**Наставно - научном већу**
**Математичког факултета**
**Универзитета у Београду**

Одлуком Наставно-научног већа, донесеном на 388. седници, 24. 12. 2021. године именовани смо за чланове Комисије за оцену докторске дисертације „Геодезијске линије и хиперповрши близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$" кандидата Милоша Ђорића. Након прегледања дисертације, Комисија подноси Наставно-научном већу Математичког факултета Универзитета у Београду следећи извештај.

## 1. Основни подаци о кандидату и дисертацији

### Основни подаци о кандидату

Милош Ђорић је рођен 6. 2. 1988. у Београду. Основну школу и Математичку гимназију у Београду завршио је као ученик генерације, освојивши неколико награда на државним и међународним такмичењима из математике и физике. Дипломирао је 2010. године на Основним академским студијама на Математичком факултету Универзитета у Београду, смер Теоријска математика и примене, након четири године студирања са просечном оценом 10. Током студија је више пута награђиван као један од најбољих студената у генерацији. Мастер академске студије, модул Математика, на истом факултету уписао је 2010. године и дипломирао 2011. године одбранивши мастер рад „Вајерштрасова репрезентација минималних површи", под менторством проф. др Мирјане Ђорић, са просечном оценом 10. Докторске студије на Катедри за геометрију Математичког факултета Универзитета у Београду уписао је школске 2011/12 по акредитацији из 2009. године, а затим школске 2018/19 по акредитацији из 2015. Запослен је на Математичком факултету од 2010. године, у звањима сарадник у настави, затим асистент и асистент практичне наставе. У Математичкој гимназији у Београду запослен је од 2010. године као спољни сарадник. Члан је пројекта „Геометрија, образовање, визуелизација са применама", под бројем 174012, Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије, од 2011. године. Био је члан Организационог одбора више међународних конференција, члан Комисије за такмичења ученика основних школа, члан Уредништва часописа „Тангента" за ученике средњих школа од 2011. до 2016. године, док је у часопису „Математички лист" за ученике основних школа члан Уредништва од 2018. године. Један је од аутора збирке „1100 задатака са математичких такмичења ученика основних школа", у више издања Друштва математичара Србије.

**Наслов дисертације:** Геодезијске линије и хиперповрши близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$

**Обим дисертације и библиографија:** Дисертација има 92 стране и три прилога (изјава о ауторству, изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада и изјава о коришћењу). Дисертација се састоји од увода, 7 глава, литературе и биографије аутора. У литератури је наведена 61 референца.

## 2. Предмет и циљ дисертације

Скоро Хермитска многострукост $(\widetilde{M}, g, \widetilde{\nabla}, J)$, где је $\widetilde{\nabla}$ Леви-Чивита конексија метрике $g$, а $J$ скоро комплексна структура, је близу Келерова уколико је тензорско поље $G$ дато

са $G(X,Y) = (\widetilde{\nabla}_X J)Y$ кососиметрично. Близу Келерове многострукости су генерализација Келерових, за које важи $G \equiv 0$, а близу Келерова многострукост која није уједно и Келерова је строго близу Келерова. У раду *Paul-Andy Nagy, Nearly Kähler geometry and Riemannian foliations, Asian J. Math. 6(3), 2002,* показано је да је свака строго близу Келерова многострукост локално изометрична Римановом производу неколико разних типова многострукости од којих су шестодимензионе близу Келерове један од типова. При том, постоје тачно четири хомогене, шестодимензионе близу Келерове многострукости (*Jean-Baptiste Butruille, Homogeneous nearly Kähler manifolds, in Handbook of pseudo-Riemannian geometry and supersymmetry, 16, 399-423, IRMA Lect. Math. Theor. Phys*): сфера $\mathbb{S}^6$, продукт многострукост $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, комплексни пројективни простор $\mathbb{CP}^3$ и многострукост застава $F^3$ у $\mathbb{C}^3$, при чему су последње три многострукости снабдевене метрикама које се разликују од стандардних.
Продукт многострукост $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ је снабдевена и скоро продукт структуром $P$, различитом од стандардне, која је изометрија и која је, у извесном смислу, усклађена са са скоро комплексном структуром $J$ (задовољавају неколико релација од којих је једна и да антикомутирају). Ове особине донекле подсећају на особине које задовољавају оператори облика на комплексној квадрици и представљају мотивацију да се на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ дефинишу појмови аналогни појмовима $\mathcal{A}$-главних и $\mathcal{A}$-изотропноих векторских поља на квадрици. У раду *Marilena Moruz, Luc Vrancken, Properties of the nearly Kähler* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$*, Publ. Inst. Math. (N. S.) 103 (117 2018), pp. 147–158,* показано је да постоје тачно три скоро продукт структуре које задовољавају ове особине и да се једна од друге могу добити помоћу изометрија $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. С обзиром да, за разлику од квадрике, $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ нема $\mathbb{S}^1$-фамилију скоро продукт структура, кандидат је у једном самосталном и једном коауторском раду увео појмове $\mathcal{P}$-главних и $\mathcal{P}$-изотропних векторских поља помоћу једне од карактеризација примењљивих на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Наиме, нека је за векторско поље $Z$ на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ дата дистрибуција $D_Z = \{Z, JZ, PZ, JPZ\}$. Ако је $\dim D_Z = 2$ онда је $Z$ $\mathcal{P}$-главно, а ако је $\dim D_Z = 4$ онда је $Z$ $\mathcal{P}$-изотропно векторско поље.
Предмет дисертације је проучавање геометрије близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ и неколико посебних типова њених подмногострукости. Прво, проучавање геодезијских линија близу Келерове $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ и њихових особина са циљем њихове класификације. Важно је нагласити да су експлицитне параметризације геодезијских линија битне и за изучавање одређених класа хиперповрши које су тубе око подмногострукости мањих димензија.
Затим, кандидат се у тези бави изучавањем хиперповрши $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ чија су нормална векторска поља или $\mathcal{P}$-главна или $\mathcal{P}$-изотропна, са циљем одређивања њихових особина и добијања одговора на питања егзистенције или класификације неких од подфамилија ове две фамилије.

## 3. Основне хипотезе од којих се полазило у истраживању

За анализирање хиперповрши близу Келерове продукт многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ потребно је конструисати одговарајући локални покретни репер који одговара задатој структури, односно додатним условима које хиперповрш задовољава. Користе се поред јединичног нормалног векторског поља $\xi$ и поља $J\xi$, у зависности од димензије дистрибуције $D_\xi = \{\xi, J\xi, P\xi, JP\xi\}$, векторска поља која су сопствена за $P$ или $JP$. Помоћу структурних једначина хиперповрши примењених на векторска поља овог репера добијају се релације које задовољавају коефицијенти конексије и друге фундаменталне форме.

## 4. Кратак опис садржаја дисертације

Главни део дисертације састоји се од 7 глава.

У првој глави дате су основне дефиниције и геометријске особине близу Келерових многострукости, а у другом поглављу је детаљније описана близу Келерова продукт многострукост

$\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$. Дата су одговарајућа скоро комплексна структура $J$, затим скоро продукт структура $P$ и показане су релације које $P$ и $J$ задовољавају ($P$ је симетрична изометрија која антикомутира са $J$, веза $P$ и $G$, израз за коваријантни извод $P$). Дата је веза између Леви-Чивита конексије и конексије наслеђене из еуклидског простора $R^8$, израз за Риманов тензор кривине и релације које задовољава $(1,2)$-тензорско поље $G$. Описане су изометрије овако задане структуре и показано је да постоје тачне три скоро продукт структуре $P$ које задовољавају дате особине (*Marilena Moruz, Luc Vrancken, Properties of the nearly Kähler* $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$*, Publ. Inst. Math. (N. S.) 103 (117 2018), pp. 147–158*).
У трећој глави су проучаване геодезијске линије близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ и дато је детаљно извођење њихових параметризација, које је објављено у раду *Miloš Djorić, Mirjana Djorić, Marilena Moruz, Geodesic lines on nearly Kähler* $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$*, J. Math. Anal. Appl. 466 (2018), 1099–1108.*
У четвртој глави изложене су основне особине хиперповрши близу Келерових многострукости са посебним освртом на Хопфове хиперповрши и њихове особине. Показано је да скоро комплексна структура амбијентне многострукости индукује на хиперповрши скоро контактну структуру и изведене су структурне једначине, посебно Гаусова и Кодацијева једначина. Наведени су примери Хопфових, минималних хиперповрши из *Zejun Hu, Zeke Yao, Yinshan Zhang, On some hypersurfaces in the homogeneous nearly Kähler* $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$*, Math. Nachr. 291 (2018), 343–373.* Дате су њихове главне кривине. Приказани су до сада познати резултати из литературе о $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ о непостојању хиперповрши чији оператор облика антикомутира са скоро контактном структуром, умбиличких хиперповрши, хиперповрши са паралелном другом фундаменталном формом, конформно равних хиперповрши.
Пета глава је посвећена $P$-сингуларним векторским пољима на $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ која су дефинисана по угледу на $A$-сингуларна векторска поља на комплексној квадрици. Прво су представљене основне особине комплексне квадрике и појмови $\mathcal{A}$-главних и $\mathcal{A}$-изотропних векторских поља као и њихове карактеризације. Затим је коришћењем једне од карактеризација, која се може пренети на случај $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ уведен и појам $\mathcal{P}$-главних и $\mathcal{P}$-изотропних векторских поља, а затим су показане особине и карактеризације хиперповрши чије је јединично нормално векторско поље $\mathcal{P}$-главно, што су резултати објављени у *Miloš Djorić, Hypersurfaces of homogeneous nearly Kähler* $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ *whose normal vector field is* $\mathcal{P}$*-principal, Mediterr. J. Math. 18, 251 (2021).*
И шеста глава је посвећена хиперповршима са јединичном нормалом $\xi$ која је $\mathcal{P}$-главна, а садржи друге резултате објављене у *Miloš Djorić, Hypersurfaces of homogeneous nearly Kähler* $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ *whose normal vector field is* $\mathcal{P}$*-principal, Mediterr. J. Math. 18, 251 (2021)*, као и још необјављене самосталне резултате кандидата. У овом поглављу кандидат разматра хиперповрши за које је $\xi$ такво да је $P\xi=\pm\xi$ или $P\xi=\pm J\xi$. Прво је уведен посебно одабран покретни репер који одговара датој структури хиперповрши и добијене су одговарајуће структурне једначине тако што су за векторска поља репера добијене вредности тензорског поља $G$, као и релације које међусобно задовољавају коефицијенти конексије и друге фундаменталне форме. Доказано је непостојање хиперповрши за које је $P\xi=\pm J\xi$ и $P\xi=\xi$. За хиперповрши са особином $P\xi=-\xi$ је показано да су Хопфове, одређене су вишеструкости главних кривина и дата је класификација хиперповрши са тачно три разне главне кривине и примери хиперповрши са 5 разних главних кривина. Ако је $P\xi=\cos\theta\xi+\sin\theta J\xi$, где је $\theta$ константа, онда је $\xi$ $P$-искошено. Анализиране су хиперповрши са $P$-искошеним векторским пољем и доказане су неке од њихових особина.
Седма глава је посвећена хиперповршима са $\mathcal{P}$-изотропним нормалним векторским пољем и садржи резултате објављене у *Miloš Djorić, Mirjana Djorić, Marilena Moruz, Real hypersurfaces of the homogeneous nearly Kähler* $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ *with* $\mathcal{P}$*-isotropic normal, J. Geom. Phys. 160 (2021).* Уведен је локални покретни репер који одговара овој структури, одређене су вредности тензора $G$ на том реперу, као и релације које међусобно задовољавају коефицијенти конексије и друге фундаменталне форме. Коришћењем овог репера показано је да хиперповрши $\mathbb{S}^3\times\mathbb{S}^3$ са $\mathcal{P}$-

изотропном нормалом не могу бити ни минималне, ни Хопфове, а затим је дата и њихова потпуна класификација.

## 5. Остварени резултати и научни допринос дисертације

С обзиром да је геодезијска линија кроз тачку $(a, b)$ продукт многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ дата са $(ax(t), by(t))$ где је $(x(t), y(t))$ геодезијска линија кроз $(1, 1)$, за потпуну класификацију геодезијских линија довољно је дати параметризације геодезијских линија кроз $(1, 1)$. Доказане су следеће две теореме које се баве геодезијским линијама $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ које су објављене и у коауторском раду *Miloš Djorić, Mirjana Djorić, Marilena Moruz, Geodesic lines on nearly Kähler $S^3 \times S^3$, J. Math. Anal. Appl. 466 (2018), 1099–1108.* У првој су дате експлицитне параметризације геодезијских линија.

**Теорема 1** *Геодезијске линије $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ које садрже тачку $(1, 1)$ дате су параметризацијом:*

1. $$\gamma(t) = (\cos(at) + \sin(at)i, \cos(at) - \sin(at)i), a \in R \setminus \{0\};$$

2. $$\gamma(t) = (\cos(at) + \sin(at)i, \cos(\widetilde{a}t) + \sin(\widetilde{a}t)i), \text{ где је за } c_1 \in ImH \setminus \{0\},\ d_1 \in R,$$
$$a = \frac{1 + d_1}{2}|c_1|,\ \widetilde{a} = \frac{1 - d_1}{2}|c_1|;$$

3. $$\begin{aligned}\gamma(t) = \Big(&(\frac{1}{1+\phi^2}\cos(At) + \frac{\phi^2}{1+\phi^2}\cos(Bt)) + (\frac{1}{1+\phi^2}\sin(At) + \frac{\phi^2}{1+\phi^2}\sin(Bt))i\\
&+ (\frac{\phi}{1+\phi^2}\sin(At) - \frac{\phi}{1+\phi^2}\sin(Bt))j - (-\frac{\phi}{1+\phi^2}\cos(At) + \frac{\phi}{1+\phi^2}\cos(Bt))k,\\
&(\frac{1}{1+\widetilde{\phi}^2}\cos(\widetilde{A}t) + \frac{\widetilde{\phi}^2}{1+\widetilde{\phi}^2}\cos(\widetilde{B}t)) + (\frac{1}{1+\widetilde{\phi}^2}\sin(\widetilde{A}t) + \frac{\widetilde{\phi}^2}{1+\widetilde{\phi}^2}\sin(\widetilde{B}t))i\\
&+ (\frac{\widetilde{\phi}}{1+\widetilde{\phi}^2}\sin(\widetilde{A}t) - \frac{\widetilde{\phi}}{1+\widetilde{\phi}^2}\sin(\widetilde{B}t))j - (-\frac{\widetilde{\phi}}{1+\widetilde{\phi}^2}\cos(\widetilde{A}t) + \frac{\widetilde{\phi}}{1+\widetilde{\phi}^2}\cos(\widetilde{B}t))k\Big),\end{aligned}$$
$$\text{где је } c_1, c_2 \in ImH \setminus \{0\},\ d_1 \in R,\ a = \frac{1+d_1}{2}|c_1|,\ b = \frac{1}{2}|c_2|,\ c = \frac{2}{3}|c_1|,$$
$$\widetilde{a} = \frac{1-d_1}{2}|c_1|,\ \widetilde{b} = -\frac{1}{2}|c_2|,\ \widetilde{c} = c,$$
$$A = \frac{c + \sqrt{(2a-c)^2 + 4b^2}}{2},\ B = \frac{c - \sqrt{(2a-c)^2 + 4b^2}}{2},$$
$$\widetilde{A} = \frac{\widetilde{c} + \sqrt{(2\widetilde{a}-\widetilde{c})^2 + 4\widetilde{b}^2}}{2},\ \widetilde{B} = \frac{\widetilde{c} - \sqrt{(2\widetilde{a}-\widetilde{c})^2 + 4\widetilde{b}^2}}{2},$$
$$\phi = \frac{c - 2a + \sqrt{(c-2a)^2 + 4b^2}}{2b},\ \widetilde{\phi} = \frac{\widetilde{c} - 2\widetilde{a} + \sqrt{(\widetilde{c}-2\widetilde{a})^2 + 4\widetilde{b}^2}}{2\widetilde{b}}.$$

Даље, испитане су особине ових геодезијских линија и доказана је следећа теорема.

**Теорема 2**

1. *Геодезијске линије близу Келерове метрике на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ поклапају се са геодезијским линијама у односу на стандардну продукт метрику ако и само ако важи $c_1 = 0$ или $c_2 = 0$.*

2. *Тангентни вектор геодезијске линије је сопствени вектор оператора $P$ са сопственом вредношћу $-1$ ако и само ако је $c_1 = 0$, а са сопственом вредношћу $1$ ако и само ако је $c_1 \neq 0$, $c_2 = 0$ и $d_1 = 0$.*

3. *Геодезијска линија на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ је затворена ако и само ако је задовољен неки од следећих услова: дата је параметризацијом као у Теореми 1 (1), дата је параметризацијом као у Теореми 1 (2) где је $\frac{a}{\tilde{a}}$ рационалан број, дата је параметризацијом као у Теореми 1 (3) где су $\frac{B}{A}$, $\frac{\widetilde{B}}{\widetilde{A}}$ и $\frac{\widetilde{A}}{A}$ рационални бројеви.*

Кандидат је у два рада, једном самосталном и једном коауторском увео појмове $\mathcal{P}$-главних и $\mathcal{P}$-изотропних векторских поља, као и $\mathcal{P}$-искошених векторских поља. У раду *Miloš Djorić, Hypersurfaces of homogeneous nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ whose normal vector field is $\mathcal{P}$-principal, Mediterr. J. Math. 18, 251 (2021)* показао је да важе следеће две теореме које карактеришу $\mathcal{P}$-главна поља и хиперповрши са $\mathcal{P}$-главним нормалним векторским пољем.

**Теорема 3** *За тангентно векторско поље $Z$ на $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ наредна тврђења су еквивалентна:*

1. *$Z$ је $\mathcal{P}$-главно;*

2. *постоји глатка функција $\theta$ таква да је $PZ = \cos\theta Z + \sin\theta JZ$;*

3. *постоје глатке функције $f_1, f_2, f_3$ које нису све једнаке нули, такве да је*

$$\begin{aligned} Z|_{(p,q)} = {} & f_1(\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6})(pi, 0) + \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6})(0, qi)) + f_2(\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6})(pj, 0) + \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6})(0, qj)) \\ & - f_3(\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6})(pk, 0) - \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6})(0, qk)); \end{aligned}$$

4. *холоморфна секциона кривина равни $\Pi_Z = Span\{Z, JZ\}$ једнака је $0$.*

**Теорема 4** *Ако је $\xi$ јединично векторско поље ортогонално на хиперповрш у $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ и $U^\perp$ дистрибуција на хиперповрши чија су векторска поља ортогонална на $J\xi$ онда је еквивалентно:*

1. *$\xi$ је $\mathcal{P}$-главно векторско поље;*

2. *дистрибуција $U^\perp$ је $P$-инваријантна.*

Користећи ове резултате даље је изучавао хиперповрши за које које је $P\xi = \pm\xi$ или $P\xi = \pm J\xi$. Конструисао је одговарајуће локалне покретне репере и помоћу добијених структурних релација показао да важе следећа тврђења.

**Теорема 5** *Не постоји хиперповрш $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ чије јединично нормално векторско поље $\xi$ задовољава $P\xi = \pm J\xi$.*

**Теорема 6** *Не постоји хиперповрш $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ чије јединично нормално векторско поље $\xi$ задовољава $P\xi = \xi$.*

**Теорема 7** *Хиперповрши за које је $P\xi = -\xi$ су Хопфове, а главна кривина која одговара векторском пољу $J\xi$ је нула. При том је број различитих кривина или 3 или 5.*

**Теорема 8** *Хиперповрш од $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ за коју је $P\xi = -\xi$ и која има тачно три главне кривине локално је конгруентна имерзији*

$$f_{3,r} : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2 \to S^3 \times S^3, \;\; f_{3,r}(x, y) = (\overline{x}, (\sqrt{1 - r^2} + ry)\overline{x}).$$

**Теорема 9** *Уколико је јединично нормално векторско поље* $\xi$ *хиперповрши* $P$*-искошено онда је* $\theta \in \{\pi, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\}$. *Таква површ је Хопфова и има 3 или 5 главних кривина, док је кривина која одговара векторском пољу* $J\xi$ *једнака* 0. *Уколико постоје тачно 3 главне кривине, хиперповрш је локално конгруентна једној од следећих имерзија* $f_{i,r} : \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3, i = 1, 2, 3.$

$$
\begin{aligned}
f_{1,r}(x, y(y_1, y_2, y_3)) &= (x, (ry_1, ry_2, ry_3, \sqrt{1-r^2})),\\
f_{2,r}(x, y(y_1, y_2, y_3)) &= (ry_1, ry_2, ry_3, \sqrt{1-r^2}), x),\\
f_{3,r}(x, y(y_1, y_2, y_3)) &= (\overline{x}, (ry_1, ry_2, ry_3, \sqrt{1-r^2})\overline{x}).
\end{aligned}
$$

Сличним методама су изучаване и хиперповрши са $\mathcal{P}$-изотропном нормалом, одговарајући резултати су објављени у раду *Miloš Djorić, Hypersurfaces of homogeneous nearly Kähler* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ *whose normal vector field is* $\mathcal{P}$*-principal, Mediterr. J. Math. 18, 251 (2021).* Показано је да такве хиперповрши не могу бити минималне нити Хопфове, а затим је дата и њихова потпуна класификација.

**Теорема 10** *Хиперповрш близу Келерове многострукости* $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ *чије је нормално векторско поље* $\mathcal{P}$*-изотропно локално је дата имерзијом*

$$
\begin{aligned}
&(u,v,x,y,z) \mapsto f(u,v,x,y,z) = (a(x,y,z)p(u,v)\overline{c}(x,y,z), b(x,y,z)q(u,v), \overline{c}(x,y,z)), \textit{где је}\\
&\quad (p,q) \in \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \textit{дато са}\\
&\quad p(u,v) = (\frac{1}{2}\cos(\frac{\sqrt{3}u - v}{\sqrt{2}}), \frac{1}{2}\sin(\frac{\sqrt{3}u - v}{\sqrt{2}}), \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\frac{u}{\sqrt{6}} + \frac{v}{2}), \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{u}{\sqrt{6}} + \frac{v}{2})),\\
&\quad q(u,v) = (-\frac{1}{2}\sin(\frac{\sqrt{3}u + v}{\sqrt{2}}), \frac{1}{2}\cos(\frac{\sqrt{3}u + v}{\sqrt{2}}), \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{u}{\sqrt{6}} - \frac{v}{2}), -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(\frac{u}{\sqrt{6}} - \frac{v}{2}));\\
&\quad \textit{јединични кватерниони } a,\ b,\ c \textit{ су решења система ПДЈ}\\
&\quad a_x = a\eta_1, b_x = b\eta_2, c_x = c\eta_3,\\
&\quad a_y = a\delta_1, b_y = b\delta_2, c_y = c\delta_3,\\
&\quad a_z = a\mu_1, b_z = b\mu_2, c_z = c\mu_3,\\
&\quad \textit{за коефицијенте } \eta_i, \delta_i, \mu_i \textit{ који задовољавају услов}\\
&\quad g(\eta_1, i) + g(\eta_2, i) + g(\eta_3, i) = 0,\\
&\quad g(\delta_1, i) + g(\delta_2, i) + g(\delta_3, i) = 0,\\
&\quad g(\mu_1, i) + g(\mu_2, i) + g(\mu_3, i) = 0.
\end{aligned}
$$

## 6. **Објављени и саопштени резултати који чине део докторске дисертације**

### Објављени радови

1. Miloš Djorić, Mirjana Djorić, Marilena Moruz, Geodesic lines on nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$, J. Math. Anal. Appl. 466 (2018), 1099–1108. (M 21, IF: 1.190);
2. Miloš Djorić, Mirjana Djorić, Marilena Moruz, Real hypersurfaces of the homogeneous nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ with $\mathcal{P}$-isotropic normal, J. Geom. Phys. 160 (2021) (M 22, IF: 1.056);
3. Miloš Djorić, Hypersurfaces of homogeneous nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ whose normal vector field is $\mathcal{P}$-principal, Mediterr. J. Math. 18, 251 (2021) (M 21, IF: 1.4).

**Саопштења на научним скуповима**

1. XX Geometrical seminar, Врњачка Бања, 2018. године. Саопштење "Geodesic lines on the nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$";
2. Pure and Applied Differential Geometry - PADGE, Leuven, Белгија, 2017. године. Постер "Geodesic lines on the nearly Kähler $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$";
3. XI Симпозијум Математика и примене, Београд, 2021. године. Саопштење „Неке реалне хиперповрши близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$".

## 7. Закључак

Предмет докторске дисертације „Геодезијске линије и хиперповрши близу Келерове многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$" кандидата Милоша Ђорића је диференцијална геометрија одређених подмногострукости близу Келерових многострукости што је савремена и актуелна област истраживања. Шестодимензионе, хомогене близу Келерове многострукости су од посебног интереса због своје примене у математичкој физици, а неке њихове подмногострукости (које задовољавају додатне услове везане за структуру многострукости) су са аспекта теорије подмногострукости најзанимљивије. Технике за изучавање продукт многострукости $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ и њених подмногострукости су установљене тек у скорије време, а многа питања везана за геометрију $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$ су још отворена. У овој тези су доказана важна тврђења, као што је класификација геодезијских линија и класификације посебних врста хиперповрши које представљају конкретан и значајан допринос познавању геометрије $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$. Резултати до којих је дошао кандидат су оригинални и нетривијални и делимично објављени у једном самосталном и два коауторска рада на СЦИ листи. Теза је уредно написана, са јасним и систематичним објашњењима и детаљним доказима.
Кандидат је при том проучио обимну литературу, показао је одлично познавање области и оспособљеност за обављање самосталног научног рада.
Због свега наведеног предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати приложени текст као докторску дисертацију Милоша Ђорића и одреди комисију за њену јавну одбрану.

Београд, 21. 1. 2022. године

Чланови комисије:

________________________

проф. др Мирослава Антић (председник)
ванредни професор Математичког факултета
Универзитета у Београду

________________________

проф. др Зоран Ракић
редовни професор Математичког факултета
Универзитета у Београду

проф. др Срђан Вукмировић
ванредни професор Математичког факултета
Универзитета у Београду

проф. др Емилија Нешовић
редовни професор Природно-математичког факултета
Универзитета у Крагујевцу