



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА У
НОВОМ САДУ



**ПРИЛОГ РАЗВОЈУ НУМЕРИЧКИХ
МЕТОДА У ОДРЕЂИВАЊУ
ЕФЕКТИВНЕ ВРЕДНОСТИ
ПРИМЕНЉИВИХ У МЕТРОЛОШКОЈ
ИНСТРУМЕНТАЦИЈИ**

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Ментор:

Проф. др Драган Пејић

Кандидат:

Марина Булат

Нови Сад, 2022. Године

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА¹

Врста рада:	Докторска дисертација
Име и презиме аутора:	Марина Булат
Ментор (титула, име, презиме, звање, институција)	Др Драган Пејић, ванредни професор, Факултет техничких наука
Наслов рада:	Прилог развоју нумеричких метода у одређивању ефективне вредности применљивих у метролошкој инструментацији
Језик публикације (писмо):	Српски (ћирилица)
Физички опис рада:	Унети број: Страница 110 Делови 5/ Поглавља 7 Референци 47 Табела 7 Слика 43 Графикона 0 Прилога 1
Научна област:	Електротехничко и рачунарско инжењерство
Ужа научна област (научна дисциплина):	Електрична мерења, метрологија и биомедицина
Кључне речи / предметна одредница:	Ефективна вредност, нумерички методи, интерполација, одабирање, Симпсонова 1/3 квадратурна формула, Симпсонова 3/8 квадратурна формула, примитивна квадратурна формула, трапезна квадратурна формула, аналогно-дигитална конверзија, праг конверзије

¹ Аутор докторске дисертације потписао је и приложио следеће Обрасце:

5б – Изјава о ауторству;

5в – Изјава о истоветности штампане и електронске верзије и о личним подацима;

5г – Изјава о коришћењу.

Ове Изјаве се чувају на факултету у штампаном и електронском облику и не кориче се са тезом.

<p>Резиме на језику рада:</p>	<p>Ова дисертација се бави проценом ефективне вредности сигнала применом нумеричких метода успостављајући везу између формалног аналитичког приступа и практичног истраживања. Један аспект дисертације се бави развојем и проучавањем модификација Симпсонових квадратурних формула у циљу њихове опште применљивости, док се други заснива на одређивању оптималне вредности прага у условима мале нецелобројне вредности количника учестаности одабирања и учестаности мереног сигнала. Показано је да за нулту вредност прага, примена модификованих Симпсонових квадратурних формула обезбеђује мању грешку процене ефективне вредности сигнала него примена најчешће коришћених метода, као што су примитивна и трапезна квадратурна формула. Време процесорског рада је приближно исто за све методе. Такође је потврђено да је могуће одредити оптималну вредност прага за нумерички метод који се употребљава. Научни допринос дисертације је могућност да се поменути ефекти постигну минималним изменама у фирмверу хардвера без потребе за унапређењем техничких карактеристика самог хардвера.</p>
<p>Датум прихватања теме од стране надлежног већа:</p>	<p>31.03.2022.</p>
<p>Датум одбране: (Попуњава одговарајућа служба)</p>	
<p>Чланови комисије: (титула, име, презиме, звање, институција)</p>	<p>Председник: Др Марјан Урекар, доцент Члан: Др Драган Денић, ред. професор Члан: Др Зоран Митровић, ред. професор Члан: Др Платон Совиљ, ред. професор Члан: Др Борис Антић, доцент Члан, ментор: Др Драган Пејић, ванредни професор</p>
<p>Напомена:</p>	

KEY WORD DOCUMENTATION²

Document type:	Doctoral dissertation
Author:	Marina Bulat
Supervisor (title, first name, last name, position, institution)	Dr. Dragan Pejić, Associate Professor, Faculty of Technical Sciences
Thesis title:	A Contribution to the Development of Numerical Methods Used for the Estimation of the RMS Value Applicable in Metrological Instrumentation
Language of text (script):	Serbian language (cyrillic)
Physical description:	Number of: Pages 110 Parts 5/ Chapters 7 References 47 Tables 7 Illustrations 43 Graphs 0 Appendices 1
Scientific field:	Electrical and computer engineering
Scientific subfield (scientific discipline):	Electrical measurements, metrology, and biomedicine
Subject, Key words:	RMS, numerical methods, interpolation, sampling, Simpson's 1/3 rule, Simpson's 3/8 rule, rectangle method, trapezoidal rule, analog-to-digital conversion, treshhold.
Abstract in English language:	This dissertation examines the estimation of the RMS value using numerical methods, while establishing a link between the idealized analytic and practical approaches. One aspect is concerned with the

² The author of doctoral dissertation has signed the following Statements:

56 – Statement on the authority,

5B – Statement that the printed and e-version of doctoral dissertation are identical and about personal data,

5r – Statement on copyright licenses.

The paper and e-versions of Statements are held at he faculty and are not included into the printed thesis.

	<p>modification of Simpson's rules in order to ensure their general applicability, and the other with the optimal threshold value for low, non-integer values of the ratio of the sampling frequency and signal's fundamental frequency. It has been shown that in comparison to the most frequently used methods such as rectangle method and trapezoidal rule, the application of the modified Simpson's rules enables a lower RMS error when the threshold value is zero. Processing time is approximately the same for all the methods. It has also been confirmed that it is possible to determine the optimal threshold value for any method used for the estimation of the RMS value. A scientific contribution of the dissertation lies in the possibility to obtain those effects by slightly modifying the firmware, without financial investment in the hardware.</p>
<p>Accepted on Scientific Board on:</p>	<p>31.03.2022.</p>
<p>Defended: (Filled by the faculty service)</p>	
<p>Thesis Defend Board: (title, first name, last name, position, institution)</p>	<p>President: Dr. Marjan Urekar, Assistant Professor Member: Dr. Dragan Denić, Full Professor Member: Dr. Zoran Mitrović, Full Professor Member: Dr. Platon Sovilj, Full Professor Member: Dr. Boris Antić, Assistant Professor Member: Dr. Dragan Pejić, Associate Professor</p>
<p>Note:</p>	

Сажетак

Ова дисертација се бави проценом ефективне вредности сигнала применом нумеричких метода успостављајући везу између формалног аналитичког приступа и практичног истраживања. Један аспект дисертације се бави развојем и проучавањем модификација Симпсонових квадратурних формула у циљу њихове опште применљивости, док се други заснива на одређивању оптималне вредности прага у условима мале нецелобројне вредности количника учестаности одабирања и учестаности мереног сигнала. Показано је да за нулту вредност прага, примена модификованих Симпсонових квадратурних формула обезбеђује мању грешку процене ефективне вредности сигнала него примена најчешће коришћених метода, као што су примитивна и трапезна квадратурна формула. Време процесорског рада је приближно исто за све методе. Такође је потврђено да је могуће одредити оптималну вредност прага за нумерички метод који се употребљава. Научни допринос дисертације је могућност да се поменути ефекти постигну минималним изменама у фирмверу хардвера без потребе за унапређењем техничких карактеристика самог хардвера.

Кључне речи: Ефективна вредност, нумерички методи, интерполација, одабирање, Симпсонова 1/3 квадратурна формула, Симпсонова 3/8 квадратурна формула, примитивна квадратурна формула, трапезна квадратурна формула, аналогно-дигитална конверзија, почетни тренутак конверзије.

Abstract

This dissertation examines the estimation of the RMS value using numerical methods, while establishing a link between the idealized analytic and practical approaches. One aspect is concerned with the modification of Simpson's rules in order to ensure their general applicability, and the other with the optimal threshold value for low, non-integer values of the ratio of the sampling frequency and signal's fundamental frequency. It has been shown that in comparison to the most frequently used methods such as rectangle method and trapezoidal rule, the application of the modified Simpson's rules enables a lower RMS error when the threshold value is zero. Processing time is approximately the same for all the methods. It has also been confirmed that it is possible to determine the optimal threshold value for any method used for the estimation of the RMS value. A scientific contribution of the dissertation lies in the possibility to obtain those effects by slightly modifying the firmware, without financial investment in the hardware.

Keywords: RMS, numerical methods, interpolation, sampling, Simpson's 1/3 and 3/8 rules, rectangle method, trapezoidal rule, analog-to-digital conversion, threshold.

Садржај

Сажетак.....	
Abstract.....	
Садржај.....	
Списак слика.....	
Списак табела.....	
I УВОД.....	1
1. Тематски, методолошки и организациони оквири.....	1
1.1 Тема.....	1
1.2 Предмет и циљ истраживања.....	1
1.3 Мотивација истраживања.....	2
1.4 Хипотеза истраживања.....	2
1.5 Домен тезе.....	2
1.6 Методи истраживања.....	3
1.7 Допринос докторске дисертације.....	4
1.8 Структура рада.....	5
II ТЕОРИЈСКИ ДЕО ИСТРАЖИВАЊА.....	7
2. Основни појмови, дефиниције и терминологија.....	7
2.1 Дефиниција и приступи одређивању ефективне вредности наизменичног сигнала.....	7
2.2 Пресликавање ефективне вредности величина зависних од времена у једносмерну вредност.....	8
2.2.1 Термални конвертори.....	9
2.2.2 Директно израчунавање.....	12
2.2.3 Имплицитно израчунавање.....	12
2.3 Аналогно-дигитална конверзија.....	17
2.3.1 Аналогни и дигитални уређаји.....	17
2.3.2 А/Д конвертори.....	17
2.4 Постојећи методи нумеричке интеграције за одређивање ефективне вредности сигнала.....	23
2.4.1 Нумеричка интеграција.....	23
2.4.2 Нумерички методи.....	25
2.4.2.1 Примитивне квадратурне формуле.....	26
2.4.2.2 Трапезна квадратурна формула.....	28
2.4.2.3 Симпсонова 1/3 квадратурна формула.....	29
2.4.2.4 Симпсонова 3/8 квадратурна формула.....	32
3. Предлози за модификације Симпсонових квадратурних формула у циљу превазилажења ограничења у примени.....	35

3.1 Проблем непознавања броја одбирака у условима нецелобројног вредности количника учестаности одабирања и основне учестаности сигнала	35
3.2 Модификација Симпсонове 1/3 квадратурне формуле	43
3.3 Модификација Симпсонове 3/8 квадратурне формуле	48
4. Примена нумеричких метода за одређивање ефективне вредности сигнала	53
4.1 Симулације	56
5. Испитивање утицаја избора почетног тренутка конверзије на грешку процене ефективне вредности сигнала.....	64
5.1 Симулације	64
III ПРАКТИЧАН ДЕО ИСТРАЖИВАЊА	75
6. Експериментална провера и поређење посматраних нумеричких метода.....	75
7. Експериментална провера утицаја избора вредности прага на грешку процене ефективне вредности сигнала.....	81
IV КВАЛИТАТИВНА АНАЛИЗА И ТУМАЧЕЊЕ РЕЗУЛТАТА.....	85
V ЗАКЉУЧАК	89
Литература.....	
Прилог.....	
Биографија.....	

Списак слика

- Слика 2.1 Шема конвертора са сталним појачањем
- Слика 2.2 Шема конвертора са променљивим појачањем
- Слика 2.3 Блок шема конвертора базираног на техници директног израчунавања
- Слика 2.4 Блок шема конвертора базираног на техници имплицитног израчунавања
- Слика 2.5 Блок шема конвертора базираног на колима која изводе операције
- Слика 2.6 Електрична шема конвертора базираног на колима која изводе операције логаритмовања-антилогаритмовања
- Слика 2.7 Општа блок шема аналогно-дигиталног конвертора
- Слика 2.8 *Sample and hold* коло
- Слика 2.9 Илустрације метода левих и десних правоугаоника за произвољну непрекидну монотono растућу функцију
- Слика 2.10 Илустрација трапезне квадратурне формуле примењене на произвољној непрекидној функцији чија је периода T
- Слика 2.11 Принцип Симпсонове 13 квадратурне формуле
- Слика 2.12 Принцип Симпсонове 38 квадратурне формуле
- Слика 3.1 Ефективна вредност простопериодичног напона при називној учестаности сигнала 50 Hz и учестаности одабирања 20 kHz
- Слика 3.2 Ефективна вредност простопериодичног напона при називној учестаности сигнала 50,2 Hz и учестаности одабирања 20 kHz
- Слика 3.3 Варирање броја одбирака
- Слика 3.4 Зависност израчунате ефективне вредности простопериодичног сигнала при вредности количника учестаности одабирања и основне учестаности мереног сигнала 10,1
- Слика 3.5 Зависност израчунате ефективне вредности простопериодичног сигнала при вредности количника учестаности одабирања и основне учестаности мереног сигнала 10,9
- Слика 3.6 Простопериодични сигнал периоде T одређене узастопним проласком растућег нивоа сигнала кроз нулу
- Слика 3.7 Илустрација модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле
- Слика 3.8 Модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула:
Површине и потповршине добијене над одређеним одбирцима
- Слика 3.9 Модификована Симпсонова 3/8 квадратурна формула:
Површине и потповршине добијене над одређеним одбирцима

- Слика 4.1 Сигнал који има нулту и онај који има вредност различиту од нулте у тренутку одабирања
- Слика 4.2 Максимална одступања у релативном облику за сва четири метода са одговарајућим анвелопама
- Слика 4.3 Максимално одступање од тачне вредности исказано у релативном облику у случају простопериодичног сигнала
- Слика 4.4 Максимално одступање од тачне вредности исказано у релативном облику у случају сложенопериодичног сигнала
- Слика 5.1 Зависност стандардне девијације резултата добијених симулацијама за сваку од четири квадратурне формуле за простопериодичан напон од вредности количника f_s/f , за нулту вредност прага
- Слика 5.2 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за примитивну квадратурну формулу у случају простопериодичног напона
- Слика 5.3 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за примитивну квадратурну формулу у случају сложено периодичног напона
- Слика 5.4 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за трапезну квадратурну формулу у случају простопериодичног напона
- Слика 5.5 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за трапезну квадратурну формулу у случају сложенопериодичног напона
- Слика 5.6 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за модификовану Симпсонову $1/3$ квадратурну формулу у случају простопериодичног напона
- Слика 5.7 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за модификовану Симпсонову $1/3$ квадратурну формулу у случају сложенопериодичног напона
- Слика 5.8 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за модификовану Симпсонову $3/8$ квадратурну формулу у случају простопериодичног напона
- Слика 5.9 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за модификовану Симпсонову $3/8$ квадратурну формулу у случају сложенопериодичног напона
- Слика 5.10 Нормализована оптимална вредност прага у зависности од вредности количника f_s/f у случају простопериодичног напона
- Слика 5.11 Нормализована оптимална вредност прага у зависности од вредности количника f_s/f у случају сложенопериодичног напона
- Слика 6.1 Радно окружење током експерименталне провере
- Слика 6.2 Максимално одступање од тачне вредности исказано у релативном облику у случају простопериодичног сигнала
- Слика 6.3 Максимално одступање од тачне вредности исказано у релативном облику

у случају сложенепериодичног сигнала

- Слика 7.1 Резултати мерења у случају примитивне, трапезне, модификоване Симпсонове 1/3 и модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле за простопериодичан сигнал при вредности количника $f_s/f = 10,6$
- Слика 7.2 Резултати мерења у случају примитивне, трапезне, модификоване Симпсонове 1/3 и модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле
- Слика 7.3 Резултати мерења у случају примитивне и трапезне квадратурне формуле за простопериодични сигнал при вредности количника $f_s/f = 10,6$
- Слика 7.4 Резултати мерења у случају примитивне и трапезне квадратурне формуле за сложенепериодични сигнал при вредности количника $f_s/f = 10,6$

Списак табела

- Табела 4.1 Приказ коефицијената вектора коефицијената за посматрана четири метода
- Табела 4.2 Максимална одступања од тачне вредности исказаних у релативном облику у случају простопериодичног и сложенопериодичног сигнала за сваки од четири метода, за вредност количника $f_s/f = 10,6$
- Табела 6.1 Максимална одступања мерених резултата од тачне вредности исказаних у релативном облику у случају простопериодичног и сложенопериодичног сигнала за сваки од четири метода, за вредност количника $f_s/f = 10,6$
- Табела 6.2 Компарација максималних одступања од тачне вредности исказаних сигнала у релативном облику у случају простопериодичног и сложенопериодичног сигнала при примени модификованих Симпсонових метода и при употреби стандардних за $f_s/f = 10,6$
- Табела 7.1 Максимална одступања од тачне вредности исказаних у релативном облику у случају простопериодичног и сложенопериодичног сигнала за сваки од четири метода, за вредност количника $f_s/f = 10,6$
- Табела 8.1 Приказ вектора коефицијента за четири посматрана метода
- Табела 8.2 Приказ укупног броја операција које су за сваки од четири метода потребне за процену ефективне вредности сигнала
- Табела 8.3 Резултати мерења за сва четири примењена метода у случају оба типа сигнала

I УВОД

1. Тематски, методолошки и организациони оквири

1.1 Тема

У најширем смислу, тема ове дисертације је процена ефективне вредности сигнала мереног помоћу одбирака у времену. У ужем смислу, проблем процене ефективне вредности сигнала се посматра у оквирима нумеричких метода. Окосница истраживања је покушај налажења најефикасније примене нумеричких метода у сврху процене ефективне вредности сигнала са што мањом грешком. Практични контекст истраживања разоткрива контраст између формалног аналитичког и метролошког приступа проблему процене ефективне вредности сигнала. Из тог разлога се указује на потребу за оптималним решењем за проблеме који се јављају у метролошком истраживању, за разлику од формалног аналитичког. Овакве специфичности су колико проблематичне толико и инспиративне. Доказ за то је истраживање које је представљено у овој дисертацији, а које је било покренуто, развијало се и дало резултате у контексту предочених разматрања.

1.2 Предмет и циљ истраживања

Предмет истраживања ове докторске дисертације је оптимални начин рачунања ефективне вредности сигнала нумеричким путем на основу одбирака сигнала. Циљ овог истраживања је развијање универзалних нумеричких метода који користе интеграционе полиноме другог и трећег реда, као и одређивање оптималног прага конверзије за посматране методе у сврху процене ефективне вредности сигнала, те примена на постојећем хардверу ради постизања бољих мерних перформанси у условима нецелобројне вредности количника учестаности одабирања и учестаности сигнала f_s/f у случају четири посматрана метода за два типа сигнала. Да би се овај циљ реализовао, теми се приступа из два угла. Један се тиче проналажења нумеричких метода за рачунање ефективне вредности сигнала ефикаснијих од оних које су најчешће у употреби. У ту сврху се разматра могућност опште применљивости Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле и Симпсонове $3/8$ квадратурне формуле и предлажу се њихове модификације. Други аспект приступа теми за фокус има утицај избора почетног тренутка конверзије (прага) на грешку процене ефективне вредности сигнала. У том контексту се посматра примитивна квадратурна формула, трапезна квадратурна формула, модификована Симпсонова $1/3$

квадратурна формула и модификована Симпсонова $3/8$ квадратурна формула, и одређује се оптимална вредност прага за сваку од њих.

1.3 Мотивација истраживања

Проблем ограничења у примени метода који се посматрају се испоставило као основа за покушај да се постојеће Симпсонове квадратурне формуле унапреде тако да модификоване верзије постојећих метода оригинално ограниченог спектра буду универзално применљиве, без захтева за надоградњу хардвера. Централни део ове дисертације се тиче налажења ефикаснијих метода за процену ефективне вредности сигнала који са прихватљивом грешком даје могућност одређивања ефективне вредности сигнала врло велике учестаности, а при томе не захтева вишеструко већу учестаност одабирања (мала вредност f_s/f).

Почетна идеја је била да се провери да ли је могуће релативно једноставним манипулацијама математичког модела који би био примењен у постојећем хардверу мерног инструмента постићи смањење грешке мерења без улагања у додатне компоненте. При томе се успешним сматра уколико примена предложених модалитета резултује грешком која је бар два пута мања од оне која се добија употребом стандардних.

Модификовани методи могу да буду подстицај научницима за даље истраживање сличних могућности или чак за даље унапређење других метода по сличном алгоритму.

1.4 Хипотеза истраживања

Хипотеза развијена у оквиру овог истраживања дефинисана на основу установљеног предмета и постављених циљева гласи: могуће је развити такве универзалне нумеричке методе који користе интеграционе полиноме другог и трећег реда који су ефикаснији у поређењу са методима најчешће у употреби, као и установити оптимални праг конверзије за посматране методе, те омогућити примену на постојећем хардверу ради постизања мање грешке процене ефективне вредности сигнала.

1.5 Домен тезе

У метрологији, мерење ефективне вредности сигнала у практичном смислу има примат у односу на мерење његових других параметара. Услед разних параметара електричних кола, међу које спадају нелинеарност феромагнетних материјала од којих се праве језгра трансформатора, те нелинеарни и чоперски претварачи, у пракси се јављају

сигнали који одступају од простопериодичних. У сфери електричних мерења, уређаји су најчешће калибрисани за простопериодичне таласне облике струје и напона, па се услед тог јавља грешка при мерењу када сигнал није очекиваног таласног облика. Постоје и ситуације у којима се не очекује простопериодични облик, као што је случај у телекомуникацијама и у импулсној електроници. Стога је домен овог истраживања одређен развојем нумеричких метода и избором оптималне вредности прага конверзије у сврху процене ефективне вредности сигнала у условима нецелобројне вредности количника fs/f , те њихова примена на постојећем хардверу. Развијени методи су модификоване, универзално применљиве верзије стандардних нумеричких метода који користе интеграционе полиноме другог и трећег реда. Утицај избора вредности прага се испитује у случају четири посматрана метода за два типа сигнала.

1.6 Методи истраживања

Методи који су коришћени у дисертацији обухватају теоријско сагледавање проблема процене ефективне вредности сигнала и експерименталну проверу хипотезе. Теоријски део нуди увид у комплексност феномена и специфичности његових манифестација у различитим областима, као што су математичка проучавања и практично инжењерско истраживање. У том контексту, фокус је на два тематска оквира. Прво је питање броја одбирака као ограничавајућег фактора примене Симпсонових квадратурних формула, а други вредност прага као фактора који утиче на оптимизацију нумеричких метода које се користе. У циљу доказивања оправданости понуђених решења у виду модификованих Симпсонових квадратурних формула и одређивања оптималне вредности прага, теоријски део се бави сакупљањем и проучавањем доступне литературе, као и анализом података који су у њој представљени.

Инсистира се на понуђеним решењима као могућности унапређења инжењерске праксе, али и њеног довођења у везу са аналитичким проучавањима. Исто тако, избор прага се јавља као детаљ који омогућава боље мерне перформансе, чиме се такође индиректно указује на однос између формалног аналитичког и практичног приступа феномену који се посматра у овом истраживању. Тиме се јасно диференцирају области, али се указује и на везу између њих.

Симулације изведене у сврху провере могућности потврђивања хипотезе су одредиле даљи правац истраживања у облику експерименталне провере. Експериментални метод примењен у практичном делу обухвата мерење и процену ефективне вредности сигнала. Тумачење података се заснива на индуктивним и дедуктивним методима закључивања, а анализа података се обавља коришћењем дескриптивног метода.

1.7 Допринос докторске дисертације

Резултати истраживања представљени у овој докторској дисертацији указују на допринос овог истраживања науци у ширем смислу, метрологији као ужој стручној области и интердисциплинарној комуникацији разних научних и практичних области како у академском, тако и у корпоративном и индустријском контексту. Они обухватају следеће инстанце:

- Приказ проблематике рачунања ефективне вредности нумеричким методима са акцентом на ограничења у примени Симпсонових квадратурних формула и мерних перформанси примитивне и трапезне квадратурне формуле;

- Предлог оригиналног решења проблема ограничене примене и унапређење мерних перформанси у виду модификованих Симпсонових квадратурних формула незнатном изменом алгоритма ових метода;

- Унапређење мерних перформанси одређивањем оптималне вредности прага за модификоване Симпсонове квадратурне формуле, те за примитивне и трапезне квадратурне формуле;

- Имплементација комерцијалног решења у виду универзално применљивих метода за сваки инструмент;

- Основа за даље истраживање сличних могућности и за даље унапређење других метода по сличном алгоритму и, као наставак овог, као подстрек другим истраживачким пројектима;

- Повезивање и превазилажење јаза између формалног аналитичког и инжењерског приступа рачунању ефективне вредности;

- Интеграција у предавачку праксу;

- Практична примена у индустрији;

- Интердисциплинарни академски дијалог;

- Комуникација између академског дискурса и корпоративног сектора;

- Објављивање књига, те научних и стручних радова у академским часописима.

У стриктно научном смислу, допринос ове докторске дисертације и истраживања обухвата:

- Потврду дефинисане хипотезе и представљање резултата који су добијени прво провером могућности потврде хипотезе путем симулација, а онда и експерименталном провером која је указала на прихватање предложене хипотезе;
- Активно учествовање у међународном академском и корпоративном дијалогу путем излагања на домаћим и међународним конференцијама, објављивањем у домаћим и међународним часописима, као и разменом са домаћим и међународним институцијама и компанијама.

1.8 Структура рада

Дисертација се састоји од пет делова који су насловљени “Увод”, “Теоријски део истраживања”, “Практичан део истраживања”, “Квалитативна анализа и тумачење резултата” и “Закључак”. Текст дисертације је подељен у седам поглавља. У првом поглављу, које коинцидира са првим делом, представљају се тема дисертације, предмет и циљ истраживања, мотивација истраживања, као и хипотеза истраживања, домен тезе, методи истраживања, допринос докторске дисертације и структура рада. У другом поглављу, које је уједно и почетак теоријског дела истраживања, представљају се дефиниција и приступи одрживању ефективне вредности наизменичног сигнала, пресликавање ефективне вредности величина зависних од времена у једносмерну вредност, аналогно-дигитална конверзија и постојећи методи нумеричке интеграције за одређивање ефективне вредности сигнала. У трећем поглављу је предочен проблем непознавања броја одбирака у условима нецелобројне вредности количника учестаности одабирања и основне учестаности сигнала, те је дат предлог модификација Симпсонових квадратурних формула. Четврто поглавље представља нумеричке методе које се користе у овом истраживању (примитивна и трапезна квадратурна формула, те модификоване верзије Симпсонових квадратурних формула) и даје се увид у резултате симулација за предочена четири метода на примеру два сигнала. Пето поглавље се бави питањем утицаја избора прага на грешку процене ефективне вредности сигнала. У оквиру овог поглавља је дат и приказ резултата симулација на примеру посматрана четири метода за поменута два типа сигнала. Две централне теме представљене у трећем и петом поглављу чине окосницу дисертације и основу за њен научни допринос. Шесто поглавље, којим почиње трећи, практичан, део истраживања, пружа увид у експерименталну проверу примене модификованих Симпсонових квадратурних формула и предочава резултате мерења у случају два типа сигнала за четири метода. На ово поглавље се надовезује седмо, које прати експерименталну проверу утицаја избора вредности прага на грешку процене ефективне вредности сигнала на примеру иста два сигнала за исте нумеричке методе. У

четвртом делу се резултатима експеримената приступа са становишта квалитативне анализе и тумачења резултата. Посматрају се резултати експерименталне провере оба решења која се предлажу, а тичу се модификованих Симпсонових квадратурних формула и избора вредности прага. У петом делу се у виду закључних разматрања даје рекапитулација основних идеја, њихове реализације, резултата експерименталног дела и смерница за могућности даљег истраживања. Након овог поглавља следи списак коришћене литературе, прилог и биографија ауторке.

II ТЕОРИЈСКИ ДЕО ИСТРАЖИВАЊА

2. Основни појмови, дефиниције и терминологија

2.1 Дефиниција и приступи одређивању ефективне вредности наизменичног сигнала

У зависности од врсте побуде, постоје електричне мреже са константном и оне са променљивом побудом. Први тип карактерише временски непроменљив струјни или напонски извор. Као последица се јављају временски непроменљиве струје и напони у остатку кола. Други тип чине кола са временски променљивим побудама, које могу, а не морају да буду наизменичне. Засебна група кола која карактерише променљива побуда чине кола са периодичним сигнаlima. Они се понављају на идентичан начин након одређеног временског интервала који се назива периода. Периодични сигнали се могу поделити на простопериодичне и сложенопериодичне. У прву категорију спадају сигнали дефинисани својом учестаношћу и амплитудом, а мењају се по синусном закону. Другој категорији припадају они који се не мењају по синусном закону. Апериодични сигнали нису разматрани у оквиру овог истраживања јер излазе из оквира онога што је његов домен.

Наизменичне величине се процењују на основу њиховог извршеног рада. То подразумева упоређивање њиховог топлотног дејства са топлотним дејством које остваре једносмерне величине под истим условима. Ефективна вредност је параметар који се уводи да се опише њихово топлотно дејство. Прецизније говорећи, ефективна вредност неке физичке величине, као један од основних параметара сигнала, је она вредност једносмерног напона или једносмерне струје која на произвољном отпорнику отпорности R ствара исти термички ефекат за исто време T . Стога, квадрат ефективне вредности сигнала једнак је средњој вредности снаге коју напонски $u(t)$ или струјни сигнал $i(t)$ развија на јединичном отпорнику у неком временском интервалу, што је представљено изразима (2.1) и (2.2).

$$\frac{U_{ef}^2}{R} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \frac{u^2(t)}{R} dt \quad (2.1)$$

$$R \cdot I^2 = \frac{1}{T} \cdot R \cdot \int_0^T i^2(t) dt \quad (2.2)$$

На основу израза (2.1) и (2.2) се добијају аналитички изрази (2.3) и (2.4) за одређивање ефективне вредности напона U_{ef} и струје I_{ef} .

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2(t) dt} \quad (2.3)$$

$$I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T i^2(t) dt} \quad (2.4)$$

Мерење ефективне вредности сигнала у практичном смислу има примат у односу на мерење његових других параметара. Потребно је нагласити да управо ситуације у пракси карактеришу специфичности које се тичу врсте сигнала и резултата мерења. Простопериодични сигнали се разматрају када су у питању ситуације у идеалним условима. У пракси су они реткост. Оно што се заправо јавља су изобличене варијанте таквих сигнала. До нежељених изобличења долази услед разних параметара електричних кола, међу које спадају нелинеарност феромагнетних материјала од којих се праве језгра трансформатора, нелинеарни и чоперски претварачи. Као резултат се јављају поменути сигнали који одступају од простопериодичних. Ова чињеница је од великог значаја у сфери електричних мерења јер су уређаји најчешће калибрисани за простопериодичне таласне облике струје и напона. Услед тог се јавља грешка при мерењу. Постоје и ситуације у којима се не очекује простопериодични облик, као што је случај у телекомуникацијама и у импулсној електроници.

2.2 Пресликавање ефективне вредности величина зависних од времена у једносмерну вредност

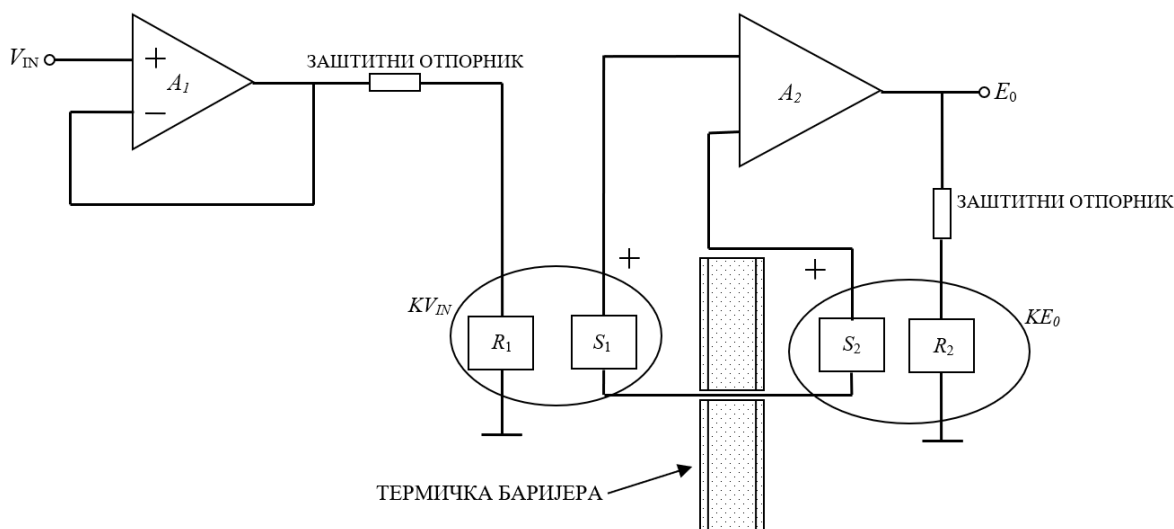
Због комплексности и специфичности, уобичајени начин мерења ефективне вредности сигнала подразумева употребу конвертора који ефективну вредност претвара у једносмерну. Стога се мерење ефективне вредности сигнала путем електричних уређаја заснива се на принципу претварања наизменичне у једносмерну величину јер у том облику она може да се мери лако доступним DC волтметром који има могућност мерења једносмерне вредности, али не и ефективне. За временски зависне величине користи се израз (2.3) за одређивање ефективне вредности напона.

У наставку текста, представљена је класификација електронских кола, тзв. конвертора, који су у употреби у ту сврху [1]. Један од њих је термални конвертор који користи технику засновану на конверзији наизменичног напона или струје у топлоту на отпорнику чија је отпорност позната. Други је заснован на директном израчунавању

користећи аналогно квадрирање, усредњавање и кореновање. Трећи конвертор користи имплицитно израчунавање, које се ослања на директно израчунавање. Разлика између њих је реализација операције кореновања за које се у имплицитном израчунавању користи коло са повратном спрегом.

2.2.1 Термални конвертори

Конвертор са сталним појачањем који се употребљава за учестаност до 100 MHz је заснован на термичкој техници где се користи конверзија наизменичног напона или струје у топлоту на отпорнику чија је отпорност позната [2]. Шема једног таквог конвертора је представљена на слици 2.1.



Слика 2.1 Шема конвертора са сталним појачањем

Шема приказана на слици 2.1 пружа увид у структуру једноставног конвертора са сталним појачањем. Ова структура је изабрана да би се указало на основне компоненте које улазе у састав сваког конвертора, где спадају: два операциона појачивача A_1 и A_2 , од којих први струјно одваја делове кола на улазу и излазу, термопарови S_1 и S_2 и отпорници R_1 и R_2 .

Улазни напон V_{IN} преко операционог појачивача A_1 узрокује загревање отпорника R_1 , а једносмерни напон E_0 на излазу преко повратне спреге загрева отпорник R_2 до температуре развијене на отпорнику R_1 . Да би се одржавале једнаке вредности температуре на отпорницима R_1 и R_2 , користи се негативна повратна спрега реализована десним делом шеме: A_2 , R_2 и S_2 . Под претпоставком да су отпорници R_1 и R_2 упарени (једнаки) и да постоји термичка баријера (загревање отпорника R_1 утиче само на

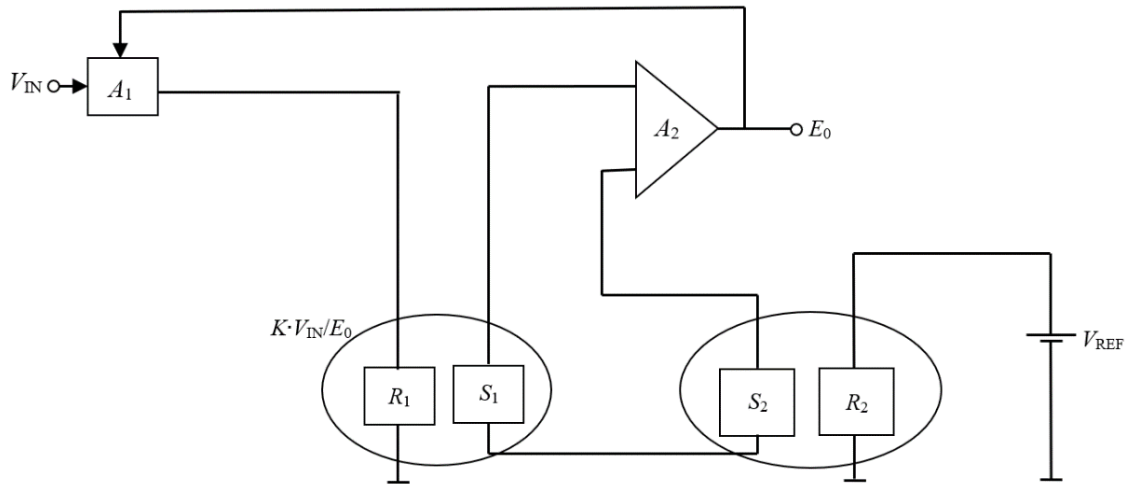
температурни сензор S_I и обрнуто), у устаљеном режиму се добија једносмерна вредност E_0 која је једнака ефективної вредности улазног сигнала V_{IN} (2.5).

$$\frac{(K \cdot V_{IN})^2}{R_1} = \frac{(K \cdot E_0)^2}{R_2} \quad (2.5)$$

Потребно је обратити пажњу на два аспекта функционисања појачивача A_I . Као прво, неопходно је обезбедити излазну струју која је довољна за развијање температуре на отпорницима малих отпорности. Поред тога, треба пажљиво изабрати одговарајући пропусни опсег, јер он ограничава опсег фреквенција улазног сигнала. Доње ограничење пропусног опсега је дефинисано термичком константом сензора за мале учестаности (обично реда неколико Hz).

Температурни сензор S_I детектује температуру сразмерну квадрату ефективне вредности улазног напона (KV_{IN}). Увећавање ефективне вредности улазног напона n пута узрокује пораст температуре n^2 пута, што представља ограничење динамичког опсега овог конвертора. Поред наведеног недостатка, код термалних конвертора постоји и значајно време кашњења. Овај проблем је превазиђен појавом термалног конвертора са променљивим појачањем.

Термални конвертори са променљивим појачањем се заснивају на одржавању једнаких снага загревања отпорника R_1 и R_2 , што има за последицу већи динамички опсег и тачност ових конвертора од оних са сталним појачањем [3]. Међутим, то захтева релативно велику струју за загревање отпорника (до 100 mA). При учестаности улазног сигнала мањим од 10 Hz се добија нестабилан одзив кола. Са горње стране, фреквенцијски опсег је ограничен карактеристикама улазног бафера. Блок шема једноставног термалног конвертора са променљивим појачањем је представљена на слици 2.2.



Слика 2.2 Шема конвертора са променљивим појачањем

Појачање улазног појачивача A_1 се подешава помоћу сигнала са излаза појачивача A_2 у циљу изједначавања снаге загревања отпорника R_1 са снагом загревања отпорника R_2 , а коло се напаја константним напонем V_{REF} . У овом случају сензор S_1 детектује температуру сразмерну ефективној вредности улазног напона, за разлику од термалног конвертора са сталним појачањем код кога је температура сразмерна квадрату ефективне вредности. На овај начин се превазилази проблем динамичког опсега. Описана ситуација је представљена изразима (2.6) и (2.7).

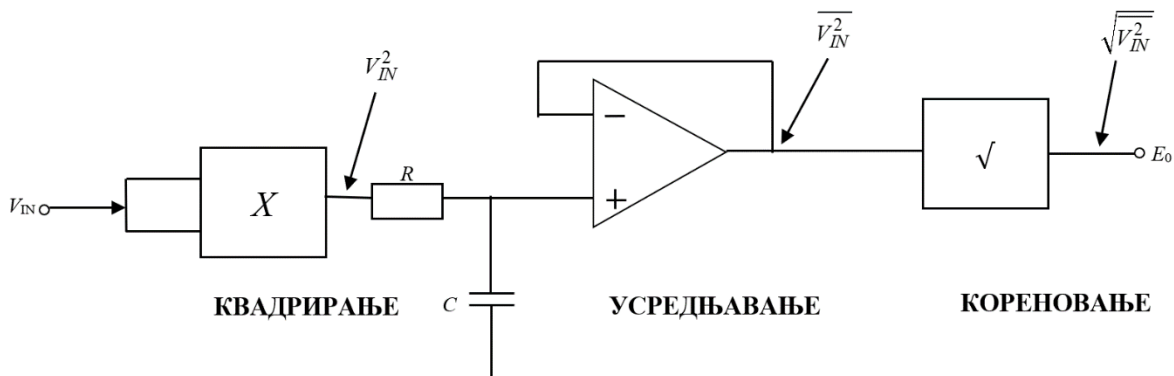
$$\left(\frac{k \cdot V_{IN}}{E_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{R_1} = \frac{V_{REF}^2}{R_2} \quad (2.6)$$

$$E_0 = \sqrt{k \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{V_{IN}^2}{V_{REF}^2}} \quad (2.7)$$

Конвертори са променљивим појачањем су од великог значаја јер премошћују проблем који се појављује када се користе конвертори са сталним појачањем. Међутим, иако не захтевају опрез при избору температурних сензора и отпорника, који карактерише конверторе са сталним појачањем, за конверторе са променљивим појачањем је потребна релативно велика струја за загревање отпорника.

2.2.2 Директно израчунавање

Метод у којем се користе аналогна кола (множачи и операциони појачивачи) за извршавање математичких операција квадрирања, усредњавања и кореновања представља технику директног (експлицитног) израчунавања ефективне вредности. Блок шема једноставног термалног конвертора заснованог на директном израчунавању [4] је представљена на слици 2.3.

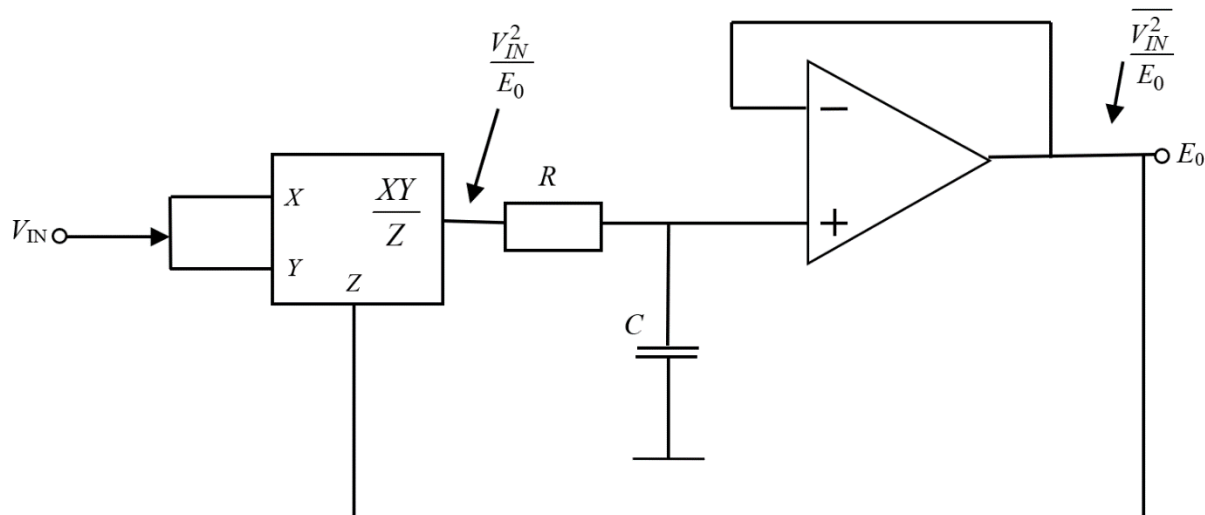


Слика 2.3 Блок шема конвертора базираног на техници директног израчунавања

Прва операција у оквиру представљене шеме је квадрирање. За пораст ефективне вредности улазног напона од n пута на излазу првог блока добија се n^2 пута већи одзив. Услед тога се јавља проблем ограниченог динамичког опсега. Висока цена и степен сложености овакве шеме јављају се услед употребе кола за квадрирање, кола за кореновање и операционог појачивача. Уз ограничен динамички опсег, ово су додатни недостаци који карактеришу шему о којој је реч.

2.2.3 Имплицитно израчунавање

У случају имплицитног израчунавања, операција кореновања је реализована колом са повратном спрегом, што представља разлику у поређењу са претходном техником. Предност овог конвертора, генерално говорећи, је могућност његове употребе за споропроменљиве сигнале уколико се пажљиво изабере вредност временске константе $\tau = RC$. Израчунавање ефективне вредности напона помоћу ове технике дато је изразима (2.8) и (2.9), а блок шема верзије овог конвертора је представљена на слици 2.4.



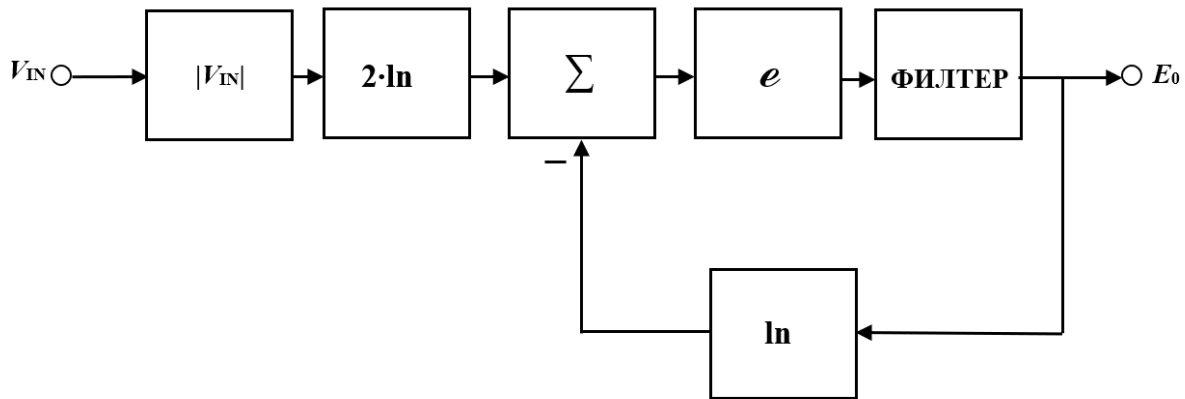
Слика 2.4 Блок шема конвертора базираног на техници имплицитног израчунавања

Први блок на шеми представља коло које множи напон са два улаза и дели га напоном који је доведен на трећи улаз (XY/Z). На Z улаз се доводи сигнал са излаза бафера E_0 . Улазни напон V_{IN} се доводи на улазе X и Y . Интегратор сачињен од елемената R и C на свом излазу даје средњу вредност $\overline{V_{IN}^2}/E_0$. Вредност на излазу бафера E_0 је једнака вредности на улазу бафера, тј. на излазу интегратора.

$$E_0 = \frac{\overline{V_{IN}^2}}{E_0} \quad (2.8)$$

$$E_0 = \sqrt{\overline{V_{IN}^2}} \quad (2.9)$$

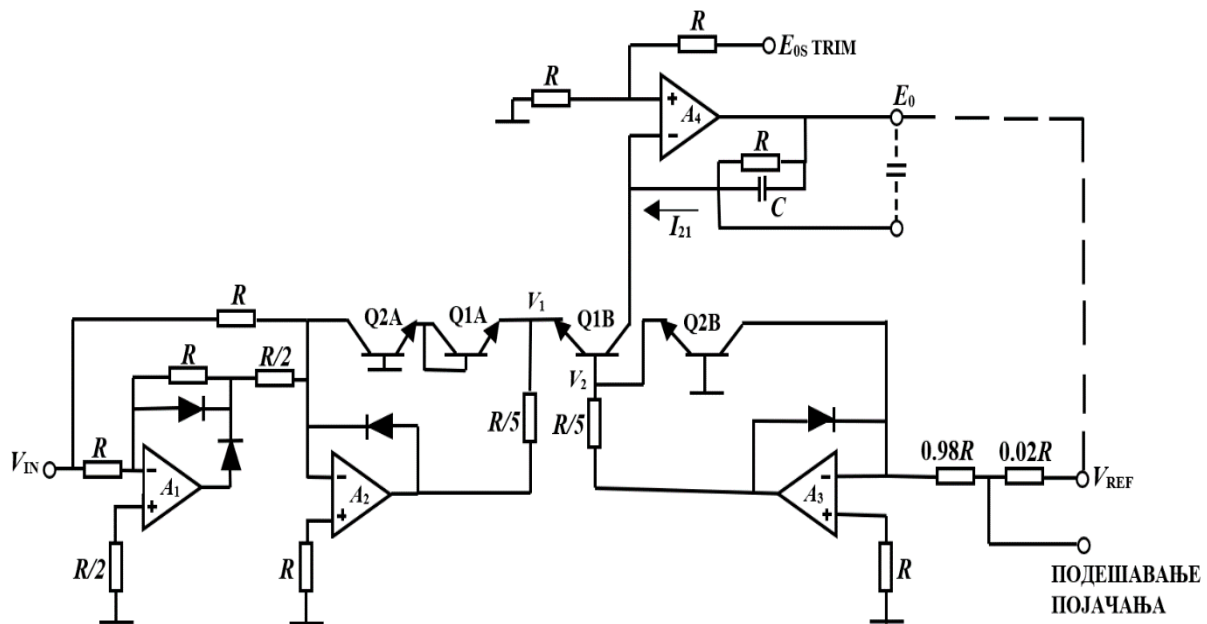
Ова шема може бити реализована стандардним начином, који подразумева директно множење и дељење. Поред тога, она може бити остварена и преко кола која изводе операције логаритмовања-антилогаритмовања. Блок шема оваквог конвертора је представљена на слици 2.5 [5].



Слика 2.5 Блок шема конвертора базираног на колима која изводе операције логаритмовања-антилогаритмовања

Први блок шеме представља математичку операцију апсолутне вредности улазног напонског сигнала V_{IN} који је неопходан за исправан рад наредног блока – логаритамског појачивача. Услед квадрирања у дефиницији датој изразом (2.3), ефективна вредност улазног напона једнака је ефективној вредности апсолутне вредности улазног сигнала. Коришћењем логаритамског (\ln) и анти-логаритамског (e) појачивача сложене операције множења и дељења се изводе сабирањем и одузимањем. У изразу (2.10) је, уз занемаривање деловања филтера на слици 2.5, дато објашњење принципа рада.

$$\frac{V_{IN}^2}{E_0} = e^{\ln\left(\frac{V_{IN}^2}{E_0}\right)} = e^{2\ln(|V_{IN}|) - \ln(E_0)} \quad (2.10)$$



Слика 2.6 Електрична шема конвертора базираног на колима која изводе операције логаритмовања-антилогаритмовања

На слици 2.6 је дат детаљнији приказ конвертора базираног на колима која изводе операције логаритмовања-антилогаритмовања. Део око операционог појачивача A_1 представља коло за одређивање апсолутне вредности, а део око операционог појачивача A_2 представља двоструку вредност логаритма сигнала. Блок око A_3 представља логаритам излазног сигнала E_0 . Антилогаритмовање и филтрирање (усредњавање) се изводи делом шеме око A_4 . Принцип рада логаритамског појачивача је описан математичким изразима:

$$V_1 = -2 \cdot \frac{k \cdot T}{q} \cdot \ln \left(\frac{V_{IN}^2}{R \cdot I_{ES}} \right) \quad (2.11)$$

$$V_2 = -2 \cdot \frac{k \cdot T}{q} \cdot \ln \left(\frac{E_0}{R \cdot I_{ES}} \right) \quad (2.12)$$

$$I_{21} = I_{ES} \cdot e^{q(V_1 - V_2)/RT} \quad (2.13)$$

$$V_1 - V_2 = \frac{k \cdot T}{q} \cdot \left(2 \cdot \ln \left(\frac{V_{IN}}{R \cdot I_{ES}} \right) - \ln \left(\frac{E_0}{R \cdot I_{ES}} \right) \right) \quad (2.14)$$

$$V_1 - V_2 = \frac{k \cdot T}{q} \cdot \ln \left(\frac{V_{IN}^2}{E_0 \cdot R \cdot I_{ES}} \right) \quad (2.15)$$

$$I_{21} = I_{ES} \cdot \frac{V_{IN}^2}{E_0 \cdot R \cdot I_{ES}} = \frac{V_{IN}^2}{E_0 \cdot R} \quad (2.16)$$

$$E_0 = \overline{I_{21} \cdot R} \Big|_{RC} = \overline{\left(\frac{V_{IN}^2}{E_0} \right)} \quad (2.17),$$

где је I_{ES} инверзна струја засићења; q елементарно наелектрисање електрона, које приближно износи $1.60219 \cdot 10^{-19}$ C; k_B Болцманова константа,³ чија је приближна вредност $1.38062 \cdot 10^{-23}$ J/K; а T апсолутна температура p - n споја. Израз kT/q представља термални напон V_T који на собној температури износи око 26 mV [6].

Када је вредност фреквенције улазног сигнала довољно већа од $1/(2\pi RC)$ да је $\overline{E_0} \approx E_0$, онда следи израз (2.18).

$$E_0 = \sqrt{V_{IN}^2} \quad (2.18)$$

Највећи извор грешака код оваквих кола су напонски и струјни офсети операционих појачивача, температурна зависност офсета и коефицијента појачања, те нестабилно напајање. Утицај температурно зависних параметара кола на грешку се смањује упаривањем транзистора код појачивача који изводе операције логаритмовања и антилогаритмовања.

³ Лудвиг Едуард Болцман (Ludwig Eduard Boltzmann, 1844 – 1906) је био аустријски физичар и филозоф. Сматра се да су највећа достигнућа овог научника и мислиоца развој статистичке механике и статистичко објашњење другог закона термодинамике. Такође је заслужан за дефиницију ентропије која је и данас у употреби, а датира из 1877. Макс Планк је константу $k_B = pV/(TN)$ назвао Болцмановом константом, где је p притисак, V запремина, T апсолутна температура, а N број молекула гаса.

2.3 Аналого-дигитална конверзија

2.3.1 Аналогни и дигитални уређаји

Одређивање ефективне вредности сигнала у дигиталном контексту је повезано са коришћењем дигиталних мерних инструмената, који су од примарног значаја генерално када су у питању савремене технике мерења. Њихове перформансе углавном предњаче у поређењу са аналогним инструментима. Ту се превасходно мисли на:

- 1.брзину рада;
- 2.меморисање;
- 3.могућност интеграције;
- 4.поузданост;
- 5.отпорност на сметње;
- 6.минијатуризацију;
- 7.финансијску приступачност;
- 8.аутоматизацију процеса мерења.

Да би се у ситуацијама у којима се појављује аналогни запис омогућила употреба дигиталних мерних инструмената и опреме, те да би се искористиле њихове предности, неопходно је дате аналогне величине (сигнале) превести у дигиталан облик. Претварање напонског сигнала из аналогног у дигитални запис се обавља аналого-дигиталним конвертором.

2.3.2 А/Д конвертори

У дигиталном представљању, сигнал је сачињен од кодне речи која се састоји од коначног броја битова. Обраду сигнала је пожељно обављати у дигиталном домену јер су дигиталне обраде прецизне и поуздане. Процес или поступак који омогућује добијање записа неке аналогне величине у дигиталном облику назива се аналого-дигитална (А/Д) конверзија. Уређај који омогућује добијање овог записа назива се аналого-дигитални конвертор (А/Д конвертор). Типично, процес А/Д конверзије обухвата одмеравање аналогне величине у времену и по вредности. Према томе, А/Д конвертори су електронска кола која преводе сигнал из аналогног домена у дигитални. Трансформација вредности аналогне величине у дигиталан запис подразумева читав низ техничких решења за њену реализацију. У главне карактеристике А/Д конвертора спадају укупна тачност, брзина конверзије, осетљивост, резолуција, улазна импеданса, динамички опсег улаза, неосетљивост на сметње, линеарност, те временска и температурна стабилност.

Након А/Д конверзије се располаже само одбирцима (одбирак, узорак, семпл, енгл. *sample*) функције добијеним у процесу одабирања (узорковање, семпловање, енгл. *sampling*). Рад А/Д конвертора се своди на узимање тренутне вредности мереног сигнала у дискретним временским тренуцима, које генерише такт А/Д конвертора, што представља период одабирања. У зависности од временских размака у којима се узимају одбирци, одабирање може бити униформно и неуниформно. Код првог је време између узимања два узорка сигнала увек исто, док код другог то није случај.

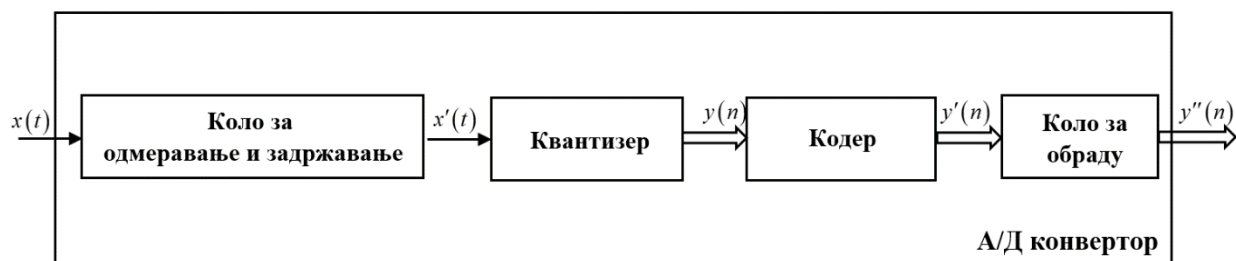
У погледу синхронизације мереног сигнала и такта одабирања, одабирање може бити синхроно и асинхроно. Прво се односи на одабирање сигнала који је фазно спрегнут са тактом одабирања, и подразумева да је однос периоде мереног сигнала и периоде такта цео број. Код синхроног одабирања се као најчешћи проблем јавља синхронизација инструмента са мереним сигналом због несавршености мултипликатора фреквенције и PLL (енгл. *phase locked loops*) блокова. Други тип одабирања није фазно спрегнут са тактом одабирања.

Ови феномени се одражавају у поступцима који се примењују за потребе рачунања и процене ефективне вредности. Тачну ефективну вредност [7] је могуће израчунати применом (2.3) уколико је доступан аналитички запис зависности сигнала од времена. Међутим, применом дигиталне технике су доступни само одбирци сигнала добијени уз помоћ А/Д конвертора, а не и аналитички запис сигнала. У таквим случајевима се примењују нумерички методи интеграције у сврху естимације ефективне вредности. Међу најзаступљенијим у пракси су примитивна и трапезна квадратурна формула.

Постоје и методи нумеричке интеграције који се у пракси ретко примењују због ограничења која их карактеришу. У овој дисертацији се разматра примена њихових модификованих, универзално применљивих верзија. Да би се стекао прецизнији увид у процес одмеравања сигнала као значајног детаља у оквиру проблема естимације ефективне вредности и, у вези са тим, употребе метода нумеричке интеграције, у наредном одељку се разматра тематика везана за сам рад А/Д конвертора.

У основи А/Д конверзије је својеврсна реконструкција сигнала из аналогног, сада изражена у дигиталном домену. Та дигитална верзија треба да буде што боља представа аналогног сигнала који се „реконструише“ или изражава другачијим „језиком“. Тај процес се састоји од четири корака, без обзира на то како је А/Д конвертор реализован. А/Д конвертори се разликују по својим перформансама и конструкцији у зависности од тога како се ова четири корака спроводе. Генерално, први корак је одмеравање тј. дискретизација по времену. Други корак је задржавање тих вредности неко време, јер је логичким колима неопходан одређени временски период да одреагују на промене стања у систему. Затим иде квантизација, која може да се јави под називом дискретизација по вредности или дигитализација. Последњи корак је кодирање. Улога кодера је генерисање адекватне репрезентације у А/Д конвертору која притом и штеди меморију. Овај оквир

рада А/Д конвертора је приказан на слици 2.7, која поред наведена четири корака приказује и пети блок за обраду. Слика илуструје општу блок шему рада А/Д конвертора, где излаз из аналого-дигиталног конвертора може даље да се користи као дигитални репрезент аналогног сигнала за дигиталне обраде [8].



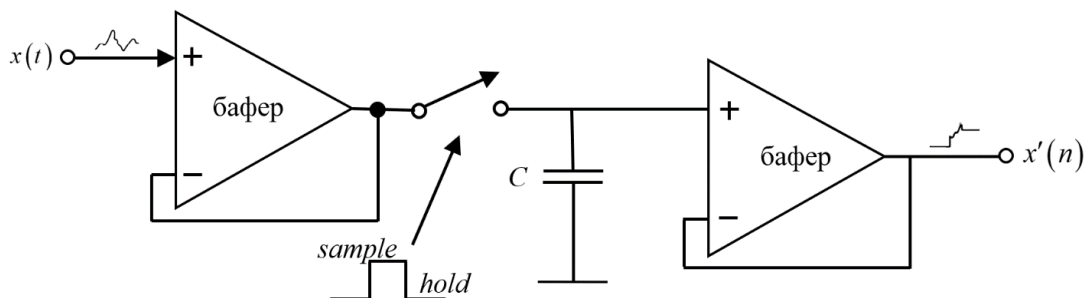
Слика 2.7 Општа блок шема аналого-дигиталног конвертора

Коло за одмеравање и задржавање (енгл. *sample and hold*) [9] одмерава аналогни сигнал и задржава његову вредност током одређеног временског периода. На тај начин се обезбеђује стабилност рада А/Д конвертора, те једнозначност и поновљивост резултата добијених конверзијом.

Први блок обавља дискретизацију по времену, тј. одмеравање, што подразумева одабирање аналогног континуалног сигнала $x(t)$ у тачно одређеним временским тренуцима које одређује такт узорковања, а од којих зависи да ли је реч о униформном или неуниформном одмеравању. На излазу из овог кола се добија дискретни аналогни сигнал $x'(t)$. Прецизније говорећи, временско одмеравање O је релација код које је домен $D(\rho)$ скуп вредности функције $x(t)$, а кодомен $A(\rho)$ скуп придружених вредности из коначног дискретног скупа. Треба приметити да уколико би вредност учестаности одмеравања била бесконачна, као и под условом да је дискретизација по вредности са бесконачном резолуцијом, било би могуће у потпуности реконструисати улазни сигнал. Међутим, пракса показује да је тај идеални сценарио недоступан. Стога је у циљу постизања што боље реконструкције сигнала потребно обезбедити што већу учестаност одмеравања како би период одабирања био краћи [10]. Данашњи најбржи А/Д конвертори имају период одабирања мањи од 0,5 ns [11].

Шема кола за одмеравање и задржавање је приказана на слици 2.8. У његов састав улази најмање један бафер, најмање један аналогни прекидач, као што је FET (енгл. *field effect transistor*) и кондензатор [12]. Улога бафера је одвајање импеданси да кондензатор не би оптерећивао коло пре кола за одмеравање и задржавање, те да се импеданса кондензатора не би комбиновала са излазном импедансом претходног степена. Његова функција је такође и обезбеђивање довољне струје да би кондензатор могао да се напуни или испразни на нову вредност у дефинисаном времену. Бафер ствара реконструисану

верзију улазног сигнала и прослеђује је на кондензатор капацитивности C . Да би се аналогни ниво одржао у било ком моменту, потребно је да аналогни прекидач буде отворен. Док је прекидач затворен, кондензатор се пуни или празни. Конкретно, напон на кондензатору достиже напон који одговара напону улазног сигнала и прати ту вредност напона уколико бафер обезбеђује довољно велику струју и ако *slew rate* појачивача то дозвољава. Излаз овог кола прослеђује измењени аналогни континуални сигнал $x'(t)$ на улаз квантизера.



Слика 2.8 *Sample and hold* коло

Други блок шеме А/Д конвертора је квантизер. Сигнал који доводимо на његов улаз је аналогни континуални сигнал $x'(t)$, а излаз из квантизера дигитални дискретни сигнал $y(n)$. Нека је X скуп улазних физичких величина, а Y скуп излазних вредности А/Д конвертора. Да би се предочио процес квантизације у оквирима теме ове дисертације, у наредном делу текста појмови релације и функције ће бити разматрани у контексту дефиниција у складу са [13] и [14].

Бинарна релација ρ је скуп уређених парова, где је скуп свих првих компоненти релације домен који се означава са $D(\rho)$, а скуп свих других компоненти кодомен који се означава са $A(\rho)$. Она је релација скупа A ако и само ако је скуп A скуп свих првих и других компоненти скупа ρ , тј. ако и само ако је $D(\rho) \cup A(\rho) \subseteq A$ и она представља било који подскуп од A^2 тј. $\rho \subseteq A^2$. Пресликавање скупа $X \subset \mathbb{R}$ у скуп $Y \subset \mathbb{R}$ је бинарна релација f која се назива квантизација. Немогућност бесконачне прецизности квантизације има за последицу то да је скуп Y коначан дискретни скуп.

У практичном контексту, излазни скуп Y је најчешће коначан подскуп скупа целих бројева \mathbb{Z} , а често се јавља и као подскуп скупа природних бројева укључујући нулу. Стога се релација f може записати као (2.19).

$$f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow (Y \subset \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad (2.19)$$

Скуп уређених парова f је функција ако и само ако

$$(\forall x, y \in D(f)) x = y \Rightarrow f(x) = f(y).$$

Скуп свих првих компоненти функције f зовемо домен функције и означавамо са $D(f)$, док $A(f)$ називамо скупом свих слика. Елементе скупа $D(f)$ зовемо оригиналима, а елементе скупа $A(f)$ сликама.

Ако је $A = D(\rho)$ и $A(\rho) \subseteq B$ где је f нека функција, онда кажемо да f пресликава скуп A у скуп B , или је f функција скупа A у скуп B , што означавамо $f : A \rightarrow B$ или $A \xrightarrow{f} B$. Другим речима, функција пресликавања скупа A у скуп B сваком елементу скупа A придружује тачно један елемент скупа B , с тим да могу постојати елементи скупа B којима није придружен ниједан елемент скупа A . Ако је инверзна функција f^{-1} функције f такође функција, онда кажемо да је f^{-1} инверзна функција функције f . Инверзна функција f^{-1} за функцију f постоји ако и само ако је функција f инјективна. Другим речима, функција скупа X у скуп Y сваком елементу скупа X придружује тачно један елемент скупа Y , с тим да могу постојати елементи скупа Y којима није придружен ниједан елемент скупа X . Релација f биће функција уколико је овај услов испуњен.

Смислено тумачење резултата добијених квантизацијом је могућа уколико је релација f функција. У противном би се јавили извесни проблеми. Један од њих је немогућност добијања дигиталног записа за неке улазне вредности, што би за последицу имало дисфункционалност квантизера, те немогућност његовог обављања постављеног задатка. Поред тога, предвиђање и анализа рада квантизера би били онемогућени, што би довело у питање практични смисао резултата. Међутим, опсег улазних вредности се често ограничава због конструкционих ограничења и линеарности рада квантизера и А/Д конвертора. Из тог разлога се може сматрати да је тиме решен проблем добијања дигиталног записа за цео опсег улазних вредности. Уз то, уколико квантизер својом конструкцијом омогућава превођење вредности из улазног скупа X у излазни скуп Y на једнозначан (поновљив) начин, тј. ако ради као коначан детерминистички уређај који ће за исту вредност на улазу увек дати исту вредност на излазу, следи да је релација f функција, чиме се постиже смислено тумачење резултата добијених квантизацијом. Ово указује на чињеницу да $f : X \rightarrow Y$ представља преносну функцију квантизера.

Функција $f : A \rightarrow B$ је сурјективна, што означавамо са $f : A \xrightarrow{na} B$, ако и само ако $A(f) = B$, односно

$$f \text{ је функција} \wedge D(f) = A \wedge (\forall y \in B)(\exists x \in A)f(x) = y.$$

Дакле, закључује се да је функција $f : X \rightarrow Y$ сирјективна, јер за сваки елемент (слику) из скупа Y постоји елемент (оригинал) из скупа X који се у њу пресликава.

Функција f је инјективна или „један на један“, што означавамо са $f : A \xrightarrow{1-1} B$, ако и само ако не постоје два пара чије су прве две компоненте различите, а друге две компоненте једнаке, односно ако за свако x и y из њеног домена $D(f)$ важи:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Ако је функција f инјективна и сирјективна функција скупа A у скуп B , онда кажемо да је функција f бијективна функција скупа A у скуп B , што означавамо са $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$. Дакле, закључује се да функција $f : X \rightarrow Y$ није инјективна, јер постоји најмање један елемент (слика) из скупа Y за који постоји више од једног елемента (оригинал) из скупа X који се у њу пресликава. Разлог је потреба за ограничавањем броја излазних вредности у циљу њиховог записа коначним бројем бита. Како функција нема особину инјективности, не постоји њена инверзна функција f^{-1} , која би омогућила јединствену реконструкцију полазне аналогне величине у виду дигиталног записа, што резултује неминовном грешком квантизације у процесу конверзије. Како ниједна од ове две особине функције f није задовољена, закључујемо да функција f није бијективна.

Грешка квантизације, која неће бити разматрана у овој дисертацији, је доминантни фактор у оквиру укупне грешке конверзије. У поређењу са њом, утицај грешака које могу да буду својствене преосталим блоковима је знатно мањи на укупну грешку конверзије. Како је фокус ове дисертације ефективна вредност сигнала у циљу могућности добијања веће тачности и прецизности њене процене, од централног значаја су питања могућности коришћења нумеричке интеграције и нумеричких метода, чиме се бави наредно поглавље. У ту сврху, преглед појмова и појава који је дат у овом поглављу приказује основне компоненте које чине истраживање у домену процене ефективне вредности сигнала. Како ће се у даљем делу инсистирати на приказу и поређењу одређених нумеричких метода, овде су разматрани појмови који ће бити саставни део испитивања могућности унапређења одабраних нумеричких метода. Стога је посвећена пажња А/Д конверторима и процесу одабирања, јер ће они бити од кључног значаја за централни део дисертације, који се бави предлозима за решења која обезбеђују мању грешку при процени ефективне вредности.

2.4 Постојећи методи нумеричке интеграције за одређивање ефективне вредности сигнала

Како се дисертација бави нумеричким методима разматрајући могућност њихове опште применљивости, у наставку текста ће бити предочен преглед неких од постојећих нумеричких метода, укључујући кратак историјски осврт на њихов развој и примену. Затим ће бити представљена детаљна разматрања предлога о модификованим верзијама неких од постојећих метода нумеричке интеграције.

2.4.1 Нумеричка интеграција

Нумеричка интеграција, или нумеричка квадратура, припада области математике и представља поступак израчунавања приближне вредности одређеног интеграла. Формуле које се користе за нумеричко одређивање једнодимензионалних интеграла се називају квадратурне формуле. Ове интерполационе формуле са еквиливантно распоређеним чворовима интеграције (одбирцима функције) могу бити отвореног или затвореног типа. Код отвореног типа, сви чворови интеграције се налазе унутар посматраног интервала (периоде), тако да се први и последњи одбирак не поклапају са рубним тачкама интервала интеграције, што је случај када однос периоде мереног сигнала и периоде такта није цео број. За разлику од отвореног типа, затворени карактерише поклапање првог и последњег одбирка функције са крајевима интервала интеграције, што је последица целобројне вредности односа периоде мереног сигнала и периоде такта.

Основни критеријум употребе нумеричке интеграције је или питање доступности аналитичког записа функције или нерешивост интеграла. У првом случају, једино су доступни обирци добијени у процесу одмеравања. Услед одсуства информације о аналитичком запису функције није могуће израчунати тачну вредност, те се стога прибегава коришћењу нумеричке интеграције. На тај начин се добија информација о естимираној вредности одређеног интеграла непознате функције. У наставку текста следи кратак преглед дефиниција одређеног и неодређеног интеграла.

У математичкој анализи, основне области чине интегрални и диференцијални рачун, чији су зачетници Њутн⁴ и Лајбниц⁵. Иако је податак био предмет контроверзе у време

⁴ Исак Њутн (Sir Isaac Newton, 1643 —1727) је био енглески научник чији су доприноси оставили видног трага у областима физике, математике, астрономије. Њутн се бавио и алхемијом и филозофијом природе. Међу достигнућа од револуционарног значаја треба издвојити открића у оквирима поручавања гравитације, кретања и хелиоцентричног система. У овом раду је од посебног интереса његово откриће инфинитезималног рачуна, до којег је независно од Њутна дошао и Готфрид Лајбниц.

⁵ Готфрид Лајбниц (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646 –1716) је био немачки филозоф, математичар, физичар и дипломата. Његова истраживања и увиди се тичу и области као што су право, историја, а нашли су и примену у биологији, медицини, теорији вероватноће, информатици, геологији и психологији. Овде се

када су до тих увида дошли, званична верзија тврди да су Њутн и Лајбниц независно један од другог формулисали основе инфинитезималног рачуна, који је омогућио успостављање везе између неодређеног и одређеног интеграла, а познат је под називом Њутн-Лајбницова теорема.

Неодређени интеграл [15] функције $f(x)$ над интервалом I представља скуп свих примитивних функција функције $f(x)$ над тим интервалом и дат је изразом (2.20).

$$\int f(x) dx \quad (2.20)$$

При том, за функцију $F(x)$, која је диференцијабилна над интервалом I кажемо да је примитивна функција функције $f(x)$ над тим интервалом ако за свако x из тог интервала важи израз (2.21).

$$F'(x) = f(x) \quad (2.21)$$

Овде треба приметити да ако су функције $F_1(x)$ и $F_2(x)$ примитивне функције функције $f(x)$ над интервалом I , онда се оне над тим интервалом разликују за константу C , као што је приказано изразом (2.22).

$$F_1(x) = F_2(x) + C \quad (2.22)$$

Потребан и довољан услов за постојање неодређеног интеграла [16] функције $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ над интервалом I је да је она непрекидна над тим интервалом.

Ако је функција $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ограничена и коначним бројем прекида, непрекидна или монотона над затвореним интервалом $[a, b]$, тада кажемо да је она интегрална над тим интервалом.

Одређени интеграл [17] има широку примену у научним областима. Неке од инстанци су техничке науке, физика, хемија, биологија, као и друштвене науке, а нарочито је значајна његова примена у математичким дисциплинама. Неке од конкретних примена одређеног интеграла у геометрији и физици су израчунавање дужине лука криве, израчунавање површине равних фигура, површине и запремина обртних тела, површине омотача обртних тела и рад силе.

нарочито истиче његов допринос науци у виду открића инфинитезималног рачуна, до којег је дошао и Исак Њутн независно од Лајбница.

Веза између одређеног и неодређеног интеграла је представљена у оквиру једне од фундаменталних теорема у области математике познате под називом Њутн-Лајбницова теорема која је представљена у наставку текста.

Ако је F примитивна функција непрекидне функције f над интервалом $[a, b]$, одређени интеграл $\int_a^b f(x) dx$ може да се израчуна на основу израза (2.23).

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \quad (2.23)$$

Њутн-Лајбницова теорема се, уз дефиницију одређеног интеграла, користи за одређивање граничне вредности низова.

2.4.2 Нумерички методи

Историјски гледано, разни методи су се у одређеним периодима користили за потребе естимирања неке величине. Методи који су најчешће у употреби за нумеричке интеграције су примитивне квадратурне и Њутн-Коутсове формуле, где спадају трапезна квадратурна формула, Симпсонова 1/3 квадратурна формула и Симпсонова 3/8 квадратурна формула. У [18] се наводи да је трапезна квадратурна формула први пут била употребљена 50. године пре нове ере у Вавилону за естимацију пређеног пута планете Јупитер. Математичари Старе Грчке су одређивали површину као конструкцију једнаких квадрата и истраживали проблем квадратуре круга, као што је показано у [19]. Касније, на шта упућује [20], Галилео Галилеј (Galileo Galilei) и Жил де Робервал (Gilles de Roberval) су израчунали површину свода циклоиде. У [21] налазимо податке о томе како је Грегори де Сан-Винсент (Grégoire de Saint-Vincent) одредио површину испод хиперболе, а Алфонсо Антонио де Сараса (Alphonse Antonio de Sarasa) успоставио однос између површине и логаритма. Ови методи се користе за одређивање вредности једнодимензионалног интеграла. За израчунавање вишедимензионалних интеграла, Монте Карло метод је међу онима који се често употребљава, на шта указује [22]. Појава рачунара у двадесетом веку довела је до радикално убрзаног развоја ове математичке области. Савремени методи нумеричке интеграције су засновани на теорији информација. Неки од неконвенционалних савремених метода су представљени у [23], [24] и [25].

Употреба нумеричких метода датира од античких времена. Данас се користе како у основном, тако и у измењеним облицима, па и у виду композитних форми које интегришу елементе појединих типова нумеричких интеграција [26] и [27]. У овом истраживању се не користе такви облици, али се предлажу модификације постојеће Симпсонове 1/3 квадратурне формуле и Симпсонове 3/8 квадратурне формуле.

Приближна вредност одређеног интеграла I , који је дат изразом (2.24), израчунава се на основу апроксимације подинтегралне функције интерполационим полиномом n -тог реда, при чему су $a_i, i = 0, 1, 2, \dots, n$ коефицијенти интерполационог полинома, што је представљено изразом (2.25).

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (2.24)$$

$$I_n = \int_a^b (a_n x^n + \dots + a_0) dx, \quad a < b \quad (2.25)$$

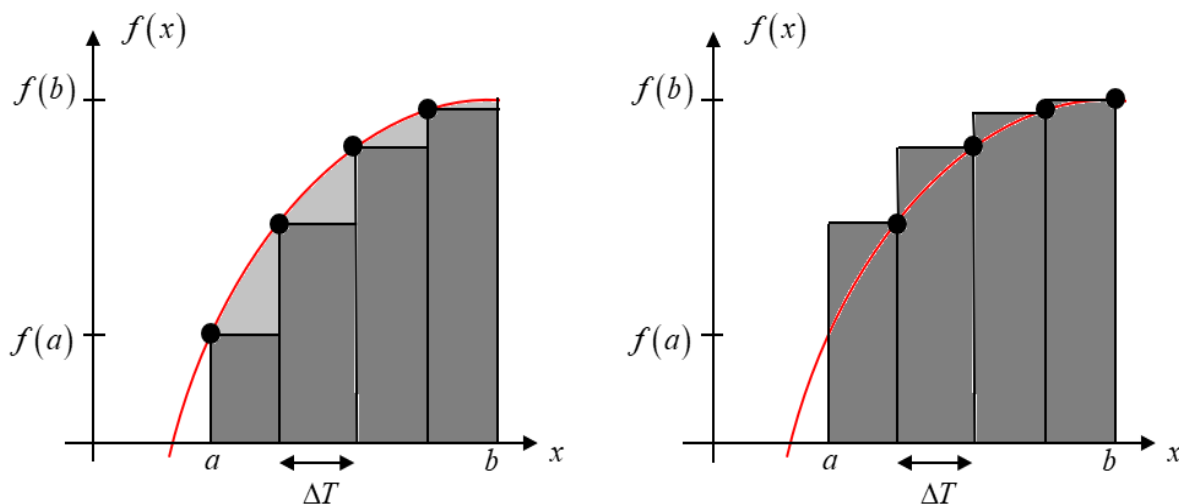
Грешка метода потиче од грешке апроксимације интерполационим полиномом и једнака је разлици I и I_n . Постоје начини да се грешка редукује, а један од њих је употреба Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле, што је дато је у [28]. За разлику од тога, ова дисертација ставља акценат на модификацију постојећих метода. Конкретно, истраживање се фокусира на модификоване Симпсонове $1/3$ и $3/8$ квадратурне формуле у циљу постизања мање укупне грешке методе.

Уз то, Симпсонова $1/3$ квадратурна формула и Симпсонова $3/8$ квадратурна формула у стандардном облику, који карактерише лимитирана употреба условљена бројем одбирака, дају увид у полазну тачку у процесу модификовања тих метода. Модификоване верзије немају ограничење својствено стандардним, чиме се постиже њихова универзална применљивост.

2.4.2.1 Примитивне квадратурне формуле

Примитивне квадратурне формуле [29] су методи левих, десних и средњих правоугаоника⁶. На слици 2.9 је приказана илустрација формула левих и десних правоугаоника за произвољну непрекидну монотонно растућу функцију.

⁶ Примитивна квадратурна формула је термин који се односи на све примитивне квадратурне формуле, с тим што се у овом раду овај термин користи да означи формулу левих правоугаоника јер се само она користи у поменутих поглављима. Избор ове формуле није заснован на неком фиксном узроку или принципу јер је у конкретной практичној ситуацији мерења немогуће унапред утврдити која ће формула бити подобнија. Стога је формула левих правоугаоника изабрана да би се обезбедила униформност поступка, што омогућава лакши и прецизнији увид и прегледнији приказ како поступка тако и резултата.



Слика 2.9 Илустрације метода левих и десних правоугаоника за произвољну непрекидну монотono растућу функцију

Са слике 2.9 се може уочити да је код оба метода дужина подинтервала униформна. Интеграл се апроксимира сумом потповршина правоугаоника где се за једну његову страну узима вредност ширине подинтервала ΔT , а за вредност друге стране правоугаоника вредност функције у левој, односно десној крајњој тачки тог подинтервала. Слика такође показује да је број потповршина идентичан броју одбирака добијених у оквиру интервала интеграције. Према илустрацији на левој половини слике 2.9 можемо закључити да ће применом апроксимације методом левих правоугаоника над интервалом где је функција монотono растућа, процењена вредност одређеног интеграла бити мања од тачне вредности. У случају опадајуће функције, при апроксимацији левих правоугаоника, процењена вредност одређеног интеграла би била већа од стварне вредности. Десна половина слике 2.9 представља процењену вредност одређеног интеграла у случају монотono растуће функције. У овом случају, процењена вредност одређеног интеграла ће бити већа, а у случају монотono опадајуће функције мања од тачне вредности.

С обзиром на претходно речено, уколико одбирке добијене у оквиру интервала интеграције означимо са $x_i = x_1 + (i-1)\Delta T, i = 1, 2, \dots, n$ за $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, n \in \mathbb{N}$, а вредност ширине подинтервала са ΔT где је $\Delta T = (x_n - x_1)/(n-1)$, на основу формуле левих правоугаоника се добија израз за естимацију површине испод дате криве L_n (2.26).

$$L_n = \Delta T \cdot \sum_{i=1}^n f(x_1 + (i-1)\Delta T) \quad (2.26)$$

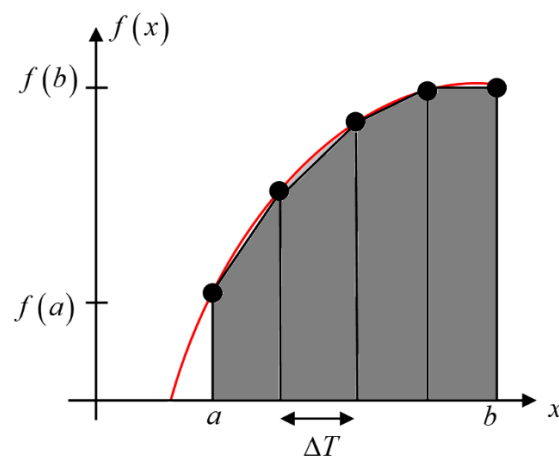
Аналогно овоме, уколико одбирке добијене у оквиру интеграције означимо са $x_i = x_1 + i \cdot \Delta T, i = 1, 2, \dots, n$ за $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, n \in \mathbb{N}$, а вредност ширине подинтервала са ΔT где је $\Delta T = (x_n - x_1)/(n - 1)$, на основу формуле десних правоугаоника се изводи израз за естимацију површине испод дате криве D_n (2.27).

$$D_n = \Delta T \cdot \sum_{i=1}^n f(x_1 + i\Delta T) \quad (2.27)$$

Метод средњих правоугаоника неће бити коришћен у овом истраживању јер подразумева или познавање аналитичког записа функције, како би се могла одредити вредност функције на средини посматраног подинтервала, или апроксимацију интерполацијом којом се у овој дисертацији нећемо бавити. За потребе овог истраживања, фокусираћемо се на формуле левих и десних правоугаоника.

2.4.2.2 Трапезна квадратурна формула

Њутн-Коутсова формула која за нумеричку интеграцију користи полином првог реда (афину функцију) је трапезна квадратурна формула [29]. Геометријско тумачење овог метода је површина правоуглог трапеза. Интеграл се апроксимира сумом потповршина правоуглих трапеза код којих доња основица има вредност ΔT , један крак вредност функције у једном тренутку одабирања, а други вредност функције у следећем тренутку одабирања. Број потповршина је за један мањи од броја одбирака добијених у оквиру интервала интеграције. Илустрација овог метода на примеру сигнала је приказана на слици 2.10.



Слика 2.10 Илустрација трапезне квадратурне формуле примењене на произвољној непрекидној функцији

С обзиром на претходно речено, уколико одбирке добијене у оквиру интервала интеграције означимо са $x_i = x_1 + (i-1) \cdot \Delta T, i=1, 2, \dots, n$ за $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b, n \in \mathbb{N}$, где је n број одбирака, а вредност ширине подинтервала са ΔT , где је $\Delta T = (x_n - x_1)/(n-1)$, за $T = b - a$, на основу трапезне квадратурне формуле [30] се добија израз за процену површине испод дате криве T_n (2.28).

$$T_n = \frac{\Delta T}{2} \left[f(x_1) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} f(x_1 + i\Delta T) + f(x_n) \right] \quad (2.28)$$

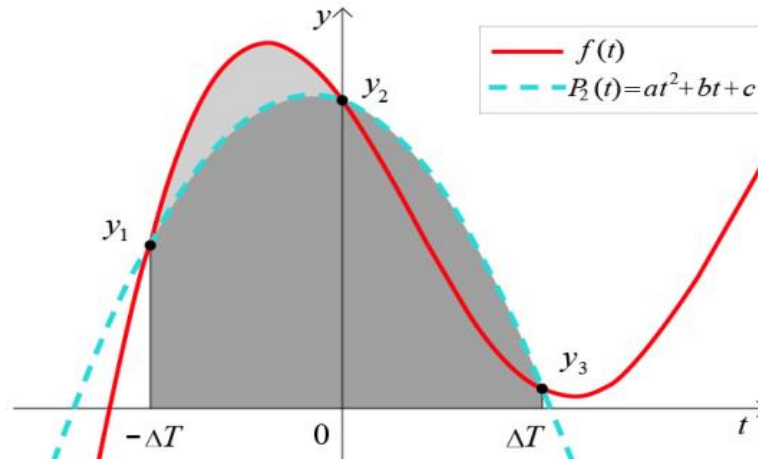
За разлику од примитивне квадратурне формуле трапезне квадратурне формуле, где је број потповршина идентичан броју одбирака добијених у оквиру интервала интеграције, у случају трапезне квадратурне формуле, број потповршина је за један мањи од броја одбирака.

2.4.2.3 Симпсонова 1/3 квадратурна формула

Симпсонова ⁷ 1/3 квадратурна формула [30] представља поступак нумеричке интеграције функције интеграционим полиномом другог реда (квадратна функција, парабола) [31]. Интервал интеграције $[a, b]$ дели се на подинтервале једнаких ширина $2\Delta T$ одређених на основу n одбирака. Подинтервали се добију на основу три одбирка, па је употреба Симпсонове 1/3 квадратурне формуле оправдана само у случају када је укупан број одбирака у оквиру интервала интеграције непаран, тј. ако је број подинтервала паран. Поменути услови у којима је могуће користити овај метод представљају ограничења њене примене. Ова чињеница је од великог значаја за поље метрологије. У наредним поглављима ће бити приказане инстанце истраживања које нуде решења за лимитирану ситуацију. Пре него што предложимо решења проблема, приказаћемо стандардне верзије метода о којима је реч, првенствено стављајући акценат на Симпсонову 1/3 квадратурну формулу.

⁷ Томас Симпсон (Thomas Simpson, 1710 –1761) је био математичар и изумитељ британског порекла. Иако Симпсонова правила носе његово име, сматра се да су те формуле биле познате Јохану Кеплеру и другим научницима који су живели много пре Симпсоновог времена. Међутим, Симпсон је засигурно заслужан за ове формуле на основу популарности уџбеника који су везани за његово име, а из којих су многи дошли до знања о поменутих формулама.

На слици 2.11 је дата илустрација на којој су приказана три суседна одбирака произвољне функције $f(t)$. Црвеном бојом је означена функција $f(t)$, а испрекидана зелена линија представља апроксимацију полиномом другог реда.



Слика 2.11 Принцип Симпсонове 1/3 квадратурне формуле

Да би се могла проценити површина I испод криве $f(t)$ једног подинтервала, што је приказано у (2.29) и (2.30), неопходно је прво одредити параболу на основу три узастопна одбирка функције.

$$I = \int_{-\Delta T}^{\Delta T} f(t) dt \approx \int_{-\Delta T}^{\Delta T} P_2(t) dt = \int_{-\Delta T}^{\Delta T} (at^2 + bt + c) dt \quad (2.29)$$

$$I = a \frac{t^3}{3} \Big|_{-\Delta T}^{\Delta T} + b \frac{t^2}{2} \Big|_{-\Delta T}^{\Delta T} + c t \Big|_{-\Delta T}^{\Delta T} = \frac{\Delta T}{3} (2a\Delta T^2 + 6c) \quad (2.30)$$

За тачке $(-\Delta T, y_1)$, $(0, y_2)$ и $(\Delta T, y_3)$ које припадају параболу $P_2(t)$ важи да је:

$$y_1 = a\Delta T^2 - b\Delta T + c \quad (2.31)$$

$$y_2 = c \quad (2.32)$$

$$y_3 = a\Delta T^2 + b\Delta T + c \quad (2.33)$$

Из овог одређеног система једначина следи да су коефицијенти квадратне једначине:

$$a = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2\Delta T^2} \quad (2.34)$$

$$b = \frac{-y_1 + y_3}{2\Delta T} \quad (2.35)$$

$$c = y_2 \quad (2.36)$$

На основу претходног добија се израз (2.37) за процену вредности подинтеграла дате функције.

$$I \approx \frac{\Delta T}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3) \quad (2.37)$$

Помоћу полинома другог реда за прва три одбирка функције $f(t)$, естимира се површина првог подинтервала коју ћемо означити са P_1 . Затим се одређује полином другог реда на основу трећег, четвртог и петог одбирка исте функције, на основу којег се естимира површина другог подинтервала P_2 дате функције. Када се одреди и површина $P_{(n-1)/2}$ на основу последња три одбирка функције, рачуна се сума свих естимираних површина над датим подинтервалима у оквиру интеграције која представља апроксимацију стварне вредности одређеног интеграла. Разлика нумеричког решења овог интеграла и тачне вредности одређеног интеграла потиче од неподударања функције $f(t)$ и апроксимације полиномом другог реда кроз три суседна одбирка функције, односно интерполационе тачке.

С обзиром на претходно речено, уколико одбирке добијене у оквиру интервала интеграције означимо са $x_i = x_1 + i \cdot \Delta T$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ за $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$, а вредност ширине подинтервала са ΔT , где је $\Delta T = (x_n - x_1)/(n - 1)$ за $T = b - a$, на основу Симпсонове 1/3 квадратурне формуле се добија израз за естимацију површине испод дате криве $S_{(1/3)n}$ (2.38).

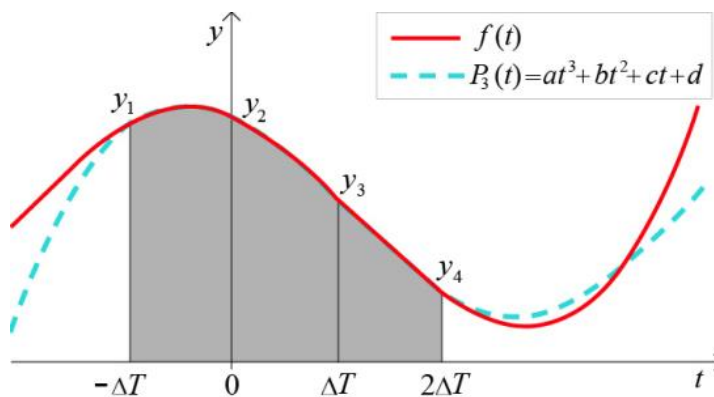
$$S_{(1/3)n} = \frac{\Delta T}{3} \left(f(x_1) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} f(x_2 + 2(i-1)\Delta T) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{n-3}{2}} f(x_3 + 2(i-1)\Delta T) + f(x_n) \right) \quad (2.38)$$

Како је употреба Симпсонове 1/3 квадратурне формуле оправдана само у случају када је укупан број одбирака у оквиру интервала интеграције непаран, то чини основу ограничења њене примене.

2.4.2.4 Симпсонова 3/8 квадратурна формула

Симпсонова 3/8 квадратурна формула представља поступак нумеричке интеграције функције интеграционим полиномом трећег реда (кубна функција) [32] и [33]. Интервал интеграције $[a, b]$ дели се на подинтервале једнаких ширина $3\Delta T$ одређених на основу n одбирака. Подинтервали се добију на основу четири суседна одбирка, па је употреба Симпсонове 3/8 квадратурне формуле оправдана само у случају када је укупан број одбирака у оквиру интервала интеграција $3k+1, k \in \mathbb{N}$. Описана ситуација заправо представља ограничења примене овог метода у пракси. Пре него што буду уведене алтернативне верзије које омогућавају универзалну примену, биће приказани стандардни облици метода о којима је реч, првенствено се фокусирајући на Симпсонову 3/8 квадратурну формулу.

Функције приказане на слици 2.12 су произволна функција $f(t)$, која је на слици означена црвеном бојом, и кубна функција формирана на основу четири узастопна одбирка функције $f(t)$, која је означена плавом испрекиданом линијом, што илуструје принцип Симпсонове 3/8 квадратурне формуле за један подинтервал интеграције $[-\Delta T, 2\Delta T]$.



Слика 2.12 Принцип Симпсонове 3/8 квадратурне формуле

Да бисмо могли да естимирамо површину I испод криве једног подинтервала, што је приказано у (2.39), неопходно је прво одредити кубну функцију на основу четири узастопна одбирка функције.

$$I = \int_{-\Delta T}^{2\Delta T} f(t) dt \approx \int_{-\Delta T}^{2\Delta T} P_3(t) dt = \int_{-\Delta T}^{2\Delta T} (at^3 + bt^2 + ct + d) dt \quad (2.39)$$

$$I = a \frac{t^4}{4} \Big|_{-\Delta T}^{2\Delta T} + b \frac{t^3}{3} \Big|_{-\Delta T}^{2\Delta T} + c \frac{t^2}{2} \Big|_{-\Delta T}^{2\Delta T} + d t \Big|_{-\Delta T}^{2\Delta T} \quad (2.40)$$

$$I = \frac{\Delta T}{4} (15a\Delta T^3 + 12b\Delta T^2 + 6c\Delta T + 12d) \quad (2.41)$$

За тачке $(-\Delta T, y_1)$, $(0, y_2)$, $(\Delta T, y_3)$ и $(2\Delta T, y_4)$, које припадају параболи $P_3(t)$ важи да је:

$$y_1 = -a\Delta T^3 + b\Delta T^2 - c\Delta T + d \quad (2.42)$$

$$y_2 = d \quad (2.43)$$

$$y_3 = a\Delta T^3 + b\Delta T^2 + c\Delta T + d \quad (2.44)$$

$$y_4 = 8a\Delta T^3 + 4b\Delta T^2 + 2c\Delta T + d \quad (2.45)$$

Из овог одређеног система једначина добијамо да су коефицијенти квадратне једначине:

$$a = \frac{-y_1 + 3y_2 - 3y_3 + y_4}{6\Delta T^3} \quad (2.46)$$

$$b = \frac{y_1 - 2y_2 + y_3}{2\Delta T^2} \quad (2.47)$$

$$c = \frac{-2y_1 - 3y_2 + 6y_3 - y_4}{6\Delta T} \quad (2.48)$$

$$d = y_2 \quad (2.49)$$

Из овога следи израз (2.50) за процену вредности подинтеграла дате функције.

$$I \approx \frac{3\Delta T}{8} (y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4) \quad (2.50)$$

Полином трећег реда за прва четири одбирка функције $f(t)$ се користи за процену површине првог подинтервала коју ћемо означити са P_1 . Затим се одређује полином трећег

реда користећи четврти, пети, шести и седми одбирак исте функције, на основу којег се естимира површина другог подинтервала P_2 . Када се одреди вредност површине $P_{(n-1)/3}$ на основу последња четири одбирка функције, рачуна се сума свих процењених површина над датим подинтервалима у оквиру интеграције која представља апроксимацију стварне вредности одређеног интеграла. Разлика нумеричког решења овог интеграла и тачне вредности одређеног интеграла потиче од неподударења функције $f(t)$ и апроксимације полиномом трећег реда кроз четири одбирка функције, односно интерполационе тачке.

С обзиром на претходно речено, уколико одбирке добијене у оквиру интервала интеграције означимо са $x_i = x_1 + (i-1) \cdot \Delta T, i = 1, 2, \dots, n$ за $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$, $n = 3k + 1, k \in \mathbb{N}$, а вредност ширине подинтервала са ΔT , где је $\Delta T = (x_n - x_1)/(n-1)$ за $T = b - a$, на основу Симпсонове 3/8 квадратурне формуле се добија израз (2.51) за естимацију одређеног интеграла над интервалом $[a, b]$.

$$S_{(3/8)_n} = \frac{3\Delta T}{8} \left[f(x_1) + 2 \sum_{i=0}^{\frac{n-7}{3}} f(x_4 + 3i\Delta T) + 3 \sum_{i=0}^{\frac{n-4}{3}} f(x_2 + 3i\Delta T) + 3 \sum_{i=0}^{\frac{n-4}{3}} f(x_3 + 3i\Delta T) + f(x_n) \right] \quad (2.51)$$

Како је употреба Симпсонове 3/8 квадратурне формуле оправдана само у случају када је укупан број одбирака у оквиру интервала интеграције облика $3k + 1$ за $k \in \mathbb{N}$, то чини основу ограничења њене примене.

3. Предлози за модификације Симпсонових квадратурних формула у циљу превазилажења ограничења у примени

Претходна поглавља су указала на стање у областима где се примењују методи нумеричке интеграције. У овом делу биће представљен оригинални научни допринос истраживања представљено у дисертацији у облику предлога за модификације Симпсонових квадратурних формула ради постизања универзалне применљивости. Метрологија је једна од дисциплина која омогућују испитивање могућности примене нумеричких метода, њихових ограничења и превазилажења тих ограничења, као што је приказано у овој дисертацији. Претходно је показано да су примитивна квадратурна формула и трапезна квадратурна формула универзално применљиви методи нумеричке интеграције. Исто тако је предочена чињеница да је ситуација сасвим другачија када су у питању Симпсонове квадратурне формуле, код којих постоји знатна зависност примене од броја одбирака који се добијају у оквиру периоде. Када је број одбирака у оквиру периоде непаран, Симпсонова $1/3$ квадратурна формула је применљива, а Симпсонова $3/8$ квадратурна формула је применљива када је тај број облика $3k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Уколико ови услови нису задовољени, методи о којима је реч нису применљиви.

Проблем није само ограничење. Додатни проблем у метрологији је што број одбирака није могуће знати пре него што се заврши процес одабирања сигнала. На основу математичког прорачуна је могуће одредити закон расподеле случајне променљиве која представља број одбирака у оквиру периоде уколико је познат вредност количника периоде мереног сигнала и периоде такта. Таква ситуација показује радикална ограничења у примени ових метода. Узимајући ту чињеницу у обзир, у овој дисертацији се разматра могућност за решење проблема који је изложен у наставку текста.

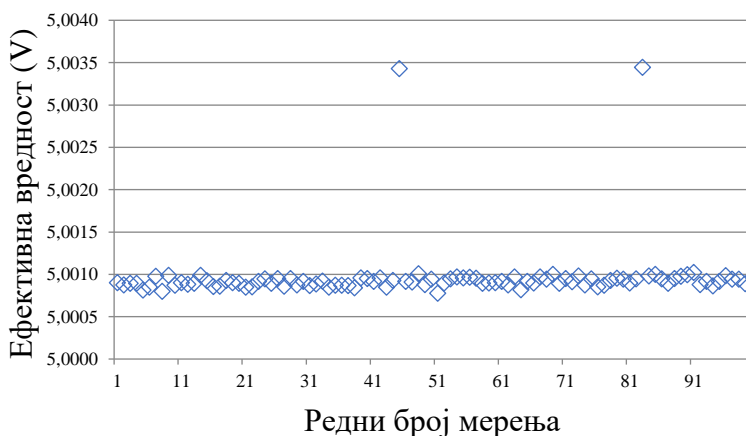
3.1 Проблем непознавања броја одбирака у условима нецелобројног вредности количника учестаности одабирања и основне учестаности сигнала

У оквиру примене традиционалних метода за одређивање ефективне вредности периодичног сигнала, процес одабирања почиње у тренутку када сигнал пролази кроз нулти ниво, а завршава се након једне периоде, у тренутку када сигнал поново достигне исти ниво. То значи да је вредност прага одабираног сигнала нула. Израз (3.1) се најчешће среће у литератури за процену ефективне вредности напонског сигнала и представља традиционални метод познат под називом примитивна квадратурна формула.

$$U_{eff} \approx \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m U_i^2} \quad (3.1)$$

Као што је раније назначено, вредност одређеног интеграла над интервалом се рачуна преко дефинисане функције. У пракси се често дешава да је недоступан аналитички запис функције. У таквим ситуацијама се користе нумерички методи [34] над вредностима одбирака дате функције добијених у процесу одабирања ($i = 1, 2, \dots, m$), где је m број одбирака који зависи од учестаности одабирања f_s . При процени одређеног интеграла, јавља се грешка при примени било ког, па тако и синхроног метода [35] и [36]. Код синхроног одабирања се обезбеђује целобројна вредност f_s/f применом PLL блока. Код асинхроног одабирања је углавном задата учестаност одабирања и зависно од варирања фундаменталне учестаности мереног сигнала долази до варирања вредности f_s/f . У случају малих вредности f_s/f , може да се јави знатна грешка, чак и случају кад се користе А/Д конвертори врхунског квалитета.

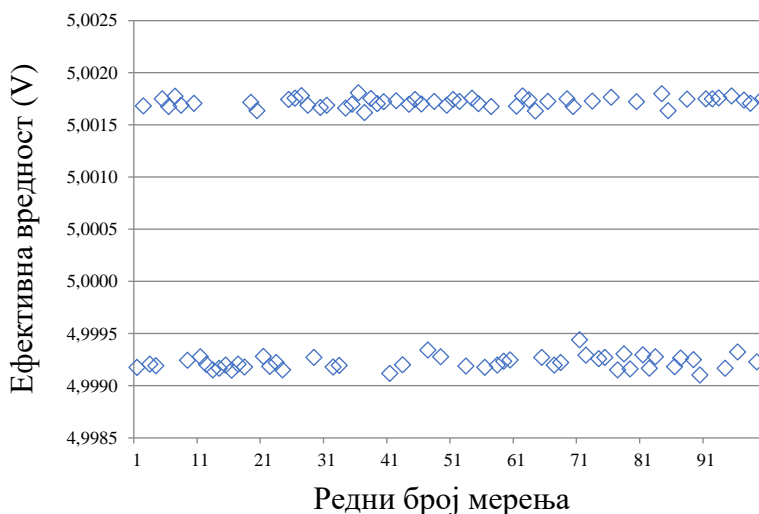
У наставку текста следи приказ две серије мерења простопериодичног напона стабилне амплитуде. У првој серији мерења, чији су резултати приказани на слици 3.1, где је називна учестаност простопериодичног напона 50 Hz, а учестаност одабирања 20 kHz, примећује се да се велики број добијених резултата расипа око вредности 5,001 V, а да само два у знатној мери одступају.



Слика 3.1 Ефективна вредност простопериодичног напона при називној учестаности сигнала 50 Hz и учестаности одабирања 20 kHz

У другој серији мерења, чији су резултати приказани на слици 3.2, где је називна учестаност простопериодичног напона 50,2 Hz, а учестаност одабирања 20 kHz, уочавају

се две групе резултата мерења које карактерише мало расипање. Међутим, треба приметити да су ове две групе веома размакнуте.



Слика 3.2 Ефективна вредност простопериодичног напона при називној учестаности сигнала 50,2 Hz и учестаности одабирања 20 kHz

За прву серију мерења, када је f_s/f целобројан ($20 \text{ kHz} / 50 \text{ Hz} = 400$), што подразумева исти број одбирака у периоди, генерално се добија добро груписање резултата за ефективну вредност. Два резултата се, међутим, приметно разликују од груписаних. Претпоставља се да је то последица одступања једне или обе учестаности од њихових називних вредности. Уобичајени поступак би подразумевао одбацавање резултата који значајно одступају од осталих. За такве резултате се сматра да садрже грубу грешку.

За другу серију мерења, када је f_s/f нецелобројан ($20 \text{ kHz} / 50,2 \text{ Hz} = 398,4$), број одбирака у оквиру једне периоде може бити $\lfloor f_s/f \rfloor$ или $\lceil f_s/f \rceil$. Ове ознаке представљају заокруживање на прву мању целобројну вредност (енгл. *floor*) и заокруживање на прву већу целобројну вредност (енгл. *ceiling*), што у овом случају 398 или 399.

Ово има за последицу две групе резултата одређивања ефективне вредности. Имајући у виду последице до којих може доћи услед грешке у подацима и/или погрешног тумачења података и/или резултата, поставља се низ питања:

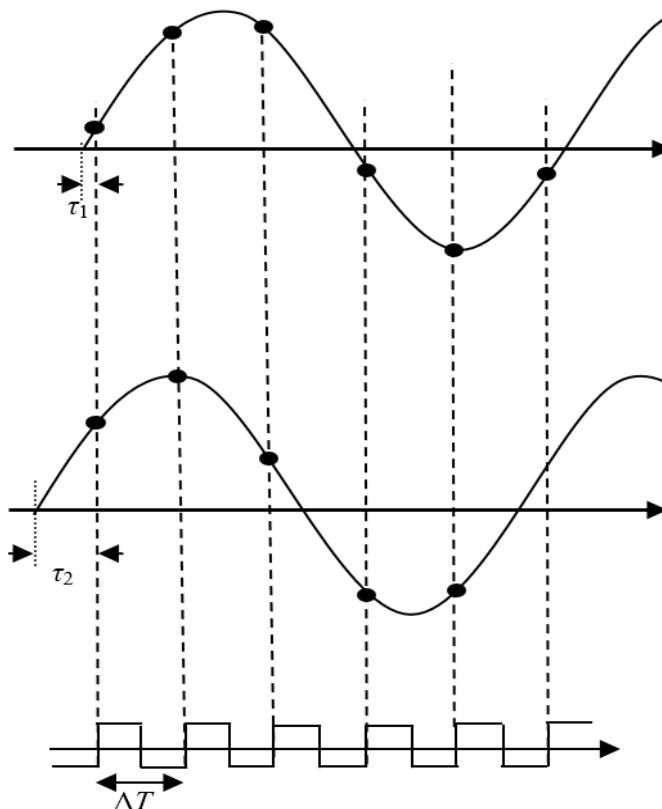
- а) Коју групу резултата сматрати валидним, а које одбацити?
- б) По ком критеријуму одабрати групу резултата коју треба одбацити имајући у виду да је подједнак број резултата у обе групе?

в) Да ли је приказано груписање података последица грубе грешке или је у питању случајна појава?

Чињеница да у оквиру сваке групе постоји мало расипање резултата мерења указује на претпоставку да оваква ситуација није последица деловања случајних грешака. Исто тако, не би била валидна тврдња да половина резултата мерења садржи грубу грешку. Стога се закључује да се ради о последици систематске грешке.

Резултати друге серије мерења су одредили даљи правац истраживања, утолико што су указали на деликатност ситуације када је f_s/f нецелобројан. Две групе резултата које су добијене биле су индикатор проблема за чијим решењем треба трагати. Да би се до њега дошло, спроведене су симулације како би се проверила оправданост идеја на којима се заснива хипотеза и да би могла да се донесе одлука о даљем току емпиријског дела истраживања.

Број одбирака добијених током једне или више периода не мора сваки пут бити исти за одређен број мерења када је реч о униформном асинхронном одабирању периодичног сигнала фиксне учестаности. Уколико је при оваквом одабирању расподела појављивања одбирака униформна, за серију мерења се на основу односа учестаности одабирања и основне учестаности мереног сигнала f_s/f може одредити вероватноћа појављивања броја добијених одбирака мање или веће вредности у оквиру периоде. Ово ће у наставку текста прво бити илустровано примером, а потом потврђено симулационим методом и доказано математичким путем. Као последица варирања броја одбирака у оквиру периоде јавља се расипање резултата, које условљава непрецизност мерења. Стога се намеће потреба за контролисањем расипања резултата које је тиме узроковано. Пример варирања броја одбирака на истом сигналу чија је периода дефинисана узастопним проласком растућег нивоа сигнала кроз нулу дат је на слици 3.3.



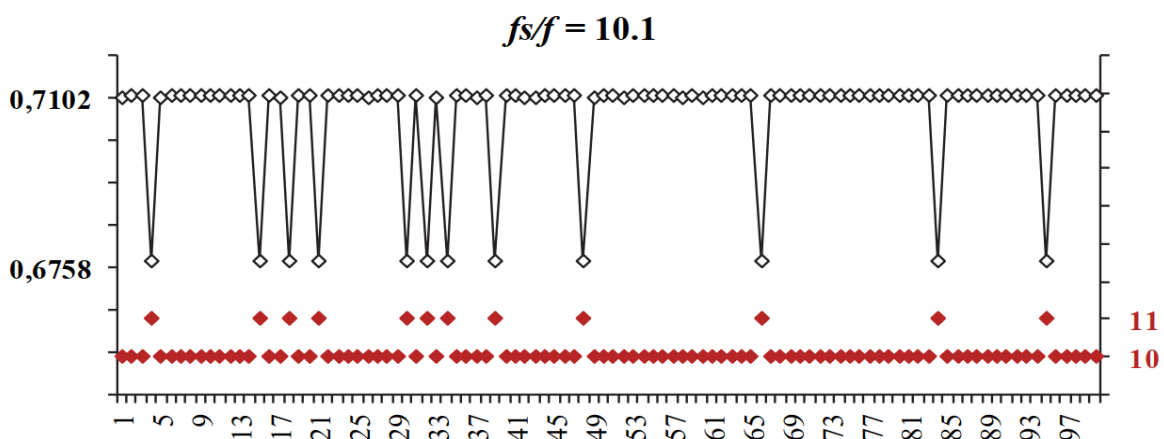
Слика 3.3 Варирање броја одбирака

Слика 3.3 приказује два простопериодична сигнала $u_1(t)$ и $u_2(t)$ који имају исту периоду T и амплитуду, али међусобно различите фазне ставове. Поред њих, представљена је и периодична поворка правоугаоних импулса која представља такт одабирања периоде ΔT . Узлазна ивица такта одабирања дефинише тренутак одабирања два сигнала $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Почетни тренутак одабирања није увек исти. Са слике 3.3 се може уочити да је у овој ситуацији, за први сигнал број добијених одбирака у оквиру периоде шест, а за други пет.

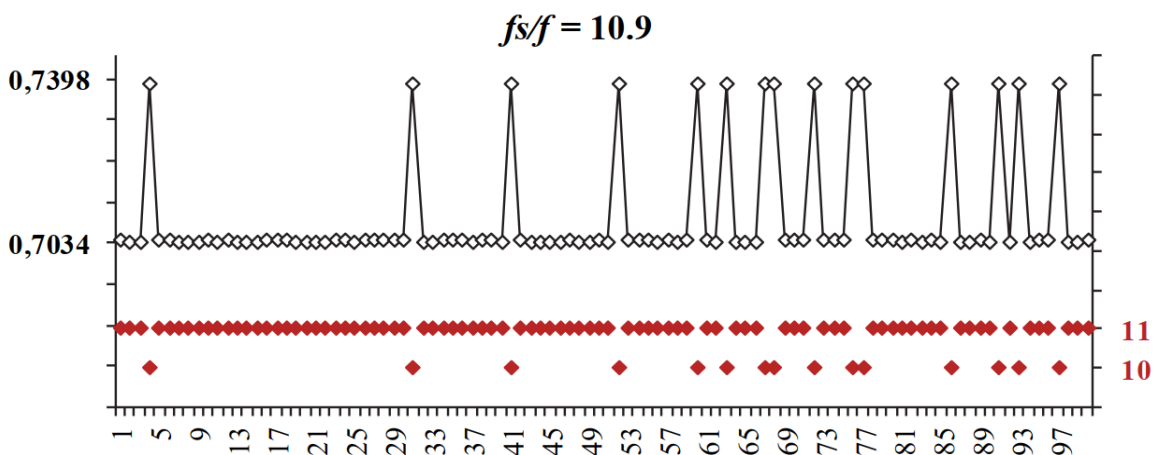
Варирање резултата и значај одабирања почетног одбирка су одредили смер наставка истраживања ка симулационом методу који је потврдио неке од очекиваних претпоставки. Сходно томе, извршене су иницијални сет симулација асинхроног одабирања простопериодичног сигнала у серији од сто мерења за две фиксне вредности f_s/f . Ово је урађено у концепту тзв. РОС (engl. *Proof of Concept*), који служи да би се показала смисленост основне идеје и аргументовало даље њено развијање. На сликама 3.4 и 3.5 су приказани резултати иницијалног сета симулација који указују на зависност израчунате ефективне вредности простопериодичног сигнала од f_s/f према примитивној квадратурној формули. На хоризонталним осама су представљени редни бројеви мерења у оквиру

серије од сто мерења. При дефинисаном нецелобројном односу f_s/f добијају се две групе резултата израчунате ефективне вредности простопериодичног сигнала.

За однос f_s/f мањи од 10,5 (слика 3.4), видимо да је учестаност појављивања десет одбирака у оквиру периоде већа од учестаности појављивања једанаест одбирака. Када је вредност односа f_s/f већа од 10,5 (слика 3.5), супротно је случај по питању учестаности појављивања десет одбирака у оквиру периоде. И у једном и у другом случају, већи број одбирака у оквиру периоде за резултат има мању вредност израчунате ефективне вредности простопериодичног сигнала.



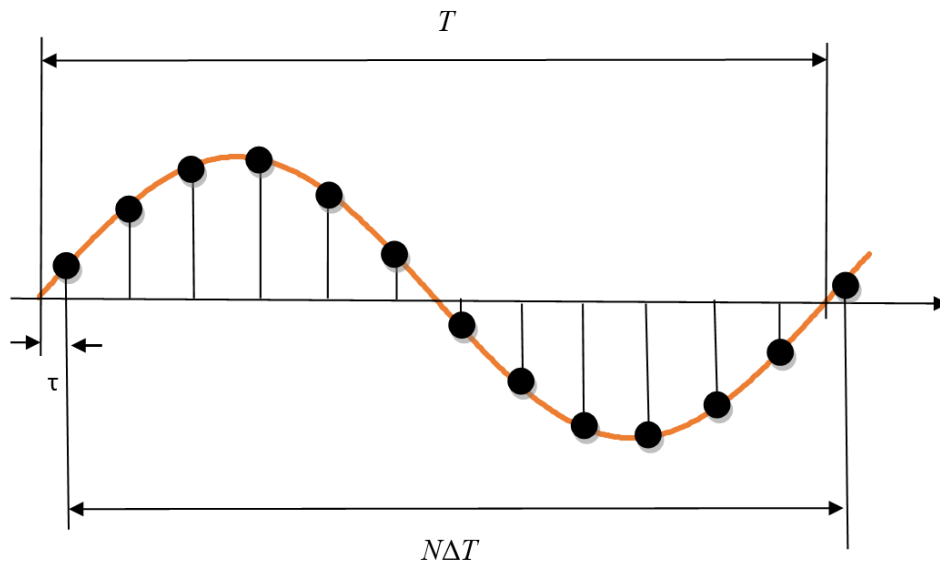
Слика 3.4 Зависност израчунате ефективне вредности простопериодичног сигнала при вредности количника учестаности одабирања и основне учестаности мереног сигнала 10,1



Слика 3.5 Зависност израчунате ефективне вредности простопериодичног сигнала при вредности количника учестаности одабирања и основне учестаности мереног сигнала 10,9

Како се претпоставило да се на основу односа учестаности одабирања и основне учестаности мереног сигнала f_s/f може одредити вероватноћа појављивања броја добијених одбирака мање или веће вредности у оквиру периоде при униформној расподели појављивања почетног момента одабирања, симулацијама је потврђена могућност демонстрације иницијалних идеја експерименталним методом. У циљу наставка истраживања у том смеру, изведени су и математички докази поменуте претпоставке, који су изложени у наставку овог дела дисертације.

На слици 3.6 је илустрован периодичан сигнал периоде T која је одређена узастопним проласком растућег сигнала кроз нулу. Случајна променљива τ представља тренутак узимања првог одбирка, а случајна променљива X број укупних одбирака добијених у оквиру периоде T . Како се дисертација бави проблемом нецелобројног односа f_s/f , тај однос можемо представити изразом (3.2). Израз (3.3) представља периоду сигнала T , а параметар δT разлику између периоде сигнала T и целог броја периода одабирања $N\Delta T$, тако да је δT увек мања од периоде одабирања, што је представљено изразом (3.4).



Слика 3.6 Периодичан сигнал периоде T одређене узастопним проласком растућег нивоа сигнала кроз нулу

$$\frac{f_s}{f} = N + \Delta N, \quad N \in \mathbb{N}, \quad \Delta N \in [0, 1) \quad (3.2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{N + \Delta N}{f_s}, \quad \Delta T = \frac{1}{f_s}, \quad T = \frac{1}{f} \quad (3.3)$$

$$T = N\Delta T + \underbrace{\Delta N\Delta T}_{\delta T} \Rightarrow \delta T = T - N\Delta T \quad (3.4)$$

Скуп вредности случајне променљиве X је скуп од два елемента, који су условљени односом τ и δT при фиксном нецелобројном односу f_s/f што је представљено у (3.5).

$$\left. \begin{array}{l} 1. \tau \leq \delta T \Rightarrow X = N + 1 \\ 2. \tau > \delta T \Rightarrow X = N \end{array} \right\} \Rightarrow \mathfrak{R}_X = \{N, N + 1\} \quad (3.5)$$

Претпоставимо да је случајна променљива τ непрекидног типа са униформном расподелом $\tau : U(0, \Delta T)$, чија је функција расподеле дата изразом (3.6).

$$F_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{t}{\Delta T}, & 0 < t \leq \Delta T \\ 1, & t > \Delta T \end{cases} \quad (3.6)$$

На основу претходног разматрања, у наставку текста је приказано поступно одређивање вероватноће да вредност случајне променљиве X буде $N + 1$, што је приказано изразима (3.7), (3.8) и (3.9).

$$P(X = N + 1) = P(\tau \leq \delta T) = F_\tau(\delta T) \quad (3.7)$$

$$P(X = N + 1) = \begin{cases} 0, & \Delta N \cdot \Delta T < 0 \\ \Delta N, & 0 \leq \Delta N \cdot \Delta T < \Delta T \\ 1, & \Delta N \cdot \Delta T \geq \Delta T \end{cases} \quad (3.8)$$

$$P(X = N + 1) = \begin{cases} 0, & \Delta N < 0 \\ \Delta N, & 0 \leq \Delta N < 1 \\ 1, & \Delta N \geq 1 \end{cases} \quad (3.9)$$

Вероватноћа да случајна променљива X има вредност N се одређује на основу особине вероватноће (3.10), што је представљено изразом (3.11).

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (3.10)$$

$$P(X = N) = 1 - P(X = N + 1) = 1 - \Delta N, \quad 0 \leq \Delta N < 1 \quad (3.11)$$

Закон расподеле случајне променљиве X је представљен изразом (3.12).

$$\Rightarrow X : \begin{pmatrix} N & N+1 \\ 1-\Delta N & \Delta N \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

3.2 Модификација Симпсонове 1/3 квадратурне формуле

Симпсонова 1/3 квадратурна формула пруже велике могућности у истраживању које се бави применом нумеричких метода. Међутим, као што је предочено, њена примена је у знатној мери отежана ограничењем које је се тиче проблема броја одбирака. Конкретно, примена Симпсонове 1/3 квадратурне формуле је условљена бројем одбирака, што онемогућава њену универзалну примену. Када је број одбирака над периодом непаран, овај метод може да се користи. Међутим, није увек могуће добити непаран број одбирака, нити је могуће знати број одбирака пре него што се процес дискретизације заврши. Број одбирака зависи од учестаности одабирања, учестаности сигнала и момента када почиње одабирање. Да би се дошло до решења проблема ограничене примене Симпсонове 1/3 квадратурне формуле, те да би се обезбедио метод који има универзалну применљивост, предлаже се модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула.

Разматрање могућности да се омогући универзална примена Симпсонове 1/3 квадратурне формуле је показало да то није могуће уколико се метод примењује у облику у којем се сада употребљава. То значи да је избор био модификација Симпсонове 1/3 квадратурне формуле. Очигледно је да се проблем броја одбирака не може решити интервенцијом која би омогућила опцију непарног броја одбирака у свакој ситуацији. Из тог разлога се прибегло покушајима да се проблему приступи индиректно. Прецизније речено, модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула не омогућује ни добијање непарног броја одбирака у свакој ситуацији, нити предвидивост броја одбирака пре завршетка процеса дискретизације, што би била очекивана решења за могућност универзалне примене Симпсонове 1/3 квадратурне формуле. За разлику од постојећег метода, модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула представља поступак нумеричке интеграције функције интеграционим полиномом другог реда, где се кључна интервенција састоји од другачијег поступка избора три узастопна одбирка који улазе у састав подинтервала. Тиме се проблем броја одбирака превазилази индиректно. Уместо манипулације у циљу измене броја одбирака, тј. контролисања у циљу одржавања непарног броја или омогућавања његове предвидивости, метод који се овде предлаже, такорећи, елиминише тај проблем. Незнатном интервенцијом у процесу селекције одбирака за естимацију вредности сигнала, применом модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле долази до померања фокуса са броја одбирака на број потповршина.

Наиме, при примени Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле посматрају се три узастопна одбирка у сетовима где је последњи одбирак једног сета први одбирак наредног. На пример, за пет одбирака у оквиру периоде формирају се две параболе кроз два сета одбирака које обележавамо са $\{y_1, y_2, y_3\}$ и $\{y_3, y_4, y_5\}$. Уместо тога, при примени модификоване Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле, селекцијом свака три узастопна одбирка формирају се сетови у којима је сваки одбирак у оквиру периоде (осим последња два) по једном први у одређеном сету у оквиру целокупног скупа сетова. У том случају, за исти пример се добијају сетови $\{y_1, y_2, y_3\}$, $\{y_2, y_3, y_4\}$ и $\{y_3, y_4, y_5\}$. Тиме се омогућује коришћење свих одбирака у оквиру периоде, што у Симпсоновој $1/3$ квадратурној формули није могуће уколико је укупан број одбирака паран. Ово значи да се модификацијом заобилази проблем који карактерише Симпсонову $1/3$ квадратурну формулу, а који чини основу ограничења њене примене.

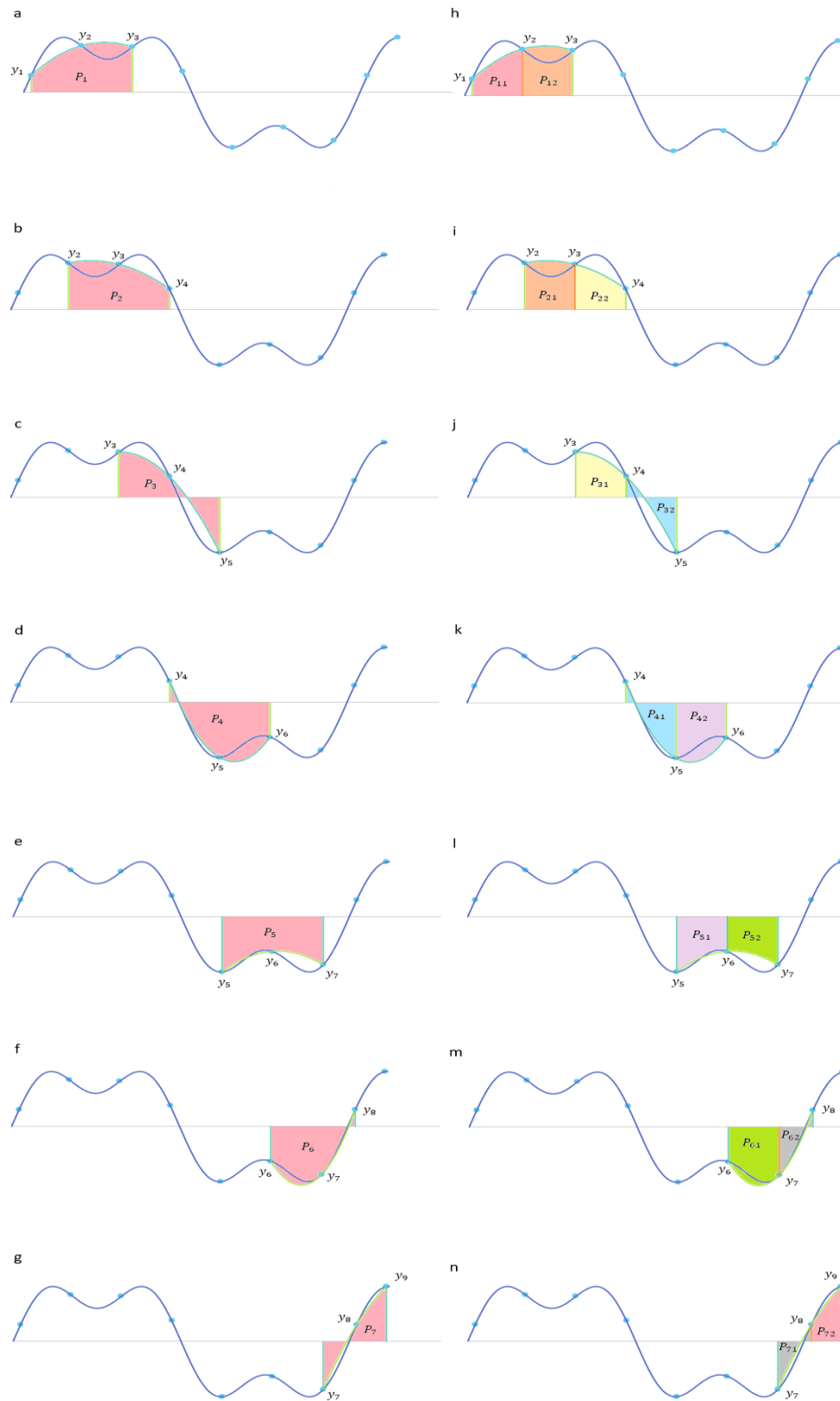
Међутим, тиме се истовремено јављају два нова проблема, што је често изазов са којим се суочава инжењерска пракса. Стога појаве нових проблема са налажењем решења за претходни проблем захтева одржавање баланса између проблема и решења. Конкретно, потповршине које се на тај начин добијају, као и њихов број, компликују процес процене вредности одређеног интеграла. Селекцијом одбирака као што је описано, формирају се сетови на основу којих се за сваки одређује парабола (полином другог реда) која одређује одговарајућу површину. Свака од тих површина се састоји од две дисјунктне потповршине једнаких ширина одређене на основу два узастопна одбирка функције. Ово има за последицу формирање наизглед дуплираних потповршина између одређених одбирака. Приметимо да, иако су формиране над истим одбирцима, потповршине нису идентичне јер су добијене на основу различитих параболо. Оваква ситуација сугерише да би то омогућило процену одређеног интеграла на основу збира свих потповршина и дељењем са два. Додатни проблем је то што се између првог и другог одбирка, као и између претпоследњег и последњег формирају потповршине које немају парњаке који су приближних вредности, као што је случај са осталим потповршинама.

Као решење за новонастали проблем се предлаже увођење два додатна одбирка ван периоде. У случају целобројног односа периоде мереног периодичног сигнала и периоде такта, први додатни одбирак ће бити исте вредности као први одбирак у оквиру периоде, док ће други додатни одбирак бити исте вредности као други одбирак у оквиру периоде. Када је тај однос нецелобројан, а учестаност одабирања довољно велика, први додатни одбирак и први одбирак у оквиру периоде су блиских вредности. Исто важи и за вредности другог додатног одбирка и другог одбирка у оквиру периоде. И у једном и у другом случају, ово решење омогућава формирање упарених потповршина и коначно процене одређеног интеграла и ефективне вредности сигнала. Ово чини окосницу модификације Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле и артикулисање њене модификоване

алтернативе у виду модификоване Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле, чији је практични значај универзална применљивост.

Слика 3.7 илуструје модификовану Симпсонову $1/3$ квадратурну формулу. На слици је представљен сложенопериодичан сигнал, чија је периода дефинисана узастопним проласком растућег сигнала кроз нулу. Поред тога, представљени су и одбирци дате функције добијени у процесу одмеравања, чији је број у оквиру овако дефинисане периоде седам, а који су на слици обележени са $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ и y_7 . Укупан број површина које се формирају на основу параболе сваког скупа одбирака би у том случају био пет, што је означено са P_1, P_2, P_3, P_4 и P_5 . Међутим, на слици је приказана другачија ситуација утолико што су уведена два додатна одбирка. Увођењем додатних одбирака, који су на слици означени са y_8 и y_9 , омогућава се формирање две додатне површине.

На левој страни слике 3.7 (од а до g) приказане су површине од P_1 до P_7 које су формиране на основу скупа одбирака добијених у оквиру периоде сада увећаног за два одбирка. Десна страна слике (од h до n) представља потповршине које се добијају на основу датих одбирака. Површине су одређене параболом и дефинисане одбирцима, а потом подељене на дисјунктне потповршине одређене узастопним одбирцима. На пример, површина P_1 , која је одређена параболом и дефинисана одбирцима y_1, y_2 и y_3 , подељена је на две дисјунктне потповршине: P_{11} која је одређена одбирцима y_1 и y_2 , и P_{12} која је одређена одбирцима y_2 и y_3 . Потповршине образоване на основу истих одбирака, али различитом параболом, обележене су истом бојом да би се указало на парњаке. Површине P_{11} и P_{72} немају парњаке, док све остале потповршине имају. Ако је однос f_s/f целобројан, онда је $y_1 = y_8$ и $y_2 = y_9$, што значи да су P_{11} и P_{72} потповршине одређене над истим вредностима одбирака, али различитим параболома. Из тог разлога је $P_{11} \approx P_{72}$. Сабирањем свих потповршина које су овако генерисане, добија се дупло већа површина од очекиване. На овај начин је омогућена процена вредности одређеног интеграла на основу укупног збира потповршина и дељењем тог збира са два.



Слика 3.7 Илустрација модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле

На слици 3.8, унутар оквира је дата илустрација ситуације коју условљавају седам одбирака. Компоненте изван оквира упућују на ситуацију добијену увођењем одбирака u_8 и u_9 , који су прва два одбирка ван периоде. Њиховим додавањем се добијају две додатне површине, односно четири потповршине, P_{61} , P_{62} , P_{71} и P_{72} , које су парњаци потповршинама и P_{52} , P_{71} , P_{62} и P_{11} тим редом. Парњаци су на слици означени зеленом, сивом и црвеном бојом. Тако употпуњена, слика представља резултат модификације Симпсонове 1/3 квадратурне формуле, где је омогућена процена одређеног интеграла на основу суме свих површина насталих применом ове модификације и дељењем тог збира са два.

P_1	=	P_{11}	+	P_{12}
P_2	=	P_{21}	+	P_{22}
P_3	=	P_{31}	+	P_{32}
P_4	=	P_{41}	+	P_{42}
P_5	=	P_{51}	+	P_{52}
P_6	=	P_{61}	+	P_{62}
P_7	=	P_{71}	+	P_{72}

Слика 3.8 Модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула: Површине и потповршине добијене над одређеним одбирцима

Уколико одбирке добијене у оквиру интервала интеграције и прва два додатна одбирка ван периоде означимо са $x_i = x_1 + (i-1) \cdot \Delta T, i = 1, 2, \dots, n$ за $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} \leq b < x_{n-1} < x_n, n \in \mathbb{N}$, а вредност ширине подинтервала са ΔT , где је $\Delta T = (x_n - x_1)/(n-1)$ за $T = b - a$, на основу модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле добијају се изрази за процену одређеног интеграла (3.13).

$$M_{SR1/3} \approx \Delta T \left(\frac{1}{6} (f(x_1) + f(x_n)) + \frac{5}{6} (f(x_2) + f(x_{n-1})) + \sum_{i=3}^{n-2} f(x_i) \right) \quad (3.13)$$

Дакле, модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула омогућава превазилажење проблема броја одбирака који спречава универзалну применљивост оригиналне Симпсонове 1/3 квадратурне формуле. Поступак који је приказан индиректно

прилази ограничењу својственом Симпсоновој $1/3$ квадратурној формули. Оно што чини посебно обележје истраживања које је представљено у овој дисертацији је специфичност приступа проблему. Конкретно, уместо покушаја да се обезбеди непаран број одбирака у свакој ситуацији, модификована Симпсонова $1/3$ квадратурна формула се фокусира на потповршине добијене на основу одређеног броја одбирака. Ово се постиже незнатном променом у алгоритму која мења логику перцепције интервала интеграције, те уноси измене у поступку интегралнења. Тиме се омогућава универзална применљивост модификоване Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле, што је њен практични значај.

3.3 Модификација Симпсонове $3/8$ квадратурне формуле

Симпсонова $3/8$ квадратурна формула је, као и Симпсонова $1/3$ квадратурна формула, предмет проучавања бројних студија [37]. Такође, оба метода се у извесним радовима проучавају у циљу унапређења њихове примене [38] и [39]. Међутим, може се уочити да у великом броју разматрања њихове употребе и могућности унапређења није узета у обзир чињеница са којом се сусреће практично истраживање које се бави овим методима. За разлику од истраживања која се углавном фокусирају на велики значај ових метода, а превиђају њихову ограничену применљивост, у овој дисертацији се посебна пажња посвећује том ограничењу и практичним резултатима који проистичу из приступа који уноси измене по том питању.

Попут Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле, Симпсонова $3/8$ квадратурна формула има ограничену примену упркос могућностима које је карактеришу. Док је услов који ограничава примену Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле непаран број одбирака, за примену Симпсонове $3/8$ квадратурне формуле тај број је облика $3k + 1$, где је $k \in \mathbb{N}$. Међутим, као што је предочено у делу у којем је представљена модификована Симпсонова $1/3$ квадратурна формула, тај услов није могуће испунити у свакој ситуацији, што значи да се у случају оба метода ради о услову који онемогућава универзалну применљивост. Овај проблем је део централне тематике дисертације. Разматрање решења проблема о којем је реч у вези са Симпсоновом $3/8$ квадратурном формулом је текло паралелно са развијањем идеје о модификацији Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле. Стога се дошло до решења које се заснива на истим принципима који карактеришу извођење модификоване Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле, а који су резутовали добијањем универзално применљиве модификоване Симпсонове $3/8$ квадратурне формуле.

Као и у поступку модификације Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле, модификација Симпсонове $3/8$ квадратурне формуле се такође заснива на индиректном приступу решавању проблема броја одбирака као услова који ограничава примену ових метода. Конкретно, као што модификована Симпсонова $1/3$ квадратурна формула не обезбеђује

непаран број одбирака у свакој ситуацији, тако ни модификована Симпсонова $3/8$ квадратурна формула не нуди решење које би осигурало да тај број у свакој ситуацији буде облика $3k + 1$, где је $k \in \mathbb{N}$. Решење се и у модификованој Симпсоновој $3/8$ квадратурној формули ослања на померање фокуса са броја одбирака на број потповршина. Тиме се проблем одбирака заобилази, те се проблем ограничене применљивости решава индиректно. Модификована Симпсонова $3/8$ квадратурна формула представља поступак нумеричке интеграције функције интеграционим полиномом трећег реда (кубном функцијом), где се кључна интервенција састоји од другачијег поступка избора четири узастопна одбирка који улазе у састав подинтервала.

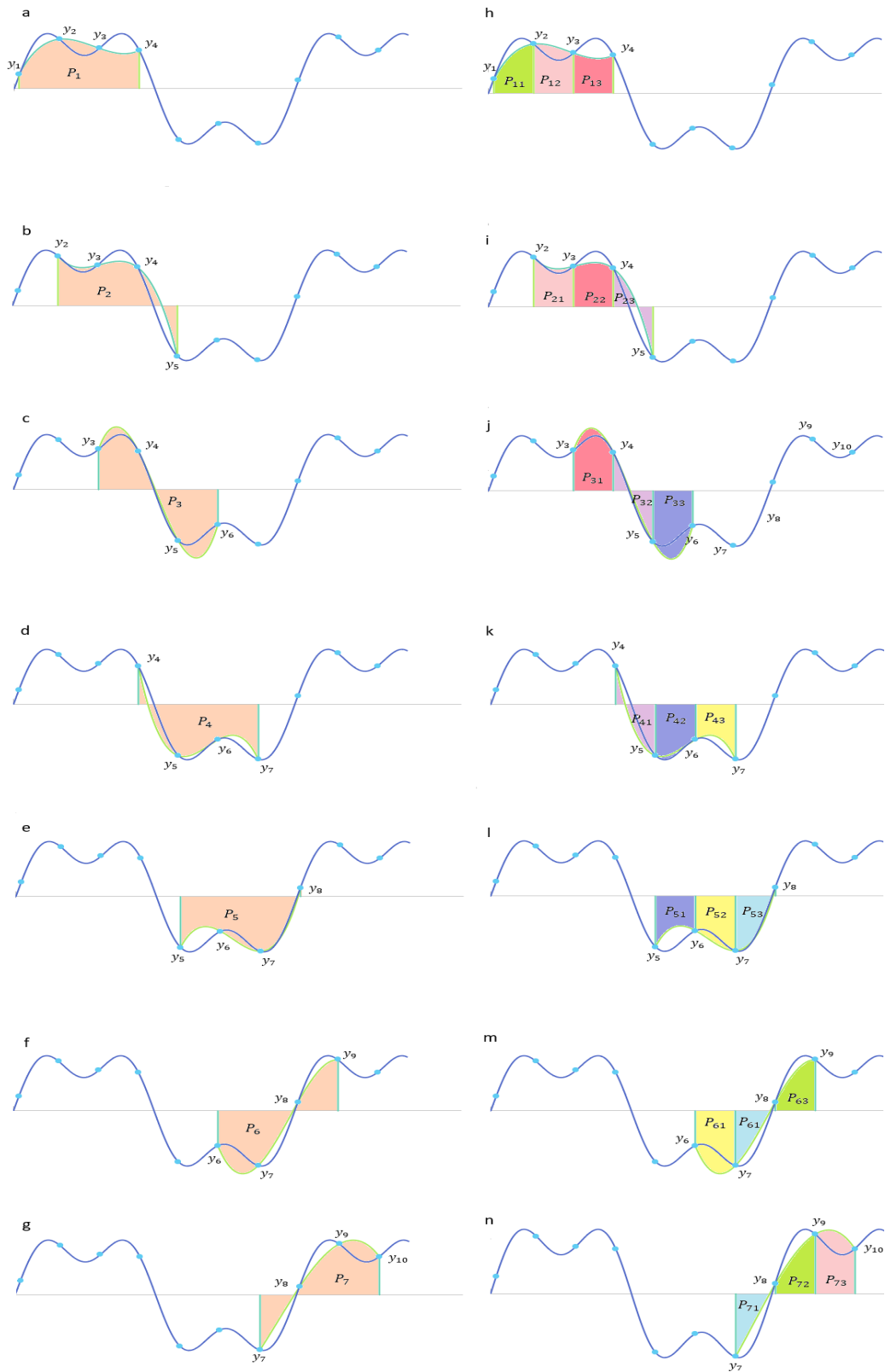
Применом Симпсонове $3/8$ квадратурне формуле се посматрају четири узастопна одбирка у сетовима где је последњи одбирак једног сета први одбирак наредног. На пример, за седам одбирака у оквиру периоде се формирају две кубне функције кроз два сета одбирака које обележавамо са $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ и $\{y_4, y_5, y_6, y_7\}$. За разлику од тога, при примени модификоване Симпсонове $3/8$ квадратурне формуле, селекцијом свака четири узастопна одбирка формирају се сетови у којима је сваки одбирак у оквиру периоде, осим последња три, по једном први у одређеном сету у оквиру целокупног скупа сетова. Тако се за исти пример добијају сетови $\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$, $\{y_3, y_4, y_5, y_6\}$ и $\{y_4, y_5, y_6, y_7\}$. Овим је омогућено да се сви одбирци у оквиру периоде користе, што у случају Симпсонове $3/8$ квадратурне формуле није изводљиво уколико укупан број одбирака није облика $3k + 1$, где је $k \in \mathbb{N}$. Овај алгоритам представља модификовану Симпсонову $3/8$ квадратурну формулу која нуди индиректно решење проблема ограничене применљивости услед условљености бројем одбирака.

Међутим, на тај начин се истовремено јављају два нова проблема. Конкретно, потповршине које се тако добијају, као и њихов број, компликују процес процене вредности одређеног интеграла. Селекцијом одбирака као што је описано, формирају се сетови на основу којих се за сваки одређује кубна функција (полином трећег реда) која одређује одговарајућу површину. Свака од тих површина се састоји од три дисјунктне потповршине једнаких ширина одређене на основу два узастопна одбирка функције. Ово има за последицу формирање по три наизглед мултипликоване потповршине између свих одбирака. Изузетак су потповршине одређене другим и трећим одбирком, као и оне одређене претпоследњим и одбирком пре њега које се наизглед дуплирају. Поред тога, не постоје одговарајуће потповршине које су приближно истих вредности као потповршине одређене првим и другим одбирком, и претпоследњим и последњим. Приметимо да је реч о наизглед мултипликованим потповршинама јер, иако су формиране над истим одбирцима, добијене су на основу различитих кубних функција.

Предлог решења новонасталих проблема се састоји од увођења наредна три одбирка ван периоде. Када је однос периоде мереног периодичног сигнала и периоде такта

целобројан, та три додатна одбирка су истих вредности као прва три у оквиру периоде. При нецелобројној вредности тог односа, а условима велике учестаности одабирања, вредности три додатна одбирка су блиске вредностима прва три одбирка у оквиру периоде. И у једном и у другом случају, решење које се овде предлаже омогућава да за сваку потповршину постоје по три одговарајуће потповршине приближних вредности. Тиме се такође омогућава и процена одређеног интеграла и ефективне вредности сигнала на основу збира свих потповршина и дељења са три. Овај алгоритам представља модификовану Симпсонову $3/8$ квадратурну формулу, која је универзално применљива.

Слика 3.9 илуструје модификовану Симпсонову $3/8$ квадратурну формулу. На слици је представљен сложенопериодичан сигнал, чија је периода дефинисана узастопним проласком растућег сигнала кроз нулу. Такође су представљени одбирци дате функције добијени у процесу одмеравања, чији је број у оквиру овако дефинисане периоде седам, а који су на слици обележени са $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6$ и y_7 . Очекивано би било да укупан број површина које се формирају на основу параболе сваког скупа одбирака у том случају буде четири, што је означено са P_1, P_2, P_3 и P_4 . Међутим, као што слика показује, ситуација је другачија јер су уведена додатна три одбирка ван периоде, који су на слици означени са y_8, y_9 и y_{10} , чиме се омогућава формирање још три површине (P_5, P_6 и P_7).



Слика 3.9 Модификована Симпсонова 3/8 квадратурна формула: Површине и потповршине добијене над одређеним одбирцима

Лева страна слике 3.9 (од а до g) приказује површине од P_1 до P_7 . Оне су формиране на основу скупа одбирака добијених у оквиру периоде којем су додата поменута три одбирка. Десна страна слике (од h до n) представља потповршине које се добијају на основу датих одбирака. Површине су одређене кубном функцијом и дефинисане одбирцима, а потом подељене на дисјунктне потповршине одређене узастопним одбирцима. На пример, површина P_1 , која је одређена кубном функцијом и дефинисана одбирцима y_1, y_2, y_3 и y_4 , подељена је на три дисјунктне потповршине: P_{11} која је одређена одбирцима y_1 и y_2 , P_{12} одређена одбирцима y_2 и y_3 , и P_{13} одређена одбирцима y_3 и y_4 . Потповршине образоване на основу истих одбирака, али различитом кубном функцијом, обележене су истом бојом да би се указало на парњаке. Површине P_{11} и P_{73} се јављају једном, површине P_{12} и P_{72} се јављају два пута, док се све остале потповршине појављују три пута.

Ако је однос f_S/f целобројан, онда је $y_1 = y_8, y_2 = y_9, a y_3 = y_{10}$, што значи да су P_{11} и P_{72}, P_{12} и P_{73} потповршине одређене над истим одбирцима али другачијом кубном функцијом. Из тог разлога је $P_{11} \approx P_{72}$ и $P_{12} \approx P_{73}$. Сабирањем свих потповршина добија се три пута већа површина од очекиване. На овај начин је омогућена процена вредности одређеног интеграла на основу укупног збира потповршина и дељењем тог збира са три.

Ако су одбирци добијени у оквиру интервала интеграције и додатна три ван периоде означени са $x_i = x_1 + (i-1) \cdot \Delta T, i = 1, 2, \dots, n$ за $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n-3} \leq b < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n$, $n \in \mathbb{N}$, а вредност ширине подинтервала са ΔT , где је $\Delta T = (x_n - x_1)/(n-1)$ за $T = b - a$, на основу модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле добијају се изрази за процену одређеног интеграла (3.14).

$$M_{SR3/8} \approx \Delta T \left(\frac{1}{8}(f(x_1) + f(x_n)) + \frac{1}{2}(f(x_2) + f(x_{n-1})) + \frac{7}{8}(f(x_3) + f(x_{n-2})) + \sum_{i=4}^{n-3} f(x_i) \right) \quad (3.14)$$

Као и у случају модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле, индиректан приступ ограничењу својственом Симпсоновој 3/8 квадратурној формули резултује модификованом Симпсоновом 3/8 квадратурном формулом. Овим се омогућава универзална применљивост превазилажењем проблема броја одбирака који ограничава применљивост оригиналне Симпсонове 3/8 квадратурне формуле. Универзална применљивост модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле, која се постиже незнатном променом у алгоритму чини њен практични значај.

4. Примена нумеричких метода за одређивање ефективне вредности сигнала

Посматрајмо периодичан напон $u(t)$ периоде T чије је одабирање извршено учестаношћу $f_s = 1/\Delta T$, где је ΔT период одабирања. Нека посматрани напон $u(t)$ растућом ивицом пролази кроз унапред дефинисан напонски ниво (праг) у тренутку $t = 0$. У тренутку τ , $0 \leq \tau < \Delta T$, се узима први одбирок, а сваки следећи одбирок се узима након периоде одабирања ΔT . Нека n представља број одбирака добијених узастопним одабирањем датог напона $u(t)$ у трајању од једне периоде која је дефинисана узастопним проласцима растућег напона кроз праг. У даљем тексту биће приказани изрази за процену ефективне вредности применом четири нумеричка метода које ће бити коришћени и у симулацијама и у експерименталном делу.

а) Примитивна квадратурна формула

Израз (4.1) представља процену ефективне вредности одређене применом примитивне квадратурне формуле. Процена ефективне вредности напона U_{ef}^{RM} је једнака квадратном корену количника скаларног производа два вектора и укупног броја одбирака n . Први вектор скаларног производа чине коефицијенти од којих сваки има вредност 1, а други, \underline{U} , који је представљен изразом (4.2), се састоји од квадрата вредности одбирака добијених у оквиру периоде $u^2(\tau + i\Delta T)$ за $i = 0, 1, \dots, n-1$. Ова формула се најчешће налази у литератури као дефиниција ефективне вредности сигнала у дискретном домену [40], [41], [42] и [43].

$$U_{ef}^{RM} \approx \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u^2(\tau + (i-1)\Delta T)} = \sqrt{\frac{1}{n} [1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1] \cdot \underline{U}} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \underline{U} &= [u^2(\tau) \ u^2(\tau + \Delta T) \ \dots \ u^2(\tau + (n-2)\Delta T) \ u^2(\tau + (n-1)\Delta T)]^T \\ \underline{U} &= [U_1^2 \ U_2^2 \ \dots \ U_{n-1}^2 \ U_n^2]^T \end{aligned} \quad (4.2)$$

б) Трапезна квадратурна формула

Израз (4.3) представља процену ефективне вредности применом трапезне квадратурне формуле. Процена ефективне вредности напона U_{ef}^{TR} је једнака квадратном корену количника скаларног производа два вектора и броја одбирака у оквиру периоде који је означен са n . Један вектор скаларног производа чине коефицијенти, а други \underline{U} се састоји од квадрата вредности одбирака добијених у оквиру периоде U_i^2 за $i = 1, 2, \dots, n+1$.

$$U_{ef}^{TR} \approx \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad \frac{1}{2} \right] \cdot \underline{U}}, \quad \underline{U} = [U_1^2 \quad U_2^2 \quad \dots \quad U_n^2 \quad U_{n+1}^2]^T \quad (4.3)$$

Приметимо да вектор коефицијената трапезне квадратурне формуле у изразу (4.3) чине коефицијенти од којих сваки има вредност 1, осим првог и последњег чије су вредности 1/2. Нагласимо такође да је за примену трапезне квадратурне формуле потребно користити један додатни одбирак, први ван периоде, односно $n+1$ одбирак, чиме се добија n потповршина.

в) Модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула

Изрази (4.4) и (4.5) представљају процену ефективне вредности одређене применом модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле. Процена ефективне вредности напона $U_{ef}^{M_{sr1/3}}$ је једнака квадратном корену количника скаларног производа два вектора и броја одбирака у оквиру периоде n . Један вектор скаларног производа чине коефицијенти, а други \underline{U} се састоји од квадрата вредности одбирака добијених у оквиру периоде U_i^2 за $i = 1, 2, \dots, n+2$.

$$U_{ef}^{M_{sr1/3}} \approx \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{6} (U_1^2 + U_{n+2}^2) + \frac{5}{6} (U_2^2 + U_{n+1}^2) + \sum_{i=3}^n U_i^2 \right)} \quad (4.4)$$

$$U_{ef}^{M_{sr1/3}} \approx \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{1}{6} \quad \frac{5}{6} \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad \frac{5}{6} \quad \frac{1}{6} \right] \cdot \underline{U}} \quad (4.5)$$

Треба приметити да је за примену модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле потребно користити два додатна одбирка поред оних добијених у оквиру периоде.

г) Модификована Симпсонова 3/8 квадратурна формула

Изрази (4.6) и (4.7) представљају процену ефективне вредности одређене применом модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле. Процена ефективне вредности напона $U_{ef}^{M_{sr3/8}}$ је једнака квадратном корену количника скаларног производа два вектора и броја одбирака у оквиру периоде n . Један вектор скаларног производа чине коефицијенти, а други \underline{U} се састоји од квадрата вредности одбирака добијених у оквиру периоде U_i^2 за $i = 1, 2, \dots, n+3$.

$$U_{ef}^{M_{sr3/8}} \approx \sqrt{\frac{1}{n} \left(\frac{1}{8}(U_1^2 + U_{n+3}^2) + \frac{1}{2}(U_2^2 + U_{n+2}^2) + \frac{7}{8}(U_3^2 + U_{n+1}^2) + \sum_{i=4}^n U_i^2 \right)} \quad (4.6)$$

$$U_{ef}^{M_{sr3/8}} \approx \sqrt{\frac{1}{n} \left[\frac{1}{8} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{7}{8} \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad \frac{7}{8} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{1}{8} \right] \cdot \underline{U}} \quad (4.7)$$

Треба приметити да је за примену модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле потребно користити три додатна одбирка поред оних добијених у оквиру периоде.

У циљу пружања детаљнијег увида у особености метода који се користе, у наставку текста је предочена компонента која чини основу разлика међу методима који се користе у овом истраживању. Табела 4.1 даје приказ вектора коефицијената за посматрана четири метода.

У случају целобројног односа fs/f , вредност првог одбирка вектора одбирака (основног скупа одбирака који је у табели 4.1 означен сивом бојом) је једнака вредности првог додатог одбирка. Слично томе, вредност другог одбирка вектора одбирака је једнака вредности другог додатог одбирка. Вредност трећег одбирка вектора одбирака ће бити једнака вредности трећег додатог одбирка, итд. Када тај однос није целобројан, не постоји правилност која је уочена у случају целобројног fs/f односа. Из тог разлога, вредности додатих одбирака и њихових парњака из основног скупа имају мањи значај, као што се може уочити у табели 4.1.

Табела 4.1 Приказ коефицијената вектора коефицијената за посматрана четири метода

n	Коефицијенти вектора коефицијената за метод који користи полином n -тог реда																	
	Коефицијенти који одговарају одбирцима вектора одбирака																	
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			
1	1/2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1/2		
2	1/6	5/6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	5/6	1/6	
3	1/8	1/2	7/8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	7/8	1/2	1/8

На основу табеле 4.1, може се закључити да:

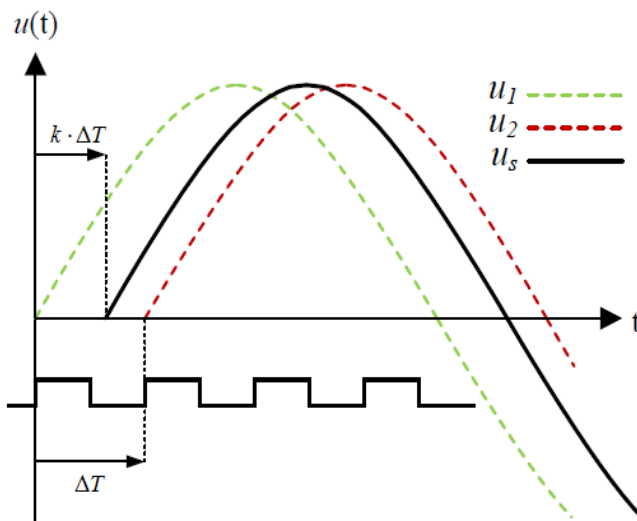
1. Сума вредности сваког додатог одбирка и његовог парњака из вектора одбирака (основног скупа одбирака који је у табели 4.1 означен сивом бојом) има вредност један (на пример, сума вредности првог коефицијента из вектора одбирака и коефицијента првог додатог одбирка је један, а такође и сума другог коефицијента из вектора одбирака и коефицијента другог додатог одбирка, итд.);
2. Укупан број додатних одбирака за метод који користи полином n –тог реда једнак је степену полинома n ;
3. Са порастом реда полинома интеграције, вредности додатих одбирака и њихових парњака из вектора одбирака имају мањи значај.

4.1 Симулације

У овом поглављу ће бити представљени резултати симулација спроведених у циљу провере зависности грешке нумеричког одређивања ефективне вредности од количника учестаности одабирања и основне учестаности сигнала f_s/f . У овом делу дисертације представљени су резултати симулација који су од централног значаја за истраживање. За реализацију симулација је изабран програмски пакет LabVIEW, који је изабран да би се и симулације и експериментални део изводили под истим условима. То конкретно значи да је одлука о коришћењу LabVIEW софтвера била руковођена чињеницом да он функционише на исти начин независно од тога да ли се подаци генеришу, што је случај у симулацијама, или се користе одбирци из А/Д конвертора, као у емпиријском делу у даљем истраживању. Из истог разлога се овај програмски пакет користи у испитивању значаја избора прага на процену ефективне вредности сигнала. Симулације су рађене са фокусом на проблем дискретизације по времену, поготово у условима када f_s/f није цео број.

У симулацијама су посматрана два случаја: а) прстопериодичан и б) сложенопериодичан. Посматран је прстопериодичан напон амплитуде 1 V учестаности 50 Hz. У сложенопериодичном случају, поред првог, постоји и трећи хармоник такав да му је вредност амплитуде 0,2 V. Амплитуда и учестаност сложенопериодичног напона су истих вредности као у случају прстопериодичног напона. Периода сигнала је препознавана на основу узастопног проласка растућег сигнала кроз нулти ниво. Симулације су рађене без разматрања утицаја дискретизације по вредности, односно моделован је А/Д конвертор бесконачне резолуције, како би се оценио само утицај проблема дискретизације по времену, поготово у условима када f_s/f није цео број и има малу вредност.

У оквиру процеса одабирања, тренутак одабирања је дефинисан појавом растуће ивице периодичне поворке правоугаоних импулса (такт сигнала) чији је период одабирања $\Delta T = 1/f_s$, где је f_s учестаност одабирања (слика 5.1). У зависности од вредности сигнала у тренутку одабирања, разликујемо два могућа стања која карактеришу процес мерења. Једно је стање у којем сигнал има нулту вредност у моменту одабирања, што је на слици 4.1 представљено на примерима сигнала $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Друго је оно у којем сигнал има вредност која је између два узастопна тренутка одабирања, што је на истој слици представљено примером сигнала $u_s(t)$.



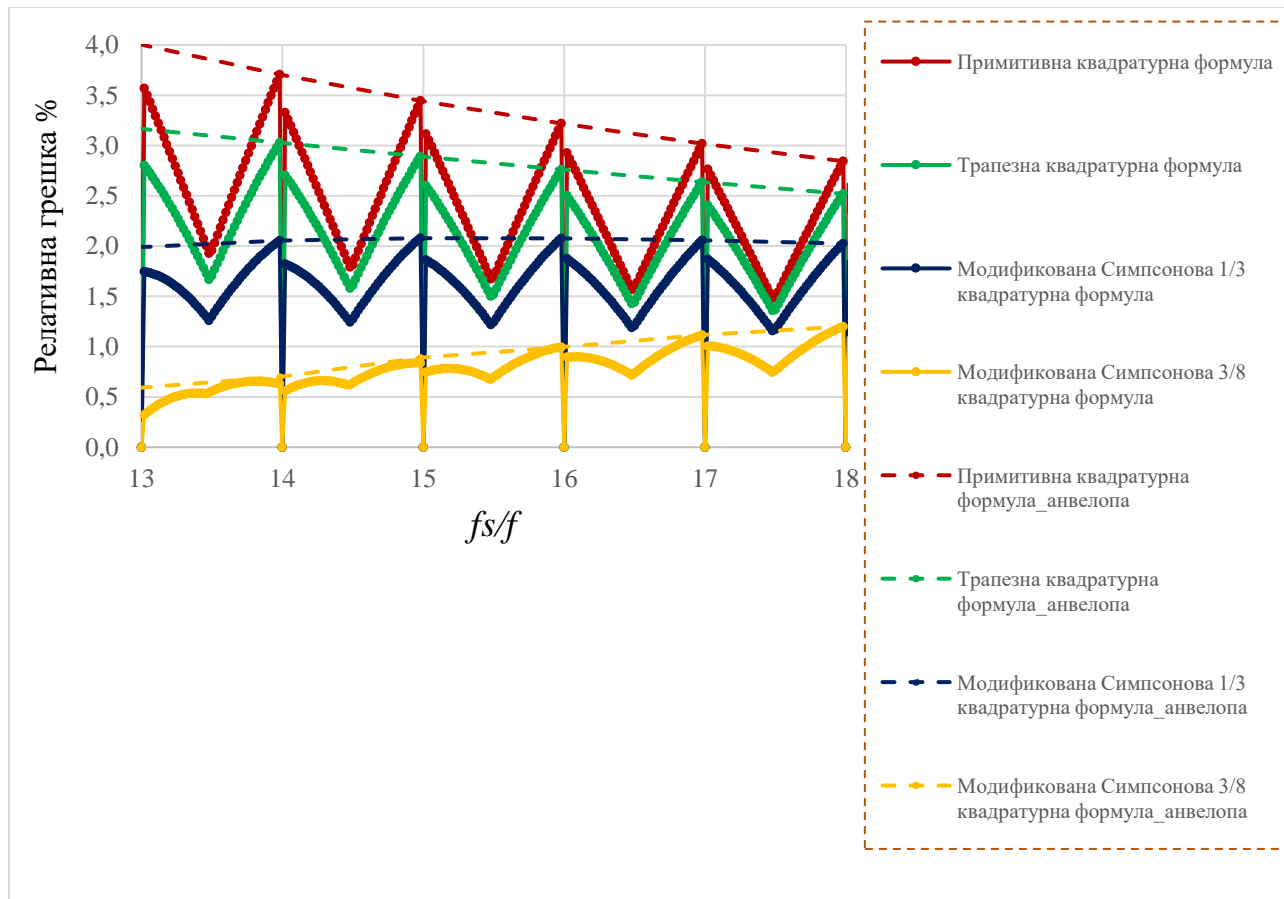
Слика 4.1 Сигнал који има нулту и онај који има вредност различиту од нулте у тренутку одабирања

Величина означена са τ , где је $\tau = k\Delta T$, представља интервал између тренутка одабирања и првог проласка сигнала кроз праг конверзије (нула). Вредност τ је непозната и може имати било коју вредност из интервала од 0 до ΔT . Стандардна вредност прага

конверзије (нула) је у овом циклусу симулација коришћена за прикупљање података који ће у даљем делу бити упоређени са подацима добијеним на основу промењене вредности прага да би се упоредила ефикасност метода у зависности од тог параметра. Како се не могу извршити симулације за све могуће вредности τ , за фазни параметар k (5.1), којим дефинишемо тренутак када сигнал достиже нулту вредност, је узет скуп вредности од 0 до 1 са кораком 0,01.

$$k = \frac{\tau}{\Delta T}, 0 < k \leq 1 \quad (5.1)$$

На слици 4.2 је приказана зависност максимално исказане релативне грешке од f_s/f за сва четири метода у случају простопериодичног сигнала. За сваку вредност f_s/f (од 13 до 18, са кораком 0,2) симулирано је 100 мерења при којима је параметар k вариран од 0 до 1, са кораком 0,01. За добијених 100 мерења је одређена средња вредност, стандардна девијација и максимална релативна грешка. У циљу оцењивања тачности је одређивана средња вредност. Разлог за налажење стандардне девијације је оцена прецизности. Тачна вредност је позната на основу познавања аналитичког записа сигнала и одређена је математичким путем применом (2.3). Поред тога, одређена је и максимална релативна грешка као показатељ највеће могуће грешке која може да се добије. Иако је стандардна девијација грешке уобичајен начин за оцену прецизности у случају вишеструких мерења, овде је коришћена максимална релативна грешка као параметар који указује на највећу могућу грешку у околини жељене вредности количника f_s/f (уобичајено је да је вредност f_s позната и константна, а могуће је да се вредност f мења).



Слика 4.2 Максимална одступања у релативном облику за сва четири метода са одговарајућим аневелопама

Слика 4.2 је варијанта графичког приказа који на најочљивији начин илуструје проблем којим се бави овај део дисертације. Када је вредност fs/f целобројна, грешка се не јавља, без обзира који је од дата четири метода употребљен. При најмањем одступању вредности fs/f од целог броја, грешка се нагло повећава и достиже локални максимум. У графичком приказу се инсистира на праћењу функције која пролази кроз максимуме тих грешака. Те функције називамо аневелопама. Праћењем тока аневелопа је омогућен приказ максималних одступања резултата од тачне вредности. Стварне грешке су мање или једнаке од оних које приказују аневелопе.

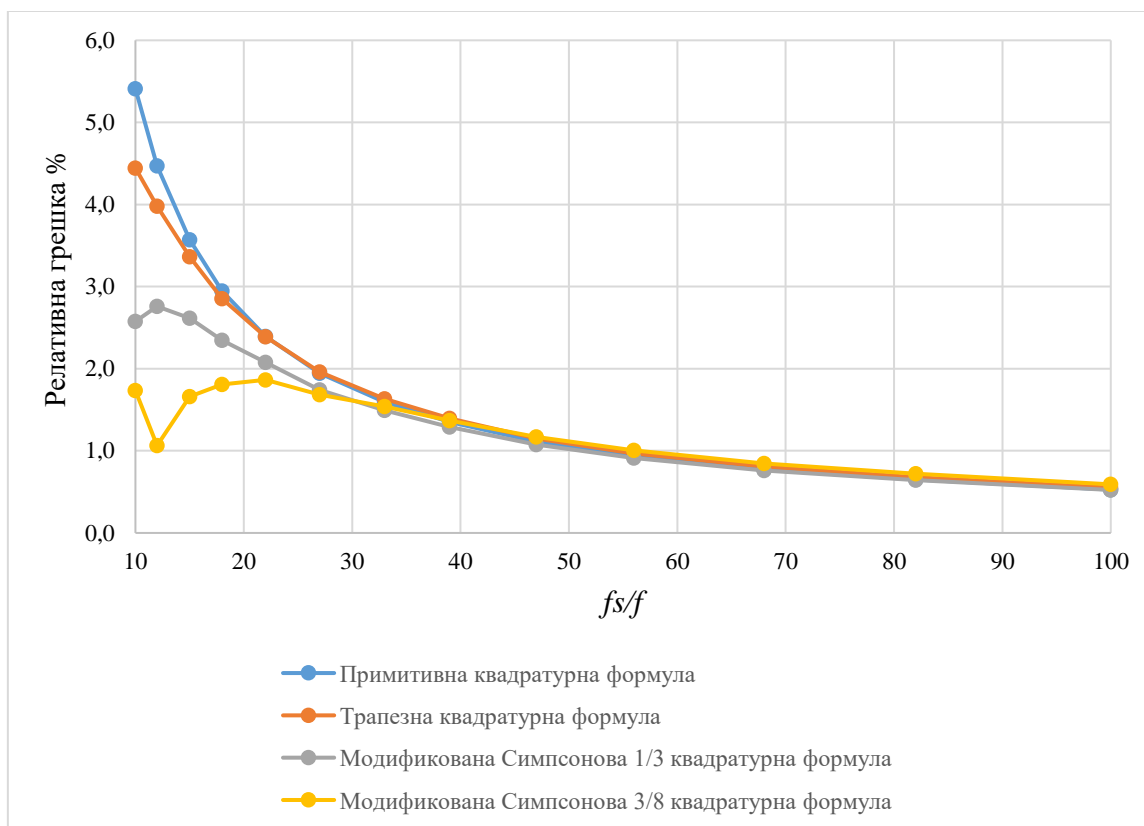
При том, нецелобројне вредности fs/f у знатној мери условљавају ситуацију, и то у врло специфичном смислу. Конкретно, грешка је најмања када је вредност fs/f тачно између два цела броја. Што је вредност fs/f ближа целом броју, грешка се повећава. Ова тенденција се примећује код сваког од четири посматрана метода.

Треба приметити да је у овом делу истраживања разматрана само дискретизација по времену, а не и по вредности. Дакле, претпостављено је коришћење аналогно-дигиталног

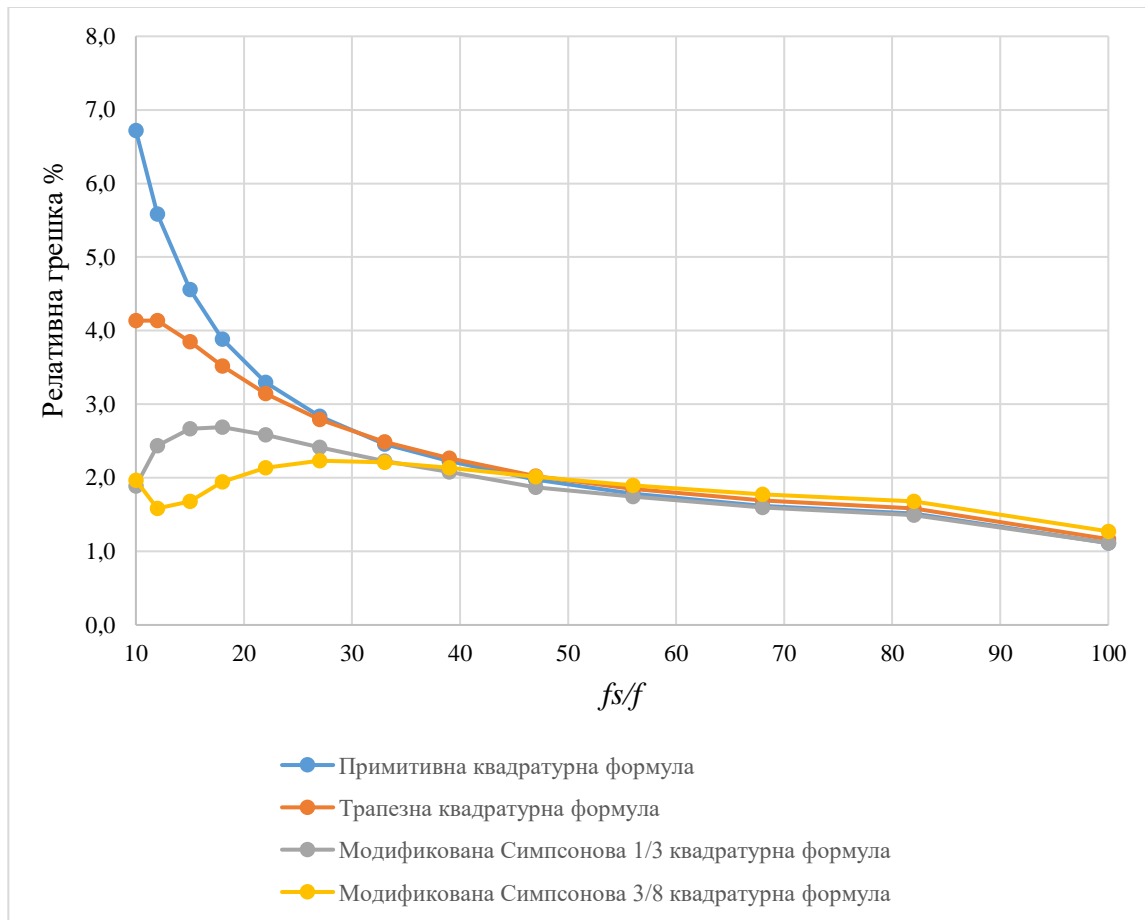
конвертора бесконачне резолуције. Чак и у том случају, добијене вредности грешке су реда неколико процената у случају малих вредности fs/f .

У наредним илустрацијама се прибегава графичком приказу који прати само стање анвелоба. Постоје два основна разлога за такве графичке приказе. Један је практичне природе, а други се тиче објективности приказа података у оквиру научног истраживања. Што се првог разлога тиче, избор приказа искључиво анвелоба има за циљ прегледност графичког приказа и лакшу уочљивост резултата који су од централног значаја за ово истраживање. Уколико би се представиле процењене грешке за сваки од четири метода, то би било веома непрегледно. Последица би могла да буде превиђање оних резултата који су кључни како за разумевање ситуације, тако и за одређивање смера истраживања. Други разлог је избегавање разматрања потенцијалних ситуација у којима вредност грешке не одговара објективним чињеницама, а такође и избегавање илустрација идеализоване ситуације која не одговара објективном стању ствари.

У делу који следи биће предочени резултати симулација који се тичу максималних одступања од тачне вредности исказаних у релативном облику за сваки од четири метода (примитивна квадратурна формула, трапезна квадратурна формула, модификована Симпсонова $1/3$ квадратурна формула, модификована Симпсонова $3/8$ квадратурна формула), где се вредности односа fs/f крећу у распону од 10 до 100. На слици 4.3, приказана су ова одступања у случају простопериодичног, а на слици 4.4 одступања у случају сложенопериодичног сигнала. За сваки од четири посматра метода, грешке конвергирају ка истој вредности ако се вредност односа fs/f повећава. Међутим, када су вредности односа мање, што је фокус ове дисертације, примећујемо да су мерне перформансе код модификоване Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле и модификоване Симпсонове $3/8$ квадратурне формуле боље него код примитивне и трапезне квадратурне формуле, што ће детаљније бити приказано у табели 4.1. Овде се још примећује да је поред разлике у динамици вредности грешке у односу на вредности fs/f , разлика између њих је и монотоност функције која је појављује у случају примитивне и трапезне квадратурне формуле, док то није случај код модификоване Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле и модификоване Симпсонове $3/8$ квадратурне формуле.



Слика 4.3 Максимално одступање од тачне вредности исказано у релативном облику у случају простопериодичног сигнала



Слика 4.4 Максимално одступање од тачне вредности исказано у релативном облику у случају сложенепериодичног сигнала

Табела 4.2 приказује резултате симулација који се тичу максималних одступања од тачне вредности исказаних у релативном облику у случају простопериодичног и сложенепериодичног сигнала за сваки од четири метода, где је вредност $fs/f = 10,6$. За ту вредност fs/f , у случају простопериодичног сигнала, примена модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле има за последицу релативну грешку чија је вредност 3,35 пута мања од оне која се добија применом примитивне квадратурне формуле и 2,81 пута мања него при примени трапезне квадратурне формуле. Што се тиче примене модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле, процењена грешка је 1,63 пута мања од оне која се добија применом трапезне квадратурне формуле, а 1,95 пута мања од грешке коју узрокује употреба примитивне квадратурне формуле. Примена модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле резултује грешком чија је процењена вредност 1,72 пута мања од грешке која се добија применом модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле.

Табела 4.2 Максимална одступања од тачне вредности исказаних у релативном облику у случају простопериодичног и сложенопериодичног сигнала за сваки од четири метода, за вредност односа $f_s/f = 10,6$

Тип сигнала	Метод			
	Примитивна квадратурна формула (%)	Трапезна квадратурна формула (%)	Модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула (%)	Модификована Симпсонова 3/8 квадратурна формула (%)
Простопериодичан	5,12	4,30	2,63	1,53
Сложенопериодичан	6,38	4,14	2,05	1,86

Из табеле 4.2 и са слика 4.2, 4.3 и 4.4 може да се уочи да се коришћењем незнатно компликованијих метода добија мања грешка.

У случају сложенопериодичног сигнала, за дату вредност f_s/f , процењена вредност релативне грешке при примени модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле је 3,43 пута мања него када се употребљава примитивна квадратурна формула, а 2,26 пута мања него она која се добија применом трапезна квадратурна формула. Примена модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле има за резултат грешку процењене вредности која је 3,11 пута мања него када се примењује примитивна квадратурна формула, а 2,02 пута мања него при примени трапезне квадратурне формуле. Поново се уочавају боље мерне перформансе модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле у поређењу са модификованом Симпсоновом 1/3 квадратурном формулом. Конкретно, примена модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле резултује грешком чија је процењена вредност 1,10 пута мања од грешке која се добија применом модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле. Из разлога који су претходно објашњени, а који се тичу хипотезе дефинисане у оквирима поређења модификованих и стандардних метода, у овој дисертацији се не инсистира на том аспекту резултата које су дале симулације.

Као што је показано у овом делу дисертације, урађене су симулације за све предложене методе на примеру два сигнала чије су периоде дефинисане узастопним проласком растућег напона кроз нулу. Упоредивањем резултата сва четири метода, резултати симулација указују на значајно мање расипање резултата и већа тачност предложених модификованих метода у односу на стандардна два метода -- примитивном и трапезном квадратурном формулом. Показано је да су два предложена модификована метода напреднија у односу на два посматрана постојећа метода јер обезбеђују већу тачност и прецизност. Увиди до којих се дошло симулацијама су врло охрабрујући и дали су подстрек за експериментални део који има за циљ проверу могућности примене предложених метода у пракси.

5. Испитивање утицаја избора почетног тренутка конверзије на грешку процене ефективне вредности сигнала

Утицај почетног тренутка конверзије на грешку процене ефективне вредности сигнала је посматран у контексту примитивне квадратурне формуле, трапезне квадратурне формуле, модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле и модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле. Постоје два основна разлога који су условили овакав избор метода. Први је универзална применљивост и, стога, широка примена примитивне и трапезне квадратурне формуле. Други је испитање дела хипотезе који се тиче универзалне применљивости и унапређеним перформансама модификованих Симпсонових квадратурних формула при оптималној вредности прага. У деловима који следе, биће речи о сегментима истраживања који се тичу симулација и експерименталног дела где је испитиван утицај избора прага за сваки од поменутих метода на грешку процене ефективне вредности.

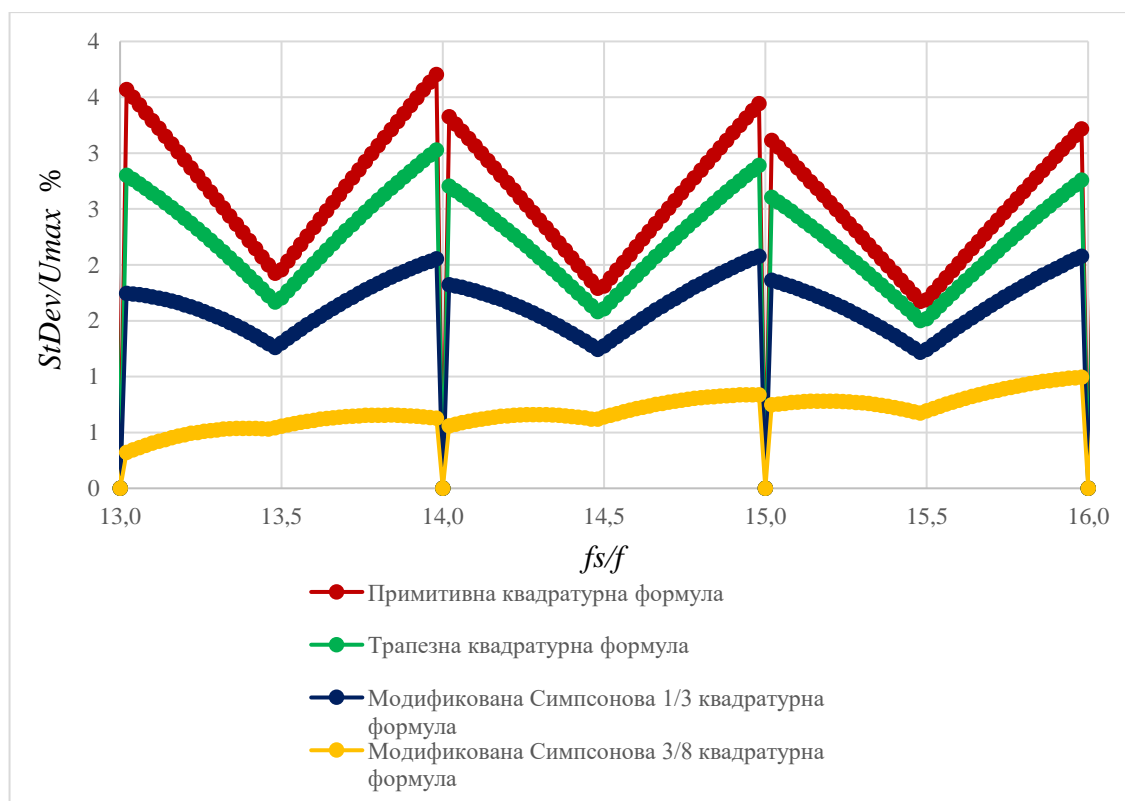
5.1 Симулације

Симулације, које су спроведене у овом истраживању такође применом LabVIEW софтвера, имају задатак да покажу да ли и, ако да, како почетни тренутак конверзије на основу којег се одређује почетак и крај периоде утиче на процену ефективне вредности у случају када су примењена поменута четири нумеричка метода на примеру простопериодичног и сложенопериодичног сигнала.

Изведене су две серије симулација. У једној од њих је посматран простопериодични (синусни) напон амплитуде $U_m = 1 \text{ V}$ и учестаности 50 Hz. У другој је фокус на сложенопериодичном напону, где поред првог хармоника, постоји и трећи чија је вредност амплитуде 0,2 V. Сигнал који је посматран у другој серији симулација је представљен изразом $u(t) = U_m \sin(\omega t) + 0,2U_m \sin(3\omega t)$.

У обе серије симулација су мењани одређени параметри. Ту спадају f_s/f који је мењан од 7 до 35, са кораком 0,2; праг U_{th} у односу на који се препознаје периода од 0 % до 90 % амплитуде напона за простопериодични, и 0 % до 80 % за сложенопериодични напон; параметар k од 0 до 1 са кораком 0,01. За сваку вредност f_s/f и U_{th} је извршено 100 симулација, при чему је вариран параметер k . За добијене резултате симулација је одређена средња вредност и стандардна девијација. На основу одступања средње вредности од тачне вредности, која је одређена математичким путем, је оцењивана тачност, а на основу стандардне девијације – прецизност резултата добијених симулацијама.

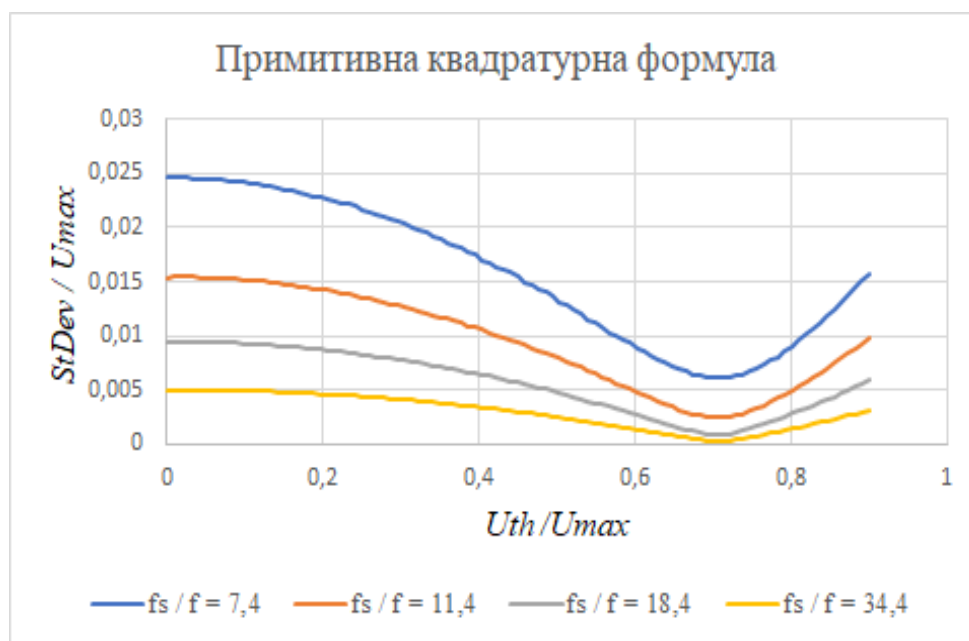
На слици 5.1 је представљена зависност количника стандардне девијације грешке и максималне вредности напона $StDev/U_{max}$ (нормализована вредност стандардне девијације грешке) у зависности од количника f_s/f за све четири квадратурне формуле за простопериодични напон када је вредност прага нула. Са слике се може уочити да целобројна вредност количника f_s/f резултује проценом ефективне вредности без грешке. Уколико вредност количника f_s/f није целобројна, постоји грешка у процени ефективне вредности сигнала. У пракси, чак и у најконтролисанијим условима у лабораторији, веома је тешко обезбедити да је вредност количника f_s/f цео број. Постоје методи код којих се применом PLL-а f_s добија множењем фундаменталне учестаности сигнала. Међутим, код оваквог решења се f_s стално мења у ширим или ужим границама, у зависности од квалитета повратне спреге и од конкретног решења PLL-а. Други проблем јесте потенцијална нестабилност учестаности сигнала f .



Слика 5.1 Зависност стандардне девијације резултата добијених симулацијама за сваку од четири квадратурне формуле за простопериодичан напон од вредности количника f_s/f , за нулту вредност прага

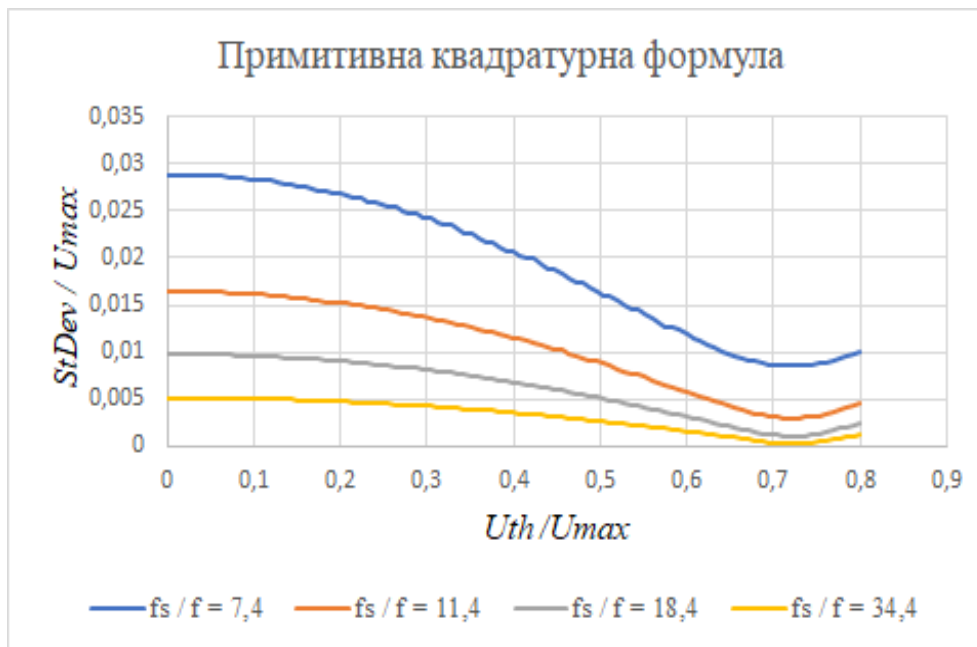
На слици 5.2 је представљена зависност количника стандардне девијације грешке и максималне вредности напона $StDev/U_{max}$ (нормализована вредност стандардне девијације грешке) у односу на количник вредности прага и максималне вредности напона U_{th}/U_{max} (нормализована вредност прага) у случају четири вредности односа f_s/f код примитивне

квадратурне формуле за простопериодични напон. Да би се обезбедио јасан графички приказ резултата симулација, на слици су приказане само четири криве (плава, наранџаста, сива и жута) за четири одабране нецелобројне вредности f_s/f . На графику се може уочити да се са порастом вредности f_s/f , вредност грешке смањује. Ако посматрамо криву означена плавом бојом ($f_s/f = 7.4$), вредност грешке при нултој вредности прага износи 0,025, а вредност грешке при оптималној вредности прага је 0,006. Дакле, избором оптималне вредности прага уместо уобичајене вредности прага (нула) добија се приближно четири пута мања грешка. Слика указује на то да се минимум функција добија за исту вредност код примитивне квадратурне формуле без обзира на вредност f_s/f .



Слика 5.2 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за примитивну квадратурну формулу у случају простопериодичног напона

На слици 5.3 је представљена иста зависност, али овога пута за случај сложенопериодичног сигнала. Сви закључци изведени за случај простопериодичног сигнала важе и овом случају. Прва разлика је у томе што су грешке незнатно веће у случају приказаном на слици 5.3 него у ономе који је представљен на слици 6.2. Друга разлика јесте да је оптимална вредност прага различита у односу на оптималну вредност прага у случају простопериодичног сигнала.



Слика 5.3 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за примитивну квадратурну формулу у случају сложенопериодичног напона

У условима нецелобројне вредности f_s/f , број одбирака, као што је претходно предочено, може бити $\lfloor f_s/f \rfloor$ или $\lceil f_s/f \rceil$. Број одбирака $\lfloor f_s/f \rfloor$ при примени примитивне квадратурне формуле не условљава значајну промену вредности бројиоца у изразу (6.1)⁸ у односу на случај $\lfloor f_s/f \rfloor$ за нулту вредност прага.

$$U_{eff} \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m U_i^2}{m}} \quad (6.1)$$

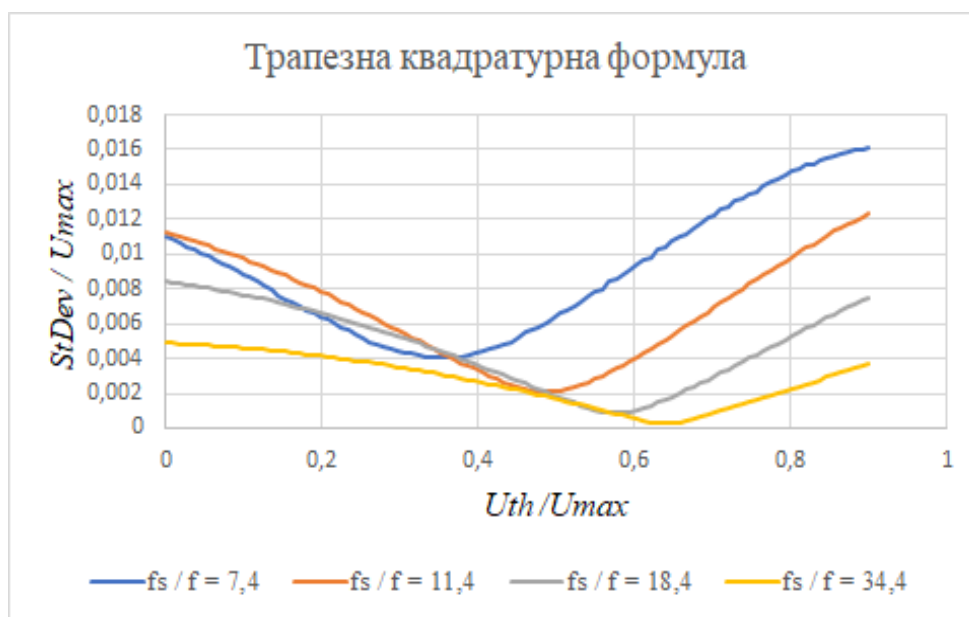
Разлог овоме је то што је вредност последњег одбирка блиска вредности прага. Међутим, у овом сценарију је вредност имениоца увећана за један, па је коначан резултат, који представља естимирану ефективну вредност, мањи од тачне вредности. Стога се може доћи до закључка да вредност додатог одбирка у случају примене примитивне квадратурне формуле треба да има вредност једнаку ефективној вредности посматраног сигнала, односно изабрана вредност прага треба да буде једнака ефективној вредности посматраног сигнала. Ова чињеница је од кључног значаја за закључак о централној улози избора прага конверзије у процени ефективне вредности. До таквог увида се дошло на основу идеја и истраживања Петра Миљанића [44] који је својим пионирским доприносом

⁸ Овај израз се први пут јавља у трећем поглављу као израз 3.1. Овде је поново представљен из практичних разлога -- да би се читаоцима омогућио непосредан приступ информацији и да би се очувала целовитост текста.

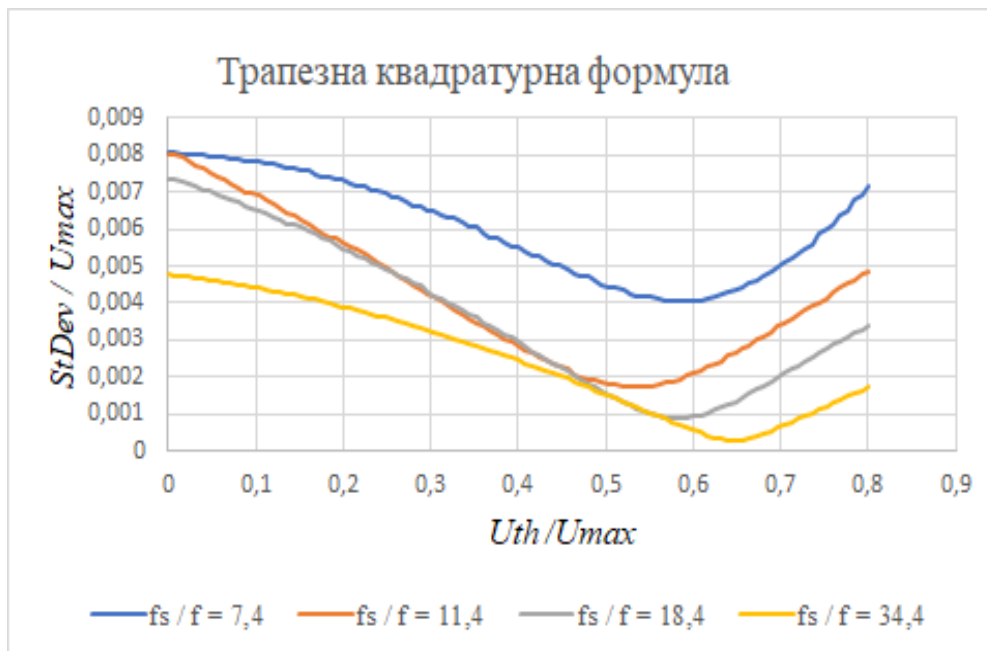
омогућио даље разматрање, унапређење и истраживање идеје о избору почетног тренутка конверзије. Захваљујући увиду који пружа његово истраживање, ова дисертација нуди верзију која полази од његове иницијалне идеје од непроцењивог значаја за истраживање у овој области.

Резултати симулација приказани на сликама 5.2 и 5.3 потврђују констатацију о избору оптималне вредности прага за процену ефективне вредности за примитивну квадратурну формулу. Идеја о процени ефективне вредности у контексту измењеног прага за примитивну квадратурну формулу је дала подстицај за сагледавање могућности побољшања мерних перформанси и за друге нумеричке методе.

Слике 5.4 и 5.5 приказују резултате симулација за два сигнала која се посматрају у контексту примене трапезне квадратурне формуле. Као и на претходним сликама на којима су приказани резултати примене примитивне квадратурне формуле, и на сликама које следе за сваки од метода који се приказују, од свих резултата симулација, представљене су само четири криве (плава, наранџаста, сива и жута) за четири одабране нецелобројне вредности односа f_s/f , али овде за трапезну квадратурну формулу.



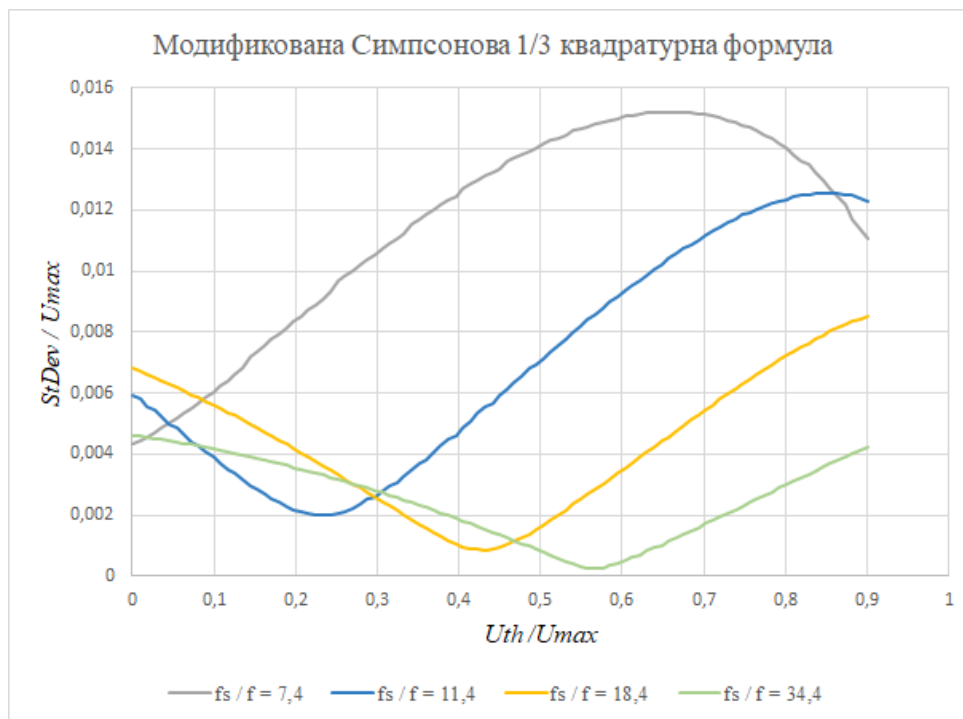
Слика 5.4 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за трапезну квадратурну формулу у случају простопериодичног напона



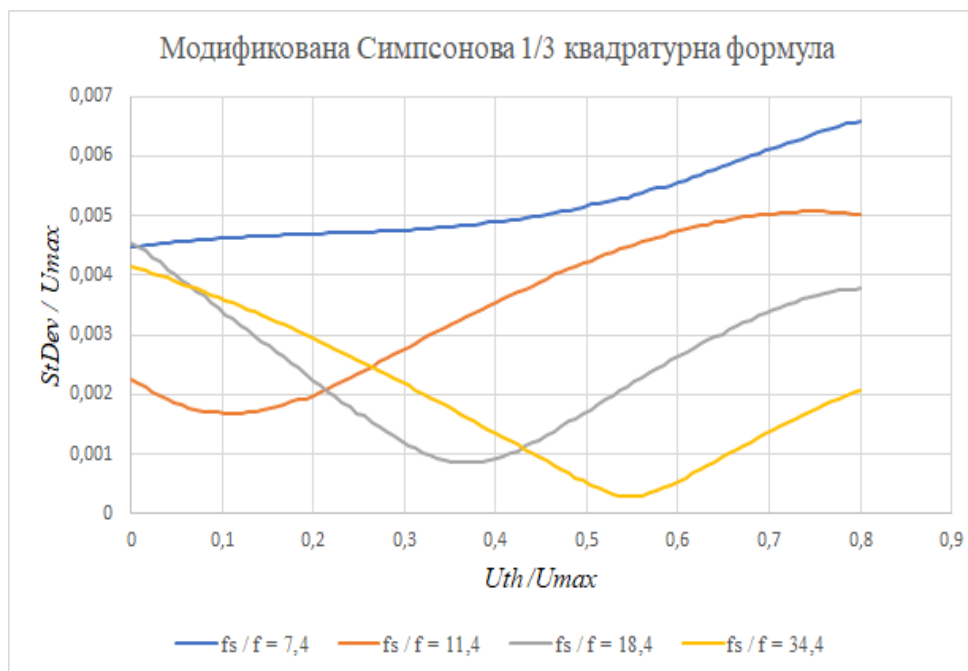
Слика 5.5 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за трапезну квадратурну формулу у случају сложенопериодичног напона

Може се приметити да све криве достижу минималну вредност која се мења у зависности од вредности количника f_s/f . При том, она није иста ни у случају простопериодичног, нити сложенопериодичног напона. Грешке које се добијају применом трапезне квадратурне формуле су мање у случају сложенопериодичног сигнала него у случају простопериодичног сигнала, што је обрнут случај у поређењу са резултатима добијеним коришћењем примитивне квадратурне формуле. Уочимо да су у случају и једног и другог сигнала, грешке мање у поређењу са грешкама које настају применом примитивне квадратурне формуле.

Слике 5.6 и 5.7 приказују резултате симулација за два сигнала која се посматрају у контексту примене модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле.



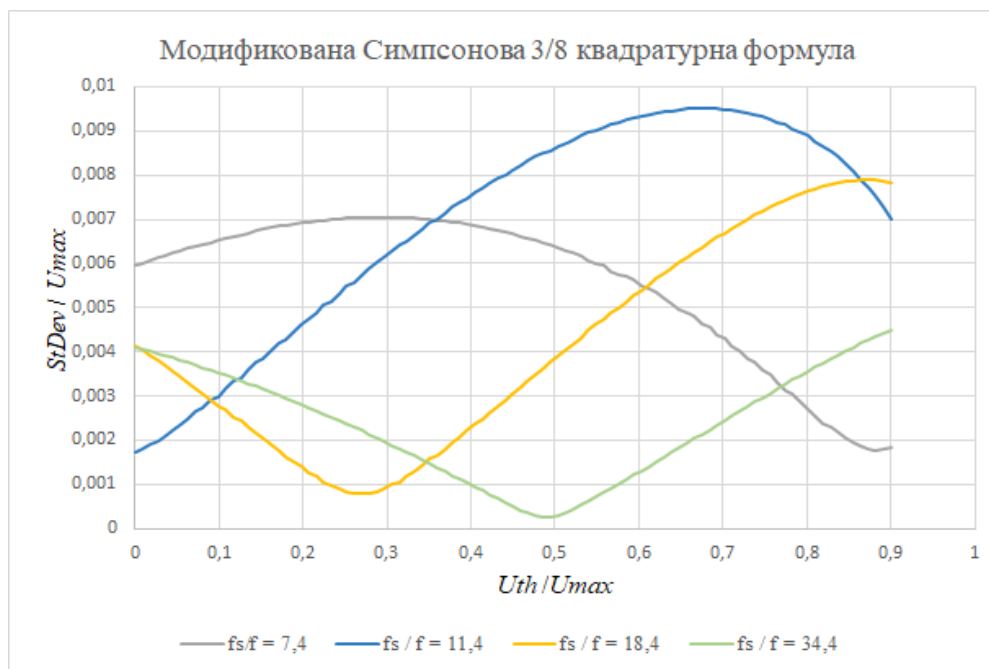
Слика 5.6 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за модификовану Симпсонову 1/3 квадратурну формулу у случају простопериодичног напона



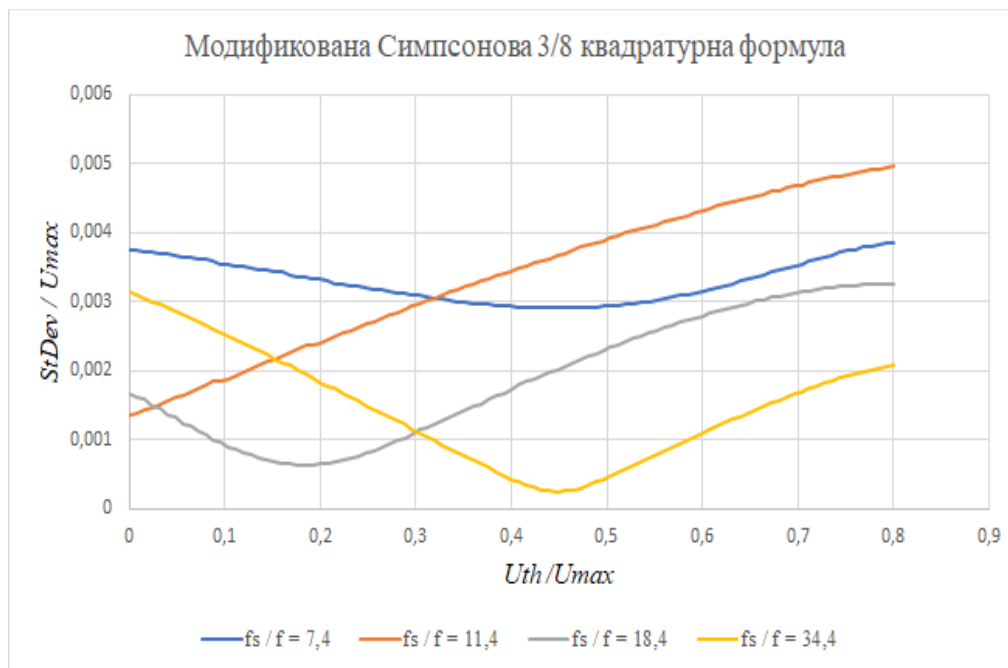
Слика 5.7 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за модификовану Симпсонову 1/3 квадратурну формулу у случају сложенепериодичног напона

Поново се може приметити да се најмање расипање резултата постиже у случају све четири криве и да се та вредност мења у зависности од вредности количника f_s/f , а и да није иста у случају простопериодичног и сложенопериодичног напона. Међутим, грешке које се добијају применом модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле су мање у поређењу са грешкама које настају применом примитивне и трапезне квадратурне формуле.

Слике 5.8 и 5.9 приказују резултате симулација у случају простопериодичног и сложенопериодичног сигнала који се посматрају у контексту примене модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле.



Слика 5.8 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за модификовану Симпсонову 3/8 квадратурну формулу у случају простопериодичног напона

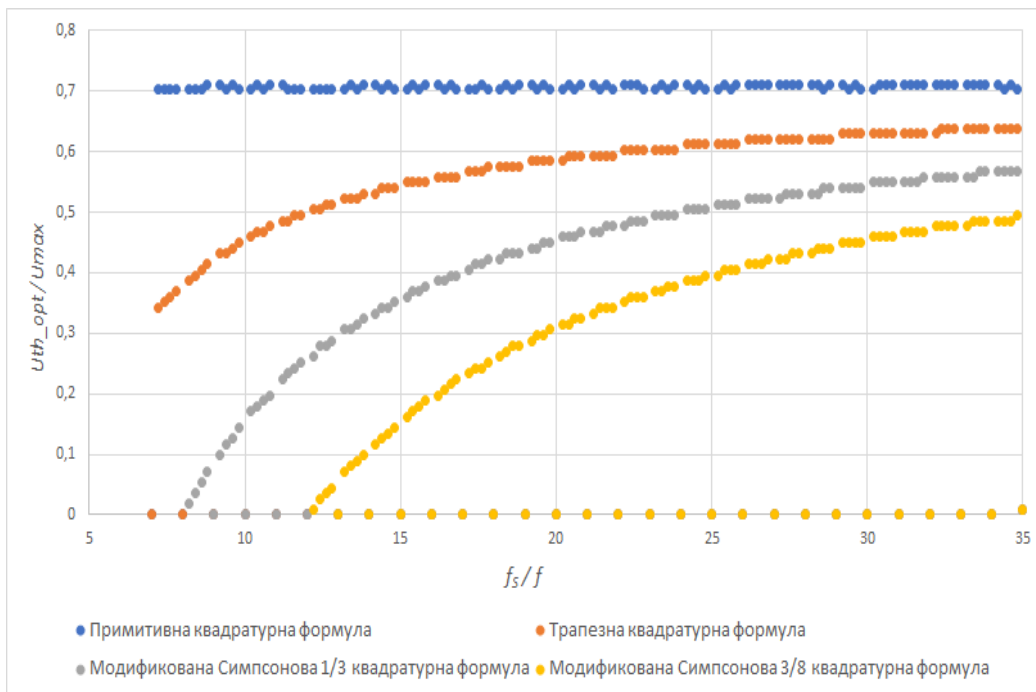


Слика 5.9 Стандардна девијација грешке у зависности од прага за модификовану Симпсонову 3/8 квадратурну формулу у случају сложенепериодичног напона

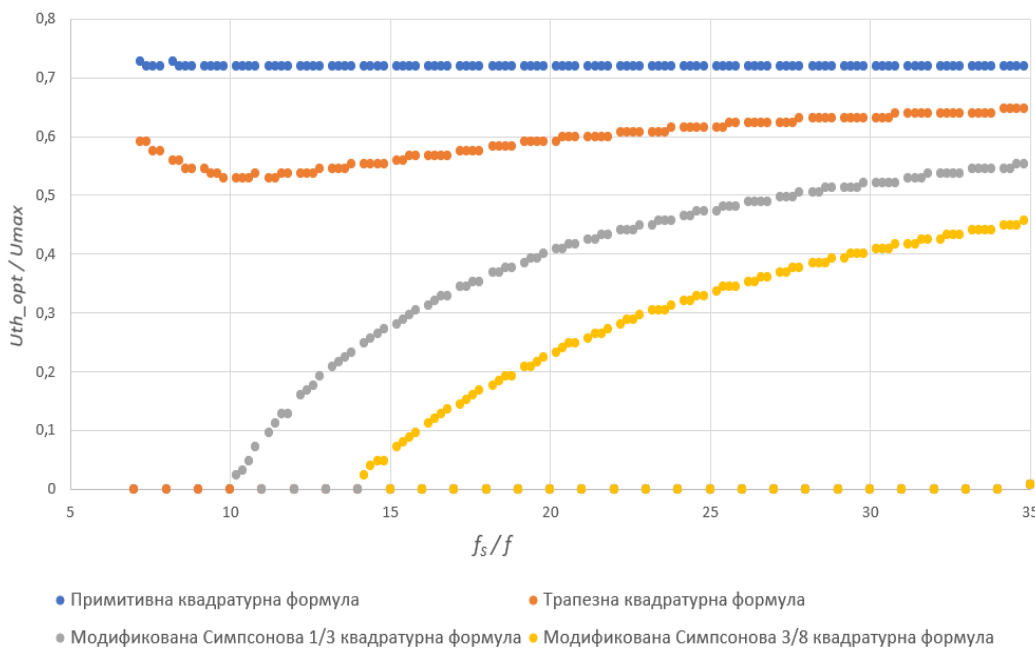
Као и у случају свих претходних метода, примећујемо да све криве достижу глобални минимум при нормализованој оптималној вредности прага према амплитуди сигнала за све четири вредности f_s/f . Грешке које се добијају применом модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле су мање у поређењу са грешкама које настају применом примитивне и трапезне квадратурне формуле, али и модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле.

На основу резултата добијених симулацијама у овој етапи истраживања, а у складу са хипотезом постављеној у почетној фази, закључује се да се оптимална вредност прага може одредити за сваки од метода при сваком односу f_s/f за оба типа сигнала. Осим тога, уочава се тенденција смањења грешке процене ефективне вредности са порастом комплексности полинома који се користи за интеграцију.

Слике 5.10 и 5.11 дају приказ нормализоване оптималне вредности прага за који се добија најмање расипање U_{th_opt}/U_{max} , а у зависности од вредности f_s/f , за простопериодичан и сложенепериодичан случај, респективно. Приликом одређивања ефективне вредности, грешка се не јавља при целобројној вредности f_s/f у случају сваког од четири метода и оба типа сигнала. Добијени резултати су једнаки ефективној вредности напона, што указује да под овим условима нема грешке која потиче од дискретизације по времену или од рачунања ефективне вредности на основу коначног броја одбирака. Претпоставља се да је узрок овоме симетрија сигнала. На сликама које следе, ти резултати симулација који не садрже грешку су приказани у виду тачака постављених на хоризонталној оси.



Слика 5.10 Нормализована оптимална вредност прага у зависности од вредности количника f_s/f у случају простопериодичног напона



Слика 5.11 Нормализована оптимална вредност прага у зависности од вредности количника f_s/f у случају сложенепериодичног напона

Резултати симулација указују на чињеницу да и при најмањем одступању вредности f_s/f од целог броја, грешка процене ефективне вредности зависи од избора вредности прага и параметра k . За сваку вредност f_s/f се може одредити оптимална вредност прага при којој се добија средња вредност резултата мерења најближа тачној вредности и истовремено најмање расипање резултата у зависности од параметра k . Такође се примећује да при оптималној вредности прага, тачност и прецизност расту са повећањем f_s/f . Када је у питању примитивна квадратурна формула, оптимална вредност прага не зависи од f_s/f , али зависи од облика сигнала: за простопериодичан облик износи 0,707, а за сложенопериодични 0,720, што су ефективне вредности за сваки од датих сигнала.

За остала три метода, оптимална вредност прага се мења и зависи од f_s/f и облика сигнала. Та вредност је мања од ефективне вредности датих сигнала. За оба типа сигнала се уочава тенденција смањења оптималне вредности прага са порастом комплексности полинома који се користи за интеграцију. Може се закључити и да је за одабране вредности f_s/f и прага, средња вредност грешке неколико пута мања од стандардне девијације грешке. Из тог разлога ће се стандардна девијација у наставку посматрати као доминантни фактор. Од изузетне важности је увид да је у случају минималног одступања f_s/f од целобројне вредности, средња вредност грешке највећа.

Резултати симулација су указали на оправданост наставка истраживања у виду емпиријске провере јер је индикована могућност њихове експерименталне потврде. Ово је био значајан момент у процесу израде дисертације јер је дао подстрек за наставак рада на идејама које су основе истраживања, а тичу се утицаја избора прага на грешку процене ефективне вредности сигнала.

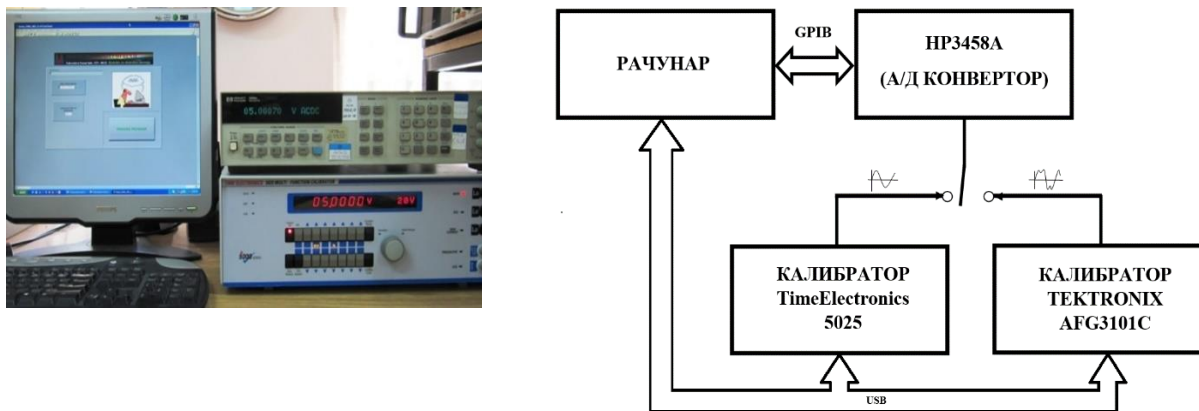
III ПРАКТИЧАН ДЕО ИСТРАЖИВАЊА

У циљу провере увида до којих се дошло у оквиру теоријских разматрања, спроведена је експериментална верификација заснована на хипотези, а вођена идејом о утицају избора вредности прага на грешку при процени ефективне вредности сигнала. Као резултат, дошло се до предлога решења у виду избора оптималне вредности прага, што омогућава минималну вредност грешке при процени ефективне вредности сигнала.

6. Експериментална провера и поређење посматраних нумеричких метода

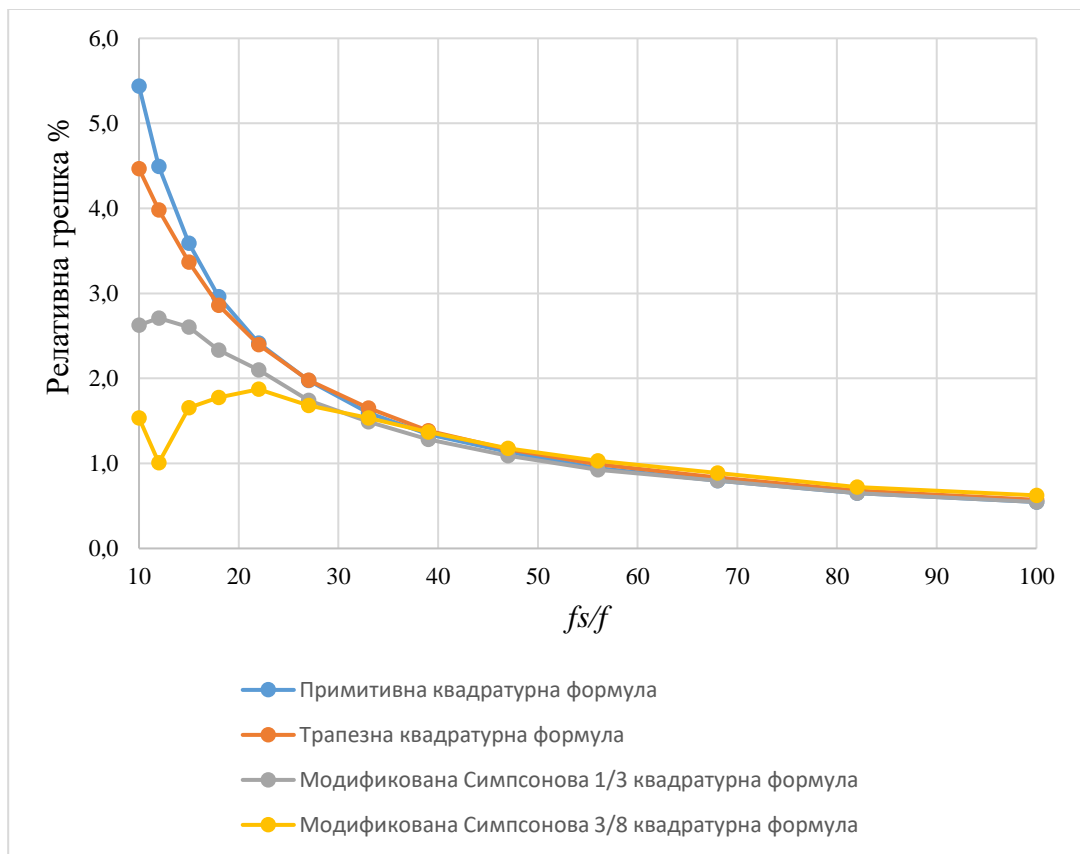
Ради провере метода описаних у претходним деловима спроведени су експерименти чији су резултати приказани у овом поглављу. Сви изведени експерименти се заснивају на коришћењу А/Д конвертора високих метролошких перформанси којим се у врло контролисаним условима врши одабирање познатом учестаношћу одабирања и са занемарљивом грешком квантизације. Добијени одбирци су подвргнути анализи у контексту сваке од четири описаних метода. Избор директног приступа А/Д конвертору најбољег инструмента у употреби је био вођен чињеницом да се тиме могу обезбедити најбољи резултати. Под овим се подразумева елиминисање могућности квантизационе грешке, што је обезбеђено великом резолуцијом. Такав А/Д конвертор такође омогућава контролисање учестаности одабирања што смањује проблем грешке квантизације. Над добијеним скупом одбирака су примењени алгоритми описани у претходним деловима и израчунате ефективне вредности напона за сваки од четири нумеричка метода, а потом је извршено поређење добијених резултата.

На слици 6.1 су приказани радно окружење и електрична шема експеримента. Мултиметар HP3458A [45] је коришћен у функцији А/Д конвертора, чијим је радом управљао рачунар уз помоћ апликације написане у програмском пакету LabVIEW. Калибратор TimeElectronics 5025 [46] је коришћен у сврху генерисања простопериодичног напона стабилне амплитуде 5 V, а TEKTRONIX AFG3101C [47] за генерисање сложенопериодичног напонског сигнала који поред првог хармоника амплитуде 5 V садржи и трећи хармоник амплитуде 1 V. Комуникација између рачунара и мултиметра HP3458A, чија је основна улога А/Д конвертор, је остварена преко дигиталне магистрале GPIB преко кога се врши конфигурисање и дефинисање начина рада уграђеног А/Д конвертора мултиметра HP3458A, а након мерења преузимају одбирци. Комуникација између рачунара и употребљена два калибратора преко којих се задаје таласни облик, амплитуда и учестаност напона је остварена путем USB комуникације.

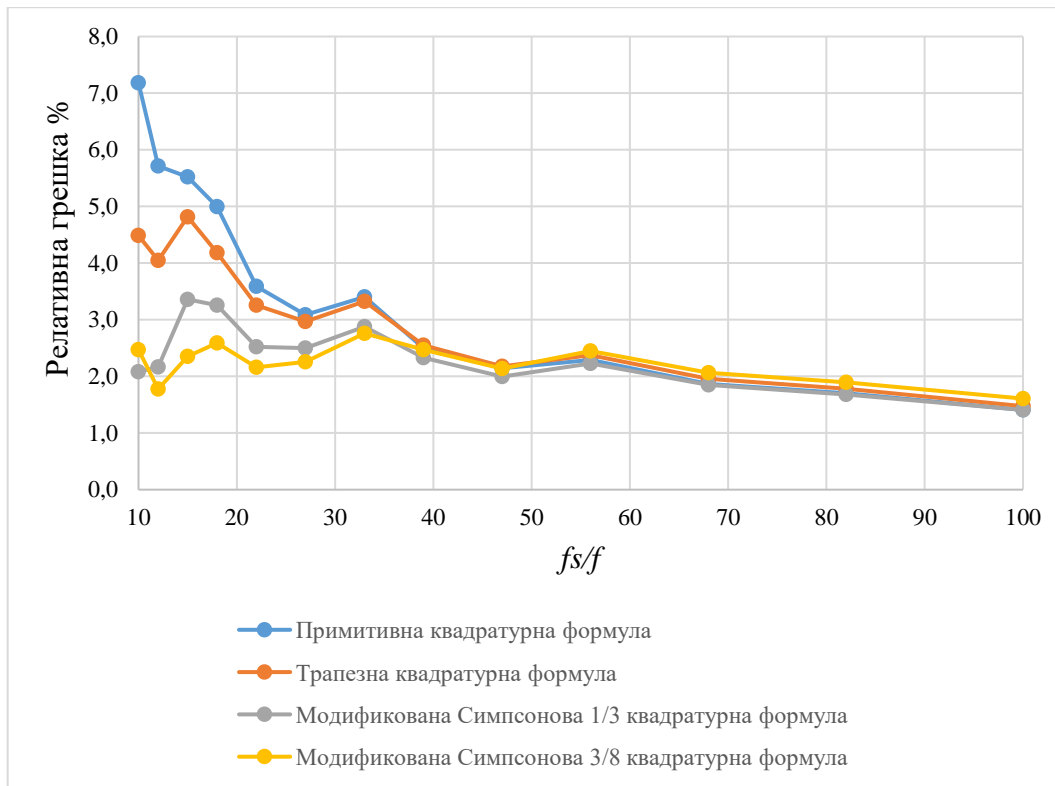


Слика 6.1 Радно окружење током експерименталне провере (лево) и електрична шема експеримента (десно)

Одабирање мултиметром HP3458A обављено је током више од 100 периода трајања 20 ms при различитим вредностима f_s/f од 10 до 100. На основу добијених одбирака у оквиру серије од 100 мерења за оба сигнала, коришћене су примитивна квадратурна формула, трапезна квадратурна формула, модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула и модификована Симпсонова 3/8 квадратурна формула за процену ефективне вредности. На основу ових вишеструких мерења са унапред дефинисаним вредностима односа f_s/f , одређена је апсолутна вредност релативне грешке за сваки метод. На слици 6.2, су представљени резултати експерименталне провере за простопериодични, а на слици 6.3, за сложенопериодични сигнал.



Слика 6.2 Максимално одступање од тачне вредности исказано у релативном облику у случају простопериодичног сигнала када је вредност прага нула



Слика 6.3 Максимално одступање од тачне вредности исказано у релативном облику у случају сложенопериодичног сигнала када је вредност прага нула

У циљу прецизнијег и јаснијег представљања резултата, вредности приказане на сликама 6.2 и 6.3 су предочене процентуално у табели 6.1 која приказује максимална одступања од тачне вредности исказаних у релативном облику у случају простопериодичног и сложенопериодичног сигнала за сваки од четири метода, где је вредност односа $f_s/f = 10,6$.

Табела 6.1 Максимална одступања мерених резултата од тачне вредности исказаних у релативном облику у случају простопериодичног и сложенопериодичног сигнала за сваки од четири метода, за вредност количника $f_s/f = 10,6$

Тип сигнала	Метод			
	Примитивна квадратурна формула (%)	Трапезна квадратурна формула (%)	Модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула (%)	Модификована Симпсонова 3/8 квадратурна формула (%)
Простопериодичан	5,16	4,32	2,65	1,38
Сложенопериодичан	6,74	4,36	2,10	2,26

Табела 6.2 приказује унапређења која се тичу максималних одступања од тачне вредности исказаних у релативном облику у случају простопериодичног и сложенопериодичног сигнала при примени модификованих Симпсонових метода у односу на употребу стандардних где је вредност $f_s/f = 10,6$.

За ту вредност f_s/f , у случају простопериодичног сигнала, примена модификоване Симпсонове $3/8$ квадратурне формуле има за последицу релативну грешку чија је вредност 3,74 пута мања од оне која се добија применом примитивне квадратурне формуле и 3,14 пута мања него при примени трапезне квадратурне формуле. Што се тиче примене модификоване Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле, процењена грешка је 1,95 пута мања од оне која се добија применом трапезне квадратурне формуле, а 1,63 пута мања од грешке коју узрокује употреба примитивне квадратурне формуле. Примена модификоване Симпсонове $3/8$ квадратурне формуле резултује грешком чија је процењена вредност 1,92 пута мања од грешке која се добија применом модификоване Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле.

Табела 6.2 Компарација максималних одступања од тачне вредности исказаних у релативном облику у случају простопериодичног и сложенопериодичног сигнала при примени модификованих Симпсонових метода и при употребу стандардних за $f_s/f = 10,6$

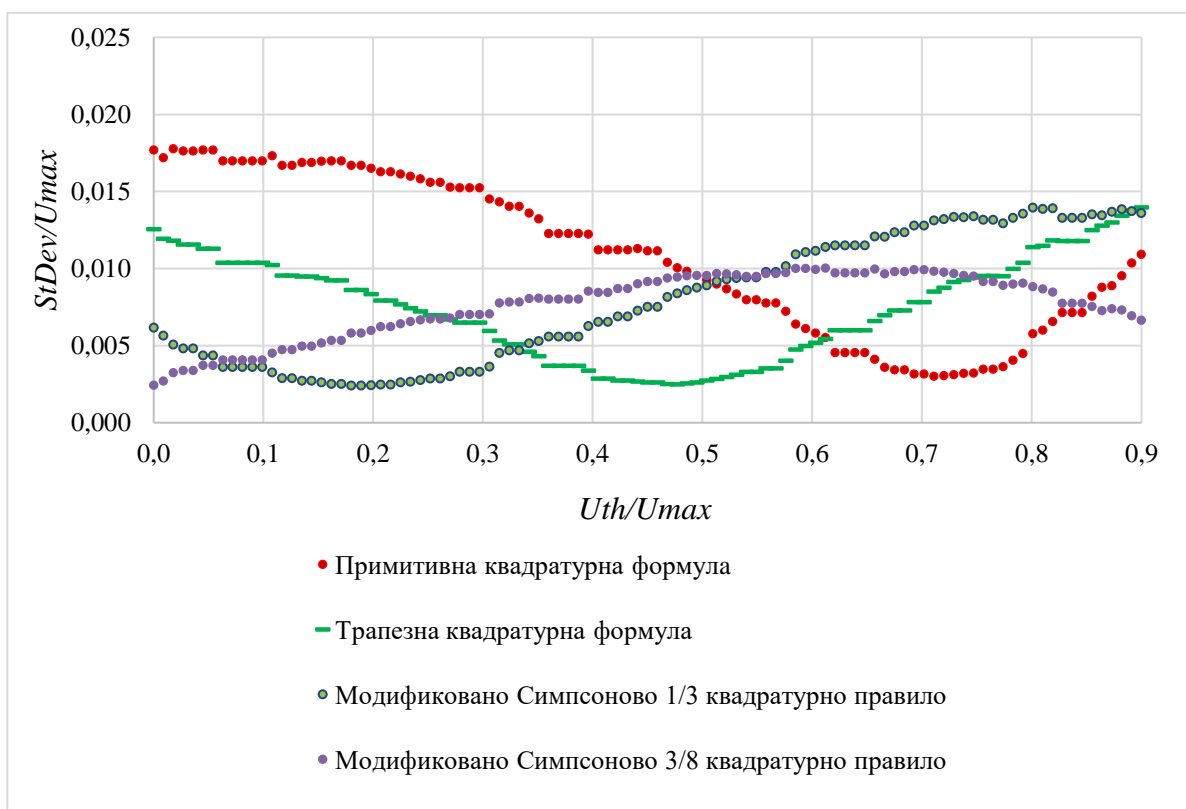
Тип сигнала	Метод	Примитивна квадратурна формула	Трапезна квадратурна формула	Модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула
Простопериодични напон	Модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула	1,63	1,95	
	Модификована Симпсонова 3/8 квадратурна формула	3,74	3,14	1,92
Сложенопериодични напон	Модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула	3,20	2,07	
	Модификована Симпсонова 3/8 квадратурна формула	2,98	1,92	0,93

У случају сложенопериодичног сигнала, за дату вредност f_s/f , процењена вредност релативне грешке при примени модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле је 2,98 пута мања него када се употребљава примитивна квадратурна формула, а 1,92 пута мања него она која се добија применом трапезне квадратурне формуле. Примена модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле има за резултат грешку процењене вредности која је 3,20 пута мања него када се примењује примитивна квадратурна формула, а 2,07 пута мања него при примени трапезне квадратурне формуле. Уочавају боље мерне перформансе модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле у поређењу са модификованом Симпсоновом 3/8 квадратурном формулом.

7. Експериментална провера утицаја избора вредности прага на грешку процене ефективне вредности сигнала

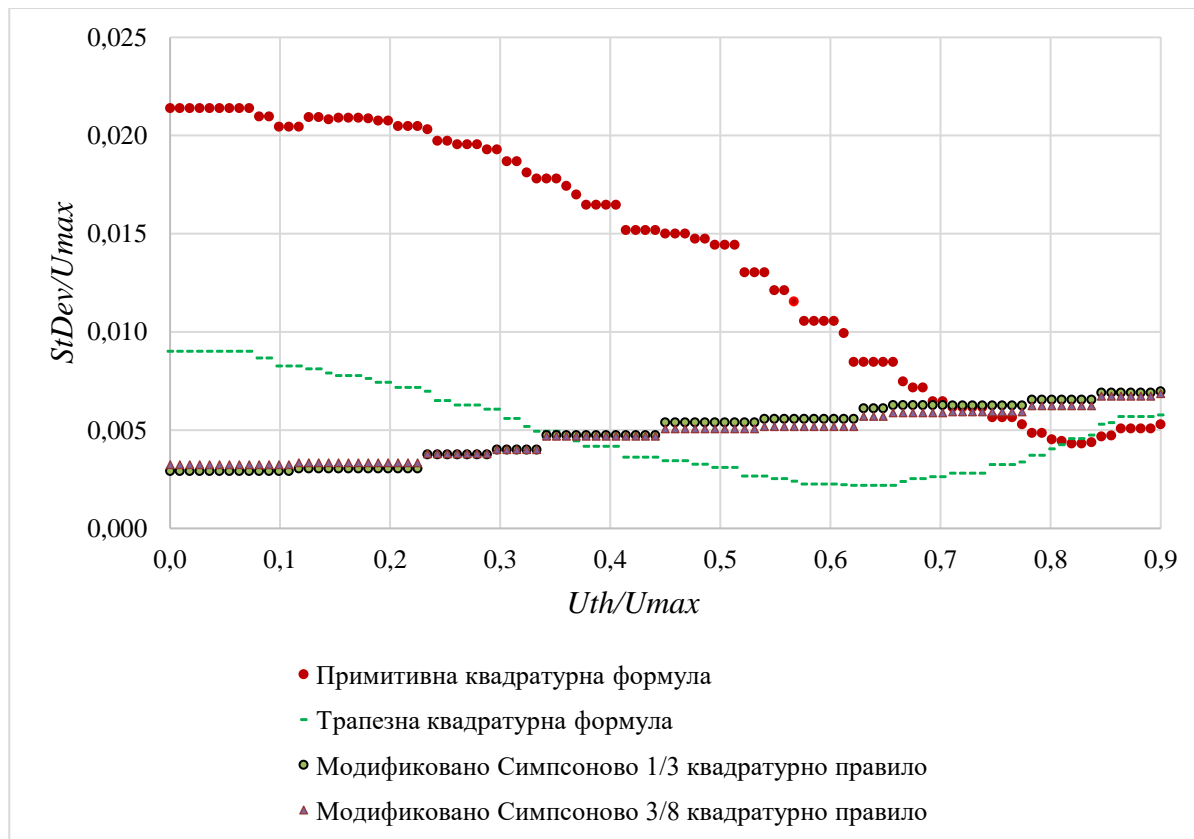
За разлику од симулација, у експерименталном делу су реални одбирци били коришћени уместо симулираних вредности. Мерења су обављена у готово истим условима у којима су извођене симулације. Разлика је у томе што је у симулацијама контролисана вредност параметра k , док је у мерењима он случајна појава. Стога, за разлику од симулација, где је обезбеђено униформно појављивање вредности параметра k из читавог опсега, у мерењима то није случај. Да би се обезбедио контекст што је могуће ближи униформном појављивању вредности параметра k из читавог опсега, експериментална мерења су спроведена над више периода.

Слика 7.1 показује зависност нормализоване стандардне девијације грешке од нормализованог прага конверзије у случају примене примитивне, трапезне, модификоване Симпсонове 1/3 и модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле, а на примеру простопериодичног сигнала за вредност количника $f_s/f = 10,6$.



Слика 7.1 Резултати мерења у случају примитивне, трапезне, модификоване Симпсонове 1/3 и модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле за простопериодичан сигнал при вредности количника $f_s/f = 10,6$

Слика 7.2 показује зависност нормализоване стандардне девијације грешке од нормализованог прага у случају примитивне, трапезне, модификоване Симпсонове 1/3 и модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле, а на примеру сложенопериодичног сигнала за вредност количника $f_s/f = 10,6$.



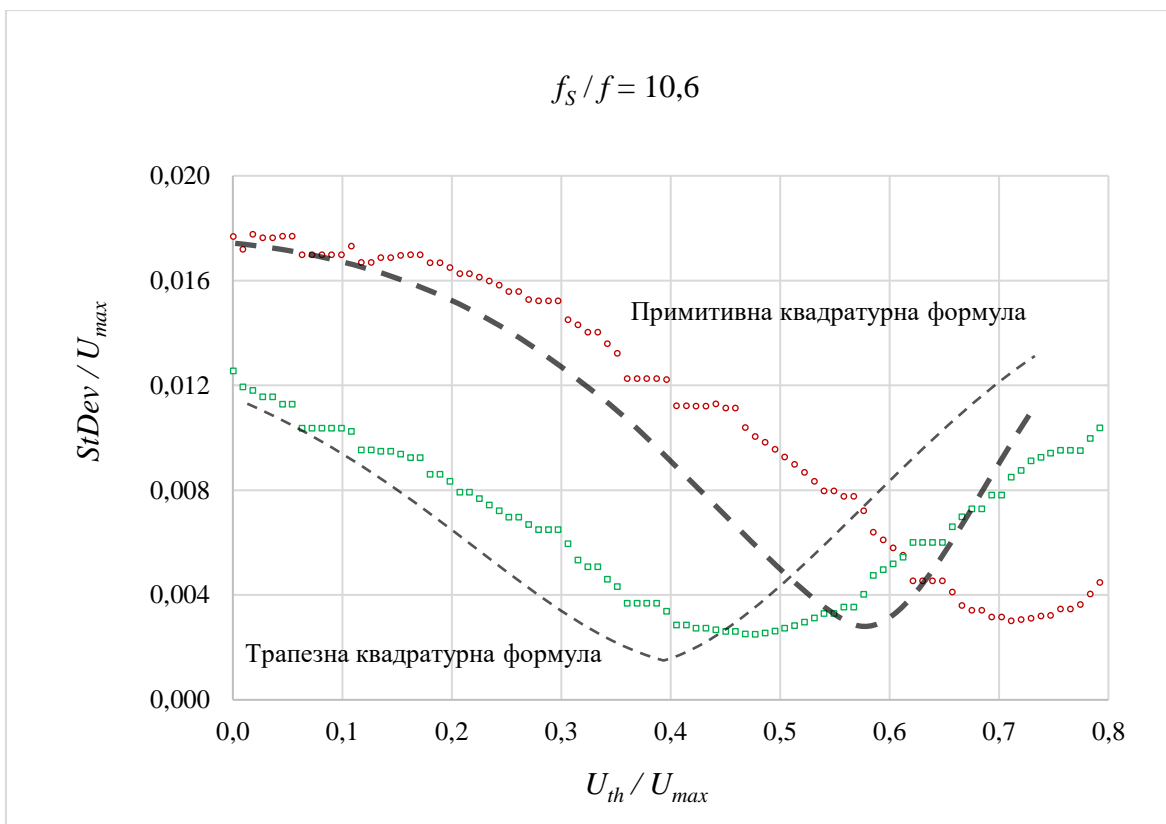
Слика 7.2 Резултати мерења у случају примитивне, трапезне, модификоване Симпсонове 1/3 и модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле за сложенопериодични сигнал при вредности количника $f_s/f = 10,6$

Експериментална верификација је у највећој мери потврдила резултате који су добијени симулацијама. На основу графика се уочава да постоје разлике између облика и вредности функција добијених при мерењу од оних који су добијени симулационим путем. У симулацијама је за сваку вредност количника f_s/f коефицијент k , којим дефинишемо тренутак када сигнал достиже нулту вредност, униформно вариран од 0 до 1 са кораком 0,01. У том контексту није узета у обзир дискретизација по вредности, односно сматрало се да је А/Д конвертор бесконачне резолуције. Број мерења који је извршен одговара броју поновљених симулација (100), али сада овај коефицијент нема униформну расподелу. Стога у мерењима не постоји могућност да се обезбеде резултати за сваку вредност коефицијента k , што чини основу претпоставке о узроку разлика између резултата симулација и мерења.

Постоји могућност да се ова разлика умањи ако се и уради већи број мерења и изабрати она чији је број појављивања коефицијента k једнак оном који се добија симулационим путем.

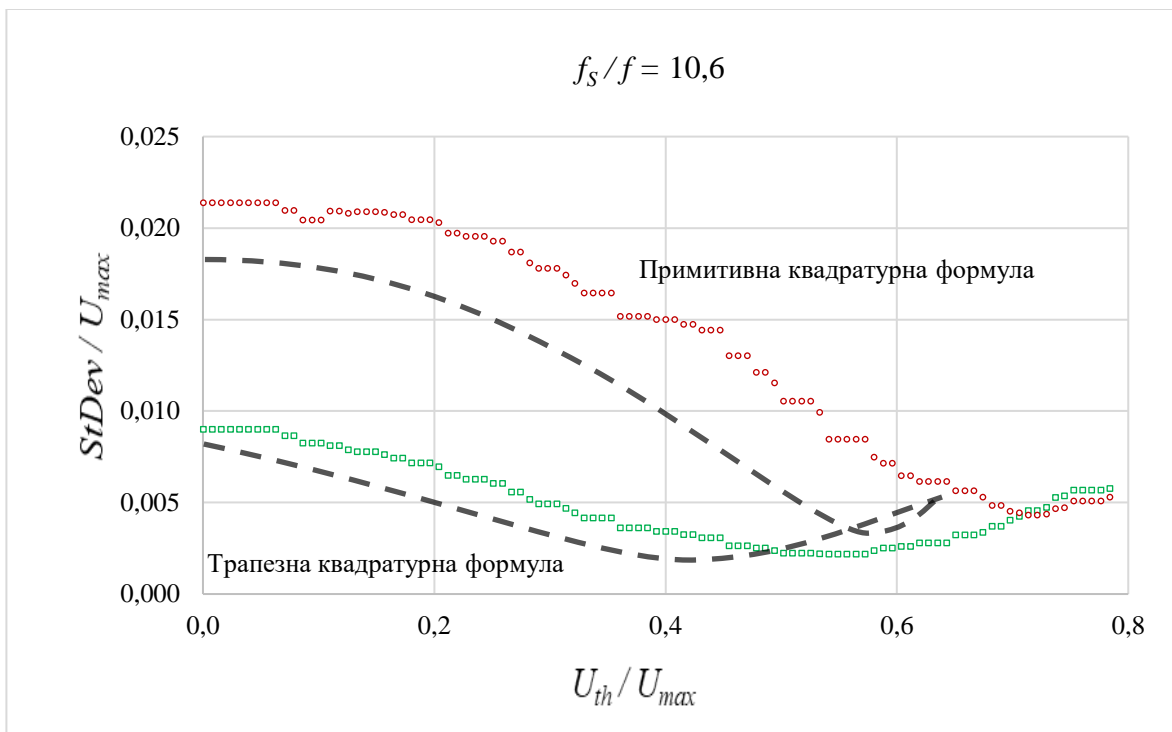
На сликама 7.3 и 7.4 су приказани резултати симулација и мерења на примеру простопериодичног и сложенопериодичног сигнала за вредност $f_s/f = 10,6$. Испрекидана линија представљају резултате симулација, црвеним тачкицама су приказани резултати мерења по примитивној квадратурној формули, а зеленим резултати мерења по трапезној квадратурној формули.

Слика 7.3 показује резултате симулација и мерења у виду зависности нормализоване стандардне девијације грешке од нормализованог прага у случају примитивне и трапезне, а на примеру простопериодичног сигнала за вредност $f_s/f = 10,6$.



Слика 7.3 Резултати симулација и мерења у случају примитивне и трапезне квадратурне формуле за простопериодични сигнал при вредности количника $f_s/f = 10,6$

Слика 7.4 показује резултате симулација и мерења у виду зависности нормализоване стандардне девијације грешке од нормализованог прага у случају примитивне и трапезне, а на примеру сложенопериодичног сигнала за вредност $f_s/f = 10,6$.



Слика 7.4 Резултати мерења у случају примитивне и трапезне квадратурне формуле за сложенепериодични сигнал при вредности количника $f_s/f = 10,6$

IV КВАЛИТАТИВНА АНАЛИЗА И ТУМАЧЕЊЕ РЕЗУЛТАТА

За процену ефективне вредности сигнала у овој дисертацији се посматрају четири метода у којима се користе редом константна, афина, квадратна и кубна функција. У зависности од метода нумеричке интеграције мењају се вектор коефицијената и број одбирака потребних за процену ефективне вредности сигнала. Табела 8.1 приказује векторе коефицијената за сваки од четири метода коришћених у овом истраживању показујући разлике међу њиховим вредностима.

Табела 8.1 Приказ вектора коефицијента за четири посматрана метода

Метод	Вектор коефицијената
Примитивна квадратурна формула	$[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$
Трапезна квадратурна формула	$\left[\frac{1}{2} \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \frac{1}{2} \right]$
Модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула	$\left[\frac{1}{6} \ \frac{5}{6} \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ 1 \ \frac{5}{6} \ \frac{1}{6} \right]$
Модификована Симпсонова 3/8 квадратурна формула	$\left[\frac{1}{8} \ \frac{1}{2} \ \frac{7}{8} \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 1 \ \frac{7}{8} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{8} \right]$

Вредности свих коефицијената у вектору коефицијената за примитивну квадратурну формулу имају вредност један, док за остале методе то није случај. За остале методе се, поред основног скупа, користе додатни одбирци за процену ефективне вредности сигнала, што има за резултат другачије вредности коефицијената у вектору коефицијената. Конкретно, додатни одбирци коришћени за одређени метод узрокују онолико вредности првих и последњих елемената вектора коефицијената различитих од један колико се додатних одбирака користи.

У процену ефективне вредности сигнала укључене су следеће операције: 1) квадрирање сваке вредности одбирка сигнала; 2) множење квадратираних вредности одбирака сигнала одговарајућим коефицијентом из вектора коефицијената; 3) сабирање добијених производа; 4) дељење бројем n којим је представљена кардиналност основног подскупа одбирака добијен у процесу одмеравања и 5) одређивање квадратног корена. Укупан број операција које су за сваки од четири метода потребне за процену ефективне вредности сигнала дат је у табели 8.2.

Табела 8.2 Приказ укупног броја операција које су за сваки од четири метода потребне за процену ефективне вредности сигнала

Метод	Квадрирање	Множење квадрираних вредности одбирака сигнала коефицијентом различитим од 1	Сабирање производа	Кореновање
Примитивна квадратурна формула	n	0	$n - 1$	1
Трапезна квадратурна формула	$n + 1$	2	n	1
Модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула	$n + 2$	4	$n + 1$	1
Модификована Симпсонова 3/8 квадратурна формула	$n + 3$	6	$n + 2$	1

Како се временска сложеност алгоритма исказује као број елементарних корака за обављање алгоритма, што је зависно од величине улаза, очигледно је да се у том погледу овде ради о незнатним разликама код примене четири метода о којима је реч. Ово значи да је, сходно малој разлици у броју одбирака, временска сложеност алгоритама иста, а процесорско време рада за сваки од метода приближно, односно са истим процесорским ресурсима може да се постигне знатно унапређење перформанси мерног уређаја.

Под успешним резултатима се сматрају они који указују на бар два пута мање грешке које се добијају при процени ефективне вредности сигнала применом модификованих метода и избором оптималног прага од грешке која се добија коришћењем стандардних метода и при нултој вредности прага. Узимајући у обзир ове оквире, може се констатовати да у случају простопериодичног напона, модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула не даје у потпуности жељене резултате, иако је приметно смањење грешке. Међутим, у случају сложенопериодичног напона, ова метода даје знатно боље резултате од стандардне.

Модификована Симпсонова 3/8 квадратурна формула даје приметно боље резултате у случају простопериодичног напона него стандардне методе у истим условима. У случају сложенопериодичног напона, ова метода даје знатно боље резултате од примитивне

квадратурне формуле, док у поређењу са трапезном квадратурном формулом, побољшање безмало достиже минимум од два пута мање вредности грешке.

Резултати који су добијени симулацијама и потврђени експерименталним путем нуде занимљиву предност по питању дизајна и функционисања микропроцесора и у постојећим мерним инструментима, а и онима који ће се производити у будућности. Решење које се предлаже захтева модификације у фирмверу постојећег инструмента без додатних улагања у хардвер.

У табели 8.3 је представљен концизан приказ тумачења резултата добијених мерењем. Овде су приказане нормализоване вредности стандардне девијације грешке када је вредност прага нула у ознаци $StDev/U_{max}$ (0) и када је та вредност оптимална, $StDev/U_{max}$ (U_{th_opt}), за четири метода у случају простопериодичног и сложенопериодичног сигнала при вредности количника $f_s/f = 10,6$, респективно. Поред тога, приказана је оптимална вредност прага, U_{th_opt} , као и унапређење уколико се она изабере уместо нуле у том контексту.

Табела 8.3 Резултати мерења за све четири примењена метода у случају оба типа сигнала

Слика	Тип сигнала	Метод	$StDev/U_{max}(0)$	U_{th_opt}	$StDev/U_{max}(U_{th_opt})$	Унапређење
8.1	Простопериодични напон	Примитивна квадратурна формула	0,01768	0,7110	0,00301	5,9
8.1		Трапезна квадратурна формула	0,01256	0,4770	0,00250	5,0
8.1		Модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула	0,00616	0,1800	0,00240	2,6
8.1		Модификована Симпсонова 3/8 квадратурна формула	0,00242	0,000	0,00242	1,0
8.2	Сложенопериодични напон	Примитивна квадратурна формула	0,02140	0,9880	0,00430	5,0
8.2		Трапезна квадратурна формула	0,0090	0,6950	0,00220	4,1
8.2		Модификована Симпсонова 1/3 квадратурна формула	0,00291	0,0000	0,00291	1,0
8.2		Модификована Симпсонова 3/8 квадратурна формула	0,00324	0,1303	0,00324	1,0

За простопериодични напон у случају примитивне и трапезне квадратурне формуле, из табеле 8.3 може да се уочи да уколико се за вредност прага изабере оптимална вредност, нормализована вредност стандардне девијације грешке је тада 5,9, односно 5,0 пута мања него у случају нулте вредности прага, што указује на далеко већа побољшања од почетних очекивања. Када је у питању модификована Симпсонова $1/3$ квадратурна формула, та вредност је 2,6, а за модификовану Симпсонову $3/8$ квадратурну формулу, примећује се да оптимални праг има нулту вредност. Табела 8.3 такође указује на знатна побољшања, с обзиром да се за изабрану оптималну вредност прага при сложенопериодичном напону када су у питању примитивна и трапезна квадратурна формула, нормализована вредност стандардне девијације добија грешка која је 5,0, односно 4,1 пута мања него у случају нулте вредности прага. Када су у питању модификована Симпсонова $1/3$ квадратурна формула и модификована Симпсонова $3/8$ квадратурну формулу, примећује се да оптимални праг има нулту вредност.

V ЗАКЉУЧАК

Почетна идеја ове докторске дисертације је била заснована на провери могућности примене релативно једноставних манипулација математичких модела који би били употребљени у постојећем хардверу мерног инструмента ради смањења грешке процене ефективне вредности сигнала без улагања у додатне компоненте. Стога је развијен математички модел у виду модификоване Симпсонове $1/3$ и $3/8$ квадратурне формуле у сврху процене ефективне вредности сигнала са мањом грешком и испитиван је утицај избора прага конверзије на грешку процене ефективне вредности сигнала.

Унапређења која се у овом истраживању сматрају успешним су оквири у којима је грешка која се добија применом предложених решења бар два пута мања од оне која настаје применом стандардних приступа. Резултати добијени симулационим путем су показали валидност и тачност иницијалних идеја, те потенцијал решења понуђених у теоријском делу и могућност њихове практичне примене. Овим је такође потврђена могућност добијања очекиваних резултата у експерименталном делу, те се у том кључу и наставило истраживање извођењем експеримената.

Сви изведени експерименти се заснивају на коришћењу А/Д конвертора високих метролошких перформанси којим се у врло контролисаним условима врши одабирање познатом учестаности одабирања и са занемарљивом грешком квантизације. Добијени одбирци су подвргнути анализи у контексту сваког од четири описаних метода. Коришћен мултиметар HP3458A у функцији А/Д конвертора, програмски пакет LabVIEW, калибратор TimeElectronics 5025, TEKTRONIX AFG3101C, дигитална магистрала GPIB и USB комуникације.

Потврђена је исправност предлога за унапређење процене ефективне вредности сигнала, и то или модификовањем Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле и Симпсонове $3/8$ квадратурне формуле или одређивањем оптималне вредности прага за метод који се користи. Истраживањем је постигнут циљ дефинисан у уводном делу дисертације, а тиче се обезбеђивања бољих мерних перформанси процене ефективне вредности сигнала у условима нецелобројне вредности количника f_s/f , у случају четири посматрана метода за два типа сигнала.

Предност модификованих метода је мања грешка и универзална применљивост, а да при том није потребно додатно време процесорског рада у поређењу са стандардним методима. Ово указује на могућност примене модификоване Симпсонове $1/3$ квадратурне формуле и Симпсонове $3/8$ квадратурне формуле у постојећим комерцијалним уређајима под условом да се се изврше мале измене у фирмверу, а без захтева за финансијско улагање у хардвер постојећих инструмената. Показано је да избор оптималне вредности прага за сваки од метода при свакој вредности количника f_s/f за оба типа сигнала утиче на грешку процене ефективне вредности сигнала, што чини још једну предност решења које ово истраживање нуди.

Ова дисертација може да буде занимљива академским научницима и истраживачима који се у својим научним радовима труде да премосте јаз између идеализованог аналитичког и инжењерског приступа одређивању ефективне вредности сигнала. Поред тога, може да заинтересује и предаваче који трагају за спојем научних открића и едукативних садржаја, те непосредном интеграцијом резултата научних истраживања у предавачку праксу. Решење које дисертација нуди може да се искористи у пословне сврхе, где би допринело ефикасности и ефективности пословања и унапређењу индустрије.

Сматра се да решења која се нуде могу да послужу као основа за истраживање које ће применом методологије коришћене у дисертацији моћи да обезбеди побољшање мерних перформанси и за друге нумеричке методе интеграције. Такође се може очекивати да би спој ова два приступа могао да се примени и за друге нумеричке методе интеграције који нису обухваћени овим истраживањем. Стога се наглашава могућност наставка истраживања у том смеру. Модификовани методи могу да буду подстицај научницима за даље истраживање сличних могућности или чак за даље унапређење других метода по сличном алгоритму.

Литература

- [1] C. Kitchin, L. Counts, eds. *RMS-to-DC Application Guide Second Edition*, 2nd ed. Norwood, MA: Analog Devices, 1986, ch. 1, pp. 1-4.
- [2] J. Williams, "A Monolithic IC for 100MHz RMS-DC Conversion," Linear Technology Corporation, Milpitas, CA, US, Application Note 22, Sep. 1987. Accessed 23 May, 2022. [Online]. Available: <https://www.analog.com/media/en/technical-documentation/application-notes/an22.pdf>
- [3] Low Level, True RMS-to-DC Converter AD636, Norwood, MA, US, Data Sheet AD636, 2013, Accessed 23 May, 2022. [Online]. Available: <http://www.analog.com>.
- [4] "RMS-to-DC Converters," Analog Devices, Inc., Norwood MA, US, MT-081 Tutorial, 2009, Accessed 23 May, 2022. [Online]. Available: <https://www.analog.com/media/en/training-seminars/tutorials/mt-081.pdf>.
- [5] C. Kitchen and L. Counts, "RMS-to-DC Conversion," Analog Devices, Inc., Norwood MA, US, Application Guide, Second Edition, 1986. Accessed 23 May, 2022. [Online]. Available: https://www.analog.com/media/en/training-seminars/design-handbooks/RMStoDC_Cover-Section-I.pdf?doc=AD8436.pdf
- [6] D. H. Sheingold, *Nonlinear Circuits Handbook: Designing with Analog Function Modules and IC's*. Norwood, MA: Analog Devices, Inc., 1976, ch. 3, pp. 165-416.
- [7] D. H. Sheingold, *Nonlinear Circuits Handbook: Designing with Analog Function Modules and IC's*. Norwood, MA: Analog Devices, Inc., 1976, ch. 1, pp. 1-28.
- [8] Z. Mitrović, *Merni instrumenti*. Novi Sad: Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, 2015, ch. 6, pp. 155-159.
- [9] P. Horowitz, H. Winfield, eds. *The Art of Electronics*, 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1989, ch. 2, pp. 61-111, ch.3, pp. 113-173.
- [10] M. Urekar, "Priilog optimizaciji performansi digitalnih merenja," doktorska disertacija, Katedra za električna merenja, Departman za Energetiku, elektroniku i telekomunikacije, Fakultetu tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, 2018.
- [11] *ADC32RF42 Dual-Channel, 14-Bit, 1.5-GSPS Analog-to-Digital Converter*. Texas Instruments, TX, USA, 2017. [Online]. Available: https://www.ti.com/lit/ds/symlink/adc32rf42.pdf?ts=1628575877677&ref_url=https%253A%252F%252Fwww.google.com%252F
- [12] A. P. Kefauver, D. Patschke, eds. *Fundamentals of Digital Audio*, vol. 22. Middleton, WI: A-R Editions, Inc., 2007, ch. 3, pp. 53-53.

- [13] R. Doroslovački, *Algebra*. Novi Sad: Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, 2017, ch. 2, pp. 11-28.
- [14] R. Doroslovački, *Algebra*. Novi Sad: Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, 2017, ch. 3, pp. 29-54.
- [15] D. Herceg, N. Petrović, Đ. Herceg, *ičke tablice*. Novi Sad: Todor, 2000, ch. 1, pp.133-144.
- [16] I. Kovačević, V. Marić, N. Ralević, M. Novković, B. Carić, S. Medić, *Matematička analiza I: Diferencijalni i integralni račun, obične diferencijalne jednačine*, 3rded. Novi Sad: Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, 2013, ch.3. pp. 111-144.
- [17] I. Kovačević, V. Marić, N. Ralević, M. Novković, B. Carić, S. Medić, *Matematička analiza I: Diferencijalni i integralni račun, obične diferencijalne jednačine*, 3rded. Novi Sad: Fakultet tehničkih nauka u Novom Sadu, 2013, ch. 4, pp. 145-182.
- [18] M. Ossendrijver, “Ancient Babylonian astronomers calculated Jupiter’s position from the area under a time-velocity graph,” *Science*, vol. 351, no. 6272, pp. 482-484, Jan. 2016, DOI: 10.1126/science.aad8085.
- [19] N. Sidoli, “On the use of the term diastēma in ancient Greek constructions,” *Historia Mathematica*, vol. 31, no. 1, pp. 2-10, Feb. 2004, DOI: 10.1016/j.hm.2003.08.003.
- [20] E. Pap, *Handbook of Measure Theory*, 1st ed., Amsterdam: Elsevier, 2002.
- [21] J. Navarro-Loidi, J. Llombart, “The introduction of logarithms into Spain,” *Historia mathematica*, vol. 35, no. 2, pp. 83-101, May 2008, <https://doi.org/10.1016/j.hm.2007.09.002>
- [22] H. Germer, “High-precision AC measurements using the Monte Carlo method,” *IEEE Trans. on Instr. and Measur.*, vol. 50, no. 2, pp. 457-460, April 2001, doi: 10.1109/19.918165.
- [23] M. Urekar, et al, “Accuracy improvement of the stochastic digital electrical energy meter,” *Measurement*, vol. 98, Nov. 2017, pp. 139-150, DOI: 10.1016/j.measurement.2016.11.038.
- [24] V. Vujicic, et al, “Low-frequency stochastic true RMS instrument,” *IEEE Trans. on Instr. and Measur.*, vol. 48, no. 2, Apr. 1999, pp. 467-470, doi: 10.1109/CPEM.1998.699956.
- [25] S. Pejic, V. Vujicic, “Accuracy limit of high-precision stochastic Watt-hour meter,” *IEEE Trans. on Instr. and Measur.*, vol. 49, no. 3, Jun. 2000, pp. 617-620, doi: 10.1109/19.850404.
- [26] R. G. McClarren, “Numerical Integration with Newton–Cotes Formulas” in *Computational Nuclear Engineering and Radiological Science Using Python*. Cambridge, MA, USA: Academic Press, 2018, pp. 267-285, DOI: 10.1016/B978-0-12-812253-2.00017-0.
- [27] P. Cerone, “Three point rules in numerical integration,” *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, vol. 47, no. 4, pp. 2341-2352, Aug. 2001, Accessed on: September 22, 2021, DOI:10.1016/S0362-546X(01)00358-3, [Online].

- [28] N. Ujević, "New error bounds for the Simpson's quadrature rule and applications," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 53, no.1, pp. 64-72, Jan. 2007, Accessed on: September 22, 2021, DOI: 10.1016/j.camwa.2006.12.008, [Online].
- [29] P.J. Davis, P. Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*, 2nd ed., New York, NY, USA: Dover Publications, Inc., 2007, ch. 1, 2, sec. 1.1, 1.2, 2.2, pp.1-48, 51-190. [Online]. Available: https://books.google.rs/books?hl=en&lr=&id=gGCKdqka0HAC&oi=fnd&pg=PP1&dq=P.J.+Davis,+P.+Rabinowitz,+Methods+of+Numerical+Integration&ots=NDvuwxxFeN&sig=l_BXltI8waB-sAN4ix-zSjqmBPo&redir_esc=y#v=onepage&q=P.J.%20Davis%2C%20P.%20Rabinowitz%2C%20Methods%20of%20Numerical%20Integration&f=false. Accessed on: May 10, 2021.
- [30] M. Attenborough, *Mathematics for Electrical Engineering and Computing*. Oxford, UK: Newnes, 2003, ch. 7, sec. 7.7, pp.132-160. [Online]. Available: https://books.google.rs/books?hl=en&lr=&id=CcwBLa1G8BUC&oi=fnd&pg=PP1&dq=Mathematics+for+Electrical+Engineering+and+Computing&ots=kF-9_66S2x&sig=xTaFJLN5ybjUICUVjdj6dyXL_eo&redir_esc=y#v=onepage&q=Mathematics%20for%20Electrical%20Engineering%20and%20Computing&f=false. Accessed on: May 10, 2021.
- [31] S.C. Chapra, *Applied numerical methods with MATLAB for engineers and scientists*, 3rd ed. New York, NY, USA: McGraw-Hill Higher Education, 2012, ch. 19, pp.462-496.
- [32] G. N. Dar, "Numerical Integration," unpublished.
- [33] P.H. Davis, I. Polonsky, "Numerical Interpolation, Differentiation and Integration," in *Handbook of Mathematical Functions: Wiith Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9th ed., M. Abramowitz, I.A. Stegun, Eds. New York, NY, USA: Dover, 1972, ch. 25, pp. 875-924.
- [34] M. N. Dhali, M. Farhad Bulbul, U. Sadiya, "Comparison on trapezoidal and Simpson's rule for unequal data space," *International Journal of Mathematical Sciences and Computing*, vol. 5, no. 4, pp. 33-43, Sep. 2019. Accessed on: May 8, 2021, DOI: 10.5815/ijmsc.2019.04.03, [Online].
- [35] Z. Sun, Z. He, T. Zang and Y. Liu, "Multi-Interharmonic Spectrum Separation and Measurement Under Asynchronous Sampling Condition," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 65, no. 8, pp. 1902-1912, Aug. 2016, doi: 10.1109/TIM.2016.2562278.
- [36] "IEEE Standard for Terminology and Test Methods for Analog-to-Digital Converters, IEEE Standard 1241-2010", 2011.
- [37] I.M.E. Hassan, "Irregular boundary area computation by Simpson's 3/8 rule," *Journal of Surveying Engineering*, vol. 113, no.3, pp. 127-132, Oct. 1987. Accessed on: October 11, 2021, DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9453\(1987\)113:3\(127\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9453(1987)113:3(127)), [Online].

- [38] H.A. Mohamed, S.M. Aflook, "Novel methods to acceleration Simpson's 3/8 Rule," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 1818, no. 1, pp. 1-8, Dec. 2021. Accessed on: October 11, 2021, doi: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1818/1/012200>, [Online].
- [39] A.L.R. Adil, "Exponential acceleration to improve Simpson's 3/8-rule," *Al-Qadisiyah Journal of Pure Science*, vol. 26, no. 1, pp. 104-111, Dec. 2021. Accessed on: October 11, 2021, doi: <https://doi.org/10.29350/qjps.2021.26.1.1240>, [Online].
- [40] B. Hu et al., "Spasticity assessment based on the Hilbert–Huang transform marginal spectrum entropy and the root mean square of surface electromyography signals: a preliminary study," *BioMed Eng OnLine*, vol. 17, issue 27, Feb 2018. Accessed on: October 22, 2021, <https://doi.org/10.1186/s12938-018-0460-1>, [Online].
- [41] K. Sohn, A. A. Armoundas, (2016) "On the efficiency and accuracy of the single equivalent moving dipole method to identify sites of cardiac electrical activation," *BioMed Eng OnLine*, vol. 54, issue 10, pp. 1611–1619, Oct 2016. Accessed on: October 22, 2021, <https://doi.org/10.1007/s11517-015-1437-x>, [Online].
- [42] D. Purcaru et al., "Some methods for computing rms values and phase differences of currents and voltages," in the 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Turkey, 2006, pp. 587-591.
- [43] J. M. Flores-Arias et al., (2019) "A Memory-Efficient True-RMS Estimator in a Limited-Resources Hardware," *Energies*, vol. 12, issue 9, pp. 1699, May 2019. Accessed on: October 22, 2021. <https://doi.org/10.3390/en12091699>, [Online].
- [44] P. Miljanic, T. Barczyk and R. Timmons, "Precision power measurements of quasi-stationary wave forms," *2012 Conference on Precision electromagnetic Measurements*, 2012, pp. 310-311, doi: 10.1109/CPEM.2012.6250926.
- [45] *HP 3458A, Operating, Programming and Configuration Manual*, 1st ed., Hewlett-Packard, Palo Alto, CA, USA, 1988.
- [46] *5025 Extended Specifications*, Version 1.3b, Time Electronics, Tonbridge, UK, Sep 2021, [Online]. Available:
https://www.timeelectronics.com/assets/upload/download_centre/documents/5025E-extended-specs.pdf
- [47] *Arbitrary/Function Generators AFG3000C Series*. Tektronix, Beaverton, OR, US, Accessed 9 November, 2021. [Online]. Available:
<https://www.tek.com/signal-generator/afg3000-function-generator>

Прилог

КОРАЦИ ЗА РЕАЛИЗАЦИЈУ АЛГОРИТМА ЗА ПРОЦЕНУ ЕФЕКТИВНЕ ВРЕДНОСТИ ЗА ПЕРИОДИЧАН СИГНАЛ У СЛУЧАЈУ МАЛЕ ВРЕДНОСТИ ОДНОСА f_s/f

Корак 1: За познату вредност учестаности сигнала, одредити учестаност одабирања.

Корак 2: Извршити одабирање над три периоде сигнала.

Објашњење:

Начин на који се обавља одабирање обезбеђује да не мора да се обраћа пажња на тренутак када се почиње са одабирањем. Одабирањем над три периоде се добија довољан број одбирака (три пута већи број одбирака од вредности $\lfloor f_s/f \rfloor$ или $\lceil f_s/f \rceil$), који обезбеђује да се и у најгорој ситуацији, одбацивањем непотребних одбирака на почетку и на крају одабирања, обезбеђују одбирци на основу којих се може одредити процена ефективне вредности применом сва четири метода.

Корак 3: Из скупа одбирака који су добијени након Коракa 2 извршити селекцију оних који ће се користити у сврху процене ефективне вредности. Први елемент тог подскупа, ког називамо основним подскупом одбирака, је први одбирак чија је вредност при порасту сигнала већа или једнака вредности прага конверзије. Остали елементи су сви наредни одбирци чије су вредности веће од вредности прага конверзије и сви након ових, који имају мању вредност од вредности прага конверзије. Последњи одбирак основног подскупа одбирака је онај који има мању вредност од вредности прага, а након којег у почетном скупу следи одбирак чија је вредност при порасту сигнала већа од вредности прага конверзије.

Корак 4: Одабрати метод за процену ефективне вредности, што условљава одређивање коначног подскупа одбирака (у даљем делу текста “вектор одбирака”) над којим се процењује ефективна вредност.

а) За коришћење примитивне квадратурне формуле, вектор одбирака чини основни подскуп одбирака редоследом којим се одбирци јављају;

б) За коришћење трапезне квадратурне формуле, вектор одбирака се састоји од основног подскупа одбирака редоследом којим се одбирци јављају и наредног одбирка из оригиналног скупа одбирака, добијеног процесом одабирања Коракoм 2, чија је вредност при порасту сигнала већа од вредности прага конверзије;

в) За коришћење модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле, вектор одбирака се састоји од основног подскупа одбирака редоследом којим се одбирци јављају и

два наредна одбирка из оригиналног скупа одбирака, добијених процесом одабирања Корак 2;

г) За коришћење модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле, вектор одбирака се састоји од основног подскупа одбирака редоследом којим се одбирци јављају и три наредна одбирка из оригиналног скупа одбирака, добијених процесом одабирања Корак 2.

Корак 5: Извршити квадрирање сваке вредности одбирака из вектора одбирака како би добили вектор квадрата одбирака.

Корак 6: Одредити вредност скаларног производа вектора квадрата одбирака и одговарајућег вектора коефицијената за одговарајућ метод:

а) У случају примитивне квадратурне формуле, вектор коефицијената је $[1111\dots1111]$, где је број елемената у вектору n , а n представља кардиналност основног скупа одбирака, односно број елемената датог скупа;

б) У случају трапезне квадратурне формуле, вектор коефицијената је $\left[\frac{1}{2}1111\dots1111\frac{1}{2}\right]$, где је број елемената у вектору $n + 1$;

в) У случају модификоване Симпсонове 1/3 квадратурне формуле, вектор коефицијената је $\left[\frac{1}{6}\frac{5}{6}111\dots111\frac{5}{6}\frac{1}{6}\right]$, где је број елемената у вектору $n + 2$;

г) У случају модификоване Симпсонове 3/8 квадратурне формуле, вектор коефицијената је $\left[\frac{1}{8}\frac{1}{8}\frac{7}{8}11\dots11\frac{7}{8}\frac{1}{8}\frac{1}{8}\right]$, где је број елемената у вектору $n + 3$.

Корак 7: У случају сваког од четири метода, добијене резултате сабрати, а збир поделити са бројем n .

Корак 8: Кореновати добијени резултат, чиме се добија процена ефективне вредности одабраног сигнала коришћењем одабраног метода.

Биографија



Марина Булат

Марина Булат је рођена 1.6.1988. у Апатину, где завршава основну школу „Жарко Зрењанин“ и гимназију "Никола Тесла". Уписује Факултет техничких наука у Новом Саду 2007. године, где завршава бечелор и мастер-дипломске академске студије Електротехнике и рачунарства, смерови Микрорачунарска електроника и Мерни системи. Током школовања је била добитник бројних стипендија и награда. Потом се запошљава на Факултету техничких наука и ради као асистент-мастер на Катедри за електрична мерења, Департмана за енергетику, електронику и телекомуникације. Паралелно са тим завршава студије Математике у техници и брани мастер-дипломски рад из области Примењене математике 2018. године. Докторске студије на студијском програму Енергетика, електроника и телекомуникације уписује 2016. године. Њена истраживачка каријера је усмерена ка областима електричних мерења, метрологије и биомедицине. Члан је IEEE и учествује у програмима наставне и научне размене у оквиру Erasmus+ програма.

Добитница је награде Друштва за ЕТРАН, 2015. за најбољи рад младог истраживача (*“Снимање динамичке петље хистерезиса осцилоскопом”*), награде Друштва за ЕТРАН, 2016. за најбољи рад (*“Еталон за пренос и калибрацију напона у условима рада ван лабораторије”*), награде Друштва за ЕТРАН, 2019. за најбољи рад (*“Примена нумеричких метода интеграције на рачунање ефективне вредности”*), награде фонда *“Момчило Момо Новковић”* за најбољег студента докторских академских студија, 2019. Активно учествује у истраживању у оквиру пројеката ПЛАМЕН и Erasmus+KA2 KALCEA.

Коаутор је научних радова штампаних у часописима са ИСИ листе. Има један рад у часопису међународног значаја верификованог посебном одлуком, једно саопштење са међународног скупа штампано у целини, четири предавања по позиву са скупа националног значаја штампано у целини, тридесет и три саопштења са скупа националног значаја штампано у целини, једну нову производну линију, нови материјал, индустријски прототип, и шест прототипова, нових метода, софтвера, стандардизованих или атестираних инструмента.

Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.

План третмана података

Назив пројекта/истраживања
Прилог развоју нумеричких метода у одређивању ефективне вредности применљивих у метролошкој инструментацији
Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање
а) Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду
Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање
Истраживање се врши у оквиру израде докторске дисертације на студијском програму Енергетика, електроника и телекомуникације
1. Опис података
<i>1.1 Врста студије</i> <i>Укратко описати тип студије у оквиру које се подаци прикупљају</i> Докторске академске студије у научној области електротехничко и рачунарско инжењерство (Докторска дисертација)
<i>1.2 Врсте података</i> а) квантитативни б) квалитативни
<i>1.3. Начин прикупљања података</i> Прикупљање података је вршено у оквирима метролошког истраживања уз помоћ мултиметра HP3458A, програмског пакета LabVIEW, калибратора TimeElectronics 5025, TEKTRONIX AFG3101C, дигиталне магистрале GPIB и USB комуникације. Инструменти су доступни у Лабораторији за метрологију Факултета техничких наука Универзитета у Новом Саду. Мерења су вршена у циљу потврђивања хипотезе постављене у контексту докторске дисертације која се бави проценом ефективне вредности сигнала.
<i>1.2 Формат података, употребљене скале, количина података</i> рачунарски експерименти и лабораторијска мерења

1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

У сврху прикупљања података коришћен је програмски пакет LabVIEW.

- a) Excel фајл, датотека .xls
- b) SPSS фајл, датотека _____
- c) PDF фајл, датотека _____
- d) Текст фајл, датотека .txt
- e) JPG фајл, датотека _____
- f) Остало, датотека _____

1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

- a) број варијабли **велики број**
- b) број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.) **велики број**

1.3.3. Поновљена мерења

a) да

б) не

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

- a) временски размак између поновљених мера је _____
- b) варијабле које се више пута мере односе се на _____
- v) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____

Напомене: _____

Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?

a) Да

b) Не

Ако је одговор не, образложити _____

2. Прикупљање података

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

а) експеримент, навести тип: **рачунарски и лабораторијски експерименти, мерење ефективне вредности сигнала**

б) корелационо истраживање, навести тип _____

ц) анализа текста, навести тип **анализа доступне литературе**

д) остало, навести шта _____

2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).

**Мултиметар HP3458A (коришћен као А/Д конвертор)
Калибратори TimeElectronics 5025 и ТЕКТРОНИХ АFG3101С**

2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да **Не**

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

а) Колики је број недостајућих података? _____

б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да Не

в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

Квалитет података је контролисан поређењем експерименталних и теоријских података.

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

Контрола уноса података је изведена на основу експертског знања.

3. Третман података и пратећа документација

3.1. Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у **Репозиторијуму докторских дисертација на Универзитету у Новом Саду.**

3.1.2. URL адреса <https://www.cris.uns.ac.rs/searchDissertations.jsf>

3.1.3. DOI _____

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

а) Да

б) Да, али после ембарга који ће трајати до _____

в) Не

Ако је одговор не, навести разлог _____

3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.

Образложење

3.2 Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен?

Стандард који примењује Репозиторијум докторских дисертација Универзитета у Новом Саду.

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.

3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму? _____

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да Не

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да Не

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да Не

Образложити

4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности (https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html) и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да Не

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да Не

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

а) Подаци нису у отвореном приступу

б) Подаци су анонимизирани

ц) Остало, навести шта

5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

а) јавно доступни

б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области

ц) затворени

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

Ауторство – некомерцијално.

6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

Марина Булат, marina.bulat@gmail.com

6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима

Марина Булат, marina.bulat@gmail.com

6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима

Марина Булат, marina.bulat@gmail.com

