

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ

Презиме, име једног
родитеља и име Рakić (Stevan) Dragan
Датум и место рођења 10.05.1983, Niš

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ - НИШ

Примљено: 19.3.2015.			
ОРГ. ЈЕД.	Б р о ј	Прилог	Вредност
01	829		

Основне студије

Универзитет Univerzitet u Nišu
Факултет Prirodno-matematički fakultet
Студијски програм Matematika i informatika
Звање Diplomirani matematičar za računarstvo i informatiku
Година уписа 2002.
Година завршетка 2008.
Просечна оцена 9,89

Магистер студије, магистарске студије

Универзитет
Факултет
Студијски програм
Звање
Година уписа
Година завршетка
Просечна оцена
Научна област
Наслов завршног рада

Докторске студије

Универзитет Univerzitet u Nišu
Факултет Prirodno-matematički fakultet
Студијски програм Matematika
Година уписа 2008.
Остварен број ЕСПБ бодова 189
Просечна оцена 10,00

НАСЛОВ ТЕМЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов теме докторске дисертације Parcijalna uređenja određena uopštenim inverzima i anulatorima
Име и презиме ментора, звање dr Dragan Đorđević, redovni profesor
Број и датум добијања сагласности за тему докторске дисертације 8/17-01-008/13-008, 16.09.2013.

ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Број страна vi+158
Број поглавља 5
Број слика (шема, графика) 0
Број табела 0
Број прилога 0

**ПРИКАЗ НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КАНДИДАТА
који садрже резултате истраживања у оквиру докторске дисертације**

P. бр.	Аутор-и, наслов, часопис, година, број волумена, странице	Категорија
1.	<p>D. S. Rakić, Decomposition of a ring induced by minus partial order, <i>Electron. J. Linear Algebra</i>, 2012, 23: 1040-1059.</p> <p>U radu je ispitivana relacija minus parcijalnog uređenja u proizvoljnim i fon Nojmanovim prstenima. Pokazano je da uslov $a <^- b$, gde je $<^-$ minus parcijalno uređenje, određuje dve trojke međusobno ortogonalnih idempotenata (e_i) i (f_i), $i = 1,2,3$, sa sumama jednakim 1, i time dekompoziciju prstena R u direktnu sumu bimodula $e_i R f_j$. Koristeći ovaj rezultat nekoliko poznatih osobina minus parcijalnog uređenja na skupu kompleksnih matrica je dokazano u kontekstu prstena. Dobijeni su ekvivalentni uslovi pri kojima je izraz $ab^{(1)}a$ invarijantan u odnosu na izbor unutrašnjig inverza $b^{(1)}$. Pokazano je da većina rezultata važi na skupu pravougaonih matrica nad prstenom.</p>	M21
2.	<p>D. S. Rakić, D. S. Djordjević, Space pre-order and minus partial order for operators on Banach spaces, <i>Aequationes Math.</i> 2013, 85: 429-448.</p> <p>U radu su ispitivane relacije prostornog pre-uređenja i minus parcijalnog uređenja na skupu $B(X, Y)$, ograničenih linearnih operatora iz Banahovog prostora X u Banahov prostor Y. Koristeći geometrijske tehnike dekompozicije potprostora, veliki broj poznatih osobina ovih relacija je proširen sa skupa kompleksnih matrica na skup $B(X, Y)$.</p>	M23
3.	<p>D. S. Rakić, N. Č. Dinčić, D. S. Djordjević, Core inverse and core partial order of Hilbert space operators, <i>Appl. Math. Comput</i>, 2014, 244: 283-302.</p> <p>U radu su definicije nedavno uvedenog jezgarnog inverza matrice i jezgarnog parcijalnog uređenja proširene na skup $B(H)$, ograničenih linearnih operatora na Hilbertovom prostoru H. Date su matrice reprezentacije operatora i njegovog jezgarnog inverza. Pokazano je da je operator A manji od operatora B u odnosu na jezgarno uređenje ako i samo ako oni imaju svojevrsnu simultanu dijagonalizaciju indukovanu odgovarajućim dekompozicijama prostora H. Relacija je takođe okarakterisana inkluzijom odgovarajućih podskupova skupa uopštenih inverza. Spektralne osobine jezgarnog inverza su takođe ispitivane.</p>	M21
4.	<p>D. S. Rakić, N. Č. Dinčić, D. S. Djordjević, Group, Moore-Penrose, core and dual core inverse in rings with involution, <i>Linear Algebra Appl.</i> 2014, 463: 115-133.</p> <p>U radu su definicije jezgarnog i dualnog jezgarnog inverza proširene sa matričnog na slučaj proizvoljnog prstena sa involucijom. Pokazano je da se grupni, Moore-Penrouzov, jezgarni i dualni jezgarni inverz mogu istovetno ispitivati korišćenjem odgovarajućih idempotenata. Dokazano je nekoliko novih osobina, a neki poznati rezultati matričnih inverza su dokazani u slučaju prstena. Dat je veliki broj karakterizacija EP elemenata. Dokazano je da jezgarni i dualni jezgarni inverz pripadaju klasi inverza duž elementa i klasi (b, c) inverza.</p>	M22
5.	<p>J. Marovt, D. S. Rakić, D. S. Djordjević, Star, left-star, and right-star partial orders in Rickart *-rings, <i>Linear Multilinear Algebra</i>, 2015, 63(2): 343-365.</p> <p>U radu je posredstvom anulatora definisana relacija $<^*$ na prstenu A. Pokazano je da se u slučaju kada je A Rickartov *-prsten ova relacija poklapa sa poznatom relacijom zvezda parcijalnog uređenja. Pojmovi levog-zvezda i desnog-zvezda parcijalnog uređenja su takođe prošireni i ispitivani. Dokazano je da su ove relacije parcijalna uređenja na Rickartovom *-prstenu. Date su 3×3 matrične forme elemenata a i b kada je $a <^* b$. Određeni su uslovi pod kojima su ova uređenja ekvivalentna minus parcijalnom uređenju. Dijamantsko parcijalno uređenje je takođe analizirano u kontekstu prstena.</p>	M22
6.	<p>D. S. Rakić, D. S. Djordjević, Partial orders in rings based on generalized inverses - unified theory, <i>Linear Algebra Appl.</i> 2015, 471: 203-223.</p> <p>U radu je najpre uveden pojam konačno dimenzionalnog prstena R, koji je blisko povezan sa pojmom Dedekindovog konačnog prstena. Zatim je Mitrina jedinstvena teorija matričnih parcijalnih uređenja baziranih na uopštenim inverzima, proširena sa skupa kompleksnih matrica na R. Dati su potrebni i dovoljni uslovi pod kojima je G-relacija parcijalno uređenje na R.</p>	M22
7.	<p>D. S. Rakić, Generalization of sharp and core partial order using annihilators, <i>Banach J. Math. Anal.</i> 2015, 9(3): 228-242.</p> <p>Koncept oštrog uređenja je nedavno proširen sa skupa kompleksnih matrica indeksa 1 na skup I_X onih ograničenih operatora A na Banahovom prostoru X za koje važi da je $\overline{\text{Im } A} \oplus \text{Ker } A = X$. U ovom radu je, korišćenjem anulatora, definicija oštrog uređenja proširena sa I_X na skup onih elemenata prstena za koje su levi i desni anulator glavni levi odnosno glavni desni ideal generisan istim idempotentom. Dokazano je da je oštro uređenje relacija poretka na ovom</p>	M21

skupu. Nastavljajući ideju baziranu na anulatorima, u radu je takođe proširen i ispitivan koncept jezgarnog parcijalnog uređenja na Rikartovom *-prstenu.

ИСПУЊЕНОСТ УСЛОВА ЗА ОДБРАНУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Кандидат испуњава услове за оцену и одбрану докторске дисертације који су предвиђени Законом о високом образовању, Статутом Универзитета и Статутом Факултета.

ДА НЕ

Кандидат је објавио три рада у часописима категорије М21 (од тога два као самосталан аутор), три рада у часописима категорије М22 и један рад у часопису категорије М23.

ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Кратак опис појединих делова дисертације (до 500 речи)

Pored Predgovora, Indeksa simbola i pojmova, Literature i obaveznih priloga, disertaciju čine sledeće glave: 1. Uvod, 2. Direktna suma potprostora i dekompozicija jedinice, 3. Minus parcijalno uređenje, 4. Zvezda, oštro, jezgarno i dualno jezgarno parcijalno uređenje, 5. Parcijalna uređenja određena anulatorima.

U prvoj glavi su prezentovani osnovni pojmovi i poznati rezultati neophodni za dalji rad. Ako je $G(A)$ određeni podskup skupa svih uopšetih inverza kompleksne matrice A , onda kažemo da je A manja od matrice B u odnosu na relaciju $<^G$ ako postoji $X \in G(A)$ tako da je $AX = BX$ i $XA = XB$. Za različite izbore skupa $G(A)$ dobijamo različita matricna uređenja.

U drugoj glavi je uspostavljena veza između topološke direktne sume potprostora normiranog vektorskog prostora X i algebarskog pojma dekompozicije jedinice prstena $R = B(X)$ u vidu sume međusobno ortogonalnih idempotenata. Pokazano je da svaka matricna forma elementa prstena određuje jednu matricnu reprezentaciju operatora i obrnuto. Rezultati ove glave su deo neobjavljenog rukopisa.

Glava 3 sadrži rezultate publikovane u radovima 1. i 2. U Poglavlju 3.1 je ispitivano prostorno pre-uređenje $<^s$ i minus parcijano uređenje $<^-$ na proizvoljnim i fon Nojmanovim regularnim prstenima. Dokazano je da uslov $a <^- b$, gde su a i b regularni elementi prstena, prirodno definiše dve trojke međusobno ortogonalnih idempotenata (e_i) i (f_j) , $i, j = 1, 2, 3$ sa sumama jednakim 1, čime se prsten razlaže u direktnu sumu bimodula $e_i R f_j$. U odnosu na ovu dekompoziciju elementi a i b imaju dijagonalne matricne forme

$$a = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f} \quad i \quad b = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b - a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{e \times f}, \quad (1)$$

pri čemu su $a \in e_1 R f_1$ i $b - a \in e_2 R f_2$ u određenom smislu invertibilni. Ovaj rezultat predstavlja uopštenje jedne od najbitnijih osobina matricnog minus parcijalnog uređenja. U Poglavlju 3.2 su dobijeni odgovarajući rezultati u vezi relacija $<^s$ i $<^-$ na skupu $B(X, Y)$ ograničenih operatora iz Banahovog prostora X na Banahov prostor Y . Dobijeni su ekvivalentni uslovi pri kojima je izraz $AB^{(1,2)}C$ invarijantan u odnosu na izbor refleksivnog inverza $B^{(1,2)}$.

Glava 4 sadrži rezultate objavljene u radovima 3, 4 i 6, kao i rezultate koji se trenutno nalaze u proceduri. U Poglavlju 4.1 se najpre nalazi ekvivalentna definicija jezgarnog inverza matrice, kojom se pojam proširuje na proizvoljan prsten sa involucijom. Zatim su analizirani Mur-Penrouzov, grupni, jezgarni i dualni jezgarni inverz, sa naglaskom na sličnostima i analogiji njihovih osobina. U Poglavlju 4.2 se ispituju osobine odgovarajućeg zvezda, oštrog, jezgarnog i dualnog jezgarnog parcijalnog uređenja na prstenu. Dokazano je da su ove relacije zaista relacije poretka na odgovarajućim skupovima regularnih elemenata. Uređenja su okarakterisana reprezentacijama analognim onima u (1), a takođe i preko inkluzija odgovarajućih podskupova skupa uopštenih inverza. U Poglavlju 4.3 je tematika iz prethodnog poglavlja posmatrana na algebri $B(H)$, gde je H Hilbertov prostor. Na primer, pokazano je da je operator A manji od operatora B u odnosu na jezgarno uređenje ako i samo ako je $H = \text{Im } A \oplus \text{Im } (BB^\# - AA^\#) \oplus \text{Ker } B$, $H = \text{Im } A \oplus^\perp \text{Im } (B - A) \oplus^\perp \text{Ker } B$ i ako u odnosu na ove dekompozicije operatori A i B imaju sledeće matricne forme

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i \quad B = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu su $A_1 \in B(\text{Im } A)$ i $B_1 \in B(\text{Im } (BB^\# - AA^\#), \text{Im } (B - A))$ invertibilni. Rezultati ove glave koji se tiču jezgarnog inverza i jezgarnog parcijalnog uređenja su većinom novi čak i u matricnom slučaju. U Poglavlju 4.4 je Mitrina jedinstvena teorija parcijalnih uređenja baziranih na uopštenim inverzima, proširena sa skupa kompleksnih matrica na prsten.

Nedostatak svih prethodnih uređenja je taj što se oni definišu samo na skupu elemenata koji poseduju uopšteni inverz. Problem proširenja definicije minus parcijalnog uređenja sa skupa kompleksnih matrica na celu algebru $B(H)$ je prvi posmatrao P. Šemrl u radu *Automorphisms of $B(H)$ with respect to minus partial order*, *J. Math. Anal. Appl.* 2010, 369:205-213. U Poglavlju 5.1 su date definicije i osnovne osobine vezane za pojmove anulatora i Rikartovih prstena, dok je u Poglavlju 5.2 posmatran anulator operatora na normiranom prostoru. U Poglavlju 5.3 je posredstvom anulatora pronađena ekvivalentna algebarska definicija Šemrllove definicije koja

omogućuje proširenje minus uređenja na opštije matematičke strukture:

$$a <^- b \Leftrightarrow \text{postoje idempotenti } p \text{ i } q \text{ takvi da je } {}^o p = {}^o a, q^o = a^o \text{ i } a = pb = bq.$$

Dokazano je da je $<^-$ relacija parcijalnog uređenja na Rikartovom prstenu. Pokazano je da uslov $a <^- b$ određuje 3×3 matrice reprezentacije slične reprezentacijama (1), pri čemu sada elementi $a \in e_1 R f_1$ i $b - a \in e_2 R f_2$ imaju osobinu da nisu delioci nule. Nastavljajući pristup iz prethodnog poglavlja, u Poglavlju 5.4 su data proširenja zvezda, levog-zvezda i desnog-zvezda parcijalnog uređenja. Pored dokaza da su ove relacije parcijalna uređenja na Rikartovom *-prstenu, još jednom su dobijene reprezentacije slične onima u (1). Takođe je posmatran uzajamni odnos ovih uređenja sa minus uređenjem, a osobine su posebno ispitane za normalne elemente prstena. U Poglavlju 5.5 je zaokružena terija parcijalnih uređenja određenih anulatorima, definisanjem i ispitivanjem oštrog i jezgarnog parcijalnog uređenja. Deo rezultata Glave 5 je publikovan u radovima 5. i 7, a deo rezultata još uvek nije publikovan.

ВРЕДНОВАЊЕ РЕЗУЛТАТА ДОКТОРСKE ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ниво остваривања постављених циљева из пријаве докторске дисертације (до 200 речи)

Predložena doktorska disertacija je u potpunosti ostvarila ciljeve postavljene u njenoj prijavi. Najbitnije osobine matricnih parcijalnih uređenja baziranih na uopštenim inverzima su dokazane u kontekstu ograničenih linearnih operatora na Banahovim i Hilbertovim prostorima. Minus, zvezda, oštro, jezgarno i dualno jezgarno parcijalno uređenje su detaljno ispitani u kontekstu proizvoljnog i fon Nojmanovog regularnog prstena. Poznata Mitrina jedinstvena teorija matricnih parcijalnih uređenja je proširena na slučaj prstena. Korišćenjem anulatora, definicije svih pomenutih relacija su proširene i na skup elemenata koji ne poseduju uopšteni inverz. Ovakvo definisana uređenja su ispitivana u kontekstu Rikartovih i Rikartovih *-prstena. Uopšten je veliki broj poznatih osobina, a dokazan je i znatan broj osobina koje su nove čak i u matricnom slučaju.

Вредновање значаја и научног доприноса резултата дисертације (до 200 речи)

Tokom poslednje četiri decenije, uvedeno je i izučavano nekoliko matricnih uređenja baziranih na uopštenim inverzima, među kojima su minus, zvezda i oštro parcijalno uređenje, kao i prostorno pre-uređenje. Oblast je aktuelna o čemu svedoči nedavno uveden pojam jezgarnog matricnog parcijalnog uređenja, brojni radovi i jedna skorašnja monografija.

Naučni doprinos predložene doktorske disertacije se ogleda u uspešnom ispitivanju navedenih relacija na širim matematičkim strukturama. Tehnike konačno dimenzionalne linearne algebre, koje se koriste u matricnom slučaju, a koje su neprimenljive u slučaju ograničenih operatora na Banahovim ili Hilbertovim prostorima, su zamenjene geometrijskom tehnikom dekompozicije prostora. Koristeći tehniku dekompozicije jedinice prstena u vidu sume međusobno ortogonalnih idempotenata, uopštene su najbitnije osobine uređenja u kontekstu fon Nojmanovih i proizvoljnih prstena sa ili bez involucije. Dokazan je i znatan broj novih rezultata. Značaj ovakvog, do sada neprimenjivanog pristupa u ispitivanju parcijalnih uređenja, leži u činjenici da je njime moguće na sličan način ispitivati osobine svih nabrojanih uređenja, što je i naznačeno odgovarajućom jedinstvenom teorijom. Poseban doprinos i značaj disertacije predstavlja upotreba anulatora u cilju pravilnog proširenja definicija različitih parcijalnih uređenja na skup elemenata koji ne poseduju uopšteni inverz i primena ovog pristupa u slučaju Rikartovih prstena.

Оцена самосталности научног рада кандидата (до 100 речи)

Kandidat je pokazao visok stepen samostalnosti u naučnom radu. Objavio je dva samostalna naučna rada u časopisima kategorije M21. Ustanovio je da se geometrijski pristup dekompozicije potprostora, tehnika dekompozicije jedinice prstena u vidu sume međusobno ortogonalnih idempotenata, i upotreba anulatora, sa velikim uspehom mogu primeniti na ispitivanje svih posmatranih parcijalnih uređenja.

ЗАКЉУЧАК (до 100 речи)

Na osnovu detaljnog pregleda priložene doktorske disertacije, Komisija zaključuje sledeće:

- Sadržaj urađene disertacije odgovara nazivu i ciljevima predloženim u prijavi disertacije.
- Metodologija razmatranja i izlaganja sadržaja disertacije je na odgovarajućem naučnom nivou.
- Kandidat izuzetno dobro poznaje teorijske osnove naučne oblasti koju istražuje.
- Kandidat je dao sopstveni originalni naučni doprinos u oblasti u kojoj je predložena tema, što je potvrđeno objavljenim naučnim radovima u uglednim međunarodnim časopisima.

Na osnovu svega što je u izveštaju navedeno, Komisija sa zadovoljstvom predlaže Nastavno-naučnom veću Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, da rad kandidata Dragana Rakića pod nazivom „Parcijalna uređenja određena uopštenim inverzima i anulatorima“ prihvati kao doktorsku disertaciju i odobri njenu javnu odbranu.

КОМИСИЈА

Број одлуке ННВ о именовану Комисије	97/1-01	
Датум именовану Комисије	28.01.2015	
Р. бр.	Име и презиме, звање	Потпис

	dr Vladimir Rakočević, redovni profesor	председник	
1.	Matematika (Научна област)	Prirodno-matematički fakultet Univerzitet u Nišu (Установа у којој је запослен)	<i>J Rakočević</i>
2.	dr Dragan Đorđević, redovni profesor	ментор, члан	
	Matematika (Научна област)	Prirodno-matematički fakultet Univerzitet u Nišu (Установа у којој је запослен)	<i>Dragan Đorđević</i>
3.	dr Peter Šemrl, redovni profesor	члан	
	Matematika (Научна област)	Fakultet za matematiku i fiziku Univerzitet u Ljubljani (Установа у којој је запослен)	<i>Peter Šemrl</i>
4.	dr Janko Marovt, vanredni profesor		
	Matematika (Научна област)	Ekonomsko-poslovni fakultet Univerzitet u Mariboru (Установа у којој је запослен)	<i>Janko Marovt</i>
5.	dr Ivana Đolović, vanredni profesor		
	Matematika (Научна област)	Tehnički fakultet Bor Univerzitet u Beogradu (Установа у којој је запослен)	<i>Ivana Đolović</i>

Датум и место:

9.3.2015., Niš, Ljubljana, Bor