UNIVERZITET U KRAGUJEVCU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA KRIVIH

U PROSTORU MINKOVSKOG

Emilija Nešović

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mentor: Prof. dr Miroslava Petrović–Torgašev

Kragujevac, 2002. godine

Ovu doktorsku disertaciju posvećujem

NIKOLI ČUPIĆU
(Šabac 1836 - Oran 1870)

mladom oficiru srpske vojske, unuku Stojana Čupića-"Zmaja od Noćaja", od čije familije (Dobrilović iz Pive) vodim poreklo, koji se školovao u Kragujevcu i bio posebno talentovan za matematiku, a naročito geometriju i koji je neposredno pred kraj života u dalekoj Africi, zaveštao svu svoju pokretnu i nepokretnu imovinu "za izdavanje naučnih i moralnih dela".

Autor

SADRŽAJ:

PREDGOVOR

Proučavanje diferencijalne geometrije krivih u Euklidskoj ravni započeto je kroz proučavanja praktičnih problema vezanih za klatno i časovnik. Baveći se tim problemima, Hajgens je (oko 1660 te godine) medju prvima došao do pojma krivine ravne krive u nekoj tački te krive. Medjutim, prvi koji je dobio odgovarajuću formulu za krivinu krive, izraženu preko izvoda te krive, bio je Njutn. Smatra se da je ta formula nastala 1671. godine. Njutn je posmatrao krivu $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ kao putanju koju opisuje neka tačka dok se kreće po ravni, u funkciji vremena t. Krivinu ravne krive definisao je na sledeći način. Na krivoj, uzeo je dve bliske tačke q_1 i q_2, sa različitih strana date tačke p na toj krivoj. Ove tri tačke zajedno jedinstveno odredjuju krug sa centrom u tački m. U graničnom procesu, kada se obe tačke q_1 i q_2 približavaju tački p duž krive α, dobija se specijalan krug, koji je tangentan na krivu α u tački p (tj. u tački p krive α, kriva α i ovaj krug imaju istu tangentnu liniju). Ovaj krug naziva se oskulatornim krugom krive α u tački p. Neka je njegov centar tačka c i radijus r. Njutn je tačku c nazvao centrom krivine, r poluprečnikom krivine, a $\kappa = 1/r$ krivinom krive α u tački p. Osim toga, on je eksplicitno izračunao da je krivina κ data formulom

$$\kappa = \frac{\dot{\alpha}_1\ddot{\alpha}_2 - \ddot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2}{(\dot{\alpha}_1^{\,2} + \dot{\alpha}_2^{\,2})^{\frac{3}{2}}}.$$

Umesto proizvoljnog parametra t, može se uzeti funkcija dužine luka s, tako da je $\dot{\alpha}_1^{\,2} + \dot{\alpha}_2^{\,2} = 1$. Neka je po definiciji $T(s)$ jedinični tangentni vektor krive α, a $N(s)$ jedinični normalni vektor u tački s krive α, tako da je $N(s)$ ortogonalan na $T(s)$ i da je $\{T(s), N(s)\}$ standardna orijentacija prostora R^2. Krivina $\kappa(s)$ krive α u tački s tada je definisana jednačinom

$$\dot{T}(s) = \kappa(s)N(s).$$

Primetimo da je $||\kappa(s)|| = ||\ddot{\alpha}(s)||$ dužina vektora $\ddot{\alpha}(s)$, koji je ortogonalan na jediničnom vektoru $\dot{\alpha}(s)$, pa stoga $||\kappa(s)||$ predstavlja i površinu pravougaonika koji je razapet nad vektorima $\dot{\alpha}(s)$ i $\ddot{\alpha}(s)$. Prema tome,

$$\kappa(s) = \begin{vmatrix} \dot{\alpha}_1(s) & \ddot{\alpha}_1(s) \\ \dot{\alpha}_2(s) & \ddot{\alpha}_2(s) \end{vmatrix} = \dot{\alpha}_1\ddot{\alpha}_2 - \ddot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2.$$

što odgovara definiciji koju je dao Njutn. Po fundamentalnoj teoremi za krive u Euklidskoj ravni E^2, ako je data diferencijabilna funkcija κ promenljive s, tada do na izometrije ravni E^2 postoji jedinstvena kriva α u ravni E^2, tako da je s parametar dužine luka, a $\kappa(s)$ krivina krive α u tački $\alpha(s)$. To znači da je do na rotacije i translacije u ravni E^2, kriva kompletno okarakterisana svojom krivinom $\kappa(s)$.

Vrlo značajan korak u proučavanju prostornih krivih u Euklidskom prostoru E^3, bilo je otkriće Frene–Sereovih formula. Njih su nezavisno otkrili Frene 1847. godine i Sere 1851. godine. Oni su najpre definisali ortonormirani reper $\{T, N, B\}$, koji je poznat kao Freneov reper, duž prostorne krive α koja je parametrizovana funkcijom dužine luka s. T je brzina ili jedinično tangentno vektorsko polje krive α. Ubrzanje $\dot{\alpha}(s)$ krive α u tački $\alpha(s)$ je vektor ortogonalan na $T(s)$. Ako je $\ddot{\alpha}(s) \neq 0$, vektorsko polje glavnih normala N je po definiciji normirano vektorsko polje ubrzanja $\ddot{\alpha}$. Vektorsko polje binormala B odredjeno je vektorskim proizvodom T i N. Poznate Frene–Sereove formule tada glase

$$
\begin{aligned}
\dot{T} &= \kappa N,\\
\dot{N} &= -\kappa T + \tau B,\\
\dot{B} &= -\tau N,
\end{aligned}
$$

i one odredjuju sve uzastopne izvode krive α. Funkcije κ i τ, koje su respektivno odredjene prvom i trećom formulom, nazivaju se prvom i drugom krivinom krive α ili krivinom i torzijom. Po fundamentalnoj teoremi za prostorne krive u Euklidskom prostoru E^3, koja je nastala 1876. godine, ako su κ i τ dve diferencijabilne funkcije promenljive s, tada do na izometrije prostora E^3 postoji jedinstvena kriva α, parametrizovana funkcijom dužine luka s, čija je krivina κ, a torzija τ. Prvi koji je otkrio da kriva α u prostoru E^3 ima dve krivine, bio je Monž 1775.godine. Štaviše, on je dobio analitički izraz za prvu krivinu, ali ne i za torziju. Medjutim, Koši je 1826. godine u svojoj knjizi prvi dao detaljnu studiju prostornih krivih, sistematičnim istraživanjem njenih uzastopnih izvoda.

Ova doktorska disertacija pripada oblasti diferencijalne geometrije koja se naziva semi Rimanovom (pseudo Rimanovom) geometrijom. Rimanova geometrija, kao specijalan slučaj semi–Rimanove geometrije, nastala je kroz nastojanja Rimana da se razvije diferencijalna geometrija mnogostrukosti koje ne moraju da budu smeštene u ambijentni Euklidski prostor. Stoga se Rimanova geometrija još naziva i unutrašnjom geometrijom mnogostrukosti. S druge strane, svaka mnogostrukost Euklidskog prostora može se proučavati kao podmnogostrukost ambijentnog Euklidskog prostora, pa na taj način nastaje spoljašnja geometrija mnogostrukosti. Ako je metrika na diferencijabilnoj mnogostrukosti indefinitna, dobija se tzv. semi- Rimanova mnogostrukost, a odgovarajuća geometrija te mnogostrukosti naziva se semi–Rimanovom geometrijom. Semi- Rimanova mnogostrukost može se proučavati kao podmnogostrukost u nekom semi- Euklidskom prostoru, pa opet razlikujemo dva pristupa u proučavanju: unutrašnji i spoljašnji.

Prostor Minkovskog E_1^n je mnogostrukost R^n snabdevena metričkim tenzorom g indeksa 1. Ovaj prostor predstavlja važan primer ravne semi Rimanove mnogostrukosti. Štaviše, geometrija prostora E_1^4, koji nastaje sjedinjavanjem prostora E^3 i vremena E u prostor-vreme kontinuum E_1^4, igra značajnu ulogu u Ajnštajnovoj specijalnoj teoriji relativnosti. Godine 1908-me Minkovski je napisao "da prostor, sam za sebe, i vreme, samo za sebe, su osudjeni da izblede kao senke, i jedino neka vrsta unije prostora i vremena će očuvati nezavisnu realnost."

U ovoj doktorskoj disertaciji proučavane su krive, kao jednodimenzione mnogostrukosti, u prostorima Minkovskog. Tako su najpre u Glavi 1 date osnovne definicije i pojmovi iz Lorencove geometrije, koji se koriste u disertaciji. Preciznije, definisana je semi- Rimanova mnogostrukost, metrički tenzor, tangentni vektor semi Rimanove mnogostrukosti, kriva na semi- Rimanovoj mnogostrukosti, Lorencova mnogostrukost, prostor Minkovskog itd. Zatim je opisan kauzalni karakter proizvoljne ravni u prostoru E_1^3, kao i kauzalni karakter proizvoljnog potprostora prostora E_1^n. Date su i definicije važnih familija hiperkvadrika u prostoru E_1^{n+1}. Navedene su i Frene–Sereove formule za krive u Euklidskim prostorima E^3 i E^4, kao i analogni oblici tih formula za krive u prostorima Minkovskog E_1^3 i E_1^4, koje su date u radu [W].

U Glavi 2 razmatrane su krive koje leže na hiperkvadrikama, tj. na pseudosferi i pseudohiperboličkom prostoru u prostorima Minkovskog. Preciznije, u prvom odeljku ove glave proučavane su prostorne krive (sa vremenskom i nul glavnom normalom) i vremenske krive koje leže na pseudosferi S_1^2 u prostoru Minkovskog E_1^3. S tim u vezi, najpre su u uvodnom delu navedeni neki poznati rezultati za prostorne krive sa prostornom glavnom normalom koje leže na pseudosferi S_1^2 u prostoru Minkovskog E_1^3. U drugom odeljku ove glave proučavane su prostorne, vremenske i nul krive koje leže na pseudohiperboličkom prostoru H_0^3 u prostor vremenu Minkovskog E_1^4. Originalni rezultati u ovoj glavi dati su u teoremama 1.1,...,1.13, kao i u teoremama 2.1,...,2.10. U teoremama 1.1,...,1.12 dati su potrebni i dovoljni uslovi da prostorne i vremenske krive leže na pseudosferi S_1^2 u prostoru E_1^3, dok je u teoremi 1.13 dokazano da ne postoje nul krive koje leže na pseudosferi S_1^2 u istom prostoru. U teoremama 2.1,...,2.9 navedeni su potrebni i dovoljni uslovi da prostorna kriva leži na pseudohiperboličkom prostoru H_0^3 u prostor vremenu Minkovskog. Štaviše, u teoremi 2.10 je dokazano da ne postoje vremenske i nul krive koje leže na pseudohiperboličkom prostoru H_0^3 u pomenutom prostoru

U Glavi 3 klasifikovane su krive tipa 2 u proizvoljnom prostoru Minkovskog E_1^n, pri čemu je u prvom odeljku dokazano da dimenzija n prostora E_1^n nije veća od 5. U prvom odeljku te glave dat je kratak istorijski prikaz razvoja teorije podmnogostrukosti konačnog tipa, koja specijalno obuhvata i teoriju krivih konačnog tipa. Pojam podmnogostrukosti konačnog tipa definisao je B. J. Čen oko 1980-te godine. Prvi rezultati o njima objavljeni su u knjigama [C] i [C3]. U drugom odeljku navedeni su najvažniji rezultati iz teorije krivih konačnog tipa koji su do sada dobijeni. Klasifikacija prostornih i vremenskih krivih tipa 2 koje leže cele u prostorima E_1^4 i E_1^5, data je u trećem odeljku. Originalni rezultati u ovoj glavi dati su u teoremama 3.1, 3.2 i 3.3, čime je kompletirana klasifikacija krivih tipa 2 u prostorima Minkovskog. U teoremi 3.1 data je klasifikacija prostornih i vremenskih krivih nul tipa 2 u prostor vremenu E_1^4. Po toj klasifikaciji, pomenute krive su prostorne kružne helise. U teoremi 3.2 data je klasifikacija prostornih i vremenskih krivih tipa 2 koje leže cele u prostoru E_1^4. U pomenutoj teoremi dobijeno je 18 neizometričnih oblika takvih krivih. Konačno, u teoremi 3.3 klasifikovane su prostorne i vremenske krive tipa 2 koje leže cele u prostoru E_1^5.

U Glavi 4 proučavane su prostorne W krive (helise), tj. krive čije su sve Freneove krivine konstantne, u prostor -vremenu Minkovskog E_1^4. U Euklidskom prostoru E^n, ove krive su detaljno proučene, pa su u prvom odeljku navedeni neki od poznatijih Euklidskih rezultata koji se odnose na ove krive. U drugom odeljku, data je potpuna klasifikacija prostornih W-krivih u prostoru E_1^4, čime je kompletirana njihova klasifikacija u tom prostoru. Naime, vremenske W krive koje leže cele u prostoru E_1^4, klasifikovane su u radu [Sy], dok su nul W krive u istom prostoru klasifikovane u radu [Bo]. Originalni rezultati u ovoj glavi dati su u teoremama 2.1,...,2.11. U teoremama 2.1,...,2.10 dobijene su eksplicitno parametarske jednačine prostornih W-krivih u prostor vremenu E_1^4, dok je u teoremi 2.11 opisano pod kojim uslovima neke od prostornih W krivih predstavljaju krive konačnog tipa 2 u istom prostoru.

U Glavi 5 razmatran je jedan od osnovnih pojmova u geometriji Lorencove ravni, tzv. hiperbolički ugao izmedju dva ne nul vektora. S obzirom da je hiperbolički ugao izmedju dva jedinična vremenska vektora definisan u radovima [BN], [BN1], [O], u prvom i drugom odeljku ove glave definisan je respektivno hiperbolički ugao izmedju dva jedinična prostorna vektora i izmedju jediničnog prostornog i jediničnog vremenskog vektora. Ovim definicijama kompletiran je pojam hiperboličkog ugla izmedju dva ne nul vektora u Lorencovoj ravni. Potom je definisana mera hiperboličkog ugla. Takodje su, pomoću definicija hiperboličkog ugla, klasifikovane sve prostorne i vremenske krive konstantne precesije u Lorencovom prostoru L^3. Originalni rezultati u ovoj glavi dati su najpre u definicijama 1.1, 1.2, kojima je definisan pojam orijentisanog hiperboličkog ugla izmedju dva jedinična prostorna vektora, u definicijama 2.1, 2.2, kojima je definisan pojam orijentisanog hiperboličkog ugla izmedju prostornog jediničnog i vremenskog jediničnog vektora, kao i u definiciji 2.3, kojom je definisan pojam mere neorijentisanog hiperboličkog ugla izmedju dva ne nul vektora u Lorencovoj ravni. Osim toga, originalni rezultati dati su u lemama 1.1, 2.1,2.2, 3.1,...,3.4. U lemama 1.1 i 2.1 dokazane su neke interesantne osobine funkcije orijentisanog hiperboličkog ugla. U lemi 2.2 dati su uslovi koje proizvoljna nenegativna realna funkcija treba da zadovoljava da bi, po definiciji, bila mera neorijentisanog hiperboličkog ugla. U lemama 3.1,...,3.4 dati su potrebni i dovoljni uslovi koje prostorna kriva jedinične brzine treba da zadovoljava da bi bila prostorna kriva konstantne precesije sa prostornom glavnom normalom u Lorencovom prostoru L^3. Originalni rezultati u ovoj glavi dati su u teoremama 2.1,...,2.10, 3.1,..., 3.10. Preciznije, u teoremama 2.1,...,2.10 proučavane su trigonometrijske relacije koje važe u trouglu ABC u Lorencovoj ravni. Izmedju ostalog, data je formula za površinu trougla u Lorencovoj ravni (T.2.1, T.2.2), kao i hiperbolička sinusna i hiperbolička kosinusna teorema (T.2.5, T.2.9) za trougao čije su sve tri stranice prostorni vektori. Konačno, u teoremama 3.1,...,3.6, pomoću pojma orijentisanog hiperboličkog ugla, izvršena je klasifikacija prostornih krivih konstantne precesije (sa prostornom i vremenskom glavnom normalom N), dok su u teoremama 3.7,...,3.10 klasifikovane vremenske krive konstantne precesije u trodimenzionom Lorencovom prostoru L^3.

Ovom prilikom želim da se najsrdačnije zahvalim svom mentoru prof. dr Miroslavi Petrović Torgašev, na dugogodišnjoj saradnji, korisnim sugestijama i pomoći oko izrade i pisanja ove doktorske disertacije. Takodje se zahvaljujem članovima komisije, prof. dr Milevi Prvanović, prof. dr Nedi Bokan i prof. dr Mirjani Djorić, koji su svojim konstruktivnim zapažanjima, korisnim savetima i predlozima doprineli poboljšanju prve verzije ove disertacije. Posebnu zahvalnost dugujem prof. dr Miroslavi Petrović Torgašev i prof. dr Leopoldu Verštralenu sa Univerziteta u Luvenu, koji su me upoznali sa problematikom semi Rimanove geometrije i inspirisali za rad na tom polju. Na kraju, želim da se zahvalim i svojim roditeljima, na podršci u toku nastajanja i pisanja ove disertacije.

U Kragujevcu, 7.6.2002. godine Autor

GLAVA 1

UVOD

1. Osnovne definicije

U ovoj glavi najpre navodimo neke osnovne definicije iz semi–Rimanove geometrije. Zatim definišemo neke osnovne pojmove Lorencove geometrije, koja je specijalan slučaj semi-Rimanove geometrije. Štaviše, u ovoj glavi opisani su i Freneovi reperi prostora E^3 i E^4, kao i prostora Minkovskog E_1^3 i E_1^4. Date su i odgovarajuće Freneove formule za krive u pomenutim Euklidskim prostorima i prostorima Minkovskog.

Neka je V realni vektorski prostor i neka je b *bilinearna forma* na V, tj. R–bilinearna funkcija $b : V \times V \to R$.

Definicija 1.1. Simetrična bilinearna forma b na vektorskom prostoru V je

(1) *pozitivno definitna*, ako za svako $v \in V, v \neq 0$ važi $b(v, v) > 0$;

(2) *negativno definitna*, ako za svako $v \in V, v \neq 0$ važi $b(v, v) < 0$;

(3) *nedegenerativna*, ako iz $b(v, w) = 0$ za svako $w \in V$, sledi $v = 0$.

Ako je forma b definitna, tada je ona i nedegenerativna.

Indeks ν simetrične bilinearne forme b na V je najveći ceo broj koji označava dimenziju potprostora $W \subset V$ na kome je $b|_W$ negativno definitna.

Definicija 1.2. *Metrički tenzor* g na glatkoj mnogostrukosti M je simetrično nedegenerativno tenzorsko polje tipa $(0, 2)$ konstantnog indeksa.

Definicija 1.3. *Semi–Rimanova mnogostrukost* je glatka mnogostrukost M snabdevena metričkim tenzorom g.

Dakle, semi-Rimanova mnogostrukost je uredjeni par (M, g), pri čemu dva različita metrička tenzora g i g_1, na istoj mnogostrukosti M, odredjuju dve različite semi–Rimanove mnogostrukosti.

U svakoj tački p semi–Rimanove mnogostrukosti M, tangentni prostor $T_p(M)$ snabdeven je skalarnim proizvodom g_p konstantnog indeksa. Konstantan indeks ν skalarnog proizvoda g_p nazivamo *indeksom* semi Rimanove mnogostrukosti, pri čemu važi da je $0 \leq \nu \leq n = \dim M$. Ako je $\nu = 0$, tada je *M Rimanova mnogostrukost*, jer je u tom slučaju g_p pozitivno definitni skalarni proizvod, tj. unutrašnji proizvod na $T_p(M)$. Ako je $\nu = 1$ i $\dim M = n \geq 2$, tada je *M Lorencova mnogostrukost.*

Za svaki ceo broj ν, $0 \leq \nu \leq n$, metrički tenzor g indeksa ν na R^n, dat je sa

$$g(v, w) = -\sum_{i=1}^{\nu} v_i w_i + \sum_{j=\nu+1}^{n} v_j w_j,$$

pri čemu $v = (v_1, ..., v_n), w = (w_1, ..., w_n) \in R^n$, odnosno metrički tenzor je oblika

$$g = -\sum_{i=1}^{\nu} dx_i^2 + \sum_{j=\nu+1}^{n} dx_j^2,$$

pri čemu je $(x_1, x_2, ..., x_n)$ pravougli koordinatni sistem prostora R^n_ν.

Mnogostrukost R^n snabdevenu metričkim tenzorom g indeksa ν nazivamo *semi-Euklidskim prostorom* E^n_ν. Specijalno, ako je $n \geq 2$ i $\nu = 1$, prostor E^n_1 nazivamo n–dimenzionalnim *prostorom Minkovskog*. Dakle, *prostor Minkovskog* E^n_1 je prostor E^n snabdeven ravnom indefinitnom metrikom $g = -dx_1^2 + dx_2^2 + ... + dx_n^2$. Indeks $\nu \neq 0$ semi–Rimanovih mnogostrukosti implicira kauzalnost tangentnih vektora tih mnogostrukosti. Naime, imamo sledeću definiciju.

Definicija 1.4. Tangentni vektor v semi–Rimanove mnogostrukosti je

(1) *prostorni*, ako je $g(v, v) > 0$ ili $v = 0$;

(2) *nul (ili svetlosni,izotropni)*, ako je $g(v, v) = 0$ i $v \neq 0$;

(3) *vremenski*, ako je $g(v, v) < 0$.

Ove tri moguće kategorije tangentnog vektora v nazivamo *kauzalnim karakterom* tangentnog vektora v. Kod Lorencovih mnogostrukosti, nul vektore nazivamo još i *svetlosnim* vektorima. Poznato je da ova terminologija vodi poreklo iz Ajnštajnove teorije relativnosti.

Definicija 1.5. Tangentni vektori v i w semi–Rimanove mnogostrukosti su *ortogonalni*, ako je

$$g(v, w) = 0.$$

Definicija 1.6. *Norma* tangentnog vektora v semi–Rimanove mnogostrukosti data je sa
$$\| v \| = \sqrt{| g(v, v) |}.$$

Ovde je interesantno primetiti da nul vektori imaju dužinu jednaku nuli, iako su različiti od nula vektora, kao i da su svaka dva kolinearna nul vektora ortogonalna. U Lorencovoj ravni se pomoću indefinitnog skalarnog proizvoda može uvesti pojam ugla između dva vektora (tzv. *hiperboličkog ugla*). O tome će biti više rečeno u Glavi 5 ove disertacije.

Definicija 1.7. Neka je $\Phi : M \longrightarrow N$ glatko preslikavanje glatkih mnogostrukosti M i N, i A kovarijantni tenzor tipa $(0, s)$ na $T_{\Phi(p)}(N)$, gde je $s \geq 1$. Neka je
$$(\Phi^*(A))(v_1, \ldots, v_s) = A(d\Phi v_1, \ldots, d\Phi v_s),$$
za svako $v_i \in T_p(M)$, $p \in M$. Tada $\Phi^*(A)$ nazivamo *povratnim tenzorom* od A pomoću preslikavanja Φ.

Dakle, $\Phi^*(A)$ je kovarijantni tenzor tipa $(0, s)$ na $T_p(M)$.

Ako je M podmnogostrukost semi–Rimanove mnogostrukosti N utopljena imerzijom $i : M \longrightarrow N$, pošto je metrički tenzor g na N indefinitan, povratni tenzor $i^*(g)$ ne mora biti metrički tenzor na M.

Definicija 1.8. Neka je M podmnogostrukost semi–Rimanove mnogostrukosti (N, g). Ako je $i^*(g)$ metrički tenzor na M, tada je M *semi–Rimanova podmnogostrukost* od N.

Definicija 1.9. Semi–Rimanova podmnogostrukost je

(1) *prostorna*, ako je $i^*(g)$ pozitivno definitno ;

(2) *Lorencova*, ako je $i^*(g)$ indeksa 1 .

Neka su $x_1, \ldots, x_n$ prirodne koordinate na semi–Euklidskom prostoru E^n_ν i $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Ako su $V = \sum\limits_{j=1}^{n} V_j \partial_j$ i $W = \sum\limits_{i=1}^{n} W_i \partial_i$ vektorska polja na E^n_ν, vektorsko polje
$$D_V W = \sum_{i=1}^{n} V(W_i)\, \partial_i$$
naziva se *(prirodnim) kovarijantnim izvodom* vektorskog polja W u odnosu na V, a koneksija D naziva se *Levi Čivitinom koneksijom* semi Euklidskog prostora E^n_ν, za svako $\nu = 0, 1, \ldots, n$. Koneksija D prostora E^n_ν indukuje Levi -Čivitinu koneksiju

∇ semi-Rimanove podmnogostrukosti M, koja zadovoljava sledeće dekompozicije (tj. redom Gausovu i Vajngartenovu formulu), po tangentnoj i normalnoj komponenti

$$D_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y),$$
$$D_X \xi = -A_\xi X + D_X^\perp \xi,$$

gde je $X, Y \in T_p(M)$, ξ je jedinično normalno vektorsko polje na M, h je *druga fundamentalna forma* podmnogostrukosti M, A_ξ je *operator oblika* od M u odnosu na ξ i $D^\perp$ je normalna koneksija od M.

Definicija 1.10. *Kriva* α na semi–Rimanovoj mnogostrukosti M je glatko preslikavanje $\alpha : I \longrightarrow M$, pri čemu je I otvoreni interval realne prave R.

Kriva α je *regularna*, ako je $\dot{\alpha}(s) \neq 0$ za svako $s \in I$. *Vektor brzine* regularne krive $\alpha = \alpha(s)$ je vektor $\dot{\alpha}(s)$, tangentan na α u tački $\alpha(s)$.

Neka je $x_1, \ldots, x_n$ lokalni koordinatni sistem na semi Rimanovoj mnogostrukosti M u tački $\alpha(s)$ krive α. Tada koordinatni prikaz vektora brzine krive α glasi

$$\dot{\alpha}(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{d(x_i \circ \alpha)}{du}(s)\, \partial_i|_{\alpha(s)},$$

gde je u koordinatni sistem na I, tj. identičko preslikavanje na I.

Ako je $\alpha : I \longrightarrow M$ kriva na semi-Rimanovoj mnogostrukosti M i $h : J \longrightarrow I$ glatka funkcija na intervalu J, tada je $\beta = \alpha(h) : J \longrightarrow M$ kriva na M koju nazivamo *reparametrizacijom krive* α. Vektor brzine krive β dat je sa

$$\dot{\beta}(t) = (\frac{dh}{du})(t)\, \dot{\alpha}(h(t)),$$

za svako $t \in J$.

Definicija 1.11. Kriva $\alpha = \alpha(s)$ na semi-Rimanovoj mnogostrukosti M je

(1) *prostorna*, ako su svi njeni vektori brzine $\dot{\alpha}(s)$ prostorni ;

(2) *vremenska*, ako su svi njeni vektori brzine $\dot{\alpha}(s)$ vremenski ;

(3) *nul kriva*, ako su svi njeni vektori brzine $\dot{\alpha}(s)$ nul .

Definicija 1.12. Neka je $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ deo po deo glatki segment krive na semi Rimanovoj mnogostrukosti M. *Dužina luka* segmenta α data je sa

$$L(\alpha) = \int_a^b ||\,\dot{\alpha}(s)\,||ds.$$

Na osnovu Definicije 1.6 imamo da je

$$\| \dot{\alpha} \| = \sqrt{| g(\dot{\alpha}, \dot{\alpha}) |},$$

pa je prema tome u koordinatama

$$\| \dot{\alpha} \| = | \sum_{i,j} \frac{d(x_i \circ \alpha)}{ds} \frac{d(x_j \circ \alpha)}{ds} |^{\frac{1}{2}}.$$

Reparametrizaciona funkcija $h : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ je deo po deo glatka funkcija, takva da je ili $h(c) = a, h(d) = b$ (pri čemu h čuva orijentaciju krive), ili $h(c) = b, h(d) = a$ (pri čemu h menja orijentaciju krive). Ako njen izvod ne menja znak, funkcija h je *monotona*. Dužina deo po deo glatkog segmenta krive se ne menja pri monotonoj reparametrizaciji. Ako je α segment krive sa brzinom $\| \dot{\alpha} \| > 0$, tada postoji strogo rastuća reparametrizaciona funkcija h, takva da je $\beta = \alpha(h)$ i $\| \dot{\beta} \| = 1$. Tada se za krivu β kaže da ima *jediničnu brzinu*, tj. da je *parametrizovana dužinom luka.*

2. Lorencove mnogostrukosti

Lorencova mnogostrukost je semi-Rimanova mnogostrukost M dimenzije $n \geq 2$, snabdevena metričkim tenzorom g indeksa 1. Proučavanje tangentnih prostora Lorencove mnogostrukosti zasniva se na pojmu *Lorencovog vektorskog prostora* V, tj. prostora sa skalarnim proizvodom indeksa 1 i dimenzije $n \geq 2$. Svaki n-dimenzionalni tangentni prostor Lorencove mnogostrukosti linearno je izometričan sa prostorom Minkovskog E_1^n.

Neka je metrički tenzor g na prostoru E_1^3 definisan sa $g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$. S obzirom da proizvoljan tangentni vektor $v \in E_1^3$ može biti prostorni, vremenski ili nul, prostor Minkovskog E_1^3 može se pretstaviti kao sledeća disjunktna unija

$$E_1^3 = \mathcal{S} \cup \mathcal{N} \cup \mathcal{T},$$

gde je $\mathcal{N}$ skup svih nul vektora prostora E_1^3, tj. $\mathcal{N}$ je *nul konus* sa jednačinom $x_1^2 = x_2^2 + x_3^2$. $\mathcal{S}$ je spoljašnjost nul konusa $\mathcal{N}$, tj. skup svih prostornih vektora prostora E_1^3, a $\mathcal{T}$ je unutrašnjost nul konusa $\mathcal{N}$, tj. skup svih vremenskih vektora prostora E_1^3.

Proizvoljna ravan π u prostoru E_1^3 može biti

(1) *prostorna*, ako je $g|_\pi$ pozitivno definitno ;

(2) *vremenska*, ako je $g|_\pi$ nedegenerativno, indeksa 1 ;

(3) *svetlosna*, ako je $g|_\pi$ degenerativno .

Prema tome, bazu prostorne ravni čine dva medjusobno ortogonalna prostorna vektora, bazu vremenske ravni čine medjusobno ortogonalni prostorni i vremenski vektor, a bazu svetlosne ravni čine medjusobno ortogonalni prostorni i nul vektor. Kao posledicu kauzalnosti ravni, imamo sledeću interesantnu osobinu: prostorna ravan ne sadrži ni jednu, vremenska ravan sadrži dve, a svetlosna ravan sadrži jednu izvodnicu nul konusa $\mathcal{N}$.

Pojam kauzalnog karaktera vektora može se na prirodan način uopštiti i na vektorske potprostore. Potprostor V prostora E_1^n je prostorni, vremenski ili svetlosni, ako je respektivno $g|_V$ pozitivno definitno, $g|_V$ nedegenerativno i indeksa 1 ili $g|_V$ degenerativno. Za proizvoljan potprostor V prostora E_1^n, potprostor $V^\perp$ je definisan pomoću

$$V^\perp = \{v \in E_1^n : v \perp V\}.$$

Tada važi sledeća osobina: V je prostorni (vremenski) potprostor ako i samo ako je $V^\perp$ vremenski (prostorni) potprostor. Štaviše, ako je V vremenski (prostorni) potprostor, tada je $E_1^n = V \oplus V^\perp$, pri čemu $\oplus$ označava direktnu sumu potprostora. Osim toga, V je svetlosni potprostor ako i samo ako je $V^\perp$ svetlosni potprostor, ali tada $V + V^\perp$ nije čitav prostor E_1^n.

Neka je $\mathcal{T}$ skup svih vremenskih vektora prostora E_1^3. Za vektor $u \in \mathcal{T}$, neka je

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{T} \mid g(u, v) < 0\}.$$

Skup $\mathcal{C}(u)$ naziva se *vremenski konus* prostora E_1^3 koji sadrži vektor u. Za vektor $-u \in \mathcal{T}$, neka je

$$\mathcal{C}(-u) = -\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathcal{T} \mid g(u, v) > 0\}.$$

Skup $\mathcal{C}(-u)$ naziva se *suprotni vremenski konus* u odnosu na konus $\mathcal{C}(u)$. Nije teško videti da je skup svih vremenskih vektora $\mathcal{T}$ dat sledećom disjunktnom unijom

$$\mathcal{T} = \mathcal{C}(u) \cup \mathcal{C}(-u),$$

pri čemu $u, -u \in \mathcal{T}$.

U prostoru E_1^{n+1} razlikujemo dve važne familije *hiperkvadrika*, tj. semi-Rimanovih podmnogostrukosti kodimenzije 1. Pošto je kodimenzija 1, *ko-indeks*, tj. zajednički indeks svih jednodimenzionalnih normalnih prostora tih hiperkvadrika, mora biti 0 ili 1. Neka je $q(v) = g(v, v)$, za svako $v \in E_1^{n+1}$.

Pseudosfera poluprečnika $r > 0$ u prostoru E_1^{n+1} je hiperkvadrika

$$S_1^n(r) = q^{-1}(r^2) = \{\, p \in E_1^{n+1} \mid g(p, p) = r^2 \,\}.$$

Pseudohiperbolički prostor poluprečnika $r > 0$ u prostoru E_1^{n+1} je hiperkvadrika

$$H_0^n(r) = q^{-1}(-r^2) = \{\, p \in E_1^{n+1} \mid g(p,p) = -r^2 \,\}.$$

Svetlosni (nul) konus sa temenom u tački m u prostoru E_1^{n+1} je hiperkvadrika

$$C^n(m) = \{\, p \in E_1^{n+1} \mid g(p-m, p-m) = 0 \,\}.$$

Familije hiperkvadrika $S_1^n(r)$ i $H_0^n(r)$ ispunjavaju čitav prostor E_1^{n+1}, osim skupa $q^{-1}(0)$, koji se sastoji iz nul konusa $q^{-1}(0) \setminus \{0\}$ i koordinatnog početka $\{0\}$.

Pri tome, pseudosfera ima *znak* $\varepsilon = 1$, jer je njen ko-indeks jednak 0 (tj. $g(z,z) > 0$ za svaki normalan vektor $z \neq 0$), a pseudohiperbolički prostor ima *znak* $\varepsilon = -1$, jer je njegov ko–indeks jednak 1 (tj. $g(z,z) < 0$ za svaki normalan vektor $z \neq 0$). Proučavanje hiperkvadrika u prostoru E_1^{n+1} pojednostavljeno je osobinom da je svaka hiperkvadrika iz prostora E_1^{n+1} homotetična sa odgovarajućom jediničnom pseudosferom $S_1^n(r)$.

3. Pokretni (Frene–Sereov) reper

Slučaj 3.1. *Pokretni reper u Euklidskom prostoru* E^3.

Neka je $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ regularna kriva jedinične brzine, tj. $g(\dot\alpha, \dot\alpha) = 1$ za svako s, u trodimenzionom Euklidskom prostoru E^3, sa metrikom $g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$. *Pokretni reper* duž krive α je ortonormirani reper $\{\, T, N, B \,\}$ koji se definiše na sledeći način. T je brzina ili jedinično tangentno vektorsko polje krive α. Ako je $\ddot\alpha \neq 0$, ubrzanje $\ddot\alpha(s)$ krive α u tački $\alpha(s)$ je vektor koji je ortogonalan na $T(s)$. Vektorsko polje glavnih normala N je normirano vektorsko polje ubrzanja $\ddot\alpha$, tj. $N = \ddot\alpha / \|\, \ddot\alpha \,\|$. Vektorsko polje binormala B se definiše pomoću vektorskog proizvoda vektora T i N, tj. $B = T \times N$. Tada su *Frene-Sereove formule* date sa

$$\begin{bmatrix} \dot T \\ \dot N \\ \dot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \varkappa & 0 \\ -\varkappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Funkcije $\varkappa$ i τ nazivamo *krivinom* i *torzijom* ili *prvom* i *drugom krivinom* krive α.

Neke specijalne krive imaju sledeće osobine :

(1) $\varkappa = 0$, ako i samo ako je α prava linija ;

(2) $\tau = 0$, ako i samo ako je α ravna kriva ;

(3) $\tau = 0$ i $\varkappa = \text{constant} > 0$, ako i samo ako je α krug ;

(4) $\tau = \text{constant} \neq 0$ i $\varkappa = \text{constant} > 0$, ako i samo ako je α kružna helisa (zavojnica).

Sledeća teorema govori o odredjenosti krive njenom krivinom i torzijom i ona je fundamentalna za krive u prostoru E^3.

Teorema A (o podudarnosti). *Ako su $\alpha, \beta : I \to E^3$ regularne krive jediničnih brzina takve da je*

$$\varkappa_\alpha = \varkappa_\beta > 0 \quad \text{i} \quad \tau_\alpha = \pm\tau_\beta,$$

tada su krive α i β kongruentne, tj. identične do na izometrije prostora E^3.

Slučaj 3.2. *Pokretni reper u prostoru Minkovskog E_1^3.*

Neka je $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$ proizvoljna kriva u prostoru E_1^3. S obzirom da proizvoljna kriva α u prostoru E_1^3 lokalno može biti prostorna, vremenska ili nul. J. Valrave je u radu [W] posebno razmatrao ove slučajeve i konstruisao odgovarajuće pokretne repere za te slučajeve, na sledeći način. Neka su k_1 i k_2 prva i druga krivina krive α.

<u>Slučaj 1.</u> α je prostorna kriva

Neka je s parametar dužine luka krive α, takav da je $g(\dot\alpha, \dot\alpha) = 1$. T je jedinično tangentno vektorsko polje krive α, tj. $T(s) = \dot\alpha(s)$. Ako je $\ddot\alpha(s) \neq 0$, tada je $\ddot\alpha(s)$ ortogonalno na $T(s)$. Prema tome, neka je vektorsko polje glavnih normala $N(s)$ kolinearno sa $\ddot\alpha(s)$. U zavisnosti od kauzalnog karaktera vektora $\ddot\alpha(s)$, imamo sledeće slučajeve :

<u>Slučaj 1.1.</u> $g(\ddot\alpha, \ddot\alpha) > 0$

Vektorsko polje glavnih normala N je tada normirano prostorno vektorsko polje $\ddot\alpha$, tj. $N = \ddot\alpha / \|\ddot\alpha\|$. Vektorsko polje binormala B je jedinstveno vremensko jedinično vektorsko polje ortogonalno na prostornoj ravni $\{T, N\}$ u svakoj tački $\alpha(s)$ krive α, tako da reper $\{T, N, B\}$ ima istu orijentaciju kao prostor E_1^3.

Frene Sereove formule tada glase

$$\begin{bmatrix} \dot T \\ \dot N \\ \dot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Slučaj 1.2. $g(\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) < 0$

Vektorsko polje glavnih normala N je tada normirano vremensko vektorsko polje $\ddot{\alpha}$, tj. $N = \ddot{\alpha}/\|\ddot{\alpha}\|$. Vektorsko polje binormala B je jedinstveno prostorno jedinično vektorsko polje, ortogonalno na vremenskoj ravni $\{T, N\}$ u svakoj tački $\alpha(s)$, tako da reper $\{T, N, B\}$ ima istu orijentaciju kao prostor E_1^3.

Frene-Sereove formule date su u obliku

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Slučaj 1.3. $g(\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) = 0$

Vektorsko polje glavnih normala N je tada vektorsko polje $\ddot{\alpha}$, tj. $N(s) = \ddot{\alpha}(s)$. Vektorsko polje binormala B je jedinstveno nul vektorsko polje ortogonalno na T, tj. $g(B, T) = 0$ u svakoj tački $\alpha(s)$ krive α, takvo da je $g(N, B) = 1$.

Frene-Sereove formule tada glase

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix},$$

gde "krivina" k_1 može imati samo dve vrednosti : $k_1 = 0$ ako je α prava linija (tj. $\ddot{\alpha}(s) = 0$), ili $k_1 = 1$ u svim ostalim slučajevima. Ako α nije prava linija, tada postoji interval I na kome je $\ddot{\alpha} \neq 0$. S obzirom da je $N(s) = \ddot{\alpha}(s) = \dot{T}(s)$, sledi da je $k_1 = 1$. Reper $\{T, N, B\}$ je pseudo-ortonormirana baza prostora E_1^3, što znači da je

$$\begin{aligned} \dot{N} &= a_1 T + a_2 N + a_3 B, \\ \dot{B} &= b_1 T + b_2 N + b_3 B. \end{aligned}$$

Iz $g(N, N) = g(N, T) = g(B, B) = 0$, dobijamo da je $a_3 = a_1 = b_2 = 0$. Uzimajući u obzir da je $g(N, B) = 1$ i $g(B, T) = 0$, diferenciranjem dobijamo da je

$$\begin{aligned} g(\dot{N}, B) + g(N, \dot{B}) &= 0, \\ g(\dot{B}, T) + g(B, \dot{T}) &= 0, \end{aligned}$$

što znači da je $a_2 = -b_3$ i $b_1 = -k_1 = -1$. Prema tome, zaključujemo da u ovom slučaju postoji samo jedna krivina $a_2 = k_2$.

Slučaj 2. α je vremenska kriva

Neka je s parametar dužine luka krive α, takav da je $g(\dot{\alpha},\dot{\alpha}) = -1$. T je jedinično vremensko tangentno vektorsko polje, tj. $T(s) = \dot{\alpha}(s)$. S obzirom da je $\ddot{\alpha}(s)$ prostorni vektor ortogonalan na $T(s)$, definišimo vektorsko polje glavnih normala sa $N = \ddot{\alpha}/||\ddot{\alpha}||$. Tada je vektorsko polje binormala B jedinstveno prostorno vektorsko polje, ortogonalno na vremenskoj ravni $\{T, N\}$ u svakoj tački $\alpha(s)$ krive α, tako da reper $\{T, N, B\}$ ima istu orijentaciju kao prostor E_1^3.

Frene–Sereove formule tada glase

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

Slučaj 3. α je nul kriva

Neka je T nul vektorsko polje $\dot{\alpha}$. Tada je $\ddot{\alpha}$ prostorno vektorsko polje ortogonalno na T, osim kada je $\ddot{\alpha} = 0$. Ako α nije nul prava linija, uzmimo za parametar *pseudo-dužinu luka* s, tj. $g(\ddot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s)) = 1$ za svako s i definišimo N kao jedinično vektorsko polje koje odgovara $\ddot{\alpha}$, tj. $N(s) = \ddot{\alpha}(s)$. Vektorsko polje binormala B je jedinstveno nul vektorsko polje, ortogonalno na $N(s)$ u svakoj tački $\alpha(s)$ krive α, takvo da je $g(T, B) = 1$.

U ovom slučaju *Frene–Sereove formule* glase

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_2 & 0 & -k_1 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}.$$

gde "krivina" k_1 može imati samo dve vrednosti : $k_1 = 0$ ako je α prava nul linija, ili $k_1 = 1$ u svim ostalim slučajevima. Ako je α nul prava linija, tada je $\ddot{\alpha}(s) = 0 = \dot{T}(s)$, što znači da je $k_1 = 0$. Ako α nije prava linija, tada postoji interval I na kome je $\ddot{\alpha}(s) \neq 0$. Vektorsko polje $N(s)$ je tada definisano sa $N(s) = \ddot{\alpha}(s) = \dot{T}(s)$, pa sledi da je $k_1 = 1$. Reper $\{T, N, B\}$ je pseudo–ortonormirana baza prostora E_1^3, što znači da je

$$\begin{aligned} \dot{N} &= a_1 T + a_2 N + a_3 B, \\ \dot{B} &= b_1 T + b_2 N + b_3 B. \end{aligned}$$

Iz relacija

$$\begin{aligned} &g(N, N) = g(T, B) = 1, \\ &g(B, B) = 0, \end{aligned}$$

dobijamo da je $a_2 = b_3 = b_1 = 0$. Uzimajući u obzir da je

$$g(T, N) = g(N, B) = 0,$$

diferenciranjem dobijamo da je

$$\begin{aligned} g(\dot{T}, N) + g(T, \dot{N}) &= 0, \\ g(\dot{N}, B) + g(N, \dot{B}) &= 0, \end{aligned}$$

što znači da je $a_3 = -k_1 = -1$ i $a_1 = -b_2$. Prema tome, zaključujemo da u ovom slučaju postoji samo jedna krivina $a_1 = k_2$.

Slučaj 3.3. *Pokretni reper u Euklidskom prostoru E^4*

Uočimo regularnu krivu $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s), \alpha_4(s))$ parametrizovanu dužinom luka s u Euklidskom prostoru E^4, koji je snabdeven metrikom $g = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$. *Freneov reper* duž krive α je ortonormirani reper $\{T, N, B_1, B_2\}$ koji je definisan na sledeći način. T je jedinično tangentno vektorsko polje krive α. Vektorsko polje glavnih normala N je normirano polje ubrzanja $\ddot{\alpha}$. Jedinično vektorsko polje B_1 se odredjuje tako da se $\dot{N}$ može dekomponovati na dve komponente, tangentnu u pravcu T i normalnu u pravcu B_1. B_2 je jedinstveno jedinično vektorsko polje ortogonalno na 3–dimenzioni potprostor $\{T, N, B_1\}$, tako da je orijentacija repera $\{T, N, B_1, B_2\}$ ista kao orijentacija prostora E^4. Freneove formule glase:

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

Funkcije k_1, k_2, k_3 nazivaju se prvom, drugom i trećom krivinom krive α. Fundamentalna teorema za krive u prostoru E^4 glasi:

Teorema B (o kongruenciji). *Ako su $\alpha, \beta : I \to E^4$ regularne krive jediničnih brzina takve da je*

$$k_{1\alpha} = k_{1\beta} > 0, \quad |k_{2\alpha}| = |k_{2\beta}|, \quad |k_{3\alpha}| = |k_{3\beta}|,$$

tada su krive α i β kongruentne, tj. identične do na izometrije prostora E^4.

Sledeće osobine karakterišu neke specijalne krive u prostoru E^4:

(1) $k_1 = 0$ ako i samo ako je α prava linija;

(2) $k_2 = 0$ ako i samo ako je α ravna kriva;

(3) $k_3 = 0$ ako i samo α leži u 3-dimenzionom potprostoru prostora E^4.

(4) $k_1 =$ constant > 0, $k_2 = 0$ ako i samo ako je α krug;

(5) $k_1 = c_1$, $k_2 = c_2$, $k_3 = 0$, $c_1, c_2 \in R_0$ ako i samo ako je α kružna helisa;

(6) $k_1 = c_1$, $k_2 = c_2$, $k_3 = c_3$ $c_1, c_2, c_3 \in R_0$ ako i samo ako je kriva α oblika

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1}\sin(\lambda_1 s)V_1 - \frac{1}{\lambda_1}\cos(\lambda_1 s)V_2 + \frac{1}{\lambda_2}\sin(\lambda_2 s)V_3 - \frac{1}{\lambda_2}\cos(\lambda_2 s)V_4,$$

pri čemu je $\lambda_1^2 = (K - \sqrt{K^2 - 4c_1^2c_3^2})/2$, $\lambda_2^2 = (K + \sqrt{K^2 - 4c_1^2c_3^2})/2$, $K = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$ i gde su V_1, V_2, V_3, V_4 medjusobno ortogonalni konstantni vektori koji zadovoljavaju uslove $g(V_1, V_1) = g(V_2, V_2)$, $g(V_3, V_3) = g(V_4, V_4)$. Kriva α leži na sferi radijusa $r = 1/|c_3|$ u prostoru E^4.

Slučaj 3.4. *Pokretni reper u prostoru Minkovskog* E_1^4

Neka je $\alpha(s)$ proizvoljna kriva u prostoru Minkovskog E_1^4, odnosno u prostoru E^4 koji je snabdeven ravnom metrikom $g = -dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$ indeksa 1. Slično kao u slučaju B, u zavisnosti od kauzalnog karaktera krive α, J. Valrave je u radu [W] konstruisao različite Freneove repere i dobio odgovarajuće Freneove formule na sledeći način. Označimo sa $\{T(s), N(s), B_1(s), B_2(s)\}$ pokretni Freneov reper duž krive α.

<u>Slučaj 1.</u> α je prostorna kriva

Neka je s parametar dužine luka tako da je $g(\dot\alpha(s), \dot\alpha(s)) = 1$. T je jedinično tangentno vektorsko polje $\dot\alpha$ krive α. Ako je $\ddot\alpha \neq 0$, uzmimo da N ima pravac $\ddot\alpha$. U zavisnosti od kauzalnog karaktera vektora $\ddot\alpha$, imamo sledeće slučajeve.

<u>Slučaj 1.1.</u> $g(\ddot\alpha, \ddot\alpha) > 0$

Vektorsko polje glavnih normala N je normirano vektorsko polje $\ddot\alpha$. Vektorsko polje B_1 ima pravac normalne komponente $C^\perp$ vektora $\dot N$ u odnosu na ravan $\{T, N\}$, i može imati sva tri kauzalna karaktera.

<u>Slučaj 1.1.1</u> $g(C^\perp, C^\perp) > 0$

B_1 je normirano vektorsko polje $C^\perp$, a B_2 je jedinstveno jedinično vremensko vektorsko polje ortogonalno na 3-dimenzioni potprostor $\{T, N, B_1\}$, tako da je orijentacija repera $\{T, N, B_1, B_2\}$ ista kao orijentacija prostora E_1^4. Freneove formule tada glase

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

pri čemu su T,N,B_1,B_2 medjusobno ortogonalni vektori koji zadovoljavaju jednačine

$$g(T,T) = g(N,N) = g(B_1,B_1) = 1, \quad g(B_2,B_2) = -1.$$

Slučaj 1.1.2 $\quad g(C^{\perp},C^{\perp}) < 0$

Tada je B_1 vremensko normirano vektorsko polje $C^{\perp}$, a B_2 je jedinstveno prostorno jedinično vektorsko polje ortogonalno na 3–dimenzioni potprostor $\{T, N, B_1\}$, tako da je orijentacija repera $\{T, N, B_1, B_2\}$ ista kao orijentacija prostora E_1^4. Freneove formule su oblika

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu su T,N,B_1,B_2 medjusobno ortogonalni vektori koji zadovoljavaju jednakosti

$$g(T,T) = g(N,N) = g(B_2,B_2) = 1, \quad g(B_1,B_1) = -1.$$

Slučaj 1.1.3 $\quad g(C^{\perp},C^{\perp}) = 0$

Takva kriva α naziva se *parcijalno nul* krivom. Tada je vektorsko polje B_1 vektorsko polje $C^{\perp}$, a B_2 je jedinstveno nul vektorsko polje ortogonalno na ravan $\{T, N\}$, tako da je $g(B_1, B_2) = 1$. Freneove formule tada postaju

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & -k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu T,N,B_1,B_2 zadovoljavaju jednačine

$$g(T,T) = g(N,N) = 1, \quad g(B_1,B_1) = g(B_2,B_2) = 0,$$
$$g(T,N) = g(T,B_1) = g(T,B_2) = g(N,B_1) = g(N,B_2) = 0, \quad g(B_1,B_2) = 1.$$

Slučaj 1.2. $g(\ddot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s)) < 0$

Vektorsko polje glavnih normala N je normirano vremensko vektorsko polje $\ddot{\alpha}$. B_1 je jedinično prostorno vektorsko polje u pravcu normalne komponente vektorskog polja $\dot{N}$. B_2 je jedinstveno jedinično prostorno vektorsko polje ortogonalno na 3-dimenzioni potprostor $\{T, N, B_1\}$ tako da je orijentacija $\{T, N, B_1, B_2\}$ ista kao orijentacija E_1^4. Freneove formule su tada oblika

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu su T,N,B_1,B_2 medjusobno ortogonalni vektori koji zadovoljavaju jednačine

$$g(T, T) = g(B_1, B_1) = g(B_2, B_2) = 1, \quad g(N, N) = -1.$$

Slučaj 1.3. $g(\ddot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s)) = 0$

Takva kriva α naziva se *pseudo nul* krivom. Tada je N vektorsko polje $\ddot{\alpha}$, ako je $\ddot{\alpha}(s) \neq 0$. B_1 je normirano prostorno vektorsko polje $\dddot{\alpha}$. Osim toga, B_2 je jedinstveno nul vektorsko polje ortogonalno na potprostor $\{T, B_1\}$, tako da je $g(N, B_2) = 1$. Freneove formule date su u obliku

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & -k_2 \\ -k_1 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu krivina k_1 može imati samo dve vrednosti: 0 ako je α prava linija, ili 1 u ostalim slučajevima. Pri tome, T,N,B_1,B_2 zadovoljavaju jednačine

$$g(T, T) = g(B_1, B_1) = 1, \quad g(N, N) = g(B_2, B_2) = 0,$$
$$g(T, N) = g(T, B_1) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(B_1, B_2) = 0, \quad g(N, B_2) = 1.$$

Slučaj 2. α je vremenska kriva

U ovom slučaju, s je parametar dužine luka krive α tako da je $g(\dot{\alpha}(s), \dot{\alpha}(s)) = -1$. Vektorsko polje T je jedinično vremensko tangentno vektorsko polje $\dot{\alpha}$. N je prostorno normirano vektorsko polje $\ddot{\alpha}$. B_1 je prostorno jedinično vektorsko polje u pravcu normalne komponente vektora $\dot{N}$ u odnosu na ravan $\{T, N\}$. B_2 je jedinstveno prostorno jedinično vektorsko polje ortogonalno na 3–dimenzioni potprostor $\{T, N, B_1\}$ i takvo da orijentacija repera $\{T, N, B_1, B_2\}$ odgovara orijentaciji prostora E_1^4. Freneove formule glase

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu su T,N,B_1,B_2 medjusobno ortogonalni vektori koji zadovoljavaju jednačine

$$g(T, T) = -1, \quad g(N, N) = g(B_1, B_1) = g(B_2, B_2) = 1.$$

Slučaj 3. α je nul kriva

Neka je T nul vektorsko polje $\dot{\alpha}$. Ako je s parametar pseudo–dužine luka krive α, tada je $g(\ddot{\alpha}(s), \ddot{\alpha}(s)) = 1$, pa uzmimo da je $N = \ddot{\alpha}$. Neka je B_1 normalna komponenta vektorskog polja $\dddot{\alpha}$ u odnosu na ravan $\{T, N\}$. Iz relacija $g(\dot{\alpha}, \dddot{\alpha}) = -1$ i $g(\ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}) = 0$, sledi da je $g(B_1, B_1) = 0$ i B_1 je jedinstveno odredjen pomoću uslova $g(T, B_1) = 1$. Tada je B_2 jedinstveno prostorno jedinično vektorsko polje ortogonalno na 3–dimenzioni potprostor $\{T, N, B_1\}$ i takvo da je orijentacija repera $\{T, N, B_1, B_2\}$ ista kao orijentacija prostora E_1^4. Freneove formule su oblika

$$\begin{bmatrix} \dot{T} \\ \dot{N} \\ \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ -k_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},$$

pri čemu krivina k_1 može imati samo dve vrednosti: 0 ako je α nul prava linija ili 1 u ostalim slučajevima. Tada vektori T,N,B_1,B_2 zadovoljavaju jednačine

$$g(T, T) = g(B_1, B_1) = 0, \quad g(N, N) = g(B_2, B_2) = 0, \; 1$$
$$g(T, N) = g(T, B_2) = g(N, B_1) = g(N, B_2) = g(B_1, B_2) = 0, \quad g(T, B_1) = 1.$$

GLAVA 2

KRIVE NA HIPERKVADRIKAMA U PROSTORIMA MINKOVSKOG

U ovoj glavi najpre su date neke osobine prostornih krivih sa vremenskom i nul glavnom normalom i vremenskih krivih jedinične brzine koje leže na pseudosferi u prostoru Minkovskog E_1^3. Štaviše, dokazano je da ne postoje nul krive koje leže na pseudosferi u istom prostoru. Potom je data karakterizacija krivih proizvoljnog kauzalnog karaktera koje leže na pseudohiperboličkom prostoru u prostor–vremenu Minkovskog E_1^4. Osim toga, dokazano je da ne postoje vremenske i nul krive koje leže na pseudohiperboličkom prostoru u prostor–vremenu Minkovskog E_1^4.

Napomenimo da su krive koje leže na sferi u Euklidskom prostoru E^3 proučavane u radovima [MP], [WO] i [WO1], gde su autori dali karakterizaciju tih krivih u termininma njihove prve krivine κ i druge krivine τ. Analogno, prostorne krive sa prostornom glavnom normalom koje leže na Lorencovoj sferi u prostoru E_1^3 proučavane su u radu [PP]. Navodimo dobijene teoreme.

Teorema 1.A ([PP]). *Neka je $\alpha(s)$ prostorna kriva jedinične brzine koja leži na Lorencovoj sferi radijusa r i sa centrom m u 3-dimenzionom prostoru Minkovskog. Tada je $\rho \neq 0$. Ako je $\tau \neq 0$ tada je $\alpha - m = -Rn + R'Tb$, pri čemu je $R = 1/\rho$, $T = 1/\tau$.*

Teorema 1.B ([PP]). *Neka je $\alpha(s)$ prostorna kriva jedinične brzine sa $R \neq 0$, $T \neq 0$, pri čemu je $R = 1/\rho$, $T = 1/\tau$. Ako je $R^2 - (R'T)^2 = r^2 =$ constant, $r > 0$, tada kriva α leži na Lorencovoj sferi radijusa r.*

Teorema 1.C ([PP]). *Ako je $\alpha(s)$ prostorna kriva jedinične brzine sa $R \neq 0$, $T \neq 0$, tada $\alpha(s)$ leži na Lorencovoj sferi ako i samo ako je $R\tau = (R'/\tau)'$.*

Teorema 1.D ([PP]). *Prostorna kriva $\alpha(s)$ jedinične brzine leži na Lorencovoj sferi ako i samo ako je $\rho > 0$ i postoji diferencijabilna funkcija $f(s)$ tako da je $f\tau = R'$, $f' - R\tau = 0$.*

Teorema 1.E ([PP]). *Prostorna kriva $\alpha(s)$ jedinične brzine leži na Lorencovoj sferi ako i samo ako postoje konstante $A, B \in R$ tako da važi jednakost*

$$\rho\Big[A\cosh\Big(\int_0^s \tau ds\Big) - B\sinh\Big(\int_0^s \tau ds\Big)\Big] \equiv 1.$$

1. U teoremama koje slede, data je karakterizacija prostornih krivih jedinične brzine sa vremenskom i nul glavnom normalom koje leže na pseudosferi u 3-dimenzionom prostoru Minkovskog E_1^3

Teorema 1.1 ([PŠ]). *Neka je $\alpha(s)$ prostorna kriva jedinične brzine sa vremenskom glavnom normalom N, koja leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ u prostoru E_1^3. Tada je $\kappa \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$. Ako je $\tau \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$, tada je*

$$\alpha - m = (1/\kappa)N - (1/\tau)(1/\kappa)'B.$$

Dokaz. Pretpostavimo da α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ sa centrom m u prostoru E_1^3. Tada je

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2,$$

za svako $s \in I \subset R$. Diferenciranjem prethodne jednačine po s, nalazimo da je

$$g(T, \alpha - m) = 0. \tag{1.1}$$

Diferenciranjem relacije (1.1) po s dobija se

$$\kappa g(N, \alpha - m) = -1.$$

Otuda je $\kappa \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$, pa je

$$g(N, \alpha - m) = -1/\kappa. \tag{1.2}$$

Dalje, pretpostavimo da je $\tau \neq 0$. Neka je dekompozicija vektora $\alpha - m$ u odnosu na Freneovu bazu $\{T, N, B\}$ data sa

$$\alpha - m = aT + bN + cB. \tag{1.3}$$

pri čemu su $a = a(s)$, $b = b(s)$ i $c = c(s)$ proizvoljne funkcije. Tada pomoću relacija (1.1) i (1.2) sledi da je

$$g(T, \alpha - m) = a = 0, \quad g(N, \alpha - m) = -b = -1/\kappa, \quad g(B, \alpha - m) = c.$$

Diferenciranjem relacije (1.2) po s i koristeći odgovarajuće Freneove formule, dobija se da je

$$g(\kappa T + \tau B, \alpha - m) + g(N, T) = -(1/\kappa)',$$

i stoga je

$$g(B, \alpha - m) = c = (-1/\tau)(/1\kappa)'.$$

Prema tome, zamenom koeficijenata a, b i c u relaciji (1.3) sledi da je

$$\alpha - m = (1/\kappa)N - (1/\tau)(1/\kappa)'B. \quad \square$$

Teorema 1.2 ([PŠ]) *Neka je $\alpha(s)$ prostorna kriva jedinične brzine sa vremenskom glavnom normalom N, krivinom $\kappa(s) \neq 0$ i torzijom $\tau(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ u prostoru E_1^3. Ako je*

$$-\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)^2 = r^2 = \text{constant}, \qquad r \in R^+, \tag{1.4}$$

tada kriva α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$.

Dokaz. Pretpostavimo da važi relacija (1.4). Uočimo vektor

$$m = \alpha - \frac{1}{\kappa}N + \frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'B.$$

Diferenciranjem prethodne jednačine po s imamo da je

$$\begin{aligned} m' &= \alpha' - \Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'N - \frac{1}{\kappa}N' + \Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)'B + \frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'B' \\ &= \Big(-\frac{\tau}{\kappa} + \Big(\frac{1}{\tau}\Big)'\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)' + \frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)''\Big)B. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Diferenciranjem relacije (1.4) po s nalazimo da je

$$-2\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)' + 2\Big(\frac{1}{\tau}\Big)\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)' = 0.$$

i stoga je

$$-\frac{\tau}{\kappa} + \Big(\frac{1}{\tau}\Big)'\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)' + \frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'' = 0.$$

Zamenom poslednje relacije u relaciji (1.5), sledi da je $m' = 0$. Dakle, $m =$ constant pa lako nalazimo da je

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = -\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)^2 = r^2.$$

Prema tome, sledi da α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$. $\square$

Teorema 1.3 ([PŠ]). *Neka je $\alpha(s)$ prostorna kriva jedinične brzine sa vremenskom glavnom normalom N, krivinom $\kappa(s) \neq 0$ i torzijom $\tau(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ u prostoru E_1^3. Tada α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ ako i samo ako je*

$$(1.6) \qquad \frac{\tau}{\kappa} = \Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)', \qquad \Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)^2 > \Big(\frac{1}{\kappa}\Big)^2.$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da kriva α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ sa centrom m u prostoru E_1^3. Tada je $g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2$ za svako $s \in I \subset R$. Na osnovu teoreme 1.1 sledi da je

$$(1.7) \qquad \alpha - m = \frac{1}{\kappa}N - \frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'B,$$

odakle je

$$(1.8) \qquad g(\alpha - m, \alpha - m) = -\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)^2.$$

Iz pretpostavke i relacije (1.8) sledi da je

$$(1.9) \qquad -\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)^2 = r^2,$$

i stoga je

$$\Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)^2 > \Big(\frac{1}{\kappa}\Big)^2.$$

Diferenciranjem relacije (1.9) po s dobija se da je

$$-\frac{1}{\kappa}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)' + \frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big(\Big(\frac{1}{\tau}\Big)'\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)' + \frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)''\Big) = 0,$$

odakle je

$$-\frac{\tau}{\kappa} + \Big(\frac{1}{\tau}\Big)'\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)' + \frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'' = 0.$$

Konačno,

$$\frac{\tau}{\kappa} = \Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)'.$$

Obratno, pretpostavimo da važi relacija (1.6). Tada se izraz $\tau/\kappa = (1/\tau(1/\kappa)')'$ lako može transformisati u jednakost

$$-2\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)' + \frac{2}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)' = 0.$$

Dalje, poslednja relacija je diferencijal jednačine

$$-\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)^2 = c = \text{constant},$$

pa s obzirom na pretpostavku (1.6) možemo uzeti da je $c = r^2$, $r \in R^+$. Konačno, na osnovu teoreme 1.2 sledi da kriva α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$. $\square$

Teorema 1.4 ([PŠ]). *Prostorna kriva $\alpha(s)$ jedinične brzine sa vremenskom glavnom normalom N leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ u prostoru E_1^3 ako i samo ako postoji diferencijabilna funkcija $f(s)$ tako da je $f\tau = (1/\kappa)'$, $f' = \tau/\kappa$, $|f| > 1/\kappa$*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da kriva $\alpha(s)$ leži na pseudosferi $S_1^2(r)$. Tada na osnovu teoreme 1.1 sledi da je

$$-\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)^2 = r^2.$$

Osim toga, na osnovu teoreme 1.3 imamo da je

$$\frac{\tau}{\kappa} = \Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)'.$$

Dalje, definisaćemo diferencijabilnu funkciju $f(s)$ sa

$$f = \frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'.$$

Sledi da je $f' = \tau/\kappa$ i $f^2 > (1/\kappa)^2$, pa je $|f| > 1/\kappa$.

Obratno, pretpostavimo da postoji diferencijabilna funkcija $f(s)$ tako da je $f\tau = (1/\kappa)'$, $f' = \tau/\kappa$ i $|f| > 1/\kappa$. S obzirom da je f diferencijabilna funkcija, ona je i neprekidna pa je $\tau \neq 0$ za svako s. Dalje, pošto je

$$f = \frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)',$$

imamo da je

$$\Big(\frac{1}{\tau}\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)'\Big)' = \frac{\tau}{\kappa},$$

pa na osnovu teoreme 1.3 sledi da α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$. $\square$

Teorema 1.5 ([PŠ]). *Prostorna kriva $\alpha(s)$ jedinične brzine sa vremenskom glavnom normalom N leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ ako i samo ako postoje konstante $A, B \in R$ tako da je*

$$\kappa\Big(A\mathrm{sh}\Big(\int_0^s \tau(s)\,ds\Big) - B\mathrm{ch}\Big(\int_0^s \tau(s)\,ds\Big)\Big) = 1.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da kriva $\alpha(s)$ leži na pseudosferi $S_1^2(r)$. Tada na osnovu teoreme 1.4 postoji diferencijabilna funkcija $f(s)$ tako da je $f\tau = (1/\kappa)'$,

$f' = \tau/\kappa$ i $|f| > 1/\kappa$. Dalje, definisaćemo C^2 funkciju $\theta(s)$ i C^1 funkcije $g(s)$ i $h(s)$ sa

$$\theta(s) = \int_0^s \tau(s)\, ds.$$

$$g(s) = -\frac{1}{\kappa}\operatorname{sh}\theta + f(s)\operatorname{ch}\theta, \quad h(s) = -\frac{1}{\kappa}\operatorname{ch}\theta + f(s)\operatorname{sh}\theta. \tag{1.10}$$

Diferenciranjem funkcija $\theta(s)$, $g(s)$ i $h(s)$ po s dobijamo da je

$$\theta'(s) = \tau(s), \quad g'(s) = h'(s) = 0,$$

i stoga je

$$g(s) = A = \text{constant}, \quad h(s) = B = \text{constant} \qquad (A, B \in R). \tag{1.11}$$

Prema tome, zamenom relacije (1.11) u relaciji (1.10) dobija se

$$-\frac{1}{\kappa}\operatorname{sh}\theta + f(s)\operatorname{ch}\theta = A, \qquad -\frac{1}{\kappa}\operatorname{ch}\theta + f(s)\operatorname{sh}\theta = B.$$

Množenjem prve od prethodnih jednačina sa $\operatorname{sh}\theta$, druge sa $-\operatorname{ch}\theta$ i sabiranjem dobijenih jednačina, nalazimo da je

$$-\frac{1}{\kappa}(\operatorname{sh}^2\theta - \operatorname{ch}^2\theta) = A\operatorname{sh}\theta - B\operatorname{ch}\theta,$$

odakle je

$$\kappa\Big(A\operatorname{sh}\Big(\int_0^s \tau(s)\, ds\Big) - B\operatorname{ch}\Big(\int_0^s \tau(s)\, ds\Big)\Big) = 1. \tag{1.12}$$

Obratno, pretpostavimo da postoje konstante $A, B \in R$ tako da relacija (1.12) važi za svako $s \in I \subset R$. Diferenciranjem relacije (1.12) po s nalazimo da je

$$\Big(\frac{1}{\kappa}\Big)' = \tau\Big(A\operatorname{ch}\Big(\int_0^s \tau(s)\, ds\Big) - B\operatorname{sh}\Big(\int_0^s \tau(s)\, ds\Big)\Big). \tag{1.13}$$

Dalje, definisaćemo diferencijabilnu funkciju $f(s)$ sa

$$f(s) = A\operatorname{ch}\Big(\int_0^s \tau(s)\, ds\Big) - B\operatorname{sh}\Big(\int_0^s \tau(s)\, ds\Big). \tag{1.14}$$

Tada lako nalazimo da je $|f| > 1/\kappa$. Relacije (1.13) i (1.14) impliciraju da je $(1/\kappa)' = \tau f$. Konačno, diferenciranjem relacije (1.14) i upotrebom relacije (1.12) sledi da je

$$f' = \tau\Big(A\operatorname{sh}\Big(\int_0^s \tau(s)\, ds\Big) - B\operatorname{ch}\Big(\int_0^s \tau(s)\, ds\Big)\Big) = \frac{\tau}{\kappa}.$$

Prema tome, na osnovu teoreme 1.4 sledi da kriva α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$. □

Teorema 1.6 ([PŠ]). *Neka je $\alpha(s)$ prostorna kriva jedinične brzine sa nul glavnom normalom N u prostoru E_1^3. Tada $\alpha(s)$ leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ sa centrom m ako i samo ako je $\alpha(s)$ ravna kriva i važi da je*

$$\alpha - m = -\frac{r^2}{2}N - B, \quad r \in R^+.$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da kriva $\alpha(s)$ leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ sa centrom m. Tada je $g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2$, za svako $s \in I \subset R$. Diferenciranjem prethodne jednačine po s nalazimo da je

$$g(T, \alpha - m) = 0. \tag{1.15}$$

Štaviše, diferenciranjem prethodne jednačine dobija se

$$\kappa g(N, \alpha - m) = -1. \tag{1.16}$$

S obzirom da je u ovom slučaju $\kappa = 1$ za svako $s \in I \subset R$, sledi da je

$$g(N, \alpha - m) = -1. \tag{1.17}$$

Diferenciranjem relacije (1.17) po s i koristeći Freneove formule nalazimo da je

$$\tau g(N, \alpha - m) = 0,$$

što zajedno sa relacijom (1.17) daje $\tau = 0$. Prema tome, $\alpha(s)$ je ravna kriva. Dalje, uočimo dekompoziciju vektora $\alpha - m$ u odnosu na Freneovu bazu $\{T, N, B\}$ oblika

$$\alpha - m = aT + bN + cB,$$

pri čemu su $a = a(s)$, $b = b(s)$, $c = c(s)$ proizvoljne funkcije. Tada relacije (1.15) i (1.17) impliciraju da je

$$g(T, \alpha - m) = a = 0, \quad g(N, \alpha - m) = c = -1, \quad g(B, \alpha - m) = b.$$

Diferenciranjem jednakosti $g(B, \alpha - m) = b$ u odnosu na s, dobija se

$$g(T, \alpha - m) = -b',$$

što zajedno sa relacijom (1.15) daje $b' = 0$. Otuda je $b = b_0 = \text{constant} \in R$. Prema tome, $\alpha - m = b_0 N - B$. Kako je $g(\alpha - m, \alpha - m) = -2b_0 = r^2$, nalazimo da je $b_0 = -r^2/2$. Stoga je

$$\alpha - m = -\frac{r^2}{2}N - B, \qquad r \in R^+. \tag{1.18}$$

Obratno, neka je $\alpha(s)$ ravna prostorna kriva jedinične brzine sa nul glavnom normalom i neka $\alpha(s)$ zadovoljava jednačinu (1.18). Tada je

$$m = \alpha + \frac{r^2}{2}N + B,$$

pa diferenciranjem prethodne jednačine po s nalazimo da je

$$m' = \alpha' + \frac{r^2}{2}N' + B'.$$

Pošto je u ovom slučaju $k(s) = 1$ i $\tau(s) = 0$ za svako $s \in I \subset R$, koristeći Freneove jednačine sledi da je $m' = 0$, pa je $m = \text{constant}$. Stoga lako nalazimo da je

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2,$$

što znači da kriva α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$. $\square$

Teorema 1.7 ([PŠ]). *Prostorna kriva $\alpha(s)$ jedinične brzine sa nul glavnom normalom N leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ u prostoru E_1^3 ako i samo ako postoje konstante $A, B \in R$ tako da je*

$$A \sinh\Big(\int_0^s \tau(s)\,ds\Big) - B\cosh\Big(\int_0^s \tau(s)\,ds\Big) = 1.$$

Dokaz. Najpre pretpostavimo da kriva α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$. Tada na osnovu teoreme 1.1 imamo da je $\tau = 0$, za svako $s \in I \subset R$. Dalje, neka je $\theta(s)$ funkcija klase C^2, $g(s)$ i $h(s)$ funkcije klase C^1 tako da je

$$\theta(s) = \int_0^s \tau(s)\,ds, \quad g(s) = -\sinh(\theta(s)), \quad h(s) = -\cosh(\theta(s)).$$

Kako je $\tau(s) = 0$ za svako s, lako nalazimo da je

$$\theta(s) = c = \text{constant}, \quad g(s) = -\sinh(c) = A, \quad h(s) = -\cosh(c) = B.$$

Dakle, postoje konstante $A, B \in R$ tako da je

$$A\sinh\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big) - B\cosh\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big) = 1.$$

Obratno, pretpostavimo da postoje konstante $A, B \in R$, tako da torzija $\tau(s)$ krive α zadovoljava jednačinu

$$A\sinh\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big) - B\cosh\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big) = 1. \tag{1.19}$$

za svako $s \in I \subset R$. Diferenciranjem po s relacije (1.19) dobijamo da je

$$\tau(A\cosh(\int_0^s \tau(s)\,ds) - B\sinh(\int_0^s \tau(s)\,ds)) = 0. \tag{1.20}$$

Novim diferenciranjem relacije (1.20) nalazimo da je

$$\tau'(A\cosh(\int_0^s \tau(s)\,ds) - B\sinh(\int_0^s \tau(s)\,ds))+$$

$$+\tau^2(A\sinh(\int_0^s \tau(s)\,ds) - B\cosh(\int_0^s \tau(s)\,ds)) = 0. \tag{1.21}$$

Tada relacije (1.19) i (1.21) impliciraju da je

$$\tau'(A\cosh(\int_0^s \tau(s)\,ds) - B\sinh(\int_0^s \tau(s)\,ds)) + \tau^2 = 0.$$

Množenjem poslednje jednakosti sa τ i koristeći (1.20) imamo da je $\tau^3 = 0$ i otuda $\tau = 0$ za svako s. Dalje, uočimo vektor

$$m = \alpha + \frac{r^2}{2}N + B,$$

pri čemu $r \in R^+$. S obzirom da je $\tau = 0$ za svako s, sledi da je $m' = 0$ i stoga je $m = \text{constant}$. Konačno,

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2,$$

pa α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$. $\square$

U teoremama koje slede, data je analogna karakterizacija vremenskih krivih koje leže na pseudosferi S_1^2 u prostoru Minkovskog E_1^3.

Teorema 1.8 ([PŠ1]). *Neka je α ravna vremenska kriva jedinične brzine sa krivinom $\kappa = \kappa(s)$. Tada α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ sa centrom m u prostoru E_1^3 ako i samo ako je $\kappa = \text{constant} \neq 0$ i važi da je*

$$\alpha - m = (1/\kappa)N \pm \sqrt{r^2 - (1/\kappa)^2}B.$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ sa centrom m. Tada je

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2. \tag{1.22}$$

za svako $s \in I \subset R$. Diferenciranjem relacije (1.22) po s, nalazimo da je

$$g(T, \alpha - m) = 0. \tag{1.23}$$

Osim toga, diferenciranjem relacije (1.23) po s dobija se da je

$$\kappa g(N, \alpha - m) = 1,$$

gde smo upotrebili odgovarajuću Freneovu formulu. Sledi da je $\kappa \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ i da je

$$g(N, \alpha - m) = 1/\kappa. \tag{1.24}$$

Dalje, neka je dekompozicija vektora $\alpha - m$ u odnosu na Freneovu bazu $\{T, N, B\}$ data sa

$$\alpha - m = aT + bN + cB, \tag{1.25}$$

pri čemu su $a = a(s)$, $b = b(s)$, $c = c(s)$ proizvoljne funkcije. Tada relacije (1.23) i (1.24) impliciraju da je

$$g(T, \alpha - m) = -a = 0, \quad g(N, \alpha - m) = b = 1/\kappa, \quad g(B, \alpha - m) = c.$$

Dalje, diferenciranjem relacije (1.24) po s dobija se da je

$$g(N', \alpha - m) + g(N, \alpha') = (1/\kappa)'.$$

Po pretpostavci, α je ravna kriva. Zato je $\tau = 0$ i koristeći odgovarajuću Freneovu formulu imamo da je

$$\kappa g(T, \alpha - m) = (1/\kappa)'.$$

Tada relacija (1.23) implicira da je $(1/\kappa)' = 0$ i stoga je $\kappa = \text{constant} \in R$. S obzirom da je $\kappa \neq 0$ za svako s, sledi da je $\kappa = \text{constant} \neq 0$. Štaviše, zamenom koeficijenata a, b i c u relaciji (1.25) dobija se da je

$$\alpha - m = (1/\kappa)N + cB.$$

Sada lako nalazimo da je

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = (1/\kappa)^2 + c^2 = r^2,$$

odakle je $c = \pm\sqrt{r^2 - (1/\kappa)^2}$. Prema tome,

$$\alpha - m = (1/\kappa)N \pm \sqrt{r^2 - (1/\kappa)^2}B.$$

Obratno, pretpostavimo da je $\kappa = \text{constant} \neq 0$ i neka je

$$\alpha - m = (1/\kappa)\, N \pm \sqrt{r^2 - (1/\kappa)^2} B,$$

pri čemu je $m \in E_1^3$ proizvoljan vektor i $r \in R^+$. Dokazaćemo da je $m = \text{constant}$. Kako je

$$m = \alpha - (1/\kappa)\, N \pm \sqrt{r^2 - (1/\kappa)^2} B,$$

diferenciranjem prethodne jednačine po s i koristeći odgovarajuću Freneovu jednačinu dobija se da je $m' = 0$. Stoga je $m = \text{constant}$. S obzirom da je $g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2$, sledi da α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ sa centrom m. $\square$

Napomena 1.1. U radu [W] data je klasifikacija prostornih, vremenskih i nul W-krivih (tj. krivih koje imaju konstantnu prvu i drugu krivinu) u 3-dimenzionalnom prostoru Minkovskog E_1^3. S obzirom da kriva $\alpha(s)$ u Teoremi 1.8 ima prvu krivinu $\kappa = \text{constant} \neq 0$ i drugu krivinu $\tau = 0$, na osnovu te klasifikacije sledi da je ona deo jedne ortogonalne hiperbole.

Teorema 1.9 ([PŠ1]). *Neka je $\alpha(s)$ vremenska kriva jedinične brzine, sa krivinom $\kappa(s) \neq 0$ i torzijom $\tau(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ u prostoru E_1^3. Tada α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ sa centrom m ako i samo ako*

$$(1/\kappa)^2 + ((1/\tau)(1/\kappa)')^2 = r^2.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da α leži na pseudosferi sa centrom m i radijusa r u prostoru E_1^3. Tada je

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2. \tag{1.26}$$

Diferenciranjem prethodne jednačine tri puta po s i koristeći odgovarajuće Freneove formule, dobija se

$$g(B, \alpha - m) = (1/\tau)(1/\kappa)'.$$

Dalje, dekompozicija vektora $\alpha - m$ u odnosu na Frene–Sereovu bazu $\{T, N, B\}$ data je sa

$$\alpha - m = aT + bN + cB, \tag{1.27}$$

gde su $a = a(s)$, $b = b(s)$ i $c = c(s)$ proizvoljne funkcije. Sledi da je

$$g(T, \alpha - m) = -a = 0, \quad g(N, \alpha - m) = b = 1/\kappa, \quad g(B, \alpha - m) = c = (1/\tau)(1/\kappa)'.$$

Prema tome, zamenom koeficijenata a, b i c u (1.27) dobijamo da je

$$\alpha - m = (1/\kappa)N + (1/\tau)(1/\kappa)'B.$$

Konačno,

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2 = (1/\kappa)^2 + ((1/\tau)(1/\kappa)')^2.$$

Obratno, ako je

$$(1/\kappa)^2 + ((1/\tau)(1/\kappa)')^2 = r^2, \tag{1.28}$$

pri čemu $r \in R^+$, uočimo vektor $m \in E_1^3$ sa jednačinom

$$m = \alpha - (1/\kappa)N - (1/\tau)(1/\kappa)'B. \tag{1.29}$$

Dokazaćemo da je m = constant. Diferenciranjem prethodne jednačine po s, nalazimo da je

$$\begin{aligned} m' &= \alpha' - (1/\kappa)'N - (1/\kappa)N' - ((1/\tau)(1/\kappa)')'B - (1/\tau)(1/\kappa)'B' \\ &= (-\tau/\kappa - ((1/\tau)(1/\kappa)')')B. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Diferenciranjem pretpostavke (1.28) po s, dobija se

$$(2/\kappa)(1/\kappa)' + (2/\tau)(1/\kappa)'((1/\tau)(1/\kappa)')' = 0,$$

odakle je

$$(\tau/\kappa) + ((1/\tau)(1/\kappa)')' = 0.$$

Zamenom poslednje relacije u relaciji (1.30) nalazimo da je $m' = 0$ za svako $s \in I \subset R$ i stoga je m = constant. Relacija (1.29) implicira da je

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = (1/\kappa)^2 + ((1/\tau)(1/\kappa)')^2 = r^2.$$

Zato kriva α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ sa centrom m. $\square$

Teorema 1.10 ([PŠ1]). *Neka je $\alpha(s)$ vremenska kriva jedinične brzine sa krivinom $\kappa(s) \neq 0$ i torzijom $\tau(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ u prostoru E_1^3. Tada α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ ako i samo ako je*

$$(\tau/\kappa) = -((1/\tau)(1/\kappa)')'.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da kriva α leži na pseudosferi sa centrom m i radijusa $r \in R^+$ u prostoru E_1^3. Tada je

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2, \tag{1.31}$$

za svako $s \in I \subset R$. Štaviše, na osnovu Teoreme 2.1 imamo

$$(1/\kappa)^2 + ((1/\tau)(1/\kappa)')^2 = r^2. \tag{1.32}$$

Diferenciranjem relacije (1.32) po s sledi da je

$$(1/\kappa)(1/\kappa)' + (1/\tau)(1/\kappa)'((1/\tau)(1/\kappa)')' = 0$$

i prema tome

$$\tau/\kappa = -((1/\tau)(1/\kappa)')'.$$

Obratno, pretpostavimo da jednačina

$$\tau/\kappa = -((1/\tau)(1/\kappa)')'$$

važi za svako $s \in I \subset R$. Tada se poslednja jednakost može lako transformisati u jednakost

$$(2/\kappa)(1/\kappa)' + (2/\tau)(1/\kappa)'((1/\tau)(1/\kappa)')' = 0.$$

S obzirom da je poslednji izraz diferencijal jednačine

$$(1/\kappa)^2 + ((1/\tau)(1/\kappa)')^2 = c = \text{constant} > 0,$$

možemo uzeti da je $c = r^2$, $r \in R^+$. Konačno, na osnovu teoreme 1.9 sledi da kriva α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$. □

Teorema 1.11 ([PŠ1]). *Vremenska kriva $\alpha(s)$ jedinične brzine sa krivinom $\kappa(s) \neq 0$ i torzijom $\tau(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ u prostoru E_1^3 ako i samo ako postoji diferencijabilna funkcija $f(s)$ tako da je $f\tau = (1/\kappa)'$ i $f' + \tau/\kappa = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da $\alpha(s)$ leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ u prostoru E_1^3. Tada na osnovu teoreme 1.3 imamo da je

$$\tau/\kappa = -((1/\tau)(1/\kappa)')'.$$

Dalje, definisaćemo diferencijabilnu funkciju $f = f(s)$ sa

$$f = (1/\tau)(1/\kappa)'.$$

Stoga je $f' = -\tau/\kappa$.

Obratno, pretpostavimo da postoji diferencijabilna funkcija $f(s)$ tako da je $f\tau = (1/\kappa)'$ i $f' = -\tau/\kappa$. Dalje, pošto je

$$f = (1/\tau)(1/\kappa)'.$$

sledi da je

$$((1/\tau)(1/\kappa)')' = -\tau/\kappa.$$

Konačno, na osnovu teoreme 1.10 imamo da kriva α leži na pseudosferi $S_1^2(r)$. $\square$

Teorema 1.12 ([PŠ1]). *Vremenska kriva $\alpha(s)$ jedinične brzine sa krivinom $\kappa(s) \neq 0$ i torzijom $\tau(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ leži na pseudosferi $S_1^2(r)$ u prostoru E_1^3 ako i samo ako postoje konstante $A, B \in R$ tako da jednakost*

$$\kappa\Big(A\cos\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big) + B\sin\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big)\Big) = 1.$$

važi za svako $s \in I \subset R$.

Dokaz. Prvo pretpostavimo da kriva $\alpha(s)$ leži na pseudosferi $S_1^2(r)$. Tada na osnovu teoreme 1.4 sledi da postoji diferencijabilna funkcija $f(s)$ tako da je $f\tau = (1/\kappa)'$ i $f' = -\tau/\kappa$. Dalje, definisaćemo C^2 funkciju $\theta(s)$ i C^1 funkcije $g(s)$ i $h(s)$ pomoću

$$\theta(s) = \int_0^s \tau(s)\,ds, \tag{1.33}$$
$$g(s) = (1/\kappa)\cos\theta - f(s)\sin\theta, \quad h(s) = (1/\kappa)\sin\theta + f(s)\cos\theta.$$

Diferenciranjem funkcija θ, g i h po s nalazimo da je

$$\theta'(s) = \tau(s), \quad g'(s) = h'(s) = 0,$$

i stoga je

$$g(s) = A, \qquad h(s) = B, \tag{1.34}$$

$A, B \in R$. Prema tome, iz relacija (1.33) i (1.34) dobijamo da je

$$(1/\kappa)\cos\theta - f(s)\sin\theta = A, \quad (1/\kappa)\sin\theta + f(s)\cos\theta = B.$$

Množenjem prve od prethodnih jednačina sa $\cos\theta$, druge sa $\sin\theta$ i sabiranjem tako dobijenih jednačina, nalazimo da je

$$1/\kappa = A\cos\theta + B\sin\theta.$$

Stoga važi jednakost

$$\kappa\Big(A\cos\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big) + B\sin\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big)\Big) = 1.$$

Obratno, neka su A i B realne konstante tako da je zadovoljena jednakost

$$\kappa\Big(A\cos\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big) + B\sin\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big)\Big) = 1 \tag{1.35}$$

za svako $s \in I \subset R$. Diferenciranjem relacije (1.35) po s sledi da je

$$\tau\Big(-A\sin\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big) + B\cos\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big)\Big) = (1/\kappa)'. \tag{1.36}$$

Dalje, definisaćemo diferencijabilnu funkciju $f(s)$ sa

$$f(s) = -A\sin\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big) + B\cos\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big). \tag{1.37}$$

Tada iz relacija (1.36) i (1.37) imamo da je $(1/\kappa)' = \tau f$, odnosno

$$f = (1/\tau)(1/\kappa)'.$$

Diferenciranjem relacije (1.37) po s i koristeći relaciju (1.35) nalazimo da je

$$f' = -\tau\Big(A\cos\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big) + B\sin\big(\int_0^s \tau(s)\,ds\big)\Big) = -\tau/\kappa.$$

Konačno, na osnovu teoreme 1.11 sledi da kriva $\alpha(s)$ leži na pseudosferi $S_1^2(r)$. $\square$

Pored prethodno navedenih teorema koje se odnose na vremenske krive, za nul krive imamo sledeću teoremu.

Teorema 1.13 ([PŠ1]). *Ne postoje nul krive $\alpha(s)$ koje leže na pseudosferi $S_1^2(r)$ u prostoru E_1^3.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji nul kriva $\alpha(s)$ koja leži na pseudosferi sa centrom $m \in E_1^3$ i poluprečnika $r \in R^+$. Tada je

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = r^2, \tag{1.38}$$

za svako $s \in I \subset R$. Diferenciranjem relacije (1.38) po s, sledi da je

$$g(T, \alpha - m) = 0. \tag{1.39}$$

Diferenciranjem relacije (1.39) po s, dobijamo

$$\kappa g(N, \alpha - m) = 0,$$

i s obzirom da je u ovom slučaju $\kappa = 1$ za svako $s \in I \subset R$, sledi da je

$$g(N, \alpha - m) = 0. \tag{1.40}$$

Diferenciranjem relacije (1.40) po s i koristeći odgovarajuće Freneove formule, nalazimo da je

$$\tau g(T, \alpha - m) - \kappa g(B, \alpha - m) = 0,$$

što zajedno sa relacijom (1.39) daje

$$-\kappa g(B, \alpha - m) = 0,$$

i stoga je

$$g(B, \alpha - m) = 0. \tag{1.41}$$

Dalje, neka je dekompozicija vektora $\alpha - m$ u odnosu na Freneovu bazu data sa

$$\alpha - m = aT + bN + cB, \tag{1.42}$$

pri čemu su $a = a(s)$, $b = b(s)$ i $c = c(s)$ proizvoljne funkcije. Tada pomoću relacija (1.39),(1.40) i (1.41) nalazimo da je

$$g(T, \alpha - m) = c = 0, \quad g(N, \alpha - m) = b = 0, \quad g(B, \alpha - m) = a = 0.$$

Konačno, jednačina (1.42) implicira da je $\alpha - m = 0$, što je kontradikcija. $\square$

2. U teoremama koje slede dajemo karakterizaciju prostornih, vremenskih i nul krivih koje leže na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$ u prostor-vremenu Minkovskog, koristeći Freneove jednačine za krive u tom prostoru. Pomenute krive okarakterisane su pomoću svoje prve, druge i treće krivine.

Teorema 2.1 ([CIŠ]). *Neka je $\alpha(s)$ prostorna kriva jedinične brzine sa prostornom glavnom normalom N, prostornom binormalom B_1 i sa krivinama $k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$, $k_3(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ u prostoru E_1^4. Tada $\alpha(s)$ leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$ ako i samo ako je*

$$\Big(\frac{1}{k_1}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)'\Big)^2 - \Big[\frac{1}{k_3}\Big(\frac{k_2}{k_1} + \Big(\frac{1}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)'\Big)'\Big)\Big]^2 = -r^2.$$

Dokaz. Pretpostavimo najpre da $\alpha(s)$ leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$ sa centrom m. Tada je

$$g(\alpha - m, \alpha - m) = -r^2,$$

za svako $s \in I \subset R$. Diferenciranjem prethodne jednačine po s dobijamo da je

$$g(T, \alpha - m) = 0. \tag{2.1}$$

Diferenciranjem relacije (2.1) po s nalazimo da je

$$g(N, \alpha - m) = -\frac{1}{k_1}, \tag{2.2}$$

gde smo upotrebili odgovarajuću Freneovu formulu. Novim diferenciranjem relacije (2.2) po s sledi da je

$$g(B_1, \alpha - m) = -\frac{1}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)'. \tag{2.3}$$

Dalje, diferenciranje prethodne jednačine po s implicira da je

$$g(B_2, \alpha - m) = -\frac{1}{k_3}\Big(\frac{k_2}{k_1} + \Big(\frac{1}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)'\Big)'\Big). \tag{2.4}$$

U nastavku, neka je dekompozicija vektora $\alpha - m$ u odnosu na Freneovu bazu $\{T, N, B_1, B_2\}$ data sa

$$\alpha - m = aT + bN + cB_1 + dB_2, \tag{2.5}$$

pri čemu su $a = a(s)$, $b = b(s)$, $c = c(s)$, $d = d(s)$ proizvoljne funkcije. Tada pomoću relacija (2.1),(2.2),(2.3),(2.4), dobijamo da je

$$g(T, \alpha - m) = a = 0, \quad g(B_1, \alpha - m) = -c = -\frac{1}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)',$$

$$g(N, \alpha - m) = b = -\frac{1}{k_1}, \quad g(B_2, \alpha - m) = -d = \frac{1}{k_3}\Big(\frac{k_2}{k_1} + \Big(\frac{1}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)'\Big)'\Big).$$

Prema tome, zamenom koeficijenata a, b, c, d u relaciji (2.5) sledi da je

$$\alpha - m = -\frac{1}{k_1}N - \frac{1}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)'B_1 + \frac{1}{k_3}\Big(\frac{k_2}{k_1} + \Big(\frac{1}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)'\Big)'\Big)B_2,$$

pa jednačina $g(\alpha - m, \alpha - m) = -r^2$ implicira

$$\Big(\frac{1}{k_1}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)'\Big)^2 - \Big[\frac{1}{k_3}\Big(\frac{k_2}{k_1} + \Big(\frac{1}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)'\Big)'\Big)\Big]^2 = -r^2. \tag{2.6}$$

Obratno, pretpostavimo da je zadovoljena relacija (2.6). Tada možemo uočiti vektor $m \in E_1^4$ oblika

$$m = \alpha + \frac{1}{k_1}N + \frac{1}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)'B_1 - \frac{1}{k_3}\Big(\frac{k_2}{k_1} + \Big(\frac{1}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)'\Big)'\Big)B_2. \tag{2.7}$$

Diferenciranjem prethodne jednačine po s i koristeći odgovarajuće Freneove jednačine, nalazimo da je

$$(2.8)\qquad m' = \left(\frac{k_3}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' - \left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_2}{k_1} + \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)'\right)\right)'\right)B_2.$$

Diferenciranjem relacije (2.6) u odnosu na s, dobijamo da je

$$(2.9)\qquad \frac{1}{k_3}\left(\frac{k_2}{k_1} + \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)'\right)\left(\frac{k_3}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' - \left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_2}{k_1} + \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)'\right)\right)'\right) = 0.$$

Ako bi važila jednakost

$$(2.10)\qquad \frac{1}{k_3}\left(\frac{k_2}{k_1} + \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)'\right) = 0,$$

tada bi zamenom relacije (2.10) u relaciji (2.6) dobili da je

$$(1/k_1)^2 + ((1/k_2)(1/k_1)')^2 = -r^2,$$

što je kontradikcija. Prema tome, sledi da je

$$(2.11)\qquad \frac{k_3}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' - \left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_2}{k_1} + \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)'\right)\right]' = 0.$$

Dalje, zamenom poslednje relacije u relaciji (2.8) sledi da je $m' = 0$ i stoga je $m =$ constant. Konačno, pomoću relacije (2.7) dobijamo da je $g(\alpha - m, \alpha - m) = -r^2$, što znači da kriva α leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$. $\square$

Teorema 2.2 ([CIŠ]). *Neka je $\alpha(s)$ prostorna kriva jedinične brzine sa prostornom glavnom normalom N, prostornom binormalom B_1 i sa krivinama $k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$, $k_3(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ u prostoru E_1^4. Tada α leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$ ako i samo ako je*

$$\frac{k_3}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' = \left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_2}{k_1} + \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)'\right)\right]',$$

i ako je

$$\left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_2}{k_1} + \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)'\right)\right]^2 > \left(\frac{1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)^2.$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da $\alpha(s)$ leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$. Tada na osnovu teoreme 2.1 sledi da važi relacija (2.6). Iz relacije (2.6) lako dobijamo da je

$$(2.12)\qquad \left[\frac{1}{k_3}\left(\frac{k_2}{k_1} + \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)'\right)\right]^2 > \left(\frac{1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)^2.$$

Osim toga, diferenciranjem relacije (2.6) po s dobija se relacija (2.11).

Obratno, pretpostavimo da važe relacije (2.11) i (2.12) za svako s. S obzirom da je jednačina (2.11) diferencijal jednačine (2.9), možemo uzeti da je $c = -r^2$, $r \in R^+$. Konačno, na osnovu teoreme 2.1 sledi da kriva α leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$. □

Teorema 2.3 ([CIŠ]). *Prostorna kriva $\alpha(s)$ jedinične brzine sa prostornom glavnom normalomin N, prostornom binormalom B_1 i sa krivinama $k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$, $k_3(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$ u prostoru E_1^4 ako i samo ako postoji diferencijabilna funkcija $f(s)$ tako da je*

$$fk_3 = \frac{k_2}{k_1} + \Big(\frac{1}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)'\Big)', \quad f' = \frac{k_3}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)', \quad f^2 - \Big(\frac{f'}{k_3}\Big)^2 > \Big(\frac{1}{k_1}\Big)^2.$$

Dokaz. Ako kriva $\alpha(s)$ leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$, tada na osnovu teoreme 2.1 imamo da je zadovoljena relacija (2.6). Osim toga, na osnovu teoreme 2.2 sledi da važi relacija (2.11) za svako s. Dalje, definišimo diferencijabilnu funkciju $f = f(s)$ pomoću

$$f(s) = \frac{1}{k_3}\Big(\frac{k_2}{k_1} + \Big(\frac{1}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)'\Big)'\Big). \tag{2.13}$$

Prema tome, iz relacija (2.6) i (2.11) lako nalazimo da je

$$f' = \frac{k_3}{k_2}\Big(\frac{1}{k_1}\Big)', \quad f^2 - \Big(\frac{f'}{k_3}\Big)^2 > \Big(\frac{1}{k_1}\Big)^2. \tag{2.14}$$

Obratno, pretpostavimo da postoji diferencijabilna funkcija $f(s)$ tako da relacije (2.13) i (2.14) važe za svako $s \in I \subset R$. Tada na osnovu relacija (2.13) i (2.14) lako nalazimo da su relacije (2.11) i (2.12) zadovoljene. Stoga na osnovu teoreme 2.2 sledi da α leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$. □

Teorema 2.4 ([CIŠ]). *Prostorna kriva $\alpha(s)$ jedinične brzine sa prostornom glavnom normalom N, prostornom binormalom B_1 i sa krivinama $k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$, $k_3(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$ u prostoru E_1^4 ako i samo ako postoje konstante $A, B \in R$ tako da važe sledeće relacije:*

$$\begin{aligned} 1/k_2(1/k_1)' = {} & \Big[A + \int_0^s (k_2/k_1)\sinh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big)ds\Big]\sinh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big) \\ & - \Big(B + \int_0^s (k_2/k_1)\cosh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big)\Big]\cosh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big). \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$
\begin{aligned}
&\Big[A + \int_0^s (k_2/k_1)\sinh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big) ds\Big]^2 > \\
&\Big[B + \int_0^s (k_2/k_1)\cosh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big) ds\Big]^2 + (1/k_1)^2.
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

Dokaz. Prvo pretpostavimo da $\alpha(s)$ leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$. Tada na osnovu teoreme 2.3 postoji diferencijabilna funkcija $f(s)$ tako da važe relacije (2.13) i (2.14). Dalje, definisaćemo C^2 funkciju $\theta(s)$ i C^1 funkcije $g(s)$ i $h(s)$ sa

$$
\begin{aligned}
\theta(s) &= \int_0^s k_3(s)\, ds, \\
g(s) &= -(1/k_2)(1/k_1)' \sinh(\theta) + f(s)\cosh(\theta) - \int_0^s (k_2/k_1)\sinh(\theta) ds, \\
h(s) &= -(1/k_2)(1/k_1)' \cosh(\theta) + f(s)\sinh(\theta) - \int_0^s (k_2/k_1)\cosh(\theta) ds.
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

Diferenciranjem funkcija $\theta(s)$, $g(s)$ i $h(s)$ po s lako nalazimo da je $\theta'(s) = k_3(s)$, $g'(s) = h'(s) = 0$ i stoga je $g(s) = A$, $h(s) = B$, $A, B \in R$. Štaviše, relacija (2.17) postaje

$$
\begin{aligned}
&-(1/k_2)(1/k_1)' \sinh(\theta) + f(s)\cosh(\theta) - \int_0^s (k_2/k_1)\sinh(\theta) ds = A, \\
&-(1/k_2)(1/k_1)' \cosh(\theta) + f(s)\cosh(\theta) - \int_0^s (k_2/k_1)\cosh(\theta) ds = B.
\end{aligned} \tag{2.18}
$$

Množenjem prve od jednačina (2.18) sa $\sinh(\theta)$, druge sa $-\cosh(\theta)$ i sabiranjem dobijenih jednačina, nalazimo da je zadovoljena relacija (2.15). Dalje, množenjem prve od jednačina (2.18) sa $\cosh(\theta)$, druge sa $-\sinh(\theta)$ i sabiranjem dobijenih jednačina, nalazimo da je

$$
f(s) = \Big(A + \int_0^s \frac{k_2}{k_1}\sinh(\theta) ds\Big)\cosh(\theta) - \Big(B + \int_0^s \frac{k_2}{k_1}\cosh(\theta) ds\Big)\sinh(\theta). \tag{2.19}
$$

Konačno, relacije (2.19) i (2.14) impliciraju da važi nejednakost (2.16).

Obratno, pretpostavimo da postoje konstante $A, B \in R$ tako da relacije (2.15) i (2.16) važe za svako $s \in I \subset R$. Pomoću diferenciranja relacije (2.15) po s imamo da je

$$
\begin{aligned}
&((1/k_2)(1/k_1)')' = (-k_2/k_1) + k_3\Big[\Big(A + \int_0^s k_2/k_1 \sinh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big) ds\Big) \\
&\cosh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big) - \Big(B + \int_0^s k_2/k_1 \cosh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big) ds\Big)\sinh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big)\Big].
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

Definišimo diferencijabilnu funkciju $f(s)$ pomoću (2.13). Tada iz relacija (2.13), (2.15) i (2.20) sledi da je $f' = (k_3/k_2)(1/k_1)'$. S druge strane, pomoću relacija (2.13), (2.16) i (2.20) nalazimo da je $f^2 - (f'/k_3)^2 > (1/k_1)^2$. Stoga po teoremu 2.3 sledi da α leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$. $\square$

U nastavku, podsetimo se da se prostorna kriva sa prostornom glavnom normalom N i nul binormalom B_1 naziva *parcijalno nul krivom* ([W]).

Teorema 2.5 ([CIŠ]). *Parcijalno nul kriva $\alpha(s)$ jedinične brzine sa krivinama $k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ leži cela u svetlosnoj hiperravni prostora E_1^4 i ima $k_3(s) = 0$ za svako s.*

Dokaz. Koristeći Freneove jednačine, lako nalazimo da je $\dot{\alpha} = T$, $\ddot{\alpha} = k_1 N$, $\dddot{\alpha} = -k_1 T + \dot{k}_1 N + k_1 k_2 B_1$, $\ddddot{\alpha} = -3k_1\dot{k}_1 T + (\ddot{k}_1 - k_1^3)N + (2\dot{k}_1 k_1 + k_1\dot{k}_2 + k_1 k_2 k_3)B_1$. Sledi da su $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$, $\dddot{\alpha}$ linearno nezavisni vektori i da su $\dot{\alpha}$, $\ddot{\alpha}$, $\dddot{\alpha}$, $\ddddot{\alpha}$ linearno zavisni vektori. Štaviše, koristeći Maklorenov razvoj krive α dat formulom

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \dot{\alpha}(0)\frac{s}{1!} + \ddot{\alpha}(0)\frac{s^2}{2!} + \dddot{\alpha}(0)\frac{s^3}{3!} + \dots,$$

nalazimo da α leži cela u svetlosnoj hiperravni π prostora E_1^4 razapetoj vektorima $\{\dot{\alpha}(0), \ddot{\alpha}(0), \dddot{\alpha}(0)\}$. Prema tome, α zadovoljava jednačinu hiperravni π, datu sa

$$g(\alpha(s) - p, q) = 0, \tag{2.21}$$

pri čemu je $q \in E_1^4$ konstantan nul vektor i $p \in E_1^4$. Diferenciranjem relacije (2.21) u odnosu na s dobija se

$$g(T, q) = 0. \tag{2.22}$$

Diferenciranjem prethodne jednačine po s i koristeći Freneove formule, imamo da je

$$g(N, q) = 0. \tag{2.23}$$

Diferenciranjem poslednje jednačine i koristeći (2.22), nalazimo da je

$$g(B_1, q) = 0.$$

Sledi da su q i B_1 kolinearni nul vektori, tj. $q = \lambda B_1$, $\lambda \in R$. Tada je $\dot{q} = \lambda k_3 B_1 = 0$ i stoga je $k_3(s) = 0$ za svako s. $\square$

Teorema 2.6 ([CIŠ]). *Parcijalno nul kriva $\alpha(s)$ jedinične brzine sa krivinama $k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$ ako i samo ako je $(1/k_2)(1/k_1)' = \text{constant} \neq 0$.*

Dokaz. Prvo pretpostavimo da $\alpha(s)$ leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$ sa centrom m u prostoru E_1^4. Tada je $g(\alpha - m, \alpha - m) = -r^2$, pa se diferenciranjem prethodne jednačine tri puta po s dobija jednačina $g(B_1, \alpha - m) = (-1/k_2)(1/k_1)'$. Novim diferenciranjem prethodne jednačine po s nalazimo da je $((1/k_2)(1/k_1)')' = 0$, posto je na osnovu teoreme 2.5, $k_3(s) = 0$. Prema tome, $(1/k_2)(1/k_1)' = \text{constant} = c_0$. Ako je $c_0 = 0$, tada je $g(B_1, \alpha - m) = 0$ što je kontradikcija. Zato je $c_0 \neq 0$.

Obratno, pretpostavimo da je $(1/k_2)(1/k_1)' = \text{constant} \neq 0$ i uočimo vektor

$$m = \alpha + (1/k_1)N - \frac{(1/k_1)^2 + r^2}{(2/k_2)(1/k_1)'}B_1 + (1/k_2)(1/k_1)'B_2,$$

pri čemu $r \in R^+$. Diferenciranjem prethodne jednačine po s lako dobijamo da je $m' = 0$, pa je $m = \text{constant}$. Konačno, $g(\alpha - m, \alpha - m) = -r^2$ i prema tome α leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$. $\square$

Teorema 2.7 ([CIŠ]). *Neka je $\alpha(s)$ parcijalno nul kriva jedinične brzine sa krivinama $k_1(s) \neq 0$, $k_2(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ u prostoru E_1^4. Tada $\alpha(s)$ leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$ ako i samo ako je*

$$\begin{aligned} &\sinh\Big(\int_0^s k_2 ds\Big)\int_0^s (1/k_1)'\sinh\Big(\int_0^s k_2 ds\Big)ds \\ &-\cosh\Big(\int_0^s k_2 ds\Big)\int_0^s (1/k_1)'\cosh\Big(\int_0^s k_2 ds\Big)ds = 0. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Dokaz. Najpre pretpostavimo da $\alpha(s)$ leži na pseudohiperboličkom prostoru sa centrom m i radijusa $r \in R^+$ u prostoru E_1^4. Tada na osnovu teoreme 2.6 sledi da je $(1/k_2)(1/k_1)' = \text{constant} \neq 0$. Neka je $(1/k_2)(1/k_1)' = c_0$, $\theta(s) = \int_0^s k_2(s)ds$. Tada je

$$\begin{aligned} &\sinh(\theta)\int_0^s (1/k_1(s))'\sinh(\theta)ds - \cosh(\theta)\int_0^s (1/k_1(s))'\cosh(\theta)ds \\ &= c_0\sinh(\theta)\int_0^s k_2(s)\sinh(\theta)ds - c_0\cosh(\theta)\int_0^s k_2(s)\cosh(\theta)ds \\ &= c_0\sinh(\theta)\int_0^s (\cosh(\theta))'ds - c_0\cosh(\theta)\int_0^s (\sinh(\theta))'ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Obratno, pretpostavimo da važi relacija (2.24). Neka je $\theta(s) = \int_0^s k_2(s)ds$. Tada diferenciranjem relacije (2.24) po s imamo da je

$$\cosh(\theta)\int_0^s (1/k_1)'\sinh(\theta)ds - \sinh(\theta)\int_0^s (1/k_1)'\cosh(\theta)ds = (1/k_2)(1/k_1)'. \tag{2.25}$$

Dalje, diferenciranjem prethodne jednačine po s i koristeći (2.24) dobijamo da je $((1/k_2(s))(1/k_1(s))')' = 0$. Sledi da je $(1/k_2(s))(1/k_1(s))' = \text{constant} = c_0$. Ako je $c_0 = 0$, tada se oduzimanjem relacije (2.25) od relacije (2.24) dobija kontradikcija. Prema tome, $c_0 \neq 0$, pa na osnovu teoreme 2.6 sledi da α leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$. □

Napomena 2.1. U slučaju kada je $\alpha(s)$ prostorna kriva sa vremenskom glavnom normalom N, može se dokazati da važe teoreme analogne teoremama 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 u prostoru E_1^4.

Podsetimo se da se prostorna kriva sa nul glavnom normalom N u prostoru E_1^4 naziva *pseudo nul krivom* ([W]). Za takve krive, dobijeni su sledeći rezultati.

Teorema 2.8 ([CIŠ]). *Neka je $\alpha(s)$ pseudo nul kriva jedinične brzine sa krivinama $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$, $k_3(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ u prostoru E_1^4. Tada $\alpha(s)$ leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$ ako i samo ako je $k_3(s)/k_2(s) = \text{constant} < 0$.*

Dokaz. Najpre pretpostavimo da α leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$ sa centrom m u prostoru E_1^4. Tada je $g(\alpha - m, \alpha - m) = -r^2$, pa tri uzastopna diferenciranja prethodne jednačine po s daju sledeće jednačine:

$$g(\alpha - m, T) = 0, \tag{2.26}$$

$$g(N, \alpha - m) = -1, \tag{2.27}$$

$$g(B_1, \alpha - m) = 0, \tag{2.28}$$

$$g(B_2, \alpha - m) = -k_3/k_2. \tag{2.29}$$

Štaviše, diferenciranjem poslednje jednačine po s, nalazimo da je

$$-g(T, \alpha - m) - k_3 g(B_1, \alpha - m) = -(k_3/k_2)'. \tag{2.30}$$

Koristeći (2.26) i (2.28) dobijamo da je $(k_3/k_2)' = 0$. Sledi da je $k_3/k_2 = \text{constant} = c_0$, $c_0 \in R$. Dokazaćemo da je $c_0 < 0$. Uočimo dekompoziciju vektora $\alpha - m$ u odnosu na Freneovu bazu $\{T, N, B_1, B_2\}$ oblika

$$\alpha - m = aT + bN + cB_1 + dB_2.$$

pri čemu su $a = a(s)$, $b = b(s)$, $c = c(s)$, $d = d(s)$ proizvoljne funkcije. Tada pomoću relacija (2.26), (2.27), (2.28), (2.29) lako nalazimo da je $g(T, \alpha - m) = a = 0$, $g(N, \alpha - m) = d = -1$, $g(B_1, \alpha - m) = c = 0$, $g(B_2, \alpha - m) = b = -c_0$. Otuda je $\alpha - m = -c_0 N - B_2$, pa sledi da je $g(\alpha - m, \alpha - m) = 2c_0 = -r^2$ i stoga je $c_0 < 0$.

Obratno, pretpostavimo da je $k_3(s)/k_2(s) = \text{constant} < 0$. Neka je $k_3/k_2 = -r^2/2$, $r \in R^+$ i uočimo vektor $m = \alpha - (r^2/2)N + B_2$. Diferenciranjem prethodne jednačine po s nalazimo da je $m' = 0$ pa je $m = \text{constant}$. Štaviše, $g(\alpha - m, \alpha - m) = -r^2$ i prema tome α leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$. $\square$

Teorema 2.9 ([CIŠ]). *Neka je $\alpha(s)$ pseudo nul kriva jedinične brzine sa krivinama $k_1(s) = 1$, $k_2(s) \neq 0$, $k_3(s) \neq 0$ za svako $s \in I \subset R$ u prostoru E_1^4. Tada α leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$ ako i samo ako važe sledeće dve relacije:*

$$\begin{aligned}(2.31)\qquad &\sinh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big)\int_0^s k_2 \sinh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big)ds\\ &-\cosh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big)\int_0^s k_2 \cosh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big)ds = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2.32)\qquad &\cosh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big)\int_0^s k_2 \sinh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big)ds\\ &< \sinh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big)\int_0^s k_2 \cosh\Big(\int_0^s k_3 ds\Big)ds.\end{aligned}$$

Dokaz. Ako α leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$, tada na osnovu teoreme 2.8 imamo da je $k_2(s)/k_3(s) = \text{constant} < 0$. Neka je $k_2(s)/k_3(s) = -c_0^2$, $c_0 \in R_0$, $\theta(s) = \int_0^s k_3(s)ds$. Dalje, lako nalazimo da je

$$\sinh(\theta)\int_0^s k_2 \sinh(\theta)ds - \cosh(\theta)\int_0^s k_2 \cosh(\theta)ds = 0.$$

Osim toga, diferenciranjem prethodne jednačine po s, dobijamo da je

$$k_2/k_3 = -c_0^2 = \cosh(\theta)\int_0^s k_2 \sinh(\theta)ds - \sinh(\theta)\int_0^s k_2 \cosh(\theta)ds,$$

i stoga je

$$\cosh(\theta)\int_0^s k_2 \sinh(\theta)ds < \sinh(\theta)\int_0^s k_2 \cosh(\theta)ds.$$

Obratno, ako važe relacije (2.31) i (2.32), neka je $\theta(s) = \int_0^s k_3(s)ds$. Diferenciranjem relacije (2.31) u odnosu na s, nalazimo da je

$$k_2/k_3 = \cosh(\theta)\int_0^s k_2 \sinh(\theta)ds - \sinh(\theta)\int_0^s k_2 \cosh(\theta)ds. \tag{2.33}$$

Novim diferenciranjem prethodne jednačine po s i koristeći relaciju (2.31) dobijamo da je $(k_2/k_3)' = 0$. Stoga je $k_2/k_3 = \text{constant} = c_0$, $c_0 \in R$. Dalje, iz relacija (2.32) i (2.33) sledi da je $c_0 < 0$. Konačno, na osnovu teoreme 2.8 sledi da α leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$. □

Teorema 2.10 ([CIŠ]). *Ne postoje vremenske i nul krive $\alpha(s)$ koje leže na pseudohiperboličkom prostoru H_0^3 u prostoru E_1^4.*

Dokaz. Ako je $\alpha(s)$ vremenska kriva jedinične brzine koja leži na pseudohiperboličkom prostoru sa centrom m i radijusa $r \in R^+$ u prostoru E_1^4, tada je $g(\alpha - m, \alpha - m) = -r^2$. Diferenciranjem prethodne jednačine po s sledi da je $g(T, \alpha - m) = 0$. Dakle, T i $\alpha - m$ su dva vremenska medjusobno ortogonalna vektora u prostoru E_1^4, što je kontradikcija. Ako je $\alpha(s)$ nul kriva koja leži na pseudohiperboličkom prostoru $H_0^3(r)$, tada na sličan način sledi da su nul vektor T i vremenski vektor $\alpha - m$ ortogonalni vektori u prostoru E_1^4, što je kontradikcija. □

GLAVA 3

KLASIFIKACIJA KRIVIH TIPA 2 U PROSTORU MINKOVSKOG E_1^n

1. Pojam podmnogostrukosti *konačnog tipa* definisao je B. J. Čen oko 1980-te godine, sa ciljem da se pomoću njega odredi pojam "stepena" podmnogostrukosti Euklidskog prostora E^n, odnosno da se odredi što bolja procena totalne srednje krivine kompaktnih podmnogostrukosti istog prostora. Naime, svaka Rimanova mnogostrukost se može realizovati kao podmnogostrukost Euklidskog prostora pomoću izometričnih imerzija. Preciznije, na osnovu Nešove teoreme, koja je dobijena 1954. godine, svaka "apstraktna" Rimanova mnogostrukost (M, g) može se realizovati kao podmnogostrukost (dovoljno dimenzionalnog) Euklidskog prostora E^{m+n}. Stoga je bilo potrebno definisati pojam "stepena" podmnogostrukosti Euklidskog prostora. U tom cilju, najpre je dokazano da se pomoću indukovane Rimanove strukture na podmnogostrukosti, svakoj podmnogostrukosti može pridružiti par dobro definisanih brojeva p i q. Par $[p, q]$, pri čemu $p \in N$, $p \leq q \leq +\infty$, naziva se *redom* podmnogostrukosti M. Preciznije, p je *donji red*, a q *gornji red* podmnogostrukosti. Prema tome, podmnogostrukost je *konačnog tipa*, ako je njen gornji red konačan i ona je *beskonačnog tipa*, ako je njen gornji red beskonačan. B. J. Čen je u radu [C] brojeve p i q definisao na sledeći način.

Neka je (M, g) kompaktna Rimanova n-mnogostrukost sa Levi–Čivitinom koneksijom ∇. Neka je $\Delta = -\mathrm{trag}\nabla^2$ Laplasov operator mnogostrukosti M, tj. eliptički diferencijalni operator na prostoru svih glatkih funkcija $C^\infty(M)$ mnogostrukosti M.

Poznato je da sopstvene vrednosti Laplasovog operatora obrazuju diskretan beskonačan niz

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \nearrow \infty.$$

Neka je $V_k = \{f \in C^\infty(M) : \Delta f = \lambda_k f\}$ sopstveni potprostor koji odgovara sopstvenoj vrednosti λ_k. Tada je V_k konačno dimenzioni potprostor. Neka je na prostoru $C^\infty(M)$ definisan unutrašnji proizvod $<,>$ pomoću

$$<f,h>=\int_M f\,h\,dV, \tag{1.1}$$

pri čemu je dV zapreminski element mnogostrukosti (M,g). Tada je $C^\infty(M) = \oplus_k V_k$, gde je $\oplus_k V_k$ kompletirani prostor $\sum_{k=0}^{\infty} V_k$.

Označimo sa f_t projekciju funkcije $f \in C^\infty(M)$ na potprostor V_t. Tada imamo sledeću *spektralnu dekompoziciju*:

$$f = \sum_{t=0}^{\infty} f_t. \tag{1.2}$$

S obzirom da je prostor V_0 dimenzije 1, za svaku nekonstantnu funkciju f postoji pozitivan ceo broj $p \geq 1$, tako da je $f_p \neq 0$ i

$$f - f_0 = \sum_{t \geq p} f_t,$$

pri čemu je $f_0 \in V_0$ konstantna funkcija. Ako postoji beskonačno mnogo $f_t \neq 0$, uzima se da je $q = +\infty$. U protivnom, postoji ceo broj $q \geq p$ tako da je $f_q \neq 0$ i

$$f - f_0 = \sum_{t=p}^{q} f_t. \tag{1.3}$$

Ako dopustimo da je $q = +\infty$, dobijamo dekompoziciju (1.3) u opštem slučaju.

Skup

$$T(f) = \{t \in N_0 : f_t \neq 0\} \tag{1.4}$$

naziva se *redom* funkcije f. Najmanji element skupa $T(f)$ je *donji red* funkcije f, a supremum skupa $T(f)$ je *gornji red* funkcije f. Funkcija f je *konačnog tipa*, ako je skup $T(f)$ konačan, odnosno ako njena spektralna dekompozicija (1.2) sadrži samo konačno mnogo ne–nula izraza. Inače, funkcija f je *beskonačnog tipa*. Funkcija f je *tipa* k, ako skup $T(f)$ sadrži tačno k elemenata.

Preslikavanje $x : M \rightarrow E^m$ je *izometrična imerzija* Rimanove mnogostrukosti M u Euklidski prostor E^m, ako izvod preslikavanja x, tj. preslikavanje x_* : $T_p(M) \rightarrow T_{x(p)}(E^m)$ čuva skalarni proizvod tangentnih vektora. Neka je $x : M \rightarrow E^m$ izometrična imerzija kompaktne Rimanove mnogostrukosti u Euklidski prostor E^m i neka je $x = (x_1, \ldots, x_m)$, pri čemu je x_A, $A = 1, \ldots, m$, A-ta Euklidska koordinatna funkcija mnogostrukosti M. Tada je

$$x_A - (x_A)_0 = \sum_{t=p_A}^{q_A} (x_A)_t$$

Za izometričnu imerziju $x : M \to E^m$, neka je

$$p = \inf_A\{p_A\}, \quad q = \sup_A\{q_A\},$$

pri čemu je $x_A - (x_A)_0 \neq 0$. Lako se vidi da su brojevi p i q dobro definisane geometrijske invarijante i da je p pozitivan ceo broj, a q je ili $+\infty$ ili ceo broj $\geq p$.

Dakle, za izometričnu imerziju $x : M \to E^m$ imamo sledeću spektralnu dekompoziciju u vektorskom obliku:

$$x = x_0 + \sum_{t=p}^{q} x_t. \tag{1.5}$$

Neka je

$$T(x) = \{t \in N_0 : x_t \neq 0\}.$$

Imerzija x ili podmnogostrukost M je *tipa* k, ako skup $T(x)$ sadrži tačno k elemenata. Na sličan način kao za glatke funkcije $f \in C^{+\infty}(M)$, moguće je definisati donji i gornji red imerzije x. Na taj način, dobijaju se sledeće dve definicije. Imerzija x je *konačnog tipa*, ako je njen gornji red q konačan broj; imerzija x je *beskonačnog tipa*, ako je njen gornji red $q = +\infty$.

Za podmnogostrukosti konačnog tipa imamo i sledeću ekvivalentnu definiciju. Podmnogostrukost M je *konačnog tipa* (*konačnog Čenovog tipa*) ako se vektor položaja x te podmnogostrukosti može napisati kao konačna suma sopstvenih funkcija $\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_k$ Laplasovog operatora Δ podmnogostrukosti M. Drugim rečima, ako je

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}_0 + \sum_{i=1}^{k} \mathrm{x}_i, \quad \Delta \mathrm{x}_i = \lambda_i \mathrm{x}_i,$$

pri čemu su $\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ sopstvene vrednosti operatora Δ.

Najjednostavnije podmnogostrukosti konačnog tipa su krive konačnog tipa. Kriva $\alpha(s)$ parametrizovana funkcijom dužine luka s u Euklidskom prostoru E^n je konačnog tipa k, $k \in N$, ako njen Laplasov operator $\Delta = -d^2/ds^2$ ima tačno k sopstvenih vrednosti $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ koje su medjusobno različite. Ako je jedna od sopstvenih vrednosti $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ jednaka nuli, kriva $\alpha(s)$ je nul tipa k.

Prema tome, jednačina proizvoljne krive α konačnog tipa u prostoru E^n glasi:

$$\alpha(s) = a_0 + b_0 s + \sum_{t=1}^{k}(a_t \cos(ts) + b_t \sin(ts)), \tag{1.6}$$

pri čemu su $\lambda_0 = 0$, $\lambda_t = t^2$, $t = 1, 2, \ldots, k$ sopstvene vrednosti, s, $\cos(ts)$, $\sin(ts)$ sopstvene funkcije Laplasovog operatora Δ krive α i $a_0, b_0, a_t, b_t \in E^n$. Ako je

$b_0 = 0$, i $||a_t||^2 + ||b_t||^2 \neq 0$ u relaciji (1.6), kriva α je zatvorena kriva tipa k. Ako je $b_0 \neq 0$ i $||a_t||^2 + ||b_t||^2 \neq 0$ u relaciji (1.6), kriva α je otvorena kriva nul tipa $k+1$.

Neka je sada $\alpha(s)$ kriva u prostoru Minkovskog E_1^n, parametrizovana funkcijom dužine luka s. Tada je Laplasov operator krive $\alpha(s)$ oblika $\Delta = \pm d^2/ds^2$. Njegove sopstvene funkcije su funkcije s, $\cos(as)$, $\sin(as)$, $\mathrm{sh}(as)$ i $\mathrm{ch}(as)$. Po definiciji, jednačina proizvoljne krive α konačnog tipa u prostoru Minkovskog E_1^n glasi:

$$\begin{aligned}\alpha(s) = a_0 + b_0 s &+ \sum_{t=1}^{k_1}(a_t\cos(p_t s) + b_t\sin(p_t s)) \\ &+ \sum_{t=1}^{k_2}(c_t\mathrm{ch}(q_t s) + d_t\mathrm{sh}(q_t s)),\end{aligned}$$

pri čemu $a_0, b_0, a_t, b_t, c_t, d_t \in E_1^n$ i gde su $0 < p_1 < \ldots < p_{k_1}$, $0 < q_1 < \ldots < q_{k_2}$ sopstvene vrednosti Laplasijana Δ krive α. Posebno, ako je $k_1 + k_2 = k$, $b_0 = 0$, i ako važi bar jedna od relacija $||a_t||^2 + ||b_t||^2 \neq 0$, $||c_t||^2 + ||d_t||^2 \neq 0$, kriva α je tipa k. Štaviše, ako je $k_1 + k_2 = k$, $b_0 \neq 0$, i ako važi bar jedna od relacija $||a_t||^2 + ||b_t||^2 \neq 0$, $||c_t||^2 + ||d_t||^2 \neq 0$, kriva α je nul tipa $k+1$.

U ovoj glavi klasifikovane su sve prostorne i vremenske krive tipa 2 koje leže cele u 4–dimenzionom i 5–dimenzionom prostoru Minkovskog. U radu [C] je dokazano da je proizvoljna kriva tipa k sadržana u najviše $2k$-dimenzionom potprostoru prostora E^n, što ekvivalentno važi i za krive tipa k u prostoru Minkovskog E_1^n. Dakle, proizvoljna kriva tipa 2 u prostoru Minkovskog E_1^n sadržana je u najviše 4 dimenzionom potprostoru prostora E_1^n, pa sledi da dimenzija n prostora E_1^n nije veća od 5. Prostorne i vremenske krive tipa 2, koje leže cele u prostoru Minkovskog E_1^3, klasifikovane su u radu [W]. Prema tome, u ovoj glavi klasifikovanjem krivih tipa 2 u prostorima E_1^4 i E_1^5, kompletirana je klasifikacija tih krivih u prostorima Minkovskog.

2. Sada navodimo neke najvažnije rezultate iz teorije krivih konačnog tipa u Euklidskim prostorima i prostorima Minkovskog koji su do sada dobijeni. S tim u vezi, najpre dajemo teoreme kojima su okarakterisane Euklidske krive konačnog tipa.

Teorema 2.A ([C1]). *Neka je $\gamma : S^1(r) \to E^n$ zatvorena glatka kriva u prostoru E^n. Tada je γ kriva konačnog tipa ako i samo ako je Furijeov razvoj svake koordinatne funkcije krive γ konačan.*

Za ravne Euklidske krive konačnog tipa, najvažniji rezultat je sledeća teorema.

Teorema 2.B ([C1]). *Ravna kriva je konačnog tipa u Euklidskom prostoru E^n ako i samo ako je tipa 1, odnosno ako i samo ako je ona otvoreni deo kruga ili prave linije*

Za ne ravne krive konačnog tipa u prostoru E^3, situacija je potpuno drugačija nego u teoremi 2.B. O tome govori sledeća teorema.

Teorema 2.C ([CDDVV]). *Za svaki prirodan broj $k \in \{2, 3, \ldots\}$ u prostoru E^3 postoji beskonačno mnogo ne ekvivalentnih krivih tipa k.*

Teorema 2.D ([CDV]). *Zatvorena kriva tipa 2 u prostoru E^n je zatvorena W-kriva ili zatvorena kriva čiji brojevi frekvencije stoje u odnosu $1 : 3$.*

Krive tipa 2 u prostoru E^n su klasifikovane i pri tome je dobijen sledeći opštiji rezultat.

Teorema 2.E ([DPVV]). *Kriva tipa 2 u prostoru E^n je zatvorena kriva ili W kriva.*

Štaviše, klasifikaciona teorema za krive tipa 2 je sledeća.

Teorema 2.F ([DPVV]). *Neka je $\gamma : [0, L] \to E^n$ kriva tipa 2 koja leži cela u prostoru E^n. Tada, ili je $n = 3$ i γ je kružna helisa ili je kongruentna sa krivom*

$$\gamma(s) = \alpha(\sqrt{12\beta}\sin(ps), -\beta\cos(ps) + \cos(3ps), -\beta\sin(ps) + \sin(3ps)),$$

pri čemu je $\alpha = 1/(p(\beta + 3))$, $\beta \in R_0^+$; ili je $n = 4$ i γ je W-kriva ili je kongruentna sa krivom

$$\gamma(s) = \alpha(\sqrt{12\delta}\sin(p(s-\theta)), \sqrt{12\beta}\cos(ps), -\delta\cos(p(s+2\theta)) - \beta\cos(ps) + \cos(3ps), \\ -\delta\sin(p(s+2\theta)) - \beta\sin(ps) + \sin(3ps)),$$

pri čemu je $\beta, \delta \in R_0^+$, $\theta \in R$ i $\alpha p = 1/\sqrt{(\beta + \delta + 3)^2 - 4\beta\delta\sin^2\theta}$.

Posebno, za otvorene krive konačnog tipa u prostoru E^3, imamo sledeći rezultat.

Teorema 2.G ([DPVV]). *Neka je γ otvorena kriva u prostoru E^3. Tada :*
(i) kriva γ je tipa 1 ako i samo ako je γ prava linija;
(ii) kriva γ je tipa 2 ako i samo ako je γ desna kružna helisa.

Krive konačnog tipa mogu ležati na kvadrikama u Euklidskom prostoru. Specijalno, za krive konačnog tipa koje leže na sferi, imamo sledeće tri teoreme

Teorema 2.H ([CDDVV]). *Svaka zatvorena prostorna kriva konačnog tipa koja leži na dvodimenzionoj sferi S^2 u prostoru E^3 je kriva tipa 1 i prema tome je krug.*

Teorema 2.I ([CDDVV]). *Svaka kriva konačnog tipa koja leži na trodimenzionoj sferi S^3 u prostoru E^4 je ili kriva tipa 1 i prema tome krug, ili zatvorena W kriva ranga 4.*

Teorema 2.J ([CDDVV]). *Neka je $n \geq 2$ prirodan broj, $m \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ i neka je γ kriva konačnog tipa koja leži na m-dimenzionoj sferi S^m u prostoru E^{2n} i čije su prve $n-2$ krivine konstantne. Tada je γ zatvorena W-kriva najviše ranga $m+1$ ako je m neparan broj, ili m ako je m paran broj.*

Krive konačnog tipa koje leže na kvadrikama različitim od sfera, okarakterisane su u sledećim teoremama.

Teorema 2.K ([DDV]). *Neka je γ zatvorena kriva konačnog tipa koja leži na nekoj kvadrici Q u prostoru E^3. Tada je*

(1) *kriva γ krug, ili je*

(2) *kvadrika Q jedna od sledećih površi: obrtni elipsoid, obrtni jednograni ili dvograni hiperboloid, kružni konus.*

Specijalno, za zatvorene krive tipa 3 koje leže na kvadrikama u prostoru E^3, imamo sledeće klasifikacione teoreme.

Teorema 2.L ([PVV1]). *Neka je γ zatvorena kriva tipa 3 koja leži na obrtnom elipsoidu u prostoru E^3. Pretpostavimo da za sopstvene vrednosti krive γ važi $p_1 < p_2 < p_3$. Tada je:*

(i) $2p_2 = p_1 + p_3$;

(ii) do na izometrije prostora E^3, jednačina elipsoida $\mathcal{E}$ se može napisati u obliku

$$x^2 + y^2 + \frac{p_2^2}{p_1 p_3} z^2 = (u + v)^2;$$

(iii) kriva γ može se parametrizovati dužinom luka s, tako da ima jednačinu

$$\begin{aligned}\gamma(s) = (&u\cos(p_3 s/r) - v\cos(p_1 s/r + \theta), u\sin(p_3 s/r) + v\cos(p_1 s/r + \theta),\\ &2\sqrt{p_1 p_3 u v}\cos(p_2 s/r + \theta/2)/p_2),\end{aligned}$$

pri čemu je $r = p_3 u + p_1 v$, $u, v \in R_0^+$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Teorema 2.M ([PVV2]). *Neka je γ zatvorena kriva tipa 3 koja leži na obrtnom jednogranom hiperboloidu $\mathcal{H}$ u prostoru E^3. Pretpostavimo da za sopstvene vrednosti krive γ važi $p_1 < p_2 < p_3$. Tada je:*

(i) $2p_1 = p_3 - p_2$ i do na izometrije prostora E^3 jednačina hiperboloida $\mathcal{H}$ se može napisati u obliku

$$x^2 + y^2 - \frac{p_1^2}{p_2 p_3} z^2 = (u - w)^2,$$

a kriva γ se može parametrizovati dužinom luka s tako da njena jednačina glasi

$$\begin{aligned}\gamma(s) = (&u\cos(p_3 s/r) + w\cos(p_2 s/r + \theta), u\sin(p_3 s/r) + w\sin(p_2 s/r + \theta),\\ &2\sqrt{p_2 p_3 u w}\cos(p_1 s/r - \theta/2)/p_1),\end{aligned}$$

pri čemu je $r = p_3 u + p_2 w$, $u, w \in R_0^+$, $\theta \in [0, 2\pi]$;

(ii) $2p_2 = p_3 - p_1$ i do na izometrije prostora E^3 jednačina hiperboloida $\mathcal{H}$ može se napisati u obliku

$$x^2 + y^2 - \frac{p_2^2}{p_1 p_3} z^2 = (u - w)^2,$$

a kriva γ može se parametrizovati dužinom luka s tako da njena jednačina glasi

$$\begin{aligned}\gamma(s) = (&u\cos(p_3 s/r) + w\cos(p_1 s/r + \theta), u\sin(p_3 s/r) + w\sin(p_1 s/r + \theta),\\ &2\sqrt{p_1 p_3 u w}\cos(p_2 s/r - \theta/2)/p_2),\end{aligned}$$

pri čemu je $r = p_3 u + p_1 w$, $u, w \in R_0^+$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Teorema 2.N ([PVV2]). *Neka je γ zatvorena kriva tipa 3 koja leži na obrtnom konusu $\mathcal{C}$ u prostoru E^3. Pretpostavimo da za sopstvene vrednosti krive γ važi $p_1 < p_2 < p_3$. Tada je:*

(i) $2p_1 = p_3 - p_2$ i do na izometrije prostora E^3 jednačina konusa $\mathcal{C}$ može se napisati u obliku

$$x^2 + y^2 - \frac{p_1^2}{p_2 p_3} z^2 = 0,$$

a kriva γ može se parametrizovati dužinom luka s tako da njena jednačina glasi

$$\begin{aligned}\gamma(s) = (&u(\cos(p_3 s/r) + w\cos(p_2 s/r + \theta)), u(\sin(p_3 s/r) + \sin(p_2 s/r + \theta)),\\ &2u\sqrt{p_2 p_3}\cos(p_1 s/r - \theta/2)/p_1),\end{aligned}$$

pri čemu je $r = u(p_2 + p_3)$, $u \in R_0^+$, $\theta \in [0, 2\pi]$;

(ii) $2p_2 = p_3 - p_1$ *i do na izometrije prostora* E^3, *jednačina konusa* C *može se napisati u obliku*

$$x^2 + y^2 - \frac{p_2^2}{p_1 p_3} z^2 = 0,$$

a kriva γ *može se parametrizovati dužinom luka* s *tako da njena jednačina glasi*

$$\gamma(s) = (u(\cos(p_3 s/r) + w\cos(p_1 s/r + \theta)), u(\sin(p_3 s/r) + \sin(p_1 s/r + \theta)),$$
$$2u\sqrt{p_1 p_3}\cos(p_2 s/r - \theta/2)/p_2),$$

pri čemu je $r = u(p_1 + p_3)$, $u \in R_0^+$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Ne postoje zatvorene krive tipa 3 koje leže na paraboloidima u prostoru E^3. Jedine krive konačnog tipa koje leže na paraboloidima su tipa 1 i to su krugovi ([DDV]). D. Bler je dobio potpunu klasifikaciju svih zatvorenih krivih tipa 3 koje leže cele u prostoru E^3.

Teorema 2.O ([B]). *Zatvorena kriva tipa 3 u prostoru* E^3 *je ili kriva koja leži na obrtnoj kvadrici ili kriva čiji brojevi frekvencije stoje u odnosu* $1:3:7$ *i takva kriva pripada 3–parametarskoj familiji krivih, ili kriva čiji brojevi frekvencije stoje u odnosu* $1:3:5$ *i takva kriva pripada 5–parametarskoj familiji krivih. Neke od krivih sa brojevima frekvencije* $1:3:5$ *ili* $1:3:7$ *takodje leže na obrtnim kvadrikama.*

Za zatvorene krive tipa 3 koje leže cele u prostoru E^4, imamo sledeći rezultat.

Teorema 2.P ([PV]). *Ako je* $\gamma(s)$ *kriva tipa 3 u Euklidskom prostoru* E^4, *tada je parametar* p_3 *jednak nekom od brojeva* $2p_1 + p_2$, $p_1 + 2p_2$, $2p_2 - p_1$ *i kriva pripada multiparametarskoj familiji krivih, ili brojevi frekvencije stoje u odnosu* $1:3:9$ *i kriva pripada 5- parametarskoj familiji krivih.*

Takodje je dobijena klasifikacija svih zatvorenih krivih tipa 3 u Euklidskim prostorima E^5 i E^6, čime je kompletirana klasifikacija svih zatvorenih krivih tipa 3 u Euklidskom prostoru E^n. Navodimo pomenute rezultate.

Teorema 2.Q ([PV1]). *Ako je* $\gamma(s)$ *kriva tipa 3 u Euklidskom prostoru* E^5, *tada* $\gamma(s)$ *pripada* k- *parametarskoj familiji krivih, pri čemu je* k *jedan od brojeva 4, 6, 9, 11, 13 i važi jedna od jednakosti* $p_2 = 3p_1$, $p_3 = 3p_1, 3p_2, 2p_1 + p_2, 2p_2 + p_1, 2p_2 - p_1$.

Teorema 2.R ([PV2]). *Ako je* $\gamma(s)$ *kriva tipa 3 u Euklidskom prostoru* E^6, *tada* $\gamma(s)$ *pripada* k *parametarskoj familiji krivih, pri čemu je* k *jedan od brojeva 3, 6, 8, 13, 15, 17.*

Sada navodimo teoreme kojima su okarakterisane krive konačnog tipa u prostoru Minkovskog.

Teorema 2.S ([DVVW]). *Svaka kriva konačnog tipa u ravni Minkovskog E_1^2 je tipa 1 i stoga je ona otvoreni deo ortogonalne hiperbole ili otvoreni deo prave linije.*

Teorema 2.T ([W]). *Ravna kriva tipa 2 koja leži u svetlosnoj ravni prostora E_1^3 je prostorna kriva nul tipa 2.*

Teorema 2.U ([W]). *Do na izometrije prostora E_1^3, ne ravna kriva α u prostoru E_1^3 je kriva nul tipa 2 ako i samo ako je α deo jedne od sledećih krivih:*

(i) $\alpha(s) = (as, b\cos s, b\sin s)$, $\quad a, b \in R_0$, $|a| \neq |b|$;

(ii) $\alpha(s) = (a\cosh s, a\sinh s, bs)$, $\quad a, b \in R_0$, $|a| \neq |b|$;

(iii) $\alpha(s) = (a\sinh s, a\cosh s, bs)$, $\quad a, b \in R_0$, $|a| \neq |b|$.

Napomenimo da u prethodnoj teoremi kriva oblika (i) leži na kružnom cilindru, a krive oblika (ii) i (iii) na hiperboličkom cilindru u prostoru E_1^3.

Teorema 2.V ([W]). *Do na izometrije prostora E_1^3 ne ravna kriva α sa obe sopstvene vrednosti Laplasovog operatora različite od nule je kriva tipa 2 u prostoru E_1^3 ako i samo ako je α deo jedne od sledećih krivih:*

(i) $\alpha(s) = (\rho\sin s, \epsilon\cos s + a\cos 3s, \epsilon\sin s + a\sin 3s)$,
$\quad \rho^2 - 12a\epsilon = 0$, $a, \epsilon, \rho \in R_0$;

(ii) $\alpha(s) = (a\cosh s + \lambda b\sinh s - 4ce^{3\lambda s}, -b\cosh s - \lambda a\sinh s + 4ce^{3\lambda s}, 2de^{\lambda s})$,
$\quad d^2 - 6(a-b)c = 0$, $a, b, c, d \in R_0$, $\lambda \in \{-1, 1\}$;

(iii) $\alpha(s) = (ae^s + b\cosh 3s, ae^s + b\sinh 3s, ce^{-s})$,
$\quad c^2 + 6ab = 0$, $a, b, c \in R_0$;

(iv) $\alpha(s) = (\epsilon\cosh s + a\cosh 3s, \epsilon\sinh s + a\sinh 3s, \rho\cosh s)$,
$\quad \rho^2 + 12a\epsilon = 0$, $a, \rho, \epsilon \in R_0$;

(v) $\alpha(s) = (\epsilon\cosh s + a\cosh 3s, \epsilon\sinh s + a\sinh 3s, \rho\sinh s)$,
$\quad \rho^2 + 12a\epsilon = 0$, $a, \rho, \epsilon \in R_0$;

(vi) $\alpha(s) = (ae^s + b\sinh 3s, ae^s + b\cosh 3s, ce^{-s})$,
$\quad c^2 - 6ab = 0$, $a, b, c \in R_0$;

(vii) $\alpha(s) = (\epsilon\sinh s + a\sinh 3s, \epsilon\cosh s + a\cosh 3s, \rho\cosh s)$,
$\quad \rho^2 - 12a\epsilon = 0$, $\rho, \epsilon, a \in R_0$;

(viii) $\alpha(s) = (\epsilon\sinh s + a\sinh 3s, \epsilon\cosh s + a\cosh 3s, \rho\sinh s)$,
$\quad \rho^2 - 12a\epsilon = 0$, $\rho, \epsilon, a \in R_0$.

Osim krivih tipa 2. u prostoru E_1^3 klasifikovane su i krive tipa 3. Ta klasifikacija data je u sledećim teoremama.

Teorema 2.W ([Š]). *Ravna kriva tipa 3 koja leži u svetlosnoj ravni prostora E_1^3. je prostorna kriva nul tipa 3*

Teorema 2.X ([Š]). *Prostorna ili vremenska ne ravna kriva α je kriva nul tipa 3 u prostoru E_1^3 ako i samo ako njeni brojevi frekvencije stoje u odnosu 1 : 2 i kriva pripada jednoj od tri 3–parametarske familije takvih krivih. ili jednoj od tri 4–parametarske familije takvih krivih.*

Teorema 2.Y ([Š]). *Prostorna ili vremenska ne ravna kriva α tipa 3 sa obe sopstvene vrednosti Laplasijana Δ različite od nule u prostoru E_1^3, je ili kriva koja leži na obrtnoj kvadrici u prostoru E_1^3. ili pripada 4–parametarskoj ili jednoj od dve 2–parametarske familije krivih čiji brojevi frekvencije stoje u odnosu 1 : 3 : 7. ili pripada jednoj od tri 4–parametarske ili jednoj od dve 5–parametarske familije krivih čiji brojevi frekvencije stoje u odnosu 1 : 3 : 5. ili pripada jednoj od tri 2 parametarske familije ili jednoj od dve 3–parametarske familije krivih čiji brojevi frekvencije stoje u odnosu 1 : 2 : 3.*

3. Poznato je da je prostor E_1^3 sadržan u prostoru E_1^4 kao njegov vremenski potprostor. tj. kao njegova vremenska hiperravan. Prema tome. ako je α kriva tipa 2 u prostoru E_1^3. ona je takodje kriva tipa 2 u prostoru E_1^4. S obzirom da su prostorne i vremenske krive tipa 2 i nul tipa 2 koje leže cele u prostoru E_1^3 klasifikovane u radu [W]. mi ćemo najpre klasifikovati pomenute krive pod pretpostavkom da one leže cele u prostoru E_1^4, a ne leže u njegovoj vremenskoj hiperravni. Ta klasifikacija data je sledećim dvema teoremama.

Teorema 3.1 ([Š]). *Neka je $\alpha(s)$ prostorna ili vremenska kriva jedinične brzine. sa jednom sopstvenom vrednošću Laplasovog operatora Δ jednakom nuli. koja leži cela u prostoru E_1^4 i ne leži u njegovoj vremenskoj hiperravni. Tada je do na izometrije prostora E_1^4. α kriva nul tipa 2 ako i samo ako je α deo jedne od sledećih prostornih kružnih helisa:*

(1) $\alpha(s) = (0, ms, n\cos(ps), n\sin(ps))$, $\quad m^2 + p^2n^2 = 1$, $\quad p \in N, m, n \in R_0$;

(2) $\alpha(s) = (ms, ms, n\cos(ps), n\sin(ps))$, $\quad p^2n^2 = 1$, $\quad p \in N, m, n \in R_0$.

Dokaz. Pretpostavimo da kriva $\alpha(s)$ zadovoljava pretpostavke teoreme i neka je $\alpha(s)$ nul tipa 2. Tada se kriva $\alpha(s)$ može napisati u jednom od sledećih oblika:

$$(a) \quad \alpha(s) = a + bs + c\cos(ps) + d\sin(ps);$$
$$(b) \quad \alpha(s) = a + bs + c\cosh(ps) + d\sinh(ps);$$

pri čemu $p \in N$, $a, b, c, d \in R^1$. Dalje, pretpostavimo da je $a = (0, 0, 0, 0)$ do na translaciju i neka je $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$, $d = (d_1, d_2, d_3, d_4)$. U nastavku, razmotrićemo slučajeve (a) i (b).

Slučaj (a). Pošto je $g(\alpha', \alpha') = \pm 1$ i s obzirom na linearnu nezavisnost funkcija $\sin(x)$ i $\cos(x)$, dobija se sledeći sistem jednačina

$$g(b, b) + \frac{p^2}{2}(g(c, c) + g(d, d)) = \pm 1. \tag{1}$$
$$g(b, c) = g(b, d) = g(c, d) = 0. \tag{2}$$
$$g(c, c) - g(d, d) = 0. \tag{3}$$

S obzirom na kauzalni karakter vektora c i d, razlikujemo tri podslučaja:
$(a.1)\, g(c, c) = g(d, d) > 0$; $(a.2)\, g(c, c) = g(d, d) = 0$; $(a.3)\, g(c, c) = g(d, d) < 0$.

$(a.1)$ Možemo pretpostaviti da je $c = (0, 0, c_3, 0)$, $d = (0, 0, 0, c_3)$, $c_3 \neq 0$. Jednačina (2) implicira da je $b = (b_1, b_2, 0, 0)$. Ako je b prostorni vektor, neka je $b_1 = \rho\sinh(\varphi)$, $b_2 = \rho\cosh(\varphi)$, $\rho \in R_0, \varphi \in R$. Tada je kriva α oblika

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (\rho s\sinh(\varphi), \rho s\cosh(\varphi), c_3\cos(ps), c_3\sin(ps)) \\ &= (0, \rho s, c_3\cos(ps), c_3\sin(ps))\begin{bmatrix}\cosh(\varphi) & \sinh(\varphi) & 0 & 0\\ \sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Prema tome, do na izometrije prostora E_1^4, kriva α je prostorna kružna helisa koja leži cela u prostornoj hiperravni prostora E_1^4, pri čemu iz jednačine (1) sledi $\rho^2 + p^2c_3^2 = 1$. Dalje, ako je b vremenski vektor, neka je $b_1 = \rho\cosh(\varphi)$, $b_2 = \rho\sinh(\varphi)$, $\rho \in R_0, \varphi \in R$. Tada kriva α ima jednačinu

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (\rho s\cosh(\varphi), \rho s\sinh(\varphi), c_3\cos(ps), c_3\sin(ps)) \\ &= (\rho s, 0, c_3\cos(ps), c_3\sin(ps))\begin{bmatrix}\cosh(\varphi) & \sinh(\varphi) & 0 & 0\\ \sinh(\varphi) & \cosh(\varphi) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Do na izometrije prostora E_1^4, kriva α leži cela u vremenskoj hiperravni prostora E_1^4, što je kontradikcija sa pretpostavkom teoreme. Konačno, ako je b nul vektor, neka je $b = (b_1, b_1, 0, 0)$, $b_1 \neq 0$. Tada kriva α glasi

$$\alpha(s) = (b_1 s, b_1 s, c_3\cos(ps), c_3\sin(ps)),$$

pri čemu jednačina (1) daje $p^2c_3^2 = 1$. Prema tome, α je prostorna kružna helisa sa nul osom koja leži cela u svetlosnoj hiperravni prostora E_1^4.

(a.2) U ovom podslučaju, neka je $c = (c_1, 0, 0, c_1)$, $d = (d_1, 0, 0, d_1)$, pri čemu c_1 i d_1 nisu oba jednaka nuli. Jednačina (2) implicira $b = (b_1, b_2, b_3, b_1)$. Neka je $b_1 = \rho\cos(\varphi)$, $b_2 = \rho\sin(\varphi)$, $\rho \in R_0$, $\varphi \in R$. Tada je α oblika

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (b_1 s + c_1\cos(ps) + d_1\sin(ps), \rho s\cos(\varphi), \rho s\sin(\varphi),\\ &\quad b_1 s + c_1\cos(ps) + d_1\sin(ps))\\ &= (b_1 s + c_1\cos(ps) + d_1\sin(ps), \rho s, 0,\\ &\quad b_1 s + c_1\cos(ps) + d_1\sin(ps))\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0\\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Dakle, kriva α leži cela u 2-dimenzionom svetlosnom potprostoru od E_1^4 i stoga leži u vremenskoj hiperravni prostora E_1^4, što je kontradikcija.

(a.3) Sledi da su c i d medjusobno ortogonalni vremenski vektori u prostoru E_1^4, što je nemoguće.

Slučaj (b). Pošto je $g(\alpha', \alpha') = \pm 1$ i s obzirom na linearnu nezavisnost funkcija $\sinh(x)$ i $\cosh(x)$, dobija se sledeći sistem jednačina

$$g(b,b) + \frac{p^2}{2}(g(d,d) - g(c,c)) = \pm 1, \tag{1}$$

$$g(b,c) = g(b,d) = g(c,d) = 0, \tag{2}$$

$$g(c,c) + g(d,d) = 0. \tag{3}$$

U odnosu na kauzalni karakter vektora c i d, razlikujemo tri podslučaja: (b.1) $g(c,c) = -g(d,d) > 0$; (b.2) $g(c,c) = -g(d,d) < 0$; (b.3) $g(c,c) = -g(d,d) = 0$.

(b.1) Možemo uzeti da je $c = (0, 0, 0, c_4)$, $d = (c_4, 0, 0, 0)$, $c_4 \neq 0$. Iz jednačine (2) sledi $b = (0, b_2, b_3, 0)$. Neka je $b_2 = \rho\cos(\varphi)$, $b_3 = \rho\sin(\varphi)$, $\rho \in R_0$, $\varphi \in R$. Tada kriva α ima oblik

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (c_4\sinh(ps), \rho s\cos(\varphi), \rho s\sin(\varphi), c_4\cosh(ps))\\ &= (c_4\sinh(ps), \rho s, 0, c_4\cosh(ps))\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0\\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Sledi da α leži cela u vremenskoj hiperravni prostora E_1^4, što je kontradikcija.

(b.2) Na sličan način dobija se kontradikcija.

$(b.3)$ Možemo pretpostaviti da je $c = (c_1, 0, 0, c_1)$, $d = (d_1, 0, 0, d_1)$, pri čemu c_1 i d_1 nisu oba jednaka nuli. Iz jednačine (2) nalazimo da je $b = (b_1, b_2, b_3, b_1)$. Neka je $b_2 = \rho\cos(\varphi)$, $b_3 = \rho\sin(\varphi)$, $\rho \in R_0, \varphi \in R$. Sledi da jednačina krive α glasi

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (b_1 s + c_1\cosh(ps) + d_1\sinh(ps), \rho s\cos(\varphi), \rho s\sin(\varphi),\\ &\qquad b_1 s + c_1\cosh(ps) + d_1\sinh(ps))\\ &= (b_1 s + c_1\cosh(ps) + d_1\sinh(ps), \rho s, 0,\\ &\qquad b_1 s + c_1\cosh(ps) + d_1\sinh(ps))\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0\\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Prema tome, α leži cela u 2–dimenzionom svetlosnom potprostoru i stoga leži u vremenskoj hiperravni prostora E_1^4, što je kontradikcija. $\square$

Napomena 3.1. *Sve krive nul tipa 2 leže cele u nekoj hiperravni prostora* E_1^4.

Teorema 3.2 ([Š]). *Neka je $\alpha(s)$ prostorna ili vremenska kriva jedinične brzine sa obe sopstvene vrednosti Laplasovog operatora različite od nule koja leži cela u prostoru E_1^4 i ne leži u njegovoj vremenskoj hiperravni. Tada je do na izometrije prostora E_1^4, α kriva tipa 2 ako i samo ako je α deo jedne od sledećih krivih:*

(1) $\alpha(s) = (m\cosh(ts), n\cos(ps), -n\sin(ps), m\sinh(ts))$;
$p^2n^2 + t^2m^2 = 1$, $\quad p, t \in N$, $\quad m, n \in R_0$;

(2) $\alpha(s) = (m\sinh(ts), n\cos(ps), -n\sin(ps), m\cosh(ts))$;
$p^2n^2 - t^2m^2 = 1$, $\quad p, t \in N$, $\quad m, n \in R_0$;

(3) $\alpha(s) = (k\cos(ps)+l\sin(ps)+m\cosh(ts)+n\sinh(ts), r\cos(ps), -r\sin(ps),$
$k\cos(ps) + l\sin(ps) + m\cosh(ts) + n\sinh(ts))$;
$p^2r^2 = 1$, $\quad m^2 + n^2 \neq 0$, $\quad p, t \in N$, $\quad m, n, k, l \in R$;

(4) $\alpha(s) = (m\cos(ps) + n\sin(ps), m\cos(ps) + n\sin(ps), k\sin(ts), k\cos(ts))$;
$t^2k^2 = 1$, $\quad m^2 + n^2 \neq 0$, $\quad p, t \in N$, $\quad t \neq 3p$, $\quad m, n \in R$;

(5) $\alpha(s) = (k\cos(ps) + l\sin(ps) + m\cos(ts) + n\sin(ts),$
$k\cos(ps) + l\sin(ps) + m\cos(ts) + n\sin(ts), r\cos(ps), r\sin(ps))$;
$p^2r^2 = 1$, $\quad m^2 + n^2 \neq 0$, $\quad p, t \in N$, $\quad m, n, k, l \in R$;

(6) $\alpha(s) = (r\cos(ps), m\cos(p(\omega - s)), \frac{m^2}{12n}\cos(p(2\omega + s)) - \frac{r^2}{12n}\cos(ps)$
$+n\cos(3ps), \frac{m^2}{12n}\sin(p(2\omega + s)) - \frac{r^2}{12n}\sin(ps) + n\sin(3ps))$;

$p^2(\frac{m^2-r^2}{2}+(\frac{1}{12n})^2(m^4+r^4-2m^2r^2\cos(2p\omega))+9n^2)=\pm 1,\quad p\in N,$
$r,m,n,\omega\in R_0$;

(7) $\alpha(s)=(r\sin(ps),r\sin(ps),m\cos(3ps),m\sin(3ps)),$
$(3pm)^2=1,\ p\in N,\quad m,r\in R_0.$

(8) $\alpha(s)=(0,r\sin(ps),m\cos(ps)+k\cos(3ps),m\sin(ps)+k\sin(3ps))$;
$r^2+12mk=0,\quad p^2(m-3k)^2=1,\quad p\in N,\quad r,m,k\in R_0$;

(9) $\alpha(s)=(r\sin(ps),0,r\cos(ps)+m\cos(3ps),r\sin(ps)+m\sin(3ps))$;
$r=12m,\quad (9pm)^2=1,\quad p\in N,\quad m,r\in R_0$;

(10) $\alpha(s)=(-\frac{r^2}{12n}\cosh(ps)-\frac{m^2}{12n}\cosh(p(2\omega-s))+n\cosh(3ps),r\cosh(ps),$
$m\cosh(p(\omega+s)),-\frac{r^2}{12n}\sinh(ps)+\frac{m^2}{12n}\sinh(p(2\omega-s))+n\sinh(3ps))$;
$p^2((\frac{1}{12n})^2(r^4+m^4+2m^2r^2\cosh(2p\omega))-\frac{r^2+m^2}{2}+9n^2)=\pm 1,\quad p\in N,$
$r,m,n,\omega\in R_0$;

(11) $\alpha(s)=(-\frac{r^2}{12n}\cosh(ps)-\frac{m^2}{12n}\cosh(p(2\omega-s))+n\cosh(3ps),r\sinh(ps),$
$m\cosh(p(\omega+s)),-\frac{r^2}{12n}\sinh(ps)+\frac{m^2}{12n}\sinh(p(2\omega-s))+n\sinh(3ps))$;
$p^2((\frac{1}{12n})^2(r^4+m^4+2m^2r^2\cosh(2p\omega))+\frac{r^2-m^2}{2}+9n^2)=\pm 1,\quad p\in N,$
$r,m,n,\omega\in R_0$;

(12) $\alpha(s)=(-\frac{r^2}{6n}e^{-p(s+2\theta)}-\frac{m^2}{12n}\cosh(ps)+n\cosh(3ps),re^{p(s-\theta)},$
$m\cosh(ps),\frac{r^2}{6n}e^{-p(s+2\theta)}-\frac{m^2}{12n}\sinh(ps)+n\sinh(3ps))$;
$p^2((\frac{m}{12n})^2(m^2+4r^2e^{-2p\theta})-\frac{m^2}{2}+9n^2)=\pm 1,\ p\in N,\ r,m,n\in R_0,\ \theta\in R$;

(13) $\alpha(s)=(-\frac{r^2}{12n}\cosh(ps)-\frac{m^2}{12n}\cosh(p(2\omega-s))+n\cosh(3ps),r\sinh(ps),$
$m\sinh(p(\omega+s)),-\frac{r^2}{12n}\sinh(ps)+\frac{m^2}{12n}\sinh(p(2\omega-s))+n\sinh(3ps))$;
$p^2((\frac{1}{12n})^2(r^4+m^4+2r^2m^2\cosh(2p\omega))+\frac{r^2+m^2}{2}+9n^2)=1,\quad p\in N,$
$r,m,n,\omega\in R_0$;

(14) $\alpha(s)=(-\frac{r^2}{6n}e^{-p(s+2\theta)}-\frac{m^2}{12n}\cosh(ps)+n\cosh(3ps),re^{p(s-\theta)},m\sinh(ps),$
$\frac{r^2}{6n}e^{-p(s+2\theta)}-\frac{m^2}{12n}\sinh(ps)+n\sinh(3ps))$;
$p^2((\frac{m}{12n})^2(m^2+4r^2e^{-2p\theta})+\frac{m^2}{2}+9n^2)=1,\ p\in N,\ r,m,n\in R_0,\ \theta\in R$;

(15) $\alpha(s)=(\frac{r^2}{12n}\sinh(ps)+\frac{m^2}{12n}\sinh(p(s-2\omega))+n\sinh(3ps),r\cosh(ps),$
$m\cosh(p(\omega+s)),\frac{r^2}{12n}\cosh(ps)+\frac{m^2}{12n}\cosh(p(s-2\omega))+n\cosh(3ps))$;
$p^2((\frac{1}{12n})^2(-r^4-m^4-2r^2m^2\cosh(2p\omega))-\frac{r^2+m^2}{2}-9n^2)=-1,\quad p\in N,$
$r,m,n,\omega\in R_0$;

(16) $\alpha(s)=(\frac{r^2}{12n}\sinh(ps)+\frac{m^2}{12n}\sinh(p(s-2\omega))+n\sinh(3ps),r\sinh(ps),$
$m\cosh(p(\omega+s)),\frac{r^2}{12n}\cosh(ps)+\frac{m^2}{12n}\cosh(p(s-2\omega))+n\cosh(3ps))$;
$p^2((\frac{1}{12n})^2(-r^4-m^4-2r^2m^2\cosh(2p\omega))+\frac{r^2-m^2}{2}-9n^2)=\pm 1,\quad p\in N,$

$r, m, n, \omega \in R_0$;

(17) $\alpha(s) = (-\frac{r^2}{6n}e^{-p(s+2\theta)} + \frac{m^2}{12n}\sinh(ps) + n\sinh(3ps), re^{p(s-\theta)},$
$m\cosh(ps), \frac{r^2}{6n}e^{-p(s+2\theta)} + \frac{m^2}{12n}\cosh(ps) + n\cosh(3ps))$;
$-p^2((\frac{m}{12n})^2(m^2+4r^2e^{-2p\theta}) + \frac{m^2}{2} + 9n^2) = -1$, $p \in N$, $r, m, n \in R_0$, $\theta \in R$;

(18) $\alpha(s) = (\frac{r^2}{12n}\sinh(ps) + \frac{m^2}{12n}\sinh(p(s-2\omega)) + n\sinh(3ps), r\sinh(ps),$
$m\sinh(p(\omega+s)), \frac{r^2}{12n}\cosh(ps) + \frac{m^2}{12n}\cosh(p(s-2\omega)) + n\cosh(3ps))$;
$p^2((\frac{1}{12n})^2(-r^4 - m^4 - 2r^2m^2\cosh(2p\omega)) + \frac{r^2+m^2}{2} - 9n^2) = \pm 1$, $p \in N$,
$r, m, n, \omega \in R_0$;

(19) $\alpha(s) = (-\frac{r^2}{6n}e^{-p(s+2\theta)} + \frac{m^2}{12n}\sinh(ps) + n\sinh(3ps), re^{p(s-\theta)},$
$m\sinh(ps), \frac{r^2}{6n}e^{-p(s+2\theta)} + \frac{m^2}{12n}\cosh(ps) + n\cosh(3ps))$;
$p^2(-(\frac{m}{12n})^2(m^2+4r^2e^{-2p\theta}) + \frac{m^2}{2} - 9n^2) = \pm 1$, $p \in N$, $r, m, n \in R_0$, $\theta \in R$.

Dokaz. Pretpostavimo da $\alpha(s)$ zadovoljava pretpostavke teoreme i neka je α kriva tipa 2. Tada se $\alpha(s)$ može napisati u jednom od sledećih oblika:

(a) $\alpha(s) = a + b\cos(ps) + c\sin(ps) + d\cosh(ts) + e\sinh(ts)$;

(b) $\alpha(s) = a + b\cos(ps) + c\sin(ps) + d\cos(ts) + e\sin(ts)$;

(c) $\alpha(s) = a + b\cosh(ps) + c\sinh(ps) + d\cosh(ts) + e\sinh(ts)$;

pri čemu $p, t \in N$, $a, b, c, d, e \in R^4$. Dalje, pretpostavimo da je $0 < p < t$ i da je $a = (0,0,0,0)$ do na translaciju. Označimo vektore b, c, d, e sa $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ i tako dalje. U nastavku, razmotrićemo slučajeve (a),(b) i (c).

Slučaj (a). Pošto je $g(\alpha', \alpha') = \pm 1$ i s obzirom na linearnu nezavisnost funkcija $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sinh(x)$ i $\cosh(x)$, dobijamo sistem jednačina:

$$\frac{p^2}{2}(g(b,b) + g(c,c)) + \frac{t^2}{2}(g(e,e) - g(d,d)) = \pm 1, \tag{1}$$

$$g(c,c) - g(b,b) = 0, \tag{2}$$

$$g(e,e) + g(d,d) = 0, \tag{3}$$

$$g(b,d) = g(b,e) = g(c,d) = g(c,e) = g(b,c) = g(d,e) = 0. \tag{4}$$

U odnosu na kauzalni karakter vektora d i e, razlikujemo tri podslučaja:
($a.1$) $g(e,e) = -g(d,d) > 0$; ($a.2$) $g(e,e) = -g(d,d) < 0$;
($a.3$) $g(e,e) = -g(d,d) = 0$.

($a.1$) U ovom podslučaju, neka je $d = (e_1, 0, 0, 0)$, $e = (0, 0, 0, e_1)$, $e_1 \neq 0$. Iz jednačine (4) dobijamo da je $b = (0, b_2, b_3, 0)$, $c = (0, c_2, c_3, 0)$. Dalje, neka je $b_2 = \rho\cos(p\varphi)$, $c_2 = \rho\sin(p\varphi)$, $\rho \in R_0, \varphi \in R$. Tada jednačine (2) i (4) impliciraju da je $b_3 = \rho\sin(p\varphi)$, $c_3 = -\rho\cos(p\varphi)$. Stoga je kriva α oblika

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (e_4\cosh(ts), \rho\cos(p(\varphi - s)), \rho\sin(p(\varphi - s)), e_4\sinh(ts))\\ &= (e_4\cosh(ts), \rho\cos(ps), -\rho\sin(ps),\\ &\quad e_4\sinh(ts))\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(p\varphi) & \sin(p\varphi) & 0\\ 0 & -\sin(p\varphi) & \cos(p\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

pri čemu jednačina (1) postaje $p^2\rho^2 + t^2e_4^2 = 1$. Do na izometrije prostora E_1^4, kriva α leži cela u E_1^4, čime se dobija oblik (1).

(a.2) Možemo pretpostaviti da je $e = (e_1, 0, 0, 0)$, $d = (0, 0, 0, e_1)$, $e_1 \neq 0$. Ovaj podslučaj je analogan podslučaju (a.1), pa nalazimo da je (do na izometrije prostora E_1^4) kriva α oblika $\alpha(s) = (e_1\sinh(ts), \rho\cos(ps), -\rho\sin(ps), e_1\cosh(ts))$, pri čemu iz jednačine (1) sledi $p^2\rho^2 - t^2e_1^2 = \pm 1$. Prema tome, α je prostorna ili vremenska kriva koja leži cela u prostoru E_1^4, čime se dobija oblik (2). Kauzalni karakter krive α zavisi od izbora konstanti.

(a.3) Možemo uzeti da je $d = (d_1, 0, 0, d_1)$, $e = (e_1, 0, 0, e_1)$, pri čemu d_1 i e_1 nisu oba jednaka nuli. Iz jednačine (4) nalazimo da je $b = (b_1, b_2, b_3, b_1)$, $c = (c_1, c_2, c_3, c_1)$. Neka je $b_2 = \rho\cos(p\varphi)$, $c_2 = \rho\sin(p\varphi)$, $\rho \in R_0$, $\varphi \in R$. Tada jednačine (2) i (4) impliciraju da je $b_3 = \rho\sin(p\varphi)$, $c_3 = -\rho\cos(p\varphi)$. Stoga je α oblika

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (b_1\cos(ps) + c_1\sin(ps) + d_1\cosh(ts) + e_1\sinh(ts), \rho\cos(p(\varphi - s)),\\ &\quad \rho\sin(p(\varphi - s)), b_1\cos(ps) + c_1\sin(ps) + d_1\cosh(ts) + e_1\sinh(ts))\\ &= (b_1\cos(ps) + c_1\sin(ps) + d_1\cosh(ts) + e_1\sinh(ts), \rho\cos(ps), -\rho\sin(ps),\\ &\quad b_1\cos(ps) + c_1\sin(ps) + d_1\cosh(ts)\\ &\quad + e_1\sinh(ts))\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos(p\varphi) & \sin(p\varphi) & 0\\ 0 & -\sin(p\varphi) & \cos(p\varphi) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

pri čemu jednačina (1) daje $p^2\rho^2 = 1$. Do na izometrije prostora E_1^4, α je prostorna kriva koja leži cela u svetlosnoj hiperravni prostora E_1^4, odakle se dobija oblik (3).

Slučaj (b). Koristeći jednačinu $g(\alpha'(s), \alpha'(s)) = \pm 1$, dobijamo da su argumenti funkcija $\sin(x)$ i $\cos(x)$ brojevi $\{2p, 2t, p+t, t-p\}$. S obzirom da je $0 < p < t$, razlikujemo dva podslučaja: (b.1) $t - p \neq 2p$; (b.2) $t - p = 2p$.

(b.1) $t - p \neq 2p$. Odgovarajući sistem jednačina je oblika

$$\frac{p^2}{2}(g(b,b)+g(c,c))+\frac{t^2}{2}(g(d,d)+g(e,e))=\pm 1, \tag{1}$$
$$g(c,c)-g(b,b)=0, \tag{2}$$
$$g(e,e)-g(d,d)=0, \tag{3}$$
$$g(b,e)=g(b,d)=g(b,c)=g(c,d)=g(c,e)=g(d,e)=0. \tag{4}$$

U odnosi na kauzalni karakter vektora d i e, razlikujemo tri podslučaja: $(b.1.1)\, g(e,e)=g(d,d)>0$; $(b.1.2)\, g(e,e)=g(d,d)=0$; $(b.1.3)\, g(e,e)=g(d,d)<0$.

$(b.1.1)$ Neka je $e=(0,0,e_3,0)$, $d=(0,0,0,e_3)$, $e_3\neq 0$. Tada jednačina (4) implicira da je $b=(b_1,b_2,0,0,)$, $c=(c_1,c_2,0,0)$. Ako je $g(b,b)=g(c,c)>0$, tada bi postojala četiri medjusobno ortogonalna vektora b, c, d, e u prostoru E_1^4, što je nemoguće. Ako je $g(b,b)=g(c,c)<0$, tada bi postojala dva medjusobno ortogonalna vektora b i c u prostoru E_1^4, što je takodje nemoguće. Konačno, ako je $g(b,b)=g(c,c)=0$, neka je $b=(b_1,b_1,0,0)$, $c=(c_1,c_1,0,0)$, pri čemu b_1 i c_1 nisu oba jednaka nuli. Sledi da α ima jednačinu $\alpha(s)=(b_1\cos(ps)+c_1\sin(ps), b_1\cos(ps)+c_1\sin(ps), e_3\sin(ts), e_3\cos(ts))$, pri čemu jednačina (1) glasi $t^2e_3^2=1$. Stoga je α prostorna kriva koja leži cela u svetlosnoj hiperravni prostora E_1^4, čime se dobija oblik (4).

$(b.1.2)$ Pretpostavimo da je $d=(d_1,d_1,0,0)$, $e=(e_1,e_1,0,0)$, pri čemu d_1 i e_1 nisu oba jednaka nuli. Tada jednačina (4) implicira da je $b=(b_1,b_1,b_3,b_4)$, $c=(c_1,c_1,c_3,c_4)$. Neka je $b_3=\rho\cos(p\varphi)$, $b_4=\rho\sin(p\varphi)$, $\rho\in R_0$, $\varphi\in R$. Iz jednačina (2) i (4) nalazimo da je $c_3=-\rho\sin(p\varphi)$, $c_4=\rho\cos(p\varphi)$. Dakle, kriva α je oblika

$$\begin{aligned}\alpha(s)&=(b_1\cos(ps)+c_1\sin(ps)+d_1\cos(ts)+e_1\sin(ts),\\ &\quad b_1\cos(ps)+c_1\sin(ps)+d_1\cos(ts)+e_1\sin(ts),\\ &\quad \rho\cos(p(\varphi+s)),\rho\sin(p(\varphi+s)))\\ &=(b_1\cos(ps)+c_1\sin(ps)+d_1\cos(ts)+e_1\sin(ts),\\ &\quad b_1\cos(ps)+c_1\sin(ps)+d_1\cos(ts)+e_1\sin(ts),\\ &\quad \rho\cos(ps),\rho\sin(ps))\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos(p\varphi)&\sin(p\varphi)\\0&0&-\sin(p\varphi)&\cos(p\varphi)\end{bmatrix},\end{aligned}$$

pri čemu jednačina (1) postaje $p^2\rho^2=1$. Do na izometrije prostora E_1^4, α je prostorna kriva koja leži cela u svetlosnoj hiperravni prostora E_1^4, čime se dobija oblik (5).

(b.1.3) U ovom podslučaju nalazimo da su d i e medjusobno ortogonalni vremenski vektori u prostoru E_1^4, što je nemoguće.

(b.2) Pošto je $g(\alpha', \alpha') = \pm 1$, dobija se sistem jednačina:

$$\frac{p^2}{2}(g(b,b) + g(c,c)) + \frac{t^2}{2}(g(d,d) + g(e,e)) = \pm 1, \tag{1}$$

$$\frac{p^2}{2}(g(c,c) - g(b,b)) + pt(g(b,d) + g(c,e)) = 0, \tag{2}$$

$$g(e,e) - g(d,d) = 0, \tag{3}$$

$$-p^2 g(b,c) + pt(g(b,e) - g(c,d)) = 0, \tag{4}$$

$$g(d,e) = 0, \tag{5}$$

$$g(c,e) - g(b,d) = 0, \tag{6}$$

$$g(b,e) + g(c,d) = 0. \tag{7}$$

Ponovo razlikujemo tri podslučaja:
(b.2.1) $g(e,e) = g(d,d) > 0$; (b.2.2) $g(e,e) = g(d,d) = 0$; (b.2.3) $g(e,e) = g(d,d) < 0$.

(b.2.1) Možemo uzeti da je $d = (0,0,d_3,0)$, $e = (0,0,0,d_3)$, $d_3 \neq 0$. Iz jednačina (6) i (7) sledi da je $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $c = (c_1, c_2, -b_4, b_3)$. Ako su b, d, e (c, d, e) linearno zavisni vektori, tada je $b_1 = b_2 = 0$ ($c_1 = c_2 = 0$), pa kriva α leži cela u 3-dimenzionom potprostoru prostora E_1^4. Štaviše, ako je $b_1 \neq 0$ i $c_2 \neq 0$ ($b_2 \neq 0$ i $c_1 \neq 0$), tada kriva α leži cela u prostoru E_1^4. U nastavku, razmatramo svaki od ovih slučajeva.

(b.2.1.1) $b_1 \neq 0, c_2 \neq 0$ (ili $b_2 \neq 0, c_1 \neq 0$).

Neka je $b_1 = \rho\cos(p\varphi)$, $c_1 = \rho\sin(p\varphi)$, $b_2 = m\cos(p\theta)$, $c_2 = m\sin(p\theta)$, ρ, $m \in R_0$, $\varphi, \theta \in R$, $\varphi \neq \theta$, $p\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $p\theta \neq k\pi$, $k \in Z$. Tada jednačine (2) i (4) impliciraju da je $b_3 = \frac{1}{12d_3}(m^2\cos(2p\theta) - \rho^2\cos(2p\varphi))$, $b_4 = \frac{1}{12d_3}(m^2\sin(2p\theta) - \rho^2\sin(2p\varphi))$. Prema tome, jednačina krive α glasi

$$\begin{aligned}\alpha(s) = (&\rho\cos(p(\varphi - s)), m\cos(p(\theta - s)),\\ &\tfrac{m^2}{12d_3}\cos(p(2\theta + s)) - \tfrac{\rho^2}{12d_3}\cos(p(2\varphi + s)) + d_3\cos(3ps),\\ &\tfrac{m^2}{12d_3}\sin(p(2\theta + s)) - \tfrac{\rho^2}{12d_3}\sin(p(2\varphi + s)) + d_3\sin(3ps)).\end{aligned}$$

Stavljajući $u = s - \varphi$ i $\omega = \theta - \varphi$, dobijamo da je

$$\begin{aligned}\alpha(u) = (&\rho\cos(pu), m\cos(p(\omega - u)), \tfrac{m^2}{12d_3}\cos(p(2\omega + u)) - \tfrac{\rho^2}{12d_3}\cos(pu)\\ &+ d_3\cos(3pu), \tfrac{m^2}{12d_3}\sin(p(2\omega + u)) - \tfrac{\rho^2}{12d_3}\sin(pu)\\ &+ d_3\sin(3pu))\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos(3p\varphi) & \sin(3p\varphi)\\ 0 & 0 & -\sin(3p\varphi) & \cos(3p\varphi)\end{bmatrix},\end{aligned}$$

pri čemu jednačina (1) postaje $p^2(\frac{1}{2}(m^2-\rho^2)+(\frac{1}{12d_3})^2(m^4+\rho^4-2m^2\rho^2\cos(2p\omega))+9d_3^2) = \pm 1$. Do na izometrije prostora E_1^4, α je prostorna ili vremenska kriva koja leži cela u prostoru E_1^4, čime se dobija oblik (6).

(b.2.1.2) $b_1 = b_2 = 0$ (ili $c_1 = c_2 = 0$).

Jednačina (4) implicira $b_4 = 0$ i stoga je $b = (0, 0, b_3, 0)$, $c = (c_1, c_2, 0, b_3)$. Ako je $b_3 = 0$, tada iz jednačine (2) sledi da je $c = (c_1, c_1, 0, 0)$, $c_1 \neq 0$. Dakle, α ima jednačinu $\alpha(s) = (c_1\sin(ps), c_1\sin(ps), d_3\cos(3ps), d_3\sin(3ps))$, pri čemu jednačina (1) postaje $(3pd_3)^2 = 1$. Sledi da je α prostorna kriva, koja leži cela u svetlosnoj hiperravni prostora E_1^4. Tako dobijamo oblik (7). Dalje, pretpostavimo da je $b_3 \neq 0$. Ako je c prostorni vektor, neka je $c_1 = \rho\sinh(p\theta)$, $c_2 = \rho\cosh(p\theta)$, $\rho \in R_0$, $\theta \in R$. Tada jednačina (2) daje $\rho^2 + 12b_3d_3 = 0$, a kriva α ima jednačinu

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (\rho\sinh(p\theta)\sin(ps), \rho\cosh(p\theta)\sin(ps), b_3\cos(ps) + d_3\cos(3ps),\\ &\quad b_3\sin(ps) + d_3\sin(3ps))\\ &= (0, \rho\sin(ps), b_3\cos(ps) + d_3\cos(3ps),\\ &\quad b_3\sin(ps) + d_3\sin(3ps))\begin{bmatrix}\cosh(p\theta) & \sinh(p\theta) & 0 & 0\\ \sinh(p\theta) & \cosh(p\theta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\end{aligned}$$

pri čemu jednačina (1) glasi $p^2(b_3 - 3d_3)^2 = 1$. Do na izometrije prostora E_1^4, α je prostorna kriva koja leži cela u prostornoj hiperravni prostora E_1^4, čime se dobija oblik (8). Ako je c vremenski vektor, tada α leži cela u vremenskoj hiperravni prostora E_1^4, što je kontradikcija. Konačno, ako je c nul vektor, neka je $c_1 = b_3\cosh(p\theta)$, $c_2 = b_3\sinh(p\theta)$, $b_3 \in R_0$, $\theta \in R$. Tada iz jednačine (2) nalazimo da je $b_3 = 12d_3$, pa je α oblika

$$\begin{aligned}\alpha(s) &= (b_3\cosh(p\theta)\sin(ps), b_3\sinh(p\theta)\sin(ps), b_3\cos(ps) + d_3\cos(3ps),\\ &\quad b_3\sin(ps) + d_3\sin(3ps))\\ &= (b_3\sin(ps), 0, b_3\cos(ps) + d_3\cos(3ps),\\ &\quad b_3\sin(ps) + d_3\sin(3ps))\begin{bmatrix}\cosh(p\theta) & \sinh(p\theta) & 0 & 0\\ \sinh(p\theta) & \cosh(p\theta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Tada jednačina (1) postaje $(9pd_3)^2 = 1$ i do na izometrije prostora E_1^4, α je prostorna kriva koja leži cela u svetlosnoj hiperravni prostora E_1^4, što daje oblik (9).

$(b.2.2)$ Možemo uzeti da je $d = (d_1, d_1, 0, 0)$, $e = (e_1, e_1, 0, 0)$, tj. da je $d = \lambda e$, $\lambda \in R$, pri čemu d_1 i e_1 nisu oba jednaka nuli. Jednačine (6) i (7) impliciraju da je $(1+\lambda^2)g(e,d) = 0$ i stoga je $g(e,d) = 0$. Tada je $g(b,d) = 0$ i prema tome je $b = (b_1, b_1, b_3, b_4)$, $c = (c_1, c_1, c_3, c_4)$. Sada imamo iste vektore b, c, d, e kao u podslučaju (b.1.2), pa dobijamo isti oblik (5) krive α.

$(b.2.3)$ Sledi da su d i e dva medjusobno ortogonalna vremenska vektora u prostoru E_1^4, što je nemoguće.

Slučaj (c). Koristeći jednačinu $g(\alpha', \alpha') = \pm 1$, nalazimo da su argumenti funkcija $\sinh(x)$ i $\cosh(x)$ brojevi $\{2p, 2t, p+t, t-p\}$. Pošto je $0 < p < t$, razlikujemo sledeća dva podslučaja: $(c.1)\, t-p \neq 2p$; $(c.2)\, t-p = 2p$.

$(c.1)$ $t - p \neq 2p$. Odgovarajući sistem jednačina je oblika:

$$\begin{aligned}
&(1) && \tfrac{p^2}{2}(g(c,c)-g(b,b)) + \tfrac{t^2}{2}(g(e,e)-g(d,d)) = \pm 1,\\
&(2) && g(d,d)+g(e,e) = 0,\\
&(3) && g(b,b)+g(c,c) = 0,\\
&(4) && g(b,c) = g(b,d) = g(b,e) = g(c,d) = g(c,e) = g(d,e) = 0.
\end{aligned}$$

U odnosu na kauzalni karakter vektora d i e, razlikujemo tri podslučaja: $(c.1.1)\, g(e,e) = -g(d,d) > 0$; $(c.1.2)\, g(e,e) = -g(d,d) < 0$; $(c.1.3)\, g(e,e) = -g(d,d) = 0$.

$(c.1.1)$ Neka je $d = (e_4, 0, 0, 0)$, $e = (0, 0, 0, e_4)$, $e_4 \neq 0$. Jednačina (4) implicira da je $b = (0, b_2, b_3, 0)$, $c = (0, c_2, c_3, 0)$, dok iz jednačine (3) dobijamo $b = c = 0$, što je kontradikcija.

$(c.1.2)$ U ovom podslučaju se ponovo dobija kontradikcija.

$(c.1.3)$ Možemo uzeti da je $d = (d_1, 0, 0, d_1)$, $e = (e_1, 0, 0, e_1)$, pri čemu d_1 i e_1 nisu oba jednaka nuli. Tada iz jednačina (3) i (4) sledi $b = c = 0$, što je kontradikcija.

$(c.2)\, t - p = 2p$. Odgovarajući sistem jednačina glasi:

$$\begin{aligned}
&(1) && \tfrac{p^2}{2}(g(c,c)-g(b,b)) + \tfrac{t^2}{2}(g(e,e)-g(d,d)) = \pm 1,\\
&(2) && g(e,e)+g(d,d) = 0,\\
&(3) && \tfrac{p^2}{2}(g(b,b)+g(c,c)) + pt(g(c,e)-g(b,d)) = 0,\\
&(4) && p^2 g(b,c) + pt(g(c,d)-g(b,e)) = 0,\\
&(5) && g(d,e) = 0,\\
&(6) && g(b,d)+g(c,e) = 0,\\
&(7) && g(b,e)+g(c,d) = 0.
\end{aligned}$$

U odnosu na kauzalni karakter vektora d i e, razlikujemo tri podslučaja:

$(c.2.1)\, g(e,e) = -g(d,d) > 0$; $(c.2.2)\, g(e,e) = -g(d,d) < 0$; $(c.2.3)\, g(e,e) = -g(d,d) = 0$.

$(c.2.1)$ Možemo pretpostaviti da je $e = (0,0,0,e_4)$, $d = (e_4,0,0,0)$, $e_4 \neq 0$. Iz jednačina (6) i (7) imamo da je $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $c = (b_4, c_2, c_3, b_1)$. Ako su b, d, e (c, d, e) linearno zavisni vektori, tada α leži cela u vremenskoj hiperravni prostora E_1^4, što je kontradikcija. Dalje, uporedjivanjem brojeva b_2 i c_2 kao i b_3 i c_3, mogu se javiti sledeće mogućnosti:

$(c.2.1.1)$ $b_2^2 > c_2^2$, $\quad b_3^2 > c_3^2$;

$(c.2.1.2)$ $b_2^2 < c_2^2$, $\quad b_3^2 > c_3^2 \quad$ (ili $b_2^2 > c_2^2$, $\quad b_3^2 < c_3^2$);

$(c.2.1.3)$ $b_2 = c_2 \neq 0$, $\quad b_3^2 > c_3^2 \quad$ (ili $b_2^2 > c_2^2$, $\quad b_3 = c_3 \neq 0$);

$(c.2.1.4)$ $b_2^2 < c_2^2$, $\quad b_3^2 < c_3^2$;

$(c.2.1.5)$ $b_2 = c_2 \neq 0$, $\quad b_3^2 < c_3^2 \quad$ (or $b_2^2 < c_2^2$, $\quad b_3 = c_3 \neq 0$);

$(c.2.1.6)$ $b_2 = c_2 \neq 0$, $\quad b_3 = c_3 \neq 0$.

U nastavku, razmotrimo ove mogućnosti posebno.

$(c.2.1.1)$ Neka je $b_2 = \rho\cosh(p\varphi)$, $c_2 = \rho\sinh(p\varphi)$, $b_3 = m\cosh(p\theta)$, $c_3 = m\sinh(p\theta)$, $m, \rho \in R_0$, $\varphi, \theta \in R$, $\varphi \neq \theta$. Tada jednačine (3) i (4) impliciraju da je $b_1 = -\frac{1}{12e_4}(\rho^2\cosh(2p\varphi) + m^2\cosh(2p\theta))$, $b_4 = \frac{1}{12e_4}(\rho^2\sinh(2p\varphi) + m^2\sinh(2p\theta))$. Stoga je α oblika

$$\begin{aligned}\alpha(s) = (&\tfrac{-\rho^2}{12e_4}\cosh(p(2\varphi - s)) - \tfrac{m^2}{12e_4}\cosh(p(2\theta - s)) + e_4\cosh(3ps),\\ &\rho\cosh(p(\varphi + s)), m\cosh(p(\theta + s)),\\ &\tfrac{\rho^2}{12e_4}\sinh(p(2\varphi - s)) + \tfrac{m^2}{12e_4}\sinh(p(2\theta - s)) + e_4\sinh(3ps)).\end{aligned}$$

Stavljajući $u = s + \varphi$ i $\omega = \theta - \varphi$, dobija se da je

$$\begin{aligned}\alpha(u) = (&-\tfrac{\rho^2}{12e_4}\cosh(pu) - \tfrac{m^2}{12e_4}\cosh(p(2\omega - u)) + e_4\cosh(3pu), \rho\cosh(pu),\\ &m\cosh(p(u+\omega)), -\tfrac{\rho^2}{12e_4}\sinh(pu) + \tfrac{m^2}{12e_4}\sinh(p(2\omega - u))\\ &+ e_4\sinh(3pu)) \cdot \begin{bmatrix} \cosh(3p\varphi) & 0 & 0 & -\sinh(3p\varphi)\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\sinh(3p\varphi) & 0 & 0 & \cosh(3p\varphi)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

pri čemu jednačina (1) postaje $p^2((\frac{1}{12e_4})^2(\rho^4 + m^4 + 2m^2\rho^2\cosh(2p\omega)) - \frac{1}{2}(\rho^2 + m^2) + 9e_4^2) = \pm 1$. Do na isometrije prostora E_1^4, α je prostorna ili vremenska kriva koja leži cela u prostoru E_1^4, što daje oblik (10).

$(c.2.1.2)$ Koristeći slične metode kao u prethodnom podslučaju $(c.2.1.1)$, dobijamo da je kriva α oblika

$$\begin{aligned}\alpha(u) =(&\tfrac{-\rho^2}{12e_4}\cosh(pu) - \tfrac{m^2}{12e_4}\cosh(p(2\omega - u)) + e_4\cosh(3pu), \rho\sinh(pu),\\ &m\cosh(p(u+\omega)), \tfrac{-\rho^2}{12e_4}\sinh(pu) + \tfrac{m^2}{12e_4}\sinh(p(2\omega - u)) + e_4\sinh(3pu)),\end{aligned}$$

pri čemu jednačina (1) glasi $p^2((\frac{1}{12e_4})^2(\rho^4+m^4+2m^2\rho^2\cosh(2p\omega))+\frac{1}{2}(\rho^2-m^2)+9e_4^2)=\pm1$. Stoga je α prostorna ili vremenska kriva koja leži cela u prostoru E_1^4, čime se dobija oblik (11). U slučaju $b_2^2>c_2^2$, $b_3^2<c_3^2$, do na izometrije prostora E_1^4 dobijamo isti oblik (11).

(c.2.1.3) Neka je $b_3=m\cosh(p\theta)$, $c_3=m\sinh(p\theta)$, $m\in R_0$, $\theta\in R$. Tada iz jednačina (3) i (4) sledi da je $b_1=-\frac{1}{12e_4}(2b_2^2+m^2\cosh(2p\theta))$, $b_4=\frac{1}{12e_4}(2b_2^2+m^2\sinh(2p\theta))$. Sledi da kriva α ima jednačinu

$$\begin{aligned}\alpha(s)=(&\tfrac{-b_2^2}{6e_4}e^{-ps}-\tfrac{m^2}{12e_4}\cosh(p(2\theta-s))+e_4\cosh(3ps),b_2e^{ps},m\cosh(p(\theta+s)),\\&\tfrac{b_2^2}{6e_4}e^{-ps}+\tfrac{m^2}{12e_4}\sinh(p(2\theta-s))+e_4\sinh(3ps)).\end{aligned}$$

Stavljajući $u=s+\theta$, nalazimo da je

$$\begin{aligned}\alpha(u)=(&\tfrac{-b_2^2}{6e_4}e^{-p(u+2\theta)}-\tfrac{m^2}{12e_4}\cosh(pu)+e_4\cosh(3pu),b_2e^{p(u-\theta)},m\cosh(pu),\\&\tfrac{b_2^2}{6e_4}e^{-p(u+2\theta)}-\tfrac{m^2}{12e_4}\sinh(pu)\\&+e_4\sinh(3pu))\begin{bmatrix}\cosh(3p\theta)&0&0&-\sinh(3p\theta)\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\-\sinh(3p\theta)&0&0&\cosh(3p\theta)\end{bmatrix},\end{aligned}$$

pri čemu jednakost (1) postaje $p^2((\frac{m}{12e_4})^2(m^2+4b_2^2e^{-2p\theta})-\frac{m^2}{2}+9e_4^2)=\pm1$. Do na izometrije prostora E_1^4, α je prostorna ili vremenska kriva koja leži cela u prostoru E_1^4, čime se dobija oblik (12). U slučaju $b_2^2>c_2^2$, $b_3=c_3\neq0$, (do na izometrije) dobija se opet kriva oblika (12).

(c.2.1.4) Koristeći slične metode kao u podslučaju (c.2.1.1), do na izometrije prostora E_1^4 nalazimo da je α oblika

$$\begin{aligned}\alpha(s)=(&-\tfrac{\rho^2}{12e_4}\cosh(ps)-\tfrac{m^2}{12e_4}\cosh(p(2\omega-s))+e_4\cosh(3ps),\rho\sinh(ps),\\&m\sinh(p(s+\omega)),-\tfrac{\rho^2}{12e_4}\sinh(ps)+\tfrac{m^2}{12e_4}\sinh(p(2\omega-s))+e_4\sinh(3ps))\end{aligned}$$

pri čemu jednačina (1) glasi $p^2((\frac{1}{12e_4})^2(\rho^4+m^4+2m^2\rho^2\cosh(2p\omega))+\frac{\rho^2+m^2}{2}+9e_4^2)=1$. Prema tome, α je prostorna kriva koja leži cela u prostoru E_1^4, čime se dobija oblik (13).

(c.2.1.5) Koristeći slične metode kao u podslučaju (c.2.1.3), do na izometrije prostora E_1^4 dobijamo da kriva α ima jednačinu

$$\begin{aligned}\alpha(u)=(&-\tfrac{b_2^2}{6e_4}e^{-p(u+2\theta)}-\tfrac{m^2}{12e_4}\cosh(pu)+e_4\cosh(3pu),b_2e^{p(u-\theta)},\\&m\sinh(pu),\tfrac{b_2^2}{6e_4}e^{-p(u+2\theta)}-\tfrac{m^2}{12e_4}\sinh(pu)+e_4\sinh(3pu))\end{aligned}$$

pri čemu jednačina (1) postaje $p^2((\frac{m}{12e_4})^2(m^2+4b_2^2e^{-2p\theta})+\frac{m^2}{2}+9e_1^2)=1$. Stoga je α prostorna kriva koja leži cela u prostoru E_1^4, čime se dobija oblik (14). U slučaju $b_2^2<c_2^2$, $b_3=c_3\neq 0$ (do na izometrije) dobija se isti oblik (14).

(c.2.1.6) Jednačine (3) i (4) daju $b_1=-\frac{1}{6e_4}(b_2^2+b_3^2)=-b_4$. Sledi da su b, c, d, e linearno zavisni vektori i pošto je d vremenski vektor, α leži cela u vremenskoj hiperravni prostora E_1^4, što je kontradikcija.

(c.2.2) Ovaj podslučaj je analogan podslučaju (c.2.1). Stoga se pomoću sličnih izračunavanja dobijaju oblici (15), (16), (17), (18) i (19) krive α.

(c.2.3) Pošto su d i e dva linearno zavisna nul vektora, α leži u 3 dimenzionom potprostoru prostora E_1^4. Neka je $d=(d_1,d_1,0,0)$, $e=(e_1,e_1,0,0)$, pri čemu d_1 i e_1 nisu oba jednaka nuli. Tada je $d=\lambda e, \lambda\in R$, pa jednačine (6) i (7) daju $(1-\lambda^2)g(c,d)=0$. Zato razlikujemo dva podslučaja: (c.2.3.1) $g(c,d)=0$; (c.2.3.2) $\lambda^2=1$.

(c.2.3.1) Iz jednačine (7) dobijamo $g(b,e)=0$ i stoga je $b=(b_1,b_1,b_3,b_4)$, $c=(c_1,c_1,c_3,c_4)$. Tada je $g(b,d)=g(c,e)=0$, pa jednačine (3) i (4) daju $b=c=0$, što je kontradikcija.

(c.2.3.2) Jednačina (6) implicira $g(b+\lambda c,d)=0$. Dalje, iz jednačina (3) i (4) sledi da su d i $b-\lambda c$ dva linearno nezavisna nul vektora. U suprotnom, ako bi d i $b-\lambda c$ bili dva linearno zavisna nul vektora, tada bi imali da je $b-\lambda c=\mu d$, $\mu\in R$. Stoga bi jednačina (6) implicirala da je $g(\lambda c+\mu d,d)+g(c,\lambda d)=0$, tj. $g(c,d)=0$, što bi dalo kontradikciju, kao u podslučaju (c.2.3.1). Dalje, neka je $b-\lambda c=(-a_0,a_0,0,0)$, $a_0\neq 0$. Tada je $b+\lambda c=(b_0,b_0,b_3,b_4)$, $b_4\neq 0$, pa iz poslednjih dveju jednačina za $b-\lambda c$ i $b+\lambda c$ nalazimo $b=(1/2)(b_0-a_0,b_0+a_0,b_3,b_4)$, $c=(\lambda/2)(a_0+b_0,b_0-a_0,b_3,b_4)$. Neka je $m=(b_0-a_0)/2$, $n=(b_0+a_0)/2$. Prema tome, kriva α je oblika

$$\alpha(s)=(m\cosh(ps)+\lambda n\sinh(ps)+d_1e^{3\lambda ps},n\cosh(ps)+\lambda m\sinh(ps)+d_1e^{3\lambda ps},\\ \frac{b_3}{2}e^{\lambda ps},\frac{b_4}{2}e^{\lambda ps}).$$

Konačno, neka je $b_3=\rho\cos(p\theta)$, $b_4=\rho\sin(p\theta)$, $\rho\in R_0$, $\theta\in R$. Tada imamo da je

$$\alpha(s)=(m\cosh(ps)+\lambda n\sinh(ps)+d_1e^{3\lambda ps},n\cosh(ps)+\lambda m\sinh(ps)+d_1e^{3\lambda ps},\\ \frac{1}{2}\rho e^{\lambda ps},0)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&\cos(p\theta)&\sin(p\theta)\\0&0&\sin(p\theta)&-\cos(p\theta)\end{bmatrix}$$

i stoga α leži cela u vremenskoj hiperravni prostora E_1^4, što je kontradikcija. □

Pošto je kriva α tipa 2 sadržana u najviše 4 dimenzionom potprostoru prostora E_1^n, sledi da ako α leži cela u prostoru E_1^n, tada je $n\leq 5$. Prema tome, razlikujemo slučajeve kada α leži cela u prostornoj, vremenskoj ili svetlosnoj hiperravni prostora E_1^5. Slučaj kada α leži cela u vremenskoj hiperravni prostora E_1^5 ekvivalentan je slučaju kada α leži cela u prostoru E_1^4, što je razmatrano u teoremama 3.1 and 3.2. Prema tome, sada ćemo razmotriti preostala dva slučaja, tj. klasifikovaćemo sve krive tipa 2 koje leže cele u prostornoj ili svetlosnoj hiperravni prostora E_1^5.

Napomena 3.2. Kriva oblika (1) iz teoreme 3.1 i kriva oblika (8) iz teoreme 3.2 leže cele u prostornoj hiperravni prostora E_1^4, pa su izometrične sa krivama dobijenim klasifikacijom krivih tipa 2 u Euklidskom prostoru E^3 u radu [DPVV].

Sledećom teoremom kompletira se klasifikacija krivih tipa 2 u prostorima Minkovskog E_1^n.

Teorema 3.3 ([Š]). *Neka je $\alpha(s)$ prostorna ili vremenska kriva jedinične brzine sa obe sopstvene vrednosti Laplasovog operatora različite od nule, koja leži cela u prostoru E_1^5 i ne leži u njegovoj vremenskoj hiperravni. Tada je do na izometrije prostora E_1^5, α kriva tipa 2 ako i samo ako je α deo jedne od sledećih krivih:*

$$\begin{aligned}
(1)\quad & \alpha(s) = (0, m\cos(ps), m\sin(ps), n\sin(ts), n\cos(ts)), \quad p^2m^2 + t^2n^2 = 1, \\
& p, t \in N, \quad t \neq 3p, \quad m, n \in R_0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)\quad & \alpha(s) = (0, m\sin(ps), r\cos(p(s-\theta)), \tfrac{r^2}{12n}\cos(p(2\theta+s)) - \tfrac{m^2}{12n}\cos(ps) \\
& \qquad +n\cos(3ps), \tfrac{r^2}{12n}\sin(p(2\theta+s)) - \tfrac{m^2}{12n}\sin(ps) + n\sin(3ps)), \\
& p^2(\tfrac{r^2+m^2}{2} + (\tfrac{1}{12n})^2((r^2-m^2)^2 + 4r^2m^2\sin^2(p\theta)) + 9n^2) = 1, \quad p \in N, \\
& \theta \in R, \quad r, m, n \in R_0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3)\quad & \alpha(s) = (m\sin(p(s+\theta)), m\sin(p(s+\theta)), r\cos(ps), \tfrac{r^2}{12n}\cos(ps) + n\cos(3ps), \\
& \qquad \tfrac{r^2}{12n}\sin(ps) + n\sin(3ps)), \\
& p^2(\tfrac{r^2}{2} + (\tfrac{r^2}{12n})^2 + 9n^2) = 1, \quad p \in N, \quad \theta \in R, \quad r, m, n \in R_0.
\end{aligned}$$

Dokaz. Pretpostavimo da kriva $\alpha(s)$ zadovoljava pretpostavke teoreme i neka je α kriva tipa 2. Tada dokaz teoreme 3.2 implicira da su podslučajevi (b.1.1) i (b.2.1) sada jedini mogući slučajevi. S obzirom na kauzalni karakter vektora b, c, d, e, lako se dokazuje da se u svim ostalim podslučajevima dobija kontradikcija. U nastavku, razmotrićemo posebno podslučajeve (b.1.1) i (b.2.1).

(b.1.1) $g(e,e) = g(d,d) > 0$. Ako je $g(b,b) = g(c,c) > 0$, tada su b, c, d, e medjusobno ortogonalni prostorni vektori, pa možemo uzeti da je $b = (0, b_2, 0, 0, 0)$, $c = (0, 0, b_2, 0, 0)$, $d = (0, 0, 0, d_4, 0)$, $e = (0, 0, 0, 0, d_4)$, $b_2 \neq 0$, $d_4 \neq 0$. Tada je α

oblika

$$\alpha(s) = (0, b_2\cos(ps), b_2\sin(ps), d_4\cos(ts), d_4\sin(ts)),$$

pri čemu jednačina (1) postaje $p^2b_2^2+t^2d_4^2=1$. Do na izometrije prostora E_1^5, α je prostorna kriva koja leži cela u prostornoj hiperravni prostora E_1^5, čime se dobija oblik (1).

$(b.2.1)$ $g(c,c)=g(d,d)>0$. Neka je $d=(0,0,0,d_4,0)$, $c=(0,0,0,0,d_4)$, $d_4\neq 0$. Štaviše, vektori b i c leže u prostornoj ili svetlosnoj hiperravni prostora E_1^5. Ako b i c leže u prostornoj hiperravni, tada su oni prostorni vektori. Neka je $b=m_1f+m_2d+m_3e$, $c=n_1h+n_2f+n_3d+n_4e$, pri čemu je $f=(0,0,d_4,0,0)$, $h=(0,d_4,0,0,0)$, $m_1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3,n_4\in R_0$. Sledi da je $b=(0,0,b_3,b_4,b_5)$, $c=(0,c_2,c_3,c_4,c_5)$. Dalje, jednačine (6) i (7) daju $c=(0,c_2,c_3,-b_5,b_4)$, a iz jednačina (2) i (4) nalazimo $b_4=(1/12d_4)(b_3^2-c_2^2-c_3^2)$, $b_5=b_3c_3/(6d_4)$. Neka je $b_3=\rho\cos(p\theta)$, $c_3=\rho\sin(p\theta)$, $\rho\in R_0$, $\theta\in R$. Tada jednačina krive α glasi

$$\begin{aligned}\alpha(s) = (0, c_2\sin(ps), \rho\cos(p(s-\theta)), &\tfrac{\rho^2}{12d_4}\cos(p(2\theta+s)) - \tfrac{c_2^2}{12d_4}\cos(ps)\\ &+ d_4\cos(3ps), \tfrac{\rho^2}{12d_4}\sin(p(2\theta+s)) - \tfrac{c_2^2}{12d_4}\sin(ps) + d_4\sin(3ps)),\end{aligned}$$

pri čemu jednačina (1) postaje $p^2(\frac{\rho^2+c_2^2}{2}+\frac{1}{(12d_4)^2}((\rho^2-c_2^2)^2+4\rho^2c_2^2\sin^2(p\theta))+9n^2)=1$. Do na izometrije prostora E_1^5, α je prostorna kriva koja leži cela u prostornoj hiperravni prostora E_1^5, čime se dobija oblik (2). Konačno, ako b i c leže u svetlosnoj hiperravni prostora E_1^5, neka je $b=m_1f+m_2d+m_3e$, $c=n_1h+n_2f+n_3d+n_4e$, pri čemu je $f=(0,0,d_4,0,0)$, $h=(d_4,d_4,0,0,0)$, $m_1,m_2,m_3,n_1,n_2,n_3,n_4\in R_0$. Sledi da je $b=(0,0,b_3,b_4,b_5)$, $c=(c_1,c_1,c_3,c_4,c_5)$. Štaviše, jednačine (6) i (7) daju $c=(c_1,c_1,c_3,-b_5,b_4)$, a iz jednačina (2) i (4) sledi da je $b_4=(1/12d_4)(b_3^2-c_3^2)$, $b_5=b_3c_3/(6d_4)$. Neka je $b_3=\rho\cos(p\theta)$, $c_3=\rho\sin(p\theta)$, $\rho\in R_0$, $\theta\in R$. Prema tome, kriva α je oblika

$$\begin{aligned}\alpha(s) = (c_1\sin(ps), c_1\sin(ps), \rho\cos(p(s-\theta)), \tfrac{\rho^2}{12d_4}\cos(p(2\theta+s)) + d_4\cos(3ps),\\ \tfrac{\rho^2}{12d_4}\sin(p(2\theta+s)) + d_4\sin(3ps)).\end{aligned}$$

Stavljajući $u=s-\theta$, dobija se da je

$$\begin{aligned}\alpha(u) = (c_1\sin(p(u+\theta)), c_1\sin(p(u+\theta)), \rho\cos(pu), \tfrac{\rho^2}{12d_4}\cos(pu) + d_4\cos(3pu),\\ \tfrac{\rho^2}{12d_4}\sin(pu) + d_4\sin(3pu))\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&\cos(3p\theta)&\sin(3p\theta)\\0&0&0&-\sin(3p\theta)&\cos(3p\theta)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

pri čemu jednačina (1) glasi $p^2(\rho^2/2+(\rho^2/12n)^2+9n^2)=1$. Dakle, α je prostorna kriva koja leži cela u svetlosnoj hiperravni prostora E_1^5, čime se dobija oblik (3) i kompletira dokaz teoreme. □

Napomena 3.3. Krive oblika (1) i (2) iz teoreme 3.3 leže cele u prostornoj hiperravni prostora E_1^5, pa su stoga izometrične sa krivama dobijenim klasifikacijom krivih tipa 2 u Euklidskom prostoru E^4 u radu [DPVV].

GLAVA 4

W-KRIVE U PROSTOR–VREMENU MINKOVSKOG

1. Poznato je da se svakoj krivoj $\alpha : I \to E^n$ jedinične brzine u Euklidskom prostoru E^n čiji su uzastopni izvodi $\alpha'(s), \alpha''(s), \dots, \alpha^{(n)}(s)$ linearno nezavisni vektori, može pridružiti ortonormirano polje repera $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_n\}$ i $n-1$ funkcija $k_1, \dots, k_{n-1} : I \to R$ koje se nazivaju Freneovim krivinama, tako da važe sledeće Freneove formule ([G]):

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ \vdots \\ V_{n-1}' \\ V_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{n-1} \\ V_n \end{bmatrix}.$$

Po definiciji, kriva $\alpha : I \to E^n$ u prostoru E^n se naziva *W-krivom (ili helisom)*, ako su sve njene Freneove krivine $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ konstantne. Posebno, W kriva $\alpha(t)$ je ranga r, ako su za svako $t \in I$ izvodi $\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(r)}(t)$ linearno nezavisni vektori, a izvodi $\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(r+1)}(t)$ su linearno zavisni vektori.

Parametrizacija proizvoljne W-krive jedinične brzine u prostoru E^{2k+1} data je sa

$$\alpha(s) = \alpha_0 + ase_0 + \sum_{i=1}^{k} r_i\big(\cos(a_i s)e_{2i-1} + \sin(a_i s)e_{2i}\big), \tag{1.1}$$

pri čemu $a \in R$, $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ su pozitivni realni brojevi koji zadovoljavaju jednačinu $a^2 + \sum_{i=1}^{k}(r_i a_i)^2 = 1$ i $\{e_0, e_1, \dots, e_{2k}\}$ je ortonormirana baza prostora E^{2k+1}. Ako je $a \neq 0$ tada kriva α iz relacije (1.1) leži cela u prostoru E^{2k+1}. U suprotnom, α leži cela u prostoru E^{2k}, kao i na hipersferi u tom prostoru. Štaviše, W kriva je zatvorena ako i samo ako je $a = 0$ i $a_i = p_i/r, p_i \in N, r \in R_0^+$. Do na izometrije prostora E^{2k}, zatvorena W kriva dužine $2\pi r$ u prostoru E^{2k} ima prirodnu parametrizaciju oblika:

$$\alpha(s) = \frac{r}{\sqrt{k}}\Big(\frac{1}{t_1}\cos\Big(\frac{t_1 s}{r}\Big), \frac{1}{t_1}\sin\Big(\frac{t_1 s}{r}\Big), \dots, \frac{1}{t_k}\cos\Big(\frac{t_k s}{r}\Big), \frac{1}{t_k}\sin\Big(\frac{t_k s}{r}\Big)\Big), \tag{1.2}$$

pri čemu su $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ pozitivni celi brojevi. W krive u Euklidskom prostoru E^n su detaljno proučene. Najjednostavniji primeri su krugovi, kao zatvorene ravne W krive i helise, kao otvorene prostorne W-krive. Osim toga, W krive su primeri krivih konačnog tipa. Neke od važnijih teorema u kojima je data veza izmedju W-krivih i krivih konačnog tipa u Euklidskom prostoru, su sledeće.

Teorema 1.A ([CDV]). *Neka je $\alpha : S^1(r) \to E^m$ zatvorena W-kriva koja leži cela u prostoru E^m. Tada je m paran broj i α je sferna kriva tipa $(m/2)$ u prostoru E^m.*

Teorema 1.B ([CDV]). *Neka je $\alpha : S^1(r) \to E^m$ kriva tipa 2 i reda $[p, q]$. Tada ili je $q = 3p$, ili je α W-kriva ranga 4.*

Teorema 1.C ([CDV]). *Neka je $\alpha : S^1(r) \to E^4$ izometrična imerzija kruga $S^1(r)$ u prostor E^4, tako da $\alpha(S^1(r))$ nije sadržana u bilo kojoj 2 ravni. Tada je α W kriva ako i samo ako je α sferna kriva tipa 2.*

Prostorne, vremenske i nul W-krive u 3-dimenzionom prostoru Minkovskog E^3_1, kompletno su klasifikovane u radu [W]. Za prostorne krive, dobijene su sledeće teoreme.

Teorema 1.D ([W]). *Prostorna kriva α u prostoru E^3_1 ima prvu krivinu $k_1 \equiv 0$ ako i samo ako je deo prave linije.*

Teorema 1.E ([W]). *Prostorna kriva α sa $g(\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) \neq 0$ u prostoru E^3_1 ima drugu krivinu $k_2 \equiv 0$ ako i samo ako je ravna kriva.*

Teorema 1.F ([W]). *Za prostornu krivu α sa $g(\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) > 0$ u prostoru E^3_1 imamo da je:*

(1) $k_2 = 0$ i $k_1 = \text{constant} > 0$ ako i samo ako je α deo kruga;

(2) $k_1 = \text{constant} > 0$, $k_2 = \text{constant} \neq 0$ i $|k_2| > k_1$ ako i samo ako je α deo prostorne hiperboličke helise sa jednačinom

$$\alpha(s) = \frac{1}{K}(k_1 \sinh(\sqrt{K}s), \sqrt{k_2^2 K}s, k_1 \cosh(\sqrt{K}s)),$$

pri čemu je $K = k_2^2 - k_1^2$;

(3) $k_1 = \text{constant} > 0$, $k_2 = \text{constant} \neq 0$ i $|k_2| < k_1$ *ako i samo ako je α deo prostorne kružne helise sa jednačinom*

$$\alpha(s) = \frac{1}{K}(\sqrt{k_2^2 K}s, k_1 \cos(\sqrt{K}s), k_1 \sin(\sqrt{K}s)),$$

pri čemu je $K = k_1^2 - k_2^2$;

(4) $k_1 = \text{constant} > 0$, $k_2 = \text{constant} \neq 0$ i $|k_2| = k_1$ *ako i samo ako se α može parametrizovati sa*

$$\alpha(s) = \frac{1}{6}(k_1 k_2 s^3, -k_1^2 s^3 + 6s, 3k_1 s^2).$$

Teorema 1.G ([W]). *Za prostornu krivu α sa $g(\ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}) < 0$ u prostoru E_1^3 imamo da je:*

(1) $k_2 = 0$ *i* $k_1 = \text{constant} > 0$ *ako i samo ako je α deo ortogonalne hiperbole;*

(2) $k_1 = \text{constant} > 0$ *i* $k_2 = \text{constant} \neq 0$ *ako i samo ako je α deo prostorne hiperboličke helise sa jednačinom*

$$\alpha(s) = \frac{1}{K}(k_1 \cosh(\sqrt{K}s), \sqrt{k_2^2 K}s, k_1 \sinh(\sqrt{K}s)),$$

pri čemu je $K = k_1^2 + k_2^2$.

Teorema 1.H ([W]) *Sve pseudo nul prostorne krive u prostoru E_1^3 sa konstantnim krivinama mogu se klasifikovati sa:*

(1) $k_1 = 0$ *ako i samo ako je α deo prostorne prave linije;*

(2) $k_1 = 1$ *i* $k_2 = 0$ *ako i samo ako je α deo ravne krive sa parametrizacijom*

$$\alpha(s) = \left(\frac{s^2}{2}, s, \frac{s^2}{2}\right);$$

(3) $k_1 = 1$ *i* $k_2 = \text{constant} \neq 0$ *ako i samo ako je α deo ravne krive sa parametrizacijom*

$$\alpha(s) = \frac{1}{k_2^2}(\cosh(k_2 s) + \sinh(k_2 s), k_2^2 s, \cosh(k_2 s) + \sinh(k_2 s)).$$

Vremenske i nul krive sa konstantnim krivinama u prostoru E_1^3 okarakterisane su sledećim dvema teoremama.

Teorema 1.I ([W]) *Sve vremenske krive sa konstantnim krivinama u prostoru E_1^3 mogu se klasifikovati sa:*

(1) $k_1 = 0$ *ako i samo ako je* α *deo vremenske prave linije;*

(2) $k_2 = 0$ *ako i samo ako je* α *ravna vremenska kriva;*

(3) $k_2 = 0$ *i* $k_1 = \text{constant} > 0$ *ako i samo ako je* α *deo ortogonalne hiperbole;*

(4) $k_1 = \text{constant} > 0$, $k_2 = \text{constant} \neq 0$ *i* $|k_2| > k_1$ *ako i samo ako je* α *deo vremenske kružne helise*

$$\alpha(s) = \frac{1}{K}(\sqrt{k_2^2 K}s, k_1 \cos(\sqrt{K}s), k_1 \sin(\sqrt{K}s)),$$

pri čemu je $K = k_2^2 - k_1^2$;

(5) $k_1 = \text{constant} > 0$, $k_2 = \text{constant} \neq 0$ *i* $|k_2| < k_1$ *ako i samo ako je* α *deo vremenske hiperboličke helise*

$$\alpha(s) = \frac{1}{K}(k_1 \sinh(\sqrt{K}s), \sqrt{k_2^2 K}s, k_1 \cosh(\sqrt{K}s))$$

pri čemu je $K = k_1^2 - k_2^2$;

(6) $k_1 = \text{constant} > 0$, $k_2 = \text{constant} \neq 0$ *i* $|k_2| = k_1$ *ako i samo ako se* α *može parametrizovati sa*

$$\alpha(s) = \frac{1}{6}(k_1^2 s^3 + 6s, 3k_1 s^2, k_1 k_2 s^3).$$

Teorema 1.J ([W]) *Sve nul krive sa konstantnim krivinama u prostoru* E_1^3 *mogu se klasifikovati sa:*

(1) $k_1 = 0$ *ako i samo ako je* α *deo prave nul linije;*

(2) $k_1 = 1$ *i* $k_2 = 0$ *ako i samo ako je* α *deo nul krive*

$$\alpha(s) = \frac{1}{6\sqrt{2}}(6s + s^3, 3\sqrt{2}s^2, 6s - s^3);$$

(3) $k_1 = 1$ *i* $k_2 > 0$ *ako i samo ako je* α *deo nul kružne helise*

$$\alpha(s) = \frac{1}{K^2}(Ks, \cos(Ks), \sin(Ks)),$$

pri čemu je $K = \sqrt{2k_2}$;

(4) $k_1 = 1$ *i* $k_2 < 0$ *ako i samo ako je* α *deo nul hiperboličke helise*

$$\alpha(s) = \frac{1}{K^2}(\sinh(Ks), Ks, \cosh(Ks))$$

pri čemu je $K = \sqrt{-2k_2}$.

2. U ovoj glavi klasifikovane su prostorne W krive u prostor vremenu Minkovskog E_1^4, čime je kompletirana klasifikacija W krivih u tom prostoru. U radovima [Bo] i [W] dobijena je parametrizacija nul helisa (tj. nul W-krivih) u prostor vremenu Minkovskog. Osim toga, vremenske W-krive u istom prostoru proučavane su u radu [Sy], gde su one klasifikovane u tipove i podtipove u zavisnosti od toga da li je neka od njihovih triju krivina jednaka nuli.

U nastavku, najpre ćemo dati neke opšte karakteristike prostornih krivih u prostor vremenu Minkovskog E_1^4. S tim u vezi, dokazaćemo teoremu koja je analogna teoremi 1.E.

Teorema 2.1 ([PŠ]). *Neka je α prostorna kriva jedinične brzine sa krivinom $k_1 > 0$ u prostoru E_1^4. Tada α ima $k_2 \equiv 0$ ako i samo ako α leži cela u 2-dimenzionom potprostoru prostora E_1^4.*

Dokaz. Pretpostavimo da kriva $\alpha(s)$ ima $k_2 \equiv 0$. Tada pomoću Freneovih formula nalazimo da je $\ddot{\alpha} = \dot{T} = k_1 N$, $\dot{N} = \pm k_1 T$. S druge strane, imamo da je $\dddot{\alpha} = \dot{k}_1 N + k_1 \dot{N} = \dot{k}_1 \ddot{\alpha}/(k_1) \pm k_1^2 \dot{\alpha}$. Koristeći Maklorenov razvoj krive α,

$$\alpha(s) = \alpha(0) + \dot{\alpha}(0)s + \ddot{\alpha}(0)\frac{s^2}{2!} + \dddot{\alpha}(0)\frac{s^3}{3!} + \cdots, \tag{2.1}$$

sledi da kriva α leži cela u 2-dimenzionom potprostoru prostora E_1^4, koji je razapet vektorima $\{\dot{\alpha}(0), \ddot{\alpha}(0)\}$.

Obratno, ako α leži cela u 2-dimenzionom potprostoru prostora E_1^4, tada ona leži cela u 2-dimenzionom potprostoru prostora E_1^3, pa na osnovu teoreme 1.E sledi da je $k_2 = 0$. □

U sledećim teoremama 2.2, 2.3, 2.4 i 2.5 data je karakterizacija prostornih krivih s obzirom na vrednost njihove treće krivine k_3.

Teorema 2.2 ([PŠ]). *Neka je α prostorna kriva jedinične brzine sa prostornom glavnom normalom N, prostornom binormalom B_1 i sa krivinama $k_1 > 0$, $k_2 \neq 0$ u prostoru E_1^4. Tada α ima $k_3 \equiv 0$ ako i samo ako α leži cela u prostornoj hiperravni prostora E_1^4.*

Dokaz. Ako $\alpha(s)$ ima $k_3 \equiv 0$, tada pomoću Freneovih jednačina dobijamo $\dot{\alpha} = T$, $\ddot{\alpha} = k_1 N$, $\dddot{\alpha} = -k_1^2 T + \dot{k}_1 N + k_1 k_2 B_1$, $\ddddot{\alpha} = -3k_1\dot{k}_1 T + (\ddot{k}_1 - k_1^3 - k_1 k_2^2)N + (2\dot{k}_1 k_2 + k_1 \dot{k}_2)B_1$. Dalje, svi izvodi krive α višeg reda po s su linearne kombinacije vektora $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}$, pa koristeći Maklorenov razvoj (2.1) krive α, zaključujemo da kriva α leži cela u prostornoj hiperravni prostora E_1^4, koja je razapeta vektorima $\{\dot{\alpha}(0), \ddot{\alpha}(0), \dddot{\alpha}(0)\}$.

Obratno, pretpostavimo da α zadovoljava pretpostavke teoreme i leži cela u prostornoj hiperravni π prostora E_1^4. Tada postoje fiksni vektori $p, q \in E_1^4$, tako da α zadovoljava jednačinu hiperravni π koja je data sa $g(x(s)-p, q) = 0$, pri čemu je $q \in \pi^\perp$ vremenski vektor. Diferenciranjem poslednje jednačine po s dobija se $g(\dot\alpha, q) = g(\ddot\alpha, q) = g(\dddot\alpha, q) = 0$. Prema tome, $\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha \in \pi$. Pošto je $T = \dot\alpha$, $N = \ddot\alpha/||\ddot\alpha||$, sledi da je $g(T, q) = g(N, q) = 0$. Dalje, diferenciranjem jednačine $g(N, q) = 0$ po s nalazimo da je $g(\dot N, q) = 0$. Pomoću Freneovih jednačina nalazimo da je $B_1 = (\dot N + k_1 T)/k_2$ i stoga je $g(B_1, q) = 0$. S obzirom da je $B_2(s)$ jedinstveni vremenski jedinični vektor ortogonalan na 3-dimenzioni potprostor $\{T, N, B_1\}$, sledi da je $B_2(s) = q/||q||$. Stoga je $\dot B_2(s) = 0$ za svako s i prema tome je $k_3 \equiv 0$. $\square$

Teorema 2.3 ([PŠ]). *Neka je $\alpha(s)$ prostorna kriva jedinične brzine sa prostornom (vremenskom) glavnom normalom N, vremenskom (prostornom) binormalom B_1 i sa krivinama $k_1 > 0, k_2 \neq 0$ u prostoru E_1^4. Tada α ima $k_3 \equiv 0$ ako i samo α leži cela u vremenskoj hiperravni prostora E_1^4.*

Dokaz. Dokaz ove teoreme analogan je dokazu prethodne teoreme 2.2. Pretpostavimo najpre da kriva α ima $k_3 \equiv 0$. Tada pomoću Freneovih jednačina dobijamo da je $\dot\alpha = T$, $\ddot\alpha = k_1 N$, $\dddot\alpha = \pm k_1^2 T + \dot k_1 N + k_1 k_2 B_1$, $\ddddot\alpha = \pm 3k_1 \dot k_1 T + (\ddot k_1 + k_1 k_2^2 \pm k_1^3) N + (2\dot k_1 k_2 + k_1 \dot k_2) B_1$. Štaviše, svi izvodi od α višeg reda po s su linearne kombinacije vektora $\dot\alpha$, $\ddot\alpha$, $\dddot\alpha$, pa koristeći Maklorenov razvoj (2.1), zaključujemo da α leži cela u vremenskoj hiperravni prostora E_1^4, razapetoj vektorima $\{\dot\alpha(0), \ddot\alpha(0), \dddot\alpha(0)\}$.

Obratno, pretpostavimo da α leži cela u vremenskoj hiperravni π prostora E_1^4. Tada postoje konstantni vektori $p, q \in E_1^4$, tako da α zadovoljava jednačinu hiperravni π oblika $g(x(s) - p, q) = 0$, pri čemu je $q \in \pi^\perp$ prostorni vektor. Diferenciranjem poslednje jednačine po s, nalazimo da je $g(\dot\alpha, q) = g(\ddot\alpha, q) = g(\dddot\alpha, q) = 0$. Prema tome, vektori $\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha \in \pi$. S obzirom da je $T = \dot\alpha$, $N = \ddot\alpha/||\ddot\alpha||$, sledi da je $g(T, q) = g(N, q) = 0$. Osim toga, diferenciranjem jednačine $g(N, q) = 0$ po s dobijamo da je $g(\dot N, q) = 0$. Iz Freneovih jednačina sledi da je $B_1 = (\dot N \pm k_1 T)/k_2$, pa je $g(B_1, q) = 0$. Pošto je $B_2(s)$ jedinstveni prostorni jedinični vektor ortogonalan na 3–dimenzioni potprostor $\{T, N, B_1\}$, sledi da je $B_2 = q/||q||$. Konačno, $\dot B_2 = 0$ za svako s, pa je $k_3 \equiv 0$.

Dalje, prisetimo se da se prostorna kriva sa prostornom glavnom normalom N i nul binormalom B_1 naziva *parcijalno nul prostornom krivom* ([W]).

Teorema 2.4 ([PŠ]). *Parcijalno nul prostorna kriva α jedinične brzine sa krivinama $k_1 > 0, k_2 \neq 0$, leži cela u svetlosnoj hiperravni prostora E_1^4 i ima*

$k_3 \equiv 0$.

Dokaz. Koristeći Freneove jednačine, nalazimo da je $\dot{\alpha} = T, \ddot{\alpha} = k_1 N, \dddot{\alpha} = -k_1 T + \dot{k}_1 N + k_1 k_2 B_1, \ddddot{\alpha} = -3k_1 \dot{k}_1 T + (\ddot{k}_1 - k_1^3)N + (2\dot{k}_1 k_1 + k_1 \dot{k}_2 + k_1 k_2 k_3)B_1$. Stoga su $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}$ linearno nezavisni vektori, dok su $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}, \ddddot{\alpha}$ linearno zavisni vektori. Štaviše, svi izvodi višeg reda krive α po s su linearne kombinacije vektora $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}$, pa koristeći Maklorenov razvoj (3.1) sledi da kriva α leži cela u svetlosnoj hiperravni π prostora E_1^4, koja je razapeta vektorima $\{\dot{\alpha}(0), \ddot{\alpha}(0), \dddot{\alpha}(0)\}$. Prema tome, možemo pretpostaviti da postoje fiksni vektori $p, q \in E_1^4$, tako da kriva α zadovoljava jednačinu hiperravni π koja je data sa $g(x(s) - p, q) = 0$, pri čemu je $q \in \pi^{\perp}$ nul vektor. Pošto je q nul vektor ortogonalan na B_1, sledi da je $q = \lambda B_1, \lambda \in R_0$. Tada je $\dot{q} = \lambda k_3 B_1 = 0$ i stoga je $k_3 \equiv 0$. $\square$

Dalje, prisetimo se da se prostorna kriva sa nul glavnom normalom naziva *pseudo nul prostornom krivom* ([W]). Takve krive okarakterisane su sledećom teoremom.

Teorema 2.5 ([PŠ]). *Pseudo nul prostorna kriva $\alpha(s)$ jedinične brzine sa krivinama $k_1 > 0, k_2 \neq 0$ leži cela u prostoru E_1^4.*

Dokaz. Pretpostavimo da kriva $\alpha(s)$ zadovoljava pretpostavke teoreme. Tada Freneove formule za krivu α impliciraju jednačine $\dot{\alpha} = T, \ddot{\alpha} = N, \dddot{\alpha} = k_2 B_1, \ddddot{\alpha} = k_2 k_3 N + \dot{k}_2 B_1 - k_2^2 B_2$. Prema tome, vektori $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}, \ddddot{\alpha}$ su linearno nezavisni. S druge strane, svi izvodi krive α višeg reda po s mogu se izraziti kao linearne kombinacije vektora $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dddot{\alpha}, \ddddot{\alpha}$. Stoga koristeći Maklorenov razvoj (3.1) krive α, zaključujemo da α leži cela u prostoru E_1^4, koji je razapet vektorima $\{\dot{\alpha}(0), \ddot{\alpha}(0), \dddot{\alpha}(0), \ddddot{\alpha}(0)\}$. $\square$

Napomena 2.1. Iz dokaza teoreme 2.5 sledi da pseudo nul prostorna kriva koja leži cela u prostor-vremenu Minkovskog, može imati $k_3 \equiv 0$ ili $k_3 \neq 0$.

Teorema 2.6 ([PŠ]). *Neka je $\alpha(s)$ prostorna kriva jedinične brzine sa prostornom glavnom normalom N i prostornom binormalom B_1 u prostoru E_1^4. Tada $\alpha(s)$ ima:*

(i) $k_1 = c_1, k_2 = c_2, k_3 = 0, c_1, c_2 \in R_0$ ako i samo ako α ima prirodnu parametrizaciju oblika

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda^2}(0, c_2 \lambda s, c_1 \sin(\lambda s), c_1 \cos(\lambda s)), \quad \lambda^2 = c_1^2 + c_2^2; \tag{2.2}$$

(ii) $k_1 = c_1, k_2 = c_2, k_3 = c_3, c_1, c_2, c_3 \in R_0$ ako i samo ako se α može parametri-

zovati pomoću

$$\alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1}(V_1 \sinh(\lambda_1 s) + V_2 \cosh(\lambda_1 s)) + \frac{1}{\lambda_2}(V_3 \sin(\lambda_2 s) - V_4 \cos(\lambda_2 s)) \tag{2.3}$$

pri čemu je $\lambda_1^2 = \frac{-K+\sqrt{K^2+4c_1^2c_3^2}}{2}$, $\lambda_2^2 = \frac{K+\sqrt{K^2+4c_1^2c_3^2}}{2}$, $K = c_1^2 + c_2^2 - c_3^2$ *i gde su* V_1, V_2, V_3, V_4 *medjusobno ortogonalni vektori koji zadovoljavaju jednačine* $g(V_1, V_1) = -g(V_2, V_2) = (\lambda_2^2 - c_1^2)/(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$, $g(V_3, V_3) = g(V_4, V_4) = (\lambda_1^2 + c_1^2)/(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$.

Dokaz. (i) Ako α ima konstantne krivine $k_1 = c_1$, $k_2 = c_2$, $k_3 = 0$, tada koristeći Freneove jednačine nalazimo da je $\dddot{T} + (c_1^2 + c_2^2)\dot{T} = 0$. Rešavanjem ove jednačine, lako dobijamo da je $T = A + B\cos(\sqrt{c_1^2 + c_2^2}s) + C\sin(\sqrt{c_1^2 + c_2^2}s)$, pri čemu su A, B, $C \in E_1^4$ konstantni vektori. Dalje, jednačina $g(T,T) = 1$ implicira da je $g(B,B) = g(C,C)$, $g(A,B) = g(A,C) = g(B,C) = 0$, $g(A,A) = 1 - g(B,B)$. S druge strane, jednačina $g(\dot{T},\dot{T}) = c_1^2$ daje $g(B,B) = \frac{c_1^2}{c_1^2+c_2^2}$. Prema tome, možemo uzeti da je $A = (0, \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}, 0, 0)$, $B = (0, 0, \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}, 0)$, $C = (0, 0, 0, \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2}})$. Prema tome, do na izometrije prostora E_1^4, kriva α je oblika (2.2).

Obratno, ako je α oblika (2.2), tada ona leži cela u prostornoj hiperravni prostora E_1^4. Tada teorema 2.2 implicira da je $k_3 \equiv 0$. Dalje, iz Freneovih jednačina dobijamo da je $g(\dot{T},\dot{T}) = k_1^2$, $g(\dot{N},\dot{N}) = k_1^2 + k_2^2$. Pošto je $\dot{T} = \ddot{\alpha}$ i $N = \ddot{\alpha}/||\ddot{\alpha}||$, nalazimo da je $g(\dot{T},\dot{T}) = c_1^2$, $g(\dot{N},\dot{N}) = c_1^2 + c_2^2$. Stoga je $k_1 = c_1$ i $k_2 = c_2$.

(ii) Najpre pretpostavimo da α ima konstantne krivine različite od nule. Tada pomoću Freneovih formula dobijamo jednačinu $\overset{\cdots}{T} + (c_1^2 + c_2^2 - c_3^2)\ddot{T} - c_1^2c_3^2 T = 0$. Rešavanjem prethodne jednačine nalazimo da je

$$T = V_1 \cosh(\lambda_1 s) + V_2 \sinh(\lambda_1 s) + V_3 \cos(\lambda_2 s) + V_4 \sin(\lambda_2 s) \tag{2.4}$$

pri čemu su $V_1, V_2, V_3, V_4 \in E_1^4$ konstantni vektori, $\lambda_1^2 = (-K + \sqrt{K^2 + 4c_1^2c_3^2})/2$, $\lambda_2^2 = (K + \sqrt{K^2 + 4c_1^2c_3^2})/2$, $K = c_1^2 + c_2^2 - c_3^2$. Dalje, jednačina $g(T,T) = 1$ implicira da je $g(V_1, V_1) = -g(V_2, V_2)$, $g(V_3, V_3) = g(V_4, V_4)$, $g(V_1, V_1) + g(V_3, V_3) = 1$, $g(V_i, V_j) = 0$ za $i \neq j$ $(i, j \in \{1, 2, 3, 4\})$. Konačno, koristeći jednačinu $g(\dot{T},\dot{T}) = c_1^2$, dobijamo da je $g(V_3, V_3) = \frac{\lambda_1^2+c_1^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$. Prema tome, do na izometrije prostora E_1^4, α je oblika (2.3).

Obratno, ako se α ima parametrizaciju oblika (2.3), tada ona ima prostornu glavnu normalu N i prostornu binormalu B_1, pa Freneove formule impliciraju da je $g(\dot{T},\dot{T}) = k_1^2$, $g(\dot{N},\dot{N}) = k_1^2 + k_2^2$. Pošto je $\dot{T} = \ddot{\alpha}$ i $N = \ddot{\alpha}/||\ddot{\alpha}||$, dobijamo da je $g(\dot{T},\dot{T}) = c_1^2$, $g(\dot{N},\dot{N}) = c_1^2 + c_2^2$. Stoga je $k_1 = c_1$ i $k_2 = c_2$. Konačno, pomoću Freneovih formula imamo da je $g(\dot{B}_1, \dot{B}_1) = k_2^2 - k_3^2$, a s druge strane pošto je $\dot{B}_1 = \frac{1}{c_2}(\ddot{N} + c_1^2 N)$, nalazimo da je $g(\dot{B}_1, \dot{B}_1) = c_2^2 - c_3^2$. Prema tome, $k_3 = c_3$. $\square$

Napomena 2.2. Kriva (2.2) leži na kružnom cilindru u prostoru E_1^4 sa jednačinom $x_3^2+x_4^2=c_1^2/(c_1^2+c_2^2)^2$. Kriva (2.3) leži na hiperkvadrici u prostoru E_1^4. Preciznije, ako je $c_3^2>c_2^2$, $c_3^2<c_2^2$, ili $c_3^2=c_2^2$, tada α leži respektivno na pseudosferi sa jednačinom $-x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(c_3^2-c_2^2)/c_1^2c_3^2$, pseudohiperboličkom prostoru sa jednačinom $-x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(c_3^2-c_2^2)/c_1^2c_3^2$, ili svetlosnom konusu sa jednačinom $-x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0$.

Na osnovu teoreme 2.3, sve prostorne W-krive sa prostornom (vremenskom) glavnom normalom N i vremenskom (prostornom) binormalom B_1, koje imaju $k_3\equiv 0$ leže cele u prostoru E_1^3 i stoga je njihova klasifikacija data u radu [W]. U sledećim dvema teoremama, mi razmatramo preostale slučajeve kada je $k_3\neq 0$.

Teorema 2.7 ([PŠ]). *Neka je α prostorna kriva jedinične brzine sa prostornom glavnom normalom N i vremenskom binormalom B_1 u prostoru E_1^4. Tada α ima $k_1=c_1$, $k_2=c_2$, $k_3=c_3$, $c_1,c_2,c_3\in R_0$ ako i samo ako α ima parametrizaciju oblika*

$$(2.5)\qquad \alpha(s)=\frac{1}{\lambda_1}(V_1\sinh(\lambda_1 s)+V_2\cosh(\lambda_1 s))+\frac{1}{\lambda_2}(V_3\sin(\lambda_2 s)-V_4\cos(\lambda_2 s)),$$

pri čemu je $\lambda_1^2=(-K+\sqrt{K^2+4c_1^2c_3^2})/2$, $\lambda_2^2=(K+\sqrt{K^2+4c_1^2c_3^2})/2$, $K=c_1^2-c_2^2-c_3^2$ i gde su V_1,V_2,V_3,V_4 medjusobno ortogonalni vektori koji zadovoljavaju jednačine $g(V_1,V_1)=-g(V_2,V_2)=(\lambda_2^2-c_1^2)/(\lambda_1^2+\lambda_2^2)$, $g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)=(c_1^2+\lambda_1^2)/(\lambda_1^2+\lambda_2^2)$.

Dokaz. Prvo pretpostavimo da α ima konstantne krivine, različite od nule. Tada pomoću Freneovih formula dobijamo jednačinu $\dddot{T}+(c_1^2-c_2^2-c_3^2)\dot{T}-c_1^2c_3^2T=0$. Rešavanjem prethodne jednačine, nalazimo da je njeno rešenje T oblika (2.4), pri čemu su $V_1,V_2,V_3,V_4\in E_1^4$ konstantni vektori, $\lambda_1^2=(-K+\sqrt{K^2+4c_1^2c_3^2})/2$, $\lambda_2^2=(K+\sqrt{K^2+4c_1^2c_3^2})/2$, $K=c_1^2-c_2^2-c_3^2$. Štaviše, jednačina $g(T,T)=1$ implicira da je $g(V_1,V_1)=-g(V_2,V_2)$, $g(V_3,V_3)=g(V_4,V_4)$, $g(V_1,V_1)+g(V_3,V_3)=1$, $g(V_i,V_j)=0$ za $i\neq j$, $i,j\in\{1,2,3,4\}$. Osim toga, pomoću jednačine $g(\dot{T},\dot{T})=c_1^2$, imamo da je $g(V_3,V_3)=(\lambda_1^2+c_1^2)/(\lambda_1^2+\lambda_2^2)$. Prema tome, sledi da je da je do na izometrije prostora E_1^4, kriva α oblika (2.5).

Obratno, pretpostavimo da α ima parametarsku jednačinu oblika (2.5). Tada lako nalazimo da je $g(\ddot{\alpha},\ddot{\alpha})=c_1^2$, a iz Freneovih formula sledi da je $g(\dot{T},\dot{T})=g(\ddot{\alpha},\ddot{\alpha}=k_1^2$, pa je $k_1=c_1$. Osim toga, nalazimo da je $g(\dot{N},\dot{N})=c_1^2-c_2^2$, a iz Freneovih formula imamo da je $g(\dot{N},\dot{N})=k_1^2-k_2^2$. Dakle, $k_2=c_2$. Dalje, iz Freneovih jednačina sledi da je $g(\dot{B}_1,\dot{B}_1)=k_2^2+k_3^2$. S druge strane imamo da je $B_1=(\dot{N}+c_1T)/c_2$, pa je $g(\dot{B}_1,\dot{B}_1)=c_2^2+c_3^2$. Prema tome, $k_3=c_3$. $\square$

Napomena 2.3. Kriva (2.5) leži na pseudosferi sa jednačinom $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (c_2^2 + c_3^2)/(c_1^2 c_3^2)$.

Teorema 2.8 ([PŠ]). *Neka je α prostorna kriva jedinične brzine sa vremenskom glavnom normalom N u prostoru E_1^4. Tada α ima $k_1 = c_1$, $k_2 = c_2$, $k_3 = c_3$, $c_1, c_2, c_3 \in R_0$ ako i samo ako se α može parametrizovati u obliku*

$$(2.6) \quad \alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1}(V_1 \sinh(\lambda_1 s) + V_2 \cosh(\lambda_1 s)) + \frac{1}{\lambda_2}(V_3 \sin(\lambda_2 s) - V_4 \cos(\lambda_2 s)),$$

pri čemu je $\lambda_1^2 = (-K + \sqrt{K^2 + 4c_1^2 c_3^2})/2$, $\lambda_2^2 = (K + \sqrt{K^2 + 4c_1^2 c_3^2})/2$, $K = c_3^2 - c_1^2 - c_2^2$ i gde su V_1, V_2, V_3, V_4 medjusobno ortogonalni vektori koji zadovoljavaju jednačine $g(V_1, V_1) = -g(V_2, V_2) = (\lambda_2^2 + c_1^2)/(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$, $g(V_3, V_3) = g(V_4, V_4) = (\lambda_1^2 - c_1^2)/(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$.

Dokaz. Dokaz ove teoreme analogan je dokazu teorema 2.6 i 2.7. Pretpostavimo najpre da α ima konstantne krivine različite od nule. Tada se pomoću Frenceovih formula lako dobija jednačina $\dddot{T} + (c_3^2 - c_1^2 - c_2^2)\ddot{T} - c_1^2 c_3^2 T = 0$. Sledi da je njeno rešenje T oblika (2.4), pri čemu su $V_1, V_2, V_3, V_4 \in E_1^4$ konstantni vektori, $\lambda_1^2 = (-K + \sqrt{K^2 + 4c_1^2 c_3^2})/2$, $\lambda_2^2 = (K + \sqrt{K^2 + 4c_1^2 c_3^2})/2$, $K = c_3^2 - c_2^2 - c_1^2$. Dalje, iz jednačine $g(T, T) = 1$, dobijamo da je $g(V_1, V_1) = -g(V_2, V_2)$, $g(V_3, V_3) = g(V_4, V_4)$, $g(V_1, V_1) + g(V_3, V_3) = 1$, pri čemu su V_1, V_2, V_3, V_4 medjusobno ortogonalni vektori. Štaviše, koristećijednačinu $g(\dot{T}, \dot{T}) = -c_1^2$, sledi daje $g(V_3, V_3) = (\lambda_1^2 - c_1^2)/(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$. Dakle, do na izometrije prostora E_1^4, kriva α ima jednačinu (2.6).

Obratno, pretpostavimo da α ima parametrizaciju oblika (2.6). Tada pomoću Frenceovih formula nalazimo da je $g(\dot{T}, \dot{T}) = -k_1^2$, $g(\dot{N}, \dot{N}) = k_1^2 + k_2^2$. S druge strane, pomoću parametrizacije (2.6) dobijamo da je $g(\dot{T}, \dot{T}) = -c_1^2$, $g(\dot{N}, \dot{N}) = c_1^2 + c_2^2$. Stoga je $k_1 = c_1$, $k_2 = c_2$. Osim toga, iz Freneovih jednačina imamo da je $g(\dot{B}_1, \dot{B}_1) = -k_2^2 + k_3^2$. S obzirom da je $B_1 = (\ddot{N} - c_1^2 N)/c_2$, sledi da je $g(\dot{B}_1, \dot{B}_1) = -c_2^2 + c_3^2$ i stoga je $k_3 = c_3$. □

Napomena 2.4. Kriva (2.6) leži na hiperkvadrici u prostor–vremenu Minkovskog E_1^4. Ako je $c_2^2 > c_3^2$, $c_2^2 < c_3^2$, $c_2^2 = c_3^2$, tada α leži respektivno na pseudosferi sa jednačinom $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (c_2^2 - c_3^2)/c_1^2 c_3^2$, pseudohiperboličkom prostoru sa jednačinom $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (c_2^2 - c_3^2)/c_1^2 c_3^2$, ili ili svetlosnom konusu sa jednačinom $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$.

Na osnovu teoreme 2.4, parcijalno nul prostorna kriva α ima $k_3(s) = 0$ za svako s. U sledećoj teoremi, dajemo klasifikaciju svih parcijalno nul prostornih W krivih u prostoru E_1^4.

Teorema 2.9. ([PŠ]). *Parcijalno nul prostorna kriva α jedinične brzine u prostoru E_1^4 ima $k_1 = c_1 \in R_0$, $k_2 = \text{constant} \neq 0$ ako i samo ako je α deo parcijalno nul prostorne helise*

$$(2.7) \qquad \alpha(s) = (as, as, \frac{1}{c_1}\sin(c_1 s), \frac{1}{c_1}\cos(c_1 s)), \quad a \in R_0.$$

Dokaz. Najpre pretpostavimo da α ima konstantne krivine različite od nule. Tada pomoću Freneovih jednačina nalazimo da je $\dddot{T} + c_1^2\dot{T} = 0$. Rešavanjem ove jednačine dobijamo da je $T = V_1 + V_2\cos(c_1 s) + V_3\sin(c_1 s)$, pri čemu su $V_1, V_2, V_3 \in E_1^4$ konstantni vektori. Dalje, jednačina $g(T,T) = 1$ implicira da je $g(V_1,V_1) + g(V_2,V_2) = 1$, $g(V_1,V_2) = g(V_1,V_3) = g(V_2,V_3) = 0$, $g(V_2,V_2) = g(V_3,V_3)$. Konačno, koristeći jednačinu $g(\dot{T},\dot{T}) = c_1^2$, sledi da je $g(V_2,V_2) = 1$. Prema tome, možemo uzeti da je $V_1 = (a,a,0,0,)$, $a \in R_0$, $V_2 = (0,0,1,0)$, $V_3 = (0,0,0,1)$. Do na izometrije prostora E_1^4, kriva α ima oblik (2.7).

Obratno, ako $\alpha(s)$ ima parametarsku jednačinu oblika (2.7), tada se lako dobija da je $\ddot{\alpha} = (0,0,-c_1\sin(c_1 s), c_1\cos(c_1 s))$ i stoga je $g(\ddot{\alpha},\ddot{\alpha}) = c_1^2$. Medjutim, pomoću Freneovih jednačina dobijamo da je $g(\dot{T},\dot{T}) = g(\ddot{\alpha},\ddot{\alpha}) = k_1^2$. Sledi da je $k_1 = c_1$. Dalje, pošto je $N = \ddot{\alpha}/||\ddot{\alpha}||$, nalazimo da je $\ddddot{\alpha} = (0,0,c_1^3\sin(c_1 s), -c_1^3\cos(c_1 s)) = -c_1^3 N$. Medjutim, pomoću Freneovih jednačina imamo da je $\ddddot{\alpha} = -k_1^3 N + k_1 k_2 B_1$. Sledi da je $k_1 k_2 = 0$ i otuda je $k_2 = \text{constant} \neq 0$. □

Napomena 2.5. Kriva (2.7) leži na kružnom cilindru u prostoru E_1^4 sa jednačinom $x_3^2 + x_4^2 = 1/c_1^2$.

Teorema 2.10 ([PŠ]). *Neka je α pseudo nul prostorna kriva jedinične brzine u prostoru E_1^4. Tada α ima:*

(i) $k_1 = 1$, $k_2 = c_2$, $k_3 = 0$, $c_2 \in R_0$ ako i samo ako se α može parametrizovati pomoću

$$(2.8) \qquad \alpha(s) = \frac{1}{\sqrt{2c_2}}(\cosh(\sqrt{c_2}s), \sinh(\sqrt{c_2}s), \sin(\sqrt{c_2}s), \cos(\sqrt{c_2}s));$$

(ii) $k_1 = 1$, $k_2 = c_2$, $k_3 = c_3$, $c_2, c_3 \in R_0$ ako i samo ako se α može parametrizovati pomoću

$$(2.9) \quad \alpha(s) = \frac{1}{\lambda_1}(V_1\sinh(\lambda_1 s) + V_2\cosh(\lambda_1 s)) + \frac{1}{\lambda_2}(V_3\sin(\lambda_2 s) - V_4\cos(\lambda_2 s)),$$

pri čemu je $\lambda_1^2 = K + \sqrt{K^2 + c_2^2}$, $\lambda_2^2 = -K + \sqrt{K^2 + c_2^2}$, $K = c_2 c_3$ i gde su V_1, V_2, V_3, V_4 medjusobno ortogonalni vektori koji zadovoljavaju jednačine $g(V_1,V_1) = -g(V_2,V_2) = \lambda_2^2/(\lambda_1^2+\lambda_2^2)$, $g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4) = \lambda_1^2/(\lambda_1^2+\lambda_2^2)$.

Dokaz. (i) Prvo pretpostavimo da α ima konstantne krivine $k_1 = 1$, $k_2 = c_2$, $k_3 = 0$. Tada pomoću Freneovih jednačina nalazimo da je $\dddot{T} - c_2^2 T = 0$. Rešavanjem prethodne jednačine dobija se da je

$$T = V_1 \cosh(\sqrt{c_2}s) + V_2 \sinh(\sqrt{c_2}s) + V_3 \cos(\sqrt{c_2}s) + V_4 \sin(\sqrt{c_2}s),$$

pri čemu su $V_1, V_2, V_3, V_4 \in E_1^4$ konstantni vektori. Štaviše, jednačina $g(T,T) = 1$ implicira da je $g(V_1,V_1) = -g(V_2,V_2)$, $g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4)$, $g(V_1,V_1)+g(V_3,V_3) = 0$, $g(V_i,V_j) = 0$ za $i \neq j$, $(i,j \in \{1,2,3,4\})$. Konačno, koristeći jednačinu $g(\dot{T},\dot{T}) = 0$, nalazimo da je $g(V_3,V_3) = 1/2$. Prema tome, možemo uzeti da je $V_1 = (0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)$, $V_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,0)$, $V_3 = (0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $V_4 = (0,0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$. Na taj način, do na izometrije prostora E_1^4, kriva α ima oblik (2.8).

Obratno, ako se $\alpha(s)$ može parametrizovati pomoću (2.8), tada nalazimo da je $g(\ddot{\alpha},\ddot{\alpha}) = 0$ i stoga je $k_1 = 1$. Dalje, nalazimo da je $g(\dddot{\alpha},\dddot{\alpha}) = g(\dot{N},\dot{N}) = c_2^2$. Medjutim, Freneove formule daju $g(\dot{N},\dot{N}) = k_2^2$. Sledi da je $k_2 = c_2$. Konačno, Freneove jednačine impliciraju da je $g(\dot{B}_1,\dot{B}_1) = -2k_2k_3$, a s druge strane pošto je $B_1 = \ddot{\alpha}/||\ddot{\alpha}||$, dobijamo da je $g(\dot{B}_1,\dot{B}_1) = 0$. Sledi da je $k_3 = 0$.

(ii) Pretpostavimo da α ima konstantne krivine $k_1 = 1$, $k_2 = c_2$, $k_3 = c_3$. Tada pomoću Freneovih formula nalazimo da je $\dddot{T} - 2c_2c_3\ddot{T} - c_2^2 T = 0$. Rešavanjem ove jednačine, dobija se da je

$$T = V_1 \cosh(\lambda_1 s) + V_2 \sinh(\lambda_1 s) + V_3 \cos(\lambda_2 s) + V_4 \sin(\lambda_2 s),$$

pri čemu su V_1, V_2, V_3, $V_4 \in E_1^4$ konstantni vektori, $\lambda_1^2 = K + \sqrt{K^2 + c_2^2}$, $\lambda_2^2 = -K + \sqrt{K^2 + c_2^2}$, $K = c_2c_3$. Dalje, jednačina $g(T,T) = 1$ implicira da je $g(V_1,V_1) = -g(V_2,V_2)$, $g(V_3,V_3) = g(V_4,V_4)$, $g(V_1,V_1) + g(V_3,V_3) = 1$, $g(V_i,V_j) \neq 0$ za $i \neq j$ $(i,j \in \{1,2,3,4\})$. Konačno, iz jednačine $g(\dot{T},\dot{T}) = 0$, dobijamo da je $g(V_1,V_1) = \lambda_2^2/(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)$. Prema tome, do na izometrije prostora E_1^4, α je oblika (2.9).

Obratno, ako $\alpha(s)$ ima parametrizaciju oblika (2.9), nalazimo da je $g(\ddot{\alpha},\ddot{\alpha}) = 0$ i stoga je $k_1 = 1$. Štaviše, dobija se da je $g(\dddot{\alpha},\dddot{\alpha}) = c_2^2$, a iz Freneovih formula imamo da je $g(\dot{N},\dot{N}) = k_2^2$. Sledi da je $k_2 = c_2$. Konačno, pošto je $B_1 = \ddot{\alpha}/||\ddot{\alpha}||$, dobija se da je $g(\dot{B}_1,\dot{B}_1) = -c_2c_3$. Medjutim, Freneove jednačine impliciraju da je $g(\dot{B}_1,\dot{B}_1) = -k_2k_3$ i stoga je $k_3 = c_3$. $\square$

Napomena 2.6. Kriva oblika (2.8) leži na svetlosnom konusu u prostoru E_1^4 sa jednačinom $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$. Kriva oblika (2.9) leži na hiperkvadrici u prostor-vremenu Minkovskog E_1^4. Ako je $c_2c_3 > 0$ ili $c_2c_3 < 0$, tada α leži respektivno na pseudosferi sa jednačinom $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2c_3/c_2$ ili na pseudohiperboličkom prostoru sa istom jednačinom.

Konačno, primetimo da su neke od W krivih, krive tipa 2. Dokaz sledeće teoreme sledi neposredno iz definicije krivih konačnog tipa 2.

Teorema 2.11 ([PŠ]). *Krive oblika (2.3),(2.5),(2.6) i (2.9), za koje* $\lambda_1, \lambda_2 \in N$, *su krive tipa 2. Kriva oblika (2.8) za koju je* $\sqrt{c_2} \in N$ *je kriva tipa 2 Krive oblika (2.2) i (2.7), za koje respektivno* $\lambda \in N$, $c_1 \in N$, *su krive nul tipa 2.*

GLAVA 5

HIPERBOLIČKI UGAO IZMEDJU VEKTORA U LORENCOVOJ RAVNI

Jedan od osnovnih pojmova u geometriji Lorencove ravni L^2 je pojam hiperboličkog ugla izmedju dva vektora. Pojam hiperboličkog ugla izmedju dva jedinična vremenska vektora (kada su oba vektora u pravcu "budućnosti", "prošlosti", ili je jedan od njih u pravcu "budućnosti", a drugi u pravcu "prošlosti") definisali su G. Birman i K. Nomizu u radovima [BN], [BN1]. U ovim radovima pomenuti autori su proučavali osobine funkcije hiperboličkog ugla, kao i relacije koje se odnose na Lorencovu trigonometriju. Neke od osobina funkcije hiperboličkog ugla su takodje opisane u radu [O].

U ovoj glavi, definisan je pojam hiperboličkog ugla izmedju dva jedinična prostorna vektora, kao i pojam hiperboličkog ugla izmedju jediničnog prostornog i jediničnog vremenskog vektora u Lorencovoj ravni. Ovim definicijama kompletiran je pojam hiperboličkog ugla izmedju dva ne nul vektora. Zatim je dokazano da je pomenuti pojam hiperboličkog ugla dobro definisan, tj. nezavisan od izbora Lorencovog koordinatnog sistema. Takodje su proučene odgovarajuće funkcije hiperboličkih uglova i potom je definisana mera hiperboličkog ugla. Treba pomenuti da pojam hiperboličkog ugla izmedju dva vektora u Lorencovoj ravni, pri čemu je bar jedan od njih nul vektor, još uvek nije definisan.

Kao što je poznato, mnoge geometrijske osobine krivih, kao i neke klase krivih, mogu se opisati pomoću ugla izmedju dveju pravih linija ili dva vektora. Jednu klasu takvih krivih čine tzv. *krive konstantne precesije*. One su definisane kao krive čija osa rotacije Freneovog repera (koja se još naziva i centroidom) rotira oko nekog fiksiranog pravca konstantnom brzinom, gradeći sa njim konstantan ugao. U Euklidskom prostoru E^3, krive konstantne precesije su detaljno proučene. Parametarske jednačine tih krivih u prostoru E^3, date su u radu [Sc]. S tim u vezi, u ovoj glavi su pomoću pojma hiperboličkog ugla klasifikovane sve prostorne krive konstantne precesije čija je glavna normala ne nul vektor, kao i sve vremenske krive konstantne precesije u Lorencovom 3-dimenzionom prostoru L^3. Štaviše, dati su i uslovi pod kojima pomenute krive konstantne precesije predstavljaju krive konačnog Čenovog tipa ([C]).

Podsetimo se da je n–dimenzioni Lorencov prostor L^n vektorski prostor R^n snabdeven Lorencovim indefinitnim unutrašnjim proizvodom

$$g(x, y) = x_1 y_1 + \cdots + x_{n-1} y_{n-1} - x_n y_n$$

za svaka dva vektora $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ prostora L^n. Uočimo u Lorencovoj ravni L^2 jedinični vremenski vektor $e = (0, 1)$. Tada vektor e orijentiše Lorencovu ravan, pa se takva vremenska orijentacija definiše na sledeći način. Kaže se da je vremenski vektor $v = (v_1, v_2)$ usmeren u pravcu "budućnosti" odnosno "prošlosti", ako je respektivno $g(v, e) < 0$ i $g(v, e) > 0$. Isto važi i za prostorne vektore. U Lorencovoj ravni posmatraćemo samo *dozvoljive koordinatne sisteme*, tj. koordinatne sisteme u kojima je vektor $e = (0, 1)$ jedinični vremenski vektor usmeren u pravcu "budućnosti", a vektor $e^{\perp} = (1, 0)$ jedinični prostorni vektor ortogonalan na e, tako da je baza $\{e, e^{\perp}\}$ pozitivno orijentisana ([BN1]).

Označimo sa G pravu Lorencovu grupu koja se sastoji od svih matrica oblika

$$A(u) = \begin{bmatrix} \cosh(u) & \sinh(u) \\ \sinh(u) & \cosh(u) \end{bmatrix}, \qquad u \in R.$$

Tada je G grupa svih linearnih transformacija ravni L^2 koje čuvaju unutrašnji proizvod, orijentaciju i vremensku–orijentaciju. U radovima [BN,BN1], hiperbolički ugao izmedju dva jedinična vektora definisan je na sledeći način.

Definicija 1.A ([BN]). *Neka su x i y dva jedinična vremenska vektora sa pravcem ka budućnosti. Kaže se da je $u \in R$ orijentisani ugao od x ka y, ako je $A(u)x = y$.*

Definicija 1.B ([BN1]). *Neka je x jedinični vremenski vektor sa pravcem ka budućnosti i y jedinični vremenski vektor sa pravcem ka prošlosti (ili obratno). Kaže se da je $u \in R$ orijentisani ugao od x ka y, ako je $(-A)(u)x = y$.*

Pri tome je funkcija orijentisanog hiperboličkog ugla $(\cdot, \cdot)$ izmedju dva jedinična vremenska vektora imala sledeće interesantne osobine ([BN1]):

(1) $(x, -x) = 0$;

(2) $(x, y) + (y, z) = (x, z)$;

(3) $(x, x) = 0$;

(4) $(y, x) = -(x, y)$;

(5) $(-x, y) = (x, y)$;

(6) $(x, -y) = (x, y)$.

Podsetimo se da je *Lorencova transformacija* $L : x \rightarrow x'$ linearna transformacija iz jednog dozvoljivog koordinatnog sistema u drugi, koja čuva metriku ([S]). Na primer, dve najjednostavnije Lorencove transformacije u prostoru L^3 su ([S]): prostorna rotacija za ugao $\theta \in R$ u prostornoj ravni $\{x_1, x_2\}$, čije su formule

$$x_1' = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta$$
$$x_2' = -x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta$$
$$x_3' = x_3,$$

i vremenska rotacija za "pseudo–ugao" $\phi \in R$ u vremenskoj ravni $\{x_2, x_3\}$, čije su formule

$$x_1' = x_1$$
$$x_2' = x_2 \cosh\phi + x_3 \sinh\phi$$
$$x_3' = x_2 \sinh\phi + x_3 \cosh\phi.$$

Ove dve jednostavne Lorencove transformacije su važne, jer se svaka Lorencova transformacija može predstaviti kao konačan niz transformacija upravo ovog tipa.

1. Sada ćemo definisati hiperbolički ugao izmedju dva jedinična prostorna vektora. Ova definicija je vrlo bliska definiciji hiperboličkog ugla izmedju dva jedinična vremenska vektora. Neka je, kao i ranije, sa $A(u) \in G$ označena matrica oblika

$$A(u) = \begin{bmatrix} \cosh(u) & \sinh(u) \\ \sinh(u) & \cosh(u) \end{bmatrix}, \qquad u \in R.$$

Neka su $X = (x_1, x_2)$ i $Y = (y_1, y_2)$ dva jedinična prostorna vektora u Lorencovoj ravni L^2. Označimo sa T operator koji komutira koordinate, tj. za proizvoljnu tačku (a_1, a_2) ravni L^2 važi $T(a_1, a_2) = (a_2, a_1)$. Tada je očigledno $g(X, T(Y)) = x_1 y_2 - x_2 y_1$. Štaviše, iz pretpostavke da su X i Y jedinični prostorni vektori, lako nalazimo da je $g(X, Y)^2 \geq 1$ i stoga je $|g(X, Y)| \geq 1$. Imamo da važi nejednakost:

$$0 < g(X, Y)^2 < 2 x_1 y_1 g(X, Y).$$

Prema tome, ako je sgn x_1 = sgn y_1, tada je $g(X, Y) > 0$. S druge strane, ako je sgn $x_1 \neq$ sgn y_1 tada je $g(X, Y) < 0$. U odnosu na ove dve različite mogućnosti, dajemo sledeće dve definicije.

Definicija 1.1. *Neka su $X = (x_1, x_2)$ i $Y = (y_1, y_2)$ dva jedinična prostorna vektora, pri čemu je sgn x_1 = sgn y_1. Broj $u \in R$ naziva se orijentisanim hiperboličkim uglom od X ka Y ako je $A(u)X = Y$.*

Definicija 1.2. *Neka su $X = (x_1, x_2)$ i $Y = (y_1, y_2)$ dva jedinična prostorna vektora, pri čemu je $\operatorname{sgn} x_1 \neq \operatorname{sgn} y_1$. Broj $u \in R$ naziva se orijentisanim hiperboličkim uglom od X ka Y ako je $(-A)(u)X = Y$*

Napomena 1.1. U definicijama 1.1 i 1.2 nije neophodno da vektori X i Y budu oba u pravcu budućnosti ili prošlosti.

Iz definicija 1.1 i 1.2 dobijamo respektivno formule

$$\begin{cases} \cosh(u) = g(X, Y) \\ \sinh(u) = g(X, T(Y)). \end{cases} \qquad \begin{cases} \cosh(u) = -g(X, Y) \\ \sinh(u) = -g(X, T(Y)). \end{cases}$$

Hiperbolički ugao u iz definicije 1.1 (slično i hiperbolički ugao u iz definicije 1.2) nezavisan je od izbora dozvoljivog koordinatnog sistema u Lorencovoj ravni L^2. Neka su $\{x_1, x_2\}$, $\{x_1', x_2'\}$ dva proizvoljna dozvoljiva koordinatna sistema u ravni L^2 i neka su koordinate vektora X i Y u odnosu na ova dva sistema respektivno (x_1, x_2), (y_1, y_2) i (x_1', x_2'), (y_1', y_2'). Ako je $L : \{x_1, x_2\} \to \{x_1', x_2'\}$ Lorencova transformacija iz prvog koordinatnog sistema u drugi, tada za koordinate vektora X i Y važi da je

$$\begin{aligned} x_1 \cosh\phi + x_2 \sinh\phi &= x_1' \qquad & y_1 \cosh\phi + y_2 \sinh\phi &= y_1' \\ x_1 \sinh\phi + x_2 \cosh\phi &= x_2' \qquad & y_1 \sinh\phi + y_2 \cosh\phi &= y_2'. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Označimo orijentisani hiperbolički ugao od X ka Y sa (X, Y). Pretpostavimo da je $(X, Y) = u$ orijentisani hiperbolički ugao u koordinatnom sistemu $\{x_1, x_2\}$. Tada na osnovu definicije 1.1 imamo da je

$$\begin{aligned} x_1 \cosh u + x_2 \sinh u &= y_1 \\ x_1 \sinh u + x_2 \cosh u &= y_2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Prema tome, iz relacija (1.1) i (1.2) sledi da je

$$\begin{aligned} x_1' \cosh u + x_2' \sinh u &= y_1' \\ x_1' \sinh u + x_2' \cosh u &= y_2' \end{aligned}$$

što znači da je $u = (L(X), L(Y))$ orijentisani hiperbolički ugao u koordinatnom sistemu $\{x_1', x_2'\}$.

Lema 1.1. *Ako su X, Y i Z jedinični prostorni vektori u Lorencovoj ravni L^2, tada za funkciju orijentisanog hiperboličkog ugla $(\cdot, \cdot)$ važi:*

(1) $(X, X) = 0$;

(2) $(X, -X) = 0$;

(3) $(X, Y) = -(Y, X)$;

(4) $(X, Y) = (-X, Y)$;

(5) $(X, Y) = (X, -Y)$;

(6) $(X, Y) + (Y, Z) = (X, Z)$.

Dokaz.

(1) Ako je $(X, X) = u$, tada na osnovu definicije 1.1 imamo da je $A(u)X = X$ i stoga je $\cosh u = 1$, $\sinh u = 0$. Prema tome, $u = 0$.

(2) Ako je $(X, -X) = u$, tada na osnovu definicije 1.2 sledi da je $(-A)(u)X = -X$ tj. $A(u)X = X$. Tada pomoću tvrdjenja (1) nalazimo da je $u = 0$.

(3) Neka je $(X, Y) = u$, $(Y, X) = v$. Ako je $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} y_1$, tada na osnovu definicije 1.1 dobijamo da je $A(u)X = Y$, $A(v)Y = X$ i stoga je $A(v)A(u)X = X$. Pošto je $A(v)A(u) = A(u+v)$, pomoću tvrdjenja (1) sledi da je $u + v = 0$ i zato je $u = -v$. Dalje, ako je $\operatorname{sgn} x_1 \neq \operatorname{sgn} y_1$, tada na osnovu definicije 1.2 dobijamo da je $(-A)(u)X = Y$, $(-A)(v)Y = X$ i stoga je $(-A)(v)(-A)(u)X = X$. Pošto je $(-A)(v)(-A)(u) = A(u+v)$, opet pomoću tvrdjenja (1) nalazimo da je $u + v = 0$ i stoga je $u = -v$.

(4) Neka je $(X, Y) = u$ i $(-X, Y) = v$. Na osnovu definicija 1.1 i 1.2 na sličan način dobijamo da je $u = v$.

(5) Dokaz je analogan dokazu tvrdjenja (4).

(6) Neka je $(X, Y) = u$ i $(Y, Z) = v$. Tada razlikujemo sledeće mogućnosti: (6.1) $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} y_1 = \operatorname{sgn} z_1$; (6.2) $\operatorname{sgn} x_1 \neq \operatorname{sgn} y_1 = \operatorname{sgn} z_1$; (6.3) $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} y_1 \neq \operatorname{sgn} z_1$; (6.4) $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} z_1 \neq \operatorname{sgn} y_1$ i razmatramo ih posebno.

(6.1) Iz definicije 1.1 imamo da je $A(u)X = Y$, $A(v)Y = Z$, odakle je $A(v)A(u)X = Z$. Pošto je $A(v)A(u) = A(u+v)$, na osnovu definicije 1.1 sledi da je $(X, Z) = u + v$.

(6.2) Iz definicija 1.1 i 1.2 imamo da je respektivno $(-A)(u)X = Y$, $A(v)Y = Z$. Sledi da je $A(v)(-A)(u)X = Z$ i stoga je $(-A)(u+v)X = Z$. Tada definicija 1.2 implicira da je $(X, Z) = u + v$.

(6.3) Iz definicija 1.1 i 1.2 imamo da je redom $A(u)X = Y$, $(-A)(v)Y = Z$ i zato je $(-A)(v)A(u)X = Z$. Sledi da je $(-A)(u+v)X = Z$, pa na osnovu definicije 1.2 dobijamo da je $(X, Z) = u + v$.

(6.4) Na osnovu definicije 1.2 sledi da je $(-A)(u)X = Y$, $(-A)(v)Y = Z$ i stoga je $(-A)(v)(-A)(u)X = Z$. Tada nalazimo da je $A(u+v)X = Z$ i pomoću definicije 1.1 dobijamo da je $(X, Z) = u + v$. □

Primetimo da ako prostorni vektori X i Y nisu jedinični vektori, opet je

...guće dobiti formulu za orijentisani hiperbolički ugao izmedju njih. Naime, ...sto su $\frac{X}{||X||}$, $\frac{Y}{||Y||}$ jedinični prostorni vektori kolinearni sa X i Y, tada je očigledno $(X,Y) = (\frac{X}{||X||}, \frac{Y}{||Y||})$. Stavljajući $(X,Y) = (\frac{X}{||X||}, \frac{Y}{||Y||}) = u$, iz definicija 1.1 i 1.2 ...lazimo respektivno da je

$$\begin{cases} \cosh u = \dfrac{g(X,Y)}{||X||\,||Y||} \\ \sinh u = \dfrac{g(X,T(Y))}{||X||\,||Y||}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \cosh u = -\dfrac{g(X,Y)}{||X||\,||Y||} \\ \sinh u = -\dfrac{g(X,T(Y))}{||X||\,||Y||}. \end{cases}$$

2. Sada dajemo definiciju hiperboličkog ugla izmedju jediničnog prostornog ...ktora i jediničnog vremenskog vektora u Lorencovoj ravni L^2. Označimo sa $B(u)$ ...atricu oblika

$$B(u) = \begin{bmatrix} \sinh u & \cosh u \\ \cosh u & \sinh u \end{bmatrix}, \qquad u \in R.$$

N...ka je $X = (x_1, x_2)$ jedinični prostorni vektor i $Y = (y_1, y_2)$ jedinični vremenski ...ktor. Tada lako nalazimo da je $g(X,T(Y))^2 \geq 1$ i prema tome je $|g(X,T(Y))| \geq$ ... Štaviše, važi sledeća jednostavna nejednakost

$$0 < g(X,Y)^2 < 2x_1y_2g(X,T(Y)).$$

I... poslednje nejednakost sledi da ako je $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} y_2$ tada je $g(X,T(Y)) > 0$, a ...ko je $\operatorname{sgn} x_1 \neq \operatorname{sgn} y_2$ tada je $g(X,T(Y)) < 0$. U odnosu na ove dve mogućnosti, ...ajemo sledeće dve definicije.

Definicija 2.1. Neka je $X = (x_1, x_2)$ jedinični prostorni vektor i $Y = (y_1, y_2)$ jedinični vremenski vektor, pri čemu je $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} y_2$. Broj $u \in R$ ...aziva se orijentisanim hiperboličkim uglom od X ka Y ako je $B(u)X = Y$.

Definicija 2.2. Neka je $X = (x_1, x_2)$ jedinični prostorni vektor i $Y = (y_1, y_2)$ jedinični vremenski vektor, pri čemu je $\operatorname{sgn} x_1 \neq \operatorname{sgn} y_2$. Broj $u \in R$ ...aziva se orijentisanim hiperboličkim uglom od X ka Y ako je $(-B)(u)X = Y$.

Iz definicija 2.1 i 2.2 nalazimo da je respektivno

$$\begin{cases} \cosh u = g(X,T(Y)), \\ \sinh u = g(X,Y), \end{cases} \qquad \begin{cases} \cosh u = -g(X,T(Y)), \\ \sinh u = -g(X,Y). \end{cases}$$

Napomena 2.1. U definicijama 2.1 i 2.2 nije neophodno da vektori X i Y budu ...a sa pravcem ka budućnosti ili ka prošlosti.

Dokazaćemo da je hiperbolički ugao u iz definicije 2.1 (analogno iz definicije 2.2) nezavisan od izbora dozvoljivog koordinatnog sistema u Lorencovoj ravni L^2. Neka su $\{x_1, x_2\}$ i $\{x'_1, x'_2\}$ dva dozvoljiva koordinatna sistema u Lorencovoj ravni L^2 i neka su koordinate vekotra X i Y u odnosu na ova dva sistema respektivno oblika (x_1, x_2), (y_1, y_2) i (x'_1, x'_2), (y'_1, y'_2). Označimo sa $L : \{x_1, x_2\} \to \{x'_1, x'_2\}$ Lorencovu transformaciju iz jednog koordinatnog sistema u drugi. Tada za koordinate vektora X i Y važi da je

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{array}{ll} x_1 \cosh\phi + x_2 \sinh\phi = x'_1 & \quad y_1 \cosh\phi + y_2 \sinh\phi = y'_1 \\ x_1 \sinh\phi + x_2 \cosh\phi = x'_2 & \quad y_1 \sinh\phi + y_2 \cosh\phi = y'_2 \end{array}.$$

Označimo orijentisani hiperbolički ugao od X ka Y sa (X, Y). Pretpostavimo da je $(X, Y) = u$ orijentisani hiperbolički ugao u koordinatnom sistemu $\{x_1, x_2\}$. Tada na osnovu definicije 2.1 imamo da je

$$\text{(2.2)} \qquad \begin{array}{l} x_1 \sinh u + x_2 \cosh u = y_1 \\ x_2 \cosh u + x_2 \sinh u = y_2 \end{array}.$$

Prema tome, iz relacija (2.1) i (2.2) nalazimo da je

$$\text{(2.3)} \qquad \begin{array}{l} x'_1 \sinh u + x'_2 \cosh u = y'_1, \\ x'_2 \cosh u + x'_2 \sinh u = y'_2. \end{array}$$

što znači da je $u = (L(X), L(Y))$ orijentisani hiperbolički ugao u koordinatnom sistemu $\{x'_1, x'_2\}$.

Lema 2.1. *Ako su X i Y jedinični prostorni i vremenski vektor respektivno i ako je Z jedinični prostorni ili vremenski vektor u Lorencovoj ravni L^2, tada za funkciju orijentisanog hiperboličkog ugla $(\cdot, \cdot)$ važi:*

(1) $(X, Y) = -(Y, X)$;

(2) $(X, Y) = (-X, Y)$;

(3) $(X, Y) = (X, -Y)$;

(4) $(X, Y) + (Y, Z) = (X, Z)$.

Dokaz.

(1) Neka je $(X, Y) = u$, $(Y, X) = v$. Ako je $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} y_2$, tada na osnovu definicije 2.1 sledi da je $B(u)X = Y$, $B(v)Y = X$, odakle je $B(v)B(u)X = Y$. Pošto je $B(v)B(u) = A(u+v)$, pomoću definicije 1.1 dobijamo da je $(X, X) = u+v$, pa tvrdjenje (1) iz Leme 1.1 implicira da je $u = -v$. Dalje, ako je $\operatorname{sgn} x_1 \neq \operatorname{sgn} y_2$ tada na osnovu definicije 2.2 imamo da je $(-B)(u)X = Y$, $(-B)(v)Y = X$ i stoga je $(-B)(v)(-B)(u)X = X$. Pošto je $(-B)(v)(-B)(u) = A(u + v)$, na osnovu

definicije 1.1 sledi da je $(X, X) = u + v$, pa tvrdjenje (1) iz Leme 1.1 implicira da je $u = -v$.

(2) Neka je $(X, Y) = u$, $(-X, Y) = v$. Ako je sgn x_1 = sgn y_2 tada pomoću definicija 2.1 i 2.2 respektivno nalazimo da je $B(u)X = Y$, $(-B)(v)(-X) = Y$. Sledi da je $B(v)X = Y$, pa na osnovu prethodnog tvrdjenja (1) imamo da je $B(-v)Y = X$. Tada je $B(-v)B(u)X = X$ i pošto je $B(-v)B(u) = A(u-v)$, na osnovu definicije 1.1 sledi da je $(X, X) = u - v$. Tada tvrdjenje (1) iz Leme 1.1 implicira da je $u = v$. Dalje, ako je sgn $x_1 \neq$ sgn y_2, tada na osnovu definicija 2.2 i 2.1 respektivno imamo da je $(-B)(u)X = Y$, $B(v)(-X) = Y$. Sledi da je $(-B)(v)X = Y$, pa tvrdjenje (1) implicira da je $(-B)(-v)Y = X$. Dakle, $(-B)(-v)(-B)(v)X = X$ i pošto je $(-B)(-v)(-B)(u) = A(u-v)$, pomoću definicije 1.1 nalazimo da je $(X, X) = u - v$. Konačno, tvrdjenje (1) iz Leme 1.1 implicira da je $u = v$.

(3) Dokaz je analogan dokazu tvrdjenja (2).

(4) Neka je $(X, Y) = u$, $(Y, Z) = v$. Tada razlikujemo sledeće slučajeve: (4.1) Z je prostorni vektor; (4.2) Z je vremenski vektor.

(4.1). U ovom slučaju, razlikujemo sledeće mogućnosti: (4.1.1) sgn x_1 = sgn y_2 = sgn z_1; (4.1.2) sgn x_1 = sgn $y_2 \neq$ sgn z_1; (4.1.3) sgn $x_1 =\neq$ sgn y_2 = sgn z_1; (4.1.4) sgn x_1 = sgn $z_1 =\neq$ sgn y_2.

(4.1.1). Pomoću definicije 2.1 i koristeći tvrdjenje (1) dobijamo da je $B(u)X = Y$, $B(-v)Z = Y$. Sledi da je $B(u)X = B(-v)Z$. Množeći ovu jednačinu sa $B(v)$, dobijamo da je $B(v)B(u)X = Z$. Pošto je $B(v)B(u) = A(u+v)$, na osnovu definicije 2.1 sledi da je $(X, Z) = u + v$.

(4.1.2). Koristeći tvrdjenje (1) i pomoću definicija 2.1 i 2.2 sledi da je $B(u)X = Y$, $(-B)(-v)Z = Y$. Prema tome, $B(u)X = (-B)(-v)Z$. Množeći ovu jednačinu sa $(-B)(v)$ nalazimo da je $(-B)(v)B(u)X = Z$. Pošto je $(-B)(v)B(u) = (-A)(u+v)$, na osnovu definicije 1.2 dobijamo da je $(X, Z) = u + v$.

(4.1.3) i (4.1.4). U ovim slučajevima, dokaz je analogan dokazu tvrdjenja (4.1.2).

(4.2). Razlikujemo sledeće mogućnosti: (4.2.1) sgn x_1 = sgn y_2 = sgn z_2; (4.2.2) sgn $x_1 \neq$ sgn y_2 = sgn z_2; (4.2.3) sgn x_1 = sgn $y_2 \neq$ sgn z_2; (4.2.4) sgn x_1 = sgn $z_2 \neq$ sgn y_2.

(4.2.1). Na osnovu definicije 2.1 i definicije hiperboličkog ugla izmedju dva vremenska vektora ([BN1]) nalazimo da je $B(u)X = Y$, $A(v)Y = Z$. Sledi da je $A(v)B(u)X = Z$ i pošto je $A(v)B(u) = B(u+v)$, pomoću definicije 2.1 dobijamo da je $(X, Z) = u + v$.

(4.2.2). Pomoću definicije 2.2 i definicije hiperboličkog ugla izmedju dva vremenska vektora imamo da je $(-B)(u)X = Y$, $A(v)Y = Z$. Tada je $A(v)(-B)(u)X$

$= Z$ i s obzirom da je $A(v)(-B)(u) = (-B)(u+v)$, na osnovu definicije 2.2 sledi da je $\langle X, Z \rangle = u + v$.

(4.2.3). Na osnovu definicije 2.1 i definicije hiperboličkog ugla izmedju dva vremenska vektora, dobijamo da je $B(u)X = Y$, $(-A)(v)Y = Z$. Prema tome, $(-A)(v)B(u)X = Z$ i pošto je $(-A)(v)B(u) = (-B)(u+v)$, pomoću definicije 2.2 sledi da je $\langle X, Z \rangle = u + v$.

(4.2.4). Dokaz je analogan dokazu prethodnog tvrdjenja. □

U slučaju kada prostorni vektor X i vremenski vektor Y nisu jedinični vektori, tada su $\frac{X}{||X||}$ i $\frac{Y}{||Y||}$ jedinični vektori kolinearni sa X i Y. Tada je očigledno $\langle X, Y \rangle = \langle \frac{X}{||X||}, \frac{Y}{||Y||} \rangle$. Stavljajući $\langle X, Y \rangle = \langle \frac{X}{||X||}, \frac{Y}{||Y||} \rangle = u$, iz definicija 2.1 i 2.2 dobijamo respektivno da je

$$\begin{cases} \cosh u = \dfrac{g(X, T(Y))}{||X||\,||Y||} \\ \sinh u = \dfrac{g(X, Y)}{||X||\,||Y||}. \end{cases} \qquad \begin{cases} \cosh u = -\dfrac{g(X, T(Y))}{||X||\,||Y||} \\ \sinh u = -\dfrac{g(X, Y)}{||X||\,||Y||}. \end{cases}$$

U nastavku, koristeći pojam hiperboličkog ugla izmedju dva ne nul vektora, dajemo formulu za površinu trougla u Lorencovoj ravni, kao i neke trigonometrijske relacije. Podsetimo se da je u Lorencovoj ravni površina paralelograma koji je razapet nad vektorima $X = (x_1, x_2)$ i $Y = (y_1, y_2)$ data sa $|g(X, T(Y))|$ ([BN]). Prema tome, ako su A, B i C tri nekolinearne tačke u Lorencovoj ravni, površina S trougla ABC jednaka je polovini površine paralelograma koji je razapet nad vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, tj. $S = |g(\overrightarrow{AB}, T(\overrightarrow{AC}))|/2$.

Teorema 2.1. *Ako su* $\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2)$, $\overrightarrow{AC} = (y_1, y_2)$ *prostorni nekolinearni vektori, tada je površina* $\triangle ABC$ *data sa*

$$S = \frac{||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{AC}||\,|\sinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{2}.$$

Dokaz. Pomoću definicija 1.1 i 1.2 lako se dobija gornja formula. □

Teorema 2.2. *Ako su* $\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2)$ *i* $\overrightarrow{AC} = (y_1, y_2)$ *prostorni i vremenski vektor respektivno, tada je površina* $\triangle ABC$ *data sa*

$$S = \frac{||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{AC}||\,|\cosh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})|}{2}.$$

Dokaz. Pomoću definicija 2.1 i 2.2 lako se dobija gornja formula. □

Teorema 2.3. *Ako su* $\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2)$ *i* $\overrightarrow{AC} = (z_1, z_2)$ *prostorni nekolinearni vektori i* $\overrightarrow{BC} = (y_1, y_2)$ *vremenski vektor takav da je* $g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 0$, *tada je*

$$\cosh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cosh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = ||\overrightarrow{AB}||/||\overrightarrow{AC}||,$$

$$|\sinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})| = |\sinh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})| = ||\overrightarrow{BC}||/||\overrightarrow{AC}||.$$

Dokaz. Pošto je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, sledi da je

$$x_1 + y_1 = z_1, \quad x_2 + y_2 = z_2. \tag{2.4}$$

Najpre dokazujemo da je $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} z_1$. Ako je $\operatorname{sgn} x_1 \neq \operatorname{sgn} z_1$, tada je $0 < g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})^2 < 2x_1 z_1 g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ i stoga je $g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) < 0$. S druge strane, $g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = ||\overrightarrow{AB}||^2 > 0$, što je kontradikcija. Prema tome, $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} z_1$, pa razlikujemo dva slučaja: (1°) $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} z_1 = \operatorname{sgn} y_2$; (2°) $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} z_1 \neq \operatorname{sgn} y_2$.

(1°). Tada je $\cosh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})/||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{AB}||/||\overrightarrow{AC}||$, $\sinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = g(\overrightarrow{AB}, T(\overrightarrow{AC}))/||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{AC}||$, što zajedno sa (2.4) daje

$$\sinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = g(\overrightarrow{AB}, T(\overrightarrow{BC}))/||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{AC}||. \tag{2.5}$$

Pošto je $\sinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})/||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{BC}|| = 0$, sledi da je $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 0$. Prema tome, $\cosh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = g(\overrightarrow{AB}, T(\overrightarrow{BC}))/||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{BC}|| = 1$. Sledi da je

$$g(\overrightarrow{AB}, T(\overrightarrow{BC})) = ||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{BC}||. \tag{2.6}$$

Zamenom relacije (2.6) u relaciji (2.5), dobijamo da je $\sinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = ||\overrightarrow{BC}||/||\overrightarrow{AC}||$. Osim toga, $\sinh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC} = -g(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})/||\overrightarrow{BC}||\,||\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{BC}||/||\overrightarrow{AC}||$, $\cosh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = g(\overrightarrow{AC}, T(\overrightarrow{BC}))/||\overrightarrow{BC}||\,||\overrightarrow{AC}||$, što zajedno sa relacijom (2.4) daje $\cosh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = g(\overrightarrow{AB}, T(\overrightarrow{BC}))/||\overrightarrow{BC}||\,||\overrightarrow{AC}||$. Zamenom relacije (2.6) u poslednjoj jednakosti nalazimo da je $\cosh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = ||\overrightarrow{AB}||/||\overrightarrow{AC}||$.

(2°). U ovom slučaju imamo da je $\cosh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = ||\overrightarrow{AB}||/||\overrightarrow{AC}||$, $\sinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = g(\overrightarrow{AB}, T(\overrightarrow{AC}))/||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{AC}||$ što zajedno sa relacijom (2.4) implicira da je

$$\sinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = g(\overrightarrow{AB}, T(\overrightarrow{BC}))/||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{AC}||. \tag{2.7}$$

Pošto je $\sinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})/||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{BC}|| = 0$, sledi da je $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 0$. Prema tome, $\cosh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = -g(\overrightarrow{AB}, T(\overrightarrow{BC}))/||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{BC}|| = 1$ i stoga je

$$-g(\overrightarrow{AB}, T(\overrightarrow{BC})) = ||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{BC}||. \tag{2.8}$$

Zamenom relacije (2.8) u relaciji (2.7) nalazimo da je $\sinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -||\overrightarrow{BC}||/||\overrightarrow{AC}||$. Dalje imamo da je $\sinh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = g(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})/||\overrightarrow{BC}||\,||\overrightarrow{AC}|| = -||\overrightarrow{BC}||$

$/||\overrightarrow{AC}||$, $\cosh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = -g(\overrightarrow{AC}, T(\overrightarrow{BC}))/||\overrightarrow{BC}||\,||\overrightarrow{AC}||$ što zajedno sa relacijom (2.4) implicira da je $\cosh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = -g(\overrightarrow{AB}, T(\overrightarrow{BC}))/||\overrightarrow{BC}||\,||\overrightarrow{AC}||$. Konačno, zamenom relacije (2.8) u poslednjoj jednakosti dobijamo da je $\cosh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = ||\overrightarrow{AB}||/||\overrightarrow{AC}||$. □

Teorema 2.4. *Ako su $\overrightarrow{BC} = (y_1, y_2)$ i $\overrightarrow{AC} = (z_1, z_2)$ vremenski nekolinearni vektori i $\overrightarrow{AB} = (x_1, x_2)$ prostorni vektor takav da je $g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 0$, tada je*

$$\cosh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \cosh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = ||\overrightarrow{BC}||/||\overrightarrow{AC}||,$$
$$|\sinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}| = |\sinh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})| = ||\overrightarrow{AB}||/||\overrightarrow{AC}||.$$

Dokaz. Dokaz je sličan dokazu teoreme 2.3. Prvo dokazujemo da je $\operatorname{sgn} y_2 = \operatorname{sgn} z_2$. Ako je $\operatorname{sgn} y_2 \neq \operatorname{sgn} z_2$, tada je $0 < g(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})^2 < -2y_2z_1g(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$, pa sledi da je $g(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) > 0$. S druge strane, imamo da je $g(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = g(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}) = -||\overrightarrow{BC}||^2 < 0$, što je kontradikcija. Prema tome, $\operatorname{sgn} y_2 = \operatorname{sgn} z_2$ i razlikujemo dva slučaja: (1°) $\operatorname{sgn} x_1 = \operatorname{sgn} y_2 = \operatorname{sgn} z_2$; (2°) $\operatorname{sgn} x_1 \neq \operatorname{sgn} y_2 = \operatorname{sgn} z_2$.

(1°). Tada je $\sinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = ||\overrightarrow{AB}||/||\overrightarrow{AC}||$, $\cosh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = g(\overrightarrow{AB}, T(\overrightarrow{BC}))/||\overrightarrow{AB}||\,||\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{BC}||/||\overrightarrow{AC}||$. Sledi da je $\cosh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = ||\overrightarrow{BC}||/||\overrightarrow{AC}||$, $\sinh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = g(\overrightarrow{AB}, T(\overrightarrow{BC}))/||\overrightarrow{BC}||\,||\overrightarrow{AC}|| = ||\overrightarrow{AB}||/||\overrightarrow{AC}||$.

(2°). U ovom slučaju je $\sinh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -||\overrightarrow{AB}||/||\overrightarrow{AC}||$, $\cosh(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = ||\overrightarrow{BC}||/||\overrightarrow{AC}||$. Štaviše, $\cosh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = ||\overrightarrow{BC}||/||\overrightarrow{AC}||$, $\sinh(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = -||\overrightarrow{AB}||/||\overrightarrow{AC}||$. □

Napomena 2.2. Relacije u teoremama 2.3 and 2.4 takodje važe kada se reči "prostorni" i "vremenski" zamene jedna drugom.

Teorema 2.5. *Neka su $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ prostorni nekolinearni vektori i neka je $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$, $\gamma = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$. Tada u $\triangle ABC$ važe relacije:*

$$\frac{||\overrightarrow{AC}||}{|\sinh(\beta)|} = \frac{||\overrightarrow{BC}||}{|\sinh(\alpha)|} = \frac{||\overrightarrow{AB}||}{|\sinh(\gamma)|}. \tag{2.9}$$

Dokaz. Neka je E tačka na pravoj AB tako da je $\overrightarrow{CE}$ vremenski vektor i $g(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{AB}) = 0$. Na osnovu teoreme 2.3 u $\triangle AEC$ važi relacija $|\sinh(\alpha)| = ||\overrightarrow{CE}||/||\overrightarrow{AC}||$. Dalje, na osnovu teoreme 2.4 u $\triangle BEC$ važi da je $|\sinh(\beta)| = ||\overrightarrow{CE}||/||\overrightarrow{BC}||$. Prema tome,

$$||\overrightarrow{BC}||\,|\sinh(\beta)| = ||\overrightarrow{AC}||\,|\sinh(\alpha)|. \tag{2.10}$$

Neka je D tačka na pravoj AC tako da je $\overrightarrow{BD}$ vremenski vektor i $g(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}) = 0$. Tada na osnovu teoreme 2.3 u $\triangle ABD$ važi $|\sinh(\alpha)| = ||\overrightarrow{BD}||/||\overrightarrow{AB}$. Po teoremi 2.4 u $\triangle BDC$ važi $|\sinh(\gamma)| = ||\overrightarrow{BD}||/||\overrightarrow{BC}||$ i stoga je

$$|\sinh(\alpha)|\,||\overrightarrow{AB}|| = |\sinh(\gamma)|\,||\overrightarrow{BC}||. \tag{2.11}$$

Konačno, iz relacija (2.10) i (2.11) dobija se relacija (2.9). □

Teorema 2.6. *Neka su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ prostorni (vremenski) nekolinearni vektori, $\overrightarrow{BC}$ vremenski (prostorni) vektor i neka je $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$, $\gamma = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$. Tada u $\triangle ABC$ važe relacije:*

$$\frac{||\overrightarrow{AC}||}{\cosh(\beta)} = \frac{||\overrightarrow{BC}||}{|\sinh(\alpha)|} = \frac{||\overrightarrow{AB}||}{\cosh(\gamma)}. \tag{2.12}$$

Dokaz. Dajemo dokaz u slučaju kada su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ prostorni vektori, a $\overrightarrow{BC}$ je vremenski vektor. Dokaz u slučaju kada su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ vremenski vektori, a $\overrightarrow{BC}$ je prostorni vektor, teče analogno.

Neka je E tačka na pravoj AB tako da je $\overrightarrow{CE}$ vremenski vektor i $g(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{AB}) = 0$. Tada po teoremi 2.3 u $\triangle AEC$ važi jednakost $|\sinh(\alpha)| = ||\overrightarrow{CE}||/||\overrightarrow{AC}||$. Dalje, na osnovu teoreme 2.4 u $\triangle BEC$ važi relacija $\cosh(\beta) = ||\overrightarrow{CE}||/||\overrightarrow{BC}||$. Prema tome,

$$||\overrightarrow{AC}||\,|\sinh(\alpha)| = ||\overrightarrow{BC}||\cosh(\beta). \tag{2.13}$$

Neka je D tačka na pravoj AC tako da je $\overrightarrow{BD}$ vremenski vektor i $g(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}) = 0$. Tada po teoremi 2.3 u $\triangle ABD$ imamo da je $|\sinh(\alpha)| = ||\overrightarrow{BD}||/||\overrightarrow{AB}||$. Takodje, na osnovu teoreme 2.4 u $\triangle BDC$ važi $\cosh(\gamma) = ||\overrightarrow{BD}||/||\overrightarrow{BC}||$. Stoga je

$$||\overrightarrow{AB}||\,|\sinh(\alpha)| = ||\overrightarrow{BC}||\cosh(\gamma). \tag{2.14}$$

Konačno, pomoću relacija (2.13) i (2.14) dobija se relacija (2.12). □

Kombinovanjem kauzalnih karaktera vektora $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AC}$, na sličan način dobijaju se sledeće dve teoreme, pri čemu je izostavljen njihov dokaz.

Teorema 2.7. *Neka su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ prostorni (vremenski) nekolinearni vektori, $\overrightarrow{AC}$ vremenski (prostorni) vektor i neka je $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$, $\gamma = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$. Tada u $\triangle ABC$ važe relacije:*

$$\frac{||\overrightarrow{AC}||}{|\sinh(\beta)|} = \frac{||\overrightarrow{BC}||}{\cosh(\alpha)} = \frac{||\overrightarrow{AB}||}{\cosh(\gamma)}.$$

Teorema 2.8. *Neka su $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AC}$ prostorni (vremenski) nekolinearni vektori, $\overrightarrow{AB}$ vremenski (prostorni) vektor i neka je $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$, $\gamma = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$. Tada u $\triangle ABC$ važe relacije:*

$$\frac{||\overrightarrow{AC}||}{\cosh(\beta)} = \frac{||\overrightarrow{BC}||}{\cosh(\alpha)} = \frac{||\overrightarrow{AB}||}{|\sinh(\gamma)|}.$$

Teorema 2.9. *Neka su $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AC}$ prostorni nekolinearni vektori i neka je $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ i $\gamma = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$. Tada u $\triangle ABC$ važe jednačine*

$$a^2 = b^2 \mp 2bc\cosh(\alpha) + c^2,$$
$$b^2 = a^2 \pm 2ac\cosh(\beta) + c^2,$$
$$c^2 = a^2 \mp 2ab\cosh(\gamma) + b^2,$$

pri čemu je $||\overrightarrow{BC}|| = a$, $||\overrightarrow{AC}|| = b$, $||\overrightarrow{AB}|| = c$.

Dokaz. Pošto je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, pomoću definicija 1.1 i 1.2 lako dobijamo gornje jednakosti. □

Teorema 2.10. *Neka su $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ prostorni nekolinearni vektori, $\overrightarrow{BC}$ vremenski vektor i neka je $\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\beta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ i $\gamma = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})$. Tada u $\triangle ABC$ važe jednakosti*

$$a^2 = -b^2 \pm 2bc\cosh(\alpha) - c^2,$$
$$b^2 = c^2 \pm 2ac\sinh(\beta) - a^2,$$
$$c^2 = b^2 \mp 2ab\sinh(\gamma) - a^2,$$

pri čemu je $||\overrightarrow{AB}|| = c$, $||\overrightarrow{BC}|| = a$, $||\overrightarrow{AC}|| = b$.

Dokaz. Pošto je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, pomoću definicija 1.1, 1.2, 2.1 i 2.2 lako dobijamo gornje jednakosti. □

U nastavku definišemo *meru* hiperboličkog ugla izmedju dva ne nul vektora. Ako je sa (X, Y) označen orijentisani hiperbolički ugao od vektora X ka vektoru Y, označimo sa $[X, Y]$ neorijentisani hiperbolički ugao izmedju vektora X i Y. Tada je očigledno $[X, Y] = |(X, Y)|$, pri čemu $|\cdot|$ označava apsolutnu vrednost. Uočimo sledeće skupove neorijentisanih uglova u Lorencovoj ravni:

$$\mathcal{A}_1 = \{[X, Y] : X, Y \in L^2, g(X, X) > 0, g(Y, Y) > 0\},$$
$$\mathcal{A}_2 = \{[X, Y] : X, Y \in L^2, g(X, X) < 0, g(Y, Y) < 0\},$$
$$\mathcal{A}_3 = \{[X, Y] : X, Y \in L^2, g(X, X) > 0, g(Y, Y) < 0\}.$$

Primetimo da je $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3 = \emptyset$. Sada definišemo funkciju $m : \cup_{i=1}^{3} \mathcal{A}_i \to R^+$ sa

$$m[X,Y] = \ln\Big(\frac{|g(X,Y)| + |g(X,T(Y))|}{||X||\,||Y||}\Big). \tag{2.15}$$

Lema 2.2. *Funkcija $m : \cup_{i=1}^{3} \mathcal{A}_i \to R^+$ ima sledeće osobine:*

(1) Postoji ugao $[X,Y] \in \cup_{i=1}^{3} \mathcal{A}_i$ tako da je $m[X,Y] = 1$;

(2) Ako je $[X,Y] = [V,W]$, tada je $m[X,Y] = m[V,W]$;

(3) Ako je $[X,Y] + [Y,Z] = [X,Z]$, tada je $m[X,Y] + m[Y,Z] = m[X,Z]$.

Dokaz. Dajemo dokaz u slučaju kada $[X,Y] \in \mathcal{A}_1$. Dokaz u preostala dva slučaja kada $[X,Y] \in \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ teče analogno. Uočimo prostorne vektore $X = (1,0)$ i $Y = (\frac{e^2+1}{2e}, \frac{e^2-1}{2e})$. Prema tome, $[X,Y] \in \mathcal{A}_1$ pa lako nalazimo da je $m[X,Y] = \ln e = 1$. Time je dokazano tvrdjenje (1).

Dalje, pretpostavimo da $[X,Y], [V,W] \in \mathcal{A}_1$ i neka je $[X,Y] = [V,W]$. Tada je $\cosh[X,Y] = \cosh[V,W]$, $\sinh[X,Y] = \sinh[V,W]$ i s obzirom da je $\cosh[X,Y] = |g(X,Y)|/||X||\,||Y||$, $\sinh[X,Y] = |g(X,T(Y))|/||X||\,||Y||$, sledi da je

$$\begin{aligned} m[X,Y] &= \ln\Big(\frac{|g(X,Y)| + |g(X,T(Y))|}{||X||\,||Y||}\Big) \\ &= \ln\Big(\frac{|g(V,W)| + |g(V,T(W))|}{||V||\,||W||}\Big) \\ &= m[V,W]. \end{aligned}$$

Time je dokazano tvrdjenje (2).

Pretpostavimo da $[X,Y]$, $[Y,Z]$, $[X,Z] \in \mathcal{A}_1$ i neka je $[X,Y] + [Y,Z] = [X,Z]$. Tada je $\cosh([X,Y]+[Y,Z]) = \cosh[X,Z]$ i stoga je $\cosh[X,Y]\cosh[Y,Z] + \sinh[X,Y]\sinh[Y,Z] = \cosh[X,Z]$. Pošto je $\cosh[X,Y] = |g(X,Y)|/||X||\,||Y||$, $\sinh[X,Y] = |g(X,T(Y))|/||X||\,||Y||$, sledi da je

$$\frac{|g(X,Y)|\,|g(Y,Z)|}{||X||\,||Y||^2\,||Z||} + \frac{|g(X,T(Y))|\,|g(Y,T(Z))|}{||X||\,||Y||^2\,||Z||} = \frac{|g(X,Z)|}{||X||\,||Z||}. \tag{2.16}$$

Štaviše, na osnovu pretpostavke $[X,Y]+[Y,Z] = [X,Z]$ imamo da je $\sinh([X,Y]+[Y,Z]) = \sinh[X,Z]$, odakle je $\sinh[X,Y]\cosh[Y,Z] + \cosh[X,Y]\sinh[Y,Z] = \sinh[X,Z]$. Stoga nalazimo da je

$$\frac{|g(X,T(Y))|\,|g(Y,Z)|}{||X||\,||Y||^2\,||Z||} + \frac{|g(X,Y)|\,|g(Y,T(Z))|}{||X||\,||Y||^2\,||Z||} = \frac{|g(X,T(Z))|}{||X||\,||Z||}. \tag{2.17}$$

Prema tome, koristeći definiciju funkcije m, relacije (2.16) i (2.17), dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
& m[X,Y]+m[Y,Z] \\
&= \ln\Big(\frac{|g(X,Y)|+|g(X,T(Y))|}{||X||\,||Y||}\Big)+\ln\Big(\frac{|g(Y,Z)|+|g(Y,T(Z))|}{||Y||\,||Z||}\Big) \\
&= \ln\Big(\Big(\frac{|g(X,Y)|+|g(X,T(Y))|}{||X||\,||Y||}\Big)\Big(\frac{|g(Y,Z)|+|g(Y,T(Z))|}{||Y||\,||Z||}\Big)\Big) \\
&= \ln\Big(\frac{|g(X,Z)|}{||X||\,||Z||}+\frac{|g(X,T(Z))|}{||X||\,||Z||}\Big) \\
&= m[X,Z].
\end{aligned}
$$

Time je dokazano tvrdjenje (3). □

Sada dajemo definiciju mere hiperboličkog ugla izmedju dva ne null vektora u Lorencovoj ravni L^2. Ova definicija analogna je definiciji mere ugla izmedju dva vektora u Euklidskoj ravni. Označimo sa $\mathcal{A} = \cup_{i=1}^{3}\mathcal{A}_i$.

Definicija 2.3. *Funkcija $m : \mathcal{A} \to R^+$ je mera hiperboličkog ugla izmedju dva ne nul vektora u Lorencovoj ravni L^2, ako ona zadovoljava sledeće uslove:*

(1) u skupu $\mathcal{A}$ postoji hiperbolički ugao $\alpha \in \mathcal{A}$, tako da je $m(\alpha) = 1$;

(2) ako $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$, tada je $m(\alpha) = m(\beta)$.

(3) ako $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{A}$ i $\alpha + \beta = \gamma$, tada je $m(\alpha) + m(\beta) = m(\gamma)$.

S obzirom da funkcija m definisana sa (2.15) zadovoljava uslove iz leme 2.2, na osnovu definicije 2.3 sledi da je funkcija m jedna mera na skupu $\mathcal{A}$ u Lorencovoj ravni.

3. Pomoću pojma hiperboličkog ugla izmedju dva ne nul vektora u Lorencovoj ravni, moguće je klasifikovati *krive konstantne precesije* u Lorencovom prostoru L^3. Podsetimo se da su po definiciji krive konstantne precesije one krive čija osa rotacije Freneovog repera rotira oko nekog fiksiranog pravca konstantnom brzinom, gradeći sa njim konstantan ugao. Ove krive detaljno su proučene u Euklidskom prostoru E^3, pri čemu su njihove parametarske jednačine date u radu [Sc]. Preciznije, u istom radu je dokazano da je tangentna indikatrisa ovih krivih helisa (zavojnica) koja leži na sferi u E^3. Osim toga, krive konstantne precesije su u radu [PVV] navedene kao primer k-minimalnih ($k \geq 2$) zatvorenih krivih u Euklidskom prostoru E^3.

U ovoj glavi, pomoću pojma hiperboličkog ugla klasifikovane su sve prostorne krive konstantne precesije (sa ne nul glavnom normalom) i sve vremenske krive konstantne precesije u Lorencovom prostoru L^3. S tim u vezi, najpre ćemo dokazati da je tangentna indikatrisa prostornih krivih konstantne precesije helisa koja leži na pseudosferi, a potom ćemo analogno dokazati da je tangentna indikatrisa vremenskih krivih konstantne precesije helisa koja leži na pseudohiperboličkom prostoru u Lorencovom prostoru L^3.

Neka je $\beta = \beta(s)$ kriva konstantne precesije jedinične brzine u Lorencovom prostoru L^3, parametrizovana funkcijom dužine luka s. Neka je $\{T(s), N(s), B(s)\}$ Freneov reper krive β. Razlikujemo dva slučaja: (A) β je prostorna kriva i (B) β je vremenska kriva. U nastavku, razmatramo posebno ova dva slučaja.

(A) U ovom slučaju, razmatramo dve mogućnosti:

(A.1) glavna normala N je prostorni vektor;

(A.2) glavna normala N je vremenski vektor.

(A.1) Označimo sa $C(s) = \tau(s)T(s) - \kappa(s)B(s)$ osu rotacije Freneovog repera krive β, tj. centroid krive β. Neka je $A(s) = C(s) + \mu N(s)$, $\mu \in R$ i pretpostavimo da je vektor $A(0)$ paralelan sa nekim fiksiranim pravcem $\overrightarrow{l}$ u prostoru L^3. S obzirom na odnos prve i druge krivine krive β, razlikujemo sledeće mogućnosti:

(A.1.1) $\kappa^2(s) > \tau^2(s)$;

(A.1.2) $\tau^2(s) > \kappa^2(s)$.

(A.1.1) U ovom slučaju, najpre ćemo fiksirati proizvoljne konstante ω i α. Neka je $\omega \in R^+$, $\omega^2 < \mu^2$ i $\alpha = \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$. Tada za krivu β važe sledeće dve leme.

Lema 3.1. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $||C'|| = \omega$;

(2) $||N'|| = \omega$;

(3) $||A|| = \alpha$;

(4) $\sinh(C, A) = \omega/\alpha$;

(5) $\cosh(N, A) = |\mu|/\alpha$.

Dokaz. Pošto je $g(C', C') = -g(N', N') = \tau^2 - \kappa^2$ i $g(A, A) = \mu^2 + \tau^2 - \kappa^2$, sledi da su tvrdjenja (1), (2) i (3) ekvivalentna. Neka je $\sigma = \mathrm{span}\{C, N\}$ ravan razapeta nad vektorima C i N. Tada je σ vremenska ravan i $A \in \sigma$. Prema tome, $|\sinh(C, A)| = |g(C, A)|/||C||\,||A|| = \omega/\alpha$ i $\cosh(N, A) = |g(N, A)|/||N||\,||A|| = |\mu|/\alpha$. $\square$

Lema 3.2 *Ako važi bilo koji od uslova iz leme 3.1, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(1) $||C''|| = |\mu\omega|$;

(2) vektor $A(s)$ paralelan je sa fiksiranim pravcem $\overrightarrow{l}$ za svako s.

Dokaz. Ako je $A' = 0$, onda i samo onda je $C'' = -\mu N'$, što je ekvivalentno sa $||C''|| = |\mu\omega|$. □

Teorema 3.1. *Neka je $\beta(s)$ prostorna kriva jedinične brzine sa prostornom glavnom normalom N, pri čemu je $\kappa^2(s) > \tau^2(s)$ za svako s. Tada $\beta(s)$ ima prirodne jednačine $\kappa(s) = \omega\cosh(\mu s)$, $\tau(s) = \omega\sinh(\mu s)$, $\omega \in R^+$, $\mu \in R$ ako i samo ako je $\beta(s)$ kriva konstantne precesije.*

Dokaz. Pretpostavimo najpre da je $\kappa(s) = \omega\cosh(\mu s)$, $\tau(s) = \omega\sinh(\mu s)$. Tada je $\tau'(s) = \mu\kappa(s)$, $\kappa'(s) = \mu\tau(s)$ i stoga je $A'(s) = 0$. Sledi da je $A(s) =$ constant i kako je po pretpostavci vektor $A(0)$ paralelan sa $\overrightarrow{l}$, sledi da je vektor $A(s)$ paralelan sa $\overrightarrow{l}$ za svako s. Tada na osnovu lema 3.1 i 3.2 sledi da je β kriva konstantne precesije.

Obratno, ako je $\beta(s)$ kriva konstantne precesije, tada na osnovu leme 3.2 imamo da je vektor $A(s)$ paralelan sa fiksiranim pravcem $\overrightarrow{l}$ za svako s, pa je $A' = 0$ što je ekvivalentno sa $(\tau' - \mu\kappa)T + (-\kappa' + \mu\tau)B = 0$. Prema tome, $\tau' = \mu\kappa$, $\kappa' = \mu\tau$. Odavde je $\kappa(s) = \omega\cosh(\mu s)$, $\tau(s) = \omega\sinh(\mu s)$. □

U nastavku, najpre ćemo dobiti parametarske jednačine tangentne indikatrise krive β, a potom integraljenjem parametarske jednačine krive β. Označimo sa $\gamma(s) = \beta'(s)$ tangentnu indikatrisu krive β. Pošto je $g(\gamma(s), \gamma(s)) = 1$, kriva $\gamma(s)$ leži na pseudosferi $x^2+y^2-z^2 = 1$ u prostoru L^3. Štaviše, lema 3.1 implicira da vektor $\gamma'(s)$, koji je kolinearan sa vektorom N, obrazuje konstantan hiperbolički ugao sa prostornim konstantnim vektorom A, tj. $(N, A) = (\frac{\gamma'}{||\gamma'||}, A) = \theta =$constant. Prema tome, $\gamma(s)$ je prostorna helisa koja leži na pseudosferi. Označimo sa s_γ funkciju dužine luka krive γ. Tada parametarske jednačine krive γ glase:

$$x_\gamma = s_\gamma \cosh\theta \qquad y_\gamma = y(s_\gamma) \qquad z_\gamma = z(s_\gamma). \tag{3.1}$$

Uočimo vektor $a_0 = A/||A||$ i pošto je na osnovu lema 3.1 i 3.2 vektor A prostorni konstantan vektor, možemo uzeti da je $a_0 = (1, 0, 0)$. Označimo sa $\gamma_\pi = \gamma_\pi(s_\pi)$ ortogonalnu projekciju krive γ na ravan $\pi \equiv Oyz$ koja je ortogonalna na vektor a_0, pri čemu je s_π funkcija dužine luka krive γ_π. Tada su parametarske jednačine krive γ_π oblika:

$$x_\pi = 0 \qquad y_\pi = y(s_\gamma) \qquad z_\pi = z(s_\gamma). \tag{3.2}$$

Štaviše, krive γ i γ_π su povezane relacijom

$$\gamma_\pi(s_\gamma) = \gamma(s_\gamma) - g(\gamma(s_\gamma), a_0)a_0. \tag{3.3}$$

Diferenciranjem prethodne jednačine u odnosu na s_γ, nalazimo da je

$$\gamma_\pi' = T_\gamma - \cosh(\theta)a_0. \tag{3.4}$$

i stoga je

$$d\gamma_\pi = (T_\gamma - \cosh(\theta)a_0)ds_1. \tag{3.5}$$

Pošto je

$$ds_\pi^2 = |g(d\gamma_\pi, d\gamma_\pi)| = \sinh^2(\theta)ds_1^2, \tag{3.6}$$

sledi da je

$$s_\pi = \sinh(\theta)s_\gamma. \tag{3.7}$$

Dalje imamo da je

$$T_\pi = \frac{d\gamma_\pi}{ds_\pi} = \frac{1}{\sinh(\theta)}T_\gamma - \coth(\theta)a_0, \tag{3.8}$$

i prema tome je

$$T_\pi' = \frac{d^2\gamma_\pi}{ds_\pi^2} = \frac{1}{\sinh^2(\theta)}\kappa_\gamma N_\gamma. \tag{3.9}$$

S druge strane, imamo da je

$$T_\pi' = \kappa_\pi N_\pi, \tag{3.10}$$

što zajedno sa relacijom (3.9) implicira da je

$$\kappa_\gamma = \sinh^2(\theta)\kappa_\pi, \quad N_\gamma || N_\pi. \tag{3.11}$$

Diferenciranjem jednakosti

$$\cosh(\theta) = g(T_\gamma, a_0) = \text{constant}, \tag{3.12}$$

u odnosu na s_γ, dobijamo da

$$g(N_\gamma, a_0) = 0. \tag{3.13}$$

Iz prethodne jednačine sledi da je

$$a_0 = \cosh(\theta)T_\gamma + \sinh(\theta)B_\gamma. \tag{3.14}$$

Diferenciranjem prethodne jednačine u odnosu na s_γ, dobija se

$$\cosh(\theta)T_\gamma' + \sinh(\theta)B_\gamma' = 0. \tag{3.15}$$

Dalje, koristeći odgovarajuće Freneove jednačine nalazimo da je

$$\frac{\kappa_\gamma}{\tau_\gamma} = -\tanh(\theta) = \text{constant}. \tag{3.16}$$

Štaviše, diferenciranjem jednačine $g(\gamma(s_\gamma), \gamma(s_\gamma)) = 1$ po s_γ i koristeći odgovarajuće Freneove formule, imamo da je

$$\gamma(s_\gamma) = -\frac{1}{\kappa_\gamma} N_\gamma + \frac{1}{\tau_\gamma}\Big(\frac{1}{\kappa_\gamma}\Big)' B_\gamma \tag{3.17}$$

i stoga je

$$g(\gamma(s_\gamma), \gamma(s_\gamma)) = \Big(\frac{1}{\kappa_\gamma}\Big)^2 - \Big(\frac{1}{\tau_\gamma}\Big(\frac{1}{\kappa_\gamma}\Big)'\Big)^2 = 1. \tag{3.18}$$

Neka je $R_\gamma = 1/\kappa_\gamma$, $T_\gamma = 1/\tau_\gamma$. Tada prethodna jednačina postaje

$$R_\gamma^2 - (T_\gamma R_\gamma')^2 = 1. \tag{3.19}$$

Zamenom $T_\gamma = -R_\gamma \tanh(\theta)$ i integraljenjem, dobijamo da je

$$R_\gamma^2 - s_\gamma^2 \coth^2(\theta) = 1. \tag{3.20}$$

Neka je $R_\pi = 1/\kappa_\pi$. Pomoću relacije (3.11) nalazimo da je $R_\gamma = R_\pi/\sinh^2(\theta)$ i pošto je $s_\gamma = s_\pi/\sinh(\theta)$, relacija (3.20) postaje

$$R_\pi^2 - s_\pi^2 \cosh^2(\theta) = \sinh^4(\theta). \tag{3.21}$$

ili ekvivalentno

$$\kappa_\pi^2 = \frac{1}{\sinh^4(\theta) + s_\pi^2 \cosh^2(\theta)}. \tag{3.22}$$

Označimo sa ϕ hiperbolički ugao izmedju vektora $e_2 = (0, 1, 0)$ i T_π, tj. $\phi = (e_2, T_\pi)$. Neka je $\phi'(s_\pi) = \kappa_\pi(s_\pi)$. Tada relacija (3.21) implicira da je

$$\phi(s_\pi) = \int \frac{ds_\pi}{\sqrt{\sinh^4(\theta) + s_\pi^2 \cosh^2(\theta)}}. \tag{3.23}$$

i stoga je

$$\phi(s_\pi) = \frac{1}{\cosh(\phi)} \sinh^{-1}\Big(\frac{s_\pi \cosh(\theta)}{\sinh^2(\theta)}\Big). \tag{3.24}$$

Iz prethodne jednačine dobijamo da je

$$s_\pi = \frac{\sinh^2(\theta)}{\cosh(\theta)}\sinh(\phi\cosh(\theta)). \tag{3.25}$$

Zamenom relacije (3.25) u relaciji (3.21) nalazimo da je

$$\kappa_\pi = \frac{1}{\sinh^2(\theta)\cosh(\phi\cosh(\theta))}. \tag{3.26}$$

Pomoću relacije (3.8) dobija se da je T_π vremenski jedinični vektor koji leži u vremenskoj ravni Oyz. Pošto je $\phi = (T_\pi, e_2)$, sledi da je

$$T_\pi = \sinh(\phi)e_2 + \cosh(\phi)e_3. \tag{3.27}$$

Dalje, pošto je $\gamma_\pi'(s_\pi) = T_\pi(s_\pi)$, dobija se da je

$$\gamma_\pi = \int \frac{1}{\kappa_\pi(\phi)}(\sinh(\phi)e_2 + \cosh(\phi)e_3)d\phi. \tag{3.28}$$

Zamenom relacije (3.26) u relaciji (3.28) i integraljenjem, nalazimo da parametarske jednačine krive γ_π glase

(3.29)

$$\begin{aligned}
x_\pi &= 0\\
y_\pi &= \frac{\sinh^2\theta}{2}\Big(\frac{1}{1+\cosh\theta}\cosh(\phi(1+\cosh\theta)) + \frac{1}{1-\cosh\theta}\cosh(\phi(1-\cosh\theta))\Big)\\
z_\pi &= \frac{\sinh^2\theta}{2}\Big(\frac{1}{1+\cosh\theta}\sinh(\phi(1+\cosh\theta)) + \frac{1}{1-\cosh\theta}\sinh(\phi(1-\cosh\theta))\Big)
\end{aligned}$$

Osim toga, funkcija dužine luka s krive β i funkcija dužine luka s_γ tangentne indikatrise γ, povezane su relacijom

$$\frac{ds_\gamma}{ds} = \kappa(s). \tag{3.30}$$

Štaviše, na osnovu teoreme 3.1, sledi da je $\kappa(s) = \omega\cosh(\mu s)$, što zajedno sa relacijom (3.30) daje

$$s_\gamma = \frac{\omega}{\mu}\sinh(\mu s). \tag{3.31}$$

Na osnovu leme 3.1 imamo da je $\cosh(\theta) = |\mu|/\alpha$ i stoga je $\sinh(\theta) = \omega/\alpha$. Koristeći relaciju (3.25), relacija (3.7) postaje

$$s_\gamma = \frac{\omega}{\mu}\sinh(\phi\cosh(\theta)). \tag{3.32}$$

Tada relacije (3.31) i (3.32) impliciraju da je

$$\varphi = \alpha s \tag{3.33}$$

Prema tome, zamenom $\sinh(\theta) = \omega/\alpha$, $\cosh(\theta) = |\mu|/\alpha$ u relaciji (3.29) i koristeći relaciju (3.33), relacija (3.29) postaje

$$\begin{aligned} x_\pi &= 0 \\ y_\pi &= \frac{\omega^2}{2\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha+\mu}\cosh((\alpha+\mu)s) + \frac{1}{\alpha-\mu}\cosh((\alpha-\mu)s)\Big) \\ z_\pi &= \frac{\omega^2}{2\alpha}\Big(\frac{1}{\alpha+\mu}\sinh((\alpha+\mu)s) + \frac{1}{\alpha-\mu}\sinh((\alpha-\mu)s)\Big). \end{aligned} \tag{3.34}$$

Tada relacije (3.1), (3.2) i (3.31) impliciraju da kriva γ ima parametarske jednačine oblika

$$\begin{aligned} x_\gamma &= \frac{\omega}{\alpha}\sinh(\mu s) \\ y_\gamma &= \frac{\mu-\alpha}{2\alpha}\cosh((\alpha+\mu)s) - \frac{\alpha+\mu}{2\alpha}\cosh((\alpha-\mu)s) \\ z_\gamma &= \frac{\mu-\alpha}{2\alpha}\sinh((\alpha+\mu)s) - \frac{\alpha+\mu}{2\alpha}\sinh((\alpha-\mu)s) \end{aligned} \tag{3.35}$$

Konačno, integraljenjem parametarskih jednačina (3.35), dobijaju se parametarske jednačine krive β u sledećoj teoremi.

Teorema 3.2. *Neka je $\beta = \beta(s)$ prostorna kriva konstantne precesije jedinične brzine sa prostornom glavnom normalom N u prostoru L^3, pri čemu je $\tau^2(s) > \kappa^2(s)$ za svako s. Tada kriva β ima parametarske jednačine oblika*

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{\omega}{\mu\alpha}\cosh(\mu s) \\ y(s) &= \frac{\mu-\alpha}{2\alpha(\alpha+\mu)}\sinh((\alpha+\mu)s) - \frac{\alpha+\mu}{2\alpha(\alpha-\mu)}\sinh((\alpha-\mu)s) \;. \\ z(s) &= \frac{\mu-\alpha}{2\alpha(\alpha+\mu)}\cosh((\alpha+\mu)s) - \frac{\alpha+\mu}{2\alpha(\alpha-\mu)}\cosh((\alpha-\mu)s) \end{aligned} \tag{3.36}$$

pri čemu je $\omega \in R^+$, $\mu \in R$, $\mu^2 > \omega^2$, $\alpha = \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$. Štaviše, kriva β leži na kvadrici $(\mu^2/\omega^2)x^2 + y^2 - z^2 = (-4\mu^2)/(\omega^4)$ u prostoru L^3.

(A.1.2) U ovom slučaju, fiksirajmo proizvoljne konstante ω i α. Neka $\omega \in R^+$ i neka je $\alpha = \sqrt{\mu^2 + \omega^2}$. Slično kao u slučaju (A.1.1), za krivu β važe sledeće dve leme.

Lema 3.3. *Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(1) $||C|| = \omega$;

(2) $||N'|| = \omega$;

(3) $||A|| = \alpha$;

(4) $\cos(C, A) = \omega/\alpha$;

(5) $\cos(N, A) = \mu/\alpha$.

Lema 3.4. *Ako važi bilo koji od uslova iz leme 3.3, tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(1) $||C'|| = |\mu\omega|$;

(2) vektor $A(s)$ *je paralelan sa fiksiranim pravcem* $\overrightarrow{l}$ *za svako* s.

Dokazi lema 3.3 i 3.4 analogni su dokazima lema 3.1 i 3.2 respektivno.

Teorema 3.3. *Neka je* $\beta = \beta(s)$ *prostorna kriva jedinične brzine sa prostornom glavnom normalom* N, *pri čemu je* $\tau^2(s) > \kappa^2(s)$. *Tada kriva* $\beta(s)$ *ima prirodne jednačine oblika* $\kappa(s) = \omega \sinh(\mu s)$, $\tau(s) = \omega \cosh(\mu s)$, $\omega \in R^+$, $\mu \in R$ *ako i samo ako je* $\beta(s)$ *kriva konstantne precesije.*

Dokaz. Dokaz ove teoreme teče analogno dokazu teoreme 3.1.

U nastavku, najpre ćemo dobiti parametarske jednačine tangentne indikatrise krive β, a potom prirodnu parameterizaciju krive β. Štaviše, koristićemo sličan postupak i metode kao u slučaju (A.1.1).

Neka je $\gamma(s) = \beta'(s)$ tangentna indikatrisa krive β. Tada je $g(\gamma(s), \gamma(s)) = 1$, pa kriva γ leži na pseudospheri sa jednačinom $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Na osnovu leme 3.3 sledi da njen tangentni vektor $\gamma'(s)$ obrazuje konstantan hiperbolički ugao sa prostornim konstantnim vektorom A, tj. $(N, A) = (\frac{\gamma'}{||\gamma'||}, A) = \theta =$constant. Prema tome, $\gamma(s)$ je prostorna helisa koja leži na pseudosferi. Stoga parametarske jednačine krive γ glase

$$x_\gamma = s_\gamma \cos\theta, \qquad y_\gamma = y_\gamma(s_\gamma), \qquad z_\gamma = z_\gamma(s_\gamma),$$

pri čemu je s_γ funkcija dužine luka krive γ. Dalje, neka je $a_0 = A/||A||$ jedinični vektor u pravcu prostornog konstantnog vektora A. Zato možemo uzeti da je $a_0 = (1, 0, 0)$. Označimo sa γ_π ortogonalnu projekciju krive γ na ravan $\pi \equiv Oyz$ koja je ortogonalna na vektoru a_0. Tada kriva γ_π jedinične brzine ima parametarske jednačine oblika

$$
\begin{aligned}
x_\pi &= 0,\\
y_\pi &= \frac{\sin^2\theta}{2}\Big(\frac{1}{1+\cos\theta}\cosh(\phi(1+\cos\theta)) + \frac{1}{\cos\theta-1}\cosh((\cos\theta-1)\phi)\Big),\\
z_\pi &= \frac{\sin^2\theta}{2}\Big(\frac{1}{1+\cos\theta}\sinh(\phi(1+\cos\theta)) - \frac{1}{\cos\theta-1}\sinh((\cos\theta-1)\phi)\Big).
\end{aligned}
$$

Štaviše, zamenom $\sin\theta = \omega/\alpha$, $\cos\theta = \mu/\alpha$, $\phi = \alpha s$, $s_\gamma = \omega\cosh(\phi\cos\theta)/\mu$ u prethodnim parametarskim jednačinama, nalazimo da parametarske jednačine krive γ glase:

$$
\begin{aligned}
x_\gamma &= \frac{\omega}{\alpha}\cosh(\mu s),\\
y_\gamma &= y_\pi = \frac{\alpha-\mu}{2\alpha}\cosh((\alpha+\mu)s) - \frac{\alpha+\mu}{2\alpha}\cosh((\mu-\alpha)s),\\
z_\gamma &= z_\pi = \frac{\alpha-\mu}{2\alpha}\sinh((\alpha+\mu)s) + \frac{\alpha+\mu}{2\alpha}\sinh((\mu-\alpha)s).
\end{aligned}
$$

Konačno, integraljenjem poslednjih jednačina dobija se parametrizacija krive β u terminima njene funkcije dužine luka s. Pomenuta parametrizacija data je u sledećoj teoremi.

Teorema 3.4. *Neka je $\beta = \beta(s)$ prostorna kriva konstantne precesije jedinične brzine sa prostornom glavnom normalom N u prostoru L^3, pri čemu je $\kappa^2(s) > \tau^2(s)$ za svako s. Tada β ima parametarske jednačine oblika*

$$
\begin{aligned}
x(s) &= \frac{\omega}{\mu\alpha}\sinh(\mu s),\\
y(s) &= \frac{\alpha-\mu}{2\alpha(\alpha+\mu)}\sinh((\alpha+\mu)s) - \frac{\alpha+\mu}{2\alpha(\mu-\alpha)}\sinh((\mu-\alpha)s),\\
z(s) &= \frac{\alpha-\mu}{2\alpha(\alpha+\mu)}\cosh((\alpha+\mu)s) + \frac{\alpha+\mu}{2\alpha(\mu-\alpha)}\cosh((\mu-\alpha)s),
\end{aligned}
$$

pri čemu $\omega \in R^+$, $\mu \in R$, $\alpha = \sqrt{\omega^2+\mu^2}$. Štaviše, kriva β leži na kvadrici $(\mu^2/\omega^2)x^2 - y^2 + z^2 = (4\mu^2/\omega^4)$ u prostoru L^3.

(A.2) U ovom slučaju, označimo sa $C(s) = -\tau(s)T(s)+\kappa(s)B(s)$ osu rotacije Freneovog repera krive β. Neka je $A(s) = C(s) + \mu N(s)$, $\mu \in R$. Pretpostavimo da je vektor $A(0)$ paralelan sa nekim fiksiranim pravcem $\overrightarrow{l}$ u prostoru L^3. Osim toga, fiksirajmo konstante ω i α, tj. neka je $\omega \in R^+$, $\omega^2 < \mu^2$, $\alpha = \sqrt{\mu^2-\omega^2}$. Tada lako nalazimo da važe leme 3.1 i 3.2. Štaviše, koristeći ove dve leme dobija se sledeći rezultat.

Teorema 3.5. *Neka je $\beta = \beta(s)$ prostorna kriva jedinične brzine sa vremenskom glavnom normalom N u prostoru L^3. Tada $\beta(s)$ ima prirodne jednačine oblika $\kappa(s) = \omega\cos(\mu s)$, $\tau(s) = \omega\sin(\mu s)$, $\omega \in R^+$, $\mu \in R$, ako i samo ako je $\beta(s)$ kriva konstantne precesije.*

Dokaz ove teoreme analogan je dokazu teoreme 3.1.

Kao u prethodnim podslučajevima, najpre nalazimo parametarske jednačine tangentne indikatrise krive β, a zatim dobijamo parametrizaciju krive β. Pošto je postupak dobijanja ovih dveju parametrizacija sličan već izvedenom postupku u slučajevima (A.1.1) i (A.1.2), dajemo samo neke etape ovog postupka. Označimo sa $\gamma(s) = \beta'(s)$ tangentnu indikatrisu krive β. Tada je $g(\gamma(s), \gamma(s)) = 1$, pa stoga kriva $\gamma(s)$ leži na pseudosferi $x^2 + y^2 - z^2 = 1$. Osim toga, na osnovu leme 3.1 sledi da njen tangentni vektor $\gamma'(s)$ obrazuje konstantan hiperbolički ugao sa vremenskim konstantnim vektorom A, tj. $(N, A) = (\frac{\gamma'}{||\gamma'||}, A) = \theta$ =constant. Stoga sledi da je $\gamma(s)$ vremenska helisa koja leži na pseudosferi. Njene parametarske jednačine glase:

$$x_\gamma = x_\gamma(s_\gamma), \qquad y_\gamma = y_\gamma(s_\gamma), \qquad z_\gamma = s_\gamma \cosh\theta,$$

pri čemu je s_γ funkcija dužine luka krive γ. Neka je $a_0 = A/||A||$, pa možemo uzeti da je $a_0 = (0, 0, 1)$. Ako se kriva γ ortogonalno projektuje na ravan $\pi \equiv Oxy$ koja je ortogonalna na a_0, nalazimo da ortogonalna projekcija γ_π jedinične brzine ima parametarske jednačine:

$$\begin{aligned}
x_\pi &= \frac{\sinh^2\theta}{2}\Big(\frac{1}{1+\cosh\theta}\sin((1+\cosh\theta)\phi) + \frac{1}{\cosh\theta - 1}\sin((\cosh\theta - 1)\phi)\Big),\\
y_\pi &= \frac{\sinh^2\theta}{2}\Big(\frac{-1}{\cosh\theta+1}\cos((\cosh\theta+1)\phi) + \frac{1}{\cosh\theta - 1}\cos((1-\cosh\theta)\phi)\Big),\\
z_\pi &= 0.
\end{aligned}$$

Štaviše, zamenom $\sinh\theta = \omega/\alpha$, $\cosh\theta = |\mu|/\alpha$, $\phi = \alpha s$, $s_\gamma = \frac{\omega}{\mu}\sin(\phi\cosh\theta)$ u poslednjim parametarskim jednačinama, sledi da parametrizacija krive γ glasi:

$$\begin{aligned}
x_\gamma &= x_\pi = \frac{\mu-\alpha}{2\alpha}\sin((\alpha+\mu)s) + \frac{\alpha+\mu}{2\alpha}\sin((\mu-\alpha)s),\\
y_\gamma &= y_\pi = \frac{\alpha-\mu}{2\alpha}\cos((\alpha+\mu)s) + \frac{\alpha+\mu}{2\alpha}\cos((\alpha-\mu)s),\\
z_\gamma &= \frac{\omega}{\alpha}\sin(\mu s).
\end{aligned}$$

Konačno, integraljenjem prethodnih jednačina, dobija se prirodna parametrizacija krive β u sledećoj teoremi.

Teorema 3.6. *Neka je $\beta = \beta(s)$ prostorna kriva konstantne precesije jedinične brzine sa vremenskom glavnom normalom N u prostoru L^3. Tada je prirodna parametrizacija krive β data sa*

$$\begin{aligned}
x(s) &= \frac{\alpha-\mu}{2\alpha(\alpha+\mu)}\cos((\alpha+\mu)s) + \frac{\alpha+\mu}{2\alpha(\alpha-\mu)}\cos((\alpha-\mu)s),\\
y(s) &= \frac{\alpha-\mu}{2\alpha(\alpha+\mu)}\sin((\alpha+\mu)s) + \frac{\alpha+\mu}{2\alpha(\alpha-\mu)}\sin((\alpha-\mu)s),\\
z(s) &= -\frac{\omega}{\mu\alpha}\cos(\mu s),
\end{aligned}$$

pri čemu $\omega \in R^+$, $\mu \in R$, $\omega^2 < \mu^2$, $\alpha = \sqrt{\mu^2 - \omega^2}$. Štaviše, kriva β leži na kvadrici $x^2 + y^2 - (\mu^2/\omega^2)z^2 = 4\mu^2/\omega^4$ i zatvorena je ako i samo ako je μ/α racionalan broj.

Napomena 3.1. Parametrizacija krive β iz teoreme 3.6 dobijena je u radu [Š3].

Posledica 3.1. Sve prostorne krive konstantne precesije za koje je μ/α racionalan broj, su krive tipa 3 u prostoru L^3.

(B) U ovom slučaju, označimo sa $C(s) = -\tau(s)T(s) - \kappa(s)B(s)$ osu rotacije Freneovog repera krive β i neka je $A(s) = C(s) + \mu N(s)$, $\mu \in R$. Pretpostavimo da je vektor $A(0)$ paralelan sa nekim fiksiranim pravcem $\overrightarrow{l}$ u prostoru L^3. Tada razlikujemo dva slučaja:

(B.1) $\kappa^2(s) > \tau^2(s)$;

(B.2) $\tau^2(s) > \kappa^2(s)$.

(B.1) U ovom slučaju, fiksirajmo konstante $\omega \in R^+$, $\alpha = \sqrt{\omega^2 + \mu^2}$. Nije teško dokazati da tada važe uslovi iz lema 3.3 i 3.4. Štaviše, koristeći ove dve leme, dobija se sledeća teorema.

Teorema 3.7. *Neka je $\beta = \beta(s)$ vremenska kriva jedinične brzine u prostoru L^3, pri čemu je $\kappa^2(s) > \tau^2(s)$ za svako s. Tada kriva $\beta(s)$ ima prirodne jednačine oblika $\kappa(s) = \omega\cosh(\mu s)$, $\tau(s) = \omega\sinh(\mu s)$, $\omega \in R^+$, $\mu \in R$, ako i samo ako je $\beta(s)$ kriva konstantne precesije.*

U ovom slučaju, tangentna indikatrisa $\gamma(s) = \beta'(s)$ krive β je prostorna helisa koja leži na pseudohiperboličkom prostoru $x^2 + y^2 - z^2 = -1$. Slično kao u prethodnim slučajevima, nalazimo parametarske jednačine krive γ, a zatim integraljenjem tih jednačina, dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 3.8. *Neka je $\beta = \beta(s)$ vremenska kriva konstantne precesije* *jedinične brzine, pri čemu je $\kappa^2(s) > \tau^2(s)$ za svako s. Tada su parametarske jednačine krive β oblika*

$$
\begin{aligned}
x(s) &= \frac{\omega}{\mu\alpha}\cosh(\mu s),\\
y(s) &= \frac{\alpha-\mu}{2\alpha(\alpha+\mu)}\cosh((\alpha+\mu)s)+\frac{\alpha+\mu}{2\alpha(\alpha-\mu)}\cosh((\alpha-\mu)s),\\
z(s) &= \frac{\alpha-\mu}{2\alpha(\alpha+\mu)}\sinh((\alpha+\mu)s)+\frac{\alpha+\mu}{2\alpha(\alpha-\mu)}\sinh((\alpha-\mu)s),
\end{aligned}
$$

pri čemu $\omega \in R^+$, $\mu \in R$, $\alpha = \sqrt{\mu^2+\omega^2}$. Štaviše, kriva β leži na kvadrici $(\mu^2/\omega^2)x^2 - y^2 + z^2 = -4\mu^2/\omega^4$.

(B.2) U ovom slučaju, fiksirajmo konstante $\omega \in R^+$, $\omega^2 < \mu^2$, $\alpha = \sqrt{\mu^2-\omega^2}$. Tada se lako pokazuje da važe uslovi iz lema 3.1 i 3.2. Štaviše, pomoću ove dve leme, dobijaju se sledeće dve teoreme.

Teorema 3.9. *Neka je $\beta = \beta(s)$ vremenska kriva jedinične brzine u prostoru L^3, pri čemu je $\tau^2(s) > \kappa^2(s)$ za svako s. Tada $\beta(s)$ ima prirodne jednačine oblika $\kappa(s) = \omega\sinh(\mu s)$, $\tau(s) = \omega\cosh(\mu s)$, $\omega \in R^+$, $\mu \in R$, ako i samo ako je $\beta(s)$ kriva konstantne precesije.*

Teorema 3.10. *Neka je $\beta = \beta(s)$ vremenska kriva konstantne precesije jedinične brzine u prostoru L^3, pri čemu je $\tau^2(s) > \kappa^2(s)$ za svako s. Tada β ima parametarske jednačine oblika*

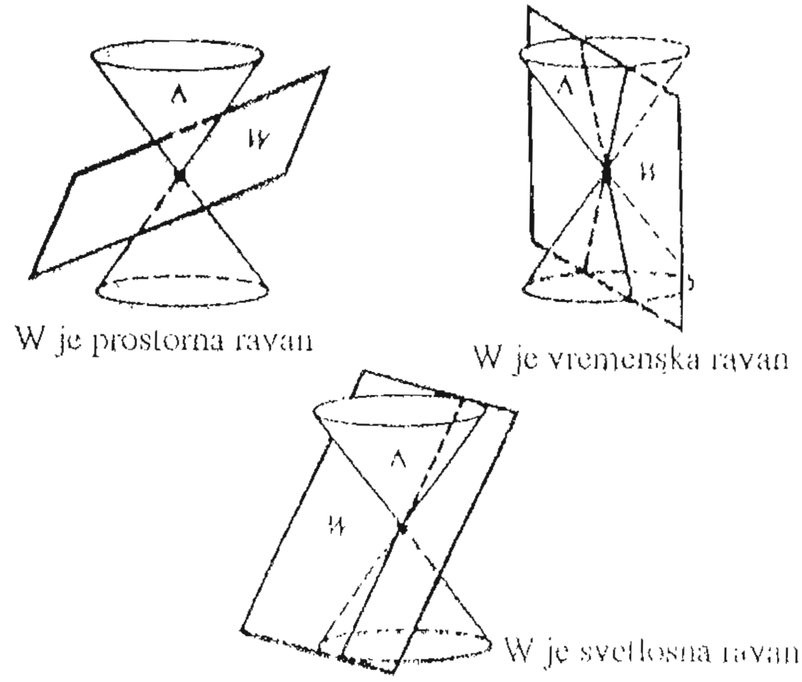
$$
\begin{aligned}
x(s) &= \frac{\omega}{\mu\alpha}\sinh(\mu s),\\
y(s) &= \frac{\mu-\alpha}{2\alpha(\alpha+\mu)}\cosh((\alpha+\mu)s)-\frac{\alpha+\mu}{2\alpha(\mu-\alpha)}\cosh((\mu-\alpha)s),\\
z(s) &= \frac{\mu-\alpha}{2\alpha(\alpha+\mu)}\sinh((\alpha+\mu)s)-\frac{\alpha+\mu}{2\alpha(\mu-\alpha)}\sinh((\mu-\alpha)s),
\end{aligned}
$$

pri čemu je $\omega \in R^+$, $\omega^2 < \mu^2$, $\alpha = \sqrt{\mu^2-\omega^2}$. Štaviše, kriva β leži na kvadrici $(\mu^2/\omega^2)x^2 + y^2 - z^2 = 4\mu^2/\omega^4$.

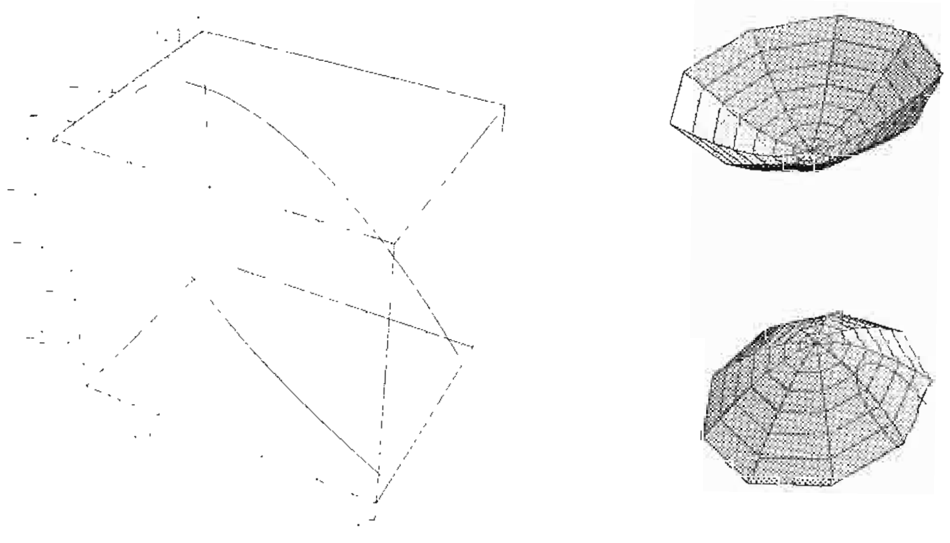
Posledica 3.2. Sve vremenske krive konstantne precesije za koje je μ/α racionalan broj su krive tipa 3 u prostoru L^3.

Na taj način, teoremom 3.10 kompletirana je klasifikacija svih ne nul krivih konstantne precesije u Lorencovom prostoru L^3.

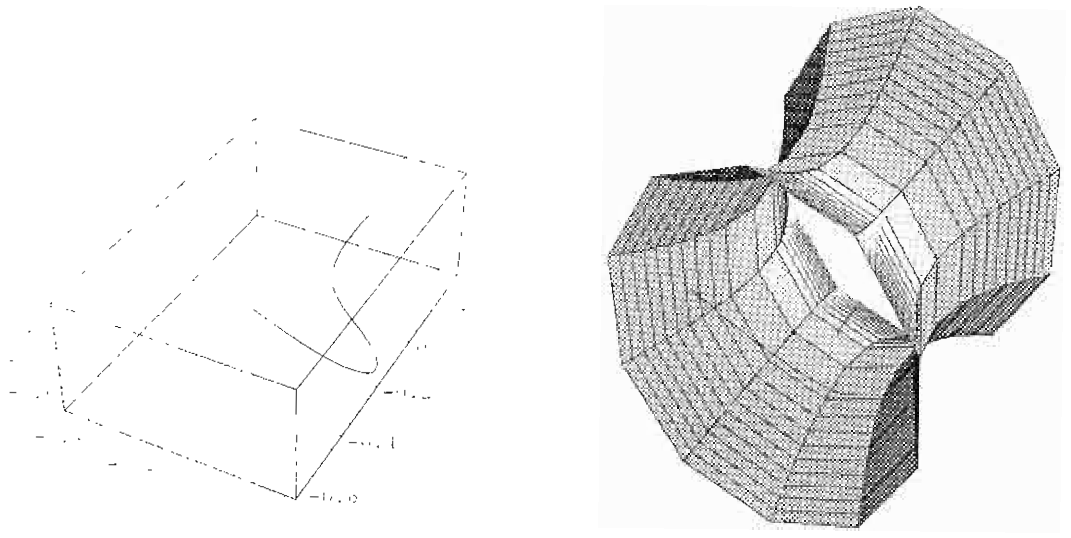
SLIKE



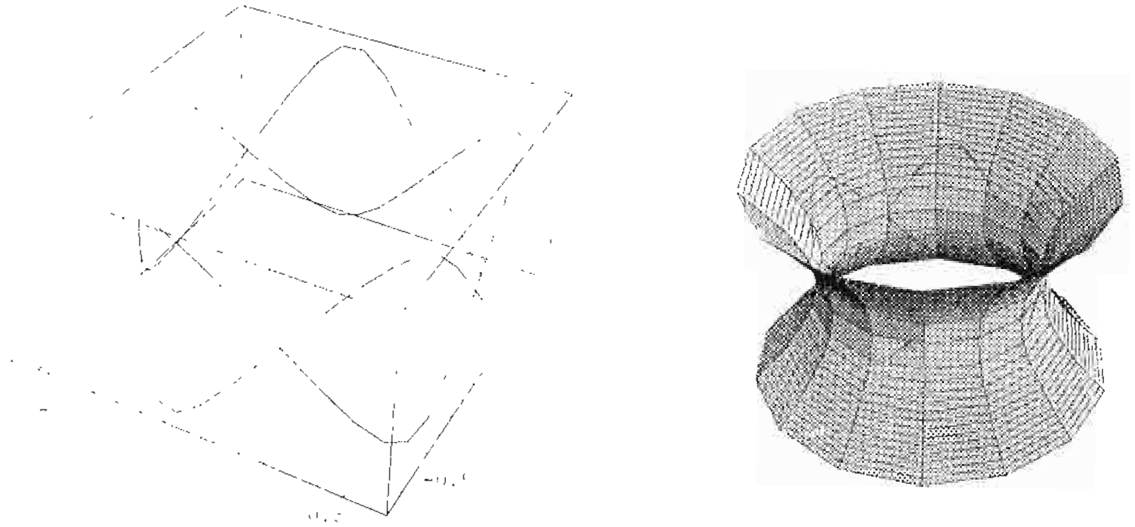
Slika 1. Kauzalni karakter ravni



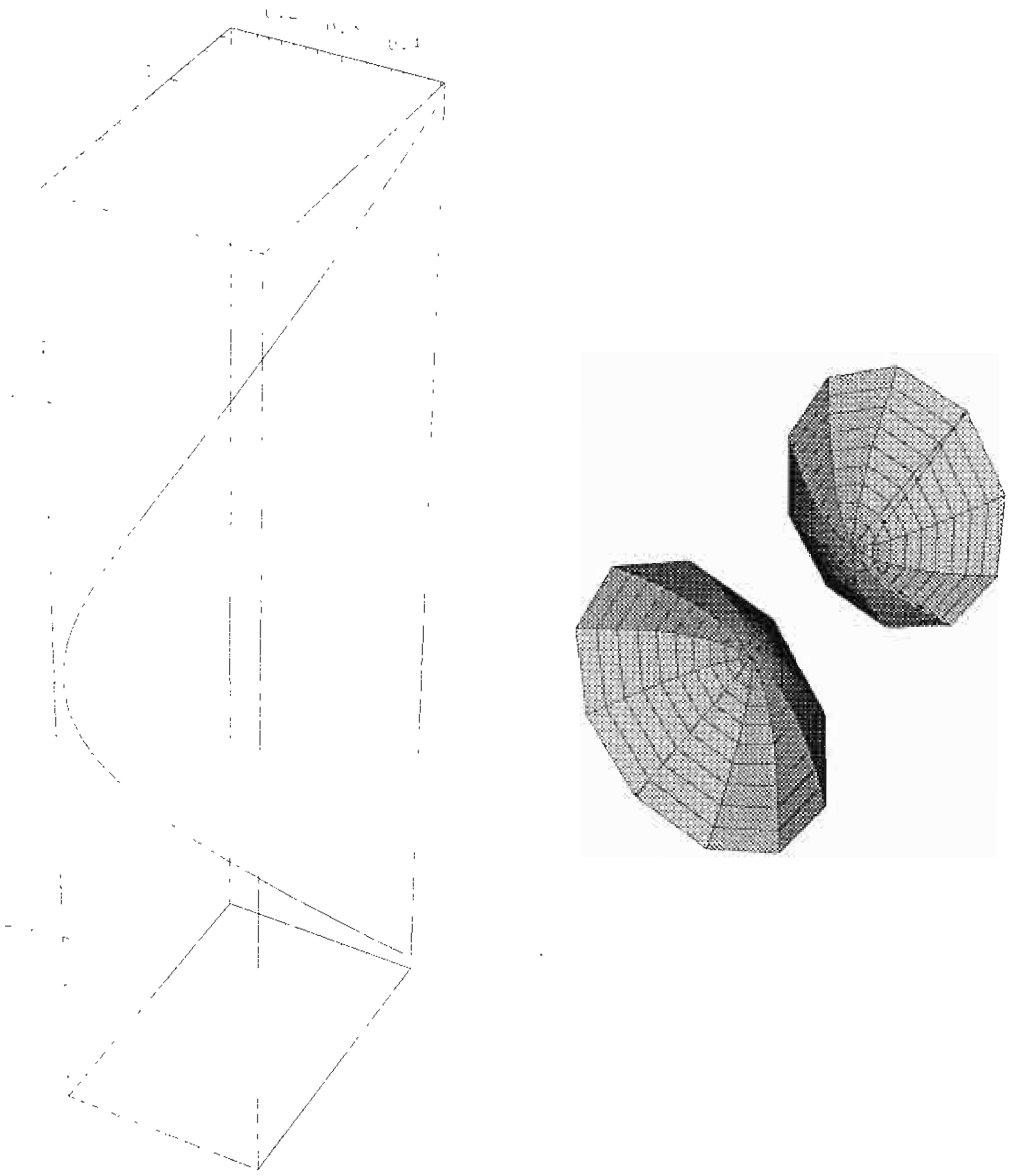
Slika 2. Prostorna kriva konstantne precesije sa prostornom glavnom normalom i $\kappa^2 > \tau^2$



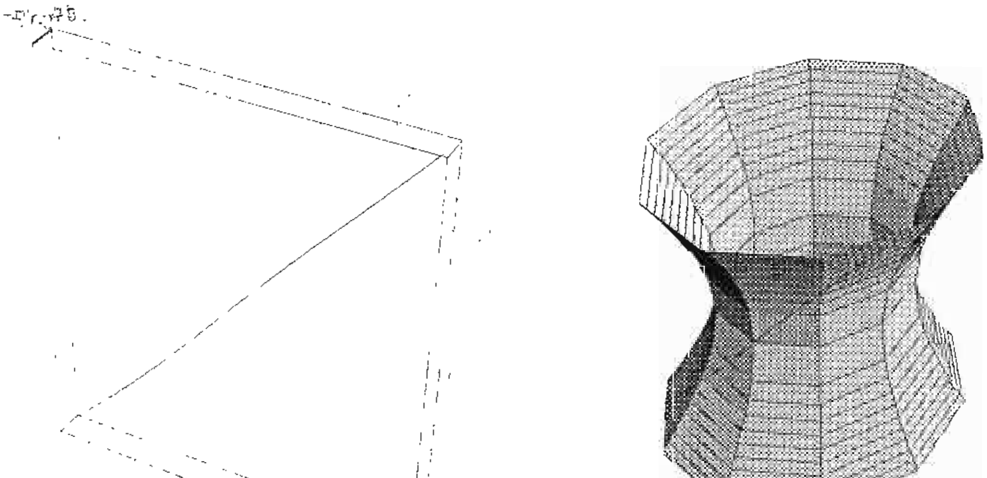
Slika 3. Prostorna kriva konstantne precesije sa prostornom glavnom normalom i $\kappa^2 < \tau^2$



Slika 4. Prostorna kriva konstantne precesije sa vremenskom glavnom normalom



Slika 5. Vremenska kriva konstantne precesije sa $\kappa^2 > \tau^2$



Slika 6. Vremenska kriva konstantne precesije sa $\kappa^2 < \tau^2$.

LITERATURA

[B] **D. E. Blair**, *A classification of 3 type curves*, Soochow J. Math. **21** (1995), 145–158.

[BB] **N. Blažić, N. Bokan**, "Uvod u diferencijalnu geometriju", Vesta Matematički fakultet, Beograd, 1996.

[BBE] **H. Balgetir, M. Bektas, M. Ergut**, *On a characterization of null helix*, Bulletin of the Institute of Mathematics Academia Sinica Vol. **29**, No. 1 (2001), 71–78.

[BE] **J. K. Beem, P. E. Ehrlich**, "Global Lorentzian geometry", Marcel Dekker, New York, 1981.

[BN] **G. S. Birman, K. Nomizu**, *Trigonometry in Lorentzian geometry*, Amer. Math. Monthly **91 (9)** (1984), 543–549.

[BN1] **G. S. Birman, K. Nomizu**, *The Gauss-Bonnet theorem for 2-dimensional spacetimes*, Michigan Math. J. **31** (1984), 77–81.

[Bo] **W. B. Bonnor**, *Null curves in a Minkowski space-time*, Tensor **20**, (1969), 229–242.

[C] **B. Y. Chen**, "Total mean curvature and submanifolds of finite type", World Scientific, Singapore, 1984.

[C1] **B. Y. Chen**, *On submanifolds of finite type*, Soochow J. Math. **9** (1983), 65–81.

[C2] **B. Y. Chen**, *A report on submanifolds of finite type*, Soochow Journal of Math. **22** (1996), 117–337.

[C3] **B. Y. Chen**, "Finite type submanifolds and generalizations", University of Roma, Roma, 1985.

[C4] **B. Y. Chen**, *When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane?* prihvaćeno za štampu u Amer. Math. Monthly (2002).

[CDDVV] **B. Y. Chen, J. Deprez, F. Dillen, L. Verstraelen and L. Vrancken**, *Curves of finite type*, Geometry and Topology of Submanifolds, **II**, World Scientific, 1990, 76–110.

[CDV] **B. Y. Chen, F. Dillen and L. Verstraelen**, *Finite type space curves*, Soochow J. Math. **12** (1986), 1–10.

[CDVV] **B. Y. Chen, F. Dillen, L. Verstraelen and L. Vrancken**, *Ruled surfaces of finite type*, Bull. Austral. Math. Soc. **42** (1990), 447-453.

[CIŠ] **C. Camci, K. Ilarslan, E. Šućurović**, *On pseudohyperbolical curves in Minkowski space-time*, Turkish J. Math. (2002), prihvaćeno za štampu.

[CKS] **H. S. Chung, D. S. Kim, K. H. Sohn**, *Finite type curves in the Lorentz Minkowski plane*, Honam J. Math. **17** (1995), 41 47.

[DB] **K. L. Duggal, A. Bejancu**, "Lightlike Submanifolds of Semi Riemannian Manifolds and Aplications", Kluwer Academic, Dordrecht, 1996.

[DDV] **J. Deprez, F. Dillen, L. Vrancken**, *Finite type curves on quadrics*, Chinese J. math. 18 (1990), 95 121.

[DPVV] **F. Dillen, M. Petrović– Torgašev, L. Verstraelen, L. Vrancken**, *Classification of curves of Chen type 2*, Differential Geometry, in honor of R. Rosca, K. U. Leuven, Dept. Wis. 1991, 101–106.

[DVVW] **F. Dillen, I. Van de Woestijne, L. Verstraelen, J. Walrave**, *Curves and ruled surfaces of finite type in Minkowski space*, Geometry and Topology of Submanifolds **VII**, World Scientific, Singapore, 1995, 124 127.

[E] **A. Einstein**, "Relativity - The Special and the General Theory", Crown Publishers, Inc. New York, 1961.

[EHI] **N. Ekmekci, H. Hacisalihoglu, K. Ilarslan**, *Harmonic Curvatures in Lorentzian Space*, Bull. Malaysian Math. Sc. Soc.(Second Series) **23** (2000), 173-179.

[EI] **N. Ekmekci, K. Ilarslan**, *Higher curvatures of a regular curve in Lorentzian space*, Jour. of Inst. of Math. & Comp. Sci. (Math. Ser.) Vol. **11**, No. 2 (1998), 97–102.

[G] **H. Gluck**, *Higher curvatures of curves in Euclidean space*, Amer. Math. Monthly **73** (1966), 699 704.

[H] **S. G. Harris**, *What is the Shape of Space in a Spacetime?*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. **54**, Part 2 (1993), 287 295.

[I] **T. Ikawa**, *On curves and submanifolds in an indefinite -Riemannian manifold*, Tsukuba J. Math. Vol. **9**, No. 2 (1985), 353-371.

[MP] **R. S. Milman, G. D. Parker**, "Elements of Differential Geometry", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1977.

[N] **Y. Nakanishi**. *On helices and pseudo Riemannian submanifolds*, Tsukuba J. Math. Vol. **12** No. 2 (1988), 469–476.

[O] **B. O'Neill**. "Semi Riemannian geometry", Academic Press, New York, 1983.

[PP] **U. Pekmen, S. Pasali**. *Some characterizations of Lorentzian spherical space like curves*. Mathematica Moravica **3** (1999), 33–37.

[PT] **M. Petrović–Torgašev**. *3-type curves in the Euclidean space* E^5, Kragujevac J. Math. (2002), prihvaćeno za štampu.

[PT1] **M. Petrović–Torgašev**. *3-type curves in the Euclidean space* E^6, preprint.

[PV] **M. Petrović–Torgašev, L. Verstraelen**. *3-type curves in the Euclidean space* E^4, Novi Sad J. Math. Vol. **29**, No. 3, (1999), 231–247.

[PV1] **M. Petrović–Torgašev, L. Verstraelen**. *Curves of finite Chen type and k-minimal curves*, Geometry and Topology of Submanifolds **VII**, World Scientific, Singapore, (1995), 214-217.

[PVV] **M. Petrović–Torgašev, J. Verstraelen and L. Verstraelen**. *Principal normal spectral variations of space curves*. Proyecciones (Revista de Matematica), Univ. Cat. del Norte, Chile. Vol. **19**, No. 2 (2000), 141–155.

[PVV1] **M. Petrović–Torgašev, L. Verstraelen, L. Vrancken**. *3-type curves on ellipsoids of revolution*, Preprint series Dep. Math. Kath. Univ. Leuven 2 (3) (1990), 31–49.

[PVV2] **M. Petrović–Torgašev, L. Verstraelen, L. Vrancken**. *3-type curves on hyperboloids of revolution and cones of revolution*. Publ. Inst. Math. (Beograd) **59 (73)** (1996), 138–152.

[PŠ] **M. Petrović–Torgašev, E. Šućurović**. *Some characterizations of Lorentzian spherical spacelike curves with the timelike and the null principal normal*. Mathematica Moravica Vol.**4** (2000), 83–92.

[PŠ1] **M. Petrović–Torgašev, E. Šućurović**. *Some characterizations of the Lorentzian spherical timelike and null curves*. Matematički Vesnik Vol.**53** (1–2) (2001), 21–27.

[PS2] **M. Petrović–Torgašev, E. Šućurović**. *Some characterizations of curves lying on the pseudohyperbolic space* H_0^2 *in the in the Minkowski space* E_1^3. Kragujevac J. Math. **22** (2000), 71–82.

[PŠ3] **M. Petrović–Torgašev, E. Šućurović**. *W curves in Minkowski space* *time*. Novi Sad J. Math. (2002). prihvaćeno za štampu.

[R] **H. Reichenbach**. "The philosophy of space&time". Dover Publications, Inc. New York. 1958

[S] **J. L. Synge**. "Relativity: the special theory", North–Holland publ. company. Amsterdam. 1972.

[Sc] **P. D. Scofield**. *Curves of constant precession*. Amer. Math. Monthly **102 (6)** (1995). 531-537.

[St] **D. J. Struik**. "Lectures on classical differential geometry". Addison Wesley. Boston. 1950.

[Sy] **J. L. Synge**. *Timelike helices in flat space-time*. Proc. Roy. Irish Academy. **A65**. (1967). 27 42.

[SW] **R. K. Sachs, H. Wu**. "General Relativity for Mathematicians". Springer-Verlag. New York Inc. 1977.

[Š] **E. Šućurović**. *A classification of 3-type curves in Minkowski 3-space E_1^3. II*. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) **68 (82)**. (2000). 117–132.

[S1] **E. Šućurović**. *A classification of 3 type curves in Minkowski 3 space E_1^3. I*. Novi sad J. Math. Vol.**29**, No. 3. (1999). 357 367.

[S2] **E. Šućurović**. *A classification of 2 type curves in the Minkowski space E_1^n*. Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) (2002). prihvaćeno za štampu.

[Š3] **E. Šućurović**. *Krive u prostorima Minkovskog*. Magistarski rad. Univ. u Kragujevcu. Prirodno–matematički fakultet. Kragujevac. 1998.

[UK] **H. Ugurlu, H. Kocayigit**. *The Frenet and Darboux instantaneous rotation vectors of curves on time-like surface*. Mathematical & Computational Applications. Vol. 1. No. 2. (1996). 133–141.

[W] **J. Walrave**. *Curves and surfaces in Minkowski space*. Doctoral thesis. Kath. Univ. Leuven. Fac. of Science. Leuven. 1995.

[WO] **Y. C. Wong**. *A global formulation of the condition for a curve to lie in a sphere*. Monatschafte fur Mathematik **67**. (1963). 363- 365.

[WO1] **Y. C. Wong**. *On an explicit characterization of spherical curves*. Proceedings of the American Mathematical Society **34**. (1972). 239 242.