Предговор

Ова докторска дисертација представља обједињавање у целину резултата који су добијени, с једне стране, у вишегодишњем раду под менторство др Синише Јешића и она се односе на постојање и јединственост непокретних и заједничких непокретних тачака за пресликавања са нелинеарним контрактивним условом, који се доводе у везу са различитим облицима ограничености скупова на просторима са недетерминистичким растојањем. У њој су изложени и резултати у вези са постојањем и јединственошћу заједничких непокретних тачака слабо комутативна и компатибилна пресликавања (различитог типа) са нелинеарним контрактивним условом. Поред наведеног, посебно место у дисертацији заузима питање конвексности, као и питања скуповне и тополошке карактеризације комплетности и компактности простора са недетерминистичким растојањем. Ти резултати доводе се у везу са постојењем непокретних и заједничких непокретних тачака нееспанзивних пресликавања, при нелинеарним условима нееспанзивности. Хипотеза од које се полази је да се конвексна структура, која је на метричким просторима дефинисана у раду [99], може пренети на просторе са недетерминистичким растојањем, као и ставови који у вези са тим важе. У овој дисертацији су сви добијени резултати у сарадњи са др Синишом Јешићем обједињени у целину. Они чине другу главу овог рада. Један од тих резултата публикован је у часопису *Fixed Point Theory* (рад [63]), док се остали (радови [64], [65] и [66]) налазе на рецензији у часописима са *SCI* листе.

С друге стране, у овој дисертацији се налазе резултати који су добијени у сарадњи са проф. др Драганом Ђурчићем, коме сам годинама био асистент на Техничком факултету у Чачку. Ови резултати су у вези са питањем узајамног односа генералисаног инверза, слабе асимптотске релације еквиваленције и јаке асимптотске релације еквиваленције у одређеним класама функција које се проучавају у Караматиној теорији правилне промењљивости. Заправо, полазећи од појмова правилне промењљивости, генералисаног инверза, слабе и јаке релације еквиваленције, као и *става A* који је у једном свом облику доказан у раду [9], доказују се теореме које представљају једну од потпуних карактеризација одређених функционалних класа. Резултати добијени у сарадњи са професором Драганом Ђурчићем, који чине трећу главу ове дисертације, публиковани су у часопису *Lithuanian Mathematical Journal* (радови [37] и [38]).

Ова дисертација се састоји из три главе. У првој глави је дат преглед основних резултата из теорије непокретне и заједничке непокретне тачке на метричким просторима, који су били мотивација за добијање дела оригиналних резултата. С једне стране, полазећи од чувеног Банахов став о непокретној тачки из 1922. године указано је на нека његова уопштења на метричким просторима. Од посебног интереса, са становишта неких резултата добијених у овој дисертацији, јесу нелинеарни контрактивни услови чије је испитивање на метричким просторима иницирано у радовима [88] и [14]. С друге стране, један део оригиналних резултата се односи на нелинеарна нееkспанзивна пресликавања. Први резултати, који су се појавили шездесетих година прошлог века и који су у вези са нееkспанзивним пресликавањима и постојањем непокретне тачке за њих, могу се наћи у радовима [16], [50] и [74]. Такође, поред одређивање непокретне тачке, од интереса је и одређивање заједничке непокретне тачке за два или више пресликавања. За метричке просторе оно је иницирано у раду [67]. Један део оригиналних резултата се односи на постојање и јединственост заједничке непокретне тачке за два, односно четири пресликавања под одређеним (додатним) условима и представља уопштење поменутог рада [67]. У току протеклих деценија, добије су многе генерализације свих претходно поменутих резултата, како на метричким просторима, тако и на просторима са богатијом структуром, који својом аксиоматиком обухватају метричке просторе. У том смислу се, у посебним поглављима прве главе, посвећује посебна пажња вероватносним, фази метричким, као и $\mathscr{L}$-фази метричким просторима. Сви резултати који су изнети у овој дисертацији, а у вези су са непокретном и заједничком непокретном тачком, добијени су на овим просторима. Посебно (последње) поглавље у првој глави посвећено је генералисаном инверзу и класама правилно промењљивих функција и оно је у вези са резултатима који су дати у трећој глави.

Друга глава се састоји од једног уводног поглавља и још три поглавља у којима су изнети оригинални научни резултати. У поглављу 2.2 су дати резултати који се односе на постојање заједничке непокретне тачке за четири пресликавања (један пар су компатибилна, а други слабо компабилна пресликавања), за која важи нелинеарни контрактивни услов дефинисан помоћу функције φ која задовољава услов $\varphi(t) < t$ на $\mathscr{L}$-фази метричким просторима. У посебном одељку овог поглавља дат и одговарајући аналогон добијеном резултату на вероватносним Менгеровим просторима. Поглавље 2.3 чине ставови који се односе на постојање и јединствености како непокретне тачке, тако и заједничке непокретне тачке за два компатибилна пресликавања која задовољавају нелинеарни генералисани контрактивни услов на вероватносним Менгеровим просторима. Ови резултати проширују резултате који су доказани у раду [26], где је уведен појам генералисане контракције линеарног типа на вероватносним Менгеровим просторима. Коначно, у поглављу 2.4, који се састоји од три одељка, се, најпре, уводе појмови стриктно конвексне и нормалне структуре на вероватносним Менгеровим просторима. С једне стране, коришћењем појма стриктне конвексности показује се постојање и јединственост непокретне тачке за пресликавања са ширим кодоменом, који задовољавају нелинеарни контрактивни услов. С друге стране, део резултата из овог поглавља се односи на постојање непокретне тачке нееκспанзивних пресликавања на стриктно конвексним Менгеровим просторима. У доказу овог резултата користи се један од еквивалената Аксиоме избора – Зорнова лема.

Трећа глава се састоји од два поглавља оригиналних резултата, као и уводног поглавља. У поглављу 3.2 се бавимо односом између слабе асимптотске релације еквиваленције и генералисаног инверза у класи $\mathcal{A}$ чији су елементи све неопадајуће и неограничене функције које су дефинисане на интервалу $[a, \infty)$, где је $a > 0$. Главни резултати изнети у овом поглављу биће ставови којима се даје једна од потпуна карактеризација функционалне класе $ORV \cap \mathcal{A}$, где је ORV класа свих $\mathcal{O}$–правилно променљивих функција у смислу Карамате. У поглављу 3.3 ћемо за претходно поменуту класу $\mathcal{A}$, као главне резултате, дати једну од потпуних карактеризација функционалне класе $R_\infty \cap \mathcal{A}$, где је R_∞ класа рапидно променљивих функција у смислу де Хана. Такође, у овој глави, биће дата и једна од карактеризација функционалне класе $PI^* \cap \mathcal{A}$.

*

* *

Овом приликом, на првом месту, желим да се захвалим ментору др Синиши Јешићу који ме је увео у теоријом непокретне тачке и несебично делио своје велико математичко знање са мном. Захваљујем му се и на многобројним саветима који су ми били од велике користи приликом писања ове дисертације. Велику захвалност дугујем и проф. др Драгану Ђурчићу који ми је непрекидно пружао пуну подршку, велику помоћ и своје велико математичко знање. Свакако, захвалност дугујем проф. др Малиши Жижовићу мом ментору на магистарским студијама, који ме је увео у теорију фази математике. Познавање ове теорије много ми је помогло приликом добијања многих резултата представљених у овој дисертацији. Овим путем се захваљујем и члановима комисије др Дејану Бојовићу и др Марији Станић на стручним саветима приликом израде ове дисертације. На крају, захвалио бих се на подршци, разумевању и стрпљењу својој породици и пријатељима.

У Београду, *Аутор*
март 2012. године

Садржај

Глава 1

Основне дефиниције и резултати

1.1 Увод

Апстрактни концепт метричког простора као скупа за чија је свака два елемента одређено растојање уведен је почетком 20. века као природна генерализација разних простора проучаваних у математичкој анализи. Наиме, Фреше[1]је 1906. године у раду [45] увео појам растојања на произвољном скупу, описао особине функције растојања и на тај начин засновао аксиоматику метричких простора. Тиме је омогућено проучавање више посебних случајева истог феномена и обухватање на први поглед различитих теорија у једну, а да је притом уведена јединствена терминологија и нотација. Теорија метричких простора објединила је резултате класичне математичке анализе везане за непрекидност, конвергенцију и разне особине простора, као што су повезаност, компактност и др. Ова теорија је, такође, убрзала даљи развој математичке анализе ка функционалној анализи, у којој тачке простора нису више само бројеви или n-торке бројева, већ и бесконачни низови бројева или функције. Даљи развој функционалне анализе и других математичких дисциплина у којима су уочени феномени слични непрекидности и конвергенцији (теорија парцијалних уређења, теорија скупова, логика) довео је до тога да се уместо метричких простора посматрају још апстрактнији простори. Тако се дошло до теорије тополошких простора која данас преставља најшири оквир у коме се изучава феномен непрекидности и сродни феномени.

Теорија непокретне тачке бави се испитивањем постојања, за непразан скуп X и пресликавање $f : X \to X$, решења једначине $f(x) = x$, тј. постојањем непокретне тачке за пресликавање f. Јасно је да се решавање многих једначина, као и система једначина може интерпретирати као решавање одговарајућег проблема непокретне тачке. Даље, на решавање једначина своде се многи математички проблеми и задаци и то не само на алгебарске једначине и системе једначина него и на диференцијалне, интегралне, диференцне, функционалне, скуповне и многе друге једначине. У многим таквим ситуација потребно је знати да ли нека једначина

[1]Maurice René Fréschet (1878–1973), француски математичар.

има решење или не и постојање њеног решења се утврђује тзв. егзистенцијалним теоремама. Тако на пример, теорема Болцано[2]–Кошија[3] за реалну функцију f једне реалне промењиве x која је непрекидна на затвореном интервалу $[a, b]$ и за коју важи $f(a) \cdot f(b) < 0$ гарантује постојање бар једног решења једначине $f(x) = 0$ унутар посматраног интервала[4]. Овакве егзистенцијалне теореме се често формулишу и као теореме о егзистенцији непокретне тачке за неку функцију. Ако претходно поменуту једначину $f(x) = 0$ запишемо у облику $\lambda \cdot f(x) + x = x$, где је $\lambda > 0$ и означавајући да је $F(x) = \lambda \cdot f(x) + x$, добијамо једначину $F(x) = x$. Ако изаберемо λ тако да се све вредности реалне функције F налазе унутар интервала $[a, b]$, тада једначину $F(x) = x$ можемо посматрати на следећи начин: реална функција F пресликава тачку (реалан број) x из интервала $[a, b]$ у тачку $y = F(x)$ из истог интервала која се у општем случају не мора поклапати са тачком x. Ипак, ако је тачка x_0 решење једначине $F(x) = x$, тада се она пресликава у саму себе тј. она је непокретна тачка. Иста тачка је решење и једначине $f(x) = 0$. Стога, теорема која говори о постојању решења једначине $F(x) = x$ може се представити на следећи начин: ако је $F : [a, b] \to [a, b]$ непрекидна функција, тада она има бар једну непокретну тачку[5]. Како је функција F произвољна непрекидна функција, посматрана особина постојања непокретне тачке се, заправо, односи на сам затворени интервал и не зависи од избора непрекидне функције F. Поред већ поменуте примене за решавање једначина и система једначина најразличитијег типа, теорија непокретне тачке се примењује и за решавање разних проблема у вези са конвергенцијом и апроксимацијом, решавању проблема из теорије игара, минимакс теорије, у формирању нових нумеричких метода. Поред математике, значајна је примена ове теорије у физици, посебно у области квантне физике честице која је у вези са теоријом струна и ε^{∞} теоријом (видети нпр. радове [40]–[43]), затим у економији и др.

Генерално посматрано, основна теоријска истраживања у вези са проблемом непокретне тачке, као и примене ове теорије, у зависности од структуралног „терена“ на коме се испитују и методолошког приступа, преламају се кроз најразличитије и међусобно удаљене математичке области. Иако је у широком спектру посматрања самог проблема непокретне тачке произашао велики број резултата, јасно се оцртавају два фундаментална и полазна резултата у вези са овим проблемом и она су везана, хронолошки гледано, за имена Брауера[6] и Банаха[7]. На сваки од ових ставова надовезало се много уопштења, аналогона, допуна, инверзија, итд.

Први велики и фундаментални резултат из теорије непокретне тачке доказао је 1905. године холандски математичар Брауер. Он је доказао да *свако непрекид-*

[2]Bernard Bolzano (1781–1848), чешки математичар италијанског порекла.

[3]Augustin Louis Caushy (1789–1857), француски математичар.

[4]У случају да је посматрана функција и монотона на посматраном интервалу, тада постоји тачно једне решење посматране једначине.

[5]Ово је једнодимензионални случај Брауерове теореме о којој ће бити речи у наставку.

[6]Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881–1966), холандски математичар.

[7]Stefan Banach (1892–1945), пољски математичар.

но пресликавање коначно димензионалног симплекса еуклидског простора у самог себе има бар једну непокретну тачку.

Други велики резултат из теорије непокретне тачке доказао је Банах 1922. године у раду [10] и он је у вези са контрактивним операторима. Банахов принцип контракције је резултат који је отворио читава нова поглавља и нове математичке теорије. Базиран је на техници која је позната као *метод сукцесивних апроксимација*, чију је апстрактну верзију увео Лиувил[8]. Међутим, систематско коришћење овог метода припада Пикару[9] који је први пут ову методу применио у раду [87] из 1890. године, тако да се често овај метод назива његовим именом.

Потребно је истаћи да је теорема Брауера представник тополошке теорије непокретне тачке, док је теорема Банаха представник метричке теорије непокретне тачке. Јасну разлику између ове две теорије је тешко поставити, јер генерално гледајући теорија непокретне тачке је грана топологије, али са друге стране утицај фунционалне и нелинеарне анализе је толико велики да се може посматрати и као део математичке анализе.

На крају овог уводног дела поменимо још резултат Тарског[10] из 1955. године који је представљао фундаментални резултат за почетак развоја теорије непокретне тачке на уређеним скуповима.

1.2 Банахов став о непокретној тачки и нека његова уопштења

С обзиром на то да ће у овој дисертацији бити изложени ставови који уопштавају и проширују Банахов став о непокретној тачки на просторе са недетерминистичком метриком у овом поглављу ћемо детаљније говорити, како о самом ставу, тако и о његовим уопштењима који су нам били основна мотивација за неке од добијених резултата. Све ставове које ћемо изложити у овом поглављу наводимо без доказа, јер ће они бити последице оригиналних резултата који су изложени у радови [63] и [66] и који ће бити изнети у другој глави овог рада и који их уопштавају на просторе са недетерминистичком метриком. У даљем тексту ћемо сматрати да су појмови који карактеришу метричке просторе, попут непрекидности, ограничености, конвергенције, комплетности и др. опште познати, па их нећемо посебно наводити и дефинисати.

Дефиниција 1.2.1. *Нека је (X, d) метрички простор. Пресликавање $T : X \to X$ се назива:*

1) *Липшицовим*[11] *пресликавањем ако постоји $L > 0$ такво да је $d(Tx, Ty) \leq$*

[8]Joseph Liouville (1809–1882), француски математичар.
[9]Charles Émile Picard (1856–1941), француски математичар.
[10]Alfred Tarski (1901–1983), пољско–амерички математичар.
[11]Rudolf Otto Sigmund Lipschitz (1832–1903), немачки математичар.

$L \cdot d(x,y)$, за свако $x, y \in X$;

2) *(стриктна) контракција ако је T Липшицово пресликавање и $L \in [0,1)$;*
3) *нееспанзивно ако је T Липшицово пресликавање и $L = 1$;*
4) *контрактивно ако је $d(Tx, Ty) < d(x,y)$, за свако $x, y \in X$, $x \neq y$.*

Следећи став је од фундаменталног значаја у метричкој теорији непокретне тачке.

Став 1.2.1 (Банахов принцип контракције)**.** *Нека је (X,d) комплетан метрички простор и нека је пресликавање $T : X \to X$ контракција, тј. нека постоји $q \in [0,1)$ такво да важи*

$$d(Tx, Ty) \leq q \cdot d(x,y), \tag{1.1}$$

за свако $x, y \in X$. Тада:

1) *пресликавање T има јединствену фиксну тачку x^*;*
2) *Пикарова итерација придружена уз T, тј., низ $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ дефинисан са*

$$x_n = T(x_{n-1}) = T^n(x_0), \quad n = 1, 2, \ldots$$

конвергира ка x^*, за било коју почетну произвољно изабрану тачку $x_0 \in X$;

3) *конвергенција је униформна ако је простор X ограничен;*
4) *важе следеће* a priori *и* a posteriori *процене грешке:*

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x_0, x_1), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$d(x_n, x^*) \leq \frac{q}{1-q} \cdot d(x_{n-1}, x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

5) *брзина конвергенције је дата са $d(x_n, x^*) \leq q \cdot d(x_{n-1}, x^*) \leq q^n \cdot d(x_0, x^*)$.*

Познато је да су у метричком простору X следећи искази еквивалентни: сваки Кошијев низ у X је конвергентан; пресек сваког опадајућег низа непразних затворених скупова у X, чији низ дијаметар тежи нули, јесте једночлан скуп; сваки низ ограничене варијације у X је конвергентан; за сваку контракцију $f : S \to S$ затвореног непразног скупа S од X следи да постоји тачка $x \in S$ са својством $x = f(x)$. Ове констатације дају више идеја како се може Банахов принцип контракције доказати.

Природно питање које се одмах намеће за Банахов принцип контракције јесте да ли је за неко Липшицово пресликавање могуће само за мало ослабити услов контракције, а и даље добијати да постоји његова непокретна тачка. У ширем смислу одговор је не и то ћемо показати следећим примером.

Пример 1.2.1 ([75]). *Посматрајмо комплетан метрички простор свих непрекидних функција $C[0,1]$ и посматрајмо затворен потпростор M од $C[0,1]$ који се састоји од пресликавања $f \in C[0,1]$ за које је $f(1) = 1$. Како је M затворен потпростор комплетног метричког простора, имамо да је M сам за себе комплетан. Дефинишимо, сада, пресликавање $T : M \to M$, на следећи начин:*

$$T(f)(t) = t \cdot f(t), \quad t \in [0,1].$$

Ако пресликавања $f, g \in M$, тада важи $|T(f) - T(g)| \in C[0,1]$, па према познатом ставу из анализе $|T(f) - T(g)|$ постиже максималну вредност за неку тачку $t_0 \in [0,1]$. Тада имамо:

$$d\big(T(f), T(g)\big) = \sup_{t\in[0,1]} \big|T(f)(t) - T(g)(t)\big| = t_0\big|f(t_0) - g(t_0)\big| \leq d(f,g).$$

С друге стране, ако $f \neq g$, тада је $f(t) \neq g(t)$ за неко $t \in [0,1]$ и тада имамо $f(1) = g(1) = 1$, што значи да је $t_0 < 1$. Стога, имамо:

$$d\big(T(f), T(g)\big) < d(f,g), \tag{1.2}$$

за свака два пресликавања $f, g \in M$ и $f \neq g$.

Ако сада претпоставимо $T(f) = f$ за неко пресликавање $f \in M$, имамо да за свако $t \in [0,1]$, важи $f(t) = t \cdot f(t)$. Из претходног следи да је $f(t) = 0$ за свако $t \in [0,1)$. С друге стране, важи $f(1) = 1$. Ово је у контрадикцији са чињеницом да је f непрекидно пресликавање, па пресликавање T нема непокретних тачака у M.

С обзиром на то да услов (1.2), сходно дефиницији 1.2.1, представља контрактивно пресликавање, видимо да се Банахов принцип контракције не може проширити на ову, незнатно општију класу пресликавања од (стриктних) контракција.

Из претходно примера се јасно види да ослабљивање особина контракције није довољно да би се омогућило постојање непокретне тачке. Једна од могућности за превазилажење овог проблема јесте да се ослабљивање особина контракције врши, истовремено, са давањем простору у коме радимо, довољно богате структуре да би се компензовала ова релаксација услова који важе за контракцију. У случају контрактивних пресликавања захтева се да простор у коме се ради буде компактан, како би постојала јединствена непокретна тачка за таква пресликавања.

У многим случајевима услов (1.1) није задовољен на целом простору X, већ само локално. Код локалне верзије Банаховог принципа контракције услов (1.1) за неко пресликавање T важи само на отвореној лопти B коју пресликава у комплетан метрички простор X.

Став 1.2.2 (Локални Банахов принцип). *Нека је (X,d) комплетан метрички простор и скуп $B(x_0, R) = \{x \in X \mid d(x,x_0) < R\}$ отворена лопта. Нека је* *пресликавање $T : B(x_0, R) \to X$ контракција са константом контрактивности $q \in [0,1)$, таква да важи $d(Tx_0, x_0) < (1-q) \cdot R$. Тада пресликавање T има јединствену непокретну тачку.*

У наставку ћемо говорити о проширењима Банаховог принципа контракције, као основним резултатима на којима ћемо заснивати даље истраживање у овом раду. Један од најважнијих начина за проширивање Банаховог принципа контракције јесте замена услова (строге) контрактивности, сличним, али слабијим условом:

$$d(Tx, Ty) \le \varphi\big(d(x,y)\big), \quad x, y \in X,$$

где је $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ одређена функција, коју називамо *нелинеарни контрактивни услов* и која чува одређене особине контракције.

Историјски гледано први значајан резултат који је извршио проширење Банаховог принципа контракције у овом правцу био је резултат Ракоча[12] дат у раду [88] из 1962. године.

Став 1.2.3 ([88])**.** *Нека је (X, d) комплетан метрички простор, пресликавање $g : X \to X$ и $\alpha : [0,\infty) \to [0,1)$ монотоно нерастућа функција. Ако за све $x, y \in X$ важи*

$$d\big(g(x), g(y)\big) \le \alpha\big(d(x,y)\big) d(x,y),$$

тада пресликавање g има јединствену непокретну тачку.

Резултат који је био много општији од претходно поменутог, добијен је од стране Бојда[13] и Вонга[14] у раду [14] 1969. године. Пре него што дамо формулацију овог резултата, најпре, ћемо дефинисати појмове *горње семинепрекидног пресликавања у тачки* и *горње семинепрекидног пресликавања на скупу.*

Дефиниција 1.2.2. *За пресликавање $\psi : A \to \mathbb{R}$ ($A \subseteq \mathbb{R}$) кажемо да је горње семинепрекидно у тачки $c \in A$ ако важи*

$$\limsup_{t \to c^+} \psi(t) \le \psi(c).$$

Ако је пресликавање горње семинепрекидно у свим тачкама скупа, називамо га горње семинепрекидно пресликавање на том скупу.

Став 1.2.4 ([14])**.** *Нека је (X, d) комплетан метрички простор, пресликавање $g : X \to X$ и $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ горње семинепрекидно пресликавање које испуњава услов $\psi(t) < t$ за свако $t > 0$. Ако за све $x, y \in X$ важи*

$$d\big(g(x), g(y)\big) \le \psi\big(d(x,y)\big),$$

[12] E. Rakotch, израелски математичар.
[13] D. W. Boyd, амерички математичар.
[14] J. S. W. Wong, амерички математичар.

тада пресликавање g има јединствену непокретну тачку.

Напоменимо да су Бојд и Вонг, у раду [14], такође, показали да ако је простор X метрички конвексан, да се тада претпоставка о горњој семинепрекидности за пресликавање ψ може изоставити.

1.3 Заједничка непокретна тачка за два пресликавања

У овом поглављу дајемо резултат Цангка[15] дат у раду [67] из 1976. године који је иницирао испитивање постојања заједничке непокретне тачке за два пресликавања, за који ћемо у овом раду дати одређена проширења.

Став 1.3.1 ([67]). *Нека је (X, d) комплетан метрички простор и нека су $f, g : X \to X$ комутативна пресликавања за која важи да је $g(X) \subseteq f(X)$ и нека је пресликавање f непрекидно. Ако постоји константа $k \in (0, 1)$ таква да за све $x, y \in X$ важи*

$$d\big(g(x), g(y)\big) \leq k \cdot d\big(f(x), f(y)\big),$$

тада пресликавања f и g имају заједничку непокретну тачку.

У овом раду ће бити презентовано више резултата који се односе на постојање заједничке непокретне тачке пресликавања на просторима са недетерминистичком метриком. Један део резултата се односи на заједничку непокретну тачку за четири пресликавања који задовољавају поменути нелинеарни контрактивни услов и то у случајевима уопштавања комутативности пресликавања на $\mathscr{L}$-фази метричким просторима, који су публиковани у раду [63]. Оваква пресликавања представљају ширу класу од комутативних пресликавања и овде ће бити посматрани на недетерминистичким просторима. У раду ће бити посматрана *компатибилна пресликавања* која су за метричке просторе уведена од стране Цангка у раду [68] и Мишре[16] у раду [83], као генерализације компатибилности у различитим облицима[17]. С друге стране, Сеса[18] је у раду [96] увео појам *слабе комутативности*, а Пант[19] је у раду [85] увео појам *R-слабе комутативности* за пресликавања дефинисана на метричким просторима. Свакако, с обзиром на то да се ради о недерминистичким просторима добијени резултати ће подразумевати фазификацију поменутих појмова.

Други део резултата се односи на заједничку непокретну тачку за два пресли-

[15]Gerald Jungck, амерички математичар.
[16]S. N. Mishra, индијски математичар.
[17]На пример, 2005. године Синг и остали су у раду [98] су увели појам *слабе компатибилности.*
[18]Salvator Sessa, италијански математичар.
[19]R. P. Pant, индијски математичар.

кавања и у вези је са нееспанзивним пресликавањима која задовољавају поменути нелинеарни контрактивни услов, о којима говоримо у наставку.

1.4 Непокретне тачке нееспанзивних пресликавања

У дефиницији 1.2.1 ове главе смо већ увели нееспанзивна пресликавања. Иако ова пресликавања представљају природно проширење контракција, у општем случају она не морају имати непокретне тачке. Штавише, њихово проучавање захтева познавање техника које, поред метричких, укључују подједнако и геометријске и тополошке поставке и технике. У последњих педесет година добијен је велики број резултата о егзистенцији непокретне тачке за нееспанзивна пресликавања како на детерминистичким, тако и на недетерминистичким просторима.

У овој дисертацији ћемо се бавити односом између нормалних, конвексних и строго конвексних структура и постојања непокретне тачке за нееспанзивна пресликавања на недетерминистичким просторима са оваквим структурама. Резултати који су добијени и који су изложени у раду [65], представљају уопштење теореме Брауера коју дајемо у наставку.

Став 1.4.1 ([16]). *Ако је K ограничен, затворен и конвексан подскуп униформно конвексног Банаховог простора X и ако је $T : K \to K$ нееспанзивно пресликавање (тј. ако важи $||T(x)-T(y)|| \leq ||x-y||$ за све $x, y \in K$), тада пресликавање T има непокретну тачку.*

Историјски гледано прве теореме о егзистенцији непокретне тачке за нееспанзивна пресликавања су независно једни од других доказали 1965. године Броудер[20] у раду [16], Геде[21] у раду [50] и Кирк[22] у раду [74][23]. Од стране Такахашија[24] је у раду [99] из 1970. године уведена *нормална структура*[25] као карактеризација скупова у метричким просторима чиме је отворен нови правац у проучавању нееспанзивних пресликавања у теорији непокретне тачке. Такође, у раду [99] је дат и један став који је уопштио резултате Броудера, односно Кирка, изложене у раду [16], односно [74]. С обзиром на то да је он од интереса за наша даља истраживања даћемо његову формулацију. Најпре, рецимо да је Такахаши посматрао метричке просторе са конвексном структуром таквом да постоји пресликавање $W : X \times X \times [0,1] \to X$ (тј. $W(x, y; \theta)$ које је дефинисано за све парове $x, y \in X$ и

[20]Felix E. Browder, амерички математичар.
[21]D. Göhde, немачки математичар.
[22]William Kirk, амерички математичар.
[23]Теорема коју је доказао Кирк је општијег облика од теорема датих у радовима [16] и [50].
[24]Wataru Takakashi, јапански математичар.
[25]О овом појму ће бити више речи у наредном поглављу.

$\theta \in [0,1]$ са вредностима у X), тако да оно задовољава услов

$$d\big(u, W(x,y;\theta)\big) \leq \theta d(u,x) + (1-\theta) d(u,y)$$

за свако $u \in X$. Такав простор X се назива *конвексним метричким простором.* Класа оваквих метричких простора укључује нормиране линеарне просторе, као и метричке просторе хиперболичког типа. На пример, Банахов простор и сваки од његових конвексних потпростора су конвексни метрички простори. Међутим, Фрешеов простор не мора обавезно бити и конвексан метрички простор.

За конвексан метрички простор X кажемо да има *особину (C)* ако сваки опадајући низ затворених конвексних подскупова од X има непразан пресек. Сада можемо дати формулацију претходно поменутог става.

Став 1.4.2 ([99])**.** *Ако је (X,d) конвексан метрички простор који задовољава особину (C). Нека је K непразан, ограничен и затворен конвексан подскуп простора X који има нормалну структуру. Свако пресликавање $T : K \to K$ има барем једну непокретну тачку.*

Интересантно је уочити да претходно изнети став указује на постојање, али не и на јединственост непокретне тачке неког пресликавање T.

1.5 Вероватносни Менгерови простори

Као што је већ на почетку ове главе речено, француски математичар Фреше је у раду [45] увео појам растојања на произвољном скупу, описао особине функције растојања и тако засновао аксиоматику метричких простора. Овако апстрактно уведени математички објекат нашао је велику примену у изучавању математичких, физичких и других научних проблема у којима се појављује појам „растојања“. Објекти који се на овај начин могу изучавати јесу нпр. тачке, функције, скупови и др. Ипак, у многим случајевима у којима се теорија метричких простора користи, додељивање јединственог реалног ненегативног броја сваком пару елемената неког скупа није довољно како би се посматрана појава или проблем описали. На пример, приликом вршења експеримента у коме се мере одређене дужине, где такав број представља растојање између две посматране тачке, често резултат екперимента није последица једног мерења, већ представља, рецимо, аритметичку средину серије таквих мерења. У оваквим и многим сличним ситуацијама погодније је концепт растојања посматрати вероватносно (статистички), него као величину тачно одређену једним ненегативним реалним бројем. Прецизније речено, уместо да сваком пару елемената p и q неког скупа придружујемо број – растојање $d(p,q)$ – можемо таквом пару елемената придружити *функцију расподеле* $F_{p,q}$ и за неки позитиван број x интерпретирати вредност $F_{p,q}(x)$ као вероватноћу да растојање између елемената p и q буде мање од x. На овакав начин, Менгер[26] је у раду [80] из 1942.

[26] Karl Menger, аустријски математичар.

године дефинисао *вероватносне метричке просторе.* Тако дату дефиницију вероватносних метричких простора он је модификовао 1951. године у раду [81] и на тај начин отклонио неке недостатке првобитне дефиниције због којих је био критикован од стране математичара тог периода[27]. У наставку, најпре, дајемо дефиницију функције расподеле, а затим и дефиницију ових простора, као и њихове основне особине.

Дефиниција 1.5.1. а) *Функцију $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називамо функцијом расподеле ако испуњава следеће услове:*

(R-1) *Из $t_1 \leq t_2$ следи да је $f(t_1) \leq f(t_2)$, за све $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$,*

(R-2) $\lim_{t\to-\infty} f(t) = 0$,

(R-3) $\lim_{t\to\infty} f(t) = 1$,

(R-4) $\lim_{t\to t^-} f(x) = f(t)$.

Назив функција расподеле потиче из теорије вероватноће пошто су особине од (R-1) *до* (R-4) *карактеристичне за функцију расподеле случајних промењивих. Фамилију овако дефинисаних функција расподеле означаваћемо са S.*

б) *Вероватносни метрички простор (скраћено ћемо га означавати са* PM[28]*-простор) је пар $(X, \mathcal{F})$, где је X непразан скуп, а $\mathcal{F} : X \times X \to S$ пресликавање које тачки $(x, y) \in X \times X$ придружује функцију расподеле, у ознаци $F_{x,y}$ која има следеће особине:*

(V-1) *$F_{x,y}(t) = 1$ за све $t > 0$ ако и само ако $x = y$,*

(V-2) $F_{x,y}(0) = 0$,

(V-3) $F_{x,y}(t) = F_{y,x}(t)$,

(V-4) *Из $F_{x,y}(t_1) = 1$ и $F_{y,z}(t_2) = 1$ следи да је $F_{x,z}(t_1 + t_2) = 1$ за све $x, y, z \in X$ и све $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.*

Вредност $F_{x,y}(t)$ може се интерпретирати као вероватноћа да је растојање тачака x и y мање од t. Због (V-2) и особина (R-1), (R-2) и (R-4) следи да је за свако $t \leq 0$ испуњено да је $F_{x,y}(t) = 0$. Лако се уочава да је услов (V-1) еквивалентан услову: $x = y$ ако и само ако је $F_{x,y} = H$, где је H ознака за Хевисајдову[29] функцију која је дефинисана са:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Можемо уочити да се сваки метрички простор (X, d) може интерпретирати као један PM-простор, ако за произвољне тачке x и y скупа X дефинишемо функцију расподеле помоћу $F_{x,y}(t) = H\big(t - d(x, y)\big)$.

[27] О овоме се више може погледати, на пример, у раду [106].

[28] скраћено од *probabilistic metric.*

[29] Oliver Heaviside (1850–1925), енглески математичар и физичар.

Дефиниција 1.5.2. а) *Бинарна операција* $T : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *се назива непрекидна* t*-норма ако функција* T *задовољава следеће услове:*

(T-1) $T(a,1) = a$ *за свако* $a \in [0,1]$*, као и* $T(0,0) = 0$,

(T-2) $T(a,b) = T(b,a)$,

(T-3) $T(a,b) \leq T(c,d)$ *за све* $a \leq c$ *и* $b \leq d$*, и* $a,b,c,d \in [0,1]$,

(T-4) $T\big(T(a,b),c\big) = T\big(a,T(b,c)\big)$.

б) *Тројка* $(X, \mathcal{F}, T)$*, где је* $(X, \mathcal{F})$ *вероватносни простор, а* T *једна* t*-норма која испуњава Менгерову неједнакост:*

$$F_{x,y}(t_1 + t_2) \geq T\Big(F_{x,z}(t_1), F_{z,y}(t_2)\Big),$$

за све $x, y, z \in X$ *и све* $t_1, t_2 \geq 0$*, назива се вероватносни Менгеров простор (убудуће ћемо га краће звати Менгеров* PM*-простор).*

Примери t-норми су $T(a,b) = \min\{a,b\}$ и $T(a,b) = ab$. Могуће је t-норме дефинисати и рекурзивно са $T^1 = T$ и

$$T^n(x_1, \ldots, x_{n+1}) = T\left(T^{n-1}(x_1, \ldots, x_n), x_{n+1}\right),$$

за $n \geq 2$ и $x_i \in [0,1]$ за свако $i \in \{1, \ldots, n+1\}$.

Напомена 1.5.1 ([94])**.** *Сваки метрички простор је Менгеров* PM*-простор. Нека је* (X,d) *метрички простор и* $T(a,b) = \min\{a,b\}$ *непрекидна* t*-норма. Дефинишимо* $F_{x,y}(t) = H\big(t - d(x,y)\big)$ *за све* $x, y \in X$ *и* $t > 0$*. Тројка* $(X, \mathcal{F}, T)$ *је један Менгеров PM-простор индукован метриком* d*.*

У наставку дајемо неке теореме, дефиниције и леме у вези са PM-просторима које ће бити од интереса за даљи рад.

Дефиниција 1.5.3. *Нека је* $(X, \mathcal{F}, T)$ *Менгеров PM-простор.*

(1) *За низ* $\{x_n\}$ *из* X *се каже да конвергира ка* x *из* X *ако, за свако* $\varepsilon > 0$ *и* $\lambda > 0$*, постоји природан број* N*, такав да важи* $F_{x_n,x}(\varepsilon) > 1 - \lambda$*, кад год је* $n \geq N$*.*

(2) *За низ* $\{x_n\}$ *из* X *се каже да је Кошијев низ ако, за свако* $\varepsilon > 0$ *и* $\lambda > 0$*, постоји природан број* N*, такав да важи* $F_{x_n,x_m}(\varepsilon) > 1 - \lambda$*, кадгод су* $n, m \geq N$*.*

(3) *За Менгеров PM-простор се каже да је комплетан ако сваки Кошијев низ из* X *конвергира ка некој тачки из* X*.*

У Менгеровом PM-простору $(X, \mathcal{F}, T)$ се (ε, λ)-топологија (видети нпр. рад [93]) уводи преко фамилије околина $\mathcal{N}_x$ тачке $x \in X$ дате са:

$$\mathcal{N}_x = \{N_x(\varepsilon, \lambda) : \ \varepsilon > 0, \lambda \in (0,1)\},$$

где је
$$N_x(\varepsilon,\lambda)=\{y\in X:\ F_{x,y}(\varepsilon)>1-\lambda\}.$$

Поменута (ε,λ)-топологија је Хаусдорфова топологија[30]. За функцију f, у овако уведеној топологији, кажемо да је непрекидна у тачки $x_0\in X$ ако и само ако за сваки низ x_n који конергира ка x_0 важи да $f(x_n)\to f(x_0)$.

Следећа лема је доказана од стране Швејцера[31] и Склара[32] у раду [93].

Лема 1.5.1. *Нека је $(X,\mathcal{F},T)$ Менгеров PM-простор. Тада је функција $\mathcal{F}$ доње полунепрекидна за свако фиксирано $t>0$, тј. за свако фиксирано $t>0$ и свака два конвергентна низа $\{x_n\},\{y_n\}$ из X таква да важи $x_n\to x, y_n\to y$, када $n\to\infty$, следи да је*
$$\liminf_{n\to\infty}F_{x_n,y_n}(t)=F_{x,y}(t).$$

Дефиниција 1.5.4. *Нека је $(X,\mathcal{F},T)$ Менгеров PM-простор и скуп $A\subseteq X$. Затворење скупа A је најмањи затворен скуп који садржи A и означавамо га са $\overline{A}$.*

Имајући на уму Хаусдорфову топологију и дефиницију конвергентних низова дајемо следећу напомену.

Напомена 1.5.2. *Елемент $x\in\overline{A}$ ако и само постоји низ $\{x_n\}$ из A такав да $x_n\to x$, када $n\to\infty$.*

У наставку дајемо дефиницију вероватносне ограничености коју је увео Шервуд[33] у раду [97]. Овај појам ћемо користити у неким од оригиналних резултата који ће бити изложени у овом раду.

Дефиниција 1.5.5. *Нека је $(X,\mathcal{F},T)$ Менгеров PM-простор и скуп $A\subseteq X$. Вероватносни дијаметар скупа A задаје се са*
$$\delta_A(t)=\inf_{x,y\in A}\sup_{\varepsilon<t}F_{x,y}(\varepsilon).$$
Дијаметар скупа A задаје се са
$$\delta_A=\sup_{t>0}\inf_{x,y\in A}\sup_{\varepsilon<t}F_{x,y}(\varepsilon).$$
Ако постоји $\lambda\in(0,1)$ такво да је $\delta_A=1-\lambda$, скуп A ћемо звати вероватносно полуограничен. Ако је $\delta_A=1$ скуп A ћемо називати вероватносно ограничен.

---

[30]Felix Hausdorff (1868–1942), немачки математичар.
[31]Berthold Schweizer, немачко–амерички математичар.
[32]Abe Sklar, амерички математичар.
[33]Howard Sherwood, амерички математичар.

Лема 1.5.2. *Нека је* $(X, \mathcal{F}, T)$ *Менгеров PM-простор. Скуп* $A \subseteq X$ *је вероватносно ограничен ако и само ако за свако* $\lambda \in (0,1)$ *постоји* $t > 0$ *такво да је* $F_{x,y}(t) > 1-\lambda$*, за све* $x, y \in A$*.*

Доказ. Тврђење следи из дефиниције $\sup A$ и $\inf A$ за непразне скупове. □

Напомена 1.5.3. *Није тешко уочити да је сваки метрички ограничен скуп и вероватносно ограничен скуп ако се посматра у индукованом PM-простору.*

Наредни став који ће бити битан за доказе неких резултата презентованих у овом раду, доказан је од стране Шервуда у раду [97].

Став 1.5.1 ([97])**.** *Нека је* $(X, \mathcal{F}, T)$ *Менгеров PM-простор и* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *низ уметнутих непразних, затворених подскупова од* X*, такав да је* $\delta_{F_n} \to \varepsilon_0$*, када* $n \to \infty$*. Тада постоји тачно једна тачка* $x_0 \in F_n$*, за свако* $n \in \mathbb{N}$*.*

Лако је показати да важи следећа лема.

Лема 1.5.3. *Нека је* $(X, \mathcal{F}, T)$ *Менгеров PM-простор. Нека је* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *низ уметнутих непразних, затворених подскупова од* X*. Низ* $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *има вероватносни дијаметар нула, тј. за свако* $\lambda \in (0,1)$ *и свако* $t > 0$ *постоји* $n_0 \in \mathbb{N}$ *такво да је* $F_{x,y}(t) > 1-\lambda$ *за све* $x, y \in F_{n_0}$*, ако и само ако* $\delta_{F_n} \to \varepsilon_0$*, када* $n \to \infty$*.*

1.6 Фази метрички простори

Поред интерпретације вредности $F_{x,y}(t)$, дате у претходном поглављу, посматрану вредност је могуће интерпретирати као степен блискости тачака $x, y \in X$ у односу на вредност параметра t. У том случају аксиоме (R-3) и (V-2) нису неопходне у аксиоматици овако засноване интерпретације недетерминистичког растојања. Наиме, ако параметар t означава тренутак у коме посматрамо степен блискости тачака x и y, тада у почетку процеса, тј. у тренутку $t = 0$, блискост не мора бити 0, односно њихово растојање не мора бити ∞. Штавише, тачке се у почетном тренутку могу поклапати. Оваква интерпретација недерминистичке метрике доводи до појма *фази метричких простора*, чија је аксиоматика ослобођена неких од аксиома које учествују у дефиницији вероватносних метричких простора. Прву дефиницију фази метричких простора дали су Калева[34] и Сеикала[35] у раду [69]. Еквивалент њиховој аксиоматици дали су Крамосил[36] и Михалек[37] у раду [76] и таква аксиоматика фази метричких простора постаје веома прихваћена од великог броја

[34]Osmo Kaleva, фински математичар.
[35]Seppo Seikkala, фински математичар.
[36]Ivan Kramosil, чешки математичар.
[37]Jiři Michlek, чешки математичар.

математичара и физичара. Даљу измену претходне аксиоматике врше Георг[38] и Верамани[39] у раду [48], ослобађајући аксиоматику од аксиоме (Fm-1k) (која је дата у наставку) и у истом раду дефинишу Хаусдорфову топологију на фази метричким просторима. Данас се изучавају фази метрички простори у смислу обе дефиниције, те ћемо их у наставку обе навести.

Дефиниција 1.6.1 ([92]). *Бинарну операцију* $* : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *називамо непрекидном Т-нормом ако је* $\big([0,1], *\big)$ *тополошки моноид са јединицом тако да је* $a * b \leq c * d$ *за све* $a, b, c, d \in [0,1]$ *за које је* $a \leq c$ *и* $b \leq d$.

Дефиниција 1.6.2 ([107]). *Функција* $A : X \to [0,1]$ *назива се фази скуп.*

Дефиниција 1.6.3 ([76]). *Тројку* $(X, M, *)$ *где је* X *произвољан скуп,* $*$ *непрекидна* T*-норма, а* M *фази скуп на* $X^2 \times [0, \infty)$ *који испуњава услове:*

(Fm-1k) $M(x, y, 0) = 0$,
(Fm-2k) $M(x, y, t) = 1$ *за све* $t > 0$ *ако и само ако је* $x = y$,
(Fm-3k) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
(Fm-4k) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$ *за све* $x, y, z \in X$ *и* $t, s > 0$,
(Fm-5k) $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \to [0, 1]$ *је непрекидна са леве стране;*

називамо фази метричким простором у смислу Крамосила и Михалека, а функцију M *називамо фази метриком.*

Дефиниција 1.6.4 ([48]). *Тројку* $(X, M, *)$ *где је* X *произвољан скуп,* $*$ *непрекидна* T*-норма, а* M *фази скуп на* $X^2 \times [0, \infty)$ *који испуњава услове:*

(Fm-1v) $M(x, y, t) > 0$,
(Fm-2v) $M(x, y, t) = 1$ *за свако* $t > 0$ *ако и само ако је* $x = y$,
(Fm-3v) $M(x, y, t) = M(y, x, t)$,
(Fm-4v) $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$ *за све* $x, y, z \in X$ *и* $t, s > 0$,
(Fm-5v) $M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \to [0, 1]$ *је непрекидна.*

називамо фази метричким простором у смислу Георга и Вераманија, а функцију M *називамо фази метриком.*

Уочимо да дефиниција 1.6.3 ослобађа аксиоматику фази метричких простора само од аксиоме (R-3) у односу на аксиоматику Менгерових PM-простора, док дефиниција 1.6.4 ослобађа аксиоматику и од аксиоме (R-2), што је добро баш због интерпретације вредности вероватносне и фази метрике, о чему је већ било речи.

[38] A. George, индијски математичар.
[39] P. Veeramani, индијски математичар.

Пример 1.6.1 ([48]). *Сваки метрички простор (X, d) је фази метрички простор у смислу обе дефиниције фази метрике. Није тешко проверити да функција*

$$M(x, y, t) = \frac{kt^n}{kt^n + m \cdot d(x, y)}$$

за $k, m, n \in \mathbb{R}^+$ испуњава све услове фази метрике, при чему је T-норма уведена помоћу $a * b = a \cdot b$. Такав фази метрички простор називамо фази метрички простор индукован метриком d. Специјално, у случају када је $k = m = n = 1$ T-норму је могуће увести помоћу $T(a, b) = \min\{a, b\}$.

Пример 1.6.2 ([48]). *Нека је $X = [a, b] \subset \mathbb{R}^+$ и нека је $a * b = ab$. Тада је фази метрику могуће увести на следећи начин:*

$$M(x, y, t) = \begin{cases} \dfrac{x}{y}, & x \leq y, \\ \dfrac{y}{x}, & y \leq x. \end{cases}$$

Уочимо да овако дефинисана метрика испуњава аксиоме дефиниције 1.6.4, али не и дефиниције 1.6.3.

У раду [51] Грабиец[40] је доказао следећу лему.

Лема 1.6.1. *Нека је $(X, M, *)$ фази метрички простор. Тада је $M(x, y, \cdot)$ неопадајућа функција за све $x, y \in X$.*

Доказ. Претпоставимо да за $t, s \in [0, 1]$, при чему је $t < s$, важи да је $M(x, y, t) > M(x, y, s)$. Тада, због (Fm-4k), односно (Fm-4v) и чињенице да је $M(y, y, s - t) = 1$ важи да је

$$M(x, y, t) > M(x, y, s) > M(x, y, t) * M(y, y, s - t) = M(x, y, t),$$

што је контрадикција. Дакле, $M(x, y, t) \leq M(x, y, s)$. $\square$

Није тешко уочити да претходна лема важи без обзира о којој дефиницији фази метричких простора је реч, јер се у њеном доказу користе аксиоме које учествују у обе дефиниције.

Дефиниција 1.6.5 ([48], [51]). *За низ $\{x_n\}$ у фази метричком простору $(X, M, *)$ кажемо да конвергира ка тачки $x \in X$ ако и само ако за свако $\varepsilon > 0$ и свако $t > 0$ постоји $n_0 \in N$ тако да је $M(x_n, x, t) > 1 - \varepsilon$ за свако $n > n_0$, односно ако је $\lim_{n\to\infty} M(x_n, x, t) = 1$ за свако $t > 0$. У том случају пишемо да је $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.*

[40] Mariusz Grabiec, пољски математичар.

У раду [48] Георг и Верамани уводе Хаусдорфову топологију на фази метричким просторима. Такође, ова топологија задовољава прву аксиому пребројивости, односно постоји пребројива база околина сваке тачке фази метричког простора.

Дефиниција 1.6.6. *Нека је $(X, M, *)$ фази метрички простор. Отворену куглу, у ознаци $B(x, r, t)$ са цетром у тачки $x \in X$, полупречника $r \in (0, 1)$ у односу на параметар $t > 0$ дефинишемо помоћу*

$$B(x, r, t) = \{y \in X \mid M(x, y, t) > 1 - r\},$$

а топологију уводимо околински са

$$\tau = \big\{A \subset X \mid x \in A \text{ ако и само ако постоје } t > 0 \text{ и } r \in (0, 1), \\ \text{тако да је } B(x, r, t) \subset A\big\}.$$

Дефиниција 1.6.7. *Нека је $(X, M, *)$ фази метрички простор. Функција $f : X \to X$ је непрекидна у тачки $x_0 \in X$ ако и само ако за сваки низ $\{x_n\}$, такав да $x_n \to x_0$, када $n \to \infty$, важи да $f(x_n) \to f(x_0)$ када $n \to \infty$.*

Природно се поставља питање да ли је фази метрика непрекидна функција по прве две координате. Свакако да одговор на то питање зависи од тога коју од наведених дефиниција фази метричког простора разматрамо и он, првенствено, зависи од тога да ли је фази метрика непрекидна или само непрекидна са леве стране по трећој координати. Одговор на постављено питање дат је у наредне три леме.

Лема 1.6.2. *Нека је $(X, M, *)$ фази метрички простор, у смислу било које од дефиниције 1.6.3 или дефиниције 1.6.4 и нека је $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Тада за свако $t > 0$ важи да је*

$$M(x, y, t-) \le \liminf_{n\to\infty} M(x_n, y_n, t) \le \limsup_{n\to\infty} M(x_n, y_n t) \le M(x, y, t+).$$

Доказ. За произвољно, довољно мало $\varepsilon > 0$ из (Fm-4k) (или (Fm-4v)) следи да важе следеће неједнакости:

$$M(x_n, y_n, t) > M(x_n, x, \frac{1}{2}\varepsilon) * M(x, y, t - \varepsilon) * M(y, y_n, \frac{1}{2}\varepsilon),$$

$$M(x, y, t + \varepsilon) > M(x, x_n, \frac{1}{2}\varepsilon) * M(x_n, y_n, t) * M(y_n, y, \frac{1}{2}\varepsilon).$$

Узимајући у првој од датих неједнакости $\liminf$, а у другој $\limsup$, када $n \to \infty$, добијамо да важи

$$M(x, y, t - \varepsilon) \le \liminf_{n\to\infty} M(x_n, y_n t) \le \limsup_{n\to\infty} M(x_n, y_n, t) \le M(x, y, t + \varepsilon).$$

Пуштајући да је $\varepsilon \to 0$ следи тврђење леме. □

Лема 1.6.3. *Нека је $(X, M, *)$ фази метрички простор, у смислу дефиниције 1.6.4. и нека је $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Тада за свако фиксирано $t > 0$ важи*

$$\lim_{n\to\infty} M(x_n, y_n, t) = M(x, y, t),$$

односно функција $M(x, y, t)$ је непрекидна за свако фиксирано $t > 0$.

Доказ. Тврђење ове леме следи из претходне леме и чињенице да је функција $M(x, y, \cdot)$ непрекидна по трећој координати, ако се посматра фази метрички простор у смислу дефиниције 1.6.4. □

Лема 1.6.4. *Нека је $(X, M, *)$ фази метрички простор, у смислу дефиниције 1.6.3 и нека је $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = y$. Тада за свако фиксирано $t > 0$ важи*

$$\liminf_{n\to\infty} M(x_n, y_n, t) = M(x, y, t),$$

односно, функција $M(x, y, t)$ је доње семинепрекидна функција за свако фиксирано $t > 0$.

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$ произвољно. Доказаћемо да важе следеће две квантификаторске формуле:

(I) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})\ n > n_0 \Rightarrow M(x_n, y_n, t) > M(x, y, t) - \varepsilon$,

(II) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)\ n > n_0 \Rightarrow M(x_n, y_n, t) < M(x, y, t) + \varepsilon$,

одакле ће следити тврђење леме.

(I) Нека је $t > 0$ фиксирано и $\varepsilon > 0$ довољно мали произвољан број. Како је $M(x, y, \cdot)$ непрекидна функција са леве стране у тачки t, тада постоји ξ $(0 < 2\xi < x)$ тако да важи

$$M(x, y, t) - M(x, y, t - 2\xi) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Означимо $M(x, y, t - 2\xi) := a$. Како је $*$ непрекидна T-норма и важи да је $a*1 = a$, тада постоји s $(0 < s < 1)$ тако да важи $a*s > a - \frac{\varepsilon}{3}$ и $(a - \frac{\varepsilon}{3})*s > a - \frac{2\varepsilon}{3}$. Како низови $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ конвергирају ка x и y тим редом, када $n \to \infty$, тада постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је за свако $n > n_0$ испуњено $M(x, x_n, \xi) > s$ и $M(y, y_n, \xi) > s$.

На основу неједнакости троугла и чињенице да је фази метрика неопадајућа функција имамо да је за свако $n > n_0$ испуњено

$$\begin{aligned}
M(x_n, y_n, t) &\geq M(x_n, y, t-\xi) * M(y, y_n, \xi),\\
&\geq \big(M(x, y, t-2\xi) * M(x, x_n, \xi)\big) * M(y, y_n, \xi)\\
&\geq (a * s) * s\\
&\geq (a - \frac{\varepsilon}{3}) * s\\
&\geq a - \frac{2\varepsilon}{3}\\
&> M(x, y, t) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

(II) Доказ овог дела добија се аналогним закључивањем, при чему се практично врши замена у запису доказа дела (I) и то x са x_n и y са y_n и обрнуто. Тада добијамо да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да је за свако $n > n_0$ испуњено

$$M(x, y, t) > M(x_n, y_n, t) - \varepsilon,$$

што је еквивалентно услову (II). Овим је доказ завршен. □

Постоје два концепта комплетности на фази метричким просторима, које ћемо навести у следећим дефиницијама.

Дефиниција 1.6.8 ([51]). *За низ* $\{x_n\}$ *у фази метричком простору* $(X, M, *)$ *кажемо да је* G*-Кошијев ако и само ако је* $\lim_{n\to\infty} M(x_{n+p}, x_n, t) = 1$, *за свако* $t > 0$ *и свако* $p \in \mathbb{N}$. *Фази метрички простор називамо* G*-комплетним ако сваки* G*-Кошијев низ тог простора конвергира ка некој тачки тог простора.*

Дефиниција 1.6.9 ([48]). *За низ* $\{x_n\}$ *у фази метричком простору* $(X, M, *)$ *кажемо да је Кошијев ако и само ако за свако* $\varepsilon > 0$ *и свако* $t > 0$ *постоји* $n_0 \in \mathbb{N}$ *тако да је* $M(x_n, x_m, t) > 1 - \varepsilon$ *за све* $n, m > n_0$. *Фази метрички простор називамо комплетним ако сваки Кошијев низ тог простора конвергира ка некој тачки тог простора.*

Веома је битно истаћи да претходне две дефиниције нису увек еквивалентне. Заправо, оне су еквивалентне (видети радове [104] и [105]) само у следећим случајевима:

1. када је скуп X над којим дефинишемо фази метрику највише пребројив, или

2. у случају када гранична вредност из дефиниције 1.6.8 постоји униформно по параметру $p \in \mathbb{N}$.

Такође, уочимо да је G-комплетност слабија од комплетности дате у дефиницији 1.6.9, пошто из G-комплетности простора следи и његова комплетност, јер је сваки Кошијев низ и G-Кошијев. Наиме, да би простор био G-комплетан захтева се да једна шира класа низова испуњава услов конвергентности. Обрнуто не мора да важи, што илуструје следећи пример. Наиме, у следећем примеру се показује да скуп свих реалних бројева $\mathbb{R}$ са стандардном метриком $d(x,y)=|x-y|$, за који знамо да је комплетан, није G-комплетан.

Пример 1.6.3 ([104]). *Уведимо на скупу $\mathbb{R}$ фази метрику помоћу*

$$M(x,y,t)=H\big(t-|x-y|\big)$$

за све $x,y\in\mathbb{R}$ и свако $t>0$ и узмимо да је T-norma $a*b=\min\{a,b\}$. Лако се показује да је простор $(\mathbb{R},M,*)$ комплетан. С друге стране, уочимо низ

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},$$

за који знамо да није конвергентан. Имамо да је за свако фиксирано $p\in\mathbb{N}$ испуњено да

$$M(x_n,x_{n+p},t)=H\big(t-|x_{n+p}-x_n|\big)=H\Big(t-\sum_{i=n+1}^{n+p}\frac{1}{i}\Big)\to 1,$$

за свако $t>0$, када $n\to\infty$. Закључујемо да је овај низ G-Кошијев, одакле следи да $\mathbb{R}$ није G-комплетан, пошто посматрани низ не конвергира.

1.7 $\mathscr{L}$-фази метрички простори

У овом поглављу ћемо дати дефиницију $\mathscr{L}$-фази метричких простора, коју су као генерализацију фази метричких простора увели 2006. године Садати[41] и остали у раду [101].

Дефиниција 1.7.1 ([101]). *Нека је $\mathscr{L}=(L,\leq_L)$ комплетна мрежа и U непразан скуп који ћемо назвати универзум. $\mathscr{L}$-фази скуп $\mathscr{A}$ на U се дефинише као пресликавање $\mathscr{A}:U\to L$, где за сваки елемент $u\in U$, $\mathscr{A}(u)$ представља степен (у L) за који u задовољава $\mathscr{A}$. Такође, дефинишимо $0_{\mathscr{L}}=\inf L$ и $1_{\mathscr{L}}=\sup L$.*

Дефиниција 1.7.2 ([101]). *Троугаона норма на $\mathscr{L}$ је пресликавање $\mathscr{T}:L^2\to L$ које задовољава, за све $x,y,z,x_1,y_1\in L$, следеће услове:*

(i) $\mathscr{T}(x,1_{\mathscr{L}})=x$,

(ii) $\mathscr{T}(x,y)=\mathscr{T}(y,x)$,

(iii) $\mathscr{T}\big(x,\mathscr{T}(y,z)\big)=\mathscr{T}\big(\mathscr{T}(x,y),z\big)$,

(iv) $x\leq_L x_1$ и $y\leq_L y_1\Rightarrow\mathscr{T}(x,y)\leq_L\mathscr{T}(x_1,y_1)$.

[41] Reza Saadati, ирански математичар.

Троугаона норма $\mathscr{T}$ може се, такође, дефинисати рекурзивно као $(n+1)$-арна операција, $n \in \mathbb{N}$, на следећи начин: $\mathscr{T}^1 = \mathscr{T}$ и

$$\mathscr{T}^n(x_1, \dots, x_{n+1}) = \mathscr{T}\big(\mathscr{T}^{n-1}(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}\big), \tag{1.3}$$

за $n \geq 2$ и $x_1, \dots, x_{n+1} \in L$.

Дефиниција 1.7.3 ([101]). *Тројка $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ се назива $\mathscr{L}$-фази метрички простор ако је X произвољан (непразан) скуп, $\mathscr{T}$ је непрекидна троугаона норма на $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$ је $\mathscr{L}$-фази скуп на $X^2 \times (0, \infty)$ који задовољава, за све $x, y, z \in X$ и све $t, s \in (0, \infty)$, следеће услове:*

(Lf-1) $\mathscr{M}(x, y, t) >_L 0_{\mathscr{L}}$;

(Lf-2) $\mathscr{M}(x, y, t) = 1_{\mathscr{L}}$ *за свако* $t > 0$ *ако и само ако је* $x = y$;

(Lf-3) $\mathscr{M}(x, y, t) = \mathscr{M}(y, x, t)$;

(Lf-4) $\mathscr{T}(\mathscr{M}(x, y, t), \mathscr{M}(y, z, s)) \leq_L \mathscr{M}(x, z, t+s)$;

(Lf-5) $\mathscr{M}(x, y, \cdot) : (0, \infty) \to L$ *је непрекидна.*

У овом случају $\mathscr{M}$ се назива $\mathscr{L}$-фази метрика.

Напомена 1.7.1 ([101]). *Сваки фази метрички простор је један $\mathscr{L}$-фази метрички простор.*

Дефиниција 1.7.4 ([1]). *Нека је $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ један $\mathscr{L}$-фази метрички простор. За $\mathscr{M}$ се каже да је непрекидна на $X^2 \times (0, \infty)$ ако*

$$\lim_{n \to \infty} \mathscr{M}(x_n, y_n, t_n) = \mathscr{M}(x, y, t)$$

кад год низ $\{(x_n, y_n, t_n)\}$ из $X^2 \times (0, \infty)$ конвергира ка $(x, y, t) \in X^2 \times (0, \infty)$, када $n \to \infty$.

Лема 1.7.1 ([1]). *Нека је $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ један $\mathscr{L}$-фази метрички простор. Тада је $\mathscr{M}$ непрекидна функција на $X^2 \times (0, \infty)$.*

Резултати који ће у другој глави овог рада бити изложени, посматраћемо на $\mathscr{L}$-фази метричким просторима који задовољавају услов

$$\mathscr{M}(x, y, 0) = 0_{\mathscr{L}} \quad \text{за} \quad x \neq y. \tag{1.4}$$

Дефиниција 1.7.5 ([101]). *Негација на $\mathscr{L}$ је произвољно (строго) опадајуће пресликавање $\mathscr{N} : L \to L$ које задовољава $\mathscr{N}(0_{\mathscr{L}}) = 1_{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{N}(1_{\mathscr{L}}) = 0_{\mathscr{L}}$. Ако је $\mathscr{N}\big(\mathscr{N}(x)\big) = x$, за свако $x \in L$, тада се $\mathscr{N}$ назива инволутивна негација. Негација N_s на $([0,1], \leq)$ дефинисана са $N_s(x) = 1 - x$, за свако $x \in [0,1]$, назива се стандардна негација на $([0,1], \leq)$.*

Посматраћемо троугаону норму $\mathscr{T}$ која задовољава услов да за свако $\mu \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ и произвољно $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, постоји $\lambda \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ такво да је

$$\mathscr{T}^{n-1}\big(\mathscr{N}(\lambda), \ldots, \mathscr{N}(\lambda)\big) >_L \mathscr{N}(\mu). \tag{1.5}$$

Напомена 1.7.2 ([55], [101]). *Услов (1.5) важи за сваку непрекидну троугаону норму $\mathscr{T}$ и за сваку инволутивну негацију $\mathscr{N}$ на $L \setminus (0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}, \leq_L)$ (следи из теореме о средњој вредности). Такође, све троугаоне норме h-типа са стандардном негацијом задовољавају услов (1.5).*

Дефиниција 1.7.6 ([101]). *Низ $\{x_n\}$ из $\mathscr{L}$-фази метричког простора $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ се назива Кошијев низ ако за свако $\varepsilon \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ и $t > 0$, постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све $m \geq n \geq n_0$ (или $n \geq m \geq n_0$) важи*

$$\mathscr{M}(x_m, x_n, t) > \mathscr{N}(\varepsilon).$$

Низ $\{x_n\}$ је конвергентан у $\mathscr{L}$-фази метричком простору $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$, при чему је $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $x \in X$, ако $\mathscr{M}(x_n, x, t) \to 1_{\mathscr{L}}$, када $n \to \infty$, за свако $t > 0$. За $\mathscr{L}$-фази метрички простор се каже да је комплетан ако и само ако је сваки Кошијев низ конвергентан.

Напоменимо да дефиниција конвергенције и дефиниција Кошијевог низа на $\mathscr{L}$-фази метрички просторима зависи од избора негације $\mathscr{N}$. Због тога је потребно истаћи да се претпоставља да је простор $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ комплетан у односу на посматрану негацију $\mathscr{N}$.

Следећа дефиниција и лема на $\mathscr{L}F$-строго ограниченим скуповима је дата од стране Јешића[42] и Бабачеве[43] у раду [61].

Дефиниција 1.7.7 ([61]). *Нека је $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-фази метрички простор и $A \subseteq X$. $\mathscr{L}$-фази дијаматар скупа A се дефинише на следећи начин:*

$$\delta_A = \sup_{t>0} \inf_{x,y\in A} \sup_{\varepsilon<t} M(x, y, \varepsilon).$$

Ако је $\delta_A = 1_{\mathscr{L}}$ тада кажемо да је скуп A је $\mathscr{L}F$-строго ограничен.

Лема 1.7.2 ([61]). *Скуп $A \subseteq X$ је $\mathscr{L}F$-строго ограничен ако и само ако за произвољну негацију $\mathscr{N}(\lambda)$ и свако $\lambda \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ постоји $t > 0$ такво да важи $\mathscr{M}(x, y, t) > \mathscr{N}(\lambda)$ за све $x, y \in A$.*

Доказ. Нека је $A \subseteq X$ $\mathscr{L}F$-строго ограничен скуп. Тврђење леме тривијално следи за произвољну негацију $\mathscr{N}(\lambda) \in [0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}]$ из дефиниције за inf и за sup скупа.

[42] Синиша Јешић, српски математичар.

[43] Наташа Бабачев, српска математичарка.

Обрнуто, како за произвољну негацију $\mathscr{N}(\lambda)$, и свако $\lambda \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ постоји $t > 0$ такво да је $\mathscr{M}(x, y, t) > \mathscr{N}(\lambda)$ за све $x, y \in A$, тада претходно и важи за сваку произвољну инволутивну негацију. Ако је $\mathscr{N}(\lambda)$ инволутивна негација, тада за свако $\lambda \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ постоји $\mu = \mathscr{N}(\lambda)$ такво да је $\mathscr{N}(\mu) = \lambda$. Ово значи да је $\sup_{\mu \in L} \mathscr{N}(\mu) = \sup_{\lambda \in L} \lambda = 1_{\mathscr{L}}$, чиме је лема доказана. $\square$

У раду [49] Георг и Верамани су увели концепт $\mathscr{L}$-фази дијаметра нула за колекцију скупова на $\mathscr{L}$-фази метричким просторима.

Дефиниција 1.7.8. *Нека је $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-фази метрички простор. За колекцију $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ се каже да има $\mathscr{L}$-фази дијаметар нула ако за свако $r \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ и свако $t > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $\mathscr{M}(x, y, t) >_L \mathscr{N}(r)$ за све $x, y \in F_{n_0}$.*

Став 1.7.1. *Нека је $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ комплетан $\mathscr{L}$-фази метрички простор. Тада свака непразна колекција, уметнутих, затворених скупова $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ са $\mathscr{L}$-фази дијаметаром нула има непразан пресек. Штавише, елемент $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ је јединствен.*

Доказ. Нека је $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ комплетан $\mathscr{L}$-фази метрички простор и нека је $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ колекција непразних, уметнутих, затворених скупова са $\mathscr{L}$-фази дијаметром нула. Нека је, такође, $x_n \in F_n$ произвољна тачка за свако $n \in \mathbb{N}$. Доказаћемо да је низ $\{x_n\}$ Кошијев. Да бисмо ово ово доказали претпоставићемо да $r \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ и да је $t > 0$ произвољно. Како $\{F_n\}$ има $\mathscr{L}$-фази дијаметар нула, следи да постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $\mathscr{M}(x, y, t) >_L \mathscr{N}(r)$ за све $x, y \in X$. Како је F_n низ уметнутих елемената, имамо да $\mathscr{M}(x_n, x_m, t) >_L \mathscr{N}(r)$ за све $n, m \geq n_0$, тј. низ $\{x_n\}$ је Кошијев. Како је посматрани простор комплетан, следи да постоји $x \in X$ такво да је $x_n \to x$. Како је $x \in F_n$ за свако n, следи да је $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Сада ћемо доказати да је $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ јединствен елемент који припада овом пресеку. Претпоставимо да постоји $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, $x \neq y$. Како низ $\{F_n\}$ има $\mathscr{L}$-фази дијаметар нула, за произвољно $t > 0$ следи да је $\mathscr{M}(x, y, t) >_L \mathscr{N}(\frac{1}{n})$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Пуштајући да $n \to \infty$, добијамо да је $\mathscr{M}(x, y, t) = 1_{\mathscr{L}}$, тј. $x = y$. $\square$

1.8 Инверзи и класе правилно промењљивих функција

Многи проблеми из математичке анализе и њених промена (нпр. у теорији вероватноће) су у вези са налажењем одговора на питање под којим условима је следећа импликација тачна:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{g(t)}{f(t)} = a \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} \frac{g^{(-1)}(t)}{f^{(-1)}(t)} = b,$$

где $f(t) \to \infty$ и $g(t) \to \infty$, када $t \to \infty$ и где су $f^{(-1)}$ и $g^{(-1)}$ одређене „инверзне" функције и $a, b \in [0, \infty]$. Овакав проблем је проучаван од стране Ђурчића[44] и Торгашева[45] у раду [33] у случају да су функције $f^{(-1)}$ и $g^{(-1)}$ инверзи или генералисани инверзи, одговарајућих функција, као и од стране Булдигина[46] и осталих у радовима [18] и [21], у случају да су функције $f^{(-1)}$ и $g^{(-1)}$ инверзи, квазиинверзи или асимптотски квазиинверзи, одговарајућих функција.

Нека је

$$\mathcal{A} = \{f : [a, \infty) \to (0, \infty)(a > 0) \mid f \text{ је неопадајућа и неограничена функција}\}.$$

У овом раду ћемо се бавити генералисаним инверзом функције која припада класи $\mathcal{A}$ и његову дефиницију дајемо у наставку.

Дефиниција 1.8.1 ([13])**.** *За неку функцију $f \in \mathcal{A}$, функција*

$$f^{\leftarrow}(x) = \inf\{y \geq a \mid f(y) > x\},$$

за $x \geq f(a)$ назива се њеним генералисаним инверзом.

Ако је функција $f \in \mathcal{A}$ непрекидна и строго растућа, тада важи $f^{\leftarrow}(x) = f^{-1}(x)$, за $x \geq f(a)$. Поред тога, важи да $f^{\leftarrow} \in \mathcal{A}$, ако $f \in \mathcal{A}$. За било коју непрекидну функцију са десне стране $g \in \mathcal{A}$, постоји функција $f \in \mathcal{A}$ ($f(x) = g^{\leftarrow}(x)$, $x \geq g(a)$) таква да је $g = f^{\leftarrow}$.

Такође, важно питање је да ли функција f која задовољава одређене особине и њен генералисани инверз $f^{\leftarrow}$ (или инверз функције у неком другом смислу) припадају истој класи функција које се проучавају у *Карауатиној*[47] *теорији правилне промењљивости* или неких њених проширења (о којима ће бити речи касније). Другим речима, поставља се питање које особине треба доделити функцији f, тако да се добију одређене карактеризације у том смислу. Најједноставнији случај је када је функција f непрекидна, строго растућа и припада класи правилно промењљивих функција са позитивним индексом промењљивости, о којој ће бити речи касније у овом одељку. Познато је да тада инверзна функција f^{-1}, функције f, припада тој истој класи. Више о овоме се може видети у радовима [6], [35], [21] и др.

У овом раду (у трећој глави) бавићемо се питањем узајамног односа генералисаног инверза, слабе асимптотске релације еквиваленције и јаке асимптотске релације еквиваленције у одређеним класама функција које се проучавају у Карамативој теорији правилне промењљивости. Стога, у наставку, уводимо одговарајуће појмове.

---

[44] Драган Ђурчић, српски математичар.

[45] Александар Торгашев, српски математичар.

[46] Valerii V. Buldygin, украјински математичар.

[47] Јован Карамата (1903–1967), академик, српски математичар.

За неку функцију $f \in \mathcal{A}$, дефинишимо скуп

$$\{f\} = \{g \in \mathcal{A} \mid f(x) \asymp g(x), x \to \infty\},$$

где ознака $f(x) \asymp g(x)$, када $x \to \infty$, представља *слабу асимптотску релацију еквиваленције*, која се уводи на следећи начин:

$$f(x) \asymp g(x),\ \text{када } x \to \infty \quad \text{ако је} \quad 0 < \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < \infty$$

(о овоме видети нпр. у [13]).

С друге стране, за неку функцију $f \in \mathcal{A}$, дефинишимо скуп

$$[f]_\sim = \{g \in \mathcal{A} \mid f(x) \sim g(x), x \to \infty\}.$$

где ознака $f(x) \sim g(x)$, када $x \to \infty$, представља *јаку асимптотску релацију еквиваленције*, која се уводи на следећи начин:

$$f(x) \sim g(x),\ \text{када } x \to \infty \quad \text{ако је} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

У трећој глави дисертације биће дата проширења следећег става који је модификована комбинација неких резултата из рада [9] (такође видети рад [13, страна 190, 14 (ii), (iii)]. Стога га у наставку наводимо.

Став А. *Нека су функције $f, g \in \mathcal{A}$ и претпоставимо да је f правилно промењлива функција чији је индекс промењливости $\rho > 0$. У том случају важи:*

(а) *ако функција $g \in [f]_\sim$, тада $g^{\leftarrow} \in [f^{\leftarrow}]_\sim$;*

(б) *ако функција $g^{\leftarrow} \in [f^{\leftarrow}]_\sim$, тада $g \in [f]_\sim$.*

На крају овог одељка даћемо преглед класа правилно промењливих функција, у којима су добијени резултати у трећој глави. Напоменимо да када будемо користили термин „мерљивости“ сматраћемо да се ради о „мерљивости у Лебеговом[48] смислу“.

За мерљиву функцију $f : [a, \infty) \to (0, \infty)$ $(a > 0)$, увешћемо следеће две функције:

$$\overline{k}_f(l) := \limsup_{x\to\infty} \frac{f(lx)}{f(x)} < \infty \quad (l > 0) \tag{1.6}$$

и

$$\underline{k}_f(l) := \liminf_{x\to\infty} \frac{f(lx)}{f(x)} > 0 \quad (l > 0). \tag{1.7}$$

[48]Henri Lèon Lebesgue (1875–1942), француски математичар.

Тауберов[49] услов генерисан условом (1.6) или (1.7) је веома важан услов конвергенције у теорији Тауберових теорема (видети радове [6] и [53]), као и у асимптотској анализи уопште (видети рад [13]). Функција $\overline{k}_f(l)$ $(l > 0)$ задата условом (1.6) назива се *индексном функцијом функције* f, док се функција $\underline{k}_f(l)$ $(l > 0)$ задата условом (1.7) назива *помоћном индексном функцијом функције* f.

1.8.1 Класа RV

Карамата је у свом раду [70] из 1930. године увео појам *правилне промењивости* и доказао неке од фундаменталних ставова у вези са *правилном промењивошћу функција* (о овоме видети и Караматин рад [71]). Ови резултати, заједно са каснијим проширењима и генерализацијама, показали су се плодотворним за рад у многим областима математике (о овоме се може видети у [95], као и у [13]).

Мерљива функција $f : [a, \infty) \to (0, \infty)$ $(a > 0)$ се назива *правилно промењивом* ако за њу важи

$$\overline{k}_f(l) = \underline{k}_f(l) = \chi(l) \in (0, \infty),$$

за свако $l > 0$. Класа свих оваквих функција се означава са RV (од скраћенице за *regularly varying*). За било коју правилно промењиву функцију f важи да је $\chi(l) = l^\rho$, $l > 0$, за неки реалан број ρ, који се назива *индексом* функције f. Класа RV је најважнији објекат у Караматиној теорији правилне промењивости (о овоме се више може видети нпр. у [95]) и њеним применама (видети, такође, радове [31], [13] и [89]).

Случај када је $\rho = 0$ одговара тзв. *споро промењивим* функцијама (о овоме се више може видети у раду [36]). Класа свих оваквих функција се означава са SV (од скраћенице за *slowly varying*). Од интереса је поменути и класу свих правилно промељивих функција за коју је индекс промењивости ρ позитиван.

Гранични случај када је $\rho = \infty$ одговара функцијама f за које је

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(lx)}{f(x)} = \infty,$$

за свако $l > 1$. Овакве функције се називају *рапидно промењивим* функцијама, а класу свих таквих функција означавамо са R_∞.

1.8.2 Класа ORV

Након поменутог рада Карамате из 1930. године многе генерализације појма правилне промењивости су се појавиле у литератури. Једну од генерализација дао је Авакумовић[50] у раду [6], коју су даље истраживали Карамата у раду

[49] Alfred Tauber (1866–1942), словачки математичар.
[50] Војислав Г. Авакумовића (1919–1990), академик, српски математичар.

[72], Фелер[51] у раду [44], као и Аљанчић[52] и Аранђеловић[53] у раду [3]. Класа функција која је проучавана од стране поменутих, као и многих других аутора, у литератури је позната је као класа $\mathcal{O}$–правилно промењљивих функција или ORV класа функција дефинисаних на интервалу $[a, \infty)$, $(a > 0)$.

Мерљива функција $f : [a, \infty) \to (0, \infty)$ $(a > 0)$ назива се $\mathcal{O}$–правилно промењљива функција ако за њу важи

$$\overline{k}_f(l) < \infty,$$

за свако $l > 0$. Ова класа је веома важан појам у асимптотској анализи[54] (видети нпр. [13] и [95]).

1.8.3 Класа PI

Ако мерљива функција $f : [a, \infty) \to (0, \infty)$ $(a > 0)$ задовољава услов

$$\underline{k}_f(l_0) > 1 \tag{1.8}$$

за неко $l_0 > 1$, тада кажемо да је она позитивно растућа (енг. *positively increasing*), тако да се класа свих оваквих функција означава са PI. Напоменимо да су услов (1.8) користили многи аутори и о томе се може видети у радовима [12], [18] и [21].

Мерљива функција $f : [a, \infty) \to (0, \infty)$ $(a > 0)$ припада класи PI^* ако постоји $\lambda_0 \geq 1$ такво да је

$$\underline{k}_f(\lambda) > 1$$

за свако $\lambda > \lambda_0$. Класа PI^*, на којој су добијени неки од резултата из треће главе, је поткласа класе PI. У случају да је $\lambda_0 = 1$ добијамо класу ARV[55](видети рад [36]), која је веома битна права поткласа класе PI^*. Класа PI^* садржи, такође, као праву поткласу, класу правилно промењљивих функција чији је индекс промењљивости ρ позитиван, као и класу рапидно промењљивих функција, у ознаци R_∞, чији је де Ханов[56] индекс ∞ (видети о овоме рад [52]), али не садржи ниједну функцију из класе споро промењљивих функција, која се означава са SV (видети рад [13], као и [95]). Више о поменутим класама може се наћи у радовима [19], [22], [23], [32], [37] и [79].

Функција $f \in ARV$ се назива *рапидно промењљивом* (у смислу де Хана) са индексом промењљивости ∞ (тј. она припада класи R_∞), ако је $\underline{k}_f(\lambda) = \infty$, за свако $\lambda > 1$ (видети радове [13], [31] и [52]).

Приметимо, на крају да је класа $\mathcal{A} \cap PI^*$ једнака класи $\mathcal{A} \cap PI$.

[51] William Feller, хрватско–амерички математичар.

[52] Слободан Аљанчић (1922–1993), српски математичар.

[53] Драгољуб Аранђеловић (1942–2008), српски математичар.

[54] На пример, у квалитативној анализи дивергентних процеса. У вези са тим видети нпр. радове [3] и [13].

[55] слово "*A*" у ознаци класе *ARV* асоцира на В. Авакумовића (видети његове радове [5], [7] и [8]).

[56] Laurens de Haan, холандски математичар.

Глава 2

Непокретне тачке за пресликавања са нелинеарним условом дефинисана на просторима са недетерминистичком метриком

2.1 Увод

У овој глави биће разматране непокретне и заједничке непокретне тачке за пресликавања са нелинеарним контрактивним условом, који се доводе у везу са различитим облицима ограничености скупова на просторима са недетерминистичким растојањем. Такође, разматраће се за слабо комутативна или компатибилна пресликавања (различитог типа), која задовољавају нелинеарни контрактивни услов, постојање заједничке непокретне тачке. Хипотеза од које се полази је да се квалитетном карактеризацијом домена пресликавања, могу релаксирати услови нелинеарне контрактивности, а да се добије податак о постојању или непостојању непокретне тачке пресликавања.

Поред наведеног, у овој глави, посебно место ће заузети питање конвексности, као и питања скуповне и тополошке карактеризације комплетности и компактности простора са недетерминистичким растојањем. Ти резултати доводе се у везу са постојењем непокретних и заједничких непокретних тачака нееkспанзивних пресликавања, при нелинеарним контрактивним условом који важи за њих. Хипотеза од које се полази у овом случају је да се конвексна структура, коју је на метричким просторима дефинисао Такахаши у раду [99], може пренети на просторе са недетерминистичким растојањем, као и ставови који у вези са тим важе.

2.2 Заједничка непокретна тачка за пресликавања дефинисана на $\mathscr{L}$-фази метричком простору

У научној литератури постоји велики број радова који се баве проблематиком непокретне и заједничке непокретне тачке за пресликавања дефинисана на недетерминистичким просторима. Међутим, већина тих резултата, с једне стране укључује услове са различитим ограничењима, понекад и веома рестриктивним. С друге стране, многи резултати добијени на овим просторима који задовољавају такве услове су аналогни резултатима за пресликавања која су дефинисана на метричким просторима, чак и са истом техником доказивања. (Видети, на пример, радове [24], [98] и [103]).

У овом поглављу биће презентовани резултати о постојању заједничке непокретне тачке за пресликавања за која важи нелинеарни контрактивни услов дефинисан помоћу функције φ која задовољава услов $\varphi(t) < t$. Нелинеарни контрактивни услов разматран је, најпре, од стране Бојда и Вонга у раду [14] и Панта у раду [85] за пресликавања дефинисана на метричким просторима, од стране Михета[1] у раду [82] за пресликавања дефинисана на фази метричким просторима и од стране Јешића и осталих у раду [62], као и О' Регана[2] и осталих у раду [84] за пресликавања дефинисана на вероватносним просторима, као и у многим другим радовима.

Теорема о заједничкој непокретној тачки за два пресликавања са нелинеарним контрактивним условом дефинисана на интуиционистичким и $\mathscr{L}$-фази метричким просторима је доказана од стране Јешића и Бабачеве у раду [61]. С друге стране, Садати и остали у раду [101], као и Адиби[3] и остали у раду [1] доказали су теорему о постојању заједничке фиксне тачке за два пресликавања која задовољавају линерни контрактивни услов и која су дефинисана на $\mathscr{L}$-фази метричким просторима. Резултати који ће бити дати у овом одељку и који су публиковани у коауторству у раду [63], представљају проширење и побољшање већине претходно поменутих радова, а такође они проширују и одговарајуће резултате са метричких простора на $\mathscr{L}$-фази метричке просторе.

У теорији непокретне тачке веома важну улогу играју генерализације комутативности. Појам компатибилног пресликавања уведен је од стране Џангка у раду [68], као и Мишре у раду [83]. Постоје многе генерализације компатибилности. Недавно су Синг[4] и остали увели појам слабе комутативности у раду [98]. Ми ћемо фазификовати ове дефиниције.

Дефиниција 2.2.1 ([63]). *Нека је $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-фази метрички простор и нека су S и T пресликавања таква да $S, T : X \to X$. Кажемо да су пресликавања S и T*

[1]Dorel Miheţ, румунски математичар.
[2]Donal O'Regan, ирски математичар.
[3]Hadi Adibi, ирански математичар.
[4]Bani Singh, индијски математичар.

компатибилна ако важи

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{M}(STx_n, TSx_n, t) = 1_{\mathscr{L}}, \tag{2.1}$$

за свако $t > 0$, *кад год је низ* $\{x_n\}$ *из* X *такав да важи*

$$\lim_{n\to\infty} Sx_n = \lim_{n\to\infty} Tx_n = z \in X.$$

Дефиниција 2.2.2 ([63]). *Нека је* $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$*-фази метрички простор и нека су* S *и* T *пресликавања таква да* $S, T : X \to X$. *Кажемо да су пресликавања* S *и* T *слабо компатибилна ако* $Sz = Tz$, *за неко* $z \in X$, *имплицира да је* $STz = TSz$.

Лако се уочава да је класа компатибилних пресликавања шира од класе комутативних пресликавања, јер је сваки пар комутативних пресликавања и компатибилан, али обрнуто не мора да важи (видети нпр. рад [98]). Примери компатибилних и слабо компатибилних пресликавања могу се наћи у радовима [67], [83] и [98].

Сваки пар компатибилних пресликавања је слабо компатибилан, што показујемо у следећој напомени. Обрнуто у општем случају не мора да важи.

Напомена 2.2.1 ([63]). *Нека су* S *и* T *компатибилна пресликавања на* $\mathscr{L}$*-фази метричком простору* $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$. *Тада је следеће тврђење тачно.*

Ако је $Sz = Tz$, *за неко* $z \in X$, *тада важи* $STz = TSz$.

Тачност овог тврђења директно следи из дефиниције 2.2.1 узимајући да је $x_n = z$ *за свако* $n \in \mathbb{N}$ *и за неку тачку* $z \in X$. $\square$

Наредне две леме ћемо користити у доказу главног резултата, тако да, најпре, њих наводимо и доказујемо. У доказу главног резултата ћемо користити и напомену 2.2.1.

Лема 2.2.1 ([63]). *Нека је* $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$*-фази метрички простор који задовољава услов* (1.4). *Тада је* $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ *непрекидно, неопадајуће пресликавање такво да* $\varphi(t) < t$ *важи за свако* $t > 0$. *Тада следећи важи следеће тврђење.*

Ако за све $x, y \in X$ *имамо* $\mathscr{M}(x, y, \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(x, y, t)$, *за свако* $t > 0$, *тада је* $x = y$.

Доказ. Ако претпоставимо да је

$$\mathscr{M}(x, y, \varphi(t)) \geq_L \mathscr{M}(x, y, t), \quad x \neq y,$$

тада из овог услова, применом Принципа математичке индукције следи да је

$$\mathscr{M}(x, y, \varphi^n(t)) \geq_L \mathscr{M}(x, y, t).$$

Пуштајући да $n \to \infty$, добијамо да је

$$\mathscr{M}(x, y, t) = 0_L$$

за свако $t > 0$, што је контрадикција са аксиомом (Lf-2) тј. имамо да је $x = y$. $\square$

Лема 2.2.2 ([63]). *Нека је $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-фази метрички простор са непрекидном троугаоном нормом $\mathscr{T}$. Нека су S и T компатибилна пресликавања таква да $S, T : X \to X$ и нека $\{Sx_n\}$ и $\{Tx_n\}$ конвергирају ка некој тачки $z \in X$, када $n \to \infty$, за неки низ $\{x_n\}$ из X. Ако је S непрекидно пресликавање, тада је*

$$\lim_{n\to\infty} TSx_n = Sz.$$

Доказ. Нека је $\mu \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ и $t > 0$ произвољно. Из непрекидности троугаоне норме $\mathscr{T}$ следи да услов (1.5) важи и да за $n = 2$ имамо да за инволутивну негацију $\mathscr{N}$ постоји $\lambda \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ такво да је

$$\mathscr{T}\big(\mathscr{N}(\lambda), \mathscr{N}(\lambda)\big) >_L \mathscr{N}(\mu).$$

Како су пресликавања S и T компатибилна, имамо да је

$$\mathscr{M}\left(TSx_n, STx_n, \frac{t}{2}\right) >_L \mathscr{N}(\lambda).$$

Такође, како Sx_n и Tx_n конвергирају ка z, важи

$$\mathscr{M}\Big(Tx_n, x_n, \frac{t}{2}\Big) >_L \mathscr{N}(\lambda),$$

као и

$$\mathscr{M}\Big(Sx_n, x_n, \frac{t}{2}\Big) >_L \mathscr{N}(\lambda).$$

Из непрекидности пресликавања S имамо да важи

$$\begin{aligned}
\mathscr{M}(TSx_n, Sz, t) &\geq_L \mathscr{T}\Big(\mathscr{M}\big(TSx_n, STx_n, \frac{t}{2}\big), \mathscr{M}\big(STx_n, Sz, \frac{t}{2}\big)\Big) \\
&\geq_L \mathscr{T}\big((N)(\lambda), \mathscr{N}(\lambda)\big) \\
&>_L \mathscr{N}(\mu).
\end{aligned}$$

Пуштајући да $\mu \to 0$ добијамо да је

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{M}(TSx_n, Sz, t) = 1_{\mathscr{L}},$$

тј.

$$\lim_{n\to\infty} TSx_n = Sz.$$

$\square$

Сада смо у могућности да докажемо главни резултат који се односи на заједничку непокретну тачку за четири пресликавања и који је у коауторству публикован у раду [63].

Став 2.2.1 ([63])**.** *Нека је $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-фази метрички простор који је комплетан у односу на посматрану негацију $\mathscr{N}$ и задовољава услов (1.4). Нека су пресликавања A, B, S и T таква да важи $A, B, S, T : X \to X$ и да су скупови $A(X)$ и $B(X)$ $\mathscr{L}F$-строго ограничени. Нека су, такође, следећи услови испуњени:*

(а) $A(X) \subseteq T(X), B(X) \subseteq S(X)$,

(б) *једно од пресликавања A или S је непрекидно,*

(в) *пар $\{A, S\}$ је компатибилан, а пар $\{B, T\}$ је слабо компатибилан,*

(г) *постоји непрекидна, неопадајућа функција $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$, која задовољава услов $\varphi(t) < t$, за свако $t > 0$, а пресликавања A, B, S и T задовољавају услов*

$$\mathscr{M}\big(Ax, By, \varphi(t)\big) \geq_L \mathscr{M}(Sx, Ty, t), \tag{2.2}$$

за свако $t > 0$ и све $x, y \in X$.

Тада пресликавања A, B, S и T имају јединствену заједничку непокретну тачку.

Доказ. Нека је $x_0 \in X$ произвољно изабарана тачка. Из (а) следи да постоји $x_1 \in X$ такво да је $A(x_0) = T(x_1)$ и за такву тачку x_1 постоји $x_2 \in X$ такво да је $B(x_1) = S(x_2)$. Применом Принципа математичке индукције можемо конструисати низ $\{z_n\}$ на следећи начин:

$$\begin{cases} z_{2n-1} = Tx_{2n-1} = Ax_{2n-2}, \\ \quad z_{2n} = Sx_{2n} = Bx_{2n-1}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Посматрајмо низ уметнутих непразних, затворених скупова дефинисаних са

$$F_n = \overline{\{z_n, z_{n+1}, \ldots\}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Доказаћемо, сада, да фамилија $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ има $\mathscr{L}$-фази дијаметар нула.

Нека је $\mu \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ и нека је $t > 0$ произвољни. Из $F_k \subseteq \overline{A(X)} \cup \overline{B(X)}$ следи да је F_k $\mathscr{L}F$-строго ограничен скуп за произвољно $k \in \mathbb{N}$. То значи да постоји $t_0 > 0$ такво да је

$$\mathscr{M}(x, y, t_0) >_L \mathscr{N}(\mu) \tag{2.4}$$

за све $x, y \in F_k$. Из

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t_0) = 0$$

следи да постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да је

$$\varphi^m(t_0) < t.$$

Нека је $n = m+k$ и нека су $x, y \in F_n$ произвољни. Тада постоје низови $\{z_{n(i)}\}$, $\{z_{n(j)}\}$ у F_n, $(n(i), n(j) \geq n, \ \ i, j \in \mathbb{N})$ такви да је

$$\lim_{i\to\infty} z_{n(i)} = x \ \text{ и } \ \lim_{j\to\infty} z_{n(j)} = y.$$

Сада можемо разликовати следећа два случаја.

Случај 1. Претпоставимо да је $n(i) \in 2\mathbb{N}-1$ и $n(j) \in 2\mathbb{N}$ или обрнуто, за довољно велико $i, j \in \mathbb{N}$ тј. $z_{n(i)} = Ax_{n(i)-1}$ и $z_{n(j)} = Bx_{n(j)-1}$.
Из (2.2) следи да је

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\big(z_{n(i)}, z_{n(j)}, \varphi(t)\big) &= \mathscr{M}\big(Ax_{n(i)-1}, Bx_{n(j)-1}, \varphi(t)\big)\\ &\geq_L \mathscr{M}\big(Sx_{n(i)-1}, Tx_{n(j)-1}, t\big)\\ &= \mathscr{M}\big(Ax_{n(i)-2}, Bx_{n(j)-2}, t\big)\\ &= \mathscr{M}(z_{n(i)-1}, z_{n(j)-1}, t).\end{aligned}$$

На основу Принципа математичке индукције, тада добијамо

$$\mathscr{M}\big(z_{n(i)}, z_{n(j)}, \varphi^m(t)\big) \geq_L \mathscr{M}\big(z_{n(i)-m}, z_{n(j)-m}, t\big). \tag{2.5}$$

Како је $\varphi^m(t_0) < t$ и како је функција $\mathscr{M}(x, y, \cdot)$ неопадајућа на L, из последњих неједнакости следи да је

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\big(z_{n(i)}, z_{n(j)}, t\big) &\geq_L \mathscr{M}\big(z_{n(i)}, z_{n(j)}, \varphi^m(t_0)\big)\\ &\geq_L \mathscr{M}\big(z_{n(i)-m}, z_{n(j)-m}, t_0\big).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Како су низови $\{z_{n(i)-m}\}$, $\{z_{n(j)-m}\}$ из F_k, из (2.4) следи да је

$$\mathscr{M}\big(z_{n(i)-m}, z_{n(j)-m}, t_0\big) >_L \mathscr{N}\big(\mu\big), \tag{2.7}$$

за свако $i, j \in \mathbb{N}$, тј. имамо да је

$$\mathscr{M}\big(z_{n(i)}, z_{n(j)}, t\big) \geq_L \mathscr{N}\big(\mu\big), \tag{2.8}$$

за $n(i) \in 2\mathbb{N}-1, n(j) \in 2\mathbb{N}$, или обрнуто.

Случај 2. Претпоставимо да су $n(i), n(j) \in 2\mathbb{N}-1$ и нека је $n(l) \geq n$ произвољан природан број и $n(l) \in 2\mathbb{N}$. Како услов (1.5) важи, нека је $\lambda \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ такво да

$$\mathscr{T}\big(\mathscr{N}(\lambda), \mathscr{N}(\lambda)\big) >_L \mathscr{N}\big(\mu\big). \tag{2.9}$$

Тада из (2.8) следи да је

$$\mathscr{M}\big(Ax_{n(j)-1}, Bx_{n(l)-1}, t\big) >_L \mathscr{N}\big(\lambda\big).$$

Такође, постоји $\varepsilon > 0$ такво да је

$$\mathscr{M}\big(Ax_{n(j)-1}, Bx_{n(l)-1}, t-\varepsilon\big) \geq_L \mathscr{N}\big(\lambda\big).$$

Имајући у виду да је $\lim_{n\to\infty}\varphi^n(t_0) = 0$, можемо изабрати $m_0 \in \mathbb{N}$, тако важи $\varphi^{m_0}(t_0) < \varepsilon$ и нека је $n_1 = \max\{m, m_0\}$. Тада имамо

$$\mathscr{M}\big(Ax_{n(j)-1}, Bx_{n(l)-1}, t-\varphi^{n_1}(t_0)\big) \geq_L \mathscr{M}\big(Ax_{n(j)-1}, Bx_{n(l)-1}, t-\varepsilon\big).$$

Из услова (2.8) имамо $\varphi^{n_1}(t_0) \leq t$ и из чињенице да је $\mathscr{M}(x,y,\cdot)$ неопадајућа функција у $\mathscr{L}$ следи да важи

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\big(Ax_{n(i)-1}, Bx_{n(l)-1}, t\big) &\geq_L \mathscr{M}\big(Ax_{n(i)-1}, Bx_{n(l)-1}, \varphi^{n_1}(t_0)\big)\\ &\geq_L \mathscr{N}(\lambda).\end{aligned}$$

Из претходне неједнакости и из услова (2.9) закључујемо да важи

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\big(z_{n(i)}, z_{n(j)}, t\big) &= \mathscr{M}\big(Ax_{n(i)-1}, Ax_{n(j)-1}, t\big)\\ &\geq_L \mathscr{T}\Big(\mathscr{M}\big(Ax_{n(i)-1}, Bx_{n(l)-1}, \varphi^{n_1}(t_0)\big),\\ &\qquad\quad \mathscr{M}\big(Ax_{n(j)-1}, Bx_{n(l)-1}, t-\varphi^{n_1}(t_0)\big)\Big)\\ &\geq_L \mathscr{T}\big(\mathscr{N}(\lambda), \mathscr{N}(\lambda)\big)\\ &>_L \mathscr{N}\big(\mu\big),\end{aligned}$$

тј. важи

$$\mathscr{M}(z_{n(i)}, z_{n(j)}, t) \geq_L \mathscr{N}(\mu), \tag{2.10}$$

за $n(i), n(j) \in 2\mathbb{N}-1$. На сличан начин можемо показати да услов (2.10) важи за $n(i), n(j) \in 2\mathbb{N}$.

Коначно, из услова (2.8) и (2.10) добијамо да у оба случаја важи

$$\mathscr{M}\big(z_{n(i)}, z_{n(j)}, t\big) \geq_L \mathscr{N}\big(\mu\big)$$

за све $i, j \in \mathbb{N}$. Пуштајући да $i, j \to \infty$, и примењујући лему 1.7.1 добијамо да важи $\mathscr{M}(x,y,t) > \mathscr{N}(\mu)$ за све $x, y \in F_n$ тј. колекција $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ има $\mathscr{L}$-фази дијаметар нула.

Примењујући став 1.7.1 закључујемо да ова колекција има непразан пресек, који се састоји од тачно једне тачке z. Како колекција $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ има $\mathscr{L}$-фази дијаметар нула и $z \in F_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$, тада за свако $\mu \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$ и свако $t > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за свако $n \geq n_0$ имамо

$$\mathscr{M}\big(z_n, z, t\big) >_L \mathscr{N}\big(\mu\big).$$

Из последњег следи да за свако $\mu \in L \setminus \{0_{\mathscr{L}}, 1_{\mathscr{L}}\}$, имамо

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{M}\big(z_n, z, t\big) >_L \mathscr{N}\big(\mu\big).$$

Пуштајући да $\mu \to 0$ добијамо да је

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{M}\big(z_n, z, t\big) = 1_{\mathscr{L}}$$

тј. да је

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z.$$

Из дефиниције низова $\{Ax_{2n-2}\}, \{Sx_{2n}\}, \{Bx_{2n-1}\}$ и $\{T_{2n-1}\}$ следи да сваки од ових низова тежи ка z.

Доказаћемо да је z заједничка непокретна тачка пресликавања A, B, S и T. Претпоставимо, најпре, да је S непрекидно пресликавање. Тада добијамо да је

$$\lim_{n\to\infty} SSx_{2n} = Sz.$$

Из компатибилности пара $\{A, S\}$ и из леме 2.2.2 следи да је

$$\lim_{n\to\infty} ASx_{2n} = Sz.$$

Користећи услов (2.2) добијамо да следећа неједнакост важи:

$$\mathscr{M}\big(ASx_{2n}, Bx_{2n-1}, \varphi(t)\big) \geq_L \mathscr{M}\big(SSx_{2n}, Tx_{2n-1}, t\big).$$

Пуштајући да $n \to \infty$ добијамо да

$$\mathscr{M}\big(Sz, z, \varphi(t)\big) \geq_L \mathscr{M}(Sz, z, t).$$

Из леме 2.2.1 следи да је $Sz = z$. Користећи услов (2.2) поново, добијамо

$$\mathscr{M}\big(Az, Bx_{2n-1}, \varphi(t)\big) \geq_L \mathscr{M}(Sz, Tx_{2n-1}, t)$$

и пуштајући да $n \to \infty$, добијамо

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\big(Az, z, \varphi(t)\big) &\geq_L \mathscr{M}(Sz, z, t)\\ &= \mathscr{M}(z, z, t)\\ &= 1_{\mathscr{L}}.\end{aligned}$$

Ово, даље, значи да је $Az = z$. Како је $A(X) \subseteq T(X)$, тада постоји тачка $u \in X$, таква да је $z = Az = Tu$ и имамо да је

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\big(z, Bu, \varphi(t)\big) &= \mathscr{M}\big(Az, Bu, \varphi(t)\big)\\ &\geq_L \mathscr{M}(Sz, Tu, t)\\ &= \mathscr{M}(z, z, t)\\ &= 1_{\mathscr{L}},\end{aligned}$$

што значи да је $Bu = z$. Из слабе компатибилности за пар $\{B, T\}$ следи да је $Tz = TBu = BTu = Bz$. Такође, из (2.2) следи

$$\mathscr{M}\big(Ax_{2n}, Bz, \varphi(t)\big) \geq_L \mathscr{M}(Sx_{2n}, Tz, t).$$

Пуштајући да $n \to \infty$ и из леме 2.2.1, добијамо да је $Bz = z$. На тај начин смо доказали да је тачка z заједничка непокретна тачка за пресликавања A, B, S и T.

Претпоставимо, сада, да је пресликавање A непрекидно. Тада је

$$\mathscr{M}(AAx_{2n}, Az, t) >_L \mathscr{N}(\mu).$$

Из компатибилности пара $\{A, S\}$ и из леме 2.2.2 следи да је

$$\mathscr{M}(SAx_{2n}, Az, t) >_L \mathscr{N}(\mu).$$

Користећи услов (2.2) добијамо да је

$$\mathscr{M}\big(AAx_{2n}, Bx_{2n-1}, \varphi(t)\big) \geq_L \mathscr{M}(SAx_{2n}, Tx_{2n-1}, t).$$

Пуштајући да $n \to \infty$ добијамо

$$\mathscr{M}\big(Az, z, \varphi(t)\big) \geq_L \mathscr{M}(Az, z, t).$$

Из леме 2.2.1 следи да је $Az = z$. Како је $A(X) \subseteq T(X)$, постоји тачка $v \in X$ таква да је $z = Az = Tv$. Из $\mathscr{M}\big(Az, Bv, \varphi(t)\big)$ имамо

$$\mathscr{M}\big(AAx_{2n}, Bv, \varphi(t)\big) \geq_L \mathscr{M}(SAx_{2n}, Tv, t).$$

Пуштајући да $n \to \infty$ добијамо

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\big(z, Bv, \varphi(t)\big) &= \mathscr{M}\big(Az, Bv, \varphi(t)\big)\\ &\geq_L \mathscr{M}(Az, Tv, t)\\ &= \mathscr{M}(z, z, t)\\ &= 1_{\mathscr{L}},\end{aligned}$$

што значи да је $z = Bv$. Како је пар $\{B, T\}$ слабо компатибилан добијамо $Tz = TBv = BTv = Bz$. Такође, користећи услов (2.2) имамо да важи

$$\mathscr{M}\big(Ax_{2n}, Bz, \varphi(t)\big) \geq_L \mathscr{M}(Sx_{2n}, Tz, t).$$

Пуштајући да $n \to \infty$ добијамо

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\big(z, Bz, \varphi(t)\big) &\geq_L \mathscr{M}(z, Tz, t)\\ &= \mathscr{M}(z, Bz, t),\end{aligned}$$

што, даље, значи да је $z = Bz = Tz$. Како је $B(X) \subseteq S(X)$, постоји тачка $w \in X$ таква да је $z = Bz = Sw$. Из услова (2.2) следи

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\big(Aw, z, \varphi(t)\big) &= \mathscr{M}\big(Aw, Bz, \varphi(t)\big)\\ &\geq_L \mathscr{M}(Sw, Tz, t)\\ &= \mathscr{M}(Sw, Bz, t)\\ &= \mathscr{M}(z, z, t)\\ &= 1_{\mathscr{L}},\end{aligned}$$

тј. $Aw = z$. Како је пар $\{A, S\}$ компатибилан и $z = Aw = Sw$, из напомене 2.2.1 добијамо да важи $Az = ASw = SAw = Sz$. На овај начин смо доказали да је z заједничка непокретна тачка за пресликавања A, B, S и T.

На крају, покажимо да је z једиствена заједничка непокретна тачка. Претпоставимо да постоји још једна заједничка непокретна тачка y. Из услова (2.2) имамо

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\big(z, y, \varphi(t)\big) &= \mathscr{M}\big(Az, By, \varphi(t)\big) \\ &\geq_L \mathscr{M}(Sz, Ty, t) \\ &= \mathscr{M}(z, y, t).\end{aligned}$$

Коначно, из леме 2.2.1 следи да је $z = y$. □

Пример 2.2.1 ([63]). *Нека је $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$-фази метрички простор индукован метриком*

$$d(x, y) = |x - y| \ \text{ на } \ X = [0, +\infty) \subset \mathbb{R},$$

тј.

$$\mathscr{M}(x, y, t) = \frac{t}{t + |x - y|}, \ \text{ са стандардном негацијом } \ N_s(x) = 1 - x.$$

Нека су

$$Ax = \frac{x}{1+x}, \qquad Sx = 2x,$$

$$Bx = \begin{cases} \dfrac{x}{1+x}, & x \in [0,1], \\ 0, & x > 1, \end{cases} \qquad Tx = \begin{cases} 2x, & x \in [0,1], \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

и

$$\varphi(t) = \begin{cases} t/(1+t), & t \in (0,1], \\ t/2, & t \geq 1. \end{cases}$$

Доказаћемо да су сви услови става 2.2.1 задовољени. Уочимо, најпре, $A(X) = [0, 1) \subset [0, 2] = T(X)$ и $B(X) = [0, \frac{1}{2}) \subset [0, +\infty) = S(X)$. Скупови $A(X)$ и $B(X)$ су метрички ограничени, тј. они су $\mathscr{L}F$-строго ограничени као подскупови $\mathscr{L}$-фази метричког простора. Због $A\big(S(x)\big) = \dfrac{2x}{1+2x}$ и $S\big(A(x)\big) = \dfrac{2x}{1+x}$, закључујемо да пресликавања A и S нису комутативна. Сада ћемо доказати да су она компатибилна пресликавања. Приметимо да важи

$$\mathscr{M}\Big(A\big(S(x)\big), S\big(A(x)\big), t\Big) = \frac{t}{t + \frac{2x^2}{(1+x)(1+2x)}}$$

и

$$\mathscr{M}\big(S(x), A(x), t\big) = \frac{t}{t + \frac{x+2x^2}{1+x}}.$$

Како

$$\frac{2x^2}{(1+x)(1+2x)} \leq \frac{x+2x^2}{1+x}$$

важи за свако $x \geq 0$, *имамо*

$$\mathscr{M}\Big(A\big(S(x)\big), S\big(A(x)\big), t\Big) \geq \mathscr{M}\big(S(x), A(x), t\big)$$

за све $x, t \geq 0$. *За низ* $\{x_n\}$ *из* $[0, +\infty)$ *такав да је*

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = \lim_{n\to\infty} Sx_n = z,$$

из претходне неједнакости имамо да је

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{M}\Big(A\big(S(x_n)\big), S\big(A(x_n)\big), t\Big) = 1.$$

Докажимо, сада, да су пресликавања B *и* T *слабо компатибилна. Ако је* $Bz = Tz$, *тада је* $z = 0$ *или* $z > 1$. *У случају* $z = 0$ *имамо* $T\big(B(0)\big) = B\big(T(0)\big) = 0$. *Са друге стране, ако је* $z > 1$ *тада важи* $T\big(B(z)\big) = T(0) = 0$ *и* $B\big(T(z)\big) = B(0) = 0$, *тј. услов* $T\big(B(z)\big) = B\big(T(z)\big)$ *из дефиниције 2.2.2 је задовољен.*

Доказаћемо у наставку да је и услов (2.2) *задовољен. Приметимо да за све* $x, y \in X$ *имамо да је*

$$\frac{1}{(1+x)(1+y)} \leq 1.$$

Посматраћемо два случаја.

Случај 1. *Посматраћемо случај када је* $0 < t \leq 1$. *Приметимо да је у овом случају* $1 + t \leq 2$.

а) *За* $x, y \in [0, 1]$ *имамо*

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\left(A(x), B(y), \frac{t}{1+t}\right) &= \frac{t}{t + (1+t)\frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)}}\\ &\geq \frac{t}{t + 2|x-y|}\\ &= \mathscr{M}\big(S(x), T(y), t\big).\end{aligned}$$

б) *За* $x > 1$ *и* $y > 1$ *имамо*

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\left(A(x), B(y), \frac{t}{1+t}\right) &= \frac{t}{t + (1+t)\frac{x}{1+x}}\\ &\geq \frac{t}{t + 2x}\\ &= \mathscr{M}\big(S(x), T(y), t\big).\end{aligned}$$

в) *Ако је* $x \in [0,1]$ *и* $y > 1$ *доказ се своди на* б). *Ако је* $x > 1$ *и* $y \in [0,1]$ *доказ се своди на* а).

Случај 2. *Сада посматрамо случај* $t \geq 1$.

г) *За* $x, y \in [0,1]$ *имамо*

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\left(A(x), B(y), \frac{t}{2}\right) &= \frac{t}{t + 2\frac{|x-y|}{(1+x)(1+y)}} \\ &\geq \frac{t}{t + 2|x-y|} \\ &= \mathscr{M}\big(S(x), T(y), t\big).\end{aligned}$$

д) *За* $x > 1$ *и* $y > 1s$ *имамо*

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\left(A(x), B(y), \frac{t}{2}\right) &= \frac{t}{t + 2\frac{x}{1+x}} \\ &\geq \frac{t}{t + 2x} \\ &= \mathscr{M}\big(S(x), T(y), t\big).\end{aligned}$$

ђ) *Ако је* $x \in [0,1]$ *и* $y > 1$ *доказ се своди на* д). *Ако је* $x > 1$ *и* $y \in [0,1]$ *доказ се своди на* г).

Из свега претходног закључујемо да је услов (2.2) *задовољен. Како функција* $\varphi(t)$ *задовољава све услове става 2.2.1 добијамо да сва пресликавања имају јединствену заједничку фиксну тачку. Лако је уочити да је та тачка* $x = 0$.

Показаћемо, сада, да се многи резултати који су добијени за непоктретне и заједничке непокретне тачке на $\mathscr{L}$-фази метричким просторима могу представити као последице претходно доказаног става. Јешић и Бабачева су у раду [61] доказали следећи став.

Став 2.2.2. *Нека је* $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ *комплетан* $\mathscr{L}$*-фази метрички простор и нека* $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ *има особину* (1.4). *Нека су, даље, пресликавања* $f, g : X \to X$, R*-слабо комутативна пресликавања, таква да је пресликавање* g *непрекидно пресликавање, скуп* $g(X)$ *је* $\mathscr{L}F$*-строго ограничен скуп и* $g(X) \subseteq f(X)$, *која задовољавају услов*

$$\mathscr{M}\big(g(x), g(y), \varphi(t)\big) \geq_L \mathscr{M}\big(f(x), f(y), t\big),$$

за неку непрекидну, неопадајућу функцију $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$, *која задовољава услов* $\varphi(t) < t$, *за свако* $t > 0$.

Тада пресликавања f *и* g *имају заједничку непокретну тачку.*

У овом ставу доказано је постојање заједничке непокретне тачке за два R-слабо комутативна пресликавања. У наставку, најпре, дајемо дефиницију ових пресликавања.

Дефиниција 2.2.3. *Нека је* $(X, \mathscr{M}, \mathscr{T})$ $\mathscr{L}$*-фази метрички простор и нека су пресликавања* f *и* g *таква да важи* $f, g : X \to X$*. Пресликавања* f *и* g *се називају* R*-слабо комутативним ако постоји неки позитиван реалан број* R *такав да важи*

$$\mathscr{M}\Big(f\big(g(x)\big), g\big(f(x)\big), Rt\Big) \geq \mathscr{M}\big(f(x), g(x), t\big),$$

за свако $t > 0$ *и свако* $x \in X$*.*

Познато је да ако су два пресликавања $f, g : X \to X$, R–слабо комутативна пресликавања, тада су она и компатибилна пресликавања, а у напомени 2.2.1 смо нагласили да су компатибилна пресликавања, слабо компатибилна. Обрнуто, у општем случају не важи. Дакле, ако у ставу 2.2.1 ставимо је пресликавање $A = B$ и пресликавање $S = T$, очигледно добијамо да је став 2.2.2 његова последица. У раду [61], Јешић и Бабачева су показали, такође, да су последице става 2.2.2, под одређеним условима и резултат који су добили Садати и остали у раду [101], као и резултат Џангка у раду [67].

2.2.1 Аналогон на Менгеровим вероватносним просторима

Како су структуре $\mathscr{L}$-фази метричких простора и PM-простора веома сличне, овде ћемо дати верзију претходно изнетог става 2.2.1 за пресликавања која су дефинисана на Менгеровим PM-просторима. У наставку дајемо само тврђење става јер је његов доказ веома сличан доказу става 2.2.1.

Став 2.2.3. *Нека је* $(X, \mathcal{F}, T)$ *комплетан Менгеров PM-простор. Нека су пресликавања* A, B, S *и* T *таква да је* $A, B, S, T : X \to X$*, при чему су* $A(X)$ *и* $B(X)$ *вероватносно ограничени скупови и нека важе следећи услови:*

(а) $A(X) \subseteq T(X), B(X) \subseteq S(X)$,

(б) *једно од пресликавања* A *или* S *је непрекидно,*

(в) *пар* $\{A, S\}$ *је компатибилан, а пар* $\{B, T\}$ *је слабо компатибилан,*

(г) *постоји непрекидна, неопадајућа функција* $\varphi : (0, \infty) \to (0, \infty)$*, која задовољава* $\varphi(t) < t$ *за свако* $t > 0$*, а пресликавања* A, B, S *и* T *задовољавају услов*

$$F_{Ax,By}(\varphi(t)) \geq F_{Sx,Ty}(t), \tag{2.11}$$

за свако $t > 0$ *и све* $x, y \in X$*.*

Тада пресликавања A, B, S *и* T *имају јединствену заједничку фиксну тачку.*

На крају овог одељка истакнимо да се многи резултати у вези са егзистенцијом и јединственошћу непокретне тачке и заједничке непокретне тачке могу доказати применом претходне теореме, слично као и у случају $\mathscr{L}$-фази метричких простора.

На пример, последица претходне теореме је верзија Банахове теореме за контрактивна пресликавања на Менгеровим PM-просторима, које је доказана у раду [94].

2.3 Заједничке непокретне тачке пресликавања са нелинеарним генерализованим контрактивним условом дефинисана на Менгеровим вероватносним просторима

У овом поглављу ћемо доказати ставове о јединствености непокретне, као и заједничке непокретне тачке за два компатибилна пресликавања која задовољавају нелинеарни генералисани контрактивни услов и они су део коауторског рада [66]. Ови резултати проширују резултате Ћирића који су доказани у раду [26]. У том раду он је увео појам генералисане контракције линеарног типа на PM-просторима и доказао теорему о јединствености непокретне тачке за генералисану контракцију f дефинисану на f-орбиталном комплетном Менгеровом PM-простору са непрекидном t-нормом T која задовољава услов $T(a,a) \geq a$, за свако $a \in [0,1]$. У наставку, најпре, дајемо дефиницију f-орбитално комплетног простора, као и дефиницију генерализоване контракције за PM-просторе.

Дефиниција 2.3.1 ([25])**.** *Нека је пресликавање $f : X \to X$. Простор X се назива f-орбитално комплетним ако сваки низ $\{f^{n_i}x,\ i \in \mathbb{N}\}$, $x \in X$, који је Кошијев има граничну вредност у X.*

Напоменимо да ако је простор X комплетан простор, тада је он и f-орбитално комплетан, за било које пресликавање $f : X \to X$. С друге стране, ако простор није комплетан, тада он може бити орбитално комплетан у односу на неко пресликавање, док за неко друго пресликавање не мора.

Дефиниција 2.3.2 ([26])**.** *За пресликавање f из PM-простора $(X, \mathcal{F})$ кажемо да је генерализована контракција ако и само ако постоји константа q, $0 < q < 1$, таква да за све $u, v \in X$ и свако $x > 0$ важи услов*

$$F_{fu,fv}(qx) \geq \min\Big\{F_{u,v}(x), F_{u,fu}(x), F_{v,fv}(x), F_{u,fv}(2x), F_{v,fu}(2x)\Big\}$$

Сада ћемо навести поменути резултат Ћирића[5] из рада [26].

Став 2.3.1 ([26])**.** *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ Менгеров PM-простор са непрекидном t-нормом T, који задовољава услов $T(x,x) \geq x$, за свако $x \in [0,1]$. Ако је пресликавање*

[5]Љубомир Ћирић, српски математичар.

$f: X \to X$ генерализована контракција на X и X је f-орбитално комплетан, тада пресликавање f има јединствену непокретну тачку $v \in X$ и $\lim_{n\to\infty} T^n u = v$, за свако $u \in X$.

Главни резултат који ћемо дати у овом одељку односиће се на постојање заједничке непокретне тачке за два компатибилна пресликавања, тако да, најпре, дајемо дефиницију компатибилних пресликавања на Менгеровим PM-просторима, битну напомену коју ћемо користити у доказу главног резултата, као и пример који илуструје ту напомену.

Дефиниција 2.3.3 ([83]). *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ Менгеров PM-простор и нека су f и g пресликавања таква да $f, g : X \to X$. Кажемо да су пресликавања f и g компатибилна ако важи*

$$\lim_{n\to\infty} F_{fgx_n, gfx_n}(t) = 1,$$

за свако $t > 0$, кад год је низ $\{x_n\}$ из X такав да важи

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = z \in X.$$

Напомена 2.3.1. *Нека су f и g два компатибилна пресликавања на Менгеровом PM-простору $(X, \mathcal{F}, T)$. Тада је следеће тврђење тачно.*

Ако је $fz = gz$, за неко $z \in X$, тада важи $fgz = gfz$.

Тачност овог тврђења директно следи из дефиниције 2.3.3 узимајући да је $x_n = z$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и за неку тачку $z \in X$.

Као што је то раније речено компатибилна пресликавања представљају проширење класе комутативних пресликавања, али су ужа класа пресликавања од слабо компабилних пресликавања, што тврди и претходна напомена. У наставку илуструјемо претходну напомену, следећим примером који је дат у раду [98], за случај Менгерових PM-простора.

Пример 2.3.1. *Нека је (X, d) метрички простор, при чему је $X = [0, 2]$ и $(X, \mathcal{F}, T)$ индукован Менгеров PM-простор тако што за произвољне тачке x и y скупа X дефинишемо функцију расподеле помоћу $F_{x,y}(t) = H\big(t - d(x, y)\big)$, за свако $t > 0$. Дефинишимо, сада, пресликавања A и S, при чему је $A, S : [0, 2] \to [0, 2]$, на следећи начин:*

$$Ax = \begin{cases} 2 - x, & x \in [0, 1), \\ 2, & x \in [1, 2], \end{cases} \qquad Sx = \begin{cases} x, & x \in [0, 1), \\ 2, & x \in [1, 2]. \end{cases}$$

Узмимо да је $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. Даље, нека је

$$F_{Ax_n,1}(t) = H\left(t - \frac{1}{n}\right),$$

и

$$\lim_{n\to\infty} F_{Ax_n,1}(t) = H(t) = 1,$$

одакле добијамо да важи $Ax_n \to 1$, *када* $n \to \infty$, *као и* $Sx_n \to 1$, *када* $n \to \infty$. *Такође, важи:*

$$F_{ASx_n,SAx_n}(t) = H\left(t - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right),$$

као и

$$\lim_{n\to\infty} F_{ASx_n,SAx_n}(t) = H(t-1) \neq 1.$$

за свако $t > 0$. *Одавде закључујемо да пресликавања* A *и* S *нису компатибилна. С друге стране, за било које* $x \in [1,2]$ *важи да је* $Ax = Sx = 2$ *и* $ASx = A(2) = 2 = S(2) = SAx$, *одакле добијамо да су ова пресликавања слабо компабилна.*

Сада ћемо дати став који представља проширење става 2.3.1 у коме ћемо увести генералисану контракцију нелинеарног типа на PM-просторима и за коју t-норма T задовољава услов $T(a,b) \geq \min\{a,b\}$ (познато је да је min једина t-норма која задовољава услов $T(a,a) \geq a$, за свако $a \in [0,1]$).

Став 2.3.2. *Нека је* $(X, \mathcal{F}, T)$ *Менгеров PM-простор са непрекидном* t*-нормом* T *која задовољава услов* $T(a,b) \geq \min\{a,b\}$, *за све* $a, b \in [0,1]$. *Нека је* $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *непрекидна, неопадајућа функција која задовољава услов* $\varphi(t) < t$, *за свако* $t > 0$ *и нека је* $f : X \to X$ *непрекидно пресликавање такво да је* $f(X)$ *вероватносно ограничен скуп и нека за све* $x, y \in X$ *и свако* $t > 0$ *важи*

$$F_{fx,fy}\big(\varphi(t)\big) \geq \min\Big\{F_{x,y}(t), F_{x,fx}(t), F_{y,fy}(t), F_{x,fy}(2t), F_{y,fx}(2t)\Big\}. \tag{2.12}$$

Ако је простор X f*-орбитално комплетан тада пресликавање* f *има јединствену непокретну тачку* $z \in X$.

Претходно изнети став нећемо доказити, јер ће он бити директна последица наредног става, којим се резултат Ћирића из рада [26] даље проширује. Најпре, наводимо и доказујемо леме која ће се користити у доказу наредног става. Ове леме ће, такође, бити коришћене и у доказима оригиналних резултата који ће бити изнети у наредним поглављима ове главе.

Лема 2.3.1 ([61])**.** *Нека је* $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ *непрекидна, неопадајућа функција која задовољава услов* $\varphi(t) < t$ *за свако* $t > 0$. *Тада за свако* $t > 0$ *важи*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0,$$

где $\varphi^n(t)$ *означава* n*-ту итерацију од* φ.

Доказ. За произвољно $t > 0$, из особина да је $\varphi(t) < t$ и да је φ је неопадајућа функција, на основу Принципа математичке индукције имамо да је $\varphi^n(t) < \varphi^{n-1}(t)$

и $\varphi^n(t) < t$, за свако $n \in \mathbb{N}$. Ово, даље, значи да је низ $\{\varphi^n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ монотоно опадајући. Због његове ограничености, следи да постоји вредност $c \geq 0$, таква да је

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = c.$$

Доказаћемо да је $c = 0$. Претпоставимо супротно, тј. да је $c > 0$. Из непрекидности функције φ тада имамо да важи

$$c = \lim_{n\to\infty} \varphi^{n+1}(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi\big(\varphi^n(t)\big) = \varphi(c) < c,$$

што је контрадикција. Дакле, важи $\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t) = 0$.

Лема 2.3.2 ([62]). *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ Менгеров PM-простор. Нека је $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ непрекидна, неопадајућа функција која задовољава услов $\varphi(t) < t$ за свако $t > 0$. Важи следеће тврђење.*

Ако за $x, y \in X$ важи $F_{x,y}\big(\varphi(t)\big) \geq F_{x,y}(t)$, за свако $t > 0$, тада је $x = y$.

Доказ. Претпоставимо да је

$$F_{x,y}\big(\varphi(t)\big) \geq F_{x,y}(t)$$

за $x \neq y$. Одавде, примењујући Принцип математичке индукције, добијамо да је

$$F_{x,y}\big(\varphi^n(t)\big) \geq F_{x,y}(t).$$

Узимајући $\liminf$, када $n \to \infty$, добијамо да је $F_{x,y}(t) = 0$, за свако $t > 0$, што је у контрадикцији са чињеницом $\sup_{t>0} F_{x,y}(t) = 1$. □

Став 2.3.3 ([66]). *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ Менгеров PM-простор са непрекидном t-нормом T која задовољава услов $T(a, b) \geq \min\{a, b\}$, за свако $a, b \in [0, 1]$. Нека је $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ непрекидна, неопадајућа функција која задовољава услов $\varphi(t) < t$, за свако $t > 0$ и нека су $f, g : X \to X$ компатибилна пресликавања, за које важи $g(X) \subseteq f(X)$, при чему је пресликавање g непрекидно пресликавање и $g(X)$ је вероватносно ограничен скуп и важи за све $x, y \in X$ и $t > 0$*

$$F_{g_x,g_y}\big(\varphi(t)\big) \geq \min\Big\{F_{fx,fy}(t), F_{fx,gx}(t), F_{fy,gy}(t), F_{fx,gy}(2t), F_{fy,gx}(2t)\Big\}. \tag{2.13}$$

Ако је простор X g-орбитално комплетан, тада пресликавања f и g имају јединствену заједничку непокретну тачку $z \in X$.

Доказ. Најпре, приметимо да за све $x, y \in X$ и свако $t > 0$, из особине t-норме и услова (2.13) наредне неједнакости важе:

$$\begin{aligned} F_{gx,gy}(\varphi(t)) &\geq \min\Big\{F_{fx,fy}(t), F_{fx,gx}(t), F_{fy,gy}(t), F_{fx,gy}(2t), F_{fy,gx}(2t)\Big\} \\ &\geq \min\Big\{F_{fx,fy}(t), F_{fx,gx}(t), F_{fy,gy}(t), T\big(F_{fx,gx}(t), F_{gx,gy}(t)\big), \\ &\qquad T\big(F_{fy,gy}(t), F_{gy,gx}(t)\big)\Big\}. \end{aligned}$$

тј. добијамо да важи:

$$F_{gx,gy}\big(\varphi(t)\big) \geq \min\Big\{F_{fx,fy}(t), F_{fx,gx}(t), F_{fy,gy}(t), \min\big\{F_{fx,gx}(t), F_{gx,gy}(t)\big\}, \min\big\{F_{fy,gy}(t), F_{gy,gx}(t)\big\}\Big\}, \tag{2.14}$$

Показаћемо да се претходна неједнакост своди на

$$F_{gx,gy}\big(\varphi(t)\big) \geq \min\Big\{F_{fx,fy}(t), F_{fx,gx}(t), F_{fy,gy}(t)\Big\} \tag{2.15}$$

за све $x, y \in X$ и свако $t > 0$. Заиста, ако би вредност $F_{gx,gy}(t)$ била минимум вредности које се налазе на десној страни неједнакости (2.14), тада бисмо имали да важи следећа неједнакост $F_{gx,gy}\big(\varphi(t)\big) \geq F_{gx,gy}(t)$ и на основу леме 2.3.2 имали бисмо да је $gx = gy$, тј. да важи $F_{gx,gy}(t) = 1$, за свако $t > 0$. Одатле би имали да је $F_{gx,gy}\big(\varphi(t)\big) = 1$, за свако $t > 0$, па би неједнакост (2.13) била тривијално задовољена. Из последњег закључујемо да $F_{gx,gy}(t)$ можемо изоставити из неједнакости (2.14). На овај начин је показано да се неједнакост (2.14), заправо, своди на неједнакост (2.15).

Сада, нека је $x_0 \in X$ произвољна тачка. Из $g(X) \subseteq f(X)$ следи да постоји тачка $x_1 \in X$ таква да је $g(x_0) = f(x_1)$. Дакле, низ $\{x_n\}$ може бити изабран тако да важи $g(x_{n-1}) = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Посматрајмо скупове $G_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ и $F_n = \overline{G_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Нека су $p, q \in \mathbb{N}_0$ произвољни бројеви. Из неједнакости (2.15) и дефиниције низа $\{fx_n\}$ имамо да важи следећа неједнакост

$$F_{gx_{n+p},gx_{n+q}}\big(\varphi(t)\big) \geq \min\Big\{F_{gx_{n+p-1},gx_{n+q-1}}(t), F_{gx_{n+p-1},gx_{n+p}}(t), F_{gx_{n+q-1},gx_{n+q}}(t)\Big\}. \tag{2.16}$$

Приметимо да тачке $gx_{n+p}, gx_{n+q} \in G_n$, а како је $G_n \subset G_{n-1}$, тада сви елементи на десној страни претходне неједнакости тј. тачке $gx_{n+p-1}, gx_{n+q-1}, gx_{n+p}, gx_{n+q}$ припадају скупу G_{n-1}. Неједнакост (2.16) важи за произвољне бројеве $p, q \in \mathbb{N}_0$, тј. она важи за свака два елемента из скупа G_n. Из претходног, ако узимамо инфимум по свим елементима $x, y \in G_n$ од леве стране неједнакости (2.16), у ознаци δ_{G_n}, имамо да важи

$$\delta_{G_n}\big(\varphi(t)\big) \geq \min\Big\{F_{gx_{n+p-1},gx_{n+q-1}}(t), F_{gx_{n+p-1},gx_{n+p}}(t), F_{gx_{n+q-1},gx_{n+q}}(t)\Big\}. \tag{2.17}$$

Такође, важи и неједнакост

$$\min\Big\{F_{gx_{n+p-1},gx_{n+q-1}}(t), F_{gx_{n+p-1},gx_{n+p}}(t), F_{gx_{n+q-1},gx_{n+q}}(t)\Big\} \geq \delta_{G_{n_1}}(t), \tag{2.18}$$

где је $\delta_{G_{n_1}}(t) = \inf_{x,y\in G_{n-1}} F_{x,y}(t)$. Из неједнакости (2.17) и (2.18) имамо да важи

$$\delta_{G_n}\big(\varphi(t)\big) \geq \delta_{G_{n-1}}(t) \tag{2.19}$$

за свако $t > 0$.

Нека је $r \in (0,1)$ и $t > 0$ произвољно и нека је $k \in \mathbb{N}$. Из $G_k \subseteq \overline{g(X)}$ следи да је G_k вероватносно ограничен скуп тј. постоји $t_0 > 0$ и $r_1 \in (0,1)$, $r > r_1$, такво да је

$$F_{x,y}(t_0) > 1 - r_1,$$

за свако $x, y \in G_k$. Узимајући инфимум по $x, y \in G_k$ у претходној неједнакости добијамо да важи

$$\delta_{G_k}(t_0) \geq 1 - r_1.$$

Примењујући лему 2.3.1 следи да постоји број $m \in \mathbb{N}$ такав да $\varphi^m(t_0) < t$. Нека је $n = m + k$ и нека су $x, y \in G_n$ произвољне тачке. Са друге стране, применом Принципа математичке индукције у неједнакости (2.19) добијамо

$$\delta_{G_n}\big(\varphi^m(t_0)\big) \geq \delta_{G_{n-m}}(t_0)$$

Из претходне неједнакости, имамо да важи

$$\delta_{G_n}(t) \geq \delta_{G_n}\big(\varphi^m(t_0)\big) \geq \delta_{G_{n-m}}(t_0) = \delta_{G_k}(t_0) \geq 1 - r_1,$$

тј. важи

$$\delta_{G_n}(t) \geq 1 - r_1.$$

Из претходног добијамо да важи

$$F_{x,y}(t) \geq 1 - r_1.$$

за све $x, y \in G_n$. Сада, нека су $x, y \in \overline{G_n} = F_n$ произвољне тачке. Тада постоје низови $\{x_{n(i)}\}$, $\{x_{n(j)}\}$ из G_n $(i, j \in \mathbb{N})$ такви да је

$$\lim_{i\to\infty} x_{n(i)} = x \quad \text{и} \quad \lim_{j\to\infty} x_{n(j)} = y.$$

Из претходне неједнакости имамо да за све $i, j \in \mathbb{N}$ важи да је

$$F_{x_{n(i)},x_{n(j)}}(t) \geq 1 - r_1.$$

Узимајући $\liminf$, када $i, j \to \infty$ имамо да је

$$F_{x,y}(t) \geq 1 - r_1,$$

за све $x, y \in F_n$ тј.

$$F_{x,y}(t) > 1 - r. \tag{2.20}$$

за све $x, y \in F_n$. На овај начин смо доказали да фамилија $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ има вероватносни дијаметар нула.

Примењујући лему 1.5.3 и став 1.5.1 закључујемо да ова фамилија има непразан пресек, који се састоји од тачно једне тачке z. Како фамилија $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ има вероватносни дијаметар нула и $z \in F_n$, за свако $n \in \mathbb{N}$, тада за свако $r \in (0,1)$ и свако $t > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такви да за свако $n \geq n_0$ важи

$$F_{gx_n,z}(t) > 1 - r.$$

Из последњег следи да за свако $r \in (0,1)$ важи

$$\liminf_{n\to\infty} F_{gx_n,z}(t) > 1 - r.$$

Пуштајући да $r \to 0$ добијамо да је

$$\liminf_{n\to\infty} F_{gx_n,z}(t) = 1$$

тј.

$$\lim_{n\to\infty} gx_n = z.$$

И дефиниције низа $\{fx_n\}$ следи да је

$$\lim_{n\to\infty} fx_n = \lim_{n\to\infty} gx_n = z.$$

Из компатибилности пресликавања f и g следи да је

$$\liminf_{n\to\infty} F_{fgx_n,gfx_n}(t) = 1,$$

за свако $t > 0$ и из непрекидности пресликавања g, као и примењујући лему 1.5.1 следи да је

$$F_{\lim\limits_{n\to\infty} fgx_n,gz}(t) = 1,$$

за свако, $t > 0$ тј.

$$\lim_{n\to\infty} fgx_n = gz.$$

Из неједнакости (2.15) имамо да је

$$F_{gx_n,ggx_n}\big(\varphi(t)\big) \geq \min\Big\{F_{fx_n,fgx_n}(t), F_{fx_n,gx_n}(t), F_{fgx_n,ggx_n}(t)\Big\}.$$

Узимајући $\liminf$, када $n \to \infty$, у претходној неједнакости, из непрекидности пресликавања g и леме 1.5.1 следи да је

$$\begin{aligned}
F_{z,gz}\big(\varphi(t)\big) &\geq \min\Big\{F_{z,gz}(t), F_{z,z}(t), F_{gz,gz}(t)\Big\} \\
&= \min\Big\{F_{z,gz}(t), 1, 1\Big\} \\
&= F_{z,gz}(t)
\end{aligned}$$

за свако $t > 0$. Из леме 2.3.2 следи да је $gz = z$.

Како је $g(X) \subseteq f(X)$, постоји $z_1 \in X$ такво да је $f(z_1) = g(z) = z$. Из неједнакости (2.15) имамо да је

$$F_{ggx_n,gz_1}\big(\varphi(t)\big) \geq \min\Big\{F_{fgx_n,fz_1}(t), F_{fgx_n,gz_1}(t), F_{fz_1,gz_1}(t)\Big\}.$$

Узимајући $\liminf$, када $n \to \infty$, у претходној неједнакости, из непрекидности пресликавања g и леме 1.5.1 следи да је

$$\begin{aligned} F_{z,gz_1}(\varphi(t)) &\geq \min\Big\{F_{z,z}(t), F_{z,gz_1}(t), F_{z,gz_1}(t)\Big\} \\ &= \min\Big\{1, F_{z,gz_1}(t)\Big\} \\ &= F_{z,gz_1}(t) \end{aligned}$$

за свако $t > 0$, тј. $g(z_1) = z$. Како је $f(z_1) = g(z_1) = z$, из напомене 2.3.1 и чињенице да је $gz_1 = z = gz$ следи да је $fz = fgz_1 = gfz_1 = gz = z$, тј. z је заједничка непокретна тачка пресликавања f и g.

Покажимо да је z јединствена заједничка непокретна тачка. Нека је $y \in X$ још једна заједничка непокретна тачка за пресликавања f и g. Из неједнакости (2.15) следи да је

$$\begin{aligned} F_{z,y}\big(\varphi(t)\big) &= F_{gz,gy}\big(\varphi(t)\big) \\ &\geq \min\Big\{F_{fz,fy}(t), F_{fz,gz}(t), F_{fy,gy}(t)\Big\} \\ &= \min\Big\{F_{z,y}(t), F_{z,z}(t), F_{y,y}(t)\Big\} \\ &= \min\Big\{F_{z,y}(t), 1, 1\Big\} \\ &= F_{z,y}(t). \end{aligned}$$

Примењујући лему 2.3.2 добијамо да је $y = z$, тј. z је јединствена заједничка непокретна тачка за пресликавања f и g. $\square$

2.4 Непокретне тачке пресликавања дефинисаних на стриктно конвексним Менгеровим вероватносним просторима

Појам PM-простора (вероватносних простора), као генерализацију метричких простора, увео је Менгер у раду [80] 1942. године. Он је, као што је раније већ речено, растојање између две тачке p и q, у ознаци $d(p,q)$, које се у метричким просторима представља ненегативним бројем, у случају PM-простора представио функцијом расподеле, у ознацу F_{pq}. Наиме, вредност $F_{pq}(x)$, за реалан број x, представља вероватноћу да је растојање између тачака p и q мање од x. Вероватносна генерализација метричких простора је од посебног значаја у истраживањима у квантној физици, посебно у вези са теоријом струна и $\varepsilon^{(\infty)}$ теоријом (видети нпр. радове [39], [40] и [42]). Одатле је произашло велико интересовање, како математичара, тако и физичара за ову област, тако да је у последњих неколико деценија публиковано неколико хиљада научних радова у вези са овом темом и то не само у вези са PM-просторима, већ и у вези са фази метричким и $\mathscr{L}$-фази метричким просторима, као и интуиционистичким фази метричким просторима.

Хронолошки гледано, даља испитивања особина PM-простора, која су уведена од стране Менгера, могу се наћи у радовима [92] и [93], аутора Швејцера и Склара који су проучавали особине ових простора. Они су се бавили топологијом, конвергенцијом низова, непрекидношћу пресликавања на овим просторима, дефинисали су појам комплетности PM-простора и др. Први резултат из теорије непокретне тачке на овим просторима добили су Сехгал[6] и остали у раду [94]. У наставку дајемо, најпре, дефиницију контракције на PM-просторима, а након тога и поменути резултат.

Дефиниција 2.4.1. *Нека је $(X, \mathcal{F})$ PM-простор и нека $f : X \to X$. За пресликавање f кажемо да је контракција ако важи*

$$F_{f_p, f_q}(kx) \geq F_{p,q}(x),$$

за неко $k \in (0,1)$, све $p, q \in X$ и свако $x \in \mathbb{R}$.

Став 2.4.1 ([94])**.** *Нека је $(X, \mathcal{F}, T_{\min})$ комплетан Менгеров PM-простор и нека је пресликавање $f : X \to X$ једна контракција. Тада постоји јединствена непокретна тачка за пресликавање f.*

Напоменимо да овај став важи само у случају када је $T(a, b) = \min\{a, b\}$.

2.4.1 Конвексна, нормална и стриктно конвексна структура

Појам нормалне структуре увели су 1948. године Бродски[7] и остали у раду [15]. Такахаши је у раду [99] из 1970. године дефинисао појмове конвексне и нормалне структуре за скупове на метричким просторима и генерелизовао неке важне теореме о непокретној тачки, које су претходно биле дефинисане за Банахове просторе. Хаџић[8] је 1987. године у раду [54] увела појам конвексне структуре за скупове на Менгеровим PM-просторима и доказала једну теорему о непокретној тачки за пресликавања у PM-просторима са конвексном структуром. Недавно је Јешић у раду [60] дефинисао конвексне, стриктно конвексне и нормалне структуре на интуиционистичким фази метричким просторима и доказао постојање непокретне тачке за широку класу нееkспанзивних пресликавања на стриктно конвексним интуиционистичким фази метричким просторима.

[6] V. M. Sehgal, индијско–амерички математичар.

[7] Mikhail Samoilovich Brodskii, руски математичар.

[8] Олга Хаџић, академик, српска математичарка.

У овом одељку ћемо дефинисати појам стриктно конвексне и нормалне структуре на Менгеровим PM-просторима, следећи горе поменуте резултате до којих су дошли Такахаши, Хаџић и Јешић и који представља део резултата изложених у радовима [64] и [65]. У том смислу, најпре, дајемо дефиниције конвексних структура, као и стриктно конвексних структура у смислу Такахашија на класичним метричким просторима.

Дефиниција 2.4.2 ([99])**.** *Нека је (X, d) метрички простор. Кажемо да метрички простор поседује Такахашијеву конвексну структуру ако постоји функција $W : X \times X \times [0, 1] \to X$ која задовољава услов*

$$d\big(z, W(x, y, \theta)\big) \leq \theta d(z, x) + (1 - \theta) \cdot d(z, y),$$

за све $x, y, z \in X$ и произвољно $\theta \in [0, 1]$. Метрички простор (X, d) са Такахашијевом конвексном структуром се назива конвексним метричким простором.

Дефиниција 2.4.3 ([99])**.** *Конвексан метрички простор (X, d) на коме је задата Такахашијева конвексна структура $W(x, y, \theta)$ називамо стриктно конвексним ако за све $x, y \in X$ и свако $\theta \in [0, 1]$ постоји јединствен елемент $u \in X$ такав да важи*

$$d(u, y) = \theta \cdot d(x, y) \quad и \quad d(x, u) = (1 - \theta) \cdot d(x, y).$$

У истом раду [99], Такахаши је доказао и следећи став, који је од интереса за наш даљи рад.

Став 2.4.2. *Нека је (X, d) стриктно конвексан метрички простор са конвексном структуром $W(x, y, \theta)$. Тада за све $x, y \in X$ и свако $\theta \in [0, 1]$ важи:*

(I) $u = W(x, y, \theta)$ *за u из претходне дефиниције*;

(II) $W(x, y, 0) = y$ *и* $W(x, y, 1) = x$.

Хаџић је у раду [54] извршила генерализацију Такахашијеве дефиниције конвексних структура на Менгерове PM-просторе.

Дефиниција 2.4.4. *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ Менгеров PM-простор. Пресликавање $S : X \times X \times [0, 1] \to X$ се назива конвексна структура на X ако за све $(x, y) \in X \times X$ важи $S(x, y, 0) = y$, $S(x, y, 1) = x$ и*

$$F_{S(x,y,\theta),z}(2t) \geq T\left(F_{x,z}\left(\frac{t}{\theta}\right), F_{y,z}\left(\frac{t}{1-\theta}\right)\right). \tag{2.21}$$

за све $x, y, z \in X$, $\theta \in (0, 1)$ и $t > 0$.

Лако је уочити да сваки метрички простор (X, d) са конвексном структуром S може бити посматран као Менгеров PM-простор $(X, \mathcal{F}, T_{min})$ (придружен Менгеров

PM-простор) са истом функцијом S. Нетривијални пример Менгеровог PM-простора са конвексном структуром може се видети у раду [54]. Менгеров PM-простор $(X, \mathcal{F}, T)$ са конвексном структором, назива се конвексан Менгеров PM-простор.

Дефиниција 2.4.5. *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ Менгеров PM-простор са конвексном структуром $S(x, y, \theta)$. Подскуп $A \subseteq X$ се назива конвексним скупом ако за све $x, y \in A$ и $\theta \in [0, 1]$ важи $S(x, y, \theta) \in A$.*

Дефиниција 2.4.6. *Конвексан Менгеров PM-простор $(X, \mathcal{F}, T)$ са конвексном структуром $S : X \times X \times [0, 1] \to X$ назива се стриктно конвексним ако, за произвољне $x, y \in X$ и произвољно $\theta \in (0, 1)$ елемент $z = S(x, y, \theta)$ јесте јединствен елемент који задовољава*

$$F_{x,y}\left(\frac{t}{\theta}\right) = F_{z,y}(t), \quad F_{x,y}\left(\frac{t}{1-\theta}\right) = F_{z,y}(t), \tag{2.22}$$

за свако $t > 0$.

Лема 2.4.1. *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ Менгеров PM-простор са конвексном структуром $S(x, y, \theta)$. Претпоставимо да за свако $\theta \in (0, 1)$, свако $t > 0$ и све $x, y, z \in X$ важи*

$$F_{S(x,y,\theta),z}(t) > \min\Big\{F_{z,x}(t), F_{z,y}(t)\Big\}. \tag{2.23}$$

Ако постоји $z \in X$ такво да је

$$F_{S(x,y,\theta),z}(t) = \min\Big\{F_{z,x}(t), F_{z,y}(t)\Big\}, \tag{2.24}$$

задовољено, за свако $t > 0$, тада је

$$S(x, y, \theta) \in \{x, y\}.$$

Доказ. Претпоставимо да услов (2.24) важи за неко $z \in X$ и свако $t > 0$. Како услов (2.23) важи, имамо да је $\theta = 0$ или $\theta = 1$ и стога имамо да је $S(x, y, 0) = y$ или $S(x, y, 1) = x$, чиме је ова лема доказана. □

Лема 2.4.2. *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ стриктно конвексан Менгеров PM-простор са конвексном структуром $S(x, y, \theta)$. Тада за произвољно $x, y \in X$, $x \neq y$, постоји $\theta \in (0, 1)$ такво да је*

$$S(x, y, \theta) \notin \{x, y\}.$$

Доказ. Претпоставимо да важи да је $S(x, y, \theta) \in \{x, y\}$, за свако $\theta \in [0, 1]$. Из услова (2.22) имамо да је $F_{x,y}(t) = 1$, за свако $t > 0$, што значи да је $x = y$. Овим је лема доказана. □

2.4.2 Непокретне тачке пресликавања са ширим кодоменом

У конвексним просторима, често се јављају случајеви када је посматрана функција f функција за коју важи $f : C \to X$, где је C непразан затворени подскуп, простора X. Асад[9] и Кирк су 1972. године у раду [4] први пут посматрали овакве функције на метричком простору (X, d). Наиме, они су доказали да је довољан услов који гарантује постојање непокретне тачке за пресликавање $f : C \to X$, где је C непразан затворени подскуп простора X, које задовољава Банахов принцип контракције $d(fx, fy) \le \lambda d(x, y)$, за свако $x, y \in C$ и $\lambda \in (0, 1)$, услов $f(\partial C) \subseteq C$, где је ∂C граница непразног затвореног скупа C, при чему је простор X метрички конвексан простор у смислу Менгера (тј. важи за све $x, y \in X$, за које је $x \neq y$, да постоји $z \in X$ $(x \neq z \neq y)$, такво да је $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$). Посматрање овакве шире класе пресликавања, од пресликавања типа $f : C \to C$, где је $C \subseteq X$, игра веома важну улогу у теорији непокретне тачке, као и њеним применама. Напоменимо и то да је посматрање услова $f(\partial C) \subseteq C$ у оваквим случајевима пожељније од услова $f(C) \subseteq C$ који је мање рестриктиван, због одређених примена у нумеричкој математици. Током наредних деценија доказано је много генерализација поменуте теореме (о овоме се може више видети, нпр. у радовима [27], [28], [30], [46], [47], [56], [57] и [90]).

У овом одељку биће дат један став за пресликавања претходно поменутог облика, која задовољавају нелинеарни контрактивни услов (у смислу Бојда и Вонга), за стриктно конвексне Менгерове PM-просторе и који представља део резултата датих у раду [64]. У доказу овог става користићемо тополошке методе за карактеризацију простора са недетерминистичком метриком. Последица тако датог става биће вероватносно уопштење резултата до којих су дошли Асад и Кирк у раду [4]. За доказ наредног става, користићемо лему 2.3.2, као и лему 2.3.1 које су већ уведене и доказане у поглављу 2.3.

Сада ћемо навести и доказати следећи оригинални резултат који чини део коауторског рада [64].

Став 2.4.3 ([64]). *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ стриктно конвексан, комплетан Менгеров PM-простор, који задовољава услов (2.23) и нека је $f : C \to X$ пресликавање за које важи да је $f(C)$ вероватносно ограничен скуп, који задовољава услов*

$$F_{f(x),f(y)}\big(\varphi(t)\big) \ge F_{x,y}(t), \tag{2.25}$$

за све $x, y \in C$ и за неку непрекидну, неопадајућу функцију $\varphi : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, која задовољава $\varphi(t) < t$, за све $t > 0$, где је C непразан, конвексан, затворен и ограничен подскуп од X. Претпоставимо да пресликавање f задовољава додатни услов

$$f(\partial C) \subseteq C. \tag{2.26}$$

Тада пресликавање f има јединствену непокретну тачку у скупу C.

[9]Nadim A. Assad, палестински математичар.

Доказ. Нека је $x \in \partial C$ произвољна тачка. Сада ћемо дефинисати низ $\{x_n\}$ на следећи начин. Нека је $x_0 = x$. Како $x \in \partial C$, на основу услова (2.30), имамо да је $fx_0 \in C$. Нека је $x_1 = fx_0$. Узмимо, сада, да је $y_2 = fx_1$. Ако $y_2 \in C$, тада је $x_2 = y_2$, а ако $y_2 \notin C$ тада изаберимо $x_2 \in \partial C$ тако да је $x_2 = S(x_1, y_2, \lambda), \lambda \in (0, 1)$. Настављајући формирање низа $\{x_n\}$ на овај начин, добијамо да за сваки његов члан важи:

$$\begin{aligned} &x_n = fx_{n-1}, && \text{ако} \quad fx_{n-1} \in C, \\ &x_n = S(x_{n-1}, fx_{n-1}, \lambda), \lambda \in (0,1) && \text{ако} \quad fx_{n-1} \notin C. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Из другог дела услова (2.27), закључујемо, да важи $x_{n-1} = fx_{n-2}$.

Посматрајмо уметнути низ непразних затворених скупова који су дефинисани на следећи начин:

$$F_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}},\ n \in \mathbb{N}.$$

Доказаћемо да фамилија овако дефинисаних скупова $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ има вероватносни дијаметар нула. У том смислу, нека је $r \in (0, 1)$ и $t > 0$ произвољно. Из $F_k \subseteq \overline{f(C)}$ следи да је F_k вероватносно ограничен скуп за произвољно $k \in \mathbb{N}$. Ово значи да постоји $t_0 > 0$ такво да је

$$F_{x,y}(t_0) > 1 - r, \tag{2.28}$$

за све $x, y \in F_k$.

Примењујући лему 2.3.1 имамо да је

$$\lim_{n\to\infty} \varphi^n(t_0) = 0,$$

одакле закључујемо да постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да је $\varphi^m(t_0) < t$. Нека је $n = m + k$ и нека су $x, y \in F_n$ произвољне тачке. Тада постоје низови $\{x_{n(i)}\}$, $\{x_{n(j)}\}$ из F_n, где су $(n(i), n(j) \geq n,\ i, j \in \mathbb{N})$ такви да је

$$\lim_{i\to\infty} x_{n(i)} = x \quad \text{и} \quad \lim_{j\to\infty} x_{n(j)} = y.$$

Да бисмо доказали да фамилија $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ има вероватносни дијаметар нула, сходно конструкцији низа $\{x_n\}$ датог условом (2.27), размотрићемо следећа три случаја:

Случај 1. $x_{n(i)} = fx_{n(i-1)}$ и $x_{n(j)} = fx_{n(j-1)}$;

Случај 2. $x_{n(i)} = fx_{n(i-1)}$ и $x_{n(j)} = S\big(x_{n(j-1)}, fx_{n(j-1)}, \lambda\big)$, за $\lambda \in (0, 1)$;

Случај 3. $x_{n(i)} = S\big(x_{n(i-1)}, fx_{n(i-1)}, \lambda\big)$ и $x_{n(j)} = S\big(x_{n(j-1)}, fx_{n(j-1)}, \lambda\big)$, за $\lambda \in (0, 1)$.

Случај 1. Ако је $x_{n(i)} = fx_{n(i-1)}$ и $x_{n(j)} = fx_{n(j-1)}$ тада из услова (2.25) имамо

$$F_{x_{n(i)},x_{n(j)}}\big(\varphi(t)\big) = F_{fx_{n(i-1)},fx_{n(j-1)}}\big(\varphi(t)\big) \geq F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-1)}}(t),$$

па на основу Принципа математичке индукције следи да је

$$F_{x_{n(i)},x_{n(j)}}\big(\varphi^m(t)\big) \geq F_{x_{n(i-m)},x_{n(j-m)}}(t).$$

Како је $\varphi^m(t_0) < t$ и како је функција $F_{x,y}(\cdot)$ неопадајућа, из претходне неједнакости имамо да је

$$F_{x_{n(i)},x_{n(j)}}(t) \geq F_{x_{n(i)},x_{n(j)}}\big(\varphi^m(t_0)\big) \geq F_{x_{n(i-m)},x_{n(j-m)}}(t_0). \tag{2.29}$$

Како су $\{x_{n(i-m)}\}$, $\{x_{n(j-m)}\}$ низови из F_k из услова (2.28) имамо да је

$$F_{x_{n(i-m)},x_{n(j-m)}}(t_0) > 1 - r,$$

за све $i, j \in \mathbb{N}$. Коначно, из претходне неједнакости и из услова (2.29) закључујемо да је

$$F_{x_{n(i)},x_{n(j)}}(t_0) > 1 - r,$$

за све $i, j \in \mathbb{N}$. Пуштајући да $i, j \to \infty$, и примењујући лему 1.7.1 добијамо да је

$$F_{x,y}(t) > 1 - r,$$

за све $x, y \in F_n$ тј. добијамо да фамилија скупова $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ има вероватносни дијаметар нула.

Случај 2. Ако $x_{n(i)} = fx_{n(i-1)}$ и $x_{n(j)} = S(x_{n(j-1)}, fx_{n(j-1)}, \lambda)$, за $\lambda \in (0,1)$ тада из услова (2.23) и (2.25) имамо

$$\begin{aligned} F_{x_{n(i)},x_{n(j)}}\big(\varphi(t)\big) &= F_{fx_{n(i-1)},S(x_{n(j-1)},fx_{n(j-1)},\lambda)}\big(\varphi(t)\big) \\ &> \min\Big\{F_{fx_{n(i-1)},x_{n(j-1)}}\big(\varphi(t)\big), F_{fx_{n(i-1)},fx_{n(j-1)}}\big(\varphi(t)\big)\Big\} \\ &= \min\Big\{F_{fx_{n(i-1)},fx_{n(j-2)}}\big(\varphi(t)\big), F_{fx_{n(i-1)},fx_{n(j-1)}}\big(\varphi(t)\big)\Big\} \\ &\geq \min\Big\{F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-2)}}\big(\varphi(t)\big), F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-1)}}\big(\varphi(t)\big)\Big\}. \end{aligned}$$

Коначно, из претходних неједнакости добијамо:

$$F_{x_{n(i)},x_{n(j)}}\big(\varphi(t)\big) > \min\Big\{F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-2)}}(t), F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-1)}}(t)\Big\}.$$

Сада ћемо посматрати два подслучаја *случаја 2.* Први од њих је

$$\min\Big\{F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-2)}}(t), F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-1)}}(t)\Big\} = F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-1)}}(t).$$

Ако је претходно задовољено тада се *случај 2* своди на *случај 1.*

Други подслучај *случаја 2*, је

$$\min\Big\{F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-2)}}(t), F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-1)}}(t)\Big\} = F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-2)}}(t)$$

и ако је он задовољен, тада постоје низови $\{x_{n(i)}\}$, $\{x_{n(j-1)}\}$ из F_n $(n(i) \geq n,\ n(j-1) \geq n,\ n, i \in \mathbb{N},\ j = 2, 3, \ldots)$ такви да је

$$\lim_{i\to\infty} x_{n(i)} = x \quad \text{и} \quad \lim_{j\to\infty} x_{n(j-1)} = y.$$

Сада је јасно и да се овај подслучај *случаја 2*, такође, своди на *случај 1.*

Случај 3. Ако $x_{n(i)} = S(x_{n(i-1)}, fx_{n(i-1)}, \lambda)$ и $x_{n(j)} = S(x_{n(j-1)}, fx_{n(j-1)}, \lambda)$, за $\lambda \in (0,1)$ тада из услова (2.23) и (2.25) имамо да је

$$\begin{aligned}
F_{(x_{n(i)},x_{n(j)}}\big(\varphi(t)\big) &= F_{S(x_{n(i-1)},fx_{n(i-1)},\lambda),S(x_{n(j-1)},fx_{n(j-1)},\lambda)}\big(\varphi(t)\big) \\
&> \min\Big\{F_{S(x_{n(i-1)},fx_{n(i-1)},\lambda),x_{n(j-1)}}(\varphi(t)), \\
&\qquad F_{S(x_{n(i-1)},fx_{n(i-1)},\lambda),fx_{n(j-1)}}\big(\varphi(t)\big)\Big\} \\
&> \min\Big\{F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-1)}}(\varphi(t)), F_{x_{n(i-1)},fx_{n(j-1)}}\big(\varphi(t)\big), \\
&\qquad F_{fx_{n(i-1)},x_{n(j-1)}}\big(\varphi(t)\big), F_{fx_{n(i-1)},fx_{n(j-1)}}\big(\varphi(t)\big)\Big\} \\
&= \min\Big\{F_{fx_{n(i-2)},fx_{n(j-2)}}\big(\varphi(t)\big), F_{fx_{n(i-2)},fx_{n(j-1)}}\big(\varphi(t)\big), \\
&\qquad F_{fx_{n(i-1)},fx_{n(j-2)}}\big(\varphi(t)\big), F_{fx_{n(i-1)},fx_{n(j-1)}}\big(\varphi(t)\big)\Big\} \\
&\geq \min\Big\{Fx_{n(i-2)}, x_{n(j-2)}(t), F_{x_{n(i-2)},x_{n(j-1)}}(t), \\
&\qquad F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-2)}}(t), F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-1)}}(t)\Big\}.
\end{aligned}$$

Очигледно, да из претходног видимо да *случај 3* има четири подслучаја, али за три од њих смо већ показали да се своде на *случај 1.* Стога ћемо посматрати једино следећи подслучај *случаја 3*:

$$\begin{aligned}
\min\Big\{&F_{x_{n(i-2)},x_{n(j-2)}}(t),F_{x_{n(i-2)},x_{n(j-1)}}(t), \\
&F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-2)}}(t), F_{x_{n(i-1)},x_{n(j-1)}}(t)\Big\} = F_{x_{n(i-2)},x_{n(j-2)}}(t).
\end{aligned}$$

Тада постоје следећа два низа $\{x_{n(i-1)}\}, \{x_{n(j-1)}\}$ из F_n, за $(n(i-1) \geq n,\ n(j-1) \geq n,\ n \in \mathbb{N},\ i,j = 2,3,\ldots)$ такви да је

$$\lim_{i\to\infty} x_{n(i-1)} = x \quad \text{и} \quad \lim_{j\to\infty} x_{n(j-1)} = y.$$

Сада је очигледно да се овај подслучај *случаја 3*, такође, своди на *случај 1.*

Како смо доказали да фамилија скупова $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ има вероватносни дијаметар нула за све могуће случајеве, примењујући став 1.5.3 закључујемо да ова фамилија има непразан пресек, који се састоји од тачно једне тачке z тј. $z \in F_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада, за свако $r \in (0,1)$ и свако $t > 0$, постоји $n_0 \in \mathbb{N}$, такво да, за свако $n \geq n_0$, важи

$$F_{x_n,z}(t_0) > 1 - r.$$

Из последње неједнакости, следи да, за свако $r \in (0,1)$, важи

$$\lim_{n\to\infty} F_{x_n,z}(t) > 1 - r.$$

Пуштајући да $r \to 0$, имамо
$$\lim_{n\to\infty} F_{x_n,z}(t) = 1,$$
тј.
$$\lim_{n\to\infty} x_n = z.$$
Из дефиниције низа $\{fx_n\}$ следи да је
$$\lim_{n\to\infty} fx_n = z.$$
Како је скуп C затворен скуп, важи да $z \in C$. Докажимо да је тачка z непокретна тачка пресликавања f. Из услова (2.25) имамо да важи
$$F_{fx_n,f\big(f(x_n)\big)}\big(\varphi(t)\big) \geq F_{x_n,f(x_n)}(t),$$
за свако $t > 0$. Пуштајући да $n \to \infty$, имамо да је
$$F_{z,fz}\big(\varphi(t)\big) \geq F_{z,fz}(t).$$
Примењујући лему 2.3.2 добијамо да је $fz = z$.

Докажимо, сада, да је тачка z јединствена непокретна тачка за пресликавање f. У ту сврху претпоставимо да постоји још једна непокретна тачка пресликавања f, нпр., тачка u. Из услова (2.25) следи да важи
$$F_{fz,fu}\big(\varphi(t)\big) \geq F_{z,u}(t),$$
за свако $t > 0$. Стога, имамо
$$F_{z,u}\big(\varphi(t)\big) \geq F_{z,u}(t),$$
за свако $t > 0$. Коначно, примењујући лему 2.3.2 следи да је $z = u$. Овим је доказ завршен. □

Пример 2.4.1 ([64]). *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ Менгеров PM-простор са конвексном структуром $S(x, y, \lambda) = \lambda x + (1 - \lambda)y$ која је индукована метриком $d(x, y) = |x - y|$ на $X = (-\infty, +\infty)$ која је дата у напомени 1.5.1. Овај простор је стриктно конвексан у смислу дефиниције 2.4.6. Како је,*
$$d\big(\lambda x + (1 - \lambda)y, z\big) < \max\big\{d(x, z), d(y, z)\big\}$$
задовољено за свако $\lambda \in (0, 1)$ имамо
$$\begin{aligned}F_{S(x,y,\theta),z}(t) &= H\big(t - d(S(x, y, \theta), z)\big)\\ &> H\big(t - \max\{d(x, z), d(y, z)\}\big)\\ &= \min\Big\{H\big(t - d(x, z)\big), H\big(t - d(y, z)\big)\Big\}\\ &= \min\{F_{z,x}(t), F_{z,y}(t)\},\end{aligned}$$

тј. услов (2.23) *важи. Нека је*

$$f(x) = \frac{3}{5} - \frac{1}{2}x^2, \qquad \varphi(t) = \begin{cases} \frac{t}{1+t}, & 0 < t \leq 1, \\ \frac{t}{2}, & t \geq 1, \end{cases}$$

за свако $t > 0$ *и нека је* $C = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Показаћемо да су сви услови става 2.4.3 задовољени. Најпре, имамо да важи $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to [\frac{19}{40}, \frac{3}{5}]$ *и* $f(-\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{19}{40} \in C$ *тј. услов* $f(\partial C) \subseteq C$ *је задовољен. Приметимо да је* $|x^2 - y^2| \leq |x - y|$ *тј.* $|x + y| \leq 1$ *за све* $x, y \in C$. *Сада ћемо размотрити две могућности.*

Ако је $0 < t \leq 1$ *имамо да је*

$$\begin{aligned} F_{f(x),f(y)}(\varphi(t)) &= H\Big(\varphi(t) - d\big(f(x), f(y)\big)\Big) \\ &= H\Big(\frac{t}{t+1} - |f(x) - f(y)|\Big) \\ &= H\Big(\frac{t}{t+1} - \frac{1}{2}|x^2 - y^2|\Big) \\ &\geq H\Big(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}|x - y|\Big) \\ &= H\big(t - |x - y|\big) \\ &= F_{x,y}(t), \end{aligned}$$

задовољено за све $x, y \in C$.

Слично, за $t \geq 1$ *имамо да је неједнакост*

$$\begin{aligned} F_{f(x),f(y)}(\varphi(t)) &= H\Big(\varphi(t) - d\big(f(x), f(y)\big)\Big) \\ &= H\Big(\frac{t}{2} - |f(x) - f(y)|\Big) \\ &= H\Big(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}|x^2 - y^2|\Big) \\ &\geq H\Big(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}|x - y|\Big) \\ &= H\big(t - |x - y|\big) \\ &= F_{x,y}(t), \end{aligned}$$

задовољено за све $x, y \in C$.

Скуп C *је, свакако, непразан, затворен и ограничен. Даље, како је скуп* $f(C)$ *метрички ограничен у смислу напомене 1.5.3 он је и вероватносно ограничен. Како су сви услови става 2.4.3 испуњени добијамо да функција* f *има јединствену непокретну тачку* $x = \frac{-5+\sqrt{220}}{10} \in C$.

2.4.3 Непокретне тачке нееекспанзивних пресликавања

Као што смо већ рекли први резултат у вези са непокретном тачком на PM-просторима добијен је од стране Сехгала и осталих у раду [94]. Прво експлицитно проучавање особина непокретне тачке за нееекспанзивна пресликавања применом опште теорије скуповне конвесности може се наћи у раду Пеноа[10] [86]. Даље, Хаџић је 1987. године у раду [54] дефинисала конвексну структуру за скупове на PM-просторима и у том раду је доказала став о непокретној тачки за пресликавања дефинисана на PM-просторима са конвексном структуром.

У овом одељку ћемо користећи дефиницију 2.4.6 стриктно конвексних структура на Менгеровим PM-просторима доказати постојање заједничке непокретне тачке за два нееекспанзивна пресликавања. У доказу главног резултата користићемо тополошке особине за карактеризацију Менгерових PM-простора. Као последица главног резултата, даћемо вероватносни облик Броудеровог резултата из рада [16]. У наставку дајемо дефиниције, као и леме и ставове (са доказима) који су део оригиналних резултата из коауторског рада [65].

Дефиниција 2.4.7 ([65])**.** *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ Менгеров PM-простор, $r \in (0,1)$, $t > 0$ и $x \in X$. Скуп*

$$N_x[\varepsilon, \lambda] = \{y \in X \mid F_{x,y}(\varepsilon) \geq 1 - \lambda\}$$

се назива затвореном (ε, λ)-околином тачке $x \in X$.

Дефиниција 2.4.8 ([65])**.** *Подскуп K Менгеровог PM-простора назива се компактним ако важи*

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha \quad \Longrightarrow \quad K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

за неке $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda$ и за сваку колекцију $\{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\}$ отворених скупова $U_\alpha \subset X$.

Лема 2.4.3 ([65])**.** *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ Менгеров PM-простор и нека је $K \subseteq X$. Тада, је K компактан скуп ако и само ако за сваку колекцију затворених скупова $\{F_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ таквих да је $F_\alpha \subseteq K$ важи*

$$\bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = \varnothing \ \ \text{за неке} \ \ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda.$$

Доказ. Доказ следи из дефиниције 2.4.8 и де Морганових закона. □

Став 2.4.4 ([65])**.** *Сваки компактан подскуп A Менгеровог PM-простора $(X, \mathcal{F}, T)$ је вероватносно полуограничен.*

[10] Jean-Paul Penot, француски математичар.

Доказ. Нека је скуп A компактан подскуп Менгеровог PM-простора X. Фиксирајмо $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in (0,1)$. Сада ћемо посматрати један (ε, λ)-покривач $\{N_x(\varepsilon,\lambda) \mid x \in A\}$. Како је A компактан подскуп, тада постоје $x_1, x_2, \dots x_n \in A$ тако да је

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} N_{x_i}(\varepsilon, \lambda).$$

Нека су $x, y \in A$. Тада постоји $i \in \{1, \dots, n\}$ такво да је $x \in N_{x_i}(\varepsilon,\lambda)$ и постоји $j \in \{1, \dots, n\}$ такво да $y \in N_{x_j}(\varepsilon, \lambda)$. На тај начин добијамо да је

$$F_{x,x_i}(\varepsilon) > 1 - \lambda \ \text{ и } \ F_{y,x_j}(\varepsilon) > 1 - \lambda.$$

Сада, нека је $m = \min\{F_{x_i,x_j}(\varepsilon) \mid 1 \le i, j \le n\}$. Очигледно је $m > 0$ и имамо

$$F_{x,y}(\varepsilon) \ge T\left(F_{x,x_i}(\varepsilon), F_{x_i,x_j}(\varepsilon), F_{x_j,y}(\varepsilon)\right) \ge T(1-\lambda, 1-\lambda, m) > 1 - \delta,$$

за неко $0 < \delta < 1$. Ако узмемо $\varepsilon_1 = 3\varepsilon$ имамо

$$F_{x,y}(\varepsilon_1) > 1 - \delta$$

за све $x, y \in A$. Стога добијамо да је A вероватносно полуограничен скуп. $\square$

Напомена 2.4.1 ([65])**.** *У Менгеровом PM-простору сваки компактан скуп је затворен и ограничен.*

У наставку ћемо дефинисати појам дијаметралне тачке на Менгеровим PM-просторима.

Дефиниција 2.4.9 ([65])**.** *Тачка $x \in A$ назива се дијаметралном ако важи*

$$\inf_{y \in A} \sup_{\varepsilon < t} F_{x,y}(\varepsilon) = \delta_A(t)$$

за свако $t > 0$.

Лема 2.4.4 ([65])**.** *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ Менгеров PM-простор и нека је $\{K_\alpha\}$ за $\alpha \in \Delta$ фамилија конвексних подскупова X. Тада је пресек скупова $K = \cap_{\alpha\in\Delta} K_\alpha$ конвексан скуп.*

Доказ. Ако $x, y \in K$, тада $x, y \in K_\alpha$ за свако $\alpha \in \Delta$. Следи да је $S(x, y, \theta) \in K_\alpha$ за свако $\alpha \in \Delta$, тј. $S(x, y, \theta) \in K$, што значи да је скуп K конвексан. $\square$

Дефиниција 2.4.10 ([65])**.** *Менгеров PM-простор $(X, \mathcal{F}, T)$ поседује конвексну структуру ако за сваки затворен, вероватносно полуограничен и конвексан скуп $Y \subset X$, који се састоји од најмање две различите тачке, постоји тачка $x \in Y$ која није дијаметрална, тј. ако постоји $t_0 > 0$ тако да важи*

$$\inf_{y \in Y} \sup_{\varepsilon < t_0} F_{x,y}(\varepsilon) > \delta_Y(t_0).$$

Очигледно компактни и конвексни скупови у конвексном метричком простору поседују нормалну структуру (видети рад [99]).

Дефиниција 2.4.11 ([65]). *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ конвексан Менгеров PM-простор и $Y \subseteq X$. Затворен конвексни омотач од Y, у ознаци* $\mathrm{conv}(Y)$, *је пресек свих затворених, конвексних скупова који садрже Y.*

Лако је видети да скуп $\mathrm{conv}(Y)$ постоји, јер је колекција затворених и конвексних скупова који садрже Y непразна, због чињенице да X припада тој колекцији. Из леме 2.4.4 следи да је овај пресек конвексан скуп. Такође, овај пресек је и затворен скуп, као пресек затворених скупова.

Дефиниција 2.4.12 ([60]). *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ Менгеров PM-простор и нека је f пресликавање, такво да је $f : X \to X$. Кажемо да је f нееxпанзивно пресликавање ако важи*

$$F_{fx,fy}(t) \geq F_{x,y}(t) \tag{2.30}$$

за све $x, y \in X$ и свако $t > 0$.

Лема 2.4.5 ([65]). *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ стриктно конвексан Менгеров PM-простор са конвексном структуром $S(x, y, \theta)$ који задовољава услов (2.27) и нека је $K \subseteq X$ непразан, конвексан и компактан подскуп од X. Тада K поседује нормалну структуру.*

Доказ. Претпоставимо да K не поседује нормалну структуру. Тада постоји затворен, вероватносно полуограничен и конвексан подскуп $Y \subset K$, који садржи најмање две различите тачке тако да Y не садржи недијаметралну тачку тј.

$$\inf_{y \in Y} \sup_{\varepsilon < t} F_{x,y}(\varepsilon) = \delta_Y(t)$$

за свако $x \in Y$. Како је X стриктно конвексан и како је услов (2.27) задовољен, тада важе лема 2.4.1 и лема 2.4.2. Нека су x_1 и x_2 произвољне тачке из Y. Из леме 2.4.2 следи да постоји $\theta_0 \in (0,1)$ тако да $S(x_1, x_2, \theta_0) \notin \{x_1, x_2\}$. Како је Y конвексан скуп, то је $S(x_1, x_2, \theta_0) \in Y$. Скуп Y је затворен подскуп компактног скупа K, тако да је Y компактан скуп. Како је

$$\delta_Y(t) = \inf_{y \in Y} \sup_{\varepsilon < t} F_{y, S(x_1, x_2, \theta)}(t)$$

непрекидна функција са леве стране на компактном скупу Y за произвољно $t > 0$, тада постоје $x_3, x_4 \in Y$ такви да важи

$$\sup_{\varepsilon < t} F_{x_3, S(x_1, x_2, \theta_0)}(\varepsilon) = \delta_Y(t).$$

Из леме 2.4.1 и чињенице да је $F_{x,y}(\cdot)$ неопадајућа функција непрекидна са леве стране имамо да је

$$\begin{aligned}
\delta_Y(t) &= \sup_{\varepsilon<t} F_{x_3,S(x_1,x_2,\theta_0)}(\varepsilon) \\
&= F_{x_3,S(x_1,x_2,\theta_0)}(t) \\
&> \min\left\{F_{x_3,x_1}(t), F_{x_3,x_2}(t)\right\} \qquad (2.31)\\
&= \min\left\{\sup_{\varepsilon<t} F_{x_3,x_1}(\varepsilon), \sup_{\varepsilon<t} F_{x_3,x_2}(\varepsilon)\right\} \\
&\geq \delta_Y(t)
\end{aligned}$$

Дакле, добили смо да је $\delta_Y(t) > \delta_Y(t)$ што представља контрадикцију. Овим је лема доказана. $\square$

Лема 2.4.6 ([65]). *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ конвексан Менгеров PM-простор са конвексном структуром $S(x, y, \theta)$ која задовољава услов* (2.27). *Тада су затворене (ε, λ)-околине $N_x[\varepsilon, \lambda]$ конвексни скупови.*

Доказ. Нека су $a, b \in N_x[\varepsilon, \lambda]$ произвољне тачке. Ово повлачи да је $F_{a,x}(\varepsilon) \geq 1 - \lambda$ и $F_{b,x}(\varepsilon) \geq 1 - \lambda$ за свако $\varepsilon > 0$. Доказаћемо да важи

$$F_{S(a,b,\theta),x}(\varepsilon) \geq 1 - \lambda$$

за свако $\varepsilon > 0$, тј. да важи

$$S(a, b, \theta) \in N_x[\varepsilon, \lambda].$$

Заиста за $\theta \in (0, 1)$, из услова (2.27) имамо да је

$$F_{S(a,b,\theta),x}(\varepsilon) > \min\left\{F_{a,x}(\varepsilon), F_{b,x}(\varepsilon)\right\} \geq \min\{1 - \lambda, 1 - \lambda\} = 1 - \lambda.$$

За $\theta = 0$ или $\theta = 1$ следи да је $S(a, b, 0) = b$ и $S(a, b, 1) = a$, тако да је у овом случају $S(a, b, \theta) \in N_x[\varepsilon, \lambda]$. $\square$

Лема 2.4.7 (Зорнова лема[11]). *Нека је X непразан парцијално уређен скуп у коме сваки ланац има доњу (горњу) границу. Тада X има минималан (максималан) елемент.*

Сада смо у могућности да докажемо оригинални резултат о егзистенцији заједничке непокретне тачке за два пресликавања, који представља део рада [65]. Овај резултат представља уопштење главног резултата Броудера из рада [16]. Такође, овај резултат представља вероватносно уопштење главног резултата који је добио Јешић у раду [60], за постојање непокретне тачке за нееекспанзивна пресликавања на интуиционистичким фази метричким просторима.

[11] Max August Zorn (1906–1993), немачко–амерички математичар.

Став 2.4.5 ([65]). *Нека је $(X,\mathcal{F},T)$ стриктно конвексан Менгеров PM-простор са конвексном структуром $S(x,y,\theta)$ који задовољава услов (2.27) и нека је $K\subseteq X$ непразан, конвексан и компактан подскуп од X. Нека су f и g пресликавања таква да $f,g:K\to K$, $g(K)\cap K\subseteq f(K)$ и нека она за све $x,y\in K$, $x\neq y$ и свако $t>0$ задовољавају услов*

$$F_{f(x),g(y)}(t)\geq F_{x,y}(t). \tag{2.32}$$

Тада, пресликавања f и g имају бар једну заједничку непокретну тачку K.

Доказ. Уочимо, најпре, колекцију Υ свих непразних затворених и конвексних скупова $K_\alpha\subseteq K$ таквих да је $g(K_\alpha)\cap f(K_\alpha)\subseteq K_\alpha$. Ова колекција је непразна зато што је $K\subseteq\Upsilon$. Заиста, скуп K је затворен скуп, као компактан скуп у Хаусдорфовом простору и он задовољава услов $g(K)\cap f(K)\subseteq K$. Ако ову колекцију уредимо релацијом инклузије скупова, тада је $(\Upsilon,\subseteq)$ парцијално уређен скуп. Нека је $\{K_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$ произвољан ланац из ове фамилије. Тада је скуп $\cap_{\alpha\in\Lambda}K_\alpha$ непразан, затворен и конвексан подскуп од K, који је доња граница овог ланца. Заиста, ако претпоставимо да је $\cap_{\alpha\in\Lambda}K_\alpha=\varnothing$, тада из леме 2.4.3 следи да постоји коначна потколекција $K_{\alpha_1}\supseteq\ldots\supseteq K_{\alpha_n}$ ланца $\{K_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$ која је дисјунктна, што је немогуће, с обзиром на то да за овај пресек важи $K_{\alpha_n}\neq\varnothing$. Тада из Зорнове леме 2.4.7 следи да постоји минимални елемент K_0 из колекције Υ такав да је $g(K_0)\cap f(K_0)\subseteq K_0$. Доказаћемо да се скуп K_0 састоји од једне једине тачке и како важи $g\cap f:K_0\to K_0$, ово значи да пресликавања g и f имају заједничку непокретну тачку.

Претпоставимо да се скуп K_0 састоји од најмање две различите тачке. Из леме 2.4.5 следи да скуп K поседује нормалну структуру. Из става 2.4.4 следи да је скуп K_0 вероватносно полуограничен скуп. Како је K_0 затворен и конвексан скуп, следи да постоји недијаметрална тачка $x_0\in K_0$, тј. постоји $t_0>0$ такво важи

$$\inf_{y\in K_0}\sup_{\varepsilon<t_0}F_{x_0,y}(\varepsilon)\quad>\quad\delta_{K_0}(t_0). \tag{2.33}$$

У даљем тексту, користићемо ознаку

$$1-\xi:=\inf_{y\in K_0}\sup_{\varepsilon<t_0}F_{x_0,y}(\varepsilon).$$

Означимо са K_1 затворен конвексан омотач скупа $g(K_0)\cap f(K_0)$. Како је $g(K_0)\cap f(K_0)\subseteq K_0$ имамо да је

$$K_1=\operatorname{conv}\big(g(K_0)\cap f(K_0)\big)=\overline{\operatorname{conv}\big(g(K_0)\cap f(K_0)\big)}\subseteq\overline{\operatorname{conv}(K_0)}=\overline{K_0}=K_0.$$

Дакле, $K_1\subseteq K_0$. Одавде, даље, имамо

$$g(K_1)\cap f(K_1)\subseteq g(K_0)\cap f(K_0)\subseteq\overline{\big(\operatorname{conv}(g(K_0)\cap f(K_0)\big)}=K_1,$$

тј. $g(K_1) \cap f(K_1) \subseteq K_1$. Ово значи да $K_1 \in \Upsilon$, а како је скуп K_0 минимални елемент имамо да $K_1 = K_0$.

Ако неједнакост (2.33) важи, тј. ако важи $1-\xi > \delta_{K_0}(t_0)$, дефинишимо скупове

$$C := \Big(\bigcap_{y \in K_0} N_y[\xi, t_0] \Big) \bigcap K_0$$

и

$$C_1 := \Big(\bigcap_{y \in g(K_0) \cap f(K_0)} N_y[\xi, t_0] \Big) \bigcap K_0.$$

Скуп C је непразан, јер $x_0 \in C$. Заиста, из неједнакости (2.33) имамо да је

$$F_{x_0, y}(t_0) \geq 1 - \xi.$$

Из претходног, закључујемо да тачка x_0 припада $N_y[\xi, t_0]$ за свако $y \in K_0$. Одавде имамо да тачка x_0 припада скупу C.

Доказаћемо да је $C = C_1$. Како важи $g(K_0) \cap f(K_0) \subseteq K_0$, имамо одмах да важи $C_1 \supseteq C$.

Показаћемо, сада, да важи и обрнуто тј. $C_1 \subseteq C$. У ту сврху, доказаћемо да $z \in C_1$ имплицира $z \in C$. Како $z \in C_1$, за произвољно $y \in g(K_0) \cap f(K_0)$ важи да је $F_{y,z}(t_0) \geq 1 - \xi$ тј. $y \in N_z[\xi, t_0]$. Обзиром да је y произвољна тачка из $g(K_0) \cap f(K_0)$ имамо да је

$$g(K_0) \cap f(K_0) \subseteq N_z[\xi, t_0].$$

Из чињенице да је $N_z[\xi, t_0]$ затворен и конвексан скуп који садржи $g(K_0) \cap f(K_0)$, закључујемо да важи

$$K_1 = \overline{\operatorname{conv}\big(g(K_0) \cap f(K_0)\big)} \subseteq N_z[\xi, t_0].$$

Како је $K_0 = K_1$, имамо да је $K_0 \subseteq N_z[\xi, t_0]$. Из последњег имамо да за свако $y \in K_0$ важи $z \in N_y[\xi, t_0]$, што значи да $C_1 \subseteq C$. Дакле, доказали смо да је $C = C_1$.

Сада ћемо доказати да $C \in \Upsilon$. Скуп C је затворен, као пресек затворених скупова. Из леме 2.4.4 и леме 2.4.6 имамо да је скуп C конвексан. Докажимо да је $g(C) \cap f(C) \subseteq C$. У ту сврху, нека је $z \in C$ и $y \in g(K_0) \cap f(K_0)$. Тада, постоји $x \in K_0$ такво да $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Примењујући неједнакост (2.32) за $t = t_0$, имамо да је

$$F_{f(z),y}(t_0) = F_{f(z),g(x)}(t_0) \geq F_{z,x}(t_0) \geq 1 - \xi.$$

Ово значи да је $f(z) \in C_1$. Како је z произвољна тачка из C, добијамо да важи $f(C) \subseteq C_1$. Због $C_1 = C$, имамо да је $f(C) \subseteq C$.

С друге стране, важи

$$F_{g(z),y}(t_0) = F_{g(z),f(x)}(t_0) \geq F_{z,x}(t_0) \geq 1 - \xi.$$

То значи да је $g(z) \in C_1$. Како је z произвољна тачка из C добијамо да је $g(C) \subseteq C_1$ и због $C_1 = C$, имамо да је $g(C) \subseteq C$. Коначно, добијамо $g(C) \cap f(C) \subseteq C$.

Како је $C \subseteq K_0$ и како је K_0 минимални елемент из колекције Υ, следи да је $C = K_0$. Сада имамо да је

$$\delta_C(t_0) \geq 1 - \xi > \delta_{K_0}(t_0).$$

Ово је контрадикција са $C = K_0$, тј. претпоставка да скуп K_0 садржи најмање две различите тачке је погрешна, што значи да K_0 садржи тачно једну тачку која је заједничка непокретна тачка пресликавања g и f. Овим је доказ завршен. $\square$

Сада ћемо дати вероватносну верзију главног резултата из рада [60] и показаћемо да је он последица претходно доказаног става.

Став 2.4.6. *Нека је $(X, \mathcal{F}, T)$ стриктно конвексан Менгеров PM-простор са конвексном структуром $S(x, y, \theta)$ која задовољава услов (2.27) и нека је $K \subseteq X$ непразан, конвексан и компактан подскуп од X. Нека је f нееспанзивно пресликавање, такво да је $f : K \to K$. Тада пресликавање f има бар једну непокретну тачку на скупу K.*

Ако у ставу 2.4.5 узмемо да је $g = f$, имамо да је пресликавање f такво да $f : K \to K$ и у овом случају, из услова (2.32) и (2.33), добијамо да је пресликавање f нееспанзивно на скупу K. Јасно је да се, сада, став 2.4.6 своди на став 2.4.5.

За следећи резултат, који је доказала Була у раду [17], С. Јешић је у свој докторској дисертацији [59] показао да је он последица става 2.4.6.

Став 2.4.7. *Нека је (X, d) стриктно конвексан метрички простор са конвексном структуром $W(x, y, \theta)$ који за свако $\theta \in (0, 1)$ и $x, y, z \in X$ испуњава услов*

$$d\big(z, W(x, y, \theta)\big) < \max\big\{d(z, x), d(z, y)\big\}. \tag{2.34}$$

Нека је $K \subseteq X$ непразан, конвексан и компактан подскуп од X и нека је f нееспанзивно пресликавање, такво да је $f : K \to K$. Тада пресликавање f има бар једну непокретну тачку на скупу K.

Пример простора који је стриктно конвексан метрички простор и који задовољава услов (2.34) jесте простор $\mathbb{R}^n$ са стандардном еуклидском метриком и конвексном структуром $W(x, y, \theta) = \theta x + (1 - \theta)y$.

Глава 3

Генералисани инверз и асимптотске релације еквиваленције

3.1 Увод

Као што је већ речено у поглављу 1.8, у овој глави ћемо извршити одређене генерализације следећег става који је модификована комбинација неких резултата из рада [9] (такође видети [13, страна 190, 14 (ii), (iii)]). Добијени резултати који ће овде бити изнети су публиковани у коауторству у радовима [37] и [38].

Став А. *Нека су функције* $f, g \in \mathcal{A}$ *и претпоставимо да је* f *правилно променљива функција чији је индекс променљивости* $\rho > 0$. *У том случају важи:*

(а) *ако* $g \in [f]_\sim$, *онда* $g^\leftarrow \in [f^\leftarrow]_\sim$;

(б) *ако* $g^\leftarrow \in [f^\leftarrow]_\sim$, *онда* $g \in [f]_\sim$.

Нека проширења овог става могу се наћи у радовима [18], [33] и [36]. Такође, неке модификације овог става су дате и у радовима [19] и [35], али је у њима посматрана другачија асимптотска релација, у процесу инвертовања функција, у односу на ону која ће бити посматрана у овом раду.

Једно проширење *става А* за слабу асимптотску релацију еквиваленције за непрекидне и строго растуће функције из класе $\mathcal{A}$ доказано је у раду [34]. У наредном одељку ми ћемо доказати ставове који проширују претходно поменуте резултате и којима се потпуно утврђује однос између слабе асимптотске релације еквиваленције и генералисаног инверза у функционалној класи $\mathcal{A}$.

3.2 Генералисани инверз и слаба асимптотска релација еквиваленције

Како је већ речено у уводу ове главе, у овом поглављу ћемо се бавити односом између слабе асимптотске релације еквиваленције и генералисаног инверза у класи $\mathcal{A}$ чији су елементи све неопадајуће и неограничене функције које су дефинисане на интервалу $[a, \infty)$, где је $a > 0$. Главни резултат у овом одељку биће став којим се даје потпуна карактеризација функционалне класе $ORV \cap \mathcal{A}$, где је ORV класа свих $\mathcal{O}$–правилно променљивих функција (у смислу Карамате).

Став 3.2.1 ([37]). *Нека функције $f, g \in \mathcal{A}$ и функција $f^{\leftarrow} \in ORV$. Ако додатно важи да $g \in \{f\}$, тада $g^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$.*

Доказ. Ако функције $f, g \in \mathcal{A}$ и важи да $f^{\leftarrow} \in ORV$, као и $g \in \{f\}$, тада постоје константе $m, M \in \mathbb{R}^+$ $(m \leq M)$ такве да важи

$$m \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq M, \tag{3.1}$$

за $x \geq x_0$, па имамо да је

$$g(x) \leq M f(x),$$

за $x \geq x_0$. Даље, важи

$$g^{\leftarrow}(x) \geq f^{\leftarrow}\left(\frac{x}{M}\right),$$

за $x \geq x_0$, тј.

$$\frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} \geq \frac{f^{\leftarrow}(\frac{x}{M})}{f^{\leftarrow}(x)}, \tag{3.2}$$

за $x \geq x_0$. Из неједнакости (3.1), такође, имамо

$$g(x) \geq m f(x),$$

за $x \geq x_0$, одакле закључујемо да важи

$$g^{\leftarrow}(x) \leq f^{\leftarrow}\left(\frac{x}{m}\right),$$

за $x \geq x_0$, тј. важи

$$\frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} \leq \frac{f^{\leftarrow}(x/m)}{f^{\leftarrow}(x)}, \tag{3.3}$$

за $x \geq x_0$. Из неједнакости (3.2) и неједнакости (3.3) тада добијамо

$$\frac{f^{\leftarrow}(\frac{x}{M})}{f^{\leftarrow}(x)} \leq \frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} \leq \frac{f^{\leftarrow}(\frac{x}{m})}{f^{\leftarrow}(x)},$$

за $x \geq x_0$. Из последње неједнакости тада важи

$$\underline{k}_{f^{\leftarrow}}\left(\frac{1}{M}\right) \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} \leq \underline{k}_{f^{\leftarrow}}\left(\frac{1}{m}\right),$$

и

$$\overline{k}_{f^{\leftarrow}}\left(\frac{1}{M}\right) \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} \leq \overline{k}_{f^{\leftarrow}}\left(\frac{1}{m}\right),$$

па добијамо

$$0 < \underline{k}_{f^{\leftarrow}}\left(\frac{1}{M}\right) \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} \leq \overline{k}_{f^{\leftarrow}}\left(\frac{1}{m}\right),$$

тј. добијамо да је $g^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$. □

Пример 3.2.1. *У општем случају, ако $g^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$, тада не мора обавезно да важи да $g \in \{f\}$. На пример, за функцију $f(x) = e^x, x \geq 1$ и функцију $g(x) = \frac{1}{2}e^x, x \geq 1$, важи да $g \notin \{f\}$.*

Став 3.2.2 ([37])**.** *Нека су $f, g \in \mathcal{A}$. Ако $g^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$ за сваку функцију $g \in \{f\}$, тада важи $f^{\leftarrow} \in ORV$ ($g^{\leftarrow} \in \{ORV\}$).*

Доказ. Нека је $f \in \mathcal{A}$ и нека за свако $g \in \mathcal{A}$ важи $g^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$, када је $g \in \{f\}$. За произвољно и фиксирано $\lambda > 0$, посматрајмо функцију $g_1(x) = \lambda f(x)$, за $x \geq a$. Тада је очигледно $g_1 \in \{f\}$, одакле, на основу претпоставке става важи $g_1^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$. Како, даље, важи

$$g_1^{\leftarrow}(x) = f^{\leftarrow}\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

за $x \geq \lambda a$, имамо

$$\infty > M(\lambda) \geq \limsup_{x\to\infty} \frac{f^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x/\lambda)} = \limsup_{t\to\infty} \frac{f^{\leftarrow}(\lambda t)}{f^{\leftarrow}(t)} = \overline{k}_{f^{\leftarrow}}(\lambda).$$

Дакле, важи $f^{\leftarrow} \in ORV$.

Даље, како на основу претпоставке става важи да $g^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$, за свако $g \in \{f\}$, произилази да је $g^{\leftarrow}(x) = h(x) f^{\leftarrow}(x)$, за $x \geq f(a)$, где је

$$0 < \frac{1}{A(g)} \leq h(x) \leq A(g) < \infty,$$

за свако $x \geq f(a)$. Стога, важи

$$\overline{k}_{g^{\leftarrow}}(\lambda) \leq \overline{k}_{f^{\leftarrow}}(\lambda) \cdot A^2(g) < \infty,$$

за $\lambda > 0$, тј. доказали смо да је $g^{\leftarrow} \in ORV$. □

Да бисмо доказали наредни став, најпре, ћемо доказати следећу лему.

Лема 3.2.1 ([37])**.** *Нека функција $f \in PI^*$. Тада постоји неко $\lambda_0 \geq 1$ и најмање једна функција $c(\lambda) > 1$ за свако $\lambda > \lambda_0$, која зависи од функције f, тако да важи $\lim_{\lambda\to\infty} c(\lambda) = \infty$ и $f(\lambda x) \geq c(\lambda) \cdot f(x)$ за свако $x \geq x_0(\lambda) > 0$.*

Доказ. Нека је
$$\underline{k}_f(\lambda) = \liminf_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)},$$
када $\lambda > \lambda_0 \geq 1$ и дефинишимо функцију
$$c(\lambda) = \frac{1}{2}(\underline{k}_f(\lambda) + 1),$$
за такво λ. Тада $c(\lambda) > 1$, за $\lambda > \lambda_0$.

Даље, нека је $\lambda_1 > \lambda_0 \geq 1$. Ако $\lambda \in [\lambda_1^n, \lambda_1^{n+1})$ и $n \geq 2$ добијамо
$$\begin{aligned}\underline{k}_f(\lambda) &\geq \liminf_{x\to\infty} \frac{f(\lambda_1 x)}{f(x)} \cdot \ldots \cdot \liminf_{x\to\infty} \frac{f(\lambda_1^{n-1} x)}{f(\lambda_1^{n-2} x)} \cdot \liminf_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(\lambda_1^{n-1} x)} \\ &= \Big(\underline{k}_f(\lambda_1)\Big)^{n-1} \cdot \left(\underline{k}_f\left(\frac{\lambda}{\lambda_1^{n-1}}\right)\right),\end{aligned}$$
што даје
$$\lim_{\lambda\to\infty} \underline{k}_f(\lambda) = \infty,$$
тако да имамо
$$\lim_{\lambda\to\infty} c(\lambda) = \infty.$$
□

Наредна два става имају своје аналогоне у случају када се посматра асимптотски квазиинверз уместо генералисаног инверза, што је показано раду [23, Став 4.1 и Став 4.2].

Став 3.2.3 ([37])**.** *Нека функција $f \in \mathcal{A}$. Тада $f \in PI^*$ ако и само ако $f^{\leftarrow} \in ORV$.*

Доказ. Најпре, претпоставимо да $f \in \mathcal{A} \cap PI^*$. Тада, за неко $\lambda_0 \geq 1$ и за свако $\lambda > \lambda_0$, важи
$$f(\lambda x) \geq c(\lambda) f(x),$$
за $x \geq x_0 = x_0(\lambda)$, где је
$$c(\lambda) = c_f(\lambda) > 1,$$
за $\lambda > \lambda_0$. Стога, за овако дефинисане λ и x имамо
$$\frac{f(\lambda x)}{c(\lambda)} \geq f(x),$$
тако да добијамо
$$\frac{f^{\leftarrow}\big(c(\lambda) x\big)}{\lambda} \leq f^{\leftarrow}(x).$$

Дакле, за овако одређено λ имамо

$$\overline{k}_{f^{\leftarrow}}\big(c(\lambda)\big) \leq \lambda < \infty.$$

На тај начин добијамо $f^{\leftarrow} \in ORV$.

Претпоставимо сада обрнуто, тј. да важи $f^{\leftarrow} \in ORV \cap \mathcal{A}$. Тада, на основу резултата из рада [3], имамо да је

$$\limsup_{x\to\infty} \sup_{\lambda\in[1,2]} \frac{f^{\leftarrow}(\lambda x)}{f^{\leftarrow}(x)} = \limsup_{x\to\infty} \frac{f^{\leftarrow}(2x)}{f^{\leftarrow}(x)} = \overline{k}_{f^{\leftarrow}}(2) \geq 1.$$

Даље, за свако $\varepsilon > 0$ постоји $x_0 = x_0(\varepsilon) > 0$ такво да је

$$\sup_{\lambda\in[1,2]} \frac{f^{\leftarrow}(\lambda x)}{f^{\leftarrow}(x)} \leq \overline{k}_{f^{\leftarrow}}(2) + \varepsilon = M(\varepsilon),$$

за $x \geq x_0$, тако да за свако $x \geq x_0$ и свако $\lambda \in [1,2]$ важи

$$\frac{f^{\leftarrow}(\lambda x)}{f^{\leftarrow}(x)} \leq M(\varepsilon).$$

Сада закључујемо да је следећи низ импликација тачан:

$$\begin{aligned}
\frac{f^{\leftarrow}(\lambda x)}{M(\varepsilon)} \leq f^{\leftarrow}(x) \quad &\Rightarrow \quad \left(\left(\frac{f(M(\varepsilon)x)}{\lambda}\right)^{\leftarrow}\right)^{\leftarrow} \geq \big(f^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow} \\
&\Rightarrow \quad f(x) \leq \frac{f\big(M^2(\varepsilon)x\big)}{\lambda} \\
&\Rightarrow \quad \frac{f\big(M^2(\varepsilon)x\big)}{f(x)} \geq \lambda \\
&\Rightarrow \quad \frac{f\big(M^2(\varepsilon)x\big)}{f(x)} \geq 2 > 1 \\
&\Rightarrow \quad \liminf_{x\to\infty} \frac{f\big(M^2(\varepsilon)x\big)}{f(x)} = \underline{k}_f\big(M^2(\varepsilon)\big) \geq 2 > 1.
\end{aligned}$$

Како је функција $\underline{k}_f(s)$ неопадајућа за $s > 0$, имамо да за њу важи

$$\underline{k}_f(\lambda) > 1,$$

за $\lambda > M^2(\varepsilon) > 1$, одакле, добијамо да $f \in PI^* \cap \mathcal{A}$. □

Из претходног става закључујемо да важи следећа последица.

Последица 3.2.1 ([37])**.** *Нека $f \in \mathcal{A}$. Тада $f, f^{\leftarrow} \in ORV$ ако и само ако $f \in ORV \cap PI^*$ ($f^{\leftarrow} \in ORV \cap PI^*$).*

Став 3.2.4 ([37]). *Нека $f \in \mathcal{A}$. Тада $f \in ORV$ ако и само ако $f^{\leftarrow} \in PI^*$.*

Доказ. Претпоставимо, најпре, да $f \in \mathcal{A} \cap ORV$. Тада, на основу резултата из рада [3], имамо

$$\limsup_{x\to\infty} \sup_{\lambda\in[1,2]} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \limsup_{x\to\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = \overline{k}_f(2) \geq 1.$$

Сада, за свако $\varepsilon > 0$, постоји неко $x_0 = x_0(\varepsilon) > 0$ такво да је

$$\sup_{\lambda\in[1,2]} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} \leq \overline{k}_f(2) + \varepsilon = m(\varepsilon),$$

за свако $x \geq x_0$. За то исто x и за свако $\lambda \in [1,2]$, тада имамо да важи

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \leq m(\varepsilon).$$

Стога, $\frac{f(\lambda x)}{m(\varepsilon)} \leq f(x)$, и имамо

$$\begin{aligned}
\frac{f^{\leftarrow}\big(m(\varepsilon)x\big)}{\lambda} \geq f^{\leftarrow}(x) \quad &\Rightarrow \quad f^{\leftarrow}\big(m(\varepsilon)x\big) \geq \lambda f^{\leftarrow}(x)\\
&\Rightarrow \quad f^{\leftarrow}\big(m(\varepsilon)x\big) \geq 2f^{\leftarrow}(x)\\
&\Rightarrow \quad \frac{f^{\leftarrow}\big(m(\varepsilon)x\big)}{f^{\leftarrow}(x)} \geq 2 > 1\\
&\Rightarrow \quad \liminf_{x\to\infty} \frac{f^{\leftarrow}\big(m(\varepsilon)x\big)}{f^{\leftarrow}(x)} \geq 2 > 1\\
&\Rightarrow \quad \underline{k}_{f^{\leftarrow}}\big(m(\varepsilon)\big) < 1.
\end{aligned}$$

Дакле,

$$\underline{k}_{f^{\leftarrow}}(\lambda) > 1,$$

за $\lambda > m(\varepsilon) = \lambda_0 \geq 1$, тако да је $f^{\leftarrow} \in PI^*$.

Даље, претпоставимо да важи обрнуто, тј. да $f^{\leftarrow} \in PI^* \cap \mathcal{A}$. Тада, за произвољно $\lambda_0 \geq 1$ и свако $\lambda > \lambda_0$ имамо

$$f^{\leftarrow}(\lambda x) \geq c(\lambda) \cdot f^{\leftarrow}(x),$$

за свако $x \geq x_0 = x_0(\lambda)$, где је

$$c(\lambda) = c_f(\lambda) > 1,$$

за $\lambda > \lambda_0$. Стога, за такво λ и такво x имамо

$$\frac{f^{\leftarrow}(\lambda x)}{c(\lambda)} \geq f^{\leftarrow}(x),$$

тако да је

$$\left(\frac{f\big(c(\lambda)x\big)}{\lambda}\right)^{\leftarrow} \geq f^{\leftarrow}(x).$$

Тада, слично као у доказу претходног става, имамо да је

$$\frac{f\big(c(\lambda)x\big)}{\lambda} \leq f\left(\sqrt{c(\lambda)}x\right).$$

Сада,

$$\frac{f\big(c(\lambda)x\big)}{f\left(\sqrt{c(\lambda)}x\right)} \leq \lambda$$

и на основу овога, добијамо

$$\overline{k}_f\left(\sqrt{c(\lambda)}\right) \leq \lambda < \infty,$$

за фиксирано $\lambda > \lambda_0$. Другим речима, добијамо $f \in ORV$. □

Последица 3.2.2 ([37]). *Нека $f \in \mathcal{A}$. Тада $f, f^{\leftarrow} \in PI^*$ ако и само ако функција $f \in ORV \cap PI^*$ ($f^{\leftarrow} \in ORV \cap PI^*$).*

Став 3.2.5 ([37]). *Нека $f \in \mathcal{A} \cap ORV$. Тада важи $f(x) \asymp (f^{\leftarrow}(x))^{\leftarrow}$, када $x \to \infty$, тј. $f \in \{(f^{\leftarrow})^{\leftarrow}\}$.*

Доказ. Имамо да важи

$$f(x) \leq \big(f^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow} \leq f(\beta x),$$

за све $x \geq 0$ и $\beta > 1$. Ако претходну неједнакост поделимо функцијом $f(x)$, добијамо

$$1 \leq \frac{\big(f^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}}{f(x)} \leq \frac{f(\beta x)}{f(x)}.$$

Стога,

$$0 < 1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{\big(f^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}}{f(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{\big(f^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}}{f(x)} \leq \overline{k}_f(\beta) < \infty.$$

Дакле, $f(x) \asymp \big(f^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}$, када $x \to \infty$. □

Став 3.2.6 ([37]). *Нека је $f \in \mathcal{A} \cap ORV$ и $g \in \mathcal{A}$. Тада важи $f(x) \asymp g(x)$, када $x \to \infty$, ако и само ако важи $\big(f^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow} \asymp \big(g^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}$, када $x \to \infty$.*

Доказ. Претпоставимо, најпре да $f \in \mathcal{A} \cap ORV$ и $g \in \mathcal{A}$. Ако важи $f(x) \asymp g(x)$, када $x \to \infty$, тада $g \in ORV$, тако да на основу става 3.2.5 имамо да важи $f(x) \asymp \big(f^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}$, када $x \to \infty$, и $g(x) \asymp \big(g^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}$, када $x \to \infty$. Стога, добијамо да важи

$$\big(f^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow} \asymp \big(g^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}, \quad \text{када } \ x \to \infty.$$

Обрнуто, претпоставимо да $f \in \mathcal{A} \cap ORV$, $g \in \mathcal{A}$ и да је $\big(f^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow} \asymp \big(g^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}$, када $x \to \infty$. Тада имамо на основу става 3.2.5 да важи $f(x) \asymp \big(g^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}$, када $x \to \infty$, јер важи $f(x) \asymp \big(f^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}$, када $x \to \infty$. Дакле, функција $\big(g^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}$ припада класи $ORV \cap \mathcal{A}$, за $x \geq a$, . На основу става 3.2.3 имамо да $g^{\leftarrow} \in PI^*$, док на основу става 3.2.4 важи да $g \in ORV$. Стога, на основу става 3.2.5 имамо да је $g(x) \asymp \big(g^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}$, када $x \to \infty$, тако да важи $f(x) \asymp g(x)$, када $x \to \infty$. $\square$

Став 3.2.7 ([37]). *Важе следећа тврђења.*

(а) *Нека $f, g \in \mathcal{A}$ и $f \in PI^* \cap ORV$. Тада је $g \in \{f\}$ ако и само ако $g^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$.*

(б) *Нека је $f \in \mathcal{A}$ и $f \notin ORV \cap PI^*$. Тада постоји функција $g \in \mathcal{A}$ таква да $g \in \{f\}$ и $g^{\leftarrow} \notin \{f^{\leftarrow}\}$, или постоји функција $g \in \mathcal{A}$ таква да $g^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$ и $g \notin \{f\}$.*

Доказ.

(а) Нека $f, g \in \mathcal{A}$ и $f \in PI^* \cap ORV$.

Најпре, претпоставимо да је $g \in \{f\}$. Како је $f \in PI^*$, на основу става 3.2.3 имамо да $f^{\leftarrow} \in ORV$, а на основу става 3.2.1 добијамо да је $g^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$.

Обрнуто, претпоставимо да је $g^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$. Како је $f \in ORV$, на основу става 3.2.5 имамо да важи $f(x) \asymp \big(f^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}$, када $x \to \infty$. Стога, функција $\big(f^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}$ припада класи $ORV \cap \mathcal{A}$, за $x \geq a$. На основу става 3.2.1 следи да важи $\big(f^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow} \asymp \big(g^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow}$, када $x \to \infty$ и на основу става 3.2.6 имамо да важи $f(x) \asymp g(x)$, када $x \to \infty$. На овај начин добијамо да $g \in \{f\}$.

(б) Претпоставимо да $f \in \mathcal{A} \setminus (ORV \cap PI^*)$. Посматраћемо следећа три случаја.

(i) Нека је $f \in ORV \setminus ARV$. Тада на основу последице 3.2.1, $f^{\leftarrow} \notin ORV$. Даље, на основу става 3.2.2, постоји функција $g \in \mathcal{A}$ тако да $g \in \{f\}$ и $g^{\leftarrow} \notin \{f^{\leftarrow}\}$.

(ii) Нека $f \notin ORV \cup PI^*$. Тада на основу става 3.2.3 функција $f^{\leftarrow} \notin ORV$, а на основу става 3.2.4 имамо да $f^{\leftarrow} \notin PI^*$, тако да, на основу става 3.2.2, постоји функција $g \in \mathcal{A}$ таква да $g \in \{f\}$ и $g^{\leftarrow} \notin \{f^{\leftarrow}\}$.

(iii) Нека $f \in PI^* \setminus ORV$. Тада постоји реалан број $p > 1$, тако да важи

$$\overline{k}_f(\lambda) = \limsup_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \infty, \quad \lambda \geq p.$$

Посматрајмо, сада функцију $g(x) = f(px)$, за $x \geq a$. Тада је

$$1 \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \infty,$$

па $g \notin \{f\}$. Како је

$$\begin{aligned} g^{\leftarrow}(x) &= \big(f(px)\big)^{\leftarrow} \\ &= \inf\{y > 0 \mid f(py) > x\} \\ &= \inf\left\{\frac{t}{p} > 0 \mid f(t) > x\right\} \\ &= \frac{f^{\leftarrow}(x)}{p}, \end{aligned}$$

имамо да важи $f^{\leftarrow}(x) \asymp g^{\leftarrow}(x)$, када $x \to \infty$, тако да постоји функција $g \in \mathcal{A}$ таква да $g^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$ и $g \notin \{f\}$. $\square$

Нека је $a > 0$. Функције $f, g : [a, \infty) \to (0, \infty)$ се називају *узајамно инверзно слабо асимптотске у* ∞, што означавамо са $f(x) \overset{*}{\asymp} g(x)$, када $x \to \infty$, ако постоји $\lambda_0 \geq 1$ такво да за свако $\lambda > \lambda_0$ постоји неко $x_0 = x_0(\lambda) > 0$ тако да је

$$f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq g(x) \leq f(\lambda x),$$

за свако $x \geq x_0$ (више о овоме видети нпр. у раду [9]).

Став 3.2.8 ([37])**.** *Нека $f, g \in \mathcal{A}$. Тада важи $f^{\leftarrow}(x) \asymp g^{\leftarrow}(x)$, када $x \to \infty$ ако и само ако важи $f(x) \overset{*}{\asymp} g(x)$, када $x \to \infty$.*

Доказ. Претпоставимо, прво, да $f, g \in \mathcal{A}$ и да важи $f(x) \overset{*}{\asymp} g(x)$, када $x \to \infty$. Тада постоји фиксирано $\lambda_0 \geq 1$ такво да за свако $\lambda > \lambda_0$ имамо

$$f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq g(x) \leq f(\lambda x),$$

за $x \geq x_0 = x_0(\lambda) > 0$. Како за овако λ и овако x важи $g(x) \leq f(\lambda x)$, следи да је

$$g^{\leftarrow}(x) \geq \frac{f^{\leftarrow}(x)}{\lambda}.$$

Одавде имамо

$$\frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} \geq \frac{1}{\lambda},$$

за такве λ и x. Из претходног, тада важи

$$f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq g(x),$$

за такве λ и x тј. важи

$$\lambda f^{\leftarrow}(x) \geq g^{\leftarrow}(x),$$

за такво λ и довољно велико x и, стога,

$$\frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} \leq \lambda.$$

Сада следи

$$0 < \frac{1}{\lambda} \leq \frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} \leq \lambda < \infty,$$

па закључујемо да $g^{\leftarrow}(x) \asymp f^{\leftarrow}(x)$, када $x \to \infty$.

Обрнуто, ако претпоставимо да су $f, g \in \mathcal{A}$ и $f^{\leftarrow}(x) \asymp g^{\leftarrow}(x)$, када $x \to \infty$, тада постоји неко $M > 1$, тако да важи

$$\frac{1}{M} \leq \frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} \leq M,$$

за $x \geq x_0(M) > 0$. Прво, за такво x имамо $g^{\leftarrow}(x) \leq M f^{\leftarrow}(x)$, па следи

$$g^{\leftarrow}(x) \leq \left(f\left(\frac{x}{M}\right)\right)^{\leftarrow}$$

и стога је

$$(g^{\leftarrow}(x))^{\leftarrow} \geq \left(\left(f\left(\frac{x}{M}\right)\right)^{\leftarrow}\right)^{\leftarrow}.$$

Даље, за такво x и неко $\lambda > 1$ имамо да је

$$f\left(\frac{x}{M}\right) \leq g(\lambda x).$$

Ако је $\lambda > 1$ и $x \geq x_0$, узмимо да је $t = \lambda x$. Тада за свако $t \geq t_0$, имамо

$$f\left(\frac{t}{\lambda M}\right) \leq g(t).$$

Даље, за исто x, имамо да је

$$g^{\leftarrow}(x) \geq \frac{f^{\leftarrow}(x)}{M},$$

па је

$$g^{\leftarrow}(x) \geq \big(f(Mx)\big)^{\leftarrow}.$$

Стога важи

$$\big(g^{\leftarrow}(x)\big)^{\leftarrow} \leq \Big(\big(f(Mx)\big)^{\leftarrow}\Big)^{\leftarrow}$$

и одатле следи

$$g(x) \leq f(\lambda M x),$$

за неко $\lambda > 1$ и $x \geq x_0$. За $t = x$ добијамо да важи

$$g(t) \leq f(\lambda M t)$$

за неко $\lambda > 1$ и $t \geq x_0$. На тај начин, ако је $\lambda > 1$ и $t \geq t_0 = t_0(\lambda)$ следи да важи

$$f\left(\frac{t}{\lambda M}\right) \leq g(t) \leq f(\lambda M t).$$

Узимајући $s = \lambda M > M > 1$, за свако $s > M > 1$ имамо да је

$$f\left(\frac{t}{s}\right) \leq g(t) \leq f(st),$$

за $t \geq t_0(s)$. Одавде, коначно, добијамо да $f(x)\overset{*}{\asymp}g(x)$, када $x \to \infty$. □

За доказ наредног става користићемо претходно доказану лему 3.2.1.

Став 3.2.9 ([37]). *Нека $f, g : [a, \infty) \to (0, \infty)$, $(a > 0)$ и нека је $f \in PI^*$. Ако $g \in \{f\}$, тада $f(x)\overset{*}{\asymp}g(x)$, када $x \to \infty$.*

Доказ. Како је $f \in PI^*$, тада на основу леме 3.2.1, постоји функција $c(\lambda) > 1$, за $\lambda > \lambda_0 \geq 1$, која зависи од функције f, таква да важи

$$f(\lambda x) \geq c(\lambda) f(x),$$

за свако $\lambda > \lambda_0$ и свако $x \geq x_0(\lambda) \geq a > 0$, тако да је

$$\lim_{\lambda \to \infty} c(\lambda) = \infty.$$

Како $g \in \{f\}$, тада постоји реалан број $M > 1$, такав да је

$$\frac{1}{M} \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq M,$$

за свако $x \geq x_1(M) = x_1 > 0$. Стога, за $x \geq \max\{x_0, x_1\}$ имамо

$$f(\lambda x) \geq c(\lambda) f(x) \geq \frac{c(\lambda) g(x)}{M}.$$

Како је

$$\frac{c(\lambda)}{M} \geq 1,$$

за $\lambda > \lambda'$, добијамо $f(\lambda x) \geq g(x)$ за такво λ и такво x. Даље, како

$$\overline{k}_f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\underline{k}_f(\lambda)},$$

за $\lambda \geq \lambda_0$, за такво λ, такође, имамо

$$\overline{k}_f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{c(\lambda)}.$$

Дакле, за такво λ и свако $x \geq x_2(\lambda) = x_2 > 0$ имамо

$$f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq \frac{2f(x)}{1+c(\lambda)}.$$

Даље, за такво λ и $x \geq \max\{x_1, x_2\}$ имамо

$$f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq \frac{2f(x)}{1+c(\lambda)} \leq \frac{2Mg(x)}{1+c(\lambda)}.$$

Како је

$$\frac{2M}{1+c(\lambda)} \leq 1$$

за $\lambda \geq \lambda''$, имамо да је $f(\frac{x}{\lambda}) \leq g(x)$ за овако изабране λ и x. Даље,

$$f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq g(x) \leq f(\lambda x),$$

за $\lambda \geq \max\{\lambda', \lambda''\}$ и $x \geq \max\{x_0, x_1, x_2\}$, што значи да је $f(x) \overset{*}{\asymp} g(x)$, $x \to \infty$. $\square$

Став 3.2.10 ([37]). *Нека $f, g : [a, \infty) \to (0, \infty)$ $(a > 0)$ и нека $f \in ORV$. Ако важи $f(x) \overset{*}{\asymp} g(x)$, када $x \to \infty$, тада $g \in \{f\}$.*

Доказ. Из свих претпоставки става 3.2.10 добијамо да је

$$\frac{f(\frac{x}{\lambda})}{f(x)} \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq \frac{f(\lambda x)}{f(x)},$$

за свако $\lambda > \lambda_0 \geq 1$ и свако $x \geq x_0 = x_0(\lambda) \geq a > 0$. Стога, за $\lambda > \lambda_0$ и зато што $f \in ORV$, имамо

$$0 < \underline{k}_f\Big(\frac{1}{\lambda}\Big) \leq \liminf_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} \leq \limsup_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} \leq \overline{k}_f(\lambda) < \infty,$$

што повлачи да важи $f(x) \asymp g(x)$, када $x \to \infty$, тј. $g \in \{f\}$. $\square$

Из става 3.2.10 произилази следећа последица.

Последица 3.2.3 ([37]). *Нека $f, g : [a, \infty) \to (0, \infty)$, $(a > 0)$ и нека $f \in ORV \cap PI^*$. Тада $g \in \{f\}$ ако и само важи $f(x) \overset{*}{\asymp} g(x)$, када $x \to \infty$.*

Уочимо да класа $ORV \cap PI^*$ садржи све правилно променљиве функције чији је индекс променљивости $\rho > 0$, као и функције из класе ERV (за дефиницију ове класе видети нпр. рад [13]), чији је доњи индекс Матушевске позитиван (о овоме видети нпр. рад [79]). Још општије, ова класа садржи све функције из класе $IRV \cap ARV$ (видети рад [36]). Такође, приметимо да ова класа не садржи ниједну споро променљиву Караматину функцију и рапидно променљиву функцију у смислу де Хана (о овоме видети нпр. рад [52]).

Пример 3.2.2 ([37]). *Функција* $f(x) = (2 + \sin x)x$*,* $x \geq 1$*, задовољава услов*

$$f \in (PI^* \cap ORV) \setminus (ARV \cap IRV).$$

Завршићемо ово поглавље следећим отвореним питањем.

Да ли је класа $ORV \cap PI^*$ *највећа класа за коју последица 3.2.3 остаје на снази?*

3.3 Однос слабе асимптотске релације еквиваленције и јаке асимптотске релације еквиваленције и генералисаног инверза

Као и у претходном поглављу посматраћемо класу $\mathcal{A}$ свих неопадајућих и неограничених функција, које су дефинисане на интервалу $[a, \infty)$, где је $a > 0$. Као главни резултата, у овом поглављу биће дата потпуна карактеризација функционалне класе $R_\infty \cap \mathcal{A}$, где је R_∞ класа рапидно промењивих функција. Такође, биће дата и карактеризација функционалне класе $PI^* \cap \mathcal{A}$.

У наредном ставу под (а) биће дато једно проширење *става А*, посматрањем слабијег услова $g \in \{f\}$ уместо услова $g \in [f]_\sim$, док се у делу под (б) показује да је $R_\infty \cap \mathcal{A}$ максимална класа, за коју део става под (а) важи.

Став 3.3.1 ([38]). *Нека су* $f, g \in \mathcal{A}$*.*

(а) *Ако* $f \in R_\infty$ *и важи* $g \in \{f\}$*, тада је* $g^\leftarrow \in [f^\leftarrow]_\sim$*.*

(б) *Ако* $g^\leftarrow \in [f^\leftarrow]_\sim$ *за сваку функцију* $g \in \{f\}$*, тада* $f \in R_\infty$ *(* $g \in R_\infty$*).*

Доказ.

(а) Из чињенице да $f \in \mathcal{A} \cap R_\infty$ и на основу резултата добијеног у раду [13], имамо да $f^\leftarrow \in SV$. Како $g \in \{f\}$, тада постоји неки реалан број $m > 0$ такав да важи

$$g(x) \cdot m \leq f(x),$$

за довољно велико x. Штавише, за исти тај број m и довољно велико x важи

$$g^\leftarrow(x) \geq f^\leftarrow(mx)$$

и тада добијамо да је

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{g^\leftarrow(x)}{f^\leftarrow(x)} \geq \lim_{x\to\infty} \frac{f^\leftarrow(mx)}{f^\leftarrow(x)} = 1.$$

С друге стране, постоји реалан број $M > 0$ такав да је

$$f(x) \leq g(x) \cdot M$$

за довољно велико x. Тада, за исти тај број M и довољно велико x важи

$$g^{\leftarrow}(x) \leq f^{\leftarrow}(Mx).$$

Тада имамо

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} \leq \lim_{x\to\infty} \frac{f^{\leftarrow}(Mx)}{f^{\leftarrow}(x)} = 1.$$

Дакле, добијамо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} = \liminf_{x\to\infty} \frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} = \limsup_{x\to\infty} \frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} = 1,$$

тако да $g^{\leftarrow} \in [f^{\leftarrow}]_{\sim}$.

(б) Нека је сада $f \in \mathcal{A}$ и нека је

$$g(x) = \lambda \cdot f(x),$$

за $x \geq a$, где је λ фиксиран и произвољан позитиван број. Тада, $g \in \mathcal{A}$ и $g \in \{f\}$, тако да важи

$$g^{\leftarrow} \in [f^{\leftarrow}]_{\sim}.$$

Из последњег добијамо да, такође, важи

$$g^{\leftarrow}(x) = f^{\leftarrow}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$$

за исто λ и довољно велико x. Сада добијамо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{\leftarrow}(\frac{x}{\lambda})}{f^{\leftarrow}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{g^{\leftarrow}(x)}{f^{\leftarrow}(x)} = 1.$$

Даље, за свако $\alpha > 0$ имамо да је $\overline{k}_{f^{\leftarrow}}(\alpha) = 1$, зато што је λ фиксиран и произвољан позитиван број, одакле добијамо да $f^{\leftarrow} \in SV$ и $f^{\leftarrow} \in \mathcal{A}$. На основу резултата који су добијени у раду [35] закључујемо да је $f \in R_{\infty}$. Ако, сада, изаберемо произвољну функцију $g \in \mathcal{A}$ такву да је $g \in \{f\}$, тада постоје неко $m > 0$ и неко $M > 0$, такви да је

$$f(x) = r(x) \cdot g(x),$$

за $x \geq a$, где је $r(x)$ функција дефинисана за $x \geq a$, а услов $m \leq r(x) \leq M$ је задовољен за довољно велико x. Из свега добијамо

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{g(\lambda x)}{g(x)} \geq \frac{m}{M} \cdot \liminf_{x\to\infty} \frac{f(\lambda x)}{f(x)} = \infty,$$

за $\lambda > 1$, тј. $g \in R_{\infty}$. □

У наредном ставу под (а) биће дато једно проширење *става А* посматрањем слабијег услова $g^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$ уместо услова $g^{\leftarrow} \in [f^{\leftarrow}]_{\sim}$, док у делу под (б) показујемо да је $PI^* \cap \mathcal{A}$ максимална класа за коју део става под (а) важи.

Став 3.3.2 ([38])**.** *Нека* $f, g \in \mathcal{A}$.

(а) *Ако* $f \in PI^*$ *и* $g \in [f]_{\sim}$, *тада је* $g^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$.

(б) *Ако* $g^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$ *за сваку функцију* $g \in [f]_{\sim}$, *тада* $f \in PI^*$ *(*$g \in PI^*$*).*

Доказ.

(а) Доказ овог тврђења је директна последица става 3.2.1 из рада [37]. Такође, методологија доказивања овог дела става је аналогна методологији која је коришћења за доказивање става 3.2.1 под (а).

(б) Нека је $f \in \mathcal{A}$ и нека је

$$g_1(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot f(x),$$

за $x \geq a$ (где ћемо претпоставити да је $a > 1$ без губитка општости). Тада добијамо да $g_1 \in [f]_{\sim}$ и да је g_1 строго растућа функција из $\mathcal{A}$. Ово повлачи да $g_1^{\leftarrow} \in \{f^{\leftarrow}\}$ и да је $g_1^{\leftarrow}$ непрекидна функција из $\mathcal{A}$. Стога, за сваку строго растућу функцију $g \in \mathcal{A}$, за коју је $g \in [g_1]_{\sim}$, добијамо да $g^{\leftarrow} \in \{g_1^{\leftarrow}\}$. Стога, постоји реалан број $M_g \in (0, \infty)$, придружен функцији g, такав да је

$$\begin{aligned}
\limsup_{x\to\infty} \frac{g_1^{\leftarrow}\big(g(x)\big)}{g_1^{\leftarrow}\big(g_1(x)\big)} &= \limsup_{x\to\infty} \frac{g_1^{\leftarrow}\big(g(x)\big)}{x} \\
&= \limsup_{x\to\infty} \frac{g_1^{\leftarrow}\big(g(x)\big)}{g^{\leftarrow}\big(g(x)\big)} \\
&\leq \limsup_{x\to\infty} \frac{g_1^{\leftarrow}(x)}{g^{\leftarrow}(x)} \\
&= M_g \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Нека је, сада, $\alpha(x)$ непрекидна функција, за $x \geq a$, таква да је $\alpha(x) \geq 1$, за $x \geq a$ и $\alpha(x) \to 1$, када $x \to \infty$. Посматрајмо, даље, функцију

$$r(x) = \max_{a \leq t \leq x} h(t),$$

за $x \geq a$, где је функција $h(x)$ дефинисана на следећи начин

$$h(x) = x \cdot \alpha(x),$$

за $x \geq a$. Уочимо да је функција $r(x)$ непрекидна, неопадајућа и $r(x) \to \infty$, када $x \to \infty$. Такође, задовољена је и следећа неједнакост

$$r(x) \geq \alpha(x) \cdot x,$$

за $x \geq a$. Сада ћемо доказати да је $r(x) \sim x$. Да бисмо ово доказали, узећемо да је $\varepsilon > 0$. Тада постоји $x_1 = x_1(\varepsilon) \geq a$ такво да је

$$1 \leq \frac{h(x)}{x} < 1 + \varepsilon,$$

за свако $x \geq x_1$ и постоји $x_2 = x_2(\varepsilon) \geq x_1$ такво да је

$$h(x) \geq \max_{a \leq u \leq x_1} h(u),$$

за свако $x \geq x_2$. Стога, за свако $x \geq x_2$ постоји функција $v(x)$ која узима вредности из интервала $[x_1, x]$ таква да важи

$$1 \leq \frac{r(x)}{x} = \frac{1}{x} \max_{a \leq u \leq x} h(u) = \frac{1}{x} \max_{x_1 \leq u \leq x} h(u) = \frac{1}{x} h\big(v(x)\big) \leq \frac{h\big(v(x)\big)}{v(x)} < 1 + \varepsilon,$$

одакле добијамо да је $r(x) \sim x$.

Дефинишимо сада функцију

$$r_1(x) = 1 - \frac{1}{x} + r(x),$$

за $x \geq a$ (и без губитка општости претпоставимо да је $a > 1$). Тада је функција r_1 из класе $\mathcal{A}$ строго растућа и непрекидна, таква да је $r_1(x) \sim x$. Одавде имамо

$$1 \leq \liminf_{x \to \infty} \frac{g_1^{\leftarrow}\big(\alpha(x) \cdot x\big)}{g_1^{\leftarrow}(x)} \leq \limsup_{x \to \infty} \frac{g_1^{\leftarrow}\big(\alpha(x) \cdot x\big)}{g_1^{\leftarrow}(x)} \leq \limsup_{x \to \infty} \frac{g_1^{\leftarrow}\big(r_1(x)\big)}{g_1^{\leftarrow}(x)}.$$

Из услова

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{g_1^{\leftarrow}\big(g(x)\big)}{g_1^{\leftarrow}\big(g_1(x)\big)} \leq M_g < \infty$$

за довољно велико x, имамо

$$\frac{g_1^{\leftarrow}\Big(r_1\big(g_1(x)\big)\Big)}{g_1^{\leftarrow}\big(g_1(x)\big)} \leq M_{r_1 \circ g_1} < \infty,$$

где је $M_{r_1 \circ g_1}$ позитиван реалан број који је придружен композицији пресликавања $r_1 \circ g_1$ на исти начин, као што је M_g придружен функцији g. Користећи претходно доказане чињенице добијамо да је

$$\frac{g_1^{\leftarrow}\big(r_1(x)\big)}{g_1^{\leftarrow}(x)} \leq M_{r_1 \circ g_1} < \infty,$$

задовољено за довољно велико x. Коначно, добијамо да важи

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{g_1^{\leftarrow}\big(\alpha(x) \cdot x\big)}{g_1^{\leftarrow}(x)} < \infty.$$

Сада ћемо претпоставити, да постоје следећа два низа:

(i) низ $\{\lambda_n\}$ такав да је $\lambda_n \geq 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \to 1$, када $n \to \infty$, и

(ii) растући низ $\{x_n\}$ такав да је $x_n \geq a$, за свако $n \in \mathbb{N}$, $x_n \to \infty$, када $n \to \infty$ и за који важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_1^{\leftarrow}(\lambda_n \cdot x_n)}{g_1^{\leftarrow}(x_n)} = \infty.$$

Посматрајмо функцију $\alpha(x)$, за $x \geq a$, такву да је

$$\alpha(x_n) = \lambda_n,$$

за $n \in \mathbb{N}$, где је $\alpha(x)$ линеарна и непрекидна функција за $x \in [x_n, x_{n+1}]$ и $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha(x) = \lambda_1$ за $x \in [a, x_1]$. Ова функција $\alpha : [a, \infty) \to [1, \infty)$ је непрекидна функција и за њу важи

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = 1.$$

Из дефиниције функције α имамо да је

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{g_1^{\leftarrow}\big(\alpha(x_n) \cdot x_n\big)}{g_1^{\leftarrow}(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{g_1^{\leftarrow}(\lambda_n \cdot x_n)}{g_1^{\leftarrow}(x_n)} = \infty.$$

Ово је у контрадикцији са чињеницом да је

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{g_1^{\leftarrow}\big(\alpha(x) \cdot x\big)}{g_1^{\leftarrow}(x)} < \infty$$

за коју смо претходно доказали. Дакле, добили смо да важи

$$\limsup_{x\to\infty \lambda\to 1} \frac{g_1^{\leftarrow}(\lambda x)}{g_1^{\leftarrow}(x)} = A$$

за неко $A \in (0, \infty)$ тј. добили смо да за свако $\varepsilon > 0$ постоје $x_0 \geq a$ и $\delta > 0$ такви да важи

$$1 \leq \frac{g_1^{\leftarrow}(\lambda x)}{g_1^{\leftarrow}(x)} \leq A + \varepsilon,$$

за свако $x \geq x_0$ и свако $\lambda \in [1, 1 + \delta]$. Стога, за свако $\lambda \in (0, 1 + \delta]$ имамо

$$\overline{k}_{g_1^{\leftarrow}}(\lambda) \leq A + \varepsilon < \infty.$$

С друге стране, из чињенице да функција $g_1^{\leftarrow}$ припада класи $\mathcal{A}$ (и да је неопадајућа) имамо да је

$$\overline{k}_{g_1^{\leftarrow}}(\lambda) < \infty,$$

за свако $\lambda > 0$ (видети [95]). Коначно, добијамо да важи $g_1^{\leftarrow} \in ORV$ и ако применимо резултат из рада [37], имамо да $g_1 \in PI^*$. Штавише, како је

$$g_1(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot f(x)$$

за свако $x \geq a$, имамо

$$\underline{k}_f(\lambda) \geq \underline{k}_{g_1}(\lambda) \cdot \liminf_{x \to \infty} \frac{\lambda x(x-1)}{(\lambda x - 1)x} = \underline{k}_{g_1}(\lambda)$$

за свако $\lambda > 0$ тј. добијамо $f \in PI^*$. $\square$

Аналогно претходном, можемо доказати да $g \in PI^*$ за свако $g \in \mathcal{A}$ такво да $g \in [f]_\sim$.

Литература

[1] H. Adibi, Y. J. Cho, D. O'Regan, R. Saadati, Common fixed point theorems in $\mathscr{L}$-fuzzy metric spaces, *Appl. Math. Comput.* **182** (2006), 820–828.

[2] A. Aghajani, K. Nourouzi, Convex sets in probabilistic normed spaces, *Chaos, Solitons & Fractals* **36(2)** (2008), 322–328.

[3] S. Aljančić, D. Arandjelović, *O*–regularly varying functions, *Publ. Inst. Math. (Beograd)* **22(36)** (1977), 5–22.

[4] N. A. Assad, W. A. Kirk, Fixed-point theorems for set-valued mappings of contractive type, *Pacific J. Math.* **43** (1972), 553—562.

[5] V. G. Avakumović, Sur une extension de la condition de convergence des théorems inverses de sommabilité, *C. R. Acad. Sci. Paris* **200** (1935), 1515–1517.

[6] V. G. Avakumović, Über einen *O*–inversionssatz, *Bull. Int. Acad. Youg. Sci.* **29–30** (1936), 107–117.

[7] V. G. Avakumović, Sur l'équation différentiale de Thomas–Fermi, I, *Publ. Inst. Math. (Beograd)* **1(15)** (1947), 101–113.

[8] V. G. Avakumović, J. Karamata, Über einige Taubersche Satze, derer Asymptotik von Exponentialcharakter ist. l., *Math. Zeit* **41** (1936), 345–356.

[9] A. A. Balkema, J. L. Geluk, L. de Haan, An extension of Karamata's Tauberian theorem and its connection with complementary convex functions, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **30(2)** (1979), 385–416.

[10] S. Banach, Sur la opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales, *Fund. Math.* **3** (1922), 133–181.

[11] V. Berinde, *Iterative Approximation of Fixed Points*, Lecture Notes in Mathematics, Volume **1912**, Springer, Berlin–Heidelberg, 2007.

[12] N. H. Bingham, C. M. Goldie, Extensions of regular variation, I, II, *Proc. London Math. Soc.* **44** (1982), 811–832.

[13] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular variation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.

[14] D. W. Boyd, J. S. Wong, On nonlinear contraction, *Proc. Amer. Math. Soc.* **20** (1969), 458–464.

[15] M.S. Brodskii, D.P. Milman, On the center of a convex set, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR(Russian)* **59** (1948), 837–840.

[16] F. E. Browder, Non-expansive nonlinear operators in a Banach space, *Proc. Nat. Acad. Sci.USA* **54** (1965), 1041–1044.

[17] I. Bula, Strictly convex metric spaces and fixed points, *Math. Moravica* **3** (1999), 5–16.

[18] V. V. Buldygin, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach, Properties of a subclass of Avakumović functions and their generalized inverses, *Ukr. Math. Zh.* **54(2)** (2002), 179–206.

[19] V. V. Buldygin, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach, Some properties of asymptotic quasiinverse function and their applications, I, *Theor. Probability and Math. Statist.* **70** (2005), 11–28.

[20] V. V. Buldygin, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach, On some properties of asymptotic quasi-inverse function and their applications, I, *Theory Probab. Math. Stat.* **70** 2005, 11–28.

[21] V. V. Buldygin, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach, On some properties of asymptotic quasiinverse function and their applications, II, *Theor. Probability and Math. Statist.* **70** (2005), 37–52.

[22] V. V. Buldygin, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach, PRV property and the φ-asymptotic behavior of solutions of stochastic differential equations, *Lith. Math. J.* **47(4)** (2007), 361—378.

[23] V. V. Buldygin, O. I. Klesov, and J. G. Steinebach, On some properties of asymptotically quasi-inverse function, *Teory Imovirn. Mat. Stat.* **77** (2007) 13–27 (in Ukrainian). English transl.: *Theory Probab. Math. Stat.* **77** (2008), 15–30.

[24] Y. J. Cho, H. K. Pathak, S. M. Kang, J. S. Jung, Common fixed points of compatible maps of type (β) on fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Sys.* **93** (1998), 99–111.

[25] L.B. Ćirić, Generalized contractions and fixed-point theorems, *Publ. Inst. Math* **12(26)** (1971), 19–26.

[26] L.B. Ćirić, On fixed point of generalized contractions on probabilistic metric spaces, *Publ. Inst. Math* **18(32)** (1975), 71–78.

[27] L. B. Ćirić, Quasi-contraction non-self mappings on Banach spaces, *Bull. Acad. Serbe Sci. Arts* **23** (1998), 25—31.

[28] L. B. Ćirić, Contractive type non-self mappings on metric spaces of hyperbolic type, *J. Math. Anal. Appl.* **317** (2006), 28—42.

[29] L. B. Ćirić, S. N. Ješić, J. S. Ume, The existence theorems for fixed and periodic points of nonexpansive mappings in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons & Fractals* (2006), doi:10.1016/j.chaos.2006.09.093.

[30] L. B. Ćirić, Common fixed point theorems for family on non-self mappings in convex metric spaces, *Nonlin. Anal.* **71** (2009), 1662–1669.

[31] D. Djurčić, D. R. Kočinac, M. R. Žižović, Some properties of rapidly varying sequences, *Journal Math. Anal. Appl.* **327** (2007), 1297–1306.

[32] D. Djurčić, Lj.D.R. Kočinac, and M.R. Žižović, A few remarks on divergent sequences: Rates of divergence II, *J. Math. Anal. Appl.* **367** (2010), 705–709,.

[33] D. Djurčić, A. Torgašev, Strong asymptotic equivalence and inversion of functions in the class K_c, *Journal Math. Anal. Appl.* **255** (2001), 383–390.

[34] D. Djurčić, A. Torgašev, Weak asymptotic equivalence and inverse functions in the class OR, *Math. Moravica* **7** (2003), 1–6.

[35] D. Djurčić, A. Torgašev, Some asymptotic relations for the generalized inverse, *J. Math. Anal. Appl.* **325** (2007), 1397–1402.

[36] D. Djurčić, A. Torgašev, S. Ješić, The strong asymptotic equivalence and the generalized inverse, *Siber. Math. J.* **49(4)** (2008), 786–795.

[37] D. Djurčić, R. Nikolić, A. Torgašev, The weak asymptotic equivalence and the generalized inverse, *Lith. Math. J.* **50(1)** (2010), 34–42.

[38] D. Djurčić, R. Nikolić, A. Torgašev, The weak and strong asymptotic equivalence relations and the generalized inverse, *Lith. Math. J.* **51(4)** (2011), 472–476.

[39] M. S. El Naschie, On the uncertainty of Cantorian geometry and two-slit experiment, *Chaos, Soliton & Fractals* **9** (1998), 517—529.

[40] M. S. El Naschie, A review of E-infinity theory and mass spectrum of high energy particle physics, *Chaos, Solitons & Fractals* **19** (2004), 209–236.

[41] M. S. El Naschie, Fuzzy Dodecahedron topology and E-infinity spacetime as a model for quantum physics, *Chaos, Soliton & Fractals* **30** (2006), 1025—1033.

[42] M. S. El Naschie, On a fuzzy Kahler-like manifold which is consistent with the two slit experiment, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **6** (2005), 517—529.

[43] M. S. El Naschie, On kähler-like manifold which is consistent with two slit experiment *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **30** (2006), 517–529.

[44] W. Feller, One-side analogues of Karamata's regular variation, *L'Enseignement Math.* **15** (1969), 107–121.

[45] M. Fréschet, Sur quelques points du calcule functionnel, *Rendiconti Circolo Mat. Palermo* **22** (1906), 1–74.

[46] L. Gajić, V. Rakočević, Quasicontraction nonself-mappings on convex metric

spaces and common fixed point theorems, *Fixed Point Theory and Applications* **3** (2005), 365–375.

[47] L. Gajić, V. Rakočević, Pair of non-self-mappings and common fixed points, *Appl. Math. and Comp.* **187** (2007), 999—1006.

[48] A. George, P. Veeramani, On some results in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Sys.* **64** (1994), 395–399.

[49] A. George, P. Veeramani, On some results of analysis for fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Sys.* **90** (1997), 365–368.

[50] D. Göhde, Zum prinzip der Kontraktiven Abbildung, *Math. Nachr.* **30** (1965), 251–258.

[51] M. Grabiec, Fixed point in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Sys.* **125** (1988), 385–389.

[52] L. de Haan, *On Regular variation and its applications to the weak convergence of sample extremes*, Math. Centre tracts, Vol. **32**, CWI, Amsterdam, 1970.

[53] L. de Haan, U. Statdtmüller, Dominated variation and related concepts and Tauberian theorems for Laplace transforms, *Journal Math. Anal. Appl.* **108** (1985), 344–365.

[54] O. Hadžić, Common fixed point theorems in probabilistic metric spaces with a convex structure, *Zb. rad. Prirod.-Mat.Fak. ser. Mat.* **18** (1987), 165–178.

[55] O. Hadžić, E. Pap, *Fixed point theory in the probabilistic metric space*, Mathematics and its Applications, **536** Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[56] M. Imdad, L. Khan, Some common fixed point theorems for family of mappings in metrically convex spaces, *Nonlin. Anal.* **67** (2007), 2717–2726.

[57] M. Imdad, M. Tanveer and M. Hasan, Some Common Fixed Point Theorems in Menger PM Spaces, *Fixed Point Theory and Appl.* Volume 2010 doi:10.1155/2010/819269.

[58] V. I. Istratescu, *Strict convexity and complex strict convexity*, Marcel Dekker Inc., New York and Basel, 1984.

[59] С. Н. Јешић, *Трансверзални простори и фиксне тачке*, Докторска дисертација, Београд, 2006.

[60] S. N. Ješić, Convex structure, normal structure and a fixed point theorem in intuitionistic fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons & Fractals* **41** (2008), 292–301.

[61] S. N. Ješić, N. A. Babačev, Common fixed point theorems in intuitionistic fuzzy metric spaces and $\mathscr{L}$-fuzzy metric spaces with nonlinear contractive conditions, *Chaos, Solitons & Fractals* **37(3)** (2008), 675–687.

[62] S. N. Ješić, D. O'Regan, N. A. Babačev, A Common Fixed Point Theorem for R-

weakly commuting mappings in Probabilistic Spaces with Nonlinear Contractive Conditions, *Appl. Math. Comput.* **201** (2008), 272—281.

[63] S. N. Ješić, N. Babačev, D. O'Regan, R. M. Nikolić, Common fixed point theorems for four mappings defined on $\mathscr{L}$-fuzzy metric spaces with nonlinear contractive type condition, *Fixed Point Theory* **10(2)** (2009), 259–274.

[64] S. N. Ješić, R. M. Nikolić, N. Babačev, Fixed point theorem in strictly convex Menger PM-spaces, рад послат у часопис са *SCI* листе.

[65] S. N. Ješić, R. M. Nikolić, N. Babačev, Fixed point theorem for non-expansive mappings in strictly convex Menger PM-spaces, рад послат у часопис са *SCI* листе.

[66] S. N. Ješić, R. M. Nikolić, N. Babačev, Fixed and common point theorems on probabilistic metric spaces with nonlinear generalized type contraction, рад послат у часопис са *SCI* листе.

[67] G. Jungck, Commuting maps and fixed points, *Am. Math. Mon.* **83** (1976), 261–263.

[68] G. Jungck, Compatible mappings and common fixed points, *Internat. J. Math. & Math. Sci.* **9** (1986), 771–779.

[69] O. Kaleva, S. Seikkala, On fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Sys.* **12** (1984), 215–229.

[70] J. Karamata, Sur un mode de croissance régulière des functions, *Mathematica (Cluj)* **4** (1930), 38–53.

[71] J. Karamata, Sur un mode de croissance régulière. Théorèmes fondamenteaux. *Bull Soc. Math. France* **61** (1933), 55–62.

[72] J. Karamata, Bernerkung über die vorstehende Arbeit des Herrn Avakumović, mit näherer Betrachtung einer Klasse von Funktionen, welche bei den Inversionssätzen vorkommen. *Bull Int. Acad. Youg. Sci.* **29–30** (1936), 117–123.

[73] Y. Kijima, W. Takahashi, A fixed point theorem for non-expansive mappings in metric spaces, *Kodai Math. Sem. Rep.* **21** (1969), 326–330.

[74] W. A. Kirk, A fixed point theorem for mappings which do not increase distances, *Amer. Math. Monthly.* **72** (1965), 1004–1006.

[75] W. A. Kirk, B. Sims, *Handbook of Metric Fixed Point Theory*, Kluwer Academic Press, Dordrecht-Boston-London, 2001.

[76] J. Kramosil, J. Michalek, Fuzzy metric and statistical metric spaces, *Kybernetica* **11** (1975), 326–334.

[77] M. Курилић, *Основи опште топологије*, Универзитет у Новом Саду, Природно–математички факултет у Новом Саду, Едиција Универзитетски уџбеник **73**, 1998.

[78] L. Marek-Crnjac, Higher dimensional dodecahedra as a model of the macro and micro universe in E-infinity Cantorian space-time, *Chaos, Solitons & Fractals* **32** (2007), 944—950.

[79] W. Matuszewska, On a generalization of regularly increasing functions, *Studia Math.* **24** (1964), 271–279.

[80] K. Menger, Statistical metrics, *Proc. Nat. Acad. of Sci., USA* **28** (1942), 535–537.

[81] K. Menger, Probabilistic geometry, *Ibid.* **37** (1951), 226–229.

[82] D. Miheţ, A Banach contraction theorem in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Sys.* **144** (2004), 431–439.

[83] S. N. Mishra, Common fixed points of compatible mappings in PM-spaces,*Math. Japon.* **36** (1991), 283—289.

[84] D. O'Regan, R. Saadati, Nonlinear contraction theorems in probabilistic spaces, *Appl. Math. Comput.* **195** (2008), 86–93.

[85] R. P. Pant, Common Fixed Points of Noncommuting Mappings, *Jour. Math. Anal. Appl.* **248** (2000), 436–440.

[86] J. P. Penot, Fixed point theorems without convexity, *Analyse Nonconvex (1977 Pau). Bull. Soc. Math. France, Memoire* **60** (1980), 143–151.

[87] É. Picard, Mémoire sur la théorie des équations aux derivées partielles et la méthode des approximations successives, *J. Math. Pures Appl.* **6** (1890), 145–210.

[88] E. Rakotch, A note on contractive mappings, *Proc. Amer. Math. Soc.* **13** (1962), 459–465.

[89] P. Rehák, S. Matucci, Regularly varying sequences and second order difference equations, *Journal of difference equations and appl.* **14(1)** (2008), 17–30.

[90] B. E. Rhoades, A fixed point theorem for some non-self mappings, *Math. Japon.* **23** (1978), 457—459.

[91] R. Saadati, A. Razani, H. Adibi, A common fixed point theorem in $\mathscr{L}$-fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons & Fractals* **33** (2007), 358–363.

[92] B. Schweizer, A. Sklar, Statistical metric spaces. *Pacific J. Math.* **10** (1960), 415–417.

[93] B. Schweizer, A. Sklar, *Probabilistic Metric Spaces.* North-Holland, New York: Elsevier, 1983.

[94] V. M. Sehgal, A. T. Bharucha-Reid, Fixed points of contraction mappings in PM-spaces. Math. *System Theory* **6** (1972), 97–102.

[95] E. Seneta, *Functions of Regular Variation*, LNM vol. **506**, Springer, New York,

1976.

[96] S. Sessa, On a weak comutativity condition of mappings in fixed point considerations. *Publ Inst Math (Beograd)* **27(46)** (1982), 149–153.

[97] H. Sherwood, Complete probabilistic metric spaces, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **20** (1971), 117–128.

[98] B. Singh, S. Jain, A fixed point theorem in Menger space through weak compatibility, *J. Math. Anal. Appl.* **301** (2005), 439—448.

[99] W. Takahashi, A convexity in metric space and nonexpansive mappings, *Kodai Math. Sem. Rep.* **22** (1970), 142–149.

[100] M. P. Тасковић, *Основе теорије фиксне тачке*, Завод за уџбенике и наставна средства–Београд, Математичка библиотека **50**, 1986.

[101] R. Saadati, A, Razani, H. Adibi, A common fixed point theorem in $\mathscr{L}$-fuzzy metric spaces, *Chaos, Solitons & Fractals* **32** (2007), 358–363.

[102] Yu. A. Shaskin, *Fixed points*, American Mathematical Society, 1991 (translated from russian).

[103] S. Sharma, Common fixed point theorems in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Syst.* **127** (2002), 345—352

[104] G. Song, Comments on „A common fixed point theorem in a fuzzy metric space“, *Fuzzy Sets and Sys.* **135** (2003), 409–413.

[105] R. Vasuki, P. Veeramani, Fixed point theorems and Cauchy sequences in fuzzy metric spaces, *Fuzzy Sets and Sys.* **135** (2003), 314–334.

[106] A. Wald, On a statistical generalization of metric spaces, *Proc. Nat. Acad. of Sci., USA* **29** (1943), 196–197.

[107] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, *Inform. and Control* (1965), 338–353.

Додатак

Summary

From Freschet's definition of metric space in the early twentieth century, the various generalizations of metric spaces such as Menger spaces, fuzzy metric spaces, intuitionistic fuzzy metric spaces, $\mathscr{L}$-fuzzy metric spaces and others, were obtained. On the other hand, the fundamental theorem in the theory of fixed points in metric spaces represents Banach contractive Principle. This theorem, which for some special cases has already been considered by a Liouville, Picard and Goursat, in the past eight decades till today, has found many important applications and has been generalized in many directions. One of them is the introduction of nonlinear contractive condition by Rakotch in 1962, and then by Boyd and Wong in 1969.

The field of research in this dissertation belongs to the nonlinear functional analysis, and partly to the topology and applied mathematics. Since the basic structures on which we conduct our research are the spaces with nondeterministic distances, the obtained results have applications in modern scientific research in physics. In this dissertation, the nonlinear contractive condition which is associated with different forms of the boundness of sets in the spaces with nondeterministic distances, will be discussed. In addition, we will be discussing the existence and uniqueness of fixed and common fixed points, under conditions of weak commutativity and compatibility for different types of mappings. The hypothesis of the proceeding is that with qualitatively characterization for the domain of mapping, we can relax the conditions of nonlinear contraction and thereby obtain information about the existence or absence of fixed points for this mapping. A special place in this dissertation takes convexity and topological characterization of completeness and compactness of the spaces with nondeterministic distances. These results are associated with the existence of fixed and common fixed points for non-expansive mappings, with nonlinear contractive condition. The main question is how the convex structure and the previously mentioned results, can be transferred to the spaces with nondeterministic distances.

This dissertation, beside Preface and References with 107 items, consists of three chapters:

1. Basic definitions and results;

2. Fixed point theorems for mappings with nonlinear condition defined in spaces with nondeterministic metrics;

3. Generalized inverse and the asymptotic equivalence relations.

In Chapter 1 a brief review of basic results from Fixed Point Theory in metric spaces for contractions and for non-expansive mappings, which were motivations for obtaining some of original results presented in this dissertation, are given. In the past decades, many generalizations of these results have appeared, both in metric spaces, and the spaces with richer structures, which include axiomatics of metric spaces. In this regard, in particular sections of the first chapter, special attention is devoted to probabilistic, fuzzy and $\mathscr{L}$-fuzzy metric spaces. Special section is devoted to the classes of regularly varying functions and to the generalized inverse.

In Chapter 2 original results for existence and uniqueness of fixed point and common fixed point for mappings with nonlinear condition, are given. Due to the nature of these results, they are divided into three sections. The first section presents the theorems for a common fixed point theorem for four mappings defined in $\mathscr{L}$-fuzzy metric spaces. The second result presents fixed and common fixed point theorems for a compatible mappings which satisfies nonlinear generalized contractive type conditions. These results improve previous results due to Ćirić in [26]. The third section presents the results which are related to strictly convex Menger PM-spaces. On one side, using the notion of strict convexity indicates the existence and uniqueness of fixed points for non-self mappings, which satisfy the nonlinear contractive condition. On the other hand, some results in this section are related to the existence of fixed points for non-expansive mappings in strictly convex Menger PM-spaces. In the proof of this result the equivalent of Axiom of choice – Zorn's lemma, is used.

Chapter 3 is devoted to the relationship between the weak asymptotic equivalence relation and the generalized inverse in the class A of all non-decreasing and unbounded functions, defined and positive on a half-axis $[a, +\infty)$ $(a > 0)$. In the main theorem, we prove a proper characterization of the functional class $ORV \cap A$, where ORV is the class of all O–regularly varying functions (in the sense of Karamata). Also, in this chapter we discuss the relationship between the weak and the strong asymptotic equivalence relation and the generalized inverse in the class $\mathcal{A}$. In the main theorem, we prove a proper characterization of the functional class $R_\infty \cap \mathcal{A}$, where R_∞ is the class of all rapidly varying functions. Also, a characterization of the functional class $PI^* \cap \mathcal{A}$ is proved.

Биографија

Николић Рале је рођен 1976. године у Крушевцу. Основну школу и гимназију, природно – математички смер, завршио је у Врњачкој Бањи као носилац Вукове дипломе. Природно – математички факултет у Крагујевцу, одсек Математика, смер Рачунарство и информатика, уписао је 1994. године, где је дипломирао 1999.

године са просечном оценом 8,43.

Од 2000. године био је запослен на Техничком факултету у Чачку где је, најпре, радио у звању асистента – приправника, а од 2007. године и као асистент при Катедри за математику.

На Техничком факултету у Чачку је 2000. године уписао последипломске (магистарске) студије, научна област математичке методе у информатици. Све планом и програмом предвиђене предмете је положио са просечном оценом 9,83. Магистарску тезу под називом *Мера хомогености и припадност и њена примена* одбранио је 2006. године, под менторством проф. др Малише Жижовића. Од новембра 2010. године до новембра 2011. године радио је као асистент, при Катедри за природно – математичке науке, на Војној академији у Београду. Тренутно ради на Математичком факултету у Београду као истраживач сарадник на пројекту, из Програма основних истраживања које финансира Министарство за просвету и науку. Хонорарно је радио на Агрономском факултету у Чачку, Високој техничкој школи у Чачку, као и на Факултету за менаџмент *Браћа Карић*.

Рале Николић има три рада публикована у научним часописима са *SCI* листе:

1. S. N. Ješić, N. A. Babačev, D. O'Regan, **R. M. Nikolić** Common fixed point theorems for four mappings defined on L-fuzzy metric spaces with nonlinear contractive type condition, *Fixed Point Theory*, **10** No. **2** (2009), pp. 259-274. **M 22 (ИФ: 0,700)**;

2. D. Djurčić, **R. Nikolić**, A. Torgašev, The weak asymptotic equivalence and generalized inverse, *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. **50**, No. **1** (2010) Springer, pp. 34-42. **M 23 (ИФ: 0,486)**

3. D. Djurčić, **R. Nikolić**, A. Torgašev, The weak and strong asymptotic equivalence relations and the generalized inverse, *Lithuanian Mathematical Journal*, Vol. **51**, No. **4** (2011), Springer, pp. 472-476. **M 23 (ИФ: 0,486)**

Део добијених резултата у претходно поменутим радовима презентован је на пет међународних конференција и то:

1. 12. Serbian Mathematical Congress, 28. 08. - 02. 09. 2008. год., ПМФ Нови Сад, Србија.

2. Analysis, Topology and Applications 2008 (ATA 2008), 30. 05. - 06. 04. 2008. год., Врњачка Бања, Србија.

3. Analysis, Topology and Applications 2010 (ATA 2010), јун 2010. год., Врњачка Бања, Србија.

4. PRIM 09, Суботица, 25. - 27. мај 2009. год.

5. International Mathematical Conference: Topics in Mathematical Analysis and Graph Theory (A satellite meeting to ICM 2006), MAGT 2006, септембар 2006,

Београд.

До сада је учествовао на три пројекта из Програма основних истраживања које је финансирало Министарство за просвету и науку, од којих је један у току, и то:

1. назив пројекта: **Нелинеарна функционална анализа са применама**; носилац пројекта: *Математички факултет у Београду*; руководилац пројекта: *Др Милан Тасковић*; време трајања: од 2001. године до 2006. године; евиденциони број пројекта: **1457**;

2. назив пројекта: **Неки проблеми савремене математичке анализе**; носилац пројекта: *Математички факултет у Београду*; руководилац пројекта: *Проф. др Александар Торгашев*; време трајања: од 2006. године до 2010. године; евиденциони број пројекта: **144031A**;

3. назив пројекта: **Анализа и алгебра са применама**; носилац пројекта: *Математички факултет у Београду*; руководилац пројекта: *Проф. др Миодраг Матељевић*; време трајања: од 2011. године; евиденциони број пројекта: **174032**.

Учествовао је и на пројекту из Програма енергетске сфикасности:

1. назив пројекта: **Развој и примена логистичких система за коришћење биомаса и отпадног дрвета као енергента у домаћинствима и индустрији**; носилац пројекта: *Технички факултет у Чачку*, руководилац пројекта: *Др Срећко Ћурчић*; време трајања: 2006. – 2009. године, евиденциони број пројекта: **243005A**;

Поред горе наведених радова Рале Николић има и следеће радове који су изложени на научним и стручним скуповима и публиковани у одговарајућим зборницима:

1. **Николић Р.**, Ђурчић Д., Жижовић М., *Фази оцена руководећих тимова*, Зборник радова, SYMOPIS 2003 (XXX симпозијум о операционим истраживањима), Херцег Нови, 2003. година, Математички институт САНУ Београд, стр. 431 – 433, ISBN 86-80593-33-8.

2. Жижовић М., Ђурчић Д., **Николић Р.**, *Homogeneity and belongingness evalution*, International Scientific Conference UNITECH 08, Procedings III, pp. 431 – 433, Gabrovo, 21–22 novemeber 2008, Bulgaria.

3. **Николић Р.**, Ђурчић Д., Жижовић М., *Фази оцена менаџерских виртуалних тимова*, Зборник радова, Прво међународно саветовање "Информатика у производном и пословном менаџменту", Добој, 2004. година, Виша техничка школа Добој, Република Српска, стр. 74–77.

4. Милић В., **Николић Р.**, Жижовић М., *Обављање различитих послова у току студирања путем интранета на универзитетима*, Зборник радова–

CD, XI конференција YU INFO 2005, Копаоник, 2005. година, Информационо друштво СЦГ.

5. **Николић Р.**, Милић В., Жижовић М., *Упоредна анализа математичког образовања информатичара са наших и једног универзитета у САД*, Зборник радова II међународне конференције Информатика, образовна технологија и нови медији у образовању, Сомбор 2005. година, Vol. 1, pp 160–163, ISBN 86-83097-31-5.

6. **Николић Р.**, Милић В., Жижовић М., *Вишекритеријумска анализа програма за самоевалуацију студената*, Зборник радова–CD, XII конференција YU INFO 2006, Копаоник, 2006. година, Информационо друштво СЦГ.

7. **Николић Р.**, Милић В., Жижовић М., *Software choise for student evaluation via multicriteria analisys*, Proceedings of III International conference "INFORMATICS EDUCATIONAL TECHNOLOGY AND NEW MEDIA IN EDUCATION", Sombor 2006, pp 256–259, ISBN 86-83097-51-X, COBISS, SR-ID 211977223.

Николић Рале је коаутор две збирке за пријемни испит из математике на Техничком факултету у Чачку:

1. Жижовић М., Стевановић, М., Ђурчић Д., Лазаревић, В., Шебековић, А., Дамњановић, Н., **Николић Р.**, *Збирка задатака за пријемни испит из математике*, Технички факултет у Чачку, 2005. год.

2. Дамњановић, Н., **Николић Р.**, *Збирка задатака за пријемни испит из математике*, Технички факултет у Чачку, 2009. год.

Рале Николић је био члан Организационог одбора три међународне конференције SPM 2007 (*Selection Principles in Mathematics*) III Workshop on Coverings, Selections and Games in Topology, ATA 2008 (*Analisys, Topology and Applications* 2008) и ATA 2010 (*Analisys, Topology and Applications* 2010) које су биле одржане у Врњачкој Бањи. Такође, као члан Редакционог одбора учествовао је у организацији научностручног скупа и изради Зборника радова *Проф. др Часлав Станојевић – живот и дело.*

Рале Николић је учествовао у оснивању и акредитацији *Факултета за хотелијерство и туризам* у Врњачкој Бањи, делегиран од стране Општине Врњачка Бања. Универзитет у Крагујевцу је у сарадњи са Општином Врњачка Бања основао овај факултет који је у школској 2011/12 години уписао прву генерацију студената.