УНИВЕРЗИТЕТ У ПРИШТИНИ
ПРИРОДНО–МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милисав Стефановић

ПРОБЛЕМ ЦЕНТРА И ФОКУСА КОД ПОЛИНОМСКИХ ДИНАМИЧКИХ СИСТЕМА И БИФУРКАЦИЈЕ ШЕСНАЕСТОГ ХИЛБЕРТОВОГ ПРОБЛЕМА СА ПРИМЕНАМА

Докторска дисертација

Косовска Митровица, 2011.

Садржај

Увод

Ова докторска дисертација посвећена је проучавању проблема центра и фокуса за полиномске дводимензионалне системе обичних диференцијалних једначина као и проучавања цикличности и бифуркација граничних цикала.

И ако су важни резултати из проблематике центара и изохроности добијени шездесетих и седамдесетих година прошлог века, ова проблематика поново привлачи знатно интересовање. У радовима [29], [57], [26] и референцама у њима изучавани су проблеми линеаризибилности и изохроности.

Након што је 1841.год. француски математичар Ж. Лиувил доказао да се у затвореном облику једначине кретања могу интегралити само у ретким случајевима, пажња математичара и механичара преусмерена је и на испитивања различитих својстава кретања, користећи својства самих једначина кретања. Чак и када се у процесу интеграције једначина кретања користе бесконачни редови то се и у том случају, као и у неким случајевима када се једначине могу интегралити у затвореном облику, веома често се дешава да се најзначајнија и најинтересантнија својства кретања не могу извести из облика добијених редова. Имајући у виду да је добијена зависност међу различитим параметрима често веома сложена, то када се једначина реши помоћу редова, а често и у затвореном облику, није увек гаранција да се такво кретање може изанализирати.

Дакле, јавила се потреба за поступцима и методама који би омогућавали да се, не решавајући саме једначине кретања, ипак добијају неопходни резултати о својствима кретања на основу познатих својстава динамичких система. Један од важних задатака теорије динамичких система је разрада ефективних метода решавања питања постојања, броја и стабилности периодичних кретања динамичких система. У случају неконстантних периодичних кретања дводимензионих динамичких система којима на фазној равни одговарају гранични цикли, важно је истаћи да се осцилације указаног типа јављају код механичких, акустичких и система који су најче71е предмет изучавања оног дела нелинеарне механике која асоцира на теорију нелинеарних осцилација. О важности изучавања граничних циклова говори чињеница да је Д.Хилберт питање њиховог броја и положаја укључио као 16-ти важан проблем од 23 наведених, 1900-те год., као нерешене проблеме. Без обзира што се овим проблемом баве многи познати свецки научници, овај проблем још није решен. Као што су показала истраживања А.А.Андронова и Е.А.Леонтович а сингуларне трајекторије динамичких система другог реда-стање равнотеже, сепаратрисе и гранични цикли-одређују скелет, који омогућава конструкцију квалитативне слике понашања фазних трајекторија у свим фазним просторима. Такође, истакнимо да за изучавање сепаратриса и понашање трајекторија у околини равнотежног стања динамичких система постоје разрађене методе, док за изучавање граничних цикала разрађених метода још увек нема, као што још увек заслужују пажњу бифуркације 16 Хилбертовог проблема са применама, што говори о савремености проблема предложене теме докторске дисертације "Проблем центра и фокуса код полиномских динамичких система и бифуркације шеснаестог Хилбертовог проблема са применама" и познавања најновијих резултата из исте проблематике. Дакле, савременост разматраних проблема говори о неопходности даљих истраживања, која су предмет докторске дисертације.

Структура рада је следећа. Рад је написан на 98 страна и садржи 18 слика. Организационо, овај рад се састоји из 5 глава. Савка глава подељена је на одељке. На крају рада наведен је списак литературе.

У првој глави ове докторске дисертације дати су основни појмови из теорије динамичких система, њихова основна својства, као и основна својства решења истих. Поред тога дата је геометријска интерпретација решења динамичког система и њихово упоређивање у простору $\mathbb{R}$ и фазној равни (x, y). Такође су дати основни појмови интегралних кривих, изоклина и општег интеграла, као и фазне равни која одговара динамичком систему.

У другој глави обрађене су Љапуновљеве функције и описани су могући типови понашања трајекторија линеарних дводомензионалних система са недегенерисаном матрицом као и неки од познатих резултата који показују понашање трајекторија у околини сингуларне тачке типа центра или фокуса за нелинеарни дводимензионални систем обичних диференцијалних једначина. Објашњени су појмови полиномских идеала и афиних варијетета као и њихово одређивање. Као главни резултат ове главе дати су потребни и довољни услови центра и фокуса за класу динамичких система трећег реда са четири параметара.

У трећем делу ове дисертације приоритет је дат препознавању центра и фокуса за дводиензионе системе диференцијалних једначина, методама израчунавања фокусних величина и формирању алгоритма за њихову редукцију. Такође су дати и услови цикличности за поменути систем.

Четврти део је посвећен проблему бифуркација малоамплитудних граничних цикала из центра или фокуса дводимензионих полиномских система.

Пета Глава, представља закључак у коме су неведени резултати ове дисертације и часописи у којима су наведени резултати објављени.

Резултати у главама 2 и 3 добијени су у сарадњи са професором Ћемалом Долићанином и Валеријем Романовским ([15], [16], [65]).

У овом истраживању теме докторске дисертације коришћене су савремене теоријске методе, уз коришћење савремене литературе и часописа у којима су објављени резултати шире везани за ову пробематику.

1

Динамички системи

1.1 Основни појмови

Посматрајмо систем диференцијалних једначина,

$$
\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y) \end{cases} \tag{1.1}
$$

где су $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ дефинисане непрекидне функције у некој области D еуклидске равни $E^2, D = E^2$ у којој је дефинисан Декартов правоугли координатни систем (x,y) са непрекидним парцијалним изводима до најмање реда један.Приметимо да независно промењива t, у функцијама $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ система (1.1), експлицитно не учествује.

Систем диференцијалних једначина (1.1), чије десне праве не садрже експлицитно независну промењиву t, зовемо *аутономним.* Иначе, аутономне системе диференцијалних једначина зовемо још *динамичким системима.*

Ако је $D \subseteq E^2$ динамички систем (1.1) зовемо *динамичким системом* у равни (равној области).

У будуће говорићемо само да је динамички систем дефинисан (задан) у области D.

Ако функције $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ из система (1.1) припадају класи C_n, тада за динамички систем (1.1) кажемо да је систем класе C_n.

Ако су $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ у (1.1) аналитичке функције у области D, тада за систем (1.1) кажемо да је *аналитички систем.*

Напоменимо да ћемо убудуће, под динамичким системима подразумевати системе класе C_1.

1.2 Основна својства динамичких система

Размотримо геометријску интерпретацију динамичког система (1.1) у $\mathbb{R}^3$ са Декартовим координатама x, y, t, при чему функције $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ треба разматрати као функције три параметра x, y и t. Како x и y не зависе од t, тада у $\mathbb{R}^3$ област дефинисаности функција $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ из (1.1) је бесконачна цилиндрична област H чије су генератрисе праве промене оси t, а директриса област D. За случај $D \equiv R^2 \equiv E^2$ имамо да је $H \equiv \mathbb{R}^3 \equiv E^3$

Решења

$$x = \varphi(t) \ \ , \ \ y = \psi(t)$$

система (1.1) интерпретирају се кривима на области H, које зовемо *интегралним кривим* система (1.1). Због чињеница да су $P(x, y)$ у$Q(x, y)$ функције класе C_1, за систем (1.1) у свим тачкама области H важи:

Особина 1.2.1 *За произвољну тачку $M_0(x_0, y_0) \in D$ и за свако* $t_0, -\infty < t_0 < \infty$ постоји једно и само једно решење

$$x = \varphi(t) \ \ , \ \ y = \psi(t)$$

система (1.1), који задовољава почетне услове

$$x_0 = \varphi(t_0) \ \ , J_0 = \psi(t_0),$$

дефинисане за све вредности t неког интервала (τ, T) који садржи t_0.

Са геометријске тачке гледишта особина (1.2.1) говори да кроз сваку тачку области H пролази једна и само једна интегрална крива система (1.1)

Особина 1.2.2 *Нека је $\overline{D_1}$ затворена ограничена област садржана у D тј. $\overline{D_1} \subset D$, и*

$$x = \varphi(t) \ \ , \ \ y = \psi(t)$$

решење система (1.1), дефинисано на интервалу (τ, T) таква да за свако $t \in (\tau, T)$ тачка $N(\varphi(t), \psi(t))$ у сваком тренутку остаје у области $\overline{D_1}$.

1.3 Основна својства решења система (1.1)

Као последице аутономности система (1.1) навешћемо нека основна својства решења посматраног система.

Особина 1.3.1 *Нека је*

$$x = \varphi(t) \ \ , \ \ y = \psi(t)$$

решење система (1.1), дефинисана на интервалу (τ, T) *тада је*

$$x = \varphi(t + C) \ \ , \ y = \psi(t + C),$$

где је C *- произвољна константа, такође решење система (1.1), које је дефинисано на*
$(\tau - C, T - C)$.

Особина 1.3.2 *Решења система (1.1)*

$$x = \varphi(t) \ \ , \ \ y = \psi(t)$$

и

$$x = \varphi(t + C) \ \ , \ y = \psi(t + C)$$

могу се сматрати као решења која задовољавају почетне услове са истим почетним условима x_0 *и* y_0 *и различитим почетним вредностима променљиве* t. *Ова два решења могу се добити једно из другог заменом* t *са* $t + C$ *са одговарајућим избором константе* C.

Особина 1.3.3 *Решења система (1.1) као функције од* t *и од почетних услова* t_0, x_0, y_0 *могу се записати у облику*

$$x = \varphi(t - t_0, x_0, \varphi_0) \, , \quad y = \psi(t - t_0, x_0, \varphi_0)$$

Особина 1.3.4 *Ако је решење система (1.1)*

$$x = \varphi(t - t_0, x_0, \varphi_0) \, , \quad y = \psi(t - t_0, x_0, \varphi_0)$$

дефинисано за $t = t_1$ *и*

$$x_1 = \varphi(t_1 - t_0, x_0, \varphi_0)$$
$$y_1 = \psi(t_1 - t_0, x_0, \varphi_0)$$

тада је

$$\varphi(t - t_0, x_0, y_0) \equiv \varphi(t - t_1, x_1, y_1)$$
$$\psi(t - t_0, x_0, y_0) \equiv \psi(t - t_1, x_1, y_1).$$

1.4 Геометријска интерпретација динамичког система на фазној равни

1.4.1 Фазна раван. Векторско поље. Сингуларне тачке

Геометријска интерпретација система (1.1) повезана је са посматраном равни (x, y), коју зовемо *фазна раван система (1.1).*

Ако посматрамо у свакој тачки $M(x, y), M \in D$ равни (x, y) вектор r са компонентама $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, тада на овај начин динамички систем (1.1) одређује у D *векторско поље.* Систем (1.1) у векторском облику записује се са,

$$\dot{x} = F(x)$$

што се нарочито користи код система са већим бројем непознатих.

Како $P(x, y)$ и $Q(x, y)$имају непрекидне парцијалне изводе, векторско поље одређено системом (1.1) зовемо *непрекидно диференцијалним векторским пољем.*

Ако је у неким тачкама, истовремено $P(x, y) = 0$ и $Q(x, y) = 0$, те тачке зовемо *сингуларним тачкама векторског поља* или *сингуларним тачкама система* (1.1), у противном се тачке зову *обичним* или *несингуларним.*

У свакој несингуларној тачки M векторског поља угао $Q(x, y)$, где је

$$\sin\theta = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \ , \quad \cos\theta = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \ ,$$

је непрекидан, док је у сингуларној тачки угао $\theta(x, y)$ неодређен кад x и y теже координатама сингуларне тачке.

1.5 Траекториије. Разбијање области D фазне равни на траекторије

Нека је,

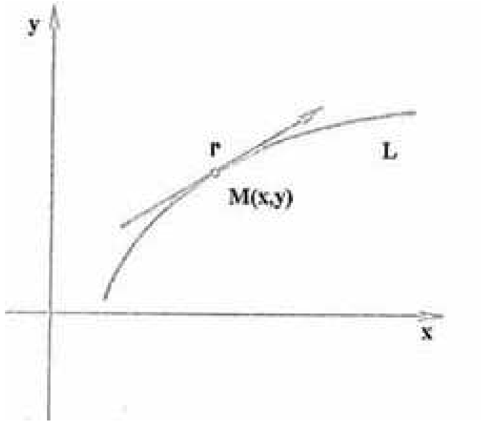
$$x = \varphi(t) \ , \ y = \psi(t)$$

произвољно решење система (1.1).

Скуп тачака $M\left(\varphi(t), \, \psi(t)\right)$, где t узима све вредности за које су функције $x = \varphi\left(t\right)$ и $y = \psi\left(t\right)$ дефинисане, зовемо *траекторијом* која одговара датом решењу а такође и *траекторијом* векторског поља заданог динамичким системом (1.1) или само траекторијом (фазном траекторијом) динамичког система (1.1).

Очигледно да су једначине $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, параметарске једначине траекторија. Обрнуто, ако имамо било коју траекторију, тада решење, којем она одговара, зовемо *решењем које одговара датој траекторији.*

Ако тачка $M(x,y)$ на траекторији није сингуларна тачка векторског поља, тада вектор $(P(x,y)\,,Q(x,y))$ је тангентни вектор траекторије сл.(1.1)



Слика 1.1:

Заиста, како је $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ решење система (1.1) важи:

$$\dot\varphi(t)=P\left(\varphi(t),\,\psi\left(t\right)\right)\ ,\ \dot\psi(t)=Q\left(\varphi\left(t\right)\right),\,\psi(t)\right).$$

Вектор $\left(\dot\varphi(t)\ ,\dot\psi(t)\right)$ очигледно је тангентни вектор траекторије L, па због

$$\dot\varphi(t)=P\left(\varphi(t),\,\psi\left(t\right)\right)\ ,\ \dot\psi(t)=Q\left(\varphi\left(t\right)\right),\,\psi(t)\right)$$

он се поклапа са вектором поља заданог система (1.1).

Ако је $M(x_0,y_0)$ сингуларна тачка система (1.1) тада због

$$P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0,$$

је очигледно $x=x_0$, $y=y_0$ решење система (1.1) па је сингуларна тачка M векторског поља (1.1) *посебна траекторија*, коју зовемо *положајем* или *тачком равнотеже.*

Обрнуто, ако систем (1.1) има решење

$$x=x_0\quad,\quad y=y_0$$

где су x_0 и y_0 неке констате, тада је тачка (x_0,y_0) тачка равнотеже тј. сингуларна тачка векторског поља тј. за њу су испуњени услови $P(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)=0$. Како у решењу

$$x=x_0\quad,\quad y=y_0$$

не фигурише t, оно је дефинисано за свако t.

Особина 1.5.1 *Свакимдвома решењима која се разликују само у избору t_0, одговара једна те иста траекторија.*

Особина 1.5.2 *Кроз сваку тачку области D пролази једна и само једна траекторија динамичиког система (1.1).*

На основу особине 1.5.2, динамички систем, задан у области D, одређује неку фамилију траекторија или такозвано *разбијање области D на траекторије.*

Као почетак испитивања разбијања области D на траекторији састоји се у утврђивању могућег карактера посебне траекторије тј. тачке равнотеже, са којом смо се већ упознали.

Претпоставимо сада да траекторија L, која одговара решењу

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t),$$

није посебна траекторија, па у свакој њеној тачки важи:

$$(\dot{\varphi}(t))^2 + \left(\dot{\psi}(t)\right)^2 \equiv (P(\varphi, \psi))^2 + (Q(\varphi, \psi))^2 \neq 0$$

Особина 1.5.3 *Нека је траекторија L, која одговара решењу*

$$x = \varphi(t) \ , y = \psi(t), \ \ t \in (\tau, T) \, ,$$

различита од посебне (специјалне) траекторије равнотеже и нека постоје вредности t_1 и t_2 из (τ, T) , $t_1 < t_2$ такве да је

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \ , \ \psi(t_1) = \psi(t_2).$$

Тада решење $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ дефинишемо за свако $t \in (-\infty, \infty)$ функције $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ су периодичне функције по t, а одговарајућа траекторија је проста глатка затворена крива.

Решење,

$$x = \varphi(t) \ , \ y = \psi(t)$$

где су,

$$\varphi(t) = \varphi\left(t + \theta_0\right) \ , \ \psi(t) = \psi\left(t + \theta_0\right)$$

периодичне функције, зовемо периодичним решењем, *а најмању периоду θ_0, за које је*

$$\varphi(t) = \varphi\left(t + \theta_0\right) \ , \ \psi(t) = \psi\left(t + \theta_0\right),$$

зовемо периодом тог решења.

Траекторије које одговарају периодичним решењима зовемо затвореним, *у противном их зовемо* отвореним.

1.6 Упоређење геометријских интерпретација у простору $\mathbb{R}^3$ и фазној равни (x, y)

Раније смо истакли да сваком решењу система (1.1) у $\mathbb{R}^3$ одговара интегрална крива.

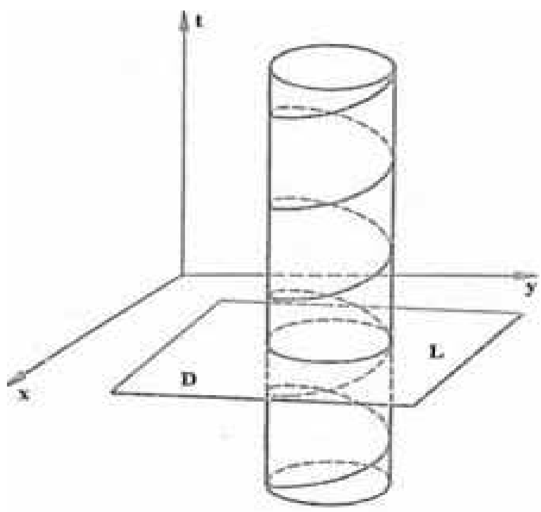
Очигледно, да је *траекторија пројекција* те интегралне криве на раван (x, y). На основу 1.3.4 закључујемо да се у траекторију пројектују оне и само оне интегралне криве простора $\mathbb{R}^3$, које се добијају из једне такве криве транслацијом за произвољан одсечак дуж осе t. На овај начин утврђује се природна веза између траекторија динамичког система на фазној равни и интегралних кривих у простору $\mathbb{R}^3$. У зависности од карактера траекторије L могу наступити следећи случајеви:

-L је траекторија равнотеже $M(x_0, y_0)$.

Тада одговарајућа интегрална крива у $\mathbb{R}^3$ је права $x = x_0$, $y = y_0$ која је паралелна оси t и пролази кроз тачку M. Транслацијом дуж осе t та права прелази у саму себе.

-L је затворена траекторија , која одговара периодичном решењу са периодом θ_0.

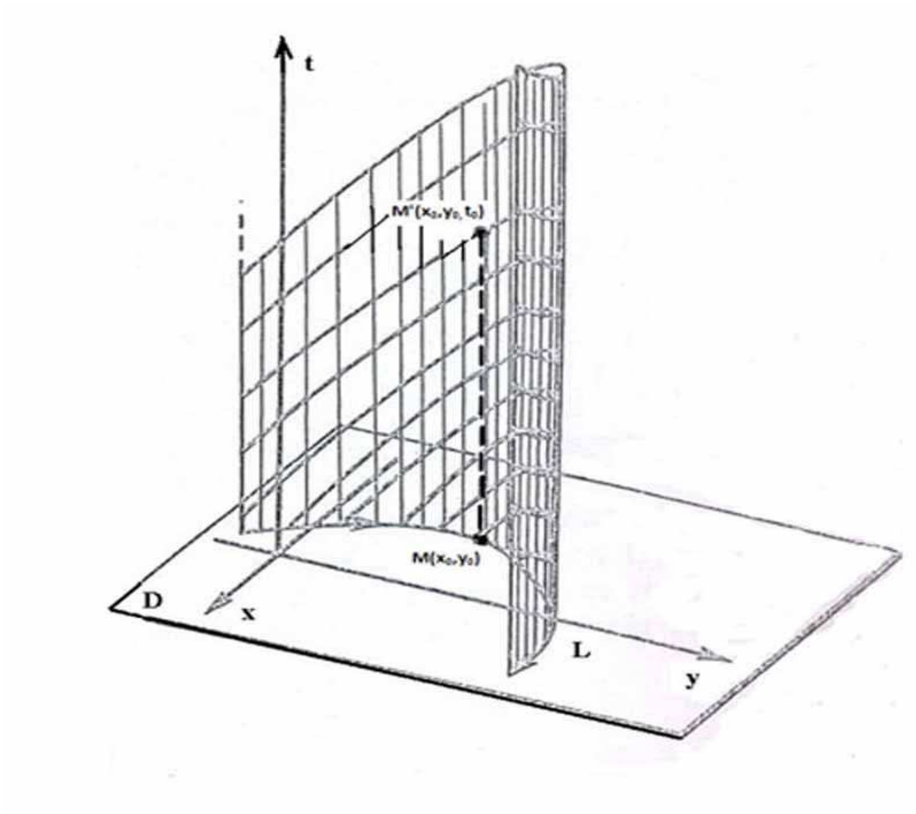
Одговарајуће интегралне криве имају облик "хеликоидне линије" са кораком θ_0 и пројектују се у траекториј L. При транслацији дуж осе t, за одсечак C, свака интегрална крива прелази у другу криву, уколико C није дељива са θ_0, а сама у себе ако је C дељива са θ_0 (сл.1.2)



Слика 1.2:

-L незатворена траекторија.

У овом случају свака интегрална крива, која одговара траекторији L, при произвољној транслацији дуж осе t, различитој од нуле, прелази у другу интегралну криву (сл.1.3)



Слика 1.3:

Упоредо са системом (1.1) размотримо систем (1.1)' тј. систем:

$$\frac{dx}{dt} = -P(x,y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -Q(x,y) \tag{1.1$'$}$$

Ако смерове вектора векторског поља система (1.1) променимо у њима супротне добијамо векторско поље система (1.1)'. Простом провером показује се, да ако је

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \varphi(t)$$

решење система (1.1), тада је

$$x = \varphi(-t) \quad , \quad y = \psi(-t)$$

решење система (1.1)'.

Очигледно да системи (1.1) и (1.1)' имају исте траекторије са супротим правцима. Дакле прелаз од система (1.1) на систем (1.1)', можемо разматрати као промену параметризација на траекторијама, а заправо као замену t са параметром $-t$.

Особина 1.6.1 *Нека је*

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t)$$

решење система (1.1), чија је траекторија различита од траекторије равнотеже. Тада постоји монотона таква функција класе $\mathbb{C}_1, t = \beta(s)$, да је пар функција

$$x = \varphi\left(\beta\left(s\right)\right) = \varphi^*\left(s\right)\ ,\ y = \psi\left(\beta\left(s\right)\right) = \psi^*\left(s\right)$$

решење система

$$\frac{dx}{ds} = P(x,y)f(x,y) = P^*(x,y),\ \frac{dy}{ds} = Q(x,y)f(x,y) = Q^*(x,y)\ldots \qquad (1.1)^*$$

где је $f(x,y)$ функција класе $\mathbb{C}_1$ дефинисана на D.

Ако претпоставимо да је $f(x,y) = 0$ у тачкама које су различите од тачака равнотеже система (1.1), као и да може мењати знак у области D, тада је очигледно да су равнотежне тачке система $(1.1)^*$ све равнотежне тачке система (1.1).

Као и све тачке области D које нису тачке равнотеже система (1.1) а у којима је $f(x,y) = 0$.

Криву

$$f(x,y) = 0$$

зовемо *сингуларном линијом* система $(1.1)^*$, и свака њена тачка је тачка равнотеже система $(1.1)^*$.

Посматрајмо траекторију L система (1.1) различиту од траекторије равнотеже, на којој је $f(x,y) \neq 0$. Тада као и раније, L је траекторија система $(1.1)^*$ са промењеном параметризацијом. Уколико пак, на кривој L има тачака криве $f(x,y) = 0$, тада све тачке криве L различите од тих тачака, разлажу се на коначан или пребројив број глатких кривих, које су траекторије система $(1.1)^*$ (сл. 1.4) чија се усмерења поклапају са усмерењима на L ако је на тој траекторији $f(x,y) > 0$, а не поклапају се у противном.

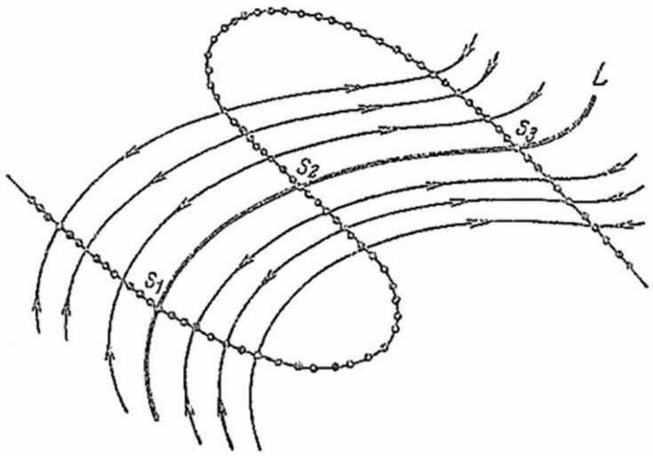
1.7 Замена промењивих и диференцијална једначина која одговара динамичком систему

1.7.1 Замена промењивих

Нека је систем (1.1) дефинисан на ограниченој области D. Посматрајмо *регуларно пресликавање*, области D на област D^* равни (u,v), задато формулама

$$x = f(u,v) \quad , \quad y = g(u,v) \qquad (1.2)$$

или њима еквивалентним,



Слика 1.4:

$$u = f^*(x,y) \quad , \quad v = g^*(x,y), \tag{1.2$'$}$$

где су f, g, f^* и g^* функције класе $\mathbb{C}_2$. Да би D^* била ограничена, што претпостављамо , потребно је и довољно да f^* и g^* буду ограничене у D.

Промењиве u, v можемо посматрати као Декартове координате равни (u, v) и као криволинијске координате области D равни (x, y). Тада (1.2) и (1.2)' представљају *замене промењивих* или *трансформацију координата*.

Нека после трансформације координата систем

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y)$$

тј. систем (1.1) се трансформише у систем облика

$$\frac{du}{dt} = U(u,v) \quad , \quad \frac{dv}{dt} = V(u,v)$$

тада имамо:

$$U(u,v) = \frac{\partial f^*}{\partial x}\, P\left(f(u,v), g(u,v)\right) + \frac{\partial f^*}{\partial y}\, Q\left(f(u,v), g(u,v)\right),$$

$$V(u,v) = \frac{\partial f^*}{\partial x}\, P\left(f(u,v), g(u,v)\right) + \frac{\partial f^*}{\partial y}\, Q\left(f(u,v), g(u,v)\right),$$

што значи да при прелазу на нове координате u, v, вектор r са координатама $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ прелази у вектор r^* са координатама $U(u, v)$ и $V(u, v)$ задате претходним изразима, који представљају њихову везу са $P(x, y)$ и $Q(x, y)$.

При пресликавању (1.2), свака траекторија

$$x = \varphi(t) \quad , \quad y = \psi(t)$$

система (1.1) прелази у траекторију

$$u = \varphi^*(t) = f^*\left(\varphi(t), \psi(t)\right)\ ,\ y = \psi^*(t) = g^*\left(\varphi(t), \psi(t)\right)$$

система,

$$\frac{du}{dt} = U(u,v)\ ,\ \frac{dv}{dt} = V(u,v)$$

и обрнуто.

У будуће ћемо користити и нерегуларно пресликавање, као што је прелаз на поларне координате

$$x = \varrho \cos\theta\ , y = \varrho \sin\theta,$$

где се као прво нарушава једнозначност а као друго, функционална детерминанта

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \varrho} & \dfrac{\partial y}{\partial \varrho} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \varrho$$

једнака је нули за $\varrho = 0$.

1.7.2 Диференцијална једначина која одговара динамичком систему

Посматрајмо поново систем (1.1), тј. систем

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y)$$

тада дељењем једне са другом, добијамо диференцијалну једначину,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, \tag{1.3}$$

или

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{1.3$'$}$$

Посматрајмо једначину (1.3) и произвољну тачку $M_0(x_0, y_0)$ области D. Имајући у виду теорему о постојању и јединствености решења, ако је за вредности x_0, y_0 , $P(x_0, y_0) \neq 0$, тада постоји јединствено решење

$$y = f(x),$$

које одговара почетним условима x_0, y_0 и аналогно, јединствена интегрална крива једначине (1.3) која пролази кроз тачку $M_0(x_0, y_0)$.

Коефицијенат правца тангенте на тој кривој у тачки $M(x_0, y_0)$ задаје се формулом

$$y'_{x_0} = \frac{dy}{dx}\ |_{\mu_0} = \frac{Q(x_0, y_0)}{P(x_0, y_0)}$$

Нека је

$$x = \varphi(t)\ ,\ y = \psi(t)$$

решење система (1.1), које одговара почетним условима t_0, x_0, y_0. Узимајући t близу t_0, x_0, y_0 као функцију $x, t = \gamma(x)$ и стављајући у функцију $y = \psi(t)$, добијамо да је $y = \psi\left(\gamma(x)\right) = f(x)$, решење система,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}.$$

Очигледно интегрална крива претходне једначине, у тачкама дефинисаности, поклапа се са траекторијом система (1.1) или је део те траекторије.

Особина 1.7.1 Истовремено задати системи

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

и

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

одређују све траекторије система (1.1) тј. система

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y)$$

различите од траекторије равнотеже.

Уместо једначина

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$$

или

$$\frac{dx}{dy} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

користићемо се следећим симетричним, у односу на x и y, једначинама

$$P(x,y)dy - Q(x,y)dx = 0$$

или

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}\,.$$

Траекторије система (1.1) које нису равнотежне зваћемо *интегралним кривим* претходне једначине. Тачке за које истврремено важи

$$P(x,y) = 0 \quad , \quad Q(x,y) = 0$$

и обе једначине

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \quad i \quad \frac{dx}{dt} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

губе смисао зовемо *сингуларним* тачкама свих једначина:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}\ ,\ \frac{dx}{dy} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\ ili\ \frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}\,.$$

Дакле, равнотежним траекторијама система (1.1) одговарају сингуларне тачке претходних једначина и обрнуто.

1.8 Изоклине. Интегралне криве. Општи интеграл једначина (1.1)

1.8.1 Изоклине

Криве области D чија је једначина

$$Q(x,y) - C\ P(x,y) = 0 \tag{1.4}$$

или једначине

$$P(x,y) = 0 \tag{1.5}$$

зовемо *изоклинама* (линијама једнаког нагиба) система (1.1) или једначине

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}.$$

Изоклине имају то својство да траекторије система (1.1) које пролазе кроз тачке, које нису тачке равнотеже, сваке криве, имају у тим тачкама исте коефицијенте правца тангената. Наиме, коефицијенти праваца траекторија у тачкама изоклине (1.4) једнаке су C, а у тачкама изоклине (1.5) су бесконачно (∞). Дакле, правци тангената на траекторији мењају се само при прелазу тачке са једне на другу изоклину.

Изоклине $P(x,y) = 0$ и $Q(x,y) = 0$ зову се *главним изоклинама.* У тачкама првој од њих тангенте на траекторијама су вертикалне, а у тачкама друге хоризонталне.

Дакле, главне изоклине зовемо још *изоклинама хоризонталног* односно *вертикалног* нагиба. Очигледно, све тачке равнотеже леже на свакој од изоклиних и обрнуто, заједничка тачка ма којих двају различитих изоклина је тачка равнотеже система.

Специјално, тачке равнотеже су заједничке тачке двају главних изоклина.

1.8.2 Интеграл. Интегрална крива. Општи интеграл система (1.1)

Наведене појмове, код дифенцијалне једначине или система диференцијалних једначина, увешћемо аналогно овим појмовима код аналитичких дифенцијалних једначина и система. Овде ћемо се задржати на наведеним појмовима кроз њихово кори7ћење неким конкретним примерима.

Нека је систем (1.1) аналитички систем у области D. Њему одговарајућа дифернцијална једначина у симетричном облику је

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)}.$$

Ако је $F(x,y)$ функција која задовољава следеће услове

1) $F(x,y)$ је аналитичка у свакој тачки криве чија је једначина

$$F(x,y) = 0$$

2) У свакој тачки криве чија је једначина

$$F(x,y) = 0$$

идентички важи једнакост

$$F'_x(x,y)P(x,y) + F'_y(x,y)Q(x,y) = 0$$

Тада релацију

$$F(x,y) = 0$$

зовемо *интегралом* или *парцијалним интегралом* система (1.1) или њему одговарајуће симетричне једначине, а криву, одређену том релацијом, *интегралном кривом.*

Нека је

$$F(x,y) = 0$$

интеграл система (1.1). Размотримо одговарајућу интегралну криву, која може имати тачака равнотеже система (1.1), а такође и тачака у којима је истовремено

$$F'_x(x,y) = F'_y(x,y) = 0,$$

тј. сингуларних тачака криве чија је једначина

$$F(x,y) = 0.$$

Особина 1.8.1 *Сваки део (одсечак) интегралне криве, који не садржи равнотежне тачке система (1.1) и који нема сингуларних тачака, је траекторија или неки њен део система (1.1).*

Заиста, нека је $M_0(x_0, y_0)$ тачка таквог одсечка криве

$$F(x, y) = 0,$$

и нека је у M_0 $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тада у некој околини M_0 крива може бити задана једначином

$$y = f(x),$$

при чему је

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{F'x(x, y)}{F'y(x, y)}$$

за све тачке криве у тој равни. Како је $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, то је у околини M_0 $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Из релације

$$F'_x(x, y)P(x, y) + F'_y(x, y)Q(x, y) = 0$$

следује, да је у околини M_0 $P(x, y) \neq 0$ и да је

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{F'x(x, y)}{F'y(x, y)} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)},$$

што значи да функција $y = f(x)$ задовољава једначину

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Аналогно се разматра случај, када је $F_x(x_0, y_0) \neq 0$. У овом случају разматрани одсечак криве

$$F(x, y) = 0,$$

је одсечак интегралне криве, која је траекторија или њен део система (1.1).

Посматрајмо сада фамилију кривих

$$F(x, y, C) = 0,$$

где је C произвољна константа, и које су дефинисане на некој области (интервалу).

Једначину,

$$F(x, y, \mathbb{C}) = 0$$

зовемо *општим интегралом* једначине

$$\frac{dx}{P(x, y)} = \frac{dy}{Q(x, y)}$$

или система (1.1) тј. система

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y),$$

ако свака крива фамилије

$$F(x,y,C) = 0$$

је интегрална крива и ако свака тачка области D припада најмање једној кривој из фамилије

$$F(x,y,C) = 0.$$

Према претходном, ако је функција $G(x,y)$, дефинисана на D, аналитичка у свим тачкама D, осим можда у тачкама равнотеже система (1.1) и ако задовољава идентитет

$$G'_x(x,y) \cdot P(x,y) + G'_y(x,y) \cdot Q(x,y) = 0,$$

тада

$$G(x,y) = C$$

је општи интеграл система (1.1).

Ако систем (1.1) има општи интеграл облика

$$G(x,y) = C,$$

где је $G(x,y)$ функција аналитичка у свим тачкама области D, тада кажемо да систем (1.1) тј. систем

$$\frac{dx}{dt} = P(x,y) \quad , \quad \frac{dy}{dt} = Q(x,y)$$

односно једначина

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)},$$

има у области D *аналитички интеграл* или *интеграл енергије* система (1.1).

Иначе за систем облика (1.1) који има аналитички интеграл, кажемо да је такозвани Хамилтонов систем:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y},$$

где је $H(x,y)$ аналитичка функција, а

$$H(x,y) = C,$$

је интеграл енергије претходног система, који је јасног облика (1.1).

1.9 Примери динамичких система који илуструју појмове претходног параграфа

Свим доле наведеним динамички системи биће дефинисани на целој равни.

Пример 1. Траекторије система

$$\frac{dx}{dt} = 1 \ , \ \frac{dy}{dt} = 0;$$

су праве,

$$y = c_1 \ , \ x = t + c_2$$

паралелене оси x. Тачака равнотеже нема, а све траекторије интегралне криве су тзв. целе траекторије.

Пример 2. Траекторије система

$$\frac{dx}{dt} = 1 \ , \ \frac{dy}{dt} = 1 + y^2;$$

су,

$$y = tg(t + c_1) \ , \ x = t + c_2$$

и нису целе траекторије, због тога што њихове тачке теже бесконачности, када t тежи коначној вредности.
Заиста је

$$\lim y_{t + c_1 \to \frac{\pi}{2}(2k+1)} = \lim t_g(t + c_1)_{t + c_1 \to \frac{\pi}{2}(2k+1)} = \infty$$

Пример 3. На фазној равни, систем

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x \ , \ \frac{dy}{dt} = a_2 y \ , \ a_1 a_2 > 0$$

задаје векторско поље сл.(1.5) на којој праве представљају изоклине.

Очигледно да дати систем има јединствену тачку равнотеже $O(0,0)$. Решење датог система, које одговара почетним условима t_0, x_0, y_0, је облика

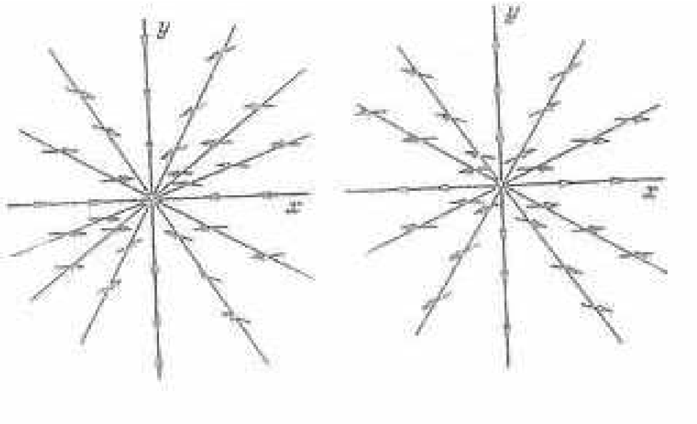
$$x = x_0 e^{a_1(t - t_0)} \quad , \quad y = y_0 e^{a_2(t - t_0)}$$

и ако је функција од $(t - t_0)$. Траекторије задатог система добијамо елиминацијом t из претходног система. Тако добијамо

$$y - y_0 \frac{x^{\frac{a_2}{a_1}}}{x_0^{\frac{a_2}{a_1}}} = 0,$$

односно,

$$y - cx^{\frac{a2}{a1}} = 0,$$



Слика 1.5:

где је

$$c = \frac{y_0}{x_0^{\frac{a_2}{a_1}}} \quad , \quad y_0 \neq 0.$$

За $y_0 = 0$ добијамо $x = 0$, као и за $c = 0$ је $y = 0$.

Ако од полазног система, пређемо на једно од следећих диференцијалних једначина:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2 y}{a_1 x},$$

или

$$\frac{dy}{a_2 y} = \frac{dx}{a_1 x}$$

тада после интеграције, као интегралне криве, добијамо параболе,

$$y = c x^{\frac{a_2}{a_1}},$$

и две координатне осе.

Као што смо раније видели, једначина

$$\frac{dy}{a_2 y} = \frac{dx}{a_1 x}$$

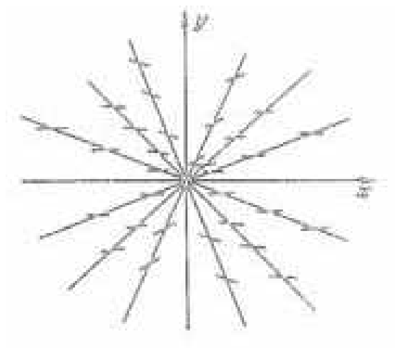
дефинише поље линеарних елемената сл.1.6.

Траекторијама полазног система су они делови (половине) парабола

$$y = c x^{\frac{a_2}{a_1}},$$

и координатних оса $x = 0$ и $y = 0$ на које те криве разбија тачка равнотеже $(0, 0)$. Из релација

$$x = x_0 e^{a_1 (t - t_0)} \quad , \quad y = y_0 e^{a_2 (t - t_0)}$$



Слика 1.6:

за $a_1 < 0, a_2 < 0$, закључујемо да ма која тачка, различита O, траекторије тежи тачки 0 равнотеже кад $t \to +\infty$, а за $a_1 > 0, a_2 > 0$, код $t \to -\infty$. Дакле, траекторије теже тачки равнотеже кад $t \to +\infty$ или кад $t \to -\infty$

Ако се тачка креће по траекторији, која није равнотежна, тежећ и некој тачки $A(x_0, y_0)$ равнотеже, тада при том $|t| \to \infty$. Заиста, према ранијем, ако би $t \to \tau, \tau$ - коначна вредност, што би значило да кроз тачку простора (x, y, t) са координатама (x_0, y_0, τ) пролазе две интегралне криве од којих је једна права паралелна оси t која одговара равнотежном стању $A_0(x_0, y_0)$, а друга која одговара траекторији L. Ово би противречило теореми о јединствености решења.

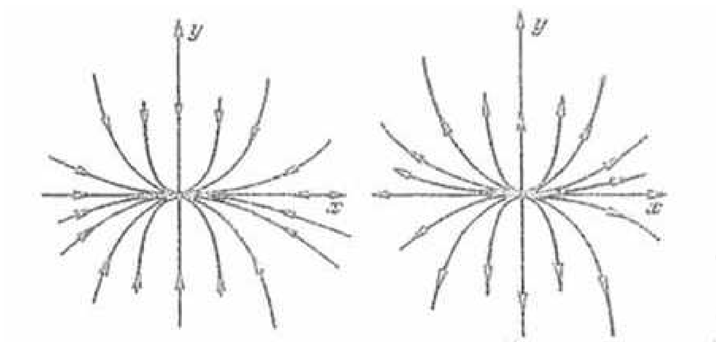
На овај начин, разбијање на траекторије одређено системом

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x \quad , \quad \frac{dy}{dt} = a_2 y$$

је облика сл.1.7. Равнотежну тачку овог зовемо *жижом* и то:

- <u>стабилном</u>, $a_1 < 0, a_2 < 0$, лева сл. 1.7

- <u>нестабилном</u>, $a_1 > 0, a_2 > 0$, десна сл. 1.7



Слика 1.7:

Размотримо још интегралне криве система

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x \quad , \quad \frac{dy}{dt} = a_2 y$$

у простору $\mathbb{R}^3$ са координатама x, y, t.

На основу формула

$$x = x_0 e^{a_1(t-t_0)} \quad , \quad y = y_0 e^{a_2(t-t_0)}$$

имамо да су интегралне криве система

$$\frac{dx}{dt} = a_1 x \quad , \quad \frac{dy}{dt} = a_2 y$$

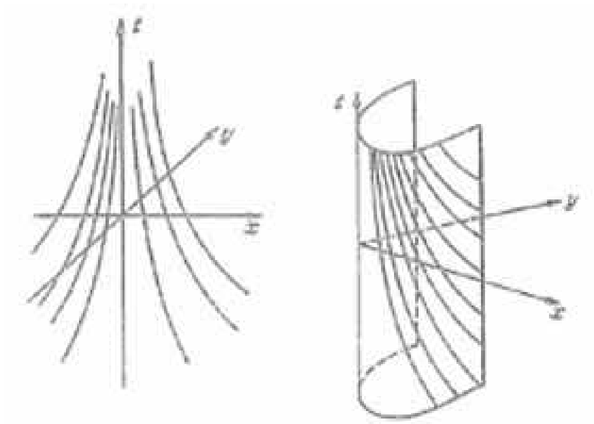
следеће криве у простору (x, y, t) :

1) оса t чија је једначина $x = 0, y = 0$ (која се добија из $x = x_0 e^{a_1(t-t_0)}$, $y = y_0 e^{a_2(t-t_0)}$, за $x_0 = y_0 = 0$) пројектује се у тачку равнотеже фазне равни.

2) Експоненцијалне криве

$$x = x_0 e^{a_1(t-t_0)} \ , \ y = 0$$

у координатној равни $x > 0, \ y = 0$ или $x < 0, \ y = 0,$ које асимптоцки теже оси $t,$ за $t \to \infty,$ кад је $a_1 < 0,$ сл.1.8 - лева, и за $t \to -\infty,$ ако је $a_1 > 0.$ Ове криве пројектују се у позитивну и негативну апсцисну полуосу, које су траекторије система.



Слика 1.8:

3) експоненцијалне криве

$$y = y_0 e^{a_2(t-t_0)} \ , \ x = 0$$

аналогне су кривима типа 2)

4) криве

$$x = x_0 e^{a_1(t-t_0)} \quad , \quad y = y_0 e^{a_2(t-t_0)} \quad , \quad x_0 y_0 \neq 0$$

расположене су на параболичким цилиндрима

$$y = C x^{a_2 / a_1} \quad , \quad C \neq 0$$

са генератрисама паралелним оси t. Оса t сваки овакав цилиндар разлаже на две половине, при чему свака интегрална крива типа 4) лежи у потпуности на једној од половина цилиндра и асимптоцки тежи оси $t, t \to \infty$, за $a_1 < 0, a_2 < 0$, сл.1.8 - десно, а за $t \to -\infty$ кад је $a_1 > 0, a_2 > 0$. Интегралне криве типа 4) добијају се једна из друге транслацијом дуж осе t, што важи и за интегралне криве типа 2) и 3).

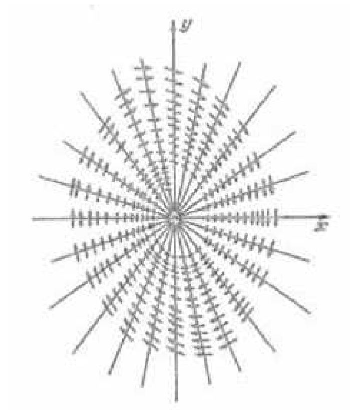
Пример 4. Векторско поље система

$$\frac{dx}{dt} = -y + \alpha x \ , \ \frac{dy}{dt} = x + \alpha y \ , \ \alpha \neq 0, \tag{1.6}$$

за случај: $\alpha < 0$ представљено је на сл.1.9

Решавајући претходни систем као линеарни систем са константним коефицијентима, добијамо решење, које одговара почетним условима t_0, x_0, y_0, у облику функција

$$\begin{aligned} x &= e^{x(t-t_0)} \left[x_0 \cos(t-t_0) - y_0 \sin(t-t_0)\right] \\ y &= e^{\alpha(t-t_0)} \left[x_0 \sin(t-t_0) - y_0 \cos(t-t_0)\right] \end{aligned} \tag{1.7}$$



Слика 1.9:

Карактер траекторија полазног система једноставније је сагледати преласком на поларне координате. Нека су ϱ_0 и θ_0 поларне координате тачке $M_0(x_0, y_0)$. Стављајући

$$x = \varrho \cos\theta \quad , \quad y = \varrho \sin\theta$$

једначина траекторије постоје

$$\theta = \theta(t) \ , \ \varrho = \varrho(t) \quad , \quad \theta(t) \geq 0, \, \theta(t_0) = \theta_0, \, \varrho(t_0) = \varrho_0.$$

После елементарих трансформација, имамо

$$\varrho = \varrho_0 e^{\alpha(t-t_0)} \ , \ \theta = t - t_0 + \theta_0 \ ,$$

одакле, елиминацијом t добијамо једначину

$$\varrho = \varrho_0 e^{\alpha(\theta-\theta_0)} \ ,$$

свих траекторија полазног система.

За $\varrho \neq 0$ ове траекторије су логаритамске спирале, док за $\varrho_0 = 0$ имамо равнотежу $O(0,0)$.

Прва од једначина (1.7) показује да све траекторије теже ка стању равнотеже O за $t \to +\infty$ за случај $\alpha < 0$ сл.1.10 - лева и за $t \to -\infty$ када је $\alpha > 0$ сл.1.10 - десна

Стање равнотеже типа, као у датом примеру, зовемо *фокусом* и то *стабилним* за $\alpha < 0$, а *нестабилним* за $\alpha > 0$.

Слика 1.10:

Једначина еквивалентна полазном систему из овог примера, тј. једначина

$$\frac{dx}{-y+\alpha x} = \frac{dy}{x+\alpha y}$$

је хомогена, из које интеграцијом добијамо

$$x^2 + y^2 - Ce^{2\alpha \arctan \frac{y}{x}} = 0,$$

или

$$x^2 + y^2 - Ce^{2\alpha \arctan \frac{x}{y}} = 0.$$

Прва од задњих двеју једначина је општи интеграл система у свакој области која не садржи тачке осе y тј. тачке $x = 0$, а друга у свакој области која не садржи тачке осе x тј. тачке $y = 0$.

Специјалан случај полазног система из овог примера, а за $\alpha = 0$, је

$$\frac{dx}{dt} = -y \ , \ \frac{dy}{dt} = x \ , \tag{1.6$'$}$$

чије одговарајуће решење почетним условима t_0, x_0, y_0, је облика

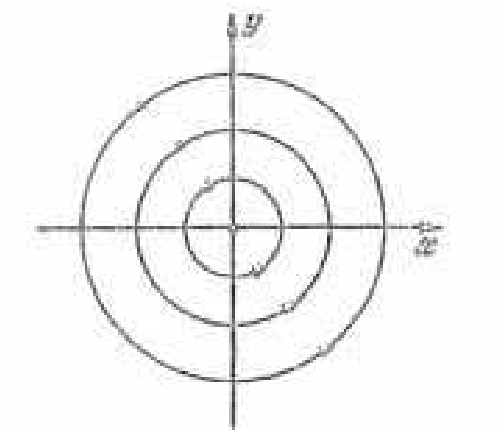
$$
\begin{aligned}
x &= x_0\cos(t-t_0) - y_0\sin(t-t_0)\\
y &= x_0\sin(t-t_0) + y_0\cos(t-t_0)
\end{aligned}
\tag{1.7$'$}
$$

Непосредном провером можемо се уверити да је

$$x^2+y^2=C,$$

општи интеграл система. Дакле, систем има аналитички интеграл.

Траекторије система су стање равнотеже $O(0,0)$ и затворене траекторије - концентрични кругови са центром у координатном почетку сл.1.11



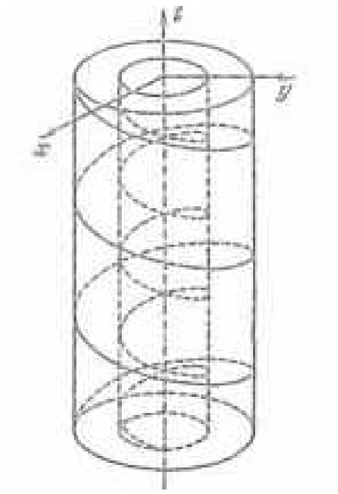
Слика 1.11:

Решење (1.7)' система, које одговара затвореним траекторијама - концентрич ним круговима, су периодичне функције периоде 2π.

Интерградне криве у простору (x,y,t) је оса t и хеликоидне линије расположене на кружном цилциндру чије су директрисе

$$x^2+y^2=C.$$

Корак сваке хеликоидне линије је 2π, сл. 1.12



Слика 1.12:

2

Услови центра за једну класу динамичких система трећег реда

2.1 Трајекторије линеарних система

Размотримо реални равански линеарни систем, тј. систем

$$\frac{du}{dt} = au + bv, \quad \frac{dv}{dt} = cu + dv, \tag{2.1}$$

за који координатни почетак представља елементарну сингуларну тачку, тј. за случај када је

$$\triangle \overset{def}{=} ad - bc \neq 0.$$

Означимо са A матрицу система (2.1). Тада постоји несингуларна матрица

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

при чему је

$$J = M^{-1} AM,$$

где је J

Zhaordanova(Marie Ennemond Camille Jordan $1838 - 1922$)

форма матрице A.

Матрица J може имати један од следећих облика

$$J_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

за случај када су сопствене вредности матрице A различите, а један од облика

$$J_2 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \qquad \text{или} \qquad J_3 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

за случај када су сопствене вредности матрице A једнаке.

Матрица M одређује промену фазе координата

$$\begin{cases} u = m_{11}x_1 + m_{12}x_2, \\ v = m_{21}x_1 + m_{22}x_2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Сопствене вредности матрице A одређују се помоћу једначине

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

то јест,

$$\lambda^2 - \lambda(a+b) + ad - bc = 0. \tag{2.3}$$

Означимо са $\sigma = a + d$, $\triangle = ad - bc$. Тада можемо једначину (2.3) написати у облику

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \triangle = 0,$$

одакле следи

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4\triangle}}{2}. \tag{2.4}$$

Стога из (2.4) добијамо да:

(а) ако је $\triangle < 0$ тада су сопствене вредности реалне и различите од којих је једна позитивна, а друга негативна;

(б) ако је $\triangle > 0$ и $\sigma^2 - 4\triangle \geq 0$ тада су сопствене вредности реалне, али су истог знака;

(ц) и ако је $\triangle > 0$ и $\sigma^2 - 4\triangle < 0$ тада су сопствене вредности коњуговано комплексне тј. $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, при чему је $\alpha \neq 0$ када је $\sigma \neq 0$ и $\alpha = 0$ када је $\sigma = 0$.

Познато је да ако су сопствене вредности реалне матрице 2×2 комплексне тада постоје реалне матрице M и J за које важи ;

$$J = M^{-1}AM$$

и

$$J_4 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Посматрајмо линеарни систем диференцијалних једначина са матрицом J_1, тј.

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2. \tag{2.6}$$

Једначина трајекторија система (2.6) је

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\lambda_1 x_1}{\lambda_2 x_2}.$$

Интеграљењем ове једначине добијамо

$$\lambda_2 \ln x_1 = \lambda_1 \ln x_2 + \ln c, \quad c > 0,$$

одакле следи

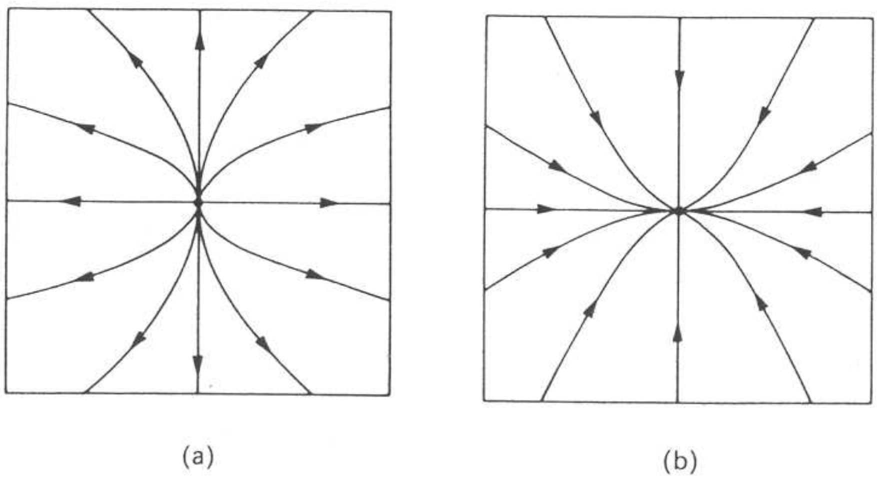
$$x_1 = c^{\frac{1}{\lambda_2}} x_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}. \tag{2.7}$$

Видимо да када су λ_1 и λ_2 истог знака тада једначина (2.7) дефинише експоненцијалну функцију са константним експонентом (сингуларна тачка се у овом случају зове *чвор*), а када су различитог знака трајекторије (2.7) су хиперболе (сингуларна тачка се тада зове *седласта тачка*).

Да би се одредио правац протока фазе одредимо решење система једначина (2.6). Интеграљењем ових једначина добијамо

$$x_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad x_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}.$$

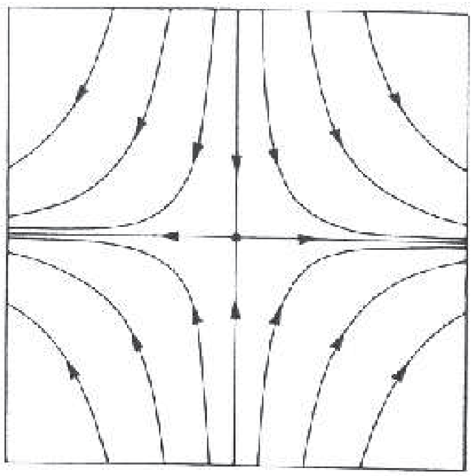
Из последњих једнакости видимо да ако су λ_1 и λ_2 позитивни тада x_1 и x_2 теже бесконачности, а ако су λ_1 и λ_2 негативни тада x_1 и x_2 теже ка нули. Коначно у случају када је λ_1 негативно, а λ_2 позитивно, x_1 тежи нули, а x_2 се приближава бесконачности.



Слика 2.1: Различите реалне вредности сопствених вредности истог знака генеришу чворове (а) нестабилан случај ($\lambda_1 > \lambda_2 > 0$); (б) стабилан случај ($\lambda_2 < \lambda_1 < 0$).

Посматрајмо сада линеаран систем диференцијалних једначина са матрицом J_2, тј. систем

$$\dot{x_1} = \lambda_0 x_1, \quad \dot{x_2} = \lambda_0 x_2. \tag{2.8}$$



Слика 2.2: Реалне сопствене вредности супротног знака ($\lambda_2 < 0 < \lambda_1$) изазивају седласте тачке.

Једначина трајекторија система (2.8) је

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Интеграљењем ове једначине добијамо

$$\ln x_1 = \ln x_2 + \ln c, \quad c > 0,$$

одакле следи

$$x_1 = cx_2.$$

Видимо да су у овом случају трајекторије праве линије. У циљу да се одреди ток фазе интегралићемо систем (2.8). Интеграцијом система (2.8) добијамо

$$x_1 = c_1 e^{\lambda_0 t}, \quad x_2 = c_2 e^{\lambda_0 t}.$$

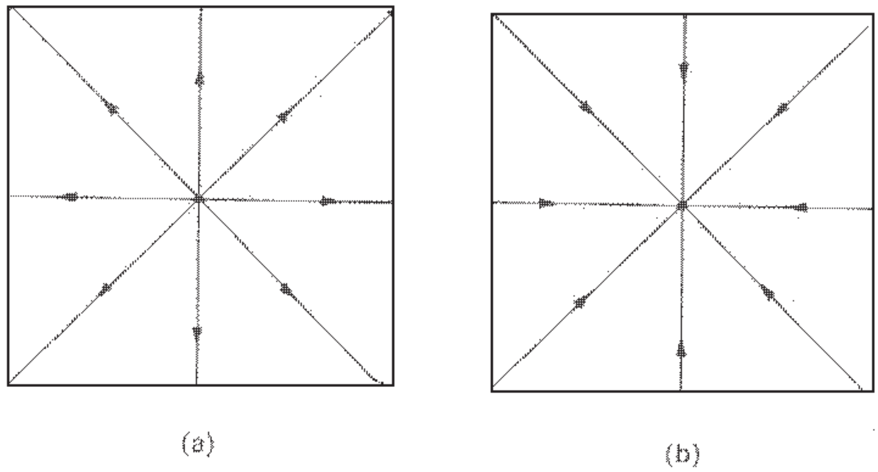
Из последње релације уочавамо да ако је λ_0 позитивно тада x_1 и x_2 теже бесконачности, а ако је λ_0 негативно и x_1 и x_2 теже нули.

Посматрајмо сада линеарни систем диференцијалних једначина са матрицом J_3, тј. систем

$$\dot{x}_1 = \lambda_0 x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \lambda_0 x_2. \tag{2.9}$$

Једначина трајекторија система (2.9) је

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\lambda_0 x_1 + x_2}{\lambda_0 x_2}.$$



Слика 2.3: Једнаке сопствене вредности ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$) генеришу звездасти чвор: (а) нестабилан случај; (б) стабилан случај; матрица A је дијагонална.

Да бисмо решили ову једначину користићемо трансформацију

$$x_1 = u(x_2)x_2.$$

Из претходне релације диференцирањем добијамо

$$\frac{dx_1}{dx_2} = u + \frac{du}{dx_2}x_2,$$

и тада имамо

$$u + \frac{du}{dx_2}x_2 = \frac{\lambda_0 u + 1}{\lambda_0}.$$

Сређивањем ове једначине, добијамо

$$\lambda_0 du = \frac{dx_2}{x_2}.$$

Интеграљењем последње једначине следи

$$x_1 = \frac{x_2}{\lambda_0}\ln cx_2.$$

У овом случају трајекторије у околини координатног почетка тангентно належу на осу Ox_1. Да бисмо видели правце фазног тока (флукса) потребно је да решимо систем једначина (2.9). Прво ћемо решити другу једначину система (2.9) и заменити добијено решење у прву једначину истог система. Тада имамо

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda_0 x_1 + ce^{\lambda_0 t}.$$

Ово је линеарна једначина. Потражићемо њено решење у облику $x_1 = u(t)v(t)$. Тада добијамо

$$\frac{dx_1}{dt} = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt}.$$

Из ове једначине следи

$$u\left(\frac{dv}{dt} - \lambda_0 v\right) + v\frac{du}{dt} = ce^{\lambda_0 t}.$$

Узимајући у обзир

$$\frac{dv}{dt} = \lambda_0 v$$

добијамо да је

$$v = c_1 e^{\lambda_0 t}.$$

Из наведених разлога је

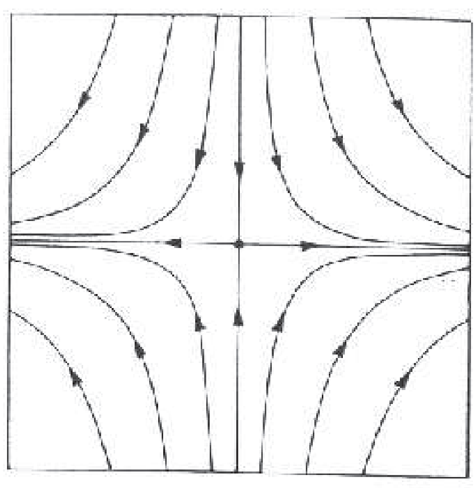
$$c_1 e^{\lambda_0 t}\frac{du}{dt} = ce^{\lambda_0 t}$$

и

$$u = \frac{c}{c_1}t + c_2.$$

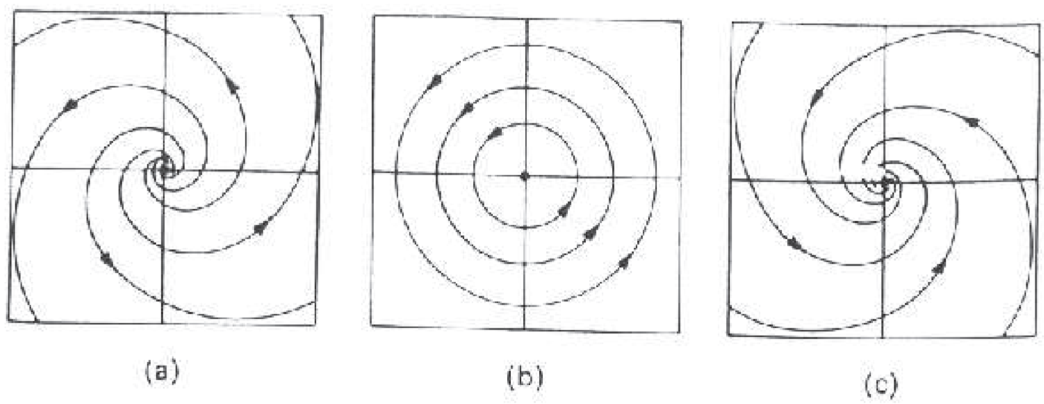
Тако смо коначно добили да је решење система (2.9) облика

$$x_1 = cte^{\lambda_0 t} + c_1 c_2 e^{\lambda_0 t},$$
$$x_2 = c_1 e^{\lambda_0 t}.$$



Слика 2.4: Када матрица A није дијагонална, једнаке сопствене вредности указују на то да је координатни почетак несвојствен чвор: (а) нестабилно стање ($\lambda_0 > 0$); (б) стабилно стање ($\lambda_0 < 0$).

Из последњих релација видимо да ако је λ_0 позитивно и $t \to -\infty$ тада x_1 и x_2 теже нули и такође ако је $\lambda_0 < 0$ и $t \to +\infty$ тада x_1 и x_2 теже нули.



Слика 2.5: Комплексне сопствене вредности стварају (а) нестабилне ж иж е ($\alpha > 0$), (б) центар ($\alpha = 0$) и (ц) стабилне ж иж е ($\alpha < 0$).

Размотримо сада систем диференцијалних једначина са матрицом J_4, тј. систем

$$\dot{x}_1 = \alpha x_1 - \beta x_2, \quad \dot{x}_2 = \beta x_1 + \alpha x_2. \tag{2.10}$$

Да бисмо решили горњи систем једначина прећи ћемо на поларне координате

$$x_1 = r\cos\varphi, \; x_2 = r\sin\varphi,$$

и тада добијамо

$$\dot{x}_1 = -r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dr}{dt}\cos\varphi,$$
$$\dot{x}_2 = -r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dr}{dt}\sin\varphi.$$

Множењем прве једначине са $\cos\varphi$, а друге са $\sin\varphi$ и потом сабирањем тих једначина имамо

$$\dot{r} = \dot{x_1}\cos\varphi + \dot{x_2}\sin\varphi.$$

Одавде следи

$$\dot{r} = \alpha r. \tag{2.11}$$

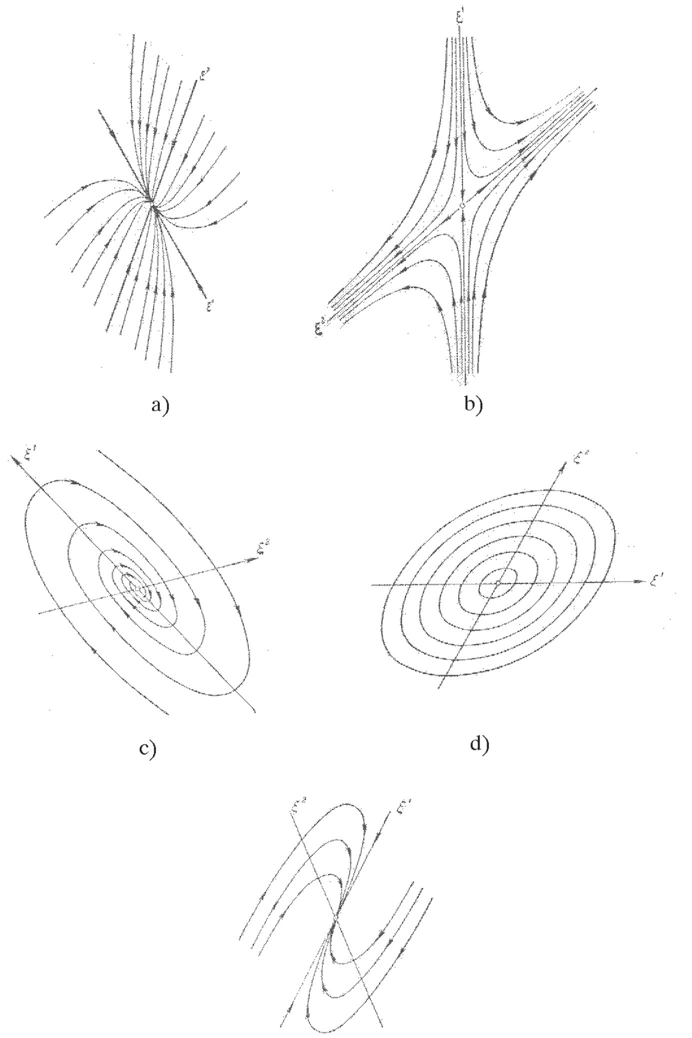
Сада, множењем прве једначине са $-\sin\varphi$, и друге са $\cos\varphi$ и на крају сабирањем тако добијене прве и друге једначине имамо

$$\dot{\varphi} = \beta. \tag{2.12}$$

Интеграљењем (2.11) и (2.12) добијамо

$$r = c_1 e^{\alpha t}, \quad \varphi = \beta t + c_2.$$

Из последње формуле видимо да угао φ монотоно расте ако је $\beta > 0$ и монотоно опада ако је $\beta < 0$, а из прве формуле следи да ако је $\alpha < 0$ тада r тежи ка нули када $t \to +\infty$. У случају када је $\alpha = 0$ добијамо $r = c_1$ тј. трајекторије су кружнице.



Слика 2.6: (а)чвор; (б)седласта тачка; (ц) стабилан фокус; (д) центар; (е) стабилна седласта тачка

Сумирајући добијене резултате уочавамо следећу квалитативну слику понашања трајекторија у случају линеарног система:

А. ако је $\triangle < 0$ тада је координатни почетак седласта тачка,

B. ако је $\triangle > 0$ и $\sigma^2 - 4\triangle \geq 0$ тада је координатни почетак ћвор,

C. ако је $\triangle > 0$, $\sigma^2 - 4\triangle < 0$, и $\sigma \neq 0$ тада су трајекторије у малој околини координатног почетка спирале,

D. ако је $\triangle > 0$ и $\sigma = 0$ све трајекторије које не пролазе кроз координатни почетак су затворене

У случају (C) равнотежна тачка у координатном почетку назива се жижа, а у случају (D) центар.

Коришћењем једначина (2.2) можемо се вратити на почетне координате u и v. Фазни портрети система (2.1) се тада добијају из фазних портрета система (2.6), (2.8), (2.9) и (2.10) као резултат линеарне трансформације (видети слику 2.6).

2.2 Трајекторије дводимензионалних система у околини центра или жиже

Теорема 2.1 *[5, п.77](Теорема о линеаризацији) Нека нелинеарни систем*

$$\dot{y} = Y(y)$$

има просту фиксирану тачку за $y = 0$. Тада су у околини координатног почетка фазни портрети система и његове линеаризације квалитативно еквивалентни ако линеаризовани систем нема центар.

Размотримо сада пертурбовани систем једначина (2.1) са члановима вишег реда, тј. систем

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= au + bv + \sum_{k+n=2}^{\infty} U_{kn} u^k v^n = U(u,v), \\ \frac{dv}{dt} &= cu + dv + \sum_{k+n=2}^{\infty} V_{kn} u^k v^n = V(u,v)\,. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Из претходног одељка је познато да се трајекторије система једначина (2.13) у случајевима A, B, C у малој околини координатног почетка тополошки не могу разликовати од трајекторија линеарног система (2.1).

Случај када линеаризовани систем има центар је другачији. Линеарна апроксимација не одређује дефинитивно понашање трајекторија нелинеарног система у околини координатног почетка. Заиста, посматрајмо систем

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -v - u(u^2 + v^2), \\ \dot{v} &= u - v(u^2 + v^2). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Преласком на поларне координате

$$u = r\cos\varphi, \quad v = r\sin\varphi, \tag{2.15}$$

добијамо систем

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -r\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dr}{dt}\cos\varphi,\\ \dot{v} &= -r\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} + \frac{dr}{dt}\sin\varphi.\end{aligned}$$

Множењем прве једначине са $\cos\varphi$, а друге са $\sin\varphi$ и сабирањем тако добијених једначина, имамо

$$\dot{r} = \dot{u}\cos\varphi + \dot{v}\sin\varphi.$$

Из последње једначине следи

$$\dot{r} = -r^3,$$

односно

$$r = \frac{1}{\sqrt{t+c}}.$$

Сада, множењем прве једначине са $-\sin\varphi$, а друге са $\cos\varphi$ и њиховим сабирањем, добијамо једначину

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\left(\dot{v}\cos\varphi - \dot{u}\sin\varphi\right),$$

одакле је

$$\dot{\varphi} = 1.$$

Стога, када је координатни почетак центар за одговарајући линеарни систем, свака трајекторија система (2.14) по спирали се приблизвава координатном почетку. Таква равнотежна тачка се назива *стабилна жижа.*

Видимо да су у случају сингуларне тачке за коју су сопствене вредности линеарног дела чисто имагинарне, тип сингуларитета (тачке) није одређен линеарном апроксимацијом и да је тада потребно посебно испитивање. Овде се ми срећемо са фасцинирајућим проблемом у квалитативној теорији диференцијалних једначина тј. са *проблемом разликовања центра и жиже* или краће речено са *проблемом центра.*

Метод локалне анализе који ћемо сада приказати се може применити у случају Ц из претходног одељка. Зато ми претпостављамо да су сопствене вредности $\alpha \pm i\beta$, где је $\beta \neq 0$. Постоји недегенерисана линеарна трансформација којом се систем (2.13) преводи на канонски облик, тј. облик

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= \alpha u - \beta v + P(u,v)\\ \frac{dv}{dt} &= \beta u + \alpha v + Q(u,v),\end{aligned} \tag{2.16}$$

где су

$$P(u,v)=\sum_{k=2}^{\infty}P_k(u,v),\qquad Q(u,v)=\sum_{k=2}^{\infty}Q_k(u,v),$$

а $P_k(u,v)$ и $Q_k(u,v)$ су хомогени полиноми степена k.

Преласком на поларне координате (2.15), систем (2.16) постаје

$$\begin{aligned}\dot r &= \alpha r + P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi + Q(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi\\ &= \alpha r + r^2\left[P_2(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi + Q_2(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi\right]+\cdots\\ \dot\varphi &= \beta - \frac{P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi - Q(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi}{r}\\ &= \beta - r\left[P_2(\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi - Q_2(\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi\right]+\cdots\,.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Јасно је да за мале вредности r ако је $\beta>0$ поларни угао расте када t расте, док у случају када је $\beta<0$ поларни угао опада када t расте.

Уместо система једначина (2.17) погодније је разматрати његове трајекторије

$$\frac{dr}{d\varphi}=\frac{\alpha r + rF(r,\sin\varphi,\cos\varphi)}{\beta + rG(r,\sin\varphi,\cos\varphi)}=R(r,\varphi)\,.\tag{2.18}$$

Функција $R(r,\varphi)$ је периодична по координати φ са периодом 2π и аналитичка за свако φ и довољно мале вредности r.

Очигледно је $R(0,\varphi)=0$, тако да је $r=0$ Решење једначине (2.18). Функцију $R(r,\phi)$ можемо развити у степени ред

$$\frac{dr}{d\varphi}=R(r,\varphi)=rR_1(\varphi)+r^2R_2(\varphi)+\cdots\,,\tag{2.19}$$

где је $R_k(\varphi)$ периодична функција по φ са периодом 2π, а ред је конвергентан за свако φ и за свако довољно мало r. У случају (2.16)

$$\begin{aligned}R_1 &= \frac{\alpha}{\beta},\\ R_2 &= \frac{\alpha-\beta}{\beta^2}P_2(\sin\varphi,\cos\varphi)\cos\varphi - \frac{\alpha+\beta}{\beta^2}Q_2(\sin\varphi,\cos\varphi)\sin\varphi.\end{aligned}$$

Означимо са

$$r=f(\varphi,\varphi_0,r_0)$$

Решење система (2.19) са почетним условима $r(0)=r_0$ и $\varphi(0)=\varphi_0$. Функција $f(\varphi,\varphi_0,r_0)$ је аналитичка функција по променљивим φ, φ_0, и r_0, и има особину да је

$$f(\varphi,\varphi_0,r_0)\equiv 0\tag{2.20}$$

(јер је $r=0$ Решење система (2.19)). Једначина (2.20) и непрекидна зависност решења од параметара [8] доводи до резултата који исказујемо као:

Пропозиција 2.2.1 *Свака трајекторија система једначина (2.16) у довољно малој околини координатног почетка пресеца сваки зрак* $\varphi = const$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Ова пропозиција имплицира да би размотрили све трајекторије у довољно малој околини $O(0,0)$ довољно је да разматрамо све трајекторије које пролазе кроз мали сегмент $A = \{(u,v)|v = 0, 0 \leq u \leq r^*\}$ за r^* довољно мало, тј. сва решења

$$r = f(\varphi, 0, r_0).$$

Развијањем у потенцијални ред, функције $f(\varphi, 0, r_0)$ по r_0, имамо ред

$$r = f(\varphi, 0, r_0) = u_1(\varphi)r_0 + u_2(\varphi)r_0^2 + \cdots ,$$

који је конвергентан за свако $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и свако $r_0 < r^*$. Ова функција је Решење једначине (2.19), па отуд је

$$u_1' r_0 + u_2' r_0^2 + \cdots \equiv R_1(\varphi)(u_1(\varphi)r_0 + u_2(\varphi)r_0^2 + \cdots) + R_2(\varphi)(u_1(\varphi)r_0 + u_2(\varphi)r_0^2 + \cdots)^2 + \cdots ,$$

где је са примом означено диференцирање по променљивој φ. Изједначавањем коефицијената уз исти степен променљиве r_0 из оваквих идентитета добијамо рекурентне диференцијалне једначине за функције $u_i(\varphi)$, тј. једначине:

$$\begin{aligned} u_1' &= R_1(\varphi)u_1 , \\ u_2' &= R_1(\varphi)u_2 + R_2 u_1^2 , \\ u_3' &= R_1(\varphi)u_3 + 2R_2(\varphi)u_1u_2 + R_3u_1^3 , \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.21}$$

Из почетног услова

$$r = f(\varphi, 0, r_0) = r_0$$

добијамо

$$u_1(0) = 1, \quad u_i(0) = 0 \quad \text{за} \quad i > 1. \tag{2.22}$$

Кори71ењем ових услова можемо одредити функције $u_i(\varphi)$ интеграљењем једначина (2.21). У случају (2.16), имамо

$$u_1(\varphi) = e^{\frac{\alpha}{\beta}\varphi},$$

$$\frac{du_2}{d\varphi} = \frac{\alpha}{\beta}u_2 + e^{\frac{2\alpha}{\beta}\varphi}\left(\frac{\alpha-\beta}{\beta^2}P_2(\sin\varphi,\cos\varphi)\cos\varphi - \frac{\alpha+\beta}{\beta^2}Q_2(\sin\varphi,\cos\varphi)\sin\varphi\right).$$

Заменом вредности $\varphi = 2\pi$ у решење $r = f(\varphi, 0, r_0)$ добијамо вредност $r = f(2\pi, 0, r_0)$, која одговара тачки A, где трајекторија $r = f(\varphi, 0, r_0)$ пролази кроз A.

Дефиниција 2.2.1 *Функција*

$$\mathcal{R}(r_0) = f(2\pi, 0, r_0) = \tilde{\eta}_1 r_0 + \eta_2 r_0^2 + \eta_3 r_0^3 + \cdots \tag{2.23}$$

(дефинисана за $|r_0| < r^*$) где је $\tilde{\eta}_1 = u_1(2\pi)$, $\eta_i = u_i(2\pi)$ за $i > 1$, се зове Поенкареово прво повратно пресликавање или само повратно пресликавање.

Уведимо функцију

$$\mathcal{P}(r_0) = \mathcal{R}(r_0) - r_0 = \eta_1 r_0 + \eta_2 r_0^2 + \eta_3 r_0^3 + \ldots, \tag{2.24}$$

где је $\eta_1 = \tilde{\eta}_1 - 1 = e^{2\pi\frac{\alpha}{\beta}} - 1$. Ми ћемо коефицијент η_i $(i \geq 1)$ звати *и-том Љапуновљевом велиӣином.* Нуле једначине (2.24) одговарају затвореним траjекторијама система (2.16); *Изоловане* нуле одговарају *ограниченим кружницама.*

Љапуновљеве величине комплетно одређују понашање трајекторија система (2.16) у близини координатног почетка. Посебно, ако су све Љапуновљеве величине једнаке нули тада су све трајекторије у малој околини U око координатног почетка затворене и координатни почетак је центар. Ако је

$$\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_{2k} = 0, \; \eta_{2k+1} \neq 0, \tag{2.25}$$

тада су све трајекторије у U спиралне линије и координатни почетак је жижа. Заиста, у овом случају је

$$\mathcal{P}(r_0) = \eta_{2k+1} r_0^{2k+1} + \sum_{m=2k+2}^{\infty} \alpha_m r_0^m \tag{2.26}$$

и ред је конвергентан у околини координатног почетка.

Да би смо анализирали специјални случај, претпоставимо да је $\eta_{2k+1} < 0$. Према (2.26) вредност $r_0 = 0$ је изолована нула једначине

$$\mathcal{P}(r_0) = 0,$$

те према томе постоји $\bar{r}_0 > 0$ тако да за $0 < r_0 < \bar{r}_0$

$$\mathcal{P}(r_0) < 0. \tag{2.27}$$

Тада трајекторија која пролази кроз тачку $P(0, r_0)$ $(0 < r_0 < \bar{r})$ пролази и кроз тачке
$P(0, r_0^{(1)})$, $P(0, r_0^{(2)})$, $\ldots$ када се угао φ повецава за 2π, 4π, $\ldots$. Овде је

$$r_0^{(1)} = \mathcal{P}(r_0) + r_0$$

и

$$r_0^{(n+1)} = \mathcal{P}(r_0^{(n)}) + r_0^{(n)}$$

за $n \geq 1$, и $r_0 > r_0^{(1)} > \cdots > r_0^{(n)} > \cdots > 0$.

Низ $\{r_0^{(n)}\}$ има граничну вредност $\hat{r} \geq 0$, и

$$\lim_{n\to\infty}\left(r_0^{(n+1)} - r_0^{(n)}\right) = \mathcal{P}(r_0^{(n)}) = 0.$$

Покажимо сада да је $\hat{r} = 0$. Да бисмо то доказали претпоставимо супротно тј. да је $\hat{r}_0 > 0$. Непрекидност $\mathcal{P}(r_0)$ имплицира да је $\mathcal{P}(\hat{r}_0) = 0$ што је у супротности са (2.27). Стога је $\hat{r}_0 = 0$ и све трајекторије у довољно малој околини координатног почетка су спиралне линије које теже $O(0,0)$ када $\varphi \to +\infty$. Слично, ако је $\eta_{2k+1} > 0$ тада су трајекторије такође спирале, али теже ка $O(0,0)$ када $\varphi \to -\infty$.

Када је услов (2.25) испуњен жижа у координатном почетку се назива фина жижа реда k. Ако је $\eta_{2k+1} < 0$ тада је жижа стабилна, а ако је $\eta_{2k+1} > 0$ она је нестабилна.

Примедба 2.2.1 *Ако интегралимо систем једначина (2.21) са другачијим почетним условима од оних задатих помоћу (2.22) тада ћемо добити другачији скуп функција $u_i(\varphi)$ и другачији скуп коефицијената η_i и $\hat{\eta}_i$. Међутим, први коефицијент различит од нуле којим је одређено понашање трајекторија у довољно малој околини координатног почетка је исти у оба случаја. То значи, да ако је*

$$\eta_1 = \cdots = \eta_i = 0,\ \eta_{i+1} \neq 0 \quad \text{и} \quad \hat{\eta}_1 = \cdots = \hat{\eta}_j = 0,\ \hat{\eta}_{j+1} \neq 0,$$

тада $i = j$ и $\eta_{i+1} = \eta_{j+1}$ (и i је неки парни број).

2.3 Полиномски идеали и афини варијетети

У овом поглављу навешћемо неке познате резултате везане за полиномске идеале. Такође, у овом поглављу биће речи о афиним варијететима и методу њиховог одређивања.

Посматрајмо прстен полинома

$$f = \sum_{\alpha} a_\alpha x^\alpha, \tag{2.28}$$

по променљивим $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са коефицијентима a_α у пољу k, који ће у случају од интереса за нас бити из $\mathbb{R}$, или $\mathbb{C}$. Овде је α једна матрица врста

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

са n не-негативних целих бројева, а са x^α су означени мономи $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$. Производ $a_\alpha x^\alpha$ се назива *term* и претпостављамо да постоји само коначан број термова у суми (2.28).

Скуп свих полинома по промењљивим $x_1, \ldots, x_n$ са коефицијентима у пољу k је означен са $k[x_1, \ldots, x_n]$. Лако је видети да је $k[x_1, \ldots, x_n]$ комутативни прстен. Означимо са $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ *потпуни степен* монома x^α, и са дег(f) потпуни степен полинома f. Значи да је дег(f) максимум од $|\alpha|$ међу свим мономима од f са не–нултим коефицијентима a_α. Уочимо да због коресподенције један на један између монома и матрице врсте са n ђхланова $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ и $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_+^n$ довољно је поређати елементе $\mathbb{N}_+^n$ (пош то у случају једне промењљиве актуелни коефицијенти терма немају никакву улогу у редоследу елемената). Из ове коресподенције наравно следи претпоставка о уређењу самих промењљивих $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$.

Подсетимо да је *парцијално уређење* $\succ$ на скупу S бинарна релација која је рефлексивна ($a \succ a$ за свако $a \in S$), антисимтерич на ($a \succ b$ и $b \succ a$ само ако је $a = b$), и транзитивна ($a \succ b$ и $b \succ c$ имплицира $a \succ c$). *Тотални ред* $>$ на скупу S је парцијални ред у коме било која два елемента могу да се пореде: за свако a и b на скупу S, или је $a = b$,или је $a > b$, или је $b > a$.

Дефиниција 1 Ред терма *на* $k[x_1, \ldots, x_n]$ *је тотални ред* $>$ *на* $\mathbb{N}_+^n$ *који има две следеће особине:*

(а) за свако α, β, *и* γ *у* $\mathbb{N}_+^n$, *ако је* $\alpha > \beta$ *тада је* $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$ *; и*

(б) $\mathbb{N}_+^n$ *је добро уређен помоћу* $>$ *: ако је* S *било који празан подскуп од* $\mathbb{N}_+^n$, *тада постоји најмањи елеменат* μ *у* S *(за свако* $\alpha \in S$, $\alpha > \mu$*).*

Уочимо да док говоримо о уређењу терма $>$ у $k[x_1, \ldots, x_n]$, ми уствари не уређујемо елементе од $k[x_1, \ldots, x_n]$, већ само мономе, тј. индивидуалне термове полинома који укључују $k[x_1, \ldots, x_n]$; тиме се објашњава терминологија уређење *терма.*

Низ a_i у $\mathbb{N}_+^n$ је *стриктно опадајући* ако је за свако i, $a_i > a_{i+1}$ и $a_i \neq a_{i+1}$. Такав се низ *завршава* ако је коначан.

Пропозиција 1 *Тотално уређење* $>$ *на* $\mathbb{N}_+^n$ *добро уређује* $\mathbb{N}_+^n$ *ако и само ако се сваки стриктно опадајући низ елемената* $\mathbb{N}_+^n$ *завршава.*

Доказ 1 *Ако постоји стриктно опадајући низ* $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$ *који се не завршава, тада* $\{a_1, a_2, \ldots\}$ *није празан подскуп од* $\mathbb{N}_+^n$ *без минималног елемента, и* $>$ *не уређује добро* $\mathbb{N}_+^n$.

Супротно, ако $>$ *не уређује добро* $\mathbb{N}_+^n$, *тада постоји непразан скуп* A *од* $\mathbb{N}_+^n$ *који нема минимални елемент. Нека је* a_1 *неки произвољни елеменат од* A. *Он није минимални, па отуд постоји елемент* $a_2 \in A$, $a_2 \neq a_1$, *такав да је* $a_1 > a_2$. *Настављајући овај процес добијамо стриктно опадајући низ који се не завршава.*

Сада ћемо дефинисати три најчешће коришћена уређења терма. У [13] је показано да они стварно испуњавају услове дате у дефиницији 1, то јест, они су стварно уређени термови.

Дефиниција 2 *Нека су $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ елементи од $\mathbb{N}_+^n$.*

(а) Лексикографско уређење. Дефинишимо $\alpha >_{\text{lex}} \beta$ ако је и само ако је, читано са лева на десно, први не нулта одредница у матрици врсти са n чланова $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ је позитивана.

(б) Степен лексикографског уређења. Дефинишимо $\alpha >_{\text{deglex}} \beta$ ако и само ако је било

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i > |\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \qquad \textit{или} \qquad |\alpha| = |\beta| \ \textit{анд}\ \alpha >_{\text{lex}} \beta\,.$$

(ц) Степен инверзног лексикографско уредења. Дефинишимо $\alpha >_{\text{degrev}} \beta$ ако и само ако је било $|\alpha| > |\beta|$ или ако је, читајућ и само са десна на лево, прва не нулта одредница у матрици врсти са n чланова $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ негативна.

На пример, ако су $\alpha = (1, 4, 4, 2)$ и $\beta = (1, 2, 6, 2)$, тада је α веће од β у односу на сва три уређења. Посебно треба уочити да је овим примером показано да дегрев није проста инверзија од деглеш.

Када је уређење терма $>$ на $k[x_1, \ldots, x_n]$ задато ми пишемо да је $a_\alpha \mathbf{x}^\alpha > a_\beta \mathbf{x}^\beta$ ако и само ако је $\alpha > \beta$. Ми понављамо да су претходне дефиниције засноване на претпостављеном уређењу промењљивих $x_1 > \cdots > x_n$. Ово уређење се мора експлицитно идентификовати када се користе промењљиве без доњег индекса. На пример, ако у $k[x, y]$ изаберемо $y > x$, тада је $y^5 >_{\text{lex}} x^9$ (пош то је $(5, 0) >_{\text{lex}} (0, 9)$) и $xy^4 >_{\text{deglex}} x^2y^3$ (пош то је $4 + 1 = 3 + 2$ и $(4, 1) >_{\text{lex}} (3, 2)$), и ми пишемо ова два последња терма као y^4x и y^3x^2 да би назнаћили основно уређење самих промењљивих.

Ако су задати поље k и природни број n, тада се скуп

$$k^n = \{(a_1, \ldots, a_n) :\ a_1, \ldots, a_n \in k\}$$

назива n-то димензионални афин простор. Било ком полиному $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha \in k[x_1, \ldots, x_n]$ се придружује функција

$$f\ :\ k^n \to k$$

дефинисана као

$$f\ : (a_1, \ldots, a_n)\ \mapsto f((a_1, \ldots, a_n))\,.$$

Способност да се полиноми разматрају као функције дефинише неку врсту дуалности између алгебре и геометрије афиног простора.

Дефиниција 3 *Нека је k поље, и $f_1, \ldots, f_s$ полиноми од $k[x_1, \ldots, x_n]$ и нека је*

$$V(f_1, \ldots, f_s) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in k^n : f_i(a_1, \ldots, a_n) = 0 \qquad \textit{за свако} \qquad 1 \le i \le s\}.$$

Тада је $V(f_1, \cdots, f_s)$ афини вариетет дефинисан на полиномима $f_1, \cdots, f_s$.

Другим речима, афини вариетет $V(f_1, \dots, f_s) \subset k^n$ је скуп решења система

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = \ \dots \ = f_s(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

Следећа пропозиција даје једну важну особину афиних варијетета.

Пропозиција 2 *[13] Ако су $V, W \subset k^n$ афини варијетети, тада $V \cup W$ и $V \cap W$ су такође афини варијетети.*

Сада ћемо дефинисати главни алгебарски објект који нам је потребан за проучавање варијетета.

Дефиниција 4 *Подскуп $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ се назива идеалним ако је*

1. $0 \in I$;
2. *ако је* $f, g \in I$ *тада је* $f + g \in I$;
3. *ако је* $f \in I$ *и* $h \in k[x_1, \dots, x_n]$, *тада је* $hf \in I$.

Нека су $f_1, \dots, f_s$ елементи од $k[x_1, \dots, x_n]$. Обележимо са $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ скуп свих могућих линеарних комбинација од $f_1, \dots, f_s$ са коефицијентима из $k[x_1, \dots, x_n]$,

$$\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \mid h_1, \dots, h_s \in k[x_1, \dots, x_n] \right\}. \tag{2.29}$$

Лако се види да је скуп $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ идеал у $k[x_1, \dots, x_n]$. Идеал $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ зваћемо *идеалом генерисаним помоћу полинома* $f_1, \dots, f_s$. Идеал $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ се назива *коначно генерисаним* ако су полиноми $f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n]$ такви да је $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$; скуп $f_1, \dots, f_s$ се назива *база* од I. У ствари, сваки идеал полиномског прстена је ограничено генерисан [13].

Постоји дубоко међусобна повезаност између идеала и система алгебарских једначина. Претпоставимо да је

$$f_1, \dots, f_s \in k[x_1, \dots, x_n],$$

и размотримо систем

$$f_1 = 0, \ f_2 = 0, \ \dots \ , f_s = 0. \tag{2.30}$$

Наравно било које решење система (2.30) је решење једне једначине

$$f_1 h_1 + f_2 h_2 + \dots + f_s h_s = 0 \,.$$

Лева страна ове једначине припада идеалу $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$, и у овом смислу идеал $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ је скуп свих "полиномских последица" система (2.30) полиномских једначина.

Следећа претпоставка каже да афини варијетет уствари зависи од *идеала* пре него од посебно дефинисаног система полиномских једначина.

Пропозиција 3 *[13] Нека су $f_1, \ldots, f_s$ и $g_1, \ldots, g_m$ базе идеала $I \in k[x_1, \ldots, x_n]$, то јест, $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \langle g_1, \ldots, g_m \rangle$. Тада је $\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) = \mathbf{V}(g_1, \ldots, g_m)$.*

Видели смо како колекција полинома дефинише варијетет. Супротно томе када је задат варијетет постоји природно придружен њему идеал.

Дефиниција 5 *Нека је $V \subset k^n$ афини варијетет.* Идеал варијетета *V је скуп*

$$\mathbf{I}(V) = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ за свако } (a_1, \ldots, a_n) \in V\}.$$

Лако се види да је $\mathbf{I}(V)$ идеал од $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Дефиниција 6 *Афини варијетет $V \subset k^n$ је нередуцибилан кад год је V написан у облику $V = V_1 \cup V_2$, где су V_1 и V_2 афини варијетети, и тада је $V_1 = V$ или $V_2 = V$.*

Одавде произилази да се сваки варијетет може декомпоновати на нередуцибилне компоненте.

Теорема 1 *[13, п.201] Нека је $V \in k^n$ афини варијетет. Тада је V унија од коначног броја нередуцибилних варијетета*

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_s.$$

Декомпозиција варијетета $V \in k^n$ $V = V_1 \cup \cdots \cup V_m$, где су V_s нередуцибилни, назива се минимал ако је $V_i \not\subset V_j$ за $i \neq j$.

Теорема 2 *[13] Било који варијетет $V \subset k^n$ има минималну декомпозицију*

$$V = V_1 \cup \cdots \cup V_m, \tag{2.31}$$

и ова декомпозиција је јединствена све до реда V_i у (2.31).

Треба уочити да при тврдњи о јединствености у претходној теореми битно је да је минимална декомпозиција унија коначног броја варијетета. Иначе, на пример, раван се може представити као унија тачака или унија линија, и оне су наравно разлиците декомпозиције.

2.4 Одређивање варијетета

У овом одељку анализираћемо решења полиномских система. Ако систем

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = \cdots = f_s(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{2.32}$$

има само коначан број решења, тада их ми можемо одредити барем нумерички. Поставља се питање, како описати решења система (2.32) у случају када овај систем има бесконачно много решења.

Теорема 2 нам даје метод за то. Заиста решење система (2.32) је варијетет V у k^n.

Захваљујући Теореми 2, V има минималну декомпозицију. Стога, уопштено говорећи, да би решили систем (2.32) значи треба одредити његов варијетет, а најбољи начин да се опише варијетет је да се одреди његова минимална декомпозиција.

Сада постоје алгоритми за минималне декомпозиције афиних варијетета. Међутим, они су врло захтевни у погледу времена рачунања и потребног меморијског простора и они још увек нису реализовани у општим системима компјутерске алгебре какви су Матхематица или Мапле.

Неки од ових алгоритама су примењени у специјализованим компјутерским системима за алгебарска израчунавања као што је Сингулар [27].

Размотримо сада следећи пример. Нека је

$$p = z^2 + 1\ , \qquad q = z^3 + 2$$

Користићемо Сингулар у циљу добијања примарне декомпозиције идеала

$$I = \langle x(p-1)q, y - z^2 \rangle.$$

Код са којим се извршава декомпозиција кори71ењем Сингулар-а је следећи

```
LIB"primdec.lib";
ringr = 0, (x, y, z), dp;
polyp = z^2 + 1;
polyq = z^3 + 2;
ideali = x * (p - 1) * q, y - z^2;
minAssChar(i);
```

Првом наредбом се уђитава библиотека Сингулар-а која омогућује да се изврши примарна декомпозиција полиномских идеала. Другом наредбом се декларише наш полиномски прстен као прстен са нултом карактеристиком (тј. у пољу рационалних бројева) по променљивим x, y, z, а `dp` значи да смо фиксирали степен лексикографског уређења у прстену.

Јасно је да `полы` служи за декларисање полинома, а идеал декларише $I = x(p-1)q, y - z^2$.

На крају `minAssChar` омогућује да се изврши минимална декомпозиција варијетета идеала i кори7ћењем метода карактеристичних скупова и производи излаз.

[1] :
$_[1] = x$
$_[2] = \mathrm{z}^2 - \mathrm{y}$

[2] :
$_[1] = \mathrm{z}$
$_[2] = \mathrm{y}$

[3] :
$_[1] = \mathrm{z}^2 - \mathrm{y}$
$_[2] = \mathrm{y} * \mathrm{z} + 2$
$_[3] = \mathrm{y}^2 + 2 * \mathrm{z}$

Стога варијетет $V(I)$ садржи три нередуцибилне компоненте, прва је парабола $y = z^2$ у равни $x = 0$, друга је линија $z = y = 0$, и трећа дефинише геометријске предмете добијене као идеале одређене процедуром `minAssChar`. Ако користимо другу процедуру, на пример алгоритам `minAssGTZ`, добићемо други резултат

[1] :
$_[1] = \mathrm{z}$
$_[2] = -\mathrm{z}^2 + \mathrm{y}$

[2] :
$_[1] = \mathrm{z}^3 + 2$
$_[2] = -\mathrm{z}^2 + \mathrm{y}$

[3] :
$_[1] = -\mathrm{z}^2 + \mathrm{y}$
$_[2] = \mathrm{x}$

2.5 Услови центра за резонансно векторско поље трећег реда са четири параметара

Разматраћемо систем трећег реда у облику

$$i\frac{dw}{dt} = w\left(1 - a_{10}w - a_{01}\bar{w} - a_{11}w\bar{w} - a_{-13}w^{-1}\bar{w}^3\right) \tag{2.33}$$

где је $w = x + iy$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$.

Да би решили проблем разликовања центра и фокуса неопходно је израчунати Љапуновљеве фокусне величине, који су представљени полиномима са коефицијентима $a_{ij}, \bar{a}_{ij}$ система (2.33). Постоје многи алгоритми за њихово израчунавање ([2],[14],[56],[60]), а ми ћемо користити алгоритам који је описан у [49, 50].Означићемо са $x = (x_1, x_2, \dots x_8)$, $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$,

$$[x] = a_{10}^{x_1}\, a_{01}^{x_2}\, a_{11}^{x_3}\, a_{-13}^{x_4}\, b_{3-1}^{x_5}\, b_{11}^{x_6}\, b_{10}^{x_7}\, a_{01}^{x_8}.$$

Израчунавајући функцију

$$V(x) = \sum_{x_1,\dots,x_8 \ge 0} V(x_1, \dots, x_8),$$

рекурентном формулом добијеном у [49] добијамо Љапуновљеве фокусне величине
$g_{11}, g_{22}, g_{33}, \dots$. Означ ић емо са I идеал генерисан свим фокусним велич инама, а са I_k идеал генерисан са k првим велич инама тј. $I(g_{11}, g_{22}, \dots)$, $I_k = (g_{11}, \dots, g_{kk})$. Након груписања сваке израчунате величине g_{kk} модула идеала I_{k-1} добијамо:

$$g_{11} = 2i(Im[0010\ 0000] + Im[1100\ 0000]),$$

$$g_{22}Im[1100\ 0100] \mod (g_{11})$$

$$g_{33} = -\frac{9}{4}Im[0300\ 1001] - \frac{5}{4}Im[0001\ 1011] + \frac{1}{4}Im[0100\ 1003] -$$
$$-\frac{9}{8}Im[0001\ 0040] - \frac{1}{8}Im[0200\ 1002] \mod I_2$$

где је Im имагинарни део комплексног броја a.

Теорема 3 *Ако систем (2.33) где су $a_{11} \neq -a_{10}a_{01}$ има центар у почетку, онда важи један од услова*

(*i*) $a_{11} = Im\, a_{10}a_{01} = Im\, a_{01}^4\, \bar{a}_{-13} = Im\, a_{10}^4 a_{-13} = 0;$

(*ii*) $a_{10} = Im\, a_{11} = 0;$

(*iii*) $a_{01} = Im\, a_{11} = Im\, a_{10}^4\, a_{-13} = 0;$

(iv) $Im\, a_{10}a_{01}\bar{a}_{11} = Im\, a_{10}a_{01} = Im\, a_{01}^4\bar{a}_{-13} = 0$
$a_{10} \neq 0,\ a_{01} \neq 0,\ a_{11} \neq 0;$

(v) $Im\, a_{11} = a_{10} - \frac{1}{2}\bar{a}_{01} = 0;$

(vi) $a_{10} - 3a_{01} = |a_{-13}| - 2|a_{01}|^2 = 0.$

Доказ. Из наслова другог центра $g_{22} = 0$ добија се

$$a_{10}a_{01}b_{11} = h, \tag{2.34}$$

где је $h \in \mathbb{R}$. Стога, можемо размотрити следећа три случаја

(a) $a_{10} = 0;$

(b) $a_{01} = 0;$

(c) $a_{10} \neq 0,\ a_{01} \neq 0.$

(a) У овом случају из услова $g_{11} = 0$ имамо $Im\, a_{11} = 0$ и стога је услов (ii) задовољен.

(b) Услов $g_{11} = 0$ даје $Im\, a_{11} = 0$. Израчунавањем следећих полинома g_{ii} под условом $a_{01} = 0$ добијамо

$$g_{22} \equiv \mod I_1,\ g_{33} \equiv \mod I_1,\ g_{44} \equiv Im[0010\ 1004] \mod I_1.$$

Стога, из једанчине

$$a_{11} = 0$$

или

$$Im\, a_{10}^4 a_{-13} = 0.$$

Тако имамо било услов (iii) или

$$a_{01} = a_{11} = 0.$$

У последњем случају израчунавањем фокус квантитета добијамо

$$g_{55} = Im[0001\ 2004],$$

тј. једначина $g_{55} = 0$ даје

$$|a_{-13}|^2 Im a_{10}^4\, a_{-13} = 0,$$

и зато услов $(i), (iii)$ важи.

(c) У овом случају из (2.34) добијамо

$$a_{11} = g\, a_{10}a_{01}, \tag{2.35}$$

где је $g \in \mathbb{R}$, и тада из једначине $g_{11} = 0$

$$Im[1100,\, 0000](1+g) = 0. \tag{2.36}$$

У овом раду ми разматрамо само случај $g \neq -1$ (тј. $a_{11} \neq -a_{10}a_{01}$) и зато узимајући у обзир да $a_{01} \neq 0$, из једначине (2.36) добијамо

$$a_{10} = s\bar{a}_{01} \tag{2.37}$$

где је $s \in \mathbb{R}$.

Заменом овог израза у једначини $g_{33} = 0$ добијамо

$$Im[0400\ 1000]\ \left(\frac{1}{4}s^3 - \frac{1}{8}s^2 - \frac{9}{4}s + \frac{9}{8}\right) = 0.$$

Стога имамо било услов (iv) или један од следећа три услова:

$$\begin{aligned} &(\alpha) \quad s = 3, \\ &(\beta) \quad s = -3, \\ &(\gamma) \quad s = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Раније је поменуто да је израчунавање Љапуновљеве фокусне величине врло тежак проблем за израчунавање. Да би упростили израчунавања ми поново израчунавамо полиноме g_{ii} за сваки од случајева $(\alpha) - (\gamma)$ на аналоган начин како је дато у [50]. Израчунавањем добијамо кореcподентне случајеве

(α) У случају из $g_{11} = 0$ имамо $a_{11} = \alpha$, где је $\alpha \in \mathbb{R}$, и
$g_{22} = 0 \mod I_1,\ g_{33} = 0 \mod I_1,$
$g_{44} = -\dfrac{70}{3}Im[0101\ 0050] - \dfrac{35}{3}Im[0011\ 0040] \mod I_1.$

Стога, коришћењем корелације $g_{44} = 0$ имамо

$$Im[0001\ 0040]\left(-\frac{70}{3}|a_{01}|^2 - \frac{35}{3}\alpha\right) = 0.$$

Тако добијамо било услов (iv) или

$$a_{11} = -2a_{01}b_{10} = -2|a_{01}|^2.$$

У последњем случају израчунавања пет Љапуновљевих фокус квантитета добијамо

$$g_{55} = -\frac{25}{9}Im[0002\ 1040] + \frac{100}{9}Im[0201\ 0060].$$

Изједначавањем овог полинома са нулом имамо

$$Im[0001\ 0040]\left(-\frac{25}{9}|a_{-13}|^2 + \frac{100}{9}|a_{01}|^4\right) = 0$$

Тако било услов (iv) или (vi) се реализује.

(β) У овом случају израчунавањем шестог фокуса квантитеа добијамо

$$g_{66} \equiv Im[0031\ 0040] \mod I_5$$

Стога услови $g_{66} = 0$ дају

$$\alpha^3 Im[0001\ 0040] = 0$$

и добијамо (iv) или $a_{11} = 0$.

Случај $a_{11} = 0$ ћемо разматрати ниже.

(γ) У овом случају, обавезно имамо услов $a_{11} = 0$. Тада једначина $g_{11} = 0$ подразумева да се размотри случај када је

$$Im\, a_{10}a_{01} = 0,$$

и зато је потребно да се размотре два случаја

$$(\alpha\alpha) \quad a_{01} = 0,$$

$$(\beta\beta) \quad a_{01} \neq 0.$$

$(\alpha\alpha)$ Овај случај смо раније размотрили.

$(\beta\beta)$ У случају ако је корелација (2.37) задовољена, и, израчунавањем g_{44} и изједначавањем са нулом добијамо

$$s^3 \left(-\frac{28}{27}s + \frac{14}{27} \right) Im[0001\ 0040][0100\ 0010] = 0.$$

Стога је један од услова реализован

$$s = \frac{1}{2}(tj.\ (v)).$$

или

$$Im[0001\ 0040] = 0.$$

У последњем случају добијамо

$$Im[4001\ 0000] = s^4 Im[0001\ 0040] = 0. \tag{2.38}$$

Тада је услов (i) задовољен.

Примедба 2.5.1 *Чињеница да $(i) - (iii)$ су потребни услови центра је установљена у [14] које смо добили незвависним методама.*

Теорема 4 *Услови $(i) - (iv)$ су довољни услови центра за систем (2.33).*

Доказ. Задовољавање услова $(i)-(iii)$ су доказана у [14].

У случају (iv) коришћењем корелације (2.35) , (2.37) и $a_{-13}=ta_{01}^4$ $(t\in\mathbb{R})$, који је последица једначине

$$Im[0001\ 0040]=0,$$

ми можемо закључити да су полиноми g_{ii} полиноми само делови вектора $(0,1),(1,0)$ и стога из структуре полинома g_{kk} [49, 50] добијамо да је $g_{kk}\equiv 0\forall i$ тј. одговарајући систем (2.33) има центар.

Примедба 2.5.2 *Изгледа да услови $(v),(vi)$ су такође довољни услови центра, јер према нашим израчунавањима, у случају (vi) $gii\equiv 0\,\forall i=\overline{1,12}$ и у случају (v) $g_{ii}\equiv 0\,\forall i=\overline{1,10}$. Али да би се доказала ова ћињеница потребно је да се одреди холоморфни интеграл.*

Примедба 2.5.3 *У случају $a_{11}=-a_{10}a_{01}$ израчунали смо седам полинома $g_{11}\ldots,g_{77}$, али полиноми $g_{55},\ldots,g_{77}$ садрже око $20-30$ чланова и проблем је да се добије простији опис сет нула идеалног $I=(g_{11},\ldots g_{77})$.*

3

Услови центра и цикличност неких векторских поља трећег реда

Посматрајмо векторско поље трећег реда, тј.

(3.1)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x\left(1 - a_{10}x - a_{01}y - a_{-12}x^{-1}y^2 - a_{20}x^2 - a_{11}xy - a_{02}y^2 - a_{-13}x^{-1}y^3\right)\\ \frac{dy}{dt} &= -y\left(1 - b_{2,-1}x^2y^{-1} - b_{10}x - b_{01}y - b_{3,-1}x^3y^{-1} - b_{20}x^2 - b_{11}xy - b_{02}y^2\right),\end{aligned}$$

где су $x, y, a_{ij}, b_{ij} \in C$. Координантни почетак је $1 : -1$ резонансна сингуларна тачка векторског поља (3.1). У специјалном случају, када је $x = \overline{y}$, $a_{ij} = \overline{b}_{j,i}$, система (3.1) еквивалентан је једначини

(3.2)

$$i\frac{dx}{d\tau} = x\left(1 - a_{10}x - a_{01}\overline{x} - a_{-12}x^{-1}\overline{x}^{\ 2} - a_{20}x^2 - a_{11}x\overline{x} \ - a_{02}\overline{x}^{\ 2} - a_{-13}x^{-1}\ \overline{x}^{\ -3}\right)$$

Истакнимо да је у реалној равни $u,\ v : x = u + iv$ координантни почетак центар или фокус ситема (3.2). Мада су у последње време добијени веома значајни резултати у испитивању проблема разликовања центра и фокуса (види, на пример [12, 38, 66, 60]), још увек нису решени сви проблеми за кубне системе (3.2). Проблем центра и фокуса не односи се само на реалне полиномне системе, већ такође и на $p : q$ резонансне сингуларне тачке полиномних векторских поља и за дифеоморфизме - а недавно дати проблем је решен за $1 : -2$ резонантних сингуларних тачака квадратних векторских поља [24, 63]

У овој глави ми ћемо испитивати проблем разликовања центра и фокуса за 6-параметарска векторса поља (3.1) у којима су резонансни бројеви $-a_{11}x^2y$, $b_{11}xy^2$ - различити од нуле (за реалне системе (3.2), у којима су ђетири из фамилије коефицијената a_{ij} једнаки нули, потребни и довољни услови центра добијени су у [14]. Ми ћемо такође оцењивати број малоамплитудних реалних граничних цикала, који ишоде из координатног почетка при малим цикличностима тих система.

Специјално је показано, да у неким случајевима недовољно је знати, услове центра осим, за релане системе (3.2), како би оценили методом Баутина број граничних цикала које ишоде из координатног почетка при малим цикличностима једнаки условима центра комплексног система (3.1) омогућује дати такву оцену.

Аналогно [63] рећи ћемо да векторско поље (3.1)има центар у координантном почетку, ако постоји холоморфни интеграл облика

$$\Phi = xy + \sum_{k\geq 2}^{\infty} F_k(x,y), \tag{3.3}$$

где су $F_k(x,y)$ хомогени полиноми k - ог система.

Као што је познато, за системе (3.1) увек је могуће конструисати функцију облика (3.3) и полиноме, g_{ii} (фокусне величине) такве, да је,

$$\dot{\Phi} = g_{11}(xy)^2 + g_{22}(xy)^3 + \cdots .$$

На овај начин, систем (3.1) са задатим коефицијентима има центар у координатном почетку, тада и само тада, када је

$$g_{ii} = 0 \quad \forall i > 0.$$

На почетку, наве71емо нека својства фокусних величина система (3.1).

C систем (3.1) посматрајмо линеарни оператор,

(3.4)

$$L(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} v_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} v_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_5 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} v_6 + \\ + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} v_7 + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} v_8 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} v_9 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_{10} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} v_{11} + \\ + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} v_{12} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_{13} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_{14}$$

и означимо са M скуп свих решења $v = (v_1, v_2, \dots v_{14})$ са позитивним компонентама једначине

$$L(v) = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}$$

(где k пролази цео скуп позитивних целих бројева $k = 0, 1, 2, \dots$). Очигледно, M - је Абелов моноид. Полиномну поалгебру (моноидни прстен) моноида M над пољем Q Означимо са $Q[M]$, тј. $f \in Q[M]$ тада и само тада, када $f \in$

$Q[a_{10}, a_{01}, a_{-12}, \ldots, b_{10}, b_{01}]$, (где $Q[a_{10}, a_{01}, a_{-12} \ldots, b_{10}, b_{01}]$ - прстен полинома над Q у односу на променљиве a_{ij}, b_{ji} које су коефицијенти система (3.1)) и за сваки моном

$$a_{10}^{v1}\, a_{01}^{v2}\, a_{-12}^{v3}\, a_{20}^{v4}\, a_{11}^{v5}\, a_{02}^{v6}\, a_{-13}^{v7}\, b_{3,-1}^{v8}\, b_{20}^{v9}\, b_{11}^{v10}\, b_{02}^{v11}\, b_{2,-1}^{v12}\, b_{10}^{v13}\, b_{01}^{v14} \tag{3.5}$$

полинома f испуњем је услов, да $v \in M$. Фиксирајућ и ред коефицијената система (3.1), дат у (3.5), и писаћ емо

$$[v] = [v_1, v_2, \ldots v_{13}, v_{14}]$$

уместо (3.5). Означимо $\overline{v} = (v_{14}, v_{13}, \ldots v_1)$, и ставимо

$$IM[v] = [v] - [\overline{v}],\, RE[v] = [v] + [\overline{v}]$$

(у случају реалног система (3.2) - тј. када је $a_{ij} = \overline{b}_{ji} - IM[v] = 2iIm[v]$, $RE[v] = 2Re[v]$, тј., кореcподентно, удвоструђеном имагинарном и реалном делу $[v]$, за систем (3.1) $IM[v]$, $RE[v]$).

У [49, 50] показано је, да фокусне величине система (3.1) припадају подалгебри $Q[M]$ и при том имају облик

$$g_{ii} = \sum_{v:L(v)=\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}} g(v) IM[v], \tag{3.6}$$

где $g(v) \in Q$.

Надаље ћемо разматрати систем (3.1) у коме су 8 од 14 коефицијената a_{ij}, b_{ji} изједначени са нулом, при чему, ако је $a_{ij} = 0$, то је и $b_{ji} = 0$. Ако је избаран неки шестопараметарски систем (3.1), тада са I ћемо означити упоредни скуп индекса ненултних коефицијената система (3.1) и у вектору [в] нећемо писати нуле, на местима која одговарају нултим коефицијентима. Тако, за систем (3.1) у коме је

$$a_{10} = a_{01} = a_{-12} = a_{-13} = 0 \tag{3.7}$$

(и, аналогно, $b_{3,-1} = b_{2,-1} = b_{10} = b_{01} = 0$), писаћемо

$$[v] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6],$$

уместо,

$$[v] = [0, 0, 0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, 0, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, 0, 0, 0].$$

и у овом случају, на пример,

$$IM[1, 2, 0, 3, 4, 0] = a_{20} a_{11}^2 b_{20}^3 b_{11}^4 - a_{11}^4 a_{02}^3 b_{11}^2 b_{02}.$$

Уколико су шестопараметарски систем (3.1) и, аналогно, скуп I фиксирани, тада ћемо означити оператор (3.4) у коме су остали само вектори $\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix}$, који одговарају ненултим коефицијентима a_{ij}, b_{ji}, са $L_I(v)$, а одговарајући моноид решења једначине

$$L_I(v) = \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix},$$

(где $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) са M_I. Тако, за случај система (3.1) са условима (3.7), је

$$I = \{(2,0), (1,1)(0,2), (2,0), (1,1), (0,2)\},$$

$$L_I = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} v_3 + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} v_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_5 + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} v_6.$$

Дефиниција 3.0.1 *Елемнти $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_s \in X$ образују генерирани скуп моноида X, ако ма који елемент $\mu \in X$ можемо представити у облику: $\mu = \sum_i^s =_1 \mu_i$.*

Тако на пример, за систем (3.1)са условима (3.7) моноид M_I генериран је скупом

$$\{(100001), (001100), (001000), (000100), (101000), (000101)\}.$$

Надаље, ћемо користити следећа својства полинома из $Q[M]$.

Лема 3.1 *За призвољне $v, \mu \in M$, важ е:*

$$IM[v+\mu] = \frac{1}{2} IM[v] RE[\mu] + \frac{1}{2} IM[\mu] RE[v],$$
$$RE[v+\mu] = \frac{1}{2} IM[v] IM[\mu] + \frac{1}{2} RE[\mu] RE[v].$$

Доказ је очигледан.

Лема 3.2 *Нека је J - идеал из $Q[M]$ и, $v, \mu \in M$. Ако $IM[\mu, +v] \in J$, $IM[\mu] \in J$, тада важи:*

1) $IM[\overline{\mu} + v] \in J$,

2) *за свако $k \in N$ $IM[\mu, kv] \in J$.*

Доказ.

1) Лако су уочава, да је

(3.8) $$IM[\overline{\mu} + v] = IM[\mu + v] - IM[\mu] RE[v],$$

одакле следује прво тврђење Леме 3.2.

2) Дабисмо доказали друго од тврђења Леме 3.2 користићемо математичку индукцију по k. За $k = 1$ тврђење је тачно. Предпоставимо да твђење важи за свако $k < r$. Тада, имајући у виду релацију (3.8), за $k = r$ добијамо

$$IM[\mu + rv] = IM\left[(\mu + (r-1)v) + v\right] = IM\left[\overline{\mu} + (r-1)\overline{v} + v\right] -$$

$$IM\left[\overline{\mu} + (r-1)\overline{v}\right] RE[v] = -[v + \overline{v}] IM\left[\mu + (r-2)v\right] + IM\left[\mu + (r-1)v\right] RE[v].$$

Сагласно индукционој претпоставци последња разлика припада J.

Сматрајући, да су у систему (3.1) резонансни коефицијенти a_{11}, b_{11} различити од нуле и да a_{ij} и b_{ji} истовремено постају нуле, добијамо 15 шестопараметарских система. Из њих, у 14 случајева прва фокусна величина једнака је

$$g_{11} = a_{11} - b_{11}. \tag{3.9}$$

Ми ћемо фокусне величине израчунавати користећи алгоритам, који је описан у [49, 50], при чему се свака следећа величина факторизује по модулу идеала, генерираног претходним величинама.
Израћунавајући, за сваки систем, неколико првих фокусних величина, добијамо следеће полиноме:

1) $a_{-12} = a_{20} = a_{02} = a_{-13} = 0 : g_{11} = -IM[000\ 011] - IM[000\ 100]$,
$g_{22} = -IM[001\ 011]$;
2) $a_{01} = a_{20} = a_{02} = a_{-13} = 0 : g_{33} = \frac{1}{3} IM[001\ 013]$;
3) $a_{01} = a_{-12} = a_{02} = a_{-13} = 0 : g_{33} = -IM[011\ 002]$;
4) $a_{01} = a_{-12} = a_{20} = a_{-13} = 0 : g_{33} = \frac{1}{2} IM[010\ 102]$, $g_{44} = \frac{1}{3} IM[001\ 202]$;
5) $a_{01} = a_{-12} = a_{20} = a_{02} = 0 : g_{44} = -\frac{1}{6} IM[010\ 104], g_{55} = -\frac{7}{60} IM[001\ 204]$;
6) $a_{10} = a_{20} = a_{02} = a_{-13} = 0 : g_{22} = -\frac{2}{3} IM[010\ 003]$;
7) $a_{10} = a_{-12} = a_{02} = a_{-13} = 0 : g_{22} = -2IM[000\ 012]$;
8) $a_{10} = a_{-12} = a_{20} = a_{-13} = 0 : g_{ii} \equiv 0 \forall i > 1$;
9) $a_{10} = a_{-12} = a_{20} = a_{02} = 0 : g_{33} = -\frac{9}{8} IM[001\ 004]$;
10) $a_{10} = a_{01} = a_{02} = a_{-13} = 0 : g_{44} = -IM[000\ 032]$;
11) $a_{10} = a_{01} = a_{20} = a_{-13} = 0 : g_{44} = \frac{2}{3} IM[003\ 002]$;
12) $a_{10} = a_{01} = a_{20} = a_{02} = 0 : g_{ii} \equiv 0, \forall i > 1$;
13) $a_{10} = a_{01} = a_{-12} = a_{-13} = 0 : g_{22} = -IM[000\ 101]$;
14) $a_{10} = a_{01} = a_{-12} = a_{02} = 0 : g_{33} = -\frac{11}{8} IM[000\ 102]$;
15) $a_{10} = a_{01} = a_{-12} = a_{20} = 0 : g_{33} = -\frac{3}{8} IM[001\ 020]$,
(где ми не испитујемо прву фокусну величину у оним случајевима, када је она одређена релацијом (3.9) и такође величине g_{kk}, ако је $g_{kk} \equiv 0\ mod <$

$g_{11}, \ldots, g_{k-1\,,\,k-1} >$). Користећи израчунате фокусне величине, доказаћемо следећу теорему:

Теорема 5 *Координатни почетак је центар за системе* 1) *и* 15) *тада и само тада, када су испуњене, кореснодентно, следеће релације:*

1) један од услова:
(α) $a_{11} = -a_{10}a_{01}, \quad b_{11} = -b_{10}b_{01}$,
(β) $a_{11} - b_{11} = a_{10}a_{01} - b_{10}b_{01} = 0$;

2) један од услова:
(α) $a_{11} = b_{11} = 0$,
(β) $a_{11} - b_{11} = a_{10}^3 a_{-12} - b_{2-1}b_{01}^3 = 0$;

3) један од услова:
(α) $a_{11} = b_{11} = 0$,
(β) $a_{11} - b_{11} = a_{10}^2 b_{02} - a_{20}b_{01}^2 = 0$;

4) један од услова:
(α) $a_{11} - b_{11} = a_{10}^2 a_{02} - b_{20}b_{01}^2 = 0$,
(β) $a_{11} = b_{11} = a_{02} = 0$,
(γ) $a_{11} = b_{11} = b_{20} = 0$;

5) један од услова:
(α) $a_{11} - b_{11} = a_{10}^4 a_{-13} - b_{3,-1}b_{01}^4 = 0$,
(β) $a_{11} = b_{11} = a_{-13} = 0$,
(γ) $a_{11} = b_{11} = b_{3,-1} = 0$;

6) $a_{11} - b_{11} = a_{01}^3 b_{2,-1} - a_{-12}b_{01}^3 = 0$;

7) $a_{11} - b_{11} = a_{01}^2 a_{20} - b_{01}b_{10}^2 = 0$;

8) $a_{11} - b_{11}$;

9) $a_{11} - b_{11} = a_{01}^4 b_{3,-1} - a_{-13}b_{10}^4 = 0$;

10) $a_{11} - b_{11} = a_{-12}^2 a_{20}^3 - b_{02}^3 b_{2,-1}^2 = 0$;

11) $a_{11} - b_{11} = a_{-12}^2 b_{20}^3 - a_{02}^3 b_{2,-1}^2 = 0$;

12) $a_{11} = b_{11}$;

13) $a_{11} - b_{11} = a_{20}a_{02} - b_{20}b_{02} = 0$;

14) $a_{11} - b_{11} = a_{20}^2 a_{-13} - b_{3,-1}b_{02}^2 = 0$;

15) $a_{11} - b_{11} = a_{02}^2 b_{3,-1} - a_{-13}b_{20}^2 = 0$.

Доказ. Потребност датих улсова за постојање центра у координатном почетку лако добијамо из напред наведених, за сваки случај фокусних величина.

Докаћемо довољност наведених услова. У случају система 1), при испуњену услова (α) систем има облик:

$$\dot{x} = (1 - a_{10}x)(1 - a_{01}y), \;\; \dot{y} = -y(1 - b_{10}x)(1 - b_{01}y),$$

и непосредном интеграцијом, као решење, добијамо интеграл облика (3.3).

Претпоставимо сада, да је испуњен услов 1) (β). Систему 1) одговара линеарни оператор,

$$L_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_4 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_5 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_6.$$

Одавде, следује да је одговарајући моноид M_I генериран скупом
$\{(100\ 001), (010\ 010), (001\ 000), (000\ 100), (110\ 000), (000\ 011)\}$.

Аналогно, користећи Лему 3.1, закључујемо да је при испуњености услова 1) (β) сваки полином облика (3.6) идентички једнак нули, што значи да су све фокусне величине једнаке нули.

Потпуно аналогно се доказује довољност одговарајућих услова за случајеве
2) (β), 3) (β), 4) (α),
5) (α), 6) , 7) , 9) − 11) , 13) − 15).

Довољност услова 2) (α) доказана је у [18].

Уколико је испуњен услов 3) (α) систем добија облик,

$$\dot{x} = x\left(1 - a_{10}x - a_{20}x^2\right), \;\; \dot{y} = -y\left(1 - b_{01}y - b_{02}y^2\right),$$

и непосредним интеграљењем добијамо интеграл облика (3.3).

У случају 12) систем је гамилтонов са гамилтонијаном

$$H = \alpha x^2y^2 + \frac{2}{3}b_{2,-1}x^3 + \frac{2}{3}a_{-12}y^3 + \frac{1}{2}a_{-13}y^4 + \frac{1}{2}b_{3,-1}x^4 - 2xy,$$

(где је $a_{11} = b_{11} = \alpha$).

У случају 8) постоји инваријантна експоненцијална функција

$$\psi = e^{F(x,y)},$$

где је, $F = 2\left(\alpha xy + b_{10}x + a_{01}y + \frac{1}{2}a_{02}y^2 + \frac{1}{2}b_{20}x^2\right)$, $\alpha = a_{11} = b_{11}$, са кофактором

$$K = -2\left(a_{01}y + a_{02}y^2 - b_{10}x - b_{20}x^2\right)$$

и првим интегралом

$$\Phi = xye^{-\frac{1}{2}F}$$

(за одговарајући реални систем дати интеграл био је добијен у [14]).

Размотрић емо сада случај система 4) (β) (случај 4) (γ) - потпуно је аналоган. Одговарајући систем (3.1) облика је ,

$$\dot{x} = x\,(1 - a_{10}x)\,,\ \dot{y} = -y\left(1 - b_{01}y - b_{20}x^2\right).$$

У случају услова $a_{10} \neq 0$ (случај $a_{10} = 0$ је простији за разматрање) дати систем можемо записати у облику,

$$\dot{x}\,(1 - x)\,,\ \dot{y} = -y\left(1 - Ay - Bx^2\right). \tag{3.10}$$

Једначине траекторије система (3.10) облика је,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1 - Bx^2}{x(1-x)}y = \frac{Ay^2}{x(1-x)}\cdot$$

Уводећи смену $z = \dfrac{1}{y}$ добијамо линеарну диференцијалну једначину,

$$\frac{dz}{dx} - \frac{1 - Bx^2}{x(1-x)}z = -\frac{A}{x(1-x)}\cdot \tag{3.11}$$

Тада аналитичка функција Cz_0, где је

$$z_0 = xe^{Bx}(1-x)^{B-1},$$

и $C \equiv const$, појављује се као опште решење хомогене дифенцијалне једначине и партикуларно решење једначине (3.11),

$$z_1 = z_0\left(-\int^x \frac{A}{s(1-s)}e^{-\int^x \frac{1-Bs^2}{s(1-s)}ds}ds\right) = -Az_0\int^x \frac{(1-Bs+\ldots)(1+Bs+\ldots)}{s^2}d$$

је такође аналитичка функција. Аналогно имамо да је

$$\frac{yz_0}{1 - yz_1} \equiv c$$

први интеграл облика (3.3).

Остаје још да размотримо случај 5)(β) (због симетрије случај 5)(γ) је потпуно аналоган).

У овом случају систем је облика,

$$\dot{x} = x(1 - a_{10}x),\ \dot{y} = -y(1 - b_{01}y - b_{3,-1}x^3y^{-1}).$$

Претпоставимо, да је $a_{10} \neq 0$, $b_{01} \neq 0$. Тада, уводећи смену $x = -\dfrac{x_1}{a_{10}}$, $y = -\dfrac{y_1}{b_{01}}$ добијамо систем облика

$$\dot{x} = x + x^2,\ \dot{y} = -(y + y^2 - Cx^3). \tag{3.12}$$

За доказ постојања центра у овом случају користимо методу, која је развијена у [24]. Развијајући једначину траекторије система (3.12) у степени ред, добијамо

$$\frac{dx}{dy} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \ , \tag{3.13}$$

где је,

$$a_{3k} = 0, a_{3k+1} = a_{3k+2} = -\frac{C^k}{(y^2+y)^{k+1}} \ (k \geq 0).$$

Потражићемо први интеграл система (3.12) у облику,

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} H_i(y) x^i.$$

Тада функције H_i - решења једначина
(3.14)

$$\begin{gathered} H_1' + a_1 H_1 = 0, \\ H_2' + 2a_1 H_2 = -a_2 H_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ H_k' + k a_1 H_k = f_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

где је,

$$f_k = -(k-1)a_2 H_{k-1} - (k-2)a_3 H_{k-2} - \ldots - a_k H_1.$$

Из прве једначине од (3.14) добијамо,

$$H_1 = \frac{y}{y+1},$$

а следеће две дају

$$H_2 = -\frac{H_1^2}{y} \ , \ H_3 = -\frac{H_1^3}{2y^2}.$$

Показаћемо сада, да је за свако $k \geq 0$, испуњена релација,

$$H_{3k+s}(y) = \frac{H_1(y)^{3k+s} P_{2k}(y)}{y^{4k+s-1}} \tag{3.15}$$

где су P_{2k} полиноми степена $2k$ и $s = 1, 2, 3$.

Ово тврђење ћемо доказати индукцијом по k. Као што је напред показано, за $k = 0$ дата формула важи. Претпоставимо сада, да (3.15) важи за свако $k < m$. Тада, имајући у виду (3.14) добијамо,

$$H_k(y) = H_1(y)^k \int^y f_k(u) H_1(u)^{-k} du. \tag{3.16}$$

Одавде, за $k = m$ добијамо

$$H_{3m+1}(y) = -H_1(y)^{3m+1} \int^y \left(\sum_{i=2}^{k} (3m+2-i) a_i(u) H_{3m+2-i}(u) \right) H_1(u)^{-3m-1} du \right).$$

Потпуно аналогно, даби смо доказали да је,

$$H_{3m+1}(y) = H_1(y)^{3m+1} \frac{P_{2m}(y)}{y^{4m}},$$

довољно је показати да је,

$$\int^y a_{3r+l}(u) H_{3m-3r+2-l}(u) H_1(u)^{-3m-1} du = \frac{P_{2m}(y)}{y^{4m}} \tag{3.17}$$

где је, $l = 1, 2$.

За случај $l = 1$, имамо да је

$$-\int^y a_{3r+1}(u) H_{3m-3r+l}(u) H_1(u)^{-3m-1} du1$$

$$C^r \int^y \frac{H_1(u)^{r+1}}{u^{2r+2}} H_1(u)^{3m-3r+1} \frac{P_2(m-r)(u)}{u^{4(m-r)}} H_1(u)^{-3m-1} du1$$

$$C^r \int^y \frac{H_1(u)^{-2r+1}}{u^{2r+2}} \frac{P_{2(m-r)}(u)}{u^{4(m-r)}} du = C^r \int^y \frac{(u+1)^{2r-1} P_{2(m-r)}(u)}{u^{4m+1}} du = \frac{P_{2m}(y)}{y^{4m}} \quad .$$

За случај $l = 2$ имамо да је,

$$-\int^y a_{3r+2}(u) H_{3m-3r}(u) H_1(u)^{-3m-1} du1$$

$$C^r \int^y \frac{H_1(u)^{r+1}}{u^{2r+2}} H_1(u)^{3m-3r} \frac{P_2(m-r-1)(u)}{u^{4(m-r-1)+2}} H_1(u)^{-3m-1} du1$$

$$C^r \int^y \frac{H_1(u)^{-2r}}{u^{2r+2}} \frac{P_{2(m-r-1)}(u)}{u^{4m-4r-2}} du = C^r \int^y \frac{(u+1)^{2r} P_{2(m-r-1)}(u)}{u^{4m}} du = \frac{P_{2m}(y)}{y^{4m}} \quad .$$

Аналогно се може доказати, да H_{3m+2}, H_{3m+3} имају облик (3.15). Заиста, имајући у виду (Особину 2 из [24]), сагласно којем постојање интеграла, који је аналитичка функција у околини седла, еквивалентно постојању аналитич ког интеграла, закључујемо, да (3.12) има центар у координатном почетку.

Случај $b_{01} = 0$ је очигледан, док случај, када је $a_{10} = 0$, је аналоган већ размотреном случају.

Испитаћемо сада проблем оцене бројева малоамплитудних граничних цикала за горе размтраних 15 система.

Убудуће, сматраћемо, да сингуларна тачка $x = u + iv = 0$ система (3.2) има цикличност k у односу на простор параметара E, ако ма која нестабилност система (3.2) у E има највише k граничних цикала у малој околини тачке $u =$

$0, v = 0$ и постоји нестабилност, коју има k граничних цикала. Ако је једна од горе наведених 15 система и, исто тако, скуп I - фиксирани, означићемо простор параметара одговарајућег реалног система (3.2) са E_I.

Нека је $H =< h_1, h_2, \ldots, >$ - идеал генериран неким низом полинома $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, и $H_k =< h_1, \ldots, h_k >$ - идеал генериран k првим полиномима. Означимо са D_H базу H, добијену на следећи начин.

Input : $H =< h_1, h_2, \ldots >$

Output : D_H

$D_H := 0$; $H_0 :=< 0 >$; $k := 0$;

WHILE $H_k \neq H$ ДО

$IF\ H_k \neq H_{k-1}\ THEN\ D_H := D_H \cup h_k; k := k + 1$

Особина 3.0.1 *Ако је база D_J идеала J фокусних величина система (3.1) образована са фокусним величинама у $Q[M_I]$, тада је цикличност сингуларне тачке $x = u + iv = 0$ у односу на простор E_I мања или једнака $s - 1$.*

Доказ. Из наведених резултата у [64, 23] следује, да ако фокусне величине

$$g_{i_1 i_1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m), \ldots, g_{i_s i_s}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$$

неког система (3.2) ч ине базу D_{J_R} идеала Баутина

$$J_R =< g_{11}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \ldots, g_{tt}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m), \ldots >$$

у прстену $R[\lambda_1, \ldots, \lambda_m] = E_I(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ коефицијенти реалног система (3.2), тада је цикличност, координатног почетка, у односу на E_I мања или једнака $s - 1$. На овај начин, довољно је показати, ако неке фокусне величине генерирају цео идеал фокусних величина система (3.1) у $Q[M_I]$, то те исте фокусне величине генерирају идеал J_R система (3.2).

Претпоставимо сада, да је

$$g_{ll} = g_{i_1 i_1} f_1 + \ldots + g_{i_s i_s} f_s \tag{3.18}$$

у $Q[M_I]$. Као што произлази из (3.6),после замене у фокусним велич инама комплексно - коњуговани коефицијенти $a_{jr} = u_{jr} + iv_{jr}$, $b_{rj} = u_{jr} - iv_{jr}$ добијају се полиноми са чисто имагинарним коефицијентима. Раздвајајући у полиномима f_p реалне и имагинарне делове, добијамо да релација (3.18) може имати фокусне величине реалног система (3.2)(где су сада f_p - полиноми са реалним коефицијентима у односу на променљиве,који представљају коефицијенте одговарајућег система (3.2), $\dot{u} = -v + \ldots,\ \dot{v} = u + \ldots$).

Следећа теорема даје процену цикличности координатног почетка, напред размотрених 15 система.

Теорема 6 *Цикличност сингуларне тачке $x = u + iv = 0$, у односу на одговарајући параметарски простор коефицијената, једнака је нули у случају система* 8) *и* 12), *а јединици за системе* $1), -3), 6), 7), 9), -11)$ *и* $13) - 15)$ *мања или једнака* 2 *за системе* 4) *и* 5).

Доказ. На основу особине (3.0.1), а да бисмо добили горњу границу цикличности, довољно је наћи базис идеала фокусних величина у $Q[M_I]$.

Размотрићемо сада систем 6) покажимо да у том случају важи,

$$J =< g_{11}, g_{22} > .$$

Из ове релације произилазиће, да је цикличност једнака 1. Оператор (3.4) у датом случају има облик,

$$L_I(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v_1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} v_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} v_4 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} v_5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} v_6.$$

па је моноид M_I генериран скупом

$$M_I = \{(100001), (010010), (001000), (000100), (010003), (300010)\}.$$

Према томе, а имајући у виду Лему 3.1, закључујемо да сваки полином из $Q[M_I]$ облика (3.6) припада идеалу $< g_{11}, g_{12} >$. Потпуно аналогно разматрају се случајеви $7), 9) - 11)$ и $13) - 15)$, док суслучајеви система 8) и 12) очигледни.

Размотримо сада систем 2). Прва фокусна величина $-g_{11}-$ одређена је релацијом (3.9) па су

$$g_{22} = 0, \ \ g_{33} = \frac{1}{3} IM[001\ 013],$$

а моноид M_I генериран је скупом,

$$\{(100\ 001), (010\ 010), (001\ 000), (000\ 100), (000\ 013), (310\ 000)\}.$$

Показаћемо, да је

$$J =< g_{11}, g_{33} > \tag{3.19}$$

На снову Леме 3.2, је

$$IM[0, 0, 1, 0, k, 3k], \ \ IM[0, 0, 0, 1, k, 3k] \in J. \tag{3.20}$$

У случају $a_{11} = b_{11} = 0$ систем 2) има центар. Аналогно, ако је $g_{(a,b,0,0,e,f)}$, $IM[a, b, 0, 0, e, f]$ један члан фокусне величине g_{ii} тада је $g_{(a,b,0,0,e,f)} = 0$. Према томе, за доказ релације (3.19) довољно је показати, да ако је $IM[a, b, c, d, e, f] \in Q[M_I]$, где су c или d различити од нуле, то $IM[a, b, c, d, e, f] \in J$.

На основу Леме 3.1, имамо

$$\begin{aligned} IM[a,b,c,d,e,f] = &\frac{1}{2} IM[a,b,c,d-1,e,f] RE[000\ 100] + \\ &+ \frac{1}{2} IM[000\ 100] RE[a,b,c,d-1,e,f] \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned} IM[a,b,c,d,e,f] = &\frac{1}{2} IM[a,b,c-1,d,e,f] RE[000\ 100] + \\ &+ \frac{1}{2} IM[001\ 000] RE[a,b,c-1,d,e,f] \end{aligned} \tag{3.22}$$

Одређености ради, претпоставимо да је $c \neq 0$. Имајући у виду (3.21) и (3.22) добијамо

$$IM[a,b,c,d,e,f] = IM[a,b,1,0,e,f]g + h,$$

где $g, h, \in Q[M_I], h \in J$. На овај начин, остало је да покажемо, да

$$IM[a,b,1,0,e,f] \in J. \tag{3.23}$$

Имајући у виду структуру генерираног скупа моноида M_I, закључујемо, да је,

$$IM[a,b,1,0,e,f] = p \cdot IM[0,0,1,0,r,3r]$$

или

$$IM[a,b,1,0,e,f] = p \cdot IM[3r,r,1,0,0,0],$$

где је $p \in Q[M_I]$. Аналогно, а имајући у виду (3.20), (3.23) може се доказати, да важи релација (3.19).

Потпуно аналогно се разматра случај система 3).

Размотримо случај 4) (система 5) аналогно). За дати систем

$$g_{11} = IM[010\ 000],\ g_{33} = \frac{1}{2} IM[010\ 102],\ \ g_{44} = \frac{1}{3} IM[001\ 202],$$

услови центра

$$(\alpha) \quad IM[010\ 000] = IM[000\ 102] = 0,$$

$$(\beta) \quad a_{11} = b_{11} = a_{02} = 0,$$

$$(\gamma) \quad a_{11} = b_{11} = b_{20} = 0$$

па нам је неопходно показати, да је $g_{ii} \in J =< g_{11}, g_{33}, g_{44} > \forall i$.

Не умањујући општост, свака фокусна величина представљена је као збир полинома облика,

$$\alpha[m,0,n,n,0,m] IM[0,p,0,k,q,2k]. \tag{3.24}$$

На основу услова центра закључујемо, да је или један од бројева p, q или пак n различит од нуле. Претпоставимо, да је $p \neq 0$. Потпуно аналогно, напред размотреном случају, закључујемо, да је

$$IM[0, p, 0, k, q, 2k] \equiv IM[0, 1, 0, k, 0, 2k]h \mod < g_{11} >,$$

где $h \in Q[M_I]$. Из Леме 3.2 добијамо $IM[0, 1, 0, k, 0, 2k] \in J$ и, аналогно, полином (3.24) такође је у J. Потпуно аналогно разматра се случај $q \neq 0$.

Нека је сада $n \neq 0$. У овом случају

$$[0, 0, n, n, 0, 0]IM[0, p, 0, k, q, 2k] \equiv$$

$$\equiv [0, 0, n-1, n-1, 0, 0]IM[0, 0, 1, k+1, 0, 2k] \cdot h \mod < g_{11} >,$$

$h \in Q[M_I]$ па из Леме 3.1 закључујемо, да $IM[0, 0, 1, k+1, 0, 2k] \in J$. На овај начин, полиноми облика (3.24) и , аналогно, све фокусне величине, припадају идеалу J.

Остаје још да размотримо случај система 1), тј. потребно је доказати, да је

$$J =< g_{11}, g_{22} >,$$

где је,

$$g_{11} = IM[001\ 000] + IM[110\ 000],\ g_{22} = -IM[001\ 011],$$
$$I = \{(1,0), (0,1), (1,1)(1,1), (1,0), (0,1)\}.$$

Ако ставимо,

$$g = \frac{a_{11}}{a_{10}a_{01}},\ \hat{g} = \frac{b_{11}}{b_{10}b_{01}}. \tag{3.25}$$

тада фокусне величине су збирови полинома облика:

$$[m, n, 0, 0, n, m]\left(f(g, \hat{g})[k, k, 0, 0, 0, 0,] - \hat{f}(g, \hat{g})[0, 0, 0, 0, k, k]\right), \tag{3.26}$$

где $f \in Q[g, \hat{g}]$, и ако је $f = \sum \alpha_{ij} g^i \hat{g}^j$ тада ћемо увести ознаку:

$$\hat{f} = \sum \alpha_{ij} \hat{g}^j g^i.$$

Уколико $p(g, \hat{g}) \in Q[g, \hat{g}], v \in M$, то ћемо означавати

$$IM[p] = p - \hat{p},\ RE[p] = p + \hat{p},$$

$$IM[pv] = p[v] - \hat{p}[\bar{v}],\ RE[pv] = p[v] + \hat{p}[\bar{v}].$$

Очигледно је,

$$IM[p(v + \mu)] = \frac{1}{2} IM[pv] \cdot RE[\mu] + \frac{1}{2} RE[pv] \cdot IM[\mu],$$

и ако је q такође из $Q[g,\hat{g}]$, тада је

$$IM[pqv] = \frac{1}{2}IM[p]\cdot RE[qv] + \frac{1}{2}IM[qv]\cdot RE[p]. \tag{3.27}$$

Приметимо, да је

$$g_{11} = IM[(g+1)(1,1,0,0,0,0,)],\ g_{22} = (g-\hat{g})[1,1,0,0,1,1] \in J.$$

Тада имамо,

$$m_1 = [1,1,0,0,1,1]\cdot IM[(\hat{g}+1)(1,1,0,0,0,0,)] \in J, \tag{3.28}$$

јер је $m_1 - [1,1,0,0,1,1]g_{11} \in J$.
Нека је $m_2 = IM[(g+1)(k,k,0,0,0,0,)]$ Како је

$$m_2 = IM[(g+1)(k-1,k-1,0,0,0,0,)]\cdot RE[1,1,0,0,0,0,]-$$
$$[1,1,0,0,1,1]\cdot IM[(g+1)(k-2,k-2,0,0,0,0)],$$

то отуда на основу индукције лако добијамо, да је $m_2 \in J$.

Све фокусне величине претварају се у нуле за $g = \hat{g} = -1$, аналогно, полиноми (3.26) могу се записати у облику,

$$m_3 = [m,n,0,0,n,m]\cdot IM[h(g,\hat{g})(g+1)(k,k,0,0,0,0)], \tag{3.29}$$

или

$$m_1 = [m,n,0,0,n,m]\cdot IM[h(g,\hat{g})(g+1)(k,k,0,0,0,0)], \tag{3.30}$$

Претпоставимо, да је

$$m \geq 1,\ n \geq 1. \tag{3.31}$$

Тада за полиноме (3.29) сагласно (3.27) добијамо

$$m_3 = [m,n,0,0,n,m]IM[h(g,\hat{g})(g+1)(k,k,0,0,0,0)] =$$
$$= \left(\frac{1}{2}IM[h(g,\hat{g})]RE[(g+1)(k,k,0,0,0,0)] + \frac{1}{2}RE[h(g,\hat{g})]m_2\right)[m,n,0,0,n,m].$$

Како је $m_2 \in J$, то m_3 такође ће припадати J, ако је

$$[m,n,0,0,n,m]\cdot IM[h(g,\hat{g})] \in J. \tag{3.32}$$

Уколико је

$$g^r\hat{g}^s - \hat{g}^r g^s = g^s\hat{g}^s\left(g^{r-s} - \hat{g}^{r-s}\right) = g^s\hat{g}^s(g-\bar{g})(\ldots)$$

(ради одређености стављамо, да је $r > s$), то отуда, имајући у виду, да је $[110\ 011](g - \bar{g}) \equiv g_{22} \in J$, а с' обзиром на (3.31), закључујемо да важи релација (3.32).

Остаје да се размотри, случај, када нису испуњени предуслови (3.31). У том случају (3.29) имамо релацију,

$$m_5 = [m, n, 0, 0, n, m] IM[h(g)(g+1)(k, k, 0, 0, 0, 0)],$$

где је $h(g) \in Q[g, \hat{g}]$ - полином степена мањег, од k. Дабисмо доказали, да $m_5 \in J$, довољно је доказати, да

$$m_6 = IM[g^l(g+1)(k, k, 0, 0, 0, 0)] \in J \tag{3.33}$$

за свако $k \in N, 0 \leq l < k - 1$.

Доказаћемо тврђење (3.33) помоћу индукције по k. За $k = 1$ $m_6 = g_{11}$, што значи да важи основни корак индукције. Претпоставимо сада, да (3.33) важи за свако $k < k_0$. Тада за k_0 добијамо

$$m_6 = RE[g(110000)]f_1 - g\hat{g}[1, 1, 0, 0, 1, 1]f_2,$$

где је,

$$f_1 = IM[g^{l-1}(g+1)(k_0 - 1, k_0 - 1, 0, 0, 0, 0)],$$
$$f_2 = IM[g^{l-2}(g+1)(k_0 - 2, k_0 - 2, 0, 0, 0, 0)].$$

Сагласно претпоставци индукције $f_1, f_2 \in J$, следује, m_6 такође је у J, тј. важи (3.33) па произилази $m_5 \in J$.

Ми смо оставили по старни случај, када полином има облик (3.30). После смене у (3.30) уместо $g, \hat{g}$ вредности (3.25), израз (3.30) постаје полином. Аналогно за, $m \geq 1, n \geq 1$, што значи да можемо (3.30) записати у облику,

$$m_1 = [m-1, n-1, 0, 0, n-1, m-1] \cdot IM[h(g, \hat{g})(\hat{g}+1)(k+1, k+1, 0, 0, 1, 1)].$$

Користећ и (3.28) добијамо

$$IM[(\hat{g}+1)(k+1, k+1, 0, 0, 1, 1)] \in J,$$

и аналогно, претходном случају, закључујемо, да $m_4 \in J$.

Из израза за фокусне величине, наведених напред, лако је уочити, да постоје приближења одговарајућих система, за које се реализују дати услови теореме резултата граничних цикала.

Примедба 3.0.4 *За систем* 4) *идеал фокусних величина* $I = < g_{11}, g_{33}, g_{44} >$ *није радикални идеал у* $R[Re\ a_{10}, Im\ a_{10}, Re\ a_{02}, Im\ a_{02}, Re\ a_{11}, Im\ a_{11}]$.

Заиста, полином $Im\ a_{10}^2\ a_{02}$ *трансформише се у нулу на скупу реалних нула идеала* I, *али не припада томе идеалу. Аналогно, да би добили резултат цикличности методом Баутина, у датом случају није довољно знати само услове центра реалног система (3.2), већ су нам потребни такође услови центра комплексног система (3.1).*
Потпуно аналогна ситуација је и за случај система 5).

4

Бифуркације граничних цикала

4.1 Предмет поглавља 4

Предмет овог поглавља биће разматрање система обичних диференцијалних једначина тј.система

$$\dot{u} = \tilde{U}(u, v), \quad \dot{v} = \tilde{V}(u, v), \tag{4.1}$$

где су u и v реалне променљиве, а $\tilde{U}(u,v)$ и $\tilde{V}(u,v)$ су полиноми, при чему је $\max(\deg \tilde{U}, \deg \tilde{V}) \leq n$. Други део шеснаестог са добро познатог Хилбертовог списка отворених проблема постављених године 1900. траж и опис могућег броја и могуће локације граничних цикала, изоловане периодичне орбите који се појављују у фазном портрету таквих полиномијалних система. Иначе, минимална *униформна* граница $H(n)$ на број граничних цикала за систем (4.3.3), за неко фиксирано n, је данас позната као *n-ти Хилбертов број.*

Без обзира на једноставност поставке проблема, није учињен знача-
јан напредак чак и за мале вредности n. У тим случајевима, за више постигнутих значајних резултата, касније се утврдило да су, или нетачни или да садрже погрешне доказе. Тако на пример, дуго се сматрало да је $H(2) = 3$, све до 1980. када су Chen i Wang конструисали примере квадратичних система (4.3.3) за $n = 2$, који имају бар 4 гранична цикла. У исто време постављено је питање коректности Дулацовог доказа фундаменталне претпоставке за Хилбертов 16ти проблем да сваки *фиксиран* полиномијални систем има коначан број граничних цикала, чији доказ се касније показао као погрешан. Разматрајући питање за квадратич не системе, 1983.Chicone i Shafer су доказали да фиксиран квадратични систем има само коначно много граничних цикала у свакој ограниченој области фазне равни, а 1986, Bamc1oniRomanovski су проширили овај резултат на целу фазну раван, и тиме установили коректност Дулацове теореме у квадратичном случају. Неколико година касније, Дулацова теорема је доказана за произвољан квадратични систем. У овом тренутку без обзира на ове резултате, никаква униформна граница за број граничних цикала за поли-

номијални систем фиксираног степена није позната. Тачније, није познато да ли је $H(n)$ уопште коначан, осим у тривијалним случајевима $n = 0$ и $n = 1$.

Основна два концепта, који се користе у приступу проблему процене $H(n)$ су идеје о граничном периодичном скупу и о цикличности таквог скупа, које је користио Баутин у својим истраживањима, доказавши да је $H(2) \geq 3$. Да би их описали, разматрамо фамилију система (4.3.3) чији коефицијенти припадају посебном параметарском простору $\mathcal{E}$ снабдевеном топологијом. *Гранични периодични скуп* је скуп тачака Γ у фазном портрету система (4.3.3), који одговара неком избору e_0 параметара са својством да гранични цикл може бити форсиран да бифуркује из Γ при погодној, али произвољно малој промени параметара. Другим речима, за сваку околину U од Γ у $\mathbb{R}^2$ и сваку околину N од e_0 у $\mathcal{E}$ постоји $e_1 \in N$ такав да систем који одговара избору параметара e_1 има гранични цикл који у потпуности лежи унутар U. Гранични периодични скуп Γ има *цикличност* c у односу на $\mathcal{E}$ ако и само ако за сваки избор e параметара у околини e_0 у $\mathcal{E}$ одговарајући систем (4.3.3) има највише c граничних цикала који се у потпуности налазе у околини од Γ и c је најмањи број са тим својством. Примери граничних периодичних скупова су сингуларности жижног или централног типа, периодичне орбите, не обавезно гранични цикли и скуп формиран седластом тачком и паром својих стабилних и нестабилних сепаратриса који представљају исти скуп тачака „хомоклинич на петља“. Roussarieје показао да ако се може установити, за n фиксирано, да сваки гранични скуп за фамилију (4.3.3) има коначну цикличност, при природној компактификацији параметарског и фазног простора, онда је $H(n)$ коначан. Овај програм се за квадратне системе тренутно примењује.

У овог глави разматрамо проблем цикличности простог сингуларитета система (4.3.3), то јест, онај у коме је детерминанта линеарног дела различита од нуле, проблем који је познат као *локални 16. Хилбертов проблем.* Биће описан општи метод базиран на идејама Баутина за третирање овог и сличних проблема бифуркације и примењујемо метод за разрешавање проблема цикличности за сингуларне тачке квадратних система и проблем бифуркације за критичне периоде у прстену периода центара за фамилију кубних система.

4.2 Баутинов метод за проблеме бифуркације

Баутинов приступ бифуркацијама граничних цикала из сингуларитета векторских поља је заснован на својствима нула аналитичких функција више променљивих које зависе од параметара и коме ћемо се посветити у овом одељку. Нека је $\mathcal{E}$ подскуп од $\mathbb{R}^n$ и нека је $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathcal{E} \to \mathbb{R} : (z, \theta) \mapsto \mathcal{F}(z, \theta)$ аналитичка функција, коју ћемо у околини $z = 0$ задавати у облику

$$\mathcal{F}(z,\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j(\theta) z^j, \tag{4.2}$$

где је, за $j \in \mathbb{N}_0$, $f_j(\theta)$ аналитичка функција и за свако $\theta^* \in \mathcal{E}$ ред (4.2) конвергира у околини $(z, \theta) = (0, \theta^*)$. У свим слуђајевима који су нама од интереса, бавићемо се само бројем *позитивних* решења, за сваку фиксирану вредност параметара θ^*, једначине $\mathcal{F}(z, \theta^*) = 0$ у околини $z = 0$ у $\mathbb{R}$. Стога ћемо дефинисати вишеструкост вредности параметра θ^* у односу на $\mathcal{E}$ на следећи начин.

Дефиниција 7 *За свако $\theta^* \in \mathcal{E}$ и свако довољно мало $\varepsilon > 0$, нека $z(\theta, \varepsilon)$ означава број изолованих нула $\mathcal{F}(z, \theta)$ у интервалу $(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}$. За тачку $\theta^* \in \mathcal{E}$ се каже да има вишеструкост с у односу на простор $\mathcal{E}$ у координатном почетку у $\mathbb{R}$ ако постоје позитивне константе δ_0 и ε_0 такве да за сваки пар бројева δ и ε који задовољавају $0 < \delta < \delta_0$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,*

$$\max\{z(\theta, \varepsilon) : |\theta - \theta^*| \leq \delta\} = c,$$

где $|\cdot|$ означава уобичајену еуклидску норму на $\mathbb{R}^n$.

Постоје две могућности које су нама важне у вези равности од $\mathcal{F}(z, \theta^*)$ за $z = 0$:

(и) постоји $m \in \mathbb{N}_0$ такав да је $f_0(\theta^*) = \cdots = f_m(\theta^*) = 0$, али $f_{m+1}(\theta^*) \neq 0$;

(ии) $f_j(\theta^*) = 0$ за све $j \in \mathbb{N}_0$.

У првом случају није тешко видети да је вишеструкост θ^* највише m, као и Последицу 4.2.1. Случај (ии) је суптилнији, али постоји метод за његово разматрање, који је сугерисао Баутин. Најпре ћемо скицирати метод у случају да су функције f_j полиномијалне функције по θ. Идеја се састоји у налажењу базе идеала $\langle f_0(\theta), f_1(\theta), f_2(\theta), \ldots \rangle$ у прстену полинома $\mathbb{R}[\theta]$. На основу Хилбертове теореме о бази увек постоји коначна база. Додајући полиноме f_j по потреби да би се попунио почетни део низа $\{f_0, f_1, \ldots\}$, можемо изабрати првих $m+1$ полинома $\{f_0(\theta), f_1(\theta), \ldots, f_m(\theta)\}$ за такву базу. Кори71ењем ове базе, функцију $\mathcal{F}$ можемо написати у облику

$$\mathcal{F}(z, \theta) = \sum_{j=0}^{m} f_j(\theta)(1 + \Phi_j(z, \theta))z^j, \tag{4.3}$$

где је $\Phi_j(0, \theta) = 0$ за $j = 0, 1, \ldots, m$. Стога се функција $\mathcal{F}(z, \theta)$ понаћа као полином по z степена m у близини $\theta = \theta^*$ и стога може имати највише m нула за свако θ у околини θ^*, као што ће бити показано у Теореми 7.

Касније ћемо видети, да је локални 16. Хилбертов проблем само проблем вишеструкости функције $\mathcal{P}(\rho) = \mathcal{R}(\rho) - \rho$, где је $\mathcal{R}(\rho)$ Поенкареово обратно пресликавање. У случају када је $\mathcal{F}$ извод функције периода $T(\rho)$ раније дефинисане и $\mathcal{E}$ централни варијетет система (4.3.3) имамо такозвани проблем бифуркација критичних периода, који ћемо разматрати касније.

На основу претходног, за разматрање вишеструкости $\mathcal{F}(z, \theta)$ биће нам неопходно да смо у могућности да пребројимо изоловане нуле функција представљених у облику (4.3), што омогућује следећа теорема.

Теорема 7 *Нека је $Z : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функција која се може записати у облику*

$$Z(z, \theta) = f_1(\theta) z^{j_1}(1 + \psi_1(z, \theta)) + \cdots + f_s(\theta) z^{j_s}(1 + \psi_s(z, \theta)), \tag{4.4}$$

где $j_u \in \mathbb{N}$ за $u = 1, \ldots, s$ и $j_1 < \cdots < j_s$ и где су $f_j(\theta)$ и $\psi_j(z, \theta)$ реалне аналитичке функције он $\{(z, \theta) : |z| < \varepsilon$ и $|\theta - \theta^*| < \delta\}$ за неке позитивне реалне бројеве δ и ε и $\psi_j(0, \theta^*) = 0$ за $j = 1, \ldots, s$. Тада постоје бројеви ε_1 и δ_1, $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ и $0 < \delta_1 \leq \delta$ тако да за свако фиксирано θ које задовољава $|\theta - \theta^*| < \delta_1$, једначина

$$Z(z, \theta), \tag{4.5}$$

посматрана као једначина само по z, има највиш е $s - 1$ изолованих решења у интервалу $0 < z < \varepsilon_1$.

Доказ. Нека су δ_1 и ε_1 такви да је $0 < \delta_1 < \delta$ и $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$ и $|\psi_j(z, \theta)| < 1$ ако је $|z| \leq \varepsilon_1$ и $|\theta - \theta^*| \leq \delta_1$ за $j = 1, \ldots s$. Нека $B(\theta^*, \delta_1)$ означава затворену куглу у $\mathbb{R}^n$ радијуса δ_1 са центром θ^*. За свако $j \in \{1, \ldots, s\}$, f_j није нула функција, Иначе одговарајући члан није заступљен у (4.4). Почињемо од дефинисања скупа V_0 са $V_0 := \{\theta \in B(\theta^*, \delta_1) : f_j(\theta) = 0$ за све $j = 1, \ldots, s\}$, који је затворен, прави подскуп од $B(\theta^*, \delta_1)$. За $\theta_0 \in V_0$, као функција по z, $Z(z, \theta_0)$ је идентички једнака нули на $(0, \varepsilon_0)$ тако да став важи за $\theta_0 \in V_0$.

За свако $\theta_0 \in B(\theta^*, \delta_1) \setminus V_0$, нека је $u \in \{1, \ldots, s\}$ најмањи индекс за који је $f_u(\theta_0) \neq 0$. Тада је $Z(z, \theta_0) = f_u(\theta_0) z^{j_u} + z^{j_u + 1} g(z, \theta_0)$, где је $g(z, \theta_0)$ реална аналитичка функција на $[-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$. Стога је j_u-ти извод од $Z(z, \theta_0)$ различит од нуле за $z = 0$, тако да $Z(z, \theta_0)$ није идентички једнака нули те има коначна број $S_0(\theta_0)$ нула у $(0, \varepsilon_1)$.

Нека је $V_1 = \{\theta \in B(\theta^*, \delta_1) : f_j(\theta) = 0$, за $j = 2, \ldots, s\}$; $V_1 \supset V_0$. За $\theta_0 \in V_1$ ако је $f_1(\theta_0) = 0$ онда је $Z(z, \theta_0)$ идентички једнака нули на $(0, \varepsilon_1)$; ако је $f_1(\theta_0) \neq 0$, онда, као функција по z, $Z(z, \theta_0) = f_1(\theta_0) z^{j_1}(1 + \psi_1(z, \theta_0))$ нема нула у $(0, \varepsilon_1)$. У сваком случају тврђење важи за $\theta \in V_1$.

За $\theta \in B(\theta^*, \delta_1) \setminus V_1$, поделимо $Z(z, \theta)$ са $z^{j_1}(1 + \psi_1(z, \theta))$ да бисмо добили аналитичку функцију $\tilde{Z}^{(1)}(z, \theta)$ од z на $[-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$, потом диференцирамо по z да бисмо добили реалну аналитичку функцију $Z^{(1)}(z, \theta)$ од z на $[-\varepsilon_1, \varepsilon_1]$ која се може написати у облику

$$Z^{(1)}(z, \theta) = f_2(\theta)(j_2 - j_1) z^{j_2 - j_1 - 1}(1 + \psi_2^{(1)}(z, \theta)) + \cdots$$

$$+ f_s(\theta)(j_s - j_1) z^{j_s - j_1 - 1}(1 + \psi_s^{(1)}(z, \theta)),$$

где $\psi_j^{(1)}(0, \theta^*) = 0$ за $j = 2, \ldots, s$. Као функција од z, $\tilde{Z}^{(1)}(z, \theta)$ има исти број $S_0(\theta)$ нула на $(0, \varepsilon_1)$ као што има $Z(z, \theta)$. Као функција од z, $Z^{(1)}(z, \theta)$ није идентички једнака нули стога има коначан број $S_1(\theta)$ нула у $(0, \varepsilon_1)$. На основу Роллеове теореме, $\tilde{Z}^{(1)}(z, \theta)$ има највише једну нулу више у $(0, \varepsilon_1)$ од $Z^{(1)}(z, \theta)$, тако да је $S_0(\theta) \leq S_1(\theta) + 1$.

Функција $Z^{(1)}(z,\theta)$ је истог облика као и функција $Z(z,\theta)$ (укључујућ и ненула константу j_2-j_1 у $f_2(\theta)$ и узимајућ и, у случају потребе, ε_1 мањим да би услов $|\psi_j^{(1)}(z,\theta)|<1$ ако је $|z|\le\varepsilon_1$ био задовољен), тако да можемо поновити исту процедуру: дефинишемо $V_2=\{\theta\in B(\theta^*,\delta_1):f_j(\theta)=0$ за $j=3,\dots,s\}$, који садржи V_1 и на коме је $Z^{(1)}$ као функција од s или идентички једнака нули или нема ниједну нулу на $(0,\varepsilon_1)$, потом за $\theta\in B(\theta^*,\delta_1)\setminus V_2$ поделимо $Z^{(1)}(z,\theta)$ са $z^{j_2-j_1-1}(1+\psi_2^{(1)}(z,\theta))$ да бисмо формирали $\tilde{Z}^{(2)}(z,\theta)$, који има исти број $S_1(\theta)$ нула у $(0,\varepsilon_1)$ као и $Z^{(1)}(z,\theta)$ и коначно диференцирамо $\tilde{Z}^{(2)}(z,\theta)$ по z да бисмо добили реалну аналитичку функцију $Z^{(2)}(z,\theta)$, која, за свако $\theta\in B(\theta^*,\delta_1)\setminus V_2$ има, као функција од z, коначан број $S_2(\theta)$ нула у $(0,\varepsilon_1)$ и $S_1(\theta)\le S_2(\theta)+1$, тако да је $S_0(\theta)\le S_2(\theta)+2$.

Узимањем $Z^{(0)}(z,\theta)=Z(z,\theta)$ и понављањем процеса у укупно $s-1$ итерација, добијамо низ скупова $V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_{s-1}$ и функција $Z^{(j)}(z,\theta)$, које су дефинисане и аналитичке на $[-\varepsilon_1,\varepsilon_1]$ за $\theta\in B(\theta^*,\delta_1)\setminus V_j$, $j=0,\dots,s-1$, са својством да став важи на V_j, $Z^{(j)}(z,\theta)$ има, као функција од z, коначан број $S_j(\theta)$ нула у $(0,\varepsilon_1)$ и $S_0(\theta)\le S_j(\theta)+j$. Посебно, став важи за $\theta\in V_{s-1}$ и за $\theta\in B(\theta^*,\delta_1)\setminus V_{s-1}$, $S_0(\theta)\le S_{s-1}(\theta)+(s-1)$. Но, можемо написати $Z^{(s-1)}(z,\theta)=f_s(\theta)(j_s-j_{s-1})\cdots(j_s-j_2)(j_s-j_1)z^{j_s-j_{s-1}-1}(1+\psi_s^{(s-1)}(z,\theta))$ за неку функцију $\psi_s^{(s-1)}$ која задовољава $\psi_s^{(s-1)}(0,\theta^*)=0$. Као функција од z, $Z^{(s-1)}(z,\theta)$ није идентички једнака нули, стога нема нула у $(0,\varepsilon_1)$. Стога је $S_0(\theta)\le s-1$ тако да теорема важи за све $\theta\in B(\theta^*,\delta_1)$. Теорема је доказана. Напоменимо, да ако нас занима број изолованих решења једначине (4.5) у интервалу $(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)$, онда потражимо горњу границу $2s-1$: на основу претходне теореме има највише $s-1$ изолованих решења у $(0,\varepsilon)$, као и највише $s-1$ изолованих решења у $(-\varepsilon_1,0)$ плус могуће решења за $z=0$.

Последица 4.2.1 *Претпоставимо да коефицијенти функције $\mathcal{F}$ из (4.2) задовољавају услов*

$$f_0(\theta^*)=\cdots f_m(\theta^*)=0,\quad f_{m+1}(\theta^*)\neq 0.$$

Тада је вишеструкост од θ^* највише m.

Доказ. Како је $f_{m+1}(\theta^*)\neq 0$ у околини θ^* можемо функцију $\mathcal{F}$ из (4.2) написати у облику

$$\mathcal{F}(z,\theta)=\sum_{j=0}^{m}f_j(\theta)z^j+f_{m+1}(\theta)z^{m+1}(1+\psi(z,\theta)).$$

Сада применимо Теорему 7.

Теорема 7 омогућава нам да пребројимо нуле функција које нас занимају и природно се појављују у облику (4.2). Да бисмо искористили Теорему 7, морамо преуредити чланове нашег реда. Радећи то погодније је радити са $\mathbb{C}$ него са $\mathbb{R}$, тако да ћемо сада извршити преглед неке терминологије и чињеница које се тичу фукција више комплексних промењљивих и редова облика $\sum_{a\in\mathbb{N}_0}a_\alpha(\mathbf{x}-\mathbf{c})^\alpha$, где су a_α реални или комплексни, а који су нам неопходни за наставак. Нека k

означава поље $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Полидиск* у k^n са центром у $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$и *полирадијусом* $r = (r_1, \ldots, r_n)$ је отворени скуп $\{(x_1, \ldots, x_n) : |x_j - c_j| < r_j$ за $j = 1, \ldots, n\}$. Пош то се скуп $\mathbb{N}_0^n$ мулти-индекса може линеарно уредити на много начина, постаља се питања у ком тачно смислу се тражи лимес у дефиницији конвергенције редова облика $\sum_{a \in \mathbb{N}_0} a_\alpha (\mathbf{x} - \mathbf{c})^\alpha$. Конвергенција у ма ком смислу у тачки $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ имплицира апсолутну конвергенцију на отвореном полидиску чији је центар у $\mathbf{c}$ и полирадијус $(|c_1 - b_1|, \ldots, |c_n - b_n|)$, тако да су постојање и вредност суме реда независни од уређења његових чланова. *Клица* аналитич ке функције у тачки $\theta^* \in k^n$ је класа еквиваленције аналитичких функција при релацији: f је еквивалентна са g ако постоји околина од θ^* на којој се f и g поклапају. Означићемо са $\mathcal{G}_{\theta^*}$ прстен, у односу на природно сабирање и множење, клица аналитичких функција од θ у тачки $\theta^* \in k^n$, који је Нетерин прстен који је изоморфан прстену конвергентних степених редова од n променљивих над k. Ако је f аналитичка функција на некој отвореној околини θ^* у k^n, означавамо са $\mathbf{f}$ елемент у $\mathcal{G}_{\theta^*}$ индукован са f. Из контекста ће бити јасно када кори71ење „масних“ слова означава пресликавање у $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ за $n > 1$ и када означава клицу функције у $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, важи следећа теорема.

Теорема 8 *Нека је U отворен подскуп од $\mathbb{C}^n$, θ^* тачка у U, $g_1, \ldots, g_s$ холоморфне функције на U и $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n$ одговарајуће клице у θ^*. Нека је $I = \langle \mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_n \rangle$. Тада постоји полидиск $P \subset U$, са центром у θ^* и константа $\gamma > 0$ тако да за сваку функцију f која је холоморфна на P и таква да је $\mathbf{f} \in I$, постоје функције $h_1, \ldots, h_s$ које су холоморфне на P и које су такве да је $f = \sum_{j=1}^{s} h_j g_j$ на P и $\|h_i\|_P \leq \gamma \|f\|_P$ за $j = 1, \ldots, s$,где је $\|\cdot\|_P$ супремум норма за непрекидне функције на P, $\|f\|_P = \sup_{z \in P} |f(z)|$.*

Још једна специфичност која се појављује када променимо (4.2) у облик (4.4) коришћењем базе идеала генерисаног коефицијентним функцијама $f_j(\theta)$ је да поредак коефицијентних функција, одређен њиховим индексима, јесте значајан. Биће посебно значајно у доказу леме о прераспоређивању реда да база идеала $\langle f_j : j \in \mathbb{N}_0 \rangle$ има својство да укључује прву ненула функцију и сваку функцију f_i која је независна од свих функција са нижим индексима, у смислу да није њихова линеарна комбинација. На пример, за уређену колекцију $\{f^3, f^2, f\}$ и одговарајући идеал I, $I = \langle f^3, f \rangle$ анд $I = \langle f \rangle$, али ниједна од база које су наведене овим изразима не задовољава тај услов. Ово својство неких база истичемо следећом дефиницијом.

Дефиниција 4.2.1 *Нека је k поље и $\{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ уређен скуп полинома у $k[x_1, \ldots, x_n]$. Претпоставимо да је J најмањи индекс за који f_J није нула полином. База B идеала $I = \langle f_j : j \in \mathbb{N}_0 \rangle$* задовољава услов задржавања *уколико*

(а)$f_J \in B$ и

(б) за $j \geq J + 1$, ако $f_j \notin \langle f_0, \ldots, f_{j-1} \rangle$ онда $f_j \in B$.

Минимална база за I у односу на услов задржавања *је база која се конструише на следећи начин: почевши са $B = \{f_J\}$, редом проверавати сукцесивне елементе f_j, поцевши од $j = J + 1$ и додавати f_j у B ако и само ако $f_j \notin \langle B \rangle$.*

Процедура описана у дефиницији производи растући низ идеала, стога се мора завршити у коначно много корака пошто је прстен $k[x_1, \ldots, x_n]$ Нетерин. База конструисана на овај начин је минимална међу свим базама које задовољавању услов задржавања у смислу да садржи најмањи могући број елемената.

Када напишемо само „база B идеала $I = \langle f_1, f_2 \ldots \rangle$ која задовољава услов задржавања‘, или „минимална база“ у овом смислу, без спомињања поретка, онда се подразумева да је скуп функција који се разматра уређен онако како су оне наведене када је I описан. Сада ћемо доказати лему о прераспоређивању реда облика (4.2).

Лема 4.2.1 *Нека је $\mathcal{F}(z, \theta)$ ред облика (4.2) који конвергира на скупу $U = \{(z, \theta) : |z| < \varepsilon$ и $|\theta - \theta^*| < \delta\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Нека $\mathbf{f}_j$ означава клицу функције f_j у θ^* у прстену клица $\mathcal{G}_{\theta^*}$ комплексних аналитичких функција у θ^* где се θ^* разматра као елемент из $\mathbb{C}^n$ и претпоставимо да постоји база B идеала $I = \langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots \rangle$ у $\mathcal{G}_{\theta^*}$ која се састоји од m клица $\mathbf{f}_{j_1}, \ldots, \mathbf{f}_{j_m}$, $j_1 < \cdots < j_m$ и која задовољава услов задржавања. Тада постоје позитивни бројеви ε_1 и δ_1, за које је $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ и $0 < \delta_1 \leq \delta$, као и m аналитичких функција $\psi_{j_q}(z, \theta)$ за које је $\psi_{j_q}(0, \mathbf{0}) = 0$, $q \in \{1, \ldots, m\}$ тако да је*

$$\mathcal{F}(z, \theta) = \sum_{q=1}^{m} f_{j_q}(\theta)(1 + \psi_{j_q}(z, \theta)) z^{j_q} \tag{4.6}$$

испуњено на скупу $U_1 = \{(z, \theta) : |z| < \varepsilon_1$ и $|\theta - \theta^*| < \delta_1\}$.

Доказ. Нека су z и θ комплексни. Ред који дефинише $\mathcal{F}$ конвергира на U, прецизније на $U^{\mathbb{C}} := \{(z, \theta) : |z| < \varepsilon$ и $|\theta - \theta^*| < \delta\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. Нека је $R = \min\{\varepsilon/2, \delta/2, 1\}$ и $M = \sup\{|F(z, \theta)| : |z| \leq R$ и $|\theta - \theta^*| \leq R\} < \infty$. Како за свако фиксирано $\theta \in \mathbb{C}^n$ такво да је $|\theta - \theta^*| \leq R$, ред за $\mathcal{F}(z, \theta)$ конвергира на $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, Кошијеве неједнакости дају $|f_j(\theta) \leq M/R^j$ за све $j \in \mathbb{N}_0$ тако да ако је $W = \{\theta : |\theta - \theta^*| \leq R\} \subset \mathbb{C}^n$, онда је

$$\|f_j\|_W \leq \frac{M}{R^j}. \tag{4.7}$$

Применом Теореме 7 на идеал $I = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots \rangle = \langle \mathbf{f}_{j_1}, \ldots, \mathbf{f}_{j_m} \rangle$ установљавамо постојање полидиска $P \subset W \subset \mathbb{C}^n$ са центром у $\theta^* \in \mathbb{R}^n$, позитивне реалне константе γ и за свако $j \in \mathbb{N}_0$ m аналитичких функција $h_{j,1}, h_{j,2}, \ldots, h_{j,m}$ на P тако да је

$$f_j = h_{j,1} f_{j_1} + h_{j,2} f_{j_2} + \cdots + h_{j,m} f_{j_m}$$

и

$$\|h_{j,u}\|_P \leq \gamma \|f_j\|_P, \tag{4.8}$$

за $j \in \mathbb{N}_0$ и $u = 1, \ldots, m$. Стога је ред (**??**)

$$\mathcal{F}(z, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{q=1}^{m} h_{j,q}(\theta) f_{j_q}(\theta) \right) z^j. \tag{4.9}$$

Преуређење чланова реда је допустиво уколико ред конвергира апсолутно и показаћемо сада да је то тач но. Нека σ означава најмању компоненту у полурадијусу од P, тако да је $\sigma \leq R$. Тада за $j \geq j_m$ и θ које задовољава $|\theta - \theta^*| < \sigma$,

$$\begin{aligned} |h_{j,q}(\theta) f_{j_q}(\theta) z^j| &\leq \gamma \|f_j\|_P \frac{M}{R^{j_q}} |z|^j \text{ (из (4.7) и (4.8), пош то је } \theta \in P \subset W) \\ &\leq \gamma \|f_j\|_W \frac{M}{R^j} |z|^j \text{ (пошто је } P \subset W, j \geq j_m \text{ и } R \leq 1) \\ &\leq \gamma \frac{M^2}{R^2 j} |z|^j, \text{ (на основу (4.7))} \end{aligned}$$

те је конвергенција апсолутна за $|z| < \varepsilon_1 := R^2$ и $|\theta = \theta^*| < \delta_1 := \sigma$. Стога можемо написати (4.9) као

$$\mathcal{F}(z,\theta) = \sum_{j=0}^{j_m} \left(\sum_{q=1}^{m} h_{j,q}(\theta) f_{j_q}(\theta) \right) z^j + \sum_{q=1}^{m} \left(\sum_{j=j_m+1}^{\infty} h_{j,q}(\theta) z^j \right) f_{j_q}(\theta). \tag{4.10}$$

Претпоставимо да $r \in \{0, 1, \ldots, j_m\}$. Ако је $r = j_q$ за неко $q \in \{1, \ldots, m\}$, онда је

$$f_r(\theta) z^r = (0 \cdot f_{j_1}(\theta) + \cdots + 1 \cdot f_{j_q}(\theta) + \cdots + 0 \cdot f_{j_m}(\theta)) z^{j_q} = f_{j_q}(\theta) z^{j_q}.$$

Ако је $j_q < r < j_{q+1}$ за неко $q \in \{1, \ldots, m-1\}$ (једини преостали случај, пош то је $f_r = 0$ за $r < j_1$), тада како B задовољава услов задржавања, постоје функције $u_{r,1}(\theta), \ldots, u_{r,q}(\theta)$ које су све аналитич ке на околини у $\mathbb{C}^n$ тачке $\theta^* \in \mathbb{R}^n$, такве да је

$$f_r(\theta) = u_{r,1}(\theta) f_{j_1}(\theta) + \cdots + u_{r,q}(\theta) f_{j_q}(\theta),$$

стога је

$$f_r(\theta) z^r = (u_{r,1}(\theta) z^{r-j_1}) f_{j_1}(\theta) z^{j_1} + \cdots + (u_{r,q}(\theta) z^{r-j_q}) f_{j_q}(\theta) z^{j_q}.$$

Дакле

$$\sum_{j=0}^{j_m} \left(\sum_{q=1}^{m} h_{j,q}(\theta) f_{j_q}(\theta) \right) z^j = \sum_{q=1}^{m} f_{j_q}(\theta)(1 + \tilde{\psi}_{j_q}(z,\theta)) z^{j_q}$$

за неке функције $\tilde{\psi}(z,\theta)_{j_q}$ које су аналитич ке у околини $(0,\theta^*)$ у $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ и задовољавају услов $\tilde{\psi}(0,0) = 0$. Кори71ењем (4.10) за укључивање чланова вишег реда по z у функције $\tilde{\psi}_{j_q}$, за можда мање ε_1 и δ_1 имамо да (4.6) важи на $U_1^{\mathbb{C}} = \{(z,\theta) : |z| < \varepsilon_1 \text{ и } |\theta - \theta^*| < \delta_1\} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$. Очигледно, да ако реални бројеви $\mu, \mu_1, \ldots, \mu_m$ и комплексни бројеви $\xi_1, \ldots, \xi_m$ задовољавају услов $\mu = \mu_1 \xi_1 + \cdots + \mu_m \xi_m$, онда је $\mu = \mu_1 \mathrm{Re}\xi_1 + \cdots + \mu_m \mathrm{Re}\xi_m$. Стога, пошто функције $f_{j_1}, \ldots, f_{j_m}$ имају реалне коефицијенте и $\mathcal{F}(z,\theta)$ је реално ако су z и θ реални, ако се свако ψ_{j_q} замени својим реалним делом, (4.6) још увек важи на $U_1 := U_1^{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Лема је доказана и на основу Леме 4.2.1 и Теореме 7 имамо теорему.

Теорема 9 *Нека је $\mathcal{F}(z,\theta)$ ред облика (4.2), који конвергира на скупу $\{(z,\theta) : |z| < \varepsilon$ и $|\theta - \theta^*| < \delta\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и нека $\mathbf{f}_j$ означава клицу функције f_j у θ^* у* *прстену* $\mathcal{G}_{\theta^*}$ *клица комплексних аналитичких функција у* θ^* *где се* θ^* *разматра као елемент у* $\mathbb{C}^n$. *Претпоставимо да идеал* $I = \langle \mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots \rangle$ *у* $\mathcal{G}_{\theta^*}$ *има базу* B *која се састоји од* m *ќлица* $\mathbf{f}_{j_1}, \ldots, \mathbf{f}_{j_m}$, $j_1 < \ldots < j_m$ *и која задовољава услов задржавања. Тада постоје бројеви* ε_1 *и* δ_1, $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ *и* $0 < \delta_1 \leq \delta$ *тако да за сваки фиксиран* θ *који задовољава* $|\theta - \theta^*| < \delta_1$, *једначина* $\mathcal{F}(z, \theta) = 0$, *разматрана само као једначина по* z, *има највише* $m - 1$ *изолованих решења у интервалу* $(0, \varepsilon_1)$.

4.3 Услов цикличности

У овом одељку користићемо напред измете резултате за развој метода за рачунање максималног броја граничних цикала који могу бифурковати из просте жиже или центра система (4.3.3), који у овом делу скраћено записујемо у облику $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f_0}(\mathbf{u})$. (Подсетимо се да се сингуларитет $\mathbf{u_0}$ из 4.3.3 зове *прост* или *недегенерисан* ако је $\det \mathbf{df_0}(\mathbf{u_0}) \neq 0$.) Нека је $\mathbf{u_0}$ произвољни сингуларитет система (4.3.3). Ако је $\mathbf{u_0}$ хиперболички онда је цикличности нула. Он није хиперболички ако је или $\det \mathbf{df_0}(\mathbf{u_0}) = 0$ или $\det \mathbf{df_0}(\mathbf{u_0}) > 0$, али је $\operatorname{Tr} \mathbf{df_0}(\mathbf{u_0}) = 0$. Ако уклонимо хиперболичност стављајући $\det \mathbf{df_0}(\mathbf{u_0}) = 0$, онда $\mathbf{u_0}$ не мора бити изолован од осталих сингуларитета, а онда када јесте изолован, могуће је да се или цепа у више од једног сингуларитета или у потпуности нестаје при произвољно малој пертурбацији од $\mathbf{f_0}$, при било којој разумној топологији на скупу полинома $\mathbf{f}$. Стога је природно разматрати ситуацију $\operatorname{Tr} \mathbf{df_0}(\mathbf{u_0}) = 0$ и $\det \mathbf{df_0}(\mathbf{u_0}) > 0$, тако да је $\mathbf{u_0}$ прост и стога је или жижа или центар. шта више, *свака* жижа или центар квадратног система је прост, тако да ће теорија која се овде развије покрити квадратна антиседла у потпуности.

Стога претпоставимо да је $\mathbf{u_0}$ сингуларитет система (4.3.3) у коме је траг линеарног дела једнак нули, а детерминанта линеарног дела позитивна, проста, али нехиперболичка жижа или центар. Транслацијом која помера $\mathbf{u_0}$ у координатни почетак и линеарном трансформацијом која поставља $\mathbf{df_0}(\mathbf{u_0})$ у Жорданову нормалну форму, систем (4.3.3) може бити написан у једном посебном облику. Морамо омогућити да је траг линеарног дела ненула при пертурбацији да би се могла применити теорија о диференцном пресликавању $\mathcal{P}$ и Љапуновљевим бројевима. При временском рескалирању одговарајућа једначина добија једноставан облик

$$\dot{u} = \lambda u - v + P(u, v), \quad \dot{v} = u + \lambda v + Q(u, v), \tag{4.11}$$

где је $\lambda = \alpha/\beta$ и где су P и Q полиноми за које је $\max\{\deg P, \deg Q\} = n$, $P(u, v) = \sum_{j+k=2}^{n} A_{jk} u^j v^k$ и $Q(u, v) = \sum_{j+k=2}^{n} B_{jk} u^j v^k$. Увођење комплексне координате $x = u + iv$ на уобичајен начин изражава (4.11) у комплексном облику

$$\dot{x} = \lambda x + i \left(x - \sum_{(p,q) \in S} a_{pq} x^{p+1} \bar{x}^q \right), \tag{4.12}$$

где је $S \subseteq \mathbb{N}_{-1} \times \mathbb{N}_0$ коначан скуп, чији произвољни елемент задовољава услов $p+1 \geq 1$. шта више, $\operatorname{Re} a_{pq} \in \mathbb{Q}[A,B]$ и $\operatorname{Im} a_{pq} \in \mathbb{Q}[A,B]$. Када је $\lambda = 0$, ове једначине се своде на

$$\dot{u} = -v + P(u,v), \quad \dot{v} = u + Q(u,v) \tag{4.13}$$

и

$$\dot{x} = i\left(x = \sum_{(p,q)\in S} a_{pq} x_{p+1} \bar{x}^q\right). \tag{4.14}$$

Користићемо само $(\lambda,(A,B))$ као ознаку за цео низ коефицијената $(\lambda, A_{20}, \ldots, B_{0n})$ у $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{(n+1)(n+2)-6}$ и само a за цео низ коефицијената $(a_{p_1,q_1}, \ldots, a_{p_l,q_l}$ у $\mathbb{C}^l$. Дакле, $E(\lambda,(A,B))$, $E(\lambda,a)$, $E(A,B)$ и $E(a)$ означава простор параметара фамилија (4.11), (4.12), (4.13) и (4.14) респективно. То су само $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{(n+1)(n+2)-6}$, $\mathbb{R}\times\mathbb{C}^l$ итд.

Прецизна дефиниција цикличности сингуларитета од (4.11), односно (4.12) је следећа и она се такође може изразитити у терминима параметара $(\lambda,(A,B))$. Поновимо да је природан контекст за пертурбацију елемената фамилије (4.13) је фамилија (4.11) и то објашњава избор параметра λ у параметарском простору у дефиницији.

Дефиниција 4.3.1 *За параметре (λ,a) нека $n((\lambda,a),\varepsilon))$ означава број граничних цикала одговарајућег система (4.11) који у потпуности леже унутар ε-околине координатног почетка. Сингуларитет у координатном почетку за систем (4.11) са фикскираним коефицијентима $(\lambda^*,a^*) \in E(\lambda,a)$ има* цикличност c у односу на простор $E(\lambda,a)$ *ако постоје позитивне константе δ_0 и ε_0 такве да за сваки пар ε и δ који задовољава услове $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ и $0<\delta<\delta_)$ важи*

$$\max\{n((\lambda,a)\varepsilon)) : |(\lambda,a)-(\lambda^*,a^*)|<\delta\} = c.$$

За $\rho \in \mathbb{R}$ имамо прво повратно пресликавање $\mathcal{R}(\rho)$ одређено позитивним делом u-осе. $\mathcal{R}(\rho)$ има развој у ред

$$\mathcal{R}(\rho) = \tilde{\eta}_1\rho + \eta_2\rho^2 + \eta_3\rho^3 + \cdots \tag{4.15}$$

где су $\tilde{\eta}_l$ и η_k за $k \geq 2$ реалне аналитичке функције од параметара $(\lambda,(A,B))$ система (4.11) и посебно је $\tilde{\eta}_1 = e^{2\pi\lambda}$. Како изоловане нуле диференцне функције

$$\mathcal{P}(\rho) = \mathcal{R}(\rho) - \rho = \eta_1\rho + \eta_2\rho^2 + \eta_3\rho^3 + \cdots \tag{4.16}$$

одговарају граничним циклима система (4.11) цикличност координатног почетка у систему, који одговара $(\lambda^*,(A^*,B^*)) \in E(\lambda,(A,B))$ једнака је вишеструкости функције $\mathcal{P}(\rho)$ у $(\lambda^*,(A^*,B^*))$. Стога је понашање Љапуновљевих бројева η_k, $k \in \mathbb{N}$ кључно за цикличност координатног почетка система (4.11). На пример, већ видимо да ако је тачка $(\lambda^*,(A^*,B^*))$ у простору параметара система (4.11) таква да је $\lambda^* = \alpha^*/\beta^* \neq 0$, онда је $\eta_1 = \tilde{\eta}_1 - 1 \neq 0$ тако да развој $\mathcal{P}$ показује да ниједан гранични цикл не може бифурковати из координатног почетка при малим пертурбацијама. То се у потпуности слаже са чињеницом да је $(0,0)$ хиперболичка жижа у овој ситуацији.

Очекујемо да су Љапуновљеви бројеви полиноми по параметрима (A, B) система (4.13). Ово тврђење ћемо сада издвојити у облику става. Но, како су Љапуновљеви бројеви такође дефинисани за веће фамилије система облика (4.11), постоје заправо два скупа „Љапуновљевих бројева“ који су нам од интереса: они који се појављују у контексту система (4.13) и они који се појављују у контексту система (4.11), природна поставка у којој пертурбације из елемента (4.13) се појављују при одређивању цикличности антиседла у координатном почетку (Дефиниција 4.3.1). У контексту параметризованих фамилија (4.11) или (4.13), Љапуновљеви бројеви се такође зову и Љапуновљеве „величине“. Све што је потребно да знамо о Љапуновљевим величинама за ширу фамилију је да су то реалне аналитичке функције параметара $(\lambda, (A, B))$. Ово директно следи из аналитичности решења $f(\varphi, \varphi_0, r_0)$ проблема са почетним условима $r = r_0$ и $\varphi = \varphi_0$, чињенице да $r = 0$ није сингуларна него регуларна тачка решења одговарајуће једначине, као и аналитич ности евалуације пошто је прво Поенкареово повратно пресликавање ништа друго до евалуација $f(\varphi, 0, r_0)$ у $\varphi = 2\pi$.

Теорема 10 *Љапуновљеве величине за фамилију (4.13) су полиномијалне функције од параметара (A, B) са коефицијентима у $\mathbb{R}$.*

Љапуновљеве величине и жижне величине издвајају центре у фамилији (4.13); оне такође разликују стабилне и нестабилне слабе жиже. Ове чињенице указују на постојање блиске везе између њих и сугеришу да би било могуће користити жижне величине за истраживање цикличности простих жижа и центара. Ово је тачно и значајно је због тога што се са жижним величинама знатно лакше ради него са Љапуновљевим величинама. Права природа везе дата је у следећој теореми. Пре тога је корисно да укратко поновимо како се изводе жижне величине за реални систем (4.13). Први корак је изражавање (4.13) у комплексном облику (4.14) и додавању тој једначини њену комплексно коњуговану једначину. Посматрајући $\bar{x}$ као независно променљиву, овај пар диференцијалних једначина постаје систем обичних диференцијалних једначина на $\mathbb{C}^2$:

$$\dot{x} = i\left(x - \sum_{(p,q)\in S} a_{pq} x^{p+1} y^q\right), \quad \dot{y} = -i\left(y - \sum_{(p,q)\in S} b_{qp} x^q y^{p+1}\right), \tag{4.17}$$

где је $b_{qp} = \bar{a}_{pq}$. Ако је $\mathcal{X}$ векторско поље на $\mathbb{C}^2$ асоцирано ма ком систему на $\mathbb{C}^2$ овог облика, не обавезно комплексификацији реалног система (дакле у коме не мора да важи једнакост $b_{qp} = \bar{a}_{pq}$) онда примењујемо $\mathcal{X}$ на формални ред Ψ

задат са

$$\Psi(x,y) = xy + \sum_{j+k\geq 3} \nu_{j-1,k-1} x^j y^k. \tag{4.18}$$

Рекурзивним бирањем коефицијената $\nu_{j-1,k-1}$ у покушају да сви коефицијенти од $\mathcal{X}\Psi = \sum_{j+k\geq 1}^{\infty} g_{j,k} x^{j+1} y^{k+1}$ постану нула, добијамо функције $g_{kk} \in \mathbb{C}[a,b]$ такве да је $ig_{kk} \in \mathbb{Q}[a,b]$ $(i = \sqrt{-1})$ и

$$\mathcal{X}\Psi = g_{11}(xy)^2 + g_{22}(xy)^3 + g_{33}(xy)^4 + \cdots \tag{4.19}$$

Дакле, док је η_k полином по оригиналним реалним коефицијентима (A,B) од (4.13), g_{kk} је полином по комплексним коефицијентима (a,b) комплексификације (4.17). Да би се начинило право поређење, морамо изразити g_{kk} преко параметара (A,B). Ово је могуће пошто коефицијенти (a,b) комплексификације задовољавају услове $b = \bar{a}$ и $g_{kk}(a,\bar{a}) \in \mathbb{R}$ за све $a \in \mathbb{C}^n$ и пош то су $\operatorname{Re} a_{pq}$ и $\operatorname{Im} a_{pq}$ полиноми (са рационалним коефицијентима) по оригиналним коефицијентима (A,B) тако да је

$$g_{kk}^{\mathbb{R}}(A,B) := g_{kk}(a(A,B), \bar{a}(A,B)) \tag{4.20}$$

полином по (A,B) са рационалним коефицијентима. Постоји разлика између g_{kk} и $g_{kk}^{\mathbb{R}}$, али се она никада не истиче у литератури; мора се просто стално имати на уму контекст у коме се величина g_{kk} појављује.

Теорема 11 *Нека су η_k Љапунововљеве величине за систем (4.13) у односу на антиседло у координатном почетку, нека су g_{kk} жижне величине за комплексификацију (4.17) система (4.13) и нека $g_{kk}^{\mathbb{R}}$ ознаћава полиномијалне функције дефинисане са (4.20). Тада је $\eta_1 = \eta_2 = 0$, $\eta_3 = \pi g_{11}^{\mathbb{R}}$ и за $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $\eta_{2k} \in \langle g_{11}^{\mathbb{R}}, \ldots, g_{k-1,k-1}^{\mathbb{R}} \rangle$ и $\eta_{2k+1} - \pi g_{kk}^{\mathbb{R}} \in \langle g_{11}^{\mathbb{R}}, \ldots, g_{k-1,k-1}^{\mathbb{R}} \rangle$ у $\mathbb{R}[A,B]$.*

Доказ. Идеја се састоји у поређењу измене $\mathcal{P}(\rho)$ у позицији дуж позитивне u-осе при једном обртању око сингуларитета са променом вредности функције Ψ изражене са (4.18), израчунавања промене у Ψ интеграцијом њеног извода дуж решења (4.13), који природно генерише жижне величине на основу (4.19). У стварности је Ψ дефинисано за $(x,y) \in \mathbb{C}^2$, али ћемо ми ту функцију израчунавати на $(x,\bar{x})$, инваријантној равни која садржи фазни портрет од (4.11). Како је систем на $\mathbb{C}^2$ коме Ψ и жижзне величине g_{kk} одговарају, комплексификација реалног система, онда је $b = \bar{a}$ тако да су жижне величине g_{kk} заправо величине $g_{kk}^{\mathbb{R}}$. Како Ψ не мора конвергирати, тако да заправо и не дефинише функцију, ми ћемо радити уместо тога са скраћеним редом који дефинише Ψ,

$$\Psi_N(x,\bar{x}) := x\bar{x} + \sum_{j+k=3}^{2N+1} \nu_{j-1,k-1} x^j \bar{x}^k.$$

Фиксирајмо почетну тачку на позитивној u-оси са поларним координатама $(r,\varphi) = (\rho, 0)$ комплексним координатама $x = u + iv = \rho + i0 = \rho$. При једном обрту око сингуларитета, време се повећа за неки износ $\tau = \tau(\rho)$ и промена у Ψ_N је

$$\begin{aligned}
\triangle\Psi_N(\rho,\rho) &= \int_0^\tau \frac{d}{dt}\left[\Psi_N(x(t),\bar{x}(t))\right]dt \\
&= \int_0^\tau \sum_{k=1}^N g_{kk}^{\mathbb{R}}(x(t),\bar{x}(t))^{k+1} + o(|x(t)|^{2N+1})dt \\
&= \int_0^\tau \sum_{k=1}^N g_{kk}^{\mathbb{R}}|x(t)|^{2k+2} + o(|x(t)|^{2N+2})dt.
\end{aligned}$$

Променимо сада промењљиву интеграције са t на поларни угао φ. Имајући у виду да смо рескалирали време да буде $(\alpha,\beta) = (0,1)$, имамо $|x(t)| = r(t) = \rho + w_2(\varphi)\rho^2 + w_3(\varphi)\rho^3 + \cdots$. Како је $d\varphi/dt = 1 + \sum_{k=1}^\infty u_k(\varphi)r^k$ то је

$$dt = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^\infty u_k(\varphi)[\rho + w_2(\varphi)\rho^2 + \cdots]^k}d\varphi = (1 + \tilde{u}_1(\varphi)\rho + \tilde{u}_2(\varphi)\rho^2 + \cdots)d\varphi.$$

Стога је

$$\triangle\Psi_n(\rho,\rho) =$$

$$= \int_0^{2\pi}\sum_{k=1}^N g_{kk}^{\mathbb{R}}(\rho + w_2(\varphi)\rho^2 + \cdots)^{2k+2}(1 + \tilde{u}_1(\varphi)\rho + \tilde{u}_2(\varphi)\rho^2 + \cdots)d\varphi + o(\rho^{2N+2})$$

$$= \sum_{k=1}^N \left[2\pi g_{kk}^{\mathbb{R}}\rho^{2k+2} + g_{kk}^{\mathbb{R}}(f_{k,1}\rho^{2k+3} + f_{k,2}\rho^{2k+4} + \cdots)\right] + o(\rho^{2N+2}).$$

Ако пажњу скренемо на $\triangle\rho$, за сваку вредност $\rho > 0$ имамо позитиван реалан број ξ дефинисан функцијом $\xi = f(\rho) = \Psi(\rho,\rho) = \rho^2 + V_3\rho^3 + V_4\rho^4 + \cdots$ која има инверз $\rho = g(\xi)$. На основу Тајлорове теореме, постоји $\tilde{\xi}$ између ξ и $\xi + \varepsilon$ тако да је $g(\xi+\varepsilon) = g(\xi) + g'(\xi)\varepsilon + \frac{1}{2!}g''(\xi)\varepsilon^2$. Нека је $\tilde{\rho} = g(\tilde{\xi})$. Користећи формуле за први и други извод од g као инверзне функције од f и инвертујући добијени степени ред имамо да је за $\varepsilon = \triangle\Psi_N$,

$$\begin{aligned}
\triangle\rho &= \frac{1}{2\rho + 3V_3\rho^2 + \cdots}\triangle\Psi_N + \frac{1}{2!}\left(-\frac{2 + 6V_3\tilde{\rho} + \cdots}{(2\tilde{\rho} + 3V_3\tilde{\rho}^2 + \cdots)^3}\right)(\triangle\Psi_N)^2 \\
&= \left(\frac{1}{2\rho} + c_0 + c_1\rho + c_2\rho^2 + \cdots\right)\left(\sum_{k=1}^N\left[2\pi g_{kk}^{\mathbb{R}}\rho^{2k+2} + g_{kk}^{\mathbb{R}}(f_{k,1}\rho^{2k+3} + \cdots)\right] + o(\rho^{2N+2})\right) \\
&\quad + \left(-\frac{1}{8\tilde{\rho}^3} + d_{-2}\frac{1}{\tilde{\rho}^2} + d_{-1}\frac{1}{\tilde{\rho}} + d_0\tilde{\rho} + \cdots\right)\left(\sum_{k=1}^N (g_{kk}^{\mathbb{R}})^2(d_{k,1}\rho^{4k+4} + \cdots) + o(\rho^{2N+4})\right).
\end{aligned}$$

Како је $\triangle\Psi_n$ по ρ реда четири или више, $\tilde{\rho}$ је реда ρ. Стога је

$$\triangle\rho = \sum_{k=1}^N\left[\pi g_{kk}^{\mathbb{R}}\rho^{2k+1} + g_{kk}^{\mathbb{R}}(\tilde{f}_{k,1}\rho^{2k+2} + \tilde{f}_{k,2}\rho^{2k+3} + \cdots)\right] + o(\rho^{2N+1}). \tag{4.21}$$

Знамо да је $\eta_1 = e^{2\pi\alpha/\beta} - 1$, тако да хипотеза $\lambda = 0$ имплицира да је $\eta_1 = 0$. Стога је и $\eta_2 = 0$. Ово даје прва два тврђења става. Како је $\triangle\rho = \mathcal{P}(\rho)$, једначина (4.21) даје

$$\begin{aligned}
\eta_3\rho^3 + \eta_4\rho^4 + \eta_5\rho^5 + \cdots \quad = \quad & \pi g_{11}^{\mathbb{R}}\rho^3 + g_{11}^{\mathbb{R}}(\tilde{f}_{1,1}\rho^4 + \tilde{f}_{1,2}\rho^5 + \cdots) \\
& +\pi g_{22}^{\mathbb{R}}\rho^5 + g_{22}^{\mathbb{R}}(\tilde{f}_{2,1}\rho^6 + \tilde{f}_{2,2}\rho^7 + \cdots) \\
& +\pi g_{33}^{\mathbb{R}}\rho^7 + g_{33}^{\mathbb{R}}(\tilde{f}_{3,1}\rho^6 + \tilde{f}_{3,2}\rho^9 + \cdots) \\
& +\cdots \\
& +\pi g_{NN}^{\mathbb{R}}\rho^{2N+1} + g_{NN}^{\mathbb{R}}(\tilde{f}_{N,1}\rho^{2N+2} + \tilde{f}_{N,2}\rho^{2N+3} + \cdots) \\
& +o(\rho^{2N+1}).
\end{aligned}$$

Стога је $\eta_3 = \pi g_{11}^{\mathbb{R}}$ и за дато $k \in \mathbb{N}$, избор $N = k$ показује да последњи пар тврђења става важи за све η_4 до η_{2k+1}, теорема је доказана.

Последица 4.3.1 *Нека су η_k Љапуновљеве величине за систем (4.13) у односу на антиседло у координатном почетку, нека су g_{kk} жижне величине за комплексификацију (4.17) од (4.13) и нека $g_{kk}^{\mathbb{R}}$ означава полиномијалну функцију дефинисану са (4.20). Тада је*

$$\langle g_{11}^{\mathbb{R}}, g_{22}^{\mathbb{R}}, g_{33}^{\mathbb{R}}, \ldots \rangle = \langle \eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots \rangle = \langle \eta_3, \eta_5, \eta_7, \ldots \rangle$$

у $\mathbb{R}[A, B]$. За свако $(A^*, B^*) \in E(A, B)$ одговарајуће једнакости важе за одговарајуће клице и њихове идеале у $\mathcal{G}_{(A^*,B^*)}$.

Друга последица теореме се наводи само за клице, пошто је то контекст у коме ће касније бити коришћена.

Последица 4.3.2 *Нека су η_k Љапуновљеве величине за систем (4.13) у односу на антиседло у координатном почетку, нека су g_{kk} ж иж не величине за комплексификацију (4.17) од (4.13) и нека $g_{kk}^{\mathbb{R}}$ означава полиномијалну функцију дефинисану са (4.20). Нека је $I = \langle \eta_{2k+1} : k \in \mathbb{N} \rangle = \langle \mathbf{g}_{kk} : k \in \mathbb{N} \rangle \subset \mathcal{G}_{(A^*,B^*)}$. Претпоставимо да су $\{\eta_{k_1}, \ldots, \eta_{k_m}\}$ и $\{\mathbf{g}_{j_1,j_1}, \ldots, \mathbf{g}_{j_n,j_n}\}$ минималне базе за I у односу на услове задржавања у односу на уређене скупове $\{\eta_3, \eta_5, \eta_7, \ldots\}$ и $\{\mathbf{g}_{11}, \mathbf{g}_{22}, \ldots\}$ респективно. Тада је $m = n$ и за $q = 1, 2, \ldots, m$, $k_q = 2j_q + 1$.*

Још једна последица Теореме 10, која је и сама по себи значајна, је да је фини фокус планарног полиномијалног система реда k ако и само ако првих $k - 1$ жижних величина нестаје. Прецизно тврђење дато је у следећем ставу.

Теорема 12 *Нека су η_k Љапуновљеве величине за систем (4.13) у односу на антиседло у координатном почетку, нека су g_{kk} жижне величине за комплексификацију (4.17) од (4.13) и нека $g_{kk}^{\mathbb{R}}$ означава полиномијалну функцију дефинисану са (4.20). Систем који одговара специјалном избору реалних параметара (A, B) има фини фокус k-тог реда у координатном почетку ако и само ако је $g_{11}^{\mathbb{R}}(A, B) = \cdots = g_{k-1,k-1}^{\mathbb{R}}(A, B) = 0$, али је $g_{kk}^{\mathbb{R}}(A, B) \neq 0$.*

Пре него што наставимо са развојем теорије која нам омогућава процену цикличности центра у фамилији (4.13), показаћемо како Теорема 10 и Теорема 11 заједно омогућавају процену цикличности финог фокуса k-тог реда у таквој фамилији. Граница је универзална у смислу да без обзира на природу нелинеарности, на пример максималног реда два или три, фини фокус k-тог реда има цикличност највише k.

Теорема 13 *Фини фокус реда k има цикличност највише $k-1$ за пертурбације унутар фамилије (4.13) и највише k за пертурбације унутар фамилије (4.11).*

Доказ. На основу Теореме 10, за сваки систем облика, функција разлике $\mathcal{P}$ може се написати у облику

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\rho) \quad = \quad & \pi g_{11}^{\mathbb{R}}\rho^3 + h_{41}g_{11}\rho^4 \\
& +(h_{51}g_{11}^{\mathbb{R}} + \pi g_{22}^{\mathbb{R}})\rho^5 + (h_{61}g_{11}^{\mathbb{R}} + h_{62}g_{22}^{\mathbb{R}})\rho^6 \\
& +\cdots \\
& +(h_{2k-1,1}g_{11}^{\mathbb{R}} + \cdots + \pi g_{k-1,k-1})\rho^{2k-1} + (h_{2k,1}g_{11}^{\mathbb{R}} + \cdots + h_{2k,k}g_{k-1,k-1}^{\mathbb{R}})\rho^{2k} \\
& +(h_{2k+1,1}g_{11}^{\mathbb{R}} + \cdots \pi g_{kk}^{\mathbb{R}})\rho^{2k+1} + \eta_{2k+2}\rho^{2k+2} + \eta_{2k+3}\rho^{2k+3} + \cdots
\end{aligned}$$

Претпоставимо да систем који одговара вредностима параметара (A^*, B^*) има фини фокус реда k у координатном почетку, тако да према Теореми 12 сви $g_{11}^{\mathbb{R}}$ до $g_{k-1,k-1}^{\mathbb{R}}$ ишчезавају у (A^*, B^*), али је $g_{kk}^{\mathbb{R}}(A^*, B^*) \neq 0$. Тада како је $g_{kk}^{\mathbb{R}}$ различито он нуле на околини (A^*, B^*), када факторишемо $\pi\rho^3$ и скупимо на $g_{jj}^{\mathbb{R}}$ (али због једноставности задржимо иста имена за полиномијалне тежинске функције), можемо написати

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(\rho) \quad = \quad & \pi\rho^3[g_{11}^{\mathbb{R}}(1 + h_{41}\rho + \cdots + h_{2k+1,1}\rho^{2k-2}) \\
& +g_{22}^{\mathbb{R}}(1 + h_{62}\rho + \cdots + h_{2k+1,2}\rho^{2k-4})\rho^2 \\
& +g_{33}^{\mathbb{R}}(1 + h_{83}\rho + \cdots + h_{2k+1,3}\rho^{2k-6})\rho^4 \\
& +\cdots \\
& +g_{k-1,k-1}^{\mathbb{R}}(1 + h_{2k,k-1}\rho + h_{2k+1,2k-1}\rho^2)\rho^{2k-4} \\
& +g_{kk}^{\mathbb{R}}\rho^{2k-2} + \eta_{2k+2}\rho^{2k-1} + \eta_{2k+3}\rho^{2k} + \cdots] \\
= \quad & \pi\rho^3[g_{11}^{\mathbb{R}}(1 + \psi_1(\rho)) + g_{22}^{\mathbb{R}}\rho^2(1 + \psi_2(\rho)) + \cdots + g_{kk}^{\mathbb{R}}\rho^{2k-2}(1 + \psi_k(\rho))].
\end{aligned}$$

што важи на околини од (A^*, B^*). Ако је пертурбација учињена унутар фамилије (4.13), онда према Теореми 7, $\mathcal{P}$ има највише изолованих нула на малом интервалу $0 < \rho < \varepsilon$. За завршетак доказа, обради се и случај пертурбације која се дешава унутар фамилије. Теорема је доказана.

Раније смо навели да се надамо да ћемо моћи да користимо жижне величине за третирање проблема цикличности. Жижне се појављују из комплексификације система (4.13), али бифуркације за стварање граничних цикала природно се дешавају у већој фамилији (4.11). Повезали смо жижне величине и њихове идеале са Љапуновљевим величинама у ограниченом контексту фамилије (4.13). Следећи резултат показује како је минимална база у односу на услов задржавања идеала генерисаног Љапуновљевим величинама за ограничену фамилију (4.13) повезан са минималном базом идеала генерисаног

Љапуовљевим величинама веће фамилије (4.11) (наравно, са истим скупом индекса S). Разликоваћемо два скупа Љапуновљевих величина кори71ењем нотације η_k за оне које зависе само од параметара (A, B) и $\eta_k(\lambda)$ за оне који зависе од параметара $(\lambda, (A, B))$, мада је наравно, $\eta_k(0, (A, B)) = \eta_k(A, B)$. Како функције $\eta_k(\lambda)$ нису полиноми по параметрима $(\lambda, (A, B))$, морамо радити у прстену клица да бисмо се позабавили доменом конвергенције. Приметимо такође да третирамо η_k само као аналитичке функције у првој хипотези теореме, мада су то заправо полиноми по (A, B).

Лема 4.3.1 *Фиксирајмо фамилије (4.12) и (4.14) са истим скупом индекса S.Нека су $\{\eta_k(\lambda)\}_{k=1}^{\infty}$ Љапуновљеве величине за фамилију (4.12) и нека су $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ Љапуновљеве величине за фамилију (4.14). Фиксирајмо (A^*, B^*) у $E(A, B)$ и претпоставимо да је минимална база у односу на услов задржавања идеала $\langle \eta_1, \eta_2, \ldots \rangle$ у $\mathcal{G}_{(A^*,B^*)}$ једнака $\{\eta_{k_1}, \ldots, \eta_{k_m}\}$, $k_1 < \cdots < k_m$. Тада је $\{\eta_1(\lambda), \eta_{k_1}, \ldots, \eta_{k_m}\}$ минимална база у односу на услов задржавања у односу на уређени скуп $\{\eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda), \eta_3(\lambda), \ldots\}$ идеала $\langle \eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda), \eta_3(\lambda), \ldots \rangle$ у $\mathcal{G}_{(0,(A^*,B^*))}$.*

Доказ. Функције $\eta_k(\lambda, (A, B))$ су аналитичке у околини $(0, (A^*, B^*))$, стога по Абеловој леми њихови развоји у степене редове ту апсолутно конвергирају, тако да можемо да преуредимо чланове у овим развојима. Стога, за свако $k \in \mathbb{N}$, у околини $(0, (A^*, B^*))$, $\eta_k(\lambda, (A, B))$ може бити написано у облику

$$\eta_k(\lambda, (A, B)) = \check{\eta}_k(\lambda, (A, B)) + \check{\eta}_k(A, B), \tag{4.22}$$

где је $\check{\eta}(0, (A, B)) \equiv 0$. Када је $\lambda = 0$, $\eta_k(\lambda, (A, B))$ се редукује на $\eta_k(A, B)$ тако да мора бити $\eta_k(0, (A, B)) = 0 + \check{\eta}_k(A, B) = \eta_k(A, B)$ и (4.22) постаје

$$\eta_k(\lambda, (A, B)) = \check{\eta}_k(\lambda, (A, B)) + \eta_k(A, B). \tag{4.23}$$

Како је

$$\eta_1(\lambda, (A, B)) = e^{2\pi\lambda} - 1 = 2\pi\lambda(1 + \frac{1}{2!}(2\pi\lambda) + \cdots),$$

постоји функција $u_k(\lambda, (A, B))$ која је реална аналитичка на околини од $(0, (A^*, B^*))$ у $E(\lambda, (A, B))$ тако да је

$$\check{\eta}_k(\lambda, (A, B)) = u_k(\lambda, (A, B))\eta_1(\lambda, (A, B)).$$

Стога (4.23) постаје, искључујући зависност од (A, B) из нотације,

$$\eta_k(\lambda) = u_k(\lambda)\eta_1(\lambda) + \eta_k. \tag{4.24}$$

Означимо скуп $\{\eta_{k_1}, \ldots, \eta_{k_m}\}$ са L. Како је L минимална база у односу на услов задржавања идеала $\langle \eta_k : k \in \mathbb{N} \rangle$ у $\mathcal{G}_{(A^*,B^*)}$, (4.24) повлачи да за све $k \in \mathbb{N}$, идентитет

$$\begin{gathered}\eta_k(\lambda, (A, B)) \\ = u_k(\lambda, (A, B))\eta_1(\lambda, (A, B)) + h_{k,1}(A, B)\eta_{k_1}(A, B) + \cdots + h_{k,m}(A, B)\eta_{k_m}(A, B)\end{gathered}$$

важи у околини од $(0,(A^*,B^*))$ у $E(\lambda,(A^*,B^*))$ за функције $h_{k,q}$ које су дефинисане и реалне аналитичке на тој околини, мада без зависности од λ. Иста једначина је стога тачна и на нивоу клица у $\mathcal{G}_{(0,(A^*,B^*))}$. Дакле,

$$M = \{\eta_1(\lambda), \eta_{k_1}, \ldots, \eta_{k_m}\}$$

је база идеала $\langle \eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda), \ldots \rangle \subset \mathcal{G}_{(0,(A^*,B^*))}$. Морамо показати да је минимална међу свим базама које задовољавају услов задржавања у односу на скуп $\{\eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda), \ldots\}$. Стога нека је

$$N = \{\eta_1(\lambda), \eta_{j_1}(\lambda), \ldots, \eta_{j_n}(\lambda)\}$$

јединствена минимална база у односу на услов задржавања (која мора садржати $\eta_1(\lambda)$, пош то је $\eta_1(\lambda)$ први на листи и није $\mathbf{0}$), са ознакама изабраним тако да је $j_1 < \ldots < j_n$ и претпоставимо, у супротности са оним што желимо да покажемо, да то није база M. Постоје четири начина на која се то може десити и ми ћемо их све размотрити.

Случај 1: Постоји $p \in \{1, 2, \ldots, \min\{m, n\}\}$ тако да за $q \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. $k_q = j_q$ и $\eta_{k_q} = \eta_{j_q}(\lambda)$, али је $\eta_{k_p} \neq \eta_{j_p}(\lambda)$ и $j_p < k_p$. У том случају важи да је $k_{p-1} = j_{p-1} < j_p < k_p$, те пошто је L минимална, $\eta_{j_p} = \mathbf{h}_1\eta_{k_1} + \ldots + \mathbf{h}_{p-1}\eta_{k_{p-1}}$ за $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{p-1} \in \mathcal{G}_{(A^*,B^*)}$. Примена одговарајуће једнакости за функције која је испуњена на околини од (A^*,B^*) на (4.24) добија се да

$$\begin{aligned}
\eta_{j_p}(\lambda) &= u_{j_p}(\lambda)\eta_1(\lambda) + \eta_{j_p} \\
&= u_{j_p}(\lambda)\eta_1(\lambda) + h_1\eta_{k_1} + \cdots h_{p-1}\eta_{k_{p-1}} \\
&= u_{j_p}(\lambda)\eta_1(\lambda) + h_1\eta_{j_1}(\lambda) + \cdots h_{p-1}\eta_{j_{p-1}}(\lambda)
\end{aligned}$$

важи на околини од $(0,(A,B))$ у $E(\lambda,(A,B))$ (мада је h_q независна од λ), тако да је одговарајућа једнакост клица у контрадикцији са чињеницом да је N минимална.

Случај 2:Постоји $p \in \{1, 2, \ldots, \min\{m, n\}\}$ тако да је за $q \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, $k_q = j_q$ и $\eta_{k_q} = \eta_{j_q}(\lambda)$, али је $\eta_{k_p} \neq \eta_{j_p}(\lambda)$ и $j_p > k_p$. У овом случају је $j_{p-1} = k_{p-1} < k_p < j_p$, те $\eta_{k_p} \notin N$, стога, пошто је N минимална,

$$\begin{aligned}
\eta_{k_p}(\lambda) &= \mathbf{h}_0\eta_1(\lambda) + \mathbf{h}_1\eta_{j_1}(\lambda) + \cdots \mathbf{h}_{p-1}\eta_{j_{p-1}}(\lambda) \\
&= \mathbf{h}_0\eta_1(\lambda) + \mathbf{h}_1\eta k_1 + \cdots \mathbf{h}_{p-1}\eta_{k_{p-1}}
\end{aligned}$$

за $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_{p-1} \in \mathcal{G}_{(0,(A^*,B^*))}$. Одговарајућа једнакост функција која важи на околини од $(0,(A^*,B^*))$ у $E(\lambda,(A,B))$, када се израчуна у $\lambda = 0$ имплицира да је $\eta_{k_p} = \tilde{h}_1\eta_{k_1} + \cdots + \tilde{h}_{p-1}\eta_{k_{p-1}}$ на околини од (A^*,B^*) у $E(A,B)$, где је за $q = 1, \ldots, p-1$, $\tilde{h}(A,B) = h(0,(A,B))$. Одговарајућа једнакост клица у $\mathcal{G}_{(A^*,B^*)}$ је у контрадикцији са чињеницом да је L минимална.

Случај 3:$n < m$ и за $q \in \{1, \ldots, n\} : k_q = j_q$ и $\eta_{k_q} = \eta_{j_q}(\lambda)$. Тада је $k_m > j_n$ и $\eta_{k_m}(\lambda) \notin N$, тако да је

$$\eta_{k_m}(\lambda) = \mathbf{h}_0\eta_1(\lambda) + \mathbf{h}_1\eta_{j_1}(\lambda) + \cdots + \mathbf{h}_n\eta_{j_n}(\lambda) = \mathbf{h}_0\eta_1(\lambda) + \mathbf{h}_1\eta_{k_1} + \cdots + \mathbf{h}_0\eta_{k_n}$$

за $\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_n \in \mathcal{G}_{(0,(A^*,B^*))}$. Како је $k_m > k_n$, одговарајућа једнакост функција која важи на околини од $(0, (A^*, B^*))$ у $E(\lambda, (A, B))$ када се израчуна у $\lambda = 0$, даје исту контрадикцију као и у претходном случају.

Случај 4: $n > m$ и за $q \in \{1, \ldots, m\} : k_q = j_q$ и $\eta_{k_q} = \eta_{j_q}(\lambda)$. Тада је $j_n > k_m$ и $\eta_{j_n} \notin L$ тако да је

$$\eta_{j_n} = \mathbf{h}_1\eta_{k_1} + \cdots + \mathbf{h}_m\eta_{k_m} = \mathbf{h}_1\eta_{j_1}(\lambda) + \cdots + \mathbf{h}_m\eta_{j_m}(\lambda)$$

у $\mathcal{G}_{(0,(A^*,B^*))}$ (мада h_q не зависи од λ), тако да примена одговарајуће једнакости функција која важи на околини од $(0, (A^*, B^*))$ на (4.24) повлачи да је

$$\eta_{j_n}(\lambda) = u_{j_n}(\lambda)\eta_1(\lambda) + \eta_{j_n} = u_{j_n}(\lambda)\eta_1(\lambda) + h_1\eta_{j_1}(\lambda) + \cdots + h_m\eta_{j_m}(\lambda)$$

на околини од $(0, (A, B))$ у $E(\lambda, (A, B))$. Стога, пошто је $j_n > j_m$, одговарајућа једнакост клица јесте у контрадикцији са чињеницом да је N минимална. $\square$

Теорема 14 *Претпоставимо да* $(A^*, B^*) \in E(A, B)$ *и да се миминална база* M *у односу на услов задржавања идеала* $J = \langle \mathbf{g}_{11}^{\mathbb{R}}, \mathbf{g}_{22}^{\mathbb{R}}, \ldots \rangle$ *у* $\mathcal{G}_{(A^*,B^*)}$ *за одговарајући систем облика (4.13) састоји од* m *полинома. Тада је цикличност у координатном почетку система облика (4.11) који одговара низу параметара* $(0, (A^*, B^*)) \in E(\lambda, (A, B))$ *највише* m.

Доказ. Као што је наведено у дискусији о (4.16), цикличност у координатном почетку елемента фамилије (4.11) у односу на простор параметара $E(\lambda, (A, B))$ једнака је вишеструкости функције

$$\mathcal{P}(\rho) = \eta_1(\lambda)\rho + \eta_2(\lambda)\rho^2 + \eta_2(\lambda)\rho^3 + \cdots .$$

На основу хипотезе и Последице 4.3.2, минимална база у односу на услов задржавања идеала $\langle \eta_3, \eta_5, \ldots \rangle$ у $\mathcal{G}_{(A^*,B^*)}$ има m елемената, стога, према Леми 4.3.1 у $\mathcal{G}_{(0,(A^*,B^*))}$, минимална база у односу на услов задршавања идеала $\langle \eta_1(\lambda), \eta_2(\lambda), \eta_(\lambda), \ldots \rangle$ има $m + 1$ елемената. Тада је према Теореми 9 вишеструкост функције $\mathcal{P}(\rho)$ највише m. $\square$

Следећа последица је резултат који повезује цикличност простог антиседла у координатном почетку система (4.11) (пертурбације унутар $E(\lambda, (A, B))$) са ж иж ним велич инама комплексификације придруженог система (4.13).

Последица 4.3.3 *Фиксирајмо фамилију реалних система облика (4.11) са скупом параметара $E(\lambda,(A,B))$ или $E(\lambda,a)$. За асоцирану фамилију (4.13) и скуп параметара $E(A,B)$ или $E(a)$ размотримо комплексификацију (4.17),*

$$\dot{x} = i\left(x - \sum_{(p,q)\in S} a_{pq}x^{p+1}y^q\right), \quad \dot{y} = -i\left(y - \sum_{(p,q)\in S} b_{qp}x^q y^{p+1}\right), \tag{4.25}$$

и асоциране жижне величине $\{g_{kk}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}[a,b]$. Претпоставимо да је $\{g_{k_1,k_1},\ldots,g_{k_m,k_m}\}$ колекција жижних величина за (4.25) која има следеће особине, где стављамо да је $K=\{k_1,\ldots,k_m\}$:

(а) $g_{kk}=0$ за $1\le k<k_1$;

(б) $g_{k_q,k_q}\neq 0$ за $k_q\in K$;

(ц) за $k_q\in K$, $q>1$ и $k\in\mathbb{N}$ који задовољавају $k_{q-1}<k<k_q$, $g_{kk}\in\mathcal{B}_{k_{q-1}}$, идеал у $\mathbb{C}[a,b]$ генерисан са првих k_{q-1} жижних величина;

(д) идеал $J=\langle g_{k_1,k_1},\ldots,g_{k_m,k_m}\rangle$ у $\mathbb{C}[a,b]$ је радикалан;

(е) $\mathbf{V}(J)=\mathbf{V}(\mathcal{B})$, где је $\mathcal{B}$ Баутинов идеал $\langle g_{kk}:k\in\mathbb{N}\rangle$ у $\mathbb{C}[a,b]$. Тада је цикличност сингуларитета у координатном почетку система у фамилији (4.11), у односу на простор параметара $E(\lambda,(A,B))$ највиш е m.

Доказ. Приметимо најпре да како је $g_{kk}(a,\bar{a})=g^{\mathbb{R}}_{kk}(A(a,\bar{b}),\bar{B}(a,\bar{b}))\in\mathbb{R}$ за све $k\in\mathbb{N}$, напомена која је начињена на крају доказа Леме 4.2.1 имплицира да за сваку колекцију $\{j_1,\ldots,j_n\}\subset\mathbb{N}$, свако $k\in\mathbb{N}$ и произвољне $f_1,\ldots,f_n\in\mathbb{C}[a,b]$,

$$g_{kk}=f_1g_{j_1,j_1}+\cdots+f_ng_{j_n,j_n} \text{ повлач и } g^{\mathbb{R}}_{kk}=(\operatorname{Re} f_1)g^{\mathbb{R}}_{j_1,j_1}+\cdots+(\operatorname{Re} f_n)g_{j_n,j_n}. \tag{4.26}$$

Како је $\mathbf{V}(J)=\mathbf{V}(\mathcal{B})$, за све $k\in\mathbb{N}$, k-та жижна величина g_{kk} ишчезава на $\mathbb{V}(J)$, тако да $g_{kk}\in\mathbf{I}(\mathbf{V}(J))$. Но, пошто је J радикалан идеал, на основу $Hilbertovog Nullstellensatz-a$ је $\mathbf{I}(\mathbf{V}(J))=J$, стога $g_{kk}\in J$. Дакле, $\mathcal{B}\subset J$, тако да је $J=\mathcal{B}$, и на основу додатних хипотеза за скуп $\{g_{k_1,k_1},\ldots,g_{k_m,k_m}\}$ то јесте минимална база у односу на услов задржавања Баутиновог идеала $\mathcal{B}$ у односу на скуп $\{g_{11},g_{22},\ldots\}$. Стога, за свако $k\in\mathbb{N}$, постоје $f_{k,1},\ldots,f_{k,m}\in\mathbb{C}[a,b]$ тако да је $g_{kk}=f_1g_{k_1,k_1}+\cdots+f_mg_{k_m,k_m}$. На основу (4.26) за свако (A^*,B^*) у $E(A,B)$, $L:=\{\mathbf{g}^{\mathbb{R}}_{k_1,k_1},\ldots,\mathbf{g}_{k_m,k_m}\}$ је база идеала $I=\langle\mathbf{g}^{\mathbb{R}}_{kk}:k\in\mathbb{N}\rangle$ у $\mathcal{G}_{(A^*,B^*)}$. Јасно је да хипотеза (a) имплицира да за $k<k_1$, $\mathbf{g}^{\mathbb{R}}_{kk}=\mathbf{0}$ у $\mathcal{G}_{(A^*,B^*)}$. На основу хипотезе (b) и (4.26) за све $k_q\in K$, $q>1$ и за све $k\in\mathbb{N}$ које задовољава $k_1<k<k_q$, $\mathbf{g}^{\mathbb{R}}_{kk}\in\langle\mathbf{g}_{11},\ldots,\mathbf{g}_{k_{q-1},k_{q-1}}\rangle$ у $\mathcal{G}_{(A^*,B^*)}$. Стога је очигледно да ако L није минимална база у односу на услов задржавања M идеала $I=\langle\mathbf{g}^{\mathbb{R}}_{11},\mathbf{g}^{\mathbb{R}}_{22},\ldots\rangle$ у $\mathcal{G}_{(A^*,B^*)}$ (због могућег колапса g_{k_q,k_q} на $\mathbf{g}^{\mathbb{R}}_{k_q,k_q}=\mathbf{0}$), он ипак садржи M, који стога може имати највише m елемената. Закључак последице сада следи из Теореме 12.

5

5.1 ЗАКЉУЧАК

На основу изложеног материјала теме докторске дисертације

" Проблем центра и фокуса код полиномских динамичких система и бифуркације шеснаестог Хилбертовог проблема са применама",

као закључак невешћемо постигнуте резултате и навести часописе у којима су ти резултати објављени.

1.) Добијени су потребни и довољни услови [65], за постојање центра за резонантно векторско поље трећег реда са четири параметра, тј. система

(5.1)
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x\left(1 - a_{10}x - a_{01}y - a_{-12}x^{-1}y^2 - a_{20}x^2 - a_{11}xy - a_{02}y^2 - a_{-13}x^{-1}y^3\right)\\ \frac{dy}{dt} &= -y\left(1 - b_{2,-1}x^2y^{-1} - b_{10}x - b_{01}y - b_{3,-1}x^3y^{-1} - b_{20}x^2 - b_{11}xy - b_{02}y^2\right),\end{aligned}$$

који је еквивалентан једначини

(5.2)
$$i\frac{dx}{d\tau} = x\left(1 - a_{10}x - a_{01}\overline{x} - a_{-12}x^{-1}\overline{x}^{\,2} - a_{20}x^2 - a_{11}x\overline{x} - a_{02}\overline{x}^{\,2} - a_{-13}x^{-1}\,\overline{x}^{\,-3}\right)$$

за случај

$$x = \overline{y},\ a_{ij} = \overline{b}_{ji} \tag{5.3}$$

2.) Систематизовани су приказани проблеми истраживања граничних цикала тј. шеснаестог Хилбертовог проблема. Посебно су наведени резултати везани за проблем условног центра [15] кубних система облика:

(5.4)
$$\frac{dx}{dt} = x\left(1 - a_{10}x - a_{01}y - a_{-12}x^{-1}y^2 - a_{20}x^2 - a_{11}xy - a_{02}y^2 - a_{-13}x^{-1}y^3\right)$$
$$\frac{dy}{dt} = -y\left(1 - b_{2,-1}x^2y^{-1} - b_{10}x - b_{01}y - b_{3,-1}x^3y^{-1} - b_{20}x^2 - b_{11}xy - b_{02}y^2\right),$$

3.) Што се тиче цикличности одговарајуће сингуларне тачке система:

(5.5)
$$i\frac{dx}{d\tau} = x\left(1 - a_{10}x - a_{01}\overline{x} - a_{-12}x^{-1}\overline{x}^{\,2} - a_{20}x^2 - a_{11}x\overline{x} - a_{02}\overline{x}^{\,2} - a_{-13}x^{-1}\,\overline{x}^{\,-3}\right)$$

уз уважавање одговарајућих просторних параметара, који су једнаки нули, тј. за случај када систем има особине:

$$a_{10} = a_{-12} = a_{20} = a_{-13} = 0,$$
$$a_{10} = a_{01} = a_{20} = a_{02} = 0,$$

је мањи или једнак 2, [16], док за случај система са особинама

$$a_{01} = a_{-12} = a_{20} = a_{-13} = 0,$$

$$a_{01} = a_{-12} = a_{20} = a_{02} = 0$$

једнаки су у оба случаја.

4.) Резултати ове докторске дисертације са аспекта примене динамичких система дати су у раду "*Construction of an autogenerator dinamical model applicable to nuclear processes*" [17], у коме је развијен нови метод за конструкцију модела нелинеарних динамичких система у режиму сопствених осцилација. Основа предложеног метода је теорија векторских поља карактеристичних за носиоце интеракција произвољног типа, али посебно интересантне за дуалне системе нуклеарне физике и њихове мултипле. Новина у предложеном моделу је његово заснивање на дивергенцији поља при константној фреквенцији изменских осцилација.
При овом су посебно посматране дивергентне затворене трајекторије карактеристичне за неке специјалне типове динамичких система.
Поред наведеног, предложени модел се може ефикасно искористити за карактеризацију процеса у нуклеарној техници и дозиметрији јонизујућег зрачења.

Литература

[1] AdamsW.W., P.Loustanau, AMS"Graduate Studies in Mathematics", **3**, An introduction to Grobner Basis, (1993).

[2] Amelkin, V. V., N.A.Lukashevich, A. P. Sadovskii, Nonlinear Oscillations in Second Order Systems, Minsk, BSU, (1982).

[3] Andrews G.E., The theory of partitions, Enciclopedia of mathematicsand its applications, **2**, London, (1976)

[4] Arnol′d V.I., Additional chapters of the theory of ordinary differential equations, Moscow Nauka (Russian)

[5] Arrowsmith, D.K., C.M.Place, DynamicalSystems, Chapman&Hall, London, 1992.

[6] BamonR., Inst.Hautes.Etudes.Sci.Publ.Math.No.64, 111 − 142, (1986).

[7] BeckerT., V.Wiespfenning, Crobnerbasis, Springer − Verlag, NewYork, 1993.

[8] Bibikov, Y.N., OrdinaryDifferentialEquations, Moscow, Nauka, 1991.

[9] Cheng Lansun, Wang Mingshu, Acta Math. Sinica **22**, 751 − 758, 1979.

[10] Cherkas L.A.Differentsial′nyeUravneniya, **14**, No.9, 1594 − 1600, (Russian), 1978.

[11] Cherkas L.A., V.G. Romanovskii, H. Zoladek, Proc. Symposium on planar nonlinear dynamical systems, University of Tehnology, Delft, 1995(to appear).

[12] CimaA., A. Gasull , V. Manosa , F. Manosas Algebraic properties of the Liapunov and periodic constants, 1995, preprint.

[13] Cox, D., J.L̃ittle, D˙O′Shea. Ideals, Varieties, andAlgorithms. NewYork, Springer − −Verlag, 1992.

[14] Danilyuk, V. I. , A. S. Shube, Distinguishing the cases of the center and focus for cubic systems with six parameters, Izv. Akad. Nauk Mold. SSR, Mat. **3**, 18 − 21, (1990).

[15] Dolichanin Ch. , V. G. Romanovski, M. Stephanovich : "The center conditions for a class of cubic sistems", Matematički Bilten XX, Makedonija, Skoplje, 1996).

[16] Dolichanin Ch. M. Stephanovich, V.G. Romanovski "Applaying of a method for calculaiting the focus quantities to investigate the centre – focus and cyclicity problems", 5th annual Seminar, Belarus, Minsk, february (1996).

[17] Dolichanin C. , V. Amelkin, M. Stefanovich, M.LJ. Vujisich : "Constuction of an autogenerator model applicable to nuclear processes." , Vol. XXVI, No. 1(april 2011, potvrda).

[18] DulacH. Bull. Sci. Math. **32**, N.2, P.30 – 252.(1908).

[19] EcalleJ. J. Martinet, R. Moussu, Ramis J. – P., C.R., Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 304, 375 – 377

[20] Ecalle J. J. Martinet, R. Moussu, Ramis J. – P., C.R., Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 304, 431 – 434

[21] Farr W.W. Li C Laboriau I S and Langford W F SIAM J. Math. Anal. 20, No. 1 13 – 30. (1989)

[22] Francoise J.P. R. Pous Une approche algorithmique du probleme du centre pour des perturbations homogenes, Preprint, Universitte de Paris VI, (1994).

[23] Francoise J.P. Y. Yomdin, J. Functional Analysis. **146** 185 – 205, (1997).

[24] Fronville A. A. P. Sadovski , H. Zoadek, The solution of the $1 : -2$ resonant center problem in the quadratic case1997, preprint.

[25] Gasull, A., A. Guillamon, V. Mañosa, Centre and isochronicity conditions for systems with homogeneous nonlinearities Preprint, 1995.

[26] Gasull, A., J. Llibre, V. Mañosa, F. Mañosas, The focus – centre problem for a type of degenerate system, Nonlinearity 13 669 – 729 (2000)

[27] Greuel, G. M. G. Pfister, H. Schönemann, Singular version 1.2 User Manual. In Reports On Computer Algebra,

[28] II′yashenko Yu S, Finiteness theorem for limit cycles Transl Math Monographs **94** 1991.

[29] Jarrah, A. S. R. Laubenbacher, V. Romanovski, The symmetry component of the center variety of polynomial differential systems Computer algebra and computer analysis, (2000).

[30] Jin X., D. Wang, Bull. London, Math., Soc. **94** 1 – 4, (1990.)

[31] Kukles I. S. Dokl. Akad. Nauk SSSR **42** 208 – 211, 1944.

[32] Landis E. M. I. G. Petrovskii Mat. Sb. N. S. **43** (85) 149 – 168 (Russian), 1957 Math. Soc. Transl. **14** (2) 181 – 200, (Amer.)960.

[33] Liu Yi – rong, Chinese science bulletin 35, No. 15, 1241 – 1245, 1990.

[34] Lloyd N. G. New Directions in Dynamical Systems (Бедфорд Т Сщифт J, едс$) Л.М.С. Лецтуре Нотес 127, *Cambridge*: *Cambridge University Press pp.* 192 – 234, 1988.

[35] Lloyd N. G. J. Pearson, Simbolic Computation **9** 215 – 224, (1990).

[36] Lloyd N. G. J. M. Pearson, Computational and Appl. Math., **40**, No.2, 323 – 336, 1992.

[37] Lloyd N. G. J. M. Pearson, Algorithmic derivation of centre conditions, Preprint, University of Wales, (1995).

[38] Lloyd N. G., J. M. Pearson, C. J. Cristopher, Algorithmic derivationof

[39] Lloyd N.G. JM. Pearson, V. G. Romanovski, Computers, Mathematics and Applications, (1996).

[40] Lyapunov A. M., Collected Works, **2**, Moscow – Leningrad (Rusian), (1956).

[41] Malkin K. E. Center conditions for a class of differential equations, Izv. Mat. vuzov., (in Russian), **1**, 104 – 114Q(1996).

[42] Pearson J. M. Hilbert′s sixteenth problem : an approach using computer algebra Phd thesis, The University College of Wales Aberystwyth , (1992).

[43] Poincare H. Memoire sur les courbes definies par une equation differentielle (Qeuvres de Henri Poincare, **1** (*Paris* : *Gauthiers* – *Villars*).

[44] Romanovskii V. G. Limit cycles number of a second order polynomial system RhD thesis Leningrad State University Leningrad, (1986).

[45] Romanovskii V. G. Differential′nye Uravneniya, **24** No.11, 1904 – 1911 (Russian), (1988), Differential equations **24**, No.11, 1271 – 1277, (1988).

[46] Romanovskii V. G., Differential′nye Uravneniya, **27**, No.2, 207 – 219 (Russian), (1991), Differential equations **27**, No. 2, 141 – 150, (1991).

[47] Romanovskii V. G., Differential′nye Uravneniya, **28**, No.4, 618 – 627 (Russian), (1992), Differential Equations **28**, No. 4, 501 – 509, (1992).

[48] Romanovskii V. G., Proceedings of Second Annual Seminar "Nonlinear Phenomena in Complex Systems", Polatsk, Bealrus, 32 – 39, (1993).

[49] Romanovskii V. G. On the calculation of Lyapunov focus quantities in the case of two imaginary roots, Differentsial′nye Uravneniya (in Russian), **29** 5, 910 – 912 (1993) : Differential Equations, **29**, 5, 782 – 784 (English translation)1993).

[50] Romanovski, V. G., On center conditions for some cubic systems depend on four complex parameters Differential′nye Uravneniya, (in Russian, toappear), **31** (1995)

[51] Romanovskii V. G. Differential′nye Uravneniya, **32** No.4, (Russian, to appear), (1996).

[52] Roussarie R. Bifurcations and periodical orbits of vector fields (Montreal, PQ, 1992) NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 408, Kluwer. Acad. Publ., Dordrecht 347 – 382, (1993).

[53] Rudenok A. E. Differential′nye Uravneniya, **23**, No. 5 825 – 834 (Russian) (1987).

[54] Sadovski A. P. The centre and focus problem for analytic differential systems DSc Thesis Institute of Mathematics Belarusian Academy of Sciences, (1994).

[55] Shi Song – ling, Sci. Sinica Ser., A **23** 153 – 158, (1980).

[56] Sibirsky, K. S., Introduction to the algebraic theory of invariants of differential equations, Manchester University Press, NewYork, (1988).

[57] Vololitin, E. P., V. V. Ivanov, Isochronicity and commutability of polynomial vector fields, Siberian Mathematical Journal. 40, No.1. 30 – 48 (1999)

[58] Yakovenko S. A short proof of Bautin theorem, Preprint of the Weizmann Institute of Sciences, Rehovot, (1993).

[59] Ye Yangian, Theory of limit cycles Transl Math Monographs, AMS, 66, (1986).

[60] Zoladek H. J., Quadratic sistem with center and their pertubations, J. Differential equations, **109**, N02, 223 – 273 (1994).

[61] Zoladek H., Nonlinearity, **7**, 273 – 279, (1994).

[62] Zoladek H., Nonlinearity, (1995).

[63] Zoladek H., J. Differential equations, **137**, N.1, 94 – 118. (1997)

[64] Баутин Н.Н, Мат. сб. 30, 181-196 (1952).

[65] Долићанин Ћ., В.Г. Романовски, М. Стефановић: ”Условия центра и цикличност некоторн кубич еских векторнн поле”, Диф. уравнения, Москва, **1** (1998).

[66] СадовкиА.П., Проблема центра и фокуса дляаналитицеских дифференциалн