

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ		
1. Датум и орган који је именовао комисију: 16. 3. 2023. Наставно – научно веће Природно – математичког факултета, Универзитета у Новом Саду		
2. Састав комисије у складу са <i>Правилима докторских студија Универзитета у Новом Саду</i> :		
1. Пилиповић др Стеван Pilipović Stevan, PhD	Академик, професор емеритус Academician, professor emeritus	Анализа и вероватноћа, Analysis and probability, 12. 11. 2020.
презиме и име	звање	ужа научна област и датум избора
Природно – математички факултет, Универзитет у Новом Саду		председник
Faculty of Natural Sciences, University of Novi Sad		president
установа у којој је запослен-а		функција у комисији
2. Теофанов др Ненад Teofanov Nenad, PhD	редовни професор full professor	Анализа и вероватноћа, Analysis and probability, 1.10.2010.
презиме и име	звање	ужа научна област и датум избора
Природно – математички факултет, Универзитет у Новом Саду		члан
Faculty of Natural Sciences, University of Novi Sad		member
установа у којој је запослен-а		функција у комисији
3. Dolinar dr Gregor Dolinar Gregor, PhD	редовни професор full professor	Математика Mathematics, 20. 4. 2011.
презиме и име	Звање	ужа научна област и датум избора
Faculty of Electrical Engineering, University of Ljubljana		Члан
		member

	установа у којој је запослен-а	функција у комисији
4.	Живковић Златановић др Снежана Živković Zlatanović Snežana, PhD	редовни професор full professor Mathematics 20. 4. 2020.
	презиме и име	звање
	Природно – математички факултет, Универзитет у Нишу	ужа научна област и датум избора
	Faculty of Natural Sciences, University of Niš	члан
		member
	установа у којој је запослен-а	функција у комисији
5.	Дијана др Мосић Dijana Mosić, PhD	редовни професор full professor Mathematics, 16. 10. 2017.
	презиме и име	звање
	Природно – математички факултет, Универзитет у Нишу	ужа научна област и датум избора
	Faculty of Natural Sciences, University of Niš	члан
		member
	установа у којој је запослен-а	функција у комисији
II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ		
1. Име, име једног родитеља, презиме: Никола Милена Сарајлија / Nikola Milena Sarajlija		
2. Датум рођења, општина, држава: 19. 12. 1995. Нови Сад СРЈ / 19. 12. 1995. Novi Sad SRJ		
3. Назив факултета, назив претходно завршеног нивоа студија и стечени стручни/академски назив: Природно – математички факултет, Универзитет у Новом Саду, мастер студијски програм Математика, мастер математичар / Faculty of Natural Sciences, University of Novi Sad, master studies in Mathematics, master mathematician		
4. Година уписа на докторске студије и назив студијског програма докторских студија: 2019 Докторска школа математике / 2019 PhD School of Mathematics		
III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:		

Spectral properties of operator matrices on Banach spaces

Спектралне особине матрица оператора на Банаховим просторима

IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Докторска дисертација је написана на 126 страна, на енглеском језику, латиничним писмом. Текст дисертације је подељен у 6 поглавља, и аутор је навео укупно 61 цитат. На почетку дисертације дати су: уводна реч аутора, кључна документацијска информација на српском и енглеском језику, кратак резиме рада на српском језику, садржај рада, и сажетак на српском и енглеском језику. Затим следи текст дисертације који је подељен у следећа поглавља и потпоглавља:

1 Увод

1.1 Нотација и главни задаци

1.2 Основна тврђења

1.3 Историјска позадина

2 Случај $n = 2$

2.1 Инвертибилна комплетирања M_C

2.1.1 Позадина сепарабилних Хилбертових простора

2.1.2 Позадина несепарабилних Банахових простора

2.2 Разна комплетирања M_C

2.2.1 Фредхолм комплетирања M_C

2.2.2 Вејл комплетирања M_C

2.2.3 Браудер комплетирања M_C

2.2.4 Десна и лева Фредхолмова комплетирања M_C

2.2.5 Десна и лева комплетирања M_C

3 Случај $n = 3$

3.1 Позадина сепарабилних Хилбертових простора

3.2 Позадина несепарабилних Банахових простора

4 Општи случај $n \geq 3$

4.1 Инвертибилна комплетирања $T_n^d(A)$

4.2 Вејл инвертибилност $T_n^d(A)$

4.2.1 Случај сепарабилности

4.2.2 Несепарабилни простори

4.3 Фредхолм инвертибилност $T_n^d(A)$

4.3.1 Случај сепарабилности

4.3.2 Несепарабилни простори

5 Проблем попуњавања рупа

5.1 Случај $n = 2$

5.2 Случај $n = 3$

5.3 Општи случај $n \geq 3$

5.3.1 Вејлов спектар

5.3.2 Фредхолмов спектар

5.3.3 Спектар

6 Блок матрице оператора које нису горње троугаоне

6.1 Историјски преглед

На самом крају тезе, дата је библиографија коришћена приликом писања тезе. Након тога је наведена биографија кандидата, са списком конференција на којима је учествовао, као и списак радова кандидата који су у вези са докторском дисертацијом.

Doctoral dissertation is written with 126 pages in total, in English language, using Latin letter. Text of the dissertation is divided into 6 chapters, and the author has cited 61 references in total. At the beginning of the dissertation the author provides the following content: a word from the author, key word documentation in Serbian and English language, short summary in Serbian language, table of contents, and abstract in Serbian and English language. The latter is followed by the text of the dissertation which is divided into the following sections and subsections:

- 1 Introduction
 - 1.1 Notation and main tasks
 - 1.2 Preliminaries
 - 1.3 Historical background
- 2 Case $n = 2$
 - 2.1 Invertible completions of M_C
 - 2.1.1 Separable Hilbert space setting
 - 2.1.2 Non-separable Hilbert space setting
 - 2.2 Various completions of M_C
 - 2.2.1 Fredholm completions of M_C
 - 2.2.2 Weyl completions of M_C
 - 2.2.3 Browder completions of M_C
 - 2.2.4 Right and left Fredholm completions of M_C
 - 2.2.5 Right and left completions of M_C
- 3 Case $n = 3$
 - 3.1 Separable Hilbert space setting
 - 3.2 Non-separable Hilbert space setting
- 4 General case $n \geq 3$
 - 4.1 Invertible completions of $T_n^d(A)$
 - 4.2 Weylness of $T_n^d(A)$
 - 4.2.1 Separability case
 - 4.2.2 Nonseparable spaces
 - 4.3 Fredholmness of $T_n^d(A)$
 - 4.3.1 Separability case
 - 4.3.2 Nonseparable spaces
- 5 Filling in holes problem
 - 5.1 Case $n = 2$
 - 5.2 Case $n = 3$
 - 5.3 General case $n \geq 3$
 - 5.3.1 The Weyl spectrum
 - 5.3.2 The Fredholm spectrum

5.3.3 The spectrum
6 Block operator matrices that are not upper triangular
6.1 Historical overview

At the end of the thesis, there is a bibliography used during the writing process. Afterwards, there is a biography of the candidate with a list of conferences in which he participated in, as well as a list of papers of the candidate that are connected with this doctoral dissertation.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Дисертација садржи све неопходне елементе одређене важећим правилницима, исправно је структурирана и има јасан начин излагања.

Комисија сматра да је **наслов** докторске дисертације формулисан прецизно и недвосмислено, и да јасно указује на разматрану проблематику.

Докторску дисертацију чини 6 поглавља, која имају логичан след и добро су систематизована.

У уводном, *првом поглављу*, дата су уводна разматрања и представљени су кључни концепти дисертације. Најпре је уведена стандардна нотација која ће се користити током рада. Затим су дефинисани појмови који представљају главни предмет истраживања аутора ове дисертације. Након тога, представљена су и главна питања којима се бавио аутор дисертације. У другом потпоглављу дисертације наведена су уводна тврђења функционалне анализе која су добро позната у литератури.

У трећем потпоглављу првог поглавља дат је кратак историјски осврт на ову проблематику, са акцентима на области науке у којима изучавана проблематика налази широке примене.

Комисија закључује да су уводне одреднице, мотивација и доприноси адекватно дефинисани, као и да је кратак историјски осврт дат логичним редоследом, са акцентима на најбитније радове изучаване проблематике који постоје у литератури.

У **другом поглављу** кандидат представља неке познате резултате за матрице оператора формата 2×2 . Кандидат се најпре осврће на класичну инвертибилност горње троугаоне матрице оператора формата 2×2 (потпоглавље 2.1), и даје потребне и довољне услове за њено комплетирање. Притом, најпре се посматра случај када су простори на чијој директној суми матрица оператора делује сепарабилни (одељак 2.1.1), а затим се посматра случај када ти простори не морају имати особину сепарабилности (одељак 2.1.2). У оба ова одељка најпре се наводе главне теореме које се тичу карактеризације инвертибилности матрице оператора формата 2×2 , а затим се као последице изводе тврђења која се тичу проблема пертурбације спектра. У потпоглављу 2.2 дат је осврт на разне врсте

инвертибилности оператора које се срећу у Фредхолмовој теорији и теорији уопштених инверза. Респективно, кандидат се бави Фредхолм – инвертибилношћу (одељак 2.2.1), Вејл – инвертибилношћу (одељак 2.2.2), Браудер – инвертибилношћу (одељак 2.2.3), десном и левом Фредхолм – инвертибилношћу (одељак 2.2.4), десном и левом инвертибилношћу (одељак 2.2.5). Начин излагања у овом потпоглављу је исти као и у претходном: кандидат најпре наводи резултате о карактеризацији инвертибилности матрице оператора димензије 2, а затим као последице добија резултате који се тичу пертурбације спектра.

Комисија позитивно оцењује поглавље 2 посвећено спектралним својствима матрице оператора формата 2×2 .

У поглављу 3 кандидат наводи неке познате, али и оригиналне, резултате за матрице оператора формата 3×3 . Окарактерисана је класична инвертибилност горње троугаоне матрице оператора формата 3×3 , и дати су потребни и довољни услови за њено комплетирање. Као и у претходној глави, кандидат прво посматра случај када су простори на чијој директној суми матрица оператора делује сепарабилни (потпоглавље 3.1), а затим се посматра случај када ти простори не морају бити сепарабилни (потпоглавље 3.2). У оба ова потпоглавља најпре се наводе теореме које се тичу карактеризације инвертибилности матрице оператора формата 3×3 , а затим се као последице изводе тврђења која коментаришу пертурбације спектра.

Комисија позитивно оцењује поглавље 3 посвећено спектралним својствима матрице оператора формата 3×3 .

Четврто поглавље рада је главно поглавље. У овом поглављу кандидат наводи резултате који су искључиво његов оригинални допринос науци. Сви резултати дати су у врло општем случају, тј. за горње троугаоне матрице оператора формата $n \times n$, где је n било који природан број већи од 2. Резултати који су наведени тичу се како класичне инвертибилности, тако и општијих типова инвертибилности који се изучавају у Фредхолмовој теорији. Кандидат најпре наводи резултате за класичну инвертибилност горње троугаоне матрице оператора формата $n \times n$, и то је садржај потпоглавља 4.1. Као и до сад, прво се уводе тврђења која дају потребне и довољне услове инвертибилности, а затим се као последице изводе резултати за проблем пертурбације спектра. Осим класичне „обостране” инвертибилности, наводе се и резултати за леву и десну инвертибилност поменуте класе матрица оператора. Следеће, потпоглавље 4.2, бави се изучавањем Вејл – инвертибилности. Оно је подељено на два дела: одељак 4.2.1 у којем се претпоставља сепарабилност простора на којима делује матрица оператора, и одељак 4.2.2 у којем се сепарабилност не претпоставља. Последње потпоглавље 4.3 бави се Фредхолм – инвертибилношћу, и резултати овог потпоглавља су последица резултата претходног потпоглавља. И у овом потпоглављу прво се наводе резултати који важе под претпоставком сепарабилности, а затим се ти резултати уопштавају изостављајући

сепарабилност (видети одељке 4.3.1 и 4.3.2, респективно).

Комисија позитивно оцењује поглавље 4 посвећено спектралним својствима матрице оператора формата $n \times n$, у којем су изложени оригинални самостални резултати кандидата.

У поглављу 5 кандидат се бави решавањем једног практичног проблема везаног за матрице оператора. То је тзв. проблем попуњавања рупа који је до сада био решен у неким специјалним случајевима, а кандидат га решава за случај квадратних матрица оператора произвољних димензија. Организација овог поглавља је следећа. У потпоглављу 5.1 кандидат представља тачно решење овог проблема за горње троугаоне матрице оператора формата 2×2 , и то је резултат који је био познат у литератури. У следећем потпоглављу 5.2 се решава овај проблем за матрице оператора формата 3×3 , и то је такође познати резултат. Најзад, у потпоглављу 5.3 кандидат представља своје оригиналне резултате на ову тему, и решава овај проблем за матрице великих димензија и то за разне врсте спектра. Спектри који се изучавају су Вејлов, Фредхолмов и обичан спектар, и резултати везани за њих садржани су редом у одељцима 5.3.1, 5.3.2 и 5.3.3. У сваком од претходних одељака дају се два типа резултата на тему: они који претпостављају сепарабилност, и они који важе без сепарабилности.

Комисија позитивно оцењује поглавље 5 посвећено решавању проблема попуњава рупа за горње троугаоне матрице оператора формата $n \times n$, а у којем су изложени оригинални самостални резултати кандидата.

Поглавље 6 је кратак осврт на матрице оператора које нису горње троугаоне, већ имају неку другу блок – матричну структуру. У овом поглављу је дат историјски преглед најважнијих резултата других аутора за два типа матрица оператора формата 2×2 које нису горње троугаоне (потпоглавље 6.1).

Комисија позитивно оцењује поглавље 6 посвећено матрицама оператора које нису горње троугаоне.

Комисија позитивно оцењује све делове докторске тезе кандидата Николе Сарајлије, као и начин на који су резултати дисертације приказани и тумачени.

Dissertation contains all the required elements determined by the valid books of regulations, and it is well structured with clear way of presentation.

The committee regards that *the title* of the dissertation is formulated precisely and unambiguously, and that it clearly reflects the topic considered.

Doctoral dissertation is constituted of 6 chapters which are given with logical order and are well systematized.

Introductory, *first chapter*, contains introductory guidelines, and some key concepts of

the dissertation are presented. Firstly, some standard notation that will be used throughout the thesis is introduced. Then, the author defines the main objects of his interest. Afterwards, the main questions to be considered are presented. In the second section introductory statements of functional analysis that are well known in the literature are presented.

In the third section of the first chapter there is a short historical background on this topic, with accents on areas of science in which this topic finds broad usage.

The committee concludes that basic markers, motivation and contributions are adequately defined, and that the short historical background is with logical structure, with accents on the most important papers of this topic that exist in the literature.

In the **second chapter** the candidate presents some known results for operator matrices of the form 2×2 . Candidate first examines the usual invertibility of upper triangular operator matrix of the form 2×2 (section 2.1) and provides necessary and sufficient conditions for their completion. Thereat, the case where spaces on which direct sum an operator matrix acts are separable is studied first, and afterwards the case when those spaces need not be separable is studied. In both of these sections, the author first gives the main theorems which deal with characterizations of invertibility of operator matrices of the form 2×2 , and after that some consequences which deal with perturbation of the spectrum are given. In section 2.2 the author gives insight to various types of operator-invertibility that are studied in Fredholm theory and theory of generalized inverses. Respectively, the candidate is occupied with Fredholm-invertibility (subsection 2.2.1), Weyl-invertibility (subsection 2.2.2), Browder-invertibility (subsection 2.2.3), right and left Fredholm-invertibility (subsection 2.2.4), and right and left invertibility (subsection 2.2.5). Presentation in this subsection is the same as in the previous one: the candidate first lists results dealing with characterization of invertibility of operator matrices having dimension 2, and then as consequences he gets results dealing with perturbation of the spectrum.

The committee gives a positive opinion of chapter 2 dealing with spectral properties of operator matrices of the form 2×2 .

In the **third chapter** the author states some known and original results for operator matrices of the form 3×3 . The usual invertibility of such matrices is characterized, and some necessary and sufficient conditions for their completion are given. Just as in the previous chapter, the candidate first examines the case when an operator matrix acts on a direct sum of separable spaces (section 3.1), and after that he observes the case when separability is not needed (section 3.2). In both of these sections theorems dealing with characterizations of invertibility of operator matrices of the form 3×3 are stated first, and those results then yield statements related to the perturbation of the spectrum.

The committee gives a positive opinion of chapter 3 dealing with spectral properties of operator matrices of the form 3×3 .

Fourth chapter of the thesis is the main chapter. In this chapter the candidate states the results which are primarily his original scientific contribution. All results in this chapter are given in a rather general case, that is for upper triangular operator matrices of the form $n \times n$, where n is an arbitrary natural number greater than 2. Results in question deal with the usual invertibility, but with some more general types of invertibility that are studied in Fredholm theory as well. Candidate first states results for classical invertibility of upper triangular operator matrix of the form $n \times n$, and it is contained in section 4.1. Just as before, theorems dealing with necessary and sufficient conditions for invertibility are stated first, and then results dealing with perturbation of the spectrum follow. Beside results dealing with classical two-sided invertibility, results devoted to one-side invertibility are also given. Next section 4.2 is devoted to studying Weyl-invertibility. It is divided into two parts: subsection 4.2.1, which utilizes the assumption of separability of underlying spaces, and subsection 4.2.2 which does not utilize such assumption. Last section 4.3 examines Fredholm-invertibility, and results of this section are direct consequences of results from the preceding section. In this section results assuming separability are stated first again, and then those results are generalized to the ones not assuming separability.

The committee gives a positive opinion of chapter 4 dealing with spectral properties of operator matrices of the form $n \times n$, which contains original individual scientific results of the candidate.

In **chapter 5** the candidate examines one practical problem related to operator matrices. The problem in question is the so called "Filling in holes problem" which has been solved so far only in some special cases, and the candidate solves him for the general case of operator matrices having arbitrary large dimension. Organization of this chapter is the following. In section 5.1 the candidate presents correct solution of this problem for upper triangular operator matrices of the form 2×2 , and this is the result that was known in the literature already. In next subsection 5.2 this problem is solved for operator matrices of the form 3×3 , and this is the result that was known in the literature as well. Finally, in section 5.3, the candidate presents his original results on this topic, and successfully solves this problem for matrices of large dimensions presenting results for various kind of spectra. Spectra that are studied are Weyl, Fredholm, and the usual spectrum, and results devoted to those spectra are summarized in subsections 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3, respectively. In each of the previous subsections two types of results are presented: those that assume separability, and those that do not assume it.

The committee gives a positive opinion of chapter 5 devoted to the solution of the Filling in holes problem for operator matrices of the form $n \times n$, which contains original individual scientific results of the candidate.

Chapter 6 is a brief review to operator matrices that are not upper triangular but take some other block matrix structure instead. In this chapter there is a historical insight of the most important results of other authors for two types of operator matrices of the form 2×2 that are not upper triangular (section 6.1).

The committee gives a positive opinion of chapter 6 devoted to operator matrices that are not upper triangular.

*The committee gives a **positive opinion** for all parts of the doctoral thesis by the candidate Nikola Sarajlija, as well as for the way of presentation and interpretation of the results in the thesis.*

VI СПИСАК НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КОЈИ СУ ОБЈАВЉЕНИ ИЛИ ПРИХВАЋЕНИ ЗА ОБЈАВЉИВАЊЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА У ОКВИРУ РАДА НА ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ:

- Sarajlija Nikola, Fredholmness and Weylness of operator matrices, *Filomat* 36:8 (2022), 2507-2518 (**M22**)
- Sarajlija Nikola, Perturbing the spectrum of operator $T_n^d(A)$, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales. Serie A. Matematicas (RACSAM)*, 117 (2023) no. 1, Paper No. 10, 12pp. (**M21a**)

VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА:

Резултати и доприноси ове докторске дисертације тичу се класе горње троугаоних матрица оператора, и имају за циљ проширење неких резултата који важе за матрице формата 2×2 на матрице формата $n \times n$, где је n произвољан природни број. Дисертација има више резултата и доприноса, који се могу описати на следећи начин:

- Велика већина резултата који су добијени за матрице формата 2×2 могу се добити тако што се најпре докажу општији резултати за матрице формата $n \times n$, одакле се узимањем $n=2$ као специјалан случај онда добијају познати резултати. У дисертацији је приказан начин на који се добијају ти општији резултати, и илустровано је да се узимањем специјалног случаја $n=2$ заиста добијају познати резултати. Поменут начин за добијање општијих резултата базира се на декомпозицији Банахових простора у терминима језгра и слике елемената са главне дијагонале матрице оператора, и детаљно је описан у дисертацији.
- Досадашњи резултати добијани за горње троугаоне матрице оператора подразумевали су коришћење сепарабилности као јаке претпоставке која се морала наметнути на просторе на којима делује матрица оператора. У дисертацији је приказан алтернативан начин за добијање истих резултата који не користи претпоставку о сепарабилности. Предност новог метода у односу на стари јесте та што је нови метод примењив и на матрице оператора које могу бити произвољно велике димензије, док је стари метод функционалан једино за матрице оператора малих димензија.
- Метод утапања Банаховог простора у Банахов простор који је приказан у референци [18] има природно проширење и на горње троугаоне матрице оператора које су димензије веће од 2. Ова чињеница није до сада била позната у литератури, а кандидат ју је јасно приказао у дисертацији.
- Познати проблем спектралне теорије оператора познат под називом проблем попуњава рупа до сада је био решаван искључиво за матрице оператора формата 2×2 . У дисертацији је показано да се до решења овог проблема може доћи на природан начин из разних резултата инвертибилности који су приказани у овој дисертацији, што значи да кандидат као последицу тих резултата добија решење овог значајног проблема и за матрице оператора произвољно велике димензије.

Results and contributions of this thesis are associated to the class of upper triangular operator matrices and have as their goal generalizing some results that hold for operator matrices of the form 2×2 to matrices of the form $n \times n$, where n can be arbitrarily large natural number. Dissertation has several results and contributions, which can be described as follows.

- Many results that are proved for operator matrices of the form 2×2 can be obtained in a manner that one proves general results for operator matrices of the form $n \times n$, and then take $n=2$ as a special case. In this dissertation the correct

method for obtaining such results is shown, and it is illustrated that the special choice $n=2$ truly produces results that were already known. This method for obtaining more general results is based on a decomposition of Banach spaces in terms of kernel and range of elements placed on the main diagonal of an operator matrix and is described in detail in the dissertation.

- Results for upper triangular operator matrices that are obtained so far utilize separability as a strong assumption that must be assumed for spaces on which an operator matrix acts. In the dissertation a different approach is shown for obtaining same results that does not utilize separability. The Advantage of this approach is that it is applicable to operator matrices of an arbitrary dimension, while the previous approach was functional for operator matrices having small dimension solely.
- Method of Banach space embeddings which is shown in [18] has a natural extension to upper triangular operator matrices of dimension greater than 2. This fact has not been exploited in the literature yet, and the candidate has made its clear application in the thesis.
- Well known problem in spectral theory of operator matrices known as filling in holes problem has been solved for operator matrices of the form 2×2 solely. In the dissertation it is presented that the solution of this problem naturally follows from various invertibility results that are included in the dissertation, which means that the candidate as a consequence of those results gets a solution of this important problem for operator matrices of an arbitrary large dimension.

VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

Приказ свих резултата истраживања је добро организован по тематским целинама, и наведен је логичким редоследом. Формулација резултата је прецизна и јасна. Тумачење резултата је коректно приказано, са освртом и на последице које из главних резултата следе.

Текст дисертације је проверен у софтверу за детекцију плагијаризма iThenticate у Библиотеци Департмана за Математику и Информатику Природно – математичког факултета у Новом Саду, и као резултат анализе добијена је вредност резултујућег индекса сличности 49%. На основу резултата провере, Комисија је констатовала да је највећи обим подударности (прва три наведена преклапања) текста дисертације добијен са научним радовима кандидата. Ради се о два објављена рада и два рада постављена на платформу arXiv. У тим радовима кандидат Никола Сарајлија је једини аутор, а сами радови садрже резултате дисертације. У нешто мањем обиму софтвер је уочио преклапање са деловима текста других аутора (формулације неких дефиниција, лема, теорема и последица) при чему је у дисертацији увек наведена одговарајућа референца. Тако су, на пример, у уводном поглављу коришћене дефиниције из рада [12], а у осталим деловима аутор се позива на постојеће резултате других аутора који су прецизно наведени уз поштовање свих правила цитирања. Примера ради, у другом поглављу, аутор користи и цитира резултате из објављених радова [16], [25], [12]. У математичким текстовима је неопходно прецизно репродуковати претходно добијене резултате. С обзиром да је у дисертацији увек наведен извор цитираног резултата, у овом случају не постоје елементи плагијаризма. Остатак преклапања односи се на поједине опште коришћене фразе. Стога се закључује да је докторска дисертација оригинално ауторско дело кандидата Николе Сарајлије. Са Извештајем о подударности упознати су сви чланови комисије.

*На основу наведеног, Комисија је донела **позитивну оцену** за начин приказа и тумачења резултата, са закључком да је докторска дисертација оригинално ауторско дело кандидата Николе Сарајлије.*

Presentation of all results of the research is well organized thematically, and it is given with logical order. Formulation of the results is precise and clear. Interpretation of the results is correctly presented, with a review of consequences that follow from main results.

Text of the dissertation has been checked by the plagiarism detection software iThenticate at the library of the Department for Mathematics and Informatics at Faculty of Natural Sciences, Novi Sad, and as a result of the comparison analysis a similarity index of 49% was obtained. Based on the results of this analysis, the committee has determined that the largest amount of similarity (the first three overlaps) is with scientific articles of the candidate. The Articles in question are two published articles and other two that can be found at platform arXiv. In these articles candidate Nikola Sarajlija is the only author, and the former contain results from the dissertation. The software has also spotted some minor overlaps with parts of the text of other authors

(formulation of some definitions, lemmas, theorems and consequences), but in dissertation these parts are always with an appropriate bibliography reference. For example, in the introductory chapter definitions from article [12] are used, and in other parts of the dissertation the author summons known results of other authors that are precisely listed respecting all the rules of citations. For example, the author utilizes and cites results from published papers [16], [25], [12]. In mathematical texts it is necessary to precisely reproduce already known results. Since in the dissertation there is always a reference of a cited result, there are no elements of plagiarism in this case. The rest of the overlaps are with some generally used phrases. Therefore, it is concluded that the dissertation is an original individual work of the candidate Nikola Sarajlija. All members of the committee are familiar with the Similarity report results.

*Based on the previous paragraphs, the committee gives a **positive opinion** for the presentation and interpretation of the results, with the conclusion that the dissertation is the original individual work of the candidate Nikola Sarajlija.*

IX КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

- Да ли је дисертација написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме?

Дисертација је у потпуности написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме.

- Is the dissertation written with respect to the guidelines stated in the dissertation application?

Dissertation is completely written with the guidelines stated in the dissertation application.

- Да ли дисертација садржи све битне елементе?

Дисертација у потпуности садржи све потребне елементе. Дат је врло прецизан увод у теоријске концепте који се користе касније у раду. Организација поглавља је јасна и логична. Начин излагања је јасан и конкретан. Списак библиографских референци сведочи о добром познавању области, и квалитетно је састављен.

- Does the dissertation contain all the vital elements?

Dissertation definitely contains all the vital elements. A very precise introduction to theoretical concepts to be used is provided. The organization of the chapters is clear and logical. The interpretation is clear and concrete. List of bibliography references witnesses a well knowledge of this topic, and is well written.

- По чему је дисертација оригиналан допринос науци?

Докторска дисертација кандидата Николе Сарајлије представља оригиналан научни рад са више теоријских научних доприноса. Главни доприноси дисертације јесу уопштавање до сада постојећих резултата тако да важе са слабијим претпоставкама и у најширим могућим окружењима. Уопштења која су приказана у дисертацији могу се сврстати у две категорије од подједнаког значаја:

- Уопштења резултата везаних за горње троугаоне матрице оператора формата 2×2 и 3×3 на горње троугаоне матрице оператора формата $n \times n$, где је n произвољан број већи од 2.
- Уопштења резултата везаних за горње троугаоне матрице оператора формата 2×2 и 3×3 који претпостављају сепарабилност одговарајућих простора до резултата за матрице оператора истог формата који не претпостављају сепарабилност поменутих простора.

Оригинални доприноси дисертације који се истичу могу се описати на следећи начин:

- 1) Показано је да је метод свођења на контрадикцију приказан у библиографским референцама [54], [55] валидан и у оним Хилбертовим просторима који не морају бити сепарабилни.
- 2) Показано је да метод утапања Банахових простора уведен у

библиографској референци [12] има природно проширење са класе матрица оператора формата 2×2 на класу матрица оператора формата $n \times n$, где је n природан број већи од 2.

3) Показано је да многи досадашњи резултати од раније познати у литератури за горње троугаоне матрице оператора формата 2×2 могу да се добију као специјалан случај општијих истраживања.

- By what means the dissertation can be considered as an original contribution to science?

Doctoral dissertation by the candidate Nikola Sarajlija represents an original scientific work with several theoretic scientific contributions. Main contributions of the dissertation are generalizing known results so that they hold with weaker assumptions and in the most general settings. Generalizations that are shown in the dissertation can be separated into two categories of equal importance:

- Generalizations of results for upper triangular operator matrices having form 2×2 and 3×3 to upper triangular operator matrices having form $n \times n$, where n is an arbitrary number greater than 2.
- Generalizations of results for upper triangular operator matrices having form 2×2 and 3×3 which utilize separability of appropriate spaces, to the results for matrices of the same form which do not assume separability.

Original contributions of the dissertation which point out can be described in the following way:

1) It is shown that method of reduction to absurdity presented in bibliographical references [54], [55] stays valid in Hilbert spaces that do not assume separability.

2) It is shown that method of Banach space embeddings introduced in bibliographical reference [12] has a natural extension from the class of operator matrices having form 2×2 to the class of operator matrices having form $n \times n$, where n is a natural number greater than 2.

3) It is shown that many of existing results for upper triangular operator matrices having form 2×2 that are known so far in the literature can be derived as a special case of more general research.

- Који су недостаци дисертације и какав је њихов утицај на резултат истраживања?

Дисертација нема недостатака.

- What are the oversights of the dissertation and what is their impact to the result of the research?

Dissertation does not have oversights.

X ПРЕДЛОГ:

На основу наведеног, комисија предлаже:

да се докторска дисертација кандидата Николе Сарајлије под називом „Спектралне особине матрица оператора на Банаховим просторима” **прихвати, и да се кандидату одобри одбрана исте.**

Taking into consideration the findings of this evaluation report, the committee recommends that the dissertation entitled „Spectral properties of operator matrices on Banach spaces“ written by candidate Nikola Sarajlija is **to be accepted and the candidate allowed to proceed with its defense.**

Место и датум: Нови Сад, Љубљана, Ниш / Novi Sad, Ljubljana, Niš, 18. 4. 2023.

1. Стеван Пилиповић, професор емеритус, председник

Stevan Pilipović, professor emeritus, president

2. Ненад Теофанов, редовни професор, члан

Nenad Teofanov, full professor, member

3. Gregor Dolinar, редовни професор, члан

Gregor Dolinar, full professor, member

4. Снежана Живковић Златановић,
редовни професор, члан

Snežana Živković Zlatanović, full
professor, member

_____.

5. Дијана Мосић, редовни
професор, члан

Dijana Mosić, full professor,
member

_____.

НАПОМЕНА: Члан комисије који не жели да потпише извештај јер се не слаже са мишљењем већине чланова комисије, дужан је да унесе у извештај образложење односно разлоге због којих не жели да потпише извештај и да исти потпише.