УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Никола М. Мутавџић

ОЦЕНЕ РАСТА ГРАДИЈЕНТА ЗА ФУНКЦИЈЕ ДОБИЈЕНЕ УОПШТЕНИМ РЕПРЕЗЕНТАЦИЈАМА ПУАСОНОВОГ ТИПА

докторска дисертација

Београд, 2023.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Nikola M. Mutavdžić

GRADIENT ESTIMATES FOR FUNCTIONS WITH GENERAL POISSON'S REPRESENTATIONS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2023.

Ментор:

академик Миодраг Матељевић,
редовни члан српске Академије наука и уметности у Београду

Чланови комисије:

др Миљан Кнежевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Милош Арсеновић, редовни професор
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Владимир Божин, доцент
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Марек Светлик, доцент
Универзитет у Београду - Математички факултет

др Божидар Јовановић, научни саветник
Математички институт САНУ

Датум одбране: ____________________

Када је мој отац, одраставши у сиромашном селу Брезова испод планине Мучањ, први пут видео зграду Математичког факултета у Београду, мислио је, како је касније говорио, да гледа у најлепшу грађевину на планети. Ову дисертацију посвећујем своме тати и сећању на човека који је у срцу носио простоту детета.

Наслов дисертације: Оцене раста градијента за функције добијене уопштеним репрезентацијама Пуасоновог типа

Резиме: У овој дисертацији разматрамо оцене градијента за хармонијска и хармонијска квазиконформна пресликавања, као и за хармонијске функције у односу на фамилију метрика, међу којима је и хиперболичка метрика. Као мотивација за ово истраживање, приказани су неки нови резултати који говоре о Липшиц-непрекидности квазиконформних пресликавања, која задовољавају Лаплас-Градијентну неједнакост. Прецизније, пресликавања која разматрамо су решења Дирихеловог проблема за Пуасонову једначину и представљају уопштење хармонијских пресликавања. Осим лопте, посматране су уопштене области у којима су дефинисана решења Дирихлеовог проблема, а такође и уопштени кодомени. Најављени су нови резултати, који су формулисани за области $C^{1,\alpha}$ глаткости, и на домену и на кодомену.

Поред представљања главних резултата, дат је преглед општих појмова из диференцијалне геометрије са подсећањем на својства хиперболичке геометрије у n-димензионој лопти. Такође су наведене особине хармонисјких и субхармониских функција у односу на хиперболичку метрику, који су аналогни неким класичним резултатима из хармонијских функција и Хардијеве теорије. Испоставило се да постоји разлика у понашању градијента хиперболичких хармонијских функција у односу на еуклидски хармонијске функције. Сличан закључак и за фамилију T_α хармонијских функција. Заправо, добија се да су решења Дирихлеовог проблема за T_α хармонијске функције Липшиц-непрекидна када је гранична функција Липшиц-непрекидна. Овако нешто не важи за хармонијске функције. Такође је разматрано својство Хелдер-непрекидности решења Дирихлеовог проблема за Пуасонову једначину у случајевима еуклидске и хиперболичке метрике.

Представљене су верзије Шварцове леме на граници за плурихармонијска пресликавања у Хилбертовим и Банаховим просторима. Ови резултати су последице верзије Шварцове леме за хармонијска пресликавања из јединичног диска у интервал $(-1,1)$ са изостављеном претпоставком да се тачка $z=0$ слика у себе. Такође, приказана је верзија Шврцове леме на граници за хармонијска пресликавања из лопте у лопту, не обавезно истих димензија. У доказу је коришћена верзија Шварцове леме за фунције више променљивих, којим се првим бавио Бургет. То уопштење је изведено интеграцијом Пуасоновог језгра по тзв. поларним капама. И у овом случају је изостављена претпоставка да се тачка $z=0$ слика у себе, што представља уопштење резултата до којег је недавно дошао Д. Калај. На крају овог поглавља, доказано је да се аналоган резултат не може формулисати у случају хиперболички хармонијских пресликавања. Ова чињеница се може протумачити и као доказ да се Хопфова лема не може фомулисати за хиперболички хармонијске функције.

Међу различитим верзијама Шварцове леме, изучаване су оцене модула за класе холоморфних функција f на јединичном диску, чији индекс I_f испуњава одговоарајуће геометријске особине. Ове класе су уопштење звездастих и α-звездастих функција, које је претходно изучавао Б. Н. Орнек. Испитивањем доказа ових специјалних случајева представљен је метод који се базира на примени Џекове леме, и који се може применити у одређеним општијим ситуацијама. Као пример изведене су оштре оцене модула холоморфне функције f чији индекс I_f као кодомен има вертикалну траку, као и модула извода функције f у тачки $z=0$. Дата је и оцена раста модула холоморфних функција на диску $\mathbb{U}$, које сликају тачку $z=0$ у себе и чији је кодомен вертикална трака.

Кључне речи: Шварцова лема, Липшиц непрекдност, хармонијске функције, квазиконформна пресликавања, хиперболичка метрика, Пуасоново језгро.

Научна област: Математика

Ужа научна област: Комплексна анализа

Dissertation title: GRADIENT ESTIMATES FOR FUNCTIONS WITH GENERAL POISSON'S REPRESENTATIONS

Abstract: In this PhD thesis we investigate bounds of the gradient of harmonic and harmonic quasiconformal mappings. We also discuss such bounds for functions that are harmonic with respect to the hyperbolic metric or certain other metrics. This research has been motivated by some recent results about Lipschitz-continuity of quasiconformal mappings that satisfy the Laplace gradient inequality. More precisely, the mappings we consider are solutions of the Dirichlet problem for the Poisson equation and can be considered as a generalization of harmonic mappings. Besides the ball, we also work with general domains on which solutions of the Dirichlet problem are defined, as well as general codomains. Finally, we announce new results that have been formulated for regions of $C^{1,\alpha}$-smoothness, both as the domain and the codomain.

Besides presenting the main results, we give an overview of general notions from differential geometry and recall some of the properties of hyperbolic metric in an n-dimensional ball. We also state properties of harmonic and sub-harmonic functions with respect to the hyperbolic metric, which are analogous to some classical results from the theory if harmonic functions and Hardy's theory. It turns out that the gradients of hyperbolic harmonic functions behave differently from those of euclidean harmonic functions. A similar conclusion is obtained for the family of T_α-harmonic functions. Namely, unlike the space of harmonic functions, the solution of the Dirichlet problem in the space of T_α-harmonic functions is shown to be Lipschitz-continuous when so is the boundary function. In addition, we investigate Hölder-continuity of the solution of the Dirichlet problem for the Poisson equation in the euclidean and hyperbolic metric.

We will present versions of the Schwarz lemma on the boundary for pluriharmonic mappings in Hilbert and Banach spaces. These results will follow from the version of the Schwarz lemma for harmonic mappings from the unit disc to the interval $(-1, 1)$ without the assumption that the point $z = 0$ maps to itself. Furthermore, we show a version of the boundary Schwarz lemma for harmonic mappings from a ball to a ball, not necessarily of the same dimension. The proof uses a version of the Schwarz lemma for multivariable functions, first considered by Burget. This result is obtained by integrating the Poisson kernel over so-called polar caps. The assumption that point $z = 0$ maps to itself is again not needed, thus yielding a generalization of a recent result by D. Kalaj. At the end of this section, it is demonstrated that the analogous result is false in the case of hyperbolic harmonic functions. In a certain sense, this means that the Hopf lemma is not valid for hyperbolic harmonic functions.

Amongst various versions of the Schwarz lemma, we have been investigating bounds of the modulus for classes of holomorphic functions f on the unit disc whose index I_f fulfils certain geometric conditions. These classes are a generalization of the star and α-star functions, previously investigated by B. N. Örnek. Our method is based on using Jack's lemma and can be applied in certain more general cases. As an illustration, we derive the sharp bounds for the modulus of a holomorphic function f with index I_f whose codomain is a vertical strip, as well as bounds for the modulus of the derivative of f at point $z = 0$. Moreover, we give a bound for the rate of growth of the modulus of holomorphic functions on disk $\mathbb{U}$ that map point $z = 0$ to itself and whose codomain is a vertical strip.

Keywords: The Schwarz lemma, Lipshitz continuity, harmonic functions, quasiconformal mappings, hyperbolic metric, Poisson's kernel.

Research area: Mathematics

Research sub-area: Complex Analysis

Садржај

Увод

Класична Шварцова лема у комплексној анализи је резултат који се односи на холоморфне функције које пресликавају диск у диск. Мање је чувена него неке дубље теореме у чијим се доказима користи, као што је нпр. Риманова теорема. Мада је сама по себи међу најједноставнијим тврђењима која показују ригидност холоморфних функција, класична Шварцова лема има уопштења у разним правцима и у последњих више од сто година представља једну од главних тема испитивања у многим областима математике. Постоји обимна литература која се односи на ову тему. Потпунији списак референци, које садрже и друге важне резултате, може се наћи у [6, 57, 43, 44]. За почетак наведимо исказ Шварцове леме.

Теорема 0.1 (Шварцова лема)**.** *Нека је $\mathbb{U}$ јединични диск у комплексној равни $\mathbb{C}$. Ако је $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ холоморфна функција која испуњава услов $f(0) = 0$, тада важе неједнакости*

а) $|f(z)| \leqslant |z|, z \in \mathbb{U}$,

б) $|f'(0)| \leqslant 1$.

Ако се у неједнакости а) једнакост постиже некој тачки $z_0 \in \mathbb{U}$ или се постиже једнакост у б), онда постоји $\alpha \in [0, 2\pi)$ такво да је $f(z) = e^{i\alpha} z$, $z \in \mathbb{U}$.

Дакле, можемо видети да (погодно нормализоване) холоморфне функције чији су и домен и кодомен јединични диск имају контролисан модул. Други део Шварцове леме нам даје информацију о ограничености модула извода функције f у координатном почетку. Ипак, за сада не знамо ништа о ограничености првог извода у осталим тачкама јединичног диска. Такође, закључак а) нам говори да је функција f Липшицова у тачки 0 и то са константом липшицовости једнаком 1 на читавом јединичном диску. Директна последица Шварцове леме је следећа теорема:

Теорема 0.2. *Ако је $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ холоморфна функција, тада је*

$$|f'(z)| \leqslant \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}, \quad z \in \mathbb{U}. \tag{0.0.1}$$

Неједнакост (0.0.1) даје ограничење модула извода холоморфне функције $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ која више није нормализована у нули. Приметимо да је у случају када смо одмакнути од границе јединичног диска модул извода ограничен. У литератури се овакво својство назива локална ограниченост, односно ограниченост на компактним подскуповима, о чему ће више речи бити у наредном одељку. Као последицу Теореме 0.2 можемо закључити да је свака холоморфна функција чији су и домен и кодомен јединични диск локално Липшицова, при чему имамо и процену константе липшицовости на дисковима $B(0, r)$.

Ови, као и неки слични резултати у литератури се често наводе као локалне оцене модула функције, као и модула извода функције. Приметимо да горње оцене у претходним неједнакостима могу да теже $+\infty$ када прилазимо граници јединичног диска.

Поставља се питање да ли под неким бољим претпоставкама можемо добити добру оцену за први извод функције f. Када бисмо добили да је функција $|f'|$ ограничена, закључак би био да је функција f Липшиц-непрекидна.

Заиста, у случају када уместо холоморфних функција на јединичном диску посматрамо конформна пресликавања, уз додатне претпоставке на кодомену, добијамо (униформну) липшицовост полазне функције. На ту тему бих издвојио следеће две ситуације.

Класична теорема Келога [18] гласи да је извод конформног пресликавања f између две $C^{1,\alpha}$ области (униформно) ограничен.

У раду [15] разматран је случај када је домен конформног пресликавања јединични диск, а кодомен конвексан скуп (уз додатна својства, видети Дефиницију 2.8 [15]). У овом случају је доказана (униформна) ограниченост првог извода. Такође, наведене су и конкретне оцене, које зависе од геометријских својстава кодомена. Овакве оцене су такође разматране у раду [29] и показале су се корисним у спектралној теорији парцијалних диференцијалних једначина са применом у квантној физици [64], као и у динамици флуида [71].

Као што се може приметити, конформна пресликавања дефинисана на јединичном диску, као и на неким другим (нпр. $C^{1,\alpha}$) областима имају особину липшицовости.

Испоставило се да је уместо конформних пресликавања погодно изучавати хармонијска квазиконформна (HQC) пресликавања, која је први почео да изучава О. Мартио [39]. У раду [52] доказано је да HQC пресликавања којима су и домен и кодомен јединични диск испуњавају својство липшицовости. На Београдском семинару за комплексну анализу је у претходних двадесет година дошло до низа резултата из ове области. У монографији [45] може се наћи детаљан преглед резултата са Београдског семинара.

Као резултате који су коришћени у овој дисертацији издвојио бих следеће: у раду [13] Д. Калај и М. Матељевић су доказали наредну теорему.

Теорема 0.3 (Теорема 1.3. [13]). *Нека је f квазиконформан C^2 дифеоморфизам који $C^{1,\alpha}$ Жорданову област Ω слика на Жорданову област D. Ако постоји константа M таква да важи*

$$|\Delta f| \leqslant M|f_z \cdot f_{\bar{z}}|, \quad z \in \Omega,$$

онда f има ограничене парцијалне изводе првог реда. Конкретно, ово значи да је пресликавање f Липшиц-непрекидно.

Претходно наведена теорема уместо хармонијских пресликавања посматра пресликавања која задовољавају верзију Лаплас-градијентне неједнакости. У одељку 2 су представљени нови и општији резултати, који се могу наћи у радовима [33, 41, 46]. Поменимо да су у одељку 2 разматрана квазиконформна пресликавања у $\mathbb{R}^n$ која задовољавају Лаплас-градијентну неједнакост. Важно је скренути пажњу на метод исправљања граница, помоћу којег је доказана липшицовост у случају када је домен јединична лопта, а кодомен ограничена C^2 област. У доказу је коришћена итеративна процедура која се базира на Собољевој теореми о улагању, позната и под називом метод „bootstrap". Коришћењем модификације овог метода, најављен је доказ истог резултата у случају када су и домен и кодомен произвољне $C^{1,\alpha}$ области.

Касније ће бити разматрано уопштење теореме Келога за хармонијске функције, које се може видети у раду Матељевића, Салимова и Севостјанова [34] и [30]:

Теорема 0.4 ([34]). *Претпоставимо да је $0 < \alpha < 1$, и да је h екулидски хармонијско пресликавање на $\mathbb{B}^n$ које је непрекидно на $\overline{\mathbb{B}^n}$, при чему је испуњен услов (h1) за фиксирану тачку $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ важи $|h(x) - h(x_0)| \leqslant M|x - x_0|^\alpha$ за све $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.*

Онда постоји константа M_n таква да важи

$$(1 - r)^{1-\alpha}|h'(rx_0)| \leqslant M_n, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Верзија претходне тероеме у случају $\alpha = 1$ гласи:

Теорема 0.5 ([34]). *Претпоставимо да је функција $f : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ локално Липшиц-непрекидна у тачки $x_0 \in \mathbb{S}$, да је $f \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ и претпоставимо да је $h = P[f]$ еуклидски хармонијско пресликавања на $\mathbb{B}^n$. Тада важи:*

$$(C4) \qquad |h'(rx_0)T| \leqslant M$$

за све $0 \leqslant r < 1$ и све јединичне векторе T који су тангентни на сферу $\mathbb{S}_r^{n-1}$ у тачки rx_0. Овде M зависи само од n, $|f|_\infty$ и $Lf(x_0)$(Липшицове константе у тачки x_0).

Ако додатно претпоставимо да је пресликавање h K-квазирегуларно на дужи $[0, x_0)$, онда је

$$(C5) \qquad |h'(rx_0)| \leqslant K\,M$$

за све $0 \leqslant r < 1$.

Видимо да је у случају хармонијских пресликавања оцењен раст градијента у случају α-Хелдер-непрекидности граничне функције за $0 < \alpha < 1$ и то у само једној тачки. У одељку 4 наведен је пример хармонијске функције на полуравни, чија је гранична функција Липшицова а модул градијента неограничен када се приближавамо граничној тачки $z = 0$.

Осим (еуклиски) хармонијских пресликавања, истраживана су и хармонијска пресликавања у односу на неке друге метрике на Римановим многострукостима.

У раду [31] М. Кнежевић и М. Матељевић су извели уопштење Шварц-Пикове теореме у случају Риманових површи:

Теорема 0.6 ([31]). *Нека су R хиперболичка површ са густинам Поенкареове метрике λ и S површ са метричком густином ρ и нека је Гаусова кривина метрике $\mathrm{d}s^2 = \rho(w)|\mathrm{d}w|$ (равномерно) одозго ограничена негативном константом $-a, a > 0$. Тада свако ρ-хармонијско $k-$квазиконформно пресликавање смањује растојање до на константу која зависи само од a и k, тј.*

$$d_\rho(f(z_1), f(z_2)) \leqslant \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}d_h(z_1, z_2),$$

где је d_ρ растојање индуковано метриком $\mathrm{d}s^2 = \rho(w)|\mathrm{d}w|^2$.

Овај резултат говори да је под одговарајућим условима наметнутим на метрике (и домена и кодомена), ρ-хармонијско и квазиконформно пресликавање између Риманових површи Липшиц-непрекидно у односу на одговарајуће метрике.

У одељку 3 наведена је дефиниција хармонијских функција дефинисаним на Римовим многострукостима. Као примери дискутовани у овој дисертацији истакнуте су метрике

$$g_h^k = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2}{x_n^{2k/(n-2)}} \quad \text{и} \quad g_b^k = \frac{4|x-e_n|^{4(2+k-n)/(n-2)}}{(1-|x|^2)^{2k/(n-2)}} \sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2, \quad k > -1,$$

дефинисане на горњем полупростору и јединичној лопти, које су уопштења хиперболичке метрике $g_h = \dfrac{\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2}{x_n^2}$ на полупростору и $g_b = 4\frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2}{(1-|x|^2)^2}$ на лопти.

У одељку 4 је представљен резултат заједничког рада са М. Матељевићем [37]. У другом делу рада разматран је Дирихлеов проблем за лапласијан у односу на метрику $g_h^\alpha, \alpha > -1$ и доказано је да се решења овог пробема могу добити помоћу репрезентација Пуасоновог типа коришћењем језгра

$$K_\alpha(x,y) = \frac{\Gamma((\alpha+n)/2)}{\Gamma((\alpha+1)/2)\pi^{n/2}} \cdot \frac{y^{\alpha+1}}{(|x|^2+y^2)^{(\alpha+n)/2}}, \quad z = (x,y) \in \mathbb{H}^n.$$

У случају $\alpha > 0$ доказано је да решења Дирихлеовог проблема, када је гранична функција класе $C_c^1(\mathbb{R}^{n-1})$ припадају класи $C^1(\overline{\mathbb{H}^n})$. У доказу овог тврђења коришћена је ограниченост градијента функција добијених репрезентацијом помоћу језгра K_α и то без претпоставке квазиконформности. Као што је раније наведено, овако нешто не важи у случају функција добијених стандардном Пуасоновом репрезентацијом. Прецизније, испоставило се да парцијални извод по промењљивој y тежи нули у свакој граничној тачки, у којој је гранична функција диференцијабилна. У случају еуклидски хармонијских функција, може се десити да парцијални извод по y тежи бесконачности у граничној тачки у којој је гранична функција диференцијабилна, као што ће бити показано примером.

У одељку 5 је представљен први део рада [37]. Главни резултат овог одељка се базира на раду [23]. У овом случају посматрамо хиперболичку метрику на лопти и хиперболички Лаплсов оператор

$$\Delta_h v = (1-|x|^2)^2 \left(\Delta v + \frac{2(n-2)}{1-|x|^2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right).$$

Размотримо следећи резултат Ј. Чен, А. Расиле, М. Хуанга и Х. Ванга:

Теорема 0.7. *[23, Теорема 1.2] Нека је $n \geq 3$. Претпоставимо да важе следећи услови.*

(1) $u \in C^2(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\mathbb{B}^n}, \mathbb{R}^n), u\,|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \phi, \Delta_h u = \psi$.

(2) Постоји $L \geqslant 0$ такво да је $|\phi(\xi) - \phi(\eta)| \leqslant L|\xi - \eta|$ за све $\xi, \eta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

(3) Постоји константа $M \geqslant 0$ за коју важи $|\psi(x)| \leqslant M(1-|x|^2)$ за све $x \in \mathbb{B}^n$.

Тада постоји константа $N = N(n, L, M)$ за коју важи $x, y \in \mathbb{B}^n$,

$$|u(x) - u(y)| \leqslant N|x-y|,$$

где ознака N=$N(n, L, M)$ значи да константа N зависи само од вредности n, L и M.

Ова теорема не разматра само хармонијске функције у односу на хиперболичку метрику, већ је дозвољено да хиперболички лапласијан задовољава услов (3). Ипак, закључак је врло јак. Заправо знамо да се својство липшицовости граничне функције преноси на решење Дирихлеовог проблема за хиперболичку Пуасонову једначину. Обратимо пажњу да се у исказу Теореме 0.7 не користи услов квазиконформности, који је био коришћен у случају еуклидски хармонијских пресликавања. У овој дисертацији је презентован нови доказ Теореме 0.7, који заобилази технике хипергеометријских редова, коришћених у раду [23]. Први део доказа је аналоган доказу Теореме 0.4 из рада [34], са том разликом што се осим случаја α-Хелдер-непрекидности за $0 < \alpha < 1$, у случају хиперболичких претензија исти доказ може применити за Липшицове функције, односно за случај $\alpha = 1$. У доказу Липшиц-некрекидности хиперболичког Гриновог потенцијала коришћено је својство инваријантности хиперболичког лапласијана у односу на конформне аутоморфизме лопте, чиме је заобиђено позивање на конвергенцију хипергеометријских редова.

У одељку 6 су представљени резултати из заједничког рада са М. Матељевићем [38]. Коришћењем побољшања класичне Шварцове леме за хармонијска пресликавања у равни добијамо неке примене на леме Шварцовог типа на граници за холоморфна као и плурихармонијска пресликавања између лопти у Хилбертовим и Банаховим просторима. У другом делу овог одељка, коришћењем Бургетове оцене добијамо леме Шварцовог типа на граници за хармонијска пресликавања између лопти коначних димензија. Овим уопштавамо ранији резултат Д. Калаја за хармонијске функције, јер не захтевамо да пресликавање нулу слика у нулу. На крају одељка изводимо закључак да се варијанта Шварцове леме на граници не може формулисати за хиперболичке хармонијске функције (у општем случају) на јединичној лопти. Као што је напоменуто, ово се може протумачити као доказ да Хопфова лема не важи за овакве функције.

Означимо са S класу свих холоморфних функција f које су „1-1" на $\mathbb{U}$ и испуњавају услове $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$.

Подесетимо се неких класичних теорема:

Теорема 0.8 (Кебеова 1/4 теорема)**.** *Ако је $f \in S$, онда је $f(\mathbb{U}) \supset \mathbb{U}_{1/4}$.*

Теорема 0.9. *Ако је $f \in S$ онда је*

$$|z|(1+|z|)^{-2} \leqslant |f(z)| \leqslant |z|(1-|z|)^{-2},$$
$$(1-|z|)(1+|z|)^{-3} \leqslant |f'(z)| \leqslant (1+|z|)(1-|z|)^{-3}.$$

Резултати представљени у одељку 7 се односе на раст функција које припадају одређеним класама, међу којима су звездасте функције, што представља уопштење неких Орнекових резултата. Ови резултати се могу видети као уопштења Шварцове леме у јединичном диску $\mathbb{U}$ на функције које припадају класи S, при чему постоје додатне претпоставке на кодомену. Прецизније, посматрамо ситуацију када је кодомен функције f звездасто конвексан скуп у односу на нулу. Такође, биће речи о уопштењу аналитичке дефиниције звездастих функција, која ће дефинисати једну општију класу холоморфних функција. Ово уопштење се базира на импликацијама које происходе из Џекове леме, која се показала као корисна у изучавању α-звездастих функција. За више информација о овој теми видети монографију [58], која је посвећена изучавању диференцијалне субординације и главни правац истраживања се односи управо на примену Џекове леме.

***

Захваљујем се од срца своме ментору, проф. др Миодрагу Матељевићу, који је ме је увео у свет научног рада и у многоме утицао на мој данашњи поглед на математику. Захваљуем се члану комисије проф. др Милошу Арсеновићу, који је као професор на докторским студијама и предводник семинара Лекције из хармонијских функција утицао на развој многих идеја које су уобличиле ову дисертацију, и употпуниле моје.математичко образовање. Чланови комисије др Миљан Кнежевић и др Марек Светлик су представљали велики ослонац у многим фазама мог професионалног развића и у многоме су заслужни што је ова дисертација угледала светлост дана. Такође се захваљујем члановима комисије др Владимиру Божину и др Божидару Јовановићу, на веома корисним коментарима и сугестијама у изради ове докторске дисертације. Такође се захваљујем Математичком факултету и Математичком институту, који су потпомогли финансирање мојих докторских студија.

Захваљујем се својим родитељима, Миловану и Мили који су ми, радећи у просвети, били инспирација у одабиру животног позива. Захвалан сам на свим жртвама које су поднели, да би ми омогућли да испратим своје снове. Хвала мојим сестрама Ради и Милици, на љубави, стрпљењу и подршци, и што су остале уз мене кроз све ове године.

Глава 1

Неки општи појмови и дефиниције

Означимо са $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ еуклидску норму вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

За $R > 0$ са $B(a, R) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < R\}$ и $S(a, R) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| < R\}$ означавамо отворену лопту и сферу у $\mathbb{R}^n$ са центром у тачки a и полупречником R. Са $B(R)$ и $S(R)$ означавамо $B(0, R)$ и $S(0, R)$. Користимо $\mathbb{B}^n$ и $\mathbb{S}^{n-1}$ за $B(1)$ и $S(1)$. Осим тога, користићемо ознаку $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$ за горњи полупростор (или краће, полупростор) у $\mathbb{R}^n$.

Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и $f, g : \Omega \to \mathbb{R}_+$. Ако постоји позитивна константа c за коју је $f(x) \leqslant cg(x), x \in \Omega$, користимо ознаку $f \preceq g$ на Ω. Ако постоји позитивна константа c за коју је $\frac{1}{c}g(x) \leqslant f(x) \leqslant cg(x), x \in \Omega$, користимо ознаку $f \approx g$ (или $f \asymp g$) на Ω.

1.1 Хиперблички растојање у јединичном диску у равни

Користећи конформне изоморфизме

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad a \in \mathbb{U},$$

јединичног диска U, можемо дефинисати *псеудо-хиперболичко растојање* на $\mathbb{U}$ као

$$\delta(a, b) = |\varphi_a(b)|, \quad a, b \in \mathbb{U}.$$

Хиперболичка метрика на јединичном диску $\mathbb{U}$ може се задати формулом

$$\lambda |\mathrm{d}z|^2, \quad \text{где је} \quad \lambda(z) = \left(\frac{2}{1 - |z|^2}\right)^2.$$

Тада λ називамо *хиперболичком метричком густином. Хиперболичко растојање* на јединичном диску $\mathbb{U}$ се може изразити формулом

$$d_h(z, w) = \log \frac{1 + \delta(z, w)}{1 - \delta(z, w)}.$$

Теорема 1.1 (Шварц-Пик)**.** *Холоморфна пресликавања јединичног диска у себе не повећавају хиперболичка растојања. Другим речима, ако је $f : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ холоморфно, онда је*

$$d_h(f(z), f(w)) \leqslant d_h(z, w).$$

Нека су R и S две површи, $\sigma(z)|\mathrm{d}z|^2$ и $\rho(w)|\mathrm{d}w|^2$ метрике у односу на изотермалне координате на R и S, тим редом, нека је $f : R \to S$ класе C^2 и нека је $w = f(z)$.

Пресликавање f зваћемо $\rho-$*хармонијским* ако задовољава једначину

$$f_{z\bar{z}} + \left(\frac{\partial}{\partial w}\log\rho\right) \circ f \cdot f_z f_{\bar{z}} = 0.$$

1.2 Липшицове и Хелдер-непрекидне функције

Са $C^k(\Omega)$ означавамо скуп функција које су k пута непрекидно диференцијабилне у отвореном скупу $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Даље, нека је $C^k(\overline{\Omega})$ скуп функција у $C^k(\Omega)$ чији сви изводи закључно са k-тим редом могу непрекидно да се продуже на $\overline{\Omega}$.

Нека је $x_0 \in D$, где је D ограничен подскуп од $\mathbb{R}^n$ и f функција дефинисана на D. За $0 < \alpha < 1$ кажемо да је f *Хелдер-непрекидна* са експонентом α у тачки x_0, ако важи

$$\sup_{x\in D}\frac{|f(x) - f(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha} < +\infty.$$

Кажемо да је функција f *униформно Хелдер-непрекидна* са експонентном α у скупу $D \subseteq \mathbb{R}^n$, не нужно ограниченом, ако је количник

$$\sup_{x,y\in D}\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

ограничен. Даље, функција f је *локално Хелдер-непрекидна* са експонентном α у D, ако је униформно Хелдер-непрекидна са експонентном α на компктним подскуповима од D. У даљем тексту ћемо на неким местима користити и израз Хелдер-непрекидна за функције које су униформно Хелдер-непрекидне. Биће посебно прецизирано у сучају да је функција локално Хелдер непрекидна.

Када је $\alpha = 1$, кажемо да је f *Липшиц-непрекидна* (или скраћено *Липшицова*). Ако постоји $l > 0$ такво да је

$$|f(x) - f(y)| \geqslant l|x - y| \quad \text{за све } x, y \in D,$$

за функцију f кажемо да је (униформно) *ко-Липшицова* на скупу D. Функција је *би--Липшицова* на скупу D ако је уједно Липшицова и ко-Липшицова на D.

Нека је Ω отворен подскуп од $\mathbb{R}^n$ и k природан број. *Хелдерови простори* $C^{k,\alpha}(\Omega)$ и $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ су дефинисани као подскупови од $C^k(\Omega)$ и $C^k(\overline{\Omega})$ редом, који се састоје од функција чији су k-ти парцијални изводи локално Хелдер-непрекидни (униформно Хелдер--непрекидни) са експонентном α на Ω.

1.3 Области класе $C^{k,\alpha}$ у $\mathbb{R}^n$

Дефиниција 1.2. *Кажемо да ограничена област $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ припада класи $C^{k,\alpha}$, где је $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, $k\in\mathbb{N}$, ако њена граница припада класи $C^{k,\alpha}$, тј. ако за сваку тачку $x_0 \in \partial\Omega$ постоји лопта $B = B(x_0, r_0)$ и пресликавање $\psi : B \to D$ такво да је ([10, стр. 95])*

(а) $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+$,

(б) $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$,

(в) $\psi \in C^{k,\alpha}(B), \psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D)$.

Пресликавање ψ представља локални координатни дифеоморфизам који *исправља границу* у околини тачке x_0.

Тврђење 1.3. *Функција ψ је би-Липшицова на B за свако $k \geqslant 1$. Такође, величине $\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\psi\right|$ су ограничене за све $1 \leqslant i, j \leqslant n$ и свако $k \geqslant 2$.*

Наведимо познату теорему Келога.

Теорема 1.4 ([18])**.** *Нека је $D \subset \mathbb{C}$, $\partial D \in C^{k,\alpha}$ $(k \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \alpha < 1)$ и нека је $f : \mathbb{U} \to D$ конформно. Тада f има $C^{k,\alpha}$ продужење на $\overline{\mathbb{U}}$.*

1.4 Квазиконформна и квазирегуларна пресликавања

Нека су D, D' и Ω домени у $\mathbb{R}^n$. Ако је $f : D \to D'$ диференцијабилно пресликавање у тачки $x \in D$ и $y = f(x)$, пишемо $y_i = f_i(x), 1 \leqslant i \leqslant n$.

Означимо са $T_x\mathbb{R}^n$ тангентни простор у тачки x. Са $f'(x) : T_x\mathbb{R}^n \to T_{f(x)}\mathbb{R}^n$ означавамо диференцијал пресликавања f у тачки x, при чему $T_x\mathbb{R}^n$ можемо идентификовати са простором $\mathbb{R}^n$. У том случају се оператор $f'(x)$ се може идентификовати са матрицом $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} f_i(x)\right)$. Нека је

$$|f'(x)| = \max_{|h|=1} |f'(x)h| \quad \text{и} \quad l(f'(x)) = \min_{|h|=1} |f'(x)h|.$$

(N) Нека је ν ознака за n-димензиону стандардну Лебегову меру. Хомеоморфизам $f : D \to D'$ задовољава услов (N) ако из једнакости $\nu(A) = 0$ следи да је $\nu(f(A)) = 0$. Овде је са $f(A)$ означена директна слика скупа A при пресликавању f.

Дефиниција 1.5. *Нека је $Q = \{x_n\mathbb{R}^n : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i\}$ затворен паралелепипед у $\mathbb{R}^n$. Кажемо да је пресликавање $f : Q \to \mathbb{R}^m$ ACL (апсолутно непрекидно на линијама) ако је непрекидно на Q и ако је f апсолутно непрекидно на (у односу на ν) скоро сваком сегменту паралелном са координатним осама. Ако је $U \subset \mathbb{R}^n$ отворен скуп, кажемо да је $f : U \to \mathbb{R}^m$ ACL на U ако је $f|_Q$ ACL на сваком паралелепипеду $Q \subset U$.*

Дефиниција 1.6.

(1) *Хомеоморфизам $f : D \to D'$ је K-квазиконформан (у аналитичком смислу), ако је ACL, диференцијабилан скоро свуда на D и ако постоји константа K, $1 \leqslant K < \infty$ таква да важи*

$$|f'(x)|^n \leqslant K|J_f(x)| \quad \text{скоро свуда на } D.$$

Хомеоморфизам f је квазиконформан ако је K-квазиконформан за неко коначно K.

(2) *Нека је $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ непрекидна функција. Кажемо да је f квазирегуларна ако припада Собољевом простору $W^n_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и ако постоји константа K, $1 \leqslant K < \infty$ таква да важи*

$$|f'(x)|^n \leqslant KJ_f(x) \quad \text{скоро свуда на } D. \tag{1.4.1}$$

Најмањи број K у једначини (1.4.1) представља *спољну дилатацију* $K_O(f)$.

Ако је f квазирегуларна, тада је

$$J_f(x) \leqslant K' l(f'(x))^n \text{ скоро свуда на } D \text{ за неко } K',\ 1 \leqslant K' < \infty. \tag{1.4.2}$$

Најмањи број K' у једначини (1.4.2) представља *унутрашњу дилатацију* $K_I(f)$, а $K(f) = \max(K_O(f), K_I(f))$ *максималну дилатацију* од f. Ако $K(f) \leqslant K$, тада функцију f зовемо K-*квазирегуларном.*

Овде наводимо само неколико основних резултата, који се могу наћи у књизи [65].

(i_1) Ако је пресликавање $f : D \to D'$ квазиконформно, тада је такво и пресликавање f^{-1} и оба задовољавају услов (N).

(i_2) (Смена променљиве) Ако је пресликавање $f : D \to D'$ квазиконформно и ако је A мерљив подскуп од D, да је скуп $f(A)$ такође мерљив и важи

$$m(f(A)) = \int_A |J_f(x)| \mathrm{d}\nu(x).$$

Штавише, $J_f(x) \neq 0$ скоро свуда у скупу D.

(i_3) (*Решетњакова главна теорема*) Свако неконстантно квазирегуларно пресликавање је дискретно и отворено.

Глава 2

Оцене градијента квазиконформних пресликавања која испуњавају Лаплас-градијентну неједнакост

Ова секција прати рад [46], у коме је извршена ревизија рада [41] М. Матељевића, а где су такође најављени неки нови резултати. Прецизније, посматрана су квазиконформна пресликавања у равни и простору, која имају ограничен лапласијан. У одељку о новим резултатима је било речи и о пресликавањима која задовољавају такозвану Лаплас-градијентну неједнакост. Добијени резултати се могу посматрати и као просторна варијанта Келогове теореме. У раду [41] је истакнуто да су његове главне идеје развијене у раду [13] и на скупу „Workshop on Harmonic Mappings and Hyperbolic Metrics”, Ченај, Индија, 10-19. децембар 2009. ([61]). Као наставак тих истраживања у раду [46] представљен је такозвани метод „*исправљања границе*”.

Нека је Ω област у $\mathbb{R}^n$, а u функција из $C^2(\Omega)$. Лапласов оператор Δ се дефинише једнакошћу

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

Подсетимо се да за функцију u кажемо да је (еуклидски) хармонијска у области Ω ако задовољава *Лапласову једначину*

$$\Delta u = 0.$$

Нехомогена верзија Лапласове једначине се зове *Пуасонова једначина.* Овде испитујемо следећи Дирихлеов гранични проблем:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{у} \quad \Omega, \\ u = \varphi & \text{на } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.0.1}$$

Лапласова једначина има радијално симетрично решење r^{2-n} за $n > 2$, односно $\ln r$ за $n = 2$, где је r растојање од неке фиксиране тачке. Тако за задату тачку $y \in \Omega$ уводимо нормализовано *фундаментално решење* Лапласове једначине:

$$\Gamma(x-y) = \Gamma(|x-y|) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\omega_n} \frac{1}{|x-y|^{n-2}}, & \text{за } n > 2, \\ \frac{1}{2\pi} \ln|x-y|, & \text{за } n = 2. \end{cases} \tag{2.0.2}$$

Једноставан рачун показује да за свако $1 \leqslant i \leqslant n$ важи

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y) = \frac{1}{n\omega_n}\frac{x_i-y_i}{|x-y|^n}, \\ \left|\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x-y)\right| \leqslant \frac{1}{n\omega_n}\frac{1}{|x-y|^{n-1}}.\end{gathered} \tag{2.0.3}$$

Посматрајмо инверзију J_R у односу на сферу $S(R)$, којом се тачка $y \neq 0$ слика у

$$y^* = J_R(y) = \frac{R^2}{|y|^2}y. \tag{2.0.4}$$

Приметимо да је $J_R^{-1} = J_R$.

Уведимо ознаке

$$G_{1,R}(x,\xi) := \Gamma(|x-\xi|) \quad \text{и} \quad G_{2,R}(x,\xi) := -\left(\frac{|\xi|}{R}\right)^{2-n}\Gamma(|x-J_R(\xi)|).$$

Гринова функција за Дирихлеов проблем на лопти $B(R)$ је задата формулом

$$\overline{g}_R(x,\xi) := G_{1,R}(x,\xi) + G_{2,R}(x,\xi).$$

Гринова функција G_Ω за Дирихлеов проблем на домену $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ се узима тако да задовољава једначину

$$G_\Omega(x,y) = 0 \quad \text{за} \quad x \in \partial\Omega.$$

Пуасоново језгро за лопту B_R је дато једначином

$$P_R(x,\xi) = \frac{R^2-|x|^2}{n\omega_n R|x-\xi|^n}.$$

У случају да је $R = 1$, индекс R често изостављамо. *Пуасонов интеграл* и *Гринов потенцијал* су редом

$$\begin{aligned} P_R[\varphi](x) &:= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P_R(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}\sigma(y) \quad \text{и} \\ G_R[f](x) &:= \int_{\mathbb{B}^n} \overline{g}_R(x,y)f(y)\mathrm{d}\nu(y). \end{aligned}$$

2.1 Процена градијента Гриновог потенцијала

Теорема 2.1 ([10]). *Нека је непрекидна функција $u : \overline{B}(R) \to \mathbb{R}$ класе $C^2(B(R))$, $u = \varphi$ на $S(R)$ и функција $f = \Delta u$ је ограничена и локално Хелдер-непрекидна на $B(R)$. Тада је*

$$u(x) = P_R[\varphi](x) + G_R[f](x). \tag{2.1.1}$$

Следећа лема је техничког карактера, и у некој верзији се може наћи у разним класичним уџбеницима из парцијалних једначина. У овом излагању навешћемо верзију која се може наћи у раду [41], заједно са доказом, који је елегантан и самим тиме погодан за даља уопштења.

Лема 2.1 ([41])**.** *Ако је f ограничена функција на $\mathbb{B}^n$, онда су парцијални изводи Гринове функције $G[f]$ непрекидни на $\overline{\mathbb{B}^n}$.*

Доказ. Нека је $u(x) = \int_{\mathbb{B}^n} \overline{g}(x,y) f(y) \mathrm{d}y)$. Тада за свако $1 \leqslant i \leqslant n$ важи

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_i} u(x) &= \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{g}(x,y) f(y) \mathrm{d}\nu(y) = \\ &= \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} G_1(x,y) f(y) \mathrm{d}\nu(y) + \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} G_2(x,y) f(y) \mathrm{d}\nu(y).\end{aligned}$$

Ако уведемо ознаке

$$I_{i,1}(x) := \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} G_1(x,y) f(y) \mathrm{d}\nu(y) \quad \text{и} \quad I_{i,2}(x) := \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} G_2(x,y) f(y) \mathrm{d}\nu(y),$$

имамо да, за $k = 1, 2$ важи

$$I_{i,k}(x) = \int\limits_{|y| \leqslant 1/2} \frac{\partial}{\partial x_i} G_k(x,y) f(y) \mathrm{d}\nu(y) + \int\limits_{1/2 < |y| \leqslant 1} \frac{\partial}{\partial x_i} G_k(x,y) f(y) \mathrm{d}\nu(y).$$

На крају, дефинишимо

$$I_{i,k,1}(x) = \int\limits_{|y| \leqslant 1/2} \frac{\partial}{\partial x_i} G_k(x,y) f(y) \mathrm{d}\nu(y) \quad \text{и} \quad I_{i,k,2}(x) = \int\limits_{1/2 < |y| \leqslant 1} \frac{\partial}{\partial x_i} G_k(x,y) f(y) \mathrm{d}\nu(y).$$

Докажимо да су функције $I_{i,2}$ непрекидне на $\overline{\mathbb{B}^n}$. Доказ да су функције $I_{i,1}$ непрекидне на затвореној јединчној лопти је аналоган. Довољно је доказати да су функције $I_{i,2,k}$ непрекидне, за $k = 1, 2$.

Посматрајмо функције $I_{i,2,1}$ и претпоставимо да је $|y| < 1/2$. Тада за свако $x \in \overline{\mathbb{B}^n}$ важи $|x - y^*| \geqslant 1$. Даљим коришћењем (2.0.3) можемо проверити да важи

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} G_2(x,y) f(y) \right| \preceq \frac{1}{|y|^{n-2}} \frac{1}{|x - y^*|^{n-1}} \preceq \frac{1}{|y|^{n-2}}.$$

То значи да за је свако $x_0 \in \overline{\mathbb{B}^n}$

$$\lim_{x \to x_0} \int\limits_{|y| \leqslant 1/2} \frac{\partial}{\partial x_i} G_2(x,y) f(y) \mathrm{d}\nu(y) = \int\limits_{|y| \leqslant 1/2} \frac{\partial}{\partial x_i} G_2(x_0,y) f(y) \mathrm{d}\nu(y),$$

на основу Лебегове теореме о доминантној конвергенцији. То заправо значи да су функције $I_{i,2,1}$ непрекидне у тачки x_0.

Даље треба испитати непрекидност функција $I_{i,2,2}$ на затвореној јединичној лопти. Након увођења смене $y = J(z)$, где $J_J(z)$ означава Јакобијан пресликавања J дефинисаног једначином (2.0.4), добијамо

$$I_{i,2,2}(x) = \int\limits_{1 < |z| < 2} \frac{\partial}{\partial x_i} G_2(x, z^*) f(z^*) J_J(z) \mathrm{d}\nu(z). \tag{2.1.2}$$

После увођења смене $x - z = u$ у интегралу на десној страни једнакости (2.1.2) добијамо

$$I_{i,2,2}(x) = \int\limits_{1<|u-x|<2} \frac{\partial}{\partial x_i} G_2(x,(u-x)^*) f((u-x)^*) J_J(u-x) \mathrm{d}\nu(u).$$

Поново, коришћењем формуле (2.0.3) добијамо

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} G_2(x,(u-x)^*) f((u-x)^*) J_J(u-x) \right| \preceq K_2(u) := |u-x|^{n-2} f((u-x)^*) J_J(u-x) \frac{1}{|u|^{n-1}}.$$

Како је функција $C(z) := |z|^{n-2} f(z^*) J_J(z)$ ограничена за $1 < |z| < 2$, имамо да је функција $C_1(u) := C(u-x)$ ограничена за $1 < |u-x| < 2$ и

$$|K_2(x,u)| \preceq \frac{1}{|u|^{n-1}} \quad \text{за} \quad 1 < |u-x| < 2. \tag{2.1.3}$$

Дефинишимо функцију H:

$$H(x,u) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} G_2(x,(u-x)^*) f((u-x)^*) J_J(u-x), & 1 < |x-u| < 2, \\ 0, & |u| < 3, |x-u| < 1, |x-u| > 2. \end{cases}$$

Тада је $I_{i,2,2}(x) = \int\limits_{|u|<3} H(x,u) \mathrm{d}\nu(u)$. Коначно, коришћењем неједнакости (2.1.3) добијамо да важи

$$\lim_{x \to x_0} \int\limits_{|u|<3} H(x,u) \mathrm{d}\nu(u) = \int\limits_{|u|<3} H(x_0,u) \mathrm{d}\nu(u) \;\; \text{за све } |x_0| \leqslant 1,$$

на основу Лебегове теореме о доминантној конвергенцији. □

У раду [41] је доказана наредна лема. Она представља побољшање сличног резултата из рада [26], у коме је потврђена само ограниченост првих парцијалних извода на $\mathbb{B}^n$.

Лема 2.2. *([41, Тврђење 6]). Нека је $u : \overline{\mathbb{B}^n} \to \mathbb{R}$ решење Дирихлеовог проблема*

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{у} \quad \mathbb{B}^n, \\ u = \varphi, & \text{на} \quad \mathbb{S}^{n-1}, \end{cases} \tag{2.1.4}$$

при чему је $f \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$ и $\varphi \in C^{1,\alpha}(\mathbb{S}^{n-1})$, $0 < \alpha < 1$. Тада је $u \in C^1(\overline{\mathbb{B}^n})$.

Лема 2.3. *([41, Локална лема о градијенту, Верзија 1, Лема 2.2]). За $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ и $0 < r_0 < 2$ нека је*

$$V_0 = \mathbb{B}^n \cap B(x_0, r_0), V(r) = \mathbb{B}^n \cap B(x_0, r) \;\; \text{за} \;\; 0 < r < r_0 \;\; \text{и} \;\; T_0 = \mathbb{S}^{n-1} \cap B(x_0, r_0).$$

Ако је $u \in C^2(V_0) \cap C(V_0 \cup T_0)$ такво да важи $\Delta u \in L^\infty(V_0)$ и $u \in C^{1,\alpha}(T_0)$ тада је

$$\nabla u \in L^\infty(V(r)) \quad \text{за све} \quad 0 < r < r_0.$$

2.2 Осврт на квазиконформна и квазирегуларна пресликавања

У књизи [65] се може видети да када је квазиконформно пресликавање f диференцијабилно у тачки x, постоје само две могућности. Или је $J_f(x) \neq 0$, или је $f'(x) = 0$. Може се проверити (видети, на пример, [63]) да се за $J_f(x) \neq 0$, $|f'(x)|$ и $l(f'(x))$ могу видети као највећа и најмања *сингуларна вредност* несингуларне матрице $f'(x)$.

Тврђење 2.2. *Ако је $f : D \to D'$ квазиконформно пресликавање, тада је*

$$l(f'(x)) \leqslant |\nabla f_i(x)| \leqslant |f'(x)|.$$

Доказ. Нека је $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ несингуларан линеаран оператор и нека је A^T транспонат матрице A. Тада за сваки јединични вектор $v \in \mathbb{R}^n$ важи $|A^T v| \leqslant |A|$, пошто несингуларна матрица и њен транспонат имају исте сингуларне вредности. Претпоставимо да је $x \in D$ такво да је $\nabla f_i(x) \neq 0$. Тада је $\nabla f_i(x) = f'(x)^T e_i$ где је $e_i = (0 \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ i-ти координатни вектор, $1 \leqslant i \leqslant n$. Ако уведемо замену $A = f'(x)$ на основу ранијег разматрања добијамо да важи $l(f'(x)) \leqslant |\nabla f(x)| \leqslant |f'(x)|$. □

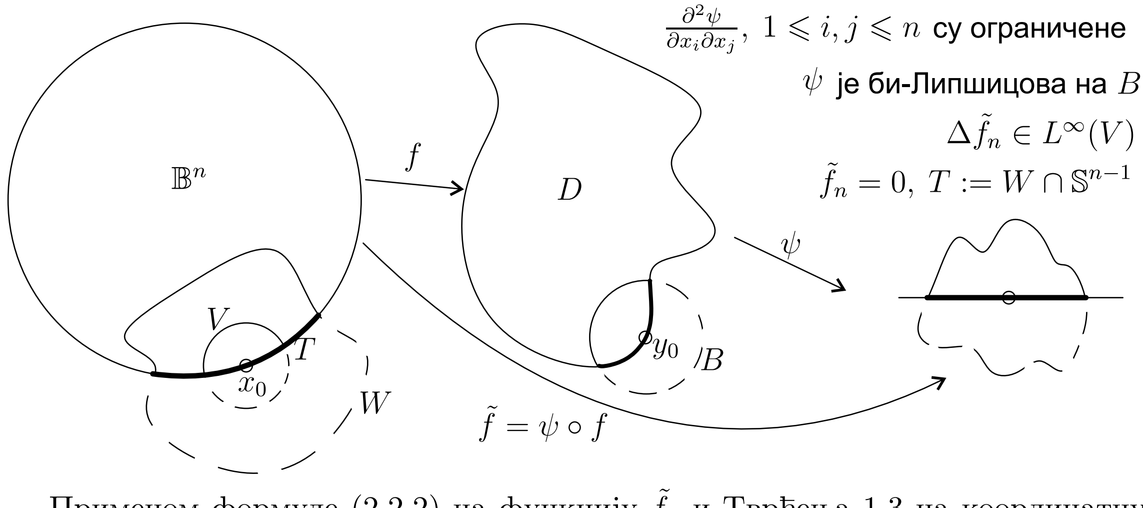
Теорема 2.3. *([41, Теорема 2.1]). Нека је $D \subset \mathbb{R}^n$ домен и $f : \mathbb{B}^n \to D$ C^2 K-квазиконформно пресликавање. Ако је $\Delta f \in L^\infty(\mathbb{B}^n)$, тада је $f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{B}^n)$.*

Доказ. Нека су D, D' домени у $\mathbb{R}^n$, $f : D \to D'$ и $h : D' \to \mathbb{R}$ C^2-функције и $\hat{h} = h \circ f$ скуп. Ако је $y = f(x)$ и $f_k(x) := y_k, 1 \leqslant k \leqslant n$, важе наредне формуле:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\hat{h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial y_i}\frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \tag{2.2.1}$$

и

$$\Delta\hat{h} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2}|\nabla f_i|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}\langle \nabla f_i, \nabla f_j\rangle + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial x_i}\Delta f_i. \tag{2.2.2}$$



Применом формуле (2.2.2) на функцију $\tilde{f}_n$ и Тврђења 1.3 на координатну карту ψ, налазимо да је $\Delta\tilde{f}_n \in L^\infty(V)$. Из дефиниције пресликавања ψ имамо да је

$$\tilde{f}_n(x) = 0, \text{ за све } x \in T := W \cap \mathbb{S}^{n-1}.$$

Користећи Лему 2.3, добијамо да је функција $\tilde{f}_n$ Липшиц-непрекидна у некој околини V_0 тачке x_0. Даље, из Тврђења 2.2 добијамо да је функција $\tilde{f}$ Липшиц-непрекидна на V_0. Коришћењем Тврђења 1.3 налазимо да је пресликавање ψ би-Липшицово у некој околини тачке y_0, па је због тога функција $f = \psi^{-1} \circ \tilde{f}$ Липшиц-непрекидна на V_0. Одавде директно добијамо да је функција f Липшиц-непрекидна на читавој лопти $\mathbb{B}^n$. □

2.3 Метод исправљања границе

У овом одељку биће приказани неки резултати добијени у радовима [25, 26].

Конкретно, биће укратко објашњен такозвани итерациони „bootstrap" метод. У раду [41] М. Матељевић је извршио модификацију овог метода прилагођену за метод исправљања границе, чиме је доказао одговарајуће локалне верзије ранијих резултата. Пре него што започнемо разматрање, наведимо неке резултате и дефиниције.

Дефиниција 2.4. *Нека је D област у $\mathbb{R}^n$ и нека $s : D \to R$. Ако је*

$$|\Delta s| \leqslant a|\nabla s|^2 + b$$

на D, тада кажемо да s задовољава a, b - Лаплас-градијентну неједнакост на D.

Теорема 2.5 ([26]). *Претпоставимо да је*

(*i*) *u реално вредносна функција непрекидна на $\overline{\mathbb{B}^n}$,*

(*ii*) *рестрикција функције u на $\mathbb{S}^{n-1}$ класе $C^{1,\alpha}$,*

(*iii*) *u фукнција која задовољава Лаплас-градијентну неједнакост на $\mathbb{B}^n$.*

Онда су парцијални изводи првог реда функције u непрекидни на $\mathbb{B}^n$.

У раду [26] коришћен је такозвани Хајнцов приступ, који се може наћи у раду [21]. Један лакши доказ Теореме 2.5 се може извести додавањем претпоставке (iv) из следеће теореме.

Теорема 2.6. *([40, Теорема 5.1.]). Претпоставимо да је*

(*i*) *$u : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}^m$ вектор вредносна функција непрекидна на $\overline{\mathbb{B}^n}$,*

(*ii*) *рестрикција u_b функције u на $\mathbb{S}^{n-1}$ класе $C^{1,\alpha}$,*

(*iii*) *u функција класе C^2 коза задовољава Лаплас-градијентну неједнакост на $\mathbb{B}^n$,*

(*iv*) *функција ∇u класе L^{q_0}.*

Тада важе следећи закључци.

а) Ако је $0 < q_0 \leqslant n$, онда $\nabla u \in L^{q_1}$ где је $q_1 = \frac{nq_0}{2n-q_0}$.

б) Ако је $q_0 > n$, онда парцијални изводи прве врсте функције u имају непрекидно продужење на $\overline{\mathbb{B}^n}$ (а тиме и на $\mathbb{R}^n$).

Напоменимо да је за пресликавање $u : D \to \mathbb{R}^n$ које је квазиконформно и компактан подскуп G скупа D Геринг доказао да $\nabla u \in L^{q_0}(G)$ за неко $q_0 > n$. Ако знамо да је $f : \mathbb{B}^n \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{B}^n$ квазиконформно, онда је $\nabla u \in L^{q_0}(G)$ за неко $q_0 > n$, па се услов (iv) природно намеће. Испоставило се да је у контексту хармонијских квазиконформних пресликавања, корисну примену нашла следећа лема.

Лема 2.4. *([40, Лема Ц]). Нека је $1 \leqslant p < \infty$ и нека је $h \in L^p(\mathbb{B}^n)$.*

(1) Ако је $p < n$, онда је $\nabla G[h]$ класе $L^q(\mathbb{B}^n)$, за $q = \frac{np}{n-p}$.

(2) Ако је $p = n$, онда је $\nabla G[h]$ класе $L^q(\mathbb{B}^n)$, за свако $q < \infty$.

(3) Ако је $p > n$, онда је $\nabla G[h]$ класе $L^\infty(\mathbb{B}^n)$.

Овај резултат можемо видети као једноставнију верзију Собољеве теореме о улагању. Доказ ове леме може се извести коришћењем Калдерон-Зигмундове неједнакости (видети нпр [10, Теорема 9.9]) и Теореме Морија; или коришћењем Рисовог потенцијала, Леме 7.12 из [10] и Гринове формуле. Овај приступ је коришћен у радовима [25, 11, 12] за доказивање Липшицове непрекидности хармонијских квазиконформних пресликавања у одговарајућем контексту. У раду [41] М. Матељевић је рафинисао њихов приступ и извео доказ Теореме 2.6, као и Теореме 2.11, која ће бити приказана у следећем одељку.

Доказ Теореме 2.5 се базира на итеративној процедури која произилази из Теореме 2.6. Ова теорема полази од припадности ∇u одговарајућем простору $L^{q_0}(\mathbb{B}^n)$, да би закључак био да, у одговарајућим условима, ∇u припада $L^{q_1}(\mathbb{B}^n), q_1 = \frac{nq_0}{2n-q_0}$. На неки начин изгледа као да, у извесном смислу, ∇u „подиже" самог себе.

На крају овог одељка навешћемо објашњење термина „bootstrap" који смо раније користили, а у последње време се често појављује у информационим технологијама. Односи се на везице која се некада налази на врху задње стране обуће и које помажу лакшем обувању. У овом контексту, термин „bootstrap" се користи у смислу чувене приче барона Минхаузена, који је себе извукао из живог блата тако што је рукама ухватио ове везице и повукао их на горе.

2.4 Најава неких нових резутата

У раду [41] проучаван је раст градијента пресликавања која задовољавају одређене парцијалне диференцијалне једнакости (и неједнакости) користећи Грин-Лапласову формулу за функцију и њене изводе. У поменутом раду је доказано да су пресликавања која су и квазиконформна између две C^2 области уједно и Липшицова. Неки од добијених резултата се могу назвати верзијом Теореме Келога и Варшавског за квазиконформна пресликавања. Прецизније, даље развијајући методе представљене у Хајнцовом раду [21], у раду [42] М. Матељевић је доказао следећу теорему (видети још Калајев рад [26]).

Теорема 2.7 ([42])**.** *Нека су испуњене следеће претпоставке:*

(1) Нека је Ω домен из $\mathbb{R}^n$ са C^2 границом и нека се пресликавање $f : \mathbb{B}^n \xrightarrow{на} \Omega$ класе C^2 може непрекидно продужити на $\overline{\mathbb{B}^n}$.

(2) Претпоставимо да f задовољава Лаплас-градијентну неједнакост на $B_0 = B(z_0, r_0) \cap \mathbb{B}^n$, где је $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$, $r_0 > 0$ и да f пресликава $B_0 \cap \mathbb{S}^{n-1}$ у $\partial\Omega$.

Закључак (VIII)*: (а) Постоји $0 < r_1 < r_0$, $c > 0$ и јединично векторско поље X на $V_1 = B(x_0, r_1) \cap \mathbb{B}^n$ (свакој тачки x придружујемо јединични вектор $h = h(x)$ са почетком у x) тако да је $|\mathrm{d}f(x)h(x)| \leqslant c$ за свако $x \in V_1$.*

(б) Ако је f још и квазиконфромно у B_0, тада је f Липшицово на V_1.

Наредна важна теорема је доказана у раду [41]. Доказ ове теореме се заснива на аргументу „bootstrap", који упрошћава метод коришћен у [21] (за више детаља видети [25, 11, 12]).

Теорема 2.8 ([41])**.** *Претпоставимо да важи претпоставка (1) претходне теореме, да је f је отворено пресликавање и*

(3) Δf је класе $L^p(B_0)$ за неко $p > n$ и

(4) f пресликава $B_0 \cap \mathbb{S}^{n-1}$ у $\partial\Omega$.

Тада важи закључак (VIII) *(а).*

(в) Ако је f још и квазирегуларно у B_0, тада је f и Липшицово на V_1.

Хипотеза 2.9. *([41, Хипотеза А]). Нека су домени D и D_0 из $\mathbb{R}^n$ класе $C^{1,\alpha}$ за $0 < \alpha < 1$ и нека је C^2 пресликавање $f : D \xrightarrow{на} D_0$ K-квазиконформно. Ако f задовољава Лаплас--градијентну неједнакост на D (заправо је Δf ограничено), тада је пресликавање f Липшицово на D.*

Долази се до закључка да локални C^2-координатни метод који се примењује на C^2 домене треба модификовати. Наиме, ако се ради са доменима класе $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, тада је локално координатно пресликавање ψ класе $C^{1,\alpha}$ за $0 < \alpha < 1$ и зато у општем случају $\tilde{f}$ не задовољава Лаплас-градијентну неједнакост.

У недавном раду [1] Д. Калај и А. Ђокај су доказали да:
(i) ако постоји $C^{1,\alpha}$ дифеоморфизам $\phi : \overline{\mathbb{B}^n} \to \overline{D}$ и (ii) f је хармонијско квазиконформно пресликавање између јединичне лопте из простора $\mathbb{R}^n$ и домена D, тада је пресликавање f Липшицово на $\mathbb{B}^n$.

Ово тврђење уопштава неке познате резултате у случају $n = 2$ и поправља друге резултате добијене у вишедимензионом случају. Напоменимо да је услов (i) јачи од претпоставке да је област D класе $C^{1,\alpha}$.

У чланку у припреми [40] представљен је доказ Теореме 2.11. Одавде следи да је Хипотеза 2.9 тачна, под неким додатним претпоставкама које треба да испуњава област D. Тачније, уопштен је резултат из рада [1], на тај начин што је ослабљен услов на области дефинисаности пресликавања, односно, уместо лопте $\mathbb{B}^n$ можемо разматрати неке општије области у $\mathbb{R}^n$ које испуњавају одређена геометријска својства. У ту сврху, размотримо за тренутак следећу дефиницију:

Дефиниција 2.10.

1. *Функцију $g_D(x, \xi)$ дефинисану на скупу $\overline{D} \times D$ за коју важи:*

   (1) g_D је хармонијска по променљивој x на скупу D, осим за $x = \xi$,

   (2) g_D је непрекидна на скупу $\overline{D}$, осим за $x = \xi$ и $g = 0$ на ∂D,

   (3) $g_D - |x - \xi|^{2-n}$ је хармонијска у $x = \xi$,

називамо Гриновом функција за област D.

2. *Функција између тополошких простора је proper, ако је инверзна слика компактног скупа компактна.*

3. *Кажемо да је D добра Гринова област ако важи*

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k} g_D(x,y)\right| \leqslant c\,\frac{1}{|x-y|^{n-1}}, \quad x,y\in D, \quad k=1,\dots,n, \quad \text{за неко} \quad c>0.$$

Област D је локално добара Гринова област у тачки $x_0 \in \partial D$ ако за свако $\delta > 0$ постоји C^{1+} област $W = W_{x_0} \subset D \cap B(x_0,\delta)$, таква да је $x_0 \in \partial W$ за коју је ∂W отворен скуп у ∂D.

4. *Област D има C^{1+} границу ако постоји $\alpha \in (0,1)$ такво да D има $C^{1,\alpha}$ границу.*

5. *D је локално добра Гринова област, ако је D локално добара Гринова област у свакој тачки $x_0 \in \partial D$.*

6. *Нека је $SC^1(G)$ класа функција $f \in C^1(G)$ за које важи $|f'(x)| \leqslant ar^{-1}\omega_f(x,r)$ за све $B(x,r) \subset G$, при чему је $\omega_f(x,r) = \sup\{|f(y)-f(x) : y \in B(x,r)\}$.*

К. Видман је доказао да су $C^{1,\alpha}$ домени примери добрих Гринових области (видети [68]).

Означимо са $d(x) = d_D(x),\ x \in D$ растојање од тачке x до границе D.

Хипотеза 1. Ако су D и G области са C^{1+} границама, пресликавање $f : D \xrightarrow{\text{на}} G$ је класе C^2 које је K-квазиконформно и функције $f_i, i = 1,2,\dots,n$, задовољавају Лаплас-градијентну неједнакост (специјално, нека је f хармонијско пресликавање) на скупу D. Да ли пресликавање f мора бити Липшицово на D?

Уведимо ознаке $\gamma = 1-\alpha, A = A_\gamma := d(z)^{-\gamma}, B = B_\gamma := |f'(z)|^{-\gamma}$ и $M = M_\gamma := AB$.

Теорема 2.11 ([40]). *Нека су испуњене следеће претпоставке:*

(1) D и G су области са C^{1+} границом, D је локално добра Гринова област, пресликавање $f : D \xrightarrow{\text{на}} G$ је proper и постоји $p > n$ такво да $|\nabla f| \in L^p$,

(2) $f \in SC^1(D)$.

(3) Претпоставимо још и да је област G класе $C^{1,\alpha}$, да је f вектор вредносна функција класе C^2 и да функције f_i задовољавају Лаплас-градијентну неједнакост на D за свако $i = 1,,2,\dots,n$.

(4) f је K-квазиконформно на D.

Важе следећи закључци:

(а) Ако је испуњена претпоставка (1), онда је $M_\gamma \in L^l$ за све $l < l_0 = \frac{p}{2-\gamma+p\gamma}$.

(б) Ако су испуњене претпоставке (1), (2), (3) и (4) онда је пресликавање f Липшиц-непрекидно на скупу D.

У раду [36] М. Матељевића и М. Воуринена је доказано да услов хармоничности и квазирегуларности функције f повлачи услов (2) претходне теореме. Важно је напоменути да је услов (2) еквивалентан услову Липшиц-непрекидности функције f у односу на квази-хиперболичку метрику.

Глава 3

Хармонијске функције на Римановим многострукостима

3.1 Неке опште формуле из диференцијалне геометрије

Следеће дефиниције се могу наћи у књизи [7]. Многострукост M_n, димензије n, је Хауздорфов тополошки простор, такав да свака тачка која припада M_n припада околини која је хомеоморфна са $\mathbb{R}^n$. Дакле, многострукости су локално компактни и локално повезани тополошки простори.

Локална карта многострукости M_n је уређени пар (Ω, φ), где је Ω отворен подскуп од M_n, а ϕ је хомеоморфизам између скупа Ω и отвореног подскупа у $\mathbb{R}^n$. Колекцију $(\Omega_i, \varphi_i)_{i\in I}$ локалних карата, за коју важи $\cup_{i\in I}\Omega_i = M_n$ називамо атлас. Координатама тачке $P \in \Omega$ у односу на пресликавање ϕ називамо координате које тачка $\varphi(P)$ има у $\mathbb{R}^n$.

Атлас класе C^k (односно, C^∞) на M_n је атлас на коме су све промене координатних система пресликавања класе C^k (односно, C^∞). То заправо значи да, ако су $(\Omega_\alpha, \varphi_\alpha)$ и $(\Omega_\beta, \varphi_\beta)$ две локалне карте, за које важи $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq 0$, имамо да је пресликавање $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ скупа $\varphi_\beta(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$ на скуп $\varphi_\alpha(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$ хомеоморфизам класе C^k (односно, C^∞).

Риманова многострукост класе C^∞ је пар (M_n, g), где су диференцијабилна многострукост M_n и Риманова метрика g класе C^∞. Риманова метрика је двоструко коваријантно тензорско поље g, такво да је у свакој тачки P многострукости M_n билинеарна форма g_P позитивно дефинитна:

$$g_P(X,Y) = g_P(Y,X) \text{ и } g_P(X,X) > 0 \text{ за } X \neq 0. \tag{3.1.1}$$

Нека је $P \in \Omega_\alpha \cap \Omega_\beta$. Означимо са $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ координате тачке $\varphi_\alpha(P) \in \mathbb{R}^n$, а са $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ координате тачке $\varphi_\beta(P) \in \mathbb{R}^n$.

У наредном делу текста биће приказан кратак део увода у опште појмове из диференцијалне геометрије, који се налази у књизи [5]. Према речима Алфорса, наш циљ је да „прикажемо врло несофистициран поглед на диференцијалну геометрију, посматрајући исту као скуп правила за промену координата". На почетку је пресликавање које представља смену координата једноставно представљено у векторском облику

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Такође је изнета примедба да смене координата морају бити инвертибилне, што се може изразити својством да је Јакобијева матрица

$$\left(\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$$

регуларна. У примерима наведеним у овој дисертацији смене координата ће увек бити класе C^∞.

Диференцијабилна многострукост постаје Риманова избором тензора метрике чија је матрица позитивно дефинитна и тада се може:

1. дефинисати дужина лука и запремина,
2. дефинисати коваријантно диференцирање,
3. дефинисати паралелно померање.

Означимо са g детерминанту матрице g_{ij}. Величина $\sqrt{g}$ се понаша као густина, у смислу да је $\sqrt{\bar{g}} = (\det \frac{\partial(x_1,\ldots,x_n)}{\partial(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)})\sqrt{g}$. Ово следи из правила за множење детерминанти. На тај начин се може дефинисати запремина (посматрамо само промене координата које чувају оријентацију).

Градијент скаларне функције f је векторско поље ∇f, које се може дефинисати помоћу скаларног производа g на многострукости,

$$g_P(\nabla f(P), v_P) = \mathrm{d}f(P)(v_P),$$

за све векторе v_P из тангентног простора T_P многострукости M_n у тачки x. Овде је $\mathrm{d}f$ спољашњи извод функције f, а то је 1-форма која узима аргумент v_P. У локалним координатама је

$$(\nabla f)_i = \nabla^i f = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j},$$

где су g^{ij} компоненте инверза метричког тензора и $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$, где је δ^k_i Кронекеров делта симбол.

За дату n-форму ω и векторско поље X, може се дефинисати $n-1$-форма $i_X\omega$ формулом

$$i_X\omega(X_1,\ldots,X_{n-1}) := \omega(X, X_1,\ldots,X_{n-1})$$

и дивергенција $\mathrm{div}_\omega X$ помоћу израза

$$\mathrm{d}(i_X\omega) = \mathrm{div}_\omega X\omega.$$

Ако је ω_g форма запремине на (M_n, g), тада број $\mathrm{div}X = \mathrm{div}_g X := div_{\omega_g} X$ представља дивергенцију од X. У локалним координатама важи формула

$$\mathrm{div}X = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}X^i\right).$$

Лаплас-Белтрамијев оператор скаларне функције f се дефинише на следећи начин

$$\Delta f := \mathrm{div}(\nabla f),$$

и задат је следећом формулом (у локалној карти):

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}v^i\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}f\right).$$

Посматрајмо простор $\mathbb{R}^n$ и Риманову метрику задату са $\sqrt{g} = \rho^n$, тј. $g^{ij} = \rho^{-2}$ и

$$\Delta f = \rho^{-n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho^{n-2}\frac{\partial}{\partial x_i}f\right).$$

Посебно, за $n = 2$ је $\Delta f = \rho^{-2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}f + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}f\right)$.

Нека (M, g) оријентисана n-димензионална Риманова многострукост са границом ∂M. На граници локално постоји позитивно оријентисани координатни систем $\{e_k\}_{k=1}^n$ такав да је $e_1 = N$ спољашња јединична нормала. Тада је поље координатних система $\{e_k\}_{k=2}^n$ позитивно на ∂M. Нека $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ представља систем ковектора дуалних на $\{e_k\}_{k=1}^n$. Форма запремине на M је тада $\mathrm{d}V_g = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n$, а форма запремине на ∂M је $\mathrm{d}S_g = \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_n$, тј. $\mathrm{d}S_g = i_N(\mathrm{d}V_g)$.

Теорема 3.1 (Теорема о дивергенцији)**.** *Нека је (M, g) компактна оријентисана Риманова многострукост. Ако је X векторско поље, тада важи*

$$\int_M div(X)\mathrm{d}V_g = \int_{\partial M}\langle X, n\rangle \mathrm{d}S_g,$$

$$\int_M (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}V_g = \int_{\partial M}(u\frac{\partial}{\partial n}v - v\frac{\partial}{\partial n}u)\mathrm{d}S_g,$$

где је

$$\frac{\partial}{\partial n}v = \mathrm{d}v(n).$$

Дефиниција 3.2. *Ако је (M^n, g) некомпактна Риманова многострукост, ненегативна Гринова функција је глатка функција*

$$G : M^n \times M^n \setminus \Delta(M) \to \mathbb{R},$$

где је $\Delta(M) = \{(x, x) : x \in M^n\}$, која испуњава следеће услове:

(1) $G(x, y) = G(y, x) \geqslant 0$,

(2) за свако $y \in M^n$ важи

$$\Delta G(x, y) = 0 \text{ за све } x \in M^n \setminus \{y\},$$

(3) за дато $y \in M^n$ и x који су близу y важи

$$G(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{n(n-2)\omega_n} + o(1)\right) d(x, y)^{2-n} & \text{за } n > 2, \\ -\left(\frac{1}{2\pi} + o(1)\right)\log d(x, y) & \text{за } n = 2. \end{cases}$$

На комплетној Римановој многострукости увек постоји Гринова функција. Такође, постоји карактеризација многострукости на којима постоји ненегативна Гринова функција ([8]).

Акин и Лојтвилер су у раду [47] проучавали решење Вајнстајнове једначине

$$\Delta u - \frac{k}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} + \frac{l}{x_n^2}u = 0 \tag{3.1.2}$$

на горњем полупростору $\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, са параметрима (k, l) за које важи $4l \leqslant (k-1)^2$, при чему је

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

еуклидски лапласијан. Посматрали су и инваријантност решења претходне једначине при Мебијусовим трансформација, као и повезну једначину на јединичној лопти $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$, где $|\cdot|$ представља еуклидску норму, наиме

$$\Delta v + \frac{2k}{1-|x|^2}\sum_{i=1}^{n} x_i\frac{\partial v}{\partial x_i} + \left(\frac{k(n-k-2)}{1-|x|^2} + \frac{4l}{(1-|x|^2)^2}\right)v = 0.$$

Доказали су особине средње вредности за решења претходне једначине на јединичној лопти, али нису посматрали горњу полураван.

3.2 Лаплас-Белтрамијеви оператори на $\mathbb{H}^n$ и $\mathbb{B}^n$

Претходне једначине се односе на сопствене вредности Лаплас-Белтрамијевих оператора на горњем полупростору $(\mathbb{H}^n, g_h)$, где је $g_h = \frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2}{x_n^2}$ и на јединичној лопти $(\mathbb{B}^n, g_b)$, за $g_b = 4\frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2}{(1-|x|^2)^2}$. Ове две многостукости су пример конформних многострукости, што значи да су њихове метрике задате формулом

$$\frac{\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2}{h^2},$$

где је $h > 0$ диференцијабилна функција. Формула за Лаплас-Белтрамијев оператор за овакве многострукости може се видети у Алфорсовој књизи [5], и гласи

$$\Delta^{lb} f = h^2\Delta f - (n-2)h\langle\nabla h, \nabla f\rangle,$$

где је $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ еуклидски скаларни производ, а ∇ представља (еуклидски) оператор градијент, који дејствује на одговарајућу реалну функцију. Нека је $\Phi : \mathbb{B}^n \mapsto \mathbb{H}^n$ дефинисано помоћу формуле $\Phi(x) = y$, за

$$y_i = \frac{2x_i}{|x-e_n|^2} \quad \text{и} \quad y_n = \frac{1-|x|^2}{|x-e_n|^2},$$

$i = 1, \dots, n-1$, $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$. У књизи [5] доказано је да је Φ дифеормофизам између $(\mathbb{H}^n, g_h)$ и $(\mathbb{B}^n, g_b)$.

Теорема 3.3 ([59]). *Лаӣлас-Белтрамијеви оӣераӣори на $\mathbb{H}^n$ и $\mathbb{B}^n$ који одговарају ӣреӣходним меӣрикама могу се изразиӣи формулама*

$$\Delta_h u = x_n^2 - (n-2)x_n \frac{\partial u}{\partial x_n}$$

и

$$\Delta_b v = (1-|x|^2)^2 \left(\Delta v + \frac{2(n-2)}{1-|x|^2} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right).$$

Шӣавише, ако је и решење једначине $\Delta_h u = 0$, ӣада $v = \Phi^* u$ задовољава услов $\Delta_b v = 0$, где је $\Phi^* u(x) = u(\Phi(x))$.

Доказ. Видети, нпр. [5]. $\square$

Напоменимо да је Вајнстајнова једначина

$$\Delta u - \frac{k}{x_n}\frac{\partial u}{\partial x_n} + \frac{l}{x_n^2} u = 0,$$

у одговарајућој вези са метриком $g_h^k = \dfrac{\sum_{i=1}^n \mathrm{d}x_i^2}{x_n^{2k/(n-2)}}$. Лаплас-Белтрамијев оператор за ову метрику је задат на следећи начин.

Теорема 3.4 ([59]). *Лаӣлас-Белтрамијев оӣраӣор на $\mathbb{H}^n$ који одговара меӣрици g_h^k има облик*

$$\Delta_{h,k} u = x_n^{2k/(n-2)} \Delta u - k x_n^{(2k-n+2)/(n-2)} \frac{\partial u}{\partial x_n},$$

где је L Лаӣлас-Белтрамијев оӣраӣор на $\mathbb{B}^n$ који одговара меӣрици

$$g_b^k = \Phi * g_h^k = \frac{4|x-e_n|^{4(2+k-n)/(n-2)}}{(1-|x|^2)^{2k/(n-2)}} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x_i^2.$$

Може се изразиӣи формулом

$$\Delta_{b,k} v = \frac{(1-|x|^2)^{2k/(n-2)}}{4|x-e_n|^{(n+2)(2+k-n)/(n-2)}} \left(\Delta(\varphi v) + \frac{2k}{1-|x|^2} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial(\varphi v)}{\partial x_i} + \frac{k(n-k-2)}{1-|x|^2}(\varphi v) \right),$$

где је $\varphi(x) = |x-e_n|^{k-n+2}$. Осим ӣога, ако је и решење једначине $\Delta_{h,k} u = 0$, ӣада важи $\Delta_{b,k}\Phi^* u = 0$.

Доказ. Видети претходну дискусију, као и [47]. $\square$

Решења Вајнстајнове једначине су добијена у процесу решавања следећег проблема сопствених вредности

$$x_n^{(2n-4)/(2k)} \Delta_{h,k} u = x_n^2 \Delta u - k x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = -lu$$

на конформној многострукости $(\mathbb{H}^n, g_h^k)$.

3.3 Општа језгра $P_{\alpha,\beta}$ Пуасоновог типа

У [47] аутор је увео специјалне Риманове метрике на јединичној лопти и горњем полупростору у $\mathbb{R}^n$, као и одговарајуће Лаплас-Белтрамијеве операторе. Праћењем метода описаних у овом раду може се испитати понашање решења одговарајућих Дирихлеових проблема на граници. Наиме, Пуасоново језгро за ову врсту оператора може се написати у облику

$$P_{\alpha,\beta}(x,y) = \frac{(1-|x|^2)^\alpha}{|x-y|^{2\beta}},$$

за $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$.

Гелер је у [17] увео фамилију диференцијалних оператора

$$\Delta_{\alpha,\beta} = (1-|z|^2)\sum_{i,j}(\delta_{ij} - z_i\overline{z}_j D_i\overline{D}_j + \alpha R + \beta\overline{R} - \alpha\beta),$$

где је $R = \sum z_i D_i$.

За Дирихлеов проблем видети формулу (3.5) у [50]:

$$u(z) = \int_{S^n} u(\zeta)P_{\alpha,\beta}(z,\zeta)\mathrm{d}A(\zeta) + \int_{\mathbb{B}^n} \Delta_{\alpha,\beta}u(\omega)(1-\overline{z}\omega)^\alpha(1-z\overline{\omega})^\beta(1-|\omega|^2)^{-\alpha-\beta}\mathrm{d}\lambda(\omega). \tag{3.3.1}$$

Претходна формула важи ако је, нпр. $u \in C^2(\mathbb{B}^n) \cap C(\overline{\mathbb{B}^n})$ такво да је испуњено

$$\int_{\mathbb{B}^n} |\Delta_{\alpha,\beta}u(\omega)|\frac{\mathrm{d}V(\omega)}{1-|\omega|} < +\infty. \tag{3.3.2}$$

Глава 4

Оцена градијента за функције добијене уопштеним репрезентацијама Пуасоновог типа

4.1 Гранично понашање T_α-хармонијских функција у полупростору

За $z \in \mathbb{R}^n$ користимо ознаку $z = (x, y)$, при чему је $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Поред тога, скуп $\mathbb{R}^{n-1}$ идентификујемо са $\{z \in \mathbb{R}^n : y = 0\}$, горњу полураван означавамо са $\mathbb{H}^n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : y > 0\}$ и V је n-димензионална Лебегова мера на $\mathbb{R}^n$.

У раду [69] аутор је посматрао $n-$димензиону елиптичку парцијалну диференцијалну једначину

$$D_\alpha u = y^{-\alpha}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2} - \frac{\alpha}{y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{4.1.1}$$

где је α произвољан реалан параметар. Решења једначине (4.1.1) у литератури се понекад називају генерализовани осно-симетрични потенцијали (скраћеница GASP на енглеском), за детаље видети Вајстајнов рад [66]. Ова теорија се показала као корисно средство за изучавање проблема у механици флуида и уопштених Трикомијевих једначина [66, 67]. У том контексту, оператор $y^{\alpha+1}D_\alpha$ се традиционално обележава са L_k, са параметром $k = -\alpha$, односно

$$L_k u := y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1}^2}\right) + k\frac{\partial u}{\partial y}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Као што је приказано у секцији 7.2. једначина $D_\alpha u = 0$ је Лаплас-Белтрамијева једначина у Римановом простору дефинисаном метриком

$$\mathrm{d}s^2 = y^{2\alpha/(n-2)}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{d}x_i^2 + \mathrm{d}y^2\right), \quad n > 2.$$

Такође, може се проверити да важи формула

$$D_\alpha u = \operatorname{div}(y^{-\alpha}\nabla u),$$

где су div и ∇ дивергенција и градијент у односу на еуклидску метрику.

Пошто је понашање решења једначине $D_\alpha u = 0$ есенцијално другачије у случајевима $\alpha > 1$ и $\alpha \leqslant -1$, ограничићемо се на решавање Дирихлеовог проблема

$$\begin{cases} D_\alpha u = 0, & \text{у } \mathbb{H}^n, \\ u = f, & \text{на } \mathbb{R}^{n-1} \end{cases} \tag{4.1.2}$$

искључиво у у случају $\alpha > -1$. У нашем излагању акценат је стављен на решавање Дирихлеовог проблема (4.1.2) за ограничену функцију $f \in C(\mathbb{R}^{n-1})$. Напоменимо да је Витстен у раду ([69]) посматрао следећу ситуацију:

Дефиниција 4.1. *Нека је*

$$u_y(x) = u(x, y), x \in \mathbb{R}^{n-1}, \tag{4.1.3}$$

за произвољно $y > 0$.

Ако f припада простору дистрибуција $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$, где је $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{n-1})$ скуп Шварцових тест функција, Витстен је решио проблем (4.1.2) у смислу да је

$$\lim_{y \to 0} u_y = f \quad \text{у} \quad \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n-1}).$$

У наставку наводимо један познат резултат.

Теорема 4.2 (Теорема 2.1(А. Хубер)[69]). *Нека је и решење једначине $D_\alpha u = 0$ дефинисано у области G, чија граница садржи отворен подскуп $S \subset \partial\mathbb{H}^n$. Ако фукција и има граничне вредности које су једнаке нули на скупу S, онда*

(а) у случају $\alpha \leqslant -1$ важи $u \equiv 0$ на G,

(б) у случају $\alpha > -1$ функција и се може представити у облику $u = y^{\alpha+1} v(x, y)$, где је функција v аналитичка на $G \cup S$ и задовољава услов $D_{-(2+\alpha)} v = 0$. (Такође, свака функција овог типа испуњава претпоставку теореме.)

На основу претходне теореме се може закључити да не постоји Гринова функција на $\mathbb{H}^n$ у случају $\alpha \leqslant -1$, док је у случају $\alpha > -1$ Гринова функција позната. У случају $n = 2$ видети рад Вајнстајна [66], а за $n \geqslant 3$ видети рад Ериксон и Орлеама [59].

Дефиниција 4.3. *Решења једначине $D_\alpha u = 0$, $\alpha > -1$ у $\mathbb{H}^n$, називамо T_α-хармонијским функцијама у полупросору.*

Означимо $\gamma_\alpha(z) = (1 - |z|^2)^{-\alpha}$. У раду [4], Олафсон и Витстен су разматрали решења парцијалне диференцијалне једначине $T_\alpha u(z) = \partial \gamma_\alpha \overline{\partial} u(z) = 0$ у јединичном диску $z \in \mathbb{U}$ за $\alpha > -1$ и решили су Дирихлеов проблем

$$\left\{ \begin{array}{ll} T_\alpha u = 0, & \text{на } \mathbb{U}, \\ u = f, & \text{на } \mathbb{T}, \end{array} \right\} \tag{4.1.4}$$

у случају када су граничне вредности задате у смислу дистрибуција. Интересантно је то да се услучају $n = 2$ оператор D_α може посматрати као симетрични део оператора T_α, до на скалирање одређеном функцијом.

Калфалах, Матељевић и Мхамди су решили проблем (4.1.2) у случају када је f непрекидна функција, у раду [3], где су разматране и верзије Шварцове леме за ове функције.

Сингуларно понашање оператора D_α у близини границе онемогућава примену строго елиптичких парцијалних диференцијалних оператора у решавању Дирихлеовог проблема (4.1.2). Поред тога, зна се доста о постојању и јединствености решења Дирихлеовог проблема (4.1.2) када је гранична функција регуларна. Заправо, појам одговарајућег Пуасоновог интеграла се појављује у раду [66].

У наставку ћемо границу полупростора $\mathbb{H}^n$ идентификовати са реалним еуклидским простором $\mathbb{R}^{n-1}$ и означити са $|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2}$ еуклидску норму тачке $x \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Дефиниција 4.4. *Нека је $\alpha > -1$. Дефинишимо језгро K_α на следећи начин:*

$$K_\alpha(x,y) = \frac{\Gamma((\alpha+n)/2)}{\Gamma((\alpha+1)/2)\pi^{n/2}} \cdot \frac{y^{\alpha+1}}{(|x|^2+y^2)^{(\alpha+n)/2}}, z \in \mathbb{H}^n,$$

где је формулом $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t, s > 0$ дефинисана Гама функција.

Напоменимо да се класично Пуасоново језгро на полупростору $\mathbb{H}^n$,

$$P(x,y) = K_0(x,y) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\pi^{(n+1)/2}} \cdot \frac{y}{(|x|^2+y^2)^{n/2}}, z \in \mathbb{H}^n,$$

може добити као специјални случај језгра K_α у случају $\alpha = 0$. Такође, у случају $\alpha = n-2$ добијамо Пуасоново језгро за модел хиперболичког n димензионог простора у полуравни $\mathbb{H}^n$

$$P_{\mathbb{H}^n}(x,y) = K_{n-1}(x,y) = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n/2)\pi^{n/2}} \cdot \left(\frac{y}{|x|^2+y^2}\right)^{n-1}, \quad z \in \mathbb{H}^n.$$

На сличан начин, фамилија језгара K_α је на природан начин повезана са фамилијом диференцијалних оператора D_α, за $\alpha > -1$. Сходно томе наведимо следеће резултате:

Лема 4.1 (Лема 2.3 [69])**.** *Нека је $\alpha > -1$ и нека је K_α дефинисано формулом (4.4). Тада важи*

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_\alpha(x,y)\mathrm{d}V(x) = 1,$$

за свако $y > 0$.

Теорема 4.5 (Теорема 2.4 [69])**.** *Нека је $\alpha > -1$. Тада је K_α решење једначине $D_\alpha u = 0$ у $\mathbb{H}^{n-1}$. Означимо са $K_{\alpha,y}$ функцију $K_{\alpha,y}(x) = K_\alpha(x,y)$, за свако $y > 0$. Тада важи $\lim\limits_{y\to 0} K_y = \delta_0$ у простору $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n-1})$.*

Дефиниција 4.6. *Нека је функција f непрекидна и ограничена на $\mathbb{R}^{n-1}$. Тада формулом*

$$K_\alpha[f](z) := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K_\alpha(x-t,y)f(x)\mathrm{d}V(t) \tag{4.1.5}$$

дефинишемо α-Пуасонов интеграл функције f, за свако $\alpha > -1$.

Докажимо сада наредну кратку теорему.

Теорема 4.7. *Претпоставимо да је функција f непрекидна и ограничена на $\mathbb{R}^{n-1}$. Када је $z=(x,y)\in\overline{\mathbb{H}^n}$ дефинишемо функцију F на следећи начин*

$$F(z)=\begin{cases} K_\alpha[f](z), & \text{на } z\in\mathbb{H}^n,\\ f(x), & \text{на } x\in\mathbb{R}^{n-1}.\end{cases}$$

Тада је F непрекидна на $\overline{\mathbb{H}^n}$, T_α-хармонијска на $\mathbb{H}^n$ и важи $|F(z)\leqslant\|f\|_\infty$ за свако $z\in\mathbb{H}^n$.

Доказ. Пошто је $\|K_{\alpha,y}\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1},\mathrm{d}V(x))}=1$, директно добијамо да је $|F(z)\leqslant\|f\|_\infty$. Нека је $a\in\mathbb{R}^{n-1}$ и $\delta>0$. Тада је

$$\begin{aligned}|F(z)-f(a)|&=\left|\int_{\mathbb{R}^{n-1}}K_\alpha(x-t,y)(f(t)-f(a))\mathrm{d}V(t)\right|\leqslant\\ &\leqslant\int_{|t-a|\leqslant\delta}K_\alpha(x-t,y)|f(t)-f(a)|\mathrm{d}V(t)+2\|f\|_\infty\int_{|t-a|>\delta}K_\alpha(x-t,y)\mathrm{d}V(t).\end{aligned}$$

Остатак доказа је аналоган доказу Теореме 5.3.3 [60]. □

У наставку су представљени резултати из заједничког рада са М. Матељевићем [37], са неким додацима. У раду [37] су разматране искључиво хармонијске функције у односу на хиперболичку метрику у полупростору, тј. случај $\alpha=n-2$. Доказаћемо да се у случају C_c^1 глаткости функције f сви парцијални изводи α-Пуасоновог интеграла функције f могу непрекидно продужити на границу $\mathbb{H}^n$, *за свако* $\alpha>0$. Као специјалан случај добијамо да тврђење важи за хиперболичке хармонијске функције на полупростору. Ако је $\alpha>0$, прво ћемо доказати да је, у случају да је функција u α-хармонијска у горњем полупростору, испуњено

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y)\to 0\quad\text{када}\quad y\to 0^+,$$

када је гранична функција f функције u диференцијабилна у тачки x_0. У општем случају, ово није тачно за (еуклидски) хармонијске функције, тј. за случај $\alpha=0$. У раду [14] може се видети пример функције $g\in C^1(\mathbb{R})$ такве да за функцију u која је (еуклидско) хармонијско продужење функције g на полураван $\mathbb{H}^2$ важи

$$\limsup_{y\to 0^+}\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)=+\infty.$$

Домен за контрапример у случају $\alpha=0$ је горња полураван $\mathbb{H}^2$ и гранична функција која је дефинисана формулом

$$g(x)=\begin{cases}0, & \text{за } x=0 \text{ или } |x|>1;\\ \left|\frac{x}{\log|x|}\right|, & \text{за } |x|\leqslant\frac{1}{2};\\ \beta(x), & \text{за } \frac{1}{2}<|x|\leqslant 1,\end{cases}$$

где је функција $\beta(x)$ таква да је g глатко на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и да важи $g(x)>0$ за све $x\in\mathbb{R}$. Пошто је

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{x/|x|}{-\log|x|}=0,$$

имамо да је функција g диференцијабилна у тачки 0 и да важи $g(0)=0$.

Нека је $u(x,y)$ хармонијска функција дефинисана на горњој полуравни, чија је g гранична функција. Одавде u има репрезентацију помоћу Пуасоновог интеграла

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{g(t)}{|x-t|^2+y^2}\mathrm{d}t.$$

Како је функција g непрекидна и ограничена на $\mathbb{R}$, имамо да је функција $\bar{u}$ дефинисана на $\overline{\mathbb{H}^2}$ са $\bar{u}(x,y)=u(x,y), y>0$ и $\bar{u}(x,0)=g(x)$ некрекидна на $\overline{\mathbb{H}^2}$, као у Теореми 4.7. Пошто је

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y}\geqslant\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{\pi}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{|t|}{-\log|t|(t^2+y^2)}\mathrm{d}t,$$

добијамо да је $\limsup\limits_{y\to 0^+}\frac{\partial u}{\partial y}(0,y)=+\infty$. Одавде се може закључити да функција u није диференцијабилна у тачки 0.

Сада ћемо формулисати лему, чији је доказ аналоган доказу Леме 6.1. у [51].

Лема 4.2. *Нека је $f\in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, и нека је u њено α-хармонијско продужење дато формулом (4.7), за свако $\alpha>-1$. Тада је*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}K_\alpha(x-t,y)\frac{\partial f}{\partial t_i}(t)\,\mathrm{d}V(t)$$

за све $1\leqslant i\leqslant n-1$, где је $t=(t_1,\ldots,t_{n-1})\in\mathbb{R}^{n-1}$. Дакле, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ је непрекидан и на граници датом једначином $y=0$ за $1\leqslant i\leqslant n-1$. Штавише,

$$\lim_{y\to 0}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Даље формулишемо следећи услов:

(*i*) f припада класи $C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ и има компактан носач.

У наставку излагања биће нам потребна наредна техничка лема.

Лема 4.3. *([55]) Ако је функција f непрекидна и радијална (тј. $f(x)=\tilde{f}(|x|)$) на затвореној лопти полупречника R у $\mathbb{R}^{n-1}$, центрираној у координатном почетку, тада је*

$$\int_{B(R)}f(x)\mathrm{d}V(x)=\sigma_{n-1}\int_0^R\tilde{f}(r)r^{n-2}\mathrm{d}r.$$

Пре него што формулишемо главно тврђење у овој секцији, наводимо још једну лему.

Лема 4.4. *Ако је*

$$I_s(y)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|x|}{(|x|^2+y^2)^{s/2}}\mathrm{d}V(x),$$

тада је $I_s(y)\preceq\frac{1}{y^{s-n}}$, за $s>n$.

Доказ. Увођењем смене $x=ty$ добијамо

$$I_s(y)=\frac{1}{y^{s-n}}\int\limits_0^\infty\frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{s/2}}\mathrm{d}r.$$

Пошто последњи интеграл конвергира акко конвергира интеграл $\int\limits_1^\infty\frac{\mathrm{d}r}{r^{s-n+1}}$, имамо да је у случају $s-n>0$, односно $s>n$ испуњено тврђење. □

На основу специјалног случаја $s = \alpha + n$ Леме 4.4, добијамо да постоји $M_1(n) > 0$ такво да је

$$y^\alpha \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|x|}{(|x|^2 + y^2)^{(\alpha+n)/2}} \mathrm{d}V(x) \leqslant M_1(n)$$

за свако $y > 0$.

Приметимо да услов $s = n + \alpha > n$ није испуњен за $-1 < \alpha \leqslant 0$, док јесте испуњен за свако $\alpha > 0$.

Сада можемо формулисати следећу теорему, важну за доказ главног тврђења у овој секцији. Ради једноставнијег записа језгра K_α, уведимо ознаку

$$w_{n,\alpha} = \frac{\Gamma((\alpha+n)/2)}{\Gamma((\alpha+1)/2)\pi^{n/2}}.$$

Теорема 4.8. *Нека је $\alpha > 0$ произвољно и претпоставимо да функција f задовољава услов (i) и диференцијабилна је у тачки 0. Ако је функција u дефинисана формулом (4.1.5), тада је*

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial u}{\partial y}(0, y) = 0.$$

Доказ. Након једноставног израчунавања добијамо

$$\frac{\partial}{\partial y} K_\alpha(x, y) = w_\alpha \frac{y^\alpha}{(|x|^2 + y^2)^{(\alpha+n)/2}} \left(\alpha + 1 - (\alpha + n) \frac{y^2}{|x|^2 + y^2} \right).$$

Одавде директно следи да важи следећа процена,

$$\left| \frac{\partial}{\partial y} K_\alpha(x, y) \right| \preceq \frac{y^\alpha}{(|x|^2 + y^2)^{(\alpha+n)/2}} \quad \text{на скупу} \quad z \in \mathbb{H}^n. \tag{4.1.6}$$

Нека је $M_1(n)$ као у Леми 4.4. На основу претпоставке, за свако $\epsilon = \epsilon(0) > 0$ постоји $\delta = \delta(0) > 0$ за које важи

$$f(x) - f(0) = a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} + \epsilon(x)|x|,$$

где је

$$|\epsilon(x)| < \frac{\epsilon}{2M_1(n)} \cdot \frac{1}{w_{n,\alpha}} \text{ за } |x| < \delta.$$

Слично као у доказу Теореме 5.12, имамо да је

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y} u(0, y) &= w_{n,\alpha} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial}{\partial y} K_\alpha(x, y)(f(x) - f(0)) \mathrm{d}V(x) = \\
&= w_{n,\alpha} \int_{B(\delta)} \frac{\partial}{\partial y} K_\alpha(x, y)(a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} + \epsilon(x)|x|) \mathrm{d}V(x) + \\
&+ w_{n,\alpha} \int_{B(\delta)^c} \frac{\partial}{\partial y} K_\alpha(x, y)(f(x) - f(0)) \mathrm{d}V(x).
\end{aligned}$$

Како је $x_k \frac{\partial}{\partial y} P_h(x, y)$ непарна функција променљиве x_k и лопта $B(\delta)$ је симетрична у односу на хиперраван $x_k = 0$, за свако $1 \leqslant k \leqslant n - 1$ важи

$$\frac{\partial}{\partial y} u(0, y) = w_{n,\alpha} \left(\int_{B(\delta)} \frac{\partial}{\partial y} K_\alpha(x, y) \epsilon(x)|x| \mathrm{d}V(x) + \int_{B(\delta)^c} \frac{\partial}{\partial y} K_\alpha(x, y)(f(x) - f(0)) \mathrm{d}V(x) \right).$$

Ако дефинишемо

$$I_{1,n}(y) := \int_{B(\delta)} \left|\frac{\partial}{\partial y} K_\alpha(x,y)\right| |\epsilon(x)||x| \mathrm{d}V(x),$$

$$I_{2,n}(y) := \int_{B(\delta)^c} \left|\frac{\partial}{\partial y} K_\alpha(x,y)\right| |f(x) - f(0)| \mathrm{d}V(x),$$

имамо да је $\left|\frac{\partial}{\partial y} u(0,y)\right| \preceq I_{1,n}(y) + I_{2,n}(y)$. Сада, коришћењем неједнакости (4.1.6) добијамо

(4.1.7) $$I_{1,n}(y) \leqslant \epsilon y^\alpha \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|x|}{(|x|^2+y^2)^{(\alpha+n)/2}} \mathrm{d}V(x) < \frac{\epsilon}{w_{n,\alpha}}.$$

Такође, имамо да је

$$I_{2,n}(y) \preceq y^\alpha \int_{|x| \geqslant \delta} \frac{\mathrm{d}V(x)}{(|x|^2+y^2)^{(\alpha+n)/2}}.$$

Уведимо ознаку

$$J_{\delta,n}(y) := \int_{|x| \geqslant \delta} \frac{\mathrm{d}V(x)}{(|x|^2+y^2)^{(\alpha+n)/2}}.$$

Након смене променљиве $x = yt$, добијамо

$$J_{\delta,n}(y) = \frac{1}{y^{(\alpha+n)/2}} \int_{|t| \geqslant \frac{\delta}{y}} \frac{\mathrm{d}V(t)}{(1+|t|^2)^{(\alpha+n)/2}} = \frac{\sigma_{n-1}}{y^{(\alpha+n)/2}} \int_{\delta/y}^{+\infty} \frac{r^{n-2}}{(1+r^2)^{(\alpha+n)/2}} \mathrm{d}r$$

$$= \left[\rho = \frac{1}{r}\right] = \frac{\sigma_{n-1}}{y^{(\alpha+n)/2}} \int_0^{y/\delta} \frac{\rho^\alpha}{(1+\rho^2)^{(\alpha+n)/2}} \mathrm{d}\rho.$$

Ако је $1+\rho^2 \geqslant 1$, имамо да важи $J_{\delta,n}(y) \preceq \frac{1}{\delta^{\alpha+1}}$. То значи да је

$$I_{2,n}(y) \leqslant M_2(f,n) \frac{y^\alpha}{\delta^{\alpha+1}} < \frac{\epsilon}{2w_{n,\alpha}},$$

ако је $0 < y < \left(\frac{\epsilon\delta^{\alpha+1}}{2M_2(f,n)} \cdot \frac{1}{w_{n,\alpha}}\right)^{1/\alpha} =: \delta_0 = \delta_0(\epsilon(0), \delta(0))$. Коначно, важи

(4.1.8) $$\left|\frac{\partial}{\partial y} u(0,y)\right| < \epsilon, \text{ за } 0 < y < \delta_0.$$

□

Лема 4.5. *Нека су f и u функције дефинисане као у Теореми 4.8, нека је f диференцијабилна у околини тачке 0 и нека су сви парцијални изводи функције f непрекидни у тачки 0. Тада за свако $\epsilon > 0$ постоји $\eta, \delta_0 > 0$, такво да је*

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} u(x,y)\right| < \epsilon, \text{ за свако } |x| < \eta, 0 < y < \delta_0.$$

Заправо, $\lim\limits_{\substack{z \to 0,\\ z \in \mathbb{H}^n}} \frac{\partial}{\partial y} u(z) = 0.$

Доказ. Прво, за свако $\epsilon > 0$ постоји $\delta, \eta > 0$, такво да је

$$f(x+h) - f(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f(x) h_{n-1} + \epsilon(x,h)|h| \quad \text{и}$$

$$|\epsilon(x,h)| < \epsilon \text{ ако је } |x| < \eta, \ |h| < \delta.$$

Ово се може лако проверити коришћењем теореме о средњој вредности [62, Последица 10.2.9]. Наиме, користимо да постоје $\eta > 0$ и $\delta > 0$ (које не зависи од s, t), такви да важи

$$|f(t + h_i e_i) - f(t) - \frac{\partial}{\partial x_i} f(0) h_i| < \frac{\epsilon}{2(n-1)} |h_i| \text{ за } |t| < \eta, |h_i| < \delta, 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Приметимо да нам у овом случају треба да важи $\left|\frac{\partial}{\partial x_i} f(s) - \frac{\partial}{\partial x_i} f(0)\right| < \frac{\epsilon}{2(n-1)}$, за свако $|s| < \eta + \delta$. Овде је $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ стандардна ортонормирана база простора $\mathbb{R}^{n-1}$. Сада нам је остало само да искористимо чињенице да је

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) = & (f(x+h) - f(x+h-h_1 e_1)) + \\ & + (f(x+h-h_1 e_1) - f(x+h-h_1 e_1 - h_2 e_2)) + \ldots + \\ & + (f(x+h_{n-1} e_{n-1} - f(x)) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{\left| f(x+h) - f(x) - \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) h_1 - \ldots - \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f(x) h_{n-1} \right|}{|h|} \leqslant \\ & \frac{1}{|h|} \left\{ \left| f(x+h) - f(x+h-h_1 e_1) - \frac{\partial}{\partial x_1} f(0) h_1 \right| + \left| \frac{\partial}{\partial x_1} f(0) - \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \right| |h_1| + \right. \\ & + \left| f(x+h-h_1 e_1) - f(x+h-h_1 e_1 - h_2 e_2) - \frac{\partial}{\partial x_2} f(0) h_2 \right| + \\ & + \left| \frac{\partial}{\partial x_2} f(0) - \frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \right| |h_2| + \ldots + \\ & + \left| f(x+h_{n-1} e_{n-1}) - f(x) - \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f(0) h_{n-1} \right| + \\ & \left. + \left| \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f(0) - \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} f(x) \right| |h_{n-1}| \right\} \leqslant \\ & \leqslant \frac{\epsilon(|h_1| + \ldots + |h_{n-1}|)}{(n-1)|h|} < \epsilon, \text{ за } |x| < \eta, |h| < \delta. \end{aligned}$$

Сада користимо да у једначини (4.1.8) δ_0 зависи од δ, које је изабрано из дефиниције диференцијабилности функције f у тачки 0. Дакле, нашли смо η-околину тачке 0 у којој $\delta(x)$, на основу дефиниције диференцијабилности функције f у тачки x, заправо, не зависи од x, па можемо користити доказ Теореме 4.8 да бисмо добили резултат. □

На основу Леме 4.5 долазимо до наредног тврђења.

Теорема 4.9. *Нека је $f \in C_c^1(\mathbb{R}^{n-1})$ и $u = K_\alpha[f]$, за произвољно $\alpha > 0$. Тада је $u \in C^1(\overline{\mathbb{H}^n})$.*

Глава 5

Хелдер и Липшиц-непрекифност решења хиперболичке Пуасонове једначине

5.1 Хиперболичка геометрија у $\mathbb{R}^n$

Нека је $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, при чему се код матричних операција x третира као вектор колона. За групу ортогоналних матрица реда n користимо ознаку $O(n)$.

Група *сличности* се састоји од свих пресликавања облика

$$x \mapsto mx + b,$$

где је $b \in \mathbb{R}^n$ и m је конформна матрица, тј. $m = \lambda k$ за $\lambda > 0$ и $k \in O(n)$.

Инверзија у односу на јединичну сферу се дефинише на следећи начин:

$$x \mapsto x^* = J(x) = \frac{x}{|x|^2} \quad (J(0) = \infty,\ J(\infty) = 0).$$

Очигледно је $J^2 = I$, идентичко пресликавање.

Дефиниција 5.1 ([5]). *Пуна мебијусова група $\widehat{M}(\mathbb{R}^n)$ је група генерисана скупом свих сличности којима је придружена још инверзија. Мебијусова група $M(\mathbb{R}^n)$ је подгрупа чији се елементи састоје од парног броја фактора J и сличности које чувају оријентацију.*

Извод диференцијабилног пресликавања f из једног отвореног скупа из $\mathbb{R}^n$ у други је Јакобијева матрица

$$f'(x) \quad \text{или} \quad Df(x),$$

чији су елементи

$$f'(x)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = D_j f_i(x).$$

Извод сличности $\gamma x = mx + b$ је константна конформна матрица m. Компоненте матрице $J'(x)$ за $x \neq 0$ су

$$J'(x)_{ij} = \frac{1}{|x|^2}\left(\delta_{ij} - \frac{2x_i x_j}{|x|^2}\right). \tag{5.1.1}$$

Ако означимо са $Q(x)$ матрицу чији су елементи

$$Q(x)_{ij} = \frac{x_i x_j}{|x|^2},$$

тада се (5.1.1) може написати у облику

$$J'(x) = \frac{1}{|x|^2}(I - 2Q(x)). \tag{5.1.2}$$

Из једнакости $Q^2 = Q$ следи $(I - 2Q)^2 = I$, па је $I - 2Q \in O(n)$. Дакле, $J'(x)$ је конформна матрица за свако $x \neq 0$.

Даље, на основу правила о изводу комозиције функција, следи да је $\gamma'(x)$ конформна матрица за свако $\gamma \in \widehat{M}(\mathbb{R}^n)$. Другим речима, све Мебијусове трансформације су конформне (уз одговарајућу интерпретацију у бесконачности).

За свако $\gamma \in \widehat{M}(\mathbb{R}^n)$ означимо са $|\gamma'(x)|$ позитиван број за који је $\dfrac{\gamma'(x)}{|\gamma'(x)|} \in O(n)$. Узевши у претходну дефиницију норме линеарног пресликавања $|D\gamma|$ важи формула $|D\gamma(x)| = |\gamma'(x)|$.

Још једна примена правила о изводу композиције функција је наредна формула:

$$|\gamma x - \gamma y| = |\gamma'(x)|^{1/2} |\gamma'(y)|^{1/2} |x - y|. \tag{5.1.3}$$

Посматрајмо сада апсолутну дворазмеру

$$|a, b, c, d| = \left|\frac{a-c}{a-d}\right| : \left|\frac{b-c}{b-d}\right|,$$

која је очигледно инваријантна у смислу да важи

$$|\gamma a, \gamma b, \gamma c, \gamma d| = |a, b, c, d|. \tag{5.1.4}$$

Можемо користити ту инваријантност да докажемо да се кругови сликају у кругове. Заиста, постоји класично тврђење у $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$, продуживо на $\mathbb{R}^n$, да a, b, c, d леже на кругу у цикличном реду ако и само ако важи

$$|a - b||c - d| + |b - c||d - a| = |a - c||b - d|,$$

што се може написати у инваријантном облику

$$|a, d, b, c| + |c, d, b, a| = 1.$$

Још једна примена инваријантности (5.1.4) је за доказивање наредне важне леме.

Лема 5.1 ([5])**.** *Ако γ фиксира бесконачно далеку тачку, онда је γ сличност.*

Последица 1 ([5])**.** *Ако су a и b две различите коначе тачке, тада је општи облик $\gamma \in \widehat{M}(\mathbb{R}^n)$ за које важи $\gamma(a) = 0$, $\gamma(b) = \infty$ облика*

$$\gamma(x) = m[(x - b)^* - (a - b)^*], \tag{5.1.5}$$

где је m константна конформна матрица.

Заправо, јасно је да $(x - b)^* - (a - b)^*$ слика a у 0 и b у ∞.

Означимо са $\widehat{M}(\mathbb{B}^n)$ и $M(\mathbb{B}^n)$ подгрупе које чувају јединичну лопту $\mathbb{B}^n = \{x : |x < 1|\}$. Како су Мебијусове трансформације бијективне, јединична сфера $\mathbb{S}^{n-1} = \{x : |x| = 1\}$ и спољашњост од $\mathbb{B}^n$ су такође инваријантни.

Лема 5.2 ([5]). *Ако је $\gamma \in \widehat{M}(\mathbb{B}^n)$ и $\gamma(0) = 0$, тада је γ ротација (тј. $\gamma(x) = kx$, $k \in O(n)$).*

Доказ. Ако је $\gamma(\infty) = \infty$ знамо на основу Леме 5.1 да је $\gamma = mx$ и како је $|mx| = 1$ за $|x| = 1$, следи да је $m = k \in O(n)$.

Претпоставимо сада да је $\gamma^{-1}(\infty) = b \neq \infty$. Тада на основу (5.1.5) важи

$$|(x-b)^* + b^*| = \text{const.}$$

за $x = 1$. Даље је

$$|(x-b)^* + b^*| = \frac{|x|}{|x-b||b|},$$

па је $|x - b| = \text{const.}$ за $|x| = 1$, што је немогуће будући да је $b \neq 0$. $\square$

Сада ћемо одредити најопштије $\gamma \in \widehat{M}(\mathbb{B}^n)$. За почетак, наводимо наредну лему.

Лема 5.3. *Важи ([5])*

$$(x - y^*)^* + y = |y|^2(I - 2Q(y))(x^* - y)^*. \tag{5.1.6}$$

Испоставља се да важи и наредна важна једнакост:

$$(I - 2Q(y))(I - 2Q(x - y^*)) = (I - 2Q(x^* - y))(I - 2Q(x)).$$

За дато $a \in \mathbb{B}^n$ ($a \neq 0$) конструишимо a^* и сферу $S^{n-1}(a^*, (|a^*|^2 - 1)^{1/2})$ са центром у тачки a^* и полупречником $\sqrt{1 - |a|^2}/|a|$ која нормално сече сферу $\mathbb{S}^{n-1}$. Инверзија у односу на ову једничну сферу је дата формулом

$$\sigma_a x = a^* + (|a^*|^2 - 1)(x - a^*)^*.$$

Претпоставимо да ову инверзији $\sigma_a x$ прати инверзија у односу на раван која пролази кроз координатни почетак и нормална је на a. Једноставно је видети да је ова друга инверзија множење матрицом $I - 2Q(a)$. Заправо,

$$y' = (I - 2Q(a))y = y - \frac{2(ya)a}{|a|^2}.$$

Дефинишимо сада пресликавање

$$T_a x = (I - 2Q(x))\sigma_a x.$$

Свако $\gamma \in \widehat{M}(\mathbb{B}^n)$ за које важи $\gamma(a) = 0$ је облика kT_a за неко $k \in O(n)$.

Израз за T_a се може поједноставити коришћењем идентитета (5.1.6). Јасно је да је $(I - 2Q(a))a^* = -a^*$, па је

$$T_a x = -a^* + (|a^*|^2 - 1)(I - 2Q(a))(x - a^*)^*.$$

Заменимо сада y са a у једнакости (5.1.6) и помножимо је са $I - 2Q(a)$. Добијамо

$$(I - 2Q(a))(x - a^*)^* = a + |a|^2(x^* - a)^* \quad \text{и}$$

$$T_a x = -a^* + (|a^*|^2 - 1)a + (1 - |a|^2)(x^* - a)^*,$$

па је

$$T_a x = -a + (1 - |a|^2)(x^* - a)^*.$$

Ипак, коришћење x^* у овој формули се може избећи на следећи начин:

$$T_a x = \frac{(1 - |a|^2)(x - a) - |x - a|^2 a}{[x, a]^2},$$

где је

$$[x, a] = |x||x^* - a| = |a||x - a^*| \quad \text{и} \quad [x, a]^2 = 1 + |x|^2|a|^2 - 2xa.$$

Једноставним израчунавањем добијају се наредни изрази

$$T_y'(0) = 1 - |y|^2, \quad T_y'(y) = \frac{1}{1 - |y|^2}.$$

Такође је $T_y 0 = -y$ и зато је $T_{-y} = T_y^{-1}$. Даље налазимо

$$|T_y x| = |T_y x - T_y y| = |T_y'(x)|^{1/2}|T_y'(y)|^{1/2}|x - y| = \frac{|x - y|}{[x, y]}.$$

Коначно је

$$1 - |T_y x|^2 = \frac{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}{[x, y]^2},$$

па важи

$$\frac{|T_y'(x)|}{1 - |T_y x|^2} = \frac{1}{1 - |x|^2}.$$

На овај начин смо доказали инваријантност Поенкареове метрике

$$ds = \frac{2|dx|}{1 - |x|^2}$$

у односу на Мебијусову групу $M(\mathbb{B}^n)$. Геодезијске линије су све кружнице ортогоналне на јединичну сферу. Хиперболичко растојање од координатног почетка до тачке x може се задати формулом

$$d_h(0, x) = \log \frac{1 + |x|}{1 - |x|},$$

а хиперболичко растојање између тачака x и y је

$$d_h(x, y) = \log \frac{1 + |T_y x|}{1 - |T_y x|}.$$

5.2 Хиперболичка Гринова функција и Хиперболичко Пуасоново језгро

Подсетимо се да је је Лапласов оператор у односу на хиперболичку метрику задат формулом

$$\Delta_h v = (1-|x|^2)^2 \left(\Delta v + \frac{2(n-2)}{1-|x|^2} \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right).$$

За $0 < r < 1$ дефинишемо

$$g(r) := \int_r^1 \frac{(1-t^2)^{n-2}}{t^{n-1}} \mathrm{d}t. \tag{5.2.1}$$

Хиперболичка Гринова функција је задата формулом

$$g(x,y) = G_h(x,y) = g(|T_y x|) = g\left(\frac{|x-y|}{[x,y]} \right). \tag{5.2.2}$$

За $n = 2$ важи $g(r) = \log \frac{1}{r}$, док је за $n > 2$ испуњено $g(r) \sim \frac{1}{n-2} r^{2-n}$ за $r \to 0$ и $g(r) = O((1-r)^{n-1})$ за $r \to 1$.

Нека је $\mathrm{d}\sigma$ ознака за $(n-1)$-димензиону Лебегову меру нормализовану тако да важи $\sigma(\mathbb{S}^{n-1}) = 1$.

Пуасоново језгро P_h за хиперболички лапласијан Δ_h дато је формулом

$$P_h(x,t) = \left(\frac{1-|x|^2|}{|t-x|^2} \right)^{n-1}, \tag{5.2.3}$$

и задовољава једначину

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} P_h(x,t) \mathrm{d}\sigma(t) = 1.$$

Сада за функцију $f \in L_1(\mathbb{S}^{n-1})$ можемо дефинисати хиперболички Пуасонов интеграл формулом

$$P_h[f](x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} P_h(x,t) f(t) \mathrm{d}\sigma(t), \tag{5.2.4}$$

као и хиперболички Гринов интеграл

$$G_h[\psi](x) = \int_{\mathbb{B}^n} G_h(x,y) \psi(y) \mathrm{d}\tau(y),$$

за одговарајуће функције ψ и

$$\mathrm{d}\tau(x) = \frac{\mathrm{d}\nu(x)}{(1-|x|^2)^n},$$

где је ν ознака за n-димензионалну Лебегову меру, нормализовану тако да важи $\nu(\mathbb{B}^n) = 1$.

Дирихлеов проблем за Лапласову једначину у хиперболичкој лопти $\mathbb{B}^n$

Дирихлеов проблем је добро истражен у областима у којима је метрика глатка. Пример таквих резултата може се видети, рецимо, у поглављу IX књиге [54]. Испоставило се да је овај проблем у случају хиперболичке метрике на јединичној лопти са граничним вредностима на јединичној сфери веома интересантан и недавно је разматран у чланку [23]. Ово је случај када густина метрике тежи ∞ на граници. Између осталог, Ј. Чен, М. Хуанг, А. Расила и Х. Ванг искористили су лепе особине Мебијусових трансформација и хиперболичке Гринове функције (описаних, рецимо у књигама [5, 60]), као и одговарајуће оцене интеграла. Прецизније, аутори овог чланка су доказали да је за $n \geqslant 3$ и функцију $u \in C^2(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\mathbb{B}^n}, \mathbb{R}^n)$ која је решење хиперболичке Пуасонове једначине, испуњено

$$u = P_h[\phi] - G_h[\psi], \tag{5.2.5}$$

под претпоставком да је

$$u\,|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \phi \quad \text{и} \quad \int_{\mathbb{B}^n} (1-|x|^2)^{n-1} |\psi(x)|\, d\tau(x) < \infty.$$

Овде су P_h и G_h ознаке за Пуасонов и Гринов интеграл за Δ_h, тим редоследом. Штавише, доказали су да су функције облика $u = P_h[\phi] - G_h[\psi]$ у овом случају Липшиц-непрекидне.

Посматрајмо сада Дирихлеов проблем

$$\begin{cases} u(x) = \phi(x), & \text{за } x \in \mathbb{S}^{n-1}, \\ (\Delta_h)u(x) = \psi, & \text{за } x \in \mathbb{B}^n. \end{cases} \tag{5.2.6}$$

У наставку ћемо уместо аутоморфизма $T_y x$ користити функцију $\varphi_y(x) := -T_y x$. За овај нови аутоморфизам јединичне лопте важи $\varphi_y(y) = 0$ и $\varphi_y^2 = Id$.

Теорема 5.2. *[23] Претпоставимо да важи $u \in C^2(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\mathbb{B}^n}, \mathbb{R}^n)$, где је $n \geqslant 3$ и*

$$\int_{\mathbb{B}^n} (1-|x|^2)^{n-1} |\psi(x)| \mathrm{d}\tau(x) \leqslant \mu_1, \ \text{где је } \mu_1 > 0 \text{ константа.}$$

Ако u задовољава (5.2.6), тада важи

(1) $u = P_h[\phi] - G_h[\psi]$,

(2) $U = u \circ \varphi_x = P_h[\phi \circ \varphi_x] - G_h[\psi \circ \varphi_x]$, $x \in \mathbb{B}^n$.

У раду [23] доказан је следећи резултат.

Теорема 5.3. *[23, Теорема 1.2] Нека је $n \geq 3$. Претпоставимо да важе следећи услови.*

(1) $u \in C^2(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\mathbb{B}^n}, \mathbb{R}^n)$ има репрезентацију (5.2.5).

(2) Постоји $L \geqslant 0$ такво да је $|\phi(\xi) - \phi(\eta)| \leqslant L|\xi - \eta|$ за све $\xi, \eta \in \mathbb{S}^{n-1}$.

(3) Постоји константа $M \geqslant 0$ за коју важи $|\psi(x)| \leqslant M(1 - |x|^2)$ за све $x \in \mathbb{B}^n$.

Тада постоји константа $N = N(n, L, M)$ за коју важи $x, y \in \mathbb{B}^n$,

$$|u(x) - u(y)| \leqslant N|x - y|,$$

где ознака $N{=}N(n, L, M)$ значи да константа N зависи само од вредности n, L и M.

Заправо, доказан је општији резултат. Наиме:

(А) ако функција ϕ испуњава услов (1), тада је функција $\Phi = P_h[\phi]$ Липшиц-непрекидна;

(Б) ако функција ψ испуњава услов (3), тада је функција $\Psi = G_h[\psi]$ Липшиц-непрекидна.

Напоменимо да исказ који одговара закључку (A) није истинит у случају еуклидског Пуасоновог интеграла. Нешто касније биће више речи о овом феномену.

У Пропозицији 5.5 биће представљен кратак доказ горње теореме. У [23, Лема 5.2] аутори су користили технике манипулације хипергеометријским редовима у доказивању формула (5.5.1) и (5.5.2). Уместо овог приступа, у раду [37] је употребљена Пропозиција 5.2 и неке једноставне неједнакости, које су у ствари модификација неких оцена и Хардијеве теорије у равни (за више детаља видети Леме 5.4, 5.6 и Лему 5.4), где једноставна смена променљиве $\theta = (1-r)u$ у интегралу

$$\int_0^\infty \frac{\theta^{\alpha+n-2}}{\left((1-r)^2 + \frac{4r}{\pi^2}\,\theta^2\right)^{n-1}}\, d\theta$$

даје оцене раста, које ће бити оптималне.

У Теореми 5.12 доказано је да услов $\alpha-$Хелдер-непрекидности $(0 < \alpha \leqslant 1)$ у тачки x на граници $\mathbb{B}^n$ повлачи Хелдер-непрекидност функције дуж читавог радијус-вектора тачке x. Овај резултат је аналоган са [34, Теорема 6.2], осим у случају $\alpha = 1$. Случај када је гранична функција ϕ (еуклидски) хармонијске функције Липшиц-непрекидна истраживан је у раду М. Матељевића, М. Арсеновића и В. Манојловић [30]. Уз додатан услов да је функција $P[\phi]$ K-квазирегуларна, они су доказали да је $P[\phi]$ Липшиц-непрекидна на $\mathbb{B}^n$.

У скорашњем раду [24] аутори су доказали да услов (3) не може бити изузет из исказа Теореме 5.3. У следећем одељку су представљени алтернативни услови које хиперболички лапласијан ψ мора да испуњава да бисмо добили непрекидност Гриновог потенцијала функције ψ по Хелдеру и Липшицу. Еуклидски Гринов потенцијал је, између осталог, разматран у раду [41] М. Матељевића.

5.3 Дирихлеов проблем за хиперболичку Пуасонову једначину

Садржај овог одељка везан је за хармонијске и субхармонијске функција на хиперболичкој лопти и детаљан преглед ове теме је изложен у књизи [60] М. Стола.

Дефиниција 5.4 (Дефиниција 4.3.1 [60])**.** *Нека је D подскуп од $\mathbb{R}^n$. Функција $f : D \to [-\infty, +\infty)$ је полунепрекидна одозго у тачки $x_0 \in D$, ако за свако $\alpha \in \mathbb{R}^n$ за које важи $\alpha > f(x_0)$ постоји $\delta > 0$, такво да је*

$$f(x) < \alpha \textit{ за свако } x \in D \cap B(x_0, \delta).$$

Дефиниција 5.5 (Дефиниција 4.3.3 [60])**.** *Нека је Ω отворен подскуп од $\mathbb{B}^n$. Полунепрекидна функција одозго $f : \Omega \to [-\infty, +\infty)$, за коју важи $f \not\equiv -\infty$, је $\mathcal{H}$-субхармонијска на Ω, ако важи*

$$f(a) \leqslant \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\varphi_a(rt))\mathrm{d}\sigma(t)$$

за свако $a \in \Omega$ и свако довољно мало r.

Теорема 5.6 (Теорема 4.6.3 [60]). *Ако је функција f $\mathcal{H}$-субхармонијска на $\mathbb{B}^n$, тада постоји јединствена регуларна Борелова мера μ_f на $\mathbb{B}^n$ за коју је*

$$\int_{\mathbb{B}^n} \psi \mathrm{d}\mu_f = \int_{\mathbb{B}^n} f\Delta_h\psi\mathrm{d}\tau, \tag{5.3.1}$$

за све функције $f \in C_c^2(\mathbb{B}^n)$.

Дефиниција 5.7 (Дефиниција 4.6.4 [60]). *Ако је функција f $\mathcal{H}$-субхармонијска на $\mathbb{B}^n$, јединствена регуларна Борелова мера μ_f која задовољава* (5.3.1) *је Рисова мера од f.*

Дефиниција 5.8. *Као у Еуклидском случају, за $\zeta \in \mathbb{S}^{n-1}$ и $\alpha > 1$, означимо са $\Gamma_\alpha(\zeta)$ Штолцов угао у тачки ζ дефинисан помоћу*

$$\Gamma_\alpha(\zeta) = \{y \in \mathbb{B}^n : |y - \zeta| < \alpha(1 - |y|)\}.$$

Теорема 5.9 (Теорема 8.3.3 [60]).

(а) Ако је $f \in L_1(\mathbb{S}^{n-1})$, тада за свако $\alpha > 1$,

$$\lim_{\substack{x\to\zeta,\\ x\in\Gamma_\alpha(\zeta)}} P_h[f](x) = f(\zeta) \text{ скоро свуда у односу на меру } \sigma \text{ на } \mathbb{S}^{n-1}.$$

(б) Ако је ν означена Борелова мера на $\mathbb{S}^{n-1}$ која је сингуларна у односу на σ, тада за свако $\alpha > 1$,

$$\lim_{\substack{x\to\zeta,\\ x\in\Gamma_\alpha(\zeta)}} P_h[f](\nu) = 0 \text{ скоро свуда у односу на меру } \sigma \text{ на } \mathbb{S}^{n-1}.$$

Кажемо да позитивна мера μ задовољава услов интеграбилности, ако важи

$$\int_{\mathbb{B}^n} (1 - |y|^2)^{n-1} d\mu(y) < \infty. \tag{5.3.2}$$

Подсетимо се да је Гринов потенцијал регуларне Борелове мере μ на $\mathbb{B}^n$ дефинисан помоћу (видети [60]) $G_\mu(x) = \int_{\mathbb{B}^n} G_h(x,y)\mathrm{d}\mu(y)$. У књизи [60] је доказано да је $G_\mu(x) \not\equiv +\infty$ ако и само ако важи (5.3.2).

Пропозиција 5.1 (Последица 4.1.5 [60]). *Ако је $f \in C_c^2(\mathbb{B}^n)$, тада је за свако $a \in \mathbb{B}^n$*

$$f(a) = -\int_{\mathbb{B}^n} G_h(a,x)\Delta_h f(x)\mathrm{d}\tau(x).$$

Теорема 5.10 (Теорема 9.4.1 [60]). *Нека је G_μ Гринов потенцијал мере μ за који важи услов* (5.3.2). *Тада је*

$$\lim_{r\to 1} G_\mu(rt) = 0 \text{ за скоро свако } t \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Наредна теорема може се посматрати као уопштење Теореме 5.2 из [23], која представља Дирихлеов проблем за хиперболичку Пуасонову једначину.

Теорема 5.11 ([37]). *Претпоставимо да Борелова ненегативна мера задовољава услов интеграбилности (5.3.2) и да је $u = P_h[\phi] - G_h[\mu]$, при чему је $\phi \in L^1(\mathbb{S}^{n-1})$. Тада је $(\Delta_h)u = \mu$ у слабом смислу и*

$$\lim_{r\to 1} u(rt) = \phi(t)$$

за скоро свако $t \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Доказ. Нека је $v(x) = -G_\mu(x)$ и $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{B}^n)$. Тада је

$$\int_{\mathbb{B}^n} v(x)\Delta_h\psi(x)\mathrm{d}\tau(x) = -\int_{\mathbb{B}^n}\left(\int_{\mathbb{B}^n} G_h(x,y)\mathrm{d}\mu(y)\right)\Delta_h\psi(x)\mathrm{d}\tau(x).$$

На основу Фубинијеве теореме, имамо да је

$$\int_{\mathbb{B}^n} v(x)\Delta_h\psi(x)\mathrm{d}\tau(x) = -\int_{\mathbb{B}^n}\left(\int_{\mathbb{B}^n} G_h(x,y)\Delta_h\psi(x)\mathrm{d}\tau(x)\right)\mathrm{d}\mu(y).$$

Коришћењем Пропозиције 5.1 добијамо

$$\int_{\mathbb{B}^n} v(x)\Delta_h\psi(x)\mathrm{d}\tau(x) = \int_{\mathbb{B}^n}\psi(y)\mathrm{d}\mu(y).$$

За други део овог доказа користи се Теорема 8.3.3, подсекција 5.9, Теорема 2 и Теорема 9.4.1 из [60]. □

5.4 Хиперболички хармонијске функције у јединичној лопти и локална Хелдер-непрекидност

На почетку обратимо пажњу на рад [34], конкретно на Пропозицију 5.10. У овој пропозицији коришћене су следеће ознаке: σ_{n-1} је мера јединичне сфере $\mathbb{S}^{n-1}$, док је φ угао између радијус вектора тачке $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}$ и радијус вектор тачке $\tilde{x}$.

Уведимо ознаку $\sigma_*(n) = \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}$. Користећи формулу

$$\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \quad \text{добијамо да је} \quad \sigma_*(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)}.$$

Пропозиција 5.2 (Пропозиција 5.10 [34]). *Ако је f функција дефинисана на јединичној сфери $\mathbb{S}^{n-1}$ и зависи само од угла φ, тада важи*

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\eta)\,\mathrm{d}\sigma(\eta) = \sigma_{n-2}\int_0^\pi f(\varphi)\sin^{n-2}\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Доказаћемо следећу теорему, која је аналогна Теореми 6.2 из рада [34].

Теорема 5.12 ([37]). *Претпоставимо да је $0 < \alpha \leqslant 1$, да је h функција која је хиперболички хармонијска на $\mathbb{B}^n$ и непрекидна на $\overline{\mathbb{B}^n}$ и*

(x1) нека је $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ такво да важи $|h(x) - h(x_0)| \leqslant M|x - x_0|^\alpha$ за $x \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Тада постоји константа M_n таква да важи

$$(1-r)^{1-\alpha}|h'(rx_0)| \leqslant M_n, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

Доказ. Означимо са h_b рестрикцију функције h на сферу $\mathbb{S}^{n-1}$. Пошто је h хиперболички хармонијска на $\mathbb{B}^n$ и непрекидна на $\overline{\mathbb{B}^n}$, имамо да важи

$$h(x) = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} P_h(x,\eta)h_b(\eta)\mathrm{d}\sigma(\eta), \tag{5.4.1}$$

за сваку тачку $x \in \mathbb{B}^n$. Нека је $d := d(x) = 1 - |x|^2$. После краћег рачуна добијамо да је

$$\partial_{x_k} P_h(x,t) = -2(n-1)\left(\frac{x_k}{|x-t|^2} + d(x)\frac{x_k - t_k}{|x-t|^4}\right)\left(\frac{1-|x|^2}{|t-x|^2}\right)^{n-2}.$$

Дакле, за оне тачке x за које важи $d \leqslant |x-t|$, важи

$$|\partial_{x_k} P_h(x,t)| \leqslant c_1 \frac{(1-|x|^2)^{n-2}}{|x-t|^{2(n-1)}}. \tag{5.4.2}$$

Нека је $x = re_n$ и нека је θ ознака за угао између радијус вектора тачки t и e_n. Тада $s := |x-t|^2 = 1 - 2r\cos\theta + r^2$ зависи само од θ, ако је x претходно фиксирано. Пошто је $\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \partial_k P_h(x,t)h(e_n)\mathrm{d}\sigma(t) = 0$, добијамо да важи

$$\partial_{x_k} h(x) = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \partial_k P_h(x,t)\big(h(t) - h(e_n)\big)\mathrm{d}\sigma(t). \tag{5.4.3}$$

Закључујемо да, због услова (5.4.2) и хипотезе (x1), важи

$$|\partial_{x_k} h(x)| \leqslant c_2(1-|x|^2)^{n-2} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|e_n - t|^\alpha}{|x-t|^{2(n-1)}}\mathrm{d}\sigma(t). \tag{5.4.4}$$

Према томе, доказ Теореме 5.12 се своди на доказ следеће пропозиције. □

Пропозиција 5.3 ([37]). *Претпоставимо да је $n \geqslant 3$, $0 < \alpha \leqslant 1$ и да је $x = re_n$, где је $0 < r < 1$. Тада важи*

$$I_\alpha(re_n) := (1-|x|^2)^{n-2} \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{|e_n - t|^\alpha}{|x-t|^{2(n-1)}}\mathrm{d}\sigma(t) \leqslant c \cdot \frac{1}{(1-r)^{1-\alpha}},$$

где је $c = c(\alpha, n)$ позитивна константа која зависи само од n и α.

Доказ. Посматрајмо сферне капе S^θ дефинисане формулом $t_n > \cos\theta$ и извршимо парцијалну интеграцију. Пошто за фиксирано $\theta \in [0,\pi]$ важи $|e_n - t| \leqslant \theta$ за све $t \in S^\theta$, применом Пропозиције 5.2 на функцију $f(t) = \frac{|e_n-t|^\alpha}{|x-t|^{2(n-1)}}$, добијамо

$$\begin{aligned} I_\alpha(re_n) &\leqslant c_3(1-|x|^2)^{n-2} \int\limits_0^\pi \frac{|\theta|^{n-2}|\theta|^\alpha}{((1-r)^2 + \frac{4r}{\pi^2}\theta^2)^{n-1}}\, d\theta \\ &< c_4(1-|x|^2)^{n-2} \int\limits_0^\infty \frac{\theta^{\alpha+n-2}}{\big((1-r)^2 + \frac{4r}{\pi^2}\,\theta^2\big)^{n-1}}\, d\theta\,. \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Надаље, користећи неједнакост

$$\left(1+\frac{4r}{\pi^2}u^2\right)^{-1} \leqslant c_5(1+u^2)^{-1}$$

која важи у случају $\frac{1}{2} \leqslant r < 1$ и смену променљивих

$$\theta = (1-r)u, \tag{5.4.6}$$

налазимо да важи

$$I_\alpha(re_n) \leqslant c_6(1-r)^{\alpha-1}\int_0^\infty \frac{u^{\alpha+n-2}}{(1+u^2)^{n-2}}\,du. \tag{5.4.7}$$

Означимо са $J(\alpha)$ последњи израз на десној страни претходне формуле. Пошто је $g(u) = \frac{u^{\alpha+n-2}}{(1+u^2)^{n-1}} \sim u^{\alpha-n}$ када $u \to +\infty$ и пошто, по претпоставци, важи $0 < \alpha \leqslant 1$ (конкретно $\alpha - n < -1$), добијамо на интеграл $J(\alpha)$ конвергира и налазимо да је испуњено

$$I_\alpha(re_n) \leqslant c_7(1-r)^{\alpha-1} \quad \text{за} \quad \frac{1}{2} \leqslant r < 1. \tag{5.4.8}$$

Функција $(1-r)^{1-\alpha}A(r)$ је непрекидна на $[0, 1/2]$ и постиже своју максималну вредност c_8, што значи да је

$$I_\alpha(re_n) \leqslant c_9(1-r)^{\alpha-1} \quad \text{за} \quad 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}, \tag{5.4.9}$$

за $c_9 = c_3c_8$. Према томе, из услова (5.4.8) и (5.4.9), при чему је $c = \max\{c_7, c_9\}$, следи доказ пропозиције. □

У овом тренутку је интересантно напоменути да услов $\alpha = 1$, односно, услов Липшиц-непрекидности граничне функције не повлачи нужно Липшиц-непрекидност њеног хармонијског продужења. Ипак, у случају хиперболички хармонијског продужења, под претпоставкама Теореме 5.12, закључујемо да је и у случају $\alpha = 1$ исказ ове теореме на снази.

Комбиновањем Пропозиције 5.3 и формуле (5.4.4) добијамо доказ Теореме 5.12.

5.5 Раст парцијалних извода за хиперболички Гринов потенцијал

У овој секцији посматрамо Хелдерову и Липшицову непрекидност за хиперболички Гринов потенцијал на јединичној лопти у $\mathbb{R}^n$. Требаће нам наредна лема.

Лема 5.4 ([37]). *Нека је $n \geqslant 3$ и $r = |x|$, где је $0 < r < 1$. Ако је*

$$A(r,\rho) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{\sqrt{1-2\rho\langle x,\xi\rangle + \rho^2|x|^2}} \quad \text{и} \quad B(r,\rho) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{1-2\rho\langle x,\xi\rangle + \rho^2|x|^2},$$

тада важе следећи закључци.

(i) Постоје константе $C_1, C_2 > 0$ такве да за свако $0 < \rho < 1$ и $1/2 < r < 1$ важи $A(r,\rho) \leqslant \frac{C_1(n)}{\sqrt{\rho}}$ за $n \geqslant 3$ и $B(r,\rho) \leqslant \frac{C_2(n)}{\rho}$ за $n > 3$.

(ii) Постоје константе $C_3, C_4 > 0$ такве да за свако $1/2 < r, \rho < 1$ важи $B(r,\rho) \leqslant C_3 - C_4 \log(1-\rho)$ за $n = 3$.

Доказ. На основу Пропозиције 5.2, имамо да је

$$A(r,\rho)=\sigma_*(n)\int_0^\pi \frac{\sin^{n-2}\theta}{\sqrt{(1-\rho r)^2+4\rho r\sin^2\frac{\theta}{2}}}\,\mathrm{d}\theta,\quad B(r,\rho)=\sigma_*(n)\int_0^\pi \frac{\sin^{n-2}\theta}{(1-\rho r)^2+4\rho r\sin^2\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta,$$

где је θ угао између вектору x и ξ. Коришћењем чињенице $\sin x \geqslant \frac{2}{\pi}x$ за $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, добијамо

$$A(r,\rho) \leqslant \frac{\widetilde{C}_1}{\sqrt{\rho r}}\int_0^\pi \frac{\theta^{n-2}}{\theta}\,\mathrm{d}\theta,\quad B(r,\rho) \leqslant \frac{\widetilde{C}_2}{\rho r}\int_0^\pi \frac{\theta^{n-2}}{\theta^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Први и други интеграл конвергирају у случајевима $n \geqslant 3$ и $n \geqslant 4$, редом, одакле следи (i).

Да бисмо доказали (ii), претпоставимо да је $n = 3$. Тада имамо да је

$$B(r,\rho) \leqslant \sigma_*(3)\int_0^\pi \frac{\theta\,\mathrm{d}\theta}{(1-\rho)^2 + \frac{4r\rho}{\pi^2}\theta^2}.$$

Када је $0 < \rho < 1/2$,0 важи $B(r,\rho) \leqslant 2\pi^2\sigma_*(3)$. Нека је $1/2 < r,\ \rho < 1$ и уведимо смену променљиве $\theta = (1-\rho)u$. Тада је

$$\begin{aligned}
B(r,\rho) &\leqslant \sigma_*(3)\int_0^{\frac{\pi}{1-\rho}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+\frac{u^2}{\pi^2}} = \sigma_*(3)\left(\int_0^1 \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+\frac{u^2}{\pi^2}} + \int_1^{\frac{\pi}{1-\rho}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+\frac{u^2}{\pi^2}}\right)\\
&\leqslant C_3 + \widetilde{C}_4\int_1^{\frac{\pi}{1-\rho}} \frac{u\,\mathrm{d}u}{u^2}\\
&\leqslant C_3 - C_4\log(1-\rho).
\end{aligned}$$

□

Пропозиција 5.4 ([37]). *Нека је $n \geqslant 3, \psi \in C(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^n)$ и $|\psi(x)| \leqslant M(1-|x|^2)$ у $\mathbb{B}^n$, где је M константа. Нека је*

$$I_{2,k}(x) = \int_{\mathbb{B}^n} \left|\frac{\partial}{\partial x_k} G_h(x,y)\psi(y)\right| \mathrm{d}\tau(y).$$

Тада постоји константа $\beta = \beta(n, M)$ таква да је

$$I_{2,k}(x) \leqslant \beta_1,\ \text{за свако}\ x \in \mathbb{B}^n.$$

Доказ. На основу формуле (5.3) из рада [23] следи да је $\frac{\partial}{\partial x_k}G_h(x,y) = (D_kG_h)_1(x,y) + (D_kG_h)_2(x,y)$, где је

$$(D_kG_h)_1(x,y) := -\frac{(x_k-y_k)(1-|x|^2)^{n-1}(1-|y|^2)^{n-1}}{n|x-y|^n[x,y]^n}$$

и

$$(D_kG_h)_2(x,y) := -\frac{x_k(1-|x|^2)^{n-2}(1-|y|^2)^{n-1}}{n|x-y|^{n-2}[x,y]^n}.$$

Такође, из рада [23] имамо да важи

$$I_{2,k}(x) \leqslant \frac{1}{n}\left(I_{3,k} + I_{4,k}\right),$$

где је

$$I_{3,k}(x) = \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|x_k - y_k|(1-|x|^2)^{n-1}(1-|y|^2)^{n-1}}{|x-y|^n [x,y]^n} |\psi(y)| \,\mathrm{d}\tau(y)$$

и

$$I_{4,k}(x) = \int_{\mathbb{B}^n} \frac{|x_k|(1-|x|^2)^{n-2}(1-|y|^2)^{n-1}}{|x-y|^{n-2}[x,y]^n} |\psi(y)| \,\mathrm{d}\tau(y).$$

Након примене услова (3) из Теореме 5.3 и увођења смене променљиве $y = \varphi_x(w)$, добијамо

$$|I_{3,k}(x)| \leqslant J_{3,k}(x) := M \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\mathrm{d}\nu(w)}{[x,w]|w|^{n-1}} \text{ и } |I_{4,k}(x)| \leqslant J_{4,k}(x) := M \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\mathrm{d}\nu(w)}{[x,w]^2|w|^{n-2}}.$$

(За више детаља видети [23, Тврђење 5.3, 5.4]). Коначно, коришћењем Леме 5.4 добијамо

$$J_{3,k}(x) = nM \int_0^1 \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{[x,\rho\xi]} \,\mathrm{d}\rho = \int_0^1 A(r,\rho)\,\mathrm{d}\rho < +\infty \tag{5.5.1}$$

и

$$J_{4,k}(x) = nM \int_0^1 \rho \,\mathrm{d}\rho \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{[x,\rho\xi]^2} = \int_0^1 \rho B(r,\rho)\,\mathrm{d}\rho < +\infty. \tag{5.5.2}$$

Овде користимо да је $[x,\rho\xi] = \sqrt{1-2\rho\langle x,\xi\rangle + \rho^2|x|^2}$. □

Нека је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $F, G : \Omega \to \mathbb{R}_+ := [0,+\infty)$. Користимо ознаку $F(x) \preceq G(x), x \in \Omega$ када постоји $C > 0$ такво да је $F(x) \leqslant CG(x), x \in \Omega$.

Лема 5.5 ([37]). *Претпоставимо да је $n \geqslant 3$. Нека је $I_m = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{|x-\xi|^m}$, где је $x \in \mathbb{B}^n$ и $r = |x|$. Ако је $r \to 1^-$, тада важи:*

(i) *I_m је ограничен за $0 < m < n-1$.*

(ii) *$I_{n-1} \preceq \log \frac{1}{1-r}$.*

(iii) *$I_m \preceq \frac{1}{(1-r)^{m-n+1}}$ за $m > n-1$.*

Доказ. Коришћењем Пропозиције 5.2 можемо закључити да је

$$I_m = \sigma_*(n) \int_0^\pi \frac{\sin^{n-2}\theta}{((1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta}{2})^{\frac{m}{2}}} \,\mathrm{d}\theta.$$

Напишимо сада интеграл I_m у облику

$$I_m = \sigma_*(n) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n-2}\theta}{((1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta}{2})^{\frac{m}{2}}} \,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin^{n-2}\theta}{((1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta}{2})^{\frac{m}{2}}} \,\mathrm{d}\theta \right).$$

Како важи $\sin x \sim x$ за $x \in (0,\pi/2)$, имамо да за $r \to 1^-$ постоји $c_3 > 0$ такво да је

$$I_m \preceq c_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta^{n-2}}{\theta^m} \mathrm{d}\theta,$$

одакле следи закључак (i). Такође, постоје $c_4, c_5 > 0$ такви да важи

$$I_m = c_4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n-2}\theta}{((1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{\theta}{2})^{\frac{m}{2}}} \,\mathrm{d}\theta + c_5.$$

Да бисмо доказали (ii), уводимо смену $\theta = (1-r)u$. Тада је

$$I_m \preceq \frac{1}{(1-r)^{m-n+1}} \int_0^{\frac{\pi}{2(1-r)}} \frac{u^{n-2}\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^{\frac{m}{2}}},$$

одакле добијамо наш закључак. Претпоставимо сада да је $m = n-1$. Важи

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &\preceq \int_0^{\frac{\pi}{2(1-r)}} \frac{u^{n-2}\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^{\frac{n-1}{2}}} \\
&= \left(\int_0^1 \frac{u^{n-2}\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^{\frac{n-1}{2}}} + \int_1^{\frac{\pi}{2(1-r)}} \frac{u^{n-2}\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^{\frac{n-1}{2}}} \right) \\
&\preceq \log \frac{1}{1-r}.
\end{aligned}$$

□

Пре наредног резултата, докажимо наредно тврђење.

Лема 5.6 ([37])**.** *Ако је $r = |x|$, $0 \leqslant \rho < 1, 1/2 \leqslant r < 1$ и $B(r,\rho)$ је дефинисано као у Леми 5.4, имамо да је*

$$\int_0^1 B(r,\rho)\mathrm{d}\rho < +\infty. \tag{5.5.3}$$

Доказ. Коришћењем Пропозиције 5.2, можемо проверити да је

$$B(r,\rho) = \sigma_*(n) \int_0^\pi \frac{\sin^{n-2}\theta}{(1-\rho r)^2 + 4\rho r \sin^2\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta.$$

Ако је $0 < \rho \leqslant 1/2$, имамо да је

$$B(r,\rho) \preceq \int_0^\pi \frac{\theta^{n-2}}{1/4}\mathrm{d}\theta = const.$$

За $1/2 < \rho < 1$ можемо користити

$$B(r,\rho) \preceq \frac{1}{\rho} \int_0^\pi \frac{\theta^{n-2}}{\theta^2}\,\mathrm{d}\theta \preceq \frac{1}{\rho},\ \text{за } n > 3.$$

Ово значи да за $n > 3$ имамо наш резултат. За $n = 3$ закључак следи из својства (ii) из Леме 5.4.

□

Пропозиција 5.5 ([37])**.** *Претпоставимо да је $n \geq 3$, $\psi \in C(\mathbb{B}^n, \mathbb{R}^n)$ и $|\psi(x)| \leqslant M(1-|x|^2)$ из $\mathbb{B}^n$, где је M константа. Нека је $1 \leqslant k \leqslant n$ и $u(x) = \int_{\mathbb{B}^n} G_h(x,y)\psi(y)\,\mathrm{d}\tau(y)$. Тада је*

$$\frac{\partial}{\partial x_k} u(x) = \int_{\mathbb{B}^n} \frac{\partial}{\partial x_k} G_h(x,y)\psi(y)\,\mathrm{d}\tau(y),$$

и постоји константа $\beta_1 = \beta_1(n, M)$ таква да је

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_k} u(x) \right| \leqslant \beta_1,\ \text{за свако } x \in \mathbb{B}^n.$$

Доказ. Фиксирајмо $x \in \mathbb{B}_n$ и нека је $V^x = u \circ \varphi_x$. Тада на основу инваријантности Δ_h важи $\Delta_h V^x(y) = \Delta_h (u \circ \varphi_x)(y) = \Delta_h u(\varphi_x((y)) = \psi(\varphi_x((y))$ и

$$V^x(0) = \int_{\mathbb{B}_n} G_h(0,y)\Delta_h V^x(y)\mathrm{d}\tau(y) = \int_{\mathbb{B}_n} G_h(0,y)\psi(\varphi_x(y))\mathrm{d}\tau(y).$$

Ово значи да је

$$\frac{\partial}{\partial x_k} V^x(0) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{\partial}{\partial x_k} G_h(0,y)\psi(\varphi_x(y))\mathrm{d}\tau(y).$$

На основу формуле (5.3) из рада [23] добијамо

$$\frac{\partial}{\partial x_k} G_h(0,y) = \frac{y_k(1-|y|^2)^{n-1}}{n|y|^n}.$$

Сада, имамо

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k} V^x(0)\right| \leqslant \frac{1}{n}\int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|y|^2)^{n-1}}{|y|^{n-1}}|\psi(\varphi_x(y))|\mathrm{d}\tau(y) \preceq \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|y|^2)^{n-1}}{|y|^{n-1}}(1-|\varphi_x(y)|^2)\mathrm{d}\tau(y).$$

Како је $1-|\varphi_x(y)|^2 = \dfrac{(1-|y|^2)(1-|x|^2)}{[x,y]^2}$, добијамо

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial x_k} V^x(0)\right| &\preceq \int_{\mathbb{B}_n} \frac{\mathrm{d}\nu(y)}{|y|^{n-1}[x,y]^2}(1-|x|^2) = \int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{\mathrm{d}\sigma(\xi)}{1-2\rho\langle x,\xi\rangle+\rho^2|x|^2}(1-|x|^2) \\ &\preceq 1-|x|^2,\end{aligned}$$

за $1/2 \leqslant |x| < 1$, на основу Леме 5.6. Коришћењем (видети [60])

$$|\nabla V^x(0)| \approx |\nabla u(x)|(1-|x|^2), \tag{5.5.4}$$

налазимо да је ∇u ограничен, q.e.d. □

Гринова функција и Рисов потенцијал

У неким истраживањима се показало да је од интереса истраживати неке друге претпоставке уместо услова (3) из Теореме 5.3.
Посматрајмо следећи услов.

(x3-1) Функција ψ је класе $C(\mathbb{B}^n)$ и функција $(1-|y|^2)^{-2}\psi$ припада класи $L^p(\mathbb{B}^n, \nu(y))$ за било коју вредност $p > n$.

Нека је $\mu \in (0,1)$ и нека је Ω ограничена област у $\mathbb{R}^n$. Рисов потенцијал се дефинише као оператор V_μ на простору $L_1(\Omega, \mathrm{d}\nu)$ и задат је помоћу формуле

$$V_\mu(x) = \int_\Omega |x-y|^{n(\mu-1)} f(y)\mathrm{d}\nu(y).$$

Главне особине Рисовог потенцијала су исказане у [10, Леми 7.12].

Лема 5.7 ([37])**.** *Оператор V_μ простор $L^p(\Omega,\mathrm{d}\nu)$ непрекидно слика у простор $L^q(\Omega,\mathrm{d}\nu)$, за свако q за које важи $1 \leqslant q \leqslant +\infty$ и које испуњава услов*

$$0 \leqslant \delta = \delta(p,q) = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \mu. \tag{5.5.5}$$

Како је

$$|(D_kG_h)_1(x,y)| \preceq K_0(x,y) := \frac{(1-|x|^2)^{n-1}(1-|y|^2)^{n-1}}{|x-y|^{n-1}[x,y]^n}$$

и $(1-|x|^2)^{n-1}(1-|y|^2) \leqslant [x,y]^n$, налазимо да је

$$|(D_kG_h)_1(x,y)| \preceq K_1(x,y) := \frac{(1-|y|^2)^{n-2}}{|x-y|^{n-1}} \text{ и } |(D_kG_h)_2(x,y)| \preceq K_2(x,y) := \frac{(1-|y|^2)^{n-3}}{|x-y|^{n-2}}.$$

Нека је

$$M(x) := \int_{\mathbb{B}_n} K_1(x,y)|\psi(y)|d\tau(y) = \int_{\mathbb{B}_n} \frac{(1-|y|^2)^{-2}\psi(y)}{|x-y|^{n-1}} \mathrm{d}\nu(y).$$

Сада можемо закључити да је $|I_{3,k}(x)| \leqslant M(x)$.

Ако ψ задовољава услове (x3-1), имамо да је функција M ограничена на $\mathbb{B}^n$, на основу Леме 5.7. Да би $|I_{4,k}|$ било ограничено, треба нам да функција $(1-|y|^2)^{-3}\psi$ припада класи $L^p(\mathbb{B}^n,\nu(y))$ за било које $p > \frac{n}{2}$. Може се лако проверити да услов (x3-1) повлачи ограниченост парцијалних извода хиперболичког Гриновог потенцијала функције ψ. На тај начин добијамо наредно тврђење. Нека је

$$(1-|y|^2)^{-1-\alpha}\psi \in L^p(\mathbb{B}^n, d\nu) \text{ за неко } p > n \text{ и } \alpha \in (0,1]. \tag{5.5.6}$$

Пропозиција 5.6 ([37])**.** *Ако важи* (5.5.6)*, тада је* $G_h[\psi]$ *α-Хелдерова, за* $\alpha \in (0,1]$.

Доказ. Како је $(1-|x|^2)^{n-\alpha}(1-|y|^2)^{\alpha} \leqslant [x,y]^n$, имамо да је

$$(1-r)^{1-\alpha}|G_h[\psi](rx_0)| \leqslant M_n, \quad 0 \leqslant r < 1.$$

□

Теорема 5.13 ([37])**.** *Нека је* $n \geqslant 3$ *и* $u \in C^2(\mathbb{B}^n,\mathbb{R}^n) \cap C(\overline{\mathbb{B}^n},\mathbb{R}^n)$*, и задовољава услов (x1) и* $\Delta_h u$ *задовољава услов* (5.5.6)*. Тада важе следећи закључци.*

Ако је функција u α-Хелдер-непрекидна на $\mathbb{S}$, тада је и α-Хелдер-непрекидна на $\overline{\mathbb{B}^n}$, за свако $0 < \alpha \leqslant 1$.

Глава 6

Шварцова лема на граници за хармонијска и плурихармонијска пресликавања и нека уопштења

У овом поглављу су представљени резултати из заједничког рада са М. Матељевићем [38]. Коришћењем побољшања класичне Шварцове леме за хармонијска пресликавања у равни добијамо неке примене на леме Шварцовог типа на граници за холоморфна и, специјално, плурихармонијска пресликавања између јединичних лопти у Хилбертовим и Банаховим просторима. У другом делу овог рада, коришћењем Бургетове оцене добијамо леме Шварцовог типа на граници за хармонијска пресликавања између лопти коначних димензија. Овим уопштавамо ранији резултат Д. Калаја за хармонијске функције, јер не захтевамо да пресликавање фиксира нулу. На крају одељка изводимо занимљив закључак за хиперболичке хармонијске функције на јединичној лопти који указује да Хопфова лема не важи за овакве функције.

6.1 Уводне напомене

Шварцова лема и Хилбертови простори

Матељевић и Ли су у [20] разматрали плурихармонијска и хармонијска пресликавања f дефинисана на јединичној лопти $\mathbb{B}^n$ $(n \geqslant 2)$, диференцијабилна у тачки a на граници лопте $\mathbb{B}^n$, уз претпоставку да $f(\mathbb{B}^n)$ задовољава извесне услове конвексности у тачки $f(a)$. За оваква пресликавања f добили су верзије граничне Шварцове леме, као и оштру оцену сопствене вредности Јакобијеве матрице у тачки a.

По завршетку рукописа [20] Хамада је кроз комуникацију са М. Матељевићем преусмерио пажњу на рад [57] на arxiv-у. У том раду аутори уопштавају класичну Шварцову лему за раванска хармонијска пресликавања на Банахове просторе и излажу неке примене на тврђења граничног Шварцовог типа за плурихармонијска пресликавања у Банаховим просторима. Недавно су Хамада и Кор у раду [19] разматрали теореме ригидности на граници за холоморфна пресликавања. У том раду је објашњена и разлика у константама које се добију за јединичну лопту и за јединични полидиск, а дато је и уопштење на друге ограничене симетричне области у $\mathbb{C}^n$ и уравнотежене домене у комплексним Банаховим просторима.

Коришћењем приступа из горе поменутих радова, у овом раду добићемо неке нове резултате.

Следеће тврђење су доказали И. Грејем, Х. Хамада и Г. Кор [[22], Пропозиција 1.8]:

Теорема 6.1 ([22])**.** *За $j = 1, 2$, нека је $\mathbb{B}_j$ јединична лопта у комплексном Хилбертовом простору H_j и нека је $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ плурихармонијско пресликавање. Претпоставимо да f припада класи C^1 у некој тачки $z_0 \in \partial\mathbb{B}_1$, при чему је $f(z_0) = w_0 \in \partial\mathbb{B}_2$. Тада за неку константу $\lambda \in \mathbb{R}$ важи $Df(z_0)^* w_0 = \lambda z_0$. Штавише,*

$$\lambda \geqslant \frac{1 - \mathrm{Re}(\langle f(0), w_0\rangle)}{2} > 0.$$

У одељку 6.2 даћемо побољшање ове оцене. Касније су С. Чен, Х. Хамада, С. Понусами, Р. Виџајакумар у [57] приметили да се помоћу [[22], Пропозиција 1.8] и аргумената сличних онима у доказу њихове Теореме 3.3 [57] може добити боља оцена:

Пропозиција 6.1 ([38])**.**

$$\lambda \geqslant \max\left\{\frac{2}{\pi} - |f(0)|, \frac{1 - \mathrm{Re}(\langle f(0), w_0\rangle)}{2}\right\}.$$

Између осталог, из претходне Пропозиције 6.1 под условом $f(0) = 0$ следи да је $\lambda \geqslant 2/\pi$, што такође следи и из Теореме 1.1 (*ii*) и (*iii*) из [20].

Даље је у [57] доказана једна верзија Шварцове леме на граници за комплексне Банахове просторе:

Теорема 6.2 (Теорема 3.3 [57])**.** *Нека су B_X и B_Y редом јединичне лопте у комплексним Банаховим просторима X и Y, и нека је $f : B_X \to B_Y$ плурихармонијско пресликавање. Претпоставимо да је f диференцијабилно у тачки $b \in \partial B_X$ и да је при томе $|f(b)|_Y = 1$. Тада важи*

$$|Df(b)b|_Y \geqslant \max\left\{\frac{2}{\pi} - |f(0)|, \frac{1 - |f(0)|}{2}\right\}. \tag{6.1.1}$$

У одељку 6.3 доказаћемо Теорему 6.7 која даје бољу оцену. Читаоцу препуштамо да провери ово тврђење. Теорема 6.9 даје Шварцову лему на граници за хармомнијске функције из јединичне лопте у $\mathbb{R}^n$ у јединичну лопту у неком Хилбертовом простору и која слика нулу у нулу. Ово је уопштење истраживања у раду [27].

Шварцова лема за хармонијске функције више променљивих

Колико нам је познато, изучавање Шварцове леме за реалне хармонијске функције из јединичне лопте у простору $\mathbb{R}^n$ у интервал $(-1, 1)$ започели су Хавинсон, Бургет, Акслер и други; више детаља се може наћи нпр. у [44]. Уопштењима Шварцове леме на функције више променљивих први се бавио Бургет [9] (видети и радове Х.А. Шварца и Е.Ј.П.Г. Шмита који су тамо цитирани). Та уопштења су извођена интеграцијом Пуасоновог језгра по тзв. поларној капи, коришћењем сферних координата; тај метод ћемо називати *Бургетовим методом сферне капе*. У првом делу одељка 6.5 наведене су неке од формула из тог рада које ћемо користити. Такође помоћу сферних координата, Хавинсон [28] даје елементаран аргумент којим се могу добити оштре оцене извода ограничених хармонијских функција на јединичној лопти у $\mathbb{R}^n$. Он експлицитно даје резултат у три димензије који има физичку интерпретацију. Вреди напоменути да се слична идеја појављује у књизи [56] код пресликавања која фиксирају нулу, где је сферна капа замењена полусфером.

Д. Калај [27] је посматрао Хајнц-Шварцове неједнакости за хармонијска пресликавања на јединичној лопти, које су пак верзија Шварцове леме на граници. Ове идеје су недавно разматране на Семинару из анализе у Београду и до неких од новијих резултата дошли су М. Матељевић и сарадници М. Светлик, А. Халфалах, М. Мхамди, Б. Пуртић, Х.П. Ли са писцем ових редова (видети [3], [35], [2]). Више детаља се може наћи у уводу рада [44] од М. Матељевића. Између осталог, овде користимо Пропозицију 4.4 из [20], која је последица оцене добијене у [35] (видети и [2]), овде наведене као Пропозиција 6.2. Коришћењем Бургетове оцене, у одељку 6.5 доказујемо Теорему 6.11 за хармонијска пресликавања између коначнодимензионалних јединичних лопти. Ова теорема уопштава Теорему 2.5 из поменутог Калајевог рада, јер не захтева да пресликавање фиксира нулу. Коначно, на крају одељка изводимо занимљив закључак о хиперболичким хармонијским функцијама на јединичној лопти који показује да на њих Хопфова лема није применљива.

И кинески математичари су дали значајан допринос на овом пољу. Овде ћемо споменути само резултате који се тичу овде представљених резултата: З. Чен, Ј. Лиу и Ј. Пан; С. Даи, Х. Чен и Ј. Пан; С. Танг, Т. Лиу и W. Жанг; Ј.Ф. Жу, итд.

6.2 Шварцова лема на граници за плурихармонијска пресликавања у Хилбертовом простору

Нека је H комплексан Хилбертов простор са скаларним производом $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Простор H се може посматрати и као реалан Хилбертов простор са скаларним производом $\mathrm{Re}\langle\cdot,\cdot\rangle$. Означимо са $|\cdot|$ индуковану норму у простору H, а са $\mathbb{B}$ јединичну лопту у њему. За свако $z_0 \in \partial\mathbb{B}$, тангентни простор $T_{z_0}(\partial\mathbb{B})$ се дефинише као

$$T_{z_0}(\partial\mathbb{B}) = \{\beta \in H : \mathrm{Re}\langle z_0, \beta\rangle = 0\}.$$

Нека су H_1 и H_2 комплексни Хилбертови простори, а Ω нека област у H_1.

Дефиниција 6.3. *Кажемо да је пресликавање $f : \Omega \to H_2$* диференцијабилно *у тачки $z \in \Omega$ ако постоји ограничено линеарно пресликавање $Df(z) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(H_1, H_2)$ такво да је*

$$f(z+h) = f(z) + Df(z)h + o(|h|) \quad \textit{када} \quad h \to 0.$$

Пресликавање f сматрамо диференцијабилним на области Ω ако је диференцијабилно у свакој тачки у Ω. Тада пресликавање

$$\mathcal{D}f : \Omega \to \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(H_1, H_2), \; z \mapsto Df(z)$$

називамо *изводом* пресликавања f на Ω. Ако је $\mathcal{D}f$ непрекидно у околини тачке z, кажемо да пресликавање f припада класи C^1 у тачки z. Ако је $Df(z)$ ограничено линеарно пресликавање за свако $z \in \Omega$, онда је f *холоморфно* пресликавање на Ω.

Дефиниција 6.4. *За C^2-пресликавање $f : \mathbb{B}_1 \to H_2$ кажемо да је плурихармонијско ако је за свако $w \in H_2$ рестрикција комплексне функције $f_w(z) = \langle f(z), w\rangle$ на сваку комплексну праву хармонијско пресликавање.*

Нека је пресликавање $f : \mathbb{B}_1 \to H_2$ диференцијабилно у тачки $z_0 \in \partial\mathbb{B}_1$, где су H_1 и H_2 комплексни Хилбертови простори, а $\mathbb{B}_1$ јединична лопта у простору H_1. Придружени оператор $Df(z_0)^*$ уводимо условом

$$\mathrm{Re}(\langle Df(z_0)^* w, z\rangle_{H_1}) = \mathrm{Re}(\langle w, Df(z_0)z\rangle_{H_2}) \quad \text{за} \quad z \in H_1,\ w \in H_2,$$

где је $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_j}$ скаларни производ у простору H_j за $j = 1, 2$.

Са $D_r f(x)$ означавамо извод у правцу вектора $\frac{x}{|x|}$, тј. $D_r f(x) = \frac{\partial}{\partial r} f(x)$, где је $r = |x|$.

За $a \in H_1$ и $v \in T_a(H_1)$ (што је ознака за тангентни простор у тачки a), дефинишемо полупростор $H_a = H(a, v) = \{y \in H_1 : \mathrm{Re}\langle y, v\rangle < 0\}$. Такође уведимо ознаку $v = n_a$, у жељи да истакнемо да је вектор који дефинише полураван $H_a = H(a, n_a)$ јединични. Пре истицања главних резултата, докажимо једно тврђење техничког карактера.

Тврђење 6.5 ([38]). *Претпоставимо да је функција $f : H_1 \to H_2$ диференцијабилна у тачки $a \in H_1$ и нека је $b = f(a) \in H_2$. По дефиницији адјугованог оператора, имамо да важи једнакост*

$$\mathrm{Re}\langle Df(a)Z, n_b\rangle = \mathrm{Re}\langle Z, Df(a)^* n_b\rangle,$$

за свако $Z \in T_a(H_1)$. Такође, важе следећи закључци:

(*i*) *Ако диференцијал $Df(a)$ функције f у тачки a слика полупростор H_a у полупростор H_b, имамо да важи $Df(a)^* n_b = \lambda n_a$, за неко $\lambda > 0$.*

(*ii*) *Ако функција f скуп $B(a, r_1) \cap (a + H_a)$ слика у $B(b, r_2) \cap (b + H_b)$ за неке $r_1, r_2 > 0$, тада је $Df(a)^* n_b = \lambda n_a$, за неке $\lambda \geqslant 0$. Специјално, ако је $Df(a)^* n_b \neq 0$ важиће да је $\lambda > 0$.*

(*iii*) *У сваком од случајева (i) и (ii) важи $\lambda = |Df(a)^* n_b| = \mathrm{Re}\langle Df(a)n_a, n_b\rangle$, и $\lambda \leq |Df(a)n_a|$.*

(*iv*) *Нека је $|a| = 1$. За функцију $u(x) = \mathrm{Re}\langle f(x), n_b\rangle$ имамо да важи $\lambda = D_r u(a)$.*

Доказ. Пошто, према претпоставци, $Df(a)$ полупростор H_a слика у поупростор H_b, знамо да је испуњено

$$0 = \mathrm{Re}\langle Df(a)X, n_b\rangle = \mathrm{Re}\langle X, Df(a)^* n_b\rangle$$

за све $X \in T_a(H_a)$, одакле следи да је вектор $X_0 = Df(a)^* n_b$ ортогоналан на хиперпростор $T_a(H_a)$. Према претходним ознакама, имамо да је X_0 у ствари једнако λn_b. Још знамо да, према дефиницији адјугованог оператора, важи

$$\mathrm{Re}\langle Df(a)n_a, n_b\rangle = \mathrm{Re}\langle n_a, Df(a)^* n_b\rangle = \mathrm{Re}\langle n_a, \lambda n_a\rangle = \lambda.$$

Пошто је $n_a \in H_a$ и $Df(a)n_a \in H_b$, прво закључујемо да је $\langle Df(a)n_a, n_b\rangle > 0$ односно $\lambda > 0$, одакле следи тврђење (*i*). Случај (*ii*) следи из (*i*), у случају $X_0 \neq 0$. У случају $X_0 = 0$ добијамо преостали део тврђења (*ii*).

(*iii*) је директна последица (*i*) и (*ii*). (*iv*) је последица чињенице да је $D_r u(a) = Re\langle Df(a)a, n_b\rangle = \lambda$. □

Докази Пропозиције 6.3 и Теореме 6.7 се заснивају на следећем резултату.

Пропозиција 6.2 (Пропозиција 4.4 [20])**.** *Нека је $u : \mathbb{U} \to \mathbb{U}$ хармонијска функција за коју важи $u(0) = b$. Претпоставимо да u има непрекидно продужење на граничну тачку $z_0 \in \mathbb{T}$, $u(z_0) = c \in \mathbb{T}$ и $a = \tan \frac{|\mathrm{Re}(\bar{c}b)|\pi}{4}$. Ако је функција и диференцијабилна у тачки z_0, тада је*

$$|D_r u(z_0)| \geqslant \frac{2}{\pi}\frac{1-|a|}{1+|a|}.$$

Нека је $s^-(x) = \frac{2}{\pi}\cot\left(\frac{\pi}{4}(1+x)\right), x \in (-1,1)$.

Пропозиција 6.3 ([38])**.** *Нека је $\mathbb{B}_j$ јединична лопта у комплексном Хилбертовом простору H_j за $j = 1,2$, редом. Нека је $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ плурихармонијско пресликавање. Претпоставимо да је f диференцијабилна у некој тачки $z_0 \in \partial\mathbb{B}_1$ и $f(z_0) = w_0 \in \partial\mathbb{B}_2$. Тада постоји константа $\lambda \in \mathbb{R}$ за коју важи $Df(z_0)^* w_0 = \lambda z_0$. Штавише,*

$$\lambda \geqslant s^-(b) > 0, \text{ при чему је } b = \mathrm{Re}(\langle f(0), w_0\rangle).$$

Приметимо да је $s^-(x) \geqslant \frac{1-x}{2},\ x \in (-1,1)$.

Доказ. Посматрајмо функцију $u : \mathbb{U} \to (-1,1)$, дефинисану са $u(z) = \mathrm{Re}\langle f(zz_0), w_0\rangle$. Функција u ће бити хармонијска и важи $u(0) = b$. Даље, функција u има непрекидно продужење у тачки $z_0 \in \mathbb{T}$ и може се проверити да је $u(1) = 1$. Применом Пропозиције 6.2, добијамо $|D_r u(1)| \geqslant s^-(b)$. Такође, имамо да је

$$D_r u(1) = Re\langle Df(z_0)z_0, w_0\rangle = \lambda.$$

□

Претпоставимо да је Ω домен у простору H_1, $f : \Omega \to H_2$ холоморфно пресликавање у Ω и $z_0 \in \Omega$ произвољна тачка. Дефинишемо хермитовски адјунговани оператор $Df(z_0)^\dagger$ на следећи начин

$$\langle Df(z_0)^\dagger w, z\rangle_{H_1} = \langle w, Df(z_0)z\rangle_{H_2} \quad \text{за} \quad z \in H_1,\ w \in H_2,$$

где је $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H_j}$ скаларни производ у $H_j,\ j = 1,2$. Нека је $\mathbb{B}_1$ јединична лопта у комплексном Хилбертовом простору H_1.

Лема 6.1 ([70])**.** *За $\xi \in \mathbb{B}_1$, нека је $\varphi_\xi(z) = A\frac{\xi - z}{1-\langle z,\xi\rangle}$ холоморфни аутоморфизам од $\mathbb{B}_1$, при чему $A : H_1 \to H_1$ у смислу да је $A(v) = s_\xi v + \frac{\xi\langle v,\xi\rangle}{1+s_\xi}$, $s_\xi = \sqrt{1-|\xi|^2}$ и $v \in H_1$. Тада је φ_ξ бихоломорфно у околини $\overline{\mathbb{B}}_1$ и*

$$A^2 = s_\xi^2 Id + \xi\langle\cdot,\xi\rangle, \quad A\xi = \xi, \quad \varphi_\xi^{-1} = \varphi_\xi, \quad D\varphi_\xi(z) = A\left[-\frac{Id}{1-\langle z,\xi\rangle} + \frac{(\xi - z)\langle\cdot,\xi\rangle}{(1-\langle z,\xi\rangle)^2}\right].$$

Ако уведемо ознаку $P(v) = \xi\langle v,\xi\rangle$, може се проверити да је $P^\dagger = P$. Дакле, важи $A^\dagger = A$. Такође, ако је $Q(v) = z\langle v,\xi\rangle$ и $R(v) = \xi\langle v,z\rangle$, тада је $Q^\dagger = R$. Сада имамо да важи

$$D\varphi_\xi(z)^\dagger = \left[-\frac{Id}{1-\overline{\langle z,\xi\rangle}} + \frac{\xi\langle\cdot,\xi - z\rangle}{(1-\overline{\langle z,\xi\rangle})^2}\right]A.$$

Нека је $L_z = \left[-\frac{Id}{1-\overline{\langle z,\xi\rangle}} + \frac{\xi\langle\cdot,\xi-z\rangle}{(1-\overline{\langle z,\xi\rangle})^2}\right]$.

Лема 6.2 ([70])**.** *За свако $z_0 \in \mathbb{B}_1$ важи*

$$D\varphi_\xi(z_0)^\dagger\varphi_\xi(z_0) = \frac{1-|\xi|^2}{|1-\langle z_0,\xi\rangle|^2}z_0.$$

Доказ. Директним рачуном добијамо да је

$$D\varphi_\xi(z_0)^\dagger \varphi_\xi(z_0) = L_{z_0} A^2 \frac{\xi - z_0}{1 - \langle z_0, \xi \rangle}.$$

Може се једноставно проверити да је

$$A^2 \frac{\xi - z_0}{1 - \langle z_0, \xi\rangle} = \xi - \frac{s^2 z_0}{1 - \langle z_0, \xi \rangle}.$$

Према томе, важи

$$\begin{aligned}
&D\varphi_\xi(z_0)^\dagger \varphi_\xi(z_0) = L_{z_0}\left(\xi - \frac{s^2 z_0}{1 - \langle z_0, \xi\rangle}\right)\\
&= -\frac{\xi}{1 - \overline{\langle z_0, \xi\rangle}} + \frac{\xi \langle \xi, \xi - z_0\rangle}{(1 - \overline{\langle z_0, \xi\rangle})^2} + \frac{s^2 z_0}{|1 - \langle z_0, \xi\rangle|^2} - \frac{s^2 \xi \langle z_0, \xi - z_0\rangle}{|1 - \langle z_0, \xi\rangle|^2 (1 - \overline{\langle z_0, \xi\rangle})}\\
&= -\frac{\xi(1 - \langle \xi, z_0\rangle)}{(1 - \overline{\langle z_0, \xi\rangle})^2} + \frac{\xi\langle \xi, \xi - z_0\rangle}{(1 - \overline{\langle z_0, \xi\rangle})^2} + \frac{s^2 z_0}{|1 - \langle z_0, \xi\rangle|^2} - \frac{s^2 \xi(\langle z_0, \xi\rangle - 1)}{|1 - \langle z_0, \xi\rangle|^2 (1 - \overline{\langle z_0, \xi\rangle})}\\
&= \frac{-\xi(1 - |\xi|^2)}{(1 - \overline{\langle z_0, \xi\rangle})^2} + \frac{s^2 z_0}{|1 - \langle z_0, \xi\rangle|^2} - \frac{s^2 \xi(\langle z_0, \xi\rangle - 1)}{|1 - \langle z_0, \xi\rangle|^2 (1 - \overline{\langle z_0, \xi\rangle})}\\
&= \frac{-\xi s^2 (1 - \langle z_0, \xi\rangle))}{(1 - \overline{\langle z_0, \xi\rangle})^2 (1 - \langle z, \xi\rangle)} + \frac{s^2 z_0}{|1 - \langle z_0, \xi\rangle|^2} - \frac{s^2 \xi(\langle z_0, \xi\rangle - 1)}{|1 - \langle z_0, \xi\rangle|^2 (1 - \overline{\langle z_0, \xi\rangle})}\\
&= \frac{1 - |\xi|^2}{|1 - \langle z_0, \xi\rangle|^2} z_0.
\end{aligned}$$

□

Нека су V_1 и V_2 два комплексна векторска простора. Дефинишемо скупове реалних линеарних, комплексних линеарних и комплексних антилинеарних оператора између V_1 и V_2, редом, на следећи начин.

Ако је $L : V_1 \to V_2$ адитивни линеарни оператор, тада је

$$\begin{aligned}
L \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2) &\iff \forall \lambda \in \mathbb{R}, \zeta \in V_1 : L(\lambda\zeta) = \lambda L(\zeta),\\
L \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2) &\iff \forall z \in \mathbb{C}, \zeta \in V_1 : L(z\zeta) = z L(\zeta),\\
L \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2) &\iff \forall z \in \mathbb{C}, \zeta \in V_1 : L(z\zeta) = \bar{z} L(\zeta).
\end{aligned}$$

Може се показати да важи наредно тврђење:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2) \oplus \overline{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2).$$

Прво проверавамо да је $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2) \cap \overline{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2) = \{0\}$. Да бисмо свели на контрадикцију, претпоставимо да постоји комплексан истовремено линеаран и антилинеаран оператор L између V_1 и V_2 и нека је $\zeta \in V_1$ такво да је $L(\zeta) \neq 0$. Тада је $L(i\zeta) = iL(\zeta) = -iL(\zeta)$, па је $L(\zeta) = 0$, што је контрадикција.

Уочимо сада произвољан реалан линеаран оператор L из V_1 у V_2. Можемо дефинисати операторе $L_1, L_2 : V_1 \to V_2$ за које важи $L_1(\zeta) = \frac{1}{2}(L(\zeta) - iL(i\zeta))$ и $L_2(\zeta) = \frac{1}{2}(L(\zeta) + iL(i\zeta))$. Тврдимо да је $L = L_1 + L_2$, при чему је $L_1 \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2), L_2 \in \overline{\mathcal{L}}_{\mathbb{C}}(V_1, V_2)$. Ако посматрамо $z = x + iy$ као произвољан комплесан број и ако је $\zeta \in V_1$ произвољно, тада је

$$\begin{aligned}
L_1(z\zeta) &= \frac{1}{2}(L((x+iy)\zeta) - iL(i(x+iy)\zeta)) = \frac{1}{2}(L(x\zeta + yi\zeta) - iL(-y\zeta + xi\zeta))\\
&= \frac{1}{2}(xL(\zeta) + yL(i\zeta) + iyL(\zeta) - ixL(i\zeta)) = \frac{1}{2}((x+iy)L(\zeta) - (x+iy)iL(i\zeta))\\
&= (x+iy)L_1(\zeta) = zL_1(\zeta).
\end{aligned}$$

Аналогно томе,

$$\begin{aligned} L_2(z\zeta) &= \frac{1}{2}(L((x+iy)\zeta) + iL(i(x+iy)\zeta)) = \frac{1}{2}(L(x\zeta + yi\zeta) + iL(-y\zeta + xi\zeta)) \\ &= \frac{1}{2}(xL(\zeta) + yL(i\zeta) - iyL(\zeta) + ixL(i\zeta)) = \frac{1}{2}((x-iy)L(\zeta) + (x-iy)iL(i\zeta)) \\ &= (x-iy)L_1(\zeta) = \bar{z}L_2(\zeta). \end{aligned}$$

Тврђење 6.6 ([38]). *Нека су H_1 и H_2 два комплексна Хилбертова простора и нека је $L : H_1 \to H_2$ ограничен линеаран оператор. Тада је $L^* = L^\dagger$.*

Доказ. Претпоставимо да је L ограничен линеаран оператор из H_1 у H_2. Тада постоје јединствени ограничени оператори L_1 и L_2, комплесно линеаран и комплексно антилинеаран, редом, за које важи $L = L_1 + L_2$. За те операторес можемо наћи ограничен комплексан линеаран оператор $L_1^\dagger$ такав да је $\langle L_1^\dagger(w), z\rangle = \langle w, L_1(z)\rangle$ и ограничен комплексан антилинеаран оператор $L_2^\ddagger$ дефинисан помоћу израза $\langle L_2^\ddagger(w), z\rangle = \langle w, L_2(z)\rangle$, за свако $z \in H_1, w \in H_2$. Тврдимо да важи $L_1^* = L_1^\dagger$ и $L_2^* = L_2^\ddagger$. Прво, како су и комплесан линеаран и комплесан антилинеаран оператор реални линеарни, можемо дефинисати њихове реалне адјунговане операторе. Такође, ако је $\langle L_1^\dagger(w), z\rangle = \langle w, L_1(z)\rangle$, добијамо $\mathrm{Re}\langle L_1^\dagger(w), z\rangle = \mathrm{Re}\langle w, L_1(z)\rangle$, за свако $z \in H_1, w \in H_2$. Исти аргумент важи и за оператор $L_2^\ddagger$. □

Пропозиција 6.4 ([38]). *Нека је $\mathbb{B}_j$ јединична лопта у комплексном Хилбертовом простору H_j за $j = 1, 2$, редом. Нека је $f : \mathbb{B}_1 \to \mathbb{B}_2$ плурихармонијско пресликавање за које важи $f(\xi) = 0$, за неко $\xi \in \mathbb{B}_1$. Претпоставимо да је f диференцијабилна у некој тачки $z_0 \in \partial\mathbb{B}_1$ и $f(z_0) = w_0 \in \partial\mathbb{B}_2$. Тада постоји константа $\lambda \in \mathbb{R}$ таква да је*

$$Df(z_0)^* w_0 = \lambda \frac{1 - |\xi|^2}{|1 - \langle z_0, \xi\rangle|^2} z_0,$$

при чему је $\lambda \geqslant \frac{2}{\pi}$.

Доказ. Нека је

$$\varphi_\xi(z) = A\frac{\xi - z}{1 - \langle z, \xi\rangle}$$

холоморфни аутоморфизам од $\mathbb{B}_1$, где је

$$A = s_\xi Id + \frac{\xi\langle\cdot, \xi\rangle}{1 + s_\xi}, \quad s_\xi = \sqrt{1 - |\xi|^2}.$$

Претпоставимо да је $\varphi_\xi(z_0) = p \in \partial\mathbb{B}_2$ и нека је $g(z) = f \circ \varphi_\xi(z)$. Тада је g плурихармонијско пресликавање $\mathbb{B}_1$ у $\mathbb{B}_2$, за које важи

$$g(0) = f \circ \varphi_\xi(0) = f(\xi) = 0,$$

и

$$g(p) = f \circ \varphi_\xi(p) = f(z_0) = w_0 \in \partial\mathbb{B}_2.$$

Према Пропозицији 6.3, знамо да постоји број $\lambda \geqslant \frac{2}{\pi}$ такав да је

$$D_g^*(p)w_0 = \lambda p.$$

Из једнакости $\varphi_\xi^2 = Id$ следи да је $D\varphi_\xi(p)D\varphi_\xi(z_0) = Id$ и важи
(1) $D\varphi_\xi(z_0)^* D\varphi_\xi(p)^* = Id.$

Како је $Dg(p) = Df(z_0)D\varphi_\xi(p)$, имамо $Dg(p)^* = (Df(z_0)D\varphi_\xi(p))^* = D\varphi_\xi(p)^* Df(z_0)^*$, па важи

(2) $D\varphi_\xi(p)^* D_f(z_0)^* w_0 = \lambda p$.

На основу (1) и (2) налазимо да је

$$Df(z_0)^* w_0 = \lambda D\varphi_\xi(z_0)^* p.$$

Коришћењем Леме 6.2 добијамо да је $\langle z_0, D\varphi_\xi(z_0)^\dagger p\rangle = \mu$, где је $\mu = \frac{1-|\xi|^2}{|1-\langle z_0,\xi\rangle|^2}$. Сада можемо закључути да је $\langle D\varphi_\xi(z_0)z_0, p\rangle = \mu$, одакле је $\mathrm{Re}\langle D\varphi_\xi(z_0)z_0, p\rangle = \mu$. На основу Теореме 6.1 имамо да је $D\varphi_\xi(z_0)^* p = \mu_1 z_0$, за неко $\mu_1 > 0$. Из доказа Теореме 6.1 добијамо да је

$$\mu_1 = \mathrm{Re}\langle D\varphi_\xi(z_0)z_0, p\rangle = \langle D\varphi_\xi(z_0)z_0, p\rangle = \mu.$$

□

6.3 Шварцова лема на граници у Банаховом простору

У овом делу користимо ознаке из [57]. Нека су X и Y реални или комплексни Банахови простори са нормама $|\cdot|_X$ и $|\cdot|_Y$ редом. Користимо ознаку $\mathcal{L}(X,Y)$ за простор свих непрекидних линеарних оператора из X у Y са стандардном оператор нормом

$$|A| = \sup_{x\in X\setminus\{0\}} \frac{|Ax|_Y}{|x|_X},$$

где је $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Простор линеарних оператора $\mathcal{L}(X,Y)$ је Банахов простор, у односу на горе дефинисану норму. Означимо са X^* дуални простор реалног или комплексног Банаховог простора X. За $x \in X\setminus\{0\}$, дефинишемо скуп функционала

$$T(x) = \{l_x \in X^* : l_x(x) = |x|_X \text{ и } |l_x| = 1\}.$$

Позивајући се на теорему Хана-Банаха можемо закључити да важи $T(x) \neq \varnothing$.

Нека је f функција која скуп $\Omega \subset X$ слика у реалан или комплексан Банахов простор Y, где је X комплексан Банахов простор. Кажемо да је функција f диференцијабилна у тачки $z \in \Omega$ ако постоји реално линеаран оператор $Df(z): X \to Y$ за који важи

$$\lim_{|h|\to 0^+} \frac{|f(z+h) - f(z) - Df(z)h|_Y}{|h|_X} = 0.$$

Оператор $Df(z)$ називамо Фрешеов извод функције f тачки z. У случају када је Y комплексан Банахов простор и када је оператор $Df(z)$ комплексно линеаран у свакој тачки $z \in \Omega$, кажемо да је функција f холоморфна у скупу Ω. Нека је Ω област у комплексном Банаховом простору X. За функцију f која област Ω слика у комплексан Банахов простор Y кажемо да је плурихармонијска, ако је рестрикција функције $l \circ f$ на произвољну комлексну линију у Ω хармонијска функција, за свако $l \in Y^*$.

Теорема 6.7 ([38]). *Претпоставимо да су B_1 и B_2 јединичне лопте у комплексним Банаховим просторима X и Y, и нека је $f: B_1 \to B_2$ плурихармонијска функција. Претопставимо да је функција f диференцијабилна у некој тачки $b \in \partial B_X$ за коју важи $|f(b)| = 1$. Тада важи неједнакост*

$$|Df(b)b|_Y \geqslant s^-(|f(0)|).$$

Доказ. Уочимо функцију $p(z) = \mathrm{Re}(l_{f(b)}(f(zb)))$, за $z \in \mathbb{U}$. где је $l_{f(b)} \in T(f(b))$. Пошто је f плурихармонијска имамо да је функција p хармонијска функција на $\mathbb{U}$. Такође, пошто је $|l_{f(b)}| = 1$ добијамо да важи $|\mathrm{Re}(l_{f(b)}(f(zb)))| \leqslant |l_{f(b)}(f(zb))| \leqslant |f(zb)| < 1$, што значи да функција p јединични диск слика на интервал $(-1,1)$. Из дефниције $l_{f(b)}$ имамо да важи $p(1) = 1$. Такође, можемо закључити да је $|p(0)| = |\mathrm{Re}\, l_{f(b)}(f(0))| \leqslant |l_{f(b)}(f(0))| \leq |f(0)|$. Користећи Пропозицију 6.2 имамо

$$|D_r p(1)| \geqslant s^-(|p(0)|) \geqslant s^-(|f(0)|).$$

У последњој неједнакости искористили смо чињеницу да је функција s^- опадајућа на $(-1,1)$. Са друге стране, имамо да важи $|D_r p(1)| \leqslant |Df(b)b|_Y$. Заиста, можемо проверити

$$\begin{aligned} |D_r p(1)| &= \lim_{r\to 1^-} \frac{|p(1)-p(r)|}{1-r} = \lim_{r\to 1^-} \left| \mathrm{Re}\, l_{f(b)} \frac{f(b)-f(rb)}{1-r} \right| = |\mathrm{Re}\, l_{f(b)} Df(b)b| \\ &\leqslant |Df(b)b|_Y, \end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

6.4 Шварцова лема на граници за (еуклидски) хармонијске функције

Претпоставимо да је $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ домен и H Хилбертов простор. Нека је $f : \Omega \to H$ функција за коју важи $f \in C^2(\Omega)$. Дефинишемо парцијалне изводе у односу на координате $x_i, i = 1, \dots n$, базе $\{e_1, ..., e_n\}$ простора $\mathbb{R}^n$ у тачки $a \in \Omega$ формулом:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = Df(a)e_i.$$

Дефиниција 6.8. *Функција f је хармонисјка у домену Ω ако је*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = 0 \quad \textit{за свако} \quad a \in \Omega.$$

Означимо са $\mathbf{B}^n$ и $\mathbf{S}^{n-1}$ јединичну лопту и једничну сферу у $\mathbb{R}^n$.

Добро је познато да хармонијска функција $u \in L^\infty(\mathbf{B}^n)$ има интегралну репрезентацију

$$u(x) = \mathcal{P}[f](x) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} P(x,\zeta) f(\zeta) d\sigma(\zeta),$$

при чему је функција f ограничена на $\mathbf{S}^{n-1}$; као што је познато,

$$P(x,\zeta) = \frac{1-|x|^2}{|x-\zeta|^n}, \quad \zeta \in \mathbf{S}^{n-1}$$

је Пуасоново језгро и σ је јединствена нормализована ротационо инваријантна Борлова мера на $\mathbf{S}^{n-1}$. Према [27], знамо да је $u : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^n$ хармонисјко пресликавање за које важи $u(0) = 0$, па је

$$|u(x)| \leqslant U(rN), \tag{6.4.1}$$

где је $r = |x|$, $N = \{0, \cdots, 0, 1\}$. Функција $U : \mathbf{B}^n \to [-1, 1]$ је хармонијска и дефинисана је помоћу

$$U(x) = P[\chi_{S^+} - \chi_{S^-}](x), \tag{6.4.2}$$

где је χ индикатор функција, $S^+ = \{x \in \mathbf{S}^{n-1} : x_n \geqslant 0\}$, $S^- = \{x \in \mathbf{S}^{n-1} : x_n \leq 0\}$. За више детаља видети [56, поглавље 6].

Подсетимо се да је *хипергеометријска функција* ${}_pF_q$ дефинисана за $|x| < 1$ помоћу степеног реда ([16, (2.1.2)])

$${}_pF_q[a_1, a_2, \ldots, a_p; b_1, b_2, \ldots, b_q; x] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{x^k}{k!}.$$

Овде је $(a)_k$ *Похамеров симбол* и дефинише се као $(a)_k = \frac{\Gamma(k+a)}{\Gamma(a)}$.

Наредни резултат је такозвана *Хајнц-Шварцова неједнакост*.

Лема 6.3 (Лема 2.3. [27])**.** *Ако је $V(r) = U(rN)$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, функција V' је опадајућа на интервалу $[0, 1]$ и имамо*

$$V'(r) \geqslant V'(1) = C_n =: \frac{n!\left(1 + n - (n-2)_2F_1\left[\frac{1}{2}, 1; \frac{3+n}{2}; -1\right]\right)}{2^{3n/2}\Gamma\left[\frac{1+n}{2}\right]\Gamma\left[\frac{3+n}{2}\right]}. \tag{6.4.3}$$

За више детаља о константи C_n и повезаним функцијама за $n = 2, 3, 4$ видети [27, Примедба 2.7].

Верзија Теореме 1.2 [20] важи за хармонисјка пресликавања, где је кодомен лопта $\mathbb{B}$ у произвољном Хилбертовом простору.

Теорема 6.9 ([38])**.** *Претпоставимо да је $f : \mathbf{B}^n \to \mathbb{B}$ хармонијска функција за коју важи $f(0) = 0$ и која се може непрекидно продужити у тачки $a \in \partial\mathbf{B}^n$, тако да је $f(a) = b \in \partial\mathbb{B}$. Тада важи*
(1) $\limsup_{r \to 1_-} |D_r f(ra)| \geqslant C_n$.

Додатно, претпоставимо да се f може диференцијабило продужити у тачки a.

(*i*) *Тада постоји позитиван број $\lambda \in \mathbb{R}$ такав да је $Df(a)^*b = \lambda a$ и*

(*ii*) *$\lambda \geqslant C_n$, где је C_n дато формулом* (6.4.3).

(*iii*) *Посебно, за $n = 2$ имамо $\lambda \geqslant \frac{2}{\pi}$. Ова оцена је оштра.*

Доказ. (*i*) следи из тврђења 6.5. Нека је $u = \mathrm{Re}\langle f, b\rangle$. Како је u хармонијска функција и слика $\mathbf{B}^n$ у $(-1, 1)$, $u(0) = 0$ и $u(a) = 1$, коришћењем Теореме 6.24 [56] имамо да је $u(x) \leqslant U(rN)$ и зато је

$$1 - u(x) \geqslant 1 - U(rN), \quad \text{за} \quad r = |x| < 1.$$

Дакле,

$$\frac{1 - u(x)}{1 - |x|} \geqslant \frac{1 - U(rN)}{1 - r}.$$

Даље дефинишемо $u_0(t) = u(ta)$ и $U_0(t) = U(tN)$, $0 < t < 1$. За свако $0 < t < 1$ постоје $c_t, d_t \in (t, 1)$ такви да је $1 - u_0(t) = u_0'(c_t)(1 - t)$, $1 - U_0(t) = U_0'(d_t)(1 - t)$ и $u_0'(c_t) \geqslant U_0'(d_t)$. Дакле, на основу Леме 6.3 је $u_0'(c_t) \geqslant C_n$, одкале следи (1). Ако се, додатно, f може диференцијабилно продужити у тачки a, тада важи

$$D_r u(a) = \lim_{|x| \to 1^-} \frac{1 - u(x)}{1 - |x|} \geqslant \lim_{r \to 1^-} \frac{1 - U(rN)}{1 - r} = \left.\frac{\partial U(rN)}{\partial r}\right|_{r=1} = C_n.$$

Како је на основу Тврђења 6.5 (*iv*), $\lambda = \mathrm{Re}\langle D_r f(a), b\rangle = D_r u(a)$, важи (*ii*). Применом Пропозиције 6.2 следи (*iii*). За више информација видети [35]. □

6.5 Хиперболички хармонијске функције више реалних променљивих у једниничној лопти

У овом одељку, користићемо ознаке из чланка [9]. Нека је $\mathbf{B}^n$ јединична лопта у $\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{S}^{n-1}$ јединична сфера. Нека је Ω област у $\mathbb{R}^n$ и нека је u функција која припада класи $C^2(\Omega)$.

Подсетимо се да је функција u (Еуклидски) хармонијска функција у скупу Ω ако задовољава Лапласову једначину $\Delta u = 0$. Као што је већ поменуто, Лаплас-Белтрамијев оператор у односу на хиперболичку метрику на лопти има облик

$$\Delta_h u(x) = \frac{(1-|x|^2)^2}{4}\left(\Delta u(x) + \frac{2(n-2)}{1-|x|^2}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right).$$

За сваку два пута диференцијабилна функција u дефинисану на $\mathbf{B}^n$ која задовољава услов $\Delta_h u = 0$ кажемо да је *хиперболички хармонијска* функција на $\mathbf{B}^n$.

У наставку користићемо нека својства која су заједничка хармонијским и хиерболички хармонијским функцијама:

а) Важи Пуасонова формула за хармониске и хиперболички хармонијске функције на $\mathbf{B}^n$. Ако са σ означимо уобичајену Борелову меру на јединичној сфери $\mathbf{S}^{n-1}$ и нека је f произвољна σ-интеграбилна функција на $\mathbf{S}^{n-1}$. Ако је $x \in \mathbf{B}^n$ и $\eta \in \mathbf{S}^{n-1}$, тада, у зависности од тога да ли је $P(x,\eta)$ задато са изразом

$$\frac{1}{\sigma(\mathbf{S}^{n-1})}\frac{1-|x|^2}{|x-\eta|^n}, \quad \text{или изразом} \quad \frac{1}{\sigma(\mathbf{S}^{n-1})}\frac{(1-|x|^2)^{n-1}}{|x-\eta|^{2(n-1)}},$$

добијамо хармонијску или хиперболички хармонијску функцију на $\mathbf{B}^n$ помоћу формуле

$$h(x) = P[f](x) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} P(x,\eta) f(\eta) \mathrm{d}\sigma(\eta).$$

У наставку текста ћемо користити ознаку $P(x,\eta)$ у сваком од претходна два случаја.

б)

$$1 = P[\mathbf{1}](x) = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} P(x,\eta)\mathrm{d}\sigma(\eta), \tag{6.5.1}$$

где је $\mathbf{1}(\eta) = 1$ за свако $\eta \in \mathbf{S}^{n-1}$ ознака за константну функцију.

Ово је директна последица чињенице да константне функције припадају класи хармонијских, као и хиперболички хармонијских функција на јединичној лопти.

в) Хармонијске (односно хиперболички хармонијске) функције поседују својство средње вредности у односу на (хиперболичке) сфере.

г) Теорема Фатуа, која се односи на $\sigma-$с.с. постојање нетангентних граничних вредности функција на граници, испуњена је и у хармонијском и у хиперболички хармонијском случају.

Нека је

$$M_c^n(|x|) = 2P[\chi_{S(c,\tilde{x})}](x) - 1, \tag{6.5.2}$$

$$m_c^n(|x|) = 2P[\chi_{S(c,-\tilde{x})}](x) - 1, \tag{6.5.3}$$

где је $x \in \mathbf{B}^n$, $\tilde{x} = \frac{x}{|x|}$ за $x \neq 0$; $\tilde{x} = e_1$ за $x = 0$ и $S(c, \tilde{x})$ означава поларну капу са центром $\tilde{x}$ и $\sigma-$мером c. Такође, χ_A је индикатор функција скупа A. Лако се проверава да израз на десној страни од (6.5.2) наслеђује ротациону инваријантност мере σ.

За извођење експлицитне формуле (6.5.4), упућујемо на Пропозицију 5.2 ([34]), у којој се користе ознаке са почетка подсекције 5.4.

Како је $|x - \eta|^2 = 1 - 2r\cos\varphi + r^2$, имамо да оба наша језгра зависе само од φ. Нека је $\sigma_*(n) = \frac{\sigma_{n-2}}{\sigma_{n-1}}$. На основу формуле $\sigma_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ добијамо $\sigma_*(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)}$.

Коришћењем Пропозиције 5.2, можемо написати (6.5.2) у облику

$$M_c^n(|x|) = 2\sigma_*(n)(1 - |x|^2)^\nu \int_0^{\alpha(c)} \frac{\sin^{n-2} t}{(1 - 2|x|\cos t + |x|^2)^\mu} \mathrm{d}t - 1, \tag{6.5.4}$$

$$m_c^n(|x|) = 2\sigma_*(n)(1 - |x|^2)^\nu \int_{\pi-\alpha(c)}^{\pi} \frac{\sin^{n-2} t}{(1 - 2|x|\cos t + |x|^2)^\mu} \mathrm{d}t - 1, \tag{6.5.5}$$

где је $(\nu, \mu) = (1, n/2)$ у хармонијском случају и $(\nu, \mu) = (n - 1, n - 1)$ у хиперболички хармонијском случају и $\alpha(c)$ је сферни угао од $S(c, \tilde{x})$.

Теорема 6.10 ([9])**.** *Нека је h хармонијска или хиперболички хармонијска функција са вредностима у $(-1, 1)$ и $h(0) = a, -1 < a < 1$. Тада за $c = \frac{a+1}{2}$ и свако $x \in \mathbf{B}^n$ важи*

$$m_c^n(|x|) \leqslant h(x) \leqslant M_c^n(|x|).$$

Из једнакости на десној (односно левој) страни за неко $z \in \mathbf{B}^n \setminus \{0\}$ следи

$$h(x) = 2P[\chi_{S(c,\tilde{z})}](x) - 1 \quad (\textit{односно } h(x) = 2P[\chi_{S(c,-\tilde{z})}](x) - 1),$$

за све $x \in \mathbf{B}^n$

Лема 6.4 ([38])**.** *Нека је $(\nu, \mu) = (1, n/2)$ (хармонијски случај). Тада важи*

$$\frac{\mathrm{d}M_c^n}{\mathrm{d}r}(r)\Big|_{r=1} = \frac{2^{2-n}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)} \int_{\alpha(c)}^{\pi} \frac{\sin^{n-2} t}{\sin^n(t/2)} \mathrm{d}t.$$

Доказ. Уведимо озаку $T(r) = \frac{1-M_c^n(r)}{1-r}$. Тада је

$$\frac{\mathrm{d}M_c^n}{\mathrm{d}r}(r)\Big|_{r=1} = \lim_{r \to 1^-} T(r).$$

На основу формуле (6.5.2) имамо

$$T(r) = \frac{1 - (2P[\chi_{S(c,\tilde{z})}](x) - 1)}{1 - r} = \frac{2(1 - P[\chi_{S(c,\tilde{z})}](x))}{1 - r}.$$

Ако користимо формулу (6.5.1) добијамо

$$T(r) = \frac{2P[\mathbf{1} - \chi_{S(c,\tilde{z})}](x)}{1 - r} = \frac{2P[\chi_{\mathbf{S}^{n-1} \setminus S(c,\tilde{z})}](x)}{1 - r}.$$

Сада, коришћењем верзије Пропозиције 5.2 добијамо следећи важан резултат:

$$T(r) = 2\sigma_*(n)(1 + r) \int_{\alpha(c)}^{\pi} \frac{\sin^{n-2} t}{(1 - 2r\cos t + r^2)^{n/2}} \mathrm{d}t.$$

Ова једначина се може преформулисати на следећи начин:

$$T(r) = 2\sigma_*(n)(1+r)\int_{\alpha(c)}^{\pi} Q(r,t)\mathrm{d}t,$$

при чему је $Q(r,t) = \frac{\sin^{n-2} t}{(1-2r\cos t + r^2)^{n/2}}$. Будући да постоји лимес одређеног интеграла у последњем изразу, можемо извести наредну формулу:

$$\frac{\mathrm{d}M_c^n}{\mathrm{d}r}(r)\Big|_{r=1} = 4\sigma_*(n)\int_{\alpha(c)}^{\pi} \frac{\sin^{n-2} t}{2^n \sin^n(t/2)}\mathrm{d}t.$$

□

Дефинишимо

$$D_n(c) = \frac{2^{2-n}}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)}\int_{\alpha(c)}^{\pi} \frac{\sin^{n-2} t}{\sin^n(t/2)}\mathrm{d}t.$$

Важи наредна теорема.

Теорема 6.11 ([38]). *Нека је $f : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^m$ хармонијска функција за коју важи $f(0) = a_0$ и f има непрекидно продужење у тачки $x_0 \in \partial\mathbf{B}^n$, такво да је $f(x_0) = y_0 \in \partial\mathbf{B}^m$.*

Тада важи $\limsup_{r\to 1_-} |D_r f(rx_0)| \geqslant D_n(c)$, при чему је $c = \frac{1+a}{2}$ и $a = \langle a_0, y_0\rangle$.

Ако, додатно, претпоставимо да f има диференцијабилно продужење у тачки x_0, тада постоји позитиван број $\lambda \in \mathbb{R}$ за који је $Df(x_0)^* y_0 = \lambda x_0$ и

$$\lambda \geqslant D_n(c).$$

Ова оцена је оштра.

Доказ. Дефинишимо функцију $h(x) = \langle f(x), y_0\rangle$. Ова функција је хармонијска у $\mathbf{B}^n$ и важи $h(0) = a$ и $h(x_0) = 1$. Како је, по теореми Фатуа $M_c^n(1) = 1$, коришћењем Теореме 6.10 имамо да је

$$\frac{h(x_0) - h(rx_0)}{1-r} \geqslant \frac{1 - M_c^n(r)}{1-r}.$$

Ако је $u(r) = h(rx_0), r \in [0,1)$ тада је $u'(r) = Dh(rx_0)x_0 = D_r h(rx_0)$. На основу Лагранжове теореме имамо да за свако $r \in [0,1)$ постоји $r_0 \in (r,1)$, такво да је

$$\frac{1-u(r)}{1-r} = u'(r_0) = D_r h(r_0 x_0) \geqslant \frac{1 - M_c^n(r)}{1-r}.$$

Ово значи да је $\limsup_{r\to 1^-} D_r h(rx_0) \geqslant \liminf_{r\to 1_-} \frac{1-u(r)}{1-r} \geqslant D_n(c)$. Коши-Шварцова неједнакост нам обезбеђује да важи $|D_r f(x)| \geqslant D_r h(x)$, па добијамо

$$\limsup_{r\to 1^-} |D_r f(rx_0)| \geqslant D_n(c).$$

□

На крају ове подсекције испитаћемо да ли се може формулисати слична верзија Шварцове леме на граници за хиперболички хармонијске функције.

Лема 6.5 ([38]). *Нека је $(\nu,\mu)=(n-1,n-1)$, где је $n>2$ (хиперболички хармонијски случај). Тада важи*

$$\frac{\mathrm{d}M_c^n}{\mathrm{d}r}(r)\Big|_{r=1}=0.$$

Доказ. Као у претходној леми, имамо

$$\frac{\mathrm{d}M_c^n}{\mathrm{d}r}(r)\Big|_{r=1}=\lim_{r\to 1^-}T(r),$$

Дефинишимо $Q_{hyp}(r,t)=\frac{\sin^{n-2}t}{(1-2r\cos t+r^2)^{n-1}}$. Тада је

$$T(r)=2\sigma_*(n)(1-r)^{n-2}(1+r)^{n-1}\int_{\alpha(c)}^{\pi}Q_{hyp}(r,t)\mathrm{d}t.$$

Даље, дефинишимо $J_{hyp}(r)=\int_{\alpha(c)}^{\pi}Q_{hyp}(r,t)\mathrm{d}t$. Проласком граничне вредности када $r\to 1^-$ у последњем изразу, добијамо

$$\lim_{r\to 1^-}J_{hyp}(r)=J_{hyp}=\int_{\alpha(c)}^{\pi}q_{hyp}(t)dt,$$

где је $q_{hyp}(t)=4^{-n+1}\sin^{n-2}t\sin^{-2(n-1)}t/2$.
Дакле, имамо да је $T(r)\sim d_n(1-r)^{n-2}, r\to 1^-$, одакле следи тврђење. $\square$

Из ове леме можемо закључити да је у случају хиперболички хармонијских функција које сликају јединичну лопту у $\mathbb{R}^n$ у јединичну лопту у $\mathbb{R}^m$, наступила другачија ситуација од оне у случају хармонијских функција. Наиме, пронашли смо конкретну хиперболички хармонијску функцију, која јединичну лопту слика у интервал $(-1,1)$ и задовољава $u(x_0)=1$, за неку тачку x_0 која припада граници једничне лопте, али добијамо да је радијални извод ове функције у тачки x_0 једнак нули.

На први поглед, ово може изгледати као изненађење, имајући у виду познату Хопфову лему. Функција u, из претходног разматрања, испуњава једначину $L(u)=0$, где је L униформно елиптички парцијални диференцијални оператор другог реда, постиже свој глобални максимум у тачки x_0 која се налази на граници јединичне лопте, због чега закључујемо да радијални извод функције u у тачки x_0 мора бити строго већи од нуле.

Нека је Ω област у $\mathbb{R}^n, n\geqslant 2$, и нека је $x\in\Omega$ произвољна тачка и нека функција u припада класи $C^2(\Omega)$. Дефинишимо сада парцијални диференцијлни оператор другог реда

$$Lu=a^{ij}(x)D_{ij}u+b^i(x)D_iu+c(x)u, a^{ij}=a^{ji}.$$

У овом случају користили смо конвенцију о сумацији која каже да понављање индекса повлачи сумацију по том индексу, од 1 до n. Користићемо следеће дефиниције: оператор L је *елиптички* у тачки $x\in\Omega$ ако је матрица коефицијената $A(x)=[a^{ij}(x)]$ позитивно дефинитна. Ако су $\Lambda(x),\lambda(x)$ ознаке за највећу и најмању сопствену вредност оператора $A(x)$ и ако је количник $\Lambda(x)/\lambda(x)$ униформно ограничен у Ω кажемо да је оператор L *униформно елиптички* у Ω. Биће нам потребан и следећи услов. Ако је $k>0$ константа и тачка $x\in\Omega$ произвољна, испитујемо испуњеност следећег услова

$$\frac{|b^i(x)|}{\lambda(x)}\leqslant k,\quad i=1,\dots,n. \tag{6.5.6}$$

Подсетимо се формулације Хопфове леме.

$$Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u, a^{ij} = a^{ji}.$$

Лема 6.6 (Хопфова лема, [10], Лемма 3.4). *Претпоставимо да је L униформно елиптички оператор, који задовољава услове (6.5.6), $c = 0$ и $Lu(x) \geqslant 0$ за свако $x \in \Omega$. Нека је тачка $x_0 \in \partial\Omega$ таква да за њу важи селедеће:*

(*i*) *u је непрекидна у тачки x_0;*

(*ii*) *$u(x_0) > u(x)$ за све $x \in \Omega$;*

(*iii*) *$\partial\Omega$ задовољава услов постојања унутрашне сфере у тачки x_0.*

Тада извод у правцу спољашње нормале функције u у тачки x_0, ако постоји, мора задовољавати строгу неједнакост

$$\frac{\partial}{\partial\nu}u(x_0) > 0.$$

Испоставља се да хиперболички хармонијске функције не испуњавају један од услова који захтева примена Хопфове леме. Заиста, хиперболички хармонијске функције задовољавају услов $Lu = \Delta_h u = 0$, где важи $A(x) = Id$ и $b_i(x) = \frac{2(n-2)}{1-|x|^2}, i = 1, \ldots, n$. Пошто је $\Lambda(x) = \lambda(x) = 1, x \in \mathbf{B}^n$, закључујема да оператор Δ_h не испуњава услов (6.5.6) у $\mathbf{B}^n$, што значи да не можемо применити Хопфову лему на овакве функције.

Део овог резултата се може интерпретирати као потврда да се услов (6.5.6) не може искључити из исказа Хопфове леме.

Глава 7

Осврт на неке класе холоморфних функција повезаних са Цековом и Шварцовом лемом

7.1 Уводне напомене

У овом одељку биће разматрани резултати остварени у оквиру пројекта који се бави изучавањем Шварцове леме и заједничког рада са М. Матељевићем и Б. Н. Орнеком [32]. Овај пројекат је покренуо проф. М. Матељевић и у њему су, између осталих, учествовали М. Светлик, А. Калфалах и Б. Н. Орнек [2, 35, 49, 43]. Поред конкретних резултата, биће наведени неки могући правци за будућа истраживања.

Резултати представљени у овом одељку се односе на раст функција које припадају одређеним класама, међу којима су звездасте функције, што представља уопштење неких Орнекових резултата. Након тога, ближе ћемо изучити приступ коришћен у секцији 2, да бисмо развили уопштен метод за оцену раста пресликавања, који ће бити заснован на Цековој леми (видети подсекцију 7.4, Теорему 7.7, као и Теорему 7.9) и који ћемо звати метод за изучавање раста у неким класама холоморфних функција, коришћењем Цекове леме. Потребно је нагласити да је из Теореме 7.7 изведена Теорема 7.8. Теореме 7.9 и 7.10 су наредни резултати који се односе на принцип субординације. Из ових резултата биће јасно да је оцена раста звездастих функција (Теорема 7.1) специјалан случај примене нашег уопштеног метода.

На крају ће бити изложена Теорема 7.11, која представља резултат о расту холоморфних функција.

Пре него што започемо са излагањем резултата, даћемо кратак преглед коришћених ознака.

Дефиниција 7.1. *1. Са $\mathbb{C}$ означаваћемо комплексну раван, са $\mathbb{U}$ јединични диск, са $B(a,r)$ диск са центром у тачки a и полупречником r, а са $\mathbb{C}^*$ скуп $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.*

2. Ако су U и V области у $\mathbb{C}$, са $Hol(U,V)$ (односно $O(U,V)$) означићемо фамилију свих холоморфних функција f које сликају област U у област V. Уместо $Hol(U,U)$ једноставније пишемо $Hol(U)$.

3. Ако $F\in Hol(\mathbb{U})$ испуњава $F(0)=0$ рећи ћемо да је F Шварцова функција јединичног диска.

4. *Са* $\mathbb{P}^+$ *означимо десну полураван, тј. скуп* $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$. *Нека са* $(\mathcal{P})$ *буде означена класа свих функција* p *које су холоморфне у јединичном диску* $\mathbb{U}$, *за које важи* $Re\, p(z) > 0$ *за* $|z| < 1$. *Нека* $(\mathcal{P}_a)$ *буде ознака за класу функција* p, *које су холоморфне у јединичном диску* $\mathbb{U}$ *и испуњавају услове* $p(0) = a$, $Re\, p(z) > 0$ *за* $|z| < 1$.

5. *Нека је* $I_f(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)}$ *и* $C[f](z) = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$. *У литератури се често користи ознака* $S[f](z)$ *уместо овде наведене* $I_f(z)$.

6. *Нека је* $M_f(r) = \max\{|f(re^{it})| : 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$.

7. *Означимо са* V *скуп (тачније област) који је подскуп скупа* $\mathbb{C}$. *Са* $O_I(V)$ *означићемо класу свих функција* f *холоморфних у скупу* $\mathbb{U}$ *за које важи* $I_f(\mathbb{U}) \subset V$. *Ако је задата константа* a, *кажемо да је* $f \in O_I^a(V)$ *ако важи* $f \in O_I(V)$ *и* $f(0) = a$.

Функционал I_f, који има неке особине логаритамског резидума, има важну улогу у теорији звездастих функција, као и Цековој леми.

Добро је дефинисан, на пример, у случају када је V отворен скуп и када је $f : V \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^*$ функција холоморфна у V; када је, специјално, $0 \in V$ и функција f има нулу реда $n \geqslant 1$ у тачки 0, тада пишемо $I_f(0) = n$. Подсетимо се да се овај функционал јавља у дефиницији звездастих функција, као и у исказу Цекове леме.

Ако је $a \neq 0$, $0 < r < |a|$ и ако је функција $f : B(a,r) \to \mathbb{C}^*$ холоморфна, тада можемо комплексан број z записати у поларној форми $re^{i\theta}$ у скупу $B(a,r)$ и тада постоји грана $\theta^*(r,\theta)$ вишезначне функције $\operatorname{Arg} f(re^{i\theta})$, при чему важи следећа формула:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\theta^*(r,\theta) = \operatorname{Re} I_f(z). \tag{7.1.1}$$

За фиксирано r можемо посматрати $\theta^*(r,\theta)$ као функцију променљиве θ. Из једнакости (7.1.1) имамо да важи:

(И1) У случају да $I_f : B(a, r_0) \to \mathbb{P}^+$, имамо да је $\theta^*(r,\theta)$ строго растућа.

Из (И1) директно следи:

(И2) У случају да је f функција холоморфна на скупу $\mathbb{U}$, $I_f : \mathbb{U} \to \mathbb{P}^+$ и f има једноструку нулу у тачки 0, тада је функција f „1-1” и $f(\mathbb{U})$ је звездаста област.

У наставку, подсетимо се исказа Цекове леме:

Лема 7.1 (Цекова лема)**.** *Нека је* f *функција холоморфна у јединичном диску* $\mathbb{U}$ *која није идентички једнака константи и нека је* $f(0) = 0$. *Ако* $|f(z)|$ *на скупу* $|z| = r$, $r < 1$, *свој максимум постиже у тачки* z_0, *тада важи*

$$I_f(z_0) = \frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = k,$$

где је $k \geqslant 1$ *реалан број.*

Даље, доказаћемо следећу лему.

Лема 7.2 (Цекова лема, друга верзија)**.** *Нека је* f *функција холоморфна у јединичном диску* $\mathbb{U}$ *која није идентички једнака константи и нека је* $f(0) = 0$. *Ако скуп* $f(\mathbb{U})$ *садржи тачке које се не налазе у скупу* $\mathbb{U}$, *тада*

1. *постоји тачка* $z_0 \in \mathbb{U}$ *за коју важи* $|f'(z_0)| > 1$ *и*

2. *постоји тачка $z_1 \in \mathbb{U}$ за коју важи $w_0 = f(z_1) \in \mathbb{T}$ и $I_f(z_1) = k$, где је $k \geqslant 1$ реалан број.*

Доказ. Означимо се $M_r = M_r(f)$, $0 < r < 1$ максимум функције $|f|$ на скупу T_r и са $M = M_f$ супремум функције $|f|$ на скупу $\mathbb{U}$. На основу претпоставки теореме, имамо да је $M > 1$. Претпоставимо да функција $|f|$ свој максимум на скупу T_r постиже у тачки z_r. Као последицу Шварцове леме на граници, имамо да за свако $0 < r < 1$ важи $|f'(z_r)| \geqslant M_r/r$. Одатле знамо да постоји $r_0 \in (0,1)$ такво да је за свако $r \in (r_0, 1)$ испуњено $M_r/r \geqslant M_1 > 1$, на основу чега је $|f'(z_0)| \geqslant M_1 > 1$. □

Пре него што применимо Цекову лему, узећемо у обзир следеће разматрање.

Нека је ϕ функција холоморфна на области G и $f : \mathbb{U} \to G$ такође холоморфна функција. Подсетимо се да је $I_f(z) = \frac{zf'}{f}$ и означимо $w = f(z)$. Ако је $F = \phi \circ f$, тада је $F'(z) = \phi'(w)f'(z)$, због чега је испуњено

$$I_F(z) = \frac{zF'(z)}{F(z)} = \frac{z\phi'(w)}{\phi(w)}f'(z) = I_\phi(w)I_f(z). \tag{7.1.2}$$

Претпоставимо да је функција f „1-1” и холоморфна. Тада из формуле (7.1.2) важи $I_{f^{-1}}(w)I_f(z) = 1$, где је $w = f(z)$.

Лако се проверава да је $I_{(fg)} = I_f + I_g$ и за $f = z^n g$ да важи $I_f = n + I_g$.

7.2 Оцене раста α-звездастих функција

Дискусије на тему Цекове леме биле су предмет размматрања Б. Н. Орнека у неколико објављених чланака (видети нпр. [48]).

За $p \in \mathbb{N}$, означимо са $\mathcal{A}(p)$ класу свих функција облика

$$f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + a_{p+2}z^{p+2} + \cdots$$

које су холоморфне у јединичном диску $\mathbb{U}$.

Означимо класу свих функција $f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots$ које су холоморфне у јединичном диску $\mathbb{U}$ са $\mathcal{A}$. Такође, навешћемо следеће дефиниције.

Дефиниција 7.2. *1. Функција $f \in \mathcal{A}$ припада класи $S(\alpha), \alpha \in \mathbb{R}$ ако важи да је $\operatorname{Re} S[f](z) > \alpha$, $z \in \mathbb{U}$.*

2. *Функција $f \in \mathcal{A}(p)$ припада $S_p(\alpha)$ ако је испуњено $\operatorname{Re} S[f](z) > \alpha$, $z \in \mathbb{U}$.*

3. *Функцију $f \in \mathcal{A}$ називамо звездастом реда α, $0 \leqslant \alpha < 1$, ако је „1-1” и ако је испуњено $\operatorname{Re} S[f](z) > \alpha$, $z \in \mathbb{U}$. Класу оваквих функција означавамо са $S^*(\alpha)$.*

4. *Са $C(\alpha)$ означимо класу свих конвексних функција реда α, $0 \leqslant \alpha < 1$. Ове функције су дефинисане аналитичким условом $\operatorname{Re} C[f](z) > \alpha$. У литератури су заступљене ознаке $S^* = S^*(0)$ и $C = C(0)$.*

Ако је $f \in S^*(\alpha)$ и за функцију F важи $F(z) = f(z^n)$, где је n природан број, тада важи да је $F \in S(\alpha + n)$.

Подсетимо се да пресликавање $R(z) = \frac{1+z}{1-z}$ јединични диск $\mathbb{U}$ слика на десну полураван $\mathbb{P}^+$. Ако је $L(z) = L_1(z) := \frac{z}{1-z}$, тада важи $L(z) = \frac{R(z)}{2} - \frac{1}{2}$. Дакле, добили смо да L слика јединични диск на полураван $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}\}$.

Пример 1. За $a \in \mathbb{R}$ дефинишимо скуп $X_a = \{w : \mathrm{Re}\, w > a/2\}$ и за s>0 означимо $L_s(z) := \frac{z}{(1-z)^s}$. Тада

- L слика јединични диск $\mathbb{U}$ инјективно на скуп X_{-1}.
- $I_{L_s} = 1 + sL$. Одавде имамо да I_{L_s} слика јединични диск $\mathbb{U}$ инјективно на скуп $X_{2\alpha}$, где је $\alpha = \alpha(s) = 1 - s/2$.
- Када је $0 < s \leqslant 2$, L_s је звездаста функција реда $\alpha(s)$. Такође, функција L_s има максималан раст у класи $S(\alpha)$. За доказ овог тврђења видети Теорему 7.1.

У циљу даљег излагања погодно је увести ознаке

$$s(\alpha) := 2(1-\alpha) \text{ и } \beta_0 = \beta_0(\alpha) := 1/s(\alpha). \tag{7.2.1}$$

Теорема 7.1 ([32]). *Ако за $0 < \alpha < 1$ функција f припада класи $S(\alpha)$ (специјално $S^*(\alpha)$) и важе ознаке (7.2.1) тада је испуњено*

$$(i) \qquad |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^{1/\beta_0}},$$

$$(ii) \qquad |f''(0)| \leqslant \frac{2}{\beta_0}.$$

Као последица ове теореме, јасно је да (i) важи ако β_0 заменимо са $0<\beta\leqslant\beta_0$ тј. $1/\beta \geqslant 2(1-\alpha)$. Специјално, за $\alpha = 1/2$ добијамо Орнеков резултат, који гласи:
Ако f припада $S^*(1/2)$, тада је

$$(i') \qquad |f(z)| \leqslant \frac{|z|}{1-|z|},$$

$$(ii') \qquad |f''(0)| \leqslant 2.$$

Познато је да (i') и (ii') важи за конвексне функције. Знајући да је $C \subset S^*(1/2)$ (видети [53]), добијамо да је претходна теорема уопштење познатог резултата, који важи за конвексне функције.

Доказ. Уведимо ознаку $\tau := \beta(1-\alpha)$. Из услова задатка, јасно је да важи $2<\beta_0< +\infty$. Даље, нека је

$$h(z) = h_\beta(z) := \left(\frac{z}{f(z)}\right)^\beta - 1, \text{ односно } f(z) = \frac{z}{(1+h(z))^{1/\beta}}. \tag{7.2.2}$$

После краћег рачуна може се добити

$$\frac{h'(z)}{1+h(z)} = \beta\left(\frac{1}{z} - \frac{f'(z)}{f(z)}\right), \quad \text{тј.} \quad Re\left(z\frac{h'(z)}{1+h(z)}\right) = \beta(1 - \mathrm{Re}\, S[f](z)).$$

Ово конкретно значи да је

$$Re\left(z\frac{h'(z)}{1+h(z)}\right) = \beta(1 - \mathrm{Re}\, S[f](z)) < \beta(1-\alpha) = \tau. \tag{7.2.3}$$

У наставку ћемо доказати да h испуњава услове Шварцове леме: $h(0) = 0$ и $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. За свако $r_0 \in (0,1)$ постоји тачка z_0 које испуњава услове $|z_0| = r_0$ и $\max\limits_{|z|\leqslant r_0} |h(z)| = |h(z_0)| = M_{r_0}$. Према Џековој леми, тада важи једнакост

$$z_0 h'(z_0) = k_0 h(z_0), \quad k_0 \geq 1.$$

Имајући у виду једначину (7.2.3), добијамо да важи $k_0 Re(\frac{h}{1+h}) < \tau$ у тачки z_0. Ако уведемо ознаку $w = h(z_0)$, једнакост (7.2.3) можемо написати у облику

$$Re\left(\frac{w}{1+w}\right) < \tau. \tag{7.2.4}$$

Ако је $A^0(w) = \frac{w}{1+w}$, имамо да је $A^0(w) = \frac{1}{2} - \frac{R_1(z)}{2}$, где $R_1(z) = \frac{1-z}{1+z}$ слика јединични диск на десну полураван. Одавде добијамо да је

$$\operatorname{Re} A^0(w) < \frac{1}{2} \iff |w| < 1.$$

Дакле, ако бисмо претпоставили да је $\tau \leqslant \frac{1}{2}$, добили бисмо $|w| = M_{r_0} < 1$, за свако $r_0 \in (0,1)$. Одавде следи да је $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$

Добили смо да h испуњава услове Шварцове леме, одакле добијамо да важи

$$|h(z)| \leqslant |z|, \quad |z| < 1.$$

Даље, за свако $z \in \mathbb{U}$ важи $|1+h(z)| \geqslant 1-|h(z)| \geqslant 1-|z|$. Имајући у виду (7.2.2) добијамо

$$|f(z)| \leqslant \frac{|z|}{(1-|z|)^{1/\beta}}.$$

(ii) Развојем до првог члана Маклореновог реда, добијамо

$$h'(0) = -\beta a_2 = -\frac{\beta f''(0)}{2}.$$

Пошто је према Шварцовој леми $|h'(0)| \leqslant 1$, добијамо тражену неједнакост. □

7.3 Неколико резултата уводног карактера

Овде ћемо приказати метод оцене раста неких функција, који се темељи на коришћењу Цекове леме, илустрован на неколико уводних примера. Опште тврђење ће бити доказато касније, у одељку 7.4. Прво ћемо доказати Пропозицију 7.1, коју је изворно доказао Орнек, а потом Теорему 7.4, која представља побољшање Пропозиције 7.1. Пре тога, уведимо неке ознаке, за специјалне класе холоморфних функција.

- У чланку [48] Орнек испитује особине класе $N(a)$ која се састоји од функција f, холоморфних на јединичном диску, које испуњавају услове
$$f(0) = a \quad \text{и} \quad \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{2a}{1+a^2}.$$
- Једно природно уопштење би било да за $q > 0$ и $a \in \mathbb{C}$ размотримо класу $N(a,q)$ функција f, холоморфних на јединичном диску, које испуњавају услове
$$f(0) = a \quad \text{и} \quad \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < q.$$
Дакле, $N(a,q)$ је само друга ознака за $O_I^a(B(0,q))$.
- Приметимо да овде q не зависи од a. Ако је $a = 0$, тада за функцију $s_n(z) = bz^n$, где је n природан број, важи $I_{s_n} \equiv n$. Сходно томе, s_n припада класи $N(0,q)$ ако и само ако је $q > n$.

- У случају $0 < q \leqslant 1$, класа $N(0, q)$ садржи само константну (нула-) функцију.

- Ако је $|I_f(z)| \leqslant q$ и знамо да постоји z_0 за које је $|I_f(z_0)| = q$, према принципу максимума модула важи да је $I_f(z) = c$. Ако означимо $g = \log f$, тада имамо $g' = c/z$. Дакле, $g = c \log z + c_1$, тј. $f = c_2 z^c$, што значи да је $c \geqslant 0$ цео број.

- У случају да је $f \in O_I(\overline{B(0, q)})$ и да функција $|I_f|$ свој локални максимум достиже у некој тачки z_0, важиће да је $q = n$ и $f = cz^n$ за неки природан број n.

У излагању овог поглавља биће нам потребна следећа теорема.

Теорема 7.2 (*Теорема о монодромији*)**.** *Нека је комплексна функција f аналитичка у диску садржаном у просто-повезаној области D и нека f има аналитичко продужење дуж сваког полигоналног пута у D. Тада се f може аналитички продужити до аналитичке функције у читавој области D.*

Пређимо сада на главне резултате овог одељка.

Претпоставимо да је $a \in [0, 1]$ и уведимо ознаке $O_a = \frac{1+a^2}{1-a^2}$, $R_a = \frac{2a}{1-a^2}$ и нека је $K_a = B(O_a; R_a)$ диск. Означимо са $O(\mathbb{U}, K_a)$ фамилију холоморфних функција f које сликају јединични диск $\mathbb{U}$ у диск K_a и за које је $f(0) = 1$.

Коришћењем Цекове леме можемо доказати наредну пропозицију.

Пропозиција 7.1 ([32])**.** *За свако $a \in [1, 1]$ класа $N(1, q(a))$ је подскуп класе $H_a = O(\mathbb{U}, K_a)$.*

Доказ. Нека је $\psi_a(z) = \frac{1+az}{1-az}$ и нека је $f \in N(1, q(a))$.

После краћег рачуна може се проверити да је ψ_a „1-1” на $\mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{a}\}$, при чему јединични диск $\mathbb{U}$ слика управо на диск K_a. Такође, имамо $\psi_a'(z) = \frac{2a}{(1-az)^2}$ и $|\psi_a'(z)| \geqslant q_1(a) := \frac{2a}{(1+a)^2}$ за $|z| \leqslant 1$. Одавде добијамо следеће једнакости:

1 $I_{\psi_a}(z) = \frac{2az}{1-(az)^2}$, $I_{\psi_a}(1/z) = -I_{\psi_a}(z)$,

2 I_{ψ_a} је инјективно на $\mathbb{U}$,

3 I_{ψ_a} слика $\mathbb{U}$ на G_a, и

4 $|I_{\psi_a}(z)| \geqslant q(a) := \frac{2a}{1+a^2}$ за $|z| = 1$.

Докажимо следеће тврђење.

Тврђење 7.3 ([32])**.** *За свако $s > a$ функција f слика јединични диск $\mathbb{U}$ у диск K_s.*

Ако Тврђење 7.3 не би било тачно, имали бисмо $r_0 \in (0, 1)$ и тачку z_0 такве да је $f(B(0, r_0)) \subset K_s$, $|z_0| = r_0$ и $w_0 = f(z_0) \in \partial K_s$.

Ако је $z_s = \psi_s^{-1}(w_0)$, добијамо да је $|z_s| = 1$. Према Цековој леми имамо да важи $I_f(z_0) = kI_{\psi_s}(z_s)$, $k \geqslant 1$. Пошто је $|I_{\psi_s}(z_s)| \geqslant q(s) > q(a)$, имамо $I_f(z_0) > q(a)$, што је контрадикција.

Доказали смо, дакле, да је класа $N(1, q(a))$ подкласа од $H_a = O(\mathbb{U}, K_a)$, што између осталог значи да је класа $N(a, q(a))$ подкласа од aH_a. Пошто је $\psi_a'(0) = 2a$, из принципа субординације имамо да важи $|f'(0)| \leqslant 2a^2$ за свако $f \in N(a, q(a))$.

$\square$

Пре исказа следеће теореме, размотримо функцију $\psi(z) = ae^{qz}$, $a \neq 0, q > 0$. Тада је

$$\psi'(z) = aqe^{qz}, \quad I_\psi(z) = qz \quad \text{и} \quad \psi'(0) = aqe^{q0} = aq. \tag{7.3.1}$$

Лако се може показати да је функција ψ „1-1” акко је $q \leqslant \pi$.

Теорема 7.4 ([32]). *Нека је* $\psi(z) = ae^{qz}$, $a \neq 0, q > 0$ *и претпоставимо да* $g \in N(a,q)$. *Тада важи*

(*а*) $g(\mathbb{U}) \subset \psi(\mathbb{U})$,

(*б*) $|g'(0)| \leqslant aq$,

(*в*) $\sup\{|g'(0)| : g \in N(a,q)\} = aq$.

Доказ. Претпоставимо да је $g \in N(a,q)$ и нека је $H = \psi^{-1} \circ g$. Функција $\psi^{-1}(z) = \frac{1}{q} \operatorname{Log} \frac{z}{a}$ је вишезначна, због чега је и функција H вишезначна. Пошто функција g не узима вредност 0, имамо да се свака клица функције H може аналитички продужити дуж сваке полигоналне линије у јединичном диску $\mathbb{U}$. Према Теореми о монодромији, добијамо да на јединичном диску $\mathbb{U}$ постоји грана вишезначне функције Х, коју ћемо означити са h. Докажемо сада тврђење (a).

Кад (a) не би било испуњено, имали бисмо да скуп $h(\mathbb{U})$ садржи тачке које не припадају јединичном диску $\mathbb{U}$. Без умањења општости можемо претпоставити да је h холоморфна на затвореном јединичном диску $\overline{\mathbb{U}}$ и нека се максимум модула функције h на скупу $\overline{\mathbb{U}}$ постиже у тачки z_0. Ако означимо $z^0 = h(z_0)$, по ранијој претпоставки имамо да је $|z^0| > 1$.

Ако уведемо ознаке $w_0 = g(z_0)$, добијамо да је $w_0 = \psi(z^0)$. Користећи Цекову лему и особине функционала I (7.1.2) добијамо да постоји $k \geqslant 1$ такво да је $I_f(z_0) = I_{\psi^{-1}}(w_0)I_g(z_0) = k$, што заправо значи да је $I_g(z_0) = kI_\psi(z^0)$. Користећи (7.3.1) имамо да је тада $|I_g(z_0)| > q$, што је контрадикција.

Применом Шварцове леме на функцију h, добијамо да је $|g'(0)| \leqslant |\psi'(0)|$, одакле следи ($b$) и ($v$).

□

Нека је $J_f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$, и за $a \neq 0$, $q > 0$ нека $J_a(q)$ означава класу свих функција f холоморфних у једничном диску $\mathbb{U}$ које испуњавају $f(0) = a$ и $|J_f(z)| \leqslant q$, $z \in \mathbb{U}$. Користимо ознаку J_a уместо $J_a(1)$.

(А) Ако f има нулу реда $n \geqslant 1$, тада J_f има пол у тачки 0. Дакле, да би било $f \in J_a(q)$, не сме бити $a = 0$. Осим тога f не може имати ни других нула у јединичном диску $\mathbb{U}$. У том случају постоји грана $\log f$ и пошто је $(\log f)' = \frac{f'}{f}$, имамо да је $|\log f| \leqslant q$. Претпоставимо да постоји тачка $z_0 \in \mathbb{U}$, за коју је испуњено $\left|\frac{f'(z_0)}{f(z_0)}\right| = q$. По принципу максимума, тада би важило да постоји $\alpha \in [0, 2\pi)$ такво да је $\frac{f'(z)}{f(z)} = e^{i\alpha}q$ за свако $z \in \mathbb{U}$. Ово управо значи да је $f(z) = ae^{e^{i\alpha}qz}$, за свако $z \in \mathbb{U}$.

(Б) Напоменимо да је Калфалах такође доказао Тврђење (7.3.3), истакнуто испод. Ако је $f \in O_I^a(B(0, q(a)))$, $a \neq 0$, тада је I_f ограничена аналитичка функција на јединичном диску $\mathbb{U}$ и њена вредност у тачки нула је једнака нули. Тада нам класична Шварцова лема даје

$$|I_f(z)| \leqslant \frac{2a}{1+a^2}|z|, \quad \text{одакле је} \quad \left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{2a}{1+a^2}, \quad z \in \mathbb{U}. \tag{7.3.2}$$

Као специјалан случај ове неједнакости добијамо

$$|f'(0)| \leqslant \frac{2a}{1+a^2}. \tag{7.3.3}$$

(В) Као у (Б), можемо видети да је за $a \neq 0, q > 0$ испуњено $N(a,q) \subset J_a(q)$. Пошто је $I_f(z) \leqslant J_f(z), z \in \mathbb{U}$, добијамо $N(a,q) = J_a(q)$. Такође, можемо приметити да је $f \in J_a(q)$ акко је $g \in J_a$, где је $g(z) = f(z/q)$.

(Г) Ако је $A(z) = A_{q,a}(z) = ae^{qz}$, тада имамо $J_A \equiv q$. Теорема 7.4 говори нам да важи $f \in J_a(q)$ акко је $f = A_{q,a} \circ F$, где је F Шварцова функција.

Теорема 7.5 ([32]). *Претпоставимо да је $q > 0$ и $a > 0$. Тада важи следеће:*

а) Ако је $f \in J_a(q)$, тада је испуњено $ae^{-q|z|} \leqslant |f(z)| \leqslant ae^{q|z|}$.

б) Ако је, додатно $f(1) = ae^q$ и ако постоји комплексан извод $f'(1)$, тада важи једнакост $f'(1) = kae^q \frac{1-e^{-q}}{1+e^{-q}}$, где је $1 \leqslant k \leqslant q\frac{1+e^{-q}}{1-e^{-q}}$.

Доказ. Ако је $f \in J_a(q)$, тада је $f \in N(a,q)$. Према претходној теореми имамо да је $f(\mathbb{U}) \subset \psi(\mathbb{U})$, где је $\psi(z) = ae^{qz}$. Ако је h дефинисана као у доказу Теореме 7.4, односно као грану тоталне аналитичке функције $\psi^{-1} \circ f$, имали смо да важи $h(0) = 0$ и $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. Применом Шварцове леме, имамо да је $|h(z)| \leqslant |z|$, за свако $z \in \mathbb{U}$, односно

$$h(\mathbb{U}_r) \subset \mathbb{U}_r \quad \text{за свако} \quad r \in (0,1), \quad \mathbb{U}_r = r\mathbb{U}. \tag{7.3.4}$$

Из претходног, можемо писати $f(z) = \psi(h(z)), z \in \mathbb{U}$, па применом (7.3.4) и принципа максимума модула добијамо да је

$$\max_{z\in\overline{\mathbb{U}_r}} |f(z)| \leqslant \max_{z\in\overline{\mathbb{U}_r}} |\psi(z)| = ae^{qr}.$$

На исти начин имамо да је

$$\min_{z\in\overline{\mathbb{U}_r}} |f(z)| \geqslant \min_{z\in\overline{\mathbb{U}_r}} |\psi(z)| = ae^{-qr},$$

одакле добијамо a).

Нека је $b = e^{-q}$ и нека је $T_b(z) = \frac{z-b}{1-bz}$. Тада је $T_b(1) = 1, T_b'(1) = \frac{1+b}{1-b}$.

Дефинишимо $g(z) = a^{-1}e^{-q}f(z)$. Приметимо да је тада $g(0) = b$. Применом a) имамо да је $g(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. Пошто је, према претпоставци, $f(1) = ae^q$, имамо да је $g(1) = 1$. Ако дефинишемо $F = T_b \circ g$, имамо да је $F(0) = 0$, као и $F(1) = 1$. Применом Џекове леме имамо да постоји $k \geqslant 1$ такво да важи $F'(1) = kF(1)$, тј. $F'(1) = k$. Пошто је $F'(1) = T_b'(1)g'(1) = \frac{1+b}{1-b}a^{-1}e^{-q}f'(1)$, коначно добијамо $f'(1) = kae^q\frac{1-b}{1+b}$. Имајући у виду $f'(1) \leqslant qf(1) = qae^q$, имамо и неједнакост $k \leqslant q\frac{1+b}{1-b}$. □

Теорема 7.6 ([32]). *Претпоставимо да f припада $N(0,1)$ и да f у тачки 0 поседује нулу реда $n \geqslant 1$.*

(а) Важи

$$|f(z)| \leqslant \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} e^{(n+1)|z|}|z|^n.$$

(б) Ако f има комплексан извод у тачки 1 и ако је $f(1) = \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}e^{n+1}$, тада постоји $k \geqslant n$ такво да је $f'(1) = kf(1)$. Специјално,

$$|f'(1)| \geqslant n\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!}e^{n+1}.$$

Доказ. Ако f припада $N(0,1)$ и f има нулу n-тог реда у тачки нула, тада је $f = z^n g$, где је g функција холоморфна на $\mathbb{U}$, која нема нуле. Још имамо $|n + I_g| \leqslant 1$, одакле добијамо да важи $g \in N(g(0), n+1)$. Применом Теореме 7.4 добијамо $|g(z)| \leqslant |g(0)|e^{(n+1)|z|}$. Пошто је $g(0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, добијамо управо неједнакост (a).

Докажимо сада део b). Слично као у делу под a), постојаће холоморфна функција g_1, дефинисана у јединичном диску $\mathbb{U}$, за коју важи $f(z) = z^{n-1}f(z)$. Ова функција испуњава услове Цекове леме, односно, постоји $k_1 \geqslant 1$ такво да је $g'(1) = k_1 g(1)$, што заправо значи $f'(1) - (n-1)f(1) = k_1 f(1)$. За $k = n - 1 + k_1 \geqslant n$, добијамо неједнакост $f'(1) = kf(1)$, што је и требало доказати.

□

7.4 Метод за оцену раста функција заснован на Цековој леми

У овом одељку размотрићемо једну специфичну ситуацију. Нека је G просто повезана област у $\mathbb{C}$, тачка a припада G и нека је ψ конформно пресликавање $\mathbb{U}$ на G за које важи $\psi(0) = a$. Осим тога, нека је $\phi = \psi^{-1}$ и $F = \phi \circ f$. Ако означимо $w = f(z)$ имамо да важи

$$I_f^{\psi}(z) = I_f(\psi)(z) = \frac{zF'}{F} = \frac{z\phi'(w)}{\phi(w)} f'(z) = I_{\phi}(w) I_f(z).$$

Означимо са $O_a(\mathbb{U}, G)$ фамилију функција f холоморфних на јединичном диску $\mathbb{U}$, чија је слика подскуп области G, и које испуњавају услов $f(0) = a$.

Принцип субординације 1

Подсетимо се да је $\mathbb{U}_r = B(0, r)$. Претпоставимо да је функција f_r холоморфна на диску $\mathbb{U}_r$. Тада је функција f дефинисана изразом $f(z) = f_r(rz)$ холоморфна на јединичном диску. Тада можемо израчунати

$$I_f(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{rzf_r'(rz)}{f_r(rz)} = I_{f_r}(rz).$$

Користећи ову једнакост, можемо закључита да Цекова лема важи у истом облику ако, уместо функције f дефинисане на јединичном диску, лему применимо на функцију f_r, дефинисану на $\mathbb{U}_r$.

Теорема 7.7 ([32])**.** *Нека важе следеће претпоставке*

(а) f и ψ су холоморфне у $\mathbb{U}$ и испуњен је услов $f(0) = \psi(0)$

(б) ψ је локално „1-1” у $\mathbb{U}$,

(в) I_{ψ} је „1-1” и скуп $I_{\psi}(\mathbb{U}_r)$ је звездаст у односу на нулу, за свако r које испуњава $0 < r_0 < r < 1$, за неко $r_0 > 0$.

(г) $I_f(\mathbb{U}) \subset I_{\psi}(\mathbb{U})$.

Тада је

(7.4.1) $$f(\mathbb{U}) \subset \psi(\mathbb{U}).$$

Доказ. Да би било испуњено (в), мора важити $f(z), \psi(z) \neq 0$ за свако $z \in \mathbb{U}$. Имајући у виду (г), одавде би био испуњен услов

$$I_f(\mathbb{U}_r) \subset I_\psi(\mathbb{U}_r). \tag{7.4.2}$$

Без умањења оштости, можемо претпоставити да је се функција ψ може непрекидно продужити на $\overline{\mathbb{U}}$. Претпоставимо да (7.4.2) није испуњено. Тада постоји r близу 1 такво да $f(U_r)$ није подскуп скупа $\psi(U_r)$. Заиста, ако би важило $f(\mathbb{U}_r) \subset \psi(\mathbb{U}_r)$ за свако r које испуњава $0 < r_0 < r < 1$, имало би директно (7.4.2). Одавде знамо да постоји $z_r \in \mathbb{U}_r$, за које важи $|z_r| = m < r, f(\mathbb{U}_m) \subset\ H_r := \psi(\mathbb{U}_r)$ и $w_r = f(z_r) \in \partial H_r$.

Из Теореме о монодромији, имамо да постоји аналитичка грана вишезначне функције $\psi^{-1} \circ f$ дефинисана на $\mathbb{U}_m$, коју ћемо означити са h. Ако је $\zeta_r = h(z_r)$, тада је $|\zeta_r| = r$. Из Џекове леме имамо да постоји $k \geqslant 1$, такво да важи

$$I_f(z_r) = kI_\psi(\zeta_r). \tag{7.4.3}$$

Нека је $G_r := I_\psi(\mathbb{U}_r)$. Имајући у виду (г), знамо да је $I_f(z_r) \in G_r$. Такође, имамо да, због $|\zeta_r| = r$ важи $I_\psi(\zeta_r) \in \partial G_r$. Пошто је I_ψ „1-1", а скуп G_r је звездаст у односу на нулу, имамо да из (7.4.3) мора важити $k = 1$, тј. $I_f(z_r) = I_\psi(\zeta_r)$, што нас доводи у контрадикцију.

□

Примена Теореме 7.7 нам даје Теорему 7.8. Приметимо да Теорема 7.7 не захтева да функција I_f има непрекидно продужење на јединични диск $\mathbb{U}$, уместо чега користимо претпоставку (в) у доказу. Пре формулације и доказа Теореме 7.8 подсетимо се неких техничких детаља који ће бити изнети у наставку текста.

Нека је функција g холоморфна на јединичном диску $\mathbb{U}$ и нека је испуњено $g(0)$=0. Размотримо диференцијалну једначину

$$I_f(z) = g(z), z \in \mathbb{U}. \tag{7.4.4}$$

Ако је $h(z) = g(z)/z$, имамо да важи $f'(z)/f(z) = h(z)$, односно $(\log f(z))' = h(z)$. Решење ове диференцијалне једначине задовољава $\log f(z) = H(z)$, где је H примитивна функција функције h због чега имамо да је решење једначине (7.4.4) задато формулом

$$f(z) = e^{H(z)}, z \in \mathbb{U}.$$

Ако је H_0 примитивна функција функције h која испуњава $H_0(0) = 0$, важи да је $f(z) = ce^{H_0(z)}$, при чему је $c \neq 0$.

За почетак уведимо неке ознаке. Нека је $S_0 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$ и нека је $S_q = qS_0$, где је $q > 0$. Подсетимо се да функција tan траку $S_{\pi/2}$ пресликава на $D = \mathbb{C} \setminus ((-\infty i, -i] \cup [i, i\infty))$, при чему је tan „1-1" на скупу $S_{\pi/2}$.

(у1) Можемо изабрати грану функције инверзне функцији tan (у ознаци arctan), која је „1-1" на скупу D и овај скуп слика на траку $S_{\pi/2}$. Такође, arctan јединични диск $\mathbb{U}$ слика на траку $S_{\pi/4}$.

Размотримо следећу функцију:

$$\omega(z) = \omega_q(z) = \frac{4}{\pi} q \arctan z, q > 0. \tag{7.4.5}$$

Функција ω_q јединични скуп $\mathbb{U}$ слика на траку S_q. Са Θ означимо функцију дефинисану на $\mathbb{U}$, која испуњава услове $\Theta'(z) = \frac{\omega(z)}{z}$ и $\Theta(0) = 0$.

Означимо са

(7.4.6) $$\psi(z) = \psi_q(z) = a\exp(\Theta(z)), \quad a \neq 0$$

решење једначине $I_\psi(z) = \omega_q(z)$.

Да бисмо применили Теорему 7.7, потребно је да докажемо да је испуњен услов:

(7.4.7) Функција ω је звездаста.

Имајући у виду да је ω „1-1" на скупу $\mathbb{U}$, да је $\omega(0) = 0$ и да је слика јединичног диска при функцији ω трака S_q, која је звездаст скуп, то је услов (7.4.7) испуњен.

Применом Теореме 7.7 добијамо следећу теорему:

Теорема 7.8 ([32]). *Нека су испуњени следећи услови:*

(i) нека је $\psi(z) = \psi_{(a,q)}(z) = a\exp(\Theta(z))$, $a \neq 0$ *функција дефинисана формулом (7.4.6).*

(ii) Нека је f *функција холоморфна у једничном диску* $\mathbb{U}$, *која испуњава услов* $f(0) = a$ *и*
$-q < \operatorname{Re} I_f(z) < q$, *за свако* $z \in \mathbb{U}$.

Под претпоставкама (i) и (ii) имамо следеће закључке:

(а) $f(\mathbb{U}) \subset \psi(\mathbb{U})$,

(б) $|f'(0)| \leqslant \frac{4}{\pi}aq$,

(в) Θ *је конвексна функција (која је „1-1" на* $\mathbb{U}$*), и*

(г) $\psi(-|z|) \leqslant |f(z)| \leqslant \psi(|z|)$ *за* $z \in \mathbb{U}$.

Доказ. Означимо са $H = \psi^{-1} \circ f$. Пошто је функција ψ^{-1} вишевредносна, то је и функција H вишевредносна. Пошто је ψ локално инвертибилна, закључујемо да се функција H може продужити дуж сваког полигоналног пута у $\mathbb{U}$, због чега можемо дефинисати грану h вишезначне функције H на скупу $\mathbb{U}$. Применом Теореме 7.7 на функцију ω, дефинисану формулом (7.4.5) добијамо да важи $f(\mathbb{U}) \subset \psi(\mathbb{U})$. Једноставном применом Шварцове леме на функциу h добијамо доказ тврђења (б).

(в) Приметимо да је $C[\Theta] = S[z\Theta'] = 1 + S[\Theta'] = S[\omega]$ одакле добијамо да важи $\operatorname{Re} C[\Theta] > 0$. Пошто Θ' нема нуле $\mathbb{U}$, закључујемо да је Θ конвексна функција која је „1-1" на $\mathbb{U}$.

С обзиром да је конвексност функције наследно својство, добијамо да важи

(7.4.8) скуп $\Theta(U_r)$ је конвексан за свако $0 < r < 1$.

(г) За свако $x \in (-1, 1)$ имамо да важи

$$\Theta(x) = \int_0^x \frac{\arctan t}{t} \mathrm{d}t \in \mathbb{R},$$

док за свако $y \in (-1, 1)$ директним рачуном добијамо

$$\Theta(iy) = \int_0^y \frac{\arctan it}{t} \mathrm{d}t = \int_0^y \frac{i \operatorname{atanh} t}{t} \mathrm{d}t = iv, \quad \text{где је} \quad v = \int_0^y \frac{\operatorname{atanh} t}{t} \mathrm{d}t \in \mathbb{R}.$$

Узмимо $0 < r < 1$ произвољно. Криву β_r дефинишимо параметризацијом $\beta_r(t) = \Theta(re^{it}), t \in [0, 2\pi)$. У наставку, доказаћемо да су тангенте криве β_r вертикалне у тачкама у којима ове криве секу реалну осу, што директно следи из следећих једнакости:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\beta_r(t)|_{t=0} = ire^{it}\Theta'(re^{it})|_{t=0} = ire^{it}\frac{\arctan(re^{it})}{re^{it}}|_{t=0} = ir\frac{\arctan r}{r} = i\arctan r,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\beta_r(t)|_{t=\pi} = ire^{it}\frac{\arctan re^{it}}{re^{it}}|_{t=\pi} = -i\arctan r.$$

Имајући у виду (7.4.8) добијамо неједнакости

$$\Theta(-r) \leqslant \operatorname{Re}\Theta(re^{it}) \leqslant \Theta(r).$$

Одавде следи да за свако $z \in U_r$ важи

$$\Theta(-r) < \operatorname{Re}\Theta(z) < \Theta(r).$$

Пошто је $\psi(z) \neq z, z \in \mathbb{U}$ из услова теореме имамо да важи $f(z) \neq z, z \in \mathbb{U}$. Одавде важи да можемо дефинисати грану вишезначне функције $h = \log \circ f_1$, где је $f_1(z) := f(z)/a, z \in \mathbb{U}$. Ако је $\psi_1(z) = \psi(z)/a, z \in \mathbb{U}$ имамо да важи идентитет $\Theta = \log \circ \psi_1$. Из услова $f(\mathbb{U}) \subset \psi(\mathbb{U})$ следи да је $h(\mathbb{U}) \subset \Theta(\mathbb{U})$, а пошто је Θ „1-1”, добијамо да важи $h(U_r) \subset \Theta(U_r)$. Одавде следи да је за свако $z \in U_r$

$$\Theta(-r) < \operatorname{Re} h(z) < \Theta(r).$$

Одатле дирекно добијамо да за свако $z \in U_r$ важи

$$\psi(-|z|) \leqslant |f(z)| \leqslant \psi(|z|).$$

□

Задатак 1. За вежбу, докажимо услов (7.4.7) аналитички. Нека је $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}), y \in \mathbb{R}$. Ако уведемо ознаку $\tan(x+iy) = a+ib$ тада ће бити испуњено $\tan(x-iy) = a-ib$. Одатле добијамо следећи идентитет

$$\tan 2x = \tan[(x+iy)+(x-iy)] = \frac{\tan(x+iy)+\tan(x-iy)}{1-\tan(x+iy)\tan(x-iy)} =$$
$$= \frac{(a+ib)+(a-ib)}{1-(a+ib)(a-ib)} = \frac{2a}{1-a^2-b^2}.$$

Из чињенице да $2x$ припада $S_{\pi/2}$ можемо применити функцију arctan (дефинисану условом (у1)) на обе стране претходне једначине. Одатле добијамо

$$x = \frac{1}{2}\arctan\frac{2a}{1-a^2-b^2}.$$

Осим тога, директним рачуном добијамо једнакост

$$i\tanh 2y = \tan 2iy = \tan[(x+iy)-(x-iy)] = \frac{\tan(x+iy)-\tan(x-iy)}{1+\tan(x+iy)\tan(x-iy)} = \frac{2ib}{1+a^2+b^2}.$$

Одатле добијамо једнакост

$$y = \frac{1}{2}\operatorname{atanh}\frac{2b}{1+a^2+b^2}.$$

Из претходног, добили смо да важи формула

$$\arctan(a+ib) = \frac{1}{2}\arctan\frac{2a}{1-a^2-b^2} + \frac{1}{2}i\operatorname{atanh}\frac{2b}{1+a^2+b^2},$$

за оне $a, b \in \mathbb{R}$ који испуњавају услов $a^2+b^2 < 1$. Дефинишимо сада функцију $\omega_0(z) = \arctan(z)$ за вредности $z = x+iy$ такве да је $|z| < 1$. Тада важи

$$I_{\omega_0}(z) = \frac{z}{(1+z^2)\arctan z} =$$
$$= \frac{x\arctan\left(\dfrac{2x}{1-x^2-y^2}\right)(1+x^2+y^2) + y\operatorname{atanh}\left(\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}\right)(1-x^2-y^2)}{2|1+z^2|^2|\arctan z|^2} +$$
$$+ i\frac{y\arctan\left(\frac{2x}{1-x^2-y^2}\right)(1-x^2-y^2) - x\operatorname{atanh}\left(\dfrac{2y}{1+x^2+y^2}\right)(1+x^2+y^2)}{2|1+z^2|^2|\arctan z|^2}.$$

Пошто су функције

$$A(x,y) = x \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2-y^2}\right)(1+x^2+y^2) \quad \text{и}$$
$$B(x,y) = y \operatorname{atanh}\left(\frac{2y}{1+x^2+y^2}\right)(1-x^2-y^2)$$

парне у односу на сваку од променљивих x и y, закључујемо да је $A(x,y) > 0$ за $x \neq 0$ и $B(x,y) > 0$ за $y \neq 0$. Одавде је $A(x,y) + B(x,y) > 0$ за све $(x,y) \neq (0,0)$. Дакле,

$$\operatorname{Re} I_{\omega_0}(z) > 0 \text{ за све } z \neq 0. \tag{7.4.9}$$

Пошто је по дефиницији

$$I_{\omega_0}(z) = \frac{z}{(1+z^2)\arctan z},$$

добијамо и услов

$$I_{\omega_0}(0) = 1. \tag{7.4.10}$$

Комбиновањем формула (7.4.9) и (7.4.10) добијамо да је $\operatorname{Re} I_\omega(z) > 0$ за све $z \in \mathbb{U}$, одакле следи да функција ω задовољава услове Теореме 7.7.

Принцип субординације 2

Дефиниција 7.1. Уочимо произвољно $a \neq 0$. Нека је ψ холоморфна функција на области D која садржи јединични диск $\overline{\mathbb{U}}$ и испуњава услов $\psi(0) = a$. Уведимо ознаке $m(\psi) = \inf\{|I_\psi(z)| : z \in D \setminus \overline{\mathbb{U}}\}$ и $G = \psi(D)$. Претпоставимо још да свака клица функције ψ^{-1} има аналитичко продужење дуж сваке криве у G.

Означимо са $O_a^1(\psi)$ фамилију функција f које припадају класи $O_a(\mathbb{U}, G)$ и испуњавају услов

$$|I_f(z)| < m(\psi), z \in \mathbb{U}. \tag{7.4.11}$$

Нека је h аналитичка грана вишезначне функције $\psi^{-1} \circ f$ и означимо са $z' = h(z)$. Пошто према Џековој леми имамо да постоји тачка z у $\mathbb{U}$ таква да је испуњено $|I_f(z)| \geqslant |I_\psi(z')|$, на основу (7.4.11) закључујемо да важи $|I_\psi(z')| < m(\psi)$. Одавде следи да важи $f(\mathbb{U}) \subset \psi(\mathbb{U})$. Као последицу овог разматрања добијамо следећу теорему:

Теорема 7.9 ([32]). *Ако је $f \in O_a^1(\psi)$, тада имамо следеће закључке:*

(а) $|f'(0)| \leqslant |\psi'(0)|$,

(б) $\sup\{|f'(0)| : f \in O_a(\psi)\} = |\psi'(0)|$.

За произвољан $M \subset \mathbb{C}$ дефинишимо $S(M) = \{sz : s > 1, z \in M\}$ и $A_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 1 + \epsilon\}$.

Дефиниција 7.3. *Нека је $\epsilon > 0$ унапред задато. Претпоставимо да је функција ψ холоморфна у $\mathbb{U}_{1+\epsilon}$, $\psi(0) = a$ и $G = \psi(\mathbb{U}_{1+\epsilon})$. Кажемо да функција f припада класи $O_a(\psi, \epsilon)$, ако испуњава следеће услове*

(h1) *$f(\mathbb{U}) \subset G$,*

(h2) *$I_f : \mathbb{U} \to \mathbb{C} \setminus S(I_\psi(A_\epsilon))$, и*

(h3) *Постоји клица функције ψ^{-1} која има аналитичко продужење дуж сваке криве у G.*

Ако постоји $\epsilon > 0$ такво да $f \in O_a(\psi, \epsilon)$ кажемо да функција f припада класи $O_a(\psi)$.

Теорема 7.10 ([32]). *Ако f припада класи $O_a(\psi)$, тада је*

(а) $f(\mathbb{U}) \subset \psi(\mathbb{U})$,

(б) $|f(z)| \leqslant M_\psi(r)$, где је $r = |z|$.

Доказ. (а) Нека је $f \in O_a(\psi)$ и нека је $H = \psi^{-1} \circ f$. Слично као раније, имамо да је H вишезначна функција. Из услова $(h2)$ и теореме о монодромији имамо да функција ψ^{-1} локално има инверз, па се свака клица функције H може продужити дуж сваког пута у $\mathbb{U}$, што значи да постоји аналитичка грана h функције H. Докажимо да важи $f(\mathbb{U}) \subset \psi(\mathbb{U})$.

У супротном, скуп $h(\mathbb{U})$ мора садржати тачке које се налазе изван скупа $\mathbb{U}$. Без умањења општости, можемо претпоставити да се функција h може непрекидно продужити у $\overline{\mathbb{U}}$ и нека функција h максимум модула постиже у тачки z_0 на јединичној кружници. Ако означимо $w_0 = g(z_0)$ и $z^0 = h(z_0)$ јасно је да мора бити $|z^0| > 1$ и $w_0 = f_0(z^0)$.

(б) Нека је $w = f(z)$ и $z' = h(z)$. Тада је $w = f(z) = \psi(z')$, па применом Шварцове леме, мора важити $|z'| = |h(z)| \leqslant |z|$. Применом принципа максимума модула добијамо б).

Применом формуле (7.1.2) и Цекове леме, добијамо $I_{f_0^{-1}}(w_0)I_g(z_0) = k$, $k \geqslant 1$, одакле је $I_f(z_0) = kI_\psi(z^0)$, што нам даје контрадикцију са условом $(h2)$.

Применом Шварцове леме на функцију h, добијамо и $|f'(0)| \leqslant |\psi'(0)|$. $\square$

Пример 2. Нека је $\psi(z) = \frac{a}{1-z}$.

$(i1)$ Имамо да је испуњено $I_\psi(z) = L(z) = \frac{z}{1-z}$, $S(I_\psi(\mathbb{T})) = \{z \in \mathbb{U} : \operatorname{Re} z < -\frac{1}{2}\}$. Ако f припада класи S_α, $\alpha \geqslant -1$ и ако важи $f(0) = a$, $a \neq 0$, разликујемо два следећа случаја. За $a \leqslant 0$, имамо да важи $f(\mathbb{U}) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z < a/2\}$, док за $a > 0$, важи $f(\mathbb{U}) \subset \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} f(z) > a/2\}$.

$(i2)$ Нека је $A(z) = 1 - z$, $L_s(z) = \frac{z}{(1-z)^s}, s \in \mathbb{R}$ и $L = L_1$. Тада важи $I_A = -L$ и $I_A(\mathbb{U}) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1/2\}$. Такође $I_{L_s} = 1 + sL$ за $s > 0$ испуњава $I_{L_s}(\mathbb{U}) = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > \alpha\}$, где је $\alpha = 1 - s/2$.

Ако функција f припада класи S_α, $\alpha < 0$, користећи $(i2)$ добијамо да важи неједнакост $|f(z)| \leqslant L_s(|z|)$, што значи да је L_s екстремална функција у класи S_α, $s = 2(1 - \alpha)$.

Дефиниција 7.4. *Нека f задовољава услове Дефиниције 7.3, осим што услов $(h2)$ замењујемо условом*

$(h-2)$ $\quad I_f : \mathbb{U} \to \mathbb{C} \setminus S(I_\psi(\mathbb{T}))$.

Тада кажемо да функција f припада класи $O_a^2(\psi)$.

Пропозиција 7.2 ([32]). *Ако је $f \in O_a^2(\psi)$, имамо да важи релација $f(\mathbb{U}) \subset \psi(\mathbb{U})$.*

Доказ. Претпоставимо да постоји тачка $z_0 \in \mathbb{U}$ таква да је $f(B(0, r_0) \subset \psi(\mathbb{U})$, где је $r_0 = |z_0|$ и $w_0 = f(z_0) \in \partial\psi(\mathbb{U})$. Ово нам даје да постоји тачка $\zeta_0 \in \mathbb{T}$ за коју важи $w_0 = \psi(\zeta_0)$. Као раније, имамо да постоји грана h вишезначне функције $\psi^{-1} \circ f$. Из Цекове леме, имамо да је $I_f(z_0) = kI_\psi(\zeta_0)$ за неко $k \geqslant 1$, што је контрадикција са условом $(h-2)$. $\square$

7.5 Оцена раста холоморфних функција

У следећем примеру дајемо експлицитну формулу за конформно пресликавање које слика $\mathbb{U}$ на $\mathbb{S}_0$ помоћу које можемо израчунати хиперболичку метрику на траци.

Пример 3. Нека је $\mathbb{S}_1 = \{w : |Re\, w| < \pi/4\}$. Елементарном провером видимо да пресликавање tan траку $\mathbb{S}_1$ слика на $\mathbb{U}$. Ако је $B(w) = \frac{\pi}{4}w$ и $\phi_0 = \tan \circ B$, тј. $\phi_0(w) = \tan(\frac{\pi}{4}w)$, тада ϕ_0 траку $\mathbb{S}_0$ слика на јединични диск $\mathbb{U}$. Уведемо ознаку $A_0(z) = \frac{1+z}{1-z}$, и нека је $\phi = i\dfrac{2}{\pi}\log \circ A_0$, тј. $\phi = \phi_0 \circ A_0$, где је $\phi_0 = i\frac{2}{\pi}\log$. Дефинишимо $\hat{\phi}$ формулом $\hat{\phi}(z) = -\phi(iz)$ и приметимо да ϕ интервал $I_0 = (-1, 1)$ слика на $y-$осу, $\hat{\phi}$ интервал I_0 пресликава на себе, и да је $\hat{\phi} = \frac{4}{\pi}\arctan$ инверз функције f_0. Приметимо да важи

$$(7.5.1) \qquad (i1) \quad \hat{\phi}'(0) = \frac{4}{\pi}.$$

Ако означимо $\hat{u} = \mathrm{Re}\,\hat{\phi}$, тада важи

$$(7.5.2) \qquad (i2) \quad \hat{u} = \frac{2}{\pi}arg\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right),$$

као и да $\hat{u}$ слика интервал I_0 на себе.

Подсетимо се да је $M_f(r) = \max\{|f(re^{it})| : 0 \leqslant t < 2\pi\}$. Имајући у виду претходно разматрање, можемо доказати следећу теорему:

Теорема 7.11 ([32]). *а) Нека је F пресливавање холоморфно на диску $\mathbb{U}$ у траку $\mathbb{S}_0$ које испуњава услов $F(0) = 0$. Тада је $M_F(r) \leqslant \frac{2}{\pi}\log\frac{1+r}{1-r}$, $0 < r < 1$.*

Ову теорему доказаћемо употребом следеће пропозиције:

Пропозиција 7.3 ([32]). $M_\phi(r) = \frac{2}{\pi}\log\frac{1+r}{1-r}$.

Доказ. Докажимо ово тврђење коришћењем елементарног рачуна.

Нека је $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\varphi}$, $w = A_0(z) = \frac{1+z}{1-z}$, $\phi = \log \circ A_0$ и $M(r, \theta) = |\phi(z)|^2$. Пошто је $\ln w = \log\rho + i\varphi$

$$\rho^2 = |A_0(z)|^2 = \frac{1 + 2r\cos\theta + r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2} \quad \text{и} \quad A_0(z) = \frac{1 - r^2 + 2ir\sin\theta}{|1 - z|^2},$$

имамо да $\tan\varphi = \frac{2r\sin\theta}{1-r^2}$ и $\varphi = \arctan\left(\frac{2r\sin\theta}{1-r^2}\right)$. Одавде следи

$$M(r, \theta) = \arctan^2\left(\frac{2r\sin\theta}{1-r^2}\right) + \frac{1}{4}\log^2\left(\frac{1+2r\cos\theta+r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\right), 0 < r < 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},$$

што нам даје

$$\frac{\partial M}{\partial\theta}(r, \theta) = \frac{2}{r}\frac{2(1-r^2)\cos\theta\arctan\frac{2r\sin\theta}{1-r^2} - (1+r^2)\sin\theta\log\frac{1+2r\cos\theta+r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}}{4\sin^2\theta + (r - \frac{1}{r})^2}.$$

Доказаћемо да је

$$(i) \quad \frac{\partial M}{\partial\theta}(r, \theta) \leqslant 0, \quad 0 < r < 1, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2},$$

одакле ће следити да важи

$$\max_{0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}} M(r, \theta) = M(r, 0).$$

Одавде је јасно да је испуњено $\operatorname{sgn}\frac{\partial M}{\partial\theta}(r,\theta)=\operatorname{sgn}N(r,\theta)$, где је

$$N(r,\theta)=2(1-r^2)\cos\theta\arctan\left(\frac{2r\sin\theta}{1-r^2}\right)-(1+r^2)\sin\theta\log\left(\frac{1+2r\cos\theta+r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\right).$$

Пошто је $N(0,\theta)=0$, $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$, довољно ће бити да покажемо да је испуњено

$$\frac{\partial N}{\partial r}(r,\theta)\leqslant 0, 0<r<1, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}. \tag{7.5.3}$$

На крају, директним рачуном добијамо да за $0<r<1$ и $0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}$ важи

$$\frac{\partial N}{\partial r}(r,\theta)=-2r\left(2\cos\theta\arctan\left(\frac{2r\sin\theta}{1-r^2}\right)+\sin\theta\log\left(\frac{1+2r\cos\theta+r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}\right)\right).$$

Пошто је $\frac{\partial N}{\partial r}(r,\theta)=-2rA(r,\theta)$, где је $A\geqslant 0$ на скупу $\{(r,\theta):0<r<1, 0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\}$, коначно можемо закључити да важи (7.5.3). $\square$

Докажимо сада Теорему 7.11.

Доказ. Нека је $\phi=\frac{2}{\pi}\arctan$. Коришћењем принципа субординације добијамо $F(\mathbb{U}_r)\subset\phi(\mathbb{U}_r)$, одакле је $M_F(r)\leqslant M_\phi(r)$.

$\square$

Литература

[1] D. Kalaj A. Gjokaj. “QCH mappings between unit ball and domain with $C^{1,\alpha}$ boundary.” arXiv:2005.05667 [math.AP], 2021.

[2] M. Mateljević A. Khalfallah. “On some Schwarz type inequalities.” In: *J. Inequal. Appl.* 164 (2020).

[3] M. Mhamdi A. Khalfallah M. Mateljević. “Some properties of mappings admitting general Poisson representations.” In: *Mediterr. J. Math.* 18, 193 (2021).

[4] J. Wittsen A. Olofsson. “Poisson integrals for standard weighted Laplacians in the unit disc.” In: *J. Math. Soc. Japan* 65 (2) (2013), pp. 447–486.

[5] L. V. Ahlfors. *Mobius Transformations in Several Dimensions.* University of Minnesota, 1989.

[6] M. Mateljević et al. “Project: Schwarz lemma, the Carathéodory and Kobayashi Metrics and Applications in Complex Analysis.” `https://www.researchgate.net/project/Schwarz-lemma-the-Caratheodory-and-Kobayashi-Metrics-and-Applications-in-Complex-Analysis`.

[7] T. Aubin. *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry.* Springer Berlin, Heidelberg, 1998. ISBN: 978-3-540-60752-6.

[8] P. Lu B. Chow and L. Ni. *Hamilton’s Ricci Flow (Graduate Studies in Mathematics).* American Mathematical Soc., 2006.

[9] B. Burgeth. “A Schwarz Lemma for harmonic and hyperbolic-harmonic functions in higher dimensions.” In: *Manuscripta Math.* 77 (1992), pp. 283–291.

[10] N.S. Trudinger D. Gilbarg. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, second edition, 1993.

[11] A. Zlaticanin D. Kalaj. “Quasiconformal mappings with controlled Laplacian and Hölder continuity.” In: *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 44 (2019), pp. 797–803.

[12] E. Saksman D. Kalaj. “Quasiconformal maps with controlled Laplacian.” In: *J. d’ Anal. Math.* 137 (2019), pp. 251–268.

[13] M. Mateljević D. Kalaj. “Inner estimate and quasiconformal harmonic maps between smooth domains.” In: *J. d’ Anal. Math.* 100 (2006), pp. 117–132.

[14] L. Wang D. Li. “Elliptic equations on convex domains with nonhomogeneous Dirichlet boundary conditions.” In: *Journal of Differential Equations* 246 (2009), pp. 1723–1743.

[15] C. G. Donohue. “Lipschitz Estimates for Conformal Maps from the Unit Disk to Convex Domains.” In: *Comput. Methods Funct. Theory* (2022).

[16] R. Roy G. Landrews R. Askey. *Special functions*. Cambridge University Press, London, 1999.

[17] D. Geller. "Some results in H theory for the Heisenberg group." In: *Duke Math. J.* 47 (1980), pp. 365–391.

[18] Г. М. Голузин. „Геометриц тхеору оф фунцтионс оф а цомплех вариабле". У: 1969.

[19] G. Kohr H. Hamada. "A rigidity theorem at the boundary for holomorphic mappings with values in finite dimensional bounded symmetric domains." In: *Mathematische Nachrichten* 294 (11) (2021), pp. 2151–2159.

[20] M. Mateljević H. Li. "Boundary Schwarz lemma for harmonic and pluriharmonic mappings in the unit ball." In: *Journal of Mathematical Inequalities* 16 (2) (2022), pp. 477–498.

[21] E. Heinz. "On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings." In: *J. d'Anal. Math.* 5 (1956/57), pp. 197–272.

[22] G. Kohr I. Graham H. Hamada. "A Schwarz lemma at the boundary on complex Hilbert balls and applications to starlike mappings." In: *J. Anal. Math.* 140 (2020), pp. 31–53.

[23] A. Rasila J. Chen M. Huang. "On Lipschitz continuity of solutions of hyperbolic Poisson's equation." In: *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* 57 (1) (2018), pp. 1–32.

[24] et al. J. Chen M. Huang. "Equivalent Norms of Solutions to Hyperbolic Poisson's Equations." In: *J. Geom. Anal.* 31 (2021), pp. 8173–8201.

[25] V. Manojlovic K. Astala. "On Pavlovic theorem in space." In: *Potential Anal.* Vol. 43, No. 3 (2015), pp. 361–370.

[26] D. Kalaj. "A priori estimate of gradient of a solution to certain differential inequality and quasiconformal mappings." In: *J. d'Anal. Math.* 119:1 (2013), pp. 63–88.

[27] D. Kalaj. "Heinz-Schwarz inequalities for harmonic mappings in the unit ball." In: *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 41 (2016), pp. 457–464.

[28] D. Khavinson. "An Extremal Problem for Harmonic Functions in the Ball." In: *Canadian Mathematical Bulletin* 35 (2) (1992), pp. 218–220.

[29] L. V. Kovalev. "Conformal contractions and lower bounds on the density of harmonic measure." In: *Potential Anal.* 46 (2) (2017), pp. 385–391.

[30] M. Mateljević M. Arsenović V. Manojlović. "Lipschitz-type spaces and harmonic mappings in the space." In: *Ann. Acad. Sci. Fenn., Math.* 35 (2010), pp. 379–387.

[31] M. Mateljević M. Knežević. "On the quasi-isometries of harmonic quasiconformal mappings." In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 334:1 (2007), pp. 404–413.

[32] B. N. Ornek M. Mateljević N. Mutavdžić. "Note on some classes of holomorphic functions related to Jack's and Schwarz's lemma." In: *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* 16 (1) (2022), pp. 111–131.

[33] E. Sevost'yanov M. Mateljević. "On the behavior of Orlicz-Sobolev mappings with barnching on the unit sphere." In: *Ukr. Math. Bull* 19 (4) (2022), pp. 542–584.

[34] E. Sevost'yanov M. Mateljević R. Salimov. "Hölder and Lipschitz continuity in Orlicz-Sobolev classes, the distortion and harmonic mappings." In: *Filomat* 36 (16) (2022).

[35] M. Svetlik M. Mateljević. "Hyperbolic metric on the strip and the Schwarz lemma for HQR mappings." In: *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* 14 (1) (2020), pp. 150–168.

[36] M. Vuorinen M. Mateljević. "On Harmonic Quasiconformal Quasi-Isometries." In: *Journal of Inequalities and Applications* 2010 (2010), p. 178732.

[37] N. Mutavdžić M. Mateljević. "On Lipschitz continuity and smoothness up to the boundary of solutions of hyperbolic Poisson's equation." arXiv:2208.06197 [math.CV].

[38] N. Mutavdžić M. Mateljević. "The Boundary Schwarz lemma for harmonic and pluriharmonic mappings and some generalisations." In: *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* 45 (2022), pp. 3177–3195.

[39] O. Martio. "On harmonic quasiconformal mappings." In: *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A* I (425) (1968), pp. 3–10.

[40] M. Mateljević. "Boundary Behaviour Of Partial Derivatives For Solutions To Certain Laplacian-Gradient Inequalities And Spatial Qc Maps 2." Preprint, Comunicated at XII Symposium Mathematics and Applications, Mathematical Faculty, Belgrade, 2,3. December 2022.

[41] M. Mateljević. "Boundary Behaviour of Partial Derivatives for Solutions to Certain Laplacian-Gradient Inequalities and Spatial QC Maps, Operator Theory and Harmonic Analysis." In: *Springer Proceedings in Mathematics and Statistics* 357 (2021), pp. 393–418.

[42] M. Mateljević. "Estimate for elliptic PDE and Distortion of Quasiconformal, Harmonic maps." In: *OTHA 2017, https://otha.sfedu.ru/upload/documents/abstracts/_tethis_conf_2017_SFEDU.pdf*. 2017.

[43] M. Mateljević. "Schwarz lemma and Kobayashi metrics for harmonic and holomorphic functions." In: *J. Math. Anal. Appl.* 464 (2018), pp. 78–100.

[44] M. Mateljević. "The Ahlfors-Schwarz lemma, curvature, distance and distortion." In: *Bulletin T.CLIII de l'Académie serbe des sciences et des arts - 2020 Classe des Sciences mathématiques et naturelles Sciences mathématiques* 45 (2021), pp. 67–119.

[45] M. Mateljević. *Topics in Conformal, Quasiconformal and Harmonic maps.* Zavod za udzbenike, Beograd, 2012.

[46] N. M. Mutavdžić. "The Growth of Gradients QC-mappings in n-dimensional Euclidean space with bounded laplacian." Kragujevac Journal of Mathematics. accepted:2022.

[47] H. Leutwiler Ö. Akin. "On the invariance of the solutions of the Weinstein equation under Möbius transformations." In: *Classical and modern potential theory and applications (Chateau de Bonas, 1993), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* 430 (1994), pp. 19–29.

[48] B. N. Örnek. "Estimates for holomorphic functions concerned with Jack's lemma." In: *Publications de l'Institut Mathématique* 104 (118) (2018), pp. 231–240.

[49] B. N. Örnek. "Some estimates for holomorphic functions at the boundary of the unit disc." In: *Kragujevac Journal of Mathematics* 44(3) (2020), pp. 475–485.

[50] C. Cascante P. Ahern J. Bruna. "H^p-theory for generalized M-harmonic functions in the unit ball." In: *Indiana University Mathematics Journal* 45 (1) (1996), pp. 103–135.

[51] L. Tam P. Li. “Uniqueness and Regularity of Proper Harmonic Maps II.” In: *Indiana University Mathematics Journal* 42 (2) (1993), pp. 591–635.

[52] M. Pavlović. “Boundary correspondence under harmonic quasiconformal homeomorphisms of the unit disc.” In: *Ann. Acad. Sci. Fenn.* 27 (2002), pp. 365–372.

[53] C. Pommerenke. *Univalent functions. With a chapter on quadratic differentials by Gerd Jensen.* Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1975.

[54] S. T. Yau R. Schoen. *Lectures on Harmonic Maps.* Cambridge, MA: International Press, 1997.

[55] W. Rudin. *Function theory of the unit ball in* $\mathbb{C}^n$. Springer Verlag, New York, 1980.

[56] W. Ramey S. Axler P. Bourdon. *Harmonic Function Theory.* Springer Verlag, New York, 1992.

[57] et al. S. Chen. “Schwarz type lemmas and their applications in Banach spaces.” arXiv:2110.02767v1, 2021.

[58] P. T. Mocanu S. S. Miller. *Differential subordinations.* Theory and applications, Marcel Dekker Inc. New York, Basel, 2000.

[59] H. Orelma S.-L. Eriksson. “Mean Value Properties for the Weinstein Equation Using the Hyperbolic Metric.” In: *Complex Anal. Oper. Theory* 7 (2013), pp. 1609–1621.

[60] M. Stoll. *Harmonic and Subharmonic Function Theory on the Hyperbolic Ball (London Mathematical Society Lecture Note Series).* Cambridge: Cambridge University Press, 2016.

[61] B. N. Örnek T. Akyel. “Course materials.” In: *Workshop on Harmonic Mappings and Hyperbolic Metrics, Chennai, India.* 2009.

[62] T. Tao. *Analysis I.* Texts and Readings in Mathematics, Volume 37 © Hindustan Book Agency, 2016. ISBN: 978-93-80250-64-9.

[63] T. Tao. *Topics in Random Matrix Theory.* Amer Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, 2012. ISBN: 978-0821874301.

[64] T. Ourmières-Bonafos V. Lotoreichik. “A Sharp Upper Bound on the Spectral Gap for Graphene Quantum Dots.” In: *Math Phys Anal Geom* 22,13 (2019).

[65] J. Väisälä. *Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings.* Springer-Verlag, 1971.

[66] A. Weinstein. “Generalized axially symmetric potential theory.” In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 59 (1953), pp. 120–38.

[67] A. Weinstein. “The singular solutions and the Cauchy problem for generalized Tricomi equations.” In: *Comm. Pure Appl. Math.* 7 (1954), pp. 105–116.

[68] K. -O. Widman. “Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations.” In: *Comm. Pure Appl. Math.* 21 (1967), pp. 17–37.

[69] J. Wittsten. “Generalized axially symmetric potentials with distributional boundary values.” In: *Bulletin des Sciences Mathématiques* 139(8) (2015), pp. 892–922.

[70] Y. Pan Z. Chen Y. Liu. “A Schwarz Lemma at the Boundary of Hilbert Balls.” In: *Chinese Annals of Mathematics, Series B* 39 (2018), pp. 695–704.

[71] N. Masmoudi Z. Hassainia and M. H. Wheeler. “Global bifurcation of rotating vortex patches.” In: *Comm. Pure Appl. Math* 73 (9) (2020), pp. 1933–1980.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а ____

број индекса ____

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

____

____

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, _________________

____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора ____

Број индекса ____

Студијски програм ____

Наслов рада ____

Ментор ____

Потписани/а ______________________________________

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, ________________________

____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

____

____

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, _________________________

____