$$Y_0(0) = 1 + C_1 \cdot c_1 + C_2 \cdot c_2 = Y_0^\Delta \quad (4.587)$$

U ovom slučaju integracione konstante C_1 i C_2 se dobijaju u sledećem obliku:

$$C_1 = \frac{(1 - Y_R^\Delta) \cdot k_2 + (Y_R^\Delta - Y_0^\Delta) / k_{1dR}}{k_1 - k_2} \quad (4.588)$$

$$C_2 = -\frac{(1 - Y_R^\Delta) \cdot k_1 + (Y_R^\Delta - Y_0^\Delta) / k_{1dR}}{k_1 - k_2} \quad (4.589)$$

Konačna rešenja funkcija raspodele su:

$$Y_R(z) = 1 + \frac{(1 - Y_R^\Delta) \cdot k_2 + \frac{Y_R^\Delta - Y_0^\Delta}{k_{1dR}}}{k_1 - k_2} \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{R}} - \frac{(1 - Y_R^\Delta) \cdot k_1 + \frac{Y_R^\Delta - Y_0^\Delta}{k_{1dR}}}{k_1 - k_2} \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.590)$$

$$Y_0(z) = 1 + \frac{(1 - Y_R^\Delta) \cdot k_2 + \frac{Y_R^\Delta - Y_0^\Delta}{k_{1dR}}}{k_1 - k_2} \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{R}} - \frac{(1 - Y_R^\Delta) \cdot k_1 + \frac{Y_R^\Delta - Y_0^\Delta}{k_{1dR}}}{k_1 - k_2} \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.591)$$

Sa dobijenim funkcijama $Y_R(z)$ i $Y_0(z)$, koje se uvode u opšte izraze komponentalnih napona (4.543) do (4.546), određeno je u celini stanje napona u silosnom materijalu. Funkcije raspodele se mogu pisati u opštem obliku:

$$Y_R(z) = 1 + C_1 \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{R}} + C_2 \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.592)$$

$$Y_0(z) = 1 + C_1 \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{R}} + C_2 \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.593)$$

Koeficijenti se određuju po sledećem redosledu:

$$k_{1dR} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a+1}{a} \cdot \mu_w \cdot \frac{\sigma_{rfR}}{\sigma_{rf0}} \quad (4.594)$$

$$k_{2d0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2+a} \cdot \frac{1}{K_0 \cdot \mu_w} \cdot \frac{\sigma_{rf0}}{\sigma_{rfR}} \quad (4.595)$$

$$k_{2dR} = \frac{1}{2+a} \cdot \frac{1}{K_R \cdot \mu_w} \quad (4.596)$$

$$a_2 = k_{2d0} \cdot k_{1dR} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1+a}{2+a} \cdot \frac{1}{K_0} \quad (4.597)$$

$$a_1 = k_{2d0} + k_{2dR} = \frac{1}{\mu_w} \cdot \frac{1}{2+a} \cdot \left(\frac{1}{K_R} + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{K_0} \cdot \frac{\sigma_{rf0}}{\sigma_{rfR}} \right) \quad (4.598)$$

$$k_1 = \frac{1}{2} \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{a_2} \quad (4.599)$$

$$k_2 = \frac{1}{2} \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{a_2} \quad (4.600)$$

$$C_1 = \frac{(1 - Y_R^\Delta) \cdot k_2 + \frac{Y_R^\Delta - Y_0^\Delta}{k_{1dR}}}{k_1 - k_2} \quad (4.601)$$

$$C_2 = - \frac{(1 - Y_R^\Delta) \cdot k_1 + \frac{Y_R^\Delta - Y_0^\Delta}{k_{1dR}}}{k_1 - k_2} \quad (4.602)$$

$$c_1 = 1 - k_{1dR} \cdot k_1 \quad (4.603)$$

$$c_2 = 1 - k_{1dR} \cdot k_2 \quad (4.604)$$

Po definiciji početnih uslova:

$$Y_R(z)|_{z=0} = Y_R^\Delta \quad (4.605)$$

$$Y_0(z)|_{z=0} = Y_0^\Delta \quad (4.606)$$

Kada je u pitanju trivijalni slučaj početnih uslova sa $Y_R^\Delta = 0$ i $Y_0^\Delta = 0$, koeficijenti integracije C_1 i C_2 , iz oblika (4.601) i (4.602), prelaze respektivno u oblike (4.580) i (4.581).

Posebni slučajevi početnih uslova

Početni uslovi generalno predstavljaju opterećenje na gornjoj površini materijala na posmatranom nivou $z = 0$. Ovo opterećenje je linearno vezano preko početnih vrednosti funkcije raspodele sa asimptotskim stanjem napona u silosnom materijalu. Početno stanje napona na $z = 0$ se sastoji od vertikalnog opterećenja (odgovara rotaciono simetričnom dijagramu vertikalnih napona $\sigma_z(z, r, \theta)|_{z=0} \equiv \sigma_z(z, r)|_{z=0} \equiv \sigma_z^\Delta(r)$) i smičućeg opterećenja (odgovara rotaciono simetričnom dijagramu smičućih napona na preseku kružne ćelije $\tau_{zr}(z, r, \theta)|_{z=0} \equiv \tau_{zr}(z, r)|_{z=0} \equiv \tau_{zr}^\Delta(r)$).

Početno opterećenje određuje i dijagram radijalnih napona u prvom diferencijalnom sloju materijala $z = 0$ (određuje se rotaciono simetrični dijagram radijalnih napona $\sigma_r(z, r, \theta)|_{z=0} \equiv \sigma_r(z, r)|_{z=0} \equiv \sigma_r^\Delta(r)$). Prethodni stav važi i za prstenaste napone. Opšte stanje napona, definisano sa izrazima (4.543) do (4.546), uz funkcije raspodele definisane sa izrazima (4.590) i (4.591), za posmatrani početni slučaj za $z = 0$ se dobija u sledećem obliku dijagrama početnih napona:

$$\tau_{zr}(z, r)|_{z=0} \equiv \tau_{zr}^\Delta(r) = \mu_w \cdot \sigma_{rfR} \cdot \frac{r}{R} \cdot Y_R^\Delta = \tau_{zrfR} \cdot \frac{r}{R} \cdot Y_R^\Delta \quad (4.607)$$

$$\sigma_r(z, r)|_{z=0} \equiv \sigma_r^\Delta(r) = \sigma_{rf0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) \cdot Y_0^\Delta + \sigma_{rfR} \cdot \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \cdot Y_R^\Delta \quad (4.608)$$

$$\sigma_{\theta}(z, r)|_{z=0} \equiv \sigma_{\theta}^{\Delta}(r) = \sigma_{\theta f 0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) \cdot Y_0^{\Delta} + \sigma_{\theta f R} \cdot \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \cdot Y_R^{\Delta} \quad (4.609)$$

$$\sigma_z(z, r)|_{z=0} \equiv \sigma_z^{\Delta}(r) = \sigma_{z f 0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) \cdot Y_0^{\Delta} + \sigma_{z f R} \cdot \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \cdot Y_R^{\Delta} \quad (4.610)$$

Prethodni izrazi se simultano određuju za $r = 0$ i $r = R$, i na taj način se dobijaju početne vrednosti funkcija raspodele.

Početna vrednost funkcije raspodele $Y_0(z)|_{z=0} = Y_0(0) = Y_0^{\Delta}$ u centru silosa:

$$Y_0^{\Delta} = \frac{\sigma_{z0}^{\Delta}}{\sigma_{z f 0}} \left(= \frac{\sigma_{r0}^{\Delta}}{\sigma_{r f 0}} \equiv \frac{\sigma_{\theta 0}^{\Delta}}{\sigma_{\theta f 0}} \right) \quad (4.611)$$

Početna vrednost funkcije raspodele $Y_R(z)|_{z=0} = Y_R(0) = Y_R^{\Delta}$ do zida silosa:

$$Y_R^{\Delta} = \frac{\sigma_{zR}^{\Delta}}{\sigma_{z f R}} \left(= \frac{\sigma_{rR}^{\Delta}}{\sigma_{r f R}} = \frac{\sigma_{\theta R}^{\Delta}}{\sigma_{\theta f R}} = \frac{\tau_{zrR}^{\Delta}}{\tau_{zr f R}} \right) \quad (4.612)$$

Kod Y_0^{Δ} u pitanju su odnosi glavnih napona koji vladaju u osi silosnog materijala. Kod Y_R^{Δ} u pitanju su odnosi komponentalnih napona, sem prstenastog napona koji je i glavni napon. Ovo se može proširiti i na glavne napone. Kako su odnosi kolinearni, mogu se primeniti i linearne kombinacije različitih napona.

U opštem slučaju početne vrednosti konturnih funkcija raspodele napona predstavljaju odnose početnih napona za $z = 0$ i odgovarajućih asimptotskih vrednosti napona za $z \rightarrow \infty$. Na gornjoj horizontalnoj površini materijala za $z = 0$, mogu se naneti vertikalno i smičuće opterećenje koje prate pretpostavke proračuna. Kod smičućeg opterećenja to je trougaoni dijagram napona sa nulom u centru silosa, a kod vertikalnog opterećenja su konturni početni naponi povezani jedinstvenom funkcijom interpolacije po r koordinati. Kao početno spoljno opterećenje ne može se direktno postaviti radijalno površinsko opterećenje, jer se ne može postaviti da deluje u horizontalnoj ravni. Početni radijalni naponi su u sloju materijala na $z = 0$, te su indirektno definisani preko vertikalnih i smičućih napona na gornjoj površini. Ovo ne znači da se početni radijalni naponi ne mogu koristiti za određivanje početnih vrednosti funkcija raspodele. Usled linearnosti sa vertikalnim naponima preko odnosa K_0 , radijalni naponi se mogu koristiti za određivanje početnih vrednosti funkcije raspodele:

$$Y_0^{\Delta} = \frac{\sigma_z(0, 0)}{\sigma_z(\infty, 0)} = \frac{\sigma_{r0}(0) / K_0}{\sigma_{r f 0} / K_0} = \frac{\sigma_{r0}^{\Delta}}{\sigma_{r f 0}} \quad (4.613)$$

Određivanje početnih vrednosti u specijalnim slučajevima:

I slučaj: horizontalno opterećenje p_r^{Δ} odgovara konstantnim radijalnim naponima u gornjem sloju ($z = 0$)

$$\sigma_r^{\Delta}(r) = const. \Rightarrow \sigma_{rR}^{\Delta} = \sigma_{r0}^{\Delta} = p_r^{\Delta} \quad (4.614)$$

$$Y_R^{\Delta} = \frac{p_r^{\Delta}}{\sigma_{r f R}} = \frac{p_r^{\Delta}}{\frac{\gamma \cdot R / 2}{\mu_w}} \quad (4.615)$$

$$Y_0^\Delta = \frac{p_r^\Delta}{\sigma_{rf0}} = Y_R^\Delta \cdot \frac{\sigma_{rfR}}{\sigma_{rf0}} = Y_R^\Delta \cdot \frac{1}{1 + \frac{1 - \chi_R}{a}} = Y_R^\Delta \cdot \frac{a}{1 + a - \chi_R} \quad (4.616)$$

$$\sigma_{rfR} = \frac{\gamma \cdot R / 2}{\mu_w} \quad (4.617)$$

$$\sigma_{rf0} = \sigma_{rfR} \cdot \left(1 + \frac{1 - \chi_R}{a}\right) \quad (4.618)$$

$$\chi_R = \frac{1 + 1 / K_R}{1 + 1 / K_0} \quad (4.619)$$

II slučaj: vertikalno opterećenje p_z^Δ konstantno na gornjoj površini materijala

$$\sigma_z^\Delta(r) = \text{constant} \Rightarrow \sigma_{zR}^\Delta = \sigma_{z0}^\Delta = p_z^\Delta \quad (4.620)$$

$$Y_R^\Delta = \frac{p_z^\Delta}{\sigma_{zR}} = \frac{p_z^\Delta}{\frac{\gamma \cdot R / 2}{\mu_w \cdot K_R}} \quad (4.621)$$

$$Y_0^\Delta = \frac{p_z^\Delta}{\sigma_{z0}} = Y_R^\Delta \cdot \frac{\sigma_{zR}}{\sigma_{z0}} = Y_R^\Delta \cdot \frac{\sigma_{rfR} / K_R}{\sigma_{rf0} / K_0} = Y_R^\Delta \cdot \frac{K_0}{K_R} \cdot \frac{\sigma_{rfR}}{\sigma_{rf0}} = Y_R^\Delta \cdot \frac{K_0}{K_R} \cdot \frac{a}{1 + a - \chi_R} \quad (4.622)$$

$$\sigma_{zR} = \frac{\sigma_{rfR}}{K_R} = \frac{\gamma \cdot R / 2}{\mu_w \cdot K_R} \quad (4.623)$$

$$\sigma_{z0} = \frac{\sigma_{rf0}}{K_0} = \frac{\sigma_{rfR} \cdot \left(1 + \frac{1 - \chi_R}{a}\right)}{K_0} = \sigma_{zR} \cdot \frac{K_R}{K_0} \cdot \left(1 + \frac{1 - \chi_R}{a}\right) \quad (4.624)$$

Trivijalan slučaj bez opterećenja na gornjoj površini je u opštem slučaju:

$$\tau_{zr}(z, r)|_{z=0} = 0 \quad \text{i} \quad \sigma_z(z, r)|_{z=0} = 0 \quad (4.625)$$

$$Y_R(0) = Y_R^\Delta = 0 \quad (4.626)$$

$$Y_0(0) = Y_0^\Delta = 0 \quad (4.627)$$

Početni uslovi od težine nasipne kupe materijala

U slučaju početnog uslova koji odgovara uticaju prirodnog nasipa materijala koji kod centričnog punjenja kružne ćelije odgovara nasipnoj kupi materijala, određuje se visina nasipne kupe:

$$h_N = R \cdot \tan \phi_r \quad \text{ili} \quad h_N = R \cdot \tan(0.9 \cdot \arctan \mu_i) \quad (4.628)$$

$$h_0 = \frac{1}{3} h_N \quad (4.629)$$

Težina nasipne kupe materijala je:

$$Q_N = \gamma \cdot \pi R^2 \cdot h_N / 3 = \gamma \cdot h_0 \cdot \pi R^2 \quad (4.630)$$

Dijagram vertikalnih napona na novou $z = 0$ se uzima kao vertikalni pritisak od težine materijala u nasipnoj kupi:

$$\sigma_z(0, r) = \sigma_{zf0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) \cdot Y_0^\Delta + \sigma_{zR} \cdot \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \cdot Y_R^\Delta \quad (4.631)$$

Nasipni materijal ne proizvodi vertikalni pritisak do zida ćelije u osnovi nasipne kupe (nivo $z = 0$), tako da se na osnovu izraza (4.631) za $r = R$ određuje da je:

$$\sigma_z(0, R) = \sigma_{zR} \cdot Y_R^\Delta = 0 \quad (4.632)$$

Sledi da je početna vrednost funkcije raspodele napona do zida ćelije:

$$Y_R^\Delta = 0 \quad (4.633)$$

U centralnoj osi silosa, za $r = 0$ i $z = 0$, nasipni deo proizvodi vertikalni pritisak σ_{z0}^Δ :

$$\sigma_z(0, 0) = \sigma_{zf0} \cdot Y_0^\Delta = \sigma_{z0}^\Delta \quad (4.634)$$

Sledi da je početna vrednost funkcije raspodele napona u centralnoj osi silosa:

$$Y_0^\Delta = \frac{\sigma_{z0}^\Delta}{\sigma_{zf0}} \quad (4.635)$$

Uvođenjem (4.633) i (4.635) u (4.631), određuje se dijagram vertikalnih pritisaka na nivou $z = 0$:

$$\sigma_z(0, r) = \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) \cdot \sigma_{z0}^\Delta \quad (4.636)$$

Ovi vertikalni naponi se integrale po površini poprečnog preseka kružne ćelije u cilju određivanja rezultujuće sile pritiska od težine nasipnog dela materijala:

$$Q_N = 2\pi \cdot \int_0^R \sigma_z(0, r) \cdot r \cdot dr = 2\pi \cdot \sigma_{z0}^\Delta \cdot \int_0^R \left[1 - (r/R)^a \right] \cdot r \cdot dr = \frac{a}{a+2} \cdot \sigma_{z0}^\Delta \cdot \pi R^2 \quad (4.637)$$

Izjednačavanjem izraza (4.630) i (4.637), određuje se vertikalni napon u osi silosa u osnovi nasipne kupe:

$$\sigma_{z0}^\Delta = \frac{a+2}{a} \cdot \gamma \cdot h_0 \quad (4.638)$$

Uvođenjem (4.638) u (4.635), određuje se početna vrednost funkcije raspodele u osi silosa u slučaju analize uticaja težine nasipne kupe materijala:

$$Y_0^\Delta = \frac{a+2}{a} \cdot \frac{\gamma \cdot h_0}{\sigma_{zf0}} \quad (4.639)$$

Uvođenjem početnih uslova (4.633) i (4.639) u opšte izraze za funkcije raspodele napona, (4.590) i (4.591), određuju se sledeće funkcije raspodele napona:

$$Y_R(z) = 1 + \frac{k_2 - h_0 / (a_2 \cdot R)}{k_1 - k_2} \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{R}} - \frac{k_1 - h_0 / (a_2 \cdot R)}{k_1 - k_2} \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.640)$$

$$Y_0(z) = 1 + \frac{k_2 - h_0 / (a_2 \cdot R)}{k_1 - k_2} \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \cdot \frac{z}{R}} - \frac{k_1 - h_0 / (a_2 \cdot R)}{k_1 - k_2} \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.641)$$

4.3.3.2 Rekapitulacija I-3Dr postupka proračuna stanja napona

Rekapitulacija postupka proračuna (redosled izraza odgovara redosledu sračunavanja);

Ulazni podaci i koeficijenti:

$\gamma, R, \mu_i = \tan \phi_i, \mu_w = \tan \phi_w$ (i ϕ_r ako se analizira nasipna kupa)

a (eksponent, za koji se uvodi numerička, aproksimativna ili usvojena vrednost)

$$\kappa = 1 \quad (\text{analizira se aktivno stanje napona u ćeliji silosa}) \quad (4.642)$$

$$K_0 = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} \quad (4.643)$$

$$K_R = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \quad (4.644)$$

$$\chi_0 = 1 \quad \text{i} \quad \chi_R = \frac{1 + 1/K_R}{1 + 1/K_0} \quad (4.645)$$

Izrazi za asimptotske konturne napone:

$$\sigma_{rjR} = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \quad (4.646)$$

$$\sigma_{zjR} = \sigma_{rjR} / K_R \quad \text{i} \quad \sigma_{\theta jR} = \sigma_{rjR} \cdot \chi_R \quad (4.647)$$

$$\sigma_{rf0} = \sigma_{rjR} \cdot \left[1 + \frac{1}{a} \cdot (1 - \chi_R) \right] = \sigma_{rjR} \cdot \left[1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{\mu_i + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}} \right] \quad (4.648)$$

$$\sigma_{zf0} = \sigma_{rf0} / K_0 \quad \text{i} \quad \sigma_{\theta f0} = \sigma_{rf0} \cdot \chi_0 = \sigma_{rf0} \quad (4.649)$$

Izrazi za koeficijente funkcije raspodele:

$$k_{1dR} = \frac{1}{3} \frac{a+1}{a} \cdot \mu_w \cdot \frac{\sigma_{rjR}}{\sigma_{rf0}} \quad (4.650)$$

$$k_{2d0} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2+a} \cdot \frac{1}{K_0 \cdot \mu_w} \cdot \frac{\sigma_{rf0}}{\sigma_{rjR}} \quad \text{i} \quad k_{2dR} = \frac{1}{2+a} \cdot \frac{1}{K_R \cdot \mu_w} \quad (4.651)$$

$$a_1 = k_{2d0} + k_{2dR} = \frac{1}{\mu_w} \cdot \frac{1}{2+a} \cdot \left(\frac{1}{K_R} + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{K_0} \cdot \frac{\sigma_{rf0}}{\sigma_{rjR}} \right) \quad (4.652)$$

$$a_2 = k_{2d0} \cdot k_{1dR} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1+a}{2+a} \cdot \frac{1}{K_0} \quad (4.653)$$

$$k_1 = \frac{1}{2} \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{a_2} \quad \text{i} \quad k_2 = \frac{1}{2} \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{a_2} \quad (4.654)$$

Koeficijenti integracije (prema slučajevima početnih uslova):

– ravna gornja površina materijala (bez nasipne kupe materijala)

$$C_1 = \frac{k_2}{k_1 - k_2} \quad \text{i} \quad C_2 = -\frac{k_1}{k_1 - k_2} \quad (4.655)$$

– opšti početni uslovi (početne vrednosti za Y_R^Δ i Y_0^Δ različite od nule)

$$C_1 = \frac{(1-Y_R^\Delta) \cdot k_2 + \frac{Y_R^\Delta - Y_0^\Delta}{k_{1dR}}}{k_1 - k_2} \quad \text{i} \quad C_2 = -\frac{(1-Y_R^\Delta) \cdot k_1 + \frac{Y_R^\Delta - Y_0^\Delta}{k_{1dR}}}{k_1 - k_2} \quad (4.656)$$

– nasipna kupa materijala (centrično punjenje materijala)

$$h_N = R \cdot \tan \phi_r \quad \text{i} \quad h_0 = h_N / 3 \quad (4.657)$$

$$Y_R^\Delta = 0 \quad \text{i} \quad Y_0^\Delta = \frac{a+2}{a} \cdot \frac{\gamma \cdot h_0}{\sigma_{zf0}} \quad (4.658)$$

$$C_1 = \frac{k_2 - Y_0^\Delta / k_{1dR}}{k_1 - k_2} \quad \text{i} \quad C_2 = -\frac{k_1 - Y_0^\Delta / k_{1dR}}{k_1 - k_2} \quad (4.659)$$

$$c_1 = 1 - k_{1dR} \cdot k_1 \quad \text{i} \quad c_2 = 1 - k_{1dR} \cdot k_2 \quad (4.660)$$

Funkcije vertikalne raspodele napona:

$$Y_R(z) = 1 + C_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{R}} + C_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{R}} \quad (4.661)$$

$$Y_0(z) = 1 + C_1 \cdot c_1 \cdot e^{-k_1 \frac{z}{R}} + C_2 \cdot c_2 \cdot e^{-k_2 \frac{z}{R}} \quad (4.662)$$

Opšta rešenja za napone uskladištenog materijala u silosu:

$$\sigma_z(z, r) = \sigma_{zf0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) \cdot Y_0(z) + \sigma_{zrR} \cdot \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \cdot Y_R(z) \quad (4.663)$$

$$\sigma_r(z, r) = \sigma_{rf0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) \cdot Y_0(z) + \sigma_{rR} \cdot \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \cdot Y_R(z) \quad (4.664)$$

$$\sigma_\theta(z, r) = \sigma_{\theta f0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) \cdot Y_0(z) + \sigma_{\theta rR} \cdot \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \cdot Y_R(z) \quad (4.665)$$

$$\tau_{zr}(z, r) = \mu_w \cdot \sigma_{rR} \cdot \frac{r}{R} \cdot Y_R(z) \quad (4.666)$$

Rešenja za napone u centralnoj osi silosa ($r = 0$):

$$\sigma_{z0}(z) = \sigma_z(z, 0) = \sigma_{zf0} \cdot Y_0(z) \quad \text{i} \quad \sigma_{r0}(z) = \sigma_r(z, 0) = \sigma_{rf0} \cdot Y_0(z) \quad (4.667)$$

$$\sigma_{\theta 0}(z) = \sigma_\theta(z, 0) = \sigma_{\theta f0} \cdot Y_0(z) \quad \text{i} \quad \tau_{zr0}(z) = \tau_{zr}(z, 0) = 0 \quad (4.668)$$

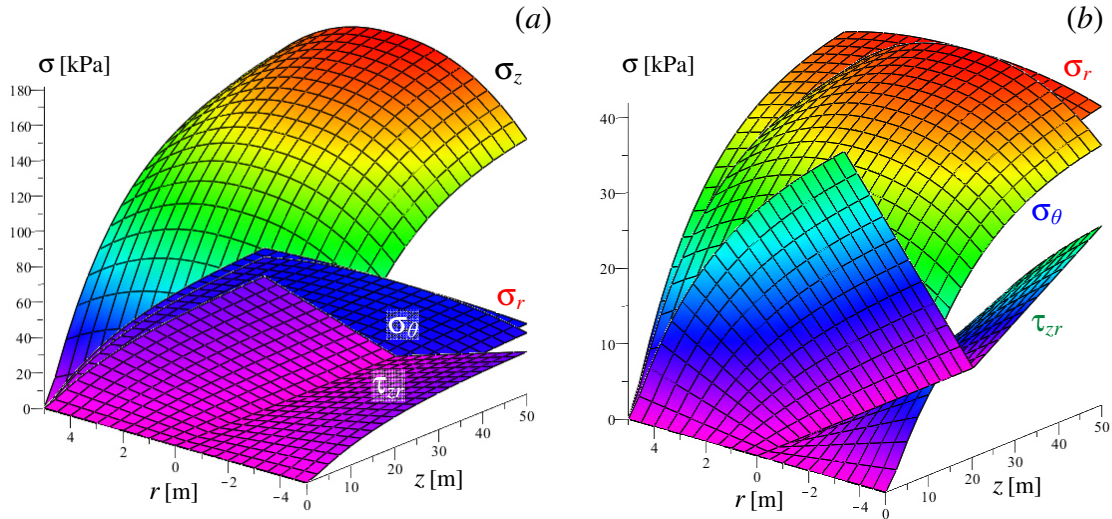
Rešenja za napone do zida ćelije ($r = R$):

$$\sigma_{zR}(z) = \sigma_z(z, R) = \sigma_{zrR} \cdot Y_R(z) \quad \text{i} \quad \sigma_{rR}(z) = \sigma_r(z, R) = \sigma_{rR} \cdot Y_R(z) \quad (4.669)$$

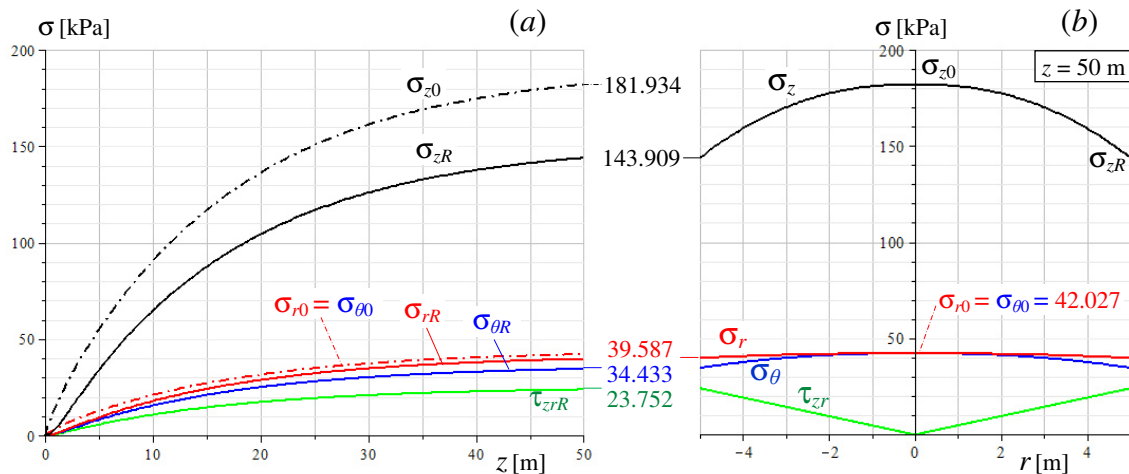
$$\sigma_{\theta R}(z) = \sigma_\theta(z, R) = \sigma_{\theta rR} \cdot Y_R(z) \quad \text{i} \quad \tau_{zrR}(z) = \tau_{zr}(z, R) = \mu_w \cdot \sigma_{rR} \cdot Y_R(z) \quad (4.670)$$

4.3.3.3 Primer 4.1 – Analiza stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu prema I-3Dr postupku

Podaci: $\gamma = 10.0 \text{ kN/m}^2$, $R = 5.0 \text{ m}$, $H = 50.0 \text{ m}$, $\mu_i = 0.8$ i $\mu_w = 0.60$; $a = 2.28255$ (numerička vrednost za aktivno stanje); i gornja površina ravna (bez nasipne kupe). Rezultati se razmatraju u § 4.3.5.2, zajedno sa rezultatima drugih postupaka.



Sl. 174 Analiza stanja napona prema I-3Dr postupku: (a) 3D prikaz napona σ_z , σ_r , σ_θ i τ_{zr} u funkciji koordinata r i z ; i (b) uvećani prikaz napona σ_r , σ_θ i τ_{zr} .



Sl. 175 Analiza stanja napona prema I-3Dr postupku: (a) 2D prikaz - dijagrami konturnih napona u funkciji z ; i (b) 2D prikaz – dijagrami napona u preseku na dubini $z = 50 \text{ m}$.

Tabela 35. Vrednosti konturnih napona u zavisnosti od dubine z (I-3Dr postupak).

Dubina materijala	Konturni naponi (do zida i u osi silosa) [kPa]					
	$\sigma_z(R)$	$\sigma_z(0)$	$\sigma_r(R)$	$\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0)$	$\sigma_\theta(R)$	$\tau_{rz}(R)$
$z = 10 \text{ m}$	64.708	90.514	17.800	20.909	15.483	10.680
$z = 20 \text{ m}$	104.329	136.249	28.699	31.473	24.963	17.219
$z = 50 \text{ m}$	143.909	181.934	39.587	42.027	34.433	23.752
$z \rightarrow \infty$	151.470	190.662	41.667	44.043	36.243	25.000

4.3.4 II-3Dr postupak - primena jedne funkcije raspodele i promenljivih radijalnih napona u preseku ćelije

Kod prethodnog proračunskog postupka uvedene su funkcije raspodele $Y_0(z)$ i $Y_R(z)$ na konturama silosnog prostora. U cilju dobijanja jednostavnijih rešenja pretpostavlja se da su ove funkcije jednake za konturne napone, tako da se razmatra samo jedna funkcija $Y(z)$. Sva izvođenja iz prethodnog poglavlja i dalje se kao opšti izrazi koriste u ovom proračunu, tako da izmene kreću tek od uvođenja funkcije raspodele, tj. izrazi (4.531) do (4.538) se sada vode u sledećem obliku:

$$\sigma_{r0}(z) = \sigma_{rf0} \cdot Y(z) \quad (4.671)$$

$$\sigma_{z0}(z) = \sigma_{zf0} \cdot Y(z) \quad (4.672)$$

$$\sigma_{\theta0}(z) = \sigma_{\theta f0} \cdot Y(z) \quad (4.673)$$

$$\tau_{zr0}(z) = 0 \quad (4.674)$$

$$\sigma_{rR}(z) = \sigma_{rfR} \cdot Y(z) \quad (4.675)$$

$$\sigma_{zR}(z) = \sigma_{zfR} \cdot Y(z) \quad (4.676)$$

$$\sigma_{\theta R}(z) = \sigma_{\theta fR} \cdot Y(z) \quad (4.677)$$

$$\tau_{zrR}(z) = \tau_{zfR} \cdot Y(z) \quad (4.678)$$

Na ovaj način kod integralnih uslova ravnoteže učestvuje samo jedna nepoznata funkcija raspodele napona po visini z . U ovom slučaju nije potrebno određivati oba uslova ravnoteže, jer je problem sa jednom nepoznatom određuje iz jedne jednačine, koja odgovara uslovu ravnoteže vertikalnih sila na diferencijalnom sloju materijala. U ovom slučaju izvođenje postupka može da se vodi na dva načina, klasičnim uslovom ravnoteže vertikalnih sila na diferencijalnom sloju materijala, kao kod *Janssen-a*, *Walker-a* i *Walters-a* i rešavanjem diferencijalne jednačine po $Y(z)$ ili izabranom naponu (npr. uobičajeno je to bio vertikalni napon), ili ekvivalentna primena rešenja integralnog uslova ravnoteže vertikalnih sila na isečku diferencijalnog sloja materijala. Ovde će se pokazati ovaj drugi pristup rešavanju problema stanja napona materijala u silosu. Svi konturni naponi su linearni preko funkcije $Y(z)$ sa asimptotskim vrednostima odgovarajućih napona. Na ovaj način stanje napona na dubini z , je afino sa asimptotskim stanjem napona. Važe ranije dobijeni izrazi za napone u funkciji koordinata r i z , izrazi (4.539) do (4.542). Naponi u materijalu sa uvođenjem jedne funkcije raspodele napona, su:

$$\tau_{zr}(z, r) = \mu_w \cdot \sigma_{rfR} \cdot \frac{r}{R} \cdot Y(z) \quad (4.679)$$

$$\sigma_r(z, r) = \left[\sigma_{rf0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) + \sigma_{rfR} \cdot \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right] \cdot Y(z) \quad (4.680)$$

$$\sigma_\theta(z, r) = \left[\sigma_{\theta f0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) + \sigma_{\theta fR} \cdot \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right] \cdot Y(z) \quad (4.681)$$

$$\sigma_z(z, r) = \left[\sigma_{zf0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) + \sigma_{zfR} \cdot \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right] \cdot Y(z) \quad (4.682)$$

Ovako postavljen problem odgovara slučaju analize sa jedinstvenom interpolacionom funkcijom za sve normalne napone i jedinstvenom funkcijom raspodele napona po visini z . Izrazi za prstenaste i vertikalne napone se mogu uzeti u formi izraza u kojima su uvršteni radijalni naponi:

$$\sigma_{\theta}(z, r) = \left[\sigma_{rf0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) + \left(\sigma_{rf0} - (\sigma_{rf0} - \sigma_{rfR}) \cdot (a+1) \right) \cdot \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right] \cdot Y(z) \quad (4.683)$$

$$\sigma_z(z, r) = \left[\frac{\sigma_{rf0}}{K_0} \cdot \left(1 - \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right) + \frac{\sigma_{rfR}}{K_R} \cdot \left(\frac{|r|}{R} \right)^a \right] \cdot Y(z) \quad (4.684)$$

Rešavanje uslova vertikalne ravnoteže na isečku diferencijalnog sloja materijala

Kako je u postavci problema samo jedna nepoznata, a to je funkcija raspodele napona po visini z , razmatra se drugi uslov ravnoteže vertikalnih sila na isečku diferencijalnog sloja materijala. Kod ovakve aproksimacije problema, prvi uslov ravnoteže koji se ne analizira, neće ni biti zadovoljen na isečku diferencijalnog sloja, ali hoće na ukupnom diferencijalnom sloju. Drugi uslov ravnoteže u metodi integralnih relacija je:

$$\int_0^R \left(\frac{\partial \sigma_z(z, r)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}(z, r)}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}(z, r)}{r} \right) \cdot r \cdot dr = \int_0^R \gamma \cdot r \cdot dr \quad (4.685)$$

Ovo odgovara uslovima ravnoteže za vertikalnu promenu sile na kružnom isečku diferencijalnog sloja visine dz , sa centralnim uglom od $\theta = 1$ radijan.

U integralnu relaciju ulaze izrazi za smičuće napone (4.679), i izrazi za odgovarajuće parcijalne izvode napona (4.679) i (4.682):

$$\frac{\partial}{\partial r} \tau_{zr}(z, r) = \mu_w \cdot \sigma_{rfR} \cdot \frac{1}{R} \cdot Y(z) \quad (4.686)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_z(z, r) = \left[\frac{\sigma_{rf0}}{K_0} \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^a \right) + \frac{\sigma_{rfR}}{K_R} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^a \right] \cdot Y'(z) \quad (4.687)$$

Drugi uslov ravnoteže posle uvođenja odgovarajućih parcijalnih izvoda i funkcija napona dobija sledeći oblik:

$$\int_0^R \left(\left[\frac{\sigma_{rf0}}{K_0} \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^a \right) + \frac{\sigma_{rfR}}{K_R} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^a \right] \cdot Y'(z) + 2\mu_w \cdot \frac{\sigma_{rfR}}{R} \cdot Y(z) \right) \cdot r \cdot dr = \frac{\gamma \cdot R^2}{2} \quad (4.688)$$

Određivanjem datog integrala dobija se posle sređivanja sledeća diferencijalna jednačina:

$$k_{2d} \cdot R \cdot Y'(z) + Y(z) = 1 \quad (4.689)$$

Bezdimenzionalni koeficijent k_{2d} u ovoj jednačini se određuje u sledećem obliku:

$$k_{2d} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2+a} \cdot \frac{1}{K_0 \cdot \mu_w} \cdot \frac{\sigma_{rf0}}{\sigma_{rfR}} + \frac{1}{2+a} \cdot \frac{1}{K_R \cdot \mu_w} \quad (4.690)$$

Ovaj oblik koeficijenta tačno odgovara sledećem:

$$k_{2d} = k_{2d0} + k_{2dR} \quad (4.691)$$

gde su koeficijenti k_{2d0} i k_{2dR} dati sa izrazima (4.561) i (4.562), kod jednačine (4.560).

Iz jednačine (4.560), koeficijent k_{2d} se može direktno odrediti pri sublimaciji funkcija raspodele $Y_0(z)$ i $Y_R(z)$ u jedinstvenu funkciju $Y(z)$.

Rešenje diferencijalne jednačine (4.689), uz početni uslov da gornji sloj materijala nije opterećen, tj. za $z = 0$ početni uslov je $Y(0) = 0$, dobija se u formi:

$$Y(z) = 1 - e^{-\frac{1}{k_{2d}} \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.692)$$

Koeficijent k_{2d} , u sređenom obliku, je identičan koeficijentu a_1 prema izrazu (4.568), odnosno:

$$k_{2d} = \frac{1}{\mu_w} \cdot \frac{1}{2+a} \cdot \left(\frac{1}{K_R} + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{K_0} \cdot \frac{\sigma_{rf0}}{\sigma_{rfR}} \right) \quad (4.693)$$

Dalje sređivanje ovog koeficijenta se razrađuje u obliku:

$$k_{2d} = \frac{1}{2} \frac{1}{K_R \cdot \mu_w} \cdot \frac{1}{2+a} \cdot \left(2+a \cdot \frac{K_R}{K_0} \cdot \frac{\sigma_{rf0}}{\sigma_{rfR}} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{K_R \cdot \mu_w} \cdot \frac{1}{2+a} \cdot \left(2+a \cdot \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{zFR}} \right) \quad (4.694)$$

Uvodeći ovaj koeficijent u (4.692), funkcija raspodele se dobija u sledećem obliku:

$$Y(z) = 1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{2+a}{2+a \cdot \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{zFR}}}} \quad (4.695)$$

Dobijena funkcija raspodele (4.695), se uvodi u izraze za određivanje opšteg stanja napona u silosnom materijalu:

$$\tau_{zr}(z, r) = \mu_w \cdot \sigma_{zFR} \cdot \frac{r}{R} \cdot \left[1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{2+a}{2+a \cdot \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{zFR}}}} \right] \quad (4.696)$$

$$\sigma_r(z, r) = \left[\sigma_{rf0} \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^a \right) + \sigma_{zFR} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^a \right] \cdot \left[1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{2+a}{2+a \cdot \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{zFR}}}} \right] \quad (4.697)$$

$$\sigma_\theta(z, r) = \left[\sigma_{\theta f0} \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^a \right) + \sigma_{\theta FR} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^a \right] \cdot \left[1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{2+a}{2+a \cdot \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{zFR}}}} \right] \quad (4.698)$$

$$\sigma_z(z, r) = \left[\sigma_{zf0} \cdot \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^a \right) + \sigma_{zFR} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^a \right] \cdot \left[1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{2+a}{2+a \cdot \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{zFR}}}} \right] \quad (4.699)$$

Za $r = 0$ dobijaju se konturni naponi u sredini silosa:

$$\tau_{zr}(z, 0) \equiv \tau_{zr0}(z) = 0 \quad (4.700)$$

$$\sigma_r(z, 0) \equiv \sigma_{r0}(z) = \sigma_{rf0} \cdot Y(z) \quad (4.701)$$

$$\sigma_{\theta}(z, 0) \equiv \sigma_{\theta 0}(z) = \sigma_{\theta f 0} \cdot Y(z) \quad (4.702)$$

$$\sigma_z(z, 0) \equiv \sigma_{z 0}(z) = \sigma_{z f 0} \cdot Y(z) \quad (4.703)$$

Za $r = R$ dobijaju se konturni naponi do zida silosa:

$$\tau_{zr}(z, R) \equiv \tau_{zrR}(z) = \mu_w \cdot \sigma_{rfR} \cdot Y(z) \quad (4.704)$$

$$\sigma_r(z, R) \equiv \sigma_{rR}(z) = \sigma_{rfR} \cdot Y(z) \quad (4.705)$$

$$\sigma_{\theta}(z, R) \equiv \sigma_{\theta R}(z) = \sigma_{\theta fR} \cdot Y(z) \quad (4.706)$$

$$\sigma_z(z, R) \equiv \sigma_{zR}(z) = \sigma_{z fR} \cdot Y(z) \quad (4.707)$$

Asimptotske veličine konturnih napona su date sa izrazima (4.523) do (4.530).

Uvođenjem ovih u prethodne formule određuju se konturni naponi po visini silosa:

$$\sigma_{r0}(z) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \cdot \left[1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{\mu_i + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}} \right] \cdot \left[1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{2+a}{2+a \cdot \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{z fR}}}} \right] \quad (4.708)$$

$$\sigma_{\theta 0}(z) = \sigma_{r0}(z) \quad (4.709)$$

$$\sigma_{z0}(z) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{K_0 \cdot \mu_w} \cdot \left[1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{\mu_i + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}} \right] \cdot \left[1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{2+a}{2+a \cdot \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{z fR}}}} \right] \quad (4.710)$$

$$\tau_{zrR}(z) = \gamma \cdot \frac{R}{2} \cdot \left[1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{2+a}{2+a \cdot \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{z fR}}}} \right] \quad (4.711)$$

$$\sigma_{rR}(z) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \cdot \left[1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{2+a}{2+a \cdot \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{z fR}}}} \right] \quad (4.712)$$

$$\sigma_{\theta R}(z) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \cdot \frac{1 + \frac{1}{K_R}}{1 + \frac{1}{K_0}} \cdot \left[1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{2+a}{2+a \cdot \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{z fR}}}} \right] \quad (4.713)$$

$$\sigma_{zR}(z) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{K_R \cdot \mu_w} \cdot \left[1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{2+a}{2+a \cdot \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{z fR}}}} \right] \quad (4.714)$$

Odnos konturnih vertikalnih napona, u okviru eksponenta funkcije raspodele napona, se može prikazati sa sledećim:

$$\frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{z fR}} = \frac{\sigma_{rf0}}{\sigma_{rfR}} \cdot \frac{K_R}{K_0} = \frac{K_R}{K_0} \cdot \left[1 + \frac{1}{a} \cdot \frac{\mu_i - \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{\mu_i + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2}} \right] \quad (4.715)$$

Potrebna vrednost koeficijenta a se uzima iz tabela u zavisnosti od koeficijenata trenja μ_i i μ_w , ili se numerički ili približno određuje iz diferencijalne jednačine asimptotskih radijalnih napona. Kod opštih izraza za stanje napona (4.696) do (4.699), i izraza za konturne napone (4.700) do (4.707), uvode se asimptotske vrednosti konturnih napona, koje su date sa izrazima (4.646) do (4.649). Konturni naponi u razvijenoj formi su prikazani sa izrazima (4.708) do (4.714). Kod ovih izraza, kao i kod određivanja funkcije vertikalne raspodele napona $Y(z)$, odnos asimptotskih konturnih vertikalnih napona je prikazan sa (4.715), gde se koeficijenti K_0 i K_R uvode prema izrazima (4.643) i (4.644).

Svođenje funkcije raspodele na Janssen-ov oblik

U slučaju da su vertikalni naponi u horizontalnom preseku konstantni (*Janssen-ova* pretpostavka), jednaki su konturni vertikalni naponi $\sigma_{zf0} = \sigma_{zFR}$. Uz ovu pretpostavku, kod izraza za funkciju raspodele (4.695), drugi član proizvoda u eksponentu se svodi na 1.0, bez obzira na konkretnu vrednost koeficijenta a , a oblik funkcije raspodele prelazi u poznatu *Janssen-ovu* funkciju raspodele:

$$Y(z) = 1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2}} \quad (4.716)$$

U ovom izrazu, $R/2$ odgovara hidrauličkom radijusu kružnog preseka ćelije, a na mestu koeficijenta bočnog pritiska K stoji vrednost K_R koja odgovara odnosu napona do zida ćelije. Koeficijent K_R se određuje prema izrazu (4.644), a funkcija raspodele (4.716) odgovara funkciji primenjenoj u AS standardu (AS 3774-1996 [14]).

Koeficijent k_{2d} se može prikazati u sledećem obliku:

$$k_{2d} = \frac{1}{2} \frac{1}{K_0 \cdot \mu_w} \cdot \frac{1}{2+a} \cdot \left(2 \frac{K_0}{K_R} + a \cdot \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{zFR}} \right) \quad (4.717)$$

Sa ovim se funkcija raspodele dobija u obliku:

$$Y(z) = 1 - e^{-\frac{K_0 \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{2+a}{2 \frac{K_0}{K_R} + a \cdot \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{zFR}}}} \quad (4.718)$$

Kada se uvedu pretpostavke da je koeficijent K konstantan i da su konstantni radijalni naponi u preseku, tj. za $K_R = K_0$ i $\sigma_{zf0} = \sigma_{zFR}$ kod drugog člana proizvoda u eksponentu gornje funkcije, ovaj član se svodi na 1.0, a oblik funkcije raspodele prelazi u poznati *Janssen-ov* oblik, s tim što je za K dobijeno da je K_0 :

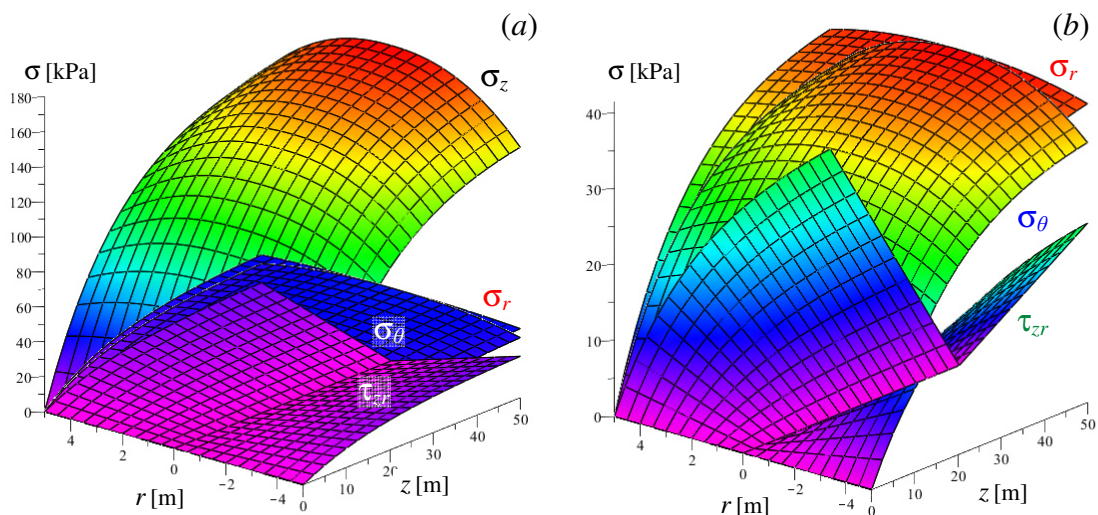
$$Y(z) = 1 - e^{-\frac{K_0 \cdot \mu_w \cdot z}{R/2}} \quad (4.719)$$

Dobijeni oblik funkcije odgovara *Könen-ovom* pristupu, gde se K uzima kao koeficijent aktivnog pritiska $K_{a \text{ Rankine}}$, a to ovde odgovara odnosu napona K_0 u centru silosa.

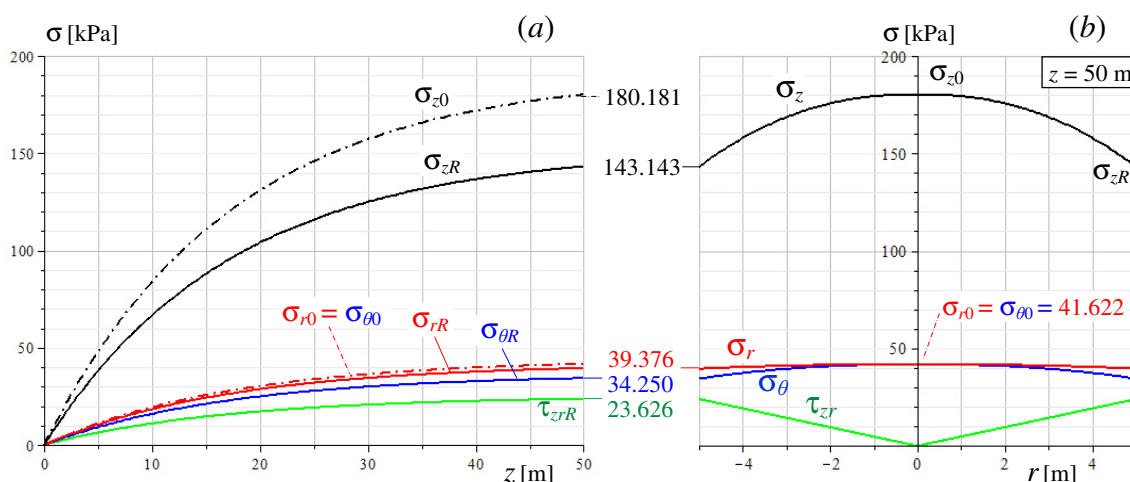
Funkcije raspodele u *Janssen-ovom* obliku (4.716) i (4.719), su određene svođenjem iz izraza (4.695), uz uvođenje odgovarajućih pretpostavki. Međutim, ovo ne rešava pitanje izbora koeficijenta K kod *Janssen-ove* funkcije raspodele, već ukazuje na dva poznata pristupa, gde se kod jednog, K uvodi kao manja vrednost K_0 , a kod drugog kao veća vrednost K_R . Uvedene pretpostavke, kod svođenja funkcije raspodele na oblike (4.716) i (4.719), su tog stepena da degenerišu osnove ovde razmatrane analize stanja napona materijala u silosu. Kod *Janssen-a* je pitanje koeficijenta K bilo ostavljeno otvoreno i preporučeno da K treba odrediti putem eksperimenta.

4.3.4.1 Primer 4.2 – Analiza stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu prema II-3Dr postupku

Podaci: $\gamma = 10.0 \text{ kN/m}^2$, $R = 5.0 \text{ m}$, $H = 50.0 \text{ m}$, $\mu_i = 0.8$ i $\mu_w = 0.60$; $a = 2.28255$ (numerička vrednost za aktivno stanje); i gornja površina ravna (bez nasipne kupe). Rezultati se razmatraju u § 4.3.5.2, zajedno sa rezultatima drugih postupaka.



Sl. 176 Analiza stanja napona prema II-3Dr postupku: (a) 3D prikaz napona σ_z , σ_r , σ_θ i τ_{zr} u funkciji koordinata r i z ; i (b) uvećani 3D prikaz napona σ_r , σ_θ i τ_{zr} .



Sl. 177 Analiza stanja napona prema II-3Dr postupku: (a) 2D prikaz - dijagrami konturnih napona u funkciji z ; i (b) 2D prikaz – dijagrami napona u preseku na dubini $z = 50 \text{ m}$.

Tabela 36. Vrednosti konturnih napona u zavisnosti od dubine z (II-3Dr postupak).

Dubina materijala	Konturni naponi (do zida i u osi silosa) [kPa]					
	$\sigma_z(R)$	$\sigma_z(0)$	$\sigma_r(R)$	$\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0)$	$\sigma_\theta(R)$	$\tau_{zr}(R)$
$z = 10 \text{ m}$	66.678	83.930	18.342	19.388	15.954	11.005
$z = 20 \text{ m}$	104.004	130.914	28.610	30.241	24.885	17.166
$z = 50 \text{ m}$	143.143	180.181	39.376	41.622	34.250	23.626
$z \rightarrow \infty$	151.470	190.662	41.667	44.043	36.243	25.000

4.3.4.2 Ila-3Dr postupak – aproksimacija postupka sa uvođenjem $a = 2$

Kao dobra aproksimacija u približnim analizama, može se uzeti da je $a = 2$ u svim slučajevima analize stanja napona. Predmetni postupak je opštiji od *Janssen*-ovog postupka, a jednako im je to što sadrže jedinstvenu funkciju raspodele napona. Za razliku od *Janssen*-ove pretpostavke o konstatnom vertikalnom naponu u preseku, kod ovde prikazanog postupka vertikalni, radijalni i prstenasti naponi su promenljivi u preseku ćelije, i afini su sa asimptotskim stanjem napona.

Pretpostavka da je $a = 2$, je aproksimacija koja olakšava primenu postupka sa uvedenom jednom funkcijom raspodele, i približava ovaj postupak *Janssen*-ovom pristupu. Slučaj $a = 2$, odgovara kvadratnoj paraboli za jedinstvenu interpolacionu funkciju napona u horizontalnom preseku. U gotove izraze za napone u silosnom materijalu (4.696) do (4.715) uvodi se da je $a = 2$. Posledice primene ove aproksimacije su sledeće: asimptotske vrednosti napona u sredini silosa σ_{rf0} , $\sigma_{\theta f0}$ i σ_{zf0} , se dobijaju kao približne vrednosti, a dijagrami asimptotskih napona odgovaraju matematički kvadratnoj paraboli koja spaja konturne vrednosti napona do zida i u sredini silosa, sa temenom parabole u sredini silosa. Između konturnih vrednosti gde je uvek zadovoljen uslov *Mohr-Coulomb*-ovog zakona plastičnosti, ovaj zakon se unekoliko izobličuje. Dalja posledica je aproksimacija kod funkcije raspodele, i njeno izobličavanje od prethodnog oblika. Uz ove aproksimacije su promenjene sve druge vrednosti napona po visini silosa. Uvodeći ovo pojednostavljenje u funkciju raspodele (4.695) određuje se:

$$Y(z) = 1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{2}{1 + \frac{\sigma_{zf0}}{\sigma_{zFR}}}} = 1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{\sigma_{zFR}}{\sigma_{zFR} + \sigma_{zf0}}} \quad (4.720)$$

Drugi član proizvoda u eksponentu odgovara odnosu asimptotskih vrednosti konturnog vertikalnog napona do zida ćelije i srednje vrednosti konturnih napona do zida i centru silosa. Kako je ovaj odnos manji od 1 (u slučaju aktivnog stanja napona) to znači da se ovim odnosom redukuje vrednost koeficijenta bočnog potiska na zidu K_R . Pri uvođenju vrednosti $a = 2$, određuju se asimptotske vrednosti radijalnog i vertikalnog napona u centralnoj osi silosa, prema sledećim izrazima:

$$\sigma_{rf0} = \sigma_{rFR} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1 + 1/K_R}{1 + 1/K_0} \right) \right] = \sigma_{rFR} \cdot \frac{3 - \chi_R}{2} \quad (4.721)$$

$$\sigma_{zf0} \cdot K_0 = \sigma_{zFR} \cdot K_R \cdot \frac{3 - \chi_R}{2} \Rightarrow \sigma_{zf0} = \frac{K_R}{K_0} \cdot \frac{3 - \chi_R}{2} \cdot \sigma_{zFR} \quad (4.722)$$

Funkcija raspodele (4.720) se uvodi u izraze za stanje napona u silosnom materijalu:

$$\tau_z(z, r) = \mu_w \cdot \sigma_{rFR} \cdot \frac{r}{R} \cdot Y(z) \quad (4.723)$$

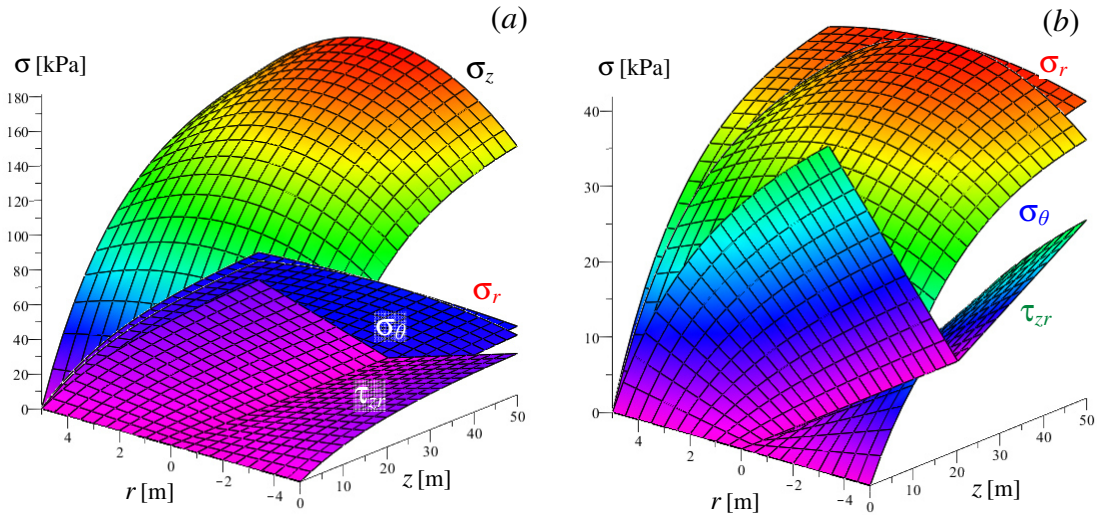
$$\sigma_r(z, r) = \left[\sigma_{rf0} + (\sigma_{rFR} - \sigma_{rf0}) \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \cdot Y(z) \quad (4.724)$$

$$\sigma_\theta(z, r) = \left[\sigma_{\theta f0} + (\sigma_{\theta FR} - \sigma_{\theta f0}) \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \cdot Y(z) \quad (4.725)$$

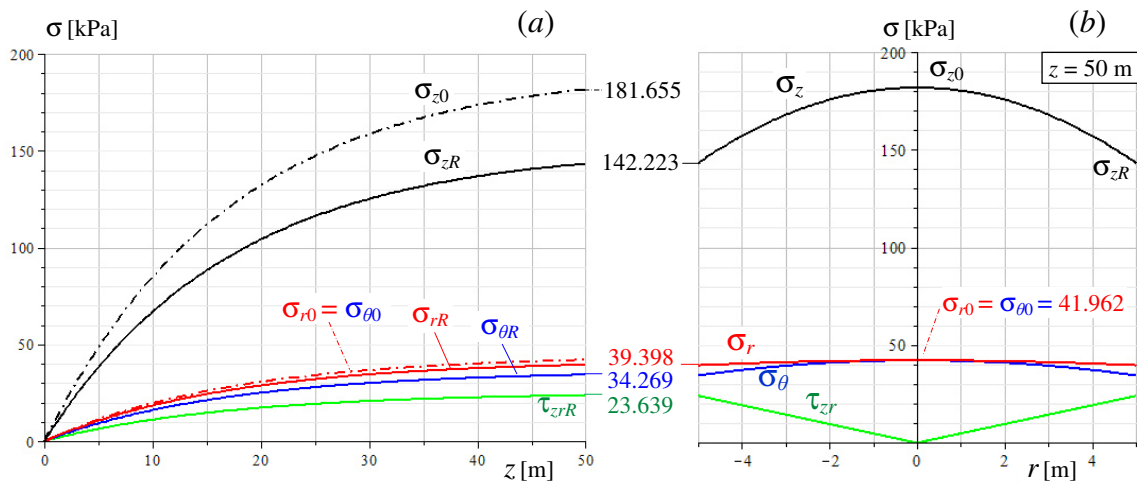
$$\sigma_z(z, r) = \left[\sigma_{zf0} + (\sigma_{zFR} - \sigma_{zf0}) \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \cdot Y(z) \quad (4.726)$$

4.3.4.3 Primer 4.3 – Analiza stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu prema Iia-3Dr postupku

Podaci: $\gamma = 10.0 \text{ kN/m}^2$, $R = 5.0 \text{ m}$, $H = 50.0 \text{ m}$, $\mu_i = 0.8$ i $\mu_w = 0.60$; $a = 2.0$ (usvojena aproks. vrednost za aktivno stanje napona); i gornja površina ravna (bez nasipne kupe). Rezultati se razmatraju u § 4.3.5.2, zajedno sa rezultatima drugih postupaka.



Sl. 178 Analiza stanja napona prema Iia-3Dr postupku: (a) 3D prikaz napona σ_z , σ_r , σ_θ i τ_{zr} u funkciji koordinata r i z ; i (b) uvećani 3D prikaz napona σ_r , σ_θ i τ_{zr} .



Sl. 179 Analiza stanja napona prema Iia-3Dr postupku: (a) 2D prikaz - dijagrami konturnih napona u funkciji z ; i (b) 2D prikaz – dijagrami napona u preseku na dubini $z = 50 \text{ m}$.

Tabela 37. Vrednosti konturnih napona u zavisnosti od dubine z (Iia-3Dr postupak).

Dubina materijala	Konturni naponi (do zida i u osi silosa) [kPa]					
	$\sigma_z(R)$	$\sigma_z(0)$	$\sigma_r(R)$	$\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0)$	$\sigma_\theta(R)$	$\tau_{rz}(R)$
$z = 10 \text{ m}$	66.840	84.776	18.386	19.583	15.993	11.032
$z = 20 \text{ m}$	104.185	132.142	28.659	30.525	24.929	17.196
$z = 50 \text{ m}$	143.223	181.655	39.398	41.962	34.269	23.639
$z \rightarrow \infty$	151.470	192.115	41.667	44.379	36.243	25.000

4.3.5 III-3Dr postupak - primena jedne funkcije raspodele i konstantnih radijalnih napona u preseku ćelije (Walker/Walters-ov postupak)

U prethodnom postupku razmatran je promenljivi dijagram radijalnog napona sa jedinstvenom funkcijom raspodele napona po visini silosa. Ovo je predstavljalo značajno pojednostavljenje u odnosu na rešenja stanja napona sa dve funkcije raspodele na konturama silosnog prostora. U odnosu na ove postupke, poznat je postupak koji je postavio *Walker*, a zatim detaljnije razvio *Walters*, u kojem je pretpostavljeno da dijagram radijalnih napona na nekoj visini z , odgovara pravougaonom dijagramu napona, odnosno da su radijalni naponi u preseku konstantni sa promenom koordinate r . Ova pretpostavka je preuzeta iz analize stanja napona kod 2D silosa, gde kod asimptotskog stanja napona radijalni naponi imaju konstantne vrednosti po preseku silosa. Pretpostavka o konstantnom dijagramu napona za bilo koju visinu z , je bila korišćena od strane *Walker*-a i *Walters*-a i drugih, i zbog podudarnosti sa situacijom kod 2D silosa, postala je praktično standardni slučaj za analize. Kod primene ove pretpostavke koeficijent bočnog pritiska kod 3Dr – kružnih ćelija, dobija oblik praktično ekvivalentan kao kod 2D silosa izduženih pravougaonih preseka. Ovako dobijena sličnost rešenja je pogodna za dobijanje generalnih, uopštenih rešenja koja su pogodna za praktičnu primenu. *Walker*, a zatim i *Walters* su razvili ovu metodu za silosne levke i ćelijski deo sa zidovima, primenom metode diferencijalnog sloja materijala. Ovde se taj postupak izvodi primenom metode integralnih relacija, iz uslova ravnoteže vertikalnih sila na isečku diferencijalnog kružnog sloja materijala. U ovom slučaju, uvodi se samo jedna funkcija raspodele $Y(z)$.

Važe izrazi (4.671) do (4.678), s tim da se uzima da je radijalni napon konstantan na datom nivou z , a sa tim i za slučaj kada $z \rightarrow \infty$:

$$\sigma_r(z, r) = \sigma_{rR}(z) = \sigma_{rR} \cdot Y(z) \quad (4.727)$$

$$\sigma_{rf}(r) = \sigma_{rR} = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} = const. \Rightarrow \sigma_{rf0} = \sigma_{rR} \quad (4.728)$$

Kao i kod prethodnih analiza, prva pretpostavka je da naponi smicanja na posmatranom nivou z (kako za konačni posmatrani nivo z , tako i za $z \rightarrow \infty$), imaju trougaonu formu dijagrama napona. Pokazano je kod analize asimptotskog stanja napona za $z \rightarrow \infty$, da ova forma odgovara u tom slučaju egzaktnoj raspodeli napona smicanja. Na ovaj način smičući naponi za posmatrani nivo z , i za $z \rightarrow \infty$, se opisuju respektivno sa sledećim formulacijama:

$$\tau_{zr}(z, r) = \mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \sigma_r(z, R) = \mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \sigma_{rR}(z) = \mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \sigma_{rR} \cdot Y(z) \quad (4.729)$$

$$\tau_{zrf}(r) = \mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \sigma_{rf}(R) = \mu_w \cdot \frac{r}{R} \cdot \sigma_{rR} \quad (4.730)$$

Pretpostavka o konstantnom radijalnom naponu data sa (4.728), prevodi koeficijent bočnog napona iz opšteg oblika (4.449) u jednostavniji oblik (4.450) koji odgovara rešenju za K kada $z \rightarrow \infty$:

$$K(z, r) = K(r) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot r^2 / R^2} \quad (4.731)$$

Odnos napona K se svodi na ekvivalentne oblike na konturama (do zida i u osi silosa), bez obzira na posmatrani opšti ili posebni oblik izraza za ovaj odnos napona:

$$K_R = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \quad (4.732)$$

$$K_0 = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} \quad (4.733)$$

U prethodna dva proračunska postupka analize stanja napona kod 3Dr silosa, bio je uveden alternativni oblik za koeficijent K , kako bi se izbegla direktna primena složenijeg oblika za ovaj koeficijent.

U predmetnoj analizi, usvojene pretpostavke o jedinstvenoj funkciji raspodele $Y(z)$, i konstantnom radijalnom naponu na posmatranom nivou z , rezultuju u primeni izraza (4.727), tako da opšti oblik koeficijenta K direktno prelazi na jednostavniji oblik (4.731). Ovde će se dalje koristiti ovaj oblik za K , za razliku od prethodnih analiza gde je bio primenjen alternativni oblik.

Vertikalni napon se direktno određuje preko odnosa bočnog napona K :

$$\sigma_z(z, r) = \frac{\sigma_r(z, r)}{K(z, r)} = \frac{\sigma_{rR}(z)}{K(r)} = \frac{\sigma_{rfR}}{K(r)} \cdot Y(z) \quad (4.734)$$

$$\sigma_{zf}(r) = \frac{\sigma_{rf}(r)}{K(r)} = \frac{\sigma_{rfR}}{K(r)} \quad (4.735)$$

Prstenasti napon se određuje preko opšteg izraza:

$$\sigma_\theta(z, r) = \sigma_r(z, r) \cdot \frac{1 + 1/K(z, r)}{1 + 1/K(z, 0)} = \sigma_{rR}(z) \cdot \frac{1 + 1/K(r)}{1 + 1/K_0} = \sigma_{rfR} \cdot \frac{1 + 1/K(r)}{1 + 1/K_0} \cdot Y(z) \quad (4.736)$$

$$\sigma_{\theta f}(r) = \sigma_{rf}(r) \cdot \frac{1 + 1/K(r)}{1 + 1/K_0} = \sigma_{rfR} \cdot \frac{1 + 1/K(r)}{1 + 1/K_0} \quad (4.737)$$

Sa uvedenim pretpostavkama proračuna mogu se odrediti asimptotske vrednosti konturnih napona sa sledećim:

$$\tau_{zrfR} = \mu_w \cdot \sigma_{rfR} = \gamma \cdot \frac{R}{2} \quad (4.738)$$

$$\tau_{zrf0} = 0 \quad (4.739)$$

$$\sigma_{rfR} = \frac{\tau_{zrfR}}{\mu_w} = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \quad (4.740)$$

$$\sigma_{rf0} = \sigma_{rfR} \quad (4.741)$$

$$\sigma_{\theta fR} = \sigma_{rfR} \cdot \frac{1 + 1/K_R}{1 + 1/K_0} \quad (4.742)$$

$$\sigma_{\theta f0} = \sigma_{rf0} (= \sigma_{rfR}) \quad (4.743)$$

$$\sigma_{zfR} = \frac{\sigma_{rfR}}{K_R} \quad (4.744)$$

$$\sigma_{zf0} = \frac{\sigma_{rf0}}{K_0} (= \frac{\sigma_{rfR}}{K_0}) \quad (4.745)$$

Prema ovim izrazima postignuta je potpuna linearnost svih asimptotskih napona sa radijalnim naponom σ_{rR} .

Promena konturnih napona po visini silosa sa jedinstvenom funkcijom raspodele se saglasno prethodnim izrazima, određuje na sledeći način:

$$\sigma_{r0}(z) = \sigma_{rf0} \cdot Y(z) = \sigma_{rFR} \cdot Y(z) \quad (4.746)$$

$$\sigma_{z0}(z) = \sigma_{zf0} \cdot Y(z) = \frac{\sigma_{rFR}}{K_0} \cdot Y(z) \quad (4.747)$$

$$\sigma_{\theta0}(z) = \sigma_{\theta f0} \cdot Y(z) = \sigma_{rFR} \cdot Y(z) \quad (4.748)$$

$$\tau_{zr0}(z) = 0 \quad (4.749)$$

$$\sigma_{rR}(z) = \sigma_{rFR} \cdot Y(z) \quad (4.750)$$

$$\sigma_{zR}(z) = \sigma_{zFR} \cdot Y(z) = \frac{\sigma_{rFR}}{K_R} \cdot Y(z) \quad (4.751)$$

$$\sigma_{\theta R}(z) = \sigma_{\theta fR} \cdot Y(z) = \sigma_{rFR} \cdot \frac{1+1/K_R}{1+1/K_0} \cdot Y(z) \quad (4.752)$$

$$\tau_{zrR}(z) = \tau_{zrFR} \cdot Y(z) = \mu_w \cdot \sigma_{rFR} \cdot Y(z) \quad (4.753)$$

U razvijenom obliku promene napona po r koordinati, dobijaju se u sledećem obliku:

$$\sigma_z(z, r) = \frac{\sigma_{rFR}}{K(r)} \cdot Y(z) = \sigma_{rFR} \cdot \left[1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{r^2}{R^2} \right] \cdot Y(z) \quad (4.754)$$

$$\tau_{zr}(z, r) = \mu_w \cdot \sigma_{rFR} \cdot \frac{r}{R} \cdot Y(z) \quad (4.755)$$

$$\sigma_r(z, r) = \sigma_{rFR} \cdot Y(z) \quad (4.756)$$

$$\sigma_{\theta}(z, r) = \sigma_{rFR} \cdot \frac{1+1/K(r)}{1+1/K_0} \cdot Y(z) = \sigma_{rFR} \cdot \frac{1 + \mu_i^2 + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{r^2}{R^2}}{1 + \mu_i^2 + \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} \cdot Y(z) \quad (4.757)$$

Rešavanje uslova vertikalne ravnoteže na isečku diferencijalnog sloja materijala

Analiza se sprovodi preko uslova ravnoteže vertikalnih sila na isečku kružnog diferencijalnog sloja materijala visine dz sa centralnim uglom od $\theta = 1$ radijan:

$$\int_0^R \left(\frac{\partial \sigma_z(z, r)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}(z, r)}{\partial r} + \frac{\tau_{zr}(z, r)}{r} \right) \cdot r \cdot dr = \int_0^R \gamma \cdot r \cdot dr \quad (4.758)$$

U ovu jednačinu ulaze izrazi za smičuće napone (4.755) i vertikalne napone (4.754). Odgovarajući parcijalni izvodi su:

$$\frac{\partial}{\partial r} \tau_{zr}(z, r) = \mu_w \cdot \sigma_{rFR} \cdot \frac{1}{R} \cdot Y(z) \quad (4.759)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \sigma_z(z, r) = \sigma_{rFR} \cdot \left[1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{r^2}{R^2} \right] \cdot Y'(z) \quad (4.760)$$

Uvodeći (4.755), (4.759) i (4.760) u integralni uslov ravnoteže (4.758), dobija se:

$$\sigma_{r/R} \cdot \int_0^R \left(\left[1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot \frac{r^2}{R^2} \right] \cdot Y'(z) + \mu_w \cdot \frac{2}{R} \cdot Y(z) \right) \cdot r \cdot dr = \frac{\gamma \cdot R^2}{2} \quad (4.761)$$

Određivanjem datog integrala dobija se posle sređivanja, sledeća diferencijalna jednačina, uz uvođenje izraza za $\sigma_{r/R}$ prema (4.740) :

$$k_{2d} \cdot R \cdot Y'(z) + Y(z) = 1 \quad (4.762)$$

Bezdimenzionalni koeficijent k_{2d} u ovoj jednačini se određuje u sledećem obliku:

$$k_{2d} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + 2\mu_i^2}{\mu_w} + \frac{2}{3} \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left(\frac{\mu_i}{\mu_w} \right)^3 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \right)^{3/2} \right] \quad (4.763)$$

Rešenje diferencijalne jednačine (4.762), uz početni uslov da gornji sloj silosnog materijala nije opterećen, tj. za $z = 0$ početni uslov je $Y(0) = 0$, dobija se u formi:

$$Y(z) = 1 - e^{-\frac{1}{k_{2d}} \cdot \frac{z}{R}} \quad (4.764)$$

Uvodeći izraz za koeficijent k_{2d} , funkcija raspodele prelazi u sledeći oblik:

$$Y(z) = 1 - e^{-\frac{1}{\frac{1 + 2\mu_i^2}{\mu_w} + \frac{4}{3} \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \left(\frac{\mu_i}{\mu_w} \right)^3 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \right)^{3/2} \right]} \cdot \frac{z}{R/2}} \quad (4.765)$$

Koeficijent k_{2d} se može predstaviti i na sledeći način, u cilju uspostavljanja veza sa Walters-ovim rešenjem stanja napona:

$$k_{2d} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K_R \cdot \mu_w} \cdot \frac{1}{\mathcal{D}} \quad (4.766)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{K_R \cdot \mu_w} \cdot \frac{1}{k_{2d}} \quad (4.767)$$

odnosno, uvodeći veličine K_R i k_{2d} :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{3Dr} = \frac{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{1 + 2\mu_i^2 + \frac{4}{3} \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i \cdot \left(\frac{\mu_i}{\mu_w} \right)^2 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \right)^{3/2} \right]} \quad (4.768)$$

Funkcija raspodele sa uvedenim faktorom distribucije \mathcal{D} je:

$$Y(z) = 1 - e^{-K_R \cdot \mathcal{D} \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{R/2}} \quad (4.769)$$

$$Y(z) = 1 - e^{-\frac{K_R \cdot \mu_w \cdot z}{R/2} \cdot \frac{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{1 + 2\mu_i^2 + \frac{4}{3} \kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i \cdot \left(\frac{\mu_i}{\mu_w} \right)^2 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2} \right)^{3/2} \right]}} \quad (4.770)$$

Ovde $R/2$ odgovara hidrauličkom radijusu kružnog preseka ćelije ($D/4$).

Oblici funkcije raspodele (4.769), odnosno (4.770) sa uvedenim faktorom distribucije \mathcal{D} prema (4.768), odgovaraju Walters-ovoj formulaciji stanja napona kod 3Dr silosa.

4.3.5.1 Rekapitulacija postupka proračuna (Walker/Walters-ov postupak)

Rešenja za napone u proizvoljnoj tački ćelije silosa:

$$\sigma_z(z, r) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{K(r) \cdot \mu_w} \cdot Y(z) \quad (4.771)$$

$$\sigma_r(z, r) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \cdot Y(z) \quad (4.772)$$

$$\tau_{zr}(z, r) = \frac{\gamma \cdot r}{2} \cdot Y(z) \quad (4.773)$$

$$\sigma_\theta(z, r) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \cdot \frac{1+1/K(r)}{1+1/K_0} \cdot Y(z) \quad (4.774)$$

$$Y(z) = 1 - e^{-K_R \cdot \mathcal{D} \cdot \mu_w \cdot \frac{z}{R/2}} = 1 - e^{-\frac{1}{\frac{1+2\mu_i^2}{\mu_w} + \frac{4}{3} \kappa \cdot \sqrt{1+\mu_i^2} \cdot \left(\frac{\mu_i}{\mu_w}\right)^3 \left[1 - \left(1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}\right)^{3/2}\right]} \cdot \frac{z}{R/2}} \quad (4.775)$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{3Dr} = \frac{1+2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1+\mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}}{1+2\mu_i^2 + \frac{4}{3} \kappa \cdot \sqrt{1+\mu_i^2} \cdot \mu_i \cdot \left(\frac{\mu_i}{\mu_w}\right)^2 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\mu_w^2}{\mu_i^2}\right)^{3/2}\right]} \quad (4.776)$$

$$K(r) = \frac{1}{1+2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1+\mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot r^2 / R^2} \quad (4.777)$$

$$K_R = \frac{1}{1+2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1+\mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \quad \text{i} \quad K_0 = \frac{1}{1+2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1+\mu_i^2} \cdot \mu_i} \quad (4.778)$$

Rešenja za napone u sredini ćelije silosa ($r = 0$):

$$\sigma_z(z, 0) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{K_0 \cdot \mu_w} \cdot Y(z) \quad \text{i} \quad \sigma_r(z, 0) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \cdot Y(z) \quad (4.779)$$

$$\sigma_\theta(z, 0) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \cdot Y(z) \quad \text{i} \quad \tau_{zr}(z, 0) = 0 \quad (4.780)$$

Rešenja za napone do zida ćelije ($r = R$):

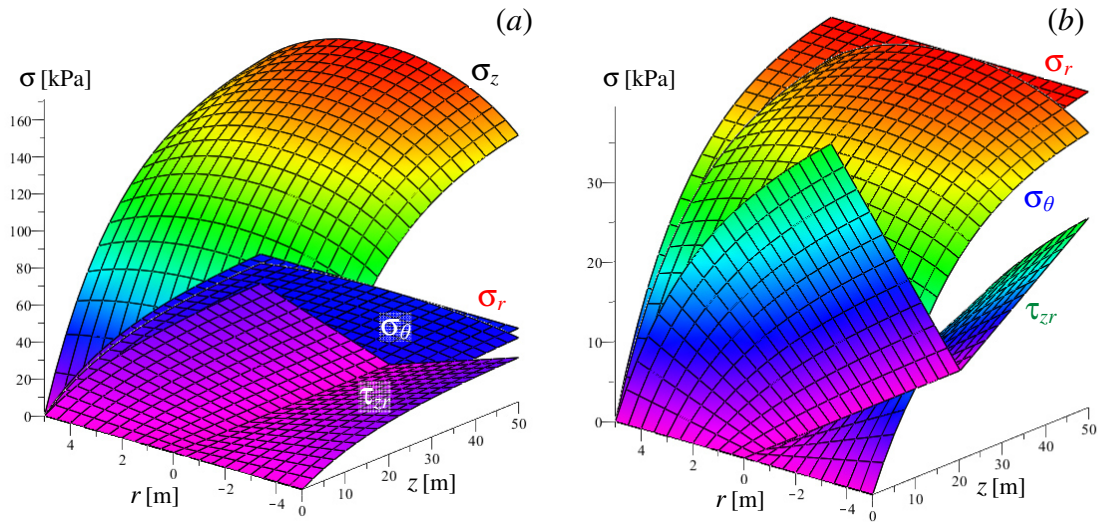
$$\sigma_z(z, R) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{K_R \cdot \mu_w} \cdot Y(z) \quad \text{i} \quad \sigma_r(z, R) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \cdot Y(z) \quad (4.781)$$

$$\sigma_\theta(z, R) = \frac{1}{2} \frac{\gamma \cdot R}{\mu_w} \cdot \frac{1+1/K_R}{1+1/K_0} \cdot Y(z) \quad \text{i} \quad \tau_{zr}(z, R) = \frac{\gamma \cdot R}{2} \cdot Y(z) \quad (4.782)$$

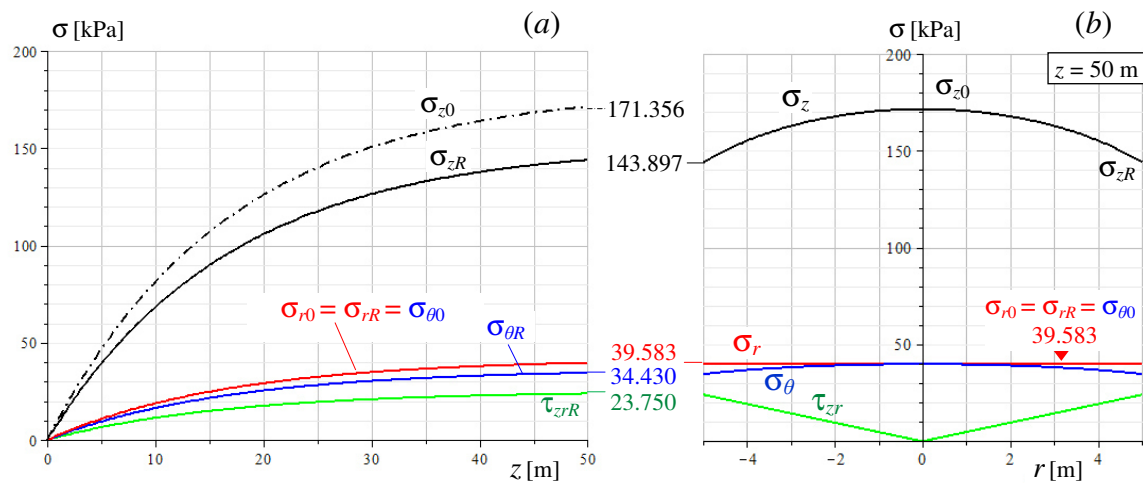
Napominje se da prstenasti naponi σ_θ ne učestvuju kod formiranja Walker/Walters-ovog postupka analize stanja napona. Prikaz ovih napona u datoj rekapitulaciji, odgovara primeni Mohr-ovog kruga napona. U simplifikovanim varijantama proračuna, ovaj napon se uzima da je jednak sa radijalnim naponom, odnosno da je $\sigma_\theta = \sigma_r$.

4.3.5.2 Primer 4.4 – Analiza stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu prema III-3Dr postupku (Walker/Walters-ov postupak)

Podaci za proračun: $\gamma = 10.0 \text{ kN/m}^2$, $R = 5.0 \text{ m}$, $H = 50.0 \text{ m}$, $\mu_i = 0.8$ i $\mu_w = 0.60$; i gornja površina materijala je ravna (bez nasipne kupe).



Sl. 180 Analiza stanja napona prema Walker/Walters-ovom postupku: (a) 3D prikaz napona σ_z , σ_r , σ_θ i τ_{zr} u funkciji koordinata r i z ; i (b) uvećani 3D prikaz napona σ_r , σ_θ i τ_{zr} .



Sl. 181 Analiza stanja napona prema Walker/Walters-ovom postupku: (a) 2D prikaz - dijagrami konturnih napona u funkciji z ; i (b) dijagrami napona na dubini $z = 50 \text{ m}$.

Tabela 38. Vrednosti konturnih napona u zavisnosti od z (Walker/Walters-ov postupak).

Dubina materijala	Konturni naponi (do zida i u osi silosa) [kPa]					
	$\sigma_z(R)$	$\sigma_z(0)$	$\sigma_r(R)$	$\sigma_r(0) = \sigma_\theta(0)$	$\sigma_\theta(R)$	$\tau_{zr}(R)$
$z = 10 \text{ m}$	68.271	81.298	18.780	18.780	16.335	11.268
$z = 20 \text{ m}$	105.772	125.954	29.095	29.095	25.308	17.457
$z = 50 \text{ m}$	143.897	171.356	39.583	39.583	34.430	23.750
$z \rightarrow \infty$	151.470	180.375	41.667	41.667	36.243	25.000

Uporedna analiza rezultata proračuna u primerima 4.1 do 4.4

Rezultati analiza u primerima 4.1 do 4.4, za isti primer 3Dr silosa, dati su u tabeli 39.

Tabela 39. Uporedni pregled rezultata analiza za 3Dr silos u primerima 4.1 do 4.4.

Postupak	Primena metode integralnih relacija			Walker/Walters-ov postupak
	I-3Dr postupak $a = 2.28255$	II-3Dr postupak $a = 2.28255$	IIa-3Dr postupak aprosk. $a = 2$	III-3Dr postupak
Dubina materijala	$\sigma_{zR} = \sigma_z(R)$ - vertikalni napon do zida ćelije [kPa]			
$z = 10$ m	64.708 (0.00%)	66.678 (3.04%)	66.840 (3.29%)	68.271 (5.51%)
$z = 20$ m	104.329 (0.00%)	104.004 (-0.31%)	104.185 (-0.14%)	105.772 (1.38%)
$z = 50$ m	143.909 (0.00%)	143.143 (-0.53%)	143.223 (-0.48%)	143.897 (-0.01%)
$z \rightarrow \infty$	151.470 (0.00%)			
Dubina materijala	$\sigma_{z0} = \sigma_z(0)$ - vertikalni napon u centralnoj osi silosa [kPa]			
$z = 10$ m	90.514 (0.00%)	83.930 (-7.27%)	84.776 (-6.34%)	81.298 (-10.18%)
$z = 20$ m	136.249 (0.00%)	130.914 (-3.92%)	132.142 (-3.01%)	125.954 (-7.56%)
$z = 50$ m	181.934 (0.00%)	180.181 (-0.96%)	181.655 (-0.15%)	171.356 (-5.81%)
$z \rightarrow \infty$	190.662 (0.00%)			
Dubina materijala	$\sigma_{rR} = \sigma_r(R)$ - radijalni napon do zida ćelije [kPa]			
$z = 10$ m	17.800 (0.00%)	18.342 (3.04%)	18.386 (3.29%)	18.780 (5.51%)
$z = 20$ m	28.699 (0.00%)	28.610 (-0.31%)	28.659 (-0.14%)	29.095 (1.38%)
$z = 50$ m	39.587 (0.00%)	39.376 (-0.53%)	39.398 (-0.48%)	39.583 (-0.01%)
$z \rightarrow \infty$	41.667 (0.00%)			
Dubina materijala	$\sigma_{r0} = \sigma_{\theta 0} \dots \sigma_r(0) = \sigma_{\theta}(0)$ - radijalni i prstenasti napon u centralnoj osi silosa [kPa]			
$z = 10$ m	20.909 (0.00%)	19.388 (-7.27%)	19.583 (-6.34%)	18.780 (-10.18%)
$z = 20$ m	31.473 (0.00%)	30.241 (-3.91%)	30.525 (-3.01%)	29.095 (-7.56%)
$z = 50$ m	42.027 (0.00%)	41.622 (-0.96%)	41.962 (-0.15%)	39.583 (-5.82%)
$z \rightarrow \infty$	44.043 (0.00%)			
Dubina materijala	$\sigma_{\theta R} = \sigma_{\theta}(R)$ - prstenasti napon do zida ćelije [kPa]			
$z = 10$ m	15.483 (0.00%)	15.954 (3.04%)	15.993 (3.29%)	16.335 (5.50%)
$z = 20$ m	24.963 (0.00%)	24.885 (-0.31%)	24.929 (-0.14%)	25.308 (1.38%)
$z = 50$ m	34.433 (0.00%)	34.250 (-0.53%)	34.269 (-0.48%)	34.430 (-0.01%)
$z \rightarrow \infty$	36.243 (0.00%)			
Dubina materijala	$\tau_{rzR} = \tau_{rz}(R)$ - smičući napon do zida ćelije [kPa]			
$z = 10$ m	10.680 (0.00%)	11.005 (3.04%)	11.032 (3.30%)	11.268 (5.51%)
$z = 20$ m	17.219 (0.00%)	17.166 (-0.31%)	17.196 (-0.13%)	17.457 (1.38%)
$z = 50$ m	23.752 (0.00%)	23.626 (-0.53%)	23.639 (-0.48%)	23.750 (-0.01%)
$z \rightarrow \infty$	25.000 (0.00%)			

U tabeli 39, prikazani su rezultati za konturne napone uskladištenog materijala u datom primeru 3Dr silosa. Stanje napona materijala u silosu, je analizirano prema postupcima koji su formirani sa metodom integralnih relacija i sa *Walker/Walters*-ovim postupkom. Rezultati analiza u proračunskim primerima su prikazani na sledeći način:

- I-3Dr postupak (primer 4.1 u § 4.3.3.3): 3D prikaz napona - sl. 174; 2D dijagrami napona - sl. 175; vrednosti napona u tabeli 35;
- II-3Dr postupak (primer 4.2 u § 4.3.4.1): 3D prikaz napona - sl. 176; 2D dijagrami napona - sl. 177; vrednosti napona u tabeli 36;
- IIa-3Dr postupak (primer 4.3 u § 4.3.4.3): 3D prikaz napona - sl. 178; 2D dijagrami napona - sl. 175; vrednosti napona u tabeli 37; i
- III-3Dr postupak – *Walker/Walters*-ov postupak (primer 4.4 u § 4.3.5.2): 3D prikaz napona - sl. 180; 2D dijagrami napona - sl. 181; vrednosti napona u tabeli 38.

Na slikama sa 3D prikazima napona predstavljena su opšta rešenja stanja napona σ_z , σ_r , σ_θ i τ_{zr} u funkciji koordinata r i z . U formi 2D prikaza, dati su dijagrami raspodele konturnih napona (naponi do zida i u centralnoj osi silosa) u funkciji dubine z , i dijagrami komponentalnih napona (u funkciji koordinate r) u preseku ćelije na dubini $z = 50$ m. Tabele koje prate ove slike, sadrže proračunske vrednosti konturnih napona na dubinama od 10, 20 i 50 m, kao i asimptotske vrednosti za $z \rightarrow \infty$.

Kod I-3Dr postupka, koriste se dve funkcije vertikalne raspodele napona $Y_0(z)$ i $Y_R(z)$, a kod ostalih postupaka samo jedna funkcija $Y(z)$. Kod postupaka I-3Dr, II-3Dr i IIa-3Dr, radijalni naponi $\sigma_r = \sigma_r(r)$ su promenljivi u preseku ćelije, dok je kod *Walker/Walters*-ovog postupka dijagram $\sigma_r = \text{const}$. Dijagrami vertikalnih napona kod I-3Dr i II-3Dr postupka su u obliku stepene funkcije, kod IIa-3Dr u obliku kvadratne parabole, a kod *Walker/Walters*-ovog postupka je u pitanju segment elipse. Naponi smicanja, kod svih postupaka, su u obliku trougaonog dijagrama, u funkciji koordinate r .

Na slikama sa 2D prikazom dijagrama napona, naznačene su brojne vrednosti napona.

Rezultati analiza stanja napona su grupisani po redosledu postupaka u tabeli 39, u cilju jednostavnijeg poređenja proračunskih vrednosti. U ovoj tabeli, pored brojne vrednosti posmatranog napona, prikazano je odstupanje date vrednosti (u %), od referentne vrednosti napona prema I-3Dr postupku. Rezultati konturnih napona su dati za konkretne dubine z od 10, 20 i 50 m, kao i asimptotske vrednosti za $z \rightarrow \infty$.

Prema pregledu svih proračunskih vrednosti u tabeli 39, tačnost rezultata, u odnosu na I-3Dr postupak, odgovara redosledu ovih postupaka u tabeli. Odstupanja su veća za manje dubine z (najveće odstupanje se odnosi na $z = 10$ m), dok asimptotske vrednosti mogu biti jednake kod ovih postupaka (odstupanje 0.00%). Kod konturnih vrednosti napona do zida ćelije (za napone σ_{zR} , σ_{rR} , $\sigma_{\theta R}$ i τ_{zR}), u preseku na dubini od 10 m, redom za postupke II, IIa i III, slede odstupanja od 3.04%, 3.29%, i 5.51%, što znači da se određuju veće vrednosti napona kod primene ovih postupaka (na strani sigurnosti). Sasvim je logično da zbog ravnoteže rezultujućih sila u preseku, naponi u sredini silosa na ovoj dubini budu relativno manji u odnosu na referentne vrednosti. U ovom slučaju, za napone u sredini silosa, odstupanja iznose -7.27%, -6.34%, i -10.18%, po redosledu postupaka II, IIa i III. Ako se kod rezultata za napone prema II I IIa postupku, izuzmu vrednosti za $z = 10$ m, najveće odstupanje napona do zida ćelije je -0.53%, a odgovarajuće odstupanje u centralnoj osi silosa je -3.9%. Kod *Walker/Walters*-ovog postupka, prethodno navedena odstupanja, iznose 1.38% i -7.6%, respektivno. Može se zaključiti da postupci sa primenom metode integralnih relacija II-3Dr i IIa-3Dr, u odnosu na *Walker/Walters*-ov postupak, daju bolju procenu stanja napona, koje odgovara referentnom I-3Dr postupku.

5 PRIMERI I ANALIZE

U poglavljima § 3 i § 4 analizirano je više primera proračuna stanja napona uskladištenog materijala u ćeliji silosa, prema raznim teorijama analize stanja napona, i to su:

- Primer 3.1 – *Janssen*-ov postupak (3Dr silos) – analiza stanja napona sa variranjem K i μ_w ;
- Primer 3.2 – *Janssen*-ov postupak (3Dr silos) – analiza stanje napona sa variranjem visine samostojećeg materijala h_0 (variranje nadopterećenja p_{v0} na gornjoj površini materijala);
- Primer 3.3 – *Janssen*-ov postupak (3Dr silos) – uporedna analiza stanja napona pri obuhvatanju težine nasipne kupe, sa uvođenjem nadopterećenja na gornjoj površini ili sa uvođenjem ekvivalentne zaravnjene površine materijala;
- Primer 3.4 – postupak *Reimbert*-ovih (3Dr silos) – analiza stanja napona i odnosa horizontalnog i vertikalnog napona sa variranjem K i μ_w u slučaju ravne gornje površine materijala (bez nasipne kupe);
- Primer 3.5 – postupak *Reimbert*-ovih (3Dr silos) – analiza stanja napona i odnosa vertikalnog i horizontalnog napona sa variranjem K i μ_w u slučaju sa formiranom nasipnom kupom;
- Primer 3.6 – upoređenje *Janssen*-ovog postupka sa postupkom *Reimbert*-ovih (3Dr silos) – analiza stanja napona sa variranjem h_0 (variranje nadopterećenja);
- Primer 3.7 – postupak *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a (3Dr silos - generalisani *Jáky*-ev postupak) – analiza stanja napona uz poređenje primene originalnog i modifikovanog izraza za smičuće napone za slučajeve sa i bez nadopterećenja;
- Primer 3.8 – postupak *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a (3Dr silos - generalisani *Jáky*-ev postupak) – analiza stanja napona sa variranjem nadopterećenja (preko variranja visine h_0) uz upoređenje sa *Janssen*-ovim postupkom;
- Primer 3.9 – postupak *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a (2D silos - generalisani *Jáky*-ev postupak) – aproksimativna analiza stanja napona 2D silosa sa adaptiranim postupkom analize 3Dr silosa, uz upoređenje sa *Janssen*-ovim postupkom, u slučaju sa i bez nasipne prizme na vrhu uskladištenog materijala;
- Primer 3.10 – proširena primena *Janssen*-ovog postupka (3Dr silos) – analiza stanja napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju materijala, sa uvođenjem modifikovanog koncepta analize skokovitog opterećenja pri adaptaciji *Walters*-

ovog postupka u okviru *Janssen*-ove teorije, na primeru AB silosa sa variranjem tipa uskladištenog materijala (pšenica, kukuruz i soja), uz poređenje sa postupkom analize prema EC1-4 za silose klase AAC 1, 2 i 3;

- Primer 4.1 – I-3Dr postupak analize stanja napona – primena metode integralnih relacija sa uvođenjem konturnih funkcija raspodele napona do zida ćelije i u osi silosa i promenljivih radijalnih napona u preseku ćelije;
- Primer 4.2 – II-3Dr postupak analize stanja napona – primena metode integralnih relacija sa uvođenjem jedne funkcije raspodele i promenljivih radijalnih napona u preseku ćelije;
- Primer 4.3 – IIa-3Dr postupak analize stanja napona – primena metode integralnih relacija sa uvođenjem jedne funkcije raspodele napona i dijagrama radijalnih napona u obliku kvadratne parabole ($a = 2$); i
- Primer 4.4 – III-3Dr postupak analize stanja napona – primena metode integralnih relacija sa uvođenjem jedne funkcije raspodele napona i konstantnih radijalnih napona u preseku ćelije (odgovara *Walker/Walters*-ovom postupku).

Navedeni primeri analize stanja napona uskladištenog materijala u ćeliji silosa se odnose na kružne ćelije cilindričnih silosa, sem analize u primeru 3.9, koja predstavlja adaptaciju rešenja za 3Dr silos na analizu stanja napona u 2D silosu. Kod primera je data odgovarajuća analiza i diskusija rezultata.

Primeri 4.1 do 4.4 se odnose na cilindrični silos sa istim geometrijskim podacima i karakteristikama uskladištenog materijala, tako da je, kod prikaza primera 4.4, dato upoređenje rezultata prema postupcima proračuna koji su korišćeni u ovim primerima.

Pored ovih primera analize stanja napona, u § 4.3.2.3 je prikazana relativna analiza (primena bezdimenzionalnih veličina) stanja asimptotskih radijalnih napona kod 3Dr silosa, gde su upoređeni rezultati pri primeni numeričkog postupka i predloženih teorijskih izraza. Ova analiza je proširena u § 4.3.2.7, gde je analizirano kompletno stanje asimptotskih normalnih napona kod 3Dr silosa. U okviru jednog primera analize asimptotskog stanja napona kod 3Dr silosa, prikazano je numeričko rešenja stanja napona i teorijsko rešenje sa primenom jedinstvene interpolacione stepene funkcije dijagrama napona. Na osnovu navedenih relativnih analiza, gde je odeđeno vrlo dobro slaganje numeričkih i teorijskih rezultata, kod primene metode integralnih relacija uvedena je interpolaciona stepena funkcija u analizi stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu.

U ovom poglavlju se analiziraju sledeći primeri:

- Primer 5.1 – uporedna analiza uticaja dodatnog lokalnog opterećenja na kružnom zidu ćelije cilindričnog silosa prema teorijskom rešenju i prema MKE. Primer se odnosi na betonski cilindrični silos, a dispozicija opterećenja se uzima prema EC1-4. Kod primene MKE varirana je gustina mreže konačnih elemenata.
- Primer 5.2 – uporedna analiza uticaja nesimetričnog opterećenja pri pražnjenju materijala u slučaju velikog ekscentriciteta protočnog kanala, prema približnom teorijskom rešenju i prema MKE. Primer se odnosi na betonski cilindrični silos, a opterećenje pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom se uzima prema EC1-4. Kod primene MKE varirana je gustina mreže konačnih elemenata.
- Primer 5.3 – analiza stanja napona uskladištenog materijala u 2D silosu prema I-2D, II-2D, III-2D i IV-2D postupku (primena metode integralnih relacija), i prema postupcima *Walker/Walters*-a, *Li*-a i *Aubertin*-a, i *Janssen*-a. Primer se odnosi na

analizu stanja napona u zatrpanom rudarskom iskopu (analogni 2D silosni problem). Ovaj primer su analizirali *Li* i *Aubertin* (2008) u ref. [168], gde su prikazani numerički rezultati stanja napona prema programu FLAC-2D i odgovarajuća analitička rešenja. U ovom primeru je bitno potvrditi validnost III-2D postupka proračuna, kako postavke primenjene kod ovog postupka, u osnovi odgovaraju postavkama kod formiranja I-3Dr postupka proračuna stanja napona uskladištenog materijala u cilindričnom silosu.

- Primer 5.4 – analiza stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu prema I-3Dr, II-3Dr i IIa-3Dr postupku (primena metode integralnih relacija), i prema postupcima *Walker/Walters-a*, *Pipatpongsa-a* i *Heng-a*, i *Janssen-a*. Analiza obuhvata stanja napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju materijala iz ćelije silosa prema navedenim postupcima proračuna. Proračunski primer odgovara podacima za ispitni silos sa pšenicom kao usipnim materijalom i ispitivanju ovog silosa koji su prikazali *Couto*, *Ruiz* i *Aguado* (2013) u ref. [53]. Pored osnovnog upoređenja rezultata proračuna prema navedenim postupcima analize stanja napona, kod ovog primera su grafički prikazani dijagrami horizontalnih pritisaka pšenice na kružni zid ćelije, prema *Janssen*-ovom postupku i prema EC1-4 (za klasu silosa AAC 1), i diskretne vrednosti rezultata ispitivanja (sedam testova prve serije ispitivanja prema ref. [53]) za faze punjenja, kratkog mirovanja i pražnjenja.
- Primer 5.5 – parametarska analiza stanja napona u 3Dr silosu, sa variranjem koeficijenata trenja μ_i i μ_w , u oblasti vrednosti ovih parametara kod skladištenja uobičajenih zrnastih materijala u betonske silose. U okviru analize su ispitani II-3Dr postupak (primena metode integralnih relacija) i *Walker/Walters*-ov postupak analize stanja napona uskladištenog materijala u cilindričnom silosu.

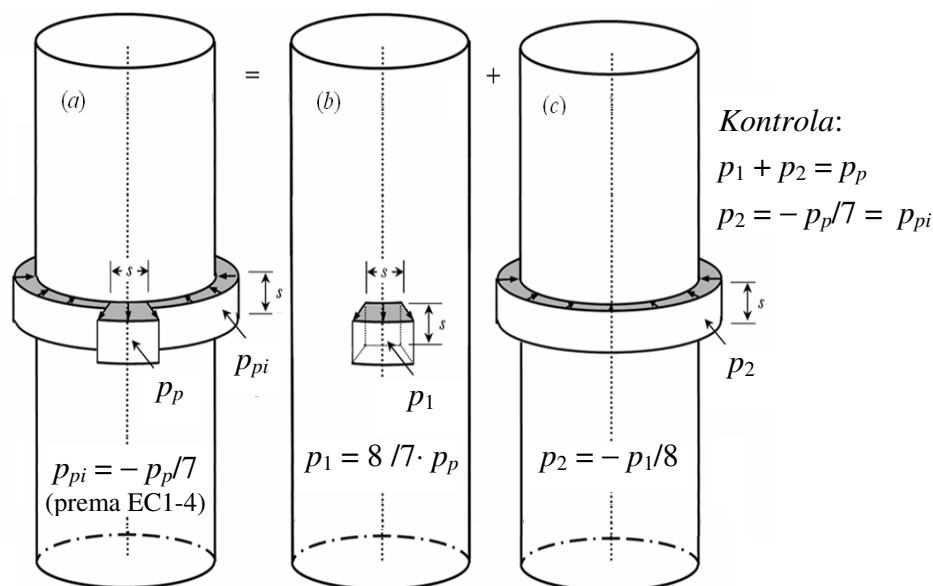
5.1 Primer 5.1 – određivanje statičkih uticaja od delovanja dodatnog lokalnog opterećenja na zidu kružne ćelije

U primeru se analiziraju statički uticaji u AB zidu cilindričnog silosa od delovanja lokalnog opterećenja primenom MKE i teorijskih izraza za određivanje uticaja u težištu površine pod delovanjem dodatnog lokalnog opterećenja. Kod primene MKE varirana je gustina mreže KE u cilju ispitivanja konvergencije rezultata i komparacije sa rezultatima prema teorijskim izrazima.

Dispozicija dodatnog lokalnog opterećenja prema EC1-4, prikazana je na sl. 182(a). Prema EC1-4, ovo opterećenje se sastoji od osnovnog dodatnog opterećenja p_p , koje deluje na dve dijametralno suprotne kvadratne površine zida ćelije (površina pod opterećenjem p_p je $s \times s$ gde je $s = \pi \cdot d_c / 16 \cong 0.2 \cdot d_c$), i dopunskog lokalnog opterećenja p_{pi} koje deluje na preostalom prstenastom delu površine zida u nivou lokalno opterećene površine. U analizi se uvodi dekompozicija opterećenja prikazana na sl. 182, gde opterećenja p_1 i p_2 predstavljaju uvećano osnovno dodatno lokalno opterećenje (dodatno lokalno opterećenje p_1) i prstenasto dopunsko lokalno opterećenje (prstenasto dopunsko opterećenje p_2), respektivno.

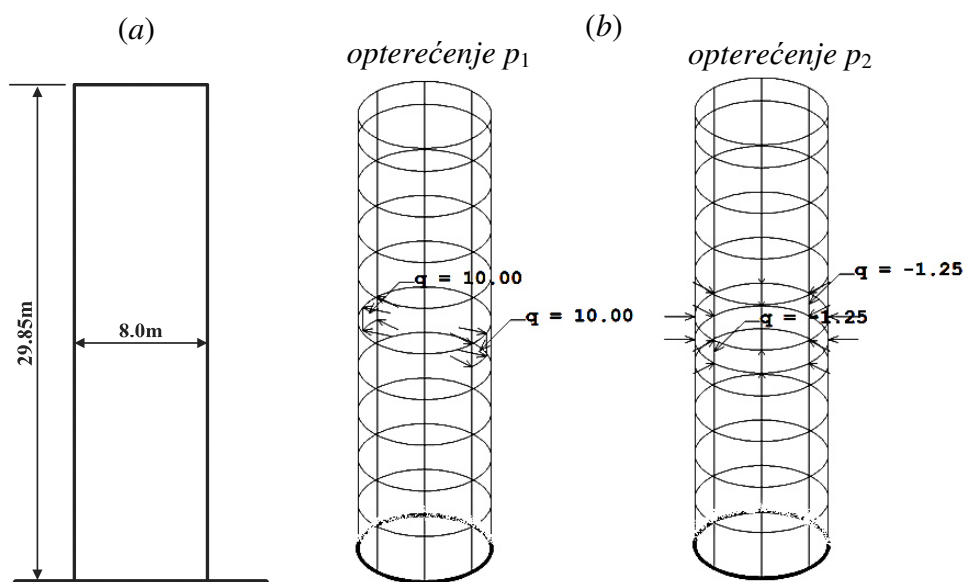
Određivanje statičkih uticaja od delovanja dodatnog lokalnog opterećenja je analizirano u § 2.10.5.5. Statički uticaji u težištu lokalne površine, od delovanja dodatnog lokalnog opterećenja p_1 , prema prikazanoj analizi u § 2.10.5.5, mogu se približno odrediti primenom aproksimativnih postupaka proračuna prema *Windels*-u (1988) [337] i *Timm*-u i *Windels*-u (1989) [308]. Statički uticaji u nivou polovine visine prstena od delovanja

prstenastog dopunskog opterećenja p_2 , određuju se primenom izraza (2.245) do (2.248), koji odgovaraju primeni fleksione teorije cilindrične ljuske.



Sl. 182 Dodatno lokalno opterećenje prema EC1-4 i dekompozicija na opterećenja p_1 i p_2 .

Proračun konstrukcije AB silosa je sproveden korišćenjem programa za strukturalnu analizu Tower 7.0¹ i SAP2000² (u daljem tekstu programi se navode kao Tower i SAP). Kod analiza gde je varirana gustine mreže KE primenjen je program Tower, a za jednu izabranu gustinu mreže KE, u cilju komparacije rezultata primenjena su oba programa.



Sl. 183 (a) Statički sistem silosa i (b) 3D prikaz opterećenja p_1 i p_2 (Tower).

¹ Radimpex (2013): Tower 7 - Program za statičku i dinamičku analizu konstrukcija - Uputstvo za rad sa programom [ažurirano za Build 7234], Copyright (c) Radimpex, <http://www.radimpex.rs>.

² CSI (2014): SAP2000 Version 17, CSI Analysis Reference Manual, Copyright (c) Computers & Structures, Inc., Berkeley, California, USA, 502 p. <http://www.csiamerica.com>.

Geometrijske karakteristike konstrukcije (statički sistem) i opterećenja p_1 i p_2 su prikazani na sl. 183. Kod statičkog sistema silosa, zid silosa je nepokretno uklješten u temeljnu konstrukciju, a gornja ivica ljsuke je slobodna. U analiziranom primeru levak je potpuno odvojen od zida ćelije, tako da se zid ćelije nezavisno deformiše od konstrukcije levka.

Dodatno lokalno opterećenje, prema EC1-4, može delovati na bilo kojoj visini zida na kojoj je uskladišten materijal, a u ovde analiziranom primeru razmatra se slučaj gde dodatno lokalno opterećenja deluje na polovini visine silosa.

Uticaji od dodatnog lokalnog opterećenja, primenom teorijskih izraza i prema MKE, se analiziraju na primeru AB silosa sa sledećim podacima:

- unutrašnji prečnik ćelije $d_i = d_c = 7.80$ m
- debljina betonskog zida ćelije $t = 0.20$ m
- prečnik ćelije meren do srednje površi kružnog zida ćelije $d = 8.00$ m
- visina silosa $H = 29.85$ m
- zid ćelije MB 30 (prema BAB 87 [126]: modul elastičnosti betona $E_b = 31.5$ GPa, i *Poisson*-ov koeficijent $\nu = 0.20$)

Analiza opterećenja p_1 i p_2

Opterećenja koja su prikazana na sl. 182, deluju na unutrašnjoj površini zida ćelije prema EC1-4, kao i u analizi *Timm*-a i *Windels*-a (1989) [308]. Kod primene MKE, kao i u analizi *Windels*-a (1988) [337], potrebno je ova opterećenja prevesti na srednju površinu cilindrične ljsuke, a to nije posebno definisano u EC1-4. Kao aproksimacija ovog problema, uzima se u svim analizama da opterećenje p_1 deluje na odgovarajućoj kvadratnoj površini cilindrične ljsuke, a intenzitet ovog opterećenja se određuje preko jednakosti rezultujuće sile na ovim površinama. Opterećenja p_1 i p_2 kod primene MKE, se uzimaju za referentne vrednosti u ovde razmatranom primeru, i ova opterećenja iznose:

$$p_1 = 10.0 \text{ kN/m}^2 \quad \text{i} \quad p_2 = -p_1/8 = -1.25 \text{ kN/m}^2.$$

U ovom primeru se opterećenja p_1 i p_2 uvode u analizu na sledeći način:

- Opterećenje p_1 kod primene MKE. je upravno na srednju površinu ljsuke zida i deluje na kvadratnu površinu zida od $1.5708 \text{ m} \times 1.5708 \text{ m} = 2.4674 \text{ m}^2$ (stranica kvadrata je određena kao $s = \pi \cdot d / 16 = \pi \cdot 8.00 / 16 = 1.5708 \text{ m}$). Opterećenje p_1 se aplicira simetrično u odnosu na vertikalnu osu silosa tako da deluje na dve dijametralno suprotne kvadratne površine zida. U primeru se analizira slučaj delovanja ovog opterećenja na sredini visine zida ćelije. Opterećenje $p_1 = 10.0 \text{ kN/m}^2$ i lokalna površina od 2.4674 m^2 se uzimaju za referentne vrednosti u proračunu. Dužina stranice kvadratne površine je izabrana tako da je omogućeno jednostavno formiranje mreže KE i apliciranje opterećenja p_1 . Kod primene MKE uvodi se:

$$p_1 = 10.0 \text{ kN/m}^2 \text{ - deluje na srednju površinu zida } (r = 4.00 \text{ m}; s = 1.5708 \text{ m});$$

- Opterećenje p_1 kod primene teorijskih izraza prema *Windels*-u (1988) [337], deluje upravno na srednju površinu zida ćelije na kvadratnoj površini $1.60 \text{ m} \times 1.60 \text{ m} = 2.560 \text{ m}^2$ (stranica kvadrata je $s = 0.2 \cdot d = 0.2 \cdot 8.00 = 1.60 \text{ m}$). Razlika u veličini površine je oko 3.8%. Redukovano opterećenje je $p_1 = 10.0 \cdot 2.4674 / 2.560 = 9.638 \text{ kN/m}^2$. Kod primene teorijskih izraza prema *Windels*-u (1988) [337], uvodi se u proračun:

$$p_1 = 9.638 \text{ kN/m}^2 \text{ - deluje na srednju površinu zida } (r = 4.00 \text{ m}; s = 1.60 \text{ m});$$

- Opterećenje p_1 kod primene teorijskog izraza prema *Timm*-u i *Windels*-u (1989) [308], deluje upravno na unutrašnju površinu zida ćelije na kvadratnoj površini $1.56 \text{ m} \times 1.56 \text{ m} = 2.4336 \text{ m}^2$ (stranica kvadrata je $s = 0.2 \cdot d_c = 0.2 \cdot 7.80 = 1.56 \text{ m}$) Razlika u veličini površine je oko -1.4%. Kako bi rezultujuća sila na lokalnoj površini odgovarala referentnom slučaju, koriguje se opterećenje p_1 , tako da se dobija da je $p_1 = 10.0 \cdot 2.4674 / 2.4336 = 10.139 \text{ kN/m}^2$. Kod primene teorijskih izraza prema *Timm*-u i *Windels*-u (1989) [308], uvodi se u proračun:
 $p_1 = 10.139 \text{ kN/m}^2$ - deluje na unutrašnju površinu zida ($r = 3.90 \text{ m}$; $s = 1.56 \text{ m}$).
- Opterećenje p_2 kod primene MKE i teorijskih izraza prema fleksionoj teoriji cilindrične ljske je jednako po intenzitetu i iznosi:
 $p_2 = -1.25 \text{ kN/m}^2$ - deluje na srednju površinu zida ($r = 4.00 \text{ m}$; $s = 1.5708 \text{ m}$).

Uticaji od delovanja opterećenja p_1 prema približnim teorijskim izrazima

Približna rešenja za statičke uticaje u težištu lokalne kvadratne površine od delovanja opterećenja p_1 (tandem opterećenje na dve dijametralno suprotne strane zida) su prikazana prema *Windels*-u (1988) [337] i *Timm*-u i *Windels*-u (1989) [308], u tabeli 21 (§ 2.10.5.5). U okviru ove tabele prikazani su potrebni proračunski izrazi, kao i pojedine vrednosti za bezdimenzionalne koeficijenate momenata savijanja, normalnih sila i pomeranja w , u težištima lokalnih opterećenih površina, u zavisnosti od parametra r/t . Tabela vrednosti su prikazane u oblasti parametra ljske silosa $10 \leq (r/t) \leq 30$, koja odgovara betonskim silosima. Opterećenje p_p koje se koristi u tabeli 21, u ovoj analizi je p_1 opterećenje.

Kod primene teorijskih izraza prema *Windels*-u (1988) [337], za vrednosti odgovarajućih bezdimenzionalnih veličina u tabeli 21 (za $r/t = 20$), određuju se sledeći uticaji:

za $r/t = 4.00/0.20 = 20.0$

$$m_\varphi = 0.01511 \cdot p_1 \cdot r^2 = 0.01511 \cdot 9.638 \cdot 4.00^2 = 2.330 \text{ kNm/m}$$

$$m_z = 0.00749 \cdot p_1 \cdot r^2 = 0.00749 \cdot 9.638 \cdot 4.00^2 = 1.155 \text{ kNm/m}$$

$$n_\varphi = 0.4352 \cdot p_1 \cdot r = 0.4352 \cdot 9.638 \cdot 4.00 = 16.778 \text{ kN/m}$$

$$n_z = 0.4657 \cdot p_1 \cdot r = 0.4657 \cdot 9.638 \cdot 4.00 = 17.954 \text{ kN/m}$$

Kod primene teorijskih izraza prema *Timm*-u i *Windels*-u (1989) [308], bezdimenzionalne veličine se uvode prema izrazima u tabeli 21 (za $r/t = 19.5$), tako da se određuje:

za $r/t = 3.90/0.20 = 19.5$

$$m_\varphi = 0.0400 \cdot (r/t)^{-0.34} \cdot p_1 \cdot r^2 = 0.01457 \cdot 10.139 \cdot 3.90^2 = 2.247 \text{ kNm/m}$$

$$m_z = 0.0448 \cdot (r/t)^{-0.60} \cdot p_1 \cdot r^2 = 0.00754 \cdot 10.139 \cdot 3.90^2 = 1.162 \text{ kNm/m}$$

$$n_\varphi = 0.0512 \cdot (r/t)^{0.69} \cdot p_1 \cdot r = 0.3976 \cdot 10.139 \cdot 3.90 = 15.720 \text{ kN/m}$$

$$n_z = 0.0176 \cdot (r/t)^{1.05} \cdot p_1 \cdot r = 0.3982 \cdot 10.139 \cdot 3.90 = 15.744 \text{ kN/m}$$

Proračunske vrednosti za momente i normalne sile, određene preko prikazanih približnih teorijskih postupaka, prikazane su u tabelama 40 i 41, u cilju upoređenja sa rezultatima kod primene MKE.

Uticaji od delovanja opterećenja p_2 prema fleksionoj teoriji cilindrične ljske

Određivanje statičkih uticaja u nivou polovine visine prstena od delovanja prstenastog dopunskog opterećenja p_2 , prikazano je u § 2.10.5.5. Ovi uticaji se određuju sa izrazima

(2.245) do (2.248), koji odgovaraju primeni fleksione teorije cilindrične ljuske. Kod primene ovih izraza, opterećenje p_{pi} se u ovoj analizi uzima kao $(-p_2)$ zbog različitog korišćenja znaka kod navedenih opterećenja. Prema ovim teorijskim izrazima su određene proračunske vrednosti koje su prikazane u tabelama 42 i 43.

Uticaji od delovanja opterećenja p_1 i p_2 prema MKE

Dodatno lokalno opterećenje p_1 se aplicira simetrično u odnosu na vertikalnu osu silosa na sredini visine silosa i na površini od $1.5708 \text{ m} \times 1.5708 \text{ m}$. Dopunsko prstenasto opterećenje p_2 se nanosi na sredini visine silosa na dužini po z osi od 1.5708 m .

Dodatno lokalno opterećenje koje deluje na kvadratnoj površini ljuske se uvodi u analizu sa $p_1 = 10.0 \text{ kN/m}^2$, tako da prstenasto opterećenje iznosi $p_2 = -p_1/8 = -1.25 \text{ kN/m}^2$.

Silos je modeliran kvadratnim površinskim konačnim elementima. Gustine mreže su date sa sledećim oznakama (ukupan broj KE se odnosi na analize u programu Tower):

"2" (dimenzije KE: $0.7854 \times 0.7854 \text{ m}$; ukupan broj KE: 1 701),

"4" (dimenzije KE: $0.3927 \times 0.3927 \text{ m}$; ukupan broj KE: 6 808),

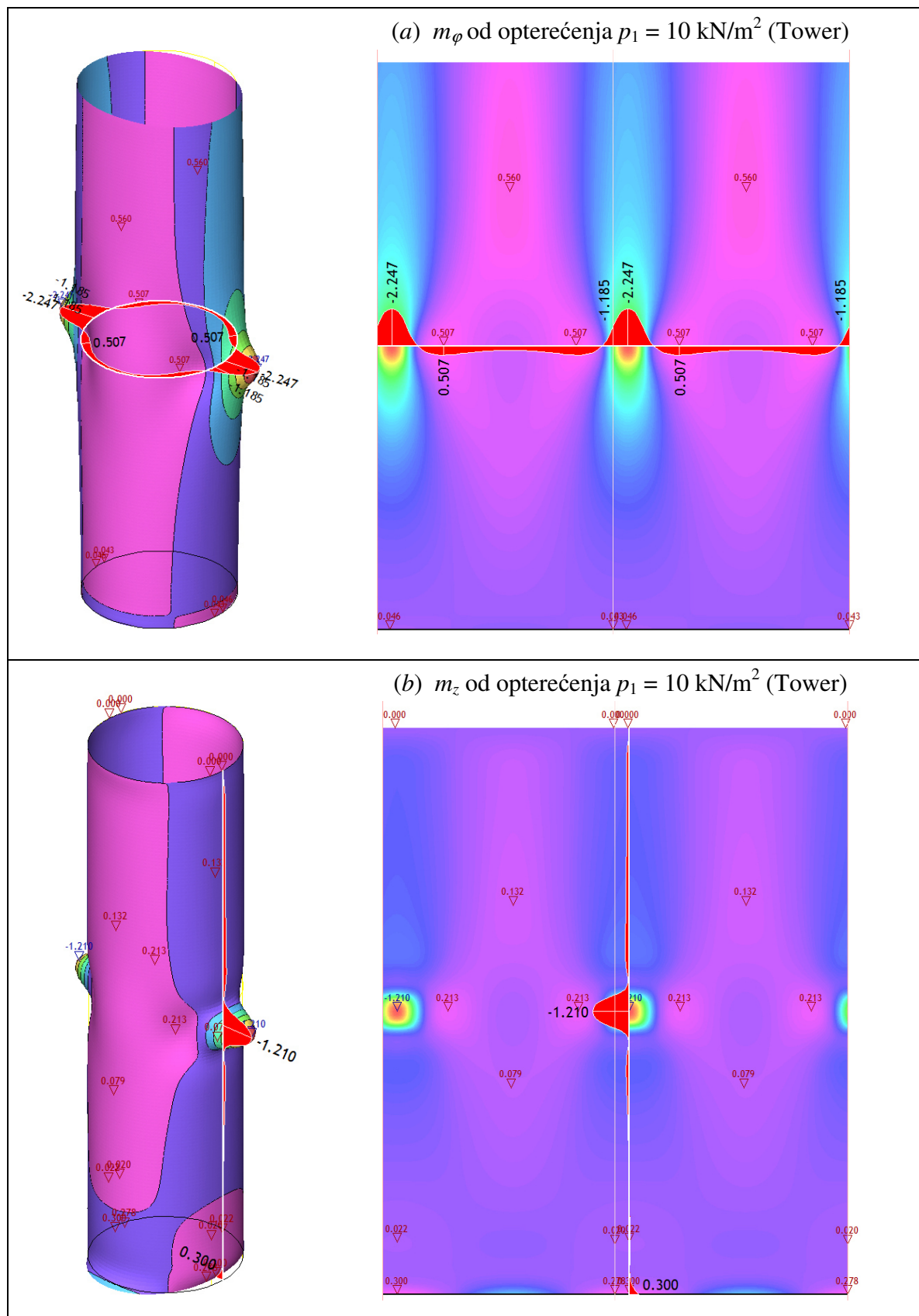
"8" (dimenzije KE: $0.1964 \times 0.1964 \text{ m}$; ukupan broj KE: 27 224) i

"16" (dimenzije KE: $0.0982 \times 0.0982 \text{ m}$; ukupan broj KE: 108 952).

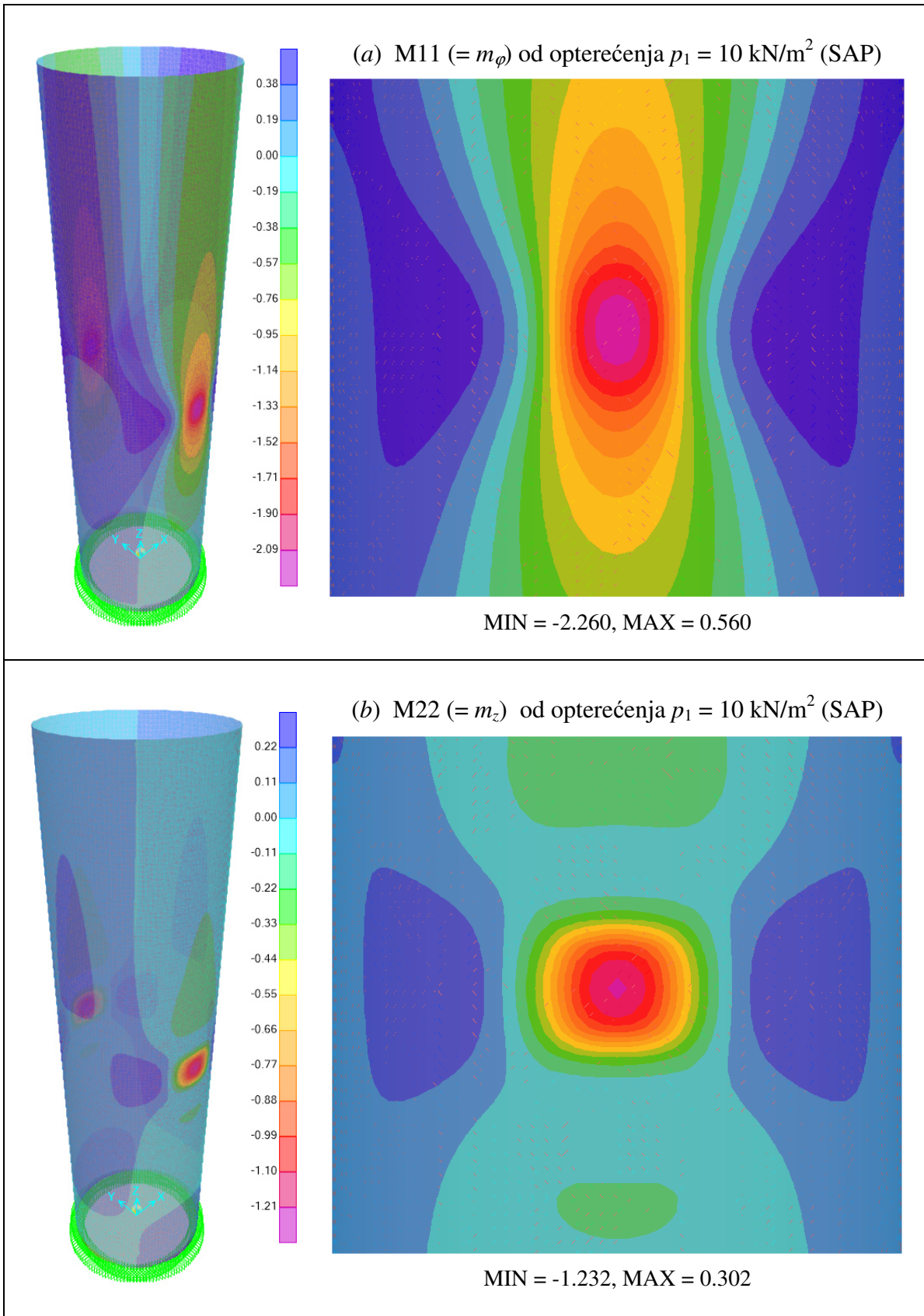
Analize su sprovedene za opterećenja p_1 i p_2 i ovde se rezultati prikazuju odvojeno po ovim opterećenjima. Program SAP je korišćen u analizi sa gustinom mreže KE "8". Oznaka gustine mreže predstavlja broj konačnih elemenata sa kojim se pokriva dužina kod lokalne površine u jednom pravcu, odnosno kod gustine mreže "8", potrebno je formirati površinu od ukupno $8 \times 8 = 64$ KE, koja odgovara lokalno opterećenoj površini od $1.5708 \text{ m} \times 1.5708 \text{ m}$.

Prikaz i analiza rezultata

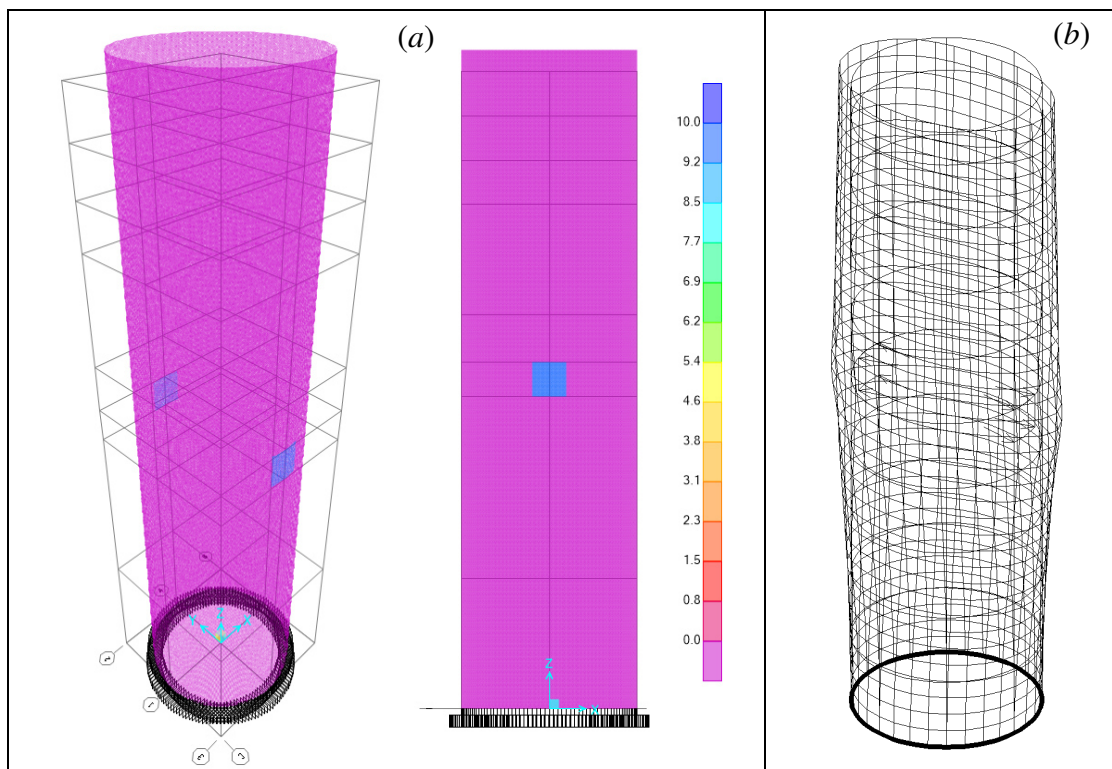
Na sl. 186(a) prikazana je dispozicija lokalnog opterećenja p_1 kod primene programa SAP, na polovini visine silosa, dok je na sl. 186(b) prikazan 3D žičani model pri deformaciji cilindričnog zida prema programu Tower. Prikazi momenata savijanja (m_φ i m_z) cilindrične ljuske su dati na sl. 184 i sl. 185, pri primeni programa Tower i SAP, respektivno. Konvencija o znaku za momente savijanja kod programa Tower i SAP je obrnuta u odnosu na konvenciju koja se primenjuje u teorijskom delu ovog rada. U teorijskom delu rada pozitivni momenti savijanja izazivaju zatezanje spoljne strane zida ćelije. 3D prikazi normalnih sila (n_φ i n_z) u presecima zida ćelije su dati na sl. 187, prema programu SAP. Konvencija o znaku, u programima i u teorijskom delu ovog rada, za normalne sile je jednaka: pozitivna je sila zatezanja. Sve presečne sile prikazane na ovim slikama, su određene za gustinu mreže KE "8". Na sl. 184 su na razvijenoj površini cilindrične ljuske prikazani dijagrami odgovarajućih momenata savijanja u horizontalnom i vertikalnom preseku zida. Navedeni preseki prolaze kroz težišnu tačku lokalno opterećene površine, tako da se uočavaju ekstremne vrednosti za m_φ i m_z u ovoj tački. Ove vrednosti za m_φ i m_z su prikazane u tabeli 40, pri variranju gustine mreže KE kod primene programa Tower (znak je obrnut zbog konvencije za m_φ i m_z). Kod prikaza dijagrama momenta može se uočiti da na površinama ljuske, van sektora koje zahvataju lokalno opterećene površine, momenti savijanja imaju promenjeni znak u odnosu na momente kod lokalno opterećene površine. Na ovaj način, veće površine zida ćelije su izložene momentima savijanja koji zatežu unutrašnju površinu zida ćelije, ali su ovi momenti po intenzitetu mnogo manji u odnosu na momente savijanja u težištima lokalno opterećenih površina.



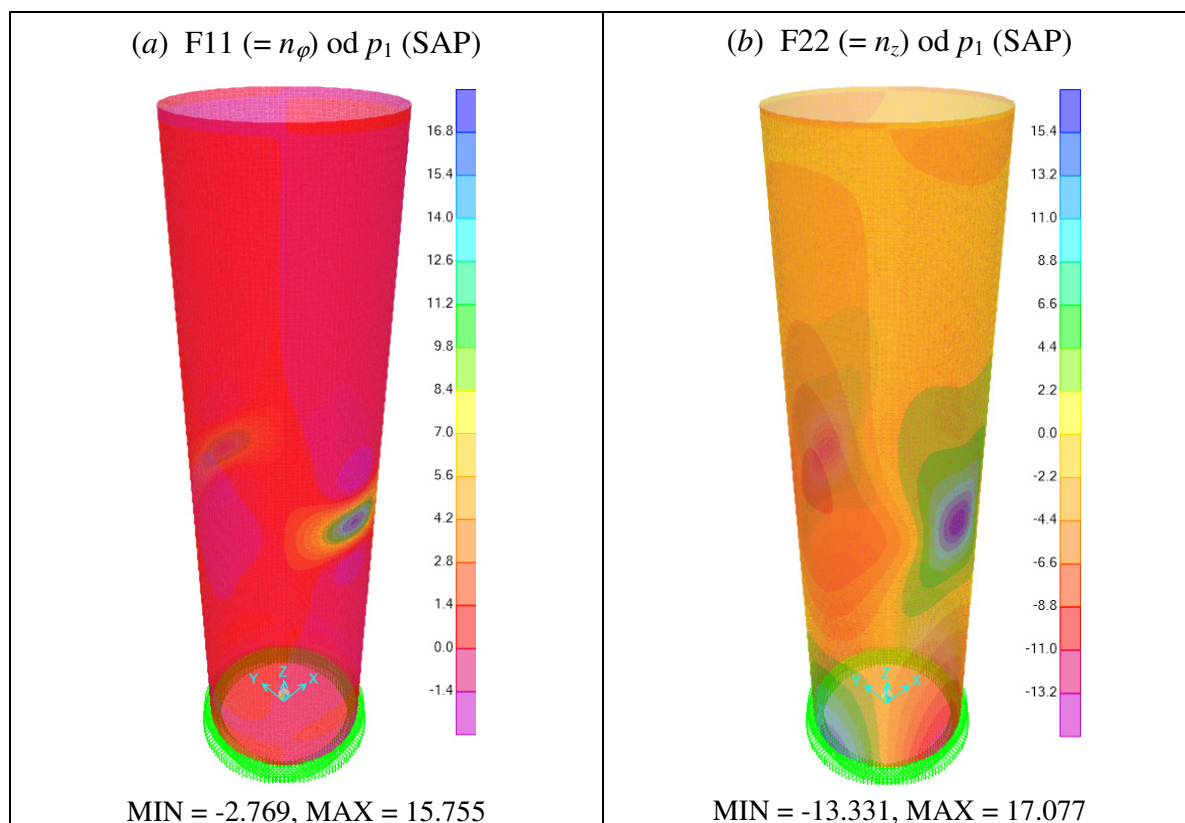
Sl. 184 Momenti savijanja u prstenastom i vertikalnom pravcu u 3D prikazu i na razvijenoj površini cilindrične ljuske, za opterećenje p_1 i gustinu mreže KE "8" (Tower).



Sl. 185 Momenti savijanja u prstenastom i vertikalnom pravcu u 3D prikazu i na površini cilindrične ljuske, za opterećenje p_1 i gustinu mreže KE "8" (SAP).



Sl. 186 Lokalno opterećenje p_1 : (a) 3D prikaz dispozicije opterećenja p_1 (SAP) i (b) 3D prikaz deformacija silosa od opterećenja p_1 (Tower).



Sl. 187 3D prikazi prstenaste i vertikalne normalne sile (n_φ i n_z) na cilindričnoj ljusci, za opterećenje p_1 i gustinu mreže "8" (SAP).

U tabeli 40 prikazane su vrednosti za momenta m_φ i m_z i normalne sile n_φ i n_z koje deluju u težištima lokalno opterećenih površina pod dodatnim lokalnim opterećenjem $p_1 = 10$ kN/m² na zidu cilindričnog silosa. Kod rezultata MKE varirana je gustina mreže konačnih elemenata od "2" do "8". Pored proračunskih vrednosti uticaja u zidu silosa, u okviru zagrada je prikazan relativni odnos posmatrane i odgovarajuće referentne vrednosti (u %). Referentne vrednosti odgovaraju rezultatima MKE sa najvećom gustinom KE "16" i kod njih je ovaj odnos 100%. Pri povećanju gustine mreže konačnih elemenata dolazi do smanjenja odstupanja između tekuće i referentne vrednosti. Pri uzastopnom dvostrukom povećavanju mreže KE proračunske vrednosti momenata m_φ i m_z postepeno rastu, ali je trend porasta ovih veličina u opadanju. Slično je i kod normalnih sila n_φ i n_z , ali se one po vrednostima smanjuju, pri čemu je trend smanjenja vrednosti u opadanju. Trend promene ovih uticaja pokazuje da proračunske vrednosti pri povećanju gustine KE konvergiraju ka konačnim vrednostima. Imajući u vidu da se rezultati određeni pri gustini mreže KE "8", razlikuju najviše do 2% u odnosu na rezultate pri gustini mreže KE "16", a da su odgovarajuće razlike za m_φ oko 0.3%, i za n_φ oko 0.5%, može se zaključiti da je sa gustinom mreže "16" kod MKE postignuta visoka tačnost proračunskih rezultata, i da je sasvim zadovoljavajuća tačnost postignuta sa gustinom mreže "8". Kod primena teorijskih izraza za približan proračun uticaja u težištu lokalno opterećene površine, uočava se relativno bolje slaganje proračunskih vrednosti prema izrazima *Timm*-a i *Windels*-a [308] sa referentnim vrednostima, u odnosu na vrednosti prema izrazima *Windels*-a [337]. Kod primene izraza *Timm*-a i *Windels*-a [308], proračunske vrednosti za m_φ se razlikuju za 0.3%, a kod n_φ za 0.5%, u odnosu na odgovarajuće referentne vrednosti prema MKE. Prema proračunskim vrednostima za n_z , može se zaključiti da je proračun po izrazu *Windels*-a [337] u ovom slučaju nešto precizniji od izraza *Timm*-a i *Windels*-a [308], ali se kod primene oba izraza proizvodi greška veća od 5% u odnosu na referentnu vrednost. Kod dimnzionisanja silosa, od veće važnosti su prstenasti uticaji, odnosno m_φ i n_φ , kako ovi uticaji u principu dovode do povećanja prstenaste armature.

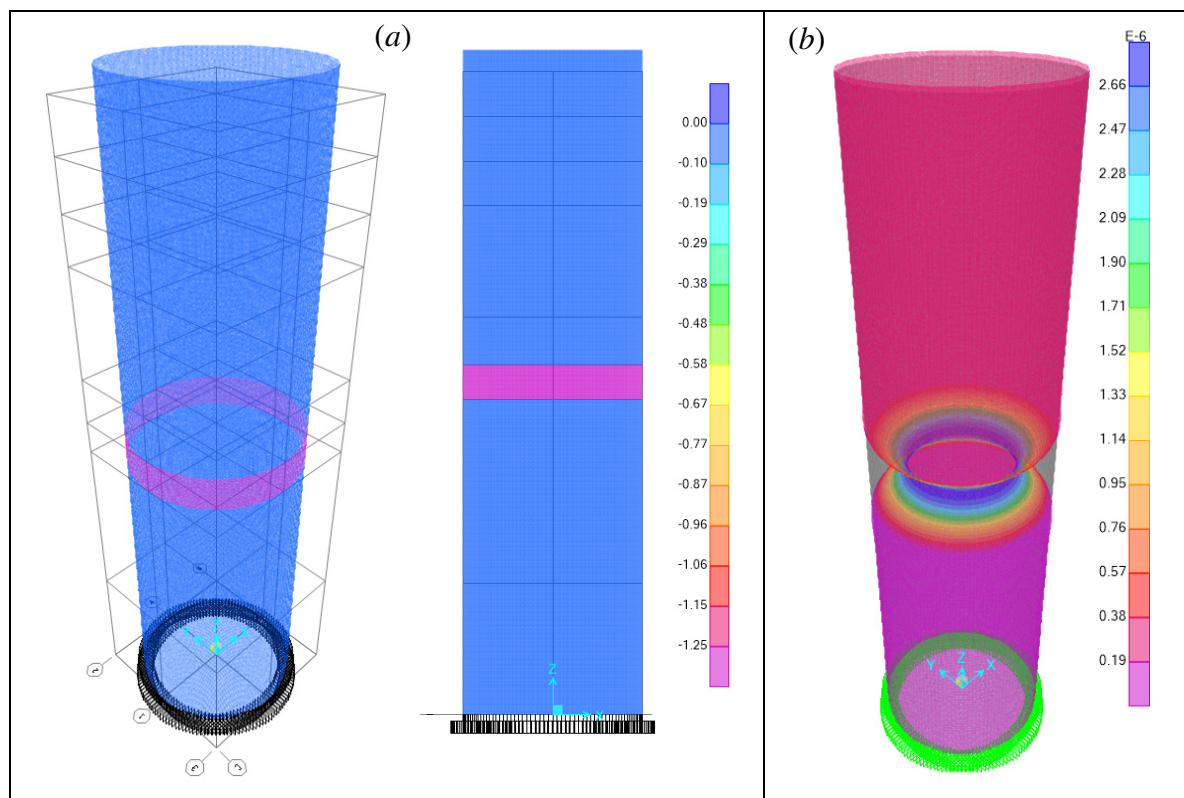
Tabela 40. Uticaji od $p_1 = 10$ kN/m² u težištu lokalne površine, prema teorijskim izrazima i prema MKE (program Tower) sa variranjem gustine mreže KE.

Uticaji od p_1	Teorijski izrazi (prema <i>Windels</i> -u [337] i <i>Timm</i> -u i <i>Windels</i> -u [308])		MKE sa gustinom mreže KE (Tower)			
			"2"	"4"	"8"	"16"
m_φ [kNm/m]	2.330 (103.4%) [337]		2.082 (92.3%)	2.216 (98.3%)	2.247 (99.7%)	2.254 (100%)
	2.247 (99.7%) [308]					
m_z [kNm/m]	1.155 (94.4%) [337]		0.942 (77.0%)	1.156 (94.4%)	1.210 (98.9%)	1.224 (100%)
	1.162 (95.0%) [308]					
n_φ [kN/m]	16.778 (106.2%) [337]		16.660 (105.5%)	16.159 (102.3%)	15.875 (100.5%)	15.795 (100%)
	15.720 (99.5%) [308]					
n_z [kN/m]	17.954 (104.7%) [337]		22.240 (129.6%)	18.776 (109.4%)	17.497 (102.0%)	17.155 (100%)
	15.744 (91.8%) [308]					

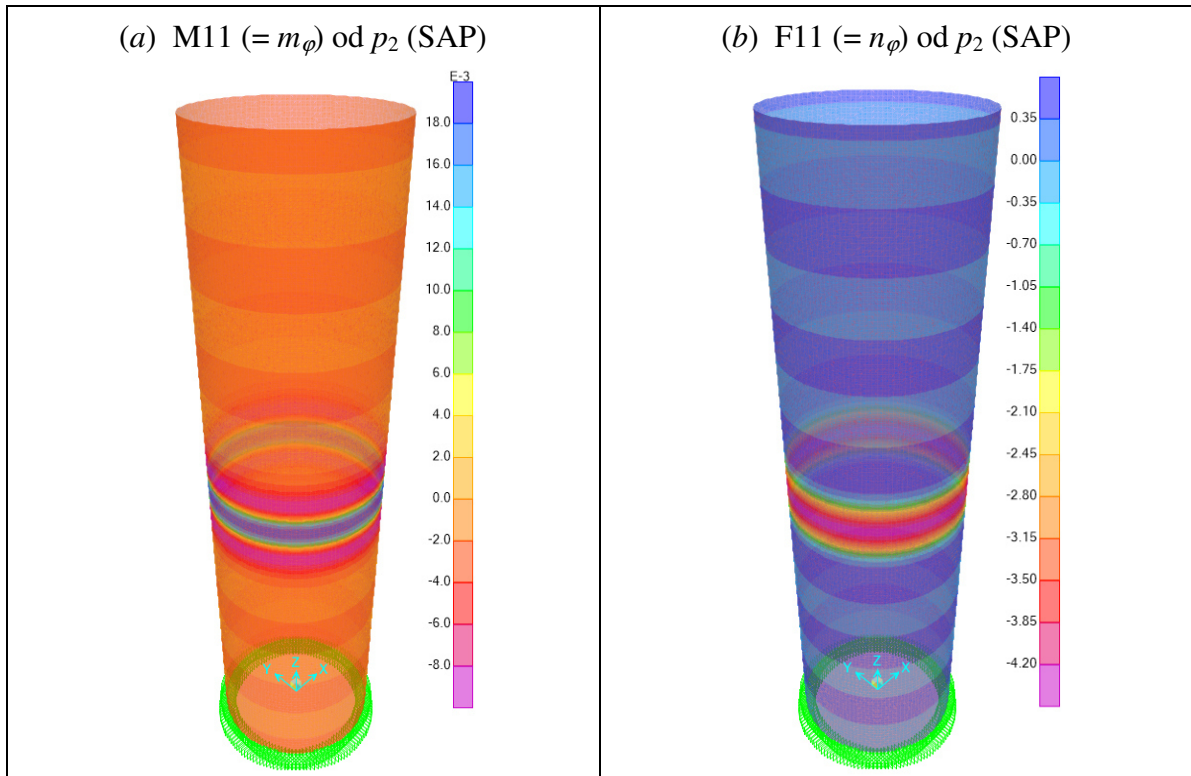
U tabeli 41 prikazane su vrednosti presečnih sila u težištima lokalno opterećenih površina na zidu ćelije, prema teorijskim izrazima i pri primeni programa Tower i SAP za gustinu mreže KE "8". Razlike između prikazanih proračunskih vrednosti prema ovim programima su male (od 0.6% do 2.5%). U odnosu na teorijske vrednosti važe slične konstatacije kao u prethodnoj analizi.

Tabela 41. Uticaji od $p_1 = 10 \text{ kN/m}^2$ u težištu lokalne površine, prema teorijskim izrazima i MKE za gustinu mreže KE "8" pri primeni programa Tower i SAP.

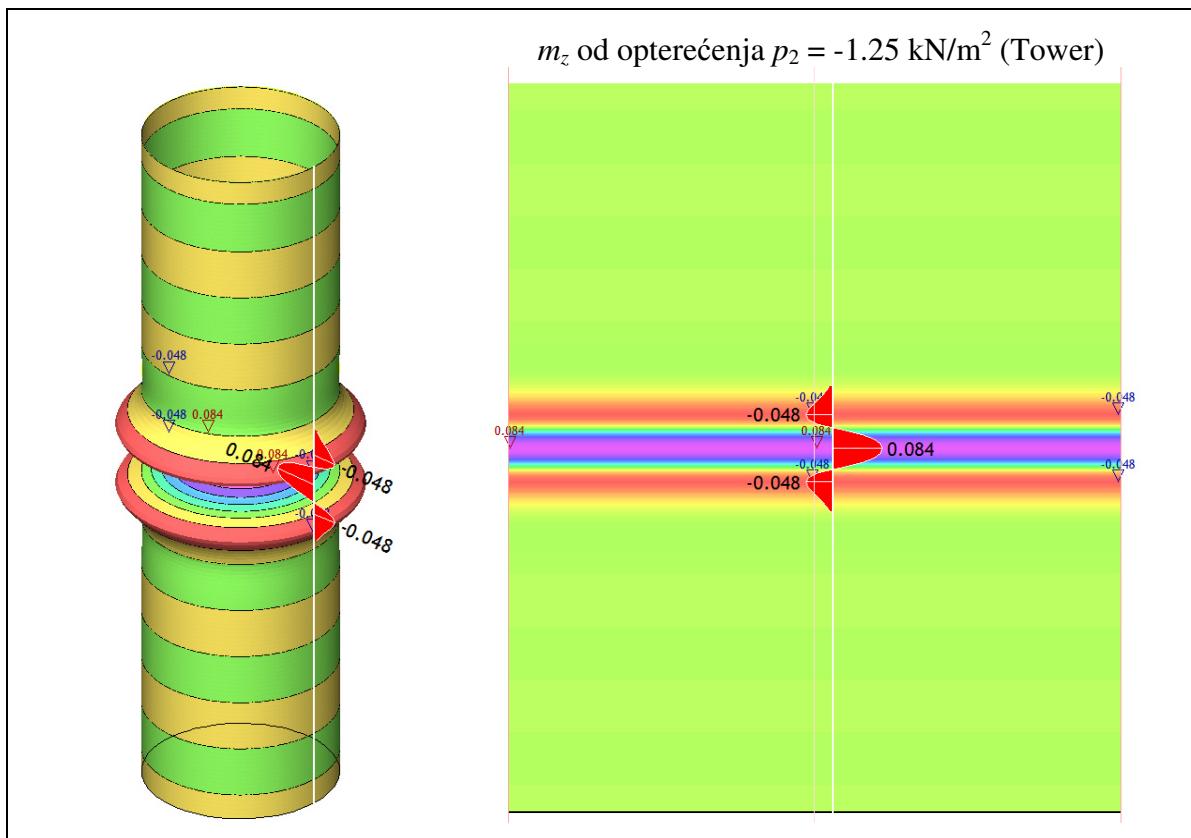
Uticaji od p_1	Teorijski izrazi (prema Windels-u [337] i Timm-u i Windels-u [308])		MKE sa gustinom mreže KE	
			"8" (Tower)	"8" (SAP)
m_φ [kNm/m]	2.330 (103.1%) [337]		2.247 (99.4%)	2.260 (100 %)
	2.247 (99.4%) [308]			
m_z [kNm/m]	1.155 (93.8%) [337]		1.210 (98.2%)	1.232 (100 %)
	1.162 (94.4%) [308]			
n_φ [kN/m]	16.778 (106.5%) [337]		15.875 (100.8%)	15.755 (100 %)
	15.720 (99.8%) [308]			
n_z [kN/m]	17.954 (105.1%) [337]		17.497 (102.5%)	17.077 (100 %)
	15.744 (92.2%) [308]			



Sl. 188 Dopunsko prstenasto opterećenje p_2 : (a) 3D prikaz dispozicije opterećenja p_2 (SAP) i (b) 3D prikaz deformacija silosa od opterećenja p_2 (SAP).



Sl. 189 3D prikazi prstenastog momenta savijanja i normalne sile (m_φ i n_φ) na cilindričnoj ljusci, za opterećenje p_2 i gustinu mreže KE "8" (SAP).



Sl. 190 Momenti savijanja u vertikalnom pravcu, m_z , u 3D prikazu i na razvijenoj površini cilindrične ljuske, za opterećenje p_2 i gustinu mreže KE "8" (Tower).

Na sl. 188 (a) prikazana je dispozicija dopunskog prstenastog opterećenja p_2 kod primene programa SAP, na polovini visine silosa, a na sl. 188(b) je 3D prikaz deformacije cilindričnog zida (SAP). Prikazi momenata savijanja m_φ i normalne sile n_φ u prstenastom pravcu cilindrične ljuske su dati na sl. 189, prema analizi u programu SAP.

Prikazi momenata savijanja m_z cilindrične ljuske su dati na sl. 190. Može se uočiti na sl. 189 i sl. 190, da je uticajna zona prstenastog opterećenja u okviru opterećene površine i neposredno uz nju, a da su dalje od te zone uticaji zanemarljivi.

Tabela 42. Uticaji od $p_2 = -1.25 \text{ kN/m}^2$, na polovini visine prstena na kojoj deluje prstenasto opterećenje, prema teorijskim izrazima i prema MKE (program Tower) sa variranjem gustine mreže KE.

Uticaji od p_2	Teorijski izrazi	MKE sa gustinom mreže KE (Tower)			
		"2"	"4"	"8"	"16"
m_φ [kNm/m]	-0.0171 (100%)	+0.0173 (-101.2%)	-0.0086 (50.3%)	-0.0150 (87.7%)	-0.0166 (97.1%)
m_z [kNm/m]	-0.0854 (100%)	-0.0582 (68.1%)	-0.0787 (92.2%)	-0.0838 (98.1%)	-0.0850 (99.5%)
n_φ [kN/m]	-4.341 (100%)	-4.144 (95.5%)	-4.308 (99.2%)	-4.333 (99.8%)	-4.339 (99.96%)
n_z [kN/m]	0.0000	-0.4985	-0.1780	-0.0474	-0.0120

Tabela 43. Uticaji od $p_2 = -1.25 \text{ kN/m}^2$, na polovini visine površine pod prstenastim opterećenjem, prema teorijskim izrazima i MKE za gustinu mreže KE "8" pri primeni programa Tower i SAP.

Uticaji od p_2	Teorijski izrazi	MKE sa gustinom mreže KE	
		"8" Tower	"8" SAP
m_φ [kNm/m]	-0.0171 (100%)	-0.0150 (87.7%)	-0.0170 (99.4%)
m_z [kNm/m]	-0.0854 (100%)	-0.0838 (98.1%)	-0.0860 (100.7%)
n_φ [kN/m]	-4.341 (100%)	-4.333 (99.8%)	-4.348 (100.2%)
n_z [kN/m]	0.0000	-0.0474	-0.073

U tabeli 42 prikazane su vrednosti za momenta m_φ i m_z i normalne sile n_φ i n_z koje deluju na polovini visine opterećene površine sa dopunskim prstenastim opterećenjem $p_2 = -1.25 \text{ kN/m}^2$ na zidu cilindričnog silosa. Kod rezultata MKE varirana je gustina mreže konačnih elemenata od "2" do "16". Pored proračunskih vrednosti uticaja u zidu silosa,

dati su i relativni odnosi za posmatrane i odgovarajuće referentne vrednosti (u %). Referentne vrednosti u ovom slučaju odgovaraju rezultatima prema teorijskim izrazima, kako su to tačna teorijska rešenja, i kod njih je ovaj odnos 100%. Tačnost proračuna pri gustini mreže KE "8" je zadovoljavajuća (razlike do 2%) ako se zanemari relativno veće odstupanje od 12% kod m_ϕ imajući u vidu da je u pitanju mala brojna vrednost. Tačnost proračunskih veličina kod primene MKE je sasvim zadovoljavajuća za najgušću mrežu KE: za m_ϕ do 3% razlike, a za m_z i n_ϕ razlika je praktično zanemarljiva.

U tabeli 43 prikazane su vrednosti presečnih sila kao u tabeli 42, ali su kod primene MKE prikazani rezultati prema programima Tower i SAP za gustinu mreže KE "8". Razlike između prikazanih proračunskih vrednosti, za m_z i n_ϕ prema ovim programima su relativno male, a isto tako su male i razlike ovih vrednosti u odnosu na tačne teorijske vrednosti (do -2% za Tower i do 0.7% za SAP).

Diskusija rezultata

Uticaji od dodatnog lokalnog opterećenja se dobijaju superpozicijom uticaja od ovde pojedinačno razmatranih opterećenja p_1 i p_2 . Kako opterećenje p_2 smanjuje maksimalne uticaje u težištu lokalno opterećene površine, uticaj ovog prstenastog opterećenja se kod preliminarnih analiza može zanemariti, a analiza sprovedi samo sa p_1 opterećenjem.

Od teorijskih izraza sa kojima se određuju uticaji opterećenja p_1 na cilindrični zid silosa, u težištu lokalno opterećene površine, za primenu se preporučuju proračunski izrazi prema *Timm*-u i *Windels*-u [308], s obzirom na vrlo male razlike (0.3% za m_ϕ i 0.5% za n_ϕ) proračunskih vrednosti u odnosu na odgovarajuće referentne vrednosti prema MKE.

Primena ovih izraza je pogodna za tabelarna sračunavanja, npr. u *Excel*-u, gde se lako može varirati visina na kojoj se nalazi dodatno lokalno opterećenje p_1 . Na ovaj način se formira anvelopa momenata savijanja po visini zida ćelije pri delovanju lokalnog opterećenja, što omogućuje jednostavno preliminarno dimenzionisanje cilindričnog zida silosa.

S obzirom na zadovoljavajuću tačnost proračuna prema MKE za gustinu mreže KE "8", može se preporučiti da dimanzija kvadratnih površinskih KE iznosi $a_{KE} = s/8 \cong 0.05 \cdot R$, odnosno 5% od poluprečnika ćelije R . Kod generisanja KE cilindričnog silosa, za dužinu stane kvadratnog KE, koji se vode po srednjoj površi cilindrične ljuske, može se uzeti da je $a_{KE} = \pi/64 \cdot (R + t/2)$, gde je t debljina zida ćelije.

Prema ovim preporukama dužina strane kvadratnog KE bi iznosila oko 0.20 m u ovde razmatranom primeru. U praksi se kod MKE analize betonskih silosa, koriste dimenzije KE od oko 0.5 m pa i veće, tako da se preporučuje primena detaljnije mreže KE u cilju povećanja tačnosti proračuna.

Prema prikazanoj analizi, momenti savijanja u težištu lokalno opterećene površine sa opterećenjem p_1 zatežu spoljnu stranu zida ćelije, a normalne sile su sile zatezanja. Ovi uticaji u kombinaciji sa uticajima od simetričnog opterećenja na zidu silosa vode ka povećanju prstenaste armature, uz relativno veću površinu spoljne armature u odnosu na unutrašnju armaturu zida ćelije. Međutim, po površini zida koje su van sektora pod lokalnim opterećenjem, javljaju se relativno manji uticaji ali sa obrnutim znakom, tako da se armiranje zida ćelije uobičajeno svodi na simetrično armiranje.

5.2 Primer 5.2 – određivanje statičkih uticaja od delovanja opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala

U primeru se daje uporedna analiza uticaja nesimetričnog opterećenja pri pražnjenju materijala u slučaju velikog ekscentriciteta protočnog kanala, prema približnom teorijskom rešenju i prema MKE. Kod primene MKE varirana je gustina mreže konačnih elemenata.

Primer se odnosi na betonski cilindrični silos, a opterećenje pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom se uzima prema EC1-4 (§ 2.10.2.5.2). Cilindrični silos po svojoj geometriji i karakteristikama materijala zida ćelije odgovara silosu u primeru 5.1.

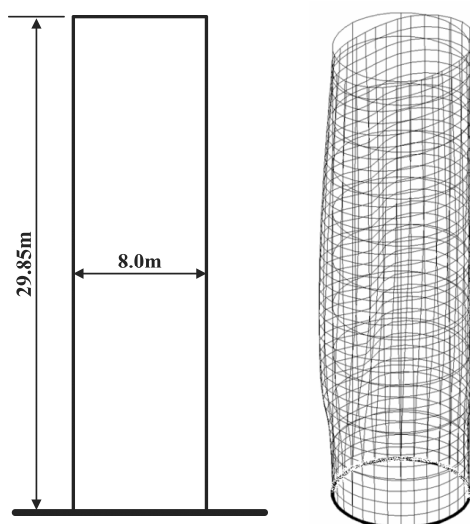
Proračun konstrukcije AB silosa je sproveden korišćenjem programa za strukturalnu analizu Tower 7.0 za gustinu mreže KE "4" i "8", koje su opisane u primeru 5.1. Kod mreže KE "8" sprovedena je dodatna analiza sa programom SAP2000. U daljem tekstu ovi programi se navode kao Tower i SAP.

Gustine mreže kvadratnih površinskih KE su date sa oznakama:

"4" (dimenzije KE: 0.3927×0.3927 m; ukupan broj KE: 6808), i

"8" (dimenzije KE: 0.1964×0.1964 m; ukupan broj KE: 27224).

Statički sistem silosa je prikazan na sl. 191(a), a na sl. 191(b) dat je 3D prikaz žičanog modela pri deformaciji cilindričnog zida prema programu Tower pri ekscentričnom pražnjenju materijala.



Sl. 191 (a) Statički sistem silosa i (b) 3D prikaz deformacija silosa od nesimetričnog opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom (Tower).

Kod statičkog sistema, zid silosa je nepokretno uklješten u temeljnu konstrukciju, a gornja ivica ljuške je slobodna.

U primeru se uzima da je levak potpuno odvojen od zida ćelije, tako da se zid ćelije nezavisno deformiše od konstrukcije levka.

Uticaji od nesimetričnog opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala, primenom teorijskih izraza i prema MKE, se analiziraju na primeru AB silosa sa sledećim podacima:

- unutrašnji prečnik ćelije $d_i = d_c = 7.80$ m
- debljina betonskog zida ćelije $t = 0.20$ m
- prečnik ćelije meren do srednje površi kružnog zida ćelije $d = 8.00$ m
- visina silosa $H = 29.85$ m
- zid ćelije MB 30 (prema BAB 87 [126]: modul elastičnosti betona $E_b = 31.5$ GPa, i Poisson-ov koeficijent $\nu = 0.20$)
- kota nivoa prelaza ćelije u levak: $+5.85$ m (uklještenje zida je na koti ± 0.00 m)
- kota nivoa gornje ravne površine materijala: $+28.85$ m (1.0 m ispod vrha silosa)
- dubina materijala na prelazu ćelije u levak: $28.85 - 5.85 = 23.0$ m

Karakteristike materijala (PŠENICA) i trenje o betonski zid (tip D3) prema EC1-4:

Materijal	$\gamma (= \gamma_u)$ [kN/m ³]	$\phi_i (= \phi_{im})$ srednja vr. [°]	a_ϕ faktor	K_m srednja vrednost	a_K faktor	$\mu_w (= \mu_{wm})$ srednja vrednost	a_μ faktor	C_{op} faktor
PŠENICA	9.0	30	1.12	0.54	1.11	0.57	1.16	0.5

Proračun geometrije protočnog kanala prema EC1-4 (silos klase AAC 3)

Geometrija protočnog kanala se određuje preko primene izraza (2.134) do (2.142), sa kojima je formulisana postupak proračuna u EC1-4, a ovde su razmatrani u § 2.10.2.5.2. Primenom ovih izraza određuju se sledeće proračunske veličine:

- poluprečnik ćelije silosa: $r = r_i = d_c/2 = 3.90$ m
- poluprečnik protočnog kanala: $r_c = 0.40 \cdot r = 1.560$ m (u primeru se analizira slučaj sa $r_c = 0.40 \cdot r$, međutim pored ovog primera u EC1-4 se kod proračuna ekscentričnog pražnjenja zahtevaju još dve takve analize u kojima se uvode slučajevi sa $r_c = 0.25 \cdot r$ i $r_c = 0.60 \cdot r$)
- ekscentricitet centra protočnog kanala: $e_c = 2.517$ m
- odnos poluprečnika protočnog kanala i poluprečnika ćelije: $G = 0.400$
- proračunski parametar centra protočnog kanala: $\eta = 0.740$
- kosinus zahvatnog ugla kontakta protočnog kanala sa zidom: $\cos \theta_c = 0.973$
- zahvatni ugao kontakta protočnog kanala sa zidom: $\theta_c = 13.239^\circ = 0.23106$ rad
- sinus zahv. ugla (iz centra prot. kanala) kontakta prot. kanala sa zidom: $\sin \psi = 0.573$
- zahvatni ugao (iz centra prot. kanala) kontakta prot. kanala sa zidom: $\psi = 34.926^\circ$
- dužina dela obima protočnog kanala u kontaktu sa zidom ćelije: $U_{wc} = 1.802$ m
- dužina dela obima prot. kanala u kontaktu sa statičnim materijalom: $U_{sc} = 7.900$ m
- površina poprečnog preseka protočnog kanala: $A_c = 7.428$ m²

Pri proračunu geometrije protočnog kanala i pritisaka na zid ćelije silosa koriste se gornja (indeks u) i donja (indeks l) vrednost posmatrane karakteristike materijala, na način koji

je naveden kod proračunskih izraza prema EC1-4. Za pšenicu kao uskladišteni materijal, ove vrednosti se određuju uz primenu faktora konverzije na sledeći način:

$$K_m = 0.54 \quad \text{i} \quad a_K = 1.11 \Rightarrow K_u = K_m \cdot a_K = 0.599 \quad \text{i} \quad K_l = K_m / a_K = 0.486$$

$$\phi_{im} = 30.0^\circ \quad \text{i} \quad a_\phi = 1.12 \Rightarrow \phi_{iu} = \phi_{im} \cdot a_\phi = 33.600^\circ \quad \text{i} \quad \phi_{il} = \phi_{im} / a_\phi = 26.786^\circ$$

$$\mu_{wm} = 0.57 \quad \text{i} \quad a_\mu = 1.16 \Rightarrow \mu_{wu} = \mu_{wm} \cdot a_\mu = 0.661 \quad \text{i} \quad \mu_{wl} = \mu_{wm} / a_\mu = 0.491$$

Proračun horizontalnih pritisaka na zid ćelije pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom

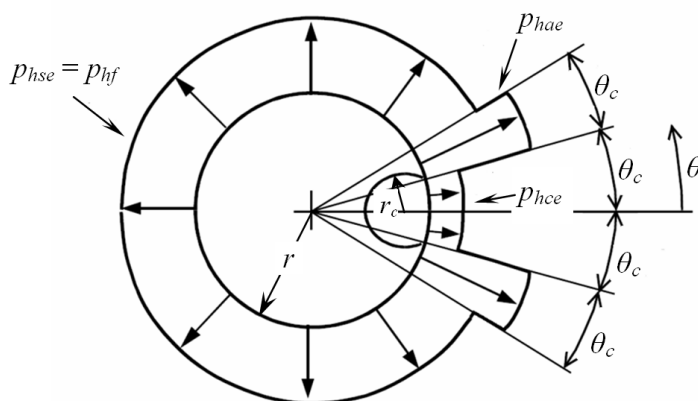
Proračun horizontalnih pritisaka na zid ćelije, prema EC1-4, pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala se sprovodi primenom izraza (2.143) do (2.148), koji su u ovom radu prikazani u § 2.10.2.5.2. Primenom ovih izraza i proračunskih vrednosti za protočni kanal određuju se sledeći horizontalni pritisci na kružni zid ćelije:

$p_{hse}(z)$ – pritisci materijala na kružni zid ćelije u zoni mirnog materijala (uzimaju se kao horizontalni pritisci nakon punjenja materijala);

$p_{hce}(z)$ – pritisci materijala na kružni zid ćelije u zoni protoka materijala (područje protočnog kanala); i

$p_{hae}(z)$ – povećani pritisci na kružni zid ćelije na bočnim stranama zida uz protočni kanal.

Raspodela horizontalnih pritisaka pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom, po obimu zida ćelije, prikazana je na sl. 192.



Sl. 192 Raspodela horizontalnih pritisaka u preseku kružne ćelije pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala.

U tabeli 44 prikazane su vrednosti pritisaka $p_{hse}(z)$, $p_{hce}(z)$ i $p_{hae}(z)$ u funkciji dubine uskladištenog materijala z , za aktuelni proračunski primer AB silosa.

Pritisci naznačeni sa gornjim indeksom EC u tabeli 44, određeni su prema EC1-4, primenom izraza (2.143) do (2.148). Ovi pritisci deluju direktno na unutrašnju površinu zida kružne ćelije. Kako se statički sistem vodi po srednjoj površi kružnog zida - cilindrične ljuske, potrebno je ove pritiske prebaciti na srednju površ cilindrične ljuske. Vrednosti opterećenja $p_h(z)$ prikazane u tabeli 44, određene su kao $p_h(z)^{EC} \cdot r / (r + t/2)$. Kako se kod AB silosa koriste relativno deblji zidovi, ova korekcija je potrebna kod analize opterećenja. Kod čeličnih silosa, gde su zidovi vrlo tanki, može se ova korekcija izostaviti (slučaj sa $t/r \cong 0$).

Korigovano opterećenje $p_{hce}(z)$ deluje na lučnoj dužini $2\theta_c \cdot (r + t/2) = 1.848$ m po obimu zida ćelije. Korig. povećano opterećenje na bočnim stranama zida uz proticajni kanal,

$p_{hae}(z)$ deluje na lučnoj dužini od po 0.924 m, na obe strane u odnosu na sektor zida pod opterećenjem $p_{hce}(z)$. Na preostalom delu po obimu zida ćelije, deluje $p_{hse}(z)$.

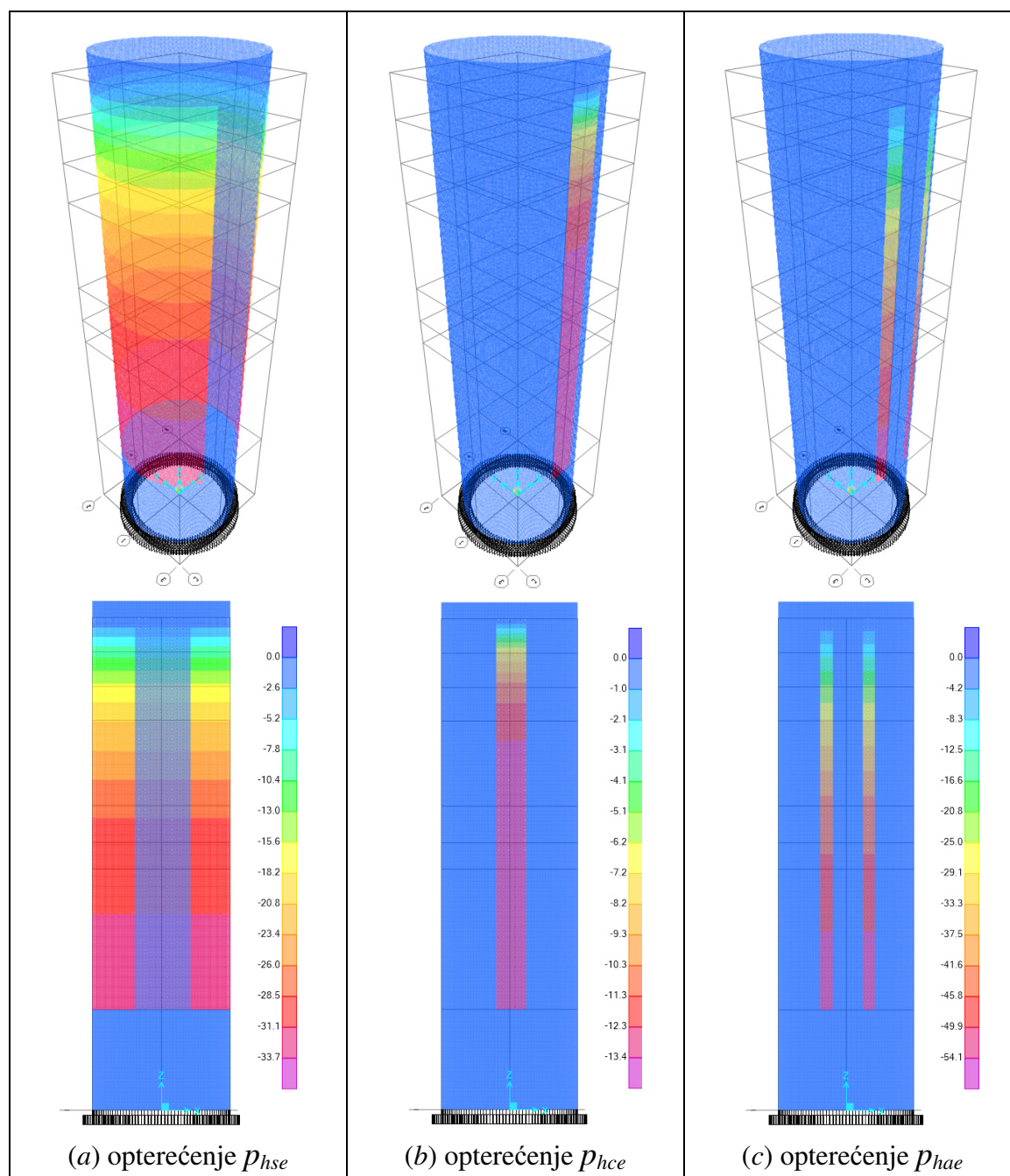
Tabela 44. Proračunski pritisci na zid kružne ćelije pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala, prema EC1-4 za analizirani primer AB silosa.

visinska kota [m]	z [m]	$p_{hse}(z)^{EC}$	$p_{hce}(z)^{EC}$	$p_{hae}(z)^{EC}$	$p_{hse}(z)$	$p_{hce}(z)$	$p_{hae}(z)$
		pritisci materijala na zid ćelije prema EC1-4 [kN/m ²]			opterećenje svedeno na srednju površ cilindrične ljuske [kN/m ²]		
+28.85	0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
+27.85	1.0	5.007	4.460	5.554	4.882	4.349	5.415
+26.85	2.0	9.312	7.470	11.154	9.079	7.283	10.875
+25.85	3.0	13.014	9.501	16.526	12.688	9.264	16.112
+24.85	4.0	16.196	10.872	21.520	15.791	10.600	20.982
+23.85	5.0	18.933	11.797	26.068	18.459	11.502	25.416
+22.85	6.0	21.285	12.421	30.149	20.753	12.111	29.396
+21.85	7.0	23.308	12.843	33.774	22.726	12.522	32.930
+20.85	8.0	25.048	13.127	36.968	24.422	12.799	36.044
+19.85	9.0	26.543	13.319	39.768	25.880	12.986	38.773
+18.85	10.0	27.829	13.448	42.210	27.133	13.112	41.155
+17.85	11.0	28.935	13.536	44.334	28.211	13.197	43.225
+16.85	12.0	29.885	13.595	46.176	29.138	13.255	45.022
+15.85	13.0	30.703	13.634	47.771	29.935	13.294	46.577
+14.85	14.0	31.406	13.661	49.150	30.620	13.320	47.921
+13.85	15.0	32.010	13.679	50.340	31.210	13.337	49.082
+12.85	16.0	32.529	13.692	51.367	31.716	13.349	50.083
+11.85	17.0	32.976	13.700	52.252	32.152	13.357	50.946
+10.85	18.0	33.360	13.706	53.015	32.526	13.363	51.689
+9.85	19.0	33.690	13.709	53.671	32.848	13.367	52.330
+8.85	20.0	33.974	13.712	54.237	33.125	13.369	52.881
+7.85	21.0	34.218	13.714	54.723	33.363	13.371	53.355
+6.85	22.0	34.428	13.715	55.142	33.568	13.372	53.763
+5.85	23.0	34.609	13.715	55.502	33.744	13.373	54.115

U tabeli 44, pojedine vrednosti opterećenja su prikazane u formi **bold**. Ove vrednosti se uzimaju za kolokacione tačke, a između dve susedne kolokacione tačke se pretpostavlja linearna promena opterećenja. Opisana aproksimacija se koristi kod unosa opterećenja u programe sa MKE analizom. Pri tome se mora voditi računa o sektoru dejstva datog opterećenja po obimu zida, promeni opterećenja po dubini, kao i o visinskoj koti za koju se vezuje dubina materijala.

Na sl. 193 prikazana su opterećenja koja odgovaraju ovde analiziranom primeru AB silosa. Opterećenja su data u formi 3D prikaza i sa frontalnim izgledom. Intenziteti opterećenja su prikazani sa kolorisanom skalom. Na slici (b) prikazano je opterećenje na zidu od pritiska u protočnom kanalu pri proticanju materijala (sektor protočnog kanala). Ovi pritisci su najmanji u poređenju sa drugim pritiscima (male vrednosti ovih pritiska su posledica malog prečnika koji ima proticajni kanal). Na bočnim površinama uz sektor protočnog kanala, deluju povećani pritisci materijala na zid ćelije. Sektori povećanih

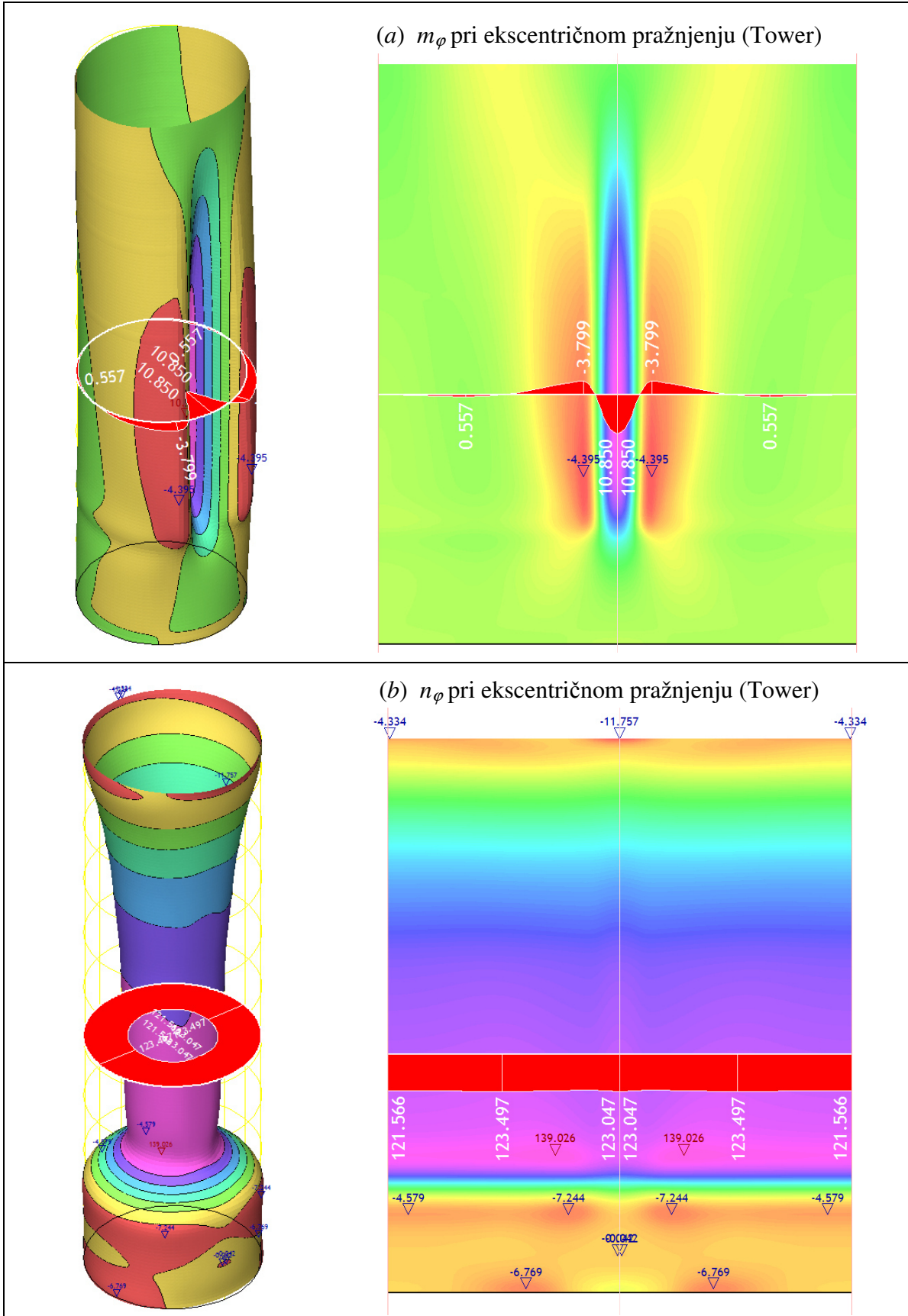
pritisaka su prikazani na slici (c). Na ostalom delu zida na površinama na koje naleže statičan materijal, deluju pritisci prikazani na slici (a).



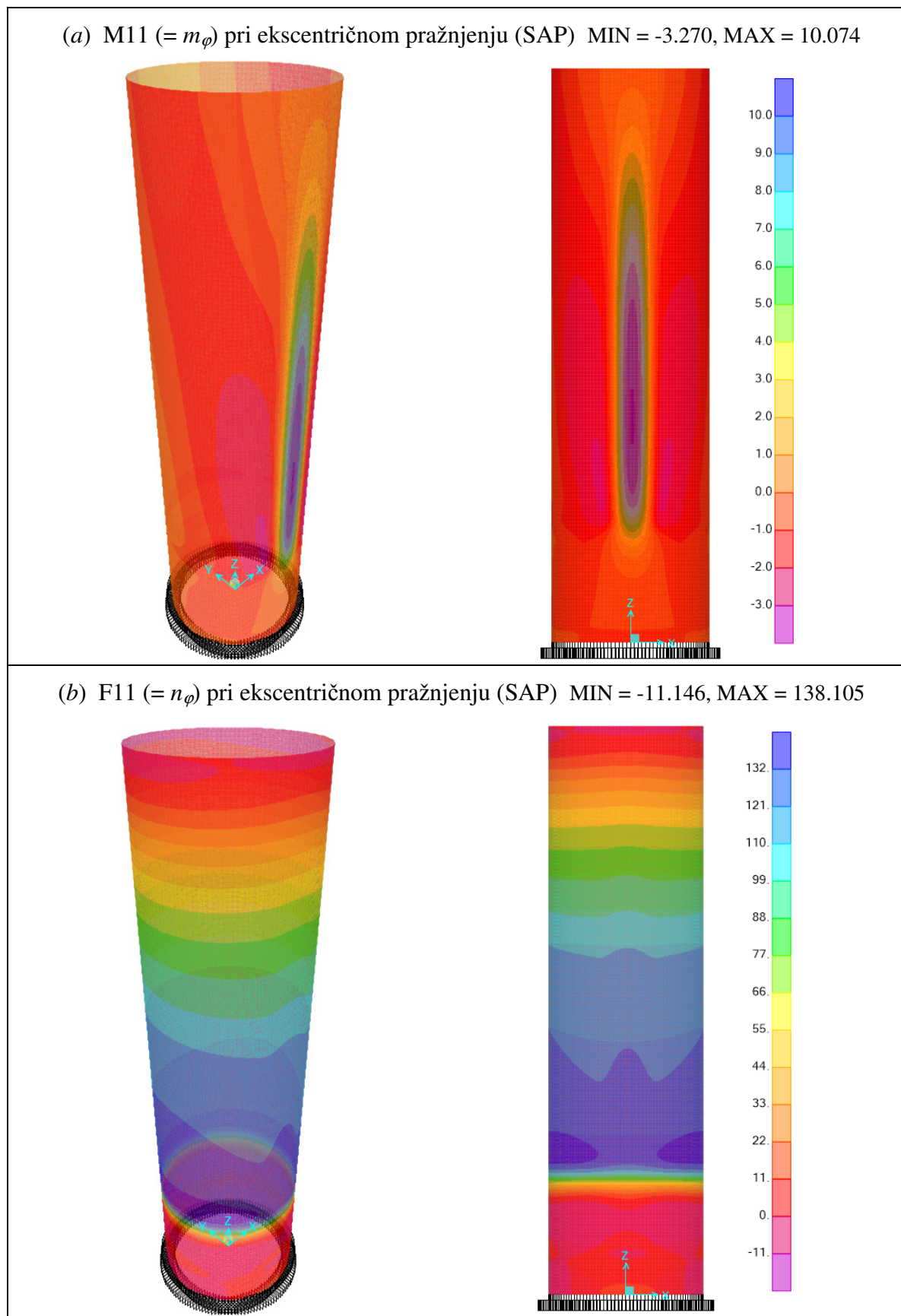
Sl. 193 Opterećenja p_{hse} , p_{hce} i p_{hae} pri ekscentričnom pražnjenju (SAP).

Prikaz i analiza rezultata

Prikazi prstenastog momenta savijanja i prstenaste normalne sile (m_φ i n_φ) cilindrične ljuske su dati na sl. 194 i sl. 195, pri primeni programa Tower i SAP, respektivno. Konvencija o znaku za momente savijanja kod programa je obrnuta u odnosu na konvenciju koja se primenjuje u teorijskom delu ovog rada (pozitivni momenti savijanja izazivaju zatezanje spoljne strane zida ćelije). Rezultati prikazani na ovim slikama odgovaraju slučaju MKE analize sa gustinom mreže konačnih elemenata "8".



Sl. 194 Uticaji od opterećenja pri pražnjenju sa velikom ekscentricitetom: momenti m_φ i normalne sile n_φ u 3D prikazu i na razvijenoj površini cilindrične ljuske (Tower).



Sl. 195 Uticaji od opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom: momenti m_{φ} i normalne sile n_{φ} u 3D prikazu i u frontalnom prikazu cilindrične ljuske (SAP).

Na sl. 194 (a) i (b), u horizontalnom preseku zida na koti +12.85 m na razvijenoj površini ljuske, prikazani su dijagrami momenata m_φ , odnosno normalne sile n_φ , respektivno. Opterećenja na ovom nivou odgovaraju dubini materijala $z = 16$ m (prema tabeli 44). Ovaj nivo je izabran za upoređenje približnih teorijskih izraza i proračunskih vrednosti prema MKE analizi za presečne sile m_φ i n_φ . Na vertikali zida koja odgovara uglu $\theta = 0$, a koja deli sektor protočnog kanala na dva jednaka dela, momenti m_φ proizvode ekstremno zatezanje unutrašnje strane zida ćelije. Veličina normalne sile n_φ u principu odgovara primeni kotlovske formule, gde se za opterećenje uvodi pritisak p_{hse} , koji vlada u delu materijala koji miruje u ćeliji dok se materijal prazni kroz protočni kanal. Raspodela normalnih sila n_φ na cilindričnom zidu je po obliku bliska rešenju za rotaciono simetrično opterećenja cilindrične ljuske. Promene normalnih sila n_φ su neznatne po obimu zida u horizontalnim presecima ćelije. Kod momenata savijanja m_φ , prema sl. 194 i sl. 195, raspodela momenata je mnogo složenija. Momenti m_φ na delu zida u području sektora protočnog kanala su ekstremnih vrednosti i izazivaju zatezanje unutrašnje površine zida. Na bočnim stranama ovog sektora momenti m_φ menjaju znak i relativno su manjeg intenziteta. Na površinama zida na dijametralno suprotnoj strani u odnosu na sektor protočnog kanala, momenati m_φ su zanemarljivih vrednosti. U kvalitativnom pogledu, raspodele uticaja na zidovima ćelije silosa pri primeni programa Tower i SAP, su praktično jednake, prema sl. 194 i sl. 195. Sa kvantitativne strane, kod primene ovih programa, razlika kod max. m_φ je oko 8.7%, a kod max. n_φ je oko 0.7%, uzimajući u obzir uticaje na celokupnoj konstrukciji silosa.

Tabela 45. Uticaji od velikog ekscentriciteta protočnog kanala pri pražnjenju, prema teorijskom rešenju i prema MKE sa variranjem gustine mreže KE (Tower).

Uticaji od ekscentričnog opterećenja	Približni teorijski izrazi (usvojeno $k_{m\varphi} = 0.7$)	MKE (gustina mreže)	
		"4"	"8"
m_φ [kNm/m]	-10.64 (98.1%)	-11.02 (101.6%)	-10.85 (100%)
n_φ [kN/m]	+126.86 (103.2%)	+122.55 (99.7%)	+122.96 (100%)

Tabela 46. Uticaji od velikog ekscentriciteta protočnog kanala pri pražnjenju, prema teorijskom rešenju i prema MKE sa gustom mreže KE "8" (Tower i SAP).

Uticaji od ekscentričnog opterećenja	Približni teorijski izrazi (usvojeno $k_{m\varphi} = 0.7$)	MKE (gustina mreže)	
		"8" Tower	"8" SAP
m_φ [kNm/m]	-10.64 (106.1%)	-10.85 (108.2%)	-10.03 (100%)
n_φ [kN/m]	+126.86 (104.6%)	+122.96 (101.4%)	+121.25 (100%)

Rezultati za m_φ i n_φ , za ugao $\theta = 0$ u preseku zida na koti +12.85 m, prikazani su u tabelama 45 i 46. U tabeli 45 prikazani su rezultati za gustine mreže KE "4" i "8" kod

primene programa Tower (znak kod vrednosti za m_φ je obrnut zbog konvencije o znaku u ovom radu).

U tabeli 46 su prikazani rezultati pri gustini mreže KE "8" kod primene programa Tower i SAP, za koje se može konstatovati da su približno jednaki. Odstupanja rezultata kod primene programa Tower i SAP, su u prvom redu posledica razlika u modelovanju konstrukcije i razlike kod unosa opterećenja na zid ćelije.

Kod određivanja aproksimativnih teorijskih vrednosti koriste se izrazi (2.318) i (2.319), koji su u ovom radu formulisani u § 2.10.6.4. Potrebno je napomenuti da se kod ovih izraza slede formulacije i obeležavanje veličina prema EC1-4, a to u principu odgovara ćelijama sa tankim zidovima. Kod primene ovih izraza za proračun uticaja kod betonskih silosa, svi pritisci u izrazima se uzimaju sa vrednostima svedenim na srednju površ cilindrične ljuske, a poluprečnik se uzima do sredine zida ćelije. Kod primene ovih izraza, u ovde analiziranom primeru AB silosa, uvode se sledeće vrednosti:

$$p_{hf} = p_{hse} = 31.716 \text{ kN/m}^2 \quad (\text{tabele 44; kota } +12.85 \text{ m, tj. dubina } z = 16.0 \text{ m});$$

$$p_{hce} = 13.349 \text{ kN/m}^2 \quad (\text{tabele 44; kota } +12.85 \text{ m, tj. dubina } z = 16.0 \text{ m});$$

$$r = 4.00 \text{ m} \quad (= r_i + t/2); i$$

$$\theta_c = 13.239^\circ \quad (\text{određeno kod proračuna geometrije protočnog kanala}).$$

Prema aproksimativnom teorijskom izrazu (2.318), prstenasta sila se određuje kao sila zatezanja po kotlovskoj formuli. Primena ove formule odgovara slučaju delovanja rotaciono simetričnih pritisaka materijala na zid silosa i slobodnom deformisanju zidova - ljuske. Kod izraza za prstenaste momente savijanja (2.319) uveden je korekcionni faktor $k_{m\varphi} = 0.7$, koji je usvojen u ovom analiziranom primeru. Ova vrednost je indikativna, ali nije verifikovana na drugim primerima analize. Formiranje aproksimativnih izraza za određivanje presečnih sila u cilindričnoj ljusci, od delovanja opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom, predstavlja pokušaj u pravcu jednostavne procene ovih uticaja u fazi preliminarnog dimenzionisanja AB silosa. Pri delovanju razmatranog opterećenja, statički uticaji se mogu precizno odrediti samo primenom složene numeričke analize konstrukcije silosa, npr. sa primenom MKE, kao što je to prikazano u ovom primeru.

Diskusija rezultata

Prema prikazanoj analizi prstenasti momenti savijanja m_φ u području zida na koji naleže protočni kanal materijala, su relativno većih vrednosti pri čemu ovi momenti zatežu unutrašnju stranu zida ćelije. Prstenasta sila zatezanja, u principu, odgovara primeni kotlovske formule sa pritiskom pri mirovanju materijala. Ovi uticaji mogu biti merodavni kod dimenzionisanja silosa klase AAC 3. Prema EC1-4, opterećenje pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom, predstavlja poseban slučaj opterećenja za koji se zahteva odvojena proračunska analiza. Prema EC1-4, ovaj proračun se ponavlja tri puta, za različite vrednosti poluprečnika protočnog kanala (preporučene vrednosti u EC1-4 su $r_c = 0.25 \cdot r$, $r_c = 0.40 \cdot r$ i $r_c = 0.60 \cdot r$). Primer koji je ovde analiziran se odnosi na slučaj $r_c = 0.40 \cdot r$. Pri povećanju r_c očekuje se i povećanje momenata m_φ , predstavljenih sa max. m_φ . U tom smislu, ponavljanje ove analize tri puta sa primenom MKE, kod projektovanja silosa izgleda potpuno deplasirano, a analizu treba sprovesti, u principu, samo prema najvećoj vrednosti za poluprečnik r_c . Pored toga, čini se da preporučena najveća vrednost za $r_c (= 0.60 \cdot r)$ u EC1-4, predstavlja preveliku vrednost koja nije utemeljena na ispitivanjima realnih silosa. U tom pravcu, predmetna analiza se može sprovesti samo za jednu vrednost poluprečnika protočnog kanala, na primer za max. $r_c = 0.40 \cdot r$.

5.3 Primer 5.3 - analiza stanja napona materijala u analognom 2D silosu - zasuti rudarski iskop (Li i Aubertin (2008) [168])

Primer se odnosi na analizu stanja napona u zatrpanom rudarskom iskopu (analogni 2D silos). Ovaj primer su detaljno analizirali *Li* i *Aubertin* (2008) u ref. [168], gde su prikazani numerički rezultati stanja napona prema programu FLAC-2D i odgovarajuća analitička rešenja. Primena programa FLAC-2D na ovom problemu analize stanja napona je detaljno opisana u ref. [170], a rezultati numeričke analize na više proračunskih primera su prikazani u ref. [168], pri čemu su ovi primeri detaljnije analizirani sa uvođenjem 15 slojeva materijala pri postepenom punjenju iskopa.

Ovde se analizira primer za koji su rezultati stanja napona prema ref. [168], prikazani na sl. 167, u § 3.7.2. U proračunskom primeru se koriste sledeći podaci:

$H = 45.0$ m (visina iskopa)

$B = 18.0$ m (širina iskopa); $b = B/2 = 9.0$ m

$\gamma = 18.0$ kN/m³ (zapreminska težina materijala ispune (iskorišćeni rudni materijal))

$\phi_i = 30.00^\circ$ (ugao unutrašnjeg trenja materijala ispune); $\mu_i = \tan\phi_i = 0.57735$

U primeru je dužina iskopa značajno veća od njegove širine, tako da stanje napona kod zasutog iskopa odgovara 2D problemu analize napona.

Od podataka nedostaje koeficijent trenja o zid $\mu_w = \tan\phi_w$, odnosno ϕ_w – ugao trenja materijala ispune o zidove iskopa (od stenske masa). Obično se usvaja da je $\phi_w = \phi_i$, ali ima i drugih preporuka, kao što su npr. $\phi_w = 3/4 \cdot \phi_i$ i $\phi_w = 0.9 \cdot \phi_i$. U postupku *Li*-a i *Aubertin*-a postavljena je jednakost uglova trenja $\phi_w = \phi_i$, i uz tu pretpostavku su uvedeni empirijski faktori koji su kalibrisani na osnovu numeričkih simulacija kod analize stanja napona sa programom FLAC-2D.

U § 3.7.3 razmatrano je određivanje koeficijenta trenja μ_w , na osnovu izjednačavanja asimptotskih vertikalnih napona do zida iskopa, kod *Walker*-ovog postupka i postupka *Li*-a i *Aubertin*-a. Rezultati za koeficijent μ_w su dati u tabeli 29 u § 3.7.3, iz koje se ovde prikazuje vrsta koja odgovara aktuelnom primeru:

H [m]	$b=B/2$ [m]	ϕ_i [°]	$\mu_{wLA}=\mu_i$	a_{LA}	C_{LA}	μ_w	μ_w/μ_i	ϕ_w/ϕ_i	$K(b)\cdot\mu_w$
45	9.0	30	0.57735	1.62409	4.14127	0.53006	0.91810	0.93088	0.24147

Prema ovim podacima, kod primene postupka *Li*-a i *Aubertin*-a koriste se koeficijenti $\mu_{wLA} = \mu_i = 0.57735$, a u drugim postupcima analize stanja napona je $\mu_w = 0.53006$ i $\mu_i = 0.57735$. Kod postupka *Li*-a i *Aubertin*-a koristi se empirijski kalibrisan koeficijent bočnog pritiska do zida iskopa $K_{LA}(b)$, a kod drugih postupaka teorijski koeficijent $K(b)$ u formulaciji *Walker*-a, odnosno *Ohde*-a.

Proizvod koeficijenata $K \cdot \mu_w$ se u teoriji naziva *Janssen*-ova konstanta. U ovom primeru je $K(b)\cdot\mu_w = 0.24147$, i $K_{LA}(b)\cdot\mu_{wLA} = 1/C_{LA} = 1/4.14127 = 0.24147$, te sledi da je ispunjen uslov za *Janssen*-ovu konstantu do zida iskopa.

Podaci o koeficijentima trenja i uglovima trenja u ovom primeru su:

$\mu_w (= \mu_{wLA}) = \mu_i = 0.57735$; i $\phi_w = \phi_i = 30^\circ$ za postupak *Li*-a i *Aubertin*-a; i

$\mu_w = 0.53006$ i $\mu_i = 0.57735$; i $\phi_w = 27.926^\circ$ i $\phi_i = 30^\circ$ za druge postupke analize.

Prikaz i analiza rezultata

Na primeru zasutog rudarskog iskopa (analogni 2D silos) sa datim podacima, izvršena je analiza stanja napona prema sedam postupaka proračuna, i to su redom sledeći postupci:

I-2D postupak – primena metode integralnih relacija (§ 4.2.1)

- Postavke: dijagram horizontalnih napona u obliku kvadratne parabole; uveden odnos smičućih i horizontalnih napona u obliku $\mu_w \cdot x/b$; sa ovim pretpostavkama se određuje da je odnos horizontalnog i vertikalnog napona $K(z,x)$ nezavisan od z , i tačno odgovara *Ohde*-ovoj (*Walker*-ovoj) formulaciji $K(x)$.

– Početni uslovi:

I slučaj sa ravnom gornjom površinom materijala ($h_0 = 0.0$ m; $\sigma_{x0N} = 0.0$ kPa);

II slučaj sa parcijalnom nasipnom prizmom ($h_0 = 1.1926$ m; $\sigma_{x0N} = 11.206$ kPa); i

III slučaj sa prirodnom nasipnom prizmom ($h_0 = 2.2929$ m; $\sigma_{x0N} = 21.543$ kPa).

II-2D postupak – primena metode integralnih relacija (§ 4.2.2)

- Postavke: dijagram horizontalnih napona u obliku segmenta elipse; uveden odnos smičućih i horizontalnih napona u obliku $\mu_w \cdot x/b$; odnos napona $K(z,x)$ je nezavisan od z , i tačno odgovara *Ohde*-ovoj (*Walker*-ovoj) formulaciji $K(x)$. Zbog uvedenih strogih pretpostavki uzima se za referentni postupak pri upoređenju rezultata.

– Početni uslovi:

I slučaj sa ravnom gornjom površinom materijala ($h_0 = 0.0$ m; $\sigma_{x0N} = 0.0$ kPa);

II slučaj sa parcijalnom nasipnom prizmom ($h_0 = 1.3645$ m; $\sigma_{x0N} = 11.911$ kPa); i

III slučaj sa prirodnom nasipnom prizmom ($h_0 = 2.2929$ m; $\sigma_{x0N} = 20.015$ kPa).

III-2D postupak – primena metode integralnih relacija (§ 4.2.4)

- Postavke: interpolacione funkcije svih normalnih napona u obliku segmenta elipse; smičući naponi u obliku trougaonog dijagrama; odnos napona $K(z,x)$ se uzima kao aproksimativni oblik $K(z)$, koji je tačan za asimptotsko stanje napona, i aproksimativan za stanje napona na konkretnoj dubini z . Početni uslov odgovara ravnoj gornjoj površini materijala.

IV-2D postupak – primena metode integralnih relacija (§ 4.2.5)

- Postavke: dijagram horizontalnih napona u obliku segmenta elipse; smičući naponi u obliku trougaonog dijagrama; odnos napona $K(z,x)$ se uzima u obliku $K(x)$ prema *Ohde*-u (*Walker*-u), koji je tačan za asimptotsko stanje napona, i aproksimativan za stanje napona na konkretnoj dubini z . Početni uslov odgovara ravnoj gornjoj površini materijala.

V-2D postupak – *Walker/Walters*-ov postupak (§ 3.6.2 i § 3.6.3)

- Postavke: dijagram vertikalnih napona u obliku segmenta elipse; horizontalni naponi u preseku konstantni; smičući naponi u obliku trougaonog dijagrama; odnos napona se uzima u obliku $K(x)$ prema *Ohde*-u (*Walker*-u). Početni uslov odgovara ravnoj gornjoj površini materijala.

Va-2D postupak – *Walker/Walters*-ov postupak sa korekcijom napona σ_x (§ 3.6.4)

- Postavke: Primena osnovnog *Walker/Walters*-ovog postupaka sa naknadnom aproks. korekcijom horizontalnih napona prema uslovu ravnoteže horizontalnih sila na diferencijalnom elementu.

VI-2D postupak – postupak *Li*-a i *Aubertin*-a (§ 3.7.1) – primena faktora distribucije DF ; i

VII-2D postupak – *Janssen*-ov postupak (§ 3.1.1) – aktivno stanje napona ($K = K_a$ Rankine).

Kod svih postupaka se primenjuje granično aktivno stanje napona, sa $\kappa = 1$, kako je u pitanju stanje pri punjenju materijala.

Kod I-2D i II-2D postupka kod početnih uslova gde se uvodi parcijalna nasipna prizma koriste se izrazi (4.161) i (4.162), a za početne uslove sa uvedenom prirodnom nasipnom prizmom primenjuju se izrazi od (4.164) do (4.167). Kod ovih izraza svi koeficijenti odgovaraju aktuelnom 2D postupku proračuna. Za određivanje visine prirodne nasipne prizme, u ovom primeru, ugao prirodnog nagiba je procenjen kao $\phi_r = 0.9 \cdot \phi_i = 27^\circ$.

Kod *Janssen*-ovog postupka koeficijent bočnog pritiska se uzima u poznatom obliku $K = K_{a \text{ Rankine}} = (1 - \sin \phi_i) / (1 + \sin \phi_i)$, i u ovom primeru iznosi 0.33333.

Rezultati proračuna su prikazani redom za navedene postupke proračuna u tabelama 47 do 53, i na slikama 196 do 202, respektivno. U tabelama su date vrednosti za horizontalne i vertikalne napone u materijalu na konturama (do zida i u sredini širine iskopa) na dubinama $1/4 \cdot H$, $2/4 \cdot H$ i $3/4 \cdot H$. Za ove dubine materijala, prikazani su dijagrami horizontalnih i vertikalnih napona, na odgovarajućim slikama pod (a) i (b), respektivno.

Na slikama 196 do 202, dati su dijagrami napona prema tekućem postupku po redosledu i postupku *Li*-a i *Aubertin*-a. Uz ove dijagrame prikazane su numeričke vrednosti određene simulacionim analizama sa programom FLAC-2D, prema ref. [168] (prikazano i na sa sl. 167 u § 3.7.2). Na ovaj način je omogućeno upoređenje navedenih postupaka, sa postupkom *Li*-a i *Aubertin*-a, i rezultatima numeričke analize sa FLAC-2D.

Kod postupaka I-2D, II-2D (tabele 47 i 48), razlika u vrednostima pri primeni različitih početnih uslova je neznatna, za analizirane dubine materijala. Kod postupaka od I do IV, koji su formirani sa metodom integralnih relacija (od sl. 196 do sl. 199), promenljivi su vertikalni i horizontalni naponi po širini osnove. Kod *Walker/Walters*-ovog postupka (sl. 200) i postupka *Li*-a i *Aubertin*-a (sl. 201) promenljivi su samo vertikalni naponi, dok su konstantni horizontalni naponi. Kod *Janssen*-ovog postupka (sl. 202), konstantni su i vertikalni i horizontalni naponi.

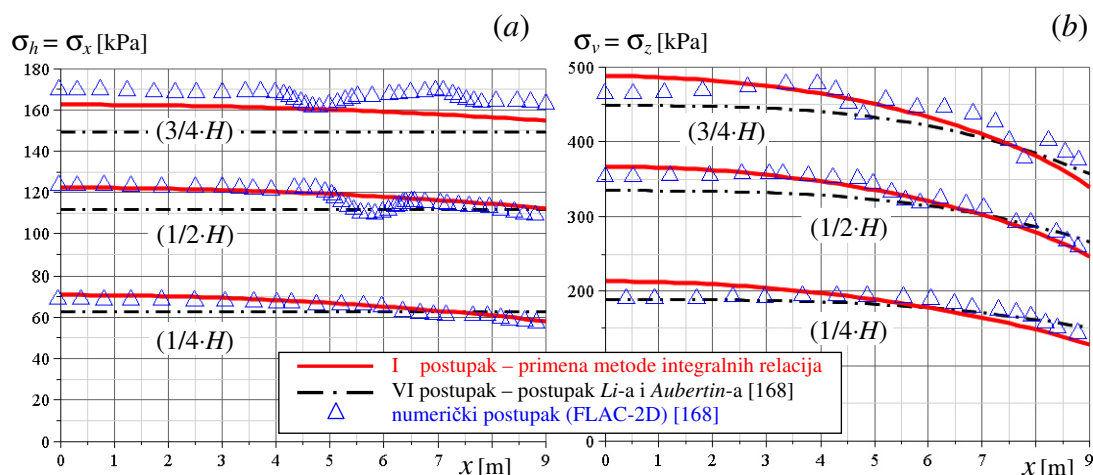
Vrednosti kod postupaka formiranih sa metodom integralnih relacija se vrlo malo razlikuju (međusobna odstupanja rezultata na dijagramima su reda veličine $\pm 1\%$). Kod konturnih vrednosti napona ova odstupanja su i manja. Ukupno gledano, svi dijagrami određeni prema postupcima sa primenom metode integralnih relacija daju bolje opšte slaganje sa numeričkim vrednostima, u odnosu na kalibrisani teorijski postupak *Li*-a i *Aubertin*-a. Ovo je posebno uočljivo kod upoređenja dijagrama horizontalnih napona.

Kod *Walker/Walters*-ovog postupka (sl. 200) uočava se relativno bolje slaganje dijagrama vertikalnih napona sa numeričkim vrednostima nego kod postupka *Li*-a i *Aubertin*-a. Slično je i kod dijagrama horizontalnih napona, s tim da su vrednosti horizontalnih napona do zida nešto veće kod *Walker/Walters*-ovog postupka, što nije uvek bliže numeričkim vrednostima. Međutim, ove vrednosti napona do zida iskopa, kao takve, su na strani sigurnosti. Kod ovih postupaka dijagrami horizontalnih napona su konstantni, pa ih treba posmatrati kao procenu prosečnih horizontalnih napona u preseku. U tabeli 51, kod prikaza rezultata *Walker/Walters*-ovog postupka sa korekcijom horizontalnih pritisaka, uočava se da korigovani konturni horizontalni pritisaci prilaze po vrednostima postupcima sa primenom metode integralnih relacija.

Kod dijagrama prema postupku *Li*-a i *Aubertin*-a (sl. 201), evidentno je relativno bolje slaganje dijagrama vertikalnih napona sa numeričkim vrednostima, nego što je to slučaj kod dijagrama horizontalnih napona, gde na većoj dubini materijala, konkretno u primeru na $3/4 \cdot H$, postoji relativno veće odstupanje dijagrama horizontalnih napona od numeričkih vrednosti.

Tabela 47. Rezultati analize prema I-2D postupku – primena metode integralnih relacija (dijagram horizontalnih napona u obliku kvadratne parabole).

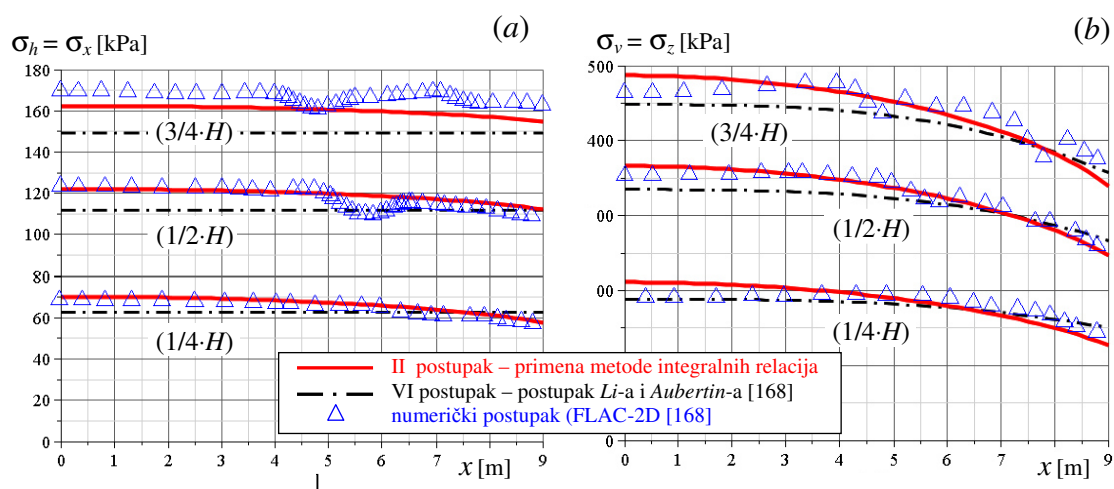
I slučaj početnih uslova ($h_0 = 0.0$ m; $\sigma_{x0N} = 0.0$ kPa; ravna gornja površina materijala)				
z [m] dubina materijala od ravne površine	Horizontalni pritisci [kPa]		Vertikalni pritisci [kPa]	
	do zida $\sigma_x(b)$ ($x = b$)	u sredini $\sigma_x(0)$ ($x = 0$)	do zida $\sigma_z(b)$ ($x = b$)	u sredini $\sigma_z(0)$ ($x = 0$)
$1/4 \cdot H$	58.176	70.827	127.704	212.480
$2/4 \cdot H$	112.419	122.296	246.775	366.889
$3/4 \cdot H$	154.771	162.483	339.744	487.450
II slučaj početnih uslova ($h_0 = 1.1926$ m; $\sigma_{x0N} = 11.206$ kPa; parcijalna nasipa prizma)				
$z + h_0$ [m] dubina materijala od ekv. površine	Horizontalni pritisci [kPa]		Vertikalni pritisci [kPa]	
	do zida $\sigma_x(b)$ ($x = b$)	u sredini $\sigma_x(0)$ ($x = 0$)	do zida $\sigma_z(b)$ ($x = b$)	u sredini $\sigma_z(0)$ ($x = 0$)
$1/4 \cdot H$	58.092	70.747	127.521	212.241
$2/4 \cdot H$	112.354	122.234	246.632	366.703
$3/4 \cdot H$	154.720	162.435	339.632	487.305
III slučaj početnih uslova ($h_0 = 2.2929$ m; $\sigma_{x0N} = 21.543$ kPa; prirodna nasipa prizma)				
$z + h_0$ [m] dubina materijala od ekv. površine	Horizontalni pritisci [kPa]		Vertikalni pritisci [kPa]	
	do zida $\sigma_x(b)$ ($x = b$)	u sredini $\sigma_x(0)$ ($x = 0$)	do zida $\sigma_z(b)$ ($x = b$)	u sredini $\sigma_z(0)$ ($x = 0$)
$1/4 \cdot H$	58.166	70.817	127.682	212.451
$2/4 \cdot H$	112.411	122.289	246.758	366.867
$3/4 \cdot H$	154.765	162.478	339.731	487.433



Sl. 196 Rezultati analize prema I-2D postupku (za I slučaj početnih uslova), postupku Li-a i Aubertin-a (2008) [168] i numeričkom postupku (FLAC-2D) [168]: (a) horizontalni naponi i (b) vertikalni naponi.

Tabela 48. Rezultati analize prema II-2D postupku – primena metode integralnih relacija (dijagram horizontalnih napona u obliku segmenta elipse).

I slučaj početnih uslova ($h_0 = 0.0$ m; $\sigma_{x0N} = 0.0$ kPa; ravna gornja površina materijala)				
z [m] dubina materijala od ravne površine	Horizontalni pritisci [kPa]		Vertikalni pritisci [kPa]	
	do zida $\sigma_x(b)$ ($x = b$)	u sredini $\sigma_x(0)$ ($x = 0$)	do zida $\sigma_z(b)$ ($x = b$)	u sredini $\sigma_z(0)$ ($x = 0$)
$1/4 \cdot H$	57.665	70.329	126.583	210.987
$2/4 \cdot H$	112.152	122.033	246.190	366.100
$3/4 \cdot H$	154.666	162.376	339.514	487.128
II slučaj početnih uslova ($h_0 = 1.3645$ m; $\sigma_{x0N} = 11.911$ kPa; parcijalna nasipa prizma)				
$z + h_0$ [m] dubina materijala od ekv. površine	Horizontalni pritisci [kPa]		Vertikalni pritisci [kPa]	
	do zida $\sigma_x(b)$ ($x = b$)	u sredini $\sigma_x(0)$ ($x = 0$)	do zida $\sigma_z(b)$ ($x = b$)	u sredini $\sigma_z(0)$ ($x = 0$)
$1/4 \cdot H$	57.555	70.224	126.341	210.673
$2/4 \cdot H$	112.066	121.952	246.001	365.855
$3/4 \cdot H$	154.599	162.312	339.366	486.937
III slučaj početnih uslova ($h_0 = 2.2929$ m; $\sigma_{x0N} = 20.015$ kPa; prirodna nasipa prizma)				
$z + h_0$ [m] dubina materijala od ekv. površine	Horizontalni pritisci [kPa]		Vertikalni pritisci [kPa]	
	do zida $\sigma_x(b)$ ($x = b$)	u sredini $\sigma_x(0)$ ($x = 0$)	do zida $\sigma_z(b)$ ($x = b$)	u sredini $\sigma_z(0)$ ($x = 0$)
$1/4 \cdot H$	57.608	70.275	126.457	210.823
$2/4 \cdot H$	112.107	121.991	246.091	365.972
$3/4 \cdot H$	154.631	162.343	339.437	487.028



Sl. 197 Rezultati analize prema II-2D postupku (za I slučaj početnih uslova), postupku Li-a i Aubertin-a (2008) [168] i numeričkom postupku (FLAC-2D) [168]: (a) horizontalni naponi i (b) vertikalni naponi.

Tabela 49. Rezultati analize prema III-2D postupku – primena metode integralnih relacija (dijagrami normalnih napona u obliku segmenta elipse; uvođenje aproksimativnog oblika za odnos napona K).

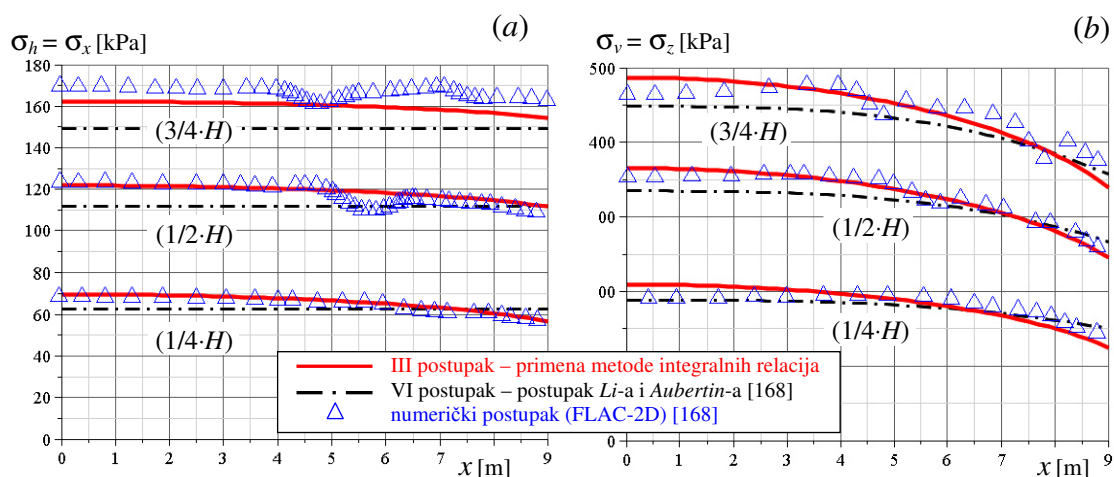
z [m] dubina od gornje ravne površine	Horizontalni pritisci [kPa]		Vertikalni pritisci [kPa]	
	do zida $\sigma_x(b) (x = b)$	u sredini $\sigma_x(0) (x = 0)$	do zida $\sigma_z(b) (x = b)$	u sredini $\sigma_z(0) (x = 0)$
1/4·H	56.715	69.805	124.497	209.415
2/4·H	111.539	121.784	244.845	365.353
3/4·H	154.313	162.300	338.740	486.901

Tabela 50. Rezultati analize prema IV-2D postupku – primena metode integralnih relacija (dijagram horizontalnih napona u obliku segmenta elipse; uvođenje aproksimativnog oblika za odnos napona K).

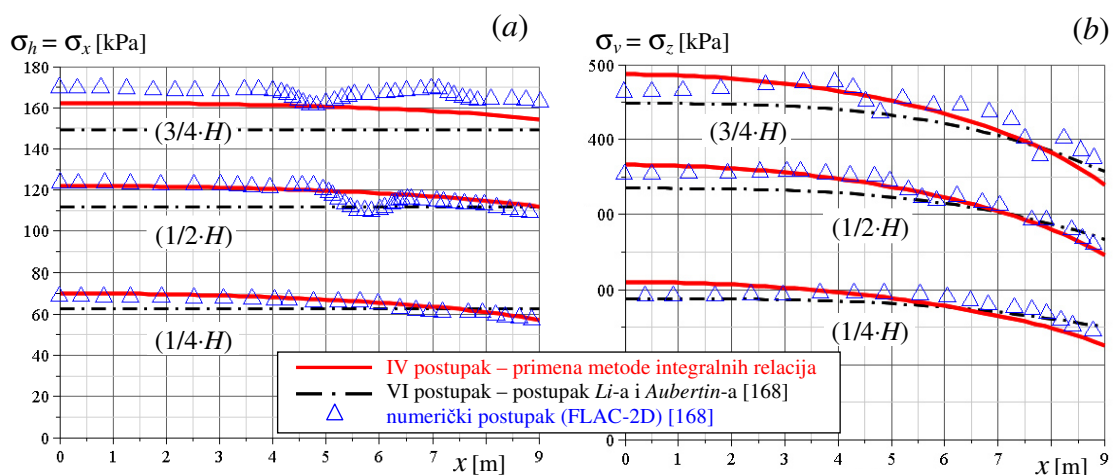
z [m] dubina od gornje ravne površine	Horizontalni pritisci [kPa]		Vertikalni pritisci [kPa]	
	do zida $\sigma_x(b) (x = b)$	u sredini $\sigma_x(0) (x = 0)$	do zida $\sigma_z(b) (x = b)$	u sredini $\sigma_z(0) (x = 0)$
1/4·H	57.140	70.193	125.430	210.578
2/4·H	111.779	121.990	245.371	365.970
3/4·H	154.422	162.386	338.977	487.159

Tabela 51. Rezultati analize prema V-2D postupku – Walker/Walters-ov postupak (horizontalni naponi konstantni u preseku; primena faktora distribucije \mathcal{D}_{2D}).

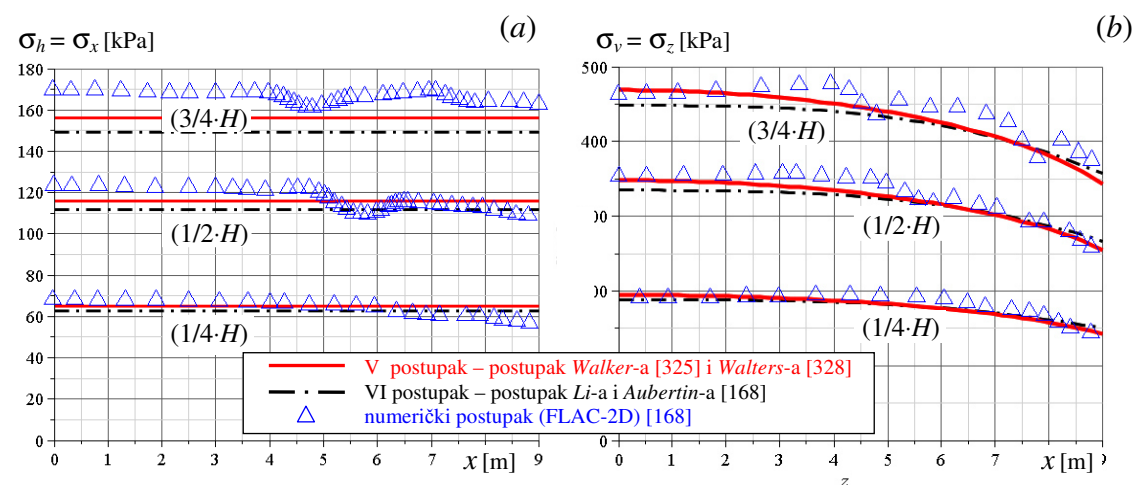
V-2D postupak – Walker/Walters-ov postupak – osnovni oblik				
z [m] dubina od gornje ravne površine	Horizontalni pritisci [kPa]		Vertikalni pritisci [kPa]	
	do zida $\sigma_x(b) (x = b)$	u sredini $\sigma_x(0) (x = 0)$	do zida $\sigma_z(b) (x = b)$	u sredini $\sigma_z(0) (x = 0)$
1/4·H	64.903		142.471	194.709
2/4·H	116.023		254.686	348.069
3/4·H	156.287		343.071	468.861
Va-2D postupak – Walker/Walters-ov postupak – korekcija za horizontalne napone				
z [m] dubina od gornje ravne površine	Horizontalni pritisci [kPa]		Vertikalni pritisci [kPa]	
	do zida $\sigma_x(b) (x = b)$	u sredini $\sigma_x(0) (x = 0)$	do zida $\sigma_z(b) (x = b)$	u sredini $\sigma_z(0) (x = 0)$
1/4·H	57.175	69.359	142.471	194.709
2/4·H	109.936	119.533	254.686	348.069
3/4·H	151.493	159.051	343.071	468.861



Sl. 198 Rezultati analize prema III-2D postupku, postupku Li-a i Aubertin-a (2008) [168] i numeričkom postupku (FLAC-2D) [168]: (a) horizontalni naponi i (b) vertikalni naponi.



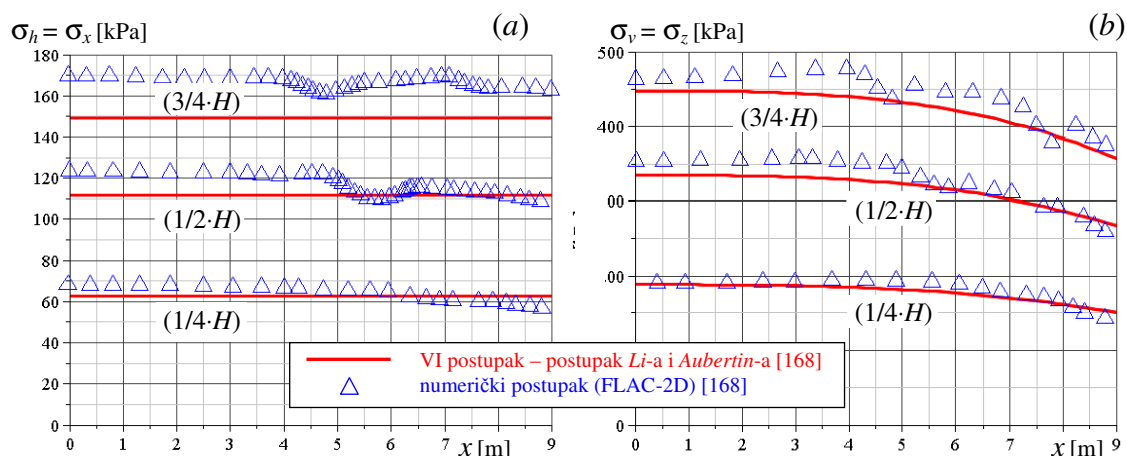
Sl. 199 Rezultati analize prema IV-2D postupku, postupku Li-a i Aubertin-a (2008) [168] i numeričkom postupku (FLAC-2D) [168]: (a) horizontalni naponi i (b) vertikalni naponi.



Sl. 200 Rezultati analize prema V-2D postupku (Walker/Walters-ov postupak), postupku Li-a i Aubertin-a (2008) [168] i numeričkom postupku (FLAC-2D) [168]: (a) horizontalni naponi i (b) vertikalni naponi.

Tabela 52. Rezultati analize prema VI-2D postupku – postupak Li-a i Aubertin-a.

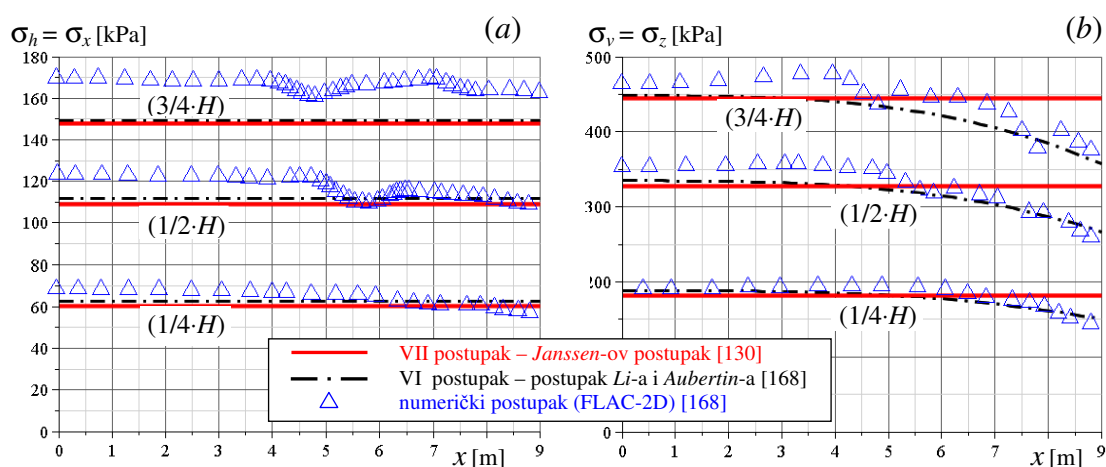
z [m] dubina od gornje ravne površine	Horizontalni pritisci [kPa]		Vertikalni pritisci [kPa]	
	do zida $\sigma_x(b) (x = b)$	u sredini $\sigma_x(0) (x = 0)$	do zida $\sigma_z(b) (x = b)$	u sredini $\sigma_z(0) (x = 0)$
1/4·H		62.814	150.186	188.442
2/4·H		111.566	266.751	334.698
3/4·H		149.405	357.221	448.213



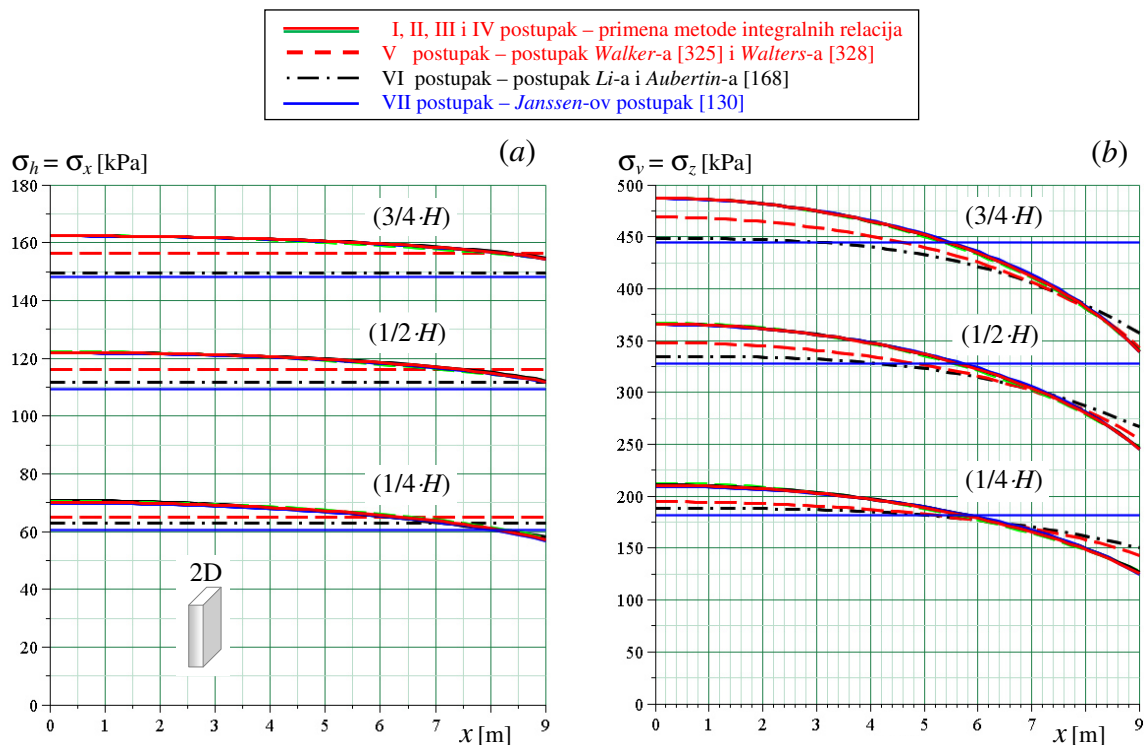
Sl. 201 Rezultati analize prema VI-2D postupku – postupku Li-a i Aubertin-a (2008) [168] i numeričkom postupku (FLAC-2D) [168]: (a) horizontalni naponi i (b) vertikalni naponi.

Tabela 53. Rezultati analize prema VII-2D postupku – Janssen-ov postupak.

z [m] dubina od gornje ravne površine	Horizontalni pritisci [kPa]		Vertikalni pritisci [kPa]	
	do zida $\sigma_x(b) (x = b)$	u sredini $\sigma_x(0) (x = 0)$	do zida $\sigma_z(b) (x = b)$	u sredini $\sigma_z(0) (x = 0)$
1/4·H		60.566	181.697	
2/4·H		109.129	327.387	
3/4·H		148.069	444.206	



Sl. 202 Rezultati prema VII-2D postupku – Janssen-ovom postupku (1895) [130], postupku Li-a i Aubertin-a (2008) [168] i numeričkom postupku (FLAC-2D) [168]: (a) horizontalni naponi i (b) vertikalni naponi.



Sl. 203 Uporedni dijagrami horizontalnih i vertikalnih napona u proračunskom primeru.

Tabela 54. Uporedni pregled rezultata za konturne napone na dubini materijala $H/2$ prema analiziranim postupcima proračuna.

Postupak	Primena metode integralnih relacija				Walker i Walters	Li i Aubertin	Janssen
	I-2D postupak	II-2D postupak	III-2D postupak	IV-2D postupak			
Naponi [kPa]							
$\sigma_x(b)$	112.419	112.152	111.539	111.779	116.023	111.566	109.129
$\sigma_x(0)$	122.296	122.033	121.784	121.990			
$\sigma_z(b)$	246.775	246.190	244.845	245.371	254.686	266.751	327.387
$\sigma_z(0)$	366.889	366.100	365.353	365.970	348.069	334.698	

Tabela 55. Uporedni pregled odstupanja konturnih napona na dubini materijala $H/2$ prema analiziranim postupcima proračuna u odnosu na rezultate II-2D postupka.

Postupak	Primena metode integralnih relacija				Walker i Walters	Li i Aubertin	Janssen
	I-2D postupak	II-2D postupak	III-2D postupak	IV-2D postupak			
Odstupanje Δ [%]							
Δ za $\sigma_x(b)$	0.24%	(0.00%)	-0.55%	-0.33%	3.45%	-0.52%	-2.70%
Δ za $\sigma_x(0)$	0.22%	(0.00%)	-0.20%	-0.04%			
Δ za $\sigma_z(b)$	0.24%	(0.00%)	-0.55%	-0.33%	3.45%	8.35%	32.98%
Δ za $\sigma_z(0)$	0.22%	(0.00%)	-0.20%	-0.04%	-4.93%	-8.58%	-10.57%

Horizontalni naponi po ukupnoj širini osnove i vertikalni naponi u srednjem delu osnove, prema *Janssen*-ovom postupku (sl. 202) se vrlo dobro slažu sa dijagramima prema postupku *Li*-a i *Aubertin*-a, s tim da su uporedne vrednosti određene prema *Janssen*-ovom postupku, u navedenim oblastima osnove, manje u proseku za oko 2% u odnosu na odgovarajuće vrednosti drugog postupka. Razlike kod vertikalnih napona se javljaju u zoni do zida ćelije, gde dijagrami napona prema postupku *Li*-a i *Aubertin*-a opadaju, što nije slučaj kod *Janssen*-ovih konstantnih vertikalnih napona.

Uporedni dijagrami horizontalnih i vertikalnih napona prema analiziranim postupcima proračuna, prikazani su na sl. 203. Dijagrami napona za posmatranu dubinu materijala, prema prva četiri analizirana postupka (primena metode integralnih relacija), su bliskih vrednosti (razlike do 1%), i praktično se na slici spajaju u jednu liniju. U odnosu na ove dijagrame, najbliži su dijagrami prema postupku *Walker/Walters*-a, zatim *Li*-a i *Aubertin*-a i na kraju *Janssen*-a. Ovo predstavlja opštu sliku po pitanju dijagrama napona.

U tabeli 54, dat je pregled konturnih vrednosti napona (za dijagrame prikazane na sl. 203), koji odgovaraju stanju napona materijala na dubini $1/2 \cdot H$, po redosledu postupaka proračuna. Odstupanja proračunskih vrednosti napona, u odnosu na referentne vrednosti (prema II-2D postupku), su prikazana u tabeli 55.

Vrednosti konturnih vertikalnih i horizontalnih napona na dubini $z = H/2$ (prema tabeli 55), kod postupka I-2D se razlikuju 0.24% za pritiske do zida, i samo 0.22% za pritiske u sredini osnove, u odnosu na referentne vrednosti. Kod III-2D postupka ove razlike za pritiske do zida su -0.55%, i -0.20% za pritiske u sredini osnove. U odnosu na III-2D postupak, postupak IV-2D je neznatno precizniji pri određivanju proračunskih vrednosti napona, pri čemu odstupanja vrednosti prema IV-2D postupka u odnosu na referentne vrednosti iznose -0.33% za pritiske do zida, i -0.04% za pritiske u sredini osnove. Prema rezultatima prva četiri postupka, koji odgovaraju primeni metode integralnih relacija, odstupanja pritisaka materijala na konturama, iznose do 0.55%. Ovo predstavlja veliku saglasnost u tačnosti proračuna, imajući u vidu da su postupci proračuna I-2D do IV-2D, zasnovani na variranju početnih pretpostavki.

Diskusija rezultata

Postupci *Li*-a i *Aubertin*-a i *Walker/Walters*-a su slični po rezultatima analize i teorijskim osnovama. Postupak *Li*-a i *Aubertin*-a, bi po rezultatima bio tačniji i bliži *Walker/Walters*-ovom i numeričkom postupku, da je kod kalibracije empirijskih parametara, ugao trenja o zid izabran u obliku $\phi_w = 0.9 \cdot \phi_i$, umesto primenjene jednakosti $\phi_w = \phi_i$ u ref. [168].

Postupci I-2D i II-2D predstavljaju najsloženije postupke proračuna i uzimaju se kao postupci sa najvećom tačnošću rezultata. Rezultati kod primene ovih postupaka su praktično jednaki. Odstupanja rezultata kod primene postupaka formiranih sa metodom integralnih relacija je reda veličine do oko 1%. Na razmatranom primeru analize stanja napona, koji su postavili *Li* i *Aubertin* u ref. [168], verifikovana je primena postupaka zasnovanih na primeni metode integralnih relacija kod analize stanja napona u 2D silosima. Rezultati kod primene ovih postupaka imaju vrlo dobro slaganje sa numeričkim vrednostima (analize sa FLAC-2D), a pri poređenju sa drugim postupcima, postupci sa primenom metode integralnih relacija daju najbolje slaganje sa numeričkim vrednostima.

Na ovaj način je potvrđena i validnost III-2D postupka proračuna, koji je u ovom radu od posebnog interesa, jer postavke primenjene kod ovog postupka, u osnovi odgovaraju postavkama primenjenim pri formiranju I-3Dr postupka proračuna. I-3Dr postupak se odnosi na analize stanja napona uskladištenog materijala u cilindričnom silosu.

5.4 Primer 5.4 - analiza stanja napona materijala u 3Dr silosu - ispitni silos sa pšenicom (Couto, Ruiz i Aguado (2013) [53])

U primeru se analiza stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu prema I-Dr, II-3Dr i IIa-3Dr postupku (primena metode integralnih relacija), i prema postupcima Walker/Walters-a, Pipatpongsa-a i Heng-a, i Janssen-a. Analiza obuhvata stanja napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju materijala iz ćelije silosa prema navedenim postupcima proračuna.

Proračunski primer odgovara ispitnom silosu i ispitivanju pri punjenju i pražnjenju silosa sa pšenicom kao usipnom materijalom prema Couto-u, Ruiz-u i Aguado-u (2013) [53].

Pored osnovnog upoređenja rezultata proračuna prema navedenim postupcima analize stanja napona, kod ovog primera su grafički prikazani uporedni dijagrami horizontalnih pritisaka pšenice na kružni zid ćelije, prema Janssen-ovom postupku i prema EC1-4 (za klasu silosa AAC 1), i diskretne vrednosti rezultata ispitivanja (sedam testova prve serije ispitivanja prikazanih u ref. [53]) za faze punjenja, kratkog mirovanja nakon punjenja i pražnjenja.

Geometrija ispitnog silosa (sl. 204):

$h_c = 2.0$ m (visina ćeliskog dela cilindričnog silosa)

$d_c = 1.0$ m (unutrašnji prečnik ćelije)

$h_h = 0.738$ m (visina konusnog levka od temene tačke do gornjeg nivoa levka)

$h_t = 0.480$ m (visina konusnog levka od nivoa ispusta do gornjeg nivoa levka)

$d_h = 0.350$ m (širina otvora levka)

$\beta = 34.3^\circ$ (ugao otklona zida levka od vertikale)

Podaci za usipni material (pšenica, prema [53]):

$\gamma = 8.392$ kN/m³ (zapreminska težina pšenice prema laboratoriskom ispitivanju)

$\phi_r = 34.22^\circ$ (ugao prirodnog nagiba za centrično punjenje pšenice u silos)

$\phi_i = 30.17^\circ$ (ugao unutrašnjeg trenja pšenice prema laboratorijskom ispitivanju)

$\mu_w = 0.20$ (koeficijent trenja pšenice o zid prema laboratorijskom ispitivanju)

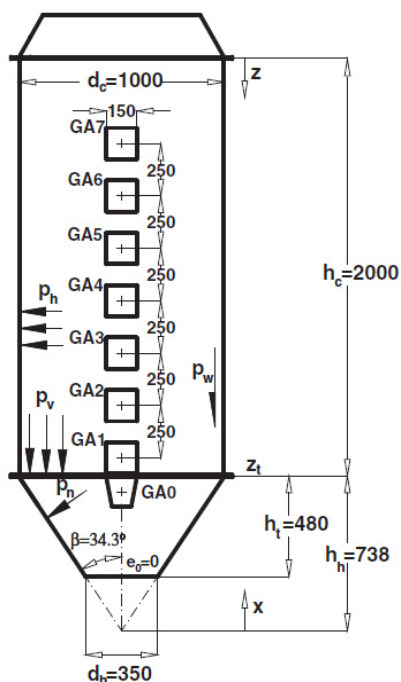
Materijal konstrukcije silosa i levka: nerđajući čelik; zavarena konstrukcija; debljina lima ćelije 3.0 mm sa prstenastim pojačanjima na gornjim i donjim ivicama ćelije i levka debljine 10.0 mm.

Kod ispitnog silosa opterećenje je vrlo malog intenziteta (kako je ćelija prečnika 1.0 m i visine 2.0 m). Debljina lima zida od 3.0 mm, za prihvatanje ovog opterećenja, je vrlo velika, tako da su deformacije zida zanemarljive. Na ovaj način, zid ćelije se posmatra kao kruti zid, kod kojeg se ne javlja efekat povećanja pritisaka usled deformabilnosti zida.

Na sl. 204 su prikazane osnovne dimenzije kod ispitnog silosa, kao i raspored mernih mesta na zidu ćelije, a na sl. 205 je foto snimak ispitnog silosa, prema [53].

Više podataka o ispitivanju ovog silosa je prikazano i razmatrano u § 3.5.3.2, gde su dati prikazi zapisa ispitivanja i rezultati ispitivanja (slike 138 do 143).

Rezultati ispitivanja na ovom silosu su prikazani u ref. [52], [53] i [55], za pšenicu, a u ref. [54] za kukuruz kao usipni materijal. U ref. [265] i [266], dati su detaljni opisi ispitne silo-stanice sa ovim ispitnim silosom, merne tehnike, postupaka ispitivanja i određivanja rezultata ispitivanja.



Sl. 204 Oznake, dimenzije i raspored mernih mesta (Couto, Ruiz i Aguado (2013) [53]).

Sl. 205 Foto snimak ispitnog silosa (Couto, Ruiz i Aguado (2013) [53]).

Kod primenjenih postupaka proračuna koriste se odnosi napona $K(z,r)$ na sledeći način:

- za postupke kod kojih je primenjena metoda integralnih relacija (I-Dr, II-3Dr i IIa-3Dr postupci) koristi se alternativni oblik odnosa napona $K(z,r)$, prema izrazu (4.472), koji se uvodi kod izvođenja proračunskih postupaka. Kod gotovih proračunskih izraza koriste se odnosi napona na konturama, i to su:

$$K(z,r)|_{r=R} = K(z,R) = K(R) = K_R = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2}} \quad (5.1)$$

$$K(z,r)|_{r=0} = K(z,0) = K(0) = K_0 = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \mu_i} \quad (5.2)$$

Izrazi se koriste za aktivno stanje napona u ćeliji, tako da je $\kappa = 1$. Ovi izrazi su po definiciji jednaki odnosu napona K prema *Ohde*-u (*Walker*-u) na konturama.

- za *Walker/Walters*-ov postupak (III-3Dr postupak) direktno se koristi *Ohde*-ova (*Walker*-ova) formulacija za odnosa napona $K(z,r)$, prema izrazu (4.450):

$$K(z,r) = K(r) = \frac{1}{1 + 2\mu_i^2 + 2\kappa \cdot \sqrt{1 + \mu_i^2} \cdot \sqrt{\mu_i^2 - \mu_w^2} \cdot r^2 / R^2} \quad (5.3)$$

Koristi se aktivno stanje napona u ćeliji, tako da je $\kappa = 1$. Ovaj odnos napona se na konturama svodi na izraze (5.1) i (5.2).

- za postupak *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a i *Janssen*-ov postupak (IV-3Dr i V-3Dr postupci, respektivno) koristi se konstantna vrednost koeficijenta bočnog pritiska K . U ovom radu je uvedeno aktivno stanje napona ($\kappa = 1$) pri punjenju, mirovanju i pražnjenju materijala, gde se koeficijenti K uvode sa izrazima:

$$K_f = (1 - \sin \phi_i) / (1 + \sin \phi_i) \quad (\text{za granično aktivno stanje pri punjenju}); \quad (5.4)$$

$$K_0 = 1 - \sin \phi_i \quad (\text{za aktivno stanje pri mirovanju}); \quad (5.5)$$

$$K_e = \cos^2 \phi_i \quad (\text{za aktivno stanje pri pražnjenju}). \quad (5.6)$$

Proračun se sprovodi za aktivna stanja napona u ćeliji pri punjenju, mirovanju i pražnjenju, pri čemu se određuju koeficijenti unutrašnjeg trenja μ_{if} , μ_{i0} i μ_{ie} (odgovaraju uglovima ϕ_{if} , ϕ_{i0} i ϕ_{ie}), respektivno. Odgovarajući koeficijent μ_{if} , μ_{i0} i μ_{ie} se uzima kao koeficijent μ_i u izrazima (5.1) do (5.3), za proračunske analiza stanja napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju materijala iz ćelije silosa, respektivno.

Koeficijenti K se u primeru sračunavaju na sledeći način:

$$\phi_i = 30.17^\circ \Rightarrow \mu_{if} = \mu_i = \tan \phi_i = 0.58131;$$

$$K_f = (1 - \sin \phi_i) / (1 + \sin \phi_i) = 0.33106 \quad \text{ili kao} \quad K_f = 1 / (\sqrt{1 + \mu_{if}^2} + \mu_{if})^2 = 0.33106$$

$$K_0 = 1 - \sin \phi_i = 0.49743$$

$$\mu_{i0} = (1 - K_0) / (2\sqrt{K_0}) = 0.35628 \quad (K_0 = 1 / (\sqrt{1 + \mu_{i0}^2} + \mu_{i0})^2 = 0.49743)$$

$$K_e = \cos^2 \phi_i = 0.74743$$

$$\mu_{ie} = (1 - K_e) / (2\sqrt{K_e}) = 0.14607 \quad (K_e = 1 / (\sqrt{1 + \mu_{ie}^2} + \mu_{ie})^2 = 0.74743)$$

Kod *Janssen*-ovog postupka i postupka *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a (postupci sa konstantnim vertikalnim naponima u preseku - § 3.5.6.1), za stanja napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju, primenjuju se po redosledu sledeći koeficijenti K :

$$K_f = 0.33106; \quad K_0 = 0.49743 \quad \text{i} \quad K_e = 0.74743.$$

Uz koeficijente K_f , K_0 i K_e , određeni su i koeficijenti unutrašnjeg trenja μ_{if} , μ_{i0} i μ_{ie} :

$$\mu_{if} = 0.58131 (\geq \mu_w = 0.20); \quad \mu_{i0} = 0.35628 (\geq \mu_w = 0.20) \quad \text{i} \quad \mu_{ie} = 0.14607 (\not\geq \mu_w = 0.20).$$

Koeficijenti unutrašnjeg trenja μ_{if} , μ_{i0} i μ_{ie} koriste se kod postupaka formiranih sa primenom metode integralnih relacija i *Walker/Walters*-ovog postupka (postupci sa promenljivim vertikalnim naponima u preseku - § 3.5.6.2). Ako je ispunjen uslov da je $\mu_i \geq \mu_w$, koeficijent K se uzima prema izrazima (5.1) do (5.3), koji odgovaraju *I obliku koeficijenta K*. U slučaju da je $\mu_i < \mu_w$, koristi se *II oblik koeficijenta K* prema izrazu (3.415). U ovom primeru proračuna, to je slučaj kod stanja napona pri pražnjenju, gde je $\mu_{ie} < \mu_w$. U cilju zadržavanja *I oblika koeficijenta K*, i kod analize napona pri pražnjenju, koeficijent unutrašnjeg trenja se uzima da iznosi $\mu_{ie} = 0.205$, što približno odgovara koeficijentu trenja o zid $\mu_w = 0.20$. Usvojena vrednost je 2.5% veća od μ_w , kako bi se osigurala konvergencija numeričkog postupka pri određivanju eksponenta a (za postupke I-3Dr i II-3Dr). Ovaj pristup je, u principu, konzistentan sa sličnim postupanjem u AS 3774 (1996) [14], gde se kod određivanja koeficijenta K prema izrazu (2.86) u § 2.7.7.2, u slučaju da je koeficijent μ_w veći od μ_i , u proračunu ograničava μ_w i uzima da je $\mu_w = \mu_i$.

U proračunskom primeru, kod analize stanja napona prema postupcima sa promenljivim vertikalnim naponima u preseku, uvode se sledeći koeficijenti unutrašnjeg trenja:

$$\mu_{if} = 0.58131 (\geq \mu_w = 0.20); \quad \mu_{i0} = 0.35628 (\geq \mu_w = 0.20) \quad \text{i} \quad \mu_{ie} = 0.20500 (\geq \mu_w = 0.20).$$

Analizira se aktivno stanje napona u ćeliji silosa, tako da je $\kappa = 1$. Analize u primeru se odnose na početni uslov koji odgovara ravnoj gornjoj površini materijala.

Prikaz i analiza rezultata

Na primeru ispitnog silosa sa pšenicom (3Dr silos) sa datim podacima, izvršena je analiza stanja napona prema pet postupaka proračuna, i to su redom sledeći postupci:

I-3Dr postupak – primena metode integralnih relacija (§ 4.3.3)

Postavke: dijagrami i interpolacione funkcije svih normalnih napona u obliku stepene funkcije sa eksponentom a ; smičući naponi u obliku trougaonog dijagrama; odnos napona $K(z,r)$ se uzima u alternativnom obliku; na konturama se koriste izrazi za odnos napona K prema Ohde-u (*Walker-u*); postupak se zasniva na rešavanju dva uslova ravnoteže, tako da se uvode dve konturne funkcije raspodele $Y_R(z)$ i $Y_0(z)$. Uzima se za referentni postupak pri upoređenju rezultata.

Rezultati su prikazani u tabeli 56 i na sl. 206.

II-3Dr postupak – primena metode integralnih relacija (§ 4.3.4)

- Postavke: iste su postavke kao kod I-3Dr postupka, ali se postupak zasniva na rešavanju jednog uslova ravnoteže (vertikalnih sila) tako da se primenjuje jedna funkcija raspodele $Y(z)$, koja važi za sve napone na ukupnom prostoru koji zauzima materijal.

Rezultati su prikazani u tabeli 57 i na sl. 207.

(IIa-3Dr postupak – primena metode integralnih relacija (§ 4.3.4.2))

- Postupak IIa-3Dr je varijanta II-3Dr postupka, gde se uvodi eksponent $a = 2$. U ovom slučaju interpolaciona funkcija je u obliku kvadratne parabole. Za direktno sračunavanje prema postupka IIa-3Dr mogu da se koriste jednostavniji izrazi prikazani u § 4.3.4.2, koji su formirani iz opštih izraza za $a = 2$. Rezultati su prikazani kod II-3Dr postupka, u tabeli 57, gde je usvojena vrednost $a = 2$.

III-3Dr postupak – *Walker/Walters-ov* postupak (§ 3.6.1 i § 4.3.5)

- Postavke: dijagram vertikalnih napona u obliku segmenta elipse; radijalni naponi u preseku konstantni; smičući naponi u obliku trougaonog dijagrama; odnos napona se uzima u obliku $K(r)$ prema Ohde-u (*Walker-u*).

Rezultati su prikazani u tabeli 58 i na sl. 208.

IV-3Dr postupak – postupak *Pipatpongsa-a* i *Heng-a* (§ 3.4 i § 3.4.1)

- Postavke (*generalisani Jáky-ev postupak*): vertikalni naponi u preseku konstantni; radijalni naponi promenljivi; smičući naponi u obliku trougaonog dijagrama. Kao postupak sa konstantnim vertikalnim naponima koristi se koeficijent bočnog pritiska za aktivno stanje napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju.

Rezultati su prikazani u tabeli 59 i na sl. 209.

V-3Dr postupak – *Janssen-ov* postupak (§ 3.1.1) – aktivno stanje sa $K = K_a$ Rankine.

- Postavke: vertikalni i radijalni naponi u preseku konstantni; smičući naponi se prikazuju u obliku trougaonog dijagrama. Kao postupak sa konstantnim vertikalnim naponima koristi se koeficijent bočnog pritiska za aktivno stanje napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju.

Rezultati su prikazani u tabeli 60 i na sl. 210.

U tabelama 56 do 60, prikazani su rezultati prema redosledu navedenih proračunskih postupaka. Uporedni pregled rezultata svih postupaka proračuna koji su primenjeni u ovom primeru, dat je u tabeli 61. Uporedni pregled odstupanja rezultata postupaka proračuna, u odnosu na rezultate prema I-3Dr postupku, prikazan je u tabeli 62.

U tabelama su prikazane vrednosti za:

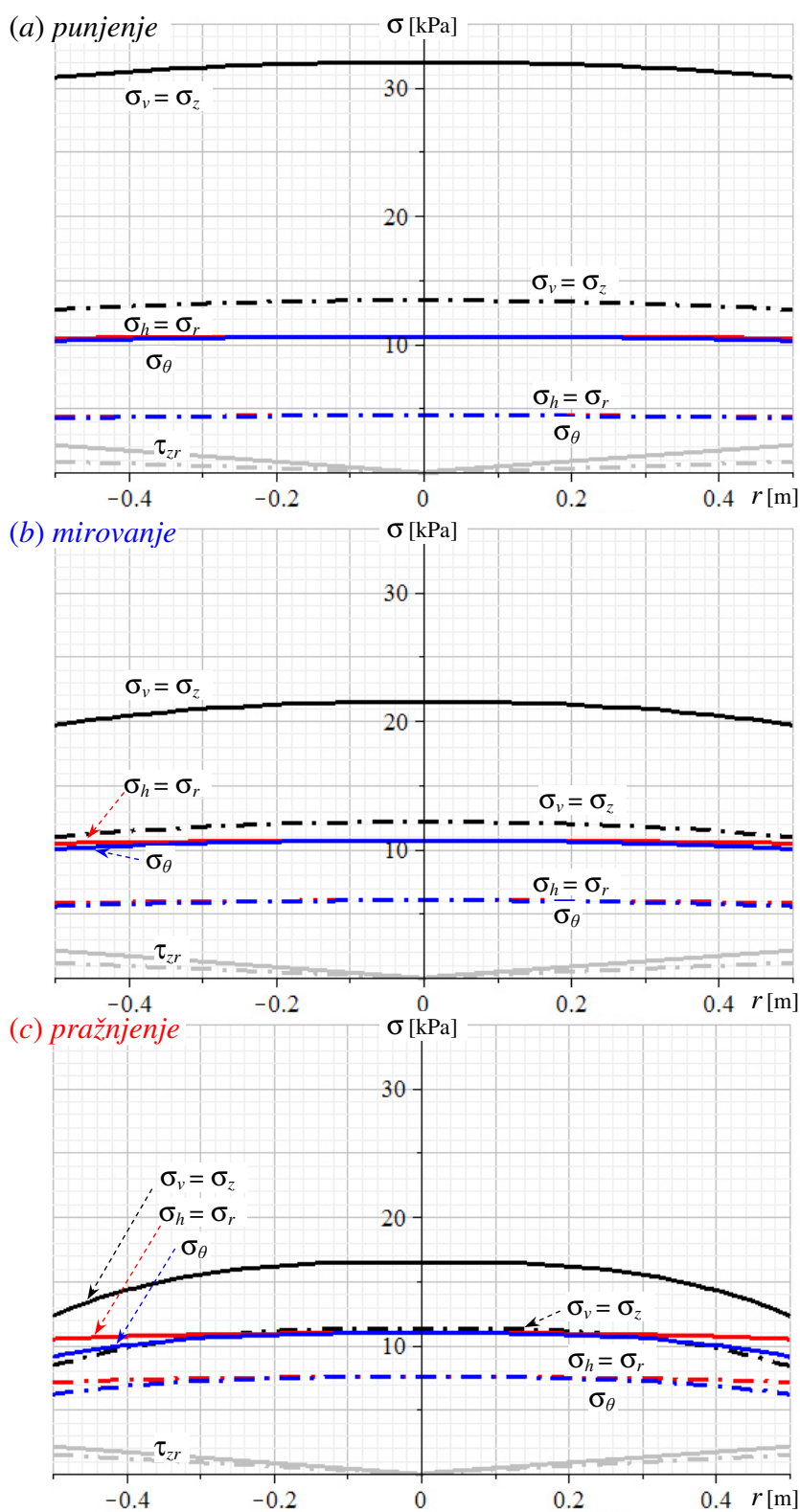
- radijalne napone σ_r - do zida ćelije $\sigma_r(R)$ i u centralnoj osi $\sigma_r(0)$, za $z = 2.0$ m;
- vertikalne napone σ_z - do zida ćelije $\sigma_z(R)$ i u centralnoj osi $\sigma_z(0)$, za $z = 2.0$ m; i
- asimptotske radijalne napone σ_{rf} - do zida ćelije σ_{rfR} , i u centralnoj osi σ_{rf0} , za $z \rightarrow \infty$.

Upoređenjem rezultata u tabeli 56 i 57, sa uporednim naponima (sa primenom numeričkog eksponenta a), naponi kod drugih vrednosti eksponenta a , odstupaju do max. 1.8% kod asimptotskih napona, a za napone na dubini $z = 2.0$ m, odstupanja su značajno manja (do 0.5%). Odstupanja su veća kod stanja napona pri pražnjenju (do 1.8%), a značajno manja kod stanja mirovanja materijala. Na ovaj način je pokazano, da je za konkretne dubine materijala u ćeliji, sasvim zadovoljavajuća aproksimacija uvođenje vrednosti $a = 2$, što odgovara primeni aproks. IIa-3Dr postupka.

Tabela 56. I-3Dr postupak – primena konturnih funkcija raspodele.

<i>Punjenje – inicijalno stanje $\mu_{if} = 0.58131$ i $\mu_w = 0.20$</i>				
<i>Naponi [kPa]</i>	<i>a = 3</i> (usvojena vrednost)	<i>a = 2</i> (usvojena vrednost)	<i>a = 2.04202</i> (numerička vrednost)	<i>a = 2.02146</i> (približna vrednost)
$\sigma_r(R)$	4.315	4.322	4.321	4.322
$\sigma_r(0)$	4.418	4.449	4.447	4.448
$\sigma_z(R)$	12.679	12.700	12.699	12.699
$\sigma_z(0)$	13.345	13.438	13.433	13.436
σ_{rfR}	10.490			
σ_{rf0}	10.561	10.597	10.595	10.596
<i>Mirovanje – konsolidaciono stanje $\mu_{i0} = 0.35628$ i $\mu_w = 0.20$</i>				
<i>Naponi [kPa]</i>	<i>a = 3</i> (usvojena vrednost)	<i>a = 2</i> (usvojena vrednost)	<i>a = 2.11862</i> (numerička vrednost)	<i>a = 2.07431</i> (približna vrednost)
$\sigma_r(R)$	5.813	5.830	5.828	5.829
$\sigma_r(0)$	5.982	6.052	6.041	6.045
$\sigma_z(R)$	10.927	10.960	10.955	10.957
$\sigma_z(0)$	12.025	12.167	12.144	12.152
σ_{rfR}	10.490			
σ_{rf0}	10.641	10.717	10.705	10.709
<i>Pražnjenje – početno stanje pri pražnjenju $\mu_{ie} = 0.20500$ i $\mu_w = 0.20$</i>				
<i>Naponi [kPa]</i>	<i>a = 3</i> (usvojena vrednost)	<i>a = 2</i> (usvojena vrednost)	<i>a = 2.81590</i> (numerička vrednost)	<i>a = 2.66634</i> (približna vrednost)
$\sigma_r(R)$	7.121	7.185	7.131	7.139
$\sigma_r(0)$	7.518	7.750	7.549	7.578
$\sigma_z(R)$	8.374	8.448	8.385	8.395
$\sigma_z(0)$	11.296	11.645	11.343	11.386
σ_{rfR}	10.490			
σ_{rf0}	10.946	11.175	10.976	11.004

Legenda	$\sigma_v = \sigma_z$	$\sigma_h = \sigma_r$	σ_θ	τ_{zr}
$z \rightarrow \infty$	—	—	—	—
$z = 2.0$ m	- · - · -	- · - · -	- · - · -	- · - · -



Sl. 206 I-3Dr postupak – primena metode integralnih relacija: dijagrami vertikalnih, radialnih, prstenastih i smičućih napona za $z \rightarrow \infty$ i $z = 2.0$ m.

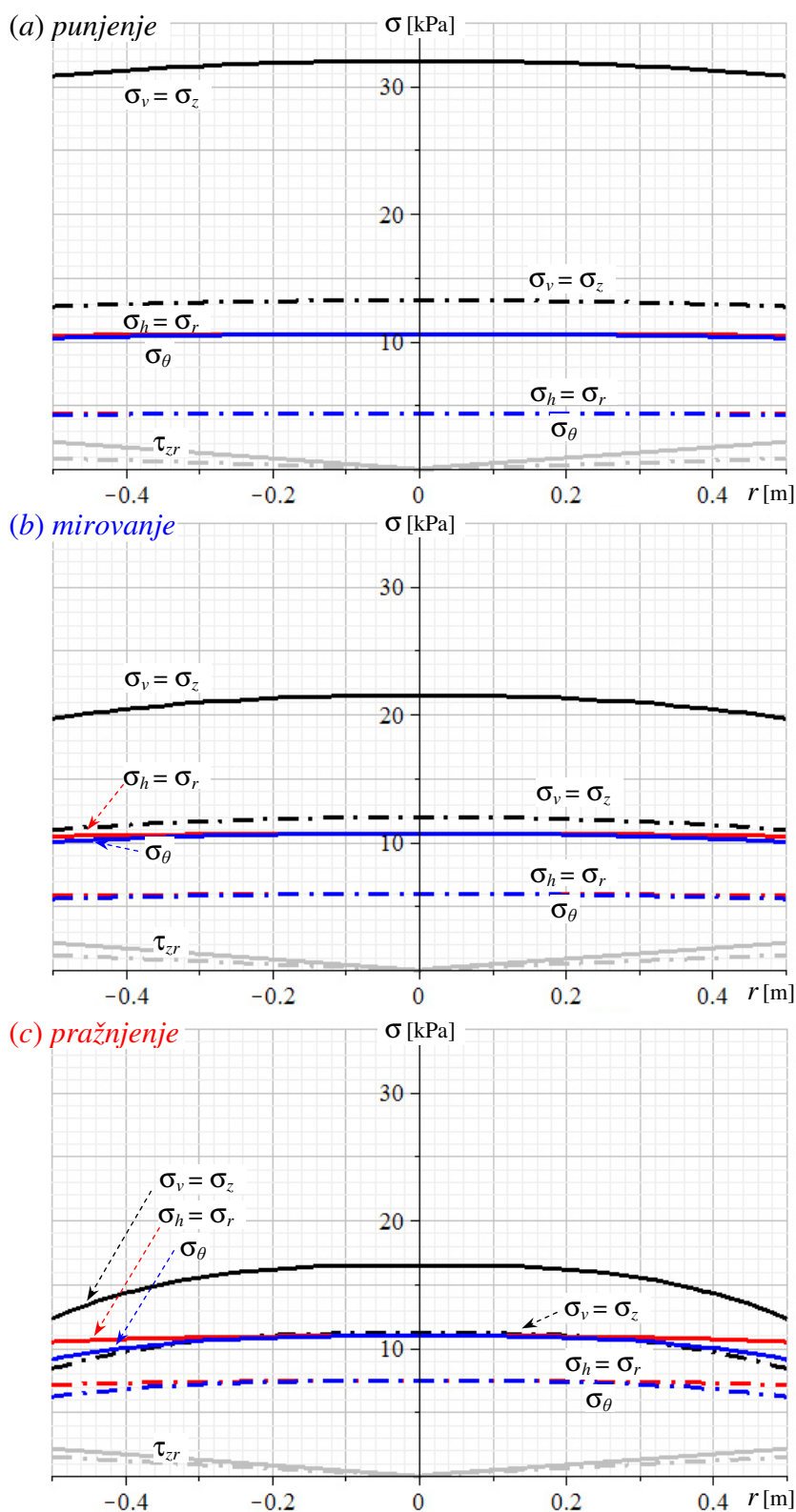
Kod postupaka proračuna sa primenom metode integralnih relacija (postupci I-3Dr i II-3Dr) analiziran je uticaj veličine eksponenta a . Eksponent a je uveden u proračun analize stanja napona kao usvojena vrednost $a = 2$ i $a = 3$, kao približna vrednost određena primenom izraza (4.495), (4.496) i (4.515), i prema numeričkom postupku (razmatrano u § 4.3.2.5). Približne i numeričke vrednosti za a zavise od koeficijenata μ_i i μ_w (videti tabele 32 i 33 u § 4.3.2.5), tako da se ove vrednosti razlikuju za stanja punjenja, mirovanja i pražnjenja.

Na sl. 206 i sl. 207, prikazani su dijagrami za stanja napona kod primene I-3Dr i II-3Dr postupka (za numerički određen eksponent a). Radijalni naponi (na $z = 2.0$ m) se povećavaju prelazom stanja materijala nakon punjenja u mirovanje, kao i pri prelazu iz stanja mirovanja u stanje pri pražnjenju

Tabela 57. II-3Dr postupak – primena jedne funkcije raspodele.

<i>Punjenje – inicijalno stanje $\mu_{if} = 0.58131$ i $\mu_w = 0.20$</i>				
<i>Naponi [kPa]</i>	<i>a = 3</i> (usvojena vrednost)	<i>a = 2</i> (usvojena vrednost)	<i>a = 2.04202</i> (numerička vrednost)	<i>a = 2.02146</i> (približna vrednost)
$\sigma_r(R)$	4.336	4.342	4.341	4.341
$\sigma_r(0)$	4.365	4.386	4.385	4.385
$\sigma_z(R)$	12.741	12.758	12.757	12.757
$\sigma_z(0)$	13.186	13.248	13.244	13.246
σ_{rfR}	10.490			
σ_{rf0}	10.561	10.597	10.595	10.596
<i>Mirovanje – konsolidaciono stanje $\mu_{i0} = 0.35628$ i $\mu_w = 0.20$</i>				
<i>Naponi [kPa]</i>	<i>a = 3</i> (usvojena vrednost)	<i>a = 2</i> (usvojena vrednost)	<i>a = 2.11862</i> (numerička vrednost)	<i>a = 2.07431</i> (približna vrednost)
$\sigma_r(R)$	5.823	5.840	5.837	5.838
$\sigma_r(0)$	5.907	5.966	5.957	5.960
$\sigma_z(R)$	10.947	10.978	10.973	10.975
$\sigma_z(0)$	11.875	11.994	11.975	11.982
σ_{rfR}	10.490			
σ_{rf0}	10.642	10.717	10.705	10.709
<i>Pražnjenje – početno stanje pri pražnjenju $\mu_{ie} = 0.20500$ i $\mu_w = 0.20$</i>				
<i>Naponi [kPa]</i>	<i>a = 3</i> (usvojena vrednost)	<i>a = 2</i> (usvojena vrednost)	<i>a = 2.81590</i> (numerička vrednost)	<i>a = 2.66634</i> (približna vrednost)
$\sigma_r(R)$	7.114	7.177	7.124	7.132
$\sigma_r(0)$	7.424	7.645	7.454	7.481
$\sigma_z(R)$	8.366	8.439	8.377	8.387
$\sigma_z(0)$	11.155	11.488	11.200	11.241
σ_{rfR}	10.490			
σ_{rf0}	10.946	11.175	10.976	11.004

Legenda	$\sigma_v = \sigma_z$	$\sigma_h = \sigma_r$	σ_θ	τ_{zr}
$z \rightarrow \infty$	—	—	—	—
$z = 2.0$ m	- · - · -	- · - · -	- · - · -	- · - · -



Sl. 207 II-3Dr postupak – primena metode integralnih relacija: dijagrami vertikalnih, radijalnih, prstenastih i smičućih napona za $z \rightarrow \infty$ i $z = 2.0$ m.

Povećanja radijalnih napona kod navedenih promena stanja, su praćena smanjenjem vertikalnih napona u silosu. Promene radijalnih napona u asimptotskom stanju napona su neznatne, a kod vertikalnih napona promene su značajne. Konkretno vrednosti za promene napona se razmatraju kod pregleda uporednih rezultata (tabela 61) i slika sa uporednim dijagramima napona (sl. 211 i sl. 212).

Kod *Walker/Walters*-ovog postupka, u analizama stanja napona, uvedeni su koeficijenti unutrašnjeg trenja $\mu_{if} = 0.58131$, $\mu_{i0} = 0.35628$ i $\mu_{ie} = 0.20500$ (za stanja pri punjenju, mirovanju i pražnjenju respektivno), i koeficijent trenja materijala o zid ćelije $\mu_w = 0.20$.

Kod postupka *Pipatpongsa-e* i *Heng-a*, i *Janssen*-ovog postupaka, u analizama stanja napona, uvedene su vrednosti koeficijenata bočnog pritiska $K_f = 0.33106$, $K_0 = 0.49743$ i $K_e = 0.74743$ (za stanja punjenja, mirovanja i pražnjenja respektivno), i koeficijent trenja materijala o zid ćelije $\mu_w = 0.20$.

Tabela 58. III-3Dr postupak – postupak Walker-a i Walters-a sa fakt. distribucije \mathcal{D}_{3Dr} .

Naponi [kPa]	Punjenje	Mirovanje	Pražnjenje
$\sigma_r(R)$	4.358	5.878	7.216
$\sigma_r(0)$			
$\sigma_z(R)$	12.806	11.050	8.485
$\sigma_z(0)$	13.164	11.816	10.843
σ_{rR}	10.490		
σ_{r0}			

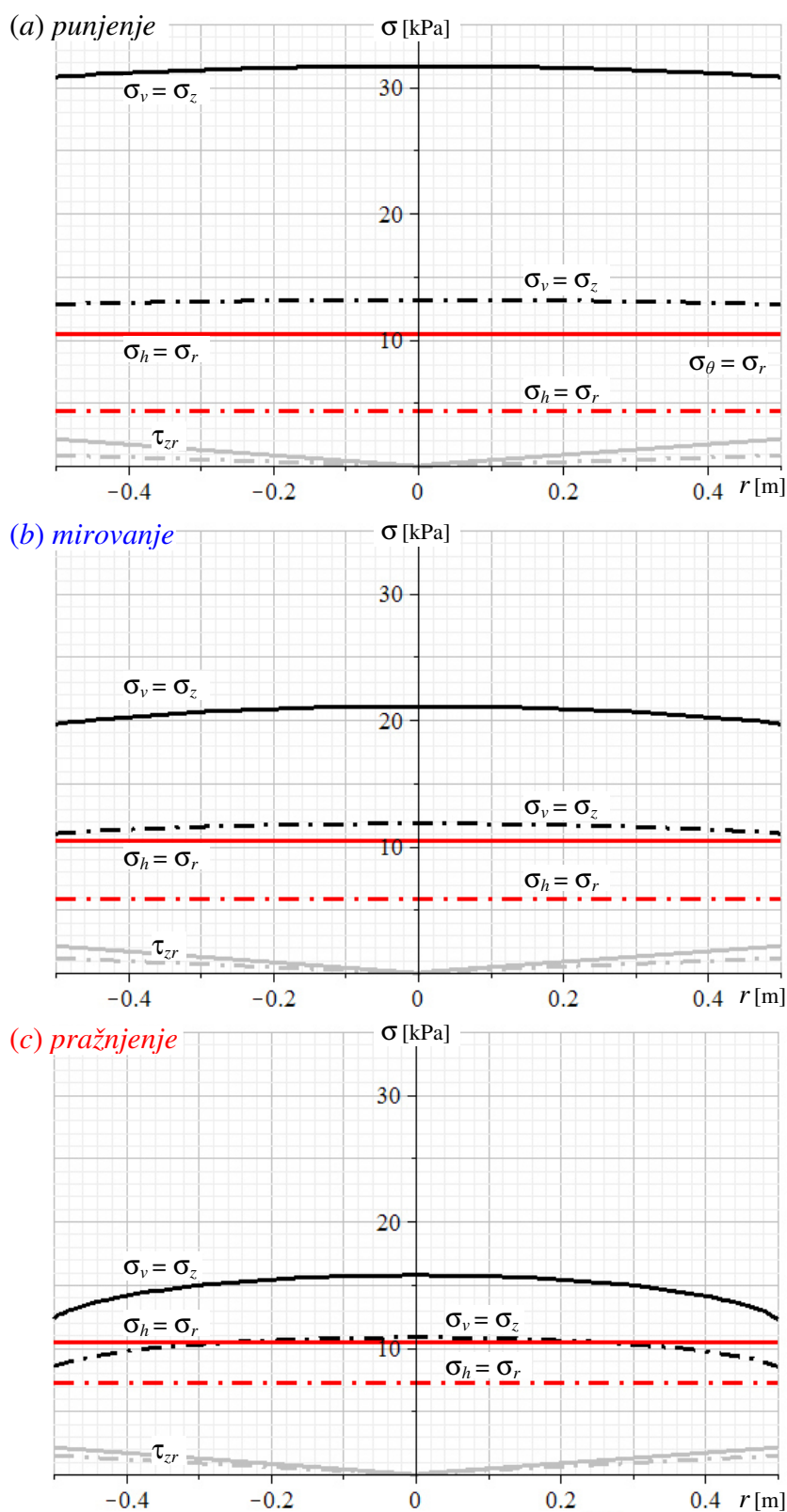
Tabela 59. IV-3Dr postupak – postupak Pipatpongsa-a i Heng-a.

Naponi [kPa]	Punjenje	Mirovanje	Pražnjenje
$\sigma_r(R)$	4.273	5.736	7.336
$\sigma_r(0)$	4.357	5.833	7.433
$\sigma_z(R)$	13.160	11.725	9.945
$\sigma_z(0)$			
σ_{rR}	10.490		
σ_{r0}			

Tabela 60. V-3Dr postupak – Janssen-ov postupak

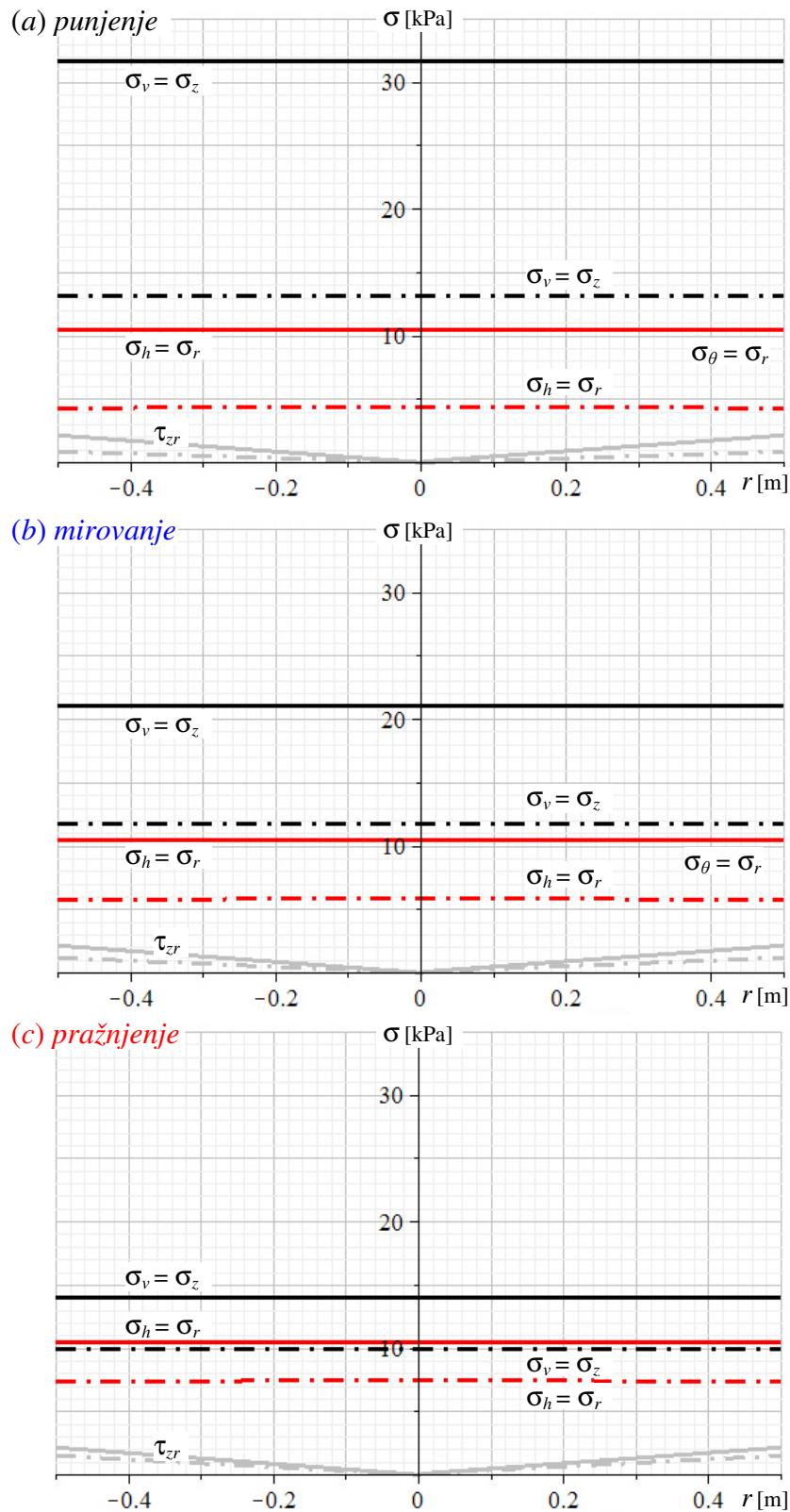
Naponi [kPa]	Punjenje	Mirovanje	Pražnjenje
$\sigma_r(R)$	4.317	5.757	7.317
$\sigma_r(0)$			
$\sigma_z(R)$	13.030	11.574	9.790
$\sigma_z(0)$			
σ_{rR}	10.490		
σ_{r0}			

Legenda	$\sigma_v = \sigma_z$	$\sigma_h = \sigma_r$	σ_θ	τ_{zr}
$z \rightarrow \infty$	—	—	—	—
$z = 2.0 \text{ m}$	- · - · -	- · - · -	- · - · -	- · - · -



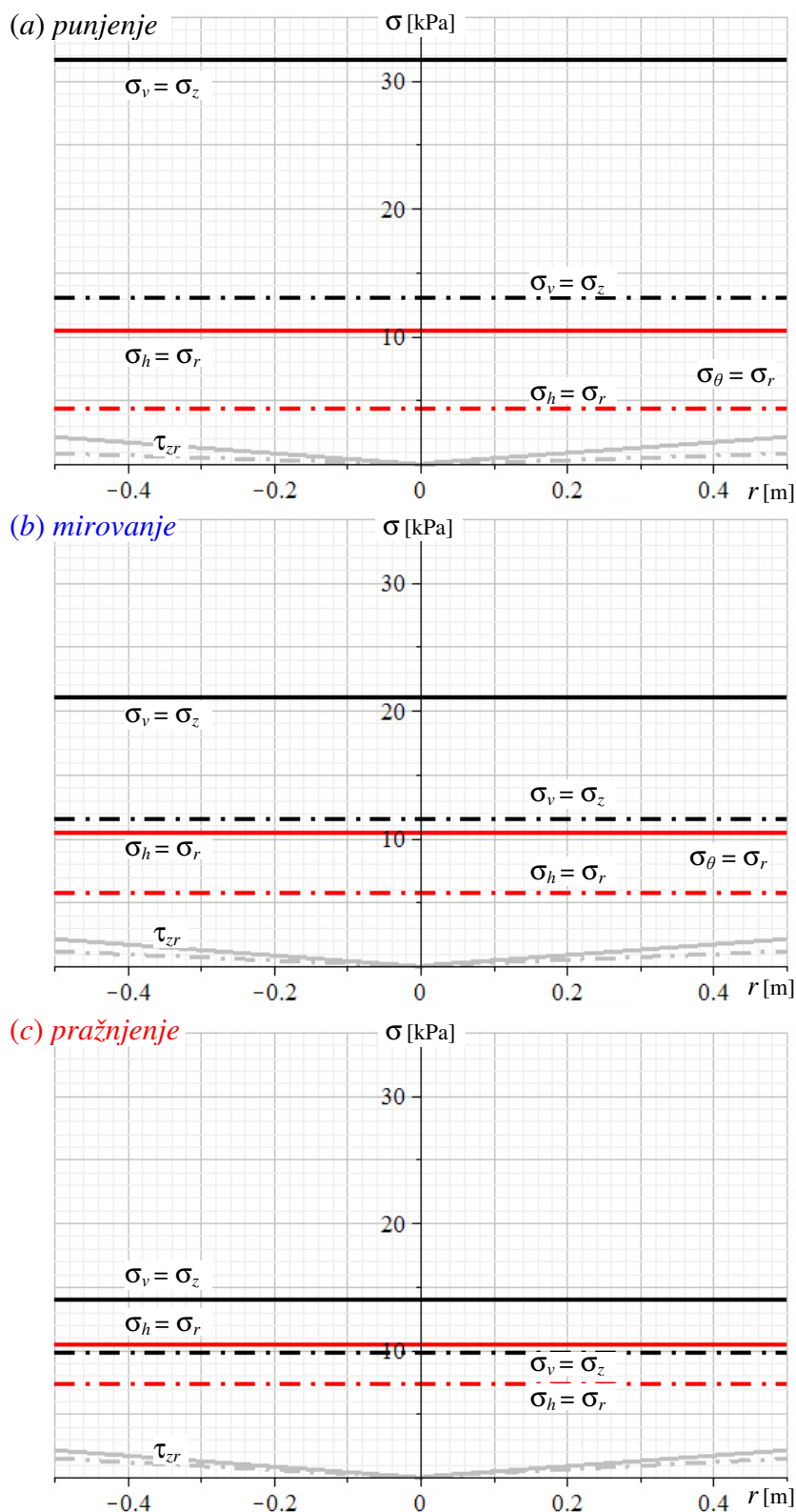
Sl. 208 III-3Dr postupak – postupak Walker-a i Walters-a: dijagrami vertikalnih, radijalnih, prstenastih i smičućih napona za $z \rightarrow \infty$ i $z = 2.0 \text{ m}$.

Legenda	$\sigma_v = \sigma_z$	$\sigma_h = \sigma_r$	σ_θ	τ_{zr}
$z \rightarrow \infty$	—	—	—	—
$z = 2.0 \text{ m}$	- · - · -	- · - · -	- · - · -	- · - · -



Sl. 209 IV-3Dr postupak – postupak Pipatpongsa-a i Heng-a: dijagrami vertikalnih, radialnih, prstenastih i smičućih napona za $z \rightarrow \infty$ i $z = 2.0 \text{ m}$.

Legenda	$\sigma_v = \sigma_z$	$\sigma_h = \sigma_r$	σ_θ	τ_{zr}
$z \rightarrow \infty$	—	—	—	—
$z = 2.0$ m	- · - · -	- · - · -	- · - · -	- · - · -



Sl. 210 V-3Dr postupak – Janssen-ov postupak: dijagrami vertikalnih, radijalnih, prstenastih i smičućih napona za $z \rightarrow \infty$ i $z = 2.0$ m.

Na sl. 208 i tabeli 58 su prikazani dijagrami, odnosno rezultati kod primene *Walker/Walters*-ovog postupka. Rezultati i dijagrami su slični sa prethodnim u analizama prema postupcima I-3Dr i II-3Dr, s tim da su radijalni naponi u preseku konstantnih vrednosti, i da prstenasti naponi odgovaraju radijalnim naponima, što odgovara uvedenim pretpostavkama u ovom postupku.

Kod primene postupka *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a (sl. 209 i tabela 59), vertikalni naponi su konstantni u preseku, a promjenjivost radijalnih napona u preseku je relativno manje izražena u odnosu na prva tri postupka. Rezultati i dijagrami kod ovog postupaka, skoro u potpunosti nalikuju rešenju stanja napona prema *Janssen*-ovom postupku (sl. 210 i tabela 60). Kod primene *Janssen*-ovog postupka konstantni su i vertikalni i horizontalni naponi.

Uredni pregled vrednosti konturnih napona, prema razmatranim postupcima proračuna na primeru ispitnog silosa sa pšenicom, je prikazan u tabela 61.

Tabela 61. Uredni pregled rezultata prema razmatranim postupcima proračuna.

Postupak	Primena metode integralnih relacija			Walker i Walters	Pipatpongsa i Heng	Janssen
<i>Punjenje – inicijalno stanje</i>						
Naponi [kPa]	I postupak $a = 2.04020$	II postupak $a = 2.04020$	IIa postupak aprox. $a = 2$	III postupak	IV postupak	V postupak
$\sigma_r(R)$	4.321	4.341	4.342	4.358	4.273	4.317
$\sigma_r(0)$	4.447	4.385	4.386		4.357	
$\sigma_z(R)$	12.699	12.757	12.758	12.806	13.160	13.030
$\sigma_z(0)$	13.433	13.244	13.248	13.164		
σ_{rR}	10.490			10.490		
σ_{r0}	10.595	10.595	10.597			
<i>Mirovanje – konsolidaciono stanje</i>						
Naponi [kPa]	I postupak $a = 2.11862$	II postupak $a = 2.11862$	IIa postupak aprox. $a = 2$	III postupak	IV postupak	V postupak
$\sigma_r(R)$	5.828	5.837	5.840	5.878	5.736	5.757
$\sigma_r(0)$	6.041	5.957	5.966		5.833	
$\sigma_z(R)$	10.955	10.973	10.978	11.050	11.725	11.574
$\sigma_z(0)$	12.144	11.975	11.994	11.816		
σ_{rR}	10.490			10.490		
σ_{r0}	10.705	10.705	10.717			
<i>Pražnjenje – početno stanje pri pražnjenju</i>						
Naponi [kPa]	I postupak $a = 2.81590$	II postupak $a = 2.81590$	IIa postupak aprox. $a = 2$	III postupak	IV postupak	V postupak
$\sigma_r(R)$	7.131	7.124	7.177	7.216	7.336	7.317
$\sigma_r(0)$	7.549	7.454	7.645		7.433	
$\sigma_z(R)$	8.385	8.377	8.439	8.485	9.945	9.790
$\sigma_z(0)$	11.343	11.200	11.488	10.843		
σ_{rR}	10.490			10.490		
σ_{r0}	10.976	10.976	11.175			

Ako se sagledaju rezultati I-3Dr postupka (gde je primenjena numerička vrednost za eksponent a), koji se uzimaju za referentne vrednosti, mogu se dati sledeći zaključci:






- radijalni naponi do zida $\sigma_r(R)$ (na $z = 2.0$ m) se povećavaju prelazom stanja materijala nakon punjenja u mirovanje (povećanje oko 35%), kao i pri prelazu iz stanja mirovanja u stanje pri pražnjenju (povećanje oko 22%), a ukupno povećanje napona $\sigma_r(R)$ je oko 65%;
- vertikalni naponi u centralnoj osi $\sigma_z(0)$ (na $z = 2.0$ m) se smanjuju sa prelazom stanja materijala nakon punjenja u mirovanje za oko 10%, kao i pri prelazu iz stanja mirovanja u stanje pri pražnjenju za oko 7%, dok ukupno smanjenje iznosi oko 16%; i
- asimptotski radijalni naponi (za $z \rightarrow \infty$), pri prelazima stanja materijala nakon punjenja u mirovanje i dalje u stanje pražnjenja, se neznatno povećavaju u centralnoj osi silosa, a konturni naponi do zida su konstantni (bez promene vrednosti).

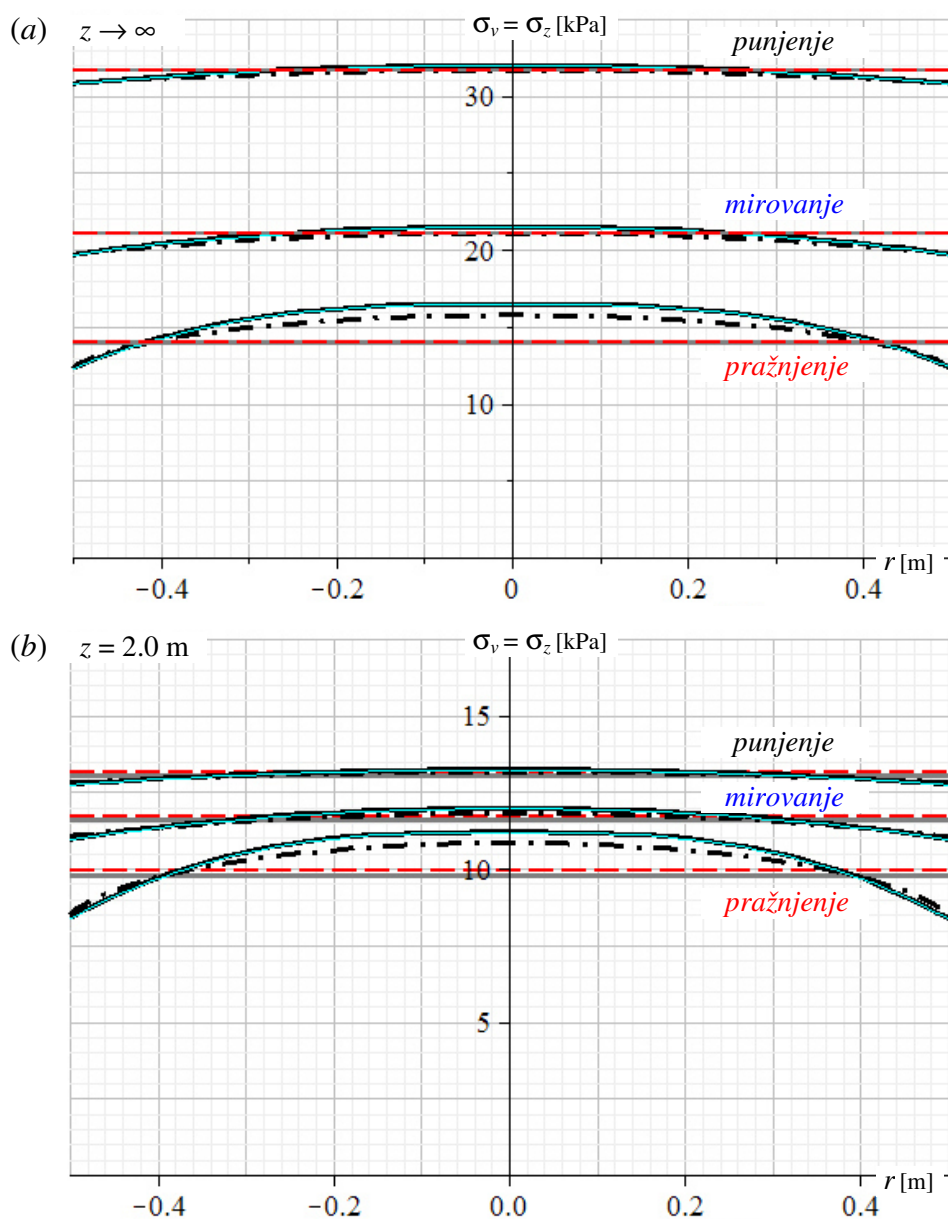
Tabela 62. Odstupanja rezultata u odnosu na rezultate prema I-3Dr postupku proračuna.

Postupak	Primena metode integralnih relacija			Walker i Walters	Pipatpongsa i Heng	Janssen
<i>Punjenje – inicijalno stanje</i>						
Odstupanje Δ [%]	I postupak $a = 2.04020$	II postupak $a = 2.04020$	IIa postupak aprox. $a = 2$	III postupak	IV postupak	V postupak
Δ za $\sigma_r(R)$	(0.00%)	0.46%	0.49%	0.86%	-1.11%	-0.09%
Δ za $\sigma_r(0)$	(0.00%)	-1.39%	-1.37%	-2.00%	-2.02%	-2.92%
Δ za $\sigma_z(R)$	(0.00%)	0.46%	0.46%	0.84%	3.63%	2.61%
Δ za $\sigma_z(0)$	(0.00%)	-1.41%	-1.38%	-2.00%	-2.03%	-3.00%
Δ za $\sigma_{r/R}$	0.00%			0.00%		
Δ za $\sigma_{r/0}$	(0.00%)	0.00%	0.02%	-0.99%		
<i>Mirovanje – konsolidaciono stanje</i>						
Odstupanje Δ [%]	I postupak $a = 2.11862$	II postupak $a = 2.11862$	IIa postupak aprox. $a = 2$	III postupak	IV postupak	V postupak
Δ za $\sigma_r(R)$	(0.00%)	0.15%	0.21%	0.86%	-1.58%	-1.22%
Δ za $\sigma_r(0)$	(0.00%)	-1.39%	-1.24%	-2.70%	-3.44%	-4.70%
Δ za $\sigma_z(R)$	(0.00%)	0.16%	0.21%	0.87%	7.03%	5.65%
Δ za $\sigma_z(0)$	(0.00%)	-1.39%	-1.24%	-2.70%	-3.45%	-4.69%
Δ za $\sigma_{r/R}$	0.00%			0.00%		
Δ za $\sigma_{r/0}$	(0.00%)	0.00%	0.11%	-2.01%		
<i>Pražnjenje – početno stanje pri pražnjenju</i>						
Odstupanje Δ [%]	I postupak $a = 2.81590$	II postupak $a = 2.81590$	IIa postupak aprox. $a = 2$	III postupak	IV postupak	V postupak
Δ za $\sigma_r(R)$	(0.00%)	-0.10%	0.65%	1.19%	2.87%	2.61%
Δ za $\sigma_r(0)$	(0.00%)	-1.26%	1.27%	-4.41%	-1.54%	-3.07%
Δ za $\sigma_z(R)$	(0.00%)	-0.10%	0.64%	1.19%	18.60%	16.76%
Δ za $\sigma_z(0)$	(0.00%)	-1.26%	1.28%	-4.41%	-12.32%	-13.69%
Δ za $\sigma_{r/R}$	0.00%			0.00%		
Δ za $\sigma_{r/0}$	(0.00%)	0.00%	1.81%	-4.43%		

Uporedni pregled odstupanja rezultata kod primene razmatranih postupaka proračuna, prikazan je u tabeli 62, kao procentualno odstupanje svih vrednosti napona prikazanih u posmatranoj vrsti tabele 61, u odnosu na referentne vrednostima prema I-3Dr postupku proračuna.

Sagledavanjem odstupanja svih prikazanih vrednosti kod primene postupaka II-3Dr i III-3Dr, u odnosu na vrednosti prema I-3Dr postupku, najveće odstupanje iznosi 1.8% i odgovara naponu σ_{r0} , dok je najveće odstupanje za napone na dubini $z = 2.0$ m, reda veličine $\pm 1.4\%$. Odstupanja napona do zida ćelije $\sigma_r(R)$ i $\sigma_z(R)$ na dubini $z = 2.0$ m, su neznatna (do 0.65%).

Legenda	I-3Dr	II-3Dr	III-3Dr	IV-3Dr	V-3Dr
postupak					

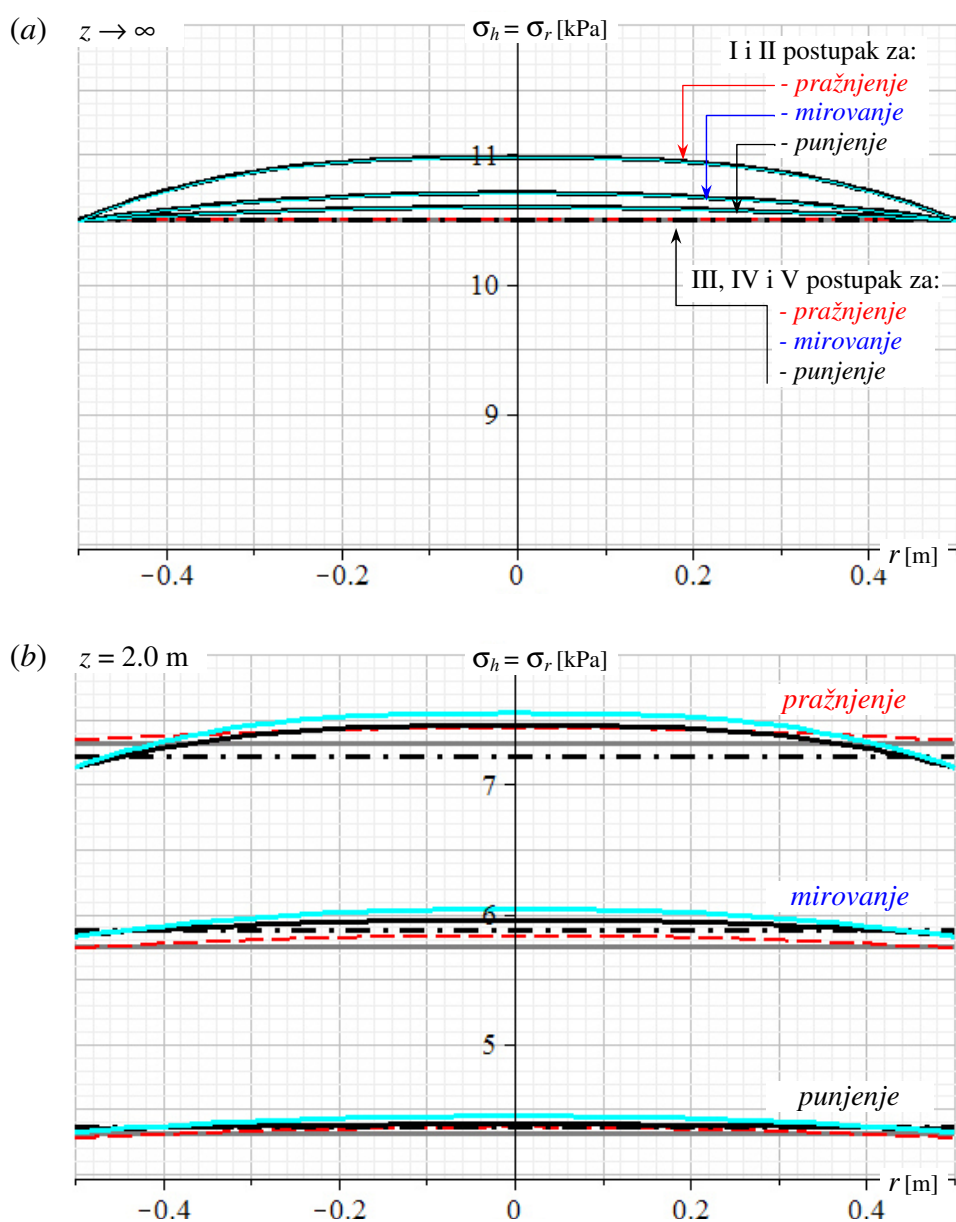


Sl. 211 Uporedni dijagrami vertikalnih napona $z \rightarrow \infty$ i $z = 2.0$ m, prema prikazanim teorijskim postupcima.

Odstupanja napona kod Walker/Walters-ovog postupaka, postupka Pipatpongsa-a i Heng-a i Janssen-ovog postupka (tabela 62) su nešto veća nego kod prethodno navedenih postupaka. Odstupanja kod napona koji su konstantni u preseku (uvedene pretpostavke u proračunu) su relativno veće, ali konstantne napone pri poređenju treba posmatrati kao prosečne napone (dvojne vrednosti u tabeli). Na osnovu upoređenja odstupanja rezultata, koji odgovaraju postupku Pipatpongsa-a i Heng-a i Janssen-ovom postupku, može se zaključiti da su ovi postupci podjednaki po tačnosti rezultata.

Na sl. 211, su prikazani uporedni dijagrami vertikalnih napona u asimptotskom slučaju stanja napona ($z \rightarrow \infty$), pod (a), i u preseku na dubini materijala $z = 2.0$ m, pod (b).

Legenda	I-3Dr	II-3Dr	III-3Dr	IV-3Dr	V-3Dr
postupak					



Sl. 212 Uporedni dijagrami radialnih napona $z \rightarrow \infty$ i $z = 2.0$ m, prema prikazanim teorijskim postupcima.

Kod asimptotskog stanja vertikalnih napona na sl. 211, dijagrami su isti za postupake I-3Dr i II-3Dr, kao i za postupake IV-3Dr i V-3Dr. Kod III-3Dr postupka (*Walker/Walters-ov* postupak) vrednosti napona su nešto manje u sredini silosa, a do zida ćelije su jednaki sa odgovarajućim vrednostima kod I-3Dr i II-3Dr postupka. Kod dijagrama vertikalnih napona u preseku na dubini $z = 2.0$ m, postoji vrlo dobro slaganje vrednosti napona prema različitim postupcima u srednjem delu ćelije, za stanja nakon punjenja i pri mirovanju materijala, a odstupanja su relativno veća kod stanja pri pražnjenju. Na sl. 211, može se uočiti da vertikalni naponi opadaju sa prelazom stanja materijala nakon punjenja u mirovanje (oko 30% za $z \rightarrow \infty$, i oko 10% u preseku na $z = 2.0$ m), kao i pri prelazu iz stanja mirovanja u stanje pri pražnjenju (oko 30% za $z \rightarrow \infty$, i oko 10% u preseku na $z = 2.0$ m), dok ukupno smanjenje iznosi oko 50% za $z \rightarrow \infty$, i oko 20% u preseku na $z = 2.0$ m. Date vrednosti predstavljaju globalne procene smanjenja vertikalnih napona kod navedenih promena stanja, od stanja pri punjenja do stanja pri pražnjenju.

Na sl. 212, su prikazani uporedni dijagrami radijalnih napona u asimptotskom slučaju stanja napona ($z \rightarrow \infty$), pod (a), i u preseku na dubini materijala $z = 2.0$ m, pod (b).

Kod asimptotskog stanja radijalnih napona na sl. 212, dijagrami su isti za postupake I-3Dr i II-3Dr (promenljivi naponi u preseku), kao i za postupake III-3Dr IV-3Dr i V-3Dr (konstantni naponi u preseku). Kod dijagrama radijalnih napona u preseku na dubini $z = 2.0$ m, postoji relativno dobro slaganje vrednosti napona prema različitim postupcima, za stanja nakon punjenja i pri mirovanju materijala, a odstupanja su relativno veća kod stanja pri pražnjenju. Na sl. 212, uočava se povećanje radijalnih napona sa prelazom stanja materijala nakon punjenja u mirovanje (od 0% do 2% za $z \rightarrow \infty$, i oko 35% u preseku na $z = 2.0$ m), kao i pri prelazu iz stanja mirovanja u stanje pri pražnjenju (od 0% do 2% za $z \rightarrow \infty$, i oko 25% u preseku na $z = 2.0$ m), dok ukupno povećanje iznosi od 0% do 5% za $z \rightarrow \infty$, i oko 65% u preseku na $z = 2.0$ m. Date vrednosti su globalne procene povećanja radijalnih napona kod navedenih promena stanja.

Upoređenje teorijskih i eksperimentalnih rezultata pritisaka na zid ćelije

Eksperimentalni rezultati, za horizontalne pritiske od nasute pšenice na kružni zid ćelije silosa prikazanog na sl. 205, koje se koriste pri upoređenju rezultata sa teorijskim pritiscima, odgovaraju prvoj seriji ispitivanja sa ukupno 7 testova punjenja i pražnjenja ispitnog silosa, prema podacima *Couto-a*, *Ruiz-a* i *Aguado-a* (2013) [53].

Ovi podaci se prikazuju uporedo sa dijagramima pritisaka prema *Janssen-ovoj* teoriji i prema EC1-4 (silos klase AAC 1). Uporedni dijagrami pritisaka su prikazani na sl. 213, sl. 214 i sl. 215, gde su preko simbola označene diskretne vrednosti rezultata ispitivanja za faze punjenja, kratkog mirovanja nakon punjenja i pražnjenja materijala iz silosa, respektivno. U § 3.5.3.2, dati su prikazi zapisa ispitivanja i više podataka o ispitivanju ovog silosa (na slikama 138 do 143).

Kod formiranja dijagrama pritisaka prema *Janssen-ovoj* teoriji (V-3Dr postupak) koristi se prethodna prikazana analiza stanja napona. U ovoj analizi je primenjeno proširenje *Janssen-ove* teorije na analize stanja napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju, sa aktivnim stanjem napona u materijalu. *Janssen-ov* postupak je ovde izabran za upoređenje, jer se najviše koristi u praksi, uveden je u EC1-4, a daje sasvim korektne rezultate za radijalne napone do zida (horizontalne pritiske na zid ćelije), kako je prikazano na sl. 212.

Kod određivanja pritisaka na zid ćelije, prema EC1-4, uvedeni su ovde već korišćeni podaci za zapreminsku težinu pšenice $\gamma = 8.392$ kN/m³ (pšenica) i koeficijent trenja

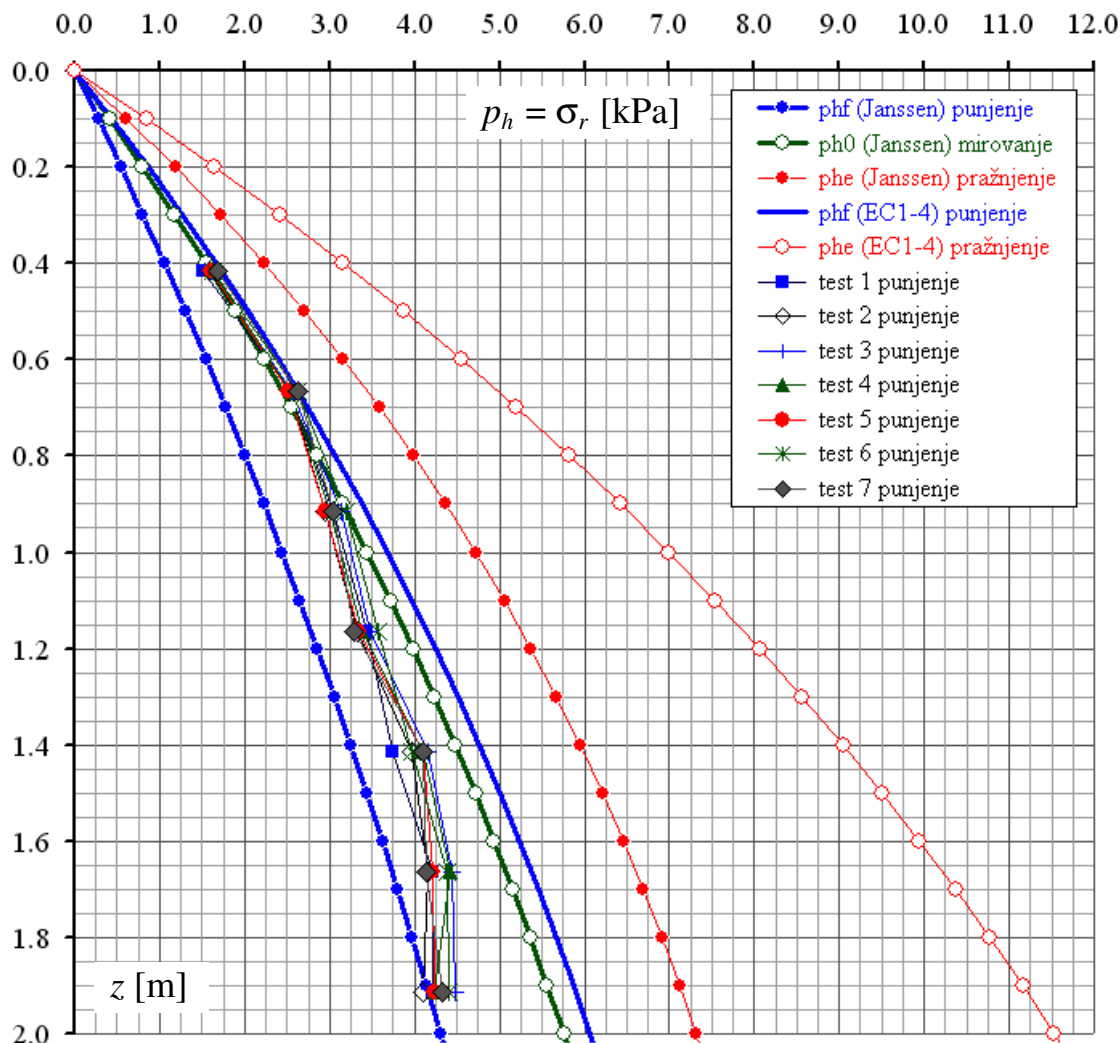
pšenice o zid ispitnog silosa $\mu_w = 0.20$, a koeficijent bočnog pritiska je uveden prema EC1-4, kao srednja vrednost odnosa napona $K_m = 0.54$ (za pšenicu).

Punjenje materijala i pražnjenje je centrično, te je $e = 0$, odakle sledi da je faktor natpritiska $C_h = 1.9$, za pritiske od uskladištene pšenice (referentni faktor materijala za lokalno opterećenje za pšenicu je $C_{op} = 0.5$), u skladu sa EC1-4 i klasu silosa AAC 1.

Dijagrami horizontalnih pritisaka, na sl. 213, sl. 214 i sl. 215, su dati prema Janssen-u za stanja punjenja, mirovanja i pražnjenja, i prema EC1-4 za stanja nakon punjenja (u EC1-4 sa ovo stanje podrazumeva kao stanje mirovanja) i stanje pri pražnjenju.

Preko odgovarajućih simbola, koji su povezani sa razlomljenom linijom kod niza podataka u jednom testu, prikazani su rezultati ispitivanja kao: maksimalni pritisci pri punjenju (sl. 213), minimalne i maksimalne vrednosti pritisaka u toku kratkog perioda mirovanja nakon punjenja (sl. 214), i maksimalne vrednosti pri pražnjenju (sl. 215).

Pritisci su određeni na zidu ćelije silosa preko mernih jedinica (od GA1 do GA7), koje su postavljene po visini silosa prema prikazu na sl. 204. Režim ispitivanja je bio "punjenje + mirovanje + pražnjenje", a rezultati ispitivanja u testu br. 6 iz prve serije ispitivanja, koja se ovde koristi, prikazani su u § 3.5.3.2, na sl.138 i sl.139, prema ref. [53].

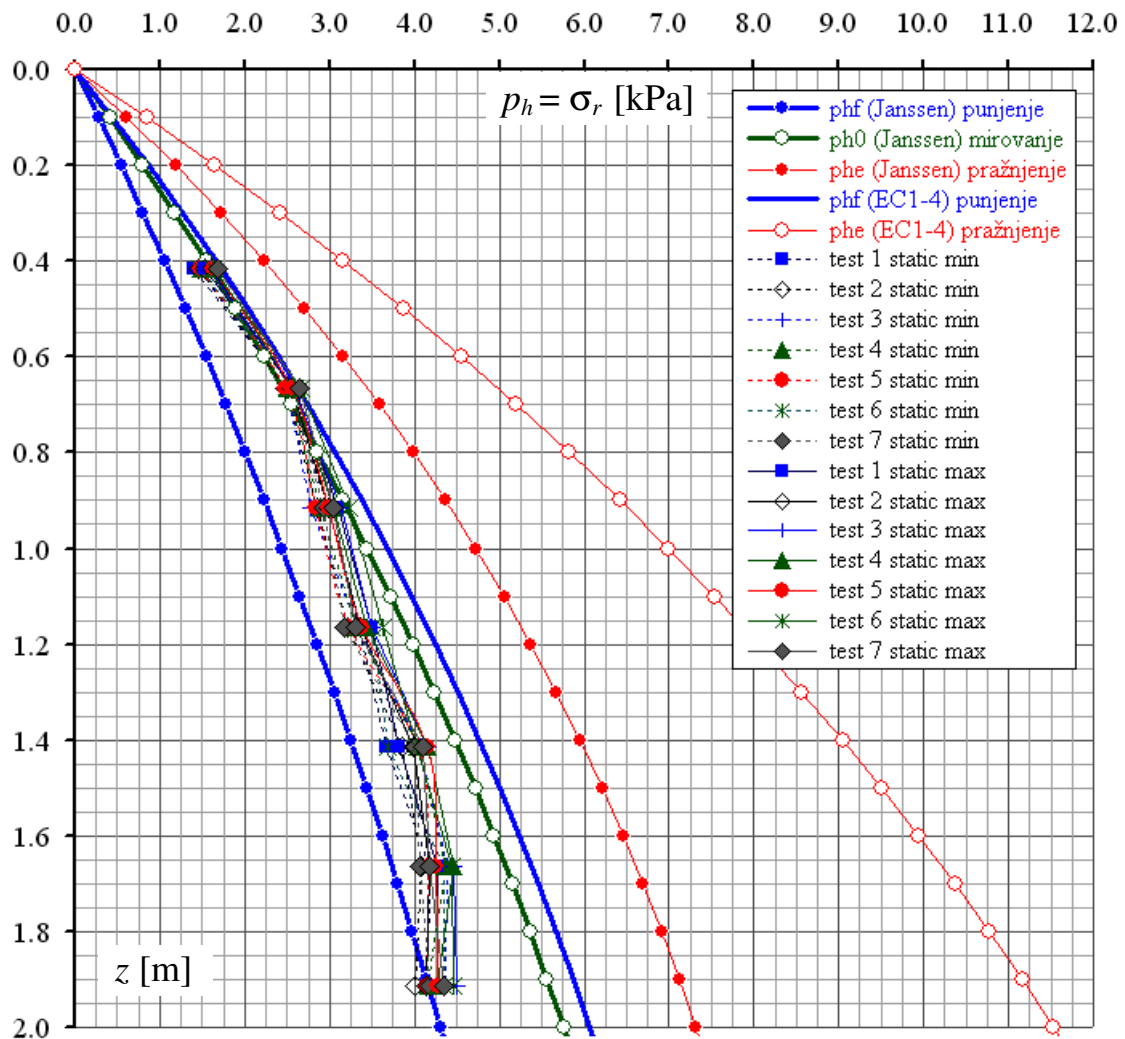


Sl. 213 Eksperimentani rezultati ispitivanja za stanje pri punjenju silosa u testovima 1 do 7, prema [53], i dijagrami pritisaka na zid $p_h = \sigma_r(R)$ prema Janssen-ovom postupku i EC1-4.

Prema sl. 213, koja se odnosi na maksimalne horizontalne pritiske pri punjenju ćelije, uočava se da eksperimentalne vrednosti stoje između dijagrama pritisaka pri punjenju i mirovanju prema *Janssen*-ovom postupku.

U gornjem delu silosa eksp. vrednosti su bliže *Janssen*-ovom dijagramu pritisaka pri mirovanju, a na dnu ćelije odgovaraju pritisacima pri punjenju. Dijagram pritisaka nakon punjenja prema EC1-4, dobro se slaže sa eksper. podacima u gornjem delu silosa, a sa povećanjem dubine materijala do dna ćelije odstupa od eksp. vrednosti i određuje veće pritiske u ovom slučaju.

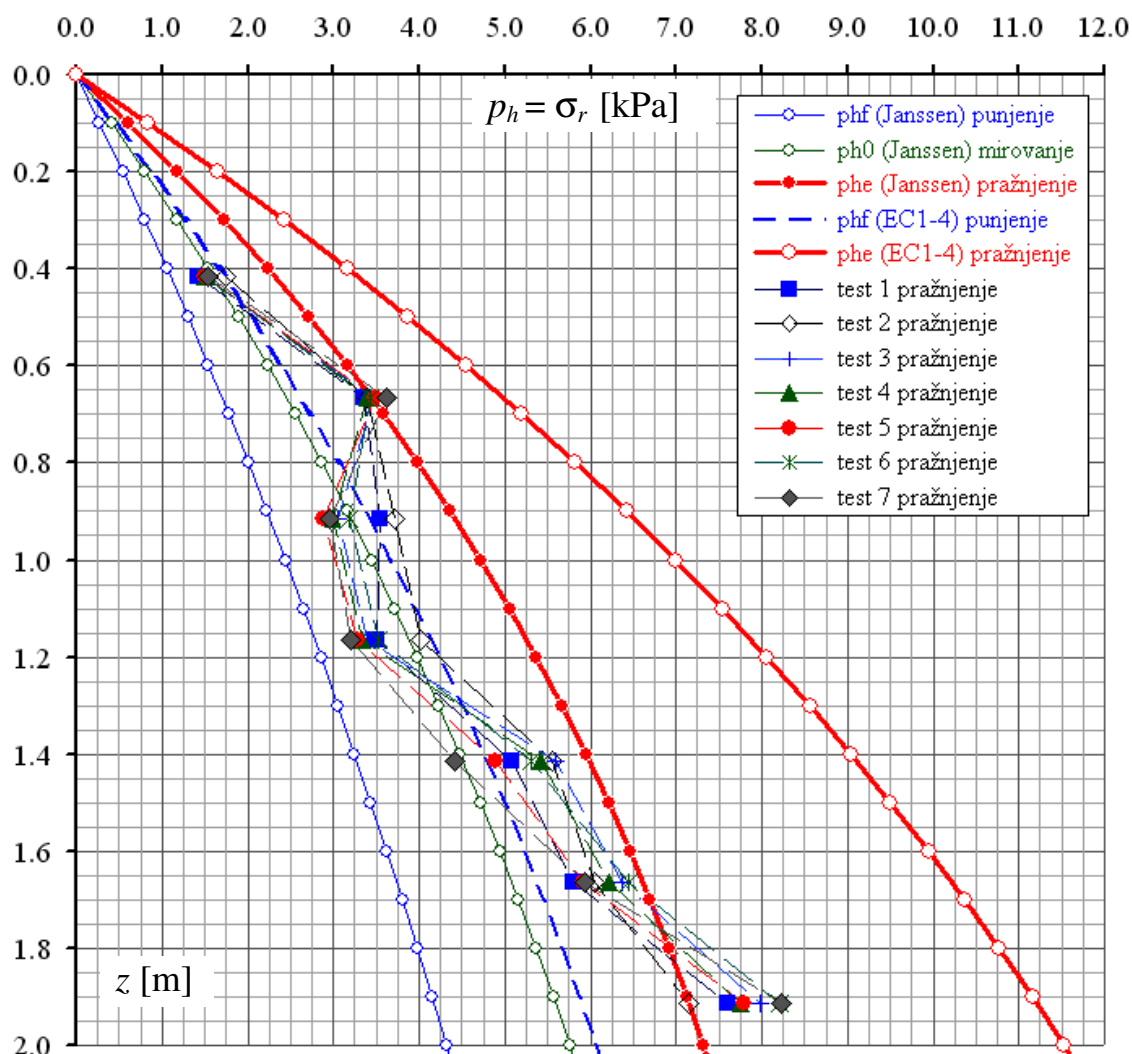
Na sl. 214, prikazane su minimalne i maksimalne vrednosti pritisaka u toku kratkog perioda mirovanja nakon punjenja pri ispitivanju silosa. Situacija je praktično ista prethodnoj na sl. 213, po pitanju upoređenja sa *Janssen*-ovim dijagramom i pritisacima prema EC1-4. Ovi rezultati su bitni, jer pokazuju promenu pritisaka u određenom periodu ispitivanja, za razliku od podataka pri punjenju, prikazanih na prethodnoj slici, gde maksimalni pritiske po visini silosa u jednom testu ne moraju biti jednovremeni. Rezultati ispitivanja prikazani na sl. 214, potvrđuju vrednosti pritisaka pri punjenju na sl. 213.



Sl. 214 Eksperimentani rezultati ispitivanja za kratak period mirovanja materijala nakon punjenja u testovima 1 do 7, prema [53], sa min. i max. vrednostima, i dijagrami pritisaka na zid $p_h = \sigma_r(R)$ prema *Janssen*-ovom postupku i EC1-4.

Na slici sl. 215, prikazani su rezultati za maksimalne vrednosti horizontalnih pritisaka na zid ćelije, pri ispitivanju silosa u toku pražnjenja materijala iz ćelije. *Janssen*-ova kriva pritisaka je bliža eksp. vrednostima u odnosu na krivu pritisaka prema EC1-4.

U EC1-4 se kod silosa klase AAC 1, sa faktorom natpritiska povećavaju osnovni pritisci pri punjenju, na taj način da se pokriju uticaji pri pražnjenju materijala, od dejstva simetričnog opterećenja na zid ćelije i uticaji od dodatnog lokalnog opterećenja. Na ovaj način, kriva pritisaka prema EC1-4, treba da stoji na strani sigurnosti pri obuhvatanju eksperimentalnih rezultata.



Sl. 215 Eksperimentani rezultati ispitivanja pri pražnjenju materijala u testovima 1 do 7, prema [53], i dijagrami pritisaka na zid $p_h = \sigma_r(R)$ prema Janssen-ovom postupku i EC1-4.

Janssen-ova kriva horizontalnih pritisaka pri pražnjenju, praktično se poklapa sa eksp. vrednostima na dubini oko 0.65 m, i na dovoljno korektan način opisuje pritiske u donjem delu silosa. Na dubini materijala oko 0.4 m, pritisci na zid, prema prikazanim rezultatima, se praktično nisu promenili pr pražnjenju u odnosu na prethodne vrednosti pri mirovanju i punjenju. Slična situacija je i na dubini od oko 1.2 m, gde pri pražnjenju praktično nema registrovanog značajnijeg povećanja pritisaka. Od sedam testova u prvoj seriji ispitivanja, drugi test pokazuje najbolje slaganje sa *Janssen*-ovom krivom pritisaka. U drugom testu,

kod mernog mesta na dubini oko 1.2 m, maksimalni pritisak pri ispitivanju, odgovara proračunskom pritisku pri mirovanju.

U principu, sa *Jansen*-ovom krivom horizontalnih pritisaka treba da se procene prosečne vrednosti pritisaka pri pražnjenju, a da se sa dodatnim lokalnim opterećenjem pokrije nesimetrični oblik opterećenja po površini zida. Za dobijanje preciznijih podataka o horizontalnim pritiscima, sprovode se ispitivanja sa većim brojem testova. Nesimetrično opterećenje po visini i obimu silosa, registruje se na više mernih mesta raspoređenih po obimu i visini zida ćelije. Kod ovde razmatranog silosa, uvedena je samo jedna vertikalna generatrisa za pozicioniranje mernih mesta po visini silosa, što je nedovoljno za potpuno ispitivanje. Kod ovog silosa su bile predviđene 4 vertikalne generatrise koje se vode po obimu ćelije na po 90° , ali je ovaj ispitni silos izveden kao prototip sa samo jednim vertikalnim pozicioniranjem mernih mesta. Na drugim pozicijama po obimu silosa, mogu se pojaviti nesimetrični pritisci, koji mogu biti veći od pritisaka određenih na samo jednom mernom mestu. Kao primer pojave nesimetričnih pritisaka po obimu zida ćelije, može da posluži prikaz sistematskih horizontalnih pritisaka, na razvijenom plaštu cilindričnog AB silosa, na sl. 67 u § 2.10.1, prema *Ooi*-u, *Pham*-u i *Rotter*-u (1990) [212]. U ref. [53], navedeni su rezultati i drugih testova u serijama ispitivanja 2 i 3, sa kojima bi se sveukupno uzevši, poboljšalo slaganje eksperimentalnih rezultata i *Janssen*-ove krive, ali to ne bi promenilo ovde date stavove u analizi rezultata.

Diskusija rezultata

Analizirano je stanje napona materijala u cilindričnom silosu, na primeru ispitnog silosa sa nasutom pšenicom. Rezultate ispitivanja na ovom silosu su prikazali *Couto*, *Ruiz* i *Aguado* (2013) [53]. Analizom su obuhvaćena stanja napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju materijala. Primenjeni su postupci I-Dr, II-3Dr i IIa-3Dr, koji su formirani sa metodom integralnih relacija, *Walker/Walters*-ov postupak, postupak *Pipatpong*-a i *Heng*-a, i *Janssen*-ov postupak. Kod I-Dr, II-3Dr i IIa-3Dr ustanovljena je dobra međusobna usaglašenost rezultata proračuna, tako da se aproksimativni IIa-3Dr postupak sa uvedenim eksponentom $a = 2$, može uzeti za dovoljno precizan postupak u analizama stanja napona materijala u silosu. Ovaj postupak je po tačnosti u nivou ili malo precizniji od *Walker/Walters*-ovog postupka, a kod primene je relativno jednostavniji.

Pri upoređenju rezultata, ustanovljeno je da vertikalni naponi opadaju prelazom stanja nakon punjenja u stanje mirovanja, i dalje iz stanja mirovanja u stanje pri pražnjenju. Procenjeno je da je ukupni pad vertikalnih napona od stanja pri punjenju do stanja pri pražnjenju silosa, kod asimptotskih vrednosti napona, oko 50%, a kod preseka na dnu ćelije oko 20%, u posmatranom primeru silosa. Kod radijalnih napona pri navedenim prelazima stanja dolazi do povećanja napona. Ukupno povećanje radijalnih napona od faze punjenja do faze pražnjenja silosa, se procenjuje da je do 5% u asimptotskom stanju napona, i oko 65% u preseku na dnu ćelije.

Analizom proračunskih vrednosti i dijagrama ustanovljeno je vrlo dobra saglasnost svih rezultata kod navedenih postupaka proračuna. Po pitanju usaglašenosti rezultata prednjače postupci koji su formirani sa metodom integralnih relacija.

Kod upoređenja teorijskih rezultata sa eksperimentalnim podacima na primeru ispitnog silosa, određeno je relativno dobro slaganje rezultata pri punjenju materijala, a kod pražnjenja kriva pritisaka obuhvata relativno dobro eksperimentalno određene vrednosti horizontalnih pritisaka (primenjen je *Janssen*-ov postupak). Kriva pritisaka nakon punjenja prema EC1-4, je na većim dubinama na strani sigurnosti u odnosu na eksp. rezultate kod analiziranog primera ispitnog silosa.

5.5 Primer 5.5 - parametarska analiza stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu

U ovom primeru analizira se stanje napona u 3Dr silosu, sa variranjem koeficijenata trenja μ_i i μ_w . Parametarska analiza je sprovedena kod primene II-3Dr postupka (primena metode integralnih relacija) i Walker/Walters-ovog postupka.

Variraju se koeficijenti unutrašnjeg trenja sa vrednostima $\mu_i = 0.80, 0.70$ i 0.60 , uz variranje koeficijenta trenja materijala o zid ćelije sa vrednostima $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 .

Stanje napona uskladištenog materijala u ćeliji silosa se uzima kao granično aktivno stanje ($\kappa = 1$).

Primenjuju se sledeći postupci analize stanja napona uskladištenog materijala u silosu:

- II-3Dr postupak - primena metode integralnih relacija (§ 4.3.4), i
- III-3Dr postupak - Walker/Walters-ov postupak (§ 3.6.1 i § 4.3.5).

Ovi postupci su po tačnosti rezultata i složenosti primene približno na istom nivou.

Razmatra se opšti primer sa usvojenim karakteristikama i geometrijom:

Geometrija silosa

$d_c = 10.0$ m (unutrašnji prečnik ćelije)

$h_c = 50.0$ m (visina ćelije)

Podaci za usipni material

$\gamma = 10$ kN/m³ (usvojena vrednost za proračun)

Ćelija se uzima da je ispunjena do vrha, i da je ravna gornja površina materijala (bez formirane nasipne kupe).

U teorijskom delu rada ovaj primer silosa je detaljnije analiziran za vrednosti koeficijenta unutrašnjeg trenja materijala $\mu_i = 0.80$ i koeficijenta trenja o zid ćelije $\mu_w = 0.60$, što u osnovi odgovara parametrima kod AB silosa, prema sledećim postupcima analize stanja napona: I-3Dr (primer 4.1 u § 4.3.3.3), II-3Dr (primer 4.2 u § 4.3.4.1), IIa-3Dr (primer 4.3 u § 4.3.4.3), koji su formirani primenom metode integralnih relacija, i prema Walker/Walters-ovom postupku (III-3Dr postupak – primer 4.4 u § 4.3.5.2).

EkspONENT a se, u ovom primeru proračuna kod primene II-3Dr postupka analize stanja napona, uvodi kao približna vrednost na osnovu izraza (4.495), (4.496) i (4.515). Približne vrednosti za a zavise od koeficijenata μ_i i μ_w (videti tabelu 33 u § 4.3.2.5), tako da se ove vrednosti razlikuju pri variranju navedenih parametara.

Prikaz i analiza rezultata

Rezultati analize stanja napona su prikazani na slikama:

- sl. 216 – za $\mu_i = 0.80$ i variranje $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (Walker/Walters-ov postupak);
- sl. 217 – za $\mu_i = 0.80$ i variranje $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (II-3Dr postupak);
- sl. 218 – za $\mu_i = 0.70$ i variranje $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (Walker/Walters-ov postupak);
- sl. 219 – za $\mu_i = 0.70$ i variranje $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (II-3Dr postupak);
- sl. 220 – za $\mu_i = 0.60$ i variranje $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (Walker/Walters-ov postupak); i
- sl. 221 – za $\mu_i = 0.60$ i variranje $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (II-3Dr postupak).

Na ovim slikama su pod (a), (b) i (c), prikazani dijagrami stanja komponentalnih napona u preseku ćelije na dubini $z = 50$ m, i za $z \rightarrow \infty$, kao i 3D prikaz komponentalnih napona u

materijalu u funkciji dubine z uskladištenog materijala (do $z = h_c = 50$ m). Slike pod (a), (b) i (c), se odnose na vrednosti parametra $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 , respektivno. Na ovaj način prikazi na slikama (sl. 216 i sl. 217, sl. 218 i sl. 219, kao i sl. 220 i sl. 221) međusobno su uporedivi (prate se sa vrednostima parametara proračuna), a odnose se na *Walker/Walters*-ov postupak i II-3Dr postupak, respektivno.

Kod primene *Walker/Walters*-ovog postupka, konturne vrednosti vertikalnih napona (do zida - σ_{zR} i u centralnoj osi - σ_{z0}) i konturne vrednosti radijalnih napona (do zida - σ_{rR} i u centralnoj osi - σ_{r0}), prikazane su u tabelama 63 i 64, respektivno.

Kod primene II-3Dr postupka, konturne vrednosti vertikalnih i radijalnih napona su prikazane u tabelama 65 i 66, respektivno.

U ovim tabelama su date vrednosti napona pri variranju koeficijenata trenja μ_i i μ_w , za dubine materijala $z = 10$ m, 20 m i 50 m, kao i za asimptotsko stanje kada $z \rightarrow \infty$. Konturne vrednosti dijagrama vertikalnih i radijalnih napona u tabelama, za $z = 50$ m i $z \rightarrow \infty$, odgovaraju konturnim vrednostima na dijagramima prikazanim na slikama (od sl. 216 do sl. 221), za odgovarajući postupak proračuna i odgovarajuće parametre μ_i i μ_w .

Odstupanja rezultata *Walker/Walters*-ovog postupka od II-3Dr postupaka za konturne radijalne i vertikalne napone u zavisnosti od dubine z pri variranju vrednosti parametara μ_i i μ_w , prikazana su u tabeli 67.

Na sl. 222 i sl. 223 objedinjeno je po šest slika sa dijagramima odnosa konturnih napona i referentnih konturnih napona, u funkciji parametara μ_i i μ_w , za relativne dubine materijala $z/d_c = 1$ i $z/d_c = 5$, i za asimptotski slučaj stanja napona ($z \rightarrow \infty$). Referentni konturni napon odgovara konturnom naponu sa fiksiranim vrednostima parametara μ_i i μ_w pri formiranju dijagrama. Kod formiranja dijagrama za vertikalne konturne napone izabrani su parametri $\mu_i = 0.8$ i $\mu_w = 0.4$ za referentne napone, a kod dijagrama za radijalne napone ovi parametri su $\mu_i = 0.6$ i $\mu_w = 0.4$. Na ovaj način, kod fiksiranih parametara, vrednost normalizovanog konturnog napona je 1.0. Za druge vrednosti parametara μ_i i μ_w , normalizovani konturni napon predstavlja odnos $\sigma_{zR}/\sigma_{zR \text{ ref}}$, $\sigma_{z0}/\sigma_{z0 \text{ ref}}$, $\sigma_{rR}/\sigma_{rR \text{ ref}}$ ili $\sigma_{r0}/\sigma_{r0 \text{ ref}}$, u zavisnosti od toga koji se napon posmatra (vertikalni ili radijalni napon; konturni napon do zida ili u centralnoj osi silosa).

Dijagrami su formirani razvijanjem odgovarajućih izraza prema II-3Dr postupku za konturne napone uz uvođenje eksponenta a kao približne vrednosti.

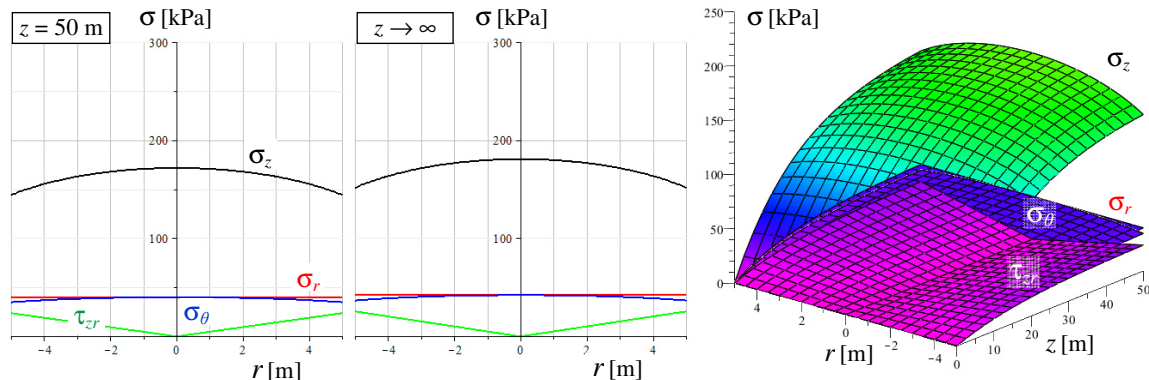
Vrednosti normalizovanih konturnih napona na dijagramima, ne zavise od konkretne težine materijala, prečnika ćelije i konkretne dubine, već samo od relativne dubine z/d_c i parametara μ_i i μ_w .

Primenom ovih dijagrama, za odgovarajuću relativnu dubinu materijala, i u zavisnosti od podataka za parametre μ_i i μ_w , sagledava se i određuje relativna promena vrednosti posmatranog konturnog napona pri promeni vrednosti parametara μ_i i μ_w . Ako je za jedan par vrednosti parametara μ_{i1} i μ_{w1} , na posmatranom dijagramu vrednost k_1 , a za drugi par vrednosti parametara μ_{i2} i μ_{w2} se određuje vrednost k_2 , odnos konturnih napona sa različitim parametrima se određuje kao odnos $\sigma(\mu_{i2}, \mu_{w2})/\sigma(\mu_{i1}, \mu_{w1}) = k_2/k_1$. Relativna promena konturnog napona u %, pri promeni parametara μ_{i1} i μ_{w1} u parametre μ_{i2} i μ_{w2} , određuje se kao $(k_2/k_1 - 1) \cdot 100\%$.

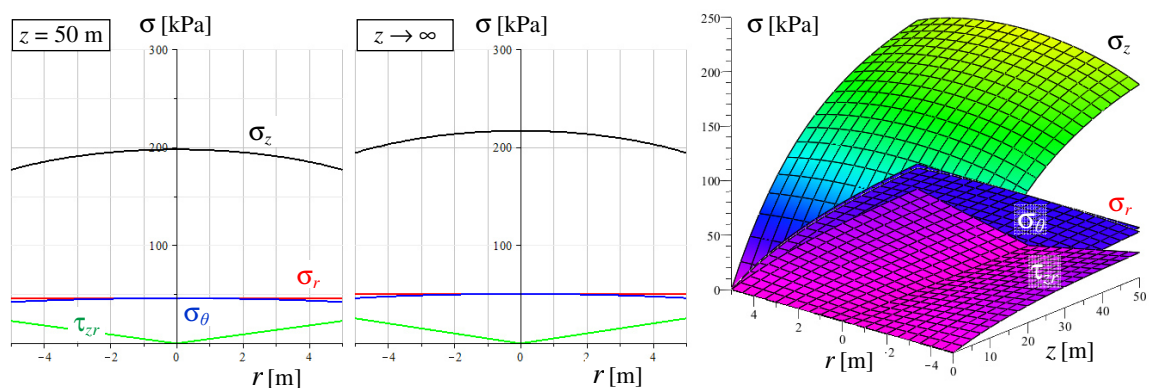
3D prikazi konturnih radijalnih napona, σ_{rR} i σ_{r0} u zrnastom materijalu u kružnoj ćeliji, u funkciji dubine materijala z i koeficijenta trenja o zid ćelije μ_w , za vrednosti koeficijenata unutrašnjeg trenja $\mu_i = 0.6, 0.7$ i 0.8 , dati su na sl. 224 i sl. 225, respektivno.

Walker/Walters-ov postupak

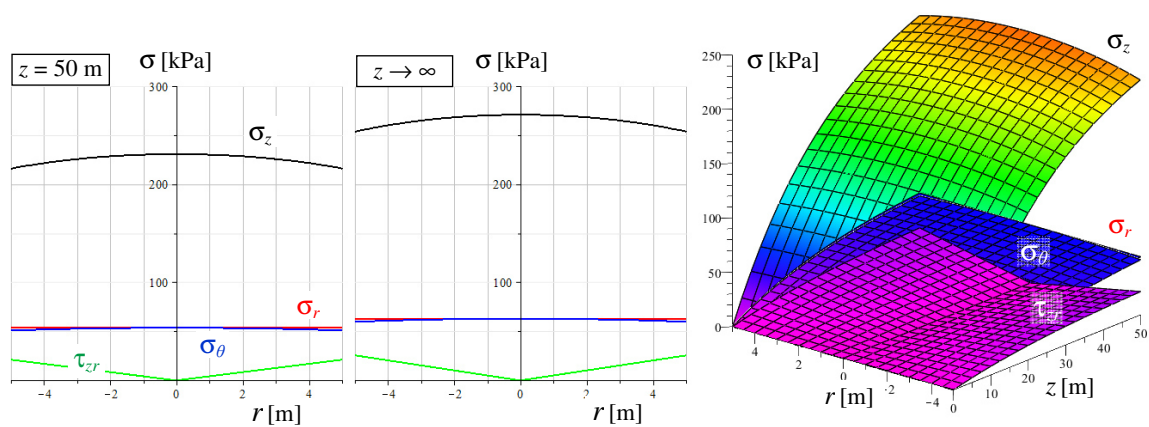
(a) $\mu_i = 0.80$ i $\mu_w = 0.60$



(b) $\mu_i = 0.80$ i $\mu_w = 0.50$



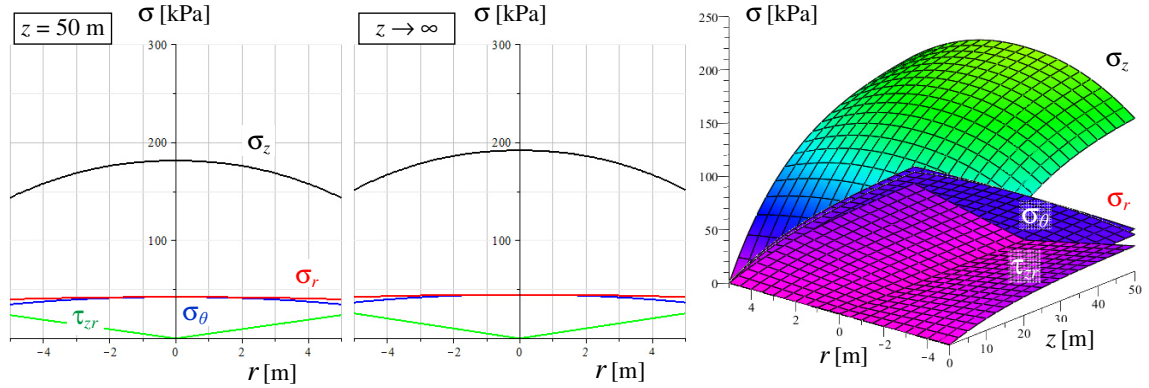
(c) $\mu_i = 0.80$ i $\mu_w = 0.40$



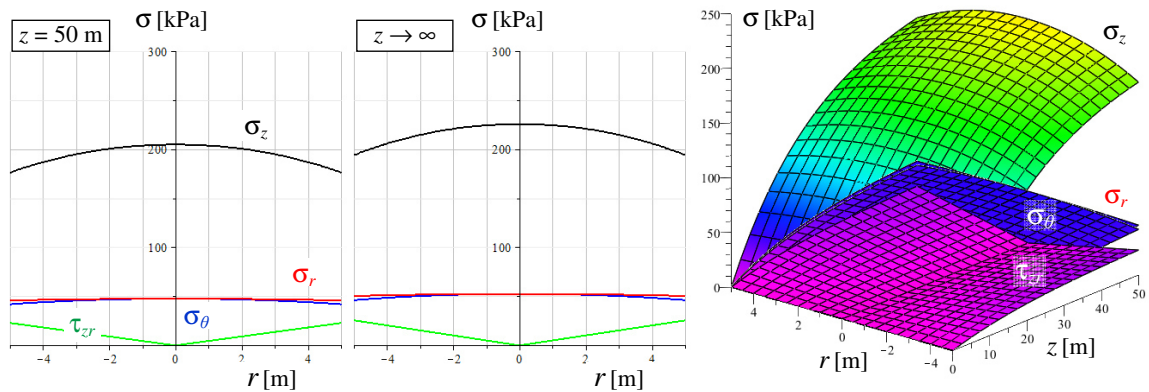
Sl. 216 Dijagrami napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu: $\mu_i = 0.80$ konstantno uz variranje vrednosti $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (primena Walker/Walters-ovog postupka).

II-3Dr postupak

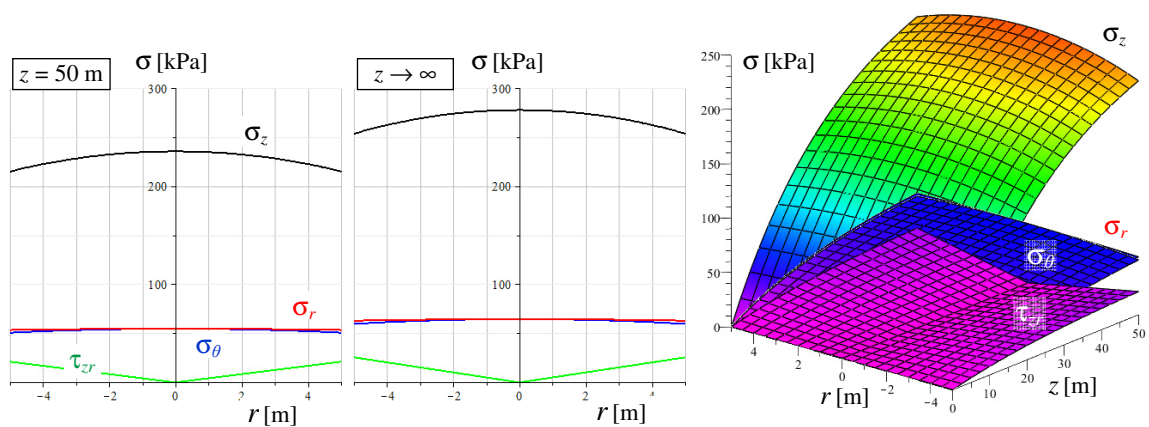
(a) $\mu_i = 0.80$ i $\mu_w = 0.60$ ($a = 2.14695$)



(b) $\mu_i = 0.80$ i $\mu_w = 0.50$ ($a = 2.08399$)



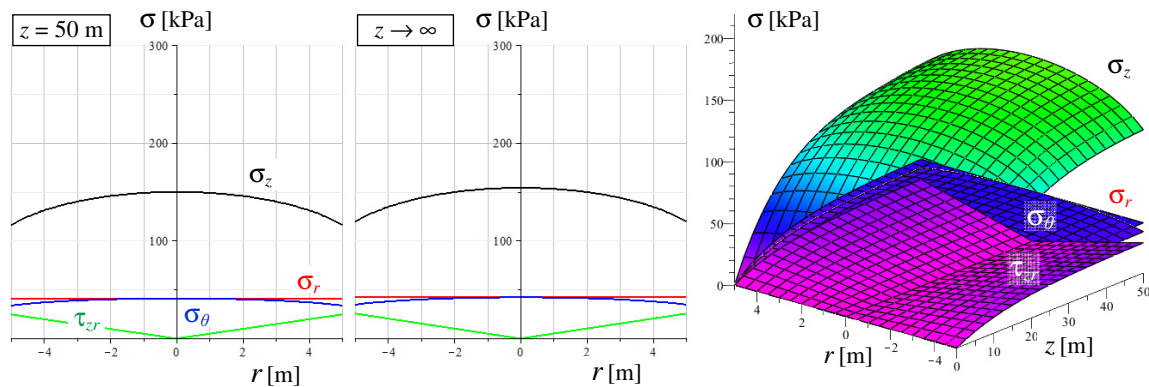
(c) $\mu_i = 0.80$ i $\mu_w = 0.40$ ($a = 2.04704$)



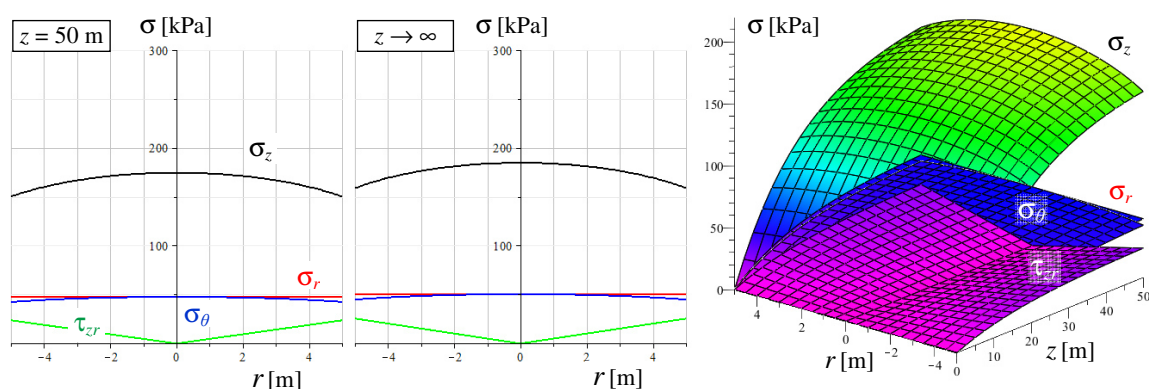
Sl. 217 Dijagrami napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu: $\mu_i = 0.80$ konstantno uz variranje vrednosti $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (primena II-3Dr postupka).

Walker/Walters-ov postupak

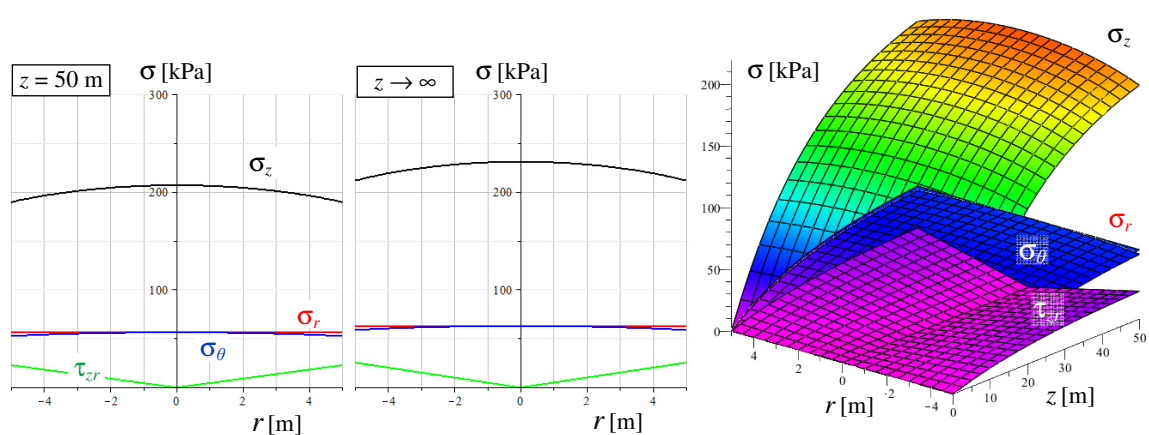
(a) $\mu_i = 0.70$ i $\mu_w = 0.60$



(b) $\mu_i = 0.70$ i $\mu_w = 0.50$



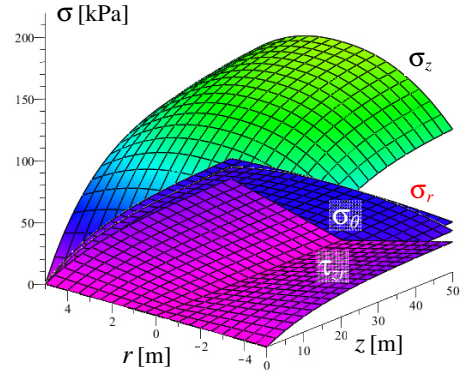
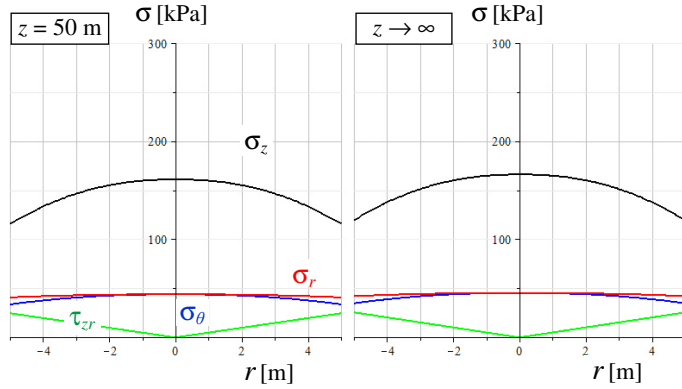
(c) $\mu_i = 0.70$ i $\mu_w = 0.40$



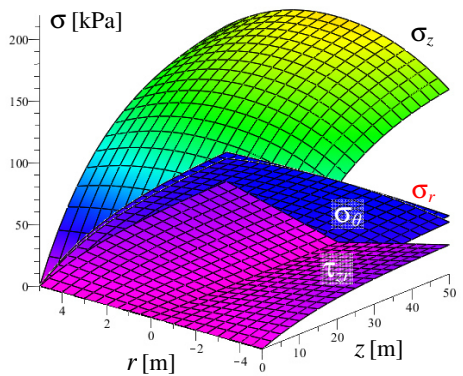
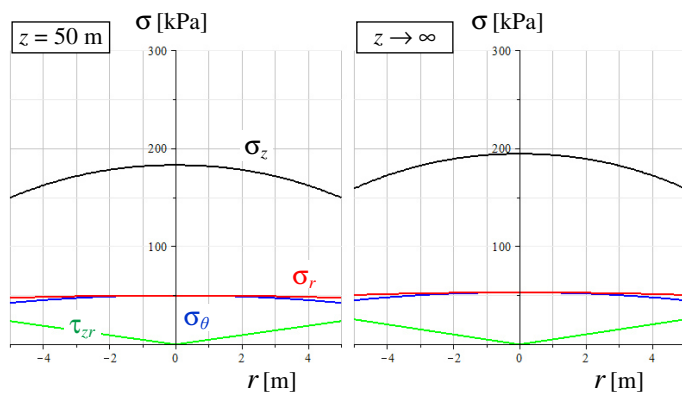
Sl. 218 Dijagrami napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu: $\mu_i = 0.70$ konstantno uz variranje vrednosti $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (primena Walker/Walters-ovog postupka).

II-3Dr postupak

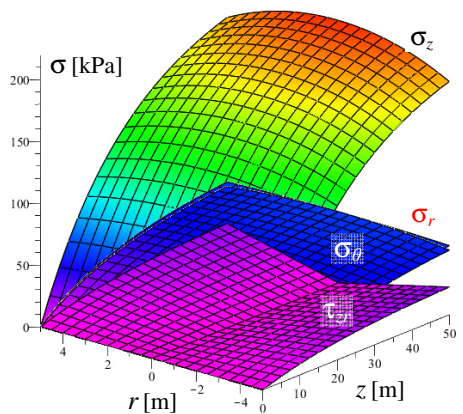
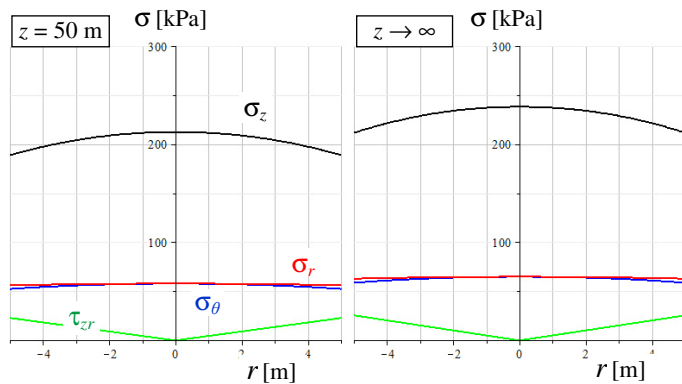
(a) $\mu_i = 0.70$ i $\mu_w = 0.60$ ($a = 2.25263$)



(b) $\mu_i = 0.70$ i $\mu_w = 0.50$ ($a = 2.12798$)



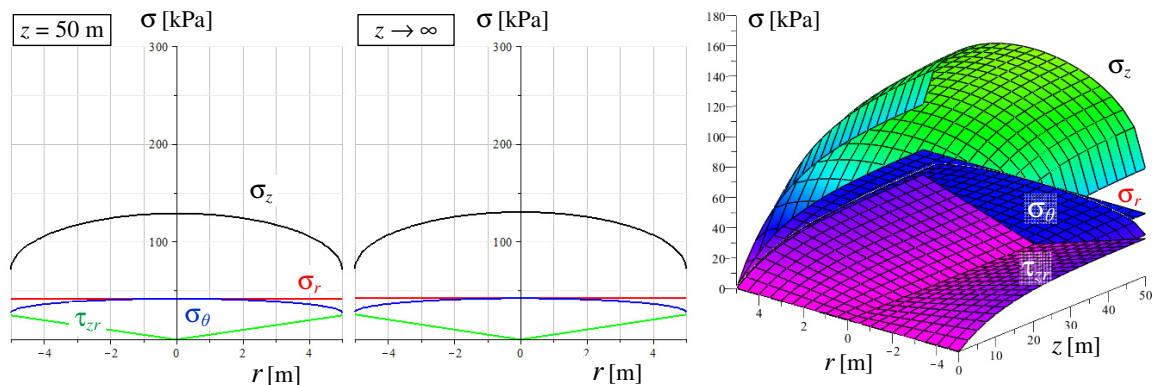
(c) $\mu_i = 0.70$ i $\mu_w = 0.40$ ($a = 2.06769$)



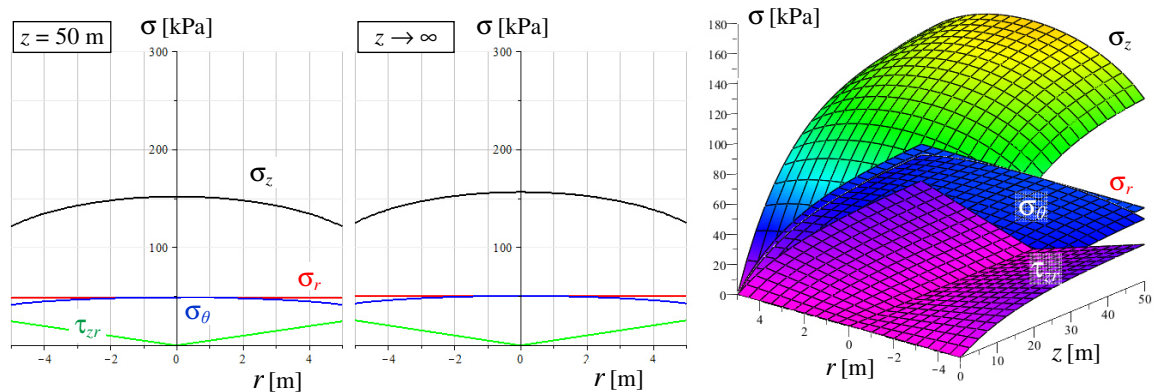
Sl. 219 Dijagrami napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu: $\mu_i = 0.70$ konstantno uz variranje vrednosti $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (primena II-3Dr postupka).

Walker/Walters-ov postupak

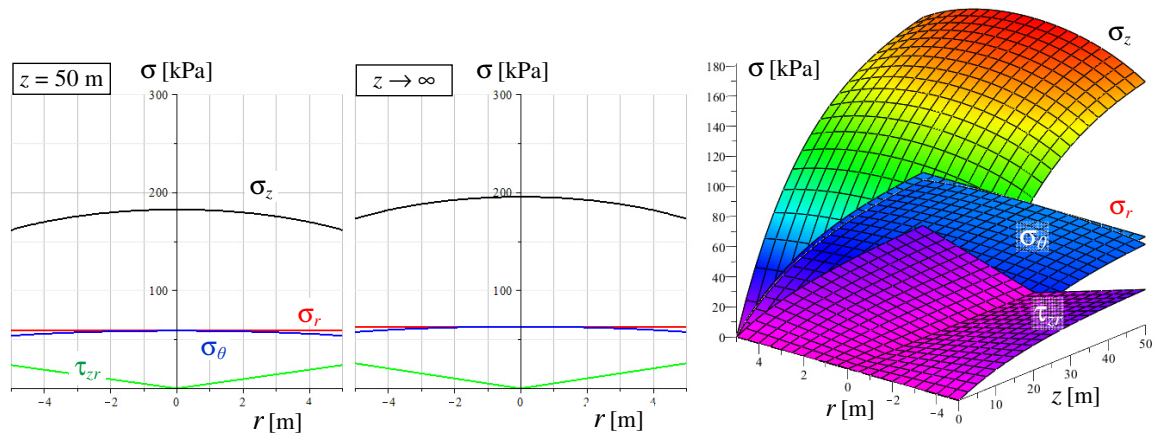
(a) $\mu_i = 0.60$ i $\mu_w = 0.60$



(b) $\mu_i = 0.60$ i $\mu_w = 0.50$



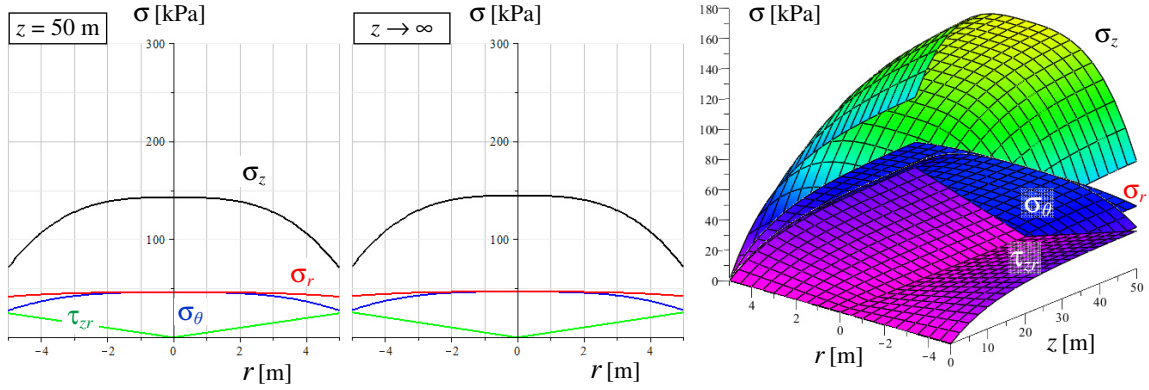
(c) $\mu_i = 0.60$ i $\mu_w = 0.40$



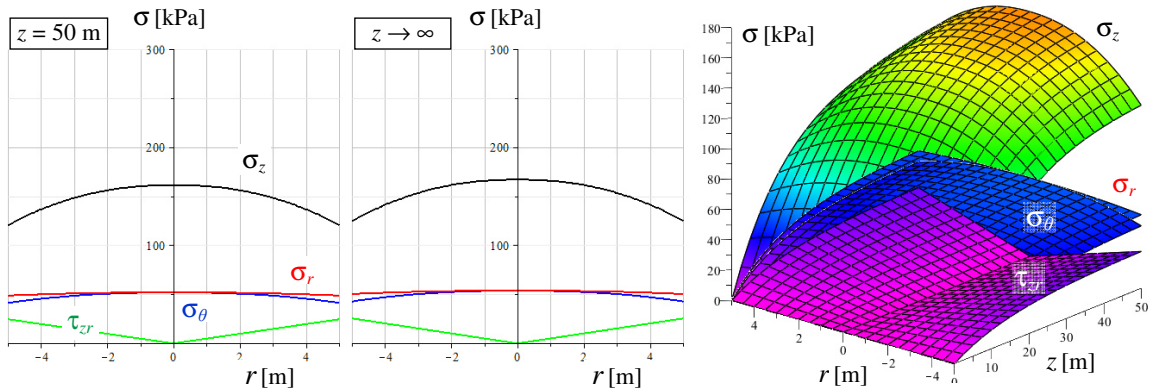
Sl. 220 Dijagrami napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu: $\mu_i = 0.60$ konstantno uz variranje vrednosti $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (primena Walker/Walters-ovog postupka).

II-3Dr postupak

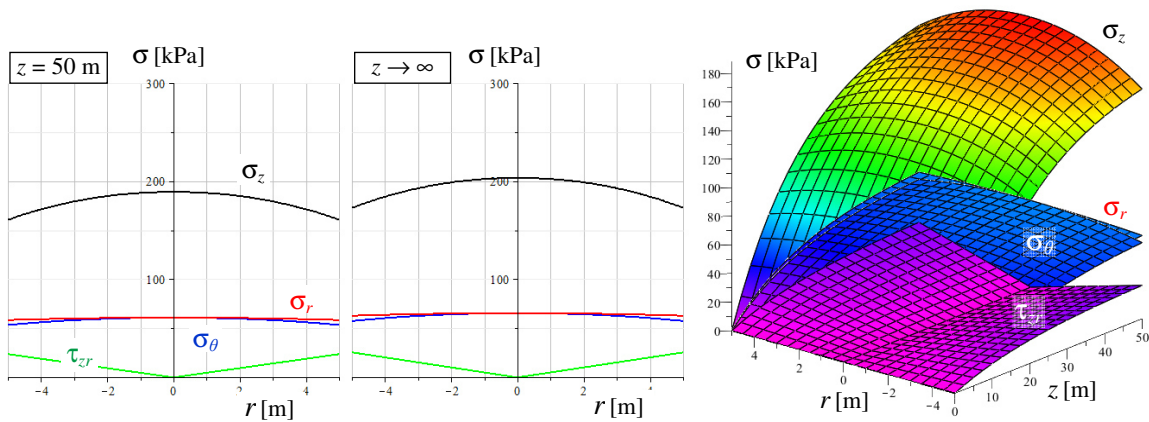
(a) $\mu_i = 0.60$ i $\mu_w = 0.60$ ($a = 3.09198$)



(b) $\mu_i = 0.60$ i $\mu_w = 0.50$ ($a = 2.22871$)



(c) $\mu_i = 0.60$ i $\mu_w = 0.40$ ($a = 2.10674$)



Sl. 221 Dijagrami napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu: $\mu_i = 0.60$ konstantno uz variranje vrednosti $\mu_w = 0.60, 0.50$ i 0.40 (primena II-3Dr postupka).

Tabela 63. Walker/Walters-ov postupak - vrednosti konturnih vertikalnih napona u zavisnosti od dubine z , pri variranju parametara μ_i i μ_w .

Walker/Walters-ov postupak		$\mu_i = 0.80$		$\mu_i = 0.70$		$\mu_i = 0.60$	
		σ_{zR}	σ_{z0}	σ_{zR}	σ_{z0}	σ_{zR}	σ_{z0}
$\mu_w = 0.60$	$z = 10$ m	68.271	81.298	61.350	79.125	42.664	77.377
	$z = 20$ m	105.770	125.954	91.118	117.517	59.930	108.690
	$z = 50$ m	143.897	171.356	115.971	149.571	70.889	128.565
	$z \rightarrow \infty$	151.470	180.375	119.176	153.705	71.667	129.976
$\mu_w = 0.50$	$z = 10$ m	74.689	83.343	69.899	81.187	63.079	78.911
	$z = 20$ m	120.620	134.595	109.030	126.639	94.244	117.898
	$z = 50$ m	176.916	197.414	150.067	174.303	121.008	151.380
	$z \rightarrow \infty$	193.975	216.450	158.800	184.446	124.678	155.971
$\mu_w = 0.40$	$z = 10$ m	80.354	85.795	76.860	83.825	72.296	81.620
	$z = 20$ m	135.228	144.384	125.776	137.173	114.326	129.071
	$z = 50$ m	215.769	230.378	189.329	206.485	161.224	182.017
	$z \rightarrow \infty$	253.405	270.562	211.402	230.557	172.692	194.964

Tabela 64. Walker/Walters-ov postupak - vrednosti konturnih radialnih napona u zavisnosti od dubine z , pri variranju parametara μ_i i μ_w .

Walker/Walters-ov postupak		$\mu_i = 0.80$		$\mu_i = 0.70$		$\mu_i = 0.60$	
		σ_{rR}	σ_{r0}	σ_{rR}	σ_{r0}	σ_{rR}	σ_{r0}
$\mu_w = 0.60$	$z = 10$ m	18.780		21.449		24.805	
	$z = 20$ m	29.095		31.857		34.843	
	$z = 50$ m	39.583		40.546		41.214	
	$z \rightarrow \infty$			41.667			
$\mu_w = 0.50$	$z = 10$ m	19.252		22.008		25.297	
	$z = 20$ m	31.091		34.329		37.795	
	$z = 50$ m	45.603		47.250		48.528	
	$z \rightarrow \infty$			50.000			
$\mu_w = 0.40$	$z = 10$ m	19.819		22.723		26.165	
	$z = 20$ m	33.353		37.185		41.376	
	$z = 50$ m	53.217		55.974		58.349	
	$z \rightarrow \infty$			62.500			

Dijagrami napona kod primene Walker/Walters-ovog postupka prikazani su na sl. 216, sl. 218 i sl. 220, a konturne vrednosti napona su date u tabeli 63 (za vertikalne napone) i tabeli 64 (za radialne napone). Dijagrami napona kod primene II-3Dr postupka (sa primenom približne vrednosti eksponenta a), prikazani su na sl. 217, sl. 219 i sl. 221, a odgovarajuće vrednosti konturnih napona su date u tabeli 65 (za vertikalne napone) i tabeli 66 (za radialne napone).

Tabela 65. II-3Dr postupak - vrednosti konturnih vertikalnih napona u zavisnosti od dubine z , pri variranju parametara μ_i i μ_w .

II-3Dr postupak		$\mu_i = 0.80$		$\mu_i = 0.70$		$\mu_i = 0.60$	
		σ_{zR}	σ_{z0}	σ_{zR}	σ_{z0}	σ_{zR}	σ_{z0}
$\mu_w = 0.60$	$z = 10$ m	66.753	84.311	59.707	83.048	41.460	83.454
	$z = 20$ m	104.088	131.466	89.501	124.489	58.935	118.629
	$z = 50$ m	143.180	180.841	115.489	160.636	70.713	142.338
	$z \rightarrow \infty$	151.470	191.312	119.176	165.764	71.667	144.257
$\mu_w = 0.50$	$z = 10$ m	73.512	85.349	68.568	83.736	61.597	82.310
	$z = 20$ m	119.164	138.353	107.529	131.316	92.762	123.956
	$z = 50$ m	176.057	204.407	149.394	182.441	120.544	161.080
	$z \rightarrow \infty$	193.975	225.211	158.800	193.927	124.678	166.604
$\mu_w = 0.40$	$z = 10$ m	79.522	87.043	75.897	85.391	71.175	83.654
	$z = 20$ m	134.090	146.771	124.545	140.125	113.015	132.830
	$z = 50$ m	214.856	235.176	188.528	212.111	160.569	188.721
	$z \rightarrow \infty$	253.405	277.371	211.402	237.846	172.692	202.970

Tabela 66. II-3Dr postupak - vrednosti konturnih radijalnih napona u zavisnosti od dubine z , pri variranju parametara μ_i i μ_w .

II-3Dr postupak		$\mu_i = 0.80$		$\mu_i = 0.70$		$\mu_i = 0.60$	
		σ_{rR}	σ_{r0}	σ_{rR}	σ_{r0}	σ_{rR}	σ_{r0}
$\mu_w = 0.60$	$z = 10$ m	18.362	19.476	20.875	22.513	24.105	26.753
	$z = 20$ m	28.633	30.369	31.292	33.747	34.264	38.029
	$z = 50$ m	39.386	41.774	40.378	43.545	41.112	45.629
	$z \rightarrow \infty$	41.667	44.193	41.667	44.936	41.667	46.244
$\mu_w = 0.50$	$z = 10$ m	18.949	19.716	21.589	22.699	24.702	26.386
	$z = 20$ m	30.716	31.960	33.857	35.597	37.201	39.737
	$z = 50$ m	45.381	47.218	47.038	49.456	48.342	51.638
	$z \rightarrow \infty$	50.000	52.024	50.000	52.570	50.000	53.408
$\mu_w = 0.40$	$z = 10$ m	19.613	20.107	22.439	23.148	25.759	26.817
	$z = 20$ m	33.072	33.904	36.821	37.985	40.902	42.581
	$z = 50$ m	52.992	54.326	55.737	57.499	58.112	60.499
	$z \rightarrow \infty$	62.500	64.073	62.500	64.476	62.500	65.066

Na osnovu prikazanih dijagrama i rezultata u tabelama, za dati opseg promene parametara μ_i i μ_w , u analizi stanja napona prema Walker/Walters-ovom postupku i II-3Dr postupku (sa primenom približne vrednosti za a), mogu se formulisati sledeći zaključci:

- Rezultati analiza kod primene navedenih postupaka proračuna su približno jednaki, pri čemu su kod primene Walker/Walters-ovog postupka radijalni naponi konstantni u

preseku (kako je i pretpostavljeno kod formiranja ovog postupka), dok su radijalni naponi kod II-3Dr postupka promenljivi u preseku ćelije.

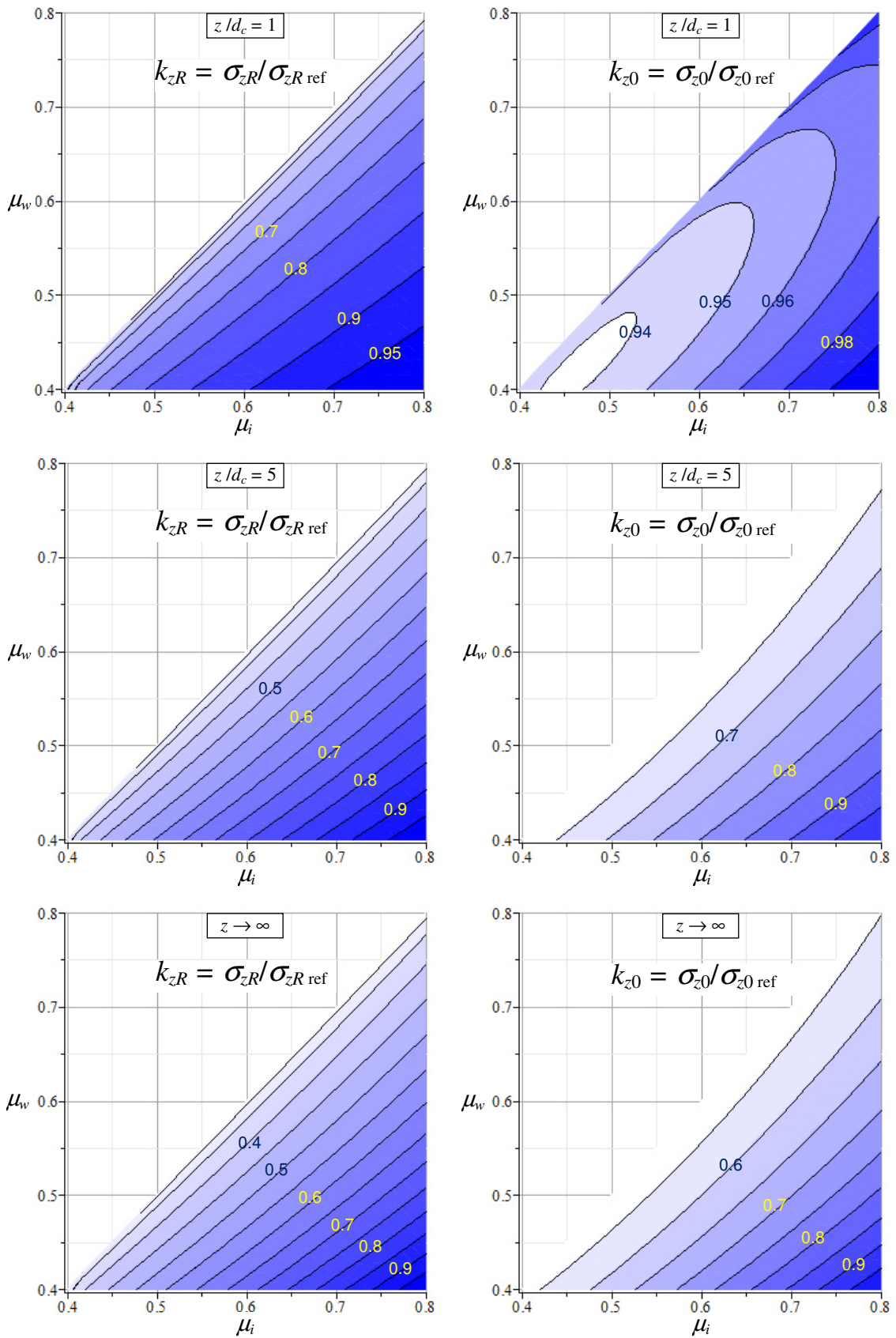
- Kod aktivnog stanja napona materijala u ćeliji, pri primeni II-3Dr postupka, vrednosti konturnih napona do zida su manje od odgovarajućih vrednosti napona u centralnoj osi silosa, kako kod dijagrama vertikalnih napona, tako i kod dijagrama radijalnih napona. Ovo je slučaj i kod vertikalnih napona prema Walker/Walters-ovom postupku.
- Kada je μ_i konstantno, a opada vrednost koeficijenta μ_w dolazi do relativnog povećanja radijalnih i vertikalnih napona u preseku ćelije na posmatranoj dubini materijala.
- Kada je μ_w konstantno, a opada vrednost koeficijenta μ_i (što odgovara povećanju odnosa napona K), dolazi do relativnog povećanja radijalnih napona i relativnog smanjenja vertikalnih napona u preseku ćelije na konkretnoj dubini materijala. U ovom slučaju, kod asimptotskog stanja radijalnih napona ($z \rightarrow \infty$), prema Walker/Walters-ovom postupku, konstantni su radijalni naponi, a kod primene II-3Dr postupka, konstantni su konturni radijalni naponi do zida ćelije.

Tabela 67. Odstupanja Walker/Walters-ovog postupka od II-3Dr postupaka za radijalne i vertikalne napone u zavisnosti od dubine z pri variranju parametara μ_i i μ_w .

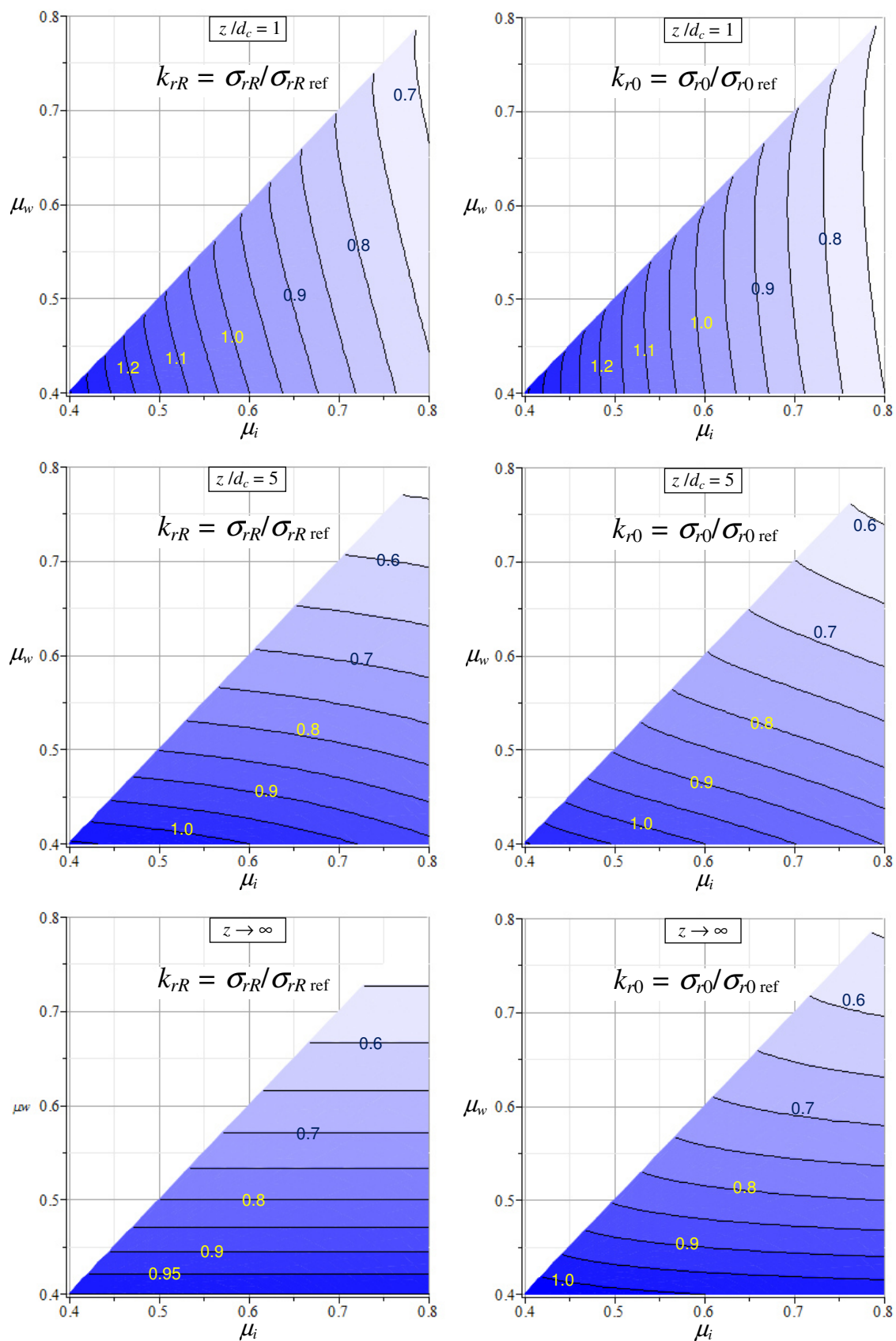
$\frac{\sigma_{Walker/Walters} - \sigma_{II-3Dr}}{\sigma_{II-3Dr}}$		$\mu_i = 0.80$		$\mu_i = 0.70$		$\mu_i = 0.60$	
		$\Delta z a \sigma_{rR}$	$\Delta z a \sigma_{r0}$	$\Delta z a \sigma_{rR}$	$\Delta z a \sigma_{r0}$	$\Delta z a \sigma_{rR}$	$\Delta z a \sigma_{r0}$
		$\Delta z a \sigma_{zR}$	$\Delta z a \sigma_{z0}$	$\Delta z a \sigma_{zR}$	$\Delta z a \sigma_{z0}$	$\Delta z a \sigma_{zR}$	$\Delta z a \sigma_{z0}$
$\mu_w = 0.60$	$z = 10$ m	2.27%	-3.57%	2.75%	-4.72%	2.90%	-7.28%
	$z = 20$ m	1.62%	-4.19%	1.81%	-5.60%	1.69%	-8.38%
	$z = 50$ m	0.50%	-5.24%	0.42%	-6.89%	0.25%	-9.68%
	$z \rightarrow \infty$	0.00%	-5.72%	0.00%	-7.27%	0.00%	-9.90%
$\mu_w = 0.50$	$z = 10$ m	1.60%	-2.35%	1.94%	-3.04%	2.41%	-4.13%
	$z = 20$ m	1.22%	-2.72%	1.40%	-3.56%	1.60%	-4.89%
	$z = 50$ m	0.49%	-3.42%	0.45%	-4.46%	0.38%	-6.02%
	$z \rightarrow \infty$	0.00%	-3.89%	0.00%	-4.89%	0.00%	-6.38%
$\mu_w = 0.40$	$z = 10$ m	1.05%	-1.43%	1.27%	-1.83%	1.57%	-2.43%
	$z = 20$ m	0.85%	-1.63%	0.99%	-2.11%	1.16%	-2.83%
	$z = 50$ m	0.42%	-2.04%	0.42%	-2.65%	0.41%	-3.55%
	$z \rightarrow \infty$	0.00%	-2.45%	0.00%	-3.06%	0.00%	-3.94%

U tabeli 67, prikazana su odstupanja rezultata određenih prema Walker/Walters-ovom postupku u odnosu na rezultate kod primene II-3Dr postupka. Odstupanja su data u %, i odnose se na konturne vrednosti radijalnih i vertikalnih napona u zavisnosti od dubine z , pri variranju vrednosti parametara μ_i i μ_w . Odstupanja su jednaka za konturne vertikalne i radijalne napone, s obzirom da je $\sigma_{rR} = K_R \cdot \sigma_{zR}$ i $\sigma_{r0} = K_0 \cdot \sigma_{z0}$, pri čemu su koeficijenti odnosa napona K_R i K_0 konstante.

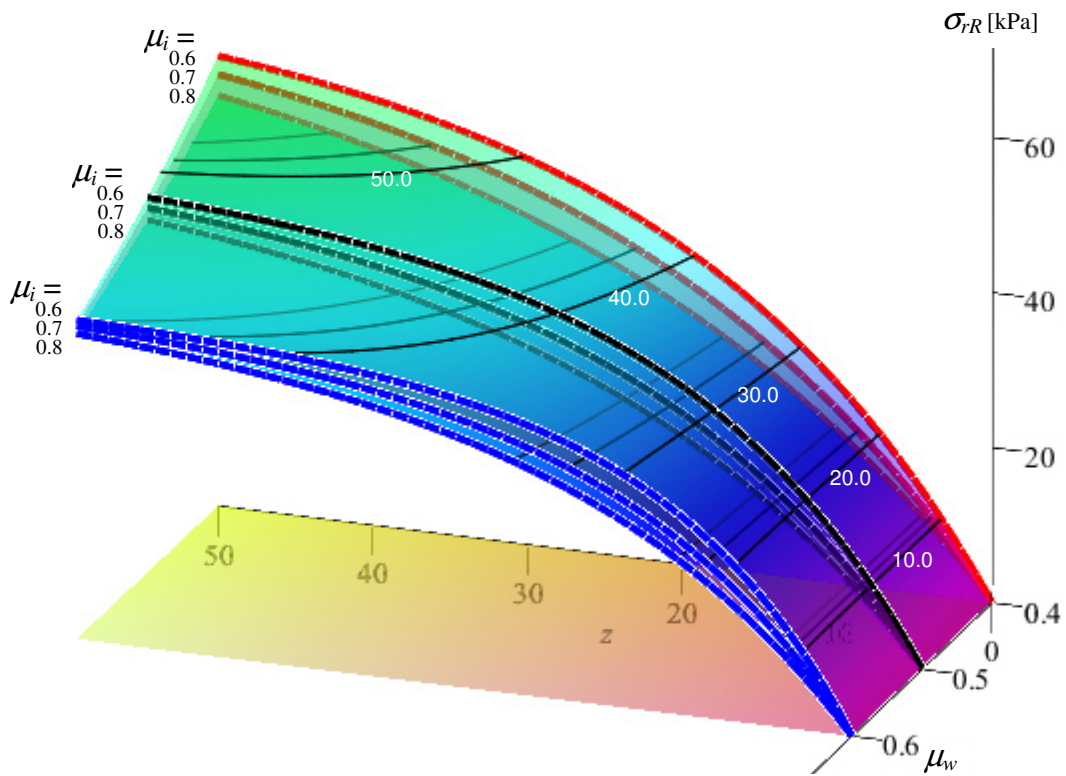
Prema tabeli 67, najveće odstupanje za σ_{rR} i σ_{zR} , iznosi 2.9% i odnosi se na najveće vrednosti parametara u tabeli $\mu_i = 0.60$ i $\mu_w = 0.60$, i dubinu $z = 10$ m. Ova odstupanja se smanjuju sa porastom dubine z i kod većih vrednosti za μ_i i manjih vrednosti za μ_w , a anuliraju se u asimptotskom slučaju kada $z \rightarrow \infty$.



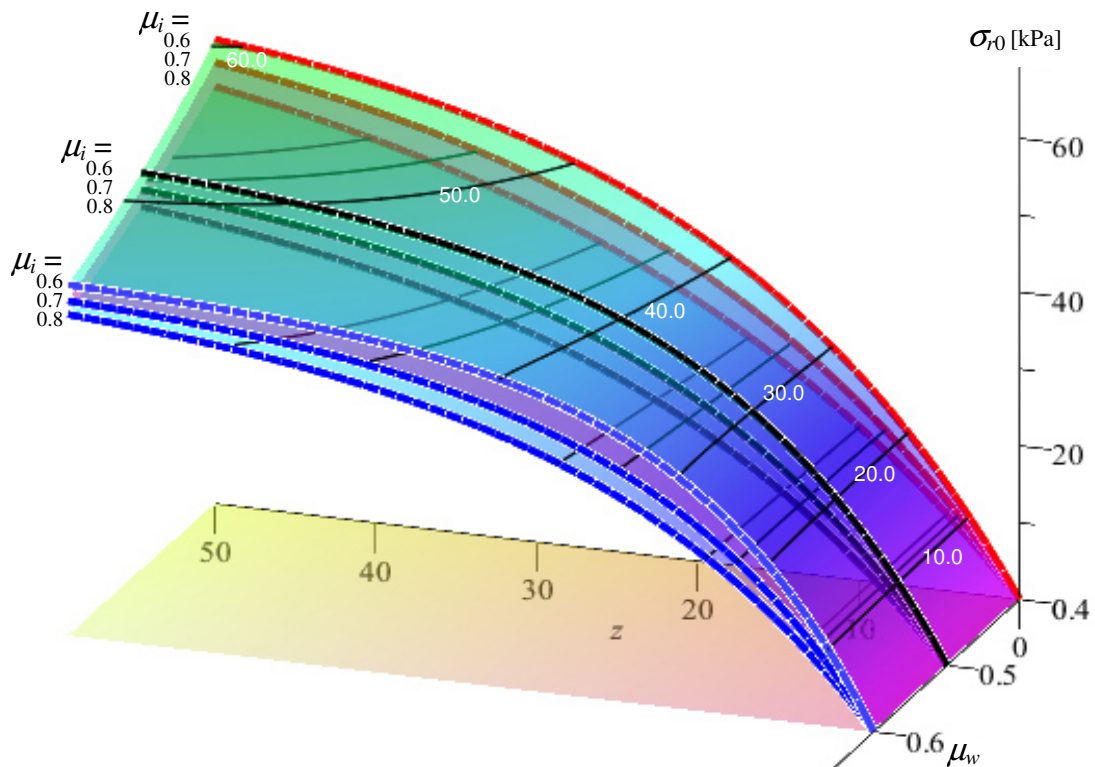
Sl. 222 Dijagrami odnosa vertikalnih napona $\sigma_{zR}/\sigma_{zR \text{ ref}}$ i $\sigma_{z0}/\sigma_{z0 \text{ ref}}$, u funkciji parametara μ_i i μ_w (parametri referentnih napona su $\mu_i = 0.8$ i $\mu_w = 0.4$).



Sl. 223 Dijagrami odnosa radialnih napona $\sigma_{rR}/\sigma_{rR \text{ ref}}$ i $\sigma_{r0}/\sigma_{r0 \text{ ref}}$ u funkciji parametara μ_i i μ_w (parametri referentnih napona su $\mu_i = 0.6$ i $\mu_w = 0.4$).



Sl. 224 3D prikaz radijalnih napona σ_{rR} do zida ćelije u funkciji z i μ_w , sa variranjem μ_i (primena II-3Dr postupka).



Sl. 225 3D prikaz radijalnih napona σ_{r0} u osi silosa u funkciji z i μ_w , sa variranjem μ_i (primena II-3Dr postupka).

Prema tabeli 67, najveće odstupanje za σ_{r0} i σ_{z0} , iznosi -9.9% i odnosi se na vrednosti parametara u tabeli $\mu_i = 0.60$ i $\mu_w = 0.60$, i dubinu $z \rightarrow \infty$. Ova odstupanja se smanjuju sa smanjenjem dubine z i kod većih vrednosti za μ_i i manjih vrednosti za μ_w .

Na sl. 222 i sl. 223 prikazani su dijagrami koeficijenata k_{zR} i k_{z0} , odnosno k_{rR} i k_{r0} , respektivno. Ovi koeficijenti predstavljaju normalizovane vrednosti konturnih napona, u funkciji parametara μ_i i μ_w . Dijagrami koeficijenata k su dati za širi opseg parametara μ_i i μ_w , od 0.4 do 0.8, u odnosu na variranje ovih parametara u tabelama. Dijagrami se odnose na vrednosti $\mu_w \leq \mu_i$, kako bi se osiguralo klizanje materijala po zidu.

Analizom dijagrama na ovim slikama, određuju se sledeći zaključci:

- prema opštem sagledavanju dijagrama na sl. 222, veće vrednosti koeficijenata k_{zR} i k_{z0} , odnosno konturnih napona σ_{zR} i σ_{z0} napona, se određuju za manje vrednosti μ_w i veće vrednosti μ_i (odgovara manjim vrednostima K);
- izuzetak u odnosu na prethodni slučaj, je manja oblast dijagrama k_{z0} na dubini $z/d_c = 1$, u oblasti parametra $\mu_w = (\approx 0.97 \div 1.0) \cdot \mu_i$, gde koeficijenti k_{z0} mogu biti relativno manji pri promenama parametara navedenim u prethodnoj alineji;
- prema opštem sagledavanju dijagrama na sl. 223, veće vrednosti koeficijenata k_{rR} i k_{r0} , odnosno konturnih napona σ_{rR} i σ_{r0} napona, se određuju za manje vrednosti μ_w i manje vrednosti μ_i (odgovara većim vrednostima K);
- izuzetak u odnosu na prethodni slučaj, je vrlo mala oblast dijagrama k_{rR} pri dubini $z/d_c = 1$, u oblasti parametra $\mu_w \approx \mu_i$, gde koeficijenti k_{rR} mogu biti relativno manji pri promeni parametara navedenim u prethodnom slučaju; kao i oblast dijagrama k_{r0} pri dubini $z/d_c = 1$, u oblasti parametra $\mu_w = (\approx 0.8 \div 1.0) \cdot \mu_i$, gde koeficijenti k_{r0} mogu biti relativno manji; i
- kod asimptotskog stanja napona, radijalni naponi do zida ćelije, σ_{rR} , nezavisni su od vrednosti parametra μ_i (ovo sledi i iz teorijske analize asimptotskog stanja napona).

Primer primene: Za $d_c = 10$ m i $z = h_c = 50$ m, je $z/d_c = 5$. Za prvi set podataka $\mu_i = 0.6$ i $\mu_w = 0.4$, prema sl. 223 je $k_{rR} = 1.0$ ($= k_1$). Za drugi set podataka $\mu_i = 0.6$ i $\mu_w = 0.6$, prema sl. 223 se određuje $k_{rR} \approx 0.71$ ($= k_2$). Promena odnosa radijalnih napona $\sigma_{rR}/\sigma_{rR \text{ ref}}$ pri promeni parametra je $0.71/1.00 = 0.71$ ($= k_2/k_1$), a razlika kod promene odnosa je -29%. Za $\gamma = 10$ kN/m³ primer odgovara analiziranim slučajevima prikazanim u tabeli 66. Prema ovoj tabeli, za prvi set podataka je $\sigma_{rR} = 58.112$ kN/m², a za drugi set je $\sigma_{rR} = 41.112$ kN/m². Odnos napona pri promeni parametra je $41.112/58.112 = 0.707$, tako da se radijalni napon do zida ćelije smanjuje za 29.3% pri promeni navedenih parametara.

Osnovni zaključak iz parametarske analize

Na osnovu prethodne analize, trend promene napona u zavisnosti od promene parametara μ_i i μ_w , kao pojedinačne promene jednog parametra ili simulatane promene oba parametra, se može prikazati na sledeći način:

- napon $\sigma_z \uparrow$, u slučaju da $\mu_w \downarrow$ i $\mu_i \uparrow$ (tj. u slučaju da $\mu_w \downarrow$ i $K \downarrow$), i
- napon $\sigma_r \uparrow$, u slučaju da $\mu_w \downarrow$ i $\mu_i \downarrow$ (tj. u slučaju da $\mu_w \downarrow$ i $K \uparrow$).

Izuzetak su manje oblasti kod dijagrama k_{z0} , k_{rR} i k_{r0} , za relativno male dubine z , što predstavlja specifičnost kod primene II-3Dr postupka u prikazanoj parametarskoj analizi. Kada bi se u parametarskoj analizi koristio *Janssen*-ov postupak, takvi izuzeci se ne bi pojavili. 3D prikazi konturnih radijalnih napona, na sl. 224 i sl. 225, u potpunosti ilustruju prethodno utvrđenu zavisnost napona σ_r od parametara μ_w i μ_i .

6 ZAVRŠNE NAPOMENE I ZAKLJUČCI

U ovom poglavlju su date opšte napomene i istaknuti zaključci rada koji se baziraju na rezultatima ovde sprovedenih teorijskih i numeričkih analiza. Na kraju su ilustrovane mogućnosti primene razmatranih i predloženih postupaka proračuna u ovom radu i naznačeni pravci daljih istraživanja u ovoj oblasti.

6.1 Opšte napomene

Primenom savremenih računarskih programa za statičku analizu konstrukcija, silosne konstrukcije se mogu vrlo detaljno analizirati po pitanju određivanja statičkih uticaja i deformacija sistema. Međutim, na drugoj strani, stoji činjenica da je malo poznata priroda i karakter opterećenja koje uskladišteni zrnasti materijali proizvode u ćelijama silosa, a prema kojima se sprovodi statička analiza.

Opterećenja od dejstva uskladištenog zrnastog materijala na zidu ćelije, se u većini tehničkih propisa, kao i evropskim normama EN 1991-4:2006 [38], i dalje uzimaju prema *Janssen*-ovoj teoriji iz 1895. god., uz odgovarajuće korekcije proračunskih izraza. U osnovi *Janssen*-ove teorije deo težine zrnastog materijala se prenosi na zidove trenjem zrna o zidove ćelije. Sa većom dubinom, bočni pritisak na zidove ćelije se povećava, kao i odgovarajuće opterećenje od trenja. Pri većim dubinama materijala, povećanje ukupne težine uskladištenog materijala se u potpunosti prihvata trenjem o zidove ćelije, pri čemu vertikalni i bočni horizontalni pritisak teže odgovarajućim asimptotskim vrednostima.

U praksi je dolazilo do brojnih slučajeva oštećenja armiranobetonskih (AB) zidova ćelija, što je stalno pokretalo interes za detaljnije sagledavanje procene opterećenja u ćelijama silosa. Razlog za pojavu ovih oštećenja je pronađen u povećanju opterećenja pri pražnjenju, što je za posledicu imalo uvođenje korekcionih faktora za povećanje opterećenja. Tek je kasnije primećeno da kod pražnjenja materijala iz silosa, postoje različiti tipovi proticanja materijala u ćeliji i levku silosa.

Sa aspekta raspodele i veličine opterećenja od dejstva zrnastog materijala, bitno je razlikovati stanje punjenja i mirovanja mase, od stanja pražnjenja. Pritisci pri punjenju ćelija zrnastim materijalom uglavnom zavise od svojstava materijala i geometrije silosa. Međutim, pritisci pri pražnjenju zavise i od vrsta protoka koji se javlja za vreme pražnjenja uskladištenog materijala.

Uticao geometrije ćelije na veličinu opterećenja je vrlo važan, a oblik ćelije utiče i na vrstu toka materijala pri pražnjenju. Kod većih osnova ćelija i veće visine uskladištenog materijala povećava se i opterećenje na zidove ćelije od zrnastog materijala.

Prema sadašnjem stanju stvari, pritisci koji deluju na zidove ćelije su veći kod silosa sa proticanjem ukupnom masom materijala, u odnosu na slučaj gde je proticanje materijala po jezgru. Silosi se uobičajeno projektuju na osnovu relativno većih opterećenja koja odgovaraju proticanju ukupnom masom, a u slučajevima kod kojih je zagarantovan protok materijala po jezgru, uzimaju se u račun relativno manji pritisci na zidove ćelije.

Pri pražnjenju uskladištenog materijala, dolazi do pojave neregularnih opterećenja usled prolamanja uslojenih svodova/kupola uskladištenog zrnastog materijala pri otpočinjanju i u toku pražnjenja. Usled toga se javljaju nesimetrična opterećenja, koja su u osnovi lokalnog karaktera i mogu se neočekivano pojaviti na nekom delu visine i površine zida ćelije. Ove neregularnosti su posledica heterogenosti zrnaste sredine i neujednačenosti karakteristika zidnih površina. U propisima se ovaj slučaj opterećenja, uvodi kao dodatno lokalno opterećenje koje deluje na relativno ograničenoj površini zida, i koje se može pojaviti na bilo kojem delu zida ćelije.

U radu su detaljnije razmatrana opterećenja u silosima prema EN 1991-4:2006 (EC1-4), a kod pojedinih pitanja i problema, uporedno su razmatrani sledeći propisi: naša tehnička uputstva TU 60 (1960) [310], ISO 11697:1990 [125] i SRPS (JUS) ISO 11697:1996 [291], ACI 313-77:1977 [3], ACI 313-97:1997 [5], AS 3774:1996 [14], EN 1991-4:2006 [38], DIN 1055-6:1987 [61], DIN 1055-6:2005 [62], SNBATI (1986) [288] i СНИП 2.10.05-85:1985 [370].

U okviru analize poznatih teorijskih postupaka i metoda za određivanje pritisaka na zidove ćelija od delovanja uskladištenog materijala detaljno su razmatrani analitički postupci za određivanje opterećenja u silosima, odnosno stanja napona, koji su formirani od strane sledećih istraživača: *Janssen-a* (1895) [130], *Гутьяр-a* (1935) prema ref. [82] i [358], braće *Reimbert* (1962) [244], *Pipatpongsa-a* i *Heng-a* (2010) [230], *Walker-a* (1966) [325] i *Walters-a* (1973) [328], *Li-a* i *Aubetrin-a* (2008) [168]. Ovi postupci se u osnovi odnose na analizu stanja napona u ćeliji silosa, odnosno određivanje opterećenja na zidu ćelije. Proračun opterećenja u levku je razmatran prema *Dabrowski-om* (*Rotter* (2008) [260]), s obzirom na to da je ovaj postupak primenjen u EN 1991-4:2006.

Kod analize stanja napona uskladištenog materijala u ćeliji silosa, primenjeno je granično stanje ravnoteže, na osnovama analize stanja napona prema *Ohde-u* (1951) [210] i *Nanninga-u* (1956) (prema [227]), gde se analizira problem asimptotskog stanja napona uskladištenog materijala kod 2D silosa (izdužene pravougaone ćelije), kao i na osnovu adekvatne analize kod 3D silosa (kružne ćelije) uz uvođenje *Walker-ovih* pretpostavki. Kod ovih analiza se uvodi *Mohr-Coulomb-ov* zakon loma materijala smicanjem.

Predmet istraživanja je delovanje i raspodela opterećenja od težine uskladištenog zrnastog materijala, u armiranobetonskim (AB) cilindričnim ćelijama silosa, uključujući dejstva na zidove ćelije silosa pri punjenju, mirovanju i pražnjenju zrnastog materijala. S obzirom da se opterećenje na zidovima dobija preko interakcije zida i zrnastog materijala u vidu kontaktnih napona, u radu se analizira stanje napona uskladištenog zrnastog materijala u ćeliji silosa. Na ovaj način, predmet istraživanja je formiranje relativno jednostavnih postupaka analize stanja napona materijala u ćeliji silosa. Pored analize stanja napona u silosima kružnih ćelija, analizirano je i ravno stanje napona kod ćelija sa izduženom pravougaonom osnovom. Ovaj slučaj je relativno jednostavniji za analizu, tako da je iskorišćen kao polazište pri formiranju i verifikaciji predloženih proračunskih postupaka.

Analiza uticaja uskladištenog zrnastog materijala se može tretirati primenom analitičkih, numeričkih ili simulacionih metoda. U radu su formirani postupci analize stanja napona materijala u ćeliji, koji se zasnivaju na primeni analitičkih metoda, kao što su metoda diferencijalnog sloja i metoda integralnih relacija. Kod ovih analiza se obuhvataju uticaji geometrijskih parametara silosa, visine punjenja ćelije sa zrnastim materijalom, kao i relevantne karakteristike uskladištenog materijala i zidova ćelije.

Kod analize stanja napona materijala u silosu, uvedena je podela na stanja pri punjenju, mirovanju i pražnjenju. Ovim stanjima odgovaraju koeficijenti bočnog pritiska K , koji se definišu kao koeficijenti aktivnog pritiska pri punjenju, mirovanju i pražnjenju materijala. Primena ovih koeficijenata K je data posebno za postupke sa konstantnim vertikalnim naponima, i posebno za postupke sa promenljivim vertikalnim naponima u preseku ćelije.

Pored toga, razmatrana je primena koeficijenata K , kod modifikovane analize pojave skokovitog opterećenja (*switch load*). Faktori natpritiska C_h koji slede iz ove analize su upoređeni sa faktorom C_h koji je uveden u EN 1991-4:2006 (EC1-4), pri čemu su na analiziranom primeru AB silosa upoređeni pritisci na zid ćelije prema predloženom teorijskom postupku i prema EC1-4.

Kod primena metode integralnih relacija u analizi stanja napona materijala u silosima, uvodi se mehanika neprekidne sredine uz primenu teorije plastičnosti pri definisanju ponašanja zrnastog materijala. Stanja napona uskladištenog materijala u silosu se analiziraju na osnovu graničnog stanja ravnoteže sa uvođenjem *Mohr-Coulomb*-ovog uslova loma materijala smicanjem. U ovom radu, metoda integralnih relacija je primenjena pri formiranju proračunskih postupaka za određivanje stanja napona u uskladištenom materijalu kod 2D silosa sa ćelijama pravougaone osnove, i kod 3Dr silosa sa ćelijama kružne osnove. Kod izbora oblika interpolacionih funkcija napona, u prikazanoj analizi, vodilo se računa da stanje napona u uskladištenom materijalu sa povećanjem dubine materijala u ćeliji silosa teži konačnom asimptotskom stanju napona. Kod analize 2D silosa, primenom metode integralnih relacija, formirano je ukupno četiri nova postupka proračuna stanja napona (postupci I-2D, II-2D, III-2D i IV-2D), a kod analize 3Dr silosa formirana su dva nova postupka proračuna (postupci I-3Dr i II-3Dr), kao i aproksimativni oblik drugog postupka (IIa-3Dr postupak). Postupci analize 2D silosa su poslužili za istraživanje primene polaznih pretpostavki, s obzirom da je problem stanja napona kod 3Dr silosa mnogo složeniji nego kod 2D silosa. Treći postupak kod 2D silosa (III-2D) se odnosi na primenu alternativnog oblika koeficijenta K , i jedinstvenog oblika interpolacione funkcije svih normalnih napona u materijalu. Ovaj postupak analize 2D silosa je razvijen na analognim pretpostavkama koje su uvedene u prvom postupku analize stanja napona materijala kod 3Dr silosa (I-3Dr).

U odnosu na I-3Dr postupak proračuna stanja napona uskladištenog materijala u 3Dr silosu, gde se uvode konturne funkcije vertikalne raspodele napona $Y_R(z)$ i $Y_0(z)$, kod II-3Dr postupka se uvodi jedna funkcija raspodele $Y(z)$, kako se postupak zasniva samo na uslovu ravnoteže vertikalnih sila na isečku diferencijalnog sloja materijala. Postupak II-3Dr analize stanja napona kod 3Dr silosa sa kružnim ćelijama je skoro jednake tačnosti sa I-3Dr postupkom, a po jednostavnosti je na nivou *Walker/Walters*-ovog postupka. Međutim, za razliku od *Walker/Walters*-ovog postupka, gde se koristi aproksimacija da su radialni naponi konstantni u preseku ćelije na dubini z , kod II-3Dr proračunskog postupka su uvedeni promenljivi radialni naponi u preseku ćelije.

Za asimptotsko stanje napona materijala u 2D silosu, teorijski egzaktno rešenje je prikazao *Ohde* (1951) [210], sa uvođenjem *Mohr-Coulomb*-ovog loma materijala smicanjem. Za odgovarajuće asimptotsko stanje napona materijala u 3Dr silosu još nije

određeno egzaktno analitičko rešenje. Zbog toga je analiza stanja napona kod 3Dr silosa relativno složenija. Asimptotsko stanje napona kod 3Dr silosa je, u ovom radu, određeno uvođenjem interpolacione stepene funkcije, gde se eksponent a , može odrediti putem numeričke integracije, ili primenom aproksimativnog teorijskog rešenja za promenljive radijalne napone. Formiranje postupaka proračuna, u ovoj disertaciji, na osnovu primene metode integralnih relacija, predstavlja teorijski doprinos analizi stanja napona u uskladištenom materijalu, odnosno određivanju opterećenja kod 2D i 3Dr silosa.

Na osnovu fomiranih postupaka analize stanja napona, u radu su analizirani uticaji pojedinih parametara na veličinu i raspored opterećenja od zrnastih materijala. Predloženi postupci proračuna su verifikovani na osnovu:

- komparativne analize rezultata dobijenih primenom predloženih postupaka i postupaka proračuna prema drugim autorima, kao i rezultata eksperimentalnih ispitivanja, i
- parametarske analize postupaka proračuna, pri variranju relevantnih parametara.

Detaljnija analiza opterećenja od delovanja uskladištenih materijala u silosima, treba da doprinese racionalnijem i ekonomičnijem projektovanju silosnih konstrukcija, i realnijoj proceni sugurnosti konstrukcije silosa.

Kao originalni teorijski doprinosi u ovom radu, navede se sledeći:

- Kod analize dodatnog lokalnog opterećenja, kod cilindričnih betonskih silosa, koje je uvedeno u EN 1991-4:2006 [38], uvedena je dekompozicija na osnovno lokalno opterećenje i dopunsko prstenasto opterećenje. Primenom približnih proračunskih izraza za određivanje uticaja od ovih opterećenja, mogu se odrediti statički uticaji u težištima lokalno opterećenih površina, sa greškom manjom od 5% u odnosu na rezultate statičke analize sa primenom metode konačnih elemenata.
- Formiran je predlog za novi oblik izraza za određivanje povećanog opterećenja p_{hae} , kod opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala, prema EN 1991-4:2006 [38] i DIN 1055-6 (2006) [62], koji zadovoljava uslov ravnoteže horizontalnih sila na svim dubinama z , a ne, kao u DIN-u, samo za $z \rightarrow \infty$.
- Formirana je aproksimativna teorijska analiza za procenu ekstremnih statičkih uticaja na zidu cilindričnog silosa, od delovanja nesimetričnog opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala.
- Kod *Janssen*-ovog postupka je data uporedna teorijska analiza uticaja nasipnog dela materijala (nasipne kupe kod kružnih ćelija), sa uvođenjem nadopterećenja od nasipnog dela materijala, i sa fiktivnim poravnanjem nasipnog dela materijala.
- Postupak *Reimbert*-ovih je razdvojen na posebne slučajeve analize sa ravnom gornjom površinom materijala, i sa uvedenim nadopterećenjem na gornjoj površini materijala, što nije bila opcija u originalnoj verziji postupka.
- Kod postupka *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a (2010) [230] za analizu stanja napona u cilindričnom silosu (3Dr silos), data je modifikacija za napone smicanja, koja odgovara početnim pretpostavkama u ovom postupku. Korekcija se odnosi kako na rešenja stanja napona bez nadopterećenja tako i na rešenja sa uvedenim nadopterećenjem na gornjoj površini materijala.
- Postupak *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a (2010) [230] je adaptiran u aproksimativnom obliku za određivanje stanja napona kod ravanskog 2D silosa.

- Uvedena je podela stanja napona kod uskladištenog materijala u ćeliji silosa koju prate odgovarajući koeficijenti K , prema uslovima u kojem se nalazi materijal, i to su stanja pri punjenju, mirovanju i pražnjenju. U ćeliji silosa sva tri navedena stanja odgovaraju aktivnom stanju napona u materijalu, ali su to aktivna stanje pri punjenju (odgovara graničnom aktivnom stanju), pri mirovanju i pri pražnjenju. Poslednja dva aktivna stanja se uzimaju sa redukovanim koeficijentom unutrašnjeg trenja materijala. Ovo je značajna razlika u odnosu na ranije shvatanje da stanje pražnjenja odgovara graničnom pasivnom stanju napona.
- Koeficijent K pri pražnjenju materijala je uveden u obliku $K_e = \cos^2 \phi_i$, na osnovu primene geometrijske progresije kod koeficijenata K_f , K_0 i K_e . Svi ovi koeficijenti su dovedeni u oblik koji odgovara aktivnom stanju napona sa uglovima unutrašnjeg trenja ϕ_{if} ($\equiv \phi_i$), ϕ_{i0} i ϕ_{ie} , respektivno. Preko ovih uglova se određuju koeficijenti unutrašnjeg trenja μ_{if} , μ_{i0} i μ_{ie} , sa kojima se koeficijenti K_f , K_0 i K_e , mogu prikazati u *Ohde*-ovoj formulaciji. Predložena analitička formulacija koeficijenta K_e , predstavlja prvi eksplicitni oblik u teoriji za koeficijent aktivnog stanja napona pri pražnjenju. Vrednosti koeficijenata K_f , K_0 i K_e prema analitičkim izrazima, upoređeni su sa eksperimentalnim vrednostima.
- Izveden je poluempirijski izraz za koeficijent K_f na nivou ravnog dna ćelije silosa, u funkciji koeficijenta K_f iz gornjeg dela ćelije iznad zone uticaja ravnog dna, na osnovu rezultata ispitivanja koeficijenta K nakon punjenja ispitnog silosa prema *Nascimento*-voj (2008) [198] i *Nascimento*-voj i *Calil*-u (2009) [199].
- Uvođenjem koeficijenata K_f , K_0 i K_e za stanja napona pri punjenju, mirovanju, i pražnjenju, proširuje se primena postojećih postupaka proračuna, kao što su *Janssen*-ov, *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a, i drugi. Uvođenjem ovih koeficijenata u tri separatne analize, određuju se navedena tri stanja napona materijala u silosu, a ne kao u dosadašnjim analizama samo pri stanju punjenja ili mirovanja materijala.
- Na osnovu uglova unutrašnjeg trenja ϕ_{if} , ϕ_{i0} i ϕ_{ie} , za stanja napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju određeni su odnosi napona K_f , K_0 i K_e , koji se uvode u postupke proračuna *Walker*-a i *Walters*-a, kao i postupke formirane u ovom radu pri primeni metode integralnih relacija. Kod ovih postupaka, uvođenjem odnosa napona K_f , K_0 i K_e , u tri separatne analize, određuju se stanja napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju. Ovo je kod stanja pri pražnjenju bitna razlika, kako je ranije ovo stanje analizirano kao pasivno stanje napona.
- Kod postupaka kod kojih se uvode promenljivi vertikalni naponi u poprečnom preseku ćelije, definisana su dva oblika funkcionalne promene odnosa napona K u poprečnom preseku ćelije. U grafičkom primeru prikazana su rešenja asimptotskih stanja napona pri primeni ovih odnosa napona. Drugi oblik odnosa napona K omogućuje analizu stanja napona u silosu u slučaju relativno velikih vrednosti koeficijenta trenja materijala o zid ćelije.
- Kod analiza skokovitog povećanja opterećenja (*switch load*), postavljen je *modifikovani koncept* analize ovog opterećenja sa uvođenjem aktivnog stanja napona pri pražnjenju materijala. U odnosu na postojeću analizu, kod *modifikovane analize skokovitog opterećenja* određuju se tri faktora natpritiska Ch , i to su faktori pri promeni stanja punjenja u stanje pražnjenja, ili pri promeni stanja punjenja u stanje mirovanja, i pri promeni stanja mirovanja u stanje pražnjenja. Najveći faktor i najveća anavelopa pritiska sa dobija pri prelasku stanja punjenja u stanje pražnjenja. U koncepciji EC1-4, gde je početno stanje u

stvari stanje mirovanja, najveći faktor je jedini faktor koji se tu analizira pri prelasku stanja nakon punjenja u stanje pražnjenja.

- U toku razvijanja postupaka proračuna stanja napona zrnastog materijala u ćelijama silosa, kod primene metode integralnih relacija, uvedena su određena unapređenja kod uvedenih pretpostavki i izbora nepoznatih. Na ovaj način u nekim postavkama i elementima primene metode postoje razlike u odnosu na primenu kod *Negi-a* (1974) i *Drescher-a* (1991). Kod *unapređene primene metode integralnih relacija* uvode se pretpostavke koje su konzistentne sa teorijskim postavkama, a kao nepoznate se uzimaju horizontalni, odnosno radijalni naponi, što vodi ka tome da su nepoznate u stvari funkcije vertikalne raspodele napona, a ne vertikalni napon. U ovom slučaju rešavanje sistema integralnih relacija je relativno jednostavnije.
- U ovom radu su na osnovu primene metode integralnih relacija, formirana četiri nova postupka analize stanja napona 2D silosa i dva nova postupka analize 3Dr silosa, različitog stepena složenosti usled primene različitih početnih pretpostavki.
- Pored formiranja novih postupaka analize, metoda integralnih relacija je primenjena u slučaju uvođenja početnih pretpostavki koje se koriste kod formiranja *Walker/Walters*-ovog postupka analize stanja napona 2D i 3Dr silosa. Dobijena teorijska rešenja za stanje napona potpuno odgovaraju *Walker/Walters*-ovom postupku. Na ovaj način je verifikovana primena unapređene metode integralnih relacija, i pokazana validnost uvođenja pretpostavki konzistentnih sa teorijskim postavkama.

6.2 Zaključci

Na osnovu teorijskih, numeričkih i parametarskih analiza stanja napona uskladištenog materijala u ćeliji silosa može se zaključiti sledeće:

- Sa povećanjem dubine materijala u ćeliji silosa, stanje napona u uskladištenom materijalu teži konačnom asimptotskom stanju napona. Na ovaj način, opterećenje po površini zida ćelije, koje odgovara kontaktnim naponima zida i materijala, se povećava sa dubinom materijala, ali trend povećanja opterećenja opada i opterećenje teži na velikim dubinama svojim asimptotskim vrednostima.
- Stanja napona uskladištenog materijala u silosu, se mogu detaljnije analizirati na osnovu graničnog stanja ravnoteže sa uvođenjem *Mohr-Coulomb*-ovog uslova loma materijala smicanjem. Kod ovih analiza se uvode promenljivi dijagrami za vertikalni pritisak u preseku ćelije, što je razlika u odnosu na *Janssen*-ov postupak i slične postupke gde se uvode konstantni vertikalni pritisci.
- Kod analize napona pri pražnjenju materijala iz ćelije uvodi se aktivno stanje napona pri pražnjenju, što je bitna razlika u odnosu na tradicionalni pristup gde se ovo stanje tretira kao granično pasivno stanje napona.
- Kod *modifikovane analize skokovitog opterećenja* određuju se tri faktora natpritiska C_h . U ovoj analizi, najveći faktor i najveća anavelopa pritiska sa određuje pri prelasku stanja punjenja u stanje pražnjenja. Na jednom primeru cilindričnog AB silosa, sa variranjem tipa uskladištenog materijala (pšenica, kukuruz i soja), izvršeno je upoređenje rezultata prema predloženom teorijskom postupku, gde se anavelopa maksimalnih pritisaka pri pražnjenju određuje na osnovu adaptiranog *Walters*-ovog

postupka u okviru *Janssen*-ove teorije, i prema proračunskim izrazima prema EC1-4 za silos klase AAC 1. Zaključeno je da kod kratkih silosa proračun pritisaka prema EC1-4 stoji na strani sigurnosti, dok kod vitkih silosa pri relativno većim dubinama materijala, proračun horizontalnih pritisaka prema EC1-4 ne mora biti na strani sigurnosti u odnosu na teorijske vrednosti.

- Kod postupaka sa promenljivim vertikalnim naponima u preseku ćelije, uveden je generalisani oblik odnosa napona K sa promenljivim koeficijentom unutrašnjeg trenja materijala μ_i . Kod analize asimptotskog stanja napona, određena su dva moguća slučaja za oblik odnosa napona K . Prvi oblik odgovara obliku odnosa napona prema *Ohde*-u, i detaljno je analiziran u radu, a za drugi oblik je data analitička formulacija, i prikazana primene u grafičkoj formi kod određivanja asimptotskog stanja napona materijala u silosu.
- Uvođenjem koeficijenata K_f , K_0 i K_e za stanja napona pri punjenju, mirovanju, i pražnjenju, proširena je primena postojećih postupaka proračuna, kao što su *Janssen*-ov postupak, postupak *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a, i drugi. Kod ovih postupaka u tri separatne analize, određuju se navedena stanja napona materijala u silosu.
- Na osnovu uglova unutrašnjeg trenja ϕ_{if} , ϕ_{i0} i ϕ_{ie} , za aktivna stanja napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju, određuju se odnosi napona K_f , K_0 i K_e , koji se uvode u *Walker/Walters*-ov postupak analize stanja napona, kao i u postupke formirane u ovom radu primenom metode integralnih relacija. Na ovaj način se u tri separatne analize, određuju stanja napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju.
- Uvođenjem odnosa napona K_e , koji odgovara aktivnom stanju napona pri pražnjenju, revitalizuje se primena *Walker/Walters*-ovog postupka kod analize stanja napona pri pražnjenju. Isto tako, uvođenjem odnosa napona K_e , revitalizuje se primena *Walters*-ove analize skokovitog opterećenja, koja je u teoriji kritikovana zbog nerealno visokih vršnih pritisaka na zidu ćelije, koji su bili posledica ranijeg uvođenja graničnog pasivnog stanja napona pri pražnjenju.
- Primena metode integralnih relacija vodi ka tačnijem određivanju stanja napona materijala u silosu, s obzirom da se analiza zasniva na ispunjenju dva uslova ravnoteže sila na isečku diferencijalnog sloja materijala, za razliku od metode diferencijalnog sloja gde je u analizi zadovoljen samo uslov ravnoteže vertikalnih sila.
- Na primeru zatrpanog rudarskog iskopa (analogni 2D silos), koji su analizirali *Li* i *Aubertin* (2008) [168], gde su prikazani numerički rezultati stanja napona pri primeni programa FLAC-2D, ispitani su postupci formirani sa metodom integralnih relacija kod 2D silosa. Rezultati kod primene ovih postupaka imaju vrlo dobro međusobno slaganje rezultata (razlike u naponima ispod 1%), kao i slaganje sa numeričkim vrednostima (analize sa FLAC-2D), a pri poređenju sa drugim postupcima, postupci sa primenom metode integralnih relacija daju najbolje slaganje sa numeričkim vrednostima. Na ovaj način je verifikovana primena postupaka zasnovanih na primeni metode integralnih relacija kod analize stanja napona u 2D silosima.
- Na primeru ispitnog 3Dr silosa sa nasutom pšenicom, za koji su rezultate ispitivanja prikazali *Couto*, *Ruiz* i *Aguado* (2013) [53], sprovedena je analiza stanja napona pri punjenju, mirovanju i pražnjenju materijala. Primenjeni su postupci I-3Dr, II-3Dr i IIa-3Dr, koji su formirani sa metodom integralnih relacija, *Walker/Walters*-ov postupak, postupak *Pipatpongsa*-a i *Heng*-a, i *Janssen*-ov postupak. Kod I-3Dr, II-3Dr i IIa-3Dr ustanovljena je dobra međusobna usaglašenost rezultata proračuna. Kod

upoređenja teorijskih rezultata sa eksperimentalnim podacima na primeru ispitnog silosa, određeno je relativno dobro slaganje rezultata pri punjenju materijala, a kod pražnjenja kriva pritisaka obuhvata relativno dobro eksperimentalno određene vrednosti horizontalnih pritisaka. Kriva pritisaka nakon punjenja prema EC1-4, je na većim dubinama na strani sigurnosti u odnosu na rezultate ispitivanja.

- Na osnovu parametarske analize promene stanja napona kod 3Dr silosa, u zavisnosti od koeficijenta unutrašnjeg trenja i koeficijenta trenja o zid, μ_i i μ_w , kao pojedinačne promene jednog parametra ili simultane promene oba parametra, zaključeno je:
 - vertikalni naponi u preseku σ_z se povećavaju, pri smanjenju koeficijenta μ_w i povećanju koeficijenta μ_i (odgovara smanjenju koeficijenta K), i
 - radijalni naponi u preseku σ_r se povećavaju, pri smanjenju koeficijenta μ_w i smanjenju koeficijenta μ_i (odgovara povećanju koeficijenta K).
- Na primeru silosa sa odnosom visine i prečnika ćelije $h_c/d_c = 2$, određeno je na osnovu pet različitih postupaka analize stanja napona, da se pri prelazu iz stanja nakon punjenja u stanje pri pražnjenju, u preseku na dnu ćelije, vertikalni naponi smanjuju za oko 20%, a radijalni naponi povećavaju za oko 65%.
- Kod analize dodatnog lokalnog opterećenja, kod cilindričnih betonskih silosa, koje je uvedeno u EN 1991-4:2006 [38], primenom približnih proračunskih izraza za određivanje uticaja od ovih opterećenja, mogu se odrediti statički uticaji u težištima lokalno opterećenih površina, sa greškom manjom od 5% u odnosu na rezultate statičke analize sa primenom metode konačnih elemenata.
- Kod AB silosa kod kojih se analizira poseban slučaj opterećenja prema EC1-4, u obliku nesimetričnog opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala, ovaj slučaj opterećenja će najverovatnije biti merodavan kod dimenzionisanja zida ćelije pri određivanju potrebne površine prstenaste armature.

6.3 Pravci daljih istraživanja

Od posebnog značaja su dalja teorijska unapređenja i eksperimentalna ispitivanja u cilju preciznijeg predviđanja odnosa napona K pri pražnjenju materijala iz ćelije silosa.

U sklopu daljih teorijskih istraživanja, od interesa je razvijanje postupaka analize stanja napona sa uvođenjem *drugog oblika odnosa napona K* . Primena ovog oblika je potrebna kod slučajeva analiza gde se javlja relativno veći uticaj trenja materijala o zid ćelije, odnosno kada je koeficijent trenja o zid μ_w , veći od koeficijenta unutrašnjeg trenja materijala μ_i , u stanjima mirovanja (μ_{i0}) i pražnjenja materijala (μ_{ie}). Ovo je značajno za analizu betonskih silosa, gde su koeficijenti μ_w relativno visokih vrednosti.

U cilju unapređenja i verifikacije aproksimativne teorijske analize za procenu ekstremnih statičkih uticaja u zidu cilindričnog silosa, od delovanja nesimetričnog opterećenja pri pražnjenju sa velikim ekscentricitetom protočnog kanala, potrebne su dalje teorijske i numeričke analize.

Kod analize stanja napona uskladištenog materijala u silosu, potrebna su dalja teorijska istraživanja problema, kao i eksperimentalna istraživanja ponašanja materijala u ćeliji silosa u stanju punjenja, mirovanja i pražnjenja.

7 LITERATURA

- [1] Abdel-Fattah M.T., Moore I.D. and Abdel-Fattah T.T. (2006): "A numerical investigation into the behavior of ground-supported concrete silos filled with saturated solids". *International Journal of Solids and Structures*, 43, Elsevier Ltd., pp. 3723-3738.
- [2] Abdel-Fattah M.T., Moore I.D. and Abdel-Fattah T.T. (2006): "Behaviour of elevated concrete silos filled with saturated solids". *Can. J. Civ. Eng.*, 33, NRC Canada, pp.227-239.
- [3] ACI Committee 313 (1977, 1983): *Recommended Practice for Design and Construction of Concrete Bins, Silos, and Bunkers for Storing Granular Materials* (ACI 313-77) (Revised 1983) 1977, amended 1983, 21 p.; and *Commentary* (ACI 313R-77), amended 1983, 18 p.
- [4] ACI Committee 313 (1981): *Post-Tensioned Concrete Silos*, ACI 313.1R-81, ACI, 7 p.
- [5] ACI Committee 313 (1997): *Standard Practice for Design and Construction of Concrete Silos and Stacking Tubes for Storing Granular Materials* (ACI 313-97), ACI, 1997, 19 p.; and *Commentary* (ACI 313R-97), 1997, 20 p.
- [6] ACI Committee 344 (1970, 1981): *Design and Construction of Circular Prestressed Concrete Structures*, ACI 344R-70 (Reapproved 1981). ACI, 1970, reapproved 1981, 16 p.
- [7] Ahmed Si s.n. (2006-7): *Calcul et Dimensionnement des Silos en Béton Armé et en Béton Précontraint (BAEL-BPEL 91)*. ISBA-TP, 46 p.
- [8] Ai J. (2010): *Particle Scale and Bulk Scale Investigation of Granular Piles and Silos*. PhD thesis, College of Science and Engineering, The University of Edinburgh, Edinburgh, 343 p.
- [9] Arnold P. (2008): "Design of silos for flow and strength – the various contributors must communicate". Paper in *Proceedings* [45], Taylor & Francis Group, London, UK, pp.95-101.
- [10] Artoni R., Santomaso A., Canu P. (2009): "Simulation of dense granular flows: Dynamics of wall stress in silos". *Chemical Engineering Science*, Elsevier Ltd., 64, pp.4040-4050.
- [11] Askari A.H. and Elwi A.E. (1986): "*Finite Element Prediction of Bin Loads*". *Structural Engineering Report No. 135*, Department of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, 138 p.
- [12] Askari A.H. and Elwi A.E. (1988): "Numerical Prediction of Hopper-Bin Pressures". *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.114, No.2, pp.342-352.
- [13] Askegaard V. and Munch-Andersen J. (1985): "Results from Test with Normal and Shear Stress Cells in a Medium-Scale Model Silo". *Powder Technology*, 44, Elsevier Sequoia, pp.151-157.

- [14] Australian Standard (1996): AS 3774-1996, *Loads on bulk containers*. Sydney; 81 p.; AS 3774 Supp1-1997 (1997): AS 3774 *Supplement 1-1997, Loads on bulk containers – Commentary (Supplement 1 to AS 3774-1966)*, Sydney, 18 p.; AS 3774/Amdt 1/1998-09-05: Amendment No.1 to AS 3774-1996, *Correction*, 1 p.; AS 3774/Amdt 2/1998-12-05: Amendment No.2 to AS 3774-1996, *Revised Text*, 3 p.
- [15] Ayuga F. (2008): "Some unresolved problems in the design of steel cylindrical silos". Paper published in *Proceedings* [45], Taylor & Francis Group, London, UK, pp.123-133.
- [16] Ayuga F., Aguado P., Gallego E. and Ramírez Á. (2005): "New steps towards the knowledge of silos behaviour". *International Agrophysics*, 19, Institute of Agrophysics, PAS, pp.7-17.
- [17] Ayuga F., Guaita M., Aguado P. (2001): "Static and Dynamic Silo Loads using Finite Element Models", *Journal of Agricultural Engineering Research*, Vol.78, No.3, pp.299-308.
- [18] Bagster D.F. (1970/71): "A note on the pressure ratio in the Janssen equation". *Powder Technology*, 4, Elsevier Sequoia S.A., Lausanne, pp.235-237.
- [19] Bagster D.F. and Nedderman R.M. (1985): "A Note on the Application of the Coulomb Method to the Calculation of Wall Stresses in Cylindrical Silos". *Powder Technology*, 42, Elsevier Sequoia, pp.193-197.
- [20] Bates L. (1999): *Guide to the Design, Selection, and Application of Screw Feeders*. The British Materials Handling Board, Professional Engineering Publishing Limited, London and Bury St Edmunds, UK, 150 p.
- [21] Bates L. (1999): *Problems in Particulate Flow. Part A - Flow Regimes*. Educ. Reso. for Part. Techn., ERC at the Univ. of Florida, <http://www.erc.ufl.edu/>
- [22] Bergh W.J.B. van den (1994): *Part I. Simulation of the Dynamic Mixing Performance of an Orbiting Screw Mixer; Part II. Influence of Particle Breakage on the Wall Friction Coefficient of Brittle Particulate Solids*. Proefschrift ter verkrijging van de graad van doctor aan de Technische Universiteit Delft, TR diss 2404, 212 p.
- [23] Berry R., Moore S.: *Design of Silos and Hoppers for Reliable Gravity Flow*. <http://www.gre.ac.uk/>
- [24] Bertho Y., Giorgiutti-Dauphiné F. and Hulin J.-P. (2003): "Dynamical Janssen Effect on Granular Packing with Moving Walls", *Physical Review Letters*, Vol.90, No.14, The American Physical Society, pp.144301(1-4).
- [25] Beyer K. (1963): *Statika armiranih betonskih konstrukcija*. (preveo s nemačkog Kušević R.), štampano po odobrenju Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, (prevod drugog originalnog izdanja iz 1956.), Građevinska knjiga, Beograd, 827 str.
- [26] Böhrnsen J.-U. (2002): *Dynamisches Verhalten von Schüttgütern beim Entleeren aus Silos*. Dissertation, Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr.45-2002, Institut für Angewandte Mechanik, Technischen Universität Braunschweig, 105 S.
- [27] Böhrnsen J.-U. and Antes H.(2001): "Granular flow: Dynamic Effects in Silos". Technical University of Braunschweig, *PARTEC 2001*, Nürnberg, CD-ROM, pp.1-13.
- [28] Bölcskei E., Orosz Á. (1981): *Vasbeton Szerkezetek. Faltartók, Lemezok, Tárolók*. Tankönyvkiadó, Budapest, 329 p.
- [29] Born J. (1968): *Praktische Schalenstatik. Band I: Die Rotationsschalen*. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, 248 S.
- [30] Briassoulis D. (1986): "Design Friction Loads for Concrete Silos". *ACI Journal*, Title No. 83-44, May-June, pp.438-445.
- [31] Brown C.J. and Nielsen J. (Eds.) (1998): *SILOS, Fundamentals of theory, behaviour and*

- design*, E & FN SPON, London, New York, 836 p.
- [32] Butterfield R. (1969): "A Theoretical Study of the Pressures Developed in a Silo Containing Single-Size Particles in a Regular Packing". *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, Vol.6, Pergamon Press, pp.227-247.
- [33] Cain W. (1916): *Earth Pressure, Retaining Walls and Bins*. First Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 287 p.
- [34] Carson J.W. (2000): "Silo Failures: Case Histories and Lessons Learned". Presented at the *Third Israeli Conference for Conveying and Handling of Particulate Solids*, Dead Sea Israel, May 2000. Preprint in *Janike & Johanson Incorporated*, <http://www.jenike.com/>, pp.1-15.
- [35] Carson J.W. (2008): "Hopper/bin design", Chapter 2 in [186], Blackwell Publishing Ltd., Oxford, UK, pp.68-98.
- [36] Carson J.W. and Jenkyn R.T. (1993): "Load Development and Structural Considerations in Silo Design". *Reliable Flow of Particulate Solids II*, Oslo, Norway, August 1993. Reprint in: *Jenike & Johanson Incorporated*, <http://www.jenike.com/>, pp.1-16.
- [37] CEN (2004): *European Standard EN 1992-1-1:2004*: E, *Eurocode 2: Design of concrete structures, Part 1-1: General rules and rules for buildings*. Decembar 2004; prevod na srpski jezik: - (2006): *Evropski standard EN 1992-1-1:2004, Evrokod 2: Proračun betonskih konstrukcija, Deo 1-1: Opšta pravila i pravila za zgrade*. Prevod: Perišić Ž., Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Intergraf MM, februar 2006, Beograd, 237 str.
- [38] CEN (2006): EN 1991-4:2006: E, *Eurocode 1: Actions on structures - Part 4: Silos and tanks*, May 2006., 107 p. and CEN (2012): EN 1991-4:2006/AC, *Eurocode 1 - Actions on structures - Part 4: Silos and tanks*, 4 p.
- [39] CEN (2006): EN 1998-4: E, *Eurocode 8 - Design of structures for earthquake resistance - Part 4: Silos, tanks and pipelines*. 81 p.
- [40] CEN (2007): EN 1993-4-1:2007: E, *Eurocode 3 - Design of steel structures - Part 4-1: Silos*. 114 p.
- [41] CEN/TR (2006): prCEN/TR 1295-3:2005: E - *Structural design of buried pipelines under various conditions of loading - Part 3: Common method*, Technical Report, Final Draft, March 2005., 205 p.
- [42] Chase G.G. (2002): *Solids Notes. Solids Processing Course Materials – Book*, The University of Akron, ~119 p.; *Solids Processing Course Materials – Handouts*, The University of Akron, ~46 p.
- [43] Chen C. (2006): "Lateral Pressure Ratio of Food Steel Silos Based on Considering the Wall Elasticity". *Chinese Agricultural Mechanization* (in Chinese), No.3, pp.(1-3).
- [44] Chen J.F., Ooi J.Y. and Rotter J.M. (1996): "A rigorous statistical technique for inferring circular silo wall pressures from wall strain measurements". *Engineering Structures*, Vol.18, No.4, Elsevier Science Ltd., pp.321-331.
- [45] Chen J.F., Ooi J.Y. and Teng J.-G. (Eds.) (2008): *Proceedings of the International Conference: "Structures and Granular Solids: From Scientific Principles to Engineering Applications"*. The Royal Society of Edinburgh, Scotland, UK, 1-2 July 2008; Taylor & Francis Group, London, UK, 325 p.
- [46] Chen J.F., Rotter J.M., Ooi J.Y., Zhong Z. (2007): "Correlation between the flow pattern and wall pressures in a full scale experimental silo". *Engineering Structures*, 29, Elsevier Ltd., pp.2308–2320.
- [47] Cheung A.B. (2007): *Modelo Estocástico de Pressões de Produtos Armazenados Para a Estimativa da Confiabilidade Estrutural de Silos Esbeltos*. PhD Tese, Escola de Engenharia

- de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 305 p.
- [48] Ciesielski R., Mitzel A., Stachurski W., Suwalski J., Źmudziński Z. (1970): *Behälter, Bunker, Silos, Schornsteine, Fernsehürme und Freileitungsmaste*. (Originalausgabe 1966, Arkady - Verlag, Warszawa), Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf, 688 S.
- [49] Cleary P.W., Sawley M.L. (2002): "DEM modelling of industrial granular flows: 3D case studies and the effect of particle shape on hopper discharge". *Applied Mathematical Modelling*, 26, Elsevier Science Inc., pp.89-111.
- [50] Cleaver J.A.S. and Nedderman R.M. (1993): "Theoretical Prediction of Stress and Velocity Profiles in Conical Hoppers". *Chemical Engineering Science*, Vol.48, No.21, Pergamon Press Ltd., pp.3693-3702.
- [51] Coetzee C.J., Basson A.H. and Vermeert P.A.(2006): "Discrete and Continuum Modelling of Silo Discharge". *R & D Journal, A Publication of the South African Institution of Mechanical Engineering*, 22 (2), pp.26-38.
- [52] Couto A., Aguado P.J., Ruiz A., Tascón A. (2012): "Experimental study of the pressures exerted by the wheat stored in slender cylindrical silos: Comparison with Eurocode 1 part 4". *SPC-07: Silos And Granular Materials (Sigma)*, Paper presented at *International Conference of Agricultural Engineering*, Valencia, Spain, C-1406, pp.(1-6).
- [53] Couto A., Ruiz A., Aguado P.J. (2013): "Experimental study of the pressures exerted by wheat stored in slender cylindrical silos, varying the flow rate of material during discharge. Comparison with Eurocode 1 part 4". *Powder Technology*, 237, Elsevier B.V., pp.450-467.
- [54] Couto A., Ruiz A., Herráez L., Moran J., Aguado P.J. (2013): "Measuring pressures in a slender cylindrical silo for storing maize. Filling, static state and discharge with different material flow rates and comparison with Eurocode 1 part 4". *Computers and Electronics in Agriculture*, 85, Elsevier B.V., pp.40-56.
- [55] Couto A., Ruiz A., Tascón A., Herráez L., Aguado P. (2013): "Experimental determination of the pressures exerted by wheat stored in silos under different conditions of discharge". *VII Congreso Ibérico de Agroingeniería y Ciencias Hortícolas*, Madrid, 26-29 Agosto 2013, Ref. N° C0181, 6 p.
- [56] Cox G.M. (2001): *Stress Distributions Beneath Heaps and Rat-Hole Problems for Granular Materials*. PhD Thesis, University of Wollongong, School of Mathematics and Applied Statistics, 169 p.
- [57] CP (2013): *CLAUDIUS PETERS - Silo technology*. Brochure: CP Silo GB July 2013, Issue 3, Claudius Peters Projects GmbH, 24 p.
- [58] Debeljković M. (1987): "*Bunkeri i silosi u čeličnoj konstrukciji*". Poglavlje u ediciji: *Građevinski kalendar 1987*, SGITJ, Beograd, str.169-312.
- [59] Debeljković M. (1996): "Ugao unutrašnjeg trenja sipkih materijala". *JUDIMK, XX Kongres*, Cetinje, 5-7 juna 1996, *Zbornik radova*, Prva knjiga, str.19-24.
- [60] Debeljković M. (2000): *Bunkeri i silosi u čeličnoj konstrukciji*. Izdavač: Časopis Izgradnja, Beograd, 354 str.
- [61] Deutsche Norm (1962, 1964, 1977, 1987):
Druckverhältnisse in Silozellen - DIN 1055, Blatt 6. Entwurf September 1962.;
Lastannahmen für Bauten - Lasten in Silozellen - DIN 1055 Blatt 6. Ausg. November 1964.;
Ergänzende Bestimmungen zu DIN 1055 Blatt 6. (DIN 1055 Blatt 6 Ausg. November 1964)
Fassung Mai 1977.;
Lastannahmen für Bauten; Lasten in Silozellen - DIN 1055 Teil 6; Erläuterungen – Beiblatt 1 zu DIN 1055 Teil 6. Ausgabe Mai 1987.

- [62] Deutsche Norm (2005): DIN 1055-6:2005-03 *Einwirkungen auf Tragwerke – Teil 6: Einwirkungen auf Silos und Flüssigkeitsbehälter*, Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, 111 S.
Deutsche Norm (2006): DIN 1055-6 *Berichtigung 1: Einwirkungen auf Tragwerke – Teil 6: Einwirkungen auf Silos und Flüssigkeitsbehälter, Berichtigungen zu DIN 1055-6:2005-03*, DIN Deutsches Institut für Normung e.V., 5 S.
- [63] Ding S., Wójcik M., Jecmenica M. and Silva S.R. de (2003): "Loads on Walls and Inserts in Mass-Flow Silos". *Task Quarterly*, Vol.7, No.4, pp.525-538.
- [64] Dischinger F., Mehmel A. (1960): "Masivne konstrukcije". str.854-1010, odeljak iz knjige *Priručnik za građevinske inženjere. I knjiga*. Urednik *Schleicher F.*, štampano po odobrenju Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, (prevog drugog originalnog izdanja iz 1954.), Građevinska knjiga, Beograd, 1208 str.
- [65] Dogangun A., Karaca Z., Durmus A. and Sezen H. (2009): "Cause of Damage and Failures in Silo Structures". *Journal of Performance of Constructed Facilities*, ASCE, Vol.23, No.2, pp.65-71.
- [66] Drescher A. (1992): "On the criteria for mass flow in hoppers". *Powder Technology*, 73, Elsevier Sequoia, pp.251-260.
- [67] Drescher A., Waters A.J. and Rhoades C.A. (1995): "Arching in hoppers: I. Arching theories and bulk material flow properties", *Powder Technology*, 84, pp.165-176.
- [68] Drescher A., Waters A.J. and Rhoades C.A. (1995): "Arching in hoppers: II. Arching theories and critical outlet size", *Powder Technology*, 84, pp.177-183.
- [69] Duddeck H., Niemann H. (1976): *Kreiszyllindrische Behälter*. Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 198 S.
- [70] Dwivedy R.C., Collins S.H. (1972): "Stresses in Wheat Flowing Steadily in a Vertical Cylindrical Bin". *Journal of Agricultural Engineering Research*, 17, pp.79-93.
- [71] Đurić M. i Dimitrijević D. (1976): "Upoređenje čeličnih i betonskih silosa i iskustva koja iz toga proističu", SDGKJ, Simpozijum: *Greške, sanacije i iskustva u investiranju, projektovanju, građenju i eksploataciji građevinskih objekata*, Cavtat, 24.XI-26.XI 1976., Knjiga K: *Industrijski objekti i specijalne konstrukcije*, Rad K3, str. K3-(1-11).
- [72] Eckhoff R.K. (2003): *Dust Explosions in the Process Industries*. Third Edition, Gulf Professional Publishing - an imprint of Elsevier Science, USA, 719 p.
- [73] Eibl J. (1998): "Concrete Structures". Part Two in book [31], E & FN SPON, London, New York, pp.259-322.
- [74] Elghazouli A.Y. and Rotter J.M. (1996): "Long-term performance and assessment of circular reinforced concrete silos". *Construction and Building Materials*, Vol.10, No.2, Elsevier Science Ltd., pp.117-122.
- [75] Enstad G. (1975): "On the theory of arching in mass flow hoppers", *Chemical Engineering Science*, Vol. 30., pp.1273-1283.
- [76] Enstad G. (1977): "A note on the stresses and dome formation in axially symmetric mass flow hoppers", *Chemical Engineering Science*, Vol. 32., pp.337-339.
- [77] Evesque P. (1999): "On Jaky Constant of Oedometers, Rowe's Relation and Incremental Modelling". *Poudres & Grains*, 6, pp.1-9.
- [78] Evesque P., Gennes P.-G. de (1998): "Sur la statique des silos". *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 326, Série II b, pp.761-766.
- [79] Federico A., Elia G. and Germano V. (2008): "A Short Note on the Earth Pressure and Mobilized Angle of Internal Friction in One-Dimensional Compression of Soils". *Journal of*

- GeoEngineering*, Vol. 3, No. 1., pp.41-46.
- [80] Felice R. Di, Scapinello C. (2010): "On the interaction between a fixed bed of solid material and the confining column wall: the Janssen approach". *Granular Matter*, Vol.12, Springer-Verlag, pp.49-55.
- [81] Ferrez J.-A. (2001): *Dynamic Triangulations for Efficient 3d Simulation of Granular Materials*. Thèse No 2432, École Polytechnique Fédérale De Lausanne, Lausanne, EPFL, 159 p.
- [82] Fischer W. (1966): *Silos und Bunker in Stahlbeton*. Veb Verlag für Bauwesen, Berlin, 344 S.
- [83] Folić R. (2005): "Projektovanje silosa u seizmičkim područjima". *Zbornik radova Građevinskog fakulteta*, Subotica, br. 14, str. 104-123.
- [84] Folić R., Pavlović P., Tatomirović M., Radonjanin V. (1998): "Repair of Soya Meal Silo, Capacity 5400 t". *Yugoslav National Report, XIII FIP Congress*, Amsterdam, *Proceedings IMS*, Vol. XXV, No.1, pp.53-68.
- [85] Folić R., Radonjanin V., Malešev M., Tatomirović M. (1997): "Evaluation & Repair of 70,000 ton R.C. Silo". *7th International Conference on Structural Faults and Repair, Proceedings*, Edinburg, Scotland, Vol. 3, pp.105-115.
- [86] Folić R., Radonjanin V., Malešev M., Tatomirović M., Kovačević D., Vasić S. (1996): "Procena stanja ćelija silosa za soju i žitarice i analiza nekih rezultata ispitivanja pod probnim opterećenje". *JUDIMK '96, XX Kongres*, Cetinje, *Simpozijum o istraživanjima i primeni savremenih dostignuća u našem građevinarstvu u oblasti materijala i konstrukcija*, Druga knjiga, str.345-350.
- [87] Foti D., Ivorra S., Trombetti T., Silvestri S., Gasparini G., Di Chiacchio L. (2013): *SEILO Assessment of the Seismic Behaviour of Flat-bottom Silos Containing Grain-like Materials*. Final Report. *SERIES Seismic Engineering Research Infrastructures for European Synergies*, Project No.: 227887, 279 p.
- [88] Frączek J., Kaczorowski J., Ślipek Z., Horabik J., Molenda M. (2003): *Standaryzacja metod pomiaru właściwości fizyczno-mechanicznych roślinnych materiałów ziarnistych*. *Acta Agrophysica*, No.92, Instytut Agrofizyki, PAN, Lublin, 160 p.
- [89] Franc G. (1979): *Teorija armiranobetonskih konstrukcija*. Građevinska knjiga, (prevod sa nemačkog: E. Balgač), Beograd, 390 str.
- [90] Freitas E.d.G.A. (2001): *Estudo Teórico e Experimental das Pressões em Silos Cilíndricos de Baixa Relação Altura/Diâmetro e Fundo Plano*. Doutor Tese, Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, São Carlos, 175 p.
- [91] Freitas E.d.G.A. and Calil C.J. (2005): "Estudo Teórico e Experimental das Pressões em Silos de Baixa Relação Altura/Diâmetro e Fundo Plano". *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, Vol.7, No.24, pp.1-34.
- [92] Gallego Vázquez E. (2006): *Numerical Simulation of Loads Exerted by Stored Materials in Silos with Non-Elastic Material Models*. PhD Thesis, Polytechnic University of Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos, Madrid, 324+72 p.
- [93] Gennes P.-G. de (1999): "Granular matter: a tentative view". *Reviews of Modern Physics*, Vol.71, No.2, Centenary 1999., The American Physical Society, pp.374-382.
- [94] Gennes P.-G. de (2008): "From Rice to Snow". *Lect. Notes Phys.*, 746, Nishina Memorial Foundation, pp.297–318.
- [95] Ghali A. (2000): *Circular storage tanks and silos*. Second edition (First published 1979), E & FN Spon, Taylor & Francis Group, London and New York, 443 p.
- [96] Gomes F.C. and Calil C.J. (2005): "Estudo Teórico e Experimental das Ações em Silos

- Horizontais". *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, Vol.7, No.24, pp.35-63.
- [97] Gremaud P.A. and Matthews J.V. (2001): "On the Computation of Steady Hopper Flows - I. Stress Determination for Coulomb Materials". *Journal of Computational Physics*, 166, Academic Press, pp.63-83.
- [98] Gremaud P.A., Matthews J.V., O'Malley M. (2004): "On the computation of steady Hopper flows II: von Mises materials in various geometries". *Journal of Computational Physics*, 200, Elsevier Inc., pp.639-653.
- [99] Gremaud P.A., Matthews J.V., Schaeffer D.G. (2006): "On the computation of steady hopper flows III: Model comparisons". *Journal of Computational Physics*, 219, Elsevier Inc., pp.443-454.
- [100] Guaita M., Couto A., Ayuga F. (2003): "Numerical Simulation of Wall Pressure during Discharge of Granular Material from Cylindrical Silos with Eccentric Hoppers". *Biosystems Engineering*, Vol. 85, No.1, Elsevier Science Ltd., pp.101-109.
- [101] Gudehus G., Kolymbas D. and Tejchman J. (1986): "Behaviour of Granular Materials in Cylindrical Silos". *Powder Technology*, 48, Elsevier Sequoia, pp.81-90.
- [102] Gumbe L.O. (1987): *Mechanical Properties of Granular Materials as Related to Loads in Cylindrical Grain Silos*, Dissertation, The Ohio State University, 307 p.
- [103] Günther H. (1988): "Betrachtungen zum Erdruehdruk". *Bauingenieur*, Vol.63, Heft 5, Springer – Verlag, S.205-210.
- [104] Gurfinkel G. (1979): "Reinforced-Concrete Bunkers and Silos". Section 22 in *Structural Engineering Handbook*, Second ed., McGraw-Hill, New York, pp.1-22.
- [105] Hajdin N. (1984): *Teorija površinskih nosača – 3. Ljuske*. Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Naučna knjiga, Beograd, 105 str.
- [106] Hampe E. (1987): "Entwicklungstendenzen der internationalen Silovorschriften". *Bauplanung - Bautechnik*, 41.Jg., Heft 7, S.298-301.
- [107] Hampe E., Pfefferkorn G., Bohn W., Schwarz J. (1982): "Erdbebenuntersuchung von zylindrischen Silobauwerken nach der Response-Spektrum-Methode". *Bauplanung-Bautechnik*, 36.Jg., Heft 8, S.367-372.
- [108] Han C., Huang H. and Drescher A. (1989): "An Approximate Analysis of Unsteady Flow of Granular Materials in Bin/Hopper Structures". *Chemical Engineering Science*, Vol.44, No.11, Pergamon Press, pp.2545-2552.
- [109] Handy R.L. (1985): "The arch in soil arching". *Journal of Geotechnical Engineering - ASCE*, Vol.111 No.3, pp.302-318.
- [110] Hanson E.S. (1916): *Concrete Silos. (Their Advantages – Different Types – How to Build Them)*. The Cement Era Publishing Company, Chicago, 174 p. + (Catalog Section) 50 p.
- [111] Hartge E.-U. (1997): *Particle Technology - Chemical Engineering I. Lectures*, Technical University Hamburg-Harburg, http://www.vt1.tu-harburg.de/vt1_e/Vorlesung.
- [112] Härtl J. (2008): *A study of granular solids in silos with and without an insert*. PhD Thesis, The University of Edinburgh, 386 p.
- [113] Hartmann F. and Katz C. (2007): *Structural Analysis with Finite Elements*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 597 p.
- [114] Hasanović V. (2001): *Silosi*. Građevinski fakultet u Sarajevu, Sarajevo, 75 str.
- [115] Heng S., Pipatpongsa T. and Ohta H. (2008): "Jaky's inconsistent assumptions on stress analyses in sand heap and storage silo". *Geo-Kanto 2008*, Nihon University Funabashi

- Campus, Nov 2008, pp.331-336.
- [116] Herzog M. (1978): "Der Silodruck beim Entleeren". *Schwaizerische Bauzeitung*, 96 Jahrgang, Heft 48, S.925-927
- [117] Hezel C.R. (2007): *Avaliação das Pressões em Silos Verticais Conforme Diferentes Normas Internacionais*. Diss. (Mestrado), Engenharia Agrícola, Cascavel, Paraná, Brasil, 139 p.
- [118] Hill J.M. and Cox G.M. (2001): "An exact parametric solution for granular flow in a converging wedge". *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 52, Birkhäuser Verlag, Basel, pp.657-668.
- [119] Hill R. (1998): *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, Oxford, First published 1950, First published in *Oxford Classics series* 1998, 355 p.
- [120] Holdich R.G. (2002): *Fundamentals of Particle Technology*. Midland Information Technology and Publishing, Shepshed, Leicestershire, UK, 173 p.
- [121] Holický M., Marková J. (2009): "Actions and Combination Rules for Silos and Tanks". pp.134-146, Chapter 8 in: *Guidebook 1 – Basis of Design and Actions on Buildings*. The Leonardo da Vinci Project, Prague, 214 p.
- [122] Horne R.M. and Nedderman R.M. (1978): "An Analysis of Switch Stresses in Two-Dimensional Bunkers". *Powder Technology*, 19, Elsevier Sequoia S.A., Lausanne, pp.235-241.
- [123] Horne R.M. and Nedderman R.M. (1978): "Stress Distribution in Hoppers". *Powder Technology*, 19, Elsevier Sequoia S.A., Lausanne, pp.243-254.
- [124] IBAU (200x): *IBAU HAMBURG - Central Cone Silos from the structural point of view*. Information, IBAU Hamburg, 27 p.
- [125] ISO (1990): *Loads due to bulk materials (Draft)*. ISO - Working Group TC98/SC3/WG5, Karlsruhe, July 1990, 23 p.
- [126] Ivković M. i Pakvor A. (ured.) (1995): *Beton i armirani beton prema BAB 87*; Tom 1 – *Priručnik* i Tom 2 – *Prilozi*. Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, (I izdanje 1991) II izdanje 1995; Građevinska knjiga, Beograd, str.770 i str.702.
- [127] Iwicki P., Wójcik M., Tejchman J. (2011): "Failure of cylindrical steel silos composed of corrugated sheets and columns and repair methods using a sensitivity analysis". *Engineering Failure Analysis*, 18, Elsevier Ltd., pp.2064-2083.
- [128] Jaeger H.M., Nagel S.R., Behringer R.P. (1996): "Granular solids, liquids, and gases". *Reviews of Modern Physics*, Vol.68, No.4, The American Physical Society, pp.1259-1273.
- [129] Jáky J. (1944, 1949): *Mehanika tla*, (Jáky J., *Talajmechanika*, Műegyetemi tájár, 1944.) (preveo sa mađarskog *Nikolić I.*), Naučna knjiga, Beograd, 1949, str.151.
- [130] Janssen H.A. (1895): "Versuche über Getreidedruck in Silozellen", *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, Vol.39, No.35, August 31, S.1045-1049.
- [131] Jenike A.W. (1987): "A Theory of Flow of Particulate Solids in Converging and Diverging Channels Based on a Conical Yield Function". *Powder Technology*, 50, Elsevier Sequoia, pp.229-236.
- [132] Jerotijević M. (1968): "Iskustvo preduzeća "RAD" na projektovanju i građenju silosa". *Savremene konstrukcije od armiranog betona*, Biro za građevinarstvo, Beograd, str.1-29.
- [133] Jerotijević M. (1969): "Projektovanje i građenje silosa". *Savremene Armirano-betonske Konstrukcije*. Časopis *Izgradnja* - Specijalno izdanje, Beograd, str.145-158.
- [134] Jerotijević M. (1981): "Silosi. Opterećenja u ćelijama, konstrukcija i razvoj izgradnje". Separat časopisa *Izgradnja* 5/81, str.3-28.

- [135] Jia C., Sun D.-W., Cao C. (2000): "Finite Element Prediction of Transient Temperature Distribution in a Grain Storage Bin". *Journal of Agricultural Engineering Research*, Vol.76, No.4, pp.323-330.
- [136] Jofriet J. C., Negi S.C., Lu Z. (1997): "A Numerical Model for Flow of Granular Materials in Silos. Part 3: Parametric Study". *Journal of Agricultural Engineering Research*, Vol.68, No.3, pp.237-246.
- [137] Jovanović L. (1963): "Neki problemi u vezi sa pritiscima u ćelijama silosa". *Izgradnja*, br. 6, Beograd, str.10-16.
- [138] Kaldenhoff M. (2008): "Experience with funnel flow". Paper published in *Proceedings* [45], Taylor & Francis Group, London, UK, pp.59-66.
- [139] Kaldenhoff M. (2009): "Full Scale Experiences with Flow Funnel", *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures*, (IASS) Symposium 2009, Universidad Politecnica de Valencia, Valencia, Spain, Domingo A. and Layaro C. (Eds.), pp.77-89.
- [140] Kaldenhoff M., Schütte J. und Hauser A. (2007): "Anwendungserfahrungen mit der neuen DIN 1055 Teil 6 bei der Sanierung zweier Rohmehlsilos", *Beton- und Stahlbetonbau*, Ernst & Sohn, Berlin, 102, Heft 2, S.107-113.
- [141] Kaminski M., Maj M. (2009): "Experimental and design loads of pressure of bulk materials against silo wall", *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures* (IASS) Symposium 2009, Universidad Politecnica de Valencia, Valencia, Spain, Domingo A. and Layaro C. (Eds.), pp.102-113.
- [142] Keiter T.W.R. and Rombach G.A (2002): "Accurate Handling of Pressure Peaks in FE – Simulations of Granular Media", *15th ASCE Engineering Mechanics Conference*, EM 2002, June 2-5, Columbia University, New York, pp.1-7.
- [143] Kellner M. (1938): "Calculs des silos". *TRAVAUX*, Janvier 1938, pp.15-30.
- [144] Kesava Rao K., Nott P.R. (2008): *An Introduction to Granular Flow*. Cambridge Series in Chemical Engineering, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 490 p.
- [145] Ketchum M.S. (1919): *The Design of Walls, Bins and Grain Elevators*, McGraw Hill, Third Edition (First Published 1907), 556 p.
- [146] Kézdi A. (1969, 1970): *Handbuch der Bodenmechanik: Band I – Bodenphysik; Band II – Bodenmechanik im Erd-, Grund- und Strassenbau*. VEB Verlag für Bauwesen Berlin, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften Budapest, Band I: 1969, 259 S., Band II: 1970, 311 S.
- [147] Khouri M.(2005): "Comparison of various methods used in the analysis of silos without wall friction". *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, Vol 41, pp.425-441.
- [148] Knödel P. (2005): "*Holzsilos BAB-A8 gegenüber Raststätte Pforzheim*", HS KA, Fb AB, S.2.
- [149] Knödel P. (2008): "Recent silo codes – and still structural failure?". Paper published in *Proceedings* [45], Taylor & Francis Group, London, UK, pp.113-122.
- [150] Knödel P. (2009): *Bemessung von Silos*. Fachhochschule München, Workshop EC3 – Rechenbeispiele, München, ~81 S.
- [151] Kobiak J., Stachurski W. (1969): *Konstrukcje żelbetowe (Część II)*. Wydanie trzecie zmienione, Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 839 p.
- [152] Kordina K. und Eibl J. (1964): "Zur Frage der Temperatur-Beanspruchung von kreiszylindrischen Stahlbetonsilos", *Beton- und Stahlbetonbau*, 59 Jg., Heft 1, Berlin, S.1-11.
- [153] Kötter F. (1899): "Der Bodendruck von Sand in verticalen cylindrischen Gefässen". *Journal*

für die reine und angewandte Mathematik, 120, S.189-241.

- [154] Koznietzski K. (1968, 1971): Silos. *Beton-Kalender* 1968, II.Teil, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn., S.147-184; Silos. *Beton-Kalender* 1971, II.Teil, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn., S.43-80.
- [155] Krause U. (ed.) (2009): *Fires in Silos (Hazards, Prevention, and Fire Fighting)*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 144 p.
- [156] Kruyt N.P. (1993): "Results of Jenike's (1987) radial stress field theory for the flow of granular materials in conical hoppers: flow regimes and flow factors". *Powder Technology*, 76, pp.109-112.
- [157] Landmann G., Seuß K., Möbius S. (1982): "Zuckersilos im Vorspanngrad III". *Bauplanung-Bautechnik*, 36.Jg., Heft 4, S.171-173.
- [158] Lapko A. (1996): "Computational model of silo shell with grain and wall structure interaction". *Engenharia Civil – UM*, Numéro 4, pp.31-41.
- [159] Lapko A. (2005): "Thermal fields in grain during storage – their sources and effects on silo structure reliability". *International Agrophysics*, 19, Institute of Agrophysics, pp.141-146.
- [160] Lapko A., Gnatowski M., Prusiel J.A. (2003): "Analysis of some effects caused by interaction between bulk solid and R.C. silo wall structure". *Powder Technology*, Vol.133, Elsevier, pp.44-53.
- [161] Lapko A., Prusiel J.A. (1997): "Stress Analysis of Silo Wall Subjected to Grain Pressure and Thermal Actions". *Engenharia Civil – UM*, Numéro 6, pp.3-16.
- [162] Lapko A., Prusiel J.A. (2001): "Studies on thermal actions and forces in cylindrical storage silo bins". Paper published in *Handbook* [166], Elsevier Science B.V., pp.189-197.
- [163] Lapko A., Prusiel J.A. (2004): "Structural analysis of RC circular grouped silos under patch actions". *Granular Matter*, 6, Springer-Verlag, pp.185-190.
- [164] Łapko A., Wójcik R. (2004): "Analiza wpływu niecentrycznego opróżniania na naprężenia w cylindrycznym silosie na zboże". *Acta Agrophysica*, 4 (2), pp.393-405.
- [165] Leppert C. (2007): *Mehrphasenmodell für granulare Medien zur numerischen Untersuchung des Phasenübergangs bei der Entleerung von Silos*. Dissertation, Techn. Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, 128 S.
- [166] Levy A. and Kalman H. (Eds.) (2001): *Handbook of Conveying and Handling of Particulate Solids*. Elsevier Science B.V., ~860 p.
- [167] Li L., Aubertin M. (2007): "An improved solution to estimate the stress state in sub-vertical backfilled stopes", *OttawaGeo2007*, Ottawa, pp.2199–2206.
- [168] Li L., Aubertin M. (2008): "An improved analytical solution to estimate the stress state in subvertical backfilled stopes", *Canadian Geotechnical Journal*, Vol.45. pp.1487–1496.
- [169] Li L., Aubertin M. (2010): "An analytical solution for the nonlinear distribution of effective and total stresses in vertical backfilled stopes", *Geomechanics and Geoengineering*, Vol.5, No.4, Taylor & Francis, pp.237-245.
- [170] Li L., Aubertin M., Simon R., Bussi re B. and Belem, T. (2003): "Modeling arching effects in narrow backfilled stopes with FLAC", In *Brummer R., Andreux P., Detournay C. and Hart R.* (eds.): *FLAC and Numerical Modeling in Geomechanics*, Balkema, Rotterdam, the Netherlands, pp.211–218.
- [171] Li X.S. and Dafalias Y.F. (2000): "Dilatancy for cohesionless soils". *G otechnique*, Vol. 50, No. 4, pp.449-460.

- [172] Lindner G. (1912): "Wanddruck in Silos und Schächtefen". *Mitteilungen über Forschungsarbeiten*, Heft 124, VDI, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, S.1-32.
- [173] Link R.A. and Elwi A.E. (1987): "*Incipient Flow in Silos: A Numerical Approach*". *Structural Engineering Report No. 147*, Department of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, 134 p.
- [174] Liu J., Shi Q., Liang X., Yang L., Sun G. (2009): "Size dependence of effective mass in granular columns". *Physica A*, 388, Elsevier B.V., pp.379-384.
- [175] Lu Z., Negi S.C., Jofriet J.C. (1997): "A Numerical Model for Flow of Granular Materials in Silos. Part 1: Model Development". *Journal of Agricultural Engineering Research*, Vol. 68, No. 3, pp.223-229.
- [176] Lumpe G. (2001): "Zur Berechnung kreiszylindrischer Schalensegmente von Mischgutsilos mit Standardsoftware", In *Festschrift Richard Greiner*. S.63-83., Herausgeber Ofner R. und Unterweger H., Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Techn. Universität Graz, Graz, 404 S.
- [177] Madrona F.S. (2008): *Pressões em Silos Esbeltos com Descarga Excêntrica*. Dissertação, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 177 p.
- [178] Maksimović M.M. (2001): *Mehanika tla* (drugo izdanje), Čigoja štampa, Beograd, 643 str.
- [179] Marconi U., Marini B., Petri A., Vulpiani A. (2000): "Janssen's law and stress fluctuations in confined dry granular materials". *Physica A*, 280, Elsevier Science B.V., pp.279-288.
- [180] Marinelli J. and Carson J.W. (2001): "Solve Solids Flow Problems in Bins, Hoppers, and Feeders". *Chemical Engineering Progress*, June 2001; Reprint in *Janike & Johanson Incorporated*, pp.1-10.
- [181] Martinez J. and Masson S. (1998): "Relationship between finite element and distinct element simulations". Chapter 34 in [31], E & FN SPON, London, New York, pp.564-579.
- [182] Martínez M.A., Alfaro I., Doblaré M. (2002): "Simulation of axisymmetric discharging in metallic silos. Analysis of the induced pressure distribution and comparison with different standards". *Engineering Structures*, 24, Elsevier Science Ltd., pp.1561-1574.
- [183] Mason J. (1964): "Silos und Behälter auf Einzelstützen". *Die Bautechnik*, 41 Jg., Heft 5 Berlin, S.151-155.
- [184] Masson S. and Martinez J. (2000): "Effect of particle mechanical properties on silo flow and stresses from distinct element simulations". *Powder Technology*, 109, Elsevier, pp.164-178.
- [185] Masson S. and Martinez J. (2002): "Effect of Particle Properties and Silo Geometry on Stresses Predicted by Discrete Simulations of Bulk Materials". EM 2002, *15th ASCE Engineering Mechanics Conference*, June 2-5, Columbia University, New York, 8 p.
- [186] McGlinchey D. (Ed.) (2008): *Bulk Solids Handling: Equipment Selection and Operation*. Blackwell Publishing Ltd., Oxford, UK, 290 p.
- [187] Meng Q., Jofriet J.C., Negi S.C. (1997): "Finite Element Analysis of Bulk Solids Flow: Part 1, Development of a Model Based on a Secant Constitutive Relationship". *Journal of Agricultural Engineering Research*, Vol. 67, No. 2, pp.141-150.
- [188] Meng Q., Jofriet J.C., Negi S.C. (1997): "Finite Element Analysis of Bulk Solids Flow: Part 2, Application to a Parametric Study". *Journal of Agricultural Engineering Research*, Vol. 67, No. 2, pp.151-159.
- [189] Michalowski R.L. (1987): "Flow of Granular Media through a Plane Parallel/Converging Bunker". *Chemical Engineering Science*, Vol.42, No.11, Pergamon Journals, pp.2587-2596.
- [190] Michalowski R.L. (2005): "Coefficient of Earth Pressure at Rest". *Journal of Geotechnical*

and *Geoenvironmental Engineering*, Vol.131, No.11, ASCE, pp.1429-1433.

- [191] Molenda M., Horabik J. (2005): *Mechanical Properties of Granular Agro-Materials and Food Powders for Industrial Practice. Part I: Characterization of mechanical properties of particulate solids for storage and handling.* Eds. Horabik J. and Laskowski J., Institute of Agrophysics, PAS, Lublin, 145 p.
- [192] Molenda M., Montross M.D. and Horabik J. (2007): "Performance of earth pressure cell as grain pressure transducer in a model silo". *International Agrophysics*, 21, Institute of Agrophysics, PAS, pp.73-79.
- [193] Moreea S.B.M. and Nedderman R.M. (1996): "Exact Stress and Velocity Distributions in a Cohesionless Material Discharging from a Conical Hopper". *Chemical Engineering Science*, Vol.51, No.16, Elsevier Science Ltd., pp.3931-3942.
- [194] Müller D. (1996): *Techniques Informatiques Efficaces Pour La Simulation De Milieux Granulaires Par Des Méthodes D'éléments Distincts*. Thèse No 1545, École Polytechnique Fédérale De Lausanne, Lausanne, 189 p.
- [195] Müller M.S. (2001): *Fast Algorithms For The Simulation Of Granular Particles*. Dissertation, Fakultät Physik, Universität Stuttgart, Stuttgart, 150 S.
- [196] Murthy V.N.S. (2003): *Geotechnical Engineering: Principles and Practices of Soil Mechanics and Foundation Engineering*. Marcel Dekker Inc., New York, 1029 p.
- [197] Nakonz W. (1965): "Silos". *Beton-Kalender 1965*, II.Teil, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, S.289-318.
- [198] Nascimento F.C. (2008): *A Relação Entre as Pressões Horizontais e Verticais em Silos Elevados: O Parâmetro K*. Mestrado Dissertação, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 119 p.
- [199] Nascimento F.C. and Calil C.J. (2009): "A relação entre as pressões horizontais e verticais em silos elevados: o parâmetro K". *Cadernos de Engenharia de Estruturas*, São Carlos, Vol. 11, No. 52, pp.17-37.
- [200] Nedderman R.M. (1992): *Statics and kinematics of granular materials*, Cambridge University Press, 352 p.
- [201] Nedderman R.M. and Laohakul C. (1980): "The Thickness of the Shear Zone of Flowing Granular Materials". *Powder Technology*, 25, Elsevier Sequoia S.A., Lausanne, pp.91-100.
- [202] Negi S.C. (1974): *Pressures Developed by Silage Materials in Cylindrical Tower Silos*, Doc. Thesis, Department of Agricultural Engineering, McGill University, Montreal, 132 p.
- [203] Negi S.C. and Ogilvie J.R. (1977): "Silage Pressures in Tower Silos. Part 1. Theoretical and Design Considerations". *Canadian Agricultural Engineering*, Vol.19, No.2, pp.92-97.
- [204] Negi S.C., Lu Z., Jofriet J.C. (1997): "A Numerical Model for Flow of Granular Materials in Silos. Part 2: Model Validation". *Journal of Agricultural Engineering Research*, Vol.68, No.3, pp.231-236.
- [205] Nielsen J. (2008): "From silo phenomena to load models", Paper published in *Proceedings [45]*, Taylor & Francis Group, London, UK, pp.49-57.
- [206] Nielsen J., Eibl J., Rotter M. (1992): "EC 1: Silos and tanks". *IABSE reports*, Zürich, Schweiz, Vol.65, pp.97-103.
- [207] Nielsen J., Rotter M., Sørensen J.D. (2012): "A note on load combinations for silos". *SPC-07: Silos And Granular Materials (Sigma)*, Paper presented at *International Conference of Agricultural Engineering*, Valencia, Spain, C-0448, pp.(1-7).
- [208] Nikitin V., Lapko A. (2006): "On Modelling Heat and Moisture Transfer in Sandwich Wall

- and Slab Structures". *Jour. of Civil Engineering and Management*, Vol.XII, No.4, pp.337-343.
- [209] Nortje D. (2002): *The Anti-Dynamic Tube in Mass Flow Silos*. PhD Thesis, The University of Western Australia, Department of Civil and Resource Engineering, 9-5 p.
- [210] Ohde J. (1951, 1958): "Pritisak u levkovima čelijskih silosa", str.1110-1112, 9. poglavlje u *Hütte, Inženjerski priručnik III*, 2 deo, 10 odeljak, Fundiranje. II Mehanika tla, 27. izdanje, Građevinska knjiga –Beograd 1958. Prevod nemačkog izdanja iz 1951.god.: Silo-Aufgaben, *Hütte*, Band III, *Baumechanik*, 27. Auflage, 921 S.
- [211] Ooi J.Y., Chen J.F., Lohnest R.A. and Rotter J.M. (1996): "Prediction of static wall pressures in coal silos". *Construction and Building Materials*, Vol.10, No.2, Elsevier Science Ltd., pp.109-116.
- [212] Ooi J.Y., Pham L. and Rotter J.M. (1990): "Systematic and random features of measured pressures on full-scale silo walls". *Engineering Structures*, Vol.12, April, Butterworth & Co. Ltd., pp.74-87.
- [213] Orosz Á. (1978): "Thermal Effects in Reinforced Concrete Silos". *Periodica Polytechnica Ser. Civ. Eng.*, Vol.22, No.3-4, Budapest, pp.125-151.
- [214] Ostendorf M., Schwedes J., Böhrnsen J.-U. and Antes H. (2003): "Dynamic Measurement and Simulation of Bulk Solids during Silo Discharge". *Task Quarterly*, 7, No.4, pp.611-621.
- [215] Ovarlez G. (2002): *Statique et rhéologie d'un milieu granulaire confiné*. Université Paris XI U.F.R. Scientifique d'Orsay, Doc. these, 234 p.
- [216] Ovarlez G. and Clément E. (2005): "Elastic medium confined in a column versus the Janssen experiment". *The European Physical Journal E: Soft Matter and Biological Physics*, Vol.16, No.4, pp.421-438.
- [217] Ovarlez G., Fond C., Clément E. (2002): "A giant overshoot effect in the Janssen granular column". Dated: December 10, 2002., pp.1-4.
- [218] Pakvor A. (1997): "Evrokod 1: Osnove proračuna i dejstva na konstrukcije". *II jug. Savetovanje: "Evrokodovi i jug. građ. konstrukterstvo"*, 1-2 april 1997, GF Univerziteta u Beogradu, IMK, Beograd, str.1-23.
- [219] Pakvor A. (2006): "Evrokod 0: Osnove proračuna konstrukcija". *Saopštenja pozvanih učesnika za Seminar "Evrokodovi za konstrukcije – Usvajanje evropskih standarda u građ. kao nacionalnih standarda Srbije i Crne Gore"*, GF Univerziteta u Beogradu, Intergraf MM, Beograd, str.21-32.
- [220] Pakvor A. (ed.) (1997): EC1, EVROKOD 1: *Osnove proračuna i dejstva na konstrukcije, Deo 4: Dejstva u silosima i rezervoarima*, Prevodioci sa engleskog: Alendar V., Pecić N., GF Univerziteta u Beogradu, 66 str. (Prevod evropskog predstandarda ENV 1991-4:1995 E, koji je CEN odobrio 30.06.1993. god. za privremenu primenu.)
- [221] Pakvor A., Alendar V., Pecić N. (1997): "Dejstva u silosima i bunkerima prema Evrokodu". *Zbornik radova, Stručni seminar SGP'97*, DGITNS, FTN IIG, Novi Sad, str.49-66.
- [222] Palma G. (2005): *Pressões e Fluxo em Silos Esbeltos ($h/d \geq 1,5$)*. Mestre Dissertação, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 109 p.
- [223] Parry R.H.G. (2004): *Mohr Circles, Stress Paths and Geotechnics*. Second Edition, Spon Press, Taylor & Francis Group, London and New York, 264 p.
- [224] Pavlović P., Folić R., Radonjanin V., Tatomirović M. (1995, 1997): "The Testing and Repair of Steel Silo". *Sixth International Conference on Structural Faults and Repair, Proceedings*, London, Vol.3, 1995, pp.55-65.; also in: *Construction and Buildings Materials*, Vol. 11, Elsevier Science Ltd., 1997, pp.353-363.

- [225] Perišić Ž. (2006): "Evrokodovi za konstrukcije i naše građevinarstvo". *Saopštenja pozvanih učesnika za Seminar "Evrokodovi za konstrukcije – Usvajanje evropskih standarda u građ. kao nacionalnih standarda Srbije i Crne Gore"*, GF Univerziteta u Beogradu, Intergraf MM, Beograd, str.11-19.
- [226] Pernich A. (2010): *Predicción Numérica de los Campos de Tensiones Durante el Llenado y la Descarga de Silos de Almacenamiento de Materiales Granulares*. Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Córdoba, Argentina, 242 p.
- [227] Peschl I.A.S.Z. (1969): *Gewelforming in Bunkers*, Proefschrift ter verkrijging van de graad van Doctor, Technische Hogeschool Eindhoven, 177 S.
- [228] Peter J. und Lochner G. (1977): "Zur Statik, Konstruktion und Ausführung eines Klinker-rundlagers – Hinweise für die Berechnung von Silowänden", *Beton- und Stahlbetonbau*, Heft 4, S.92-98. und Heft 5, S.127-133.
- [229] Pieper K., Wenzel F. (1978); "Sind die Lastansätze nach DIN 1055 Teil 6 ausreichend?" *Beton- und Stahlbetonbau*, 8, S.192-199.
- [230] Pipatpongsa T., Heng S. (2010): "Granular arch shapes in storage silo determined by quasi-static analysis under uniform vertical pressure". *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, JSME, Vol. 4, No. 8, pp.1237-1248.
- [231] Pipatpongsa T., Heng S., Iizuka A. and Ohta H. (2009): "Rationale for coefficient of earth pressure at rest derived from prismatic sand heap". *Journal of Applied Mechanics*, JSCE, Vol.12, pp.383-394.
- [232] Pipatpongsa T., Heng S., Wattanachai P. and Likitlersuang S. (2009): "Stress distributions in storage silo under uniform vertical pressure". *Proceedings of the 22th KKCNN Symposium on Civil Engineering*, October 31 – November 2, 2009, Chiangmai, Thailand, pp.535-540.
- [233] Pipatpongsa T., Khosravi M.H., Heng S. (2009): "Granular Arch Shapes under Criterion of Silo Effect". *Proceedings of the Asian Pacific Conference for Materials and Mechanics 2009 at Yokohama*, JSME No.09-202, Japan, November 13-16, pp.1-4.
- [234] Pipatpongsa T., Vardhanabhuti B. (2009): "Analyses of coefficient of lateral earth pressure in wedge-shaped granular mound based on Jaky's (1944) hypothesis". *The 14th National Convention on Civil Engineering of Thailand*, Nakhon Ratchasima, Thailand, 13-15 May 2009., pp.147-152.
- [235] Radosavljević Ž, Bajić D. (1989): *Armirani beton 3. Elementi armiranobetonkih konstrukcija*. Građevinska knjiga, Beograd, str.431.
- [236] Rahmoun J. (2006): *Modélisation du comportement des matériaux granulaires par des approches discrètes et continues*. Doc. these, No.d'ordre: 3933, Université des Sciences et Technologies de Lille, 140 p.
- [237] Rahmoun J., Fortin J. and Millet O. (2007): "Calcul des contraintes dans un matériau granulaire ensilé: comparaison entre les approches discrètes et continues". *18^{ème} Congrès Français de Mécanique*, Grenoble, 27-31 août 2007, pp.1-6.
- [238] Rahmoun J., Millet O. and Saxcé G.de (2008): "A continuous media approach to modeling the stress saturation effect in granular silos". *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, IOP Publishing Ltd and SISSA, P06011, pp.1-20.
- [239] Rahmoun J., Millet O., and Fortin J. (2009): "Friction effect on stresses in ensiled granular media". *Computers and Geotechnics*, Vol.36 No.7, pp.1113-1124.
- [240] Ramírez A., Nielsen J., Ayuga F. (2010): "Pressure measurements in steel silos with eccentric hoppers". *Powder Technology*, 201, Elsevier B.V., pp.7-20.

- [241] Ravenet J. (1977): *Silos. Teoria, Investigacion, Construccin*. Editores Técnicos Asociados, S.A., Barcelona, España, 381 p.
- [242] Ravenet J. (1981): "Silo Problems". *Bulk Solids Handling*, Vol.1, No.4, pp.667-679.
- [243] Reimbert M. and Reimbert A. (1976): *Silos. Theory and Practice*. First Edition, *Series on Bulk Materials Handling*, Vol.1 (1975/76), No.3, Trans Tech Publications, 251 p.
- [244] Reimbert M. i Reimbert A. (1962): *Silosi. Teorijska i praktična razmatranja* (prevod). Građevinska knjiga, Beograd, 207 str.
- [245] Rhodes M. (2008): *Introduction to Particle Technology*. 2nd Edition, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 450 p.
- [246] Roberts A.W. (1991): *Bulk Solids Handling – Recent Developments and Future Directions*. National Committee on Bulk Materials Handling, The Inst. of Engineers Australia, ~77 p.
- [247] Roberts A.W. (1998): "Particle Technology – Reflections And Horizons: An Engineering Perspective". *Trans IChemE*, Vol.76., Part A, Inst. of Chemical Engineers, pp.775-796.
- [248] Roberts A.W. (2005): "Characterisation for Hopper and Stockpile Design". pp.1-47. Notes based on Chapter 3, by Roberts A.W., from the Book: *Characterisation of Bulk Solids*. Edited by McGlinchey D., Blackwell Publishing, CRC Press, pp.85-131.
- [249] Röck M (2004): *Scherversuche zur Bestimmung von Schüttguteigenschaften und Siloauslegung (Verfahrenstechnisches Labor)*. Institut für Mechanische Verfahrenstechnik, TU Braunschweig, 31 S.
- [250] Rombach G.A. (2004): *Finite element design of concrete structures. Practical problems and their solutions*. Thomas Telford Publishing, London, 285 p.
- [251] Rombach G.A., Ayuga F., Neumann F., Gallego Vázquez E. (2005): "Modelling of granular flow in silos based on finite element method ANSYS vs. SILO". *Proceedings of Conference "Powder and Grains"*, Stuttgart, 18-12. July 2005, pp.469-473.
- [252] Rombach G.A., Eibl J. (1998): "A dynamic finite element model for silo pressures and solids flows". Chapter 26 in [31], E & FN SPON, London, New York, pp.481-494.
- [253] Rombach G.A., Neumann F. (2004): "3-D Finite Element Modelling of Granular Flow in Silos". *17th ASCE Engineering Mechanics Conference, EM2004*, June 13-16, University of Delaware, Newark, DE, p.1-8.
- [254] Rombach G.A., Neumann F. (2003): "Schüttguteinwirkungen auf Silozellen". *42. Forschungskolloquium des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton*, S.191-200.
- [255] Romić S. (1963): "Tačnija metoda za određivanje pritisaka u levkovima ćelijskih silosa". 11 *Godišnjak Arhitektonskog fakulteta*, Beograd, str.79-88.
- [256] Rong G.H., Negi S.C., Jofriet J.C. (1995): "Simulation of Flow Behaviour of Bulk Solids in Bins. Part 1: Model Development and Validation", *Journal of Agricultural Engineering Research*, Vol.62, pp.247-256.
- [257] Rong G.H., Negi S.C., Jofriet J.C. (1995): "Simulation of Flow Behaviour of Bulk Solids in Bins. Part 2: Shear Bands, Flow, Corrective Inserts and Velocity Profiles", *Journal of Agricultural Engineering Research*, Vol.62, pp.257-259.
- [258] Rosemeier G.-E. (1986): "Zur Bestimmung des maximalen inneren Silodrucks". *Die Bautechnik*, 63.Jg., Heft 11, Berlin, S.392-394.
- [259] Rotter J.M. (2001): "Pressures, Stresses and Buckling in Metal Silos containing Eccentrically Discharging Solids", In *Festschrift Richard Greiner*. S.85-103., Herausgeber: Ofner R. und Unterweger H., Institut für Stahlbau, Holzbau und Flächentragwerke, Technische Universität

- Graz, Graz, 404 S.
- [260] Rotter J.M. (2008): "Silo and hopper design for strength", Chapter 3 in [186], Blackwell Publishing Ltd., Oxford, UK, pp.99-134.
- [261] Rotter J.M. (2008): "Structures, stability, silos and granular solids: a personal adventure", Paper published in *Proceedings* [45], Taylor & Francis Group, London, UK, pp.1-17.
- [262] Rotter J.M. (2009): "Silos and tanks in research and practice: state of the art and current challenges", *Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2009*, Universidad Politecnica de Valencia, Valencia, Spain, Domingo A. and Layaro C. (Eds.), pp.65-76.
- [263] Rotter J.M., Holst J.M.F.G., Ooi J.Y. and Sanad A.M. (1998): "Silo pressure predictions using discrete-element and finite-element analyses". *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 356, The Royal Society, GB, pp.2685-2712.
- [264] Ruckenbrod C., Schlüter F.-H. (2006): "Silolasten nach der neuen DIN 1055-6". *Beton und Stahlbetonbau*, 101.Jg., Heft 3, Berlin, S.138-151.
- [265] Ruiz A., Couto A., Aguado P.J. (2012): "Design and instrumentation of a mid-size test station for measuring static and dynamic pressures in silos under different conditions – Part I: Description". *Computers and Electronics in Agriculture*, 85, Elsevier B.V., pp.164-173.
- [266] Ruiz A., Couto A., Aguado P.J. (2012): "Design and instrumentation of a mid-size test station for measuring static and dynamic pressures in silos under different conditions – Part II: Construction and validation". *Computers and Electronics in Agriculture*, 85, Elsevier B.V., pp.174-187.
- [267] Sadowski A.J., Rotter J.M. (2011): "Steel silos with different aspect ratios: I – Behaviour under concentric discharge". *Journal of Constructional Steel Research*, 67, Elsevier Ltd., pp.1537-1544.
- [268] Sadowski A.J., Rotter J.M. (2011): "Steel silos with different aspect ratios: II – Behaviour under eccentric discharge". *Journal of Constructional Steel Research*, 67, Elsevier Ltd., pp.1545-1553.
- [269] Safarian S.S., Harris E.C. (1985): "Silos and Bunkers". Chapter 16 in *Handbook of Concrete Engineering*, Second Edition, edited by Fintel M., Van Nostrand Reinhold Company, New York, pp.587-631.
- [270] Safarian S.S., Harris E.C. (1985): *Design and Construction of Silos and Bunkers*. Van Nostrand Reinhold Company Inc., Reprint in Taiwan, 468 p.
- [271] Sahnovski K.V. (1962): *Armirano betonske konstrukcije*, 8 preradeno izdanje (prevod sa ruskog: *Железобетонные конструкции*). Građevinska knjiga, Beograd, 422 str.
- [272] Saliger R. (1911): *Der Eisenbeton in Theorie und Konstruktion*. Alfred Kröner Verlag, Leipzig, 290 S.
- [273] Schinner A. (2001): *Ein Simulationssystem für granulare Aufschüttungen aus Teilchen variabler Form*. Dissertation, Fakultät für Naturwissenschaften der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 165 S.
- [274] Schulze D. (1991): *Untersuchungen zur gegenseitigen Beeinflussung von Silo und Austragorgan*, Dissertation, TU Braunschweig, 189 S.
- [275] Schulze D. (2001-9): Papers presented on websites: <http://www.dietmar-schulze.com/>
"Flow Properties of Powders and Bulk Solids", 2006, 21 p.;
"The automatic Ring Shear Tester RST-01.pc", 2001-9, 2 p.;
"The "small" automatic Ring Shear Tester RST-XS", 2002-9, 2 p.;
and <http://www.schwedes-and-schulze.com/>

- "*Flow Properties of Powders and Bulk Solids and Silo Design for Flow*", 2008, 2 p.
- [276] Schulze D. (2008): *Powders and Bulk Solids: Behavior, Characterization, Storage and Flow*. Springer-Verlag, Berlin, 511 p.
[Schulze D. (2009): *Pulver und Schüttgüter, Fließeigenschaften und Handhabung*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 508 S.]
- [277] Schulze D. and Schwedes J. (1994): "An Examination of Initial Stresses in Hoppers". *Chemical Engineering Science*, Vol.49, No.13, Elsevier Science Ltd., pp.2047-2058.
- [278] Schwedes J. (2001): "Flow properties of bulk solids and their use in solving industrial problems". Paper published in *Handbook* [166], Elsevier Science B.V., pp.137-152.
- [279] Schwedes J. (2003): "Review on Testers for Measuring Flow Properties of Bulk Solids". *Granular Matter*, 5, Springer-Verlag, pp.1-43.; also in: *IFPRI report*, Institut of Mechanical Process Engineering, TU Braunschweig, 123 p.
- [280] Shukla S.K., Loughran J.G., Sivakugan N. (2009): "Stress within a cohesionless granular fill in a storage vessel with sloping walls during initial static loading". *Powder Technology*, 192, Elsevier B.V., pp.389-393.
- [281] Sielamowicz I. and Mróz Z. (2003): "Analysis of Pressure Evolution in Granular Materials in Converging Bins during Filling and Emptying Processes". *Task Quarterly*, Vol.7, No.4, pp.643-666.
- [282] Silva E.T. da (1998): *Elementos pré-moldados para silos quadrados de concreto armado*. Tese (dr), Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Agrícola, 178 p.
- [283] Silva F.A.N., Horowitz B. (2003): "Procedimento para o Cálculo dos Momentos Fletores em Grupos de Silos de Concreto Armado para a Situação de Carga na Intercélula". *Engenharia Civil – UM*, Número 18, pp.19-29.
- [284] Silva M.C.A.T. da (1999): "Investigation of the Correlation between Silo Pressure Parameters". *Journal of Agricultural Engineering Research*, Vol.74, No.4, pp.363-367.
- [285] Sindel J.A. (1985): "Temperature Differentials in the Wall of a Clinker - Filled Silo". *ACI Journal*, ACI, Title no.82-7, pp.73-78.
- [286] Singh D. and Moysey E.B. (1985): "Grain Bin Wall Pressures: Theoretical and Experimental". *Canadian Agricultural Engineering*, Vol.27, No.1, pp.43-48.
- [287] Smith A.B.B., Simmonds S.H (1983): "*Lateral Coal Pressures in a Mass Flow Silo*", *Structural Engineering Report No. 113*, Department of Civil Engineering, The University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, November 1983, 294 p.
- [288] SNBATI (1986): *Règles Professionnelles de Conception et de Calcul des Silos en Béton Armé et Béton Précontraint*. *Annalles ITBDP*, Série: Béton 240, No.446, 48 p.
- [289] Spencer A.J.M., Bradley N.J. (2002): "Gravity flow of granular materials in contracting cylinders and tapered tubes". *International Journal of Engineering Science*, 40, Elsevier Science Ltd., pp.1529-1552.
- [290] Sperl M. (2006): "Experiments on Corn Pressure in Silo Cells – Translation and Comment of Janssen's Paper from 1895". *Granular Matter*, Vol.8, No.2, pp.59-65.
- [291] SRPS ISO 11697 (1996): *Osnove projektovanja građevinskih konstrukcija. Opterećenja rastresitim materijalima*. Savezni zavod za standardizaciju, 19 str; *Zbirka jug. pravilnika i standarda za građevinske konstrukcije*, Knjiga 1/2 *Dejstva na konstrukcije*, GF Univerziteta u Beogradu, Beograd, 37 str.
- [292] Stainforth P.T. (1974): "A Flow-factor for No-arching at the Transition between Hopper and Trunk in Tall Cylindrical Silos". *Powder Technology*, 9, Elsevier Sequoia S.A., Lausanne,

pp.53-55.

- [293] Sundaram V. and Cowin S.C. (1979): "A Reassessment of Static Bin Pressure Experiments". *Powder Technology*, 22, Elsevier Sequoia S.A., Lausanne, pp.23-32.
- [294] Takenaka K., Iimura K., Suzuki M. and Hirota M. (2008): "Shape Effects of the Yield Locus on the Rankine Coefficient". *Advanced Powder Technology*, 19, Koninklijke Brill NV, Leiden and Society of Powder Technology, Japan, pp.25-37.
- [295] Tardos G.I. (1999): "Stresses in Bins and Hoppers: Use of Jenike's method for hopper design". *Educ. Reso. for Part. Techn.*, ERC at the Univ. of Florida, <http://www.erc.ufl.edu/>
- [296] Tarran F.C. (1984): "Reducing Moments and Shear Forces in Silos". *ACI Journal*, ACI, Title No.81-36, pp.443-447.
- [297] Tatomirović M. (1996): *Prilog analizi uticaja tečenja i skupljanja betona spregnutih betonskih nosača*. Magistarski rad, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, str.500.
- [298] Tatomirović M. (2006): "Proračun silosa prema Evrokodu 1 – deo 4". *Deseti nacionalni i četvrti međunarodni naučni skup iNDiS 2006*, Zbornik radova, Novi Sad, 22-24. novembar 2006., Univerzitet u Novom Sadu, FTN, Institut za građevinarstvo, Novi Sad, str.219-226.
- [299] Tatomirović M. (2007): "Opterećenja od uskladištenih zrnastih materijala u ćelijama silosa". *Zbornik radova - Konferencija Savremena građevinska praksa 2007*, IG-FTN i DGITNS, Novi Sad, str.181-200.
- [300] Tatomirović M. (2008): "Opterećenja u ćelijama silosa od uskladištenih zrnastih materijala". *Časopis Materijali i konstrukcije*, Godina 51, broj 3, Beograd, str.30-44.
- [301] Tatomirović M., Pavlović P. (1991): "Program CREEP za proračun stanja napona, prslina i deformacija/ugiba armiranobetonskih preseka/elementa u toku vremena". Prilog 3.8 u priručniku *Beton i armirani beton prema BAB 87*, Tom 2 - *Prilozi*, Građevinska knjiga, Beograd, 1991. (I izdanje); Građevinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 1995. (II izdanje), str.411-459.
- [302] Tejchman J. (2000): "Behaviour of granular bodies in induced shear zones". *Granular Matter*, Vol.2, pp.77-96.
- [303] Tejchman J. (2013): *Confined Granular Flow in Silos (Experimental and Numerical Investigations)*. Springer Series in Geomechanics and Geoengineering, Springer International Publishing, Switzerland, 502 p.
- [304] Teng J.G. and Rotter J.M. (Eds.) (2004): *Buckling of thin metal shells*. Spon Press, Taylor & Francis Group, (Taylor & Francis e-Library, 2005.), London, 493 p.
- [305] Terzaghi K. (1972): *Teorijska mehanika tla*, (prevod sa engleskog: *Theoretical Soil Mechanics*, John Wiley and Sons Inc.). Naučna knjiga, Beograd, 832 str.
- [306] Tighe B. and Sperl M. (2007): "Pressure and motion of dry sand: translation of Hagen's paper from 1852". *Granular Matter*, Vol.9 No.3, pp.141-144.
- [307] Timm G. und Windels R. (1977): "Silos". *Beton-Kalender 1977, Teil II*, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, S.559-618.
- [308] Timm G. und Windels R. (1989): "Silos". *Beton-Kalender 1989, Teil II*, Wilhelm Ernst & Sohn Verlag für Architektur und technische Wissenschaften, Berlin, S.353-396.
- [309] Tomas J. (2009): *Vorlesung "Partikelmechanik und Schüttguttechnik"*. Lehrstuhl für Mechanische Verfahrenstechnik, Institut für Verfahrenstechnik, <http://www.uni-magdeburg.de/ivt/mvt/>, ~178 S.
- [310] TU 60 (1960): "Tehnička uputstva za proračun silosnih ćelija za žito". *Dokumentacija za*

- građevinarstvo i arhitekturu*, GA-37, Sveska 17, Jun 1960, 9 str.
- [311] Turčić I. (1990): "Prostorna parametarska analiza okruglih silosnih ćelija". *Građevinar*, Vol.42, No.6, str.247-258.
- [312] USS (1984): *Steel Sheet Piling - Design Manual*. United States Steel, Updated and reprinted by U. S. Department of Transportation /FHWA with permission, July 1984, 133 p.
- [313] Vandepitte D. (1979): *Berekening van Constructies – Bauwkunde en Civiele Techniek, Boekdeel I.*, Story-Scientia, Gent, 604 p. (Hoofdstuk 16: "Silo's", pp. 449-486.)
- [314] Vanel L. (1999): *Etude expérimentale de l'équilibre mécanique d'un milieu granulaire: exemples du silos et du tas de stable*. These de doctorat de l' Université Paris 6, 129 p.
- [315] Vanel L. and Clément E. (1999): "Pressure screening and fluctuations at the bottom of a granular column". *The European Physical Journal B*, 11, pp.525–533.
- [316] Vanel L., Claudin Ph., Bouchaud J.-Ph., Cates M.E., Clément E., and Wittmer J.P.(2000): "Stresses in Silos: Comparison Between Theoretical Models and New Experiments". *Physical Review Letters*, Vol.84, No.7, The American Physical Society, pp.1439-1442.
- [317] Vasić S., Popović B., Tatomirović M. (1996): "Projektovanje rekonstrukcije čeličnog levka silosa primenom programa SAP90". *III jugoslovenski simpozijum o primeni CAD tehnologija, CAD FORUM '96, Zbornik radova*, Novi Sad, str.185-192.
- [318] Veen C. van den (1993): *Beheersing van scheurvorming in silo's*. Rapport 25.5-93-07, *Rap CT M&C 93-01*, Technische Universiteit Delft, 22+4+16 p.
- [319] Verruijt A. (2001): *Soil Mechanics*. Delft University of Technology, 340 p.
- [320] Vittinghoff T. (2003): *Analyse des Langzeitverhaltens einer Spundwandkonstruktion in einem überkonsolidierten Ton*. Dissertation, Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, 197 S.
- [321] Voellmy A. (1937): *Eingebettete Rohre*, Diss. Techn. Wiss. ETH, Zürich, Nr. 856, 152 S.
- [322] Vogt C. (2000): *Praktikum Mechanische Verfahrenstechnik (Bestimmung von Schüttguteigenschaften mit dem Jenike-Schergerät)*. Arbeitsbereich Verfahrenstechnik I, Technische Universität Hamburg-Harburg, 19 S.
- [323] Vračarić V. (1985): *Teorija površinskih nosača*. Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, OOUR Naučno-obrazovni institut za industrijsku granju, Novi Sad, II-3.25+A-46 str.
- [324] Wagner J.R. (2002): *Seismisch Belastete Schüttgutsilos*, Dissertation, Fakultät für Bauingenieurwesen der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 168 S.
- [325] Walker D.M. (1966): "An approximate theory for pressure and arching in hoppers", *Chemical Engineering Science*, Vol. 21., pp.975-997.
- [326] Walker D.M. (1967): "A basis for bunker design", *Powder Technology*, 1, pp.228-236.
- [327] Walters J.K. (1973): "A theoretical analysis of stresses in axially-symmetric hoppers and bunkers". *Chemical Engineering Science*, V. 28, pp.779-789.
- [328] Walters J.K. (1973): "A theoretical analysis of stresses in silos with vertical walls". *Chemical Engineering Science*, V. 28, pp.13-21.
- [329] Walters J.K. and Nedderman R.M. (1973): "A note on the stress distribution at great depth in a silo". *Chemical Engineering Science*, Vol.28, Pergamon Press, pp.1907-1908.
- [330] Wambaugh J.F., Hartley R.R. and Behringer R.P. (2010): "Force networks and elasticity in granular silos". *The European Physical Journal E*, 32, pp.135-145.
- [331] Wang Y., Lu Y., Ooi J.Y. (2013): "Numerical modelling of dynamic pressure and flow in

- hopper discharge using the Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation". *Engineering Structures*, Vol.56, Elsevier Ltd., pp.1308-1320.
- [332] Waters A.J., Drescher A. (2000): "Modeling plug flow in bins/hoppers", *Powder Technology*, 113, Elsevier Science S.A., pp.168-175.
- [333] Wensrich C. (2002): "Dissipation, dispersion, and shocks in granular media". *Powder Technology*, 126, Elsevier Science B.V., pp.1-12.
- [334] Widisinghe S., Sivakugan N. (2012): "Vertical Stresses within Granular Materials in Silos". *2012 ANZ Conference Proceedings*, pp.590-595.
- [335] Więckowski Z. (2004): "The material point method in large strain engineering problems". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, Elsevier B.V., pp.4417-4438.
- [336] Więckowski Z., Youn S.-K. and Yeon J.-H. (1999): "A Particle-in-Cell Solution to the Silo Discharging Problem". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, John Wiley & Sons, Ltd., pp.1203-1225.
- [337] Windels R. (1988): "Kreiszyllinderschale unter Teilflächenlasten". *Bauingenieur*, Springer – Verlag, Vol.63, Heft 12, S.537-541.
- [338] Wójcik M., Tejchman J. (2009): "Modeling of shear localization during confined granular flow in silos within non-local hypoplasticity", *Powder Technology*, 192, Elsevier B.V., pp.289-310.
- [339] Wu Y.H. (1990): *Static and dynamic analysis of the flow of bulk materials through silos*. Doctor of Philosophy thesis, Department of Civil and Mining Engineering, University of Wallongong, 216 p.
- [340] Xu S., Zhang Q., Britton M.G. (1996): "A Microscopic Theory for Predicting Loads in Storage Bins for Granular Materials". *Journal of Agricultural Engineering Research*, Vol. 65, No. 3, pp.253-259.
- [341] Yuksel S.B. and Arikan S. (2007): "A New Set of Design Aids for Groups of Four Cylindrical Silos due to Interstice and Internal Loadings". *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, Published online <http://www.interscience.wiley.com/>, John Wiley & Sons Ltd., 21 p.
- [342] Zhang J., Huang W., Jiang T., Wu Q. (1999): "Study on Lateral Pressure Ratio of Stored Material in Silos", *建筑结构学报* (in Chinese), Vol.20, No.1, pp.71-74.
- [343] Zhang Q. and Britton M.G. (2003): "A micromechanics model for predicting dynamic loads during discharge in bulk solids storage structures". *Canadian Biosystems Engineering*, Vol.45, pp.5.21-5.27.
- [344] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. (2005): *The Finite Element Method* (Volume 1: *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*), Sixth edition, Elsevier, Butterworth-Heinemann, 631 p.
- [345] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. and Zhu J.Z. (2005): *The Finite Element Method* (Volume 2: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*), Sixth edition, Elsevier, Butterworth-Heinemann, 733 p.
- [346] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. and Nithiarasu P. (2005): *The Finite Element Method* (Volume 3: *The Finite Element Method for Fluid Dynamics*), Sixth edition, Elsevier, Butterworth-Heinemann, 435 p.
- [347] Байков В.Н. (1974): *Железобетонные конструкций, специальный курс* (издание 2-е), Стройиздат, Москва, 799 с.
- [348] Байков В.Н., Хампе Э., Рауэ Э. (1990): *Проектирование железобетонные тонко-*

- стенных пространственных конструкций*. Стройиздат, Москва, 232 с.
- [349] Банніков Д.О. (2008): "Визначення коефіцієнта бокового тиску сипучого матеріалу в замкненій посудині". *Металеві конструкції*, N2, Том 14, УАМК, Україна, с.113-123.
- [350] Бернштейн М.С. (1947): *Расчет конструкций с односторонними связями*. Государственное издательство строительной литературы, Москва, 92 с.
- [351] Бильченко А.В., Молодченко Г.А., Шипель Л.В., Рунцо Н.П. (1982): "Анализ конструктивных решений силосов коксохимического производства". *Строительство и архитектура*, No.4, с.14-18.
- [352] Гячев Л.В. (1968): *Движение сыпучих материалов в трубах и бункерах*. Издательство Машиностроение, Москва, 184 с.
- [353] Гячев Л.В. (1986): *Основы теории бункеров и силосов: Учебное пособие*. Алтайский политехнический институт, Барнаул, 84 с.
- [354] Добромыслов А.Н. (2010): *Примеры расчета конструкций железобетонных инженерных сооружений*. Издательство Ассоциации строительных вузов, Москва, 269 с.
- [355] Ждахин Л.П. (1970): *Расчет железобетонных бункеров по предельным состояниям*. Издательство литературы по строительству, Москва, 304 с.
- [356] Зенков Р.Л., Гриневиц Г.П., Исаев В.С. (1977): *Бункерные устройства*. Издательство Машиностроение, Москва, 225 с.
- [357] Иссерс Ф.А., Карев В.И. (1981): "Влияние знакопеременных нагрузжений на трещиностойкость и деформативность стен силосов". *Бетон и железобетон*, No.5, Москва, с.14-15.
- [358] Клейн Г.К. (1977): *Строительная механика сыпучих тел*. Издание 2-е, Москва Стройиздат, Москва, 256 с.
- [359] Козлов В.Ш., Альшиц В.Д., Аптекман А.И., Бабченко Ю.Т., Воловик Э.М. (1988): *Справочник проектировщика инженерных сооружений*. Под ред. Коршунова Д.А., 2-е изд., перераб. и доп., Б-ка проектировщика, Будивельник, Киев, 352 с.
- [360] Кричевский А.Р. (1984): *Расчет железобетонных инженерных сооружений на температурные воздействия*. Москва Стройиздат, Москва, 149 с.
- [361] Латышев Б.В. (1985): *Практические методы расчета железобетонных силосных корпусов*, 2-е издание. Стройиздат, Ленинград, 192 с.
- [362] Лизин В.Т., Пяткин В.А. (1994): *Проектирование тонкостенных конструкций: Учеб. пособие для студентов вузов*, 3-е изд., перераб. и доп., Машиностроение, Москва, 384 с.
- [363] Липницкий М.Е., Абрамович Ж.Р. (1967): *Железобетонные бункера и силосы (расчет и проектирование)*, 2-е издание. Изд. литературы по строительству, Ленинград, 355 с.
- [364] Мельников Н.П. (колл. авт. п/р.) (1962). *Справочник проектировщика металлических конструкций промышленных зданий и сооружений*. Госстройиздат, Москва, 618 с.
[Мельников Н.П. (п/р.) (1980): *Металлические конструкции. Справочник проектировщика*. 2-е изд., перераб. и доп., Стройиздат, Москва, 776 с.]
- [365] Молодченко Г.А. (2001): "Взаимосвязь горизонтального давления сыпучего материала на стены силосов с кинетикой его истечения при выгрузке". *Научно-технический сборник No.30*, с.137-143.
- [366] Осипов М.М. (1981): "Определение деформаций стенок железобетонных силосов от динамического давления сыпучего". *Строительная механика и расчет сооружений*, No.6, Москва, с.47-53.

- [367] Пухонто Л.М. (2004): *Долговечность железобетонных конструкций инженерных сооружений (силосов, бункеров, резервуаров, водонапорных башен, подпорных стен)*. Издательство АСВ, Москва, 424 с.
- [368] Самедов А.М., Борщевский С.В., Левит В.В., Рева С.Н., Каменец В.И., Буланенков Я.В. (2004): *Методические указания по расчету и проектированию силосных корпусов по дисциплине "Горнотехнические здания и сооружения"*, НТУ Украины, ДонНТУ, НГУ, Киев, Донецк, Днепропетровск, 55 с.
- [369] СНиП 2.09.03-85 (1985): *Сооружения промышленных предприятий*, Госстрой СССР.
- [370] СНиП 2.10.05-85 (1985): *Предприятия, здания и сооружения по хранению и переработке зерна*, Госстрой СССР. (Внесено Изменение № 1, утвержденное Постановлением Госстроя России от 24 февраля 2000 г. № 17).
- [371] Соколовский В.В. (1960): *Статика сыпучей среды*. Издание третье, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 241 с.
- [372] Соколовский В.В. (1969): *Теория пластичности*. Издание третье, Издательство Высшая Школа, Москва, 608 с.
- [373] Сперанский И.М., Сташевская С.Г., Бондаренко С.В. (1989): *Примеры расчета железобетонных конструкций*. Издательство Высшая Школа, Москва, 176 с.
- [374] Федосеев В.Б. (2007): "Боковой коэффициент и давление в насыпи сыпучего материала". *Электронный научный журнал «Исследовано в России»*, <http://zhurnal.ape.relarn.ru>, с.622-626.
- [375] ЦНИИпромзернопроект (1989): *Пособие по проектированию предприятий, зданий и сооружений по хранению и переработке зерна* (к СНиП 2.10.05-85). ЦИТП Госстроя СССР, Москва, 144 с.
- [376] Шарков В.П. (2005): "Формула для определения динамического давления грунта-заполнителя на стенки ячеистых ГТС в процессе его вертикальных подвижек". *Природообустройство и рациональное природопользование – необходимые условия социально-экономического развития России*. МГУП, Москва, с.277-283.
- [377] Шарков В.П. (2006): "О динамических параметрах закона Кулона". *Роль природообустройства в обеспечении устойчивого функционирования и развития экосистем*. Материалы международной научно-практической конференции, МГУП, Москва, с.1-6.
- [378] Яковлев Л.Т. (1980): "Температурные напряжения в цилиндрических железобетонных силосах элеваторов". *Бетон и железобетон*, No.5 (302), Москва, с.16-16.