Универзитет у Београду - Математички факултет
Наставно-научном већу

Извештај комисије за оцену докторске дисертације кандидата Николе Мутавџића

Одликом Наставно-научног већа Математичког факултета Универзитета у Београду, донетој на седници одржаној 20. јануара 2023. године, именовани смо са чланове Комисије за оцену докторске дисертације **"Оцене раста градијента за функције добијене репрезентацијама Пуасоновог типа"** кандидата Николе Мутавџића. Након прегледања дисертације комисија подноси Наставно-научном већу следећи извештај.

1. Основни подаци о кандидату и дисертацији

Име и презиме: Никола (Милован) Мутавџић
Датум и место рођења: 22.8.1988. Чачак

Образовање: Дипломирао је на Математичком факултету Универзитета у Београду (смер Теоријска математика и примене) 2. јула 2011. године, са просечном оценом 9,72. Мастер академске студије уписао је школске 2011/2012. године на студијском програму Математика на Математичком факултету Универзитета у Београду. Мастер рад под насловом "Каратеодоријева теорема за конформна и квазиконформна пресликавања" одбранио је 21. јануара 2013. са оценом 10 код ментора проф. др Миодрага Матељевића. Докторске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду (студијски програм Математика) уписао је октобра 2013. године. На докторским студијама положио је следеће испите: Анализа 4, Хардијеви и Бергманови простори, Спектрална теорија, Нелинеарна функционална анализа, Комплексна анализа, Динамика система тела, Квазиконформна и хармонијска пресликавања и Специјални курс - Геометријска теорија функција 2 (све са оценом 10). Школске 2021/22. поново је уписао докторске студије на Математичком факултету Универзитета у Београду, студијски програм Математика.

Радно искуство: Запослен на Математичком факултету Универзитета у Београду од октобра 2011. године до марта 2020. године, најпре као сарадник у настави, затим као асистент. До сада је држао вежбе из следећих предмета: Анализа 1А, Анализа 1Б, Анализа 2А, Анализа 2Б, Комплексне функције, Увод у финансијску математику, Комплексна анализа А, Комплексна анализа Б, Начела наставе математике. Од марта 2020. године запослен је на Математичком институту САНУ, као Истраживач приправник.

Учешће на научно-истраживачким пројектима: Пројекат Министарства за науку Републике Србије - ОН 174032 Анализа и алгебра са применама (2011-2020.).

Наслов дисертације: Оцене раста градијента за функције добијене репрезентацијама Пуасоновог типа.

Обим дисертације и библиографија: Дисертација има $X+87$ страна и три прилога (изјава о ауторству, изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада и изјава о коришћењу). Главни део дисертације састоји се од увода и седам глава. У литератури је наведена 71 референца.

2. Предмет и циљ дисертације

Предмет дисертације јесте испитивање понашања градијента за различите класе функција, дефинисаних на областима у $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, а специјално на лопти и полупростору. У истраживању, посматране су класе функција које су хармонијске у односу на фамилију Риманових метрика дефинисаних на полупростору, те стога имају репрезентације уопштеног Пуасоновог типа. Како су основна истраживања неједнакости које проистичу из Шварцове леме, посматрана су и уопштења Шварцове леме на граници, као и неки резултати везани за Џекову лему.

Циљ дисертације јесте утврђивање својстава Липшиц и Хелдер непрекидности функција и пресликавања, на основу глаткости области дефинисаности и слике, као и претпоставке да задовољавају одређене парцијалне једнакости и неједнакости другог реда, а у неким случајевима и одговарајуће граничне услове. Такође, циљ дисертације јесте и приказ техника хиперболичке геометрије у простору и неких елемената Хардијеве теорије, које доводе до једноставних доказа неких савремених резултата.

3. Основне хипотезе од којих се полази у истраживању

Позната теорема Келога нам говори да конформно пресликавање између две $C^{1,\alpha}$ области мора бити класе $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Одавде добијамо да је извод овог пресликавања Хелдер непрекидна функција. Класичан доказ ове теореме заснива се на резултатима иза теорије Хардијевих простора и напредних неједнакости из геометријске теорије функција. Сходно томе, дошло је до низа тешкоћа при покушајима да се сличан резултат добије за квазиконформна пресликавања. Насупрот томе, може се доказати да хармонијско квазиконформно пресликавање између два диска у равни мора бити Липшицово. Један доказ овог тврђења може се базирати на познавању оцена извода Пуасоновог језгра на диску, што нам даје могућност да добијемо оцену извода полазног пресликавања, али само у тангентним правцима. Ограниченост извода у свим правцима следи из одређених особина квазиконформних пресликавања.

Сличним поступком, могуће је доказати да су хармонијска квазиконформна пресликавања између две лопте у $\mathbb{R}^n, n > 2$, такође Липшицова. Исти закључак добијамо ако уместо хармонијских посматрамо пресликавања која задовољавају одређене Пуасонове једначине. У овом случају је погодно знати оцене извода Гриновог језгра за лопту у $\mathbb{R}^n, n > 2$. Коришћењем поменутих техника, могуће је доћи до оцена градијента за хармонијске функције у односу на неке Риманове метрике у полупростору у $\mathbb{R}^n, n > 2$. Посебно је разматран случај хиперболичке метрике у n-димензионој лопти, где решења одговарајућег Дирихлеовог проблема за хиперболичку Пуасонову једначину имају својство Липшицовости, у случају да је гранични услов задат функцијом која је Липшиц непрекидна.

4. Кратак опис садржаја дисертације

Садржај дисертације подељен је у 7. глава.

У глави 1. дефинисани су основни појмови и уведене су одговарајуће ознаке. Ради потпуности, дате су и дефиниције хармонијских, квазиконформних и квазирегуларних пресликавања, као и њихова својства. Приказане су и дефиниције глатких области у $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$, Липшиц и Хелдер непрекидности функција дефинисаних на подскуповима простора $\mathbb{R}^n$.

У глави 2. разматрамо оцене градијента за хармонијска и хармонијска квазиконформна пресликавања, као и за хармонијске функције у односу на фамилију метрика, међу којима је и хиперболичка метрика. Као мотивација за ово истраживање, приказани су неки нови резултати који говоре о Липшиц-непрекидности квазиконформних пресликавања, која задовољавају Лаплас-градијентну неједнакост. Осим лопте, посматране су уопштене области у којима су дефинисана решења Дирихлеовог проблема, а такође и уопштени кодомени. Најављени су нови резултати, који су формулисани за области $C^{1,\alpha}$ глаткости, и на домену и на кодомену.

У глави 3. дат је преглед општих појмова из диференцијалне геометрије са посебним освртом на фамилију Риманових метрика дефинисаних на лопти и полупростору у димензије n, које представчају уопштење еуклидске и хиперболичке метрике. Изведене су формуле за Лаплас-Белтрамијеве операторе и формуле Пуасонових језгара који одговарају овим метрикама и формуле језгара која репродукују сопствене вредности за исте Лаплас-Белтрамијеве операторе.

У глави 4. испитивано је понашање градијента T_α хармонијских функција. Ако је $\alpha > 0$, прво је доказано да је, у случају да је функција u α-хармонијска у горњем полупростору, испуњено $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y) \to 0$ када $y \to 0^+$, и када је гранична функција f функције u диференцијабилна у тачки x_0. У општем случају, ово није тачно за (еуклидски) хармонијске функције, тј. за случај $\alpha = 0$. Доказано је и да се у случају C_c^1 глаткости функције f сви парцијални изводи α-Пуасоновог интеграла функције f могу непрекидно продужити на границу $\mathbb{H}^n$, за свако $\alpha > 0$.

У глави 5. дат је осврт на хиперболичку геометрију на n-димензионој лопти. У наставку су наведене особине хармонисјких и субхармонисених функција у односу на хиперболичку метрику. Представљен је и кратак доказ тврђења које говори да су решења Дирихлеовог проблема за хиперболичку Пуасонову једначину Липшицова, када је гранични услов задат функцијом која је Липшиц непрекидна. Идеја доказа се базира на коришћењу метода који се изворно користе у теорији Хардијевих простора, заједно са применом особина изометрија хиперболичке лопте.

У глави 6. представљене су верзије Шварцове леме на граници за плурихармонијска пресликавања у Хилбертовим и Банаховим просторима. Ови резултати су последице верзије Шварцове леме за хармонијска пресликавања из јединичног диска у интервал $(-1, 1)$ са изостављеном претпоставком да се тачка $z = 0$ слика у себе. Такође, приказана је верзија Шврцове леме на граници за хармонијска пресликавања из лопте у лопту, не обавезно истих димензија. У доказу је коришћена верзија Шварцове леме за функције више промењивих, којим се првим бавио Бургет. То уопштење је изведено интеграцијом Пуасоновог језгра по тзв. поларним капама. На крају овог поглавља, доказано је да се аналоган резултат не може формулисати у случају хиперболички хармонијских пресликавања. Ова чињеница се може протумачити и као доказ да се Хопфова лема не може фомулисати за хиберболички хармонијске функције.

У глави 7. изучаване су оцене модула за класе холоморфних функција f на јединичном диску, чији индекс I_f испуњава одговарајуће геометријске особине. Ове класе су уопштење звездастих и α-звездастих функција, које је претходно изучавао Б. Н. Орнек. Испитивањем доказа ових специјалних случајева представљен је метод који се базира на примени Цекове леме. Применом овог метода изведене су оштре оцене модула холоморфне функције f чији индекс I_f као кодомен има вертикалну траку, као и модула извода функције f у тачки $z = 0$. Дата је и оцена раста модула холоморфних функција на диску $\mathbb{U}$, које сликају тачку $z = 0$ у себе и чији је кодомен вертикална трака.

5. Остварени резултати и научни допринос докторске дисертације

У раду [MM2] разматрана је липшицовост функција које су хармонијске у односу на разне Риманове метрике на лопти и полупростору у $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$. Као једно уопштење (еуклидски) хармонијских функција издвајамо решења $n-$димензионе елиптичке парцијалне једначине

$$D_\alpha u = y^{-\alpha}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} - \frac{\alpha}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{1}$$

где је α произвољан реалан параметар. Решења једначине (1) у литератури се понекад називају генерализовани осно симетрични потенцијали (скраћеница GASP на енглеском). Пошто је понашање решења једначине $D_\alpha u = 0$ есенцијално другачије у случајевима $\alpha > -1$ и $\alpha \leqslant -1$, кандидат у дисертацији разматра решавање Дирихлеовог проблема

$$\begin{cases} D_\alpha u = \psi, & \text{у } \mathbb{H}^n, \\ u = \phi, & \text{на } \mathbb{R}^{n-1} \end{cases} \tag{2}$$

искључиво у у случају $\alpha > -1$. Акценат је стављен на решавање Дирихлеовог проблема (2) када је $f \in C_c(\mathbb{R}^{n-1})$. Приметимо да у случају $\alpha = 0$ решења проблема (2) дефинишу хармонијске функције, док у случању $\alpha = n-2$ дефинишу хиперболички хармонијске функције.

Лема 1. *Нека је $\alpha > 0$ и нека је функција и решење Дирихлеовог проблема (2), нека је $\phi \in C_c(\mathbb{R}^{n-1}), \psi \equiv 0$ диференцијабилна у околини тачке 0 и нека су сви парцијални изводи функције f непрекидни у тачки 0. Тада за свако $\epsilon > 0$ постоје $\eta, \delta_0 > 0$, такви да је*

$$\left|\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)\right| < \epsilon, \text{ за свако } |x| < \eta, 0 < y < \delta_0.$$

Заправо, $\lim\limits_{\substack{z\to 0,\\ z\in\mathbb{H}^n}} \frac{\partial}{\partial y}u(z) = 0.$

Нека су $P_h(x,y)$ и $G_h(x,y)$ Пуасоново и Гриново језгро за хиперболичку Пуасонову једначину у јединичној лопти у $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$. У раду J. Chen, M. Huang, A. Rasila, X. Wang, *On Lipschitz continuity of solutions of hyperbolic Poisson's equation*, Calc. Var., 57:13 (2018) доказан је следећи резултат.

Теорема 1. *Претпоставимо су испуњени следећи услови:*

(1) $u \in C^2(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\mathbb{B}^n}, \mathbb{R}^n)$ има репрезентацију $u = P_h[\phi] + G_h[\psi]$.

(2) Постоји $L \geqslant 0$ такво да је $|\phi(\xi) - \phi(\eta)| \leqslant L|\xi - \eta|$ за све $\xi, \eta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

(3) Постоји константа $M \geqslant 0$ за коју важи $|\psi(x)| \leqslant M(1 - |x|^2)$ за све $x \in \mathbb{B}^n$.

Тада постоји константа $N = N(n, L, M)$ за коју важи $x, y \in \mathbb{B}^n$,

$$|u(x) - u(y)| \leqslant N|x - y|.$$

Заправо, доказан је општији резултат. Наиме:

(А) ако функција ϕ испуњава услов (1), тада је функција $\Phi = P_h[\phi]$ Липшиц-непрекидна;

(Б) ако функција ψ испуњава услов (3), тада је функција $\Psi = G_h[\psi]$ Липшиц-непрекидна.

Истакнуто је да исказ (A) није истинит у случају еуклидског Пуасоновог интеграла.

У овој дисертацији биће представљен кратак доказ горње теореме, док су у оригиналном чланку коришћене технике манипулације хипергеометријским редовима (приликом доказивања резултата из Леме 2). Уместо овог приступа, у дисертацији биће приказана употреба једноставних неједнакости, које су у ствари модификација неких оцена из Хардијеве теорије у равни, где једноставна смена променљиве $\theta = (1-r)u$ у интегралу

$$\int\limits_0^\infty \frac{\theta^{\alpha+n-2}}{\left((1-r)^2 + \frac{4r}{\pi^2}\,\theta^2\right)^{n-1}}\,d\theta,$$

даје оцене раста, које су се показале као оптималне.

Лема 2. *Претпоставимо да је* $n \geqslant 3$. *Нека је* $I_m = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|x-\xi|^m}$, *где је* $x \in \mathbb{B}^n$ *и* $r = |x|$. *Ако је* $r \to 1^-$, *тада важи:*

(i) I_m *је ограничен за* $0 < m < n-1$.

(ii) $I_{n-1} \preceq \log\frac{1}{1-r}$.

(iii) $I_m \preceq \frac{1}{(1-r)^{m-n+1}}$ *за* $m > n-1$.

У заједничком раду са ментором М. Матељевићем [ММ1] добијени су следећи резултати. За $a \in H_1$ и $v \in T_a(H_1)$ (што је ознака за тангентни простор у тачки a), разматран је полупростор $H_a = H(a,v) = \{y \in H_1 : \mathrm{Re}\langle y, v\rangle < 0\}$. У доказу главног резултата коришћено је следеће тврђење техничког карактера

Тврђење 2. *Претпоставимо да је функција* $f : H_1 \to H_2$ *диференцијабилна у тачки* $a \in H_1$ *и нека је* $b = f(a) \in H_2$. *По дефиницији адјугованог оператора, имамо да важи једнакост*

$$\mathrm{Re}\langle Df(a)Z, n_b\rangle = \mathrm{Re}\langle Z, Df(a)^* n_b\rangle,$$

за свако $Z \in T_a(H_1)$. *Такође, важе следећи закључци:*

(i) Ако диференцијал $Df(a)$ *функције* f *у тачки* a *слика полупростор* H_a *у полупростор* H_b, *имамо да важи* $Df(a)^* n_b = \lambda n_a$, *за неко* $\lambda > 0$.

(ii) Ако функција f *скуп* $B(a,r_1) \cap (a + H_a)$ *слика у* $B(b,r_2) \cap (b + H_b)$ *за неке* $r_1, r_2 > 0$, *тада је* $Df(a)^* n_b = \lambda n_a$, *за неке* $\lambda \geqslant 0$. *Специјално, ако је* $Df(a)^* n_b \neq 0$ *важиће да је* $\lambda > 0$.

(iii) У сваком од случајева (i) и (ii) важи $\lambda = |Df(a)^* n_b| = \mathrm{Re}\langle Df(a)n_a, n_b\rangle$, *и* $\lambda \leq |Df(a)n_a|$.

(iv) Нека је $|a| = 1$. *За функцију* $u(x) = \mathrm{Re}\langle f(x), n_b\rangle$ *имамо да важи* $\lambda = D_r u(a)$.

Доказ Пропозиције 2 (која представља главни резултат овог одељка) се заснива на следећем резултату, који је доказан у раду M. Mateljević, M. Svetlik, *Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings*, AADM 2020 Vol 14(1), 150-168.

Пропозиција 1. *Нека је* $u : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ *хармонијска функција за коју важи* $u(0) = b$. *Претпоставимо да* u *има непрекидно продужење на граничну тачку* $z_0 \in \mathbb{T}$, $u(z_0) = c \in \mathbb{T}$ *и* $a = \tan\frac{|\mathrm{Re}(\bar{c}b)|\pi}{4}$. *Ако је функција* u *диференцијабилна у тачки* z_0, *тада је*

$$|D_r u(z_0)| \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{1-|a|}{1+|a|}.$$

Нека је $s^-(x) = \frac{2}{\pi}\cot\left(\frac{\pi}{4}(1+x)\right), x \in (-1,1)$.

Пропозиција 2. *Нека је* $\mathbb{B}_j$ *јединична лопта у комплексном Хилбертовом простору* H_j *за* $j = 1,2$, *редом. Нека је* $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ *плурихармонијско пресликавање. Претпоставимо да је* f *диференцијабилна у некој тачки* $z_0 \in \partial\mathbb{B}_1$ *и* $f(z_0) = w_0 \in \partial\mathbb{B}_2$. *Тада постоји константа* $\lambda \in \mathbb{R}$ *за коју важи* $Df(z_0)^* w_0 = \lambda z_0$. *Штавише,*

$$\lambda \geqslant s^-(b) > 0, \text{ при чему је } b = \mathrm{Re}(\langle f(0), w_0\rangle).$$

Приметимо да је $s^-(x) \geqslant \frac{1-x}{2}$, $x \in (-1,1)$.

Дефинишимо

$$D_n(c) = \frac{2^{2-n}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)}\int_{\alpha(c)}^{\pi}\frac{\sin^{n-2} t}{\sin^n(t/2)}\mathrm{d}t.$$

Важи наредна теорема.

Теорема 3. *Нека је $f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^m$ хармонијска функција за коју важи $f(0) = a_0$ и f има непрекидно продужење у тачки $x_0 \in \partial\mathbf{B}^n$, такво да је $f(x_0) = y_0 \in \partial\mathbf{B}^m$.*

Тада важи $\limsup\limits_{r\to 1_-} |D_r f(rx_0)| \geqslant D_n(c)$, при чему је $c = \frac{1+a}{2}$ и $a = \langle a_0, y_0\rangle$.

Ако, додатно, претпоставимо да f има диференцијабилно продужење у тачки x_0, тада постоји позитиван број $\lambda \in \mathbb{R}$ за који је $Df(x_0)^* y_0 = \lambda x_0$ и

$$\lambda \geqslant D_n(c).$$

Ова оцена је оштра.

Нека је

$$M_c^n(x) = M_c^n(|x|) = 2P_h[\chi_{S(c,\tilde{x})}](x) - 1. \tag{3}$$

Лема 3. *Функција M_c^n, где је $n > 2$ је хармонијска у односу на хипербиличку метрику на јединичној лопти и испуњава услов*

$$\frac{\mathrm{d}M_c^n}{\mathrm{d}r}(r)\Big|_{r=1} = 0.$$

Из ове леме изведен је закључак да је у случају хиперболички хармонијских функција, из јединичне лопте у $\mathbb{R}^n$ у јединичну лопту у $\mathbb{R}^m$, наступила другачија ситуација од оне у случају хармонијских функција.

Следећи резултати су објављени у раду [ММО]. Нека је $I_f(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$ и $C[f](z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$.

Теорема 4. *Нека је $\psi(z) = ae^{qz}$, $a \neq 0, q > 0$ и претпоставимо да $g \in N(a,q) = \{g : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ холоморфна $: g(0) = a, |I_g(z)| < q, z \in \mathbb{U}\}$. Тада важи*

(а) $g(\mathbb{U}) \subset \psi(\mathbb{U})$,

(б) $|g'(0)| \leqslant aq$,

(в) $\sup\{|g'(0)| : g \in N(a,q)\} = aq$.

Нека је $J_f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, и за $a \neq 0$, $q > 0$ нека је $J_a(q) = \{f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ холоморфна $: f(0) = a, |J_f(z)| < q, z \in \mathbb{U}\}$.

Теорема 5. *Претпоставимо да је $q > 0$ и $a > 0$. Тада важи следеће:*

а) Ако је $f \in J_a(q)$, тада је испуњено $ae^{-q|z|} \leqslant |f(z)| \leqslant ae^{q|z|}$.

б) Ако је, додатно $f(1) = ae^q$ и ако постоји комплексан извод $f'(1)$, тада важи једнакост $f'(1) = kae^q \frac{1-e^{-q}}{1+e^{-q}}$, где је $1 \leqslant k \leqslant q\frac{1+e^{-q}}{1-e^{-q}}$.

Следећа теорема представља примену једног општег резултата који је доказан у раду [ММО].

Теорема 6. *Нека је функција Θ дефинисана формулом $\Theta'(z) = \frac{\arctan z}{z}, z \in \mathbb{U}$ и:*

(i) нека је $\psi(z) = \psi_{(a,q)}(z) = a\exp(\Theta(z))$, $a \neq 0$.

(ii) Нека је f холоморфна на $\mathbb{U}$, $f(0) = a$ и нека важи $-q < \operatorname{Re} I_f(z) < q$, за свако $z \in \mathbb{U}$.

Под претпоставкама (i) и (ii) имамо следеће закључке:

(а) $f(\mathbb{U}) \subset \psi(\mathbb{U})$,

(б) $|f'(0)| \leqslant \frac{4}{\pi}aq$,

(в) Θ је конвексна функција (која је "1-1" на $\mathbb{U}$), и

(г) $\psi(-|z|) \leqslant |f(z)| \leqslant \psi(|z|)$ за $z \in \mathbb{U}$.

На крају тезе представљен је познат резултат, са оригиналним доказом, који се базира на директној провери тражене неједнакоси:

Теорема 7. *а) Нека је F пресликавање холоморфно на диску $\mathbb{U}$ у траку $\mathbb{S}_0$ које испуњава услов $F(0) = 0$. Тада је $M_F(r) \leqslant \frac{2}{\pi}\log\frac{1+r}{1-r}$, $0 < r < 1$.*

6. Објављени и саопштени резултати који чине део докторске дисертације

Објављени радови који су у вези са темом дисертације:

[MMO] M. Mateljević, N. Mutavdžić, B. N. Örnek, *Note on some classes of holomorphic functions related to Jack's and Schwarz's lemma*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 16 (2022), no. 1, 111–131.

[MM1] M. Mateljević, N. Mutavdžić, *The Boundary Schwarz lemma for harmonic and pluriharmonic mappings and some generalisations*, 45 (2022), 3177–3195.

[M] N. Mutavdžić, *The Growth of Gradients QC-mappings in n-dimensional Euclidean space with bounded laplacian*, Kragujevac Journal of Mathematics, accepted 2022.

Рад на рецензији који је у вези са темом дисертације:

[MM2] M. Mateljević, N. Mutavdžić, *On Lipschitz continuity and smoothness up to the boundary of solutions of hyperbolic Poisson's equation*, arXiv:2208.06197, 2022.

Саопштења на конференцијама која су у вези са темом дисертације:

1. M. Mateljević, N. Mutavdžić, *The Boundary Schwarz lemma for harmonic and pluriharmonic mappings and some generalisations*, The eleventh Symposium "Mathematics and Applications", Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia, 3 - 4 December 2021.
2. M. Mateljević, N. Mutavdžić, *The Growth of Gradients for Solutions to certain Laplacian-Gradient Inequalities and general Poisson's equations in n-dimensional Euclidean space*, The twelfth Symposium "Mathematics and Applications", Faculty of Mathematics, University of Belgrade, Serbia, 2 - 3 December 2022.
3. M. Mateljević, N. Mutavdžić, *On Lipschitz continuity and smoothness up to the boundary of solutions of hyperbolic Poisson's equation*, MNA2022: Mathematics, Numerics and Applications, Budva, Montenegro, June 1 - 3, 2022.
4. M. Mateljevicć, N. Mutavdžić, *On Lipschitz continuity and smoothness up to the boundary of solutions of hyperbolic Poisson's equation*, Analysis, Topology and Applications 2022 (ATA2022), Gimnasium Hall, Vrnjačka Banja, Serbia, June 29 - July 02, 2022.

7. Закључак

Предмет докторске дисертације кандидата Николе Мутавџића јесте савремена и популарна област која је део геометријске теорије функција. Кандидат је проучио обимну литературу, а резултати до којих је дошао су оригинални и нетривијални. Добијене су многе оцене градијента за разне класе хармониских пресликавања, и приказани су одговарајући примери и контрапримери. Део резултата је публикован у три рада, од којих су два објављена у часописима са СЦИ листе. Један од тих радова је самостални рад кандидата, а два су коауторска. Четврти рад који улази ду састав ове дисертације налази се на рецензији у часопису са СЦИ листе. Истичемо да су резултати педантно и систематично приказани, као и да дисертација може бити користан материјал за истраживаче који желе да се упознају са овом облашћу. Комисија констатује да је дисертација урађена према одобреној пријави и да је у питању оригинално и самостално научно дело. Стога, имајући у виду претходно изложено, са задовољством предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати извештај комисије за оцену докторске дисертације кандидата Николе Мутавџића и одреди комисију за њену јавну одбрану.

чланови комисије:

____

др Миљан Кнежевић, доцент (председник комисије)
Универзитет у Београду, Математички факултет

____

др Милош Арсеновић, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

____

др Владимир Божин, доцент
Универзитет у Београду - Математички факултет

____

др Марек Светлик, доцент
Универзитет у Београду - Математички факултет

____

др Божидар Јовановић, научни саветник
Математички институт САНУ