Универзитет у Београду

Машински факултет

Дарко М. Радојевић

Стабилност посебних класа механичких система нецелог и целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу

Докторска дисертација

Београд, 2022.

University of Belgrade
Faculty of Mechanical Engineering

Darko M. Radojević

Finite time stability of special classes time-delay mechanical systems of noninteger and integer order

Doctoral dissertation

Belgrade, 2022.

Комисија за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације

Ментор: др Михаило Лазаревић, редовни професор, ментор,
Универзитет у Београду, Машински факултет

Чланови комисије: др Петар Мандић, доцент,
Универзитет у Београду, Машински факултет

др Сретен Стојановић, редовни професор,
Универзитет у Нишу, Технолошки факултет у Лесковцу

Датум одбране:

Изјаве захвалности

Овим путем желим најсрдачније да се захвалим свом ментору, цењеном проф. др Михаилу Лазаревићу, на несебичној подршци током докторских студија, као и помоћи око избора теме и у изради докторске дисертације. Својим менторским знањем, проф. др Михаило Лазаревић, конструктивним и стручним предлозима као и безрезервном моралном подршком, омогућио ми је да останем на свом путу и истрајем у својим намерама и циљевима. Неоспорна је и чињеница да је велики део ове докторске дисертације био инспирисан научним доприносима мог ментора, тако да аутор и са те стране изражава посебну захвалност.

Велику захвалност дугујем и члановима комисије, доценту др Петру Мандићу и проф. др Сретену Стојановићу, свим професорима Машинског факултета у Београду код којих сам одслушао предмете, предавања и полагао испите на докторским студијама, а који су тиме допринели на квалитету израде докторске дисертације, мом личном усавршавању и стицању нових знања.

Посебно изражавам најтоплију захвалност проф. др Драгутину Дебељковићу, чије су идеје, предлози и сугестије надоградиле моје знање из научне области докторске дисертације. Вишегодишња међусобна сарадња, коауторство у радовима који су објављени како у водећим домаћим, тако и на међународним конференцијама и часописима, заједничко учествовање и дружење на међународним конференцијама, употпуниле су незаборавне тренутке и простор у мојим академским изазовима. Својим специфичним ентузијазмом и оригиналношћу у наступима, успео је да ме научно надогради и инспирише за рад на докторским студијама.

Посебну захвалност дугујем својој супрузи и сину, на стрпљењу, разумевању, мотивисању и подршци у тешким тренуцима, уз обећање да ћу убудуће надокнадити све радосне тренутке које смо пропустили у претходном периоду.

Неизмерну захвалност дугујем родитељима што су ме изградили и васпитали као човека, научили многим стварима, пружили топлину, нежност и родитељску љубав у битним тренуцима, уткали у мене најважније животне вредности и усмерили на сигуран и прави пут којим и даље корачам.

“Tsuki kage no terasuno sato wa nakeredomo nagamuru hito no kokoro ni zo sumu”

Хонен (1133-1212)

„Село некада обасјано месечином нестаде. Када год опет погледа у месец, село наставља да живи у његовој души“

Заувек искриш у моме срцу и заувек ћеш бити део моје душе.

Све што сам ја, неизбрисив је траг твоје чистоте.

Мом оцу, пријатељу, учитељу, мецени, звезди водиљи,

проф. др Мирославу Миши Радојевићу

Стабилност посебних класа механичких система нецелог и целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу

Резиме

У овој докторској дисертацији предмет истраживања је испитивање стабилности и стабилизације на коначном временском интервалу одређене класе механичких линеарних/нелинеарних система нецелог/целог реда са чистим временским кашњењем присутним у стању и/или управљању система.

Прво је дат селективан и хронолошки преглед досадашњих резултата на пољу изучавања стабилности система нецелог реда са кашњењем на коначном временском интервалу. У наставку дат је хронолошки преглед досадашњих резултата на пољу изучавања стабилности *неутралних система целог и нецелог реда* са кашњењем на коначном временском интервалу.

Решаван је проблем стабилизације механичког система -људског тела у задатку балансирања у сагиталној равни који се може моделовати као инверзно клатно где је примењено ПДД2 управљање нецелог реда које укључује и чисто временско кашњење у повратној грани. Даље је настављено са испитивањем стабилности на временском интервалу датог затвореног неутралног система нецелог реда са временским кашњењем као и одговарајућег неутралног система али сада целог реда. Примењена је и адекватна анализа стабилности инверзног клатна у задатку балансирања људског тела у сагиталној равни методом Д-разлагања где је област стабилности добијена у функцији три подешљива параметра. Такође, реализовано је испитивање стабилности на коначном временском интервалу још једног фракционог механичког пригушног система са кашњењем заснованог на *Scot-Blair*-овом моделу где је примењен вискоеластични материјал који има за циљ смањење нежељних вибрација у датом систему. У циљу пригушења нежељених вибрација уведено је управљање у повратној спрези са кашњењем који укључује први и други извод померања истог.

Даље, добијени су нови критеријуми за испитивање робусне стабилности на коначном временском интервалу за дату класу неутралног система нецелог реда $0<\beta<\alpha<1$ са временски промењивим кашњењима. Прво је испитиван неутрални систем нецелог реда са временски промењивим кашњењима и неизвесношћу где су довољни услови стабилности добијени применом генерализоване Гронвалове неједнакости. Затим је проучаван неутрални систем са временски промењивим кашњењем нецелог реда са нелинеарним несигурностима параметара и пертурбацијама. На крају дати су и одговарајући нумерички примери који су потврдили исправност предложеног приступа. Посебна пажња је била посвећена испитивању стабилности на коначном временском интервалу једног неутралног вишечланог система нецелог реда са временски промењивим кашњењима који је садржао три фракциона извода нецелог реда. Показана је супериорност и општост добијеног критеријума у односу на одговарајуће познате критеријуме стабилности.

Кључне речи: стабилност на коначном временском интервалу, рачун нецелог реда, механички системи, чисто временско кашњење, неутрални системи са кашњењем, стабилизација

Научна област: Машинство

Ужа научна област: Механика

УДК: 531:517.938:681.5.037(043.3)

Finite time stability of special classes time- delay mechanical systems of noninteger and integer order

Abstract

In this doctoral dissertation, the subject of research is the examination of finite time stability and stabilization of a certain class of mechanical linear/nonlinear systems of noninteger/integer order with pure time delay present in the state and/or control of the system.

First, a selective and chronological way of reviewing the results so far in the field of studying the finite time stability of a system of noninteger order with a delay is given. Below is a chronological overview of the results so far in the field of studying the finite time stabilitry of neutral systems of integer and noninteger order with a delay.

The problem of stabilization of the mechanical system - the human body was solved in the task of balancing in the sagittal plane, which can be modeled as an inverse pendulum where PDD2 control of noninteger order is applied, which includes pure time delay in the feedback. The investigationg of the finite time stability of a given closed neutral system of non-integer order with a time delay as well as the corresponding neutral system but now of integer order was continued. An adequate analysis of the stability of the inverse pendulum was applied in the task of balancing the human body in the sagittal plane by the D-decomposition method, where the stability region was obtained as a function of three adjustable parameters. Also, a finite time stability test was performed of another fractional mechanical damping system with delay based on the Scot-Blair model where a viscoelastic material was applied which aims to reduce unwanted vibrations in a given system. In order to dampen unwanted vibrations, delayed feedback control was introduced, which includes the first and second displacement derivatives.

Further, new criteria for testing robust finite time stability for a given class of a neutral system of non-order with time-varying delays are obtained. First, a neutral system of non-integer order with time-varying delays and uncertainty was examined where sufficient stability conditions were obtained by applying the generalized Gronval inequality. Then, a neutral system with time-varying delay of the integer order with nonlinear uncertainties of parameters and perturbations was studied. Finally, the corresponding numerical examples are given, which confirmed the correctness of the proposed approach. Special attention was paid to the investigation of finite time stability of a neutral multimember system of non-integer order with time-varying delays containing three fractional derivatives of non-integer order. The superiority and generality of the obtained criterion in relation to the corresponding known stability criteria is shown.

Keywords: finite time stability, fractional calculus**,** mechanical systems, pure time delay, neutral time delay systems, stabilization

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Mechanics

Садржај

1. Увод

1.1 Кратак преглед докторске дисертације по поглављима

Овде се даје у кратким цртама преглед докторске тезе по поглављима. Сама дисертација је подељена на шест поглавља.

У првом поглављу прво су дата уводна разматрања која се односе на системе са кашњењем, кратак преглед по поглављима као и одговарајући преглед литературе који се односи на проблематику стабилности временски континуалних система целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу.

У другом поглављу даје је солидна основа рачуна нецелог реда, где се у наставку приказује на селективан и хронолошки начин преглед досадашњих резултата на пољу изучавања стабилности система нецелог реда са кашњењем на коначном временском интервалу. Такође, посебна пажња у овом поглављу је посвећена хронолошком прегледу досадашњих резултата на пољу изучавања стабилности неутралних система целог и нецелог реда са кашњењем на коначном временском интервалу.

Треће поглавље бави се проблемом стабилности посебних класа механичких система применом рачуна нецелог реда а који се могу приказати као одговарајући неутрални системи нецелог реда и целог реда са кашњењем. Први механички систем који се проучава јесте људско тело у задатку балансирања у сагиталној равни који се може моделовати као инверзно клатно. За његову стабилизацију око нестабилног положаја вертикалне равнотеже примењен је ПДД2 управљање нецелог реда које укључује и чисто временско кашњење. Посебно је испитана стабилност на временском интервалу одговарајућег затвореног неутралног система нецелог реда са временским кашњењем. Такође, испитана стабилност на временском интервалу одговарајућег затвореног неутралног система целог реда са временским кашњењем. Поступци стабилизације обично стабилизују разматрани систем и чине га асимптотски стабилним, чиме се прелази у сферу љапуновске стабилности. У том смислу спроведена је и адекватна анализа стабилности инверзног клатна у задатку балансирања људског тела у сагиталној равни методом Д-разлагања. За испитивање асимптотске стабилности система узет је и разматран утицај параметара (Kp, Kd, β) на стабилност система где су појачање K_a као и нецели ред γ као и временско кашњење τ су унапред одређена. Потврду изведене анализе стабилности је показана и доказана кроз одговарајућу нумеричку симулацију. На крају поглавља је разматрана стабилност на коначном временском интервалу још једног фракционог механичког пригушног система са кашњењем заснованог на *Scot-Blair*-овом моделу где је примењен вискоеластични материјал који има за циљ смањење нежељних вибрација у датом систему.

Четврто поглавље посвећено је решавању проблема робусне стабилности на коначном временском интервалу датог неутралног система нецелог реда $0 < \beta < \alpha < 1$ са временски промењивим кашњењима. Прво је испитивана робусна стабилност на коначном временском интервалу неутралног система нецелог реда са временски промењивим кашњењима и неизвесношћу где су довољни услови стабилности добијени применом генерализоване Гронвалове неједнакости. Такође, истраживања су била посвећена и проблематици робусне стабилности на коначном временском интервалу неутралног система са временски промењивим кашњењем нецелог реда са нелинеарним несигурностима параметара и пертурбацијама. На крају дати су и одговарајући нумерички примери који потврђују исправност предложеног приступа.

У петом поглављу акценат је дат по први пут за један неутрални вишечлани систем нецелог реда $0 < \gamma \le 1 < \beta < \alpha \le 2$ са временски промењивим кашњењима**.** Добијени су нови критеријуми стабилности на коначном временском интервалу датог неутралног вишечланог система нецелог реда са временски промењивим кашњењима. Једним еклататним нумеричким примером добијена је потврда претходно изведених теоријских резултата.

Докторска теза се завршава са шестим поглављем које садржи закључке и научне доприносе дисертације.

1.2 Уводна разматрања

1.2.1 Основна поставка проблема, особине и специфичности разматраних класа система са позиција могуће динамичке анализе

Предмет истраживања у оквиру докторске дисертације са предложеном темом је динамичко понашање на коначном временском интервалу одређене класе механичких линеарних/нелинеарних система нецелог/целог реда са чистим временским кашњењем присутним у стању и/или управљању система. Наиме, већ крајем шездесетих година двадесетог века, системи са чистим временским кашњењем привлаче велику пажњу научне и стручне јавности, [1,2].

Њихова појава у роботици, дугачким хидрауличним и пнеуматским и електричним водовима, динамици летелица и великим системима подстакла је бројне научнике да се њима интензивно баве. Присуство чисто временског кашњења, без обзира да ли је оно присутно у управљању и/или у стању може да произведе нежељене прелазне карактеристике па чак и до појаве нестабилности, [3,4].

Претходно поменути случај веома је чест када су у питању динамички системи са повратном спрегом, односно уочено је да се то јавља и код одређене класе механичких система које су овде од интереса за истраживање. Због тога је овај проблем наишао на велико интересовање код многих истраживача.

Наиме, у пракси је често од посебног интереса, не само испитивати стабилност система по Љапунову, већ је од далеко већег значаја утврдити да ли трајекторије система при његовом кретању у простору стања досежу или остају унутар раније прописаних граница. Систем може да буде стабилан у смислу Љапунова а потпуно неупотребљив са становишта његових показатеља кретања у простору стања. Ту се у првом реду мисли на недозвољени прескок или неприхватљиво дуго време смирења.

Због тога је сасвим оправдано кретање система посматрати унутар унапред прописаних граница које се могу усвојити у облику хипер-цилиндра у простору стања који могу бити схваћени као скупови дозвољених стања у којима се систем може наћи. Исти ти скупови могу бити стационарни или временски променљиви и потребно је да буду унапред дефинисани. Мимо тога, од посебног је интереса да се и динамичко понашање система посматра на коначном временском интервалу. Границе до којих достиже одзив система било у слободном било у принудном радном режиму представља веома значајан проблем са инжењерско-техничке тачке гледишта.

У општем случају разматрање проблема који укључује и чисто временско кашњење повлачи далеко сложенију математичку анализу. Континуални механички системи целог реда са кашњењем, у математичком смислу, представљају динамичке системе описане функционалним-диференцијалним једначинама, што свакако представља тежи задатак у одређивању решавања тог система у поређењу са уобичајеним методама које се користе за решавање система без кашњења.

Овде разматрана класа система са кашњењем целог реда, поседује читав низ додатних специфичности и особина које се не сусрећу код стандардних континуалних механичких система и описана је математичким моделом у виду диференцијалних једначина са помереним аргументом:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = A_0\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-\tau_x) \tag{1.1}$$

када су у питању аутономни континуални системи са кашњењем, где је са τ_x, означава чисто временско кашњење у стању које може бити константно или временски промењљиво $\tau_x(t)$ са придруженом почетном функцијом стања: $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\psi}_x(t), \quad t \in [-\tau_{xm}, 0]$. Одговарајући неаутономни системи са кашњењем су облика:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = A_0\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-\tau_x(t)) + B_0\boldsymbol{u}(t), \tag{1.2}$$

С друге стране, неутрално кашњење је пример врсте временског кашњења, које не постоји само у стању система, већ има везе и са изводом стања система. Дакле, неутрални системи представљају веома општу класу која укључује, као посебне случајеве, обичне системе са кашњењем. Неутрални системи са кашњењем се појављују у практичним инжењерским апликацијама (дистрибутивна мрежа у далеководу без губитака, измењивачи топлоте, роботи у контакту са окружењем),[5].

Од посебног интереса биће истраживање класе тзв. *неутралних механичких система* који укључују осим кашњења у стању и кашњење које се појављује у првом изводу стања.

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = A_0\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-\tau_x(t)) + A_{N1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t-\tau_{xN}(t))}{\mathrm{d}t}, \tag{1.3}$$

односно, одговарајућих неаутономних неутралних система

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} = A_0\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-\tau_x(t)) + A_{N1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t-\tau_{xN}(t))}{\mathrm{d}t} + B_0\boldsymbol{u}(t) + B_1\boldsymbol{u}(t-\tau_u(t)), \tag{1.4}$$

Са друге стране посебан изазов представљаће и проучавање дате класе механичких система чији се динамички модели могу описати применом савремене теорије фракционог рачуна, (*рачуна нецелог реда*), [6,7]. Наиме, већ више од четрдест година примена рачуна нецелог реда (*fractional calculus*) привлачи пажњу научне и стручне јавности широм света. Први пут рачун нецелог реда са јавља око краја 17. века и везују се за коресподенцију која је остварена између Лопитала и Лајбница, и то у време када су Њутн и Лајбниц постављали основе диференцијалног и интегралног рачуна. Касније, овом рачуну је посвећивана извесна пажња од стране многих познатих математичара и научника тог доба све до двадесетог века, међу којима су Ојлер, Риман, Лиувил, Абел, Фурије. Тек од седамдесетих година двадесетог века, долази до пуног развоја примене рачуна нецелог реда са тенденцијом непрекидног раста примене по обиму и броју публикованих научних радова, књига, конференција. Последњих деценија примена рачуна нецелобројног реда привлачи пажњу све веће научне јавности у различитим гранама: математици, физици, техници, итд. Фракциони рачун или *рачун нецелог реда* је област математичке анализе која се бави изучавањем и применом извода и интеграла произвољног реалног или комплексног реда, [8]. То је генерализација класичног интегро-диференцијалног рачуна, где оператори интеграљења и диференцирања имају целобројан степен. Примена и присуство рачуна нецелог реда у свим гранама науке и технике више је него евидентно јер омогућава да се уочени системи квалитетније, боље моделирају, односно развију и примене квалитетнији системи управљања, и у том смислу бројни научни радови и обимна публицистичка делатност у пуној мери су исказали интерес који је за њих био показан. Другим речима, рачун нецелог реда се последњих деценија све више примењује у моделирању и анализи својстава динамике механичких система, решавању све сложенијих задатака управљања, стабилности система који укључују и кашњења, опису конститутивних релација савремених материјала и структура са својствима вискоеластичности која укључују меморијске и ефекте наслеђивања и др.

У том смислу, радови [9-12] који се баве испитивањем стабилности система нецелог реда са кашњењем послужиће као добра основа за испитивање динамичког понашања на коначном временском интервалу одређене класе механичких линеарних/ нелинеарних система нецелог/целог реда са чистим временским кашњењем присутним у стању и/или управљању система.

Осим тога, основе математичког моделирања динамичких (механичких) система са кашњењем нецелог реда дат је у литератури [13-15]. Као пример једног неутралног система са кашњењем јесте примена вискоеластичног материјала који је искоришћен за смањење нежељних вибрација у датим системима. *Scot-Blair* модел претпоставља да је пригушење пропорционално нецелом реду извода променљиве померања, [15].

Уочава се да се одговарајући модели могу описати односно уопштити и одговарајућим неутралним диференцијалним једначинама нецелог реда или неутралним Волтеровим интегрално-диференцијалним једначинама нецелог реда. Недавно, аутори у радовима [16,17] су се бавили испитивањем стабилности на коначном временском интервалу неутралних аутономних система нецелог реда са временским кашњењем применом *Gronwall*-ове неједнакости док је у раду [18] анализирана стабилност на коначном временском интервалу за класу аутономних неутралних система нецелог реда са временски промењивим кашњењем и која садржи нелинеарности типа Липшица.

1.3 Стабилност временски континуалних система целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу

Основне идеје, мотивације и могућности примене концепта стабилности на *коначном временском интервалу* (ФТС) и практичне стабилности, без обзира на разматране класе система, а који укључују нелинеарне, нестационарне, континуалне, дискретне и "велике системе", као и системе који раде у слободном или принудном рандом режиму, исцрпно су дати у лит. [2]. На основу тих излагања уочава се, да се у великој већини извођења јавља један међурезултат оваквог облика:

$$\dot{V}\left(t,\mathbf{x}(t)\right)=\gamma V\left(t,\mathbf{x}(t)\right), \text{ где је } \gamma \in R. \tag{1.5}$$

Претходни израз, идентичан је познатим релацијама из љапуновске стабилности што недвосмислено указује да се идентичан проблем, када је у питању овај концепт стабилности, јавља без обзира на разматрану класу система. Те релације се обично јављају као последица могућих миноризација или мајоризација или, а у даљем поступку се подвргава интеграљању (сумирању), што доводи до коначно жељених резултата. Уочава се да овакав методолошки једноставан прилаз, доводи до релативно једноставних услова стабилности на коначном временском интервалу.

Са друге стране, када су у питању *континуални системи са кашњењем*, овакав прилаз наилази на велике потешкоће имајући у виду да агрегациона функција мора да садржи и члан који треба да обухвати динамичко понашање система, пре почетног тренутка.

Облик агрегационих функција је најчешће представљен комбинацијом збира кретања система и интеграла који практично обухвата динамику система са кашњењем оличена у тзв. *функцији почетних услова*, која је *a priori* увек позната.

Овакви њихови облици, познати у литератури као *Љапуновљеви функционали*, методолошким поступцима који се користе за обичне системе, не могу да успоставе релацију типа јед. (1.5). Уочава се да дата агрегациона функција не мора да буде функција одређена по знаку, као и што се не захтева да њен извод, дуж кретања система, буде негативно одређен.

Да би превазишли недостатке оваквог приступа, напори аутора су били усмерени у другим правцима у циљу решавања овог проблема. У томе они успевају и то оригиналном применом технике засноване на коришћењу *Coppelo*-ове неједначине, матричне мере, а нешто касније и *Bellman-Gronwall* -овог принципа. Овакви прилази показали су се успешним и дали су резултате не мање ефикасне од уобичајених, имајући у виду познату чињеницу да се у испитивању стабилности система са кашњењем појављују два могућа прилаза.

Први, који не узима у обзир износ чисто временског кашњења и други који то узима у обзир. У првом случају добијају се нешто једноставнији, алгебарски довољни услови концепта стабилности на коначном времеснком интервалу, док су у другом случају ти резултати нешто сложенији, често скопчани и са потребом решавања трансцедентних једначина, али далеко значајнији јер поред системских матрица критеријуми садрже и износ чисто временског кашњења, тако да се може сагледати директно и његов утицај на стабилност система.

Најчешће, и овде су добијени *само довољни услови стабилности* на коначном временском интервалу, да се могуће оцене добијају са задовољавајућом тачношћу и високим вредностима горњих граница. Са друге стране уочено је да само неколико радова решавају проблем нестабилности ове класе система на коначном временском интервалу. Ово проистиче из чињенице да су уобичајене формуле преузете из матричног рачуна углавом минуризационог типа.

У наредном одељку биће презентован преглед неких значајнијих резултата, који представљају главне окоснице будућих истраживања, а у примени само на различите *класе континуалних система са кашњењем целог реда.*

1.3.1 Селективан и хронолошки преглед досадашњих резултата на пољу изучавања практичне стабилности и стабилности на коначном временском интервалу

Хронолошки гледано седамдесетих година, изнесене су бројне дефиниције такозване техничке и практичне стабилности, као што су у радовима [19,20] аутори изнели различита обележавања стабилности на коначном временском интервалу за временски континуалне системе и константне границе трајекторија; *Lashirer*, *Story* [21] представили су концепт временски коначне стабилности, назване "*коначна стабилност*"; *Grujić* [22,23] је представио и размотрио уопштенији тип стабилности (“*практична стабилност са временом смирења”, практична експоненцијална стабилност,* итд.);

Уопштено говорећи, ове дефиниције су у бити засноване на претходно дефинисаним ограничењима за поремећај почетних услова и допустивим поремећајем одзива система. Стога, важан корак је анализа ових одређених ограничености особина решења, што претходи пројектовању управљачких сигнала, што се тиче коначног времена или практичног управљања стабилности. При томе, радови који се односе на ову проблематику - *стабилност на ФТС равнотежног стања система* могу се сврстати у две категорије.

Прву категорију, [20,24-26] је могуће дефинисати на следећи начин: *за познати ограничени почетни услов, стање система не превазилази одређену границу на одређеном коначном временском интервалу* и позната је у литератури под називом *коначно временска ограниченост* (*finite-time boundedness).*

Друга категорија, [27] се односи на стабилност ФТС при чему је дефинисано да: *стање система достиже равнотежно стање система за коначно време* и која је у литератури као коначно временска привлачност (*finite-time attractiveness)*. На даље, нама је овде од интереса коришћење *првог прилаза односно дефиницију стабилности система на коначном временском интервалу.*

Даљи допринос у проширењу концепта ФТС на класу континуалних а касније и дискретних система са чистим временским кашњењем дали су у највећом мери аутори са ових простора.

Тако, аутор Ненадић [28], износи ново виђење ФТС и, проширује га на временски континуалне системе са кашњењем,кроз одговарајуће Дефиниције и остале резултате дате у виду довољних, а понегде и у виду потребних услова. Скоро у исто време Hsiao, Hwang [29] дају своје виђење концепта ФТС-а у примени на нелинеарне, сингуларно-пертурбоване системе са вишеструким кашњењем, експлицитно присутним у "брзом" подсистему где дају дефиницију која се суштински разликује датој у [28].

У радовима [30,31] аутори су извели довољне услове ФТС и практичне стабилности за дату класу линеарних, стационарних система са чистим временским кашњењем, и то када је могуће израчунати фундаменталну матрицу система *са и без* кашњења. Даље, у радовима [32,33] аутори такође добијају довољне услове ФТС дате класе система, „по дефиницији" нормирајући једначину кретања система са кашњењем у простору стања.

Известан напредак остварују аутори у радовима [32-35] јер по први пут примењују *Coppel* -ову неједначину и матричну меру за добијање довољних услова практичне стабилности различитих класа система са кашњењем,како за аутономне тако и за оне који раде у принудном радном режиму.

На тај начин имајући у виду флексибилност примене матричне мере изведен је низ резултата који се односе на широки спектар могућих процена коначног временског интервала.

Даље, у радовима [36-40] аутори (*Дебељковић и др.*) настављају истраживања који представљају логичан наставак добијених резултата у претходним радовима у правцу изналажења бољих и једноставнијих критеријума практичне стабилности за различите класе разматраних система узимајући у обзир истовремено и наметнута ограничења.

У односу на раније добијене резултате у радовима [38,41-42] по први пут је примењена добро позната *Bellman-Gronwall* -ова теорема за добијање довољних услова ФТС који укључују и *износ чистог временског кашњења,* који су сада функција сингуларних вредности базичних матрица датог система са кашњењем чиме је постигнут значајан помак у овој области.

Супериорност претходног приступа у погледу квалитета оцена у односу на раније добијене резултате аутора је потврђено бројним примерима.

Даље, у радовима [43,44] добијени су нови довољни услови ФТС-а, за континуалне системе са кашњењем где је примењена Халеова трансформација која преводи постојеће диференцијалне једначине у систем једначина диференцијално-интегралног типа.

Са појавом теорије линеарних матричних неједначина тзв. (ЛМИ) јављају се нови радови аутора [45-47] који су мање конзервативни и решавају проблем стабилности са поменутих позиција а шта више и успутно проблем стабилизације ове класе система увођењем пропорционалног (статичког, немеморијског) регулатора у повратну спрегу система по величинама стања. Чак шта више, проблем робусне стабилности и робусне стабилизације, методом подешавања полова, на коначном времнском интервалу, је проучаван и решен у раду [46].

Даље, објављени су радови аутора [48,49] који се односе на поље атрактивне стабилности на коначном временском интервалу ове класе система, где се добијају нова побољшања постојећих резултата.

У раду [50], решаван је проблем испитивања практичне стабилности дате класе система где је искоришћен Љапунов-Красовски функционал, као могуће агрегационе функције придружене разматраном систему који сада не мора бити позитивно одређен у целом простору стања, нити да има негативну одређеност његовог извода дуж кретања система.

Сличан приступ дат је и у радовима [51,52], где је формулација функције сличне Љапунову коришћена за развој нових довољних услова зависних од кашњења за ФТС. Предложена функција не мора да буде позитивно-дефинисана у целом простору стања и не мора да има негативне изводе дуж путања система. Закључено је да је испитивање стабилности коришћењем новог услова за испитивање стабилности мање компликовано за нумеричке прорачуне.

Такође, аутори у раду [53], добијају нове, довољне услове који зависе од кашњења, за посебну класу континуалних, линеарних система са кашњењем у стању захваљујући посебно одабраном квази-Љапуновљевом функционалу, наменски формулисаног за ову класу специфичних проблема. Супериорност и мања конзервативност ових резултата показана је кроз неколико еклатантних примера.

Мало касније аутори [54] објављују рад који се бави проблемом атрактивне практичне стабилности, разматране класе система са кашњењем, а на основу обједињавања довољних услова који систем са кашњењем мора да задовољи појединачно за случај стабилности на коначном временском интервалу а и за случај асимптотске стабилности.

Извесна пажња је посвећена и дискретним системима са кашњењем [55], где је уведен дискретни функционал налик Љапунову са дискретном конволуцијом одложених стања, за класу дискретних система са временским кашњењем и добијени су нови ФТС критеријуми. Да би се решио ФТС проблем, примењује се комбинација приступа сличног Љапунову и Џенсенове дискретне неједнакости. На крају дат је један нумерички пример да покаже предност предложеног метода.

Такође, аутори у својим радовима [56-59] посвећују пажњу сложенијој класи система тј. сингуларним системима са кашњењем и дају више критеријума ФТС за ову сложенију класу система.

1.3.2 Класа разматраних система и неопходна тумачења

У општем случају, нелинеарни, управљачки систем целог реда са чистим временским кашњењем се може представити као, [4]:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}\left(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t-\tau), \mathbf{u}(t)\right), \quad t \geq 0 \qquad \mathbf{x}(t) = \psi(t), \ -\tau \leq t \leq 0, \tag{1.6}$$

где је са $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ означен вектор стања, а са $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ вектор управљања, $\psi \in \mathcal{C}^n = \mathcal{C}^n\left(\left[-\tau, 0\right], \mathbb{R}^n\right)$ је функција почетних стања. Овде је са $\mathcal{C} = \mathcal{C}\left(\left[-\tau, 0\right], \mathbb{R}^n\right)$ означен Банахов простор временски континуалних функција које пресликавају временски интервал у са топологијом униформне конвергенције.

Даље од интереса ће бити разматрати посебну класу *линеарних временски континуалних система са кашњењем* која је описана следећим моделом у простору стања

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau), \quad \tau > 0, \tag{1.7}$$

$$\mathbf{x}(t) = \psi_x(t), \quad -\tau \leq t \leq 0, \tag{1.8}$$

када су у питању аутономни системи, односно када су у питању системи са кашњењем који раде у принудном радном режиму са:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) + B_0\mathbf{u}(t) + B_1\mathbf{u}(t-\tau), \tag{1.9}$$

$$\mathbf{x}(t) = \psi_x(t), \quad \mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\varphi}_u(t), \quad -\tau \leq t \leq 0 \quad , \tag{1.10}$$

Систем (1.7), се назива *хомогеним*, $\mathbb{R}^n$ означава простор стања система, датог јед. (1.7), A_0, A_1, су константне матрице система одговарајућих димензија, а τ је чисто временско кашњење $\tau = const., (\tau > 0)$. Динамичко понашање система (1.7) заједно са почетном функцијом (1.8), је дефинисано на непрекидном временском интервалу $J_0 = \{t_0, \ t_0 + T\}$, где величина T може бити или позитиван реалан број или симбол $+\infty$, тако да се истовремено могу третирати стабилност на коначном временском интервалу и практична стабилност. Уочава се такође да је $J_0 \in \mathbb{R}_+$.

Такође, у општем случају, за разматрани систем се не захтева да: $f(0,0) \equiv 0$, што повлачи да није неопходно да координатни почетак простора стања буде равнотежно стање. Нека $V: J_0 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, тако да је функција $V(t, \mathbf{x}(t))$ ограничена за $\forall t \in J_0$, $\forall \mathbf{x}(t)$, за које је $\|\mathbf{x}(t)\|$, такође, ограничена где је са $\|(\cdot)\|$ означена еуклидска норма.

За временски инваријантне скупове уводе се следеће претпоставке: $S_{(\ )}$ је ограничен, повезан и отворен скуп. Нека је S_β дати скуп свих дозвољених стања система за $\forall t \in J_0$. Скуп S_α, $S_\alpha \subset S_\beta$, означава скуп свих дозвољених почетних стања. Скупови S_α и S_β су повезани *и a priori* познати. S_ε означен је скуп допустивих управљања. За означавање скупова користе се раније усвојене ознаке, где је $\mathcal{S}_\alpha \subseteq \mathcal{S}_\beta$, са општом нотацијом типа:

$$\mathcal{S}_\rho = \left\{ \mathbf{x}(t) : \left\|\mathbf{x}(t)\right\|_Q^2 < \rho,\ Q = Q^T > 0 \right\}. \tag{1.11}$$

Уочава се да се израз (1.8) може написати у својој најопштијој форми, као:

$$\mathbf{x}(t_0 + s) = \psi_x(s), \quad \tau \le s \le 0, \quad \psi_x \in \mathcal{C}, \tag{1.12}$$

где $\mathcal{C}$ представља Банахов простор континуалних функција дефинисаних на временском интервалу дужине τ, које пресликавају интервале $[t-\tau, \tau]$ у $\mathbb{R}^n$, тада се норма, може приказати у следећем виду:

$$\|\psi\| = \max_{-\tau \le s \le 0} \|\psi(s)\| \tag{1.13}$$

Поред ове норме, могу се користити и друге уобичајене норме вектора $\|\mathbf{x}\|_{(\cdot)}$, $(\cdot) =$ 1, 2, ∞ и матричне норме ‖(·)‖ | индуковане тим вектором. $\lambda(\ )$ означава сопствене вредности матрице $[(.)]$, где су $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ су максимална и минимална сопствена вредност, следствено. Матрична мера се веома често користи при испитивању љапуновске стабилности система са кашњењем. Када се користи еуклидска норма, она је дата са $\|\mathbf{x}\|_2 \overset{\Delta}{=} \left(\mathbf{x}^T\mathbf{x}\right)^{1/2}$, односно за матрице са $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}\left(A^T A\right)}$. За произвољну матрицу $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, матрична мера се дефинисе као:

$$\mu(A) \overset{\Delta}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}, \tag{1.14}$$

Матрична мера, дефинисана изразом (1.14), може имати три различита облика, у зависности од коришћене норме

$$\mu_1(A) = \max_k \left(\mathrm{Re}(a_{kk}) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} |a_{ik}| \right), \mu_2(A) = \frac{1}{2}\max_i \lambda_i\left(A^T + A\right), \mu_\infty(A) = \max_i \left(\mathrm{Re}(a_{ii}) + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} |a_{ki}| \right) \tag{1.15}$$

Даље, се наводи и добро позната *Белман-Гронвалова* лема.

Лема 1.1 Нека непрекидне, скаларне функције $x(t)$ и $\wp(t)$ и задовољавају следећу неједначину:

$$x(t) \le \kappa(t) + \int_0^t \wp(s) x(s) ds, \quad t \ge 0, \tag{1.16}$$

где је $\kappa(t)$ нека неопадајућа функција. Тада важи:

$$x(t) \le \kappa(t) \exp \int_0^t \wp(s) ds\ . \tag{1.17}$$

Посебно је овде потребно нагласити да се у применама јед. (1.6 – 1.10) не појављују никакве потешкоће везане за питања *егзистенције, јединствености и непрекидности решења* у односу на почетне податке.

Дефиниције стабилности

Дефиниција 1.1 Систем, дат јед. (1.7), са почетном функцијом, датом јед. (1.8) је *стабилан на коначном временском интервалу* $\{\alpha, \beta, T\}$ где је $0 \le \alpha < \beta$ ако $\sup\limits_{t \in [-\tau, 0]} \psi^T(t)\psi(t) \le \alpha$ повлачи $\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{x}(t) < \beta, \ \forall t \in [0, T]$.

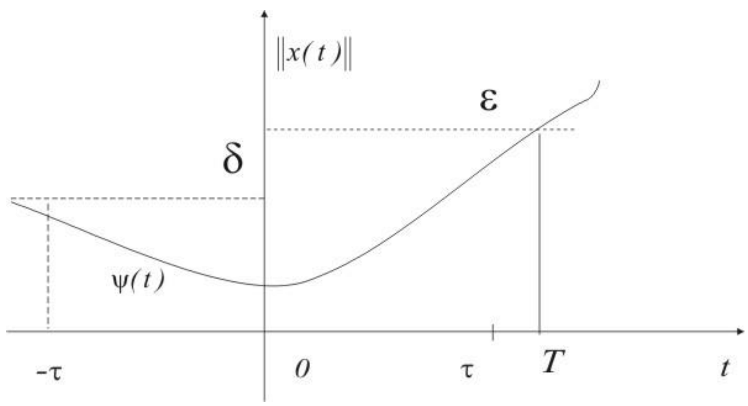
Дефиниција 1.2. Систем, дат јед. (1.7) који задовољава почетни услов (1.8) је *стабилан на коначном временском интервалу* у односу на $\{t_o, J, \delta, \varepsilon, \tau\}, \delta < \varepsilon$ ако и само ако

$$\|\psi_x\|_C < \delta \tag{1.18}$$

повлачи:

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon \quad , \qquad \forall t \in J \tag{1.19}$$

Графичка илустрација претходне дефиниције, дата је на сл. 1.1



Слика. 1.1 *Илустрација концепта стабилности на коначном временском интервалу*

.

2. Стабилност временски континуалних система са кашњењем нецелог реда на коначном временском интервалу

2.1 Уводна разматрања везана за примену рачуна нецелог реда на динамичке системе

Без губитка општости, сва разматрања, која су везана за класе временски континуалних система са кашњењем, могу се у целости, преузети и у даљим разматрањима, при чему је неопходно да се води рачуна о специфичностима појединих класа система са кашњењем нецелог реда, и то у погледу вредности нецелог реда фракциног извода тако и природи самог чистог временског кашњења, [4].

Само временско кашњење може се јавити како у стању што представља чешћи случај, тако и у управљању или у њиховој комбинацији. При томе, оно може бити константно, временски промењиво или у најопштијем случају нека унапред позната нелинеарна, непрекидна функција времена.

Са друге стране, иако је идеја о операторима нецелог (фракционог) реда, стара колико и идеја о операторима целог реда тј. преко триста година, тек је последњих четрдесет година постала популарна међу научницима и истраживачима, са сталним порастом примене фракционих (нецелих) оператора.

Можемо рећи да је данас, опште познат теоријски и практичан значај ових фракционих оператора, а њихова примена у науци и инжењерству се може сматрати као један потпуно нов правац.

Математичко моделирање и симулација динамичких система и процеса, базирано на примени нецелих (фракционих) оператора природно води ка добијању одговарајућих диференцијалних једначина нецелог реда и потреби за њиховим решавањем и анализом. При томе, одговарајуће диференцијалне једначине са нецелим (фракционим) изводима, биле су предмет истраживања многих истраживача и научника, због њиховог присуства у различитим пољима науке, попут физике, хемије, инжењерства, [60-62].

Применом фракционих оператора имамо више степени слободе у фази добијања одговарајућег модела. Такође, имајући у виду да фракциони оператори представљају тзв. нелокалне операторе и они као такви представљају одличан инструмент за опис меморијских и наследних особина различитих материјала и процеса. Другим речима систем диференцијалних једначина нецелог реда је погодан да опише модел који поседује „меморију".

У раду аутори [60], показују да су реални објекти уопштено фракционог типа, с тим да је код већине фракциони (нецели) ред веома мали. Један типичан пример система нецелог реда је однос напона и струје код РЦ трансмисионог вода са полубесконачним губицима, или пример дифузије топлоте у полубесконачно чврсто тело, где је топлотни проток једнак половини извода температуре [62].

У раду [63] проучаване су динамичке особине система са нелинеарностима релејна нелинеарност и типа засићења. Показано је да су ови типови нелинеарности погодни за примену теорије рачуна нецелог реда.

Такође, остварена је примена рачуна нецелог реда у електро-хемији колоидних честица, дата у радовима [64,65], где се разматрају уопштени модели са нецелим изводима граничних фаза контакта течност–течност. Нова теорија електровискоеластичности је омогућила да се разуме понашање наелектрисаних граничних фаза у контакту течност–течност, код фино расутих система, а заснива се на новом моделу течности, [66]. Сугерисано је увођење малог времена кашњења што је омогућило да се електромагнетне осцилације „континуума“ могу добити коришћењем линеарних диференцијалних једначина са кашњењем нецелог реда,[64].

Такође, остварени су и помаци у анализи и синтези динамичких система, који се могу моделирати применом диференцијалних једначина нецелог реда. Лако се уочава да један од начина могућности побољшања ПИД контролера би била коришћење фракционих контролера са нецелим диференцијалним и интегралним члановима PD^{δ}, PI^{λ}, D^{δ}, [62].

На пример, ефекат временских кашњења који се јављају у ПИД регулатору у остварењу стабилности простог електомеханичког система проучаван је анализирањем особина трансцедентне једначине, [67]. Стабилан рад система магнетног лежаја може се постићи једино управљањем са повратном спрегом, где су неизбежна временска кашњења, нарочито када се користи дигитални регулатор.

За закон робусног управљања, аутори [68] представљају побољшано управљање са временским кашњењем, и које се успешно примењује код решавање задатака управљања роботом.

У раду [9] спроведена је анализа стабилности на коначном временском интервалу за роботски систем *Newcastle* са једним степеном слободе где је примењено одговарајуће PD^{α} управљање у којем се појављује временско кашњење у нецелом управљачком систему.

Што се тиче решавања проблема стабилности, крајем прошлог века дошло је до неких нових резултата по питању опште стабилности у теорији управљања системима описаних диференцијалним једначинама са нецелим изводима, [69]. За линеарне диференцијалне системе нецелог реда коначних димензија у простору стања, [69,70] аутор је увео концепте унутрашње и спољашње стабилности.

Међутим уочено је да за динамичке системе нецелог реда, тешко проценити стабилност простим испитивањем карактеристичне једначине, било тражењем доминантних коренова или било неком другом афирмисаном алгебарском методом. Тако да је директно испитивање стабилности система са нецелим изводима коришћењем полиномског критеријума (на пример *Routh -ов*, *или Jury* -ев метод), скопчано са великим потешкоћама, такорећи није могуће, с обзиром да карактеристична једначина система, у општем случају, није полиномска, већ псеудополиномска функција разломљених експонената комплексне променљиве s.

За сада преостаје фреквентна метода из комплексне анализе, заснована на *принципу аргумента* (тј. типа Најквист), која се може користити за проверу стабилности у БИБО смислу (*ограничен улаз- ограничен излаз*).

Надаље ће бити од интереса разматрати *стабилност на коначном временском интервалу* (не)линеарних, стационарних система описаних диференцијалним једначинама са нецелим изводима и присутним чистим временским кашњењем, представљених својим математичким моделима у простору стања.

Такође, у крајњој инстанци, проучиће се и проблем стабилизације истих, увођењем одговарајуће повратне спреге по стању, различитих типова, а за предметне класе разматраних система.

2.2 Основе рачуна нецелог реда

*Фракциони рачун** (енг. *fractional calculus*) или *рачун нецелог реда* је област математичке анализе која се бави изучавањем и применом извода и интеграла нецелог или произвољног реалног или комплексног реда.

До краја 20. века откривене су многе физичке манифестације и различите примене фракционог рачуна. Модели засновани на фракционим диференцијалним једначинама су се показали корисним у физици, механици, електротехници, биохемији, медицини, финансијама, теорији вероватноће и многим другим наукама које су се развијале последњих деценија. У периоду од 1900-1970 публикован је мали број радова везан за област фракционог рачуна. Допринос су дали Х. Дејвис, А. Ердели, Г. Харди, Х. Кобер, Ј.Литлвуд, М. Риз, С. Самко, Х. Вејл. Године 1974. у Конетикату је одржана прва међународна конференција на тему фракционог рачуна. Након тога, теорија фракционих оператора доживљава нагли развој. До данашњег дана списак књига, радова и текстова посвећених теорији и примени фракционог рачуна броји више стотина наслова. Детаљан преглед већине поменутих дела као и одржаних конференција, курсева и семинара на дату тему се може видети у [71].

Почетак развоја фракционог рачуна сеже 300 година уназад, јер познато је да су крајем 17. века познати научници Њутн и Лајбниц поставили основе диференцијалног и интегралног рачуна. Такође, научници Лајбниц (*Gottfried Leibniz 1646-1716*) и Лопитал (*Guillaume de L'Hopital* 1661-1704) су били такође заинтересовани и за проблеме тзв. *фракционог рачуна* (ФР) и најједноставнијим диференцијалним фракционим једначинама (ДФЈ) иницирајући питањем решавања проблема проширења извода целобројног реда $d^n f(x)/dx^n$ за n-ти извод функције

---

* коректније је рећи *рачун нецелог реда*, пошто степен може бити и реалан, комплексан број али задржаће се назив у уводним разматрањима због препознатљивости самог појма.

y=y(x) тако да степен извода не буде цео број већ да буде рационалан на пример $n=1/2$. У њиховој међусобној коресподенцији забележено је да је у писму упућеном Лопиталу на претходно постављен проблем, датираном на 30 септембар, 1695 године Лајбниц одговорио: "*То ће довести до парадокса, од којих ће се једног дана проистећи корисне последице.*" Овим речима *фракциони рачун* је био рођен и установљен. Проблеме која је изнедрио и поставио фракциони рачун (*рачун нецелог реда*) је привукао посебну пажњу познатих математичара и механичара тог доба, међу којима су Ојлер, Риман, Лаплас, Лиувил, Абел, Фурије, Ланграњж.

Тако је Ојлер (*Leonard Euler 1707-1783*), проучавао диференцирање степене функције $d^p x^a / dx^p$ за нецеле вредности параметра p. Даље, Лаплас (*Pierre-Simon Laplace* 1749-1827) је 1812. год. предложио идеју диференцирања нецелог реда за функције које имају интегралну репрезентацију облика $\int P(t) t^{-x} dt$, [72]. Идеју Ојлера је детаљније разрадио Лакроа (*Francois Lacroix 1765-1843*) када је у својој књизи, [73] приказо формулу (2.1) за α -ти извод функције $y=t^n$ где је n -позитиван цео број.

$$D^{\alpha} y(t) = \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}\left(t^m\right) = \frac{n!}{(n-\alpha)!} t^{n-\alpha}, \quad n \geq \alpha. \tag{2.1}$$

Ако се узме у обзир Ојлерова гама функција $\Gamma(\cdot)$ где C је скуп комплексних бројева

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

добија се израз (2.1) у следећем облику:

$$D^{\alpha} y(t) = \frac{d^{\alpha} y}{dt^{\alpha}} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)} t^{n-\alpha}, \quad n > \alpha. \tag{2.3}$$

На основу претходног израза могу се добити следећи специјални случајеви:

$$\begin{aligned} &n=1, \alpha=1/2 \rightarrow D^{1/2}(t) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} t^{0.5} = \frac{2t^{1/2}}{\pi^{1/2}}. \\ &n=0, \alpha \neq 0 \rightarrow \frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}}(1) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \neq 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Затим, Фурије (*Joseph Fourier 1768-1830*) је дао формулу фракционог оператора произвољним реда α која је проистекла је из интегралне репрезентације функције, [74].

$$D^{\alpha} f(t) = \frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} s^{\alpha} \cos\left[s(t-\xi) + \alpha\pi/2\right] ds, \tag{2.5}$$

На неки начин, ово је била прва дефиниција извода нецелог реда "*довољно добрих*" функција. Примену фракционих оператора је први остварио Абел (*Niels Abel 802-1829*)

у циљу решавања интегралне једначине која се појављује у формулацији чувеног проблема из механике -проблема *таутохрона**.
Лиувил је извео формулу за интеграцију нецелобројног реда функције (2.6) који је сличан данашњим дефиницијама, [75-77].

$$D^{-\alpha} f\left(t\right)=\frac{1}{\left(-1\right)^{\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{0}^{\infty} f\left(t+s\right)s^{\alpha-1}f\left(s\right)ds \tag{2.6}$$

тако да је он применио дефинисане фракционе операторе за решавање неких типова обичних линеарних диференцијалних једначина. Са друге стране у циљу решавања генерализованих Тејлорових редова Риман је извео различите дефиниције које укључују фракциони интеграл и који се примењивао на степене редове са нецелобројим експонентима

$$I^{\alpha} f\left(t\right)=D^{-\alpha} f\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{c}^{t}\left(t-s\right)^{\alpha-1}f\left(s\right)ds+\Psi\left(t\right) \tag{2.7}$$

С обзиром на неодређеност у доњој граници интеграла c, Риман је додао комплементарну функцију $\psi\left(t\right)$, где је данашња дефиниција фракционог интегралног оператора без претходно уведене комплементарне функције.
Даље, Сонин (*Sonin*), Летников (*Letnikov*) и Лорент, *(Laurent)* су интегрисали добијене резултате и тако установили данашњу дефиницију *Риман-Лиувиловог интеграла нецелог реда* α,[78]:

$${}_{c}D^{-\alpha} f\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_{c}^{t}\left(t-s\right)^{\alpha-1}f\left(s\right)ds,\quad \operatorname{Re}\left(\alpha\right)>0 \tag{2.8}$$

Грунвалд (*A. K. Grunwald* 1838-1920) и Летников (A. V. *Letnikov 1837-1888*) готово истовремено дају још једну дефиницију фракционих извода која се такође данас користи, [79,80] која се данас познат као *Грунвалд-Летников фракциони извод*

$${}^{GL}D^{\alpha} f\left(t\right)=\lim_{h\to 0}\frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^{k}\binom{\alpha}{k}f\left(t-kh\right)}{h^{\alpha}},\;\; \alpha>0 \tag{2.9}$$

$$\binom{\alpha}{k}=\frac{\alpha!}{k!\left(\alpha-k\right)!}=\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)\ldots\left(\alpha-k+1\right)}{k!}=\frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(k+1\right)\Gamma\left(\alpha-k+1\right)},\quad \binom{\alpha}{0}=1$$

---

* *Таутохрон проблем (изохрони проблем)* се састоји из одређивања облика криве y $y(x)$ тако да време за које се тело занемарљиве масе спусти до најниже тачке на кривој без трења а под дејством силе гравитације је независно од почетног положаја тела на уоченој кривој.

У изразу (2.9) $\binom{\alpha}{k}$ представља генерализовани биномијални коефицијент. Такође, у свом раду, [81] је показао да се Грунвалд-Летникова дефиниција подудара под извесним условима са дефиницијом коју су дали Риман и Лиувил.

У циљу решавања фракционих диференцијалних једначина на класичан рачин, Капуто је,[82,83] реформулисао „класичну" дефиницију РЛ фракционог извода у циљу искоришћења почетних услова са целим изводима за разлику од диференцијалних једначина које садрже Риман-Лиувилов фракциони извод. Тако, за дату функцију $f(x)$ са $(n-1)$ апсолутно непрекидних извода Капуто је дефинисао фракциони извод као:

$$^{C}D^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds, \tag{2.10}$$

Историјски гледано, готово истовремено, руски научник Работнов, [84] је увео овај исти диференцијални оператор у модификованом облику у проучавању различитих проблема теорије вискоеластичности. Без обзира на ову чињеницу овај фракциони оператор данас се најчешће среће у научној литератури под називом *Капутов фракциони извод*. Посебно, за нулте почетне услове дефиниције фракционих извода Капута и Риман-Лиувила се подударају.

Дефиниције фракционих оператора

Дефиниција 2.1, [85,86]: Нека је $[a,b]$ коначан интервал где су $-\infty < a < b < \infty$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$, и $f(t)$ нека је непрекидна функција дефинисана на $[a,b]$. Онда је леви *фракциони Риман–Лиувилов извод реда* α је дат са:

$$^{\mathrm{RL}}_{a}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) \mathrm{d}s, \quad \begin{cases} t \in [a,b], & \alpha \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) \geq 0, \\ n = [\mathrm{Re}(\alpha)] + 1, & n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{2.11}$$

где C је скуп комплексних бројева и $\Gamma(\cdot)$ представља Ојлерову гама функцију (2.2)

Дефиниција 2.2. Нека је $f(t)$ непрекидна функција на $[a,b]$. Леви фракциони Риман–Лиувилов (РЛ) интеграл реда α је [85,86]:

$$^{\mathrm{RL}}_{a}\mathrm{D}_t^{-\alpha} f(t) \equiv {}^{\mathrm{RL}}_{a}\mathrm{I}_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) \mathrm{d}s, \quad t \in [a,b], \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}(\alpha) > 0. \tag{2.12}$$

где $\mathrm{Re}(\alpha)$ означава реални део α.

Дефиниција 2.3. Леви фракциони Капутов извод реда α, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) \geq 0$, је дефинисан за функцију $f(\cdot):[a,b] \to C$ која припада простору апсолутно непрекидних функција: $f(t) \in AC^n[a,b] = \{ f(t) : \mathrm{d}^{n-1} f(t) / \mathrm{d}t^{n-1} \in AC[a,b] \}$, $n \in N$. је дат са [85,86]:

$$
{}_{a}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_{t}^{\alpha} f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \displaystyle\int_{a}^{t} (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s)\mathrm{d}s, & \alpha \notin \mathbb{N}_0, \quad n = \left[\mathrm{Re}(\alpha)\right]+1, \quad n \in \mathbb{N}. \\ f^{(n)}(t) = \dfrac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}, & \alpha = n \in \mathbb{N}_0. \end{cases} \tag{2.13}
$$

Интересантно је на овом месту приказати везу између Капутових и Риман-Лиувилових фракционих извода који су дати изразима (2.11), (2.13). Нека је $f \in AC^n([a,b]), \quad n-1 \le \alpha < n$, тада важи

$$
{}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha} f(t) = {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha} f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) \tag{2.14}
$$

Када је испуњено да су $f^{(k)}(a) = 0$ и испуњени су претходни услови следи да је леви РЛ извод једнак левом Капутовом изводу,

$$
{}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha} f(t) = {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha} f(t) \tag{2.15}
$$

Са друге стране, Лапласова трансформација РЛ интеграла нецелог реда $\alpha > 0$ је:

$$
L\left\{ {}^{RL}D^{-\alpha} f(t) \right\} = L\left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right\} = \frac{F(s)}{s^{\alpha}} \tag{2.16}
$$

Слично, одређује се Лапласова трансформација одговарајућег РЛ и Капутовог фракционог извода.

$$
\text{РЛ:} \qquad L\left\{ {}^{RL}D_{0}^{\alpha} f(t) \right\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^{k} \, {}^{RL}D_{0}^{\alpha-k-1} f(t)\Big|_{t=0}, \qquad n-1 < \alpha \le n \in \mathbb{N} \tag{2.17}
$$

$$
\text{Капуто:} \qquad L\left\{ {}^{C}D_{0}^{\alpha} f(t) \right\} = s^{\alpha} F(s) - \sum_{k=1}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k-1)}(0), \quad n-1 < \alpha \le n \in \mathbb{N} \tag{2.18}
$$

Дефиниција 2.4. За $z \in \mathbb{C}$ *Митаг-Лефлерова функција* $E_{\alpha}(z)$ је дефинисана са:

$$
E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}, \quad \alpha > 0 \tag{2.19}
$$

и *двопараметарска Митаг-Лефлерова функција* $E_{\alpha,\beta}(z)$ са:

$$
E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad \alpha, \beta > 0 \tag{2.20}
$$

У случају једнопараметарске Митаг-Лефлерова функције $E_{\alpha}(z)$, за случај $\alpha = 1, \alpha = 2$ добијају се развоји експоненцијалне функције и функције хиперболичног косинуса,

$$E_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}=e^z,\quad E_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(2k)!}=\cosh(\sqrt{z}),\tag{2.21}$$

Лапласова трансформација Митаг-Лефлерове функције је дата са

$$L\left(t^{\beta-1}E_{\alpha,\beta}\left(-\lambda t^{\alpha}\right)\right)=\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^{\alpha}+\lambda},\quad \left(\Re(s)>|\lambda|^{1/\alpha}\right)\tag{2.22}$$

где је $t\geq 0,\ \lambda\in\mathbb{R}$,[62].

2.3 Селективан и хронолошки преглед досадашњих резултата на пољу изучавања стабилности система нецелог реда са кашњењем на коначном временском интервалу

Прво проширење концепта стабилности на коначном временском интервалу на класу система описаних диференцијалним једначинама са нецелим изводима и присутним чистим временским кашњењем, дато је на у раду [87], где су раније изведени довољни услови за линеарне временски континуалне стационарне системе са кашњењем [88], посебном техником прилагођени овде разматраној класи система.

Наиме посматран је систем са кашњењем нецелог реда који ради у *принудном радном режиму.*

$$\frac{d^{\alpha}\boldsymbol{x}(t)}{dt^{\alpha}}=A_0\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-\tau)+B_0\boldsymbol{u}(t)+B_1\boldsymbol{u}(t-\tau),\tag{2.23}$$

са почетним функцијама:

$$\boldsymbol{x}(t)=\psi_x(t),\qquad -\tau\leq t\leq 0,\qquad\qquad \boldsymbol{u}(t)=\psi_u(t),\qquad -\tau\leq t\leq 0,\tag{2.24}$$

Одговарајући облик система са кашњењем целог реда у принудном радном режиму је

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=A_0\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-\tau)+B_0\boldsymbol{u}(t)+B_1\boldsymbol{u}(t-\tau),\tag{2.25}$$

где су почетне функције дате изразом (2.24). Такође, разматран је и случај вишеструких кашњења у стању система са нецелобројним изводом који је приказан са:

$$\begin{gathered}\frac{d^{\alpha}\boldsymbol{x}(t)}{dt^{\alpha}}=A_o\boldsymbol{x}(t)+\sum_{i=1}^{n}A_i\boldsymbol{x}(t-\tau_i),\qquad ,\\ 0\leq\tau_1<\tau_2<\tau_3<\ldots<\tau_i<\ldots<\tau_n=\Delta\end{gathered}\tag{2.26}$$

и придруженом почетном функцијом

$$\boldsymbol{x}(t)=\psi_x(t),\qquad -\Delta\leq t\leq 0\,.\tag{2.27}$$

Еклатантним нумеричким примером илустрована је коректост изведених довољних услова.

У раду [9], спроведена је анализа и синтеза нецелог реда управљања роботских система Newcastle са присутним временским кашњењем где је примењено одговарајуће PD^{α} управљање. Изведени су довољни услови ове врсте стабилности коришћењем *Bellman-Gronwell* - ове леме што омогућава да трајекторије остају унутар априори прописаних граница за класу линеарних система са временским кашњењем са нецелим изводима и то полазећи од модела у простору псеудо стања. На крају, одговарајућим нумеричким примером, показана је оправдананост, изведеног резултата. Генерализација претходних резултата је дата у радовима, [89,90], где су разматрани пертурбовани системи нецелог реда са кашњењем у стању и управљању, који су облика, [89]:

$$\frac{d^{\alpha}\boldsymbol{x}(t)}{dt^{\alpha}} = A_0\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-\tau) + B_0\boldsymbol{u}(t) + B_1\boldsymbol{u}(t-\tau) + f_0\left(\boldsymbol{x}(t)\right) + f_1\left(\boldsymbol{x}(t-\tau)\right), \qquad (2.28)$$

са почетним функцијама (2.24), где су у важности следеће претпоставке:

$$\left\| f_0(\boldsymbol{x(t)})\right\| \le c_0\left\|\boldsymbol{x(t)}\right\|,\ t\in\left[0,\infty\right),\quad \left\| f_1(\boldsymbol{x(t-\tau)})\right\| \le c_1\left\|\boldsymbol{x(t-\tau)}\right\|,\ t\in\left[0,\infty\right) \qquad (2.29)$$

где су $c_0, c_1 \in R^{+}$ познате реалне позитивне константе. Такође, [89] проучаван је следећи пертурбовани систем са кашњењем нецелог реда:

$$\frac{d^{\alpha}\boldsymbol{x}(t)}{dt^{\alpha}} = A_0\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i\boldsymbol{x}(t-\tau_i) + B_0\boldsymbol{u}(t) + f_0\left(\boldsymbol{x}(t)\right) + \sum_{i=1}^{n} f_i\left(\boldsymbol{x}(t-\tau_i)\right), \qquad (2.30)$$

где векторске функције $f_0, f_i,\ i=1,2,3...,n$ представљају нелинеарне пертурбације у односу на $x(t), x(t-\tau_i),\ i=1,2,..n$, респективно, са претпоставком да важи (2.29), где су $c_0, c_i \in R^{+},\ i=1,2,\dots,n$ познате реалне позитивне константе.

$$\left\| f_0(\boldsymbol{x(t)})\right\| \le c_0\left\|\boldsymbol{x(t)}\right\|,\ t\in\left[0,\infty\right),\quad \left\| f_i(\boldsymbol{x(t-\tau)})\right\| \le c_i\left\|\boldsymbol{x(t-\tau_i)}\right\|, i=1,2,...n \quad t\in\left[0,\infty\right) \qquad (2.31)$$

У раду [91] предмет интересовања била је класа нелинеарних система са нецелобројним изводима и присутним чистим временским кашњењем, описана једначином стања:

$$\frac{d^{\alpha}\mathbf{x}(t)}{dt^{\alpha}} = \left(A_0 + \Delta A_0\right)\mathbf{x}(t) + \left(A_1 + \Delta A_1\right)\mathbf{x}(t-\tau) + \mathbf{f}_0\left(\mathbf{x}(t)\right), \qquad (2.32)$$

са познатом почетном функцијом и унапред задатом векторском функцијом $\mathbf{f}_0\left(\mathbf{x}(t)\right)$ која представља нелинеарни параметер поремећаја у односу на $\mathbf{x}(t)$, а матрице $\Delta A_0, \Delta A_1$ представљају неизвесности у систему. Векторска функција f_0 представља нелинеарна пертурбацију у односу на $x(t)$, а матрице $\Delta A_0, \Delta A_1$ представљају пертурбације у систему система. Истражен је проблем довољних услова концепта стабилности на коначном временском интервалу, који омогућавају да кретања система остају унутар априори дефинисаних скупова за одређену класу нелинеарних аутономних система са нецелим изводима и присутним како чисто временским кашњењем тако и са неизвесностима специфичног типа оличених у системским матрицама. Одређене су и границе робусности уведених нормираних пертурбација, при којима номинални систем остаје још увек стабилан на задатом коначном интервалу, [91,92].

У раду [93] по први пут је изведен и представљен критеријум стабилности за дати систем нецелог реда са кашњењем применом генерализоване *Gronwall* –ове леме. У следећем раду [94] проблем робусне стабилности система на коначном временском интервалу проучаван је нелинеарни пертурбовани систем са нецелим изводом са чистим промењљивим временским кашњењем, који је дат са:

$$
\begin{aligned}
{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}^{\alpha}_{t_0,t}\,\boldsymbol{x}(t) &= (A_0 + \Delta A_0)\,\boldsymbol{x}(t) + (A_1 + \Delta A_1)\,\boldsymbol{x}(t-\tau_x(t)) \\
&\quad + B_0\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau_x(t))\big), \quad t \ge t_0, \quad \alpha \in \left]0,1\right[,
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

где векторска функција $f_0(.)$ задовољава следећу претпоставку:

$$
\left\| \boldsymbol{f}_0\big(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau_x(t))\big) \right\| \le c_0 \left\| \boldsymbol{x}(t) \right\| + c_1 \left\| \boldsymbol{x}(t-\tau_x(t)) \right\|, \quad \forall t \ge t_0, \tag{2.34}
$$

где су $c_0, c_1 \in \mathbb{R}^+$ познате позитивне константе. Такође, проучаван је и проблем стабилизације на коначном временском интервалу. Посебно је проучаван скаларни случај система нецелог реда дат следећим изразом

$$
\frac{d^{\alpha} x(t)}{dt^{\alpha}} = (a_0 + \Delta a_0)\,x(t) + (a_1 + \Delta a_1)\,x(t-\tau(t)) + b_0 u(t) \tag{2.35}
$$

где је примењен следећи закон управљања у повратној спрези облика: $u(t) = kx(t)$. На крају, спроведена је одговарајућа нумеричка симулација чиме је показана оправдананост изведеног резултата.

Извесна пажња је посвећена и решавању проблема [95] тзв. делимичне стабилности (*partial stability*) на коначном временском интервалу тј. стабилности кретања система у односу на неке промењљиве $y(t)$ где су:

$$
\begin{gathered}
x(t) = (x_1\ x_2 \ldots x_n)^T = \left(y^T, z^T\right)^T \ \dim y(t) = m,\ \dim z(t) = p,\ n = m + p \\
t \ge 0,\ \ \|y(t)\| \le h, \quad \|z(t)\| \le L_z \le \infty,
\end{gathered}
\tag{2.36}
$$

У научној међународној монографији [96], *Лазаревић и др.,* добијени су и приказани резултати за дискретне системе са кашњењем са присутним нецелим изводима, али ти резултати излазе ван оквира ових разматрања.

Коначно, у раду [97] критеријуми стабилности на коначном временском интервалу су проширени на нелинеарне нехомогене системе нецелог реда са нелинеарним поремећајима, укључујући вишеструка променљива кашњења у времену:

$$
{}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_{t_0,t}^{\alpha}\, \boldsymbol{x}(t) = A_0\boldsymbol{x}(t) + \sum_{i=1}^{n} A_i \boldsymbol{x}\left(t-\tau_{x,i}\right) + B_0\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{f}_0\left(\boldsymbol{x}(t)\right) + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}_i\left(\boldsymbol{x}\left(t-\tau_{x,i}\right)\right),
$$
$$
t \ge t_0, \quad \alpha \in \left]0,1\right[, \quad 0 < \tau_{x,1} < \tau_{x,2} < \cdots < \tau_{x,n} = \Delta, \tag{2.37}
$$

са придруженом почетном функцијом $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\psi}_x(t),\ \ t \in \left[t_0 - \Delta, t_0\right]$ и векторским функцијама $\boldsymbol{f}_i(\cdot),\ i = 0,1,2,\ldots,n,$ које задовољавају следеће претпоставке

$$
\begin{aligned}
&\left\| \boldsymbol{f}_0\left(\boldsymbol{x}(t)\right)\right\| \le c_0 \left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|, \quad \forall t \ge t_0,\\
&\left\| \boldsymbol{f}_i\left(\boldsymbol{x}\left(t-\tau_{x,i}(t)\right)\right)\right\| \le c_i \left\|\boldsymbol{x}\left(t-\tau_{x,i}(t)\right)\right\|, \quad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}, \quad \forall t \ge t_0,
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

Довољни услови стабилности за системе нецелог реда са вишеструким временским кашњењем добијају се коришћењем генерализованог и класичне Гронвалове леме. Погодно изабрани нумерички пример је дат на крају који илуструје и потврђује валидност добијених теоријских резултата.

Осим претходно наведених резулатата у области стабилности на коначном временском интервалу за системе нецелог реда са и без кашњења, и други аутори су изучавали ову интересантну проблематику. Тако на пример, аутор је у раду [98] изучавао проблем довољних услова стабилности на коначном временском интервалу тј. да трајекторије система остају унутар пре свега задатих подешавања за одређену класу линеарних система са временским кашњењем описаних диференцијалним једначинама са нецелим изводима у простору стања. У том смислу, може се проверити стабилност система на коначном временском интервалу. Разматрани систем је дат у простору стања облика:

$$
D^{\alpha}x(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau) + f(t), \qquad t \ge 0 \tag{2.39}
$$

$$
x(t) = \psi(t), \qquad t \in \left[-\tau, 0\right], \tag{2.40}
$$

где је са D^{α} означен Риман-Лувилиов извод нецелог реда $\alpha, 0 < \alpha < 1, \boldsymbol{\psi}_x(t),$ дата почетна непрекидна функција на $\left[-\tau, 0\right]$, $\tau = const > 0$, A_0, A_1 су константне матрице система одговарајућих димензија. Питање постојања решења диференцијалних једначина нецелог реда је доказана применом применом *Schauder*-ове теореме фиксне тачке и *Banach*-овог принципа контракционог пресликавања. Аутор је проучавао постојање и јединственост решења за линеарне система са кашњењем нецелог реда применом методе корака, [99].

У раду [100] су настављена истраживања проблема стабилности на коначном временском интервалу за класу нелинеарног система нецелог реда са чистим дискретним временским кашњењем. Аутори су применом Лапласове трансформације, Митаг-Лефлерове функције и генерализоване Гронвалове неједнакости добили нове критеријуме стабилности за систем нецелог реда $0<\alpha<1$. Такође, добијени су довољни услови који обезбеђују стабилност на коначном временском интервалу и за систем нецелог реда који има вредности $1<\alpha<2$.

Аутори [101], су развили и применили метод Митаг-Лефлерове матричне функције за линеарне фракционе диференцијалне једначине који омогућава добијања решења истих применом методе варијације константи а у циљу проучавања стабилнсти датог система на коначном временском интервалу. Коначно, дат је један илустративни пример који потврђује оправданост претходно предложеног приступа.

За разлику од претходних радова овде аутори [102] истражују стабилност на коначном временском интервалу система са кашњењем које су описане диференцијалним једначинама који садрже Риман-Лиувилове изводе нецелог реда коришћењем низа особина матричне функције Миттаг-Леффлера са кашњењем.

Даље, у раду, [103] искоришћен је метод корака и генерализована Гронвалова неједнакост где је добијен довољан услов за стабилност на коначном временском интервалу за дати нелинеарни систем са кашњењем нецелог реда. На крају дата су два нумеричка примера која илуструју применљивост резулатата доказане теореме.

У раду [104], развијена је нова фракциона Гронвалова неједнакост са временским кашњењем. На основу ове неједнакости изведен је нови критеријум за стабилност система на коначном временском интервалу за дати систем нецелог реда са кашњењем.

Робусна стабилност на коначном временском интервалу система са кашњењем нецелог реда са поремећајима је испитивана у раду [105] применом теорије фиксне тачке. Два пажљиво одабрана примера су била дата да се докаже ваљаност предложеног приступа.

2.4 Селективан и хронолошки преглед досадашњих резултата на пољу изучавања стабилности неутралних система целог и нецелог реда са кашњењем на коначном временском интервалу

2.4.1 Неки примери неутралних динамичких система са кашњењем

У наставку су наведене неке физичке појаве, процеси и системи који се могу описати диференцијално-диференцираним једначинама неутралног типа са кашњењем. Оне показују своју корисност у различитим областима науке и технике. Неутрални системи са временским кашњењем (НСВК) целог реда у механичким проблемима представљени су у радовима [106,107] при чему у раду [106], је проучавана стабилност еластичне греде када је греда изложена лонгитудиналном утицају силе управљана са повратном спрегом која садржи кашњење. Одговарајућа диференцијална једначина система се може трансформисати у диференцијалну једначину са кашњењем неутралног типа где су укључена два временска кашњења. У раду [107] је разматран проблем котрљања брода са контролом на основу вредности закаснелог убрзања односно исти се може моделирати као НСВК целог реда.

Такође, уопштавањем модела *предатор-плен* (*predator-prey*) која је описана добро познатом логистичком једначином аутори [108] су узимањем у обзир кашњења и динамичког термина у стопи раста по глави становника добили одговарајућу неутралну логистичку једначину са кашњењем целог реда. Даље, аутори су у раду [109] применили управљање у повратној спрези са закаснелим убрзањем за сузбијање *chattering* осцилација у производним машинама која се може представити у виду НСВК целог реда.

У оквиру биомеханике уочено је да самобалансирајући модели човека се могу добити у виду неутралних ТДС целог реда где се у решавању проблема стабилизације уводи управљање у повратној спрези која садржи кашњење и које узима у обзир положај, брзину и убрзања истог, [110-112].

Недавно, у циљу смањења вибрација једног механичког система примењен је генерализовани Скот-Блеров модел [113], и који се може моделовати као неутрални НСВК нецелог реда где се вискоеластичан материјал користи као пригушење у системима вибрација, под претпоставком да је пригушење пропорционално фракционом изводу померања реда $0<\alpha<1$.

2.4.2 Хронолошки преглед досадашњих резултата на пољу изучавања стабилности на коначном временском интервалу неутралних система нецелог реда

Последњих неколико година, пажња истраживача и научника је усмерена и на решавању атрактивног и актуелног проблема *стабилности на коначном временскоим интервалу неутралних система са кашњењем нецелог реда*.

Постоје различите класе линеарних диференцијално-диференцијских једначина у зависности од њихове структуре. Да бисмо разјаснили ову класификацију, разматра се следећа диференцијално-диференцна једначина целог реда:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{x}(t)+dx(t-\tau)\right]=a_0\boldsymbol{x}(t)+a_1\boldsymbol{x}(t-\tau)+a_2\int_{-\tau}^{0} f(s)x(t+s)\mathrm{ds}, \tag{2.41}$$

где су d, a_0, a_1, a_2 константе из скупа реалних бројева, $f(s)$, $s\in[-\tau,0]$ је непрекидна функција и $\tau>0$ је чисто временско кашњење. Ако $d=0, a_2=0$ онда диференцијално-диференцна једначина је *закаснело*г *типа*; ако је $d\neq 0, a_2=0$ онда диференцијално-диференцна једначина је *неутралног типа*. У случају да је $a_2\neq 0$, онда је диференцијално-диференцна једначина *дистрибутивног типа,* [114].

У овој докторској дисертацији главни фокус је на *динамичке системе неутралног типа са временским кашњењем целог и нецелог реда.* Као што се може видети, системи са временским кашњењем неутралног типа су генерализација система класичних временских кашњењем и карактерише их чињеница да брзина промене стања зависи не само од садашњих стања, већ и од брзине промене прошлих стања, тј. постоје кашњења у изводима величине стања дате диференцијалне једначине. Ова посебна карактеристика чини ову класу система погодном за моделирање разних феномена, али у исто време чини њено проучавање сложенијим.

Нека је дат хомогени непрекидни *неутрални систем са кашњењем целог реда* који ради у *слободном радном режиму* дат у простору стања као:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=A_0\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-\tau_x)+A_{N1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t-\tau_{xN})}{\mathrm{d}t}, \tag{2.42}$$

са почетном функцијом стања облика

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\psi}_x(t),\quad t\in[-\tau_{xm},0], \tag{2.43}$$

где су A_0, A_1, и A_{N1} константне матрице одговарајућих димензија, τ_x, τ_{xN} су позната чиста временска кашњења и то дискретно кашњење у стању као и неутрално кашњење респективно, где је $\tau_{xm}=\max(\tau_{xM}, \tau_{xN})$.

Одговарајући облик нехомогеног неутралног система целог реда са кашњењем у стању и управљању у принудном радном режиму је облика

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t}=A_0\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-\tau_x)+A_{N1}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t-\tau_{xN})}{\mathrm{d}t}+B_0\boldsymbol{u}(t)+B_1\boldsymbol{u}(t-\tau_u), \tag{2.44}$$

са одговарајућим почетним функцијама:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\psi}_x(t), t\in[-\tau_{xm},0], \quad \boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{\psi}_u(t), t\in[-\tau_u,0] \tag{2.45}$$

где је $u(t)\in\mathbb{R}^m$ вектор управљања; B_0 и B_1 константне матрице одговарајућих димензија; τ_u је кашњење које се јавља у управљању.

Слично системима целог реда, одговарајући *хомогени неутрални систем али сада нецелог реда* α *са кашњењем* се може приказати у простору псеудо-стања као:

$${}^c\mathrm{D}^{\alpha}\boldsymbol{x}(t)=A_0\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-\tau)+A_{N1}{}^c\mathrm{D}^{\alpha}\boldsymbol{x}(t-\tau) \tag{2.46}$$

где је почетна функција дата са (2.43) и где ${}^c\mathrm{D}^{\alpha}(..)$ означава Капутов фракциони извод реда $0<\alpha\le 1$.

Недавно, у раду [115] аутори су проучавали ФТС линеарног неутралног НИТДС нецелог реда (2.46) методом корака.

Такође, у раду [116] спроведена је ФТС анализа хомогене НИТДС (2.46) на основу генерализоване Гронвалове неједнакости где су добијена два критеријума стабилности датог система. На сличан начин, у раду [117] спроведена је ФТС анализа хомогене НИТДС са нелинеарном пертурбацијом на основу генерализоване Гронвал неједнакости.

Даље, у раду [118] аутори су добили довољне услове за ФТС неутралног НИТДС двочланог нецелог реда $0<\mu\le\lambda<1$са Липшицовим нелинеарностима коришћењем методе корака и генерализоване Гронвалове неједнакости.

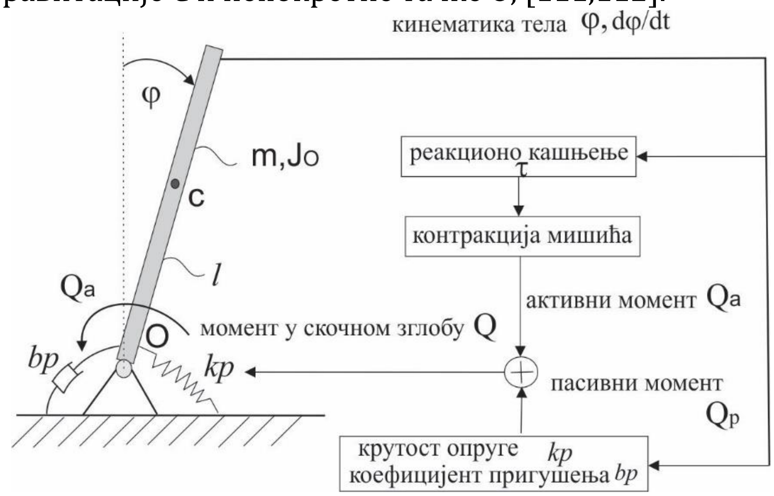
Поред тога, у раду [119] аутори су разматрали ФТС генерализованог неутралног НИТДС-а са изводима уоштеног реда где су $0<\beta\le\alpha<1$. Прво, биваријантна матрична функција Митаг-Лефлеровог типа је уведена са одговарајућим проценама исте у односу на експоненцијалну функцију. Додатно, на основу ρ-Лапласове трансформације, својстава Митаг-Лефлерове функције и генерализоване Гронвалове неједнакости, добијен је нови критеријум стабилности на коначном временском интервалу. На крају, применом једног нумеричког примера послужио је за потврђивање претходно изведених теоријских резултата.

Недавно, ФТС класе вишечланог нелинеарног система нецелог реда са временским кашњењем у стању, где је нецели ред $0<\alpha_2\le 1<\alpha_1\le 2$, су проучавани у радовима, [120,121].

3. Нека питања стабилности посебних класа механичких система: фракциони приступ

3.1 Неурално-механички модел људског балансирања у сагиталној равни

У оквиру биомеханике локомоторног система човека један од актуелних и изазовних задатака биомеханике свакако представља решавање проблема балансирања људског тела у сагиталној равни. Одговарајући неурално-механички модел људског балансирања у сагиталној равни је приказан на слици 3.1. Људско тело је моделирано као инверзно клатно са масом m, аксијалним моментом инерције J_0 у односу на хоризонталну осу која пролази кроз обртну тачку O, док l представља растојање између центра гравитације C и непокретне тачке O, [111,112].



Слика 3.1. *Неурално-механички модел људског балансирања у сагиталној равни*

Људско тело је управљано обртним моментом $M_{ox}(t)$. Момент $M_{ox}(t)$ се састоји од пасивног момента $M_p(t)$ и активног момента $M_a(t)$. Пасивни обртни момент $M_p(t)$ зависи од крутости и пригушења скочних зглобова, који су моделовани торзионом опругом крутости $k_p(t)$ и торзионим коефицијентом пригушења $b_p(t)$. Аутори у свом раду [122], су показали да крутост скочног зглоба k_p обезбеђује Ахилова тетива, апонеуроза као и стопало, и није довољно велика да одржи равнотежу против момента услед сила земљине теже. Због тога, у циљу балансирања тела у сагиталној равни током мирног стајања неопходно је генерисати додатни активни момент управљања $M_a(t)$ који генеришу контрактилни елементи мишића скочног зглоба [123].

Овај обртни момент регулише централни нервни систем на основу сензорних сигнала о углу ротације φ, угаоној брзини $\dot{\varphi}$ и угаоном убрзању $\ddot{\varphi}$ људског тела око подужне хоризонталне осе.

Применом теореме о промени момента количине кретања око подужне хоризонталне осе добија се одговарајућа диференцијална једначина кретања са:

$$\frac{dL_{ox}}{dt} = M_{ox}(mg) + M_{ox}(t) \tag{3.1}$$

односно

$$J_o\ddot{\varphi}(t) = mgl\sin\varphi - M_a(t) - M_p(t) \tag{3.2}$$

$$M_p(t) = k_p(t)\varphi(t-\theta_2) + b_p(t)\dot{\varphi}(t-\theta_1) \tag{3.3}$$

Посебно је овде од интереса размотрити случај као што је дато у [124] где су коефицијенти $b(t), k(t) = const$ константи, а временска кашњења $\theta_1, \theta_2 \approx 0$ су занемарљива па је $M_p(t)$ дат као:

$$M_p(t) = k_p\varphi(t) + b_p\dot{\varphi}(t) \tag{3.4}$$

Такође, линеарни део засићеног активног обртног момента $M_a(t)$ [111], је облика

$$M_{alin}(t) = K_p\varphi(t-\tau) + K_d\dot{\varphi}(t-\tau) + K_a\ddot{\varphi}(t-\tau) \tag{3.5}$$

при чему су са *Kp*, *Kd* и *Ka* означени пропорционално појачање, брзинско појачање и акцелерацијско појачање, респективно. Временски закашњени сигнали угла ротације φ и угаоне брзине $\dot{\varphi}$ су обезбеђени вестибуларним системом и проприоцепторима, док је сигнал угаоног убрзања $\ddot{\varphi}$ повезан са информацијама које долазе од механорецептора према другом Њутновом закону [110].

Линеаризовани систем (3.2) претпостављајући да је $sin\varphi \approx \varphi$ се може приказати сада као:

$$J_o\ddot{\varphi} + b_p\dot{\varphi} + \left(k_p - mgl\right)\varphi = -K_p\varphi(t-\tau) - K_d\dot{\varphi}(t-\tau) - K_a\ddot{\varphi}(t-\tau) \tag{3.6}$$

који се може представити на следећи начин:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\left(mgl - k_p\right)}{J_0}x - \frac{K_p}{J_0}x(t-\tau) - \frac{K_d}{J_0}\dot{x}(t-\tau) - \frac{K_a}{J_0}\ddot{x}(t-\tau) - \frac{b_p}{J_0}\dot{x} \\ &= a_1'x + a_2'x(t-\tau) + a_3'\dot{x}(t-\tau) + a_4'\ddot{x}(t-\tau) + a_5'\dot{x} \end{aligned} \tag{3.7}$$

где су коефицијенти a_i' уведени као:

$$a_1' = \frac{\left(mgl - k_p\right)}{J_0},\ a_2' = -\frac{K_p}{J_0},\quad a_3' = -\frac{K_d}{J_0},\quad a_4' = -\frac{K_a}{J_0},\quad a_5' = -\frac{b_p}{J_0} \tag{3.8}$$

Уочава се да пасивни коефицијент пригушења b_p има малу вредност тако да је оправдано претпоставити да је $b_p \approx 0, \rightarrow a_5' \approx 0$.

Тривијално решење $\varphi = 0$ линеаризованог (3.6) одговара *жељеном равнотежном стању* мирног стајања људског тела у сагиталној равни. Стога од интереса је проучити и испитати *локалну стабилност* користећи претходни линеаризовани систем (3.6)

3.2 Стабилност на коначном временском интервалу за случај балансирања људског тела у сагиталној равни- фракциони приступ

Овде разматрамо један општији случај балансирања људског тела у сагиталној равни где линеаризовани активни момент $M_a(t)$ сада укључује изводе фракционог реда и дат са:

$$M_{alin}(t) = K_p x\big(t-\tau_1(t)\big) + K_d\, {}^{c}\mathrm{D}_t^{\beta} \boldsymbol{x}\big(t-\tau_2(t)\big) + K_a\, {}^{c}\mathrm{D}_t^{\gamma} \boldsymbol{x}\big(t-\tau_3(t)\big) \tag{3.9}$$

за $0 < \beta \le 1$ и $1 < \gamma \le 2$. ${}^{C}\mathrm{D}_t^{\beta} \boldsymbol{x}(..), {}^{c}\mathrm{D}_t^{\gamma} \boldsymbol{x}(..)$ означавају Капутове фракционе изводе реда β, γ . Разматра се следећи затворени неутрални вишечлани систем фракционог реда са временски промењивим кашњењем који је представљен следећом фракционом диференцијалном једначином:

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = a_1' \boldsymbol{x}(t) + a_2' \boldsymbol{x}\big(t-\tau_1(t)\big) + a_3'\, {}^{c}\mathrm{D}_t^{\beta} \boldsymbol{x}\big(t-\tau_2(t)\big) + a_4'\, {}^{c}\mathrm{D}_t^{\gamma} \boldsymbol{x}\big(t-\tau_3(t)\big) \tag{3.10}$$

Ради једноставности проучавања система (3.10) претпоставља се да је $\tau_1(t) = \tau_2(t) = \tau_3(t) = \tau$, па (3.10) постаје:

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = a_1' \boldsymbol{x}(t) + a_2' \boldsymbol{x}(t-\tau) + a_3'\, {}^{c}\mathrm{D}_t^{\beta} \boldsymbol{x}(t-\tau) + a_4'\, {}^{c}\mathrm{D}_t^{\gamma} \boldsymbol{x}(t-\tau) \tag{3.11}$$

Посебно, у овом прилогу разматрамо случај $\gamma = 2$ где имамо *затворени неутрални фракциони систем са временским кашњењем* који је облика:

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = a_1' \boldsymbol{x}(t) + a_2' \boldsymbol{x}(t-\tau) + a_3'\, {}^{c}\mathrm{D}_t^{\beta} \boldsymbol{x}(t-\tau) + a_4' \ddot{\boldsymbol{x}}(t-\tau) \tag{3.12}$$

Пре него што се настави даље, даје се дефиниција ФТС-а за систем (3.12) са придруженим почетним функцијама (3.13).

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\psi}_x(t), t \in [-\tau, 0], \quad \boldsymbol{x}'(t) = \varphi_x(t), t \in [-\tau, 0], \tag{3.13}$$

Дефиниција 3.1 Неутрални систем са кашњењем фракционог реда дат са једначином стања (3.12), која задовољава почетне функције (3.13) је *стабилан на коначном временском интервалу* у односу на $\{\delta, \varepsilon, t_0, J, \|(\cdot)\|\}$, $\delta < \varepsilon$, ако и само ако је:

$$\rho < \delta, \qquad \forall t \in J \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in J, \tag{3.14}$$

где је $\rho = \max\left\{\|\psi\|_C, \|\varphi\|_C\right\}$ и δ, ε позитивне константе.

***Лема 3.1* [8]** $\quad {}_0I_t^{\alpha}\left({}^cD_0^{\alpha}x(t)\right) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}x^{(k)}(0), \quad n-1<\alpha<n, t>0$ (3.15)

Посебно, када је $1<\alpha<2$, следи

$$ {}_0I_t^{\alpha}\left({}^cD_0^{\alpha}x(t)\right) = x(t) - x(0) - tx'(0), \quad t>0 \tag{3.16}$$

Лема 3.2 Нека је $\alpha>\beta>0, n-1<\beta<n$ и $x(t)\in AC^n[a,b]$. Онда,

$$ {}_0I_t^{\alpha}\left({}^cD_0^{\beta}x(t)\right) = {}_0I_t^{\alpha-\beta}x(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k+\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+k+1)}x^{(k)}(0). \tag{3.17}$$

Доказ: На основу дефиниције 2.1 следи

$$ {}^cD_0^{\beta}x(t) = {}_0I_t^{n-\beta}\,{}^cD_0^{n}x(t). \tag{3.18}$$

Применом фракционог оператора ${}_0I_t^{\alpha}$ и узимајући у обзир особину комутитативности RL интеграла, добија се

$$ {}_0I_t^{\alpha}\,{}^cD_0^{\beta}x(t) = {}_0I_t^{\alpha}\,{}_0I_t^{n-\beta}\,{}^cD_0^{n}x(t) = {}_0I_t^{\alpha-\beta}\left({}_0I_t^{n}\,{}^cD_0^{n}x(t)\right). \tag{3.19}$$

На основу *Леме 3.2,* уочава се да важи такође

$$ {}_0I_t^{n}\,{}^cD_0^{n}x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k x^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)} \tag{3.20}$$

Следствено, има се да је

$$ \begin{aligned} {}_0I_t^{\alpha}\,{}^cD_0^{\beta}x(t) &= {}_0I_t^{\alpha-\beta}\left(x(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k x^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}\right) = {}_0I_t^{\alpha-\beta}x(t) - {}_0I_t^{\alpha-\beta}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k x^{(k)}(0)}{\Gamma(k+1)}\right) = \\ &= {}_0I_t^{\alpha-\beta}x(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^{k+\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+k+1)}x^{(k)}(0) \end{aligned} \tag{3.21}$$

Овим је доказ завршен.

Особина 3.1*.* Претпоставимо да је $0<\gamma<1<\alpha<2$. Онда важи:

$$ {}_0I_t^{\alpha}\left({}^cD_0^{\gamma}x(t)\right) = {}_0I_t^{\alpha-\gamma}x(t) - \frac{x(0)\cdot t^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}, \quad t\ge 0 \tag{3.22}$$

Особина 3.2. Претпоставимо да је испуњено $1<\beta<\alpha<2$. Онда важи:

$$ {}_0I_t^{\alpha}\left({}^cD_0^{\beta}x(t)\right)={}_0I_t^{\alpha-\beta}x(t)-\frac{x(0)\cdot t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}-\frac{x^{(1)}(0)\cdot t^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)},\quad t\geq 0 \tag{3.23}$$

Лема 3.3 **[125] (***Генерализована Гронвалова неједнакост***)** Претпоставимо да су $x(t),a(t)$ ненегативне и локално интеграбилне на $0\leq t<T, some\ T\leq +\infty$, и $g(t)$ је ненегативна, неопадајућа непрекидна функција дефинисана на $0\leq t<T$, $g(t)\leq M=const$, $\alpha>0$ са неједнакошћу

$$x(t)\leq a(t)+g(t)\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}x(s)ds \tag{3.24}$$

на горе поменутом интервалу. Онда важи

$$x(t)\leq a(t)+\int_0^t\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(g(t)\Gamma(\alpha)\right)^n}{\Gamma(n\alpha)}(t-s)^{n\alpha-1}a(s)\right]ds,\quad 0\leq t<T \tag{3.25}$$

Последица *1*. Нека је у важности Лема 3.3, и нека је $a(t)$ неопадајућа функција на $[0,T)$. Онда важи:

$$x(t)\leq a(t)E_{\alpha}\left(g(t)\Gamma(\alpha)t^{\alpha}\right) \tag{3.26}$$

где је E_{α} Митаг-Лефлерова функција дефинисана са $E_{\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k/\Gamma(k\alpha+1)$.

Лема 3.4 **[126] (***Проширена форма генерализоване Гронвалове неједнакости***),** Претпоставимо да су фракциони ред $\alpha>0,\beta>0,$ док је са $a(t)$ означена ненегативна функција локално интеграбилна на $[0,T)$, $g_1(t)$ и $g_2(t)$ су ненегативне, неопадајуће, непрекидне функције дефинисане на $[0,T)$; $g_1(t)\leq N_1, g_2(t)\leq N_2, (N_1,N_2=const)$. Претпоставимо да $x(t)$ је ненегативна и локално интегрална на $[0,T)$ са

$$x(t)\leq a(t)+g_1(t)\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}x(s)ds+g_2(t)\int_0^t(t-s)^{\beta-1}x(s),\quad t\in[0,T) \tag{3.27}$$

онда

$$x(t)\leq a(t)+\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\left[g(t)\right]^n\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k\left[\Gamma(\alpha)\right]^{n-k}\left[\Gamma(\beta)\right]^k}{\Gamma\left((n-k)\alpha+k\beta\right)}(t-s)^{(n-k)\alpha+k\beta-1}a(s)ds,\quad t\in[0,T) \tag{3.28}$$

где је $g(t)=g_1(t)+g_2(t)$ и $C_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)/k!$.

Последица 2. Нека је у важности Лема 3.4, и нека је $a(t)$ неопадајућа функција на $[0,T)$. Онда важи:

$$x(t)\le a(t)E_\kappa\left[g(t)\left(\Gamma(\alpha)t^\alpha+\Gamma(\beta)t^\beta\right)\right],\ \kappa=min(\alpha,\beta). \tag{3.29}$$

Теорема 3.1 Неутрални систем кашњења (3.12) који задовољава почетне услове (3.13) је стабилан на коначном временском интервалу у односу на $\{\delta,\varepsilon,t_0,J,\|(\cdot)\|\}$, $\delta<\varepsilon$, ако је испуњен следећи услов:

$$\frac{1}{1-a_4}\left[(1+|t|)\cdot(1+a_4)+\frac{a_3|t|^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}\right]E_\beta\left[g(t)\left(\Gamma(2-\beta)t^{2-\beta}+\Gamma(2)t^2\right)\right]<\frac{\varepsilon}{\delta} \tag{3.30}$$

где су $g(t)=\dfrac{\left(a_3/\Gamma(2-\beta)+a_\Sigma\right)}{(1-a_4)}$ и $a_4<1$.

Доказ: Користећи *Лему 3.1* и *Лему 3.2*, можемо добити решење за (3.12) у облику еквивалентне Волтерове интегралне једначине, где је $t_0=0$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=x(0)+\dot{x}(0)\cdot t+a_4'x(t-\tau)-a_4'\psi_x(-\tau)-a_4't\cdot\varphi_x(-\tau)\\&-\frac{a_3'\psi_x(-\tau)t^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}+\frac{a_3'}{\Gamma(2-\beta)}\int_0^t(t-s)^{1-\beta}\,x(s-\tau)ds+\int_0^t(t-s)\left[a_1'x(s)+a_2'x(s-\tau)\right]ds\end{aligned} \tag{3.31}$$

Сада, применом норме $\|(\cdot)\|$ на израз (3.31), можемо добити процену решења као:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t)\|&\le\|x(0)\|+\|\dot{x}(0)\|\cdot|t|+|a_4'|\|x(t-\tau)\|+|a_4'|\|\psi_x(-\tau)\|+|a_4'||t|\cdot\|\varphi_x(-\tau)\|\\&+\frac{|a_3'|\|\psi_x(-\tau)\|\left|t^{2-\beta}\right|}{\Gamma(3-\beta)}+\frac{|a_3'|}{\Gamma(2-\beta)}\int_0^t\left|(t-s)^{1-\beta}\right|\|x(s-\tau)\|ds+\int_0^t|(t-s)|\left\|\left[a_1'x(s)+a_2'x(s-\tau)\right]\right\|ds\end{aligned} \tag{3.32}$$

Узимајући у обзир да је: $\|a_1'x(t)+a_2'x(t-\tau)\|\le a_1\|\boldsymbol{x}(t)\|+a_2\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|$, следи

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t)\|&\le\|\psi_x\|_C\left[1+a_4+\frac{a_3|t|^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}\right]+\|\varphi_x\|_C\cdot|t|(1+a_4)+a_4\|x(t-\tau)\|\\&+\frac{a_3}{\Gamma(2-\beta)}\int_0^t\left|(t-s)^{1-\beta}\right|\|x(s-\tau)\|ds+\int_0^t|(t-s)|\left[a_1\|x(s)\|+a_2\|x(s-\tau)\|\right]ds\end{aligned} \tag{3.33}$$

Нека је $z(t)=\sup\limits_{\nu\in[-\tau,t]}\left\|x(\nu)\right\|, \quad \forall t\in[0,T]$. За $\forall t^{\bullet}\in[0,t]$, следећи услови су задовољени

$$\left\|x\left(t^{*}-\tau\right)\right\|\leq z\left(t^{*}\right), \quad \left\|x\left(t^{*}\right)\right\|\leq \sup_{t^{*}\in[t-\tau,t]}\left\{\left\|\boldsymbol{x}\left(t^{*}\right)\right\|\right\}\leq z\left(t^{*}\right). \tag{3.34}$$

Узимајући у обзир претходне неједнакости израз (3.33) се може реорганизовати на следећи начин:

$$\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|\leq\left\|\psi_x\right\|_C\left[1+a_4+\frac{a_3|t|^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}\right]+\left\|\varphi_x\right\|_C\cdot|t|\left(1+a_4\right)+a_4z(t)+\frac{a_3}{\Gamma(2-\beta)}\int_0^t\left|(t-s)\right|^{1-\beta}z(s)\,ds+a_{\Sigma}\int_0^t\left|(t-s)\right|z(s)\,ds \tag{3.35}$$

где је $a_{\Sigma}=\left(a_1+a_2\right)$. Такође, за $\forall\nu\in[0,t]$ има се

$$\left\|\boldsymbol{x}(\nu)\right\|\leq\left\|\psi_x\right\|_C\left[1+a_4+\frac{a_3|\nu|^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}\right]+\left\|\varphi_x\right\|_C\cdot|\nu|\left(1+a_4\right)+a_4z(\nu)+\frac{a_3}{\Gamma(2-\beta)}\int_0^{\nu}|s|^{1-\beta}z(\nu-s)\,ds+a_{\Sigma}\int_0^{\nu}|s|z(\nu-s)\,ds \tag{3.36}$$

Узимајући у обзир да ненегативна функција $z(t)$ је растућа, онда функције $\int_0^t|s|^{1-\beta}z(t-s)\,ds, \int_0^t|s|z(t-s)\,ds,$ су растуће у односу на $t\geq 0$. Осим тога, $\beta>0, \quad 1-\beta>0, \quad ,\nu^{\beta}\leq t^{\beta},\nu^{1-\beta}\leq t^{1-\beta}$, следи

$$\int_0^{\nu}|s|^{1-\beta}z(\nu-s)\,ds\leq\int_0^t|s|^{1-\beta}z(t-s)\,ds, \qquad \int_0^{\nu}|s|^{1}z(\nu-s)\,ds\leq\int_0^t|s|^{1}z(t-s)\,ds, \tag{3.37}$$

$$z(t)=\sup_{\nu\in[-\tau,t]}\left\|x(\nu)\right\|\leq\max\left\{\sup_{\nu\in[-\tau,0]}\left\|x(\nu)\right\|,\ \sup_{\nu\in[0,t]}\left\|x(\nu)\right\|\right\},$$

$$\leq\max\left\{\begin{array}{l}\left\|\psi_x\right\|_C,\left\|\psi_x\right\|_C\left[1+a_4+\dfrac{a_3|t|^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}\right]+\left\|\varphi_x\right\|_C\cdot|t|\left(1+a_4\right)+a_4z(t)+\\ +\dfrac{a_3}{\Gamma(2-\beta)}\displaystyle\int_0^t\left|(t-s)\right|^{1-\beta}z(s)\,ds+a_{\Sigma}\int_0^t\left|(t-s)\right|z(s)\,ds\end{array}\right\} \tag{3.38}$$

$$=\left\|\psi_x\right\|_C\left[1+a_4+\frac{a_3|t|^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}\right]+\left\|\varphi_x\right\|_C\cdot|t|\left(1+a_4\right)+a_4z(t)+\frac{a_3}{\Gamma(2-\beta)}\int_0^t\left|(t-s)\right|^{1-\beta}z(s)\,ds+a_{\Sigma}\int_0^t\left|(t-s)\right|z(s)\,ds$$

или (3.39)

$$z(t) \le \frac{1}{(1-a_4)}\left[\|\psi_x\|_C\left[1+a_4+\frac{a_3|t|^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}\right]+\|\varphi_x\|_C\cdot|t|(1+a_4)+\frac{a_3}{\Gamma(2-\beta)}\int_0^t|(t-s)|^{1-\beta}z(s)ds+a_\Sigma\int_0^t|(t-s)|z(s)ds\right]$$

где се претпоставља да $1-a_4>0$. Сада уводимо $\omega(t)$ која је неопадајућа функција на $J_0=[0,T]$.

$$\omega(t)=\frac{1}{1-a_4}\left[\|\psi_x\|_C\left[1+a_4+\frac{a_3|t|^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}\right]+\|\varphi_x\|_C\cdot|t|\cdot(1+a_4)\right] \tag{3.40}$$

На основу *Леме 3.4* за $\alpha=2>0,\beta>0$, $\kappa=min(2,\beta)=\beta$ добија се:

$$\|x(t)\|\le z(t)\le\omega(t)E_\beta\left[g(t)\left(\Gamma(2-\beta)t^{2-\beta}+\Gamma(2)t^2\right)\right] \tag{3.41}$$

где је $g(t)=g_1(t)+g_2(t)=\dfrac{(a_3/\Gamma(2-\beta)+a_\Sigma)}{(1-a_4)}$. Узимајући у обзир дефиницију 3.1 добија се

$$\|x(t)\|\le\rho\frac{1}{1-a_4}\left[(1+|t|)\cdot(1+a_4)+\frac{a_3|t|^{2-\beta}}{\Gamma(3-\beta)}\right]E_\beta\left[g(t)\left(\Gamma(2-\beta)t^{2-\beta}+\Gamma(2)t^2\right)\right] \tag{3.42}$$

Коначно, користећи основни услов Теореме 3.1, можемо добити тражени ФТС услов:

$$\|\mathbf{x}(t)\|<\varepsilon,\quad \forall t\in J. \tag{3.43}$$

Даље, да би се демонстрирала ефикасност претходно добијеног ФТС резултата, разматра се следећи линеарни НИТДС (3.44). Овде нотација $\|(.)\|$ означава $\infty-$норму матрице или вектора.

Пример 3.1. Разматра се следећи затворени неутрални НИТДС са кашњењем фракционог реда, $0<\beta\le1,\ \gamma=2$

$$\ddot{\mathbf{x}}(t)=a_1'\mathbf{x}(t)+a_2'\mathbf{x}(t-\tau)+a_3'{}^c\mathrm{D}_t^\beta\mathbf{x}(t-\tau)+a_4'\ddot{\mathbf{x}}(t-\tau) \tag{3.44}$$

где су одговарајући параметри дати са

$$a_1'=\frac{(mgl-k_p)}{J_0}>0,\ a_2'=-\frac{K_p}{J_0},\quad a_3'=-\frac{K_d}{J_0},\quad a_4'=-\frac{K_a}{J_0} \tag{3.45}$$

Нумеричке вредности физичких параметара људског тела у задатку балансирања су дате: $mg=600,\ \ J_0=60,\ \ k_p=471,\ \ l=1$, [112] и временско кашњење $\tau=0.2$. За параметре појачања позиционог, брзинског и убрзања познати су интервали вредности: $K_p\in[0,3000],\ \ K_d\in[0,600],\ \ K_a\in[-12,48]$. На тај начин можемо израчунати вредности за коефицијенте као $a_1' = 2.15,\ a_2' = -\dfrac{K_p}{J_0} \in [0,50],\quad a_3' = -\dfrac{K_d}{J_0} \in [0,10],\quad a_4' = -\dfrac{K_a}{J_0} \in [-0.2, 0.8]$, односно узимајући вредности за $K_a = 12,\ K_d = 240\ K_p = 720,$ добија се

$$a_1 = |a_1'| = 2.15,\ a_2 = |a_2'| = 12, a_3 = |a_3'| = 4, a_4 = |a_4'| = 0.2 \tag{3.46}$$

Такође, усвојено је да је фракциони ред $\beta = 0.9$, са придруженим функцијама: $\boldsymbol{\psi}_x(t) = 0$, $t \in [-0.2\ \ 0]$; $\varphi_x(t) = 0$, $t \in [-0.2\ \ 0]$; Следи на основу датих почетних функција и дате једначине стања да је : $\|\boldsymbol{\psi}_x\|_C = 0.\ \ \|\varphi_x\|_C = 0\ \ \rho = \max\{\|\psi\|_C, \|\varphi\|_C\} = 0.00 < \delta = 0.01$. Ако узмемо $\delta = 0.01$и $\varepsilon = 30$ онда важи услов (3.30) Теореме 3.1 за $T_e \approx 0.23$ s тако да можемо добити процењено време ФТС-а.

3.3 Стабилност на коначном временском интервалу за случај балансирања људског тела у сагиталној равни- класичан приступ

Посебно, у овом делу разматрамо и случај целог реда $\beta = 1,\ \gamma = 2$ где имамо *затворени неутрални фракциони систем са временским кашњењем* који укључује изводе целог реда и који је облика:

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = a_1'\boldsymbol{x}(t) + a_2'\boldsymbol{x}(t-\tau) + a_3'\dot{\boldsymbol{x}}(t-\tau) + a_4'\ddot{\boldsymbol{x}}(t-\tau) \tag{3.47}$$

са придруженим функцијама почетног стања (3.48).

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\psi}_x(t), t \in [-\tau, 0], \quad \boldsymbol{x}'(t) = \varphi_x(t), t \in [-\tau, 0], \tag{3.48}$$

Сада је могуће формулисати следећу Теорему 3.2.

Теорема 3.2 Неутрални систем са кашњењем (3.47) који задовољава почетне услове (3.48) је *стабилан на коначном временском интервалу* у односу на $\{\delta, \varepsilon, t_0, J, \|(\cdot)\|\}$, $\delta < \varepsilon,$ ако је испуњен следећи услов:

$$\frac{1}{1-a_4}\Big[(1+a_4)(1+|t|) + a_3|t|\Big]e^{a_\Sigma(t+t^2)} exp\left(a_\Sigma\left(t+t^2\right)\right) < \frac{\varepsilon}{\delta} \tag{3.49}$$

где су $a_\Sigma = (a_1 + a_2 + a_3)$ и $a_4 < 1$.

Доказ: Користећи *Лему 3.1* и *Лему 3.2*, можемо добити решење за (3.47) у облику еквивалентне интегралне једначине, где је $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= x(0) + \dot{x}(0)\cdot t + a_4'x(t-\tau) - a_4'\psi_x(-\tau) - a_4't\cdot\varphi_x(-\tau) \\ &-a_3'\psi_x(-\tau)t + a_3'\int_0^t x(s-\tau)ds + \int_0^t (t-s)\big[a_1'x(s) + a_2'x(s-\tau)\big]ds \end{aligned} \tag{3.50}$$

Сада, применом норме $\|(\cdot)\|$ на израз (3.50), можемо добити процену решења као:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t)\| &\le \|x(0)\| + \|\dot{x}(0)\|\cdot|t| + |a_4'|\|x(t-\tau)\| + |a_4'|\|\psi_x(-\tau)\| + |a_4'||t|\cdot\|\varphi_x(-\tau)\| \\ &+|a_3'|\|\psi_x(-\tau)\|t + |a_3'|\int_0^t \|x(s-\tau)\|ds + \int_0^t |(t-s)|\|[a_1'x(s) + a_2'x(s-\tau)]\|ds\end{aligned} \tag{3.51}$$

Узимајући у обзир да је: $\|a_1'x(t) + a_2'x(t-\tau)\| \le a_1\|\boldsymbol{x}(t)\| + a_2\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\|$, следи

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t)\| &\le \|\psi_x\|_C[1 + a_4 + a_3|t|] + \|\varphi_x\|_C\cdot|t|(1+a_4) + a_4\|x(t-\tau)\| \\ &+a_3\int_0^t \|x(s-\tau)\|ds + \int_0^t |(t-s)|[a_1\|x(s)\| + a_2\|x(s-\tau)\|]ds\end{aligned} \tag{3.52}$$

Нека је $z(t) = \sup_{\nu\in[-\tau,t]}\|x(\nu)\|, \quad \forall t\in[0,T]$. За $\forall t^{\bullet}\in[0,t]$, следећи услови су задовољени

$$\|x(t^*-\tau)\| \le z(t^*), \quad \|x(t^*)\| \le \sup_{t^*\in[t-\tau,t]}\{\|\boldsymbol{x}(t^*)\|\} \le z(t^*). \tag{3.53}$$

Узимајући у обзир претходне неједнакости израз (3.52) се може реорганизовати на следећи начин:

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \|\psi_x\|_C[1+a_4+a_3|t|] + \|\varphi_x\|_C\cdot|t|(1+a_4) + a_4 z(t) + a_3\int_0^t z(s)ds + a_\Sigma\int_0^t|(t-s)|z(s)ds \tag{3.54}$$

Пратећи кораке доказа из претходне Теореме следи

$$z(t) \le \frac{1}{1-a_4}\left(\|\psi_x\|_C[1+a_4+a_3|t|] + \|\varphi_x\|_C\cdot(1+a_4)|t|\right) + \frac{a_3}{1-a_4}\int_0^t z(s)ds + \frac{a_\Sigma}{1-a_4}\int_0^t|(t-s)|z(s)ds \tag{3.55}$$

Могуће је даље уочити да увођењем $\omega(t)$ (3.56) која је неопадајућа функција на $J_0 = [0,T]$ се добија

$$\omega(t) = \frac{1}{1-a_4}\left(\|\psi_x\|_C[1+a_4+a_3|t|] + \|\varphi_x\|_C\cdot(1+a_4)|t|\right), \qquad a_4 < 1 \tag{3.56}$$

$$z(t) \le \omega(t) + \frac{a_3}{1-a_4}\int_0^t z(s)ds + \frac{a_\Sigma}{1-a_4}\int_0^t|(t-s)|z(s)ds \tag{3.57}$$

На основу генерализоване Гронвалове неједнакости Леме 3.4 за $\alpha = 2 > 0, \beta = 1 > 0$, $\kappa = min(2,1) = 1$ добија се:

$$\|x(t)\| \le z(t) \le \omega(t)E_1\left[g(t)\left(t+t^2\right)\right] \tag{3.58}$$

где је $g(t)=\dfrac{(a_1+a_2+a_3)}{(1-a_4)}$. Узимајући у обзир дефиницију 3.1 добија се

$$\left\|x(t)\right\| \le \rho \frac{1}{1-a_4}\left[(1+a_4)(1+|t|)+a_3|t|\right]e^{a_\Sigma\left(t+t^2\right)} \tag{3.59}$$

Коначно, користећи основни услов Теореме 3.2, можемо добити тражени ФТС услов:

$$\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\| < \varepsilon, \quad \forall t \in J. \tag{3.60}$$

Примедба 3.1 Лако се показује и доказује да услов стабилности Теореме 3.2 се може добити као *специјални случај услова стабилности* Теореме 3.1 за случај $\beta=1$.

3.4 Анализа стабилности инверзног клатна у задатку балансирања људског тела у сагиталној равни методом Д-разлагања

Са друге стране познато је да класичан поступак синтезе на коначном временском интервалу, није још у целости решен и да системи који у отвореном колу дејства не испуњавају дати критеријум на задатом коначном временском интервалу, постану то стабилизацијом. Поступци стабилизације обично стабилизују систем и чине га асимптотски стабилним, чиме се прелази у сферу љапуновске стабилности. У том смислу поново се уочава у затвореном облику следећа фракциона диференцијална једначина облика:

$$\ddot{\boldsymbol{x}}(t)=a_1'\boldsymbol{x}(t)+a_2'\boldsymbol{x}(t-\tau)+a_3'{}^{c}\mathrm{D}_t^{\beta}\boldsymbol{x}(t-\tau)+a_4'{}^{c}\mathrm{D}_t^{\gamma}\boldsymbol{x}(t-\tau) \tag{3.61}$$

У циљу анализе стабилности разматраног система овде је од интереса применити методу Д-разлагања за решавање овог проблема, [127,128]. У основи методе Д-разлагања лежи идеја одређивања скупа свих вредности подешљивих параметара управљачког система за које је разматрани систем стабилан чиме се може одредити потенцијалну област стабилности у одговарајућој параметарској равни оивичене контурама. Коначну потврду доказа уочене области стабилности да заиста јесте област стабилности, може се доказати применом нумеричке симулације, Најквистовог критеријума или применом алгебарских критеријума (Хурвиц, Раус).

У том смислу прво се примењује Лапласова трансформација на (3.61) и можемо сада одредити у s - домену, узимајући у обзир почетне услове:

(3.62)

$$\frac{sx(0)+\dot{x}(0)-a_3s^{(\beta-1)}e^{-\tau s}x(-\tau)-a_4s^{(\gamma-1)}e^{-\tau s}x(-\tau)-a_4s^{(\gamma-2)}e^{-\tau s}\dot{x}(-\tau)}{s^2-a_4e^{-\tau s}s^{\gamma}-a_3e^{-\tau s}s^{\beta}-a_2e^{-\tau s}-a_1}, \text{ за } 0<\beta\le 1 \text{ и } 1<\gamma\le 2$$

или за случај $1<\beta\le 2, 1<\gamma\le 2$ (3.63)

$$\frac{sx(0)+\dot{x}(0)-a_3 s^{(\beta-1)}e^{-\tau s}x(-\tau)-a_3 s^{(\beta-2)}e^{-\tau s}\dot{x}(-\tau)-a_4 s^{(\gamma-1)}e^{-\tau s}x(-\tau)-a_4 s^{(\gamma-2)}e^{-\tau s}\dot{x}(-\tau)}{s^2-a_4 e^{-\tau s}s^{\gamma}-a_3 e^{-\tau s}s^{\beta}-a_2 e^{-\tau s}-a_1},$$ за $1<\beta\le 2$

$1<\gamma\le 2$

Да би се применила метода Д- разлагања потребно је уочити карактеристични полином датог система узимајући у обзир (3.45), као:

$$f(s)=s^2-a+e^{-\tau s}\left(\frac{K_P}{J_O}+\frac{K_D}{J_O}s^{\beta}+\frac{K_A}{J_O}s^{\gamma}\right) \tag{3.64}$$

где је сада $a=a_1'$. Даље, потребно је уочити границу стабилности која се добија заменом $s=i\omega$ у (3.64) и изједначавајући $f(i\omega)=0$ следи:

$$f(i\omega)=(i\omega)^2-a+e^{-\tau i\omega}\left(\frac{K_P}{J_O}+\frac{K_D}{J_O}(i\omega)^{\beta}+\frac{K_A}{J_O}(i\omega)^{\gamma}\right)=0\,. \tag{3.65}$$

Ако се узме у обзир да је $e^{-\tau i\omega}=\cos(\omega\tau)-i\sin(\omega\tau)$, и

$$(i\omega)^{\beta}=\omega^{\beta}\left(\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)\right), \tag{3.66}$$

могуће је (3.65) раздвојити на реални и имагинарни део на следећи начин:

$$f(i\omega)=\mathrm{Re}(\omega,K_P,K_D,\beta)+i\,\mathrm{Im}(\omega,K_P,K_D,\beta)=0\,, \tag{3.67}$$

одакле се одређују две линеарне једначине у односу на K_P и K_D: (3.68)

$$\mathrm{Re}(\omega,K_P,K_D,\beta)=\cos(\tau\omega)\frac{K_P}{J_O}+\omega^{\beta}\cos\left(\frac{\beta\pi}{2}-\tau\omega\right)\frac{K_D}{J_O}-\left(\omega^2+a-\frac{K_A}{J_O}\omega^{\gamma}\cos\left(\frac{\gamma\pi}{2}-\tau\omega\right)\right)=0\,,$$

$$\mathrm{Im}(\omega,K_P,K_D,\beta)=-\sin(\tau\omega)\frac{K_P}{J_O}+\omega^{\beta}\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}-\tau\omega\right)\frac{K_D}{J_O}+\frac{K_A}{J_O}\omega^{\gamma}\sin\left(\frac{\gamma\pi}{2}-\tau\omega\right)=0\,.$$

У циљу даље анализе параметри γ, τ и K_A су унапред познати и имају фиксиране вредности док ће параметар β бити слободан параметар. Промена фреквенције ω је у интервалу $0\le\omega<\infty$. Решавањем система једначина (3.68) добија се решење за K_P и K_D, у следећем облику:

$$K_P=\frac{\Delta_P}{\Delta},\quad K_D=\frac{\Delta_D}{\Delta}, K_D: \tag{3.69}$$

где су са Δ_P, Δ_D Δ означене следеће детерминанте

$$\Delta_P = \begin{vmatrix} \omega^2 + a - \dfrac{K_A}{J_O}\omega^{\gamma}\cos\left(\dfrac{\gamma\pi}{2} - \tau\omega\right) & \dfrac{\omega^{\beta}}{J_O}\cos\left(\dfrac{\beta\pi}{2} - \tau\omega\right) \\ -\dfrac{K_A}{J_O}\omega^{\gamma}\sin\left(\dfrac{\gamma\pi}{2} - \tau\omega\right) & \dfrac{\omega^{\beta}}{J_O}\sin\left(\dfrac{\beta\pi}{2} - \tau\omega\right) \end{vmatrix}, \tag{3.70}$$

$$\Delta_D = \begin{vmatrix} \dfrac{\cos(\tau\omega)}{J_O} & \omega^2 + a - \dfrac{K_A}{J_O}\omega^{\gamma}\cos\left(\dfrac{\gamma\pi}{2} - \tau\omega\right) \\ \dfrac{-\sin(\tau\omega)}{J_O} & -\dfrac{K_A}{J_O}\omega^{\gamma}\sin\left(\dfrac{\gamma\pi}{2} - \tau\omega\right) \end{vmatrix} \text{ и}$$

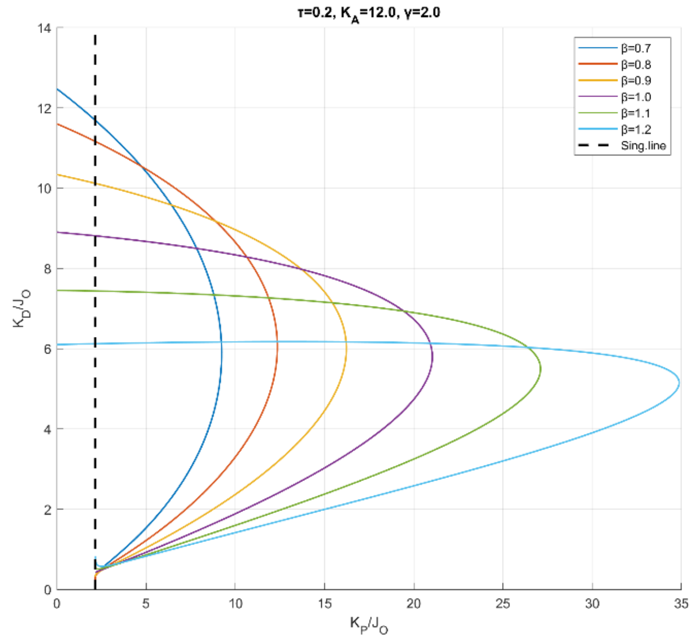
$$\Delta = \frac{1}{J_O}\begin{vmatrix} \cos(\tau\omega) & \omega^{\beta}\cos\left(\dfrac{\beta\pi}{2} - \tau\omega\right) \\ -\sin(\tau\omega) & \omega^{\beta}\sin\left(\dfrac{\beta\pi}{2} - \tau\omega\right) \end{vmatrix} = \frac{\omega^{\beta}}{J_O}\sin\left(\frac{\beta\pi}{2}\right)$$

А фиксиране вредности β $(0 < \beta < \gamma \le 2)$ и променом ω од 0 до ∞, добијају се декомпозиционе криве у (K_P, K_D) параметарској равни, из чега можемо извући закључке о регионима стабилности система. За $\omega = 0$ имамо сингуларност $(\Delta = 0)$ и у овом случају област стабилности је оивичена сингуларном линијом $K_P = a$, што значи за $K_P \le a$ да је систем нестабилан за сваку комбинацију контролних параметара. Потврду изведене анализе стабилности је показана и доказана кроз одговарајућу нумеричку симулацију.

3.4.1 Резултати симулације

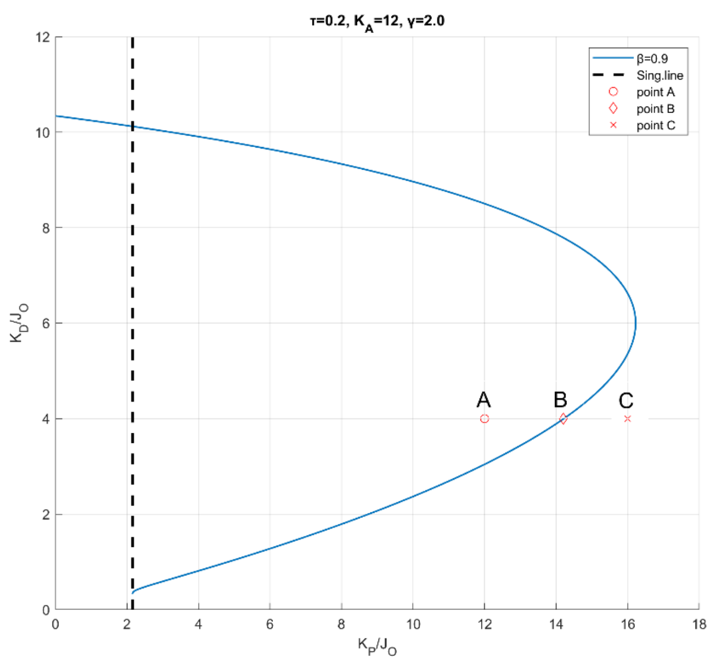
За испитивање асимптотске стабилности система узимамо и разматрамо утицај параметара (Kp, Kd, β) на стабилност система. Појачање K_a као и γ, τ су унапред одређена и износе: $K_a = 12$, $\gamma = 2, \tau = 0.2$. Имајући у виду горе описану процедуру, домен стабилности је израчунат за случај $\beta \in (0.7 - 1.2)$ и приказан на слици која следи. Област стабилности добијене у овом примеру за линеаризовани систем (3.61) ће важити али само у блиској околини равнотежног стања за одговарајући нелинеарни систем балансирања човековог тела у сагиталној равни на основу Љапуновљеве индиректне теореме, [129].

Посебно се на слици 3.2 уочава утицај фракционог извода β на величину области стабилности и тенденцију померања области стабилности у страну већих вредности K_p и мањих вредности K_D са порастом вредности β.



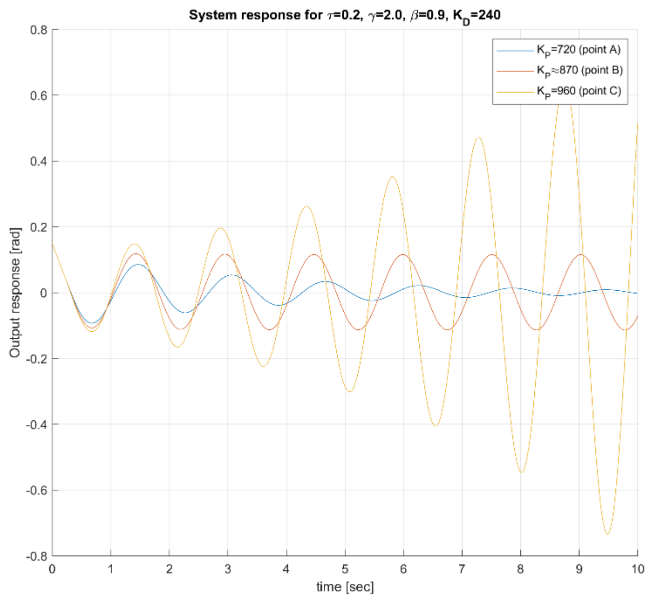
Слика 3.2 *Домен стабилности у 2Д равни за* $\beta \in (0.7-1.2)$, $\gamma = 2$

Потврду изведене анализе стабилности се сада спроводи применом одговарајуће нумеричке симулације. На слици 3.3 могу се уочити три различите тачке у (K_D, K_P) равни за вредности $\beta = 0,9$ и $\gamma = 2$, $\tau = 0.2$, $\mathrm{Ka} = 12$.



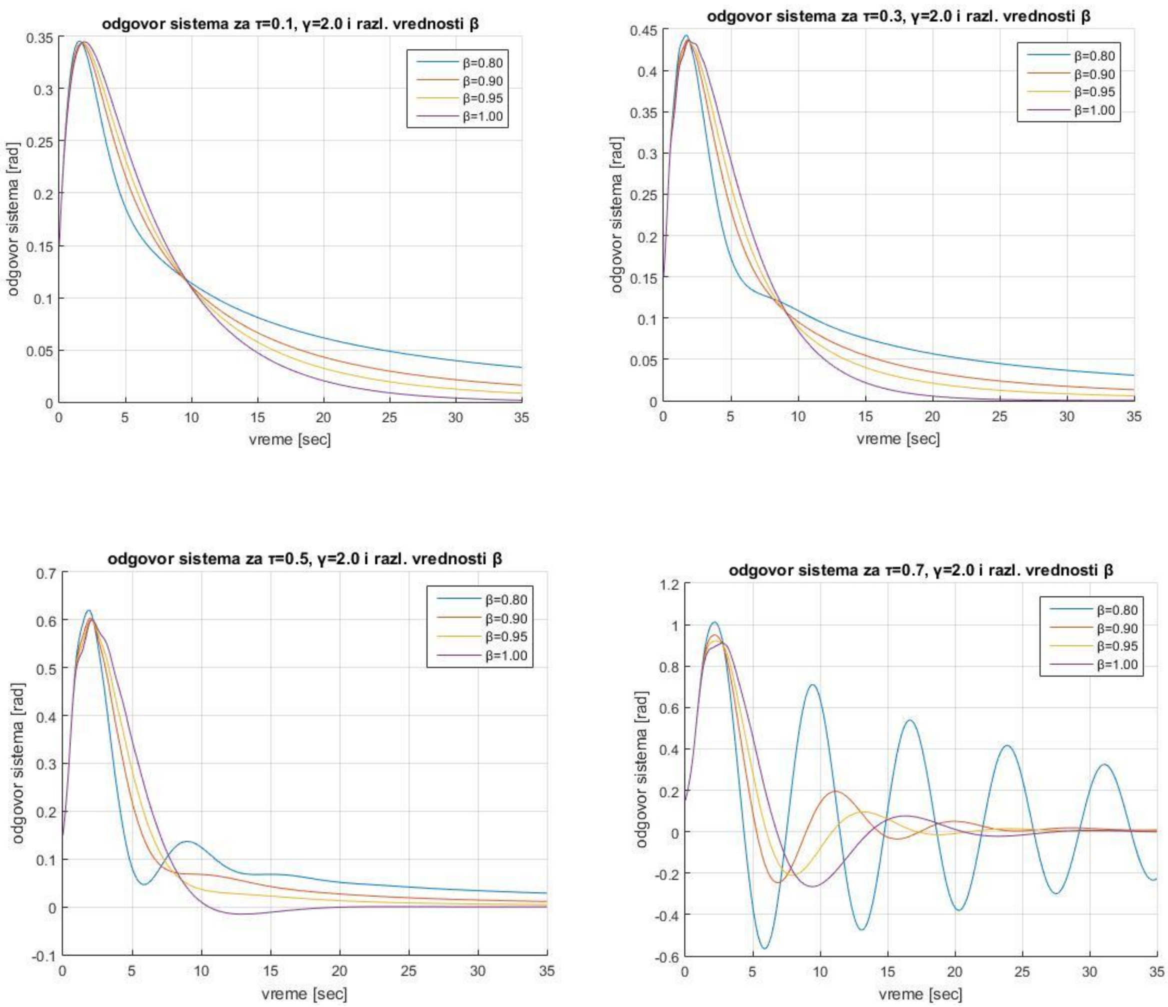
Слика 3.3 *Одређивање домена стабилности у параметарској равни*

Затим се одређује импулсни одзив за сваку од три уочене тачке A, B, C што је и приказано на слици 3.4 где су добијени очекивани импулсни одзиви чиме је на овај начин потврђено да је претходно добијен домен стабилности тачно одређен.



Слика 3.4 *Импулсни одзиви система за тачке A, B, C,*

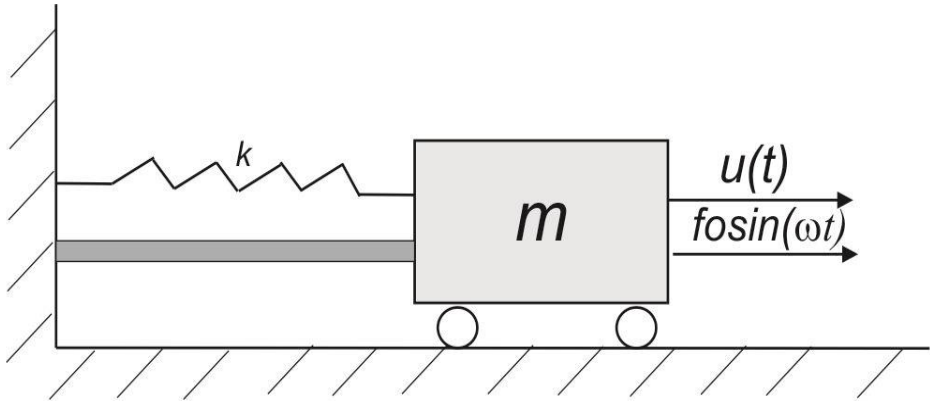
Посебно, од интереса је размотрити утицај кашњења τ и различите вредности фракционог извода β на асимтотску стабилност система. На доњој слици 3.5 се уочава да за мање вредности кашњења најбољи одзив система се добија за $\beta = 1$, док се за веће вредности кашњења τ, на пример $\tau = 0.7$, за $\beta \approx 0.95$ се добија најбољи одзив. Тиме можемо закључити да употребом управљања који садржи фракциони извод β омогућава употреба већег интервала временског кашњења τ у циљу стабилизације разматраног система.



Слика 3.5 *Одзиви система за различите вредности* τ, β и $\gamma = 2$.

3.5 Фракциони механички пригушни систем заснован на *Scot-Blair-овом моделу* - стабилност на коначном временском интервалу

Овде се даје и разматра пример једног механичког неутралног система са кашњењем где је примењен вискоеластични материјал који има за циљ смањење нежељних вибрација у датим системима. При томе се користи за вискоеластични елемент тзв. *Scot-Blair-ов* модел [130], слика 3.6 који претпоставља да је пригушење пропорционално нецелом реду извода променљиве померања.



Слика 3.6 *Фракциони механички пригушни систем*

Генерализација класичног пригушног система који се састоји од масе и пригушног елемента под дејством хармонијске побуде може бити представљен у следећем облику:

$$m\ddot{x}(t)+c\,{}^{c}D_t^{\alpha}x(t)+kx(t)=u(t)+f_0\sin(\omega t) \tag{3.71}$$

где је ${}^{c}D_t^{\alpha}x(t),\ 0<\alpha\le 1$ фракциони Капутов извод. У циљу пригушења нежељених вибрација уводи се управљање у повратној спрези са кашњењем које укључује први и други извод $\dot{x}(t-\tau),\ \ddot{x}(t-\tau)$, тј.

$$u(t)=-k_v\dot{x}(t-\tau)-k_a\ddot{x}(t-\tau), \tag{3.72}$$

односно, добија се затворени неутрални систем фракционог реда са кашњењем облика:

$$m\ddot{x}(t)+c\,{}^{c}D_t^{\alpha}x(t)+kx(t)=-k_v\dot{x}(t-\tau)-k_a\ddot{x}(t-\tau)+f_0\sin(\omega t) \tag{3.73}$$

Ако се узме случај $\alpha=1/2$, може се претходни случај свести на еквивалентни систем фракционог реда облика, где су одговарајуће величине псеудо стања уведена на следећи начин:

$$\begin{aligned}
&x_1(t)={}^{c}D_t^{1/2}x(t),\quad x_2(t)=\dot{x}(t)={}^{c}D_t^{1/2}\left({}^{c}D_t^{1/2}x(t)\right)={}^{c}D_t^{1/2}x_1(t),\\
&x_3(t)={}^{c}D_t^{3/2}x(t)={}^{c}D_t^{1/2}\left({}^{c}D_t^{2/2}x(t)\right)={}^{c}D_t^{1/2}\left(x_2(t)\right)\\
&x_4(t)=\ddot{x}(t)={}^{c}D_t^{4/2}x(t)={}^{c}D_t^{1/2}\left({}^{c}D_t^{3/2}x(t)\right)={}^{c}D_t^{1/2}\left(x_3(t)\right)
\end{aligned} \tag{3.74}$$

односно

$$
\begin{aligned}
&{}^{c}D_t^{1/2}x(t)=x_1(t)\\
&{}^{c}D_t^{1/2}x_1(t)=x_2(t)\\
&{}^{c}D_t^{1/2}x_2(t)=x_3(t)\\
&{}^{c}D_t^{1/2}x_3(t)=\ddot{x}(t)=-\frac{c}{m}x_1(t)-\frac{k}{m}x(t)-\frac{k_v}{m}x_2(t-\tau)-\frac{k_a}{m}\,{}^{c}D_t^{1/2}x_3(t-\tau)+\frac{f_0}{m}\sin(\omega t)
\end{aligned}
\tag{3.75}
$$

Увођењем вектора $\tilde{x}(t)=\left[x(t),x_1(t),x_2(t),x_3(t),\right]^T$, $\tilde{f}(t)=\left[0,0,0,f_o\sin(\omega t,)\right]^T$ добија се једначина за принудну вибрацију у кондезованом облику:

$$
{}^{c}D_t^{\alpha}\tilde{x}(t)=A_1\tilde{x}(t)+A_2\tilde{x}(t-\tau)+A_3\,{}^{c}D_t^{\alpha}\tilde{x}(t-\tau)+\tilde{f}(t)
\tag{3.76}
$$

где су $0<\alpha=1/2<1$

$$
A_1=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\-\frac{k}{m}&-\frac{c}{m}&0&0\end{bmatrix}
A_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-\frac{k_v}{m}&0\end{bmatrix}
A_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-\frac{k_a}{m}\end{bmatrix}
\tag{3.77}
$$

са придруженом функцијом почетних стања (3.78).

$$
\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\psi}_x(t),t\in[-\tau,0].
\tag{3.78}
$$

Дефиниција 3.2 Неутрални систем са кашњењем фракционог реда дат са једначином стања (3.77), који задовољава почетну функцију (3.78) је *стабилан на коначном временском интервалу* у односу на $\left\{\delta,\varepsilon,t_0,J,\|(\cdot)\|\right\}$, $\delta<\varepsilon$, ако и само ако је:

$$
\|\boldsymbol{\psi}_x\|_C<\delta\quad\Rightarrow\quad\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon,\quad\forall t\in J.
\tag{3.79}
$$

Даље, од интереса је испитати стабилност на коначном временском интервалу горе наведеног система у затвореном облику у присуству поремећаја облика $f_0\sin(\omega t)$.

Теорема 3.3 Неутрални систем кашњења (3.76) који задовољава почетне услове (3.78) је стабилан на коначном временском интервалу у односу на $\left\{\delta,\varepsilon,t_0,J,\|(\cdot)\|\right\}$, $\delta<\varepsilon$, ако је испуњен следећи услов:

$$
\frac{(1+a_3)}{(1-a_3)}E_\alpha\left(\frac{a_\Sigma}{(1-a_3)}t^\alpha\right)+\frac{f_{op}}{(1-a_3)\cdot\Gamma(\alpha+1)}|t|^\alpha\le\varepsilon/\delta
\tag{3.80}
$$

где су $f_{op}=|f_o|/\delta$, $a_\Sigma=a_1+a_2$, $a_3<1$.

Доказ: Решење горе разматраног неутралног система нецелог реда се може добити у облику еквивалентне Волтерове интегралне једначине, (3.76) где је $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t) &= x(0) + A_3\left(x(t-\tau) - x(-\tau)\right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left[A_1 x(s) + A_2 x(s-\tau) + f(s)\right]ds \\ &= \psi_x(0) - A_3\psi_x(-\tau) + A_3 x(t-\tau) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\left[A_1 x(s) + A_2 x(s-\tau) + f(s)\right]ds\end{aligned} \tag{3.81}$$

Примењујући норму на претходни израз, добија се естимација решења $\boldsymbol{x}(t)$:

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \|\psi_x(0)\| + \|A_3\|\|\psi_x(-\tau)\| + \|A_3\|\|x(t-\tau)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)^{\alpha-1}\right|\left[\|A_1\boldsymbol{x}(s) + A_2\boldsymbol{x}(t-\tau) + f(s)\|\right]ds \tag{3.82}$$

Такође узимајући у обзир (3.76),следи да важи:

$$\|A_1\boldsymbol{x}(t) + A_2\boldsymbol{x}(t-\tau) + f(t)\| \le a_1\|\boldsymbol{x}(t)\| + a_2\|\boldsymbol{x}(t-\tau)\| + |f_0| \tag{3.83}$$

Уводи се да је $z(t) = \sup\limits_{\theta\in[-\tau,t]}\|x(\theta)\|, \quad \forall t \in [0,T]$. За $\forall t^{\bullet} \in [0,t]$, следећи услови су испуњени

$$\left\|x\left(t^{\bullet} - \tau\right)\right\| \le z\left(t^{\bullet}\right), \quad \left\|x\left(t^{\bullet}\right)\right\| \le \sup_{t^{\bullet}\in[t-\tau,t]}\left\{\left\|\boldsymbol{x}\left(t^{\bullet}\right)\right\|\right\} \le z\left(t^{\bullet}\right). \tag{3.84}$$

Примењујући претходну неједнакост, израз (3.82) се може сада приказати као:

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \le [1 + a_3]\|\psi_x\|_C + a_3 z(t) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-1}\left(a_1 z(s) + a_2 z(s)\right)ds + \frac{|f_0|}{\Gamma(\alpha+1)}|t|^{\alpha} \tag{3.85}$$

Пратећи кораке доказа из претходне Теореме следи

$$z(t) \le [1 + a_3]\|\psi_x\|_C + a_3 z(t) + \frac{a_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-1} z(s)ds + \frac{|f_0|}{\Gamma(\alpha+1)}|t|^{\alpha} \tag{3.86}$$

где је сада $a_\Sigma = a_1 + a_2$ односно

$$z(t) \le \frac{(1+a_3)}{(1-a_3)}\|\psi_x\|_C + \frac{a_\Sigma}{(1-a_3)\cdot\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-1} z(s)ds + \frac{|f_0|}{(1-a_3)\cdot\Gamma(\alpha+1)}|t|^{\alpha} \tag{3.87}$$

где је испуњен услов да је $a_3 < 1$. Могуће је даље уочити да увођењем $a(t)$ (3.88) која је неопадајућа функција на $J_0 = [0,T]$ добија се

$$a(t) = \frac{(1+a_3)}{(1-a_3)}\|\psi_x\|_C \tag{3.88}$$

$$z(t) \le a(t) + \frac{a_\Sigma}{(1-a_3)\cdot\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-1} z(s)ds + \frac{|f_0|}{(1-a_3)\cdot\Gamma(\alpha+1)}|t|^\alpha \qquad (3.89)$$

Применом генерализоване Гронвалове неједнакости - Лема 3.3 следи

$$\|x(t)\| \le z(t) \le a(t)E_\alpha\left(\frac{a_\Sigma}{(1-a_3)}t^\alpha\right) + \frac{|f_0|}{(1-a_3)\cdot\Gamma(\alpha+1)}|t|^\alpha \qquad (3.90)$$

Узимајући у обзир дефиницију 3.2 добија се

$$\|x(t)\| \le \frac{(1+a_3)}{(1-a_3)}\delta E_\alpha\left(\frac{a_\Sigma}{(1-a_3)}t^\alpha\right) + \frac{|f_0|}{(1-a_3)\cdot\Gamma(\alpha+1)}|t|^\alpha \qquad (3.91)$$

Коначно, имајући у виду основни услов Теореме 3.3, можемо добити тражени ФТС услов:

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in J. \qquad (3.92)$$

Примедба 3.2

Неутрални систем кашњења (3.75), $\alpha = 1/2$ који задовољава почетну функцију (3.78) је стабилан на коначном временском интервалу у односу на $\{\delta, \varepsilon, t_0, J, \|(\cdot)\|\}$, $\delta < \varepsilon$, ако је испуњен следећи услов:

$$\frac{(1+a_3)}{(1-a_3)}E_{1/2}\left(\frac{a_\Sigma}{(1-a_3)}t^{1/2}\right) + \frac{f_{o\rho}}{(1-a_3)\cdot\Gamma(3/2)}|t|^{1/2} \le \varepsilon/\delta \qquad (3.93)$$

где су $f_{o\rho} = |f_o|/\delta$, $a_\Sigma = a_1 + a_2$, $a_3 < 1$.

4. Робусна стабилност на коначном временском интервалу неутралног система нецелог реда $0 < \beta < \alpha < 1$ са временски променљивим кашњењима и неизвесностима:

4.1 Неутрални системи нецелог реда са временским кашњењима - уводна разматрања

Овде ће бити проучаван нехомоген неутрални двочлани систем, са временски променљивим кашњењима у стању и управљању, може се представити следећом једначином у простору стања:

$$ {}^{c}\mathrm{D}^{\alpha}\boldsymbol{x}(t) = A_0\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}\big(t-\tau_1(t)\big) + A_2{}^{c}\mathrm{D}^{\beta}\boldsymbol{x}\big(t-\tau_2(t)\big) + B_0\boldsymbol{u}(t) + B_1\boldsymbol{u}\big(t-\tau_u(t)\big) \tag{4.1} $$

са придруженим непрекидним почетним функцијама почетног стања и управљања:

$$ \begin{aligned} &\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\psi}_x(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad \tau = \max(\tau_1, \tau_2) \\ &\boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\psi}_u(t), t \in [-\tau_{uM}, 0], \quad 0 \le \tau_u(t) \le \tau_{uM} \end{aligned} \tag{4.2} $$

где ${}^{C}\mathrm{D}_t^{\alpha}, {}^{C}\mathrm{D}_t^{\beta}$ означава фракциони Капутов извод реда $\alpha, \beta \quad 0 < \beta < \alpha < 1$. Почетне функције (4.2) и њихове норме су дате у општој форми као:

$$ \begin{aligned} &\boldsymbol{x}(t_0+t) = \boldsymbol{\psi}_x(t), \quad t \in \left[-\tau_{x,M}, 0\right], \quad \begin{cases} \boldsymbol{\psi}_x(t) \in C\left(\left[-\tau_{x,M}, 0\right], \mathbb{R}^n\right), \\ \left\|\boldsymbol{\psi}_x\right\|_C = \sup\left\{\left\|\boldsymbol{\psi}_x(t)\right\| : t \in \left[-\tau_{x,M}, 0\right]\right\}, \end{cases} \\ &\boldsymbol{u}(t_0+t) = \boldsymbol{\psi}_u(t), \quad t \in \left[-\tau_{u,M}, 0\right], \quad \begin{cases} \boldsymbol{\psi}_u(t) \in C\left(\left[-\tau_{u,M}, 0\right], \mathbb{R}^n\right), \\ \left\|\boldsymbol{\psi}_u\right\|_C = \sup\left\{\left\|\boldsymbol{\psi}_u(t)\right\| : t \in \left[-\tau_{u,M}, 0\right]\right\}, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.3} $$

где $C\left(\left[-\tau_{x,M}, 0\right], \mathbb{R}^n\right)$ и $C\left(\left[-\tau_{u,M}, 0\right], \mathbb{R}^n\right)$ означавају Баханов простор свих непрекидних реалних векторских функција дефинисан на временским интервалима $\left[-\tau_{x,M}, 0\right]$ и $\left[-\tau_{u,M}, 0\right]$, респективно, који пресликавају ове временске интервале на $\mathbb{R}^n$ где је норма дефинисана као: $\|\psi\|_C = \sup_{-\tau \le \theta \le 0}\|\psi(\theta)\|$.

Претпоставља се постојање уобичајеног услова глаткости, што значи да нема проблема са постојањем, јединственошћу и континуитетом решења система у односу на почетне услове, [4].

Пре него што се настави даље, даје се дефиниција стабилности на коначном временском интервалу за нехомоген систем (4.1) са придруженим почетним функцијама (4.2) респективно.

Дефиниција 4.1 Нехомогени фракциони систем са кашњењем дат једначином стања (4.1), који задовољава почетну функцију (4.2) је *стабилан на коначном временском интервалу* у односу на $\{\delta, \varepsilon, t_0, J, \|(\cdot)\|\}$, $\delta < \varepsilon$, ако и само ако је:

$$\left.\begin{array}{l} \|\boldsymbol{\psi}_x\|_C < \delta, \quad \|\boldsymbol{\psi}_u\|_C < \gamma_0, \\ \|\boldsymbol{u}(t)\| < \gamma_u, \quad \forall t \in J, \end{array}\right\} \Rightarrow \|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in J. \tag{4.4}$$

Лема 4.1. [118] Претпоставимо да је $x(t) \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R})$, $\dot{x}(t) \geq 0$ и $\alpha > 0$. Онда интеграл $\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds$ је монотоно растући у односу на t .

Доказ: Нека $X(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds$ онда

$$X(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(s)ds = \int_0^t \frac{(s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(t-s)ds . \tag{4.5}$$

Пошто

$$\dot{X}(t) = \int_0^t \frac{(s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{dx(t-s)}{dt} ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} x(0) \geq \int_0^t \frac{(s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{dx(t-s)}{dt} ds \geq 0. \tag{4.6}$$

може се закључити да $X(t)$ је монотоно растућа у односу на *t.*

4.2. Робусна стабилност на коначном временском интервалу неутралног система нецелог реда са временски промењивим кашњењима и неизвесношћу

Овде се испитује проблем довољних услова који омогућавају да трајекторије система остану унутар *априорно* задатих скупова за класу неизвесног неутралног двочланог система са временски промењивим кашњењима у стању и управљању, представљеног следећом једначином стања, [132]:

$$\begin{aligned} {}^{c}\mathrm{D}^{\alpha}\boldsymbol{x}(t) &= (A_0 + \Delta A_0)\boldsymbol{x}(t) + (A_1 + \Delta A_1)\boldsymbol{x}(t - \tau_x(t)) + \\ &+ (A_{N1} + \Delta A_{N1})^{c}\mathrm{D}^{\beta}\boldsymbol{x}(t - \tau_{xN}(t)) + B_0\boldsymbol{u}(t) + B_1\boldsymbol{u}(t - \tau_u(t)), \end{aligned} \tag{4.7}$$

са припадајућим непрекидним функцијама почетног стања и улаза (управљања):

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\psi}_x(t), t \in [-\tau_{xm}, 0], \quad \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\psi}_u(t), t \in [-\tau_{uM}, 0] \tag{4.8}$$

где временски промењива кашњења задовољавају (15), као и $\tau_{xm} = \max(\tau_{xM}, \tau_{xN})$, $0 \leq \tau_u(t) \leq \tau_{uM}$ и ${}^{C}\mathrm{D}_t^{\alpha}, {}^{C}\mathrm{D}_t^{\beta}$ означава фракциони Капутов извод реда α, β $0 < \beta < \alpha < 1.$

Теорема 4.1 Нехомогени неутрални систем фракционог реда са временским промењљивим кашњењем са два израза (4.7) која задовољава почетне функције (4.8) је *стабилно на коначном временском интервалу* у односу на $\{\delta, \varepsilon, \gamma_u, \gamma_0, J_0, \|(\cdot)\|\}$, $\delta < \varepsilon$, ако следећи услов је испуњен:

$$\begin{aligned}&\left[1+\frac{\mu_{N1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{\mu_\Sigma |t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]E_{\alpha-\beta}\left[\left(\frac{\mu_{N1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}+\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha)t^{\alpha}\right)\right]\\&+\frac{\gamma_{0u}|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\gamma_{01}\tau_{uM}{}^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\gamma_{1u}|t-\tau_u|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\leq\frac{\varepsilon}{\delta},\quad \forall t\in J_0,\end{aligned} \tag{4.9}$$

где:

$$\begin{aligned}&\mu_\Sigma=\sum_{i=0}^{n=1}\mu_{A_i},\quad \mu_{A_i}=\sigma_{\max}(A_i)+\sigma_{\max}(\Delta A_i),\quad i=0,1,\\&\mu_{N1}=\sigma_{\max}(A_{N1})+\sigma_{\max}(\Delta A_{N1}),\quad b_j=\|B_j\|,\quad j=0,1\quad J_0=[0,T],\\&\gamma_{u0}=b_0\gamma_u/\delta,\gamma_{u1}=b_1\gamma_u/\delta,\gamma_{01}=b_1\gamma_0/\delta,\end{aligned} \tag{4.10}$$

где $\sigma_{\max}(\cdot)$ означава највећу сингуларну вредност матрице $(\cdot)$.

Доказ: У складу са својством фракционог реда $0<\beta<\alpha<1$, решење се може добити у облику еквивалентне Волтерове интегралне једначине, где је $t_0=0$:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t)&=\psi_x(0)-(A_{N1}+\Delta A_{N1})\psi_x(-\tau_{xm})\frac{t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}(A_{N1}+\Delta A_{N1})x(s-\tau_{xN}(s))ds+\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\begin{bmatrix}(A_0+\Delta A_0)\mathbf{x}(s)+(A_1+\Delta A_1)\mathbf{x}(t-\tau_x(s))\\+B_0u(s)+B_1u(s-\tau_u(s))\end{bmatrix}ds\end{aligned} \tag{4.11}$$

Сада, применом норме $\|(\cdot)\|$ на једначину (4.11), може се добити процена решења $\mathbf{x}(t)$:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}(t)\|&\leq\|\psi_x(0)\|+\|(A_{N1}+\Delta A_{N1})\|\|\psi_x(-\tau_{xm})\|\frac{|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t|(t-s)|^{\alpha-\beta-1}\|(A_{N1}+\Delta A_{N1})\|\|x(s-\tau_{xN}(s))\|ds+\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t|(t-s)^{\alpha-1}|\left\|\begin{bmatrix}(A_0+\Delta A_0)\mathbf{x}(s)+(A_1+\Delta A_1)\mathbf{x}(t-\tau_x(s))\\+B_0u(s)+B_1u(s-\tau_u(s))\end{bmatrix}\right\|ds\end{aligned} \tag{4.12}$$

Такође, може се добити:

$$\left\| \begin{matrix} \left(A_0+\Delta A_0\right)\boldsymbol{x}(t)+\left(A_1+\Delta A_1\right)\boldsymbol{x}\left(t-\tau_x(t)\right)+ \\ +B_0\boldsymbol{u}(t)+B_1\boldsymbol{u}\left(t-\tau_u(t)\right), \end{matrix} \right\| \le \left(\sigma_{\max}\left(A_0\right)+\sigma_{\max}\left(\Delta A_0\right)\right)\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|+ \\ +\left(\sigma_{\max}\left(A_1\right)+\sigma_{\max}\left(\Delta A_1\right)\right)\left\|\boldsymbol{x}\left(t-\tau_x(t)\right)\right\|+\left\|B_0\right\|\left\|\boldsymbol{u}(t)\right\|+\left\|B_1\right\|\left\|\boldsymbol{u}\left(t-\tau_u(t)\right)\right\| \tag{4.13}$$

где је у важности:

$$\left\|\boldsymbol{x}\left(t-\tau_x(t)\right)\right\| \le \sup\left\{\left\|\boldsymbol{x}\left(t^{\bullet}\right)\right\| : t^{\bullet}\in\left[t-\tau_{xm},t\right]\right\}. \tag{4.14}$$

Применом ове претходне неједнакости, (4.13) се може представити на следећи начин:

$$\begin{aligned} &\left\|\left(A_0+\Delta A_0\right)\boldsymbol{x}(t)+\left(A_1+\Delta A_1\right)\boldsymbol{x}\left(t-\tau_x(t)\right)+B_0\boldsymbol{u}(t)+B_1\boldsymbol{u}\left(t-\tau_u(t)\right)\right\| \le \\ &\le \mu_{A_0}\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|+\mu_{A_1}\left\|\boldsymbol{x}\left(t-\tau_x(t)\right)\right\|+b_0\left\|\boldsymbol{u}(t)\right\|+b_1\left\|\boldsymbol{u}\left(t-\tau_u(t)\right)\right\| \\ &\le \mu_{\Sigma}\sup_{t^{\bullet}\in\left[t-\tau_{xm},t\right]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^{\bullet}\right)\right\|+b_0\left\|\boldsymbol{u}(t)\right\|+b_1\left\|\boldsymbol{u}\left(t-\tau_u(t)\right)\right\|, \quad t>\tau_{xm}, \\ &\le \mu_{\Sigma}\left(\sup_{t^{\bullet}\in\left[t-\tau_{xm},t\right]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^{\bullet}\right)\right\|+\left\|\boldsymbol{\psi}_x\right\|_C\right)+b_0\left\|\boldsymbol{u}(t)\right\|+b_1\left\|\boldsymbol{u}\left(t-\tau_u(t)\right)\right\|, \quad t>0^{+}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

После комбиновања (4.12) и (4.15), важи следеће:

$$\begin{aligned} \left\|\boldsymbol{x}(t)\right\| &\le \left\|\psi_x\right\|_C\left[1+\frac{\left(\sigma_{\max}\left(A_{N1}\right)+\sigma_{\max}\left(\Delta A_{N1}\right)\right)|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right] \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t\left|(t-s)\right|^{\alpha-\beta-1}\left(\left(\sigma_{\max}\left(A_{N1}\right)+\sigma_{\max}\left(\Delta A_{N1}\right)\right)\right)\left\|x\left(s-\tau_{xN}(s)\right)\right\|ds+ \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left|(t-s)^{\alpha-1}\right|\left[\mu_{\Sigma}\left(\sup_{t^{\bullet}\in\left[s-\tau_{xm},s\right]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^{\bullet}\right)\right\|+\left\|\boldsymbol{\psi}_x\right\|_C\right)+b_0\left\|\boldsymbol{u}(s)\right\|+b_1\left\|\boldsymbol{u}\left(s-\tau_u(s)\right)\right\|\right]ds \end{aligned} \tag{4.16}$$

Осим тога, може се добити (4.17)

$$\begin{aligned} \left\|\boldsymbol{x}(t)\right\| &\le \left\|\psi_x\right\|_C\left[1+\frac{\mu_{N1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{\mu_{\Sigma}|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]+\frac{\mu_{N1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t\left|(t-s)\right|^{\alpha-\beta-1}\sup_{t^{\bullet}\in\left[s-\tau_{xm},s\right]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^{\bullet}\right)\right\|ds+ \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left|(t-s)^{\alpha-1}\right|\left[\mu_{\Sigma}\left(\sup_{t^{\bullet}\in\left[s-\tau_{xm},s\right]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^{\bullet}\right)\right\|\right)\right]ds+ \\ &+\frac{b_0\gamma_u|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\gamma_0{\tau_{uM}}^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau_{uM}}^t\left|(t-s)^{\alpha-1}\right|\left\|\boldsymbol{u}\left(s-\tau_{uM}\right)\right\|ds \end{aligned}$$

$$\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\| \le \left\|\psi_x\right\|_C \left[1 + \frac{\mu_{N1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} + \frac{\mu_\Sigma |t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right] + \frac{\mu_{N1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-\beta-1} \sup_{t^\bullet\in[s-\tau_{xm},s]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^\bullet\right)\right\| ds +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)^{\alpha-1}\right|\left[\mu_\Sigma\left(\sup_{t^\bullet\in[s-\tau_{xm},s]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^\bullet\right)\right\|\right)\right]ds + \frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{t-\tau_{uM}} \left|(t-\tau_{uM}-s)^{\alpha-1}\right|\left\|\boldsymbol{u}(s)\right\|ds +$$

$$+\frac{b_0\gamma_u|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b_1\gamma_0\tau_{uM}{}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\| \le \left\|\psi_x\right\|_C \left[1 + \frac{\mu_{N1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} + \frac{\mu_\Sigma |t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right] + \frac{\mu_{N1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-\beta-1} \sup_{t^\bullet\in[s-\tau_{xm},s]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^\bullet\right)\right\| ds +$$

$$+\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)^{\alpha-1}\right|\left[\left(\sup_{t^\bullet\in[s-\tau_{xm},s]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^\bullet\right)\right\|\right)\right]ds + \frac{b_0\gamma_u|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b_1\gamma_0\tau_{uM}{}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b_1\gamma_u|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

Даље, уводи се неопадајућа функција $a(t)$ на следећи начин

$$a(t) = \left\|\psi_x\right\|_C \left[1 + \frac{\mu_{N1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} + \frac{\mu_\Sigma |t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]. \tag{4.18}$$

Уочава се $\frac{\mu_{N1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}, \frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}$ да су монотоно неопадајуће ненегативне непрекидне функције на временском интервалу $J_0 = [0, T]$, а на основу Леме 4.1 [126] , има се:

$$\sup_{t^\bullet\in[t-\tau_{x,M},t]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^\bullet\right)\right\| \le a(t) + \frac{\mu_{N1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-\beta-1} \sup_{t^\bullet\in[s-\tau_{xm},s]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^\bullet\right)\right\| ds +$$

$$+\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)^{\alpha-1}\right|\left[\left(\sup_{t^\bullet\in[s-\tau_{xm},s]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^\bullet\right)\right\|\right)\right]ds + \frac{b_0\gamma_u|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b_1\gamma_0\tau_{uM}{}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{b_1\gamma_u|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{4.19}$$

Применом *Леме 3.4* [126], следи

$$\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\| \le \sup_{t^\bullet\in[t-\tau_{x,M},t]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^\bullet\right)\right\| \le a(t)E_\kappa\left[g\left(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta} + \Gamma(\alpha)t^\alpha\right)\right] \tag{4.20}$$

где су $g = g_1 + g_2$, $g_1 = \frac{\mu_{N1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}, g_2 = \frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}$ и $\kappa = min(\alpha, \alpha-\beta)$. Такође, добија се

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \delta\left[1+\frac{\mu_{N1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{\mu_{\Sigma}|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right] E_{\kappa}\left[g(t)\left(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha)t^{\alpha}\right)\right] \\ +\frac{b_0\gamma_u|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\gamma_0\tau_{uM}{}^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\gamma_u|t-\tau_{uM}|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\end{aligned} \tag{4.21}$$

Коначно, користећи основни услов *Теореме 4.1,* можемо добити тражени услов стабилности на коначном временском интервалу:

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \in J_0. \tag{4.22}$$

Овим доказ је завршен. Из Теореме 4.1 следи и резултат који се даје у наставку.

Теорема 4.2 Хомогени неутрални систем фракционог реда са кашњењем дат са (4.7) (где је са $\boldsymbol{u}(t) \equiv 0$, $\boldsymbol{u}(t-\tau_u(t)) \equiv 0$, $\forall t \in J_0$, $\forall j \in \{1,2,\ldots,m\}$,) која задовољава почетне функције (4.8) *је стабилно на коначном временском интервалу* у односу на $\{\delta, \varepsilon, J_0, \|(\cdot)\|\}$, $\delta < \varepsilon$, ако је следећи услов испуњен:

$$\left[1+\frac{\mu_{N1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{\mu_{\Sigma}|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right] E_{\kappa}\left[g(t)\left(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha)t^{\alpha}\right)\right] \le \frac{\varepsilon}{\delta}, \quad \forall t \in J_0, \tag{4.23}$$

Доказ: Доказ следи одмах из доказа Теореме 4.1.

Примедба 4.1. У претходно изложеном и добијеном резултату неутрални део система се разликује од осталих неутралних система који се могу наћи у постојећој научној литератури. Наиме имамо члан $\mathrm{D}^{\beta}\boldsymbol{x}(t-\tau_{xN}(t))$, где фракциони ред задовољава $\alpha \ne \beta$, тако да разматрани систем добија општији карактер.

4.2.1 Симулациони резултати

Разматра се нехомогени пертурбовани неутрални систем фракционог реда са временски промењивим кашњењем у стању и управљању:

$$\begin{aligned}{}^{c}\mathrm{D}^{0.5}\boldsymbol{x}(t) = (A_0+\Delta A_0)\boldsymbol{x}(t)+(A_1+\Delta A_1)\boldsymbol{x}(t-\tau_x(t))+ \\ +(A_{N1}+\Delta A_{N1})^{c}\,\mathrm{D}^{0.1}\boldsymbol{x}(t-\tau_{xN}(t))+B_0\boldsymbol{u}(t)+B_1\boldsymbol{u}(t-\tau_u(t)),\end{aligned} \tag{4.24}$$

где:

$$A_0=\begin{bmatrix}-0,2 & 0\\ -0,1 & 0,3\end{bmatrix},\quad \Delta A_0=\begin{bmatrix}-0,02 & 0,01\\ -0,01 & 0,03\end{bmatrix},\qquad B_0=\begin{bmatrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$
$$A_1=\begin{bmatrix}-0,2 & 0,1\\ 0 & -0,1\end{bmatrix},\quad \Delta A_1=\begin{bmatrix}-0,05 & 0,01\\ 0,02 & -0,03\end{bmatrix}, A_{N1}=\begin{bmatrix}0,3 & 0\\ -0,05 & 0,2\end{bmatrix},\quad \Delta A_{N1}=\begin{bmatrix}0,04 & 0\\ 0 & 0,02\end{bmatrix}, \tag{4.25}$$

где су $t_0=0, \tau_x=\tau_{xN}=0.1, \tau_{xm}=0.1,\ \tau_u=\tau_{uM}=0,04,$ са придруженим функцијама:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\psi}_x(t)=\left[0,05\quad 0,05\right]^{\mathrm{T}}, &\quad t\in\left[t_0-\tau_{xm}, t_0\right]=\left[-0,1\ \ 0\right],\\ \boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{\psi}_u(t)=\left[0,1\quad 0\right]^{\mathrm{T}}, &\quad t\in\left[t_0-\tau_{um}, t_0\right]=\left[-0.04,\ 0\right],\end{aligned} \tag{4.26}$$

Задатак је анализирати стабилност на коначном временском интервалу у односу на $\left\{\delta=0,1,\ \varepsilon=50,\ \gamma_0=0,2,\ \gamma_u=2,\ J_0=\left[0,3\right]\ \mathrm{s}\right\}$. Из почетних функција и дате једначине стања следи:

$$\begin{aligned}\left\|\boldsymbol{\psi}_x\right\|_{C}&=\max_{t\in\left[-0.1,\ 0\right]}\left\|\boldsymbol{\psi}_x(t)\right\|=\left\|\boldsymbol{\psi}_x\right\|=\left(0,05^2+0,05^2\right)^{1/2}=0,071<\delta=0,1,\\ \left\|\boldsymbol{\psi}_u\right\|_{C}&=\max_{t\in\left[-0,04,\ 0\right]}\left\|\boldsymbol{\psi}_u(t)\right\|=\left\|\boldsymbol{\psi}_u\right\|=\left(0,1^2+0^2\right)^{1/2}=0.1<\gamma_0=0.2,\end{aligned} \tag{4.27}$$

Штавише, друге вредности се израчунавају на следећи начин:

$$\sigma_{\max}(A_0)=0,3257, \sigma_{\max}(\Delta A_0)=0,0362, \sigma_{\max}(A_1)=0,2288, \sigma_{\max}(\Delta A_1)=0,04$$
$$\sigma_{\max}(A_{N1})=0,3071, \sigma_{\max}(\Delta A_{N1})=0,2146$$

$$\begin{aligned}&\mu_{A_0}=\sigma_{\max}(A_0)+\sigma_{\max}(\Delta A_0)=0,3619,\quad \mu_{A_1}=\sigma_{\max}(A_1)+\sigma_{\max}(\Delta A_1)=0.2688,\\ &\mu_{N1}=\sigma_{\max}(A_{N1})+\sigma_{\max}(\Delta A_{N1})=0.5217, \mu_{\Sigma}=\mu_{A_0}+\mu_{A_1}=0.6381\end{aligned} \tag{4.28}$$

$$b_0=\left\|B_0\right\|=\sigma_{\max}(B_0)=3, b_1=\left\|B_1\right\|=\sigma_{\max}(B_1)=2,$$
$$\gamma_{u0}=b_0\gamma_u/\delta=60, \gamma_{u1}=b_1\gamma_u/\delta=40, \gamma_{01}=b_1\gamma_0/\delta=60$$

Примењујући услов Теореме 4.1, следи:

$$\begin{aligned}&\left[1+\frac{0.5217\left|T_e\right|^{0.4}}{\Gamma(1.4)}+\frac{0.6381\left|T_e\right|^{0.5}}{\Gamma(1.5)}\right]E_{0.4}\left[\left(\frac{0.5217}{\Gamma(0.4)}+\frac{0.638}{\Gamma(0.5)}\right)\left(\Gamma(0.4)T_e^{\,0.4}+\Gamma(0.5)T_e^{\,0.5}\right)\right]\\ &+\frac{60\left|T_e\right|^{0.5}}{\Gamma(1.5)}+\frac{60\cdot 0.04^{0.5}}{\Gamma(1.5)}+\frac{40\left|T_e-0.04\right|^{0.5}}{\Gamma(1.5)}\le\frac{50}{0.2},\end{aligned} \tag{4.29}$$

и, на тај начин може се добити да је процењено време стабилности на коначном временском интервалу $T_{\mathrm{e}}\approx 0,454$ s.

4.3 Робусна стабилност на коначном временском интервалу неутралног система са временски промењљивим кашњењем нецелог реда са нелинеарним несигурностима параметара и пертурбацијама

Од интереса је овде да се проучи робусна стабилност на коначно временском интервалу тј. проблем довољних услова који омогућавају да трајекторије система остану унутар априори датих скупова за класу неутралног двочланог система фракционог реда са временски промењљивим кашњењима у стању са нелинеарним несигурностима параметара и пертурбацијама, представљеним следећом једначином стања,[133]:

$$\begin{aligned}&{}^{c}\mathrm{D}^{\alpha}\boldsymbol{x}(t)=A_0\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}(t-\tau_x(t))+\\&+A_{N1}{}^{c}\mathrm{D}^{\beta}\boldsymbol{x}(t-\tau_{xN}(t))+B_0\boldsymbol{u}(t)+f(x(t),t)+g(x(t-\tau_x(t)),t)+Cw(t)\end{aligned}\tag{4.30}$$

са припадајућом непрекидном почетном функцијом стања:

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\psi}_x(t),t\in[-\tau_{xm},0],\tag{4.31}$$

где временски променљива кашњења задовољавају (4.32), као и $\tau_{xm}=\max(\tau_{xM},\tau_{xN})$, и ${}^{C}\mathrm{D}_t^{\alpha},{}^{C}\mathrm{D}_t^{\beta}$ означавају фракциони Капутов извод реда $\alpha,\beta\ \ 0<\beta<\alpha<1$. Такође, $x(t)\in R^n$ означава вектор стања а $u(t)\in\mathbb{R}^m$ означава вектор управљања; $A_0,A_1,\ A_{N1},B_0$ и C су константне матрице са одговарајућим димензијама; $\tau_x(t),\tau_{xN}(t)$ означавају временски променљива кашњења у стању и неутрално кашњење у стању респективно које задовољавају:

$$0\le\tau_x(t)\le\tau_{xM},0\le\tau_{xN}(t)\le\tau_{xN},\quad\forall t\in J=[t_0,t_0+T],\quad t_0\in R,\quad T>0\tag{4.32}$$

и τ_{xm} је дефинисан као максимум $\max(\tau_{xM},\tau_{xN})$. Понашање система (4.30) са датом почетном функцијом (4.31) се посматра у временском интервалу $J=[t_0,t_0+T]\subset R,$ где може бити или реалан позитиван број или симбол ∞. Овде се уводи следећа претпоставка да нелинеарне пертурбације параметара $f(x(t),t)$ и $g(x(t-\tau_x(t)),t)$ се могу описати као линеарне векторске функције као што следи:

$$f(x(t),t)=\Delta A_0(t)x(t),\quad g(x(t-\tau_x(t)),t)=\Delta A_1(t)x(t-\tau_x(t))\tag{4.33}$$

где су $\Delta A_0(t)$ и $\Delta A_1(t)$ временски зависне структурне параметарске неизвесности. Такође, $w(t)\in R^n$ је вектор поремећаја, који има горњу границу која је дата следећим изразом: $\|w(t)\|<\gamma_w,\forall t\in[0,T]$.

Овде се уводи и наводи дефиниција стабилности на коначном временском интервалу за нехомогени систем дат једначином (4.30) са одговарајућом почетном функцијом (4.31)

Дефиниција 4.2 Систем са кашњењем фракционог реда дат са једначином стања (4.30), која задовољава почетну функцију (4.31) је стабилно на коначном временском интервалу у односу на $\{\delta,\varepsilon,\gamma_u,t_0,J,\|(\cdot)\|\}$, $\delta<\varepsilon$, ако и само ако је:

$$\|\boldsymbol{\psi}_x\|_C<\delta,\quad \|\boldsymbol{u}(t)\|<\gamma_u,\quad \forall t\in J \quad \Rightarrow \quad \|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon,\quad \forall t\in J. \tag{4.34}$$

где је $\rho=\max\{\|\psi\|_C,\|\varphi\|_C\}$ и δ,ε су позитивне константе.

Теорема 4.3 Нехомогени систем фракционог реда са временским промењивим кашњењем са два израза (4.30) која задовољава почетну функцију (4.31) је стабилно на коначном временском интервалу у односу на $\{\delta,\varepsilon,\gamma_u,J_0,\|(\cdot)\|\}$, $\delta<\varepsilon$, ако следећи услов је испуњен:

$$\begin{aligned}&\left[1+\frac{\sigma_{\max}(A_{N1})|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{\eta_\Sigma|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]E_\kappa\left[\left(\frac{\sigma_{\max}(A_{N1})}{\Gamma(\alpha-\beta)}+\frac{\eta_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha)t^\alpha\right)\right]\\&+\frac{\gamma_{0u}|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\gamma_{0w}|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\le\frac{\varepsilon}{\delta},\quad \forall t\in J_0,\end{aligned} \tag{4.35}$$

где су
$$\begin{aligned}&\eta_\Sigma=\sum_{i=0}^{n=1}\eta_{A_i},\quad \eta_{A_i}=\sigma_{\max}(A_i)+\sigma_{\max}(\Delta A_i),\quad i=0,1,\quad b_0=\|B_0\|c=\|C\|\\&\gamma_{0u}=b_0\gamma_u/\delta,\gamma_{0w}=c\gamma_w/\delta,\ \sup_{t\in[0,T]}\|\Delta A_0(t)\|=\Delta a_0,\quad \sup_{t\in[0,T]}\|\Delta A_1(t)\|=\Delta a_1,\end{aligned} \tag{4.36}$$

где $\sigma_{\max}(\cdot)$ означава највећу сингуларну вредност матрице $(\cdot)$.

Доказ: Узимајући у обзир особине фракционог извода реда $0<\beta<\alpha<1$, решење дате фракционе диференцијалне једначине (4.30) се може добити слично као и у (4.11), у форми еквивалентне Волтерове интегралне једначине, где је узето у обзир да је овде $t_0=0$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)=&\psi_x(0)-A_{N1}\cdot\psi_x(-\tau_{xm})\frac{t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}A_{N1}x(s-\tau_{xN}(s))ds+\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\begin{bmatrix}A_0\boldsymbol{x}(s)+A_1\boldsymbol{x}(t-\tau_x(s))\\+B_0u(s)+Cw(s)+f(x(s),s)+g(x(s-\tau_x(s)),s)\end{bmatrix}ds\end{aligned} \tag{4.37}$$

Примењујући норму на претходни израз, добија се естимација решења $\boldsymbol{x}(t)$:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t)\|\le&\|\psi_x(0)\|+\|A_{N1}\|\|\psi_x(-\tau_{xm})\|\frac{|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t\left|(t-s)\right|^{\alpha-\beta-1}\|A_{N1}\|\|x(s-\tau_{xN}(s))\|ds\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left|(t-s)^{\alpha-1}\right|\left[\|A_0\boldsymbol{x}(s)+A_1\boldsymbol{x}(t-\tau_x(s))+B_0u(s)+Cw(s)+f(x(s),s)+g(x(s-\tau_x(s)),s)\|\right]ds\end{aligned} \tag{4.38}$$

Такође, узимајући у обзир (4.33), следи да важи: (4.39)

$$\left\| \begin{matrix} A_0 \boldsymbol{x}(t) + A_1 \boldsymbol{x}(t-\tau_x(t)) + \\ +B_0 \boldsymbol{u}(t) + Cw(t) + f(x(t),t) + g(x(t-\tau_x),t) \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} (A_0+\Delta A_0)\boldsymbol{x}(t) + (A_1+\Delta A_1)\boldsymbol{x}(t-\tau_x(t)) \\ +B_0 \boldsymbol{u}(t) + Cw(t) \end{matrix} \right\|$$
$$\le (\sigma_{\max}(A_0)+\Delta a_0)\|\boldsymbol{x}(t)\| + (\sigma_{\max}(A_1)+\Delta a_1)\|\boldsymbol{x}(t-\tau_x(t))\| + \|B_0\|\|\boldsymbol{u}(t)\| + \|C\|\|\boldsymbol{w}(t)\|$$

Са друге стране ако се уочи да важи следећа неједнакост $\|\boldsymbol{x}(t-\tau_x(t))\| \le \sup\left\{\left\|\boldsymbol{x}\left(t^\bullet\right)\right\| : t^\bullet \in [t-\tau_{xm},t]\right\}$ претходни израз се може приказати као:

$$\begin{aligned} &\|(A_0+\Delta A_0)\boldsymbol{x}(t) + (A_1+\Delta A_1)\boldsymbol{x}(t-\tau_x(t)) + B_0\boldsymbol{u}(t) + Cw(t)\| \le \\ &\le \eta_\Sigma\left(\sup_{t^\bullet\in[t-\tau_{xm},t]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^\bullet\right)\right\| + \|\boldsymbol{\psi}_x\|_C\right) + b_0\|\boldsymbol{u}(t)\| + c\|w(t)\|, \quad t>0^+, \end{aligned} \tag{4.40}$$

Даље, имајући у виду изразе (4.38) и (4.40) може се добити (4.41)

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \|\psi_x\|_C\left[1+\frac{\sigma_{\max}(A_{N1})|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right] + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\beta-1}\sigma_{\max}(A_{N1})\|x(s-\tau_{xN}(s))\|ds +$$
$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}|\left[\eta_\Sigma\left(\sup_{s^\bullet\in[s-\tau_{xm},s]}\left\|\boldsymbol{x}\left(s^\bullet\right)\right\| + \|\boldsymbol{\psi}_x\|_C\right) + b_0\|\boldsymbol{u}(s)\| + c\|w(s)\|,\right]ds$$

Слично, ако се узму у обзир да су испуњене следеће неједнакости $\|\boldsymbol{u}(s)\| < \gamma_u, \|w(s)\| < \gamma_w$, (4.41) добија следећи облик

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{x}(t)\| \le \|\psi_x\|_C\left[1+\frac{\sigma_{\max(A_{N1})}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} + \frac{\eta_\Sigma |t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right] + \frac{\sigma_{\max(A_{N1})}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t |(t-s)|^{\alpha-\beta-1}\sup_{s^\bullet\in[s-\tau_{xm},s]}\left\|\boldsymbol{x}\left(s^\bullet\right)\right\|ds + \\ &+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |(t-s)^{\alpha-1}|\left[\eta_\Sigma\left(\sup_{s^\bullet\in[s-\tau_{xm},s]}\left\|\boldsymbol{x}\left(s^\bullet\right)\right\|\right)\right]ds + \frac{b_0\gamma_u|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{c\gamma_w|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned} \tag{4.42}$$

Посебно, функција $e(t)$ (4.43) неопадајућа функција на $J_0=[0,T]$ и $\frac{\sigma_{\max}(A_{N1})}{\Gamma(\alpha-\beta)}, \frac{\eta_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}$ су монотоно растуће (*овде константне*) ненегативне непрекидне функције на $J_0=[0,T]$.

$$e(t) = \|\psi_x\|_C\left[1+\frac{\sigma_{\max}(A_{N1})|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} + \frac{\eta_\Sigma|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]. \tag{4.43}$$

Применом Леме 4.1, [126], имамо да важи:

$$\sup_{t^{\bullet}\in\left[t-\tau_{x,M},t\right]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^{\bullet}\right)\right\|\le e(t)+\frac{\sigma_{\max}\left(A_{N1}\right)}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t\left|(t-s)\right|^{\alpha-\beta-1}\sup_{s^{\bullet}\in\left[s-\tau_{xm},s\right]}\left\|\boldsymbol{x}\left(s^{\bullet}\right)\right\|ds+$$
$$+\frac{\eta_{\Sigma}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left|(t-s)\right|^{\alpha-1}\left[\left(\sup_{s^{\bullet}\in\left[s-\tau_{xm},s\right]}\left\|\boldsymbol{x}\left(s^{\bullet}\right)\right\|\right)\right]ds+\frac{b_0\gamma_u|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\gamma_w|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{4.44}$$

Слично, на основу Леме 3.4 [126], добија се:

$$\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|\le\sup_{t^{\bullet}\in\left[t-\tau_{x,M},t\right]}\left\|\boldsymbol{x}\left(t^{\bullet}\right)\right\|\le e(t)E_{\kappa}\left[g(t)\left(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha)t^{\alpha}\right)\right] \tag{4.45}$$

где су $g(t)=g_1(t)+g_2(t)$, $g_1=\dfrac{\sigma_{\max}\left(A_{N1}\right)}{\Gamma(\alpha-\beta)}, g_2=\dfrac{\eta_{\Sigma}}{\Gamma(\alpha)}$ и $\kappa=min(\alpha,\alpha-\beta)$. Следствено, добија се да је:

$$\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|\le\delta\left[1+\frac{\sigma_{\max}\left(A_{N1}\right)|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{\eta_{\Sigma}|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]E_{\kappa}\left[g(t)\left(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha)t^{\alpha}\right)\right]+\frac{b_0\gamma_u|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\gamma_w|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{4.46}$$

Примењујући основни услов Теореме 4.3, добија се захтевани услов стабилности на коначном временском интервалу:

$$\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|<\varepsilon,\quad\forall t\in J_0. \tag{4.47}$$

Из Теореме 4.3 следи одмах и следећи резултат:

Теорема 4.4 Хомогени систем фракционог реда са кашњењем дат са (4.30) без поремећаја и параметарских неизвесности ($\boldsymbol{u}(t)\equiv0,\ f\left(x(t),t\right)\equiv0,$ $g\left(x\left(t-\tau_x(t)\right),t\right)\equiv0,\quad w(t)\equiv0$) која задовољава почетну функцију (4.31) је стабилно на коначном временском интервалу у односу на $\left\{\delta,\varepsilon,J_0,\left\|(\cdot)\right\|\right\},\ \delta<\varepsilon,$ ако следећи услов је испуњен

$$\left[1+\frac{\sigma_{\max}\left(A_{N1}\right)|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{\left(\sigma_{\max}\left(A_0\right)+\sigma_{\max}\left(A_1\right)\right)|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\cdot$$
$$E_{\kappa}\left[\left(\frac{\sigma_{\max}\left(A_{N1}\right)}{\Gamma(\alpha-\beta)}+\frac{\left(\sigma_{\max}\left(A_0\right)+\sigma_{\max}\left(A_1\right)\right)}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha)t^{\alpha}\right)\right]\le\frac{\varepsilon}{\delta},\quad\forall t\in J_0, \tag{4.48}$$

Доказ: Доказ следи одмах из доказа претходне Теореме 4.3.

Примедба 4.1 Није тешко уочити да услов Теореме 4.3 се своди на услов Теореме 4.2 (за случај да су $\sigma_{\max}\left(\Delta A_i\right)=0,\ i=0,1,\quad\sigma_{\max}\left(\Delta A_{N1}\right)=0$).

4.3.1 Симулациони резултати

Разматра се нехомогени пертурбовани систем фракционог реда са временски променљивим кашњењем са поремећајем:

$$
\begin{aligned}
&{}^{c}\mathrm{D}^{0.5}\boldsymbol{x}(t) = A_0\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}\left(t-\tau_x(t)\right) + \\
&+ A_{N1}{}^{c}\mathrm{D}^{0.1}\boldsymbol{x}\left(t-\tau_{xN}(t)\right) + B_0\boldsymbol{u}(t) + f\left(x(t),t\right) + g\left(x\left(t-\tau_x(t)\right),t\right) + Cw(t)
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

где су сада:

$$
\begin{aligned}
&A_0 = \begin{bmatrix} -0,2 & 0 \\ -0,1 & 0,3 \end{bmatrix},\quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad C = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.2 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix},\quad \Delta A_1(t) = \begin{bmatrix} 0.02(1-\sin t) & 0 \\ 0 & 0.03\cos t \end{bmatrix}, \\
&A_1 = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix},\quad A_{N1} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 \\ -0,05 & 0,2 \end{bmatrix},\quad \Delta A_0(t) = \begin{bmatrix} 0.02\cos t & 0 \\ 0 & 0.04\cos t \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

односно $t_0 = 0, \tau_x = \tau_{xN} = 0.1, \tau_{xm} = 0.1,$ и придруженом функцијом: $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\psi}_x(t) = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,05 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ $, t \in [t_0 - \tau_{xm}, t_0] = [-0,1\ \ 0]$. Задатак је анализирати стабилност на коначном временском интервалу у односу на $\{\delta = 0.2,\ \varepsilon = 50,\ \gamma_u = 2,\ J_0 = [0,3]\ \mathrm{s}\}$. Из почетне функције и дате једначине стања следи:

$$
\begin{aligned}
&A_0 = \begin{bmatrix} -0,2 & 0 \\ -0,1 & 0,3 \end{bmatrix},\quad \Delta A_0(t) = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 \\ 0 & 0,04 \end{bmatrix},\qquad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\quad B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
&A_1 = \begin{bmatrix} -0,2 & 0,1 \\ 0 & -0,1 \end{bmatrix},\quad \Delta A_1(t) = \begin{bmatrix} 0,02 & 0 \\ 0 & 0,03 \end{bmatrix}, A_{N1} = \begin{bmatrix} 0,3 & 0 \\ -0,05 & 0,2 \end{bmatrix},\quad \Delta A_{N1} = \begin{bmatrix} 0,04 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{4.51}
$$

где су $t_0 = 0, \tau_x = \tau_{xN} = 0.1, \tau_{xm} = 0.1,\ \tau_u = \tau_{uM} = 0,04,$ са придруженим функцијама:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}(t) &= \boldsymbol{\psi}_x(t) = \begin{bmatrix} 0,05 & 0,05 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\quad t \in [t_0 - \tau_{xm}, t_0] = [-0,1\ \ 0], \\
\boldsymbol{u}(t) &= \boldsymbol{\psi}_u(t) = \begin{bmatrix} 0,1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\qquad t \in [t_0 - \tau_{um}, t_0] = [-0.04,\ 0],
\end{aligned}
\tag{4.52}
$$

Задатак је анализирати стабилност на коначном временском интервалу у односу на $\{\delta = 0,1,\ \varepsilon = 50,\ \gamma_0 = 0,2,\ \gamma_u = 2,\ J_0 = [0,3]\ \mathrm{s}\}$. Из почетних функција и дате једначине стања следи:

$$
\|\boldsymbol{\psi}_x\|_{\mathcal{C}} = \max_{t \in [-0.1,\ 0]} \|\boldsymbol{\psi}_x(t)\| = \|\boldsymbol{\psi}_x\| = \left(0,05^2 + 0,05^2\right)^{1/2} = 0,071 < \delta = 0,1,
\tag{4.53}
$$

Као и: $\sigma_{\max}(A_0) = 0.3257, \sigma_{\max}(A_1) = 0.2288,\ \sigma_{\max}(A_{N1}) = 0.3071,$

$$\Delta a_0 = \sup_{t\in[0,T]} \left\|\Delta A_0(t)\right\| = \left\|\begin{matrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.04 \end{matrix}\right\| = 0.04,\ \Delta a_1 = \sup_{t\in[0,T]} \left\|\Delta A_1(t)\right\| = \left\|\begin{matrix} 0.02 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{matrix}\right\| = 0.03,$$

$$\begin{aligned} &\eta_{A_0} = \sigma_{\max}(A_0) + \Delta a_0 = 0,3657, \quad \eta_{A_1} = \sigma_{\max}(A_1) + \Delta a_1 = 0.2588, \\ &\eta_{\Sigma} = \eta_{A_0} + \eta_{A_1} = 0.6245, \quad \gamma_w = 1 \end{aligned} \tag{4.54}$$

$$b_0 = \|B_0\| = \sigma_{\max}(B_0) = 3,\ c = \|C\| = 0.2395, \gamma_{u0} = b_0\gamma_u / \delta = 60, \quad \gamma_{0w} = c\gamma_w / \delta = 2.395,$$

Примењујући услов Теореме 3.1, следи:

$$\begin{aligned} &\left[1 + \frac{0.3071|T_e|^{0.4}}{\Gamma(1.4)} + \frac{0.6245|T_e|^{0.5}}{\Gamma(1.5)}\right] E_{0.4}\left[\left(\frac{0.3071}{\Gamma(0.4)} + \frac{0.6245}{\Gamma(0.5)}\right)\left(\Gamma(0.4)T_e^{0.4} + \Gamma(0.5)T_e^{0.5}\right)\right] \\ &+ \frac{60|T_e|^{0.5}}{\Gamma(1.5)} + \frac{2.395\cdot|T_e|^{0.5}}{\Gamma(1.5)} \le \frac{50}{0.2}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

и, на тај начин може се добити процењено време стабилности на коначном временском интервалу $T_{\mathrm{e}} \approx 0,635$ s.

5. Стабилност на коначном временском интервалу неутралног вишечланог система нецелог реда $0<\gamma\le 1<\beta<\alpha\le 2$ са временски промењивим кашњењима

5.1 Уводна разматрања и опис проблема

Како је у уводном делу истакнуто, у доступној литератури постоје неколико радова ФТС-а за вишечлане нелинеарне системе нецелог реда. Овде ће бити од значаја проучити ФТС НИТДС-а са пригушним понашањем и ефектима временског кашњења. Тако на пример, ФТС класе вишечланог нелинеарног фракционог система са временским кашњењем у стању и $0<\alpha_2\le 1<\alpha_1\le 2$ су проучавани у радовима,[120,121].

У овом делу биће изложени резултати који се односе на проблем ФТС једног нелинеарног неутралног НИТДС-а са временски промењивим кашњењем у улазу и кашњењем у стању и вишечланим нецелим редом $0<\gamma\le 1<\beta<\alpha\le 2$ користећи генерализовану Гронвалову неједнакост и проширени облик генерализоване Гронвалове неједнакости, [134]. Дакле, проучаван је нови генерализовани неутрални НИТДС са три различита нецелог реда $0<\gamma\le 1<\beta<\alpha\le 2$ са временски промењивим улазом и кашњењима у стању, где по први пут разматрамо случај вишечланог неутралног НИТДС-а који укључује изразе који укључују кашњења истовремено ${}^{C}\mathrm{D}_t^{\beta}\boldsymbol{x}\left(t-\tau_{xN1}(t)\right)$, ${}^{C}\mathrm{D}_t^{\gamma}\boldsymbol{x}\left(t-\tau_{xN2}(t)\right)$, где је сада $0<\gamma\le 1<\beta<2$. У наставку биће приказано и доказано три нова критеријума ФТС за горе проучавани неутрални НИТДС-а са вишечланим фракционим редом $0<\gamma\le 1<\beta<\alpha\le 2$ са временски промењивим кашњењем у улазу и стању која су добијена коришћењем генерализоване Гронвалове неједнакости и проширеног облика генерализоване Гронвалове неједнакости.

У овом поглављу, норма $\|(\cdot)\|$ ће означавати било коју векторску норму, $\|(\cdot)\|_1$, $\|(\cdot)\|_2$, односно $\|(\cdot)\|_\infty$, или одговарајућу матричну норму индуковану еквивалентном векторском нормом, 1–, 2–, односно or $\infty-$ нормом, респективно. Такође, ${}_{a}^{\mathrm{C}}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)$ или ${}_{a}\mathrm{D}_t^{\alpha} f(t)$ ће означавати фракциони Капутов извод нецелог реда α са доњом границом a за функцију $f(.)$; ${}_{a}^{\mathrm{RL}}\mathrm{D}_t^{-\alpha} f(t)$ или ${}_{a}\mathrm{I}_t^{\alpha} f(t)$ означава Риман-Лиувилов интеграл нецелог реда α са доњом границом a за функцију $f(.)$.

Лема 4.1. [118] Претпоставимо да је $x(t)\in C^1\left([0,+\infty),R\right)$, $\dot{x}(t)\ge 0$ и $\alpha>0$.

Онда, $\int_0^t\left((t-s)^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)\right)x(s)ds$ интегрална функција је монотоно растућа у односу на *t.*

Овде ће бити од интереса размотрити један неутрални нецелог реда вишечлани систем са временски промењивим кашњењем у стању и улазу са нелинеарном пертурбацијом и поремећајем који је дат следећом диференцијалном једначином:

$$\begin{aligned} {}^{c}\mathrm{D}_t^{\alpha}\boldsymbol{x}(t) &= A_0\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}\left(t-\tau_x(t)\right) + A_{N1}{}^{c}\mathrm{D}_t^{\beta}\boldsymbol{x}\left(t-\tau_{xN1}(t)\right) + A_{N2}{}^{c}\mathrm{D}_t^{\gamma}\boldsymbol{x}\left(t-\tau_{xN2}(t)\right) \\ &+ B_0\boldsymbol{u}(t) + B_1\boldsymbol{u}\left(t-\tau_u(t)\right) + f\left(t,x(t)\right) + Cw(t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

са придруженом непрекидном почетном функцијом стања и улаза (управљање):

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\psi}_x(t), t \in [-\tau_{xm}, 0], \quad \boldsymbol{x}'(t) = \varphi_x(t), t \in [-\tau_{xm}, 0], \quad \boldsymbol{u}(t) = \boldsymbol{\psi}_u(t), t \in [-\tau_{uM}, 0] \tag{5.2}$$

где је са $\tau_x(t)$ означено временски промењливо кашњење у стању, $\tau_{xN(.)}(t)$ је неутрално временски промењливо кашњење, $\tau_u(t)$ је временски промењливо кашњење у управљању и она представљају непрекидне функције које задовољавају (5.3):

$$\begin{aligned} &0 \le \tau_x(t) \le \tau_{xM}, 0 \le \tau_{xN}(t) \le \tau_{xN}, \quad \forall t \in J = [t_0, t_0 + T], \quad t_0 \in \mathbb{R}, \quad T > 0 \\ &0 \le \tau_u(t) \le \tau_{uM} \end{aligned} \tag{5.3}$$

где су са τ_{xM}, τ_{xN}, and τ_{uM} означене познате позитивне константе. Због једноставности усваја се претпоставка да су $\tau_{xN}(t) = \tau_{xN_1}(t) = \tau_{xN2}(t)$; τ_{xm} је дефинисано као $\max(\tau_{xM}, \tau_{xN})$ и t_0 почетно време. ${}^{C}\mathrm{D}_t^{\alpha}, {}^{C}\mathrm{D}_t^{\beta}, {}^{C}\mathrm{D}_t^{\gamma}$ означавају фракционе изводе нецелог реда α, β, γ, $0 < \gamma \le 1 < \beta < \alpha \le 2$; $x(t) \in R^n$ је вектор стања и $u(t) \in \mathbb{R}^m$ вектор управљања; A_0, A_1, A_{N1}, B_0, B_1 и C су константне матрице одговарајућих димензија; $w(t) \in R^n$ је вектор поремећаја, који је ограничен са горње стране као што следи $\|w(t)\| < \eta_W, \eta_W = const > 0, \quad \forall t \in J$. $\boldsymbol{\psi}_x(t) \in C\left([-\tau_{xm}, 0], R^n\right)$ представља почетну функцију са нормом $\|\psi_x\|_C = \sup_{-\tau \le \theta \le 0}\|\psi_x(\theta)\|$, и $\varphi_x(t) \in C\left([-\tau_{xm}, 0], R^n\right)$ је почетна функција $x'(t) = dx(t)/dt$ са нормом $\|\varphi_x\|_C = \sup_{-\tau \le \theta \le 0}\|\varphi_x(\theta)\|$.

Даље, се уводи претпоставка да нелинеарна пертурбација $f:[0,T] \times R^n \times R^n \to R^n$ је *Lipschitz* непрекидна на $[0,T]$ и постоји непрекидна функција $l(t)$ тако да

$$\left\| f\left(t, x(t)\right) \right\| \le l(t)\|x(t)\|, \tag{5.4}$$

за било које време $\forall t \in [0,T]$ и $f(t,0) = (0,0)^T$. Такође, уводе се следеће дефиниције стабилности система на коначном временском интервалу ФТС за систем (5.1) са придруженим почетним функцијама (5.2).

Дефиниција 5.1 [93,135]: Неутрални систем са кашњењем нецелог реда дат нехомогеном једначином стања (5.1) која задовољава почетне функције (5.2) је стабилан на коначном временском интервалу у односу на $\left\{\delta,\varepsilon,\eta_u,\eta_0,t_0,J,\left\|(\cdot)\right\|\right\}$, $\delta<\varepsilon$, ако и само ако је:

$$\left.\begin{array}{l}\rho<\delta, \quad \left\|\boldsymbol{\psi}_u\right\|_C<\eta_0, \\ \left\|\boldsymbol{u}(t)\right\|<\eta_u, \quad \forall t\in J,\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|<\varepsilon, \quad \forall t\in J, \tag{5.5}$$

где је $\rho=\max\left\{\left\|\psi\right\|_C,\left\|\varphi\right\|_C\right\}$ и $\delta,\varepsilon,\eta_0,\eta_u$ позитивне константе.

Дефиниција 5.2 [93,135]: Неутрални систем са кашњењем фракционог реда дат са нехомогеном једначином стања (5.1), $\left(\boldsymbol{u}\left(t-\tau_u(t)\right)\equiv 0\right)$ која задовољава почетне функције (5.2) је стабилно на коначном временском интервалу у односу на $\left\{\delta,\varepsilon,\eta_u,t_0,J,\left\|(\cdot)\right\|\right\}$, $\delta<\varepsilon$, ако и само ако је:

$$\rho<\delta, \quad \left\|\boldsymbol{u}(t)\right\|<\eta_u, \quad \forall t\in J \quad \Rightarrow \quad \left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|<\varepsilon, \quad \forall t\in J, \tag{5.6}$$

где је $\rho=\max\left\{\left\|\psi\right\|_C,\left\|\varphi\right\|_C\right\}$ и $\delta,\varepsilon,\eta_u$ позитивне константе.

Дефиниција 5.3 [93,135]: Неутрални систем са кашњењем фракционог реда дат са нехомогеном једначином стања (5.1), $\left(\boldsymbol{u}\left(t-\tau_u(t)\right)\equiv 0,\boldsymbol{u}(t)\equiv 0\right)$ која задовољава почетне функције (5.2) је стабилно на коначном временском интервалу у односу на $\left\{\delta,\varepsilon,t_0,J,\left\|(\cdot)\right\|\right\}$, $\delta<\varepsilon$, ако и само ако је:

$$\rho<\delta, \qquad \forall t\in J \quad \Rightarrow \quad \left\|\boldsymbol{x}(t)\right\|<\varepsilon, \quad \forall t\in J, \tag{5.7}$$

где је $\rho=\max\left\{\left\|\psi\right\|_C,\left\|\varphi\right\|_C\right\}$ и δ,ε позитивне константе.

5.2 Нови критеријуми стабилности на коначном временском интервалу-неутралног вишечланог система нецелог реда са временски промењљивим кашњењима

У овој одељку, применом генерализоване Гронвалове неједнакости укључујући и проширену форму, нове критеријуме ФТС НИТДС су изведене.

Теорема 5.1 Нехомогени нелинеарни неутрални вишечлани систем са временским промењљивим кашњењем нецелог реда (5.1) која задовољава почетне функције (5.2) је стабилан на коначном временском интервалу у односу на $\left\{\delta,\varepsilon,\eta_u,\eta_0,t_0,J,\left\|(\cdot)\right\|\right\}$, $\delta<\varepsilon$, ако следећи услов важи:

$$\left[1+|t|+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}+\frac{a_{n2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right]\cdot$$
$$E_\kappa\left[g(t)\left(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha-\gamma)t^{\alpha-\gamma}\right)\right]\cdot E_\alpha\left(\mu_\Sigma t^\alpha\right) \tag{5.8}$$
$$+\frac{\eta_{0u}|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\eta_{01}\tau_{uM}{}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\eta_{1u}|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\eta_{0w}|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}<\frac{\varepsilon}{\delta},\quad \forall t\in J_0$$

где су: $\|A_0\|=a_o,\quad \|A_1\|=a_1,\quad \|A_{N1}\|=a_{n1}, \|A_{N2}\|=a_{n2}, \|B_o\|=b_o, \left\|B_1\right\|=b_1, \|C\|=c$

$$\sup_{t\in[0,T]}\left(a_0+l(t)\right)=\mu_o, a_1=\mu_1,\ \ \mu_\Sigma=\mu_0+\mu_1,$$

$$\eta_{0u}=b_0\eta_u/\delta, \eta_{0w}=c\eta_w/\delta, \eta_{01}=b_1\eta_0/\delta, \eta_{1u}=b_1\eta_u/\delta \tag{5.9}$$

Доказ: Узимајући у обзир да су $0<\gamma\le 1<\beta<\alpha\le 2$ и примењујући фракциони интеграл ${}_0I_t^\alpha$ на систем (5.1), има се:

$$\begin{aligned}&{}_0I_t^\alpha\left({}^c\mathrm{D}_t^\alpha \boldsymbol{x}(t)-A_{N1}{}^c\mathrm{D}_t^\beta \boldsymbol{x}\left(t-\tau_{xN1}(t)\right)-A_{N2}{}^c\mathrm{D}_t^\gamma \boldsymbol{x}\left(t-\tau_{xN2}(t)\right)\right)=\\&={}_0I_t^\alpha\left(A_0\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}\left(t-\tau_x(t)\right)+B_0\boldsymbol{u}(t)+B_1\boldsymbol{u}\left(t-\tau_u(t)\right)+f\left(t,x(t)\right)+Cw(t)\right)\end{aligned} \tag{5.10}$$

Користећи *Лему 3.1 и Лема 3.2,* добија се решење за (5.10) у форми еквивалентне Волтерове интегралне једначине, где је $t_0=0$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)&=\psi_x(0)+t\varphi_x(0)-A_{N2}\cdot\psi_x(-\tau_{xm})\frac{t^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\gamma-1}A_{N2}x\left(s-\tau_{xN}(s)\right)ds+\\&-A_{N1}\frac{\psi_x(-\tau_{xm})\cdot t^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}-A_{N1}\frac{\varphi_x(-\tau_{xm})\cdot t^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-\beta-1}A_{N1}x\left(s-\tau_{xN}(s)\right)ds+\\&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\left[\begin{array}{l}A_0\boldsymbol{x}(s)+A_1\boldsymbol{x}\left(t-\tau_x(s)\right)\\+B_0u(s)+B_1u\left(s-\tau_u(s)\right)+f\left(s,x(s)\right)+Cw(s)\end{array}\right]ds\end{aligned} \tag{5.11}$$

Даље, применом норме $\|(\cdot)\|$ на израз (5.10), можемо добити естимацију решења $\boldsymbol{x}(t)$:

$$\begin{aligned}
&\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\| \le \left\|\psi_x(0)\right\| + |t|\left\|\varphi_x(0)\right\| + \left\|A_{N2}\right\|\left\|\psi_x(-\tau_{xm})\right\|\frac{|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-\gamma-1}\left\|A_{N2}\right\|\left\|x\left(s-\tau_{xN}(s)\right)\right\|ds + \left\|A_{N1}\right\|\left\|\psi_x(-\tau_{xm})\right\|\frac{|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} + \\
&+\left\|A_{N1}\right\|\left\|\varphi_x(-\tau_{xm})\right\|\frac{|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-\beta-1}\left\|A_{N1}\right\|\left\|x\left(s-\tau_{xN}(s)\right)\right\|ds + \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)^{\alpha-1}\right|\left[\left\|\begin{matrix} A_0\boldsymbol{x}(s)+A_1\boldsymbol{x}\left(t-\tau_x(s)\right) \\ +B_0u(s)+B_1u\left(s-\tau_u(s)\right)+f\left(s,x(s)\right)+Cw(s)\end{matrix}\right\|\right]ds.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Такође, може се закључити да важи следећа процена:

$$\begin{aligned}
&\left\|\begin{matrix} A_0\boldsymbol{x}(t)+A_1\boldsymbol{x}\left(t-\tau_x(t)\right)+B_0\boldsymbol{u}(t)+B_1\boldsymbol{u}\left(t-\tau_u(t)\right) \\ +f\left(t,x(t)\right)+Cw(t)\end{matrix}\right\| = \\
&\le a_o\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\| + a_1\left\|\boldsymbol{x}\left(t-\tau_x(t)\right)\right\| + b_o\left\|\boldsymbol{u}(t)\right\| + b_1\left\|\boldsymbol{u}\left(t-\tau_u(t)\right)\right\| + c\left\|\boldsymbol{w}(t)\right\| + \left\|f\left(t,x(t)\right)\right\| \\
&\quad\le \left(a_o+l(t)\right)\left\|x(t)\right\| + a_1\left\|\boldsymbol{x}\left(t-\tau_x(t)\right)\right\| + b_0\left\|u(t)\right\| + b_1\left\|\boldsymbol{u}\left(t-\tau_u(t)\right)\right\| + \\
&\qquad + c\left\|\boldsymbol{w}(t)\right\| \\
&\quad= \mu_0\left\|x(t)\right\| + \mu_1\left\|\boldsymbol{x}\left(t-\tau_x(t)\right)\right\| + b_0\left\|\boldsymbol{u}(t)\right\| + b_1\left\|\boldsymbol{u}\left(t-\tau_u(t)\right)\right\| + c\left\|\boldsymbol{w}(t)\right\|.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Уводи се да је $y(t) = \sup_{\theta\in[-\tau_{xm},t]}\left\|x(\theta)\right\|, \quad \forall t\in[0,T]$. За $\forall t^{\bullet}\in[0,t]$, следећи услови су испуњени

$$\left\|x\left(t^{\bullet}-\tau_{x*}\left(t^{\bullet}\right)\right)\right\| \le y\left(t^{\bullet}\right), \quad \left\|x\left(t^{\bullet}\right)\right\| \le \sup_{t^{\bullet}\in[t-\tau_{xm},t]}\left\{\left\|\boldsymbol{x}\left(t^{\bullet}\right)\right\|\right\} \le y\left(t^{\bullet}\right). \tag{5.14}$$

Примењујући претходну неједнакост, израз (5.12) се може сада приказати као:

$$\begin{aligned}
&\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\| \le \left\|\psi_x\right\|_C\left[1+\frac{a_{n2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right] + \left\|\varphi_x\right\|_C\left[|t|+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right] + \\
&+\frac{a_{n1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-\beta-1} y(s)ds + \frac{a_{n2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-\gamma-1} y(s)ds + \\
&+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)^{\alpha-1}\right|\left[(\mu_0+\mu_1)y(s)+b_0\left\|\boldsymbol{u}(s)\right\|+b_1\left\|\boldsymbol{u}\left(s-\tau_u(s)\right)\right\|+c\left\|w(s)\right\|\right]ds.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Узимајући у обзир услове за $\left\|\boldsymbol{u}(s)\right\| < \eta_u, \left\|w(s)\right\| < \eta_w$, може се реорганизовати горња неједнакост као (5.16)

$$\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\| \le \left\|\psi_x\right\|_C \left[1+\frac{a_{n2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right]+\left\|\varphi_x\right\|_C\left[|t|+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right]+$$
$$+\frac{a_{n1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t\left|(t-s)\right|^{\alpha-\beta-1}y(s)\,ds+\frac{a_{n2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t\left|(t-s)\right|^{\alpha-\gamma-1}y(s)\,ds+$$
$$+\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left|(t-s)\right|^{\alpha-1}y(s)ds+\frac{b_0\eta_u|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_0\tau_{uM}{}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\eta_w|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\tau_{uM}}^t\left|(t-s)^{\alpha-1}\right|\left\|\boldsymbol{u}(s-\tau_{uM})\right\|ds,$$

или

$$\left\|\boldsymbol{x}(t)\right\| \le \left\|\psi_x\right\|_C \left[1+\frac{a_{n2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right]+\left\|\varphi_x\right\|_C\left[|t|+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right]+$$
$$+\frac{a_{n1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t\left|(t-s)\right|^{\alpha-\beta-1}y(s)\,ds+\frac{a_{n2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t\left|(t-s)\right|^{\alpha-\gamma-1}y(s)\,ds+ \tag{5.17}$$
$$+\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t\left|(t-s)\right|^{\alpha-1}y(s)ds+\frac{b_0\eta_u|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_0\tau_{uM}{}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\eta_w|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_u|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

За $\forall\theta\in[0,t]$ и сменом $\theta-s\to s'\to s$ у подинтегралним изразима добија се

$$\left\|\boldsymbol{x}(\theta)\right\| \le \left\|\psi_x\right\|_C \left[1+\frac{a_{n2}|\theta|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{a_{n1}|\theta|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right]+\left\|\varphi_x\right\|_C\left[|\theta|+\frac{a_{n1}|\theta|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right]+$$
$$+\frac{a_{n1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^\theta|s|^{\alpha-\beta-1}y(\theta-s)\,ds+\frac{a_{n2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^\theta|s|^{\alpha-\gamma-1}y(\theta-s)\,ds+ \tag{5.18}$$
$$\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\theta|s|^{\alpha-1}y(\theta-s)ds+\frac{b_0\eta_u|\theta|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_0\tau_{uM}{}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\eta_w|\theta|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_u|\theta-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Узимајући у обзир да ненегативна функција $y(t)$ је растућа функција, функције

$\int_0^t|s|^{\alpha-\gamma-1}y(t-s)\,ds,\ \int_0^t|s|^{\alpha-\beta-1}y(t-s)\,ds,\ \int_0^t|s|^{\alpha-1}y(t-s)\,ds,$ су растуће у односу на $t\ge 0$. Осим тога, $\alpha>0,\quad \alpha-\beta>0,\quad \alpha-\gamma>0,\ \theta^\alpha\le t^\alpha,\quad \theta^{\alpha-\beta}\le t^{\alpha-\beta},\ \theta^{\alpha-\gamma}\le t^{\alpha-\gamma},$ следи

$$\int_0^\theta|s|^\omega y(\theta-s)\,ds\le\int_0^t|s|^\omega y(t-s)\,ds,\quad \omega=(\alpha-1,\alpha-\beta-1,\alpha-\gamma-1) \tag{5.19}$$

т.ј.

$$
\begin{aligned}
&\left\|\boldsymbol{x}(\theta)\right\| \le \left\|\psi_x\right\|_C \left[1+\frac{a_{n2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right]+\left\|\varphi_x\right\|_C\left[|t|+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right]+\\
&+\frac{a_{n1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t |s|^{\alpha-\beta-1} y(t-s)\,ds+\frac{a_{n2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t |s|^{\alpha-\gamma-1} y(t-s)\,ds+\\
&+\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |s|^{\alpha-1} y(t-s)ds+\frac{b_0\eta_u|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_0\tau_{uM}{}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\eta_w|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_u|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

Такође, има се

$$
\begin{aligned}
&y(t)=\sup_{\theta\in[-\tau_{xm},t]}\left\|x(\theta)\right\| \le \max\left\{\sup_{\theta\in[-\tau_{xm},0]}\left\|x(\theta)\right\|,\ \sup_{\theta\in[0,t]}\left\|x(\theta)\right\|,\right\}\le\\
&\le\max\left\{\begin{aligned}&\left\|\psi_x\right\|_C,\left\|\psi_x\right\|_C\left[1+\frac{a_{n2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right]+\left\|\varphi_x\right\|_C\left[|t|+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right]+\\
&+\frac{a_{n1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t |s|^{\alpha-\beta-1} y(t-s)\,ds+\frac{a_{n2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t |s|^{\alpha-\gamma-1} y(t-s)\,ds+\\
&+\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |s|^{\alpha-1} y(t-s)ds+\frac{b_0\eta_u|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_0\tau_{uM}{}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\eta_w|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_u|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\end{aligned}\right\}\\
&=\left\|\psi_x\right\|_C\left[1+\frac{a_{n2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right]+\left\|\varphi_x\right\|_C\left[|t|+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right]+\\
&+\frac{a_{n1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-\beta-1} y(s)\,ds+\frac{a_{n2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-\gamma-1} y(s)\,ds+\\
&+\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-1} y(s)ds+\frac{b_0\eta_u|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_0\tau_{uM}{}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\eta_w|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_u|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

Сада, уводи се функција $e(t)$ која је неопадајућа на $J_0=[0,T]$

$$
e(t)=\left\|\psi_x\right\|_C\left[1+\frac{a_{n2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}\right]+\left\|\varphi_x\right\|_C\left[|t|+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}\right].
\tag{5.22}
$$

Применом Леме 3.4, следи:

$$
\begin{aligned}
&y(t)\le e(t)E_\kappa\left[g(t)\left(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha-\gamma)t^{\alpha-\gamma}\right)\right]+\\
&+\frac{\mu_\Sigma}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \left|(t-s)\right|^{\alpha-1} y(s)ds+\frac{b_0\eta_u|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_0\tau_{uM}{}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_u|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\eta_w|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

где су $g(t)=g_1(t)+g_2(t),\, g_1=\dfrac{a_{n1}}{\Gamma(\alpha-\beta)}, g_2=\dfrac{a_{n2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}$ и $\kappa=min(\alpha-\gamma,\alpha-\beta)$. Исто тако, применом Лема 3.3, има се:

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{x}(t)\|\le y(t)\le e(t)E_\kappa\left[g(t)\left(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha-\gamma)t^{\alpha-\gamma}\right)\right]E_\alpha\left(\mu_\Sigma t^\alpha\right)\\
&+\frac{b_0\eta_u|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_0\tau_{uM}{}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_u|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\eta_w|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\\
&\le\rho\left[1+|t|+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}+\frac{a_{n2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right]\cdot\\
&\cdot E_\kappa\left[g(t)\left(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha-\gamma)t^{\alpha-\gamma}\right)\right]E_\alpha\left(\mu_\Sigma t^\alpha\right)+\\
&+\frac{b_0\eta_u|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_0\tau_{uM}{}^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{b_1\eta_u|t-\tau_{uM}|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{c\eta_w|t|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.
\end{aligned}\tag{5.24}$$

Коначно, узимајући у обзир услов Теореме 5.1, добија се тражени критеријум стабилности на коначном временском интервалу ФТС:

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|<\varepsilon,\quad \forall t\in J.\tag{5.25}$$

На основу Теореме 5.1, следи одмах следећи резултат.

Теорема 5.2 Нека х*омогени систем* дат са (5.1), где су сада $\boldsymbol{u}(t)\equiv 0,\quad \boldsymbol{u}(t-\tau_u(t))\equiv 0$ $\forall t\in J_0$, без пертурбације и поремећаја $f(t,x(t))\equiv 0,\quad w(t)\equiv 0$, истовремено задовољава почетну функцију (5.2) је стабилан на коначном временском интервалу у односу на $\{\delta,\varepsilon,J_0,\|(\cdot)\|\},\ \delta<\varepsilon$, ако је следећи услов задовољен:

$$\begin{aligned}
&\left[1+|t|+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}+\frac{a_{n1}|t|^{\alpha-\beta+1}}{\Gamma(\alpha-\beta+2)}+\frac{a_{n2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right]\cdot\\
&\cdot E_\kappa\left[g(t)\left(\Gamma(\alpha-\beta)t^{\alpha-\beta}+\Gamma(\alpha-\gamma)t^{\alpha-\gamma}\right)\right]E_\alpha\left(\mu_\Sigma t^\alpha\right)<\frac{\varepsilon}{\delta},\quad \forall t\in J_0.
\end{aligned}\tag{5.26}$$

Доказ**:** Доказ директно следи из доказа за претходну Теорему 3.1

Теорема 5.3 Нехомогени нелинеарни неутрални систем нецелог реда са временским промењивим кашњењем са два-израза и без члана $A_{N1}{}^{c}\mathrm{D}_t^{\beta}\boldsymbol{x}(t-\tau_{xN1}(t))$, (т.j. $A_{N1}=0$) дат са (5.27) и $0<\gamma\le 1<\alpha\le 2$ при чему је почетна функција (5.2), је *стабилан на коначном временском интервалу* у односу на $\{\delta,\varepsilon,\eta_u,\eta_0,t_0,J,\|(\cdot)\|\},\ \delta<\varepsilon,$ ако је следећи услов испуњен, (5.28):

$$
\begin{aligned}
{}^{c}\mathrm{D}_t^{\alpha}\boldsymbol{x}(t) &= A_0\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-\tau_x(t)) + A_{N2}{}^{c}\mathrm{D}_t^{\gamma}\boldsymbol{x}(t-\tau_{xN2}(t)) \\
&+ B_0\boldsymbol{u}(t) + B_1\boldsymbol{u}(t-\tau_u(t)) + f(t,x(t)) + Cw(t)
\end{aligned} \tag{5.27}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left[1+|t|+\frac{a_{n2}|t|^{\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)}\right]E_{\kappa}\left[\left(\frac{a_{n2}}{\Gamma(\alpha-\gamma)}+\frac{\mu_{\Sigma}}{\Gamma(\alpha)}\right)\left(\Gamma(\alpha-\gamma)t^{\alpha-\gamma}+\Gamma(\alpha)t^{\alpha}\right)\right]+ \\
&+\frac{\eta_{0u}|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\eta_{01}\tau_{uM}{}^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\eta_{0w}|t|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}+\frac{\eta_{1u}|t-\tau_{uM}|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}<\frac{\varepsilon}{\delta}, \quad \forall t\in J_0,
\end{aligned} \tag{5.28}
$$

где је $\kappa = min(\alpha-\gamma,\alpha)$.

Доказ: Доказ је сличан доказу Теореме 5.1 само са применом проширене форме генерализоване Гронвалове неједнакости добија се услов (5.28) у оквиру Теореме 5.3.

Примедба 5.1 Систем (5.27) се може свести на случај из [120], израз (9) за случај *n=1,* $\tau_{N1}=0, A_{N_2}=B_1=0, C=0,$) и на случај приказан у [121], израз (1) узимајући у обзир да је $\tau_{N1}=0, A_{N_2}=B_1=0, C=0, f=0$. Лако се може проверити да добијени критеријуми стабилности (5.8), (5.28) су општијег карактера.

5.3 Нумерички резултати

У овом одељку, да би се демонстрирала ефикасност претходно добијених ФТС резултата, разматра се нехомогени нелинеарни НИТДС са поремећајем (5.29). Овде све ознаке $\|(.)\|$ означавају $\infty -$ норму матрице или вектора.

Пример 4.1 Разматра се нелинеарни неутрални НИТДС (5.29) са временски промењљивим кашњењем по улазу и стању и вишечланим нецелобројним редом $0<\gamma\le 1<\beta<\alpha\le 2$

$$
\begin{aligned}
{}^{c}\mathrm{D}_t^{\alpha}\boldsymbol{x}(t) &= A_0\boldsymbol{x}(t) + A_1\boldsymbol{x}(t-\tau_x(t)) + A_{N1}{}^{c}\mathrm{D}_t^{\beta}\boldsymbol{x}(t-\tau_{xN1}(t)) + A_{N2}{}^{c}\mathrm{D}_t^{\gamma}\boldsymbol{x}(t-\tau_{xN2}(t)) \\
&+ B_0\boldsymbol{u}(t) + B_1\boldsymbol{u}(t-\tau_u(t)) + f(t,x(t)) + Cw(t)
\end{aligned} \tag{5.29}
$$

где су

$$
\begin{aligned}
&A_0=\begin{bmatrix}-0.2 & 0\\ -0.1 & 0.3\end{bmatrix}, A_1=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.1\\ 0 & -0.1\end{bmatrix}, A_{N1}=\begin{bmatrix}0.3 & 0\\ -0.05 & 0.2\end{bmatrix}, A_{N2}=\begin{bmatrix}0.3 & -0.2\\ 0.4 & 0.1\end{bmatrix} \\
&B_0=\begin{bmatrix}0\\ 0.5\end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix}0.5\\ 0\end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix}0.5\\ 0\end{bmatrix}, f(t,x(t))=\begin{bmatrix}0.01\sin x_1(t)\\ 0.01\sin x_2(t)\end{bmatrix}, w(t)=\sin(t)
\end{aligned} \tag{5.30}
$$

и $t_0 = 0, \alpha = 1.5, \beta = 1.1, \gamma = 0.5, \tau_x = \tau_u = 0.1, \tau_{xN1} = \tau_{xN2} = \tau_{xN} = 0.1, \tau_{xm} = 0.1$, са придруженим функцијама: $\psi_x(t) = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, t \in [-0{,}1 \;\; 0]$; $\varphi_x(t) = \begin{bmatrix} 0.07 & 0.07 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, t \in [-0{,}1 \;\; 0]$; $\psi_u(t) = 0.05$, $t \in [-0{,}1 \;\; 0]$. Задатак је анализирати ФТС у односу на $\{\delta = 0.08, \ \varepsilon = 50, \ \eta_u = 1\}$. Од почетних функција и дате једначине стања има се: $\|\psi_x\|_{\mathcal{C}} = \max\limits_{t \in [-0.1, 0]} \|\psi_x(t)\|_\infty = 0.05$, $\|\varphi_x\|_{\mathcal{C}} = 0.07$, $\rho = \max\left\{\|\psi\|_C, \|\varphi\|_C\right\} = 0.07 < \delta = 0.08$ $\|A_0\| = 0.4, \|A_1\| = 0.3, \|A_{N1}\| = 0.3, \|A_{N2}\| = 0.5$, $\|B_0\| = 0.5, \|B_1\| = 0.5, \ \|C\| = 0.5, \ l(t) = 0.01, \ \eta_w = 1.01, \eta_u = 1, \eta_o = 0.06$. Применом услова из Теореме 5.1 може се добити процењено време ФТС-а $T_{\mathrm{e}} \approx 0.8 \ \mathrm{s}$.

Пример 5.2. Разматра се следећи хомогени неутрални НИТДС са временски промењљивим кашњењима стања вишечланог израза нецелог реда $0 < \gamma \le 1 < \beta < \alpha \le 2$

$$ {}^{c}\mathrm{D}_t^{\alpha} \boldsymbol{x}(t) = A_0 \boldsymbol{x}(t) + A_1 \boldsymbol{x}\left(t - \tau_x(t)\right) + A_{N1}{}^{c}\mathrm{D}_t^{\beta} \boldsymbol{x}\left(t - \tau_{xN1}(t)\right) + A_{N2}{}^{c}\mathrm{D}_t^{\gamma} \boldsymbol{x}\left(t - \tau_{xN2}(t)\right) \tag{5.31} $$

где

$$ A_0 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.3 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}, A_{N1} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, A_{N2} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ -0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, \tag{5.32} $$

и $\alpha = 1.75, \beta = 1.5, \gamma = 0.75, \tau_x = 0.15, \tau_{xm} = 0.15, \ \tau_{xN1} = \tau_{xN2} = \tau_{xN} = 0.15$, са придруженим функцијама: $\psi_x(t) = \begin{bmatrix} 0.03 & 0.03 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, t \in [-0.15 \;\; 0]$; $\varphi_x(t) = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, t \in [-0.15 \;\; 0]$; Такође, из почетних функција и дате једначине стања израчунава се : $\|\psi_x\|_{\mathcal{C}} = 0.03$, $\|\varphi_x\|_{\mathcal{C}} = 0.05$, $\rho = \max\left\{\|\psi\|_C, \|\varphi\|_C\right\} = 0.05 < \delta = 0.06$. Очигледно је да су $\|A_0\| = 0.2, \|A_1\| = 0.4, \ \|A_{N1}\| = 0.5$, $\|A_{N2}\| = 0.4$. Ако узмемо да је $\delta = 0.06$ и $\varepsilon = 100$ онда важи услов (5.28) теореме 5.2 важи за $T_{\mathrm{e}} \approx 0.328 \ \mathrm{s}$ тако да можемо добити процењено време ФТС-а.

6. Закључак и научни доприноси докторске дисертације

Предмет истраживања ове докторске дисертације је динамичко понашање на коначном временском интервалу одређене класе механичких линеарних/ нелинеарних система нецелог/целог реда са чистим временским кашњењем присутним у стању и/или управљању система са посебним акцентом на решавање проблема стабилности на коначном временском интервалу истих. При томе разматрани су механички системи типа инверзног клатна (балансирање људског тела у сагиталној равни) као и један пригушни механички систем са кашњењем заснованог на *Scot-Blair*-овом моделу где је примењен одговарајући вискоеластични материјал. Приликом испитивања динамичког понашања, управљања односно формирања математичког модела истих, примењен је савремени фракциони рачун (рачун нецелог реда) који привлачи пажњу и заузима све више место у истраживањима многих научника и истраживача у свету.

На основу свега горе предоченог и наведеног, можемо овде навести и издвојити као кључне доприносе ове докторске дисертације следеће:

- Решавање проблема стабилизације механичког система -људског тела у задатку балансирања у сагиталној равни који се може моделовати као инверзно клатно. За његову стабилизацију око нестабилног положаја вертикалне равнотеже примењено је по први пут ПДД2 управљање нецелог реда које укључује и чисто временско кашњење у повратној грани. Посебно је испитана стабилност на временском интервалу одговарајућег затвореног неутралног система нецелог реда са временским кашњењем где је добијен нови критеријум стабилности уз добијања довољних услова. Такође, испитана је стабилност на временском интервалу одговарајућег затвореног неутралног система целог реда са временским кашњењем где је сада примењено ПДД2 управљање целог реда које укључује и чисто временско кашњење у повратној грани.
- Примењена је и адекватна анализа стабилности инверзног клатна у задатку балансирања људског тела у сагиталној равни методом Д-разлагања. При томе, метода Д-разлагања је примењена на класу линеарних неутралних диференцијално-диференцних једначина нецелог реда са чистим временским кашњењем. За испитивање стабилности система узет је и разматран утицај параметара (Kp, Kd, β) на стабилност система где су појачање K_a као и нецели ред γ као и временско кашњење τ су унапред задата и позната. Потврду изведене анализе стабилности је показана и доказана кроз одговарајућу нумеричку симулацију.
- Испитивање стабилности на коначном временском интервалу још једног фракционог механичког пригушног система са кашњењем заснованог на *Scot-Blair*-овом моделу где је примењен вискоеластични материјал који има за циљ

смањење нежељних вибрација у датом систему. У циљу пригушења нежељених вибрација уводи се управљање у повратној спрези са кашњењем који укључује први и други извод померања истог. При томе, формиран је нови критеријум за испитивање стабилности на коначном временском интервалу затвореног неутралног система нецелог реда са кашњењем. Посебно је проучаван случај $\alpha = 1/2$ где је показана могућност еквивалентирања почетног неутралног система другог реда у други неутрални систем нецелог реда $\alpha = 1/2$.

- Формирање нових критеријума робусне стабилности на коначном временском интервалу који су по први пут добијени за дату класу неутралног система нецелог реда $0 < \beta < \alpha < 1$ са временски променљивим кашњењима. Прво је испитивана робусна стабилност на коначном временском интервалу неутралног система нецелог реда са временски променљивим кашњењима и неизвесношћу где су довољни услови стабилности добијени применом генерализоване Гронвалове неједнакости. Такође, истраживања су била посвећена и проблематици робусне стабилности на коначном временском интервалу неутралног система са временски променљивим кашњењем нецелог реда са нелинеарним несигурностима параметара и пертурбацијама. На крају дати су и одговарајући нумерички примери који потврђују исправност предложеног приступа.
- Испитивање стабилности на коначном временском интервалу један неутрални вишечлани систем нецелог реда $0 < \gamma \leq 1 < \beta < \alpha \leq 2$ са временски променљивим кашњењима. Добијени су нови критеријуми стабилности на коначном временском интервалу датог неутралног вишечланог система нецелог реда са временски променљивим кашњењима. Показана је супериорност и општост добијеног критеријума у односу на одговарајуће познате критеријуме стабилности. Једним еклататним нумеричким примером добијена је потврда претходно изведених теоријских резултата.

Литература

[1] М.Лазаревић Д. Дебељковић, Д. Крстић, Оптимално управљање системима са кашњењем у процесној индустрији, ТМФ-факултет, Београд, 2003.

[2] Д. Љ. Дебељковић,С. А. Милинковић, Стојановић, Б.С, Стабилност система са чистим временским кашњењем на коначном и бесконачном временском интервалу, Чигоја штампа, Београд, 2005.

[3] Francesco Amato Roberto Ambrosino Marco Ariola Carlo Cosentino Gianmaria De Tommas, Finite-Time Stability and Control, Springer-Verlag London 2014.

[4] С. Стојановић, М. Лазаревић, Д. Љ. Дебељковић, Д. Антић, Стабилност и робусност посебних класа аутоматског управљања на коначном временском интервалу, II део, 2019, Технолошки факултет у Лесковцу, Универзитет у Нишу.

[5] E. Fridman, Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control,ISBN 978-3-319-09392-5 , DOI 10.1007/978-3-319-09393-2 Springer International Publishing Switzerland 2014.

[6] Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press; 1999 https://www.elsevier.com/books/fractional-differential-equations/podlubny/978-0-12-558840-9

[7] A. Kochubei, Y.Luchko, Eds, Handbook of Fractional Calculus with Applications, Volume 1: Basic Theor*y,* Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2019.

[8] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I. Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications*.* Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.

[9] M.Lazarević, Finite Time Stability Analysis of PD^{α} Fractional Control of Robotic Time Delay Systems*,* Journal of Mechanics Research Communications,Vol. 33, Iss.2, March-Apr., 2006, pp.269-279.

[10] M.Lazarević, A.Spasić, Finite-Time Stability Analysis of Fractional Order Time Delay Systems:Gronwall`s Approach*,* Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49,(2009), 475-481.

[11] Lazarević, M., Bučanović, Lj.: Prilog modeliranju i dinamickoj analizi sistema necelobrojnog reda sa osnovama racuna necelobrojnog reda, Mašinski fakultet, Beograd, 2012.

[12] M.Lazarević, Editor of, Advanced Topics on Applications of Fractional Calculus on Control Problems, System Stability And Modeling, WSEAS, ID 9028,ISBN: 978-960-474-348-3, pp. 202,2014.

[13] Baleanu D.Kumar D., Singh H., Methods of mathematical modelling fractional differential equations, CRC Press Taylor & Francis Group,2020.

[14] Tian, Y.; Yu, T.; He, G.T.; Zhong, L.F.; Stanley, H.E. The resonance behavior in the fractional harmonic oscillator with time delay and fluctuating mass. Phys. Stat. Mech. Appl. 545, 123731,2020.

[15] Xu Q., M.Shi, Z.Wang, Stability and delay sensitivity of neutral fractional-delay systems, Chaos 26, 084301,doi: 10.1063/1.4958713,2016.

[16] Denghao P., J. Wei, Finite-time stability of neutral fractional time-delay systems via generalized Gronwalls inequality, Abstr. Appl. Anal. 2014 1–4, p. 610547,2014.

[17] Liu K.Wei,Jiang Wei, Finite time stability of fractional order neutral differential equations, Journal of Mathematics, Vol. 34, Iss.1, p.43-50, 2014.

[18] Du F., J-G Lu, Finite-time stability of neutral fractional order time delay systems with Lipschitz nonlinearities, Applied Mathematics and Computation 375, 125079, https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125079, 2020.

[19] La Salle, S. Lefschet, Stability by Lyapunov's Direct Method, Acad.Press, New York, 1961

[20] Weiss, L., F. Infante, On the Stability of Systems Defined over Finite Time Interval, Proc. National Acad. Science 54(1), pp. 44-48, 1965.

[21] Lashirer, A. M., C. Story, Final-Stability with Applications, J. Inst. Math. Appl., **9**, 379-410, 1972.

[22] Grujić, Lj. T., Non-Lyapunov Stability Analysis of Large-Scale Systems on Time-Varying Sets. Int. J. Control 21(3), pp.401-405, 1975a.

[23] Grujić, Lj. T., Practical Stability with Settling Time on Composite Systems, Automatika(YU), TP. 9,1,1975b.,

[24] Amato, F., Ariola, M., & Dorato P. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances. Automatica, 37(9), 1459–1463, 2001.

[25] Ambrosino, R., Calabrese, F., Cosentino, C., & Tommasi, G. D.,Sufficient conditions for finite-time stability of impulsive dynamical systems. IEEETransactions on Automatic Control, 54(4), 861–865, 2009.

[26] Lazarević, M. P., Debeljković, D. L. Finite time stability analysis of linear autonomous fractional order systems with delayed state. Asian Journal of Control, 7(4), 440–447,2005

[27] Nersesov, S. G., Haddad, W. M., & Hui, Q. Finite time stabilization of nonlinear dynamical systems via control vector Lyapunov functions. Journal of the Franklin Institute, 345 (7), 819–837, 2008.

[28] Nenadić, Z. Lj., Sinteza kontinualnog automatskog upravljanja na konačnom vremenskom intervalu za objekte i procese sa kašnjenjem, Dipl. rad, Katedra za automatsko upravljanje, Mašinski fakultet, Beograd (1995).

[29] Hsiao, F. H. and J. D. Hwang ,Stabilization of Nonlinear Singularly Perturbed Multiple Time Delay Systems by Dither, Trans. ASME J. of Dynamic Systems, Measurement and Control, 118 (3), (1996) 177–181.

[30] Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Praktična stabilnost jedne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenje”, Zbornik radova HIPNEF ‘96, Vrnjačka Banja, 5–7 jun (1993.a) 197–204.

[31] Nenadić, Z. Lj., D. Lj. Debeljković, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Stabilnost na konačnom vremenskom intervalu jedne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem, Tehnika – E, 45 (11-12) (1993.b) E1–E7.

[32] Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, On Practical Stability of Time–Delay Systems: New Results, *Proc.* 2nd *ASCC* 97, Seoul (Korea), July 22–25, (1997.a) pp. III–543–543.

[33] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, Finite time stability for the metal strips cold rolling, *Proc.* ASI, Kyongju (Korea), July 16 – 18, (1997.b) pp. 233 – 238.

[34] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. Tomašević, On practical stability of time delay systems under perturbing forces, *Proc.* AMSE Conference, Melbourne (Australia), October 29 – 31, (1997.c) pp. 442 – 446.

[35] Debeljković, D. Lj., Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, M. B.. Jovanović, On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval, *Proc*. *CDC* 97, San Diego, California (USA), December 21–23, (1997.d) pp. 2771–2772.

[36] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, Further results on non-Lyapunov stability of time delay systems, *Proc.* MELECON 98, Tel-Aviv (Israel), May 18 - 20, Vol.1, (1998.a) pp. 509 – 512.

[37] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Non - Lyapunov stability analysis of linear time delay systems, *Preprints* DYCOPS 5, 5th IFAC Symposium on Dynamics and Process Systems, Corfu (Greece), June 8–10, (1998.b) pp. 549 - 553.

[38] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Finite Time Stability Analysis of Linear Time Delay Systems: Bellman–Gronwall Approach, *Proc.* 1st *IFAC Workshop on Linear Time Delay Systems*, Grenoble (France) July 6–7, (1998.c) pp. 171–173.

[39] Debeljković, D. Lj., S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jacić, Đ. Koruga, Further results on Non - Lyapunov stability of time delay systems, *Preprints* 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation, Shenyang (China), September 8 - 10 (1998.d), pp. TS13 6 - 10.

[40] Debeljković, D. Lj., Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Lj. A. Jaci, Further results on Non - Lyapunov stability of linear systems with delayed state, *Proc*. XII CBA - Brazilian Automatic Control Conference, Uberlandia (Brazil), September 14 - 18 (1998.e), Vol. IV, pp. 1229 - 1233.

[41] Debeljković, D. Lj., M. P. Lazarević, Đ. Koruga, S. A. Milinković, M. B. Jovanović, Further Results on the Stability of Linear Nonautonomous Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval, *Proc*. ***ACC*** 2000, Chicago Illinois (USA), June 28–30, (2000) 1450–1451.

[42] Lazarević, M. P., D. Lj. Debeljković, Z. Lj. Nenadić, S. A. Milinković, Finite Time Stability of Time Delay Systems, *IMA J. Math. Control and Info.,* 16 (3) (1999).

[43] Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović T. Nestorović, D. Popov, On Finite and Practical Stability of Time Delayed Systems: Lyapunov - Krassovski Approach:

Delay Dependent Criteria, Proc. The 23 rd, Chinese Control and Decision Conference CCDC 2011, Mianyang, (China), 23 – 25 May , (2011.b) 331 – 337, also CD-Rom.

[44] Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović T. Nestorović, D. Popov, On Finite Time Stability and Asymptotic Practical Stability of Time Delayed Systems: New Delay Dependent Criteria , Proc. Chinese Control Conference CCDC 2011, Yantai, (China), 24 – 26, June (2011.c) pp. 1058 – 1065, also CD-Rom.

[45] Stojanović, S.B., Debeljković, D.Lj., Antić, D.S.: Finite time stability and stabi-lization of linear time delay systems,Facta Universitatis, Ser: Autom. ControlRob., 2012,11, (1), pp. 25–3618

[46] Stojanović, S.B., Debeljković, D.Lj., Antić, D.S.: Robust finite-time stability andstabilization of linear uncertain time-delay systems, Asian J. Control, 2013,15,(5), pp. 1548–1554

[47] Buzurović, I. M., D. Lj. Debeljković, D. M. Radojević, G. V. Simeunović, Asymptotic stability of singular time delay systems: Lyapunov's approach based on Jensen's and Coppel's inequality, Book. of Abstracts, International Conference of Experimental and Numerical Investigation and New Technologies, Zlatibor, (Serbia), July 04 – 06, 2018, Book of Abstracts, pp. 21, CD-Rom, Innovation Center of Faculty of Mechanical Engineering, ISBN 978-86-7083-979-3, https://www.researchgate.net/ project/ International Conference of Experimental and Numerical Investigations and New Technologies.

[48] Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, G. V. Simeunović, M. A. Misić, Asymptotic Practical Stability of Time Delay Systems, Proc. of 10 th International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, (Serbia), 23 – 26 September, (2012.b), 119 – 124, also CD – Rom.

[49] Debeljković, D. Lj. S. B. Stojanović, M. P. Lazarević, T. Nestorović, G. V. Simeunović, " On Practical Stability of Time Delayed Systems: Delay Independent and Delay Dependent Criteria ", *Proc. AADECA* 2012, 23^0 Congreso Argentino Control Automatico, 3 – 5 October (2012.c), Buenos Aiers, (2012.c) also CD – Rom.

[50] Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, A. M. Jovanović, N. J. Dimitrijević, G. V. Simeunović, Delay-Dependent Conditions for Finite Time Stability of Continuous

Systems with Latency, *Proc*. of 10 *th* International Symposium on Intelligent Systems and Informatics, Subotica, (Serbia), 23 – 26 September, (2013.d), 161 – 166, also CD – Rom

[51] Dimitrijević N. J., D. Lj. Debeljković, G. V. Simeunović, D. M. Radojević, Further Results on Finite Time Stability of Continuous Time Delay Systems: Basic Algebraic Approach, Proc. International Scientific Conference, 17–19 December 2017, Bansko, Bulgaria, pp. 2303–2310, http://ibsedu.bg/media/Conference/2017/

[52] Debeljković, Lj. D, I. M. Buzurović, G. V. Simeunović, D. M. Radojević, Improved Results on Finite Time of Time Delay Systems: Jensen's Inequality based Approac*h*, Tehnika Masinstvo (Serbia), Vol. 67, No. 1 (2018) pp. 78–86, https:// doi.org//10.5937/tehnika1801076D

[53] Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, N. J. Dimitrijević, M. A. Misić, Finite Time Stability of Continuous Time Delay Systems: Jensen's Inequality-based Approach, *Proc.* of The 9 th IEEE Conference on Industrial Electronics and Application (ICIEA 2014.a), June 09 – 11, Hangzhou (China), CD – Rom, pp. 24 – 30.

[54] Debeljković, D. Lj., I. M. Buzurović, N. J. Dimitrijević, G. V. Simeunović, On Finite Time Instability of Continuous Time Delay System" *Proc.* of The 9 th IEEE Conference on Industrial Electronics and Application (ICIEA 2014.b), June 09 – 11, Hangzhou (China), CD – Rom, pp. 1416 – 1421

[55] T. Nestorović, D. Lj. Debeljković, D. M. Radojević, G. V. Simeunović, Discrete time delayed system stability theory in the sense of non-lyapunov: delay independent and delay dependent approach, Book. of Abstracts, International Conference of Experimental and Numerical Investigation and New Technologies, Zlatibor, (Serbia), July 02–05, 2017, https://www.researchgate.net/project/International Conference of Experimental and Numerical Investigations and New Technologies

[56] Buzurović, I. M., D. Lj. Debeljković, M. Sedak, D. M. Radojević, Finite- Time Stability Analysis of Descriptor Discrete Time Delay Systems using Discrete Convolution of Delayed States, Proc. 14 th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, (ICARCV) - 2016, Phuket (Thailand), 13-15, November, (2016), pp. Tu 24.5, ISSN 978-1-5090-3549-6/16/$31.00© 2016 IEEE, http://icarcv.org/2016/home.asp

[57] Buzurović, I. M., S. B. Stojanović, D. Lj. Debeljković, D. M. Radojević, Novel Delay Dependent Conditions for Non_Lyapunov Stabilty of Singular Time Delay Systems, Proc. Chinese Control and Decision Conference CCDC 2016, Yinchuan (China), 28-30, May, (2016), pp. 1071-1075, ISSN 978-1-9714-7016-8/16/$31.00© 2016 IEEE, http://www.ccdc.neu.edu.cn/

[58] Nestorović, T., D. Lj. Debeljković, D. M. Radojević, G. V. Simeunović, On Stability of Time Varying Delay Singular Systems over the Finite Time Interval, Book. of Abstracts, International Conference of Experimental and Numerical Investigation and New Technologies, Zlatibor, (*Serbia),* July 02–05, 2017, https://www.researchgate.net/project/ International Conference of Experimental and Numerical Investigations and New Technologies.

[59] Buzurović, I. M., D. Lj. Debeljković, M. Sedak, D. M. Radojević, Further Results on Finite-time Stability of Continuous Singular Time Delay Systems, The 12th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications (ICIEA 2017), Siam Reap (Cambodia), June18-20, (2017), ISBN 978-1-5090-6161-7, http://www.ieeeiciea.org/2017/

[60] Torvik, P. J. R. L. Bagley,On the appearance of the fractional derivatives in the behaviour of real materials, J. Appl. Mech. (Trans SME), Vol. 51, (1984) 294-298.

[61] Mainardi, F., Fractional Relaxation-Oscillation and Fractional Diffusion-Wave Phenomena, Chaos, Solitons & Fractals Vol.7 No.9, (1996) 1461-1477.

[62] Podlubny, I. Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego 1999

[63] R.Barbarosa, J.Machado, Fractional Describing Function Analysis of Systems with Backlash and Impact henomena, (2002),INES 2002, 6th Int.Conference on Int.Eng. Sys. 2002, pp.521-526, May 2002, Opatija, Croatia.

[64] Spasić, A. M., M. P. Lazarević, Electrovisco-elasticity of Liquid-Liquid Interfaces: fractional-order model (New constitutive models of liquids), *Lectures in rheology*, Department of Mechanics, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, 2004.

[65] Spasić, A, M. P. Lazarević, D. Krstić, Chapter: Theory of electroviscoelasticity, 371-394 in Finely Dispersed Particles: Micro-Nano-and Atto-Engineering, Dekker CRC Press - Taylor & Francis, Florida, 950. 2005.

[66] Spasić, A. M *et al* , Electroviscoelasticity of Liquid-Liquid Interfaces in A. V. Delgado Interfacial Electrokinetics and Electrophoresis, Marcel Dek., NY, Chapter 30. 2001.

[67] Ji, J.C., Stability of bifurcation in an electromechanical system with time delays. Mech. Ress. Commun. 30, 217-225, 2003.

[68] Park J. Y., Chang P. H.,Enhanced Time Delay Control and Its Applications to Force Control of Robot Manipulators, Spec. Issu. Auto. Robots: Rehabilitation Robotics (2003).

[69] Matignon, D., Stability result on fractional differential equations with applications to control processing, In IMACS - SMC Proceeding, July, Lille, France, (1996) 963-968.

[70] Matignon, D., Stability properties for generalized fractional differential systems, ESAIM: Proceedings, 5: (1998) 145 – 158,

[71] Machado, J.T., Kiryakova, V., Mainardi, F. Recent history of fractional calculus. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 16(3):1140-1153, 2011.

[72] Laplace P.S. Theorie analytique des probabilites, Imprimeur-Libraire pour les Mathematiques, Paris, 85-156, 1820.

[73] Lacroix S.F. Traite du calcul differentiel et du calcul integral, Imprimeur-Libraire pour les sciences, Paris, 409-410, 1819.

[74] Fourier J.,Théorie analytique de la chaleur, Paris, 1822.

[75] Liouville, J. Memoire sur quelques questions de geometrie et de mecanique, et sur un noveau genre de calcul pour resoudre ces questions. J. l'Ecole Roy. Polytechn., 13, Sect. 21, 1-69, 1832a.

[76] Liouville, J.,Memoire sur le calcul des differentielles a indices quelconques. J. l'Ecole Roy. Polytechn., 13, Sect. 21, 71-162, 1832b.

[77] Liouville J. Memoire sur le theoreme des fonctions complementaires. J. f ur reine und angew. Math., 11:1-19, 1834.

[78] Laurent H., Sur le calcul des derivees a indicies quelconques. Nouv. Annales de Mathematiques, 3(3):240-252, 1884.

[79] Grunwald A. K, Uber "begrenzte" Derivationen und deren Anwendung. Zeit. fur Mathematik und Physik 12 , 441-480, 1867.

[80] Letnikov A. V. Theory of differentiation with an arbitrary index (Russian), Moscow, Matem. Sbornik, 3:1-66, 1868.

[81] Letnikov A. V., An explanation of the concepts of the theory of differentiation of arbitrary index (Russian), *Moscow Matem. Sbornik*, 6:413-445, 1872.

[82] Caputo M., Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Part II. J Roy Austral Soc.;13:529-539, 1967.

[83] Caputo, M. Elasticit´a e Dissipazione. Zanichelli, Bologna, 1969.

[84] Rabotnov Y.N., Creep problems in structural members. North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, 7, 1969. Originally published in Russian as: Polzuchest Elementov Konstruktsii, Nauka, Moscow, 1966.

[85] Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I. Fractional Integrals and Derivatives - Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 1993.

[86] A. Kochubei, Y.Luchko,Eds, Handbook of Fractional Calculus with Applications,Volume 1: Basic Theory,Walter de Gruyter GmbH, Berlin/Boston, 2019.

[87] Lazarević, M. P., Debeljković, D. L. Finite time stability analysis of linear autonomous fractional order systems with delayed state. Asian Journal of Control, 7(4), 440–447, 2005

[88] Lazarević, M.P., Lj.D. Debeljković, Z.Lj. Nenadić, S.A. Milinković, Finite time stability of time-delay systems. IMA J. Math. Cont. Inf. 17, 101-109, 2000.

[89] Lazarević, P.M.: Further results on finite time stability of nonautonomous fractional order time delay systems, IFNA-ANS Journal Problems of nonlinear analysis in engineering systems, No.1(27), Vol.13, 2007b, pp.123-148, ISSN 1727-687X, (in Russian and English).

[90] Lazarević M., Finite-time stability analysis of fractional order time delay systems: bellman-gronwall`s approach,Scientific Technical Review, Vol.LVII, No.1, pp.8-15, 2007c.

[91] Lazarević M., D. Debeljković, Robust Finite Time Stability of Nonlinear Fractional Order Time Delay Systems, International Journal of Information and Systems Sciences, Vol.4.No.2, 2008, pp.301-315.

[92] Lazarević M., D. Debeljković, Robust Finite Time Stability of Perturbed Nonlinear Fractional Order Time Delay Systems, IFAC Workshop, Ismir,Turkey, May, p.375-382, 2007a

[93] Lazarević M., A.Spasić, Finite-Time Stability Analysis of Fractional Order Time Delay Systems: Gronwall`s Approach, Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49, pp. 475-481.

[94] Lazarević M.P, Non-Lyapunov Stability and Stabilization of Fractional Order Systems Including Time-Varying Delays, Recent Research in System Science, Proc. of the 15th WSEAS Int. Conf. on Systems (Part of 15th WSEAS CSCC Multiconference), Corfu, 14-16, July, pp.196-201., 2011.

[95] M.Lazarević, Further Results on Finite Time Partial Stability of Fractional Order Time Delay Systems, 6th Workshop on Fractional Differentiation and Its Applications Part of 2013 IFAC Joint Conference SSSC Grenoble, France, February 4-6, 2013, pp.155-160, IFAC - papers on line: DOI:10.3182/20130204-3-FR-4032.00223

[96] Lazarević, M. P. D. Lj. Debeljković, et al., Advanced Topics on Applications of Fractional Calculus on Control Problems, System Stabilty and Modeling, - Chapter 5 : Editiors. V. Mladenov, N. Mastorakis, WSEAS Press, 2014, ISBN 978 – 960 – 474 – 348 - 3.

[97] Misljen M., M.Lazarević, Non-Lyapunov Stability of the Fractional-Order Time-Varying Delay Systems, Scientific Technical Review, 2015,Vol.65,No.3,pp.8-18

[98] Zhang X. Some results of linear fractional order time-delay system, Applied Mathematics and Computation 197, 407–411,2008.

[99] Hale J.K and S. M. Verduyn Lunel, Introduction to Functional-Differential Equations, vol. 99 of Applied Mathematical Sciences, Springer, New York, NY, USA, 1993.

[100] F. Wanga, D Chen, X. Zhang, Y. Wub,Finite-time stability of a class of nonlinear fractional-order system with the discrete time delay, International Journal of Systems Science, 2016, http://dx.doi.org/ 10.1080/ 00207721.2016.1226985.

[101] M. Li, J.R. Wang, Finite time stability of fractional delay differential equations,Applied Mathematics Letters 64 (2017) 170–176

[102] Li M, Wang J. Finite time stability and relative controllability of Riemann-Liouville fractional delay differential equations. Math Meth Appl Sci. 2019;42:6607-6623. https://doi.org/10.1002/mma.5765

[103] F. Du, B. Jia, Finite-time Stability of Nonlinear Fractional Order Systems with a Constant Delay, Journal of Nonlinear Modeling and Analysis,Volume 2, Number 1, March 2020, 1-13

[104] F. Du, J.G Lu, New Criterion for finite-time stability of fractional delay systems, Applied Mathematics Letters, Volume 104, June 2020, 106248

[105] A. Ben Makhlouf, A novel finite time stability analysis of nonlinear fractional-order time delay systems: A fixed point approach, Asian Journal of Control, 2021 https://doi.org/10.1002/asjc.2756

[106] L. Zhang and G. Stepan, Exact stability chart of an elastic beam subjected to delayed feedback. Journal of Sound and Vibration. 367 (2016) 219-232. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.01.002

[107] K. Patanarapeelert, T.D. Frank, R. Friedrich, P.J. Beek, I.M. Tang, A data analysis method for identifying deterministic components of stable and unstable time-delayed systems with colored noise, Physics Letters A 360 (2006) 190–198.

[108] Gopalsamy, K. and Zhang, B. G. (1988). On a neutral delay logistic equation. Dynamics and Stability of Systems: An International Journal, 3-4(2):183–195.

[109] I. Mancisidor, A. Pena-Sevillano, Z. Dombovari, R. Barcena, J. Munoa, Delayed feedback control for chatter suppression in turning machines, Mechatronics, Volume 63, November 2019, 102276 https://doi.org/10.1016/j.mechatronics.2019.102276

[110] T. Insperger, J.G. Milton and G. Stepan, Acceleration feedback improves balancing against reflex delay. J. R. Soc. Interface 10 (2013) 20120763. https://doi.org/10.1098/rsif.2012.0763

[111] L. Zhang, G. Stepan and T. Insperger, Saturation limits the contribution of acceleration feedback to balancing against reaction delay. J. R. Soc. Interface 2018 (2018) 20170771. https://doi.org/10.1098/rsif.2017.0771

[112] A. Domoshnitsky, S. Levi, R. H. Kappel, E. Litsyn,R. Yavich, Stability of neutral delay differential equations with applications in a model of human balancing, Math. Model. Nat. Phenom. 16 (2021) 21 https://doi.org/10.1051/mmnp/2021008

[113] Xu Q., M.Shi, Z.Wang, Stability and delay sensitivity of neutral fractional-delay systems, Chaos 26, (2016), 084301,https://doi.org/10.1063/1.4958713

[114] E. Fridman, Introduction to Time-Delay Systems: Analysis and Control,ISBN 978-3-319-09392-5 , DOI 10.1007/978-3-319-09393-2 Springer International Publishing Switzerland 2014

[115] Liu K.W.Jiang W., Finite time stability of fractional order neutral differential equations, Journal of Mathematics, vol.34,no1. pp.43-50.2014.

[116] P. Denghao, J. Wei, Finite-Time Stability of Neutral Fractional Time-Delay Systems via Generalized Gronwalls Inequality,Vol.2014 |Article ID 610547 | https://doi.org/ 10.1155/ 2014/610547

[117] Z.Li, G. Cunchen, R. Qifeng, Robust finite-time stability of neutral fractional time-delay systems, (2021),Vol.49, No.3 Journal of Shanghai Normal University, pp.344-360. doi： 10.3969/J.ISSN.1000-5137.2020.03.010

[118] F. Du, J-G Lu, Finite-time stability of neutral fractional order time delay systems with Lipschitz nonlinearities, Applied Mathematics and Computation 375, (2020) 125079, https://doi.org/ 10.1016/j.amc.2020.125079

[119] J. Ren, C. Zhai, Stability analysis of generalized neutral fractional differential systems with time delays, Applied Mathematics Letters 116 (2021) 106987, https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106987

[120] G. Arthi, N. Brindha and Yong-Ki Ma, Finite-time stability of multiterm fractional nonlinear systems with multistate time delay, Advances in Difference Equations, (2021) 2021:102 p.1-15, https://doi.org/10.1186/s13662-021-03260-9

[121] Arthi G., Brindha N. and Baleanu D. (2022) Finite-time stability results for fractional damped dynamical systems with time delays, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 27(2), pp. 221-233. doi: 10.15388/namc.2022.27.25194. DOI:https://doi.org/10.15388/namc.2022.27.25194

[122] Loram ID, Lakie M. 2002 Direct measurement of human ankle stiffness during quiet standing: the intrinsic mechanical stiffness is insufficient for stability. J. Physiol. 545, 1041–1053. (doi:10.1113/jphysiol.2002.025049)

[123] Vette AH, Masani K, Nakazawa K, Popovic MR. 2010 Neural-mechanical feedback control scheme generates physiological ankle torque fluctuation during quiet stance. IEEE Trans. Neural. Syst. Rehabil. Eng. 18, 86–95. (doi:10.1109/tnsre.2009.2037891)

[124] L.Zhang, G.Stepan, T.Insperger,Saturation limits the contribution of acceleration feedback to balancing aganist reaction delay. J.R.Soc Interface 2018, Jan; 15(138): 20170771, doi: 10.1098/rsif.2017.0771

[125] Ye., J.Gao., Y. Ding., A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation, J. Math. Anal. Appl. (2007), 328, 1075–1081. DOI:10.1016/J.JMAA.2006.05.061

[126] Sheng J., W. Jiang, Existence and uniqueness of the solution of fractional damped dynamical systems, Advances in Difference Equations, (2017) 1-16, 2017. https://doi.org/10.1186/s13662-016-1049-2

[127] Y.I. Neimark, On the problem of the distribution of the roots of polynomials, Dokl. Akad. Nauk SSSR. 58 (1947) 357–360.

[128] Y.I. Neimark, D-decomposition of the space of the quasipolynomials, Appl. Math. Mech. 13 (1949) 349–380.

[129] H. Khalil, Nonlinear Systems, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2002.

[130] F. Mainardi, Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity (Imperial College Press, London, 2010).

[131] X.-F. Zhou, J.Wei, and L.-G. Hu, Controllability of a fractional linear time-invariant neutral dynamical system, AppliedMathematics Letters, vol. 26, no. 4, pp. 418–424, 2013.

[132] Lazarević P.M., D. M. Radojević, S. Pišl, G. Maione, „Robust finite-time stability of uncertain neutral nonhomogeneous fractional-order systems with time-varying delays“, Theoretical and Applied Mechanics, Serbia, 2020. Vol.47 (2020) Issue 2, 241–255.

[133] Lazarević P.M., D. M. Radojević, G. Maione, S. Pišl, Finite-time stability of neutral fractional-order time varying delay systems with nonlinear parameter uncertainties and perturbations, 8th International Congress of Serbian Society of Mechanics Kragujevac, ISBN 978-86-909973-8-1 Serbia, June 28-30, 2021, pp.652-661.

[134] D. M. Radojević, M. P. Lazarević, Further results on finite-time stability of neutral nonlinear multi-term fractional order time-varying delay systems, Filomat 36:5 (2022), 1775–1787, https://doi.org/10.2298/FIL2205775R

[135] C. Liang, W.Wei, J.Wang, Stability of delay differential equations via delayed matrix sine and cosine of polynomial degrees, Adv. Difference Equ., (2017) (1):1–17, https://doi.org/10.1186/s13662-017-1188-0.

Биографски подаци кандидата

Кандидат Дарко Радојевић је рођен у Београду 10. новембра 1976. године, од оца Мирослава Радојевића и мајке Мирјане Радојевић.
Основну школу „Радоје Домановић“ на Новом Београду завршио је 1991. године а Девету гимназију „Михаило Петровић Алас“ на Новом Београду 1995. године. Дипломирао на Факултету организационих наука у Београду, на одсеку за индустријско инжењерство, а на истом факултету завршио и мастер студије 2008. године са просечном оценом 9,86.

Докторске студије је уписао школске 2012/2013 године на Машинском факултету, Универзитета у Београду, где је положио све испите предвиђене Планом и Програмом усавршавања са просечном оценом 9,50. Радни наслов докторске дисертације гласи: „Стабилност посебних класа механичких система нецелог и целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу“, ментор проф. др Михаило Лазаревић, Катедра за Механику.

Први рад под називом „Novel Delay Dependent Conditions for Non Lyapunov Stabilty of Singular Time Delay Systems“ објављен је на конференцији у Кини 2016. године, Chinese Control and Decision Conference CCDC 2016, Yinchuan (Kina). У периоду од 2016. до 2022. године објавио је више научних радова на домаћим и иностраним конференцијама односно часописима. Последњи рад је објављен 2022. године, у интернационалном часопису ФИЛОМАТ, под насловом „Further Results on Finite-Time Stability of Neutral Nonlinear Multi-Term Fractional Order Time-Varying Delay Systems“.

У својој радној каријери између осталог бавио се инжењерингом, пројектовањем, анализом и оптимизацијом производних линија и процесне опреме у индустрији, израдом модела оптимизације оперативне припреме производње, организацијом одржавања и управљањем техничим системом објекта који укључује процесне, хидро и термотехничке системе, координатор на пројекту израде и имплементације апликативних/софтверских система кроз фазно увођење нових решења као и израдом, имплементацијом и развојем контакт центара.

Одслужио је редован војни рок 2003. године. Вишегодишњи инструктор у борилачким вештинама, шидоши ратничке вештине Нинђуцу, чланство у професионалном удружењу Bujinkan Dojo Honbu - Noda City Japan (Ninjutsu Martal Art). Током свог школовања и професионалног усавршавања похађао и завршио велики број професионалних курсева: MCSA Microsoft, AutoCAD, Windows Server 2003, ISA Server, SQL, Visual Basic, Primavera Project Planner, Monte Carlo, LaTeX, QuarkXPress, Проактивно вођење продаје Модул I и II, више нивоа енглеског језика као и разне обуке из вештина презентације, комуникације, вођења и техника продаје.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани **Дарко М. Радојевић**

број индекса ______Д39/12_________________

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Стабилност посебних класа механичких система нецелог и целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, ___.___.2022.

____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора _**Дарко М. Радојевић**___ ____________________
Број индекса ______ ___**Д 39/12**____________________________________
Студијски програм _____Докторске академске студије__________________
Наслов рада**. Стабилност посебних класа механичких система нецелог и целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу**

Ментор _____проф. др Михаило Лазаревић____________________
Потписани ___ Дарко Радојевић______________________________

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, ___.___.2022.

____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Стабилност посебних класа механичких система нецелог и целог реда са кашњењем на коначном временском интервалу

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, ___.___.2022.

____

1. Ауторство – Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.
2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.
5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.
6. Ауторство – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.