УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ

ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ДЕПАРТМАН ЗА МАТЕМАТИКУ И ИНФОРМАТИКУ

ПРИМЕНА ФОРСИНГ МЕТОДЕ НА ДОКАЗИВАЊЕ КОМБИНАТОРНИХ ТВРЂЕЊА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ментори

Др Милош Курилић
Др Стево Тодорчевић

Кандидат

Мр Недељко Стефановић

Нови Сад, 2023.

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ **ОБРАЗАЦ – 5а**
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА[1]

Врста рада:	Докторска дисертација
Име и презиме аутора:	Недељко Стефановић
Ментор (титула, име, презиме, звање, институција)	Др Милош Курилић, редовни професор, Природно-математички факултет Универзитета у Новом Саду Др Стево Тодорчевић, Научни саветник, Математички институт, САНУ
Наслов рада:	Примена форсинг методе на доказивање комбинаторних тврђења
Језик публикације (писмо):	Српски (ћирилица)
Физички опис рада:	Унети број: Страница 146 Поглавља -- 9 Референци - 19 Табела -- 0 Слика -- 0 Графикона -- 0 Прилога -- 0
Научна област:	Математика
Ужа научна област (научна дисциплина):	Математичка логика
Кључне речи / предметна одредница:	Форсинг, Ремзијева теорија, Комбинаторика
Резиме на језику рада:	Пол Коен је конструисао модел за који је доказао да у њему важе ZF аксиоме, али не и аксиома избора. Ипак, Халперн и Леви су доказали да у том моделу важи BPI (исказ да свака Булова алгебра има ултрафилтер). Тај доказ се темељи на Халперн-Лојхлијевој теореми, која представља ремзијевско тврђење о бојењу производа дрвета. Касније је Харингтон пронашао далеко једноставнији доказ Халперн-Лојхлијеве теореме коришћењем форсинга. Касније су пронађене многе друге примене Халперн-Лојхлијеве теореме. Овде се Халперн-Лојхлијева теорема изводи из чињенице да у Коеновом симетричном моделу моделу важи BPI и показује се како се тај модел може користити уместо Халперн-Лојхлијеве теореме за доказивање тврђења која се иначе доказују применом Халперн-Лојхлијеве теореме.

[1] Аутор докторске дисертације потписао је и приложио следеће Обрасце:
5б – Изјава о ауторству;
5в – Изјава о истоветности штампане и електронске верзије и о личним подацима;
5г – Изјава о коришћењу.
Ове Изјаве се чувају на факултету у штампаном и електронском облику и не кориче се са тезом.

	Другим речима, даје се метода која представља алтернативу Халперн-Лојхлијевој теореми у њеним применама, при чему тај апарат има исту снагу као Халперн-Лојхлијева теорема. Та метода је апстрахован у виду теореме која важи у ZFC и у чијој формулацији нема метаматематичких појмова. Такође, дају се још неке замене за Халперн-Лојхлијеву теорему, које нису доказиве у ZFC, али које су апсолутне за одређену класу тврђења. Применом једне од теорема апсолутности из овог текста се добија алтернативни доказ Халперн-Лојхлијеве теореме. Наводе се и могућности примене изложених теорема апсолутности у теорији пољских простора и математичкој анализи. Такође, дата је одговарајућа теорема која важи у ZFC и у чијој формулацији нема метаматематичких појмова.
Датум прихватања теме од стране надлежног већа:	20.7.2020.
Датум одбране: (Попуњава одговарајућа служба)	
Чланови комисије: (титула, име, презиме, звање, институција)	Председник: Др Борис Шобот, ванредни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област Алгебра и математичка логика, Члан: Др Милош Курилић, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област Анализа и вероватноћа, ментор, Члан: академик Др Стево Тодорчевић, редовни члан САНУ, научни саветник Математичког института САНУ, ужа научна област Теорија скупова, руководилац истраживања на University of Toronto, ментор. Члан: Др Бориша Кузељевић, доцент Природо-математичког факултета у Новом Саду, ужа научна област Алгебра и математичка логика. Члан: Др Александар Перовић, редовни професор Саобраћајног факултета у Београду, ужа научна област Математика.
Напомена:	

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES

KEY WORD DOCUMENTATION[2]

Document type:	Doctoral dissertation
Author:	Nedeljko Stefanović
Supervisor (title, first name, last name, position, institution)	PhD Miloš Kurilić, full professor, Faculty of Science, University of Novi Sad PhD Stevo Todorčević, research professor, Mathematical Institute, SASA
Thesis title:	Applications of the forcing method to proving combinatorial theorems.
Language of text (script):	Serbian language (cyrillic)
Physical description:	Number of: Pages -- 146 Chapters -- 19 References -- 19 Tables -- 0 Illustrations -- 0 Graphs -- 0 Appendices -- 0
Scientific field:	Mathematics
Scientific subfield (scientific discipline):	Mathematical logic
Subject, Key words:	Forcing, Ramsey theory, combinatorics
Abstract in English language:	Paul Cohen constructed a model (Cohen's symmetric model) for which he proved that the axioms of ZF hold in it, but not the Axiom of Choice. Nevertheless, Halpern and Levy proved in that in the Cohen's symmetric model BPI (the statement that every Boolean algebra has an ultrafilter) is true. That proof was based on the Halpern-Läuchli theorem, a Ramsey-Theoretic proposition about the partitioning of tree products. Later, Harrington found another proof of the Halpern-Läuchli theorem using forcing. Later, many other applications of the Halpern-Läuchli theorem were found \cite{rs}. Here, Halpern-Läuchli theorem is derived from the fact that BPI holds in the Cohen's symmetric model, and it is shown how that model can be used instead of the Halpern-Läuchli theorem to prove statements which are otherwise proved by applying the theorem. In other words, a mathematical method is given. That method is an alternative to the Halpern-Läuchli theorem in its applications, whereby that method has the same power as the theorem itself. This method is abstracted by ZFC theorem without metamathematical notions in formulation.

[2] The author of doctoral dissertation has signed the following Statements:
5б – Statement on the authority,
5в – Statement that the printed and e-version of doctoral dissertation are identical and about personal data,
5г – Statement on copyright licenses.
The paper and e-versions of Statements are held at he faculty and are not included into the printed thesis.

	Also, a relative consistency with ZFC, of some principles which are stronger than the Halpern-Läuchli theorem, is given. This provides a new proof of the Halpern-Läuchli theorem from the axioms of ZFC. Corresponded ZFC theorem without metamathematical notions in formulation is also given.
Accepted on Scientific Board on:	July, 7th 2020.
Defended: (Filled by the faculty service)	
Thesis Defend Board: (title, first name, last name, position, institution)	President: PhD Boris Šobot, associate professor of Faculty of Sciences of Novi Sad, scientific area Algebra and mathematical logic. Member: PhD Miloš Kurilić, full professor of Faculty of Sciences of Novi Sad, sicentific area Analysis and probability, supervisor. Member: academician Stevo Todorčević, full member of SASA, research professor of Mathematical institute of SASA, scientific area Set theory, research manager of University of Toronto, supervisor. Member: PhD Boriša Kuzeljević, assistant professor of Faculty of Sciences of Novi Sad, scientific area Algebra and mathematical logic. Member: PhD Aleksandar Perović, full professor of Faculty of Transport and Traffic Engineering, scientific area Mathematics.
Note:	

Ову тезу посвећујем својој преминулој мајци.

Захвалница

Користим прилику да се захвалим ментору проф. Др Стеву Тодорчевићу на менторском вођењу кроз ово узбудљиво истраживање.

Затим бих се захвалио ментору проф. Др Милошу Курилићу за пун менторски ангажман и максималну предусретљивост у вези свих аспеката мојих докторских студија укључујући и ово истраживање и израду ове тезе.

Захваљујем се и Др Бориши Кузељевићу, на максималној помоћи у вези свих аспеката мојих докторских студија и израде ове тезе, као и на пажљивом вођењу рачуна о свим техничким аспектима тезе како би се избегли проблеми.

Такође се захваљујем и члановима Научно-наставног већа факултета на максималном излажењу мени у сусрет у вези свих мојих потреба у вези докторских студија, као и припадницима служби факултета на благовременом давању информација о свим административним питањима и максималном олакшавању административних послова на факултету мени, који не живим у Новом Саду.

Захваљујем се преминулим професорима Др Славиши Прешићу, код кога сам заволео логику и Др Александру Јовановићу, код кога сам заволео теорију скупова. Захваљујем се и свом оцу, као свом првом учитељу математике.

На крају бих да се захвалим предузећу Novelic, у коме сам запослен, на ослобађању од свих обавеза на послу у периоду овог истраживања, чиме су га финансирали.

Аутор

Садржај

Резиме

Пол Коен је у [3] и [4] конструисао модел[1] за који је доказао да у њему важе ZF аксиоме, али не и аксиома избора.

Ипак, Халперн и Леви су у [8] доказали да у том моделу важи[2] BPI. Тај доказ се темељи на Халперн-Лојхлијевој теореми, која представља ремзијевско тврђење о бојењу производа дрвета доказаној у [7].

Касније је Харингтон пронашао далеко једноставнији доказ Халперн-Лојхлијеве теореме коришћењем форсинга. Тај доказ се може наћи у [18], [5] и овде.

Касније су пронађене многе друге примене Халперн-Лојхлијеве теореме. За више детаља видети [16]. Овде се Халперн-Лојхлијева теорема изводи из чињенице да у Коеновом симетричном моделу моделу важи BPI и показује се како се тај модел може користити уместо Халперн-Лојхлијеве теореме за доказивање тврђења која се иначе доказују применом Халперн-Лојхлијеве теореме.

Другим речима, даје се метода која представља алтернативу Халперн-Лојхлијевој теореми у њеним применама, при чему тај апарат има исту снагу као Халперн-Лојхлијева теорема. Тај апарат је апстрахован у виду теореме која важи у ZFC и у чијој формулацији нема метаматематичких појмова.

Такође, дају се још неке замене за Халперн-Лојхлијеву теорему, које нису доказиве у ZFC, али које су апсолутне за одређену класу тврђења. Применом једне од теорема апсолутности из овог текста се добија алтернативни доказ Халперн-Лојхлијеве теореме. Наводе се и могућности примене изложених теорема апсолутности у теорији пољских простора и математичкој анализи. Такође, дата је одговарајућа теорема која важи у ZFC и у чијој формулацији нема метаматематичких појмова.

Харингтонов доказ Халперн-Лојхлијеве теореме, који је овде такође изложен, се темељи на [15], а који је једноставнији од доказа датог у [7].

[1] У ознакама из овог текста, тај модел је $N(\omega, \mathcal{R}(\{\emptyset\}), M)$.

[2] Исказ да свака Булова алгебра има ултрафилтер.

Abstract

Paul Cohen in [3] and [4] constructed a model[3] (Cohen's symmetric model) for which he proved that the axioms of ZF hold in it, but not the Axiom of Choice. Nevertheless, Halpern and Levy proved in [8] that in the Cohen's symmetric model[4] BPI is true.

That proof was based on the Halpern-Läuchli theorem, a Ramsey-Theoretic proposition about the partitioning of tree products. The Halpern-Läuchli theorem was first proven in [7]. Later, Harrington found another proof of the Halpern-Läuchli theorem using forcing. This proof can be found in [6], [18], [15] and [5].

Later, many other applications of the Halpern-Läuchli theorem were found [16]. Here, the Halpern-Läuchli theorem is derived from the fact that BPI holds in the Cohen's symmetric model, and it is shown how that model can be used instead of the Halpern-Läuchli theorem to prove statements which are otherwise proved by applying the theorem.

In other words, a mathematical method is given. That method is an alternative to the Halpern-Läuchli theorem in its applications, whereby that method has the same power as the theorem itself. This method is abstracted by ZFC theorem without metamathematical notions in formulation.

Also, a relative consistency with ZFC, of some principles which are stronger than the Halpern-Läuchli theorem, is given. This provides a new proof of the Halpern-Läuchli theorem from the axioms of ZFC. Corresponded ZFC theorem without metamathematical notions in formulation is also given.

[3] In the notation of this article, that model is $N(\omega, \mathcal{R}(\{0\}), M)$.

[4] The statement that every Boolean algebra has an ultrafilter.

Глава 1

Аксиоматска теорија скупова

Теорија скупова ZFC је теорија првог реда на језику који се састоји само од једног бинарног релацијског знака $\in$. Индивидуе зовемо скуповима.

1.1 Класе

У теорији ZFC појам *класе* је метапојам. Уз аксиому екстензионалности, он је шири од појма скупа. Приликом дефинисања појма класе, ради једноставности користићемо семантичку интерпретацију уз напомену да постоји и синтаксна интерпретација. То значи да радимо замишљајући да се извођења односе на неки модел M и неку валуацију v тог модела. Притом је M произвољан модел који задовољава дате аксиоме, а v произвољна валуација тог модела.

1.1.1 Појам класе

Подскупове домена модела, који су дефинабилни са параметрима зовемо *класама тог модела*, а подскупове домена модела који су дефинабилни без параметара зовемо *дефинабилним класама тог модела*. Класе записујемо великим, масним словима. Дакле, формула $\varphi(x)$ дефинише класу

$$\{a \in \mathrm{dom}(M) \,|\, M \models \varphi(a)\}$$

модела M, коју апстрахујући модел M записујемо као

$$\{x \,|\, \varphi(x)\}.$$

Формулом

$$\psi(x, p_1, \ldots, p_n) \tag{1.1}$$

и избором промењиве x да не игра улогу параметра одређена је класа

$$\{a \in \mathrm{dom}(M) \,|\, M \models \psi(a, v(p_1), \ldots, v(p_n))\},$$

коју апстрахујући модел M и валуацију v записујемо као

$$\{x \,|\, \psi(x, p_1, \ldots, p_n)\}, \tag{1.2}$$

при чему она зависи од параметара $p_1, \ldots, p_n$.

Припадање скупа x класи $\mathbf{C}$ записујемо као $x \in \mathbf{C}$. Дакле, ако класу (1.2) обележимо са $\mathbf{C}$, онда формулу (1.1) записујемо као $x \in \mathbf{C}$. Једнакост класа $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ у ознаци $\mathbf{C} = \mathbf{D}$ дефинишемо као исказ

$$(\forall x)(x \in \mathbf{C} \Leftrightarrow x \in \mathbf{D}).$$

Овде ћемо говорећи о класама говорити и о скуповима, тако што скупу A придружујемо класу свих његових елемената. Инклузију између класа дефинишемо на уобичајени начин.

$$\mathbf{C} \subseteq \mathbf{D} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in \mathbf{C} \Rightarrow x \in \mathbf{D}).$$

Пошто се класа задаје одговарајућом формулом, треба водити рачуна да чак и дефинабилна класа дефинисана одређеном формулом може у једном моделу бити празна, а у другом непразна. Слично томе, одређени пар формула у неком моделу може да представља исту класу, а у другим различите класе. Због тога се извођења увек односе на произвољни фиксирани модел M који задовољава дате аксиоме и произвољну фиксирану валуацију v над тим моделом.

Празну класу, одређену формулом $x \neq x$, обележаваћемо са $\emptyset$, док ћемо *универзалну класу*, одређену формулом $x = x$ обележавати са $\mathbf{V}$. Буловске операције над класама дефинишемо на природан начин и оне задовољавају законе Булових алгебри. За ма коју класу $\mathbf{C}$ и формулу $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ уводимо следеће дефиниције:

$$(\forall x \in \mathbf{C})\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall x)(x \in \mathbf{C} \Rightarrow \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)),$$

$$(\exists x \in \mathbf{C})\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists x)(x \in \mathbf{C} \wedge \varphi(x, y_1, \ldots, y_n)).$$

Посебно, за сваку формулу φ важи да је формула $(\forall x \in \emptyset)\varphi$ је логичка истина, као и да је формула $(\exists x \in \emptyset)\varphi$ логичка контрадикција. Формуле $(\forall x \in \mathbf{V})\varphi \Leftrightarrow (\forall x)\varphi$ и $(\exists x \in \mathbf{V})\varphi \Leftrightarrow (\exists x)\varphi$ су такође логичке истине.

Под *унијом класе* $\mathbf{C}$ у ознаци $\bigcup \mathbf{C}$ подразумевамо класу свих скупова x таквих да постоји скуп $y \in \mathbf{C}$ такав да $x \in y$. За класу $\mathbf{C}$ кажемо да је транзитивна ако важи $\bigcup \mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}$. Слично томе, *пресек класе* $\mathbf{C}$ дефинишемо на следећи начин:

$$\bigcap \mathbf{C} := \{x \mid (\forall A \in \mathbf{C}) x \in A\}.$$

Посебно, $\bigcap \emptyset$ је класа свих скупова. За пресек класа и унију класа важе Де Морганови закони. Притом, за ма које класе $\mathbf{C}$ важи $(\forall A \in \mathbf{C}) A \subseteq \bigcup \mathbf{C}$, као и

$$\bigcup \mathbf{C} \subseteq \mathbf{D} \Leftrightarrow (\forall A \in \mathbf{C}) A \subseteq \mathbf{D}, \quad (\exists A \in \mathbf{C}) A \supseteq \mathbf{D} \Rightarrow \bigcup \mathbf{C} \supseteq \mathbf{D},$$

где је $\mathbf{D}$ ма која класа.

Уколико су $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ дисјунктне класе, то јест ако важи $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \emptyset$, онда класу $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ обележавамо и са $\mathbf{A} \sqcup \mathbf{B}$. Ако су елементи класе $\mathbf{S}$ у паровима дисјунктни скупови, онда класу $\bigcup \mathbf{S}$ обележавамо и са $\bigsqcup \mathbf{S}$. За ма које класе $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ за $n \geqslant 2$ важи

$$\mathbf{A}_1 \cup \cdots \cup \mathbf{A}_n = \mathbf{A}_1 \sqcup \bigsqcup_{k=2}^{n} (\mathbf{A}_k \setminus \mathbf{A}_{k-1}).$$

1.1.2 Класне релације

За $m \geqslant 1$ уводимо појам *m-арне класне релације* (односно класне релације арности m) модела M као подскуп скупа $\mathrm{dom}(M)^m$ који је дефинабилан са параметрима. У случају дефинабилности без параметара, такву релацију зовемо дефинабилном. Притом, m-арну класну релацију задајемо формулом

$$\theta(x_1, \ldots, x_m, p_1, \ldots, p_n), \tag{1.3}$$

где су $p_1, \ldots, p_n$ параметри, уз сличне напомене као за појам класе. Класа је заправо унарна класна релација. Припадање m-торке скупова $\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$ m-арној класној релацији $\mathbf{R}$ записујемо као $\mathbf{R}(x_1, \ldots, x_m)$.

Појмове _домена_ и _ранга класне бинарне релације_ $\mathbf{R}$ дефинишемо као

$$\mathrm{dom}(\mathbf{R}) := \{a \mid (\exists b)\mathbf{R}(a, b)\}, \quad \mathrm{ran}(\mathbf{R}) := \{b \mid (\exists a)\mathbf{R}(a, b)\}.$$

Дакле, за ма коју класну бинарну релацију $\mathbf{R}$ и ма које c важи

$$c \in \mathrm{dom}(\mathbf{R}) \Leftrightarrow (\exists y)\mathbf{R}(c, y), \quad c \in \mathrm{ran}(\mathbf{R}) \Leftrightarrow (\exists x)\mathbf{R}(x, c).$$

Композицију $\mathbf{S} \circ \mathbf{R}$ _класних бинарних релација_ $\mathbf{R}$ _и_ $\mathbf{S}$ дефинишемо као класну бинарну релацију за коју важи

$$(\mathbf{S} \circ \mathbf{R})(a, b) \Leftrightarrow (\exists c)(\mathbf{R}(a, c) \wedge \mathbf{S}(c, b)).$$

Композиција класних бинарних релација је асоцијативна операција. Ако је $\mathbf{R}$ класна бинарна релација, онда _инверзну класну (бинарну) релацију_ $\mathbf{R}^{-1}$ дефинишемо као

$$\mathbf{R}^{-1}(a, b) \Leftrightarrow \mathbf{R}(b, a).$$

Ако су $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ класне бинарне релације, онда важи $(\mathbf{S} \circ \mathbf{R})^{-1} = \mathbf{R}^{-1} \circ \mathbf{S}^{-1}$. _Слику_ $\mathbf{R}[\mathbf{A}]$ _класе_ $\mathbf{A}$ _при класној бинарној релацији_ $\mathbf{R}$ дефинишемо као

$$\mathbf{R}[\mathbf{A}] := \{b \mid (\exists a \in \mathbf{A})\mathbf{R}(a, b)\}.$$

За ма коју класну бинарну релацију $\mathbf{R}$ важи

$$\mathbf{R}[\emptyset] = \emptyset, \quad \mathbf{R}[\mathrm{dom}(\mathbf{R})] = \mathbf{R}[\mathbf{V}] = \mathrm{ran}(\mathbf{R}),$$

$$\mathbf{R}^{-1}[\emptyset] = \emptyset, \quad \mathbf{R}^{-1}[\mathrm{ran}(\mathbf{R})] = \mathbf{R}^{-1}[\mathbf{V}] = \mathrm{dom}(\mathbf{R}),$$

као и $\mathbf{R}[\mathbf{A}] \subseteq \mathbf{R}[\mathbf{B}]$ за ма које класе $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ за које је $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. Такође, за ма коју класу $\mathbf{A}$ и класну бинарну релацију $\mathbf{R}$ важи

$$\mathbf{R}\left[\bigcup \mathbf{A}\right] = \bigcup \{\mathbf{R}[X] \mid X \in A\}.$$

Ако је $\mathbf{R}$ класна бинарна релација и $\mathbf{A} \subseteq \mathrm{dom}(\mathbf{R})$, онда _рестрикцију бинарне класне релације_ $\mathbf{R}$ на класи $\mathbf{A}$ у ознаци $\mathbf{R} \restriction \mathbf{A}$ дефинишемо као класну бинарну релацију такву да важи

$$(\mathbf{R} \restriction \mathbf{A})(a, b) \Leftrightarrow a \in \mathbf{A} \wedge \mathbf{R}(a, b).$$

1.1.3 Класне функције

Ако је $\mathbf{F}$ класна релација арности $m+1$ таква да не постоје скупови $a_1, \ldots, a_m, b, c$ такви да важи $b \neq c$, $\mathbf{F}(a_1, \ldots, a_m, b)$ и $\mathbf{F}(a_1, \ldots, a_m, c)$, онда $\mathbf{F}$ називамо једном m-арном _класном функцијом_ (или класном функцијом арносити m). У том случају, скуп b такав да важи $\mathbf{F}(a_1, \ldots, a_m, b)$ обележавамо са $\mathbf{F}(a_1, \ldots, a_m)$.

Ако је $\mathbf{F}$ унарна класна функција, $\mathbf{A} = \mathrm{dom}(\mathbf{F})$ и $\mathbf{B} \supseteq \mathrm{ran}(\mathbf{F})$, онда кажемо да $\mathbf{F}$ пресликава класу $\mathbf{A}$ у класу $\mathbf{B}$ и пишемо $\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$. Уколико $\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ и $\mathbf{G} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$, онда $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{C}$. Посебно, композиција пара унарних класних функција је класна функција.

Обзиром да је класна функција посебан случај бинарне класне релације, за класне функције важи све што важи и за класне релације. Осим тога, за ма које класе $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ важи и

$$\mathbf{F}^{-1}[\mathbf{A} \setminus \mathbf{B}] = \mathbf{F}^{-1}[\mathbf{A}] \setminus \mathbf{F}^{-1}[\mathbf{B}],$$

$$\mathbf{F}^{-1}[\bigcap \mathbf{A}] = \bigcap \mathbf{F}^{-1}[\mathbf{A}].$$

Ако не постоје $a, b \in \mathrm{dom}(\mathbf{F})$ такви да је $a \neq b$ и $\mathbf{F}(a) = \mathbf{F}(b)$, онда кажемо да је $\mathbf{F}$ инјекција. За ма коју класну функцију $\mathbf{F}$ важи да је $\mathbf{F}^{-1}$ функција акко је $\mathbf{F}$ инјекција. Притом, ако је $\mathbf{F}$ инјекција, онда је и $\mathbf{F}^{-1}$ инјекција. Композиција пара инјекција је такође инјекција.

Под сурјекцијом класе $\mathbf{A}$ на класу $\mathbf{B}$ подразумевамо класну функцију $\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ такву да је $\mathrm{ran}(\mathbf{F}) = \mathbf{B}$. Ако је $\mathbf{F}$ сурјекција класе $\mathbf{A}$ на класу $\mathbf{B}$ и $\mathbf{G}$ сурјекција класу $\mathbf{B}$ на класу $\mathbf{C}$, онда је $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ сурјекција класе $\mathbf{A}$ на класу $\mathbf{C}$.

Ако $\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ и $\mathbf{G} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ и $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ је инјекција, онда је и $\mathbf{F}$ инјекција. Ако је притом $\mathrm{ran}(\mathbf{F}) = \mathbf{B}$, онда је и $\mathbf{G}$ инјекција.

Ако $\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ и $\mathbf{G} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{C}$ и $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ је сурјекција класе $\mathbf{A}$ на класу $\mathbf{C}$, онда је и $\mathbf{G}$ сурјекција. Ако је притом $\mathbf{G}$ инјекција, онда је и $\mathbf{F}$ сурјекција класе $\mathbf{A}$ на класу $\mathbf{B}$.

Свакој класи $\mathbf{A}$ можемо придружити класну функцију $1_{\mathbf{A}}$ дефинисану на следећи начин:

$$1_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}, \quad (\forall x \in \mathbf{A}) 1_{\mathbf{A}}(x) = x.$$

Ако $\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}$ онда важи $\mathbf{F} \circ 1_{\mathbf{A}} = 1_{\mathbf{B}} \circ \mathbf{F} = \mathbf{F}$. За ма које инјективну класну функцију $\mathbf{F}$ важи $\mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F} = 1_{\mathrm{dom}(\mathbf{F})}$ и $\mathbf{F} \circ \mathbf{F}^{-1} = 1_{\mathrm{ran}(\mathbf{F})}$. Такође, за класну функцију $\mathbf{F}$ кажемо да је класна бијекција класе $\mathbf{A}$ на класу $\mathbf{B}$ ако важи $\mathbf{F}^{-1} \circ \mathbf{F} = 1_{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{F} \circ \mathbf{F}^{-1} = 1_{\mathbf{B}}$.

Класне функције $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ су *сагласне* (или *компатибилне*) ако постоји класна функција чије су оне рестрикције. Класне функције са дисјунктним доменима су дисјунктне класне релације. Дисјунктне класне функције су компатибилне. Унија параметарске фамилије класних функција је класна функција акко су класне функције из те фамилије у паровима сагласне.

1.2 Аксиоме и њихове основне последице

Аксиоме теорије скупова и њихове прве последице излажемо у наставку. Притом ћемо изостављати водеће универзалне кванторе.

1.2.1 Аксиома екстензионалности

$$(\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y.$$

Према овој аксиоми, не постоје два празна скупа, нити два партитивна скупа истог скупа и томе слично. Нека је A било који скуп. Њему можемо придружити класу $\mathbf{C}_A$ дефинисану на следећи начин:

$$a \in \mathbf{C}_A \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} a \in A.$$

Аксиома екстензионалности би се могла преформулисати као

$$A = B \Leftrightarrow \mathbf{C}_A = \mathbf{C}_B,$$

одакле следи да класу $\mathbf{C}_A$ можемо изједначити са скупом A, односно посматрати скупове као посебан случај класа. *Правим класама* називамо класе које нису скупови.

Ипак, ова аксиома нам не обезбеђује постојање[1] скупова. У наставку дефинишемо неке стандардне појмове и наводимо њихове особине које следе из до тада наведених аксиома. Елементарне доказе изостављамо.

[1] Осим постојања бар једног скупа, које следи из претпоставки коришћене логике.

1.2.2 Аксиома празног скупа

$$(\exists y)(\forall x) x \notin y.$$

Ова аксиома тврди да постоји празан скуп, односно да је празна класа скуп. Она се може извести из схема-аксиоме сепарације јер је претпоставка о постојању барем једног објекта укључена у коришћену логику. Ипак, овде је наводимо као засебну аксиому. Према аксиоми екстензионалности, празан скуп је јединствен.

1.2.3 Аксиома пара

$$(\exists z)(\forall u)(u \in z \Leftrightarrow u = x \vee u = y).$$

Према аксиоми екстензионалности, скуп чије се постојање овом аксиомом постулира је јединствен. Означавамо га са $\{x, y\}$. Такође, уводимо следеће дефиниције:

$$\{x\} := \{x, x\}, \quad \langle x \rangle = x, \quad \langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle := \langle \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle, \quad n \geqslant 3.$$

Као што је очекивано, у општем случају важи

$$\langle a_1, \ldots, a_n \rangle = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle \Leftrightarrow \bigwedge_{i=1}^{n} a_i = b_i.$$

За ма које класе $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ дефинишемо њихов *Декартов производ* у ознаци $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ као класу свих парова $\langle a, b \rangle$ таквих да $a \in \mathbf{A}$ и $b \in \mathbf{B}$. За ма које класе $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ важи

$$z \in \mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_n \Leftrightarrow (\exists x_1 \in \mathbf{A}_1, \ldots, x_n \in \mathbf{A}_n)\, z = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

За ма коју класу $\mathbf{A}$ и ма које n дефинишимо

$$\mathbf{A}^n := \underbrace{\mathbf{A} \times \cdots \times \mathbf{A}}_{n \text{ пута}}.$$

1.2.4 Аксиома уније

$$(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (\exists u \in x) z \in u).$$

Скуп чије се постојање постулира овом аксиомом је такође јединствен на основу аксиоме екстензионалности и обележавамо га са $\bigcup x$. Притом уводимо следеће дефиниције

$$x \cup y := \bigcup \{x, y\},$$

$$\{x_1, \ldots, x_n\} := \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup \{x_n\}, \quad n \geqslant 3.$$

Операција $\cup$ је асоцијативна, комутативна и идемпотентна и има неутрални елемент $\emptyset$.

1.2.5 Аксиома партитивног скупа

$$(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z \subseteq x).$$

Скуп чије се постојање постулира овом аксиомом је такође јединствен на основу аксиоме екстензионалности и обележавамо га са $\mathcal{P}(x)$.

1.2.6 Схема аксиома сепарације

За сваку формулу $\varphi(x, z, p_1, \ldots, p_n)$, следећа формула је аксиома

$$(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(x, z, p_1, \ldots, p_n)).$$

Ова аксиома тврди да је пресек скупа и класе скуп, односно да подкласа скупа представља скуп. Скуп чије се постојање постулира овом аксиомом је такође јединствен на основу аксиоме екстензионалности и обележавамо га са $\{z \in x \,|\, \varphi(x, z, p_1, \ldots, p_n)\}$. За ма које скупове a и b дефинишимо скупове

$$a \cap b := \{x \in a \,|\, x \in b\}, \quad a \setminus b := \{x \in a \,|\, x \notin b\}.$$

Нека је a било који скуп. Скуп $a \setminus a$ је празан, а такав је јединствен. Такође за ма који скуп a дефинишимо скуп

$$\bigcap a := \{x \in \bigcup a \,|\, (\forall y \in a) x \in y\}.$$

За ма које x и ма које $a \neq \emptyset$ важи

$$x \in \bigcap a \Leftrightarrow (\forall y \in a) x \in y.$$

Операција $\cap$ је асоцијативна, комутативна и идемпотентна и за свако x важи $x \cap \emptyset = \emptyset$. За ма које скупове A и B и ма које $a \in A$ и $b \in B$ важи

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)),$$

па је

$$A \times B = \{z \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \,|\, (\exists a, b) z = \langle a, b \rangle\},$$

па је Декартов производ скупова скуп. Ако $f : A \longrightarrow B$, где су A и B скупови, онда је f скуп.

Теорема 1 (*Шредер-Бернштајн*) *За ма које скупове A и B и ма које $f : A \longrightarrow B$ и $g : B \longrightarrow A$ постоје скупови A_1, A_2, B_1, B_2 такви да важи*

$$A_1 \sqcup A_2 = A, \quad B_1 \sqcup B_2 = B, \quad f[A_1] = B_1, \quad g[B_2] = A_2. \tag{1.4}$$

Доказ: наведени услови су еквивалентни следећим:

$$B_1 = f[A_1], \quad B_2 = B \setminus f[A_1], \quad A_2 = g[B \setminus f[A_1]],$$

$$A_1 = A \setminus g[B \setminus f[A_1]].$$

Пошто се скупови A_2, B_1 и B_2 овим релацијама изражавају преко скупа A_1, довољно је доказати да постоји скуп A_1 који задовољава последњи услов. Другим речима, треба доказати да функција

$$h : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A), \quad h(X) = A \setminus g[B \setminus f[X]]$$

има непокретну тачку. Очигледно из $X \subseteq Y \subseteq A$ следи $h(X) \subseteq h(Y)$. Нека је

$$S := \{X \subseteq A \,|\, X \subseteq h(X)\}, \quad A_1 := \bigcup S.$$

За свако $X \in S$ на основу дефиниција скупова S и A_1 важи

$$X \subseteq h(X), \quad X \subseteq A_1.$$

На основу монотоније функције h, важи $h(X) \subseteq h(A_1)$, па је на основу транзитивности инклузије $X \subseteq h(A_1)$. Из произвољности скупа X следи да је $A_1 = \bigcup S \subseteq h(A_1)$, односно $A_1 \subseteq h(A_1)$. Докажимо обрнуту инклузију. На основу монотоније функције h је $h(A_1) \subseteq h(h(A_1))$, што значи да $h(A_1) \in S$, одакле следи $h(A_1) \subseteq \bigcup S = A_1$. $\square$

Дефинишимо релацију $\preccurlyeq$ као $A \preccurlyeq B$ акко постоји инјекција скупа A у скуп B, а *релацију еквипотенције* $\sim$ са $A \sim B$ акко постоји бијекција скупа A на скуп B и релацију $\prec$ са $A \prec B$ акко је $A \preccurlyeq B$ и није $A \sim B$. Очигледно је $\preccurlyeq$ релација претпоретка, а $\sim$ релација еквиваленције. За скупове A и B за које је $A \sim B$ кажемо да су *еквипотентни*. Очигледно је $\preccurlyeq$ релација претпоретка, а $\sim$ релација еквиваленције.

Теорема 2 (*Кантор-Бернштајн*) *За ма које скупове A и B важи*

$$A \sim B \Leftrightarrow (A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A).$$

Доказ: Претпоставимо да важи је $A \sim B$ и нека је f бијекција скупа A на скуп B. Тада је f инјекција скупа A у скуп B и f^{-1} инјекција скупа B у скуп A, па важи $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A$.

Претпоставимо да важи $A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A$ и нека је f инјекција скупа A у скуп B и g инјекција скупа B у скуп A. Према Шредер-Бернштајновој теореми можемо изабрати скупове A_1, A_2, B_1 и B_2 тако да важи (1.4). Тада је $(f \restriction A_1) \cup (g \restriction B_2)^{-1}$ бијекција скупа A на скуп B, па важи $A \sim B$. $\square$

Теорема 3 (*Кантор*) *Ни за један скуп A не постоји сурјекција скупа A у скуп $\mathcal{P}(A)$. За сваки скуп A важи $A \prec \mathcal{P}(A)$.*

Доказ: Пресликавање $f : A \longrightarrow \mathcal{P}(A)$ дефинисано са $f(x) = \{x\}$ је инјекција. Нека је g произвољно пресликавање скупа A у скуп $\mathcal{P}(A)$. Дефинишимо скуп

$$B := \{x \in A \,|\, x \notin g(x)\}.$$

Очигледно важи $B \in \mathcal{P}(A)$. Нека је $a \in A$ такво да важи $g(a) = B$. Тада важи

$$a \in B \Leftrightarrow a \notin g(a),$$

односно $a \in B \Leftrightarrow a \notin B$, што је противречност, па $B \notin \mathrm{ran}(g)$. Према томе, g не може бити сурјекција скупа A на скуп $\mathcal{P}(A)$. $\square$

Наведимо теорему која доказује постојање правих класа.

Теорема 4 **V** *је права класа.*

Доказ: Претпоставимо супротно, да је **V** скуп. Тада је $\mathcal{P}(\mathbf{V}) \subseteq \mathbf{V}$, одакле следи да је $\mathcal{P}(\mathbf{V}) \preccurlyeq \mathbf{V}$, супротно теореми 3. $\square$

1.2.7 Аксиома бесконачности

$$(\exists x)(\emptyset \in x \wedge (\forall a \in x) a \cup \{a\} \in x).$$

Из аксиома теорије скупова је немогуће извести постојање бесконачног скупа без коришћења ове аксиоме. Она постулира постојање <u>*индуктивног скупа*</u>, који се дефинише као скуп коме је празан скуп један од елемената и који је затворен за операцију $a \mapsto a \cup \{a\}$.

Теорема 5 *Постоји инклузијски најмањи индуктиван скуп.*

Доказ: Нека је A било који индуктиван скуп и нека је ω пресек свих његових индуктивних подскупова. Скуп ω је индуктиван као пресек непразног скупа индуктивних скупова. Нека је I било који индуктиван скуп. Скуп $\omega \cap I$ је индуктиван подскуп скупа A. Скуп ω је према конструкцији подскуп сваког индуктивног подскупа скупа A, па је $\omega \subseteq \omega \cap I \subseteq I$, одакле следи да је $\omega \subseteq I$. $\square$

Инклузијски најмањи индуктиван скуп ћемо обележавати са ω. Пошто он нема правих подскупова који су индуктивни, важи

$$(\forall S \subseteq \omega)(\emptyset \in S \wedge (\forall x \in S) x \cup \{x\} \in S \Rightarrow S = \omega).$$

Природни бројеви

Теорема 6 *Скуп ω је добро уређен релацијом $x < y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in y$. Притом је $\emptyset$ најмањи елемент, а за $x \in \omega$ је $x \cup \{x\}$ најмањи елемент који је већи од x. Посебно, скуп ω нема највећи елемент. Такође, сваки елемент осим првог је облика је $x \cup \{x\}$ за неко $x \in \omega$, па има непосредног претходника. Операција $x \mapsto x \cup \{x\}$ је инјекција.*

Доказ: Скуп

$$S_0 := \{n \in \omega \mid n = \emptyset \vee (\exists m \in \omega) n = m \cup \{m\}\}$$

је индуктиван, па важи

$$(\forall n \in \omega)(n = \emptyset \vee (\exists m \in \omega) n = m \cup \{m\}). \tag{1.5}$$

Докажимо да је скуп

$$S_1 := \{n \in \omega \mid n \subseteq \omega\}$$

индуктиван. Очигледно је $\emptyset \in S_1$. Претпоставимо да је $n \in S_1$. Тада важи $n \in \omega$ и $n \subseteq \omega$, одакле следи да је $n \cup \{n\} \subseteq \omega$, што заједно са $n \cup \{n\} \in \omega$ повлачи да важи $n \cup \{n\} \in S_1$. Према томе, скуп S_1 је индуктиван, па важи

$$(\forall n \in \omega) n \subseteq \omega.$$

Нека је

$$S_2 := \{m \in \omega \mid (\forall T \subseteq \omega)(m \in T \Rightarrow (\exists n \in T) n \cap T = \emptyset)\}.$$

Очигледно $\emptyset \in S_2$. Претпоставимо да је $m \in S_2$. Тада важи

$$m \in \omega, \quad m \cup \{m\} \in \omega, \quad (\forall T \subseteq \omega)(m \in T \Rightarrow (\exists n \in T) n \cap T = \emptyset). \tag{1.6}$$

Претпоставимо да је T скуп за који важи

$$m \cup \{m\} \in T \subseteq \omega, \quad (\forall n \in T) n \cap T \neq \emptyset \tag{1.7}$$

и изведимо противречност. Тада важи

$$m \notin T, \quad (m \cup \{m\}) \cap T \neq \emptyset, \quad m \cap T \neq \emptyset. \tag{1.8}$$

Из $m \in T \cup \{m\} \subseteq \omega$ следи да за неко n важи

$$n \in T \cup \{m\}, \quad n \cap (T \cup \{m\}) = \emptyset, \quad n \cap T = \emptyset. \tag{1.9}$$

Према (1.7), то је могуће само ако $n \notin T$, односно $n = m$, што заједно са (1.9) повлачи да важи $m \cap T = \emptyset$, што је у супротности са (1.8). Према томе, важи

$$(\forall m \in \omega)(\forall T \subseteq \omega)(m \in T \Rightarrow (\exists n \in T) n \cap T = \emptyset),$$

односно

$$(\forall T \subseteq \omega)(T \neq \emptyset \Rightarrow (\exists n \in T) n \cap T = \emptyset). \tag{1.10}$$

Нека су $m, n \in \omega$ произвољни. Из (1.10) примењеног за $T = \{m, n\}$ следи да важи највише један од следећих исказа

$$m \in n, \quad m = n, \quad n \in m.$$

Одатле посебно следи да важи

$$(\forall n \in \omega) n \notin n, \tag{1.11}$$

као и да је релација $\leqslant$ дефинисана на скупу ω са

$$m \leqslant n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} m \in n \vee m = n$$

антисиметрична, а очигледно и рефлексивна. Пошто је скуп

$$\{m \in \omega \mid (\forall n \in m) n \subseteq m\}$$

индуктиван, за све $m, n, k \in \omega$ важи

$$k \in n \wedge n \in m \Rightarrow k \in m,$$

одакле следи да је релација $\leqslant$ транзитивна. Дакле, $\leqslant$ је релација поретка. Докажимо да је скуп

$$S_3 := \{n \in \omega \mid (\forall m \in n) m \cup \{m\} \in n \cup \{n\}\}$$

индуктиван. Празан скуп припада скупу S_3 јер је универзална квантификација по празном скупу логичка истина. Нека $n \in S_3$. Тада важи $n \in \omega$ и $(\forall m \in n) m \cup \{m\} \in n \cup \{n\}$, као и $n \cup \{n\} \in \omega$. Нека је $m \in n \cup \{n\}$ произвољно. Ако је $m \in n$, онда $m \cup \{m\} \in n \cup \{n\}$. Ако је пак $m = n$, онда је $m \cup \{m\} = n \cup \{n\}$. У оба случаја важи $m \cup \{m\} \in n \cup \{n\} \cup \{n \cup \{n\}\}$. Према томе, важи $n \cup \{n\} \in S_3$, па је скуп S_3 индуктиван. Дакле, важи

$$(\forall n \in \omega)(\forall m \in n) m \cup \{m\} \in n \cup \{n\}. \tag{1.12}$$

Докажимо сада да је скуп

$$S_4 = \{m \in \omega \mid (\forall n \in \omega)(m \in n \vee m = n \vee n \in \omega)\}$$

индуктиван. Из индуктивности скупа

$$\{n \in \omega \mid n = \emptyset \ \vee \ \emptyset \in n\},$$

која се лако доказује, следи да $\emptyset \in S_4$. Нека су $m \in S_4$ и $n \in \omega$ произвољни. Из $m \in S_4$ следи да важи

$$m \in n \ \vee \ m = n \ \vee \ n \in m.$$

Ако је $n \in m$ или $n = m$, онда важи $n \in m \cup \{m\}$. Ако је пак $m \in n$, онда према (1.12) важи $m \cup \{m\} \in n \cup \{n\}$, односно

$$m \cup \{m\} \in n \ \vee \ m \cup \{m\} = n.$$

Дакле, у сваком случају је

$$m \cup \{m\} \in n \ \vee \ m \cup \{m\} = n \ \vee \ n \in m \cup \{m\},$$

па $m \cup \{m\} \in S_4$. Тиме је доказано да је скуп S_4 индуктиван, па важи

$$(\forall m, n \in \omega)(m \in n \ \vee \ m = n \ \vee \ n \in m).$$

Према томе, уређење $\leqslant$ је линеарно. Из (1.10) следи да је $\leqslant$ добро уређење. Очигледно је $\emptyset$ најмањи елемент. Такође, за ма које $m, n \in \omega$ важи

$$m < n \cup \{n\} \ \Rightarrow \ m \in n \cup \{n\} \ \Rightarrow \ m \leqslant n,$$

па је $n \cup \{n\}$ најмањи елемент већи од n. Према (1.11), за све $m, n \in \omega$ следи да за све $m, n \in \omega$ важи $m < n \Leftrightarrow m \in n$, а самим тим и $n < n \cup \{n\}$, па скуп ω нема највећи елемент. Такође, за $m, n \in \omega$ такве да је $m < n$ није $n < m$, па важи

$$n \in n \cup \{n\}, \quad n \notin m \cup \{m\},$$

одакле следи да је $m \cup \{m\} \neq n \cup \{n\}$, па је операција $x \mapsto x \cup \{x\}$ на скупу ω инјекција. $\square$

Дакле, за $s : \omega \longrightarrow \omega$ дефинисано са $s(x) = x \cup \{x\}$ важи да је $\langle \omega, \emptyset, s \rangle$ индуктивна алгебра, то јест да задовољава Пеанове аксиоме.

Под *скупом природних бројева* (укључујући и нулу) подразумевамо скуп ω. Његове елементе зовемо *природним бројевима*. Притом нулу дефинишемо као празан скуп јединицу као скуп $\{0\}$, двојку као скуп $\{0, 1\}$, тројку као скуп $\{0, 1, 2\}$ и тако даље.

Коначни и бесконачни скупови

За скуп ћемо рећи да је *коначан* ако је еквипотентан неком природном броју. Остале скупове ћемо звати *бесконачним*.

Теорема 7 *Ниједан природан број се не може инјективно пресликати ни у један од својих елемената. Посебно, не постоје различити еквипотентни природни бројеви. Скуп ω се не може инјективно пресликати ни у један природан број. Посебно, скуп ω је бесконачан.*

Доказ: Доказ изводимо свођењем на противречност. Нека је n најмањи природан број који се може инјективно пресликати у неки од својих елемената, нека је m најмањи елемент скупа n у који се n може пресликати инјективно и нека је $f : n \longrightarrow m$ једна од таквих инјекција.

Из $m \in n$ следи да је $n \neq \emptyset$, па постоји $p \in \omega$ такво да је $n = p \cup \{p\}$. Нека је $k = f(p)$. Из $k \in m$ следи да постоји неко $q \in \omega$ такво да је $m = q \cup \{q\}$. Дакле, важи $k \in q$ или $k = q$.

Нека је $g : (m \setminus \{k\}) \longrightarrow q$ дефинисано на следећи начин: за $x \in m \setminus \{k\}$ је $g(x) = x$ за $x \neq q$, односно $g(x) = k$ ако је $x = q$ (уколико је $k \neq q$). Тада је g инјекција, па је $g \circ (f \restriction p)$ инјекција скупа p у скуп q. Притом из $q < m \leqslant p$ следи $q \in p$ супротно начину избора елемента n.

Ако би h била инјекција скупа ω у $l \in \omega$, онда би $h \circ 1_{l \cup \{l\}}$ била инјекција из $l \cup \{l\}$ у l супротно претходно доказаном. $\square$

Јединствени природан број n коме је неки коначан скуп X еквипотентан ћемо означавати са $|X|$ и звати бројем елемената скупа X. Основна својства коначних скупова се доказују индукцијом про броју елемената тих коначних скупова.

1.2.8 Схема аксиома замене

$$(\forall x)(\exists_1 y)\varphi(x, y, p_1, \ldots, p_n) \Rightarrow (\forall A)(\exists B)(\forall y)(y \in B \Leftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x, y, p_1, \ldots, p_n)).$$

Ова аксиома тврди да за ма коју класну функцију $\mathbf{F}$ дефинисану на класи свих скупова и за ма који скуп A важи да је $\mathbf{F}[A]$ скуп. Притом, тај скуп обележавамо са

$$\{\mathbf{F}[x] \mid x \in A\}.$$

Такође, ако је $\mathbf{R}$ класна бинарна релација и A скуп такав да је $\mathbf{R} \upharpoonright A$ функција. онда за функцију $\mathbf{F}$ дефинисану са

$$\mathbf{F}(x) = y \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (x \in A \wedge \mathbf{R}(x, y)) \vee (x \notin A \wedge y = x)$$

важи да је класа $\mathbf{R}[A]$ такође скуп јер се поклапа са скупом $\mathbf{F}[A]$. Такође, ако је $\mathbf{F}$ класна функција чији је домен скуп A, онда је $\mathbf{F} \subseteq A \times \mathbf{F}[A]$, па је функција $\mathbf{F}$ скуп. Другим речима, класна функција је скуп акко је њен домен скуп.

Теорема о рекурзивној дефиницији

Нека је $\mathbf{R}$ транзитивна класна бинарна релација таква да важи следеће:

1) $(\forall S \neq \emptyset)(\exists b \in S)\neg(\exists a \in S)\mathbf{R}(a, b)$.

2) $(\forall b)(\exists S)(\forall x)(x \in S \Leftrightarrow \mathbf{R}(a, b))$.

Другим речима, ако се бинарна класна релација $\mathbf{R}$ схвати као строги поредак, онда сваки непразан скуп има $\mathbf{R}$-минималан елемент и за сваки скуп важи да је класа свих елемената који су $\mathbf{R}$-испод њега скуп. Тада кажемо да је бинарна класна релација $\mathbf{R}$ *добро заснована*. Услов 2 је свакако испуњен у случају да је $\mathbf{R}$ скуп.

Ако за класу $\mathbf{X}$ и бинарну класну релацију $\mathbf{R}$ важи да је $\mathbf{R} \cap (\mathbf{X} \times \mathbf{X})$ добро заснована релација, онда кажемо да је бинарна класна релација $\mathbf{R}$ добро заснована на класи $\mathbf{X}$. Према претходном, услов 2 је свакако испуњен ако је $\mathbf{R} \cap (\mathbf{X} \times \mathbf{X})$, што је свакако случај ако је $\mathbf{R}$ скуп или $\mathbf{X}$ скуп.

Теорема 8 *Нека је $<$ добро заснована релација на класи $\mathbf{X}$ и нека је $\mathbf{S}$ било која непразна поткласа класе $\mathbf{X}$. Тада класа $\mathbf{S}$ има минимални елемент.*

Доказ: Претпоставимо да су претпоставке исказа теореме задовољене. Изаберимо произвољно $a \in \mathbf{S}$. Нека је C скуп свих $b \in \mathbf{S}$ таквих да је $b < a$ и нека је $S = \{a\} \cup C$. Минимални елемент скупа S је минимални елемент класе $\mathbf{S}$. $\square$

Теорема 9 *Нека је $<$ добро заснована релација на класи $\mathbf{X}$ и нека је $\mathbf{P}$ било која класа. Тада важи*

$$(\forall a \in \mathbf{X})((\forall b < a)b \in \mathbf{P} \Rightarrow a \in \mathbf{P}) \Rightarrow \mathbf{X} \subseteq \mathbf{P}.$$

Доказ: У супротном би класа $\mathbf{S} = \mathbf{X} \setminus \mathbf{P}$ била непразна, па би према теореми 8 имала минимални елемент, супротно претпоставци теореме. □

Ово значи да, ако је $<$ добро заснована релација на класи $\mathbf{X}$, онда можемо доказивати да сви елементи класе $\mathbf{X}$ имају неко својство тако што докажемо да произвољан елемент a класе $\mathbf{X}$ има то својство под претпоставком да то својство имају сви елементи класе $\mathbf{X}$, који су мањи од a.

Теорема 10 (*Теорема о рекурзивној дефиницији*) *Нека су* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *ма које класе и* $<$ *добро заснована релација на класи* $\mathbf{X}$. *Сваком* $a \in \mathbf{X}$ *придружимо скуп* L_a *свих* $x \in \mathbf{X}$ *таквих да важи* $x < a$. *Нека је* $\mathbf{G}$ *бинарна класна функција, која за свако* $a \in \mathbf{X}$ *и* $f : L_a \longrightarrow \mathbf{Y}$ *пару* $\langle a, f\rangle$ *придружује неки елемент класе* $\mathbf{Y}$. *Тада постоји тачно једна класна функција* $\mathbf{F} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ *таква да важи*

$$(\forall a \in \mathbf{X})\mathbf{F}(a) = \mathbf{G}(a, \mathbf{F} \restriction L_a).$$

Доказ: Нека је $\mathbf{S}$ класа свих функција f таквих да постоји $a \in \mathbf{X}$ тако да важи

$$f : L_a \longrightarrow \mathbf{Y}, \quad (\forall x \in L_a) f(x) = G(x, f \restriction L_x).$$

Нека је $\mathbf{F}$ класна бинарна релација дефинисана на следећи начин:

$$\mathbf{F}(a, b) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\exists f \in \mathbf{S})(a \in \text{dom}(f) \wedge f(a) = b).$$

Докажимо најпре да је $\mathbf{F}$ класна функција. За ма које a, b_1 и b_2 такве да је $\mathbf{F}(a, b_1)$ и $\mathbf{F}(a, b_2)$. Изаберимо $f_1, f_2 \in \mathbf{S}$ тако да важи $a \in \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2)$, $f_1(a) = b_1$ и $f_2(a) = b_2$. Ако је скуп

$$\{x \in \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2) \,|\, f_1(x) \neq f_2(x)\}$$

непразан, онда има минималан елемент c. На основу транзитивности релације $<$ важи

$$L_c \subseteq \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2).$$

На основу избора елемента c је $f_1 \restriction L_c = f_2 \restriction L_c$, па је

$$f_1(c) = \mathbf{G}(c, f_1 \restriction L_c) = \mathbf{G}(c, f_1 \restriction L_c) = f_2(c),$$

супротно избору елемента c. Дакле, за свако $x \in \text{dom}(f_1) \cap \text{dom}(f_2)$ важи $f_1(x) = f_2(x)$, па је

$$b_1 = f_1(a) = f_2(a) = b_2,$$

одакле следи да је $\mathbf{F}$ функција. Ако је класа $\mathbf{X} \setminus \text{dom}(\mathbf{F})$ непразна, онда има минимални елемент x. За $y = G(x, \mathbf{F} \restriction L_x)$ и $g = \{\langle x, y\rangle\} \cup \mathbf{F} \restriction L_x$ важи $g \in \mathbf{S}$ и $x \in \text{dom}(g)$, што је у супротности са избором елемента x. Ако су $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ различите класне функције које сликају класу $\mathbf{X}$ у класу $\mathbf{Y}$, онда је класа

$$\{x \in \mathbf{X} \,|\, \mathbf{F}_1(x) \neq \mathbf{F}_2(x)\}$$

непразна, па има минимални елемент, одакле се изводи противречност на сличан начин. □

Сада је могуће дефинисати уобичајене аритметичке операције над скупом ω. За дефинисање бинарних операција се користи лексикографско уређење над скупом ω^2. Дакле,

$$m' = m \cup \{m\}, \quad 0 := \emptyset, \quad m + 0 = m, \quad m + n' = (m+n)', \quad m \cdot 0 = 0, \quad mn' = mn + m.$$

Пошто је $\langle \omega, 0, '\rangle$ индуктивна алгебра, она задовољава законе Пеанове аритметике. *Транзитивну класу* дефинишемо као класу $\mathbf{X}$ такву да важи $\bigcup \mathbf{X} \subseteq \mathbf{X}$, односно тако да за ма које a и b важи

$$a \in b \wedge b \in \mathbf{X} \Rightarrow a \in \mathbf{X}.$$

Под *транзитивним скупом* подразумевамо транзитивну класу која је скуп. Унија било које фамилије транзитивних класа је транзитивна класа и унија било ког скупа транзитивних скупова је транзитиван скуп.

Теорема 11 *За сваки скуп x постоји инклузијски најмањи транзитиван скуп A такав да је $x \subseteq A$.*

Доказ: Нека је $T_0 = x$ и $T_{n+1} = \bigcup T_n$. Скуп $A = \bigcup_{n\in\omega} T_n$ има тражене особине. □

Слично важи и за класе.

Теорема 12 *За сваку класу $\mathbf{X}$ постоји инклузијски најмања транзитивна класа $\mathbf{T}$ таква да важи $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{T}$.*

Доказ: Класа $\bigcup\{\mathrm{tc}(x) \mid x \in \mathbf{X}\}$ испуњава тражене услове. □

Класу $\mathbf{T}$ из претходне теореме зовемо *транзитивним затворењем класе* $\mathbf{X}$ и обележавамо са $\mathrm{tc}(\mathbf{X})$.

Транзитивни колапс

За класну бинарну релацију $\mathbf{R}$ кажемо да је *екстензионална на класи* $\mathbf{X}$ ако за ма које различите $a, b \in \mathbf{X}$ постоји $c \in \mathbf{X}$ такво да важи тачно једно од $\mathbf{R}(c, a)$ и $\mathbf{R}(c, b)$. За класу $\mathbf{X}$ кажемо да је *екстензионална* ако је бинарна релација $\in$ екстензионална на класи $\mathbf{X}$.

Теорема 13 (*Теорема о транзитивном колапсу*) *Нека је бинарна класна релација $\mathbf{R}$ добро заснована и екстензионална на класе $\mathbf{X}$. Тада постоји тачно једна класна инјекција $\mathbf{F}$ дефинисана на класи $\mathbf{X}$ таква да за ма које $a, b \in \mathbf{X}$ важи $\mathbf{R}(a, b) \Leftrightarrow \mathbf{F}(a) \in \mathbf{F}(b)$ и да је класа $\mathbf{F}[\mathbf{X}]$ транзитивна.*

Доказ: Према теореми 10 постоји класна функција $\mathbf{F}$ са доменом $\mathbf{X}$ таква да за свако $a \in \mathbf{X}$ важи

$$\mathbf{F}(a) = \{\mathbf{F}(x) \mid x \in \mathbf{X},\ \mathbf{R}(x, a)\}.$$

Класа $\mathbf{F}[\mathbf{X}]$ је очигледно транзитивна и за ма које $a, b \in \mathbf{X}$ важи $\mathbf{R}(a, b) \Leftrightarrow \mathbf{F}(a) \in \mathbf{F}(b)$. Из екстензионалности класе $\mathbf{X}$ следи инјективност функције $\mathbf{F}$. Докажимо још јединственост.

Претпоставимо да су $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ различите класне функције које испуњавају наведене услове. Тада постоји $\mathbf{R}$ минималан елемент a класе $\mathbf{X}$ такав да је $\mathbf{F}_1(a) \neq \mathbf{F}_2(a)$, а самим тим и c које припада тачно једном од $\mathbf{F}_1(a)$ и $\mathbf{F}_2(a)$. Без умањења општости, можемо претпоставити да $c \in \mathbf{F}_1(a) \setminus \mathbf{F}_2(a)$. Одатле следи да постоји $t \in \mathbf{X}$ такво да важи $c = \mathbf{F}_1(t)$. Тада важи

$$\mathbf{F}_1(t) \in \mathbf{F}_1(a), \quad \mathbf{R}(t, a), \quad \mathbf{F}_2(t) \in \mathbf{F}_2(a), \quad c \in \mathbf{F}_2(a),$$

што је супротно избору елемента c. □

Уз симболику из претходне теореме, под *транзитивним колапсом* екстензионалне и добро засноване релацијске структуре $\langle \mathbf{X}, \mathbf{R} \rangle$ подразумевамо класу $\mathbf{F}[\mathbf{X}]$. Из јединствености транзитивног колапса следи да је свака екстензионална добро заснована релација је изоморфна релацији $\in$ на тачно једној класи.

Ординали

Под *ординалом* подразумевамо транзитиван скуп, који је добро уређен релацијом $\in$. Посебно, празан скуп такође сматрамо ординалом. Према теореми о транзитивном колапсу, не постоји пар различитих изоморфних ординала и свако добро уређење је изоморфно тачно једном ординалу. Другим речима, ординали су транзитивни колапси добрих уређења, односно канонски представници класа изоморфности добрих уређења. Ординале ћемо обележавати малим грчким словима.

Сваки елемент ординала је ординал и једнак је скупу свих елемената који су мањи од њега. Ако је α ординал, онда $\alpha \notin \alpha$ јер би у супротном α био елемент ординала α, који је у у уређењу ординала α мањи од себе.

Свака два ординала су инклузијски упоредива јер би у супротном у сваком од од њих могли одабрати најмањи елемент који није у оном другом, а тако изабрани елементи би били једнаки према аксиоми екстензионалности. Дакле, за ма које ординале α и β важи тачно једно од следећег:

$$\alpha \subsetneq \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \alpha \supsetneq \beta.$$

Ако је ординал α прави подскуп ординала β, онда постоји најмањи елемент γ ординала β који не припада α. Из транзитивности ординала α следи да је α почетни комад од β, а онда из аксиоме екстензионалности да је $\alpha = \gamma$, па важи $\alpha \in \beta$, а самим тим и $\alpha \cup \{\alpha\} \subseteq \beta$. Дакле, за ма које ординале α и β важи

$$\alpha \in \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \subsetneq \beta,$$

$$\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta \;\Leftrightarrow\; \alpha \subseteq \beta.$$

Према томе, следећи искази су еквивалентни:

$$\alpha < \beta, \quad \alpha \in \beta, \quad \alpha \subsetneq \beta, \quad \alpha \text{ је прави почетни комад од } \beta.$$

Такође, следећи искази су еквивалентни:

$$\alpha \leqslant \beta, \quad \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta, \quad \alpha \subseteq \beta, \quad \alpha \text{ је почетни комад од } \beta.$$

Најмањи ординал већи од ординала α је $\alpha \cup \{\alpha\}$ и обележаваћемо га са $\alpha + 1$. Ординал облика $\alpha + 1$ ћемо звати ординалом наследником, а остале ординале ћемо звати граничним ординалима. Дакле, α је гранични ординал акко је $\bigcup \alpha = \alpha$.

Нека је **S** непразна класа ординала и $\alpha = \bigcap \mathbf{S}$. Тада је α такође ординал и припада класи **S** јер би у супротном важило $\alpha = \bigcap \mathbf{S} \subsetneq \alpha$.

Класу ординала обележавамо са **ORD**. На основу претходног, класа **ORD** је транзитивна и добро уређена релацијом $\in$. Класа **ORD** није скуп јер би у супротном била ординал који припада самом себи. Скуп ординала је ординал акко је транзитиван, односно акко је прави почетни комад класе **ORD**. Унија било ког скупа ординала је супремум тог скупа у класи **ORD** и самим тим ординал.

Као и раније, нулу ћемо дефинисати као празан скуп. Над ординалима се дефинишу операције сабирања, множења и степеновања на следећи начин:

$$\begin{aligned} \alpha + 0 &= \alpha, & \alpha + (\beta + 1) &= (\alpha + \beta) + 1, & \alpha + \gamma &= \sup_{\beta \in \gamma} \alpha + \beta, \\ \alpha \cdot 0 &= 0, & \alpha(\beta + 1) &= \alpha\beta + \alpha, & \alpha\gamma &= \sup_{\beta \in \gamma} \alpha\beta, \\ \alpha^0 &= 1, & \alpha^{\beta+1} &= \alpha^\beta \alpha, & \alpha^\gamma &= \sup_{\beta \in \gamma} \alpha^\beta, \end{aligned} \tag{1.13}$$

где је γ произвољан гранични ординал већи од нуле. Пошто су ординали канонски представници класа изоморфности добрих уређења, наведене операције над ординалима се могу протумачити као операције над добрим уређењима.

Операцији сабирања ординала одговара операција надовезивања добрих уређења (друго иза првог), док множењу ординала одговара лексикографски поредак на њиховом Декартовом производу. Ординал α^β је изоморфан скупу свих функција које сликају β у α и које су различите од нуле само на неком коначном подскупу од α, при чему поредак различитих функција из тог скупа одговара поретку њихових слика у највећој тачци домена у којој се разликују.

Наведене репрезентације се доказују доказивањем једнакости (1.13) индукцијом најпре по γ, па по β и на крају по α. За ма које ординале α, β и γ важи

$$0+\alpha=\alpha,\quad 0\cdot\alpha=0,\quad 1\cdot\alpha=\alpha,\quad 1^\alpha=1,\quad \alpha^1=\alpha,$$
$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),\quad (\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma),\qquad \alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma,\quad \alpha^{\beta+\gamma}=\alpha^\beta\alpha^\gamma.$$

Ови закони се такође могу доказати индукцијом најпре по γ, па по β и на крају по α, као и коришћењем наведених репрезентација. На било који од та два начина се доказује да за ма које ординале α и β важи

$$\alpha\leqslant\beta \iff (\exists\gamma)\alpha+\gamma=\beta, \qquad \alpha<\beta \iff (\exists\gamma>0)\alpha+\gamma=\beta.$$

За ординале важе следећи закони:

$$\begin{aligned}\alpha+\beta<\alpha+\gamma &\iff \beta<\gamma,\\ \alpha\beta<\alpha\gamma &\iff \beta<\gamma, \quad \text{за } \alpha\geqslant 1,\\ \alpha^\beta<\alpha^\gamma &\iff \beta<\gamma, \quad \text{за } \alpha\geqslant 2.\end{aligned}$$

Аналогни закони важе и ако се знак $<$ свуда замени знаком $\leqslant$, односно знаком $=$.

Теорема 14 (*Еуклидско дељење ординала*) *Нека су α и β ма који ординали такви да је $\beta>0$. Тада постоје јединствено одређени ординали γ и δ такви да је $\alpha=\beta\gamma+\delta$ и $\delta<\beta$.*

Доказ: Нека је γ супремум свих ординала η таквих да је $\beta\eta\leqslant\alpha$. Тада важи $\beta(\gamma+1)>\alpha$. Претпоставимо да је $\beta\gamma>\alpha$. Тада је γ гранични ординал, па би важи $\beta\gamma=\bigcup_{\eta<\gamma}\beta\eta\leqslant\alpha$ супротно претпоставци. Дакле, важи $\beta\gamma\leqslant\alpha$.

Нека је δ најмањи ординал такав да је $\beta\gamma+\delta\geqslant\alpha$. Претпоставка да је $\beta\gamma+\delta>\alpha$ се обара слично као малопре, па важи $\alpha=\beta\gamma+\delta$.

Нека су γ' и δ' ординали за које важи $\alpha=\beta\gamma'+\delta'$ и $\delta'<\beta$. Ако је $\gamma'<\gamma$ онда важи

$$\alpha=\beta\gamma'+\delta'<\beta(\gamma'+1)\leqslant\beta\gamma+\delta=\alpha,$$

односно $\alpha<\alpha$, што је немогуће, па важи $\gamma'\geqslant\gamma$. Аналогно се закључује да важи и обрнута неједнакост, па је $\gamma'=\gamma$. Ако је $\delta'<\delta$, онда важи

$$\alpha+1=\beta\gamma'+\delta'+1\leqslant\beta\gamma+\delta=\alpha,$$

односно $\alpha+1\leqslant\alpha$, што је немогуће, па је $\delta'\geqslant\delta$. Обрнута неједнакост се изводи аналогно, па важи $\delta'=\delta$. $\square$

Теорема 15 (*Хартогсова теорема*) *За сваки скуп X постоји најмањи ординал који се не може пресликати инјективно у скуп X.*

Доказ: Нека је W класа свих добрих уређења w таквих да је $\mathrm{dom}(w)\subseteq X$. Класа W је скуп као подскуп скупа $\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X\times X)$. Нека је α класа свих транзитивних колапса елемената скупа W. Према схема аксиоми замене, класа α је скуп. Пошто је почетни комад доброг уређења такође добро уређење, скуп α је транзитиван, па је ординал.

Ординал α се не може инјективно пресликати у скуп X јер би у супротном постојало добро уређење слике ординала α при том пресликавању, а транзитивни колапс те слике би био елемент ординала α изоморфан ординалу α, што је немогуће.

Сваки ординал $\beta<\alpha$ је елемент ординала α, па је изоморфан неком добром уређењу неког подскупа скупа X, одакле следи да се може инјективно пресликати у скуп X. $\square$

Уведимо појам <u>*кумулативне хијерархије*</u> V_α, где $\alpha \in \mathbf{ORD}$ следећом рекурзивном дефиницијом:

$$V_0 = \emptyset, \quad V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha),$$

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta, \quad \text{за гранични } \alpha > 0.$$

Теорема 16 *За ма који ординал α важи да је скуп V_α транзитиван. За ма које ординале α и β такве да је $\alpha < \beta$ важи $V_\alpha \subsetneq V_\beta$.*

Доказ: Доказ првог дела тврђења изводимо индукцијом по α. V_0 је транзитиван скуп зато што је празан. Ако је V_α транзитиван скуп, онда је $V_{\alpha+1}$ транзитиван скуп као партитивни скуп транзитивног скупа. Ако је α бесконачан гранични ординал, онда је V_α транзитиван скуп као унија скупова који су по индуктивној претпоставци транзитивни.

Доказ другог дела тврђења изводимо двоструком индукцијом — најпре по β, а затим по α. Ако је β гранични ординал, онда је V_β унија својих правих подскупова од којих је један V_α. Ако је $\beta = \delta + 1$, онда је по индуктивној претпоставци $V_\alpha \subseteq V_\delta$. Из транзитивности скупа V_δ следи да је $V_\delta \subseteq \mathcal{P}(V_\delta) = V_\beta$. Различитост следи из теореме 3. □

Наведимо на крају једну карактеризацију добро заснованих уређења.

Теорема 17 *За свако парцијално уређење $\langle P, <\rangle$ важи да су следећи услови еквивалентни:*

- *Уређење $\langle P, <\rangle$ је добро засновано.*
- *Постоји пресликавање $f : P \longrightarrow \mathbf{ORD}$ такво да важи*

$$(\forall a, b \in P)(a < b \Rightarrow f(a) < f(b)). \tag{1.14}$$

Доказ: Ако је уређење $\langle P, <\rangle$ добро засновано, онда је са

$$f : P \longrightarrow \mathbf{ORD}, \quad f(x) = \sup\{f(a) + 1 \mid a < x\}$$

добро дефинисана функција која испуњава услов (1.14). Докажимо обрнути смер.

Нека је $f : P \longrightarrow \mathbf{ORD}$ такво да важи (1.14) и нека је C непразан подскуп од P. За $a \in C$ такво да је $f(a) = \min(f[X])$ важи да је минималан елемент скупа X. □

1.2.9 Аксиома регуларности

$$x \neq \emptyset \Rightarrow (\exists a \in x) x \cap a = \emptyset.$$

Према овој аксиоми, свака класа је добро заснована. Другим речима, свака непразна класа има <u>*$\in$-минимални елемент*</u>, односно такав елемент a да ниједан елемент те класе не припада a. То омогућава извођење доказа <u>*$\in$-индукцијом*</u>, односно доказивање да сваки елемент неке класе $\mathbf{C}$ има неко својство доказивањем да за сваки елемент a класе $\mathbf{C}$ важи да ако сваки елемент скупа $a \cap \mathbf{C}$ има то својство, онда и a има то својство.

Према овој аксиоми не постоји скуп a такав да $a \in a$ јер у супротном скуп $\{a\}$ не би имао $\in$-минимални елемент. Слично томе, не постоје скупови a, b и c такви да важи

$$a \in b \in c \in a$$

јер у супротном скуп $\{a, b, c\}$ не би имао $\in$-минимални елемент. Општије, ни за једно n не постоје скупови $a_1, \ldots, a_n$ такви да важи

$$\bigwedge_{i=1}^{n-1} a_i \in a_{i+1} \wedge a_n \in a_1$$

јер у супротном скуп $\{a_1, \ldots, a_n\}$ не би имао $\in$-минимални елемент.

Теорема 18 *Не постоји бесконачан низ чији је сваки члан осим првог елемент претходног члана тог низа.*

Доказ: Ако је f функција са доменом ω таква да важи $(\forall n \in \omega) f(n+1) \in f(n)$, онда скуп $f[\omega]$ нема $\in$-минимални елемент. $\square$

Следећа теорема допуњује теорему о транзитивном колапсу.

Теорема 19 *Нека је* **X** *екстензионална класа и нека је* **F** *њен транзитивни колапс. За свако* $x \in \mathbf{X}$ *за које је* $\mathrm{tc}(x) \subseteq \mathbf{X}$ *важи* $\mathbf{F}(x) = x$.

Доказ: Нека је $x \in \mathbf{X}$ такав да је $\mathrm{tc}(x) \subseteq \mathbf{X}$ и $(\forall t \in x)\mathbf{F}(t) \neq t$. На основу дефиниције транзитивног колапса, важи

$$\mathbf{F}(x) = \{\mathbf{F}(t) \mid t \in x\} = \{t \mid t \in x\} = x.$$

$\square$

Следећа теорема истиче значај кумулативне хијерархије.

Теорема 20 $(\forall x)(\exists \alpha \in \mathbf{ORD}) x \in V_\alpha$.

Доказ: Доказ изводимо $\in$-индукцијом. Претпоставимо да је a такво да

$$(\forall x \in a)(\exists \alpha \in \mathbf{ORD}) x \in V_\alpha.$$

Нека је $\alpha : a \longrightarrow \mathbf{ORD}$ такво да за ма које $x \in a$ важи да је $\alpha(x)$ најмањи ординал такав да важи $x \in V_{\alpha(x)}$. За $\beta = \sup_{x \in a} \alpha(x)$ важи $(\forall x \in a) x \in V_\beta$, а самим тим и $a \in V_{\beta+1}$. $\square$

Најмањи ординал α такав да дати скуп x припада скупу $V_{\alpha+1}$ зовемо *ранг скупа* x и обележавамо га са $\mathrm{rank}(x)$. Систем до сада уведених аксиома обележава се са ZF.

1.2.10 Аксиома избора

$$(\exists f)(f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow X \wedge (\forall A \subseteq X)(A \neq \emptyset \Rightarrow f(A) \in A)).$$

Претходна аксиома тврди да постоји функција која сваком непразном подскупу A скупа X придружује неки елемент скупа A. Уз симболику из аксиоме избора, функцију f зовемо *изборном функцијом* или *функцијом избора* скупа A.

Одатле се лако изводи мало општија формулација овог принципа. Нека је X скуп коме празан скуп не припада. Његову унију означимо са U. Према аксиоми избора постоји функција

$$g : \mathcal{P}(U) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow U$$

таква да за сваки непразан подскуп A скупа U важи $g(A) \in A$. Пошто је $X \subseteq \mathcal{P}(U) \setminus \{\emptyset\}$, за функцију $f = g \upharpoonright X$ важи да је функција са доменом X таква да за свако $A \in X$ важи $f(A) \in A$. У овом случају, функцију f зовемо изборном функцијом или функцијом избора фамилије X.

Систем до сада уведених аксиома се обележава са ZFC. Надаље ће се подразумевати да су све теореме изведене у ZFC систему, осим ако уз формулацију теореме није наведен други систем. Већ у ZF важи да сваки коначан скуп непразних скупова има изборну функцију, што се доказује индукцијом по броју елемената тог скупа. Такође, непразна фамилија скупова чији је пресек непразан, има функцију избора већ у ZF.

У најважније теореме ZFC теорије које нису доказиве у ZF свакако спадају принцип доброг уређења и Цорнова лема.

Теорема 21 (*Цермелов принцип доброг уређења*) *Сваки скуп се може добро уредити.*

Доказ: Нека је X произвољан скуп, f његова изборна функција. Према теореми 3, скуп $\mathcal{P}(X) \setminus X$ је непразан, па можемо одабрати неки његов елемент c. Према Хартогсовој теореми, можемо одабрати ординал β који се не може инјективно пресликати у скуп X. Нека је $g : \beta \longrightarrow (X \cup \{c\})$ дефинисано на следећи начин:

$$g(\alpha) = \begin{cases} f(X \setminus g[\alpha]), & \text{ако је } X \setminus g[\alpha] \neq \emptyset, \\ c, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ако $c \notin g[\beta]$, онда је g инјекција ординала β у скуп X, супротно избору ординала β. Нека је α најмањи ординал такав да је $g(\alpha) = c$. Тада је $g \upharpoonright \alpha$ бијекција ординала α на скуп X, па се добро уређење ординала α може пренети на скуп X. $\Box$

Теорема 22 (*Цорнова лема*) *У сваком парцијално уређеном скупу у коме сваки ланац има мајоранту постоји максималан елемент.*

Доказ: Нека је $\langle X, \leqslant \rangle$ произвољан парцијално уређен скуп, f његова изборна функција. За произвољан $A \subseteq X$ са $M(A)$ означимо скуп свих мајоранти скупа A, које не припадају скупу A. Према теореми 3, скуп $\mathcal{P}(X) \setminus X$ је непразан, па можемо одабрати неки његов елемент c. Према Хартогсовој теореми, можемо одабрати ординал β који се не може инјективно пресликати у скуп X. Нека је $g : \beta \longrightarrow (X \cup \{c\})$ дефинисано на следећи начин:

$$g(\alpha) = \begin{cases} f(M(g[\alpha])), & \text{ако је } M(g[\alpha]) \neq \emptyset, \\ c, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ако $c \notin g[\beta]$, онда је g инјекција ординала β у скуп X, супротно избору ординала β. Нека је α најмањи ординал такав да је $g(\alpha) = c$. Тада је $g[\alpha]$ ланац без мајоранте која му не припада, па има највећи елемент e. Тада је e максималан елемент парцијалног уређења $\langle X, \leqslant \rangle$. $\Box$

Слабији облици аксиоме избора

У ZF теорији су принцип доброг уређења и Цорнова лема еквиваленти аксиоме избора. Под слабијим облицима аксиоме избора подразумевамо тврђења која у ZF теорији следе из аксиоме избора, али је не имплицирају. Два најзначајнија таква тврђења су *аксиома зависног избора*, коју обележавамо са DC и тврђење да свака Булова алгебра има прост идеал, које обележавамо са BPI.

Теорема 23 (*Аксиома зависног избора*) *За ма који непразан скуп D и бинарну релацију R на њему такву да важи*

$$(\forall a \in D)(\exists b \in D) R(a, b)$$

постоји бесконачан низ $(a_n)_{n \in \omega}$ такав да за свако n важи $R(a_n, a_{n+1})$.

Доказ: Нека је f изборна функција скупа D и нека је e било који елемент скупа D. Низ $(a_n)_{n\in\omega}$ дефинисан са

$$a_0 = e, \quad a_{n+1} = f(\{b \in D \mid R(a_n, b)\}).$$

задовољава тражене услове. $\square$

Овај принцип се често користи у следећем еквивалентном[2] облику:

Теорема 24 (ZF + DC) *Нека је D непразан скуп и S скуп свих коначних низова елемената скупа D, $P \subseteq S$ такво да $\emptyset \in P$ и да за свако $s \in P$ постоји $a \in D$ такво да[3] $s^\frown a$ припада скупу P. Тада постоји бесконачан низ елемената скупа D чији сваки прави почетни комад припада скупу P.*

Доказ: Нека је T скуп свих $s \in S$ таквих да сваки[4] почетни комад од s припада скупу P и нека је R бинарна релација на скупу T дефинисана са

$$R(s,t) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} s,t \in T \wedge (\exists a \in D) t = s^\frown a.$$

Скуп T је непразан јер му припада празан низ, па на основу DC постоји бесконачан низ $(t_n)_{n\in\omega}$ елемената скупа T такав да за свако n важи $R(t_n, t_{n+1})$. Пошто је t_n прави почетни комад низа t_{n+1}, постоји бесконачан низ који је унија низова t_n за све n и он испуњава тражене услове. $\square$

Теорема 25 (ZF) *Свако добро уређење је линеарно уређење у коме нема бесконачних опадајућих низова. Уз* DC *важи и обрат.*

Доказ: Свако добро уређење је линеарно зато што сваки двочлани подскуп домена има најмањи елемент. Ако у неком линеарном уређењу постоји бесконачан опадајући низ, онда то није добро уређење јер скуп свих чланова тог низа нема најмањи елемент.

У линеарном уређењу које није добро уређење можемо уочити неки непразан скуп S који нема најмањи елемент и бинарну релацију R на скупу S дефинисану са $R(a,b) \Leftrightarrow b < a$. Уз DC у том уређењу постоји бесконачан опадајући низ. $\square$

Теорема 26 (ZF) *Нека су $\langle M_1, d_1\rangle$ и $\langle M_1, d_1\rangle$ метрички простори $f : M_1 \longrightarrow M_2$ и $a \in M_1$. Ако је функција f у тачки a непрекидна у $\varepsilon - \delta$ смислу, онда је у тачки a непрекидна у низовском смислу. Уз* DC *важи и обрат.*

Доказ: Претпоставимо да је функција f непрекидна у тачки a у $\varepsilon - \delta$ смислу и да је $(x_n)_{n\in\omega}$ низ у M_1 који тежи ка a. Нека је дато $\varepsilon > 0$. Изаберимо $\delta > 0$ такво да важи

$$(\forall b \in M_1)(d_1(a,b) < \delta \Rightarrow d_2(f(a), f(b)) < \varepsilon).$$

Нека је $m \in \omega$ такво да за све $n > m$ важи $d_1(x_n, a) < \delta$. Тада важи

$$(\forall n > m) d_2(f(a), f(x_n)) < \varepsilon.$$

Претпоставимо сада да важи DC и да функција f није непрекидна у тачки a у $\varepsilon - \delta$ смислу. Нека је $\varepsilon > 0$ такво да за свако $\delta > 0$ постоји $b \in M_1$ такво да је $d_1(a,b) < \delta$ и $d_2(f(a), f(b)) \geqslant \varepsilon$. На скупу $\{b \in M_1 \mid d_2(f(a), f(b)) \geqslant \varepsilon\}$ уведимо бинарну релацију R са

$$R(u,v) \Leftrightarrow d_1(a,v) < d_1(a,u)/2.$$

На основу DC постоји низ $(x_n)_{n\in\omega}$ елемената скупа M_1 такав да за свако n важи

$$d_1(a, x_n) < d_1(a, x_0)/2^n, \quad d_2(f(a), f(x_n)) \geqslant \varepsilon.$$

$\square$

[2] У ZF теорији.

[3] $s^\frown a$ је ознака за низ који се добија додавањем елемента a на крај низа s.

[4] Укључујући и сам низ s.

Теорема 27 *Свака Булова алгебра има прост идеал.*

Доказ: Нека је $\leqslant$ било које добро уређење на домену Булове алгебри B и нека је f пресликавање домена Булове алгебре B у скуп $\{0,1\}$ дефинисано на следећи начин:

$$f(a) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } \{b < a \mid f(b) = 1\} \text{ базис идеала}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Скуп $f^{-1}[\{1\}]$ је прост идеал као максималан базис идеала. $\square$

Теорема 28 (ZF + BPI) *Сваки идеал Булове алгебре има допуну до простог идеала, односно сваки филтер Булове алгебре има допуну до ултрафилтера.*

Доказ: Нека је I идеал Булове алгебре B. Тада је унија простог идеала Булове алгебре $B_{/I}$ прост идеал Булове алгебре B чији је I подскуп. $\square$

Теорема 29 (ZF + BPI) *За сваки идеал I Булове алгебре B постоји ултрафилтер F Булове алгебре B такав да је $F \cap I = \emptyset$.*

Доказ: Нека је I' допуна идеала I до простог идеала Булове алгебре B. Тада је скуп

$$F = \{-a \mid a \in I'\}$$

ултрафултер Булове алгебре B дисјунктан са I', па самим тим и са I. $\square$

Теорема 30 (ZF + BPI) *Исказна теорија је непротивречна акко је задовољива. Свака непротивречна исказна теорија има допуну до комплетне непротивречне теорије. Свака противречна исказна теорија има коначан део који је противречан.*

Доказ: Нека је T непротивречна исказна теорија и $\sim$ релација еквиваленције на скупу формула дефинисана са $\varphi \sim \psi$ акко $T \vdash (\varphi \Leftrightarrow \psi)$. На скупу класа еквиваленције се операције уводе на уобичајен начин.

$$[\varphi] \cdot [\psi] = [\varphi \wedge \psi], \quad [\varphi] + [\psi] = [\varphi \vee \psi], \quad -[\varphi] = [\neg\psi].$$

На тај начин се добија Булова алгебра B. Из непротивречности теорије T следи да је се нула и јединица Булове алгебре B разликују. Јединица Булове алгебре B је скуп свих теорема теорије T. Унија било ког ултрафилтера Булове алгебре B је комплетирање теорије . Модел комплетирања је валуација која слово p слика у јединицу акко је p теорема тог комплетирања. Последњи део тврђења следи из коначности доказа. $\square$

Наведимо неке примене претходне теореме.

Теорема 31 (ZF + BPI) *Свако парцијално уређење има допуну до линеарног. Посебно, сваки скуп се може линеарно уредити и свака непразна фамилија коначних непразних скупова има изборну функцију.*

Доказ: Нека је $\langle P, \leqslant\rangle$ парцијално уређен скуп. Исказна слова ће бити облика $p(a,b)$, где $a, b \in P$. Нека је T исказна теорија чије су аксиоме формуле облика $p(a,b)$ за $a, b \in P$ такве да важи $a \leqslant b$, затим формуле облика $\neg(p(a,b) \wedge p(b,a))$ за $a, b \in P$ такве да важи $a \neq b$, као и све формуле облика

$$p(a,b) \vee p(b,a), \quad p(a,b) \wedge p(b,c) \Rightarrow p(a,c)$$

за $a, b, c \in P$. Ова теорија је непротивречна зато што се свако коначно парцијално уређење може[5] допунити до линеарног. Ако је T' допуна теорије T до комплетне и непротивречне теорије. Тада се парцијално уређење $\leqslant$ може допунити до линеарног уређења $\preccurlyeq$ дефинисаног са

$$a \preccurlyeq b \quad \Leftrightarrow \quad T' \vdash p(a, b).$$

Последњи део тврђења следи из чињенице да сваки коначан подскуп линеарног уређења има најмањи елемент. □

Теорема 32 (ZF + BPI) *Нека је F било које поље, A алгебарско раширење поља F и L раширење поља F са особином да за свако a из домена поља A важи да минимални полином елемента a над пољем F има линеарну факторизацију над пољем L. Тада постоји утапање поља A у поље L, чија је рестрикција на домену поља F идентитет.*

Доказ: Исказна слова ће нам бити искази облика $e(a) = b$, где је a произвољан елемент поља A, а b произвољан елемент поља L. За свако a из домена поља F уведимо аксиому $e(a) = a$. За ма које a из домена поља A и међусобно различите елементе b_1 и b_2 домена поља L уведимо аксиому

$$\neg(e(a) = b_1 \land e(a) = b_2).$$

За ма које a из домена поља A и његов минимални полином μ над пољем F уведимо аксиому $\bigvee_{i=1}^{n} e(a) = b_i$, где су $b_1, \ldots, b_n$ сви међусобно различити корени полинома μ у пољу L. За ма које елементе a_1 и a_2 домена поља A и ма које елементе b_1 и b_2 домена поља L уведимо аксиоме

$$e(a_1) = b_1 \ \land\ e(a_2) = b_2 \quad \Rightarrow \quad e(a_1 + a_2) = b_1 + b_2,$$

$$e(a_1) = b_1 \ \land\ e(a_2) = b_2 \quad \Rightarrow \quad e(a_1 a_2) = b_1 b_2.$$

Сваки коначан део ове исказне теорије је задовољив на основу познате теореме из алгебре да тврђење важи у специјалном случају када је A коренско поље неког полинома над F. Модел ове теорије даје тражено утапање. □

Теорема 33 (ZF + BPI) *Теорија првог реда је непротивречна акко има модел. Свака непротивречна теорија првог реда има допуну до комплетне непротивречне теорије. Свака противречна теорија првог реда има коначан део који је противречан.*

Доказ: Нека је T непротивречна теорија првог реда и $\sim$ релација еквиваленције на скупу реченица дефинисана са $\varphi \sim \psi$ акко $T \vdash (\varphi \Leftrightarrow \psi)$. На скупу класа еквиваленције се операције уводе на уобичајен начин.

$$[\varphi] \cdot [\psi] = [\varphi \land \psi], \quad [\varphi] + [\psi] = [\varphi \lor \psi], \quad -[\varphi] = [\neg\psi].$$

Остатак доказа постојања комплетирања је исти као у случају исказног рачуна. Последњи део тврђења је последица коначности доказа. Докажимо још први део тврђења.

Нека је T непротивречна теорија првог реда језика L и нека је α најмањи ординал такав да све формуле и језик припадају скупу $V_{\alpha+1}$. Тада $R(\langle T, L\rangle)$ дефинишемо као пар $\langle T', L'\rangle$, где тако да важи:

- L' је језик који проширује језик L симболима константи, тако што се свакој формули φ чија је једина слободна променљива x придружује по један симбол константе у ознаци c_φ, а који може бити дефинисан као $\langle \alpha + 1, \varphi\rangle$,

[5] Та чињеница се доказује индукцијом по броју елемената коначног парцијалног уређења.

- T' је теорија језика L' која проширује теорију T додавањем свих аксиома облика

$$(\forall x)(\varphi(x) \Rightarrow \varphi(c_\varphi)),$$

  где је φ формула језика L чија је једина слободна променљива x.

Тада је T' такође непротивречна теорија. Нека је

$$\langle T_0, L_0\rangle = \langle T, L\rangle, \quad \langle T_{n+1}, L_{n+1}\rangle = R(\langle T_n, L_n\rangle) \quad \text{и} \quad T'' = \bigcup_{n\in\omega} T_n$$

и нека је L'' дефинисано на сличан начин. Тада је T'' непротивречна теорија језика L''. Нека је T^* комплетирање теорије T''. Конструишимо модел M теорије T^*.

Уведимо релацију еквиваленције $\sim$ међу затвореним термима на следећи начин: $t_1 \sim t_2$ акко $T'' \vdash t_1 = t_2$. Елементи домена модела M ће бити одговарајуће класе еквиваленције. Дефинишимо интерпретацију симбола језика L''. Ако је c симбол константе, онда је $c^M = [c]$. Ако је f операцијски симбол арности m, онда његову интерпретацију дефинишемо као

$$f^M([t_1], \ldots, [t_m]) := [f(t_1, \ldots, t_m)]$$

за ма које затворене терме $t_1, \ldots, t_m$. Ако је ρ релацијски симбол арности n, онда његову интерпретацију дефинишемо као

$$\rho^M([t_1], \ldots, [t_n]) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} T'' \vdash \rho(t_1, \ldots, t_n),$$

где су $t_1, \ldots, t_n$ произвољни затворени терми. Индукцијом по сложености терма се доказује да за ма који терм $u(x_1, \ldots, x_k)$ и ма које затворене терме $t_1, \ldots, t_k$ вредност терма u у моделу M при валуацији v за коју је $v(x_i) = t_i$ за све i износи $[u(t_1, \ldots, t_k)]$. Такође, индукцијом по сложености формуле се доказује да за сваку формулу $v(x_1, \ldots, x_l)$ и ма које затворене терме $t_1, \ldots, t_l$ важи

$$M \models v(t_1, \ldots, t_l) \text{ акко } T'' \vdash v(t_1, \ldots, t_l).$$

Према томе, $M \models T''$. $\square$

Наведимо једну примену ове теореме у алгебри.

Теорема 34 (ZF+BPI) *Свако поље има алгебарско затворење. Притом, између свака два алгебарска затворења поља F постоји изоморфизам чија је рестрикција на домену поља F идентитет.*

Доказ: Нека је F било које поље и L језик првог реда који се састоји од језика поља и по једног симбола константе за сваки елемент домена поља F. Симбол константе који одговара елементу a домена поља F обележаваћемо са $\underline{a}$. Најпре уведимо аксиоме поља. Модели ове теорије су поља. Затим за ма које међусобно различите елементе a и b домена поља F уведимо аксиому $\underline{a} \neq \underline{b}$ и за ма које елементе a и b домена поља F уведимо аксиоме

$$\underline{a} + \underline{b} = \underline{a+b}, \quad \underline{a}\,\underline{b} = \underline{ab}.$$

Модели до сада уведених аксиома су поља у која се поље F може утопити. За сваки моничан полином p над пољем F степена већег од један уведимо аксиому да полином p има барем n корена не бројећи вишеструкости, где је n број корена полинома p у његовом коренском пољу, не бројећи вишеструкости.

Модели ове теорије су поља у која се поље F може утопити и у којима, до на изједначавање поља F са његовом сликом при утапању, сваки полином над F има линеарну факторизацију. Сваки коначан део ове теорије има модел на основу теореме о коренском пољу полинома. Самим тим, постоји раширење K поља F у коме сваки полином над F има линеарну факторизацију.

Потпоље A поља K, које се састоји од елемената који су алгебарски над пољем F је алгебарско затворење поља F.

Нека су A_1 и A_2 алгебарска затворења поља F. Према теореми 32, постоје утапања

$$e_1 : A_1 \longrightarrow A_2 \quad \text{и} \quad e_2 : A_2 \longrightarrow A_1$$

чије су рестрикције на домену поља F идентитети. Тада је $e_1 \circ e_2$ утапање поља A_2 у себе, чија је слика потпоље од A_2 које је алгебарско затворење поља F, па је пресликавање $e_1 \circ e_2$ сурјективно. Према томе, e_1 је сурјекција, па самим тим и изоморфизам. □

Видели смо да је систем ZF+BPI довољан за коректно заснивање исказног и предикатског рачуна. Напоменимо без доказа да се у њему могу доказати уобичајене теореме[6] о елиминацији квантора, као и Лошова теорема о ултрапроизводу за случај множења коначних структура када је производ непразан.

1.3 Кардинални бројеви

Кардинал или *кардинални број* се дефинише као ординал који није еквипотентан ниједном свом елементу. Према принципу доброг уређења и теореми о транзитивном колапсу, сваки скуп је еквипотентан неком ординалу. За дати скуп X са $|X|$ означавамо најмањи ординал који је еквипотентан скупу X. Притом је $|X|$ кардинал. Класу кардинала обележавамо са **CARD**.

За ма који скуп X и кардинал κ уводимо следеће ознаке:

$$[X]^{\kappa} = \{A \subseteq X \mid |A| = \kappa\},$$

$$[X]^{<\kappa} = \{A \subseteq X \mid |A| < \kappa\},$$

$$[X]^{\leqslant\kappa} = \{A \subseteq X \mid |A| \leqslant \kappa\}.$$

Теорема 35 *Ниједан природан број се не може инјективно пресликати у свој прави подскуп. Природни бројеви и скуп ω су кардинали.*

Доказ: Празан скуп нема праве подскупове. Ако се $n \in \omega$ не може инјективно пресликати у свој прави подскуп, а $n \cup \{n\}$ може, онда се $n \cup \{n\}$ може инјективно пресликати у n, а рестрикција тог инјективног пресликавања на скуп n је инјективно пресликавање природног броја n у свој прави подскуп супротно претпоставци.

Ако се ω може инјективно пресликати у природан број n, онда се $n \cup \{n\}$ инјективно пресликава у n композицијом инклузије $n \cup \{n\}$ у ω и инјекције ω у n, што је немогуће.

Према томе, различити природни бројеви нису еквипотентни и ниједан природан број није еквипотентан са ω. □

Кардинали се обележавају малим грчким словима почев од κ. На кардиналима се операције дефинишу на уобичајен начин.

$$\kappa + \lambda = |\kappa \times \{0\} \;\;\cup\;\; \lambda \times \{1\}|, \quad \kappa\lambda = |\kappa \times \lambda|,$$

$$\kappa^{\lambda} = |{}^{\lambda}\kappa| = |\{f \subseteq (\kappa \times \lambda) \mid f : \kappa \longrightarrow \lambda\}|,$$

[6] На пример, за реално затворена поља, алгебарски затворена поља, безатомичне Булове алгебре, густа линеарна уређења са крајевима или без крајева, као и за уређене Абелове групе са дељењем без торзије.

$$\kappa^{<\lambda} = \sum_{\alpha<\lambda} \kappa^{|\alpha|}.$$

Сабирање и множење се уопштавају на бесконачне фамилије кардинала на следећи начин:

$$\sum_{i\in I} \kappa_i = |\bigcup_{i\in I}(\kappa_i \times \{i\})|,$$

$$\prod_{i\in I} \kappa_i = |\{f : I \longrightarrow \textstyle\bigcup_{i\in I} \kappa_i \mid (\forall i \in I) f(i) \in \kappa_i\}|.$$

Мада су кардинали специјални случајеви ординала, ове операције се разликују од одговарајућих операција дефинисаних на ординалима. Притом, за кардиналну аритметику важе уобичајени аритметички закони.

$$(\kappa + \lambda) + \mu = \kappa + (\lambda + \mu), \quad \kappa + \lambda = \lambda + \kappa,$$

$$(\kappa\lambda)\mu = \kappa(\lambda\mu), \quad \kappa\lambda = \lambda\kappa,$$

$$\kappa(\lambda + \mu) = \kappa\lambda + \kappa\mu, \quad \kappa^\lambda\kappa^\mu = \kappa^{\lambda+\mu}, \quad (\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\mu}.$$

Ови идентитети се доказују проналажењем одговарајућих бијекција. На природним бројевима се ове операције поклапају са уобичајеним аритметичким операцијама. Према томе, у коначном случају се поклапају не само појмови ординала и кардинала, него и ординалне и кардиналне операције.

Међутим, бесконачни кардинали су идемпотентни за разлику од коначних ординала већих од један. Једна од бијекција скупа ω^2 на скуп ω је *Канторов полином*, који је дефинисан на следећи начин:

$$p(x, y) = \binom{x + y + 1}{2} + x = \frac{(x + y)(x + y + 1)}{2} + x.$$

Општи случај идемпотентности бесконачних кардинала се доказује свођењем на противречност. Претпоставимо да је κ најмањи бесконачан кардинал који није идемпотентан и уведимо добро уређење на скупу $\kappa \times \kappa$ на следећи начин: Парове ординала упоређујемо лексикографски најпре по максимуму, па по првој компоненти, па по другој компоненти. Лако се доказује да за сваки елемент уређења важи да је скуп елемената мањих од њега кардиналности мање од κ, тако да транзитивни колапс уређења не може бити већи од κ.

Из идемпотентности посебно следи да за ма који бесконачан скуп X важи $|[X]^{<\omega}| = |X|$, као и да за ма које кардинале κ и λ важи

$$\kappa, \lambda > 0 \ \wedge \ \max\{\kappa, \lambda\} \geqslant \omega \ \Rightarrow \ \kappa + \lambda = \kappa\lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

Из Хартогсове теореме следи да за сваки кардинал κ постоји први кардинал који је већи од κ и њега обележавамо са κ^+. За кардинал κ кажемо да је *наследник* ако постоји кардинал λ такав да важи $\kappa = \lambda^+$. Сваки бесконачан кардинал је гранични ординал.

Хијерархију *алефа* дефинишемо на следећи начин:

$$\aleph : \mathbf{ORD} \longrightarrow \mathbf{CARD}, \quad \aleph_0 = \omega, \quad \aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+,$$

$$\aleph_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta, \quad \text{за гранични ординал } \alpha > 0.$$

Притом је ω_α алтернативна ознака за $\aleph_\alpha$. Ознаку ω_α користимо за објекте које третирамо као ординале (односно, вршимо над њима операције са ординалима), док ознаку $\aleph_\alpha$ користимо за објекте које третирамо као кардинале (односно, вршимо над њима операције са кардиналима). Очигледно, за $\alpha > 0$ важи да је кардинал $\aleph_\alpha$ је гранични акко је ординал α гранични.

За ма коју фамилију скупова $(A_i)_{i\in I}$ очигледно важи

$$|\bigcup_{i\in I} A_i|] \leqslant \sum_{i\in I} |A_i|.$$

Из теореме 3 следи да за сваки кардинал κ важи $2^\kappa > \kappa$. Самим тим, за сваки бесконачан кардинал κ и за сваки кардинал λ важи

$$2 \leqslant \lambda \leqslant 2^\kappa \ \ \Rightarrow \ \ \lambda^\kappa = 2^\kappa = \kappa^\kappa,$$

што следи из

$$2^\kappa \leqslant \lambda^\kappa \leqslant (2^\kappa)^\kappa = 2^{k^2} = 2^\kappa \leqslant \kappa^\kappa \leqslant (2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa.$$

Следећа теорема даје важну неједнакост кардиналне аритметике.

Теорема 36 (*Кенигова лема*) *За ма које $I \neq \emptyset$ и ма које фамилије кардинала $(\kappa_i)_{i\in I}$ и $(\lambda_i)_{i\in I}$ важи*

$$(\forall i \in I)\kappa_i < \lambda_i \ \ \Rightarrow \ \ \sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

Доказ: Нека је I непразан скуп и нека су $(A_i)_{i\in I}$ и $(B_i)_{i\in I}$ фамилије скупова такве да за свако $i \in I$ важи $|A_i| < |B_i|$. Нека је

$$F : \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \{f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} B_i \,|\, (\forall i \in I) f(i) \in B_i\}.$$

Докажимо да пресликавање F није сурјективно. Нађимо функцију $f : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} B_i$ такву да за свако i важи $f(i) \in B_i$ и да за свако $a \in \mathrm{dom}(F)$ важи $F(a) \neq f$. Свакоm $i \in I$ можемо придружити пресликавање

$$g_i : A_i \longrightarrow B_i, \quad g_i(x) = F(x)(i),$$

као и неко $f(i) \in B_i \setminus g_i[A_i]$. Нека је $a \in \mathrm{dom}(F)$ произвољно. Тада постоји $i \in I$ такво да $a \in A_i$. Из $F(a)(i) = g_i(a) \neq f(i)$ следи да је $F(a) \neq f$. □

1.4 Кофиналност

Нека је α бесконачан гранични ординал. Под неограниченим скупом у α подразумевамо $S \subseteq \alpha$ такав да је $\bigcup S = \alpha$.

Сваком бесконачном граничном ординалу α придружујемо најмањи кардинал κ такав да постоји неограничен скуп S у α такав да је $|S| = \kappa$ и који зовемо *кофиналношћу ординала* α и обележавамо са $\mathrm{cf}(\alpha)$. Кофиналност бесконачног кардинала дефинишемо на исти начин, третирајући бесконачан кардинал као бесконачан гранични ординал.

Очигледно је $\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant |\alpha|$. Следећа теорема даје једну карактеризацију појма кофиналности ординала.

Теорема 37 *Нека је α бесконачан гранични ординал и нека је κ било који кардинал. Тада су следећи услови еквивалентни:*

1) $\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant \kappa$.

2) *Постоји фамилија $(A_\beta)_{\beta<\kappa}$ ограничених подскупова од α таква да је $\bigcup_{\beta<\kappa} A_\beta = \alpha$.*

3) *Постоји фамилија $(B_\beta)_{\beta<\kappa}$ у паровима дисјунктних, ограничених подскупова од α таква да је $\bigcup_{\beta<\kappa} B_\beta = \alpha$.*

4) *Постоји неограничено пресликавање из κ у α.*

Доказ: 1) $\Rightarrow$ 2) Нека је S неограничен подскуп од α кардиналности $\lambda \leqslant \kappa$ и нека је $f : S \longrightarrow \lambda$ транзитивни колапс скупа S. Фамилија $(A_\beta)_{\beta<\kappa}$ дефинисана са

$$A_\beta = \begin{cases} f(\beta), & \beta < \lambda, \\ \emptyset, & \lambda \leqslant \beta < \kappa \end{cases}$$

испуњава тражене услове.
2) $\Rightarrow$ 3) Фамилија

$$B_\beta = A_\beta \setminus \bigcup_{\gamma<\beta} A_\alpha$$

испуњава тражене услове.
3) $\Rightarrow$ 4) Пресликавање $f : \kappa \longrightarrow \alpha$ дато са $f(\beta) = \sup B_\beta$ испуњава тражене услове.
4) $\Rightarrow$ 1) Ако је f неограничено пресликавање из κ у α, онда је $f[\kappa]$ неограничен подскуп од α кардиналности не веће од κ. $\square$

Теорема 38 *Нека је α бесконачан гранични ординал. Тада је $\mathrm{cf}(\alpha)$ најмањи кардинал κ такав да постоји неограничено растуће пресликавање из κ у α.*

Доказ: Нека је S неограничен подскуп од α кардиналности $\mathrm{cf}(\alpha)$ и нека је f транзитивни колапс скупа S. За $\beta = f[S]$ важи $|\beta| = \mathrm{cf}(\alpha)$. Нека је g бијекција кардинала $\mathrm{cf}(\alpha)$ на ординал β.

Дефинишимо пресликавање $h : \mathrm{cf}(\alpha) \longrightarrow \mathbf{ORD}$ на следећи начин: $h(\gamma)$ је најмањи ординал који је већи од свих ординала облика $h(\delta)$ и $f^{-1}(g(\delta))$ где је $\delta < \gamma$. Пресликавање h је очигледно растуће и самим тим инјективно.

За свако $\gamma < \mathrm{cf}(\alpha)$ важи $h(\gamma) < \alpha$ јер би у супротном постојало најмање $\gamma < \mathrm{cf}(\alpha)$ такво да је $h(\gamma) \geqslant \alpha$, па би скуп $h[\gamma] \cup f^{-1}[g[\gamma]]$ био неограничен подскуп од α кардиналности $|\gamma| < \mathrm{cf}(\alpha)$, супротно дефиницији кофиналности.

Скуп $h[\mathrm{cf}(\alpha)]$ је неограничен у α јер би у супротном постојало $\delta \in \mathrm{cf}(\alpha)$ такво да је $h[\mathrm{cf}(\alpha)] \subseteq f^{-1}(g(\delta))$, супротно начину избора функције h.

Ако је пак $u : \kappa \longrightarrow \alpha$ растуће неограничено пресликавање, онда је $u[\kappa]$ неограничен подскуп од α, па према дефиницији кофиналности важи $\kappa \geqslant \mathrm{cf}(\alpha)$. $\square$

Теорема 39 *Нека је A бесконачан скуп. Тада је $\mathrm{cf}(|A|)$ најмањи кардинал κ такав да постоји скуп $S \subseteq [A]^{<|A|}$ кардиналности κ такав да је $\bigcup S = A$. Такође, $\mathrm{cf}(|A|)$ је најмањи кардинал κ такав да постоји фамилија $T \subseteq [A]^{<|A|}$ непразних дисјунктних скупова таква да важи $|T| = \kappa$ и $\bigcup T = A$.*

Доказ: Нека је f бијекција кардинала $\lambda = |A|$ на скуп A. Према теореми 37 постоји скуп B непразних ограничених дисјунктних подскупова кардинала λ такав да је $|B| = \mathrm{cf}(\lambda)$ и $\bigcup B = \lambda$. Тада је $T = \{f[X] \mid X \in B\}$ скуп непразних дисјунктних скупова за који важи

$$|T| = \mathrm{cf}(\lambda), \quad T \subseteq [A]^{<\lambda}, \quad \bigcup T = A. \tag{1.15}$$

Нека је $S \subseteq [A]^{<|A|}$ такав да важи $\bigcup S = A$ и нека је $\kappa = |S|$. Нека је g бијекција кардинала κ на скуп S. Дефинишимо добро уређење на скупу A на следећи начин:

$$\begin{aligned} a < b \quad \Leftrightarrow \quad & \min\{\beta < \kappa \mid a \in g(\beta)\} < \min\{\beta < \kappa \mid b \in g(\beta)\} \\ \vee \quad & (\min\{\beta < \kappa \mid a \in g(\beta)\} = \min\{\beta < \kappa \mid b \in g(\beta)\}) \wedge f(a) < f(b). \end{aligned}$$

Другим речима, скуп A уређујемо лексикографски најпре по месту у низу g на коме се елемент први пут појављује, а потом у уређењу наслеђеном из кардинала λ. У овом уређењу важи да за ма које $\alpha, \beta \in \kappa$ за које је $\alpha < \beta$ важи да је сваки елемент скупа $g(\alpha)$ мањи од сваког елемента скупа $g(\beta)$. Према томе, елементи скупа S су ограничени у том уређењу од A, па према теореми 37 важи $\kappa \geqslant \mathrm{cf}(\alpha)$. $\square$

Теорема 40 *Нека су α и β бесконачни гранични ординали такви да постоји растућа неограничена функција из α у β. Тада важи $\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\beta)$. За сваки бесконачан гранични ординал α важи*

$$\mathrm{cf}(\alpha) = \mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha)).$$

Доказ: Нека је f неограничена растућа функција из α у β и нека је g неограничена растућа функција из $\mathrm{cf}(\alpha)$ у α. Тада је $g \circ f$ неограничена растућа функција из $\mathrm{cf}(\alpha)$ у β, па важи $\mathrm{cf}(\beta) \leqslant \mathrm{cf}(\alpha)$.

За произвољну растућу неограничену функцију h из $\mathrm{cf}(\beta)$ у β важи да је функција u из $\mathrm{cf}(\beta)$ у α дефинисана са $u(\gamma) = \min\{\delta < \alpha \mid h(\gamma) < f(\delta)\}$ неограничена, одакле следи да је $\mathrm{cf}(\alpha) \leqslant \mathrm{cf}(\beta)$.

Преостали део тврђења следи из претходног и постојања неограниченог растућег пресликавања из $\mathrm{cf}(\alpha)$ у α. $\square$

Теорема 41 *За ма које ординале α и β, где је β бесконачан гранични ординал важи*

$$\mathrm{cf}(\alpha + \beta) = \mathrm{cf}(\beta), \quad \alpha \geqslant 1 \Rightarrow \mathrm{cf}(\alpha\beta) = \beta, \quad \alpha \geqslant 2 \Rightarrow \mathrm{cf}(\alpha^{\beta}) = \mathrm{cf}(\beta).$$

Доказ: Нека је f растућа неограничена функција која слика $\mathrm{cf}(\beta)$ у β. Функције $g_1(\gamma) = \alpha + f(\gamma)$, $g_2(\gamma) = \alpha f(\gamma)$ и $g_3(\gamma) = \alpha^{f(\gamma)}$ су под наведеним условима за α неограничене растуће функције из $\mathrm{cf}(\beta)$ у ординале $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ и α^{β}. $\square$

Наведимо неке последице Кенигове леме на кофиналност при кардиналним операцијама.

Теорема 42 *Нека је I ма који непразан скуп, $\lambda \geqslant 1$ ма који кардинал и $(\kappa_i)_{i \in I}$ фамилија кардинала тако да је кардинал $\prod_{i \in I} \kappa_i$ бесконачан. Тада важи*

$$(\forall i \in I)\kappa_i > \lambda \ \Rightarrow \ \mathrm{cf}(\textstyle\prod_{i \in I} \kappa_i) > \lambda|I|.$$

Посебно, ако је $\kappa \geqslant 2$ и $\lambda \geqslant \aleph_0$, онда важи $\mathrm{cf}(\kappa^{\lambda}) > \lambda$. Такође, за сваки бесконачан кардинал κ важи $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$.

Доказ: Доказаћемо само последњи део тврђења, пошто је преостали део тривијалан. Изаберимо фамилију $(\lambda_\alpha)_{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)}$ ординала мањих од κ, чија је унија једнака κ. Тада важи

$$\kappa \leqslant \Big| \bigcup_{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)} \lambda_\alpha \Big| \leqslant \sum_{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)} |\lambda_\alpha| \leqslant \mathrm{cf}(\kappa)\kappa \leqslant \kappa^2 = \kappa,$$

а самим тим и

$$\kappa = \sum_{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)} |\lambda_\alpha| < \prod_{\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)} \kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}.$$

$\square$

За бесконачан кардинал κ кажемо да је *регуларан* ако важи $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$. Преостале регуларне кардинале зовемо *сингуларним*. Кардинални број бесконачног скупа A је сингуларан акко постоји скуп $S \subseteq [A]^{<|A|}$ такав да важи $|S| < |A|$ и $\bigcup S = A$. За сваки бесконачан кардинал κ важи да је $\mathrm{cf}(\kappa)$ регуларан кардинал.

1.5 Затворени неограничени скупови

Нека је κ било који бесконачан кардинал. За подскуп кардинала κ кажемо да је затворен ако садржи супремуме свих својих непразних ограничених подскупова. Овде ћемо разматрати затворене неограничене подскупове бесконачних кардинала. Скуп свих затворених неограничених подскупова кардинала κ обележавамо са $\mathcal{C}(\kappa)$. Скуп свих подскупова бесконачног кардинала κ који имају подскуп у $\mathcal{C}(\kappa)$ обележавамо са $\mathcal{F}(\kappa)$.

Теорема 43 *Нека је κ бесконачан кардинал. Тада за сваки затворен неограничен подскуп C од κ и свако $\alpha < \kappa$ важи да је скуп $C \setminus \alpha$ затворен и неограничен.*

Доказ: За свако $\mu < \kappa$ можемо одабрати $\beta \in C$ такав да важи $\beta \geqslant \mu$. Тада $\beta \in C \setminus \alpha$ и $\beta \geqslant \mu$.

Нека је S непразан и ограничен подскуп скупа $C \setminus \alpha$. Тада је S непразан и ограничен подскуп скупа C и $\sup S$ припада скупу $C \cap (\kappa \setminus \alpha)$, а самим тим и скупу $C \setminus \alpha$. $\Box$

Теорема 44 *Нека је κ бесконачан кардинал. Тада за сваки неограничен подскуп S од κ важи*

$$\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant |S| \leqslant \kappa \tag{1.16}$$

Сваки скуп $S \subseteq \kappa$ кардиналности κ је неограничен у κ. Ако је κ регуларан кардинал, онда за свако $S \subseteq \kappa$ важи да је S неограничен у κ акко је $|S| = \kappa$.

Доказ: Ако је S неограничен подскуп од κ, онда $\mathrm{cf}(\kappa) \leqslant |S|$ следи из дефиниције кофиналности, док $|S| \leqslant \kappa$ следи из $S \subseteq \kappa$. Ако је S ограничен подскуп од κ, онда постоји неко $\alpha < \kappa$ такво да је $S \subseteq \alpha$, па важи $|S| \leqslant |\alpha| < \kappa$. Ако је κ регуларан кардинал и S неограничен подскуп од κ, онда $|S| = \kappa$ следи из (1.16). $\Box$

Теорема 45 *Нека је κ бесконачан кардинал непребројиве кофиналности. Тада је скуп $\mathcal{C}(\kappa)$ затворен за пресеке фамилија кардиналности мање од $\mathrm{cf}(\kappa)$. Другим речима, $\mathcal{F}(\kappa)$ је један $\mathrm{cf}(\kappa)$-комплетан филтер.*

Доказ: Нека је $\lambda < \kappa$ произвољно. Дефинишимо низ $(\mu_n)_{n\in\omega}$ на следећи начин: Нека је μ_0 најмањи елемент скупа C_1 који је већи од λ. За свако $n \geqslant 0$ нека је μ_{2n+1} најмањи елемент скупа C_2 који је већи од μ_{2n} и нека за свако $n \geqslant 1$ важи да је μ_{2n} најмањи елемент скупа C_1 који је већи од μ_{2n-1}. Тада је $\sup_{n\in\omega} \mu_n$ елемент скупа $C_1 \cap C_2$ који је већи од λ.

Нека је $2 \leqslant \lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ и $(C_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ фамилија затворених неограничених скупова и нека је $\mu < \kappa$ произвољно. Дефинишимо низ $(\nu_\alpha)_{\alpha<\lambda\omega}$ на следећи начин:

Нека је ν_0 најмањи елемент скупа C_0 који је већи од μ. За $0 < \alpha < \lambda\omega$ нека су n и β јединствени ординали за које је $\alpha = \lambda n + \beta$ и $\beta < \lambda$. Наравно, $n < \omega$. Нека је ν_α најмањи ординал из C_β који је за свако $\eta < \alpha$ већи ординала ν_η. То је могуће због $|\lambda\omega| = |\lambda|\aleph_0 < \mathrm{cf}(\kappa)$. Из истог разлога, за $\theta = \sup_{\alpha<\lambda\omega}$ важи $\theta < \kappa$. За свако $\beta < \lambda$ важи $\theta = \sup_{n\in\omega} \nu_{\lambda n+\beta} \in C_\beta$. $\Box$

Нека је κ непребројив регуларан кардинал и $(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ фамилија његових затворених неограничених подскупова. Тада скуп

$$\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha := \{\eta < \kappa \,|\, (\forall \alpha < \eta) \eta \in C_\alpha\}$$

зовемо *дијагоналним пресеком* фамилије $(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$.

Теорема 46 *Нека је κ непребројив регуларан кардинал и $(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ фамилија његових затворених неограничених подскупова. Тада је скуп $\Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ затворен и неограничен у κ.*

Доказ: Докажимо неограниченост скупа $D = \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ у κ. Нека је $\nu < \kappa$ произвољно и докажимо да скуп D садржи елемент већи од ν. Нека је η_0 најмањи елемент скупа C_0 који је већи од ν. За произвољан природан број n нека је η_{n+1} најмањи елемент скупа $\bigcap_{\alpha<\eta_n} C_\alpha$ који је већи од η_n. Докажимо да ординал $\theta = \sup_{n\in\omega} \eta_n$ припада скупу D. Нека је $\alpha < \theta$ и докажимо да $\theta \in C_\alpha$. Према дефиницији супремума постоји $k \in \omega$ такво да је $\eta_k \geqslant \alpha$. Из монотоније низа $(\eta_n)_{n<\omega}$ следи да за свако $n > k$ важи $\eta_n > \alpha$. Према дефиницији елемента η_n важи $\eta_m \in C_\alpha$, па $\theta \in C_\alpha$.

Докажимо сада затвореност скупа D у κ. Нека је скуп $S \subseteq D$ непразан и ограничен у κ нека је $\mu = \sup S$. Докажимо да $\mu \in D$. Нека је $\alpha < \mu$ и докажимо да $\mu \in C_\alpha$. Нека је β произвољан ординал за који је $\alpha \leqslant \beta < \mu$. Према дефиницији супремума, постоји ординал $\gamma \in S$ такав да је $\gamma > \beta$. Из $\gamma \in S \subseteq D$ следи да $\gamma \in D$, па због $\alpha < \gamma$ важи $\gamma \in C_\alpha$. Дакле, скуп $C_\alpha \cap S$ је непразан подскуп од C_α чији је супремум μ, па важи $\mu \in C_\alpha$. $\Box$

1.6 Стационарни скупови

Нека је κ бесконачан кардинал. За скуп $S \subseteq \kappa$ кажемо да је *стационаран у κ* ако има непразан пресек са сваким затвореним неограниченим подскупом од κ.

Теорема 47 *Нека је κ бесконачан кардинал и S стационаран скуп у κ. Тада за свако S' за које је $S \subseteq S' \subseteq \kappa$ важи да је скуп S' стационаран у κ. За ма које подскупове S_1 и S_2 скупа κ такве да је скуп $(S_1 \setminus S_2) \cup (S_2 \setminus S_1)$ ограничен у κ важи да је S_1 стационаран у κ акко је S_2 стационаран у κ.*

Доказ: Први део следи из чињенице да је надскуп непразног скупа непразан скуп, а други део из првог дела и теореме 43. $\Box$

Теорема 48 *Нека је κ бесконачан кардинал непребројиве кофиналности. Тада је сваки затворен и неограничен скуп у κ стационаран у κ и пресек стационарног скупа у κ и затвореног неограниченог скупа у κ је стационаран скуп у κ.*

Доказ: Следи из чињенице да је пресек два затворена неограничена скупа затворен неограничен скуп. $\Box$

Теорема 49 *Нека је κ бесконачан кардинал непребројиве кофиналности, S стационаран скуп у κ и F скуп кардиналности мање од $\mathrm{cf}(\kappa)$ такав да важи $\bigcup F = S$. Тада у скупу F постоји скуп који је стационаран у κ. Ако је A било који скуп кардиналности мање од $\mathrm{cf}(\kappa)$, онда за свако $f : S \longrightarrow A$ постоји $a \in A$ такво да је скуп $f^{-1}[\{a\}]$ стационаран у κ.*

Доказ: Ако скупу F не припада ниједан скуп који је стационаран у κ, онда се сваком скупу $X \in F$ може придружити скуп $C_X \subseteq \kappa$ који је затворен и неограничен у κ и који је дисјунктан са X. Нека је $C = \bigcap_{X\in F} C_X$. Скуп C је затворен и неограничен у κ и за свако $X \in F$ важи $C \cap X \subseteq C_X \cap X = \emptyset$, а самим тим и $C \cap S = C \cap \bigcup F = \emptyset$ супротно стационарности скупа S. Преостали део тврђења следи из претходно доказаног за $F = \{f^{-1}[\{a\}] \mid a \in A\}$. $\Box$

Теорема 50 *Нека је κ бесконачан кардинал непребројиве кофиналности, C затворен неограничен скуп у κ и λ регуларан кардинал мањи од $\mathrm{cf}(\kappa)$. Тада је скуп $S = \{\alpha \in C \setminus \omega \mid \bigcup \alpha = \alpha,\, \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\}$ стационаран подскуп од κ.*

Доказ: Претпоставимо да је C' затворен и неограничен скуп у κ такав да је $S \cap C' = \emptyset$ и изведимо противречност. Скуп $C \cap C'$ је затворен неограничен у κ, па у њему можемо наћи ограничен растући низ дужине λ. Супремум тог низа је елемент скупа $C \cap C'$ кофиналности λ, а самим тим и скупа $S \cap C'$. $\Box$

Нека је κ бесконачан кардинал и S неограничен подскуп од κ. За функцију $f : S \longrightarrow \kappa$ кажемо да је *регресивна* ако почев однекле важи $f(\alpha) < \alpha$.

Теорема 51 *Нека је κ бесконачан кардинал и $S \subseteq \kappa$. Ако скуп S није стационаран у κ онда постоји регресивна функција $f : S \longrightarrow \kappa$, која је неограничена и почев однекле неопадајућа и која самим тим не може бити константна ни на једном неограниченом подскупу. Ако је κ непребројив регуларан кардинал и ако је скуп S стационаран у κ, онда за сваку регресивну функцију $f : S \longrightarrow \kappa$ постоји скуп $S' \subseteq S$, који је стационаран у κ и на коме је функција f константна.*

Доказ: Ако скуп S није стационаран у κ, онда можемо изабрати неки скуп C који је затворен неограничен у κ и такав да је $S \cap C = \emptyset$. Функција $f : S \longrightarrow \kappa$ дефинисана са

$$f(\alpha) = \begin{cases} \sup(\alpha \cap C), & \text{ако је } \alpha \cap C \neq \emptyset, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

је због затворености скупа C и дисјунктности скупова S и C регресивна. Функција f је неограничена због неограничености скупова S и C и очигледно је неопадајућа, па није константна ни на једном неограниченом скупу. Нека је κ непребројив регуларан кардинал, скуп $S \subseteq \kappa$ стационаран у κ и $f : S \longrightarrow \kappa$ регресивна функција. Нека је $\alpha_0 < \kappa$ такво да за $S' = S \setminus \alpha_0$ важи $(\forall \alpha \in S') f(\alpha) < \alpha$.

Скуп S' је очигледно стационаран. Претпоставимо да f није константна ни на једном подскупу од S' који је стационаран у κ. Тада за свако $\alpha < \kappa$ постоји скуп C_α, који је затворен и неограничен у κ и такав да је $f^{-1}[\{\alpha\}] \cap C_\alpha = \emptyset$.

Нека је $C = \Delta_{\alpha<\kappa} C_\alpha = \{\alpha < \kappa \mid (\forall \beta < \alpha) \alpha \in C_\beta\}$ дијагонални пресек фамилије $(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$. Скуп C је затворен неограничен у κ, па можемо одабрати неко $\alpha \in S' \cap C$. За $\beta = f(\alpha)$ важи $\alpha \in f^{-1}[\{\beta\}]$, као и $\beta < \alpha$, а самим тим и $\alpha \in f^{-1}[\{\beta\}] \cap C_\beta$ супротно начину избора скупа C_β. $\Box$

Теорема 52 *Нека је κ непребројив регуларан кардинал, S стационаран скуп у κ, t функција транзитивног колапса скупа S и S_0 подскуп од S, који је такође стационаран у κ. Тада је и скуп $t[S_0]$ стационаран у κ.*

Доказ: Индукцијом по $\alpha \in S$ се доказује да је $t(\alpha) \leqslant \alpha$ за све $\alpha \in S$. Скуп L свих $\alpha \in S$ таквих да је $t(\alpha) < \alpha$ је нестационаран на основу теореме 51. Нека је C_0 затворен неограничен скуп такав да је $L \cap C_0 = \emptyset$.

Изаберимо произвољан затворен и неограничен скуп C. Тада је скуп $C_1 = C_0 \cap C$ такође затворен и неограничен, па можемо одабрати неко $\alpha \in S_0 \cap C_1$. Тада важи $\alpha = t(\alpha) \in t[S_0] \cap C$. $\Box$

Теорема 53 *Нека је κ непребројив кардинал непребројиве кофиналности, $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$ регуларан кардинал и нека је C било који затворен и неограничен скуп у κ. Тада је скуп*

$$S = \{\alpha \in C \mid \alpha > 0, \bigcup \alpha = \alpha, \mathrm{cf}(\alpha) = \lambda\}$$

стационаран у κ.

Доказ: Нека је C' било који затворен и неограничен скуп у κ. Тада је скуп $C \cap C'$ затворен и неограничен. Дефинишимо низ ординала $(\mu_\alpha)_\alpha$ на следећи начин: $\mu_0 = \min(C \cap C')$ За $0 < \alpha < \lambda$ нека је μ_α најмањи елемент скупа $C \cap C'$ који је већи од μ_β за све $\beta < \alpha$. Дефиниција је коректна јер је $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$, па је за свако $\beta < \alpha$ скуп $\{\mu_\alpha \mid \alpha < \beta\}$ ограничен подскуп од κ. Такође, $\{\mu_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ је ограничен скуп у κ, односно за $\nu = \sup_{\alpha<\lambda} \mu_\alpha$ важи $\nu < \kappa$. Из затворености скупа $C \cap C'$ следи да важи $\nu \in C \cap C'$. Пошто је низ $(\mu_\alpha)_\alpha$ растући, важи $\mathrm{cf}(\nu) = \mathrm{cf}(\lambda) = \lambda$, па је $\nu \in S \cap C'$. $\Box$

1.7 Δ-систем лема

Под *Δ-системом са кореном* r подразумевамо било који скуп функција F такав да за ма које различите функције f_1 и f_2 из F важи

$$(\forall x \in \mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2)) f_1(x) = f_2(x) \quad \wedge \quad f_1 \cap f_2 = r.$$

Значај Δ-система истиче следећа теорема:

Теорема 54 (*Δ-систем лема*) *Нека је λ било који бесконачан кардинал и нека су κ и θ регуларни непребројиви кардинали за које важи*

$$\kappa^{<\lambda} = \kappa \geqslant \lambda, \quad \theta = \kappa^+.$$

Нека су X, Y и D ма који скупови такви да је $|Y| \leqslant \kappa$ и $|D| = \theta$. Нека је p функција која сваком $x \in D$ придружује по неку парцијалну функцију из X у Y кардиналности мање од λ. Тада постоји скуп $D' \subseteq D$ еквипотентан са D, такав да скуп $p[D']$ образује Δ-систем. Уколико је $D \subseteq \theta$ стационаран у θ, онда се скуп D' може одабрати тако да такође буде стационаран у θ.

Доказ: Без умањења општости можемо претпоставити да је D подскуп скупа θ, који је стационаран у θ. Због

$$|\bigcup_{x\in D} \mathrm{dom}(p(x))| \leqslant \sum_{x\in D} |\mathrm{dom}(p(x))| \leqslant \sum_{x\in D} \kappa = \theta\kappa = \theta,$$

без умањења општости, можемо претпоставити да је $X = \theta$. Скуп

$$E' := \{\eta < \theta \mid (\forall \alpha < \eta) \sup \mathrm{dom}(p(\alpha)) < \eta\}$$

је затворен и неограничен као дијагонални пресек фамилије

$$E_\alpha := \{\eta < \theta \mid \sup \mathrm{dom}(p(\alpha)) < \eta\}$$

затворених и неограничених скупова. Из затворености и неограничености скупа E' следи да је скуп

$$E := \{\eta \in E' \mid \mathrm{cf}(\eta) = \kappa\}$$

стационаран. Дефинишимо $f : E \longrightarrow \theta$ са $f(\alpha) = \sup(\mathrm{dom}(p(\alpha)) \cap \alpha)$. За свако $\alpha \in E$ важи $\mathrm{cf}(\alpha) = \kappa$, па због $|\mathrm{dom}(p(\alpha)) \cap \alpha| \leqslant |\mathrm{dom}(p(\alpha))| \leqslant \lambda < \kappa$ важи $|\mathrm{dom}(p(\alpha)) \cap \alpha| < \kappa$, што заједно са $\mathrm{dom}(p(\alpha)) \cap \alpha \subseteq \alpha$ повлачи да важи $\sup(\mathrm{dom}(p(\alpha)) \cap \alpha) < \alpha$, односно $f(\alpha) < \alpha$. На основу леме о притискању на доле, постоје стационаран скуп $S \subseteq E$ и неко $\zeta < \theta$ тако да важи

$$(\forall \alpha \in S) \sup(\mathrm{dom}(p(\alpha)) \cap \alpha) < \zeta.$$

Због $\zeta < \theta = \kappa^+$ важи $|\zeta| \leqslant \kappa$. Без умањења општости можемо претпоставити да је $\mathrm{cf}(\zeta) = \kappa$. Нека је F скуп свих парцијалних функција g из ζ у Y таквих да је $|\mathrm{dom}(g)| < \kappa$. Важи

$$|\{u \subseteq \zeta \mid |u| < \lambda\}| = |\{u \subseteq \kappa \mid |u| < \lambda\}| \leqslant \sum_{\mu\in\lambda} \kappa^{|\mu|} \leqslant \lambda\kappa = \kappa.$$

За скуп u такав да је $|u| < \lambda$ важи

$$|Y^u| \leqslant \kappa^{<\lambda} = \kappa.$$

Према томе, важи

$$|F| = |\bigcup\{Y^u \mid u \subseteq \zeta \wedge |u| < \lambda\}| \leqslant \kappa^2 = \kappa < \theta.$$

Сваком $r \in F$ придружимо скуп

$$A_r := \{\xi \in S \,|\, p(\xi) \restriction \xi = r\}.$$

Очигледно важи $S = \bigcup_{r \in F} A_r$, па на основу регуларности и непребројивости кардинала θ, можемо одабрати неко $r \in F$ тако да скуп A_r буде стационаран. Нека је $D' := A_r$.

Нека су $\xi, \eta \in A_r$ такви да је $\xi < \eta$ и нека је $\alpha \in \mathrm{dom}(p(\xi)) \cap \mathrm{dom}(p(\eta))$. Из $\xi < \eta \in A_r \subseteq S \subseteq E$ следи да је $\sup \mathrm{dom}(p(\xi)) < \eta$, а самим тим и $\alpha < \eta$, па $\alpha \in \mathrm{dom}(p(\eta)) \cap \eta$. Из $\xi, \eta \in A_r$ следи да је $\mathrm{dom}(p(\eta)) \cap \eta = \mathrm{dom}(r) = \mathrm{dom}(p(\xi)) \cap \xi$. Према томе, $\alpha \in \mathrm{dom}(r)$ и $\alpha \in \mathrm{dom}(p_\xi) \cap \xi$. На основу тога и $\xi, \eta \in A_r$ следи да важи $p(\xi)(\alpha) = r(\alpha) = p(\eta)(\alpha)$. Дакле, $p(\xi) \cap p(\eta) = r$, па скуп $\{p(\xi) \,|\, \xi \in D'\}$ образује Δ-систем са кореном r. $\Box$

Следећа теорема олакшава примену Δ-систем леме.

Теорема 55 *Нека је λ било који кардинал већи од нуле. Тада важи следеће:*

- *За ма који бесконачан кардинал μ важи $(2^{\mu\lambda})^\lambda = 2^{\mu\lambda} > \mu$.*
- *Ако је κ бесконачан кардинал за који важи $\kappa^\lambda = \kappa$, онда је $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+$, као и $(2^\kappa)^\lambda = 2^\kappa$.*

Посебно, за ма који бесконачан кардинал λ важи да је класа свих кардинала κ таквих да је $\kappa^\lambda = \kappa$ кофинална и затворена за операције $\kappa \mapsto \kappa^+$ и $\kappa \mapsto 2^\kappa$.

Доказ: За ма који бесконачан кардинал μ важи

$$(2^{\mu\lambda})^\lambda = 2^{\mu\lambda^2} = 2^{\mu\lambda} \geqslant 2^\mu > \mu.$$

За ма који бесконачан кардинал $\kappa \leqslant \lambda$ важи $\kappa^\lambda = 2^\lambda > \lambda \geqslant \kappa$, а самим тим и $\kappa^\lambda > \kappa$. Другим речима, за ма који бесконачан кардинал κ такав да је $\kappa^\lambda = \kappa$, важи $\kappa > \lambda$.

Нека је κ бесконачан кардинал такав да је $\kappa^\lambda = \kappa$. Према претходном је $\kappa > \lambda$, па важи

$$(2^\kappa)^\lambda = 2^{\kappa\lambda} = 2^\kappa.$$

Из $\mathrm{cf}(\kappa)^+ = \kappa^+ > \lambda$ и $\kappa^\lambda = \kappa < \kappa^+$ следи $(\kappa^+)^\lambda = \kappa^+$. $\Box$

Глава 2

Модели теорије скупова

2.1 Појам модела

Нека је $\mathcal{L}$ језик првог реда коме припада барем бинарни релацијски симбол $\in$. Надаље ћемо разматрати само такве језике. Под *класним моделом* $\mathfrak{M}$ језика $\mathcal{L}$ подразумевамо непразну класу **M** снабдевену интерпретацијама симбола језика $\mathcal{L}$ тако да важи следеће:

- Интерпретација симбола константе је неки елемент класе **M**.
- Интерпретација операцијског знака арности n је n-арна класна операција у односу на коју је класа **M** затворена и која је дефинабилна са параметрима $p_1, \ldots, p_n$.
- Интерпретација релацијског знака арности n је n-арна класна релација и која је дефинабилна са параметрима $p_1, \ldots, p_n$.
- Ако интерпретацију бинарног релацијског знака $\in$ у моделу $\mathfrak{M}$ означимо са $\in^{\mathfrak{M}}$, онда важи

$$(\forall b \in \mathbf{M})(\exists A)(\forall a \in \mathbf{M})(a \in^{\mathfrak{M}} b \Rightarrow a \in A).$$

При томе, класу **M** зовемо *доменом класног модела* $\mathfrak{M}$ у ознаци $\mathrm{dom}(\mathfrak{M})$, док интерпретацију симбола s језика $\mathcal{L}$ у класном моделу $\mathfrak{M}$ обележавамо са $s^{\mathfrak{M}}$. Дакле,

$$(\forall a, b \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}))(\mathfrak{M} \models a \in b \;\;\Leftrightarrow\;\; a \in^{\mathfrak{M}} b)$$

$$(\forall a, b \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}))(\mathfrak{M} \models a = b \;\;\Leftrightarrow\;\; a = b)$$

За класни модел кажемо да је *модел* ако му је домен скуп. За класни модел кажемо да је *добро заснован* ако је таква интерпретација релацијског знака $\in$ на њему, односно да је *екстензионалан* ако задовољава аксиому екстензионалности.

Под *класним $\in$-моделом* подразумевамо класни модел $\mathfrak{M}$ на ме се релација $\in$ тумачи управо као релација $\in$ на класи $\mathrm{dom}(\mathfrak{M})$, односно

$$(\forall a, b \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}))((a \in b)^{\mathfrak{M}} \;\Leftrightarrow\; a \in b).$$

Сваки класни $\in$-модел је добро заснован. Класни $\in$ модел $\mathfrak{M}$ је екстензионалан акко за ма које различите $a, b \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M})$ постоји $c \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M})$ за које важи тачно једно од $c \in a$ и $c \in b$. Класни модел који је скуп називамо *$\in$-моделом*.

Под *транзитивним класним моделом* подразумевамо класни $\in$-модел $\mathfrak{M}$ такав да му је домен транзитиван. Транзитиван класни модел је увек добро заснован и екстензионалан. Према теореми о транзитивном колапсу, класни модел је изоморфан транзитивном акко је добро заснован и екстензионалан и у том случају је изоморфизам јединствен. Одатле следи да су различити транзитивни класни модели увек неизоморфни. Транзитиван класни модел који је скуп зовемо транзитивним моделом.

2.2 Релација задовољења на моделима

Нека је $\mathcal{L}$ језик првог реда који садржи само бинарни релацијски знак $\in$. Тада дефинишемо функцију $\mathrm{Val}(t, v, \mathfrak{M})$ вредности терма t при валуацији v у моделу $\mathfrak{M}$ рекурзивно по сложености терма на следећи начин:

- Ако је x променљива, онда је $\mathrm{Val}(x, v, \mathfrak{M}) = v(x)$.
- Ако је c симбол константе, онда је $\mathrm{Val}(c, v, \mathfrak{M}) = c^{\mathfrak{M}}$.
- Ако је f операцијски симбол арности n и $t_1, \ldots, t_n$ терми, онда је

$$\mathrm{Val}(f(t_1, \ldots, t_n), v, \mathfrak{M}) = f^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}(t_1, v, \mathfrak{M}), \ldots, \mathrm{Val}(t_n, v, \mathfrak{M})).$$

Валуацију модела $\mathfrak{M}$ дефинишемо као пресликавање скупа ω у скуп $\mathrm{dom}(\mathfrak{M})$. За валуацију v модела $\mathfrak{M}$, променљиву x и $a \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M})$ са v_a^x означавамо валуацију модела $\mathfrak{M}$ такву да је $v_a^x(x) = a$ и $v_a^x(y) = v(y)$ за сваку променљиву y која је различита од x. Дефинишимо релацију задовољења $\mathrm{Sat}(\varphi, v, \mathfrak{M})$ формуле φ при валуацији v у моделу $\mathfrak{M}$.

- Ако су t_1 и t_2 терми, онда је

$$\mathrm{Sat}(t_1 = t_2, v, \mathfrak{M}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Val}(t_1, v, \mathfrak{M}) = \mathrm{Val}(t_2, v, \mathfrak{M}).$$

- Ако је R релацијски знак арности n и ако су $t_1, \ldots, t_n$ терми, онда је

$$\mathrm{Sat}(R(t_1, \ldots, t_n), v, \mathfrak{M}) \quad \Leftrightarrow \quad R^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}(t_1, v, \mathfrak{M}), \ldots, \mathrm{Val}(t_n, v, \mathfrak{M})).$$

- $\mathrm{Sat}(\neg\psi, v, \mathfrak{M}) \quad \Leftrightarrow \quad \neg\mathrm{Sat}(\psi, v, \mathfrak{M})$.
- $\mathrm{Sat}((\psi_1 \wedge \psi_2), v, \mathfrak{M}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Sat}(\psi_1, v, \mathfrak{M}) \wedge \mathrm{Sat}(\psi_2, v, \mathfrak{M})$.
- $\mathrm{Sat}((\forall x)\psi, v, \mathfrak{M}) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall a \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}))\mathrm{Sat}(\psi, v_a^x, \mathfrak{M})$.

Ово је рекурзивна дефиниција у односу на поредак $\langle \varphi', v' \rangle < \langle \varphi'', v'' \rangle$ акко је φ' права потформула формуле φ''. Пошто не постоји бесконачан опадајући низ формула и за дату формулу φ, валуацију v и модел $\mathfrak{M}$ испод пара $\langle \varphi, v \rangle$ се налазе парови облика $\langle \varphi', v' \rangle$, где је φ' једна од коначно много правих потформула формуле φ, а v' из скупа валуација над моделом $\mathfrak{M}$, ова дефиниција је коректна.

2.3 Кодирање формула и рекурзивност језика

Под *рекурзивним кодирањем језика* $\mathcal{L}$ подразумевамо торку $\langle c, f, r, ar_f, ar_r\rangle$ такву да важи

1) c је инјекција скупа симбола језика $\mathcal{L}$ константи у скуп ω.

2) f је инјекција скупа операцијских симбола језика $\mathcal{L}$ у скуп ω.

3) r је инјекција скупа релацијских симбола језика $\mathcal{L}$ у скуп ω.

4) $ar_f : \mathrm{ran}(f) \longrightarrow \omega$ и функција арности на скупу операцијских знакова језика $\mathcal{L}$ једнака $ar_f \circ f$.

5) $ar_r : \mathrm{ran}(f) \longrightarrow \omega$ и функција арности на скупу релацијских знакова језика $\mathcal{L}$ једнака $ar_r \circ f$.

6) Скупови $\mathrm{ran}(c)$, $\mathrm{ran}(f)$ и $\mathrm{ran}(r)$ су почетни комади скупа ω.

7) Функције ar_f и ar_r су рекурзивне.

Под *кодирањем језика* $\mathcal{L}$ подразумевамо торку $\langle c, f, r, ar_f, ar_r\rangle$ такву да важе услови 1-6. Следећи услови су еквивалентни:

- Језик $\mathcal{L}$ је највише пребројив.
- Језик $\mathcal{L}$ има кодирање.
- Постоји торка $\langle c, f, r, ar_f, ar_r\rangle$ таква да важе услови 1-5.

За језик $\mathcal{L}$ кажемо да је *рекурзиван* ако постоји барем једно рекурзивно кодирање језика $\mathcal{L}$. Очигледно важи да је језик $\mathcal{L}$ рекурзиван акко постоји торка $\langle c, f, r, ar_f, ar_r\rangle$ таква да важе услови 1-5 и услов 7, при чему су скупови $\mathrm{ran}(f)$ и $\mathrm{ran}(r)$ рекурзивни.

За свако $n \in \omega \setminus \{0\}$ дефинишимо бијекцију p_n скупа ω^n на скуп ω на следећи начин: p_1 је идентитет, p_2 је Канторов полином, а за $n \geqslant 3$ је $p_n(x_1, \ldots, x_n) = p_2(p_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$.

Дефинишимо инјекције $x : \mathrm{ran}(c) \longrightarrow \omega$ и $y : \omega \longrightarrow \omega$ на следећи начин: Ако је скуп симбола константи језика $\mathcal{L}$ коначан и има m елемената, онда нека је $x(a) = a$ и $y(a) = m + a$. Ако је скуп симбола константи језика $\mathcal{L}$ бесконачан, онда нека је $x(a) = 2a$ и $y(k) = 2a+1$. У оба случаја важи $\mathrm{ran}(x) \sqcup \mathrm{ran}(z) = \omega$.

Дефинишимо бијекцију z на скуп ω на следећи начин: Ако је скуп операцијских симбола језика $\mathcal{L}$ коначан и има n елемената, онда нека је $z : (n+1) \times \omega \longrightarrow \omega$ дефинисано са $z(a, b) = (n+1)b+a$. Ако је скуп операцијских симбола језика $\mathcal{L}$ бесконачан, онда нека је $z : \omega^2 \longrightarrow \omega$ Канторов полином. Нека је $\langle c, f, r, ar_f, ar_r\rangle$ кодирање језика $\mathcal{L}$ Дефинишимо *кодирање термова језика* $\mathcal{L}$.

- Ако је s симбол константе језика $\mathcal{L}$, онда је $\ulcorner s \urcorner = x(c(s))$.
- Ако је v_i променљива, онда је $\ulcorner v_i \urcorner = y(z(0, i))$.
- Ако је s операцијски знак језика $\mathcal{L}$ арности d и ако су $t_1, \ldots, t_d$ терми језика $\mathcal{L}$, онда је $\ulcorner s(t_1, \ldots, t_d) \urcorner = y(z(f(s) + 1, p_n(\ulcorner t_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner t_d \urcorner)))$.

Овако изабрано кодирање термова је бијективно. Дефинишимо бијекцију e на скуп ω на следећи начин: Ако је скуп релацијских симбола језика $\mathcal{L}$ коначан и има k елемената, онда нека је

$$e : (k+1) \times \omega \longrightarrow \omega, \quad e(a, b) = (k+1)b + a.$$

Ако је скуп операцијских симбола језика $\mathcal{L}$ бесконачан, онда нека је $e : \omega^2 \longrightarrow \omega$ Канторов полином. Дефинишимо *кодирање формула језика* $\mathcal{L}$ на следећи начин:

- Ако су t_1 и t_2 терми језика $\mathcal{L}$, онда је $\ulcorner t_1 = t_2 \urcorner = 4e(0, p_2(\ulcorner t_1 \urcorner, \ulcorner t_2 \urcorner))$.
- Ако је s релацијски знак језика $\mathcal{L}$ арности d и ако су $t_1, \ldots, t_d$ терми језика $\mathcal{L}$, онда је
$$\ulcorner s(t_1, \ldots, t_d) \urcorner = 4e(f(s) + 1, p_n(\ulcorner t_1 \urcorner, \ldots, \ulcorner t_d \urcorner)).$$
- За ма коју формулу φ језика $\mathcal{L}$ је $\ulcorner \neg\varphi \urcorner = 4\ulcorner \varphi \urcorner + 1$.
- За ма које формуле φ_1 и φ_2 језика $\mathcal{L}$ је $\ulcorner (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \urcorner = 4p_2(\ulcorner \varphi_1 \urcorner, \ulcorner \varphi_2 \urcorner) + 2$.
- За ма коју променљиву v_i и формулу φ је $\ulcorner (\forall v_i)\varphi \urcorner = 4p_2(i, \ulcorner \varphi \urcorner) + 3$.

Овако изабрано кодирање формула је бијективно. На овај начин смо сваком кодирању језика придружили бијективна кодирања термова и формула. Притом су рекурзивном кодирању језика придружени кодирања термова и формула тако да уобичајене операције над термима и формулама при тим кодирањима буду рекурзивне. Рецимо, тада постоје алгоритамски одговори на следећа питања:

- Шта је структура терма са датим кодом? Другим речима:
  - Да ли је дати број код терм константе и ако јесте, шта је код константе од које потиче?
  - Да ли је дати број код терм променљиве и ако јесте, од које променљиве потиче?
  - Да ли је дати број код сложеног терма и ако јесте, шта је код главног операцијског знака, шта му је арност и шта су кодови термова операнада?
- Шта је структура формуле са датим кодом? Другим речима:
  - Да ли је дати број код једнакосне формуле и ако јесте, шта су кодови термова на левој, односно десној страни једнакости?
  - Да ли је дати број код релацијске формуле и ако јесте, шта је код одговарајућег релацијског знака, шта му је арност и шта су кодови термова операнада?
  - Да ли је дати број код негацијске формуле и ако јесте, шта је код негиране формуле?
  - Да ли је дати број код конјункцијске формуле и ако јесте, шта су кодови првог и другог конјункта?
  - Да ли је дати број код квантификацијске формуле и ако јесте, која је променљива квантификована и шта је код квантификоване формуле?
- Шта је скуп слободних променљивих терма са датим кодом?
- Шта је скуп слободних променљивих формуле са датим кодом?
- Шта је скуп свих променљивих које се појављују у формули са датим кодом?
- Шта је код терма који се добија супституцијом коначног скупа променљивих термима са датим кодовима у терму са датим кодом?
- Шта је код формуле која се добија супституцијом коначног скупа променљивих термима са датим кодовима у формули са датим кодом?

Очигледно, сваки коначан језик има рекурзивно кодирање и сваки језик који има рекурзивно кодирање је највише пребројив. Такође, сваки највише пребројив језик је могуће кодирати ма барем један начин. Докажимо да постоји пребројив језик који нема рекурзивно кодирање.

Нека је $(f_n)_{n\in\omega}$ низ свих унарних, неограничених тоталних израчунљивих функција. За произвољне $m, n \in \omega$ дефинишимо $s(n)$ као $n+1$-ви по величини елемент скупа $f_n[\omega]$, то јест

$$s(n) \in f_n[\omega], \quad |s(n) \cap f_n[\omega]| = n.$$

Нека је $g : \omega \longrightarrow \omega$ растућа функција таква да важи $(\forall n) g(n) > s(n)$. Претпоставимо да је $(R_n)_{n\in\omega}$ низ релацијских симбола таквих да за свако n важи да је арност симбола R_n једнака $g(n)$ и нека за свако n важи је $\pi(n)$ код релацијског знака R_n. Нека је n такво да је $f_n = g \circ \pi$. Тада важи да је $n+1$-ва вредност скупа $g[\pi[\omega]] \subseteq g[\omega]$ већа или једнака од $n+1$-ве вредности скупа $g[\omega]$, која је једнака $g(n)$, што је веће од $s(n)$. То је у супротности са начином избора броја n.

2.4 Релација задовољења на класним моделима

2.4.1 Неуспех дефинисања релације на класним моделима за све формуле

Релацију задовољења на класним моделима не можемо дефинисати аналогно релацији задовољења на моделима зато што класа валуација датог класног модела није скуп, па поредак преко којег се врши рекурзивна дефиниција није добро заснован јер испод дате тројке имамо праву класу тројки.

Када би постојала релација задовољења на класном моделу **V**, односно формула $\mathrm{Sat}(x)$ таква да је за сваку реченицу φ испуњено

$$\mathrm{Sat}(\ulcorner\varphi\urcorner) \Leftrightarrow \varphi,$$

онда би постојала формула $F(x)$ таква да за сваку формулу $\psi(x)$ чија је једина евентуална слободна променљива x важи

$$F(\ulcorner\psi(x)\urcorner) \Leftrightarrow \neg\mathrm{Sat}(\ulcorner\psi(\ulcorner\psi(x)\urcorner)\urcorner),$$

а самим тим и

$$F(\ulcorner\psi(x)\urcorner) \Leftrightarrow \neg\psi(\ulcorner\psi(x)\urcorner),$$

као и

$$F(\ulcorner F(x)\urcorner) \Leftrightarrow \neg F(\ulcorner F(x)\urcorner),$$

што је противречност. То значи да није могуће дефинисати једну релацију задовољења на класном моделу за све формуле. Зато ћемо увести бесконачну хијерархију формула, која исцрпљује скуп свих формула, а онда на сваком нивоу хијерархије релацију задовољења на класним моделима за тај ниво хијерархије формула.

2.4.2 Хијерархија формула

Хијерархију формула језика $\mathcal{L}$ дефинишемо на следећи начин: Скуп $\Pi_0(\mathcal{L})$ дефинишемо као скуп формула језика $\mathcal{L}$ такав да за ма коју формулу φ језика $\mathcal{L}$ важи следеће: $\varphi \in \Pi_0(\mathcal{L})$ ако важи једно од

- Формула φ је атомска.
- За неку формулу $\psi \in \Pi_0(\mathcal{L})$ важи $\varphi = \neg\psi$.
- За неке формуле $\varphi_1, \varphi_2 \in \Pi_0(\mathcal{L})$ важи $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.
- За неку променљиву x, терм t и формулу $\psi \in \Pi_0(\mathcal{L})$ важи $\varphi = (\forall x \in t)\psi$.

Другим речима, $\Pi_0(\mathcal{L})$ је инклузијски најмањи скуп свих формула језика који садржи све атомске формуле, затворен је за Буловске комбинације и ограничену квантификацију. Скуп $\Sigma_0(\mathcal{L})$ дефинишемо као скуп који је једнак $\Pi_0(\mathcal{L})$.

Претпоставимо да су скупови $\underline{\Sigma_n(\mathcal{L})}$ и $\underline{\Pi_n(\mathcal{L})}$ за неко $n \in \omega$ дефинисани и дефинишимо скупове $\Sigma_{n+1}(\mathcal{L})$ и $\Pi_{n+1}(\mathcal{L})$ формула језика $\mathcal{L}$. Формула φ језика $\mathcal{L}$ припада скупу $\Pi_{n+1}(\mathcal{L})$ ако важи једно од следећег:

- $\varphi \in \Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})$.
- За неку формулу $\psi \in \Sigma_{n+1}(\mathcal{L})$ важи $\varphi = \neg\psi$.
- За неке формуле $\varphi_1, \varphi_2 \in \Pi_{n+1}(\mathcal{L})$ важи $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.
- За неку промењљиву x и формулу $\psi \in \Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_{n+1}(\mathcal{L})$ важи $\varphi = (\forall x)\psi$.

Формула φ језика $\mathcal{L}$ припада скупу $\Sigma_{n+1}(\mathcal{L})$ ако важи једно од следећег:

- $\varphi \in \Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})$.
- За неку формулу $\psi \in \Pi_{n+1}(\mathcal{L})$ важи $\varphi = \neg\psi$.
- За неке формуле $\varphi_1, \varphi_2 \in \Sigma_{n+1}(\mathcal{L})$ важи $\varphi = (\varphi_1 \wedge \varphi_2)$.
- За неку промењљиву x, терм t и формулу $\psi \in \Sigma_{n+1}(\mathcal{L})$ важи $\varphi = (\forall x \in t)\psi$.

За $n \in \omega$ са $\Delta_n(\mathcal{L})$ означаваћемо скуп $\Sigma_n(\mathcal{L}) \cap \Pi_n(\mathcal{L})$. Очигледно за свако n важи

$$\Pi_n(\mathcal{L}) \cup \Sigma_n(\mathcal{L}) \subseteq \Pi_{n+1}(\mathcal{L}) \cap \Sigma_{n+1}(\mathcal{L}),$$

као и да је скуп свих формула језика $\mathcal{L}$ једнак $\bigcup_{n\in\omega} \Sigma_n(\mathcal{L})$, односно $\bigcup_{n\in\omega} \Pi_n(\mathcal{L})$. При рекурзивном кодирању језика $\mathcal{L}$, скупови $\Sigma_n(\mathcal{L})$, $\Pi_n(\mathcal{L})$ и $\Delta_n(\mathcal{L})$ су до на идентификацију формула и њихових кодова рекурзивни.

Такође, ако је $\varphi \in \Sigma_{n+1}(\mathcal{L})$ и x нека промењљива, онда формула[1] $(\exists x)\varphi$ такође припада скупу $\Sigma_{n+1}(\mathcal{L})$. Уколико је $\mathcal{L}$ језик који се састоји само од бинарног релацијског знака $\in$, онда уместо $\Sigma_n(\mathcal{L}), \Pi_n(\mathcal{L})$ и $\Delta_n(\mathcal{L})$ пишемо краће Σ_n, Π_n и Δ_n. Ради лакшег писања, ознака попут $\varphi(x_1, \ldots, x_d)$ ће означавати формулу која нема слободних промељивих осим наведених и и параметарских промењљивих $p_1, \ldots, p_n$ у коришћеним дефиницијама, при чему међу промењљивама $x_1, \ldots, x_d$ нема промењљивих $p_1, \ldots, p_n$.

Теорема 56 *За $n \in \omega$ са ZF_n означимо теорију која обухвата све ZF аксиоме осим схема аксиоме замене и још обухвата оне инстанце схема аксиоме замене које су у скупу $\Sigma_n \cup \Pi_n$.*

Нека је $n \in \omega$. Тада постоји $m > n$ такво да важи следеће: Нека је $\mathcal{L}$ било који језик и нека је T теорија језика $\mathcal{L}$, која је дефинициона екстензија теорије ZF_m, при чему се сваки од симбола језика $\mathcal{L}$ различит од $\in$ дефинише у теорији ZF_m дефиниционом формулом из скупа Δ_m. За ма коју формулу φ језика $\mathcal{L}$ и за ма коју променљиву u која се не јавља слободно у формули φ важи

- *Ако $\varphi \in \Pi_{n+1}(\mathcal{L})$, онда постоји формула $\psi \in \Sigma_n(\mathcal{L})$ таква да важи $T \vdash \varphi \Leftrightarrow (\forall u)\psi$.*
- *Ако $\varphi \in \Sigma_{n+1}(\mathcal{L})$, онда постоји формула $\psi \in \Pi_n(\mathcal{L})$ таква да важи $T \vdash \varphi \Leftrightarrow \neg(\forall u)\neg\psi$.*

Доказ: Доказ изводимо индукцијом по сложености формуле $\varphi(\bar{x})$. Без умањења општости можемо претпоставити да се промењљива u не појављује у формули $\varphi(\bar{x})$. Претпоставимо најпре да формула $\varphi(\bar{x})$ припада скупу $\Pi_{n+1}(\mathcal{L})$.

[1] Јер се дефинише као формула $\neg(\forall x)\neg\varphi$.

- Ако $\varphi(\bar{x}) \in \Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})$, онда тврђење важи јер је $\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow (\forall u)\varphi(\bar{x})$ ваљана формула.

- Ако је $\varphi(\bar{x}) = \neg\theta(\bar{x})$ за $\theta(\bar{x}) \in \Sigma_{n+1}(\mathcal{L})$, онда по индуктивној претпоставци постоји формула $\chi(\bar{x}, u) \in \Pi_n(\mathcal{L})$ таква да $T \vdash (\psi(\bar{x}) \Leftrightarrow \neg(\forall u)\neg\chi(\bar{x}, u))$. Одатле следи да важи
$$T \vdash (\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow (\forall u)\neg\chi(\bar{x}, u)).$$

- Ако је $\varphi(\bar{x}) = (\theta_1(\bar{x}) \wedge \theta_2(\bar{x}))$ за $\theta_1(\bar{x}), \theta_2(\bar{x}) \in \Pi_{n+1}(\mathcal{L})$, онда по индуктивној претпоставци постоје формуле $\chi_1(\bar{x}, y), \chi_2(\bar{x}, z) \in \Sigma_n(\mathcal{L})$ такве да важи
$$T \vdash (\theta_1(\bar{x}) \Leftrightarrow (\forall y)\chi_1(\bar{x}, y)), \quad T \vdash (\theta_2(\bar{x}) \Leftrightarrow (\forall z)\chi_2(\bar{x}, z)).$$
Одатле следи да важи и $T \vdash (\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow (\forall u)(\chi_1(\bar{x}, u) \wedge \chi_2(\bar{x}, u)))$.

- Ако је $\varphi(\bar{x}) = (\forall y)\theta(\bar{x}, y)$ за $\theta(\bar{x}, y) \in \Pi_{n+1}(\mathcal{L})$, онда по индуктивној претпоставци постоји формула $\chi(\bar{x}, y, z) \in \Sigma_n(\mathcal{L})$ таква да важи $T \vdash (\theta(\bar{x}, y) \Leftrightarrow (\forall z)\chi(\bar{x}, y, z))$. Одатле следи да важи $T \vdash (\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow (\forall y, z)\chi(\bar{x}, y, z))$. Одатле и из теореме $(\forall y, z)(\exists u)(y, z \in u)$ следи да важи $T \vdash (\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow (\forall u)(\forall y \in u, z \in u)\chi(\bar{x}, y, z))$.

- Ако је $\varphi(\bar{x}) = (\forall y)\psi(\bar{x}, y)$ за $\psi(\bar{x}, y) \in \Sigma_n(\mathcal{L})$, онда на основу правила о замени везаних промењљивих важи $T \vdash (\varphi(x) \Leftrightarrow (\forall u)\psi(\bar{x}, u))$.

Претпоставимо сада да формула $\varphi(\bar{x}) \in \Sigma_{n+1}(\mathcal{L})$.

- Ако $\varphi(\bar{x}) \in \Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})$, онда тврђење важи јер је $\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow \neg(\forall u)\neg\varphi(\bar{x})$ ваљана формула.

- Ако је $\varphi(\bar{x}) = \neg\theta(\bar{x})$ за $\theta(\bar{x}) \in \Pi_{n+1}(\mathcal{L})$, онда по индуктивној претпоставци постоји формула $\chi(\bar{x}, u) \in \Sigma_n(\mathcal{L})$ таква да $T \vdash (\psi(\bar{x}) \Leftrightarrow (\forall u)\chi(\bar{x}, u))$. Одатле следи да важи
$$T \vdash (\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow \neg(\forall u)\neg\neg\chi(\bar{x}, u)).$$

- Ако је $\varphi(\bar{x}) = (\theta_1(\bar{x}) \wedge \theta_2(\bar{x}))$ за $\theta_1(\bar{x}), \theta_2(\bar{x}) \in \Sigma_{n+1}(\mathcal{L})$, онда по индуктивној претпоставци постоје формуле $\chi_1(\bar{x}, y), \chi_2(\bar{x}, z) \in \Pi_n(\mathcal{L})$ такве да важи
$$T \vdash (\theta_1(\bar{x}) \Leftrightarrow \neg(\forall y)\neg\chi_1(\bar{x}, y)), \quad T \vdash (\theta_2(\bar{x}) \Leftrightarrow \neg(\forall z)\neg\chi_2(\bar{x}, z)).$$
Одатле и из теореме $(\forall y, z)(\exists u)(y, z \in u)$ следи да важи и
$$T \vdash (\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow \neg(\forall u)\neg(\neg(\forall y \in u)\neg\chi_1(\bar{x}, y) \wedge \neg(\forall z \in u)\neg\chi_2(\bar{x}, z))).$$

- Ако за неки терм $t(\bar{x})$ важи $\varphi(\bar{x}) = (\forall y \in t(\bar{x}))\theta(\bar{x}, y)$ за $\theta(\bar{x}, y) \in \Pi_{n+1}(\mathcal{L})$, онда по индуктивној претпоставци постоји формула $\chi(\bar{x}, y, z) \in \Sigma_n(\mathcal{L})$ таква да важи
$$T \vdash (\theta(\bar{x}, y) \Leftrightarrow \neg(\forall z)\neg\chi(\bar{x}, y, z)).$$
Одатле следи да важи $T \vdash (\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow (\forall y \in t(\bar{x}))\neg(\forall z)\neg\chi(\bar{x}, y, z))$. Одатле, из одговарајућег примерка схема аксиоме замене[2] и из теореме $(\forall z)(\exists u)z \in u$ следи да важи
$$T \vdash (\varphi(\bar{x}) \Leftrightarrow \neg(\forall u)\neg(\forall y \in t(\bar{x}))\neg(\forall z \in u)\neg\chi(\bar{x}, y, z)).$$

[2] Сложеност потребне инстанце схема аксиоме сепарације у хијерархији зависи само од сложености у хијерархији формуле χ и дефиниционих формула симбола језика $\mathcal{L}$ различитих од $\in$, а који се појављују у терму t.

□

Доказ теореме 56 нам за дату формулу φ из одговарајуће класе и променљиву u која се у њој не појављује даје формулу ψ такође из одговарајуће класе такву да важи одговарајућа еквиваленција. Коришћењем тог пресликавања можемо свакој формули φ из одговарајуће класе придружити прву променљиву u која се у формули φ не појављује, а онда и формулу ψ из одговарајуће класе тако да важи одговарајућа еквиваленција. При рекурзивном кодирању језика, последња трансформација је рекурзивна до на идентификацију формула и њихових кодова.

Класне релације, односно класне операције које су дефинабилне $\Sigma_n(\mathcal{L})$, односно $\Pi_n(\mathcal{L})$ формулама називамо $\Sigma_n(\mathcal{L})$, односно $\Pi_n(\mathcal{L})$ класним релацијама, односно класним операцијама. За класну релацију, односно класну операцију, која је и $\Sigma_n(\mathcal{L})$ и $\Pi_n(\mathcal{L})$ класна релација, односно класна операција, кажемо да је $\Delta_n(\mathcal{L})$ класна релација, односно класна операција.

2.4.3 Хијерархијска дефиниција задовољивости на класним моделима

Нека је $\mathcal{L}$ било који језик и нека је $\mathfrak{M}$ било који класни модел језика $\mathcal{L}$. Са C означимо скуп свих интерпретација константи језика $\mathcal{L}$.

Нека је X ма који скуп за који важи $X \subseteq \mathrm{dom}(\mathfrak{M})$. Дефинишимо скуп $F(X)$ као скуп коме припадају сви елементи облика $f^{\mathfrak{M}}(a_1,\dots,a_d)$, где је $d \in \omega$, елементи $a_1,\dots,a_d$ припадају скупу X, а f је операцијски знак језика $\mathcal{L}$ арности d. Такође, дефинишимо скуп (X) на следећи начин:

$$E(X) := \{a \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}) \mid (\exists b \in X) a \in^{\mathfrak{M}} b\}, \quad T(X) := X \cup C \cup E(X) \cup F(X).$$

Према дефиницији класног модела $E(X)$ је скуп. За свако $n \in \omega$ дефинишимо скуп $I_n(X)$ на следећи начин:

$$I_0(X) = X \cup C, \quad I_{n+1}(X) = I_n(X) \cup E(I_n(X)) \cup F(I_n(X)).$$

Дефинишимо $I_\omega(X)$ као скуп $\bigcup_{n\in\omega} I_n(X)$. Скуп $I_\omega(X)$ је инклузијски најмањи скуп такав да важи

$$X \cup C \cup E(I_\omega(X)) \cup F(I_\omega(X)) \subseteq I_\omega(X). \tag{2.1}$$

Такође, за свако $a \in I_\omega(X)$ важи $I_\omega(a) \subseteq I_\omega(X)$ и за сваки скуп $Y \subseteq X$ важи $I_\omega(Y) \subseteq I_\omega(X)$. Свакој валуацији $v : \omega \longrightarrow \mathrm{dom}(\mathfrak{M})$ придружићемо скупове

$$D(v) := I_\omega(\{v(i) \mid i \in \omega\}), \quad S(v) := \{u \mid u : \omega \longrightarrow D(v)\}.$$

Из (2.1) следи да за свако $u \in S(v)$ важи $D(u) \subseteq D(v)$ и $S(u) \subseteq S(v)$, као и да за свако $a \in D(v)$ и сваку променљиву x важи $v^x_a \in S(v)$.

Ако су φ' и φ'' формуле језика $\mathcal{L}$ а v' и v'' валуације модела $\mathfrak{M}$, онда кажемо да је пар $\langle\varphi', v'\rangle$ мањи од пара $\langle\varphi'', v''\rangle$ ако је формула φ' права потформула формуле φ'' и $v' \in S(v'')$. Овај поредак је добро заснован.

Вредност терма при валуацији се дефинише на уобичајен начин. За $n \in \omega$ ћемо са $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_n(\varphi, v)$ означавати релацију задовољења формуле φ при валуацији v у моделу $\mathfrak{M}$ у случају да формула φ припада скупу $\Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})$.

Дефинишимо најпре релацију $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_0(\varphi, v)$. Задовољење атомских, негацијских и конјункцијских формула се дефинише на уобичајен начин. Ако за неки терм t важи $\varphi = (\forall x \in t)\psi$ за неко ψ из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L})$, онда је

$$\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_0(\varphi, v) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall a \in \mathrm{Val}(t, v, \mathfrak{M}))\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_0(\psi, v^x_a).$$

Претпоставимо да је релација $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_n(\varphi, v)$ већ дефинисана и дефинишимо релацију $\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n+1}(\varphi, v)$. Нека је $\varphi \in \Sigma_{n+1}(\mathcal{L}) \cup \Pi_{n+1}(\mathcal{L})$. Нека је u прва променљива која се не појављује у формули φ. Ако је $\varphi \in \Pi_{n+1}(\mathcal{L})$, онда за формулу $\psi \in \Sigma_n(\mathcal{L})$ придружену формули φ важи $\varphi \Leftrightarrow (\forall u)\psi$ и тада је

$$\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n+1}(\varphi, v) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall a \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}))\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}(\psi, v^u_a).$$

У супротном важи $\varphi \in \Sigma_{n+1}(\mathcal{L})$, па за формулу $\psi \in \Pi_n(\mathcal{L})$ придружену формули φ важи

$$\varphi \Leftrightarrow \neg(\forall u)\neg\psi$$

и тада је

$$\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n+1}(\varphi, v) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \neg(\forall a \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}))\neg\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}(\psi, v^u_a).$$

Из ове дефиниције се лако изводи да за $\varphi \in \Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})$ важи

$$\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n+1}(\varphi, v) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}(\varphi, v),$$

а одатле и из монотоније хијерархије формула да важи

$$\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{m}(\varphi, v) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}(\varphi, v) \quad \text{за све } m \geqslant n.$$

Такође се доказује да за формуле из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})$ у општем случају важи

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}(t_1 = t_2, v) &\Leftrightarrow \mathrm{Val}(t_1, v, \mathfrak{M}) = \mathrm{Val}(t_2, v, \mathfrak{M}), \\
\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}(t_1 \in t_2, v) &\Leftrightarrow \mathrm{Val}(t_1, v, \mathfrak{M}) \in^{\mathfrak{M}} \mathrm{Val}(t_2, v, \mathfrak{M}), \\
\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}(R(t_1, \ldots, t_d), v) &\Leftrightarrow R^{\mathfrak{M}}(\mathrm{Val}(t_1, v, \mathfrak{M}), \ldots, \mathrm{Val}(t_d, v, \mathfrak{M})), \\
\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}(\neg\varphi, v) &\Leftrightarrow \neg\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}(\varphi, v), \\
\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}((\varphi_1 \wedge \varphi_2), v) &\Leftrightarrow \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}(\varphi_1, v) \wedge \mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}(\varphi_2, v), \\
\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}((\forall x)\varphi, v) &\Leftrightarrow (\forall a \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}))\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}(\varphi, v^x_a).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Одавде се индукцијом по сложености формуле φ изводи да ако $\varphi \in \Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})$, онда за ма који модел $\mathfrak{M}$ и његову валуацију v важи

$$\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}(\varphi, v) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Sat}(\varphi, v, \mathfrak{M}).$$

Даћемо још једну интерпретацију ових појмова. Нека је $\mathfrak{V}$ ма који модел језика $\mathcal{L}$ и $\mathfrak{M}$ његов унутрашњи класни подмодел истог језика. Нека је φ формула из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})$ и нека које $v \in \mathrm{dom}(\mathfrak{V})$ такво да у моделу $\mathfrak{V}$ важи да је v валуација модела $\mathfrak{M}$. Тада важи

$$\mathrm{Sat}^{\mathfrak{M}}_{n}(\varphi, v) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{M} \models_v \varphi.$$

Напоменимо овде да је домен пресликавања v скуп природних бројева са становишта модела $\mathfrak{V}$, који не мора бити изоморфан структури природних бројева у универзуму. Последица теореме компактности предикатског рачуна је да реализација структуре природних бројева у моделу $\mathfrak{V}$ може имати бесконачне елементе, чак и ако модел $\mathfrak{V}\mathfrak{D}$ задовољава ZFC аксиоме. Ипак, вредност формуле у моделу при валуацији зависи само од вредности оних променљивих које имају слободна јављања у тој формули.

Слично важи и за појам формуле. Ако је φ формула са становишта универзума, онда ове релације не мењају значење у зависности од реализације скупа природних бројева у моделу $\mathfrak{M}$ јер се користи вредност валуације у само коначно много тачака (са становишта универзума) које се представљају природним бројевима (такође са становишта универзума).

2.5 Релативизација

Нека је $\mathcal{L}$ произвољан језик и нека је $\mathfrak{M}$ произвољан класни модел језика $\mathcal{L}$. Тада дефинишемо појам *релативизације формуле* на класни модел $\mathfrak{M}$ као трансформацију којом свакој формули $\varphi(x_1, \ldots, x_d)$ придружујемо формулу у ознаци $\varphi^{\mathfrak{M}}(x_1, \ldots, x_d) \in \Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})$ тако да за сваку валуацију v модела $\mathfrak{M}$ важи

$$\mathrm{Sat}_n^{\mathfrak{M}}(\varphi, v) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^{\mathfrak{M}}(v(x_1), \ldots, v(x_n)).$$

Овде се претпоставља да се у формули φ не појављује ниједна од променљивих које играју улогу параметра у дефиницији класе $\mathrm{dom}(\mathfrak{M})$ нити у дефиницији неког симбола језика $\mathcal{L}$ који се појављује у формули φ. Ти услови су довољно општи јер формулу φ можемо трансформисати тако што најпре извршимо замену везаних променљивих, а потом и слободних променљивих у формулама које се појављују у датом контексту.

Дефинишимо ту трансформацију. Најпре је потребно дефинисати трансформацију термова. Нека важи следеће:

1) t је терм језика $\mathcal{L}$,

2) p и v су дисјунктни коначни скупови променљивих,

3) скупу p припадају све променљиве које се јављају у терму t, као и све параметарске променљиве из дефиниције класе $\mathrm{dom}(\mathfrak{M})$ и дефиниционих формула симбола језика $\mathcal{L}$ који се појављују у терму t,

4) z је променљива која не припада скупу $p \cup v$.

Тада четворки $\langle z, t, p, v\rangle$ на следећи начин придружујемо тројку $\langle \varphi(z), p', v'\rangle = T(z, t, p, v)$, где је $\varphi(z)$ формула језика $\mathcal{L}$, а p' и v' коначни скупови променљивих:

- Ако је x променљива, онда је $T(z, x, p, v) = \langle z = x, p \cup \{x\}, v\rangle$.

- Ако је c симбол константе и $\varphi_c(x)$ дефинициона формула интерпретације тог симбола константе са параметарским променљивама из скупа p, онда је $T(z, c, p, v) = \langle \varphi_c(z), p, v\rangle$.

- Ако је f операцијски симбол арности n, при чему је $\varphi_f(x_1, \ldots, x_n, y)$ је дефинициона формула интерпретације тог операцијског симбола и ако су $t_1, \ldots, t_n$ терми, онда важи

  $$T(z, f(t_1, \ldots, t_n), p, v) = \langle \varphi_f(y_1, \ldots, y_n, z) \wedge \bigwedge_{i=1}^n \psi_i(y_i), p \cup \bigcup_{i=1}^n p_i, v \cup \bigcup_{i=1}^n v_i\rangle$$

  за неке $y_1, \ldots, y_n, \psi_1(y_1), \ldots, \psi_n(y_n), p_1, \ldots, p_n, v_1, \ldots, v_n$ такве да важи

  – $y_1, \ldots, y_n$ су међусобно различите променљиве које не припадају скупу $p \cup c \cup \{z\}$,
  – $\bigwedge_{i=1}^n T(y_i, t_i, v) = \langle \psi_i(y_i), p_i, v_i\rangle$.

Индукцијом по сложености терма t се доказује следеће: Ако је испуњено следеће

- важе услови 1)-4)

- $T(z, t, p, v) = \langle \varphi(z, y_1, \ldots, y_n), p', v'\rangle$,

- $y_1, \ldots, y_n$ су све међусобно различите променљиве из скупа v', онда важи $z = t \Leftrightarrow (\exists y_1, \dots, y_n)\varphi(z, y_1, \dots, y_n)$, као и $(\forall y_1, \dots, y_n)(\varphi(z, y_1, \dots, y_n) \Rightarrow z = t)$.

Под претпоставком да важе услови 1)-4) и да скуп p обухвата све параметарске променљиве из дефиниција симбола језика који се појављују у терму t, индукцијом по сложености терма t се доказује следеће:

- Ако су интерпретације симбола константи и операцијских симбола који се појављују у терму t дефинабилне $\Sigma_n(\mathcal{L})$ формулама, онда је $t = n$ такође $\Sigma_n(\mathcal{L})$ релација.
- Ако су интерпретације симбола константи и операцијских симбола који се појављују у терму t дефинабилне $\Pi_n(\mathcal{L})$ формулама, онда је $t = n$ такође $\Pi_n(\mathcal{L})$ релација.

Скицирајмо доказ само други део у случају када је t сложен терм. Уз наведене претпоставке за дефиницију пресликавања T за случај сложеног терма и претпоставку да су $y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_k$ све међусобно различите променљиве из скупа v важи

$$t = z \Leftrightarrow (\forall y_1, \dots, y_n, u_1, \dots, u_k)(\psi_1(y_1) \wedge \dots \wedge \psi_n(y_n) \Rightarrow \varphi_f(y_1, \dots, y_n z)).$$

Дефинишимо напокон најављену трансформацију формула.

- Ако је φ атомска формула облика $t_1 = t_2$, где су t_1 и t_2 терми језика $\mathcal{L}$ и ако су z_1 и z_2 различите променљиве које не припадају скупу p и притом важи

  $$T(z_1, t_1, p, \emptyset) = \langle \psi_1(z_1), p', v' \rangle, \quad T(z_2, t_2, p', v') = \langle \psi_2(z_2), p'', v'' \rangle,$$

  и ако су $u_1, \dots, u_k$ све међусобно различите променљиве из скупа v'' онда за формулу $\varphi^{\mathfrak{M}}$ можемо одабрати било коју од формула

  $$(\exists z_1, z_2, u_1, \dots, u_k)(\psi_1(z_1) \wedge \psi_2(z_2) \wedge z_1 = z_2),$$

  $$(\forall z_1, z_2, u_1, \dots, u_k)(\psi_1(z_1) \wedge \psi_2(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2).$$

- Ако је φ атомска формула облика $R(t_1, \dots, t_n)$, где су $t_1, \dots, t_n$ терми језика $\mathcal{L}$ и ако су $z_1, \dots, z_n$ су различите променљиве које не припадају скупу p и притом важи

  $$T(z_1, t_1, p, \emptyset) = \langle \psi_1(z_1), p(1), v(1) \rangle \wedge \bigwedge_{i=2}^{n} T(z_i, t_i, p(i-1), v(i-1)) = \langle \psi_i(z_i), p(i), v(i) \rangle,$$

  и ако су $u_1, \dots, u_k$ све међусобно различите променљиве из скупа $v(n)$ и ако је $\psi_R(x, \dots, x_n)$ формула којом се представља интерпретација релацијског знака R у моделу $\mathfrak{M}$, онда за формулу $\varphi^{\mathfrak{M}}$ можемо одабрати било коју од формула

  $$(\exists z_1, \dots, z_n, u_1, \dots, u_k)\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(z_i) \wedge \varphi_R(z_1, \dots, z_n)\Big),$$

  $$(\forall z_1, \dots, z_n, u_1, \dots, u_k)\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \psi_i(z_i) \Rightarrow \varphi_R(z_1, \dots, z_n)\Big).$$

- За ма коју формулу φ је $(\neg\varphi)^{\mathfrak{M}} = \neg\varphi^{\mathfrak{M}}$.
- За ма које формуле φ_1 и φ_2 је

  $$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)^{\mathfrak{M}} = \varphi_1^{\mathfrak{M}} \wedge \varphi_2^{\mathfrak{M}}.$$

- За ма коју формулу φ и за ма коју променљиву z која не припада скупу p је

$$((\forall z)\varphi)^{\mathfrak{M}} = (\forall z \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}))\varphi^{\mathfrak{M}}.$$

Индукцијом по сложености формуле се доказује да ова дефиниција задовољава захтев наведен на почетку. Такође, индукцијом по сложености формуле φ се доказује да ако је $n \geqslant$ такво да су dom($\mathfrak{M}$) и интерпретације свих симбола језика $\mathcal{L}$ су $\Delta_n(\mathcal{L})$ релације, онда за $m \geqslant 1$ важи

- Ако $\varphi \in \Sigma_m(\mathcal{L})$, онда $\varphi^{\mathfrak{M}} \in \Sigma_{m+n-1}(\mathcal{L})$.
- Ако $\varphi \in \Pi_m(\mathcal{L})$, онда $\varphi^{\mathfrak{M}} \in \Pi_{m+n-1}(\mathcal{L})$.

2.6 Апсолутност

Нека је $\mathfrak{M}$ класни модел језика $\mathcal{L}$ и $\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_d)$ формула језика $\mathcal{L}$ таква да ниједна слободна променљива формуле φ није параметарска нити у дефиницији класе dom($\mathfrak{M}$), нити у дефиницијама интерпретација у моделу $\mathfrak{M}$ симбола језика $\mathcal{L}$ који се појављују у формули φ. Тада кажемо да је формула φ *апсолутна за модел* $\mathfrak{M}$ ако за сваку валуацију v модела $\mathfrak{M}$ важи

$$(\forall x_1, \dots, x_d \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}))(\varphi^{\mathfrak{M}}(x_1, \dots, x_d) \Leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_d)).$$

За променљиву ћемо рећи да је параметарска ако учествује као параметар у дефиницији класе $\mathfrak{M}$ или у дефиницији неког од симбола језика $\mathcal{L}$ који учествује у некој од формула или неком од термова које разматрамо.

У наставку текста ћемо подразумевати да написане променљиве нису параметарске. Такође, подразумеваћемо да у наведеним формулама и термима нема слободних променљивих осим написаних и параметарских. Коначно, узимамо да параметарске променљиве имају неке фиксиране вредности, па ће се све односити на валуације које сликају параметарске променљиве у одговарајуће вредности.

За терм $t(x_1, \dots, x_d)$ кажемо да је апсолутан за модел $\mathfrak{M}$ ако за сваку валуацију v модела $\mathfrak{M}$ важи

$$\mathrm{Val}(t(x_1, \dots, x_d), v, \mathfrak{M}) = t(v(x_1), \dots, v(x_d)).$$

То заправо значи да је формула $z = t$ апсолутна за модел $\mathfrak{M}$, где је z променљива која се не појављује у терму t. Са друге стране, апсолутност формуле $z \in t$ за модел $\mathfrak{M}$ је еквивалентна услову да за сваку валуацију v модела $\mathfrak{M}$ важи

$$\mathrm{Val}(t(x_1, \dots, x_d), v, \mathfrak{M}) = t(v(x_1), \dots, v(x_d)) \cap \mathrm{dom}(\mathfrak{M}).$$

За сваку променљиву x важи да је терм x апсолутан за модел $\mathfrak{M}$. Нека је f операцијски симбол језика $\mathcal{L}$ арности d. Тада су следећи искази еквивалентни:

- Формула $y = f(x_1, \dots, x_d)$ је апсолутна за модел $\mathfrak{M}$, где су $x_1, \dots, x_d, y$ променљиве.
- За ма које терме $t_1, \dots, t_d$, где је y променљива која се не јавља нити у једном од термова $t_1, \dots, t_d$ важи да је формула $y = f(t_1, \dots, t_d)$ апсолутна за модел $\mathfrak{M}$.

Такође, за релацијски симбол R језика $\mathcal{L}$ арности d важи да су следећи искази еквивалентни:

- Формула $R(x_1, \dots, x_d)$ је апсолутна за модел $\mathfrak{M}$, где су $x_1, \dots, x_d$ променљиве.
- За ма које терме $t_1 = t_1(z_1, \dots, z_m), \dots, t_d = t_d(z_1, \dots, z_m)$ који су апсолутни за важи да је формула $R(t_1, \dots, t_d)$ апсолутна за модел $\mathfrak{M}$, где су $z_1, \dots, z_m$ променљиве.

Скуп формула које су апсолутне за модел $\mathfrak{M}$ је затворен за буловске комбинације. Надаље ћемо претпостављати да су сви терми апсолутни за модел $\mathfrak{M}$ као и да је модел $\mathfrak{M}$ транзитиван. Тада је скуп формула које су апсолутне за модел $\mathfrak{M}$ затворен и за ограничену квантификацију. Према томе, све формуле из скупа $\Sigma_0(\mathcal{L})$ су апсолутне за модел $\mathfrak{M}$.

Рецимо, појмови празног скупа, уније скупа, транзитивног скупа, ординала, граничног ординала и скупа ω су апсолутни за све транзитивне моделе. Такође, за сваку формулу $\varphi(x_1,\dots,x_d)$ из скупа $\Sigma_1(\mathcal{L})$ важи

$$(\forall x_1,\dots,x_d \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}))(\varphi^{\mathfrak{M}}(x_1,\dots,x_d) \Rightarrow \varphi(x_1,\dots,x_d)),$$

док за сваку формулу $\psi(x_1,\dots,x_d)$ из скупа $\Pi_1(\mathcal{L})$ важи

$$(\forall x_1,\dots,x_d \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}))(\psi(x_1,\dots,x_d) \Rightarrow \psi^{\mathfrak{M}}(x_1,\dots,x_d)).$$

Према томе, $\Delta_1(\mathcal{L})$ релације су апсолутне за модел $\mathfrak{M}$ ако у њему важи реченица о еквиваленцији одговарајуће формуле из скупа $\Sigma_1(\mathcal{L})$ и одговарајуће формуле из скупа $\Pi_1(\mathcal{L})$.

За релацију арности d која је апсолутна за модел $\mathfrak{M}$ важи да су све $\Delta_1(\mathcal{L}')$ релације апсолутне за модел $\mathcal{L}'$ језик који се добија проширивањем језика $\mathcal{L}$ релацијским симболом арности d као заменом за одговарајућом дефиниционом формулом.

Слично томе, ако је формула $\varphi(x)$ апсолутна за модел $\mathfrak{M}$ и притом важи

$$(\exists_1 x)\varphi(x), \quad ((\exists_1 x)\varphi(x))^{\mathfrak{M}},$$

онда су за модел $\mathfrak{M}$ апсолутне Δ_1 релације проширења језика једним симболом константе и одговарајућег проширења интерпретације. Слично важи и у случају додавања једног операцијског знака арности d и његове интерпретације дефиниционом формулом $\psi(x_1,\dots,x_d,y)$ која је апсолутна за модел $\mathfrak{M}$ и при чему важи

$$(\forall x_1,\dots,x_d \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}))(\exists_1 y)\psi(x_1,\dots,x_d,y), \quad ((\forall x_1,\dots,x_d)(\exists_1 y)\psi(x_1,\dots,x_d,y))^{\mathfrak{M}}.$$

Тако је на пример појам добро заснованог парцијалног уређења апсолутан за све транзитивне моделе у којима је задовољена теорема 17.

Уз симболику из теореме 10, напоменимо још да се рекурзивно дефинисана класна функција описује класном Δ_1-релацијом у језику који обухвата симболе за $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{G}$ и $<$ јер се рекурзивно дефинисана функција може описати како са

$$\mathbf{F}(a,b) \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} (\exists f \in \mathbf{S})(a \in \mathrm{dom}(f) \wedge f(a) = b).$$

тако и са

$$\mathbf{F}(a,b) \overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow} (\forall f \in \mathbf{S})(a \in \mathrm{dom}(f) \Rightarrow f(a) = b).$$

Према томе, појмови транзитивног затворења скупа и транзитивног колапса, као и операције над ординалима су апсолутне за све транзитивне моделе у којима су задовољене теореме о постојању резултата тих операција. Исто важи и за релацију задовољења на моделима, као и за бинарну релацију $x \in V_\alpha$. Ово последње значи да за транзитиван модел M који рефлектује одговарајућу реченицу важи $V_\alpha^M = V_\alpha \cap M$.

Нека је $\mathbf{M}$ транзитиван класни модел, који задовољава аксиоме пара и уније. Индукцијом по $n \in \omega$ се доказује да $(\forall n \in \omega) n \in \mathbf{M}$, односно $\omega \subseteq \mathbf{M}$.

Затим се индукцијом по броју елемената коначног скупа $a \in \mathbf{M}$ доказује да је скуп a у бијекцији са неким природним бројем, односно да је коначан.

Ако је пак скуп $b \in \mathbf{M}$ коначан са становишта класног модела $\mathbf{M}$, онда је скуп b у бијекцији са неким природним бројем са становишта класног модела $\mathbf{M}$.

Појам бијекције између датог пара скупова је тернарна класна релација која је апсолутна за транзитивне моделе. Такође, и појам природног броја је апсолутан за транзитивне класне модела, па је скуп b коначан. Према томе, појам коначног скупа је апсолутан за модел $\mathbf{M}$.

Пошто између различитих природних бројева нема бијекције, не може је бити ни у моделу $\mathbf{M}$, па је појам кардиналног броја коначног скупа такође апсолутан за модел $\mathbf{M}$.

2.7 Рефлексија

До сада смо говорили о моделима језика теорије скупова. Међутим, неопходан нам је механизам добијања модела који задовољава одређене аксиоме. Код следећих тврђења треба обратити пажњу на то да се ради о метатеоремама којима се тврди да је свако тврђење одређеног облика теорема, које имају бесконачно много примерака теорема.

За класни модел $\mathfrak{M}$ кажемо да *рефлектује формулу* $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ ако за важи

$$(\forall a_1,\ldots,a_n \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}))(\varphi(a_1,\ldots,a_n) \Leftrightarrow \varphi^{\mathfrak{M}}(a_1,\ldots,a_n)).$$

Ипак, овај појам се првенствено примењује на моделе. Као што видимо, дефиниција рефлексије користи задовољење на класама, које није дефинабилно на скупу свих формула. То значи да ћемо са рефлексијом морати да се ограничавамо на скуп формула $\Sigma_n \cup \Pi_n$. Овде одговарајуће теореме наводимо у релативној варијанти.

Теорема 57 (*Теорема рефлексије за формуле*) *Нека је $\mathfrak{M}$ класни модел језика $\mathcal{L}$ и нека је $(M_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{ORD}}$ инклузијски неопадајућа фамилија скупова таква да је $\bigcup_{\alpha\in\mathbf{ORD}} M_\alpha = \mathrm{dom}(\mathfrak{M})$. Тада је за свако $n\in\omega$ следећи исказ теорема:*

За сваки бесконачан регуларан кардинал κ и сваки ординал α постоји гранични ординал $\beta > \alpha$ кофиналности κ такав да важи следеће:

- *Скуп M_β садржи интерпретације у моделу $\mathfrak{M}$ свих симбола константи језика $\mathcal{L}$.*
- *Скуп M_β је затворен за интерпретације у моделу $\mathfrak{M}$ свих операцијских симбола језика $\mathcal{L}$.*
- *За сваку формулу $\varphi\in\Sigma_n(\mathcal{L})\cup\Pi_n(\mathcal{L})$ и свако $v:\omega\longrightarrow M_\beta$ важи*

$$\mathrm{Sat}(\varphi,v,\mathfrak{N}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Sat}_n^{\mathfrak{M}}(\varphi,v), \tag{2.3}$$

где је $\mathfrak{N}$ подмодел модела $\mathfrak{M}$ одређен доменом M_β.

Доказ: Подсетимо се да је због коначности скупа слободних променљивих произвољне формуле могуће ограничити се само на разматрања валуација које су почев однекле константне.

Сваком симболу константе c језика $\mathcal{L}$ можемо придружити најмањи ординал $\delta > \alpha$ такав да $c^{\mathfrak{M}} \in M_\delta$. Пошто је класа свих симбола језика скуп, можемо уочити најмањи ординал $\gamma_0 > \alpha$ и да скупу M_{γ_0} припадају интерпретације у моделу $\mathfrak{M}$ свих симбола константи језика $\mathcal{L}$.

За ма које $\nu \geqslant \gamma_0$ са $p(\nu)$ означимо најмањи ординал такав да важи $p(\nu \geqslant \nu)$ и да је скуп $M_{p(\nu)}$ затворен за интерпретације у моделу $\mathfrak{M}$ свих операцијских знакова језика $\mathcal{L}$.

Свакој формули $\varphi\in\Sigma_n(\mathcal{L})\cup\Pi_n(\mathcal{L})$ придружимо класу C_φ свих ординала $\nu\geqslant\gamma_0$ за које важи следеће:

- Скуп M_ν је затворен за интерпретације у моделу $\mathfrak{M}$ операцијских симбола језика $\mathcal{L}$.
- За ма које $v:\omega\longrightarrow M_\nu$ важи (2.3), где је $\mathfrak{N}$ подмодел модела $\mathfrak{M}$ одређен доменом M_ν.

Из дефинабилности релације $\mathrm{Sat}_n^{\mathfrak{M}}(\varphi, v)$ преко параметара φ и v следи да је C_φ класа са параметром φ.

Нека је F скуп свих формула $\varphi \in \Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})$ таквих да је класа C_φ кофинална и затворена за супремуме својих подскупова. Докажимо да је $F = \Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})$. Доказ изводимо индукцијом по сложености формуле. Притом се доказивање да у сваком од разматраних случајева важи да је класе C_φ затворена за супремуме, као и да су одговарајући скупови затворени за интерпретације у моделу $\mathfrak{M}$ операцијских симбола језика $\mathcal{L}$.

Нека је φ атомска формула или негација формуле из скупа F и нека је $\mu \geqslant \gamma_0$. Тада важи да $p(\mu) \in C_\varphi$. Нека је формула φ конјункција формула ψ_1 и ψ_2 из скупа F, и $\mu \geqslant \gamma_0$. По индуктивној претпоставци постоје функције f и g које сваком ординалу $\mu \geqslant \gamma_0$ придружују по неки ординал тако да важи $f(\mu), g(\mu) > \mu$, $f(\mu) \in C_{\psi_1}$ и $g(\mu) \in C_{\psi_2}$. Нека је $\theta_0 = \mu + 1$, $\theta_{2k+1} = f(p(\theta_{2k}))$, $\theta_{2k+2} = g(p(\theta_{2k+1}))$. Тада важи $\sup_{n\in\omega} \theta_n \in C_{\psi_1} \cap C_{\psi_2} \subseteq C_\varphi$.

Претпоставимо да је φ формула $(\forall z)\psi(x_1, \ldots, x_m, z)$ за неко $\psi \in F$ и нека је $\mu \geqslant \gamma_0$. Сваком $\zeta \geqslant \gamma_0$ придружимо најмањи ординал $h(\zeta) > \zeta$ такав да $h(\zeta) \in C_\psi$, као и да за ма које $v : \omega \longrightarrow M_\zeta$ важи

$$(\exists b \in \mathrm{dom}(\mathfrak{M}))\mathrm{Sat}_n^{\mathfrak{M}}(\psi, v_b^z) \quad \Rightarrow \quad (\exists b \in M_{h(\zeta)})\mathrm{Sat}_n^{\mathfrak{M}}(\psi, v_b^z).$$

Из $M_{h(\zeta)} \subseteq \mathrm{dom}(\mathfrak{M})$ следи да обрнута импликација свакако важи. Нека је $\eta_0 = \mu$ и нека је $\eta_{k+1} = h(\eta_k)$. Тада $\sup_{k\in\omega} \eta_k \in C_\varphi$. Тиме је доказано да важи $F = \Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})$.

Нека је $\lambda = |\Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})|$ и t бијекција скупа λ на скуп $\Sigma_n(\mathcal{L}) \cup \Pi_n(\mathcal{L})$. За ма које $\sigma < \kappa$ и $\tau < \lambda$ такве да је $\langle \sigma, \tau \rangle \neq \langle 0, 0 \rangle$ нека је $\gamma_{\sigma\lambda+\tau}$ најмањи елемент класе $C_{t(\tau)}$ који је већи од γ_ξ за све $\xi < \sigma\lambda + \tau$. За $\beta = \sup_{\xi<\kappa\lambda} \gamma_\xi$ важи тврђење теореме. $\square$

Теорема 58 *За свако n се може доказати да постоји транзитиван модел M језика који обухвата само бинарни релацијски симбол $\in$, такав да модел M рефлектује све формуле из скупа $\Sigma_n \cup \Pi_n$ и све инстанце схема аксиоме сепарације.*

Доказ: Следи из теореме 57 и чињенице да за ма који гранични ординал $\alpha > 0$ скуп V_α представља транзитиван модел који задовољава све инстанце схема аксиоме сепарације. $\square$

Напоменимо да за сваки бесконачан гранични ординал α модел V_α задовољава све инстанце схема аксиоме сепарације, тако да се за свако n може доказати да постоји модел који рефлектује све инстанце схема аксиоме сепарације и све формуле из скупа $\Sigma_n \cup \Pi_n$.

Модел чије се постојање тврди теоремом 57 је непребројив. Постоје формуле које се могу рефлектовати искључиво непребројивим транзитивним моделима. Једна од таквих формула је формула $\varphi(x)$ која тврди следеће: Ако је скуп x празан, онда важе аксиома бесконачности и аксиома партитивног скупа, а ако је скуп x непразан онда је $x = \mathcal{P}(\omega)$.

Нека је M транзитиван модел који рефлектује формулу $\varphi(x)$. Пошто модел мора бити непразан, а празан скуп припада сваком непразном транзитивном скупу, важи $\emptyset \in M$. Пошто аксиоме бесконачности и партитивног скупа важе у универзуму, важи $\varphi(\emptyset)$, а самим тим и $M \models \varphi(\emptyset)$, па аксиоме бесконачности и партитивног скупа важе и у моделу M. Нека је $a \in M$ реализација појма $\mathcal{P}(\omega)$ са становишта модела M. Пошто празан скуп припада моделу M и он је такође празан скуп са становишта модела M, а празан скуп је подскуп сваког скупа, важи $\emptyset \in a$, па је $a \neq \emptyset$. На основу начина избора формуле $\varphi(x)$ и елемента a, важи $M \models \varphi(a)$, па самим тим и $\varphi(a)$, одакле следи да је $a = \mathcal{P}(\omega)$, па $\mathcal{P}(\omega) \in M$. Из транзитивности модела M следи да важи $\mathcal{P}(\omega) \subseteq M$, па је модел M непребројив.

Ипак, нама ће требати рефлексија формула пребројивим моделима. Као што претходни пример показује, то у општем случају није могуће за формуле које садрже слободне променљиве. Следећа теорема обезбеђује рефлексију произвољних реченица пребројивим моделима.

Теорема 59 (*Теорема рефлексије за реченице*) *Нека је M транзитиван модел језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}$ и нека је a транзитиван елемент модела M. Тада постоји транзитиван модел N кардиналности не веће од $|a| + \aleph_0$ такав да важи $a \in N$ и да задовољава исте реченице као модел M.*

Доказ: Нека је $\kappa = |a|$ и нека је $(S_n)_{n\in\omega}$ инклузијски непадајући низ подскупова скупа M такав да за свако $n \in \omega$ важи

- $|S_n| \leqslant \kappa$ и $a \cup \{a\} \subseteq S_n$.
- За сваку формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_m, z)$ језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}$ и ма које $a_1, \ldots, a_m \in S_n$ важи

$$(\exists c \in M) M \models \varphi(a_1, \ldots, a_m, c) \quad \Rightarrow \quad (\exists c \in S_{n+1}) M \models \varphi(a_1, \ldots, a_m, c).$$

Тада за скуп $T = \bigcup_{n\in\omega} S_n$ важи

- $|T| \leqslant \kappa$ и $a \cup \{a\} \subseteq T$.
- За сваку формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_m, z)$ језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}$ и ма које $a_1, \ldots, a_m \in T$ важи

$$(\exists c \in M) M \models \varphi(a_1, \ldots, a_m, c) \quad \Rightarrow \quad (\exists c \in T) M \models \varphi(a_1, \ldots, a_m, c).$$

Скуп T ћемо посматрати као $\in$-модел језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}$. Модел T је добро заснован као подмодел транзитивног модела. Индукцијом по сложености формуле, доказује се да за сваку формулу $\psi(x_1, \ldots, x_m)$ језика $\mathcal{L}$ и ма које $a_1, \ldots, a_m \in T$ важи

$$M \models \psi(a_1, \ldots, a_m) \quad \Leftrightarrow \quad T \models \psi(a_1, \ldots, a_m).$$

Према томе, модел T задовољава исте реченице као модел M. Међутим, модел T није транзитиван. Пошто је модел M транзитиван, он је екстензионалан, па је и модел N' екстензионалан. Нека је t транзитивни колапс скупа T и нека је $N = t[T]$. Пошто је t изоморфизам модела T и N, модел N задовољава исте реченице као модел M и притом важи $|N| = |T| \leqslant \kappa$. Из $\mathrm{tc}(\{a\}) = a \cup \{a\} \subseteq T$ следи да је $t(a) = a$, па $a \in N$. □

Теорема 60 *За свако n се може доказати да постоји транзитиван модел M језика који обухвата само бинарни релацијски симбол $\in$, такав да модел M рефлектује све формуле из скупа $\Sigma_n \cup \Pi_n$ и све инстанце схема аксиоме сепарације.*

Доказ: Следи из теорема 58 и 59. □

2.8 Скупови ординала

Под скупом ординала подразумеваћемо било који скуп чији су сви елементи ординали. У одређеном смислу, сваки скуп се може кодирати скупом ординала.

Теорема 61 (ZF) *Постоје теорема Θ теорије* ZF *и формула $\varphi(x, y)$ таква да важи следеће:*

- *За сваки транзитивни модел M који задовољава Θ формула $\varphi(x, y)$ дефинише унарну класну операцију $\mathbf{F}(x)$, која је апсолутна за модел M.*
- *За сваки скуп a такав да се скуп* $\mathrm{tc}(a)$ *може добро уредити постоји скуп ординала s такав да важи следеће:*

– $\mathbf{F}(s) = a$. *Посебно, за сваки транзитиван модел* M *који задовољава* Θ *важи*

$$s \in M \Rightarrow a \in M.$$

– *Ако је* $\mathrm{tc}(a)$ *бесконачан скуп, онда је* $s \subseteq |\mathrm{tc}(a)|$.

– *Ако је* $\mathrm{tc}(a)$ *коначан скуп, онда је* s *коначан подскуп скупа* ω.

Доказ: Скуп a је једнозначно одређен скупом $T = \mathrm{tc}(\{a\})$ као једини елемент скупа T који не припада ниједном елементу скупа T. Нека је $\kappa = |T|$, f бијекција скупа κ на скуп T и нека је R бинарна релација на κ дефинисана са $R(x, y) \Leftrightarrow f(x) \in f(y)$. Скуп T је транзитивни колапс бинарне релације R, па је скуп T једнозначно одређен скупом R. Међу паровима ординала можемо увести следећи поредак:

$$\langle \alpha', \beta' \rangle < \langle \alpha, \beta \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle \max\{\alpha', \beta'\}, \alpha', \beta' \rangle < \langle \max\{\alpha, \beta\}, \alpha, \beta \rangle.$$

Ова релација је добро уређење класе $\mathbf{ORD}^2$ за које важи

$$\langle \alpha', \beta' \rangle < \langle \alpha, \beta \rangle \quad \Rightarrow \quad \alpha', \beta' \leqslant \max\{|\alpha|, |\beta|\},$$

па за $\alpha, \beta \in \kappa$ важи следеће:

- Ако је кардинал κ бесконачан, онда је скуп свих $\langle \alpha', \beta' \rangle < \langle \alpha, \beta \rangle$ кардиналности мање од κ.
- Ако је кардинал κ коначан, онда је скуп свих $\langle \alpha', \beta' \rangle < \langle \alpha, \beta \rangle$ коначан.

Према томе, ово уређење класе $\mathbf{ORD}^2$ је изоморфно уређењу класе $\mathbf{ORD}$ и одговарајући изоморфизам $\mathbf{I} : \mathbf{ORD}^2 \longrightarrow \mathbf{ORD}$ је јединствен као транзитивни колапс уређења свих $\langle \alpha', \beta' \rangle < \langle \alpha, \beta \rangle$ за дато $\langle \alpha, \beta \rangle$. Притом је изоморфизам $\mathbf{I}$ апсолутан за транзитивне моделе који задовољавају аксиому пара, теорему о постојању класе свих парова ординала, теорему о транзитивном колапсу и теорему да је $\mathbf{I}$ функција. За $s = \mathbf{I}[R]$ важи да је R једнозначно одређено са s.

Унарну класну операцију $\mathbf{F}$ дефинишемо на следећи начин: Нека је s било који скуп. Ако s није скуп ординала, онда нека је $\mathbf{F}(s) = \emptyset$. У супротном, нека је $R = \mathbf{I}^{-1}[s]$. Ако је релација R изоморфна релацији припадања на неком транзитивном скупу, онда је тај скуп јединствен. Нека је T тај транзитивни скуп, ако такав постоји. У супротном, нека је $T = \emptyset$. Ако скуп T има тачно један елемент који не припада ниједном елементу скупа T, онда ћемо тај елемент изабрати за вредност $\mathbf{F}(s)$. У супротном, нека је $\mathbf{F}(s) = \emptyset$.

Нека је a скуп такав да се скуп $\mathrm{tc}(a)$ може добро уредити и нека је скуп s дефинисан преко a на описани начин и нека s припада транзитивном моделу M који задовољава наведене реченице и реченицу да је $\mathbf{I}$ бијекција. Тада моделу M припада скуп R дефинисан преко s на описани начин. Пошто је релација R добро заснована, она је добро заснована и са становишта модела M, па моделу M припада скуп T дефинисан преко R на описани начин. Због транзитивности модела M важи $\mathbf{F}(s) \in M$, при чему је модел M апсолутан за све кораке ове трансформације. $\square$

Непосредна последица теореме 61 је да за произвољан кардинал κ и класу

$$H(\kappa) = \{a \in \mathbf{V} \mid |\mathrm{tc}(a)| < \kappa\}$$

важи да је $H(\kappa)$ скуп кардиналности $2^{<\kappa}$.

Теорема 62 (ZF) *Постоји теорема* Θ *теорије* ZF *таква да важи следеће: Нека су* M_1 *и* M_2 *транзитивни модели који задовољавају* Θ, *при чему важи*

$$\{s \in M_1 \mid s \subseteq \mathbf{ORD}\} = \{s \in M_2 \mid s \subseteq \mathbf{ORD}\}. \tag{2.4}$$

Тада важи

$$\{a \in M_1 \mid \mathrm{tc}(a) \text{ се може добро уредити}\} = \{a \in M_2 \mid \mathrm{tc}(a) \text{ се може добро уредити}\}. \tag{2.5}$$

Ако барем један од модела M_1 и M_2 задовољава аксиому избора, онда је $M_1 = M_2$.

Доказ: Докажимо само нетривијалан смер. Реченица Θ се може изабрати тако да имплицира став да се домен добро уређеног скупа може бијективно пресликати на неки кардинал, став да сваки скуп има транзитивно затворење, аксиому пара, теорему Θ из формулације теореме 61, као и да за свако a постоји скуп ординала s који испуњава услове из теореме 61 и за који је $\mathbf{F}(s) = a$.

Због симетричности услова теореме, довољно је доказати да је $M_1 \subseteq M_2$. Нека је $a \in M_1$ произвољно такво да скуп $\mathrm{tc}(a)$ има добро уређење у моделу M_1. Према теореми 61, можемо изабрати скуп ординала $s \in M_1$, који са становишта модела M_1 испуњава услове наведене у теореми 61 и такав да важи $M_1 \models \mathbf{F}(s) = a$. На основу (2.4) важи $s \in M_2$, па ако модел M_2 задовољава теорему Θ из теореме 61, онда важи $a \in M_2$. Тиме је доказано да важи (2.5).

Претпоставимо да модел M_1 задовољава аксиому избора. Из (2.5) следи да важи $M_1 \subseteq M_2$. Доказ обрнуте инклузије изводимо $\in$-индукцијом. Нека је $a \in M_2$ такав да важи $a \subseteq M_1$. Претпоставимо да модели M_1 и M_2 задовољавају одговарајуће инстанце теореме о рекурзивној дефиницији, као и теорему $(\forall x)(\exists \alpha \in \mathbf{ORD}) x \in V_\alpha$. Тада је бинарна класна релација $x \in V_\alpha$ апсолутна за те моделе.

Нека је $\alpha \in \mathbf{ORD} \cap M_2$ такав да са становишта модела M_1 важи $a \in V_\alpha$. Тада ће важити и $a \in V_\alpha$. Одатле и из транзитивности скупа V_α следи да важи $\mathrm{tc}(a) \subseteq V_\alpha$, а самим тим и $\mathrm{tc}(a) \subseteq V_\alpha \cap M_1 = V_\alpha^{M_1}$, па постоји $b \in M_1$ такво да је $\mathrm{tc}(a) \subseteq b$.

Пошто модел M_1 задовољава принцип доброг уређења, скуп b има добро уређење у моделу M_1. Према доказаној релацији $M_1 \subseteq M_2$, скуп b, као и његово добро уређење припадају моделу M_2. Ако модел M_2 задовољава одговарајућу инстанцу схема аксиоме сепарације, онда се скуп $\mathrm{tc}(a)$ може добро уредити са становишта модела M_2, па према (2.5) важи $a \in M_1$. $\square$

Глава 3

Конструктибилност

3.1 Конструктибилна хијерархија

Дефинишимо операцију $\mathrm{def}(X)$ сличну операцији партитивног скупа, али штедљивију и контролисанију. Нека је $\mathrm{def}(\emptyset) = \{\emptyset\}$. За $X \neq \emptyset$ нека је $\mathrm{def}(X)$ скуп свих подскупова од X који су дефинабилни са параметрима из X над $\in$-моделом са доменом X, то јест

$$\mathrm{def}(X) = \{Y \subseteq X \mid (\exists \varphi, v)(v : \omega \longrightarrow X \wedge (\forall a \in X)(a \in Y) \Leftrightarrow \mathrm{Sat}(\varphi, v_a^{x_0}, X))\}.$$

За произвољан скуп A дефинишимо фамилију $(L_\alpha(A))_{\alpha \in \mathbf{ORD}}$ и класу $\mathbf{L}(A)$ на следећи начин:

$$L_0(A) = \mathrm{tc}(\{A\}), \quad L_{\alpha+1}(A) = \mathrm{def}(L_\alpha(A)),$$

$$L_\alpha(A) = \bigcup_{\beta < \alpha} L_\beta(A) \quad \text{за бесконачан гранични ординал } \alpha,$$

$$\mathbf{L}(A) = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ORD}} (A).$$

Индукцијом по α се лако доказује да $\alpha \in L_\alpha(A)$, да је $L_\alpha(A)$ транзитиван скуп и да за свако $\beta < \alpha$ важи $L_\beta \in L_\alpha$ и $L_\beta \subsetneq L_\alpha$, као и да $\mathrm{tc}(\{A\}) \in L_\alpha(A)$. Дакле, $\mathbf{L}(A)$ је транзитивна класа којој припадају сви ординали и којој припада скуп $\mathrm{tc}(\{A\})$, а самим тим и скуп A. Свако $a \in \mathbf{L}(A)$ можемо придружити најмањи ординал $r(a)$ такав да важи $a \in L_{r(a)}(A)$. Притом за свако $a \in \mathbf{L}(A)$ важи да је $r(a)$ или нула или ординал наследник.

Посебно, класу $\mathbf{L} = \mathbf{L}(\emptyset)$ зовемо Геделовим *конструктибилним универзумом*.

3.2 Задовољеност аксиома

Теорема 63 (ZF) *За сваки природан број n је теорема да за сваки скуп A класа $\mathbf{L}(A)$ је апсолутна за све* ZF *аксиоме из скупа $\Sigma_n \cup \Delta_n$.*

Доказ:

Аксиома празног скупа Појам празног скупа је апсолутан за транзитивне моделе и притом важи $\emptyset \in L_0(A)$.

Аксиома екстензионалности Следи из транзитивности класе $\mathbf{L}(A)$.

Аксиома пара Из монотоније фамилије $(L_\alpha(A))_{\alpha\in\mathbf{ORD}}$ следи да за ма које $a, b \in \mathbf{L}(A)$ постоји ординал α такав да $a, b \in L_\alpha(A)$, одакле следи да $\{a, b\} \in L_{\alpha+1}$. Наравно, појам неуређеног пара је апсолутан за транзитивне моделе.

Аксиома уније Нека је a произвољан елемент класе $\mathbf{L}(A)$ и нека је α ординал за који важи $a \in L_\alpha(A)$. На основу транзитивности скупа $L_\alpha(A)$ важи $a \subseteq L_\alpha(A)$, као и $\bigcup a \subseteq L_\alpha(A)$, па због апсолутности релације $x \in \bigcup y$ за транзитивне моделе важи $\bigcup a \in L_{\alpha+1}(A)$. Из апсолутности релације $x = \bigcup y$ за транзитивне класне моделе следи да класни модел $\mathbf{L}(A)$ задовољава аксиому уније.

Аксиома партитивног скупа Нека је a произвољан елемент класе $\mathbf{L}(A)$ и нека је α ординал за који важи $(\forall b \in \mathbf{L}(A))(b \subseteq a \Rightarrow b \in L_\alpha(A))$. Из апсолутности релације $\subseteq$ следи да важи $(\mathcal{P}(a))^{\mathbf{L}(A)} = \mathcal{P}(a) \cap \mathbf{L}(A) \in L_{\alpha+1}(A)$.

Аксиома бесконачности Скуп ω припада класи $\mathbf{L}(A)$ као ординал, при чему је константа ω апсолутна за све транзитивне моделе.

Схема аксиома сепарације Нека су $a, b_1 \ldots, b_m \in \mathbf{L}(A)$ и $c = \{x \in a \mid \varphi^{\mathbf{L}(A)}(x, a, b_1, \ldots, x_n)\}$, при чему $\varphi \in \Sigma_n \cup \Pi_n$. Нека је α ординал за који важи $a, b_1 \ldots, b_m \in L_\alpha(A)$. Према теореми 57 можемо одабрати $\beta \geqslant \alpha + \omega$ такво да је формула φ апсолутна при прелазу између модела $\mathbf{L}(A)$ и $L_\beta(A)$. Тада $c \in L_{\beta+1}(A)$.

Схема аксиома замене Нека су $X, c_1, \ldots, c_m$ елементи класе $\mathbf{L}(A)$, нека је $\varphi(x, y, z_1, \ldots, z_m)$ формула из скупа $\Sigma_n \cup \Pi_n$ и нека је α ординал за који важи $X, c_1, \ldots, c_m \in L_\alpha(A)$. Сваком $a \in X$ можемо придружити најмањи ординал $\beta(a)$ такав да важи

$$\beta(a) \geqslant \alpha \ \wedge \ (\mathbf{L}(A) \models (\exists y)\varphi(a, y, c_1, \ldots, c_m) \Rightarrow (\exists y \in L_{\beta(a)}(A))\varphi(a, y, c_1, \ldots, c_m)).$$

Нека је $\gamma = \sup_{a\in X} \beta(a)$. Према томе, у класном моделу $\mathbf{L}(A)$ је за $Y = L_\gamma$ испуњено да за свако $a \in X$ постоји $b \in Y$ такво да важи $\varphi(x, y, c_1, \ldots, c_m)$. Одатле и из задовољености одговарајуће инстанце схема аксиоме сепарације следи тврђење.

Аксиома регуларности Следи из транзитивности модела $\mathbf{L}(A)$.

□

Теорема 64 *Класни модел $\mathbf{L}(A)$ је апсолутан за пресликавање $\alpha \mapsto L_\alpha(A)$ и притом у класном моделу $\mathbf{L}(A)$ важи $\mathbf{V} = \mathbf{L}(A)$. Такође, важи $\mathbf{CARD} \subseteq \mathbf{CARD}^{\mathbf{L}(A)}$. За свако $a \in \mathbf{L}(A)$ које има добро уређење у $\mathbf{L}(A)$ важи $|a|^{\mathbf{L}(A)} \geqslant |a|$.*

Доказ: Пресликавање $\alpha \mapsto L_\alpha(A)$ је рекурзивно дефинисано преко Δ_1 класних релација, при чему постоји коначан доказ да модел $\mathbf{L}(A)$ задовољава коначан фрагмент теорије ZF довољан за извођење теореме о еквиваленцији Σ_1 формуле и Π_1 формуле којима се дефинише ово пресликавање, као и теореме да је класна релација између α и $L_\alpha(A)$ једна операција са параметром A.

Нека је $a \in \mathbf{L}(A)$ произвољно. Тада за неки ординал α важи $a \in L_\alpha(A) = (L_\alpha(A))^{\mathbf{L}(A)}$, одакле следи да важи $\mathbf{L}(A) \models \mathbf{V} = \mathbf{L}(A)$.

Својство »бити кардинал« је Π_1 класна релација, па се преноси са класног модела $\mathbf{V}$ на његов класни подмодел $\mathbf{L}(A)$, што значи да важи $\mathbf{CARD} \subseteq \mathbf{CARD}^{\mathbf{L}(A)}$. Нека је $a \in \mathbf{L}(A)$ такво да има добро уређење у $\mathbf{L}(A)$. За произвољну бијекцију f скупа a на ординал $|a|^{\mathbf{L}(A)}$ такву да $f \in \mathbf{L}(A)$ важи да $f \in \mathbf{V}$, па је $|a| = ||a|^{\mathbf{L}(A)}| \leqslant |a|^{\mathbf{L}(A)}$. □

Релација $\mathbf{L}(A) \models \mathbf{V} = \mathbf{L}(A)$ значи да унутрашња својства класног модела $\mathbf{L}(A)$ можемо доказивати извођењем тих својстава из аксиома ZF $+ \mathbf{V} = \mathbf{L}(A)$.

Теорема 65 *Следећи услови су еквивалентни:*

- *Скуп* $\mathrm{tc}(A)$ *има добро уређење у класном моделу* $\mathbf{L}(A)$.
- *Класни модел* $\mathbf{L}(A)$ *задовољава аксиому избора.*
- *Модел* $\mathbf{L}(A)$ *има класну бијекцију између класе ординала и универзума, која је дефинисана формулом чији су параметри добро уређење скупа* $\mathrm{tc}(A)$ *и скуп* A, *при чему је модел* $\mathbf{L}(A)$ *апсолутан за ту формулу.*

Доказ: Претпоставимо да скуп $\mathrm{tc}(A)$ има добро уређење у класном моделу $\mathbf{L}(A)$ и докажимо трећи од наведених услова. Остатак тврђења се тривијално доказује. За $a \in \mathbf{L}(A)$ са $r(a)$ означимо најмањи ординал такав да $a \in L_{r(a)}(A)$.

Дефинишимо добро уређење на $L_\alpha(A)$ индукцијом по α. Добро уређење скупа $L_0(A)$ дефинишемо тако што на крај доброг уређења скупа $\mathrm{tc}(A)$ додајемо елемент A. Претпоставимо да је $\alpha > 0$ и да је дефинисано добро уређење на сваком од скупова $L_\beta(A)$ за $\beta < \alpha$.

Нека су a_1 и a_2 произвољни елементи скупа $L_\alpha(A)$. Ако је $r(a_1) < r(a_2)$, онда поредак дефинишемо тако да буде $a_1 < a_2$. Ако је пак $r(a_2) < r(a_1)$, онда поредак дефинишемо тако да буде $a_2 < a_1$. Ако је $r(a_1) = r(a_2) < \alpha$, онда поредак између a_1 и a_2 наслеђујемо од доброг уређења скупа $L_{r(a_1)}(A)$.

Уколико је $r(a_1) = \alpha$, онда ординал α не може бити гранични, па за неко β важи $\alpha = \beta + 1$. Елементе a_1 и a_2 уређујемо лексикографски најпре према најмањој формули којом се могу дефинисати као подскупови скупа $L_\beta(A)$, а затим по најмањој валуацији којом се дефинишу тим формулама, узимајући у обзир добро уређење скупа $L_\beta(A)$, као и чињеницу да истинитосна вредност формуле при валуацији зависи само од вредности слободних променљивих у тој формули, којих има коначно много, при чему се остале променљиве могу пресликати у најмањи елемент скупа $L_\beta(A)$.

Дефинишимо поредак међу елементима класе $\mathbf{L}(A)$. Нека су a_1 и a_2 произвољни елементи скупа $\mathbf{L}(A)$. Ако је $r(a_1) < r(a_2)$, онда поредак дефинишемо тако да буде $a_1 < a_2$. Ако је пак $r(a_2) < r(a_1)$, онда поредак дефинишемо тако да буде $a_2 < a_1$. Ако је $r(a_1) = r(a_2)$, онда поредак између a_1 и a_2 наслеђујемо од доброг уређења скупа $L_{r(a_1)}(A)$.

Од елемента a класе $\mathbf{L}(a)$ могу бити мањи само елементи скупа $L_{r(a)}(A)$. Наведено уређење је линеарно, без бесконачних опадајућих низова и при чему је сваки прави почетни комад скуп, па је изоморфно са уређењем класе **ORD**.

Коришћене дефиниције (укључујући и дефиницију изоморфизма са класом **ORD**) су рекурзивне до на појмове за које је класни модел $\mathbf{L}(A)$ апсолутан, па зато овај изоморфизам представља класу модела $\mathbf{L}(A)$, при чему са становишта класног модела $\mathbf{L}(A)$ такође има наведена својства. □

Последица претходне теореме је да за ма који скуп ординала s важи да је у моделу $L(s)$ задовољена аксиома избора па унутрашња својства класе $\mathbf{L}(s)$ можемо доказивати извођењем из аксиома ZFC + $\mathbf{V} = \mathbf{L}(s)$.

3.3 Континуум функција

Теорема 66 *Нека је* s *скуп ординала. Тада за сваки ординал* α *важи*

$$|L_\alpha(s)| + |\mathrm{tc}(s)| + \aleph_0 = |\alpha| + |\mathrm{tc}(s)| + \aleph_0. \tag{3.1}$$

Доказ: Претпоставимо да тврђење теореме није тачно и изведимо противречност. Нека је α најмањи ординал за који (3.1) није тачно. Тада не може бити $\alpha = 0$ због

$$|L_0(s)| + |\mathrm{tc}(s)| + \aleph_0 = 2|\mathrm{tc}(s)| + 1 + \aleph_0 = 0 + |\mathrm{tc}(s)| + \aleph_0.$$

Нека је α ординал наследник. Изаберимо ординал β за који важи $\alpha = \beta + 1$. Дакле, важи $L_\alpha(s) = \mathrm{def}(L_\beta(s))$. Ако је скуп $L_\beta(s)$ коначан, онда су и скупови α, $\mathrm{tc}(s)$ и $L_\alpha(s)$ коначни. па су обе стране једнакости (3.1) једнаке $\aleph_0$. Ако је скуп $L_\beta(s)$ бесконачан, онда из дефиниције операције $a \mapsto \mathrm{def}(a)$ и теореме о идемпотентности бесконачних кардинала следи да важи $|L_\alpha(s)| = |L_\beta(s)|$. Одатле и из индуктивне претпоставке следи да важи (3.1).

Нека је α бесконачан гранични ординал. Тада због $\alpha \subseteq L_\alpha$ важи

$$\sup_{\beta<\alpha} |L_\beta(s)| \leqslant |L_\alpha(s)| \leqslant \sum_{\beta<\alpha} |L_\beta()| \leqslant |\alpha|\,|L_\alpha(s)| = |L_\alpha(s)|,$$

а самим тим и $|L_\alpha(s)| = \sup_{\beta<\alpha} |L_\beta(s)|$. Одатле и из индуктивне претпоставке следи да важи (3.1). $\Box$

Теорема 67 *Нека је s скуп ординала. Тада у класном моделу $\mathbf{L}(s)$ важи*

$$(\forall\kappa \in \mathbf{CARD})((s \subseteq \kappa \,\wedge\, \kappa \geqslant \aleph_0) \Rightarrow 2^\kappa = \kappa^+). \tag{3.2}$$

Доказ: Извешћемо формулу (3.2) из аксиома ZFC + $\mathbf{V} = \mathbf{L}(s)$. Нека је κ бесконачан кардинал за који је $s \subseteq \kappa$. Изаберимо произвољан $a \subseteq \kappa$. Због $V = \mathbf{L}(s)$ можемо одабрати ординал α такав да скупови a, s и κ припадају скупу $L_\alpha(s)$.

Према теореми 57 можемо одабрати неки ординал $\beta > \alpha$ такав да модел $L_\beta(s)$ рефлектује потребан коначан фрагмент теорије ZFC + $\mathbf{V} = \mathbf{L}(s)$. Према теореми 59 постоји транзитиван подмодел M модела $L_\beta(s)$ кардиналности κ такав да важи следеће:

- Скуп $L_\alpha(s)$ припада моделу M.
- Модел M рефлектује теореме теорије ZF које обезбеђују апсолутност тернарне класне релације $x \in L_\alpha(A)$ за тај модел, као и бинарне класне операције $\langle\alpha, A\rangle \mapsto L_\alpha(A)$.
- Модел M рефлектује теорему да је бинарна класна операција $\langle\alpha, A\rangle \mapsto L_\alpha(A)$ дефинисана за сваки скуп A и сваки ординал α.
- Модел M рефлектује теорему 66.

Скуп $L_\alpha(s)$ припада моделу M, па самим тим важи $|L_\alpha(s)| \leqslant |M| = \kappa$. Према теореми 66 важи $|\alpha| \leqslant \kappa$. Из транзитивности модела M следи да $a \in L_\alpha(s)$. Према томе, важи $\mathcal{P}(\kappa) \subseteq L_{\kappa^+}(s)$, а самим тим и $\kappa^+ \leqslant 2^\kappa = |\mathcal{P}(\kappa)| \leqslant |L_{\kappa^+}(s)| = \kappa^+$, одакле следи тврђење. $\Box$

3.4 Апсолутност реченица

Овде ћемо доказати чувену *Леви-Шенфилдову теорему апсолутности* по којој је класни модел $\mathbf{L}$ апсолутан за реченице из скупа $\Sigma_1 \cup \Pi_1$. За то је довољно доказати апсолутност за реченице облика $(\exists z)\varphi(z)$, где је $\varphi(z)$ формула из скупа Σ_0. Ипак, Леви-Шенфилдова теорема апсолутности тврди и нешто више.

Теорема 68 *Нека је $\varphi(z)$ формула из скупа Σ_0. Тада важи*

$$(\exists z)\varphi(z) \quad\Leftrightarrow\quad (\exists z \in \mathbf{L})(\varphi(z) \wedge |\mathrm{tc}(z)|^{\mathbf{L}} \leqslant \aleph_0).$$

Доказ: Доказаћемо само нетривијалан смер. Претпоставимо да важи $(\exists z)\varphi(z)$. Нека је $\psi(x, y, z)$ следећа формула

$$(x = y \,\Leftrightarrow\, ((\forall t \in x)t \in y \,\wedge\, (\forall t \in y)t \in x)) \,\wedge\, \varphi(z).$$

Тада је реченица $(\forall x, y)(\exists z)\psi(x, y, z)$ логички еквивалентна конјункцији реченице $(\exists z)\varphi(z)$ и аксиоме екстензионалности, па и она важи. Уколико та реченица има коначан добро заснован модел, онда ће тај модел бити и екстензионалан, па ће по теореми о транзитивном колапсу имати и коначан та реченица имати и коначан транзитиван модел M. У том случају важи $M \in V_\omega = L_\omega$ и за неко $c \in M$ важи $M \models \varphi(c)$, односно $\varphi(c)$, при чему због транзитивности скупа M важи $\mathrm{tc}(c) \subseteq M$, па је скуп $\mathrm{tc}(c)$ такође коначан елемент класе $\mathbf{L}$, па је коначан и са становишта класног модела $\mathbf{L}$.

Претпоставимо зато да реченица $(\forall x, y)(\exists z)\psi(x, y, z)$ нема коначан добро заснован модел и докажимо да има транзитиван модел у класи $\mathbf{L}$, који је са становишта класног модела $\mathbf{L}$ највише пребројив. Нека је α бесконачан гранични ординал такав да модел $\mathbf{V}_\alpha$ рефлектује реченицу $(\forall x, y)(\exists z)\psi(x, y, z)$ и формулу $\psi(x, y, z)$. Нека је P скуп свих тројки $\langle A, E, f\rangle$ таквих да важи следеће:

- A је непразан коначан подскуп скупа ω.
- E је бинарна релација на скупу A.
- f је пресликавање скупа A у скуп α такво да важи $(\forall a, b \in A)(E(a, b) \Rightarrow f(a) < f(b))$.

За $\langle A, E, f\rangle \in P$ ћемо пар $\langle A, E\rangle$ тумачити као модел језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}$. Дакле, важи

$$(\forall a, b \in A)(E(a, b) \Leftrightarrow \langle A, E\rangle \models a \in b).$$

Функција f је сведок да је тај модел добро заснован. На скупу P уводимо релацију $<$ на следећи начин: $\langle A', E', f'\rangle < \langle A, E, f\rangle$ ако важи следеће:

- $A \subseteq A'$, $E = E' \cap A^2$ и $f \subseteq f'$.
- $(\forall x, y \in A)(\exists z \in A')\langle A', E'\rangle \models \psi(x, y, z)$.

Очигледно је $\langle P, <\rangle$ парцијално уређен скуп, који припада класи $\mathbf{L}$. Докажимо да парцијално уређење $\langle P, <\rangle$ није добро засновано. Нека је X скуп свих $\langle A, E, f\rangle \in P$ таквих да постоји инјекција $h : A \longrightarrow V_\alpha$ таква да важи следеће:

- $(\forall a, b \in A)(E(a, b) \Leftrightarrow h(a) \in h(b))$.
- $(\forall a \in A) f(a) = \mathrm{rank}(h(a))$.

Скуп X је непразан јер $\langle\{\emptyset\}, \emptyset, \{\langle\emptyset, \emptyset\rangle\}\rangle$. Докажимо да нема минимални елемент. Изаберимо произвољно $\langle A, E, f\rangle \in X$ и нека је h инјекција скупа A у скуп V_α за коју важе наведени услови.

Нека је $B = h[A]$. Скуп B је коначан, па постоји коначан скуп B' такав да важи $B \subseteq B' \subseteq V_\alpha$ као и $(\forall a, b \in B)(\exists c \in B')B' \models \psi(a, b, c)$. Тада можемо изабрати скуп $S \subseteq \omega$ еквипотентан са $B' \setminus B$ и бијекцију g скупа S на скуп $B' \setminus B$. Нека је $A' = A \cup S$ и $h' = h \cup g$. Тада је h' бијекција скупа A' на скуп B' чија је рестрикција на скупу A једнака h. Дефинишимо бинарну релацију E' на скупу A' на следећи начин: $E'(a, b) \Leftrightarrow h(a) \in h(b)$, као и пресликавање $f' : A' \longrightarrow V_\alpha$ као $f'(a) = \mathrm{rank}(h'(a))$.

Очигледно важи $\langle A', E', f'\rangle \in X$. Притом је $A' = A$ у супротности са претпоставком да не постоји коначан добро заснован модел реченице $(\forall x, y)(\exists z)\psi(x, y, z)$. Према томе, важи $\langle A', E', f'\rangle < \langle A, E, f\rangle$, па парцијално уређен скуп $\langle P, <\rangle$ није добро заснован.

Пошто је класни модел $\mathbf{L}$ апсолутан за појам добре заснованости парцијалног уређења, парцијално уређење $\langle P, <\rangle$ није добро засновано ни са становишта класног модела $\mathbf{L}$, па у класном моделу постоји бесконачан опадајући низ[1] $(\langle A_n, E_n, f_n\rangle)_{n\in\omega}$ елемената скупа P. За $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$, $E = \bigcup_{n\in\omega} E_n$ и $f = \bigcup_{n\in\omega} f_n$ важи следеће:

[1] Низ који као функција са доменом ω припада класи $\mathbf{L}$

- $\langle A, E, f\rangle \in \mathbf{L}$.
- $|A|^{\mathbf{L}} \leqslant \aleph_0$.
- je бинарна релација на скупу A.
- $\langle A, E\rangle \models (\forall x, y)(\exists z)\psi(x, y, z)$, па је модел $\langle A, E\rangle$ екстензионалан и важи $\langle A, E\rangle(\exists z)\varphi(z)$.
- f је сведок добре заснованости модела $\langle A, E\rangle$.

Нека је T транзитивни колапс модела $\langle A, E\rangle$. Тада важи $T \in \mathbf{L}$, $|T|^{\mathbf{L}} \leqslant \aleph_0$ и $T \models (\exists z)\varphi(z)$. Нека је $c \in T$ такво да важи $T \models \varphi(c)$. Тада важи $c \in \mathbf{L}$, $\varphi(c)$ и $c \subseteq T$, а самим тим и $|c|^{\mathbf{L}} \leqslant \aleph_0$. $\square$

Ипак, видећемо да конструктибилни универзум у општем случају није апсолутан за Σ_1 формуле, а самим тим ни за Π_1 формуле, већ само за реченице из скупа $\Sigma_1 \cup \Pi_1$.

Глава 4

Ординална дефинабилност

4.1 Ординално дефинабилни скупови

Надаље ће **T** означавати било коју класу. Под $\mathbf{OD}(\mathbf{T})$ ћемо подразумевати класу свих скупова a таквих да постоје

$$a_1, \ldots, a_m \in T, \quad \alpha_1 \ldots, \alpha_n, \beta \in ORD, \quad \varphi(x, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_n) \in \mathrm{For}(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \tag{4.1}$$

такви да важи

$$a_1, \ldots, a_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in V_\beta, \quad \{c \in V_\beta \,|\, V_\beta \models \varphi(c, a_1, \ldots, a_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\} = \{a\}. \tag{4.2}$$

Елементе класе $\mathbf{OD}(T)$ називамо *ординално дефинабилним скуповима* до на параметре из класе **T**. Класа $\mathbf{OD}(\mathbf{T})$ је дефинисана преко истих параметара као класа **T**. Претпоставимо да су (4.1) такви да важи (4.2). Нека је m позитиван природан број. Пошто је класа **ORD** изоморфна класи $\mathbf{ORD}^m$ у односу на уређење

$$\begin{aligned}
&\langle \alpha'_1, \ldots, \alpha'_m \rangle \leqslant \langle \alpha''_1, \ldots, \alpha''_m \rangle \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \\
&\langle \max\{\alpha'_1, \ldots, \alpha'_m\}, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_m \rangle \leqslant_{lex} \langle \max\{\alpha''_1, \ldots, \alpha''_m\}, \alpha''_1, \ldots, \alpha''_m \rangle,
\end{aligned}$$

постоје класна бијекција $\mathbf{F}^m$ класе $\mathbf{ORD}^m$ на класу **ORD** и класне функције $\mathbf{F}^m_1, \ldots, \mathbf{F}^m_m$, које пресликавају класу **ORD** на себе, тако да важи следеће:

- Пресликавања $\mathbf{F}^m, \mathbf{F}^m_1, \ldots, \mathbf{F}^m_n$ су дефинабилна без параметара и апсолутна за транзитивне моделе који рефлектују одређени коначан фрагмент теорије ZF.
- За ма које $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbf{ORD}$ важи

$$\langle \mathbf{F}^m_1(\mathbf{F}^m(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)), \ldots, \mathbf{F}^m_m(\mathbf{F}^m(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)) \rangle = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle,$$

$$\mathbf{F}^m(\mathbf{F}^m_1(\alpha), \ldots, \mathbf{F}^m_m(\alpha)) = \alpha,$$

$$\max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \leqslant \mathbf{F}^m(\alpha_1, \ldots, \alpha_m).$$

Ако су $\gamma, \delta \in \mathbf{ORD}$ такви да је $\delta \geqslant \gamma + \omega$, онда је релација задовољења Тарског на домену V_γ апсолутна за модел V_δ. Такође, пресликавање $\eta \mapsto V_\eta$ је апсолутно за модел V_δ за све $\eta \leqslant \gamma$. Према томе, за формулу

$$\psi(x, y_1, \ldots, y_m, z) := \varphi(x, y_1, \ldots, y_m, \mathbf{F}^n_1(z), \ldots, \mathbf{F}^n_n(z))$$

и $\alpha = \mathbf{F}^n(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ важи

$$(V_\beta \models \varphi(c, a_1, \dots, a_m, \alpha_1, \dots, \alpha_n)) \Leftrightarrow (V_\beta \models \psi(c, a_1, \dots, a_m, \alpha)),$$

па су од ординала параметара довољна два – α и β. На аналоган начин је могуће број ординала параметара свести на један.

Теорема 69 *Постоји природан број k такав да за свако n важи следеће: Нека је*

- *M транзитиван модел који задовољава све* ZF *аксиоме из скупа $\Sigma_{n+k} \cup \Pi_{n+k}$,*
- *класа модела M,*
- *$c \in M$, $b_1, \dots, b_m \in T$, $\alpha \in M \cap$* **ORD***,*
- *$\varphi(x, y_1, \dots, y_m, z)$ формула из скупа $\Sigma_n \cup \Pi_n$,*

тако да важи

$$(\forall c \in M)(c = a \Leftrightarrow \varphi(c, b_1, \dots, b_m, \alpha)).$$

Тада је $a \in (\mathbf{OD}(T))^M$.

Доказ: Пошто модел M задовољава све ZF аксиоме из скупа $\Sigma_{n+k} \cup \Pi_{n+k}$, он задовољава инстанцу теореме рефлексије, па постоји ординал β такав да модел V_β рефлектује формулу φ и да важи $\alpha, a, b_1, \dots, b_m \in V_\beta$. Тада важи

$$(\forall c \in V_\beta)(c = a \Leftrightarrow \varphi(c, b_1, \dots, b_m, \alpha)),$$

одакле следи да $a \in (\mathbf{OD}(T))^M$. $\square$

Класа $\mathbf{OD}(\mathbf{T})$ садржи све ординале јер за сваки ординал α и ма који ординал $\beta > \alpha$ важи $\alpha \in V_\beta$, као и $\{c \in V_\beta \mid c = \alpha\} = \{\alpha\}$.

4.2 Наследно ординално дефинабилни скупови

Класа $\mathbf{HOD}(\mathbf{T})$ се дефинише као класа свих скупова a таквих да $\mathrm{tc}(\{a\}) \in \mathbf{OD}(\mathbf{T})$. Елементе класе $\mathbf{HOD}(\mathbf{T})$ зовемо *наследно ординално дефинабилним скуповима* до на параметре из класе $\mathbf{T}$. Класа $\mathbf{HOD}(\mathbf{T})$ је највећа транзитивна потклаcа од $\mathbf{OD}(\mathbf{T})$ и дефинабилна је преко истих параметара као класа $\mathbf{T}$ и за њу важе исте напомене о смањењу броја потребних параметара. Из транзитивности класе ординала и $\mathbf{ORD} \subseteq \mathbf{OD}(\mathbf{T})$ следи да сваки ординал припада класи $\mathbf{HOD}(\mathbf{T})$. За свако важи да су следећи услови су еквивалентни:

- $a \in \mathbf{HOD}(\mathbf{T})$,
- $a \in \mathbf{OD}(\mathbf{T})$ и $\mathrm{tc}(a) \subseteq \mathbf{OD}(\mathbf{T})$,
- $a \in \mathbf{OD}(\mathbf{T})$ и $\mathrm{tc}(a) \subseteq \mathbf{HOD}(\mathbf{T})$.

Теорема 70 *За сваки природан број n важи да је следеће тврђење теорема теорије* ZF*: Ако је* $\mathbf{T}$ *класа која садржи и све параметре преко којих је дефинисана, онда су све* ZF *аксиоме из скупа $\Sigma_n \cup \Pi_n$ су задовољене у транзитивном класном моделу* $\mathbf{HOD}(\mathbf{T})$*. и класа* $\mathbf{HOD}(\mathbf{T})$ *садржи све ординале.*

Доказ:

Аксиома празног скупа Појам празног скупа је дефинабилан без параметара и нема елемената.

Аксиома екстензионалности Следи из транзитивности класе $\mathbf{HOD}(\mathbf{T})$.

Аксиома пара Нека $a, b \in \mathbf{HOD}(\mathbf{T})$ и нека су T_a и T_b коначни подскупови класе $\mathbf{T}$ такви да је $a \in \mathbf{OD}(T_a)$ и $b \in \mathbf{OD}(T_b)$. Тада важи $\{a, b\} \in \mathbf{OD}(T_a \cup T_b)$ и $\mathrm{tc}(\{a, b\}) = \{a, b\} \cup \mathrm{tc}(a) \cup \mathrm{tc}(b)$.

Аксиома уније Скуп $\bigcup a$ је дефинабилан преко истих параметара као и скуп a и притом важи $\mathrm{tc}(\bigcup a) \subseteq \bigcup a$.

Аксиома партититвног скупа Скуп $\mathcal{P}(a)$ је дефинабилан преко истих параметара као скуп a, док је класа $\mathbf{HOD}(\mathbf{T})$ дефинабилна преко истих параметара као класа $\mathbf{T}$, па је за $a \in \mathbf{HOD}(\mathbf{T})$ скуп $(\mathcal{P}(a))^{\mathbf{HOD}(\mathbf{T})}$ дефинабилан преко параметара преко којих су дефинабилни скуп a и класа $\mathbf{T}$. Одатле и из претпоставке да је класа $\mathbf{T}$ дефинабилна преко параметара из класе $\mathbf{T}$ следи да $(\mathcal{P}(a))^{\mathbf{HOD}(\mathbf{T})} \in \mathbf{HOD}(\mathbf{T})$.

Аксиома бесконачности Скуп ω припада класи $\mathbf{HOD}(\mathbf{T})$ као ординал.

Схема аксиома сепарације Нека су $a, b_1 \dots, b_m \in \mathbf{HOD}(\mathbf{T})$, $\alpha \in \mathbf{ORD}$ и нека је

$$c = \{x \in a \mid \varphi^{\mathbf{HOD}(\mathbf{T})}(x, a, b_1, \dots, x_n)\},$$

при чему $\varphi \in \Sigma_n \cup \Pi_n$. Нека је γ ординал за који важи $a, b_1 \dots, b_m, \alpha \in V_\gamma$ и за који је транзитивни модел V_γ апсолутан за формулу φ. Тада важи

$$\{x \in V_\gamma \mid x \in a \wedge V_\gamma \models \varphi(x, b_1, \dots, b_m, \alpha)\} = c.$$

Према томе, за $\beta = \gamma + \omega$ важи

$$\{t \in V_\beta \mid t = \{x \in V_\gamma \mid x \in a \wedge V_\gamma \models \varphi(x, b_1, \dots, b_m, \alpha)\}\} = \{c\},$$

па је скуп c дефинабилан преко параметара преко којих су дефинабилни $a, b_1, \dots, b_m$, и преко ординала α, β и γ. Одатле и из $\mathrm{tc}(c) \subseteq \mathrm{tc}(a) \subseteq \mathbf{HOD}(\mathbf{T})$ следи да важи $c \in \mathbf{HOD}(\mathbf{T})$.

Схема аксиома замене Нека су $X, c_1, \dots, c_m$ елементи класе $\mathbf{HOD}(\mathbf{T})$, нека је α ординал за који важи $X, c_1, \dots, c_m \in V_\alpha$ и нека је $\varphi(x, y, z, t_1, \dots, t_m)$ формула из скупа $\Sigma_n \cup \Pi_n$. Сваком $a \in X$ можемо придружити најмањи ординал $\gamma(a)$ такав да важи $\gamma(a) \geqslant \alpha$ и

$$((\exists y)\varphi(a, y, X, c_1, \dots, c_m))^{\mathbf{HOD}(\mathbf{T})} \Rightarrow (\exists y \in V_{\gamma(a)} \cap \mathbf{HOD}(\mathbf{T}))\varphi^{\mathbf{HOD}(\mathbf{T})}(a, y, X, c_1, \dots, c_m)).$$

Нека је $\delta = \sup_{a \in X} \gamma(a)$. Тада за $Y = V_\delta \cap \mathbf{HOD}(\mathbf{T})$ важи

$$(\forall a \in X)(((\exists y)\varphi(a, y, X, c_1, \dots, c_m))^{\mathbf{HOD}(\mathbf{T})} \Rightarrow (\exists y \in Y)\varphi^{\mathbf{HOD}(\mathbf{T})}(a, y, X, c_1, \dots, c_m))).$$

Нека је μ ординал који је већи од δ и такав да сви параметри преко којих је дефинисана класа $\mathbf{T}$ припадају скупу V_μ. Нека је β гранични ординал већи од μ, који рефлектује дефинициону формулу класе $\mathbf{HOD}(\mathbf{T})$. Тада важи

$$\{x \in V_\beta \mid x = V_\delta \cap \mathbf{HOD}(\mathbf{T})\} = \{Y\},$$

одакле следи да је $Y \in \mathbf{OD}(\mathbf{T})$. Из дефиниције скупа Y следи да је $Y \subseteq \mathbf{HOD}(\mathbf{T})$, па скуп Y припада класи $\mathbf{HOD}(\mathbf{T})$. Према томе,важи

$$\mathbf{HOD}(\mathbf{T}) \models (\forall x \in X)((\exists y)\varphi(x, y, X, c_1, \dots, c_m) \Rightarrow (\exists y \in Y)\varphi(x, y, X, c_1, \dots, c_m)).$$

Одатле и из задовољености одговарајуће инстанце схема аксиоме сепарације следи тврђење.

Аксиома регуларности Следи из транзитивности модела $\mathbf{HOD}(\mathbf{T})$.

□

Глава 5

Форсинг

5.1 Основни појмови

Нека је $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant \rangle$ *безатомично парцијално уређење*, то јест парцијално уређење у коме важи следећи услов безатомичности

$$(\forall p \in P)(\exists q, r \leqslant p)\neg(\exists t \in P)(t \leqslant q \wedge t \leqslant r).$$

Елементе скупа P ћемо звати *условима*, при чему ћемо рећи да је услов p *јачи од услова* q ако је $p \leqslant q$. За услове p и q ћемо рећи да су *сагласни* или *компатибилни* у ознаци $p||q$ ако постоји услов r такав да важи $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$. У супротном за услове p и q кажемо да су *некомпатибилни* у ознаци $p\perp q$. За скуп $F \subseteq P$ ћемо рећи да је *филтер* ако важи

$$(\forall p, q \in F)(\exists r \in F)(r \leqslant p \wedge r \leqslant q), \quad (\forall p \in F)(\forall q \in P)(p \leqslant q \Rightarrow q \in F).$$

Сада можемо дати интерпретацију појмова јачег услова, компатибилних услова и некомпатибилних услова. Нека је F ознака за произвољан филтер. Тада за произвољне услове p и q важи

$$p \leqslant q \quad \Leftrightarrow \quad (\forall F)(p \in F \Rightarrow q \in F).$$

Смер $\Rightarrow$ следи директно из дефиниције филтера. Смер $\Leftarrow$ се доказује тако што се за филтер F изабере скуп свих $r \in P$ таквих да важи $p \leqslant r$. Дакле, импликација $p \in F \Rightarrow q \in F$ је у општем случају тачна акко је $p \leqslant q$. Такође, за ма које услове p и q важи

$$p||q \quad \Leftrightarrow \quad (\exists F)(p \in F \wedge q \in F).$$

Смер $\Leftarrow$ директно следи из дефиниције филтера. Смер $\Rightarrow$ се доказује тако што се за $r \in P$ такво да важи $r \leqslant p$ и $r \leqslant q$ изабере да филтер F буде скуп свих услова s таквих да важи $r \leqslant s$. Другим речима, услови p и q су сагласни акко су услови $p \in F$ и $q \in F$ сагласни. То се може изразити и на следећи начин:

$$p\perp q \quad \Leftrightarrow \quad \neg(\exists F)(p \in F \wedge q \in F),$$

односно услови p и q су некомпатибилни акко су услови $p \in F$ и $q \in F$ узајамно противречни. За скуп $I \subseteq P$ ћемо рећи да је *некомпатибилан* ако важи

$$(\forall p, q \in I)(p \neq q \Rightarrow p\perp q).$$

Првенствено ћемо користити инклузијски максималне некомпатибилне скупове, које ћемо краће звати *максималним некомпатибилним скуповима*. Помоћу Цорнове леме се једноставно доказује да се сваки некомпатибилан скуп може допунити до максималног некомпатибилног скупа. За скуп $D \subseteq P$ ћемо рећи да је *густ* ако важи

$$(\forall p \in P)(\exists q \in D) q \leqslant p.$$

За скуп $D \subseteq P$ ћемо рећи да је *густ испод* p ако важи

$$(\forall q \in P)(q \leqslant p \Rightarrow (\exists r \in D) r \leqslant q).$$

За ма који скуп $D \subseteq P$ следећи услови су еквивалентни:

- Скуп D је густ.
- За сваки услов p важи да је скуп D густ испод p.
- За скуп D' свих услова p таквих да је скуп D густ испод p важи да је скуп D' густ.
- За сваки максималан некомпатибилан скуп $I \subseteq P$ важи да постоје $p \in D$ и $q \in I$ такви да важи $p \leqslant q$.

Такође, за ма који услов p и ма које $D \subseteq P$ следећи услови су еквивалентни:

- Скуп D је густ испод p.
- За свако $q \leqslant p$ важи да је скуп D густ испод q.
- Скуп $\{q \in D \mid q \leqslant p\}$ је густ испод p.
- Скуп $D \cup \{q \in P \mid p \perp q\}$ је густ.
- Скуп $\{q \in P \mid q \leqslant p\} \cup \{q \in P \mid p \perp q\}$ је густ.

Дефинишимо хијерархију $(V_\alpha^P)_{\mathbf{ORD}}$ и класу $\mathbf{V}^P$ на следећи нађин:

$$V_0^P = \emptyset, \quad V_{\alpha+1}^P = \mathcal{P}(P \times V_\alpha^P),$$

$$V_\alpha^P = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta^P, \quad \text{где је } \alpha \text{ бесконачан гранични ординал,}$$

$$\mathbf{V}^P = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ORD}} V_\alpha^P.$$

Класу $\mathbf{V}^P$ зовемо *класом имена*, а њене елементе *именима*. Следећи услови су еквивалентни:

- Скуп σ је име.
- Сваки елемент скупа σ је уређен пар чија је прва компонента услов, а друга име.

Сваком скупу a придружујемо његово *канонско име* у ознаци $\check{a}$ на следећи начин:

$$\check{a} = P \times \{\check{x} \mid x \in a\} = \{\langle p, x\rangle \mid x \in a\}.$$

Под *канонским именом филтера* подразумевамо име $\{\langle p, \check{p}\rangle \mid p \in P\}$ и за њега ћемо користити ознаку Γ. Притом под *рангом имена* σ у ознаци $\mathrm{rnk}(\sigma)$ подразумевамо најмањи ординал α такав да важи $\sigma \in V_\alpha^P$. Очигледно, из $\sigma \in \mathbf{V}^P$ и $\langle p, \pi\rangle \in \sigma$ следи да важи $\pi \in \mathbf{V}^P$ и $\mathrm{rnk}(\pi) < \mathrm{rnk}(\sigma)$.

5.2 Форсинг раширење

Нека је M произвољан пребројив транзитиван модел одговарајућег коначног фрагмента теорије ZFC и нека је $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant\rangle$ безатомично парцијално уређење такво да $\mathcal{P} \in M$.

За филтер G ћемо рећи да је *M-генерички*, или краће генерички, ако за сваки густ скуп D важи $D \in M \Rightarrow G \cap D \neq \emptyset$. Докажимо да за сваки услов p постоји генерички филтер G такав да $p \in G$.

Пошто је модел M пребројив, можемо изабрати низ $(D_n)_{n\in\omega}$ свих густих скупова који припадају моделу M. Нека је $q_0 = p$ и q_{n+1} неки услов који је мањи од p и који припада скупу D_n. Такав избор је могућ зато што је скуп D_n густ. Очигледно, низ $(q_n)_{n\in\omega}$ је монотоно нерастући. Нека је

$$G = \{r \in P \mid (\exists n \in \omega) r \leqslant p\}.$$

Из $q_0 = p$ следи $q_0 \leqslant p$, а самим тим и $p \in G$. Такође, за свако $n \in \omega$ због $q_n \leqslant q_n$ важи $q_n \in G$ а самим тим и $q_n \in G \cap D_n$, одакле следи да је $G \cap D_n \neq \emptyset$.

Докажимо да је G филтер. Нека су r_1 и r_2 ма који услови из G. Изаберимо n_1 и n_2 из ω за које важи $q_{n_1} \leqslant r_1$ и $q_{n_2} \leqslant r_2$. Тада за $m = \max\{n_1, n_2\}$ важи $\bigwedge_{i=1}^{2}(q_m \leqslant q_{n_i} \leqslant r_i)$, односно $q_m \leqslant r_1, r_2$, при чему важи $q_m \in G$. Нека је $r \in G$ произвољно и нека је s било који услов за који важи $r \leqslant s$. Изаберимо $n \in \omega$ за које важи $q_n \leqslant r$. Тада важи $q_n \leqslant r \leqslant s$, а самим тим и $q_n \leqslant s$, одакле следи да важи $s \in G$.

Нека је G било који генерички филтер, p било који елемент филтера G и D подскуп скупа P који је густ испод p. Докажимо да тада важи $G \cap D \neq \emptyset$. Скуп $D' = D \cup \{q \in P \mid q \perp p\}$ је густ и припада моделу M, па постоји неко $q \in G \cap D'$. Из $p, q \in G$ следи да не може бити $p \perp q$, па $q \in D$.

Докажимо да за ма који филтер G важи да је скуп $D = P \setminus G$ густ. Нека је p било који услов. Из претпоставке о безатомичности парцијалног уређења $\mathcal{P}$ следи да постоје услови $q_1, q_2 \leqslant p$ такви да важи $q_1 \perp q_2$, одакле следи да не могу оба услова q_1 и q_2 да буду у филтеру G, па барем један од њих припада скупу D одакле следи да је скуп D густ.

Нека је G генерички филтер. Докажимо да $G \notin M$. У супротном би скуп $D = P \setminus G$ такође припадао скуп M, па пошто је скуп D притом густ, важило би $G \cap D \neq \emptyset$, што противречи избору скупа D.

Скуп $(\mathbf{V}^P)^M$ ћемо краће обележавати са M^P. Такође, за произвољан ординал $\alpha \in M$ ћемо скуп $(\mathbf{V}^P_\alpha)$ краће обележавати са M^P_α. За произвољан генерички филтер G дефинишемо функцију $\mathrm{int}_G : M^P \longrightarrow \mathbf{V}$ на следећи начин:

$$\mathrm{int}_G(\sigma) = \{\mathrm{int}_G(\tau) \mid (\exists p \in G)\langle p, \tau\rangle \in \sigma\}.$$

Скуп $\mathrm{int}_G(\sigma)$ зовемо *интерпретацијом имена σ при филтеру G*, односно интерпретацијом имена σ када је јасно о ком се филтеру ради. Такође, уместо $\mathrm{int}_G(\sigma)$ такође пишемо σ_G.

За ма које $a \in M$ важи $\mathrm{int}_G(\check{a}) = a$, као и $\mathrm{int}_G(\Gamma) = G$. Одатле следи да за скуп $M[G] = \mathrm{int}_[M^P]$ важи $M \subseteq M[G]$ и $G \in M[G] \setminus M$. Докажимо да је скуп $M[G]$ транзитиван. Нека $a \in b$ и $b \in M[G]$. Према дефиницији скупа $M[G]$ постоји име које се интерпретира као скуп b. Њега уобичајено обележавамо са $\dot{b}$. Из дефиниције интерпретације и $a \in \dot{b}_G$ следи да постоје $p \in G$ и $\sigma \in M^P$ такви да $\langle p, \sigma\rangle \in \dot{b}$ и $\sigma_G = a$, одакле следи да $a \in M[G]$.

Транзитивни модел $M[G]$ зовемо *генеричком екстензијом* или *генеричким раширењем* или *форсинг екстензијом* или *форсинг раширењем* модела M.

Теорема 71 *Нека је M пребројив транзитиван модел језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}$ који задовољава одређену теорему теорије* ZF. *Нека су $\mathcal{P}_1 = \langle P_1, \leqslant_1\rangle$ и $\mathcal{P}_2 = \langle P_2, \leqslant_2\rangle$ безатомична парцијална уређења која припадају моделу M. Нека је $D_1 \in M$ густ скуп у уређењу $\mathcal{P}_1$ и $D_2 \in M$ густ скуп у уређењу $\mathcal{P}_2$ и нека је $f \in M$ бијекција скупа D_1 на скуп D_2 таква да за ма које $a, b \in D_1$ важи $f(a) \leqslant_2 f(b) \Leftrightarrow a \leqslant_1 b$. Тада за сваком $\mathcal{P}_1$-генеричком филтеру G_1 над M можемо придружити $\mathcal{P}_2$-генерички филтер G_2 над M на следећи начин: $G_2 = \{q \in P_2 \mid (\exists p \in G_1 \cap D_1) f(p) \leqslant_2 q\}$. Притом важи $M[G_1] = M[G_2]$.*

Доказ: Претпоставимо да је $q' \in G_2$ и $q'' \in P_2$, при чему важи $q' \leqslant_2 q''$. Изаберимо $p \in G_1 \cap D_1$ такав да важи $f(p) \leqslant_2 q'$. Тада из транзитивности поретка $\leqslant_2$ следи да важи $f(p) \leqslant_2 q''$, а самим тим и $q'' \in G_2$.

Нека су сада q' и q'' произвољни елементи скупа G_2. Изаберимо елементе p' и p'' из скупа $G_1 \cap D_1$ такве да важи $f(p') \leqslant_2 q'$ и $f(p'') \leqslant_2 q''$. Нека је $r \in G_1$ такво да важи $r \leqslant_1 p', p''$ и нека је $p \in G_1 \cap D_1$ такво да је $p \leqslant r$. Из транзитивности релације $\leqslant_1$ следи да важи $p \leqslant p', p''$, а самим тим и $f(p) \leqslant_2 f(p'), f(p'')$, а самим тим и

$$f(p) \leqslant_2 f(p') \leqslant q', \quad f(p) \leqslant_2 f(p'') \leqslant q''.$$

Из рефлексивности релације $\leqslant_2$ следи да $f(p) \in G_2$. Према томе, G_2 је филтер уређења $\mathcal{P}_2$. Докажимо да је генерички. Претпоставимо да је $D'' \in M$ скуп који је густ у уређењу $\mathcal{P}_2$ и докажимо да је $G_2 \cap D'' \neq \emptyset$. Нека је

$$D = \{p \in D_1 \,|\, (\exists q \in D'') f(p) \leqslant q\}.$$

Очигледно, $D \in M$. Докажимо да је скуп D густ у уређењу $\mathcal{P}_1$. Нека је $r \in P_1$ произвољно. Нека је $s \in D_1$ такво да важи $s \leqslant_1 r$. Изаберимо $q \in D''$ такво да важи $q \leqslant_2 f(s)$. Нека је $t \in D_2$ такво да важи $t \leqslant_2 q$ и нека је $p = f^{-1}(t)$. Тада важи $f(p) = t \leqslant_2 q \leqslant_2 f(s)$, одакле следи да је $p \leqslant_1 s$ и да важи $p \in D$.

Нека је $p \in G_1 \cap D$ произвољно. Тада је $p \in G_1 \cap D_1$ и можемо одабрати неко $q \in D''$ такво да важи $f(p) \leqslant q$, одакле следи да важи $q \in G_2$, а самим тим и $q \in G_2 \cap D''$, па је филтер G_2 уређења $\mathcal{P}_2$ генерички над M.

Из дефиниције скупа G_2 следи да је $G_2 \in M[G_1]$. Одатле и из дефиниције скупа $M[G_2]$ следи да је $M[G_2] \subseteq M[G_1]$. Да бисмо доказали обрнуту инклузију, довољно је доказати да је $G_1 \in M[G_2]$. Нека је $G = \{p \in P_1 \,|\, (\exists q \in G_2 \cap D_2) f^{-1}(q) \leqslant_1 p\}$. Очигледно $G \in M[G_2]$. Докажимо да важи $G_1 = G$.

Претпоставимо да $p \in G_1$. Пошто је скуп D_1 густ у уређењу $\mathcal{P}_1$ и $D_1 \in M$, можемо одабрати неко $r \in G_1 \cap D_1$ такво да важи $r \leqslant_1 p$. За $q = f(r)$ важи $q \in G_2 \cap D_2$ и $f^{-1}(q) \leqslant_1 p$, па $p \in G$.

Претпоставимо сада да $p \in G$. Изаберимо $q \in G_2 \cap D_2$ такво да важи $f^{-1}(q) \leqslant_1 p$. Према дефиницији скупа G_2, можемо одабрати неко $r \in G_1 \cap D_1$ такво да важи $f(r) \leqslant_2 q$. Из $r \in G_1$ и $r \leqslant_1 f^{-1}(q) \leqslant_1 p$ следи да $p \in G_1$. $\Box$

5.3 Форсинг релација

Дефинишимо релацију $R(p, \sigma, \tau, t)$, где је p услов, σ и τ имена и $t \in \{0, 1, 2\}$ на следећи начин:

$$\begin{aligned}
R(p,\sigma,\tau,0) &\Leftrightarrow \text{ скуп } \{r \leqslant p \,|\, (\forall \langle s, \pi\rangle \in \sigma)(r \leqslant s \Rightarrow R(r,\pi,\tau,2))\} \text{ је густ испод } p,\\
R(p,\sigma,\tau,1) &\Leftrightarrow R(p,\sigma,\tau,0) \wedge R(p,\tau,\sigma,0),\\
R(p,\sigma,\tau,2) &\Leftrightarrow \text{ скуп } \{r \leqslant p \,|\, (\exists \langle s, \pi\rangle \in \tau)(r \leqslant s \wedge R(r,\sigma,\pi,1))\} \text{ је густ испод } p.
\end{aligned}$$

Ова рекурзивна дефиниција се изводи по добро заснованој релацији над торкама $\langle p, \sigma, \tau, t\rangle$, где се поређење врши у лексикографском поретку најпре по $\max\{\mathrm{rnk}(\sigma), \{\mathrm{rnk}(\tau)\}$, затим по $\mathrm{rnk}(\sigma)$, па по $\mathrm{rnk}(\tau)$ и на крају по t. Параметар p не учествује у поређењу. Ова релација је очигледно добро заснована.

Теорема 72 *За ма које $p \in P$, ма које $\sigma, \tau \in \mathbf{V}^P$ и ма које $t \in \{0, 1, 2\}$ важи да су следећи услови еквивалентни:*

- $R(p, \sigma, \tau, t)$.

- $(\forall q \leqslant p)R(q, \sigma, \tau, t)$.
- *Скуп свих r таквих да важи $R(r, \sigma, \tau, t)$ је густ испод p.*

Доказ: Ако је $t \neq 1$, онда тврђење следи из чињенице да је $R(p, \sigma, \tau, t)$ дефинисано као исказ да је неки подскуп од P густ испод p. Случај $t = 1$ се своди на случај $t = 0$. □

Теорема 73 *Нека је M пребројив транзитиван модел који задовољава подесан коначан фрагмент теорије* ZFC, *$\mathcal{P} = \langle P, \leqslant \rangle$ безатомично парцијално уређење такво да важи $\mathcal{L} \in M$. Тада за ма које $\sigma, \tau \in M^P$ и ма који генерички филтер важи*

- $\sigma_G \subseteq \tau_G \iff (\exists p \in G)M \models R(p, \sigma, \tau, 0)$.
- $\sigma_G = \tau_G \iff (\exists p \in G)M \models R(p, \sigma, \tau, 1)$.
- $\sigma_G \in \tau_G \iff (\exists p \in G)M \models R(p, \sigma, \tau, 2)$.

Доказ: За ма које $\sigma, \tau \in M^P$ и $t \in \{0, 1, 2\}$ важи да је скуп

$$D(\sigma, \tau, t) = \{p \in P \mid M \models R(p, \sigma, \tau, t)\} \cup \{p \in P \mid (\forall q \leqslant p)M \models \neg R(q, \sigma, \tau, t)\}$$

густ, па постоји $p \in G$ такво да важи $M \models R(p, \sigma, \tau, t)$ или $(\forall q \leqslant p)M \models \neg R(q, \sigma, \tau, t)$. Према томе, релацију $(\exists p \in G)M \models R(p, \sigma, \tau, t)$ можемо доказивати довођењем претпоставке

$$p \in G \wedge (\forall q \leqslant p)M \models \neg R(q, \sigma, \tau, t) \tag{5.1}$$

до противречности. Доказ изводимо индукцијом по σ, τ и t по добро заснованој релацији коришћеној у дефиницији релације R.

Случај $\sigma_G \subseteq \tau_G \Rightarrow$: Претпоставимо да важи и (5.1) за $t = 0$ и изведимо противречност. Тада за свако $q \leqslant p$ постоји $q' \leqslant q$ такво да за свако $r \leqslant q'$ важи $\neg(\forall \langle s, \pi \rangle \in \sigma)(r \leqslant s \Rightarrow R(r, \pi, \tau, 2))$. Другим речима, скуп свих $q' \in P$ таквих да важи

$$(\forall r \leqslant q')(\exists \langle s, \pi \rangle \in \sigma)(r \leqslant s \wedge M \models \neg R(r, \pi, \tau, 2)) \tag{5.2}$$

је густ испод p па постоји $q' \in G$ такво да важи (5.2), односно

$$\begin{aligned}&(\forall r \leqslant q')(\exists \langle s, \pi \rangle \in \sigma)(r \leqslant s \wedge \\ &M \models (\exists r' \leqslant r)(\forall r'' \leqslant r')(\forall \langle s', \pi' \rangle \in \tau)\neg(r'' \leqslant s' \wedge R(r'', \pi, \pi', 1))),\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}&(\forall r \leqslant q')(\exists \langle s, \pi \rangle \in \sigma)(r \leqslant s \wedge \\ &(\exists r' \leqslant r)(\forall r'' \leqslant r')(\forall \langle s', \pi' \rangle \in \tau)\neg(r'' \leqslant s' \wedge M \models R(r'', \pi, \pi', 1))),\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}&(\forall r \leqslant q')(\exists r' \leqslant r)(\exists \langle s, \pi \rangle \in \sigma)(r \leqslant s \wedge \\ &(\forall r'' \leqslant r')(\forall \langle s', \pi' \rangle \in \tau)\neg(r'' \leqslant s' \wedge M \models R(r'', \pi, \pi', 1))).\end{aligned}$$

Пошто из $r' \leqslant r$ и $r \leqslant q'$ следи $r' \leqslant q'$, важи

$$\begin{aligned}&(\forall r \leqslant q')(\exists r' \leqslant r)(\exists \langle s, \pi \rangle \in \sigma)(r' \leqslant s \wedge \\ &(\forall r'' \leqslant r')(\forall \langle s', \pi' \rangle \in \tau)\neg(r'' \leqslant s' \wedge M \models R(r'', \pi, \pi', 1))).\end{aligned}$$

Другим речима, скуп свих r' таквих да важи

$$(\exists \langle s, \pi\rangle \in \sigma)(r' \leqslant s \wedge (\forall r'' \leqslant r')(\forall \langle s', \pi'\rangle \in \tau)\neg(r'' \leqslant s' \wedge M \models R(r'', \pi, \pi', 1)))$$

је густ испод q', па постоје $r' \in G$ и $\langle s, \pi\rangle \in \sigma$ такви да важи

$$r' \leqslant s \wedge (\forall r'' \leqslant r')(\forall \langle s', \pi'\rangle \in \tau)\neg(r'' \leqslant s' \wedge M \models R(r, \pi, \pi', 1)), \tag{5.3}$$

а самим тим и $s \in G$ и $\pi_G \in \tau_G$. Одатле следи да за неко $\langle s', \pi'\rangle \in \tau$ важи $s' \in G$ и $\pi_G = \pi'_G$. Према индуктивној претпоставци, постоји $t \in G$ такво да важи $M \models R(t, \pi, \pi', 1)$. Нека је $r'' \in G$ такво да важи $r'' \leqslant r', s', t$. Тада важи $r'' \leqslant r'$ и $M \models R(r'', \pi, \pi', 1)$, што је у супротности са (5.3).

Случај $\sigma_G \subseteq \tau_G \Leftarrow$**:** Нека је $p \in G$ такво да важи $M \models R(p, \sigma, \tau, 0)$ и нека је $a \in \sigma_G$. Тада постоји $\langle s, \pi\rangle \in \sigma$ такво да важи $s \in G$ и $a = \pi_G$. Према дефиницији релације R, скуп свих r таквих да важи

$$(\forall \langle s', \pi'\rangle \in \sigma)(r \leqslant s' \Rightarrow M \models R(r, \pi', \sigma, 2)) \tag{5.4}$$

је густ испод p, па постоји неко $r \in G$ такво да важи (5.4). Притом је r могао бити одабран тако да важи $r \leqslant s$. Тада важи $M \models R(t, \pi, \sigma, 2)$, па по индуктивној претпоставци важи $\pi_G \in \tau_G$, а самим тим и $a \in \tau_G$, чиме је доказано да важи $\sigma_G \subseteq \tau_G$.

Случај $\sigma_G = \tau_G \Rightarrow$**:** Нека је $\sigma_G = \tau_G$. Тада важи $\sigma_G \subseteq \tau_G$ и $\tau_G \subseteq \sigma_G$. Према индуктивној претпоставци, постоје $p_1, p_2 \in G$ такви да важи $M \models R(p_1, \sigma, \tau, 0)$ и $M \models R(p_2, \tau, \sigma, 0)$. Нека је $p \in G$ такво да важи $p \leqslant p_1, p_2$. Тада важи $M \models R(p, \sigma, \tau, 1)$.

Случај $\sigma_G = \tau_G \Leftarrow$**:** Нека је $p \in G$ такво да важи $M \models R(p, \sigma, \tau, 1)$. Тада важи $M \models R(p, \sigma, \tau, 0)$ и $M \models R(p, \sigma, \tau, 0)$. На основу индуктивне претпоставке важи $\sigma_G = \tau_G$ и $\tau_G \subseteq \sigma_G$, одакле следи да је $\sigma_G = \tau_G$.

Случај $\sigma_G \in \tau_G \Rightarrow$**:** Нека је $\sigma_G \in \tau_G$. Тада постоји $\langle s, \pi\rangle \in \tau$ такав да важи $s \in G$ и $\sigma_G = \pi_G$. На основу индуктивне претпоставке постоји $q \in G$ такво да важи $M \models R(q, \sigma, \pi, 1)$. Нека је $p \in G$ такво да важи $p \leqslant q, s$. Тада важи $M \models R(p, \sigma, \pi, 1)$.

Случај $\sigma_G \in \tau_G \Leftarrow$**:** Претпоставимо да важи $p \in G$ и $M \models R(p, \sigma, \tau, 2)$. Тада је скуп свих $r \in P$ таквих да важи

$$(\exists \langle s, \pi\rangle \in \tau)(r \leqslant s \wedge R(r, \sigma, \pi, 1))$$

густ испод p, па постоје $r \in G$ и $\langle s, \pi\rangle \in \tau$ такви да важи $r \leqslant s$ и $M \models R(r, \sigma, \pi, 1)$. Тада важи $s \in G$, а самим тим и $\pi_G \in \tau_G$. Према индуктивној претпоставци важи $\sigma_G = \pi_G$, одакле следи да је $\sigma_G \in \tau_G$.

□

Теорема 74 *За ма које $\sigma, \tau \in M^P$ и ма који услов p важи*

- $M \models R(p, \sigma, \tau, 0)$ *акко за сваки генерички филтер G важи $p \in G \Rightarrow \sigma_G \subseteq \tau_G$.*
- $M \models R(p, \sigma, \tau, 1)$ *акко за сваки генерички филтер G важи $p \in G \Rightarrow \sigma_G = \tau_G$.*
- $M \models R(p, \sigma, \tau, 2)$ *акко за сваки генерички филтер G важи $p \in G \Rightarrow \sigma_G \in \tau_G$.*

Доказ: У сва три случаја смер слева удесно следи из теореме 73. Доказаћемо обрнут смер. Обрнут смер ћемо доказивати доказивањем контрапозиције. Према теореми 72 из $M \models \neg R(p, \sigma, \tau, t)$ следи да постоји $q \leqslant p$ такво да за свако $r \leqslant q$ важи $M \models \neg R(r, \sigma, \tau, t)$. Нека је G генерички филтер такав да $r \in G$. Тада $p \in G$ и тврђење следи из теореме 73. $\Box$

Надаље ћемо уместо $R(p, \sigma, \tau, 1)$ писати $p \Vdash_{\mathcal{P}} \sigma = \tau$, односно $p \Vdash \sigma = \tau$, док ћемо уместо $R(p, \sigma, \tau, 2)$ писати $p \Vdash_{\mathcal{P}} \sigma \in \tau$, односно $p \Vdash \sigma \in \tau$.

Класну релацију $p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$, где је $\varphi(x_1, \ldots, x_d)$ формула језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}$ и где $p \in P$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_d \in \mathbf{V}^P$ дефинишемо индукцијом по сложености формуле на следећи начин:

- $p \Vdash_{\mathcal{P}} \sigma = \tau$ ако важи $R(p, \sigma, \tau, 1)$.
- $p \Vdash_{\mathcal{P}} \sigma \in \tau$ ако важи $R(p, \sigma, \tau, 2)$.
- $p \Vdash_{\mathcal{P}} \neg\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ ако важи $(\forall q \leqslant p) p \nVdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$.
- $p \Vdash_{\mathcal{P}} (\psi_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_d) \wedge \psi_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_d))$ ако $p \Vdash_{\mathcal{P}} \psi_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ и $p \Vdash_{\mathcal{P}} \psi_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$.
- $p \Vdash_{\mathcal{P}} (\forall x)\theta(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ ако за свако $\pi \in \mathbf{V}^P$ важи $p \Vdash_{\mathcal{P}} \theta(\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$.

Саму релацију $p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi$ зовемо *форсинг релацијом*. Форсинг релација је класна релација дефинисана у односу на дату формулу φ. Да бисмо је за дато n дефинисали у односу на све формуле из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$, неопходно је третирати ограничене квантификаторе у дефиницији форсинг релације посебно, а не као посебан случај неограничених квантификатора. У том смислу, уводимо следећу дефиницију: $p \Vdash_{\mathcal{P}} (\forall x \in \sigma_1)\theta(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ важи ако за све $\langle q, \sigma \rangle \in \sigma_1$ и све $r \leqslant p, q$ важи $r \Vdash_{\mathcal{P}} \theta(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$.

Приметимо да из дефиниције форсинг релације следи да за ма коју формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_d)$, и ма које $\sigma_1, \ldots, \sigma_d \in \mathbf{V}^P$ важи

$$p \nVdash_{\mathcal{P}} \neg\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d) \quad \Rightarrow \quad (\exists q \leqslant p) q \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d),$$

одакле следи да важи

$$(\forall p \in P)(\exists q \leqslant p)(q \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d) \;\vee\; q \Vdash_{\mathcal{P}} \neg\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)).$$

За услов p кажемо да *одлучује исказ* $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ ако важи

$$p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d) \;\vee\; p \Vdash_{\mathcal{P}} \neg\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d).$$

Према претходном, за сваки исказ важи да је скуп услова који га одлучују густ. Самим тим, за сваки исказ важи да сваки генерички филтер садржи неки услов који одлучује тај исказ. Наведимо важна својства форсинг релације.

Теорема 75 *За сваки природан број n следеће тврђење теорема: Нека је $\varphi(x_1, \ldots, x_d)$ ма која формула из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$, $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant \rangle$ ма које безатомично парцијално уређење, p ма који услов и нека су $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ произвољна имена. Тада су следећи услови еквивалентни:*

$$p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d), \tag{5.5}$$

$$(\forall q \leqslant p) q \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d), \tag{5.6}$$

$$(\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q) r \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d). \tag{5.7}$$

Доказ: Довољно је доказати импликације (5.5)⇒(5.6) и (5.7)⇒(5.5) јер је импликација (5.6)⇒(5.7) тривијална. Случај када је формула φ атомска се своди на теорему 72.

Размотримо случај када је φ формула $\neg\psi(x_1,\ldots,x_d)$. Импликација (5.5)⇒(5.6) следи из дефиниције форсинг релације и транзитивности релације $\leqslant$.

Претпоставимо да важи (5.7) и да не важи (5.5) и изведимо противречност. Пошто не важи (5.5), постоји неко $q \leqslant p$ такво да важи $q \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\sigma_1,\ldots,\sigma_d)$. На основу (5.7) постоји $r \leqslant q$ такво да важи $r \Vdash_{\mathcal{P}} \neg\psi(\sigma_1,\ldots,\sigma_d)$, одакле следи да због $r \leqslant r$ важи $r \nVdash_{\mathcal{P}} \neg\psi(\sigma_1,\ldots,\sigma_d)$, што је у супротности са исказом $r \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\sigma_1,\ldots,\sigma_d)$, који је последица индуктивне претпоставке и $r \leqslant q$.

Размотримо сада случај да је φ формула $\psi_1(\sigma_1,\ldots,\sigma_d) \wedge \psi_2(x_1,\ldots,x_d)$. Ако важи (5.5), онда важи и $\bigwedge_{i=1}^{2} p \Vdash_{\mathcal{P}} \psi_i(\sigma_1,\ldots,\sigma_d)$, па по индуктивној претпоставци важи

$$(\forall q \leqslant p) p \Vdash_{\mathcal{P}} \psi_1(\sigma_1,\ldots,\sigma_d), \quad (\forall q \leqslant p) p \Vdash_{\mathcal{P}} \psi_2(\sigma_1,\ldots,\sigma_d),$$

а самим тим и

$$(\forall q \leqslant p)((p \Vdash_{\mathcal{P}} \psi_1(\sigma_1,\ldots,\sigma_d)) \wedge (p \Vdash_{\mathcal{P}} \psi_1(\sigma_1,\ldots,\sigma_d))),$$

односно (5.6). Претпоставимо сада да важи (5.7). Тада важи

$$(\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q) r \Vdash_{\mathcal{P}} \psi_1(\sigma_1,\ldots,\sigma_d), \quad (\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q) r \Vdash_{\mathcal{P}} \psi_2(\sigma_1,\ldots,\sigma_d).$$

Одатле и из индуктивне претпоставке следи да важи

$$p \Vdash_{\mathcal{P}} \psi_1(\sigma_1,\ldots,\sigma_d), \quad p \Vdash_{\mathcal{P}} \psi_2(\sigma_1,\ldots,\sigma_d),$$

а самим тим и (5.5). Размотримо сада случај да је φ формула $(\forall x \in x_1)\psi(x,x_1,\ldots,x_d)$. Претпоставимо да важи (5.5), односно

$$(\forall \langle q,\sigma\rangle \in \sigma_1)(\forall r \leqslant p,q) r \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\sigma,\sigma_1,\ldots,\sigma_d).$$

Из транзитивности релације $\leqslant$ следи да важи

$$(\forall p' \leqslant p)(\forall \langle q,\sigma\rangle \in \sigma_1)(\forall r \leqslant p',q) r \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\sigma,\sigma_1,\ldots,\sigma_d),$$

односно (5.6). Претпоставимо да важи (5.7), односно

$$(\forall p' \leqslant p)(\exists p'' \leqslant p)(\forall \langle q,\sigma\rangle \in \sigma_1)(\forall r \leqslant p'',q) r \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\sigma,\sigma_1,\ldots,\sigma_d).$$

Нека су $\langle q,\sigma\rangle \in \sigma_1$ и $r \leqslant p,q$ произвољни. Докажимо да важи $r \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\sigma,\sigma_1,\ldots,\sigma_d)$. У супротном, постоји $p' \leqslant r$ такво да за свако $s \leqslant p'$ важи $s \nVdash_{\mathcal{P}} \psi(\sigma,\sigma_1,\ldots,\sigma_d)$ Изаберимо $p'' \leqslant p'$ тако да важи

$$(\forall s \leqslant p'',q) s \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\sigma,\sigma_1,\ldots,\sigma_d).$$

Међутим, то није могуће јер одатле следи да услов p'' исти исказ и форсира и не форсира, што је противречност. Према томе, важи (5.5).

Коначно, размотримо случај када је φ формула $(\forall x)\psi(x,x_1,\ldots,x_d)$. Претпоставимо да важи (5.5). Нека су $\pi \in \mathbf{V}^P$ и $q \leqslant$ произвољни. Тада важи $p \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi,\sigma_1,\ldots,\sigma_d)$, па према индуктивној претпоставци важи $q \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi,\sigma_1,\ldots,\sigma_d)$. Одатле следи да важи (5.6).

Претпоставимо сада да важи (5.7), односно

$$(\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q)(\forall \pi \in \mathbf{V}^P) r \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi,\sigma_1,\ldots,\sigma_d).$$

Нека је $\pi \in \mathbf{V}^P$ произвољно. Тада важи $(\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q) r \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi,\sigma_1,\ldots,\sigma_d)$, па на основу индуктивне претпоставке важи $p \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi,\sigma_1,\ldots,\sigma_d)$. Према томе, важи (5.5). $\Box$

Теорема 76 (*Форсинг теорема*) *за сваки природан број n постоји природан број k такав да је: Нека је M пребројив транзитиван модел језика $\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}$ који задовољава све* ZFC *аксиоме из скупа $\Sigma_k(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_k(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$. Тада за ма коју формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_d)$ из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$ и ма које $\sigma_1, \ldots, \sigma_d \in M^P$ важи следеће:*

- *За ма који генерички филтер G важи*

$$M[G] \models \varphi(\mathrm{int}_G(\sigma_1), \ldots, \mathrm{int}_G(\sigma_d)) \quad \textit{акко} \quad (\exists p \in G) M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d).$$

- *$M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ акко за сваки генерички филтер G важи*

$$p \in G \quad \Rightarrow \quad M[G] \models \varphi(\mathrm{int}_G(\sigma_1), \ldots, \mathrm{int}_G(\sigma_d)).$$

Доказ: Нека је n дато. Изаберимо довољно велико k да уз наведене претпоставке о моделу M модел M задовољава теорему 75, коректност коришћених дефиниција у вези са хијерархијом формула и класном релацијом задовољења, као и друге аксиоме које ћемо овде користити. Доказ се изводи најпре индукцијом по n, а потом по сложености формуле. Притом формулу из ис Такође, довољно је доказати смер $\Rightarrow$ за оба дела тврђења.

Случај када је φ атомска формула следи из теорема 73 и 74. Размотримо случај када је φ негација формуле $\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$. Претпоставимо да важи

$$M[G] \models \varphi(\mathrm{int}_G(\sigma_1), \ldots, \mathrm{int}_G(\sigma_d)). \tag{5.8}$$

и изаберимо услов p који са становишта модела M одлучује исказ $\psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$. У том случају важи $M \not\models p \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$, јер би у супротном по индуктивној претпоставци важила негација од (5.8). Према томе, на основу дефиниције одлучивања исказа важи

$$M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d). \tag{5.9}$$

Претпоставимо да важи (5.9) и да је G произвољан генерички филтер такав да $p \in G$. Тада важи (5.8) јер би у супротном по индуктивној претпоставци постојало $q \in G$ такво да важи

$$M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d),$$

па би за $r \in G$ такво да је $r \leqslant p, q$ важило да са становишта модела M услов r форсира исказ и његову негацију, што противречи дефиницији форсирања негације исказа и рефлексивности релације $\leqslant$.

Размотримо сада случај када је φ конјункција формула $\psi_1(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ и $\psi_2(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$. Претпоставимо да важи (5.8). Према индуктивној претпоставци, постоје услови $p_1, p_2 \in G$ такви да важи $\bigwedge_{i=1}^{2} M \models p_i \Vdash_{\mathcal{P}} \psi_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$. За $p \in G$ такво да је $p \leqslant p_1, p_2$ важи (5.9).

Претпоставимо да важи (5.9) и да је G произвољан генерички филтер такав да $p \in G$. Тада важи $\bigwedge_{i=1}^{2} M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \psi_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$, па по индуктивној претпоставци важи и (5.8).

Размотримо сада случај када је φ формула $(\forall x \in x_1)\psi(x, x_1, \ldots, x_d)$. Претпоставимо да важи (5.8) и изаберимо услов $p \in G$ који са становишта модела M одлучује исказ $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$. Претпоставимо да важи $M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \neg\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ и изведимо противречност. Према дефиницији форсинг релације, важи $(\forall q \leqslant p) M \models q \not\Vdash_{\mathcal{P}} (\forall x \in \sigma_1)\psi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$, односно

$$(\forall q \leqslant p)(\exists \langle r, \pi \rangle \in \sigma_1)(\exists s \leqslant q, r) M \models s \not\Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_d). \tag{5.10}$$

Претпоставимо да важи

$$q \leqslant p, \quad \langle r, \pi \rangle \in \sigma_1, \quad s \leqslant q, r, \quad M \models s \not\Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_d).$$

Тада постоји $s' \leqslant s$ такво да важи $(\forall t \leqslant s')M \models t \nVdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$. Због транзитивности релације $\leqslant$ важи $s' \leqslant q, r$, одакле закључујемо да важи

$$(\exists s \leqslant q, r)M \models s \nVdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_d) \quad \Rightarrow \quad (\exists s \leqslant q, r)(\forall t \leqslant s)M \models t \nVdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_d).$$

Одатле и из (5.10) следи да важи

$$(\forall q \leqslant p)(\exists \langle r, \pi \rangle \in \sigma_1)(\exists s \leqslant q, r)(\forall t \leqslant s)M \models t \nVdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_d),$$

односно

$$(\forall q \leqslant p)(\exists s \leqslant q)(\exists \langle r, \pi \rangle \in \sigma_1)(s \leqslant r \,\wedge\, (\forall t \leqslant s)M \models t \nVdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)).$$

Нека су $s \in G$ и $\langle r, \pi \rangle \in \sigma_1$ такви да важи $s \leqslant p, r$ и $(\forall t \leqslant s)M \models t \nVdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_d))$. Тада $r \in G$, па $\pi_G \in \mathrm{int}_G(\sigma_1)$, одакле следи да важи $M[G] \models \psi(\pi_G, \mathrm{int}_G(\sigma_1), \ldots, \mathrm{int}_G(\sigma_d))$, па по индуктивној претпоставци постоји неко $t' \in G$ такво да важи $M \models t' \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$. Нека је $t \in G$ такво да важи $t \leqslant s, t'$. Тада са становишта модела M услов t и форсира и не форсира исти исказ, што је противречност.

Претпоставимо сада да важи (5.9), односно

$$(\forall \langle q, \pi \rangle \in \sigma_1)(\forall r \leqslant p, q)M \models r \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$$

и нека је G генерички филтер такав да важи $p \in G$ и да не важи (5.8) и изведимо противречност. Нека је $a \in \mathrm{int}_G(\sigma_1)$ такво да важи $M[G] \models \neg\psi(a, \mathrm{int}_G(\sigma_1), \ldots, \mathrm{int}_G(\sigma_d))$. Тада постоји $\langle q, \pi \rangle \in \sigma_1$ такво да важи $\pi_G = \mathrm{int}_G(\sigma_1)$, а самим тим и $M[G] \models \neg\psi(\pi_G, \mathrm{int}_G(\sigma_1), \ldots, \mathrm{int}_G(\sigma_d))$. Према индуктивној претпоставци, постоји $s \in G$ такво да важи $M \models s \Vdash_{\mathcal{P}} \neg\psi(\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$, Нека је $r \in G$ такво да важи $r \leqslant p, q, s$. Тада у моделу M услов r и форсира и не форсира исти исказ, што је противречност.

Размотримо сада случај када је φ формула $(\forall x)\psi(x, x_1, \ldots, x_d)$. Претпоставимо да важи (5.8) и изаберимо услов $p \in G$ који са становишта модела M одлучује исказ $\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$. Претпоставимо да важи $M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \neg\varphi(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ и изведимо противречност. Према дефиницији форсинг релације важи $(\forall q \leqslant p)M \models q \nVdash_{\mathcal{P}} (\forall x)\psi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$, односно за свако $q \leqslant p$ постоји $\sigma \in M^P$ такво да скуп свих $r \leqslant q$ таквих да $M \models r \nVdash_{\mathcal{P}} \psi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ није густ испод q, па постоје $\sigma \in M^P$ и $r \leqslant q$ такви да за свако $s \leqslant r$ важи $M \models s \nVdash_{\mathcal{P}} \psi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$, односно

$$M \models r \Vdash_{\mathcal{P}} \neg\psi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d). \tag{5.11}$$

Према томе, скуп свих $r \leqslant p$ таквих да важи (5.11) је густ, па важи

$$M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \neg\psi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d).$$

Према индуктивној претпоставци важи $M[G] \models \neg\psi(\sigma_G, \mathrm{int}_G(\sigma_1), \ldots, \mathrm{int}_G(\sigma_d))$, што је у супротности са претпоставком да важи (5.8).

Претпоставимо сада да важи (5.9) и нека је G генерички филтер такав да важи $p \in G$ и да не важи (5.8) и изведимо противречност. Нека је $\sigma \in M^P$ такво да важи

$$M[G] \models \neg\psi(\sigma_G, \mathrm{int}_G(\sigma_1), \ldots, \mathrm{int}_G(\sigma_d)).$$

Према индуктивној претпоставци, постоји $q \in G$ такво да важи

$$M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \neg\psi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d).$$

Нека је $r \in G$ такво да важи $r \leqslant p, q$. Због $r \leqslant p$ важи $M \models r \Vdash_{\mathcal{P}} \psi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$, док из $r \leqslant q$ следи супротно. $\square$

Теорема 77 *За сваки природан број n важи да је следеће тврђење теорема: За сваку формулу $\varphi(x, x_1, \ldots, x_d)$ из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\text{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\text{ZFC}})$, свако безатомично парцијално уређење $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant\rangle$ и ма које $p \in P$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_d \in \mathbf{V}^P$ важи да су следећи услови еквивалентни:*

- $p \Vdash_{\mathcal{P}} (\forall x \in \sigma_1)\varphi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$.
- $(\forall \sigma \in \mathbf{V}^P) p \Vdash_{\mathcal{P}} (\sigma \in \sigma_1 \Rightarrow \varphi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d))$.

Доказ: Претпоставимо супротно. Нека је n такво да тврђење теореме није тачно и изаберимо пребројив транзитиван модел M који рефлектује све реченице из скупа $\Sigma_k(\mathcal{L}_{\text{ZFC}}) \cup \Pi_k(\mathcal{L}_{\text{ZFC}})$ за довољно велико k.

Тврђење теореме за вредност n није тачно ни са становишта модела M, па у њему постоје безатомично парцијално уређење $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant\rangle$, формула $\varphi(x, x_1, \ldots, x_d)$ из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\text{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\text{ZFC}})$ и $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d, \in M^P$ и $p \in P$ такви да важи

$$M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} (\forall x \in \sigma_1)\varphi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_d),$$

$$M \models p \nVdash_{\mathcal{P}} (\sigma \in \sigma_1 \Rightarrow \varphi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)).$$

Нека је $q \leqslant p$ такво да важи

$$(\forall r \leqslant q) M \models r \nVdash_{\mathcal{P}} (\sigma \in \sigma_1 \Rightarrow \varphi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)),$$

односно

$$(\forall r \leqslant q) M \models r \nVdash_{\mathcal{P}} \neg(\sigma \in \sigma_1 \wedge \neg\varphi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)),$$

то јест,

$$(\forall r \leqslant q)(\exists t \leqslant r) M \models t \Vdash_{\mathcal{P}} (\sigma \in \sigma_1 \wedge \neg\varphi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)).$$

Изаберимо $t \leqslant q$ такво да важи

$$M \models t \Vdash_{\mathcal{P}} \sigma \in \sigma_1, \quad M \models \Vdash_P \neg\varphi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)).$$

Нека је G генерички филтер коме припада услов t. Тада важи

$$M[G] \models (\forall x \in \text{int}_G(\sigma_1))\varphi(x, \text{int}_G(\sigma_1), \ldots, \text{int}_G(\sigma_d)),$$

као и

$$M[G] \models \sigma_G \in \text{int}_G(\sigma_1), \quad M[G] \models \neg\varphi(\sigma_G, \text{int}_G(\sigma_1), \ldots, \text{int}_G(\sigma_d)),$$

што је узајамно противречно. □

Теорема 78 *За сваки природан број n важи да је следеће тврђење теорема: За сваку формулу $\varphi(x, x_1, \ldots, x_d)$ из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\text{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\text{ZFC}})$, свако безатомично парцијално уређење $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant\rangle$ и ма које $p \in P$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_d \in \mathbf{V}^P$ важи да су следећи услови еквивалентни:*

- $p \Vdash_{\mathcal{P}} (\exists x)\varphi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$.
- $(\exists \sigma \in \mathbf{V}^P) p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$.

Доказ: Претпоставимо супротно и нека је n_0 природан број такав да тврђење није тачно за $n = n_0$. Нека је M пребројив транзитиван модел који рефлектује све реченице из скупа $\Sigma_k(\mathcal{L}_{\text{ZFC}}) \cup \Pi_k(\mathcal{L}_{\text{ZFC}})$ за довољно велико k. У њему важи негација тврђења теореме за $n = n_0$. Нека су $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant\rangle \in M$

безатомично парцијално уређење, $\varphi(x, x_1, \ldots, x_d)$ формула из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$, нека су $\sigma_1, \ldots, \sigma_d \in M^P$ и $p \in P$ такви да важи

$$M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \neg(\forall x)\neg\varphi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_d),$$

односно

$$(\forall q \leqslant p) M \models q \nVdash_{\mathcal{P}} (\forall x)\neg\varphi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_d),$$

што је еквивалентно са

$$(\forall q \leqslant p)(\exists \pi) M \models q \nVdash_{\mathcal{P}} \neg\varphi(\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_d),$$

то јест са

$$(\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q)(\exists \sigma) M \models r \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d).$$

Нека је

$$D = \{r \leqslant p \,|\, \exists \pi) M \models r \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\pi, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)\}.$$

Скуп D је густ испод p. Нека је $I \in M$ инклузијски максималан некомпатибилан подскуп скупа D. Тада је I инклузијски максималан подскуп скупа услова мањих од p. Нека је $f \in M$, такво да $f : I \longrightarrow M^P$ и да за свако $r \in I$ важи

$$M \models r \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(f(r), \sigma_1, \ldots, \sigma_d). \tag{5.12}$$

Нека је

$$\sigma = \{\langle s, \pi\rangle \,|\, (\exists r \in I)(\exists t)(\langle t, \pi\rangle \in f(r) \,\wedge\, s \leqslant r, t)\}.$$

Докажимо да важи $M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$. У супротном, можемо одабрати неко $q \leqslant p$ такво да за свако $r \leqslant q$ важи $M \models r \nVdash_{\mathcal{P}} \varphi(\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$, као и неко $r \in I$ такво да је сагласно са q и да важи (5.12). Нека је $q' \leqslant q, r$. Изаберимо генерички филтер G такав да важи $q' \in G$. Из начина на који смо изабрали r и G следи да важи $M[G] \models \neg\varphi(\sigma_G, \mathrm{int}_G(\sigma_1), \ldots, \mathrm{int}_G(\sigma_d))$. Такође, на основу начина избора функције f важи $M[G] \models \varphi((f(r))_G, \mathrm{int}_G(\sigma_1), \ldots, \mathrm{int}_G(\sigma_d))$. Противречност ћемо извести тако што ћемо доказати да је $\sigma_G = (f(r))_G$.

Ако $a \in \sigma_G$, онда постоји $\langle s, \pi\rangle \in \sigma$ такво да важи $s \in G$ и $\pi_G = a$. Самим тим, постоје $r' \in I$ и t такво да важи $\langle t, \pi\rangle \in f(r')$ и $s \leqslant r', t$. Услови r и r' су сагласни јер припадају истом генеричком филтеру G. Такође, они припадају истом некомпатибилном скупу I, па важи $r' = r$. Из $\langle t, \pi\rangle \in f(r)$ и $t \in G$ следи да важи $a = \pi_G \in (f(r))_G$.

Нека $a \in (f(r))_G$. Тада постоји $\langle t, \pi\rangle \in f(r)$ такво да важи $t \in G$ и $\pi_G = a$. Нека је $s \in G$ такво да важи $s \leqslant r, t$. Тада важи $\langle s, \pi\rangle \in \sigma$, а самим тим и $a = \pi_G \in \sigma_G$. $\square$

Теорема 79 *За свако n важи да је следеће тврђење теорема: За сваку формулу $\varphi(x, x_1, \ldots, x_d)$ из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$, сваки скуп A, свако безатомично парцијално уређење $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant\rangle$ и ма које $p \in P$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_d \in \mathbf{V}^P$ важи да су следећи услови еквивалентни:*

$$p \Vdash_{\mathcal{P}} (\exists x \in \check{A})\varphi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_d), \tag{5.13}$$

$$(\forall q \leqslant p)(\exists r \leqslant q)(\exists a \in A) r \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\check{a}, \sigma_1, \ldots, \sigma_d). \tag{5.14}$$

Доказ: Нека је n_0 било који природан број. Доказаћемо тврђење за $n = n_0$. Нека је M пребројив транзитиван модел, који рефлектује све реченице из скупа $\Sigma_k(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_k(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$ за довољно велико k и докажимо да за $n = n_0$ тврђење теореме важи у моделу M.

Нека је $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant\rangle \in M$ безатомично парцијално уређење, $\varphi(x, x_1, \ldots, x_d)$ формула из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$, $p \in P$, $A \in M$ и $\sigma_1, \ldots, \sigma_d \in M^P$.

Претпоставимо да у моделу M важи (5.13), али не и (5.14). Нека је $q \leqslant p$ произвољно и нека је G генерички филтер такав да важи $q \in G$. Тада свакако $p \in G$, па према важењу (5.13) у моделу

M постоји $a \in \check{A}_G = A$ такво да важи $M[G] \models \varphi(\check{a}_G, \mathrm{int}_G(\sigma_1), \ldots, \mathrm{int}_G(\sigma_d))$, па можемо одабрати неко $s \in G$ тако да важи $M \models s \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\check{a}, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$. Тада можемо одабрати и $r \in G$ тако да важи $r \leqslant q, s$ и за њега ће важити

$$r \leqslant q, \quad M \models r \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\check{a}, \sigma_1, \ldots, \sigma_d).$$

Претпоставимо сада да у моделу M важи (5.14), али не и (5.13). Ово друго заправо значи да можемо одабрати $q \leqslant p$ такво да важи

$$M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} (\forall x \in \check{A}) \neg\varphi(x, \sigma_1, \ldots, \sigma_d). \tag{5.15}$$

Према важењу (5.14) у моделу M, можемо одабрати неко $r \leqslant q$ и неко $a \in A$ тако да важи $M \models r \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\check{a}, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$, што је у супротности са $r \leqslant q$ и (5.15). $\square$

Уз уобичајене претпоставке о значењу ознака, нека за неко $A \in M$ важи (5.13). Тада за услов $r \leqslant p$ такав да постоји $a \in A$ такав да важи $r \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\check{a}, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$ кажемо да *одређује вредност* t за коју важи $\varphi(\check{t}, \sigma_1, \ldots, \sigma_d)$.

Према претходној теореми, ако p форсира да нека вредност припада скупу $\check{A}$, онда је скуп услова који одређују неки елемент скупа $\check{A}$ коме је та вредност једнака густ испод p. Рецимо, ако важи $p \Vdash_{\mathcal{P}} \sigma \in \check{A}$, онда је скуп услова који одређују вредност σ као појединачан елемент скупа $\check{A}$ густ испод p.

Ако су A и B скупови, $\dot{f}$ име и $p \Vdash_{\mathcal{P}} \dot{f} \longrightarrow \check{A} \longrightarrow \check{B}$, онда је за ма које $a_1, \ldots, a_d \in A$ скуп свих услова r таквих да r одређује вредности $\dot{f}(\check{a}_1), \ldots, \dot{f}(\check{a}_d)$ густ испод p. Општије, ако $p \Vdash_{\mathcal{P}} \dot{f} : \sigma \longrightarrow \check{B}$ и $\bigwedge_{i=1}^{d} p \Vdash_{\mathcal{P}} \tau_i \in \sigma$ за нека имена $\tau_1, \ldots, \tau_d$, онда је скуп свих услова r таквих да r одређује вредности $\dot{f}(\tau_1), \ldots, \dot{f}(\tau_d)$ густ испод p.

Теорема 80 *За сваки природан број n важи да је следеће тврђење теорема: За ма које реченице $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ и ψ из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$, за ма које безатомично парцијално уређење $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant \rangle$ и ма које $p \in P$ важи*

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m \models \psi \quad \Rightarrow \quad \Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{m} p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi_i \Big) \Rightarrow p \Vdash_{\mathcal{P}} \psi \Big).$$

Доказ: Претпоставимо да важи

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_m \models \psi. \tag{5.16}$$

Са Θ означимо исказ да постоје безатомично парцијално уређење $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant \rangle$ и $p \in P$ такви да важи

$$\bigwedge_{i=1}^{m} p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi_i, \quad p \nVdash_{\mathcal{P}} \psi.$$

Претпоставимо $\neg\Theta$ и изведимо противречност. Нека је M пребројив транзитиван модел који за довољно велико k рефлектује све реченице из скупа $\Sigma_k(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_k(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$. Пошто модел M рефлектује реченицу Θ, можемо одабрати безатомично парцијално уређење $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant \rangle \in M$ и ма које $p \in P$ тако да важи

$$\bigwedge_{i=1}^{m} M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi_i, \quad M \models p \nVdash_{\mathcal{P}} \psi.$$

Изаберимо $q \leqslant p$ тако да важи $M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \neg\psi$ и генерички филтер G такав да важи $q \in G$. Тада важи

$$M[G] \models \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_i, \quad M[G] \models \neg\psi,$$

што је у супротности са (5.16). $\square$

5.4 Важење аксиома у генеричком раширењу

Форсинг метода је дизајнирана тако да форсинг раширење пребројивог транзитивног модела ZFC аксиома задовољи ZFC аксиоме. Ипак, из ZFC аксиома не следи постојање модела за ZFC. То је последица Геделових теорема непотпуности и теореме о постојању модела. Такође, из аксиома ZFC и додатне аксиоме да је теорија ZFC непротивречна не следи постојање транзитивног модела теорије ZFC. Другим речима, претпоставка о постојању транзитивног модела теорије ZFC је јача од претпоставке о постојању модела теорије ZFC.

Наиме, нека је M транзитиван модел за ZFC. Из постојања модела за ZFC следи непротивречност теорије ZFC. Исказ о непротивречности теорије ZFC је као аритметичко тврђење апсолутан за транзитивне моделе теорије ZFC, па важи у моделу M. Према томе, M је модел за теорију T чији се скуп аксиома састоји од аксиома теорије ZFC и додатне аксиоме да је теорија ZFC непротивречна, па је модел M сведок за непротивречност теорије T. Према томе, из теорије T се не може извести постојање барем једног транзитивног модела теорије ZFC.

Међутим, према теоремама рефлексије, постоје пребројиви транзитивни модели довољно великих фрагмената теорије ZFC. Теорема о важењу ZFC аксиома у генеричком раширењу има сличну формулацију.

Теорема 81 *За сваки природан број n постоји природан број k такав да је следеће тврђење теорема: За сваки пребројив транзитиван модел M који задовољава сваку аксиому теорије* ZFC *која припада скупу $\Sigma_k(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_k(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$ и и ма које безатомично парцијално уређење $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant \rangle \in M$ и ма који генерички филтер G важи да модел $M[G]$ задовољава сваку аксиому теорије* ZFC *која припада скупу $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$.*

Доказ:

Аксиоме екстензионалности, празног скупа, бесконачности и регуларности Важење у моделу $M[G]$ ових аксиома следи из транзитивности модела $M[G]$, и из $\emptyset, \omega \in M \subseteq M[G]$.

Аксиома пара Нека су $a, b \in M[G]$ и $\dot{a}, \dot{b} \in M^P$ такви да важи $\dot{a}_G = a$ и $\dot{b}_G = b$. Тада за име $\sigma = P \times \{\dot{a}, \dot{b}\}$ важи $\sigma_G = \{a, b\}$. Притом је појам неуређеног пара апсолутан за транзитивне моделе.

Аксиома уније Нека је $a \in M[G]$ и $\dot{a} \in M^P$ такво да важи $\dot{a}_G = a$. Тада за име

$$\sigma = \{\langle p, \tau \rangle \mid (\exists \langle q, \pi \rangle \in \dot{a})(\exists r \in P)(p \leqslant q, r \wedge \langle r, \tau \rangle \in \pi)\}$$

важи $\sigma_G = \bigcup \dot{a}_G = \bigcup a$.

Схема аксиома сепарације Нека је $\varphi(x, y, z_1, \ldots, z_m)$ формула из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$ и нека су $a, b_1, \ldots, b_m \in M[G]$. Изаберимо $\dot{a}, \dot{b}_1, \ldots, \dot{b}_m$ из скупа M^P такве да важи

$$\dot{a}_G = a, \quad \mathrm{int}_G(\dot{b}_1) = b_1, \ldots, \mathrm{int}_G(\dot{b}_m) = b_m.$$

Нека је σ име дефинисано на следећи начин:

$$\sigma = \{\langle p, \pi \rangle \mid (\exists q \in P)(\langle q, \pi \rangle \in \dot{a} \wedge M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} (\pi \in \dot{a} \wedge \varphi(\pi, \dot{a}, \dot{b}_1, \ldots. \dot{b}_m)))\}.$$

Нека $c \in \sigma_G$. Тада постоји $\langle p, \pi \rangle$ такав да важи

$$p \in G, \quad \pi_G = c, \quad M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \pi \in \dot{a}, \quad M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\pi, \dot{a}, \dot{b}_1, \ldots. \dot{b}_m)),$$

а самим тим и $c = \pi_G \in \dot{a}_G = a$ и $M[G] \models \varphi(c, a, b_1, \ldots, b_m)$.

Претпоставимо сада да је $c \in a$ и $M[G] \models \varphi(c, a, b_1, \dots, b_m)$. Тада можемо одабрати $\langle q, \pi\rangle \in \dot{a}$ такво да важи $q \in G$ и $c = \pi_G$, као и $r \in G$ такво да важи $M \models r \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\pi, \dot{a}, \dot{b}_1, \dots, \dot{b}_m)$. Нека је $p \in G$ такво да важи $p \leqslant q, r$. Тада важи $\langle p, \pi\rangle \in \sigma$, одакле следи да важи $c \in \sigma_G$. Према томе, важи $M[G] \models (\forall x)(x \in \sigma_G \Leftrightarrow (x \in a \wedge \varphi(x, a, b_1, \dots, b_m)))$.

Аксиома партитивног скупа Нека је $a \in M[G]$. Изаберимо $\dot{a} \in M^P$ такво да важи $\dot{a}_G = a$. Нека је $A = \mathrm{ran}(\dot{a}) = \{\mu \mid (\exists p \in P)\langle p, \mu\rangle \in \dot{A}\}$ и $\sigma = P \times \mathcal{P}(P \times A) \cap M$

Докажимо да важи $s \in \sigma_G$. Нека је $s \in M[G]$ такво да важи $s \subseteq a$. Изаберимо $\dot{s} \in M^P$ такво да важи $\dot{s}_G = s$. Нека је

$$\tau = \{\langle p, \pi\rangle \mid (\exists q \in P)\langle q, \pi\rangle \in \dot{a} \wedge p \leqslant q \wedge M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \pi \in \dot{s}\}.$$

Очигледно је $\tau \subseteq P \times A$, па важи $\tau_G \in \sigma_G$. Докажимо да је $\tau_G = s$. Нека $c \in \tau_G$. Тада постоје $\langle q, \pi\rangle \in \dot{a}$ и $p \in G$ тако да важи $c = \pi_G$, $p \leqslant q$ и $M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \pi \in \dot{s}$, па $c \in s$.

Претпоставимо сада да важи $c \in s$. Због $s \subseteq a$ важи $c \in a = \dot{a}_G$, па постоји $\langle q, \pi\rangle \in \dot{a}$ такав да важи $q \in G$ и $\pi_G = c$. Изаберимо $r \in G$ такав да важи $M \models r \Vdash_{\mathcal{P}} \pi \in \dot{s}$. Изаберимо $p \in G$ такав да важи $p \leqslant q, r$. Тада важи $\langle p, \pi\rangle \in \tau$, а самим тим и $c = \pi_G \in \tau_G$.

Према томе, важи $\mathcal{P}(a) \cap M[G] \subseteq \sigma_G$. Остатак тврђења следи из важења одговарајућег примерка схема аксиоме сепарације у моделу $M[G]$.

Схема аксиома замене Нека је $\varphi(x, y, u, z_1, \dots, z_m)$ формула из скупа $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$ и нека су $s, b_1, \dots, b_m \in M[G]$. Изаберимо $\dot{s}, \dot{b}_1, \dots, \dot{b}_m$ из скупа M^P такве да важи

$$\dot{s}_G = s, \quad \mathrm{int}_G(\dot{b}_1) = b_1, \dots, \mathrm{int}_G(\dot{b}_m) = b_m.$$

Нека је S скуп свих имена π таквих да за неко $q \in P$ важи $\langle q, \pi\rangle \in \dot{s}$. Сваком $\pi \in S$ и сваком $p \in P$ придружимо најмањи ординал $\alpha(\pi, p)$ такав да важи следеће

$$M \models ((\exists \tau \in V^P)p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\pi, \tau, \dot{s}, \dot{b}_1, \dots, \dot{b}_m) \Rightarrow (\exists \tau \in V^P_{\alpha(\pi,p)})p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\pi, \tau, \dot{s}, \dot{b}_1, \dots, \dot{b}_m)).$$

Функција α је класна функција у M, чији је домен елемент модела M. Према томе, $\alpha \in M$, па ординал $\beta = \sup \alpha[S \times P]$ припада моделу M. Тада за све $\pi \in M^P$ и $p \in P$ важи

$$M \models ((\exists \tau \in V^P)p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\pi, \tau, \dot{s}, \dot{b}_1, \dots, \dot{b}_m) \Rightarrow (\exists \tau \in V^P_\beta)p \Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\pi, \tau, \dot{s}, \dot{b}_1, \dots, \dot{b}_m)).$$

Нека је $\sigma = P \times (V^P_\beta)^M$. Очигледно, $\sigma \in M^P$. Докажимо да важи

$$M[G] \models (\forall x \in s)((\exists y)\varphi(x, y, s, b_1, \dots, b_m)) \Rightarrow (\exists y \in \sigma_G)\varphi(x, y, s, b_1, \dots, b_m)). \quad (5.17)$$

Нека је $a \in s$ произвољно. Тада постоји $\langle q, \pi\rangle \in \dot{s}$ такво да важи $q \in G$ и $\pi_G = a$. Из дефиниције скупа S следи да $\pi \in S$. Претпоставимо да важи $M[G] \models (\exists y)\varphi(a, y, s, b_1, \dots, b_m)$. Тада за неко $\mu \in M^P$ важи $M[G] \models \varphi(\pi_G, \mu_G, s, b_1, \dots, b_m)$, па можемо одабрати неко $p \in G$ такво да важи $M \models p \Vdash_{\mathcal{P}}\Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\pi, \mu, \dot{s}, \dot{b}_1, \dots, \dot{b}_m)$. Међутим, тада можемо одабрати неко $\tau \in (V^P_\beta)^M$ такво да важи $M \models p \Vdash_{\mathcal{P}}\Vdash_{\mathcal{P}} \varphi(\pi, \mu, \dot{s}, \dot{b}_1, \dots, \dot{b}_m)$, а самим тим и $M[G] \models \varphi(a, \tau_G, s, b_1, \dots, b_m)$. На основу начина избора имена τ и σ важи $\tau_G \in \sigma_G$.

На тај начин је доказано да важи (5.17), одакле се лако изводи одговарајући примерак схема аксиоме замене.

Аксиома избора Нека је $A \in M[G]$ произвољно и нека је $\dot{A} \in M^P$ такво да важи $\dot{A}_G = A$. Нека је $g \in M$ бијекција неког ординала $\alpha \in M$ на скуп $\dot{A}$. Из $M \subseteq M[G]$ следи да важи $g, \dot{A} \in M[G]$. Нека је функција f са доменом α дефинисана са $f(\beta) = \mathrm{int}_G(g(\beta))$. Тада важи $f \in M[G]$ и $A \subseteq f[\alpha]$.

Дефинишимо функцију $h : A \longrightarrow \alpha$ са $h(a) = \min\{\beta \in \alpha \mid f(\beta) = a\}$. Пресликавање h је инјективно и припада моделу $M[G]$, па у моделу $M[G]$ можемо дефинисати добро уређење скупа A са $a_1 < a_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} h(a_1) \in h(a_2)$.

□

5.5 Кардиналност и кофиналност у генеричком раширењу

У наставку текста ћемо претпоставити да је M пребројив транзитиван модел, $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant \rangle$ безатомично парцијално уређење, које припада моделу M, да модел M задовољава све аксиоме теорије ZFC које припадају скупу $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\text{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\text{ZFC}})$ за довољно велико n, да је G генерички филтер и да је κ најмањи кардинал модела M такав да у моделу M уређење $\mathcal{P}$ нема некомпатибилних подскупова кардиналности κ.

За парцијално уређење кажемо да је ccc ако нема непребројивих некомпатибилних скупова. Уколико за уређење $\mathcal{P}$ у моделу M важи да је ccc, онда за одговарајући форсинг кажемо да је ccc.

Теорема 82 *Претпоставимо да $A \in M$, $f : A \longrightarrow M$ и $f \in M[G]$. Тада постоји $g \in M$ такво да важи $g : A \longrightarrow \mathcal{P}(B)$, $(\forall a \in A)|g(a)|^M < \kappa$ и $(\forall a \in A) f(a) \in g(a)$.*

Доказ: Нека је $\dot{f} \in M^P$ такво да важи $\dot{f}_G = f$. За свако $a \in A$ нека је $g(a)$ скуп свих вредности $b \in M$ за које постоји $p \in P$ такво да важи

$$M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} »\dot{f} \text{ је функција са доменом } \check{A} \text{ и } \dot{f}(\check{a}) = \check{b}«.$$

Услови који одређују различите вредности исте функције у истој тачки не могу бити сагласни, па је $|g(a)|^M < \kappa$. Остатак тврђења се тривијално доказује. □

Теорема 83 *Нека је α бесконачан гранични ординал из M. Тада важи следеће:*

$$(\mathrm{cf}(\alpha))^{M[G]} \leqslant (\mathrm{cf}(\alpha))^M,$$

$$(\mathrm{cf}(\alpha))^M \geqslant \kappa \;\Rightarrow\; (\mathrm{cf}(\alpha))^{M[G]} = (\mathrm{cf}(\alpha))^M.$$

Посебно, ако у парцијалном уређењу $\mathcal{P}$ нема непребројивих некомпатибилних скупова, онда важи $\mathrm{cf}^{M[G]} = \mathrm{cf}^M$.

Доказ: Први део тврђења следи из $M \subseteq M[G]$. Докажимо други део. Претпоставимо да је $(\mathrm{cf}(\alpha))^M \geqslant \kappa$. Неједнакост $\leqslant$ следи из првог дела тврђења. Докажимо неједнакост $\geqslant$.

Нека је $(\mathrm{cf}(\alpha))^{M[G]} = \lambda$ и $f \in M[G]$ неограничено растуће пресликавање из λ у α. На основу теореме 82, можемо одабрати неко $g \in M$ такво да важи $g : \lambda \longrightarrow \mathcal{P}(\alpha)$, $(\forall \beta \in \lambda) f(\beta) \in g(\beta)$ и $(\forall \beta \in \lambda)|g(\beta)|^M < \kappa$.

За ма које $\beta \in \lambda$ из $|g(\beta)|^M < \kappa \leqslant \mathrm{cf}(\alpha)$ и $g(\beta \subseteq \alpha)$ следи да је $\sup(g(\beta)) < \alpha$. Дакле, за функцију $h : \lambda \longrightarrow \alpha$ дефинисану са $h(\beta) = \sup(g(\beta))$ важи $h \in M$ и $h \geqslant f$. Из последњег да је h неограничена функција, одакле коначно следи да је $(\mathrm{cf}(\alpha))^M \leqslant \lambda$. □

Теорема 84 *Важи* $\mathbf{CARD}^{M[G]} \subseteq \mathbf{CARD}^M$. *Такође, за ма које $\lambda \in \mathbf{CARD}^M$ за које је $\lambda \geqslant \kappa$ важи $\kappa \in \mathbf{CARD}^{M[G]}$. Посебно, ако парцијално уређење $\mathcal{P}$ нема непребројиве некомпатибилне скупове, онда је* $\mathbf{CARD}^{M[G]} = \mathbf{CARD}^M$.

Доказ: Први део тврђења следи из $M \subseteq M[G]$ и $\mathbf{ORD}^{M[G]} = \mathbf{ORD}^M$. Други део тврђења у случају да је λ регуларан кардинал у M следи из теореме 83, а у случају да је λ сингуларан кардинал у M из чињенице да је супремум кардинала кардинал. $\Box$

Теорема 85 *За сваки бесконачан кардинал λ у $M[G]$ важи $(2^\lambda)^{M[G]} \leqslant ((|P|^{<\kappa})^\lambda)^M$.*

Доказ: Нека је $\mu = (2^\lambda)^{M[G]}$ и $f \in M[G]$ бијекција скупа μ на скуп $\mathcal{P}(\lambda)$. Пошто је ординал μ кардинал у $M[G]$, он је кардинал и у M. Изаберимо $\dot{f} \in M^P$ такво да важи $\dot{f}_G = f$ и $p \in G$ такво да у моделу M услов p форсира да је $\dot{f}$ бијекција скупа $\check{\mu}$ на скуп $\mathcal{P}(\check{\lambda})$. За $\alpha \in \mu$ и $\beta \in \lambda$ нека је

$$D(\alpha,\beta) = \{q \leqslant p \mid M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \check{\beta} \in \dot{f}(\check{\alpha}) \ \vee \ M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \check{\beta} \notin \dot{f}(\check{\alpha})\}.$$

Пресликавање D припада моделу M и за ма које α, β важи да је скуп $D(\alpha,\beta)$ густ испод p. Изаберимо пресликавање $I \in M$ са истим доменом такво да је $I(\alpha,\beta)$ инклузијски максималан некомпатибилан подскуп скупа $D(\alpha,\beta)$. За ма које α,β за скуп $I(\alpha,\beta)$ важи да је максималан некомпатибилан скуп испод p, као и да је подскуп скупа P кардиналности мање од κ. За $\alpha \in \mu$ и $\beta \in \lambda$ нека је

$$S_\alpha(\beta) = \{q \in I(\alpha,\beta) \mid M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \check{\beta} \in \dot{f}(\check{\alpha})\}, \quad \sigma_\alpha = \bigcup_{\beta\in\lambda} (S_\alpha(\beta) \times \{\check{\beta}\}).$$

Докажимо да за свако $\alpha \in \mu$ важи $\mathrm{int}_G(\sigma_\alpha) = f(\alpha)$. Претпоставимо да $\beta \in \mathrm{int}_G(\sigma_\alpha)$. То значи да постоје $q \in G$ и $\tau \in M^P$ такви да важи $\langle r, \tau\rangle \in \sigma_\alpha$ и $\tau_G = \beta$. Из дефиниције имена σ_α следи да је τ канонско име неког елемента скупа λ и да важи $M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \tau \in \dot{f}(\check{\alpha})$. Према томе, важи $\beta \in \lambda$, $\tau = \check{\beta}$ и $M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \check{\beta} \in \dot{f}(\check{\alpha})$, а самим тим и $\beta \in f(\alpha)$.

Претпоставимо да $\beta \in f(\alpha)$. Нека је

$$D = \{r \in P \mid (\exists q \in I(\alpha,\beta)) r \leqslant q\}.$$

Скуп D је густ испод p, па можемо изабрати неко $r \in G \cap D$. Нека је $q \in I(\alpha,\beta)$ такво да важи $r \leqslant q$. Тада свакако важи $q \in G$, као и

$$M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \check{\beta} \in \dot{f}(\check{\alpha}) \ \ \vee \ \ M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \check{\beta} \notin \dot{f}(\check{\alpha}).$$

Из $\beta \in f(\alpha)$ и $q \in G$ следи да не може бити $M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \check{\beta} \notin \dot{f}(\check{\alpha})$, па важи $M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \check{\beta} \in \dot{f}(\check{\alpha})$, а самим тим и $\langle q, \check{\beta}\rangle \in \sigma_\alpha$, одакле следи да је $\beta \in \mathrm{int}_G(\sigma_\alpha)$.

Из инјективности пресликавања f следи да је пресликавање $g(\alpha) = \sigma_\alpha$ инјекција у M скупа μ у скуп свих пресликавања скупа λ у скуп свих подскупова скупа P који припадају моделу M и који су у моделу M кардиналности мање од κ. Према томе, важи

$$|\mathcal{P}(\lambda)|^{M[G]} = \mu \leqslant ((|P|^{<\kappa})^\lambda)^M.$$

$\Box$

Теорема 86 *Ако је $\kappa = \aleph_1^M$, односно у моделу M важи да парцијално уређење $\mathcal{P}$ нема непребројивих некомпатибилних скупова, онда за сваки кардинал λ у M важи да је $(2^\lambda)^{M[G]} \geqslant (2^\lambda)^M$.*

Доказ: Пошто у моделу M парцијално уређење $\mathcal{P}$ нема непребројивих некомпатибилних скупова, модели M и $M[G]$ имају исту класу кардинала, па је λ кардинал у $M[G]$. Нека је $\mu = |2^\lambda|^M$ и нека је $f \in M$ бијекција скупа μ на скуп $(\mathcal{P}(\lambda))^M$. Скуп μ је кардинал и у моделу $M[G]$, па важи $|\mu|^{M[G]} = \mu$. Из $(\mathcal{P}(\lambda))^{M[G]} \supseteq (\mathcal{P}(\lambda))^M$ следи да је f инјекција скупа μ у скуп $(\mathcal{P}(\lambda))^{M[G]}$, па је $(2^\lambda \geqslant \mu)^{M[G]}$. $\Box$

Ако је λ_0 кардинал у M такав да важи $(2^{\lambda_0} \geqslant |P|^{<\kappa})^M$ и ако је $\kappa = \aleph_1^M$, онда за сваки кардинал λ у M за који је $\lambda \geqslant \lambda_0$ важи $(2^\lambda)^{M[G]} = (2^\lambda)^M$.

5.6 Коенов форсинг

Нека је A бесконачан скуп и B скуп са барем два елемента. Функције које сликају неки подскуп скупа A у неки скуп B зовемо *парцијалним функцијама* из скупа A у скуп B. Функције чији је домен коначан зовемо *коначним функцијама*.

Нека је P скуп свих *коначних парцијалних функција* из скупа A у скуп B. На скупу P уведимо поредак на следећи начин:

$$f \leqslant g \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \operatorname{dom}(g) \subseteq \operatorname{dom}(f) \wedge (\forall x \in \operatorname{dom}(g)) g(x) = f(x).$$

Поредак међу парцијалним функцијама уведен на описани начин зовемо *уређењем обрнутом инклузијом*. Уведено парцијално уређење обележавамо са $\mathcal{F}(A, B)$. Користићемо следеће дефиниције:

$$\mathcal{I}(I, B) := \mathcal{F}(I \times \omega, B), \quad \mathcal{R}(I) := \mathcal{F}(I \times \omega, \{0,1\}), \quad \mathcal{N}(I) := \mathcal{F}(I \times \omega, \omega).$$

Парцијално уређење облика $\mathcal{F}(A, B)$ за неки бесконачан скуп A и скуп B са барем два елемента зовемо *Коеновим уређењем*, а форсинг са Коеновим уређењем зовемо *Коеновим форсингом*.

У Коеновом уређењу су функције f и g сагласне ако важи $(\forall x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)) f(x) = g(x)$. Према томе, унија филтера је функција. Такође, за свако $a \in A$ важи да је скуп свих услова који су дефинисани у тачки a густ, тако да је унија генеричког филтера функција која пресликава скуп A у скуп B.

Теорема 87 *Нека су $A, B \in M$, при чему је A бесконачан скуп, док B има барем два елемента, $\mathcal{P} = \mathcal{F}(A, B)$ и нека је G произвољан $\mathcal{P}$-генерички филтер над M. За ма који $S \subseteq G$ важи да је $S \in M$ акко је скуп S коначан.*

Доказ: Нека је S подскуп домена уређења $\mathcal{P}$ које припада транзитивном моделу M. Тада важи $S \subseteq M$, па ако је скуп S коначан, онда свакако $S \in M$. Претпоставимо да је скуп S бесконачан и да $S \in M$ и изведимо противречност.

Нека је D скуп свих услова p таквих да постоје $q \in S$ и $x \in \operatorname{dom}(p) \cap \operatorname{dom}(q)$ такви да важи $p(x) \neq q(x)$. Докажимо да је скуп D густ.

Пошто је S подскуп филтера G, унија скупа S је функција. Ако би та функција била коначна, онда би скуп S био коначан јер коначна функција има само коначно много рестрикција. Дакле, домен уније свих услова из скупа S је бесконачан.

Нека је r произвољан услов. Његов домен је коначан, па постоје $q \in S$ и $x \in \operatorname{dom}(q)$ такав да $x \notin \operatorname{dom}(r)$. Нека је p услов који је дефинисан на скупу $\operatorname{dom}(r) \cup \{x\}$ тако да јој r буде рестрикција и да важи $p(x) \neq q(x)$. Тада важи $p \in D$ и $p \leqslant q$. Тиме је доказано да је скуп D густ.

Нека је $p \in G \cap D$. Из $p \in D$ следи да постоје $q \in S$ и $x \in \operatorname{dom}(p) \cap \operatorname{dom}(q)$ такви да важи $p(x) \neq q(x)$. Међутим, онда су p и q некомпатибилни услови који припадају истом филтеру G, што је немогуће. $\square$

Теорема 88 *Нека су $A, B \in M$, при чему је A бесконачан скуп, док B има барем два елемента, $\mathcal{P} = \mathcal{F}(A, B)$ и нека је G произвољан $\mathcal{P}$-генерички филтер над M. Нека је $e \in M$ произвољно пресликавање скупа ω у скуп A такво да је скуп $e[\omega]$ бесконачан, $s \in M$ ма које пресликавање скупа ω у скуп B и нека је f унија генеричког филтера G. Тада постоји $n \in \omega$ такво да важи $f(e(n)) \neq s(n)$.*

Доказ: Нека је D скуп свих услова p таквих да постоји $n \in \omega$ такав да важи $e(n) \in \operatorname{dom}(p)$ и $p(e(n)) \neq s(n)$. Домен сваког услова коначан, а скуп $e[\omega]$ бесконачан, па за сваки услов r можемо одабрати неко $n \in \omega$ такво да $e(n) \notin r$. Нека је p услов са доменом $\operatorname{dom}(r) \cup \{e(n)\}$ такав да је r рестрикција од p и да важи $p(e(n)) \neq s(n)$. Тада важи $p \in D$ и $p \leqslant r$.

Дакле, скуп D је густ, па можемо одабрати неко $p \in G \cap D$. Због $p \in D$ можемо одабрати $n \in \omega$ такво да важи $e(n) \in \mathrm{dom}(p)$ и $p(e(n)) \neq s(n)$. Пошто је $p \in G$ и $f = \bigcup G$, важи

$$f(e(n)) = p(e(n)) \neq s(n).$$

□

Теорема 89 (*Лема о производу форсинга*) *Нека су $\mathcal{P}_1 = \langle P_1, \leqslant_1 \rangle$ и $\mathcal{P}_2 = \langle P_2, \leqslant_2 \rangle$ безатомична парцијална уређења која припадају моделу M и нека је $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 = \langle p, \leqslant \rangle$ производ парцијалних уређења дефинисан на следећи начин:*

$$P := P_1 \times P_2, \quad \langle p_1, p_2 \rangle \leqslant \langle q_1, q_2 \rangle \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} p_1 \leqslant_1 q_1 \wedge p_2 \leqslant_2 q_2.$$

Тада су следећи услови еквивалентни:

- *G је $\mathcal{P}$-генерички филтер над M.*
- *$G = G_1 \times G_2$ за неки $\mathcal{P}_1$-генерички филтер G_1 над M и неки $\mathcal{P}_2$-генерички филтер G_2 над $M[G_1]$.*

Доказ: Претпоставимо да за G важи да је $\mathcal{P}$-генерички филтер над M. Нека су $\langle p_1, p_2 \rangle, \langle q_1, q_2 \rangle \in G$ произвољни. Изаберимо $\langle r_1, r_2 \rangle \in G$ такво да важи $\langle r_1, r_2 \rangle \leqslant \langle p_1, p_2 \rangle, \langle q_1, q_2 \rangle$, односно $r_1 \leqslant_1 p_1, q_1$ и $r_2 \leqslant_2 p_2, q_2$. Тада важи $\langle r_1, r_2 \rangle \leqslant \langle p_1, q_2 \rangle, \langle q_1, p_2 \rangle$, а самим тим и $\langle p_1, q_2 \rangle, \langle q_1, p_2 \rangle \in G$, па постоје скупови G_1 и G_2 такви да важи $G = G_1 \times G_2$.

Лако се закључује да G_1 и G_2 морају бити филтери. Нека је скуп $D_1 \subseteq P_1$ густ у $\mathcal{P}_1$. Тада је скуп $D_1 \in M$ густ у $\mathcal{P}$. Нека је $\langle p_1, p_2 \rangle \in G \cap (D_1 \times P_2)$. Тада важи $p_1 \in G_1 \cap D_1$, па за филтер G_1 важи да је $\mathcal{P}_1$-генерички над M.

Нека је скуп $D_2 \in M[G_1]$ густ у $\mathcal{P}_2$. Изаберимо произвољно $p_2 \in D_2$ и $\dot{D}_2 \in M^{P_1}$ такво да важи $\mathrm{int}_{G_1}(\dot{D}_2) = D_2$. Такође, изаберимо $p_1 \in G_1$ такво да важи

$$M \models p_1 \Vdash_{\mathcal{P}_1} (\check{p}_2 \in \dot{D}_2 \wedge \text{»}\dot{D}_2 \text{ је густ у } \check{\mathcal{P}}_2\text{«}).$$

Докажимо да је скуп

$$D = \{\langle q_1, q_2 \rangle \in P_1 \times P_2 \,|\, q_1 \leqslant p_1 \wedge M \models q_1 \Vdash_{\mathcal{P}_1} \check{q}_2 \in \dot{D}_2\}.$$

густ испод $\langle p_1, p_2 \rangle$ у $\mathcal{P}$. Нека је $\langle r_1, r_2 \rangle \leqslant \langle p_1, p_2 \rangle$, односно $r_1 \leqslant_1 p_1$ и $r_2 \leqslant p_2$. Уз ознаку l за бинарну релацију $\leqslant_2$

$$M \models r_1 \Vdash_{\mathcal{P}_1} (\exists x \in \dot{D}_2) \langle x, \check{r}_2 \rangle \in \check{l}.$$

Нека су $p_1 \leqslant_1 r_1$ и $q_2 \in P_2$ такви да важи $M \models q_1 \Vdash_{\mathcal{P}_1} (\check{q}_2 \in \dot{D}_2 \wedge \langle \check{q}_2, \check{r}_2 \rangle \in \check{l})$. Нека је H било који $\mathcal{P}_1$-генерички филтер над M такав да $p_1 \in H$. Тада важи $M[H] \models q_1 \leqslant_2 r_2$, одакле следи да важи $q_2 \leqslant_2 r_2$. Према томе, важи $\langle q_1, q_2 \rangle \leqslant \langle r_1, r_2 \rangle$ и $\langle q_1, q_2 \rangle \in D$. Тиме је доказано да је скуп D густ испод $\langle p_1, p_2 \rangle$.

Нека је $\langle q_1, q_2 \rangle \in G \cap D$. Тада важи $q_1 \in G_1$, $q_2 \in G_2$ и $M \models q_1 \Vdash_{\mathcal{P}_1} \check{q}_2 \in \dot{D}_2$, одакле следи да $q_2 \in \mathrm{int}_{G_1}(\dot{D}_2) = D_2$. Дакле, $q_2 \in G_2 \cap D_2$, па је $G_2 \cap D_2 \neq \emptyset$.

Претпоставимо сада да је $G = G_1 \times G_2$, где за скуп G_1 један $\mathcal{P}_1$-генерички филтер над M, док за G_2 важи да је $\mathcal{P}_2$-генерички филтер над $M[G_1]$ и докажимо да је G један $\mathcal{P}$-генерички филтер над M. Лако се доказује да је G филтер. Нека је $D \in M$ произвољан густ скуп у $\mathcal{P}$. Нека је

$$D'' = \{p_2 \in P_2 \,|\, (\exists p_1 \in G_1) \langle p_1, p_2 \rangle \in D\}.$$

Скуп D'' припада моделу $M[G_1]$. Докажимо да је густ у $\mathcal{P}_2$. Изаберимо $q_2 \in P_2$ произвољно. Нека је

$$D' = \{p_1 \in P_1 \,|\, (\exists p_2 \leqslant_2 q_2) \langle p_1, p_2 \rangle \in D\}.$$

Скуп D' припада моделу M и густ је у $\mathcal{P}_1$ јер за ма које $q_1 \in P_1$ можемо одабрати $\langle r_1, r_2\rangle \in D$ тако да важи $\langle r_1, r_2\rangle \leqslant \langle q_1, q_2\rangle$, а самим тим и $r_1 \in D'$ и $r_1 \leqslant q_1$. Нека је $p_1 \in G_1 \cap D'$. Из $p_1 \in D'$ следи да можемо одабрати $p_2 \leqslant q_2$ тако да важи $\langle p_1, p_2\rangle \in D$, па због $p_1 \in G$ важи $p_2 \in D''$. Дакле, нашли смо елемент скупа D'' испод q_2, чиме је доказано да је скуп D'' густ у $\mathcal{P}_2$.

Нека је $p_2 \in G_2 \cap D'$ произвољно. Тада можемо одабрати $p_1 \in G$ тако да важи $\langle p_1, p_2\rangle \in D$. Очигледно $\langle p_1, p_2\rangle \in G_1 \times G_2 = G$, па је $G \cap D \neq \emptyset$. $\square$

Уколико је $\mathcal{P} = \mathcal{I}(I, B)$ за $I \neq \emptyset$ и $|B| \geqslant 2$, онда сваком генеричком филтеру G одговара једна фамилија $(r_i)_{i\in\omega}$ пресликавања из скупа ω у скуп B дефинисана на следећи начин: $r_i(n) = F(i, n)$, где је $F = \bigcup G$.

За произвољно $i \in I$ функцију r_i зовемо *генеричким елементом на месту* i, док за произвољан услов p под *информацијом на месту* i коју носи услов p називамо функцију c дефинисану са

$$\mathrm{dom}(c) = \{n \in \omega \mid \langle i, n\rangle \in \mathrm{dom}(p)\}, \quad (\forall n \in \mathrm{dom}(c))c(n) = p(i, n).$$

Пресликавања скупа ω у скуп $\{0, 1\}$ зовемо реалним бројевима. За уређење $\mathcal{R}(I)$ за $I \neq \emptyset$ кажемо да додаје $|I|$ Коенових реалних бројева.

Притом, за дисјунктне непразне скупове I_1 и I_2 и ма који скуп B са барем два елемента важи да је $\mathcal{I}(I_1, B) \times \mathcal{I}(I_2, B) \simeq \mathcal{I}(I_1 \cup I_2, B)$. Нека је I скуп са барем два елемента, $j \in I$ произвољно и $I_1 = I \setminus \{j\}$ и $I_2 = \{j\}$. Нека је G произвољан $\mathcal{I}(I, B)$ генерички филтер, $f = \bigcup G$, $r_i(n) = f(i, n)$ за све $i \in I$ и $n \in \omega$.

Нека је G' скуп свих услова $p \in G$ таквих да $(\forall n \in \omega)\langle j, n\rangle \notin \mathrm{dom}(p)$. Тада је према леми о производу форсинга функција r_j генеричка над моделом $M[G']$. Притом, $(\forall i \in I \setminus \{j\})r_i \in M[G']$. Одатле посебно следи да су r_k и r_l различити за све међусобно различите $k, l \in I$.

Последња чињеница има и једноставнији доказ. Наиме, скуп свих услова p таквих да постоји $n \in \omega$ такав да важи $\langle k, n\rangle, \langle l, n\rangle \in \mathrm{dom}(p)$ и $p(k, n) \neq p(l, n)$ је густ.

Нека су B_1 и B_2 ма који скупови исте кардиналности са барем два елемента и нека су A_1 и A_2 ма који бесконачни скупови исте кардиналности. Тада важи $\mathcal{F}(A_1, B_1) \simeq \mathcal{F}(A_2, B_2)$. Према томе, важи $\mathcal{F}(A, B) \simeq \mathcal{I}(A, B)$. Такође, за сваки непразан највише пребројив скуп I важи $\mathcal{I}(I, B) \simeq \mathcal{I}(\omega, B)$. Према томе, важи $\mathcal{F}(A, B) \simeq I(\kappa, \lambda)$ за неке кардинале $\kappa \geqslant \aleph_0$ и $\lambda \geqslant 2$.

Теорема 90 *Нека су $I \in M$ бесконачан скуп, $I_0 \in M$ његов бесконачан подскуп, $B \in M$ скуп са барем два елемента и $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant\rangle = \mathcal{I}(I, B)$. Тада у $M[G]$ важи да за било коју коначну парцијалну функцију s из ω у B постоји $i \in I_0$ такво да за $f = \bigcup G$ важи $(\forall n \in \mathrm{dom}(s))f(i, n) = s(n)$.*

Доказ: Нека је D свих услова p таквих да постоји $i \in I_0$ такав да важи

$$(\forall n \in \mathrm{dom}(s))(\langle i, n\rangle \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(i, n) = s(n)).$$

Пошто је скуп I_0 бесконачан, а услови су коначне парцијалне функције, скуп D је густ. Нека је $p \in G \cap D$. Тврђење следи из $p \in D$ и $p \subseteq f$. $\square$

Теорема 91 *Нека је $\mathcal{P}$ уређење свих непразних коначних низова елемената из ω, уређених обрнутом инклузијом. Свако пребројиво безатомично парцијално уређење има густо подуређење изоморфно уређењу $\mathcal{P}$.*

Доказ: Нека је $\mathcal{Q} = \langle Q, \leqslant\rangle$ произвољно безатомично парцијално уређење и нека је $(q_n)_{n\in\omega}$ низ свих елемената скупа Q. Докажимо да за свако $p \in Q$ постоји бесконачан некомпатибилан скуп чији су сви елементи испод p.

Нека су r_0 и s_0 некомпатибилни елементи испод p. За свако n изаберимо некомпатибилне елементе r_{n+1} и s_{n+1} испод r_n. Очигледно за свако $n \in \omega$ важи $r_{n+1} < r_n$. Нека су $m, n \in \omega$ такви да важи $m < n$. Тада важи $s_n \leqslant r_{n-1} \leqslant r_m$, па из некомпатибилности елемената r_m и s_m следи да су елементи s_m и s_n такође некомпатибилни. Дакле, $\{s_n \mid n \in \omega\}$ је некомпатибилан скуп елемената испод p.

Одатле следи да постоји бесконачан инклузијски максималан некомпатибилан скуп елемената који су мањи од p. Такође, из доказаног следи да постоји бесконачан инклузијски максималан некомпатибилан скуп, који притом садржи елемент који је мањи од q_0. Један од таквих ћемо означити са I.

Дефинишимо пресликавање F које сваком непразном коначном низу природних бројева придружује неки елемент скупа Q. Нека је Φ_n скуп свих коначних низова дужине n. Дефинишимо рекурзивно по n пресликавање F на скупу Φ_n. Нека је e бијекција скупа ω на скуп I. За произвољно $n \in \omega$ нека се низ дужине 1, чији је једини елемент n слика пресликавањем F у $e(n)$. Дакле, важи $F[\Phi_1] = I$. Претпоставимо да је за неко $k \geqslant 1$ испуњено да је $F[\Phi_k]$ максималан некомпатибилан скуп.

Нека је $f \in \Phi_k$ произвољно. Ако је $F(f) || q_{k+1}$, онда изаберимо неко $p \leqslant F(f), q_{k+1}$, неки бесконачан максималан некомпатибилан скуп елемената који су испод p и неку његову допуну до максималног некомпатибилног скупа J елемената који су испод $F(f)$. Тада је скуп J бесконачан и садржи елемент који је мањи од q_{k+1}. Ако је $F(f) \perp q_{k+1}$, онда нека је J бесконачан максималан некомпатибилан скуп елемената испод $F(f)$.

Дакле, у оба случаја је J бесконачан максималан некомпатибилан скуп елемената испод $F(f)$, при чему скуп J садржи елемент мањи од q_{k+1} ако је $F(f) || q_{k+1}$. Нека је u бијекција скупа ω на скуп J. Нека је $F(f^\frown n) = u(n)$ за све $n \in \omega$.

Нека је $K(f) = \{F(f^\frown n) \mid n \in \omega\}$ за $f \in \Phi_k$. Елементи скупа $K(f)$ су узајамно некомпатибилни према конструкцији, док за различите f_1 и f_2 из Φ_k и произвољне $p_1 \in K(f_1)$ и $p_2 \in K(f_2)$ важи $p_1 \perp p_2$ јер је $p_1 \leqslant F(f_1)$ и $p_2 \leqslant F(f_2)$ и $F(f_1) \perp F(f_2)$. Дакле, скуп $F[\Phi_{k+1}] = \bigcup_{f \in \Phi_k} K(f)$ је бесконачан некомпатибилан скуп.

Нека је p_0 произвољан елемент скупа Q. Пошто је по претпоставци $F[\Phi_k]$ максималан некомпатибилан скуп, можемо одабрати неко $f \in \Phi_k$ такво да важи $F(f) || p_0$. Пошто је $\{F(f^\frown n) \mid n \in \omega\}$ максималан некомпатибилан скуп елемената испод $F(f)$, постоји $n \in \omega$ такво да важи $F(f^\frown n) || p_0$. У посебном случају када је $p_0 = q_{k+1}$, закључујемо да скуп $F[\Phi_{k+1}]$ садржи барем један елемент мањи од q_{k+1}.

Дакле, важи следеће:

- За свако $k \geqslant 1$ важи да је скуп $F[\Phi_k]$ бесконачан максималан некомпатибилан скуп који садржи барем један елемент мањи од q_k.
- За ма које $k \geqslant 1$ и $f \in \Phi_k$ важи да је скуп $\{F(f^\frown n) \mid n \in \omega\}$ бесконачан максималан некомпатибилан скуп елемената испод $F(f)$.
- За ма које $k \geqslant 1$, $f \in \Phi_k$ и $n \in \omega$ важи $F(f^\frown n) < F(f)$.
- За ма које $k \geqslant 1$, $f \in \Phi_k$ и различите $m, n \in \omega$ важи $F(f^\frown m) \perp F(f^\frown n)$.

□

Теорема 92 *За ма који непразан скуп I важи да постоје густо подуређење $\mathcal{P}_1$ уређења $\mathcal{N}(I)$ и густо подуређење $\mathcal{P}_2$ уређења $\mathcal{R}(I)$ тако да су уређења $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_1$ изоморфна.*

Доказ: Нека је $\mathcal{S}$ уређење свих коначних низова природних бројева уређених обрнутом инклузијом, $\mathcal{Z}$ уређење свих коначних низова елемената скупа $\{0, 1\}$ уређених обрнутом инклузијом. Нека је $\mathcal{S}'$ подуређење уређења $\mathcal{S}$ које се састоји од непразних низова и $\mathcal{Z}'$ подуређење уређења $\mathcal{Z}$ које се такође састоји од непразних низова. Густо утапање уређења S' у уређење $\mathcal{Z}'$ се може допунити до густог утапања f уређења S у уређење $\mathcal{Z}$, које слика празан низ у празан низ.

Уређење $\mathcal{N}(I)$ има густо подуређење $\mathcal{P}_1 = \langle P_1, \leqslant_1 \rangle$ које се састоји од услова p за које важи

$$(\forall i \in I)(\forall m, n \in \omega)((m < n \wedge n \in \mathrm{dom}(p)) \Rightarrow m \in \mathrm{dom}(p)).$$

Слично томе, уређење $\mathcal{N}(I)$ има густо подуређење $\mathcal{Q}$ које се дефинише на аналоган начин. Нека је c_1 пресликавање чији је домен $P_1 \times I$ такво да за свако $p \in P_1$ и $i \in I$ важи да је

$$\mathrm{dom}(c_1(p,i)) = \{n \in \omega \mid \langle i, n \rangle \in \mathrm{dom}(p)\}, \quad (\forall n \in \mathrm{dom}(c_1(p,i)))c_1(p,i)(n) = p(i,n).$$

Слично томе, постоји пресликавање c_2 чији је домен $\mathrm{dom}(\mathcal{Q}) \times I$ и које се дефинише на аналоган начин. Пресликавање $F : P_1 \longrightarrow \mathrm{dom}(\mathcal{Q})$ одређено са $(\forall i \in I)c_2(F(p), i) = f(c_1(p,i))$ је добро дефинисано зато што се пресликавањем f празан низ слика у празан низ. Лако се доказује да је пресликавање F густо утапање уређења $\mathcal{P}_1$ у уређење $\mathcal{Q}$, а самим тим и у уређење $\mathcal{Z}$. $\square$

Овде ћемо се ограничити на случај када је $|B| \leqslant \aleph_0$. Притом, за сваки непразан скуп I важи да уређења $\mathcal{N}(I)$ и $\mathcal{R}(I)$ дају исти форсинг. Из теореме 54 за $\kappa = \lambda = \aleph_0$ следи да је Коенов форсинг ccc. Дефинишимо хијерархију $(\beth_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{ORD}}$ на следећи начин:

$$\beth_0 = \aleph_0, \quad \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha},$$

$$\beth_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \beth_\beta, \quad \text{где је } \alpha \text{ бесконачан граничан ординал.}$$

Теорема 93 *За сваки бесконачан гранични ординал α непребројиве кофиналности важи $\beth_\alpha^{\aleph_0} = \beth_\alpha$.*

Доказ: Нека је $\kappa = \beth_\alpha^{\aleph_0}$. Тада је због непребројиве кофиналности кардинала κ свако пресликавање из ω у κ ограничено у κ, па важи

$$\kappa^{\aleph_0} \leqslant \sum_{\beta<\alpha} \beth_\beta^{\aleph_0} \leqslant \sum_{\beta<\alpha} \beth_\beta^{\beth_\beta} \leqslant \sum_{\beta<\alpha} 2^{\beth_\beta} \leqslant \sum_{\beta<\alpha} \beth_{\beta+1} \leqslant |\alpha| \sup_{\beta<\alpha} \beth_{\beta+1} \leqslant \beth_\alpha^2 = \kappa.$$

$\square$

Теорема 94 *Нека је $\alpha \in M$ бесконачан гранични ординал такав да важи $(\mathrm{cf}(\alpha))^M > \aleph_0$ и нека је $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant \rangle$ уређење које додаје $(\beth_\alpha)^M$ Коенових реалних бројева. Тада важи $(2^{\aleph_0})^{M[G]} = (\beth_\alpha)^M$.*

Доказ: Нека је $\kappa = (\beth_\alpha)^M$, $F = \bigcup G$ и $r_\nu(n) = F(\nu, n)$ за све $\nu < \kappa$ и $n \in \omega$. Тада је $\nu \mapsto r_\nu$ инјекција из κ у $(2^{\aleph_0})^{M[G]}$, па важи $(2^{\aleph_0})^{M[G]} \geqslant \kappa$. Према теоремама 85 и 93 важи

$$(2^{\aleph_0})^{M[G]} \leqslant (|P|^{\aleph_0})^M = (\kappa^{\aleph_0})^M = \kappa.$$

$\square$

5.7 Дефинабилност модела у његовом генеричком раширењу

Овде ћемо доказати чувену Лејверову теорему да је M класа модела $M[G]$ дефинабилна са параметром из M. У ту сврху ћемо најпре дефинисати неке појмове. Подсетимо се да за дати бесконачан кардинал μ са $H(\mu)$ означавамо скуп свих скупова x таквих да важи $|\mathrm{tc}(x)| < \mu$. Нека су κ и λ произвољни бесконачни регуларни кардинали такви да је $\kappa < \lambda$. Такође, са F ћемо означавати унарну класну функцију из теореме 61. Притом ћемо подразумевати да је $F(a) = \emptyset$ ако је a скуп који има барем један елемент који није ординал. Под κ-λ моделом ћемо подразумевати скуп N који испуњава следеће услове:

- N је транзитиван подскуп скупа $H(\lambda)$.
- За ма које $a \in N$ важи $F(a) \in N$.
- За ма које $b \in N$ постоји $a \in N$ такво да је $F(a) = b$.
- За свако $s \in N$ и $\mu < \lambda$ важи $s \cap \mu \in N$.
- Ако је $a \in N$ и $a \subseteq$ **ORD**, онда функција транзитивног колапса скупа a припада скупу N.
- Ако је $f \in N$ инјективно пресликавање, онда $f^{-1} \in N$ и $f[\mathrm{dom}(f)] \in N$.
- Ако је $a \in H(\lambda) \setminus N$ и $a \subseteq N$, онда постоји скуп $s \subseteq a$ такав да важи $|s| < \kappa$ и $s \notin N$.
- За свако $a \in H(\kappa)$ такво да важи $a \subseteq N$ постоји $c \in H(\kappa) \cap N$ такво да важи $a \subseteq c$.

Теорема 95 *Нека је $\kappa = (|P|^+)^M$ и $\lambda > \kappa$ регуларан кардинал у M. Тада су κ и λ регуларни кардинали у $M[G]$ и важи $H(\lambda)^M = H(\lambda)^{M[G]} \cap M$.*

Доказ: Из теореме 83 следи да су κ и λ регуларни кардинали у $M[G]$. Нека је $a \in H(\lambda)^{M[G]} \cap M$ произвољно и нека је $\mu = |\mathrm{tc}(a)|^M$. Ако је $\mu \geqslant \lambda$ онда у $M[G]$ постоји бијекција између μ и ординала $|\mathrm{tc}(a)|^{M[G]} < \lambda$, што није могуће зато што је λ кардинал у $M[G]$. Према томе, $\mu < \lambda$, па $a \in H(\lambda)^M$.

Претпоставимо да $a \in H(\lambda)^M$. Тада свакако $a \in M$. Изаберимо неку бијекцију $f \in M$ неког ординала $\alpha < \lambda$ на скуп $\mathrm{tc}(a)$. Због $M \subseteq M[G]$ важи $f \in M[G]$, одакле следи да важи $|\mathrm{tc}(a)|^{M[G]} < \lambda$, односно $a \in H(\lambda)^{M[G]}$. $\square$

Теорема 96 *Нека је $\kappa = (|P|^+)^M$ и $\lambda > \kappa$ регуларан кардинал у M. Тада у $M[G]$ за скуп $H(\lambda)^M$ важи да је κ-λ модел.*

Доказ: Доказаћемо само нетривијалан део тврђења. Нека је $a \in H(\lambda)^{M[G]} \setminus H(\lambda)^M$ такво да важи $a \subseteq H(\lambda)^M$. Из теореме 95 следи да $a \notin M$.

Изаберимо неко $\dot{a} \in M^P$ такво да важи $\dot{a}_G = a$. Нека је C скуп свих услова p таквих да постоји барем једно $e \in H(\lambda)^M$ такво да важи

$$M \models p \nVdash_{\mathcal{P}} \check{e} \in \dot{a}, \quad M \models p \nVdash_{\mathcal{P}} \check{e} \notin \dot{a}.$$

Нека је $p \in G$ произвољно. Тада $p \in C$ јер би у супротном важило

$$a = \{e \in H(\lambda)^M \mid M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \check{e} \in \dot{a}\},$$

што је у супротности са $a \notin M$. Према томе, важи $G \subseteq C$. Нека је $g \in M$ функција која слика скуп C у скуп $H(\lambda)^M$ таква да за свако $p \in C$ важи

$$M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} (f(p))\check{} \in \dot{a}, \quad M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} (f(p))\check{} \notin \dot{a}.$$

Тада важи $g[C] \in M$ и $|g[C]|^M \leqslant |C|^M \leqslant |P|^M < \kappa$. Такође, важи и $g[C] \subseteq H(\lambda)^M$, па због регуларности кардинала λ у M важи $|\mathrm{tc}(g[C])|^{M[G]} \leqslant |\mathrm{tc}(g[C])|^M < \kappa$.

Нека је $s = a \cap g[C]$. Тада свакако важи $s \subseteq a$ и $|s|^{M[G]} \leqslant |g[C]|^{M[G]} < \kappa$. Докажимо да $s \notin M$. Доказ изводимо свођењем на противречност. Претпоставимо да $s \in M$ и изведимо противречност.

Тада постоји $p \in G$ такво да важи $M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \dot{a} \cap (g[C])\check{} = \check{s}$. Због $G \subseteq C$ важи $p \in C$, што значи да у моделу M услов p не одлучује исказ $(g(p))\check{} \in \dot{a}$. Међутим, у моделу M услов p форсира да $(g(p))\check{} \in (g[C])\check{}$, што значи да у моделу M услов p не одлучује исказ $(g(p))\check{} \in \check{s}$, што је немогуће јер се ради о релацији припадања између канонских имена елемената модела M.

Нека је $a \in H(\kappa)^{M[G]}$ такво да важи $a \subseteq H(\lambda)^M$ и докажимо да постоји $c \in H(\kappa)^{M[G]} \cap H(\lambda)^M$ такво да важи $a \subseteq c$. Нека је $\mu = |a|^{M[G]}$ и $h \in M[G]$ бијекција скупа μ на скуп a. Тада свакако важи $\mu < \kappa$. Изаберимо $\dot{a}, \dot{h} \in M^P$ и $p \in G$ такве да важи $\dot{a}_G = a$, $\dot{h}_G = h$ и $M \models p \Vdash_{\mathcal{P}} \dot{h} : \check{\mu} \longrightarrow \dot{a}$. Сваком $\alpha < \mu$ придружимо скуп

$$v(\alpha) := \{e \in H(\lambda)^M \mid (\exists q \leqslant p) M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \dot{h}(\check{\alpha}) = \check{e}\}.$$

Очигледно важи $v(\alpha) \in M$ и $v(\alpha) \subseteq H(\lambda)^M$. За различите $e_1, e_2 \in H(\lambda)^M$ и $q \leqslant p$ не може важити $M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \dot{h}(\check{\alpha}) = \check{e}_1$ и $M \models q \Vdash_{\mathcal{P}} \dot{h}(\check{\alpha}) = \check{e}_2$.

Према томе, важи $|v(\alpha)|^M \leqslant |P|^M < \kappa$. Такође, $h(\alpha) \in v(\alpha)$, па за $c = \bigcup_{\alpha<\mu} v(\alpha)$ важи $c \in M$ и $a \subseteq c \subseteq H(\lambda)^M$, па на основу регуларности кардинала κ у M и $\mu < \kappa$ важи $|c|^M < \kappa$. Одатле и из регуларности кардинала λ у M следи да важи $c \in H(\lambda)^M$. $\square$

Теорема 97 *Нека је $\kappa = (|P|^+)^M$ и $\lambda > \kappa$ регуларан кардинал у M. Нека су N_1 и N_2 произвољни κ-λ модели у $M[G]$ за које важи $H(\kappa)^{M[G]} \cap N_1 = H(\kappa)^{M[G]} \cap N_2$. Тада важи $N_1 = N_2$.*

Доказ: Због симетричности услова, довољно је доказати да важи $N_1 \subseteq N_2$. Нека је $b \in N_1$. Докажимо да важи $b \in N_2$. Ако је $b = \emptyset$, онда свакако важи $b \in N_2$ јер је скуп N_2 непразан и транзитиван. Претпоставимо зато да је $b \neq \emptyset$.

Нека је $a \in N_1$ скуп за који важи $F(a) = b$. Довољно је доказати да $a \in N_2$. Претпоставимо да $a \notin N_2$ и изведимо противречност. Пошто је скуп b непразан, сви елементи скупа a су ординали. Нека је $\mu = (\sup a) + 1$. На основу теореме 61 важи $|\mu|^{M[G]} \leqslant |\mathrm{tc}(\{a\}) + \aleph_0|^{M[G]} < \lambda$, а самим тим и $\mu < \lambda$.

На основу претпоставке о скупу N_2, можемо одабрати скуп $s \subseteq a$ такав да важи $|s|^{M[G]} < \kappa$ и $s \notin N_2$. Очигледно важи $s \subseteq \mu$. На основу претпоставки о N_1 и κ, можемо конструисати у $M[G]$ инклузијски неопадајући низ $(c_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ скупова такав да за свако $\alpha < \kappa$ важи $|c_\alpha|^{M[G]} < \kappa$ и $s \subseteq c_\alpha \subseteq \mu$, као и да за сваки гранични ординал $\beta < \kappa$ и свако $n \in \omega$ важи $c_{\beta+2n} \in N_1$ и $c_{\beta+2n+1} \in N_2$.

Нека је $d = \bigcup_{\alpha<\kappa} c_\alpha$. Очигледно важи $d \subseteq \mu$ и $|d|^{M[G]} \leqslant \kappa$. Нека је $u \in M[G]$ подскуп скупа d и који је у моделу $M[G]$ кардиналности мање од κ. Из регуларности кардинала κ у $M[G]$ следи да је низ $(c_\alpha \cap u)_{\alpha<\kappa}$ почев однекле константан, па за неки гранични ординал $\beta < \kappa$ и неко $n \in \omega$ важи $c_{\beta+2n} = c_{\beta+2n+1} = u$, одакле следи да $u \in N_1 \cap N_2$. Из произвољности скупа u и претпоставке о скуповима N_1 и N_2 следи да $d \in N_1 \cap N_2$.

Нека је $t : d \longrightarrow \kappa$ транзитивни колапс скупа d. Према претпоставци о скуповима N_1 и N_2 важи $t, t^{-1} \in N_1 \cap N_2$. Из $s \in N_1$ следи да је $t[s] \in N_1$. Пошто је $|t[s]|^{M[G]} = |s|^{M[G]} < \kappa$, и $t[s] \subseteq \kappa$, важи $t[s] \in H(\kappa) \cap N_1 = H(\kappa) \cap N_2$, па $s = t^{-1}[t[s]] \in N_2$. $\square$

Теорема 98 *Постоји формула $\varphi(x, y, z)$ таква да за сваки пребројив транзитиван модел M који задовољава одређену теорему* ZFC *теорије, за свако безатомично парцијално уређење $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant \rangle \in M$ и за сваки $\mathcal{P}$-генерички филтер G над M важи*

$$M = \{a \in M[G] \mid M[G] \models \varphi(a, \kappa, S)\},$$

где је $\kappa = (|P|^+)^M$ и $S = H(\kappa)^M$.

Доказ: Формула $\varphi(x, y, z)$ тврди да је y регуларан кардинал и да постоји регуларан кардинал $\lambda > y$ и y-λ модел N такав да важи $x \in N$ и $H(y) \cap N = z$. $\square$

5.8 Примена форсинга на доказивање теорема

Форсинг метода је изворно настала за извођење доказа релативне конзистентности. Међутим, испоставило се да је форсинг метода примењива и на доказивање да је одређени исказ теорема ZFC теорије. Овде ћемо приказати неке од начина. У сваком случају доказ дате реченице φ изводимо свођењем на противречност. Дакле, претпоставимо да важи $\neg\varphi$ и изведимо противречност.

Нека $\varphi \in \Pi_1(\mathcal{L}_{\text{ZFC}})$, то јест реченица $\neg\varphi$ је еквивалентна формули облика

$$(\exists x_1, \ldots, x_d)R(x_1, \ldots, x_d), \tag{5.18}$$

где $R(x_1, \ldots, x_m) \in \Sigma_0(\mathcal{L}_{\text{ZFC}})$. Према теореми 68 постоји пребројив ординал α такав да $\neg\varphi$ важи у L_α. Другим речима, постоје $a_1, \ldots, a_m \in L_\alpha$ такви да важи $L_\alpha \models R(a_1, \ldots, a_m)$. Пошто је формула $R(x_1, \ldots, x_m)$ апсолутна за транзитивне моделе, формула $\neg\varphi$ ће бити тачна у сваком транзитивном моделу M за који важи $a_1, \ldots, a_m \in M$, па самим тим и у сваком транзитивном моделу M за који важи $M \subseteq L_\alpha$, односно у сваком транзитивном моделу M који задовољава одређену теорему теорије ZF и има висину која није мања од α.

То значи да можемо поћи од било којег транзитивног модела који има висину која није мања од α и који задовољава подесан фрагмент теорије ZF и онда вршити трансформације модела док не стигнемо до транзитивног модела висине не мање од α, тако да у њему важе одговарајућа теорема теорије ZF и да за њега можемо доказати да задовољава реченицу φ. Тада смо добили тражену противречност.

Нека $\varphi \in \Pi_1(\mathcal{L})$ за неки језик $\mathcal{L}$, који је шири од језика $\mathcal{L}_{\text{ZFC}}$. Другим речима, реченица $\neg\varphi$ је еквивалентна формули облика (5.18), где $R(x_1, \ldots, x_m) \in \Sigma_0(\mathcal{L})$. У том случају можемо рефлексијом да изаберемо пребројив транзитиван модел M који рефлектује потребан фрагмент теорије ZFC и реченицу $\neg\varphi$. Тада ће се важење реченице $\neg\varphi$ преносити са модела M на форсинг раширење $M[G]$ које је добијено форсингом у односу на који су апсолутни појмови језика $\mathcal{L}$. Таква форсинг раширења можемо понављати произвољан број пута. Ако на тај начин добијемо модел за који можемо доказати да задовољава реченицу φ, онда смо добили тражену противречност.

Нека је реченица $\neg\varphi$ еквивалентна формули облика

$$(\exists x_1, \ldots, x_m \in H(\aleph_1))(\forall y_1, \ldots, y_n)R(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n), \tag{5.19}$$

где је $R(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ формула из скупа $\Sigma_0(\mathcal{L}_{\text{ZFC}})$, а $H(\aleph_1)$ скуп свих скупова чија су транзитивна затворења највише пребројива. Најпре изаберимо $a_1, \ldots, a_m \in H(\aleph_1)$ такве да важи

$$(\forall y_1, \ldots, y_n)R(a_1, \ldots, a_m, y_1, \ldots, y_n). \tag{5.20}$$

Тада за $t = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ важи $t \in H(\aleph_1)$, па можемо одабрати пребројив скуп $s \subseteq \omega_1$ који кодира t у смислу теореме 61. Тада ће за пребројив ординал α такав да модел $M = L_\alpha(t)$ рефлектује одговарајућу теорему теорије ZFC важити $a_1, \ldots, a_m \in M$ и $M \models (\forall y_1, \ldots, y_n)R(a_1, \ldots, a_m, y_1, \ldots, y_n)$.

Ако можемо да докажемо да у моделу $M[G]$ важи $\neg(\forall y_1, \ldots, y_n)R(a_1, \ldots, a_m, y_1, \ldots, y_n)$, онда можемо изабрати $b_1, \ldots, b_n \in M[G]$ тако да важи $M[G] \models \neg R(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$, а самим тим и $\neg R(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n)$, што је у супротности са (5.20).

Помоћу ових механизама се од сваког доказа релативне конзистентности форсингом неке хипотезе H у односу[1] на теорију ZFC добијају теореме апсолутности, по којима за реченицу φ из одговарајуће класе реченица важи

$$\text{ZFC} + H \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \text{ZFC} \vdash \varphi.$$

Предност овог приступа је што га могу користити и они који нису стручњаци за теорију скупова. Код тог приступа је стручњак за теорију скупова неопходан само да испита да ли реченица φ припада некој од класа формула одређених описаним механизмима, а даље се користе уобичајене математичке[2] методе. Ипак, тај приступ не омогућава коришћење специфичних особина модела M, његовог односа са моделом $M[G]$ и појмова као што су генерички објекти, што је могуће ако се користе описани механизми са форсингом.

[1]Заправо, није обавезно да теорија буде ZFC. Понекад се разматрају и друге теорије у истом контексту.

[2]Дакле, метаматематичке као што је форсинг нису неопходне.

Глава 6

Коенов симетрични модел

6.1 Основне дефиниције

Надаље ће M бити пребројив транзитиван модел који за довољно велико n задовољава све аксиоме теорије ZFC које припадају скупу $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$, а $I \in M$ неки бесконачан скуп. Надаље ће $\mathcal{Q} = \langle Q, \leqslant_Q \rangle$ означавати неко безатомично парцијално уређење које припада моделу M, док ће $\mathcal{P} = \langle P, \leqslant \rangle$ бити парцијално уређење дефинисано на следећи начин: P је скуп свих коначних функција из скупа I у скуп Q, при чему се уређење дефинише као

$$(\forall s_1, s_2 \in P)(s_1 \leqslant s_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\mathrm{dom}(s_2) \subseteq \mathrm{dom}(s_1) \ \wedge \ (\forall i \in \mathrm{dom}(s_2)) s_1(i) \leqslant s_2(i))).$$

Са G ћемо означавати неки P-генерички филтер над M, а са X неку класу модела $M[G]$ са параметрима из M такву да је $X \subseteq M$. Такође, за свако $i \in I$ дефинишимо

$$\dot{c}_i := \{\langle p, (p(i))\check{\ } \rangle \mid p \in \mathrm{dom}(P),\ i \in \mathrm{dom}(p)\}, \quad c_i := \mathrm{int}_G(\dot{c}_i),$$

као и

$$\dot{C} := \{\langle p, \dot{c}_i \rangle \mid p \in \mathrm{dom}(P),\ i \in I\}, \quad C = \mathrm{int}_G(\dot{C}).$$

Очигледно, за све $i \in I$ важи

$$c_i = \{p(i) \mid p \in G \wedge i \in \mathrm{dom}(p)\}, \quad c_i \subseteq \mathrm{dom}(Q) \in M, \tag{6.1}$$

као и

$$C = \{c_i \mid i \in I\}.$$

Такође, за свако $i \in I$ важи

$$c_i \text{ је } Q\text{-генерички филтер над } M[f_i], \quad \text{где је } f_i : I \setminus \{i\} \longrightarrow C,\ f_i(j) = c_j. \tag{6.2}$$

Последње тврђење следи из леме о производу форсинга. Посебно, за ма које различите $i_1, i_2 \in I$ постоје $s_1 \in c_{i_1}$ и $s_2 \in c_{i_2}$ такви да важи $s_1 \perp s_2$, а самим тим и $c_i \neq c_j$, па је скуп C је бесконачан. Дефинишимо модел

$$N(I, Q, X) := \mathbf{HOD}(C \cup \{C\} \cup X)^{M[G]}.$$

У овој дефиницији занемарујемо малу некоректност да M и G нису једнозначно одређени са I, Q и X. Ако нема опасности од забуне, уместо $N(I, Q, X)$ писаћемо N.

Под <u>*Коеновим симетричним моделом*</u> се обично подразумева модел $N(\omega, \mathcal{R}(\{0\}), X)$, при чему је $X = \emptyset$ или $X = M$. Надаље ћемо радити под претпоставком да је $Q \subseteq N$. Тада за свако i важи $c_i \in N$, а самим тим и $C \in N$. Та претпоставка је свакако задовољена у случају да је $X = M$ јер тада важи $Q \subseteq M \subseteq N$.

6.2 Својства Коеновог симетричног модела

Под *околином* ћемо подразумевати скуп облика

$$[s] := \{c \in C \mid s \in c\}, \quad s \in \mathrm{dom}(Q).$$

Под *околином елемента* $c \in C$ ћемо подразумевати било коју околину којој c припада. Притом, за ма које $s \in Q$ и $r \in C$ важи

$$r \in [s] \Leftrightarrow s \in r. \tag{6.3}$$

За ма које $s_1, s_2 \in Q$ важи $s_1 \perp s_2 \Leftrightarrow [s_1] \cap [s_2] = \emptyset$. Одатле следи да се различити елементи скупа C могу сместити у дисјунктне околине.

Пређимо сада на својства Коеновог симетричног модела. Следећа теорема истиче значај једне једноставне врсте аутоморфизама уређења $\mathcal{P}$.

Теорема 99 *Нека је $\sigma \in M$ пермутација скупа I и нека је f аутоморфизам уређења $\mathcal{P}$ такав да за свако $x \in P$ важи $f(x) = x \circ \sigma$. Тада $f \in M$ и за $H = f[G]$ важи да је H један $\mathcal{P}$-генерички филтер над M, као и $M[H] = M[G]$, $\dot{C}_H = C$ и $(\forall i \in I)\mathrm{int}_H(\dot{c}_i) = c_{\sigma(i)}$.*

Доказ: За ма које $i \in I$ важи

$$\begin{aligned}
\mathrm{int}_H(\dot{c}_i) &= \mathrm{int}_H(\{\langle p, (p(i))\check{}\rangle \mid p \in P,\, i \in \mathrm{dom}(p)\}) \\
&= \{p(i) \mid p \in H,\, i \in \mathrm{dom}(p)\} \\
&= \{f(x)(i) \mid f(x) \in H,\, i \in \mathrm{dom}(f(x))\} \\
&= \{x(\sigma(i)) \mid f(x) \in f[G],\, i \in \mathrm{dom}(x \circ \sigma)\} \\
&= \{x(\sigma(i)) \mid x \in G,\, \sigma(i) \in \mathrm{dom}(x)\} \\
&= \mathrm{int}_G(\dot{c}_{\sigma(i)}) = c_{\sigma(i)}.
\end{aligned}$$

Самим тим, важи

$$\begin{aligned}
\mathrm{int}_H(\dot{C}) &= \mathrm{int}_H(\{\langle p, \dot{c}_i\rangle \mid p \in P,\, i \in I\}) = \{\mathrm{int}_H(c_i) \mid i \in I\} \\
&= \{c_{\sigma(i)} \mid i \in I\} = \{c_i \mid i \in I\} = C.
\end{aligned}$$

□

Најважније својство Коеновог базног модела је изражено лемом о непрекидности. Пре ње, наводимо сличну теорему за модел $M[G]$.

Теорема 100 [5] *Претпоставимо да важи следеће*

1) $a_1, \ldots, a_m \in M$,

2) $r_1, \ldots, r_n$ *су међусобно различити елементи скупа* C,

3) $\varphi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, z)$ *је формула језика* $\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}$,

4) *У моделу M важи одређена теорема теорије* ZFC, *која је одређена формулом* φ.

Тада постоје дисјунктне околине $[s_1], \ldots, [s_n]$ елемената $r_1, \ldots, r_n$ тим редом, такве да за све $r'_1 \in [s_1], \ldots, r'_n \in [s_n]$ важи

$$M[G] \models (\varphi(a_1, \ldots, a_m, r_1, \ldots, r_n, C) \Leftrightarrow \varphi(a_1, \ldots, a_m, r'_1, \ldots, r'_n, C)).$$

Доказ: Без умањења општости, можемо претпоставити да важи

$$M[G] \models \varphi(a_1, \ldots, a_m, r_1, \ldots, r_n, C),$$

јер се супротан случај разматра аналогно, преласком са формуле φ на формулу $\neg\varphi$. Нека су $i_1, \ldots, i_n$ елементи скупа I такви да важи $\bigwedge_{j=1}^{n} r_j = c_{i_j}$.

Ако модел M задовољава коначан фрагмент теорије ZFC из кога следи одговарајући примерак форсинг теореме, онда можемо одабрати $p \in G$ такав да важи

$$M \models p \Vdash_P \varphi(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m, \dot{c}_{i_1}, \ldots, \dot{c}_{i_n}, \dot{C}). \tag{6.4}$$

Притом смо p могли одабрати тако да важи

$$\{i_1, \ldots, i_n\} \subseteq \mathrm{dom}(p),$$

$$(\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(p))(x_1 \neq x_2 \Rightarrow p(x_1) \perp p(x_2)),$$

јер је скуп таквих услова густ. Пошто p припада филтеру G, важи $\bigwedge_{j=1}^{n} p(i_j) \in c_{i_j}$. Нека је

$$s_j := p(i_j), \quad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Важи

$$\bigwedge_{j=1}^{n} c_{i_j} \in [s_j]. \tag{6.5}$$

На основу начина избора елемента p, чланови скупа

$$\{[p(x)] \mid x \in \mathrm{dom}(p) \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}\} \cup \{[s_1], \ldots, [s_n]\} \tag{6.6}$$

су у паровима дисјунктни, што заједно са (6.5) повлачи да важи

$$\bigwedge_{j=1}^{n} (\forall l \in \mathrm{dom}(p))(c_l \in [s_j] \Rightarrow l = i_j). \tag{6.7}$$

Изаберимо произвољне $r'_j \in [s_j]$ за $j \in \{1, \ldots, n\}$. Нека су $i'_1, \ldots, i'_n \in I$ такви да важи $\bigwedge_{j=1}^{n} r'_j = c_{i'_j}$. Тада важи $\bigwedge_{j=1}^{n} c_{i'_j} \in [s_j]$, односно $\bigwedge_{j=1}^{n} s_j \in c_{i'_j}$, то јест $\bigwedge_{j=1}^{n} p(i_j) \in c_{i'_j}$. Ово последње управо значи да за свако $j \in \{1, \ldots, n\}$ постоји неко $q'_j \in G$ такво да је $i'_j \in \mathrm{dom}(q'_j)$ и $q'_j(i'_j) = p(i_j)$. Нека је

$$q_j : \{i'_j\} \longrightarrow Q, \quad q_j(i'_j) = p(i_j)$$

за све $j \in \{1, \ldots, n\}$. Због $q'_j \leqslant q_j$ важи $q_j \in G$. Нека је $q' \in G$ такав да важи $q' \leqslant p, q_1, \ldots, q_n$. Очигледно важи

$$\mathrm{dom}(p) \cup \{i'_1, \ldots, i'_n\} \subseteq \mathrm{dom}(q'), \quad \bigwedge_{j=1}^{n} (q'(i_j), q'(i'_j) \leqslant p(i_j) = s_j).$$

Према (6.7), важи

$$\bigwedge_{j=1}^{n} (i'_j \in \mathrm{dom}(p) \Rightarrow i'_j = i_j), \tag{6.8}$$

па је следећа дефиниција услова q коректна.

$$\mathrm{dom}(q) = \mathrm{dom}(p) \cup \{i'_1, \ldots, i'_n\}, \quad \bigwedge_{j=1}^{n} (q(i_j) = q'(i'_j) = p(i_j)),$$

при чему важи $q' \leqslant q$, а самим тим и $q \in G$. Такође је $q \leqslant p$, па на основу (6.4) важи

$$M \models q \Vdash_P \varphi(\check{a}_1, \ldots, \check{a}_m, \dot{c}_{i_1}, \ldots, \dot{c}_{i_n}, \dot{C}).$$

За ма које различите l_1 и l_2 важи $\{c_{i_{l_1}}, c_{i'_{l_1}}\} \subseteq [s_{l_1}]$ и $\{c_{i_{l_2}}, c_{i'_{l_2}}\} \subseteq [s_{l_2}]$, па из дисјунктности околина $[s_{l_1}]$ и $[s_{l_2}]$ следи дисјунктност скупова $\{c_{i_{l_1}}, c_{i'_{l_1}}\}$ и $\{c_{i_{l_2}}, c_{i'_{l_2}}\}$, одакле следи дисјунктност скупова $\{i_{l_1}, i'_{l_1}\}$ и $\{i_{l_2}, i'_{l_2}\}$.

Пошто унија пермутација дефинисаних на дисјунктним доменима представља пермутацију уније тих домена, постоји пермутација σ скупа I таква да за свако l важи $\sigma(i_l) = i'_l$ и $\sigma(i'_l) = i_l$ и која фиксира сваку од преосталих тачака. Наравно, пошто σ фиксира све тачке осим евентуално њих коначно много, важи $\sigma \in M$.

Нека је f аутоморфизам уређења P такав да за свако $x \in P$ важи $f(x) = x \circ \sigma$ и нека је $H := f[G]$. Скуп H је такође P-генерички филтер над M и важи $M[G] = M[H]$ јер $f \in M$. Према теореми 99, важи $\dot{C}_H = C$, као и

$$\mathrm{int}_H(\dot{c}_{i_l}) = c_{\sigma(i_l)} = c_{i'_l} = r'_l.$$

за свако l. На основу начина избора q, σ и f, важи

$$\{i_1, i_1, \ldots, i_n, i'_n\} \subseteq \mathrm{dom}(q) \cap \mathrm{dom}(f(q)),$$

$$(\forall x \in I \setminus \{i_1, i'_1, \ldots, i_n, i'_n\})(x \in \mathrm{dom}(f(q)) \Leftrightarrow x \in \mathrm{dom}(q \circ \sigma) \Leftrightarrow \sigma(x) \in \mathrm{dom}(q) \Leftrightarrow x \in \mathrm{dom}(q)),$$

односно $\mathrm{dom}(f(q)) = \mathrm{dom}(q)$. Такође, важи

$$(\forall j)(f(q)(i_j) = q(\sigma(i_j)) = q(i'_j) = p(i_j) = q(i_j)),$$

$$(\forall j)(f(q)(i'_j) = q(\sigma(i'_j)) = q(i_j) = p(i_j) = q(i'_j)),$$

$$(\forall x \in \mathrm{dom}(q) \setminus \{i_1, i'_1, \ldots, i_n, i'_n\}) f(q)(x) = q(\sigma(x)) = q(x).$$

Према томе, важи $q = f(q) \in H$, а самим тим, ако модел M притом задовољава подесан коначан фрагмент теорије ZFC, који зависи само од формуле φ, важи и

$$M[H] \models \varphi(\mathrm{int}_H(\check{a}_1), \ldots, \mathrm{int}_H(\check{a}_m), \mathrm{int}_H(\dot{c}_{i_1}), \ldots, \mathrm{int}_H(\dot{c}_{i_n}), \mathrm{int}_H(\dot{C})),$$

$$M[G] \models \varphi(a_1, \ldots, a_m, r'_1, \ldots, r'_n, C).$$

□

У следећој теореми нема претпоставке да је X класа у M са параметрима $a_1, \ldots, a_m$.

Теорема 101 (*Лема о непрекидности*) [5] *Претпоставимо да важи следеће*

1) $X \subseteq M$ *и* $a_1, \ldots, a_m \in M \cap N$,

2) $r_1, \ldots, r_n$ *су међусобно различити елементи скупа* C,

3) $\varphi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, z)$ *је формула језика* $\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}$,

4) *У моделу* M *важи одређена теорема теорије* ZFC, *одређена формулом* φ.

Тада йосшоје дисјункшне околине $[s_1], \ldots, [s_n]$ *елеменаша* $r_1, \ldots, r_n$ *шим редом, шакве да за све* $r_1' \in [s_1], \ldots, r_n' \in [s_n]$ *важи*

$$N \models (\varphi(a_1, \ldots, a_m, r_1, \ldots, r_n, C) \Leftrightarrow \varphi(a_1, \ldots, a_m, r_1', \ldots, r_n', C)).$$

Доказ: Претпоставимо да важи

$$N \models \varphi(a_1, \ldots, a_m, r_1, \ldots, r_n, C).$$

Супротан случај се разматра аналогно, преласком са формуле φ на формулу $\neg\varphi$. Са $d_1, \ldots, d_k$ означимо параметре из M преко којих је класа X дефинабилна у $M[G]$. Пошто је N класа модела $M[G]$ дефинабилна преко истих параметара као класа X, можемо одабрати формулу $\psi(u, v_1, \ldots, v_k)$ такву да важи

$$N = \{t \in M[G] \mid M[G] \models \psi(t, d_1, \ldots, d_k)\}$$

и при чему формуле φ и ψ немају заједничких променљивих. Дефинишимо трансформацију формула $\mu \mapsto T(\mu)$ на следећи начин:

$$T(\mu) := \mu, \quad \text{ако је формула } \mu \text{ атомска},$$

$$T(\neg\mu) := \neg T(\mu),$$
$$T(\mu \wedge \nu) := T(\mu) \wedge T(\nu),$$
$$T((\forall w)\mu) := (\forall w)(\psi(w, v_1, \ldots, v_k) \Rightarrow T(\mu)).$$

Нека је формула $\theta(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, z, v_1, \ldots, v_k)$ слика формуле φ при трансформацији T. Ово је ништа друго до релативизација формуле φ на формулу ψ, па важи

$$N \models \varphi(a_1, \ldots, a_m, t_1, \ldots, t_n, C) \quad \text{акко} \quad M[G] \models \theta(a_1, \ldots, a_m, t_1, \ldots, t_n, C, d_1, \ldots, d_k)$$

за ма које $t_1, \ldots, t_n$ из модела N, а самим тим и из скупа C. Самим тим важи

$$M[G] \models \theta(a_1, \ldots, a_m, r_1, \ldots, r_n, C, d_1, \ldots, d_k).$$

Према теореми 100 можемо изабрати $s_1 \in r_1, \ldots, s_n \in r_n$ тако да околине $[s_1], \ldots, [s_n]$ буду у паровима дисјунктне и да за ма које $r_1' \in [s_1], \ldots, r_n' \in [s_n]$ важи

$$M[G] \models \theta(a_1, \ldots, a_m, r_1', \ldots, r_n', C, d_1, \ldots, d_k),$$

а самим тим и

$$N \models \varphi(a_1, \ldots, a_m, r_1', \ldots, r_n', C).$$

□

Теорема 102 *За ма које* $a_1, \ldots, a_m \in M$ *и ма које*

$$b \in \mathbf{OD}(\{a_1, \ldots, a_m, C\} \cup C)^{M[G]} \tag{6.9}$$

йосшоји инклузијски најмањи скуй $A \subseteq C$ *шакав да важи*

$$b \in \mathbf{OD}(\{a_1, \ldots, a_m, C\} \cup A)^{M[G]}. \tag{6.10}$$

Пришом је скуй A *коначан.*

Доказ: Изаберимо b тако да важи (6.9) произвољно. Пошто се при дефинисању елемента b користи коначно много параметара, постоји коначан подскуп скупа C такав да важи (6.10), а самим тим се скуп A може изабрати тако да буде инклузијски минималан. Такође, сваки инклузијски минималан подскуп A скупа C такав да важи (6.10) је коначан.

Претпоставимо да тврђење теореме није тачно за изабрани елемент b. Тада можемо изабрати инклузијски минималне подскупове A и B скупа C, такве да важи (6.10) и

$$b \in \mathbf{OD}(\{a_1, \ldots, a_m, C\} \cup B)^{M[G]}. \tag{6.11}$$

Пошто су A и B инклузијски минимални, они су коначни, а пошто су минималмни и различити, важи $A \setminus B \neq \emptyset$ и $B \setminus A \neq \emptyset$, па можемо одабрати међусобно различите елементе

$$u_1, \ldots, u_{n_1}, v_1, \ldots, v_{n_2}, w_1, \ldots, w_{n_3}$$

скупа C, ординале $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{ORD}^{M[G]}$ и формуле

$$\varphi_1(x, y_1, \ldots, y_m, z, p_1, \ldots, p_{n_1}, q_1, \ldots, q_{n_2})$$

и

$$\varphi_2(x, y_1, \ldots, y_m, z, q_1, \ldots, q_{n_2}, r_1, \ldots, r_{n_3}),$$

тако да важи

$$n_1, n_3 > 0, \quad \alpha_1 \in V_{\beta_1}, \quad \alpha_2 \in V_{\beta_2}, \quad b \in V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2},$$

$$A \setminus B = \{u_1, \ldots, u_{n_1}\}, \quad A \cap B = \{v_1, \ldots, v_{n_2}\}, \quad B \setminus A = \{w_1, \ldots, w_{n_3}\},$$

$$M[G] \models (\forall x \in V_{\beta_1})(x = b \Leftrightarrow V_{\beta_1} \models \varphi_1(x, a_1, \ldots, a_m, \alpha_1, u_1, \ldots, u_{n_1}, v_1, \ldots, v_{n_2}))$$

и

$$M[G] \models (\forall x \in V_{\beta_2})(x = b \Leftrightarrow V_{\beta_2} \models \varphi_2(x, a_1, \ldots, a_m, \alpha_2, v_1, \ldots, v_{n_2}, w_1, \ldots, w_{n_3})).$$

Тада важи

$$\begin{aligned} M[G] \quad \models \quad & (\exists x \in V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2})(V_{\beta_1} \models \varphi_1(x, a_1, \ldots, a_m, \alpha_1, u_1, \ldots, u_{n_1}, v_1, \ldots, v_{n_2}) \wedge \\ & V_{\beta_2} \models \varphi_2(x, a_1, \ldots, a_m, \alpha_2, v_1, \ldots, v_{n_2}, w_1, \ldots, w_{n_3})), \end{aligned}$$

$$M[G] \models (\exists_1 x \in V_{\beta_1}) V_{\beta_1} \models \varphi_1(x, a_1, \ldots, a_m, \alpha_1, u_1, \ldots, u_{n_1}, v_1, \ldots, v_{n_2}),$$

$$M[G] \models (\exists_1 x \in V_{\beta_2}) V_{\beta_2} \models \varphi_2(x, a_1, \ldots, a_m, \alpha_2, v_1, \ldots, v_{n_2}, w_1, \ldots, w_{n_3}),$$

$$M[G] \models V_{\beta_1} \models \varphi_1(b, a_1, \ldots, a_m, \alpha_1, u_1, \ldots, u_{n_1}, v_1, \ldots, v_{n_2}),$$

$$M[G] \models V_{\beta_2} \models \varphi_2(b, a_1, \ldots, a_m, \alpha_2, v_1, \ldots, v_{n_2}, w_1, \ldots, w_{n_3}).$$

На основу леме о непрекидности, постоје околине

$$U_1, \ldots, U_{n_1}, W_1, \ldots, W_{n_3}$$

тачака $u_1, \ldots, u_{n_1}, w_1, \ldots, w_{n_3}$ тим редом, тако да за све

$$u'_1 \in U_1, \ldots, u'_{n_1} \in U_{n_1}, w'_1 \in W_1, \ldots, w'_{n_3} \in W_{n_3} \tag{6.12}$$

важи

$$\begin{aligned} M[G] \quad \models \quad & (\exists x \in V_{\beta_1} \cap V_{\beta_2})(V_{\beta_1} \models \varphi_1(x, a_1, \ldots, a_m, \alpha_1, u'_1, \ldots, u'_{n_1}, v_1, \ldots, v_{n_2}) \wedge \\ & V_{\beta_2} \models \varphi_2(x, a_1, \ldots, a_m, \alpha_2, v_1, \ldots, v_{n_2}, w'_1, \ldots, w'_{n_3})), \end{aligned}$$

$$M[G] \models (\exists_1 x \in V_{\beta_1}) V_{\beta_1} \models \varphi_1(x, a_1, \ldots, a_m, \alpha_1, u'_1, \ldots, u'_{n_1}, v_1, \ldots, v_{n_2}),$$

$$M[G] \models (\exists_1 x \in V_{\beta_2}) V_{\beta_2} \models \varphi_2(x, a_1, \ldots, a_m, \alpha_2, v_1, \ldots, v_{n_2}, w'_1, \ldots, w'_{n_3}).$$

Према томе, постоје функције

$$f : [U_1] \times \cdots [U_{n_1}] \longrightarrow V_{\beta_1}^{M[G]},$$

$$g : [W_1] \times \cdots [W_{n_3}] \longrightarrow V_{\beta_2}^{M[G]},$$

такве да за све (6.12) важи

$$M[G] \models (\forall x \in V_{\beta_1})(x = f(u'_1, \ldots, u'_{n_1}) \Leftrightarrow V_{\beta_1} \models \varphi_1(x, a_1, \ldots, a_m, \alpha_1, u'_1, \ldots, u'_{n_1}, v_1, \ldots, v_{n_2})),$$

$$M[G] \models (\forall x \in V_{\beta_2})(x = g(w'_1, \ldots, w'_{n_3}) \Leftrightarrow V_{\beta_2} \models \varphi_2(x, a_1, \ldots, a_m, \alpha_2, v_1, \ldots, v_{n_2}, w'_1, \ldots, w'_{n_3})),$$

као и

$$f(u'_1, \ldots, u'_{n_1}) = g(w'_1, \ldots, w'_{n_3}), \quad f(u_1, \ldots, u_{n_1}) = g(w_1, \ldots, w_{n_3}) = b.$$

Према томе, ове функције су константне и једнаке истој вредности, при чему је та вредност b, па важи

$$\begin{aligned} M[G] \quad \models \quad & (\forall x \in V_\beta)(x = b \Leftrightarrow \\ & (\exists u'_1 \in U_1, \ldots, u'_{n_1} \in U_{n_1}) \varphi_1(x, a_1, \ldots, a_m, \alpha_1, u'_1, \ldots, u'_{n_1}, v_1, \ldots, v_{n_2})). \end{aligned}$$

Дакле, $b \in \mathbf{OD}(\{a_1, \ldots, a_m, C\} \cup (A \cap B))^{M[G]}$, супротно избору скупова A и B. $\Box$

Теорема 103 *Ако је $X \subseteq M$, онда за свако $b \in \mathbf{OD}(X \cup C \cup \{C\})^{M[G]}$ постоји инклузијски најмањи скуп $A \subseteq C$ такав да важи $b \in \mathbf{OD}(X \cup A \cup \{C\})^{M[G]}$. Притом је скуп A коначан.*

Доказ: Нека је $b \in \mathbf{OD}(X \cup C \cup \{C\})^M$. Пошто свака дефиниција преко параметара користи само коначно много параметара, постоји коначан скуп $A \subseteq C$ такав да важи $b \in \mathbf{OD}(X \cup A \cup \{C\})^{M[G]}$. Пошто је A коначан, он се може одабрати тако да буде инклузијски минималан са тим особинама. Одатле и из теореме 102 следи тврђење. $\Box$

У случају када је $X \subseteq M$, надаље ћемо са $\mathbf{F}_1$ означавати функцију која сваком $b \in N$ придружује инклузијски најмањи подскуп A скупа C такав да важи $b \in \mathbf{OD}(X \cup A \cup \{C\})^{M[G]}$.

Теорема 104 *Функција $\mathbf{F}_1$ је класа модела $M[G]$ дефинабилна са параметрима из $\mathbf{ORD}^M \cup \{C\} \cup T$, где је T скуп параметара преко којих је дефинабилна класа X у $M[G]$.*

Доказ:

$$\begin{aligned} (F_1(b) = A)^{M[G]} \quad \Leftrightarrow \quad & A \subseteq C \wedge b \in \mathbf{OD}(X \cup A \cup \{C\})^{M[G]} \\ & \wedge (\forall A' \subseteq A)(b \in \mathbf{OD}(X \cup A' \cup \{C\})^{M[G]} \Rightarrow A' \subseteq A). \end{aligned}$$

$\Box$

6.3 Аксиома избора и Коенов симетрични модел

Коенов симетрични модел задовољава ZF аксиоме, али не и аксиому избора, што ћемо илустровати на неким добро познатим примерима.

Теорема 105 *Ако је $X \subseteq M$, онда за ма које $f \in N$ и $A \in M \cap N$ такве да $f : A \longrightarrow C$ важи да је скуп $f[A]$ коначан. Посебно, модел N не садржи ниједну бијекцију између скупа C и неког ординала, а самим тим ни добро уређење скупа C. Пошто $C \in N$, модел N не задовољава аксиому избора.*

Доказ: Претпоставимо да је $X \subseteq M$, $A \in M \cap N$ и $f \in N$, тако да $f : A \longrightarrow C$ и да је скуп $f[A]$ бесконачан и изведимо противречност.

Нека су $\varphi(x, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n, u)$ формула, $a_1, \dots, a_m \in X \cup \mathbf{ORD}^M$ и $r_1, \dots, r_n \in C$ такви да важи

$$M[G] \models (\forall x)(x = f \Leftrightarrow \varphi(x, a_1, \dots, a_m, r_1, \dots, r_n, C)),$$

а самим тим и

$$M[G] \models (\forall x)(\varphi(x, a_1, \dots, a_m, r_1, \dots, r_n, C) \Rightarrow (x : A \longrightarrow C)).$$

Пошто је скуп $f[A]$ бесконачан, можемо одабрати неко $r \in f[A] \setminus \{r_1, \dots, r_n\}$. Нека је $a \in A$ такво да важи $f(a) = r$. Тада важи

$$M[G] \models (\forall x)(\varphi(x, a_1, \dots, a_m, r_1, \dots, r_n, C) \Rightarrow ((x : A \longrightarrow C) \wedge x(a) = r)).$$

На основу теореме 101 постоји околина $[s]$ тачке r таква да за свако $r' \in [s]$ важи

$$M[G] \models (\forall x)(\varphi(x, a_1, \dots, a_m, r_1, \dots, r_n, C) \Rightarrow ((x : A \longrightarrow C) \wedge x(a) = r')),$$

а самим тим и

$$M[G] \models (\varphi(f, a_1, \dots, a_m, r_1, \dots, r_n, C) \Rightarrow ((f : A \longrightarrow C) \wedge f(a) = r')),$$

одакле следи $f(a) = r'$. Међутим, то је немогуће јер су околине бесконачне, а функција не може сликати једну тачку домена у више вредности. $\Box$

Теорема 106 *Модел N не задовољава аксиому зависног избора.*

Доказ: Нека је R бинарна релација на скупу коначних подскупова скупа C дефинисана са

$$R(A, B) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} A \subseteq B \wedge |B \setminus A| = 1.$$

Ако у моделу N постоји бесконачан низ x такав да за свако $n \in \omega$ важи $R(x(n), x(n+1))$, онда можемо дефинисати $f : \omega \longrightarrow C$ тако да $f(n)$ буде јединствени елемент скупа $x(n+1) \setminus x(n)$. Тада је f инјекција скупа ω у скуп C, супротно теореми 105. $\Box$

Теорема 107 *Нека је $I = \omega$, $\mathcal{Q} = \mathcal{R}(\omega)$ и $X = M$. Тада у моделу N постоји функција $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ таква да важи*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists a_1, a_2 \in (0, \varepsilon))(f(a_1) = 0 \wedge f(a_2) = 1)$$

и да за свако $x : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ важи

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x(n)) = 0.$$

Доказ: Сваком елементу скупа C одговара неки бесконачан низ нула и јединица, као и неки реалан број из интервала $(0,1)$. Наиме, бесконачном низу $e : \omega \longrightarrow \{0,1\}$ нула и јединица одговара реалан број $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1}$. Скуп реалних бројева који одговарају елементима скупа C обележаваћемо са A. Функцију f дефинишемо тако да елементе скупа A слика у јединицу, а остале реалне бројеве у нулу.

У интервалу $(0,1)$ су густо распоређени како рационални бројеви који се сликају у нулу јер не припадају скупу A. Према теореми 90 у интервалу $(0,1)$ су густо распоређени и елементи скупа A, који се сликају у јединицу, па функција f није здесна непрекидна у нули.

Нека је $x : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ такво да $x(n)$ тежи нули када n тежи бесконачности. Нека је $a \in A$ произвољно и нека је $x' : \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ дефинисано тако да важи $x'(n) = x(n)$ ако $x(n) \in A$, односно $x'(n) = a$ у супротном.

Према теореми 105, скуп $x'[\omega]$ је коначан, па се у низу x појављује само коначно много елемената скупа A. Пошто низ x тежи нули (која не припада скупу A), сваки од елемената скупа A се појављује коначно много пута у низу x. Самим тим, низ x почев однекле, па на даље нема чланова скупа A, па је низ $f(x(n))$ почев однекле па на даље константно једнак нули. $\square$

Познато је да у Коеновом генеричком раширењу $M[G]$ ниједно добро уређење скупа реалних бројева није дефинабилно са параметрима из модела M. Овде тај резултат наводимо у нешто општијем облику.

После свих ових негативних резултата, наведимо један позитиван, који нам говори да одређена слабија форма аксиоме избора ипак важи у моделу N.

Теорема 108 (*Лема о малом кршењу избора*) *Претпоставимо да је $X \subseteq M$, да постоји линеарно уређење скупа I које припада класи $\mathbf{OD}(X)^{M[G]}$, да је класа X дефинабилна у $M[G]$ преко параметара из скупа X и да за свако $\alpha \in \mathbf{ORD}^M$ постоји добро уређење скупа $\mathbf{OD}(X)^M \cap V_\alpha$ које припада класи $\mathbf{OD}(X)^M$.*

Тада за свако $\alpha \in \mathbf{ORD}^M$ у моделу N постоји функција $F_2 : V_\alpha^N \longrightarrow \mathbf{ORD}^N$ таква да је функција F дефинисана $F(x) = \langle \mathbf{F}_1(x), F_2(x) \rangle$ инјекција. Посебно, за сваки коначан подскуп C' скупа C, скуп $\{x \in V_\alpha^N \mid \mathbf{F}_1(x) \subseteq C'\}$ има добро уређење у N.

Доказ: На основу теореме (104), функција $\mathbf{F}_1$ је класа у $M[G]$ дефинабилна преко параметара из скупа $X \cup \{C\} \cup \mathbf{ORD}^M$. Нека је $\alpha \in ORD^M$ и нека је a произвољан елемент класе $V_\alpha^N = V_\alpha \cap N$. Према дефиницији модела N, елементу a можемо придружити

$$\begin{gathered} m, n \in \omega, \quad a_1, \dots, a_m \in X, \quad r_1, \dots, r_n \in C, \quad \beta, \gamma \in \mathbf{ORD}^M, \\ \varphi(x, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n, u, v) \in \mathrm{For}(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}), \end{gathered} \tag{6.13}$$

тако да важи

- $a_1, \dots, a_m \in V_\beta \cap X$
- $\mathbf{F}_1(a) = \{r_1, \dots, r_n\}$,
- $r_1 < \cdots < r_n$,
- $a, \gamma, r_1, \dots, r_n, C \in V_\beta^{M[G]}$,
- $M[G] \models (\forall x)(x = a \Leftrightarrow x \in V_\beta \wedge V_\beta \models (\varphi(x, a_1, \dots, a_m, r_1, \dots, r_n, C, \gamma)))$.

Такав избор параметара једнозначно одређује a. Притом су скуп $\{r_1, \dots, r_n\}$, као и n једнозначно одређени. Такође, линеаран поредак скупа C се наслеђује од линеарног поретка скупа I.

Изаберимо остале параметре на следећи начин: Нека је μ најмањи гранични ординал такав да се за свако a из класе $S(\alpha)$ могу одабрати параметри (6.13), тако да важе наведени услови и да притом буде $\alpha, \beta < \mu$.

Нека је $w \in \mathbf{OD}(X)^M$ добро уређење класе $\mathbf{OD}(X)^M$. То нам омогућава да добро уредимо скуп свих коначних низова $a_1, \ldots, a_m \in X \cap S(\mu)$ дате дужине m лексикографским поретком и да га на тај начин кодирамо неким ординалом δ. На тај начин је a кодиран системом

$$\langle m, n, \beta, \gamma, \delta, \varphi \rangle, \tag{6.14}$$

уређењем w и скупом $\mathbf{F}_1(a)$. Функција F_2 придружује елементу a ординал који кодира систем (6.14). Остатак тврђења следи из чињенице да се сваки коначан скуп може добро уредити већ у ZF. $\Box$

Услови претходне теореме су испуњени ако је $X = \emptyset$ или $X = M$ и ако је I скуп скупова ординала (што је испуњено ако је I ординал). Избор $X = M$ је могућ на основу теореме 98.

6.4 Халперн-Лојхлијева теорема

6.4.1 Припремни ставови за доказ Халперн-Лојхлијеве теореме

Теорема 109 *Нека је Y било који скуп и нека су $X_1, \ldots, X_d$ скупови чији су кардинални бројеви непребројиви регуларни кардинали тако да важи $|X_1| > |Y|$ и $|X_{i+1}| > 2^{|X_i|}$ за све $i < d$. Тада, за ма које $f : X_1 \times \cdots \times X_d \longrightarrow Y$ постоје скупови $X_1' \subseteq X_1, \ldots, X_d' \subseteq X_d$ такви да важи $|X_1'| = |X_1|, \ldots, |X_d'| \subseteq |X_d|$ и да је функција f константна на скупу $X_1' \times \cdots \times X_d'$.*

Уколико су скупови $X_1, \ldots, X_d$ стационарни подскупови својих кардинала, онда се и скупови $X_1', \ldots, X_d'$ могу одабрати да буду стационарни.

Доказ: Доказ изводимо индукцијом по d. Притом ћемо претпоставити да су скупови $X_1, \ldots, X_d$ стационарни подскупови својих кардинала. За $d = 1$ тврђење важи на теореме 49. Претпоставимо да је $d \geqslant 2$ и докажимо индуктивни корак. Нека је $f : X_1 \times \cdots \times X_d \longrightarrow Y$ произвољно. Дефинишимо функцију G на следећи начин:

$$G : X_d \longrightarrow Y^{X_1 \times \cdots \times X_{d-1}}, \quad (\forall a_1 \in X_1, \ldots, a_d \in X_d) G(a_d)(a_1, \ldots, a_{d-1}) = f(a_1, \ldots, a_d).$$

Из претпоставки о кардиналностима следи да важи

$$|Y^{X_1 \times \cdots \times X_{d-1}}| = |Y|^{|X_1 \times \cdots \times X_{d-1}|} \leqslant (2^{|Y|})^{\max\{|X_1|, \ldots, |X_{d-1}|\}} \leqslant (2^{|Y|})^{|X_{d-1}|} = 2^{|X_{d-1}|} < |X_d|,$$

па на теореме 49 постоји стационаран скуп $X_d' \subseteq X_d$ такав је G константно на скупу X_d'.

Нека је g функција таква да за све $a \in X_d'$ важи $G(a) = g$. По индуктивној претпоставци постоје $X_1' \subseteq X_1, \ldots, X_{d-1}' \subseteq X_{d-1}$ такви да важи $|X_1'| = |X_1|, \ldots, |X_{d-1}'| = |X_{d-1}|$ и тако да је притом функција g на скупу $X_1' \times \cdots \times X_{d-1}'$ константно једнака некој вредности b. За ма које $a_1 \in X_1', \ldots, a_d \in X_d'$ важи

$$f(a_1, \ldots, a_d) = G(a_d)(a_1, \ldots, a_{d-1}) = g(a_1, \ldots, a_{d-1}) = b.$$

$\Box$

Теорема 110 *Претпоставимо да су κ и λ бесконачни кардинали за које важи $\kappa^{<\lambda} = \kappa \geqslant \lambda$. Нека су X и Y ма који скупови такви да важи $|X|, |Y| \leqslant \kappa$. Са P означимо скуп свих парцијалних функција из X у Y кардиналности мање од λ. Нека су $X_1, \ldots, X_d$ произвољни скупови чији су кардинални бројеви непребројиви регуларни кардинали такви да важи*

1) $|X_1| = \kappa^+$,

2) *за све $i < d$ важи $|X_{i+1}| = \mu_i^+$ за неко $\mu_i \geqslant 2^{|X_i|}$ такво да је $\mu_i^{|X_i|} = \mu_i$.*

Тада за свако $p : X_1 \times \cdots \times X_d \longrightarrow P$ *постоје скупови* $X'_1 \subseteq X_1, \ldots, X'_d \subseteq X_d$ *такви да важи* $|X'_1| = |X_1|, \ldots, |X'_d| = |X_d|$ *и тако да је притом скуп* $\bigcup p[X'_1 \times \cdots \times X'_d]$ *функција.*

Уколико су скупови $X_1, \ldots, X_d$ *стационарни подскупови својих кардинала, онда се и скупови* $X'_1, \ldots, X'_d$ *могу одабрати да буду стационарни.*

Доказ: Претпоставићемо да су скупови $X_1, \ldots, X_d$ стационарни подскупови својих кардинала. Доказ изводимо индукцијом по d. За $d = 1$, тврђење следи из теореме 54. Претпоставимо да је $d \geqslant 2$.

Без умањења општости можемо претпоставити да је скуп X бесконачан. Скуп свих подскупова скупа X кардиналности мање од λ нема више од $\kappa^{<\lambda} = \kappa$. Пресликавања било ког од тих подскупова у скуп Y нема више од $\kappa^{<\lambda} = \kappa$. Према томе, важи $|P| = |X|$.

Дефинишимо $F : X_d \longrightarrow P^{X_1 \times \cdots \times X_{d-1}}$ на следећи начин:

$$F(x_d)(x_1, \ldots, x_{d-1}) = p(x_1, \ldots, x_d).$$

На основу индуктивне претпоставке, сваком $x \in X_d$ можемо придружити стационарне скупове $Z_i(x) \subseteq X_i$ за $i < d$ такве да за све $i < d$ скуп $\bigcup F(x)[Z_1(x) \times \cdots \times Z_{d-1}(x)]$ функција, коју ћемо обележавати са $q(x)$. Притом, за свако $x_1, \ldots, x_d$ важи $|\mathrm{dom}(p(x_1, \ldots, x_d))| < \lambda$, па је

$$\begin{aligned} |\mathrm{dom}(q(x))| &= |\mathrm{dom}(\bigcup(F(x)[Z_1(x) \times \cdots \times Z_{d-1}(x)]))| \leqslant \lambda |Z_1(x)| \cdots |Z_{d-1}(x)| \\ &= \lambda |X_1| \cdots |X_{d-1}| \leqslant |X_{d-1}|^d = |X_{d-1}|. \end{aligned}$$

Према теореми 54, постоји стационаран скуп $Z_d \subseteq X_d$ такав да је скуп $f = \bigcup_{x \in Z_d} q(x)$ функција. Дакле, важи

$$\begin{aligned} (\forall x_d \in Z_d)(\forall x_1 \in Z_1(x_d), \ldots, x_{d-1} \in Z_{d-1}(x_d)) p(x_1, \ldots, x_d) &= F(x_d)(x_1, \ldots, x_{d-1}) \\ &\subseteq q(x_d) \subseteq f. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Дефинишимо функцију G на следећи начин:

$$\mathrm{dom}(G) = Z_d, \quad G(x) = \langle Z_1(x), \ldots, Z_{d-1}(x) \rangle.$$

Према теореми 109, постоји стационаран скуп $X'_d \subseteq Z_d$ на коме је G константна функција. Нека су $X'_1, \ldots, X'_{d-1}$ такви да важи $G(x) = \langle X'_1, \ldots, X'_{d-1} \rangle$ за све $x \in X'_d$.

Нека је $a \in X'_d$ произвољно. За ма које $i < d$ важи $|X'_i| = |Z_i(a)| = |X_i|$. Такође, за ма које $x_1 \in X'_1, \ldots, x_d \in X'_d$ важи

$$\langle x_1, \ldots, x_{d-1} \rangle \in X'_1 \times \cdots \times X'_{d-1} = Z_1(x_d) \times \cdots \times Z_{d-1}(x_d),$$

па према (6.15) важи

$$(\forall x_1 \in X'_1, \ldots, x_d \in X'_d) p(x_1, \ldots, x_d) \subseteq f.$$

□

6.4.2 Варијанте Халперн-Лојхлијеве теореме

Халперн-Лојхлијева теорема има више еквивалентних формулација. Овде наводимо неке од њих. Пре тога, неопходно је да уведемо неке појмове.

Под дрветом ћемо подразумевати парцијално уређење са најмањим елементом, при чему за свако a из домена тог уређења важи да је скуп свих елемената мањих од a добро уређен.

Максималне ланце зовемо гранама. Овде ћемо разматрати дрвета код којих сваки чвор има барем једног, али коначно много непосредних наследника, и код којих сваки чвор има коначно много претходника. Грану b дрвета T зовемо <u>*изолованом*</u> ако на тој грани сваки чвор почев од неког па на даље има тачно једног непосредног наследника. Дрво називамо <u>*савршено*</u> ако нема изолованих грана.

Под висином чвора подразумеваћемо број елемената мањих од тог чвора. Под m-тим слојем дрвета T, у ознаци $T(m)$, подразумевамо скуп свих његових чворова на висини m.

Нека је $T_1, \ldots, T_d$ низ дрвета као уређених структура. Под њиховим производом подразумевамо скуп $\bigcup_{m=0}^{\infty}(T_1(m) \times \cdots \times T_d(m))$.

Нека је T дрво, $l, m, n \in \omega$ и $t \in T(l)$, при чему је $l \leqslant m \leqslant n$. За $D \subseteq T(n)$ такав да важи

$$(\forall u \in T(m))(t \leqslant u \Rightarrow (\exists v \in D) u \leqslant v)$$

кажемо да је (m, n)-густ изнад t у дрвету T.

Сваку грану g дрвета T ћемо кодирати једним пресликавањем $c_g : \omega \longrightarrow \omega$ дефинисаним на следећи начин: За произвољно $n \in \omega$ са $a(n)$ означимо чвор гране g на нивоу n у дрвету T. Нека је $c_g(n)$ број деце чвора $a(n)$ у дрвету T, која су у неком изабраном линеарном поретку скупа чворова дрвета T мања од чвора $a(n+1)$. Пресликавање $g \mapsto c_g$ је инјективно.

Чвору $v \in T(n)$ ћемо придружити функцију $c_g \restriction n$, где је g произвољна грана којој припада чвор v. То придруживање је такође инјективно. Надаље ћемо чворове и гране идентификовати са низовима који их кодирају.

Теорема 111 (*Халперн-Лојхлијева теорема*) *Нека су $T_1, \ldots, T_d$ ма која дрвета, T њихов производ и $f : T \longrightarrow c$, при чему су c и d природни бројеви већи од нуле. Тада постоје чворови $t_1, \ldots, t_d$ дрвета $T_1, \ldots, T_d$ на истој висини l, тако да за све $m \geqslant l$ постоји бесконачно много вредности $n \geqslant m$ таквих да постоје скупови $D_1 \subseteq T_1(n), \ldots, D_d \subseteq T_d(n)$ који су (m, n)-густи изнад $t_1, \ldots, t_d$ и тако да је функција f константна на скупу $D_1 \times \cdots \times D_d$.*

Доказ: Општи случај се своди на случај множења савршених дрвета. Наиме, ако дрво T_d има грану b такву да за неко n_0 сваки чвор гране b на висини већој од n_0 има само једног непосредног следбеника, онда можемо изабрати неке $v_1 \in T_1(n_0), \ldots, v_d \in T_d(n_0)$ тако да важи $v_d = b(n_0)$ и тврђење теореме разматрати на производу поддрвета изнад чворова $v_1, \ldots, v_d$. Димензија ће се смањити за један јер ће једно од дрвета бити линеарно уређење.

Тврђење доказујемо свођењем на противречност. Претпоставићемо исказ тврђења није тачан и извешћемо контрадикцију. На основу теореме рефлексије, постоји пребројив транзитиван модел M у коме тврђење не важи и који задовољава подесан коначан фрагмент теорије ZFC.

Нека су $\theta_1, \ldots, \theta_d$ кардинални бројеви дефинисани са $\theta_1 = \aleph_2$ и $\theta_{i+1} = (2^{\theta_i})^{++}$ за $i < d$. Форсинг ћемо радити над парцијалним уређењем P свих коначних функција p које сликају скуп

$$D = \{\langle i, \sigma, k\rangle \mid 1 \leqslant i \leqslant d,\ \sigma < \theta_i,\ k \in \omega\}$$

у скуп ω, таквих да важи

$$(\forall i \leqslant d, \sigma < \theta_i, k \in \omega)(\langle i, \sigma, k+1\rangle \in \mathrm{dom}(p) \Rightarrow \langle i, \sigma, k\rangle \in \mathrm{dom}(p))$$

$(\forall i \leqslant d, \sigma < \theta_i, k \in \omega)$ »пресликавање $L(i, \sigma, p)$ кодира пут до неког чвора дрвета T_i«,

где је

$$L(i, \sigma, p) : \{k \mid \langle i, \sigma, k\rangle \in \mathrm{dom}(p)\} \longrightarrow \omega,$$
$$(\forall k \in \mathrm{dom}(L(i, \sigma, p))) L(i, \sigma, p)(k) = p(i, \sigma, k).$$

Притом те функције уређујемо обрнутом инклузијом. За ма које $i \leqslant d$, $\sigma < \theta_i$ и $p \in \mathrm{dom}(P)$ нека је

$$c(i, \sigma, p) := \{\langle k, j\rangle \mid \langle i, \sigma, k\rangle \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(i, \sigma, k) = j\}.$$

Другим речима, $c(i,\sigma,p)$ је чвор дрвета T_i, који одговара услову p и вредности σ. Нека је

$$\dot{r}(i,\sigma) := \{\langle p, \langle k, p(i,\sigma,k)\rangle\check{}\,\rangle \mid i \leqslant d,\ \sigma < \theta_i,\ k \in \omega,\ \langle i,\sigma,k\rangle \in \mathrm{dom}(p)\}.$$

$$\dot{r}(i,\sigma,n) := \{\langle p, \langle k, p(i,\sigma,k)\rangle\check{}\,\rangle \mid i \leqslant d,\ \sigma < \theta_i,\ k < n,\ \langle i,\sigma,n\rangle \in \mathrm{dom}(p)\}.$$

Другим речима, $\dot{r}(i,\sigma)$ је име за грану дрвета T_i која одговара вредности σ, док је $\dot{r}(i,\sigma,n)$ име за чвор на тој грани на висини n. Нека је $\dot{F}$ име за које важи

$$M \models \Vdash_P \text{»}\dot{F} \text{ је неглавни ултрафилтер Булове алгебре } \mathcal{P}(\check{\omega})\text{«}.$$

Надаље ћемо $\sigma_1,\ldots,\sigma_d$ краће означавати са $\bar{\sigma}$. Дефинишимо функције $e,p,s,U,g \in N$ чији је домен $\theta_1 \times \cdots \times \theta_d$ на следећи начин: Нека је

$$\dot{U}(\bar{\sigma},k) := \{\langle q,\check{n}\rangle \mid M \models q \Vdash_P \check{f}(\dot{r}(1,\sigma_1,n),\ldots,\dot{r}(d,\sigma_d,n)) = \check{k}\}.$$

Другим речима, $\dot{U}(\bar{\sigma},k)$ је име за скуп свих $n \in \omega$, таквих да функција f слика у број k систем чворова на висини n, који одговарају гранама са именима $\dot{r}(1,\sigma_1),\ldots,\dot{r}(d,\sigma_d)$. Нека је

$$\dot{e}(\bar{\sigma}) := \{\langle q,\check{k}\rangle \mid M \models q \Vdash_P \dot{U}(\bar{\sigma},k) \in \dot{F}\}.$$

Другим речима, $\dot{e}(\bar{\sigma})$ је име за јединствену боју k такву да скуп са именом $\dot{U}(\bar{\sigma},k)$ припада ултрафилтеру са именом $\dot{F}$. Прецизније, важи

$$(\forall k \in c, q \in \mathrm{dom}(P))((M \models q \Vdash_P \dot{U}(\bar{\sigma},k) \in \dot{F}) \Leftrightarrow (M \models q \Vdash_P \dot{e}(\bar{\sigma}) = \check{k})).$$

Нека је

$$\dot{U}(\bar{\sigma}) := \{\langle q,\check{n}\rangle \mid M \models q \Vdash_P \check{f}(\dot{r}(1,\sigma_1,n),\ldots,\dot{r}(d,\sigma_d,n)) = \dot{e}(\bar{\sigma})\}.$$

Другим речима, $\dot{U}(\bar{\sigma})$ је име за скуп са именом $\dot{U}(\bar{\sigma},k)$ за ону вредност k за коју припада ултрафилтеру са именом $\dot{F}$. Прецизније, важи

$$M \models \Vdash_P \dot{U}(\bar{\sigma}) \in \dot{F},$$

$$(\forall k \in c, q \in \mathrm{dom}(P))((M \models q \Vdash_P \dot{U}(\bar{\sigma},k) \in \dot{F}) \Leftrightarrow (M \models q \Vdash \dot{U}(\bar{\sigma},k) = \dot{U}(\bar{\sigma}))).$$

Пошто $M \models \Vdash_P \dot{e}(\bar{\sigma}) \subseteq \check{c}$, скуп свих услова који одређују вредност $\dot{e}(\bar{\sigma})$ је густ, постоји услов $p_0(\bar{\sigma})$ такав да важи

$$(\exists k \in c) M \models p_0(\bar{\sigma}) \Vdash_P \dot{e}(\bar{\sigma}) = \check{k}.$$

Нека је $a(\bar{\sigma})$ јединствени елемент скупа ω такав да важи

$$M \models p_0(\bar{\sigma}) \Vdash_P \dot{e}(\bar{\sigma}) = (a(\bar{\sigma}))\check{}.$$

Услов $p_0(\bar{\sigma})$ можемо допунити до неког услова $p(\bar{\sigma})$, тако да важи

$$(\exists h \geqslant l_0)(\forall i \leqslant d)|c(i,\sigma_i,p(\bar{\sigma}))| = h.$$

Пошто је услов $p(\bar{\sigma})$ јачи од услова $p_0(\bar{\sigma})$, важи

$$M \models p(\bar{\sigma}) \Vdash_P \dot{e}(\bar{\sigma}) = (a(\bar{\sigma}))\check{}.$$

Нека је $s(\bar{\sigma})$ јединствена вредност за коју важи $|c(i,\sigma_i,p(\bar{\sigma}))| = s(\bar{\sigma})$ за све i. Коначно, нека је

$$g(\bar{\sigma}) := \langle a(\bar{\sigma}), s(\bar{\sigma}), c(1,\sigma_1,p(\bar{\sigma})),\ldots,c(d,\sigma_d,p(\bar{\sigma}))\rangle.$$

Према теоремама 109 и 110, постоје скупови $H_1 \subseteq \theta_1, \dots, H_d \subseteq \theta_d$ такви да за свако i важи $|H_i| = \theta_i$, да је на скупу $H_1 \times \cdots \times H_d$ функција g константно једнака неком $\langle k, l, t_1, \dots, t_d \rangle$ и да је скуп

$$\bigcup p[H_1 \times \cdots \times H_d]$$

функција. Нека је $m \geqslant l$ дато. За свако i, нека је C_i скуп свих елемената скупа $T_i(m)$, који су изнад t_i у дрвету T_i.

За свако i изаберимо подскуп A_i скупа H_i такав да важи $|A_i| = |C_i|$, као и неку бијекцију φ_i скупа A_i на скуп C_i. Наравно, скупови $C_1, \dots, C_d$ су коначни као подскупови коначних нивоа дрвета, па су самим тим и скупови $A_1, \dots, A_d$ коначни. Према томе, скуп $A_1 \times \cdots \times A_d$ је коначан. Због тога и зато што је $A_i \subseteq H_i$ за све i, можемо дефинисати услов

$$p' = \bigcup \{p(\bar{\sigma}) \mid \sigma_1 \in A_1, \dots, \sigma_d \in A_d\}.$$

Изаберимо произвољне $\sigma_1 \in A_1, \dots, \sigma_d \in A_d$. На основу избора услова p' и константности функције g на скупу $A_1 \times \cdots \times A_d$, за свако i важи $c(i, \sigma_i, p') = c(i, \sigma_i, p(\bar{\sigma})) = t_i$, а самим тим и

$$|c(i, \sigma_i, p')| = |c(i, \sigma_i, p(\bar{\sigma}))| = s(\bar{\sigma}) = l,$$

односно $t_i \in T_i(l)$. Такође, услов p' можемо допунити до услова p'' таквог да за свако i и за свако $\sigma_1 \in A_1, \dots, \sigma_d \in A_d$ важи

$$c(i, \sigma_i, p'') = \varphi_i(\sigma_i),$$

а самим тим и

$$M \models p'' \Vdash_P \dot{r}(i, \sigma_i, m) = (\varphi_i(\sigma_i))\check{}.$$

Из $p'' \leqslant p' \leqslant p_0(\bar{\sigma})$ следи да за све $\sigma_1 \in A_1, \dots, \sigma_d \in A_d$ важи

$$M \models p'' \Vdash_P \dot{e}(\bar{\sigma}) = \check{k}, \quad M \models p'' \Vdash_P \dot{U}(\bar{\sigma}, k) \in \dot{F}.$$

Изаберимо било који P-генерички филтер G над M који садржи услов p''. За $F := \dot{F}_G$ важи

$$M[G] \models \text{»}F \text{ је неглавни ултрафилтер Булове алгебре } \mathcal{P}(\omega)\text{«},$$

одакле следи да је скуп F неглавни ултрафилтер Булове алгебре $\mathcal{P}(\omega) \cap M[G]$, а самим тим и неглавни филтер Булове алгебре $\mathcal{P}(\omega)$. Такође, за скуп

$$U := \bigcap \{\mathrm{int}_G(\dot{U}(\bar{\sigma}, k)) \mid \sigma_1 \in A_1, \dots, \sigma_d \in A_d\}$$

важи $U \in F$, одакле следи да је скуп U бесконачан и да самим тим има бесконачно много бројева n таквих да је $n \geqslant m$ и $n \in U$. Изаберимо било које такво n. За све $\sigma_1 \in A_1, \dots, \sigma_d \in A_d$ и све i важи

$$M[G] \models \mathrm{int}_G(\dot{r}(i, \sigma_i, m)) = \varphi_i(\sigma_i),$$

односно

$$\mathrm{int}_G(\dot{r}(i, \sigma_i, m)) = \varphi_i(\sigma_i). \tag{6.16}$$

Дефинишимо скупове

$$D_i := \{\mathrm{int}_G(\dot{r}(i, \sigma, n)) \mid \sigma \in A_i\}, \quad i \in \{1, \dots, d\}.$$

Докажимо да за свако i за скуп D_i важи да је (m, n)-густ у дрвету T_i изнад t_i. Изаберимо било које $x \in T_i(m)$, које је у дрвету T_i изнад чвора t_i. То значи да $x \in C_i$, односно да можемо одабрати неко $\sigma \in A_i$ тако да важи $x \in \varphi_i(\sigma)$, па је

$$x = \varphi_i(\sigma) = \mathrm{int}_G(\dot{r}(i, \sigma, m)) \subseteq \mathrm{int}_G(\dot{r}(i, \sigma, n)) \in D_i.$$

Докажимо још да је функција f на скупу $D_1 \times \cdots \times D_d$ константно једнака k. Изаберимо произвољне $w_1 \in D_1, \ldots, w_d \in D_d$ и докажимо да је $f(w_1, \ldots, w_d) = k$. На основу начина избора скупова $D_1, \ldots, D_d$ постоје $\sigma_1 \in A_1, \ldots, \sigma_d \in A_d$ такви да важи $w_j = \mathrm{int}_G(\dot{r}(j, \sigma_j, n))$ за све j.

Према избору скупа U и броја n, важи

$$n \in \mathrm{int}_G(\dot{U}(\bar{\sigma}, k)).$$

Према томе и на основу избора имена $\dot{U}(\bar{\sigma}, k)$, постоји неко $q \in G$такво да важи

$$M \models q \Vdash_P \check{f}(\dot{r}(1, \sigma_1, n), \ldots, \dot{r}(d, \sigma_d, n)) = \check{k},$$

а самим тим и

$$M[G] \models f(\mathrm{int}_G(\dot{r}(1, \sigma_1, n)), \ldots, \mathrm{int}_H(\dot{r}(d, \sigma_d, n))) = k,$$

односно

$$f(\mathrm{int}_G(\dot{r}(1, \sigma_1, n)), \ldots, \mathrm{int}_G(\dot{r}(d, \sigma_d, n))) = k,$$

а одатле и на основу начина избора $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ следи $f(w_1, \ldots, w_d) = k$. $\Box$

Изложени доказ Халперн-Лојхлијеве теореме припада Харингтону. Халперн-Лојхлијеву теорему смо изложили у општијем облику, који не повећава сложеност доказа, али је таква формулација ипак непотребна, јер не доноси ништа више од следеће, једноставније формулације.

Теорема 112 *Нека су $c, d \geqslant 1$ и $T_1, \ldots, T_d$ дрвета. За ма које бојење производа T тих девета c боја, постоје $m, n, t_1, \ldots, t_d$ и $D_1, \ldots, D_d$ такви да је*

$$m < n, \quad (\forall i)(t_i \in T_i(m) \wedge D_i \subseteq T_i(n)),$$

$$(\forall i) D_i \textit{ је } (m+1, n)\textit{-густ изнад } t_i \textit{ у дрвету } T_i,$$

$$\textit{скуп } D_1 \times \cdots \times D_d \textit{ је обојен једном бојом.}$$

Доказ: Следи из теореме 111 и $m < m + 1 \leqslant n$. $\Box$

Ипак, ми ћемо овде користити другачију варијанту Халперн-Лојхлијеве теореме, коју ћемо извести из теореме 112. Наиме, требаће нам слична формулација по којој за дата дрвета и дати број боја постоји ниво до кога се тражено n мора појавити, а који не зависи од избора бојења.

Теорема 113 *Нека су $c, d \geqslant 1$ и $T_1, \ldots, T_d$ дрвета. Тада постоји n' такво да за ма које бојење производа T тих дрвета до слоја n' у c боја, постоје $m, n, t_1, \ldots, t_d$ и $D_1, \ldots, D_d$ такви да је*

$$m < n \leqslant n', \quad (\forall i)(t_i \in T_i(m) \wedge D_i \subseteq T_i(n)),$$

$$(\forall i) D_i \textit{ је } (m+1, n)\textit{-густ изнад } t_i \textit{ у дрвету } T_i,$$

$$\textit{скуп } D_1 \times \cdots \times D_d \textit{ је обојен једном бојом.}$$

Доказ: Нека је T производ дрвета $T_1, \ldots, T_d$. Претпоставићемо да су боје бројеви мањи од c. Са $p(a_1, \ldots, a_d, i)$ ћемо обележавати исказ да је чвор $\langle a_1, \ldots, a_d \rangle$ производа T обојен бојом i, при чему је $i < c$. Исказна теорија која се састоји од аксиома

$$\bigvee_{i<c} p(a_1, \ldots, a_d, i) \wedge \neg \bigvee_{i<j<c} (p(a_1, \ldots, a_d, i) \wedge p(a_1, \ldots, a_d, j)) \tag{6.17}$$

по свим могућим елементима $\langle a_1, \ldots, a_d \rangle$ производа T тврди да је сваки чвор обојен тачно једном од тих боја. За сваки могући избор $m, n, t_1, \ldots, t_d, D_1, \ldots, D_d$ таквих да важи

$$\begin{gathered} m < n, \\ t_1 \in T_i(m), \ldots, t_d \in T_i(m), \\ D_1 \subseteq T_1(n), \ldots, D_d \subseteq T_d(n), \\ (\forall i)(D_i \text{ је } (m+1, n)\text{-густ изнад } t_i) \end{gathered} \tag{6.18}$$

додајмо аксиому

$$a(D_1, \ldots, D_d) := \bigvee (p(u_1, \ldots, u_d, i) \wedge p(v_1, \ldots, v_d, j)) \tag{6.19}$$

где се дисјункција узима по свим међусобно различитим торкама $\langle u_1, \ldots, u_d \rangle, \langle v_1, \ldots, v_d \rangle$ из скупа $D_1 \times \cdots \times D_d$ и свим могућим i, j таквим да је $i < j < c$.

Та аксиома значи да скуп $D_1 \times \cdots \times D_d$ није обојен једном бојом. Из теореме 112 следи да је ова теорија незадовољива, па по теореми компактности исказног рачуна има коначан подскуп A, који је такође противречан. Нека је A' скуп оних аксиома из скупа A, које нису облика (6.17).

Свакој од аксиома $a \in A'$ придружимо број $n_a \in \omega$ такав да се аксиома a односи на неке скупове $D_1, \ldots, D_d$ на висини n_a. Нека је $n' = \max\{n_a \mid a \in A'\}$.

Изаберимо било које бојење f дрвета до нивоа n' у c боја и изаберимо валуацију v такву да за ма које $\langle a_1, \ldots, a_d \rangle \in T$ и $i < c$ важи

$$v(p(a_1, \ldots, a_d, i)) = 1 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(a_1, \ldots, a_d) = i.$$

Пошто је теорија A противречна а све формуле из скупа $A \setminus A'$ су задовољене при валуацији v, постоји нека аксиома $a \in A'$ таква да $v \not\models a$. На основу избора броја n' важи $n_a \leqslant n'$. Притом, постоји избор $m, n, t_1, \ldots, t_d, D_1, \ldots, D_d$ таквих да важе услови (6.18) са којима се добија управо аксиома a. Притом важи $n = n_a$, док $v \not\models a$ значи управо да је скуп $D_1 \times \cdots \times D_d$ обојен једном бојом. $\Box$

6.5 BPI у моделу N

Теорема 114 *Претпоставимо да је $X \subseteq M$, да је X дефинабилна класа у $M[G]$ преко параметара из скупа $X \cup \{C\} \cup \mathbf{ORD}^M$, као и да за свако $\alpha \in \mathbf{ORD}^M$ постоји добро уређење скупа $X \cap V_\alpha^N$, које припада моделу N. Тада у моделу N свака Булова алгебра има прост идеал.*

Доказ: Нека је дата Булова алгебра $B \in N$ и нека је $\lambda \in N$ довољно велики ординал да V_λ^N садржи све скупове са којима ћемо радити. Нека је $C' = \mathbf{F}_1(B)$.

Обзиром да је скуп C' коначан, нека су $r_1, \ldots, r_n$ сви његови међусобно различити елементи. Надаље ћемо $r_1, \ldots, r_n$ краће означавати са $\bar{r}$, а $\langle r_1, \ldots, r_n \rangle$ са $\vec{r}$ и слично за остале ознаке. Са $\mathcal{I}$ означимо скуп свих правих идеала I Булове алгебре B, таквих да је $I \in N$ и $F_1(I) \subseteq C'$. Према теореми 104 важи $\mathbf{F}_1(\mathcal{I}) \subseteq C'$.

Према теореми 108 постоји добро уређење скупа $\mathcal{I}$, које припада моделу N и тако да је у моделу $M[G]$ дефинабилно са параметрима из скупа $X \cup C' \cup \{C\} \cup \mathbf{ORD}^M$. Према томе, за $\kappa = |\mathcal{I}|^N$ можемо дефинисати фамилију $(I_\alpha)_{\alpha < (\kappa^+)^N}$ елемената скупа $\mathcal{I} \cup \{\emptyset\}$ на следећи начин:

$$I_\alpha := \begin{cases} \min\{I \in \mathcal{I} \,:\, (\forall \beta \in \alpha) I_\beta \subsetneq I\}, & \text{ако такав постоји,} \\ \emptyset & \text{у супротном.} \end{cases}$$

Очигледно важи $(I_\alpha)_{\alpha<(\kappa^+)^N} \in N$. Ако се у овом низу не појављује $\emptyset$, онда је то растући низ елемената из $\mathcal{I}$, а самим тим и инјективно пресликавање, што је немогуће обзиром на кардиналост скупа $\mathcal{I}$ и дужину низа. Према томе, у овом низу се појављује $\emptyset$.

Нека је δ најмањи ординал такав да је $I_\delta = \emptyset$. Ординал δ не може бити гранични јер би у супротном за свако $\beta < \delta$ важило да је $\beta + 1 < \delta$ и да је самим тим $I_\beta \subsetneq I_{\beta+1} \in \mathcal{I}$, односно да је $\bigcup_{\beta<\delta} I_\beta$ прави надидеал идеала I_β за свако $\beta < \delta$, што је у супротности са $I_\delta = \emptyset$.

Нека је β ординал за који је $\delta = \beta+1$. Пошто је I_β надскуп сваког претходног члана низа, идеал који је прави надскуп идеала I_β је такође прави надскуп свих претходних чланова низа. То заједно са $I_{\beta+1} = I_\delta = \emptyset$ значи да таквог идеала нема у скупу $\mathcal{I}$. Према томе, $I = I_\beta$ је максималан елемент скупа $\mathcal{I}$.

Претпоставимо да идеал I није прост и изведимо противречност. Тада постоји неко $u \in \mathrm{dom}(B)$ такво да $u, -u \notin I$. Пошто $u \in \mathrm{dom}(B) \in N$, можемо дефинисати C'' као $C'' := \mathbf{F}_1(u) \setminus C'$.

Идеал J генерисан са $I \cup \{u\}$ је прави идеал и прави је надскуп идеала I. Из својства идеала I да је максималан у скупу $\mathcal{I}$ закључујемо да је $C'' \neq \emptyset$.

Нека су $x_1, \ldots, x_d$ сви међусобно различити елементи скупа C''. Изаберимо $a_1, \ldots, a_m$ из скупа $X \cup \mathbf{ORD}^M$ и формулу $\theta(x, y_1, \ldots, y_d, z_1, \ldots, z_k, v, w_1, \ldots, w_m)$ тако да важи

$$M[G] \models (\forall x)(x = u \Leftrightarrow \theta(x, x_1, \ldots, x_d, \bar{r}, C, \bar{a})),$$

а самим тим и

$$M[G] \models (\exists_1 x)\theta(x, x_1, \ldots, x_d, \bar{r}, C, \bar{a}),$$

и

$$M[G] \models (\forall x)(\theta(x, x_1, \ldots, x_d, \bar{r}, C, \bar{a}) \Rightarrow x \notin I \wedge -x \notin I).$$

Према леми о непрекидности, постоје неки $s_1, \ldots, s_d \in Q$ такви да су $[s_1], \ldots, [s_d]$ околине тачака $x_1, \ldots, x_d$ тим редом, које су узајамно дисјунктне и такве да за ма које $\vec{z} \in [s_1] \times \cdots \times [s_d]$ важи

$$M[G] \models (\exists_1 x)\theta(x, \bar{z}, \bar{r}, C, \bar{a})$$

и

$$M[G] \models (\forall x)(\theta(x, \bar{z}, \bar{r}, C, \bar{a}) \Rightarrow x \notin I \wedge -x \notin I).$$

Последња формула важи зато што не варирамо ниједан од параметара преко којих је I дефинисан, а то су параметри $\bar{r}$, C и елементи класе $X \cup \mathbf{ORD}^M$. Другим речима, постоји једнозначно одређена функција $h : [s_1] \times \cdots \times [s_d] \longrightarrow \mathrm{dom}(B)$ таква да за свако $\vec{z} \in \mathrm{dom}(h)$ важи

$$M[G] \models \theta(h(\bar{z}), \bar{z}, \bar{r}, C, \bar{a}),$$

а самим тим и

$$h(\bar{z}) \notin I, \quad -h(\bar{z}) \notin I. \tag{6.20}$$

Притом је функција h дефинабилна у $M[G]$ са параметрима из скупа $X \cup C' \cup \{C\} \cup ORD^M$. Дефинишимо дрвета $T_1, \ldots, T_d$ тако да важи следеће:

1) Чворови дрвета су елементи скупа Q.

2) Чвор t' дрвета T_i је после чвора t истог дрвета акко је $t' < t$.

3) За свако m, за све $t_1 \in T_1(m), \ldots, t_d \in T_d(m)$ и за ма које коначне скупове

$$C_1 \subseteq T_1(m+1), \ldots, C_d \subseteq T_d(m+1)$$

такве да је за сваки непосредни наследник t елемента t_i у дрвету T_i испуњено $|C_i \cap [t]| = 1$, важи

$$\bigwedge \{h(\bar{z}) \mid \vec{z} \in C_1 \times \cdots \times C_d\} \in I, \quad \bigwedge \{-h(\bar{z}) \mid \vec{z} \in C_1 \times \cdots \times C_d\} \in I.$$

Корене дрвета $T_1, \dots, T_d$ дефинишемо као $s_1, \dots, s_d$ тим редом. Наведени услови су свакако испуњени до тог нивоа.

Претпоставимо да су дрвета $T_1, \dots, T_d$ дефинисана до нивоа m и да су наведени услови испуњени до тог нивоа. Дефинишимо ниво $m+1$.

Нека је $\vec{t}$ ма који елемент скупа $T_1(m) \times \cdots \times T_d(m)$. Из $\bigwedge_{i=1}^d t_i \leqslant s_i$ следи $\bigwedge_{i=1}^d [t_i] \subseteq [s_i]$, а самим тим и (6.20) за све $\vec{z} \in [t_1] \times \cdots \times [t_d]$. Одатле следи да су идеали генерисани скуповима

$$I \cup \{h(\bar{z}) \,|\, \vec{z} \in [t_1] \times \cdots \times [t_d]\} \text{ и } I \cup \{-h(\bar{z}) \,|\, \vec{z} \in [t_1] \times \cdots \times [t_d]\}$$

прави надскупови идеала I, па пошто су идеали генерисани тим скуповима дефинабилни у $M[G]$ преко параметара из скупа $X \cup C' \cup \{C\} \cup \mathbf{ORD}^M$, ти идеали су неправи. Према томе, постоје коначни скупови $H^1_{\vec{t}}, H^2_{\vec{t}} \subseteq [t_1] \times \cdots \times [t_d]$ такви да важи

$$\bigwedge \{h(\bar{z}) \,|\, \vec{z} \in H^1_{\vec{t}}\} \in I, \quad \bigwedge \{-h(\bar{z}) \,|\, \vec{z} \in H^2_{\vec{t}}\} \in I.$$

Нека је H унија свих скупова облика $H^1_{\vec{t}}$ и $H^2_{\vec{t}}$ за све $\vec{t} \in T_1(m) \times \cdots \times T_d(m)$. Скуп H коначан као коначна унија коначних скупова. Притом важи $H \subseteq [t_1] \times \cdots \times [t_d]$, као и

$$\bigwedge \{h(\bar{z}) \,|\, \vec{z} \in H\} \in I, \quad \bigwedge \{-h(\bar{z}) \,|\, \vec{z} \in H\} \in I.$$

Сваком чвору t дрвета T_i на висини m придружимо скуп

$$K_i^t := \{r \in [t] \,|\, (\exists \vec{z} \in H) r = z_i\}.$$

Тада важи $H \subseteq K_1^{t_1} \times \cdots \times K_d^{t_d}$, а самим тим и

$$\bigwedge \{h(\bar{z}) \,|\, \vec{z} \in K_1^{t_1} \times \cdots \times K_i^{t_d}\} \in I, \quad \bigwedge \{-h(\bar{z}) \,|\, \vec{z} \in K_1^{t_1} \times \cdots \times K_i^{t_d}\} \in I.$$

Нека су $i \in \{1, \dots, d\}$ и $t \in T_i(m)$ произвољни. Пошто је $K_i^t \subseteq [t]$, сваком $r \in K_i^t$ можемо придружити неко $w_i^{tr} \in \mathrm{dom}(Q)$ тако да важи $w_i^{tr} < t$ и да околине $[w_i^{tr_1}]$ и $[w_i^{tr_2}]$ буду дисјунктне за ма које различите елементе r_1 и r_2 скупа K_i^t. Скуп непосредних наследника елемента $t \in T_i(m)$ у дрвету T_i ће бити $\{w_i^{tr} \,|\, r \in K_i^t\}$.

Према леми о непрекидности, елементи w_i^{tr} су могли бити одабрани тако да важи и услов 3. Нека је n' као из теореме 113 за бојење производа дрвета $T_1, \dots, T_d$ у две боје. Нека је $W \in M[G]$ изборна функција скупа свих околина одређених чворовима дрвета $T_1, \dots, T_d$ до нивоа n'. Нека је

$$E := \{\langle W([t_1]), \dots, W([t_d])\rangle \,|\, \vec{t} \in \bigcup_{l \leqslant n'} T_1(l) \times \cdots \times T_d(l)\}.$$

Изаберимо произвољан $E' \subseteq E$. Дефинишимо скупове

$$Q_1 := \{\vec{t} \in \bigcup_{l \leqslant n'} (T_1(l) \times \cdots \times T_d(l)) \,|\, \langle W([t_1]), \dots, W([t_d])\rangle \in E'\},$$

$$Q_2 := \left(\bigcup_{l \leqslant n'} (T_1(l) \times \cdots \times T_d(l)) \right) \setminus Q_1.$$

Према теореми 113, постоје $m, n \in \omega$, затим $t_1 \in T_1(m), \dots, t_d \in T_d(m)$, као и скупови

$$D_1 \subseteq T_1(n), \dots, D_d \subseteq T_d(n)$$

такви да је $m < n \leqslant n'$, да за све i важи да је D_i један $(m+1, n)$ густ скуп изнад t_i и да је скуп $D = D_1 \times \cdots \times D_d$ подскуп једног од скупова Q_1 и Q_2.

За свако $i \in \{1, \ldots, d\}$ нека су $s_i^1, \ldots, s_i^{k_i}$ сви међусобно различити непосредни наследници чвора t_i у дрвету T_i. За свако $i \in \{1, \ldots, d\}$ и $j \in \{1, \ldots, k_i\}$ нека је t_i^j неки од чворова из скупа D_i који је изнад s_i^j у дрвету T_i. За свако $i \in \{1, \ldots, d\}$ нека је

$$C_i := \{W([t_i^j]) \mid 1 \leqslant j \leqslant k_i\}.$$

Пошто је $W([t_i^j])$ елемент околине која је подоколина околине $[s_i^j]$, важи $W([t_i^j]) \in [s_i^j]$. Према томе, и према конструкцији дрвета важи

$$\bigwedge \{h(\bar{z}) \mid \vec{z} \in C_1 \times \cdots \times C_d\} \in I, \quad \bigwedge \{-h(\bar{z}) \mid \vec{z} \in C_1 \times \cdots \times C_d\} \in I.$$

Ако је $D \subseteq Q_1$ онда важи $C_1 \times \cdots \times C_d \subseteq E'$, а самим тим и

$$\bigwedge_{\vec{z} \in E'} h(\bar{z}) \in I.$$

У случају да је $D \subseteq Q_2$, онда важи $C_1 \times \cdots \times C_d \subseteq E \setminus E'$, а самим тим и

$$\bigwedge_{\vec{z} \in E \setminus E'} -h(\bar{z}) \in I.$$

У оба случаја је

$$\left(\bigwedge_{\vec{z} \in E'} h(\bar{z}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{\vec{z} \in E \setminus E'} -h(\bar{z}) \right) \in I.$$

Сада коришћењем закона дистрибутивности у Буловој алгебри B закључујемо да је

$$1 = \bigwedge_{\vec{z} \in E} (h(\bar{z}) \vee -h(\bar{z})) = \bigvee_{E' \subseteq E} \left(\left(\bigwedge_{\vec{z} \in E'} h(\bar{z}) \right) \wedge \left(\bigwedge_{\vec{z} \in E \setminus E'} -h(\bar{z}) \right) \right) \in I,$$

што је контрадикција са условом да је идеал I прави. $\square$

Глава 7

Пољски и савршени простори

7.1 Однос пољских и савршених простора

Под *пољским простором* подразумевамо комплетан сепарабилан метрички простор. *Савршен простор* дефинишемо као пољски простор без изолованих тачака. Пољски простори представљају далеко најважнију класу простора у математици јер обухватају све сепарабилне Банахове просторе и њихове затворене потпросторе.

Сваки сепарабилан метрички простор има највише пребројиву базу, која се састоји од отворених лопти $B(x, r)$, где је x тачка из највише пребројивог густог скупа, а r позитиван рационалан број. Са друге стране, ако простор има највише пребројиву базу, онда у сваком базном отвореном скупу можемо изабрати по једну тачку. Скуп свих изабраних тачака је највише пребројив и густ. Дакле, метрички простор је сепарабилан акко има највише пребројиву базу. Одатле следи да је потпростор сепарабилног простора сепарабилан.

У сваком сепарабилном метричком простору је свака тачка лимес низа тачака из највише пребројивог густог скупа,ж па кардиналност сепарабилног метричког простора не може бити већа од $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Нека је $\mathcal{M} = \langle M, \rho \rangle$ савршен простор. Пошто простор $\mathcal{M}$ нема изолованих тачака, скуп M мора бити бесконачан. Дефинишимо пресликавање f које сваком коначном низу нула и јединица придружује по један затворен скуп са непразном унутрашњошћу.

Празан низ ћемо пресликавањем f пресликати у скуп M. Претпоставимо да је s коначан низ нула и јединица дужине l и да је $f(s)$ дефинисано. Уочимо неке различите тачке a и b у унутрашњости скупа $f(s)$, као и позитиван реалан број $r < 1/(l+1)$ такав да важи $\overline{B(a,r)}, \overline{B(b,r)} \subseteq f(s)$ и $\rho(a,b) > 2r$. Из последњег следи да важи $\overline{B(a,r)} \cap \overline{B(b,r)} = \emptyset$. Нека је $f(s^\frown 0) = \overline{B(a,r)}$ и $f(s^\frown 1) = \overline{B(b,r)}$.

Тада ће за $i \in \{0,1\}$ важити $f(s^\frown i) \subseteq f(s)$ и $\mathrm{diam}(f(s^\frown i)) < 2/(l+1)$. Дефинишимо пресликавање које сваком F које сваком бесконачном низу s нула и јединица придружује по једну тачку на следећи начин: $F(s) \in \bigcap_{n=0^\infty} f(s \restriction n)$. Ово пресликавање је инјективно, па сваки савршен простор има кардиналност $2^{\aleph_0}$.

Тачку кондензације дефинишемо као тачку чија је свака околина непребројива. Свакој тачки пољског простора која није његова тачка кондензације можемо придружити њену базну околину која је највише пребројива. Пошто је база највише пребројива, унија тако одабраних околина ће такође бити највише пребројива и обухватаће све тачке које нису тачке кондензације.Према томе, скуп тачака кондензације непребројивог пољског простора је непребројив и очигледно затворен.

Докажимо да скуп тачака кондензације пољског простора не може имати изолованих тачака. Претпоставимо супротно и изведимо противречност. Нека је a тачка кондензације пољског простора и нека је $r > 0$ такво да у лопти $B(a,r)$ нема других тачака кондензације. Тада свакој тачки скупа $B(a,r) \setminus \{a\}$ можемо придружити базну околину која је највише пребројива, па ће унија тако одабраних околина бити највише пребројива, што значи да ће и скуп $B(a,r) \setminus \{a\}$ бити највише пребројив, супротно избору тачке a као тачке кондензације.

Дакле скуп тачака кондензације непребројивог пољског простора је савршен простор, па сваки непребројив пољски простор има кардиналност $2^{\aleph_0}$ и савршен потпростор ван кога има највише пребројиво много тачака.

7.2 Беров простор

Овде ће нам од главног интереса бити Беров простор свих бесконачних низова природних бројева у Тихоновљевој топологији производа. Он је савршен, потпуно неповезан простор са метриком дефинисаном на следећи начин:

$$d(a,b) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} \cdot \frac{|b(n) - a(n)|}{1 + |b(n) - a(n)|} \right).$$

За произвољне $x, y \geqslant 0$ важи

$$\frac{x+y}{1+x+y} = \frac{x}{1+x+y} + \frac{y}{1+x+y} \leqslant \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y},$$

на основу чега се лако проверава неједнакост троугла да за наведену метрику d.

Теорема 115 *Сваки савршен простор има густ G_δ подскуп који је хомеоморфан Беровом простору.*

Доказ: Нека је $\mathcal{M} = \langle M, \rho \rangle$ савршен простор. Дефинишимо пресликавање f које сваком коначном низу природних бројева придружује непразан отворен скуп простора $\mathcal{M}$ на следећи начин: Празном низу се пресликавањем f придружује скуп M. Нека је s коначан низ природних бројева дужине l за који је $f(s)$ већ дефинисано. Пошто савршен простор нема изолованих тачака, скуп $f(s)$ је бесконачан, па можемо у њему наћи бесконачан густ низ $(a_n)_{n\in\omega}$ различитих тачака. Индуктивно можемо изабрати низ позитивних реалних бројева $(r_n)_{n\in\omega}$ мањих од $1/(l+1)$ тако да важи следеће:

- $(\forall n \in \omega)(\exists \varepsilon > 0) B(a_n, r_n + \varepsilon) \subseteq f(s)$.
- $(\forall m, n \in \omega)(m \neq n \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0) B(a_m, r_m + \varepsilon) \cap B(a_n, r_n + \varepsilon) = \emptyset)$.

За свако $n \in \omega$ нека је $f(s^\frown n) = B(a_n, r_n)$. Очигледно за свако $l \in \omega$ важи да је унија скупова $f(s)$ за све коначне низове s дужине l густ отворен скуп, који ћемо обележити са U_l.

Нека је $G = \bigcap_{l=0}^{\infty} U_l$. Скуп G је према конструкцији G_δ скуп, а према Беровој теореми о категоријама је густ.

За сваки коначан низ s природних бројева и свако $n \in \omega$ важи $\overline{f(s^\frown n)} \subseteq f(s)$. Дефинишимо пресликавање F које сваком бесконачном низу s природних бројева придружује тачку скупа G на следећи начин: $F(s) \in \bigcap_{l=0}^{\infty} f(s \upharpoonright l)$. Пресликавање F је тражени хомеоморфизам. $\Box$

Нека је s произвољан коначан низ природних бројева. Са $[s]$ ћемо означавати скуп свих бесконачних низова t природних бројева таквих да важи $s \subseteq t$. Скупови облика $[s]$, где је s коначан низ природних бројева, образује базу топологије Беровог простора. Притом, уређењу коначних низова обрнутом инклузијом одговара уређење базних скупова инклузијом. Другим речима, за ма које коначне низове s_1 и s_2 природних бројева важи

$$s_1 \subseteq s_2 \quad \Leftrightarrow \quad [s_2] \subseteq [s_1].$$

7.3 Берово својство

Под <u>*скупом са Беровим својством*</u> подразумевамо скуп такав да постоје отворен скуп U и низ $(F_n)_{n\in\omega}$ нигде густих скупова тако да важи

$$(A \setminus U) \cup (U \setminus A) \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n. \tag{7.1}$$

Ово заправо значи да скуп A можемо апроксимирати отвореним скупом U у смислу да утврђујемо да ли важи $x \in A$ на основу тога да ли важи $x \in U$, при чему је скуп тачака у којима правимо грешку мали у смислу да је пребројива унија нигде густих скупова.

Фамилија свих скупова са Беровим својством очигледно обухвата све отворене скупове. Претпоставимо да скуп A има Берово својство, да је U отворен скуп и да је $(F_n)_{n\in\omega}$ низ нигде густих скупова тако да важи (7.1). Нека је U' отворење комплемента скупа U. Тада је U' отворен скуп дисјунктан са U и такав да је скуп $U \cup U'$ густ. Нека је F комплемент скупа $U \cup U'$. Скуп F је нигде густ и за комплемент A' скупа A важи $(A' \setminus U') \cup (U' \setminus A') \subseteq F \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$, па је и скуп A' има Берово својство. Дакле, фамилија скупова са Беровим својством је затворена за комплементирање.

Нека је $(A_n)_{n\in\omega}$ низ скупова са Беровим својством и $A = \bigcup_{n=0}^{\infty}$. Нека је $(U_n)_{n\in\omega}$ низ отворених скупова и нека је F_n^m нигде густ скуп за свако $m, n \in \omega$, при чему за свако $n \in \omega$ важи

$$(A_n \setminus U_n) \cup (U_n \setminus A_n) \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} F_n^m.$$

Тада за $U = \bigcup_{n=0}^{\infty}$ и $F_n = \bigcup_{m=0}^{\infty} F_n^m$ важи (7.1), па скуп A такође има Берово својство. Дакле, фамилија скупова са Беровим својством је σ-алгебра која обухвата све отворене скупове, па сваки Борелов скуп има Берово својство. То важи у ZFC.

7.4 Пројективни скупови

Дефинишимо појам <u>*пројективног скупа*</u> пољског простора $\mathcal{M} = \langle M, \rho \rangle$. Нека је $\mathcal{F}$ фамилија простора којој припада простор $\mathcal{M}$ и која је затворена за множење простором $\mathbb{R}$. За простор $\mathcal{N} \in \mathcal{F}$ дефинишемо $\Sigma_0(\mathcal{N})$, односно $\Pi_0(\mathcal{N})$ као скупове свих Борелових скупова простора $\mathcal{N}$.

За било које $n \in \omega$ и простор $\mathcal{M}' = \langle M', \rho' \rangle$ из фамилије $\mathcal{F}$ дефинишемо $\Sigma_{n+1}(\mathcal{M}')$ као скуп свих $A \subseteq M'$ таквих да постоји $B \in \Pi_n(\mathcal{M}' \times \mathbb{R})$ такав да важи

$$A = \{x \in M' \mid (\exists y \in \mathbb{R})\langle x, y \rangle \in B\}.$$

Такође, дефинишемо $\Pi_{n+1}(\mathcal{M}')$ као скуп свих $A \subseteq M'$ таквих да $M' \setminus A \in \Sigma_n(\mathcal{M}')$. Скуп пројективних скупова простора $\mathcal{M}$ дефинишемо као скуп $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n(\mathcal{M})$, односно $\bigcup_{n=0}^{\infty} \Pi_n(\mathcal{M})$. Уз аксиому о постојању јако компактног кардинала се може доказати да сваки пројективан скуп има Берово својство.

7.5 Кодирање тополошких појмова

Због примене форсинга на доказивање теорема од значаја је питање који се објекти могу кодирати скуповима чија су транзитивна затворења највише пребројива, у смислу декодирања операцијама које су апсолутне за транзитивне моделе који за довољно велико n задовољавају скуп ZFC аксиома које припадају скупу $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$.

Декодирање не мора бити апсолутно у смислу добијања истог скупа, већ скупа чија се разматрана тополошка својства преносе између транзитивних модела укључујући ту и универзум.

Из теореме о јединствености комплетирања тополошког простора следи да је пољски простор до на конгруенцију једнозначно одређен неким својим густим највише пребројивим потпростором. До на подударност простора, домен простора може бити подскуп од $\mathbb{R}$.

Он ће заједно са функцијом метрике на њему бити скуп чије је транзитивно затворење највише пребројиво, јер је сваки реалан број понаособ такав, а у метрици највише пребројивог скупа ће се појавити највише пребројиво много реалних бројева као растојања између тачака.

Дакле, произвољан пољски простор $\mathcal{P} = \langle P, \rho \rangle$ се може заменити њему подударним пољским простором $\mathcal{P}_0 = \langle P_0, \rho_0 \rangle$ таквим да је $P_0 \subseteq \mathbb{R}$. Затим се може најпре одабрати неки његов пребројив густ потпростор $\mathcal{P}_1 = \langle P_1, \rho_1 \rangle$, а потом и пребројив транзитиван модел M који садржи простор $\mathcal{P}_1$ и неку бијекцију скупа P_1 са неким подскупом од ω и који за довољно велико n рефлектује све ZFC аксиоме (и можда још неке реченице) које припадају скупу $\Sigma_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}}) \cup \Pi_n(\mathcal{L}_{\mathrm{ZFC}})$.

У моделу M можемо уочити комплетирање $\mathcal{P}_2 = \langle P_2, \rho_2 \rangle$ простора $\mathcal{P}_1$. Потом у моделу $M[G]$ можемо уочити комплетирање $\mathcal{P}_3 = \langle P_3, \rho_3 \rangle$ простора $\mathcal{P}_2$. На крају у универзуму можемо заменити простор $\mathcal{P}$ њему подударним комплетирањем $\mathcal{P}_4 = \langle P_4, \rho_4 \rangle$ простора $\mathcal{P}_3$. Притом је приликом прављења комплетирања могуће бирати реалне бројеве да буду тачке које се додају.

На тај начин смо у универзуму заменили простор $\mathcal{P}$ њему подударним простором $\mathcal{P}_4$, при чему је пресек простора $\mathcal{P}_4$ са било којим од модела M и $M[G]$ густ потпростор простора $\mathcal{P}_4$, који је притом комплетан у том моделу, то јест садржи лимесе свих Кошијевих низова тог простора који припадају том моделу.

Такође, модел M, а самим тим и модел $M[G]$ ће садржати највише пребројив густ скуп простора $\mathcal{P}_4$, као и бијекцију између тог скупа и неког подскупа од ω.

Дакле, простор $\mathcal{P}_\triangle$ у пресеку са било којим од модела M и $M[G]$ даје густ потпростор простора $\mathcal{P}_4$, који припада том моделу и који је пољски простор у том моделу и важи $P_4 \subseteq \mathbb{R}$.

Уколико је простор $\mathcal{P}$ највише пребројив, могуће је изабрати да буде $P_1 = P_0$. У том случају би било $\mathcal{P}_4 = \mathcal{P}_0$.

Надаље ћемо претпостављати да модел M задовољава одговарајући скуп реченица и да је $\mathcal{P} = \langle P, \rho \rangle$ пољски простор који у пресеку са M односно $M[G]$ даје густ потпростор простора $\mathcal{P}$ који је у том моделу пољски простор.

Уколико је простор $\mathcal{P}$ највише пребројив, онда се може додатно претпоставити да $\mathcal{P} \in M$ и да је $P = \mathbb{Q}$ или $P = \omega$. Размотримо случај када је простор $\mathcal{P}$ непребројив. Тада простор $\mathcal{P}$ садржи савршен потпростор, па има кардиналност $2^{\aleph_0}$, па се може додатно претпоставити да је $P = \mathbb{R}$.

Надаље у овој глави ћемо претпостављати да се разматрања односе на фиксирани непребројив пољски простор $\mathcal{P}$ и моделе M и $M[G]$ који испуњавају наведене услове и сви тополошки појмови же се односити на простор $\mathcal{P}$ ако другачије није наглашено.

Такође, можемо претпоставити[1] да за скуп T свих тачака простора $\mathcal{P}$ које нису тачке кондензације тог простора важи да скуп T и нека бијекција скупа T са неким подскупом скупа ω припадају моделу M. На тај начин је појам тачке кондензације разматраног простора апсолутан за моделе M и $M[G]$.

Ако интервал реалне праве пресечен са моделом припада моделу, онда му припадају и крајеви интервала као инфимум и супремум пресека. Пошто је скуп реалних бројева непребројив, пребројив транзитиван модел не може садржати све реалне бројеве, па постоји интервал реалне праве чији пресек са датим пребројивим транзитивним моделом не припада том моделу.

То значи да отворена лопта пресечена са моделом у општем случају не мора припадати моделу. Међутим, отворена лопта са центром и полупречником који припадају моделу има својство да је

[1] Ова претпоставка је непотребна јер је појам изоловане тачке апсолутан и у ZFC доказује да је декомпозиција пољског простора на дисјунктну унију савршеног скупа и највише пребројивог скупа јединствена. Овде је изабран приступ којим се избегава потреба за доказивањем те чињенице. Другим речима, појам тачке кондензације у пољском простору је (неочекивано) апсолутан за транзитивне моделе.

њен пресек са моделом припада том моделу и да је у њему такође лопта са истим центром и полупречником. Међутим, нама ће требати пребројива база која ће у том смислу бити апсолутна, као и у наведеном смислу апсолутно кодирање отворених скупова.

Са Q ћемо означити неки елемент модела M који је густ подскуп простора $\mathcal{P}$ и који је у моделу M највише пребројив. Скуп свих отворених лопти са центром у некој од тачака скупа Q са позитивним рационалним полупречником образује пребројиву базу, без обзира да ли то то тумачимо у универзуму или у моделу M или у моделу $M[G]$.

Сваком отвореном скупу U придружићемо скуп

$$\mathcal{S}(U) = \{\langle a, r\rangle \in Q \times \mathbb{Q} \mid r > 0 \wedge B(a, r) \subseteq U\}.$$

Ако је U отворен скуп, онда ћемо $\mathcal{S}(U)$ звати *кодом отвореног скупа* U. Сваком подскупу S скупа $Q \times \mathbb{Q}$ придружићемо скуп

$$\mathcal{U}(S) = \bigcup \{B(a, r) \mid \langle a, r\rangle \in S\}.$$

За скуп $S \subseteq Q \times \mathbb{Q}$ ћемо рећи да је максималан ако важи

$$(\forall a \in Q, r \in \mathbb{Q})(r > 0 \Rightarrow (\langle a, r\rangle \in S \Leftrightarrow B(a, r) \subseteq \mathcal{U}(S))).$$

Максималне подскупове скупа $Q \times \mathbb{Q}$ ћемо звати кодовима. За сваки отворен скуп U важи да је скуп $\mathcal{S}(U)$ максималан, затим $\mathcal{U}(\mathcal{S}(U)) = U$, као и

$$U \cap M \in M \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{S}(U) = \mathcal{S}^M(U \cap M),$$

$$U \cap M[G] \in M[G] \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{S}(U) = \mathcal{S}^{M[G]}(U \cap M).$$

Такође, за сваки максималан $S \subseteq Q \times \mathbb{Q}$ важи $\mathcal{S}(\mathcal{U}(S)) = S$, као и

$$S \in M \;\;\Rightarrow\;\; U^M(S) = U^{M[G]}(S) \cap M = U(S) \cap M,$$

$$S \in M[G] \;\;\Rightarrow\;\; U^{M[G]}(S) = U(S) \cap M[G].$$

На овај начин је успостављена дефинабилна бијекција између скупа свих отворених скупова и скупа свих кодова, која је у наведеном смислу апсолутна за моделе M и $M[G]$.

За отворен скуп U ћемо рећи да има код у M, односно у $M[G]$ ако скуп $\mathcal{S}(U)$ припада моделу M, односно $M[G]$. Слично, за скуп $U \in M[G]$ ћемо рећи да има код у M ако $\mathcal{S}^{M[G]} \in M$. За ма који отворен скуп U важи

$$U \cap M \in M \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{S}(U) \in M,$$

$$U \cap M[G] \in M[G] \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{S}(U) \in M[G].$$

Притом, за отворен скуп U са кодом $S \in M[G]$ важи

$$\mathcal{U}^{M[G]}(S) = U \cap M[G] = \mathcal{U}(S) \cap M[G], \quad \mathcal{S}^{M[G]}(U \cap M[G]) = \mathcal{S}(U).$$

Ако притом важи и $S \in M$, онда је

$$\mathcal{U}^M(S) = U \cap M = \mathcal{U}(S) \cap M, \quad \mathcal{S}^M(U \cap M) = \mathcal{S}(U).$$

За отворен скуп U са кодом у M, односно у $M[G]$ важи да је скуп U густ акко је скуп $U \cap M$ густ у моделу M, односно акко је скуп $U \cap M[G]$ густ у моделу $M[G]$. На тај начин је појам густине апсолутан за моделе M и $M[G]$.

На тај начин смо кодирали отворене скупове. То можемо сматрати и кодирањем затворених скупова, јер су они комплементи отворених скупова. Слично томе, појам нигде густог затвореног скупа је на аналоган начин апсолутан за моделе M и $M[G]$.

7.6 Веза са Коеновим форсингом

Базу топологије Беровог простора можемо изабрати на природан начин. За било који коначан низ s природних бројева ћемо са $[s]$ означавати скуп свих бесконачних низова t природних бројева таквих да важи $s \subseteq t$. Једну од база топологије Беровог простора чини скуп свих скупова облика $[s]$, где је s коначан низ природних бројева. Ову базу Беровог простора ћемо звати *Беровом базом*. Она је директно повезана са уређењем $\mathcal{N}(I)$ за непразан скуп I.

Ако је дата једна пребројива база савршеног простора у виду бесконачног низа, онда можемо дефинисати утапање e Беровог простора као у доказу теореме 115, с тим да увек бирамо базне отворене скупове (осим за слику празног низа) и то увек први из низа базних скупова који испуњава тражене услове. У случају непребројивих пољских простора, Беров простор утапамо у савршен потпростор који се састоји од тачака кондензације.

Теорема 116 *Претпоставимо да је G један $\mathcal{N}(I)$-генерички филтер над M за неки непразан скуп $I \in M$. Тада за сваки густ отворен скуп U са кодом у M важи $(\forall i \in I) e(r_i) \in U$, где је r_i генерички елемент на месту i.*

Доказ: Слику $e[{}^{\omega}\omega]$ Беровог простора при утапању e обележимо са B. Нека је $i \in I$ произвољно и нека је D свих услова p таквих да је информација s коју услов p носи на месту i коначан низ природних бројева такав да важи $[s] \subseteq e^{-1}[U \cap B]$.

Скуп D је густ зато што је скуп $U \cap B$ отворен густ скуп у релативној топологији скупа B. Изаберимо произвољно $p \in G \cap D$. Нека је s информација коју услов p носи на месту i. Тада важи $e(r_i) \in e[s] \subseteq U$. $\Box$

Претходна теорема се може изразити и речима да слика Коенових генеричких елемената не припада ниједном затвореном нигде густом скупу који има код у M.

Глава 8

Повезани резултати

У чланку [19] је Халперн-Лојхлијева теорема доведена у везу са принципом о партиционисању коначног степена Канторовог скупа. Из тог принципа је могуће извести Халперн-Лојхлијеву теорему.

Ипак, тај принцип је у теорији ZFC доказив само у случају димензија 1 и 2. У теорији ZFC + CH се доказује негација тог принципа за димензију 3. Ипак, када користимо моделе теорије скупова, тај принцип можемо примењивати у одређеним моделима теорије скупова у којима не важи ZFC + CH.

Тај принцип важи у Коеновом симетричном моделу (у коме не важи аксиома избора), што је последица важења BPI у том моделу. Такође, принцип важи и у форсинг раширењима у којима је додато довољно Коенових реалних бројева (у којима важи ZFC + ¬CH), што се може доказати на начин сличан Харингтоновом доказу Халперн-Лојхлијеве теореме форсингом.

8.1 Уводни појмови

Најпре се подсетимо да за ма који идеал I Булове алгебре B скуп

$$F := \{-i \mid i \in I\}$$

образује филтер, при чему за сваки ултрафилтер $U \supseteq F$ због $(\forall i \in I)(-i) \in U$ важи $U \cap I = \emptyset$. Према томе, за сваки идеал постоји ултрафилтер дисјунктан са тим идеалом. Општије, за ма који подскуп S домена Булове алгебре B важи да постоји ултрафилтер дисјунктан са S акко не постоји коначан подскуп скупа S чији је збир једнак јединици. Скуп свих ултрафилтера над скупом X обележаваћемо са βX.

Нека је T произвољно дрво. Са $[T]$ означимо скуп свих грана дрвета T. За $b \in [T]$ и чвор v са гране b ћемо са $\mathrm{Lev}(v, b)$ означавати $n \in \omega$ такав да важи $v \in b \cap T(n)$, док ћемо са N_v означавати скуп свих грана које садрже чвор v. Са $b(n)$ означаваћемо јединствени елемент скупа $b \cap T(n)$. Дакле, $\mathrm{Lev}(b(n), b) = n$.

Нека су $T_1, \ldots, T_d$ ма која дрвета. Дефинишимо дрво T на следећи начин: Скуп чворова дрвета T је скуп $X := \bigcup_{l \in \omega}(T_1(l) \times \cdots \times T_d(l))$. За ма које $\vec{a}, \vec{b} \in X$ ћемо рећи да је чвор $\vec{b}$ непосредни наследник чвора $\vec{a}$ у дрвету T ако је за свако i чвор b_i непосредни наследник чвора a_i у дрвету T_i. Притом ћемо за дрво T користити ознаку $T_1 \otimes \cdots \otimes T_d$. Дакле, важи

$$(\forall l \in \omega)\,(T_1 \otimes \cdots \otimes T_d)(l) = T_1(l) \times \cdots \times T_d(l).$$

Такође, између скупова $[T_1 \otimes \cdots \otimes T_d]$ и $[T_1] \times \cdots \times [T_d]$ постоји природна бијекција.

Очигледно је $T_1 \otimes \cdots \otimes T_d$ дрво. Ако је $f : \bigcup_{l=0}^{\infty}(T_1(l) \times \cdots \times T_d(l)) \longrightarrow c$, где је c коначан скуп и ако је F ултрафилтер над скупом ω, онда можемо дефинисати пресликавање f_F скупа $[T_1] \times \cdots \times [T_d]$ у скуп c на следећи начин:

$$f_F(b_1, \ldots, b_d) = v \quad \Leftrightarrow \quad \{n \in \omega \mid f(b_1(n), \ldots, b_d(n)) = v\} \in F.$$

На скупу $[T]$ дефинишемо базу топологије, која се састоји од свих скупова облика N_v, где је v чвор дрвета T. Очигледно је база топологије пребројива. Штавише, свако дрво је хомеоморфно Канторовом скупу.

8.2 Зукерови резултати

Нека је $\langle P, \rho\rangle$ пољски простор и $X \subseteq P$ такав да не постоји базна околина таква да сваки базни скуп има подоколину у којој је скуп X прве категорије. Пошто је база пребројива, унија U свих тих подоколина је густ отворен скуп у коме је скуп X прве категорије, док је комплемент скупа U нигде густ, па је скуп X прве категорије. Дакле, за сваки скуп који није прве категорије постоји базна околина која нема подоколину у којој скуп X прве категорије.

Дефиниција 1 [19]*Нека су $\langle P_1, \rho_1\rangle, \ldots, \langle P_d, \rho_d\rangle$ ма који пољски простори и $U_1, \ldots, U_d$ непразни отворени скупови у просторима $\langle P_1, \rho_1\rangle, \ldots, \langle P_d, \rho_d\rangle$. Нека је Z произвољан подскуп скупа $P_1 \times \cdots \times P_d$. За скуп Z кажемо да је $(U_1, \ldots, U_d)$-DDF ако важи једно од следећег:*

- *$d = 1$ и Z је густ у простору $\langle P_1, \rho_1\rangle$ у скупу U_1,*
- *$d \geqslant 2$ и важи следеће:*
  - *Скуп $\{x_1 \in U_1 \mid (\exists y_1, \ldots, y_n)\langle x_1, y_2, \ldots, y_n\rangle \in Z\}$.*
  - *За ма које $\langle x_1^1, \ldots, x_d^1\rangle, \ldots, \langle x_1^m, \ldots, x_d^m\rangle \in Z$ важи да је скуп*

$$\{y_d \in U_d \mid \bigwedge_{i=1}^{m} \langle x_1^i, \ldots, x_{d-1}^i, y_d\rangle \in Z\}$$

густ у простору $\langle P_d, \rho_d\rangle$ у скупу U_d, као и да за све k такве да је $2 \leqslant k \leqslant d-1$ (ако је $d \geqslant 3$) важи да је скуп

$$\{y_k \in U_k \mid \bigwedge_{i=1}^{m} (\exists z_{k+1}, \ldots, z_d)\langle x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k, z_{k+1}, \ldots, z_d\rangle \in Z\}$$

густ у простору $\langle P_k, \rho_k\rangle$ у скупу U_k.

За скуп Z кажемо да је негде DDF *ако је $(U_1, \ldots, U_d)$*-DDF *за неке непразне отворене скупове $U_1, \ldots, U_d$ простора $\langle P_1, \rho_1\rangle, \ldots, \langle P_d, \rho_d\rangle$.* ▲

За ма које $d \geqslant 1$ и кардинал κ ћемо са $\mathrm{DDF}_d(\kappa)$ означавати следећи исказ:

За ма које пољске просторе $\langle P_1, \rho_1\rangle, \ldots, \langle P_d, \rho_d\rangle$ и ма које пресликавање f скупа $P_1 \times \cdots \times P_d$ у скуп кардиналности мање од κ постоји скуп који је негде DDF *и на коме је пресликавање f константно.*

Исказ $\mathrm{DDF}_d(\aleph_0)$ заправо значи да скупови који не садрже подскуп који је негде DDF генеришу идеал, тако да је исказ $\mathrm{DDF}_d(\aleph_0)$ у теорији ZF + BPI еквивалентан следећем:

За ма које пољске просторе $\langle P_1, \rho_1\rangle, \dots, \langle P_d, \rho_d\rangle$ постоји $U \in \beta(P_1 \times \cdots \times P_d)$ чији сваки елемент садржи подскуп који је негде DDF.

Исказ $(\forall d)\mathrm{DDF}_d(\kappa)$ ћемо означавати са $\mathrm{DDF}(\kappa)$, док ћемо $\mathrm{DDF}_d(\aleph_0)$ означавати DDF_d, односно уместо $\mathrm{DDF}(\aleph_0)$ ћемо писати DDF. О значају исказа DDF_d и DDF говори следећа теорема.

Теорема 117 [19] (ZF + BPI) *За свако d важи да* DDF_d *имплицира Халперн-Лојхлијеву теорему у случају множења d дрвета.*

Доказ: У ZF аксиома избора важи за фамилије непразних скупова, које су коначне у наведеном смислу, што се доказује индукцијом по броју елемената фамилије. Индукцијом по $l \in \omega$ се доказује да за свако дрво T важи да је скуп $T(l)$ коначан. У индуктивном кораку се користи чињеница да је унија коначне фамилије коначних скупова коначан скуп, при чему се та чињеница доказује индукцијом по броју елемената фамилије.

Нека је d такво да важи DDF_d и нека су $T_1, \dots, T_d$ ма која дрвета и нека је $T = T_1 \otimes \cdots \otimes T_d$. На основу DDF_d, можемо изабрати ултрафилтер над U скупом $[T] = [T_1] \times \cdots \times [T_d]$, чији сваки елемент садржи подскуп који је негде DDF. Такође, уочимо неки неглавни ултрафилтер F над скупом ω.

Нека је $f : \bigcup_{l=0}^{\infty}(T_1(l) \times \cdots \times T_d(l)) \longrightarrow c$, где је c неки коначан скуп. Нека је $v \in c$ такво да скуп $A = (f_F)^{-1}[\{v\}]$ припада ултрафилтеру U. Изаберимо неко $S \subseteq A$ такво да је скуп S негде DDF. Тада је свакако $f_F[S] = \{v\}$. Нека су $s_1, \dots, s_d$ чворови дрвета $T_1, \dots, T_d$ тим редом, такви да је S један $(N_{T_1}, \dots, N_{T_d})$-DDF скуп. Без умањења општости можемо претпоставити да су сви од чворова $s_1, \dots, s_d$ на истој висини, односно да за неко m важи $\bigwedge_{i=1}^{d} s_i \in T_i(m)$. За свако $k < d$ нека је

$$S_k := \{\langle u_1, \dots, u_k\rangle \in [T_1] \times \cdots \times [T_k] \mid (\exists u_{k+1} \in [T_{k+1}], \dots, u_d \in [T_d])\langle u_1, \dots, u_d\rangle \in S\}.$$

и нека је $S_d = S$. За свако i нека су $t_i^1, \dots, t_i^{l_i}$ сви непосредни наследници чвора s_i у дрвету T_i. Због наведених особина скупова $S_1, \dots, S_d$, можемо за све $i \leqslant d$ изабрати гране $w_i^1, \dots, w_i^{m_i}$ тако да важи следеће:

$$(\forall j_1 \leqslant l_1, \dots, j_{k+1} \leqslant l_{k+1})\langle w_1^{j_1}, \dots, w_{k+1}^{j_{k+1}}\rangle \in S_{k+1}, \quad \bigwedge_{i=1}^{l_{k+1}} t_{k+1}^i \in w_{k+1}^i.$$

На основу начина избора грана w_i^j, важи

$$(\forall j_1 \leqslant m_1, \dots, j_d \leqslant m_d)\langle w_1^{j_1}, \dots, w_d^{j_d}\rangle \in S \subseteq A,$$

а самим тим и да скуп

$$\bigcap\{\{n \in \omega \mid \langle w_1^{j_1}, \dots, w_d^{j_d}\rangle\} \mid j_1 \leqslant l_1, \dots, j_d \leqslant l_d\} \tag{8.1}$$

припада неглавном ултрафилтеру F. Према томе, скуп (8.1) је бесконачан, па садржи неко $n > m$. Коначно,

$$(\forall j_1 \leqslant l_1, \dots, j_d \leqslant l_d)\langle w_1^{j_1}(n), \dots, w_d^{j_d}(n)\rangle \in A.$$

За свако i скуп $D_i = \{w_1^1, \dots, w_d^{l_d}\}$ је $(m+1)-n$ густ изнат чвора t_i у дрвету T_i и пресликавање f је константно на скупу $D_1 \times \cdots \times D_d$. $\square$

У чланку [19] је још доказано да важи DDF_2 у ZFC и $\neg\mathrm{DDF}_3$ за две боје у ZFC + CH. Пошто исказ DDF_d није доказив у ZFC за $d \geqslant 3$, при чему већ у ZF + BPI имплицира Халперн-Лојхлијеву теорему, он представља јачи принцип од Халперн-Лојхлијеве теореме, па је од интереса наћи моделе где он важи.

8.3 Заједнички резултати Зукера и Криса Ламби-Хенсона

У чланку [12] Енди Зукер и Крис Ламби-Хенсон су разматрали и случај бојења у две боје, као и случај бојења у пребројиво много боја, при чему су разматрали још један принцип, који је јачи од DDF. За ма које $d \geqslant 1$ и ма који кардинал κ, са $\mathrm{PG}_d(\kappa)$ ћемо означавати следећи исказ:

> *За ма које пољске просторе $\langle P_1, \rho_1\rangle, \ldots, \langle P_d, \rho_d\rangle$ и ма које пресликавање f скупа $P_1 \times \cdots \times P_d$ у скуп кардиналности мање од κ постоје негде густи скупови $D_1, \ldots, D_d$ у просторима $\langle P_1, \rho_1\rangle, \ldots, \langle P_d, \rho_d\rangle$ такви да је пресликавање f константно на скупу $D_1 \times \cdots \times D_d$.*

Притом за принцип PG уводимо аналогне конвенције о изостављању ознаке за димензију d и кардинал κ као за принцип DDF. Наравно, принцип PG_d је у теорији $\mathrm{ZF} + \mathrm{BPI}$ еквивалентан следећем:

> *За ма које пољске просторе $\langle P_1, \rho_1\rangle, \ldots, \langle P_d, \rho_d\rangle$ постоји $U \in \beta(P_1 \times \cdots \times P_d)$ чији сваки елемент садржи подскуп облика $D_1 \times \cdots \times D_d$, где су $D_1, \ldots, D_d$ скупови који су негде густи у просторима $\langle P_1, \rho_1\rangle, \ldots, \langle P_d, \rho_d\rangle$.*

Са G_d ћемо обележавати следећи слабији исказ од исказа PG_d:

> *Уз ознаку $\mathcal{C} = \langle C, \rho\rangle$ за Канторов простор, за ма које пресликавање f скупа C^d у коначан скуп постоје негде густи скупови $D_1, \ldots, D_d$ у простору $\mathcal{C}$ такви да је пресликавање f константно на скупу $D_1 \times \cdots \times D_d$.*

Са G ћемо означавати исказ $(\forall d) G_d$. Из овог принципа се Халперн-Лојхлијева теорема изводи још лакше него из принципа DDF.

Теорема 118 [19] ($\mathrm{ZF} + \mathrm{BPI}$) *За свако d важи да G_d имплицира Халперн-Лојхлијеву теорему у случају множења d дрвета.*

Доказ: Најпре дајемо исте напомене о коначним скуповима у $\mathrm{ZF} + \mathrm{BPI}$ теорији као на почетку доказа теореме 117.

Нека је d такво да важи G_d и нека су $T_1, \ldots, T_d$ ма која дрвета и нека је $T = T_1 \otimes \cdots \otimes T_d$. На основу G_d, можемо изабрати ултрафилтер над U скупом $[T] = [T_1] \times \cdots \times [T_d]$, чији сваки елемент садржи подскуп који је Декартов производ d негде густих скупова. Такође, уочимо неки неглавни ултрафилтер F над скупом ω.

Нека је $f : \bigcup_{l=0}^{\infty}(T_1(l) \times \cdots \times T_d(l)) \longrightarrow c$, где је c неки коначан скуп. Нека је $v \in c$ такво да скуп $A = (f_F)^{-1}[\{v\}]$ припада ултрафилтеру U. Изаберимо негде густе скупове $D_1, \ldots, D_d$ у дрветима $T_1, \ldots, T_d$ такве да је $D_1 \times \cdots \times D_d \subseteq S$. Тада свакако важи $f_F[D_1 \times \cdots \times D_d] = \{v\}$.

Нека су $s_1, \ldots, s_d$ чворови дрвета $T_1, \ldots, T_d$ такви да је D_i густ у N_{s_i} за свако i. Без умањења општости можемо претпоставити да су сви од чворова $s_1, \ldots, s_d$ на истој висини, односно да за неко m важи $\bigwedge_{i=1}^{d} s_i \in T_i(m)$.

За свако i нека су $t_i^1, \ldots, t_i^{l_i}$ сви непосредни наследници чвора s_i у дрвету T_i. Због наведених особина скупова $D_1, \ldots, D_d$, можемо за све $i \leqslant d$ изабрати гране $w_i^1, \ldots, w_i^{m_i}$ у скупу D_i.

На основу начина избора грана w_i^j, важи

$$(\forall j_1 \leqslant m_1, \ldots, j_d \leqslant m_d)\langle w_1^{j_1}, \ldots, w_d^{j_d}\rangle \in D_1 \times \cdots \times D_d,$$

а самим тим и да скуп

$$\bigcap \{\{n \in \omega \mid \langle w_1^{j_1}, \ldots, w_d^{j_d}\rangle\} \mid j_1 \leqslant l_1, \ldots, j_d \leqslant l_d\} \tag{8.2}$$

припада неглавном ултрафилтеру F. Према томе, скуп (8.2) је бесконачан, па садржи неко $n > m$. Коначно,

$$(\forall j_1 \leqslant l_1, \dots, j_d \leqslant l_d)\langle w_1^{j_1}(n), \dots, w_d^{j_d}(n)\rangle \in A.$$

За свако i скуп $D_i = \{w_1^1, \dots, w_d^{l_d}\}$ је $(m+1)-n$ густ изнад чвора t_i у дрвету T_i и пресликавање f је константно на скупу $D_1 \times \cdots \times D_d$. $\Box$

У чланку [12] аутори су доказали PG_2 принцип за две боје. Такође су доказали да након додавања барем $\beth_{d-1}^+$ Коенових реалних бројева у генеричком раширењу важи PG_d за пребројиво много боја, да $\mathrm{DDF}_d \Rightarrow 2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_{d-1}$ и да PG_d за пребројиво много боја имплицира $2^{\aleph_0} \geqslant \aleph_d$. За ту сврху су користили једну варијанту вишедимензионе Δ-систем леме, коју је Ламби-Хенсон објавио у [11].

Глава 9

Оригинални резултати

У овој глави су садржани сви оригинални резултати ове тезе. Сви резултати из ове главе су оригинални ако другачије није изричито наглашено.

9.1 Халперн-Лојхлијева теорема на основу BPI у N

Овде ћемо извести теорему 111 из претпоставке да у моделу N важи BPI. Та претпоставка је тачна, што је исказ теореме 114. Међутим, ово није другачији доказ теореме 111 јер је теорема 114 доказана преко теореме 111. Овај доказ ће нам послужити да од његових идеја направимо једну методу.

9.1.1 Потребни појмови

Најпре уведимо једну бијекцију између грана дрвета и бесконачних низова нула и јединица. Свакој грани ћемо придружити два низа природних бројева $\langle g_i : i \in \omega \rangle$ и $\langle h_i : i \in \omega \rangle$. Први низ представља степене гранања чворова те гране, а други изборе деце.

Дакле, ако први низ почиње са $1, 7, 4, \ldots$, то значи да корен дрвета има једно дете, да чвор са гране који је на нивоу 1 има седморо деце и да чвор гране који је са нивоа 2 има четворо деце. Уколико други низ почиње са $1, 5, 3, \ldots$, то значи да грана из корена иде у једино дете корена, да из свог чвора на нивоу 1 иде у пето од седморо деце, а да из чвора на нивоу 2 иде у треће од четворо деце. Дакле, важи $1 \leqslant h_i \leqslant g_i$.

Сваком $i \in \omega$ придружимо коначан низ битова z_i на следећи начин: Ако је $h_i < g_i$, онда је z_i низ од $h_i - 1$ јединица иза којих стоји нула. Ако је пак $h_i = g_i$, онда је z_i низ од $h_i - 1$ јединица.

Приметимо да је z_i непразан низ акко је $g_i \geqslant 2$. Пошто су све гране по претпоставци неизоловане, z_i ће бити непразан низ за бесконачно много вредности i.

Свакој грани придружимо низ који се добија надовезивањем свих z_i. На основу претходног, тај низ ће бити бесконачан. Наведено пресликавање је бијекција између скупа свих грана једног дрвета и скупа свих бесконачних низова битова.

На сличан начин, сваки чвор се као прави почетни комад неке гране кодира коначним низом битова, при чему је то придруживање инјективно, али не мора бити бијективно.

Притом ћемо за бесконачан низ битова σ и $k \in \omega$ под $\sigma \restriction k$ подразумевати коначан низ битова који кодира почетни комад гране кодиране низом σ, а који се састоји од првих k чворова те гране.

Тада ће свака околина елемента скупа b имати подоколину, која одговара скупу свих грана које пролазе кроз један одређени чвор.

Надаље ћемо идентификовати чворове и коначне низове нула и јединица који их кодирају, као и гране и бесконачне низове битова који их кодирају. Овде ћемо користити Коенов симетрични модел уз симболику и претпоставке из главе Надаље ће бити $I=\omega$, $Q=\mathcal{R}(\{0\})$ и $X=M$ уз претпоставке из главе 6 и одељка 5.6. Ради једноставнијег изражавања, елементе скупа C ћемо идентификовати са одговарајућим пресликавањима из ω у $\{0,1\}$. Гране које на тај начин одговарају елементима скупа C зваћемо Коеновим гранама. Пошто је скуп C густ у интервалу $[0,1]$, кроз сваки чвор било ког дрвета пролази бесконачно много Коенових грана.

Нека је C' неки коначан подскуп скупа C. Скуп C' може бити скуп параметара који се користе за дефинисање неких одређених елемената модела N. Кроз сваки чвор сваког дрвета пролази бесконачно много Коенових грана које не одговарају ниједном од елемената скупа C'.

Нека су $T_1,\dots,T_d$ ма која дрвета, и F ма који ултрафилтер над ω. Тада сваком бојењу f производа дрвета $T_1,\dots,T_d$ бојама из коначног скупа S можемо придружити бојење f_F торки грана $\langle b_1,\dots,b_d\rangle$ дрвета $T_1,\dots,T_d$ бојама из истог скупа S на следећи начин: За дате гране $b_1,\dots,b_d$ дрвета $T_1,\dots,T_d$ скупови облика

$$A_c(b_1,\dots,b_d):=\{n\in\omega\mid f(b_1(n),\dots,b_d(n))=c\},\quad c\in C$$

чине коначну партицију скупа ω, па је следећа дефиниција коректна

$$f_F(b_1,\dots,b_d)=c\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}A_c(b_1,\dots,b_d)\in F.$$

Нека су $b_1,\dots,b_n$ Коенове гране дрвета $T_1,\dots,T_d$ тим редом, које одговарају међусобно различитим елементима скупа $C\setminus C'$. Ако гране $b_1,\dots,b_n$ са становишта модела $M[G]$ или N задовољавају неки систем услова са параметрима из скупа $M\cup C'\cup\{C\}$, онда постоје чворови $v_1,\dots,v_n$ на гранама $b_1,\dots,b_n$ тим редом, такви да сваки систем Коенових грана са дрвета $T_1,\dots,T_n$ тим редом таквих да садрже чворове $v_1,\dots,v_n$ тим редом задовољава исти систем услова са становишта истог модела. Притом се чворови $v_1,\dots,v_n$ могу одабрати тако да буду на истој висини.

9.1.2 Извођење Халперн-Лојхлијеве теореме из BPI у N

Користићемо се ознакама из теореме 111. Према напомени датој на почетку доказа теореме 111, општи случај Халперн-Лојхлијеве теореме се своди на случај множења савршених дрвета. На основу теореме рефлексије, можемо одабрати пребројив транзитиван модел M који рефлектује ову теорему и доказивати је у њему. Са F_0 означимо елемент модела N такав да важи

$$N\models \text{»}F_0 \text{ је ултрафилтер Булове алгебре } \mathcal{P}(\omega)_{/\mathrm{fin}}\text{«},$$

док ће F бити ознака за $\bigcup F_0$. Очигледно, F је неглавни ултрафилтер Булове алгебре $\mathcal{P}(\omega)^N$. Пошто $F\in N$, постоје међусобно различити елементи $r_1,\dots,r_k\in C$, формула $\varphi(X_1,\dots,X_k,B,A,y)$ и $\alpha\in M$ такви да важи

$$M[G]\models(\forall y)(y=F\Leftrightarrow\varphi(r_1,\dots,r_k,C,\alpha,y)),$$

а самим тим и

$$M[G]\models(\exists_1 y)\varphi(r_1,\dots,r_k,C,\alpha,y),$$

$$M[G]\models(\forall y)(\varphi(r_1,\dots,r_k,C,\alpha,y)\Rightarrow \text{»}y \text{ је неглавни ултрафилтер Булове алгебре } \mathcal{P}(\omega)^N\text{«}).$$

Ово последње је тачно зато што је N класа у $M[G]$ са параметрима из $M\cup\{C\}$. Нека је $\psi(x,y,z,t)$ формула дефинисана на следећи начин:

$$\psi(T,b,n,v)\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}\text{»}b \text{ је код неке гране дрвета } T\text{, а } v \text{ је код чвора на тој грани на нивоу } n\text{«}.$$

Пошто дрвета $T_1, \ldots, T_d$ по претпоставци немају изолованих грана, кроз сваки чвор било којег од тих дрвета пролази бесконачно много његових грана, па можемо изабрати међусобно различите $b_1, \ldots, b_d \in C$ који се разликују од $r_1, \ldots, r_k$ и такве да за све i важи да је b_i код неке гране дрвета T_i. Означимо са e јединствени елемент скупа c такав да важи[1]

$$N \models \{n \in \omega \mid (\exists v_1, \ldots, v_d)(\bigwedge_{i=1}^d \psi(T_i, b_i, n, v_i) \wedge f(v_1, \ldots, v_d) = e)\} \in F.$$

Због апсолутности формуле са десне стране знака $\models$ важи

$$M[G] \models \{n \in \omega \mid (\exists v_1, \ldots, v_d)(\bigwedge_{i=1}^d \psi(T_i, b_i, n, v_i) \wedge f(v_1, \ldots, v_d) = e)\} \in F,$$

а самим тим и

$$\begin{aligned} M[G] \models (\forall y)(\varphi(r_1, \ldots, r_k, C, \alpha, y) \Rightarrow \\ \{n \in \omega \mid (\exists v_1, \ldots, v_d)(\bigwedge_{i=1}^d \psi(T_i, b_i, n, v_i) \wedge f(v_1, \ldots, v_d) = e)\} \in y). \end{aligned}$$

Пошто $f, T_1, \ldots, T_d \in M$, и $b_1, \ldots, b_d$ се разликују међу собом, као и од елемената $r_1, \ldots, r_k$, према леми 100 постоје дисјунктне околине $[t_1], \ldots, [t_d]$ елемената $b_1, \ldots, b_d$ тим редом, такве да за ма које $b'_1 \in [t_1], \ldots, b'_d \in [t_d]$ важи

$$\begin{aligned} M[G] \models (\forall y)(\varphi(r_1, \ldots, r_k, C, \alpha, y) \Rightarrow \\ \{n \in \omega \mid (\exists v_1, \ldots, v_d)(\bigwedge_{i=1}^d \psi(T_i, b'_i, n, v_i) \wedge f(v_1, \ldots, v_d) = e)\} \in y). \end{aligned}$$

На основу избора формуле φ, за све $b'_1 \in [t_1], \ldots, b'_d \in [t_d]$ важи

$$M[G] \models \{n \in \omega \mid (\exists v_1, \ldots, v_d)(\bigwedge_{i=1}^d \psi(T_i, b'_i, n, v_i) \wedge f(v_1, \ldots, v_d) = e)\} \in F,$$

односно

$$\{n \in \omega \mid (\exists v_1, \ldots, v_d)(\bigwedge_{i<d} \psi(T_i, b'_i, n, v_i) \wedge f(v_1, \ldots, v_d) = e)\} \in F.$$

Другим речима, важи

$$(\forall b'_1 \in [t_1], \ldots, b'_d \in [t_d]) U(b'_1, \ldots, b'_d) \in F,$$

где је

$$U(b'_1, \ldots, b'_d) := \{n \in \omega \mid (\exists v_1, \ldots, v_d)(\bigwedge_{i=1}^d \psi(T_i, b'_i, n, v_i) \wedge f(v_1, \ldots, v_d) = e)\}.$$

Притом смо околине могли изабрати тако да сви од $t_1, \ldots, t_d$ представљају исправне кодове чворова на истој висини l. Наравно, низови $t_1, \ldots, t_d$ не морају имати исту дужину.

Нека је $m \geqslant l$ произвољно. Изаберимо коначне подскупове $A_1, \ldots, A_d$ скупова $[t_1], \ldots, [t_d]$ тим редом, тако да за свако i и за сваки чвор $t \in T_i(m)$ изнад t_i постоји неко $b \in A_i$ такво да важи $\psi(T_i, b, m, t_i)$. Пошто је $A_i \subseteq [t_i]$ за све i, важи

$$(\forall b'_i \in A_1, \ldots, b'_d \in A_d)\, U(b'_1, \ldots, b'_d) \in F.$$

Из коначности скупова $A_1, \ldots, A_d$ следи да је и њихов Декартов производ коначан, па скуп

$$U = \bigcap \{U(b'_1, \ldots, b'_d) \mid b'_1 \in A_1, \ldots, b'_d \in A_d\}.$$

[1] На тај начин можемо дефинисати бојење производа скупова грана дрвета $T_1, \ldots, T_d$.

припада филтеру F. Пошто је F неглавни филтер, постоји бесконачно много вредности $n \in U$ таквих да је $n \geqslant m$. Изаберимо било које такво n и докажимо да скупови

$$D_i := \{v \in T_i(m) \mid (\exists b \in A_i)\psi(T_i, b, n, v)\}, \quad i \in \{1, \dots, d\}$$

испуњавају наведене услове.

На основу избора скупова $A_1, \dots, A_d$, за ма које i и $u \in T_i(m)$ које је изнад t_i у дрвету T_i, постоји $b \in A_i$ тако да важи $\psi(T_i, b, m, u)$, па је за w такво да важи $\psi(T_i, b, n, w)$ испуњено $w \in D_i$. Према томе, скуп D_i је (m, n)-густ изнад t_i.

Изаберимо произвољне $v_1 \in D_1, \dots, v_d \in D_d$. На основу избора скупова $D_1, \dots, D_d$, постоје $b'_1, \dots, b'_d$ из скупова $A_1, \dots, A_d$ тим редом, тако да за свако i важи да је v_i чвор гране b'_i дрвета T_i на висини n. На основу избора природног броја n важи $n \in U(b'_1, \dots, b'_d)$. На основу начина на који је скуп $U(b'_1, \dots, b'_d)$ дефинисан, важи $f(v_1, \dots, v_d) = e$.

9.1.3 Важење принципа G у Коеновом симетричном моделу

Принцип G у општем случају важи у моделу N који задовољава аксиоме ZF + BPI. Самим тим, Халперн-Лојхлијева теорема такође важи у моделу N.

За било који пример дрвета и бојења њиховог производа се модел M може изабрати тако да тај пример припада моделу $M \subseteq N$. Због тога и чињенице да модел N задовољава аксиоме ZF + BPI, које су довољне за извођење Халперн-Лојхлијеве теореме из G, значајна је следећа теорема.

Теорема 119 *Важи* $N \models$ G.

Доказ: Нека су $T_1, \dots, T_d$ ма која дрвета у N и нека су $S_1, \dots, S_n$ ма који скупови из N такви да важи

$$S_1 \cup \dots \cup S_n = [T_1] \times \dots \times [T_d].$$

Изаберимо Коенове гране $b_1, \dots, b_d$ дрвета $T_1, \dots, T_d$ тим редом, које одговарају различитим елементима скупа

$$C \setminus \Big(\big(\bigcup_{i=1}^{d} F_1(T_i) \big) \cup \big(\bigcup_{i=1}^{n} F_1(S_i) \big) \Big).$$

Изаберимо i за које важи

$$\langle b_1, \dots, b_d \rangle \in S_i.$$

Према леми о непрекидности, постоје чворови $v_1, \dots, v_d$ на гранама $b_1, \dots, b_d$ тим редом, тако да за ма које Коенове гране $b'_1, \dots, b'_d$ које садрже чворове $v_1, \dots, v_d$ важи $\langle b'_1, \dots, b'_d \rangle \in S_i$. За свако i нека је E_i скуп свих Коенових грана дрвета T_i, које садрже чвор v_i. Скупови $E_1, \dots, E_d$ су негде густи у дрветима $T_1, \dots, T_d$ тим редом, па је скуп $E_1 \times \dots \times E_d \subseteq S_i$ негде густ. $\square$

Још једно извођење Халперн-Лојхлијеве теореме из BPI у N

Подсетимо се да према напомени датој на почетку доказа теореме 111, општи случај Халперн-Лојхлијеве теореме се своди на случај множења савршених дрвета.

Изаберимо било који пример дрвета и бојења њиховог производа. Можемо одабрати пребројив транзитиван модел M тако да обухвати тај пример. У моделу N важи ZF + BPI + G, па самим тим и Халперн-Лојхлијева теорема. Пример чворова и скупова изнад њих који испуњавају услове са становишта модела, испуњаваће их и са становишта универзума, јер су услови апсолутни за транзитивне моделе.

9.2 Сагласност принципа PG са ZFC

Докажимо да принцип PG важи и у важном моделу који задовољава ZFC аксиоме. Пре тога ћемо увести појам Δ^d-система и доказати уопштење теореме 110.

Дефиниција 2 Нека су $X_1, \ldots, X_d, D$ и Y скупови, p пресликавање скупа $X_1 \times \cdots \times X_d$ у скуп парцијалних функција из D у Y и $r_1, \ldots, r_d$ парцијалне функције из D у Y такве да важи

1) $r_1 \subseteq \cdots \subseteq r_d$,

2) за свако $k < d$ и све $x_1 \in X_1, \ldots, x_d \in X_d$ важи да скуп

$$\{\big(\bigcup\{p(y_1, \ldots, y_d) \mid \vec{y} \in X_1 \times \cdots \times X_d \wedge y_k = x_k \wedge \cdots \wedge y_d = x_d\}\big) \cap r_{k+1} \mid x_k \in X_k\}$$

образује Δ-систем са кореном r_k,

3) скуп

$$\{\bigcup\{p(y_1, \ldots, y_d) \mid \vec{y} \in X_1 \times \cdots \times X_d \wedge y_d = x_d\} \mid x_d \in X_d\}$$

образује Δ-систем са кореном r_d,

4) за свако $k < d$ вредност $p(x_1, \ldots, x_d) \cap r_{k+1}$ зависи само од $x_1, \ldots, x_k$,

5) за свако q постоје скупови $F_1, \ldots, F_d$ кардиналности не веће од $|q|$ тако да за свако $k \leqslant d$ и $\vec{x} \in X_1 \times \cdots \times X_d$ важи следеће:

$$(x_k \notin F_k \wedge \cdots \wedge x_d \notin F_d) \Rightarrow (\mathrm{dom}(p(\bar{x})) \cap q \subseteq \mathrm{dom}(r_k)).$$

онда кажемо да је $\langle p, X_1, \ldots, X_d, r_1, \ldots, r_d\rangle$ један Δ^d-систем са кореном r_1. ▲

Очигледно, појам Δ^1-система се поклапа са појмом Δ-система.

Теорема 120 *Нека су κ и λ ма који бесконачни кардинали такви да важи $\kappa^{<\lambda} = \kappa \geqslant \lambda$ и нека су $\kappa_1, \ldots, \kappa_d$ кардинали такви да је $\kappa_1 = \kappa^+$ и да за свако $i < d$ важи $\kappa_{i+1} = \mu_i^+$ за неки регуларан кардинал $\mu_i \geqslant 2^{\kappa_i}$ такав да је $\mu_i^{\kappa_i} = \mu_i$. Нека су $X_1, \ldots, X_d$ скупови кардиналности $\kappa_1, \ldots, \kappa_d$, нека је $D \supseteq X_1 \cup \cdots \cup X_d$ такав да важи $|D| = \kappa_d$ и нека је Y непразан скуп такав да је $|Y| \leqslant \kappa$. Нека је p пресликавање скупа $X_1 \times \cdots \times X_d$ у скуп свих парцијалних функција из D у Y кардиналности мање од λ такво да важи*

$$(\forall x_1 \in X_1, \ldots, x_d \in X_d)\{x_1, \ldots, x_d\} \subseteq \mathrm{dom}(p(x_1, \ldots, x_d)).$$

Тада постоје $X_1', \ldots, X_d'$ и $r_1, \ldots, r_d$ такви да важи следеће:

1) $\langle p, X_1', \ldots, X_d', r_1, \ldots, r_d\rangle$ *је Δ^d-систем,*

2) $\bigwedge_{i=1}^{d}(X_i' \subseteq X_i \wedge |X_i'| = |X_i|)$,

3) $|r_1| < \lambda$ *и* $\bigwedge_{i=2}^{d} |r_i| \leqslant \kappa_{d-1}$,

Уколико су скупови $X_1, \ldots, X_d$ стационарни подскупови својих кардинала, онда се и скупови $X_1', \ldots, X_d'$ могу одабрати да буду стационарни.

Доказ: Претпоставићемо да су скупови $X_1, \dots, X_d$ стационарни подскупови својих кардинала. На основу теореме 110, можемо се ограничити на случај када је $\bigcup p[X_1 \times \cdots \times X_d]$ функција. Нека је $d = 1$. На основу теореме 54 постоји $X \subseteq X_1$ тако да је $|X| = |X_1|$ и да притом скуп $p[X]$ образује Δ-систем са кореном r_1. Очигледно је $|r_1| < \lambda$ и $|\bigcup p[X]| \leqslant |X_1|$. Нека је $d \geqslant 2$. На основу

$$|\mathrm{dom}(\bigcup p[X_1 \times \cdots \times X_d])| \leqslant |X_1 \times \cdots \times X_d|\lambda = \kappa_d,$$

можемо без умањења општости претпоставити да је $|D| = \kappa_d$. За свако $x_d \in X_d$ дефинишимо скуп

$$p'(x_d) = \bigcup \{p(x_1, \dots, x_d) \,|\, x_1 \in X_1, \dots, x_{d-1} \in X_{d-1}\}.$$

Сваком $x_d \in X_d$ можемо придружити скуп

$$p'(x_d) = \bigcup \{p(x_1, \dots, x_d) \,|\, x_1 \in X_1, \dots, x_{d-1} \in X_{d-1}\}.$$

Према теореми 54, постоји стационаран скуп $X \subseteq X_d$ такав да скуп $p'[X]$ образује Δ-систем са неким кореном r_d. Из

$$(\forall x \in X)|p'(x)| \leqslant \kappa_{d-1} \tag{9.1}$$

следи да је $|r_d| \leqslant \kappa_{d-1}$. За свако $\vec{x} \in X_1 \times \cdots \times X_d$ важи

$$x_d \in X \Rightarrow \{x_1, \dots, x_d\} \subseteq \mathrm{dom}(p(x_1, \dots, x_d)) \subseteq \mathrm{dom}(p'(x_d)).$$

Према томе, $x_d \in \mathrm{dom}(p'(x_d))$, одакле следи да је

$$\bigcup \mathrm{dom}(p'[X]) \supseteq X.$$

Одатле и из (9.1) следи да је $|p'[X]| = \kappa_d$, па постоји $X' \subseteq X$ такав да је $|X'| = \kappa_d$ и такав да је функција p' инјекција на скупу X'. Дефинишимо функцију p'' на следећи начин:

$$\mathrm{dom}(p'') = X', \quad p''(x_d)(x_1, \dots, x_{d-1}) = p(x_1, \dots, x_d) \cap r_d.$$

Према индуктивној претпоставци, сваком $x_d \in X$ можемо придружити скупове

$$X'_1(x_d), \dots, X'_{d-1}(x_d) \text{ и } r_1(x_d), \dots, r_{d-1}(x_d),$$

тако да важи исказ теореме примењен на систем

$$\langle p''(x_d), X'_1(x_d), \dots, X_{d-1}(x_d), r_1(x_d), \dots, r_{d-1}(x_d)\rangle.$$

Према теореми 109, постоји стационаран скуп $X'_d \subseteq X$ такав да су функције $X'_1, \dots, X'_{d-1}$, p'' и $r_1, \dots, r_{d-1}$ на скупу X'_d константно једнаке неким вредностима, које ћемо обележити истим ознакама као те функције.

Функција r_{d-1} је корен Δ-система скупа функција које су рестрикције функције r_d. Према томе, $r_{d-1} \subseteq r_d$ и за све $\vec{x} \in X'_1 \times \cdots \times X'_d$ и $k \leqslant d$ важи

$$p''(x_d)(x_1, \dots, x_{d-1}) \cap r_k = p(\bar{x}) \cap r_d \cap r_k = p(\bar{x}) \cap r_k.$$

Докажимо да је $\langle p, X'_1, \dots, X'_d, r_1, \dots, r_d\rangle$ један Δ^d-систем. Нека је $k < d$ и $\bigwedge_{i=k+1}^{d} x_i \in X'_i$. Ако је $k < d - 1$, онда према услову 2 из дефиниције Δ^{d-1}-система следећи скуп је Δ-систем са кореном r_k:

$$\{(\bigcup \{p''(x_d)(y_1, \dots, y_{d-1}) \,|\, y_1 \in X_1, \dots, y_{d-1} \in X_{d-1}, \bigwedge_{i=k}^{d-1} y_i = x_i\}) \cap r_{k+1} \,|\, x_k \in X_k\}.$$

Овај скуп је једнак следећем:

$$\{\big(\bigcup\{p''(y_d)(y_1,\dots,y_{d-1})\,|\,\vec{y}\in X_1\times\cdots\times\in X_d\wedge y_k=x_k\wedge\cdots\wedge y_d=x_d\}\big)\cap r_{k+1}\,|\,x_k\in X_k\},$$

$$\{\big(\bigcup\{p(\bar{y})\cap r_d\,|\,\vec{y}\in X_1\times\cdots\times\in X_d\wedge y_k=x_k\wedge\cdots\wedge y_d=x_d\}\big)\cap r_{k+1}\,|\,x_k\in X_k\},$$

$$\{\big(\bigcup\{p(\bar{y})\,|\,\vec{y}\in X_1\times\cdots\times\in X_d\wedge y_k=x_k\wedge\cdots\wedge y_d=x_d\}\big)\cap r_d\cap r_{k+1}\,|\,x_k\in X_k\},$$

$$\{\big(\bigcup\{p(\bar{y})\,|\,\vec{y}\in X_1\times\cdots\times\in X_d\wedge y_k=x_k\wedge\cdots\wedge y_d=x_d\}\big)\cap r_{k+1}\,|\,x_k\in X_k\}.$$

Према томе, услов 2 из дефиниције Δ^d-система је испуњен за $k<d-1$. На основу услова 2 из дефиниције Δ^{d-1}-система, за свако $x_d\in X'_d$ следећи скуп је Δ-систем са кореном r_{d-1}:

$$\{\bigcup\{p''(x_d)(y_1,\dots,y_{d-1})\,|\,y_1\in X'_1,\dots,y_{d-1}\in X'_{d-1},\,y_{d-1}=x_{d-1}\}\,|\,x_{d-1}\in X_{d-1}\}.$$

Овај скуп је једнак следећем:

$$\{\bigcup\{p''(y_d)(y_1,\dots,y_{d-1})\,|\,\vec{y}\in X'_1\times\cdots\times X'_d,\,y_{d-1}=x_{d-1},y_d=x_d\}\,|\,x_{d-1}\in X_{d-1}\},$$

$$\{\bigcup\{p(\bar{y})\cap r_d\,|\,\vec{y}\in X'_1\times\cdots\times X'_d,\,y_{d-1}=x_{d-1},y_d=x_d\}\,|\,x_{d-1}\in X_{d-1}\},$$

$$\{\big(\bigcup\{p(\bar{y})\,|\,\vec{y}\in X'_1\times\cdots\times X'_d,\,y_{d-1}=x_{d-1},y_d=x_d\}\big)\cap r_d\,|\,x_{d-1}\in X_{d-1}\}.$$

Према томе, услов 2 из дефиниције Δ^d-система важи за $k=d-1$. На основу дефиниција r_d и p', као и на основу индуктивне претпоставке, услов 3 из дефиниције Δ^d-система је такође испуњен.

Нека је $k<d$ и нека су $\vec{x},\vec{y}\in X'_1\times\cdots\times X'_d$ такви да важи $\bigwedge_{i=1}^{k}x_i=y_i$. Тада

$$p''(x_d)(x_1,\dots,x_{d-1})\cap r_{k+1}=p''(y_d)(y_1,\dots,y_{d-1})\cap r_{k+1}$$

важи на основу константности функције p'' (у случају када је $k=d-1$), док услов 4 из дефиниције Δ^d-система важи на основу индуктивне претпоставке (у случају када је $k<d-1$). Према томе, важи $p(\bar{x})\cap r_{k+1}=p(\bar{y})\cap r_{k+1}$, што значи да је испуњен услов 4 из дефиниције Δ^d-система.

Изаберимо произвољне $\vec{x}\in X'_1\times\cdots\times X'_d$. Пошто скуп $p'[X'_d]$ образује Δ-систем са кореном r_d, функције $p(\bar{x})$ и r_d су рестрикције исте функције $p'(x_d)$. Према томе, важи

$$\mathrm{dom}(p(\bar{x})\cap r_d)=\mathrm{dom}(p(\bar{x}))\cap\mathrm{dom}(r_d).$$

Такође, $r_{k+1}\subseteq r_d$ важи за свако $k<d$, па су функције $p(\bar{x})$ и r_{k+1} такође рестрикције исте функције $p'(x_d)$, па важи

$$\mathrm{dom}(p(\bar{x})\cap r_{k+1})=\mathrm{dom}(p(\bar{x}))\cap\mathrm{dom}(r_{k+1}).$$

Изаберимо произвољно $q\subseteq D$. Пошто је функција p' инјекција на скупу X'_d и скуп $p'[X'_d]$ је Δ-систем са кореном r_d, постоји $F_d\subseteq X'_d$ тако да важи $|F_d|\leqslant|q|$ и

$$(\forall\vec{x}\in X'_1\times\cdots\times X'_d)(x_d\notin F_d\Rightarrow\mathrm{dom}(p(\bar{x}))\cap q\subseteq\mathrm{dom}(r_d)).\tag{9.2}$$

На основу индуктивне претпоставке, постоје подскупови $F_1,\dots,F_{d-1}$ скупова $X'_1,\dots,X'_{d-1}$, који немају више од $|q|$ елемената, и такви да за све $k<d$ важи

$$(\forall\vec{x}\in X'_1\times\cdots\times X'_d)(\bigwedge_{i=k}^{d-1}x_i\notin F_i\Rightarrow\mathrm{dom}(p''(x_d)(x_1,\dots,x_{d-1}))\cap q\subseteq\mathrm{dom}(r_k)),$$

односно

$$(\forall\vec{x}\in X_1'\times\cdots\times X_d')(\bigwedge_{i=k}^{d-1} x_i\notin F_i\Rightarrow \mathrm{dom}(p(\bar{x})\cap r_d)\cap q\subseteq \mathrm{dom}(r_k)),$$

то јест

$$(\forall\vec{x}\in X_1'\times\cdots\times X_d')(\bigwedge_{i=k}^{d-1} x_i\notin F_i\Rightarrow \mathrm{dom}(p(\bar{x}))\cap\mathrm{dom}(r_d)\cap q\subseteq \mathrm{dom}(r_k)). \tag{9.3}$$

Формула

$$(\forall\vec{x}\in X_1'\times\cdots\times X_d')(\bigwedge_{i=k}^{d} x_i\notin F_i\Rightarrow \mathrm{dom}(p(\bar{x}))\cap q\subseteq \mathrm{dom}(r_k))$$

важи за $k=d$ на основу (9.2), док у случају $k<d$ следи из (9.2) и (9.3). □

Претходна теорема има и финитарну варијанту, коју овде не наводимо јер није релевантна за теорију скупова.

Теорема 121 *Нека је M пребројив транзитиван модел. Нека је θ_0 непребројив регуларан кардинал у M и за свако $i\in\omega$ нека је $\theta_{i+1}=2^{\theta_i}$ у M. Нека је $\lambda=\sup_i\theta_i$. Тада у генеричком раширењу $M[G]$ добијеном додавањем барем λ Коенових реалних бројева важи $PG(\lambda)$. Штавише, елементи негде густих скупова из формулације* PG *принципа ће се састојати само од независних Коенових реалних бројева, осим у случају када се негде густ скуп своди на изоловану тачку простора.*

Доказ: Општи случај PG принципа се своди на специјалан случај множења савршених простора јер ако неки простор има изоловану тачку, онда га можемо заменити простором који се састоји само од те тачке, чиме се број простора који се множе смањује за један.

Такође, пошто је Беров простор савршен и густо се утапа у сваки савршен простор, тврђење је довољно доказати у случају степеновања Беровог простора.

Нека је $\mathcal{P}=\langle P,\leqslant\rangle=\mathcal{N}(\lambda)$. Генерички објекат ће представљати фамилију бесконачних низова природних бројева индексирану ординалима из скупа λ. Дефинишимо име

$$\dot{b}:=\{\langle q,\langle\sigma,\langle n,k\rangle\rangle\check{}\rangle\mid \sigma\in\mathrm{dom}(q)\wedge n\in\mathrm{dom}(q(\sigma))\wedge q(\sigma)(n)=k\}.$$

Другим речима, $\dot{b}$ је име за функцију која сваком $\sigma\in\lambda$ придружује генерички низ на месту σ. Претпоставимо да $M[G]\models\neg PG(\lambda)$. Тада постоје $p_0\in G$, име $\dot{f}$, неко $d\in\omega\setminus\{0\}$ и $\mu<\lambda$ такви да важи

$$M\models p_0\Vdash \dot{f}:({}^{\omega}\omega)^d\longrightarrow\mu$$

и да у моделу M услов p_0 форсира да не постоје негде густи скупови $D_1,\ldots,D_d$ у Беровом простору ${}^{\omega}\omega$ чији су елементи међусобно независни Коенови реални бројеви (осим у случају када се негде густ скуп своди на тачку) и при чему је $\dot{f}$ константно на скупу $D_1\times\cdots\times D_d$. Изаберимо $j\in\omega$ такво да је $\theta_j>\mu$. Нека је $\kappa_0=\theta_i$ и $\kappa_{i+1}=(2^{\kappa_i})^+$ у M за све $i\in\omega$. За сваки кардинал κ важи $\kappa<2^\kappa<(2^\kappa)^+\leqslant 2^{2^\kappa}$. Према томе, $\sup_i\kappa_i=\lambda$.

Сваком $\vec{\sigma}\in\kappa_1\times\cdots\times\kappa_d$ придружимо услов $p(\bar{\sigma})\leqslant p_1$ и неко $k(\bar{\sigma})\in\mu$ такво да важи

$$M\models p(\bar{\sigma})\Vdash_P \dot{f}(\dot{b}(\sigma_1),\ldots,\dot{b}(\sigma_d))=k(\bar{\sigma}),\quad \{\sigma_1,\ldots,\sigma_d\}\subseteq\mathrm{dom}(p(\bar{\sigma})),$$

при чему услов $p(\bar{\sigma})$ сваком елементу свог домена придружује низ исте дужине $l(\bar{\sigma})\in\omega$.

За свако $i\leqslant d$ дефинишимо функцију c_i чији је домен $\kappa_1\times\cdots\times\kappa_d$, такву да за свако $\vec{\sigma}$ из домена важи

$$c_i(\bar{\sigma})=p(\bar{\sigma})(\sigma_i).$$

Другим речима, $c_i(\bar{\sigma})$ је информација о генеричкој грани на месту σ_i, коју услов носи $p(\bar{\sigma})$. Дефинишимо функцију g са истим доменом такву да важи

$$g(\bar{\sigma}) = \langle k(\bar{\sigma}), l(\bar{\sigma}), c_1(\bar{\sigma}), \ldots, c_d(\bar{\sigma})\rangle.$$

Напоменимо да је $|\mathrm{range}(g)|^M < \kappa_0$. Према теоремама 109 и 110, у моделу M постоје бесконачни подскупови $H_1, \ldots, H_d$ скупова $\kappa_1, \ldots, \kappa_d$ такви да важи $|H_i|^M = \kappa_i$ за све i, да је функција g на скупу $H_1 \times \cdots \times H_d$ константно једнака неком $\langle k, l, c_1, \ldots, c_d\rangle$, као и да су сви услови из скупа $p[H_1 \times \cdots \times H_d]$ сагласни. Означимо $H_1 \times \cdots \times H_d$ са H.

На основу теореме 120, скупови $H_1, \ldots, H_d$ могу бити одабрани тако да постоје $r_1, \ldots, r_d$ у M тако да важи следеће:

1) $\langle p, H_1, \ldots, H_d, r_1, \ldots, r_d\rangle$ је Δ^d-систем,

2) $|r_1| < \aleph_0$ и $\bigwedge_{i=2}^d |r_i|^M = \kappa_{i-1}$.

За дати услов q_0 означићемо са $F_1(q_0), \ldots, F_d(q_0)$ скупове који су у симболици из дефиниције Δ^d-система означени са $F_1, \ldots, F_d$ за $q = \mathrm{dom}(q_0)$. Нека је

$$\dot{T} := \{\langle p(\bar{\sigma}), \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_d\rangle\check{}\,\rangle \mid \vec{\sigma} \in H\}.$$

Докажимо следеће:

$$M \models r_1 \Vdash_P (\forall \vec{\sigma} \in \dot{T})\dot{f}(\dot{b}(\sigma_1), \ldots, \dot{b}(\sigma_d)) = k.$$

У супротном, постоје $\vec{\sigma} \in H$ и $q_0 \leqslant r_1$ такви да важи

$$M \models q_0 \Vdash_P f(\dot{b}(\sigma_1), \ldots, \dot{b}(\sigma_d)) \neq k, \quad M \models q_0 \Vdash_P \vec{\sigma} \in \dot{T}.$$

Претходна формула значи да је $q_0 \leqslant p(\bar{\sigma})$, па важи

$$M \models q_0 \Vdash_P \dot{f}(\dot{b}(\sigma_1), \ldots, \dot{b}(\sigma_d)) = k,$$

што је противречност. За произвољан коначан низ s природних бројева дефинишимо $[s]$ као скуп свих бесконачних низова x природних бројева таквих да важи $s \subseteq x$.

Изаберимо произвољне бесконачне скупове $I_1, \ldots, I_d \in M$ за које важи $I_k \subseteq H_i$ за свако i. Означимо $I_1 \times \cdots \times I_d$ са I. Нека су $s_1, \ldots, s_d$ коначни низови природних бројева такви да важи $s_1 \supseteq c_1, \ldots, s_d \supseteq c_d$. Докажимо следеће:

$$M \models r_1 \Vdash_P (\exists \vec{\sigma} \in I \cap \dot{T})\langle \dot{b}(\sigma_1), \ldots, \dot{b}(\sigma_d)\rangle \in [s_1] \times \cdots \times [s_d]. \tag{9.4}$$

У супротном постоји $q_0 \leqslant r_1$ такво да важи

$$M \models q_0 \Vdash_P \neg(\exists \vec{\sigma} \in I \cap \dot{T})\langle \dot{b}(\sigma_1), \ldots, \dot{b}(\sigma_d)\rangle \in [s_1] \times \cdots \times [s_d].$$

Изаберимо $\vec{\tau}$ из скупа I такво да важи $\bigwedge_{i=1}^d \tau_i \notin (F_i(q_0) \cup \mathrm{dom}(q_0))$. На основу $p(\bar{\tau}), q_0 \leqslant r_1$ и $\mathrm{dom}(p(\bar{\tau})) \cap \mathrm{dom}(q_0) \subseteq \mathrm{dom}(r_1)$ важи $p(\bar{\tau}) || q_0$.

За свако i је информација коју услов $p(\bar{\tau})$ носи о Коеновом реалном броју на месту τ_i једнака c_i. На основу начина избора елемента τ_i, услов q_0 не садржи никакву информацију о Коеновом реалном броју на том месту.

Нека је q_1 највећи услов испод $p(\bar{\tau})$ који за свако i садржи информацију s_i о Коеновом реалном броју на месту τ_i. Тада важи $q_1 \leqslant p(\bar{\tau})$ и $q_1 || q_0$. Изаберимо услов q_2 такав да важи $q_2 \leqslant q_0, q_1$. Због $q_2 \leqslant p(\bar{\tau})$, важи

$$M \models q_2 \Vdash_P \langle \tau_1, \ldots, \tau_d\rangle \in \dot{T}.$$

Пошто је $q_2 \leqslant q_1$, важи

$$M \models q_2 \Vdash_P \bigwedge_{i=1}^{d} \dot{b}(\tau_i) \in [s_i],$$

што је у супротности са $q_2 \leqslant q_0$ и избором услова q_0. Ова противречност доказује да важи (9.4).

Претпоставимо да је $d > 1$. Нека је s_d произвољан коначан низ природних бројева такав да важи $s_d \supseteq c_d$. Докажимо да у моделу M услов r_1 форсира да за сваки коначан подскуп F скупа

$$\{\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{d-1} \rangle) \mid (\exists \sigma_d)\vec{\sigma} \in \dot{T} \cap I\}$$

постоји $\sigma_d \in I_d$ такво да за свако $\langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{d-1}\rangle \in F$ важи $\dot{b}(\sigma_d) \in [s_d]$ и $\vec{\sigma} \in \dot{T} \cap I$. У супротном, постоји $q_0 \leqslant r_1$ које у моделу M форсира негацију овог исказа и одлучује скуп F. Нека је

$$F = \{\langle \sigma_1^1, \ldots, \sigma_{d-1}^1\rangle, \ldots, \langle \sigma_1^m, \ldots \sigma_{d-1}^1\rangle\}.$$

Без умањења општости можемо претпоставити да за неке одређене $\sigma_d^1, \ldots, \sigma_d^m$ услов q_0 форсира да за све i важи $\langle \sigma_1^i, \ldots, \sigma_d^i\rangle \in \dot{T} \cap I$. Из

$$M \models q_0 \Vdash_P \bigwedge_{i=1}^{m} \langle \sigma_1^i, \ldots, \sigma_d^i\rangle \in I,$$

следи

$$\langle \sigma_1^1, \ldots, \sigma_d^1\rangle, \ldots, \langle \sigma_1^m, \ldots, \sigma_d^m\rangle \in I.$$

На основу

$$M \models q_0 \Vdash_P \bigwedge_{i=1}^{m} \langle \sigma_1^i, \ldots, \sigma_d^i\rangle \in \dot{T}$$

важи

$$q_0 \leqslant p(\sigma_1^1, \ldots, \sigma_d^1), \ldots, p(\sigma_1^m, \ldots, \sigma_d^m).$$

Изаберимо $\sigma_d \in I_d \setminus (F_d(q_0) \cup \mathrm{dom}(q_0))$. За свако i важи

$$\mathrm{dom}(p(\sigma_1^i, \ldots, \sigma_{d-1}^i, \sigma_d)) \cap \mathrm{dom}(q_0) \subseteq \mathrm{dom}(r_d).$$

Према томе,

$$\begin{aligned}
\mathrm{dom}(p(\sigma_1^i, \ldots, \sigma_{d-1}^i, \sigma_d)) \cap \mathrm{dom}(q_0) &= \mathrm{dom}(p(\sigma_1^i, \ldots, \sigma_{d-1}^i, \sigma_d)) \cap \mathrm{dom}(r_d) \cap \mathrm{dom}(q_0) \\
&= \mathrm{dom}(p(\sigma_1^i, \ldots, \sigma_{d-1}^i, \sigma_d^i)) \cap \mathrm{dom}(r_d) \cap \mathrm{dom}(q_0),
\end{aligned}$$

што заједно са $q_0 \leqslant p(\sigma_1^i, \ldots, \sigma_d^i)$ и

$$p(\sigma_1^i, \ldots, \sigma_{d-1}^i, \sigma_d) \restriction \mathrm{dom}(r_d) = p(\sigma_1^i, \ldots, \sigma_d^i) \restriction \mathrm{dom}(r_d)$$

имплицира да је $q_0 || p(\sigma_1^i, \ldots, \sigma_{d-1}^i, \sigma_d)$. За услов q_1 дефинисан на следећи начин

$$q_1 := \inf \{p(\sigma_1^i, \ldots, \sigma_{d-1}^i, \sigma_d) \mid i \in \{1, \ldots, m\}\}$$

важи $q_0 || q_1$. Информација о Коеновом реалном броју на месту σ_d коју носи услов q_1 је c_d. Из $\sigma_d \notin \mathrm{dom}(q_0)$ можемо закључити да q_0 не садржи никакву информацију о Коеновом реалном броју на том месту. Према томе, постоји услов $q_2 \leqslant q_0, q_1$ такав да информација коју q_2 садржи о Коеновом реалном броју на месту σ_d је s_d. Дакле, важи

$$M \models q_2 \Vdash_P (\sigma_d \in I_d \wedge \dot{b}(\sigma_d) \in [s_d]),$$

као и
$$M \models q_2 \Vdash_P \langle \sigma_1^1, \dots, \sigma_{d-1}^1, \sigma_d \rangle, \dots, \langle \sigma_1^1, \dots, \sigma_{d-1}^1, \sigma_d \rangle \in \dot{T} \cap I,$$
што је противречност. Очигледно, аналоган исказ важи ако скупове $\kappa_1, \dots, \kappa_d$ заменимо скуповима $\kappa_{n_1}, \dots, \kappa_{n_d}$ за неке $n_1, \dots, n_d \in \omega$ за које је $n_1 < \cdots < n_d$.

Штавише, аналоган исказ важи ако заменимо скупове $\kappa_1, \dots, \kappa_d$ скуповима $\kappa_{n_{\pi(1)}}, \dots, \kappa_{n_{\sigma_d}}$ за неке различите $n_1, \dots, n_d \in \omega$ и пермутацију π скупа $\{1, \dots, d\}$ такву да је $n_{\sigma(1)} < \cdots < n_{\sigma(d)}$.

Изаберимо пермутације $\pi_1, \dots, \pi_d$ скупа $\{1, \dots, d\}$ закве да за свако i важи $\pi_i(d) = i$. Изаберимо $n_j^i \in \omega$ за $i, j \in \{1, \dots, d\}$ такво да за све $i \in \{1, \dots, d\}$ важи
$$\pi_i(n_1^i) < \cdots < \pi_i(n_d^i),$$
као и да за све $i, j \in \{1, \dots, d\}$ за које је $i \neq d$ важи
$$\pi_i(n_j^i) \leqslant \pi_{i+1}(n_j^{i+1}).$$

У моделу M можемо одабрати скупове $H_1^d \subseteq \kappa_{n_1^d}, \dots, H_d^d \subseteq \kappa_{n_d^d}$ такве да је $\bigcup p[H_1^d \times \cdots \times H_d^d]$ функција и тако да важи $|H_j^d|^M = \kappa_{n_j^d}$ и да добијемо неки Δ^d-систем са кореном t_d. Тада добијамо неке $c_1, \dots, c_d, l$ и k и те вредности се неће мењати јер ћемо само сужавати систем.

За свако $i < d$ можемо у моделу M изабрати неке скупове $H_1^i \subseteq H_1^{i+1}, \dots, H_d^i \subseteq H_d^{i+1}$ такве да за све j важи $|H_j^i|^M = \kappa_{n_j^i}$ и где ћемо добити неки Δ^d-систем са кореном t_i.

Наравно, корени $t_1, \dots, t_d$ су рестрикције функције $\bigcup p[H_1^d \times \cdots \times H_d^d]$, па је $t := t_1 \cup \cdots \cup t_d$ функција и штавише услов.

Изаберимо у моделу M бесконачне скупове $I_1 \subseteq H_1^1, \dots, I_d \subseteq H_d^1$ и означимо $I_1 \times \cdots \times I_d$ са I. За свако $i \in \{1, \dots, d\}$ нека је $\langle s_j^i : j \in \omega \rangle$ низ свих коначних низова u природних бројева таквих да важи $u \supseteq c_i$. Нека је H неки генерички филтер коме припада услов t.

Следећу конструкцију изводимо у моделу $M[H]$. Најпре изаберимо $\sigma_0^1 \in I_1, \dots, \sigma_0^d \in I_d$ такве да важи
$$\langle \sigma_0^1, \dots, \sigma_0^d \rangle \in \dot{T}_H$$
и
$$\dot{b}_H(\sigma_0^1) \in [s_0^1], \dots, \dot{b}_H(\sigma_0^d) \in [s_0^d].$$

Претпоставимо да су $\sigma_i^1, \dots, \sigma_i^d$ дефинисани за неко $i \in \omega$. Изаберимо $\sigma_{i+1}^1 \in I_1$ тако да важи $\dot{b}_H(\sigma_{i+1}^1) \in [s_{i+1}^1]$ и тако да (ако је $d \geqslant 2$) за све $m_2, \dots, m_d \leqslant i$ важи
$$\langle \sigma_{i+1}^1, \sigma_{m_2}^2, \dots, \sigma_{m_d}^d \rangle \in \dot{T}_H.$$

Претпоставимо да су $\sigma_{i+1}^1, \dots, \sigma_{i+1}^j$ дефинисани за неко $j < d$. Изаберимо $\sigma_{i+1}^{j+1} \in I_{j+1}$ тако да важи $\dot{b}_H(\sigma_{i+1}^{j+1}) \in [s_{i+1}^{j+1}]$ и тако да (ако је $j+1 < d$) за све $m_1, \dots, m_d \in \omega$ важи да ако је
$$(\forall k < j+1) m_k \leqslant i+1 \ \wedge\ m_{j+1} = i+1 \ \wedge\ (\forall k > j+1) m_k \leqslant i,$$
онда важи $\langle \sigma_{m_1}^1, \dots, \sigma_{m_d}^d \rangle \in \dot{T}_H$. Скупови $D_1, \dots, D_d$ дефинисани са
$$D_i := \{\dot{b}_H(\sigma_j^i) \mid j \in \omega\}$$
су негде густи и функција $\dot{f}_H$ је константна на скупу $D_1 \times \cdots \times D_d$, што је у супротности са $p_0 \in H$. $\square$

Теорема 122 *Нека је M пребројив транзитиван модел и $M[G]$ његово генеричко раширење које се добија додавањем $(\beth_\alpha)^M$ Коенових реалних бројева, где је $\alpha \in M$ гранични ординал који је у моделу M непребројиве кофиналности. Тада $M[G] \models \mathrm{PG}(2^{\aleph_0})$.*

Доказ: На основу теореме 93 важи $(2^{\aleph_0})^{M[G]} = (\beth_\alpha)^M$. Нека је κ произвољан бесконачан кардинал у M који је мањи од $(\beth_\alpha)^M$. Изаберимо $\beta < \alpha$ такво да важи $\kappa < (\beth_\beta)^M$. Пошто је ординал α у моделу M непребројиве кофиналности, важи $\beta + \omega < \alpha$, па према теореми 121 важи $M[G] \models$ PG(κ^+). □

Теорема 123 *Нека је M пребројив транзитиван модел и $M[G]$ његово генеричко раширење које се добија додавањем барем $(\beth_\omega)^M$ Коенових реалних бројева. Тада $M[G] \models$ PG$((\beth_\omega)^M)$.*

Доказ: Доказ је сасвим сличан доказу теореме 122 и препушта се читаоцу. □

Из теореме 122 следи Халперн-Лојхлијева теорема, на пример на начине описане у 5.8 и тиме се добија нов доказ Халперн-Лојхлијеве теореме.

9.3 Сродни резултати у ZFC

Као што је доказано у [19] и [12], принцип PG није сагласан са ZFC$+$CH и самим тим се не може извести из ZFC аксиома.

Теорема 124 *Нека су $\mathcal{P}_1 = \langle P_1, \rho_1\rangle, \ldots, \mathcal{P}_d = \langle P_d, \rho_d\rangle$ пољски простори и $f : P_1 \times \cdots \times P_d \longrightarrow \omega$ такво да је за свако $n \in \omega$ скуп $f^{-1}[\{n\}]$ има Берово својство. Тада постоје негде густи скупови $D_1, \ldots, D_d$ простора $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_d$ такви да је функција f на скупу $D_1 \times \cdots \times D_d$ константна.*

Доказ: На основу аналогних напомена као на почетку доказа теореме 121, општи случај се своди на случај степена Беровог простора.

Претпоставимо супротно и изаберимо неки контрапример. Функција f заправо прави једну највише пребројиву партицију свог домена на делове са Беровим својством.

Изаберимо пребројив транзитиван модел M који садржи кодове отворених скупова који представљају апроксимације елемената партиције, као и кодове нигде густих затворених скупова који учествују у мајорирању грешака апроксимација. Нека је $M[G]$ генеричко раширење модела M додавањем $(\beth_\omega)^M$ Коенових реалних бројева.

Изаберимо функцију бојења g која све тачке уније свих затворених нигде густих скупова који учествују у мајорирању грешака апроксимација боји у једну засебну боју, док све остале тачке боји исто као функција f.

Према теореми 121, у моделу $M[G]$ ће постојати негде густи скупови $D_1, \ldots, D_d$ који се састоје од независних Коенових реалних бројева и такви да је функција g константна на скупу $D_1 \times \cdots \times D_d$.

Пошто се композиција коначно много Коенових реалних бројева понаша као један Коенов реалан број, а коначан степен Беровог простора је хомеоморфан Беровом простору, тачке скупа $D_1 \times \cdots \times D_d$ у универзуму не припадају ниједном затвореном нигде густом скупу који има код у M, па ће и функција f на том скупу бити константна. □

Једнодимензиони случај ове теореме је ништа друго до уопштење Берове теореме о категоријама у случају пољских простора са затворених скупова на скупове са Беровим својством.

Следећа теорема се односи на дрвета код којих за сваки чвор важи да је на коначној висини и да има барем једног, али највише пребројиво много непосредних следбеника. Докажимо неке познате чињенице о таквим дрветима. Под кондензационом граном ћемо подразумевати грану такву да су све њене околине непребројиве. Докажимо да кроз чвор v пролази барем једна кондензациона грана акко је скуп свих грана које пролазе кроз чвор v непребројив.

Ако је b кондензациона грана дрвета T, која пролази кроз чвор v дрвета T, онда је скуп свих грана дрвета T које пролазе кроз чвор v непребројив јер је то једна од околина гране b.

Претпоставимо сада да је v чвор дрвета T кроз који пролази непребројиво много грана. Нека је $w_0, \ldots, w_l$ пут у дрвету T од корена w_0 до чвора $v = w_l$. Дефинишимо чвор w_i за $i > l$ на следећи начин: Ако кроз чвор w_{i-1} пролази непребројиво много грана, онда нека је w_i непосредни следбеник чвора w_{i-1} такав да кроз чвор w_i пролази непребројиво много грана.

Такав избор је могућ због пребројивости скупа непосредних следбеника чвора w_{i-1}. па ће за свако i важити да кроз чвор w_i пролази непребројиво много грана. Према томе, скуп $\{w_i \mid i \in \omega\}$ је кондензациона грана која пролази кроз чвор $v = w_l$. Применом доказаног на случај када је v корен дрвета T долазимо до закључка да је скуп грана дрвета T непребројив акко дрво T има барем једну кондензациону грану.

Докажимо да у свакој околини кондензационе гране b дрвета T постоје друге кондензационе гране дрвета T. У супротном, можемо одабрати чвор v гране b такав да у скупу U свих грана које пролази кроз чвор v нема других кондензационих грана дрвета T. Према претходно доказаном, сваки базни отворени подскуп скупа $U \setminus \{b\}$ је највише пребројив, па пошто је база топологије највише пребројива, онда је и скуп $U \setminus \{b\}$, а самим тим и скуп U највише пребројив, супротно начину избора гране b.

Под кондензационим чвором дрвета T подразумевамо чвор дрвета T кроз који пролази непребројиво много грана. Дакле, грана дрвета T је кондензациона у дрвету T акко су сви њени чворови кондензациони у дрвету T. Према претходно доказаном, чвор дрвета T је кондензациони у дрвету T акко припада барем једној кондензационој грани дрвета T.

Кондензационо поддрво дрвета T је поддрво дрвета T које се састоји од кондензационих чворова дрвета T. Према претходном, скуп кондензационих грана дрвета T једнак је скупу грана кондензационог поддрвета дрвета T и кондензационо поддрво дрвета T је непразно акко дрво T има непребројиво много грана. Ако дрво T има непребројиво много грана, онда кондензационо поддрво нема изолованих грана.

Свако дрво без изолованих грана има кардинални број $2^{\aleph_0}$ јер се у њега може утопити пуно бинарно дрво. Одатле можемо закључити да ако кондензационих грана има, онда их има $2^{\aleph_0}$, као и да кроз сваки чвор који није кондензациони пролази барем једна изолована грана. Према томе, кроз сваки чвор пролази или кондензациона грана или изолована грана, па је скуп грана које су или кондензационе или изоловане густ.

Наравно, свака изолована грана је одређена својим први чвором чији сваки потомак има тачно једног непосредног потомка, па пошто је скуп чворова највише пребројив, изолованих грана има највише пребројиво много.

Свако дрво T са наведеним особинама се може на природан начин утопити у Беров простор, тако да је слика домена комплетан потпростор кодомена.

Нека је b било која грана дрвета T. Тада је $e(b) = s$, где је $s : \omega \longrightarrow \omega$ такво да за свако $n \in \omega$ важи следеће: $b(n+1)$ је k-ти непосредни следбеник чвора $b(n)$ (у односу на неки изабрани редослед непосредних потомака чвора $b(n)$), где је $k = s(n) + 1$. Дакле, уколико је $b(n+1)$ први непосредни следбеник чвора $b(n)$, онда је $s(n) = 0$.

Пресликавање e је хомеоморфизам простора $[T]$ на његову слику у релативној топологији. За ма које различите $b_1, b_2 \in [T]$ постоји најмање $n \in \omega$ такво да важи $b_1(n) \neq b_2(n)$ и притом је $n > 0$ јер је корен заједнички почетни чвор свих грана, па важи $e(b_1)(n-1) \neq e(b_2)(n-1)$.

Докажимо непрекидност. Нека је V базна околина кодомена. Тада постоји коначан низ f природних бројева такав да је V скуп свих бесконачних низова s природних бројева таквих да важи $f \subseteq s$. Ако f описује пут у дрвету T од корена до неког чвора v, онда је $e^{-1}[V]$ скуп свих грана дрвета T које пролазе кроз чвор v (што је базни отворен скуп домена). У супротном је $e^{-1}[V] = \emptyset$. Отвореност се доказује на сличан начин као непрекидност.

Докажимо још комплетност слике. Нека је $(b_m)_{m\in\omega}$ било који низ грана дрвета T такав да је низ $(e(b_m))_{m\in\omega}$ Кошијев. За свако $m \in \omega$ важи да је низ $(e(b_m)(n))_{n\in\omega}$ Кошијев, па је због дискретности простора ω почев однекле константно једнак некој вредности $l(m)$. Тада је низ l лимес низа $(e(b_m))_{m\in\omega}$. Нека је $n \in \omega$ произвољно. Изаберимо m_0 такво да за свако $m \geqslant m_0$ важи

$$\langle e(b_m)(0), \ldots, e(b_m)(n)\rangle = \langle l(0), \ldots, l(n)\rangle.$$

Тада низ $l(0),\ldots,l(n)$ описује пут у дрвету T од корена до чвора $v(n) = b_{m_0}(n)$. Из произвољности избора вредности n следи да је низ l слика гране $(v(n))_{n\in\omega}$ при пресликавању e. Овим је доказано да је тополошки простор $[T]$ пољски.

Нека је T било које дрво без изолованих грана и нека је w неко добро уређење његових чворова. Дефинишимо скуп $B_0(w)$ као скуп свих грана b дрвета T таквих да постоји неко n_0 такво да је за свако $n \geqslant n_0$ чвор $b(n+1)$ први од непосредних потомака чвора $b(n)$ у дрвету T у уређењу w. Такође, дефинишимо скуп $B_1(w)$ као куп свих грана b дрвета T таквих да постоји неко n_0 такво да је за свако $n \geqslant n_0$ чвор $b(n+1)$ последњи од непосредних потомака чвора $b(n)$ у дрвету T у добром уређењу w. Гране из скупа $B_0(w)\cup B_1(w)$ зовемо граничним гранама дрвета T у односу на поредак w.

Напоменимо да у дрвету у коме има чворова са бесконачно много непосредних следбеника скуп $B_1(w)$ може бити празан. Са друге стране, скуп $B_0(w)$ је густ јер кроз сваки чвор дрвета T пролази барем једна грана из скупа $B_0(w)$. Такође, скуп $B_0(w)$ је пребројив, скуп $B_1(w)$ највише пребројив и скупови $B_0(w)$ и $B_1(w)$ су дисјунктни.

Докажимо да се за сваки пребројив подскуп S скупа $[T]$ добро уређење w може одабрати тако да скуп S буде дисјунктан са скуповима $B_0(w)$ и $B_1(w)$. Нека је $(m_k)_{k\in\omega}$ низ природних бројева такав да се сваки природан број појављује бесконачно много пута у том низу. То може да буде на пример прва пројекција инверза Канторовог полинома.

Нека је $(b_k)_{k\in\omega}$ набрајање свих елемената скупа S и нека је $(l_k)_{k\in\omega}$ растући низ природних бројева такав да за свако k чвор $b_{m_k}(l_k)$ има више од једног непосредног наследника. Тада се добро уређење w скупа чворова дрвета T може одабрати тако да за свако k чвор $b_{m_{2k+1}}(l_{2k+1}+1)$ буде први непосредни потомак чвора $b_{m_{2k+1}}(l_{2k+1})$, као и да чвор $b_{m_{2k+2}}(l_{2k+2}+1)$ буде други непосредни потомак чвора $b_{m_{2k+2}}(l_{2k+2})$.

Тада за свако $b\in S$ постоји бесконачно много природних бројева l таквих да $b(l+1)$ није први непосредни следбеник чвора $b(l)$, па $b\notin B_0(w)$. Слично томе, за свако $b\in S$ постоји бесконачно много природних бројева l таквих да $b(l+1)$ није последњи непосредни следбеник чвора $b(l)$ (ако такав постоји), па $b\notin B_1(w)$.

Скуп $U = [T]\setminus(B_0(w)\cup B_1(w))$ у односу на лексикографски поредак функција представља сепарабилно густо линеарно уређење без крајева. Нека је C пребројив густ подскуп скупа U.

На основу Канторовог цик-цак аргумента, свака два густа линеарна уређења без крајева су изоморфна, па постоји изоморфизам u_w скупа C на скуп $(0,1)\cap\mathbb{Q}$. Њега можемо допунити до пресликавања скупа U у интервал $[0,1]$ на следећи начин: За произвољно $b\in[T]$ нека је $L(b)$ скуп свих рационалних бројева који одговарају гранама из скупа C које су лево од гране b и нека је $R(b)$ скуп свих рационалних бројева који одговарају гранама из скупа C које су лево од гране b. Тада скупови $L(b)$ и $R(b)$ образују један Дедекиндов рез, коме одговара тачно један реалан број, који придружујемо грани b и који представља вредност $u_w(b)$.

Између двеју грана, од који је барем једна у скупу U морају постојати бар две гране скупа U, а самим тим и барем једна грана из скупа C. Због тога ће тим двема гранама одговарати различити реални бројеви. Исто важи и за две гране из скупа $B_0(w)$. Пошто кроз сваки чвор пролази бар једна грана из скупа $B_0(w)$, скуп $u_w[B_0(w)]$ је густ подскуп скупа $[0,1]$.

Докажимо да је пресликавање u_w сурјекција скупа $[T]$ на скуп $[0,1]$. Одатле следи да је скуп $C_0 = (0,1)\setminus u_w[U]$ пребројив густ подскуп скупа $(0,1)$. За произвољно $a\in[0,1]$ нека је

$$l(a) = \{b\in C \mid u_w(b) < a\},\quad r(a) = \{b\in C\mid u_w(b) > a\}.$$

Нека је b најлевља грана чији сваки чвор има својство да кроз њега пролази грана из скупа C која се слика у елемент скупа $r(a)$. Њу можемо дефинисати на следећи начин: Нека је $b(0)$ корен дрвета T. За свако $n\in\omega$ нека је $b(n+1)$ најлевљи непосредан наследник чвора $b(n)$ кроз који пролази барем једна грана из скупа C која се слика у елемент скупа $r(a)$.

Све гране из скупа C које су лево од гране b се сликају у елементе скупа $l(a)$, док се све гране из скупа C које су десно од гране b сликају у елементе скупа $r(a)$. Према томе, важи $u_w(b) = a$.

Теорема 125 *Нека су $T_1, \ldots, T_d$ дрвећа висине ω, у којима сваки чвор има барем једног, али највише пребројиво много непосредних наследника и нека су $M_1, \ldots, M_d$ скупови такви да за свако i важи да је M_i пребројива уније нигде густих скупова простора $[T_i]$. Нека $f : \bigcup_{l=0}^{\infty}(T_1(l) \times \cdots \times T_d(l)) \longrightarrow A$, где је A коначан скуп. Тада постоје скупови $D_1, \ldots, D_d, U$, неглавни ултрафилтер F над скупом ω и пресликавање g скупа U у скуп A такви да важи следеће*

- *Пресликавање g је непрекидно, то јест инверзне слике једночланих скупова су отворени скупови.*
- *За ма које $b_1 \in D_1, \ldots, b_d \in D_d$ и $a \in A$ важи*
$$g(b_1, \ldots, b_d) = a \quad \Leftrightarrow \quad \{n \in \omega \mid f(b_1(n), \ldots, b_d(n)) = a\} \in F. \tag{9.5}$$
- *За свако i важи да је D_i пребројив густ скуп у простору $[T_i]$, дисјунктан са скупом M_i, као и да је сваки елемент скупа D_i или кондензациона или изолована грана дрвета T_i.*

Доказ: Нека су дати $T_1, \ldots, T_d, M_1, \ldots, M_d$, f и A као у исказу теореме. Без умањења општости можемо претпоставити да је за свако i скуп M_i пребројива унија затворених нигде густих скупова простора $[T_i]$. За свако i изаберимо добро уређење w_i скупа чворова дрвета T_i које је изоморфно неком подскупу од ω.

Изаберимо пребројив транзитиван модел M такав да му припадају $T_1, \ldots, T_d$, f и $w_1, \ldots, w_d$, кодове за скупове $M_1, \ldots, M_d$, као и скуп кондензационих чворова за свако од дрвета $T_1, \ldots, T_d$. Нека је $M[G]$ генерично раширење модела M над уређењем $\mathcal{R}(\omega)$ и нека је C скуп додатих независних Коенових реалних бројева. Нека је $N = (\mathbf{HOD}(M \cup C \cup \{C\}))^{M[G]}$ одговарајући Коенов симетрични модел. Пошто за свако i скуп кондензационих чворова дрвета T_i припада моделу M, сваки од модела M, N и $M[G]$ садржи скуп свих кондензационих грана (са становишта универзума) дрвета T_i које припадају том моделу.

Пошто $N \models$ BPI, можемо изабрати $F' \in N$ које је неглавни ултрафилтер над ω у N. У универзуму је F' базис филтера над скупом ω, па можемо уочити неки ултрафилтер F над омега такав да важи $F' \subseteq F$.

За свако i нека је I_i скуп свих изолованих грана дрвета T_i и нека је P_i скуп свих кондензационих грана дрвета T_i које нису граничне у кондензационом поддрвету дрвета T_i у односу на поредак w_i. Ако је скуп $[T_i]$ највише пребројив, онда је $P_i = \emptyset$. За свако i за које је скуп $[T_i]$ непребројив нека је φ_i пресликавање скупа P_i у скуп $(0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ које је уређајни изоморфизам.

Нека су $r_1, \ldots, r_m$ сви међусобно различити елементи скупа $F_1(F')$, односно сви међусобно различити елементи скупа C који учествују у дефиницији скупа F' у моделу M у контексту дефиниције Коеновог симетричног модела N. Нека су $j_1, \ldots, j_m \in \omega$ такви да за свако k важи да је j_k индекс Коеновог реалног броја r_k.

Нека је $\Omega = \omega \setminus \{j_1, \ldots, j_m\}$ и нека је C' скуп свих Коенових реалних бројева који одговарају индексима који припадају скупу Ω. Нека су $\Omega_1, \ldots, \Omega_d$ бесконачни узајамно дисјунктни подскупови скупа Ω, који припадају моделу M.

Нека су $C_1, \ldots, C_d$ подскупови скупа C' такви да за свако i важи да је C_i скуп свих Коенових реалних бројева чији индекс припада скупу Ω_i. Тада су $C_1, \ldots, C_d$ дисјунктни густи подскупови интервала $(0, 1)$, који су дисјунктни са сваким затвореним нигде густим подскупом интервала $(0, 1)$ који има код у M.

Напоменимо да скупови $C_1, \ldots, C_d$ припадају моделу $M[G]$, али да на основу теореме 105 не припадају моделу N. За свако i за које је скуп $[T_i]$ непребројив нека је

$$D_i = \{b \in P_i \mid \varphi_i(b) \in C_i\} \cup I_i, \quad D_i' = \{b \in P_i \mid \varphi_i(b) \in C'\} \cup I_i.$$

За i за које је скуп $[T_i]$ највише пребројив нека је $D_i = D'_i = I_i$. Скупови $D'_1, \ldots, D'_d$ припадају моделу $N \subseteq M[G]$. Нека је $i \in \{1, \ldots, d\}$ произвољно. Изоловане тачке не могу припадати нигде густим скуповима, па је $I_i \cap M_i = \emptyset$. Ако је i такво да је скуп $[T_i]$ непребројив, онда је φ_i хомеоморфизам, па је и скуп $\varphi_i[P_i \cap M_i]$ је пребројива унија нигде густих затворених подскупова простора $(0,1) \setminus \mathbb{Q}$ са кодом у M, па важи $C' \cap \varphi_i[P_i \cap M_i] = \emptyset$, а самим тим и $D'_i \cap M_i = \varphi_i^{-1}[C'] \cap M_i = \emptyset$.

Пошто је скуп F' ултрафилтер над ω у N и скуп A је коначан, могуће је дефинисати пресликавање h на скупу $D' = D'_1 \times \cdots \times D'_d$ тако да важи

$$(\forall \langle b_1, \ldots, b_d \rangle \in D', a \in A)(h(b_1, \ldots, b_d) = a \ \Leftrightarrow\ \{n \in \omega \mid f(b_1(n), \ldots, b_d(n)) = a\} \in F'). \quad (9.6)$$

Наравно, формула (9.6) важи и ако се F' замени са F. Нека је D скуп свих $\langle b_1, \ldots, b_d \rangle \in D'$ таквих да не постоје различити i и j такви да важи $b_i \in P_i$, $b_j \in P_j$ и $\varphi_i(b_i) = \varphi_j(b_j)$. Скуп D припада моделу N. За свако i важи $D_i \subseteq D'_i \in N$. Одатле и из транзитивности модела N следи да важи и $D_i \subseteq N$. Одатле и из дисјунктности у паровима скупова $C_1, \ldots, C_d$ следи да важи $D_1 \times \cdots \times D_d \subseteq D$.

Пошто изоловане гране имају једночлане околине, које припадају моделу M, из леме о непрекидности следи да је пресликавање h на скупу D непрекидно, односно за свако $a \in A$ скуп $h^{-1}[\{a\}]$ је отворен у релативној топологији скупа D. За свако $a \in A$ нека је V_a отворен скуп простора $[T_1] \times \cdots \times [T_d]$ у универзуму такав да важи $h^{-1}[\{a\}] = V_a \cap D$.

Нека је $V = \bigcup_{a \in A} V_a$. Скуп V је отворен као унија отворених скупова и густ је као надскуп густог скупа $D \supseteq D_1 \times \cdots \times D_d$. Такође, за ма које различите $a_1, a_2 \in A$ важи да су скупови V_{a_1} и V_{a_2} дисјунктни. У супротном би због густине скупа D скуп $V_{a_1} \cap V_{a_2} \cap D$ био непразан, што је у супротности са начином на који су скупови V_{a_1} и V_{a_2} изабрани. Сада можемо дефинисати пресликавање $g : V \longrightarrow A$ са $g(u) = a \Leftrightarrow u \in V_a$. $\Box$

Изведимо Халперн-Лојхлијеву теорему из теореме 125. Нека су дата дрвета $T_1, \ldots, T_d$ и пресликавање f њиховог производа у неки коначан скуп A. Тада постоје $F, D_1, \ldots, D_d, V$ и g који задовољавају услове из формулације теореме 125.

Изаберимо $b_1 \in D_1, \ldots, b_d \in D_d$ произвољно и нека је $a = g(b_1, \ldots, b_d)$ и $U = g^{-1}[\{a\}]$. Пошто је скуп U отворен, постоје отворени скупови $U_1, \ldots, U_d$ простора $[T_1], \ldots, [T_d]$ такви да важи

$$\langle b_1, \ldots, b_d \rangle \in U_1 \times \cdots \times U_d \subseteq U.$$

За свако i је скуп $D'_i = D_i \cap U_i$ густ у непразном отвореном скупу U_i у простору $[T_i]$. Притом је функција g константно једнака вредности a на скупу $D'_1 \times \cdots \times D'_d$.

Изаберимо $m \in \omega$ и $t_1 \in T_1(m), \ldots, t_d \in T_d(m)$ тако да је за свако i базна околина простора $[T_i]$ одређена чвором t_i подскуп скупа U_i. За свако i нека су $s_i^1, \ldots, s_i^{k_i}$ сви непосредни наследници чвора t_i у дрвету T_i. Такође, за свако i и $j \leqslant k_i$ нека је b_i^j грана из скупа D'_i која садржи чвор s_i^j.

За ма које $j_1 \leqslant k_1, \ldots, j_d \leqslant k_d$ важи $g(b_1^{j_1}, \ldots, b_d^{j_d}) = a$, па је према начину избора пресликавања g скуп $S(j_1, \ldots, j_d) := \{n \in \omega \mid f(b_1^{j_1}(n), \ldots, b_d^{j_d}(n)) = a\}$ припада филтеру F. Пошто је филтер фамилија скупова затворена за коначне пресеке, пресек S скупова $S(j_1, \ldots, j_d)$ за све $j_1 \leqslant k_1, \ldots, j_d \leqslant k_d$ такође припада филтеру F.

Пошто је филтер F неглавни, он не садржи коначне скупове. Према томе, постоји неко $n > m$ такво да за све $j_1 \leqslant k_1, \ldots, j_d \leqslant k_d$ важи $f(b_1^{j_1}(n), \ldots, b_d^{j_d}(n)) = a$.

За свако i нека је $D''_i = \{b_i^1(n), \ldots, b_i^{k_i}(n)\}$. За свако i важи да је D''_i један (m,n)-густ скуп изнад чвора t_i у дрвету T_i, као и да је функција f константна на скупу $D''_1 \times \cdots \times D''_d$.

Ипак, ово није алтернативни доказ Халперн-Лојхлијеве теореме јер је теорема 125 доказана коришћењем Халперн-Левијеве теореме да у Коеновом симетричном моделу важи BPI, али показује снагу ове теореме, то јест начин на који се може користити на пример као замена за Халперн-Лојхлијеву теорему у доказима у којима се она користи.

Закључак

У математици је један доказ теореме довољан да оправда њен исказ. Зашто онда тражити нове доказе већ доказаних теорема?

Докази теорема носе у себи математичке идеје које могу бити употребљиве за решавање неког другог математичког проблема. За развој математике је најважнији прилив свежих математичких идеја. Међутим, како доћи до њих?

До нових идеја се обично долази решавањем тешких математичких проблема. Зато се неки математички проблем решава због његове тежине и без да има неку познату примену. Овде се потрагом за новим доказом Халперн-Лојхлијеве теореме дошло до нових резултата. Теорема 121 је доказана коришћењем идеја Харингтоновог доказа Халперн-Лојхлијеве теореме уз још неке идеје да би се доказало више.

Такође, за математичку логику се може рећи да су њени резултати слабије цитирани од резултата из неких других грана математике. Разлог је у заостајању у погледу примена, мада их има. Специфичност математичке логике је да обилује негативним резултатима (мада има и позитивних) у односу на друге области математике. Они јесу фасцинантни, али обично непримењиви.

Многи математичари из других области избегавају метаматематичке методе зато што је њихово савладавање захтевно, а због заостатка у погледу примена изгледа као неисплативо. То су уједно и главни проблеми математичке логике као области.

Циљ овог истраживања је био решавање управо тих проблема, односно проналажење моћних примена метаматематичких метода. Такође, теорема 125 илуструје корист од модела у којима не важи аксиома избора.

Индекс

Литература

[1] Audrito Giorgio, *Characterization of Set-Generic Extensions*, Università Degli studi di Torino, facoltà di scienze m.f.n.; Corso di studi in matematica, (2010).
`http://www.logicatorino.altervista.org/matteo_viale/audrito.pdf`,

[2] Bergfalk Jeffrey, Hrušák Michael, and Shelah Saharon *Ramsey theory for highly connected monochromatic subgraphs.*, Acta Mathematica Hungarica, 163(1):309–322, (2021).

[3] Cohen, Paul J. *The independence of the continuum hypothesis I*, Proceedings of the U.S. National Academy of Sciemces, 50: 1143-48, (1963).

[4] Cohen, Paul J. *The independence of the continuum hypothesis II*, Proceedings of the U.S. National Academy of Sciemces, 51: 105-48, (1964).

[5] De La Cruz Omar, *Halpern and Levy Redux* – Необјављени рукопис заснован на серији састанака са С. Тодорчевићем у CRM Bellatera центру близу Барселоне, (2003).

[6] Dobrinen, Natasha *Forcing in Ramsey theory*, Proceedings of the 2016 RIMS Symposium on Infinite Combinatorics and Forcing Theory, (2017).

[7] Halpern, James D.; Läuchli Hans, *A partition theorem*, Transactions of the American Mathematical Society, 124: 360–367, (1966).

[8] Halpern James D., Lévy Azriel, *The Boolean Prime Ideal Theorem does not imply the Axiom of Choice*, Axiomatic Set Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. XIII, Part I, pp. 83–134, AMS, Providence, (1971).

[9] Jech Tomas, *Set Theory*, 3rd Millennium ed, rev. and expanded. – Berlin; Heidelberg; New York; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo : Springer (2002). (Springer monographs in mathematics).

[10] Kunen Kenneth, *Set Theory – An Introduction to Independence Proofs*, Studies in logic and the foundations of mathematics; vol. 102; Elsevier B.V., (1980).

[11] Lambie-Hanson Chris, *Higher-dimensional Delta-systems*, Order (2022).
`https://doi.org/10.1007/s11083-022-09602-w` (2022).

[12] Lambie-Hanson Chris and Zucker Andy, *Polish space partition principles and the Halpern-Läuchli theorem*, `https://arxiv.org/pdf/2209.04859v1.pdf`.

[13] Milliken Keith R., *A Ramsey theorem for trees*, Journal of Combinatorial Theory, Series A Volume 26, Issue 3, Pages 215-237 (Maj, 1979).

[14] STEFANOVIĆ NEDELJKO, *Alternatives to the Halpern-Läuchli theorem*, Annals of Pure and Applied Logic, DOI: 10.1016/j.apal.2023.103313 (2023) https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0168007223000702.

[15] TATCH MOORE JUSTIN, *The Method of Forcing,* (2019). https://arxiv.org/abs/1902.03235

[16] TODORČEVIĆ STEVO, *Introduction to Ramsey Spaces*, Princeton University Press, (2010).

[17] TODORČEVIĆ STEVO, *Reals and positive partition relations*, Logic, methodology and philosophy of science, VII, (1983).

[18] TODORČEVIĆ STEVO, FARAH ILIJAS, *Some applications of the method of forcing*, Yenisei, Moscow, (1995).

[19] ANDY ZUCKER, *A new proof of the 2-dimensional Halpern-Läuchli theorem;*, (2017), https://www.math.cmu.edu/~andrewz/HL2d.pdf.

Биографија

Недељко Стефановић је рођен 31.12.1973. у Смедеревској Паланци, где је завршио основну и средњу школу. Студије математике је уписао на Математичком факултету Универзитета у Београду 1993. године, а звање Дипломирани математичар за теоријску математику и примене стекао је 1999. године, када је уписао магистарске студије на истом факултету на групи за логику, да би звање Магистар математике стекао 2004. године. Докторске академске студије математике је уписао на Природно-математичком факултету Универзитета у Новом Саду 2014. године.

Од јесени 1999. до јесени 2000. радио је на Грађевинском факултету Универзитета у Београду као млади таленат, а у периоду од јесени 2000. до јесени 2005. је био запослен на истом факултету као асистент-приправник. Касније је радио на пословима развоја софтвера. У том периоду је као главни аутор објавио је следећи коауторски научни рад са Мр Милошем Милошевићем

N. Stefanović, M. Milošević, *A very simple proof of Pascal's hexagon theorem and some applications*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) Vol. 120, No. 5, pp. 619–629, Indian Academy of Sciences, (Novembar 2010).

Овај чланак је цитиран у следећим публикацијама:

- *Finding Ellipses – What Blaschke Products, Poncelet's Theorem and Numerical Range Know about Each Other*, Urlich Daep, Pamela Gorkin, Andrew Shaffer, Karl Voss, AMS/MAA, THE CARUS MATHEMATICAL MONOGRAPHS, vol 34 (2018).

- *Plano Projetivo e Construções com Régua*, Manuel, Calunga Florentino, http://hdl.handle.net/10400.6/9961 (12.7.2018).

- *A Fast Ellipse Detector Using Projective Invariant Pruning*, Q. Jia, X. Fan, Z. Luo, L. Song and T. Qiu, in IEEE Transactions on Image Processing, vol. 26, no. 8, pp. 3665-3679, doi: 10.1109/TIP.2017.2704660 (Avgust 2017).

- *Ellipse proposal and convolutional neural network discriminant for autonomous landing marker detection*, Ren Jin, Hafiz Muhammad Owais, Defu Lin, Tao Song, Yifang Yuan, Journal of Field Robotics, (27.10.2018).

- *Álgebras de Lie e Teoremas Clássicos de Geometria*, Ana Sofia Guerreiro, Instituto Superior Técnico, Projeto em Matemática, (12.7.2021).

- *Algorithmic procedures as the main mathematical knowledge: the teaching and learning of algorithms in primary school*, DOI: 10.12681/eadd/48056, (2020).

Део резултата ове тезе приказан је 22.8.2022. на међународној конференцији SETTOP 2022 одржаној у Новом Саду и објављен је у самосталном чланку [14] аутора ове тезе. Ти резултати су помињани на предавању *Adding many Cohen reals* Криса Ламби-Хенсона 1.9.2022. на међународној конференцији ESTC 2022 у Торину, коју је организовала Logic Group. Такође, помињани су у [12].

План третмана података

Назив пројекта/истраживања
Примена форсинг методе на доказивање комбинаторних тврђења
Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање
а) Департман за математику и информатику, Проридно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање
Докторске академске студије, Математика (Математичка логика), Природно. Математички факултет, Универзитет у Новом Саду
1. Опис података

1.1 Врста студије

Укратко описати тип студије у оквиру које се подаци прикупљају

У овој студији нема података, а односи се на изучавање могућности примене форсинг методе на доказивање комбинаторних тврђења на примеру Халперн-Лојхлијеве теореме

1.2 Врсте података

а) квантитативни

б) квалитативни

1.3. Начин прикупљања података

а) анкете, упитници, тестови

б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи

в) генотипови: навести врсту ___________________________________

г) административни подаци: навести врсту __________________________

д) узорци ткива: навести врсту_____________________________________

ђ) снимци, фотографије: навести врсту________________________________

е) текст, навести врсту ____

ж) мапа, навести врсту ____

з) остало: описати ____

1.3 Формат података, употребљене скале, количина података

1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

a) Excel фајл, датотека ___________________

b) SPSS фајл, датотека ___________________

c) PDF фајл, датотека ____________________

d) Текст фајл, датотека ___________________

e) JPG фајл, датотека ____________________

f) Остало, датотека _____________________

1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

а) број варијабли ____

б) број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.) _______________________

1.3.3. Поновљена мерења

а) да

б) не

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) временски размак између поновљених мера је ________________________________

б) варијабле које се више пута мере односе се на __________________________________

в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____________

Напомене: ____

Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?

а) Да

б) Не

Ако је одговор не, образложити ____

____

2. Прикупљање података

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

а) експеримент, навести тип ____

б) корелационо истраживање, навести тип ___________________________________

ц) анализа текста, навести тип ____

д) остало, навести шта ____

2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).

____

____

2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да Не

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) Колики је број недостајућих података? __________________________

б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да Не

в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

____

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

____

____

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

____

____

3. Третман података и пратећа документација

3.1. Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у ______________________________________ *репозиторијум.*

3.1.2. URL адреса ____

3.1.3. DOI ____

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

а) *Да*

б) *Да, али после ембарга који ће трајати до* ______________________________________

в) *Не*

Ако је одговор не, навести разлог ____

3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.

Образложење

____

____

3.2 Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен? ___________________________________

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

____

____

Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.

____

____

____

____

3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму? _______________________

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да Не

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да Не

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да Не

Образложити

____

____

4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности *(https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html)* и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да Не

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

____

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да Не

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

а) Подаци нису у отвореном приступу

б) Подаци су анонимизирани

ц) Остало, навести шта

____

____

5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

а) јавно доступни

б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области

ц) затворени

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

____

____

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

____

____

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

____

6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

____

6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима

____

6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима

____