Универзитет у Нишу

Природно-математички факултет

Департман за математику

Ана В. Милетић Илић

Временски низови са ненегативним целобројним вредностима генерисани зависним бројачким низовима

Докторска дисертација

Ментор

Проф. др Мирослав М. Ристић

Ниш, 2014

University of Niš

Faculty of Sciences and Mathematics

Department of mathematics

Ana V. Miletić Ilić

Time series with non-negative integer values based on dependent counting series

PhD thesis

Supervisor

Prof. dr Miroslav M. Ristić

Niš, 2014

Ментор:

Проф. др Мирослав М. Ристић,

редовни професор Природно-математичког факултета у Нишу

Чланови комисије:

1. **Проф. др Биљана Ч. Поповић**,
   редовни професор Природно-математичког факултета у Нишу
2. **Проф. др Миомир С. Станковић**,
   редовни професор Факултета заштите на раду у Нишу
3. **др Александар С. Настић**,
   доцент Природно-математичког факултета у Нишу

Садржај

Предговор

Предмет изучавања ове дисертације су ауторегресивни временски низови са ненегативним целобројним вредностима генерисани зависним бројачким низовима. Дефинисани су нови тининг оператори и уведени нови модели који у основи имају зависне Бернулијеве бројачке низове.

Најчешће коришћени ненегативни целобројни ауторегресивни модели до сада се базирају на независним Бернулијевим и независним геометријским бројачким низовима. Al-Osh и Alzaid (1987) и McKenzie (1985) први су дефинисали моделе базиране на независним Бернулијевим бројачким низовима користећи биномни тининг оператор. Модели базирани на биномном тининг оператору су углавном погодни за описивање података који се односе на пребројавање елемената посматране популације, при чему у сваком тренутку са одређеном вероватноћом постојећи елементи могу да опстану или ишчезну из ње. Ristić, Bakouch и Nastić (2009) су конструисали ненегативни целобројни ауторегресивни модел помоћу негативног биномног тининг оператора који у основи има геометријски бројачки низ независних случајних променљивих. Модели базирани на геометријском бројачком низу су погодни за примену у ситуацијама у којима посматрани елементи нису пасивни као у претходном случају, већ могу да генеришу више нових елемената. Претпоставка о независности чланова бројачког низа има важну улогу у одређивању особина ових модела и у примени на реалним подацима. Наиме, ови модели су погодни за описивање догађаја који се одвијају потпуно независно. Међутим, у пракси много чешће наилазимо на појаве у којима међу посматраним догађајима постоји значајна повезаност у смислу да реализација једног догађаја утиче на то да ли ће се други догађај реализовати или се неће реализовати у одређеном тренутку. Такве примере имамо у економији, метеорологији, криминологији као и у многим другим научним дисциплинама. Из тих разлога јавља се потреба за конструкцијом нових модела који би у основи имали зависне бројачке низове.

Под ауторегресивним временским низом са ненегативним целобројним вредностима и зависним бројачким низовима конструисаног од стране Brännäs и Hellström (2001) подразумевамо низ случајних променљивих $\{X_t\}_{t\in\mathbb{N}}$ дефинисан са

$$X_t = \alpha \circ X_{t-1} + \varepsilon_t,\ t \geq 1,$$

где је $\alpha \in (0,1)$, $\{\varepsilon_t\}$ је низ независних једнако расподељених ненегативних целобројних случајних променљивих са очекивањем μ_ε и коначном дисперзијом σ_ε^2, где су случајне променљиве ε_t и X_{t-k} независне случајне променљиве за свако $k > 0$. Тининг оператор $\alpha\circ$ је дефинисан са

$$\alpha \circ X = \sum_{i=1}^{X} Y_i,$$

где $\{Y_i\}$ представља низ зависних случајних променљивих таквих да је

$$E(Y_iY_j) = \theta_s \neq E(Y_i)E(Y_j) = \alpha^2,\ i \neq j.$$

Бројачки низ $\{Y_i\}$ који су посматрали Brännäs и Hellström дефинисали су Lunn и Davies (1998) на следећи начин.

$$Y_i = (1 - V_i)W_i + V_iZ, \tag{1}$$

где је $\{W_i\}$ низ независних идентички расподељених случајних променљивих са Бернулијевом расподелом $Ber(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, $\{V_i\}$ је низ независних идентички расподељених случајних променљивих са Бернулијевом расподелом $Ber(\theta)$, $\theta \in [0,1]$, а Z је случајна променљива са Бернулијевом расподелом $Ber(\alpha)$. Случајне променљиве W_i, V_j и Z су независне за свако $i \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{N}$.

Дисертација се састоји из три главе у којима су приказани оригинални објављени и још увек необјављени резултати. У првом делу су дати основни појмови који се користе у дисертацији и укратко су представљени неки постојећи целобројни ненегативни временски низови генерисани независним бројачким низовима.

Други део садржи три поглавља у којима су конструисана три нова различита модела генерисана зависним бројачким низовима. Први модел је заснован на бројачким низовима дефинисаним једначином (1). Овако дефинисан бројачки низ је низ зависних случајних промењљивих са Бернулијевом расподелом $Ber(\alpha)$, при чему важи да је $Corr(Y_i, Y_j) = \theta^2 \neq 0$ за $\theta \neq 0$ и $i \neq j$. Уведен је генерализовани тининг оператор I врсте базиран на оваквом бројачком низу и уз помоћ овог оператора конструисан је модел са геометријском маргиналном расподелом. Детаљно су представљене особине новог оператора и изведена су основна својства модела. На крају је дата примена модела на реалним подацима при чему је овај модел упоређен са неким релевантним моделима са независним бројачким низовима. Резултати овог поглавља објављени су у раду Ristić, Nastić и Miletić Ilić (2013). У другом поглављу уведен је нови бројачки низ зависних случајних промењљивих и на основу њега дефинисан генерализовани тининг оператор II врсте. Конструисан је нови модел помоћу овог оператора, при чему су одређене основне особине модела, аутокорелациона структура и условне статистичке особине. Непознати параметри су оцењени разним методама оцењивања и разматрана су асимптотска својства добијених оцена. Овај модел је детаљно представљен у раду Miletić Ilić (2014). У трећем поглављу бројачки низ зависних случајних промењљивих дефинисан је на једноставнији начин него у претходна два случаја. Дефинисан је генерализовани тининг оператор III врсте и уведен модел базиран на овом оператору. Као резултат једноставности бројачког низа добијен је модел са низом нових корисних особина. Поред стандардних метода оцењивања непознатих параметара овде је коришћен и метод базиран на условним вероватноћама. Представљена је примена модела у пракси и дато је поређење овог модела како са моделима са независним бројачким низовима, тако и са претходно дефинисаним моделима са зависним бројачким низовима. На крају ове главе дат је кратак преглед сличности и разлика међу генерализованим операторима I, II и III врсте.

У трећем делу дисертације уводи се мешовити модел комбинованом применом биномног и генерализованог биномног тининг оператора I врсте. Овакав модел је погодан за описивање појава промењљивог карактера у смислу да се посматрани догађаји могу одвијати независно у одређеном тренутку, док у неком другом тренутку може постојати значајна међусобна зависност. Као и раније и овде су одређене основне особине модела, оцењени су непознати параметри и разматрана је могућа примена модела на подацима из стварног живота.

Највећу захвалност дугујем свом ментору Проф. др Мирославу М. Ристићу, редовном професору Природно-математичког факултета у Нишу на предложеној теми дисертације, на изузетној стручној помоћи и ангажовању у свим фазама мојих докторских студија, као и на посвећеном времену и усмеравању у изради ове дисертације.

Захваљујем се др Александру С. Настићу, доценту Природно-математичког факултета у Нишу на конструктивним дискусијама и саветима који су ми помогли у раду.

Захваљујем се Проф. др Биљани Ч. Поповић, редовном професору Природно-математичког факултета у Нишу и Проф. др Миомиру С. Станковићу, редовном професору Факултета заштите на раду у Нишу на корисним сугестијама које су значајно побољшале квалитет ове дисертације.

Захваљујем се својој најбољој другарици др Бојани Р. Петковић, научном сараднику на Технолошком Универзитету у Илменауу на моралној подршци, без чије иницијативе не бих све ово ни почела.

На крају се из небројено много разлога захваљујем својој породици.

Глава 1

INAR модели

У овој глави изложени су основни појмови и резултати који ће се користити у дисертацији. У првом поглављу дате су дефиниције које описују временске низове и случајне процесе. Наведене су особине и основни елементи који се користе у анализи временских низова. У складу са одређеним особинама уведена је и најосновнија класификација временских низова. Више детаља о томе може се наћи у Brockwell и Davis (1987, 2002), Box и Jenkins (1976), Tsay (2010), Shumway и Stoffer (2006).

Од посебног интереса за ову дисертацију је класа ненегативних целобројних ауторегресивних временских низова (INAR)[1] у чијем формирању се користи такозвани тининг оператор. Као најзначајнији и најчешће коришћени оператор издвојен је биномни тининг оператор који су увели Steutel и van Harn (1979). Овај оператор је заснован на Бернулијевом бројачком низу независних идентички расподељених случајних промењивих. Модели који се изграђују помоћу овог оператора погодни су за представљање различитих временских низова који се јављају у природи и друштву. У другом поглављу су представљене особине овог оператора и дат је преглед неких INAR временских низова генерисаних биномним тинингом.

Модификацијама биномног тининг оператора добијени су нови различити тининг оператори. Неки од њих су такође базирани на Бернулијевом бројачком низу, док је у неким другим основа низ

[1] Integer-valued autoregressive

геометријски расподељених случајних променљивих. Неки од временских низова у којима учествују овакви оператори биће кратко представљени у трећем поглављу.

1.1 Уводни појмови

Временски низ представља уређени низ опсервација регистрованих у времену у једнаким временским интервалима. Предвиђање будућих вредности на основу анализе опсервираних података подразумева коришћење одговарајућег математичког модела. Наиме, погодно би било да се вредност временског низа у тренутку t посматра као реализација случајне променљиве X_t. У том контексту, временски низ се повезује са фамилијом случајних променљивих. Посебно важну улогу у анализи временских низова имају они чије се особине не мењају са временом. Тако долазимо до појма стационарности. Биће поменуте три групе линеарних стационарних временских низова: ауторегресивни временски низови (AR)[2], временски низови покретних средина (MA)[3] и ауторегресивни временски низови покретних средина (ARMA)[4].

Дефиниција 1.1.1 *(Случајни процес) Случајни процес је фамилија случајних променљивих $\{X_t, t \in T\}$ дефинисаних на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где је T индексни скуп.*

Ако је скуп T непребројив (рецимо T је неки интервал из скупа R), онда се каже да је процес са непрекидним временом, а уколико је T подскуп скупа целих бројева онда је дати процес са дискретним временом. Надаље радимо са процесима са дискретним временом.

Дефиниција 1.1.2 *(Реализације случајног процеса) Функције $\{X(t) \equiv X_t, t \in T\}$ за фиксирано $\omega \in \Omega$, зову се реализације случајног процеса $\{X_t, t \in T\}$.*

Дефиниција 1.1.3 *(Временски низ) Временски низ је случајни процес $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ дефинисан на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

[2] Autoregressive
[3] Moving average
[4] Autoregressive moving average

Примедба 1.1.1 У терминима теорије вероватноће, временски низ обично представља случајни процес са дискретним временом. Међутим, под временским низом се такође подразумева низ опсервираних вредности случајног процеса, тј. реализација случајног процеса. У литератури се договорно користи исти појам, тј. појам временског низа, и за означавање самог процеса, и за означавање његове реализације. Такву праксу наставићемо и овде.

У пракси обично можемо да дођемо само до једне реализације посматраног временског низа у одређеном временском интервалу. Временски низови који имају својство да се може вршити оцењивање њихових параметара само на основу једне реализације зову се **ергодични** временски низови. Надаље ћемо посматрати само ергодичне временске низове.

Дефиниција 1.1.4 *(Средња вредност) Нека је $\{X_t\}$ временски низ такав да је $E(X_t^2) < \infty$. Средња вредност временског низа $\{X_t\}$ је*

$$\mu_X(t) = E(X_t),\ t \in \mathbb{Z}.$$

Дефиниција 1.1.5 *(Коваријансна функција) Нека је $\{X_t\}$ временски низ такав да је $E(X_t^2) < \infty$. Аутоковаријансна функција временског низа $\{X_t\}$ је*

$$\gamma_X(r,s) = Cov(X_r, X_s) = E[(X_r - \mu_X(r))(X_s - \mu_X(s))],\ \text{за свако } r,s \in \mathbb{Z}.$$

Дефиниција 1.1.6 *(Стационарност) Временски низ $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ је слабо стационаран ако су задовољени услови:*

(i) $E(X_t) = \mu$, *за свако* $t \in \mathbb{Z}$,

(ii) $E(X_t^2) < \infty$, *за свако* $t \in \mathbb{Z}$,

(iii) $Cov(X_{t+h}, X_t) = \gamma(h)$ *зависи само од* h, $h \in \mathbb{Z}$.

Из дефиниције се види да су средња вредност и коваријансна функција стационарних временских низова инваријантни у односу на време. За стационарни временски низ каже се још и да је слабо стационаран или стационаран у широком смислу.

Дефиниција 1.1.7 *(Строга стационарност) Временски низ* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *је строго стационаран ако случајни вектори* $(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k})'$ *и* $(X_{t_1+h}, X_{t_2+h}, \ldots, X_{t_k+h})'$ *имају исте заједничке расподеле за свако* $k \geq 1$ *и за свако* $t_1, t_2, \ldots, t_k, h \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1.1.1 *Ако је* $E(X_t^2) < \infty$, *тада је строго стационаран временски низ* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *и стационаран.*

Обрнуто тврђење у општем случају не важи.

Дефиниција 1.1.8 *(Гаусов временски низ) Временски низ* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *је Гаусов ако и само ако је свака функција расподеле било ког коначног подскупа временског низа* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *вишедимензионална нормална.*

Теорема 1.1.2 *Ако је* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *стационаран Гаусов временски низ, тада је он и строго стационаран.*

Дефиниција 1.1.9 *(Бели шум) Временски низ* $\{Z_t\}$ *зове се бели шум ако се састоји од некорелисаних идентички расподељених случајних промењљивих, за које је* $E(Z_t) = 0$ *и* $Var(Z_t) = \sigma^2$.

Дефиниција 1.1.10 *(Аутоковаријансна функција стационарног временског низа) Аутоковаријансна функција стационарног временског низа* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *дата је са*

$$\gamma_X(h) = E[(X_{t+h} - \mu)(X_t - \mu)],\ h \in \mathbb{Z}.$$

Аутоковаријансна функција за $h = 0$ је дисперзија временског низа, јер је $\gamma(0) = E(X_t - \mu)^2$.

Дефиниција 1.1.11 *(Аутокорелациона функција стационарног временског низа) Аутокорелациона функција стационарног временског низа* $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ *дата је са*

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)},\ h \in \mathbb{Z}.$$

За аутокорелациону функцију важи да је $|\rho_X(h)| \leq 1$ за свако $h \in \mathbb{Z}$.

Дефиниција 1.1.12 *(Линеаран временски низ) За временски низ* $\{X_t\}$ *кажемо да је линеаран ако се може представити у облику*

$$X_t = \mu + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j},$$

при чему је $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$ *и* $\{Z_t\}$ *је бели шум такав да је* $E(Z_t) = 0$ *и* $Var(Z_t) = \sigma^2$.

Коришћењем белог шума може бити генерисана веома широка класа стационарних временских низова. Тако долазимо до појма временских низова ауторегресивних покретних средина (ARMA).

Дефиниција 1.1.13 *($ARMA(p,q)$ временски низ) За временски низ* $\{X_t\}$ *кажемо да је* $ARMA(p,q)$ *временски низ ако је стационаран и ако је за свако* $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t - \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} = \sum_{j=1}^{q} \theta_j Z_{t-j} + Z_t,$$

где је $\{Z_t\}$ *бели шум који се састоји од независних случајних промењивих, такав да је* $E(Z_t) = 0$ *и* $Var(Z_t) = \sigma^2$.

Дефиниција 1.1.14 *(Ауторегресивни $AR(p)$ временски низ) За временски низ* $\{X_t\}$ *кажемо да је ауторегресивни временски низ реда p ако је стационаран и ако је за свако* $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + Z_t,$$

где је $\{Z_t\}$ *бели шум који се састоји од независних случајних промењивих, такав да је* $E(Z_t) = 0$ *и* $Var(Z_t) = \sigma^2$.

Дефиниција 1.1.15 *(Временски низ покретних средина $MA(q)$) За временски низ* $\{X_t\}$ *кажемо да је временски низ покретних средина реда q ако је стационаран и ако је за свако* $t \in \mathbb{Z}$

$$X_t = Z_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j Z_{t-j},$$

где је $\{Z_t\}$ *бели шум који се састоји од независних случајних промењивих, такав да је* $E(Z_t) = 0$ *и* $Var(Z_t) = \sigma^2$.

Пример 1.1.1 (AR(1) временски низ) Посматрајмо ауторегресивни временски низ $\{X_t\}$ реда 1 задат једначином

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t,\ t \in \mathbb{Z},$$

где је $\{Z_t\}$ бели шум такав да је $E(Z_t) = 0$, $Var(Z_t) = \sigma^2$ и важи услов $|\phi| < 1$.
Може се показати да је аутоковаријансна функција $\gamma(h) = \frac{\sigma^2\phi^h}{1-\phi^2}$, а аутокорелациона функција је $\rho(h) = \phi^{|h|},\ h \in \mathbb{Z}$. Такође се може приметити да аутокорелациона функција експоненцијално опада када $h \to \infty$.

Посебну класу ауторегресивних временских низова чине INAR временски низови о којима ће бити речи у наредном поглављу.

Сада ћемо представити неке важне теореме које се користе у асимптотској карактеризацији оцена непознатих параметара INAR временских низова.

Нека је $\{\boldsymbol{X}_t\}$ d-димензионални временски низ и $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$ вектор параметара. Нека $\mathcal{F}_{t-1}^X$ означава σ-алгебру генерисану са $\{\boldsymbol{X}_s, s \leq t-1\}$, а $\mathcal{F}_{t-1}^X(m)$, σ-алгебру генерисану са $\{\boldsymbol{X}_s, t-m \leq s \leq t-1\}$. Нека је даље $\tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}(\boldsymbol{\beta}) = E\left(\boldsymbol{X}_t | \mathcal{F}_{t-1}^X(m)\right)$ и нека је функција $Q_N(\boldsymbol{\beta})$ дефинисана са

$$Q_N(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{t=m+1}^{N} \left(\boldsymbol{X}_t - \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}(\boldsymbol{\beta})\right)^2$$

Тада важе следеће теореме.

Теорема 1.1.3 (Tjøstheim, 1986, T.3.1) *Претпоставимо да је $\{\boldsymbol{X}_t\}$ строго стационаран ергодичан временски низ са коначним другим моментом, такав да је функција $\tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}(\boldsymbol{\beta})$ скоро сигурно три пута непрекидно диференцијабилна на неком отвореном скупу који садржи стварну вредност параметра $\boldsymbol{\beta_0}$, и нека су задовољени услови:*

$C1.$ $E\left|\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta_i}\right|^2 < \infty$, *за* $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$,

$E\left|\frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta_i \partial \beta_j}\right|^2 < \infty$, *за* $i, j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, *C*2. *Важи линеарна независност у средње-квадратном смислу вектора* $\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\beta_i}$, *где је* $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, *тј. за произвољне реалне бројеве* $a_1, \dots, a_r$ *услов* $E\left|\sum_{i=1}^{r} a_i \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta_i}\right|^2 = 0$, *имплицира да је* $a_1 = a_2 = \cdots = a_r = 0$.

*C*3. *Постоје функције* $G_{n-1}^{ijk}(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ *и* $H_n^{ijk}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ *такве да је:*
$\left|\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta_i} \frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta_j \partial \beta_k}\right| \leq G_{n-1}^{ijk}, \quad E\left(G_{n-1}^{ijk}\right) < \infty,$
$\left|\left(\boldsymbol{X}_t - \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}\right) \frac{\partial^3 \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \beta_i \partial \beta_j \partial \beta_k}\right| \leq H_n^{ijk}, \quad E\left(H_n^{ijk}\right) < \infty,$
за $i, j, k \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Тада постоји низ оцена $\{\hat{\boldsymbol{\beta}}_N\}$ *који минимизира функцију* $Q_N(\boldsymbol{\beta})$, *такав да* $\hat{\boldsymbol{\beta}}_N \overset{c.u.}{\to} \boldsymbol{\beta}_0$, $N \to \infty$.

Да би важила наредна теорема, потребни су следећи услови:

a) Постоји m, такво да је за $t \geq m + 1$,
$$E\left(\boldsymbol{X}_t | \mathcal{F}_{t-1}^X\right) \overset{c.u.}{=} E\left(\boldsymbol{X}_t | \mathcal{F}_{t-1}^X(m)\right),$$

b) Постоји m, такво да је за $t \geq m + 1$,
$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{t|t-1} &\overset{деф.}{=} E\left\{(\boldsymbol{X}_t - \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1})(\boldsymbol{X}_t - \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1})^T | \mathcal{F}_{t-1}^X\right\} \\ &\overset{c.u.}{=} E\left\{(\boldsymbol{X}_t - \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1})(\boldsymbol{X}_t - \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1})^T | \mathcal{F}_{t-1}^X(m)\right\}. \end{aligned}$$

Нека је
$$\boldsymbol{U} = E\left\{\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}^T}{\partial \boldsymbol{\beta}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right\},$$
где је $\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}/\partial \boldsymbol{\beta}$ матрица реда $d \times r$, у којој су вектори колона једнаки $\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}/\partial \beta_i$, $i = 1, \dots, r$.

Теорема 1.1.4 (Tjøstheim, 1986, T.3.2) *Нека су задовољени услови* (*a*) *и* (*b*) *и услови* C1-C3 *претходне теореме и нека је уз то задовољен и услов*
$$\boldsymbol{R} \equiv E\left\{\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}^T}{\partial \boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{f}_{t|t-1} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{X}}_{t|t-1}}{\partial \boldsymbol{\beta}}\right\} < \infty.$$

Тада за низ оцена из Теореме 1.1.3 важи да

$$N^{1/2}\left(\hat{\boldsymbol{\beta}}_N - \boldsymbol{\beta}_0\right) \xrightarrow{p} \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}\right),\ N \to \infty,$$

Теорема 1.1.5 (Brockwell, Davis, 1987, T. 6.3.3) *Ако су* $\{\boldsymbol{X_n}\}$ *и* $\{\boldsymbol{Y_n}\}$ *два низа случајних вектора, такви да је* $\boldsymbol{X_n} - \boldsymbol{Y_n} = o_p(1)$ *и* $\boldsymbol{X_n} \to \boldsymbol{X}$, *када* $n \to \infty$, *тада и* $\boldsymbol{Y_n} \to \boldsymbol{X}$, *када* $n \to \infty$.

Теорема 1.1.6 (Brockwell, Davis, 1987, T. 6.4.1) *Нека је* X_n *са* $\mathcal{AN}(\mu, \sigma_n^2)$ *расподелом, где* $\sigma_n \to 0$, *за* $n \to \infty$. *Ако је* g *диференцијабилна функција у* μ, *тада* $g(X_n)$ *има* $\mathcal{AN}(g(\mu), g'(\mu)^2\sigma_n^2)$ *расподелу.*

Теорема 1.1.7 (Brockwell, Davis, 1987, T. 6.4.3) *Претпоставимо да* $\boldsymbol{X}_n$ *има* $\mathcal{AN}\left(\boldsymbol{\mu}, c_N^2\Sigma\right)$ *расподелу, где је* Σ *симетрична ненегативно дефинитна матрица и* $c_N \to 0$, *када* $N \to \infty$. *Ако је* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}) = (g_1(\boldsymbol{X}), \ldots, g_m(\boldsymbol{X}))$ *пресликавање из* $\mathbb{R}^k$ *у* $\mathbb{R}^m$, *такво да је свака* $g_i(\cdot)$ *непрекидно диференцијабилна функција у околини* $\boldsymbol{\mu}$ *и ако матрица* $D\Sigma D^T$ *има све дијагоналне елементе различите од нуле, где је* D *матрица* $[(\partial g_i/\partial x_j)(\boldsymbol{\mu})]$ *реда* $m \times k$, *тада* $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{X}_N)$ *има* $\mathcal{AN}\left(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\mu}), c_N^2 D\Sigma D^T\right)$ *расподелу.*

1.2 Биномни тининг оператор

Као што је већ поменуто, у последњих неколико декада двадесетог века, покушавајући да што боље моделирају природне појаве са целобројним вредностима, научници су конструисали низ различитих модела. Битан искорак направили су Jacobs и Lewis (1978a-c), када су у низу својих радова дефинисали и описали дискретне ауторегресивне моделе покретних средина (DARMA)[5] који су се структурално базирали на претходно описаним ARMA моделима. McKenzie (1985) и Al-Osh и Alzaid (1987), независним приступом уводе ненегативне целобројне ауторегресивне временске низове првог реда, користећи биномни тининг оператор који су дефинисали Steutel и Van Harn (1979). На тај начин, започета је нова етапа у моделирању ненегативних целобројних ауторегресивних временских низова.

У првом делу овог одељка, описан је ненегативни целобројни ауторегресивни модел првог реда (INAR(1)) са уопштеном маргиналном расподелом, генерисан биномним тининг оператором. Наведене су најважније особине овог оператора као и битне карактеристике ових модела. У другом делу одељка укратко су представљени значајни INAR модели генерисани биномним тинингом, са конкретним маргиналним расподелама. Укратко је представљен и INAR модел вишег реда.

1.2.1 Дефиниција и особине биномног тининг оператора

Упознајмо се најпре са биномним тининг оператором " $\circ$ " који је неопходан за дефинисање INAR модела. Овај оператор су дефинисали Steutel и van Harn (1979).

Нека је X ненегативна целобројна случајна променљива. Тада

[5] Discrete autoregressive moving average

је за свако $\alpha \in [0,1]$, оператор $" \circ "$ дефинисан са

$$\alpha \circ X = \sum_{i=1}^{X} Y_i, \tag{1.2.1}$$

где је $\{Y_i\}$ низ независних једнако расподељених случајних променљивих, независних од X, са Бернулијевом расподелом $P(Y_i = 1) = 1 - P(Y_i = 0) = \alpha$. Низ $\{Y_i\}$ зове се бројачки низ, док назив овог оператора потиче од расподеле случајне променљиве $\sum_{i=1}^{X} Y_i$ под условом да је $\{X = x\}$, која је једнака биномној са параметрима x и α.

Особине биномног тининг оператора

Нека су $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$ и нека су оператори $"\alpha \circ"$, $"\beta \circ"$, $\gamma \circ"$ дефинисани са $\alpha \circ X = \sum_{i=1}^{X} B_i^{(1)}$, $\beta \circ X = \sum_{i=1}^{X} B_i^{(2)}$, $\gamma \circ X = \sum_{i=1}^{X} B_i^{(3)}$, где је $\{B_i^{(1)}\}$ низ независних једнако расподељених случајних променљивих независних од X, са Бернулијевом расподелом са параметром α, $\{B_i^{(2)}\}$ је низ независних једнако расподељених случајних променљивих независних од X, са Бернулијевом расподелом са параметром β и $\{B_i^{(3)}\}$ је низ независних једнако расподељених случајних променљивих независних од X, са Бернулијевом расподелом са параметром γ. Тада:

1. $0 \circ X \overset{c.u.}{=} 0$.
2. $1 \circ X \overset{c.u.}{=} X$.
3. $\alpha \circ (\beta \circ X) \overset{p}{=} (\alpha\beta) \circ X$, где су одговарајући бројачки низови $\{B_i^{(1)}\}$ и $\{B_i^{(2)}\}$ независни.
4. $E(\alpha \circ X) = \alpha E(X)$.
5. $E(\alpha \circ X)^2 = \alpha^2 E(X^2) + \alpha(1-\alpha)E(X)$.
6. $E(X(\alpha \circ Y)) = \alpha E(XY)$.
7. $E\left(X(\alpha \circ Y)^2\right) = \alpha^2 E(XY^2) + \alpha(1-\alpha)E(XY)$.

8. $E((\alpha \circ X)(\beta \circ Y)) = \alpha\beta E(XY)$, ако су одговарајући бројачки низови $\{B_i^{(1)}\}$ и $\{B_i^{(2)}\}$ међусобно независни и независни од X и Y.
9. $E((\alpha \circ X)^2(\beta \circ Y)) = \alpha^2\beta E(X^2Y) + \alpha(1-\alpha)\beta E(XY)$, ако су одговарајући бројачки низови $\{B_i^{(1)}\}$ и $\{B_i^{(2)}\}$ независни и независни од X и Y.
10. $E(XY(\alpha \circ Z)) = \alpha E(XYZ)$.
11. $E(X(\alpha \circ Y)(\beta \circ Z)) = \alpha\beta E(XYZ)$, ако су одговарајући бројачки низови $\{B_i^{(1)}\}$ и $\{B_i^{(2)}\}$ међусобно независни и независни од X, Y и Z.
12. $E((\alpha \circ X)(\beta \circ Y)(\gamma \circ Z)) = \alpha\beta\gamma E(XYZ)$, ако су одговарајући бројачки низови $\{B_i^{(1)}\}$, $\{B_i^{(2)}\}$ и $\{B_i^{(3)}\}$ међусобно независни и независни од X, Y и Z.
13. $\alpha \circ (X+Y) \stackrel{p}{=} \alpha \circ X + \alpha \circ Y$, ако су X и Y независне случајне променљиве.
14. $Cov(X, \alpha \circ Y) = \alpha Cov(X,Y)$.
15. $E(\alpha \circ X|X) = \alpha X$, $\alpha \in (0,1)$.
16. $E((\alpha \circ X)^2|X) = \alpha^2X^2 + \alpha(1-\alpha)X$, $\alpha \in (0,1)$.

Већина особина преузета је из Silva и Oliveira (2004). Докази појединих особина могу се наћи у Al-Osh и Alzaid (1987), Du и Li (1991), Franke и Subba Rao (1995). Последње две особине доказане су у Nastić (2008).

1.2.2 Неки INAR модели са биномним тинингом

INAR(1) модели засновани на биномном тининг оператору, које су дефинисали Al-Osh и Alzaid (1987), погодни су за описивање података који се односе на бројање елемената неке популације, при чему у сваком тренутку постојећи елементи могу да опстану или ишчезну из ње са извесном вероватноћом. Ова особина је директна последица чињенице да је биномни тининг оператор базиран на Бернулијевом бројачком низу што значи да свака бројачка случајна промењљива има две могуће реализације, 0 или 1. Ови аутори су конструисали стационаран временски низ дат следећом дефиницијом.

Дефиниција 1.2.1 (Al-Osh, Alzaid, 1987) *Временски низ* $\{X_n\}$ *дат једначином*

$$X_n = \alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1.2.2}$$

је $INAR(1)$ *временски низ, где је* $\alpha \in [0,1]$, $\{\varepsilon_n\}$ *је низ независних ненегативних целобројних идентички расподељених случајних промењљивих са очекивањем* μ_ε *и коначном дисперзијом* σ_ε^2, *таквих да су* X_m *и* ε_n *независне случајне промењљиве за* $m < n$, *и* $\{Y_i\}$ *је бројачки низ независних случајних промењљивих са Бернулијевом расподелом са параметром* α.

Аутори дају следећу интерпретацију INAR(1) модела дефинисаног једначином (1.2.2). Компоненте временског низа у тренутку n, X_n, су (i) опстали елементи временског низа у тренутку $n-1$, X_{n-1}, сваки са вероватноћом опстанка α и (ii) елементи који су ушли у посматрани систем у интервалу $(n-1, n]$ као иновациони члан ε_n.

Наведимо сада најважније особине временског низа $\{X_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ задатог Дефиницијом 1.2.1.

Очекивање и дисперзија временског низа $\{X_n\}$ су дати са:

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \alpha E(X_{n-1}) + \mu_\varepsilon, \\ Var(X_n) &= \alpha^2 Var(X_{n-1}) + \alpha(1-\alpha)E(X_{n-1}) + \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Аутоковаријансна функција реда k једнака је

$$\gamma(k) \equiv Cov(X_{n-k}, X_n) = \alpha^k \gamma(0), \ k \geq 0,$$

а одавде директно следи да је аутокорелациона функција реда k

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \alpha^k, \ k \geq 0.$$

Аутокорелација је истог облика као код стандардних ауторегресивних AR(1) модела што указује на њихову повезаност.

Што се условних статистичких особина тиче, имамо да је условно очекивање за корак 1:

$$E(X_{n+1}|X_n) = \alpha X_n + \mu_\varepsilon.$$

У Nastić (2008) показано је да се за k корака добија

$$E(X_{n+k}|X_n) = \alpha^k X_n + \mu_\varepsilon \left(\frac{1-\alpha^k}{1-\alpha} \right), \ k \geq 1,$$

условна дисперзија за $k = 1$ је

$$Var(X_{n+1}|X_n) = \alpha(1-\alpha)X_n + \sigma_\varepsilon^2,$$

док је за корак $k \geq 1$

$$Var(X_{n+k}|X_n) = \alpha^k(1-\alpha^k)X_n + \mu_\varepsilon \frac{\alpha(1-\alpha^k)(1-\alpha^{k-1})}{1-\alpha^2} + \sigma_\varepsilon^2 \frac{1-\alpha^{2k}}{1-\alpha^2}.$$

Лако се проверава да $E(X_{n+k}|X_n) \to E(X_n)$ и $Var(X_{n+k}|X_n) \to Var(X_n)$, за $k \to \infty$, односно, са порастом k регресиона функција конвергира безусловном математичком очекивању, тј. предвиђања за велики број корака су блиска константном математичком очекивању. Такође, условна дисперзија се асимптотски приближава безусловној дисперзији временског низа.

Из чињенице да су случајне променљиве INAR(1) временског низа једнако расподељене, следи да је

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\mu_\varepsilon}{1-\alpha}, \quad \alpha \neq 1, \\ Var(X) &= \frac{\alpha\mu_\varepsilon + \sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2}, \ \alpha \neq 1. \end{aligned}$$

Представићемо сада два фундаментална INAR(1) модела са Пуасоновом и геометријском маргиналном расподелом.

Пуасонов INAR(1) модел

Један од најчешће коришћених ненегативних целобројних ауторегресивних временских низова је Пуасонов INAR(1) временски низ реда 1. С обзиром на то да Пуасонова расподела није предмет ове дисертације, навешћемо само најосновније особине овог модела.

Пуасонов ненегативни целобројни ауторегресивни временски низ првог реда су увели Al-Osh и Alzaid (1987) Дефиницијом 1.2.1, претпостављајући да иновациони низ $\{\varepsilon_n\}$ има Пуасонову $\mathcal{P}(\lambda)$ расподелу. Уз претпоставку да је $X_t \stackrel{d}{=} X_{t-1}$, расподела временског низа једнозначно је одређена расподелом иновационог низа. Маргинална расподела временског низа је Пуасонова са параметром $\frac{\lambda}{1-\alpha}$.

Очекивање и дисперзија временског низа су

$$E(X_n) = \frac{\lambda}{1-\alpha},\ Var(X_n) = \frac{\lambda}{1-\alpha},\ \alpha \neq 1,$$

док су аутоковаријансна и аутокорелациона функција дате редом са

$$\gamma(k) = \alpha^k \frac{\lambda}{1-\alpha},\ \rho(k) = \alpha^k,\ k \geq 0.$$

У Nastić (2008) је показано да су условно очекивање и условна дисперзија за k корака дати са

$$\begin{aligned} E(X_{n+k}|X_n) &= \frac{\lambda}{1-\alpha}\left(1-\alpha^k\right) + \alpha^k X_n,\ k \geq 1, \\ Var(X_{n+k}|X_n) &= \left(1-\alpha^k\right)\left(\frac{\lambda}{1-\alpha} + \alpha^k X_n\right),\ k \geq 1. \end{aligned}$$

Директном провером може се утврдити да $E(X_{n+k}|X_n) \to E(X_n)$ и $Var(X_{n+k}|X_n) \to Var(X_n)$, за $k \to \infty$.

За Пуасонов временски низ важи да је регресија уназад линеарна функција, тј. важи

$$E(X_{n-1}|X_n = x) = \alpha x + \mu_\varepsilon.$$

У Теореми 5.1 (Alzaid и Al-Osh, 1988), доказано је да је Пуасонов временски низ једини INAR(1) временски низ код кога је регресија уназад линеарна.

Геометријски INAR(1) модел

Alzaid и Al-Osh (1988) представили су још један важни ненегативни целобројни ауторегресивни временски низ базиран на биномном тинингу, са геометријском маргиналном расподелом.

Наиме, они су опет полазећи од Дефиниције 1.2.1 посматрали низ случајних променљивих који задовољава једначину

$$X_n = \alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n, \ n \in \mathbb{Z},$$

где је $\alpha \in (0,1)$, $\{\varepsilon_n\}$ је низ независних, ненегативних, целобројних случајних променљивих, независних од X_m за $m < n$, а $\{Y_i\}$ је бројачки низ независних једнако расподељених случајних променљивих, независних од X_n, са Бернулијевом расподелом са параметром α, при чему су сада разматрали геометријску расподелу за $\{X_n\}$, тј. $P(X_n = j) = (1-q)q^j$, $q \in (0,1)$, $j = 0,1,2,\ldots$. Овако дефинисан временски низ краће су назвали GINAR(1)[6].

Полазећи од геометријске маргиналне расподеле временског низа $\{X_n\}$, добијамо да је функција генератрисе вероватноћа иновационог низа једнака

$$\Phi_\varepsilon(s) = \alpha + (1-\alpha)\frac{1-q}{1-qs},$$

одакле следи да је расподела иновационог низа

$$\varepsilon_n \stackrel{p}{=} \begin{cases} 0, & \text{с.в.} \quad \alpha, \\ G_n, & \text{с.в.} \quad 1-\alpha, \end{cases}$$

где G_n има геометријску расподелу са параметром q. Одавде закључујемо да се GINAR(1) временски низ може представити у облику

$$\begin{aligned} X_n &= \begin{cases} \alpha \circ X_{n-1}, & \text{с.в.} \quad \alpha, \\ \alpha \circ X_{n-1} + G_n, & \text{с.в.} \quad 1-\alpha, \end{cases} \\ &= \alpha \circ X_{n-1} + I_n G_n, \end{aligned}$$

где је $\{I_n\}$ низ независних, једнако расподељених случајних променљивих таквих да је I_n случајна променљива са Бернулијевом расподелом са параметром $1-\alpha$.

Као у Nastić (2008) уводимо следећу примедбу.

Примедба 1.2.1 Ради једноставнијих извођења одговарајућих статистика, може се користити алтернативна параметризација увођењем смене $q = \frac{P}{1+P}$, где је $P \geq 0$.

[6]Geometric INAR

Наведимо сада још неке најважније особине овог модела.
Лако се израчунава да важи

$$\mu_\varepsilon = (1-\alpha)\frac{q}{1-q},\ \sigma_\varepsilon^2 = \frac{(1-\alpha)q(1+\alpha q)}{(1-q)^2},$$

затим

$$E(X) = \frac{q}{1-q},\ Var(X) = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Аутоковаријансна и аутокорелациона функција су дате редом са

$$\gamma(k) = \alpha^k \frac{q}{(1-q)^2},\ \rho(k) = \alpha^k,\ k \geq 0.$$

У Nastić (2008) је показано да су условно очекивање и условна дисперзија за $k \geq 1$ корака дати са:

$$\begin{aligned} E(X_{n+k}|X_n) &= \alpha^k X_n + \frac{q}{1-q}\left(1-\alpha^k\right), \\ Var(X_{n+k}|X_n) &= \alpha^k\left(1-\alpha^k\right)X_n + \frac{q(1-\alpha^k)}{1-q}\left(1+\frac{q}{1-q}\left(1+\alpha^k\right)\right). \end{aligned}$$

Поменимо још једно битно својство по коме се овај временски низ разликује од Пуасоновог временског низа. Наиме, овде регресија уназад

$$E(X_{n-1}|X_n = x) = \frac{q(1-\alpha)}{1-q(1-\alpha)} + \frac{\alpha\left(1-\left(\frac{\alpha}{1-q(1-\alpha)}\right)^x\right)}{(1-q)(1-\alpha)(1-q(1-\alpha))},\ x \geq 1,$$

није линеарна функција.

INAR(p) - Биномни тининг модел

У дефинисању модела вишег реда, базираног на биномном тининг оператору коришћена су два значајна приступа. Du и Li (1991) са једне стране, су уопштили INAR(1) модел који су увели Al-Osh и Alzaid (1987). Корелациона структура и особине овог модела одговарају стандардном AR(p) моделу. Други приступ представили су Alzaid и Al-Osh (1990). Овде ћемо укратко представити модел који су конструисали Du и Li.

Користећи биномни тининг оператор (1.2.1), Du и Li (1991) су дефинисали INAR(p) временски низ као

$$X_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \circ X_{n-i} + \varepsilon_n, \tag{1.2.3}$$

где су $\alpha_j \in [0,1]$, $j = 1, \ldots, p$, ε_n су независне једнако расподељене ненегативне целобројне случајне променљиве са очекивањем μ_ε и дисперзијом σ_ε^2 независне од свих бројачких низова и сви бројачки низови су међусобно независни.

Следећа теорема одређује услове под којима постоји стационарно решење једначине (1.2.3).

Теорема 1.2.1 (Du, Li, 1991) *Нека је $\{\varepsilon_n\}$ низ независних једнако расподељених ненегативних целобројних случајних променљивих са очекивањем μ_ε и дисперзијом σ_ε^2 и нека је $\alpha_i \in [0,1]$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$. Ако су корени једначине*

$$\lambda^p - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \lambda^{p-i} = 0$$

ван јединичног круга, онда постоји јединствен стационарни ненегативни целобројни временски низ $\{X_n\}$, који задовољава једначину

$$X_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \circ X_{n-i} + \varepsilon_n,$$

при чему је $Cov(X_s, \varepsilon_t) = 0$, за $s < t$.

1.3 INAR модели базирани на неким другим тининг операторима

У овом делу представићемо само неке INAR моделе генерисане различитим тининг операторима насталим извесним модификацијама биномног тининг оператора. Неки су базирани на Бернулијевом бројачком низу, док други са негативним биномним тининг оператором у основи имају геометријски бројачки низ.

INAR(1) модели са случајним коефицијентима

У сталној тежњи да се што боље опишу различити процеси који се јављају у природи, модели базирани на Бернулијевом бројачком низу са константном вероватноћом опстанка елемената у посматраној популацији постали су недовољни. Наиме, појавила се потреба да се опишу и временски низови у којима се мења вероватноћа опстанка јединки. На тај начин, константа $\alpha \in [0,1]$ којом је одређен биномни тининг оператор сада постаје случајна променљива ϕ са вредностима из интервала $[0,1]$. Овакав концепт сугерисали су Zheng, Basawa и Datta (2007), формирајући модел са случајним коефицијентима, а касније је Weiß (2008b) посматрао специјалан случај у коме случајна променљива ϕ има бета $\mathcal{B}(\alpha,\beta)$ расподелу. Овде наводимо дефиницију преузету из прегледног чланка Weiß (2008b).

Дефиниција 1.3.1 (Weiß, 2008b) *Нека је X случајна променљива са вредностима из $\mathbb{N}_0$ и нека је ϕ случајна променљива са вредностима из $[0,1]$, независна од X. Случајна променљива $\phi \circ X$ је добијена тининг оператором променљивог коефицијента, ако је "$\circ$" биномни тининг оператор који не зависи од ϕ и X.*

За овако дефинисани тининг оператор важе следеће особине:

$$
\begin{aligned}
E(\phi \circ X) &= \mu_\phi E(X), \\
Var(\phi \circ X) &= \mu_\phi^2 Var(X) + \mu_\phi(1-\mu_\phi)E(X) + \sigma_\phi^2 E(X(X-1)), \\
Cov(\phi \circ X, X) &= \mu_\phi Var(X),
\end{aligned}
$$

где је $\mu_\phi = E(\phi)$ и $\sigma_\phi = Var(\phi)$.

Следећи резултате из Joe (1996), Weiß (2008b) је посматрао случај када ϕ има бета $\mathcal{B}(\alpha,\beta)$ расподелу, тј.

$$P(\phi = t) = \frac{t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)},\ t \in (0,1),$$

где је $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du,\ \alpha,\beta \geq 0$. Тада $\phi \circ X|X = x$ има бета биномну $\mathcal{BB}(x;\alpha,\beta)$ расподелу, односно важи да је

$$P((\phi \circ X|X = x) = i) = \binom{x}{i}\frac{B(\alpha+i,\beta+x-i)}{B(\alpha,\beta)},\ x \in \mathbb{N}.$$

Лема 1.3.1 (Weiß, 2008b) *Нека је X случајна променљива са негативном биномном $\mathcal{NB}(n,p)$ расподелом. Нека је $\beta_n \circ X$ бета биномни тининг, где β_n има бета $\mathcal{B}(n\rho, n(1-\rho))$ расподелу, тј. $E(\beta_n) = \rho$ и $Var(\beta_n) = \rho(1-\rho)/(n+1)$. Тада $\beta_n \circ X$ има негативну биномну $\mathcal{NB}(n\rho,p)$ расподелу.*

Нека су n и $n\rho$ ненегативни цели бројеви и $p \in (0,1)$. Користећи претходну Лему, уведен је временски низ $\{X_n\}$ са негативном биномном $\mathcal{NB}(n,p)$ маргиналном расподелом, који задовољава једначину

$$X_n = \beta_n \circ X_{n-1} + \varepsilon_n,\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.3.1}$$

где је $\{\varepsilon_n\}$ низ независних ненегативних целобројних случајних променљивих са $\mathcal{NB}(n(1-\rho),p)$ расподелом, $\{\beta_n\}$ је низ независних случајних променљивих са бета $\mathcal{B}(n\rho, n(1-\rho))$ расподелом, независних од $\{\varepsilon_n\}$ и од $\{X_m\}_{m<n}$.

За овај временски низ важи да је

$$E(X) = \frac{n(1-p)}{p},\ Var(X) = \frac{n(1-p)}{p^2},$$

условно очекивање је

$$E(X_n|X_{n-1}) = \rho X_{n-1} + \frac{n(1-\rho)(1-p)}{p},$$

док је аутокорелациона функција дата са

$$\rho_X(k) = \rho^k,\ k \geq 0.$$

Итеративни INAR(1) модел

Al-Osh и Aly (1992) су увели нови оператор који се може схватити као композиција два тининг оператора, а затим су дефинисали нови временски низ $\{X_n\}$ са негативном биномном расподелом, базиран на новом тининг оператору, дат следећом једначином:

$$X_n = \alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n,$$

где је оператор $"*"$ дефинисан са

$$\alpha * X = \sum_{i=1}^{N(X)} W_i,$$

тако да важи:

(i) W_i је низ независних, једнако расподељених случајних променљивих са геометријском расподелом са параметром $\alpha/(1+\alpha)$, $\alpha > 0$.

(ii) За сваку фиксирану, ненегативну целобројну вредност x случајне променљиве X, $N(x)$ је случајна променљива са биномном расподелом са параметрима x и λ, где је $\lambda = \alpha p$, $0 \leq p \leq 1$, а ε_n су независне, једнако расподељене случајне променљиве са негативном биномном расподелом $\mathcal{NB}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}, \nu\right)$, где је $\nu > 0$ и ε_n су независне од $\alpha * X_{n-1}$.

За итеративни тининг оператор $"*"$ важе особине:

$$\begin{aligned} E(\alpha * X) &= pE(X), \\ Var(\alpha * X) &= p^2 Var(X) + \frac{p}{\alpha}(2 + \alpha(1-p))E(X), \\ Cov(\alpha * X, X) &= pVar(X). \end{aligned}$$

Ако X_0 има негативну биномну расподелу са параметрима ν и $\frac{\alpha(1-p)}{1+\alpha(1-p)}$, онда дефинисани временски низ има $\mathcal{NB}\left(\nu, \frac{\alpha(1-p)}{1+\alpha(1-p)}\right)$ расподелу и важи да је

$$E(X) = \frac{\nu}{\alpha(1-p)}, \; Var(X) = \frac{\nu(1+\alpha(1-p))}{(\alpha(1-p))^2},$$

условно очекивање је

$$E(X_n|X_{n-1}) = pX_{n-1} + \frac{\nu}{\alpha},$$

док је аутокорелациона функција дата са

$$\rho_X(k) = p^k, \; k \geq 0.$$

Квази-биномни INAR(1) модел

У природи се често јављају временски низови са много комплекснијим механизмом опстанка јединки од оног који може да се опише стандардним биномним тинингом. Наиме, у многим проблемима вероватноћа опстанка елемената није константна. У свом раду Alzaid и Al-Osh (1993) су посматрали временске низове са генералисаном Пуасоновом маргиналном расподелом код којих је вероватноћа опстанка елемената линеарна функција броја претходно постојећих елемената.

Они су увели нови квази биномни тининг оператор "$\rho_{\theta,\lambda}\circ$", за који важи да $\rho_{\theta,\lambda}\circ X$ има квази биномну расподелу $\mathcal{QB}(\rho, \frac{\theta}{\lambda}, x)$ под условом да је $\{X = x\}$, за $x \in \mathbb{N}_0$, где је $\lambda > 0$, $\rho \in (0,1)$ и $\frac{x\theta}{\lambda} < \min(\rho, 1-\rho)$. За квази биномни оператор важе следеће особине аналогне особинама биномног тининг оператора:

$$\begin{aligned} E(\rho_{\theta,\lambda}\circ X) &= \rho E(X), \\ Cov(\rho_{\theta,\lambda}\circ X, X) &= \rho Var(X). \end{aligned}$$

Напоменимо да овде користимо означавање из прегледног чланка Weiß (2008b). Из истог чланка наводимо следећу лему.

Лема 1.3.2 (Weiß, 2008b) *Ако је X случајна променљива са генералисаном Пуасоновом $\mathcal{GP}(\lambda,\theta)$ расподелом и ако су бројачки низови квази биномног тининг оператора независни од X, тада случајна променљива $\rho_{\theta,\lambda}\circ X$ има генералисану Пуасонову $\mathcal{GP}(\rho\lambda,\theta)$ расподелу.*

Уз помоћ квази биномног тининг оператора, Alzaid и Al-Osh (1993) су конструисали нови временски низ на следећи начин

$$X_n = \rho_{\theta,\lambda}\circ X_{n-1} + \varepsilon_n, \; n \geq 1, \tag{1.3.2}$$

где је $\lambda > 0,\ \rho, \theta \in (0,1),\ \{\varepsilon_n\}$ је низ независних, једнако расподељених случајних променљивих са $\mathcal{GP}((1-\rho)\lambda, \theta)$ расподелом, бројачки низови тининг оператора су међусобно независни, и бројачки низови тининг оператора и случајна променљива ε_n су независни од X_m за $m < n$.

Временски низ ће имати генералисану Пуасонову $\mathcal{GP}(\lambda, \theta)$ маргиналну расподелу са законом расподеле

$$P(X = x) = \frac{\lambda(\lambda + x\theta)^{x-1} e^{-\lambda - x\theta}}{x!},\ x = 0, 1, \ldots;$$

$\lambda > 0,\ \max(-1, -\frac{\lambda}{m}) < \theta \leq 1,\ m > 4$. За овако дефинисан временски низ важи да је

$$E(X) = \frac{\lambda}{1-\theta},\ Var(X) = \frac{\lambda}{(1-\theta)^3}.$$

Условно очекивање је

$$E(X_n | X_{n-1}) = \rho X_{n-1} + \frac{\lambda(1-\rho)}{1-\theta},$$

док је аутокорелациона функција једнака

$$\rho_X(k) = \rho^k,\ k \geq 0.$$

Неки INAR модели базирани на негативном биномном тинингу

Временски низови засновани на биномном тининг оператору су погодни за моделирање низова код којих посматрани елементи могу да учествују у укупној суми само са вредностима 0 или 1. Међутим, у природи се врло често јављају процеси у којима посматрани елемент може да генерише више нових елемената. У том случају, Бернулијев бројачки низ није погодан за описивање таквих података и конструисање одговарајућих модела, па се из тих разлога појавила потреба за коришћењем новог бројачког низа са геометријском расподелом. Тако су Ristić, Bakouch и Nastić (2009) дефинисали негативни биномни тининг оператор "$*$" са $\alpha * X = \sum_{i=1}^{X} W_i$, $\alpha \in (0,1)$, где је $\{W_i\}$ низ независних, једнако расподељених случајних променљивих са геометријском расподелом са параметром $\frac{\alpha}{1+\alpha}$. Случајна променљива $\alpha * X$ за фиксирано $X = x$ има негативну биномну расподелу са параметрима x и $\frac{\alpha}{1+\alpha}$.

Навешћемо сада неке најважније особине овог оператора представљене у Nastić (2008). Нека су $\beta, \gamma \in (0,1)$ и нека су оператори "$\beta *$" и "$\gamma *$" дефинисани са $\beta * X = \sum_{i=1}^{X} W_i'$, где је $\{W_i'\}$ низ независних, једнако расподељених случајних променљивих са $Geom\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)$ расподелом и $\gamma * X = \sum_{i=1}^{X} W_i''$, где је $\{W_i''\}$ низ независних, једнако расподељених случајних променљивих са $Geom\left(\frac{\gamma}{1+\gamma}\right)$ расподелом. Тада:

(i) $0 * X = 0,\ 1 * X \overset{p}{\neq} X$.

(ii) $\alpha * (\beta * X) \overset{p}{\neq} (\alpha\beta) * X$.

(iii) $E(\alpha * X) = \alpha E(X)$.

(iv) $E(\alpha * X)^2 = \alpha^2 E\left(X^2\right) + \alpha(1+\alpha)E(X)$.

(v) $E\left((\alpha * X)Y\right) = \alpha E\left(XY\right)$, ако је одговарајући бројачки низ $\{W_i\}$ независан од X и Y.

(*vi*) $E(\alpha * X - \alpha * Y)^2 = \alpha(1+\alpha)E|X-Y| + \alpha^2 E(X-Y)^2$, где су одговарајући бројачки низови за $\alpha * X$ и $\alpha * Y$ исти, са $Geom\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$ расподелом.

(*vii*) $E(X(\beta * Y)(\gamma * Z)) = \beta\gamma E(XYZ)$, ако су бројачки низови $\{W_i'\}$ и $\{W_i''\}$ међусобно независни и независни од X, Y и Z.

Поменућемо сада неке моделе засноване на негативном биномном тининг оператору са различитим маргиналним расподелама.

Нови геометријски INAR(1) модел

Код многих временских низова вредности узорачке средине и дисперзије се битно разликују, те Пуасонова маргинална расподела не даје добре резултате у описивању таквих података. Из тих разлога, Ristić, Bakouch и Nastić (2009) су конструисали временски низ са геометријском маргиналном расподелом, базиран на негативном биномном тинингу.

Дефиниција 1.3.2 (Ristić, Bakouch, Nastić, 2009) *Ненегативни целобројни ауторегресивни временски низ првог реда са геометријском маргиналном расподелом* ($NGINAR(1)$)[7] *је низ* $\{X_n\}$ *који задовољава једначину*

$$X_n = \alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n, \tag{1.3.3}$$

где је $n \geq 1$, *оператор* " $*$ " *је дефинисан са* $\alpha * X = \sum_{i=1}^{X} W_i$, $\alpha \in (0,1)$, $\{X_n\}$ *је низ случајних променљивих са геометријском расподелом са параметром* $\frac{\mu}{1+\mu}$, $\mu > 0$, $\{W_i\}$ *је бројачки низ независних случајних променљивих са геометријском расподелом са параметром* $\frac{\alpha}{1+\alpha}$, *а* $\{\varepsilon_n\}$ *иновациони низ ненегативних целобројних независних једнако расподељених случајних променљивих, независних од* $\{W_i\}$, *таквих да је* ε_n *независно од* X_{n-l}, *за* $l > 0$.

За овако дефинисан временски низ важи да је

$$E(X) = \mu, \ Var(X) = \mu(1+\mu),$$

[7] New geometric INAR

условно очекивање је

$$E(X_n|X_{n-1}) = \alpha X_{n-1} + (1-\alpha)\mu.$$

За аутоковаријансну функцију важи да је

$$\gamma(k) \equiv Cov(X_{n+k}, X_n) = \alpha^k \gamma(0),\ \ k \geq 0,$$

па је аутокорелациона функција и овде једнака

$$\rho(k) = \alpha^k,\ \ k \geq 0.$$

Случајна промењлива ε_n је добро дефинисана за $\alpha \in \left(0, \frac{\mu}{1+\mu}\right]$ и њена расподела је мешавина две геометријске расподеле

$$\varepsilon_n \stackrel{p}{=} \begin{cases} Geom\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right), & \text{с.в.} \quad \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}, \\ Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right), & \text{с.в.} \quad 1 - \frac{\alpha\mu}{\mu-\alpha}. \end{cases}$$

Овај модел се битно разликује од свих претходно наведених модела и може имати широку примену у моделирању података чије се генерисање добро описује геометријским бројачким низом.

Негативни биномни INAR модел

У претходно наведеном моделу разматрана је геометријска маргинална расподела. У овом моделу аутори су посматрали још општију маргиналну расподелу. Наиме, Ristić, Nastić и Bakouch (2012) су представили још један модел заснован на негативном биномном тининг оператору, сада са негативном биномном маргиналном расподелом.

Дефиниција 1.3.3 (Ristić, Nastić, Bakouch, 2012) *Ненегативни целобројни ауторегресивни временски низ првог реда са негативном биномном маргиналном расподелом* ($NBINAR(1)$)[8], *је низ случајних промењливих, који задовољава једначину*

$$X_n = \alpha * X_{n-1} + \varepsilon_n, \tag{1.3.4}$$

[8] Negative binomial INAR

за $n \geq 1$, $\alpha \in (0,1)$, *где је* " $*$ " *негативни биномни тининг оператор, заснован на геометријском бројачком низу* $\{W_i\}$, $\{X_n\}$ *је стационарни временски низ са* $\mathcal{NB}\left(\theta, \frac{\mu}{1+\mu}\right)$ *маргиналном расподелом, тј.* $P(X_n = i) = \frac{\Gamma(\theta+i)}{\Gamma(\theta)i!} \cdot \frac{\mu^i}{(1+\mu)^{\theta+i}}$, $\theta > 0$, $\mu > 0$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, *а иновациони низ* $\{\varepsilon_n\}$ *је низ независних, једнако расподељених случајних променљивих, независних од* $\{W_i\}$, *при чему је* ε_n *независно од* X_{n-l}, *за* $l > 0$.

За овај временски низ имамо да је

$$E(X) = \theta\mu, \ Var(X) = \theta\mu(1+\mu).$$

Условно очекивање за корак један је

$$E(X_n|X_{n-1}) = \alpha X_{n-1} + (1-\alpha)\theta\mu.$$

Аутокорелациона функција је дата са

$$\rho(k) = \alpha^k, \ k \geq 0.$$

Функција генератрисе вероватноћа случајне променљиве ε_n је добро дефинисана за $\alpha \in \left(0, \frac{\mu}{1+\mu}\right]$. Расподела случајне променљиве ε_n се може записати у облику $\varepsilon_n \stackrel{p}{=} Y_n + Z_n$, где су Y_n и Z_n независне случајне променљиве и важи да $Y_n : \mathcal{NB}\left(\theta, \frac{\alpha}{1+\alpha}\right)$, док је случајна променљива $Z_n = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}\right)^{R_i} \circ V_i$, где је $N \stackrel{p}{=} \mathcal{P}\left(-\theta \ln \frac{\alpha(1+\mu)}{\mu}\right)$, $R_i \stackrel{p}{=} \mathcal{U}(0,1)$, $V_i \stackrel{p}{=} Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, " $\circ$ " је биномни тининг оператор, а N, R_i, V_i су независне случајне променљиве.

Поменућемо још један врло интересантан модел.

Мешовити INAR модел

Као што је већ поменуто, биномни тининг је погодан за описивање појава у којима су посматрани елементи пасивни, односно само опстају или само ишчезавају, док се за потребе опсервирања активних елемената који могу да генеришу више нових јединки користи негативни биномни тининг. Међутим, у пракси се могу јавити и елементи промењљивог карактера који су у одређеним временским интервалима пасивни, односно, активни. Тако су Nastić и

Ristić (2012) конструисали модел заснован на мешавини биномног и негативног биномног тининг оператора.

Нека су "$\circ_n$" и "$*_n$" редом, биномни и негативни биномни тининг оператор. Индекс n означава да је тининг примењен у тренутку n. Оператор биномног тининга дефинисан је са $\alpha \circ_n X = \sum_{i=1}^{X} B_i^{(n)}$, где је $\left\{B_i^{(n)}\right\}$ низ независних Бернулијевих случајних променљивих са параметром α, док је негативни биномни тининг дефинисан са $\beta *_n X = \sum_{j}^{X} G_j^{(n)}$, чији се бројачки низ $\left\{G_j^{(n)}\right\}$ састоји од независних случајних променљивих са $Geom(\beta/(1+\beta))$ расподелом. Временски низ $\{X_n\}$ са $Geom(\mu/(1+\mu))$ маргиналном расподелом, $\mu > 0$, дефинисан је са

$$X_n = \begin{cases} \alpha \circ_n X_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } p, \\ \beta *_n X_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } 1-p, \end{cases} \tag{1.3.5}$$

где су $\alpha, \beta \in (0,1)$, $p \in [0,1]$ и важе следећи услови:

(i) $\{\varepsilon_n\}$ је низ ненегативних целобројних независних једнако расподељених случајних променљивих,

(ii) ε_n не зависе од X_m, $\alpha \circ_{m+1} X_m$ и $\beta *_{m+1} X_m$, за $m < n$,

(iii) тининг оператори у тренутку n се примењују независно једни од других,

(iv) тининг оператори примењени над X_n и случајне променљиве X_{n-1}, X_{n-2}, $\ldots$ су независни,

(v) условне вероватноће $P\left(\alpha \circ_{n+1} X_n = i, \beta *_{n+1} X_n = j | X_n = x, H_{n-1}\right)$ и $P\left(\alpha \circ_{n+1} X_n = i, \beta *_{n+1} X_n = j | X_n = x\right)$ су једнаке, где H_{n-1} означава прошлост процеса, односно свих случајних променљивих X_m, $\alpha \circ_{m+1} X_m$ и $\beta *_{m+1} X_m$, за $m < n$,

(vi) случајне променљиве $\alpha \circ_{n+1} X_n$ и $\beta *_{n+1} X_n$ за дато X_n су независне.

За овај временски низ важи да је

$$E(X) = \mu, \ Var(X) = \mu(1+\mu),$$

условно очекивање за корак један је

$$E(X_n|X_{n-1}) = \theta X_{n-1} + (1-\theta)\mu,$$

док условна дисперзија квадратно зависи од прошлости временског низа и дата је са

$$\begin{aligned} Var(X_n|X_{n-1}) &= (\tau-\theta^2)X_{n-1}^2 + (\nu - 2\mu\theta(1-\theta))X_{n-1} - \nu\mu \\ &\quad +(1-\tau)\mu(1+2\mu) - \mu^2(1-\theta)^2, \end{aligned}$$

где је $\theta = p\alpha + (1-p)\beta$, $\tau = \alpha^2 p + \beta^2(1-p)$ и $\nu = \alpha(1-\alpha)p + \beta(1+\beta)(1-p) + 2\mu(1-\theta)\theta$. Ова квадратна зависност условне дисперзије од прошлости временског низа утиче на то да се са повећањем вредности временског низа битно повећавају вредности условне дисперзије.

Аутокорелациона функција је

$$\rho(k) = \theta^k,\ k \geq 0.$$

Ако је $\alpha\mu < \beta(1+\mu) < \mu$, онда је расподела случајне променљиве ε_n мешавина три геометријске расподеле, тј.

$$\varepsilon_n \stackrel{p}{=} \begin{cases} Geom(\mu/(1+\mu)), & \text{с.в.}\ \ A_1 = \frac{\mu(\alpha-1)(\beta-\mu+\mu\beta)}{(\mu-a)(\mu-b)}, \\ Geom(a/(1+a)), & \text{с.в.}\ \ A_2 = \frac{(\mu\alpha-a)(\beta-a+\mu\beta)}{(\mu-a)(b-a)}, \\ Geom(b/(1+b)), & \text{с.в.}\ \ A_3 = \frac{(\mu\alpha-b)(\beta-b+\mu\beta)}{(\mu-b)(a-b)}, \end{cases}$$

где су a и b решења једначине $x^2-(\beta+\alpha\mu+\beta\mu p-\alpha\mu p)x+(1-p)\alpha\beta\mu = 0$ и $a < b$.

Претходно описани модел првог реда подразумева да се веза између два узастопна елемента временског низа остварује применом и Бернулијевог и геометријског бројачког низа. У другом случају може се десити да случајни догађаји непосредно након свог настанка буду пасивни, а затим у наредном временском периоду постају активни. За описивање овакве зависности Nastić и Ristić (2012) су конструисали модел реда 2. Мешовити модели вишег реда представљени су у раду Ristić и Nastić (2012).

Заједничка карактеристика свих описаних модела је независност елемената бројачког низа. Међутим, у природи се често јављају процеси у којима реализација једног елемента утиче на то да ли ће се други елемент реализовати или не, у датом тренутку. Тако долазимо до проблема зависних бројачких низова о чему ће бити речи у наредним главама.

Глава 2

INAR(1) модели са зависним Бернулијевим бројачким низовима

Ненегативни целобројни ауторегресивни модели који су до сада коришћени су конструисани помоћу тининг оператора који у основи имају независне бројачке низове. Претпоставка о независности има веома важну улогу и доприноси томе да се добијају релативно једноставни модели са особинама које се лако изводе. Међутим, у пракси се ретко срећу овакви примери. То би значило да су одговарајући догађаји који су предмет посматрања потпуно независни и да не постоји никаква интеракција међу њима. У реалном животу се много чешће срећемо са појавама у којима су посматране јединке међусобно повезане. У већини научних дисциплина имамо примере оваквих појава. У економији, на пример, не може се опстанак или банкрот великих компанија проучавати и разматрати независно, јер све оне заједно раде и функционишу у истом макроекономском миљеу, остварујући значајан међусобни утицај. Затим, у криминологији врло често наилазимо на кривична дела која су међусобно повезана, настала дејством организованих криминалних група. Природно се намеће потреба за конструкцијом нових модела који би добро описивали овакве појаве, а који би у основи имали зависне бројачке низове.

Из тих разлога ми овде уводимо нове тининг операторе "$\alpha\bullet_\theta$"који ће се базирати на бројачким низовима $\{U_i\}$ зависних идентички расподељених случајних променљивих са Бернулијевом расподелом, а затим ћемо посматрати моделе дефинисане са

$$X_t = \alpha \bullet_\theta X_{t-1} + \varepsilon_t, \ t \in \mathbb{Z},$$

где су $\alpha \in (0,1)$ и $\theta \in (0,1)$.

У првом делу ове главе случајне променљиве U_i су дефинисане на следећи начин:

$$U_i = (1 - V_i)W_i + V_i Z, \ i \in \mathbb{N},$$

где су $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ низови независних једнако расподељених случајних променљивих са Бернулијевим расподелама, редом са параметрима α и θ, где $\alpha, \theta \in [0,1]$, Z је такође случајна променљива са Бернулијевом расподелом са параметром α, и случајне променљиве W_i, V_j и Z су независне, за свако $i, j \in \mathbb{N}$. Параметром θ ће бити одређена зависност међу члановима бројачког низа.

У другом делу су случајне променљиве U_i дефинисане са

$$U_i = 1 - V_i + V_i Z, \ i \in \mathbb{N},$$

где је $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ низ независних једнако расподељених случајних променљивих са $Ber(\theta)$ расподелом, $\theta \in (0,1]$, док је Z случајна променљива са $Ber\left(\frac{\alpha+\theta-1}{\theta}\right)$ расподелом, тако да важи $0 \leq 1 - \alpha \leq \theta$, $\alpha \in (0,1]$. Случајне променљиве Z и V_i су независне за свако $i \in \mathbb{N}$.

У трећем делу ове случајне променљиве су дефинисане са

$$U_i = V_i Z, \ i \in \mathbb{N},$$

где је $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ низ независних случајних променљивих са $Ber(\theta)$ расподелом, $\theta \in (0,1]$ и Z је случајна променљива са Бернулијевом расподелом са параметром α/θ, где је $0 \leq \alpha \leq \theta \leq 1$. Случајне променљиве V_i и Z су независне за свако $i \in \mathbb{N}$.

Као резултат примене ових оператора добијамо један општи и свеобухватни модел који је самим тим и најсложенији, док са друге стране добијамо два модела код којих губимо на општости због извесних ограничења у условима, али зато добијамо моделе који су једноставнији и флексибилнији за рад и примену.

2.1 Геометријски INAR(1) модел са Бернулијевим зависним бројачким низовима I врсте

Након вишегодишње примене независних бројачких низова у конструкцији INAR модела, прва разматрања у погледу одбацивања претпоставке о независности се могу наћи у Brännäs и Hellström (2001). Неколико година раније су Lunn и Davies (1998) конструисали алгоритам за генерисање позитивно корелисаних Бернулијевих случајних променљивих. Наиме, њихов циљ је био да генеришу кластере бинарних променљивих са корелацијом ρ_j у j-том кластеру за сврху Монте Карло симулација. Тако су дефинисали случајне променљиве $X_{ij} = (1 - U_{ij})Y_{ij} + U_{ij}Z_j,\ i = 1, \dots, k_j;$ $j = 1, \dots, n$, где су Y_{ij} и Z_j независне случајне променљиве са $Ber(p_j)$ расподелом и U_{ij} независне случајне променљиве са $Ber(r_j)$ расподелом, $p_j, r_j \in [0, 1]$. Показано је да случајне променљиве X_{ij} имају $Ber(p_j)$ расподелу и да је корелација $Corr(X_{ij}X_{mj}) = r_j^2$, за $i \neq m$, односно $\rho_j = r_j^2$. У оквиру разматрања INAR(1) модела $y_t = \alpha \circ y_{t-1} + \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}$, Brännäs и Hellström (2001) су модификовали овај алгоритам посматрајући сада случајне променљиве $U_i = (1 - W_i)V_i + W_iZ,\ i = 1, \dots, y_{t-1}$, где су све случајне променљиве из U_i међусобно независне са Бернулијевим расподелама и то са параметром α за V_i и Z, и са параметром $k^{1/2}$ за W_i. На тај начин су добили зависне случајне променљиве са константном корелацијом $Corr(U_i, U_j) = k$, за $i \neq j$. Овако дефинисане случајне променљиве биће разматране у овом раду и представљаће основу новог тининг оператора.

Ослањајући се на резултате представљене у Ristić, Nastić и Miletić Ilić (2013), најпре ћемо се упознати са дефиницијом и основним особинама тининг оператора базираном на зависном Бернулијевом бројачком низу. Затим ћемо уз помоћ новог оператора конструисати INAR модел реда један са геометријском маргиналном расподелом. Након извођења основних својстава модела размотрићемо аутокорелациону структуру и одредићемо неке условне статистичке особине. На крају ће бити речи о методама за оцењивање непознатих параметара као и о могућој примени модела на подацима из стварног живота.

2.1.1 Генерализовани биномни тининг оператор I врсте

У овом одељку представићемо нови тининг оператор базиран на зависном Бернулијевом бројачком низу. Резултати овог одељка су публиковани у раду Ristić, Nastić и Miletić Ilić (2013).

Нека је $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ низ случајних променљивих дефинисаних са

$$U_i = (1 - V_i)W_i + V_i Z, \tag{2.1.1}$$

где је $\{W_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ низ независних једнако расподељених случајних променљивих са $Ber(\alpha)$ расподелом, $\alpha \in [0, 1]$, $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ је низ независних једнако расподељених случајних променљивих са $Ber(\theta)$ расподелом, $\theta \in [0, 1]$, и Z је случајна променљива са $Ber(\alpha)$ расподелом. Претпоставимо да су случајне променљиве W_i, V_j и Z независне за свако $i \in \mathbb{N}$ и свако $j \in \mathbb{N}$. Овако дефинисане случајне променљиве $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ представљају специјалан случај променљивих које су разматрали Lunn и Davies (1998). Показаћемо да ове случајне променљиве имају $Ber(\alpha)$ расподелу и да су међусобно зависне.

Означимо функцију генератрисе вероватноћа са $\Phi(s)$. Непосредно из дефиниције (2.1.1) следи да је

$$\begin{aligned}
\Phi_{U_i}(s) &= E(s^{(1-V_i)W_i+V_iZ}) \\
&= (1-\theta)E(s^{W_i}) + \theta E(s^Z) \\
&= (1-\theta)(1-\alpha+\alpha s) + \theta(1-\alpha+\alpha s) \\
&= 1-\alpha+\alpha s,
\end{aligned}$$

одакле закључујемо да свака случајна променљива U_i има Бернулијеву расподелу са параметром α, па је тако $E(U_i) = \alpha$ и $Var(U_i) = \alpha(1-\alpha)$. Даље, директним израчунавањем добијамо да је

$$\begin{aligned}
E(U_iU_j) &= E((W_i - V_iW_i + V_iZ)(W_j - V_jW_j + V_jZ)) \\
&= E(W_iW_j) - E(W_iV_jW_j) + E(W_iV_jZ) \\
&\quad -E(V_iW_iW_j) + E(V_iW_iV_jW_j) - E(V_iV_jW_iZ) \\
&\quad +E(V_iW_jZ) - E(V_iV_jW_jZ) + E(V_iV_jZ^2) \\
&= \alpha^2 - \alpha^2\theta^2 + \alpha\theta^2, \text{ за } i \neq j,
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

па одатле имамо да је

$$\begin{aligned} Cov(U_i, U_j) &= E(U_iU_j) - E(U_i)E(U_j) \\ &= \alpha^2 - \alpha^2\theta^2 + \alpha\theta^2 - \alpha^2 \\ &= \theta^2\alpha(1-\alpha), \ i \neq j \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Corr(U_i, U_j) &= \frac{Cov(U_i, U_j)}{Var(U_i)} \\ &= \theta^2 \neq 0, \ \text{за } \theta \neq 0 \text{ и } i \neq j, \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

чиме смо показали да су случајне променљиве U_i међусобно зависне и да је њихова зависност одређена параметром θ.

За дефинисање новог тининг оператора потребно је одредити расподелу случајне променљиве $U_1 + U_2 + \cdots + U_n, n \geq 1, U_0 = 0$. Користећи чињеницу да су случајне променљиве W_i, $i \in \mathbb{N}$ независне и једнако расподељене, добијамо да је функција генератрисе вероватноћа случајне променљиве $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ једнака

$$\begin{aligned} E\left(s^{U_1+U_2+\cdots+U_n}\right) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1-\theta)^{n-j}\theta^j E\left(s^{W_1+W_2+\cdots+W_{n-j}+jZ}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1-\theta)^{n-j}\theta^j (E(s^{W_1}))^{n-j} E(s^{jZ}) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1-\theta)^{n-j}\theta^j (1-\alpha+\alpha s)^{n-j}(1-\alpha+\alpha s^j) \\ &= (1-\alpha)\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1-\theta)^{n-j}\theta^j (1-\alpha+\alpha s)^{n-j} \\ &\quad +\alpha\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1-\theta)^{n-j}\theta^j (1-\alpha+\alpha s)^{n-j} s^j \\ &= (1-\alpha)\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \theta^j ((1-\theta)(1-\alpha+\alpha s))^{n-j} \\ &\quad +\alpha\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (\theta s)^j ((1-\theta)(1-\alpha+\alpha s))^{n-j} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-\alpha)(\theta + (1-\theta)(1-\alpha+\alpha s))^n \\
&\quad +\alpha(\theta s + (1-\theta)(1-\alpha+\alpha s))^n \\
&= (1-\alpha)(1-\alpha(1-\theta)(1-s))^n \\
&\quad +\alpha(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-s))^n.
\end{aligned}
$$

Из последње једнакости закључујемо да случајна променљива $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ има расподелу

$$
U_1 + U_2 + \cdots + U_n \stackrel{p}{=} \begin{cases} Bin(n, \alpha(1-\theta)), & \text{с.в.} \quad 1-\alpha, \\ Bin(n, \theta + \alpha(1-\theta)), & \text{с.в.} \quad \alpha. \end{cases} \tag{2.1.4}
$$

Сада можемо да дефинишемо нови тининг оператор заснован на Бернулијевом бројачком низу зависних случајних променљивих $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Дефиниција 2.1.1 (Ristić, Nastić, Miletić Ilić, 2013) *Нека је X ненегативна целобројна случајна променљива и нека сума случајних променљивих $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ има расподелу дату у (2.1.4). Оператор $\alpha\circ_\theta$, за који важи*

$$
\alpha \circ_\theta X = U_1 + U_2 + \cdots + U_X, \tag{2.1.5}
$$

где су $\alpha, \theta \in [0,1]$, назваћемо генерализовани биномни тининг оператор I врсте.

Одредимо сада функцију генератрисе вероватноћа случајне променљиве $U_1 + U_2 + \ldots + U_X$. Из (2.1.4) добијамо да је

$$
\begin{aligned}
E(s^{U_1+U_2+\ldots+U_X}) &= \sum_{x=0}^{\infty} E(s^{U_1+U_2+\ldots+U_x}) P(X=x) \\
&= (1-\alpha)\sum_{x=0}^{\infty}(1-\alpha(1-\theta)+\alpha(1-\theta)s)^x P(X=x) \\
&\quad +\alpha\sum_{x=0}^{\infty}(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)+(\alpha+\theta-\alpha\theta)s)^x P(X=x) \\
&= (1-\alpha)\Phi_X(1-\alpha(1-\theta)+\alpha(1-\theta)s) \\
&\quad +\alpha\Phi_X(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)+(\alpha+\theta-\alpha\theta)s),
\end{aligned}
$$

па је одавде функција генератрисе вероватноћа генерализованог биномног тининг оператора I врсте

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\alpha\circ_\theta X}(s) &= (1-\alpha)\Phi_X(1-\alpha(1-\theta)+\alpha(1-\theta)s) \\
&\quad +\alpha\Phi_X(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)+(\alpha+\theta-\alpha\theta)s).
\end{aligned} \tag{2.1.6}
$$

Размотримо сада неке специјалне случајеве који следе директно из дефиниције.

Примедба 2.1.1 (*i*) За $\alpha = 0$, добијамо да је $U_1 + \cdots + U_n \stackrel{p}{=} Bin(n,0) \equiv 0$, одакле следи да је $0 \circ_\theta X \stackrel{p}{=} 0$.

(*ii*) За $\alpha = 1$, добијамо да је $U_1 + \cdots + U_n \stackrel{p}{=} Bin(n,1) \equiv n$, одакле следи да је $1 \circ_\theta X \stackrel{p}{=} X$.

(*iii*) За $\theta = 0$, имамо да је $U_1 + \cdots + U_n \stackrel{p}{=} Bin(n,\alpha)$, што значи да је $\alpha\circ_0$ биномни тининг оператор $\alpha\circ$.

(*iv*) За $\theta = 1$, важи да је $U_1 + \cdots + U_n$ мешавина нуле и константе n са вероватноћама $1-\alpha$ и α, редом. Одавде следи да је $\alpha \circ_1 X \stackrel{p}{=} ZX$, где је Z случајна променљива са $Ber(\alpha)$ расподелом, независна од X.

Следећом теоремом описана је веза између генерализованог биномног тининг оператора I врсте "$\alpha\circ_\theta$"и биномног тининг оператора "$\alpha\circ$".

Теорема 2.1.1 (Ristić, Nastić, Miletić Ilić, 2013) *Нека су I_α и I_β две независне случајне променљиве редом са $Ber(\alpha)$ и $Ber(\beta)$ расподелама, $\alpha, \beta \in (0,1)$, и претпоставимо да су независне од случајне променљиве X. Нека су бројачки низови тининг оператора $\alpha\circ_\theta$ и $\beta\circ_\delta$ међусобно независни, и независни од X, где су $\theta, \delta \in (0,1)$. Тада важи:*

(*i*) $\alpha \circ_\theta X \stackrel{p}{=} (I_\alpha\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ X$, *где је*

$$(I_\alpha\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ X = \begin{cases} (\alpha(1-\theta)) \circ X, & \textit{с.в.} \ \ 1-\alpha, \\ (\theta + \alpha(1-\theta)) \circ X, & \textit{с.в.} \ \ \alpha. \end{cases}$$

(*ii*) $\alpha \circ_\theta (\beta \circ_\delta X) \stackrel{p}{=} ((I_\alpha\theta + \alpha - \alpha\theta)(I_\beta\delta + \beta - \beta\delta)) \circ X$, *где је*

$$((I_\alpha\theta + \alpha - \alpha\theta)(I_\beta\delta + \beta - \beta\delta))\circ X =$$

$$= \begin{cases} (\alpha\beta(1-\theta)(1-\delta)) \circ X, & \textit{с.в.} \ \ (1-\alpha)(1-\beta), \\ ((\theta + \alpha(1-\theta))\beta(1-\delta)) \circ X, & \textit{с.в.} \ \ \alpha(1-\beta), \\ (\alpha(1-\theta)(\delta + \beta(1-\delta))) \circ X, & \textit{с.в.} \ \ (1-\alpha)\beta, \\ ((\theta + \alpha(1-\theta))(\delta + \beta(1-\delta))) \circ X, & \textit{с.в.} \ \ \alpha\beta. \end{cases}$$

Доказ. (i) Директно из (2.1.6) следи да је

$$\alpha \circ_\theta X = \begin{cases} (\alpha(1-\theta)) \circ X, & \text{с.в. } 1-\alpha, \\ (\theta + \alpha(1-\theta)) \circ X, & \text{с.в. } \alpha. \end{cases} = (I_\alpha \theta + \alpha - \alpha\theta) \circ X.$$

(ii) За израчунавање функције генератрисе вероватноћа случајне променљиве $\alpha \circ_\theta (\beta \circ_\delta X)$ користићемо тврђење (i) ове теореме, па тако имамо да је

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\circ_\theta(\beta\circ_\delta X)} &= (1-\alpha)\Phi_{\beta\circ_\theta X}(1-\alpha(1-\theta)+\alpha(1-\theta)s) \\ &+ \alpha\Phi_{\beta\circ_\theta X}(1-(\theta+\alpha(1-\theta))+(\theta+\alpha(1-\theta))s). \end{aligned}$$

Ако уведемо ознаку $\Phi_X(1-\alpha+\alpha s) \equiv \boldsymbol{\varphi}(\alpha, s)$, добијамо даље

$$\begin{aligned} \Phi_{\alpha\circ_\theta(\beta\circ_\delta X)} &= (1-\alpha)\left\{(1-\beta)\boldsymbol{\varphi}\left(\beta(1-\delta), 1-\alpha(1-\theta)+\alpha(1-\theta)s\right)\right. \\ &\left. + \beta\boldsymbol{\varphi}\left(\delta+\beta(1-\delta), 1-\alpha(1-\theta)+\alpha(1-\theta)s\right)\right\} \\ &+\alpha\left\{(1-\beta)\boldsymbol{\varphi}\left(\beta(1-\delta), 1-(\theta+\alpha(1-\theta))+(\theta+\alpha(1-\theta))s\right)\right. \\ &\left. + \beta\boldsymbol{\varphi}\left(\delta+\beta(1-\delta), 1-(\theta+\alpha(1-\theta))+(\theta+\alpha(1-\theta))s\right)\right\} \\ &= (1-\alpha)(1-\beta)\boldsymbol{\varphi}\left(\alpha\beta(1-\theta)(1-\delta), s\right) \\ &+(1-\alpha)\beta\boldsymbol{\varphi}\left(\alpha(1-\theta)(\delta+\beta(1-\delta)), s\right) \\ &+\alpha(1-\beta)\boldsymbol{\varphi}\left((\theta+\alpha(1-\theta))\beta(1-\delta), s\right) \\ &+\alpha\beta\boldsymbol{\varphi}\left((\theta+\alpha(1-\theta))(\delta+\beta(1-\delta)), s\right). \end{aligned}$$

Из последње једнакости директно следи да је

$$\begin{aligned} \alpha \circ_\theta (\beta \circ_\delta X) &\stackrel{p}{=} \begin{cases} (\alpha\beta(1-\theta)(1-\delta)) \circ X, & \text{с.в. } (1-\alpha)(1-\beta), \\ ((\theta+\alpha(1-\theta))\beta(1-\delta)) \circ X, & \text{с.в. } \alpha(1-\beta), \\ (\alpha(1-\theta)(\delta+\beta(1-\delta))) \circ X, & \text{с.в. } (1-\alpha)\beta, \\ ((\theta+\alpha(1-\theta))(\delta+\beta(1-\delta))) \circ X, & \text{с.в. } \alpha\beta. \end{cases} \\ &= ((I_\alpha\theta+\alpha-\alpha\theta)(I_\beta\delta+\beta-\beta\delta)) \circ X. \ \square \end{aligned}$$

Из претходне теореме следи да се друга особина може написати као

$$(I_\alpha\theta+\alpha-\alpha\theta) \circ ((I_\beta\delta+\beta-\beta\delta) \circ X) \stackrel{p}{=} ((I_\alpha\theta+\alpha-\alpha\theta)(I_\beta\delta+\beta-\beta\delta)) \circ X,$$

што значи да добро позната особина биномног тининг оператора $\alpha \circ (\beta \circ X) \stackrel{p}{=} (\alpha\beta) \circ X$ важи и за генерализовани биномни тининг оператор I врсте.

2.1.2 Особине генерализованог биномног тининг оператора I врсте

Нека је X ненегативна целобројна случајна променљива и нека су $\alpha \in [0,1]$, $\theta \in [0,1]$ и $\beta \in [0,1]$. Следећом лемом дајемо својства оператора "$\alpha \circ_\theta$".

Лема 2.1.1 (Ristić, Nastić, Miletić Ilić, 2013) *Генерализовани биномни тининг оператор* I *врсте "$\alpha \circ_\theta$" има следеће особине:*

(*i*) $E(\alpha \circ_\theta X) = \alpha E(X)$.

(*ii*) $E(\alpha \circ_\theta X)^2 = \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)E(X) + \alpha(\alpha + (1-\alpha)\theta^2)E(X^2)$.

(*iii*) $E(X(\alpha \circ_\theta Y)) = \alpha E(XY)$, *ако су бројачки низови тининг оператора "$\alpha \circ_\theta$" независни од X и Y.*

(*iv*) $E(X(\alpha \circ_\theta Y)^2) = \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)E(XY) + (\alpha^2 + \alpha(1-\alpha)\theta^2)E(XY^2)$, *ако су бројачки низови тининг оператора "$\alpha \circ_\theta$" независни од X и Y.*

(*v*) $E((\alpha \circ_\theta X)(\beta \circ_\theta Y)) = \alpha\beta E(XY)$, *ако су одговарајући бројачки низови тининг оператора међусобно независни и независни од X и Y.*

(*vi*) $E((\alpha \circ_\theta X)^2(\beta \circ_\theta Y)) = \alpha\beta(1-\alpha)(1-\theta^2)E(XY) + \beta(\alpha^2 + \alpha(1-\alpha)\theta^2)E(X^2Y)$, *ако су одговарајући бројачки низови тининг оператора међусобно независни и независни од X и Y.*

(*vii*) $E(X(\alpha \circ_\theta Y)(\beta \circ_\theta Z)) = \alpha\beta E(XYZ)$, *ако су одговарајући бројачки низови тининг оператора међусобно независни и независни од X, Y и Z.*

(*viii*) $E((\alpha \circ_\theta X)(\beta \circ_\theta Y)(\gamma \circ_\theta Z)) = \alpha\beta\gamma E(XYZ)$, *ако су одговарајући бројачки низови тининг оператора међусобно независни и независни од X, Y и Z.*

(*ix*) $Cov(X, \alpha \circ_\theta Y) = \alpha Cov(X,Y)$.

(x) $\alpha \circ_\theta (X+Y) \stackrel{p}{=} (I_\alpha\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ X + (I_\alpha\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ Y$, *где су* X *и* Y *независне случајне променљиве,* I_α *је случајна променљива са* $Ber(\alpha)$ *расподелом и независна је од* X *и* Y*, и бројачки низови за* $(I_\alpha\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ X$ *и* $(I_\alpha\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ Y$ *су независни.*

(xi) $E(\alpha \circ_\theta X|X) = \alpha X$.

(xii) $E((\alpha \circ_\theta X)^2|X) = \alpha(\alpha + (1-\alpha)\theta^2)X^2 + \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)X$.

(xiii) $Var(\alpha \circ_\theta X|X) = \alpha(1-\alpha)\left(\theta^2 X^2 + (1-\theta^2)X\right)$.

Доказ. Овде ћемо доказати само неке од особина док се остале доказују на сличан начин као у Silva и Oliveira (2004).

(iv) Означимо са $p(x,y) \equiv P(X=x, Y=y)$. Имамо да је

$$\begin{aligned}
E(X(\alpha \circ_\theta Y)^2) &= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} E\left(x\left(\sum_{i=1}^{y} U_i\right)^2\right) p(x,y) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} E\left[x\left(\sum_{i=1}^{y} U_i^2 + \sum_{i=1}^{y}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{y} U_iU_j\right)\right] p(x,y) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} \left[xyE(U_i^2) + xy(y-1)E(U_iU_j)\right] p(x,y) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} \left[xy(E(U_i^2) - E(U_iU_j)) + xy^2E(U_iU_j)\right] p(x,y) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty} \left[\alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)xy + (\alpha^2 + \alpha(1-\alpha)\theta^2)xy^2\right] p(x,y) \\
&= \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)E(XY) + (\alpha^2 + \alpha(1-\alpha)\theta^2)E(XY^2).
\end{aligned}$$

(x) Користећи Теорему 2.1.1 и особине биномног тининг оператора добијамо да је

$$\begin{aligned}
\alpha \circ_\theta (X+Y) &\stackrel{p}{=} (1_\alpha\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ (X+Y) \\
&\stackrel{p}{=} \begin{cases} \alpha(1-\theta) \circ (X+Y), & \text{с.в.} \quad 1-\alpha, \\ (\theta + \alpha - \alpha\theta) \circ (X+Y), & \text{с.в.} \quad \alpha. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{p}{=} \begin{cases} \alpha(1-\theta)\circ X + \alpha(1-\theta)\circ Y, & \text{с.в.} \quad 1-\alpha, \\ (\theta+\alpha-\alpha\theta)\circ X + (\theta+\alpha-\alpha\theta)\circ Y, & \text{с.в.} \quad \alpha. \end{cases} \\
&\stackrel{p}{=} (1_\alpha\theta+\alpha-\alpha\theta)\circ X + (1_\alpha\theta+\alpha-\alpha\theta)\circ Y.
\end{aligned}$$

(xii) Овде имамо да је

$$\begin{aligned}
E\left((\alpha\circ_\theta X)^2|X=x\right) &= E\left(\sum_{i=1}^{x} U_i^2 + \sum_{i=1}^{x}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{x} U_iU_j\right) \\
&= xE(U_i^2) + x(x-1)E(U_iU_j) \\
&= x^2E(U_iU_j) + x(E(U_i^2) - E(U_iU_j)) \\
&= \alpha(\alpha+(1-\alpha)\theta^2)x^2 + \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)x,
\end{aligned}$$

па одавде следи особина (xii).

$(xiii)$ Доказ ове особине директно следи из особина (xi) и (xii) и из једнакости

$$Var(\alpha\circ_\theta X|X) = E((\alpha\circ_\theta X)^2|X) - (E(\alpha\circ_\theta X|X))^2 . \ \square$$

2.1.3 Конструкција и основна својства модела DCINAR(1)

Уведимо сада ненегативни целобројни ауторегресивни временски низ (DCINAR(1))[1], базиран на генерализованом биномном тининг оператору I врсте. Под овим временским низом подразумевамо низ случајних променљивих $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$, који задовољава једначину

$$X_t = \alpha\circ_\theta X_{t-1} + \varepsilon_t, \ \ t\in\mathbb{Z}, \tag{2.1.7}$$

где је $\alpha\in[0,1]$, $\theta\in[0,1]$ и при томе важе следећи услови:

(A1) $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ је низ независних једнако расподељених случајних променљивих, таквих да је $Cov(\varepsilon_t, X_s)$, $s<t$,

(A2) случајне променљиве $\{U_i\}_{i\geq 1}$ су независне од X_j и ε_k, за свако i,j,k,

[1]Dependent counting INAR

(A3) бројачки низови случајних променљивих $\{U_i\}_{i\geq 1}$, који се користе за генерисање X_t и X_s, су међусобно независни за $t \neq s$.

Дефиниција 2.1.2 (Ristić, Nastić, Miletić Ilić, 2013) *Низ* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ *ненегативних целобројних случајних променљивих је* $INAR$ *временски низ реда 1 са зависним бројачким низом* ($DCINAR(1)$)*, ако постоји низ* $\{\varepsilon_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$*, тако да важи једначина (2.1.7) и да су задовољени услови (A1)-(A3).*

Надаље претпостављамо да су случајне променљиве временског низа једнако расподељене. Сличним поступком као у Nastić (2008) показаћемо да је DCINAR(1) временски низ ланац Маркова. Наиме, из (2.1.7) следи да је X_t функција од $X_{t-1}, U_1^{(t-1)}, U_2^{(t-1)}, \ldots, U_{X_{t-1}}^{(t-1)}, \varepsilon_t$, где горњи индекс означава тренутак у коме је примењен тининг. X_{t-1} је функција од $X_{t-2}, U_1^{(t-2)}, U_2^{(t-2)}, \ldots, U_{X_{t-2}}^{(t-2)}, \varepsilon_{t-1}$. Видимо да X_t од даље прошлости зависи само посредно преко X_{t-1}, па следи да је DCINAR(1) временски низ ланац Маркова. Показаћемо да је строго стационаран и ергодичан. Доказе изводимо као у Nastić (2008) и Du и Li (1991).

Лема 2.1.2 $DCINAR(1)$ *временски низ са једнаким расподелама случајних променљивих је строго стационаран.*

Доказ. Треба показати да за свако n и k из $\mathbb{N}$ важи

$$P(X_1 = j_1, X_2 = j_2, \ldots, X_k = j_k) = P(X_{n+1} = j_1, X_{n+2} = j_2, \ldots, X_{n+k} = j_k).$$

$\{X_n\}$ је ланац Маркова, па имамо да је

$$\begin{aligned}
P(X_1 = j_1, \ldots, X_k = j_k) &= P(X_k = j_k | X_{k-1} = j_{k-1}) \\
&\quad \times \cdots \times P(X_2 = j_2 | X_1 = j_1) P(X_1 = j_1), \\
P(X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+k} = j_k) &= P(X_{n+k} = j_k | X_{n+k-1} = j_{k-1}) \\
&\quad \times \cdots \times P(X_{n+2} = j_2 | X_{n+1} = j_1) P(X_{n+1} = j_1).
\end{aligned}$$

Из претпоставке да су случајне променљиве једнако расподељене следи да је $P(X_1 = j_1) = P(X_{n+1} = j_1)$, па остаје да се покаже да је $P(X_{i+1} = j_{i+1} | X_i = j_i) = P(X_{n+i+1} = j_{i+1} | X_{n+i} = j_i)$, за свако

$i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$. За неко $x \in \mathbb{N}_0$ и неко $y \in \mathbb{N}_0$, користећи чињеницу да су случајне променљиве $\{\varepsilon_n\}$ једнако расподељене, добијамо

$$\begin{aligned}
P(X_{i+1} = y | X_i = x) &= P\left(\sum_{l=1}^{x} U_l + \varepsilon_{i+1} = y\right) \\
&= \sum_{k=0}^{min(x,y)} P\left(\sum_{l=1}^{x} U_l = k\right) P(\varepsilon_{i+1} = y - k) \\
&= \sum_{k=0}^{min(x,y)} P\left(\sum_{l=1}^{x} U_l = k\right) P(\varepsilon_{n+i+1} = y - k) \\
&= P(X_{n+i+1} = y | X_{n+i} = x). \ \Box
\end{aligned}$$

За доказивање ергодичности потребна су нам помоћна тврђења.

Дефиниција 2.1.3 (Širjaev, 1989) *Нека је дат низ случајних променљивих* $\xi_0, \xi_{\pm 1}, \xi_{\pm 2}, \ldots$ *Ако је* $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots)$ σ*-алгебра генерисана са* $\{\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots\}$*, онда је* $\mathcal{X} = \bigcap_{n=0}^{-\infty} \mathcal{F}_n$*, репна* σ*-алгебра.*

Лема 2.1.3 (Širjaev, 1989) *Ако је* $\xi_0, \xi_{\pm 1}, \xi_{\pm 2}, \ldots$ *низ независних случајних променљивих и ако је* $A \in \mathcal{X}$*, где је* $\mathcal{X}$ *дато у претходној Дефиницији 2.1.3, тада је* $P(A) = 0$ *или* $P(A) = 1$*.*

Лема 2.1.4 (Širjaev, 1989) *Строго стационаран процес* $\{X_n\}$ *је ергодичан, ако је вероватноћа произвољног инваријантног догађаја у односу на овај процес једнака 0 или 1.*

Теорема 2.1.2 *Строго стационаран* $DCINAR(1)$ *процес је ергодичан.*

Доказ. Нека је A произвољни догађај, инваријантан у односу на временски низ $\{X_n\}$. Дакле, постоји неки скуп B, такав да је $A = \{\omega | (X_n, X_{n-1}, \ldots) \in B\}$, за свако $n \in \mathbb{Z}$. Ако је $\mathcal{F}(X_n, X_{n-1}, \ldots)$ σ-алгебра генерисана са $\{X_n, X_{n-1}, \ldots\}$, тада $A \in \mathcal{F}(X_n, X_{n-1}, \ldots)$, за свако $n \in \mathbb{Z}$. На основу (2.1.7) следи да је $\mathcal{F}(X_n, X_{n-1}, \ldots) \subseteq \mathcal{F}\left(\varepsilon_n, \boldsymbol{U}^{(n)}, \varepsilon_{n-1}, \boldsymbol{U}^{(n-1)}, \ldots\right)$, где је $\boldsymbol{U}^{(n)}$ одговарајући бројачки низ

$\{U_i\}$ којим је генерисана случајна променљива X_n. Одатле имамо да $A \in \mathcal{F}\left(\varepsilon_n, \boldsymbol{U}^{(n)}, \varepsilon_{n-1}, \boldsymbol{U}^{(n-1)}, \dots\right)$, за свако $n \in \mathbb{Z}$, па самим тим и

$$A \in \bigcap_{n=0}^{-\infty} \mathcal{F}\left(\varepsilon_n, \boldsymbol{U}^{(n)}, \varepsilon_{n-1}, \boldsymbol{U}^{(n-1)}, \dots\right). \tag{2.1.8}$$

Из услова (A1)-(A3) следи да је $\left\{\varepsilon_n, \boldsymbol{U}^{(n)}\right\}$ низ независних случајних променљивих. Десна страна у (2.1.8) је репна σ-алгебра, па на основу Леме 2.1.3 и Леме 2.1.4 следи да је временски низ $\{X_n\}$ ергодичан. □

Ако са μ_ε и μ означимо, редом, очекивања случајних променљивих ε_t и X_t, под претпоставком да постоји $E(X_t)$, онда из особине (iii) Леме 2.1.1, директно следи да је $\mu_\varepsilon = (1-\alpha)\mu$.

Аутокорелациона структура модела

Израчунајмо аутоковаријансну функцију реда k:

$$\begin{aligned}\gamma(k) \equiv Cov(X_{t+k}, X_t) &= Cov(\alpha \circ_\theta X_{t+k-1} + \varepsilon_{t+k}, X_t)\\ &= Cov(\alpha \circ_\theta X_{t+k-1}, X_t).\end{aligned}$$

Користећи особину (xi) Леме 2.1.1, имамо да је

$$\gamma(k) = \alpha Cov(X_{t+k-1}, X_t) = \alpha\gamma(k-1).$$

Понављајући сада поступак k пута, добијамо да је

$$\gamma(k) = \alpha^k \gamma(0),\ \ k \geq 0, \tag{2.1.9}$$

а одатле следи да је аутокорелациона функција реда k

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \alpha^k,\ \ k \geq 0, \tag{2.1.10}$$

под претпоставком да је $\gamma(0) < \infty$. Приметимо да је аутокорелациона функција истог облика као код стандардних AR(1) модела и да опада експоненцијално када $k \to \infty$.

2.1.4 Условне статистичке особине DCINAR(1) модела

Одредимо најпре условно очекивање за један корак. Користећи особину ($xiii$) Леме 2.1.1, добијамо

$$E(X_{t+1}|X_t) = \alpha X_t + (1-\alpha)\mu. \tag{2.1.11}$$

Слично, за $k = 2$:

$$\begin{aligned} E(X_{t+2}|X_t) &= E(E(X_{t+2}|X_{t+1})|X_t) = E(\alpha X_{t+1} + (1-\alpha)\mu|X_t) \\ &= \alpha(\alpha X_t + (1-\alpha)\mu) + (1-\alpha)\mu = \alpha^2 X_t + (1-\alpha)\mu(1+\alpha). \end{aligned}$$

Понављајући поступак k пута, лако се израчунава да важи

$$E(X_{t+k}|X_t) = \alpha^k X_t + (1-\alpha^k)\mu. \tag{2.1.12}$$

Одавде је очигледно да $E(X_{t+k}|X_t) \to E(X_t)$, када $k \to \infty$, односно условно очекивање конвергира ка безусловном математичком очекивању.

Да бисмо израчунали условну дисперзију одредићемо најпре условни други момент. Тако за $k = 1$ имамо да је

$$E(X_{t+1}^2|X_t) = E((\alpha \circ_\theta X_t)^2|X_t) + 2\mu_\varepsilon E(\alpha \circ_\theta X_t|X_t) + E(\varepsilon_{t+1}^2).$$

Користећи сада особине ($xiii$) и (xiv) Леме 2.1.1, добијамо

$$E(X_{t+1}^2|X_t) = \alpha(\alpha + (1-\alpha)\theta^2)X_t^2 + \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)X_t + 2\alpha X_t\mu_\varepsilon + E(\varepsilon_{t+1}^2).$$

Коначно, из претходног и из једнакости

$$Var(X_{t+1}|X_t) = E(X_{t+1}^2|X_t) - (E(X_{t+1}|X_t))^2,$$

следи да је

$$Var(X_{t+1}|X_t) = \alpha\theta^2(1-\alpha)X_t^2 + \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)X_t + \sigma_\varepsilon^2, \tag{2.1.13}$$

где σ_ε^2 означава дисперзију случајне променљиве ε_t.

Слично, за $k = 2$:

$$\begin{aligned} E(X_{t+2}^2|X_t) &= E(E(X_{t+2}^2|X_{t+1})|X_t) \\ &= a^2X_t^2 + b(a+\alpha)X_t + b(1-\alpha)\mu + (1+a)E(\varepsilon_{t+1}^2), \end{aligned}$$

где је $a = \alpha^2 - \alpha^2\theta^2 + \alpha\theta^2$, $b = \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2+2\mu)$.

За $k = 3$ добијамо:

$$\begin{aligned}E(X_{t+3}^2|X_t) &= E(E(X_{t+3}^2|X_{t+1})|X_t)\\ &= a^3X_t^2 + b(a^2+a\alpha+\alpha^2)X_t + b(1-\alpha)\mu(a+\alpha+1)\\ &\quad +(a^2+a+1)E(\varepsilon_{t+1}^2),\end{aligned}$$

што се може другачије записати као

$$\begin{aligned}E(X_{t+3}^2|X_t) &= a^3X_t^2 + b\frac{a^3-\alpha^3}{a-\alpha}X_t + \frac{b(1-\alpha)\mu}{a-\alpha}\left(\frac{a^3-1}{a-1} - \frac{\alpha^3-1}{\alpha-1}\right)\\ &\quad +\frac{a^3-1}{a-1}E(\varepsilon_{t+1}^2).\end{aligned}$$

Настављајући поступак и посматрајући добијене формуле може се закључити да је условни други момент за k корака једнак

$$E(X_{t+k}^2|X_t) = a^kX_t^2 + b\frac{a^k-\alpha^k}{a-\alpha}X_t + \frac{b(1-\alpha)\mu}{a-\alpha}\left(\frac{a^k-1}{a-1} - \frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}\right) + \frac{a^k-1}{a-1}E(\varepsilon_{t+1}^2),$$

што се може доказати математичком индукцијом.

Из последње једнакости и из (2.1.12) добијамо да је условна дисперзија за k корака дата са

$$\begin{aligned}Var(X_{t+k}|X_t) &= E(X_{t+k}^2|X_t) - (E(X_{t+k}|X_t))^2\\ &= (a^k - \alpha^{2k})X_t^2 + \left(b\frac{a^k-\alpha^k}{a-\alpha} - 2\mu\alpha^k(1-\alpha^k)\right)X_t\\ &\quad +\frac{a^k-1}{a-1}\sigma_\varepsilon^2 + \frac{b(1-\alpha)\mu}{a-\alpha}\left(\frac{a^k-1}{a-1} - \frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}\right)\\ &\quad +(1-\alpha)^2\left(\frac{a^k-1}{a-1} - \frac{(1-\alpha^k)^2}{(1-\alpha)^2}\right)\mu^2.\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Приметимо да условна дисперзија временског низа зависи од X_t^2, то јест квадратно зависи од прошлости временског низа. Како је коефицијент ове зависности $(\alpha^2 - \alpha^2\theta^2 + \alpha\theta^2)^k - \alpha^{2k}$, видимо да овај квадратни утицај нестаје када вредност параметра α тежи нули или јединици, или када θ тежи нули. Са друге стране, како је $\alpha < 1$ и $a = \alpha(\alpha + (1-\alpha)\theta^2) < \alpha + 1 - \alpha = 1$, то се директном провером утврђује да $Var(X_{t+k}|X_t) \to Var(X_t)$, односно условна дисперзија тежи безусловној дисперзији за велике вредности k.

Расподела иновационог низа

Надаље претпостављамо да временски низ $\{X_t\}$ има геометријску маргиналну расподелу са параметром $\frac{\mu}{1+\mu}$, $\mu > 0$. На тај начин добијамо геометријски INAR модел реда један, са зависним бројачким низом DCGINAR(1)[2]. Мотивација за избор геометријске маргиналне расподеле биће објашњена касније у одељку о примени на реалним подацима. У овом одељку размотрићемо нека својства овог модела.

Расподела иновационог низа ε_t дата је следећом теоремом.

Теорема 2.1.3 (Ristić, Nastić, Miletić Ilić, 2013) *Нека су $\alpha, \theta \in (0,1)$ и нека временски низ $\{X_t\}$ дефинисан са (2.1.7) има геометријску расподелу са параметром $\frac{\mu}{1+\mu}$, $\mu > 0$. Тада је случајна променљива ε_t мешавина нуле и две геометријски расподељене случајне променљиве*

$$\varepsilon_t \stackrel{p}{=} \begin{cases} 0, & \text{с.в. } \frac{\alpha(1-\theta)(\alpha+\theta-\alpha\theta)}{\alpha+\theta-2\alpha\theta} \\ Geom(\frac{\mu}{1+\mu}), & \text{с.в. } \frac{(1-\alpha(1-\theta))(1-\alpha)(1-\theta)}{1-\alpha-\theta+2\alpha\theta} \\ Geom(\frac{(\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu}{1+(\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu}), & \text{с.в. } \frac{\alpha(1-\alpha)\theta^2}{(\alpha+\theta-2\alpha\theta)(1-\alpha-\theta+2\alpha\theta)} \end{cases}.$$

Доказ. Полазећи од дефиниције модела (2.1.7), одредићемо функцију генератрисе вероватноћа случајне променљиве ε_t.

Из (2.1.6) добијамо да је функција генератрисе вероватноћа случајне променљиве ε_t

$$\phi_\varepsilon(s) = \frac{\phi_X(s)}{(1-\alpha)\phi_X(1-\alpha(1-\theta)(1-s)) + \alpha\phi_X(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)(1-s))}.$$

Користећи сада претпоставку о геометријској маргиналној расподели временског низа, добијамо да је

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon(s) &= \frac{\frac{1}{1+\mu-\mu s}}{\frac{1-\alpha}{1+\mu-\mu(1-\alpha(1-\theta)+\alpha(1-\theta)\mu s)} + \frac{\alpha}{1+\mu-\mu(1-(\alpha+\theta-\alpha\theta)+(\alpha+\theta-\alpha\theta)\mu s)}} \\ &= \frac{\frac{1}{1+\mu-\mu s}}{\frac{[1+\alpha(1-\theta)\mu-\alpha(1-\theta)\mu s][1+(\alpha+\theta-\alpha\theta)\mu-(\alpha+\theta-\alpha\theta)\mu s]}{(1-\alpha)[1+(\alpha+\theta-\alpha\theta)\mu-(\alpha+\theta-\alpha\theta)\mu s]+\alpha[1+\alpha(1-\theta)\mu-\alpha(1-\theta)\mu s]}}. \end{aligned}$$

[2]Dependent counting geometric INAR

Након једноставног срeђивања имениоца у другом разломку добијамо

$$\phi_\varepsilon(s) = \frac{[1+\alpha(1-\theta)\mu - \alpha(1-\theta)\mu s][1+(\alpha+\theta-\alpha\theta)\mu - (\alpha+\theta-\alpha\theta)\mu s]}{(1+\mu-\mu s)[1+(\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu - (\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu s]},$$

што можемо написати у облику

$$\begin{aligned}\phi_\varepsilon(s) &= C + A_1 \cdot \frac{1}{1+\mu-\mu s} \\ &\quad + A_2 \cdot \frac{1}{1+(\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu - (\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu s}, \qquad (2.1.15)\end{aligned}$$

где је

$$C = \frac{\alpha(1-\theta)(\alpha+\theta-\alpha\theta)}{\alpha+\theta-2\alpha\theta}.$$

Одредимо сада коефицијенте A_1 и A_2. Уведимо ознаке $a \equiv \alpha + \theta - 2\alpha\theta$ и $b \equiv \alpha+\theta-\alpha\theta$. Из претходне две једнакости имамо да је

$$\begin{gathered} a[1+\alpha(1-\theta)\mu - \alpha(1-\theta)\mu s][1+b\mu-b\mu s] = \\ = \alpha(1-\theta)b(1+\mu-\mu s)[1+a\mu-a\mu s] \\ +A_1 a[1+a\mu-a\mu s] + A_2 a(1+\mu-\mu s). \end{gathered}$$

Нека је $1+\mu-\mu s = 0$, тј. $s = 1+\frac{1}{\mu}$. Заменом у претходној једнакости, добијамо да су први и трећи сабирак на десној страни једнаки нули па одатле добијамо да је

$$A_1 = \frac{(1-\alpha(1-\theta))(1-\alpha)(1-\theta)}{1-\alpha-\theta+2\alpha\theta}.$$

На сличан начин, претпостављајући сада да је $s = 1 + \frac{1}{(\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu}$, добићемо да је

$$A_2 = \frac{\alpha\theta^2(1-\alpha)}{(\alpha+\theta-2\alpha\theta)(1-\alpha-\theta+2\alpha\theta)}.$$

Остаје још да проверимо да ли су коефицијенти C, A_1 и A_2 вероватноће, тј. да је њихов збир једнак 1 и да су им вредности из интервала $[0,1]$. Довољно је показати да су ови бројеви ненегативни и да је њихов збир 1. Директном провером се утврђује да је $C + A_1 + A_2 = 1$. Показаћемо да су ненегативни. Из услова $\alpha \in (0,1)$ и $\theta \in (0,1)$, директно добијамо следеће неједнакости:

$$\alpha + \theta - \alpha\theta = \alpha + \theta(1-\alpha) > 0,$$

$$\alpha + \theta - 2\alpha\theta = \alpha(1-\theta) + \theta(1-\alpha) > 0,$$

па је одавде $C > 0$. Даље,

$$1 - \alpha(1-\theta) > 0,$$

$$1 - \alpha - \theta + 2\alpha\theta = (1-\alpha)(1-\theta) + \alpha\theta > 0,$$

па одавде имамо да је $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$.

Како су $\frac{1}{1+\mu-\mu s}$ и $\frac{1}{1+(\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu-(\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu s}$ функције генератрисе вероватноћа случајних променљивих са геометријским расподелама, редом са параметрима $\frac{\mu}{1+\mu}$ и $\frac{(\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu}{1+(\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu}$, и константа 1 је функција генератрисе вероватноћа случајне променљиве 0, то из (2.1.15) доказ директно следи. □

Приметимо да вероватноће у претходној теореми не зависе од параметра μ, односно не зависе од избора параметра геометријске расподеле посматраног временског низа.

Последица 2.1.1 *Ако су задовољени услови Теореме 2.1.3, онда су очекивање и дисперзија случајне променљиве ε_t, редом*

$$\mu_\varepsilon = (1-\alpha)\mu, \ \sigma_\varepsilon^2 = (1-\alpha)\mu(1 + (1 + \alpha - 2\alpha\theta^2)\mu). \tag{2.1.16}$$

Примедба 2.1.2 (Ristić, Nastić, Miletić Ilić, 2013) Размотримо неке специјалне случајеве:

(*i*) Ако је $\alpha = 0$, онда је $X_t = \varepsilon_t$, па је $\{X_t\}$ низ независних једнако расподељених случајних променљивих са $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$ расподелом.

(*ii*) Ако је $\alpha = 1$, онда је $X_t = X_{t-1}$, па је $X_t = X_i$, за свако $t, i \in \mathbb{Z}$.

(*iii*) Ако је $\theta = 0$, временски низ $\{X_t\}$ се своди на GINAR(1) временски низ који су дефинисали Alzaid и Al-Osh (1998).

(*iv*) Ако је $\theta = 1$, онда је $X_t = Z_t X_{t-1} + \varepsilon_t$, где је $\{\varepsilon_t\}$ низ независних случајних променљивих са $Geom\left(\frac{(1-\alpha)\mu}{1+(1-\alpha)\mu}\right)$ расподелом, $\{Z_t\}$ је низ независних случајних променљивих са $Ber(\alpha)$ расподелом, случајне променљиве ε_t и Z_s су независне за свако t и s, и X_{t-l} је независно од ε_t и Z_t за свако $l \geq 1$.

2.1.5 Оцењивање непознатих параметара DCGINAR(1) модела

У овом одељку оценићемо непознате параметре DCGINAR(1) модела методом условних најмањих квадрата (CLS)[3], методом момената (YW)[4] и методом максималне веродостојности (ML)[5]. Све оцене ће бити засноване на реализацији случајног вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ посматраног временског низа.

Метод условних најмањих квадрата

За оцењивање параметара α и μ методом условних најмањих квадрата користићемо функцију $Q_N(\alpha, \mu)$. Како ова функција садржи само параметре α и μ, то ћемо прво оценити ова два параметра, а након тога ћемо оценити параметар θ. Дакле, функција коју минимизирамо је

$$Q_N(\alpha, \mu) = \sum_{t=2}^{N} (X_t - \alpha X_{t-1} - (1-\alpha)\mu)^2. \qquad (2.1.17)$$

Ова сума квадрата тј. функција $Q_N(\alpha, \mu)$ је иста као код NGINAR(1) временског низа, па се добијају и исте оцене. Тако имамо

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{cls} &= \frac{\sum_{t=2}^{N} X_t X_{t-1} - \frac{1}{N-1} \sum_{t=2}^{N} X_t \sum_{t=2}^{N} X_{t-1}}{\sum_{t=2}^{N} X_{t-1}^2 - \frac{1}{N-1} (\sum_{t=2}^{N} X_{t-1})^2}, \\ \hat{\mu}_{cls} &= \frac{\sum_{t=2}^{N} X_t - \hat{\alpha}_{cls} \sum_{t=2}^{N} X_{t-1}}{(N-1)(1-\hat{\alpha}_{cls})}. \end{aligned}$$

Функција $Q_N(\alpha, \mu)$ не садржи параметар θ, па ћемо за оцењивање параметра θ користити метод који су представили Karlsen и Tjostheim (1998). Уводимо нову случајну промењливу

$$V_t = (X_t - E(X_t | X_{t-1}))^2 = (X_t - \alpha X_{t-1} - (1-\alpha)\mu)^2.$$

[3]Conditional least squares

[4]Yule-Walker
Udny Yule (1871-1951), британски статистичар
Gilbert Walker (1868-1958), британски статистичар

[5]Maximum likelihood

Даље, користећи (2.1.13) имамо

$$
\begin{aligned}
E(V_t|X_{t-1}) &= E((X_t - E(X_t|X_{t-1}))^2|X_{t-1}) = Var(X_t|X_{t-1}) \\
&= \alpha\theta^2(1-\alpha)X_{t-1}^2 + \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)X_{t-1} \\
&\quad +(1-\alpha)\mu(1+(1+\alpha-2\alpha\theta^2)\mu).
\end{aligned}
$$

Оцену условних најмањих квадрата параметра θ добићемо минимизирањем суме квадрата

$$
\begin{aligned}
S_N(\theta^2) &= \sum_{t=2}^{N}(V_t - E(V_t|X_{t-1}))^2 \\
&= \sum_{t=2}^{N}\big[V_t - \alpha(1-\alpha)(X_{t-1}^2 - X_{t-1} - 2\mu^2)\theta^2 \\
&\qquad -(1-\alpha)(\alpha X_{t-1} + \mu + (1+\alpha)\mu^2)\big]^2.
\end{aligned}
$$

Тако добијамо

$$
\hat{\theta}_{cls} = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{N}(\hat{V}_t - (1-\hat{\alpha}_{cls})(\hat{\alpha}_{cls}X_{t-1} + \hat{\mu}_{cls} + (1+\hat{\alpha}_{cls})\hat{\mu}_{cls}^2))(X_{t-1}^2 - X_{t-1} - 2\hat{\mu}_{cls}^2)}{\hat{\alpha}_{cls}(1-\hat{\alpha}_{cls})\sum_{t=2}^{n}(X_{t-1}^2 - X_{t-1} - 2\hat{\mu}_{cls}^2)^2}},
$$

где је $\hat{V}_t = (X_t - \hat{\alpha}_{cls}X_{t-1} - (1-\hat{\alpha}_{cls})\hat{\mu}_{cls})^2$, а $\hat{\alpha}_{cls}$ и $\hat{\mu}_{cls}$ су претходно добијене оцене условних најмањих квадрата параметара α и μ.

Размотримо сада асимптотска својства оцена $(\hat{\alpha}_{cls}, \hat{\mu}_{cls})$. Покажимо најпре да важе услови C1-C3 Теореме 1.1.3. Нека је $\boldsymbol{\beta} = (\alpha, \mu)$ и $g(\boldsymbol{\beta}, X_{t-1}) \equiv E(X_t|X_{t-1}) = \alpha X_{t-1} + (1-\alpha)\mu$. За $X = X_{t-1}$ имамо да је

$$
\begin{aligned}
E\left|\frac{\partial g}{\partial \alpha}\right|^2 &= E(X-\mu)^2 = Var(X) = \mu(1+\mu) < \infty, \\
E\left|\frac{\partial g}{\partial \mu}\right|^2 &= (1-\alpha)^2 < \infty \quad \text{и} \quad E\left|\frac{\partial^2 g}{\partial\alpha\partial\mu}\right|^2 = 1 < \infty,
\end{aligned}
$$

па важи услов C1. Слично се доказује да важи услов C3. Проверимо сада да је задовољен услов C2, односно одредимо константе a_1 и a_2 из једначине

$$
E\left|a_1\frac{\partial g}{\partial \alpha} + a_2\frac{\partial g}{\partial \mu}\right|^2 = 0.
$$

Одавде имамо да је

$$\begin{aligned} 0 &= E\left(a_1(X-\mu)+a_2(1-\alpha)\right)^2 \\ &= a_1^2E(X-\mu)^2+a_2^2(1-\alpha)^2, \end{aligned}$$

а ово је могуће само за $a_1 = a_2 = 0$. Тиме смо доказали да важи и услов C2, па на основу Теореме 1.1.3 следи строга постојаност оцена $(\hat{\alpha}_{cls}, \hat{\mu}_{cls})$.

Докажимо сада строгу постојаност оцене $\hat{\theta}_{cls}$. Поделимо бројилац и именилац у $\hat{\theta}_{cls}$ са $N-1$ и посматрајмо рецимо члан $X_t^2X_{t-1}^2$ који ће се јавити у бројиоцу након множења свих чланова. То можемо да запишемо као

$$\begin{aligned} \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N}X_t^2X_{t-1}^2 &= \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N}X_t^2X_{t-1}^2-\left(\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N}X_t^2\right)\left(\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N}X_{t-1}^2\right) \\ &\quad+\left(\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N}X_t^2\right)\left(\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N}X_{t-1}^2\right) \\ &\xrightarrow{c.u.} Cov(X_t^2,X_{t-1}^2)+E(X_t^2)E(X_{t-1}^2),\ \text{када } N\to\infty, \end{aligned}$$

при чему конвергенција следи из ергодичности временског низа. Одредимо зато следеће коваријансе.

$$\begin{aligned} Cov\left(X_t^2,X_{t-1}^2\right) &= Cov\left((\alpha\circ_\theta X_{t-1})^2,X_{t-1}^2\right)+2E(\varepsilon_t)Cov\left(\alpha\circ_\theta X_{t-1},X_{t-1}^2\right) \\ &= \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)E(X_{t-1}^3)+(\alpha^2+\alpha(1-\alpha)\theta^2)E(X_{t-1}^4) \\ &\quad-\alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)E(X_{t-1})+(\alpha^2+\alpha(1-\alpha)\theta^2)E(X_{t-1}^2) \\ &\quad+(1-\alpha)\mu\left(\alpha E(X_{t-1}^3)-\alpha E(X_{t-1})E(X_{t-1}^2)\right). \end{aligned}$$

Користећи да је $E(X_{t-1}^4)=\mu(1+14\mu+36\mu^2+24\mu^3)$, $E(X_{t-1}^3)=\mu(1+6\mu+6\mu^2)$ и $E(X_{t-1}^2)=\mu(1+2\mu)$, добијамо да је

$$\begin{aligned} Cov\left(X_t^2,X_{t-1}^2\right) &= \alpha\mu(1+\mu)(1+6\mu+6\alpha\mu+8\theta^2\mu-8\alpha\theta^2\mu+8\mu^2 \\ &\quad+12\alpha\mu^2+20\theta^2\mu^2-20\alpha\theta^2\mu^2). \end{aligned}$$

Слично, добијамо да је

$$\begin{aligned} Cov\left(X_t^2,X_{t-1}\right) &= \alpha\mu(1+\mu)(1+2\mu+2\alpha\mu+4\theta^2\mu-4\alpha\theta^2\mu), \\ Cov\left(X_t,X_{t-1}^2\right) &= \alpha\mu(1+5\mu+4\mu^2), \\ Cov\left(X_t,X_{t-1}^3\right) &= \alpha\mu(1+\mu)(1+12\mu+18\mu^2). \end{aligned}$$

Након множења свих елеменета у бројиоцу оцене $\hat{\theta}_{cls}$, из ергодичности временског низа добијамо да одређени сабирци скоро извесно теже овим коваријансама. Оцене $\hat{\alpha}_{cls}$ и $\hat{\mu}_{cls}$ су строго постојане, па скоро извесно теже ка α и μ. Након сређивања добијамо да бројилац скоро извесно конвергира ка $4\alpha(1-\alpha)\theta^2\mu^2(1+\mu)(1+5\mu)$, док именилац скоро извесно конвергира ка $4\alpha(1-\alpha)\mu^2(1+\mu)(1+5\mu)$. Одатле следи да $\hat{\theta}_{cls} \xrightarrow{c.u.} \theta_{cls}$, па је оцена $\hat{\theta}_{cls}$ строго постојана.

Докажимо сада да оцене $(\hat{\alpha}_{cls}, \hat{\mu}_{cls})$ имају асимптотски нормалну расподелу.

Како је

$$
\begin{aligned}
f_{t|t-1} &= E((X_t - E(X_t|X_{t-1}))^2|X_{t-1}) = Var(X_t|X_{t-1}) \\
&= \alpha(1-\alpha)\theta^2 X_{t-1}^2 + \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)X_{t-1} \\
&\quad +\mu(1-\alpha)(1+\mu+\mu\alpha-2\mu\alpha\theta^2),
\end{aligned}
$$

то имамо да је

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &\equiv E\left[\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\alpha,\mu) f_{t|t-1} \frac{\partial g^T}{\partial \boldsymbol{\beta}}(\alpha,\mu)\right] \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

где је

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= (1-\alpha)\mu(1+\mu)(\alpha+\mu+3\alpha\mu+8\alpha\mu\theta^2+\mu^2+\alpha\mu^2+12\alpha\mu^2\theta^2), \\
a_{12} &= a_{21} = (1-\alpha)^2\alpha\mu(1+\mu+4\mu\theta^2+4\mu^2\theta^2), \\
a_{22} &= \mu(1-\alpha)^3(1+\alpha)(1+\mu).
\end{aligned}
$$

У одређивању матрице $\boldsymbol{R}$ појављују се моменти $E(X^i)$, $i = 1, \ldots, 4$. Пошто су сви елементи матрице $\boldsymbol{R}$ коначни, сви услови теореме 1.1.4 су задовољени, па добијамо да

$$
\sqrt{N}\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{cls} - \alpha \\ \hat{\mu}_{cls} - \mu \end{bmatrix} \xrightarrow{p} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{U}^{-1}\right),
$$

где је $\boldsymbol{U} = \left[E\left(\frac{\partial g}{\partial \beta_i}\frac{\partial g}{\partial \beta_j}\right)\right]_{2\times 2}$, $i, j \in \{1, 2\}$.

Лако се израчунава да је

$$
\boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} \mu(1+\mu) & 0 \\ 0 & (1-\alpha)^2 \end{bmatrix},
$$

па је одатле асимптотска коваријансна матрица оцена $(\hat{\alpha}_{cls}, \hat{\mu}_{cls})$

$$U^{-1}RU^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\alpha)(\alpha+\mu+3\alpha\mu+8\alpha\mu\theta^2+\mu^2+\alpha\mu^2+12\alpha\mu^2\theta^2)}{\mu(1+\mu)} & \alpha(1+4\mu\theta^2) \\ \alpha(1+4\mu\theta^2) & \frac{(1+\alpha)\mu(1+\mu)}{1-\alpha} \end{bmatrix}. \quad (2.1.18)$$

Размотримо сада коваријансну матрицу $U^{-1}RU^{-1}$. На главној дијагонали су граничне вредности одговарајућих дисперзија, док су ван главне дијагонале граничне вредности одговарајућих коваријанси. Приметимо да у случају када корелираност временског низа опада, односно α тежи нули, тада коваријансе теже нули, тј. зависност између оцена такође опада. У исто време, дисперзија оцене параметра α тежи јединици, а дисперзија оцене параметра μ је блиска дисперзији маргиналне расподеле. Са друге стране, у случају јаке корелираности, када α тежи јединици, коваријансе конвергирају ка вредности $1+4\theta^2\mu$, док дисперзија оцене за α тежи нули, што значи да оцена параметра α конвергира ка константи. Истовремено, дисперзија оцене параметра μ има екстремно велику вредност, па ова оцена постаје бескорисна за велики обим узорка. Корелираност између елемената бројачког низа такође утиче на промене вредности коваријансне матрице. Тако у случају слабе корелираности између елемената бројачког низа, када θ тежи нули, коваријансе су блиске корелацији временског низа α, док у случају јаке корелираности, тј. када θ тежи јединици, коваријансе теже ка вредности $\alpha(1+4\mu)$. Промена вредности θ не утиче на дисперзију оцене параметра μ.

Теорема 2.1.4 *Ако су параметри α и μ познати, оцена условних најмањих квадрата параметра θ има асимптотски нормалну расподелу.*

Доказ. Ако су параметри α и μ познати, имамо да је

$$\hat{\theta}^2_{cls} = \frac{\sum_{t=2}^{N} (V_t - Y_{1,t-1})\, Y_{2,t-1}}{\alpha(1-\alpha)\sum_{t=2}^{N} Y^2_{2,t-1}},$$

где је $V_t = (X_t - \alpha X_{t-1} - (1-\alpha)\mu)^2$, $Y_{1,t-1} = (1-\alpha)(\alpha X_{t-1} + \mu(1+\mu+\alpha\mu))$

и $Y_{2,t-1} = X_{t-1}^2 - X_{t-1} - 2\mu^2$. Лако се показује да важи

$$\sqrt{N-1}\left(\hat{\theta}_{cls}^2 - \theta^2\right) = \frac{(N-1)^{-1/2}\sum\limits_{t=2}^{N}\left(V_t - Y_{1,t-1} - \alpha(1-\alpha)\theta^2 Y_{2,t-1}\right)Y_{2,t-1}}{(N-1)^{-1}\alpha(1-\alpha)\sum\limits_{t=2}^{N}Y_{2,t-1}^2}. \quad (2.1.19)$$

Низови $\{Y_{2,t}\}_{t\in\mathbb{Z}}$ и $\{(V_t - Y_{1,t-1} - \alpha(1-\alpha)\theta^2 Y_{2,t-1})\, Y_{2,t-1}\}_{t\in\mathbb{Z}}$ су строго стационарни и ергодични као трансформације строго стационарног и ергодичног посматраног временског низа $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$. Даље, имамо да је

$$\begin{aligned} Y_{2,t-1}^2 &= (X_{t-1}^2 - X_{t-1} - 2\mu^2)^2 \\ &= X_{t-1}^4 - 2X_{t-1}^3 + (1-4\mu^2)X_{t-1}^2 + 4\mu^2 X_{t-1} + 4\mu^2. \end{aligned}$$

Из ергодичке теореме следи да $(N-1)^{-1}\sum_{t=2}^N X_t^k \to E(X_t^k)$ за $N \to \infty$. Из овога и из чињенице да је $E(X) = \mu$, $E(X^2) = \mu(1+2\mu)$, $E(X^3) = \mu(1+6\mu+6\mu^2)$ и $E(X^4) = \mu(1+14\mu+36\mu^2+24\mu^3)$, следи да $(N-1)^{-1}\alpha\sum\limits_{t=2}^{N} Y_{2,t-1}^2$ конвергира у вероватноћи ка константи, тј. важи

$$(N-1)^{-1}\alpha(1-\alpha)\sum_{t=2}^{N} Y_{2,t-1}^2 \longrightarrow 4\alpha(1-\alpha)\mu^2(1+\mu)(1+5\mu), \text{ за } N \to \infty.$$

Означимо сада σ-поље генерисано случајним променљивама X_{t-i}, $i \geq 1$ са $\mathcal{F}_{t-1}$. Добијамо да је

$$\begin{aligned} E(V_t|\mathcal{F}_{t-1}) &= E\left((X_t - \alpha X_{t-1} - (1-\alpha)\mu)^2|\mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &= E(X_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) - 2\alpha E(X_t|\mathcal{F}_{t-1})X_{t-1} - 2(1-\alpha)\mu E(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) \\ &\quad +\alpha^2 X_{t-1}^2 + 2\alpha(1-\alpha)\mu X_{t-1} + (1-\alpha)^2\mu^2 \\ &= \alpha(1-\alpha)\theta^2 X_{t-1}^2 + \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)X_{t-1} \\ &\quad +(1-\alpha)\mu(1+\mu+\alpha\mu-2\mu\alpha\theta^2) \\ &= (1-\alpha)Y_{1,t-1} + \alpha(1-\alpha)\theta^2 Y_{2,t-1}, \end{aligned}$$

па одавде следи да је

$$E\left(\left(V_t - Y_{1,t-1} - \alpha(1-\alpha)\theta^2 Y_{2,t-1}\right)Y_{2,t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right) = 0,$$

што значи да је низ $\{(V_t - Y_{1,t-1} - \alpha(1-\alpha)\theta^2 Y_{2,t-1})\, Y_{2,t-1}\}$ строго стационаран и ергодичан мартингал разлике. Из централне граничне теореме за ергодичне и строго стационарне низове мартингала разлике, добијамо да $(N-1)^{-1/2}\sum_{t=2}^{N}(V_t + Y_{1,t-1} - \alpha(1-\alpha)\theta^2 Y_{2,t-1})\, Y_{2,t-1}$ конвергира у расподели ка нормалној расподели са очекивањем нула и дисперзијом $Var((V_t - Y_{1,t-1} - \alpha(1-\alpha)\theta^2 Y_{2,t-1})\, Y_{2,t-1}) \equiv \sigma^2$. Сада бројилац у (2.1.19) конвергира у расподели ка нормалној расподели, а именилац конвергира у вероватноћи ка константи, па из теореме Слацког следи асимптотска нормалност оцене условних најмањих квадрата параметра θ^2. Означимо са $c \equiv 4\alpha(1-\alpha)\mu^2(1+\mu)(1+5\mu)$. Функција $g(x) = \sqrt{x}$ је диференцијабилна за $x = \theta^2$, па из Теореме 1.1.6 следи

$$\sqrt{N-1}\left(\hat{\theta}_{cls} - \theta\right) \xrightarrow{p} Z \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{4\theta^2 c^2}\sigma^2\right). \ \square$$

Метод момената

Пошто је параметар μ једнак очекивању, а параметар α аутокорелационој функцији временског низа, тј. $\mu = E(X_t)$ и $\alpha = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)}$, то оцене можемо добити на следећи начин:

$$\hat{\mu}_{yw} = \overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} X_t,$$

$$\hat{\alpha}_{yw} = \frac{\sum_{t=2}^{N}(X_t - \overline{X}_N)(X_{t-1} - \overline{X}_N)}{\sum_{t=1}^{N}(X_t - \overline{X}_N)^2}.$$

Да бисмо оценили параметар θ, одредимо најпре коваријансу случајних променљивих X_t^2 и X_{t-1}.

$$\begin{aligned} Cov(X_t^2, X_{t-1}) &= Cov((\alpha \circ_\theta X_{t-1} + \varepsilon_t)^2, X_{t-1}) \\ &= Cov((\alpha \circ_\theta X_{t-1})^2, X_{t-1}) + 2E(\varepsilon_t)Cov(\alpha \circ_\theta X_{t-1}, X_{t-1}). \end{aligned}$$

Из Последице 2.1.1 и особине (xi) Леме 2.1.1, имамо да је $E(\varepsilon_t) = (1-\alpha)\mu$ и $Cov(\alpha \circ_\theta X_{t-1}, X_{t-1}) = \alpha Var(X_{t-1})$. Одредимо сада $Cov((\alpha \circ_\theta X_{t-1})^2, X_{t-1})$. Важи

$$Cov((\alpha \circ_\theta X_{t-1})^2, X_{t-1}) = E((\alpha \circ_\theta X_{t-1})^2 X_{t-1}) - E((\alpha \circ_\theta X_{t-1})^2)E(X_{t-1}).$$

Из особина (vi) и (iv) Леме 2.1.1, имамо да је

$$\begin{aligned}E((\alpha \circ_\theta X_{t-1})^2 X_{t-1}) &= \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)E(X_{t-1}^2) + (\alpha^2 + \alpha(1-\alpha)\theta^2)E(X_{t-1}^3) \\ &= \alpha E(X_{t-1}^2) + \alpha(\alpha + (1-\alpha)\theta^2)(E(X_{t-1}^3) - E(X_{t-1}^2)),\end{aligned}$$

и да је

$$E(\alpha \circ_\theta X_{t-1})^2 = \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)E(X_{t-1}) + \alpha(\alpha + (1-\alpha)\theta^2)E(X_{t-1}^2).$$

Из чињенице да временски низ има геометријску маргиналну расподелу, имамо да је $E(X_{t-1}^3) = \mu(1 + 6\mu + 6\mu^2)$ и $E(X_{t-1}^2) = \mu(1 + 2\mu)$. Коначно, замењујући ове моменте у претходним једнакостима, добијамо да је коваријанса случајних променљивих X_t^2 и X_{t-1} дата са

$$Cov(X_t^2, X_{t-1}) = \alpha\mu(1 + \mu)(1 + 2\mu + 2\alpha\mu + 4\theta^2\mu - 4\alpha\theta^2\mu).$$

Можемо приметити да је коваријансна функција између случајних променљивих X_t^2 и X_{t-1} блиска нули када су α или μ блиски нули. Када α тежи јединици коваријанса не зависи од параметра θ и једнака је $\mu(1 + \mu)(1 + 4\mu)$.

Решавајући једначину по θ, добијамо да је оцена добијена методом момената параметра θ дата са

$$\hat{\theta}_{yw} = \sqrt{\frac{\hat{C} - \hat{\alpha}_{yw}\hat{\mu}_{yw}(1 + \hat{\mu}_{yw})(1 + 2\hat{\mu}_{yw} + 2\hat{\alpha}_{yw}\hat{\mu}_{yw})}{4\hat{\alpha}_{yw}(1 - \hat{\alpha}_{yw})(1 + \hat{\mu}_{yw})\hat{\mu}_{yw}^2}},$$

где је $\hat{C}$ оцена коваријансе $Cov(X_t^2, X_{t-1})$ и једнака је

$$\hat{C} = \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} X_t^2 X_{t-1} - \left(\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} X_t^2\right)\left(\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} X_{t-1}\right).$$

DCGINAR(1) временски низ је строго стационаран и ергодичан, па важи

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} X_t &\xrightarrow{c.u.} E(X_t),\ N \to \infty, \\ \frac{1}{N}\sum_{t=k+1}^{N} X_t X_{t-k} &\xrightarrow{c.u.} E(X_t X_{t-k}),\ N \to \infty,\end{aligned}$$

и

$$\hat{\gamma}(k) \xrightarrow{c.u.} \gamma(k), \ k \geq 0, \ N \to \infty.$$

Одавде закључујемо да су оцене добијене методом момената параметара μ и α строго постојане. Слично, имамо да

$$\hat{C} \xrightarrow{c.u.} E(X_t^2 X_t) - E(X_t^2)E(X_{t-1}) = Cov(X_t^2, X_{t-1}), \ N \to \infty,$$

па одавде и из строге постојаности оцена параметара μ и α закључујемо да је и оцена параметра θ строго постојана.

Метод максималне веродостојности

Изведимо сада оцене параметара α, θ и μ методом максималне веродостојности. Као што је већ поменуто, DCGINAR(1) временски низ је ланац Маркова па одредимо најпре вероватноће прелаза.

Из дефиниције временског низа директно следи

$$P(X_n = j | X_{n-1} = 0) = P(\varepsilon_n = j).$$

Даље, из дефиниције временског низа и из (2.1.4), за $i \geq 1$ добијамо да је

$$P(X_n = j | X_{n-1} = i) = P(U_1 + U_2 + \cdots + U_i + \varepsilon_n = j)$$

$$= \sum_{k=0}^{min(i,j)} ((1-\alpha)\binom{i}{k}(\alpha(1-\theta))^k(1-\alpha(1-\theta))^{i-k} + \alpha\binom{i}{k}(\theta+\alpha(1-\theta))^k(1-\theta-\alpha(1-\theta))^{i-k})P(\varepsilon_n = j-k), \ i > 0,$$

где је

$$\begin{aligned} P(\varepsilon_n = 0) \ &= \ \frac{\alpha(1-\theta)(\alpha+\theta-\alpha\theta)}{\alpha+\theta-2\alpha\theta} + \frac{1}{1+\mu} \cdot \frac{(1-\alpha(1-\theta))(1-\alpha)(1-\theta)}{1-\alpha-\theta+2\alpha\theta} \\ &+ \frac{1}{1+(\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu} \\ &\times \frac{\alpha(1-\alpha)\theta^2}{(\alpha+\theta-2\alpha\theta)(1-\alpha-\theta+2\alpha\theta)} \ , \end{aligned} \tag{2.1.20}$$

$$\begin{aligned} P(\varepsilon_n = l) &= \frac{\mu^l}{(1+\mu)^{l+1}} \cdot \frac{(1-\alpha(1-\theta))(1-\alpha)(1-\theta)}{1-\alpha-\theta+2\alpha\theta} \\ &\quad + \frac{((\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu)^l}{(1+(\alpha+\theta-2\alpha\theta)\mu)^{l+1}} \\ &\quad \times \frac{\alpha(1-\alpha)\theta^2}{(\alpha+\theta-2\alpha\theta)(1-\alpha-\theta+2\alpha\theta)}, \text{ за } l > 0. \quad (2.1.21) \end{aligned}$$

Сада максимизирамо логаритамску функцију веродостојности

$$\log L(x_1, \dots x_N; \mu, \alpha, \theta) = x_1 \log \mu - (x_1+1)\log(1+\mu) + \sum_{n=2}^{N} \log P_n(x_n, x_{n-1}; \mu, \alpha, \theta),$$

где је $P_n(x_n, x_{n-1}; \mu, \alpha, \theta) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1})$. Коначно, решавањем система једначина

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = 0,$$

добијамо оцене максималне веродостојности параметара α, θ и μ. Напоменимо да је аналитичко решавање оваквог система немогуће, али се може извести стандардним нумеричким процедурама уграђеним у већини статистичких софтверских пакета. Овде смо користили програмски пакет R који служи за статистичку анализу података.

Нумерички резултати

Због веома сложених функција које израчунавамо неопходно је коришћење нумеричких метода у оцењивању непознатих параметара. У ту сврху користили смо статистички софтверски пакет R. Како бисмо применили статистике за оцењивање, симулирали смо 100 узорака DCGINAR(1) временског низа, дужине 500. Симулације су изведене за следеће стварне вредности параметара: (a) $\alpha = 0,1$, $\theta = 0,1$, $\mu = 0,2$; (b) $\alpha = 0,2$, $\theta = 0,3$, $\mu = 1$; (c) $\alpha =$

$0,2,\ \theta = 0,3,\ \mu = 5$; $(d)\ \alpha = 0,6,\ \theta = 0,8,\ \mu = 1$; $(e)\ \alpha = 0,8,\ \theta = 0,9,\ \mu = 5$. Прва вредност сваког узорка је моделирана геометријском расподелом са параметром $\frac{\mu}{1+\mu}$, док су остале вредности моделиране коришћењем особина посматраног временског низа. За подузорке обима 100, 200 и 500, израчунате су оцене параметара помоћу претходно описаних метода оцењивања, а затим су одређене средине за свих 100 узорака. Средине и стандардне девијације су представљене у Табели 2.1. Примећујемо да у сваком од случајева средине конвергирају ка стварним вредностима параметара. Стандардне девијације су у већини случајева блиске нули, осим за мали обим узорка у случају великих вредности параметара (случај (e)). Из (2.1.18) видимо да у случају када су α и μ блиски нули, дисперзија оцене параметра μ тежи нули, па су тако у случајевима (a) и (b) малих вредности параметара α и μ добијена најмања стандардна одступања у оцењивању параметра μ. Са друге стране, такође из (2.1.18) видимо да би највеће одступање у оцењивању параметра μ требало да се добије у случају када μ узима велике вредности, што се поклапа са случајевима (c) и (e), или када α тежи јединици што је опет случај (e). Најбржа конвергенција стандардних девијација у оцењивању параметра α се уочава у случајевима (d) и (e), тј. када α тежи јединици, што се опет поклапа са теоријском стандардном девијацијом из (2.1.18). Најмање стандардне девијације у оцењивању параметра θ добијене у случају (e). Напоменимо још да стандардне девијације конвергирају нули, али притом не морају нужно да чине монотоно опадајући низ, већ могу да расту и опадају наизменично, што се обично може приметити на малом обиму узорка. То примећујемо у случају (e) код оцењивања параметра θ методом момената. Поредећи међусобно методе оцењивања, није тешко закључити да су најбољи резултати у свим разматраним случајевима добијени методом максималне веродостојности.

2.1.6 Примена на реалним подацима

У овом делу показујемо како се DCGINAR(1) модел може применити на временском низу стварних података. Такође, овај модел упоређујемо са неколико важних INAR модела. Почећемо са мотивацијом за избор геометријске маргиналне расподеле. Наиме, Табела 2.1: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара DCGINAR(1) модела

Обим	$\hat{\alpha}_{yw}$	$\hat{\theta}_{yw}$	$\hat{\mu}_{yw}$	$\hat{\alpha}_{cls}$	$\hat{\theta}_{cls}$	$\hat{\mu}_{cls}$	$\hat{\alpha}_{ml}$	$\hat{\theta}_{ml}$	$\hat{\mu}_{ml}$
a) Стварне вредности $\alpha = 0.1$, $\theta = 0.1$, $\mu = 0.2$									
100	0.0945	0.2260	0.1908	0.0952	0.2343	0.1914	0.0979	0.2825	0.1911
Ст. дев.	0.1000	0.3954	0.0500	0.1009	0.3941	0.0502	0.1005	0.3746	0.0500
200	0.0930	0.2433	0.1943	0.0933	0.1973	0.1946	0.0996	0.3080	0.1937
Ст. дев.	0.0762	0.3886	0.0407	0.0764	0.3538	0.0406	0.0699	0.3657	0.0406
500	0.0934	0.2030	0.1990	0.0936	0.2233	0.1991	0.0973	0.2783	0.1990
Ст. дев.	0.0565	0.3577	0.0226	0.0567	0.3529	0.0226	0.0518	0.3498	0.0226
b) Стварне вредности $\alpha = 0.2$, $\theta = 0.3$, $\mu = 1$									
100	0.1731	0.2666	1.0054	0.1753	0.2378	1.0063	0.2005	0.3175	1.0054
Ст. дев.	0.0885	0.3648	0.1645	0.0894	0.3215	0.1657	0.0807	0.2916	0.1611
200	0.1850	0.2521	0.9983	0.1864	0.2277	0.9985	0.2028	0.2726	0.9984
Ст. дев.	0.0697	0.3443	0.1095	0.0706	0.2877	0.1086	0.0636	0.2683	0.1071
500	0.1896	0.2181	1.0011	0.1899	0.2159	1.0011	0.1964	0.2565	1.0002
Ст. дев.	0.0456	0.2741	0.0841	0.0456	0.2441	0.0841	0.0396	0.2022	0.0811
c) Стварне вредности $\alpha = 0.2$, $\theta = 0.3$, $\mu = 5$									
100	0.1680	0.2277	5.0383	0.1693	0.1887	5.0308	0.1981	0.2516	5.0169
Ст. дев.	0.0878	0.3060	0.6558	0.0888	0.2628	0.6560	0.0634	0.2194	0.6507
200	0.1801	0.2407	5.0838	0.1810	0.2077	5.0814	0.1916	0.2311	5.0684
Ст. дев.	0.0596	0.2838	0.4660	0.0599	0.2439	0.4693	0.0470	0.1723	0.4527
500	0.1900	0.2666	5.0189	0.1903	0.2247	5.0176	0.1956	0.2688	5.0085
Ст. дев.	0.0431	0.2713	0.3107	0.0431	0.2175	0.3107	0.0305	0.1243	0.2968
d) Стварне вредности $\alpha = 0.6$, $\theta = 0.8$, $\mu = 1$									
100	0.5510	0.3585	1.0116	0.5571	0.6403	1.0194	0.5897	0.7973	1.0029
Ст. дев.	0.1410	0.4556	0.2578	0.1400	0.2718	0.2744	0.0755	0.1269	0.2339
200	0.5714	0.5245	1.0127	0.5739	0.7204	1.0143	0.5970	0.8106	1.0161
Ст. дев.	0.1031	0.4421	0.1807	0.1030	0.1755	0.1831	0.0557	0.0638	0.1717
500	0.5920	0.5444	1.0194	0.5933	0.7731	1.0204	0.6006	0.8105	1.0176
Ст. дев.	0.0624	0.4062	0.1267	0.0631	0.1195	0.1276	0.0318	0.0417	0.1245
e) Стварне вредности $\alpha = 0.8$, $\theta = 0.9$, $\mu = 5$									
100	0.7188	0.2153	4.9873	0.7258	0.8884	5.0521	0.7990	0.9023	5.1604
Ст. дев.	0.0988	0.3802	1.5759	0.1009	0.1153	1.8144	0.0396	0.0361	1.2486
200	0.7542	0.2927	5.0090	0.7590	0.9053	5.0088	0.7986	0.9001	5.1074
Ст. дев.	0.0661	0.4281	1.1891	0.0658	0.0930	1.2125	0.0282	0.0231	0.9430
500	0.7850	0.3974	5.0467	0.7866	0.8980	5.0445	0.8013	0.8989	5.0869
Ст. дев.	0.0419	0.4590	0.7234	0.0419	0.0888	0.7241	0.0170	0.0148	0.5731

познато је да се код многих реалних података уочава овердисперзија, то јест дисперзија је значајно већа од очекивања. У таквим случајевима Пуасонова расподела није адекватан избор за маргиналну расподелу, па стога треба размотрити неке друге расподеле као што су геометријска, негативна биномна или генералисана Пуасонова. Приликом избора расподеле треба водити рачуна о два битна фактора: да расподела има што мање параметара и да се одговарајуће вероватноће лако рачунају. Геометријска расподела има један, а негативна биномна и генералисана Пуасонова имају по два параметра.

Посматраћемо реалне податке преузете са интернет сајта Forecasting Principles, на адреси http://www.forecastingprinciples.com, из секције о криминолошким подацима. Ови подаци представљају број луталица на месечном нивоу, регистрованих у шездесет четвртој полицијској станици у Питсбургу. Низ се састоји од 144 опсервације, од јануара 1990. до децембра 2001. године. Узорачка средина, узорачка дисперзија и узорачка аутокорелација су редом 0,3403, 0,4358 и 0,1959. Вредност $0,3403(1+0,3403)=0,4561$ је приближно једнака вредности узорачке дисперзије, што је у складу са особинама геометријске расподеле. Размотримо сада очекиване и опсервиране учестаности, вредности χ^2 статистика, као и одговарајуће p-вредности. Да бисмо одредили опсервиране учестаности n_i и очекиване учестаности n_{0i}, треба најпре одредити одговарајуће опсервиране вероватноће p_i и теоријске вероватноће p_{0i}. Како су реализоване вредности за овај пример 0,1,2 и 3, то је $i=0,\dots,3$. Теоријске вероватноће одређујемо у складу са посматраним расподелама, па тако редом за расподеле $\mathcal{P}(\lambda)$, $Geom(\frac{\mu}{1+\mu})$, $\mathcal{NB}(\theta,\frac{\mu}{1+\mu})$ и $\mathcal{GP}(\lambda,\theta)$, за $i=0,1,2,3$ имамо

$$
\begin{aligned}
p_{0i} &\equiv P(X=i)=\frac{\lambda^i e^{-\lambda}}{i!}, \qquad p_{0i}=\frac{\mu^i}{(1+\mu)^{i+1}},\\
p_{0i} &= \binom{\theta+i-1}{i}\frac{\mu^i}{(1+\mu)^{i+\theta}}, \quad p_{0i}=\frac{\lambda(\lambda+\theta i)^{i-1}e^{-\lambda-\theta i}}{i!}.
\end{aligned}
$$

Тест статистика је дата са

$$
\chi_0^2=\sum_{i=0}^{3}\frac{(n_i-n_{0i})^2}{n_{0i}},
$$

Расподела	Оцене параметара	Очекиване учестаности	χ^2	p
Пуасонова	$\lambda = 0.3403$	(102.5, 34.9, 5.9, 0.8)	16.5202	0.00026
Геометријска	$\mu = 0.3403$	(107.4, 27.3, 6.9, 2.4)	3.8908	0.14293
Негативна биномна	$\mu = 0.2809$, $\theta = 1.2114$	(106.7, 28.3, 6.9, 2.1)	4.1461	0.04173
Генералисана Пуасонова	$\lambda = 0.3007$, $\theta = 0.1164$	(106.0, 31.0, 3.0, 4.0)	4.0284	0.04470
Опсервиране учестаности		(106.0, 31.0, 3.0, 4.0)		

при чему је $n_i = np_i$, $n_{0i} = np_{0i}$, где је n обим узорка, односно $n = 144$. Резултати су представљени у наредној табели. Поредећи p-вредности, закључујемо да геометријска расподела највише одговара посматраним подацима. Због свега наведеног, разматран је модел са геометријском маргиналном расподелом.

Графици временског низа, аутокорелационе функције и парцијалне аутокорелационе функције, представљени су на Слици 2.1. Са графика аутокорелационе функције видимо да су подаци корелирани и да функција има експоненцијално опадајући карактер, па можемо закључити да се серија може моделирати ауторегресивним моделом. На основу графика парцијалне аутокорелационе функције можемо закључити да је најпогоднији модел реда један.

Сада ћемо упоредити наш модел са другим INAR моделима првог реда, користећи софтвер који су развили Ristić и Nastić за потребе оцењивања временских низова са ненегативним целобројним вредностима. Посматраћемо следеће моделе:

- INAR(1) модел са Пуасоновом маргиналном расподелом (Al-Osh, Alzaid, 1987),
- NGINAR(1), нови геометријски INAR(1) модел базиран на негативном биномном тинингу (Ristić, Bakouch, Nastić, 2009),
- Мешовити INAR(1) и мешовити $\alpha\beta$ INAR(1) модел (Nastić, Ristić, 2012),
- INAR(1) модели I1, I2, I3 са негативном биномном маргиналном расподелом (Zhu, Joe, 2006, 2010)
- Итеративни INAR(1) модел са негативном биномном маргиналном расподелом (Al-Osh, Aly, 1992),
- Негативни биномни INAR(1) модел са случајним коефицијентима (Weiß, 2008b),

- Квази-биномни INAR(1) модел са генерализованом Пуасоновом маргиналном расподелом (Alzaid, Al-Osh, 1993).

За сваки модел оцењени су непознати параметри методом максималне веродостојности при чему су иницијалне вредности оцене добијене методом условних најмањих квадрата. Критеријуми које користимо за поређење модела су: RMS[6] или квадратни корен одступања опсервираних и прогнозираних вредности

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{N}(X_t - E(X_t|X_{t-1}))^2}{N-1}},$$

затим AIC или Акаикеов информациони критеријум

$$AIC = -2\ln(\max L) + 2M,$$

и BIC или Бајесов информациони критеријум

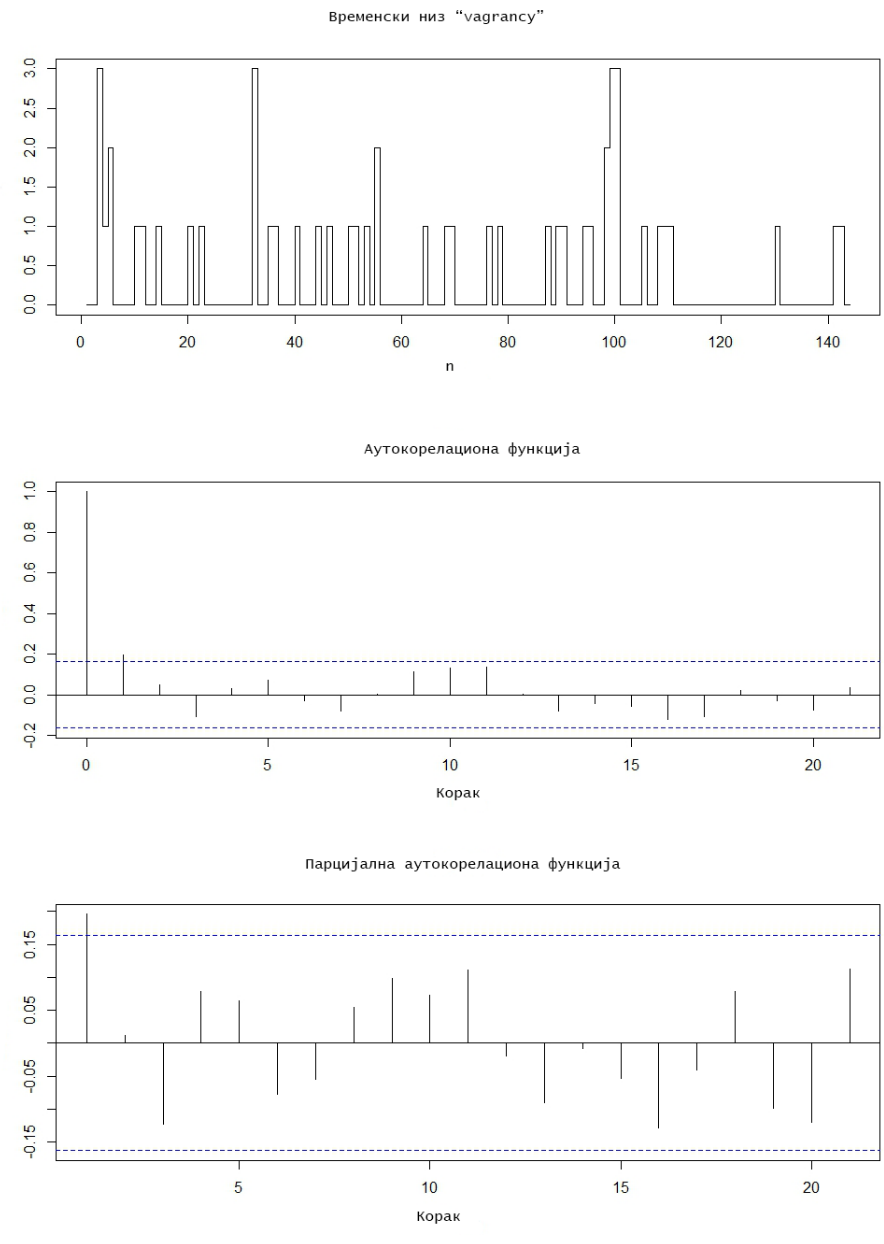
$$BIC = -2\ln(\max L) + M\ln N,$$

где је $\max L$ максимална вредност функције веродостојности, M је број непознатих параметара, а N је обим узорка. Мање вредности ових карактеристика одређују бољи модел. Иако између AIC и BIC критеријума постоје теоријске разлике, у пракси се разликују само у коефицијенту који множи број непознатих параметара. Вредности ових критеријума се повећавају са бројем параметара, па су приликом поређења модела једноставнији модели са мањим бројем параметара у повољнијој позицији. Како је $\ln N > 2$ за $N \geq 8$, то се са повећањем броја параметара, вредности BIC критеријума више повећавају у односу на вредности AIC критеријума. Оба критеријума имају своје предности и недостатке и зато је најбоље користити их у комбинацији. Напоменимо да за коришћење RMS критеријума није потребна претпоставка о конкретној маргиналној расподели. О овом критеријуму ће више бити речи у наредним поглављима. Сви резултати представљени су у Табели 2.2. Видимо да су за DCGINAR(1) модел добијене најмање вредности ових карактеристика. Изузетак је NGINAR(1) модел код кога је добијена мања BIC вредност, што је у складу са претходним

[6] Root mean square

објашњењем, јер NGINAR(1) модел има мањи број непознатих параметара. Јасно је да DCGINAR(1) на овим подацима има најбоље перформансе.

Интересантно питање за разматрање је зашто баш овај модел даје најбоље резултате на оваквом скупу података. Могуће је да одговор лежи у самој природи посматране популације. Наиме, у Америци се лутање сматра кривичним делом, или другим речима, бити бескућник је забрањено. Подаци представљају број луталица на месечном нивоу. Као што је познато, бескућници се често удружују у групе у којима живе и делују у сличним условима. Они су на тај начин међусобно повезани, то јест, постоји значајна интеракција међу њима, па самим тим и међусобна зависност у њиховом лутању улицама чинећи тако криминалне прекршаје. Користећи наш модел $\sum_{i=1}^{X_{n-1}} U_i + \varepsilon_n$, ми у ствари моделирамо број луталица, при чему са $\sum_{i=1}^{X_{n-1}} U_i$ представљамо број опсталих бескућника, а са ε_n број новопридошлих бескућника. Ово је једини модел међу наведеним, који се базира на бројачком низу зависних случајних променљивих $\{U_i\}$, те је као такав најбољи у анализи посматраног скупа података.



Слика 2.1: Дијаграми временског низа, аутокорелационе функције и парцијалне аутокорелационе функције података о броју лутања.

Табела 2.2: Оцене параметара, AIC, BIC и RMS за податке о броју кривичних прекршаја лутања.

Модел	ML оцене	AIC	BIC	RMS
i.i.d. Poisson	$\hat{\lambda} = 0.3403$	224.1363	227.1061	
Poisson INAR(1)	$\hat{\lambda} = 0.2891$			
	$\hat{\alpha} = 0.1483$	221.9247	227.8643	0.6475
NGINAR(1)	$\hat{\mu} = 4.2718$			
	$\hat{\alpha} = 3.1715$	219.4051	225.3447	0.6469
Mixed INAR(1)	$\hat{\mu} = 1.5167$			
	$\hat{\alpha} = 1$			
	$\hat{p} = 0.1735$	244.1753	253.0847	0.8362
Mixed $\alpha\beta$ INAR(1)	$\hat{\mu} = 0.3375$			
	$\hat{\alpha} = 0$			
	$\hat{\beta} = 0.315$			
	$\hat{p} = 0.4642$	222.7653	234.6445	0.6470
NBINAR I1	$\hat{p} = 0.8413$			
	$\hat{\theta} = 1.7994$			
	$\hat{\alpha} = 0.1421$	221.7445	230.6539	0.6477
NBINAR I2	$\hat{p} = 0.8034$			
	$\hat{\theta} = 1.3868$			
	$\hat{\alpha} = 0.1595$			
	$\hat{\gamma} = 0.2815$	222.8746	234.7538	0.6472
NBINAR I3	$\hat{p} = 0.8024$			
	$\hat{\theta} = 1.3806$			
	$\hat{\alpha} = 0.1679$			
	$\hat{\delta} = 1.146$	222.8924	234.7717	0.6470
NBIINAR(1)	$\hat{n} = 1.4056$			
	$\hat{p} = 4.9299$			
	$\hat{\rho} = 0.1599$	220.9403	229.8497	0.6472
NBINAR(1)	$\hat{p} = 0.2208$			
	$\hat{\theta} = 1.5367$			
	$\hat{\alpha} = 0.1676$	220.9886	229.898	0.6470
NBRCINAR(1)	$\hat{n} = 1.2484$			
	$\hat{p} = 0.7897$			
	$\hat{\rho} = 0.166$	219.4756	228.385	0.6471
GPQINAR(1)	$\hat{\lambda} = 0.2446$			
	$\hat{\theta} = 0.1127$			
	$\hat{\rho} = 0.1745$	219.1248	228.0343	0.6493
DCGINAR(1)	$\hat{\mu} = 0.3352$			
	$\hat{\alpha} = 0.1778$			
	$\hat{\theta} = 1$	217.6808	226.5902	0.6469

2.2 Геометријски INAR(1) модел са Бернулијевим зависним бројачким низовима II врсте

У циљу што бољег описивања појава и ситуација из реалног живота, научници су конструисали низ различитих статистичких модела који су временом постајали све комплекснији, а самим тим је и рачунски апарат постајао све сложенији. Што су функције сложеније, то је потребно више времена за извршавање процедура које се користе у нумеричким израчунавањима. Да би модел био ефикасан у примени на конкретним серијама података, важно је да се приликом конструкције води рачуна и о његовој једноставности.

Увођењем додатних ограничења, конструисаћемо једноставније бројачке случајне променљиве у односу на оне представљене у оквиру DCGINAR(1) модела. Помоћу тининг оператора који ће се базирати на новом бројачком низу конструисаћемо INAR(1) временски низ са геометријском маргиналном расподелом. Са једне стране DCGINAR(1) модел је општији и свеобухватнији, док ће са друге стране нови модел бити једноставнији и ефикаснији за примену на коначном обиму узорка посматране популације.

Приметимо да је код претходног модела расподела суме бројачких случајних променљивих $U_1 + \cdots + U_n$ једнака мешавини две биномне расподеле. Код новог модела та расподела ће бити једнака мешавини константе n и једне биномне расподеле, што у пракси значи да се у једном тренутку са извесном вероватноћом могу реализовати све бројачке случајне променљиве или се са одређеном вероватноћом могу реализовати само неке од њих. Можемо закључити да без обзира на то што су оба модела заснована на Бернулијевом бројачком низу зависних случајних променљивих, у основи се битно разликују и сваки од њих ће имати примену на другачијем типу стварних података.

2.2.1 Генерализовани биномни тининг оператор II врсте

Случајне променљиве на којима ће се базирати генерализовани биномни тининг оператор II врсте, конструисаћемо на следећи начин

$$U_i = 1 - V_i + V_i Z, \tag{2.2.1}$$

где је $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ низ независних једнако расподељених случајних променљивих са $Ber(\theta)$ расподелом, $\theta \in (0,1]$, док је Z случајна променљива са $Ber\left(\frac{\alpha+\theta-1}{\theta}\right)$ расподелом, тако да важи услов $0 \le 1-\alpha \le \theta$. Уз претпоставку да су случајне променљиве Z и V_i независне за свако $i \in \mathbb{N}$, показаћемо да је $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, низ међусобно зависних случајних променљивих са $Ber(\alpha)$ расподелом, $\alpha \in (0,1]$. На сличан начин као код DCGINAR(1) модела, добијамо

$$\begin{aligned}
E(s^{U_i}) &= E(s^{1-V_i+V_iZ}) \\
&= \theta E(s^Z) + (1-\theta)s \\
&= \theta\left(1 - \frac{\alpha+\theta-1}{\theta} + \frac{\alpha+\theta-1}{\theta}s\right) + (1-\theta)s \\
&= 1-\alpha+\alpha s,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(U_iU_j) &= E((1-V_i+V_iZ)(1-V_j+V_jZ)) \\
&= 1 - E(V_j) + E(V_jZ) - E(V_i) + E(V_iV_j) \\
&\quad -E(V_iV_jZ) + E(V_iZ) - E(V_iV_jZ) + E(V_iV_jZ^2) \\
&= 1 - 2\theta + 2\theta\frac{\alpha+\theta-1}{\theta} - 2\theta^2\frac{\alpha+\theta-1}{\theta} + \theta^2 + \theta^2\frac{\alpha+\theta-1}{\theta} \\
&= 2\alpha - \alpha\theta + \theta - 1, \ \text{за } i \neq j,
\end{aligned}$$

па одатле имамо

$$\begin{aligned}
Cov(U_i,U_j) &= E(U_iU_j) - E(U_i)E(U_j) = 2\alpha - \alpha\theta + \theta - 1 \\
&= (1-\alpha)(\alpha+\theta-1), \\
Corr(U_i,U_j) &= \frac{(1-\alpha)(\alpha+\theta-1)}{\alpha(1-\alpha)} \\
&= \frac{\alpha+\theta-1}{\alpha}, \ \text{за } \alpha \in (0,1].
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Приметимо да корелација припада интервалу $[0,1]$. Наиме, из услова $\alpha > 0$ и $1-\alpha \leq \theta$, имамо да је $Corr(U_i, U_j) \geq 0$. Такође, из $\theta \leq 1$ следи да је $\alpha + \theta - 1 \leq \alpha$, па је одатле $Corr(U_i, U_j) \leq 1$.

Примедба 2.2.1 За $\theta = 1-\alpha$, низ $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ је низ независних случајних променљивих са $Ber(\alpha)$ расподелом. За $\theta = 1$, важи да је $U_i = Z$ за свако $i \in \mathbb{N}$, тј. ове случајне променљиве су зависне са $Ber(\alpha)$ расподелом и са $Corr(U_i, U_j) = 1$.

Одредимо најпре расподелу случајне променљиве $U_1 + \cdots + U_n$, за $n \geq 1$, где је $U_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
E(s^{U_1+\cdots+U_n}) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1-\theta)^{n-j}\theta^j E(s^{n-j+jZ}) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1-\theta)^{n-j}\theta^j s^{n-j} E(s^{jZ}) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (1-\theta)^{n-j}\theta^j s^{n-j} \left(1 - \frac{\alpha+\theta-1}{\theta} + \frac{\alpha+\theta-1}{\theta} s^j\right) \\
&= \left(1 - \frac{\alpha+\theta-1}{\theta}\right) \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} ((1-\theta)s)^{n-j}\theta^j \\
&\quad + \frac{\alpha+\theta-1}{\theta} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} ((1-\theta)s)^{n-j}(\theta s)^j \\
&= \frac{1-\alpha}{\theta}((1-\theta)s+\theta)^n + \frac{\alpha+\theta-1}{\theta}((1-\theta)s+\theta s)^n \\
&= \frac{1-\alpha}{\theta}(1-(1-\theta)+(1-\theta)s)^n + \frac{\alpha+\theta-1}{\theta}s^n.
\end{aligned}$$

Одавде закључујемо да случајна променљива $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ има расподелу дату са

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n \stackrel{p}{=} \begin{cases} n, & \text{с.в. } 1 - \frac{1-\alpha}{\theta}, \\ Bin(n, 1-\theta), & \text{с.в. } \frac{1-\alpha}{\theta}. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Дефинишимо сада нови тининг оператор заснован на случајном низу $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Дефиниција 2.2.1 (Miletić Ilić, 2014) *Нека је X ненегативна целобројна случајна промењива, нека је $\{U_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ низ случајних промењивих такав да важи (2.2.3), и нека је $U_0 = 0$. Оператор $\alpha *_\theta$, за који важи*

$$\alpha *_\theta X = U_1 + U_2 + \cdots + U_X, \tag{2.2.4}$$

где је $0 \leq 1 - \alpha \leq \theta$ и $\theta \in (0, 1]$, називаћемо генерализовани биномни тининг оператор II *врсте.*

Одредимо функцију генератрисе вероватноћа генерализованог биномног тининг оператора II врсте. Из (2.2.3) имамо да је

$$\begin{aligned} E(s^{U_1+U_2+\cdots+U_X}) &= \sum_{x=0}^{\infty} E(s^{U_1+U_2+\cdots+U_X}) P(X=x) \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha+\theta-1}{\theta} s^x + \frac{1-\alpha}{\theta} (\theta + (1-\theta)s)^x \right) P(X=x) \\ &= \frac{\alpha+\theta-1}{\theta} \sum_{x=0}^{\infty} s^x P(X=x) \\ &\quad + \frac{1-\alpha}{\theta} \sum_{x=0}^{\infty} (\theta + (1-\theta)s)^x P(X=x) \\ &= \frac{\alpha+\theta-1}{\theta} \Phi_X(s) + \frac{1-\alpha}{\theta} \Phi_X(\theta + (1-\theta)s), \end{aligned}$$

па је одавде

$$\Phi_{\alpha *_\theta X}(s) \equiv E\left(s^{\alpha *_\theta X}\right) = \frac{\alpha+\theta-1}{\theta} \Phi_X(s) + \frac{1-\alpha}{\theta} \Phi_X(\theta + (1-\theta)s). \tag{2.2.5}$$

Размотримо сада неке специјалне случајеве које добијамо директно из (2.2.5).

Примедба 2.2.2 (*i*) За $\alpha = 1$, добијамо да је $\Phi_{\alpha *_\theta X}(s) = \Phi_X(s)$, а одатле је $1 *_\theta X \stackrel{p}{=} X$. Иста особина важи за генерализовани биномни тининг оператор I врсте $\alpha \circ_\theta$.

(*ii*) За $\theta = 1$, следи да је $\Phi_{\alpha *_\theta X}(s) = 1 - \alpha + \alpha \Phi_X(s)$, па је одатле $\alpha *_1 X \stackrel{p}{=} ZX$, где је Z случајна промењива са $Ber(\alpha)$ расподелом, независна од X. Иста особина важи за генерализовани биномни тининг оператор I врсте $\alpha \circ_\theta$.

(*iii*) За $\theta = 1-\alpha$, следи да је $\Phi_{\alpha *_\theta X}(s) = \Phi_X(1-\alpha+\alpha s)$, што значи да $\alpha *_{1-\alpha}$ одговара биномном тининг оператору $\alpha\circ$. Приметимо да је овакав закључак добијен за генерализовани биномни тининг оператор I врсте $\alpha\circ_\theta$, када је $\theta = 0$ и $\alpha \in [0,1]$.

Веза између генерализованог биномног тининг оператора II врсте "$\alpha *_\theta$"и биномног тининг оператора "$\alpha\circ$", дата је следећом теоремом.

Теорема 2.2.1 (Miletić Ilić, 2014) *Нека су $I_{\frac{1-\alpha}{\theta}}$ и $I_{\frac{1-\beta}{\delta}}$ две случајне променљиве са Бернулијевим расподелама са параметрима $(1-\alpha)/\theta$ и $(1-\beta)/\delta$ респективно, при чему су задовољени услови $0 \le 1-\alpha \le \theta$, $\theta \in (0,1]$ и $0 \le 1-\beta \le \delta$, $\delta \in (0,1]$. Претпоставимо да су оне међусобно независне, и независне од X. Нека су бројачки низови за $\alpha *_\theta$ и $\beta *_\delta$, такође међусобно независни, и независни од X. Тада важи:*

(*i*) $\alpha *_\theta X \stackrel{p}{=} (1-\theta\cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})\circ X$, *где је*

$$(1-\theta\cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})\circ X = \begin{cases} X, & с.в.\ 1-\frac{(1-\alpha)}{\theta}, \\ (1-\theta)\circ X, & с.в.\ \frac{(1-\alpha)}{\theta}. \end{cases}$$

(*ii*) $\alpha *_\theta (\beta *_\delta X) \stackrel{p}{=} ((1-\theta\cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})(1-\delta\cdot I_{\frac{1-\beta}{\delta}}))\circ X$, *где је*

$$((1-\theta\cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})(1-\delta\cdot I_{\frac{1-\beta}{\delta}}))\circ X = \begin{cases} X, & с.в.\ \frac{(\theta-(1-\alpha))(\delta-(1-\beta))}{\theta\delta}, \\ (1-\theta)\circ X, & с.в.\ \frac{(1-\alpha)(\delta-(1-\beta))}{\theta\delta}, \\ (1-\delta)\circ X, & с.в.\ \frac{(1-\beta)(\theta-(1-\alpha))}{\theta\delta}, \\ ((1-\theta)(1-\delta))\circ X, & с.в.\ \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\theta\delta}. \end{cases}$$

(*iii*) $\alpha *_\theta (X+Y) \stackrel{p}{=} (1-\theta\cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})\circ X + (1-\theta\cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})\circ Y$, *где су X и Y независне случајне променљиве, случајна променљива $I_{\frac{1-\alpha}{\theta}}$ је независна од X и Y, и бројачки низови за $(1-\theta\cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})\circ X$ и $(1-\theta\cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})\circ Y$ су независни.*

Доказ. (*i*) Из (2.2.5) и из дефиниције биномног тининг оператора, користећи његову функцију генератрисе вероватноћа, имамо да је

$$\begin{aligned} E\left(s^{\alpha *_\theta X}\right) &= \left(1-\frac{1-\alpha}{\theta}\right)\Phi_X(s) + \frac{1-\alpha}{\theta}\Phi_X(1-(1-\theta)+(1-\theta)s) \\ &= \left(1-\frac{1-\alpha}{\theta}\right)\Phi_X(s) + \frac{1-\alpha}{\theta}\Phi_{(1-\theta)\circ X}(s), \end{aligned}$$

па је одавде

$$
\begin{aligned}
\alpha *_\theta X &\overset{p}{=} \begin{cases} X, & \text{с.в. } 1-\frac{(1-\alpha)}{\theta}, \\ (1-\theta)\circ X, & \text{с.в. } \frac{(1-\alpha)}{\theta}. \end{cases} \\
&\overset{p}{=} (1-\theta\cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})\circ X.
\end{aligned}
$$

(ii) Из (2.2.5) добијамо да је функција генератрисе вероватноћа случајне променљиве $\alpha *_\theta (\beta *_\delta X)$ дата са

$$
\Phi_{\alpha*_\theta(\beta*_\delta X)}(s) = \left(1-\frac{1-\alpha}{\theta}\right)\Phi_{\beta*_\delta X}(s) + \frac{1-\alpha}{\theta}\Phi_{\beta*_\delta X}(\theta+(1-\theta)s)
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \left(1-\frac{1-\alpha}{\theta}\right)\left[\left(1-\frac{1-\beta}{\delta}\right)\Phi_X(s)+\frac{1-\beta}{\delta}\Phi_X(\delta+(1-\delta)s)\right] \\
& +\frac{1-\alpha}{\theta}\left[\left(1-\frac{1-\beta}{\delta}\right)\Phi_X(\theta+(1-\theta)s)\right. \\
& \left. +\,\frac{1-\beta}{\delta}\Phi_X(1-(1-\delta)(1-\theta)+(1-\delta)(1-\theta)s)\right] \\
= \;& \left(1-\frac{1-\alpha}{\theta}\right)\left(1-\frac{1-\beta}{\delta}\right)\Phi_X(s) \\
& +\left(1-\frac{1-\alpha}{\theta}\right)\frac{1-\beta}{\delta}\Phi_X(\delta+(1-\delta)s) \\
& +\frac{1-\alpha}{\theta}\left(1-\frac{1-\beta}{\delta}\right)\Phi_X(\theta+(1-\theta)s) \\
& +\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\theta\delta}\Phi_X(\theta+\delta-\theta\delta+(1-\theta)(1-\delta)s).
\end{aligned}
$$

Важи да је $\Phi_X(\theta+(1-\theta)s)\equiv\Phi_X(1-(1-\theta)+(1-\theta)s)=\Phi_{(1-\theta)\circ X}(s)$, па примењујући ову формулу на све функције генератрисе вероватноћа из последње једнакости директно добијамо (ii).

(iii) Користећи (i), добијамо да је функција генератрисе вероватноћа случајне променљиве $\alpha *_\theta (X+Y)$ једнака

$$
\Phi_{\alpha*_\theta(X+Y)}(s) = E\left(s^{\alpha*_\theta(X+Y)}\right) = E\left(s^{(1-\theta\cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})\circ(X+Y)}\right)
$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1-\frac{1-\alpha}{\theta}\right)E\left(s^{X+Y}\right)+\frac{1-\alpha}{\theta}E\left(s^{(1-\theta)\circ(X+Y)}\right)\\
&= \left(1-\frac{1-\alpha}{\theta}\right)\Phi_X(s)\Phi_Y(s)+\frac{1-\alpha}{\theta}\Phi_X(\theta+(1-\theta)s)\Phi_Y(\theta+(1-\theta)s).
\end{aligned}$$

Са друге стране, функција генератрисе вероватноћа случајне променљиве на десној страни једнакости (iii) биће једнака

$$\Phi_{(1-\theta\cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})\circ X+(1-\theta\cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})\circ Y}(s)=E\left(s^{(1-\theta\cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})\circ X+(1-\theta\cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})\circ Y}\right)=$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1-\frac{1-\alpha}{\theta}\right)E\left(s^{X+Y}\right)+\frac{1-\alpha}{\theta}E\left(s^{(1-\theta)\circ X+(1-\theta)\circ Y}\right)\\
&= \left(1-\frac{1-\alpha}{\theta}\right)\Phi_X(s)\Phi_Y(s)+\frac{1-\alpha}{\theta}\Phi_X(\theta+(1-\theta)s)\Phi_Y(\theta+(1-\theta)s).
\end{aligned}$$

Одавде директно следи (iii). $\square$

2.2.2 Особине генерализованог биномног тининг оператора II врсте

Условна функција генератрисе вероватноћа случајне поменљиве $\alpha *_\theta X$ за дато X је

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha *_\theta X|X}(s) &\equiv E\left(s^{\alpha *_\theta X}|X\right)\\
&= \left(1-\frac{1-\alpha}{\theta}\right)s^X+\frac{1-\alpha}{\theta}\left(\theta+(1-\theta)s\right)^X. \quad (2.2.6)
\end{aligned}$$

Применом познате везе између момената случајне променљиве и вредности извода одређеног реда функције генератрисе вероватноћа у 1, одредићемо нека својства генерализованог биномног тининг оператора II врсте.

Теорема 2.2.2 (Miletić Ilić, 2014) *Нека је X ненегативна целобројна случајна променљива. Тада важи:*

(*i*) *n-ти условни факторијелни момент случајне променљиве $\alpha *_\theta X$ је*

$$E\left((\alpha *_\theta X)_n|X\right) = \left(1 - \frac{1-\alpha}{\theta} + \frac{1-\alpha}{\theta}(1-\theta)^n\right)(X)_n, \ n \geq 1,$$

где је $(X)_n = X(X-1)\cdots(X-n+1)$;

(*ii*) $E\left(\alpha *_\theta X|X\right) = \alpha X$;

(*iii*) $E\left((\alpha *_\theta X)^2|X\right) = (2\alpha + \theta - \alpha\theta - 1)X^2 + (1-\alpha)(1-\theta)X$;

(*iv*) $Var\left(\alpha *_\theta X|X\right) = (1-\alpha)(\alpha + \theta - 1)X^2 + (1-\alpha)(1-\theta)X$.

Доказ. (*i*) Из (2.2.6) имамо да је

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_{\alpha *_\theta X|X}(s)}{\partial s} &= \left(1 - \frac{1-\alpha}{\theta}\right) X s^{X-1} \\
&+ \frac{1-\alpha}{\theta}(1-\theta)X\left(\theta + (1-\theta)s\right)^{X-1}, \\
\frac{\partial^2 \Phi_{\alpha *_\theta X|X}(s)}{\partial s^2} &= \left(1 - \frac{1-\alpha}{\theta}\right) X(X-1) s^{X-2} \\
&+ \frac{1-\alpha}{\theta}(1-\theta)^2 X(X-1)\left(\theta + (1-\theta)s\right)^{X-2}.
\end{aligned}$$

Настављајући поступак, добијамо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n \Phi_{\alpha *_\theta X|X}(s)}{\partial s^n} &= \left(1 - \frac{1-\alpha}{\theta}\right) X(X-1)\cdots(X-n+1) s^{X-n} \\
&+ \frac{1-\alpha}{\theta}(1-\theta)^n X(X-1)\cdots(X-n+1)\left(\theta + (1-\theta)s\right)^{X-n},
\end{aligned}$$

а одавде следи

$$E\left((\alpha *_\theta X)_n|X\right) = \frac{\partial^n \Phi_{\alpha *_\theta X|X}(s)}{\partial s^n}\bigg|_{s=1} = \left(1 - \frac{1-\alpha}{\theta} + \frac{1-\alpha}{\theta}(1-\theta)^n\right)(X)_n.$$

(ii) Доказ директно следи из (i), за $n = 1$

$$E\left((\alpha *_\theta X)|X\right) = \left(1 - \frac{1-\alpha}{\theta} + \frac{1-\alpha}{\theta}(1-\theta)\right) X = \alpha X.$$

(iii) Поново из (i), за $n = 2$, имамо да је

$$\begin{aligned} E\left((\alpha *_\theta X)^2|X\right) &= E\left(\alpha *_\theta X|X\right) + \left(1 - \frac{1-\alpha}{\theta} + \frac{1-\alpha}{\theta}(1-\theta)^2\right) X(X-1) \\ &= \alpha X + (2\alpha + \theta - \alpha\theta - 1)(X^2 - X) \\ &= (2\alpha + \theta - \alpha\theta - 1)X^2 + (1-\alpha)(1-\theta)X. \end{aligned}$$

(iv) Директно следи из (ii) и (iii). □

Последица 2.2.1 *Нека је X ненегативна целобројна случајна променљива и нека је $(X)_n = X(X-1)\cdots(X-n+1)$. Тада је:*

(i) *n-ти факторијелни момент случајне променљиве $\alpha *_\theta X$*

$$E\left((\alpha *_\theta X)_n\right) = \left(1 - \frac{1-\alpha}{\theta} + \frac{1-\alpha}{\theta}(1-\theta)^n\right) E((X)_n), \ n \geq 1;$$

(ii) $E\left(\alpha *_\theta X\right) = \alpha E(X)$;

(iii) $E\left((\alpha *_\theta X)^2\right) = (2\alpha + \theta - \alpha\theta - 1)E(X^2) + (1-\alpha)(1-\theta)E(X)$;

(iv) $Var\left(\alpha *_\theta X\right) = (2\alpha+\theta-\alpha\theta-1)Var(X) + (1-\alpha)(\alpha+\theta-1)(E(X))^2 + (1-\alpha)(1-\theta)E(X)$.

Лема 2.2.1 *Нека су X и Y две ненегативне целобројне случајне променљиве са коначним другим моментима. Тада је:*

(i) $E(X(\alpha *_\theta Y)) = \alpha E(X, Y)$;

(ii) $Cov(X, \alpha *_\theta Y) = \alpha Cov(X, Y)$

Доказ. Доказ је сличан доказу Леме 2.1.1. □

2.2.3 Конструкција и основна својства модела NDCINAR(1)

У овом одељку представићемо INAR(1) модел базиран на генерализованом биномном тининг оператору II врсте.

Дефиниција 2.2.2 (Miletić Ilić, 2014) *Временски низ* $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ *ненегативних целобројних случајних променљивих, дефинисан са*

$$X_t = \alpha *_\theta X_{t-1} + \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}, \tag{2.2.7}$$

где је $0 \leq 1 - \alpha \leq \theta$ *и* $\theta \in (0, 1]$, *је* $INAR$ *временски низ реда 1 са зависним бројачким низом* ($NDCINAR(1)$)[7], *ако постоји низ* $\{\varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ *независних једнако расподељених случајних променљивих, таквих да је* $Cov(\varepsilon_t, X_s) = 0$ *за* $s < t$, *случајне променљиве бројачког низа* $\{U_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ *су независне од* X_j *и* ε_k, *за свако* i, j, k, *и бројачки низови* $\{U_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ *који се користе за генерисање* X_t *и* X_s, *су међусобно независни за* $t \neq s$.

Надаље претпостављамо да су случајне променљиве временског низа једнако расподељене. Одредимо функцију генератрисе вероватноћа, очекивање и дисперзију случајне променљиве ε_t.

Лема 2.2.2 *Функција генератрисе вероватноћа случајне променљиве* ε_t, *дата је са*

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{\Phi_X(s)}{(1 - \frac{1-\alpha}{\theta})\Phi_X(s) + \frac{1-\alpha}{\theta}\Phi_X(\theta + (1-\theta)s)}. \tag{2.2.8}$$

Из (2.2.7) и из особина генерализованог биномног тининг оператора II врсте имамо да је

$$\begin{aligned} E(X_t) &= E(\alpha * X_{t-1}) + E(\varepsilon_t) \\ &= \alpha E(X_{t-1}) + E(\varepsilon_t), \end{aligned}$$

па из стационарности временског низа следи да је очекивање случајне променљиве ε_t

$$\mu_\varepsilon = (1 - \alpha)E(X).$$

[7] New dependent counting INAR

Из (2.2.7) и особине (iv) Последице 2.2.1, директно следи да је дисперзија случајне променљиве ε_t једнака

$$\sigma_\varepsilon^2 = (1-\alpha)\left((2-\theta)Var(X) + (1-\theta-\alpha)\left(E(X)\right)^2 - (1-\theta)E(X)\right).$$

Размотримо сада аутокорелациону структуру модела. Из Леме 2.2.1, добијамо да је аутоковаријансна функција NDCINAR(1) модела

$$\gamma(k) \equiv Cov(X_{t+k}, X_t) = \alpha\gamma_{k-1} = \cdots = \alpha^k\gamma(0),\ \ k \geq 0, \tag{2.2.9}$$

па одатле директно следи да је аутокорелација експоненцијално опадајућа функција дата са

$$\rho(k) = \alpha^k,\ \ k \geq 0. \tag{2.2.10}$$

2.2.4 Условне статистичке особине NDCINAR(1) модела

Означимо са μ очекивање случајне променљиве X_t. Користећи особину (ii) Теореме 2.2.2, добијамо условно очекивање за један корак

$$E(X_{t+1}|X_t) = \alpha X_t + (1-\alpha)\mu, \tag{2.2.11}$$

и за k корака

$$E(X_{t+k}|X_t) = \alpha^k X_t + (1-\alpha^k)\mu. \tag{2.2.12}$$

Даље, из особине (iii) исте теореме следи да је условни други момент једнак

$$E\left(X_{t+1}^2|X_t\right) = (2\alpha+\theta-\alpha\theta-1)X_t^2 + (1-\alpha)(1-\theta)X_t + 2\alpha X_t\mu_\varepsilon + E(\varepsilon_t^2),$$

а одатле имамо да је условна дисперзија

$$Var(X_{t+1}|X_t) = (1-\alpha)(\alpha+\theta-1)X_t^2 + (1-\alpha)(1-\theta)X_t + \sigma_\varepsilon^2. \tag{2.2.13}$$

Приметимо да је условна дисперзија квадратна функција. У случају када је вредност θ блиска вредности $1-\alpha$, условна дисперзија постаје линеарна функција, док у случају када α тежи 1, условна дисперзија тежи дисперзији иновационог низа.

Надаље, добијамо да је условни други момент за k корака

$$
\begin{aligned}
E(X_{t+k}^2|X_t) &= a^k X_t^2 + b\frac{a^k-\alpha^k}{a-\alpha}X_t \\
&\quad + \frac{b(1-\alpha)\mu}{a-\alpha}\left(\frac{a^k-1}{a-1}-\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}\right)+\frac{a^k-1}{a-1}E(\varepsilon^2),
\end{aligned}
$$

а одатле је условна дисперзија за k корака

$$
\begin{aligned}
Var(X_{t+k}|X_t) &= E(X_{t+k}^2|X_t)-(E(X_{t+k}|X_t))^2 \\
&= (a^k-\alpha^{2k})X_t^2+\left(b\frac{a^k-\alpha^k}{a-\alpha}-2\mu\alpha^k(1-\alpha^k)\right)X_t \\
&\quad +\frac{a^k-1}{a-1}\sigma_\varepsilon^2+\frac{b(1-\alpha)\mu}{a-\alpha}\left(\frac{a^k-1}{a-1}-\frac{\alpha^k-1}{\alpha-1}\right) \\
&\quad +(1-\alpha)^2\left(\frac{a^k-1}{a-1}-\frac{(1-\alpha^k)^2}{(1-\alpha)^2}\right)\mu^2, \qquad (2.2.14)
\end{aligned}
$$

где је $a = 2\alpha-\alpha\theta+\theta-1$ и $b = (1-\alpha)(1-\theta+2\alpha\mu)$. Видимо да и овде условна дисперзија квадратно зависи од прошлости временског низа. Коефицијент зависности је у овом случају једнак $((2\alpha-\alpha\theta+\theta-1)^k-\alpha^{2k})$ и тежи нули када α тежи 1 или када вредност параметра θ тежи својој граничној вредности $1-\alpha$. Како је $\alpha < 1$, то је $a = \alpha(1-\theta)+\theta-1+\alpha < 1-\theta+\theta-1+\alpha = \alpha < 1$, па директном провером утврђујемо да $Var(X_{t+k}|X_t) \to Var(X_t)$, за $k \to \infty$.

Расподела иновационог низа

Надаље претпостављамо да временски низ $\{X_t\}$ има геометријску маргиналну расподелу са параметром $\frac{\mu}{1+\mu}$, $\mu > 0$.

Теорема 2.2.3 (Miletić Ilić, 2014) *Нека је $\theta \in (0,1]$ и $0 \le 1-\alpha \le \theta$ и нека временски низ дефинисан са (2.2.7) има геометријску расподелу са параметром $\frac{\mu}{1+\mu}$, $\mu > 0$. Тада је случајна променљива ε_t мешавина нуле и случајне променљиве са геометријском расподелом, тј.*

$$
\varepsilon_t \stackrel{p}{=} \begin{cases} 0, & \text{с.в. } \frac{1-\theta}{2-\alpha-\theta} \\ Geom\left(\frac{(2-\alpha-\theta)\mu}{1+(2-\alpha-\theta)\mu}\right), & \text{с.в. } \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\theta}. \end{cases}
$$

Доказ. Из Леме 2.2.2 и користећи претпоставку о геометријској маргиналној расподели временског низа, добијамо да је

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(s) &= \frac{\frac{1}{1+\mu-\mu s}}{\frac{\alpha+\theta-1}{\theta}\cdot\frac{1}{1+\mu-\mu s}+\frac{1-\alpha}{\theta}\cdot\frac{1}{1+\mu-\mu(\theta+(1-\theta)s)}}\\ &= \frac{\theta(1+\mu(1-\theta)-\mu(1-\theta)s)}{(\alpha+\theta-1)(1+\mu(1-\theta)-\mu(1-\theta)s)+(1-\alpha)(1+\mu-\mu s)}\ .\end{aligned}$$

Означимо именилац претходног разломка са $I(s)$. Имамо да је

$$\begin{aligned}I(s) &= (\alpha+\theta-1)(1+\mu(1-\theta)-\mu(1-\theta)s)+(1-\alpha)(1+\mu-\mu s)\\ &= \alpha+\alpha\mu-\alpha\mu\theta+\theta+\theta\mu-\theta^2\mu-1-\mu+\mu\theta+1+\mu-\alpha-\alpha\mu\\ &\quad +(-\alpha\mu+\alpha\mu\theta-\mu\theta+\mu\theta^2+\mu-\mu\theta-\mu+\alpha\mu)s\\ &= \theta[1+(2\mu-\mu\theta-\mu\alpha)-(2\mu-\mu\theta-\mu\alpha)s].\end{aligned}$$

Тако добијамо да је

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(s) &= \frac{1+\mu(1-\theta)-\mu(1-\theta)s}{1+(2\mu-\mu\theta-\mu\alpha)-(2\mu-\mu\theta-\mu\alpha)s}\\ &= \frac{1-\theta}{2-\alpha-\theta}+\frac{1-\alpha}{2-\alpha-\theta}\cdot\frac{1}{1+\mu(2-\alpha-\theta)-\mu(2-\alpha-\theta)s}\ .\end{aligned}$$

Како је $\frac{1}{1+\mu(2-\alpha-\theta)-\mu(2-\alpha-\theta)s}$ функција генератрисе вероватноћа случајне променљиве са $Geom\left(\frac{(2-\alpha-\theta)\mu}{1+(2-\alpha-\theta)\mu}\right)$ расподелом, а 1 одговара случајној променљивој која је у расподели једнака нули, то из последње једнакости доказ директно следи. $\square$

Последица 2.2.2 *Ако важе услови Теореме 2.2.3, онда су очекивање и дисперзија случајне променљиве ε_t, редом*

$$\mu_\varepsilon=(1-\alpha)\mu,\ \sigma_\varepsilon^2=(1-\alpha)(3-\alpha-2\theta)\mu^2+(1-\alpha)\mu. \tag{2.2.15}$$

Размотримо расподелу случајне променљиве ε_t за неке специјалне вредности параметара. За $\theta=1$, случајна променљива ε_t има геометријску расподелу са параметром $\frac{(1-\alpha)\mu}{1+(1-\alpha)\mu}$. За $\alpha=1$, ε_t је у расподели једнака нули, док је за $\theta=1-\alpha$, расподела случајне променљиве ε_t једнака мешавини нуле и $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$ расподеле, редом са вероватноћама α и $1-\alpha$. Одатле добијамо следећу примедбу.

Примедба 2.2.3 (*i*) Ако је $\alpha = 1$, тада је $X_t = X_{t-1}$, па је $X_t = X_i$, за свако $t, i \in \mathbb{Z}$.

(*ii*) Ако је $\theta = 1$, тада је $X_t = Z_t X_{t-1} + \varepsilon_t$, где је $\{\varepsilon_t\}$ низ случајних променљивих са $Geom\left(\frac{(1-\alpha)\mu}{1+(1-\alpha)\mu}\right)$ расподелом, $\{Z_t\}$ је низ независних једнако расподељених случајних променљивих са $Ber(\alpha)$ расподелом, ε_t и Z_s су независне за свако t и свако s, и X_{t-l} је независно од ε_t и Z_t за свако $l \geq 1$.

(*iii*) Ако је $\theta = 1 - \alpha$, тада се $\{X_t\}$ своди на GINAR(1) временски низ који су дефинисали Alzaid и Al-Osh (1988).

На сличан начин као код претходног модела, може се показати да важи следећа теорема.

Теорема 2.2.4 NDCINAR(1) *временски низ са једнаким расподелама случајних променљивих је строго стационаран и ергодичан.*

2.2.5 Оцењивање непознатих параметара NDCINAR(1) модела

Оценимо сада непознате параметре α, θ и μ NDCINAR(1) модела стандардним методама, базирајући оцењивање на реализацији случајног вектора $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ посматраног временског низа.

Метод условних најмањих квадрата

Пошто је функција која се минимизира $Q_N(\alpha, \mu) = \sum_{t=2}^{N}(X_t - \alpha X_{t-1} - (1-\alpha)\mu)^2$ иста као код DCGINAR(1) модела, то се добијају и исте оцене условних најмањих квадрата параметара α и μ, па је тако

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{cls} &= \frac{\sum_{t=2}^{N} X_t X_{t-1} - \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} X_t \sum_{t=2}^{N} X_{t-1}}{\sum_{t=2}^{N} X_{t-1}^2 - \frac{1}{N-1}(\sum_{t=2}^{N} X_{t-1})^2}, \\
\hat{\mu}_{cls} &= \frac{\sum_{t=2}^{N} X_t - \hat{\alpha}_{cls}\sum_{t=2}^{N} X_{t-1}}{(N-1)(1-\hat{\alpha}_{cls})}.
\end{aligned}$$

За оцењивање параметра θ поново користимо метод који су увели Karlsen и Tjostheim (1998), па тако оцену условних најмањих квадрата параметра θ добијамо минимизирањем функције

$$S(\theta) = \sum_{t=2}^{N} \left(V_t - Var(X_t|X_{t-1})\right)^2,$$

где је $V_t = (X_t - \alpha X_{t-1} - (1-\alpha)\mu)^2$. Из једнакости (2.2.13) и Последице 2.2.2, имамо да је

$$\begin{aligned}
Var(X_t|X_{t-1}) &= (1-\alpha)(\alpha+\theta-1)X_{t-1}^2 + (1-\alpha)(1-\theta)X_{t-1} + \sigma_\varepsilon^2 \\
&= (1-\alpha)(\alpha+\theta-1)X_{t-1}^2 + (1-\alpha)(1-\theta)X_{t-1} \\
&\quad +(1-\alpha)\mu(1+3\mu-2\theta\mu-\alpha\mu) \\
&= (1-\alpha)\theta X_{t-1}^2 - (1-\alpha)^2 X_{t-1}^2 - (1-\alpha)\theta X_{t-1} \\
&\quad +(1-\alpha)X_{t-1} + (1-\alpha)\mu(1+3\mu-\alpha\mu) - 2(1-\alpha)\theta\mu^2 \\
&= (1-\alpha)\theta(X_{t-1}^2 - X_{t-1} - 2\mu^2) - (1-\alpha)^2 X_{t-1} \\
&\quad +(1-\alpha)X_{t-1} + (1-\alpha)\mu(1+3\mu-\alpha\mu),
\end{aligned}$$

па је одатле

$$\begin{aligned}
S(\theta) &= \sum_{t=2}^{N} \big[V_t - (1-\alpha)(X_{t-1}^2 - X_{t-1} - 2\mu^2)\theta + (1-\alpha) \\
&\quad \times ((1-\alpha)X_{t-1}^2 - X_{t-1} - (1+3\mu-\alpha\mu)\mu)\big]^2.
\end{aligned}$$

Примењујући стандардну процедуру за минимизирање дате функције, и замењујући параметре α и μ њиховим оценама условних најмањих квадрата, добијамо да је оцена условних најмањих квадрата параметра θ дата са

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_{cls} &= \frac{\sum_{t=2}^{N}(\hat{V}_t + (1-\hat{\alpha}_{cls})((1-\hat{\alpha}_{cls})X_{t-1}^2 - X_{t-1} - \hat{\mu}_{cls}(1+3\hat{\mu}_{cls} - \hat{\alpha}_{cls}\hat{\mu}_{cls})))}{(1-\hat{\alpha}_{cls})\sum_{t=2}^{n}(X_{t-1}^2 - X_{t-1} - 2\hat{\mu}_{cls}^2)^2} \\
&\quad \times (X_{t-1}^2 - X_{t-1} - 2\hat{\mu}_{cls}^2),
\end{aligned}$$

где је $\hat{V}_t = (X_t - \hat{\alpha}_{cls}X_{t-1} - (1-\hat{\alpha}_{cls})\hat{\mu}_{cls})^2$.

Из ергодичности NDCINAR(1) временског низа, следи строга постојаност оцене условних најмањих квадрата параметра θ. Да бисмо размотрили асимптотске особине $(\hat{\alpha}_{cls}, \hat{\mu}_{cls})$ оцена, поново примењујемо Теореме 1.1.3 и 1.1.4. Имамо да је функција $g \equiv E(X_t|X_{t-1}) = \alpha X_{t-1} + (1-\alpha)\mu$ иста као код DCGINAR(1) модела, одакле следи да су сви услови Теореме 1.1.3 задовољени, па су оцене $\hat{\alpha}_{cls}$ и $\hat{\mu}_{cls}$ строго постојане. Даље, имамо да је

$$\begin{aligned} f_{t|t-1} &= Var(X_t|X_{t-1}) \\ &= (1-\alpha)(\alpha+\theta-1)X_{t-1}^2 + (1-\alpha)(1-\alpha)X_{t-1} \\ &\quad +\mu(1-\alpha)(1+3\mu-2\theta\mu-\alpha\mu), \end{aligned}$$

па добијамо да је

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

где је

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1-\alpha)\mu(1+\mu)(\alpha-7\mu+11\alpha\mu+8\theta\mu-11\mu^2+13\alpha\mu^2+12\theta\mu^2), \\ a_{12} &= a_{21} = (1-\alpha)^2\mu(1+\mu)(\alpha-4\mu+4\alpha\mu+4\theta\mu), \\ a_{22} &= \mu(1-\alpha)^3(1+\alpha)(1+\mu). \end{aligned}$$

Приликом одређивања матрице $\boldsymbol{R}$ јављају се моменти $E(X^i)$, $i = 1,\ldots,4$. Пошто су сви елементи матрице $\boldsymbol{R}$ коначни, сви услови Теореме 1.1.4 су задовољени, па добијамо да

$$\sqrt{N}\begin{bmatrix} \hat{\alpha}_{cls}-\alpha \\ \hat{\mu}_{cls}-\mu \end{bmatrix} \xrightarrow{p} \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}\right),$$

где је коваријансна матрица

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\alpha)(\alpha-7\mu+11\alpha\mu+8\theta\mu-11\mu^2+13\alpha\mu^2+12\theta\mu^2)}{\mu(1+\mu)} & \alpha+4\mu(\alpha+\theta-1) \\ \alpha+4\mu(\alpha+\theta-1) & \frac{(1+\alpha)\mu(1+\mu)}{1-\alpha} \end{bmatrix}.$$

Интересантно је размотрити како неки специјални случајеви вредности параметара утичу на промене вредности коваријансне матрице, па самим тим и на понашање оцена условних најмањих квадрата. У случају када α тежи 0 и θ тежи 1, коваријансна матрица тежи $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu(1+\mu) \end{bmatrix}$, што значи да када корелираност у временском низу опада, а расте зависност међу елементима бројачког низа, тада зависност између оцена такође опада. У исто време дисперзија оцене параметра α тежи јединици, док је дисперзија оцене параметра μ блиска дисперзији маргиналне расподеле. У случају јаке корелисаности временског низа, тј. ако α тежи 1, онда се матрица своди на $\begin{bmatrix} 0 & 1+4\mu\theta \\ 1+4\mu\theta & \infty \end{bmatrix}$, што значи да оцена параметра α конвергира константи, док дисперзија за $\hat{\mu}_{cls}$ дивергира, па ова оцена постаје бескорисна за велики обим узорка. Слично, ако је μ близу 0, матрица тежи $\begin{bmatrix} \infty & \alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$. У овом случају, коваријансе су блиске корелацији у временском низу, оцена параметра μ конвергира ка константи, док оцена параметра α постаје бескорисна на великом обиму узорка.

Метод момената

Пошто је $\mu = E(X_t)$ и $\alpha = \gamma(1)/\gamma(0)$, оцене за μ и α су

$$\hat{\mu}_{yw} = \overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} X_t,$$

$$\hat{\alpha}_{yw} = \frac{\sum_{t=2}^{N}(X_t - \overline{X}_N)(X_{t-1} - \overline{X}_N)}{\sum_{t=1}^{N}(X_t - \overline{X}_N)^2}.$$

За оцењивање параметра θ искористићемо коваријансу случајних променљивих X_t^2 и X_{t-1}, па тако имамо да је

$$\begin{aligned} Cov(X_t^2, X_{t-1}) &= Cov((\alpha *_\theta X_{t-1})^2, X_{t-1}) + 2E(\varepsilon_t)Cov(\alpha *_\theta X_{t-1}, X_{t-1}) \\ &= Cov((\alpha *_\theta X_{t-1})^2, X_{t-1}) + 2\mu_\varepsilon \alpha Var(X_{t-1}) \\ &= Cov((\alpha *_\theta X_{t-1})^2, X_{t-1}) + 2\alpha(1-\alpha)(1+\mu)\mu^2. \end{aligned}$$

Даље, из Последице 2.2.1, добијамо

$$Cov((\alpha *_\theta X_{t-1})^2, X_{t-1}) = E((\alpha *_\theta X_{t-1})^2 X_{t-1}) - E((\alpha *_\theta X_{t-1})^2)E(X_{t-1})$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-\alpha)(1-\theta)E(X_{t-1}^2) + (2\alpha - \alpha\theta + \theta - 1)E(X_{t-1}^3) \\
&\quad -[(1-\alpha)(1-\theta)E(X_{t-1}) + (2\alpha - \alpha\theta + \theta - 1)E(X_{t-1}^2)]E(X_{t-1}) \\
&= (2\alpha - \alpha\theta + \theta - 1)E(X_{t-1}^3) \\
&\quad +[(1-\alpha)(1-\theta) - (2\alpha - \alpha\theta + \theta - 1)E(X_{t-1})]E(X_{t-1}^2) \\
&\quad -(1-\alpha)(1-\theta)(E(X_{t-1}))^2.
\end{aligned}
$$

Користећи претпоставку да временски низ има геометријску маргиналну расподелу, и замењујући одговарајуће моменте у претходној једнакости, добијамо да је

$$Cov((\alpha *_\theta X_{t-1})^2, X_{t-1}) = \mu(1+\mu)(\alpha - 4\mu + 8\alpha\mu + 4\theta\mu - 4\alpha\theta\mu),$$

па је одатле

$$Cov(X_t^2, X_{t-1}) = \mu(1+\mu)(\alpha - 4\mu + 10\alpha\mu - 2\alpha^2\mu + 4\theta\mu(1-\alpha)).$$

Може се приметити да коваријанса између случајних променљивих X_t^2 и X_{t-1} тежи нули када μ тежи нули. Такође, у случају када α тежи јединици, коваријанса зависи само од параметра μ и једнака је $\mu(1+\mu)(1+4\mu)$. Коначно, из последње једнакости добијамо да је оцена параметра θ добијена методом момената једнака

$$\hat{\theta}_{yw} = \frac{\hat{C} - \hat{\mu}_{yw}(1+\hat{\mu}_{yw})(\hat{\alpha}_{yw} - 4\hat{\mu}_{yw} + 2\hat{\alpha}_{yw}\hat{\mu}_{yw}(5-\hat{\alpha}_{yw}))}{4(1-\hat{\alpha}_{yw})(1+\hat{\mu}_{yw})\hat{\mu}_{yw}^2},$$

где је $\hat{C}$ оцена коваријансе $Cov(X_t^2, X_{t-1})$ и једнака је

$$\hat{C} = \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} X_t^2 X_{t-1} - \left(\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} X_t^2\right)\left(\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} X_{t-1}\right).$$

Оцене параметара α и μ добијене методом момената су исте као код DCGINAR(1) модела па су строго постојане. Показали смо да из ергодичности временског низа следи да је $\hat{C}$ строго постојана оцена коваријансе $Cov(X_t^2, X_{t-1})$. Из строге постојаности оцена параметара α и μ и оцене $\hat{C}$ следи

$$\hat{\theta}_{yw} \xrightarrow{c.u.} \frac{Cov(X_t^2, X_{t-1}) - \mu(1+\mu)(\alpha - 4\mu + 2\alpha\mu(5-\alpha))}{4(1-\alpha)(1+\mu)\mu^2} = \theta, \text{ када } N \to \infty,$$

па одатле следи строга постојаност оцене параметра θ.

Метод максималне веродостојности

Оцене добијамо максимизирањем логаритмоване функције веродостојности

$$\log L(x_1, \ldots x_N; \mu, \alpha, \theta) = x_1 \log \mu - (x_1+1) \log(1+\mu) + \sum_{n=2}^{N} \log P_n(x_n, x_{n-1}; \mu, \alpha, \theta),$$

где је $P_n(x_n, x_{n-1}; \mu, \alpha, \theta) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1})$. Одредимо сада вероватноће прелаза

$$P(X_n = j | X_{n-1} = 0) = P(\varepsilon_n = j),$$

$$\begin{aligned} P(X_n = j | X_{n-1} = i) &= \sum_{k=0}^{min(i,j)} \Bigg((1 - \frac{1-\alpha}{\theta}) I(i = k) \\ &\quad + \frac{1-\alpha}{\theta} \binom{i}{k} (1-\theta)^k \theta^{i-k} \Bigg) P(\varepsilon_n = j - k), \ i > 0. \end{aligned}$$

Из расподеле случајне променљиве ε_n, имамо да је

$$\begin{aligned} P(\varepsilon_n = 0) &= \frac{1-\theta}{2-\alpha-\theta} + \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\theta} \cdot \frac{1}{1+\mu(2-\theta-\alpha)} \\ &= \frac{1+(1-\theta)\mu}{1+\mu(2-\theta-\alpha)}, \\ P(\varepsilon_n = l) &= \frac{1-\alpha}{2-\alpha-\theta} \cdot \frac{(\mu(2-\theta-\alpha))^l}{(1+\mu(2-\theta-\alpha))^{l+1}}, \ l > 0. \end{aligned}$$

Оцене максималне веродостојности добијамо решавањем система једначина

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = 0$$
$$\frac{\partial \log L}{\partial \alpha} = 0$$
$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = 0.$$

Због комплексности добијених једначина аналитичко решавање је немогуће па можемо применити нумеричке процедуре уграђене у већини статистичких софтверских пакета. Овде је коришћен програмски пакет R и пакет који су направили Ristić и Nastić.

Нумерички резултати

У овом одељку упоредићемо претходно описане методе оцењивања параметара. Најпре је симулирано 100 узорака обима 500, а затим су одређене узорачке средине и стандардне девијације за подузорке обима 100, 200, 300, 400 и 500. Да бисмо лакше уочили и детаљно анализирали понашање и особине оцена, посматране узорке смо поделили у неколико група. Узимајући у обзир услове $0 \leq 1-\alpha \leq \theta$ и $\theta \in (0,1]$, разматрана су следећа четири случаја стварних вредности параметара: (a) $\alpha = 0,2, \theta = 0,9$, (b) $\alpha = 0,5, \theta = 0,6$, (c) $\alpha = 0,8, \theta = 0,2$ и (d) $\alpha = 0,8, \theta = 0,9$. Унутар сваке групе параметар μ се мења, узимајући вредности $0,5$, 1 и 5. Анализирајући резултате представљене у Табелама 2.3 - 2.6, можемо уочити да све средине конвергирају правим вредностима, а стандардне девијације конвергирају нули у свим случајевима. Стандардна одступања су мала, осим за оцену параметра μ, за $\mu = 5$, у трећем и четвртом случају, када је јака корелираност временског низа, односно за велико α. Приметимо да промена вредности параметра μ значајно утиче на стандардне девијације у свакој групи. У првом случају, промена параметра μ не утиче значајно на оцене параметра α, док стандардне девијације у оцењивању параметара θ и μ опадају и расту, респективно, са повећањем параметра μ. У свим осталим случајевима, промена параметра μ утиче на оцене параметра α, у смислу да стандардне девијације опадају са повећањем параметра μ, док је утицај промене параметра μ на оцене параметара θ и μ исти као у првом случају. Даље, у првом случају, за $\mu = 0,5$, метод условних најмањих квадрата даје најбоље резултате у оцењивању параметра μ, док су у четвртом случају, тј. у случају када су вредности параметара α и θ највеће, за $\mu = 0,5$ и $\mu = 1$, најмање стандардне девијације у оцењивању параметра μ за подузорак обима 100 добијене методом момената. Поредећи све случајеве, можемо уочити да је најбржа конвергенција стандардних девијација у оцењивању параметара α и θ постигнута у трећем случају, тј. у случају снажне корелисаности временског низа $\{X_t\}$ и слабе зависности бројачког низа.

Расподела	Оцене параметара	χ^2	p-вредност
Пуасонова	$\lambda = 1.0417$	6918.6	0.0000
Геометријска	$\mu = 1.0417$	16.7	0.0536
Негативна биномна	$\mu = 1.0257$, $\theta = 1.0155$	16.9	0.0311
Генералисана Пуасонова	$\lambda = 0.7319$, $\theta = 0.2974$	15.8	0.0460

Насупрот томе, стандардна одступања у оцењивању параметра μ су најближа нули у првом случају, тј. у случају слабе корелираности временског низа $\{X_t\}$ и снажне зависности међу члановима бројачког низа. Коначно, очигледно је да метод максималне веродостојности даје најбоље резултате у односу на све параметре.

2.2.6 Примена на реалним подацима

Размотримо сада могућу примену NDCINAR(1) модела на стварним подацима. Анализирани временски низ је преузет са интернет сајта Forecasting Principles (http://www.forecastingprinciples.com), из секције о криминолошким подацима. Посматрани низ се састоји од 144 опсервације и представља месечно бројање регистрованих случајева вандализма, у периоду од јануара 1990. до децембра 2001. године, у полицијској станици 1411, у Питсбургу. Посматрајући графике аутокорелационе и парцијалне аутокорелационе функције на Слици 2.2, закључујемо да је ауторегресивни модел реда један одговарајући за дате податке. Вредности узорачке средине, дисперзије и аутокорелације су редом 1,042, 2,110 и 0,198. Видимо да је присутна овердисперзија. При том је израз $1,042(1+1,042)$ приближно једнак 2,1 што се поклапа са вредношћу узорачке дисперзије, а добро је позната особина геометријске расподеле да је $Var(X) = E(X)(1+E(X))$. Још ћемо израчунати вредности χ^2 статистика и одговарајуће p-вредности, да бисмо утврдили која дискретна расподела је најпогоднија. Из табеле изнад видимо да је највећа p-вредност добијена за геометријску расподелу, те закључујемо да модели са геометријском маргиналном расподелом представљају најбољи избор у овом случају.

Сада ћемо NDCINAR(1) модел да упоредимо са другим INAR(1) моделима са геометријском маргиналном расподелом, као што су:

- Геометријски INAR(1) модел (Alzaid, Al-Osh, 1988),

- NGINAR(1), нови геометријски INAR(1) модел базиран на негативном биномном тинингу (Ristić, Bakouch, Nastić, 2009),

- Мешовити $\alpha\beta$ INAR(1) модел (Nastić, Ristić, 2012),

и још са моделима са неким другим маргиналним расподелама као што су:

- INAR(1) модел са Пуасоновом маргиналном расподелом (Al-Osh, Alzaid, 1987),

- INAR(1) модели I1, I2, I3 са негативном биномном маргиналном расподелом (Zhu, Joe, 2006, 2010)

- Итеративни INAR(1) модел са негативном биномном маргиналном расподелом (Al-Osh, Aly, 1992),

- Негативни биномни INAR(1) модел са случајним коефицијентима (Weiß, 2008b),

и на крају са DCGINAR(1) моделом са зависним бројачким низом. За поређење су коришћена три критеријума: AIC, BIC и RMS. У Табели 2.7 су представљене вредности ових критеријума, као и оцене максималне веродостојности непознатих параметара. Познато је да су вредности AIC и BIC критеријума директно пропорционалне броју параметара модела. Видимо да NDCINAR(1) модел обезбеђује најмање вредности ових критеријума чак и у поређењу са неким моделима са мањим бројем параметара. Изузетак је GINAR(1) модел код кога се добија мања BIC вредност. Овај модел има мањи број непознатих параметара у односну на NDCINAR(1) модел, па су добијене вредности у складу са претходно објашњеном особином BIC критеријума. Напоменимо још да вредности RMS зависе од $E(X_t|X_{t-1})$. Како је $E(X_t|X_{t-1}) = \alpha X_{t-1} + (1-\alpha)\mu$ у свим посматраним моделима, то свуда добијамо исту вредност за RMS, као што је и очекивано.

Узимајући у обзир све наведено, очигледно је да NDCINAR(1) модел представља најбољи избор међу свим разматраним моделима.

Анализа природе посматраног скупа података нам можда може дати објашњење зашто NDCINAR(1) модел даје најбоље резултате.

Наиме, криминално дело које посматрамо "criminal mischief" обухвата неколико различитих типова криминалних активности, а све се односе на намерно уништавање туђе имовине. Примери таквих активности су писање графита и бојење зидова на зградама, ломљење предмета на јавним местима, подметање експлозива, као и било какве друге активности које имају за циљ оштећење углавном јавне имовине. Овде се таква врста кривичног дела описује као вандализам. Овакве криминалне акције у Америци су углавном распрострањене међу младима и то у оквиру различитих врста удружења и братстава. Они делују у договору, па постоји одређена веза и зависност међу регистрованим случајевима. Тако на пример, једна организована акција подразумева да једна бројачка променљива која се реализује, тј. оствари вредност 1, директно утиче на другу да се и она реализује и такође добије вредност 1. Са друге стране, ово су активности које се углавном дешавају на јавним местима, па једна реализована бројачка променљива подразумева интервенцију полиције, те на тај начин утиче да се друга променљива не реализује, тј. оствари вредност 0. С обзиром на то да је NDCINAR(1) модел базиран на зависном Бернулијевом бројачком низу, то је логично да као такав представља најбољи избор.

Табела 2.3: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара NDCINAR(1) модела.

N	$\hat{\alpha}_{ml}$	$\hat{\theta}_{ml}$	$\hat{\mu}_{ml}$	$\hat{\alpha}_{cls}$	$\hat{\theta}_{cls}$	$\hat{\mu}_{cls}$	$\hat{\alpha}_{yw}$	$\hat{\theta}_{yw}$	$\hat{\mu}_{yw}$
i) Стварне вредности $\alpha = 0.2$, $\theta = 0.9$, $\mu = 0.5$									
100	0.1817	0.9185	0.5103	0.1661	0.8834	0.5143	0.1643	0.8807	0.5150
Ст. дев.	0.1054	0.0785	0.1214	0.1107	0.0934	0.1200	0.1093	0.0975	0.1207
200	0.1880	0.9076	0.5022	0.1761	0.8723	0.5021	0.1753	0.8822	0.5026
Ст. дев.	0.0759	0.0646	0.0817	0.0909	0.0792	0.0811	0.0905	0.0832	0.0820
300	0.1904	0.9039	0.5025	0.1881	0.8731	0.5022	0.1877	0.8864	0.5026
Ст. дев.	0.0649	0.0617	0.0678	0.0858	0.0758	0.0666	0.0857	0.0827	0.0672
500	0.1980	0.8999	0.5015	0.1983	0.8717	0.5012	0.1980	0.8888	0.5013
Ст. дев.	0.0478	0.0523	0.0504	0.0664	0.0653	0.0491	0.0664	0.0769	0.0496
ii) Стварне вредности $\alpha = 0.2$, $\theta = 0.9$, $\mu = 1$									
100	0.1845	0.9095	0.9875	0.1676	0.8823	0.9935	0.1662	0.8854	0.9928
Ст. дев.	0.0997	0.0744	0.1829	0.1087	0.0910	0.1897	0.1078	0.0990	0.1854
200	0.1873	0.9013	0.9973	0.1754	0.8739	0.9953	0.1743	0.8808	0.9954
Ст. дев.	0.0727	0.0535	0.1285	0.0807	0.0658	0.1301	0.0799	0.0785	0.1283
300	0.1929	0.9007	1.0020	0.1819	0.8713	1.0004	0.1813	0.8848	1.0004
Ст. дев.	0.0522	0.0426	0.1055	0.0662	0.0460	0.1083	0.0662	0.0644	0.1067
500	0.1956	0.9010	1.0033	0.1963	0.8826	1.0042	0.1960	0.8894	1.0043
Ст. дев.	0.0414	0.0383	0.0850	0.0598	0.0534	0.0866	0.0598	0.0642	0.0857
iii) Стварне вредности $\alpha = 0.2$, $\theta = 0.9$, $\mu = 5$									
100	0.1934	0.9033	4.9100	0.1851	0.8791	4.9123	0.1837	0.8876	4.9084
Ст. дев.	0.0860	0.0520	0.5994	0.1117	0.0760	0.6001	0.1108	0.0947	0.5941
200	0.1898	0.9055	4.9482	0.1796	0.8827	4.9503	0.1786	0.8906	4.9493
Ст. дев.	0.0622	0.0353	0.4681	0.0805	0.0594	0.4702	0.0801	0.0774	0.4674
300	0.1902	0.9053	4.9674	0.1838	0.8829	4.9605	0.1833	0.8962	4.9598
Ст. дев.	0.0485	0.0301	0.3826	0.0665	0.0497	0.3889	0.0665	0.0665	0.3848
500	0.1945	0.9025	4.9935	0.1904	0.8883	4.9840	0.1901	0.8973	4.9834
Ст. дев.	0.0341	0.0217	0.3236	0.0498	0.0432	0.3308	0.0497	0.0559	0.3290

Табела 2.4: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара NDCINAR(1) модела.

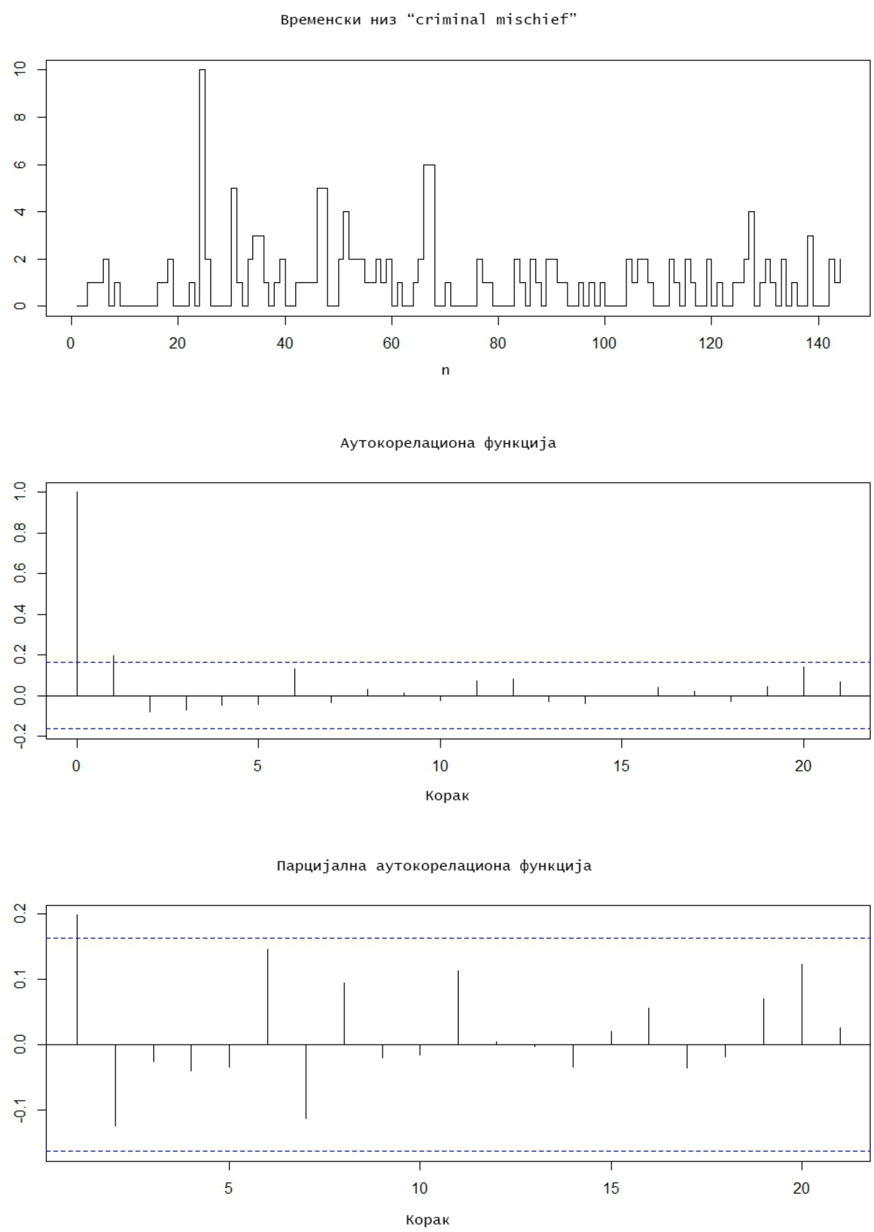
N	$\hat{\alpha}_{ml}$	$\hat{\theta}_{ml}$	$\hat{\mu}_{ml}$	$\hat{\alpha}_{cls}$	$\hat{\theta}_{cls}$	$\hat{\mu}_{cls}$	$\hat{\alpha}_{yw}$	$\hat{\theta}_{yw}$	$\hat{\mu}_{yw}$
i) Стварне вредности $\alpha = 0.5$, $\theta = 0.6$, $\mu = 0.5$									
100	0.4985	0.6429	0.5011	0.4707	0.6296	0.4981	0.4662	0.6614	0.4993
Ст. дев.	0.0876	0.1344	0.1237	0.1203	0.1604	0.1247	0.1190	0.1941	0.1240
200	0.5021	0.6223	0.4906	0.4894	0.5966	0.4896	0.4873	0.6488	0.4897
Ст. дев.	0.0657	0.0952	0.0994	0.0924	0.1253	0.1022	0.0921	0.1962	0.1012
300	0.5000	0.6196	0.4910	0.4888	0.6053	0.4899	0.4872	0.6585	0.4899
Ст. дев.	0.0528	0.0786	0.0757	0.0734	0.1145	0.0807	0.0739	0.1921	0.0799
500	0.5012	0.6073	0.4949	0.4937	0.5981	0.4942	0.4932	0.6373	0.4947
Ст. дев.	0.0413	0.0542	0.0610	0.0626	0.0920	0.0654	0.0626	0.1686	0.0649
ii) Стварне вредности $\alpha = 0.5$, $\theta = 0.6$, $\mu = 1$									
100	0.5022	0.6059	0.9922	0.4751	0.5828	0.9976	0.4698	0.6224	0.9954
Ст. дев.	0.0721	0.0904	0.2478	0.0885	0.1028	0.2594	0.0891	0.1603	0.2552
200	0.5068	0.5853	1.0008	0.4915	0.5661	1.0029	0.4895	0.6033	1.0027
Ст. дев.	0.0554	0.0627	0.1717	0.0670	0.0804	0.1708	0.0662	0.1525	0.1686
300	0.5050	0.5883	1.0109	0.4942	0.5677	1.0139	0.4910	0.6319	1.0120
Ст. дев.	0.0453	0.0498	0.1457	0.0664	0.0721	0.1488	0.0670	0.1732	0.1481
500	0.5048	0.5932	1.0047	0.5010	0.5741	1.0077	0.5000	0.6325	1.0078
Ст. дев.	0.0345	0.0458	0.1080	0.0569	0.0616	0.1154	0.0571	0.1711	0.1150
iii) Стварне вредности $\alpha = 0.5$, $\theta = 0.6$, $\mu = 5$									
100	0.4842	0.6080	4.8464	0.4747	0.6062	4.9682	0.4688	0.6546	4.9464
Ст. дев.	0.0572	0.0416	0.8880	0.1138	0.0831	1.0412	0.1138	0.1667	1.0308
200	0.4944	0.6030	4.9253	0.4884	0.5934	4.9996	0.4847	0.6214	4.9900
Ст. дев.	0.0367	0.0294	0.5964	0.0734	0.0586	0.7020	0.0745	0.1556	0.7071
300	0.4979	0.6045	4.9251	0.5000	0.5947	4.9611	0.4988	0.6577	4.9583
Ст. дев.	0.0306	0.0230	0.4764	0.0627	0.0575	0.5686	0.0632	0.1707	0.5694
500	0.5004	0.6035	4.9943	0.4994	0.6017	5.0168	0.4982	0.6412	5.0136
Ст. дев.	0.0250	0.0174	0.3766	0.0490	0.0495	0.4566	0.0486	0.1648	0.4556

Табела 2.5: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара NDCINAR(1) модела.

N	$\hat{\alpha}_{ml}$	$\hat{\theta}_{ml}$	$\hat{\mu}_{ml}$	$\hat{\alpha}_{cls}$	$\hat{\theta}_{cls}$	$\hat{\mu}_{cls}$	$\hat{\alpha}_{yw}$	$\hat{\theta}_{yw}$	$\hat{\mu}_{yw}$
	i) Стварне вредности $\alpha = 0.8$, $\theta = 0.2$, $\mu = 0.5$								
100	0.7850	0.3514	0.4823	0.7734	0.3811	0.5203	0.7661	0.3717	0.5154
Ст. дев.	0.0623	0.2467	0.2558	0.0817	0.2732	0.2965	0.0803	0.2836	0.2866
200	0.7978	0.2731	0.4885	0.7847	0.2878	0.5082	0.7818	0.3743	0.5072
Ст. дев.	0.0390	0.128)	0.1686	0.0606	0.1627	0.1801	0.0608	0.3010	0.1762
300	0.8009	0.2468	0.4936	0.7920	0.2547	0.5103	0.7882	0.3910	0.5074
Ст. дев.	0.0305	0.0786	0.1387	0.0462	0.1116	0.1508	0.0459	0.3209	0.1468
500	0.8009	0.2278	0.5018	0.7955	0.2390	0.5138	0.7935	0.3820	0.5131
Ст. дев.	0.0233	0.0538	0.1130	0.0353	0.0909	0.1206	0.0357	0.3125	0.1202
	ii) Стварне вредности $\alpha = 0.8$, $\theta = 0.2$, $\mu = 1$								
100	0.7895	0.2529	0.9392	0.7631	0.2970	0.9879	0.7558	0.3947	0.9562
Ст. дев.	0.0479	0.0947	0.3861	0.0761	0.1537	0.5585	0.0739	0.2882	0.4197
200	0.7940	0.2311	0.9266	0.7814	0.2470	0.9356	0.7775	0.4060	0.9389
Ст. дев.	0.0312	0.0534	0.2406	0.0524	0.0807	0.2715	0.0544	0.3062	0.2654
300	0.7954	0.2199	0.9505	0.7823	0.2431	0.9556	0.7797	0.3736	0.9536
Ст. дев.	0.0259	0.0388	0.1974	0.0433	0.0707	0.2403	0.0430	0.2854	0.2349
500	0.7961	0.2172	0.9672	0.7870	0.2376	0.9743	0.7849	0.4126	0.9722
Ст. дев.	0.0190	0.0283	0.1651	0.0350	0.0576	0.1819	0.0343	0.3135	0.1793
	iii) Стварне вредности $\alpha = 0.8$, $\theta = 0.2$, $\mu = 5$								
100	0.7972	0.2101	4.9164	0.7718	0.2515	4.9350	0.7630	0.3947	4.9203
Ст. дев.	0.0232	0.0239	1.3225	0.0632	0.0665	1.6281	0.0621	0.2875	1.6269
200	0.7958	0.2086	4.9148	0.7853	0.2448	4.9092	0.7816	0.3945	4.9330
Ст. дев.	0.0145	0.0146	0.9757	0.0445	0.0466	1.1762	0.0458	0.2986	1.1804
300	0.7973	0.2063	4.8726	0.7894	0.2358	4.8829	0.7867	0.3917	4.8860
Ст. дев.	0.0113	0.0111	0.8283	0.0330	0.0395	1.0165	0.0317	0.2960	1.0175
500	0.7979	0.2045	4.9245	0.7914	0.2315	4.9094	0.7893	0.3958	4.9073
Ст. дев.	0.0084	0.0078	0.5888	0.0273	0.0422	0.7956	0.0268	0.2944	0.7966

Табела 2.6: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара NDCINAR(1) модела.

N	$\hat{\alpha}_{ml}$	$\hat{\theta}_{ml}$	$\hat{\mu}_{ml}$	$\hat{\alpha}_{cls}$	$\hat{\theta}_{cls}$	$\hat{\mu}_{cls}$	$\hat{\alpha}_{yw}$	$\hat{\theta}_{yw}$	$\hat{\mu}_{yw}$
		i) Стварне вредности $\alpha = 0.8$, $\theta = 0.9$, $\mu = 0.5$							
100	0.7915	0.9080	0.5276	0.7348	0.8642	0.5122	0.7253	0.4531	0.5022
Ст. дев.	0.0770	0.1380	0.2661	0.1096	0.2117	0.2767	0.1082	0.3041	0.2624
200	0.7933	0.9074	0.5117	0.7539	0.8893	0.5009	0.7496	0.4605	0.4966
Ст. дев.	0.0525	0.0959	0.1746	0.0820	0.1815	0.1791	0.0811	0.3190	0.1762
300	0.7933	0.9118	0.4940	0.7642	0.8844	0.4846	0.7613	0.5151	0.4824
Ст. дев.	0.0397	0.0716	0.1434	0.0687	0.1802	0.1498	0.0691	0.3453	0.1470
500	0.7933	0.9116	0.4925	0.7772	0.8691	0.4897	0.7760	0.5277	0.4886
Ст. дев.	0.0331	0.0584	0.1118	0.0603	0.1776	0.1171	0.0599	0.3515	0.1155
		ii) Стварне вредности $\alpha = 0.8$, $\theta = 0.9$, $\mu = 1$							
100	0.7883	0.8917	1.0250	0.7231	0.8440	0.9606	0.7160	0.4329	0.9743
Ст. дев.	0.0602	0.0836	0.3959	0.1068	0.1880	0.3875	0.1063	0.2664	0.3716
200	0.7931	0.8975	1.0211	0.7461	0.8776	0.9754	0.7429	0.4405	0.9854
Ст. дев.	0.0421	0.0597	0.2612	0.0838	0.1390	0.2542	0.0841	0.2962	0.2591
300	0.7941	0.9041	0.9963	0.7520	0.8891	0.9580	0.7481	0.4423	0.9630
Ст. дев.	0.0335	0.0470	0.1912	0.0698	0.1324	0.2061	0.0694	0.2978	0.2096
500	0.7968	0.9014	0.9983	0.7724	0.8829	0.9764	0.7710	0.4904	0.9800
Ст. дев.	0.0245	0.0371	0.1585	0.0566	0.1296	0.1721	0.0567	0.3346	0.1743
		iii) Стварне вредности $\alpha = 0.8$, $\theta = 0.9$, $\mu = 5$							
100	0.8039	0.9008	5.2499	0.7449	0.8867	5.3438	0.7343	0.3952	5.2852
Ст. дев.	0.0454	0.0349	1.4466	0.1033	0.1244	1.9726	0.1051	0.2735	1.9458
200	0.8015	0.9032	5.0957	0.7800	0.9046	5.2200	0.7750	0.4238	5.2307
Ст. дев.	0.0292	0.0226	0.8334	0.0627	0.1006	1.2149	0.0618	0.3021	1.3026
300	0.8008	0.9000	5.0540	0.7864	0.9076	5.1909	0.7835	0.4723	5.1818
Ст. дев.	0.0220	0.0184	0.6637	0.0597	0.0924	0.9521	0.0595	0.3239	0.9560
500	0.8010	0.8984	5.0547	0.7924	0.9134	5.1566	0.7915	0.5096	5.1582
Ст. дев.	0.0177	0.0149	0.5573	0.0511	0.0879	0.7899	0.0511	0.3407	0.8011



Слика 2.2: Дијаграми временског низа, аутокорелационе функције и парцијалне аутокорелационе функције података о броју прекршаја вандализма.

Табела 2.7: Оцене параметара, стандардне грешке, AIC, BIC и RMS за податке о броју прекршаја вандализма.

Модел	ML оцене	AIC	BIC	RMS
i.i.d. Poisson	$\hat{\lambda} = 1.0417$ (0.0851)	437.3	440.3	
Poisson INAR(1)	$\hat{\lambda} = 0.8851$ (0.0964)			
	$\hat{\alpha} = 0.1502$ (0.0613)	432.0	437.9	1.42
GINAR(1)	$\hat{q} = 0.5043$ (0.0333)			
	$\hat{\alpha} = 0.1460$ (0.0668)	406.9	412.8	1.42
NGINAR(1)	$\hat{\mu} = 1.0232$ (0.1472)			
	$\hat{\alpha} = 0.2204$ (0.1072)	405.9	411.8	1.42
Mixed $\alpha\beta$ INAR(1)	$\hat{\mu} = 1.0572$ (0.1614)			
	$\hat{\alpha} = 0.0299$ (0.1917)			
	$\hat{\beta} = 0.4169$ (0.1872)			
	$\hat{p} = 0.4395$ (0.5038)	407.0	418.9	1.42
I1	$\hat{p} = 0.5825$ (0.0814)			
	$\hat{\theta} = 1.4484$ (0.4689)			
	$\hat{\alpha} = 0.158$ (0.0699)	407.4	416.3	1.42
I2	$\hat{p} = 0.5627$ (0.0847)			
	$\hat{\theta} = 1.3449$ (0.4308)			
	$\hat{\alpha} = 0.2173$ (0.0938)			
	$\hat{\gamma} = 0.3345$ (0.1765)	408.2	420.0	1.42
I3	$\hat{p} = 0.5675$ (0.0835)			
	$\hat{\theta} = 1.3662$ (0.4392)			
	$\hat{\alpha} = 0.2011$ (0.0850)			
	$\hat{\delta} = 0.7415$ (0.6699)	408.4	420.3	1.42
NBIINAR(1)	$\hat{n} = 1.3576$ (0.4335)			
	$\hat{p} = 1.6333$ (0.5365)			
	$\hat{\rho} = 0.2020$ (0.0962)	407.0	415.9	1.42
NBRCINAR(1)	$\hat{n} = 1.3277$ (0.4312)			
	$\hat{p} = 0.5620$ (0.0853)			
	$\hat{\rho} = 0.2143$ (0.0825)	404.6	413.5	1.42
DCGINAR(1)	$\hat{\mu} = 1.0281$ (0.1456)			
	$\hat{\alpha} = 0.2164$ (0.0844)			
	$\hat{\theta} = 0.7715$ (0.1953)	405.0	414.0	1.42
NDCINAR(1)	$\hat{\mu} = 1.0046$ (0.1422)			
	$\hat{\alpha} = 0.2107$ (0.0767)			
	$\hat{\theta} = 0.9077$ (0.0676)	404.1	413.0	1.42

2.3 Геометријски INAR(1) модел са Бернулијевим зависним бројачким низовима III врсте

У овом делу ћемо дефинисати Бернулијеве бројачке случајне променљиве U_i на најједноставнији начин до сада. Захваљујући једноставности бројачког низа, модел који ћемо увести имаће низ нових корисних особина. Након конструкције и карактеризације модела оценићемо непознате параметре помоћу неколико различитих метода и размотрићемо асимптотске особине добијених оцена. На крају ћемо размотрити примену овог модела на подацима из реалног живота и упоредићемо га са другим конкурентним INAR моделима.

Напоменимо да ће расподела случајне променљиве $U_1 + \cdots + U_n$, у овом случају бити једнака мешавини нуле и биномне расподеле, што може значити да се у једном тренутку са извесном вероватноћом неће реализовати ни једна бројачка случајна променљива или ће се са одређеном вероватноћом реализовати само неке од њих. Модел са оваквим својством може имати широку примену у пракси на одговарајућем типу података.

2.3.1 Генерализовани биномни тининг оператор III врсте

Овог пута дефинисаћемо Бернулијеве зависне случајне променљиве $\{U_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ на следећи начин. Нека је $\{V_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ низ независних случајних променљивих са $Ber(\theta)$ расподелом и нека је Z случајна променљива са Бернулијевом расподелом са параметром α/θ, где је $0 \le \alpha \le \theta \le 1$, $\theta > 0$. Претпоставимо да су случајне променљиве V_i и Z независне за свако $i \in \mathbb{N}$. Показаћемо да случајне променљиве

$$U_i = V_i Z,\ \ i \in \mathbb{N}, \tag{2.3.1}$$

имају Бернулијеву расподелу са параметром α и да су међусобно корелисане. Директно из дефиниције следи да је функција генератрисе вероватноћа случајне променљиве U_i дата са

$$\begin{aligned}\Phi_{U_i}(s) &= E(s^{V_i Z}) = \theta E(s^Z) + (1-\theta)\\ &= \theta\left(1-\frac{\alpha}{\theta}+\frac{\alpha}{\theta}s\right)+1-\theta\\ &= 1-\alpha+\alpha s.\end{aligned}$$

Даље, за $i \neq j$ имамо да је

$$\begin{aligned}E(U_iU_j) &= E(V_iV_jZ^2)\\ &= E(V_i)E(V_j)E(Z^2) = \alpha\theta,\\ Cov(U_i,U_j) &= E(U_iU_j)-E(U_i)E(U_j)\\ &= \alpha\theta-\alpha^2 = \alpha(\theta-\alpha),\\ Corr(U_i,U_j) &= \frac{\alpha(\theta-\alpha)}{\alpha(1-\alpha)} = \frac{\theta-\alpha}{1-\alpha},\ \text{за}\ \alpha\neq 0,\ \alpha\neq 1. \qquad (2.3.2)\end{aligned}$$

Из услова $0 \leq \alpha \leq \theta \leq 1$ директно следи да $Corr(U_i,U_j) \in [0,1]$ за $i \neq j$. Приметимо још да ова корелација зависи од два параметра, α и θ.

Примедба 2.3.1 Ако је $\alpha = \theta$, онда је $U_i = V_i$, што значи да су случајне променљиве $\{U_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ независне, док се за $\theta = 1$ постиже максимална корелираност, тј. $U_i = Z$, за свако $i \in \mathbb{N}$.

Да бисмо представили генерализовани биномни тининг оператор III врсте базиран на претходно дефинисаном низу $\{U_i,\ i \in \mathbb{N}\}$, најпре ћемо доказати следећу теорему.

Теорема 2.3.1 *Нека је $\{U_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ низ зависних случајних променљивих са Бернулијевом расподелом, дефинисаних са $U_i = V_iZ$, где је $\{V_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ низ независних случајних променљивих са $Ber(\theta)$ расподелом, Z је случајна променљива са $Ber(\alpha/\theta)$ расподелом, $0 \leq \alpha \leq \theta \leq 1$, $\theta > 0$, и случајне променљиве V_i и Z су независне за свако $i \in \mathbb{N}$. Тада је случајна променљива $U_1 + \cdots + U_n$, $n \geq 1$, мешавина нуле и једне случајне променљиве са биномном расподелом, тј.*

$$U_1+U_2+\cdots+U_n \stackrel{p}{=} \begin{cases} 0, & \text{с.в.}\ \ 1-\frac{\alpha}{\theta},\\ Bin(n,\theta), & \text{с.в.}\ \ \frac{\alpha}{\theta}.\end{cases} \qquad (2.3.3)$$

Доказ.

$$\begin{aligned}
E\left(s^{U_1+U_2+\cdots+U_n}\right) &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1-\theta)^{n-j}\theta^j E(s^{jZ}) \\
&= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1-\theta)^{n-j}\theta^j\left(1-\frac{\alpha}{\theta}+\frac{\alpha}{\theta}s^j\right) \\
&= \left(1-\frac{\alpha}{\theta}\right)\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1-\theta)^{n-j}\theta^j \\
&\quad +\frac{\alpha}{\theta}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1-\theta)^{n-j}(\theta s)^j \\
&= \frac{\theta-\alpha}{\theta}+\frac{\alpha}{\theta}(1-\theta+\theta s)^n.
\end{aligned}$$

Из последње једнакости доказ директно следи. □

Дефиниција 2.3.1 *Нека је* $\{U_i,\ i\in\mathbb{N}\}$ *низ случајних промењљивих датих као у Теореми 2.3.1,* $U_0=0$*, и нека је* X *ненегативна целобројна случајна промењлива. Оператор* $\alpha\diamond_\theta$*,* $0\le\alpha\le\theta\le1$*,* $\theta>0$*, дефинисан са* $\alpha\diamond_\theta X=U_1+U_2+\cdots+U_X$ *ћемо назвати генерализовани биномни тининг оператор* III *врсте.*

Из Теореме 2.3.1 и Дефиниције 2.3.1, имамо да је

$$\begin{aligned}
E\left(s^{U_1+U_2+\cdots+U_X}\right) &= \sum_{x=0}^{\infty}E\left(s^{U_1+U_2+\cdots+U_x}\right)P(X=x) \\
&= \sum_{x=0}^{\infty}\left(\frac{\theta-\alpha}{\theta}+\frac{\alpha}{\theta}(1-\theta+\theta s)^x\right)P(X=x) \\
&= \frac{\theta-\alpha}{\theta}\sum_{x=0}^{\infty}P(X=x)+\frac{\alpha}{\theta}\sum_{x=0}^{\infty}(1-\theta+\theta s)^x P(X=x) \\
&= \frac{\theta-\alpha}{\theta}+\frac{\alpha}{\theta}\Phi_X(1-\theta+\theta s),
\end{aligned}$$

па одатле закључујемо да је функција генератрисе вероватноћа генерализованог биномног тининг оператора III врсте дата са

$$\Phi_{\alpha\diamond_\theta X}(s) \equiv E\left(s^{\alpha\diamond_\theta X}\right) = 1 - \frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta}\Phi_X(1-\theta+\theta s), \tag{2.3.4}$$

где је $\Phi_X(s)$ функција генератрисе вероватноћа ненегативне целобројне случајне променљиве X. Размотримо сада неке специјалне случајеве који директно следе из (2.3.4).

Примедба 2.3.2 (*i*) За $\alpha = 0$, добијамо да је $\Phi_{\alpha\diamond_\theta X}(s) = 1$, а одатле $0 \diamond_\theta X \stackrel{p}{=} 0$.

(*ii*) За $\theta = 1$, добијамо да је $\Phi_{\alpha\diamond_\theta X}(s) = 1 - \alpha + \alpha\Phi_X(s)$, а одатле $\alpha \diamond_1 X \stackrel{p}{=} ZX$, где је Z случајна променљива са Бернулијевом расподелом са параметром α.

(*iii*) За $\theta = \alpha = 1$, добијамо да је $\Phi_{\alpha\diamond_\theta X}(s) = \Phi_X(s)$, а одатле имамо да је $1 \diamond_1 X \stackrel{p}{=} X$.

(*iv*) За $\alpha = \theta$, добијамо $\Phi_{\alpha\diamond_\theta X}(s) = \Phi_X(1-\alpha+\alpha s)$, што значи да $\alpha\diamond_\alpha$ постаје биномни тининг оператор $\alpha\circ$.

Следећом теоремом показујемо да позната особина $\alpha \circ (\beta \circ X) \stackrel{p}{=} (\alpha\beta) \circ X$ важи и за генерализовани биномни тининг оператор III врсте.

Теорема 2.3.2 *Нека је* $0 \le \alpha \le \theta \le 1$, $0 \le \beta \le \delta \le 1$, $\theta > 0$, $\delta > 0$, *и нека је* X *ненегативна целобројна случајна променљива. Тада је*

$$\alpha \diamond_\theta (\beta \diamond_\delta X) \stackrel{p}{=} (\alpha\beta) \diamond_{(\theta\delta)} X.$$

Доказ. Користећи (2.3.4), добијамо да је функција генератрисе вероватноћа случајне променљиве $\alpha \diamond_\theta (\beta \diamond_\delta X)$ једнака

$$\begin{aligned}
\Phi_{\alpha\diamond_\theta(\beta\diamond_\delta X)} &= 1 - \frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta}\Phi_{\beta\diamond_\delta X}(1-\theta+\theta s) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta}\left(1 - \frac{\beta}{\delta} + \frac{\beta}{\delta}\Phi_X(1-\delta+\delta(1-\theta+\theta s))\right) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta}\left(1 - \frac{\beta}{\delta} + \frac{\beta}{\delta}\Phi_X(1-\delta\theta+\delta\theta s)\right) \\
&= 1 - \frac{\alpha\beta}{\theta\delta} + \frac{\alpha\beta}{\theta\delta}\Phi_X(1-\theta\delta+\theta\delta s).
\end{aligned}$$

Последњи израз представља функцију генератрисе вероватноћа случајне променљиве $(\alpha\beta) \diamond_{(\theta\delta)} X$. $\square$

Примедба 2.3.3 Из једнакости (2.3.4) видимо да случајна променљива $\alpha \diamond_\theta X$ има исту расподелу као случајна променљива $A \circ X$, где је A дискретна случајна променљива са законом расподеле $P(A = \theta) = 1 - P(A = 0) = \alpha/\theta$.

Примедба 2.3.4 Нека су A и B две зависне случајне променљиве са расподелом $P(A = \theta, B = \theta) = 1 - P(A = 0, B = 0) = \alpha/\theta$, нека су X и Y две независне ненегативне целобројне случајне променљиве и нека су бројачки низови у $\theta \circ X$ и $\theta \circ Y$ независни. Тада случајне променљиве $\alpha \diamond_\theta (X + Y)$ и $A \circ X + B \circ Y$ имају исту расподелу.

Користећи Примедбу 2.3.3 добијамо да је

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\alpha\diamond_\theta(X+Y)}(s) &= E\left(s^{\alpha\diamond_\theta(X+Y)}\right) = E\left(s^{A\circ(X+Y)}\right) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta} E\left(s^{\theta\circ(X+Y)}\right) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta} \Phi_X(1 - \theta + \theta s)\Phi_Y(1 - \theta + \theta s).
\end{aligned}
$$

Са друге стране, имамо да је

$$
\begin{aligned}
\Phi_{A\circ X+B\circ Y}(s) &= E\left(s^{A\circ X+B\circ Y}\right) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta} E\left(s^{\theta\circ X+\theta\circ Y}\right) \\
&= 1 - \frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta} \Phi_X(1 - \theta + \theta s)\Phi_Y(1 - \theta + \theta s),
\end{aligned}
$$

па одавде следи да важи Примедба 2.3.4.

2.3.2 Особине генерализованог биномног тининг оператора III врсте

Сада ћемо извести неке особине генерализованог биномног тининг оператора III врсте. Условне особине добијамо применом наредне теореме.

Теорема 2.3.3 *Нека је* $\Phi_{\alpha\diamond_\theta X|X}(s) \equiv E\left(s^{\alpha\diamond_\theta X}|X\right)$ *условна функција генератрисе вероватноћа случајне променљиве* $\alpha \diamond_\theta X$ *за дато* X.

(*i*) *Условна функција генератрисе вероватноћа случајне променљиве* $\alpha \diamond_\theta X$ *за дато* X *је*

$$\Phi_{\alpha\diamond_\theta X|X}(s) = 1 - \frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta}(1-\theta+\theta s)^X.$$

(*ii*) n*-ти условни факторијелни момент случајне променљиве* $\alpha \diamond_\theta X$ *за дато* X *је*

$$E\left((\alpha \diamond_\theta X)_n|X\right) = \alpha\theta^{n-1}(X)_n, \; n \geq 1,$$

где је $(X)_n = X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

(*iii*) *Условно очекивање случајне променљиве* $\alpha \diamond_\theta X$ *за дато* X *је*

$$E\left(\alpha \diamond_\theta X|X\right) = \alpha X.$$

(*iv*) *Условни други момент случајне променљиве* $\alpha \diamond_\theta X$ *за дато* X *је*

$$E\left((\alpha \diamond_\theta X)^2|X\right) = \alpha\theta X^2 + \alpha(1-\theta)X.$$

(*v*) *Условна дисперзија случајне променљиве* $\alpha \diamond_\theta X$ *за дато* X *је*

$$Var\left(\alpha \diamond_\theta X|X\right) = \alpha(\theta-\alpha)X^2 + \alpha(1-\theta)X.$$

Доказ. (*i*) Имамо да је

$$E\left(s^{\alpha\diamond_\theta X}|X=x\right) = 1 - \frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta}(1-\theta+\theta s)^x,$$

па одатле следи да је

$$E\left(s^{\alpha\diamond_\theta X}|X\right) = 1 - \frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta}(1-\theta+\theta s)^X,$$

односно следи (*i*).

(*ii*) Користећи (*i*) добијамо да је

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_{\alpha\diamond_\theta X|X}(s)}{\partial s} &= \alpha X(1-\theta+\theta s)^{X-1} \\
\frac{\partial^2 \Phi_{\alpha\diamond_\theta X|X}(s)}{\partial s^2} &= \alpha\theta X(X-1)(1-\theta+\theta s)^{X-2}
\end{aligned}$$

Настављајући поступак, добијамо

$$\begin{aligned}\frac{\partial^n \Phi_{\alpha\diamond_\theta X|X}(s)}{\partial s^n} &= \alpha\theta^{n-1}X(X-1)\cdots(X-n+1)(1-\theta+\theta s)^{X-n} \\ &= \alpha\theta^{n-1}(X)_n(1-\theta+\theta s)^{X-n},\end{aligned}$$

што се лако може доказати математичком индукцијом. Сада, за $s=1$ имамо

$$E\left((\alpha\diamond_\theta X)_n|X\right) = \frac{\partial^n \Phi_{\alpha\diamond_\theta X|X}(s)}{\partial s^n}\Big|_{s=1} = \alpha\theta^{n-1}(X)_n.$$

(iii) Како је $(X)_n = X$ за $n=1$, то из (ii) за $n=1$ добијамо

$$E\left(\alpha\diamond_\theta X|X\right) = \alpha\theta^0 X = \alpha X.$$

(iv) Из (ii), за $n=2$, имамо да је

$$\begin{aligned}E\left((\alpha\diamond_\theta X)^2|X\right) &= E\left(\alpha\diamond_\theta X|X\right) + \alpha\theta X(X-1) \\ &= \alpha X + \alpha\theta X^2 - \alpha\theta X \\ &= \alpha\theta X^2 + \alpha(1-\theta)X.\end{aligned}$$

(v) Директно следи из (iii) и (iv). □

Последица 2.3.1 *Генерализовани биномни тининг оператор III врсте има следеће особине:*

(i) *n-ти факторијелни момент случајне променљиве $\alpha\diamond_\theta X$ за дато X је*

$$E\left((\alpha\diamond_\theta X)_n\right) = \alpha\theta^{n-1}E((X)_n),\ n\geq 1,$$

где је $(X)_n = X(X-1)\cdots(X-n+1)$.

(ii) *Очекивање случајне променљиве $\alpha\diamond_\theta X$ за дато X је*

$$E\left(\alpha\diamond_\theta X\right) = \alpha E(X).$$

(iii) *Дисперзија случајне променљиве $\alpha\diamond_\theta X$ за дато X је*

$$Var\left(\alpha\diamond_\theta X\right) = \alpha\theta Var(X) + \alpha(\theta-\alpha)(E(X))^2 + \alpha(1-\theta)E(X).$$

2.3.3 Конструкција и основна својства модела ADCINAR(1)

У овом одељку представљамо стационарни временски низ базиран на генерализованом биномном тининг оператору III врсте.

Дефиниција 2.3.2 *За низ $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ ненегативих целобројних случајних променљивих кажемо да је алтернативни $INAR$ модел реда 1 са зависним бројачким низом $(ADCINAR(1))$[8], ако је дат са*

$$X_t = \alpha \diamond_\theta X_{t-1} + \varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}, \tag{2.3.5}$$

где је $0 \le \alpha \le \theta \le 1$, $\{\varepsilon_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ је низ независних једнако расподељених случајних променљивих таквих да је $Cov(\varepsilon_t, X_s) = 0$ за $s < t$, бројачке случајне променљиве $\{U_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ су независне од X_j и ε_k, за свако i, j и k, и низови случајних променљивих $\{U_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ који се користе за генерисање случајних променљивих X_t и X_s су међусобно независни за $t \neq s$.

Одредимо функцију генератрисе вероватноћа случајне променљиве X_t.

$$\begin{aligned}
\Phi_{X_t}(s) &= \Phi_{\alpha\diamond X_{t-1}}(s)\Phi_{\varepsilon_t}(s) \\
&= \left(1 - \frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta}\Phi_{X_{t-1}}(1-\theta+\theta s)\right)\Phi_{\varepsilon_t}(s) \\
&= \left(1 - \frac{\alpha}{\theta}\right)\Phi_{\varepsilon_t}(s) + \frac{\alpha}{\theta}\Phi_{X_{t-1}}(1-\theta+\theta s)\Phi_{\varepsilon_t}(s) \\
&= \left(1 - \frac{\alpha}{\theta}\right)\Phi_{\varepsilon_t}(s) + \frac{\alpha}{\theta}\Phi_{\alpha\diamond X_{t-2}}(1-\theta+\theta s)\Phi_{\varepsilon_{t-1}}(1-\theta+\theta s) \\
&= \left(1 - \frac{\alpha}{\theta}\right)\Phi_{\varepsilon_t}(s) \\
&\quad + \frac{\alpha}{\theta}\left[\left(1 - \frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta}\Phi_{X_{t-2}}(1-\theta^2+\theta^2 s)\right)\Phi_{\varepsilon_{t-1}}(1-\theta+\theta s)\right]\Phi_{\varepsilon_t}(s) \\
&= \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^2\Phi_{X_{t-2}}(1-\theta^2+\theta^2 s)\Phi_{\varepsilon_{t-1}}(1-\theta+\theta s)\Phi_{\varepsilon_t}(s) \\
&\quad + \left(1 - \frac{\alpha}{\theta}\right)\Phi_{\varepsilon_t}(s) + \frac{\alpha}{\theta}\left(1 - \frac{\alpha}{\theta}\right)\Phi_{\varepsilon_{t-1}}(1-\theta+\theta s)\Phi_{\varepsilon_t}(s).
\end{aligned}$$

[8] Alternative dependent counting INAR

Настављајући поступак, добијамо да је

$$\begin{aligned}\Phi_{X_t}(s) &= \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^k \Phi_{X_{t-k}}(1-\theta^k+\theta^k s)\prod_{i=0}^{k-1}\Phi_{\varepsilon_{t-i}}(1-\theta^i+\theta^i s)\\ &\quad+\left(1-\frac{\alpha}{\theta}\right)\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^j\prod_{l=0}^{j}\Phi_{\varepsilon_{t-l}}(1-\theta^l+\theta^l s).\end{aligned}$$

Дакле, случајна променљива X_t се може записати као

$$X_t \stackrel{p}{=} \left(\prod_{i=0}^{k-1}A_{t-i}\right)\circ X_{t-k}+\sum_{i=1}^{k-1}\left(\prod_{l=0}^{i-1}A_{t-l}\right)\circ\varepsilon_{t-i}+\varepsilon_t,\ t=1,2,\ldots,$$

где је $\{A_t\}$ низ независних једнако расподељених случајних променљивих независних од $\{\varepsilon_t\}$ са расподелом $P(A_t=\theta)=1-P(A_t=0)=\alpha/\theta$. Одатле добијамо

$$\begin{aligned}E\left(X_t-\sum_{i=1}^{k-1}\left(\prod_{l=0}^{i-1}A_{t-l}\right)\circ\varepsilon_{t-i}-\varepsilon_t\right)^2 &= E\left(\left(\prod_{i=0}^{k-1}A_{t-i}\right)\circ X_{t-k}\right)^2\\ &= \left(\frac{\alpha}{\theta}\right)^k\left(\theta^{2k}E(X_{t-k}^2)+\theta^k(1-\theta^k)E(X_{t-k})\right).\end{aligned}$$

Пошто X_t има коначан други момент и важи $0\le\alpha\le\theta<1$, следи да десна страна ове једнакости конвергира нули, када $k\to\infty$. То значи да постоји средње квадратно решење једначине (2.3.5) и дато је са

$$X_t \stackrel{с.к.}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\left(\prod_{l=0}^{i-1}A_{t-l}\right)\circ\varepsilon_{t-i}+\varepsilon_t,\ t=1,2,\ldots$$

Важи следећа лема.

Лема 2.3.1 *Функција генератрисе вероватноћа случајне променљиве* ε_t *је*

$$\Phi_\varepsilon(s)=\frac{\Phi_X(s)}{1-\frac{\alpha}{\theta}+\frac{\alpha}{\theta}\Phi_X(1-\theta+\theta s)}. \tag{2.3.6}$$

Из услова стационарности временског низа $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ и из Последице 2.3.1, следи да су очекивање и дисперзија случајне променљиве ε_t дати редом са $\mu_\varepsilon = (1-\alpha)E(X)$ и

$$\sigma_\varepsilon^2 = (1-\alpha\theta)Var(X) - \alpha(\theta-\alpha)\left(E(X)\right)^2 - \alpha(1-\theta)E(X).$$

На исти начин као код претходних модела, може се показати да је аутокорелациона функција ADCINAR(1) модела $\rho(k) = \alpha^{|k|}$, $k \in \mathbb{Z}$. Дакле, аутокорелациона функција је позитивна и експоненцијално опадајућа функција.

2.3.4 Условне статистичке особине ADCINAR(1) модела

Слично као раније, показујемо да је функција регресије дата са

$$E(X_{t+k}|X_t) = \alpha^k X_t + (1-\alpha^k)\mu,$$

где је $\mu = E(X_t)$, док из Теореме 2.3.3 добијамо да је условна дисперзија

$$Var(X_{t+1}|X_t) = \alpha(\theta-\alpha)X_t^2 + \alpha(1-\theta)X_t + \sigma_\varepsilon^2. \tag{2.3.7}$$

Одредимо сада рекурентну формулу за условну дисперзију. Уведимо ознаке $\sigma_k(X_t) = Var(X_{t+k}|X_{t+k-1})$ и $\mu_k(X_t) = E(X_{t+k}|X_{t+k-1})$. Користећи чињеницу да је ADCINAR(1) модел временски низ Маркова, добијамо

$$\begin{aligned}
Var(X_{t+k}|X_t) &= E(X_{t+k}^2|X_t) - \left(E(X_{t+k}|X_t)\right)^2 \\
&= E\left(E(X_{t+k}^2|X_{t+k-1})|X_t\right) - \left(E(X_{t+k}|X_t)\right)^2 \\
&= E\left(\sigma_k(X_t)|X_t\right) + E\left((\mu_k(X_t))^2|X_t\right) - \left(E(X_{t+k}|X_t)\right)^2 \\
&= E\left(\sigma_k(X_t)|X_t\right) + E\left((\mu_k(X_t))^2|X_t\right) - \left(E(\mu_k(X_t)|X_t)\right)^2 \\
&= E\left(\sigma_k(X_t)|X_t\right) + Var\left(\mu_k(X_t)|X_t\right) \\
&= E\left(\sigma_k(X_t)|X_t\right) + Var\left(\alpha X_{t+k-1} + \mu_\varepsilon|X_t\right),
\end{aligned}$$

па је одатле

$$Var(X_{t+k}|X_t) = \alpha^2 Var(X_{t+k-1}|X_t) + E\left(Var(X_{t+k}|X_{t+k-1})|X_t\right). \tag{2.3.8}$$

Нека је сада $\sigma_k(X_t) = Var(X_{t+k-1}|X_t)$ и $\mu_k(X_t) = E(X_{t+k-1}|X_t)$. Користећи (2.3.7) и (2.3.8), имамо да је

$$\begin{aligned}
& Var(X_{t+k}|X_t) = \\
= \;& \alpha^2\sigma_k(X_t) + E\left[\left(\alpha(\theta-\alpha)X_{t+k-1}^2 + \alpha(1-\theta)X_{t+k-1} + \sigma_\varepsilon^2\right)|X_t\right] \\
= \;& \alpha^2\sigma_k(X_t) + \alpha(\theta-\alpha)E(X_{t+k-1}^2|X_t) + \alpha(1-\theta)\mu_k(X_t) + \sigma_\varepsilon^2 \\
= \;& \alpha^2\left[E(X_{t+k-1}^2|X_t) - (\mu_k(X_t))^2\right] \\
& +\alpha(\theta-\alpha)E(X_{t+k-1}^2|X_t) + \alpha(1-\theta)\mu_k(X_t) + \sigma_\varepsilon^2 \\
= \;& \alpha\theta E(X_{t+k-1}^2|X_t) - \alpha^2(\mu_k(X_t))^2 + \alpha(1-\theta)\mu_k(X_t) + \sigma_\varepsilon^2 \\
= \;& \alpha\theta\sigma_k(X_t) + \alpha(\theta-\alpha)(\mu_k(X_t))^2 + \alpha(1-\theta)\mu_k(X_t) + \sigma_\varepsilon^2 \\
= \;& \alpha\theta\sigma_k(X_t) + \alpha(\theta-\alpha)\left(\alpha^{k-1}X_t + (1-\alpha^{k-1})\mu\right)^2 \\
& +\alpha(1-\theta) + \left(\alpha^{k-1}X_t + (1-\alpha^{k-1})\mu\right) + \sigma_\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Коначно, добијамо да је условна дисперзија дата рекурентном формулом

$$\begin{aligned}
Var(X_{t+k}|X_t) \;=\;& \alpha\theta Var(X_{t+k-1}|X_t) + (\theta-\alpha)\alpha^{2k-1}X_t^2 \\
& +\alpha^k\left[1-\theta+2(\theta-\alpha)(1-\alpha^{k-1})\mu\right]X_t \\
& +\mu(1-\alpha^{k-1})\alpha\left(1-\theta+(\theta-\alpha)(1-\alpha^{k-1})\mu\right) + \sigma_\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Понављајући претходну једнакост k пута може се показати да условна дисперзија зависи од $\alpha^k(\theta^k - \alpha^k)X_t^2$, тј. представља квадратну функцију по X_t. Коефицијент квадратне зависности тежи нули када су α и θ приближно једнаки.

Надаље разматрамо стационарни ADCINAR(1) временски низ са геометријском маргиналном расподелом са параметром $\frac{\mu}{1+\mu}$, где је $\mu > 0$. Наредном теоремом дата је расподела шума ε_t.

Теорема 2.3.4 *Ако је маргинална расподела стационарног ADCINAR(1) временског низа $\{X_t,\ t \in \mathbb{Z}\}$ геометријска са параметром $\mu/(1+\mu)$, где је $\mu > 0$ и $0 \le \alpha \le \theta \le 1$, онда се расподела случајне променљиве ε_t може представити као мешавина две геометријске расподеле, тј.*

$$\varepsilon_t \stackrel{p}{=} \begin{cases} Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right), & \text{с.в. } \frac{1-\theta}{1-\theta+\alpha}, \\ Geom\left(\frac{\mu(\theta-\alpha)}{1+\mu(\theta-\alpha)}\right), & \text{с.в. } \frac{\alpha}{1-\theta+\alpha}. \end{cases}$$

Доказ. Користећи претпоставку о геометријској маргиналној расподели ADCINAR(1) временског низа и из (2.3.6) добијамо

$$\begin{aligned}\Phi_\varepsilon(s) &= \frac{\frac{1}{1+\mu-\mu s}}{\frac{\theta-\alpha}{\theta}+\frac{\alpha}{\theta}\cdot\frac{1}{1+\mu-\mu(1-\theta+\theta s)}} = \frac{\frac{1}{1+\mu-\mu s}}{\frac{(\theta-\alpha)(1+\mu\theta-\mu\theta s)+\alpha}{\theta(1+\mu\theta-\mu\theta s)}}\\ &= \frac{1+\mu\theta-\mu\theta s}{(1+\mu-\mu s)(1+\mu(\theta-\alpha)-\mu(\theta-\alpha)s)}\\ &= \frac{1-\theta}{1-\theta+\alpha}\cdot\frac{1}{1+\mu-\mu s}+\frac{\alpha}{1-\theta+\alpha}\cdot\frac{1}{1+\mu(\theta-\alpha)-\mu(\theta-\alpha)s}\,.\end{aligned}$$

Како су $\frac{1}{1+\mu-\mu s}$ и $\frac{1}{1+\mu(\theta-\alpha)-\mu(\theta-\alpha)s}$ функције генератриса вероватноћа случајних променљивих са геометријским расподелама, редом са параметрима $\frac{\mu}{1+\mu}$ и $\frac{(\theta-\alpha)\mu}{1+(\theta-\alpha)\mu}$, то из последње једнакости доказ директно следи. □

Последица 2.3.2 *Уз претпоставку да важе услови претходне теореме, очекивање и дисперзија случајне променљиве ε_t су $\mu_\varepsilon = (1-\alpha)\mu$ и $\sigma_\varepsilon^2 = (1-2\alpha\theta+\alpha^2)\mu^2+(1-\alpha)\mu$, респективно.*

Одредимо сада вероватноће прелаза.

$$\begin{aligned}P(X_{t+1}=i|X_t=j) &= \left(1-\frac{\alpha}{\theta}\right)P(\varepsilon_{t+1}=i)\\ &\quad+\frac{\alpha}{\theta}\sum_{k=0}^{\min(i,j)}\binom{j}{k}\theta^k(1-\theta)^{j-k}P(\varepsilon_{t+1}=i-k).\end{aligned}$$

Користећи чињеницу да је

$$P(\varepsilon_{t+1}=i)=\frac{1-\theta}{1-\theta+\alpha}\cdot\frac{\mu^i}{(1+\mu)^{i+1}}+\frac{\alpha}{1-\theta+\alpha}\cdot\frac{\mu^i(\theta-\alpha)^i}{(1+\mu(\theta-\alpha))^{i+1}}\,,\ i=0,1,2,\ldots$$

добијамо

$$\begin{aligned}&P(X_{t+1}=i|X_t=j)=\\ =\ &\frac{1-\theta}{\theta(1-\theta+\alpha)}\cdot\frac{\mu^i}{(1+\mu)^{i+1}}\left[\theta-\alpha+\alpha(1-\theta)^j\sum_{k=0}^{\min(i,j)}\binom{j}{k}\left(\frac{\theta(1+\mu)}{\mu(1-\theta)}\right)^k\right]\\ &+\frac{\alpha}{\theta(1-\theta+\alpha)}\cdot\frac{\mu^i(\theta-\alpha)^i}{(1+\mu(\theta-\alpha))^{i+1}}\\ &\times\left[\theta-\alpha+\alpha(1-\theta)^j\sum_{k=0}^{\min(i,j)}\binom{j}{k}\left(\frac{\theta(1+\mu(\theta-\alpha))}{\mu(1-\theta)(\theta-\alpha)}\right)^k\right].\end{aligned}\tag{2.3.9}$$

Одавде добијамо врло интересантне резултате које ћемо користити касније у одељку о оцењивању непознатих параметара. Означимо са $\pi(j) = P(X_t = 0|X_{t-1} = j)$, $j \geq 0$. Тада је

$$\begin{aligned}
\pi(j) &= \frac{1-\theta}{\theta(1-\theta+\alpha)(1+\mu)}\left(\theta-\alpha+\alpha(1-\theta)^j\right) \\
&\quad + \frac{\alpha}{\theta(1-\theta+\alpha)(1+\mu(\theta-\alpha))}\left(\theta-\alpha+\alpha(1-\theta)^j\right) \\
&= \frac{\theta-\alpha+\alpha(1-\theta)^j}{\theta(1-\theta+\alpha)}\left(\frac{1-\theta}{1+\mu}+\frac{\alpha}{1+\mu(\theta-\alpha)}\right) \\
&= \frac{\theta-\alpha+\alpha(1-\theta)^j}{\theta(1-\theta+\alpha)}\cdot\frac{1+\mu\theta-\theta-\theta^2\mu+\theta\mu\alpha+\alpha}{(1+\mu)(1+\mu(\theta-\alpha))} \\
&= \frac{\theta-\alpha+\alpha(1-\theta)^j}{\theta(1-\theta+\alpha)}\cdot\frac{(1+\theta\mu)(1-\theta+\alpha)}{(1+\mu)(1+\mu(\theta-\alpha))} \\
&= \frac{\left(\theta-\alpha+\alpha(1-\theta)^j\right)(1+\mu\theta)}{\theta(1+\mu)(1+\mu(\theta-\alpha))},\ j \geq 0,
\end{aligned}$$

а одатле директно следи да је

$$\frac{\pi(j)}{\pi(0)} = \frac{\theta-\alpha+\alpha(1-\theta)^j}{\theta},\ j \geq 0.$$

На крају, лако се израчунава да важи

$$\alpha = 1 - \frac{\pi(1)}{\pi(0)}, \tag{2.3.10}$$

$$\theta = 1 - \frac{\pi(1)-\pi(2)}{\pi(0)-\pi(1)}. \tag{2.3.11}$$

На исти начин као код претходних модела ове главе, може се доказати следећа теорема.

Теорема 2.3.5 $ADCINAR(1)$ *временски низ је строго стационаран и ергодичан.*

2.3.5 Оцењивање непознатих параметара ADCINAR(1) модела

У овом одељку оценићемо непознате параметре α, θ и μ, ADCINAR(1) модела. Поред метода условних најмањих квадрата (CLS) и метода момената (YW), овде ћемо размотрити још један метод који ће се базирати на вероватноћама. Оцене максималне веродостојности изводимо максимизирањем логаритамске функције веродостојности која се добија коришћењем вероватноћа прелаза (2.3.9). За израчунавање ML оцена користићемо нумерички метод, па секција о ML оценама неће бити посебно разматрана. Сви резултати биће базирани на реализацији случајног вектора $(X_1, X_2, \dots, X_N)$ посматраног временског низа.

Метод условних најмањих квадрата

ADCINAR(1) модел има исту функцију регресије $E(X_{t+1}|X_t) = \alpha X_t + (1-\alpha)\mu$ као и претходна два модела, па ће и оцене условних најмањих квадрата параметара α и μ бити исте, тј.

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_{cls} &= \frac{\sum\limits_{t=2}^{N} X_t X_{t-1} - \frac{1}{N-1}\sum\limits_{t=2}^{N} X_t \sum\limits_{t=2}^{N} X_{t-1}}{\sum\limits_{t=2}^{N} X_{t-1}^2 - \frac{1}{N-1}\left(\sum\limits_{t=2}^{N} X_{t-1}\right)^2} \\
\hat{\mu}_{cls} &= \frac{\sum\limits_{t=2}^{N} X_t - \hat{\alpha}_{cls}\sum\limits_{t=2}^{N} X_{t-1}}{(N-1)(1-\hat{\alpha}_{cls})}.
\end{aligned}$$

За оцењивање параметра θ поново ћемо користити метод који су увели Karlsen и Tjostheim (1998). Наиме, параметар θ ћемо оценити минимизирањем функције

$$Q(\theta) = \sum_{t=2}^{N} (W_t - Var(X_t|X_{t-1}))^2 = (W_t + Y_{1,t-1} - \theta\alpha Y_{2,t-1})^2,$$

где је $W_t = (X_t - \alpha X_{t-1} - (1-\alpha)\mu)^2$, $Y_{1,t-1} = \alpha^2 X_{t-1}^2 - \alpha X_{t-1} - (1+\alpha^2)\mu^2 - (1-\alpha)\mu$ и $Y_{2,t-1} = X_{t-1}^2 - X_{t-1} - 2\mu^2$. Решавајући једначину $Q'(\theta) = 0$ по θ и замењујући параметре α и μ њиховим CLS оценама $\hat{\alpha}_{cls}$ и $\hat{\mu}_{cls}$, добијамо да је оцена условних најмањих квадрата параметра θ дата са

$$\hat{\theta}_{cls} = \frac{\sum_{t=2}^{N} \left(\hat{W}_t + \hat{Y}_{1,t-1}\right) \hat{Y}_{2,t-1}}{\hat{\alpha}_{cls} \sum_{t=2}^{N} \hat{Y}_{2,t-1}^2}.$$

И овде имамо да је функција $g \equiv E(X_t|X_{t-1}) = \alpha X_{t-1} + (1-\alpha)\mu$ иста као код DCGINAR(1) модела, одакле следи да су сви услови Теореме 1.1.3 задовољени, па су оцене $\hat{\alpha}_{cls}$ и $\hat{\mu}_{cls}$ строго постојане. Строга постојаност оцене условних најмањих квадрата параметра θ следи из ергодичности ADCINAR(1) временског низа. Асимптотску расподелу оцена $(\hat{\alpha}_{cls}, \hat{\mu}_{cls})$ поново одређујемо применом Теореме 1.1.4. Имамо да је

$$\begin{aligned} f_{t|t-1} &= Var(X_t|X_{t-1}) \\ &= \alpha(\theta-\alpha)X_{t-1}^2 + \alpha(1-\theta)X_{t-1} + \mu(1+\mu+\alpha^2\mu-\alpha-2\alpha\theta\mu), \end{aligned}$$

па добијамо да је

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

где је

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mu(1+\mu)(\alpha-\alpha^2+\mu+2\alpha\mu-11\alpha^2\mu+8\alpha\theta\mu+\mu^2-13\alpha^2\mu^2+12\alpha\theta\mu^2), \\ a_{12} &= a_{21} = \alpha(1-\alpha)\mu(1+\mu)(1-\alpha-4\alpha\mu+4\theta\mu), \\ a_{22} &= \mu(1-\alpha)^3(1+\alpha)(1+\mu). \end{aligned}$$

Како су сви елементи матрице $\boldsymbol{R}$ коначни, сви услови Теореме 1.1.4 су задовољени, па добијамо да $\sqrt{N-1}(\hat{\alpha}_{cls}-\alpha, \hat{\mu}_{cls}-\mu)^T$ конвергира ка нормалној расподели са очекивањем $(0,0)^T$ и коваријансном матрицом

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha-\alpha^2+\mu(1+2\alpha-11\alpha^2+8\alpha\theta)+\mu^2(1-13\alpha^2+12\alpha\theta)}{\mu(1+\mu)} & \frac{\alpha(1-\alpha+4\mu(\theta-\alpha))}{1-\alpha} \\ \frac{\alpha(1-\alpha+4\mu(\theta-\alpha))}{1-\alpha} & \frac{(1+\alpha)\mu(1+\mu)}{1-\alpha} \end{bmatrix}.$$

Размотримо сада како неки специјални случајеви вредности параметара утичу на коваријансну матрицу. У случају када α тежи 0, коваријансна матрица тежи $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu(1+\mu) \end{bmatrix}$, тј. када корелираност у временском низу опада, тада опада и зависност између оцена, док у исто време дисперзија оцене параметра α тежи јединици, а дисперзија оцене параметра μ тежи дисперзији маргиналне расподеле. У случају када је μ близу 0, матрица тежи $\begin{bmatrix} \infty & \alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$, тј. коваријансе су блиске корелацији у временском низу, оцена параметра μ конвергира ка константи, док оцена параметра α постаје бескорисна на великом обиму узорка. У случају када θ тежи 1, и α тежи θ, матрица тежи $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \infty \end{bmatrix}$, па овде оцена параметра α конвергира ка константи, док оцена параметра μ постаје бескорисна на великом обиму узорка.

Теорема 2.3.6 *Ако су параметри α и μ познати, онда оцена условних најмањих квадрата параметра θ има асимптотски нормалну расподелу.*

Доказ. Лако се показује да важи

$$\sqrt{N-1}\left(\hat{\theta}_{cls}-\theta\right)=\frac{(N-1)^{-1/2}\sum\limits_{t=2}^{N}\left(W_t+Y_{1,t-1}-\alpha\theta Y_{2,t-1}\right)Y_{2,t-1}}{(N-1)^{-1}\alpha\sum\limits_{t=2}^{N}Y_{2,t-1}^2}. \tag{2.3.12}$$

ADCINAR(1) временски низ је строго стационаран и ергодичан, па су $\{Y_{2,t},\ t\in\mathbb{Z}\}$ и $\{\left(W_t+Y_{1,t-1}-\alpha\theta Y_{2,t-1}\right)Y_{2,t-1},\ t\in\mathbb{Z}\}$ такође строго стационарни и ергодични низови. Овде је $Y_{2,t-1}$ исто дефинисано као у Теореми 2.1.4, а већ смо доказали да $(N-1)^{-1}\sum\limits_{t=2}^{N}Y_{2,t-1}^2$ конвергира у вероватноћи ка константи, тј. важи

$$(N-1)^{-1}\alpha\sum_{t=2}^{N}Y_{2,t-1}^2\longrightarrow 4\alpha\mu^2(1+\mu)(1+5\mu),\ \text{за}\ N\to\infty.$$

Са друге стране, ако $\mathcal{F}_{t-1}$ представља σ-поље генерисано случајним промењливама X_{t-i}, $i \geq 1$, тада имамо да је

$$\begin{aligned}
E(W_t|\mathcal{F}_{t-1}) &= E\left((X_t - \alpha X_{t-1} - (1-\alpha)\mu)^2|\mathcal{F}_{t-1}\right)\\
&= E(X_t^2|\mathcal{F}_{t-1}) - 2\alpha E(X_t|\mathcal{F}_{t-1})X_{t-1} - 2(1-\alpha)\mu E(X_t|\mathcal{F}_{t-1})\\
&\quad +\alpha^2 X_{t-1}^2 + 2\alpha(1-\alpha)\mu X_{t-1} + (1-\alpha)^2\mu^2\\
&= \alpha(\theta-\alpha)X_{t-1}^2 + \alpha(1-\alpha)X_{t-1}\\
&\quad -(1-\alpha)^2\mu^2 + \mu(1-\alpha+2\mu-2\alpha\mu+2\alpha^2\mu-2\alpha\theta\mu)\\
&= \alpha\theta Y_{2,t-1} - Y_{1,t-1},
\end{aligned}$$

а одатле је

$$E\left((W_t + Y_{1,t-1} - \alpha\theta Y_{2,t-1})\, Y_{2,t-1}|\mathcal{F}_{t-1}\right) = 0.$$

То значи да је низ $\left\{(W_t + Y_{1,t-1} - \alpha\theta Y_{2,t-1})\, Y_{2,t-1}\right\}$ строго стационаран и ергодичан мартингал разлике. Из централне граничне теореме за ергодичне и строго стационарне низове мартингала разлике, добијамо да $(n-1)^{-1/2}\sum\limits_{t=2}^{n}(W_t + Y_{1,t-1} - \alpha\theta Y_{2,t-1})\, Y_{2,t-1}$ конвергира у расподели ка нормалној расподели са очекивањем нула и дисперзијом $Var((W_t + Y_{1,t-1} - \alpha\theta Y_{2,t-1})\, Y_{2,t-1})$. Пошто бројилац у (2.3.12) конвергира у расподели ка нормалној расподели, а именилац конвергира у вероватноћи ка константи, то из теореме Слацког следи асимптотска нормалност оцене условних најмањих квадрата параметра θ. $\square$

Метод момената

Пошто је $E(X_t) = \mu$ и $Corr(X_t, X_{t-1}) = \alpha$, параметре α и θ можемо оценити узорачком средином и узорачком аутокорелацијом као и до сада, тј.

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_{yw} &= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} X_t \equiv \overline{X}_N,\\
\hat{\alpha}_{yw} &= \frac{\sum\limits_{t=2}^{N}(X_t - \overline{X}_N)(X_{t-1} - \overline{X}_N)}{\sum\limits_{t=1}^{N}(X_t - \overline{X}_N)^2}.
\end{aligned}$$

Параметар θ оцењујемо на сличан начин као раније. Наиме, из Последице 2.3.1 имамо да је

$$E(\alpha \diamond_\theta X_{t-1})^2 = \alpha\theta E(X_{t-1}^2) + \alpha(1-\theta)E(X_{t-1}) = \alpha\mu(1+2\theta\mu).$$

Даље, лако се проверава да важи

$$\begin{aligned} E\left(X_{t-1}(\alpha \diamond_\theta X_{t-1})^2\right) &= \alpha\theta E(X_{t-1}^3) + \alpha(1-\theta)E(X_{t-1}^2) \\ &= \alpha\mu(1+2\mu+4\theta\mu+6\theta\mu^2). \end{aligned}$$

Сада, из последње две једнакости добијамо

$$Cov((\alpha \diamond_\theta X_{t-1})^2, X_{t-1}) = \alpha\mu(1+\mu)(1+4\theta\mu),$$

а одатле је

$$\begin{aligned} Cov(X_t^2, X_{t-1}) &= Cov\left((\alpha \diamond_\theta X_{t-1})^2, X_{t-1}\right) + 2E(\varepsilon_t)Cov(\alpha \diamond_\theta X_{t-1}, X_{t-1}) \\ &= \alpha\mu(1+\mu)(1+2\mu-2\alpha\mu+4\theta\mu). \end{aligned}$$

Коначно, имамо да је YW оцена параметра θ

$$\hat{\theta}_{yw} = \frac{\hat{C} - \hat{\alpha}_{yw}\hat{\mu}_{yw}(1+\hat{\mu}_{yw})(1+2\hat{\mu}_{yw}-2\hat{\alpha}_{yw}\hat{\mu}_{yw})}{4\hat{\alpha}_{yw}\hat{\mu}_{yw}^2(1+\hat{\mu}_{yw})},$$

где је

$$\hat{C} = \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} X_t^2 X_{t-1} - \left(\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} X_t^2\right)\left(\frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} X_{t-1}\right).$$

Оцене параметара α и μ добијене методом момената су исте као код DCGINAR(1) модела, па закључујемо да су строго постојане. Доказали смо да је $\hat{C}$ строго постојана оцена коваријансе $Cov(X_t^2, X_{t-1})$, па одатле и из строге постојаности оцена параметара α и μ следи строга постојаност оцене параметра θ.

Метод условних вероватноћа

Оцене базиране на условним вероватноћама параметара α, θ и μ можемо добити из чињенице да је $P(X_t = 0) = (1+\mu)^{-1}$, и користећи једнакости (2.3.10) и (2.3.11). Вероватноћу $P(X_t = i)$ можемо оценити коришћењем статистике

$$\hat{P}_1(i) = N^{-1}\sum_{t=1}^{N} I(X_t = i),$$

где је случајна променљива $I(A)$ индикатор догађаја A. Тако добијамо да је оцена параметра μ

$$\hat{\mu}_p = \frac{N}{\sum\limits_{t=1}^{N} I(X_t = 0)} - 1.$$

За оцењивање параметара α и θ потребне су нам оцене вероватноћа $P(X_t = 0, X_{t-1} = i)$ и $P(X_t = 0|X_{t-1} = i)$. Вероватноћу $P(X_t = 0, X_{t-1} = i)$, можемо оценити коришћењем статистике

$$\hat{P}_2(i) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=2}^{N} I(X_t = 0, X_{t-1} = i),$$

а одатле следи да условну вероватноћу $P(X_t = 0|X_{t-1} = i)$, можемо оценити коришћењем статистике

$$\hat{\pi}(i) \equiv \frac{\hat{P}_2(i)}{\hat{P}_1(i)},\ i \geq 0.$$

Коначно, оцене параметара α и θ су

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}_p &= 1 - \frac{\hat{\pi}(1)}{\hat{\pi}(0)}, \\
\hat{\theta}_p &= 1 - \frac{\hat{\pi}(1) - \hat{\pi}(2)}{\hat{\pi}(0) - \hat{\pi}(1)}.
\end{aligned}$$

Асимптотске особине добијених оцена следе из наредне теореме.

Теорема 2.3.7 *Оцене параметара α, θ и μ добијене методом условних вероватноћа су постојане оцене параметара α, θ и μ, респективно.*

Доказ. ADCINAR(1) временски низ је строго стационаран и ергодичан, па одатле следи да су статистике $n^{-1}\sum_{t=1}^{n} I(X_t = i)$ и $(n-1)^{-1}\sum_{t=2}^{n} I(X_t = 0, X_{t-1} = i)$ постојане оцене вероватноћа $P(X_t = i)$ и $P(X_t = 0, X_{t-1} = i)$, респективно. Докажимо да оцена $\hat{\mu}_p$ конвергира у вероватноћи ка μ. За произвољно $\varepsilon > 0$, имамо да је

$$P\{|\hat{\mu}_p - \mu| > \varepsilon\} = P\left\{\left|\frac{1}{\hat{P}_1(0)} - 1 - \left(\frac{1}{p_1(0)} - 1\right)\right| > \varepsilon\right\} = P\left\{\left|\frac{1}{\hat{P}_1(0)} - \frac{1}{p_1(0)}\right| > \varepsilon\right\}$$

где је $p_1(i) \equiv P(X_t = i)$. Како је оцена $\hat{P}_1(i)$ постојана, а функција $f(x) = 1/x$ непрекидна на $(0,1)$, то из особина конвергенције у вероватноћи следи да

$$P\left\{\left|\frac{1}{\hat{P}_1(0)} - \frac{1}{p_1(0)}\right| > \varepsilon\right\} \longrightarrow 0, \text{ за } N \to \infty,$$

па одатле следи постојаност оцене параметра μ. На исти начин се доказује постојаност оцена параметара α и θ. □

Нумерички резултати

У овом одељку представљамо резултате примене описаних метода за оцењивање непознатих параметара на симулираним временским низовима. Резултати су добијени коришћењем софтвера који су развили Ristić и Nastić. Најпре је симулирано 100 узорака ADCINAR(1) модела, обима 1000. Затим су разматрани подузорци обима 100, 200, 300,..., 900 и 1000. Симулирани узорци су добијени за следеће стварне вредности параметара: (a) $\alpha = 0,1, \theta = 0,3$, (b) $\alpha = 0,1, \theta = 0,9$, (c) $\alpha = 0,3, \theta = 0,7$ и (d) $\alpha = 0,7, \theta = 0,9$. У сваком од случајева, вредности параметра μ су: $\mu = 0,5$, $\mu = 1$ и $\mu = 5$. Узорачке средине и стандардне девијације су представљене у Табелама 2.9 - 2.16. У свим случајевима средине конвергирају стварним вредностима. Стандардне девијације су мале, осим у случају оцена параметра μ добијених методом условних вероватноћа, за $\mu = 5$, у случају (d). Размотримо сада случај (а) када су вредности параметара α и θ блиске нули. Најмања стандардна одступања у оцењивању параметра μ помоћу свих метода, добијају се за најмању вредност параметра μ, тј. за $\mu = 0,5$. Најмања стандардна одступања у оцењивању параметра θ методом максималне веродостојности и методом условних вероватноћа добијене су за највећу вредност параметра μ, тј. за $\mu = 5$. Промена вредности параметра μ не утиче значајно на оцењивање параметра α. У овом случају, најбољи резултати су добијени методом максималне веродостојности. Размотримо даље случај (b) слабе корелисаности временског низа $\{X_t\}$, и јаке зависности између чланова бројачког низа, тј. случај када је вредност за α блиска нули, а вредност за θ блиска јединици. И овде метод максималне веродостојности даје најбоље резултате, осим у оцењивању параметра μ, у случају када је $\mu = 1$, где се најмање стандардне девијације постижу применом CLS метода. Поредећи случајеве (а) и (b), може се приметити да повећање вредности параметра θ не утиче битно на оцене. Посматрајући сада случај (с), видимо да повећање корелације α битно утиче на побољшање оцена параметра θ, док се стандардне девијације оцена параметра μ незнатно повећавају. И у овом случају метод максималне веродостојности даје најбоље резултате, осим у оцењивању параметра μ, за $\mu = 1$, где је бољи метод момената. Коначно, у случају (d) највећих вредности параметара, добијене су најмање стандардне девијације у оцењивању параметра θ. Насупрот томе, код оцењивања параметра μ добијене су највеће стандардне девијације. И у овом случају ML метод обезбеђује најбоље резултате у оцењивању свих параметара.

2.3.6 Примена на реалним подацима

У овом делу разматрамо могућу примену ADCINAR(1) модела у пракси. Са сајта Forecasting Principles на веб адреси (http://www.forecastingprinciples.com), у секцији о криминалним радњама, смо преузели један скуп података који се односи на кривично дело намерног подметања пожара. Овај скуп садржи 132 опсервације и представља месечно бројање случајева подметнутих пожара, регистрованих у полицијској станици 36055001400 у Рочестеру, у

Расподела	Оцене параметара	Очекиване учестаности	χ^2	p
Пуасонова	$\lambda = 0.8258$	$(57.8, 47.7, 19.7, 5.4, 1.3)$	32.9696	0.0000
Геометријска	$\mu = 0.8258$	$(72.3, 32.7, 14.8, 6.7, 5.5)$	5.2405	0.1550
Негативна биномна	$\mu = 0.6177$, $\theta = 1.3368$	$(69.4, 35.4, 15.8, 6.7, 4.7)$	6.5823	0.0372
Генерализована Пуасонова	$\lambda = 0.6492$, $\theta = 0.2138$	$(69.0, 36.2, 15.7, 6.5, 4.6)$	7.2369	0.0268
Опсервиране учестаности		$(74.0, 29.0, 12.0, 12.0, 5.0)$		

периоду од јануара 1991. до децембра 2001. Графички приказ вредности, аутокорелационе и парцијалне аутокорелационе функције су дати на Слици 2.3. Лако се може закључити да је ауторегресивни модел реда 1 погодан за анализу овог скупа података. Вредности узорачке средине, дисперзије и аутокорелације су редом 0,826, 1,336 и 0,236. Одавде видимо да је присутна овердисперзија, што значи да Пуасонова расподела неће бити добар избор за описивање посматраног временског низа. У наредној табели су представљене вредности χ^2 статистика и одговарајуће p-вредности Пуасонове, геометријске, негативне биномне и генерализоване Пуасонове расподеле. Највећа вредност за p добијена је за геометријску расподелу, што значи да су модели са геометријском маргиналном расподелом најпогоднији у овом случају.

Сада ћемо упоредити ADCINAR(1) модел са неколико важних конкурентних INAR(1) модела са геометријском маргиналном расподелом:

- Геометријски INAR(1) модел (Alzaid, Al-Osh, 1988),
- NGINAR(1), нови геометријски INAR(1) модел (Ristić, Bakouch, Nastić, 2009),
- DCGINAR(1) модел базиран на генерализованом биномном тинингу.

Вредности информационих критеријума AIC и BIC и вредност RMS су дати у Табели 2.8. Оцене максималне веродостојности непознатих параметара су такође одређене и представљене у истој табели. Видимо да су AIC и BIC вредности ADCINAR(1) модела најмање, чак мање од већине AIC и BIC вредности прва два модела који имају мањи број параметара.

Размотримо сада природу посматраног скупа података. Под овим кривичним делом подразумева се намерно подметање пожара

Табела 2.8: Оцене параметара, стандардне грешке, AIC, BIC и RMS за податке о броју кривичних дела подметања пожара.

Модел	ML оцене	AIC	BIC	RMS
GINAR(1)	$\hat{q} = 0.4498$ (0.0365)			
	$\hat{\alpha} = 0.1371$ (0.0774)	332.7	338.5	1.13
NGINAR(1)	$\hat{\mu} = 0.8152$ (0.1311)			
	$\hat{\alpha} = 0.2226$ (0.0968)	330.5	336.3	1.12
DCGINAR(1)	$\hat{\mu} = 0.8072$ (0.1276)			
	$\hat{\alpha} = 0.2036$ (0.0799)			
	$\hat{\theta} = 0.6827$ (0.1747)	331.3	339.9	1.12
NDCINAR(1)	$\hat{\mu} = 0.8188$ (0.1224)			
	$\hat{\alpha} = 0.1518$ (0.0849)			
	$\hat{\theta} = 0.8825$ (0.0889)	334.5	343.2	1.13
ADCINAR(1)	$\hat{\mu} = 0.8026$ (0.1294)			
	$\hat{\alpha} = 0.2242$ (0.0784)			
	$\hat{\theta} = 0.6233$ (0.1655)	329.3	338.0	1.12

у зградама, аутомобилима, у природи или било где на јавним местима. У Америци се сваке године бележи велики број оваквих случајева. Према неким званичним подацима на овај начин годишње буде повређен велики број људи и при том се земљи наноси велика материјална штета. Зависност чланова бројачког низа ADCINAR(1) модела има битну улогу у анализи посматраног скупа података. Наиме, када се једна случајна променљива реализује и добије вредност 1, долази до повећања нивоа безбедности у држави што има директан утицај на то да друга бројачка променљива добије вредност 0. У исто време, вести се брзо шире путем медија па један регистровани случај може бити упозорење другим потенцијалним нападачима да пажљивије организују подметање новог пожара. На тај начин једна реализована случајна променљива директно утиче на то да се и друга реализује и добије вредност 1. Дакле, јасно је да међу посматраним елементима постоји извесна интеракција и повезаност, па то може да буде важан разлог зашто модел са зависним бројачким низом даје најбоље резултате.

Табела 2.9: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара ADCINAR(1) модела.

a-I

N	$\hat{\mu}_{cls}$	$\hat{\alpha}_{cls}$	$\hat{\theta}_{cls}$	$\hat{\mu}_{yw}$	$\hat{\alpha}_{yw}$	$\hat{\theta}_{yw}$
	i) Стварне вредности $\mu = 0.5, \alpha = 0.1, \theta = 0.3,$					
100	0.5183	0.0818	0.2944	0.5177	0.0808	0.3155
Ст. дев.	(0.0880)	(0.0875)	(0.3599)	(0.0883)	(0.0861)	(0.3828)
200	0.5071	0.0805	0.3215	0.5070	0.0803	0.3149
Ст. дев.	(0.0618)	(0.0699)	(0.3599)	(0.0616)	(0.0697)	(0.3723)
300	0.5081	0.0866	0.3294	0.5079	0.0863	0.3568
Ст. дев.	(0.0529)	(0.0603)	(0.3422)	(0.0528)	(0.0600)	(0.3736)
400	0.5070	0.0869	0.2989	0.5069	0.0867	0.3373
Ст. дев.	(0.0440)	(0.0540)	(0.3207)	(0.0441)	(0.0539)	(0.3538)
500	0.5052	0.0864	0.2806	0.5051	0.0863	0.3399
Ст. дев.	(0.0409)	(0.0462)	(0.3055)	(0.0409)	(0.0461)	(0.3299)
600	0.5041	0.0910	0.2780	0.5041	0.0910	0.3214
Ст. дев.	(0.0403)	(0.0433)	(0.2788)	(0.0404)	(0.0432)	(0.3092)
700	0.5043	0.0915	0.2891	0.5043	0.0913	0.3263
Ст. дев.	(0.0389)	(0.0405)	(0.2836)	(0.0389)	(0.0404)	(0.3061)
800	0.5059	0.0962	0.2943	0.5059	0.0961	0.3190
Ст. дев.	(0.0334)	(0.0384)	(0.2708)	(0.0334)	(0.0383)	(0.2881)
900	0.5043	0.0978	0.2902	0.5043	0.0976	0.3155
Ст. дев.	(0.0320)	(0.0361)	(0.2676)	(0.0320)	(0.0360)	(0.2801)
1000	0.5025	0.0985	0.2976	0.5024	0.0984	0.3074
Ст. дев.	(0.0293)	(0.0344)	(0.2592)	(0.0293)	(0.0344)	(0.2734)
	ii) Стварне вредности $\mu = 1, \alpha = 0.1, \theta = 0.3,$					
100	0.9978	0.0895	0.2724	0.9977	0.0886	0.2731
Ст. дев.	(0.1570)	(0.0787)	(0.3094)	(0.1554)	(0.0779)	(0.3408)
200	1.0051	0.0979	0.2820	1.0049	0.0972	0.2973
Ст. дев.	(0.1149)	(0.0647)	(0.2797)	(0.1136)	(0.0643)	(0.3259)
300	1.0002	0.0926	0.2544	1.0002	0.0923	0.2903
Ст. дев.	(0.0921)	(0.0573)	(0.2584)	(0.0919)	(0.0571)	(0.3158)
400	1.0008	0.0971	0.2377	1.0008	0.0968	0.2875
Ст. дев.	(0.0777)	(0.0543)	(0.2232)	(0.0776)	(0.0542)	(0.2884)
500	0.9999	0.0986	0.2469	0.9999	0.0984	0.2822
Ст. дев.	(0.0671)	(0.0528)	(0.2062)	(0.0671)	(0.0527)	(0.2626)
600	1.0007	0.0958	0.2471	1.0007	0.0957	0.2954
Ст. дев.	(0.0577)	(0.0491)	(0.2013)	(0.0577)	(0.0491)	(0.2710)
700	0.9984	0.0932	0.2437	0.9985	0.0930	0.2744
Ст. дев.	(0.0547)	(0.0440)	(0.2077)	(0.0546)	(0.0440)	(0.2587)
800	0.9983	0.0934	0.2390	0.9983	0.0933	0.2690
Ст. дев.	(0.0505)	(0.0400)	(0.1959)	(0.0505)	(0.0400)	(0.2435)
900	0.9966	0.0950	0.2420	0.9966	0.0949	0.2731
Ст. дев.	(0.0467)	(0.0381)	(0.1872)	(0.0465)	(0.0381)	(0.2436)
1000	0.9951	0.0957	0.2441	0.9951	0.0956	0.2680
Ст. дев.	(0.0475)	(0.0370)	(0.1872)	(0.0474)	(0.0370)	(0.2308)
	iii) Стварне вредности $\mu = 5, \alpha = 0.1, \theta = 0.3,$					
100	4.9934	0.0959	0.2850	4.9960	0.0952	0.2573
Ст. дев.	(0.5754)	(0.0930)	(0.3337)	(0.5691)	(0.0924)	(0.3326)
200	5.0067	0.0889	0.2792	5.0076	0.0886	0.2690
Ст. дев.	(0.4704)	(0.0638)	(0.2903)	(0.4682)	(0.0635)	(0.2968)
300	4.9869	0.0869	0.3114	4.9876	0.0866	0.3156
Ст. дев.	(0.4069)	(0.0644)	(0.3024)	(0.4074)	(0.0642)	(0.3201)
400	4.9909	0.0878	0.2767	4.9915	0.0876	0.3079
Ст. дев.	(0.3312)	(0.0548)	(0.2573)	(0.3318)	(0.0548)	(0.2925)
500	4.9865	0.0907	0.3126	4.9869	0.0905	0.3255
Ст. дев.	(0.2887)	(0.0479)	(0.2695)	(0.2890)	(0.0478)	(0.2884)
600	4.9952	0.0918	0.3042	4.9955	0.0915	0.3203
Ст. дев.	(0.2475)	(0.0424)	(0.2610)	(0.2483)	(0.0422)	(0.2789)
700	4.9910	0.0951	0.3174	4.9913	0.0950	0.3363
Ст. дев.	(0.2355)	(0.0389)	(0.2567)	(0.2357)	(0.0389)	(0.2771)
800	4.9929	0.0961	0.3183	4.9933	0.0960	0.3331
Ст. дев.	(0.2266)	(0.0369)	(0.2507)	(0.2265)	(0.0369)	(0.2749)
900	4.9834	0.0952	0.3266	4.9836	0.0951	0.3341
Ст. дев.	(0.2054)	(0.0357)	(0.2438)	(0.2056)	(0.0357)	(0.2645)
1000	4.9829	0.0946	0.3201	4.9831	0.0945	0.3272
Ст. дев.	(0.1970)	(0.0327)	(0.2382)	(0.1970)	(0.0327)	(0.2459)

Табела 2.10: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара ADCINAR(1) модела.

a-II

N	$\hat{\mu}_p$	$\hat{\alpha}_p$	$\hat{\theta}_p$	$\hat{\mu}_{ml}$	$\hat{\alpha}_{ml}$	$\hat{\theta}_{ml}$
	i) Стварне вредности $\mu = 0.5$, $\alpha = 0.1$, $\theta = 0.3$,					
100	0.5157	0.0807	0.7087	0.5139	0.0882	0.5312
Ст. дев.	(0.1100)	(0.1106)	(0.4265)	(0.0905)	(0.0801)	(0.3521)
200	0.5066	0.0814	0.6697	0.5058	0.0898	0.4388
Ст. дев.	(0.0733)	(0.0907)	(0.4210)	(0.0612)	(0.0603)	(0.3475)
300	0.5072	0.0851	0.6310	0.5076	0.0935	0.4414
Ст. дев.	(0.0619)	(0.0865)	(0.4414)	(0.0526)	(0.0530)	(0.3102)
400	0.5048	0.0804	0.5895	0.5068	0.0910	0.4014
Ст. дев.	(0.0515)	(0.0710)	(0.4407)	(0.0440)	(0.0465)	(0.2900)
500	0.5044	0.0876	0.5657	0.5052	0.0929	0.3673
Ст. дев.	(0.0513)	(0.0674)	(0.4285)	(0.0410)	(0.0395)	(0.2701)
600	0.5032	0.0899	0.4909	0.5047	0.0981	0.3650
Ст. дев.	(0.0492)	(0.0673)	(0.4195)	(0.0399)	(0.0391)	(0.2675)
700	0.5042	0.0874	0.4869	0.5043	0.0970	0.3728
Ст. дев.	(0.0464)	(0.0643)	(0.4194)	(0.0389)	(0.0357)	(0.2640)
800	0.5066	0.0906	0.4528	0.5058	0.1001	0.3549
Ст. дев.	(0.0414)	(0.0596)	(0.4077)	(0.0331)	(0.0334)	(0.2401)
900	0.5065	0.0917	0.4278	0.5043	0.1004	0.3461
Ст. дев.	(0.0395)	(0.0559)	(0.4026)	(0.0317)	(0.0315)	(0.2264)
1000	0.5055	0.0952	0.4523	0.5024	0.1004	0.3481
Ст. дев.	(0.0366)	(0.0530)	(0.4000)	(0.0293)	(0.0290)	(0.2141)
	ii) Стварне вредности $\mu = 1$, $\alpha = 0.1$, $\theta = 0.3$,					
100	1.0419	0.1252	0.6831	0.9940	0.1086	0.3990
Ст. дев.	(0.2312)	(0.1357)	(0.4091)	(0.1543)	(0.0816)	(0.2815)
200	1.0318	0.1118	0.7747	1.0020	0.1053	0.3779
Ст. дев.	(0.1623)	(0.1208)	(0.3772)	(0.1160)	(0.0574)	(0.2747)
300	1.0146	0.1029	0.6508	0.9995	0.0990	0.3498
Ст. дев.	(0.1314)	(0.0985)	(0.4154)	(0.0931)	(0.0477)	(0.2571)
400	1.0124	0.1017	0.6059	1.0003	0.1002	0.3078
Ст. дев.	(0.1088)	(0.0885)	(0.4145)	(0.0779)	(0.0438)	(0.2170)
500	1.0120	0.1010	0.5982	1.0000	0.1009	0.3232
Ст. дев.	(0.0995)	(0.0799)	(0.4213)	(0.0677)	(0.0386)	(0.1976)
600	1.0085	0.0978	0.5664	1.0007	0.0986	0.3009
Ст. дев.	(0.0846)	(0.0751)	(0.4264)	(0.0578)	(0.0362)	(0.1814)
700	1.0060	0.0894	0.4857	0.9984	0.0951	0.2803
Ст. дев.	(0.0840)	(0.0705)	(0.4347)	(0.0542)	(0.0316)	(0.1611)
800	1.0050	0.0910	0.4732	0.9982	0.0960	0.2812
Ст. дев.	(0.0767)	(0.0683)	(0.4310)	(0.0502)	(0.0295)	(0.1565)
900	1.0060	0.0918	0.4471	0.9964	0.0969	0.2788
Ст. дев.	(0.0759)	(0.0619)	(0.4114)	(0.0464)	(0.0279)	(0.1478)
1000	1.0056	0.0963	0.5073	0.9949	0.0976	0.2827
Ст. дев.	(0.0752)	(0.0619)	(0.4188)	(0.0472)	(0.0276)	(0.1415)
	iii) Стварне вредности $\mu = 5$, $\alpha = 0.1$, $\theta = 0.3$,					
100	5.5980	0.1971	0.7503	4.9594	0.1172	0.4863
Ст. дев.	(1.7242)	(0.2933)	(0.3950)	(0.5973)	(0.0766)	(0.2588)
200	5.3438	0.1542	0.7905	4.9958	0.1038	0.4179
Ст. дев.	(1.2710)	(0.2077)	(0.3466)	(0.4729)	(0.0522)	(0.2386)
300	5.1453	0.1117	0.7594	4.9810	0.0981	0.3804
Ст. дев.	(0.8809)	(0.1545)	(0.3790)	(0.4089)	(0.0489)	(0.2187)
400	5.1210	0.1155	0.7285	4.9877	0.0958	0.3369
Ст. дев.	(0.7082)	(0.1526)	(0.3982)	(0.3299)	(0.0420)	(0.1734)
500	5.0814	0.1227	0.7528	4.9877	0.1000	0.3181
Ст. дев.	(0.6125)	(0.1481)	(0.3840)	(0.2856)	(0.0342)	(0.1421)
600	5.0657	0.1266	0.7279	4.9921	0.0994	0.3408
Ст. дев.	(0.5553)	(0.1569)	(0.3839)	(0.2489)	(0.0313)	(0.1711)
700	5.0540	0.1391	0.8085	4.9902	0.1001	0.3189
Ст. дев.	(0.5081)	(0.1583)	(0.3418)	(0.2363)	(0.0279)	(0.1169)
800	5.0581	0.1411	0.7929	4.9924	0.1003	0.3209
Ст. дев.	(0.4791)	(0.1526)	(0.3520)	(0.2266)	(0.0252)	(0.1181)
900	5.0393	0.1436	0.7938	4.9837	0.0999	0.3045
Ст. дев.	(0.4329)	(0.1477)	(0.3552)	(0.2056)	(0.0244)	(0.0713)
1000	5.0262	0.1386	0.7786	4.9835	0.0991	0.3030
Ст. дев.	(0.4299)	(0.1418)	(0.3667)	(0.1970)	(0.0234)	(0.0651)

Табела 2.11: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара ADCINAR(1) модела.

b-I

N	$\hat{\mu}_{cls}$	$\hat{\alpha}_{cls}$	$\hat{\theta}_{cls}$	$\hat{\mu}_{yw}$	$\hat{\alpha}_{yw}$	$\hat{\theta}_{yw}$
	i) Стварне вредности $\mu = 0.5, \alpha = 0.1, \theta = 0.9,$					
100	0.5071	0.0721	0.3527	0.5063	0.0717	0.4170
Ст. дев.	(0.0961)	(0.0741)	(0.3912)	(0.0957)	(0.0736)	(0.4226)
200	0.5034	0.0924	0.4513	0.5029	0.0917	0.5349
Ст. дев.	(0.0652)	(0.0751)	(0.3883)	(0.0650)	(0.0745)	(0.4037)
300	0.5004	0.0884	0.4808	0.5001	0.0883	0.5390
Ст. дев.	(0.0546)	(0.0671)	(0.3820)	(0.0544)	(0.0670)	(0.3947)
400	0.4999	0.0891	0.5100	0.4997	0.0889	0.5933
Ст. дев.	(0.0454)	(0.0597)	(0.3641)	(0.0453)	(0.0594)	(0.3802)
500	0.5020	0.0909	0.5163	0.5018	0.0907	0.5842
Ст. дев.	(0.0415)	(0.0569)	(0.3669)	(0.0413)	(0.0567)	(0.3804)
600	0.5024	0.0890	0.5406	0.5022	0.0889	0.5857
Ст. дев.	(0.0380)	(0.0551)	(0.3639)	(0.0379)	(0.0551)	(0.3820)
700	0.5006	0.0922	0.5616	0.5005	0.0921	0.6112
Ст. дев.	(0.0341)	(0.0525)	(0.3577)	(0.0339)	(0.0525)	(0.3676)
800	0.4997	0.0943	0.5850	0.4995	0.0942	0.6400
Ст. дев.	(0.0324)	(0.0486)	(0.3542)	(0.0323)	(0.0485)	(0.3557)
900	0.5003	0.0971	0.6213	0.5002	0.0969	0.6863
Ст. дев.	(0.0323)	(0.0467)	(0.3547)	(0.0322)	(0.0467)	(0.3391)
1000	0.5012	0.0967	0.6283	0.5011	0.0965	0.6883
Ст. дев.	(0.0301)	(0.0421)	(0.3367)	(0.0300)	(0.0420)	(0.3242)
	ii) Стварне вредности $\mu = 1, \alpha = 0.1, \theta = 0.9,$					
100	1.0000	0.0918	0.4351	1.0039	0.0908	0.4588
Ст. дев.	(0.1688)	(0.1010)	(0.4065)	(0.1723)	(0.0993)	(0.4328)
200	0.9931	0.0880	0.4180	0.9951	0.0877	0.4911
Ст. дев.	(0.1145)	(0.0755)	(0.3741)	(0.1165)	(0.0751)	(0.4026)
300	0.9943	0.0911	0.5141	0.9956	0.0908	0.5724
Ст. дев.	(0.0898)	(0.0744)	(0.3739)	(0.0910)	(0.0741)	(0.3840)
400	0.9918	0.0893	0.5701	0.9929	0.0891	0.6194
Ст. дев.	(0.0805)	(0.0629)	(0.3623)	(0.0815)	(0.0628)	(0.3692)
500	0.9996	0.0910	0.6162	1.0004	0.0909	0.6391
Ст. дев.	(0.0696)	(0.0567)	(0.3390)	(0.0703)	(0.0566)	(0.3361)
600	0.9979	0.0900	0.6153	0.9986	0.0899	0.6487
Ст. дев.	(0.0646)	(0.0542)	(0.3236)	(0.0651)	(0.0541)	(0.3459)
700	1.0000	0.0919	0.6613	1.0005	0.0917	0.6796
Ст. дев.	(0.0619)	(0.0509)	(0.3077)	(0.0621)	(0.0508)	(0.3158)
800	0.9998	0.0933	0.6601	1.0003	0.0932	0.6911
Ст. дев.	(0.0592)	(0.0458)	(0.3023)	(0.0593)	(0.0458)	(0.2851)
900	0.9980	0.0944	0.6840	0.9985	0.0942	0.6864
Ст. дев.	(0.0561)	(0.0437)	(0.2774)	(0.0562)	(0.0437)	(0.2814)
1000	0.9951	0.0952	0.6762	0.9956	0.0951	0.6808
Ст. дев.	(0.0528)	(0.0395)	(0.2785)	(0.0529)	(0.0394)	(0.2807)
	iii) Стварне вредности $\mu = 5, \alpha = 0.1, \theta = 0.9,$					
100	5.0897	0.0966	0.5268	5.0839	0.0957	0.5124
Ст. дев.	(0.5716)	(0.0997)	(0.4075)	(0.5721)	(0.0987)	(0.4165)
200	5.1125	0.0891	0.5521	5.1095	0.0888	0.5534
Ст. дев.	(0.4481)	(0.0822)	(0.3691)	(0.4485)	(0.0820)	(0.3817)
300	5.0749	0.1020	0.6108	5.0731	0.1017	0.6078
Ст. дев.	(0.3823)	(0.0770)	(0.3187)	(0.3840)	(0.0769)	(0.3396)
400	5.0524	0.0983	0.6248	5.0510	0.0980	0.6205
Ст. дев.	(0.3142)	(0.0673)	(0.3159)	(0.3150)	(0.0672)	(0.3360)
500	5.0561	0.1000	0.6440	5.0549	0.0998	0.6781
Ст. дев.	(0.2774)	(0.0606)	(0.2967)	(0.2782)	(0.0606)	(0.3046)
600	5.0443	0.0990	0.6720	5.0433	0.0989	0.7088
Ст. дев.	(0.2410)	(0.0558)	(0.2743)	(0.2418)	(0.0558)	(0.2843)
700	5.0373	0.0985	0.6924	5.0365	0.0983	0.7181
Ст. дев.	(0.2213)	(0.0553)	(0.2709)	(0.2224)	(0.0552)	(0.2797)
800	5.0390	0.0996	0.6919	5.0382	0.0995	0.7169
Ст. дев.	(0.1986)	(0.0518)	(0.2647)	(0.1992)	(0.0517)	(0.2844)
900	5.0289	0.0979	0.7052	5.0282	0.0979	0.7307
Ст. дев.	(0.1767)	(0.0486)	(0.2598)	(0.1770)	(0.0486)	(0.2648)
1000	5.0228	0.0979	0.7129	5.0224	0.0978	0.7308
Ст. дев.	(0.1738)	(0.0471)	(0.2666)	(0.1741)	(0.0471)	(0.2570)

Табела 2.12: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара ADCINAR(1) модела.

b-II

N	$\hat{\mu}_{pb}$	$\hat{\alpha}_{pb}$	$\hat{\theta}_{pb}$	$\hat{\mu}_{ml}$	$\hat{\alpha}_{ml}$	$\hat{\theta}_{ml}$
i) Стварне вредности $\mu = 0.5, \alpha = 0.1, \theta = 0.9,$						
100	0.5136	0.1116	0.7023	0.5063	0.0979	0.5648
Ст. дев.	(0.1155)	(0.1239)	(0.4157)	(0.0959)	(0.0835)	(0.4016)
200	0.5011	0.1093	0.7705	0.5034	0.1061	0.7198
Ст. дев.	(0.0716)	(0.0925)	(0.3741)	(0.0662)	(0.0622)	(0.3487)
300	0.5012	0.1101	0.7661	0.5003	0.1019	0.7582
Ст. дев.	(0.0598)	(0.0778)	(0.3630)	(0.0549)	(0.0601)	(0.3319)
400	0.5007	0.1042	0.7735	0.4997	0.1010	0.7734
Ст. дев.	(0.0515)	(0.0736)	(0.3747)	(0.0447)	(0.0511)	(0.2992)
500	0.5043	0.1068	0.7549	0.5023	0.1007	0.7931
Ст. дев.	(0.0477)	(0.0726)	(0.3811)	(0.0420)	(0.0491)	(0.2979)
600	0.5036	0.0998	0.7188	0.5024	0.0967	0.8112
Ст. дев.	(0.0455)	(0.0635)	(0.3917)	(0.0389)	(0.0434)	(0.2663)
700	0.5002	0.0968	0.6831	0.5000	0.0982	0.8433
Ст. дев.	(0.0390)	(0.0585)	(0.4070)	(0.0335)	(0.0414)	(0.2242)
800	0.4994	0.0944	0.7014	0.4991	0.0980	0.8756
Ст. дев.	(0.0358)	(0.0529)	(0.4061)	(0.0322)	(0.0361)	(0.1778)
900	0.4992	0.0961	0.6627	0.4992	0.0984	0.8874
Ст. дев.	(0.0337)	(0.0484)	(0.4098)	(0.0321)	(0.0341)	(0.1587)
1000	0.5007	0.0951	0.6677	0.5007	0.0980	0.8787
Ст. дев.	(0.0325)	(0.0470)	(0.3944)	(0.0300)	(0.0308)	(0.1747)
ii) Стварне вредности $\mu = 1, \alpha = 0.1, \theta = 0.9,$						
100	1.0461	0.1139	0.7630	1.0025	0.1154	0.7012
Ст. дев.	(0.2545)	(0.1458)	(0.3916)	(0.1781)	(0.0876)	(0.3369)
200	1.0211	0.0988	0.7385	0.9953	0.1055	0.7429
Ст. дев.	(0.1488)	(0.1146)	(0.4054)	(0.1184)	(0.0611)	(0.3089)
300	1.0093	0.0968	0.7524	0.9960	0.1098	0.8231
Ст. дев.	(0.1140)	(0.1054)	(0.4003)	(0.0913)	(0.0503)	(0.2397)
400	1.0063	0.0975	0.7372	0.9926	0.1041	0.8474
Ст. дев.	(0.1020)	(0.1006)	(0.3973)	(0.0809)	(0.0420)	(0.2065)
500	1.0065	0.0918	0.6983	1.0015	0.1032	0.8581
Ст. дев.	(0.0912)	(0.0831)	(0.4129)	(0.0695)	(0.0397)	(0.1689)
600	1.0018	0.0872	0.6849	0.9982	0.0992	0.8747
Ст. дев.	(0.0847)	(0.0772)	(0.4127)	(0.0650)	(0.0374)	(0.1424)
700	1.0033	0.0859	0.6520	1.0000	0.1009	0.8835
Ст. дев.	(0.0768)	(0.0768)	(0.4362)	(0.0620)	(0.0342)	(0.1493)
800	1.0031	0.0835	0.7017	1.0000	0.1015	0.8697
Ст. дев.	(0.0738)	(0.0714)	(0.4153)	(0.0599)	(0.0314)	(0.1467)
900	1.0031	0.0857	0.6896	0.9982	0.1021	0.8726
Ст. дев.	(0.0721)	(0.0686)	(0.4083)	(0.0572)	(0.0308)	(0.1303)
1000	1.0001	0.0872	0.6604	0.9956	0.1022	0.8764
Ст. дев.	(0.0679)	(0.0677)	(0.4176)	(0.0538)	(0.0278)	(0.1214)
iii) Стварне вредности $\mu = 5, \alpha = 0.1, \theta = 0.9,$						
100	5.2710	0.2941	0.8523	5.0721	0.1181	0.7345
Ст. дев.	(1.3601)	(0.3512)	(0.3012)	(0.5526)	(0.0775)	(0.2635)
200	5.2444	0.2019	0.7950	5.1099	0.1047	0.8342
Ст. дев.	(1.0663)	(0.2506)	(0.3474)	(0.4452)	(0.0511)	(0.1623)
300	5.0408	0.1745	0.7876	5.0732	0.1080	0.8420
Ст. дев.	(0.7538)	(0.2267)	(0.3584)	(0.3718)	(0.0416)	(0.1466)
400	5.0173	0.1594	0.7932	5.0523	0.1059	0.8675
Ст. дев.	(0.6421)	(0.2093)	(0.3613)	(0.3062)	(0.0363)	(0.1290)
500	5.0191	0.1508	0.7912	5.0552	0.1046	0.8863
Ст. дев.	(0.5736)	(0.2031)	(0.3684)	(0.2694)	(0.0371)	(0.1066)
600	4.9900	0.1426	0.8026	5.0452	0.1032	0.8810
Ст. дев.	(0.4998)	(0.1887)	(0.3390)	(0.2354)	(0.0353)	(0.1119)
700	5.0055	0.1432	0.7371	5.0389	0.1033	0.8809
Ст. дев.	(0.4571)	(0.1851)	(0.3950)	(0.2182)	(0.0325)	(0.1062)
800	5.0147	0.1314	0.7795	5.0405	0.1031	0.8882
Ст. дев.	(0.4108)	(0.1742)	(0.3841)	(0.1941)	(0.0304)	(0.1021)
900	5.0263	0.1318	0.7569	5.0314	0.1022	0.8925
Ст. дев.	(0.4088)	(0.1587)	(0.3924)	(0.1724)	(0.0289)	(0.1003)
1000	5.0018	0.1408	0.7739	5.0263	0.1018	0.8971
Ст. дев.	(0.4046)	(0.1565)	(0.3695)	(0.1701)	(0.0262)	(0.0807)

Табела 2.13: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара ADCINAR(1) модела.

c-I

N	$\hat{\mu}_{cls}$	$\hat{\alpha}_{cls}$	$\hat{\theta}_{cls}$	$\hat{\mu}_{yw}$	$\hat{\alpha}_{yw}$	$\hat{\theta}_{yw}$
	i) Стварне вредности $\mu = 0.5$, $\alpha = 0.3$, $\theta = 0.7$,					
100	0.5201	0.2980	0.5248	0.5185	0.2949	0.4685
Ст. дев.	(0.1356)	(0.1247)	(0.2835)	(0.1339)	(0.1246)	(0.2984)
200	0.5043	0.2925	0.5447	0.5038	0.2912	0.5106
Ст. дев.	(0.0882)	(0.1012)	(0.2227)	(0.0879)	(0.1007)	(0.2839)
300	0.5006	0.2954	0.5883	0.5003	0.2946	0.5438
Ст. дев.	(0.0657)	(0.0875)	(0.2160)	(0.0654)	(0.0873)	(0.2825)
400	0.4939	0.2928	0.5942	0.4937	0.2921	0.5560
Ст. дев.	(0.0570)	(0.0762)	(0.2030)	(0.0567)	(0.0762)	(0.2915)
500	0.4960	0.2981	0.6117	0.4958	0.2975	0.5755
Ст. дев.	(0.0469)	(0.0653)	(0.1684)	(0.0468)	(0.0652)	(0.2767)
600	0.4971	0.2977	0.6289	0.4969	0.2970	0.6038
Ст. дев.	(0.0456)	(0.0593)	(0.1580)	(0.0456)	(0.0590)	(0.2718)
700	0.4979	0.2986	0.6407	0.4977	0.2981	0.6249
Ст. дев.	(0.0455)	(0.0583)	(0.1503)	(0.0455)	(0.0584)	(0.2710)
800	0.4973	0.3009	0.6434	0.4973	0.3005	0.6335
Ст. дев.	(0.0437)	(0.0559)	(0.1387)	(0.0437)	(0.0560)	(0.2620)
900	0.4988	0.3051	0.6655	0.4987	0.3048	0.6551
Ст. дев.	(0.0417)	(0.0540)	(0.1316)	(0.0418)	(0.0540)	(0.2499)
1000	0.4989	0.3042	0.6638	0.4988	0.3040	0.6502
Ст. дев.	(0.0391)	(0.0484)	(0.1343)	(0.0391)	(0.0484)	(0.2398)
	ii) Стварне вредности $\mu = 1$, $\alpha = 0.3$, $\theta = 0.7$,					
100	1.0056	0.2732	0.5094	1.0090	0.2711	0.4683
Ст. дев.	(0.1668)	(0.1271)	(0.2463)	(0.1650)	(0.1265)	(0.2989)
200	0.9948	0.2943	0.5811	0.9956	0.2921	0.5151
Ст. дев.	(0.1227)	(0.1025)	(0.2159)	(0.1219)	(0.1012)	(0.2699)
300	1.0021	0.2897	0.6094	1.0032	0.2889	0.5512
Ст. дев.	(0.1034)	(0.0832)	(0.1916)	(0.1029)	(0.0832)	(0.2692)
400	0.9937	0.2930	0.6108	0.9946	0.2923	0.5629
Ст. дев.	(0.0894)	(0.0761)	(0.1680)	(0.0886)	(0.0761)	(0.2578)
500	0.9957	0.2889	0.6216	0.9965	0.2886	0.5762
Ст. дев.	(0.0898)	(0.0657)	(0.1445)	(0.0889)	(0.0656)	(0.2458)
600	0.9964	0.2874	0.6281	0.9968	0.2869	0.5841
Ст. дев.	(0.0834)	(0.0576)	(0.1320)	(0.0827)	(0.0573)	(0.2378)
700	0.9969	0.2898	0.6376	0.9973	0.2894	0.6095
Ст. дев.	(0.0724)	(0.0530)	(0.1049)	(0.0715)	(0.0527)	(0.2385)
800	0.9943	0.2899	0.6393	0.9948	0.2896	0.6134
Ст. дев.	(0.0667)	(0.0531)	(0.1026)	(0.0663)	(0.0530)	(0.2345)
900	0.9940	0.2919	0.6497	0.9944	0.2917	0.6280
Ст. дев.	(0.0643)	(0.0512)	(0.1029)	(0.0641)	(0.0512)	(0.2240)
1000	0.9966	0.2951	0.6509	0.9968	0.2948	0.6377
Ст. дев.	(0.0612)	(0.0472)	(0.0952)	(0.0608)	(0.0471)	(0.2218)
	iii) Стварне вредности $\mu = 5$, $\alpha = 0.3$, $\theta = 0.7$,					
100	5.0727	0.2766	0.5577	5.0822	0.2745	0.5121
Ст. дев.	(0.7002)	(0.1153)	(0.2176)	(0.7018)	(0.1146)	(0.2920)
200	5.0056	0.2838	0.5963	5.0115	0.2823	0.5310
Ст. дев.	(0.5606)	(0.0983)	(0.1431)	(0.5633)	(0.0981)	(0.2510)
300	4.9504	0.2899	0.6265	4.9549	0.2892	0.5635
Ст. дев.	(0.4584)	(0.0774)	(0.1238)	(0.4592)	(0.0773)	(0.2532)
400	4.9439	0.2904	0.6391	4.9464	0.2895	0.5851
Ст. дев.	(0.3912)	(0.0690)	(0.1223)	(0.3896)	(0.0693)	(0.2317)
500	4.9449	0.2946	0.6588	4.9465	0.2939	0.6178
Ст. дев.	(0.3545)	(0.0620)	(0.1155)	(0.3539)	(0.0617)	(0.2235)
600	4.9553	0.2969	0.6624	4.9563	0.2963	0.6232
Ст. дев.	(0.3174)	(0.0619)	(0.1064)	(0.3142)	(0.0616)	(0.2131)
700	4.9817	0.2957	0.6628	4.9826	0.2953	0.6325
Ст. дев.	(0.3014)	(0.0597)	(0.0984)	(0.2989)	(0.0596)	(0.2042)
800	4.9817	0.2941	0.6630	4.9823	0.2936	0.6314
Ст. дев.	(0.2887)	(0.0549)	(0.0897)	(0.2863)	(0.0548)	(0.2035)
900	4.9801	0.2947	0.6707	4.9809	0.2942	0.6422
Ст. дев.	(0.2712)	(0.0502)	(0.0811)	(0.2691)	(0.0500)	(0.1934)
1000	4.9837	0.2971	0.6715	4.9847	0.2969	0.6459
Ст. дев.	(0.2616)	(0.0463)	(0.0823)	(0.2594)	(0.0462)	(0.1869)

Табела 2.14: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара ADCINAR(1) модела.

c-II

N	$\hat{\mu}_{pb}$	$\hat{\alpha}_{pb}$	$\hat{\theta}_{pb}$	$\hat{\mu}_{ml}$	$\hat{\alpha}_{ml}$	$\hat{\theta}_{ml}$
	i) Стварне вредности $\mu = 0.5$, $\alpha = 0.3$, $\theta = 0.7$,					
100	0.5275	0.3022	0.6776	0.5179	0.3078	0.6820
Ст. дев.	(0.1584)	(0.1478)	(0.3449)	(0.1314)	(0.0933)	(0.2457)
200	0.5124	0.2911	0.6051	0.5044	0.2996	0.7115
Ст. дев.	(0.1120)	(0.1127)	(0.3459)	(0.0874)	(0.0702)	(0.1859)
300	0.5059	0.2886	0.5919	0.4997	0.2971	0.7072
Ст. дев.	(0.0800)	(0.0851)	(0.3171)	(0.0664)	(0.0580)	(0.1657)
400	0.4966	0.2874	0.5910	0.4930	0.2921	0.7056
Ст. дев.	(0.0627)	(0.0837)	(0.3271)	(0.0571)	(0.0544)	(0.1455)
500	0.4972	0.2882	0.6187	0.4943	0.2938	0.7041
Ст. дев.	(0.0553)	(0.0708)	(0.3023)	(0.0469)	(0.0456)	(0.1247)
600	0.4985	0.2912	0.6310	0.4960	0.2944	0.7059
Ст. дев.	(0.0509)	(0.0619)	(0.2887)	(0.0453)	(0.0412)	(0.1074)
700	0.5000	0.2968	0.6488	0.4972	0.2966	0.7053
Ст. дев.	(0.0497)	(0.0577)	(0.2800)	(0.0445)	(0.0400)	(0.0936)
800	0.4984	0.2956	0.6578	0.4963	0.2976	0.7047
Ст. дев.	(0.0474)	(0.0517)	(0.2713)	(0.0423)	(0.0372)	(0.0895)
900	0.4993	0.2973	0.6581	0.4976	0.2998	0.7080
Ст. дев.	(0.0452)	(0.0489)	(0.2651)	(0.0403)	(0.0346)	(0.0777)
1000	0.5000	0.2991	0.6576	0.4982	0.3007	0.7085
Ст. дев.	(0.0437)	(0.0474)	(0.2474)	(0.0382)	(0.0323)	(0.0746)
	ii) Стварне вредности $\mu = 1$, $\alpha = 0.3$, $\theta = 0.7$,					
100	1.0173	0.2690	0.6849	1.0109	0.2941	0.7024
Ст. дев.	(0.2109)	(0.1846)	(0.3780)	(0.1698)	(0.1015)	(0.1872)
200	1.0094	0.2749	0.6474	0.9934	0.2980	0.7019
Ст. дев.	(0.1663)	(0.1404)	(0.3481)	(0.1250)	(0.0685)	(0.1432)
300	1.0165	0.2686	0.6070	1.0004	0.2927	0.6952
Ст. дев.	(0.1361)	(0.1166)	(0.3613)	(0.1046)	(0.0573)	(0.1158)
400	1.0043	0.2763	0.6131	0.9931	0.2988	0.7004
Ст. дев.	(0.1086)	(0.0957)	(0.3270)	(0.0879)	(0.0485)	(0.0958)
500	1.0051	0.2811	0.6338	0.9966	0.2970	0.7032
Ст. дев.	(0.1001)	(0.0895)	(0.3192)	(0.0899)	(0.0451)	(0.0940)
600	1.0045	0.2837	0.6272	0.9979	0.2962	0.7048
Ст. дев.	(0.0937)	(0.0836)	(0.3037)	(0.0836)	(0.0397)	(0.0860)
700	1.0035	0.2869	0.6249	0.9986	0.2974	0.7055
Ст. дев.	(0.0850)	(0.0766)	(0.2860)	(0.0733)	(0.0348)	(0.0726)
800	1.0003	0.2904	0.6322	0.9961	0.2971	0.7052
Ст. дев.	(0.0786)	(0.0717)	(0.2951)	(0.0665)	(0.0335)	(0.0685)
900	0.9971	0.2897	0.6400	0.9948	0.2963	0.7040
Ст. дев.	(0.0766)	(0.0711)	(0.2943)	(0.0638)	(0.0332)	(0.0631)
1000	0.9968	0.2924	0.6607	0.9968	0.2972	0.7016
Ст. дев.	(0.0723)	(0.0646)	(0.2684)	(0.0610)	(0.0308)	(0.0580)
	iii) Стварне вредности $\mu = 5$, $\alpha = 0.3$, $\theta = 0.7$,					
100	5.4963	0.3212	0.8120	5.0974	0.3058	0.7088
Ст. дев.	(1.7116)	(0.3183)	(0.3326)	(0.7026)	(0.0678)	(0.1083)
200	5.1919	0.3297	0.7233	5.0155	0.3039	0.7021
Ст. дев.	(1.2242)	(0.2618)	(0.3608)	(0.5547)	(0.0490)	(0.0618)
300	5.1262	0.2895	0.7059	4.9593	0.3029	0.7003
Ст. дев.	(0.9578)	(0.2322)	(0.3558)	(0.4440)	(0.0383)	(0.0475)
400	5.0969	0.2768	0.6904	4.9497	0.2993	0.6998
Ст. дев.	(0.7537)	(0.2164)	(0.3607)	(0.3768)	(0.0350)	(0.0445)
500	5.0546	0.2701	0.6456	4.9469	0.3004	0.7024
Ст. дев.	(0.6576)	(0.2023)	(0.3731)	(0.3481)	(0.0288)	(0.0383)
600	5.0730	0.2850	0.6452	4.9539	0.3009	0.7039
Ст. дев.	(0.6318)	(0.1896)	(0.3735)	(0.3097)	(0.0273)	(0.0344)
700	5.0835	0.2887	0.6680	4.9808	0.2999	0.7034
Ст. дев.	(0.6043)	(0.1829)	(0.3629)	(0.2963)	(0.0250)	(0.0316)
800	5.0724	0.2727	0.6386	4.9804	0.2989	0.7038
Ст. дев.	(0.5284)	(0.1772)	(0.3769)	(0.2810)	(0.0246)	(0.0289)
900	5.0556	0.2915	0.6078	4.9819	0.2998	0.7046
Ст. дев.	(0.4850)	(0.1633)	(0.3754)	(0.2628)	(0.0243)	(0.0270)
1000	5.0454	0.2891	0.6135	4.9829	0.3009	0.7035
Ст. дев.	(0.4443)	(0.1611)	(0.3718)	(0.2574)	(0.0220)	(0.0270)

Табела 2.15: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара ADCINAR(1) модела.

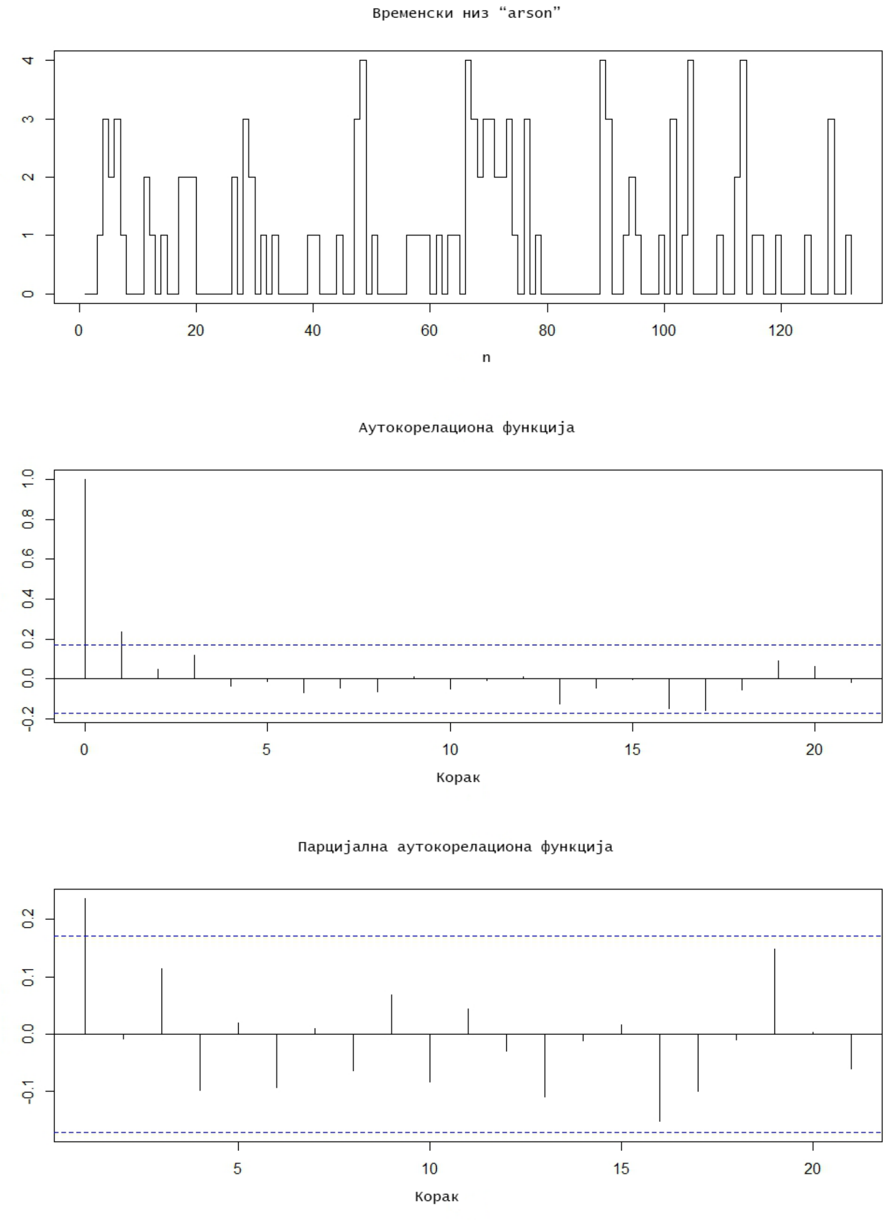
d-I

N	$\hat{\mu}_{cls}$	$\hat{\alpha}_{cls}$	$\hat{\theta}_{cls}$	$\hat{\mu}_{yw}$	$\hat{\alpha}_{yw}$	$\hat{\theta}_{yw}$
	i) Стварне вредности $\mu = 0.5$, $\alpha = 0.7$, $\theta = 0.9$,					
100	0.4947	0.6286	0.8335	0.4889	0.6171	0.6726
Ст. дев.	(0.1640)	(0.1289)	(0.1441)	(0.1582)	(0.1222)	(0.1689)
200	0.4904	0.6491	0.8639	0.4923	0.6470	0.7205
Ст. дев.	(0.1111)	(0.0893)	(0.1168)	(0.1130)	(0.0896)	(0.1617)
300	0.4920	0.6616	0.8788	0.4918	0.6581	0.7428
Ст. дев.	(0.1107)	(0.0731)	(0.0986)	(0.1102)	(0.0732)	(0.1560)
400	0.4878	0.6641	0.8762	0.4881	0.6628	0.7671
Ст. дев.	(0.1015)	(0.0730)	(0.0965)	(0.1011)	(0.0732)	(0.1616)
500	0.4875	0.6643	0.8813	0.4874	0.6628	0.7737
Ст. дев.	(0.0889)	(0.0692)	(0.0923)	(0.0888)	(0.0691)	(0.1599)
600	0.4893	0.6672	0.8820	0.4893	0.6663	0.7711
Ст. дев.	(0.0811)	(0.0638)	(0.0824)	(0.0812)	(0.0636)	(0.1526)
700	0.4878	0.6700	0.8867	0.4878	0.6691	0.7761
Ст. дев.	(0.0748)	(0.0580)	(0.0804)	(0.0740)	(0.0576)	(0.1506)
800	0.4878	0.6730	0.8906	0.4877	0.6718	0.7835
Ст. дев.	(0.0695)	(0.0538)	(0.0776)	(0.0688)	(0.0536)	(0.1517)
900	0.4859	0.6768	0.8910	0.4858	0.6761	0.7870
Ст. дев.	(0.0656)	(0.0491)	(0.0710)	(0.0656)	(0.0492)	(0.1497)
1000	0.4872	0.6778	0.8882	0.4873	0.6769	0.7869
Ст. дев.	(0.0604)	(0.0449)	(0.0725)	(0.0603)	(0.0450)	(0.1489)
	ii) Стварне вредности $\mu = 1$, $\alpha = 0.7$, $\theta = 0.9$,					
100	0.9811	0.6431	0.8631	0.9661	0.6376	0.7041
Ст. дев.	(0.3332)	(0.1420)	(0.1115)	(0.3119)	(0.1413)	(0.1864)
200	0.9869	0.6677	0.8765	0.9805	0.6633	0.7658
Ст. дев.	(0.2306)	(0.0992)	(0.0894)	(0.2334)	(0.1004)	(0.1601)
300	0.9841	0.6765	0.8876	0.9802	0.6735	0.7792
Ст. дев.	(0.1772)	(0.0849)	(0.0797)	(0.1785)	(0.0840)	(0.1570)
400	0.9917	0.6771	0.8925	0.9878	0.6753	0.7699
Ст. дев.	(0.1551)	(0.0697)	(0.0762)	(0.1550)	(0.0695)	(0.1549)
500	0.9962	0.6783	0.8957	0.9943	0.6769	0.7833
Ст. дев.	(0.1427)	(0.0678)	(0.0706)	(0.1435)	(0.0678)	(0.1566)
600	0.9956	0.6814	0.8984	0.9932	0.6800	0.7907
Ст. дев.	(0.1243)	(0.0618)	(0.0667)	(0.1244)	(0.0615)	(0.1505)
700	0.9983	0.6837	0.8991	0.9965	0.6827	0.7939
Ст. дев.	(0.1121)	(0.0557)	(0.0634)	(0.1117)	(0.0557)	(0.1485)
800	0.9955	0.6835	0.8998	0.9946	0.6828	0.7906
Ст. дев.	(0.0973)	(0.0514)	(0.0625)	(0.0978)	(0.0512)	(0.1444)
900	1.0001	0.6853	0.8970	0.9987	0.6846	0.7956
Ст. дев.	(0.0947)	(0.0493)	(0.0610)	(0.0954)	(0.0492)	(0.1427)
1000	1.0036	0.6850	0.8998	1.0023	0.6846	0.7913
Ст. дев.	(0.0907)	(0.0434)	(0.0593)	(0.0910)	(0.0434)	(0.1398)
	iii) Стварне вредности $\mu = 5$, $\alpha = 0.7$, $\theta = 0.9$,					
100	5.2071	0.6578	0.8787	5.1256	0.6473	0.7355
Ст. дев.	(1.4020)	(0.1137)	(0.0735)	(1.2511)	(0.1087)	(0.1684)
200	4.9976	0.6761	0.8827	5.0022	0.6741	0.7676
Ст. дев.	(0.9179)	(0.0859)	(0.0637)	(0.8949)	(0.0862)	(0.1567)
300	4.9569	0.6819	0.8897	4.9556	0.6798	0.8035
Ст. дев.	(0.7455)	(0.0757)	(0.0642)	(0.7387)	(0.0754)	(0.1537)
400	4.9812	0.6891	0.8954	4.9770	0.6862	0.8208
Ст. дев.	(0.6103)	(0.0685)	(0.0570)	(0.6125)	(0.0684)	(0.1483)
500	4.9628	0.6882	0.9033	4.9622	0.6869	0.8288
Ст. дев.	(0.5994)	(0.0627)	(0.0518)	(0.5891)	(0.0617)	(0.1464)
600	4.9535	0.6885	0.9039	4.9504	0.6874	0.8257
Ст. дев.	(0.5371)	(0.0613)	(0.0506)	(0.5384)	(0.0611)	(0.1445)
700	4.9395	0.6887	0.9066	4.9392	0.6879	0.8424
Ст. дев.	(0.5281)	(0.0599)	(0.0520)	(0.5208)	(0.0598)	(0.1399)
800	4.9490	0.6910	0.9074	4.9475	0.6904	0.8365
Ст. дев.	(0.4991)	(0.0545)	(0.0488)	(0.4983)	(0.0545)	(0.1401)
900	4.9549	0.6926	0.9079	4.9543	0.6919	0.8351
Ст. дев.	(0.4730)	(0.0512)	(0.0464)	(0.4691)	(0.0511)	(0.1403)
1000	4.9860	0.6940	0.9066	4.9831	0.6932	0.8417
Ст. дев.	(0.4613)	(0.0482)	(0.0445)	(0.4555)	(0.0481)	(0.1360)

Табела 2.16: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара ADCINAR(1) модела.

d-II

N	$\hat{\mu}_{pb}$	$\hat{\alpha}_{pb}$	$\hat{\theta}_{pb}$	$\hat{\mu}_{ml}$	$\hat{\alpha}_{ml}$	$\hat{\theta}_{ml}$
	i) Стварне вредности $\mu = 0.5, \alpha = 0.7, \theta = 0.9,$					
100	0.5571	0.6892	0.8717	0.4993	0.6785	0.8985
Ст. дев.	(0.2480)	(0.0997)	(0.1496)	(0.1585)	(0.0795)	(0.0912)
200	0.5323	0.7049	0.8918	0.5041	0.6907	0.9012
Ст. дев.	(0.1500)	(0.0701)	(0.1212)	(0.1138)	(0.0529)	(0.0587)
300	0.5222	0.7064	0.9024	0.5026	0.6946	0.9003
Ст. дев.	(0.1341)	(0.0589)	(0.1049)	(0.1089)	(0.0469)	(0.0506)
400	0.5047	0.6992	0.9064	0.4964	0.6916	0.8984
Ст. дев.	(0.1213)	(0.0520)	(0.0962)	(0.0978)	(0.0439)	(0.0463)
500	0.4991	0.6958	0.9059	0.4952	0.6892	0.8977
Ст. дев.	(0.1033)	(0.0461)	(0.0961)	(0.0842)	(0.0384)	(0.0346)
600	0.5020	0.6943	0.8995	0.4957	0.6885	0.8978
Ст. дев.	(0.0926)	(0.0441)	(0.0952)	(0.0775)	(0.0353)	(0.0304)
700	0.5002	0.6963	0.9022	0.4939	0.6898	0.8987
Ст. дев.	(0.0857)	(0.0402)	(0.0976)	(0.0708)	(0.0314)	(0.0266)
800	0.4976	0.6952	0.9045	0.4932	0.6896	0.8992
Ст. дев.	(0.0823)	(0.0375)	(0.0903)	(0.0662)	(0.0294)	(0.0248)
900	0.4935	0.6952	0.9051	0.4905	0.6900	0.8982
Ст. дев.	(0.0774)	(0.0371)	(0.0848)	(0.0632)	(0.0287)	(0.0246)
1000	0.4953	0.6968	0.9055	0.4921	0.6912	0.8976
Ст. дев.	(0.0716)	(0.0348)	(0.0808)	(0.0585)	(0.0264)	(0.0237)
	ii) Стварне вредности $\mu = 1, \alpha = 0.7, \theta = 0.9,$					
100	1.1120	0.7054	0.8805	0.9727	0.6974	0.9102
Ст. дев.	(0.4789)	(0.1028)	(0.1432)	(0.2958)	(0.0698)	(0.0465)
200	1.0141	0.6980	0.8771	0.9827	0.6981	0.9008
Ст. дев.	(0.2642)	(0.0727)	(0.1337)	(0.2075)	(0.0482)	(0.0357)
300	1.0068	0.6951	0.8786	0.9794	0.6978	0.9017
Ст. дев.	(0.2112)	(0.0602)	(0.1188)	(0.1613)	(0.0384)	(0.0268)
400	1.0220	0.6996	0.8845	0.9928	0.6981	0.9007
Ст. дев.	(0.1978)	(0.0504)	(0.1084)	(0.1438)	(0.0327)	(0.0237)
500	1.0185	0.7006	0.8974	0.9993	0.6980	0.9001
Ст. дев.	(0.1788)	(0.0441)	(0.0937)	(0.1299)	(0.0279)	(0.0193)
600	1.0135	0.6992	0.8971	0.9992	0.6988	0.9014
Ст. дев.	(0.1608)	(0.0402)	(0.0820)	(0.1171)	(0.0262)	(0.0181)
700	1.0162	0.7002	0.9051	1.0014	0.6988	0.9005
Ст. дев.	(0.1439)	(0.0368)	(0.0757)	(0.1074)	(0.0238)	(0.0184)
800	1.0182	0.7005	0.9040	1.0001	0.6990	0.9007
Ст. дев.	(0.1350)	(0.0362)	(0.0728)	(0.0958)	(0.0226)	(0.0181)
900	1.0244	0.7025	0.9076	1.0044	0.6999	0.8999
Ст. дев.	(0.1242)	(0.0340)	(0.0689)	(0.0915)	(0.0218)	(0.0170)
1000	1.0272	0.7024	0.9047	1.0091	0.7001	0.9003
Ст. дев.	(0.1172)	(0.0330)	(0.0687)	(0.0883)	(0.0197)	(0.0151)
	iii) Стварне вредности $\mu = 5, \alpha = 0.7, \theta = 0.9,$					
100	5.6670	0.6878	0.8103	5.2035	0.6937	0.9019
Ст. дев.	(2.5446)	(0.2199)	(0.2421)	(1.2396)	(0.0476)	(0.0235)
200	5.2149	0.6750	0.7873	5.0443	0.6950	0.9002
Ст. дев.	(1.3976)	(0.1789)	(0.2283)	(0.9081)	(0.0360)	(0.0167)
300	5.1307	0.6946	0.8333	5.0049	0.6954	0.8992
Ст. дев.	(1.1784)	(0.1271)	(0.1724)	(0.7237)	(0.0310)	(0.0137)
400	5.1147	0.6869	0.8297	5.0148	0.6975	0.8996
Ст. дев.	(1.0173)	(0.1128)	(0.1664)	(0.5942)	(0.0253)	(0.0105)
500	5.0709	0.6898	0.8458	4.9841	0.6976	0.8996
Ст. дев.	(1.0045)	(0.1102)	(0.1669)	(0.5530)	(0.0231)	(0.0094)
600	5.0805	0.6897	0.8515	4.9703	0.6974	0.8996
Ст. дев.	(0.9049)	(0.1047)	(0.1641)	(0.4950)	(0.0220)	(0.0090)
700	5.0137	0.6876	0.8586	4.9549	0.6972	0.8995
Ст. дев.	(0.8146)	(0.0922)	(0.1533)	(0.4692)	(0.0205)	(0.0092)
800	5.0617	0.6853	0.8571	4.9614	0.6980	0.9002
Ст. дев.	(0.8112)	(0.0827)	(0.1435)	(0.4505)	(0.0189)	(0.0081)
900	5.0341	0.6870	0.8636	4.9557	0.6982	0.9001
Ст. дев.	(0.7329)	(0.0770)	(0.1297)	(0.4279)	(0.0177)	(0.0081)
1000	5.0422	0.6848	0.8587	4.9819	0.6985	0.8998
Ст. дев.	(0.6913)	(0.0767)	(0.1328)	(0.4098)	(0.0169)	(0.0077)



Слика 2.3: Дијаграми временског низа, аутокорелационе функције и парцијалне аутокорелационе функције података о броју подметнутих пожара.

2.3.7 Сличности и разлике међу генерализованим операторима I, II и III врсте

У овом одељку даћемо кратак преглед особина генерализованих оператора I, II и III врсте. Упоредићемо њихове најважније особине међусобно, али и са одговарајућим особинама биномног тининг оператора. Такође ћемо размотрити мотивацију за увођење ове три врсте оператора.

Подсетимо се да је биномни тининг оператор заснован на низу независних једнако расподељених случајних променљивих са $Ber(\alpha)$ расподелом, док су генерализовани тининг оператори засновани на низовима зависних случајних променљивих, такође са $Ber(\alpha)$ расподелом. У конструкцији генерализованих тининг оператора учествује нови параметар θ који одређује корелисаност између бројачких случајних променљивих.

Нека је $\alpha \in (0,1)$, нека су X и Y ненегативне целобројне случајне променљиве и нека "$\alpha \bullet_\theta$" означава генерализоване тининг операторе I, II и III врсте. Из претходних одељака закључујемо да следеће особине важе за сва три оператора:

(i) $E(\alpha \bullet_\theta X) = \alpha E(X)$,

(ii) $E((\alpha \bullet_\theta X)Y) = \alpha E(XY)$,

(iii) $Cov(X, \alpha \bullet_\theta Y) = \alpha Cov(X,Y)$.

Такође, за условно очекивање имамо

(iv) $E(\alpha \bullet_\theta X|X) = \alpha X$.

Ове особине су аналогне особинама које важе и за биномни тининг оператор "$\alpha \circ$".

За условну дисперзију важи:

(i) $Var(\alpha \circ_\theta X|X) = \alpha(1-\alpha)\theta^2 X^2 + \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)X$,

(ii) $Var(\alpha *_\theta X|X) = \alpha(\theta-\alpha)X^2 + \alpha(1-\theta)X$,

(iii) $Var(\alpha \diamond_\theta X|X) = (1-\alpha)(\alpha+\theta-1)X^2 + (1-\alpha)(1-\theta)X$.

За биномни тининг оператор имамо да је $Var(\alpha \circ_\theta X|X) = \alpha(1-\alpha)X$, односно условна дисперзија је линеарна функција. Можемо приметити да у случају генерализованог тининг оператора I врсте ако θ тежи нули, условна дисперзија тежи $\alpha(1-\alpha)X$. У случају генерализованих тининг оператора II и III врсте условна дисперзија тежи $\alpha(1-\alpha)X$, када θ тежи граничним вредностима α и $1-\alpha$, редом.

Даље, за генерализоване тининг операторе I, II и III врсте важи:

(i) $\alpha \circ_\theta (\beta \circ_\delta X) \overset{p}{=} ((I_\alpha \theta + \alpha - \alpha\theta)(I_\beta \delta + \beta - \beta\delta)) \circ X,$

(ii) $\alpha *_\theta (\beta *_\delta X) \overset{p}{=} ((1 - \theta \cdot I_{\frac{1-\alpha}{\theta}})(1 - \delta \cdot I_{\frac{1-\beta}{\delta}})) \circ X,$

(iii) $\alpha \diamond_\theta (\beta \diamond_\delta X) \overset{p}{=} (\alpha\beta) \diamond_{(\theta\delta)} X.$

За сва три оператора важе особине аналогне особини биномног тининг оператора $\alpha \circ (\beta \circ X) \overset{d}{=} (\alpha\beta) \circ X$.

Пошто је генерализовани тининг оператор најопштији, размотримо мотивацију за увођење генерализованих тининг оператора II и III врсте. Расподела суме бројачких случајних променљивих је у првом случају једнака мешавини две биномне расподеле, тј

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n \overset{p}{=} \begin{cases} Bin(n, \alpha(1-\theta)), & \text{с.в.} \quad 1-\alpha, \\ Bin(n, \theta + \alpha(1-\theta)), & \text{с.в.} \quad \alpha \ . \end{cases}$$

У другом случају имамо да је

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n \overset{p}{=} \begin{cases} n, & \text{с.в.} \quad 1 - \frac{1-\alpha}{\theta}, \\ Bin(n, 1-\theta), & \text{с.в.} \quad \frac{1-\alpha}{\theta} \ , \end{cases}$$

што у пракси значи да се у датом тренутку са извесном вероватноћом могу реализовати све бројачке случајне променљиве или се са одређеном вероватноћом могу реализовати само неке од њих.

У трећем случају је ова расподела једака мешавини нуле и биномне расподеле

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n \overset{p}{=} \begin{cases} 0, & \text{с.в.} \quad 1 - \frac{\alpha}{\theta}, \\ Bin(n, \theta), & \text{с.в.} \quad \frac{\alpha}{\theta} \ , \end{cases}$$

што значи да се у једном тренутку са извесном вероватноћом неће реализовати ни једна бројачка случајна променљива или ће се са одређеном вероватноћом реализовати само неке од њих.

Заједничка особина модела који су засновани на овим операторима је то што се сви они базирају на зависним бројачким низовима. Међутим, због наведених разлика јасно је да ће сваки од њих имати примену на различитим типовима података.

Глава 3

Мешовити INAR модел са зависним и независним бројачким низовима

Подсетимо се да је до сада најчешће коришћени биномни тининг оператор заснован на Бернулијевом бројачком низу независних случајних променљивих. У претходним главама описали смо тининг операторе који се базирају на Бернулијевим бројачким низовима зависних случајних променљивих. Тако сада са једне стране имамо INAR моделе базиране на биномном тинингу који су погодни за описивање појава у којима су елементи посматране популације потпуно независни, док са друге стране имамо моделе базиране на генерализованом биномном тининг оператору, који добро описују појаве у којима међу посматраним јединкама постоји значајна међусобна повезаност.

Међутим, у стварном животу често наилазимо на ситуације које су у основи врло сложене. Наиме, може се десити да елементи који су предмет посматрања, у одређеним временским интервалима буду независни, док у у другим временским интервалима могу бити значајно повезани и међусобно зависни. У циљу што бољег описивања таквих појава, у овој глави уводимо сложеније моделе који ће се базирати на мешавини ова два тининг оператора.

3.1 Мешовити INAR модел првог реда

Модели у чијој конструкцији учествује један тининг оператор често не могу довољно добро да опишу врло сложене природне појаве. Тако су Nastić и Ristić (2012) и Ristić и Nastić (2012), увели моделе засноване на мешавини биномног и негативног биномног тининг оператора. Ови модели су погодни за описивање појава у којима се јављају случајни догађаји променљивог карактера у смислу мењања степена активности посматраних елемената. Наиме, елементи у одређеним интервалима могу бити пасивни у смислу да могу само да опстају или само да ишчезавају, док у другим интервалима могу бити активни у смислу да могу да генеришу више нових елемената. На тај начин, веза између чланова низа се остварује применом и Бернулијевог и геометријског бројачког низа.

Ми ћемо у овој глави такође проучавати моделе који ће бити погодни за описивање случајних догађаја променљивог карактера, али ће се та променљивост овде односити на međусобну зависност посматраних елемената. Тако ћемо конструисати мешовити модел првог реда у коме ће веза између узастопних чланова низа бити остварена применом Бернулијевог бројачког низа са независним, и Бернулијевог бројачког низа са зависним случајним променљивама. Након конструкције модела, размотрићемо основна својства, одредићемо расподелу иновационог низа и оценити непознате параметре. На крају ћемо дати пример примене модела на стварним подацима.

3.1.1 Конструкција и основна својства модела MDCINAR(1)

Подсетимо се да је биномни тининг оператор "$\alpha\circ$" дефинисан са $\alpha\circ X=\sum_{i=1}^{X}Y_i$, где је $\{Y_i\}$ низ независних једнако расподељених случајних променљивих са $Ber(\alpha)$ расподелом. Генерализовани биномни тининг оператор I врсте "$\alpha\circ_\theta$" је дефинисан са $\alpha\circ_\theta X=\sum_{i=1}^{X}U_i,\ \alpha,\theta\in(0,1)$, где је $\{U_i\}$ низ зависних случајних променљивих са $Ber(\alpha)$ расподелом. У овој секцији конструишемо

INAR модел реда један уз помоћ ова два тининг оператора. Нека је временски низ $\{X_n, n \geq 0\}$, генерисан са

$$X_n = \begin{cases} \alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } p, \\ \alpha \circ_\theta X_{n-1} + \varepsilon_n, & \text{с.в. } 1-p, \ n \geq 1 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

где су $\alpha,\ \theta \in (0,1)$, $p \in [0,1]$, и важе следећи услови:

(A1) $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ је низ независних једнако расподељених случајних променљивих таквих да је $Cov(\varepsilon_n, X_m) = 0$ за $m < n$,

(A2) бројачке случајне променљиве низова $\{Y_i\}_{i\geq 1}$ и $\{U_j\}_{j\geq 1}$ су међусобно независне и независне од X_k и ε_l, за свако i, j, k и l,

(A3) низови случајних променљивих $\{Y_i\}_{i\geq 1}$, који се користе за генерисање $\alpha \circ X_n$ и $\alpha \circ X_m$, су међусобно независни, и такође, низови случајних променљивих $\{U_j\}_{j\geq 1}$, који генеришу $\alpha \circ_\theta X_n$ и $\alpha \circ_\theta X_m$ су међусобно независни за $n \neq m$.

Дефиниција 3.1.1 *Низ $\{X_n, n \geq 0\}$ ненегативних целобројних случајних променљивих је мешовити* INAR *модел реда 1 са зависним и независним бројачким низовима $(MDCINAR(1))$*[1]*, ако постоји низ $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, такав да важи (3.1.1) и да су задовољени услови $(A1)-(A3)$.*

Надаље разматрамо временски низ $\{X_n, n \geq 0\}$ са једнаким расподелама случајних променљивих.

Теорема 3.1.1 *Временски низ $\{X_n, n \geq 0\}$ дат у Дефиницији 3.1.1, са једнаким расподелама случајних променљивих је строго стационаран ланац Маркова.*

Доказ. Из Дефиниције 3.1.1 видимо да X_n зависи од $X_{n-1}, Y_1^{(n-1)}, \ldots, Y_{X_{n-1}}^{(n-1)}, U_1^{(n-1)}, \ldots, U_{X_{n-1}}^{(n-1)}, \varepsilon_n$, па је X_n функција од X_{n-1}. На исти начин закључујемо да је X_{n-1} функција од X_{n-2}, што значи да X_n од даље прошлости зависи посредно преко X_{n-1}, а одатле следи да је $\{X_n\}$ ланац Маркова.

Размотримо зато строгу стационарност временског низа. Треба доказати да за свако n и k из $\mathbb{N}$ важи

$$P(X_1 = j_1, X_2 = j_2, \ldots, X_k = j_k) = P(X_{n+1} = j_1, X_{n+2} = j_2, \ldots, X_{n+k} = j_k).$$

[1] Mixed dependent counting INAR

$\{X_n\}$ је ланац Маркова, па као у доказу Леме 2.1.2 имамо да је

$$\begin{aligned} P(X_1 = j_1, \ldots, X_k = j_k) &= P(X_k = j_k | X_{k-1} = j_{k-1}) \\ &\quad \times \cdots \times P(X_2 = j_2 | X_1 = j_1) P(X_1 = j_1), \\ P(X_{n+1} = j_1, \ldots, X_{n+k} = j_k) &= P(X_{n+k} = j_k | X_{n+k-1} = j_{k-1}) \\ &\quad \times \cdots \times P(X_{n+2} = j_2 | X_{n+1} = j_1) P(X_{n+1} = j_1). \end{aligned}$$

Користећи Дефиницију 3.1.1 и чињеницу да је $\{\varepsilon_n\}$ низ независних једнако расподељених случајних променљивих, за неко $x \in \mathbb{N}_0$ и неко $y \in \mathbb{N}_0$ добијамо

$$\begin{aligned} P(X_{i+1} = y | X_i = x) &= pP\left(\sum_{l=1}^{x} Y_l + \varepsilon_{i+1} = y\right) + (1-p)P\left(\sum_{s=1}^{x} U_s + \varepsilon_{i+1} = y\right) \\ &= p \sum_{k=0}^{min(x,y)} P\left(\sum_{l=1}^{x} Y_l = k\right) P(\varepsilon_{i+1} = y - k) \\ &\quad + (1-p) \sum_{m=0}^{min(x,y)} P\left(\sum_{s=1}^{x} U_s = m\right) P(\varepsilon_{i+1} = y - m) \\ &= p \sum_{k=0}^{min(x,y)} P\left(\sum_{l=1}^{x} Y_l = k\right) P(\varepsilon_{n+i+1} = y - k) \\ &\quad + (1-p) \sum_{m=0}^{min(x,y)} P\left(\sum_{s=1}^{x} U_s = m\right) P(\varepsilon_{n+i+1} = y - m) \\ &= P(X_{n+i+1} = y | X_{n+i} = x). \ \Box \end{aligned}$$

Користећи особине биномног и генерализованог биномног тининг оператора, добијамо да је

$$\begin{aligned} E(X_n) &= pE(\alpha \circ X_{n-1} + \varepsilon_n) + (1-p)E(\alpha \circ_\theta X_{n-1} + \varepsilon_n) \\ &= \alpha E(X_n) + E(\varepsilon_n). \end{aligned}$$

Одавде имамо да је $\mu_\varepsilon = (1-\alpha)\mu$, где смо са μ_ε и μ означили очекивања случајних променљивих ε_n и X_n, респективно.

Даље, из Дефиниције 3.1.1 и особина ових оператора, имамо да је

$$E(X_{n+k}X_n) = \alpha E(X_{n+k-1}X_n) + (1-\alpha)\mu^2,$$

што је исто као и код свих модела првог реда које смо посматрали у претходним главама. Очигледно, аутоковаријансна функција временског низа је

$$\begin{aligned}
\gamma_k &\equiv Cov(X_{n+k}, X_n) \\
&= pCov(\alpha \circ X_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k}, X_n) + (1-p)Cov(\alpha \circ_\theta X_{n+k-1} + \varepsilon_{n+k}, X_n) \\
&= p\alpha Cov(X_{n+k-1}, X_n) + (1-p)\alpha Cov(X_{n+k-1}, X_n) \\
&= \alpha Cov(X_{n+k-1}, X_n) = \alpha\gamma_{k-1}, \;\; k \geq 0.
\end{aligned}$$

Понављајући поступак k пута, добијамо да је $\gamma_k = \alpha^k \gamma_0, \;\; k \geq 0$, а одатле директно следи да је аутокорелациона функција $\rho_k = \alpha^k, \; k \geq 0$.

Расподела иновационог низа

Претпоставимо сада да MDCINAR(1) временски низ има геометријску маргиналну расподелу са параметром $\frac{\mu}{1+\mu}$, $\mu > 0$. Следећом теоремом је дата расподела иновационог низа $\{\varepsilon_n\}$.

Теорема 3.1.2 *Ако важе услови* $(A1) - (A3)$, *случајна променљива* ε_n *је мешавина нуле и три геометријски расподељене случајне променљиве, тј.*

$$\varepsilon_n \stackrel{p}{=} \begin{cases} 0, & \textit{с.в.}\ \frac{\alpha^2(1-\theta)(\alpha+\theta-\alpha\theta)}{ab} \\ Geom(\frac{\mu}{1+\mu}), & \textit{с.в.}\ \frac{(1-\alpha(1-\theta))(1-\alpha)^2(1-\theta)}{(1-a)(1-b)} \\ Geom(\frac{a\mu}{1+a\mu}), & \textit{с.в.}\ \frac{(\alpha-a)(a-\alpha+\alpha\theta)(a-\alpha-\theta+\alpha\theta)}{a(1-a)(a-b)} \\ Geom(\frac{b\mu}{1+b\mu}), & \textit{с.в.}\ \frac{(b-\alpha)(b-\alpha+\alpha\theta)(\theta+\alpha-b-\alpha\theta)}{b(1-b)(b-a)} \end{cases}.$$

где су a *и* b $(a \leq b)$, *решења једначине* $x^2 - (2\alpha + \theta - 2\alpha\theta)x + \alpha(\alpha + \theta - 2\alpha\theta - \theta^2 p + \alpha\theta^2 p) = 0$.

Доказ. Ако означимо функције генератрисе вероватноће случајних променљивих X_n и ε_n, редом са $\Phi_X(s)$ и $\Phi_\varepsilon(s)$, имамо да је

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{\Phi_X(s)}{p\phi_X(\alpha, s) + (1-p)(1-\alpha)\phi_X(\alpha(1-\theta), s) + (1-p)\alpha\phi_X(\theta + \alpha(1-\theta), s)},$$

где је $\phi_X(\alpha, s) \equiv \Phi_X(1 - \alpha + \alpha s)$.

Означимо именилац претходног разломка са $I(s)$. Користећи претпоставку да X_n има $Geom(\mu/(1+\mu))$ расподелу, добијамо

$$
\begin{aligned}
I(s) \;=\; & \frac{(1-p)(1-\alpha)}{1+\mu-\mu(1-\alpha(1-\theta)+\alpha(1-\theta)s)} \\
& +\frac{(1-p)(1-\alpha)}{1+\mu-\mu(1-(\theta+\alpha(1-\theta))+(\theta+\alpha(1-\theta))s)} \\
& +\frac{p}{1+\mu-\mu(1-\alpha+\alpha s)}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{A(s)}{[1+\alpha(1-\theta)\mu-\alpha(1-\theta)\mu s][1+(\theta+\alpha(1-\theta))\mu+(\theta+\alpha(1-\theta))\mu s][1+\alpha\mu-\alpha\mu s]},
$$

где је

$$
\begin{aligned}
A(s) \;=\; & 1+2\alpha\mu+\theta\mu-2\alpha\theta\mu+\alpha^2\mu^2+\alpha\theta\mu^2-2\alpha^2\theta\mu^2-\alpha\theta^2\mu^2p+\alpha^2\theta^2\mu^2p \\
& -(2\alpha+\theta-2\alpha\theta+2\alpha^2\mu+2\alpha\theta\mu-4\alpha^2\theta\mu-2\alpha\theta^2\mu p+2\alpha^2\theta^2\mu p)\mu s \\
& +\alpha(\alpha+\theta-2\alpha\theta-\theta^2p+\alpha\theta^2p)\mu^2s^2, \qquad (3.1.2)
\end{aligned}
$$

па је одавде

$$
\Phi_\varepsilon(s)=\frac{\Phi_X(s)}{I(s)}=\frac{\frac{1}{1+\mu-\mu s}}{I(s)}
$$

$$
= \frac{[1+\alpha(1-\theta)\mu-\alpha(1-\theta)\mu s][1+(\theta+\alpha(1-\theta))\mu+(\theta+\alpha(1-\theta))\mu s][1+\alpha\mu-\alpha\mu s]}{A(s)(1+\mu-\mu s)}.
$$

Ако $A(s)$ запишемо у облику $A(s)=(1+a\mu-a\mu s)(1+b\mu-b\mu s)$, добијамо да је

$$
A(s)=1+a\mu+b\mu+ab\mu^2-(a\mu+b\mu+2ab\mu^2)s+ab\mu^2s^2. \qquad (3.1.3)
$$

Изједначавајући коефицијенте у (3.1.2) и (3.1.3), добијамо

$$
\begin{aligned}
a+b &= 2\alpha+\theta-2\alpha\theta \\
ab &= \alpha(\alpha+\theta-2\alpha\theta-\theta^2p+\alpha\theta^2p),
\end{aligned}
$$

па ће a и b представљати решења једначине

$$
x^2-(a+b)x+ab=0,
$$

односно једначине

$$x^2 - (2\alpha + \theta - 2\alpha\theta)x + \alpha(\alpha + \theta - 2\alpha\theta - \theta^2 p + \alpha\theta^2 p).$$

Докажимо сада да су a и b реални позитивни бројеви. За дискриминанту важи да је

$$\begin{aligned}
D &= (2\alpha + \theta - 2\alpha\theta)^2 - 4\alpha(\alpha + \theta - 2\alpha\theta - \theta^2 p + \alpha\theta^2 p) \\
&= (1 - 4\alpha(1-p) + 4\alpha^2(1-p))\theta^2 \\
&= (1 - p + p - 4\alpha(1-p) + 4\alpha^2(1-p))\theta^2 \\
&= p\theta^2 + (1-p)(1 - 4\alpha + 4\alpha^2) \\
&= p\theta^2 + (1-p)(1-2\alpha)^2,
\end{aligned}$$

чиме смо показали да је $D \geq 0$, па су a и b реални бројеви. Даље, имамо да је

$$\begin{aligned}
a + b &= 2\alpha + \theta - 2\alpha\theta \\
&= 2\alpha(1-\theta) + \theta > 0, \\
ab &= \alpha(\alpha + \theta - 2\alpha\theta - \theta^2 p + \alpha\theta^2 p) \\
&= \alpha(\alpha(1-\theta) + \theta(1-\alpha) - \theta^2 p(1-\alpha)) \\
&= \alpha(\alpha(1-\theta) + \theta(1-\alpha)(1-\theta p)) > 0,
\end{aligned}$$

одакле следи да су a и b позитивни бројеви. Коначно,

$$\begin{aligned}
a &= \frac{2\alpha + \theta - 2\alpha\theta - \theta\sqrt{1 - 4\alpha(1-p) + 4\alpha^2(1-p)}}{2} \\
b &= \frac{2\alpha + \theta - 2\alpha\theta + \theta\sqrt{1 - 4\alpha(1-p) + 4\alpha^2(1-p)}}{2}.
\end{aligned}$$

Из свега претходног закључујемо да се функција генератрисе вероватноће случајне променљиве ε_n може записати као

$$\Phi_\varepsilon(s) = \frac{[1 + \alpha(1-\theta)\mu - \alpha(1-\theta)\mu s][1 + (\theta + \alpha(1-\theta))\mu + (\theta + \alpha(1-\theta))\mu s][1 + \alpha\mu - \alpha\mu s]}{(1 + \mu - \mu s)(1 + a\mu - a\mu s)(1 + b\mu - b\mu s)}.$$

Докажимо сада да се $\Phi_\varepsilon(s)$ може представити у облику

$$\Phi_\varepsilon(s) = A_0 + \frac{A_1}{1 + \mu - \mu s} + \frac{A_2}{1 + a\mu - a\mu s} + \frac{A_3}{1 + b\mu - b\mu s}, \tag{3.1.4}$$

где је

$$A_0 = \frac{\alpha^2(1-\theta)(\alpha+\theta-\alpha\theta)}{ab}.$$

односно, одредимо коефицијенте A_1, A_2 и A_3.

Нека је $1+\mu-\mu s=0$, тј. $s=1+\frac{1}{\mu}$. Добијамо да је

$$\begin{aligned}
&ab\left(1+\alpha(1-\theta)\mu-\alpha(1-\theta)\mu\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right)\\
&\times\left(1+(\theta+\alpha(1-\theta))\mu-(\theta+\alpha(1-\theta))\mu\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right)\\
&\times\left(1+\alpha\mu-\alpha\mu\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right)\\
&=A_1\cdot ab\left(1+a\mu-a\mu\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right)\left(1+b\mu-b\mu\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\right),
\end{aligned}$$

па је одавде

$$(1-\alpha(1-\theta))(1-(\theta+\alpha(1-\theta)))(1-\alpha)=A_1(1-a)(1-b),$$

тј. добијамо да је

$$A_1=\frac{(1-\theta)(1-\alpha)^2(1-\alpha+\alpha\theta)}{(1-a)(1-b)}.$$

Слично, стављајући да је $1+a\mu-a\mu s=0$ и $1+b\mu-b\mu s=0$, одређујемо остале коефицијенте

$$A_2=\frac{(\alpha-a)(a-\alpha+\alpha\theta)(a-\alpha-\theta+\alpha\theta)}{a(1-a)(a-b)},$$

$$A_3=\frac{(b-\alpha)(b-\alpha+\alpha\theta)(\theta+\alpha-b-\alpha\theta)}{b(1-b)(b-a)}.$$

Сада треба проверити да су A_i, $i=0,1,2,3$ добро дефинисане вероватноће, тј. да је њихов збир једнак 1 и да им вредности припадају интервалу $[0,1]$. Директном провером се утврђује да је њихов збир једнак 1, што значи да је довољно показати да је $A_i\geq 0$, за $i=0,1,2,3$.

Очигледно је да је $A_0 \geq 0$. Важи да је

$$\begin{aligned}(1-a)(1-b) &= 1-(a+b)+ab \\ &= 1-(2\alpha+\theta-2\alpha\theta)+\alpha(\alpha+\theta-2\alpha\theta-\theta^2p+\alpha\theta^2p) \\ &= (1-\alpha)(1-\alpha-\theta+2\alpha\theta-\alpha\theta^2p) \\ &= (1-\alpha)((1-\alpha)(1-\theta)+\alpha\theta(1-\theta p))>0,\end{aligned}$$

па одавде следи да је $A_1 \geq 0$. Даље, имамо да је

$$\begin{aligned}(a-\alpha)(b-\alpha) &= ab-\alpha(a+b)+\alpha^2 \\ &= -\alpha\theta^2p(1-p)\leq 0,\end{aligned}$$

а одавде следи да су $a-\alpha$ и $b-\alpha$ супротног знака, па су могућа два случаја. Случај $a-\alpha \geq 0$ и $b-\alpha \leq 0$, тј. $b \leq \alpha \leq a$ је немогућ због претпоставке да је $a \leq b$, па одатле следи да важи случај $a \leq \alpha \leq b$. Како је $\alpha < 1$, то ће бити и $a < 1$. Сада, из неједнакости $(1-a)(1-b) > 0$ добијамо да је $b < 1$. Пођимо сада од производа

$$\begin{aligned}(a-\alpha(1-\theta))(b-\alpha(1-\theta)) &= ab-\alpha(1-\theta)(a+b)+\alpha^2(1-\theta)^2 \\ &= (1-p)(1-\alpha)\alpha\theta^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Како је $b \geq \alpha$, то је $b-\alpha+\alpha\theta \geq 0$, па је одатле и $a-\alpha+\alpha\theta \geq 0$. Коначно, посматрајмо производ

$$\begin{aligned}&(a-\theta-\alpha(1-\theta))(b-\theta-\alpha(1-\theta)) = \\ &= ab-(\theta+\alpha(1-\theta))(a+b)+(\theta+\alpha(1-\theta))^2 \\ &= (1-p)(1-\alpha)\alpha\theta^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Из неједнакости $a-\alpha \leq 0$ следи да је $a-\alpha-\theta(1-\alpha) \leq 0$, а одатле $b-\theta-\alpha(1-\theta) \leq 0$. Сада из $\alpha-a \geq 0$, $a-\alpha+\alpha\theta \geq 0$ и $a-\alpha-\theta+\alpha\theta \leq 0$ следи да је $(\alpha-a)(a-\alpha+\alpha\theta)(a-\alpha-\theta+\alpha\theta) \leq 0$, што је бројилац у A_2. Из $a > 0$, $1-a > 0$ и $a-b < 0$ следи да је бројилац у A_2 негативан, па добијамо да је $A_2 \geq 0$. Са друге стране, добили смо да су сви чиниоци у бројиоцу у A_3 ненегативни и сви чиниоци у имениоцу позитивни, па је одатле $A_3 \geq 0$. Тиме смо доказали да су A_i, $i = 0, 1, 2, 3$ добро дефинисане вероватноће, па из (3.1.4) следи доказ теореме. $\square$

Размотримо сада како неке специјалне вредности параметара утичу на расподелу иновационог низа. За $\theta = 1$, расподела случајне променљиве ε_n једнака је мешавини две геометријске расподеле $Geom\left(\frac{a\mu}{1+a\mu}\right)$ и $Geom\left(\frac{b\mu}{1+b\mu}\right)$, где су a и b решења једначине $x^2 - x + \alpha(1-\alpha)(1-p) = 0$. За $\theta = 0$, имамо да је $a = b = \alpha$, па је расподела случајне променљиве ε_n једнака је мешавини нуле и геометријске расподеле $Geom\left(\frac{\mu}{1+\mu}\right)$, редом са вероватноћама α и $(1-\alpha)$, па се овај модел своди на GINAR(1) модел који су дефинисали Alzaid и Al-Osh (1988).

3.1.2 Условне статистичке особине MDCINAR(1) модела

Одредимо сада условно очекивање и условну дисперзију. Из Дефиниције 3.1.1, имамо да је

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}|X_n) &= pE(\alpha \circ X_n + \varepsilon_{n+1}|X_n) + (1-p)E(\alpha \circ_\theta X_n + \varepsilon_{n+1}|X_n) \\ &= p\alpha X_n + p\mu_\varepsilon + (1-p)(\alpha X_n + \mu_\varepsilon) \\ &= \alpha X_n + \mu_\varepsilon \\ &= \alpha X_n + (1-\alpha)\mu. \end{aligned}$$

Слично као у претходним моделима, добијамо да је

$$E(X_{n+k}|X_n) = \alpha^k X_n + (1-\alpha^k)\mu,$$

па важи $E(X_{n+k}|X_n) \to E(X_n)$, за $k \to \infty$. Одредимо сада условну дисперзију за корак један. Најпре рачунамо

$$E(X_{n+1}^2|X_n) = pE((\alpha \circ X_n + \varepsilon_{n+1})^2|X_n) + (1-p)E((\alpha \circ_\theta X_n + \varepsilon_{n+1})^2|X_n)$$

$$\begin{aligned} &= p\left\{\alpha^2 X_n^2 + \alpha(1-\alpha+2\mu_\varepsilon)X_n + E(\varepsilon^2)\right\} \\ &\quad +(1-p)\left\{\alpha(\alpha+\theta^2(1-\alpha))X_n^2 + \alpha(1-\alpha)(1-\theta^2)X_n + 2\alpha\mu_\varepsilon X_n + E(\varepsilon^2)\right\} \\ &= \left\{p\alpha^2 + \alpha(1-p)(\alpha+\theta^2(1-\alpha))\right\} X_n^2 \\ &\quad + \left\{p\alpha(1-\alpha+2\mu_\varepsilon) + (1-p)\alpha(1-\alpha)(1-\theta^2) + (1-p)2\alpha\mu_\varepsilon\right\} X_n + E(\varepsilon^2) \\ &= \alpha\left\{p\alpha + (1-p)(\alpha+\theta^2-\alpha\theta^2)\right\} X_n^2 \\ &\quad +\alpha(1-\alpha)\left(1-(1-p)\theta^2+2\mu\right) X_n + E(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Сада, из

$$Var(X_{n+1}|X_n) = E(X_{n+1}^2|X_n) - (E(X_{n+1}|X_n))^2,$$

добијамо да је

$$\begin{aligned} Var(X_{n+1}|X_n) &= \alpha\left(p\alpha + (1-p)(\alpha+\theta^2-\alpha\theta^2)\right)X_n^2 \\ &\quad +\alpha(1-\alpha)\left(1-(1-p)\theta^2+2\mu\right)X_n + E(\varepsilon^2) \\ &\quad -\alpha^2X_n^2 - 2\alpha(1-\alpha)\mu X_n - (1-\alpha)^2\mu^2 \\ &= \alpha(p\alpha+(1-p)(\alpha+\theta^2-\alpha\theta^2)-\alpha)X_n^2 \\ &\quad +\alpha(1-\alpha)(1-(1-p)\theta^2)X_n + E(\varepsilon^2) - (1-\alpha)^2\mu^2, \end{aligned}$$

па је одавде

$$Var(X_{n+1}|X_n) = \alpha\theta^2(1-\alpha)(1-p)X_n^2 + \alpha(1-\alpha)(1-(1-p)\theta^2)X_n + \sigma_\varepsilon^2, \quad (3.1.5)$$

где је

$$\sigma_\varepsilon^2 = (1-\alpha)\mu(1+(1+\alpha-2\alpha(1-p)\theta^2)\mu). \quad (3.1.6)$$

Видимо да условна дисперзија квадратно зависи од прошлости временског низа. Ова квадратна зависност се губи у случају када θ тежи нули, или када p тежи јединици.

3.1.3 Оцењивање непознатих параметара MDCINAR(1) модела

У овој секцији оценићемо непознате параметре α, θ, μ и p, користећи метод момената и модификовани метод условних најмањих квадрата. За израчунавање ML оцена користићемо метод нелинеарне оптимизације применом функције nlm() у оквиру софтверског пакета R. Помоћу ове фунцкије нумеричким путем се одређује минимум негативне логаритамске функције веродостојности, па секција о ML оценама неће бити посебно разматрана. Све оцене ће бити базиране на реализацији случајног вектора $(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ посматраног временског низа.

Модификовани метод условних најмањих квадрата

За оцењивање непознатих параметара поново ћемо користити двокорачни метод (Karlsen и Tjostheim, 1998). У првом кораку минимизирамо суму $Q_N(\alpha,\mu)=\sum_{n=2}^{N}(X_n-\alpha X_{n-1}-(1-\alpha)\mu)^2$ да бисмо добили оцене параметара α и μ. Ова функција је иста као код претходних модела реда један, то ћемо добити и исте оцене, тј.

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{cls} &= \frac{\sum_{n=2}^{N}X_nX_{n-1}-\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N}X_n\sum_{n=2}^{N}X_{n-1}}{\sum_{n=2}^{n}X_{n-1}^2-\frac{1}{N-1}(\sum_{t=2}^{n}X_{t-1})^2}\\ \hat{\mu}_{cls} &= \frac{\sum_{t=2}^{N}X_n-\hat{\alpha}_{cls}\sum_{n=2}^{N}X_{n-1}}{(N-1)(1-\hat{\alpha}_{cls})}.\end{aligned}$$

Како се параметри p и θ повезани изразом $(1-p)\theta^2$, означимо са $\eta=(1-p)\theta^2$ и оценимо η у другом кораку минимизирањем функције

$$S(\eta)=\sum_{n=2}^{N}(V_n-Var(X_n|X_{n-1}))^2,$$

где је $V_n=(X_n-\alpha X_{n-1}-(1-\alpha)\mu)^2$. Из (3.1.5) и (3.1.6) добијамо да је

$$S(\eta)=\sum_{n=2}^{N}(V_n-\alpha(1-\alpha)(X_{n-1}^2-X_{n-1}-2\mu^2)\eta-(1-\alpha)(\alpha X_{n-1}+\mu+(1+\alpha)\mu^2))^2.$$

Одавде добијамо да је

$$\hat{\eta}_{cls}=\frac{\sum_{n=2}^{N}(\hat{V}_n-(1-\hat{\alpha}_{cls})(\hat{\alpha}_{cls}X_{n-1}+\hat{\mu}_{cls}+(1+\hat{\alpha}_{cls})\hat{\mu}_{cls}^2))(X_{n-1}^2-X_{n-1}-2\hat{\mu}_{cls}^2)}{\hat{\alpha}_{cls}(1-\hat{\alpha}_{cls})\sum_{n=2}^{N}(X_{n-1}^2-X_{n-1}-2\hat{\mu}_{cls}^2)^2},$$

где је $\hat{V}_n=(X_n-\hat{\alpha}_{cls}X_{n-1}-(1-\hat{\alpha}_{cls})\hat{\mu}_{cls})^2$.

Строга постојаност оцена $(\hat{\alpha}_{cls},\hat{\mu}_{cls})$ следи из чињенице да се ове оцене поклапају са одговарајућим строго постојаним оценама у претходним моделима. Из ергодичности временског низа следи строга постојаност оцене η_{cls}. У практичној примени, оцене за θ и p се могу добити тако што ћемо један од ова два параметра оценити неком другом методом или можемо претпоставити да је један од ова два параметра унапред задат као познати параметар. Из Теореме 1.1.4, добијамо асимптотску расподелу оцена $(\hat{\alpha}_{cls},\hat{\mu}_{cls})$, тј. важи

$$\sqrt{N}\begin{bmatrix}\hat{\alpha}_{cls}-\alpha\\ \hat{\mu}_{cls}-\mu\end{bmatrix}\xrightarrow{p}\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}\right).$$

где је

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{U}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{(1-\alpha)(\alpha+\mu+3\alpha\mu+8\alpha(1-p)\mu\theta^2+\mu^2+\alpha\mu^2+12\alpha(1-p)\mu^2\theta^2)}{\mu(1+\mu)} & \alpha(1+4(1-p)\mu\theta^2)\\ \alpha(1+4(1-p)\mu\theta^2) & \frac{(1+\alpha)\mu(1+\mu)}{1-\alpha}\end{bmatrix}.$$

Размотримо сада како неки специјални случајеви вредности параметара утичу на коваријансну матрицу. У случају када α тежи нули, зависност између оцена опада, дисперзија оцене параметра α тежи ка 1, док дисперзија оцене параметра μ тежи дисперзији маргиналне расподеле. У случају када μ тежи нули, коваријансе теже корелацији, оцена параметра μ конвергира ка константи, док дисперзија оцене параметра α тежи ка бесконачности. У случају када α тежи јединици, коваријансе теже ка $1+4(1-p)\mu\theta^2$, оцена параметра α конвергира ка константи, док дисперзија оцене параметра μ тежи ка бесконачности.

Метод момената

Пошто је $E(X_n)=\mu$ и $Corr(X_n,X_{n-1})=\alpha$, за оцењивање параметара α и μ користимо узорачку средину и узорачку аутокорелацију. Тако имамо да је

$$\begin{aligned}\hat{\mu}_{yw} &= \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}X_n,\\ \hat{\alpha}_{yw} &= \frac{\sum\limits_{n=2}^{N}(X_n-\overline{X}_N)(X_{n-1}-\overline{X}_N)}{\sum\limits_{n=1}^{N}(X_n-\overline{X}_N)^2}.\end{aligned}$$

Параметар θ оцењујемо уз помоћ $Cov(X_n^2,X_{n-1})$. Лако се показује да важи

$$\begin{aligned}Cov(X_n^2,X_{n-1}) &= pCov((\alpha\circ X_{n-1})^2,X_{n-1})\\ &+ (1-p)Cov((\alpha\circ_\theta X_{n-1})^2,X_{n-1})+2\alpha(1-\alpha)\mu^2(1+\mu).\end{aligned}$$

Користећи особине биномног и генерализованог биномног тининг оператора, слично као у претходним моделима показујемо да је

$$Cov(X_n^2, X_{n-1}) = \alpha\mu(1+\mu)(1+\mu+2\alpha\mu+4\mu(1-\alpha)(1-p)\theta^2).$$

Нека је $\hat{C}$ оцена коваријансе $Cov(X_n^2, X_{n-1})$, тј.

$$\hat{C} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N} X_n^2 X_{n-1} - \left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N} X_n^2\right)\left(\frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N} X_{n-1}\right).$$

Овде ћемо опет оценити $\eta = (1-p)\theta^2$. Имамо да је

$$\hat{\eta}_{yw} = \frac{\hat{C} - \hat{\alpha}_{yw}\hat{\mu}_{yw}(1+\hat{\mu}_{yw})(1+2\hat{\mu}_{yw}+2\hat{\alpha}_{yw}\hat{\mu}_{yw})}{4\hat{\alpha}_{yw}(1-\hat{\alpha}_{yw})\hat{\mu}_{yw}^2(1+\hat{\mu}_{yw})}.$$

Оцене параметара α и μ добијене методом момената су исте као код претходних модела, па су строго постојане. Из строге постојаности ових оцена, строге постојаности оцене $\hat{C}$ и из ергодичности временског низа, следи строга постојаност оцене параметра η.

Нумерички резултати

Упоредимо сада методе оцењивања непознатих параметара мешовитог MDCINAR(1) модела, разматране у одељку 3.1.3. Најпре симулирамо 100 узорака обима 1000. Затим рачунамо узорачке средине и стандардне девијације за подузорке обима 100, 200, 500 и 1000. Посматраћемо следеће случајеве стварних вредности параметара (a) $\alpha = 0,1, \theta = 0,8, p = 0,2$, (b) $\alpha = 0,3, \theta = 0,4, p = 0,4$ и (c) $\alpha = 0,6, \theta = 0,1, p = 0,7$. У сваком од ова три случаја, параметар μ ће имати вредности 0,5 или 2. Из Табела 3.1 и 3.2, видимо да средине конвергирају правим вредностима у свим случајевима и да стандардне девијације опадају са повећањем обима узорка. У првом случају, тј. у случају када је слаба корелисаност α, снажна зависност међу члановима бројачког низа θ, и када је p мало, најбољи резултати се добијају методом максималне веродостојности. У другом случају, када су вредности за α, θ и p блиске, најмање стандардне девијације у оцењивању параметара θ и p се добијају методом условних најмањих квадрата. У последњем случају, за велике вредности α и p и малу вредност θ, резултати оцењивања параметара θ и p су слични као у првом случају, док се најмања одступања у оцењивању параметра μ, за $\mu = 0,5$, добијају методом момената. Анализирајући како промена вредности параметра μ утиче на оцене, може се приметити да у прва два случаја боље оцене за параметре α, θ и p добијамо када је μ веће, док се у трећем случају боље оцене добијају углавном када је μ мање. Можемо приметити да у случају (c) за $\mu = 2$, стандардне девијације у оцењивању параметра θ не опадају, што је могуће када посматрамо мали обим узорка. Такође, можемо приметити да се код оцењивања параметра p не добијају добри резултати као код оцењивања осталих параметара, што је последица коришћења модификованог метода оцењивања. Узимајући све у обзир, закључујемо да метод максималне веродостојности у већини случајева даје најбоље резултате, у односу на све параметре.

3.1.4 Примена на реалним подацима

Сада ћемо размотрити примену посматраног модела на примеру стварних података преузетих са сајта Forecasting Principles (http://www.forecastingprinciples.com). Ради се о криминолошким подацима (C-SHOTS) који представљају месечно бројање пријављених пуцњева, прикупљених применом CAD[2] система. Овај временски низ саджи 144 опсервације, регистроване у полицијској станици 1016, у периоду од јануара 1991. до децембра 2001. године, у Питсбургу. Узорачка средина, дисперзија и аутокорелација су редом 4,139, 21,183 и 0,452. Одговарајући графикони су представљени на Слици 3.1. Видимо да ауторегресивни модел реда један одговара овим подацима.

Упоредићемо сада наш модел са другим одговарајућим INAR(1) моделима. С обзиром на то да је MDCINAR(1) модел базиран на биномном и генерализованом биномном тининг оператору I врсте, логично је упоредити га са геометријским INAR(1) моделом (Al-zaid, Al-Osh, 1988) који је заснован на биномном тинингу, и са DC-GINAR(1) моделом који је базиран на генерализованом биномном тинингу I врсте. Ради комплетнијег поређења, посматраћемо и неке друге моделе као што су: NGINAR(1) модел (Ristić, Bakouch,

[2]Computer aided dispatch

Nastić, 2009), INAR(1) модел са Пуасоновом маргиналном расподелом (Al-Osh, Alzaid, 1987), INAR(1) модел са негативном биномном маргиналном расподелом (Zhu, Joe, 2006) и NBINAR(1) модел (Ristić, Nastić, Bakouch, 2012). Анализирајући поредбене критеријуме AIC, BIC и RMS (Табела 3.3), видимо да MDCINAR(1) модел даје најбоље резултате, чак и поред тога што садржи највећи број параметара.

Осврнимо се сада на природу посматраних података. CAD или 911 кол центар садржи податке који се односе на пријаве и притужбе грађана на различите врсте ометања, угрожавања и узнемиравања. У овом случају, те пријаве се односе на пуцњаву. У случају неког организованог већег злочина, као што је оружана пљачка на пример, пријављени случајеви могу бити уско повезани и међусобно зависни. С друге стране, они могу бити и комплетно независни ако се односе на неповезане злочине. Посматрани скуп података укључује обе ситуације, па MDCINAR(1) модел који је заснован и на зависним и на независним бројачким низовима представља у овом случају најбољи избор. Напоменимо да се овакве ситуације могу често сретати у реалном животу, па овај модел може имати широку примену у пракси.

Табела 3.1: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара MDCINAR(1) модела.

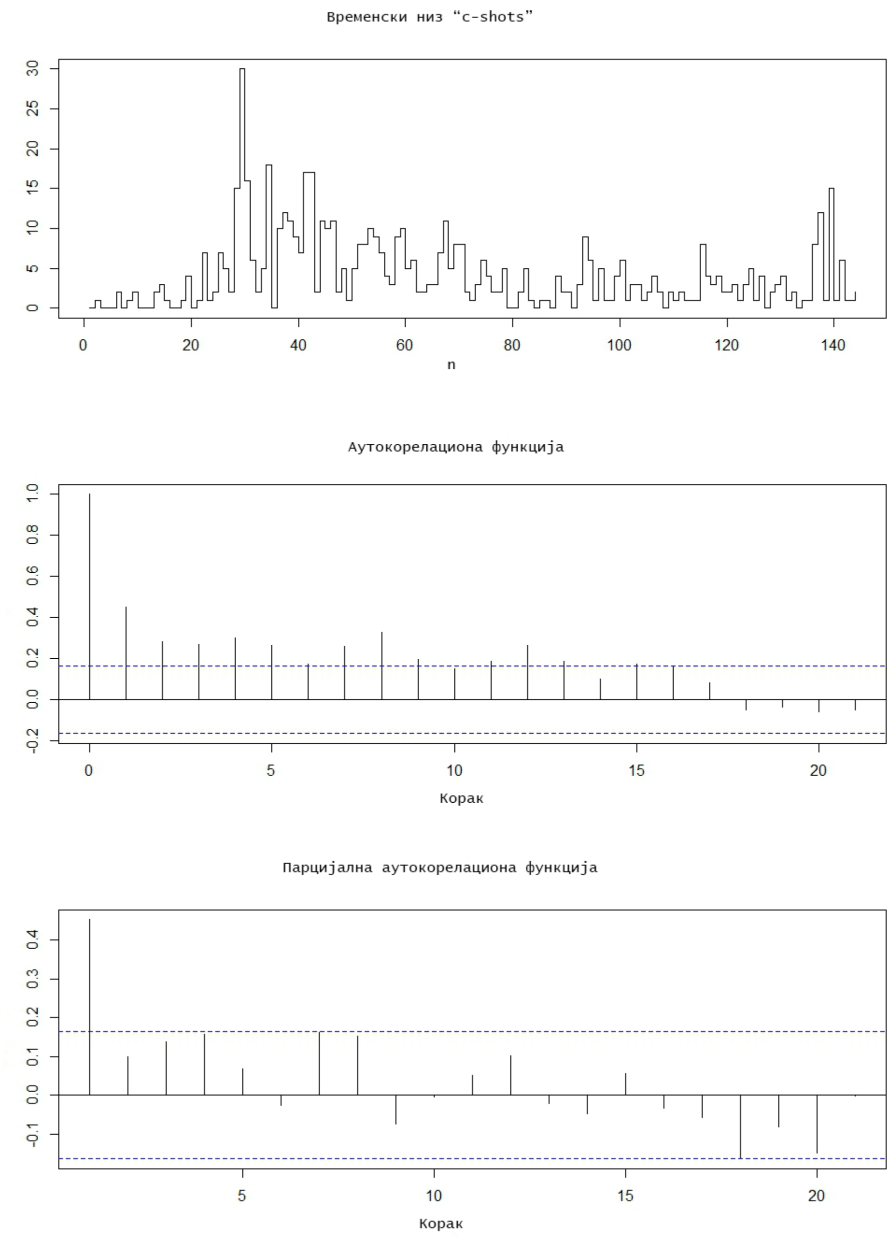
I

N	$\hat{\alpha}_{ml}$	$\hat{\theta}_{ml}$	$\hat{\mu}_{ml}$	$\hat{p}_{ml}$	$\hat{\alpha}_{cls}$	$\hat{\theta}_{cls}$	$\hat{\mu}_{cls}$	$\hat{p}_{cls}$
		i) Стварне вредности		$\alpha = 0.1,\ \theta = 0.8,\ \mu = 0.5,\ p = 0.2$				
100	0.1011	0.6417	0.4832	0.2282	0.1008	0.3711	0.4847	0.5717
Ст. дев.	(0.0889)	(0.3490)	(0.0930)	(0.2955)	(0.1022)	(0.4252)	(0.0957)	(0.4422)
200	0.0960	0.6362	0.4878	0.2350	0.0980	0.4046	0.4891	0.5547
Ст. дев.	(0.0626)	(0.3483)	(0.0677)	(0.3123)	(0.0825)	(0.4347)	(0.0699)	(0.4419)
500	0.0961	0.6641	0.4957	0.2284	0.0982	0.4637	0.4965	0.4770
Ст. дев.	(0.0509)	(0.3187)	(0.0437)	(0.2791)	(0.0610)	(0.4183)	(0.0440)	(0.4242)
1000	0.0990	0.7416	0.4980	0.2051	0.0988	0.5272	0.4982	0.3838
Ст. дев.	(0.0341)	(0.2656)	(0.0322)	(0.2696)	(0.0439)	(0.3717)	(0.0326)	(0.3705)
		ii) Стварне вредности		$\alpha = 0.1,\ \theta = 0.8,\ \mu = 2,\ p = 0.2$				
100	0.1097	0.7515	2.0097	0.2468	0.0935	0.4593	2.0173	0.5316
Ст. дев.	(0.0829)	(0.2668)	(0.2851)	(0.3289)	(0.1003)	(0.4470)	(0.2864)	(0.4316)
200	0.1143	0.7112	2.0105	0.2598	0.1072	0.4778	2.0149	0.4707
Ст. дев.	(0.0718)	(0.2663)	(0.1872)	(0.3294)	(0.0828)	(0.4081)	(0.1929)	(0.3961)
500	0.1091	0.7329	2.0140	0.2449	0.1115	0.5917	2.0180	0.3722
Ст. дев.	(0.0432)	(0.2499)	(0.1050)	(0.2782)	(0.0595)	(0.3579)	(0.1074)	(0.3311)
1000	0.1035	0.7819	1.9963	0.2394	0.1060	0.6387	1.9982	0.3015
Ст. дев.	(0.0301)	(0.1837)	(0.0806)	(0.2328)	(0.0412)	(0.3108)	(0.0800)	(0.2687)
		iii) Стварне вредности		$\alpha = 0.3,\ \theta = 0.4,\ \mu = 0.5,\ p = 0.4$				
100	0.2833	0.4255	0.4950	0.4228	0.2710	0.2260	0.4970	0.7562
Ст. дев.	(0.1020)	(0.3808)	(0.1191)	(0.3634)	(0.1301)	(0.3421)	(0.1191)	(0.3330)
200	0.2951	0.4412	0.5013	0.4861	0.2859	0.2121	0.5037	0.7778
Ст. дев.	(0.0673)	(0.4045)	(0.0878)	(0.3498)	(0.0953)	(0.3194)	(0.0863)	(0.3046)
500	0.2940	0.3775	0.4964	0.4211	0.2885	0.2239	0.4973	0.7298
Ст. дев.	(0.0458)	(0.3484)	(0.0530)	(0.3395)	(0.0638)	(0.3072)	(0.0532)	(0.3114)
1000	0.2982	0.3899	0.4996	0.3755	0.2937	0.2496	0.4996	0.6628
Ст. дев.	(0.0286)	(0.3246)	(0.0382)	(0.3753)	(0.0408)	(0.2750)	(0.0385)	(0.3113)
		iv) Стварне вредности		$\alpha = 0.3,\ \theta = 0.4,\ \mu = 2,\ p = 0.4$				
100	0.2994	0.3967	1.9900	0.3940	0.2833	0.2157	1.9994	0.7132
Ст. дев.	(0.0655)	(0.3054)	(0.2838)	(0.3826)	(0.0979)	(0.2885)	(0.2937)	(0.3240)
200	0.2984	0.4325	1.9772	0.4071	0.2836	0.2302	1.9742	0.7149
Ст. дев.	(0.0477)	(0.2862)	(0.1874)	(0.3789)	(0.0816)	(0.2929)	(0.1923)	(0.3216)
500	0.2955	0.4325	1.9872	0.3373	0.2891	0.2580	1.9903	0.6048
Ст. дев.	(0.0337)	(0.2281)	(0.1391)	(0.3586)	(0.0531)	(0.2594)	(0.1397)	(0.3160)
1000	0.2990	0.4372	2.0027	0.3522	0.2984	0.2977	2.0025	0.5336
Ст. дев.	(0.0217)	(0.2111)	(0.1005)	(0.3620)	(0.0364)	(0.2348)	(0.1000)	(0.2909)
		v) Стварне вредности		$\alpha = 0.6,\ \theta = 0.1,\ \mu = 0.5,\ p = 0.7$				
100	0.5953	0.2735	0.5028	0.6492	0.5660	0.1581	0.4930	0.9139
Ст. дев.	(0.0831)	(0.3675)	(0.1652)	(0.3404)	(0.0938)	(0.3171)	(0.1627)	(0.1751)
200	0.5999	0.1882	0.4971	0.6326	0.5796	0.1152	0.4915	0.9246
Ст. дев.	(0.0516)	(0.3031)	(0.1055)	(0.3416)	(0.0669)	(0.2480)	(0.1110)	(0.1490)
500	0.5982	0.1954	0.4981	0.6463	0.5831	0.1107	0.4932	0.9064
Ст. дев.	(0.0365)	(0.3075)	(0.0750)	(0.3024)	(0.0467)	(0.2272)	(0.0750)	(0.1716)
1000	0.6000	0.2032	0.5051	0.6552	0.5929	0.1662	0.5018	0.8704
Ст. дев.	(0.0217)	(0.3031)	(0.0510)	(0.3013)	(0.0294)	(0.2647)	(0.0502)	(0.1697)
		vi) Стварне вредности		$\alpha = 0.6,\ \theta = 0.1,\ \mu = 2,\ p = 0.7$				
100	0.6024	0.2671	1.9916	0.6356	0.5755	0.1872	2.0263	0.9174
Ст. дев.	(0.0473)	(0.3430)	(0.4622)	(0.4175)	(0.0724)	(0.3182)	(0.4996)	(0.1281)
200	0.6050	0.1954	2.0188	0.6826	0.5809	0.1156	2.0204	0.9481
Ст. дев.	(0.0338)	(0.2892)	(0.3553)	(0.3890)	(0.0566)	(0.2619)	(0.3554)	(0.1075)
500	0.6008	0.2491	1.9574	0.7126	0.5931	0.1584	1.9691	0.9198
Ст. дев.	(0.0208)	(0.3267)	(0.2029)	(0.3743)	(0.0399)	(0.2792)	(0.2315)	(0.1225)
1000	0.5994	0.2552	1.9677	0.7330	0.5978	0.1736	1.9650	0.8905
Ст. дев.	(0.0144)	(0.3270)	(0.1345)	(0.3448)	(0.0290)	(0.2385)	(0.1511)	(0.1313)

Табела 3.2: Средине и стандардне девијације оцена за неке стварне вредности параметара MDCINAR(1) модела.

II

N	$\hat{\alpha}_{yw}$	$\hat{\theta}_{yw}$	$\hat{\mu}_{yw}$	$\hat{p}_{yw}$
i) Стварне вредности	$\alpha = 0.1,\ \theta = 0.8,\ \mu = 0.5,\ p = 0.2$			
100	0.0833	0.4462	0.4844	0.5239
Ст. дев.	(0.1222)	(0.4519)	(0.0931)	(0.4452)
200	0.0909	0.5471	0.4891	0.4062
Ст. дев.	(0.0916)	(0.4362)	(0.0690)	(0.4245)
500	0.0969	0.5846	0.4965	0.3840
Ст. дев.	(0.0630)	(0.4120)	(0.0437)	(0.4013)
1000	0.0985	0.6195	0.4982	0.3084
Ст. дев.	(0.0443)	(0.3607)	(0.0325)	(0.3329)
ii) Стварне вредности	$\alpha = 0.1,\ \theta = 0.8,\ \mu = 2,\ p = 0.2$			
100	0.0777	0.5201	2.0138	0.4054
Ст. дев.	(0.1166)	(0.4086)	(0.2828)	(0.3909)
200	0.1033	0.6043	2.0135	0.3209
Ст. дев.	(0.0875)	(0.3715)	(0.1896)	(0.3319)
500	0.1111	0.6541	2.0174	0.3016
Ст. дев.	(0.0597)	(0.3495)	(0.1066)	(0.2946)
1000	0.1059	0.6995	1.9979	0.2998
Ст. дев.	(0.0412)	(0.3054)	(0.0795)	(0.2697)
iii) Стварне вредности	$\alpha = 0.3,\ \theta = 0.4,\ \mu = 0.5,\ p = 0.4$			
100	0.2677	0.2595	0.4973	0.7524
Ст. дев.	(0.1295)	(0.3874)	(0.1199)	(0.3564)
200	0.2845	0.2087	0.5033	0.7889
Ст. дев.	(0.0956)	(0.3525)	(0.0875)	(0.3318)
500	0.2878	0.2534	0.4972	0.7368
Ст. дев.	(0.0637)	(0.3542)	(0.0532)	(0.3382)
1000	0.2934	0.2813	0.4995	0.6542
Ст. дев.	(0.0408)	(0.3222)	(0.0386)	(0.3226)
iv) Стварне вредности	$\alpha = 0.3,\ \theta = 0.4,\ \mu = 2,\ p = 0.4$			
100	0.2772	0.2487	1.9959	0.7686
Ст. дев.	(0.0946)	(0.3870)	(0.2861)	(0.3442)
200	0.2822	0.2682	1.9746	0.6919
Ст. дев.	(0.0814)	(0.3553)	(0.1912)	(0.3464)
500	0.2887	0.2756	1.9905	0.6726
Ст. дев.	(0.0529)	(0.3374)	(0.1387)	(0.3373)
1000	0.2982	0.2934	2.0025	0.5968
Ст. дев.	(0.0364)	(0.2948)	(0.0998)	(0.3161)
v) Стварне вредности	$\alpha = 0.6,\ \theta = 0.1,\ \mu = 0.5,\ p = 0.7$			
100	0.5609	0.2582	0.4927	0.7943
Ст. дев.	(0.0939)	(0.4230)	(0.1615)	(0.3603)
200	0.5772	0.2623	0.4910	0.7926
Ст. дев.	(0.0670)	(0.4227)	(0.1095)	(0.3617)
500	0.5815	0.2875	0.4924	0.8145
Ст. дев.	(0.0470)	(0.4382)	(0.0750)	(0.3040)
1000	0.5921	0.2675	0.5017	0.8203
Ст. дев.	(0.0296)	(0.4058)	(0.0502)	(0.2865)
vi) Стварне вредности	$\alpha = 0.6,\ \theta = 0.1,\ \mu = 2,\ p = 0.7$			
100	0.5697	0.2468	2.0294	0.8583
Ст. дев.	(0.0739)	(0.4210)	(0.4968)	(0.2762)
200	0.5781	0.2697	2.0196	0.8100
Ст. дев.	(0.0565)	(0.4126)	(0.3532)	(0.3266)
500	0.5917	0.3159	1.9686	0.8087
Ст. дев.	(0.0403)	(0.4455)	(0.2288)	(0.3022)
1000	0.5975	0.3506	1.9653	0.8032
Ст. дев.	(0.0289)	(0.4374)	(0.1503)	(0.2832)



Слика 3.1: Дијаграми временског низа, аутокорелационе функције и парцијалне аутокорелационе функције података о броју пуцњава.

Табела 3.3: Оцене параметара, AIC, BIC и RMS за податке о броју пуцњава (C-SHOTS).

Модел	ML оцене	AIC	BIC	RMS
MDCINAR(1)	$\hat{\mu} = 4.0109$			
	$\hat{\alpha} = 0.3891$			
	$\hat{\theta} = 0.8720$			
	$\hat{p} = 0.2825$	709.7	721.6	4.10
GINAR(1)	$\hat{q} = 0.7983$			
	$\hat{\alpha} = 0.1432$	726.6	732.5	4.33
DCGINAR(1)	$\hat{\mu} = 3.9723$			
	$\hat{\alpha} = 0.3371$			
	$\hat{\theta} = 0.7643$	711.9	720.9	4.13
NGINAR(1)	$\hat{\mu} = 3.8901$			
	$\hat{\alpha} = 0.2805$	722.9	728.8	4.17
Пуасонов INAR(1)	$\hat{\lambda} = 2.9956$			
	$\hat{\alpha} = 0.2734$	929.4	935.4	4.17
NB(1)	$\hat{p} = 0.2642$			
	$\hat{\theta} = 1.4581$			
	$\hat{\alpha} = 0.2026$	725.6	734.5	4.25
NBINAR(1)	$\hat{p} = 2.9025$			
	$\hat{\theta} = 1.4179$			
	$\hat{\alpha} = 0.2954$	720.7	729.6	4.15

Закључак

Најчешће коришћени и највише проучавани INAR модели до сада су базирани на независним бројачким низовима. У овој дисертацији су разматрани ауторегресивни временски низови са ненегативним целобројним вредностима генерисани зависним Бернулијевим бројачким низовима. Најпре су дефинисани нови генерализовани тининг оператори I, II и III врсте и представљена су основна својства ових оператора. Затим су уз помоћ ових оператора конструисана три различита модела, одређене су њихове основне особине и представљена је могућа примена на реалним подацима. Приликом поређења нових модела са постојећим INAR моделима базираним на независним бројачким низовима примећено је да су нови модели дали много боље резултате на посматраним скуповима података. Анализом саме природе тих популација уочено је да међу посматраних елементима постоји извесни међусобни утицај. У складу с тим може се закључити да зависни бројачки низ има важну улогу у описивању појава у природи и друштву у којима међу посматраним догађајима постоји очигледна повезаност. Конструисан је и мешовити модел базиран и на зависном и на независном Бернулијевом бројачком низу. Овај модел добро описује сложене појаве у којима посматрани елементи нису константно независни, нити константно зависни, већ су променљивог карактера. Како у реалном животу много чешће наилазимо на ситуације у којима се догађаји не одвијају независно, већ у међусобној интеракцији, то сви представљени модели могу имати веома широку примену у пракси.

Нека од будућих поља истраживања би се могла односити на уопштавање модела за зависним бројачким низовима у односу на ред и димензионалност модела.

Литература

Al-Osh, M.A., Aly, E.E.A.A. (1992) First order autoregressive time series with negative binomial and geometric marginals, *Commun. Statist. Theory Meth.* **21**, 2483–2492.

Al-Osh, M.A., Alzaid, A.A. (1987) First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process, *J. Time Ser. Anal.* **8**, 261–275.

Aly, E.A.A.A., Bouzar, N. (1994) Explicit stationary distributions for some Galton-Watson processes with immigration, *Commun. Statist. Stochastic Models* **10**, 499-517.

Aly, E.E.A.A., Bouzar, N. (2005) Stationary solutions for integer-valued autoregressive processes, *International Journal of Mathematics and Mathematical Science* **1**, 1–18.

Alzaid, A.A., Al-Osh, M.A. (1988) First-order integer-valued autoregressive (INAR(1)) process: distributional and regression properties, *Statist. Neerlandica* **42**, 53-61.

Alzaid, A.A., Al-Osh, M.A. (1990) Integer-valued pth order autoregressive structure(INAR(p)) process, *J. Appl. Probab.* **27**, 314–324.

Alzaid, A.A., Al-Osh, M.A. (1993) Some autoregressive moving average processes with generalized Poisson marginal distributions, *Ann. Inst. Statist. Math.* **45**, 223–232.

Bakouch, H.S., Ristić, M.M. (2010) Zero truncated Poisson integer-valued AR(1) model, *Metrika* **72**, 265–280.

Brännäs, K., Hellström, J. (2001) Generalized integer-valued autoregression, *Econometric reviews* **20(4)**, 425–443.

Brockwell, P., Davis, R. (1987) Time Series: Theory and Methods, *Springer-Verlag, New York*.

Brockwell, P., Davis, R. (2002) Introduction to Time Series and Forecasting, Second Edition, *Springer-Verlag, New York*.

Box G., Jenkins G. (1976) Time Series Analysis: forecasting and control, Revised Edition, *Holden-Day*.

Chabot-Hallé, D., Duchesne, P. (2008) Diagnostic Checking of Multivariate Non-linear Time Series Models with Martingale Difference Errors, *Statistics and Probability Letters*, **78**, 997–1005.

Cox, DR., Miller, HD. (1965) The Theory of Stochastic Processes, *Methuen, London.*

Dewald L.S., Lewis P.A.W., McKenzie E. (1989) A bivariate first-order autoregressive time series model in exponential variables (BEAR(1)), *Management Science* **35**, 1236–1246.

Du, J.-Guan, Li, Y. (1991) The integer-valued autoregressive (INAR(p)) model, *J. Time Ser. Anal.* **12**, 129–142.

Franke, J., Subba Rao, T. (1993) Multivariate first-order integer-valued autoregressions, Technical Report, Mathematics Department, UMIST.

Freeland, R.K., McCabe, B. (2005) Asymptotic properties of CLS estimators in the Poisson AR(1) model, *Statistics and Probability Letters* **73**, 147–153.

Gauthier, G., Latour, A. (1994) Covergence forte des estimateurs des paramètres d'un processus GENAR(p), *Ann. Sci. Math. Québec* **18**, 49–71.

Gaver, D.P., Lewis P.A.W. (1980) First-order autoregressive gamma sequences and point processes, *Advances in Appled Probability* **12**, 727–745.

Grunwald, G.K., Hyndman, R.J., Tedesco, L., Tweedie, R.L. (2000) Non-gaussian conditional linear AR(1) models, *Aust. N.Z.J. Stat.* **42**, 479–495.

Ihaka, R. Gentleman, R. (1996) R: a language for data analysis and graphics, *J. Comput. Graphical Stat.* **5**, 299–314.

Jacobs, P.A., Lewis P.A.W. (1977) A mixed autoregressive-moving average exponential sequence and point process (EARMA (1,1)), *Advances in applied probability* **9**, 87–104.

Jacobs, P.A., Lewis P.A.W. (1978a) Discrete time series generated by mixture I: correlational and runs properties, *Journal of the Royal Statistical Society Series B* **40**, 94–105.

Jacobs, P.A., Lewis P.A.W. (1978b) Discrete time series generated by mixtures II: asymptotic properties, *Journal of the Royal Statistical Society Series B* **40**, 222–228.

Jacobs, P.A., Lewis P.A.W. (1978c) Discrete time series generated by mixtures III: autoregressive processes (DAR(p)), *Naval Postgraduate School Technical Report*, NPS55Lw 73061A.

Jacobs, P.A., Lewis P.A.W. (1983) Stationary discrete autoregressive-moving average time series generated by mixtures, *J. Time Ser. Anal.* **4**, 19–36.

Joe, H. (1996) Time series models with univariate margins in the convolution-closed infinitely divisible class, *J. Appl. Prob.* **33**, 664–677.

Karlsen, H., Tjøstheim, D. (1988) Consistent estimates for the NEAR(2) and NLAR(2) time series models. *J. R. Statist. Soc. B* **50**, 313–320.

Kocherlakota, S., Kocherlakota, K. (1992) Bivariate Discrete Distributions, *Statistics: textbooks and monographs*, vol. 132. *New York: Markel Dekker.*

Latour, A. (1997) The multivariate GINAR(p) process. *Adv. Appl. Prob.* **29**, 228–248.

Latour, A. (1998) Existence and Stochastic Structure of a non-negative integer-valued autoregressive process, *J. Time Ser. Anal.* **19**, 439–455.

Lawrance, A.J. (1980) Some autoregressive models for point processes, in: P. Bartfai i J. Tomko (eds.), *Point Processes and Queueing Problems,* 257–275, Cooloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 24, Kesthely (Hungary), Proceedings Published by North-Holland, Amsterdam.

Lawrance, A.J., Lewis P.A.W. (1980) The exponential autoregressive moving average EARMA(p,q) process, *Journal of the Royal Statistical Society Series E* **42**, 150–161.

Lunn, A.D., Davies, S.J. (1998) A Note on Generating Correlated Binary Variables, *Biometrika* **85**, 487–490.

McKenzie, E. (1985) Some simple models for discrete variate time series, *Water Resources Bulletin* **21**, 645–650.

McKenzie, E. (1986) Autoregressive moving-average processes with negative binomial and geometric distributions, *Adv. Appl. Prob.* **18**, 679–705.

McKenzie, E. (1987) Innovation Distributions for Gamma and Negative Binomial Autoregressions, *Scandinavian Journal of Statistics* **14**, 79–85.

Miletić Ilić, A. V., Ristić, M. M., Nastić, A. S. (2014) A geometric time series model with an alternative dependent Bernoulli counting series, послат на публиковање.

Miletić Ilić, A. V. (2014) A geometric time series model with a new dependent Bernoulli counting series, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, прихваћен за публиковање.

Miletić Ilić, A. V., Ristić, M. M., Nastić, A. S., Bakouch H. S. (2014) An INAR(1) model based on a mixed dependent and independent counting series, послат на публиковање.

Nastić, A. S. (2008) Ауторегресивни процеси са ненегативним целобројним вредностима, *Магистарска теза*, *Универзитет у Нишу*, *Природно-математички факултет*.

Nastić, A. S. (2012a) Допринос анализи временских низова са ненегативним целобројним вредностима генерисаних геометријским бројачким низовима, *Докторска дисертација*, *Универзитет у Нишу*, *Природно-математички факултет*.

Nastić, A. S. (2012b) On shifted geometric INAR(1) models based on geometric counting series, *Communications in Statistics - Theory and Methods* **41**(23), 4285–4301.

Nastić, A. S., Ristić, M. M., Bakouch, H. S. (2012) A combined geometric INAR(p) model based on negative binomial thinning, *Mathematical and Computer Modelling* **55**, 1665–1672.

Nastić, A. S., Ristić, M. M. (2012) Some geometric mixed INAR models, *Statistics and probability letters* **82**, 805–811.

Park, Y., Oh, C.W. (1997) Some asymptotic properties in INAR(1) processes with Poisson marginals, *Statistical Papers* **38**, 287–302.

Pedeli, X., Karlis, D. (2009) Bivariate INAR(1) Models, Technical Report no. 247, Department of Statistics, Athens University of Economics and Business, Athens June.

Pedeli, X., Karlis, D. (2011) A Bivariate INAR(1) Process with Application, *Statistical Modelling: An international Journal*, **11**(4), 325–349.

Pedeli, X., Karlis, D. (2013) On Estimation of the Bivariate Poisson INAR Process, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **42**(3), 514–533.

Ristić, M. M., Bakouch, H. S., Nastić, A. S. (2009) A New Geometric First-Order Integer-Valued Autoregressive (NGINAR(1)) process, *Journal of Statistical Planning and inference* **139**, 2218–2226.

Ristić, M. M., Nastić, A. S., Bakouch, H. S. (2012) Estimation in an Integer-Valued Autoregressive Process With Negative Binomial Marginals (NBINAR(1)), *Communications in Statistics - Theory and Methods* **41**(4), 606–618.

Ristić, M. M., Nastić, A. S., Jayakumar, K., Bakouch, H. S. (2012) A bivariate INAR(1) time series model with geometric marginals, *Applied Mathematics Letters* **25**(3), 481–485.

Ristić, M. M., Nastić, A. S. (2012) A mixed INAR(p) model, *J. Time Ser. Anal.* **33**, 903–915.

Ristić, M. M., Nastić, A. S., Miletić Ilić, A. V. (2013) A geometric time series model with dependent Bernoulli counting series, *J. Time Ser. Anal.* **34**(4), 466–476.

Shumway, R., Stoffer, D. (2006) Time Series Analysis and Its Applications, With R Examples, Second Edition, *Springer-Verlag, New York.*

Silva, M.E., Oliveira, V.L. (2004) Difference equations for the higher order moments and cumulants of the $INAR(1)$ model, *J. Time Ser. Anal.* **25**, 317–333.

Steutel, F.W., van Harn, K. (1979) Discrete analogues of self-decomposability and stability, *The Annals of Probability* **7**, 893–899.

Širjaev, A.N. (1989) Verovatnoća, *"Nauka", Glavna redakcija fizičko-matematičke literature, Moskva.*

Tjøstheim, D. (1986) Estimation in nonlinear time series models, *Stochastic Processes and Their Applications* **21**, 251–273.

Tsay R. (2010) Analysis of Financial Time series, 3rd edition, *John Wiley and Sons, New York.*

van Harn, K., Steutel, F.W., Vervaat, W. (1982) Self-decomposable discrete distributions and branching processes, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **61**, 97–118.

Weiß, C.H. (2008a) Serial dependance and regression of Poisson INARMA models, *J. Statist. Plann. Inference* **138**, 2975–2990.

Weiß, C.H. (2008b) Thinning operations for modeling time series of counts – a survey, *Advances in Statistical Analysis* **92**, 319–341.

Weiß, C. H. (2008c) The combined INAR(p) models for time series of counts, *Stat. Prob. Lett.* **78** (13), 1817–1822.

Weiß, C. H. (2009) A New Class of Autoregressive Models for Time Series of Binomial Counts, *Communications in Statistics - Theory and Methods* **38**, 447–460.

Zheng, H., Basawa, I.V., Datta, S. (2006) Inference for pth-order random coefficient integer-valued autoregressive processes, *J. Time Ser. Anal.* **27**, 411–440.

Zheng, H., Basawa, I.V., Datta, S. (2007) First-order random coefficient integer-valued autoregressive processes, *J. Stat. Plann. Inf.* **173**, 212–229.

Zhu, R., Joe, H. (2003) A new type of discrete self-decomposability and its applications to continuous-time Markov processes for modeling count data time series, *Stoch. Models* **19**, 235–254.

Zhu, R., Joe, H. (2006) Modelling count data time series with Markov processes based on binomial thinning, *J. Time Ser. Anal.* **27**, 725–738.

Zhu, R., Joe, H. (2010) Negative binomial time series models based on expectation thinning operators, *J. Statist. Plann. Inference* **140**, 1874–1888.

Zhu, F., Wang, D. (2011) Estimation and testing for a Poisson autoregressive model, *Metrika* **73**, 211–230.

БИОГРАФИЈА

Ана Милетић Илић је рођена 19.03.1977. године у Нишу. Завршила је Основну школу "21. мај" са Вуковом дипломом. Након тога је уписала Гимназију "Бора Станковић" у Нишу на природно-математичком смеру и завршила са просеком 5,00. Због одличног успеха била је добитник републичке стипендије.

Након завршене гимназије уписала је Филозофски факултет, сада Природно-математички факултет у Нишу, одсек математика, смер Теоријска математика и примене. Дипломирала је 11.06.2004. године са просечном оценом 9,11 стекавши звање дипломирани математичар за теоријску математику и примене.

Школске 2004./5. године почиње са радом у математичкој Гимназији "Бора Станковић" у Нишу као професор математике. Учествовала је у организацији многих такмичења, држала предавања талентованим ученицима на нивоу града, члан је комисије за преглед задатака на такмичењима као и члан комисије за прегледавање тестова на квалификационим испитима за упис ученика у средње школе.

Школске 2007/8. године уписала је постдипломске студије на смеру Математичка статистика и примене. Положила је све испите са просечном оценом 9,78.

БИБЛИОГРАФИЈА

1. Ristić, M.M., Nastić, A.S., Miletić Ilić, A. (2013) A geometric time series model with dependent Bernoulli counting series, Journal of Time Series Analysis 34(4), 466–476.

2. Miletić Ilić, A. (2014) A geometric time series model with a new dependent Bernoulli counting series, Communications in Statistics - Theory and Methods, прихваћен за публиковање.

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Ана В. Милетић Илић
Ментор, **МН**:	Мирослав М. Ристић
Наслов рада, **НР**:	ВРЕМЕНСКИ НИЗОВИ СА НЕНЕГАТИВНИМ ЦЕЛОБРОЈНИМ ВРЕДНОСТИМА ГЕНЕРИСАНИ ЗАВИСНИМ БРОЈАЧКИМ НИЗОВИМА
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2014.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	166 стр., граф. прикази и табеле
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	статистика случајних процеса
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	INAR модели, биномни тининг, генерализовани биномни тининг, зависни Бернулијев бројачки низ, геометријска маргинална расподела
УДК	519.246.8
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	

Извод, **ИЗ**:	У овој дисертацији су дефинисани генерализовани тининг оператори базирани на Бернулијевим низовима случајних промењљивих. Уз помоћ ових оператора конструисани су ауторегресивни модели првог реда са ненегативним целобројним вредностима и са геометријском маргиналном расподелом. Комбинованом применом биномног и генерализованог биномног тининг оператора конструисан је и мешовити модел базиран како на зависним тако и на независним Бернулијевим бројачким низовима. Одређене су основне особине свих модела, оцењени су непознати параметри и разматрана су асимптотска својства добијених оцена. Представљена је, такође, могућа примена на реалним подацима, при чему су нови модели упоређени и међусобно и са постојећим релевантним INAR моделима.
Датум прихватања теме, **ДП**:	02.12.2013.
Датум одбране, **ДО**:	
Чланови комисије, **КО**:	Председник:
	Члан:
	Члан:
	Члан:
	Члан, ментор:

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	monograph
Type of record, **TR**:	textual / graphic
Contents code, **CC**:	doctoral dissertation
Author, **AU**:	Ana V. Miletić Ilić
Mentor, **MN**:	Miroslav M. Ristić
Title, **TI**:	TIME SERIES WITH NON-NEGATIVE INTEGER VALUES BASED ON DEPENDENT COUNTING SERIES
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Serbia
Publication year, **PY**:	1998
Publisher, **PB**:	author's reprint
Publication place, **PP**:	Niš, Višegradska 33.
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	166 p. ; graphic representations; tables
Scientific field, **SF**:	mathematics
Scientific discipline, **SD**:	statistics for stochastic processes
Subject/Key words, **S/KW**:	INAR models, binomial thinning, generalized binomial thinning, dependent Bernoulli counting series, geometric marginal distribution
UC	519.246.8
Holding data, **HD**:	library
Note, **N**:	

Abstract, **AB**:		New generalized thinning operators based on Bernoulli sequences of dependent random variables are presented In this thesis. Using these operators autoregressive models of the first order with non-negative integer values and geometric marginal distribution are constructed. Also, a mixed model based on both dependent and independent Bernoulli counting series is constructed by combined application of the binomial and the generalized binomial thinning operator. Some basic features of all introduced models are determined, unknown model parameters are estimated and asymptotic properties of obtained estimates are considered. Possible application to real data is also presented, where the new models are compared with each other and with the existing relevant INAR models.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		02.12.2013.
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 1.

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

Временски низови са ненегативним целобројним вредностима генерисани зависним бројачким низовима

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација, ни у целини, ни у деловима, није била предложена за добијање било које дипломе, према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

У Нишу, 29.08.2014.

Аутор дисертације:

Ана В. Милетић Илић

Потпис докторанда:

Ана Милетић Илић

Прилог 2.

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНЕ И ЕЛЕКТРОНСКЕ ВЕРЗИЈЕ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Име и презиме аутора:
Ана Милетић Илић

Студијски програм:
Математика

Наслов рада:
Временски низови са ненегативним целобројним вредностима генерисани зависним бројачким низовима

Ментор:
Проф. др Мирослав М. Ристић

Изјављујем да је штампана верзија моје докторске дисертације истоветна електронској верзији, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 29.08.2014.

Аутор дисертације:

Ана В. Милетић Илић

Потпис докторанда:
Ана Милетић Илић

Прилог 3.

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла" да, у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

Временски низови са ненегативним целобројним вредностима генерисани зависним бројачким низовима

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство – некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да подвучете само једну од шест понуђених лиценци; кратак опис лиценци је у наставку текста).

У Нишу, 29.08.2014.

Аутор дисертације:

Ана В. Милетић Илић

Потпис докторанда:

Ана Милетић Илић