



**UNIVERZITET U NIŠU**  
**ELEKTRONSKI FAKULTET U NIŠU**

**MR MARKO T. MILOJKOVIĆ**

**PRIMENA ORTOGONALNIH FUNKCIJA  
U MODELIRANJU DINAMIČKIH  
SISTEMA I UPRAVLJANJU SISTEMIMA  
SA FAZI KLIZNIM REŽIMIMA**

**DOKTORSKA DISERTACIJA**

**NIŠ, 2011.**

**Univerzitet u Nišu**  
**Elektronski fakultet u Nišu**

**Mr Marko T. Milojković**

**Primena ortogonalnih funkcija u modeliranju  
dinamičkih sistema i upravljanju sistemima sa  
fazi kliznim režimima**

**Doktorska disertacija**

**mentor**  
**Prof. dr Dragan Antić**

**Niš, 2011.**

## Zahvalnost autora

*Ova doktorska disertacija predstavlja rezultat višegodišnjeg istraživanja tima ljudi sa Katedre za automatiku. Mnoge kolege su mi pomogle u njenom stvaranju. Najpre želim da zahvalim trojici ljudi bez kojih ove disertacije ne bi ni bilo, barem ne u ovoj i ovakvoj formi. Zahvaljujem se svom mentoru prof. dr Draganu Antiću na usmeravanju i podsticanju tokom izrade disertacije. Hvala prof. dr Bratislavu Dankoviću na čijim se osnovnim matematičkim idejama bazira celokupna disertacija, kao i kolegi Saši Nikoliću koji je sa mnom učestvovao u gotovo svakom istraživanju vezanom za disertaciju.*

*Zahvaljujem se kolegama Zoranu Ičiću i Stanku Stankovu na pomoći pri praktičnim realizacijama sistema korišćenih u disertaciji, kao i kolegama Darku Mitiću i Staniši Periću na pomoći pri izvođenju eksperimenata na sistemu protiv blokiranja točkova. Hvala i kolegama Zoranu Jovanoviću, Dejanu Mitiću, Miodragu Spasiću i Nikoli Dankoviću, koji su, svako na svoj način, doprineli stvaranju i završetku disertacije, bilo čitanjem i nalaženjem grešaka, bilo rečima podrške, ponekom kafom i šalom ili video igrom u trenucima zamora.*

# Sadržaj

Uvod .....	1
<b>1. Ortogonalne funkcije</b> .....	<b>4</b>
1.1 Istorijski pregled ortogonalnih funkcija i kratak opis poglavlja .....	4
1.2 Ortogonalnost funkcija .....	6
1.2.1 Osnovni pojmovi vezani za ortogonalnost .....	6
1.2.2 Ortogonalni sistemi i postupak ortogonalizacije .....	7
1.2.3 Primeri ortogonalnih sistema .....	8
1.3 Ortogonalni polinomi .....	9
1.3.1 Ortogonalni polinomi na realnoj liniji i njihove osobine .....	9
1.3.2 Važnije relacije vezane za ortogonalne polinome .....	11
1.3.3 Nule ortogonalnih polinoma .....	13
1.4 Klasični ortogonalni polinomi .....	14
1.4.1 Definicija i vrste klasičnih ortogonalnih polinoma .....	14
1.4.2 Osobine klasičnih ortogonalnih polinoma .....	16
1.4.3 Važnije relacije vezane za klasične ortogonalne polinome .....	18
1.5 Primena ortogonalnih polinoma u aproksimaciji funkcija .....	20
1.6 Generalizacije ortogonalnih polinoma .....	22
1.6.1 Šiftovani ortogonalni polinomi .....	22
1.6.2 Kvazi ortogonalni polinomi .....	23
1.6.3 Skoro ortogonalni polinomi .....	27
1.7 Literatura .....	30
<b>2. Filtri bazirani na ortogonalnim racionalnim funkcijama</b> .....	<b>33</b>
2.1 Kratak opis poglavlja .....	33
2.2 Ortogonalne racionalne funkcije .....	34
2.2.1 Definicija ortogonalnih racionalnih funkcija .....	34
2.2.2 Formiranje različitih tipova ortogonalnih racionalnih funkcija .....	36
2.3 Kvazi ortogonalne racionalne funkcije .....	40
2.3.1 Definicija kvazi ortogonalnih racionalnih funkcija .....	40
2.3.2 Formiranje različitih tipova kvazi ortogonalnih racionalnih funkcija .....	41
2.4 Skoro ortogonalne racionalne funkcije .....	42
2.5 Ortogonalni filtri .....	43

2.5.1	Projektovanje ortogonalnih filtara .....	43
2.5.2	Praktična realizacija ortogonalnih filtara .....	45
2.6	Kvazi ortogonalni filtri .....	48
2.6.1	Projektovanje kvazi ortogonalnih filtara.....	48
2.6.2	Praktična realizacija kvazi ortogonalnih filtara .....	49
2.7	Skoro ortogonalni filtri .....	51
2.7.1	Projektovanje skoro ortogonalnih filtara .....	51
2.7.2	Praktična realizacija skoro ortogonalnih filtara .....	52
2.8	Literatura.....	54
<b>3.</b>	<b>Primena ortogonalnih funkcija u modeliranju dinamičkih sistema .....</b>	<b>56</b>
3.1	Potencijal primene ortogonalnih funkcija u modeliranju dinamičkih sistema i kratak opis poglavlja .....	56
3.2	Modeliranje dinamičkih sistema primenom ortogonalnih filtara .....	58
3.3	Modeliranje hidrauličkog sistema.....	59
3.3.1	Opis sistema.....	59
3.3.2	Opis eksperimenta.....	62
3.3.3	Analiza rezultata .....	64
3.4	Modeliranje dinamičkih sistema primenom kvazi ortogonalnih filtara.....	65
3.5	Modeliranje kaskadno povezanog transportnog sistema .....	67
3.5.1	Opis sistema.....	67
3.5.2	Analiza sistema i njegova praktična realizacija .....	70
3.5.3	Opis eksperimenta.....	71
3.6	Modeliranje dinamičkih sistema primenom skoro ortogonalnih filtara.....	73
3.7	Modeliranje jednosmernog servo motora .....	74
3.7.1	Opis sistema.....	74
3.7.2	Opis eksperimenta.....	75
3.7.3	Analiza rezultata .....	78
3.8	Literatura.....	80
<b>4.</b>	<b>Primena ortogonalnih funkcija u upravljanju dinamičkim sistemima .....</b>	<b>83</b>
4.1	Potencijal primene ortogonalnih funkcija u upravljanju dinamičkim sistemima i kratak opis poglavlja .....	83
4.2	Upravljanje antenskim sistemom.....	84
4.2.1	Upravljački algoritam .....	84
4.2.2	Praktična realizacija eksperimentalnog sistema .....	86

4.2.3 Eksperimentalni rezultati i analiza.....	88
4.3 Sistem protiv blokiranja kočnica .....	91
4.3.1 Opis sistema.....	91
4.3.2 Model sistema .....	93
4.4 Upravljanje sistemom protiv blokiranja kočnica primenom upravljanja sa kliznim režimima .....	96
4.4.1 Upravljanje sa kliznim režimom.....	96
4.4.2 Klasično upravljanje sa kliznim režimom .....	98
4.4.3 Integralno upravljanje sa kliznim režimom .....	99
4.4.4 Upravljanje sa kliznim režimom i konstantnim plus proporcionalnim zakonom dosezanja .....	100
4.4.5 Upravljanje sa kliznim režimom i eksponencijalnim zakonom dosezanja .	101
4.5 Primena ortogonalnih funkcija i fazi kliznog režima u upravljanju sistemom protiv blokiranja kočnica .....	103
4.5.1 Projektovanje upravljanja sa fazi kliznim režimom primenom ortogonalnih funkcija .....	103
4.5.2 Analiza eksperimentalnih rezultata.....	105
4.6 Literatura.....	108
<b>Zaključak</b> .....	111

# Uvod

Istorijat proučavanja ortogonalnih funkcija je veoma dug i seže od kraja osamnaestog veka. Međutim, tek se od devedesetih godina prošlog veka razmatra mogućnost njihove primene u oblastima automatike, a naročito u modeliranju i upravljanju dinamičkim sistemima. U poslednje vreme, ostvaren je veliki napredak na polju ortogonalnih racionalnih funkcija, ortogonalnih algebarskih i trigonometrijskih polinoma, kao i ortogonalnih sistema u celini. Naročito se uočava veliki broj radova koji se bave primenom ortogonalnih sistema u elektronici, teoriji kola, digitalnoj obradi signala i telekomunikacijama. Jedna od najvažnijih primena ortogonalnih funkcija je i projektovanje ortogonalnih filtara koji se mogu uspešno koristiti za formiranje generatora ortogonalnih signala, modeliranje i identifikaciju dinamičkih sistema, kao i za praktičnu realizaciju optimalnih i adaptivnih sistema. Predmet razmatranja ove disertacije biće upravo mogućnost novih primena ortogonalnih funkcija i filtara u modeliranju i upravljanju dinamičkim sistemima. Shodno tome, disertacija je podeljena na četiri poglavlja. Sva poglavlja počinju istorijskim pregledom i kratkim opisom, a završavaju se relevantnom literaturom.

Prvo poglavlje se bavi ortogonalnim funkcijama. Najpre je dat kraći istorijski pregled dosadašnjih rezultata iz oblasti ortogonalnih funkcija i sistema i detaljno su objašnjeni najvažniji pojmovi vezani za ortogonalnost. Dat je pregled glavnih osobina ortogonalnih polinoma sa naglaskom na klasičnim ortogonalnim polinomima. S obzirom na značaj za dalji tok disertacije, opisana je primena ortogonalnih polinoma u aproksimaciji funkcija kao i pojam šiftovanih polinoma. Na kraju poglavlja su uvedeni pojmovi kvazi ortogonalnosti i skoro ortogonalnosti koji predstavljaju izvesne generalizacije klasične ortogonalnosti pogodne za primenu u automatici i tehnici uopšte. Prikazani su i novi matematički rezultati izvedeni za ove tipove ortogonalnosti i polinome bazirane na njima.

U drugom poglavlju opisan je nov matematički alat za dobijanje ortogonalnih racionalnih funkcija baziran na novim transformacijama u kompleksnom domenu i pokazano je kako se na taj način mogu dobiti i neke druge klase ortogonalnih funkcija. Takođe su izvedene i odgovarajuće skoro i kvazi ortogonalne racionalne funkcije. Na osnovu dobijenih ortogonalnih funkcija mogu se projektovati nove klase ortogonalnih filtara koji omogućavaju generisanje funkcija u formi realnih fizičkih signala. Detaljno

je opisan način projektovanja ovih filtara u analognoj tehnici koja omogućava veliku brzinu, jednostavnost, robustnost i preciznost. Validnost realizovanih filtara je dokazana podudarnošću signala snimljenih na njima sa dobijenim matematičkim izrazima i izvedenim simulacijama.

U trećem poglavlju je pokazano kako se novodobijeni ortogonalni filtri i sekvence signala koje oni generišu mogu uspešno koristiti za aproksimaciju signala i modeliranje dinamičkih sistema. Dekompozicija dinamičkih sistema u smislu ortogonalnog razvoja omogućava aproksimaciju ili modeliranje sistema sa razvojima konačne dužine. Fleksibilnim podešavanjem baznih funkcija do željenih karakteristika sistema koji se analizira, brzina konvergencije ovih razvoja može se drastično povećati. To vodi veoma kvalitetnim modelima koji su određeni malim brojem parametara. Poslednjih godina predmet intenzivnog proučavanja postaju i takozvani nesavršeni sistemi. Do nesavršenosti sistema dolazi usled mnogobrojnih faktora (izrada pojedinačnih komponenti, uslovi rada sistema...). Najveći problem koji se javlja kod ovih sistema je dobijanje njihovih modela, a jedno od mogućih rešenja je upravo primena skoro ortogonalnih filtara. U praksi se takođe često javlja potreba za formiranjem filtara kod kojih je razlika stepena u polinomima brojioca i imenioca funkcije prenosa veća od jedan. Za formiranje ovih funkcija prenosa pogodni su kvazi ortogonalni polinomi čije su Laplasove transformacije racionalne funkcije sa proizvoljnom razlikom stepena polinoma. U okviru poglavlja je najpre objašnjeno kako se formiraju podešavajući filtri, tj. uopšteni modeli čijom se promenom parametara može opisati dinamičko ponašanje različitih sistema i kako se parametri takvih modela mogu optimizovati primenom genetičkih algoritama uz korišćenje srednjekvadratne greške kao kriterijuma kvaliteta modela. Pokazano je i kako se posle dobijanja konkretne realizacije filtra za zadati sistem, lako dobija i matematički model preko diferencijalnih jednačina ili funkcije prenosa. Takođe su objašnjene prednosti ovakvih ortogonalnih fizičkih modela u pogledu tačnosti i jednostavnosti kao i brzine modeliranja. Procedure modeliranja pomoću svakog od tri realizovana filtra (klasičnog, kvazi i skoro ortogonalnog) demonstrirane su na realnim sistemima (jednosmerni servo motor, hidraulični sistem sa tri rezervoara, transportni sistem sa pokretnim trakama) kroz izvršene eksperimente.

Četvrto poglavlje ispituje mogućnosti primene izvedenih ortogonalnih funkcija i realizovanih filtara u upravljanju dinamičkim sistemima. Upotreba ortogonalnih funkcija u različitim problemima upravljanja dinamičkim sistemima je uglavnom motivisana njihovom jednostavnošću, lakom praktičnom izradom i brzinom



izračunavanja i reagovanja. Intenzivnije proučavanje uloge ortogonalnih funkcija u upravljanju dinamičkim sistemima počelo je pre tridesetak godina i baziralo se na dobrim osobinama ortogonalnih polinoma u smislu optimalnog predstavljanja realnih signala ortogonalnim razvojem u red. Povoljne osobine ortogonalnih filtara kao što su jednostavna realizacija, preciznost i brzina reagovanja uticale su na njihovu primenu u adaptivnim sistemima automatskog upravljanja kao i kod optimalnog podešavanja regulatora. U poslednjem poglavlju je pokazan način direktne upotrebe ortogonalnog filtra u upravljanju praktično realizovanim antenskim sistemom. Takođe je opisano kako se razvijene ortogonalne funkcije mogu upotrebiti u projektovanju fazi kliznih regulatora u cilju poboljšanja osobina sistema automatskog upravljanja. Takvo upravljanje će biti demonstrirano na primeru složenog ABS sistema i upoređeno sa drugim metodama upravljanja.

Trebalo bi naglasiti da je jedan deo rezultata, neposredno proisteklih ili vezanih za ovu disertaciju, već verifikovan u naučnim radovima objavljenim u časopisima i zbornicima sa međunarodnih i domaćih konferencija koji su citirani u okviru literature. Na kraju su naglašeni doprinosi ove disertacije, izvedeni zaključci i nagovešteni mogući dalji pravci istraživanja, bazirani na korišćenju rezultata prikazanih u disertaciji.

# 1. Ortogonalne funkcije

## 1.1 Istorijski pregled ortogonalnih funkcija i kratak opis poglavlja

Ležandrovi<sup>1</sup> polinomi i njihove ortogonalne osobine su ispitivani još krajem osamnaestog veka prilikom određivanja sila privlačenja među nebeskim telima pri revoluciji [1.1]. Kao rezultat rešavanja diferencijalnih jednačina na beskonačnim i polubeskonačnim intervalima i razvoja proizvoljnih funkcija na tim intervalima, došlo se do Ermitovih<sup>2</sup> polinoma [1.1]. Teorija kontinualnih fraktala je kasnije podstakla proučavanje ortogonalnih polinoma [1.2] tako da su sredinom devetnaestog veka pronađeni i Lagerovi<sup>3</sup> polinomi [1.3]. Pomenuti tipovi polinoma, ortogonalni na realnoj osi u odnosu na određenu težinsku funkciju, još od Gausovog<sup>4</sup> vremena efikasno se koriste za numeričku procenu vrednosti integrala pomoću takozvanih kvadrature formula. Furije<sup>5</sup> je 1807. godine pri rešavanju parcijalne diferencijalne jednačine vezane za provođenje toplote primetio da se rešenje može predstaviti kao red sinusnih funkcija sa eksponencijalnim težinama. Kasnije je tu ideju proširio na predstavljanje bilo koje funkcije kao konačne sume sinusnih i kosinusnih funkcija. Čebišev<sup>6</sup> je tokom svog rada otkrio da od svih aproksimacionih polinoma proizvoljne funkcije na intervalu  $[-1,1]$ , najbolju minimizaciju maksimalne greške omogućava linearna kombinacija polinoma koji se danas zovu Čebiševljevi [1.1]. Nešto kasnije su pronađeni i Jakobijevi<sup>7</sup> i Gegenbauerovi<sup>8</sup> polinomi. Jednu posebnu klasu ortogonalnih funkcija, koja je našla posebnu primenu u identifikaciji dinamičkih sistema, predstavljaju takozvane u delovima konstantne bazisne funkcije. U ovu familiju spadaju Harove<sup>9</sup> i Volšove<sup>10</sup> funkcije [1.4]. U prvoj polovini dvadesetog veka su izučavane generalisane ortonormirane racionalne bazisne funkcije u odvojenim radovima Takenake [1.5] i

---

<sup>1</sup> A. M. Legendre (1752-1833), francuski matematičar

<sup>2</sup> Ch. Hermite (1822-1901), francuski matematičar

<sup>3</sup> E. Laguerre (1834-1886), francuski matematičar

<sup>4</sup> J. C. F. Gauss (1777-1855), nemački matematičar i naučnik

<sup>5</sup> J. B. J. Fourier (1768-1830), francuski matematičar

<sup>6</sup> P. L. Tchebycheff (1821-1894), ruski matematičar

<sup>7</sup> K. G. J. Jacobi (1804-1851), nemački matematičar

<sup>8</sup> L. Gegenbauer (1849-1903), austrijski matematičar

<sup>9</sup> A. Haar (1885-1933), mađarski matematičar

<sup>10</sup> J. L. Walsh (1895-1973), američki matematičar

Malmkvista<sup>11</sup>. Primenu ovih bazisa na aproksimaciju funkcija na jediničnom krugu (analiza diskretnih sistema) i u poluravni (kontinualni sistemi) razradio je Volš sredinom prošlog veka. U ovom periodu je značajan i rad Segaa<sup>12</sup> i Geronimusa<sup>13</sup> [1.6] na analizi polinoma ortogonalnih na različitim domenima kao i radovi Djarbašijana<sup>14</sup> o ortogonalnim racionalnim funkcijama na jediničnom krugu sa fiksnim polovima [1.7]. Usled izvesnih specijalnih osobina, najbrojnija su istraživanja ortogonalnosti na realnoj osi i na jediničnom krugu [1.8].

Ortogonalne funkcije i ortogonalni polinomi su brzo povezani sa ostalim granama matematike kao što su: kontinualni fraktali, interpolacija, Padeova aproksimacija, kvadrature formule, teorija aproksimacije, numerička analiza, specijalne funkcije, kombinatorika, teorija grafova. Nabrojane ortogonalne funkcije su takođe našle i široku primenu u nauci i inženjerstvu. Od sedamdesetih godina prošlog veka javljaju se brojni patent i praktične primene ortogonalnih funkcija u elektrostatici, elektronici [1.9], teoriji kola, telekomunikacijama [1.10], kompresiji podataka, adaptivnom upravljanju, aproksimaciji modela, implementaciji digitalnih filtara, digitalnoj obradi signala [1.11]. Iako su sve navedene ortogonalne i sinusno-kosinusne funkcije stare više od jednog veka, tek je u poslednjih dvadesetak godina primećen njihov ogroman potencijal primene u identifikaciji i upravljanju dinamičkim sistemima [1.12], [1.13].

U ovom poglavlju će najpre biti detaljno objašnjen pojam i definicija ortogonalnosti funkcija. Biće date i definicije ostalih pojmova usko vezanih za ortogonalnost, kao što su: unutrašnji proizvod, težinska funkcija, norma i ortogonalizacija. Zatim će biti predstavljeni ortogonalni polinomi na realnoj liniji, kao u praksi najvažniji vid ortogonalnih funkcija, i iz njih izvedeni klasični ortogonalni polinomi. Biće opisane njihove najvažnije osobine i teoreme. Naročita pažnja biće posvećena primeni ortogonalnih polinoma u aproksimaciji funkcija jer je ta primena od velikog značaja za metode modeliranja i upravljanja dinamičkim sistemima izvedene u daljem toku ove disertacije. Iz istog razloga dalje će biti detaljno objašnjeni pojmovi šiftovanih (pomeranih), kvazi ortogonalnih i skoro ortogonalnih polinoma kao modifikacija ili uopštenja koje proizilaze iz osnovne definicije ortogonalnosti funkcija.

---

<sup>11</sup> J. Malmquist (1882-1952), švedski matematičar

<sup>12</sup> G. Szego (1895-1985), mađarski matematičar

<sup>13</sup> Ya. L. Geronimus (1898-1984), ruski matematičar

<sup>14</sup> M. M. Djarbashian (1918-1994), jermenski matematičar

## 1.2 Ortogonalnost funkcija

### 1.2.1 Osnovni pojmovi vezani za ortogonalnost

Definicija 1: Funkciju  $x \rightarrow w(x)$  definisanu na konačnom intervalu  $(a, b)$  nazivamo težinskom funkcijom [1.14] ako je ona na tom intervalu nenegativna, integrabilna i njen integral pozitivan, tj. ako je

$$w(x) \geq 0; \quad (x \in (a, b)); \quad 0 < \int_a^b w(x) dx < +\infty. \quad (1.1)$$

Ako je interval  $(a, b)$  beskonačan, pored navedenih uslova, potrebno je i da sledeći integrali (momenti težinske funkcije  $w$ ) apsolutno konvergiraju

$$C_k = \int_a^b x^k w(x) dx \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1.2)$$

Linearnim (vektorskim) prostorom, u oznaci  $L^2(a, b)$ , nazivamo skup realnih funkcija  $x \rightarrow w(x)$ , za koje je  $\int_a^b w(x) f^2(x) dx < +\infty$ , i u koji su uvedene unutrašnja i spoljašnja kompozicija pomoću  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  i  $(cf)(x) = cf(x)$ , gde je  $c$  pozitivna konstanta.

U prostor  $L^2(a, b)$  se može uvesti norma pomoću

$$\|f\| = \left( \int_a^b w(x) f^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad (1.3)$$

i unutrašnji proizvod sa težinom pomoću

$$(f, g) = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx \quad (f, g \in L^2(a, b)), \quad (1.4)$$

pri čemu očigledno važi  $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ . Ukoliko je  $w(x) = 1$ , reč je o prostom unutrašnjem proizvodu. Nadalje će se pod unutrašnjim proizvodom funkcija podrazumevati unutrašnji proizvod sa težinom. U opštijem slučaju kada imamo kompleksne funkcije, unutrašnji proizvod se, takođe, može uvesti kao  $(f, g) = \int w(x) f(x) \overline{g(x)} dx$ , gde linija označava konjugovano kompleksnu vrednost.

U realnom prostoru, unutrašnji proizvod predstavlja preslikavanje koje zadovoljava sledeće uslove:

- a)  $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$  (aditivnost)  
 b)  $(\alpha f, g) = \alpha(f, g)$  (homogenost)  
 c)  $(f, g) = (g, f)$  (simetričnost)  
 d)  $(f, f) > 0, (f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$  (pozitivnost)

Uslovi a) i b) zajedno definišu linearnost. Treba naglasiti i da se u slučaju kompleksnog prostora uslov c), koji unutrašnji proizvod mora da zadovolji, menja u  $(f, g) = \overline{(g, f)}$ .

Unutrašnji proizvod funkcija [1.15] je u stvari generalizacija skalarnog proizvoda vektora gde se za dva normirana vektora kaže da su ortogonalni ako im je skalarni proizvod jednak nuli, a ukoliko su im pravci približno jednaki, skalarni proizvod im je blizak jedinici. Slično tome se za dve normirane funkcije može reći da su “bliže jedna drugoj” ukoliko im je unutrašnji proizvod bliži jedinici. Za unutrašnji proizvod dve funkcije važi takozvana Koši<sup>15</sup>-Švarcova<sup>16</sup> nejednakost  $|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|$ , gde znak jednakosti važi ako i samo ako su funkcije  $f$  i  $g$  međusobno linearno zavisne, tj. ako postoji skalar  $c$  takav da važi  $g = cf$ .

## 1.2.2 Ortogonalni sistemi i postupak ortogonalizacije

Definicija 2: Ortogonalnim sistemom [1.14] nazivamo skup funkcija  $\{f_k\}_{k \in I}$  u prostoru  $L^2(a, b)$  za koji važi

$$(f_n, f_k) = \begin{cases} 0 & k \neq n, \\ \|f_k\|^2 & k = n. \end{cases} \quad (1.5)$$

pri čemu indeksni skup  $I$  može biti konačan, prebrojiv ili neprebrojiv.

U slučaju da je  $\|f_k\| = 1$ , za svako  $k \in I$  kaže se da skup funkcija  $\{f_k\}_{k \in I}$  u prostoru  $L^2(a, b)$  obrazuje ortonormiran skup funkcija i označava se sa  $\{f_k^*\}_{k \in I}$ .

Gram<sup>17</sup>-Šmitov<sup>18</sup> metod ortogonalizacije je postupak kojim se datom skupu linearno nezavisnih vektora  $\{\varphi_0, \varphi_1, \dots\}$  pridružuje ortogonalni sistem vektora  $\{u_0, u_1, \dots\}$ . Najpre se odabere  $u_0 = \varphi_0$ , a zatim se sledeći član  $u_1$  predstavi u obliku  $u_1 = \varphi_1 + c_{10}u_0$  gde je  $c_{10}$  parametar koji se određuje iz uslova ortogonalnosti vektora  $u_1$  i  $u_0$ , tj.

<sup>15</sup> A. L. Cauchy (1789-1857), francuski matematičar

<sup>16</sup> K. H. A. Schwarz (1843-1921), nemački matematičar

<sup>17</sup> J. P. Gram (1850-1916), danski matematičar

<sup>18</sup> E. Schmidt (1876-1959), nemački matematičar

$(u_1, u_0) = (\varphi_1, u_0) + c_{10}(u_0, u_0) = 0$ , odakle je  $c_{10} = -\frac{(\varphi_1, u_0)}{(u_0, u_0)}$ . Ukoliko su već konstruisani

vektori  $u_0, u_1, \dots, u_{k-1}$ , sledeći vektor  $u_k$  se traži u obliku

$$u_k = \varphi_k + c_{k0}u_0 + c_{k1}u_1 + \dots + c_{k,k-1}u_{k-1}, \quad (1.6)$$

pri čemu se parametri  $c_{ki}$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ ) određuju iz uslova

$$(u_k, u_i) = (\varphi_k, u_i) + \sum_{j=0}^{k-1} c_{kj}(u_j, u_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, k-1). \quad (1.7)$$

Prema tome, važi  $c_{ki} = -\frac{(\varphi_k, u_i)}{(u_i, u_i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ ), tj.

$$u_k = \varphi_k - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\varphi_k, u_i)}{(u_i, u_i)} u_i \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (1.8)$$

### 1.2.3 Primeri ortogonalnih sistema

Na ovom mestu biće samo navedeni neki interesantni ortogonalni sistemi od kojih će pojedini biti korišćeni u daljem toku disertacije.

– Trigonometrijski sistem

Trigonometrijski sistem  $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots\}$  je ortogonalan

uz unutrašnji proizvod definisan kao  $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ .

– Ortogonalni polinomi na jediničnom krugu

Sistem monoma  $\{z^n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  je ortonormiran sa unutrašnjim proizvodom

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{j\theta}) \overline{g(e^{j\theta})} d\theta. \quad (1.9)$$

– Ortogonalni polinomi na jediničnom disku

Sistem monoma  $p_n(z) = \sqrt{(n+1)/\pi} z^n$ ,  $n = 0, 1, \dots$  je ortonormiran sa unutrašnjim

proizvodom definisanim dvostrukim integralom  $(f, g) = \iint_{|z| \leq 1} f(z) \overline{g(z)} dx dy$ .

– Malmkvist-Takenakin sistem ortogonalnih funkcija

Neka je  $\{a_v\}_{v \in \mathbb{N}_0}$  niz kompleksnih brojeva takav da je  $|a_v| < 1$  ( $v = 0, 1, \dots$ ). Sistem racionalnih funkcija

$$w_n(z) = \frac{\prod_{v=0}^{n-1} (z - a_v)}{\prod_{v=0}^{n-1} (z - 1/\bar{a}_v)}, \quad n \in N_0 \quad (1.10)$$

je ortogonalan u odnosu na unutrašnji proizvod  $(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{j\theta}) \overline{g(e^{j\theta})} d\theta$ . Može se primetiti da ovaj sistem predstavlja generalizaciju ortogonalnih polinoma na jediničnom krugu. Za normu ovih funkcija važi relacija  $\|w_n\|^2 = \frac{|a_0 a_1 \dots a_n|}{1 - |a_n|^2}$ .

– Mincovi ortogonalni polinomi

Neka je  $\Lambda_n = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  niz kompleksnih brojeva takav da je  $\text{Re}(\lambda_k) > -1/2$ ,  $k \in N_0$ . Tada se mogu uvesti takozvani Minc-Ležandrovi polinomi na intervalu  $(0, 1]$  kao

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} W_n(z) x^z dz, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1.11)$$

gde kontura  $\Gamma$  okružuje sve polove racionalne funkcije

$$W_n(z) = \prod_{v=0}^{n-1} \frac{z + \bar{\lambda}_v + 1}{z - \lambda_v} \cdot \frac{1}{z - \lambda_v} \quad (n \in N_0). \quad (1.12)$$

Polinomi dati sa (1.11) su ortogonalni u odnosu na unutrašnji proizvod  $(f, g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx$ . Odgovarajući ortonormirani polinomi se dobijaju pomoću relacije  $P_n^*(x) = (1 + \lambda_n + \bar{\lambda}_n)^{1/2} P_n(x)$ .

## 1.3 Ortogonalni polinomi

### 1.3.1 Ortogonalni polinomi na realnoj liniji i njihove osobine

Neka je  $P_n$  skup svih algebarskih polinoma  $p_n$  najvećeg stepena  $n$ , tj.  $p_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ . Polinom je moničan ukoliko je  $a_n=1$ . Posmatrajmo kao specijalan slučaj skupa funkcija prirodni bazis  $\{1, x, x^2, \dots\}$  i prostor  $X=L^2(a, b)$ , gde je  $x \rightarrow w(x)$  težinska funkcija. Koristeći Gram-Šmitov postupak ortogonalizacije, moguće je

konstruisati ortogonalni bazis  $\{Q_k\}_{k \in N_0}$  u  $X$ . Zavisno od izbora težinske funkcije mogu se dobiti različite klase ortogonalnih polinoma [1.2].

Ako je  $\{Q_k\}_{k \in N_0}$  niz polinoma ortogonalan na  $(a, b)$  sa težinskom funkcijom  $w(x)$ , onda važe sledeće teoreme od kojih će neke biti navedene bez dokaza.

Teorema 1: Ako je niz  $\{Q_k\}_{k \in N_0}$  ortogonalan na  $(a, b)$  u odnosu na težinsku funkciju  $x \rightarrow w(x)$ , tada je i niz  $\{c_k Q_k\}_{k \in N_0}$ , gde su  $c_k$  konstante različite od nule, takođe ortogonalan na  $(a, b)$  u odnosu na istu težinsku funkciju.

Teorema 2: Članovi niza  $\{Q_k\}_{k \in N_0}$  ortogonalnih polinoma mogu se izraziti preko eksplicitne formule

$$Q_n(x) = A_n \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_n \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_{n+1} \\ \vdots & & & \\ C_{n-1} & C_n & \cdots & C_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad (1.13)$$

gde je  $A_n$  konstanta različita od nule, a  $C_k$  ( $k=0,1,\dots,2n-1$ ) momenti težinske funkcije definisani poznatim izrazom  $C_k = \int_a^b x^k w(x) dx$  ( $k = 1,2,\dots$ ).

Teorema 3: Proizvoljan algebarski polinom  $R(x)$  stepena  $n$  može se predstaviti kao linearna kombinacija polinoma iz ortogonalnog niza  $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$ , tj.

$R(x) = \sum_{i=0}^n a_i Q_i(x)$ , gde se koeficijenti  $a_i$  izračunavaju pomoću

$$a_i = \frac{(R(x), Q_i(x))}{\|Q_i\|^2} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (1.14)$$

Dokaz: Dokazuje se matematičkom indukcijom. Tvrdjenje teoreme je tačno za konstante, tj. za polinome nultog stepena. Pretpostavimo da je tvrdjenje tačno za sve polinome stepena manjeg od  $n$ . Pošto su oba polinoma  $R(x)$  i  $Q_n(x)$  stepena  $n$ , uvek možemo izabrati konstantu  $a_n$  tako da se član sa  $x^n$  polinoma  $R(x)$  poklopi sa  $a_n Q_n$ . Tada je razlika  $R(x) - a_n Q_n(x)$  polinom stepena  $(n-1)$  pa se na osnovu početne pretpostavke

može napisati u obliku:  $R(x) - a_n Q_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i Q_i(x)$ , čime je dokaz završen. •



### 1.3.2 Važnije relacije vezane za ortogonalne polinome

Teorema 4: Između tri uzastopna polinoma u nizu  $\{Q_k(x)\}_{k \in N_0}$  postoji rekurentna relacija

$$Q_{k+1}(x) - (\alpha_k x + \beta_k)Q_k(x) + \gamma_k Q_{k-1}(x) = 0, \quad (1.15)$$

gde su  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$  konstante koje zavise od  $k$ .

Dokaz: Izaberimo  $\alpha_k$  tako da polinom  $R(x) = Q_{k+1}(x) - \alpha_k x Q_k(x)$  bude stepena  $k$ . Na osnovu teoreme 3, ovaj polinom se može predstaviti kao linearna kombinacija polinoma  $Q_0, Q_1, \dots, Q_k$ , tj. u obliku

$$Q_{k+1}(x) - \alpha_k x Q_k(x) = \beta_k Q_k(x) - \sum_{j=1}^k \gamma_j Q_{j-1}(x). \quad (1.16)$$

Množenjem poslednjeg izraza sa  $w(x)Q_i(x)$  i integracijom u granicama od  $a$  do  $b$  dobijamo

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x) Q_{k+1}(x) Q_i(x) dx - \alpha_k \int_a^b w(x) Q_k(x) x Q_i(x) dx = \\ = \beta_k \int_a^b w(x) Q_k(x) Q_i(x) dx - \sum_{j=1}^k \gamma_j \int_a^b w(x) Q_{j-1}(x) Q_i(x) dx, \end{aligned} \quad (1.17)$$

ili u skladu sa definicijom unutrašnjeg proizvoda (1.4)

$$(Q_{k+1}, Q_i) - \alpha_k (Q_k, x Q_i) = \beta_k (Q_k, Q_i) - \sum_{j=1}^k \gamma_j (Q_{j-1}, Q_i). \quad (1.18)$$

Ako je  $0 \leq i \leq k-2$ , korišćenjem osobine ortogonalnosti niza  $\{Q_k\}_{k \in N_0}$ , zaključujemo da je  $\gamma_j = 0$  ( $j=1, \dots, k-1$ ). Prema tome, jednakost se svodi na (1.15), što je trebalo i dokazati. •

Treba naglasiti da važi i obrnuto tvrđenje tj. ako niz polinoma zadovoljava tročlanu rekurentnu relaciju (1.15), tada postoji interval  $(a, b)$  i težinska funkcija  $w(x)$  u odnosu na koju je ovaj niz polinoma ortogonalan na tom intervalu. Takođe, treba napomenuti da je relacija (1.15) tačna i za  $k=0$ , ukoliko usvojimo  $Q_{-1}(x) = 0$ .

Tročlana rekurentna relacija (1.15) ima važnu ulogu u teoriji ortogonalnih polinoma iz tri razloga:

1. Omogućava lako generisanje niza ortogonalnih polinoma. Počevši od  $Q_{-1}(x) = 0$  i  $Q_0(x) = 1$ , lako se pomoću (1.4) dobijaju sledeći članovi niza  $Q_1(x), Q_2(x), \dots$

2. Jednostavno se izračunavaju konačne sume oblika  $\sum_{k=0}^m C_k Q_k(x)$ , koje se često javljaju u teoriji aproksimacija.
3. Istu tročlanu relaciju zadovoljavaju i funkcije druge vrste u odnosu na polinom  $Q_k$

$$W_k(x) = \int_a^b \frac{w(x)}{x-t} Q_k(t) dt \quad (x \notin (a, b)). \quad (1.19)$$

Teorema 5: Za ortogonalni niz polinoma  $\{Q_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$  važi sledeća sumaciona formula (poznata kao Kristofel<sup>19</sup>-Darbuov<sup>20</sup> identitet)

$$\sum_{k=0}^n \frac{Q_k(x)Q_k(t)}{\|Q_k\|^2} = \frac{1}{\alpha_n \|Q_n\|^2} \frac{Q_{n+1}(x)Q_n(t) - Q_{n+1}(t)Q_n(x)}{x-t}, \quad (1.20)$$

gde je  $\alpha_n$  konstanta koja se javlja u rekurentnoj relaciji (1.15).

Dokaz: Množenjem tročlane relacije (1.15) sa  $Q_k(t)$  dobija se

$$Q_{k+1}(x)Q_k(t) - (\alpha_k x + \beta_k)Q_k(x)Q_k(t) + \gamma_k Q_{k-1}(x)Q_k(t) = 0. \quad (1.21)$$

Zamenom promenljivih  $x$  i  $t$  u poslednjoj relaciji dobijamo

$$Q_{k+1}(t)Q_k(x) - (\alpha_k x + \beta_k)Q_k(t)Q_k(x) + \gamma_k Q_{k-1}(t)Q_k(x) = 0. \quad (1.22)$$

Oduzimanjem relacije (1.22) od (1.21) dobijamo

$$Q_{k+1}(x)Q_k(t) - Q_{k+1}(t)Q_k(x) = \alpha_k(x-t)Q_k(x)Q_k(t) + \gamma_k [Q_k(x)Q_{k-1}(t) - Q_{k-1}(x)Q_k(t)]. \quad (1.23)$$

Sa druge strane, iz rekurentne relacije na osnovu ortonormalnosti dobijamo relacije

$$\alpha_k \int_a^b xw(x)Q_k(x)Q_{k-1}(x)dx = \gamma_k \quad \text{i} \quad \alpha_{k-1} \int_a^b xw(x)Q_k(x)Q_{k-1}(x)dx = 1, \quad \text{kao i njihov odnos}$$

$$\frac{\gamma_k}{\alpha_k} = \frac{1}{\alpha_{k-1}}.$$

Na osnovu poslednjeg odnosa jednačina (1.23) postaje

$$\frac{Q_{k+1}(x)Q_k(t) - Q_k(x)Q_{k+1}(t)}{\alpha_k} = (x-t)Q_k(x)Q_k(t) + \frac{Q_k(x)Q_{k-1}(t) - Q_{k-1}(x)Q_k(t)}{\alpha_{k-1}}. \quad (1.24)$$

Ova formula važi za  $k=1,2,3,\dots$ . Ona može važiti i za  $k=0$  uz konvenciju  $Q_{-1}(x)=0$ , dok  $\alpha_{-1} \neq 0$  može biti proizvoljno. Sabiranjem poslednjih jednakosti za  $k=0,1,2,\dots,n$  dobija se upravo formula (1.20). •

<sup>19</sup> E. B. Cristoffel (1829-1900), nemački matematičar

<sup>20</sup> G. Darboux (1842-1917), francuski matematičar

### 1.3.3 Nule ortogonalnih polinoma

Teorema 6: Sve nule polinoma  $Q_k(x)$  su realne, različite (proste) i leže u intervalu  $(a, b)$ .

Dokaz: Neka na intervalu  $(a, b)$  polinom  $Q_k(x)$  menja znak samo u tačkama  $x_1, x_2, \dots, x_r$  koje su različite. Ove tačke su u stvari nule neparnog reda polinoma  $Q_k(x)$  koje pripadaju intervalu  $(a, b)$ . Uvedimo polinom  $B(x) = \prod_{j=1}^r (x - x_j)$ . Proizvod  $Q_k(x)B(x)$  ne

menja znak na segmentu  $[a, b]$ . Neka je, na primer,  $Q_k(x)B(x) \geq 0$ . Odatle je i

$\int_a^b w(x)Q_k(x)B(x)dx \geq 0$ . Ako bismo pretpostavili da je  $r < k$ , važi bi (po teoremi 3)

$$B(x) = \sum_{i=0}^r b_i A_i(x) \quad \text{i} \quad \int_a^b w(x)Q_k(x)B(x)dx = \sum_{i=0}^r b_i \int_a^b w(x)Q_k(x)A_i(x)dx = 0 \quad \text{što je u}$$

suprotnosti sa već navedenim  $\int_a^b w(x)Q_k(x)B(x)dx \geq 0$ . Iz ove protivrečnosti sleduje  $r=n$ ,

što je i trebalo dokazati. •

Teorema 7: Sve nule polinoma  $Q_k(x)$  leže strogo između nula sledećeg polinoma u nizu  $(Q_{k+1}(x))$ .

Dokaz: Za ortogonalni niz polinoma  $\{Q_k\}_{k \in N_0}$  važi identitet

$$\sum_{k=0}^n \frac{Q_k^2(x)}{\|Q_k\|^2} = \frac{1}{\alpha_n \|Q_n\|^2} (Q'_{n+1}(x)Q_n(x) - Q_{n+1}(x)Q'_n(x)). \quad (1.25)$$

Ovaj rezultat se dobija direktno iz relacije (1.20), prelaskom na graničnu vrednost, kada  $t \rightarrow x$ . Leva strana jednačine (1.25) je pozitivna za svako  $x$  jer je  $Q_0(x) = Q_0 \neq 0$ . Iz (1.25) sledi da polinomi  $Q_n(x)$  i  $Q_{n+1}(x)$  nemaju zajedničkih nula. Zaista, ako bi  $x = \alpha$  bila zajednička nula tih polinoma, tada bi desna strana relacije (1.25) bila jednaka nuli za  $x = \alpha$ , dok je leva strana te jednakosti pozitivna.

Za dve uzastopne nule polinoma  $Q_{n+1}(x)$  važi nejednakost  $Q'_{n+1}(x_k^{(n+1)})Q'_{n+1}(x_{k+1}^{(n+1)}) < 0$ . Pretpostavimo da je  $\alpha_n > 0$ ; u suprotnom slučaju dokaz bi bio analogan. Iz (1.25) slede nejednakosti  $Q_n(x_k^{(n+1)})Q'_{n+1}(x_k^{(n+1)}) > 0$  i  $Q_n(x_{k+1}^{(n+1)})Q'_{n+1}(x_{k+1}^{(n+1)}) > 0$  čijim se množenjem dobija  $Q_n(x_k^{(n+1)})Q_n(x_{k+1}^{(n+1)})Q'_{n+1}(x_k^{(n+1)})Q'_{n+1}(x_{k+1}^{(n+1)}) > 0$ . Konačno, iz poslednje dve izvedene nejednakosti sledi nejednakost  $Q_n(x_k^{(n+1)})Q_n(x_{k+1}^{(n+1)}) < 0$ . Dakle, polinom  $Q_n(x)$  ima različite znakove u tačkama  $x_k^{(n+1)}$  i  $x_{k+1}^{(n+1)}$ . Na osnovu neprekidnosti

zaključujemo da u intervalu  $(x_k^{(n+1)}, x_{k+1}^{(n+1)})$  postoji bar jedna nula polinoma  $Q_n(x)$ . Pošto je broj ovih intervala jednak  $n$ , a polinom  $Q_n(x)$  ima tačno  $n$  različitih nula, zaključujemo da se između dve bilo koje susedne nule polinoma  $Q_{n+1}(x)$  nalazi tačno jedna nula polinoma  $Q_n(x)$ , čime je teorema dokazana. •

## 1.4 Klasični ortogonalni polinomi

### 1.4.1 Definicija i vrste klasičnih ortogonalnih polinoma

Definicija 3: Neka je  $\{Q_k\}_{k \in N_0}$  niz ortogonalnih polinoma na  $(a, b)$  sa težinskom funkcijom  $x \rightarrow w(x)$ . Ortogonalni polinomi  $Q_k$  ( $k=0,1,\dots$ ) nazivaju se klasičnim [1.16] ako težinska funkcija zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d}{dx}(A(x)w(x)) = B(x)w(x), \quad (1.26)$$

gde je  $x \rightarrow B(x)$  polinom prvog stepena, a funkcija  $x \rightarrow A(x)$  je polinom najviše drugog stepena koja u zavisnosti od  $a$  i  $b$  ima oblik

$$A(x) = \begin{cases} (x-a)(b-x) & (a \text{ i } b \text{ konačni}), \\ x-a & (a \text{ konačno, } b = +\infty), \\ b-x & (a = -\infty, b \text{ konačno}), \\ 1 & (a = -\infty, b = +\infty). \end{cases} \quad (1.27)$$

Težinska funkcija  $w(x)$  ima neprekidan prvi izvod za svako  $x \in (a, b)$ , i jedino na krajevima intervala  $(a, b)$  može imati singularitete.

Rešenje diferencijalne jednačine (1.26) je

$$w(x) = \frac{C}{A(x)} \exp\left(\int \frac{B(x)}{A(x)} dx\right), \quad (1.28)$$

gde je  $C$  proizvoljna konstanta. Ako je  $B(x)=rx+q$ , težinska funkcija, u zavisnosti od  $a$  i  $b$  na osnovu (1.28) ima oblik

$$w(x) = \begin{cases} (b-x)^\alpha (x-a)^\beta & (a \text{ i } b \text{ konačni}), \\ (x-a)^s \exp(rx) & (a \text{ konačno, } b = +\infty), \\ (b-x)^t \exp(-rx) & (a = -\infty, b \text{ konačno}), \\ \exp\left(\int B(x) dx\right) & (a = -\infty, b = +\infty), \end{cases} \quad (1.29)$$

gde je  $\alpha = \frac{B(b)}{b-a} - 1$ ,  $\beta = -\frac{B(b)}{b-a} - 1$ ,  $s = B(a) - 1$ ,  $t = B(b) - 1$ .

Granični uslovi zahtevaju da je  $B(a) > 0$  ako je  $a$  konačno, da je  $B(b) < 0$  ako je  $b$  konačno, kao i da je  $r = B'(x) < 0$ .

Na osnovu (1.29) može se zaključiti kakav oblik mora da ima težinska funkcija kod klasičnih ortogonalnih polinoma. S obzirom na to da se primenom linearne transformacije svaki interval  $(a, b)$  može transformisati u jedan od intervala  $(-1, 1)$ ,  $(0, +\infty)$  i  $(-\infty, +\infty)$  ne umanjujući opštost, za težinsku funkciju može se respektivno uzeti  $x \rightarrow (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ ,  $x \rightarrow x^s e^{-x}$ ,  $x \rightarrow e^{-x^2}$ . Tada na osnovu graničnih uslova parametri  $\alpha, \beta$  i  $s$  moraju ispunjavati sledeće uslove:  $\alpha > -1, \beta > -1, s > -1$ . Razmotrimo posebno ova tri slučaja težinske funkcije:

1. Neka je  $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$  i  $(a, b) = (-1, 1)$ . Tada je funkcija  $A$  data u obliku

$A(x) = 1 - x^2$ , a funkcija  $B$  se može naći iz diferencijalne jednačine (1.26)

$$B(x) = \frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} (A(x)w(x)) = \beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x. \quad \text{Odgovarajući ortogonalni}$$

polinomi nazivaju se Jakobijevi i označavaju se sa  $P^{(\alpha, \beta)}(x)$ . Specijalni slučajevi Jakobijevih polinoma [1.17] su:

- Ležandrovi polinomi  $P_k(x)$  ( $\alpha = \beta = 0$ ),
- Čebiševljevi polinomi prve vrste  $T_k(x)$  ( $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ ),
- Čebiševljevi polinomi druge vrste  $S_k(x)$  ( $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ),
- Gegenbauerovi (ultrasferni) polinomi  $C_k^\lambda(x)$  ( $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$ ).

Treba primetiti da klasa Gegenbauerovih polinoma obuhvata Ležandrove kao i Čebiševljeve polinome.

2. Neka je  $w(x) = x^s e^{-x}$  i  $(a, b) = (0, +\infty)$ . Tada je  $A(x) = x$  i  $B(x) = -x + s + 1$ .

Odgovarajući polinomi su generalisani Lagerovi polinomi, u oznaci  $L_k^s(x)$ .

Polinomi koji se dobijaju za  $s=0$  nazivaju se Lagerovi i označavaju se sa  $L_k^0(x)$  ili jednostavnije  $L_k(x)$ .

3. Neka je, najzad,  $w(x) = e^{-x^2}$  i  $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ . Tada je  $A(x) = 1$  i  $B(x) = -2x$ . Polinomi koji se dobijaju u ovom slučaju nazivaju se Ermitovi i označavaju se sa  $H_k(x)$ .

### 1.4.2 Osobine klasičnih ortogonalnih polinoma

Teorema 8: Niz izvodnih polinoma  $\{Q_k^{(m)}(x)\}_{k=m, m-1, \dots}$  klasičnih ortogonalnih polinoma takođe formira niz klasičnih ortogonalnih polinoma na intervalu  $(a, b)$  sa težinskom funkcijom  $x \rightarrow w_m(x) = A^m(x)w(x)$ . Odgovarajuća diferencijalna jednačina za težinsku funkciju je  $\frac{d}{dx}(A(x)w_m(x)) = B_m(x)w_m(x)$  gde je  $B_m(x) = mA'(x) + B(x)$ .

Teorema 9: Polinom  $x \rightarrow Q_k(x)$  je jedno partikularno rešenje homogene diferencijalne jednačine drugog reda (ovo je jednačina Šturma<sup>21</sup>-Liuvilovog<sup>22</sup> tipa)

$$A(x)y'' + B(x)y' + \lambda_k y = 0, \quad (1.30)$$

gde je  $\lambda_k = -k \left[ \frac{1}{2}(k-1)A''(x) + B'(x) \right]$  ( $k \in N_0$ ).

Dokaz: Neka je  $m < k$ . Kako je niz  $\{Q_k'(x)\}_{k \in N_0}$  ortogonalan na intervalu  $(a, b)$  sa težinskom funkcijom  $x \rightarrow w_1(x) = A(x)w(x)$  (po teoremi 8), važi jednakost

$$I_m = \int_a^b A(x)w(x)Q_k'(x)x^{m-1} dx = 0. \quad (1.31)$$

Primenom parcijalne integracije ( $dv = x^{m-1} dx$ ) i korišćenjem graničnih uslova dobijamo

$$I_m = -\frac{1}{m} \int_a^b \frac{d}{dx}(A(x)w(x)Q_k'(x))x^m dx = -\frac{1}{m} \int_a^b [B(x)w(x)Q_k'(x) + A(x)w(x)Q_k''(x)]x^m dx, \quad \text{tj.}$$

$$I_m = -\frac{1}{m} \int_a^b w(x)x^m \tilde{Q}_k(x) dx, \quad \text{gde je } \tilde{Q}_k(x) = B(x)Q_k'(x) + A(x)Q_k''(x). \text{ S obzirom na to da}$$

je  $I_m = 0$  za svako  $m < k$  ( $m \in N$ ), zaključujemo da je niz polinoma  $\{\tilde{Q}_k\}_{k \in N_0}$  ortogonalan na  $(a, b)$  sa težinskom funkcijom  $x \rightarrow w(x)$ . S druge strane, zbog jedinstvenosti ovih polinoma imamo

<sup>21</sup> J. Sturm (1803-1855), švajcarski matematičar

<sup>22</sup> J. Liouville (1809-1881), francuski matematičar

$$A(x)Q_k''(x) + B(x)Q_k'(x) + \lambda_k Q_k(x) = 0, \quad (1.32)$$

gde je  $\tilde{Q}_k(x) = -\lambda_k Q_k(x)$ .

Da bismo odredili  $\lambda_k$ , dovoljno je uporediti koeficijente uz  $x^k$  u prethodnoj relaciji. Ako pretpostavimo da je  $Q_k(x) = a_k x^k + \dots$ , imamo  $Q_k'(x) = k a_k x^{k-1} + \dots$  i  $Q_k''(x) = k(k-1) a_k x^{k-2} + \dots$ . Pošto je  $A(x) = \frac{1}{2} A''(0) x^2 + \dots$  i  $B(x) = \frac{1}{2} B'(0) x + r$ , zamenom u (1.32) dobijamo

$$a_k x^k \left( \frac{1}{2} A''(0) k(k-1) + k B'(0) + \lambda_k \right) + \dots = 0, \quad (1.33)$$

odakle se direktno dobija izraz za  $\lambda_k$  iz postavke teoreme. •

Kao što je već rečeno  $B(x)$  je polinom prvog stepena, a  $A(x)$  je polinom najviše drugog stepena, pa su i rezultati za  $\lambda_k$  konstante. Rešenja diferencijalne jednačine (1.30) imaju singularnosti osim za posebno odabrane vrednosti  $\lambda_k$ . Kombinacije  $\lambda_k$  vode nizu polinomnih rešenja ako je ispunjen jedan od tri sledeća uslova:

1.  $A(x)$  je polinom drugog reda sa dve različite realne nule između kojih se nalazi nula polinoma  $B(x)$ . Koeficijenti uz najveće stepene u polinomima  $A(x)$  i  $B(x)$  imaju isti znak. Ispunjenje ovog uslova dovodi do rešenja jednačine u formi polinoma Jakobijevog tipa.
2.  $A(x)$  je polinom prvog reda i njegova nula je različita od nule polinoma  $B(x)$ . Koeficijenti uz najveće stepene u polinomima  $A(x)$  i  $B(x)$  imaju isti znak ako je nula  $B(x)$  manja od nule  $A(x)$  i obrnuto. Ispunjenje ovog uslova dovodi do rešenja jednačine u formi polinoma Lagerovog tipa.
3.  $A(x)$  je konstanta različita od nule čiji je znak suprotan znaku koeficijenta uz najveći stepen polinoma  $B(x)$ . Ispunjenje ovog uslova dovodi do rešenja jednačine u formi polinoma Ermitovog tipa.

U sva tri slučaja rešenje jednačine (1.30) je niz polinoma ortogonalnih na intervalu koji je ograničen nulama polinoma  $A(x)$  sa težinskom funkcijom datom izrazom (1.28).

### 1.4.3 Važnije relacije vezane za klasične ortogonalne polinome

Teorema 10: Za članove niza klasičnih polinoma  $\{Q_k\}_{k \in N_0}$  važi poznata Rodriguesova<sup>23</sup> formula

$$Q_k(x) = \frac{1}{C_k w(x)} \frac{d^k}{dx^k} (A(x)^k w(x)) \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (1.34)$$

gde su  $C_k$  konstante različite od nule.

Dokaz: Korišćenjem diferencijalne jednačine za težinsku funkciju (1.26), diferencijalna jednačina (1.30) se može predstaviti i u standardnom Šturm-Liuvilovom obliku

$$\frac{d}{dx} \left( A(x) w(x) \frac{dy}{dx} \right) + \lambda_k w(x) y = 0. \quad (1.35)$$

Na sličan način se, uvođenjem odgovarajućih zamena, može napisati diferencijalna jednačina za  $Q_k^{(m)}(x)$

$$\frac{d}{dx} (w_{m+1}(x) Q_k^{(m+1)}(x)) + \lambda_{km} w_m(x) Q_k^{(m)}(x) = 0. \quad (1.36)$$

Sukcesivnom primenom poslednje jednakosti za  $m=0, 1, \dots, k-1$  dobijamo

$$\begin{aligned} w(x) Q_k(x) &= -\frac{1}{\lambda_{k0}} \frac{d}{dx} (w_1(x) Q_k'(x)) = \\ &= \frac{(-1)^2}{\lambda_{k0} \lambda_{k1}} \frac{d^2}{dx^2} (w_2(x) Q_k''(x)) = \dots = \frac{(-1)^k}{\prod_{m=0}^{k-1} \lambda_{km}} \frac{d^k}{dx^k} (w_k(x) Q_k^{(k)}(x)). \end{aligned} \quad (1.37)$$

Pretpostavimo da je  $Q_k(x) = a_k x^k + \dots$ . Tada je  $Q_k^{(k)}(x) = k! a_k$ . Ako stavimo

$$C_k = \frac{\prod_{m=0}^{k-1} \lambda_{km}}{(-1)^k k! a_k}, \quad (1.38)$$

iz prethodnog direktno sledi (1.34). •

Korišćenjem Košijeve teoreme za izvod reda  $k$  regularne funkcije, formula (1.30) se može predstaviti i u integralnom obliku

$$Q_k(x) = \frac{1}{C_k w(x)} \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{A(z)^k w(z)}{(z-x)^{k+1}} dz, \quad (1.39)$$

gde je  $\Gamma$  zatvorena kontura takva da je  $x \in \text{int } \Gamma$ .

<sup>23</sup> O. Rodrigues (1794-1851), francuski matematičar i ekonomista



U sledećoj tabeli su sumirane i prikazane neke od važnijih formula vezanih za klasične ortogonalne polinome, kao i nekoliko početnih članova ortogonalnih nizova.

Tabela 1.1 *Klasični ortogonalni polinomi – važnije relacije i početni članovi niza*

tip polinoma	interval ortogonalnosti $[a,b]$	težina $w(x)$	diferencijalna jednačina $A(x)y'' + B(x)y' + \lambda_k y = 0$		
			$A(x)$	$B(x)$	$\lambda_k$
Ležandrovi	$[-1,1]$	1	$1-x^2$	$-2x$	$k(k+1)$
Čebiševljevi I	$[-1,1]$	$(1-x^2)^{-1/2}$	$1-x^2$	$-x$	$k^2$
Čebiševljevi II	$[-1,1]$	$(1-x^2)^{1/2}$	$1-x^2$	$-3x$	$k(k+2)$
Lagerovi	$[0,+\infty]$	$e^{-x}$	$x$	$1-x$	$k$
Ermitovi	$[-\infty,+\infty]$	$e^{-x^2}$	1	$-2x$	$2k$
tip polinoma	norma $\ Q_k\ ^2$	Rodriguesova formula - $C_k$	rekurentna relacija $Q_{k+1}(x) - (\alpha_k x + \beta_k)Q_k(x) + \gamma_k Q_{k-1}(x) = 0$		
			$\alpha_k$	$\beta_k$	$\gamma_k$
Ležandrovi	$\frac{2}{2k+1}$	$(-2)^k k!$	$\frac{2k+1}{k+1}$	0	$\frac{k}{k+1}$
Čebiševljevi I	$\frac{\pi/2}{\pi} (k \neq 0)$ $\pi (k = 0)$	$(-2)^k \frac{\Gamma(k+1/2)}{\sqrt{\pi}}$	2	0	1
Čebiševljevi II	$\pi/2$	$2(-2)^k \frac{\Gamma(k+3/2)}{(k+1)\sqrt{\pi}}$	2	0	1
Lagerovi	$(k!)^2$	$k!$	$\frac{-1}{k+1}$	$\frac{2k+1}{k+1}$	$\frac{k}{k+1}$
Ermitovi	$2^k k! \sqrt{\pi}$	$(-1)^k$	2	0	$2k$
tip polinoma	$Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), Q_3(x), Q_4(x), Q_5(x)$				
Ležandrovi	1, $x$ , $(3x^2-1)/2$ , $(5x^3-3x)/2$ , $(35x^4-30x^2+3)/8$ , $(63x^5-70x^3+15x)/8$				
Čebiševljevi I	1, $x$ , $2x^2-1$ , $4x^3-3x$ , $8x^4-8x^2+1$ , $16x^5-20x^3+5x$				
Čebiševljevi II	1, $2x$ , $4x^2-1$ , $8x^3-4x$ , $16x^4-12x^2+1$ , $32x^5-32x^3+6x$				
Lagerovi	1, $1-x$ , $(2-4x+x^2)/2$ , $(6-18x+9x^2-x^3)/6$ , $(24-96x+72x^2-16x^3+x^4)/24$				
Ermitovi	1, $2x$ , $4x^2-2$ , $8x^3-12x$ , $16x^4-48x^2+12$ , $32x^5-160x^3+120x$				

## 1.5 Primena ortogonalnih polinoma u aproksimaciji funkcija

Osnovni problem u teoriji aproksimacija je kako za zadatu funkciju  $f$  iz nekog velikog prostora  $X$  naći jednostavnu funkciju  $\phi$  iz nekog malog podskupa  $\Phi \in X$  takvu da je funkcija  $\phi$  u nekom smislu bliska funkciji  $f$  [1.18]. Posmatrajmo aproksimaciju proizvoljne realne funkcije definisane na segmentu  $[a, b]$  ( $f: [a, b] \rightarrow R$ ) pomoću linearne aproksimacione funkcije

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^n a_i \phi_i(x), \quad (1.40)$$

gde je  $\{\phi_i\}$  sistem linearno nezavisnih funkcija iz prostora  $L^2(a, b)$  u kome je unutrašnji proizvod u odnosu na težinsku funkciju  $x \rightarrow w(x)$  uveden pomoću (1.4). Grešku aproksimacije definišemo pomoću

$$\delta_n(x) = f(x) - \phi(x) = f(x) - \sum_{i=0}^n a_i \phi_i(x). \quad (1.41)$$

Pod najboljom srednje kvadratnom aproksimacijom [1.14] podrazumevamo onu aproksimacionu funkciju  $\phi(x)$  za koju se postiže minimum veličine

$$\|\delta_n\| = \left( \int_a^b w(x) \delta_n^2(x) dx \right)^{1/2}. \quad (1.42)$$

Pitanje postojanja i jedinstvenosti najbolje aproksimacije date funkcije je od najvećeg značaja u teoriji aproksimacija. Glavni konstruktivni elementi koji se koriste u aproksimacijama su algebarski i trigonometrijski polinomi, racionalne funkcije i splajnovi. U ovoj disertaciji, akcenat je na algebarskim polinomima i racionalnim funkcijama.

Teorema 11: Ako  $\{\phi_i\}$  predstavlja skup ortogonalnih polinoma, tj. ako se za sistem aproksimacionih funkcija iskoristi niz  $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ , tada je najbolja srednje kvadratna aproksimacija

$$\phi^*(x) = \sum_{i=0}^n c_i Q_i(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(f, Q_i)}{\|Q_i\|^2} Q_i(x), \quad (1.43)$$

i tada je minimalna srednje kvadratna greška (1.42) data izrazom

$$\|\delta_n\|_{\min} = \left( \int_a^b w(x) f^2(x) dx - \sum_{i=0}^n c_i^2 \|Q_i\|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.44)$$

Dokaz: Najbolja aproksimacija [1.19] se postiže za minimalnu vrednost integrala iz izraza (1.42)

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b w(x) \left( f(x) - \sum_{i=0}^n a_i \phi_i(x) \right)^2 dx = \\ &= \int_a^b w(x) f^2(x) dx - 2 \sum_{i=0}^n a_i \int_a^b w(x) f(x) Q_i(x) dx + \sum_{i=0}^n a_i^2 \|Q_i\|^2. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Ukoliko uvedemo smenu  $c_i = \frac{1}{\|Q_i\|^2} \int_a^b w(x) f(x) Q_i(x) dx$ , dobija se

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b w(x) f^2(x) dx - 2 \sum_{i=0}^n a_i c_i \|Q_i\|^2 + \sum_{i=0}^n a_i^2 \|Q_i\|^2 = \\ &= \int_a^b w(x) f^2(x) dx - \sum_{i=0}^n c_i^2 \|Q_i\|^2 + \sum_{i=0}^n (a_i - c_i)^2 \|Q_i\|^2. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Iz poslednjeg izraza se vidi da se minimum integrala  $I$  postiže ako je  $a_i = c_i$ , čime je dokaz završen. •

Skup koeficijenata  $c_i = \frac{(f, Q_i)}{\|Q_i\|^2} = \frac{\int_a^b w(x) f(x) Q_i(x) dx}{\int_a^b w(x) Q_i^2(x) dx}$  naziva se spektrom funkcije  $f(x)$  u

odnosu na ortogonalni niz polinoma  $\{Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x)\}$ , a aproksimaciona suma

$\sum_{i=0}^n c_i Q_i(x)$  se naziva spektralnom sumom funkcije  $f(x)$  u odnosu na isti niz polinoma, u

zapisu:  $f(x) \sim \sum_{i=0}^n c_i Q_i(x)$ . Tačnost aproksimacije raste sa povećanjem reda

aproksimacije  $n$ . Ako  $n$  teži beskonačnom, konačna suma u (1.43) prelazi u beskonačan niz smanjujući srednje kvadratnu grešku na nulu. Tada (prema (1.43)) važi Parsevalova<sup>24</sup> relacija

$$\int_a^b w(x) f^2(x) dx = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 \|Q_i\|^2. \quad (1.47)$$

Za skup ortogonalnih funkcija  $\{Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_n(x)\}$  se kaže da je kompletan ako za bilo koju kontinualnu funkciju  $f(x)$ , srednje kvadratna greška teži nuli kako  $n$  teži

<sup>24</sup> M. A. Parseval (1755-1836), francuski matematičar

beskonačnosti, tj. ako je zadovoljena Parsevalova relacija. Ukoliko je  $n$  konačno, tada važi Beselova<sup>25</sup> nejednakost

$$\int_a^b w(x) f^2(x) dx \geq \sum_{i=0}^n c_i^2 \|Q_i\|^2. \quad (1.48)$$

## 1.6 Generalizacije ortogonalnih polinoma

### 1.6.1 Šiftovani ortogonalni polinomi

Polinomi koji su do sada razmatrani su ortogonalni na određenom intervalu. Da bi bilo moguće analizirati signale na proizvoljnim intervalima, uvode se šiftovani polinomi [1.16] kojima je moguće opisati signal na bilo kom razmatranom intervalu.

Svi ortogonalni polinomi u konačnom opsegu (Ležandrovi, Čebiševljevi prve i druge vrste, Jakobijevi i Gegenbauerovi) su definisani na intervalu  $[-1, 1]$ . U cilju analize i obrade realnih signala koji mogu uzimati vrednosti na proizvoljnom intervalu, klasični polinomi se mogu redefinisati, tj. šiftovati na željeni interval  $[\tau_a, \tau_b]$ . Šiftovani ortogonalni polinomi  $\{\psi_k(\tau)\}$  se definišu na proizvoljnom intervalu  $[\tau_a, \tau_b]$  i mogu se dobiti iz regularnih (nešiftovanih)  $\{\phi_k(x)\}$  pomoću smene  $x = \tau^*$  definisane sa

$$\tau^* = \frac{2(\tau - \tau_a)}{\tau_b - \tau_a} - 1 = A\tau + B, \quad (1.49)$$

gde je  $A = \frac{2}{\tau_b - \tau_a}$  i  $B = -\frac{(\tau_b + \tau_a)}{(\tau_b - \tau_a)}$ , uz uslov da je interval ortogonalnosti konačan.

Tada se menja i sama definicija ortogonalnosti

$$(\psi_n, \psi_k) = \int_{\tau_a}^{\tau_b} \omega(\tau) \psi_n(\tau) \psi_k(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & k \neq n, \\ \|\psi_k\|^2 = \frac{\|\phi_k\|^2}{A} & k = n. \end{cases} \quad (1.50)$$

gde je  $\omega(\tau) = w(\tau^*)$  i  $\phi_k(\tau) = \psi_k(\tau^*)$ , a norme  $\|\phi_k\|$  se mogu naći u tabeli 1.1 za različite tipove polinoma.

Klasični Lagerovi polinomi su ortogonalni na intervalu  $[0, +\infty]$  sa težinskom funkcijom  $w(x) = e^{-x}$ , a Ermitovi na  $[-\infty, +\infty]$  sa  $w(x) = e^{-x^2}$ . Može se primetiti da u oba

<sup>25</sup> F. W. Bessel (1784-1846), nemački matematičar i astronom

slučaja važi  $w(0)=1$  i  $w(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ . To znači da ove težinske funkcije drugačije odmeravaju velike i male vrednosti  $x$ . Zbog toga, a u cilju boljeg predstavljanja funkcije  $f(x)$ ,  $x \in [\tau_a, \tau_b]$ , centar ( $x=0$ ) treba pomeriti (šiftovati) u  $\tau_a$  smenom  $x = \tau - \tau_a$ , tako da nova težinska funkcija postaje u oba slučaja jedinica za  $\tau = \tau_a$ . Dobijeni polinomi su takođe šiftovani, ali treba primetiti da opisano šiftovanje kod Lagerovih i Ermitovih polinoma ima potpuno drugačiji smisao od šiftovanja kod polinoma ortogonalnih na konačnom intervalu [1.20].

Proizvoljna funkcija  $f(\tau)$  definisana na intervalu  $[\tau_a, \tau_b]$  može se aproksimirati sistemom šiftovanih ortogonalnih polinoma  $\{\psi_k(\tau)\}$

$$f(\tau) \approx \sum_{i=0}^n c_i \psi_i(\tau) = C\Psi(\tau), \quad (1.51)$$

gde je  $\Psi(\tau) = [\psi_0(\tau) \ \psi_1(\tau) \ \dots \ \psi_n(\tau)]^T$  vektor šiftovanih polinoma koji se koriste za aproksimaciju, a  $C = [c_0 \ c_1 \ \dots \ c_n]$  spektralni vektor u kome se spektralni koeficijenti računaju kao  $c_i = \frac{1}{\|\psi_i\|^2} \int_{\tau_a}^{\tau_b} \omega(\tau) f(\tau) \psi_i(\tau) d\tau$ .

## 1.6.2 Kvazi ortogonalni polinomi

Koncept kvazi-ortogonalnost prvi put je uveden još 1923. godine u radu [1.21] kao matematički alat za rešavanje problema momenta u mehanici. Kvazi-ortogonalne funkcije, a posebno kvazi-ortogonalni polinomi kasnije su razmatrani u većem broju radova [1.22], [1.23].

**Definicija 4:** Kvazi ortogonalnim sistemom nazivamo sekvencu polinoma  $\{P_n^k(x)\}$  za koju važi

$$(P_n^k(x), P_m^k(x)) = \int_a^b P_n^k(x) P_m^k(x) w(x) dx = \begin{cases} 0, & 0 \leq m \leq n-k-1 \\ N_{n,m}^k \neq 0, & n \geq k+1 \end{cases} \quad (1.52)$$

gde  $k$  predstavlja red kvazi-ortogonalnosti,  $a$  i  $b$  su granice kvazi-ortogonalnosti, a  $w(x)$  predstavlja težinsku funkciju.

Kvazi ortogonalnost se obično sagledava u klasičnom maniru (u odnosu na klasične ortogonalne polinome), pa se i kvazi ortogonalni sistemi obično konstruišu na

osnovu klasičnih ortogonalnih sistema [1.24]. Sledeće dve teoreme daju vezu između klasičnih i kvazi ortogonalnih polinoma [1.25].

Teorema 12: Ukoliko je  $\{P_n(x)\}$  sekvenca ortogonalnih polinoma, tada je polinom koji predstavlja njihovu linearnu kombinaciju

$$R_n(x) = P_n(x) + c_1 P_{n-1}(x) + \dots + c_k P_{n-k}(x) \quad (1.53)$$

kvazi ortogonalan i to sa redom ortogonalnosti  $k$ . Pritom, koeficijenti  $c_i$  mogu biti zavisni od  $n$ .

Teorema 13: Svaka sekvenca ortogonalnih polinoma na određenom intervalu ortogonalnosti i sa određenom težinskom funkcijom je kvazi ortogonalna sa nekom drugom težinskom funkcijom.

Na primer, ukoliko promenimo težinsku funkciju kod Ležandrovih polinoma ortogonalnih na  $(-1, 1)$  sa  $w(x)=1$  na  $w(x)=x^k$ , dobićemo kvazi ortogonalne polinome Ležandrovog tipa na istom intervalu.

U cilju analize osobina i relacija kvazi ortogonalnih polinoma, razmotrimo primer kada su granice intervala kvazi ortogonalnosti  $a=0$ ,  $b=1$  i težinska funkcija  $w(x)=x$ .

Tada je po definiciji kvazi ortogonalnosti

$$\int_0^1 P_n^k(x) P_m^k(x) x dx = \begin{cases} 0, & 0 \leq m \leq n-k-1 \\ N_{n,m}^k \neq 0, & n \geq k+1 \end{cases} \quad (1.54)$$

gde se norme  $N_{n,m}^k$  mogu lako dobiti u zatvorenoj formi korišćenjem eksplicitnih

relacija:  $P_n^k(x) = x \sum_{i=1}^n A_{n,i}^k x^{i-1}$ , gde je  $A_{n,i}^k = \frac{(-1)^{n-k+i} (n+i-k-1)!}{i!(i-1)!(n-i)!}$ .

Na primer, u slučaju Ležandrovih kvazi ortogonalnih polinoma prvog reda ( $k=1$ ) izračunavamo sledeće dve konstante:

$$1. \quad N_{n,n}^1 = \int_0^1 P_n^1(x) P_{n-1}^1(x) x dx = \frac{1}{2n(2n+1)(n+1)},$$

$$2. \quad N_{n,n-1}^1 = \int_0^1 P_n^1(x) P_{n-1}^1(x) x dx = -\frac{1}{2n(2n-1)(2n+1)}.$$

U slučaju Ležandrovih kvazi ortogonalnih polinoma drugog reda ( $k=2$ ) imamo tri konstante:

$$1. \quad N_{n,n}^2 = \int_0^1 P_n^2(x) P_n^2(x) x dx = \frac{1}{8f(n)}, \text{ gde je}$$

$$f(n) = \frac{n(n-1)(2n-1)(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$2. \quad N_{n,n-1}^2 = \int_0^1 P_n^2(x) P_{n-1}^2(x) x dx = -\frac{1}{30f(n)}, \text{ gde je}$$

$$f(n) = \frac{4}{15}(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{2}{3}n(n-1)(n-2)(n-3) + \\ + 3(n-1)(n-2)(n-3) + \frac{19}{2}(n-2)(n-3) + 20(n-3) + 21,$$

$$3. \quad N_{n,n-2}^2 = \int_0^1 P_n^2(x) P_{n-2}^2(x) x dx = \frac{1}{240f(n)}, \text{ gde je}$$

$$f(n) = \frac{2}{15}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + \frac{2}{3}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) + \\ + \frac{19}{6}(n-2)(n-3)(n-4) + 11(n-3)(n-4) + 25(n-4) + 28.$$

Razmotrimo sada ponovo Ležandrove kvazi ortogonalne polinome. Za ove polinome važe sledeće glavne relacije, analogne relacijama koje važe za klasične Ležandrove polinome:

$$\text{Kristofelova formula } \frac{d}{dx} x P_{n+1}^k(x) - \frac{d}{dx} x P_{n-1}^k(x) = (2n+1) P_n^k(x),$$

$$\text{Rodriguesova formule } P_n^k(x) = \frac{1}{x} \frac{d^{(n-k)}}{dx^{(n-k)}} x^{n-k+1} (x-1)^n,$$

Bonetova rekurentna relacija

$$(n+2) P_{n+1}^1(x) = (2n+1)(2x-1) P_n^1(x) - (n-1) P_{n-1}^1(x) \text{ (za } k=1)$$

$$x(x-1) \frac{d^2 P_n^2(x)}{dx^2} + (x-2) \frac{d P_n^2(x)}{dx} - n^2 P_n^2(x) = 0 \text{ (za } k=2).$$

Ove poslednje relacije pripadaju klasi hipergeometrijskih diferencijalnih jednačina čija je forma data izrazom

$$z(z-1) \frac{d^2 P}{dz^2} + [(a+b+1)z-c] \frac{dP}{dz} + (ab)P = 0, \quad (1.55)$$

i čije je rešenje  ${}_2F_1(a, b, c, x)$ . U specijalnim slučajevima, za kombinacije parametara  $a=n+1, b=-n, c=2$ , i  $a=n, b=-n, c=2$ , dobijamo poslednje dve jednačine (za  $k=0$  i  $k=1$ ).

Proizvoljna funkcija  $f(x)$  može se razviti u red kvazi-ortogonalnih polinoma  $k$ -tog reda na sledeći način (određivanje kvazi-Furijeovih koeficijenata)

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i P_i^k(x). \quad (1.56)$$

Na primer, za polinome kvazi ortogonalnosti reda  $k=1$ , množenjem sa  $P_i^1$  i integraljanjem od 0 do 1 dobija se

$$\int_0^1 f(x)P_i^1(x)dx = a_{i-1} \int_0^1 P_{i-1}^1(x)P_i^1(x)dx + a_i \int_0^1 P_i^1(x)P_i^1(x)dx + a_{i+1} \int_0^1 P_{i+1}^1(x)P_i^1(x)dx. \quad (1.57)$$

Ako uvedemo oznaku:  $F_i^1 = \int_0^1 f(x)P_i^1(x)dx$ , dobija se:

$a_{i-1}^1 N_{i,i-1}^1 + a_i^1 N_{i,i}^1 + a_{i+1}^1 N_{i,i+1}^1 = F_i^1$ , ( $i=1, \dots, n$ ), tj. sistem jednačina

$$\begin{aligned} a_0^1 N_{0,0}^1 + a_1^1 N_{0,1}^1 &= F_1^1 \\ a_0^1 N_{0,1}^1 + a_1^1 N_{1,1}^1 + a_2^1 N_{1,2}^1 &= F_2^1 \\ a_1^1 N_{1,2}^1 + a_2^1 N_{2,2}^1 + a_3^1 N_{2,3}^1 &= F_3^1 \\ &\vdots \\ a_{n-2}^1 N_{n-2,n}^1 + a_{n-1}^1 N_{n-1,n-1}^1 + a_n^1 N_{n-1,n}^1 &= F_n^1 \end{aligned} \quad (1.58)$$

Ovo je sistem od  $n$  jednačina sa  $n+1$  nepoznatih. Da bismo u potpunosti odredili nepoznate koeficijente  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , neophodna je još jedna, dopunska jednačina.

Koristeći osobinu kvazi-ortogonalnosti Ležandrovih polinoma  $P_i(0) = (-1)^i$  i (1.52) dobija se dopunska jednačina

$$a_0^1 - a_1^1 + a_2^1 + \dots + (-1)^n a_n^1 = -f(0). \quad (1.59)$$

Determinanta sistema je

$$D = \begin{vmatrix} N_{0,0}^1 & N_{0,1}^1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ N_{0,1}^1 & N_{1,1}^1 & N_{1,2}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_{1,2}^1 & N_{2,2}^1 & N_{2,3}^1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_{2,3}^1 & N_{3,3}^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & N_{n-1,n}^1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^n \end{vmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (1.60)$$

Primetimo da smo za  $k=1$  dobili sistem jednačina (1.58), kod koga imamo po tri člana na levoj strani znaka jednakosti (izuzev prve i poslednje). Posledica toga je da je determinanta (1.60) trodijagonalna. U opštem slučaju za kvazi ortogonalne polinome reda  $k$ , postupak je isti, samo sistem jednačina (1.58) na levoj strani ima  $2k+1$  članova, a determinanta (1.60) biće  $2k+1$  dijagonalna.



### 1.6.3 Skoro ortogonalni polinomi

Definicija 5: Skoro ortogonalnim sistemom [1.26], [1.27] nazivamo sekvencu polinoma  $\{P_k^{(\varepsilon)}(x)\}$  za koju važi

$$(P_n^{(\varepsilon)}, P_k^{(\varepsilon)}) = \begin{cases} \varepsilon & k \neq n, \\ \|P_k^{(\varepsilon)}\|^2 & k = n. \end{cases} \quad (1.61)$$

gde je  $\varepsilon$  veoma mali pozitivan realni broj ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ).

Očigledno je da važi  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P_n^{(\varepsilon)}(x) = P_n(x)$ , tj. kada  $\varepsilon$  teži nuli, sekvenca skoro ortogonalnih polinoma postaje sekvenca ortogonalnih polinoma. Takođe, treba primetiti da usled prisustva dodatnog  $\varepsilon$  više ne važi distributivnost unutrašnjeg proizvoda. Zbog toga za skoro ortogonalne polinome ne važi većina pravila koja važe za klasične ortogonalne polinome.

Za generisanje skoro ortogonalnih polinoma može se koristiti sledeća procedura: ako sa  $\mu_{j,k}$  označimo unutrašnji proizvod  $\mu_{j,k} = (x^j, P_k^{(\varepsilon)}(x))$ , tada se koeficijenti u izrazu  $P_n^{(\varepsilon)}(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} x^k$  mogu naći kao rešenja sledećeg linearnog algebarskog sistema

$$\begin{bmatrix} \mu_{0,0} & \mu_{1,0} & \cdots & \mu_{n-1,0} \\ \mu_{0,1} & \mu_{1,1} & \cdots & \mu_{n-1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{0,n-1} & \mu_{1,n-1} & \cdots & \mu_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{n,0} \\ \alpha_{n,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon - \mu_{n,0} \\ \varepsilon - \mu_{n,1} \\ \vdots \\ \varepsilon - \mu_{n,n-1} \end{bmatrix}. \quad (1.62)$$

Teorema 14: Pošto monični polinomi  $\{P_k^{(\varepsilon)}(x)\}_{k=0}^n$  formiraju bazis u prostoru polinoma stepena ne većeg od  $n$ , važe sledeće dve relacije koje daju veze između ortogonalnih i skoro ortogonalnih polinoma [1.28]

$$P_n^{(\varepsilon)}(x) = P_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k^{(n)}(\varepsilon)}{\|P_k\|^2} P_k(x), \quad (1.63)$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k^{(n)}(\varepsilon) P_k^{(\varepsilon)}(x) \quad (c_n^{(n)} = 1). \quad (1.64)$$

Teorema 15: Za koeficijente  $b_j^{(n)}$  važi relacija

$$b_j^{(n)}(\varepsilon) = \varepsilon_n \sum_{i=0}^j c_i^{(j)}(\varepsilon) \quad (j = 0, 1, \dots, n-1) (\forall n \in N_0), \quad (1.65)$$

i oni ne zavise od  $n$ .

Dokaz: Polazeći od unutrašnjeg proizvoda  $P_n^{(\varepsilon)}(x)$  i  $P_j(x)$  možemo napisati

$$\left(P_n^{(\varepsilon)}, P_j\right) = \left(P_n, P_j\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k^{(n)}(\varepsilon)}{\|P_k\|^2} \left(P_k, P_j\right). \quad (1.66)$$

Iz relacije ortogonalnosti za polinome  $\{P_k(x)\}_{k=0}^n$ , imamo  $\left(P_n^{(\varepsilon)}, P_j\right) = b_j^{(n)}(\varepsilon)$ . Sa druge strane važi  $P_j(x) = \sum_{i=0}^j c_i^{(j)}(\varepsilon) P_i^{(\varepsilon)}(x)$ , pa konačno dobijamo

$$b_j^{(n)}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^j c_i^{(j)}(\varepsilon) \left(P_n^{(\varepsilon)}, P_i^{(\varepsilon)}\right) = \varepsilon \sum_{i=0}^j c_i^{(j)}(\varepsilon), \quad (1.67)$$

odakle se vidi da koeficijenti  $b_j(\varepsilon)$  ne zavise od  $n$ . •

Teorema 16: Koeficijenti  $b_k(\varepsilon)$  zadovoljavaju sledeću rekurentnu relaciju

$$b_n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k^2}{\|P_k\|^2} = \varepsilon \quad (n \in N). \quad (1.68)$$

Dokaz: Iz osobine skoro ortogonalnosti sledi

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \left(P_{n+1}^{(\varepsilon)}, P_n^{(\varepsilon)}\right) = \left(P_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{\|P_k\|^2} P_k(x), P_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{\|P_i\|^2} P_i(x)\right) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{\|P_k\|^2} \left(P_k(x), P_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b_i}{\|P_i\|^2} P_i(x)\right) = \frac{b_n}{\|P_n\|^2} \left(P_n(x), P_n(x)\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{\|P_k\|^2} \left(P_k(x), \frac{b_k}{\|P_k\|^2} P_k(x)\right) \end{aligned}$$

odakle direktno sledi formula (1.68). •

Iz ove teoreme slede sledeće dve posledice:

Posledica 1: Polinomi  $\{b_k(\varepsilon)\}$  su rekurentno povezani sledećom relacijom [1.29]

$$b_0 = \varepsilon, \quad b_{k+1} = b_k \left(1 - \frac{b_k}{\|P_k\|^2}\right) \quad (k \in N). \quad (1.69)$$

Posledica 2: Kvadrat norme skoro ortogonalnih polinoma  $\{P_n^{(\varepsilon)}(x)\}$  može se naći iz izraza

$$\|P_n^{(\varepsilon)}(x)\|^2 = \|P_n\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k^2}{\|P_k\|^2}. \quad (1.70)$$

Dokaz: Iz definicije norme polinoma imamo

$$\|P_n^{(\varepsilon)}\|^2 = \left(P_n^{(\varepsilon)}, P_n^{(\varepsilon)}\right) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{b_k}{\|P_k\|^2} P_k, \sum_{i=0}^n \frac{b_i}{\|P_i\|^2} P_i\right). \quad (1.71)$$

Sa druge strane, iz definicije ortogonalnosti imamo  $\|P_n^{(\varepsilon)}\|^2 = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{\|P_k\|^2} \left( P_k, \frac{b_k}{\|P_k\|^2} P_k \right)$ ,

odakle direktno sledi izraz za kvadrat norme. •

Kao primere sekvenci (po prva tri člana niza) skoro ortogonalnih polinoma možemo razmotriti neke klasične slučajeve:

- skoro ortogonalni Ležandrovi monični polinomi  $\{P_n^{(\varepsilon)}(x)\}$  izvedeni iz šiftovanih moničnih Ležandrovih polinoma ortogonalnih na  $(0, 1)$  sa težinom  $w(x) = 1$

$$P_0^{(\varepsilon)} = 1, P_1^{(\varepsilon)} = x - \frac{1}{2} + \varepsilon, P_2^{(\varepsilon)} = x^2 - (1 - 12\varepsilon + 12\varepsilon^2)x + \frac{1}{6}(1 - 30\varepsilon + 36\varepsilon^2) \dots$$

- skoro ortogonalni Čebiševljevi polinomi  $\{T_n^{(\varepsilon)}(x)\}$  izvedeni iz moničnih Čebiševljevih polinoma ortogonalnih na  $(-1, 1)$  sa težinom  $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$

$$T_0^{(\varepsilon)} = 1, T_1^{(\varepsilon)} = x + \frac{\varepsilon}{\pi}, T_2^{(\varepsilon)} = x^2 + \frac{2\varepsilon(\pi - \varepsilon)}{\pi^2}x - \frac{\pi - 2\varepsilon}{2\pi} \dots$$

- skoro ortogonalni Lagerovi polinomi  $\{L_n^{(\varepsilon)}(x)\}$  izvedeni iz Lagerovih polinoma ortogonalnih na  $(0, +\infty)$  sa težinom  $w(x) = e^{-x}$

$$L_0^{(\varepsilon)} = 1, L_1^{(\varepsilon)} = x - (1 - \varepsilon), L_2^{(\varepsilon)} = x^2 - (4 - \varepsilon + \varepsilon^2)x + (2 + \varepsilon^2) \dots$$

## 1.7 Literatura

- [1.1] M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972.
- [1.2] G. Szego, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, New York, 1938.
- [1.3] E. T. Bell, *The Development of Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1945.
- [1.4] J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, vol. 20, American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1975.
- [1.5] S. Takenaka, "On some properties of orthogonal functions", *Proceedings of the Japan Academy, Series A*, vol. 2, no. 3, pp. 106-108, 1926.
- [1.6] Ya. L. Geronimus, *Polynomials Orthogonal on a Circle and Interval*, Fiz. Mat. Lit., Moscow, 1958.
- [1.7] M. M. Djrbashian, "Orthogonal systems of rational functions on the circle unit with given set of poles", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 147, pp. 1278-1281, 1962.
- [1.8] M. M. Djrbashian, "Orthogonal systems of rational functions on the circle", *Akad. Nauk. Arman.*, vol. 1, pp. 3-24, 1966.
- [1.9] R. Subbayan, K. M. Zakariah, "Computer aided design of electronic circuits using single term Walsh series", *International Journal of Electronics*, vol. 54, no. 1, pp. 161-165, 1983.
- [1.10] Y. W. Lee, *Statistical Theory of Communication*, John Wiley and Sons, New York, 1960.
- [1.11] N. Ahmed, K. R. Rao, *Orthogonal Transformations for Digital Signal Processing*, Springer Verlag, Berlin, Germany, 1975.
- [1.12] S. G. Tzafestas, G. P. Rao, "Analysis, control and identification of distributed parameter and time delay systems using piece wise constant orthogonal basis functions - An overview", *Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*, Fort Lauderdale, Florida, vol. 24, part 1, 11.-13. December, 1985, pp. 1129-1132.

- [1.13] G. Dumont, Y. Fu, A. L. Elshafei, “Orthonormal functions in identification and adaptive control”, *Intelligent Tuning and Adaptive Control (ITAC) Conference*, Singapore, 1991.
- [1.14] M. S. Petković, G. V. Milovanović, Matematika za studente tehničkih fakulteta V deo, *Elektronski fakultet u Nišu*, Niš, 2000.
- [1.15] G. V. Milovanović, “Orthogonal polynomial systems and some applications”, In: *Inner Product Spaces and Applications* (Th. M. Rassias, ed.), pp. 115-182, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 376, Longman, Harlow, 1997.
- [1.16] D. S. Mitrinović, D. Ž. Đoković, Specijalne funkcije, *Univerzitet u Beogradu, Beogradski grafički zavod*, Beograd, 1964.
- [1.17] P. C. McCarthy, J. E. Sayre, B. L. R. Shawyer, “Generalized Legendre polynomials”, *Journal of Mathematical Analysis Applications*, vol. 177, pp. 530–537, 1993.
- [1.18] G. Mastroianni, G. Milovanović, Interpolation Processes – Basic Theory and Applications, *Springer-Verlag*, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [1.19] P. S. Heuberger, T. J. de Hoog, “Approximation and realization using generalized orthonormal bases”, *Proceedings of the 1999 European Control Conference, ECC99*, 31. August–3. September, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [1.20] R. Y. Chang, M. L. Wang, “Model reduction and control system design by shifted Legendre polynomial functions”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 105, no. 1, pp. 52-55, 1983.
- [1.21] M. Riesz, “Sur le probleme des moments”, Troisième Note, *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik*, vol. 17(16), pp. 1-52, 1923.
- [1.22] T. S. Chihara, “On quasi-orthogonal polynomials”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 8, pp. 765-767, 1957.
- [1.23] M. Alfaro, L. Moral, “Quasi-orthogonality on the unit circle and semi-classical forms”, *Portugaliae Mathematica*, vol. 51, pp. 47-62, 1991.
- [1.24] C. Brezinski, K. A. Driver, M. R. Zaglia, “Quasi-orthogonality with applications to some families of classical orthogonal polynomials”, *Applied Numerical Mathematics*, vol. 48, no. 2, pp. 157-168, 2004.
- [1.25] D. Dickinson, “On quasi-orthogonal polynomials”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 12, no. 2, pp. 185–194, 1961.
- [1.26] I. Ben-Yaacov, F. Wagner, “On almost orthogonality in simple theories”, *Journal of Symbolic Logic*, vol. 69, 398-408, 2004.

- [1.27] A. Beny, R. H. Torres, “Almost orthogonality and a class of bounded bilinear pseudodifferential operator”, *Mathematical Research Letters*, vol. 11, pp. 1-11, 2004.
- [1.28] B. Danković, P. Rajković, “On a class of almost orthogonal polynomials”, *Fourth International Conference on Numerical Analysis and Application*, June 16.-20., 2008, Lozenetz, *University of Rouse*, pp. 241-248, 2008.
- [1.29] B. Danković, P. Rajković, S. Marinković, “On a Class of Almost Orthogonal Polynomials”, in *Numerical Analysis and Its Applications, Lecture Notes in Computer Science*, vol. 5434, eds. S. Margenov, L. G. Vulkov and J. Wasniewski, (Springer-Verlag, Berlin, 2009), pp. 241-248.

## **2. Filtri bazirani na ortogonalnim racionalnim funkcijama**

### **2.1 Kratak opis poglavlja**

Ortogonalne racionalne funkcije predstavljaju prirodnu generalizaciju ortogonalnih polinoma pa se mnoge osobine ortogonalnih polinoma na realnoj osi i jediničnom krugu mogu proširiti na slučaj racionalnih funkcija [2.1]. Iako su do danas proučeni mnogi aspekti ortogonalnih racionalnih funkcija [2.2], [2.3], generisanje samih funkcija sa proizvoljnim polovima, kao i relacije koje se za njih mogu izvesti su i dalje nepoznanica. U ovom poglavlju disertacije će biti objašnjen nov metod za dobijanje klasičnih ortogonalnih racionalnih funkcija primenom novih transformacija u kompleksnom domenu. Takođe će biti izvedene i odgovarajuće skoro i kvazi ortogonalne funkcije, kao i njihove rekurentne relacije.

Drugi bitan problem koji će se razmotriti u ovom poglavlju je kako se na osnovu izvedenih funkcija mogu projektovati nove klase ortogonalnih filtara. koji omogućuju generisanje funkcija u formi realnih fizičkih signala. Kao što je poznato, filtri su elektronska kola koja obavljaju funkcije procesiranja signala [2.4], [2.5]. Mogu biti pasivni ili aktivni, analogni ili digitalni, linearni ili nelinearni, diskretni ili kontinualni, IIR ili FIR. Filtri koji su predmet ovog poglavlja su analogni, aktivni, linearni, kontinualni, FIR tipa. Racionalne funkcije izvedene u ovom poglavlju su veoma pogodne za projektovanje filtara u analognoj tehnici koja omogućava veliku brzinu, jednostavnost, robusnost i preciznost praktično realizovanih filtara. Takvi, praktično realizovani filtri, kasnije će biti iskorišćeni u modeliranju i upravljanju dinamičkim sistemima. Validnost realizovanih filtara je dokazana podudarnošću signala snimljenih na njima sa dobijenim matematičkim izrazima i izvedenim simulacijama.

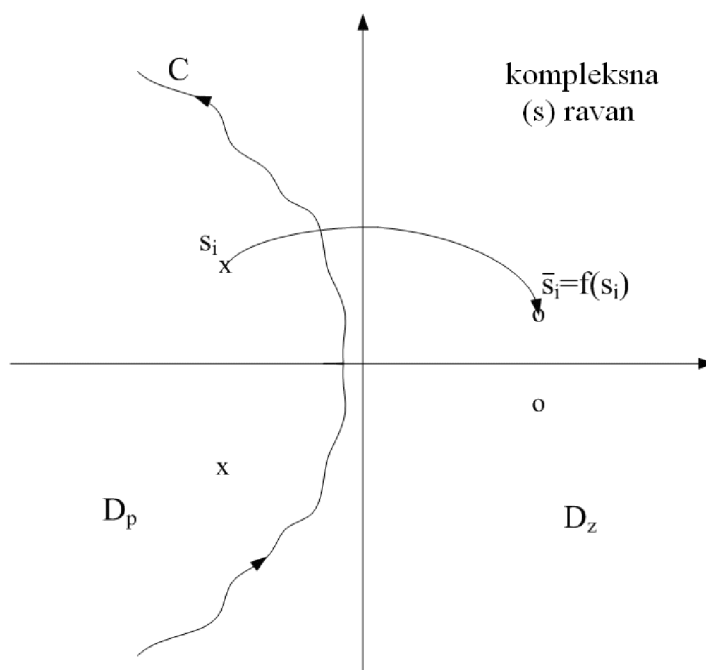
## 2.2 Ortogonalne racionalne funkcije

### 2.2.1 Definicija ortogonalnih racionalnih funkcija

Ortogonalne racionalne funkcije u kompleksnom domenu [2.6], [2.7] mogu se definisati na sledeći način. Razmotrimo racionalnu funkciju sa datim polovima  $s_i$  i odgovarajućim nulama  $f(s_i)$  (sve ortogonalne funkcije imaju nule i polove u strogo definisanoj zavisnosti). U slučaju da želimo da generišemo klasične ortogonalne polinome, koristimo racionalnu funkciju koja ima red polinoma u imeniocu za jedan manji od reda polinoma u brojiocu

$$W_n(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (s + f(s_i))}{\prod_{i=1}^n (s + s_i)}. \quad (2.1)$$

Za zadate polove  $s_i$ , nule se dobijaju određenim preslikavanjem (transformacionom funkcijom)  $F(s, \bar{s}) = 0$ , tj.  $\bar{s} = f(s)$  iz jedne oblasti (domena) kompleksne ravni  $D_p$  u drugu  $D_z$ , tj. sa jedne strane konture  $C$  na drugu (slika 2.1).



Slika 2.1 Preslikavanje polova u nule pomoću transformacije  $f(s)$



Potreban uslov je da preslikavanje  $f(s)$  bude simetrično. Znači, funkcija  $F(s, \bar{s})$  mora biti simetrična, tj. moraju da važe relacije  $\bar{s} = f(s)$  i  $s = f(\bar{s})$ . Domen (oblast)  $D_p$  sadrži sve polove, a domen  $D_z$  sve nule i pri tom su te dve oblasti disjunktne [2.8]. Kontura  $C$  se može odrediti u slučaju bilo koje konkretne transformacije (preslikavanja) korišćenjem smena  $s = x + jy$  i  $\bar{s} = x - jy$ . Jednačina konture u  $s$  ( $xy$ ) ravni je  $F(x + jy, x - jy) = 0$ .

Korišćenjem transformacije  $\bar{s} = f(s)$  i osobine simetrije, iz (2.1) dobijamo

$$W_n(\bar{s}) = \bar{W}_n(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (s + s_i)}{\prod_{i=1}^n (s + f(s_i))}. \quad (2.2)$$

Primetimo da su polovi funkcije  $\bar{W}_n(s)$  jednaki nulama funkcije  $W_n(s)$  i obrnuto.

Dokažimo sada da je sekvenca racionalnih funkcija ortogonalna u kompleksnoj ravni  $s$  na konturi  $C$ . Razmotrimo unutrašnji proizvod

$$\oint_C W_n(s) \bar{W}_m(s) ds = \oint_C \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (s + f(s_i))}{\prod_{i=1}^n (s + s_i)} \frac{\prod_{i=1}^{m-1} (s + s_i)}{\prod_{i=1}^m (s + f(s_i))} ds. \quad (2.3)$$

gde je upotrebljeno  $\bar{W}_m(s) = W_m(\bar{s})$ .

Primenom Košijeve teoreme dobija se sledeća relacija

$$\oint_C W_n(s) \bar{W}_m(s) ds = \begin{cases} 0, & \text{za } m \neq n, \\ N_n \neq 0, & \text{za } m = n, \end{cases} \quad (2.4)$$

jer za  $m \neq n$ , proizvod  $W_n(s)$  i  $\bar{W}_m(s)$  ne sadrži nule u domenu  $D_p$ .

U slučaju da je  $m \neq n$ , svi polovi iz domena  $D_p$  se relacijom (2.4) eliminišu, pa prema Košijevoj teoremi  $\oint_C W_n(s) \bar{W}_m(s) ds = 0$ . Za  $m = n$  svi polovi se poništavaju osim

jednog, pa je prema Košijevoj teoremi  $\oint_C W_n(s) \bar{W}_m(s) ds = N_n \neq 0$ , gde je

$$N_n = 2\pi i \operatorname{Res}_{s=s_n} (W_n(s) \bar{W}_m(s) ds).$$

## 2.2.2 Formiranje različitih tipova ortogonalnih racionalnih funkcija

Usvajanjem različitih vrednosti polova niza funkcija  $W_n(s)$ , određivanjem odgovarajućih nula i primenom inverzne Laplasove<sup>26</sup> transformacije, možemo dobiti različite tipove klasičnih ortogonalnih funkcija. Na ovom mestu treba još jednom napomenuti da pri konstruisanju bazisa ortogonalnih racionalnih funkcija, polovi mogu biti odabrani potpuno proizvoljno pod uslovom da je zadovoljen uslov simetričnosti transformacione funkcije. Na taj način se mogu izvesti svi poznati ortogonalni sistemi kao i mnogi novi.

Funkcija  $F(s, \bar{s})$  transformiše (preslikava) oblast u kompleksnoj ravni  $s$ , u kojoj su locirani svi polovi, u drugu oblast koja sadrži sve nule. Dve osnovne varijante ove transformacije su  $\bar{s} + s = 0$ , tj.  $\bar{s} = -s$  i  $s\bar{s} = 1$ , tj.  $\bar{s} = 1/s$ . U prvom slučaju, leva poluravan kompleksne ravni  $s$  se preslikava u desnu. Racionalne funkcije dobijene ovim preslikavanjem se mogu uspešno upotrebiti za modeliranje i sintezu kontinualnih sistema, s obzirom na činjenicu da su kontinualni dinamički sistemi stabilni ukoliko su svi koreni njihove karakteristične jednačine smešteni u levoj poluravni. U drugom slučaju (u slučaju druge transformacije), unutrašnjost jediničnog kruga sa centrom u koordinatnom početku se preslikava u oblast izvan kruga. Racionalne funkcije dobijene na ovaj način su pogodne za modeliranje diskretnih sistema jer je poznato da su polovi stabilnih diskretnih sistema smešteni unutar jediničnog kruga.

Moguće su i opštije transformacije pri čemu je i dalje jedini uslov da funkcija  $F(s, \bar{s})$  bude simetrična. Tako je moguće dobiti i opštije klase ortogonalnih funkcija i filtara. Jedna od takvih transformacionih funkcija,  $s + \bar{s} = k$ , omogućava generisanje svih klasičnih ortogonalnih polinoma: Ležandrovih, Lagerovih, Čebiševljevih, Gegenbauerovih i Jakobijevih. Pomoću druge transformacije,  $s\bar{s} = k$ , mogu se dobiti ortogonalne Malmkvistove funkcije [2.9], [2.10], ortogonalne u jediničnom krugu

$$\text{kompleksne ravni } M_n(z) = \frac{\sqrt{1-\alpha_n^2}}{z-\alpha_n} \prod_{j=0}^{n-1} \frac{z-1}{\alpha_j(z-\alpha_j)}.$$

---

<sup>26</sup> P. S. Laplace (1749-1827), francuski matematičar i astronom

### 2.2.2.1 Preslikavanje $\bar{s} = -s$

Razmotrimo, najpre, slučaj transformacione funkcije  $\bar{s} = -s$ . Ako polove izaberemo u obliku  $s_i = -\frac{2i+1+\beta}{2}$ , dobićemo sekvencu racionalnih funkcija

$$W_n(s) = \sqrt{2n+\beta+1} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} \left( s - \frac{2i+1+\beta}{2} \right)}{\prod_{i=1}^n \left( s + \frac{2i+1+\beta}{2} \right)}, \quad (2.5)$$

gde je  $\beta$  proizvoljan realni parametar. Relacija (2.5) predstavlja racionalne Jakobijeve funkcije koje se mogu izvesti iz klasičnih Jakobijevih polinoma kada se na njih primeni smena  $x = e^{-t}$ , a zatim i Laplasova transformacija. Izraz (2.5) u sebi sadrži sve klasične ortogonalne racionalne funkcije uključujući Ležandrove, Čebiševljeve, Lagerove i Ermitove i može se iskoristiti za projektovanje tih ortogonalnih filtara.

U specijalnom slučaju  $\beta = -1$ , imamo

$$W_n(s) = \sqrt{2n} \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (s-i)}{\prod_{i=1}^n (s+i)}. \quad (2.6)$$

Relacija (2.6) predstavlja poznate Ležandrove funkcije koje se mogu dobiti iz klasičnih Ležandrovih polinoma pomoću smene  $x = e^{-t}$ .

Važna osobina ortogonalnih funkcija koja je ovde iskorišćena je da je jedini uslov ortogonalnosti funkcija simetričnost funkcije preslikavanja polova u nule, pri čemu se polovi mogu birati potpuno proizvoljno. Posle normalizacije izraza (2.6), tj. posle deljenja faktorom  $\sqrt{2n}$  i proizvoljnog izbora niza polova  $s_i$  sa  $\text{Re}(s_i) < 0$  (polovi locirani u levoj poluravni), dobijamo niz (sekvencu) ortogonalnih funkcija

$$W_n(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (s - s_i)}{\prod_{i=1}^n (s + s_i)}. \quad (2.7)$$

Posle razvoja (2.7) u parcijalne razlomke dobijamo

$$W_n(s) = \sum_{i=1}^n \frac{a_{n,i}}{s + s_i}, \quad (2.8)$$

gde je

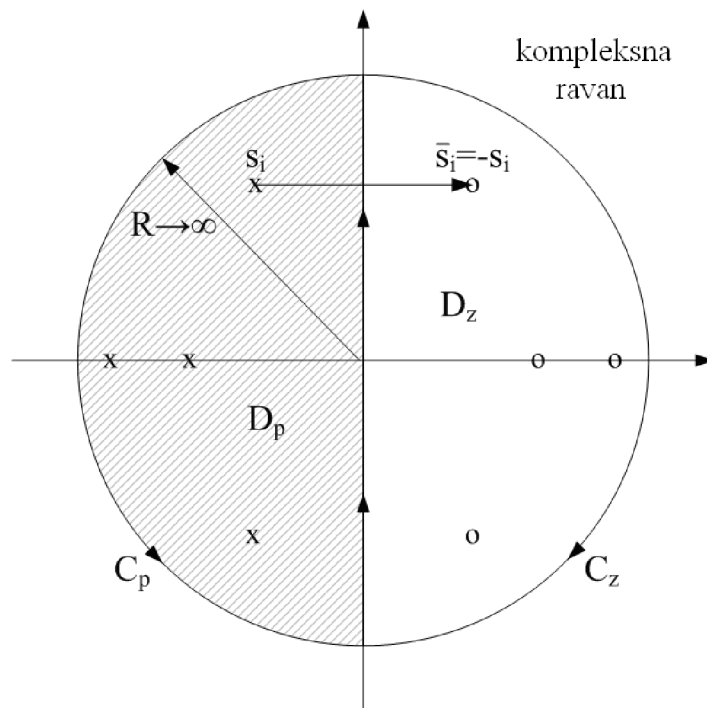
$$a_{n,i} = \frac{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n-1} (s_k - s_i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n (s_k + s_i)}. \quad (2.9)$$

Korišćenjem transformacije  $f(s) = \bar{s} = -s$ , polovi  $s_i$  se preslikavaju u nule locirane u desnoj poluravni (slika 2.2). Iz relacije (2.4) proizlazi zaključak da su funkcije  $W_n(s)$  ortogonalne u levoj poluravni (u domenu  $D_p$ ).

Posle primene inverzne Laplasove transformacije na relaciju (2.8), dobija se

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^n a_{n,i} e^{-it}, \quad (2.10)$$

a posle smene  $e^{-t} = x$ , dobijamo Mincove<sup>27</sup> ortogonalne polinome [2.11], [2.12], [2.13].



Slika 2.2 Preslikavanje polova u nule transformacijom  $\bar{s}_i = -s_i$

<sup>27</sup> H. Müntz (1884-1956), nemački matematičar

### 2.2.2.2 Preslikavanje $\bar{s} = 1/s$

Razmotrimo sada drugi slučaj, kada se koristi preslikavanje  $\bar{s} = 1/s$ . Ovom transformacijom se polovi smešteni u unutrašnjosti jediničnog kruga preslikavaju u oblast izvan kruga. Tako se dobija niz Malmkvistovih funkcija

$$W_n(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} (s + \bar{s}_i)}{\prod_{i=1}^n (s + s_i)}. \quad (2.11)$$

Racionalne funkcije (2.11) su ortogonalne u domenu  $D_p$  (jedinični krug ograničen konturom  $C_p$ , prikazan na slici 2.3).

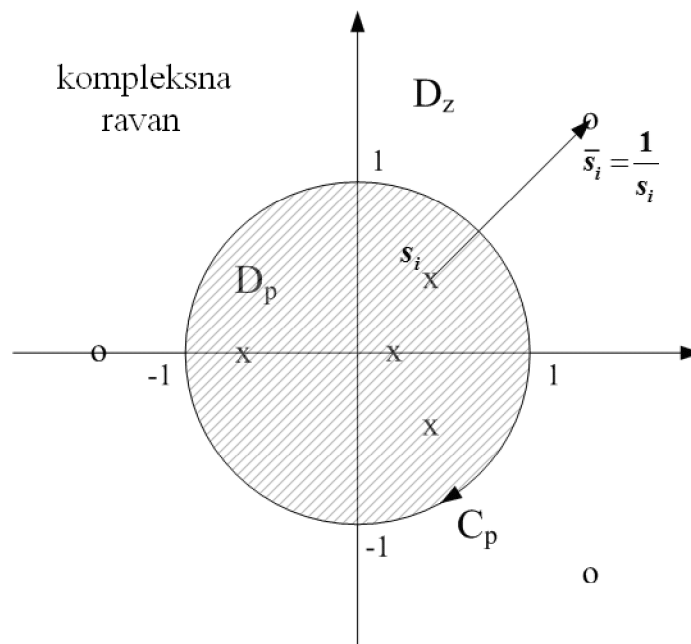
Razvojem relacije (2.11) u sumu parcijalnih razlomaka dobijamo

$$W_n(s) = \sum_{k=1}^n \frac{A_{n,k}}{s - s_k}, \quad (2.12)$$

gde je

$$A_{n,k} = \frac{\prod_{v=1}^{n-1} (s_k - 1/s_v)}{\prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^n (s_k - s_v)}. \quad (2.13)$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije na (2.12) dobija se  $\varphi(t) = \sum_{i=1}^n A_{n,i} e^{-it}$ .



Slika 2.3 Preslikavanje polova u nule transformacijom  $\bar{s}_i = 1/s_i$

## 2.3 Kvazi ortogonalne racionalne funkcije

### 2.3.1 Definicija kvazi ortogonalnih racionalnih funkcija

U cilju dobijanja kvazi ortogonalnih funkcija u smislu definicije 4 razmatra se racionalna funkcija oblika

$$W_n(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n-k-1} (s + f(s_i))}{\prod_{i=1}^n (s + s_i)}. \quad (2.14)$$

Primetimo da je red polinoma u imeniocu za  $k+1$  manji od reda polinoma u brojiocu. Ova činjenica ima za direktnu posledicu kasnije formiranje kvazi ortogonalnih funkcija  $k$ -tog reda. Niz funkcija  $W_n(s)$  je kvazi ortogonalan, što se može dokazati primenom Košijeve teoreme

$$\oint_C W_n(s) \overline{W_m(s)} ds = \oint_C \frac{\prod_{i=1}^{n-k-1} (s + f(s_i))}{\prod_{i=1}^n (s + s_i)} \frac{\prod_{i=1}^{m-k-1} (s + s_i)}{\prod_{i=1}^m (s + f(s_i))} ds, \quad (2.15)$$

tj.

$$\oint_C W_n(s) \overline{W_m(s)} ds \begin{cases} = 0, & \text{za } 0 \leq m \leq n - k - 1 \\ \neq 0, & \text{za } n - k \leq m \leq n \end{cases}. \quad (2.16)$$

Posle primene Hevisajdovog<sup>28</sup> razvoja na (2.14) dobijamo

$$W_n(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i^n}{s + s_i}, \quad (2.17)$$

gde je

$$A_j^n = \text{Res}(W_n(s)) = \frac{\prod_{i=1}^{n-k-1} (s_j + f(s_i))}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (s_j + s_i)}. \quad (2.18)$$

<sup>28</sup> O. Heaviside (1850-1925), engleski inženjer, matematičar i fizičar

### 2.3.2 Formiranje različitih tipova kvazi ortogonalnih racionalnih funkcija

U slučaju primenjene transformacije  $\bar{s} = f(s) = -s$ , tj.  $F(s, \bar{s}) = s + \bar{s}$ , funkcija prenosa dobija oblik

$$W_n^k(s) = \frac{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_{n-k-1})}{(s+a_1)(s+a_2)\cdots(s+a_n)}. \quad (2.19)$$

Posle primene Hevisajdovog razvoja imamo  $W_n^k(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_{n,i}^k}{s+a_i}$ , gde je

$$A_{n,i}^k = \frac{(-1)^{2n-k+2} \prod_{j=1}^{n-k-1} (a_i + a_j)}{\prod_{j=1}^{i-1} (a_i - a_j) \prod_{j=i+1}^n (a_i - a_j)}.$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije na (2.17) dobija se niz kvazi ortogonalnih eksponencijalnih funkcija na intervalu  $(0, \infty)$ . Daljim uvođenjem smene  $e^{-t} = x$ , dobijamo kvazi ortogonalne Ležandrove polinome na intervalu  $(0, 1)$ . Na sličan način, u slučaju primene transformacione funkcije  $s = f(\bar{s}) = 1/\bar{s}$ , dobijaju se kvazi ortogonalne Malmkvistove funkcije.

Razmotrimo sada slučaj Ležandrovih kvazi ortogonalnih funkcija. One se generišu korišćenjem preslikavanja  $F(s, \bar{s}) = s + \bar{s} = 0$  uz jedini uslov da polovi funkcija  $W_n(s)$  imaju celobrojne vrednosti (u suprotnom je reč o Minc-Ležandrovim kvazi ortogonalnim funkcijama). Tada funkcije imaju formu funkcija prenosa

$$W_n^k(s) = \frac{(s-1)(s-2)\cdots[s-(n-k-1)]}{(s+1)(s+2)\cdots(s+n)}. \quad (2.20)$$

Posle primene Hevisajdovog razvoja dobijamo

$$W_n^k(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_{n,i}^k}{s+i}, \quad (2.21)$$

gde je

$$A_{n,i}^k = \frac{(-1)^{n-k+i} (n+i-k-1)!}{i!(i-1)!(n-i)!}. \quad (2.22)$$

Primenom inverzne Laplasove transformacije na izraz (2.21) dobija se

$$W_n^k(e^{-t}) = \sum_{i=1}^n e^{-it} A_{n,i}^k. \quad (2.23)$$

Posle uvođenja smene  $x = e^{-t}$ , najzad, dobijamo Ležandrove kvazi ortogonalne polinome  $k$ -tog reda, na intervalu  $(0, 1)$  sa težinom  $w(x) = \frac{1}{x}$

$$P_n^k(x) = \sum_{i=1}^n A_{n,i}^k x^i. \quad (2.24)$$

Pošto ovi polinomi mogu da se napišu i na drugačiji način

$$P_n^k(x) = x \sum_{i=1}^n A_{n,i}^k x^{i-1}, \quad (2.25)$$

poželjno je umesto polinoma (2.24) razmatrati polinome date sa  $\sum_{i=1}^n A_{n,i}^k x^{i-1}$ , koji su takođe kvazi ortogonalni, ali sa težinom  $w(x) = x$  umesto  $w(x) = 1/x$ .

Ovde je dato nekoliko kvazi ortogonalnih polinoma prvog reda ( $k=1$ ) na intervalu  $(0, 1)$  sa težinskom funkcijom  $w(x) = x$

$$P_1^1(x) = -x + 1, \quad P_2^1(x) = -2x^2 + 3x - 1, \quad P_3^1(x) = -5x^3 + 10x^2 - 6x + 1,$$

$$P_4^1(x) = -14x^4 + 35x^3 - 30x^2 + 10x - 1, \quad P_5^1(x) = -42x^5 + 126x^4 - 140x^3 + 70x^2 - 15x + 1,$$

i nekoliko kvazi ortogonalnih polinoma drugog reda

$$P_2^2(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}, \quad P_3^2(x) = \frac{5}{6}x^3 - 2x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{3}, \quad P_4^2(x) = \frac{7}{4}x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 2x + \frac{1}{4}$$

$$P_5^2(x) = \frac{21}{5}x^5 - 14x^4 + \frac{35}{2}x^3 - 10x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{1}{5},$$

$$P_6^2(x) = 11x^6 - 42x^5 + 63x^4 - \frac{140}{3}x^3 + \frac{35}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{6}.$$

## 2.4 Skoro ortogonalne racionalne funkcije

Razmotrimo šiftovane Ležandrove polinome ortogonalne na intervalu  $(0, 1)$  čija je norma data sa

$$\|P_n\|^2 = \frac{1}{4^n} \frac{(n!)^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!} = \frac{1}{k_n}. \quad (2.26)$$

Korišćenjem smene  $x = e^{-t}$  i primenom relacija (1.59) i (1.60), dobijaju se skoro ortogonalne funkcije  $P_n^{(\varepsilon)}(e^{-t})$  na intervalu  $(0, \infty)$  sa težinom  $e^{-t}$ . Konačno, primenom



Laplasove transformacije možemo dobiti racionalne skoro ortogonalne funkcije Malmkvistovog tipa

$$W_n^{(\varepsilon)}(s) = L \left[ P_n^{(\varepsilon)}(e^{-t}) \right]. \quad (2.27)$$

Iz relacija (1.54) i (2.27) možemo direktno dobiti rekurentnu relaciju za skoro ortogonalne funkcije  $W_n^{(\varepsilon)}(s)$

$$W_n^{(\varepsilon)}(s) = W_n(s) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k(\varepsilon)}{\|P_k\|^2} W_k(s). \quad (2.28)$$

Iz (2.28) dobijamo i rekurentnu relaciju za  $W_{n+1}^{(\varepsilon)}(s)$

$$W_{n+1}^{(\varepsilon)}(s) = W_n^{(\varepsilon)}(s) + W_{n+1}(s) + W_n(s) \left( \frac{b_n(\varepsilon)}{\|P_n\|^2} - 1 \right), \quad (2.29)$$

tj.

$$W_{n+1}^{(\varepsilon)}(s) = W_n^{(\varepsilon)}(s) + W_{n+1}(s) + W_n(s) k_n, \quad (2.30)$$

gde je

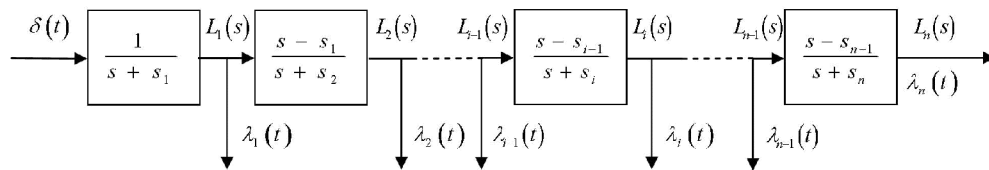
$$k_n = \frac{b_n}{\|P_n\|^2} - 1, \quad k_0 = \varepsilon. \quad (2.31)$$

## 2.5 Ortogonalni filtri

### 2.5.1 Projektovanje ortogonalnih filtara

Jedna od najvažnijih primena ortogonalnih funkcija je projektovanje ortogonalnih filtara [2.14], [2.15]. Ovi filtri se mogu koristiti za aproksimaciju signala, formiranje generatora ortogonalnih signala, modeliranje i identifikaciju sistema, kao i praktičnu realizaciju optimalnih i adaptivnih sistema i metoda upravljanja [2.16], [2.17]. Teorija klasičnih ortogonalnih filtara je dobro proučena i opisana u brojnim radovima [2.18], [2.19], [2.20], [2.21].

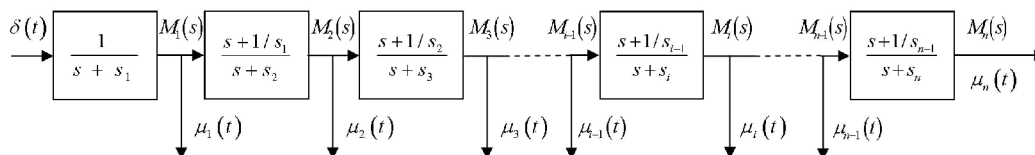
Ortogonalni Minc-Ležandrov filtar na slici 2.4 se dobija direktno iz relacije (2.7). Treba imati na umu da je pri tom iskorišćena transformacija  $\bar{s} = -s$ . Ukoliko su vrednosti  $s_i$  celi brojevi, onda je reč o Ležandrovom ortogonalnom filtru.



Slika 2.4 Minc-Ležandrov ortogonalni filter

Oznake na slici imaju sledeća značenja:  $\delta(t)$  je Dirakova<sup>29</sup> impulsna funkcija, a funkcije  $\lambda_i(t)$  predstavljaju inverzne Laplasove transformacije funkcija  $L_i(s)$ . Niz funkcija  $L_i(s)$  je ortogonalan u levoj poluravni kompleksne ravni. Sekvenca funkcija  $\lambda_i(t)$  predstavlja niz eksponencijalnih funkcija, ortogonalnih na intervalu  $(0, \infty)$ . U specijalnom slučaju  $s_i = i$ , funkcije  $\lambda_i(t)$  postaju niz Ležandrovih eksponencijalnih funkcija ortogonalnih na intervalu  $(0, \infty)$  sa težinom  $w(t) = e^{-t}$ . Dakle, filter može da generiše realne signale koji predstavljaju niz Ležandrovih ortogonalnih eksponencijalnih funkcija. Ova sekvenca funkcija može se iskoristiti za aproksimaciju proizvoljnih funkcija na intervalu  $(0, \infty)$ , a daje najbolje aproksimacije u smislu srednje kvadratne greške za signale eksponencijalnog tipa u realnom vremenu  $t \in [0, \infty]$ . Trebalo bi napomenuti da su dobro poznate Pronijeve<sup>30</sup> aproksimacije upravo ovog tipa. Ovi filteri su veoma pogodni za dobijanje modela dinamičkih sistema sa eksponencijalnim odzivom, tj. za modeliranje sistema sa polovima u realnom domenu. Primitimo da su ovakvi sistemi veoma česti u industriji (mehanički, hidraulički, termički, hemijski procesi). Ako uvedemo smenu  $e^{-t} = x$  u ove funkcije, dobićemo šiftovalne Ležandrove polinome, ortogonalne na intervalu  $(0, 1)$ .

Ortogonalni filter prikazan na slici 2.5 je konstruisan pomoću druge razmatrane transformacije  $\bar{s} = 1/s$ .



Slika 2.5 Malmkvistov ortogonalni filter

<sup>29</sup> P. A. M. Dirac (1902-1984), engleski fizičar

<sup>30</sup> G. C. F. M. R. de Prony (1755-1839), francuski matematičar i inženjer

Sekvenca funkcija  $M_i(s)$  je ortogonalan na jediničnom krugu i predstavlja niz ortogonalnih Malmkvistovih funkcija. Niz signala  $\mu_i(t)$ , obeleženih na slici 2.5, predstavlja inverzne Laplasove transformacije funkcija  $M_i(s)$ . Sve napomene vezane za sliku 2.4 važe i u ovom slučaju.

Ortogonalni filtri prikazani na slikama 2.4 i 2.5 mogu se efikasno primeniti u aproksimaciji signala i modeliranju kontinualnih i diskretnih sistema. Funkcije  $L_i(s)$  koje generiše filter prikazan na slici 2.4 su ortogonalne u levoj poluravni kompleksne ravni  $s$ , tako da je ovaj filter pogodan za aproksimaciju i modeliranje kontinualnih signala i sistema. Slično, funkcije  $M_i(s)$  koje generiše filter prikazan na slici 2.5 su ortogonalne na jediničnom krugu u kompleksnoj ravni  $s$ , tako da je ovaj filter pogodan za modeliranje diskretnih signala i sistema.

### 2.5.2 Praktična realizacija ortogonalnih filtera

U cilju verifikacije dobijenih teorijskih rezultata i demonstracije funkcionisanja ortogonalnih filtera, u Laboratoriji za modeliranje, simulaciju i upravljanje sistemima praktično je realizovan Ležandrov ortogonalni filter na način koji će biti detaljnije opisan u nastavku. Razmotrimo najpre šiftovane Ležandrove polinome ortogonalne na intervalu  $(0, 1)$  u eksplicitnom obliku

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{(n+k)!}{k!} x^k. \quad (2.32)$$

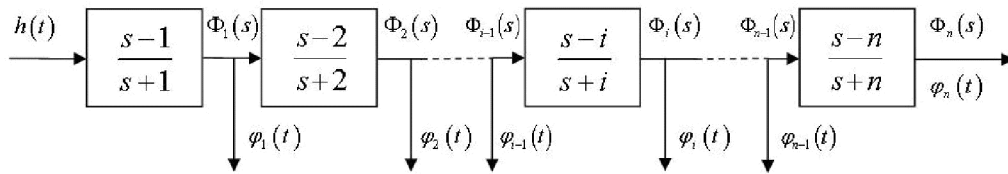
Prvih nekoliko članova niza Ležandrovih ortogonalnih polinoma su

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= 2x - 1, \\ P_2(x) &= 6x^2 - 6x + 1, \\ P_3(x) &= 20x^3 - 30x^2 + 12x - 1, \dots \end{aligned}$$

Nakon primene smene  $x = e^{-t}$  na (2.32) i izvršene Laplasove transformacije, dobijamo sledeći niz (sekvencu) racionalnih funkcija

$$W_n(s) = L[P_n(e^{-t})] = \frac{1}{s} \frac{\prod_{i=1}^n (s-i)}{\prod_{i=1}^n (s+i)}. \quad (2.33)$$

Iz poslednjeg izraza se može direktno projektovati Ležandrov ortogonalni filter prikazan na slici 2.6



Slika 2.6 Ležandrov ortogonalni filter

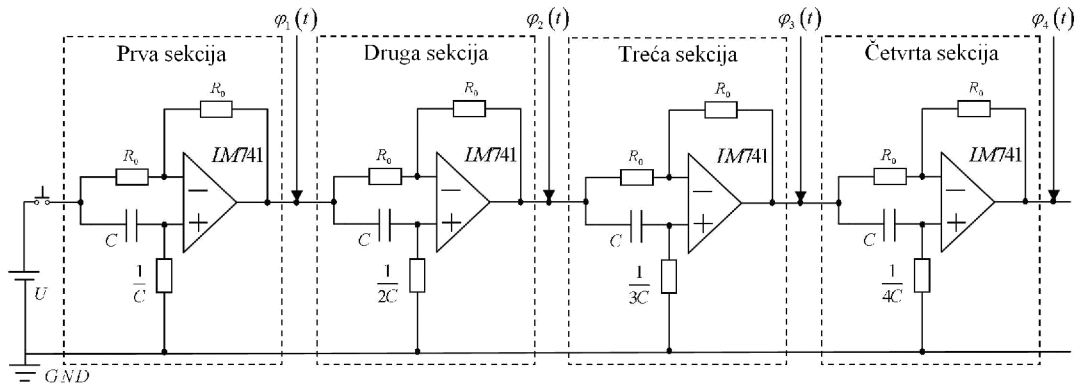
gde  $h(t)$  predstavlja jedinični odskočni Hevisajdov ulazni signal, a funkcije  $\varphi_i(t)$  su inverzne Laplasove transformacije funkcija  $\Phi_i(s)$ . Niz funkcija  $\varphi_i(t)$ , sa druge strane, predstavlja sekvencu Ležandrovih eksponencijalnih funkcija ortogonalnih na intervalu  $(0, \infty)$  sa težinom  $w(t) = e^{-t}$  i formulom

$$\varphi_i(t) = \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} \frac{(i+j)!}{j!} e^{-jt}. \quad (2.34)$$

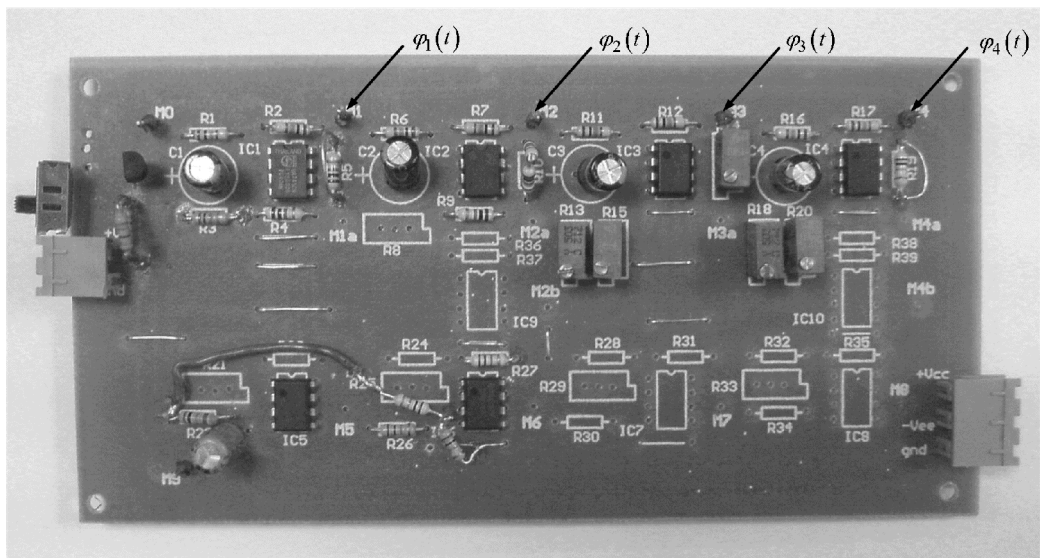
Prvih nekoliko članova niza su:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= 1, \\ \varphi_1(t) &= 2e^{-t} - 1, \\ \varphi_2(t) &= 6e^{-2t} - 6e^{-t} + 1, \\ \varphi_3(t) &= 20e^{-3t} - 30e^{-2t} + 12e^{-t} - 1, \dots \end{aligned}$$

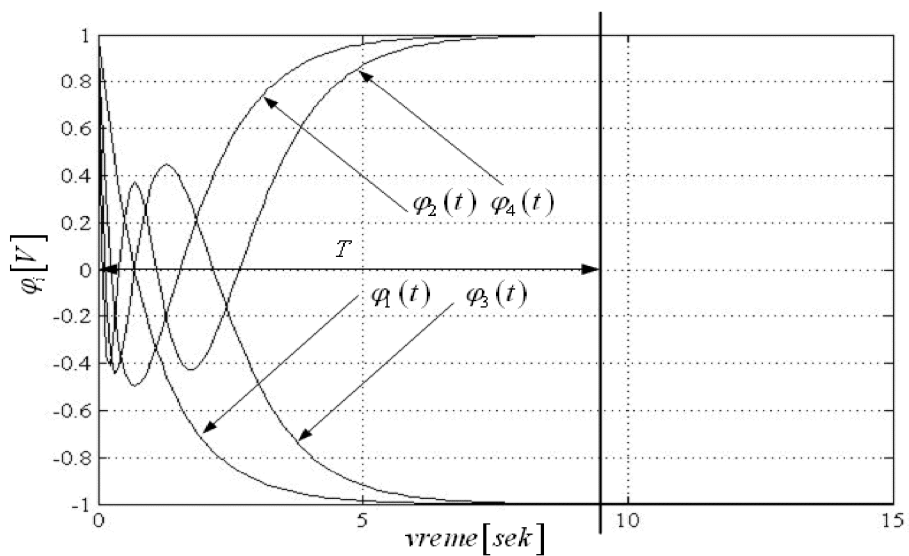
Dobijeni filter sa slike 2.6 je veoma pogodan za praktičnu realizaciju. Na slici 2.7 je prikazana šema praktične realizacije, a na slici 2.8 urađena štampana ploča filtra. Konkretno realizovan filter ima četiri sekcije. Na slici 2.9 su prikazani signali snimljeni na izlazima filtra. Njihov oblik u potpunosti odgovara rezultatima koji se dobijaju iz matematičkih izraza kao i simulacionim rezultatima.



Slika 2.7 Šema praktične realizacije Ležandrovog ortogonalnog filtra



Slika 2.8 Ležandrov ortogonalni filtar, štampana ploča



Slika 2.9 Signali snimljeni na Ležandrovom ortogonalnom filtru

## 2.6 Kvazi ortogonalni filtri

### 2.6.1 Projektovanje kvazi ortogonalnih filtara

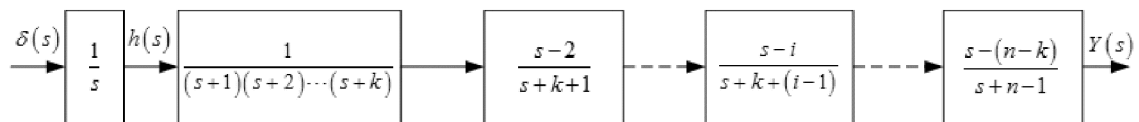
Razmotrimo funkciju  $W_n^k(s)$  datu relacijom (2.20). Za dalji razvoj kvazi ortogonalnih funkcija povoljnije je koristiti šiftovani oblik funkcije

$$W_n^k(s-1) = \frac{(s-2)(s-3)\cdots[s-(k+1)]\cdots[s-(n-k)]}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+k)(s+k+1)\cdots(s+n-1)}. \quad (2.35)$$

Ove funkcije se mogu predstaviti i na sledeći način

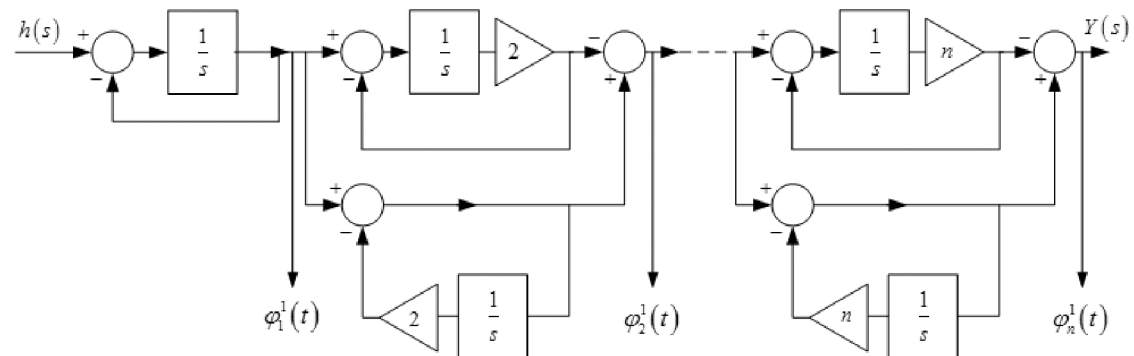
$$W_n^k(s-1) = \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+k)} \cdot \frac{s-2}{s+k+1} \cdots \frac{s-i}{s+k+(i-1)} \cdots \frac{s-(n-k)}{s+n-1}. \quad (2.36)$$

Uopšteni blok dijagram kvazi ortogonalnog filtra reda  $k$ , prikazan na slici 2.10, dobija se direktno na osnovu (2.36).



Slika 2.10 Blok dijagram kvazi ortogonalnog filtra reda  $k$

Umesto Dirakovog impulsnog signala  $\delta(s)$  možemo koristiti isti dijagram, ali bez bloka  $1/s$  ukoliko koristimo Hevisajdov odskočni ulaz koji se može lako praktično realizovati. Ova pogodnost je ujedno i glavni razlog prvobitnog šiftovanja funkcije  $W_n^k(s)$  u (2.36). Za  $k=1$ , iz blok dijagrama možemo dobiti analognu šemu za kvazi ortogonalni filter prvog reda [2.22], prilagođenu praktičnoj realizaciji



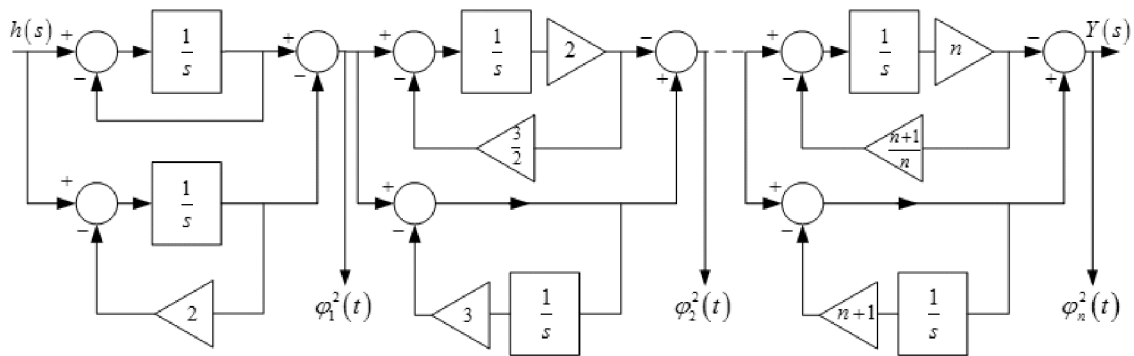
Slika 2.11 Analogna šema kvazi ortogonalnog filtra prvog reda prilagođena praktičnoj realizaciji

Signali označeni sa  $\varphi_i^1(t)$  na slici 2.11 predstavljaju sekvencu eksponencijalnih kvazi ortogonalnih funkcija na intervalu  $(0, 1)$  sa težinom  $w(t) = e^{-t}$ . Oni su u stvari inverzne Laplasove transformacije izlaznih signala iz odgovarajućih sekcija kvazi ortogonalnog filtra prvog reda

$$\varphi_i^1(t) = L^{-1} \{ \varphi_i^1(s) \}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.37)$$

gde je  $\varphi_i^1(s) = h(s) \prod_{j=1}^i W_j(s)$  za  $i = 1, 2, \dots, n$ . Član  $W_j(s)$  predstavlja funkciju prenosa pojedinačne sekcije filtra.

Na sličan način se mogu generisati kvazi ortogonalni filtri drugog reda ( $k=2$ ) pomoću filtra čija je analogna šema data na slici 2.12.



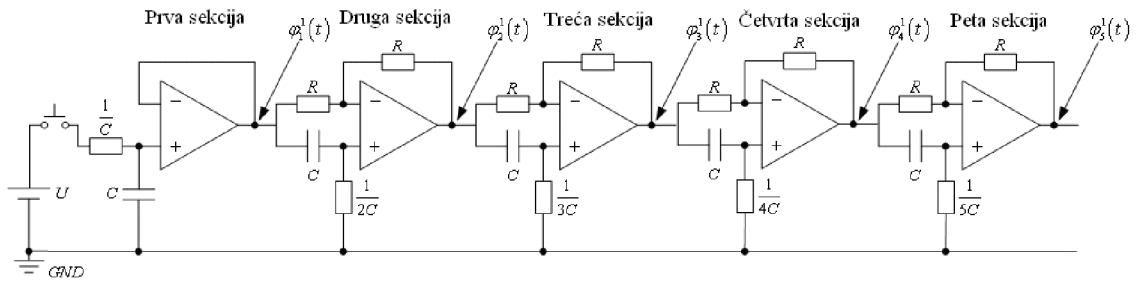
Slika 2.12 Analogna šema za kvazi ortogonalni filter drugog reda prilagođen praktičnoj realizaciji

Na slici 2.12 su oznakama  $\varphi_i^2(t)$  obeleženi signali  $L^{-1} \{ \varphi_{i+1}^2(s) \}, \quad i = 1, 2, \dots, n$ .

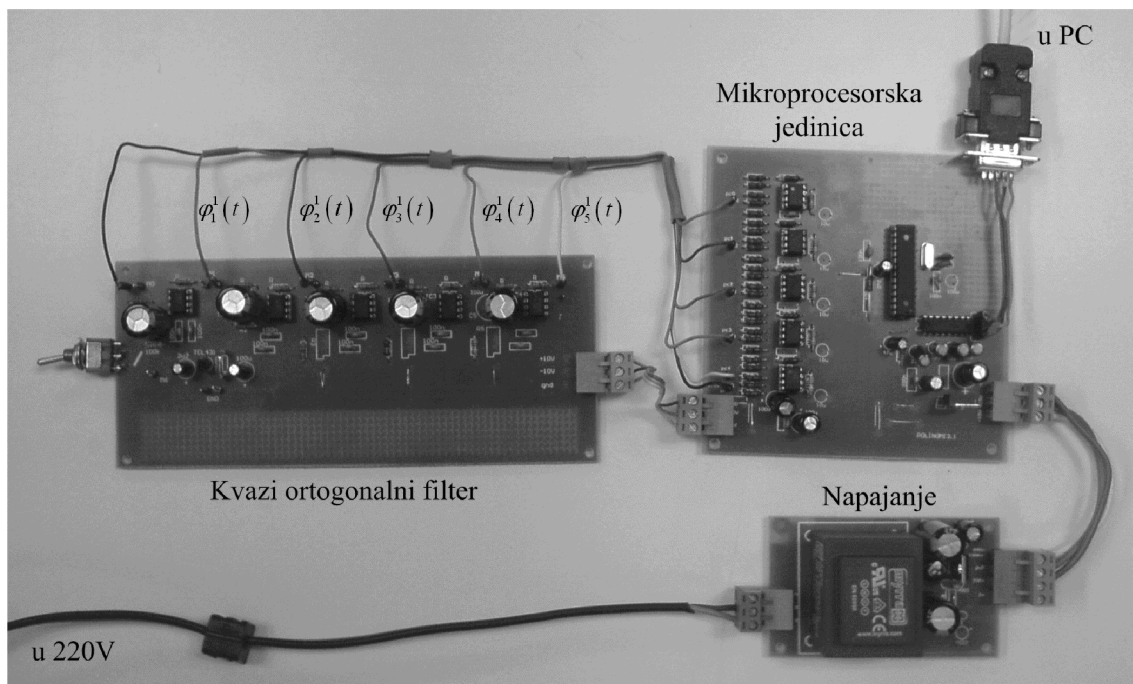
## 2.6.2 Praktična realizacija kvazi ortogonalnih filtara

Dobijene analogne šeme filtara prikazane na slikama 2.11 i 2.12 su veoma jednostavne i pogodne za praktičnu realizaciju. U Laboratoriji za modeliranje, simulaciju i upravljanje sistemima je projektovana i praktično realizovana eksperimentalna štampana ploča za kvazi ortogonalni filter prvog reda sa pet sekcija. Kvazi ortogonalni filter Ležandrovog tipa prikazan na slici 2.11 ima praktičnu realizaciju kao na slici 2.13. Laboratorijska postavka za testiranje kvazi ortogonalnog filtra je prikazana na slici 2.14. Postavka se sastoji od štampane ploče sa realizovanim

Ležandrovim kvazi ortogonalnim filtrom prvog reda, mikroprocesorske jedinice i napajanja.



Slika 2.13 *Praktična realizacija Ležandrovog kvazi ortogonalnog filtra prvog reda*

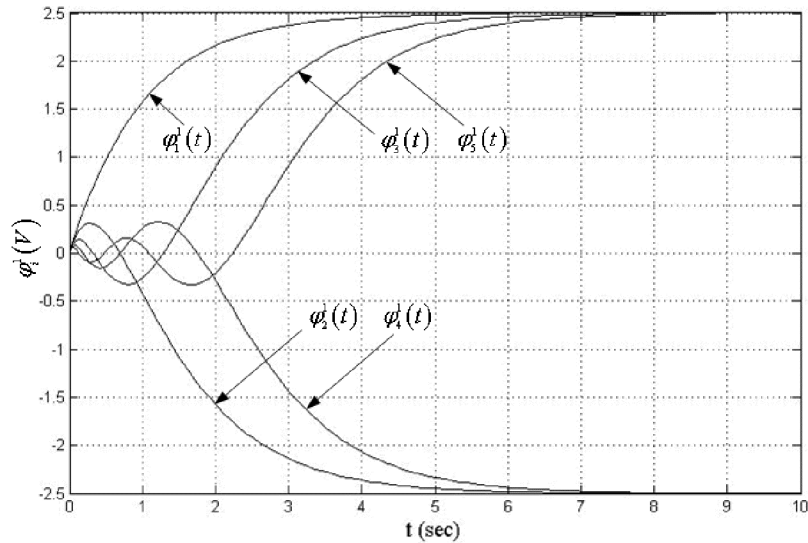


Slika 2.14 *Laboratorijska postavka za Ležandrov kvazi ortogonalni filter prvog reda*

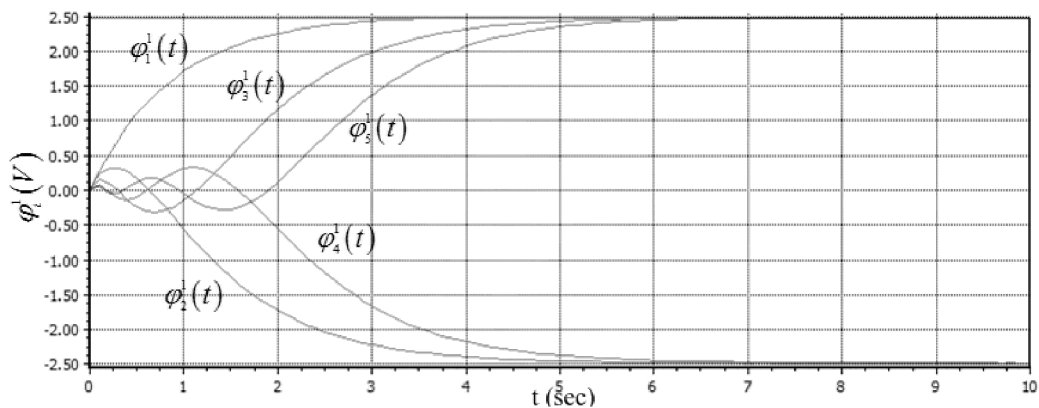
Više eksperimenata je izvedeno u cilju verifikacije kvazi ortogonalnosti i preciznosti realizovanog filtra. Najpre su izvedene simulacije u MATLAB-u na bazi šeme sa slike 2.11. Nekoliko simuliranih kvazi ortogonalnih signala je prikazano na slici 2.15. Zatim su eksperimentalno snimljeni kvazi ortogonalni signali sa praktično realizovanog filtra (slika 2.13) i rezultati su prikazani na slici 2.16. U oba slučaja je za ulazni signal uzet odskočni signal amplitude 2.5V.

Možemo primetiti visok nivo poklapanja rezultata dobijenih simulacijom i snimljenih signala sa filtra. Standardna devijacija je ispod 2%. Rezultati potpuno dokazuju tačnost i kvalitet realizovanog kvazi ortogonalnog filtra.





Slika 2.15 Signali kvazi ortogonalnog filtra prvog reda simulirani u MATLAB-u



Slika 2.16 Signali izmereni na praktično realizovanom kvazi ortogonalnom filtru

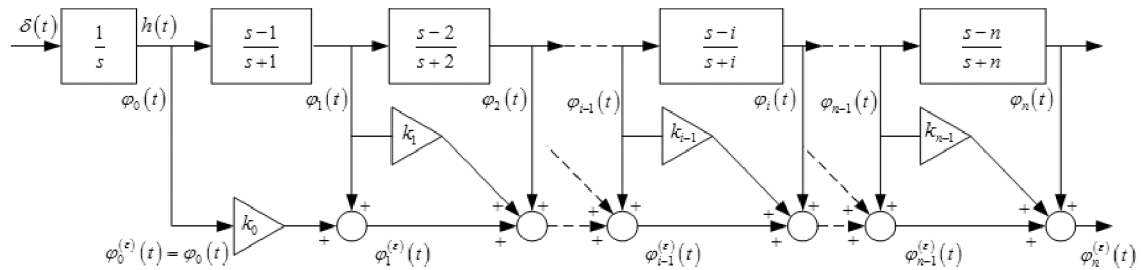
## 2.7 Skoro ortogonalni filtri

### 2.7.1 Projektovanje skoro ortogonalnih filtara

Razmotrimo slučaj Ležandrovih skoro ortogonalnih funkcija. Na sličan način kao i ranije u slučaju klasičnih ortogonalnih funkcija, mogu se konstruisati i skoro ortogonalni filtri [2.23]. Počinjemo sa relacijom za šiftovalne Ležandrove polinome ortogonalne na (0, 1) u eksplicitnom obliku

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \frac{(n+j)!}{j!} x^j. \quad (2.38)$$

Korišćenjem rekurentne relacije (2.30), relacije (2.38), smene  $x=e^{-t}$  i primenom Laplasove transformacije može se dobiti skoro ortogonalni filter Ležandrovog tipa (slika 2.17). Ovaj filter predstavlja generalizovanu (uopštenu) verziju filtra prikazanog na slici 2.4.



Slika 2.17 Skoro ortogonalni filter Ležandrovog tipa

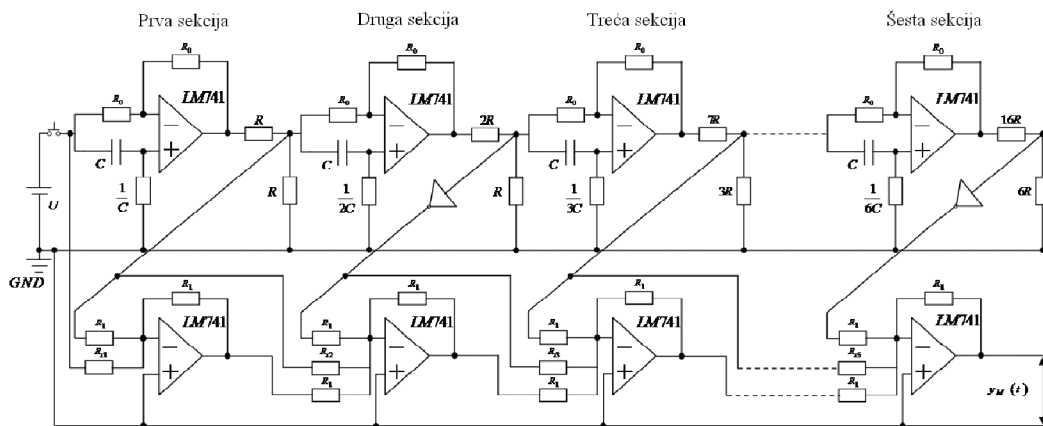
Funkcije  $\varphi_i^{(\varepsilon)}(s)$  na slici 2.17 su skoro ortogonalne, pa su njihovi unutrašnji proizvodi

$$I_{mn} = \int_0^{\infty} \varphi_m^{(\varepsilon)}(t) \varphi_n^{(\varepsilon)}(t) e^{-t} dt = \begin{cases} \varepsilon, & m \neq n \\ N_n^{(\varepsilon)}, & m = n \end{cases} \quad (2.39)$$

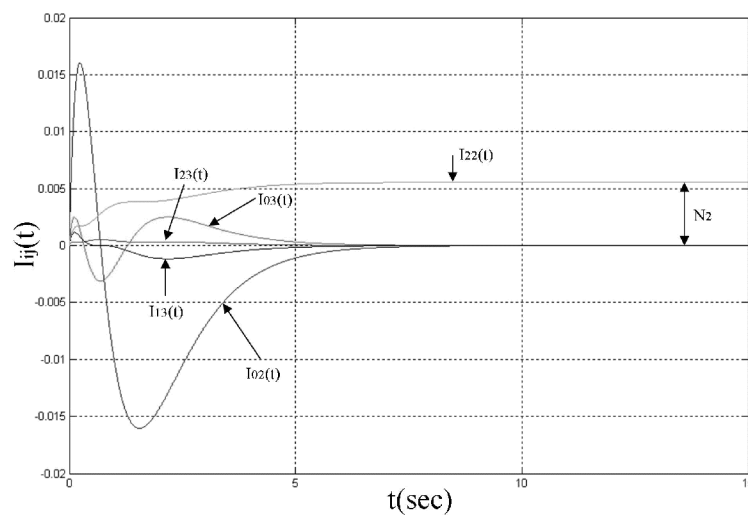
Realni signali  $\varphi_m^{(\varepsilon)}(t)$  i  $\varphi_n^{(\varepsilon)}(t)$  predstavljaju skoro ortogonalne Ležandrove funkcije. To je niz skoro ortogonalnih eksponencijalnih funkcija na  $(0, \infty)$  sa težinom  $w(t) = e^{-t}$ .

## 2.7.2 Praktična realizacija skoro ortogonalnih filtera

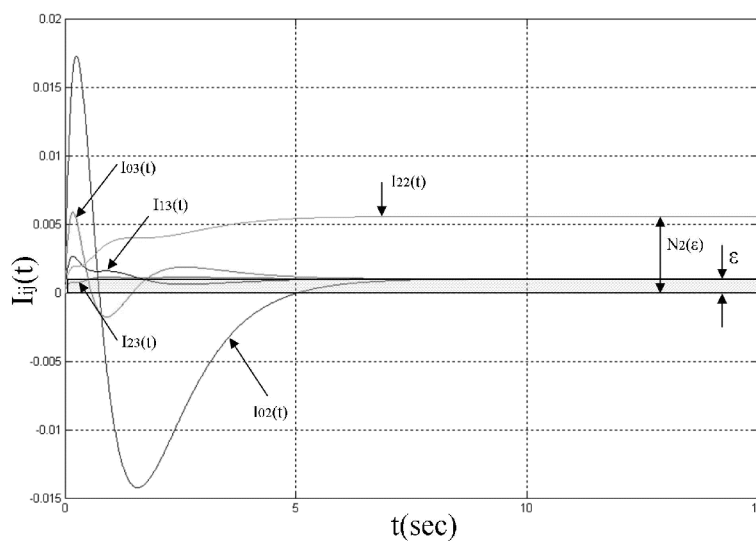
Skoro ortogonalni filter sa slike 2.17 ima praktičnu realizaciju datu na slici 2.18 i realizovan je u Laboratoriji za modeliranje, simulaciju i upravljanje sistemima u formi štampane ploče sa šest sekcija filtra. Slike 2.19 i 2.20 prikazuju unutrašnje proizvode ortogonalnog i skoro ortogonalnog Ležandrovog filtra dobijene merenjem realnih signala sa kojih se direktno vidi značenje skoro ortogonalnosti i potvrđuje njegova definicija.



Slika 2.18 Praktična realizacija Ležandrovog skoro ortogonalnog filtra



Slika 2.19 Unutrašnji proizvodi izlaznih signala ortogonalnog filtra



Slika 2.20 Unutrašnji proizvodi izlaznih signala skoro ortogonalnog filtra

## 2.8 Literatura

- [2.1] A. Bultheel, P. Gonzalez Vera, E. Hendriksen, O. Njastad, Orthogonal Rational Functions, vol. 5 of Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, *Cambridge University Press*, 1999.
- [2.2] W. Van Assche, I. Vanherwegen. “Quadrature formulas based on rational interpolation“, *Mathematics of Computation*, vol. 61, no. 204, pp.765-783, 1993.
- [2.3] K. Pan, “On the convergence of rational functions orthogonal on the unit circle“, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 76, pp.315-324, 1996.
- [2.4] A. Zverev, Handbook of Filter Synthesis, *John Wiley & Sons*, 1969.
- [2.5] A. Williams, F. Taylor, Electronic Filter Design Handbook, *McGraw-Hill*, 1995.
- [2.6] X. Nie, D. Raghuramireddy, R. Unbehauen, “Orthonormal expansion of stable rational transfer function“, *Electronic Letters*, vol. 27, pp.1492–1494, 1991.
- [2.7] A. Bultheel, P. González-Vera, E. Hendriksen, O. Njastad, “Separation of zeroes of para-orthogonal rational functions“, *Acta Mathematica Hungarica*, vol. 96, pp.169-186, 2002.
- [2.8] B. Danković, D. Antić, Z. Jovanović, Identifikacija procesa, *Elektronski fakultet u Nišu*, Niš, 2010.
- [2.9] J. Malmquist, “Sur les fonctions á un nombre fini des branches définies par les équations différentielles du premier ordre“, *Acta Mathematica*, vol. 36, pp. 297-343, 1913.
- [2.10] B. Danković, G. V. Milovanović, S. Rančić, “Malmquist and Müntz orthogonal systems and applications“, in *Inner Product Spaces and Applications*, T. M. Rassias Eds., *Addison-Wesley Longman*. Harlow, pp. 22 - 41, 1997.
- [2.11] S. B. Marinković, B. Danković, M. S. Stanković, P. M. Rajković, “Orthogonality of some sequences of the rational functions and the Müntz polynomials“, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 163, pp. 419-427, 2004.
- [2.12] P. B. Borwein, T. Erdelyi, J. Zhang, “Müntz systems and orthogonal Müntz-Legendre polynomials“, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 342, no. 2, pp.523-542, 1994.

- [2.13] G. V. Milovanović, B. Danković, S. Rančić, “Some Müntz orthogonal systems”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 99, no. 1-2, pp. 299-310, 1998.
- [2.14] A. H. Gray, J. D. Markel, “A normalized digital filter structure”, *IEEE Transactions Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 23, pp. 268 - 277, 1975.
- [2.15] L. J. Karam, J. H. McClellan, “Complex Chebyshev approximation for FIR filter design”, *IEEE Transactions Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 42, pp. 207-216, 1995.
- [2.16] A. H. Gray, “Passive cascaded lattice digital filters”, *IEEE Transactions Circuits and Systems*, CAS-27, pp. 337–344, 1980.
- [2.17] U. B. Desai, “A state-space approach to orthogonal digital filters”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. 38, no. 2, pp. 160-169, 1991.
- [2.18] J. Cousseau, P. Diniz, G. Sentoni, O. Agamennoni, “On orthogonal realizations for adaptive IIR filters”, *International Journal Circuit Theory and Applications*, vol. 28, pp. 481-500, 2000.
- [2.19] A. C. den Brinker, “Laguerre-domain adaptive filters”, *IEEE Transactions Signal Processing*, vol. 42, pp. 953–956, 1994.
- [2.20] Z. Fejzo, H. Lev-Ari, “Adaptive Laguerre-lattice filters”, *IEEE Transactions Signal Processing*, vol. 45, pp. 3006–3016, 1997.
- [2.21] M. Padmanabhan, K. Martin, G. Peceli, *Feedback-Based Orthogonal Digital Filters: Theory, Applications, and Implementation*, *Kluwer Academic Publishers*, 1996.
- [2.22] S. Nikolić, M. Milojković, D. Antić, B. Danković, Z. Jovanović, S. Perić, “Skoro ortogonalni i kvazi-ortogonalni filtri”, *TEHNIKA-Elektrotehnika*, vol. 59, no. 5, pp. 1-6, 2010.
- [2.23] B. Danković, S. Nikolić, M. Milojković, Z. Jovanović, “A class of almost orthogonal filters”, *Journal of Circuits, Systems, and Computers*, vol. 18, no. 5, pp. 923-931, 2009.

## **3. Primena ortogonalnih funkcija u modeliranju dinamičkih sistema**

### **3.1 Potencijal primene ortogonalnih funkcija u modeliranju dinamičkih sistema i kratak opis poglavlja**

Jedna od osnovnih osobina savremenih tehnoloških sistema je njihova složenost, što podrazumeva relativno veliki broj koordinata stanja i parametara, komplikovane veze između njih, kao i velike brzine promena pojedinih veličina. U isto vreme se postavljaju sve stroži zahtevi pri realizaciji ovih dinamičkih sistema u pogledu tačnosti rada, kvaliteta proizvoda, produktivnosti i ekonomičnosti. Najvažniji pristup kod analize složenih sistema je njihovo modeliranje [3.1]. Pojam modeliranja podrazumeva formiranje modela kao sistema koji je analogan procesu u pogledu njegovog ponašanja [3.2], [3.3]. Po opštijoj definiciji model je predstava objekta, sistema ili ideje u nekoj formi drugačijoj od samog entiteta. Model koji sadrži sve bitne karakteristike procesa za određenu svrhu, omogućuje da se proučavanje procesa zameni proučavanjem modela pri čemu je eksperimentisanje sa modelom jeftinije, lakše, brže ili bezopasno. Prema glavnoj klasifikaciji modeli mogu biti fizički ili apstraktni pri čemu se fizički dalje mogu podeliti na fizičke sa istom prirodom i različitom prirodom, a apstraktni na matematičke i nematematičke.

Pri proceni dinamičkih modela na bazi merenih ulaznih i izlaznih signala, neophodne su odgovarajuće strukture modela. Glavni problem je izbor strukture modela koja je dovoljno složena da u sebi sadrži dovoljno mogućih modela i da je u stanju da nađe najbolju aproksimaciju procesa koji se analizira. Sa druge strane, struktura modela bi trebalo da bude i dovoljno jednostavna da izbegne velike varijacije i složenost praktične izrade. Dekompozicija dinamičkih sistema u smislu ortogonalnog razvoja omogućava aproksimaciju ili modeliranje sistema sa razvojjima konačne dužine. Dobro su poznate dobre osobine ortogonalnih funkcija u teoriji aproksimacija [1.14], [1.18]. To je, pre svega, minimalna srednje kvadratna greška pri aproksimaciji, kao i mogućnost predstavljanja drugih funkcija u obliku reda ortogonalnih funkcija. Fleksibilnim podešavanjem funkcija do željenih karakteristika sistema koji se analizira,

brzina konvergencije ortogonalnih razvoja može se drastično povećati. To vodi veoma kvalitetnim modelima koji su određeni malim brojem parametara. Te osobine su omogućile projektovanje ortogonalnih filtara u teoriji signala i njenoj primeni. Na sličan način se te dobre osobine mogu iskoristiti kod primena nekih metoda za identifikaciju i modeliranje dinamičkih sistema [3.4], [3.5]. U praktičnoj primeni, sistemi ortogonalnih funkcija mogu se primenjivati, kako kod pasivne identifikacije, tako i kod aktivne identifikacije procesa [3.6], [3.7]. U prvom slučaju se vrši aproksimacija odziva procesa nekom klasom ortogonalnih funkcija, a zatim se vrši određivanje funkcija prenosa. U drugom slučaju se ortogonalne funkcije koriste za sintezu podešavajućih modela koji se koriste pri aktivnoj identifikaciji. Sinteza modela se vrši slično sintezi ortogonalnih filtara u teoriji signala [3.8], [3.9].

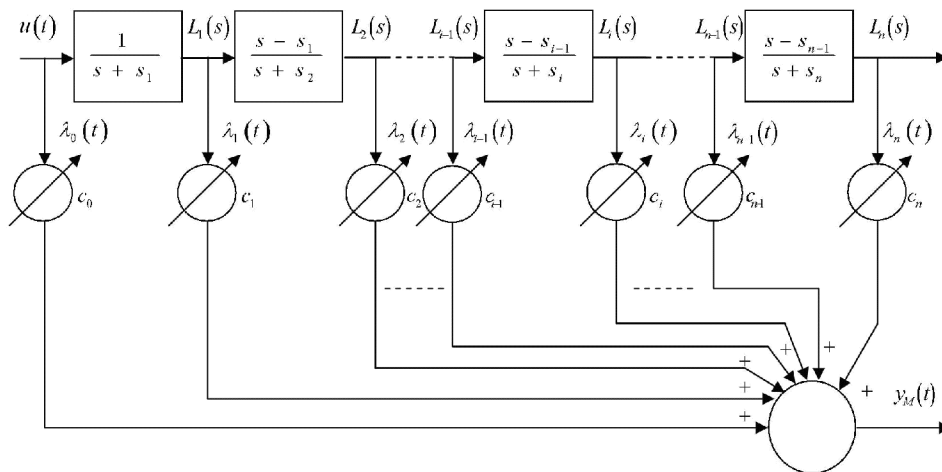
U ovom poglavlju će biti pokazano kako se ortogonalni filtri bazirani na ortogonalnim racionalnim funkcijama, čije je projektovanje i praktična realizacija opisana u prethodnom poglavlju, mogu iskoristiti za modeliranje dinamičkih sistema. Najpre će biti objašnjeno kako se dobijaju podešavajući filtri čijom se promenom parametara može opisati dinamičko ponašanje različitih sistema. Upravo zbog toga što se u procesu modeliranja kreira model sistema od podešavajućeg filtra, u ovoj disertaciji se koristi širi pojam – modeliranje, umesto užeg – identifikacija, iako se u suštini model dobija eksperimentalno, korišćenjem različitih odziva sistema. Takođe treba naglasiti da ovakvi modeli spadaju u fizičke modele sa različitom prirodom jer se raznorodni tehnički sistemi predstavljaju električnim kolima (filtrima). Sa druge strane, posle dobijanja konkretne realizacije filtra za zadati sistem, lako se dobija i matematički model preko diferencijalnih jednačina ili funkcije prenosa. Usled realizacije filtara u analognoj tehnici i ortogonalnosti signala koje oni generišu, metode modeliranja prikazane u ovom poglavlju daju mogućnost bržeg, tačnijeg i jednostavnijeg modeliranja uz korišćenje manje komponenata i parametara u odnosu na slične filtarske modele.

## 3.2 Modeliranje dinamičkih sistema primenom ortogonalnih filtara

U cilju modeliranja kontinualnih sistema može se iskoristiti sledeći aproksimacioni izraz

$$y_M(t) \approx \sum_{i=0}^n c_i \lambda_i(t). \quad (3.1)$$

Podešavajući model prikazan na slici 3.1 se formira na osnovu relacije (3.1) i filtra sa slike 2.4. Može se koristiti za modeliranje proizvoljnih kontinualnih sistema [3.10], [3.11]. Pojedinačni modeli se dobijaju podešavanjem parametara  $c_i$ . Prilikom modeliranja konkretnog, nepoznatog sistema, ovi parametri se podešavaju tako da model sa slike 3.1 odgovara što je moguće više nepoznatom sistemu [3.12], [3.13].



Slika 3.1 *Podešavajući ortogonalni model Minc-Ležandrovog tipa*

Proces modeliranja počinje tako što se isti ulazni signal dovede i na nepoznati sistem (čiji se model traži) i na podešavajući model sa slike. Sledeći korak je formiranje razlike izlaznih signala sistema i modela, kao i formiranje srednje kvadratne greške

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T (y_S - y_M)^2 dt, \quad (3.2)$$

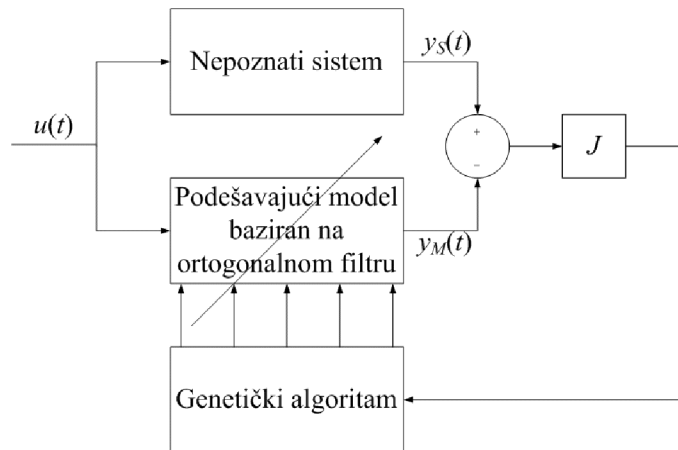
gde  $y_S(t)$  i  $y_M(t)$  predstavljaju izlaze sistema i modela, respektivno.

Parametri  $c_i$  se potom podešavaju sve dok se ne postigne minimizacija funkcije (3.2), tj. dok se ne dobije najbolji model nepoznatog sistema u smislu srednje kvadratne greške [3.14]. Optimalno podešavanje parametara se postiže nekom od tehnika



optimizacije, na primer primenom genetičkih algoritama. Kao što je poznato, genetički algoritmi predstavljaju optimizacionu tehniku koja se bazira na imitiranju procesa evolucije iz prirode [3.15], [3.16]. Pokazali su odlične performanse kao optimizatori u mnogim praktičnim primenama [3.17], [3.18].

Blok dijagram koji ilustruje proces modeliranja, prikazan je na slici 3.2.



Slika 3.2 Blok dijagram toka modeliranja

### 3.3 Modeliranje hidrauličkog sistema

#### 3.3.1 Opis sistema

Razmatra se hidraulički sistem proizvođača “Inteco” [3.19] prikazan na slici 3.3.



Slika 3.3 Hidraulički sistem

Sistem sa slike se sastoji od tri odvojena ali međusobno povezana rezervoara opremljena odvodnim ventilima. Poseban rezervoar, montiran na dnu, funkcioniše kao skladište tečnosti za sistem. Jedan rezervoar je sa konstantnim poprečnim presekom, a ostali su sa promenljivim (konični i sferični). To su ujedno i glavne nelinearnosti sistema. Pumpa promenljive brzine se koristi za punjenje gornjeg rezervoara. Tečnost zatim teče redom kroz rezervoare usled delovanja gravitacije. Ventili se pritom ponašaju kao hidrauličke otpornosti. Step en otvorenosti ventila se reguliše i može se iskoristiti za promenu karakteristika protoka. Svaki rezervoar je opremljen senzorom nivoa koji funkcioniše na principu merenja hidrauličnog pritiska.

Multitank sistem se može povezati sa problemima regulacije nivoa tečnosti koji se često javljaju u industrijskim rezervoarima za skladištenje (čeličane, farmaceutska industrija, hemijska industrija). Sam sistem je projektovan tako da funkcioniše sa spoljnim, digitalnim regulatorom povezanim sa računatom. Upravljački računar komunicira sa senzorima nivoa, ventilima i pumpom preko odvojene ulazno-izlazne table i interfejsom za napajanje. Ulazno-izlazna jedinica se kontroliše pomoću softvera u realnom vremenu koji radi u okruženju MATLAB/Simulink-a.

Hidraulički sistem sa slike 3.3 može se opisati dobro poznatim jednačinama materijalnog balansa

$$\begin{aligned} \frac{dH_1}{dt} &= \frac{1}{\beta_1(H_1)}q - \frac{1}{\beta_1(H_1)}C_1H_1^{\alpha_1}, \\ \frac{dH_2}{dt} &= \frac{1}{\beta_2(H_2)}C_1H_1^{\alpha_1} - \frac{1}{\beta_2(H_2)}C_2H_2^{\alpha_2}, \\ \frac{dH_3}{dt} &= \frac{1}{\beta_3(H_3)}C_2H_2^{\alpha_2} - \frac{1}{\beta_3(H_3)}C_3H_3^{\alpha_3}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

gde je  $q$  količina tečnosti koja ulazi u gornji rezervoar,  $H_i$  je nivo tečnosti u  $i$ -tom rezervoaru ( $i=1, 2, 3$ ),  $C_i$  je otpornost izlaznog otvora  $i$ -tog rezervoara,  $\alpha_i$  je koeficijent protoka  $i$ -tog rezervoara (koeficijent otvorenosti ventila),  $\beta_1(H_1)$  je poprečni presek  $i$ -tog rezervoara na visini tečnosti  $H_i$ . Vrednosti za poprečne preseke pojedinačnih rezervoara su sledeće:  $\beta_1(H_1) = aw$  je konstantni poprečni presek gornjeg rezervoara,

$\beta_2(H_2) = cw + \frac{H_2}{H_{2\max}}bw$  je promenljivi presek srednjeg rezervoara,

$\beta_3(H_3) = w\sqrt{R^2 - (R - H_3)^2}$  je promenljivi poprečni presek donjeg rezervoara. U

konkretnom slučaju datog sistema, vrednosti parametara su:  $a=0.25\text{m}$ ,  $b=0.345\text{m}$ ,  $c=0.1\text{m}$ ,  $w=0.035\text{m}$ ,  $R=0.364\text{m}$ ,  $H_{1max}=H_{2max}=H_{3max}=0.35\text{m}$ .

Ukoliko desne strane jednačina (3.3) napišemo u obliku  $F(x,q)=[F_1, F_2, F_3]$ , dobijamo

$$\begin{aligned} F_1(q, H_1) &= \frac{1}{\beta_1(H_1)} q - \frac{1}{\beta_1(H_1)} C_1 H_1^{\alpha_1}, \\ F_2(H_1, H_2) &= \frac{1}{\beta_2(H_2)} C_1 H_1^{\alpha_1} - \frac{1}{\beta_2(H_2)} C_2 H_2^{\alpha_2}, \\ F_3(H_2, H_3) &= \frac{1}{\beta_3(H_3)} C_2 H_2^{\alpha_2} - \frac{1}{\beta_3(H_3)} C_3 H_3^{\alpha_3}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Za model sistema (3.3) i za fiksirano  $q=q_0$ , možemo definisati ravnotežno stanje (koordinate stanja u ustaljenom stanju) pomoću relacije  $q_0 = C_1 H_{10}^{\alpha_1} = C_2 H_{20}^{\alpha_2} = C_3 H_{30}^{\alpha_3}$ .

Linearizovani model se može dobiti pomoću Tejorovog<sup>31</sup> razvoja (3.3) u okolini pretpostavljene ravnotežne tačke  $\frac{dh}{dt} = J_H h + J_q u$ , gde je  $h=H-H_0$  modifikovani vektor stanja (rastojanje od ravnotežnog stanja),  $u=q-q_0$  je devijacija upravljanja uzimajući u obzir  $q_0$ , dok  $J_p$  i  $J_q$  predstavljaju Jakobijan matrice sistema (3.4)

$$\begin{aligned} J_H &= \left[ \frac{\partial F(H, q)}{\partial H} \right]_{H=H_0, q=q_0}, \quad J_q = \left[ \frac{\partial F(H, q)}{\partial q} \right]_{H=H_0, q=q_0} \\ J_H &= \begin{bmatrix} \frac{-C_1 \alpha_1}{(H_{10})^{1-\alpha_1} \beta_1(H_{10})} & 0 & 0 \\ \frac{C_1 \alpha_1}{(H_{10})^{1-\alpha_1} \beta_2(H_{20})} & \frac{-C_2 \alpha_2}{(H_{20})^{1-\alpha_2} \beta_2(H_{20})} & 0 \\ 0 & \frac{C_2 \alpha_2}{(H_{20})^{1-\alpha_2} \beta_3(H_{30})} & \frac{C_3 \alpha_3}{(H_{30})^{1-\alpha_3} \beta_3(H_{30})} \end{bmatrix} \\ J_q &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_1(H_{10})} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Linearizovani model (3.5) može se koristiti za analizu stabilnosti kao i projektovanje upravljanja sistema delovanjem pumpe. Posle matematičkih operacija u kompleksnom domenu, ukoliko se za izlaz sistema izabere  $H_1$ , pri čemu je ulaz dotok vode u prvi rezervoar  $Q_1$ , dobija se funkcija prenosa sledećeg oblika

<sup>31</sup> B. Taylor (1685-1731), engleski matematičar

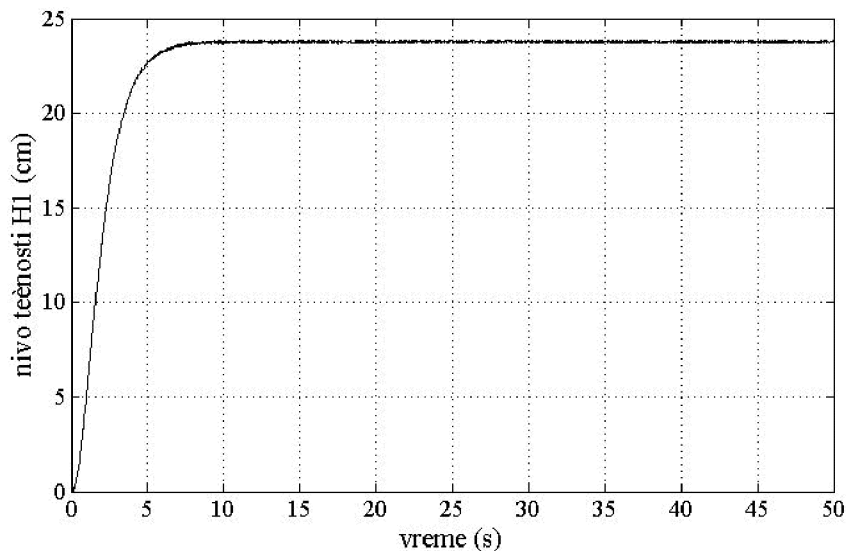
$$W(s) = \frac{H_1(s)}{Q_1(s)} = \frac{\alpha_2 s^2 + a_1 s + \alpha_0}{s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}, \quad (3.6)$$

gde je

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{\beta_1(H_{10})}, \quad a_1 = \frac{C_2 \alpha_2}{H_{20}^{1-\alpha_2} \beta_2(H_{20}) \beta_1(H_{10})} + \frac{C_3 \alpha_3}{H_{30}^{1-\alpha_3} \beta_3(H_{30}) \beta_1(H_{10})}, \\ a_0 &= \frac{C_2 \alpha_2}{H_{20}^{1-\alpha_2} \beta_2(H_{20}) \beta_1(H_{10})} \cdot \frac{C_3 \alpha_3}{H_{30}^{1-\alpha_3} \beta_3(H_{30}) \beta_1(H_{10})}, \\ b_2 &= \frac{C_1 \alpha_1}{H_{10}^{1-\alpha_1} \beta_1(H_{10})} + \frac{C_2 \alpha_2}{H_{20}^{1-\alpha_2} \beta_2(H_{20})} + \frac{C_3 \alpha_3}{H_{30}^{1-\alpha_3} \beta_3(H_{30})}, \\ b_1 &= \frac{C_1 C_3 \alpha_1 \alpha_3}{H_{10}^{1-\alpha_1} H_{30}^{1-\alpha_3} \beta_1(H_{10}) \beta_3(H_{30})} + \frac{C_2 C_3 \alpha_2 \alpha_3}{H_{20}^{1-\alpha_2} H_{30}^{1-\alpha_3} \beta_2(H_{20}) \beta_3(H_{30})} + \\ &+ \frac{C_1 C_2 \alpha_1 \alpha_2}{H_{10}^{1-\alpha_1} H_{20}^{1-\alpha_2} \beta_1(H_{10}) \beta_2(H_{20})}, \quad b_0 = \frac{C_1 C_2 C_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}{H_{10}^{1-\alpha_1} H_{20}^{1-\alpha_2} H_{30}^{1-\alpha_3} \beta_1(H_{10}) \beta_2(H_{20}) \beta_3(H_{30})}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.3.2 Opis eksperimenta

Na početku modeliranja pretpostavimo da su sistem i celokupna dosadašnja njegova analiza potpuno nepoznati (crna kutija). Jedini poznati podatak o sistemu je izmereni izlaz (nivo vode  $H_1$ ) za zadati ulazni odskočni signal (zapreminski protok vode  $Q_1$ ), prikazan na slici 3.4.



Slika 3.4 Odskočni odziv sistema

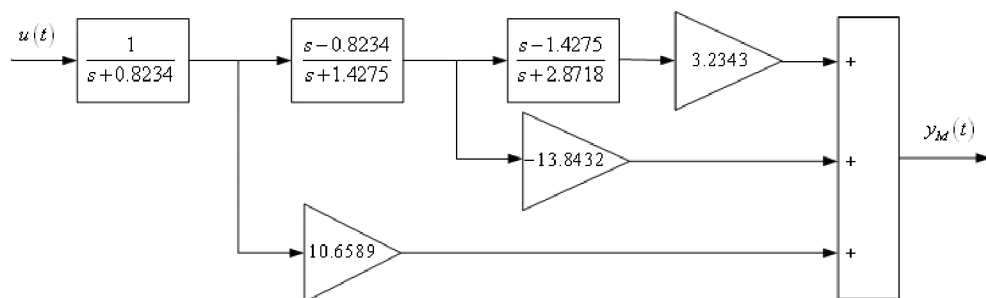
U cilju dobijanja parametara modela datog sistema, primenjen je metod opisan u prethodnom poglavlju 3.2. Isti ulazni signal je primenjen i na nepoznati sistem i na podešavajući model (slika 3.1). Izabrani podešavajući model ima strukturu prikazanu na slici 2.4 sa tri sekcije i četiri podešavajuća parametra  $c_0, c_1, c_2$  i  $c_3$ . Za odabrani model postoje još tri parametra čije optimalne vrednosti treba naći – polovi  $s_1, s_2$  i  $s_3$ . Sledeći korak je formiranje razlike izmerenih izlaza sistema i modela, kao i izračunavanje srednje kvadratne greške date sa (3.2). Optimalne vrednosti parametara najboljeg modela nepoznatog sistema se određuju korišćenjem genetičkog algoritma.

Genetički algoritam koji je iskorišćen u eksperimentu ima sledeće parametre: početnu populaciju od 300 jedinki, broj generacija 200, stohastičku uniformnu selekciju, reprodukciju uz 12 elitnih jedinki i Gausovu mutaciju sa skupljanjem. Hromozom ima strukturu koja se sastoji od 7 parametara kodiranih realnim brojevima:  $c_0, c_1, c_2, c_3, s_1, s_2$  i  $s_3$ . Cilj eksperimenta je bio da se postigne što manja srednje kvadratna greška za odabrani ulaz, tj. da se dobije najbolji mogući model sistema u smislu srednje kvadratne greške. Zbog toga je relacija (3.2) iskorišćena kao fitness funkcija genetičkog algoritma. Ukupno vreme eksperimenta je 50 sekundi.

Nakon eksperiments dobijene su sledeće vrednosti parametara modela sistema:  $c_0=10^{-6}$ ,  $c_1=10.6589$ ,  $c_2=-13.8432$ ,  $c_3=3.2343$ ,  $s_1=0.8234$ ,  $s_2=1.4275$  i  $s_3=2.8718$ . Vrednost parametra  $c_0$  je bliska nuli što znači da nema direktnog preslikavanja ulaza na izlaz. Stoga se taj parametar može izbaciti iz modela. Pomoću dobijenih rezultata, šeme sa slike 3.1 i relacije (3.1), može se odrediti linearizovani model nepoznatog sistema u obliku funkcije prenosa

$$W_{M1}(s) = \frac{0.0501s^2 + 10.1257s + 80.2318}{s^3 + 5.1227s^2 + 7.6395s + 3.3755} \quad (3.8)$$

Odgovarajući dobijeni filter-model je prikazan na slici 3.5

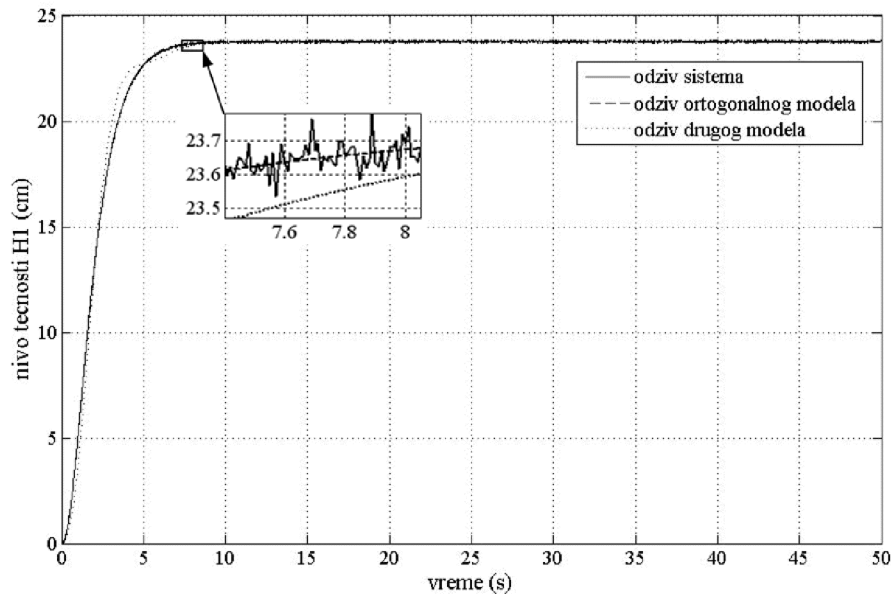


Slika 3.5 Ortogonalni model sistema

### 3.3.3 Analiza rezultata

U cilju verifikacije dobijenog modela i ilustriranja podudarnosti nepoznatog sistema i njegovog dobijenog modela, urađen je novi niz eksperimenata. Rezultati eksperimenta (nivoi vode) za primenjeni odskočni ulaz su prikazani na slici 3.6. Može se uočiti visok stepen podudarnosti nepoznatog hidrauličkog sistema i njegovog modela baziranog na ortogonalnim funkcijama. Odzivi sistema se praktično preklapaju što se najbolje primećuje na uvećanom detalju grafika.

Radi poređenja, na slici 3.6 su takođe prikazani i rezultati dobijeni metodom površina za identifikaciju parametara modela sistema [2.8]. Ovaj metod predstavlja opšti grafoanalitički metod za određivanje koeficijenata diferencijalne jednačine, tj. funkcije prenosa na osnovu eksperimentalno snimljenog odskočnog odziva. Matematički model sistema se pretpostavlja u obliku funkcije prenosa



Slika 3.6 Odzivi originalnog sistema i njegovih modela

$$W(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + 1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}, \quad (3.9)$$

gde se koeficijenti  $a_i$  i  $b_i$  mogu odrediti iz sledećeg skupa jednačina

$$\begin{aligned}
a_1 &= F_1 + b_1 \\
a_2 &= F_2 + b_2 + b_1 F_1 \\
&\vdots \\
a_i &= F_i + b_i + \sum_{j=1}^{i-1} b_j F_{i-j},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

gde je

$$\begin{aligned}
F_1 &= \int_0^{\infty} (1 - y_1) dt, \\
F_2 &= F_1^2 \int_0^{\infty} (1 - y_1)(1 - \theta) d\theta, \quad \theta = \frac{t}{F_1}, \\
&\vdots \\
F_i &= F_1^i \int_0^{\infty} (1 - y_1) \left( \frac{(-\theta)^{i-1}}{(i-1)!} + \frac{(-\theta)^{i-2}}{(i-2)!} + \sum_{j=0}^{i-3} \frac{F_{i-j-1} (-\theta)^j}{F_1^{i-j-1}} \right) d\theta.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Primenjujući ovaj metod identifikacije i Laplasovu transformaciju dobija se funkcija prenosa nepoznatog sistema

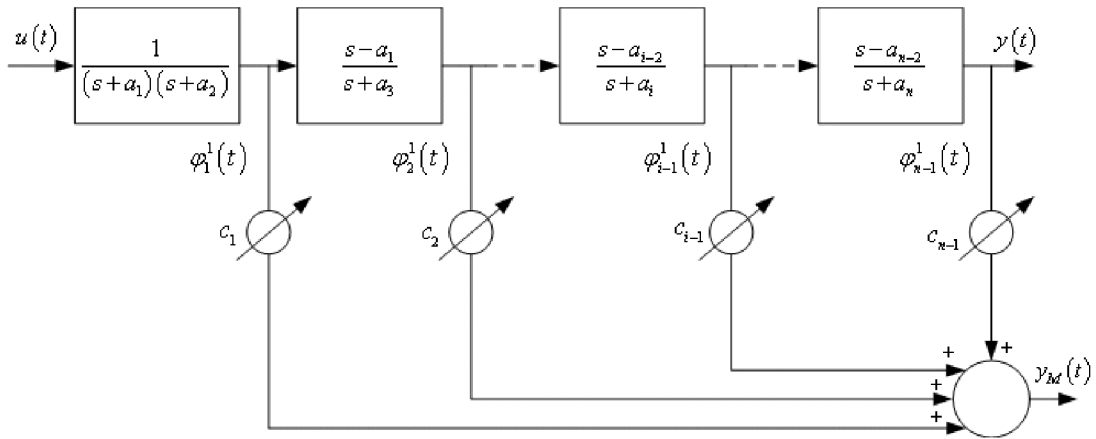
$$W_{M2}(s) = \frac{0.00062s^2 + 0.12621s + 1}{0.01246s^3 + 0.06384s^2 + 0.09522s + 0.04207}. \tag{3.12}$$

Odziv modela sa ovom funkcijom prenosa je takođe prikazan na grafiku 3.6 tačkastom linijom. Usled multipliciranja greške tokom uzastopnih integraljenja, rezultati ostvareni ovom metodom su lošiji od prethodnih. Srednje kvadratna greška (3.2) za ovaj model je  $J=0.48239$ , u odnosu na  $J=0.03672$  za model baziran na ortogonalnom filtru.

### 3.4 Modeliranje dinamičkih sistema primenom kvazi ortogonalnih filtara

Primetimo da svi klasični ortogonalni filtri imaju funkcije prenosa kod kojih je red polinoma u imeniocu za jedan manji od reda polinoma u brojiocu. U praksi se često javlja potreba za formiranjem funkcija prenosa opštijeg oblika, tj. sa razlikom polinoma većom od jedan. To se može postići korišćenjem kvazi ortogonalnih polinoma.

Sekvenca kvazi ortogonalnih funkcija definisana na način kao u relaciji (2.19) je pogodna za direktno projektovanje kvazi ortogonalnog generatora signala i podešavajućeg modela. Na primer, kvazi ortogonalni podešavajući model Ležandrovog tipa prvog reda ( $k=1$ ) je prikazan na slici 3.7



Slika 3.7 Podešavajući generator Ležandrovih kvazi ortogonalnih signala prvog reda

Signali na slici označeni sa  $\varphi_i^1(t)$  ( $i=1,2,\dots,n-1$ ) predstavljaju sekvencu eksponencijalnih kvazi ortogonalnih funkcija na intervalu  $(0, 1)$  sa težinom  $w(t) = e^{-t}$ . Oni predstavljaju inverzne Laplasove transformacije izlaznih signala iz odgovarajućih sekcija kvazi ortogonalnog filtra prvog reda

$$\varphi_i^1(t) = L^{-1} \{ \varphi_i^1(s) \}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (3.13)$$

gde je  $\varphi_i^1(s) = u(s) \prod_{j=1}^i W_j^1(s)$  za ( $i=1, 2, \dots, n-1$ ). Član  $W_j^1(s)$  predstavlja funkciju prenosa jedne ćelije (sekcije) generatora signala (filtra).

U cilju dobijanja modela sistema, ponovo se koristi poznata aproksimacija

$$y_M(t) \approx \sum_{i=1}^{n-1} c_i \varphi_i^1(t). \quad (3.14)$$

Podešavajući model na slici 3.7 je konstruisan na osnovu aproksimacije (3.14) i funkcije prenosa filtra (2.19). Podešavajući model može se upotrebiti za modeliranje proizvoljnog dinamičkog sistema. Pojedinačni modeli se dobijaju pomoću podešavajućih parametara  $c_i$  ( $i=1,2,\dots,n-1$ ) i polova ćelija filtra  $a_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ). Tokom modeliranja konkretnog nepoznatog sistema, ovi parametri se podešavaju tako da model na slici 3.7 odgovara nepoznatom sistemu što je više moguće. Modeliranje i u ovom slučaju podrazumeva primenu istog ulaznog signala i na nepoznati sistem (čiji se model traži) i na model sa slike 3.7. Zatim se traži razlika izlaza sistema i modela, i formira sa srednje kvadratna greška koja u ovom slučaju može da bude i nešto drugačija od (3.2) u smislu većeg vrednovanja greške u ustaljenom stanju od prelaznog dela odziva

$$J = \frac{1}{T} \int_0^T t (y_S - y_M)^2 dt, \quad (3.15)$$



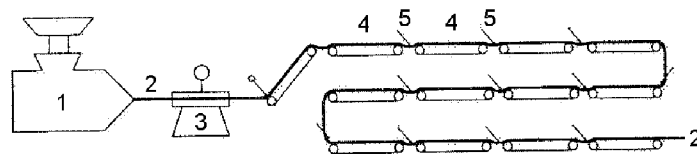
gde su  $y_S(t)$  i  $y_M(t)$  izlazni signali iz sistema i modela.

Parametri podešavajućeg modela se menjaju (podešavaju) sve dok se ne postigne minimum funkcije greške (3.15), tj. sve dok se ne postigne najbolji model nepoznatog sistema u smislu srednje kvadratne greške. Optimalno podešavanje parametara se može postići genetičkim algoritmom. Kompletan blok dijagram koji ilustruje tok modeliranja je ponovo opisan slikom 3.2 samo što sada imamo podešavajući kvazi ortogonalan model umesto ortogonalnog.

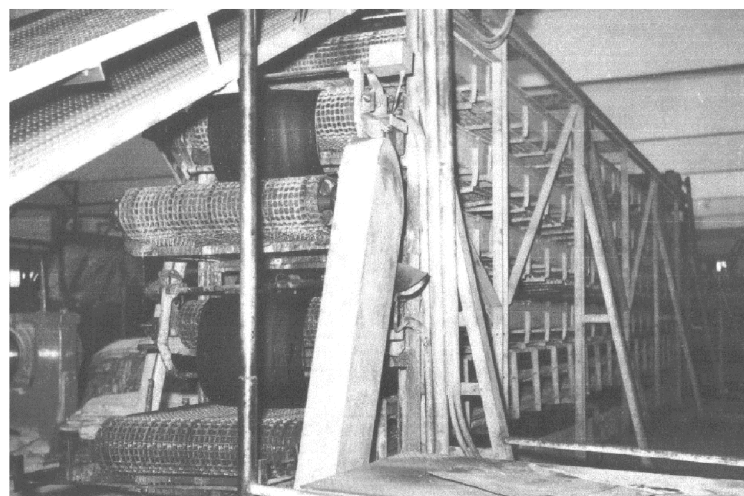
## 3.5 Modeliranje kaskadno povezanog transportnog sistema

### 3.5.1 Opis sistema

Razmotrimo sistem koji se sastoji od kaskadno povezanih transportera za hlađenje gumenih traka, prikazan šematski na slici 3.8 i u fabrici na slici 3.9.



Slika 3.8 Kaskadni sistem za transport gumene trake (1-ekstruder, 2-gumena traka, 3-vaga, 4-transporteri, 5-prelazi)



Slika 3.9 Sistem za hlađenje gume u fabrici "Tigar-Michelline", Srbija

Gumena traka dolazi iz ekstrudera (oznaka 1 na slici 3.8), prolazi vagu (oznaka 3) i ide u sistem za hlađenje. Neophodno je gumenu traku ohladiti do sobne temperature. Dok guma prolazi kroz sistem za hlađenje ona se skuplja i to sa nekim koeficijentom kontrakcije  $\mu < 1$ . Usled kontrakcije imamo različite brzine gumene trake na krajevima, što izaziva proklizavanje gume u odnosu na transporter. Brzine pojedinačnih transporterata se podešavaju lokalnim regulatorima koji određuju brzinu sledećeg transporterata u odnosu na dužinu gume između dva uzastopna transporterata.

Promena dužine gumene trake između dva transporterata može se opisati sledećim jednačinama

$$\begin{aligned} \frac{dl_i}{dt} &= V_{g,i-1}^{(2)} - V_{g,i}^{(1)}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ V_{g,i-1}^{(2)} &= V_{i-1}, \quad V_{g,i}^{(1)} = \frac{1}{\mu} V_i, \\ \frac{dl_i}{dt} &= V_{i-1} - \frac{1}{\mu} V_i, \\ \Delta l_i &= \frac{1}{s} \left( V_{i-1} - \frac{1}{\mu_i} V_i \right), \end{aligned} \quad (3.16)$$

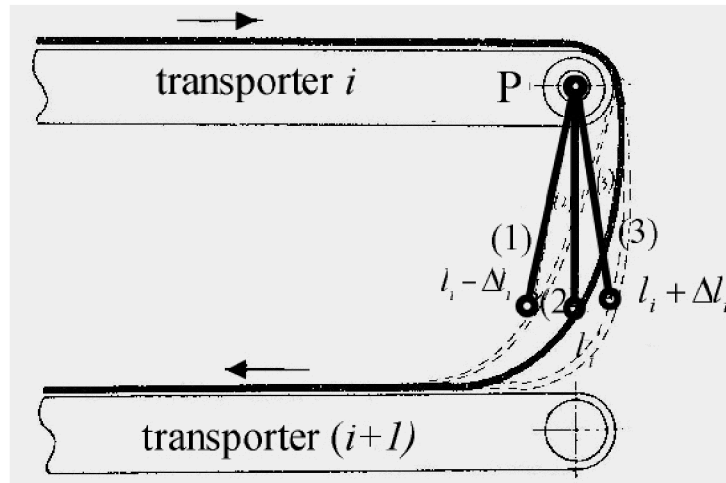
gde je:  $l_i$  - dužina gumene trake između  $i$ -tog i  $(i+1)$ -og transporterata,  $V_{g,i-1}^{(2)}$  - brzina gume na kraju  $(i-1)$ -og transporterata,  $V_{g,i}^{(1)}$  - brzina gume na početku  $i$ -tog transporterata,  $n$  - broj transporterata,  $\Delta l_i$  - promena dužine gumene trake između dva uzastopna transporterata,  $V_i$  - brzina  $i$ -tog transporterata,  $\mu_i$  - koeficijent kontrakcije gume za  $i$ -ti transporter.

Slika 3.10 prikazuje prelaz između dva transporterata. Da bi regulisali brzine transporterata, neophodno je meriti dužine gume između transporterata ( $\Delta l_i$ ). Ova merenja se izvode specijalnim sensorima (potenciometri  $P$  na slici 3.10). Vrednost ugla potenciometra  $\beta_i$  zadovoljava relaciju  $\beta_i = \Phi(\Delta l_i)$ , gde  $\Phi$  predstavlja nelinearnu zavisnost. Vrednost  $\beta_i$  se kreće između 0 i 90 stepeni. Napon na potenciometru je u tom slučaju dat sa  $u_i = K_{pi} \beta_i$ , gde  $K_{pi}$  predstavlja koeficijent potenciometra [V/rad].

Napon potenciometra se potom pojačava i konačno se brzine motora koji pogone transporterata regulišu pomoću tiristorskih regulatora. Dinamika  $i$ -tog transporterata sa regulatorom i motorom može se opisati jednačinom

$$T_1 T_2 \frac{dV_i^2}{dt^2} + (T_1 + T_2) \frac{dV_i}{dt} + V_i = u_i, \quad (3.17)$$

gde su  $T_1$  i  $T_2$  mehanička i električna vremenska konstanta elektromehaničkog pogona, respektivno.

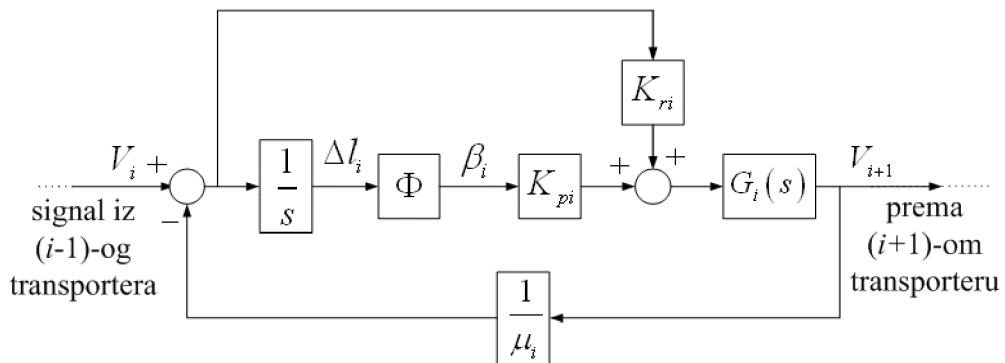


Slika 3.10 Prelaz gume između dva transportera

Prema (3.17), funkcija prenosa  $i$ -tog transportera ima oblik

$$G_i(s) = \frac{V_i(s)}{u_i(s)} = \frac{1}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2)s + 1}. \quad (3.18)$$

Iz jednačina koje opisuju sistem (3.16), (3.17) i (3.18) može se izvesti blok dijagram pojedinačnog transportera prikazan na slici 3.11



Slika 3.11 Blok dijagram pojedinačnog transportera u kaskadno povezanom sistemu

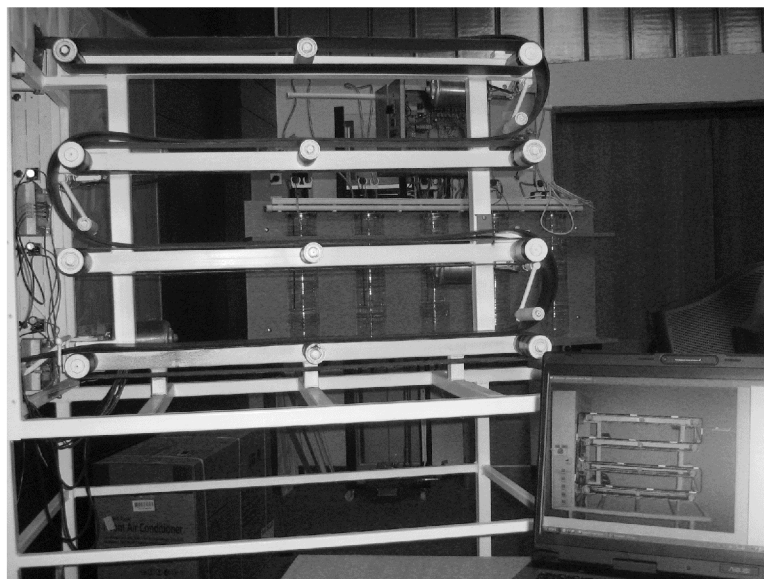
### 3.5.2 Analiza sistema i njegova praktična realizacija

Integraljenje brzine između transporterera može izazvati statičku grešku kada se parametar  $\mu$  menja (npr. pri promeni kvaliteta gume ili temperature okoline). Na slici 3.10 srednja pozicija senzora (pozicija 2) odgovara normalnom radu. Ako se  $\mu$  poveća, senzor se pomera u poziciju 1 i javlja se statička greška  $-\Delta I_i$  (guma se rasteže). Ako se  $\mu$  smanji, senzor se pomera u poziciju 3 i javlja se statička greška  $+\Delta I_i$  (guma se sakuplja). Kompenzacioni potenciometri ( $K_{ri}$  na slici 3.11) se uvode u cilju kompenzacije statičke greške tako da se njihovim podešavanjem sistem vraća u normalno funkcionisanje (pozicija 2 na slici 3.10).

Na stabilnost i dinamiku opisanog transportnog sistema, između ostalih, utiču i sledeće osobine:

- Guma se nagomilava na mestima prelaza (tačke 5 na slici 3.8) zbog integracije razlike u brzinama;
- Na prelazima kaskada, između transporterera, javljaju se nelinearne zavisnosti;
- Koeficijent kontrakcije  $\mu$  ima delimično stohastički karakter zato što zavisi od kvaliteta gume i temperature okoline.

Usled kaskadne strukture i prisutnih nelinearnosti, sistem je sklon oscilovanju [3.20], a pod izvesnim uslovima u njemu se može javiti i deterministički kaos [3.21]. Zbog svega toga, ovaj sistem je veoma kompleksan i težak za modeliranje [3.22].



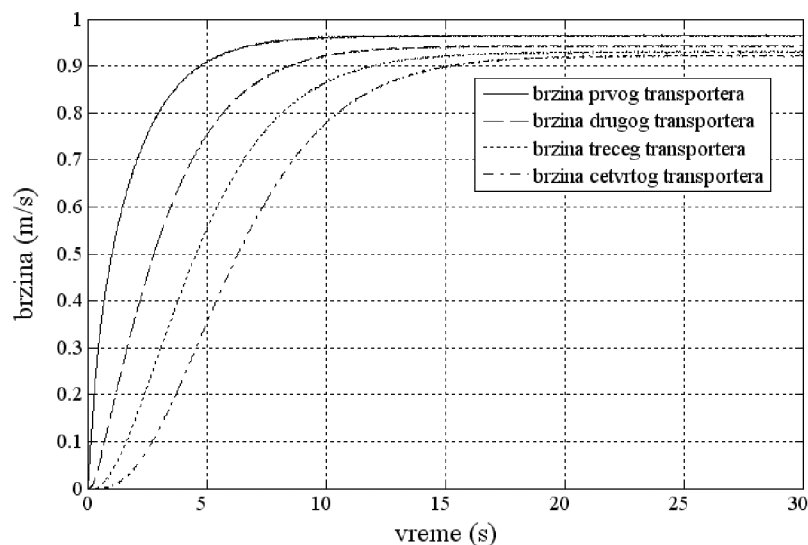
Slika 3.12 Laboratorijska postavka – kaskadno povezani sistem sa četiri transporterera

Eksperimentalni kaskadno povezani sistem sa četiri transportera je praktično realizovan u Laboratoriji za modeliranje, simulaciju i upravljanje sistemima na Elektronskom fakultetu u Nišu. Praktično realizovan sistem (slika 3.12) može da imitira stvarni, fabrički, u svim pomenutim aspektima.

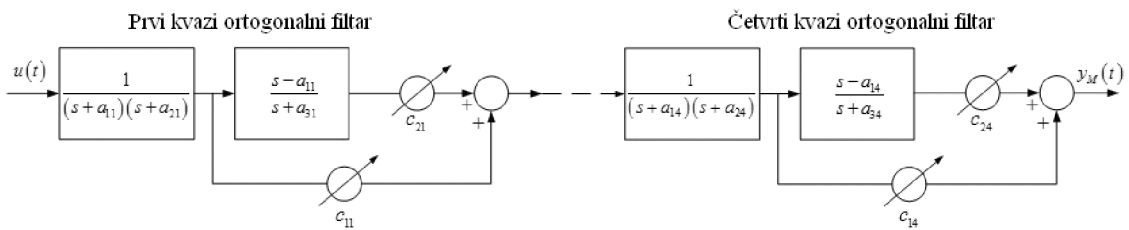
### 3.5.3 Opis eksperimenta

Cilj eksperimenata je bio dobijanje modela i funkcije prenosa prikazanog laboratorijskog sistema pomoću razvijenih kvazi ortogonalnih funkcija. Pri tom se smatra da je sistem crna kutija i zanemarujemo celokupno predznanje o njemu. Jedini poznati podaci o sistemu su izmereni izlazi (brzine pojedinačnih transportera) za zadati odskočni ulaz (slika 3.13).

Za modeliranje je odabran podešavajući model sa četiri kvazi ortogonalna filtra (po jedan za svaki transporter) prvog reda ( $k=1$ ) sa po dve sekcije ( $n=3$ ), prikazan na slici 3.14. Svaki filter ima pet podešavajućih parametara ( $a_1, a_2, a_3, c_1,$  i  $c_2$  na slici 3.5). Isti jedinični odskočni ulazni signal se dovodi i na nepoznati sistem i na podešavajući model (kao na slici 3.2). Zatim se kao i u ranijim slučajevima modeliranja formira razlika izlaznih signala, izračunava srednje kvadratna greška i genetičkim algoritmom nalaze optimalni parametri podešavajućeg modela koji tu grešku minimizuju. Vreme eksperimenta je 30 sekundi.



Slika 3.13 Odskočni odziv laboratorijskog eksperimentalnog kaskadno povezanog sistema



Slika 3.14 *Kvazi ortogonalni model kaskadno povezanog sistema*

Dobijeni rezultati za optimalne vrednosti parametara podešavajućeg modela su prikazani u tabeli 3.1.

Tabela 3.1 *Dobijeni parametri kvazi ortogonalnog modela za sva četiri transportera*

	Transporter 1	Transporter 2	Transporter 3	Transporter 4
$a_1$	1.5687	1.5889	1.5845	1.6226
$a_2$	0.4371	0.4143	0.4209	0.3767
$a_3$	0.0531	0.0543	0.0534	0.0579
$c_1$	0.2121	0.1924	0.1733	0.1533
$c_2$	-0.0156	-0.0154	-0.0161	-0.0158

Koristeći ove parametre dobijamo odgovarajuće funkcije prenosa kvazi ortogonalnih filtara koji predstavljaju modele pojedinačnih transportera

$$TF_1(s) = \frac{0.1965s + 0.0357}{s^3 + 2.0586s^2 + 0.7922s + 0.0364},$$

$$TF_2(s) = \frac{0.1768s + 0.0355}{s^3 + 2.0585s^2 + 0.7691s + 0.0359},$$

$$TF_3(s) = \frac{0.1571s + 0.0352}{s^3 + 2.0589s^2 + 0.7741s + 0.0356},$$

$$TF_4(s) = \frac{0.1375s + 0.0346}{s^3 + 2.0573s^2 + 0.7271s + 0.0354}.$$

Celokupna funkcija prenosa za kompletan kaskadno povezani sistem može se dobiti kao redna veza pojedinačnih transportera  $TF(s) = \prod_{i=1}^4 TF_i(s)$ . Odskočni (step) odziv dobijenog modela je gotovo identičan realnom sistemu sa standardnom devijacijom manjom od 1.5%. Rezultati pokazuju visok nivo tačnosti, brzine, jednostavnosti i kvaliteta predložene metode modeliranja.

### 3.6 Modeliranje dinamičkih sistema primenom skoro ortogonalnih filtara

Komponente koje se koriste pri izradi realnih sistema nisu savršene i njihovi parametri mogu varirati u okviru dozvoljenog opsega. Razlozi za to mogu biti različiti: nesavršena proizvodnja, uslovi eksploatacije sistema (temperatura okoline, pritisak, vlaga, elektromagnetna polja, promene napona...). Shodno tome, svaki realan sistem je na neki način nesavršen [3.23], [3.24]. U poslednje vreme se takvi, sistemi sa nesavršenostima ili nesavršeni sistemi, sve intenzivnije proučavaju [3.25]. Trebalo bi, takođe, napomenuti da, sa druge strane, digitalne sisteme u tom smislu možemo smatrati savršenim jer nesavršenost njihovih komponenata ne utiče na tačnost sistema kao celine. Jedan od najvećih problema koji se javlja pri proučavanju takvih nesavršenih (eng. *imperfect*) sistema je dobijanje njihovih modela. Skoro ortogonalni filtri kao neki vid nesavršenih filtara predstavljaju najbolje sredstvo za modeliranje i analizu nesavršenih sistema.

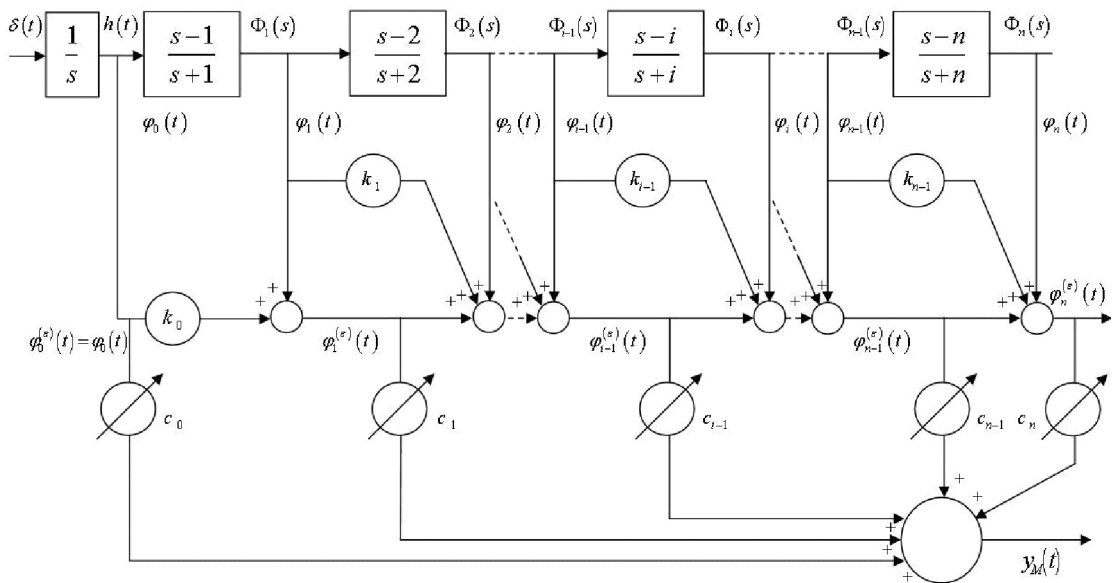
Filtar prikazan na slici 2.13 generiše skoro ortogonalne funkcije koje se mogu upotrebiti u modeliranju dinamičkih sistema korišćenjem aproksimacije

$$y_M(t) \approx \sum_{i=0}^n c_i \phi_i^{(\varepsilon)}(t). \quad (3.19)$$

Prilikom modeliranja idealizovanog (savršenog) sistema, model se dobija kao funkcija prenosa sa potpuno određenim koeficijentima. U slučaju modeliranja nesavršenih sistema, model se dobija kao funkcija prenosa čiji su koeficijenti takođe nesavršeni (neprecizni), tj. zavise od  $\varepsilon$  ( $\varepsilon$  predstavlja meru skoro ortogonalnosti). Dakle, za modeliranje nesavršenih sistema može se iskoristiti skoro ortogonalni filtar kao na slici 3.15 pri čemu je sam postupak modeliranja isti kao i u prethodnim poglavljima. Parametri  $k_i$  se izračunavaju prema (1.30), a parametri  $c_i$  mogu da se podešavaju.

Model nesavršenog sistema može se dobiti na dva načina [3.26]. Prvi način je da se iskoristi (3.19) i direktno primeni genetički algoritam na podešavanje parametara  $c_i$  u cilju minimizacije optimizacione funkcije, tj. srednje kvadratne greške. Posle dobijanja optimalnih parametara može se primeniti Laplasova transformacija na izlazni signal. Model nesavršenog sistema se tada može direktno naći kao odnos izlaza  $Y(s)$  i ulaza  $X(s)$ . Drugi način je da se pretpostavi oblik funkcija prenosa, a da se zatim podeše

parametri funkcije da bi se minimizovala kriterijumska funkcija. U slučaju nesavršenih sistema, ovi koeficijenti će biti zavisni od  $\varepsilon$ .



Slika 3.15 Podešavajući model nesavršenog sistema baziran na skoro ortogonalnom filtru

## 3.7 Modeliranje jednosmernog servo motora

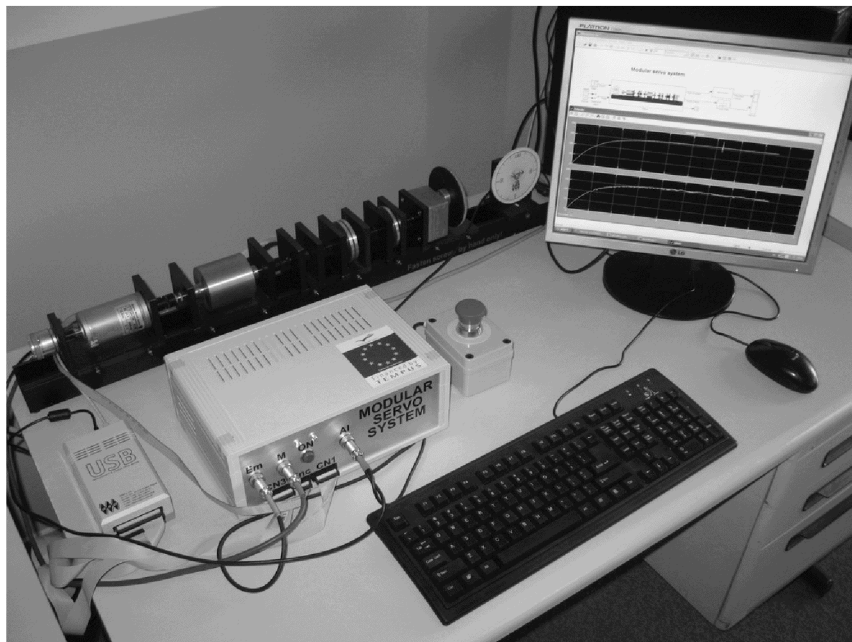
### 3.7.1 Opis sistema

Kao primer modeliranja nesavršenog sistema razmatra se modularni servo pogon, prikazan na slici 3.16. Modularni servo sistem [3.27] proizvođača “Inteco” se sastoji od digitalnog servomehanizma i otvorenog softverskog okruženja za izvođenje eksperimenata u realnom vremenu. Servo sistem podržava projektovanje i implementaciju naprednih upravljačkih algoritama u realnom vremenu pomoću MATLAB i Simulink okruženja. Sistem koristi standardnu PC hardversku platformu i Windows operativne sisteme.

Servo sistem sa slike se sastoji od nekoliko modula montiranih na metalnu šinu i povezanih malim spojnica. Moduli se nižu u lanac koji započinje jednosmernim (DC) motorom sa tahogeneratorom. Lanac zatvaraju prenosni element i izlazni disk. Između se mogu montirati inercioni element, zatorski element, magnetna kočnica i



enkoder. Rotacioni ugao osovine DC motora se meri pomoću inkrementalnog enkodera. Tahogenerator se povezuje direktno na DC motor i generiše napon proporcionalan ugaonoj brzini. Servomehanizam je povezan na računar na kome je realizovan upravljački algoritam. Sistem senzora se bazira na RTDAC/USB akvizicionoj tabli sa A/D konvertorima. Ulazno-izlazna tabla je povezana sa jedinicom za napajanje. Svim funkcijama sistema se pristupa iz Modular Servo Toolbox-a, koji radi direktno u MATLAB/Simulink okruženju. Modularni servo motor sadrži neke nelinearne statičke karakteristike tipa histerezisa i zasićenja koje se mogu javiti u operacionim pojačavačima i aktuatorima. Do njih takođe može doći usled konačne dužine reči u A/D i D/A konvertorima. U realnim uslovima eksploatacije, rad modularnog servo pogona zavisi od različitih faktora: vlažnosti vazduha, temperature, magnetnog polja okolnih uređaja, suvog kinetičkog trenja.

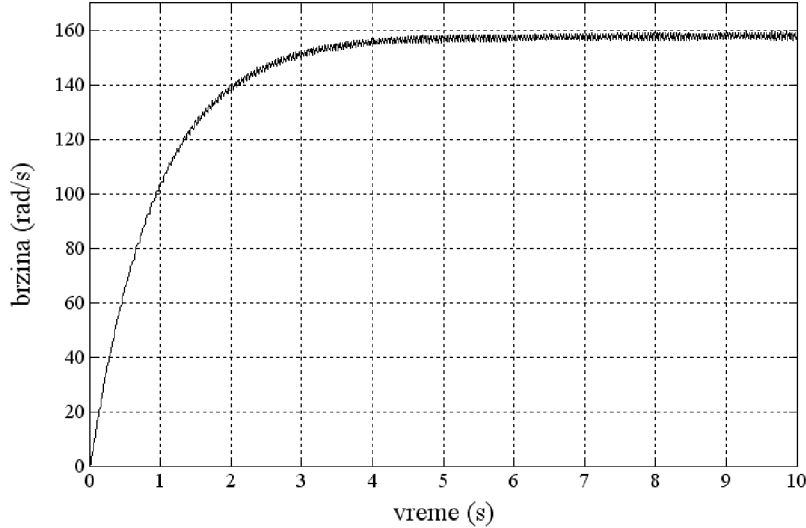


Slika 3.16 Modularni servo sistem u laboratorijskoj postavci

### 3.7.2 Opis eksperimenta

Pretpostavimo da je sistem potpuno nepoznat. Cilj je kao i u prethodnim primerima nalaženje njegovog modela i funkcije prenosa. Jedini poznati podatak o sistemu je ponovo mereni izlazni signal (ugaona brzina), koji se dobija kao odziv na ulazni odskočni signal i koji je prikazan na slici 3.17. Ako definišemo, a priori,

maksimalnu devijaciju ( $\varepsilon$ ) parametara našeg modela u odnosu na idealan model servo sistema datog u formi diferencijalnih jednačina, tada se naš model nesavršenog sistema može dobiti kao generalizovani idealni model sa parametrima zavisnim od  $\varepsilon$ .



Slika 3.17 Odskočni odziv servo motora

Da bismo dobili model zadatog sistema, primenićemo poznatu proceduru. U ovom konkretnom slučaju biramo model modularnog servo sistema sa tri ćelije podešavajućeg filtra sa slike 3.15. Takav model ima četiri podešavajuća parametra  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$  čije optimalne vrednosti direktno zavise od  $\varepsilon$ . Korišćenjem relacija (1.22), (2.31) i (3.19) dobija se funkcija prenosa nepoznatog sistema (servo motora)

$$W^{(\varepsilon)}(s) = \frac{a_3(\varepsilon)s^3 + a_2(\varepsilon)s^2 + a_1(\varepsilon)s + a_0(\varepsilon)}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}, \quad (3.20)$$

gde je

$$a_0(\varepsilon) = 6(c_0(\varepsilon) - c_1(\varepsilon) + c_2(\varepsilon) - c_3(\varepsilon)) + 6\varepsilon(c_1(\varepsilon) - 11c_2(\varepsilon) + 169c_3(\varepsilon)) + 72\varepsilon^2c_2(\varepsilon) + 25920\varepsilon^3c_3(\varepsilon) - 12960\varepsilon^4c_3(\varepsilon),$$

$$a_1(\varepsilon) = 11c_0(\varepsilon) + c_1(\varepsilon) - 7c_2(\varepsilon) + 11c_3(\varepsilon) + \varepsilon(11c_1(\varepsilon) + 23c_2(\varepsilon) - 1237c_3(\varepsilon)) - 12\varepsilon^2(c_2(\varepsilon) - 1364c_3(\varepsilon)) - 30240\varepsilon^3c_3(\varepsilon) + 15120\varepsilon^4c_3(\varepsilon),$$

$$a_2(\varepsilon) = 6c_0(\varepsilon) + 4c_1(\varepsilon) - 6c_3(\varepsilon) + 6\varepsilon(c_1(\varepsilon) + 9c_2(\varepsilon) + 9c_3(\varepsilon)) - 48\varepsilon^2(c_2(\varepsilon) + c_3(\varepsilon)),$$

$$a_3(\varepsilon) = c_0(\varepsilon) + c_1(\varepsilon) + c_2(\varepsilon) + c_3(\varepsilon) + \varepsilon(13c_2(\varepsilon) + 193c_3(\varepsilon)) - 12\varepsilon^2(c_2(\varepsilon) - 196c_3(\varepsilon)) + 4320\varepsilon^3c_3(\varepsilon) - 2160\varepsilon^4c_3(\varepsilon).$$

Funkcija prenosa direktno zavisi od  $\varepsilon$ , preko koeficijenata  $k_i$  i  $c_i$ . Parametar  $\varepsilon$  predstavlja meru nesigurnosti modela koja opisuje nesavršenost sistema. Varijacije

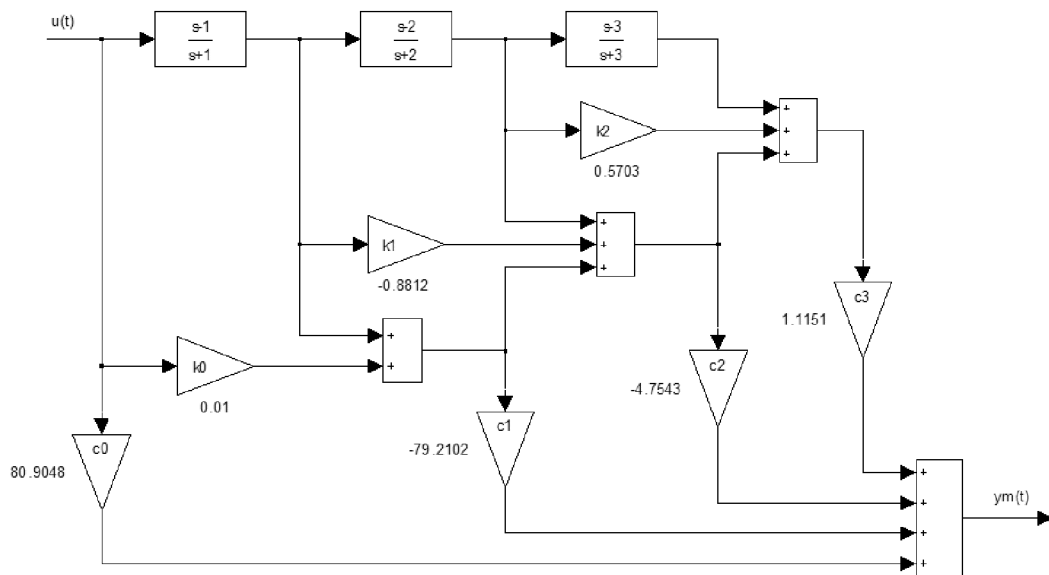
parametra  $\varepsilon$  u sebi sadrže kumulativne uticaje svih nesavršenih elemenata, nesigurnosti modela i uticaj šuma merenja izlaza sistema. Opseg varijacija se može utvrditi izvođenjem niza eksperimenata. Očekivano je da su odzivi dobijeni na osnovu različitih eksperimenata međusobno različiti. Odzivi padaju u okviru određenih granica, koje zavise od parametra  $\varepsilon$ , tj. od kvaliteta komponenata realnog sistema. Znači,  $W^{(\varepsilon)}(s)$  predstavlja model nesavršenog sistema, dobijen pomoću skoro ortogonalnih polinoma. Ovaj model opisuje sve moguće modele čiji su parametri u opsegu  $\pm\varepsilon$  u odnosu na idealizovani model sistema. Drugim rečima, ako je odziv idealizovanog sistema  $y_S(t)$ , a odziv nesavršenog modela  $y_M(t)$ , onda uvek važi sledeća relacija vezana za relativnu devijaciju

$$\delta = \frac{\int_0^T |y_S(t) - y_M(t)| dt}{\int_0^T |y_S(t)| dt} \leq \varepsilon. \quad (3.21)$$

Trebalo bi napomenuti da su u ovom konkretnom slučaju izvedena četiri eksperimenta i rezultati su pokazali razlike u odzivima modela manje od jednog procenta u smislu srednje kvadratne greške. Za odabranu vrednost  $\varepsilon$  od 0.01, dobijenu eksperimentima možemo korišćenjem izraza (1.22) i (2.31) izračunati koeficijente  $k_i$  ( $i=0, 1, 2$ ):  $k_0=0.01$ ,  $k_1=-0.8812$ ,  $k_2=0.5703$ . Zatim se pušta isti odskočni ulaz u nepoznati sistem i podešavajući model kao na slici 3.2, formira se razlika izlaza i sračunava srednje kvadratna greška. Optimalne vrednosti podešavajućih parametara  $c_0$ ,  $c_1$ ,  $c_2$  i  $c_3$ , potrebne za najbolji mogući model nepoznatog sistema su i ovaj put određene genetičkim algoritmom. Vreme eksperimenta je bilo 2 sekundi sa periodom odabiranja 0.01. Na kraju su dobijene sledeće vrednosti parametara  $c_i$ :  $c_0=80.9048$ ,  $c_1=-79.2102$ ,  $c_2=-4.7543$  i  $c_3=1.1151$ . Odgovarajući skoro ortogonalni model dobijen eksperimentima je prikazan na slici 3.18.

Konačna funkcija prenosa modularnog servo sistema dobijena eksperimentalnim putem je

$$W^{(\varepsilon)}(s) = \frac{-1.4544s^3 + 155.197s^2 + 834.485s + 933.603}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}. \quad (3.22)$$

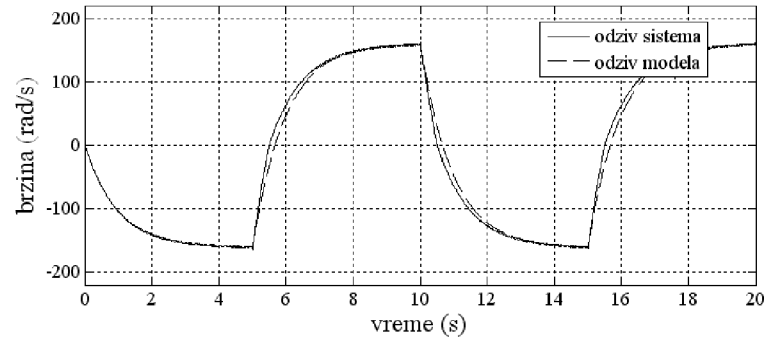


Slika 3.18 Skoro ortogonalni model servo motora

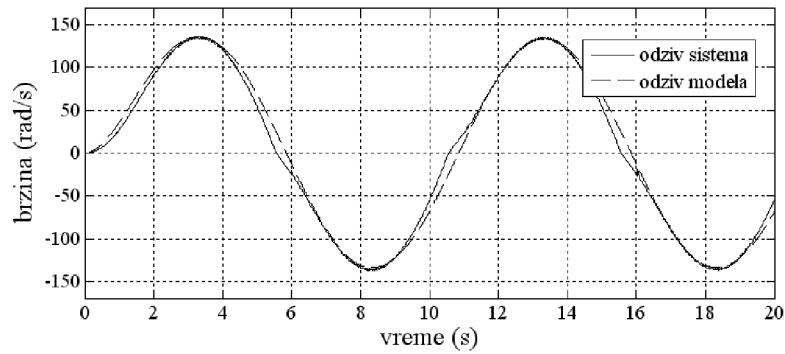
### 3.7.3 Analiza rezultata

Kao ilustracija validnosti modela, na slikama 3.19 i 3.20 su prikazani eksperimentalni rezultati (brzine realnog sistema i njegovog modela) dobijeni primenom kvadratnog i sinusnog ulaznog signala (amplitude 1V i frekvencije 0.1Hz). Može se videti da do manjih odstupanja dolazi u trenucima kada nelinearnosti sistema dolaze do izražaja. Dobijeni model (filter) je po svojoj prirodi linearan pa ne može adekvatno da isprati, na primer, pojavu mrtvog hoda (zazora) koji se javlja pri promeni smera okretanja motora i drugih nelinearnosti sistema.

U cilju dalje verifikacije modela i ilustrovanja visokog nivoa poklapanja između nepoznatog nesavršenog sistema i njegovog modela, izvršene su još dve serije eksperimenata. Najpre je izvršeno pet eksperimenata sa zadatim skupom već opisanih uslova za  $\varepsilon=0.01$ . Izmereni su različiti odzivi sistema i izračunate relativne devijacije ( $\delta$  u (3.21)) između ovih odziva i izlaza modela. Rezultati su prikazani u prvoj vrsti tabele 2. Zatim su veštački promenjeni eksperimentalni uslovi i ubačene velike varijacije u radu samog sistema i uređaja za merenje (do 4%). Rezultati za drugu seriju od pet eksperimenata za  $\varepsilon=0.04$  su prikazani u drugoj vrsti tabele 3.2. Iz tabele se može videti da vrednost relativne devijacije  $\delta$  uvek ostaje u zadatim granicama određene nesigurnosti sistema  $\varepsilon$  (relacija (3.21)).



Slika 3.19 Odzivi sistema i njegovog modela na primenjeni pravougaoni ulazni signal



Slika 3.20 Odzivi sistema i njegovog modela na primenjeni sinusni ulazni signal

Tabela 3.2 Relativne devijacije za različite eksperimentalne postavke

	$\delta_1$	$\delta_2$	$\delta_3$	$\delta_4$	$\delta_5$
$\varepsilon=0.01$	0.00721	0.00388	0.00062	0.00580	0.00865
$\varepsilon=0.04$	0.02422	0.00832	0.03294	0.02375	0.01329

### 3.8 Literatura

- [3.1] D. Antić, B. Danković, Modeliranje i simulacija dinamičkih sistema, *Elektronski fakultet u Nišu*, Niš, 2001.
- [3.2] C. Close, D. Frederick, J. Newell, Modelling and Analysis of Dynamic Systems, *John Wiley & Sons*, New York, 2002.
- [3.3] R. Woods, K. Lawrence, Modeling and Simulation of Dynamic Systems, *Prentice Hall*, New Jersey, 1997.
- [3.4] B. M. Ninness, H. Hjalmarsson, F. Gustafsson, “On the fundamental role of orthonormal bases in system identification”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47(8), pp. 1384-1407, 1999.
- [3.5] P. Hof, P. Heuberger, J. Bokor, “System identification with generalized orthonormal basis functions”, *Automatica*, vol. 31, no.12, pp. 1821-1834, 1995.
- [3.6] P. Bodin, T.E. Silva, B. Wahlberg, “On the construction of orthonormal basis functions for system identification”, *Proceedings of the 13th IFAC World Congress*, 30. June–5. July, vol. 1, San-Francisco, 1996, pp. 369-374.
- [3.7] D. K. de Vries, P. van den Hof, “Frequency domain identification with generalized orthonormal basis functions”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, pp. 656–669, 1998.
- [3.8] C. T. Chou, M. Verhaegen, R. Johansson, “Continuous-time identification of SISO systems using Laguerre functions”, *IEEE Transactions Signal Processing*, vol. 47, no. 2, pp. 349-362, 1999.
- [3.9] J. H. Chou, “Analysis and identification of scaled systems via shifted Jacobi series”, *International Journal of Systems Science*, vol. 18, no. 1, pp. 33-41, 1987.
- [3.10] P. Heuberger, P Van den Hof, Bo Wahlberg, Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions, *Springer-Verlag*, London, 2005.
- [3.11] B. Danković, D. Antić, Z. Jovanović, S. Nikolić, M. Milojković, “Systems modeling based on rational functions”, *Scientific Bulletin of UPT, Transactions on Automatic Control and Computer Science*, vol. 54(68), no. 4, pp. 149-154, 2009.

- [3.12] D. Antić, B. Danković, M. Milojković, S. Nikolić, “Modeliranje dinamičkih sistema Ležandrovim ortogonalnim funkcijama”, *TEHNIKA, Elektrotehnika*, vol. 58, no. 5, pp. 1-6, 2009.
- [3.13] B. Danković, D. Antić, Z. Jovanović, S. Nikolić, M. Milojković, “Systems modeling based on Legendre polynomials”, *Proceedings of the 5th International Symposium on Applied Computational Intelligence and Informatics, SACI 2009*, Timisoara, Romania, May 28.-29., 2009, pp. 241-246.
- [3.14] B. Danković, D. Antić, M. Milojković, S. Stankov, “Systems modelling based on orthogonal filters”, *Proceedings of the 9th International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services, TELSIKS 2009*, October 07.-09., 2009, Niš, Serbia, vol. 2, pp. 514-517.
- [3.15] J. H. Holland, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [3.16] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Addison-Wesley, Reading, 1989.
- [3.17] B. Danković, D. Antić, Z. Jovanović, M. Milojković, “Genetic algorithms applied in parameter optimization of cascade connected systems”, *Proceedings of the XLIV International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies ICEST 2007*, Ohrid, Macedonia, June 24-27, 2007, pp. 557-560.
- [3.18] D. Mitić, D. Antić, S. Nikolić, M. Milojković, “Identification of the multitank system using genetic algorithm”, *Proceedings of the XLV International Scientific Conference on Information, Communication and Energy Systems and Technologies, ICEST 2010*, Ohrid, Macedonia, June 23.-26., 2010, pp. 453-456.
- [3.19] Inteco, “Modular Servo System-User’s Manual”, 2008, [www.inteco.com.pl](http://www.inteco.com.pl)
- [3.20] B. Danković, “On the oscillations in the automated cascade systems for rubber threads transport”, *Jurema, Zagreb*, pp. 97-100, 1989.
- [3.21] B. Danković, M. Stanković, B. Vidojković, “On the appearance of chaos in the automatic control cascade systems”, *Proceedings of the 7th Symposium of Mathematics and Its Applications*, Timisoara, Romania, pp. 101-106, 1997.
- [3.22] D. Trajković, V. Nikolić, D. Antić, B. Danković, “Analyzing, modeling and simulation of the cascade connected transporters in tire industry using signal and bond graphs”, *Machine Dynamics Problems* vol. 29, no. 3, pp. 91-106, 2005.

- [3.23] Y. C. Schorling, T. Most, C. Bucher, “Stability analysis for imperfect systems with random loading”, *Proceedings of Eighth International Conference on Structural Safety and Reliability*, Newport Beach, California, 17.-22. June, 2001, pp. 1-9.
- [3.24] T. Most, C. Bucher, Y. C. Schorling, “Dynamic stability analysis of nonlinear structures with geometrical imperfections under random loading”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 276, pp. 381-400, 2004.
- [3.25] B. Danković, B. M. Vidojković, B. Vidojković, “The probability stability estimation of discrete time systems with random parameters”, *Control Intelligent Systems*, vol. 35, no. 2, pp. 134-139, 2007.
- [3.26] M. Milojković, S. Nikolić, B. Danković, D. Antić, Z. Jovanović, “Modelling of dynamical systems based on almost orthogonal polynomials”, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, vol. 16, no. 2, pp. 133-144, 2010.
- [3.27] Inteco, “Modular Servo System – User’s Manual”, 2008, [www.inteco.com.pl](http://www.inteco.com.pl)



## **4. Primena ortogonalnih funkcija u upravljanju dinamičkim sistemima**

### **4.1 Potencijal primene ortogonalnih funkcija u upravljanju dinamičkim sistemima i kratak opis poglavlja**

Korišćenje ortogonalnih funkcija i filtara u upravljanju dinamičkim sistemima [4.1] je uglavnom motivisano njihovom jednostavnošću, lakom praktičnom izradom i brzinom izračunavanja i reagovanja. Intenzivnije proučavanje uloge ortogonalnih funkcija u upravljanju dinamičkim sistemima počelo je pre tridesetak godina, naročito u oblastima adaptivnog i optimalnog upravljanja. Brojni su radovi na temu optimalnog upravljanja linearnim [4.2], [4.3], nelinearnim [4.4] i diskretnim [4.5] sistemima, sistemima sa observerom [4.6], sa vremenskim kašnjenjem [4.7], sa distribuiranim parametrima [4.8]... Ti radovi se baziraju na dobrim osobinama ortogonalnih polinoma u smislu optimalnog predstavljanja realnih signala ortogonalnim razvojem u red. Druge povoljne osobine ortogonalnih filtara kao što su jednostavna realizacija, preciznost i brzina reagovanja uticale su na njihovu primenu u adaptivnim sistemima automatskog upravljanja [4.9] kao i kod optimalnog podešavanja regulatora [4.10], [4.11]. U ovom poglavlju će biti opisan jedan nov način korišćenja ortogonalnih funkcija u upravljanju dinamičkim sistemima. Ortogonalni filter čije je projektovanje i realizacija opisana u drugom poglavlju je upotrebljen u upravljanju antenskim sistemom [4.12].

Posebno će biti opisani i načini poboljšanja performansi sistema sa upravljanjem u fazi kliznim režimima [4.13] korišćenjem ortogonalnih funkcija. Fazi regulatori danas imaju veliku primenu u najraznovrsnijim sistemima automatskog upravljanja. Kombinovanje fazi regulatora sa teorijom kliznih režima je omogućilo prevazilaženje nedostataka pojedinačnih tehnika i donelo niz dobrih osobina upravljanja kao što su: velika robusnost, mogućnost primene ekspertskog znanja i iskustva, blaže promene nivoa upravljačkog signala, lakše ispitivanje stabilnosti, mogućnost upravljanja nelinearnim, teško upravljivim i nedovoljno poznatim sistemima kao i sistemima sa promenljivim parametrima. Razvijene ortogonalne funkcije se mogu upotrebiti u

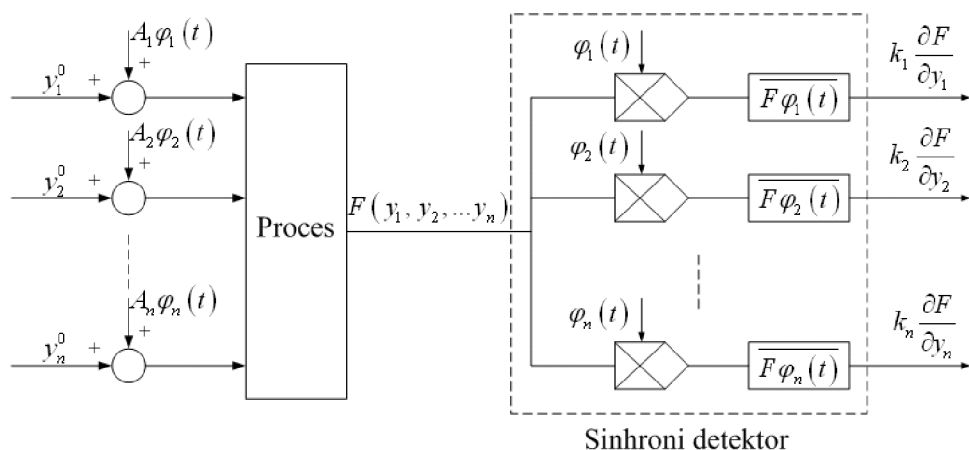
optimizaciji fazi kliznih regulatora. Takvo upravljanje će biti demonstrirano na primeru složenog ABS sistema i upoređeno sa drugim metodama upravljanja.

## 4.2 Upravljanje antenskim sistemom

### 4.2.1 Upravljački algoritam

Problem upravljanja pozicioniranjem antena datira od samih početaka razvijanja antenskih sistema. Osnovni cilj kod ovih sistema je okretanje antene u smeru predajnika, tj. najjačeg elektromagnetnog polja. Sami predajnici pri tom mogu biti raznovrsni: zemaljski (pokretna vozila), vazdušni (avioni, rakete), ili sateliti. Pri upravljanju antenskim sistemima treba rešiti dva ključna problema: detekciju gradijenta elektromagnetnog polja i praćenje cilja bazirano na odabranom algoritmu. U ovom poglavlju će biti demonstrirano kako se projektovani ortogonalni filtri mogu iskoristiti za upravljanje opisanim sistemima.

Predloženi upravljački algoritam se sastoji od dva dela: detekcije gradijenta i organizacije kretanja prema ekstremumu. Za detekciju gradijenta se koriste ortogonalni signali  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$  koje generiše projektovani Ležandrov ortogonalni filter sa slika 2.6, 2.7 i 2.8. Blok dijagram uopštenog sistema za detekciju gradijenta je prikazan na slici 4.1.



Slika 4.1 Sistem za detekciju gradijenta

Na ulazne signale, na slici obeležene kao  $y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0$ , sistemski se dodaju ortogonalne komponente  $A_i \varphi_i(t)$  koje generiše ortogonalni filtar. Tako se dobijaju potrebni signali

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1^0 + A_1 \varphi_1(t) \\ y_2 &= y_2^0 + A_2 \varphi_2(t) \\ &\vdots \\ y_n &= y_n^0 + A_n \varphi_n(t). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Izlazni signal antenskog sistema je kompleksna nelinearna funkcija tipa paraboloida. Taj signal se vodi u detektor gradijenta koji se sastoji od  $n$  grana (broj grana je jednak broju ulaznih koordinata). Svaka grana se sastoji od množača za signal jačine polja  $F(y_1, y_2, \dots, y_n)$  i odgovarajućih ortogonalnih signala  $\varphi_i(t)$ . Dobijeni proizvodi se zatim vode u elemente za izračunavanje sledeće relacije

$$\overline{F(y_1, y_2, \dots, y_n) \varphi_i(t) w(t)} = \int_0^T F \varphi_i(t) w(t) dt, \quad (4.2)$$

gde  $w(t) = e^{-t}$  predstavlja težinsku funkciju.

Posle razvijanja relacije (4.2) u red i smene  $A_i \varphi_i(t) = \Delta y_i$ , dobijamo

$$\begin{aligned} F(y_1, y_2, \dots, y_n) &= F(y_1^0 + \Delta y_1, y_2^0 + \Delta y_2, \dots, y_n^0 + \Delta y_n) = \\ &= F(y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_j} \Big|_{y_j=y_j^0} \Delta y_j + \frac{1}{2!} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \frac{\partial^2 F}{\partial y_{j_1} \partial y_{j_2}} \Big|_{y_j=y_j^0} \Delta y_{j_1} \Delta y_{j_2} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_k} \frac{\partial^k F}{\partial y_{j_1} \partial y_{j_2} \dots \partial y_{j_k}} \Big|_{y_j=y_j^0} \Delta y_{j_1} \Delta y_{j_2} \dots \Delta y_{j_k}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Trebalo bi napomenuti i da za gradijent funkcije  $F$  važi relacija

$$\mathit{grad}F(y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i} \vec{i}_i, \quad (4.4)$$

gde  $\vec{i}_i$  predstavlja jedinični vektor.

Jednačina (4.3) omogućava određivanje komponenti gradijenta  $\partial F / \partial y_i$  na osnovu ortogonalnog filtra, što je neophodno za dalju realizaciju gradijentnog upravljačkog algoritma. Nakon množenja (4.3) sa  $\varphi_n(t)$  i primene definicije ortogonalnosti za funkcije  $\varphi_i(t)$ , dobijamo

$$\begin{aligned} \overline{F(y_1, y_2, \dots, y_n) \varphi_n(t) w(t)} &\approx \sum_{j=1}^n \frac{\partial F}{\partial y_i} \Big|_{y_j=y_{j0}} \Delta y_j A_j \int_0^T \varphi_j(t) \varphi_n(t) w(t) dt = \\ &= \frac{\partial F}{\partial y_n} A_n \int_0^T \varphi_n(t) \varphi_n(t) w(t) dt = k_n \frac{\partial F}{\partial y_n}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

gde je [1.2]

$$k_n = A_n \int_0^T \varphi_n(t) \varphi_n(t) w(t) dt = \frac{1}{2n+1}. \quad (4.6)$$

Označimo na kraju gradijent funkcije  $F$  sa  $G$  ( $G = \text{grad}F$ ) i normalizovanu vrednost gradijenta sa

$$\mathbf{G}_{0j} = \frac{\mathbf{G}}{|\mathbf{G}|} = \frac{\sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i} \vec{i}_n}{\sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial y_i} \right)^2}} \quad (4.7)$$

Praćenje cilja se bazira na gradijentnoj metodi i relaciji

$$\theta(j+1) = \theta(j) - h(j) \mathbf{G}_{0j} \quad (4.8)$$

gde  $h(j)$  predstavlja težinsku funkciju koja može biti ili konstantna ili promenljiva. Konstantan korak se koristi kada je poželjno brže pozicioniranje uz nedostatak što se mogu javiti oscilacije blizu ekstremuma, pri krajevima kretanja. U slučajevima da je potrebno preciznije upravljanje koristi se promenljivi korak koji se smanjuje sa približavanjem ekstremumima. U razmatranom slučaju, postoje dve komponente gradijenta

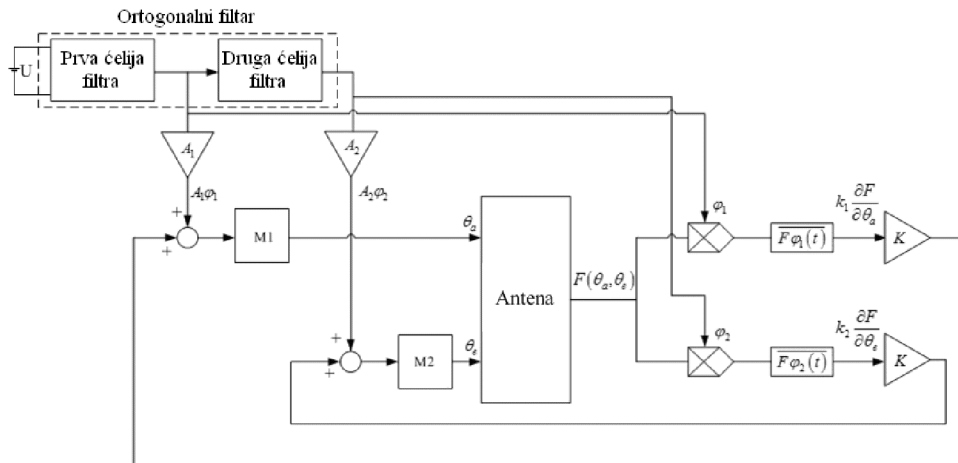
$$\begin{aligned} \theta_a(j+1) &= \theta_a(j) - h_a(j) G_{0j}, \\ \theta_e(j+1) &= \theta_e(j) - h_e(j) G_{0j}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

gde  $\theta_a$  i  $\theta_e$  predstavljaju uglove elevacije i azimuta.

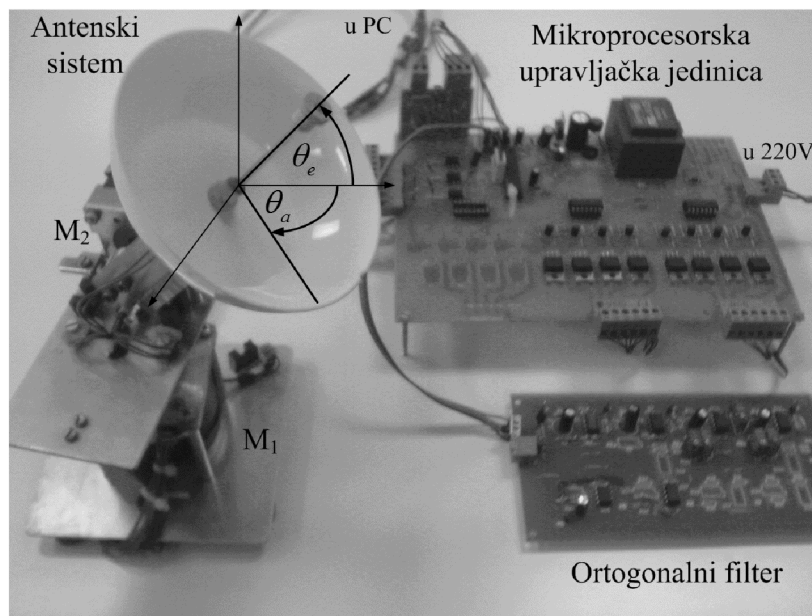
## 4.2.2 Praktična realizacija eksperimentalnog sistema

S obzirom na to da antenski sistem funkcioniše sa dve koordinate (uglovi elevacije i azimuta), vrednosti tih koordinata u potpunosti određuju usmeravanje antene prema izvoru zračenja. Veličina polja izvora zračenja  $F(\theta_a, \theta_e)$  zavisi samo od uglova  $\theta_a$  i  $\theta_e$ . U ovom slučaju, pošto operišemo sa dve koordinate, koristi se Ležandrov ortogonalni filter koji ima konfiguraciju kao na slikama 2.6 i 2.7 sa dve sekcije. Tada su

funkcije  $\varphi_1(t)$  i  $\varphi_2(t)$  sa slike 2.6 međusobno ortogonalne sa težinskom funkcijom  $e^{-t}$ . Prema jednačini (4.4), gradijent polja je  $gradF(\theta_a, \theta_e) = \frac{\partial F}{\partial \theta_a} \vec{i}_1 + \frac{\partial F}{\partial \theta_e} \vec{i}_2$ . Blok dijagram antenskog sistema korišćenog u eksperimentima je prikazan na slici 4.2, dok je praktično realizovani eksperimentalni sistem dat na slici 4.3.



Slika 4.2. Blok dijagram antenskog sistema

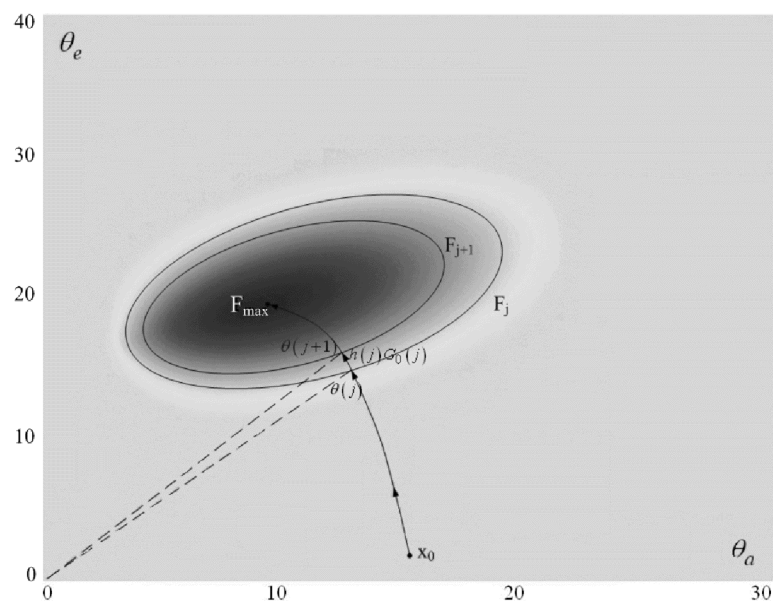


Slika 4.3 Eksperimentalna postavka antenskog sistema

Uglovi  $\theta_a$  i  $\theta_e$  se podešavaju pomoću dva koračna motora M1 i M2 (tipovi motora su 86BYG-NEMA34 i ROB-09238 sa sledećim karakteristikama: ugao koraka – 1.2 stepena; broj koraka za punu revoluciju – 300; tačnost ugaonog pozicioniranja –  $\pm 3\%$ ; faze – 2; radna temperatura –  $-20$  to  $40^\circ\text{C}$ ; nominalni napon – 12V; nominalna struja –

0.33A; obrtni moment – 2.3kg\*cm). Kod primenjenih motora je broj koraka proporcionalan upravljačkom naponu. Komponente gradijenta elektromagnetnog polja se otkrivaju pomoću sinhronog detektora sa slike 4.1. Motori se upravljaju odgovarajućim izlazima detektora gradijenta ( $k_1 \frac{\partial F}{\partial \theta_a}, k_2 \frac{\partial F}{\partial \theta_e}$ ). U cilju upravljanja realnim objektom, ovi signali se pojačavaju ( $K$  na slici 4.2) i zatim vode u reduktore za podešavanje uglova  $\theta_a$  i  $\theta_e$ . Motori M1 i M2 se nezavisno upravljaju, ali se sistem kao celina okreće ka promeni maksimalnog polja, tj. u pravcu elektromagnetnog gradijenta. Opisani upravljački algoritam radi dok se ne dosegne maksimalna jačina polja, tj. dok se antena potpuno ne okrene prema izvoru zračenja. Predloženi metod omogućava optimalno praćenje pokretnog izvora.

Slika 4.4 prikazuje trajektoriju kretanja antene u  $(\theta_a, \theta_e)$  ravni (u stepenima) prema maksimumu polja ( $F_{max}$ ) iz proizvoljne početne pozicije antene ( $x_0$ ) i ilustruje glavne aspekte predloženog upravljanja. Slika takođe prikazuje dve ekvidistantne linije sa jednakom jačinom polja, kao i druge oznake u cilju boljeg objašnjenja opisanog upravljanja.

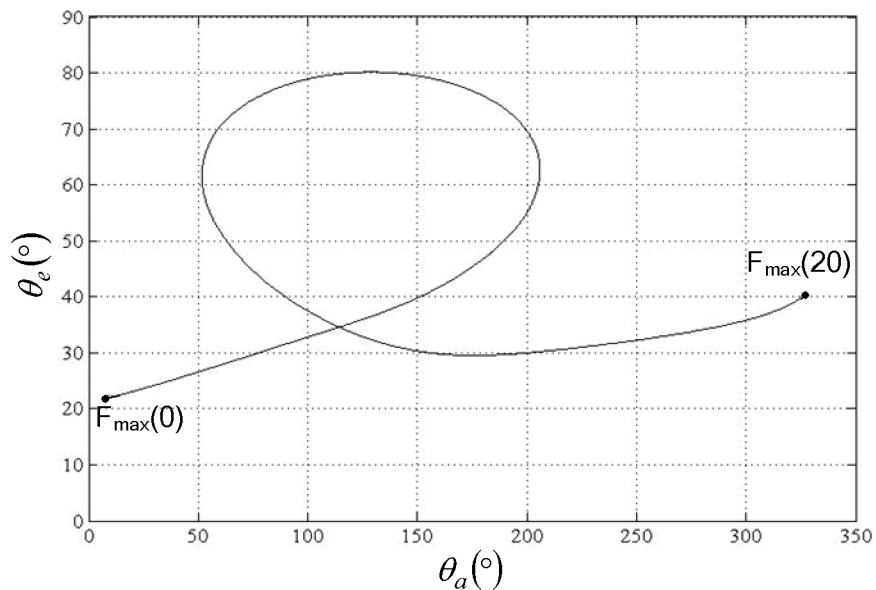


Slika 4.4 Trajektorija kretanja antene

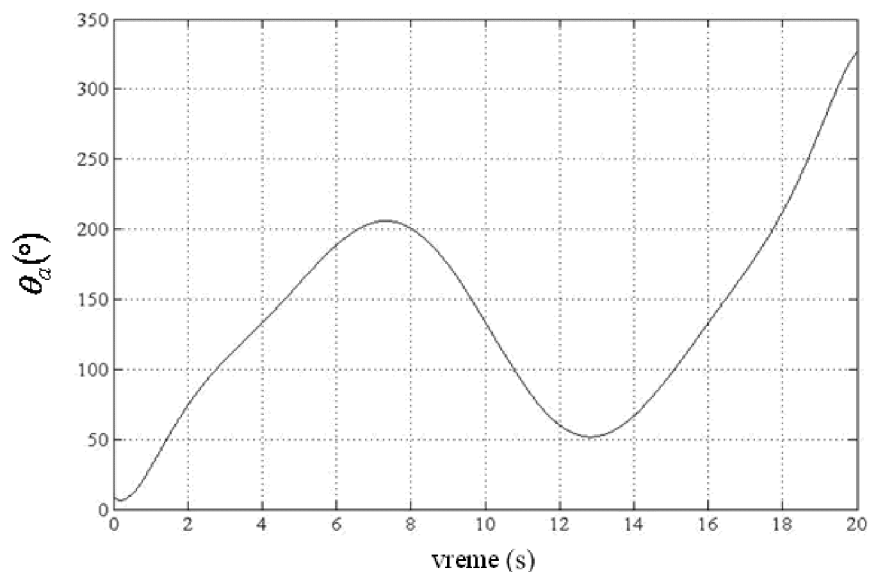
### 4.2.3 Eksperimentalni rezultati i analiza

U cilju verifikacije predložene metode upravljanja, izvršena su tri eksperimenta sa različitim regulatorima i izvršena je komparativna analiza. Cilj je bio da antena prati

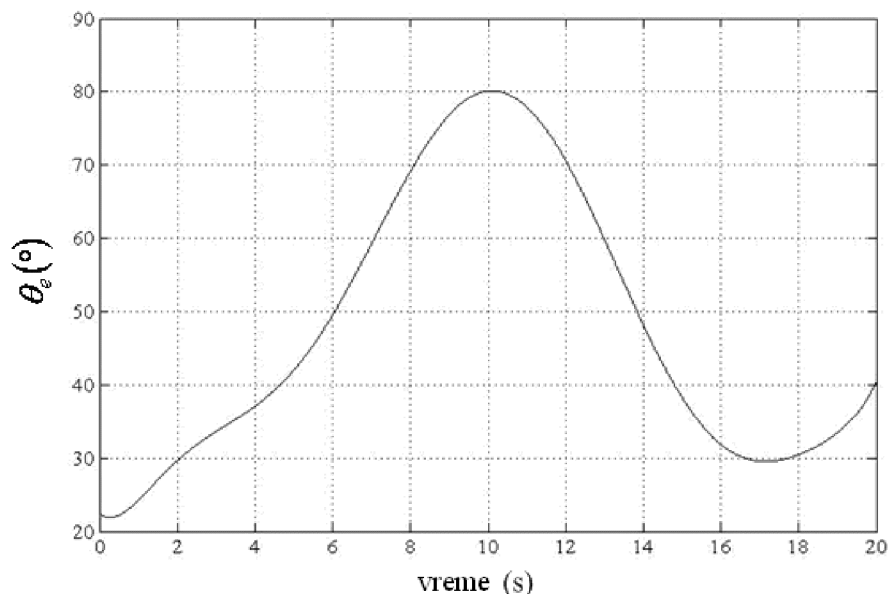
maksimum polja što tačnije. U eksperimentima je korišćen jednostavan svetlosni izvor (sijalica od 100W) i fotosenzor (metod je isti i za bilo koji drugi izvor zračenja). Eksperimentalna putanja kretanja izvora u  $(\theta_a, \theta_e)$  ravni je prikazana na slici 4.5. Vreme trajanja praćenja je 20 sekundi. Rezultate je lakše pratiti ukoliko se putanja kretanja razdvoji na dve posebne komponente azimuta i elevacije u funkciji vremena kao što prikazuju slike 4.6 i 4.7. Tokom eksperimenata je antenski sistem bio pozicioniran na stolu, pa je ugao elevacije ograničen na opseg od 0 do 90 stepeni, a ugao azimuta može imati bilo koju vrednost iz punog kruga.



Slika 4.5 Putanja maksimuma polja ( $F_{max}$ )

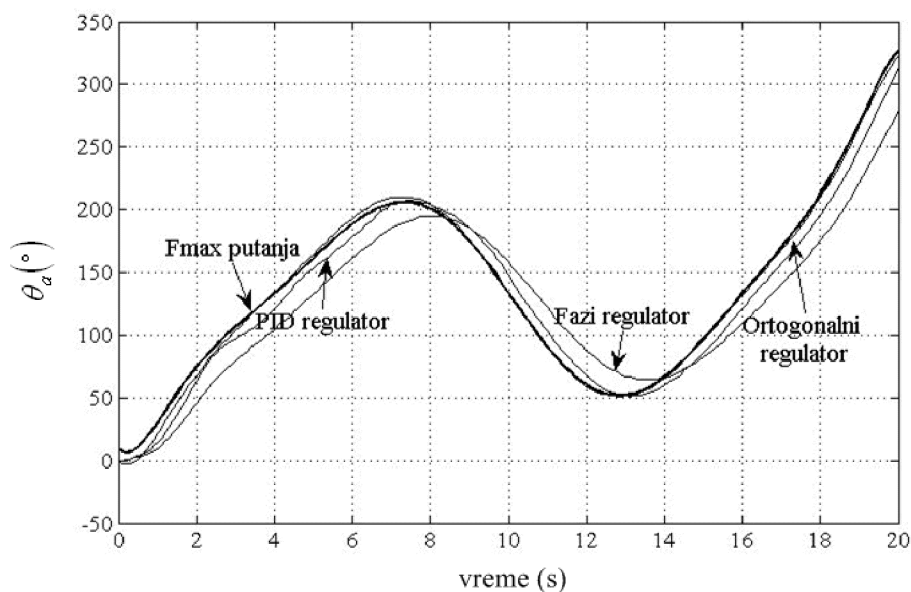


Slika 4.6 Komponenta azimuta u funkciji vremena



Slika 4.7 Komponenta elevacije u funkciji vremena

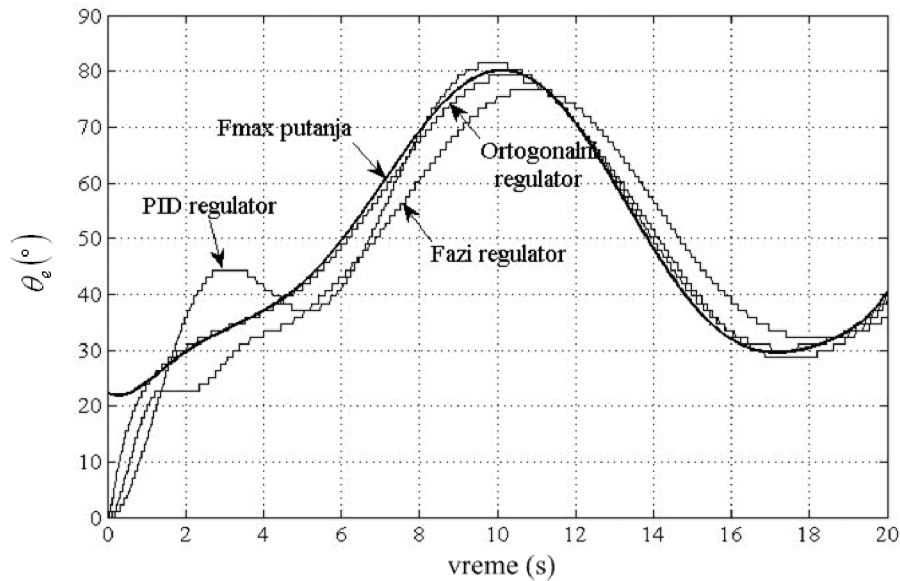
U eksperimentima su upoređena tri različita regulatora: PID regulator, fazi regulator i ortogonalni regulator opisan u ovom poglavlju. Regulatori su projektovani i podešeni eksperimentalno bez znanja o funkciji prenosa objekta regulacije (antene). PID regulator je podešen Zigler-Nikolsovom<sup>32</sup> metodom dok je fazi regulator PD tipa čiji su ulazi greška i promena greške, a izlazi su upravljački naponi motora. Eksperimentalni rezultati praćenja antene za sva tri slučaja su prikazani na slikama 4.8 i 4.9.



Slika 4.8 Rezultati praćenja ugla azimuta za različite regulatore

<sup>32</sup> N. B. Nichols (1914-1997), američki inženjer





Slika 4.9 Rezultati praćenja ugla elevacije za različite regulatore

Iz prikazanih rezultata se može primetiti da najbolje rezultate praćenja izvora daje metod ortogonalnog upravljanja. Fazi regulator je sporiji, a PID regulator izaziva preskoke usled brzih promena pozicije cilja. Može se izračunati indeks performanse za svaki od tri metoda upravljanja kao modifikovana srednje kvadratna greška praćenja pomoću relacije

$$J = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{T} \int_0^T (y_{ta} - y_{aa})^2 dt + \frac{1}{T} \int_0^T (y_{te} - y_{ae})^2 dt \right), \quad (4.10)$$

gde  $T$  predstavlja trajanje eksperimenta ( $T=20s$ ),  $y_{ta}$  i  $y_{te}$  komponente azimuta i elevacije pozicije cilja (maksimuma polja),  $y_{aa}$  i  $y_{ae}$  komponente azimuta i elevacije pozicije antene za primenjene različite regulatore. Izračunate performanse po formuli (4.10) za ortogonalni, PID i fazi regulator su, redom,  $J_{ort}=8.491$ ,  $J_{pid}=17.432$ , i  $J_{fuz}=37.833$ .

## 4.3 Sistem protiv blokiranja kočnica

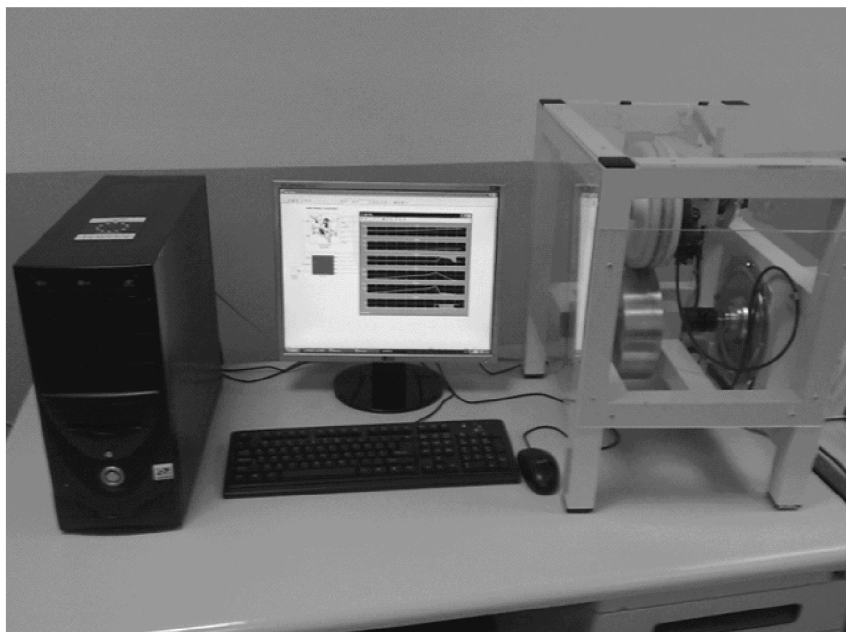
### 4.3.1 Opis sistema

Sistem protiv blokiranja kočnica (*Anti-lock Braking System - ABS*) se koristi u današnjim vozilima u cilju prevencije njihovog naglog zaustavljanja. To je elektronski sistem koji neprekidno prati i upravlja proklizavanjem točkova prilikom kočenja i tako

pomaže sigurnom zaustavljanju vozila. Takođe, smanjuje zaustavni put prilikom kočenja na klizavom putu, pošto točkovi koji se okreću imaju mnogo veće trenje sa podlogom od blokiranih. Na taj način, sistem protiv blokiranja točkova značajno povećava stabilnost i upravljivost vozilom. Prva istraživanja ovakvih sistema datiraju od sredine prošlog veka (*Bosch*), a komercijalna upotreba počinje 1978. godine u Mercedesovim vozilima.

ABS se sastoji od senzora brzine, upravljačke jedinice i regulacionih ventila. Senzori brzine se nalaze na svakom točku ponaosob ili unutar diferencijala. U slučaju pojave moguće blokade točkova, upravljačka jedinica proračunava jačinu pritiska u kočionom podsystemu vozila, gde se nalaze ventili koji doziraju silu kočenja. Jačina pritiska treba da zadovolji uslov maksimalnog kočenja, a da pri tome ne prouzrokuje blokiranje točkova, odnosno da održi najbolje trenje točkova sa površinom. Ovo se ostvaruje obezbeđivanjem željenog koeficijenta prijanjanja točkova vozila (u oznaci  $\mu$ ). Koeficijent prijanjanja točkova vozila određuje odnos između sile trenja, generisane tokom ubrzanja ili kočenja, i normalnog opterećenja vozila. Ovaj koeficijent nelinearno zavisi od proklizavanja točka (u oznaci  $\lambda$ ), koje se definiše kao relativna razlika između brzine točka i brzine vozila. ABS regulator se obično projektuje tako da reguliše proklizavanje točka, s tim da koeficijent prijanjanja točkova vozila ostvari maksimalnu vrednost. Uglavnom se željeno proklizavanje točka bira tako da bude konstantno i da se njegova vrednost kreće od 0.08 do 0.3.

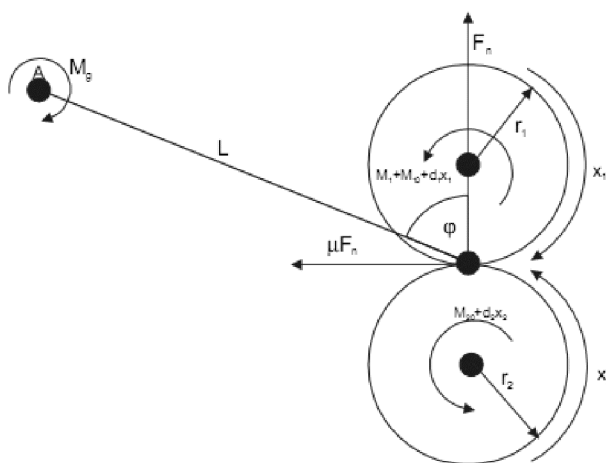
Na slici 4.10 prikazana je maketa ABS-a [4.14], koja se sastoji od dva točka u međusobnom kontaktu. Donji točak imitira relativno kretanje puta i ima glatku površinu, koja se može prekriti određenim materijalom, u cilju bolje simulacije površine po kojoj se vozilo kreće, dok gornji točak predstavlja točak vozila. Kočioni sistem, montiran na gornjem točku, preko hidraulične spojnice povezan je sa ručicom kočnice, koju preko čelične sajle pokreće motor jednosmerne struje. Donji točak je povezan s drugim motorom jednosmerne struje, čiji je glavni zadatak ubrzavanje točka, dok je tokom faze kočenja njegovo napajanje isključeno. Oba motora se upravljaju širinski-impulsno modulisanim signalima učestanosti od 3,5 kHz. Enkoderi, koji su postavljeni na osovine oba točka, mere ugaone pomeraje s tačnošću od  $0.175^\circ$ . Sistem je pomoću hardverskog interfejsa povezan s računarom, pri čemu su sve funkcije interfejsa dostupne preko ABS Toolbox-a, koji radi direktno u MATLAB<sup>®</sup>/Simulink<sup>®</sup> i RTWT toolbox okruženju.



Slika 4.10 ABS u laboratorijskoj postavci

### 4.3.2 Model sistema

Slika 4.11 prikazuje grafički model ABS-a jedne četvrtine vozila. Model je značajno uprošćen, jer se razmatra samo longitudinalno kretanje vozila i ugaono kretanje točka, a pri tom je zanemaren uticaj ostalih točkova na vozilu. Brzina vozila jednaka je proizvodu ugaone brzine donjeg točka i njegovog poluprečnika, dok je ugaona brzina točka vozila jednaka ugaonoj brzini gornjeg točka. Prilikom usporavanja vozila, moment sile kočenja deluje na gornji točak.



Slika 4.11 Grafički model

Dinamika ABS-a definisana je sledećim jednačinama

$$J_1 \dot{x}_1 = F_n r_1 s \mu(\lambda) - d_1 x_1 - s_1 M_{10} - s_1 M_1 \quad (4.11)$$

$$J_2 \dot{x}_2 = -F_n r_2 s \mu(\lambda) - d_2 x_2 - s_2 M_{20}, \quad (4.12)$$

pri čemu je  $M_1$  moment sila kojom deluje kočnica,  $x_1$  ugaona brzina gornjeg točka,  $x_2$  ugaona brzina donjeg točka,  $r_1$  i  $r_2$  predstavljaju poluprečnike gornjeg i donjeg točka.  $J_1$  i  $J_2$  su momenti inercije,  $d_1$  i  $d_2$  koeficijenti viskoznog trenja,  $M_{10}$  i  $M_{20}$  su statična trenja, gornjeg i donjeg točka, respektivno.  $s$ ,  $s_1$  i  $s_2$  su pomoćne promenljive određene sa

$$s = \text{sgn}(r_2 x_2 - r_1 x_1), \quad s_1 = \text{sgn}(x_1), \quad s_2 = \text{sgn}(x_2). \quad (4.13)$$

Kao što se može videti iz (4.11) i (4.12), sila trenja je proporcionalna normalnoj sili  $F_n$  (delovanje gornjeg točka na donji).  $\mu(\lambda)$  je koeficijent proporcije, ranije pomenut kao koeficijent prijanjanja točkova vozila.

Na osnovu sume momenata sila, koji se javljaju u tački  $A$  (slika 4.11), normalna sila se definiše sa

$$F_n = \frac{M_g + s_1 M_1 + s_1 M_{10} + d_1 x_1}{L(\sin \varphi - s \mu(\lambda) \cos \varphi)}, \quad (4.14)$$

gde  $M_g$  objedinjuje gravitacioni moment sile i moment sile amortizera koji deluju na ravnotežnu polugu,  $L$  je udaljenost između tačke kontakta točkova i ose rotacije poluge, dok je  $\varphi$  ugao između normale u tački kontakta točkova i linije  $L$ .

Pri normalnim uslovima kretanja vozila, ugaona brzina točka jednaka je brzini vozila, dok se tokom ubrzanja ili kočenja ove brzine međusobno razlikuju, a tu razliku nazivamo proklizavanje točka  $\lambda$  i detaljno opisujemo sa

$$\lambda = \begin{cases} \frac{r_2 x_2 - r_1 x_1}{r_2 x_2}, r_2 x_2 \geq r_1 x_1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ \frac{r_1 x_1 - r_2 x_2}{r_1 x_1}, r_2 x_2 < r_1 x_1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ \frac{r_2 x_2 - r_1 x_1}{r_2 x_2}, r_2 x_2 < r_1 x_1, x_1 < 0, x_2 < 0, \\ \frac{r_1 x_1 - r_2 x_2}{r_1 x_1}, r_2 x_2 \geq r_1 x_1, x_1 < 0, x_2 < 0, \\ 1, x_1 < 0, x_2 \geq 0, \\ 1, x_1 \geq 0, x_2 < 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Na osnovu (4.15) može da se zaključi da vrednost proklizavanja jednaka nuli označava jednakost brzina točka i vozila, a da vrednost jednaka jedinici znači da se točak

blokirao, odnosno da je došlo do proklizavanja. Koeficijent prijanjanja točkova vozila  $\mu(\lambda)$  je nelinearna funkcija proklizavanja točka i nekih drugih fizičkih promenljivih.

Zamenom (4.14) u (4.11) i (4.12), imajući u vidu da je

$$S(\lambda) = \frac{s\mu(\lambda)}{L(\sin\varphi - s\mu(\lambda)\cos\varphi)}, \quad (4.16)$$

početni model sistema može da se napiše kao

$$\dot{x}_1 = S(\lambda)(c_{11}x_1 + c_{12}) + c_{13}x_1 + c_{14} + (c_{15}S(\lambda, x_1, x_2) + c_{16})s_1(x_1)M_1, \quad (4.17)$$

$$\dot{x}_2 = S(\lambda)(c_{21}x_1 + c_{22}) + c_{23}x_1 + c_{24} + c_{25}S(\lambda, x_1, x_2)s_1(x_1)M_1, \quad (4.18)$$

gde je

$$S(\lambda) = \frac{s\mu(\lambda)}{L(\sin\varphi - s\mu(\lambda)\cos\varphi)} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{r_1 d_1}{J_1}, c_{12} = \frac{(s_1 M_{10} + M_g) r_1}{J_1}, c_{13} = -\frac{d_1}{J_1}, \\ c_{14} &= -\frac{s_1 M_{10}}{J_1}, c_{15} = \frac{r_1}{J_1}, c_{16} = -\frac{1}{J_1}, \\ c_{21} &= -\frac{r_2 d_1}{J_2}, c_{22} = -\frac{(s_1 M_{10} + M_g) r_2}{J_2}, \\ c_{23} &= -\frac{d_2}{J_2}, c_{24} = -\frac{s_2 M_{20}}{J_2}, c_{25} = -\frac{r_2}{J_2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

U fazi kočenja brzina točka opada dok sila, koja deluje na točak, raste, što dovodi do proklizavanja između točka vozila i površine puta. Brzina točka biće manja od brzine vozila, tj. važiće  $r_2 x_2 \geq r_1 x_1$ , a kako je  $x_1 > 0$  i  $x_2 > 0$ , proklizavanje točka može da se predstavi kao

$$\lambda = \frac{r_2 x_2 - r_1 x_1}{r_2 x_2}. \quad (4.21)$$

Uzevši u obzir da je sada  $s = s_1 = s_2 = 1$ , model sistema, dat jednačinama (4.17) i (4.18), postaje

$$\dot{x}_1 = S(\lambda)(c_{11}x_1 + c_{12}) + c_{13}x_1 + c_{14} + (c_{15}S(\lambda) + c_{16})M_1, \quad (4.22)$$

$$\dot{x}_2 = S(\lambda)(c_{21}x_1 + c_{22}) + c_{23}x_1 + c_{24} + c_{25}S(\lambda)M_1. \quad (4.23)$$

S obzirom na to da se ABS regulator projektuje tako da obezbeđuje konstantnu vrednost proklizavanja, pri kojoj sila trenja (koeficijent prijanjanja točkova vozila) ima

maksimalnu vrednost, trebalo bi naći model u kome je proklizavanje točka veličina kojom se upravlja. Diferenciranjem (4.21) dobija se

$$\dot{\lambda} = -\frac{r_1}{r_2 x_2} \dot{x}_1 + \frac{r_1 x_1}{r_2 x_2^2} \dot{x}_2. \quad (4.24)$$

Uvođenjem (4.22) i (4.23) u (4.24) i vodeći računa da je  $x_1 = r_2(1-\lambda)x_2/r_1$ , konačni model sistema, pogodan za projektovanje regulatora je

$$\dot{\lambda} = f(\lambda, x_2) + g(\lambda, x_2)M_1, \quad x_2 \neq 0 \quad (4.25)$$

gde je

$$f(\lambda, x_2) = -\left( (S(\lambda)c_{11} + c_{13})(1-\lambda) + \frac{r_1}{r_2 x_2} (S(\lambda)c_{12} + c_{14}) \right) + \frac{(1-\lambda)}{x_2} \left( \left( S(\lambda)c_{21} \frac{r_2}{r_1} (1-\lambda) + c_{23} \right) x_2 + S(\lambda)c_{22} + c_{24} \right) \quad (4.26)$$

$$g(\lambda, x_2) = -\frac{r_1}{r_2 x_2} \left( c_{15} S(\lambda) + c_{16} - \frac{r_2}{r_1} c_{25} S(\lambda) (1-\lambda) \right). \quad (4.27)$$

## 4.4 Upravljanje sistemom protiv blokiranja kočnica primenom upravljanja sa kliznim režimima

### 4.4.1 Upravljanje sa kliznim režimom

Model ABS-a izrazito je nelinearan usled nelinearnih karakteristika samog procesa kočenja. Pored toga, na sistem deluju spoljašnji poremećaji, koji se ne mogu predvideti, a parametri sistema variraju u toku normalne eksploatacije. Usled toga, kao logičan izbor za upravljanje ABS-om nameće se upravljanje promenljive strukture s kliznim režimom, upravo zbog svoje robustnosti na promenu parametara i dejstvo spoljašnjih poremećaja. Upravljanje promenljive strukture [4.15] pripada klasi nelinearnih zakona upravljanja, pri čemu je klizni režim [4.16] od posebnog značaja kod ovih algoritama, a nastaje kada upravljanje obezbedi kretanje fazne tačke sistema po prethodno definisanoj kliznoj površini, određenoj takozvanom prekidačkom funkcijom. U kliznom režimu je dinamika sistema umanjeno reda i unapred poznata. Glavni nedostatak upravljanja promenljive strukture sa kliznim režimom je pojava četeringa, koji može da pobudi nemodeliranu dinamiku i izazove habanje mehaničkih delova

sistema. Četering se javlja kao posledica brze promene upravljačkog signala duž klizne prave.

U ovom poglavlju biće implementirane različite varijante upravljanja sa kliznim režimom [4.17] i biće prikazani eksperimentalni rezultati dobijeni na realnom ABS-u sa slike 4.10. Projektovanje upravljanja se vrši na osnovu dinamičke jednačine proklizavanja točka date jednačinom (4.25). Upravljački signal se sastoji od dve komponente: ekvivalentnog upravljanja  $M_1^{eq}$  [4.18] i upravljanja u fazi dosezanja  $M_1^r(\sigma)$  koje osigurava da se stanje sistema uvek dovodi na kliznu površinu bez obzira na početni položaj u faznoj ravni. Znači, upravljanje se u svim eksperimentima definiše kao

$$M_1 = M_1^{eq} + M_1^r(\sigma), \quad (4.28)$$

gde  $\sigma$  predstavlja prekidačku funkciju. Pošto je dinamika sistema koji se proučava prvog reda, prekidačka funkcija se bira kao

$$\sigma = \lambda - \lambda_r, \quad (4.29)$$

gde je  $\lambda_r$  referentna vrednost proklizavanja točka. Glavni cilj upravljačkog algoritma je da obezbedi  $\sigma = 0$ , tj.  $\lambda = \lambda_r$ . Za sistem koji se nalazi u fazi klizanja, komponenta ekvivalentnog upravljanja se izračunava iz uslova  $\dot{\sigma} = 0$

$$\dot{\sigma} = 0 \Rightarrow \dot{\lambda} = 0 \Leftrightarrow f(\lambda, x_2) + g(\lambda, x_2)M_1^{eq} = 0. \quad (4.30)$$

Iz poslednje jednačine se dobija ekvivalentna upravljačka obrtna sila kočnice u obliku

$$M_1^{eq} = -g(\lambda, x_2)^{-1} f(\lambda, x_2), \quad (4.31)$$

i računa se na osnovu nominalnih vrednosti parametara sistema. Ukoliko nominalne vrednosti za  $f(\lambda, x_2)$  i  $g(\lambda, x_2)$  obeležimo sa  $\hat{f}(\lambda, x_2)$  i  $\hat{g}(\lambda, x_2)$ , ekvivalentna upravljačka obrtna sila primenjena u realnom upravljanju je

$$\hat{M}_1^{eq} = -\hat{g}(\lambda, x_2)^{-1} \hat{f}(\lambda, x_2). \quad (4.32)$$

Radi pojednostavljenja, uvode se sledeće skraćene oznake:  $f(\lambda, x_2) = f$ ,  $\hat{f}(\lambda, x_2) = \hat{f}$ ,  $g(\lambda, x_2) = g$  i  $\hat{g}(\lambda, x_2) = \hat{g}$ . Pretpostavlja se da je  $|\hat{f}| < \hat{F}$ ,  $|f - \hat{f}| < \varepsilon_f$  i  $|1 - g/\hat{g}| < \varepsilon_g < 1$ , gde su  $\hat{F}$ ,  $\varepsilon_f$  i  $\varepsilon_g$  pozitivne realne konstante, kao i da važi  $g/\hat{g} > 0$ .

## 4.4.2 Klasično upravljanje sa kliznim režimom

Prvi eksperiment je urađen za klasično upravljanje sa kliznim režimom gde se komponenta upravljanja u fazi dosezanja klizne prave definiše kao

$$M_1^r(\sigma) = -\hat{g}^{-1}M_c \operatorname{sgn}(\sigma), \quad (4.33)$$

pa je kočiona obrtna sila

$$M_1 = \hat{M}_1^{eq} - \hat{g}^{-1}M_c \operatorname{sgn}(\sigma). \quad (4.34)$$

Parametar  $M_c$  se bira tako da budu ispunjeni uslovi postojanja kliznog režima

$$\sigma\dot{\sigma} < -\eta|\sigma|, \quad \eta > 0. \quad (4.35)$$

Na taj način se obezbeđuje konačno vreme dosezanja

$$t_r < \frac{|\sigma(0)|}{\eta}. \quad (4.36)$$

S obzirom na to da važi  $\dot{\sigma} = \dot{\lambda}$ , zamenom (4.34) u (4.25), uzimajući u obzir (4.32) i (4.35), dobija se

$$\frac{g}{\hat{g}} \left( \frac{\hat{g}}{g} (f - \hat{f}) \sigma + \frac{\hat{g}}{g} \hat{f} \left( 1 - \frac{g}{\hat{g}} \right) \sigma - M_c |\sigma| \right) < \eta |\sigma|. \quad (4.37)$$

Klizanje će u sistemu (4.25) sa upravljanjem (4.34) biti uspostavljeno ukoliko se  $M_c$  odabere tako da ispuni sledeći uslov

$$M_c > \max \left( \left| \frac{\hat{g}}{g} \left( (f - \hat{f}) + \hat{f} \left( 1 - \frac{g}{\hat{g}} \right) + \eta \right) \right| \right) > \frac{\varepsilon_f + \hat{F}\varepsilon_g + \eta}{1 - \varepsilon_g}. \quad (4.38)$$

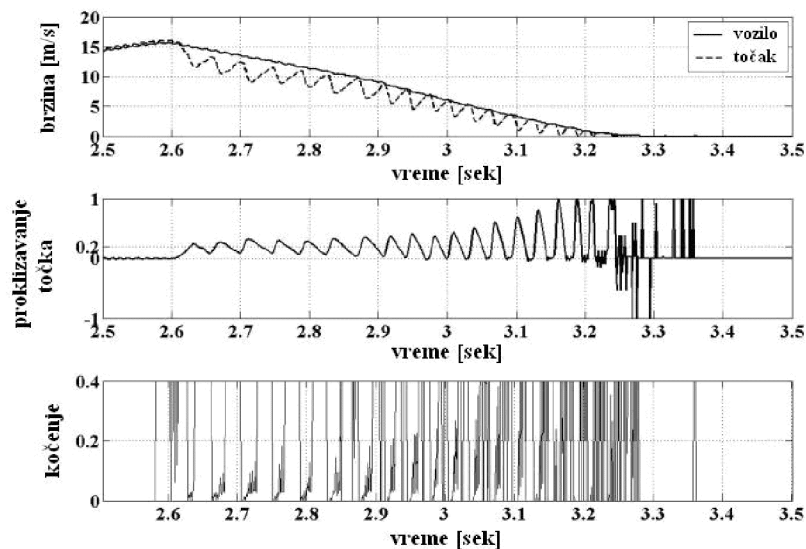
Na slici 4.12 su prikazani eksperimentalni rezultati dobijeni primenom klasičnog upravljanja sa kliznim režimom za odabranu vrednost parametra  $M_c=10$ . Referentna vrednost proklizavanja točka korišćena u svim eksperimentima je  $\lambda=0.2$ .

Četering koji se javlja kod klasičnog upravljanja sa kliznim režimom, može se ublažiti ako se, na primer, prekidna  $\operatorname{sgn}$  funkcija iz (4.34) zameni kontinualnom

$$h(\sigma) = \frac{\sigma}{|\sigma| + \rho}, \quad (4.39)$$

gde je  $\rho \geq 0$ . Međutim, tako se gubi tačnost u ravnotežnom stanju i karakteristike robusnosti.





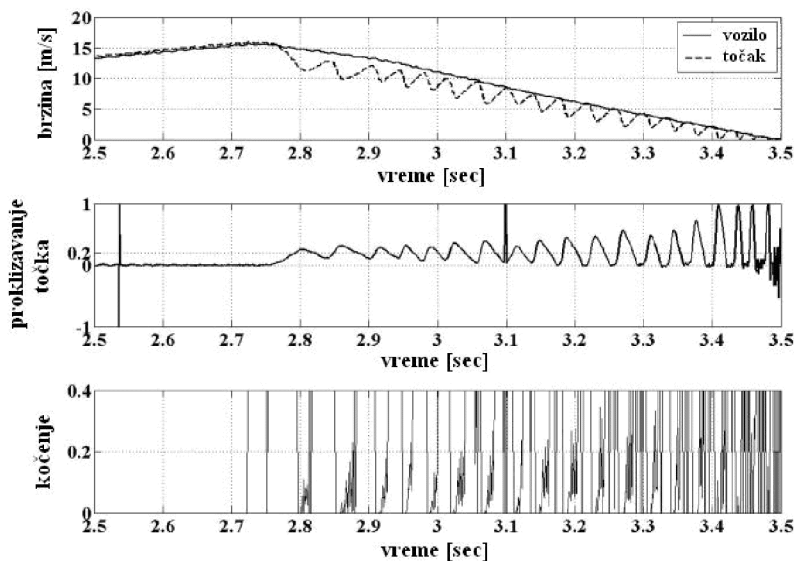
Slika 4.12 Klasično upravljanje sa kliznim režimom

### 4.4.3 Integralno upravljanje sa kliznim režimom

Kod drugog eksperimenta je, u cilju poboljšanja tačnosti i smanjenja četeringa, u upravljanje (4.34) uvedena integralna prekidačka funkcija

$$\sigma = (\lambda - \lambda_r) + c_1 \int (\lambda - \lambda_r) dt . \quad (4.40)$$

Slika 4.13 prikazuje eksperimentalne rezultate koji se dobijaju primenom ovakvog upravljanja. U eksperimentima su korišćene vrednosti  $c_1=5$  i  $M_1=10$ .



Slika 4.13 Integralno upravljanje sa kliznim režimom

Može se primetiti da uvođenje integralne komponente u upravljanje poboljšava tačnost u ustaljenom stanju uz neznatno smanjenje četeringa, ali i usporava odziv u prelaznom režimu i produžava zaustavni put vozila.

#### 4.4.4 Upravljanje sa kliznim režimom i konstantnim plus proporcionalnim zakonom dosezanja

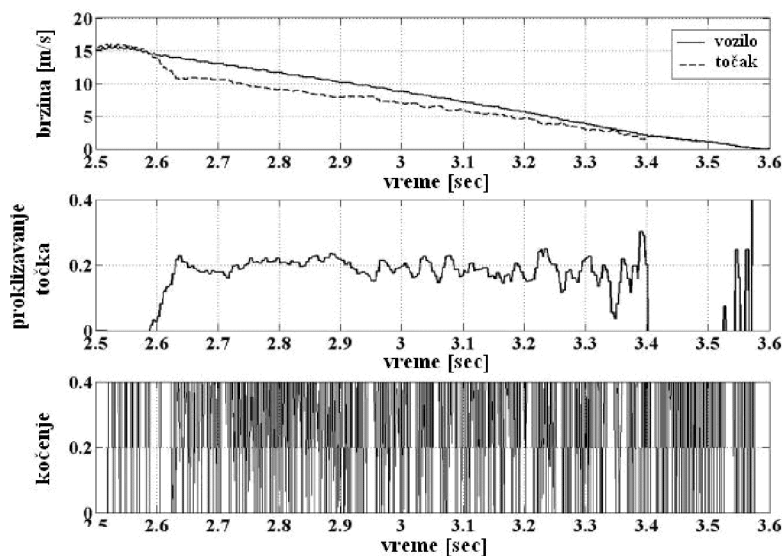
Treći eksperiment je izveden uz implementirano upravljanje kliznim režimom sa konstantnim plus proporcionalnim zakonom dosezanja [4.19]. U tom slučaju se prekidačka funkcija takođe definiše sa (4.29), a njena dinamika sledećom jednačinom

$$\dot{\sigma} = \dot{\lambda} = -M_p \sigma - M_c \operatorname{sgn}(\sigma), \quad M_p > 0, \quad M_c > 0. \quad (4.41)$$

Zamenom (4.41) u (4.25), upravljačka kočiona obrtna sila je data jednačinom (4.28), gde se  $\hat{M}_1^{eq}$  definiše sa (4.32), a komponenta dosezanja je

$$M_1^r(\sigma) = -\hat{g}^{-1} \left( M_p \sigma + M_c \operatorname{sgn}(\sigma) \right). \quad (4.42)$$

Parametri  $M_p$  i  $M_c$  se biraju tako da bude zadovoljen uslov egzistencije kliznog režima. Proporcionalna komponenta upravljanja dosezanja  $M_p$  pomaže da se faza dosezanja skрати i omogućava izbor manje vrednosti za konstantnu komponentu  $M_c$ . Rezultati dobijeni primenom ovakvog upravljanja su prikazani na slici 4.14. U cilju pariranja nemodeliranoj dinamici, odabrane vrednosti parametara  $M_p$  i  $M_c$  su 10 i 4, respektivno.



Slika 4.14 Upravljanje sa kliznim režimom uz konstantni plus proporcionalni zakon dosezanja

Može se primetiti da je tačnost sistema značajno poboljšana ali po cenu većeg broja skokovitih promena upravljačkog signala i većeg četeringa.

#### 4.4.5 Upravljanje sa kliznim režimom i eksponencijalnim zakonom dosezanja

Sledeći eksperiment u ovom poglavlju ispituje primenu upravljanja sa kliznim režimom i eksponencijalnim zakonom dosezanja [4.20]. Nelinearni zakon dosezanja se primenjuje u cilju ublažavanja četeringa. Kod ovog upravljanja se konstantna komponenta zakona dosezanja zamenjuje eksponencijalnom funkcijom koja se prilagođava promenama prekidačke funkcije. Njena dinamika se opisuje sa

$$\dot{\sigma} = -\frac{M_c}{N(\sigma)} \operatorname{sgn}(\sigma), \quad M_c > 0, \quad (4.43)$$

$$N(\sigma) = \gamma + (1 - \gamma)e^{-\beta|\sigma|^r}, \quad (4.44)$$

gde je  $\gamma$  pozitivna konstanta manja od jedan,  $r$  je pozitivan ceo broj, a  $\beta$  pozitivan broj. Ukoliko se izabere da je  $\gamma = 1$ , upravljanje se svodi na klasično upravljanje sa kliznim režimom. I u ovom slučaju se upravljačka obrtna sila kočnice definiše sa (4.28), ali je sada komponenta dosezanja

$$M_1^r(\sigma) = -\hat{g}^{-1} \frac{M_c}{N(\sigma)} \operatorname{sgn}(\sigma). \quad (4.45)$$

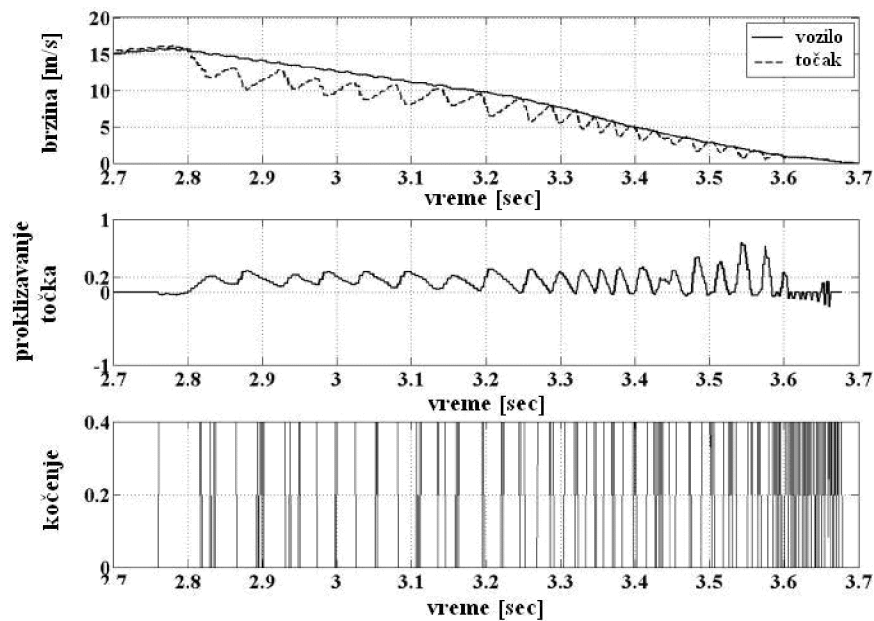
Iz uslova egzistencije kliznog režima, dobija se sledeća nejednakost

$$M_c > \frac{\gamma(\varepsilon_f + \hat{F}\varepsilon_g) + (1 - \gamma)e^{\beta|\sigma|^r}(\varepsilon_f + \hat{F}\varepsilon_g) + \eta}{1 - \varepsilon_g}, \quad (4.46)$$

Ovako projektovano upravljanje bi trebalo da obezbedi kraće vreme dosezanja klizne prave uz manje vrednosti upravljačkog parametra  $M_c$  u odnosu na klasično upravljanje sa kliznim režimom. Dobijeni eksperimentalni rezultati su prikazani na slici 4.15. Primenjene su sledeće vrednosti parametara:  $M_c=10$ ,  $\gamma=0.1$ ,  $r=1$  i  $\beta=500$ .

Sa slike se vidi da su postignuta značajna poboljšanja u odnosu na prethodne metode upravljanja. Zaustavni put je kraći uz smanjenje greške praćenja referentne vrednosti proklizavanja i smanjenje četeringa. Trebalo bi primetiti i uvedena ograničenja upravljačkog signala. Naime, prirodno ograničenje upravljačkog signala

kočione obrtne sile je interval  $(0, 1)$ . Međutim, ovaj interval je preveliki za implementaciju u realnom sistemu, usled nesavršenog prenosa obrtne sile DC motora na mehanizam hidraulične kočnice preko čelične sajle. Implementacija maksimalne vrednosti upravljanja (u zasićenju) bi izazvala velike oscilacije u odzivu sistema protiv blokiranja točkova i tako učinila upravljanje proklizavanjem nemogućim. Zbog toga je upravljački signal u svim eksperimentima ograničen na interval  $(0, 0.4)$ . Budući da klasični klizni režim i klizni režim sa eksponencijalnim zakonom dosezanja zahtevaju veće vrednosti dela sa relejnim upravljanjem, razumljivo je zašto su njihovi rezultati lošiji od onih koje postiže upravljanje sa kliznim režimom i konstantnim plus proporcionalnim zakonom dosezanja.



Slika 4.15 Upravljanje sa kliznim režimom uz eksponencijalni zakon dosezanja

## 4.5 Primena ortogonalnih funkcija i fazi kliznog režima u upravljanju sistemom protiv blokiranja kočnica

### 4.5.1 Projektovanje upravljanja sa fazi kliznim režimom primenom ortogonalnih funkcija

Primena ortogonalnih funkcija u upravljanju sistemom protiv blokiranja točkova se bazira na linearizaciji sistema u okolini radnih tačaka, u različitim oblastima rada sistema. Sličan princip je primenjen u radu [4.21] gde je sistem najpre modeliran posebnim linearnim modelima za svaku od 54 različite oblasti rada, a zatim su konstruisani posebni fazi regulatori na osnovu tih modela. Ovi pojednostavljeni modeli ne oslikavaju svu složenost stvarnog sistema ali dovoljno dobro opisuju njegovu dinamiku u specifičnim uslovima. U tom radu je pokazano da se linearizovani sistem svodi na funkciju prenosa (od ulaza – primenjene sile kočenja do izlaza – proklizavanja)

$$W(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0}, \quad (4.47)$$

Ideja primenjena u ovom poglavlju je da se najpre snime odskočni odzivi sistema (vrednosti proklizavanja  $\lambda$ ) u devet oblasti rada, za različite nivoe upravljanja (kočione sile) ravnomerno odabrane iz domena mogućih vrednosti. Na osnovu ovih odziva može se izvršiti linearizacija sistema u datim oblastima pomoću ortogonalnih polinoma, na način opisan u poglavlju 3. Pri tom se koristi podešavajući Minc-Ležandrov ortogonalni filter prikazan na slici 3.1 sa dve sekcije koji rezultira željenim oblikom funkcije prenosa (4.47). Dobijeni eksperimentalni rezultati su prikazani u tabeli 4.1.

Tabela 4.1 *Dobijeni parametri linearizovanog sistema za različite oblasti rada*

oblast rada	$a_1$	$a_0$	$b_1$	$b_0$
1	0.4870	38.5466	64.631	935.3293
2	0.1385	73.9746	92.113	1409.4
3	0.7042	17.922	31.129	242.0561
4	0.9414	5.7735	44.013	-29.4233
5	0.9966	20.9434	43.476	-115.7159
6	0.6324	4.7556	1.401	-7.3129
7	0.6230	10.1635	3.638	-13.806
8	0.7194	10.7825	1.183	-3.0782
9	0.3052	21.9169	3.482	2.3701

Za projektovanje regulatora predloženom metodom se koristi model sistema u kanoničkoj formi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= d_{11}x_1 + d_{12}x_2 + ku \\ \dot{x}_2 &= d_{21}x_1 + d_{22}x_2 \\ y &= x_1\end{aligned}\tag{4.48}$$

gde je  $d_{11}=(b_0-a_1b_1)/b_1$ ,  $d_{12}=b_0(b_0-a_1b_1)/b_1-a_0b_1$ ,  $d_{21}=1/b_1$ ,  $d_{22}=-b_0/b_1$ ,  $k=b_1$ .

Za datu formu sistema, upravljanje sa kliznim režimom se može projektovati kao [4.32]

$$u = u_{eq} + \alpha \operatorname{sgn}(x_1^{ref} - x_1),\tag{4.49}$$

pri čemu je  $x_1$  vrednost proklizavanja  $\lambda$ , a  $\lambda^{ref}=0.2$  kao i u prethodnim eksperimentima.

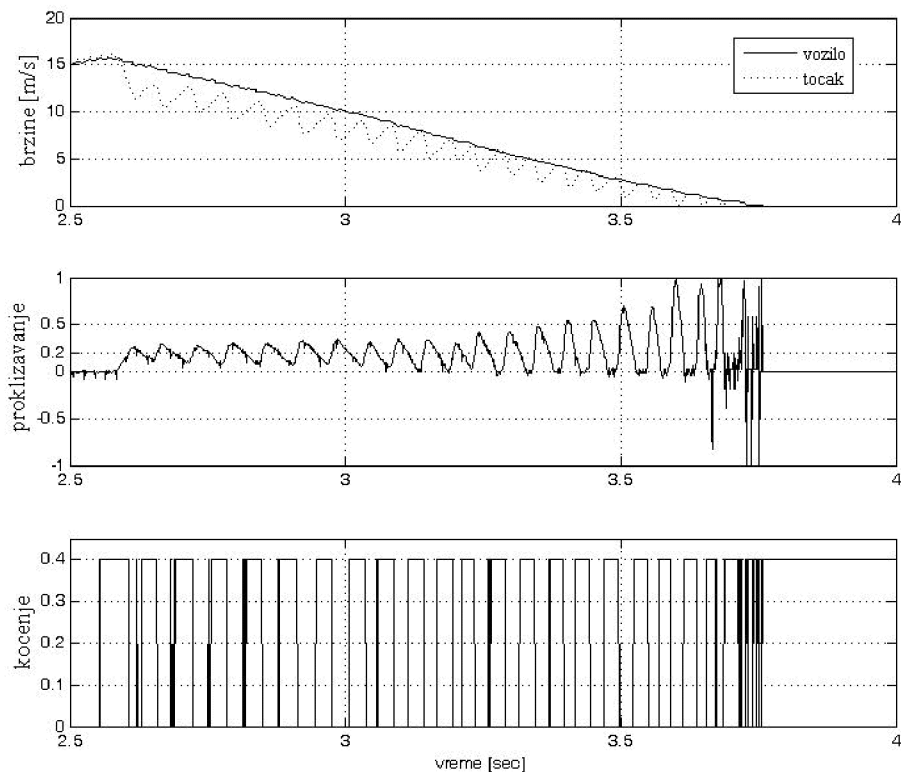
Ekvivalentno upravljanje se dobija iz uslova egzistencije kliznog režima kao

$$u_{eq} = -\frac{d_{11}x_1}{k}.\tag{4.50}$$

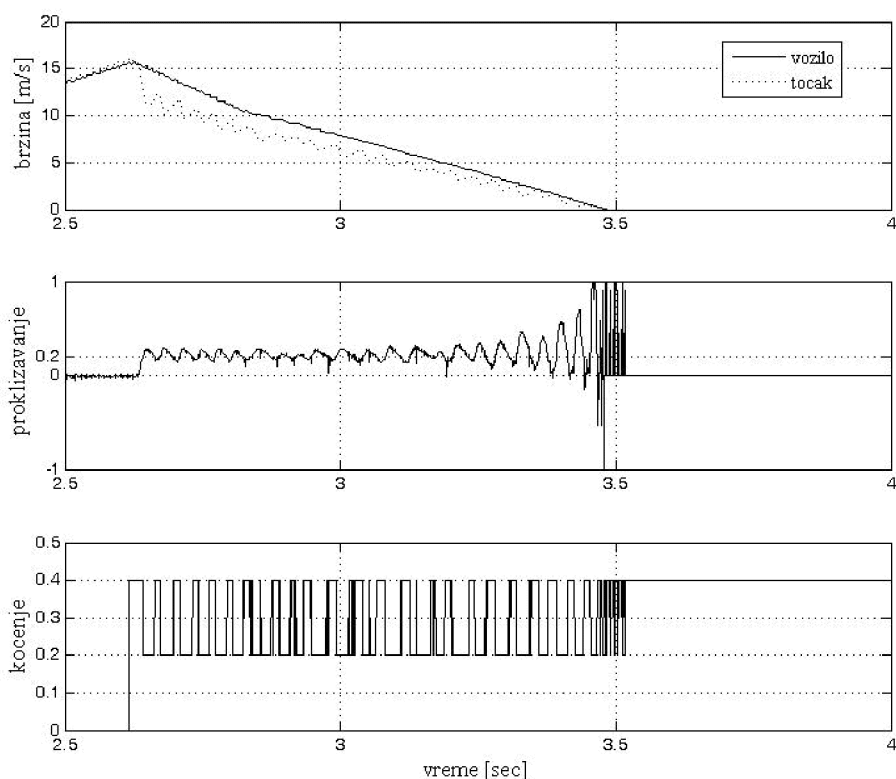
Dodatno poboljšanje željenih performansi regulatora u smislu smanjenja četeringa se može postići uvođenjem fazi logike [4.23] u klizni režim upravljanja. Fazi regulatori [4.24], [4.25] su našli izuzetno veliku primenu u najraznovrsnijim sistemima automatskog upravljanja, a njihovo kombinovanje sa teorijom kliznih režima je omogućilo prevazilaženje nedostataka pojedinačnih tehnika upravljanja i donelo niz dobrih osobina upravljanja kao što su: velika robustnost, mogućnost primene ekspertskog znanja i iskustva, blaže promene nivoa upravljačkog signala, lakše ispitivanje stabilnosti, mogućnost upravljanja nelinearnim, teško upravljivim i nedovoljno poznatim sistemima, kao i sistemima sa promenljivim parametrima [4.26]-[4.30]. Fazi klizni režimi se mogu realizovati na više načina [4.13], a ovde je odabran najjednostavniji kod koga se uvođenjem fazi regulatora stvara neka vrsta graničnog sloja [4.16] koja pomaže smanjenju četeringa i samim tim pobuđivanja nemodelirane dinamike sistema za nagle promene vrednosti upravljačkog signala [4.31]. Signum funkcija u izrazu za upravljanje (4.49) se zamenjuje jednostavnim fazi regulatorom čiji je ulaz vrednost klizne promenljive, sa funkcijama pripadnosti trougaonog ili Gausovog oblika. Oblik i broj funkcija pripadnosti kao i baza pravila fazi regulatora se može podesiti na način opisan u [4.13] u cilju dobijanja optimalne zamene signum funkcije za dati problem upravljanja.

## 4.5.2 Analiza eksperimentalnih rezultata

Eksperimentalni rezultati dobijeni primenom opisanog upravljanja su prikazani na slici 4.16. Rezultati se mogu dodatno poboljšati ograničavanjem upravljanja na oblast (0.2-0.4) što se može videti na slici 4.17. Tim dodatnim ograničenjem se izbegava mrtva zona koja se često javlja pri opuštanju kočnice (između vrednosti 0 i 0.2). Komparativna analiza rezultata svih predloženih metoda upravljanja je prikazana u tabeli 4.2. Pri tom su korišćena tri relevantna parametra ocene kvaliteta regulatora. Prvi parametar je označen sa  $T_z$  i on označava zaustavno vreme, tj. vreme koje protekne od početka kočenja do potpunog zaustavljanja vozila. Drugi parametar je srednjekvadratna greška upravljanja koja se izračunava po formuli  $E = \int_0^{T_z} (\lambda - \lambda_{ref})^2 dt$ . Treći parametar je  $N$  i on predstavlja ukupan broj promena nivoa upravljanja tokom procesa kočenja oslikavajući trošenje ABS sistema u toku rada. Očigledno je da je poželjno za svaku od upravljačkih metoda da sva tri parametra budu što manje vrednosti.



Slika 4.16 Upravljanje sa ortogonalnim fazi kliznim režimom



Slika 4.17 Upravljanje sa ortogonalnim fazi kliznim režimom i dodatnim ograničenjem vrednosti upravljačkog signala

Tabela 4.2 Parametri ocene kvaliteta projektovanih ABS regulatora

Upravljanje	$T_z$	$E$	$N$	$J$
klasično	1.03	48.6750	230	4.5910
integralno	1.14	45.0433	254	4.7965
konstantno+proporcionalno	1.05	15.1268	539	4.9296
eksponencijalno	0.94	25.4296	188	3.4854
ortogonalno	1.07	32.0758	69	3.4237
ortogonalno sa ograničenjem	0.88	22.3369	103	2.8919

Iz tabele se može videti da klasično i integralno upravljanje sa kliznim režimom daju slične rezultate. Ubacivanje konstantnog plus proporcionalnog zakona dosezanja u klizni režim ostvaruje se tačnije praćenje referentne vrednosti ali po cenu dupliranja broja promena nivoa upravljanja. Ubedljivo najbolje rezultate od analiziranih postojećih metoda upravljanja sa kliznim režimom daje ono sa eksponencijalnim zakonom dosezanja. Korišćenje ortogonalnih modela u fazi kliznom režimu donosi još bolje performanse upravljanog sistema dok dodatno ograničenje upravljačkog signala drastično snižava sve parametre. To se može najbolje sagledati ukoliko se uvede



sveobuhvatni indeks performanse ( $J$  u tabeli 4.2) koji objedinjuje sva tri, prethodno opisana, relevantna parametra za analizu kvaliteta upravljanja. Taj indeks se dobija jednostavnom formulom:  $J=k_1T_z+k_2E+k_3N$  gde se koeficijentima  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$  može regulisati značaj svakog od tri relevantna parametra na ukupni indeks performansi. Vrednosti u koloni  $J$  tabele 4.2, dobijene su izborom  $k_1=1.95504$ ,  $k_2=0.03197$  i  $k_3=0.00444$ . Ti koeficijenti omogućavaju normalizaciju parametara pri čemu je istaknut značaj zaustavnog vremena vozila (najbitniji parametar za bezbednost) udvostručavanjem normalizovane vrednosti. Dobijene vrednosti indeksa performansi potvrđuju kvalitet projektovanog upravljanja sa fazi kliznim režimom primenom ortogonalnih funkcija.

## 4.6 Literatura

- [4.1] K. B. Datta, B. M. Mohan, *Orthogonal Functions in Systems and Control*, *World Scientific Publishing Co.*, Singapore, 1995.
- [4.2] Y. F. Chang, T. T. Lee, "Application of general orthogonal polynomials to the optimal control of time-varying linear systems", *International Journal of Control*, vol. 43, no. 4, pp. 1283-1304, 1986.
- [4.3] R. Y. Chang, M. L. Wang, "Model reduction and control system design by shifted Legendre polynomial functions", *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 105, no. 1, pp. 52-55, 1983.
- [4.4] S. Beyhan, M. Alci, "An orthogonal ARX network for identification and control of nonlinear systems", *ICAT 2009. XXII International Symposium on Information, Communication and Automation Technologies*, pp. 1-5, 2009.
- [4.5] I. R. Horng, S. J. Ho, "Optimal control of digital systems via discrete Legendre polynomials", *Int. J. Control*, vol. 43, no. 2, pp. 615-627, 1986.
- [4.6] J. H. Chou, I. R. Horng, "Shifted Chebyshev series analysis of linear optimal control systems incorporating observers", *International Journal of Control*, vol. 41, no. 1, pp. 129-134, 1985.
- [4.7] I. R. Horng, S. J. Ho, "Analysis, parameter identification and optimal control of time-delay systems via Chebyshev series", *International Journal of Control*, vol. 45, no. 5, pp. 1221-1234, 1985.
- [4.8] R. Y. Chang, M. L. Wang, "Solution of two point boundary value problems by generalized orthogonal polynomials and application to optimal control of lumped and distributed parameter systems", *International Journal of Control*, vol. 43, no. 6, pp. 1785-1802, 1986.
- [4.9] C. Zervos, G. Dumont, "Deterministic adaptive control based on Laguerre series representation", *International Journal of Control*, vol. 48, pp. 2333-2359, 1988.
- [4.10] I. R. Horng, J. H. Chou, "Digital PID controller design via general discrete orthogonal polynomials", *International Journal of Control*, vol. 47, no. 1, pp. 187-192, 1988.
- [4.11] C. Zervos, P. Belanger, G. Dumont, "Controller tuning using orthonormal series identification", *Automatica*, vol. 24, pp. 165-175, 1988.

- [4.12] S. Nikolić, D. Antić, B. Danković, M. Milojković, Z. Jovanović, S. Perić, “Orthogonal functions applied in antenna positioning”, *Advances in Electrical and Computer Engineering*, vol. 10, no. 4, pp. 35-42, 2010.
- [4.13] M. Milojković, “Primena genetičkih algoritama u fazi kliznim režimima”, *magistarska teza, Elektronski fakultet u Nišu*, 2008.
- [4.14] Inteco, “The laboratory Anti-lock Braking System controlled from PC”, 2008, [www.inteco.com.pl](http://www.inteco.com.pl)
- [4.15] J. Y. Hung, W. Gao, and J. C. Hung, “Variable structure control: A Survey”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40. no. 1, pp. 2-22, 1993.
- [4.16] V. I. Utkin, “Sliding mode control design principles and application to electric drives”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 23-36, 1993.
- [4.17] D. Antić, V. Nikolić, D. Mitić, M. Milojković, S. Perić, “Sliding mode control of Anti-lock braking system: An Overview”, *Proceedings of the X Trienal International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements, SAUM 2010*, Niš, Serbia, November 10.-12., 2010, pp. 41-48.
- [4.18] B. Draženović, “The invariance conditions in variable structure systems”, *Automatica*, vol. 5, pp 287-295, 1969.
- [4.19] W. Gao, J. C. Hung, “Variable structure control of nonlinear systems: A new approach”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 40, no. 1, pp. 45-55, 1993.
- [4.20] C. J. Fallaha, M. Saad, H. Kanaan, K. Al-Haddad, “Sliding-mode robot control with exponential reaching law”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 58, no. 2, pp. 600-609, 2011.
- [4.21] M. B. Radac, R. E. Precup, S. Preitl, J. K. Tar, E. M. Petriu, “Linear and fuzzy control solutions for a laboratory anti-lock braking system”, *6<sup>th</sup> International Symposium on Intelligent Systems and Informatics SISY 2008*, Subotica, Serbia, September 26-27, 2008.
- [4.22] D. Mitić, “Digitalni sistemi promenljive strukture zasnovani na modelu ulaz-izlaz”, *doktorska disertacija, Elektronski fakultet*, Niš, 2006.
- [4.23] L. A. Zadeh, “Fuzzy sets”, *Information and Control*, vol. 8, pp. 338-353, 1965.
- [4.24] K. M. Passino, S. Yurkovich, *Fuzzy Control*, Addison-Wesley, 1998.
- [4.25] R. Palm, D. Driankov, H. Hellendoorn, *Model Based Fuzzy Control*, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

- [4.26] D. Antić, M. Milojković, Z. Jovanović, S. Nikolić, “Optimal design of the fuzzy sliding mode control for a DC servo drive”, *Journal of Mechanical Engineering*, vol. 56, no. 7-8, pp. 455-463, 2010.
- [4.27] D. Antić, M. Milojković, S. Nikolić, S. Perić, “Optimal moving sliding mode control with application to electrical servo drive”, *Scientific Bulletin of UPT, Transactions on Automatic Control and Computer Science*, vol. 55(69), no. 4, pp. 217-222, 2010.
- [4.28] D. Antić, M. Milojković, Z. Jovanović, “Genetic algorithms applied in fuzzy-sliding mode control of nonlinear systems”, *Proceedings of International Conference on Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services TELSIKS 2007*, Niš, September 26-28, 2007., pp. 490-493.
- [4.29] D. Antić, M. Milojković, D. Mitić, “An improvement of fuzzy sliding mode control of nonminimum phase plants by using genetic algorithms”, *Proceedings of the IX Triennial International SAUM Conference on Systems, Automatic Control and Measurements SAUM 2007*, Niš, November 22-23, 2007, pp. 129-132.
- [4.30] D. Antić, M. Milojković, S. Nikolić, S. Perić, “Optimal fuzzy sliding mode control with a time-varying sliding surface”, *IEEE International Joint Conferences on Computational Cybernetics and Technical Informatics ICC-CONTI 2010*, May 27-29, 2010., pp. 149-153.
- [4.31] D. Mitić, D. Antić, M. Milojković, “On error-signal based design of digital minimum variance control with fuzzy-sliding mode”, *FACTA UNIVERSITATIS, Series: Automatic Control and Robotics*, vol. 7, no. 1, pp. 121-129, 2008.
- [4.32] V. I. Utkin, *Sliding Modes in Control and Optimization*, Springer-Verlag, 1992.

# Zaključak

Predmet proučavanja ove disertacije bila je mogućnost primene ortogonalnih funkcija u modeliranju i upravljanju dinamičkim sistemima. Sama ideja da bi ta primena mogla biti uspešna proizilazi iz prirode i sveta oko nas, gde se ortogonalnost javlja u mnogim vidovima i uvek donosi neku ravnotežu ili optimalnost. U disertaciji je najpre dat pregled najvažnijih dosadašnjih rezultata iz oblasti ortogonalnosti. Na bazi tih rezultata, izveden je matematički okvir za razvoj novih ortogonalnih racionalnih funkcija. Te funkcije se baziraju na određenim transformacijama u kompleksnom domenu. Odgovarajućim izborom transformacija mogu se dobiti novi skupovi ortogonalnih funkcija pogodnih za primenu u tehničkim sistemima. Izvedene su glavne definicije i relacije vezane za skoro ortogonalne funkcije koje se mogu uspešno primeniti u analizi i sintezi sistema sa nesavršenostima. Na isti način su obrađene i kvazi ortogonalne funkcije koje takođe imaju primenu kod određenih tipova dinamičkih sistema. Trebalo bi naglasiti da je teorija i većina prikazanih matematičkih rezultata vezanih za ove generalizacije ortogonalnih funkcija potpuno nova i u naučnom svetu po prvi put izvedena.

Pri pisanju ove disertacije, od velikog značaja je bilo da se teoretski rezultati potvrde u praksi i nađu realnu primenu. Zbog toga je važan međukorak bila praktična realizacija analognih filtera koji su u stanju da generišu ortogonalne, skoro ortogonalne i kvazi ortogonalne realne signale. U disertaciji je opisan potpuni postupak projektovanja ovih filtera na bazi matematičkih relacija i date su šeme za njihovu praktičnu realizaciju. Signali snimljeni na ovim filterima se u potpunosti poklapaju sa odgovarajućim matematičkim formulama i prethodno izvedenim simulacijama, što je dokaz njihove validnosti i pravilne realizacije.

Dekompozicija dinamičkih sistema u smislu ortogonalnog razvoja omogućava aproksimaciju ili modeliranje sistema sa razvojima konačne dužine. Fleksibilnim podešavanjem baznih funkcija do željenih karakteristika sistema koji se analizira, brzina konvergencije ovih razvoja može se drastično povećati. To vodi veoma kvalitetnim modelima koji su određeni malim brojem parametara. Superiornost ortogonalnih modela se ogleda u njihovoj jednostavnosti, tačnosti i brzini modeliranja. Ortogonalni modeli ili postižu istu tačnost sa manjim brojem komponenti ili veću tačnost sa istim brojem komponenti u odnosu na druge modela. Procedure modeliranja pomoću svakog

od tri realizovana filtra (klasičnog, kvazi i skoro ortogonalnog) demonstrirane su na realnim sistemima (jednosmerni servo motor, hidraulični sistem sa tri rezervoara, transportni sistem sa pokretnim trakama) kroz izvršene eksperimente.

Poslednja bitna tema koju ova disertacija obrađuje je mogućnost primene izvedenih ortogonalnih funkcija i realizovanih filtara u upravljanju dinamičkim sistemima. Upotreba ortogonalnih funkcija u različitim problemima upravljanja je uglavnom motivisana njihovom jednostavnošću, lakom praktičnom izradom i brzinom izračunavanja i reagovanja. Naročito su se ortogonalne funkcije pokazale pogodnim za projektovanje optimalnih i adaptivnih sistema automatskog upravljanja. Prednosti primene novodobijenih ortogonalnih funkcija i filtara u upravljanju je demonstrirana na eksperimentima sa antenskim sistemom i sistemom protiv blokiranja točkova. Pri tom je važna i činjenica da su antenski sistem kao i transportni sistem sa pokretnim trakama samostalno realizovani u Laboratoriji za modeliranje, simulaciju i upravljanje sistemima. Na primeru upravljanja ABS-om, kao izuzetno kompleksnim problemom i velikim izazovom, kako za nauku tako i za proizvodnju, analizirane su i upoređivane brojne nove varijante upravljanja sa kliznim i fazi kliznim režimima. Pokazano je da i u tom problemu teorija ortogonalnih funkcija može doprineti u poboljšanju performansi upravljanog sistema.

Ova disertacija je samo zagrebala po površini brojne mogućnosti primene razvijenih ortogonalnih, kvazi ortogonalnih i skoro ortogonalnih racionalnih funkcija i filtara i demonstrirala neke njihove prednosti u modeliranju i upravljanju dinamičkim sistemima. Ove funkcije mogu imati veliki potencijal primene u elektronici, teoriji kola, digitalnoj obradi signala, telekomunikacijama. Dalji koraci u matematičkom smislu bili bi objedinjavanje teorije skoro i kvazi ortogonalnih polinoma u jedinstven sistem koji bi bio konačna generalizacija ortogonalnosti i koja bi davala potpunu slobodu u projektovanju najraznovrsnijih sistema. Autorova namera je i da se u daljem radu posveti mogućnostima primene ortogonalnih funkcija u takozvanim inteligentnim upravljačkim sistemima. Naročito su interesantne mogućnosti kombinovanja ovih funkcija sa neuronskim mrežama u smislu optimalnog projektovanja mreža, kao i sa fazi regulatorima, gde bi nove ortogonalne funkcije mogle da nađu mesto u konsekventnim delovima zaključivanja. Uspeh u projektovanju takvih fazi regulatora bi omogućio razvoj naprednijih tehnika upravljanja sa fazi kliznim režimima.