

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета одржаној 23. априла 2021. године у Београду одређени смо у Комисију за преглед и оцену рукописа

Гребнерове базе за коначно генерисане идеале над неким класама ненетериних прстена

који је предат као докторска дисертација Маје Рославцев. Кандидаткиња је предала текст, комисија је исти прегледала и подноси Већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Биографија кандидата

Маја Рославцев уписала је Математички факултет, смер Теоријска математика и примене, 2006. године. Дипломирала је 2010. године, са просечном оценом 9,54. Исте године уписала је Мастер студије на Математичком факултету у Београду, смер Математика. Мастер рад под насловом „Градуисане слободне резолвенте” одбранила је 2011. године, под менторством проф. др Александра Липковског, са оценом 10. Докторске студије на Математичком факултету у Београду, смер Математика, уписала је 2011. године. Положила је све испите предвиђене планом и програмом докторских студија са просечном оценом 10.

2. Списак научних радова кандидата

1. A. Kostić, Z.Z. Petrović, Z.S. Pucanović, M. Roslavcev, *A generalization of nil-clean rings*, Miskolc Mathematical Notes, 19:2 (2018), 969-981, ISSN: 1787-2405, DOI: 10.18514/MMN.2018.2585, IF 2017: 0.585, **M23**.
2. A. Kostić, Z.Z. Petrović, Z.S. Pucanović, M. Roslavcev, *Note on strongly nil clean elements in rings*, Czechoslovak Mathematical Journal, 69:1 (2019), 87-92, ISSN: 0011-4642, DOI: 10.21136/CMJ.2018.0167-17, IF 2018: 0.424, **M23**.
3. M. Roslavcev, *Gröbner bases for ideals in univariate polynomial rings over valuation rings*, Matematički Vesnik, 73:3(2021), 183-190, ISSN: 0025-5165, **M51**.

4. A. Kostić, Z.Z. Petrović, Z.S. Pucanović, M. Roslavcev, *On a generalized Jordan form of an infinite upper triangular matrix*, Linear and Multilinear Algebra, 69:8 (2021), 1534-1542, ISSN: 0308-1087, DOI: 10.1080/03081087.2019.1632783, IF 2020: 1.736, **M21**.
5. Z.Z. Petrović, M. Roslavcev, *Gröbner bases for modules over Prüfer domains*, Mathematical Reports, прихваћен за објављивање, 8 стр., ISSN: 2285-3898, IF 2020: 0.662, **M23**.
6. A. Kostić, Z.Z. Petrović, Z.S. Pucanović, M. Roslavcev, *On the generalized strongly nil clean property of matrix rings*, Algebra Colloquium, прихваћен за објављивање, 12 стр., ISSN: 1005-3867, IF 2020: 0.429, **M23**.
7. Z.Z. Petrović, M. Roslavcev, *Commutative von Neumann regular rings are 1-Gröbner*, на рецензији, 9 стр.

3. Саопштења на научним скуповима

1. М. Рославцев, *Koszul rings*, 13. Српски математички конгрес, Врњачка Бања, 22-25. мај, 2014.
2. З. З. Петровић, М. Рославцев, О коначно генерисаним идеалима у полиномијалним прстенима над нететериним валуационим доменима, Седми симпозијум „Математика и примене”, 2016.

4. Предмет докторске дисертације

Предмет изучавања ове докторске дисертације су Гребнерове базе за коначно генерисане идеале у прстенима полинома над неким класама нететериних прстена. Аутори у радовима „*The Gröbner ring conjecture in the lexicographic order case*” (I. Yengui) и „*The Gröbner ring conjecture in one variable*” (H. Lombardi, P. Shuster, I. Yengui) отварају питање да ли је валуациони домен Гребнеров прстен. Овим се мотивише даље истраживање на тему Гребнерових база и валуационих прстена, као и свих других класа нететериних прстена, сродних њима или не, код којих саме особине прстена наговештавају могућности извођења закључака о коначној генерисаности идеала $LT(I)$. Прстени на којима је фокус у овој докторској дисертацији су Приферови домени Крулове димензије 1, валуациони домени Крулове димензије 1, валуациони прстени Крулове димензије 0, фон Нојман регуларни комутативни прстени и $(p - 1)$ -нил-чисти комутативни прстени. Познато је да је већи део теорије Гребнерових база разматран за случај када је базни прстен поље или Нететерин комутативни домен, у шта се убрајају главно-идеалски домени и Дедекиндови домени. Нететерини прстени који су овде споменути разматрају се са претпоставком комутативности, као и постојања јединице, али не нужно без делитеља нуле. У овој докторској дисертацији пажња је највише усмерена на прстене полинома са једном неодређеном, што представља почетни

корак ка изучавању Гребнерових база за коначно генерисане идеале у прстенима полинома са више неодређених.

Пристап за одређивање Гребнерових база у случају ненетериних прстена не може бити стандардни, као на пример у класичној литератури која се бави Гребнеровим базама и где се, између осталог, користи појам S -полинома. У овом случају егзистенција Гребнерове базе види се кроз коначну генерисаност идеала $LT(I)$ водећих чланова свих полинома полазног идеала I . Анализа одређених особина наведених ненетериних прстена, то јест, особина елемената тих прстена као коефицијената полинома, може резултовати тиме да, под одређеним условима, $LT(I)$ буде коначно генерисан. Предмет анализе су и алгоритми и методе за конкретно израчунавање Гребнерових база. Као и у стандардној литератури, једна од примена је одређивање Гребнерових база за подмодуле коначно генерисаних слободних модула над прстенима полинома који су, у овом случају, над ненетериним прстенима.

5. Приказ дисертације

Ова дисертација се састоји од увода на 2 стране, текста од 58 страна подељеног у 7 глава и списка литературе од 44 библиографске јединице.

У првој глави представљене су неопходне дефиниције и тврђења у циљу дефинисања појма Гребнерове базе и јаке Гребнерове базе за идеал у прстену полинома над прстеном R , као и неки од основних појмова из теорије комутативних прстена који се користе у тексту. Остале главе садрже оригиналне резултате, пре којих су представљене основне дефиниције и особине појмова који се анализирају.

У другој глави испитују се валуациони домени. Представљен је доказ да над једнодимензионим валуационим доменом V сваки коначно генерисани идеал у $V[X]$ има минималну јаку Гребнерову базу. Та база се може и одредити, користећи резултате који претходе овој теорему. Дат је и један детаљно разрађен пример ненетериног валуационог домена Крулове димензије један, затим један коначно генерисани идеал над овим прстеном и одређена је његова Гребнерова база помоћу представљених техника.

Трећа глава се бави валуационим прстенима, који представљају генерализацију прстена из претходне главе. Доказано је да постоји минимална јака Гребнерова база за сваки коначно генерисани идеал у $V[X]$, где је V нуладимензиони валуациони прстен у коме је анулатор сваког елемента коначно генерисан. Сем тога, дат је пример ненетериног валуационог прстена Крулове димензије један где је анулатор сваког елемента коначно генерисан, затим коначно генерисан идеал над овим прстеном и одређена је његова Гребнерова база помоћу приказаних резултата у овој глави. Резултати ове главе су представљени у раду под бројем 3.

У наредној глави се уводи појам Приферовог домена и представља доказ да постоји Гребнерова база за сваки коначно генерисни идеал у $R[X]$, где је R Приферов домен димензије један. Такође се износи закључак да наведени резултат важи и за Безуове домене као важну поткласу Приферових. Потом се доказује да постоји Гребнерова база за коначно генерисан подмодул у $R[X]^m$, где је R једнодимензиони Приферов домен и где је фиксиран мономни поредак POT . Резултати ове главе су представљени у раду под бројем 5.

У петој глави се изучавају Фон Нојман регуларни комутативни прстени и представља доказ да постоји јака Гребнерова база за коначно генерисани идеал у $R[X]$. Такође је приказан пример на коме се демонстрирају технике одређивања те базе које се базирају на датим резултатима. Резултати ове главе су представљени у раду под бројем 7.

Шеста глава се бави $(p - 1)$ -нил-чистим комутативним прстенима R , који су уведени у раду под бројем 1, а даље истраживање је настављено у раду под бројем 6. Дат је доказ да је могуће решити проблем припадности радикалском идеалу у $R[X]$, као и примери неких ненетериних $(p - 1)$ -нил-чистих прстена.

Седма глава се бави дискусијом о прстену полинома са више неодређених и о могућностима генерализације резултата из претходних глава. На крају се представљају питања о смеру даљег истраживања и евентуалном проширењу свих наведених резултата.

У овој докторској дисертацији тежиште је на анализи особина наведених ненетериних прстена у циљу испитивања коначне генерисаности идеала $LT(I)$, где је I коначно генерисани идеал у прстену полинома. У истраживању се користе теорија Гребнерових база, као и методе теорије прстена са специјалним особинама. Једна од главних техника која се користи у показивању да је идеал водећих чланова коначно генерисан јесте одређивање једног или више полинома у датом идеалу који имају специјалне особине. На пример, полином чији је водећи коефицијент идемпотент или 1, полином чији водећи коефицијент генерише $c(f_1) + \dots + c(f_k)$ (где је $I = \langle f_1, \dots, f_k \rangle$), полиноми чији водећи коефицијенти генеришу идеал свих водећих коефицијената полазног идеала, и тако даље. На тај начин се фиксира максимални степен полинома у идеалу, а потом посматрају одређени придружени идеали или модули који добро описују водеће чланове полинома који су мањег степена од претходно одређених специјалних полинома.

6. Закључак

Ова теза садржи веома конкретан и значајан допринос теорији Гребнерових база за коначно генерисане идеале у полиномијалним прстенима са једном неодређеном над ненетериним прстенима, а такође и неке резултате за прстене полинома са више неодређених. У тези је указано на проблеме који се појављују у

једином до сада објављеном раду о полиномима са више неодређених. Добијени су нови докази и нови алгоритми за постојеће резултате других аутора, али и резултати о постојању Гребнерових база за две нове, добро познате класе прстена, као и за питање припадности идеалу за класу прстена које је аутор увео и испитивао у својим коауторским радовима. Теза је лепо написана, са кратким и јасним доказима и конкретним и добро приказаним примерима.

Због свега наведеног, предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати приложени текст као докторску дисертацију Маје Рославцев и одреди комисију за њену јавну одбрану.

Београд, 24. август 2021.

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

проф. др Зоран Петровић, редовни професор (ментор)
Универзитет у Београду
Математички факултет

проф. др Александар Липковски, редовни професор
Универзитет у Београду
Математички факултет

проф. др Зоран Пуцановић, ванредни професор
Универзитет у Београду
Грађевински факултет

др Марко Радовановић, доцент
Универзитет у Београду
Математички факултет