UNIVERZITET U NIŠU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU

Marko V. Kostadinov

KONZISTENTNOST I PROBLEMI KOMPLETIRANJA OPERATORSKIH MATRICA

Doktorska disertacija

Niš, 2022.

UNIVERSITY OF NIŠ
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Marko V. Kostadinov

CONSISTENCY AND COMPLETION PROBLEMS OF OPERATOR MATRICES

PhD Thesis

Niš, 2022.

Подаци о докторској дисертацији

Ментор:	Др Драгана Цветковић-Илић, редовни провесор, Природно-математички факултет, Универзитет у Нишу
Наслов:	Конзистентност и проблеми комплетирања операторских матрица
Резиме:	У овој докторској тези проучавани су различити типови комплетирања операторских матрица, као и конзистентност у особинама инвертибилности и припадности скупу Фредхолмових оператора. Својтство конзистентности је разматрано на Банаховим алгебрама у смислу конзистентности у односу на особину инвертибилности и припадности скупу Фредхолмових оператора. Резултати везани за комплетирање операторских матрица су доведени у везу са одређеним особинама линеарне комбинације два произвољна оператора на Хилбертовим просторима. Проучаване особине су: инвертибилност, инјективност, лева (десна) инвертибилност, затвореност слике и конзистентност у инвертибилности линеарне комбинације два произвољна оператора на Хилбертовим просторима. Резултати су примењени и на проучавање генералисаног Бот-Дафиновог инверза, пре свега на представљање генералисаног Бот-Дафиновог инверза ограниченог линеарног оператора на Хилбертовом простору користећи операторску матрицу. Добијено представљање генералисаног Бот-Дафиновог инверза операторском матрицом представља уопштење претходних резултата.
Научна област:	Математичке науке
Научна дисциплина:	Математичка анализа, Функционална анализа
Кључне речи:	функционална анализа / уопштени инверзи, Банахове алгебра, инвертибилност, полу-регуларан скуп, Хилбертов простор, конзистентност, конзистентност у инвертибилности, Фредхолмов оператор, Фредхолм конзистентан оператор, операторске матрице, сепарабилан Хилбертов простор, пројектори, ортогоналне пројекције, Бот-Дафинов инверз, Уопштени Бот-Дафинов инверз
УДК:	517.98 517.983.23/.24

CERIF класификација:	P 140: Класе, Фуријерова анализа, функционална анализа
Тип лиценце Креативне заједнице:	**CC BY-NC-ND**

Data on Doctoral Dissertation

Doctoral Supervisor:	Dragana Cvetković-Ilić, PhD, full professor at Faculty of Sciences and Mathematics, University of Niš
Title:	Consistency and completion problems of operator matrices
Abstract:	In this thesis different types of operator matrix completions have been studied, as well as consistency in invertibility and in Fredholmnes. The property consistency has been considered on Banach algebras in the sense of concsistency in invertibility and consistence in Fredholmnes. Result concering completions of operator matrices are linked to certain properties of a linear combination of two arbitrary Hilbert space operators. The properties studied in this thesis are: invertibility, injectivity, left (right) invertibility, closednes of range, consistency in invertibility of a linear combination of two arbitrary Hilbert space operators. Some of these results are applied to the study of the Generalized Bott-Duffin inverse, primarily to represent the Generalized Bott-Duffin inverse of bounded linear operator on a Hilbert space using an operator matrix. The obtained operator matrix representation of the Generalized Bott-Duffin inverse is a generalization of previous results.
Scientific Field:	Mathematics
Scientific Discipline:	Mathematcial analisys, Functional Analysis
Key Words:	functional analysis / generalized inverses, Banach algebra, invertibility, semiregularity, Hilbert space, consistency, consistent in invertibility, Fredholm operator, Fredholm consistent operator, operator matrices, Injectivity, operator matrix, separable Hilbert space, projectors, orthogonal projections, Bott–Duffin inverse, Generalised Bott–Duffin inverse
UDC:	517.98 517.983.23/.24
CERIF Classification:	P140: Series, Fourier analysis, functional analysis

Прилог 4/1

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	монографска
Тип записа, **ТЗ**:	текстуални / графички
Врста рада, **ВР**:	докторска дисертација
Аутор, **АУ**:	Марко В. Костадинов
Ментор, **МН**:	Драгана Цветковић-Илић
Наслов рада, **НР**:	КОНЗИСТЕНТНОСТ И ПРОБЛЕМИ КОМПЛЕТИРАЊА ОПЕРАТОРСКИХ МАТРИЦА
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Србија
Година, **ГО**:	2021.
Издавач, **ИЗ**:	ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Ниш, Вишеградска 33.
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	89 стр., граф. прикази
Научна област, **НО**:	математика
Научна дисциплина, **НД**:	математичка анализа
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	функционална анализа / уопштени инверзи, Банахове алгебра, инвертибилност, полу-регуларан скуп, Хилбертов простор, конзистентност, конзистентност у инвертибилности, Фредхолмов оператор, Фредхолм конзистентан оператор, операторске матрице, сепарабилан Хилбертов простор, пројектори, ортогоналне пројекције, Бот-Дафинов инверз, Уопштени Бот-Дафинов инверз
УДК	517.98 517.983.23/.24
Чува се, **ЧУ**:	библиотека
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	У овој докторској тези проучавани су различити типови комплетирања операторских матрица, као и конзистентност у особинама инвертибилности и припадности скупу Фредхолмових оператора. Својтство конзистентности је разматрано на Банаховим алгебрама у смислу конзистентности у односу на особину инвертибилности и припадности

	скупу Фредхолмових оператора. Резултати везани за комплетирање операторских матрица су доведени у везу са одређеним особинама линеарне комбинације два произвољна оператора на Хилбертовим просторима. Проучаване особине су: инвертибилност, инјективност, лева (десна) инвертибилност, затвореност слике и конзистентност у инвертибилности линеарне комбинације два произвољна оператора на Хилбертовим просторима. Резултати су примењени и на проучавање генералисаног Бот-Дафиновог инверза, пре свега на представљање генералисаног Бот-Дафиновог инверза ограниченог линеарног оператора на Хилбертовом простору користећи операторску матрицу. Добијено представљање генералисаног Бот-Дафиновог инверза операторском матрицом представља уопштење претходних резултата.
Датум прихватања теме, **ДП**:	08.06.2020.
Датум одбране, **ДО**:	

Чланови комисије, **КО**:	Председник:
	Члан:
	Члан:
	Члан:
	Члан, ментор:

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Прилог 4/2

ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
НИШ

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	**monograph**
Type of record, **TR**:	**textual / graphic**
Contents code, **CC**:	**doctoral dissertation**
Author, **AU**:	**Marko V. Kostadinov**
Mentor, **MN**:	**Dragana Cvetković-Ilić**
Title, **TI**:	**CONSISTENCY AND COMPLETION PROBLEMS OF OPERATOR MATRICES**
Language of text, **LT**:	**Serbian**
Language of abstract, **LA**:	**English**
Country of publication, **CP**:	**Serbia**
Locality of publication, **LP**:	**Serbia**
Publication year, **PY**:	**2020**
Publisher, **PB**:	**author's reprint**
Publication place, **PP**:	**Niš, Višegradska 33.**
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	**89 p. ; graphic representations**
Scientific field, **SF**:	**mathematics**
Scientific discipline, **SD**:	**mathematical analysis**
Subject/Key words, **S/KW**:	**functional analysis / generalized inverses, Banach algebra, invertibility, semiregularity, Hilbert space, consistency, consistent in invertibility, Fredholm operator, Fredholm consistent operator, operator matrices, Injectivity, operator matrix, separable Hilbert space, projectors, orthogonal projections, Bott–Duffin inverse, Generalised Bott–Duffin inverse**
UC	**517.98** **517.983.23/.24**
Holding data, **HD**:	**library**
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	**In this thesis different types of operator matrix completions have been studied, as well as consistency in invertibility and in Fredholmnes. The property consistency has been considered on Banach algebras in the sense of concsistency in invertibility and consistence in Fredholmnes. Result concering completions of operator matrices are linked to certain properties of a linear combination of two arbitrary Hilbert space operators. The properties studied in this thesis are: invertibility, injectivity, left (right) invertibility, closednes of range, consistency in invertibility of a linear combination of two**

		arbitrary Hilbert space operators. Some of these results are applied to the study of the Generalized Bott-Duffin inverse, primarily to represent the Generalized Bott-Duffin inverse of bounded linear operator on a Hilbert space using an operator matrix. The obtained operator matrix representation of the Generalized Bott-Duffin inverse is a generalization of previous results.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:		**08.06.2020.**
Defended on, **DE**:		
Defended Board, **DB**:	President:	
	Member:	
	Member:	
	Member:	
	Member, Mentor:	

Образац Q4.09.13 - Издање 1

Sadržaj

Predgovor

Primarni cilj ove disertacije je detaljno proučavanje pojma konzistentnosti operatora i povezanih problema kompletiranja operatorskih matrica. Prvi deo disertacije se bavi proučavanjem pojma konzistentnosti na Banahovim algebrama i paralelno sa tim problemom kompletiranja operatorskih matrica do konzistentnost u invertibilnosti, odnosno do Fredholm konzistentnosti. Drugi deo disertacije se bavi proučanjem osobina linearnih kombinacija operatora na Hilbertovim prostorima sa konačnim ciljem opisivanja potrebnih i dovoljnih uslova pod kojim je linearna kombinacija operatora konzistentna u invertibilnosti. Poslednji deo disertacije je posvećen uopštenom Bott-Duffinovom inverzu, preciznije bavi se predstavljanjem uopštenog Bott-Duffinovog inverza operatorskom matricom. Važno je napomenuti da operatorske matrice nisu samo cilj jednog dela istraživanja, no predstavljaju i oruđe kojim se dolazi do mnogih rezultata, pre svega u proučavanju linearnih kombinacija operatora. Disertacija je podeljena u četiri glave.

Prva glava se bavi kratkom osnovnim pojmovima kojima se istraživanja bave, istorijom istraživanja i motivacijom za istraživanja čiji su rezultati predstavljeni u ovoj disertaciji.

Druga glava sadrži rezultate iz radova [57] i [21] koji se bave pojmom konzistentosti i problemima kompletiranja operatorskih matrica. U sekcijama 2.1 i 2.2 bavimo se pojmom konzistetnosti u inveritibilnosti, preciznije, prvo pojam konzistentnosti definišemo na Banahovim algebrama i u tom okviru dolazimo do interesantnih rezultata o tom pojmu. Pored toga bavimo se pitanjem kompletiranja operatorske matrice oblika $M_{T,S}$ na Hilbertovim prostorima do konzistentosti u invertibilnosti. Uz potrebne i dovoljne uslove za egzistenciju operatora T i S takvih da je operatorska matrica $M_{T,S}$ konzistentna u invertibilnosti potpuno opisujemo skupove

$$\bigcap_{T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}),S\in\mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{CI}(M_{T,S}), \ \text{i} \ \bigcup_{T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}),S\in\mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{CI}(M_{T,S}).$$

U sekcijama 2.3 i 2.4 posmatramo pojam Fredholm konzistentnosti na Banahovim algebrama, a zatim i pitanjem kompletiranja operatorske matrice oblika $M_{T,S}$ na Hilbertovim prostorima do Fredholm konzistentosti.

U trećoj glavi izlažemo rezultate iz radova [20] i [59] koji se tiču linearnih kombinacija operatora na Hilbertovim prostorima. U sekcijama 3.2, 3.3, 3.4 i 3.5 se bavimo uslovima pod kojim je linearna kombinacija operatora injektivna, levo (desno) invertibilna, invertibilna. U sekciji 3.6 dajemo uslove pod kojima je slika linearne kombinacije zatvorena. Kao zaključak ovih proučavanja dolazimo do potrebnih i dovoljnih uslova da linearna kombinacija operatora na Hilbertovim prostorima bude konzistentna u invertibilnosti. Paralelno opštem slučaju posmatramo i neke specijalne klase operatora gde injektivnost, leva (desna) invertibilnost, invertibilnost, i zatvorenost slike linearne kombinacije ne zavisi od izbora skalara.

Četvrta i poslednja glava se bavi predstavljanjem uopštenog Bott-Duffin-ovog inverza operatora operatorskom matricom. Ovaj problem je u specijalnom slučaju proučavan u radu [60]. Preciznije, iz rezultata o Moore-Penroseovom inverzu donje trougaonih operatorskih matrica, specijalno kada je jedan od operatora koji čine matricu inveritibilan dolazi se do potrebnih i dovoljnih uslove da uopšteni Bott-Duffinov inverz ima specijalno predstavljanje operatorskom matricom. Na ovo pitanje u opštem slučaju odgovaramo koristeči rezultate objavljene u radu [58]. Kao posledicu ovih rezultata zajedno sa rezultatima iz glave tri dolazimo do predstavljanja Bott-Duffinovog inverza operatorskom matricom.

* * *

Pre nego što nastavimo sa tekstom disertacije želeo bih da iskoristim priliku da izrazim moju ogromnu zahvalnost mom mentoru, profesorki Dragani Cvetković-Ilić. Njene smernice, strpljivost i ohrabrenja tokom celog toka doktorskih studija su bila ogromna pomoć tokom izrade ove disertacije. Raznovrsnost tema unutar ove disertacije je direktna posledica njenog pristupa koji ohrabruje samostalno istraživanje i širenje naučnih interesovanja. Zahvalan sam na podršci brojnih kolega, i sa Prirodno-Matematičkog fakulteta gde je izrada ove disertacije počela, i kolegama sa Mašinskog fakulteta koji su me primili u njihov kolektiv i pružili odličnu okolinu za završetak ovog poduhvata. Zahvaljujem se Mašinskom fakultetu u Nišu na finansijskoj pomoći pri izradi disertacije. Želeo bih da se zahvalim i članovima komisije na njihovom doprinosu. Zahvaljujem se i mojoj porodici i prijateljima na bezuslovnoj podršci, posebno bratu Milošu Kostadinovu i verenici Milici Joković. Njima je ova disertacija i posvećena.

Glava 1

Uvod

1.1 Oznake

U ovom odeljku dajemo kratak pregled oznaka koje ćemo koristiti u nastavku disertacije. Sa $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ označamo skup kompleksnih (realnih) brojeva. Banahove algebre označavamo sa $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$, dok Banahove prostore označvaamo sa $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}, \ldots$. Hilbertove prostore čemo označavati sa $\mathcal{H}, \mathcal{K}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots$, i ukoliko nije naglašeno suprotno pretpostavljamo da su separabilni. Ortogonalan komplement skupa M koji je podskup Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ označavamo sa $M^\perp$. Za Banahove prostore $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ sa $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ označavamo skup svih ogračenih linernih operatora iz $\mathcal{X}$ u $\mathcal{Y}$, pritom umesto $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ pišemo $\mathcal{B}(\mathcal{X})$. Za $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ sa $\mathcal{R}(A)$ označavamo sliku operatora A, dok sa $\mathcal{N}(A)$ označamo jezgro operatora A. Za $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ koristićemo sledeće standardne oznake $n(A) = \dim \mathcal{N}(A)$, $\beta(A) = \text{codim}\mathcal{R}(A)$ i u slučaju $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, $d(A) = \dim \mathcal{R}(A)^\perp$. Za zatvoren potprostor $\mathcal{M}$ Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$ sa $P_\mathcal{M}$ označavamo ortogonalnu projekciju na $\mathcal{M}$. Ukoliko su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ potprostori Banahovog prostora $\mathcal{X}$ njihovu sumu označavamo sa $\mathcal{M} + \mathcal{N}$, a njihovu direktnu sumu sa $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. Ukoliko su potprostori $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zatvoreni jedinstvenu projekciju čija je slika $\mathcal{M}$ a jezgro $\mathcal{N}$ označavamo sa $P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$, dok sa $P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}} : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ označavamo operator definisan sa

$$P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}x = P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}x, \ x \in \mathcal{H}.$$

Za $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ i potprostor $\mathcal{Z}$ od $\mathcal{X}$ sa $A|_\mathcal{Z}$ označavamo restrikciju operatora A na potprostor $\mathcal{Z}$. Za podskup $S \subset \mathcal{Y}$ i $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ skup $A^{-1}[S]$ definišemo sa

$$A^{-1}[S] = \{x \in \mathcal{X} \, : \, Ax \in S\}.$$

Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ je donje polu-Fredholmov ako je $\beta(A) < \infty$, gornje polu-Fredholmov ako je $n(A) < \infty$ i $\mathcal{R}(A)$ zatvoren potprostor. Operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

je Fredholmov ako je i gornje polu-Fredholmov i donje polu-Fredholmov, tj. ako je $n(A) < \infty$ i $\beta(A) < \infty$. Indeks operatora $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ je definisan sa $\mathrm{ind}(A) = n(A) - \beta(A)$. Za $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ kažemo da je Weyl-ov ako je Fredholmov i $\mathrm{ind}(A) = 0$. Skup svih Fredholmovih (donje polu-Fredholmovih, gornje polu-Fredholmovih, Weyl-ovih) operatora označavamo sa $\phi(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ($\phi_+(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\phi_-(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\phi_0(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$). Prisetimo se da je u slučaju operatora na Hilbertovim prostorima pojam donje polu-Fredholmovog operatora ekvivalentan pojmu desno Fredholmovog operatora, a pojam gornje polu-Fredholmovog operatora ekvivalentan pojmu levo Fredholmovoh operatora.
Moore-Penroseov inverz operatora $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, u oznaci $A^\dagger$ je (jedinstveni) operator koji zadovoljava jednačine

$$AXA = A,\ XAX = X,\ (AX)^* = AX,\ (XA)^* = XA.$$

Poznato je da $A^\dagger$ postoji i pritom je ograničen ako i samo ako je slika operatora A zatvorena. U tom slučaju, $AA^\dagger$ i $A^\dagger A$ su ortogonalne projekcije na $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{N}(A)^\perp$, redom.

1.2 Pojam konzistentnosti

Pojam operatora konzistentnih u invertibilnosti, kraće CI, uveden je od strane Gonga i Hana u [35], gde su proučavane spektralne karakterizacije proizvoda konačno mnogo normalnih (esencijalno normalnih) operatora. Kažemo da je operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ konzistentan u invertibilnosti (CI) ako za svaki $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ važi da je AT invertibilan ako i samo ako je TA invertibilan. Karakterizacija operatora konzistentnih u invertibilnosti na Hilbertovim prostorima je data sledećom teoremom:

Teorema 1.2.1 *Operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ je konzistentan u invertibilnosti (CI) ako i samo ako je ispunjen jedan od narednih uzajamno isključivih slučajeva:*

(i) *T je invertibilan;*

(ii) *slika operatora T nije zatvorena;*

(iii) *$\mathcal{N}(T) \neq \{0\}$ i $\mathcal{R}(T) = \overline{\mathcal{R}(T)} \neq \mathcal{H}$.*

Iz ove teoreme vidimo da $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nije konzistentan u invertbibilnosti ako i samo ako je T levo, ali ne i desno invertibilan, ili ako je desno ali ne i levo invertibilan. Prirodno definišemo CI spektar operatora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sa

$$\sigma_{CI}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ nije } CI \text{ operator}\}.$$

Interesantni rezultati o operatorima konzinstentim u invertibilnosti se mogu naći u radovima X. Caoa, H. Zhanga, Y. Zhanga i Q. Xina [9, 10], kao i u radovima D. Cvetković-Ilić, G. Haia i A. Chena u [21, 18, 40]. Posebno je interesantan rad [9], gde je istraživana veza između CI spektra i raznih oblika tvrđenja "važi Weyl-ova Teorema". Preciznije, ako za $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ važi

$$\sigma(A) \setminus \sigma_w(A) = \pi_{00}(A),$$

gde je $\sigma_w(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I \notin \phi_0(\mathcal{X})\}$, i

$$\pi_{00}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 0 < n(A - \lambda I) < \infty\} \cap \operatorname{iso} \sigma(A),$$

pri čemu je $\operatorname{iso} \sigma(A)$ skup svih izolovanih tačaka skupa $\sigma(A)$, kažemo da za A važi Weyl-ova Teorema.

Lako se proverava da je proizvod dva operatora konzistentnih u invertibilnosti i sam operator konzistentnan u invertibilnosti, pa ova elementarna osobina dodatno budi interesovanje da se ispita koja svojstva još ispunjava skup svih operatora konzistentih u invertibilnosti, što je i cilj narednih rezultata.

Pojam konzistentnosti operatora ne trebamo uvek vezati samo za invertibilnost. U opštem slučaju, za dati skup $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{B}(\mathcal{X})$ analogno možemo definisati pojam $\mathcal{S}$-konzistentih operatora. Preciznije, za operator $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ kažemo da je $\mathcal{S}$-konzistentan ako za svaki $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ važi

$$TA \in \mathcal{S} \Leftrightarrow AT \in \mathcal{S}.$$

Tako su, na primer, posmatrani Fredholm konzistentni operatori (kraće FC operatori) i interesante rezultate o njima možemo naći u [14, 15]. Ovaj skup predstavlja slučaj kada je $\mathcal{S}$ skup svih Fredholmovih operatora Banahovog prostora $\mathcal{X}$. U narednoj teoremi je data karakterizacija Fredholm konzistentih operatora na Hilbertovim prostorima koja će biti od velikog značaja jer ćemo pored CI operatora posmatrati i FC operatore i pokušati da i kod ove klase operatora odgovorimo na ista pitanja kao i kod CI operatora.

Teorema 1.2.2 [*18*] *Neka je $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. T je Fredholm konzistentan (FC) ako i samo ako je ispunjen jedan od narednih uzajamno isključivih uslova:*

(i) *T je Fredholmov operator,*

(ii) *slika operatora T nije zatvorena,*

(iii) *slika operatora T je zatvorena, $n(T) = d(T) = \infty$.*

Iz ove teoreme vidimo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ nije Fredholm konzistentan ako i samo ako je T levo Fredholmov, ali ne i desno Fredholmov, ili ako je desno Fredholmov ali ne i levo Fredholmov. Prirodno definišemo FC spektar operatora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sa

$$\sigma_{FC}(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ nije } FC \text{ operator } \}.$$

Proučavanju neke klase operatora se može pristupiti putem aksiomatske teorije spektra koju su uveli Müller, Mbekhta i Kordula u radovima [64, 63, 56]. Ovakav pristup je koristan jer proveravanjem ispunjenosti nekoliko jednostavnih uslova možemo brzo zaključiti da neki skup elemenata Banahove algebre ima osobine poput zatvorenosti odgovarajućeg spektra, itd. Za to su nam potrebni pojmovi regularnog skupa i gornje polu-regularnog skupa u Banahovoj algebri čije definicije su date u nastavku:

Definicija 1.2.1 [*56*] Neka je $\mathcal{A}$ Banahova algebra. Neprazan podskup R od $\mathcal{A}$ je regularan ako važe sledeći uslovi:

1) Za svaki $a \in \mathcal{A}$ i $n \in \mathbb{N}$ važi $a \in R \Leftrightarrow a^n \in R$,

2) Ako su a, b, c, d elementi Banahove algebre $\mathcal{A}$ koji međusobno komutiraju takvi da je $ac + bd = 1_{\mathcal{A}}$, onda $ab \in R$ ako i samo ako $a \in R$ i $b \in R$.

Definicija 1.2.2 [*64*] Neka je $\mathcal{A}$ Banahova algebra. Neprazan podskup R od $\mathcal{A}$ je gornje polu-regularan ako važe sledeći uslovi:

1) Za svaki $a \in \mathcal{A}$ i $n \in \mathbb{N}$ važi implikacija $a \in R \Rightarrow a^n \in R$,

2) Ako su a, b, c, d elementi Banahove algebre $\mathcal{A}$ koji međusobno komutiraju takvi da je $ac + bd = 1_{\mathcal{A}}$, onda iz $a, b \in R$ sledi $ab \in R$.

3) R sadrži okolinu jediničnog elementa $1_{\mathcal{A}}$.

Neki primeri regularnih skupova su skup svih invertibilnih (levo invertibilnih, desno invertibilnih) operatora, Fredholmovih (levo Fredholmovih, desno Fredholmovih) operatora, itd. Naravno, $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ i $\mathcal{R} = \emptyset$ su trivijalni primeri regularnih skupova.
Navedimo i nekoliko interesantnih primera gornje polu-regularnih skupova.
Ako je $\mathcal{X}$ Banahov prostor onda je $\mathcal{R} = \{T \in \Phi(\mathcal{X}) : \operatorname{ind}(T) = 0\}$ gornje polu-regularan skup kao otvorena polugrupa. Odgovarajući spektar definisan sa

$$\sigma_w(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \notin \Phi(\mathcal{X}) \text{ ili } \operatorname{ind}(T - \lambda) \neq 0\}$$

je poznat kao Vejlov spektar operatora T. Ukoliko posmatramo $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ kao Banahovu algebru, gde je $\mathcal{X}$ Banahov prostor, onda su i sledeći skupovi gornje polu-regularni:

$$\begin{aligned}
&\{T \in \Phi(\mathcal{X}) \,:\, \mathrm{ind}(T) \geq m\} \\
&\{T \in \Phi(\mathcal{X}) \,:\, \mathrm{ind}(T) \leq -m\} \\
&\{T \in \Phi(\mathcal{X}) \,:\, \mathrm{ind}(T) \in \{mz \,:\, z \in \mathbb{Z}\}\} \\
&\{T \in \Phi_+(\mathcal{X}) \,:\, \mathrm{ind}(T) \leq -m\} \\
&\{T \in \Phi_-(\mathcal{X}) \,:\, \mathrm{ind}(T) \geq m\},
\end{aligned}$$

gde je m nenegativan ceo broj. Specijalno, za $m = 0$ posledenje dve klase su u stvari poznati skupovi

$$\begin{aligned}
\Phi_+^-(\mathcal{X}) &= \{T \in \Phi_+(\mathcal{X}) \,:\, \mathrm{ind}(T) \leq 0\}, \\
\Phi_-^+(\mathcal{X}) &= \{T \in \Phi_-(\mathcal{X}) \,:\, \mathrm{ind}(T) \geq 0\}.
\end{aligned}$$

1.3 Neki rezultati o linearnim kombinacijama operatora

Linearne kombinacije projekcija i ortogonalnih projekcija su već duže vreme predmet mnogih radova. Među prvim radovima na tu temu su rad Bukholtza [8], gde je razmatrana inveritiblnost razlike dve ortogonalne projekcije na Hilbertovim prostorima i rad Grosa i Trenklera [36] gde je proučavana invertibilnost razlike dve idempotentne matrice. Invertibilnost linearne kombinacije idempontentih matrica je detaljno obrađena u [2] od strane J. Baksalary-ja i O.Baksalary-ja.

Sa druge strane Koliha i Rakočević su proširili opseg istraživanja tako što su posmatrali zbir, odnosno razliku idempotenata na prstenima u radovima [50] i [51]. U radu [50] Koliha i Rakočević su prvo pokazali da ako su f, g idempotenti u prstenu sa jedinicom $\mathcal{R}$ takvi da je $f - g$ invertibilan element, onda je i $f + g$ invertibilan element prstena i dali su formuli za $(f + g)^{-1}$ u zavisnosti od $(f - g)^{-1}$:

$$(f + g)^{-1} = 1 - h - k + 2kh,$$

gde su h i k idempotenti takvi da su

$$h\mathcal{R} = f\mathcal{R},\ (1 - h)\mathcal{R} = g\mathcal{R},\ \mathcal{R}k = \mathcal{R}f \ \text{ i } \ \mathcal{R}(1 - k) = \mathcal{R}g.$$

Što se tiče samih uslova za invertibilnost sume dva idempotenta dokazali su da je zbir dva idempotenta f i g inveritiblan ako i samo ako je $f + g$ regularan element i

$$\begin{aligned}
f\mathcal{R} \cap g(1 - f)\mathcal{R} &= \{0\} = f^0 \cap g^0, \\
\mathcal{R}f \cap \mathcal{R}(1 - f)g &= \{0\} = {}^0f \cap {}^0g,
\end{aligned}$$

pod uslovom da je $2 = 1 + 1$ inveritibilan elemenat prstena $\mathcal{R}$, pri čemu su za $a \in \mathcal{R}$ skupovi a^0 i ${}^0a$ definisani sa

$$a^0 = \{x \in \mathcal{R} : \, ax = 0\}, \; {}^0a = \{x \in \mathcal{R} : \, xa = 0\}.$$

Kao posledica ovih rezultata dobijeni su analogni razultati u slučaju projekcija i ortogonalnih projekcija na Hilbertovim prostorima. U radu [51] je istraživanje inveritiblnosti razlike dva idempotenta prošireno i dati su brojni ekvivalentni uslovi za invertibilnost razlike dva idempotenta na prstenu. Glavni rezultat ovog rada je sledeća teorema:

Teorema 1.3.1 [*51*] *Neka su f, g idempotenti prstena sa jedinicom $\mathcal{R}$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *$f - g$ je inveritibilan,*

(ii) *$\mathcal{R} = f\mathcal{R} \oplus g\mathcal{R}$ i $\mathcal{R} = \mathcal{R}f \oplus \mathcal{R}g$,*

(iii) *Postoje idempotenti $h, k \in \mathcal{R}$ takvi da važi $h\mathcal{R} = f\mathcal{R}$, $(1-h)\mathcal{R} = g\mathcal{R}$, $\mathcal{R}k = \mathcal{R}f$, $\mathcal{R}(1-k) = \mathcal{R}g$, pritom su h i k jedinstveni ukoliko postoje,*

(iv) *$1 - fg$ je invertibilan, $f\mathcal{R} \cap g\mathcal{R} = \{0\}$ i $\mathcal{R} = f^0 + g^0$,*

(v) *$1 - fg$ i $f + g - fg$ su invertibilni.*

U istom radu su rezultati o invertibilnosti idempotenata formulisani i u slučaja prstena sa involucijom. Kao posledica ovih rezultata prošireni su rezultati i inveritiblnosti razlike projekcija na Hilbertovim prostorima.

Isti autori su produbili svoje rezultate u slučaju matrica i na Banahovim prostorima u radovima [55], [54] i [53]. U radu [55] Koliha, Rakočević i Straškaba su uslove za invertibilnosti zbira, odnosno razlike dve idempotentne matrice formulisali analogno uslovima dobijenim u prethodnim radovima i produbili ih za ovaj specijalan slučaj. Posebno je interesantna eksplicitna formula za $(P+Q)^{-1}$ u slučaju kada je $P+Q$ invertibilna matrica, a $P-Q$ singularna matrica. Preciznije,

$$(P+Q)^{-1} = \left(I - \frac{1}{2}P_{U,V}\right)\left(I - P_{\mathcal{N}(P),N}P_{\mathcal{R}(P),M} - P_{N,\mathcal{N}(P)}P_{M,\mathcal{R}(P)}\right),$$

gde je

$$M = \mathcal{R}(Q(I-P)), \quad N = \mathcal{N}((I-P)Q),$$
$$U = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q), \quad V = \mathcal{R}(Q(I-O)) \oplus \mathcal{N}(Q).$$

Koliha i Rakočević su u radu [54] dali potrebne i dovoljne uslove da razlika dve ortognalne projekcije na Hilbertovom prostoru bude Fredholmov operator. U radu [53] isti autori su dali potvrdan odgovor na sledeće pitanje:
Ako su P_1, P_2 projekcije na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$, da li je tačno da je $P_1 + P_2$ Fredholmov operator ako i samo ako je linearna kombinacija $c_1P_1 + c_2P_2$ Fredholmov operator, gde su $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $c_1 + c_2 \neq 0$?
Štaviše, pokazali su da je ovo tačno i u slučaju projekcija na Banahovim prostorima, ali nisu dali potrebne i dovoljne uslove kada je linearna kombinacija projekcija Fredholmov operator. Odgovor na ovo pitanje su dali D. Cvetković-Ilić i J. Milenković u radu [22].

U slučaju linearnih kombinacija projekcija na Hilbertovim prostorima istraživanje je nastavljeno u radovima [30, 27, 61]. Vrlo je interesantan rad [31] koji su napisali Du, Deng, Mbehta i Müller gde su posmatrane i druge osobine linearne kombinacije projekcija osim invertibilnosti. Autori su pokazali da zatvorenost slike, komplementarnost jezgra, injektivnost, surjektivnost, (leva, desna) invertibilnost, regularnost linearne kombinacije $c_1P + c_2Q$ projekcija P, Q na Banahovom prostoru $\mathcal{X}$, ne zavisi od izbora skalara $c_1, c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ i $c_1 + c_2 \neq 0$.

Sa druge strane ispitivanje invertibilnosti linearne kombinacije operatora (a i drugih osobina linearne kombinacije operatora) u opštem slučaju je usledilo kasnije u radu [41] čiji su autori Hai, Bao i Chen gde su dati potrebni i dovoljni uslovi pod kojim je linearna kombinacija operatora na Hilbertovim prostorima inveritiblna u slučaju kada su njihove slike zatvorene. Ovaj rad je interesantan i zbog primene operatorskih matrica.

Osnovna ideja je da iskoristimo rezultate o injektivnosti (levoj invertibilnosti, desnoj invertibilnosti, invertibilnosti, itd.) gornje trougaone operatorske matrice

$$M_C = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{Y}_1 \to \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{Y}_2,$$

gde su $\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i$, $i = 1, 2$ Banahovi (Hilbertovi) prostori i $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2)$, $C \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}_1, \mathcal{X}_2)$, kako bismo došli do analognih rezultata o linearnoj kombinaciji operatora $\alpha A + \beta B$. Koristićemo sledeća predstavljanja operatora A i B operatorskim matricama:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ \mathcal{N}(B)^\perp \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}(A)} \\ \mathcal{R}(A)^\perp \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ \mathcal{N}(B)^\perp \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}(A)} \\ \mathcal{R}(A)^\perp \end{bmatrix},$$

jer je tada operatorska matrica koja predstavlja linernu kombinaciju $\alpha A + \beta B$ data sa

$$\begin{bmatrix} \alpha A_1 & \beta B_1 + \alpha A_2 \\ 0 & \beta B_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ \mathcal{N}(B)^{\perp} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}(A)} \\ \mathcal{R}(A)^{\perp} \end{bmatrix}.$$

Ovakav pristup nije jedinstven jer su detaljna proučavanja problem kompletiranja operatorskih matrica (videti [15, 16, 17, 42, 23, 18, 67, 19] za deo rezultata) primenjena na proučavanje određenih problema iz teorije operatora; neki primeri tih primena su [66, 22]. U radu [66] D. Cvetković-Ilić i V. Pavlović su su dali potrebne i dovoljne uslove pod kojima važi zakon obrnutog redosleda za $\{1\}$-inverze na separabilnim Hilbertovim prostorima. U tu svrhu su regularne operatore $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ predstavili operatorskim matricama

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix}, \\ B &= \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

pri čemu je B_1 invertiblan operator, a $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix} \to \mathcal{R}(A)$ desno invertibilan operator. Koristeći ova predstavljanja dobija se da je

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(B) \\ \mathcal{N}(B^*) \end{bmatrix}.$$

Autori zatim dokazuju odgovarajuće rezultate o operatorskim matricama koje zatim koriste i dolaze do sledeće teoreme:

Teorema 1.3.2 [*66*] *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $B \in \mathcal{B}(\mathcal{L}, \mathcal{H})$ regularni operatori predstavljeni sa* (1.1) *i neka je AB regularan operator. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(i) $(AB)\{1\} \subseteq B\{1\}A\{1\}$,

(ii) *Važi jedan od sledećih uslova:*

- (*a*) $\dim \mathcal{N}(A^*) \leq \dim \mathcal{N}(B)$, $\dim \mathcal{N}(A_1^*) + \dim \mathcal{N}(A^*) \leq \dim \mathcal{N}(B^*)$ *i* $\dim \mathcal{N}(B^*) < \infty$,
- (*b*) $\dim \mathcal{N}(A^*) \leq \dim \mathcal{N}(B)$, $\dim \mathcal{N}(A^*) \leq \dim \mathcal{N}(A_2'') + \dim \mathcal{N}(A_2)$ *i* $\dim \mathcal{N}(B^*) = \infty$,
- (*c*) $\dim \mathcal{N}(B) \leq \dim \mathcal{N}(A^*)$, $\dim \mathcal{N}(B_1^*) + \dim \mathcal{N}(B) \leq \dim \mathcal{N}(A)$ *i* $\dim \mathcal{N}(A) < \infty$,

(d) $\dim \mathcal{N}(B) \leq \dim \mathcal{N}(A^*)$, $\dim \mathcal{N}(B) \leq \dim \mathcal{N}(B_2'') + \dim \mathcal{N}(B_2)$ *i* $\dim \mathcal{N}(A) = \infty$,

gde je $A_2'' = P_{\mathcal{N}(A_1^*)} A_2|_{\mathcal{R}(A_2^*)}$, $B_1 = P_{\mathcal{R}(B^*)} B|_{\mathcal{R}(A^*)}$, $B_2 = P_{\mathcal{R}(B^*)} B^*|_{\mathcal{N}(A)}$ *i* $B_2'' = P_{\mathcal{N}(B_1^*)} B_2|_{\mathcal{R}(B_2^*)}$.

U radu [22] su D. Cvetković-Ilić i J. Milenković su takođe koristile predstavljanja operatora $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ operatorskim matricama

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ \mathcal{N}(B)^\perp \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}(A)} \\ \mathcal{R}(A)^\perp \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ \mathcal{N}(B)^\perp \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}(A)} \\ \mathcal{R}(A)^\perp \end{bmatrix},$$

jer linearna kombinacija $\alpha A + \beta B$ ima predstavljanje gornje-trougaonom operatorskom matricom i koristile odgovarajuće razultate o kompletiranju gornje-trougaone operatorske matrice do Fredholmovog operatora kako bi dale potrebne i dovoljnje uslove da linearna kombinacija $\alpha A + \beta B$ bude Fredholmov operator.

1.4 Bott-Duffinov i uopšteni Bott-Duffinov inverz

Proučavanje posebnog uopštenog inverzna, koji kasnije postaje poznatiji kao Bott-Duffinov inverz počinje radom istoimenih autora u [7] gde se razvijaju metode za rešavanje sistema oblika

$$Ax + y = b, \ x \in \mathcal{L}, \ y \in \mathcal{L}^\perp, \tag{1.2}$$

gde je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{C}^n$ i L neki potprostor od $\mathbb{C}^n$. Takvi primeri se javljaju u mehanici, ali i u teoriji električnih kola. Osim u [7] interesantan primer primene ovog inverza u teoriji električnih kola se može naći u odeljku 12 druge glave [4]. Sistem (1.2) ima rešenje ako i samo ako sistem

$$(AP_{\mathcal{L}} + P_{\mathcal{L}^\perp})z = b \tag{1.3}$$

ima rešenje i pritom je $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ rešenje sistema (1.2) ako i samo ako je

$$x = P_{\mathcal{L}} z, \ y = P_{\mathcal{L}^\perp} z = b - AP_{\mathcal{L}} z,$$

gde je z rešenje sistema (1.3). Ako je matrica $AP_{\mathcal{L}} + P_{\mathcal{L}^\perp}$ invertibilna, onda (1.2) ima jedinstveno rešenje i ono je dato sa

$$x = P_{\mathcal{L}}(AP_{\mathcal{L}} + P_{\mathcal{L}^\perp})^{-1}b, \;\; y = b - Ax.$$

Bott-Duffinov inverz matrice $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ je upravo definisan sa

$$A^{-1}_{(\mathcal{M})} = P_{\mathcal{M}}(AP_{\mathcal{M}} + P^{\perp}_{\mathcal{M}})^{-1},$$

gde je $\mathcal{M}$ dati potprostor od $\mathbb{C}^n$, pod uslovom da je matrica $(AP_{\mathcal{M}} + P^{\perp}_{\mathcal{M}})$ invertibilna. Ova definicija se prirodno uopštava na Hilbertove prostore.

Definicija 1.4.1 Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ komplementarni potprostori prostora $\mathcal{H}$. Bott-Duffinov inverz operatora A postoji ukoliko je operator $AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$ invertibilan i definisan je sa

$$A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})^{-1}.$$

Iz definicije se lako pokazuju sledeće osobine Bott-Duffinovog inverza:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{M},\mathcal{N}} &= P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AA^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = AA^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}P_{\mathcal{M},\mathcal{N}} \\ A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} &= P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}. \end{aligned}$$

Iz ovih jednakosti se može dokazati sledeća karakterizacija Bott-Duffinov inverza:

Posledica 1.4.1 *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ komplementarni potprostori prostora $\mathcal{H}$ takvi da je $AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$ invertibilan operator. Onda je*

(a) $A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = (AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^{(1,2)}_{\mathcal{M},\mathcal{N}} = (P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A)^{(1,2)}_{\mathcal{M},\mathcal{N}} = (P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^{(1,2)}_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$,

(b) $\left(A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}\right)^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$.

Sličnu motivaciju je iskoristio Chen u radu [11] kako bi uveo pojam uopštenog Bott-Duffinov inverza matrice sledećom definicijom:

Definicija 1.4.2 [*11*] Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ data matrica i $\mathcal{L}$ potprostor od $\mathbb{C}^n$. Uopšteni Bott-Duffinov inverz matrice A u odnostu na potprostor $\mathcal{L}$ je definisan sa

$$A^{\dagger}_{(\mathcal{L})} = P_{\mathcal{L}}(AP_{\mathcal{L}} + P_{\mathcal{L}^\perp})^{\dagger}.$$

Nama je od interesa uopštenje ove definicije na Hilbertove prostore:

Definicija 1.4.3 Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ komplementarni potprostori prostora $\mathcal{H}$. Bott-Duffinov inverz operatora A postoji ukoliko je operator $AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$ Moore-Penrose inveritibilan i definisan je sa

$$A^{\dagger}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})^{\dagger}.$$

Pored rada Chena interesantni su rad Denga i Chena [25], već pomenuti rad Lija [60], kao i rad [62] čiji su autori Liu, Wang i Wei. Pojam Bott-Duffinov inverza je proširen i na polugrupe, gde je izveden iz pojma (b, c) inverza koji je uveo Drazin u radu [28]. Neka je S polugrupa i $a, b, c \in S$. Element a je $(b, c)-$invertibilan ako postoji $y \in S$ takav da je

$$y \in (bSy) \cap (ySc),\ yab = b,\ cay = c.$$

Ako su $e, f \in S$ idempotenti, Bott-Duffinov (e, f)-inverz elementa a je element $y \in S$ takav da važi

$$y = ey = yf,\ yae = e,\ fay = f.$$

Iz definicija je jasno da ako je $y \in S$ $(b, c)-$inverz za $a \in S$, gde su b i c idempotenti polualgebre S, onda je y Bott-Duffinov (b, c)-inverz elementa a. Obratno, Bott-Duffinov $(e, f)-$inverz elementa $a \in S$ je i $(e, f)-$inverz.
Interesantne rezultate o (b, c)-inverzu možemo naći u radovima [49], [6] i [5]. U radu [49] su dati potrebni i dovoljni uslovi za egzistenciju $(b, c)-$inverza u prstenu sa jedinicom i uspostavljena veza između $(b, c)-$inverza i grupnog inverza. Uslovima za egistenciju (b, c)-inverza su se bavili i autori u radu [6] gde je uveden i pojam zakona obrnutog redosleda za (b, c)-inverze. Takođe, data je i karakterizacija $(b, c)-$inverza na Banahovim algebrama. Posebno je interesantan rad [5] gde je data karakterizacija (b, c)-inverza operatora na Banahovim prostorima, a zatim i veza između (b, c)-inverza i uopštenih inverza sa unapred zadatom slikom na Banahovim prostorima. Glavni rezultat rada [5] je teorema:

Teorema 1.4.1 [5] *Neka su $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ regularni operatori. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *$A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ je $(B, C)-$invertibilan,*

(ii) *Postoji $X \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ tako da važi*

$$XAX = X,\ \mathcal{R}(X) = \mathcal{R}(B)\ i\ \mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(C)$$

(i) *Postoji $A^{(2)}_{\mathcal{R}(B),\mathcal{N}(C)}$, tj. postoji spoljni inverz operatora A sa slikom $\mathcal{R}(B)$ i jezgrom $\mathcal{N}(C)$,*

(iii) $A|_{\mathcal{R}(B)}^{\mathcal{R}(AB)} : \mathcal{R}(B) \to \mathcal{R}(AB)$ *definisan sa* $A|_{\mathcal{R}(B)}^{\mathcal{R}(AB)} x = Ax$, *za* $x \in \mathcal{R}(B)$, *je invertibilan operator,* $\mathcal{R}(AB) \oplus \mathcal{N}(C) = \mathcal{X}$.

Štaviše, u tom slučaju je $(B, C)-$*inverz operatora* A *jednak operatoru* $X = A^{(2)}_{\mathcal{R}(B),\mathcal{N}(C)}$.

Kao posledica Teoreme 1.4.1 uspostavlja se i obrnuta veza. Ako su $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ zatvoreni i komplementarni potprostori Banahovog prostora $\mathcal{X}$, onda su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(i) Postoji spoljni inverz $A^{(2)}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$,

(ii) Postoji $(B, C)-$inverz operatora A za proizvoljne regularne operatore B i C za koje važi $\mathcal{R}(B) = \mathcal{T}$ i $\mathcal{N}(C) = \mathcal{S}$,

(iii) Postoji Bott-Duffinov $(P, Q)-$inverz operatora A za proizvoljne projektore P i Q za koje važi $\mathcal{R}(P) = \mathcal{T}$ i $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{S}$.

Štaviše, ukoliko jedan od ovih inverza postoji, onda su $(B, C)-$inverz operatora A i Bott-Duffinov $(P, Q)-$inverz operatora A jednaki spoljnom inverzu $A^{(2)}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$.
Kako je originalna motivacija za proučavanje uopštenog Bott-Duffinovog inverza motivisana direktnim primenama mora se spomenuti i rad [1], gde se uopšteni Bott-Duffinov povezuje sa kompatibilnim parovima operatora A i zatvorenih potprostora Hilbertovog prostora.

Glava 2

Konzistentnost i kompletiranja operatorskih matrica

2.1 Konzistentnost u invertibilnosti u Banahovim algebrama

Kako su pojmovi regularnih i polu-regularnih skupova definisani za podskupove Banahovih algebri prirodno je da definišemo pojam konzistentosti u invertibilnosti na Banahovoim algebrama (i time maksimizujemo primenljivost narednih rezultata). Za Banahovu algebru $\mathcal{A}$, sa $\mathcal{A}^{-1}$ označavamo grupu svih invertibilnih elemenata algebre, a sa $\mathcal{A}_l^{-1}$ ($\mathcal{A}_r^{-1}$) grupu svih levo (desno) inveritiblnih elemenata algebre. Kažemo da je $a \in \mathcal{A}$ konzistentan u invertibilnosti (CI) ako za sve $c \in \mathcal{A}$ važi

$$ac \in \mathcal{A}^{-1} \Leftrightarrow ca \in \mathcal{A}^{-1}.$$

Prvo ćemo pokazati lemu koja daje karakterizaciju CI elemenata koja je analogna karakterizaciji CI operatora:

Lema 2.1.1 *Elemenat a Banahove algebre $\mathcal{A}$ nije konzistentan u invertibilnosti ako i samo ako je $a \in \mathcal{A}_l^{-1} \setminus \mathcal{A}_r^{-1}$ ili $a \in \mathcal{A}_r^{-1} \setminus \mathcal{A}_l^{-1}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da $a \in \mathcal{A}$ nije CI. Onda postoji $c \in \mathcal{A}$ takav da $ac \in \mathcal{A}^{-1}$ i $ca \notin \mathcal{A}^{-1}$, ili $ca \in \mathcal{A}^{-1}$ i $ac \notin \mathcal{A}^{-1}$. Ako važi prvi slučaj, iz $ac \in \mathcal{A}^{-1}$ sledi da a mora biti desno invertibilan. Kada bi a bio i levo invertibilan, onda bi i c bio invertibilan što dalje implicira invertibilnost elementa ca. Iz ove kontradikcije vidimo da $a \in \mathcal{A}_r^{-1} \setminus \mathcal{A}_l^{-1}$. Analogno zaključujemo da iz $ca \in \mathcal{A}^{-1}$ i $ac \notin \mathcal{A}^{-1}$ sledi $a \in \mathcal{A}_l^{-1} \setminus \mathcal{A}_r^{-1}$.

Ako $a \in \mathcal{A}_l^{-1} \setminus \mathcal{A}_r^{-1}$ imamo da $a_l^{-1}a = 1_{\mathcal{A}}$ i $aa_l^1 \notin \mathcal{A}^{-1}$ za proizvoljan levi inverz a_l^{-1} elementa a, pa po definiciji a nije CI. Analogno zaključujemo da a nije CI u slučaju $a \in \mathcal{A}_r^{-1} \setminus \mathcal{A}_l^{-1}$. $\square$
Kao što smo već napomenuli, proizvod dva CI operatora jeste CI. Analogno važi i za CI elemente Banahove algebre što nas motiviše da proverimo da li je skup svih CI elemenata gornje polu-regularan.

Teorema 2.1.1 *Skup svih CI elemenata Banahove algebre $\mathcal{A}$ je gornje polu-regularan.*

Dokaz. Ako su a, b komutirajući CI elementi i $c \in \mathcal{A}$ proizvoljan onda važi

$$abc \text{ je invertibilan} \Leftrightarrow bca \text{ je invertibilan} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cab \text{ je invertibilan}$$

Iz ovog zaključka sledi da su ispunjeni uslovi (1) i (2) Definicije 1.2.2.
Kako su svi invertibilni elementi CI, i kako je poznato da postoji okolina jediničnog elementa $1_{\mathcal{A}}$ čiji su elementi invertibilni zaključujemo da postoji okolina jediničnog elementa $1_{\mathcal{A}}$ čiji su svi elementi CI. Sledi, da je ispunjen i uslov (3) iz Definicije 1.2.2. $\square$
Iz ove Teoreme direktno sledi sledeći rezultat

Posledica 2.1.1 *Skup svih CI operatora u $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ ($\mathcal{B}(\mathcal{H})$) je gornje polu-regulanan.*

Kako su svi invertibilni elementi CI sledi da $\sigma_{CI}(a) \subseteq \sigma(a)$, gde je

$$\sigma_{CI}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ \lambda - a \text{ nije } CI\}.$$

Od koristi će biti sledeći rezultat:

Teorema 2.1.2 [64] *Neka je $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}$ gornje polu-regularan skup. Pretpostavimo da $\mathcal{R}$ zadovoljava uslov*

$$b \in \mathcal{R} \cap \mathcal{A}^{-1} \Rightarrow b^{-1} \in \mathcal{R}.$$

Tada važi $\sigma_{\mathcal{R}}(f(a)) \subseteq f(\sigma_{\mathcal{R}}(a))$, za svaki $a \in \mathcal{A}$ i za sve lokalno ne-konstantne funkcije f analitičke u nekoj okolini skupa $\sigma(a) \cup \sigma_{\mathcal{R}}(a)$.
Štaviše, $\sigma_{\mathcal{R}}(f(a)) \subset f(\sigma_{\mathcal{R}}(a) \cup \sigma(a))$ za sve funkcije f analitičke na nekoj okolini skupa $\sigma_{\mathcal{R}}(a) \cup \sigma(a)$.

Kako je $\sigma_{CI}(a) \subseteq \sigma(a)$ (i stoga $\sigma_{CI}(a) \cup \sigma(a) = \sigma(a)$) vidimo da važi naredna teorema:

Teorema 2.1.3 *Za $a \in \mathcal{A}$ važi $\sigma_{CI}(f(a)) \subseteq f(\sigma_{CI}(a))$ za sve lokalno ne-konstantne funkcije f analitičke na nekoj okolini skupa $\sigma(a) \cup \sigma_{CI}(a) = \sigma(a)$ i $f(\sigma_{CI}(a)) \subseteq f(\sigma(a))$, za sve funkcije f analitičke na nekoj okolini od $\sigma(a)$.*

Naravno prirodno je ispitati da li skup svih CI elemenata (operatora) zadovoljava još neke interesantne osobine, i da li, i pod kojim uslovima, taj skup jeste regularan.

Primedba: Iz Leme 2.1.1 vidimo da važi

$$\sigma_{CI}(a) = (\sigma_l(a) \setminus \sigma_r(a)) \cup (\sigma_r(a) \setminus \sigma_l(a)).$$

U slučaju $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ova jednakost implicira da CI spektar nekog operatora može biti prazan. Na primer, Hermitski (normalni) operatori će imati prazan CI spektar. Poznato je da je spektar ograničenog linearnog operatora zatvoren skup, pa je od interesa ispitati da li isto važi i za CI spektar. Da to nije uvek slučaj pokazuje sledeći primer:

Primer 2.2.1. Neka je operator T iz $\mathcal{B}(l^2 \oplus l^2)$ definisan sa

$$T = 2S \oplus (I - S^*) : l^2 \oplus l^2 \to l^2 \oplus l^2,$$

gde je S operator desnog pomeraja na l^2. Neka je $(\lambda_n)_n$ niz kompleksnih brojeva takvih da

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 2, \ \ \lambda_n \in B(0,2) \setminus B(1,1),$$

gde $B(\lambda, r)$ otvorena kugla poluprečnika r sa centrom u λ. Setimo se da je $S - \lambda I$ desno invertibilan, ali ne i levo invertibilan za $|\lambda| < 1$, dok je $S - \lambda I$ levo invertibilan, ali ne i desno invertibilan za $|\lambda| = 1$. Najzad, $S - \lambda I$ je invertibilan za $|\lambda| > 1$. Imamo da je svaki $\lambda_n \in \sigma_{CI}(T)$ jer je $2S - \lambda_n I$ desno invertibilan, ali ne i levo invertibilan, dok je $(1 - \lambda_n)I - S^*$ invertibilan odakle sledi da je T levo invertibilan, ali ne i desno invertibilan. Međutim, kako $2S - 2I$ nije desno invertibilan i $I - S^* - 2I = -(S^* + I)$ nije levo inveritiblan (kao Hilbert adjungovani operator operatora koji nije desno inveritiblan) sledi da $T - 2I$ nije ni levo ni desno inveritiblan, pa je stoga $T - 2I$ CI operator. Zaključujemo da $\sigma_{CI}(T)$ nije zatvoren skup.

Ostaje da damo odgovor pod kojim uslovima će skup CI operatora na Hilbertovom prostoru biti regularan. U tu svrhu će nam koristiti sledeći

Primer 2.2.2. Neka su T i P_M operatori na $\mathcal{B}(l^2)$ definisani na sledeći način, $T = S^2$, gde je S operator desnog pomeraja na l^2 i P_M ortogonalna projekcija na potprostor

$$M = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^2 : \ x_{2n-1} = x_{2n}, \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Neka je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in l^2$ proizvoljan. Onda je $(x_1, x_1, x_2, x_2, \dots, x_n, x_n, \dots)$ element potprostora M, pa je M netrivijalan potprostor od l^2. Lako se proverava da je M zatvoren potprostor. Takođe, lako je proveriti da T komutira sa P_M i $P_{M^\perp}$. Primetimo da je

$$2P_{M^\perp} + 2P_M - T = 2I - T,$$

invertibilan operator. Za $x \in l^2$ imamo da važi

$$(2P_M - T)x = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_3 + x_4 - x_1, x_3 + x_4 - x_2, \dots).$$

Iz činjenice da $(1, 0, \dots, 0, \dots) \notin \mathcal{R}(2P_M - T)$, sledi da $2P_M - T$ nije desno invertiblan. Pretpostavimo da $(2P_M - T)x = 0$ za neki $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2$. Ovo znači da

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 = 0, \\ &x_3 + x_4 - x_1 = 0, \\ &x_3 + x_4 - x_2 = 0, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Iz prve tri jednačine dobijamo $x_1 = x_2 = 0$, i na sličan način zaključujemo $x_3 = x_4 = 0$. Nastavljajući postupak dobijamo $x_{2k-1} = x_{2k} = 0$, za $k \in \mathbb{N}$. Lako se proverava da je slika operatora $2P_M - T$ zatvorena. Zaključujemo da je $2P_M - T$ levo invertibilan, ali ne i desno invertibilan. Lako se pokazuje da $(2I - T)^{-1}$ komutira sa $P_{M^\perp}$ i $2P_M - T$. Najzad, imamo:

$$(2I - T)^{-1} P_{M^\perp} + (2I - T)^{-1}(2P_M - T) = I,$$

i svi operatori u ovoj jednakosti komutiraju, $P_{M^\perp}$ je CI operator jer $\mathcal{N}(P_M) = \mathcal{R}(P_M)^\perp \neq \{0\}$, $2P_M - T$ nije CI operator jer je levo, ali ne i desno inveritibilan, i

$$2P_{M^\perp}(2P_M - T) = (2P_M - T)(2P_{M^\perp}) = -2TP_{M^\perp}$$

nije ni levo ni desno invertibilan, pa je stoga CI operator. Zaključujemo da uslov (2) Definicije (1.2.1) nije zadovoljen, pa skup svih CI operatora na l^2 **nije regularan**.

Primer 2.3. Proizvoljna matrica $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jeste CI operator jer je ili inveritiblna ili $\{0\} \neq \mathcal{N}(T), \mathcal{R}(T) \neq \mathbb{C}^n$. Ovo znači da su svi elementi prostora $\mathbb{C}^{n \times n}$ konzistentni u invertibilnosti (što je ekvivalentno sa $\sigma_{CI}(T) = \emptyset$ za sve $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$)

Sada možemo dati potrebne i dovoljne uslove da skup svih CI operatora na Hilbertovom prostoru bude regularan.

Teorema 2.1.4 *Skup svih CI operatora na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, gde je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor je regularan ako i samo ako je $\mathcal{H}$ konačno dimenzionalan.*

Dokaz. Ako je $\mathcal{H}$ konačno dimenzionalan onda je on izomorfan sa $\mathbb{C}^{n\times n}$ za neko $n \in \mathbb{N}$. Iz prethodnog primera vidimo da se u ovom slučaju skup svih CI operatora poklapa sa celim prostorom. Kako je ceo prostor trivijalno regularan zaključujemo da je ovom slučaju skup svih CI operatora regularan.
Obratno, pretpostavimo da $\mathcal{H}$ nije konačno dimenzionalan. Ako je $\mathcal{H}$ separabilan onda je on izomorfan l^2 pa iz Primera 2.2 vidimo da skup svih CI operatora nije regularan. Ako $\mathcal{H}$ nije separabilan onda sadrži separabilan zatvoren potprostor $\mathcal{K}$. Imamo da $\mathcal{H} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{K}^{\perp}$ i znamo da je $\mathcal{K}$ izomorfan sa l^2. Iz Primera 2.2. znamo da postoji par komutirajučih operatora koji ne zadovoljavaju uslov (2) Definicije 1.2.1. Bez gubljenja opštosti neka su to operatori $2P_M^{\perp}$ i $2P_M - T$. Onda operatori

$$A = 2P_M^{\perp} \oplus 0 \quad \text{i} \quad B = 2P_M - T \oplus I_{\mathcal{K}^{\perp}}$$

komutiraju, i postoje operatori C, D takvi da $AC + BD = I_{\mathcal{H}}$ koji komutiraju sa operatorima A i B. Štaviše, A je CI operator, B nije CI operator, ali njihov proizvod jeste CI operator. Zakljčujemo da uslov (2) Definicije 1.2.1 nije ispunjen, tako da skup svih CI operatora na $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ nije regularan. $\square$

2.2 Konzistentnost u invertibilnosti operatorskih matrica oblika $M_{T,S}$

Cilj ove sekcije je da odredimo uslove pod kojim za date operatore $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ na separabilnim Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je operatorska matrica

$$M_{T,S} = \begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

konzistentna u invertibilnosti. Pored toga daćemo odgovor na pitanje kada će operatorska matrica $M_{T,S}$ biti CI za sve $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Koristeći dobijene rezultate za date operatore $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ u potpunosti ćemo opisati skup

$$\bigcap_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{CI}(M_{T,S}).$$

Pre dokazivanja glavnih rezultata ovog odeljka potrebni su nam neki pomoćni rezultati. Svi prostori koji se pojavljuju o ovom odeljku su netrivijalni separabilni Hilbertovi prostori.

Potrebni si nam i sledeći rezultati koji se tiču problema kompletiranja operatorskih matrica datih sa (2.1) do invertibilnosti, leve i desne invertibilnosti.

Teorema 2.2.1 [37, 39] *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ dati operatori. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *Postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je $M_{T,S}$ invertibilan operator;*

(ii) *$\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ je desno inveritibilan operator i $\dim \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}) = \dim \mathcal{K}$.*

Teorema 2.2.2 [38] *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ dati operatori. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(i) *Postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je $M_{T,S}$ desno invertibilan operator;*

(ii) *$\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} : \mathcal{H} \oplus \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ je desno invertibilan operator i $\dim \mathcal{K} \le \dim \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})$.*

Teorema 2.2.3 [38] *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ dati operatori.*

(i) *Ako je $\dim \mathcal{K} = \infty$, onda postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je $M_{T,S}$ levo invertibilan operator;*

(ii) *Ako je $\dim \mathcal{K} < \infty$, onda postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je $M_{T,S}$ levo invertibilan operator ako i samo ako je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren i $\dim \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}) \le \dim \mathcal{K}$.*

Najzad, poslednji pomoćni rezultati koji će nam biti potreban je sledeća

Lema 2.2.1 *Neka je operatorska matrica $M_{T,S} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$ data sa (2.1). Ako $\mathcal{R}(M_{T,S})$ nije zatvoren potprostor onda $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ nije levo invertibilan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ levo invertibilan i neka je $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \in \overline{\mathcal{R}(M_{T,S})}$ proizvoljan. Onda postoje nizovi (x_n) i (y_n) iz $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$, redom, takvi da

$$Ax_n + Cy_n \to x, \ n \to \infty$$

$$Tx_n + Sy_n \to y, \ n \to \infty.$$

Kako je $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ levo invertibilan sledi da $\left(\begin{bmatrix} x_n & y_n \end{bmatrix}\right)$ konvergira, pa $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \in \mathcal{R}(M_{T,S})$. Zaključujemo da je $\mathcal{R}(M_{T,S})$ zatvoren potprostor. $\square$

Problemom egzistencije operatora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvih da je operatorska matrica $M_{T,S}$ data sa (2.1) konzistentna u invertibilnosti bavi se sledeća Teorema:

Teorema 2.2.4 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ dati operatori. Postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je operatorska matrica $M_{T,S}$ data sa* (2.1) *konzistentna u invertibilnosti (CI) ako i samo ako $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ nije levo invertibilan. Štaviše, ako je $M_{T,S}$ CI operator za neke $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ onda je i $M_{0,0}$ CI operator.*

Dokaz. ($\Rightarrow$:) Neka su operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je $M_{T,S}$ konzistentan u invertibilnosti. Prema Teoremi 1.2.1 imamo sledeće mogućnosti:

(i) $M_{T,S}$ je invertibilan: Prema Teoremi 2.2.1 sledi da je $\dim \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}) = \dim \mathcal{K}$. Kako je $\mathcal{K} \neq \{0\}$ dalje sledi da $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ nije levo invertibilan.

(ii) Slika operatora $M_{T,S}$ nije zatvorena: Iz Leme 2.2.1 sledi da $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ nije levo invertibilan.

(iii) $\mathcal{N}(M_{T,S}) \neq \{0\}$ i $\mathcal{R}(M_{T,S}) = \overline{\mathcal{R}(M_{T,S})} \neq \mathcal{K}$: Iz $\mathcal{N}(M_{T,S}) \subseteq \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}\right)$ sledi da $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ nije injektivan i samim tim nije levo invertibilan.

($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ nije levo invertibilan. Ako $\mathcal{R}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})$ nije zatvoren, onda $\mathcal{R}(M_{0,0}) = \mathcal{R}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})$ nije zatvoren potprostor u $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ pa po Teoremi 1.2.1 imamo da je $M_{0,0}$ CI. Ako je slika operatora $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ zatvorena i $\mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}) \neq \{0\}$, onda imamo da $\mathcal{R}(M_{0,0}) = \overline{\mathcal{R}(M_{0,0})} = \mathcal{R}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}) \neq \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$, i da $\mathcal{N}(M_{0,0}) = \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}) \neq \{0\}$. Iz Teoreme 1.2.1 sledi da je $M_{0,0}$ CI. $\square$

U narednoj teoremi pokazujemo da u slučaju kada je $\mathcal{K}$ besnonačnodimenzionalan uvek postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $\mathcal{S} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da operatorska matrica $M_{T,S}$ nije CI.

Teorema 2.2.5 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$. Ako je $\dim \mathcal{K} = \infty$, onda postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da operatorska matrica $M_{T,S}$ data sa* (2.1) *nije CI.*

Dokaz. Najpre, pretpostavimo da postoje $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je $M_{T,S}$ desno invertibilan operator. Iz Teoreme 2.2.2 sledi da je $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ desno inveritibilan operator i $\dim \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}) = \infty$. Kako je $\dim \mathcal{K} = \infty$, znamo da postoji beskonačno dimenzionalan zatvoren potprostor $\mathcal{S}$ od $\mathcal{K}$, $\mathcal{S} \neq \mathcal{K}$ i operator $\begin{bmatrix} T & S \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix} \to \mathcal{K}$ takav da je $\begin{bmatrix} T & S \end{bmatrix}|_{\mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})^{\perp}} = 0$, $\mathcal{N}(\begin{bmatrix} T & S \end{bmatrix}|_{\mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})}) = \{0\}$ i $\mathcal{R}(\begin{bmatrix} T & S \end{bmatrix}) = \mathcal{S}$. Za $M_{T,S}$ imamo $\mathcal{N}(M_{T,S}) = \{0\}$ i $\mathcal{R}(M_{T,S}) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{S} \neq \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$. Iz Teoreme 1.2.1 sledi da $M_{T,S}$ nije CI.

Sa druge strane, ako ne postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je $M_{T,S}$ desno invertibilan operator onda možemo naći operatore $T_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ za koje je M_{T_0,S_0} levo invertibilan. Egzistenciju ovih operatora garantuje Teorema

2.2.3. Operatorska matrica M_{T_0,S_0} jeste levo invertibilna, ali nije desno invertibilna, tako da možemo zaključiti da M_{T_0,S_0} nije CI operator. $\square$

Ako prethodni rezultat uporedimo sa analognim rezultatom o gornje trougaonim operatorskim matricama možemo primetiti interesantne razlike. Naime, ako je $\dim \mathcal{K} = \infty$, onda ne postoji par operatora $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ takvih da je $M_{T,S}$ CI operator za sve $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $\mathcal{S} \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, dok u slučaju gornje trougaonih operatorskih matrica pod određenim uslovima možemo naći takav par operatora:

Teorema 2.2.6 [40] *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Operatorska matrica $M_C = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ je CI operator za svako $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ ako i samo ako važi jedan od narednih uslova:*

(i) *$\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{R}(B)$ nisu zatvoreni;*

(ii) *$\mathcal{R}(A)$ nije zatvoren, $\mathcal{R}(B)$ je zatvoren, $n(B) < \infty$;*

(iii) *$\mathcal{R}(A)$ nije zatvoren, $\mathcal{R}(B)$ je zatvoren, $d(B) > 0$;*

(iv) *$\mathcal{R}(B)$ nije zatvoren, $\mathcal{R}(A)$ je zatvoren, $d(A) < \infty$;*

(v) *$\mathcal{R}(B)$ nije zatvoren, $\mathcal{R}(A)$ je zatvoren, $n(A) > 0$;*

(vi) *$\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{R}(B)$ su zatvoreni, $n(A) > 0$ i $d(B) > 0$;*

(vii) *$\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{R}(B)$ su zatvoreni, $n(B) > d(A)$ i $d(B) > 0$;*

(viii) *$\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{R}(B)$ su zatvoreni, $d(A) > n(B)$ i $n(A) > 0$;*

(ix) *$\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{R}(B)$ su zatvoreni, $n(B) = d(A) < \infty$ i $n(A) = d(B) = 0$.*

Naredni rezultat se odnosi na slučaj kada je $\mathcal{K}$ konačno dimenzionalan netrivijalan Hilbertov prostor i daje potrebne i dovoljne uslove da $M_{T,S}$ bude CI za sve $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$.

Teorema 2.2.7 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ dati operatori i $\dim \mathcal{K} < \infty$. Operatorska matrica $M_{T,S}$ data sa (2.1) je CI za sve $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:*

1. *$\mathcal{R}(A)$ nije zatvoren potprostor;*
2. *$\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(C) = \mathcal{H}$, $\dim \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}) = \dim \mathcal{K}$.*

3. $\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(C)\neq\mathcal{H}$, $\dim\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})>\dim\mathcal{K}$;

Dokaz. Razlikovaćemo dva slučaja: kada je slika operatora A zatvorena i kada nije. Ako je $\mathcal{R}(A)$ nije zatvoren potprostor, onda za proizvoljne $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $S\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ imamo da $\mathcal{R}(M_{T,S})$ nije zatvoren potprostor kao slika sume operatora A i operatora konačnog ranga $\begin{bmatrix}0 & C\\ T & S\end{bmatrix}$. Primenom Teoreme 1.2.1 dobijamo da je $M_{T,S}$ CI operator za proizvoljne $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $S\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$. Pretpostavimo da je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren potprostor. Sledi da je slika operatora $M_{T,S}$ zatvorena. Nadalje ćemo razmtrati sledećih 5 slučajeva:

Slučaj 1: $\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(C)=\mathcal{H}$ i $\dim\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})>\dim\mathcal{K}$. Tada postoje operatori $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $S\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je restrikcija operatora $\begin{bmatrix}T & S\end{bmatrix}$ na potprostor $\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})$ nije injektivna ali jeste surjektivna. Ovo implicira da $\mathcal{N}(M_{T,S})=\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})\cap\mathcal{N}(\begin{bmatrix}T & S\end{bmatrix})\neq\{0\}$ i $\mathcal{R}(M_{T,S})=\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$. Iz Teoreme 1.2.1 sledi da za ovaj izbor operatora T i S, $M_{T,S}$ nije CI operator.

Slučaj 2: $\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(C)=\mathcal{H}$ i $\dim\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})<\dim\mathcal{K}$. Onda postoje operatori $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $S\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je restrikcija operatora $\begin{bmatrix}T & S\end{bmatrix}$ na potprostor $\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})$ injektivna, ali ne i surjektivna. Ovo implicira da $\mathcal{N}(M_{T,S})=\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})\cap\mathcal{N}(\begin{bmatrix}T & S\end{bmatrix})=\{0\}$ i $\mathcal{R}(M_{T,S})\neq\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$. Iz Teoreme 1.2.1 sledi da za ovaj izbor operatora T i S, $M_{T,S}$ nije CI operator.

Slučaj 3: $\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(C)=\mathcal{H}$ i $\dim\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})=\dim\mathcal{K}$. Ako su $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $S\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je restrikcija operatora $\begin{bmatrix}T & S\end{bmatrix}$ na potprostor $\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})$ bijektivna, onda je $M_{T,S}$ očigledno invertibilan pa prema Teoremi 1.2.1 zaključujemo da je $M_{T,S}$ CI operator. Ako su $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $S\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da restrikcija operatora $\begin{bmatrix}T & S\end{bmatrix}$ na potprostor $\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})$ nije bijektivna, onda ona nije ni injektivna ni surjektivna. Stoga je $\mathcal{N}(M_{T,S})=\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})\cap\mathcal{N}(\begin{bmatrix}T & S\end{bmatrix})\neq\{0\}$. Takođe, iz $\mathcal{R}\left(\begin{bmatrix}T & S\end{bmatrix}|_{\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})}\right)\neq\mathcal{K}$ sledi da $\mathcal{R}(M_{T,S})\neq\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$. Sada, koristeći Teoremu 1.2.1 zaključujemo da je $M_{T,S}$ CI operator. Dakle, $M_{T,S}$ je CI operator za proizvoljne $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $S\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$,

Slučaj 4: $\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(C)\neq\mathcal{H}$ i $\dim\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})\leq\dim\mathcal{K}$. Za proizvoljne $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $S\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$

$$\mathcal{R}(M_{T,S})\neq\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}.$$

Takođe, postoje $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $S\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je restrikcija operatora $\begin{bmatrix}T & S\end{bmatrix}$ na potprostor $\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})$ injektivna. Ovo implicira da $\mathcal{N}(M_{T,S})=\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})\cap\mathcal{N}(\begin{bmatrix}T & S\end{bmatrix})=\{0\}$, pa iz Teoreme 1.2.1 dobijamo da za takav izbor operatora T i S operatorska matrica $M_{T,S}$ nije CI operator.

Slučaj 5: $\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(C)\neq\mathcal{H}$ i $\dim\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})>\dim\mathcal{K}$. Za proizvoljne $T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $S\in\mathcal{B}(\mathcal{K})$ imamo da $\mathcal{R}(M_{T,S})\neq\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ i $\mathcal{N}(M_{T,S})=\mathcal{N}(\begin{bmatrix}A & C\end{bmatrix})\cap$

$\mathcal{N}(\begin{bmatrix} T & S \end{bmatrix}) \neq \{0\}$. Prema Teoremi 1.2.1 važi da je za proizvoljne $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ operatorska matrica $M_{T,S}$ CI operator. $\square$

Posledica 2.2.1 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$. Ako je $\dim \mathcal{K} < \infty$, onda postoje $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da $M_{T,S}$ data sa (2.1) nije CI ako i samo ako važi jedan od narednih uzajmno isključivih uslova:*

1. $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(C) = \mathcal{H}$, $\dim \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}) \neq \dim \mathcal{K}$,
2. $\mathcal{R}(A)$ *je zatvoren*, $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(C) \neq \mathcal{H}$, $\dim \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}) \leq \dim \mathcal{K}$.

Sada možemo koristeći Teoreme 2.2.4-2.2.7 da potpuno opišemo skupove

$$\bigcap_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{CI}(M_{T,S}) \quad \text{i} \quad \bigcup_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{CI}(M_{T,S}).$$

Posledica 2.2.2 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$. Tada važi,*

$$\bigcap_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{CI}(M_{T,S}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} A - \lambda I & C \end{bmatrix} \text{ nije levo invertibilan}\}.$$

Posledica 2.2.3 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$.*

(i) *Ako je* $\dim \mathcal{K} = \infty$, *tada je* $\displaystyle\bigcup_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{CI}(M_{T,S}) = \mathbb{C}$.

(ii) *Ako je* $\dim \mathcal{K} < \infty$, *tada je*

$$\begin{aligned}
&\bigcup_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{CI}(M_{T,S}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}(A - \lambda) + \mathcal{R}(C) = \mathcal{H}, \\
&\dim \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A - \lambda & C \end{bmatrix}) \neq \dim \mathcal{K}\} \\
&\cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \mathcal{R}(A - \lambda) = \overline{\mathcal{R}(A - \lambda)}, \mathcal{R}(A - \lambda) + \mathcal{R}(C) \neq \mathcal{H}, \\
&\dim \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A - \lambda & C \end{bmatrix}) \leq \dim \mathcal{K}\}.
\end{aligned}$$

U radu [40] je pokazano da u slučaju gornje trougaone operatorske matrice date sa

$$M_C = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix}, \tag{2.2}$$

imamo da za date operatore $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ važi

$$\bigcap_{C \in \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})} \sigma_{CI}(M_C) = \sigma_{CI}(M_0).$$

Da to nije slučaj sa operatorskim matricama definisanim sa (2.1) pokazuje sledeći

Primer 2.3.1. Neka je $\dim \mathcal{H} = \infty$ i $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pretpostavimo da je $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je $A - \lambda$ levo invertibilan ali ne i desno invertibilan, i neka je $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ operator koji nije injektivan. Pokazaćemo da $\lambda \in \sigma_{CI}(M_{0,0})$, i $\lambda \notin \cap_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{CI}(M_{T,S})$. Kako C nije injektivan sledi da $\begin{bmatrix} A - \lambda & C \end{bmatrix}$ nije levo invertibilan, što po Teoremi 2.2.4 implicira postojanje operatora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvih da je $M_{T,S} - \lambda$ CI operator. Stoga $\lambda \notin \cap_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{CI}(M_{T,S})$. Kako bi pokazali da $\lambda \in \sigma_{CI}(M_{0,0})$ dovoljno je pokazati da je $M_{0,0} - \lambda I$ levo, ali ne i desno invertibilan. Lako se proverava da je

$$\begin{bmatrix} (A-\lambda)_l^{-1} & \frac{1}{\lambda}(A-\lambda)_l^{-1} C \\ 0 & -\frac{1}{\lambda} \end{bmatrix},$$

levi inverz za $M_{0,0} - \lambda I$. Kako bismo pokazali da $M_{0,0} - \lambda I$ nije desno inveritibilan pretpostavićemo suprotno, to jest da postoji operatorska matrica

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix},$$

takva da

$$\begin{bmatrix} A-\lambda & C \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{K}} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Očigledno iz (2.3) sledi $W = -\lambda$ i $Z = 0$, iz čega pak sledi $(A - \lambda)X = I_{\mathcal{H}}$, što je u suprotnosti sa pretpostavkom da $A - \lambda$ nije desno invertibilan. Dakle, $\lambda \in \sigma_{CI}(M_{0,0}) \setminus \bigcap_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{CI}(M_{T,S})$.

2.3 Fredholm konzistentnost u Banahovim algebrama

Kao i u slučaju CI operatora, pojam Fredholm konzistentnosti (FC) možemo definisati na odgovarajući način i na Banahovim algebrama. R. Harte je u [44] uveo pojam T-Fredholm elementa Banahove algebre. Za ograničen homomorfizam T :

$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ između kompleksnih Banahovih algebri $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ takvih da $1_\mathcal{A} \neq 0_\mathcal{A} (1_\mathcal{B} \neq 0_\mathcal{B})$ kažemo da je $a \in \mathcal{A}$ T-Fredholmov (levo T-Fredholmov, desno T-Fredholmov) ako i samo ako je $T(a) \in \mathcal{B}^{-1}(\mathcal{B}_l^{-1}, \mathcal{B}_r^{-1})$. Koristeći ovu definiciju kažemo da je $a \in \mathcal{A}$ T-Fredholm konzistentan (T-FC) ako za svaki $c \in \mathcal{A}$ važi

$$ac \text{ je } T - \text{Fredholmov } \Leftrightarrow ca \text{ je } T - \text{Fredholmov}.$$

Kada je $\mathcal{X}$ Banahov prostor, skup Fredholmovih operatora je u stvari specijalan slučaj gornje definicije za $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$, gde je $T : \mathcal{B}(\mathcal{X}) \to \mathcal{B}(\mathcal{X})/\mathcal{K}(\mathcal{X})$ kanonska projekcija.

Potpuno analogno Lemi 2.1.1 i Teoremama 2.1.1 i 2.3.3 pokazujemo da važi sledeća

Lema 2.3.1 *Elemenat a Banahove algebre $\mathcal{A}$ nije T-FC ako i samo ako je a levo T-Fredholmov, ali ne i desno T-Fredholmov, ili ako je a desno T-Fredholmov, ali ne i levo T-Fredholmov.*

Dokaz. Pretpostavimo da $a \in \mathcal{A}$ nije $T - FC$. Onda postoji $c \in \mathcal{A}$ takav da $T(ac) \in \mathcal{B}^{-1}$ i $T(ca) \notin \mathcal{B}^{-1}$, ili $T(ca) \in \mathcal{B}^{-1}$ i $T(ac) \notin \mathcal{B}^{-1}$. Ako prvi slučaj važi, iz $T(ac) = T(a)T(c) \in \mathcal{B}^{-1}$, sledi da je $T(a)$ desno invertibilan. Ako bi $T(a)$ bio i levo invertibilan onda bi $T(c)$ bio invertibilan, pa samim tim i $T(ca)$. Iz ove kontradikcije vidimo da važi $T(a) \in \mathcal{B}_r^{-1} \setminus \mathcal{B}_l^{-1}$, što po definiciji znači da je a desno T-Fredholmov, ali ne i levo T-Fredholmov. Analogno zaključujemo da u drugom slučaju mora važiti $T(a) \in \mathcal{B}_l^{-1} \setminus \mathcal{B}_r^{-1}$.
Ako je a levo T-Fredholmov, ali ne i desno T-Fredholmov imamo $T(a) \in \mathcal{B}_l^{-1} \setminus \mathcal{B}_r^{-1}$, to jest $T(a)_l^{-1}T(a) = 1_\mathcal{B}$ i $T(a)T(a)_l^{-1} \notin \mathcal{B}^{-1}$, za proizvoljni levi inverz $T(a)_l^{-1}$ od $T(a)$, pa a nije $T - FC$. Analogno zaključujemo da a nije $T - FC$ u slučaju kada je a desno T-Fredholmov, ali ne i levo T-Fredholmov. $\square$

Posledica 2.3.1 *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kompleksne Banahove algebre takve da $1_\mathcal{A} \neq 0_\mathcal{A} (1_\mathcal{B} \neq 0_\mathcal{B})$, i neka je $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ograničen homomorfizam. Tada je $a \in \mathcal{A}$ $T - FC$ ako i samo ako je $T(a)$ CI.*

Analogno Teoremi 2.1.1 dokazujemo sledeći rezultat:

Teorema 2.3.1 *Neka su $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ kompleksne Banahove algebre takve da $1_\mathcal{A} \neq 0_\mathcal{A} (1_\mathcal{B} \neq 0_\mathcal{B})$, i neka je $T : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ograničen homomorfizam. Skup svih T-Fredholm konzistentih elemenata algebre $\mathcal{A}$ je gornje polu-regularan.*

Dokaz. Neka su $a, b \in \mathcal{A}$ komutirajući T-Fredholm konzistenti elementi i neka je $c \in \mathcal{A}$ proizvoljan. Imamo da važi

$$abc \text{ je T-Fredholmov} \Leftrightarrow bca \text{ je T-Fredholmov} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cab \text{ je T-Fredholmov.}$$

Kako su invertibilni elementi $T-FC$, i kako je poznato da postoji okolina jediničnog elementa $1_{\mathcal{A}}$ čiji su elementi invertibilni zaključujemo da postoji okolina jediničnog elementa $1_{\mathcal{A}}$ čiji su svi elementi T-FC. Dakle, postoji otvorena okolina jediničnog elementa $1_{\mathcal{A}}$ čiji su elementi $T-FC$. $\square$

Posledica 2.3.2 *Skup svih Fredholm konzistentih operatora u $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ je gornje poluregularan.*

Kako su svi inveritiblni elementi Banahove algebre T-FC vidimo da će važiti teorema analogna Teoremi 2.1.3 za T-FC spektar, koji je definisan sa

$$\sigma_{TFC}(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ a - \lambda \text{ nije } T - FC\}$$

Teorema 2.3.2 *Za svaki $a \in \mathcal{A}$ važi $\sigma_{TFC}(f(a)) \subseteq f(\sigma_{TFC}(a))$ za sve lokalno nekonstantne funkcije f analitičke u nekoj okolini skupa $\sigma(a) \cup \sigma_{TFC}(a) = \sigma(a)$, i $f(\sigma_{CI}(a)) \subseteq f(\sigma(a))$, za sve funkcije f analitičke na nekoj okolini skupa $\sigma(a)$.*

Kao i u slučaju CI spektra, kada posmatramo slučaj $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i Fredholmove operatore, Hermitski operatori će imati prazan FC spektar. Motivisani Posledicom 2.3.1 i zaključcima o skupu CI operatora prirodno je očekivati da skup svih Fredholm konzistentih operatora u $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ nije u opštem slučaju regularan i da FC spektar u opštem slučaju nije zatvoren. Naredni primeri će nam pomoći u tome:

Primer 2.4.1. Neka je $A \in \mathcal{B}(l^2)$ definisan na sledeći način:

$$Ax = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, \dots), \ x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l^2.$$

Drugim rečima, $Ae_n = e_{2n-1}$, gde je e_n n-ti vektor standardne ortonormirane baze prostora l^2. Lako se proverava da je A levo invertibilan, ali ne i desno inveritibilan i $d(A) = \infty$. Sledi da je A levo Fredholmov, ali ne i desno Fredholmov, pa A nije Fredholm konzistentan. Dok za

$$(I - A)x = (0, x_2, x_3 - x_2, x_4, x_5 - x_3, x_6, \dots), \ x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l^2,$$

imamo da važi

$$\mathcal{N}(I-A)=\mathcal{R}(I-A)^{\perp}=\{x\in l^2:\, x_n=0, n\geq 2\}.$$

Poslednji deo jednakosti sledi iz činjenice da za

$$(I-A^*)x=(0,x_2-x_3,x_3-x_5,x_4-x_7,x_5-x_9,\dots)$$

imamo da $x\in\mathcal{N}(I-A^*)$ ako

$$x_n=x_{2n-1}=x_{4n-3}=...$$

odakle sledi da je

$$\mathcal{N}(I-A^*)=\{x\in l^2:\, x_n=0, n\geq 2\}.$$

Vidimo da je $n(I-A)=d(I-A)=1$, iz čega zaključujemo da je $I-A$ Fredholmov i samim tim Fredholm konzistentan. Definišimo operator $T\in\mathcal{B}(l^2\oplus l^2)$ sa

$$T=A\oplus I_{l^2}.$$

Operator T takođe nije Fredholm konzistentan i

$$I_{l^2\oplus l^2}-T=(I_{l^2}-A)\oplus 0,$$

pa je $n(I_{l^2\oplus l^2}-T)=d(I_{l^2\oplus l^2}-T)=\infty$, što znači da je $I-T$ Fredholm konzistentan u $\mathcal{B}(l^2\oplus l^2)$. Za $(I_{l^2\oplus l^2}-T)T$ takođe važi $n((I_{l^2\oplus l^2}-T)T)=d((I_{l^2\oplus l^2}-T)T)=\infty$, pa je i ovaj operator Fredholm konzistentan u $\mathcal{B}(l^2\oplus l^2)$. Najzad, kako je $(I_{l^2\oplus l^2}-T)+T=I_{l^2\oplus l^2}$, i kako $I_{l^2\oplus l^2}-T$ i T komutiraju vidimo da uslov (2) iz Definicije 1.2.1 nije ispunjen iz čega zaključujemo da skup svih Fredholm konzistenih operatora u $\mathcal{B}(l^2\oplus l^2)$ nije regularan.

Primer 2.4.2. Neka je $\mathcal{H}$ separabilan Hilbertov prostor. Onda $\mathcal{H}$ možemo predstaviti kao ortogonalnu direktnu sumu zatvorenih beskonačno dimenzionalnih potprostora M_n, $n\in\mathbb{N}$ ($\mathcal{H}=\bigoplus_{n=1}^{\infty}M_n$). Kako bismo pokazali valjanost ove tvrdnje uradićemo sledeće. Kako je $\mathcal{H}$ separabilan znamo da postoji zatvoren beskonačno dimenzionalan podprostop M_1 prostora $\mathcal{H}$ sa beskončnom kodimenzijom. Kao zatvoren potprostor separabilnog prostora sledi da je i $M_1^{\perp}$ separabilan Hilbertov prostor. Neka je M_2 zatvoren potprostor od $M_1^{\perp}$ izomorfan sa M_1. Nastavljajući ovaj postupak dolazimo do traženih potprostora M_n, $n\in\mathbb{N}$. Neka je $(\lambda_n)_n$ niz kompleksnih brojeva koji teži 0. Za svaki $n\in\mathbb{N}$ postoji ograničen linearan operator $T_n\in\mathcal{B}(\mathcal{M}_n)$ takav da su $T_n, T_n-\lambda_m$, $m\in\mathbb{N}\setminus\{n\}$ invertibilni, $n\,(T_n-\lambda_n)=\infty$ i $\mathcal{R}\,(T_n-\lambda_n)=M_n$.

Sledi da $\lambda_n \in \sigma_{FC}(T_n)$ i $0, \lambda_m \notin \sigma_{FC}(T_n)$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$. Štaviše, operatore T_n možemo odabrati tako da je familija operatora T_n uniformno ograničena. Sledi da je $T = \bigoplus_{n=1}^{\infty} T_n$ ograničen linearan operator na $\mathcal{H}$ koji je invertibilan i važi

$$n(T - \lambda_n) = \infty,\ \mathcal{R}(T - \lambda_n) = \mathcal{H},\ n \in \mathbb{N}.$$

Ovo znači da $\lambda_n \in \sigma_{FC}(T)$, $n \in \mathbb{N}$ i $0 \notin \sigma_{FC}(T)$. Zaključujemo da $\sigma_{FC}(T)$ nije zatvoren. Kako bi bili sigurni konstruisaćemo operatore T_n. Za svako $n \in \mathbb{N}$ postoji $r_n > 0$ takav da $\lambda_m \notin B(\lambda_n, r_n)$, za $m \neq n$. Sledi $|r_n| < |\lambda_n|$ i $0 \notin B(\lambda_n, r_n)$. Štaviše, za svaki $n \in \mathbb{N}$, postoji zatvoren potprostor $\mathcal{K}_n$ takav da je $\mathcal{M}_n = \mathcal{K}_n \oplus \mathcal{K}_n^{\perp}$ i $\dim \mathcal{K}_n = \dim \mathcal{K}_n^{\perp} = \infty$. Znamo da je $\mathcal{K}_n$ izomorfan sa $\mathcal{M}_n$. Neka je J_n' taj izomorfizam. Bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je J_n' unitaran. Ovaj izomorfizam možemo prirodno produžiti definisanjem operatora $J_n \in \mathcal{B}(\mathcal{M}_n)$ sa

$$J_n x = \begin{cases} J_n' x, & x \in K_n \\ 0, & x \in \mathcal{K}_n^{\perp} \end{cases}.$$

Imamo da je $\mathcal{N}(J_n) = \mathcal{K}_n^{\perp}$ i $\mathcal{R}(J_n) = \mathcal{M}_n$. Definišimo T_n sa

$$T_n = r_n J_n + \lambda_n.$$

Za ovako definisan T_n imamo da $T_n - \lambda_n = r_n J_n$, te je $n(T_n - \lambda_n) = n(J_n) = \infty$ i $\mathcal{R}(T_n - \lambda_n) = \mathcal{R}(J_n) = \mathcal{M}_n$, i važi $\lambda_n \in \sigma_{FC}(T_n)$. Kako je $|\lambda_n|, |\lambda_n - \lambda_m| > |r_n| = \|r_n J_n\|$, za $m \neq n$ sledi da su T_n i $T_n - \lambda_m$, $m \neq n$, invertibilni, i $\|T_n\| \leq r_n + \lambda_n \leq 1 + M$ za $n \in \mathbb{N}$, gde je M bilo koja gornja granica konvergentnog niza $(\lambda_n)_n$ što pokazije da je familija $(T_n)_n$ uniformno ograničena.

Kako je $\sigma_{FC}(T) = \emptyset$ za sve $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ kada je $\mathcal{H}$ konačno dimenzionalan, skup svih Fredholm konzistentih operatora će se poklopiti sa $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ i stoga trivijalno biti regularan. Analogno Teoremi 2.1.4 zaključujemo da važi sledeća

Teorema 2.3.3 *Neka je $\mathcal{H}$ Hilbertov prostor. Skup svuh Fredholm konzistentih operatora iz $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ će biti regularan ako i samo ako je $\mathcal{H}$ konačno dimenzionalan.*

2.4 Fredholm konzistentnost operatorskih matrica oblika $M_{T,S}$

U ovoj sekciji ćemo razmatrati problem kompletiranja operatorske matrice $M_{T,S}$ date sa (2.1) do Fredholm konzistentnog operatora, to jest uslovima pod kojima za date operatore $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je $M_{T,S}$ Fredholm konzistentan operator. Primetimo da je ovaj problem usko povezan sa problem kompletiranja operatorske matrice $M_{T,S}$ do Fredholmovog, (levo) desno Fredholmovog operatora jer kao što smo već napomenuli operator nije FC ako i samo ako je levo Fredholmov, ali ne i desno Fredholmov, ili desno Fredholmov ali ne i levo Fredholmov. Pretpostavljamo da je $\mathcal{H}$ beskonačno dimenzionalan prostor jer je u protivnom problem trivijalan.

Prvo navodimo nekoliko pomoćnih rezultata o operatorima na Banahovim prostorima.

Lema 2.4.1 *Neka su $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ Banahovi prostori, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$. Ako je $ST \in \phi(\mathcal{X}, \mathcal{Z})$ onda važi: $T \in \phi(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ if and only if $S \in \phi(\mathcal{Y}, \mathcal{Z})$.*

Lema 2.4.2 *Neka su $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Banahovi prostori, $T \in \phi(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ i neka je $F \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operator konačnog ranga. Onda $T + F \in \phi(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Analogan zaključak važi i za klase ϕ_+,ϕ_-,ϕ_l and ϕ_r.*

Lema 2.4.3 *Neka su $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ Banahovi prostori i $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Operator T je levo Fredholmov (desno Fredholmov) ako i samo ako postoji operator $S \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ takav da $ST = I_{\mathcal{X}} + F$ ($TS = I_{\mathcal{Y}} + F$), gde $F \in \mathcal{B}(\mathcal{X})(\mathcal{B}(\mathcal{Y}))$ operator konačnog ranga.*

Naredne teoreme daju uslove pod kojima postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je operatorska matrica $M_{T,S}$ data sa (2.1) Fredholmov, levo Fredholmov ili desno Fredholmov operator, redom. Interesantno je primetiti da su potrebni i dovoljni uslovi egzistencije traženih operatora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ isti za sva tri tipa Fredholmovih operatora.

Teorema 2.4.1 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ dati i $\dim \mathcal{K} = \infty$. Operatorska matrica $M_{T,S}$ data sa (2.1) je Fredholmov operator za neke $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(K)$ ako i samo ako je $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \in \phi_r(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}, \mathcal{H}) \setminus \phi_l(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}, \mathcal{H})$.*

Dokaz. ($\Leftarrow$:) Pretpostavimo da je $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \in \phi_r(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}) \setminus \phi_l(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$. Kako je $n(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}) = \infty$, znamo da postoji levo invertibilan operator $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$, takav da je $\mathcal{R}(Y) = \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})$. Naravno,

$$\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} Y = 0. \tag{2.4}$$

Kako je slika operatora Y zatvorena, znamo da postoji njegov Moore-Penroseov inverz $Y^\dagger \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}, \mathcal{K})$. Slično, kako je slika operatora $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ zatvorena znamo da postoji njegov Mur-Penrozov inverz $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}^\dagger$, koji će zbog lakšeg označavanja biti označen sa L. Naravno,

$$\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} L = I_{\mathcal{H}} - P_{\mathcal{R}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})^\perp}. \tag{2.5}$$

Kako je $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ desno Fredholmov, znamo da je $\dim \mathcal{R}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})^\perp < \infty$ pa je $P_{\mathcal{R}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})^\perp}$ operator konačnog ranga. Štaviše, iz $\mathcal{R}(L) = \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})^\perp$ i $\mathcal{N}(Y^\dagger) = \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})^\perp$, sledi

$$Y^\dagger L = 0. \tag{2.6}$$

Pretpostavimo sada da Y, $Y^\dagger$ i L imaju sledeće reprezentacije u obliku operatorskih matrica:

$$Y = \begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix} : \mathcal{K} \to \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix},$$

$$Y^\dagger = \begin{bmatrix} T & S \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix} \to \mathcal{K},$$

i

$$L = \begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix} : \mathcal{H} \to \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix}.$$

Iz (2.4)-(2.6) sledi

$$\begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{K}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{\mathcal{R}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})^\perp} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz činjenice da je $P_{\mathcal{R}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})^\perp}$ operator konačnog ranga, koristeći Lemu 2.4.2 zaključujemo da je $M_{T,S}$ desno Fredholmov. Iz

$$\mathcal{N}(M_{T,S}) = \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}) \cap \mathcal{N}(\begin{bmatrix} T & S \end{bmatrix}) = \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}) \cap \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})^\perp = \{0\},$$

vidimo da je $M_{T,S}$ Fredholmov operator.

($\Rightarrow$:) Pretpostavimo da postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je operatorska matrica $M_{T,S}$ data sa (2.1) Freholmov operator. Tada postoje operatori $N \in \phi(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$ i $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$ takvi da je P operator konačnog ranga i $M_{T,S}N = I_{\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}} + P$, što možemo predstaviti sa

$$\begin{bmatrix} A & C \\ T & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & E \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{K}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

gde su svi operatori P_{ij} operatori konačnog ranga. Specijalno, iz (2.7) vidimo da važi

$$\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix} = I_{\mathcal{H}} + P_{11},$$

što implicira da je $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ desno Fredholmov operator. Na sličan način zaključujemo da je $\begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix}$ levo Fredholmov, što implicira da $n\left(\begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix}\right) < \infty$. Kako je P_{12} operator konačnog ranga i kako je $\dim \mathcal{K} = \infty$ sledi da je $n(P_{12}) = \infty$. Sada iz

$$\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix} = P_{12}. \tag{2.8}$$

i činjenice da je $n\left(\begin{bmatrix} E \\ G \end{bmatrix}\right) < \infty$, sledi da je $n(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}) = \infty$. Konačno zaključujemo da $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \in \phi_r(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}) \setminus \phi_l(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$. □

Kao posledicu sledeće

Teorema 2.4.2 [32] *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ i $C \in B(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Sledeća trvrđenja su ekvivalentna:*

(a) $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \in \phi_r(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}, \mathcal{X})$, *i postoji* $J \in \phi_l\left(\mathcal{Y}, \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})\right) \setminus \phi\left(\mathcal{Y}, \mathcal{N}(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix})\right)$;

(b) $M_{T,S} \in \phi_r(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}) \setminus \phi(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$ *za neke* $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *i* $S \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$.

dobijamo

Teorema 2.4.3 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ i $\dim \mathcal{K} = \infty$. Postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(K)$ takvi da operatorska matrica $M_{T,S}$ data sa* (2.1) *pripada skupu $\phi_r(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$ ($\phi_r(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}) \setminus \phi_l(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$) ako i samo ako je $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix} \in \phi_r(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}) \setminus \phi_l(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$.*

Teorema 2.4.4 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ i $\dim \mathcal{K} = \infty$. Onda postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(K)$ takvi da je operatorska matrica $M_{T,S}$ data sa (2.1) levo ali ne i desno Fredholmova.*

Dokaz. Kako su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ beskonačno dimenzionalni separabilni Hilbertovi prostori imamo da je $\mathcal{K} \cong \mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$, pa rezultat sledi iz Teoreme 3.2 iz [32] u kojoj je pokazano da u slučaju kada je $\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}$ izomorfan za $\mathcal{Y}$ uvek postoje $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ takvi da važi $M_{T,S} \in \phi_l(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y}) \setminus \phi(\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})$. □

Ako je $\mathcal{K}$ konačno dimenzionalan imamo da je $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ Fredholmov (levo Fredholmov, desno Fredholmov, zatvorene slike) ako i samo ako je $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$ Fredholmov (levo Fredholmov, desno Fredholmov, zatvorene slike). Štaviše, u slučaju kada je $M_{T,S}$ data sa (2.1) onda je $M_{T,S}$ perturbacija operatorom konačnog ranga operatorske matrica $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (važi i obrat). Iz ovih činjenica zaključujemo da važi sledeća

Teorema 2.4.5 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ i $\dim \mathcal{K} < \infty$. Operatorska matrica $M_{T,S}$ data sa* (2.1) *je Fredholmov (levo Fredholmov, desno Fredholmov) za sve $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ ako i samo ako je A Fredholmov (levo Fredholmov, desno Fredholmov).*

Teorema 2.4.6 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$. Ako je $\dim K = \infty$, operatorska matrica $M_{T,S}$ data sa (2.1) je Fredholm konzistentan operator za neke operatore $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ ako i samo ako $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ nije levo Fredholmov operator. Štaviše, ako je $M_{T,S}$ Fredholm konzistentan operator za neke operatore $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, tada je $M_{0,0}$ takođe Fredholm konzistentan operator.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ levo Fredholmov. Dokazaćemo da uslovi (i)-(iii) Teoreme 1.2.2 nisu zadovoljeni ni za jedan izbor operatora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Iz $n\left(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}\right) < \infty$ i činjenice da za proizvoljne $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ važi $\mathcal{N}(M_{T,S}) \subseteq \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}\right)$ sledi da za proizvoljne $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ važi $n(M_{T,S}) < \infty$. Stoga uslov (ii) iz Teoreme 1.2.2 nije uspunjen. Iz Teoreme 2.4.1 sledi da uslov (i) Teoreme 1.2.2 nije zadovoljen ni za jedan izbor operatora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$. Kako bi dokazali da uslov (iii) Teoreme 1.2.2 nije ispunjen ni za jedan izbor operatora $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$, dovoljno je dokazati da je za proizvoljne $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ slika restrikcije operatora $M_{T,S}$ na potprostor $\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}\right)^{\perp}$ zatvorena, no to sledi direktno iz Leme 2.2.1.

Ako $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ nije levo Fredholmov razmatramo dva moguća slučaja.

Slučaj 1. Slika operatora $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ nije zatvorena. Očigledno sledi da slika operatora $M_{0,0}$ takođe nije zatvorena pa iz Teoreme 1.2.2 imamo da je $M_{0,0}$ Fredholm konzistentan operator.

Slučaj 2. Slika operatora $\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}$ jeste zatvorena i $n\left(\begin{bmatrix} A & C \end{bmatrix}\right) = \infty$. Onda je $n(M_{0,0}) = d(M_{0,0}) = \infty$, slika operatora $M_{0,0}$ je zatvorena, pa iz Teoreme 1.2.2 dobijamo da je $M_{0,0}$ Fredholm konzistentan operator. $\square$

Slično slučaju konzistentnosti u invertibilnosti dokazujemo da uvek možemo naći operatore $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takve da $M_{T,S}$ nije FC operator kada je $\dim \mathcal{K} = \infty$.

Teorema 2.4.7 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$. Ako je $\dim \mathcal{K} = \infty$, onda postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da operatorska matrica $M_{T,S}$ data sa* (2.1) *nije Freholm konzistentan operator.*

Dokaz. Iz Teoreme 2.4.4 znamo da postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je $M_{T,S}$ levo Fredholmov, ali ne i desno Fredholmov operator. Iz Teoreme 1.2.2 sledi da $M_{T,S}$ nije Fredholm konzistentan operator operator.□

Analogno Teoremi 2.4.5 u slučaju kada je $\mathcal{K}$ konačno dimenzionalan zaključujemo da važi naredna

Teorema 2.4.8 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$. Ako je $\dim \mathcal{K} < \infty$, Tada je operatorska matrica $M_{T,S}$ data sa* (2.1) *Fredholm konzistentan operator za sve $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ ako i samo ako je A Fredholm konzistentan operator.*

Koristeći Teoreme 2.4.6-2.4.8 možemo potpuno opisati skupove

$$\bigcap_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{FC}(M_{T,S}) \ \text{ i } \bigcup_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{FC}(M_{T,S}).$$

Posledica 2.4.1 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$.*

(1) *Ako je $\dim \mathcal{K} = \infty$, tada*

$$\bigcap_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{FC}(M_{T,S}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} A - \lambda & C \end{bmatrix} \text{ je levo Fredholmov}\},$$

and

$$\bigcup_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{FC}(M_{T,S}) = \mathbb{C}.$$

(2) *Ako je $\dim \mathcal{K} < \infty$, tada*

$$\bigcap_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{FC}(M_{T,S}) = \bigcup_{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}), S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{FC}(M_{T,S}) = \sigma_{FC}(A).$$

U radu [18] je dokazano da za proizvoljne operatore $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ važi jednakost

$$\bigcap_{C \in \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})} \sigma_{FC}(M_C) = \sigma_{FC}(M_0),$$

gde je M_C operatorska matrica data sa

$$M_C = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

U slučaju operatorske matrice (2.1) analogan rezultat ne važi. U narednom primeru pokazačemo da važi

$$\bigcap_{T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}),S\in\mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{FC}(M_{T,S}) \neq \sigma_{FC}(M_{0,0}). \tag{2.9}$$

Primer 2.4.3. Pretpostavimo da je $\dim \mathcal{K} = \dim \mathcal{H} = \infty$ i neka je $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ako je operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je $A - \lambda \in \phi_l(\mathcal{H}) \setminus \phi_r(\mathcal{H})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ operator takav da je $n(C) = \infty$, imamo da $\begin{bmatrix} A-\lambda & C \end{bmatrix} \notin \phi_l(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}, \mathcal{H})$. Iz Teoreme 2.4.6 znamo da postoje operatori $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ i $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ takvi da je $M_{T,S} - \lambda$ Fredholm konzistentan operator, pa važi

$$0 \notin \bigcap_{T\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K}),S\in\mathcal{B}(\mathcal{K})} \sigma_{FC}(M_{T,S}). \tag{2.10}$$

Dokazaćemo da $M_{0,0} - \lambda I \in \phi_l(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}) \setminus \phi_r(\mathcal{H}\oplus\mathcal{K})$, što će značiti da je $0 \in \sigma_{FC}(M_{0,0})$, što će zajedno sa (2.10) implicirati da (2.9) važi. Kako je $A - \lambda$ levo Fredholmov, znamo da postoji $A_0 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takav da je $A_0(A - \lambda) = I_{\mathcal{H}} + F$, gde je $F \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operator konačnog ranga. Imamo da je $M_{0,0} - \lambda I \in \phi_l(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$ jer važi

$$\begin{bmatrix} A_0 & \frac{1}{\lambda}A_0C \\ 0 & -\frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A-\lambda & C \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} + F & 0 \\ 0 & I_{\mathcal{K}} \end{bmatrix}.$$

Dokažimo da $M_{0,0} - \lambda I \notin \phi_r(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $M_{0,0} - \lambda I \in \phi_r(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$. Tada postoji operatorska matrica

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ Y & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{H} \\ \mathcal{K} \end{bmatrix},$$

takva da važi

$$\begin{bmatrix} A-\lambda & C \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{\mathcal{H}} + F_1 & F_2 \\ F_3 & I_{\mathcal{K}} + F_4 \end{bmatrix},$$

gde su operatori F_i operatori konačnog ranga. Kako je $-\lambda Y = F_3$, sledi da je Y operator konačnog ranga. Sada iz $(A - \lambda)X + CY = I_{\mathcal{H}} + F_1$, sledi $A - \lambda \in \phi_r(\mathcal{H})$, što je kontradikcija. Zaključujemo, $M_{0,0} - \lambda I \notin \phi_r(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$.

Glava 3

Osobine linearne kombinacije operatora

3.1 Pomoćni rezultati o gornje-trougaonim operatorskim matricama

U ovoj sekciji najpre navodimo rezultate o gornje trougaonim operatorskim matricama koje ćemo koristiti u proučavanju linearne kombinacije operatora.

Teorema 3.1.1 [*15*] *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ dati operatori, gde su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ Banahovi prostori. Operatorska matrica $M_C = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ je injektivna ako i samo ako je A injektivan i $\mathcal{R}(C|_{\mathcal{N}(B)}) \cap \mathcal{R}(A) = \{0\}$.*

Primedba: Analizirajući dokaz Teoreme 3.1.1 dat u [15] vidimo da će bez ikakvih dodatnih modifikacija ova teorema važiti za operatorske matrice tipa:

$$M_C = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} : \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{Y}_1 \to \mathcal{X}_2 \oplus \mathcal{Y}_2,$$

gde su $\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i$, $i = 1, 2$ Banahovi prostori.

Teorema 3.1.2 [*15*] *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Operatorska matrica M_C je levo invertibilna ako i samo su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) *A je levo invertibilan operator;*

(ii) $\begin{bmatrix} (I - P_{\mathcal{R}(A)})C \\ B \end{bmatrix}$ *je levo invertibilan operator.*

Primedba: Pod $P_{\mathcal{R}(A)}$ podrazumevamo proizvoljnu, ali fiksiranu, projekciju na $\mathcal{R}(A)$. Slično, koristićemo oznaku $P_{\mathcal{N}(B)}$ za proizvoljnu, ali fiksiranu projekciju na $\mathcal{N}(B)$.

Teorema 3.1.3 [*15*] *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$. Operatorska matrica M_C je desno invertibilna ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) *B je desno invertibilan operator;*

(ii) *$\begin{bmatrix} A & CP_{\mathcal{N}(B)} \end{bmatrix}$ je desno invertibilan operator.*

Primedba: U slučaju kada posmatramo operatorsku matricu M_C na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ neki od uslova prethodnih teorema mogu biti formulisani na drugačiji način. Uslov (ii) iz Teoreme 3.1.2 je ekvivalentan sa uslovom da je $\begin{bmatrix} C^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp} & B^* \end{bmatrix}$ desno invertibilna,

$$\mathcal{R}(C^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp}) + \mathcal{R}(B^*) = \mathcal{K}.$$

Uslov (ii) Teoreme 3.1.3 je ekvivalentan sa

$$\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(CP_{\mathcal{N}(B)}) = \mathcal{H}.$$

Štaviše, kao i u slučaju Teoreme 3.1.1, Teoreme 3.1.2 i Teoreme 3.1.3 mogu biti reformulisane u slučaju kada je $A \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), B \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2)$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K}_1, \mathcal{H}_2)$, gde su $\mathcal{H}_i, \mathcal{K}_i$, $i = 1, 2$, Hilbertovi prostori.

Sada navodimo rezultate o invertibilnosti operatorske matrice M_C:

Teorema 3.1.4 [*15*] *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$ i $B \in \mathcal{B}(\mathcal{Y})$. Operatorska matrica M_C je invertibilna za neki $C \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(i) *A je levo invertibilan operator,*

(ii) *B je desno invertibilan operator,*

(iii) *$\mathcal{N}(B) \cong \mathcal{X}/R(A)$.*

Ako su uslovi (i)-(iii) *zadovoljeni, onda je skup svih $C \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ takvih da je operatorska matrica M_C invertibilna dat sa*

$$\begin{aligned} S(A, B) = \{C \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) : C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{P} \\ \mathcal{N}(B) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{S} \end{bmatrix}, \\ C_4 \textit{ je invertibilan}, \mathcal{X} = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{S} \textit{ i } \mathcal{Y} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{N}(B)\}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

U primedbi 2.5 iz [15] dokazano je da ako posmatramo proizvoljne, ali fiksirane dekompozicije od $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X} = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{S}$ i $\mathcal{Y} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{N}(B)$, tada je

$$\begin{aligned} S(A,B) = \{C \in \mathcal{B}(\mathcal{Y},\mathcal{X}) : C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{P} \\ \mathcal{N}(B) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{S} \end{bmatrix}, \\ C_4 \text{ je invertibilan}\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Na osnovi gornjih rezultata i činjenice da je invertibilnost operatora $C_4 \in \mathcal{B}(\mathcal{N}(B),\mathcal{S})$ ekvivalentna sa time da je $P_{\mathcal{S},\mathcal{R}(A)}C|_{\mathcal{N}(B)}$ injektivan operator čija je slika $\mathcal{S}$, u slučaju separabilnih Hilbertovih prostora imamo sledeću karakterizaciju inveritiblnosti gornje trougaone operatorske matrice M_C:

Teorema 3.1.5 *Neka su $\mathcal{H}$ i $\mathcal{K}$ separabilni Hilbertovi prostori i $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$. Operatorska matrica $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$ je invertibilna ako i samo ako je A levo invertibilan, B desno invertibilan i $P_{\mathcal{S},\mathcal{R}(A)}C|_{\mathcal{N}(B)}$ injektivan operator sa (zatvorenom) slikom $\mathcal{S}$, gde je $\mathcal{H} = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{S}$.*

Ostaje da navedemo i potrebne i dovoljne uslove pod kojim je slika operatorske matrice M_C zatvorena:

Teorema 3.1.6 [45] *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2,\mathcal{H}_1)$ dati operatori na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$. Slika operatorske matrice M_C je zatvorena ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovu:*

(i) $\mathcal{R}(P_{\mathcal{R}(A)^\perp}C|_{\mathcal{N}(B)})$ *je zatvoren potprostor;*

(ii) $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}C|_{\mathcal{N}(P_{\mathcal{R}(A)^\perp}C|_{\mathcal{N}(B)})}) = \overline{\mathcal{R}(A)}$;

(iii) $\mathcal{R}(B^*) + \mathcal{R}(P_{\mathcal{N}(B)^\perp}C^*|_{\mathcal{R}(P_{\mathcal{R}(A)^\perp}C|_{\mathcal{N}(B)})^\perp}) = \overline{\mathcal{R}(B^*)}$.

Primedba: Uslovi prethodne teoreme se mogu zapisati u malo pogodnijem obliku. Prvo, primetimo da je

$$\mathcal{N}(P_{\mathcal{R}(A)^\perp}C|_{\mathcal{N}(B)}) = \{x \in \mathcal{N}(B) |\, Cx \in \overline{\mathcal{R}(A)}\},$$

iz čega vidimo da je

$$\mathcal{R}(P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}C|_{\mathcal{N}(P_{\mathcal{R}(A)^\perp}C|_{\mathcal{N}(B)})}) = \mathcal{R}(C|_{\mathcal{N}(B)}) \cap \overline{\mathcal{R}(A)}.$$

Iz prethodne jednakosti zaključujemo da uslov (ii) možemo zameniti sa

$$\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(C|_{\mathcal{N}(B)}) \cap \overline{\mathcal{R}(A)} = \overline{\mathcal{R}(A)}.$$

Potpuno analogno dolazimo do zaključka da uslov (iii) možemo zameniti sa

$$\mathcal{R}(B^*) + \mathcal{R}(C^*|_{\mathcal{R}(A)^\perp}) \cap \overline{\mathcal{R}(B^*)} = \overline{\mathcal{R}(B^*)}.$$

Koristeći ove zaključke dolazimo do preformulacije Teoreme 3.1.6:

Teorema 3.1.7 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ dati operatori na Hilbertovim prostorima $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$. Slika operatorske matrice M_C je zatvorena ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovu:*

(i) $\mathcal{R}(P_{\mathcal{R}(A)^\perp} C|_{\mathcal{N}(B)})$ *je zatvoren potprostor;*

(ii) $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(C|_{\mathcal{N}(B)}) \cap \overline{\mathcal{R}(A)}$;

(iii) $\overline{\mathcal{R}(B^*)} = \mathcal{R}(B^*) + \mathcal{R}(C^*|_{\mathcal{R}(A)^\perp}) \cap \overline{\mathcal{R}(B^*)}$.

3.2 Injektivnost linearne kombinacije operatora

Koristeći rezultate navedene u prethodnoj sekciji, možemo se pozabaviti uslovima pod kojim je linearna kombinacija dva operatora injektivna. Time se bavi naredna teorema:

Teorema 3.2.1 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Operator $\alpha A + \beta B$ je injektivan ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(i) $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$;

(ii) $\mathcal{N}(\alpha A + \beta B) \cap \mathcal{N}(B)^\perp = \{0\}$;

(iii) $\mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}) \cap \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) = \{0\}$,

gde je $\mathcal{T} = B^{-1}(\mathcal{R}(A)) \cap \mathcal{N}(B)^\perp$.

Dokaz. Prvo moramo primetiti da operatori A i B imaju sledeće reprezentacije:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ \mathcal{N}(B)^\perp \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}(A)} \\ \mathcal{R}(A)^\perp \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ \mathcal{N}(B)^\perp \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}(A)} \\ \mathcal{R}(A)^\perp \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

gde su $\mathcal{H} = \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{N}(B)^\perp = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{R}(A)^\perp$ razlaganja prostora $\mathcal{H}$. Vidimo da je linearna kombinacija $\alpha A + \beta B$ injektivna ako i samo ako je operatorska matrica

$$\begin{bmatrix} \alpha A_1 & \beta B_1 + \alpha A_2 \\ 0 & \beta B_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ \mathcal{N}(B)^\perp \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}(A)} \\ \mathcal{R}(A)^\perp \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

injektivna. Prema Teoremi 3.1.1, operatorska matrica (3.5) je injektivna ako i samo ako važe sledeći uslovi:

(i) A_1 je injektivan;

(ii) $(\alpha A_2 + \beta B_1)|_{\mathcal{N}(B_2)}$ je injektivan i $\mathcal{R}((\alpha A_1 + \beta B_2)|_{\mathcal{N}(B_2)}) \cap \mathcal{R}(A_1) = \{0\}$.

Očigledno je da (i) važi ako i samo ako je $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$. Sada detaljnije ispitujemo uslove iz (ii). Kako je $\alpha A_2 + \beta B_1 = P'_{\overline{\mathcal{R}(A)}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{N}(B)^\perp}$, i $\mathcal{T}' = \mathcal{N}(B_2) \subseteq \mathcal{N}(B)^\perp$, imamo da je $(\alpha A_2 + \beta B_1)|_{\mathcal{T}'}$ injektivan ako i samo ako je $P'_{\overline{\mathcal{R}(A)}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}'}$ injektivan i presek njegove slike sa $\mathcal{R}(A_1) = \mathcal{R}(A|_{\mathcal{N}(B)}) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ sadrži samo nula vektor. Iz $\mathcal{T}' = B^{-1}(\overline{\mathcal{R}(A)}) \cap \mathcal{N}(B)^\perp$ vidimo da je drugi uslov iz (ii) ekvivalentan sa $\mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}'}) \cap \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) = \{0\}$ (ovde koristimo činjenicu da $\mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$ implicira $P'_{\mathcal{R}(A)}(\alpha A + \beta B)_{\mathcal{T}'} = (\alpha A + \beta B)_{\mathcal{T}'}$). Ponovo koristeći $\mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}'}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$ dobijamo da je $P_{\overline{\mathcal{R}(A)}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}'}$ injektivan ako i samo ako je $\mathcal{N}(P_{\mathcal{R}(A)}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{N}(B)^\perp}) \cap \mathcal{T}' = \{0\}$, što je očigledno ekvivalentno sa $\mathcal{N}(\alpha A + \beta B) \cap \mathcal{N}(B)^\perp = \{0\}$. Kako bismo završili dokaz ostaje da pokažemo da je $\mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}'}) \cap \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) = \{0\}$ ako i samo ako je $\mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}) \cap \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) = \{0\}$, gde je $\mathcal{T} = B^{-1}(\mathcal{R}(A)) \cap \mathcal{N}(B)^\perp$. Dovoljno je posmatrati slučaj $\mathcal{R}(A) \neq \overline{\mathcal{R}(A)}$. Potprostor $\mathcal{T}'$ možemo razložiti kao $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cup \mathcal{T}_1$, gde je

$$\mathcal{T}_1 = B^{-1}(\overline{\mathcal{R}(A)} \setminus \mathcal{R}(A)) \cap \mathcal{N}(B)^\perp.$$

Primetimo da $\mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}_1}) \cap \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) = \{0\}$ uvek važi. Zaista, ukoliko bi pretpostavili da postoji nenula vektor u $\mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}_1}) \cap \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$, onda bi postojali vektori $x \in \mathcal{T}_1$ i $y \in N(B)$ za koje važi $\alpha Ax + \beta Bx = Ay$. No onda bi dobili

$$\beta Bx = A(\alpha x + y),$$

iz čega sledi $x \in \mathcal{T}$, što je kontradikcija sa činjenicom $\mathcal{T} \cap \mathcal{T}_1 = \emptyset$. Iz

$$\mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}'}) = \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}) \cup \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}_1})$$

iz iz prethodnog zaključka vidimo da će $\mathcal{R}((\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}})\cap\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})=\{0\}$ važiti ako i samo ako je $\mathcal{R}((\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}'})\cap\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})=\{0\}$. $\Box$

Važno je napomenuti da zbog prirode Teoreme 3.1.1 ne moramo koristiti ortogonalna razlaganja prostora $\mathcal{H}$, tj. možemo iskoristiti razlaganja

$$\mathcal{H}=\mathcal{N}(B)\oplus\mathcal{N}=\overline{\mathcal{R}(A)}\oplus\mathcal{M},$$

gde su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zatvoreni potprostori komplementarni potprostorima $\overline{\mathcal{R}(A)}$ i $\mathcal{N}(B)$, redom. Tako da uslov (ii) iz Teoreme 3.2.1 možemo formulisati na sledeći način: $\mathcal{N}(\alpha A+\beta B)\cap\mathcal{N}=\{0\}$; gde je potprostor $\mathcal{T}$ sada dat sa $B^{-1}(\mathcal{R}(A))\cap\mathcal{N}$.

Pre nego što nastavimo sa daljim istraživanjem iz narednog elementarnog primera vidimo da injektivnost linearne kombinacije operatora može zavisiti od izbora konstanti što će poslužiti kao dodatna motivacija da potražimo specijalne slučajeve gde injektivnost linearne kombinacije operatora ne zavisi od izbora konstanti.

Primer 3.2.1. Neka su $A,B\in\mathcal{B}(l_2)$ operatori definisani kao blok- dijagonalni operatori čiji su dijagonalni blokovi matrice

$$M_A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ \frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ 0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix},\ M_B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\ 0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

za A, i B, redom. Lako se proverava da je $A+B$ injektivan, dok $A-B$ nije. Ako situaciju analiziramo koristeći Teoremu 3.2.1 vidimo da važi:

$$\mathcal{N}(A)=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\mid x_{3k-1}=-x_{3k-2},x_{3k}=0,\ k\in\mathbb{N}\},$$

$$\mathcal{N}(B)=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\mid x_{3k-1}=x_{3k-2},x_{3k}=0,\ k\in\mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{N}(B)^{\perp}=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\mid x_{3k-1}=-x_{3k-2},\ k\in\mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{R}(A)=\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\mid x_{3k-1}=x_{3k-2},\ k\in\mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{T}=\{0\}.$$

Kako je $\mathcal{N}(A)\cap\mathcal{N}(B)=\{0\}$, i kako je $\mathcal{T}=\{0\}$ dobijamo da je uslov (i) Teoreme 3.2.1 zadovoljen, i pritom je uslov (iii) trivijalno zadovoljen. Lako se proverava da je $A+B$ injektivan na $\mathcal{N}(B)^{\perp}$, dok $A-B$ nije, pa iz Teoreme 3.2.1 sledi da je $A+B$ injektivan, dok $A-B$ nije.

Primer 3.2.2. Neka su $A, B \in \mathcal{B}(l_2)$ blok-dijagonalni operatori čiji su dijagonalni blokovi matrice

$$N_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; N_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

redom. Lako se proverava da je $A + B$ injektivan, dok $A - B$ nije. Štaviše, iz $N_A^3 = N_B^3 = 0$ vidimo da su A i B nilpotentni operatori.

Iz ovog primera vidimo da i elementearne klase operatora nemaju osobinu da injektivnost linearne kombinacije dva operatora ne zavisi od izbora konstanti u linearnoj kombinaciji.

U nastavku sekcije se bavimo specijalnim slučajevima kada injektivnost linearne kombinacije $\alpha A + \beta B$ ne zavisi od izbora skalara $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

Teorema 3.2.2 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takvi da je $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tada je $\alpha A + \beta B$ injektivan operator ako i samo ako je $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$.*

Dokaz. Iz pretpostavke da je $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ sledi da je $\mathcal{T} = \{0\}$ pa su uslovi (ii) i (iii) Teoreme 3.2.1 trivijalno ispunjeni. Možemo zaključiti da će linearna kombinacija $\alpha A + \beta B$ biti injektivna ako i samo ako je $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$.$\square$

Slično se dobija sledeća teorema:

Teorema 3.2.3 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takvi da je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$, i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tada je $\alpha A + \beta B$ injektivan ako i samo ako je $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\alpha A + \beta B$ injektivan. Iz pretpostavke da je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$, sledi da važi $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$. Iz Teoreme 3.2.1 sledi da važe uslovi (ii) i (iii). Pretpostavimo da je $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) \neq \{0\}$. Iz ove pretpostavke sledi da postoji ne-nula vektor $z \in \mathcal{H}$ takav da je $z = Ax = By$, gde je $x \in \mathcal{N}(B)$ (ponovo koristimo pretpostavku da je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$) i $y \in \mathcal{N}(B)^\perp$ (ovo znači da je $y \in \mathcal{T} = B^{-1}(\mathcal{R}(A)) \cap \mathcal{N}(B)^\perp$). Iz injektivnosti operatora $\alpha A + \beta B$ imamo da je

$$(\alpha A + \beta B)\left(\frac{1}{\alpha}x - \frac{1}{\beta}y\right) = -\frac{\alpha}{\beta}Ay \neq 0.$$

Koristeći $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$, dobijamo da postoji $w \in \mathcal{N}(B)$ takav da je $\frac{\alpha}{\beta}Ay = Aw$. Sledi,

$$0 \neq (\alpha A + \beta B)\left(\frac{1}{\beta}y\right) = A(w + x),$$

gde smo ponovo koristili injektivnost operatora $\alpha A+\beta B$ i činjenicu da je $\mathcal{N}(A)\cap\mathcal{N}(B)=\{0\}$. Sledi da $\mathcal{R}((\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}})\cap\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})\neq\{0\}$ što je u kontradikciji sa uslovom *(iii)* Teoreme 3.2.1. Zaključujemo da mora važiti $\mathcal{R}(A)\cap\mathcal{R}(B)=\{0\}$.
Obratno, ako je $\mathcal{N}(A)\cap\mathcal{N}(B)=\{0\}$ i $\mathcal{R}(A)\cap\mathcal{R}(B)=\{0\}$ ispunjeni su uslovi (i) i (iii) Teoreme 3.2.1. Pretpostavimo da uslov (ii) nije ispunjen. Sledi da postoji ne-nula vektor $x\in\mathcal{N}(B)^{\perp}$ takav da je $Bx=A(-\frac{\alpha}{\beta}x)$. Ovo je u kontradikciji sa $\mathcal{R}(A)\cap\mathcal{R}(B)=\{0\}$, pa zaključujemo da je ispunjen i uslov *(ii)*. $\square$

Iz Teorema 3.2.2 i 3.2.3 dobija se sledeća Posledica:

Posledica 3.2.1 *Neka su $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Ako važi jedan od uslova $\mathcal{R}(A)\cap\mathcal{R}(B)=\{0\}$ ili $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$, onda injektivnost linearne kombinacije $\alpha A+\beta B$ ne zavisi od izbora skalara $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.*

Prelazimo sada na ispitivanje injektivnosti linearnih kombinacija projektora (gde ćemo posmatrati i razlike i zbirove).

Teorema 3.2.4 *Neka su $P,Q\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dati projektori i $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Operator $\alpha P+\beta Q$ je injektivan ako i samo je*

$$\begin{cases}\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)=\mathcal{R}(Q)\cap\mathcal{R}(P(I-Q))=\{0\}, & \alpha+\beta\neq 0;\\ \mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)=\mathcal{R}(P)\cap\mathcal{R}(Q)=\{0\}, & \alpha+\beta=0.\end{cases}$$

Dokaz. Napomenimo prvo da $\mathcal{H}$ možemo prikazati kao direktnu sumu $\mathcal{N}(Q)\oplus\mathcal{R}(Q)$ i $\mathcal{N}(P)\oplus\mathcal{R}(P)$. Stoga linearnu kombinaciju $\alpha P+\beta Q$ možemo u ovom slučaju predstaviti operatorskom matricom:

$$\alpha P+\beta Q=\begin{bmatrix}\alpha P_1 & \alpha P_2+\beta Q_1\\ 0 & \beta Q_2\end{bmatrix}:\begin{bmatrix}\mathcal{N}(Q)\\ \mathcal{R}(Q)\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\mathcal{R}(P)\\ \mathcal{N}(P)\end{bmatrix}. \tag{3.6}$$

Sada primenom Teoreme 3.1.1 na (3.6) zaključujemo da će linearna kombinacija projektora $\alpha P+\beta Q$ biti injektivna ako i samo je $P_1:\mathcal{N}(Q)\to\mathcal{R}(P)$ injektivan i $(\alpha P_2+\beta Q_1)|_{\mathcal{N}(Q_2)}$ injektivan i pritom se jedino nula vektor nalazi u preseku njegove slike sa $\mathcal{R}(P_1)$. P_1 je injektivan ako i samo ako je $\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)=\{0\}$. Imamo da je $\mathcal{N}(Q_2)=\mathcal{R}(P)\cap\mathcal{R}(Q)$. Dalje, za $x\in\mathcal{R}(P)\cap\mathcal{R}(Q)$ imamo $(\alpha P_2+\beta Q_1)x=(\alpha+\beta)x$. Iz ovog razloga dokaz nastavljamo posmatrajući dva odvojena slučaja, $\alpha+\beta\neq 0$ i $\alpha+\beta=0$.
Ako je $\alpha+\beta\neq 0$, očigledno da je $(\alpha P_2+\beta Q_1)|_{\mathcal{N}(Q_2)}$ injektivan i $\mathcal{R}((\alpha P_2+\beta Q_1)|_{\mathcal{N}(Q_2)})=\mathcal{R}(P)\cap\mathcal{R}(Q)$, pa je drugi uslov Teoreme 3.1.1 ekvivalentan sa $\{0\}=\mathcal{R}(P)\cap\mathcal{R}(Q)\cap\mathcal{R}(P|_{\mathcal{N}(Q)})=\mathcal{R}(Q)\cap\mathcal{R}(P(I-Q))$. Možemo zaključiti da će u slučaju $\alpha+\beta\neq 0$, operator $\alpha P+\beta Q$ biti injektivan ako i samo ako je $\mathcal{N}(P)\cap\mathcal{N}(Q)=\mathcal{R}(Q)\cap\mathcal{R}(P(I-Q))=$

$\{0\}$.
Ako je $\alpha + \beta = 0$, onda sa svako $x \in \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$ imamo $(\alpha P_2 + \beta Q_1)x = 0$, pa će uslovi Teoreme 3.1.1 biti ispunjeni ako i samo ako je $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = \{0\}$.□

Uslovi pod kojima je linearna kombinacija ortogonalnih projektora injektivna su dati sledećom teoremom

Teorema 3.2.5 *Neka su $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ortogonalni projektori i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Operator $\alpha P + \beta Q$ je injektivian ako i samo ako je*

$$\begin{cases} \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}, & \alpha + \beta \neq 0; \\ \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = \{0\}, & \alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

Dokaz. Ova teorema direktno sledi iz Teoreme 3.2.4 i iz

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(Q) \cap \mathcal{R}(P(I-Q)) &= \mathcal{R}(Q) \cap \mathcal{N}((I-Q)P)^{\perp} = \\ &= \mathcal{R}(Q) \cap (\mathcal{N}(P) \oplus (\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)))^{\perp} = \\ &= \mathcal{R}(Q) \cap N(P)^{\perp} \cap (\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q))^{\perp} = \\ &= \mathcal{R}(Q) \cap \mathcal{R}(P) \cap (\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q))^{\perp} = \{0\}, \end{aligned}$$

gde smo iskoristili uslov da su P i Q ortogonalni projektori. □

3.3 Leva (desna) invertibilnost linearne kombinacije operatora

U ovoj sekciji koristeći Teoreme 3.1.2 i 3.1.3 dajemo potrebne i dovoljne uslove za levu (desnu) inveritiblnost linearne kombinacije $\alpha A + \beta B$, gde je $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Teorema 3.3.1 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Operator $\alpha A + \beta B$ je levo invertibilan ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$,

(ii) $\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ *je zatvoren potprostor,*

(iii) $\mathcal{N}(B)^{\perp} = \mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^{\perp}}) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)^*|_{\mathcal{S}})$,

gde je $\mathcal{S} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})^{\perp} \cap \overline{\mathcal{R}(A)}$.

Dokaz. Kako je $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{N}(B)^\perp$, operator $\alpha A + \beta B$ možemo predstaviti operatorskom matricom

$$\begin{bmatrix} \alpha A_1 & \beta B_1 + \alpha A_2 \\ 0 & \beta B_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ \mathcal{N}(B)^\perp \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}(A)} \\ \mathcal{R}(A)^\perp \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Koristeći Teoremu 3.1.2 vidimo da je $\alpha A + \beta B$ levo invertibilan ako i samo ako je:

(i) A_1 levo invertibilan,

(ii) $\mathcal{R}((\alpha A_2 + \beta B_1)^* P_{\mathcal{S}}) + \mathcal{R}(B_2^*) = \mathcal{N}(B)^\perp$,

gde je $\mathcal{S} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})^\perp \cap \overline{\mathcal{R}(A)}$.
Uslov (i) je ekvivalentan sa uslovima $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$ i $\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ zatvoren. Kako je $\mathcal{S}$ potprostor od $\overline{\mathcal{R}(A)}$ i $\mathcal{R}(A_1)^\perp = \mathcal{N}(A_1^*)$, uslov (ii) je ekvivalentan sa

$$\mathcal{R}((\alpha A + \beta B)^*|_{\mathcal{S}}) + \mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp}) = \mathcal{N}(B)^\perp, \tag{3.8}$$

čime je dokaz završen. □

Primedba: Uslov (iii) može biti formulisan i na sledeći način:
$\begin{bmatrix} P_{\mathcal{S}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{N}(B)^\perp} \\ P_{\mathcal{R}(A)^\perp} B \end{bmatrix} : \mathcal{N}(B)^\perp \to \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}(A)} \\ \mathcal{R}(A)^\perp \end{bmatrix}$ je levo invertibilan.

Teorema 3.3.2 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Operator $\alpha A + \beta B$ je desno invertibilan ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$,

(ii) $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}})$,

gde je $\mathcal{T} = B^{-1}(\overline{\mathcal{R}(A)}) \cap \mathcal{N}(B)^\perp$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\alpha A + \beta B$ desno invertibilan što je ekvivalento desnoj invertibilnosti operatorske matrice date sa (3.7). Koristeći Teoremu 3.1.3 vidimo da će operatorska matrica data sa (3.7) biti desno inveritiblna ako i samo ako su ispunjeni uslovi:

(1) B_2 je desno invertibilan,

(2) $\mathcal{R}(A_1) + \mathcal{R}((\alpha A_2 + \beta B_1)|_{\mathcal{T}}) = \overline{\mathcal{R}(A)}$,

gde je $\mathcal{T} = \mathcal{N}(B_2) = B^{-1}(\overline{\mathcal{R}(A)}) \cap \mathcal{N}(B)^{\perp}$. Prvi uslov je ekvivalentan sa $\mathcal{R}(A)^{\perp} \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)} + \mathcal{R}(B)$, što pak implicira da $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} + \mathcal{R}(B)$. Uslov (ii) je ekvivalentan sa

$$\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}) = \overline{\mathcal{R}(A)}.$$

Ova jednakost zajedno sa $\overline{\mathcal{R}(A)} + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$ implicira da

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} + \mathcal{R}(B) &= \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}) + \mathcal{R}(B) \subseteq \\ &\subseteq \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) + \mathcal{R}(A|_{\mathcal{T}}) + \mathcal{R}(B|_{\mathcal{T}}) + \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{H}.\end{aligned}$$

Time smo dokazali da je $\alpha A + \beta B$ desno invertibilan ako i samo ako važe uslovi (i) i (ii).
Obratno, lako se proverava da ako važe uslovi (i) i (ii) onda operatorska matrica data sa (3.7) zadovoljava uslove Teoreme 3.1.3, na osnovu čega zaključujemo je $\alpha A + \beta B$ desno inveritiblan. $\square$

Primedba: Nije teško dokazati da prethodna teorema važi za proizvoljne dekompozcije

$$\mathcal{H} = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{M} = \mathcal{N} \oplus \mathcal{N}(B),$$

gde su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zatvoreni potprostori od $\mathcal{H}$ komplementari sa $\overline{\mathcal{R}(A)}$ i $\mathcal{N}(B)$, redom.

Uslove za levu i desnu invertibilnost linearne kombinacije operatora možemo malo drugačije formulisati što će nam biti od velikog značaja u poslednjoj sekciji ove glave. Prvo ćemo se pozabaviti uslovima pod kojim je linearna kombinacija operatora desno invertibilna. Time se bavi naredna teorema:

Teorema 3.3.3 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Operator $\alpha A + \beta B$ je desno invertibilan ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

i) $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$,

ii) $\mathcal{R}(P_{\mathcal{S}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}) = \mathcal{S}$,

iii) $\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) + \mathcal{R}\left((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}\right) \cap \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})}$,

gde je $\mathcal{T} = B^{-1}(\overline{\mathcal{R}(A)}) \cap \mathcal{N}(B)^{\perp}$ i $\mathcal{S} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})^{\perp} \cap \overline{\mathcal{R}(A)}$.

Dokaz. Pokazaćemo da je uslov (ii) Teoreme 3.3.2 ekvivalentan uslovima ii) i iii). Iz dokaza Teoreme 3.3.2 znamo da uslov (ii) proizilazi iz drugog uslova Teoreme 3.1.3, to jest iz uslova da je operatorska matrica

$$\begin{bmatrix}\alpha A_1 & (\alpha A_2 + \beta B_1)|_{\mathcal{T}}\end{bmatrix} : \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{N}(B)^{\perp} \to \overline{\mathcal{R}(A)}$$

desno invertibilna. Koristeći razlaganje $\overline{R(A)} = \overline{R(AP_{\mathcal{N}(B)})} \oplus \mathcal{S}$ vidimo da će ova operatorska matrica biti desno invertibilna ako i samo ako je operatorska matrica

$$\begin{bmatrix} \alpha A_{11} & P'_{\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})}}(\alpha A_2 + \beta B_1)|_{\mathcal{T}} \\ 0 & P'_{\mathcal{S}}(\alpha A_2 + \beta B_1)|_{\mathcal{T}} \end{bmatrix} : \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{N}(B)^{\perp} \to \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})} \oplus \mathcal{S} \tag{3.9}$$

desno invertibilna, gde je $A_{11} = P'_{\overline{R(AP_{\mathcal{N}(B)})}}A|_{\mathcal{N}(B)} : \mathcal{N}(B) \to \overline{R(AP_{\mathcal{N}(B)})}$. Primenom Teoreme 3.1.3 vidimo da će operatorska matrica data sa (3.9) biti desno invertibilna ako i samo ako je $\mathcal{R}(P'_{\mathcal{S}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}) = \mathcal{S}$ i

$$\mathcal{R}(A_{11}) + \mathcal{R}(P'_{\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{N}(P_{\mathcal{S}}(\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}})} = \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})},$$

gde smo koristili činjenice da je $\mathcal{N}(P'_{\mathcal{S}}(\alpha A_2 + \beta B_1)|_{\mathcal{T}}) \subseteq \mathcal{T}$ i da je

$$(\alpha A_2 + \beta B_1)|_{\mathcal{T}} = (\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}$$

i

$$(\alpha A_2 + \beta B_1)|_{\mathcal{N}(P_{\mathcal{S}}(\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}})} = (\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{N}(P_{\mathcal{S}}(\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}})}.$$

Prvi od ovih uslova je očigledno ekvivalentan sa $\mathcal{R}(P_{\mathcal{S}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}) = \mathcal{S}$. Kako je

$$\mathcal{N}(P_{\mathcal{S}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}) = (\alpha A + \beta B)^{-1}(\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})}) \cap \mathcal{T}$$

vidimo da je

$$\mathcal{R}(P'_{\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{N}(P_{\mathcal{S}}(\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}})} = \mathcal{R}\left((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}\right) \cap \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})}.$$

Iz ove jednakosti, zajedno sa $\mathcal{R}(A_{11}) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$, zaključujemo da je operatorska matrica data sa (3.9) desno invertibilna ako i samo ako važe uslovi ii) i iii), čime je dokaz završen. □

Analogno pokazujemo i sledeću teoremu o levoj invertibilnosti linearne kombinacije operatora:

Teorema 3.3.4 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Operator $\alpha A + \beta B$ je levo invertibilan ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

i) $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$,

ii) $\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ *je zatvoren potprostor,*

iii) *operator* $P_{\mathcal{S}}(\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}}$ *je injektivan sa zatvorenom slikom,*

iv) $\overline{\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})}=\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})+\mathcal{R}\left((\alpha A+\beta B)^*|_{\mathcal{S}}\right)\cap\overline{\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})}$,

gde je $\mathcal{T}=B^{-1}(\overline{\mathcal{R}(A)})\cap\mathcal{N}(B)^\perp$ *i* $\mathcal{S}=\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})^\perp\cap\overline{\mathcal{R}(A)}$.

Koristeći Teoreme 3.3.1 i 3.3.2 možemo razmatrati specijalne slučajeve gde leva (desna) inveritiblnost linearne kombinacije $\alpha A+\beta B$ ne zavisi od izbora skalara $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Teorema 3.3.5 *Neka su* $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ *za koje važi* $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$, $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$. *Operator* $\alpha A+\beta B$ *je levo invertibilan ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(i) $\mathcal{N}(A)\cap\mathcal{N}(B)=\{0\}$,

(ii) $\mathcal{R}(A)$ *je zatvoren potprostor,*

(iii) $\mathcal{R}(P_{\mathcal{R}(A)^\perp}B)$ *je zatvoren potprostor,*

(iv) $\mathcal{R}(B)\cap\mathcal{R}(A)=\{0\}$.

Dokaz. Primetimo da iz $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ sledi da je

$$\mathcal{S}=\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})^\perp\cap\overline{R(A)}=\{0\}.$$

Prvo, pretpostavimo da je $\alpha A+\beta B$ levo invertibilan, što znači da su ispunjeni sledeći uslovi Teoreme 3.3.1:

1. $\mathcal{N}(A)\cap\mathcal{N}(B)=\{0\}$,
2. $\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ je zatvoren.
3. $\mathcal{N}(B)^\perp=\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})+\mathcal{R}((\alpha A+\beta B)^*|_{\mathcal{S}})$.

Jasno je da je uslov 2. ispunjen ako i samo ako je slika operatora A zatvorena. Kako je $\mathcal{S}=\{0\}$ uslov 3. postaje

$$\mathcal{N}(B)^\perp=\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp}),$$

što je ekvivalentno tome da je B_2^* desno invertibilan, što pak implicira da je B_2 levo invertibilan, iz čega sledi da je $\mathcal{R}(B_2)=\mathcal{R}(P_{\mathcal{R}(A)^\perp}B)$ zatvoren i $\mathcal{T}=\{0\}$. Iz jednakosti $\mathcal{T}=\{0\}$ sledi da je $\mathcal{R}(A)\cap\mathcal{R}(B)=\{0\}$ (ovde već koristimo činjenicu da je slika operatora A zatvorena).
Obratno, ako su uslovi (i)-(iv) ispunjeni lako se proverava da su takođe ispunjeni uslovi Teoreme 3.3.1. □

Teorema 3.3.6 *Neka su* $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *za koje važi* $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Operator* $\alpha A + \beta B$ *je desno invertibilan ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

i) $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$,

ii) $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B|_{\mathcal{T}})$,

gde je $\mathcal{T} = \mathcal{N}(B_2) = B^{-1}(\overline{\mathcal{R}(A)}) \cap \mathcal{N}(B)^{\perp}$.

Dokaz. Ako je $\alpha A + \beta B$ desno invertibilan znamo da su ispunjeni uslovi Teoreme 3.3.2. U našem slučaju drugi uslov Teoreme 3.3.2 je

$$\overline{R(A)} = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}).$$

Sledi da

$$\overline{\mathcal{R}(A)} \subseteq \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(A|_{\mathcal{T}}) + \mathcal{R}(B|_{\mathcal{T}}) \subseteq \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B|_{\mathcal{T}}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)},$$

gde smo iskoristili da važi $\mathcal{R}(B|_{\mathcal{T}}) \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$. Dakle, ako je $\alpha A + \beta B$ desno invertibilan uslovi (i) i (ii) važe. Lako se proverava da ako važe uslovi i) i ii) onda su ispunjeni i uslovi Teoreme 3.3.2. $\square$

Teorema 3.3.7 *Neka su* $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *za koje važi* $\overline{\mathcal{R}(A)} \cap \overline{\mathcal{R}(B)} = \{0\}$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Operator* $\alpha A + \beta B$ *je desno invertibilan ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

i) $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$,

ii) $\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) = \overline{\mathcal{R}(A)}$.

Dokaz. Dokaz sledi direktno iz činjenice da u ovom slučaju imamo da je $\mathcal{T} = B^{-1}(\overline{\mathcal{R}(A)}) \cap \mathcal{N}(B)^{\perp} = \{0\}$. $\square$

Sada dajemo uslove pod kojim je linearna kombinacija ortogonalnih projektora levo (desno) invertibilna:

Teorema 3.3.8 *Neka su* $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *ortogonalne projekcije i* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Operator* $\alpha P + \beta Q$ *je levo invertibilan ako*

$$\begin{cases} \mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}, & \alpha + \beta \neq 0 \\ \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}, & \alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

Dokaz. Prostor $\mathcal{H}$ ima sledeće ortogonalne dekompozicije $\mathcal{H} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(Q) \oplus \mathcal{R}(Q)$. Primetimo da je sada $\mathcal{T} = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$ i

$$\mathcal{S} = \mathcal{R}(P(I-Q))^{\perp} \cap \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}((I-Q)P) \cap \mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = \mathcal{T}.$$

Sada je

$$\mathcal{R}((\alpha P + \beta Q)|_{\mathcal{T}}) = \mathcal{R}((\alpha P + \beta Q)^*|_{\mathcal{S}}) = \begin{cases} \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) & ,\alpha \neq -\beta \\ \{0\} & ,\alpha = -\beta. \end{cases}$$

Iz Teoreme 3.3.1 sledi da će linearna kombinacija $\alpha P + \beta Q$, gde sy $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ biti levo inveritiblna ako i samo ako važe uslovi

(i) $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$,

(ii) $\mathcal{R}(P(I-Q))$ je zatvoren,

(iii) $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(Q(I-P)) + (R(P) \cap \mathcal{R}(Q))$ kada je $\alpha \neq -\beta$ i $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(Q(I-P)$ kada je $\alpha = -\beta$.

Preciznije, uslov (iii) u slučaju $\alpha \neq -\beta$ možemo zapisati kao $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(Q(I-P)) \oplus (R(P) \cap \mathcal{R}(Q))$ jer je $\mathcal{R}(Q(I-P)) \cap \mathcal{R}(P) = \{0\}$ (što smo videli u dokazu Teoreme 3.2.5).

Pretpostavimo da je $\alpha P + \beta Q$ levo invertibilan, to jest da su navedeni uslovi ispunjeni. Iz uslova (i) sledi da je $\overline{\mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q)} = \mathcal{H}$. Uslov (ii) je ekvivalentan uslovu da je $\mathcal{R}((I-Q)P)$ zatvoren, a prema Posledici 2.5 iz [47] to je ekvivalentno uslovu da je $\mathcal{R}(Q) + \mathcal{R}(P)$ zatvoren. Zaključujemo da ako je $\alpha P + \beta Q$ levo invertibilan i $\alpha \neq -\beta$, onda je $\mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}$.

Obratno, pretpostavimo da je $\mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}$ i $\alpha \neq -\beta$. Dokažimo da su uslovi (i)-(iii) ispunjeni, is čega sledi da je $\alpha P + \beta Q$ levo invertibilan. $\mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q)$ je zatvoren (i kako smo već napomenuli) to implicira da je $\mathcal{R}(P(I-Q))$ zatvoren pa je uslov (ii) ispunjen. Štaviše, iz $\mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}$ sledi da je $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$ pa je uslov (i) takođe ispunjen. Ostaje da pokažemo da je i uslov (iii) ispunjen. Imamo da je operator Q_2 (iz razlaganja (3.7)) desno invertibilan, pa je Q_2^* levo invertibilan. Kako je $\mathcal{R}(Q_2^*) = \mathcal{R}(Q(I-P))$ primenom Posledice 2.5 from [47] dobijamo da je $\mathcal{R}(Q_2^*)$ zatvoren i

$$\mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(Q_2^*) \oplus (\mathcal{R}(Q_2^*)^{\perp} \cap \mathcal{R}(Q)).$$

Kako je $\mathcal{R}(Q_2^*)^{\perp} \cap \mathcal{R}(Q) = \mathcal{N}(Q_2) = \mathcal{T}$ sledi da je

$$\mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(Q(I-P)) \oplus \mathcal{T} = \mathcal{R}(Q(I-P)) \oplus (\mathcal{R}(P) \cap R(Q)),$$

pa uslov (iii) važi.
Pretpostavimo da je $\mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}$ i $\alpha = -\beta$. Znamo da su uslovi (i) i (ii) zadovoljeni. Veśmo prokomentarisali da je Q_2 desno invertibilan, i kako je $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) = \{0\}$ zaključujemo da je Q_2 invertibilan, samim tim i Q_2^* je invertibilan, pa je $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(Q_2^*) = \mathcal{R}(Q(I-P))$. Zaključujemo da je uslov (iii) ispunjen, čime je dokaz završen. □

Iz Teoreme 3.3.8 vidimo da su linearne kombinacije $\alpha P + \beta Q$ i $\overline{\alpha} P + \overline{\beta} Q$ istovremeno levo invertibilne iz čega sledi da će $\alpha P + \beta Q$ biti desno invertibilan ako i samo ako je levo invertibilan. Iz ovog zaključka dobijamo sledeće posledice:

Posledica 3.3.1 *Neka su $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ortogonalne projekcije i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Operator $\alpha P + \beta Q$ je desno inveritiblan ako i samo ako*

$$\begin{cases} \mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}, & \alpha + \beta \neq 0 \\ \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}, & \alpha + \beta = 0. \end{cases}$$

Posledica 3.3.2 *Neka su $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ortogonalne projekcije i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna*

(i) *$\alpha P + \beta Q$ je levo (desno) invertibilan,*

(i) *$\alpha P + \beta Q$ je invertibilan.*

Pitanje inveritiblnosti zbira, odnosno razlike dva ortogonalna projektora je bilo predmet više interesantnih radova tako da ćemo se ovim pitanjem detaljnije pozabaviti u sekciji 3.5. Interesantni rezultati se mogu dobiti i o linearnih kombinacijama projektora:

Teorema 3.3.9 *Neka su $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ projektori i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Operator $\alpha P + \beta Q$ je desno invertibilan ako i samo ako je $\mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}$ i*

$$\begin{cases} \mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(P(I-Q)) + (\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)), & \alpha \neq -\beta, \\ \mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(P(I-Q)), & \alpha = \beta. \end{cases}$$

Dokaz. Koristeći Teoremu 3.3.2 vidimo da će linearna kombinacija $\alpha P + \beta Q$ biti desno invertibilna ako i samo ako je $\mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}$ i

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(P(I-Q)) + \mathcal{R}((\alpha P + \beta Q)|_{\mathcal{T}}).$$

Lako se proverava da ako posmatramo razlaganja $\mathcal{H} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(Q) \oplus N(Q)$ imamo da je $\mathcal{T} = \mathcal{R}(P) \cap R(Q)$. Kako bismo završili dokaz ostaje da primetimo da u slučaju $\alpha \neq -\beta$ imamo da je $\mathcal{R}((\alpha P + \beta Q)|_{\mathcal{T}}) = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$, a u slučaju $\alpha = -\beta$ imamo da je $\mathcal{R}((\alpha P + \beta Q)|_{\mathcal{T}}) = \{0\}$.□

3.4 Invertibilnost linearne kombinacije operatora

Kao prirodan nastavak prethodnih sekcija prelazimo na proučavanje invertibilnosti linearne kombinacije dva operatora, pri čemu je glavni rezultat sledeća teorema

Teorema 3.4.1 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dati operatori i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Operator $\alpha A + \beta B$ je invertibilian ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(i) $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$, $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$,

(ii) $\mathcal{R}(A|_{\mathcal{N}(B)})$ *je zatvoren potprostor,*

(iii) $P_{\mathcal{S},\mathcal{R}(A|_{\mathcal{N}(B)})}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}$ *je injektivan operator čija je slika* $\mathcal{S}$,

gde je $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(A|_{\mathcal{N}(B)}) \oplus \mathcal{S}$, $\mathcal{T} = B^{-1}\left(\overline{\mathcal{R}(A)}\right) \cap \mathcal{P}$ *i* $\mathcal{H} = \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{P}$.

Dokaz. Posmatrajmo razlaganja prostora $\mathcal{H}$ data sa $\mathcal{H} = \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{P} = \overline{\mathcal{R}(A)} \oplus \mathcal{Q}$. Operatori $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ imaju sledeća predstavljanja preko operatorskih matrica u odnosu na ova razlaganja:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}(A)} \\ \mathcal{Q} \end{bmatrix}, \tag{3.10}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}(A)} \\ \mathcal{Q} \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ proizvoljni. Iz gornjih predstavljanja operatora $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ sledi da je linearna kombinacija $\alpha A + \beta B$ invertibilna ako i samo ako je operatorska matrica

$$\begin{bmatrix} \alpha A_1 & \alpha A_2 + \beta B_1 \\ 0 & \beta B_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{N}(B) \\ \mathcal{P} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{R}(A)} \\ \mathcal{Q} \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

invertibilna. Koristeći Teoremu 3.1.5 vidimo da će operatorska matrica (3.12) biti invertibilna ako i samo ako važe uslovi:

(i) αA_1 je levo invertibilan,

(ii) βB_2 je desno invertibilan,

(iii) $P_{\mathcal{S},\mathcal{R}(A_1)}(\alpha A_2 + \beta B_1)|_{\mathcal{N}(B_2)}$ je injektivan operator sa slikom $\mathcal{S}$, gde je $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(A_1) \oplus \mathcal{S}$.

Očigledno je da (i) važi ako i samo ako je $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$ i slika operatora $A|_{\mathcal{N}(B)}$ je zatvorena. Uslov (ii) je zadovoljen ako i samo ako je $\mathcal{R}(P_{\mathcal{Q},\overline{\mathcal{R}(A)}}B) = \mathcal{Q}$. Iz

$$\mathcal{R}(P_{\mathcal{Q},\overline{\mathcal{R}(A)}}B) = \mathcal{Q} \Leftrightarrow \mathcal{Q} \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)} + \mathcal{R}(B) \Leftrightarrow \overline{\mathcal{R}(A)} + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H},$$

vidimo da je uslov (ii) ekvivalentan sa $\overline{\mathcal{R}(A)} + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$.
Kako bi detaljnije razmatrali uslov (iii) primetimo da je

$$\mathcal{N}(B_2) = \mathcal{N}\left(P_{\mathcal{Q},\overline{\mathcal{R}(A)}}B\right) \cap \mathcal{P} = B^{-1}\left(\overline{\mathcal{R}(A)}\right) \cap \mathcal{P}$$

i neka je $\mathcal{T} = B^{-1}\left(\overline{\mathcal{R}(A)}\right) \cap \mathcal{P}$. Imamo da je

$$\mathcal{N}\left(P_{\mathcal{S},\mathcal{R}(A_1)}\left(\alpha A_2 + \beta B_1\right)|_{\mathcal{T}}\right) = \mathcal{N}\left(P_{\mathcal{S},\mathcal{R}(A_1)}\left(\alpha A + \beta B\right)|_{\mathcal{T}}\right)$$

i

$$\mathcal{R}\left(P_{\mathcal{S},\mathcal{R}(A_1)}\left(\alpha A_2 + \beta B_1\right)|_{\mathcal{T}}\right) = \mathcal{R}\left(P_{\mathcal{S},\mathcal{R}(A_1)}\left(\alpha A + \beta B\right)|_{\mathcal{T}}\right).$$

Stoga zaključujemo da je $\alpha A + \beta B$ is invertibilan ako i samo ako važe uslovi:

(i) $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$, $\overline{\mathcal{R}(A)} + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$,

(ii) $\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ je zatvoren potprostor,

(iii) $P_{\mathcal{S},\mathcal{R}(A_1)}\left(\alpha A + \beta B\right)|_{\mathcal{T}}$ je injektivan operator sa slikom $\mathcal{S}$.

Primetimo da se drugi deo uslova (i), $\overline{\mathcal{R}(A)} + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$, može zameniti sa $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$: Pretpostavimo da su uslovi (i)-(iii) ispunjeni. Kako je

$$\mathcal{S} = \mathcal{R}(P_{\mathcal{S},\mathcal{R}(A_1)}\left(\alpha A + \beta B\right)|_{\mathcal{T}}),$$

imamo da

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{R}\left(\left(\alpha A + \beta B\right)|_{\mathcal{T}}\right) + \mathcal{R}(A_1) \subseteq \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B).$$

Sada, iz $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(A_1) \oplus \mathcal{S}$ sledi da $\overline{\mathcal{R}(A)} \subseteq \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)$. Stoga, $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$. (Naravno, možemo direktno iz surjektivnosti operatora $\alpha A + \beta B$ zaključiti da je $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$). $\square$

U slučaju kada je $\mathcal{S}$ ortogonalni komplement potprostora $\mathcal{R}(A|_{\mathcal{N}(B)}) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ u prostoru $\overline{\mathcal{R}(A)}$ i $\mathcal{P} = \mathcal{N}(B)^{\perp}$, primenom Teoreme 3.4.1 dobijamo:

Teorema 3.4.2 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Operator $\alpha A + \beta B$ je invertibilan ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(i) $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$, $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$,

(ii) $\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ *je zatvoren potprostor,*

(iii) $P_{\mathcal{S}} (\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}$ *je injektivan operator sa slikom* $\mathcal{S}$,

gde je $\mathcal{S} = \mathcal{R}\left(AP_{\mathcal{N}(B)}\right)^{\perp} \cap \overline{\mathcal{R}(A)}$ *i* $\mathcal{T} = \mathcal{N}\left(P_{\mathcal{R}(A)^{\perp}}B\right) \cap \mathcal{N}(B)^{\perp}$.

Iz Teoreme 3.4.2 možemo zaključiti da je invertibilnost linearne kombinacije $\alpha A+\beta B$ moguća za neke konstante $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ samo ako je

$$\dim\left(\mathcal{N}\left(P_{\mathcal{R}(A)^{\perp}}B\right) \cap \mathcal{N}(B)^{\perp}\right) = \dim\left(\mathcal{R}\left(AP_{\mathcal{N}(B)}\right)^{\perp} \cap \overline{\mathcal{R}(A)}\right),$$

odakle proizilazi sledeća posledica:

Posledica 3.4.1 *Neka su* $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. *Ako je*

$$\dim\left(\mathcal{N}\left(P_{\mathcal{R}(A)^{\perp}}B\right) \cap \mathcal{N}(B)^{\perp}\right) \neq \dim\left(\mathcal{R}\left(AP_{\mathcal{N}(B)}\right)^{\perp} \cap \overline{\mathcal{R}(A)}\right),$$

onda linearna kombinacija $\alpha A + \beta B$ *nije invertibilna ni za jedan izbor konstanti* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Pozabavimo se uslovom (iii) Teoreme 3.4.2 koji kaže da $\mathcal{R}\left(P_{\mathcal{S}} (\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}\right) = \mathcal{S}$ i $\mathcal{N}\left(P_{\mathcal{S}} (\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}\right) = \{0\}$. Pretpostavimo da su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dati sa (3.3) i (3.4), redom, gde je $\mathcal{S}$ ortogonalni komplement potprostora $\mathcal{R}(A|_{\mathcal{N}(B)}) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ u prostoru $\overline{\mathcal{R}(A)}$, $\mathcal{T} = \mathcal{N}\left(P_{\mathcal{R}(A)^{\perp}}B\right) \cap \mathcal{N}(B)^{\perp}$ i $\mathcal{P} = \mathcal{N}(B)^{\perp}$. Prvi uslov iz (iii) je ekvivalentan sa

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})} + \overline{\mathcal{R}(A)} \cap \mathcal{R}\left((\alpha A + \beta B) P_{\mathcal{N}(B)^{\perp}}\right), \tag{3.13}$$

jer je $\mathcal{R}\left((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}\right) = \overline{\mathcal{R}(A)} \cap \mathcal{R}\left((\alpha A + \beta B) P_{\mathcal{N}(B)^{\perp}}\right)$. Drugi uslov iz (iii),

$$\mathcal{N}\left(P_{\mathcal{S}} (\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}\right) = \{0\},$$

je ekvivalentan sa

$$N(\alpha A_2 + \beta B_1) \cap \mathcal{N}(B_2) = \{0\}, \quad \mathcal{R}\left((\alpha A_2 + \beta B_1)|_{\mathcal{T}}\right) \cap \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})} = \{0\}. \tag{3.14}$$

Očigledno je da je prvo uslov iz (3.14) ekvivalentan sa

$$\mathcal{N}(\alpha A + \beta B) \cap \mathcal{N}(B)^{\perp} = \{0\}$$

dok je drugi uslov ekvivalentan sa

$$\mathcal{R}\left((\alpha A+\beta B)\, P_{\mathcal{N}(B)^{\perp}}\right) \cap \overline{R(AP_{\mathcal{N}(B)})} = \{0\}.$$

Sada, iz prethodna dva uslova i (3.13) možemo zaključiti da je uslov (iii) Teoreme 3.4.2 ekvivalentan sa

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})} \oplus \overline{\mathcal{R}(A)} \cap \mathcal{R}\left((\alpha A+\beta B)\, P_{\mathcal{N}(B)^{\perp}}\right)$$

i

$$\mathcal{N}\,(\alpha A+\beta B) \cap \mathcal{N}(B)^{\perp} = \{0\}.$$

Naša zapažanja su formulisana u sledećoj teoremi:

Teorema 3.4.3 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Operator $\alpha A+\beta B$ je invertibilan ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$, $\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$,

(ii) $\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ *je zatvoren potprostor,*

(iii) $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) \oplus \overline{\mathcal{R}(A)} \cap \mathcal{R}\left((\alpha A+\beta B)\, P_{\mathcal{N}(B)^{\perp}}\right)$,
$\mathcal{N}\,(\alpha A+\beta B) \cap \mathcal{N}(B)^{\perp} = \{0\}$.

Kako su uslovi invertibilnosti operatora $\alpha A+\beta B$ simetrični po A i B možemo dobiti nove varijante potrebnih i dovoljnih uslova invertibilnosti ove linearne kombinacije zamenom operatora A i B u uslovima Teorema 3.4.1, 3.4.2 i 3.4.3.

3.5 Invertibilnost linearne kombinacije specijalnih klasa operatora

U Teoremama 3.4.1 i 3.4.2 problem invertibilnosti linearne kombinacije dva operatora se svodi na to da nova linearna kombinacija operatora mora biti injektiva i sa unapred zadatom slikom, što na prvi pogled nije odgovor na glavni problem. No uslovi koje smo dobiti u ovim teoremama su veoma korisni u daljoj analizi ovog problema za specijalne klase operatora gde možemo dobiti mnogo kompaktnije uslove invertibilnosti linearne kombinacije (što smo videli u prethodnim odeljcima u slučaju injektivnosti i leve (desne) invertibilnosti). Ova sekcija se bavi baš takvim problemima. (**1**) Problem invertibilnosti $\alpha A+\beta B$ u slučaju kada su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ regularni operatori i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ je razmatran u radu [41].

Teorema 3.5.1 *[41] Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ regularni operatori i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Operator $\alpha A + \beta B$ je invertibilan ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(i') $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$, $\mathcal{R}(A)^\perp \cap \mathcal{R}(B)^\perp = \{0\}$,

(ii') $\mathcal{R}(A^\dagger A(I - B^\dagger B))$ *i* $\mathcal{R}((I - AA^\dagger)BB^\dagger)$ *su zatvoreni potprostori,*

(iii') $P'_{\mathcal{L}}\left(\alpha AB^\dagger B + \beta AA^\dagger B\right)|_{\mathcal{M}}$ *je invertibilan,*

gde je $\mathcal{L} = (A^*)^\dagger\left(R(A^*) \cap \mathcal{R}(B^*)\right)$, $\mathcal{M} = B^\dagger\left(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)\right)$ i $P'_{\mathcal{L}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{L})$ je definisan sa $P'_{\mathcal{L}}x = P_{\mathcal{L}}x$, $x \in \mathcal{H}$.

Kao posledicu Teoreme 3.4.2 dobijamo glavi rezultati iz [41], Teoremu 3.5.1. Kako ovaj zaključak nije očigledan prvo pokazujemo jednu pomoćnu lemu:

Lema 3.5.1 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ako operatori A i B imaju zatvorene slike, tada važi*

(i) $\mathcal{N}\left(P_{\mathcal{R}(A)^\perp}B\right) \cap \mathcal{N}(B)^\perp = B^{-1}\left(\mathcal{R}(A)\right) \cap \mathcal{N}(B)^\perp = B^\dagger\left(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)\right)$,

(ii) $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}\left(AP_{\mathcal{N}(B)}\right)^\perp = (A^*)^\dagger\left(R(A^*) \cap \mathcal{R}(B^*)\right)$.

Dokaz. (i) Prva jednakost je očigledna. Neka je $x \in B^{-1}\left(\mathcal{R}(A)\right) \cap \mathcal{N}(B)^\perp$. Onda je $Bx \in \mathcal{R}(A)$ i $x = B^\dagger Bx$. Dakle, $x \in B^\dagger\left(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)\right)$. Pretpostavimo da je $x \in B^\dagger\left(\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)\right)$. Tada za neke $s, t \in \mathcal{H}$ imamo da je $x = B^\dagger Bt = B^\dagger As$ i $Bt = As$. Zaključujemo da je $x \in \mathcal{R}(B^*) = \mathcal{N}(B)^\perp$ i $Bx = Bt = As \in \mathcal{R}(A)$.
(ii) Neka je $y \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}\left(AP_{\mathcal{N}(B)}\right)^\perp$. Tada je $y = AA^\dagger y$ i $A^*y = B^\dagger BA^*y$. Stoga je $A^*y = B^\dagger BA^*y \in R(A^*) \cap \mathcal{R}(B^*)$. Imamo da je

$$y = (A^\dagger)^*A^*y = (A^\dagger)^*B^\dagger BA^*y.$$

Pretpostavimo sada da je $y \in (A^*)^\dagger\left(R(A^*) \cap \mathcal{R}(B^*)\right)$. Onda postoje $s, t \in \mathcal{H}$ takvi da je $y = (A^\dagger)^*A^*t = (A^\dagger)^*B^*s$ i $A^*t = B^*s$. Imamo da je $y \in \mathcal{R}(A)$ iz čega sledi $y = AA^\dagger y$. Sada ćemo pokazati da $y \in \mathcal{R}\left(AP_{\mathcal{N}(B)}\right)^\perp = \mathcal{N}(P_{\mathcal{N}(B)}A^*)$:

$$\begin{aligned} B^\dagger BA^*y &= B^\dagger BA^*(A^\dagger)^*B^*s = B^\dagger BA^\dagger AB^*s \\ &= B^\dagger BA^\dagger AA^*t = B^\dagger BB^*s = B^*s \\ &= A^*t = A^*y. \square \end{aligned}$$

Naredni rezultat pokazuje da je Teorema 3.4.2 ekvivalentna Teoremi 2.1 iz [41] u slučaju kada operatori $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ imaju zatvorene slike.

Teorema 3.5.2 *Neka su* $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *regularni operatori i* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Uslovi (i)-(iii) Teoreme 3.4.2 ekvivalentni su uslovima (i')-(iii') Teoreme 3.5.1.*

Dokaz. Prvo, primetimo da iz Leme 3.5.1 imamo da je $\mathcal{M} = \mathcal{T}$ i $\mathcal{S} = \mathcal{L}$, za potprostore $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ koje smo definisali u Teoremi 3.4.2 i potprostore $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ iz Teoreme 3.5.1. Takođe, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{R}(B^\dagger)$ i $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{R}((A^*)^\dagger A^*) = \mathcal{R}(A)$ iz čega sledi da je $AB^\dagger B|_{\mathcal{M}} = A|_{\mathcal{M}}$ i $P'_{\mathcal{L}} = AA^\dagger P'_{\mathcal{L}} = P'_{\mathcal{L}} AA^\dagger$. Zaključujemo da su uslovi (iii) i (iii') ekvivalentni. Pretpostavimo da su ispunjeni uslovi (i)-(iii) Teoreme 3.4.2. Uzimanjem ortogonalnog komplementa u $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$ dobijamo $\mathcal{R}(A)^\perp \cap \mathcal{R}(B)^\perp = \{0\}$, pa je zadovoljen uslov (i'). Iz $\mathcal{H} = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)$ sledi da je $\mathcal{R}(A)^\perp \subseteq \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B)$ što dalje implicira da je $\mathcal{R}(P_{\mathcal{R}(A)^\perp} B) = \mathcal{R}(A)^\perp$. Stoga $P_{\mathcal{R}(A)^\perp} B$ ima zatvorenu sliku što je ekvivalentno time da $(I - AA^\dagger)BB^\dagger$ ima zatvorenu sliku. Očigledno je da $AP_{\mathcal{N}(B)}$ ima zatvorenu sliku ako i samo ako $A^\dagger A(I - B^\dagger B)$ ima zatvorenu sliku. Sledi da je i uslov (ii') ispunjen. Obratno, pretpostavimo da su ispunjeni uslovi (i')-(iii') Teoreme 3.5.1. Ostaje da pokažemo da je $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$. Tražena jednakost sledi iz činjenice da iz uslova (i')-(iii') sledi invertibilnost $\alpha A + \beta B$. □

(**2**) Problem invertibilnosti linearnih kombinacija projektora (idempotenata) je razmatran u više radova. Iz tog skupa možemo izdvojiti interesantan rezultat da je invertibilnost linearne kombinacije $\alpha P + \beta Q$, gde su $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha + \beta \neq 0$, ekvivalentna invertibilnosti $P + Q$ što znači da ne zavisi od izbora skalara α i β. Ovo su prvi put pokazali J. K. Baksalary i koautori u radu [2] za konačno dimenzionalni slučaj

$$\alpha P + \beta Q \text{ je invertibilan } \Leftrightarrow \mathcal{R}(P(I - Q)) \cap \mathcal{R}(Q(I - P)) = \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$$

što su kasnije generalizovali H.K, Du i koautori u radu [30] za slučaj projektora na Hilbertovim prostorima i konačno Koliha i Rakočević u radu [53] za slučaj idempotenata na Banahovim algebrama, ali bez potrebnih i dovoljnih uslova za invertibilnost $\alpha P + \beta Q$. Potrebni i dovoljni uslovi za inveritilnost linearne kombinacije projektora na P i Q na Hilbertovom prostoru su dati kasnije u drugom radu Kolihe i Rakočevića, [50] (kao i za elemente prstena sa jedinicom):

Teorema 3.5.3 [*50*] *Neka su* $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *projektori na Hilbertovom prostoru* $\mathcal{H}$. *Sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) $P + Q$ *je invertibilan.*

(ii) *Slika operatora* $P + Q$ *je zatvorena i*

$$\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q(I - P)) = \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\},$$
$$\mathcal{R}(P^*) \cap \mathcal{R}(Q^*(I - P^*)) = \mathcal{N}(P^*) \cap \mathcal{N}(Q^*) = \{0\}.$$

U slučaju kada su $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ projektori primenom Teoreme 3.4.1 na razlaganje $\mathcal{H} = \mathcal{N}(Q) \oplus \mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P)$ dobija se glavni rezultat iz [30], koji kaže da je inveritilnost linearne kombinacije $\alpha P + \beta Q$ nezavisna od izbora skalara $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \alpha \neq -\beta$, ali dobijamo i potrebne i dovoljne uslove za invertibilnost linearne kombinacije $\alpha P + \beta Q$ koji se razlikuju od uslova datih u Teoremi 3.5.3.

Teorema 3.5.4 *Neka su $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dati projektori i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha + \beta \neq 0$. $\alpha P + \beta Q$ inveritibilan operator ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(i) $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$, $\mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}$,

(ii) $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) \oplus \mathcal{R}(P|_{\mathcal{N}(Q)})$.

Dokaz. U ovom slučaj potprostor $\mathcal{T}$ definisan u Teoremi 3.4.1 sa $\mathcal{T} = Q^{-1}\left(\mathcal{R}(P)\right) \cap \mathcal{R}(Q)$ jednak je $\mathcal{T} = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$. Stoga za svaki $x \in \mathcal{T}$ imamo da je $(\alpha P + \beta Q)x = (\alpha + \beta)x$, što implicira da je injektivnost operatora $P_{\mathcal{S}, \mathcal{R}(P|_{\mathcal{N}(Q)})}\left(\alpha P + \beta Q\right)|_{\mathcal{T}}$ ekvivalentna sa $\mathcal{R}(P|_{\mathcal{N}(Q)}) \cap \mathcal{T} = \{0\}$ tj.

$$\mathcal{R}(P|_{\mathcal{N}(Q)}) \cap \mathcal{R}(Q) = \{0\}. \tag{3.15}$$

Takođe, slika operatora $P_{\mathcal{S}, \mathcal{R}(P|_{\mathcal{N}(Q)})}\left(\alpha P + \beta Q\right)|_{\mathcal{T}}$ je $\mathcal{S}$ ako i samo ako je $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T} + \mathcal{R}(P|_{\mathcal{N}(Q)})$, što je ekvivalentno sa $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) + \mathcal{R}(P|_{\mathcal{N}(Q)})$. Sada, iz (3.15) imamo da je

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) \oplus \mathcal{R}(P|_{\mathcal{N}(Q)}). \tag{3.16}$$

Koristeći (3.16), činjenicu da je presek dve slike operatora takođe slika operatora i Teoremu 2.3 iz [33] zaključujemo da je $\mathcal{R}(P|_{\mathcal{N}(Q)})$ zatvoren. Vidimo da su ispunjeni svi uslovi Teoreme 3.4.1 čime je dokaz završen. $\square$

Očigledno iz Tepreme 3.5.4 dobija se sledeća teorema:

Posledica 3.5.1 *Neka su $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dati projektori i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha + \beta \neq 0$. Invertibilnost linearne kombinacije $\alpha P + \beta Q$ nezavisna od izbora skalara $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha + \beta \neq 0$.*

(**3**) Problem invertibilnosti linearne kombincaije $\alpha P + \beta Q$ kada su P i Q ortogonalni projektori je takođe bio tema dosta radova. U radu [8] Buckholtz razmatra specijalni slučaj kada je $\alpha + \beta = 1$ i daje potrebne i dovoljne uslove pod kojima je razlika ortogonalnih projektora na Hilbertovom prostoru invertibilna, kao i eksplicitnu formulu za njen inverz. U [50] Koliha i Rakočević razmatraju invertibilnost sume dve ortogonalne projekcije, što je kao što već znamo, ekvivalentno invertibilnosti linearne kombinacije $\alpha P + \beta Q$, $\alpha \neq -\beta$:

Teorema 3.5.5 [50] *Neka su $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ortogonalni projektori na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Onda su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$P + Q$ je invertibilan,*

(ii) *Slika operatora $P + Q$ je zatvorena i*

$$\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q(I - P)) = \mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}.$$

Prvo moramo primetiti da je uslov $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q(I - P)) = \{0\}$ Teoreme 3.5.5 iz [50] suv išan što pokazuje sledeća teorema:

Lema 3.5.2 *Neka su $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ortogonalni projektori na Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}$. Tada je*

$$\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q(I - P)) = \{0\}.$$

Dokaz. Najpre, primetimo da važi

$$\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q(I - P)) = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q(I - P)) \cap \mathcal{R}(Q).$$

Dakle, dovoljno je pokazati da je $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q(I - P)) \cap \mathcal{R}(Q) = \{0\}$. Lako se proverava da važi

$$\mathcal{R}(Q(I - P))^{\perp} \cap \mathcal{R}(Q) = \mathcal{N}((I - P)Q) \cap \mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q),$$

iz čega sledi $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) \subseteq \mathcal{R}(Q(I - P))^{\perp}$, tj. $\mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q) \cap \mathcal{R}(Q(I - P)) = \{0\}$.
$\square$

Iako smo već dali uslove invertibilnosti linearne kombinacije ortogonalnih projektora kroz Teoremu 3.3.8 i Posledicu 3.3.1, do sledećih zaključaka ćemo doći i Teoremom 3.4.1 kako bi stekli kompletniju sliku:

Teorema 3.5.6 *Neka su $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ dati ortogonalni projektori i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\alpha + \beta \neq 0$. Sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) *$\alpha P + \beta Q$ je invertibilan,*

(ii) *$\mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}$,*

(iii) *$\mathcal{R}(P + Q)$ je zatvoren i $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$.*

Dokaz. (i)$\Leftrightarrow$ (ii) Kao što smo i ranije primetili, u slučaju kada su $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ortogonalni projektori, potprostori $\mathcal{S}$ i $\mathcal{T}$ definisani u Teoremi 3.4.2 su jednaki jer je $\mathcal{S} = \mathcal{R}\left(PP_{\mathcal{N}(Q)}\right)^{\perp} \cap \mathcal{R}(P)$ i $\mathcal{T} = \mathcal{N}\left(P_{\mathcal{R}(P)^{\perp}}Q\right) \cap \mathcal{N}(Q)^{\perp}$, tj. $\mathcal{S} = \mathcal{T} = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)$. Zaista, ako su $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ortogonalni projektori onda je

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \mathcal{R}\left(PP_{\mathcal{N}(Q)}\right)^{\perp} \cap \mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(P(I-Q))^{\perp} \cap \mathcal{R}(P) \\ &= \mathcal{N}((I-Q)P) \cap \mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\mathcal{T} &= \mathcal{N}\left(P_{\mathcal{R}(P)^{\perp}}Q\right) \cap \mathcal{N}(Q)^{\perp} = \mathcal{N}((I-P)Q) \cap \mathcal{R}(Q) \\ &= \mathcal{R}(P) \cap \mathcal{R}(Q).\end{aligned}$$

Stoga za svaki $x \in \mathcal{T}$ imamo da je $(\alpha P+\beta Q)x = (\alpha+\beta)x$ i $P_{\mathcal{S}}(\alpha P+\beta Q)x = (\alpha+\beta)x$. Zaključujemo da je $P_{\mathcal{S}}\left(\alpha P + \beta Q\right)|_{\mathcal{T}}$ iz uslova (iii) Teoreme 3.4.2 injektivan operator sa slikom $\mathcal{S}$ ako i samo ako je $\alpha + \beta \neq 0$. Takođe, iz $\mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}$ sledi da je $\mathcal{N}(P) \cap \mathcal{N}(Q) = \{0\}$. Sada, koristeći Teoremu 3.4.2 možemo zaključiti da u slučaju kada su $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ortogonalni projektori, $\alpha P + \beta Q$ je invertibilan operator ako i samo ako važe sledeći uslovi:

($*$) $\mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q) = \mathcal{H}$,

($**$) $P|_{\mathcal{N}(Q)}$ ima zatvorenu sliku.

Primetimo da uslov ($**$) može biti zamenjen uslovom da je $\mathcal{R}(P(I-Q))$ zatvoren. Prema Stavu 2.4 iz [47], imamo da je $\mathcal{R}(P(I-Q))$ zatvoren ako i samo ako je $R(P+Q)$ zatvoren, što je po Posledici 3 iz [33] ekvivalentno sa činjenicom da je $\mathcal{R}(P)+\mathcal{R}(Q)$ zatvoren. Kako uslov ($*$) garantuje zatvorenost $\mathcal{R}(P) + \mathcal{R}(Q)$, zaključujemo da je uslov ($*$) potreban i dovoljan da bi $\alpha P + \beta Q$ bio invertibilan operator.
(i)$\Leftrightarrow$ (iii) Sledi iz Teoreme 3.5.5 i Leme 3.5.2. $\square$.

(**4**) Sada razmatramo invertibilnost linearne kombinacije $\alpha A + \beta B$ za date operatore $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ u dva specijalna slučaja: kada je $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ i kada je $\overline{\mathcal{R}\left(AP_{\mathcal{N}(B)}\right)} = \overline{\mathcal{R}(A)}$. U oba slučaja ćemo pored potrebnih i dovoljnih uslova za invertibilnost $\alpha A + \beta B$ zaključiti i da je invertibilnost ove linearne kombinacije nezavisna od izbora skalara $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

U slučaju kada su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ takvi da je $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ koristeći Teoremu 3.4.2 dobija se sledeća teorema:

Teorema 3.5.7 *Neka su* $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *dati operatori i* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Ako je* $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$, *tada je operator* $\alpha A + \beta B$ *is inveritiblan ako i samo ako je*

$$\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}, \; \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B) = \mathcal{H}. \tag{3.17}$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $\alpha A + \beta B$ invertibilan. Prema Teoremi 3.4.2 sledi da je $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$ pa po Teoremi 2.3 iz [33] sledi da su $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{R}(B)$ zatvoreni. Sada iz uslova $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$ zajedno sa činjenicom da je $\mathcal{R}(A)$ zatvoren sledi da je $\mathcal{T} = \mathcal{N}\left(P_{\mathcal{R}(A)^\perp} B\right) \cap \mathcal{N}(B)^\perp = \{0\}$. Iz ovog zaključka i uslova (iii) Teoreme 3.4.2 sada sledi $\mathcal{S} = \mathcal{R}\left(AP_{\mathcal{N}(B)}\right)^\perp \cap \overline{\mathcal{R}(A)} = \{0\}$. Stoga je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ iz čega dalje sledi $\mathcal{N}(A)^\perp \subseteq \mathcal{N}(B) + \mathcal{N}(A)$. Zaključujemo da je $\mathcal{H} = \mathcal{N}(B) + \mathcal{N}(A)$. Iz uslova (i) Teoreme 3.4.2 dobijamo da je $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$, pa važi $\mathcal{H} = \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{N}(A)$.
Sa druge strane pretpostavimo da (3.17) važi. Ponovo zaključujemo da su $\mathcal{R}(A)$ i $\mathcal{R}(B)$ zatvoreni i da je prvi uslov Teoreme 3.4.2 zadovoljen. Takođe, $\mathcal{R}(A) = A(\mathcal{H}) = A(\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B)) = A(\mathcal{N}(B)) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$, pa je uslov (ii) Teoreme 3.4.2 zadovoljen. Kako je $\mathcal{T} = \mathcal{S} = \{0\}$ možemo odmah zaključiti da je i uslov (iii) Teoreme 3.4.2 zadovoljen, čime je dokaz završen.□

Primedba: Iz dokaza Teoreme 3.5.7 vidimo da isti uslovi važe i u slučaju kada je $\overline{\mathcal{R}(A)} \cap \overline{\mathcal{R}(B)} = \{0\}$.

Na sličan način se dobija i sledeća teorema:

Teorema 3.5.8 *Neka su* $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *i* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Ako je* $\overline{\mathcal{R}\left(AP_{\mathcal{N}(B)}\right)} = \overline{\mathcal{R}(A)}$ *tada je operator* $\alpha A + \beta B$ *invertibilan ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(i) $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$, $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$,

(ii) $\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ *je zatvoren potprostor.*

Dokaz. Ako je $\overline{\mathcal{R}\left(AP_{\mathcal{N}(B)}\right)} = \overline{\mathcal{R}(A)}$ onda za potprostor $\mathcal{S}$ koji smo definisali u Teoremi 3.4.1 imamo da je $\mathcal{S} = \{0\}$. Sledi da je uslov (iii) Teoreme 3.4.1 ispunjen ako i samo ako je $\mathcal{T} = \{0\}$, tj. ako i samo ako je $\overline{\mathcal{R}(A)} \cap \mathcal{R}(B) = \{0\}$. Ostatak dokaza direktno sledi iz Teoreme 3.4.1. □

Posledica 3.5.2 *Neka su* $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. *Ako važi* $\overline{\mathcal{R}(A)} \cap \overline{\mathcal{R}(B)} = \{0\}$ *ili* $\overline{\mathcal{R}\left(AP_{\mathcal{N}(B)}\right)} = \overline{\mathcal{R}(A)}$ *tada inveritibilnost linearne kombinacije* $\alpha A + \beta B$ *ne zavisi od izbora skalara* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(**5**) Sada razmatramo slučaj kada je jedan od operatora $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ injektivan.

Kako su uslovi invertibilnosti $\alpha A + \beta B$ simetrični po A i B, pretpostavimo da je $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ injektivan:

Teorema 3.5.9 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pri čemu je B injektivan i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tada je $\alpha A + \beta B$ invertibilan ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

(i) $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$,

(ii) $(\alpha A + \beta B)|_{B^{-1}(\overline{\mathcal{R}(A)})}$ *je injektivan operator sa slikom* $\overline{\mathcal{R}(A)}$.

Posmatrajući neke specijalne klase operatora videli smo da invertibilnost linearne kombinacije $\alpha A+\beta B$ može biti nezavisan od izbora skalara $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Još jedan slučaj gde ovu osobinu možemo naći je dat u sledećem rezultatu.

Teorema 3.5.10 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ako postoji zatvoren potprostor $\mathcal{P}$ takav da je $\mathcal{H} = \mathcal{N}(B) \oplus \mathcal{P}$ i $A|_{\mathcal{P}} = 0$ ili $P_{\overline{\mathcal{R}(A)}} B = 0$, tada invertibilnost linearne kombinacije $\alpha A + \beta B$ ne zavisi od izbora skalara.*

Dokaz. Koristeći reprezentacije (3.3) i (3.4) operatora A i B, i reprezentaciju (3.12) operaora $\alpha A + \beta B$ i koristeći Teoremu 3.1.5 vidimo da traženi zaključak direktno sledi. $\square$

Dajemo i jedan interesantan primer:

Primer 3.5.1 Ako je operator $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \mathcal{H})$ bijektivan onda linearna kombinacija $\alpha A + \beta B$ nije invertibilna ni za jedan izbor konstanti $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ovo direktno sledi iz Stava 3.1. iz rada [46] i Teoreme 3.4.2.

3.6 Zatvorenost slike i konzistentnost u invertibilnosti linearne kombinacije operatora

Koristeći rezultate prethodnih sekcija prelazimo na glavni zadatak, dati potrebne i dovoljne uslove za konzistentnost u invertibilnosti linearne kombinacije operatora. Kako bi dali kompletan odgovor na ovo pitanje potrebno je prvo dati potrebne i dovoljne uslove pod kojima je slika linearne kombinacije operatora zatvorena.

Teorema 3.6.1 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Slika operatora $\alpha A + \beta B$ je zatvorena ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) *slika operatora* $P_S(\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}}$ *je zatvorena,*

(ii) $\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) + \mathcal{R}((\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}}) \cap \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})}$,

(iii) $\overline{\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})} = \mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp}) + \mathcal{R}((\alpha A+\beta B)^*|_{\mathcal{S}}) \cap \overline{\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})}$,

gde je $\mathcal{T} = B^{-1}(\overline{\mathcal{R}(A)}) \cap \mathcal{N}(B)^\perp$ *i* $\mathcal{S} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})^\perp \cap \overline{\mathcal{R}(A)}$.

Dokaz. Slika linearne kombinacije $\alpha A+\beta B$ je zatvorena ako i samo sako je slika operatorske matrice date sa (3.5) zatvorena (pri čemu pretpostavljamo da A i B imaju predstavljanja data sa (3.3) i (3.4)). Iz Teoreme 3.1.7 sledi da će slika operatoske matrice date sa (3.3.1) biti zatvorena ako i samo ako važe sledeći uslovi:

1) $P'_{\mathcal{S}}(\alpha A_2+\beta B_1)|_{\mathcal{T}}$ ima zatvorenu sliku,

2) $\overline{\mathcal{R}(\alpha A_1)} = \mathcal{R}(\alpha A_1) + \mathcal{R}((\alpha A_2+\beta B_1)|_{\mathcal{T}}) \cap \overline{\mathcal{R}(\alpha A_1)}$,

3) $\overline{\mathcal{R}((\beta B_2)^*)} = \mathcal{R}((\beta B_2)^*) + \mathcal{R}((\alpha A_2+\beta B_1)^*|_{\mathcal{S}}) \cap \overline{\mathcal{R}((\beta B_2)^*)}$,

gde su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{S}$ definisani sa $\mathcal{T} = \mathcal{N}(\beta B_2) = B^{-1}(\overline{\mathcal{R}(A)}) \cap \mathcal{N}(B)^\perp$ i $\mathcal{S} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})^\perp \cap \overline{\mathcal{R}(A)}$. Kako je $\mathcal{S} \subseteq \overline{\mathcal{R}(A)}$ i $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{N}(B)^\perp$ imamo da je $\mathcal{R}(P\mathcal{S}(\alpha A_2+\beta B_1)|_{\mathcal{T}}) = \mathcal{R}(P_{\mathcal{S}}(\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}})$ pa je uslov 1) ekvivalentan uslovu da je slika operatora $P_S(\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}}$ zatvorena.
Kako je $\mathcal{R}(\alpha A_1) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ i $\mathcal{R}((\alpha A_2+\beta B_1)|_{\mathcal{T}}) = \mathcal{R}((\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}})$, uslov 2) je ekvivalentan sa $\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) + \mathcal{R}((\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}}) \cap \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})}$.
Na sličan način iz činjenice da je $\mathcal{R}((\beta B_2)^*) = \mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})$ i $\mathcal{R}((\alpha A_2+\beta B_1)^*|_{\mathcal{S}}) = \mathcal{R}((\alpha A+\beta B)^*|_{\mathcal{S}})$, vidimo da je uslov 3) ekvivalentan sa $\overline{\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})} = \mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp}) + \mathcal{R}((\alpha A+\beta B)^*|_{\mathcal{S}}) \cap \overline{\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})}$, čime je dokaz završen. $\square$
Pre nego što pređemo na glave rezultate ovog odeljka pozabavićemo se jednim primerom koji će poslužiti kao dodatna motivacija za proučavanje nekih specijalnih slučajevima gde zatvorenost slike linearne kombinacije $\alpha A+\beta B$ ne zavisi od izbora konstanti α i β.

Primer 3.6.1: Neka su $A, B \in \mathcal{B}(l_2)$ operatori definisani sa

$$Ae_n = \begin{cases} \frac{e_n}{2n}, & n = 4k-3 \\ -\frac{e_n}{2}, & n = 4k-2 \\ 0, & n = 4k-1 \\ 0, & n = 4k \end{cases}, \quad Be_n = \begin{cases} \frac{e_n}{2n}, & n = 4k-3 \\ \frac{e_n}{2}, & n = 4k-2 \\ e_n - e_{n+1}, & n = 4k-1 \\ e_n - e_{n-1}, & n = 4k \end{cases},$$

gde je $k \in \mathbb{N}$ i e_n je n-ti vektor standardne baze prostora l_2. Lako se proverava da $A - B$ ima zatvorenu sliku, dok slika $A + B$ nije zatvorena. Ako posmatramo uslove Teoreme 3.6.1 vidimo da je

$$\mathcal{N}(B) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_{4k-3} = x_{4k-2} = 0,\, x_{4k-1} = x_{4k},\, k \in \mathbb{N}\},$$

$$\mathcal{N}(B)^{\perp} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_{4k-1} = -x_{4k}, k \in \mathbb{N}\},$$
$$\overline{\mathcal{R}(A)} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_{4k-1} = x_{4k} = 0\, k \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{T} = \mathcal{B}^{-1}(\overline{R(A)}) \cap \mathcal{N}(B)^{\perp} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_{4k-1} = x_{4k} = 0,\, k \in \mathbb{N}\} = \overline{\mathcal{R}(A)},$$
$$R(AP_{\mathcal{N}(B)}) = \{0\},\;\; S = \overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{T},\, \mathcal{R}(A)^{\perp} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_{4k-3} = x_{4k-2},\, k \in \mathbb{N}\}.$$

Sada je jasno da slika operatora $A + B$ ne može biti zatvorena jer je $P_S(A + B)|_{\mathcal{T}}$ kompaktan operator na beskonačno dimenzionalnom prostoru $S = \mathcal{T} = \overline{\mathcal{R}(A)}$. Sa druge strane, kako je $\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})} = \{0\}$, i kako su

$$\mathcal{R}(P_{\mathcal{R}(A)^{\perp}}B) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_{4k-3} = x_{4k-2} = 0,\, x_{4k-1} = -x_{4k},\, k \in \mathbb{N}\}$$

i

$$\mathcal{R}(P_S(A - B)|_{\mathcal{T}}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_{4k-1} = x_{4k-3} = x_{4k-3} = 0,\, k \in \mathbb{N}\}$$

zatvoreni potprostori u $\mathcal{H}$ i S, redom, prema Teoremi 3.6.1 imamo da je slika operatora $A - B$ zatvorena.
Koristeći prethodni rezultat možemo se pozabaviti nekim specijalnim slučajevima:

Teorema 3.6.2 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(H)$ takvi da je $\overline{\mathcal{R}(A)} \cap \overline{\mathcal{R}(B)} = \{0\}$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Slika operatora $\alpha A + \beta B$ je zatvorena ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) *$\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ je zatvoren potprostor,*

(ii) *$\mathcal{N}(B)^{\perp} = \mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^{\perp}}) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)^*|_{\mathcal{S}})$,*

gde je $\mathcal{S} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})^{\perp} \cap \overline{\mathcal{R}(A)}$.

Dokaz. U ovom slučaju imamo da je $\mathcal{T} = B^{-1}(\overline{\mathcal{R}(A)}) \cap \mathcal{N}(B)^{\perp} = \{0\}$, pa je uslov (i) Teoreme 3.6.1 je trivijalno ispunjen. Dalje, iz istog razloga vidimo da je uslov (ii) ekvivalentan uslovu da $AP_{\mathcal{N}(B)}$ ima zatvorenu sliku. Kako je $\mathcal{T} = \{0\}$ imamo da je $B_2 : \mathcal{N}(B)^{\perp} \to \mathcal{R}(A)^{\perp}$ injektivan iz čega imamo da je $\overline{\mathcal{R}((B_2)^*)} = \mathcal{N}(B)^{\perp}$. Kako je $\mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^{\perp}}) = \mathcal{R}((B_2)^*)$ vidimo da je uslov (iii) ekvivalentan sa

$$\mathcal{N}(B)^{\perp} = \mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^{\perp}}) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)^*|_{\mathcal{S}}) \cap \mathcal{N}(B)^{\perp}.$$

Potprostor $\mathcal{S}$ je ortogonalni komplement potprostora $\mathcal{R}(A_1)$ u prostoru $\overline{\mathcal{R}(A)}$ pa ga stoga možemo posmatrati kao

$$\mathcal{S} = \mathcal{N}(A_1^*) = \mathcal{N}(P'_{\mathcal{N}(B)}A^*|_{\overline{\mathcal{R}(A)}}) = (A^*)^{-1}(\mathcal{N}(B)^\perp) \cap \overline{\mathcal{R}(A)}.$$

Iz ove jednakosti sledi da je uslov (iii) ekvivalentan sa:

$$\mathcal{N}(B)^\perp = \mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp}) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)^*|_{\mathcal{S}})$$

čime je dokaz završen. $\Box$.

Primedba: Iz Teorema 3.2.2 i 3.5.7 smo videli da injektivnost (invertiblnost) linearne kombinacije $\alpha A + \beta B$, za $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ne zavisi od izbora skalara α, β u slučaju kada je $\overline{\mathcal{R}(A)} \cap \overline{\mathcal{R}(B)} = \{0\}$, i prirodno je čekivati da će isto važiti i za zatvorenost slike. Sledeći primer pokazuje da to nije slučaj:
Neka su $A, B \in \mathcal{B}(l_2)$ definisani sa:

$$Ae_n = \begin{cases} e_n + \frac{e_n}{2n}, & n = 2k-1 \\ -e_n - \frac{e_n}{2n}, & n = 2k \end{cases}, \; Be_n = \begin{cases} -e_n + \frac{e_n}{2n}, & n = 2k-1 \\ e_n - \frac{e_n}{2n}, & n = 2k \end{cases},$$

gde je $k \in \mathbb{N}$ i e_n je n-ti vektor standardne baze prostora l_2. Lako se proverava da A i B imaju zatvorene slike čiji je presek trivijalan, da je slika operatora $A - B$ zatvorena, dok slika operatora $A + B$ nije zatvorena (kao slika kompaktnog operatora).

Teorema 3.6.3 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(H)$ takvi da je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Slika operatora $\alpha A + \beta B$ je zatvorena ako i samo ako $P_{\mathcal{R}(A)^\perp}B$ ima zatvorenu sliku i*

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) \cap \overline{\mathcal{R}(A)},$$

gde je $\mathcal{T} = B^{-1}(\overline{\mathcal{R}(A)}) \cap \mathcal{N}(B)^\perp$.

Dokaz. Iz $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ sledi da je $\mathcal{R}(P_S(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}) = \{0\}$ i $\mathcal{N}(P_S(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}$ pa je uslov (i) Teoreme 3.6.1 trivijalno ispunjen. Kako je $\mathcal{S} = \{0\}$ vidimo da je uslov (iii) ekvivalentan uslovu da $P_{\mathcal{R}(A)^\perp}B$ ima zatvorenu sliku. Očigledno je da je uslov (ii) ekvivalentan sa $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}})$. Preostaje da pokažemo da je $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B|_{\mathcal{T}}) = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}})$. Inkluzija $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}) \subseteq \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B|_{\mathcal{T}})$ je očigledna. Neka je $Ax + By$ iz $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B|_{\mathcal{T}})$ proizvoljan. Onda iz

$$Ax + By = A(x - \frac{\alpha}{\beta}y) + (\alpha A + \beta B)\left(\frac{1}{\beta}y\right)$$

vidimo da $Ax + By \in \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}})$. Kako je $\mathcal{R}(B|_{\mathcal{T}}) = \mathcal{R}(B) \cap \overline{\mathcal{R}(A)}$ vidimo da je uslov (ii) zaista ekvivalentan sa $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) \cap \overline{\mathcal{R}(A)}$. $\Box$

Posledica 3.6.1 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(H)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ takvi da je $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$. Tada zatvorenost slike operatora $\alpha A + \beta B$ ne zavisi od izbora skalara $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

Sada možemo napokon dati potrebne i dovoljne uslove za konsistentnost u invertiblnosti linearne kombinacije operatora:

Teorema 3.6.4 *Neka su $A, B \in \mathcal{B}(H)$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Operator $\alpha A + \beta B$ je konzistentan u invertibilnosti ako i samo ako je ispunjen jedan od narednih uzajamno isključivih uslova:*

1° $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) = \{0\}$, $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$, $A|_{\mathcal{N}(B)}$ *ima zatvorenu sliku,* $P_{\mathcal{S}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}})$ *je injektivan operator sa slikom* $\mathcal{S}$,

2° *Slika operatora* $P_{\mathcal{S}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}$ *nije zatvorena,*

3° $\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}B})} \neq \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) + \mathcal{R}\left((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}\right) \cap \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}B})}$,

4° $\overline{\mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp})} \neq \mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp}) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)^*|_{\mathcal{S}}) \cap \overline{\mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp})}$,

5° *Slika operatora* $P_{\mathcal{S}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}})$ *je zatvorena,*
$\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}B})} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) + \mathcal{R}\left((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}\right) \cap \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}B})}$,
$\overline{\mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp})} = \mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp}) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)^*|_{\mathcal{S}}) \cap \overline{\mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp})}$,
$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) \neq \{0\}$ *i* $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) \neq \mathcal{H}$,

6° *Slika operatora* $P_{\mathcal{S}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}})$ *je zatvorena,*
$\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}B})} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) + \mathcal{R}\left((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}\right) \cap \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}B})}$,
$\overline{\mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp})} = \mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp}) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)^*|_{\mathcal{S}}) \cap \overline{\mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp})}$,
$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) \neq \{0\}$ *i* $\mathcal{R}(P_{\mathcal{S}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}) \neq \mathcal{S}$,

7° *Slika operatora* $P_{\mathcal{S}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}})$ *je zatvorena,*
$\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}B})} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) + \mathcal{R}\left((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}\right) \cap \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}B})}$,
$\overline{\mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp})} = \mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp}) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)^*|_{\mathcal{S}}) \cap \overline{\mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp})}$,
slika operatora $AP_{\mathcal{N}(B)}$ *nije zatvorena i* $\mathcal{R}(A) + \mathcal{R}(B) \neq \mathcal{H}$,

8° *Slika operatora* $P_{\mathcal{S}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}})$ *je zatvorena,*
$\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}B})} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) + \mathcal{R}\left((\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}\right) \cap \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}B})}$,
$\overline{\mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp})} = \mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp}) + \mathcal{R}((\alpha A + \beta B)^*|_{\mathcal{S}}) \cap \overline{\mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^\perp})}$,
slika operatora $AP_{\mathcal{N}(B)}$ *nije zatvorena i* $\mathcal{R}(P_{\mathcal{S}}(\alpha A + \beta B)|_{\mathcal{T}}) \neq \mathcal{S}$,

9° *Slika operatora* $P_{\mathcal{S}}(\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}})$ *je zatvorena,*
$\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}B})}=\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})+\mathcal{R}\left((\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}}\right)\cap\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}B})}$,
$\overline{\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})}=\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})+\mathcal{R}((\alpha A+\beta B)^*|_{\mathcal{S}})\cap\overline{\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})}$,
$P_{\mathcal{S}}(\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}}$ *nije injektivan i* $\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(B)\neq\mathcal{H}$,

10° *Slika operatora* $P_{\mathcal{S}}(\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}})$ *je zatvorena,*
$\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}B})}=\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})+\mathcal{R}\left((\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}}\right)\cap\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}B})}$,
$\overline{\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})}=\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})+\mathcal{R}((\alpha A+\beta B)^*|_{\mathcal{S}})\cap\overline{\mathcal{R}(B^*P_{\mathcal{R}(A)^\perp})}$,
$P_{\mathcal{S}}(\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}}$ *nije injektivan i* $\mathcal{R}(P_{\mathcal{S}}(\alpha A+\beta B)|_{\mathcal{T}})\neq\mathcal{S}$;

gde je $\mathcal{T}=B^{-1}(\overline{\mathcal{R}(A)})\cap\mathcal{N}(B)^\perp$ *i* $\mathcal{S}=\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})^\perp\cap\overline{\mathcal{R}(A)}$.

Dokaz. Dokaz direktno sledi iz Teoreme 1.2.1 i Teorema 3.4.2, 3.6.1, 3.3.4, 3.3.3. □.

Naravno koristeći Teoreme 3.3.1, 3.3.5, 3.3.7, 3.3.6, 3.5.7, 3.5.8, 3.6.2 i 3.6.3 možemo dati potrebne i dovoljne uslove pod kojima je linearna kombinacija operatora konzistentna u invertibilnosti u specijalnim slučajevima $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ i $\overline{\mathcal{R}(A)}\cap\overline{\mathcal{R}(B)}=\{0\}$. Lako se proverava da važe sledeće teoreme:

Teorema 3.6.5 *Neka su* $A,B\in\mathcal{B}(H)$ *takvi da je* $\mathcal{R}(A)=\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$ *i* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Operator* $\alpha A+\beta B$ *je konzistentan u invertibilnosti ako i samo ako je ispunjen jedan od narednih uzajamno isključivih uslova:*

1° $\mathcal{N}(A)\cap\mathcal{N}(B)=\{0\}$, $\mathcal{R}(A)\oplus\mathcal{R}(B)=\mathcal{H}$, *A ima zatvorenu sliku,*

2° $\mathcal{R}(P_{\mathcal{R}(A)^\perp}B)$ *nije zatvoren potprostor,*

3° $\overline{\mathcal{R}(A)}\neq\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(B)\cap\overline{\mathcal{R}(A)}$,

4° $P_{\mathcal{R}(A)^\perp}B$ *ima zatvorenu sliku,* $\overline{\mathcal{R}(A)}=\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(B)\cap\overline{\mathcal{R}(A)}$,
$\mathcal{N}(A)\cap\mathcal{N}(B)\neq\{0\}$, $\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(B)\neq\mathcal{H}$,

5° $P_{\mathcal{R}(A)^\perp}B$ *ima zatvorenu sliku,* $\overline{\mathcal{R}(A)}=\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(B)\cap\overline{\mathcal{R}(A)}$,
slika operatora A nije zatvorena, $\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(B)\neq\mathcal{H}$,

6° $P_{\mathcal{R}(A)^\perp}B$ *ima zatvorenu sliku,* $\overline{\mathcal{R}(A)}=\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(B)\cap\overline{\mathcal{R}(A)}$,
$\mathcal{R}(A)\cap\mathcal{R}(B)\neq\{0\}$, $\mathcal{R}(A)+\mathcal{R}(B)\neq\mathcal{H}$.

Teorema 3.6.6 *Neka su* $A,B\in\mathcal{B}(H)$ *takvi da je* $\overline{\mathcal{R}(A)}\cap\overline{\mathcal{R}(B)}=\{0\}$ *i* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$. *Operator* $\alpha A+\beta B$ *je konzistentan u invertibilnosti ako i samo ako je ispunjen jedan od narednih uzajamno isključivih uslova:*

1° $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(B) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B) = \mathcal{H}$,

2° *slika operatora* $AP_{\mathcal{N}(B)}$ *nije zatvorena,*

3° $\mathcal{N}(B)^{\perp} \neq \mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^{\perp}}) + \mathcal{R}\left((\alpha A + \beta B)^*|_{\mathcal{S}}\right)$,

4° $\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) = \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})}$, $\mathcal{N}(B)^{\perp} \neq \mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^{\perp}}) + \mathcal{R}\left((\alpha A + \beta B)^*|_{\mathcal{S}}\right)$, $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) \neq \{0\}$, $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{R}(B) \neq \mathcal{H}$,

5° $\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)}) = \overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})}$, $\mathcal{N}(B)^{\perp} \neq \mathcal{R}(B^* P_{\mathcal{R}(A)^{\perp}}) + \mathcal{R}\left((\alpha A + \beta B)^*|_{\mathcal{S}}\right)$, $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B) \neq \{0\}$, $\overline{\mathcal{R}(A)} \neq \mathcal{R}(AP_{\mathcal{N}(B)})$.

Takođe, iz Posledice 3.3.2 sledi sledeća teorema:

Teorema 3.6.7 *Neka su* $P, Q \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *ortogonalne projekcije i* $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Linearna kombinacija* $\alpha P + \beta Q$ *je konzistentna u invertibilnosti.*

Glava 4

Rezultati o uopštenom Bott-Duffinovom inverzu

4.1 Preliminarni rezultati

Kao što smo napomenuli u predgovoru, jedan od ciljeva ove disertacije je se da se $A^{\dagger}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ predstavi operatorskom matricom koja odgovara razlaganju prostora $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{H}$, i na taj način proširiti rezultate iz rada [60]. Reprezentacija uopštenih inverza korišćenjem operatorskih matrica nije novina, što možemo videti u radovima [66, 48]. Iz definicije Bott-Duffinovog inverza vidimo da se njegovo proučavanje oslanja na proučavanju linearne kombinacije $AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$ koju možemo predstaviti preko operatorske matrice na sledeće načine:

$$AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} A_I & 0 \\ A_{II} & I_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} : \mathcal{M} \oplus \mathcal{N} \to \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}, \tag{4.1}$$

gde je $A_I = P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}} A|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $A_{II} = P'_{\mathcal{N},\mathcal{M}} A|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, i

$$AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 + P_1 & I_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} : \mathcal{N}^{\perp} \oplus \mathcal{N} \to \mathcal{N}^{\perp} \oplus \mathcal{N}, \tag{4.2}$$

gde je $A_1 = P'_{\mathcal{N}^{\perp}}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})|_{\mathcal{N}^{\perp}} : \mathcal{N}^{\perp} \to \mathcal{N}^{\perp}$, $A_2 = P'_{\mathcal{N}}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})|_{\mathcal{N}^{\perp}} : \mathcal{N}^{\perp} \to \mathcal{N}$ i $P_1 = P'_{\mathcal{N}} P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}|_{\mathcal{N}^{\perp}} : \mathcal{N}^{\perp} \to \mathcal{N}$. Prvo ćemo naći predstavljanje preko operatorske matrice operatora $(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})^{\dagger}$ u obliku

$$(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})^{\dagger} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \end{bmatrix} : \mathcal{M} \oplus \mathcal{N} \to \mathcal{M} \oplus \mathcal{N},$$

i zatim iskoristiti tu operatorsku matricu da nađemo predstavljanje uopštenog Bott-Duffinovog inverza $A^{\dagger}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$. U tu svrhu ćemo koristi rezultate koji se tiču problema kompletiranja (gornje) trougaonih operatorskih matrica. Neki interesantni radovi na tu temu su [12, 15, 29, 43, 46, 26]. Najviše ćemo se oslanjati na rezultate modifikovane za donje trougaone operatorske matrice date u radu [26]. Uzimanjem Hilbert adjungovanih operatora u Teoremi 6 iz rada [26] dobija se sledeća teorema:

Teorema 4.1.1 *Neka su $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ i $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$, pri čemu je B invertibilan. Onda postoji Moore-Penroseov inverz 2×2 operatorske matrice $\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$ ako i samo ako je slika operatora A zatvorena. Mur-Penrozov inverz je dat sa*

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}^{\dagger} = \begin{bmatrix} A^{\dagger} - (I - A^{\dagger}A)C^{*}\Delta C A^{\dagger} & (I - A^{\dagger}A)C^{*}\Delta \\ -B^{*}\Delta C A^{\dagger} & B^{*}\Delta \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

gde je $\Delta = \big(BB^{*} + C(I - A^{\dagger}A)C^{*}\big)^{-1}$.

U sledećem odeljku biće korišćena i sledeća lema

Lema 4.1.1 *Neka je $\mathcal{X}$ Banahov prostor i $A \in \mathcal{B}(\mathcal{X})$. Ako je $\mathcal{Z}$ zatvoren potprostor od $\mathcal{X}$ takav da je $\mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{Z}$ zatvoren onda je slika operatora A zatvorena.*

Lema 4.1.1 je u stvari specijalan slučaj Teoreme 4.1.12. iz knjige [34] primenjena na slučaj ograničenih linearnih operatora. Korističemo i sledeću elementarnu lemu koja sledi iz definicije ortogonalnog komplementa:

Lema 4.1.2 *Neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ potprostori Hilbertovog prostora $\mathcal{H}$. Ako je $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ tada je $\mathcal{N}^{\perp} \subseteq \mathcal{M}^{\perp}$.*

4.2 Predstavljanje uopštenog Bott-Duffinovog inverza operatorskom matricom

Jedan od glavnih rezultata je sledeća

Teorema 4.2.1 *Neka je $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ zatvoreni komplementarni potprostori prostora $\mathcal{H}$. Uopšteni Bott-Duffinov inverz $A^{\dagger}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ postoji ako i samo ako $P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$ ima zatvorenu sliku i dat je sa*

$$A^{\dagger}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \mathcal{M} \oplus \mathcal{N} \to \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}, \tag{4.4}$$

gde je

$$
\begin{aligned}
A_1 &= P'_{\mathcal{N}^\perp}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})|_{\mathcal{N}^\perp} : \mathcal{N}^\perp \to \mathcal{N}^\perp,\\
A_2 &= P'_{\mathcal{N}}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})|_{\mathcal{N}^\perp} : \mathcal{N}^\perp \to \mathcal{N},\\
P_1 &= P'_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}|_{\mathcal{N}^\perp} : \mathcal{N}^\perp \to \mathcal{N},\\
\Delta &= \Big(I_{\mathcal{N}} + (A_2+P_1)(I_{\mathcal{N}^\perp} - A_1^\dagger A_1)(A_2+P_1)^*\Big)^{-1} : \mathcal{N} \to \mathcal{N},\\
T &= P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}\Big(A_1^\dagger P'_{\mathcal{N}^\perp} - (I_{\mathcal{N}^\perp} - A_1^\dagger A_1)(A_2+P_1)^*\Delta(A_2+P_1)A_1^\dagger P'_{\mathcal{N}^\perp} +\\
&\quad + (I_{\mathcal{N}^\perp} - A_1^\dagger A_1)(A_2+P_1)^*\Delta P'_{\mathcal{N}}\Big)\Big|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}, \qquad (4.5)\\
S &= P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(I_{\mathcal{N}^\perp} - A_1^\dagger A_1)(A_2+P_1)^*\Delta : \mathcal{N} \to \mathcal{M}.
\end{aligned}
$$

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da uopšteni Bot-Dufinov inverz $A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ postoji ako i samo ako $P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$ ima zatvorenu sliku, a potom pokazati da je dat sa (4.4). Po definiciji znamo da $A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ postoji ako i samo ako $(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})^\dagger$ postoji. Iz predstavljanja putem operatorske matrice (4.2) i Teoreme 4.1.1 znamo da je ovaj uslov ekvivalentan uslovu da A_1 ima zatvorenu sliku. Kako je $\mathcal{R}(A_1) \subseteq \mathcal{N}^\perp$ ovaj uslov je ekvivalentan uslovu da je $\mathcal{R}(P'_{\mathcal{N}^\perp}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}^\perp}) \oplus \mathcal{N}$ zatvoren potprostor prostora $\mathcal{H}$. Iz jednakosti

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}(P'_{\mathcal{N}^\perp}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}^\perp}) \oplus \mathcal{N} &= \mathcal{R}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}^\perp}) + \mathcal{N} =\\
&= \mathcal{R}(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}^\perp}) \oplus \mathcal{N},
\end{aligned}
$$

zaključujemo da je slika operatora A_1 zatvorena ako i samo ako je $\mathcal{R}(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}^\perp}) \oplus \mathcal{N}$ zatvoren, što je pak ekvivalentno tome da je $\mathcal{R}(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}^\perp})$ zatvoren po Lemi 4.1.1. Konačno, iz $\mathcal{R}(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}^\perp}) = \mathcal{R}(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})$ sledi traženi zaključak da $A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ postoji ako i samo ako je slika operatora $P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$ zatvorena.
Iz Teoreme 4.1.1 znamo da je predstavljanje operatorskom matricom operatora $(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})^\dagger$ u odnosu na razlaganje $\mathcal{N}^\perp \oplus \mathcal{N} = \mathcal{H}$ dato sa

$$
\begin{bmatrix} X & Y \\ -Z & \Delta \end{bmatrix}, \qquad (4.6)
$$

gde je $\Delta = \Big(I_{\mathcal{N}} + (A_2+P_1)(I_{\mathcal{N}}^\perp - A_1^\dagger A_1)(A_2+P_1)^*\Big)^{-1}$ i

$$
\begin{aligned}
X &= A_1^\dagger - (I_{\mathcal{N}^\perp} - A_1^\dagger A_1)(A_2+P_1)^*\Delta(A_2+P_1)A_1^\dagger : \mathcal{N}^\perp \to \mathcal{N}^\perp,\\
Y &= (I_{\mathcal{N}}^\perp - A_1^\dagger A_1)(A_2+P_1)^*\Delta : \mathcal{N} \to \mathcal{N}^\perp,\\
Z &= \Delta(A_2+P_1)A_1^\dagger : \mathcal{N}^\perp \to \mathcal{N}.
\end{aligned}
$$

Jedan način da dođemo do predstavljanja operatorskom matricom u odnosu na $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{H}$ je da pomožimo ovu operatorsku matricu sa

$$\begin{bmatrix} P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}^\perp} & 0 \\ P'_{\mathcal{N},\mathcal{M}}|_{\mathcal{N}^\perp} & I_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} : \mathcal{N}^\perp \oplus \mathcal{N} \to \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$$

s leva, i sa

$$\begin{bmatrix} P'_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{M}} & 0 \\ P'_{\mathcal{N}}|_{\mathcal{M}} & I_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} : \mathcal{M} \oplus \mathcal{N} \to \mathcal{N}^\perp \oplus \mathcal{N}$$

s desna. Dobijamo da $(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})^\dagger$ ima predstavljanje operatorskom matricom u odnosu na $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{H}$ dato sa:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}^\perp} & 0 \\ P'_{\mathcal{N},\mathcal{M}}|_{\mathcal{N}^\perp} & I_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & Y \\ W & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{M}} & 0 \\ P'_{\mathcal{N}}|_{\mathcal{M}} & I_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}X & P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}Y \\ P'_{\mathcal{N},\mathcal{M}}X + W & P'_{\mathcal{N},\mathcal{M}}Y + \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{M}} & 0 \\ P'_{\mathcal{N}}|_{\mathcal{M}} & I_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(XP'_{\mathcal{N}^\perp} + YP'_{\mathcal{N}})|_{\mathcal{M}} & P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}Y \\ P'_{\mathcal{N},\mathcal{M}}(XP'_{\mathcal{N}^\perp} + YP'_{\mathcal{N}})|_{\mathcal{M}} + W|_{\mathcal{M}} + \Delta|_{\mathcal{M}} & P'_{\mathcal{N},\mathcal{M}}Y + \Delta \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Iz definicije $A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ dobijamo da je predstavljanje ovog operatora operatorskom matricom u odnosu na $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{H}$ dato sa

$$\begin{aligned} A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} &= P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})^\dagger = \\ &= \begin{bmatrix} P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(XP'_{\mathcal{N}^\perp} + YP'_{\mathcal{N}})|_{\mathcal{M}} & P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T & S \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

gde su T, S i Δ dati sa (4.5). Ovim je dokaz završen. $\square$

Primedba: Kao što smo videli u dokazu, $\mathcal{R}(A_1) = \mathcal{R}(P'_{\mathcal{N}^\perp}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}^\perp})$ je zatvoren ako i samo ako je

$$\mathcal{R}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}^\perp}) + \mathcal{N}$$

zatvoren i kako je $\mathcal{R}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}^\perp}) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}) = \mathcal{R}(A|_{\mathcal{M}})$, zaključujemo da $A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ postoji ako i samo ako je

$$\mathcal{R}(A|_{\mathcal{M}}) + \mathcal{N}$$

zatvoren potprostor.

Sada dobijeni rezultat primenjujemo na slučaj $\mathcal{N} = \mathcal{M}^\perp$

Teorema 4.2.2 *Neka je* $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *i* $\mathcal{M}$ *zatvoren potprostor prostora* $\mathcal{H}$. *Uopšteni Bott-Duffinov inverz* $A^{\dagger}_{(\mathcal{M})}$ *postoji ako i samo ako je slika operatora* $P_{\mathcal{M}}AP_{\mathcal{M}}$ *zatvorena i on je dat sa:*

$$A^{\dagger}_{(\mathcal{M})} = \begin{bmatrix} T_1 & S_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp} \to \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^{\perp}, \tag{4.8}$$

gde je

$$T_1 = A_1^{\dagger} - (I_{\mathcal{M}} - A_1^{\dagger}A_1)A_2^{*}\Delta A_2 A_1^{\dagger} : \mathcal{M} \to \mathcal{M},$$
$$S_1 = (I_{\mathcal{M}} - A_1^{\dagger}A_1)A_2^{*}\Delta : \mathcal{M}^{\perp} \to \mathcal{M},$$

$A_1 = P'_{\mathcal{M}}A|_{\mathcal{M}}$, $A_2 = P'_{\mathcal{M}^{\perp}}A|_{\mathcal{M}}$ *i* $\Delta = (I_{\mathcal{M}^{\perp}} + A_2(I_{\mathcal{M}} - A_1^{\dagger}A_1)A_2)^{-1}$.

Dokaz. Rezultat direktno sledi iz Teoreme 4.1.1 primenjene na $AP_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{M}}^{\perp}$ predstavljen operatorskom matricom datom sa (4.1), gde je $\mathcal{N} = \mathcal{M}^{\perp}$ i definicije uopštenog Bott-Duffinovog inverza. □

Primedba: Li je u radu [60] dao potrebne i dovoljne uslove pod kojima važi $A_(\mathcal{M})^{\dagger} = (P_{\mathcal{M}}AP_{\mathcal{M}})^{\dagger}$, što je ekvivalentno pronalaženju potrebnih i dovoljnih uslova pod kojim je operatorska matrica kojim predstavljamao $(AP_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{M}^{\perp}})^{\dagger}$ donje trougaona. Iz predstavljanja $A^{\dagger}_{(\mathcal{M})} = P_{\mathcal{M}}(AP_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{M}^{\perp}})^{\dagger}$ operatorskom matricom datom sa (4.8) vidimo da će ovo važiti ako i samo ako je

$$(I_{\mathcal{M}} - A_1^{\dagger}A_1)A_2^{*} = 0,$$

što je ekvivalentno sa $\mathcal{N}(A_1) \subseteq \mathcal{N}(A_2)$. Iz definicije operatora A_1 i A_2 vidimo da je ovaj uslov ekvivalentan sa

$$\mathcal{R}(A|_{\mathcal{M}}) \cap \mathcal{M}^{\perp} = \{0\}.$$

Upravo smo dokazali Posledicu 4 iz rada [60] kao posledicu Teoreme 4.2.1.

Primedba: Uslov $\mathcal{R}(A|_{\mathcal{M}}) \cap \mathcal{M}^{\perp} = \{0\}$ uprošćava reprezentaciju $A^{\dagger}_{(\mathcal{M})}$ operatorskom matricom u velikoj meri, ali u slučaju $\mathcal{N} \neq \mathcal{M}^{\perp}$ situacija je malo složenija. Sledeći primer pokazuje da $A^{\dagger}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = (P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^{\dagger}$ može važiti i kada je $\mathcal{M}^{\perp} \neq \mathcal{N}$:

Primer 4.3.1. Neka su $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}_1$ i $\mathcal{N}_2$ potprostori prostora l^2 dati sa:

$$\mathcal{M} = \{x \in l^2 : x_{4n-2} = x_{4n-1}, x_{4n} = 0,\ n \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{N} = \{x \in l^2 : x_{4n-3} = x_{4n-2} = 0,\ n \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{N}_1 = \{x \in l^2 : x_{4n-2} = x_{4n-1} = x_{4n} = 0,\ n \in \mathbb{N}\},$$
$$\mathcal{N}_2 = \{x \in l^2 : x_{4n-3} = x_{4n-1} = x_{4n} = 0,\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Dalje, neka je $A \in \mathcal{B}(l^2)$ definisan sa:

$$Ax = \begin{cases} 0, & x \in \mathcal{N}, \\ (x_1, 0, x_2, 0, \dots, x_{4n-3}, 0, x_{4n-2}, 0, \dots), & x \in \mathcal{M}. \end{cases}$$

Lako se proverava da su $P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$ i $AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$ određeni sa:

$$P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}_1},\ AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}} = P_{\mathcal{N}_2^\perp}$$

Iz čega dalje dobijamo

$$(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^\dagger = P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_{\mathcal{M},\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}_1},$$

$$(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})^\dagger = AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}} = P_{\mathcal{N}_2^\perp}$$

Sada lako možemo izračunati $A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}x$:

$$A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}x = P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})^\dagger x = P_{\mathcal{N}_1}x,$$

za svaki $x \in l^2$. Zaključujemo da važi $(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^\dagger = A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$.
U narednoj teoremi dajemo potrebne i dovoljne uslove za jednakost $A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = (P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^\dagger$:

Teorema 4.2.3 *Neka je $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i neka je $\mathcal{R}(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})$ zatvoren potprostor. Jednakost $A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = (P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^\dagger$ važi ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:*

(i) $\mathcal{N}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}) = \{x \in \mathcal{N}^\perp :\ AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}x \in \mathcal{N}\}$,

(ii) $\mathcal{M}^\perp \subseteq (A^{-1}[\mathcal{N}] \cap \mathcal{M}) \oplus \mathcal{N}$,

(iii) $\mathcal{R}(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}) \subseteq \mathcal{N}^\perp$.

Dokaz. Pretpostavimo da važi jednakost $A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = (P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^\dagger$. Kako bismo pojednostavili notaciju označimo $AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$ sa $\tilde{A}$. Kako je $\mathcal{R}(A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}) \subseteq \mathcal{M}$, iz jednakosti $A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = (P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^\dagger$ sledi

$$\mathcal{R}((P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^\dagger) \subseteq \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathcal{M}^\perp \subseteq \mathcal{N}(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}) = \big(A^{-1}[\mathcal{N}] \cap \mathcal{M}\big) \oplus \mathcal{N}$$

iz čega vidimo da važi uslov (ii).
Pokažimo da važi $\mathcal{R}(\tilde{A}^\dagger|_{\mathcal{N}}) \subseteq \mathcal{N}$. Neka je $x \in \mathcal{N}$ proizvoljan. Kako je $\tilde{A}x = P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}x =$

x dobijamo da je $x \in \mathcal{R}(\tilde{A})$ iz čega sledi $\tilde{A}\tilde{A}^{\dagger}x = x$. Dalje, znamo da postoje jedinstveni $x_1 \in \mathcal{M}$ i $x_2 \in \mathcal{N}$ tako da je

$$\tilde{A}^{\dagger}x = x_1 + x_2.$$

Iz $x = \tilde{A}\tilde{A}^{\dagger}x$ dobijamo,

$$x = \tilde{A}\tilde{A}^{\dagger}x = \tilde{A}(x_1 + x_2) = Ax_1 + x_2$$

Iz gornje jednakosti sledi $Ax_1 = x - x_2 \in \mathcal{N}$ iz čega sledi da je $x_1 \in \mathcal{N}(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})$. Međutim, $x_1 \in \mathcal{N}(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^{\perp}$ jer je

$$(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^{\dagger}x = P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}\tilde{A}^{\dagger}x = P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(x_1 + x_2) = x_1$$

$$\Rightarrow x_1 \in \mathcal{R}((P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^{\dagger}) = \mathcal{N}(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^{\perp}.$$

Zaključujemo da je $x_1 = 0$, pa važi $\tilde{A}^{\dagger}x = x_2 \in \mathcal{N}$. Kako je $x \in \mathcal{N}$ proizvoljan upravo smo dokazali da je $\mathcal{R}(\tilde{A}^{\dagger}|_{\mathcal{N}}) \subseteq \mathcal{N}$. Iz ove relacije sledi da je operatorska matrica kojom predstavljamo $\tilde{A}^{\dagger} = (AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})^{\dagger}$ gornje trougaona u odnosu na $\mathcal{H} = \mathcal{N}^{\perp} \oplus \mathcal{N}$ i $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$. Sledi

$$(I_{\mathcal{N}^{\perp}} - A_1^{\dagger}A_1)(A_2 + P_1)^*\Delta = 0, \tag{4.9}$$

gde su A_1, A_2 i P_1 operatori iz (4.2). Kako je Δ inveritibilan operatora ova jednakost je ekvivalentna sa

$$\mathcal{N}(A_1) \subseteq \mathcal{N}(A_2 + P_1). \tag{4.10}$$

Iz ove inkluzije sledi $\mathcal{N}(A_1) \subseteq \mathcal{N}(\tilde{A})$. Pokažimo da važi i obratna inkluzija kada (4.10) važi. Neka je $x \in \mathcal{N}(\tilde{A})$ proizvoljan. Neka su $x_1 \in \mathcal{N}^{\perp}$ i $x_2 \in \mathcal{N}$ jedinstveni vektori takvi da je $x = x_1 + x_2$. Iz $x \in \mathcal{N}(\tilde{A})$ dobijamo

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 + P_1 & I_{\mathcal{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} A_1x_1 \\ (A_2 + P_1)x_1 + x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (A_1x_1 = 0 \wedge (A_2 + P_1)x_1 + x_2 = 0).$$

Dakle, $x_1 \in \mathcal{N}(A_1)$, pa iz (4.10) dobijamo $(A_2+P_1)x_1 = 0$ iz čega sledi $x_2 = 0$. Dobijamo da je $x = x_1$. Kako je $x \in \mathcal{N}(\tilde{A})$ prozvoljan zaključujemo da važi $\mathcal{N}(\tilde{A}) \subseteq \mathcal{N}(A_1)$. Upravo smo pokazali da je uslov (i) ispunjen.

Pošto smo zaključili da je operatorska matrica kojom predstavljamo $\tilde{A}^\dagger$ donje trougaona u odnosu na $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{H}$ i iz (4.9) koristeći Teoremu 4.2.1 dobijamo da je

$$A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = \begin{bmatrix} P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}} A_1^\dagger P'_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{M}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz ovog predstavljanja vidimo da je $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}(A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})})$ i kako je $A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = (P_{\mathcal{M},\mathcal{N}} A P_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^\dagger$ dobijamo

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}((P_{\mathcal{M},\mathcal{N}} A P_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^\dagger) = \mathcal{R}(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}} A P_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^\perp$$

iz čega sledi da je uslov (iii) ispunjen.
Obratno, pretpostavimo da su uslovi (i)-(iii) ispunjeni. Iz

$$P_{\mathcal{N}^\perp} P_{\mathcal{M},\mathcal{N}} A P_{\mathcal{M},\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}^\perp} A P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$$

i (iii) vidimo da $P_{\mathcal{M},\mathcal{N}} A P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$ možemo predstaviti sledećom operatorskom matricom

$$P_{\mathcal{M},\mathcal{N}} A P_{\mathcal{M},\mathcal{N}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \mathcal{N}^\perp \oplus \mathcal{N} \to \mathcal{N}^\perp \oplus \mathcal{N}.$$

Sledi da $(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}} A P_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^\dagger$ možemo predstaviti operatorskom matricom

$$\begin{bmatrix} A_1^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \mathcal{N}^\perp \oplus \mathcal{N} \to \mathcal{N}^\perp \oplus \mathcal{N}.$$

Iz (ii) dobijamo da je operatorska matrica kojom predstavljamo $(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}} A P_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^\dagger$ u odnosu na $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ data sa

$$\begin{bmatrix} P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}} A_1^\dagger P'_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{M}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada, iz (i) i iz Teoreme 4.2.1 sledi da $A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ možemo predstaviti operatorskom matricom

$$\begin{bmatrix} P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}} A_1^\dagger P'_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{M}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zaključujemo da važi $(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}} A P_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^\dagger = A^\dagger_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$, čime je dokaz zaršen. $\square$

Odeljak završavamo sledećom posledicom koja je ekvivalentna Posledici 8 iz rada [60]:

Posledica 4.2.1 *Neka je $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zatvoreni komplementarni potprostori prostora $\mathcal{H}$. Ako je slika operatora $P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}$ zatvorena, $\mathcal{R}(A|_{\mathcal{M}}) \cap \mathcal{N} = \{0\}$ i $A^{\dagger}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = (P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^{\dagger}$, tada je $\mathcal{N} = \mathcal{M}^{\perp}$.*

Dokaz. Kao i u dokazu Teoreme 4.2.3 vidimo da $(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^{\dagger}$ možemo predstaviti operatorskom matricom

$$(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^{\dagger} = \begin{bmatrix} A_1^{\dagger} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \mathcal{N}^{\perp} \oplus \mathcal{N} \to \mathcal{N}^{\perp} \oplus \mathcal{N},$$

gde je $A_1 = P'_{\mathcal{N}^{\perp}}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})|_{\mathcal{N}^{\perp}} : \mathcal{N}^{\perp} \to \mathcal{N}^{\perp}$. Iz pretpostavke da važi jednakost $A^{\dagger}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = (P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^{\dagger}$ i iz gornje jednakosti, sledi

$$\mathcal{R}(A_1^{\dagger}A_1) = \mathcal{R}(A_1^{\dagger}) = \mathcal{R}\left((P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^{\dagger}\right) = \mathcal{R}(A^{\dagger}_{\mathcal{M},\mathcal{N}}) \subseteq \mathcal{M}.$$

Kako je $\mathcal{N}(A_1^{\dagger}A_1) = \mathcal{N}(A_1)$, iz uslova (i) Teoreme 4.2.3 dobijamo

$$\mathcal{N}(A_1^{\dagger}A_1) = \mathcal{N}(A_1) = \mathcal{N}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}).$$

Iz pretpostavke da je $\mathcal{R}(A|_{\mathcal{M}}) \cap \mathcal{N} = \{0\}$ dobijamo

$$\mathcal{N}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}) = \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{M}$$

odakle sledi

$$\mathcal{N}(A_1^{\dagger}A_1) = \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}.$$

Kako je $\mathcal{N}^{\perp} = \mathcal{R}(A_1^{\dagger}A_1) \oplus \mathcal{N}(A_1^{\dagger}A_1)$ iz gornje inkluzije sledi

$$\mathcal{N}^{\perp} \subseteq \mathcal{M},$$

čime je dokaz završen. $\square$

Iz Teoreme 4.2.1 možemo dobiti i operatorsku matricu koja predstavlja Bott-Duffinov inverz. Zaista, iz definicije Bott-Duffinovog inverza i jedinstvenosti Moore-Penroseovog inverza imamo da će ukoliko $A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ postoji važiti

$$A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = A^{\dagger}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$$

tako da predstavljanje Bott-Duffinovog inverzna operatoskom matricom možemo dobiti podesnom modifikacijom operatorske matrice (4.4).

Teorema 4.2.4 *Neka je $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ zatvoreni komplementarni potprostori prostora $\mathcal{H}$. Bott-Duffinov inverz $A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ postoji ako i samo ako važe sledeći uslovi*

1) $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{M} = \{0\}$,

2) $\mathcal{R}(A|_{\mathcal{M}}) \oplus \mathcal{N} = \mathcal{H}$.

Ukoliko postoji, $A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ je dat sa

$$A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = \begin{bmatrix} A_I^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \mathcal{M} \oplus \mathcal{N} \to \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}, \tag{4.11}$$

gde je $A_I = P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}} A|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$.

Dokaz. Prvo ćemo se pozabaviti uslovima egzistencije Bott-Duffinovog inverza. Iz njegove definicije vidimo da $A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ postoji ako i samo ako je $AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$ invertibilan operator. Iz Teoreme 3.4.1 znamo da je $AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$ invertibilan ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(i) $\mathcal{N}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}) \cap \mathcal{N}(P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}) = \{0\}$, $\mathcal{R}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}) + \mathcal{R}(P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}) = \mathcal{H}$,

(ii) $AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}(P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})}$ ima zatvorenu sliku,

(iii) $P_{\mathcal{S},\mathcal{R}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}(P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})})}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})|_{\mathcal{T}}$ je injektivan operator čija je slika $\mathcal{S}$, gde je $\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})} = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}(P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})}) \oplus \mathcal{S}$, $\mathcal{T} = P^{-1}_{\mathcal{N},\mathcal{M}}\left(\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})}\right) \cap \mathcal{P}$ i $\mathcal{H} = \mathcal{N}(P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}) \oplus \mathcal{P}$.

Pretpostavimo da je $AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$ invertibilan, tj. da su ispunjeni uslovi (i)-(iii). Kako je $\mathcal{R}(P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}) = \mathcal{N}$ i $\mathcal{N}(P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}) = \mathcal{M}$ vidimo da je uslov (i) ekvivalentan sa

$$\mathcal{N}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}) \cap \mathcal{M} = \{0\},\ \mathcal{R}(A|_{\mathcal{M}}) + \mathcal{N} = \mathcal{H}.$$

Prvi jednakost gore je očigledno ekvivalentna sa $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{M} = \{0\}$. Zaključujemo da uslov 1) mora biti ispunjen. Iz

$$AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}(P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})} = AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{M}} = A|_{\mathcal{M}}$$

vidimo da je uslov (ii) ekvivalentan uslovu da $A|_{\mathcal{M}}$ ima zatvorenu sliku. Sledi da je $\mathcal{S} = \{0\}$, iz čega vidimo da je uslov (iii) ispunjen ako i samo ako je i $\mathcal{T} = \{0\}$. Imamo da je u našem slučaju $\mathcal{P} = \mathcal{N}$ i

$$\mathcal{T} = P^{-1}_{\mathcal{N},\mathcal{M}}\left(\overline{\mathcal{R}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})}\right) \cap \mathcal{P} = P^{-1}_{\mathcal{N},\mathcal{M}}\left(\mathcal{R}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})\right) \cap \mathcal{N} = \mathcal{R}(A|_{\mathcal{M}}) \cap \mathcal{N}.$$

Dakle, $\mathcal{T} = \{0\}$ ako i samo ako je $\mathcal{R}(A|_{\mathcal{M}}) \cap \mathcal{N} = \{0\}$. Iz ovog zaključka i drugog dela uslova (i) vidimo da i uslov 2) mora važiti.

Obratno, pretpostavimo da su ispunjeni uslovi 1) i 2). Odmah vidimo da je uslov (i) ispunjen. Iz uslova 2) imamo da je slika operatora $A|_{\mathcal{M}}$ zatvorena pa je ispunjen i uslove (ii). Iz pređašnje analize vidimo da je i uslov (iii) ispunjen jer $\mathcal{S} = \mathcal{T} = \{0\}$. Zaključujemo da je $AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$ invertibilan.
Da bismo završili dokaz moramo dokazati je predstavljanje $A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ operatorskom matricom zaista dato sa (4.11). Kako je u ovom slučaju $A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = A^{\dagger}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$, tražena operatorska matrica kojom predstavljamo $A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ data je sa (4.4). Ostaje da pokažemo da je $S = 0$ i $T = A_I^{-1}$, gde su operatori $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ i $S : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ dati sa (4.5). Prvo, primetimo da iz uslova 1) i 2) sledi da je operator $A_I = P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ invertibilan. Štaviše, iz

$$\mathcal{R}(A|_{\mathcal{M}}) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}) = \mathcal{R}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}^\perp})$$

i uslova 2) vidimo da je operator $A_1 = P'_{\mathcal{N}^\perp}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})|_{\mathcal{N}^\perp}$ definisan u (4.5) surjektivan. Iz uslova 1) sledi injektivnost operatora A_1, pa postoji A_1^{-1}. Zato je $A_1^\dagger = A_1^{-1}$ i stoga

$$\begin{aligned}
\Delta &= \Big(I_{\mathcal{N}} + (A_2 + P_1)(I_{\mathcal{N}^\perp} - A_1^\dagger A_1)(A_2 + P_1)^*\Big)^{-1} = I_{\mathcal{N}}\\
T &= P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}\Big(A_1^\dagger P'_{\mathcal{N}^\perp} - (I_{\mathcal{N}^\perp} - A_1^\dagger A_1)(A_2 + P_1)^*\Delta(A_2 + P_1)A_1^\dagger P'_{\mathcal{N}^\perp} +\\
&\quad + (I_{\mathcal{N}^\perp} - A_1^\dagger A_1)(A_2 + P_1)^*\Delta P'_{\mathcal{N}}\Big)\Big|_{\mathcal{M}} = P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{M}}\\
S &= P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}(I_{\mathcal{N}^\perp} - A_1^\dagger A_1)(A_2 + P_1)^* = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, treba još pokazati da je $T = P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{M}} = A_I^{-1}$. Iz

$$\begin{aligned}
P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{M}}P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A &= P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A = P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}A\\
&= P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}A(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}})\\
&= P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + AP_{\mathcal{N},\mathcal{M}})\\
&= P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}}P_{\mathcal{N}^\perp} + AP_{\mathcal{N},\mathcal{M}})\\
&= P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})P_{\mathcal{N}^\perp} + P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}AP_{\mathcal{N},\mathcal{M}},
\end{aligned}$$

vidimo da je

$$P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{M}}P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A|_{\mathcal{M}} = P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})P_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{M}}.$$

Sada, dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{M}}P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A|_{\mathcal{M}}) &= \mathcal{R}(P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})P_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{M}}) \\
&= \mathcal{R}(P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})P_{\mathcal{N}^\perp}P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}) \\
&= \mathcal{R}(P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})P_{\mathcal{N}^\perp}) \\
&= \mathcal{R}(P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})|_{\mathcal{N}^\perp}) \\
&= \mathcal{R}(P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}A_1) = \mathcal{R}(P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}I_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{N}^\perp}) \\
&= \mathcal{R}(P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}P_{\mathcal{N}^\perp}) = \mathcal{M}.
\end{aligned}$$

Kako važe uslovi 1) i 2) lako se proverava da je $P'_{\mathcal{M},\mathcal{N}}A_1^{-1}P'_{\mathcal{N}^\perp}(AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})P_{\mathcal{N}^\perp}|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ injektivan operator. Zaključujemo da je T levi inverz operatora A_I, a samim tim i inverz operatora A_I čime je dokaz završen. $\square$

Primedba: Teoremu smo mogli da dokažemo i na drugi način koristeći rezultate o invertibilnosti operatorskih matrica.

U slučaju $\mathcal{N} = \mathcal{M}^\perp$ potpuno analogno se dokazuje sledeća

Teorema 4.2.5 *Neka je $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i $\mathcal{M}$ zatvoren potprostor prostora $\mathcal{H}$. Bott-Duffinov inverz $A^{-1}_{(\mathcal{M})}$ postoji ako i samo ako važe sledeći uslovi*

1) $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{M} = \{0\}$,

2) $\mathcal{R}(A|_{\mathcal{M}}) \oplus \mathcal{M}^\perp = \mathcal{H}$.

Ukoliko postoji, $A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})}$ je dat sa

$$A^{-1}_{(\mathcal{M})} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp \to \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp, \tag{4.12}$$

gde je $A_1 = P'_{\mathcal{M}}A|_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$.

Vidimo da je u ovom slučaju $A^{-1}_{(\mathcal{M})} = A^{\dagger}_{(\mathcal{M})} = (P_{\mathcal{M}}AP_{\mathcal{M}})^\dagger$. Primetimo da, na osnovu Posledice 4.2.1, ova jednakost važi samo u slučaju $\mathcal{N} = \mathcal{M}^\perp$. Preciznije, dobijamo da važi

Posledica 4.2.2 *Neka je $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ i neka su $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ zatvoreni komplementarni potprostori prostora $\mathcal{H}$ takvi da je operator $AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N},\mathcal{M}}$ invertibilian. Ako važi $A^{-1}_{(\mathcal{M},\mathcal{N})} = (P_{\mathcal{M},\mathcal{N}}AP_{\mathcal{M},\mathcal{N}})^\dagger$ tada je $\mathcal{N} = \mathcal{M}^\perp$.*

Bibliografija

[1] M. L. Arias, G. Corach, M. C. Gonzalez,*Saddle point problems, Bott–Duffin inverses, abstract splines and oblique projections*, Linear Algebra Appl. 457, (2014) 61-75.

[2] J. K. Baksalary, O. M. Baksalary, *Nonsingularity of linear combinations of idempotent matrices*, Linear Algebra Appl., 388, (2004) 25-29.

[3] O. M. Baksalary, G. Trenkler, *Revisitation of the product of two orthogonal projectors*, Linear Algebra Appl., 430, (2009) 2813–2833.

[4] A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, *Generalized Inverses: Theory and Applications*, 2nd edn. Springer, New York 2003

[5] E. Boaso,*Further results on the (b,c)-inverse, the outer inverse $A^{(2)}_{T,S}$ and the Moore-Penrose inverse in the Banach context*, Linear and Multilinear Algebra, 67 (5), (2018) 1006-1030.

[6] E. Boaso, G. K. Montiel,*The (b,c)-Inverse in Rings and in the Banach Context*, Mediterranean Journal of Mathematics, 14 (3), (2017) 112.

[7] R. Bott, R.J. Duffin, *On the algebra of network*, Trans. Amer. Math. Soc., 74 (1953), 99-109.

[8] D. Buckholtz, *Inverting the difference of Hilbert space projections*, Amer. Math. Monthly, 104, (1997) 60-61.

[9] X. Cao, H. Zhang, Y. Zhang, *Consistent invertibility and Weyl's theorem*, J. Math. Anal. Appl. 369 (2010), 258-264.

[10] X. Cao, Q. Xin, *Consistent invertibility and perturbations of the generalized property (ω)*, Acta Mathematica Sinica, 55(1) (2012), 92-100.

[11] Y. Chen, *The generalized Bott-Duffin inverse and its applications*, Linear Algebra Appl. 134, (1990), 71-91.

[12] A. Chen, G. Hai, *Perturbations of the right and left spectra for operator matrices*, J. Operator Theory 67:1, 207–214 (2012)

[13] D.S. Cvetković-Ilić, *Expression of the Drazin and MP-inverse of partitioned matrix and quotient identity of generalized Schur complement*, App. Math. Comp. 213(1) (2009), 18-24.

[14] D.S. Cvetković-Ilić, *The point, residual and continuous spectrum of an upper triangular operator matrix*, Linear Algebra Appl., 459, (2014) 357-367.

[15] D.S. Cvetković-Ilić, *Invertible and regular completions of operator matrices*, Electron. J. Linear Algebra, 30, (2015) 530-549.

[16] D.S. Cvetković-Ilić, G. Hai, A. Chen, *Some results on Fredholmness and boundedness below of an upper triangular operator matrix*, Journal of Math. Anal. Appl., 425(2), (2015) 1071-1082.

[17] D.S. Cvetković-Ilić, *Completions of upper-triangular matrices to left-Fredholm operators with non-positive index*, Journal of Operator Theory, 76(1), (2016) 101-114.

[18] D.S. Cvetković-Ilić, *Fredholm consistence of upper-triangular operator matrices*, Journal of Spectral Theory, 7(4), (2017) 1023-1038.

[19] D.S. Cvetković-Ilić, V. Pavlović, *An analogue to a result of Takahashi*, Journal of Math. Anal. Appl., 446(1), (2017) 264-275.

[20] D.S. Cvetković-Ilić, M. Kostadinov, *Invertibility of linear combinations in* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, Linear and Multilinear Algebra, 68(11), (2018) 2139-2150.

[21] D. Cvetković-Ilić, M. Kostadinov, *Consistency in invertibility and Fredholmness of operator matrices*, Journal of Spectral Theory, 9 (2019), 635–649

[22] D. Cvetković-Ilić , J. Milosević, *Fredholmness of a linear combination of operators*, Journal of Math. Anal. Appl., 458(1), (2018), 555-565.

[23] D.S. Cvetković-Ilić, V. Pavlović, *Drazin invertibility of upper triangular operator matrices* , Linear and Multilinear Algebra, 66(2), (2018) 260-267.

[24] D.S. Cvetković-Ilić, Y. Wei, *Algebraic Properties of Generalized Inverses*, Series: Developments in Mathematics, Vol. 52, Springer, 2017.

[25] B. Deng, G. Chen, *A note on the generalized Bott-Duffin inverse*, Appl. Math. Lett., 20 (2007), 746-750.

[26] C.Y. Deng, H.K. Du, *Representations of the Moore-Penrose inverse for a class of 2-by-2 block operator valued partial matrices*, Linear and Multilinear algebra, 58 (1), (2010), 15-26.

[27] C. Deng, *On the invertibility of Hilbert space idempotents*, Acta Mathematica Scientia, 34(2), (2014) 523-536.

[28] M. P. Drazin, *A class of outer generalized inverses*, Linear Algebra Appl. 436, (2012) 1909–1923.

[29] H.K. Du and J. Pan, *Perturbation of spectrums of* 2×2 *operator matrices*, Proc. Amer. Math. Soc., 121, (1994) 761–776.

[30] H. Du, X. Yao, C. Deng, *Invertibility of linear combinations of two idempotents*, Proc. Amer. Math. Soc., 134, (2005) 1451-1457.

[31] H.K. Du, C. Deng, M. Mbekhta, V. Müller, *On spectral properties of linear combinations of idempotents*, Studia Mathematica, 180(3), (2007) 211-217.

[32] D. Djordjević, M. Kolundžija, *Right and left Fredholm operator matrices*, Bull. Korean Math. Soc. 50(3) (2013) 1021-1027.

[33] P.A. Fillmore, J.P. Williams, *On operator ranges*, Adv. Math., 7, (1971) 254–281.

[34] S. Goldberg, *Unbounded linear operators: theory and applications*, McGraw-Hill, 1966

[35] W. Gong, D. Han, *Spectrum of the product of operators and compact perturbations*, Proc. Amer. Math. Soc. 120(1994) 755-760.

[36] J. Gros, G. Trenkler, *Nonsingularity of the difference of two oblique projectors*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., 21, (1999) 390–395.

[37] G. Hai, A. Chen, *Invertible completions for a classes of operator partial matrices*, Acta Math. Sin. (Chin. Ser.) 52 (2009) 1219-1224.

[38] G. Hai, A. Chen, *Perturbations of the right and left spectra for operator matrices*, J. Operator Theory 67(1) (2012) 207-214.

[39] G. Hai, A. Chen, *Invertibility of operator matrices on a Banach space*, Complex. Anal. Oper. Theory 7(6) (2013) 1807-1818.

[40] G. Hai, A. Chen, *Consistent invertibility of upper-triangular operator matrices*, Linear Alg. Appl. 455 (2014) 22-31.

[41] G. Hai, C. Bao, A. Chen, *The invertibility of linear combinations of operators with closed range*, Operator and matrices, 11(3), (2017) 715-723.

[42] G. Hai, D.S. Cvetković -Ilić, *Generalized left and right Weyl spectra of upper triangular operator matrices*, Electronic J. of Linear Algebra, 32 (2017) 41-50.

[43] J.K. Han, H.Y. Lee, W.Y. Lee, *Invertible completions of* 2×2 *upper triangular operator matrices*, Proc. Amer. Math. Soc., 128, (2000) 119-123.

[44] R. Harte, *Fredholm Theory relative to a Banach algebra homomorphism*, Math. Z. 179, (1982), 431-436.

[45] J. Huang, Y. Huang, H. Wang. *Closed range and Fredholm properties of upper-triangular operator matrices*, Ann. Funct. Anal., 6, (2015) 42-52.

[46] J. Huang, J. Sun, A. Chen, C. Trunk, *Invertibility of 2x2 operator matrices*, Mathematische Nachrichten, 292 (2), (2016).

[47] S. Izumino, *The product of operators with closed ranges and an extension of the reverse order law*, Tohoku Math. J. 34, (1982) 43-52.

[48] G. Kantún-Motiel, *Matrix representations of inner and outer inverses*, RIMS Kyoto, 1893, (2014) 13-19.

[49] Y. Ke, D.S. Cvetković-Ilić, J. Chen, J. Višnjić, *New results on* (b, c)*–inverses*, Linear and Multilinear Algebra, 66(3), (2017) 447-458.

[50] J.J. Koliha , V. Rakočević, *Invertibility of the sum of idempotents*, Linear and Multilinear Algebra **50** 285–292 (2002)

[51] J.J. Koliha, V. Rakočević, *Invertibility of the Difference of Idempotents*, Linear and Multilinear Algebra, 51(1), (2003) 97-110.

[52] J.J. Koliha, V. Rakočević, *On the norm of idempotents in C*-algebras*, Rocky Mountain J. Math. 34, (2004) 685-697.

[53] J.J. Koliha, V. Rakočević, *Stability theorems for linear combinations of idempotents*, Integr. Equ. Oper. Theory 58 (2007), 597-601.

[54] J.J. Koliha, V. Rakočević, *Fredholm Properties of the Difference of Orthogonal Projections in a Hilbert Space*, Integr. equ. oper. theory 52, (2005) 125–134.

[55] J.J. Koliha, V. Rakočević, I. Straškaba, *The difference and sum of projectors*, Linear Algebra Appl. 388, (2004) 279-288.

[56] V. Kordula, V. Müller, *On the axiomatic theory of spectrum*, Studia Math. 119(1996), 109-128.

[57] M. Kostadinov, *A note on operators consistent in inveritiblity*, Facta Universitatis Series Mathematics and Informatics, 34 (3) (2019), 429–438.

[58] M. Kostadinov, *Operator matrix representations of the Generalised Bott–Duffin Inverse*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 47(1) (2020), 523-533.

[59] M. Kostadinov, *Injectivity of Linear Combinations in* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, The Electronic Journal of Linear Algebra (ELA), 37 (2021), 359-369.

[60] Y. Li, *The Moore-Penrose inverses of lower triangular operators*, Linear and Multilinear algebra, 59(3), (2011) 229-235.

[61] T. Li, C. Deng, *On the invertibility and range closedness of the linear combinations of a pair of projections*, Linear Multilinear Algebra, 65, (2017) 613-622.

[62] X. G. Liu, W. G. Wang, Y. M. Wei, *A generalization of the Bott-Duffin inverse and its applications*, Numer. Linear Algebra Appl., 16 (2009), 173–196.

[63] M. Mbekhta, V. Müller, *On the axiomatic theory of spectrum II*, Studia Math. 119(1996), 129-147.

[64] V. Müller, *Axiomatic theory of spectrum III: semiregularities*, Studia Math. 142(2), (2000), 159-169.

[65] V. Müller, *Spectral Theory of Linear operators and spectral systems in Banach Algebras*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2007.

[66] V. Pavlović, D.S. Cvetković-Ilić, *Applications of completions of operator matrices to reverse order law for 1-inverses of operators on Hilbert spaces*, Linear Algebra Appl., 484 (2015) 219-236.

[67] V. Pavlović, D.S. Cvetković-Ilić, *Completions of upper-triangular operator matrices to Kato nonsingularity*, Journal of Math. Anal. Appl., 433(2), (2016) 1230-1242.

Biografija

Marko Kostadinov rođen je 14.8.1991. u Pirotu. Osnovnu školu „Moša Pijade" završio je 2006. godine u Dimitrovgradu sa odličnim uspehom kao nosilac Vukove diplome i đak generacije. Tehničku školu u Pirotu, smer elektrotehničar računara završio je 2010. godine sa odličnim uspehom kao nosilac Vukove diplome i đak generacije. Osnovne akademske studije matematike Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu upisao je školske 2010./2011. , a završio 2013. godine sa prosečnom ocenom 9,32 (devet, trideset dva). Master akademske studije, smer matematika Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu upisao je školske 2013./2014. , a završio septembra 2015. godine sa prosečnom ocenom 9,88 (devet, osamdeset osam), odbranivši master rad na temu „Problemi kompletiranja gornje trougaonih operatorskih matrica". Doktorske akademske studije na smeru matematka Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Nišu upisao je školske 2015./2016. godine. Od 2018. godine do kraja 2020. je kao istraživač-pripravnik angažovan na projektu „Problemi nelinearne analize, teorije operatora, topologije, i primene". Kao student druge godine master studija izvodio je vežbe na predmetu Matematika 3 na osnovnim akademskim studijama na departmanu za fiziku. Kao student doktorskih studija izvodio je vežbe na predmetima Linearna Algebra i Uvod u Numeričku Analizu na departmanu za Matematiku, Linearna Algebra, Matematička Analiza 1, Matematička Analiza 2, Numerički Metodi 2 na departmanu za Računarske nauke, Matematika 3 i Matematika 4 na deparmanu za Fiziku. Školske 2015./2016. je bio angažovan na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Nišu kao saradnik u nastavi na predmetima Matematka 1, Matematka 3 i Inženjerska grafika. Od 2018. do 2020. predavao je u specijalnom odeljenju za decu sa specijalnim sposobnostima za fiziku gimnazije Svetozar Marković u Nišu. U periodu 2014.-2016. bio je korisnik stipendije za izuzetno nadarene studente i učenike Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije, u periodu 2016.-2018. bio je korisnik stipendije za studente doktorskih akademskih studija Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije. Od Oktobra 2020. godine radi kao asistent na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Nišu. Učestovao je na sledećem međunarodnim naučnom projektu, China-Serbian Bilateral Research Project: The theory of tensor, operator matrices and applications (2018.-2020.). Marko Kostadinov je autor/koautor ukupno pet naučnih publikacija:

1. Dragana Cvetković-Ilić, Marko Kostadinov, *Invertibility of linear combinations in* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, Linear and Multilinear Algebra 66 (11) (2018), 2139.-2150. https://doi.org/10.1080/03081087.2017.1388354 (kategorija M22)

2. Dragana Cvetković-Ilić, Marko Kostadinov, *Consistency in invertibility and Fredholmness of operator matrices*, Journal of Spectral Theory, 9 (2019), 635–649. https://doi.org/10.4171/JST/258 (kategorija M21)

3. Marko Kostadinov, *A note on operators consistent in inveritiblity, Facta Universitatis*, Series: Mathematics and Informatics, 34(3)(2019),429–438. https://doi.org/10.22190/FUMI1903429K (kategorija M51)

4. Marko Kostadinov, *Operator matrix representations of the generalized Bott-Duffin inverse*, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 47(1), 523-533 (2021) https://doi.org/10.1007/s41980-020-00396-4 (kategorija M23)

5. Marko Kostadinov, *Injectivity of linear combinations in* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, The Electronic Journal of Linear Algebra (ELA), 37, (2021) 359-369. https://doi.org/10.13001/ela.2021.5049 (kategorija M23)

ИЗЈАВА О АУТОРСТВУ

Изјављујем да је докторска дисертација, под насловом

КОНЗИСТЕНТНОСТ И ПРОБЛЕМИ КОМПЛЕТИРАЊА ОПЕРАТОРСКИХ МАТРИЦА

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Нишу:

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да ову дисертацију, ни у целини, нити у деловима, нисам пријављивао/ла на другим факултетима, нити универзитетима;
- да нисам повредио/ла ауторска права, нити злоупотребио/ла интелектуалну својину других лица.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци, који су у вези са ауторством и добијањем академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада, и то у каталогу Библиотеке, Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Нишу, као и у публикацијама Универзитета у Нишу.

У Нишу, 14. 1. 2022.

Потпис аутора дисертације:

Марко Костадинов

ИЗЈАВА О ИСТОВЕТНОСТИ ШТАМПАНОГ И ЕЛЕКТРОНСКОГ ОБЛИКА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Наслов дисертације:

КОНЗИСТЕНТНОСТ И ПРОБЛЕМИ КОМПЛЕТИРАЊА ОПЕРАТОРСКИХ МАТРИЦА

Изјављујем да је електронски облик моје докторске дисертације, коју сам предао/ла за уношење у **Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу,** истоветан штампаном облику.

У Нишу, 14.1.2022.

Потпис аутора дисертације:

Марко Костадинов

ИЗЈАВА О КОРИШЋЕЊУ

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Никола Тесла“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу унесе моју докторску дисертацију, под насловом:

КОНЗИСТЕНТНОСТ И ПРОБЛЕМИ КОМПЛЕТИРАЊА ОПЕРАТОРСКИХ МАТРИЦА

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском облику, погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију, унету у Дигитални репозиторијум Универзитета у Нишу, могу користити сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons), за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство **(CC BY)**
2. Ауторство – некомерцијално **(CC BY-NC)**
3. **Ауторство – некомерцијално – без прераде (CC BY-NC-ND)**
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима **(CC BY-NC-SA)**
5. Ауторство – без прераде **(CC BY-ND)**
6. Ауторство – делити под истим условима **(CC BY-SA)**

У Нишу, 14.1.2022.

Потпис аутора дисертације:

Марко Костадинов