



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА



Ђорђе Новаковић

Прилог одређивању мерне несигурности у случају корелисаних величина

-Докторска дисертација-

Нови Сад, 2022.

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА¹

| | |
|--|---|
| Врста рада: | Докторска дисертација |
| Име и презиме аутора: | Ђорђе Новаковић |
| Ментор (титула, име, презиме, звање, институција): | др Драган Пејић, ванредни професор, Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду |
| Наслов рада: | Прилог одређивању мерне несигурности у случају корелисаних величина |
| Језик публикације (писмо): | Српски језик (ћирилица) |
| Физички опис рада: | Страница: 119 Поглавља: 5 Референци: 74 Табела: 21 Слика: 39 Графикона: 0 Прилога: 3 |
| Научна област: | Електротехничко и рачунарско инжењерство |
| Ужа научна област (научна дисциплина): | Електрична мерења |
| Кључне речи / предметна одредница: | FOLD метода, Мерна несигурност, случајне променљиве са униформном расподелом, Монте Карло метода |
| Резиме на језику рада: | У дисертацији је представљена нова FOLD метода за генерисање случајних променљивих са дефинисаним коефицијентом корелације, као и њена примена у одређивању мерне несигурности Монте Карло методом. Извршено је поређење развијене FOLD методе и стандардно коришћене MVUD методе по времену извршавања, као и по одступању добијеног од задатог коефицијента корелације. Показано је да је нова метода ефикаснија по оба критеријума. Примена FOLD методе у метрологији дата је кроз поређење мерне несигурности корелисаних величина одређене на основу препорука датих GUM-ом и Монте Карлометоде. Извршен је експеримент за одређивање фактора дељења отпорничког делитеља. |
| Датум прихватања теме од стране надлежног већа: | 29/04/2021 |
| Датум одбране: (Попуњава одговарајућа служба) | |

¹ Аутор докторске дисертације потписао је и приложио следеће Обрасце:

5б – Изјава о ауторству;

5в – Изјава о истоветности штампане и електронске верзије и о личним подацима;

5г – Изјава о коришћењу.

Ове Изјаве се чувају на факултету у штампаном и електронском облику и не кориче се са тезом.

| | |
|---|---|
| Чланови комисије: (титула, име, презиме, звање, институција) | Председник: др Платон Совиљ, редовни професор, ФТН Нови Сад Члан: др Драган Денић, редовни професор, Електронски факултет Ниш Члан: др Татјана Грбић, редовни професор, ФТН Нови Сад Члан: др Славица Медић, ванредни професор, ФТН Нови Сад Члан: др Марјан Урекар, доцент, ФТН Нови Сад Члан, ментор: др Драган Пејић, ванредни професор, ФТН Нови Сад |
| Напомена: | |

**UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OR CENTER**

KEY WORD DOCUMENTATION²

| | |
|--|---|
| Document type: | Doctoral dissertation |
| Author: | Đorđe Novaković |
| Supervisor (title, first name, last name, position, institution) | PhD Dragan Pejić, Associate Professor, Faculty of Tehnical Sciences Novi Sad |
| Thesis title: | Supplement for determination of measurement uncertainty in case of correlated quantities |
| Language of text (script): | Serbian language (Cyrillic) |
| Physical description: | Pages: 119 Chapters: 5 References: 74 Tables: 21 Illustrations: 39 Graphs: 0 Appendices: 3 |
| Scientific field: | Electrical and Computer Engineering |
| Scientific subfield (scientific discipline): | Electrical Measurements |
| Subject, Key words: | FOLD method, uncertainty, uniformly distributed random variable, Monte Carlo method |
| Abstract in English language: | The dissertation proposes a new FOLD method for generating random variables with aprescribed correlation coefficient, as well as its application in determining the measurement uncertainty using the Monte Carlo method. A comparison of the developed FOLD method and the standard MVUD method was performed according to the execution time, as well as the difference between the sample and the prescribed correlation coefficient. It has been shown that the new method is more efficient according to both criteria. The application of the FOLD method in the field of electrical measurement is given through the comparison of the measurement uncertainty of the correlated quantities determined on the basis of the recommendations given by the GUM and Monte Carlo methods. An experiment was performed to determine the ratio of the resistor divider. |
| Accepted on Scientific Board on: | 29/04/2021 |
| Defended: (Filled by the faculty service) | |

² The author of doctoral dissertation has signed the following Statements:

56 – Statement on the authority,

5B – Statement that the printed and e-version of doctoral dissertation are identical and about personal data,

5r – Statement on copyright licenses.

The paper and e-versions of Statements are held at he faculty and are not included into the printed thesis.

| | |
|---|---|
| Thesis Defend Board: (title, first name, last name, position, institution) | President: PhD Platon Sovilj, Full Professor, FTN Novi Sad Member: PhD Dragan Denić, Full Professor, Faculty of Electronic Engineering, Niš Member: PhD Tatjana Grbić, Full Professor, FTN Novi Sad Member: PhD Slavica Medić, Associate Professor, FTN Novi Sad Member: PhD Marjan Urekar, Docent, FTN Novi Sad Member, Mentor: PhD Dragan Pejić, Associate Professor, FTN Novi Sad |
| Note: | |

Резиме

У дисертацији је представљена нова FOLD метода за генерисање случајних променљивих са дефинисаним коефицијентом корелације, као и њена примена у одређивању мерне несигурности Монте Карло методом.

Прво су објашњени основни појмови за анализу грешке мерења. Посебан акценат је стављен на одређивање мерне несигурности коришћењем препорука датих у „Водичу за исказивање мерне несигурности“ (GUM), као и коришћењем Монте Карло методе.

У наставку су дате теоријске основе развијене FOLD методе. Описане су примењене трансформације за генерисање две случајне променљиве са униформном $\mathcal{U}(-1, 1)$ расподелом и дефинисаним коефицијентом корелације.

Извршено је поређење развијене FOLD методе и стандардно коришћене MVUD методе по времену извршавања, као и по одступању добијеног од задатог коефицијента корелације. Предложена је и корекција како би се минимализовало одступање добијеног од задатог коефицијента корелације FOLD методе. Показано је да је нова метода ефикаснија по оба критеријума.

Примена FOLD методе у метрологији дата је кроз поређење мерне несигурности корелираних величина одређених на основу препорука датих GUM-ом и Монте Карло методе. Извршен је експеримент за одређивање фактора дељења отпорничког делитеља. На основу измерених вредности и формираног модела одређена је мерна несигурност аналитичким путем (коришћењем GUM препорука), а затим су резултати потврђени симулационом Монте Карло методом. У закључку је сумиран допринос тезе, истакнути су оригинални резултати и дати су правци даљег истраживања.

Теза се завршава листом цитираних референци.

Abstract

The dissertation proposes a new FOLD method for generating random variables with a prescribed correlation coefficient, as well as its application in determining the measurement uncertainty using the Monte Carlo method.

First, the basic concepts for measurement error analysis are explained. Special emphasis is placed on determining measurement uncertainty using the recommendations given in the “Guide to the expression of uncertainty in measurement“ (GUM), as well as using the Monte Carlo method.

The following chapter introduces the theoretical basis of the proposed FOLD method. The applied transformations for generating two random variables with an uniform $\mathcal{U}(-1, 1)$ distribution and prescribed correlation coefficient are described.

A comparison of the developed FOLD method and the standard MVUD method was performed according to the execution time, as well as the difference between the sample and the prescribed correlation coefficient. A correction is also proposed in order to minimize the difference between the sample and the prescribed correlation coefficient of the FOLD method. It has been shown that the new method is more efficient according to both criteria.

The application of the FOLD method in the field of electrical measurement is given through the comparison of the measurement uncertainty of the correlated quantities determined on the basis of the recommendations given by the GUM and Monte Carlo methods. An experiment was performed to determine the ratio of the resistor divider. Based on the measured values, and the formed model, the measurement of uncertainty was determined analytically (using GUM recommendations), and then the results were evaluated by the simulation using the Monte Carlo method.

In the conclusion, the contribution of the thesis is summarized, the original results are highlighted, and the directions of further research are given.

The thesis ends with a list of cited references.

Предговор

По дефиницији из међународног речника метрологије [1] мерење је поступак којим се одређује вредност мерене величине. Лорд Келвин (енгл. *William Thomson, 1st Baron Kelvin*) је на једном од својих предавања рекао: „Када измерите оно о чему говорите и изразите то бројевима, онда о томе нешто знате, али ако то не можете исказати бројевима, ваше знање о томе је недовољно и оскудно“ [2]. Бројна вредност даје информацију о количнику мерене величине и њеног јединичног еталона.

Тачна вредност мерене величине се не може одредити поступком мерења, односно резултат мерења увек садржи грешку. Са становишта савремене метрологије, као резултат мерења није довољно саопштити само број, него је важно оценити и ниво грешке која је настала у процесу мерења. Другим речима, често се уместо броја као резултат мерења саопштава интервал у којем се сигурно или са неком вероватноћом налази вредност мерене величине. Кроз историју метрологије су се смењивали разни концепти за исказивање граница грешке (интервал у ком се грешка налази). Ако су у питању директно мерене величине (вредности очитаване са инструмента) онда се грешка, односно границе грешке исказују на основу декларисане тачности употребљеног инструмента. Друга могућност је исказивање апсолутне и релативне грешке резултата мерења у односу на вредност добијену значајно тачнијим инструментом, опремом или методом.

Код величина које се индиректно одређују рачунањем, на основу других директно измерених вредности, концепт сигурних граница грешке дефинише највећу могућу грешку која може да се деси. Резултат мерења је интервал у којем се права вредност сигурно налази. Теорија сигурних граница грешака полази од две претпоставке. Претпоставља се да свака директно одређена величина има максималну могућу вредност грешке. Друга претпоставка је да је знак сваке од грешака директно мерених величина такав да у суми не долази до потирања доприноса грешака. Сигурне границе грешке се добијају сабирањем апсолутних вредности доприноса грешака директно измерених величина [3]. Са порастом броја директно мерених величина, на основу којих се рачуна индиректно мерена величина, мања је вероватноћа да су наведене претпоставке исправне. Тако се за сигурне границе грешке добија превелик интервал јер се вредности грешака најчешће налазе у значајно ужим границама. Да

би се добила реалнија процена интервала у којем се налази права вредност мерене величине, једно време је у употреби био концепт статистичких граница грешке [4]. Слично као у претходном концепту, овде се претпоставља максималан допринос сваке директно мерене величине. Рачунањем квадратног корена суме квадрата доприноса грешака индиректно мерених величина одређује се интервал у којем се вероватно налази грешка. Описаним поступком се добија интервал који је ужи од интервала на основу сигурних граница грешке. У том интервалу се грешка вероватно налази, док права вредност грешке може бити и ван ових граница. Проблем овог приступа је што није јасан ниво поверења, односно вероватноћа са којом се тврди да се права вредност налази у наведеном интервалу.

Усвајањем препорука [5] („Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement“ из 2008. године) дефинисан је јединствен начин исказивања квалитета мерења применом концепта мерне несигурности. Дефинисани су поступци у којима се утицајне величине посматрају као случајне величине описане статистичким подацима (стандардна девијација, средња вредност) или њиховим расподелама. Као резултат се добија интервал у којем се уз одређени ниво поверења налази права вредност мерене величине. У оквиру препорука постоје два приступа:

- а) аналитички, који се бави пропагацијом мерних несигурности додељених директно измереним величинама и
- б) симулациони, који је заснован на пропагацији вероватноћа применом Монте Карло методе. Симулациони приступ даје додатне информације о облику функције густине индиректно мерене величине, као и о вероватноћи да се права вредност нађе у датом интервалу.

Приликом одређивања мерне несигурности се често полази од претпоставке да утицајне величине нису међусобно корелисане. Уколико постоји корелација између мерених величина, таквим приступом се добија погрешна оцена мерне несигурности. Испитивање корелисаности утицајних величина и урачунавање коефицијента корелације у поступку одређивања мерне несигурности продужава и поскупљује процес мерења. У погонским и лабораторијским мерењима најчешће се претпоставља да директно мерене величине нису корелисане [6]. Када је реч о врхунским метролошким поступцима, приступа се анализи корелисаности утицајних величина и урачунавању добијених коефицијената корелације у поступку одређивања мерне несигурности.

Како произвођачи инструмената углавном дефинишу границе у којима се налази грешка мерења, а при томе не дају функцију густине, тј. расподелу грешке (која је случајна променљива), уобичајено је претпостављање униформне расподеле. Под претпоставком да грешка има униформну расподелу добија се већа мерна несигурност

у поређењу са другим расподелама које се уобичајено користе (троугаона, трапезна и нормална) [5]. Ако су две улазне величине корелисане, онда је у Монте Карло симулацијама неопходно генерисати случајне вредности задатих расподела (најчешће униформне или нормалне) уз одговарајући коефицијент корелације.

Предмет истраживања ове дисертације је дефинисање методе генерисања два ансамбла униформне расподеле са жељеним коефицијентом корелације. У том циљу је развијена нова метода, која је названа FOLD. Показано је да је FOLD метода временски ефикаснија од MVUD методе. У раду је предложен поступак корекције за смањивање разлике добијеног од задатог коефицијента корелације. Применом предложене корекције се постиже значајно мање одступање добијеног од задатог коефицијента корелације код FOLD методе у поређењу са MVUD методом [7, 8].

Дисертација је организована у пет поглавља.

У поглављу 1 изложени су основни појмови којима се бави теза. Објашњен је појам грешке мерења као и саопштавање грешке мерења. Уведен је појам и начини за одређивање мерне несигурности. На крају је дат преглед стања у области којом се теза бави.

Идеја и развој нове методе дати су у поглављу 2. Представљено је тренутно стање у области генерисања корелисаних случајних променљивих са униформном расподелом.

У поглављу 3 приказани су резултати симулација стандардне MVUD методе и нове FOLD методе. На основу резултата извршено је поређење по брзини извршавања као и по одступању узорачког од задатог коефицијента корелације стандардне и нове методе. На крају је предложена корекција одступања разлике добијеног од задатог коефицијента корелације како би се минимизовало одступање.

У поглављу 4 реализован је експеримент одређивања фактора делења напонског разделника. На основу измерених резултата одређен је коефицијент корелације мерених улазних величина. Коришћењем препорука GUM-а одређена је мерна несигурност чија је вредност поређена са резултатима добијеним Монте Карло методом. Приликом Монте Карло симулација коришћен је развијени метод за генерисање случајних променљивих са задатим коефицијентом корелације.

Поглавље 5 дефинише ограничења и даље смернице у развоју предложеног решења.

Захвалница

Велику захвалност дугујем ментору професору Драгану Пејићу и саветнику професору Платону Совиљу на великој подршци, помоћи и стрпљењу током свих година научно-истраживачког рада.

Захваљујем се професорици Татјани Грбић на несебичној помоћи у истраживањима и изради дисертације, као и на савету да сагледавање света очима метролога није увек најбоље.

Искрену захвалност дугујем свом пријатељу Александру Прокићу за безрезервну помоћ приликом израде тезе.

Хвала свим мојим пријатељима који су ми „малим сигнаlima“ подршке дали ветар у леђа да истрајем до краја.

Напоследку, највећу захвалност дугујем својој породици за безгранично разумевање, љубав и подршку током школовања. Хвала мојој Ивани на разумевању, охрабрењу и подршци када је то било најпотребније.

Садржај

| | |
|--|----------|
| Резиме | v |
| Abstract | vi |
| Предговор | vii |
| Захвалница | x |
| 1 Уводни појмови | 1 |
| 1.1 Историјски увод | 1 |
| 1.2 Грешке мерења | 4 |
| 1.3 Одређивање грешака мерења | 6 |
| 1.3.1 Сигурне границе грешке | 9 |
| 1.3.2 Статистичке границе грешке | 10 |
| 1.4 Мерна несигурност | 10 |
| 1.4.1 Одређивање мерне несигурности коришћењем GUM-а | 11 |
| 1.4.1.1 Мерна несигурност типа А | 11 |
| 1.4.1.2 Мерна несигурност типа Б | 12 |
| 1.4.1.3 Комбинована мерна несигурност | 12 |

| | |
|--|-----------|
| <i>САДРЖАЈ</i> | xii |
| 1.4.1.4 Проширена мерна несигурност | 14 |
| 1.4.1.5 Ограничења GUM-а | 16 |
| 1.4.2 Одређивање мерне несигурности коришћењем Монте Карло методе | 17 |
| 1.5 Преглед литературе | 19 |
| 2 Теоријске основе | 23 |
| 2.1 Стање у области | 23 |
| 2.2 FOLD метода | 25 |
| 2.2.1 Теоријске основе FOLD методе | 26 |
| 2.2.2 Имплементација FOLD методе | 31 |
| 2.2.3 Пирсонов коефицијент корелације | 36 |
| 2.2.4 Корекција одступања добијеног Пирсоновог коефицијента корелације од задатог коефицијента корелације | 37 |
| 3 Поређење постојеће и развијене методе | 39 |
| 3.1 Поређење по брзини извршавања | 39 |
| 3.2 Поређење одступања задатог од узорачког коефицијента корелације . . . | 43 |
| 3.3 Корекција одступања задатог од узорачког коефицијента корелације . . | 43 |
| 3.3.1 Кориговање одступања тражењем инверзне функције | 45 |
| 3.3.2 Кориговање одступања интерполацијом | 46 |
| 3.4 Поређење одступања задатог од узорачког коефицијента корелације након корекције | 47 |
| 4 Експериментална евалуација FOLD методе | 48 |
| 4.1 Експериментална поставка | 49 |
| 4.2 Одређивање мерне несигурности по GUM-у | 51 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 4.3 | Одређивање мерне несигурности коришћењем Монте Карло симулационе методе | 53 |
| 4.4 | Поређење резултата добијених по GUM-у и Монте Карло симулационом методом | 56 |
| 5 | Закључак | 60 |
| A | | 62 |
| A.1 | Униформна случајна променљива | 62 |
| A.2 | Расподела случајне променљиве X_1 и случајне променљиве Y_1 | 63 |
| A.3 | Расподела случајне променљиве W | 64 |
| A.4 | Расподела случајне променљиве W_1 | 67 |
| A.5 | Пирсонов коефицијент корелације ρ_{XV} | 68 |
| A.6 | Одређивање инверзне функције $\rho_{XV}^{-1}(k)$ | 74 |
| B | | 80 |
| B.1 | Реализација FOLD методе у Пајтон програмском језику | 80 |
| | B.1.1 Верзија 1 | 80 |
| | B.1.2 Верзија 2 | 80 |
| B.2 | Реализација FOLD методе у R програмском језику | 81 |
| B.3 | Реализација FOLD методе у C++ програмском језику | 82 |
| B.4 | Реализација MVUD методе у C++ програмском језику | 83 |
| B.5 | Експериментална поставка — код за читавање напона мултиметра и контролу селектора | 84 |
| B.6 | Монте Карло симулације MVUD метода | 86 |
| B.7 | Монте Карло симулације FOLD метода | 87 |

| | |
|--|-----------|
| <i>САДРЖАЈ</i> | xiv |
| В | 89 |
| В.1 Резултати добијени експериментом одређивања фактора дељења | 89 |

Списак слика

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Утицај систематске и случајне грешке на прецизност и тачност | 5 |
| 1.2 | Утицај систематске и случајне грешке на прецизност и тачност мерења без познавања тачне вредности | 6 |
| 1.3 | Пропагација грешке индиректно мерене величине у случају зависности једне улазне величине | 8 |
| 1.4 | Интервал поверења у зависности од фактора обухвата за нормалну расподелу | 15 |
| 1.5 | Функција густине Студентове t расподеле за различите вредности ефективног броја степени слободe и густина нормалне $\mathcal{N}(0, 1)$ расподеле | 16 |
| 1.6 | Пропагација мерне несигурности и пропагација вероватноће као метода за одређивање мерне несигурности за три независна мерења | 17 |
| 1.7 | Зависност мерне несигурности $u(P)''$ од коефицијента корелације r_{UI} . . . | 20 |
| 2.1 | Функција густине случајне променљиве W за $k \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 27 |
| 2.2 | Функција густине случајне променљиве W за $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 27 |
| 2.3 | Функција густине случајне променљиве W_1 за $k \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 28 |
| 2.4 | Функција густине случајне променљиве W_1 за $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 28 |
| 2.5 | Геометријска трансформација примењена на функцију густине случајне променљиве W_1 за $k \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 29 |

| | | |
|------|---|----|
| 2.6 | Геометријска трансформација примењена на функцију густине случајне променљиве W_1 за $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 29 |
| 2.7 | Полуотворени правоугаоник добијен након примене геометријске трансформације на трапез и троугао | 30 |
| 2.8 | Функција густине случајне променљиве (X, Y) , пројекција функције густине на xy -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и Y | 32 |
| 2.9 | Функција густине случајне променљиве (X, W_1) , пројекција функције густине на xw_1 -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и W_1 за $k = 0, 4$ | 33 |
| 2.10 | Функција густине случајне променљиве (X, W_1) , пројекција функције густине на xw_1 -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и W_1 за $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 34 |
| 2.11 | Пројекција функције густине на xv -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и V за различите вредности задатог коефицијента корелације | 35 |
| 2.12 | Зависност Пирсоновог од задатог коефицијента корелације и зависност жељеног од задатог коефицијента корелације | 36 |
| 2.13 | Зависност коефицијента корелације $k = k(r)$ коришћењем инверзне функције $\rho_{XV}^{-1}(r)$ | 38 |
| 3.1 | Зависност времена извршавања од задатог коефицијента корелације | 40 |
| 3.2 | Однос времена извршавања MVUD и FOLD методе | 41 |
| 3.3 | Зависност времена извршавања од задатог коефицијента корелације након оптимизације MVUD у C++ програмском језику | 42 |
| 3.4 | Зависност грешке од задатог коефицијента корелације | 44 |
| 3.5 | Одступање задатог од добијеног коефицијента корелације (δ^*) у зависности од задатог коефицијента корелације након примењене корекције помоћу инверзне функције $\rho_{XV}^{-1}(k)$ | 45 |
| 3.6 | Одступање задатог од добијеног коефицијента корелације (δ^*) у зависности од задатог коефицијента корелације након примењене корекције полиномијалном функцијом | 46 |

| | | |
|-----|---|----|
| 4.1 | Шема експерименталне поставке | 49 |
| 4.2 | Експериментална поставка | 50 |
| 4.3 | Апроксимација функције густине vr добијене Монте Карло методом применом MVUD и FOLD методе | 54 |
| 4.4 | Апроксимација функције густине vr добијене Монте Карло методом за различит број симулираних вредности | 55 |
| 4.5 | Зависност релативне мерне несигурности од фактора дељења vr | 57 |
| 4.6 | Зависност релативне мерне несигурности од фактора дељења $r_{U_1U_2}$ | 58 |
| 4.7 | Зависност узорачког коефицијента корелације $r_{U_1U_2}$ од фактора дељења vr | 59 |
| A.1 | Пројекција функције густине на xw_1 -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и W_1 за које је задати коефицијент корелације по апсолутној вредности мањи од $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 69 |
| A.2 | Пројекција функције густине на xv -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и V за које је апсолутна вредност задатог коефицијента корелације мања од $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 70 |
| A.3 | Пројекција функције густине на xw_1 -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и W_1 у случају $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq k < 1$ | 72 |
| A.4 | Пројекција функције густине на xv -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и V за апсолутну вредност задатог коефицијента корелације већу од $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 73 |
| A.5 | Функције $(M^{-1} \circ \mu^{-1})(k)$ за $0 < k < \frac{5}{8}$ | 75 |
| A.6 | Функције $(N^{-1} \circ \nu^{-1})(k)$ за $0 < k < \frac{5}{8}$ | 78 |

Списак табела

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Процењене мерне несигурности примера Н.2 датог у GUM-у | 21 |
| 4.1 | Релативна мерна несигурност за различите вредности vr одређена коришћењем GUM-а и Монте Карло методе | 56 |
| В.1 | Буџет мерне несигурности за $vr = 0,05$ | 89 |
| В.2 | Буџет мерне несигурности за $vr = 0,1$ | 89 |
| В.3 | Буџет мерне несигурности за $vr = 0,15$ | 90 |
| В.4 | Буџет мерне несигурности за $vr = 0,2$ | 90 |
| В.5 | Буџет мерне несигурности за $vr = 0,25$ | 90 |
| В.6 | Буџет мерне несигурности за $vr = 0,3$ | 91 |
| В.7 | Буџет мерне несигурности за $vr = 0,35$ | 91 |
| В.8 | Буџет мерне несигурности за $vr = 0,4$ | 91 |
| В.9 | Буџет мерне несигурности за $vr = 0,45$ | 92 |
| В.10 | Буџет мерне несигурности за $vr = 0,5$ | 92 |
| В.11 | Буџет мерне несигурности за $vr = 0,55$ | 92 |
| В.12 | Буџет мерне несигурности за $vr = 0,6$ | 93 |
| В.13 | Буџет мерне несигурности за $vr = 0,65$ | 93 |
| В.14 | Буџет мерне несигурности за $vr = 0,7$ | 93 |

| | |
|--|----|
| В.15 Буџет мерне несигурности за $vr = 0,75$ | 94 |
| В.16 Буџет мерне несигурности за $vr = 0,8$ | 94 |
| В.17 Буџет мерне несигурности за $vr = 0,85$ | 94 |
| В.18 Буџет мерне несигурности за $vr = 0,9$ | 95 |
| В.19 Буџет мерне несигурности за $vr = 0,95$ | 95 |

Глава 1

Уводни појмови

Са становишта савремене метрологије поред бројног изражавања неке појаве неопходно је и саопштити колика је грешка мерења. Тачније, резултат мерења није број, већ интервал у ком се налази тачна вредност. Како би се саопштио интервал грешке неопходно је проценити мерну несигурност на основу измерених вредности.

У потпоглављу 1.1 дата је еволуција метрологије кроз историју. Како мерење одговарајућих појава само по себи није довољно тако се паралелно развијало и саопштавање грешке мерења. У потпоглављу 1.2 објашњен је појам грешке мерења, као и типови грешака и њихов утицај на резултат мерења. У потпоглављу 1.3 описан је развој приказа грешке мерења почевши од сигурних граница грешке, па до статистичког начина саопштавања грешке мерења. У потпоглављу 1.4 уводи се појам мерне несигурности, начини за аналитичко одређивање исте коришћењем GUM-а и Монте Карло методе. Такође, разматрани су случајеви када мерене величине нису корелисане као и случај када постоји корелација између улазних променљивих. На крају, у потпоглављу 1.5 дат је преглед тренутног стања у области, као и садржај тезе.

1.1 Историјски увод

Прве забележене измерене величине датирају из доба древног Египта. Најчешћа потреба за мерењем су биле трговина и градња, стога су најчешће вршена мерења тежине и дужине. Тако су за потребе мерења тежине првенствено коришћене јединице попут зрна пасуља или зрна пшенице, док су за одређивање дужине коришћене јединице повезане са антрополошким мерама попут дужине лакта, палца, стопе итд. Проблем свих јединица је што су важиле само на малим географским просторима. Прва забележена јединица која је имала природу универзалне мере је био кубит и

коришћен је у древном Египту. Кубит представља дужину од лакта до врха прстију испружене шаке. Због проблема неуниформности антрополошких мера установљена је јединица краљевски кубит која је представљала исту меру као и кубит, али код тренутно владајућег фараона. Развојем различитих држава, посредством различитих утицаја преносене су и различите мере. Касније се кубит користио и у Вавилону као и у античкој Грчкој. Из античке Грчке, а посредством Рима, мере су се даље шириле дуж европског континента. Све мере су биле адаптиране и интерпретиране за потребе одређених држава што је отежавало трговину. Тако је у средњем веку у Енглеској забележен проблем приликом трговине чија су стопа, лакат итд. су исправнији, што је иницирало да краљ Хенри I (енгл. *Henry I*) дефинише јард као раздаљину од врха његовог носа до врха средњег прста на испруженој руци. Такође, уочено је да на антрополошке мере утичу различити фактори попут старења, временских прилика итд. Због тога је било покушаја дефинисања различитих јединица статистичким методама. Тако је у Немачкој у XVI веку дефинисана стопа указом: „Нека 16 људи, малих и великих, отприлике оним редом како излазе из цркве, стављају своје ципеле једну испред друге. Добијена дужина јесте, и треба да буде, праведна општа мерна стопа“[9]. Тако је стопа дефинисана као $1/16$ укупне дужине ципела, насумично одабраних 16 људи [10].

Због развоја великог броја јединица које су важиле на одређеним просторима (државама, регионима, градовима), јавља се проблем међусобне трговине. Тако је у Француској, до Француске револуције, постојало око 250000 различитих врста јединица, што је повећавало манипулације приликом трговине. Било је покушаја да се и пре Француске револуције стандардизују мере, али то није био једноставан задатак јер народ није желео да одбаци неке од традиционалних јединица које је до тада користио. На крилима Француске револуције долази до развоја идеје стандардизованог система који ће уз многе измене за резултат имати систем који се данас користи у већини држава на свету. Један од примарних проблема је представљала реализација примарног еталона, који ће касније служити за пренос на остале (секундарне) еталоне. Први развијени и званично интернационално прихваћени еталон метра дефинисан је као $1/1000000$ део раздаљине између северног пола и екватора. Мерење раздаљине су вршили француски астрономи Пјер Мешен (франц. *Pierre François Andrй Mйchain*) и Жан Батист Даламбер (франц. *Jean le Rond d'Alembert*) од 1792. до 1798. године. Њихово мерење се заснивало на одређивању раздаљине између Денкерка и Барселоне коришћењем методе триангулације, на основу које је одређена удаљеност од северног пола и екватора. Том приликом добијени метар био је краћи за приближно 0,2 mm. У септембру 1799. године донет је закон за обавезно коришћење метра на нивоу Париза. Због историјских препрека даље ширење еталона метра, изван граница Француске, било је отежано. Велику улогу у ширењу идеје о метричком систему имао је Наполеон Бонапарта (франц. *Napolйon I Bonaparte*) који је освајањима по Европи „наметао“ и метрички систем. До стандардизације и званичног прихватања метричког система као основног система на

глобалном нивоу чекало се све до 20. маја 1875. године када је донета Метарска конвенција. Метарску конвенцију је потписало 17 држава и том приликом основане су три организације: Међународни биро за тегове и мере, Генерална конференција за тегове и мере и Међународни комитет за тегове и мере. Кнежевина Србија се прва придружила тим државама у Генералној конференцији за тегове и мере 1879. године [10]. У наредним годинама долази до дефинисања и додавања и других јединица поред метра, да би 1960. године Резолуцијом бр. 12 био установљен међународни систем јединица (СИ систем)[9, 10]. Приликом поређења секундарних еталона са примарним еталонима примећено је да долази до нарушавања карактеристика и једног и другог еталона. Због тога се у XX и XXI веку прешло на описивање примарних еталона физичким феноменима који обезбеђују поновљивост. Тако је, нпр. еталон времена дефинисан на променама атома цезијума, еталон дужине на основу брзине светлости у вакууму итд [11].

Поред квантификовања резултата мерења неопходно је исказати и грешку истог. Тако се паралелно са развојем различитих врста мерила јавила потреба и за исказивањем квалитета резултата мерења. Колико год параметара се узме у обзир приликом експеримента, увек ће се јављати нови параметри који ће утицати на резултат мерења. Поред тога што је циљ мерења да саопште резултат мерења, морају се бавити и пропагацијом грешке кроз сам процес мерења као и саопштавањем исте. Једни од првих забележених корака у исказивању грешке датирају из XII века где се на скупу „*Trial of the Pyx*“ одређивала димензија и финоћа кованог новца од злата и сребра. Укупна грешка мерења је одређивана као збир појединачних грешака мерења. На пример, ако је дозвољена толеранција тежине кованице била 5 g и под претпоставком да су тежине кованица независне, онда је у случају мерења 100 кованица дозвољена грешка била 500 g [12].

Све до XVIII века ово је била уобичајена процедура за исказивање грешке мерења. У XVIII веку долази до развоја статистике која има велики утицај на исказивање мерне несигурности. Роџер Котс (енг. *Roger Cotes*), у делу објављеном 1722. године, примећује да средња вредност скупа мерења смањује грешку мерења, односно средња вредност скупа мерења ће бити ближа тачној вредности. Истраживањима у астрономији у радовима Тобијаса Мајера (нем. *Johann Tobias Mayer*) у делу објављеном 1750. године и Руђера Бошковића у раду објављеном 1755. године, а касније Пјера Симона Лапласа (франц. *Pierre-Simon Marquis de Laplace*), рад из 1788. године и Адријен-Марија Лежандра (франц. *Adrien-Marie Legendre*), рад из 1805. године, уводи се појам методе најмањих квадрата. Почетком XIX века Карл Фридрих Гаус (нем. *Johann Carl Friedrich Gauß*) радом из 1809. године, уводи појам нормалне расподеле где наводи да ће средња вредност скупа мерења представљати средњу вредност нормалне расподеле и најбољу процену тачне вредности. Гаусову теорију подржава Лаплас централном граничном теоремом, радом из 1810. године. Заједничким радом Лапласа и Гауса омогућено је да се грешка мерења може и

квантификовати као средња вредност \pm стандардна девијација [13, 14].

Даљи развој мерења захтевао је развој стандардизованог решења за оцену мерне несигурности. Ово је постигнуто објављивањем препоруке „*Expression of experimental uncertainties*“ од стране Међународног бироа за тегове и мере (франц. *Bureau International des Poids et Mesures* — BIPM). Даљим укључивањима других организација 1993. публикован је „Водич за исказивање мерне несигурности“ (енг. *Guide to the expression of uncertainty in measurement*) [15]. Касније су извршене ревизије 1995. године, да би се 2008. године коначно објавио документ „Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement“(GUM) [5].

1.2 Грешке мерења

Свако мерење је несавршено и резултује појавом грешке. GUM грешку мерења дефинише као „разлику измерене и стварне вредности“ [5]. Извори грешке мерења могу потицати од несавршености опреме којом се врши мерење, вештина особе која обавља мерења, процедура по којима је мерење вршено, промена параметара околине попут: температуре, влажности ваздуха, варијација у напонској мрежи итд. Због тога су грешке мерења груписане у три целине на основу својих карактеристика и то:

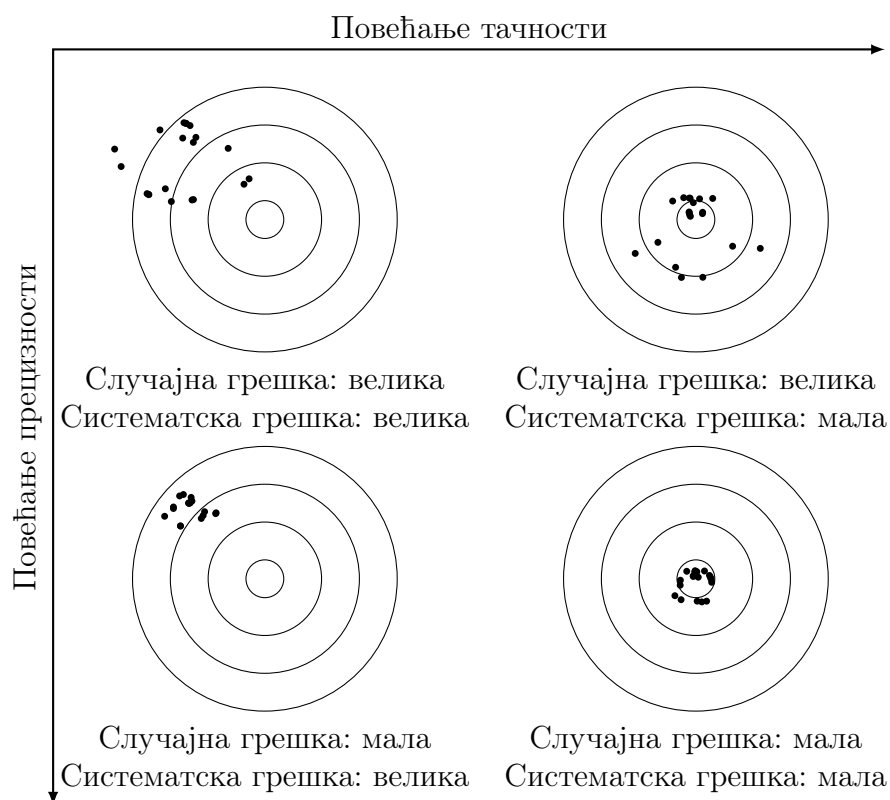
- грубе грешке,
- систематске грешке и
- случајне грешке.

Грубе грешке најчешће настају погрешним коришћењем опреме, коришћењем неисправне мерне опреме или непажњом особе која врши мерење, стога се ни не категоризују у грешке мерења у већини литературе. На основу резултата мерења грубе грешке се могу уочити великим одступањем измерене од очекиване вредности, па се због тога одбацују. Нпр. мерење струје волтметром резултоваће грубом грешком мерења.

Систематске грешке прате одговарајуће физичке законе, па се стога могу уочити у резултату мерења јер увек имају исти знак и исту вредност. На основу резултата мерења и одступања измерене од очекиване вредности могуће је одредити вредност корективног фактора чијом применом се ова грешка елиминише. Нпр. приликом мерења отпорности омметром, водови којима се повезује отпорник у коло додају отпорност и тиме нарушавају вредност отпорности која се жели мерити. Пошто је могуће одредити отпорност водова, добијена вредност се може искористити за корекцију систематске грешке.

Услед деловања непознатих спољашњих утицаја, у случају поновљених мерења, добијају се резултати који се у извесној мери међусобно разликују. За такве резултате се каже да садрже случајну грешку. Када се из резултата мерења одстрани грубе и систематске грешке преостају случајне грешке. Пошто их је немогуће предвидети јер се дешавају случајно (са сваким мерењем имају различиту случајну вредност и могу мењати знак) немогуће их је и одстранити.

На основу дефинисаних типова грешака дефинисани су појмови тачности и прецизности. Тачност представља меру одступања скупа измерених вредности од тачне вредности, док прецизност представља расутост измерених вредности око средње вредности. Што је систематска грешка мања, већа је тачност и обрнуто, а ако је случајна грешка мала, онда је прецизност велика и обрнуто. На слици 1.1 на примеру гађања у мету приказани су утицаји систематске и случајне грешке на повећање и смањење тачности и прецизности [4, 16, 17].



Слика 1.1: Утицај систематске и случајне грешке на прецизност и тачност

Како би се одредила систематска грешка неопходно је познавати тачну вредност на основу које се може одредити колико је одступање. На слици 1.2 приказано је расипање резултата за исти случај као и на слици 1.1, али без познавања тачне вредности (центра мете). Без обзира на то да ли постоји тачна вредност или не, на

основу расипања резултата мерења, могуће је одредити прецизност односно присуство случајне грешке. Непознавањем тачне вредности немогуће је одредити тачност, а самим тим и присуство систематске грешке. Тачна вредност мерене величине представља величину која би се измерила „савршеним“ мерним поступком, односно мерењем код кога је елиминисан утицај грешке на резултат мерења. Пошто је у реалним условима немогуће спровести „савршено“ мерење због утицаја различитих фактора (спољашњих фактора, несавршености инструмената итд.), тачна вредност се мора проценити или усвојити [1].



Случајна грешка: велика
Систематска грешка: ?



Случајна грешка: велика
Систематска грешка: ?



Случајна грешка: мала
Систематска грешка: ?



Случајна грешка: мала
Систематска грешка: ?

Слика 1.2: Утицај систематске и случајне грешке на прецизност и тачност мерења без познавања тачне вредности

1.3 Одређивање грешака мерења

Први покушај да се бројно одреди несавршеност мерења као грешка мерења дат је изразом

$$\delta y = y - y_t, \tag{1.1}$$

где δy представља грешку мерења, y измерену вредност и y_t тачну вредност, тј. вредност која је процењена као најближа тачној [18].

Приликом оцене тачности грешка се може исказати релативно како би се могла

лакше упоредити са другим грешкама. Релативна грешка мерења дата је изразом

$$\frac{\delta y}{y_t} = \frac{y - y_t}{y_t} 100\%. \quad (1.2)$$

У исказивању грешке често се употребљава и појам корекција. Корекција представља бројну вредност која је по апсолутној вредности једнака вредности грешке, али је супротног знака. Примена корекције могућа је само на систематске грешке јер је њихов предзнак са сваким новим мерењем идентичан, а вредност им се може предвидети [4].

Због тога се приликом одређивања грешке мерења, а касније и мерне несигурности, из резултата мерења морају избацити резултати који садрже грубу грешку и мора се извршити корекција систематске грешке.

Додатан проблем представља непознавање тачне вредности, па се тачна вредност процењује на вредност најближу тачној. Гаус је процес процене тачне вредности дефинисао са „Анализирајући значење мера које је добио, експериментатор покушава да погоди праву вредност, вредност коју би произвео најбољи могући инструмент“ [19]. Неретко се уместо појма тачне вредности користи и појам оптималне вредности као најбоље процене тачне вредности.

Нека x_1, x_2, \dots, x_N представљају резултате N извршених мерења физичке величине X , онда је најбоља процена тачне вредности, применом Гаусове методе најмањих квадрата, таква да је њено квадратно одступање сваког појединачног мерења од оптималне вредности минимално, тј.

$$\sum_i^n (x_i - x_{opt})^2 = \min.$$

Како би се одредио x_{opt} за који наведена сума има минималну вредност, неопходно је диференцирати суму по оптималној вредности па је

$$-2 \sum_i^n (x_i - x_{opt}) = 0.$$

Оптимална вредност је

$$x_{opt} = \frac{1}{N} \sum_i^n x_i, \quad (1.3)$$

што заправо представља средњу вредност извршених мерења [20, 21].

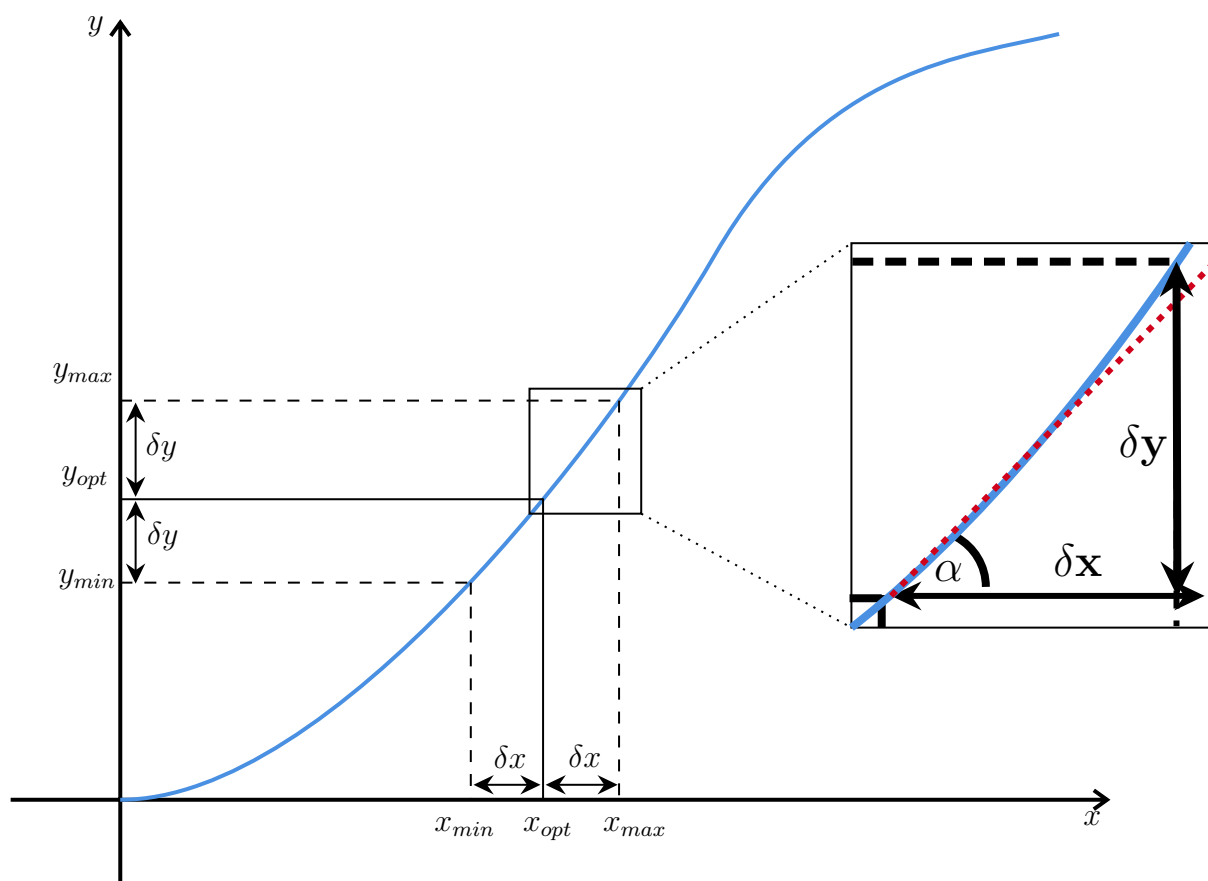
Такође, поред процене тачне вредности битно је дати и процену прецизности, односно колико је расипање резултата мерења. Тако се рачунска процена прецизности добија

одређивањем стандардног одступања (стандардне девијације) извршених мерења [21, 22] и дата је изразом

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_i^n (x_i - x_{opt})^2}{N - 1}}. \quad (1.4)$$

Важно је истаћи да и средња вредност има, као најбоља оцена тачне вредности, своју меру расипања [23, 24]. Стандардно одступање средње вредности је

$$s_{x_{opt}} = \frac{s_x}{\sqrt{N}}. \quad (1.5)$$



Слика 1.3: Пропагација грешке индиректно мерене величине у случају зависности једне улазне величине

У пракси је чест случај индиректног мерења одређене величине. Ако се жели индиректно мерити величина која зависи само од једне променљиве

$$y = f(x), \quad (1.6)$$

познавајући границе у којима се налази измерена вредност величине x и то $x_{min} = x - \delta x$ и $x_{max} = x + \delta x$, могуће је одредити y_{max} и y_{min} . На слици 1.3 приказан је један пример функције дате изразом (1.6). Под претпоставком да је грешка δx мала (тј. када δx тежи нули), може се одредити утицај грешке δx на вредност грешке индиректно мерене величине δy , стога се функција (1.6) на интервалима $x \in [x_{min}, x]$ и $x \in [x, x_{max}]$ може сматрати линеарном. На основу тога може се извести израз за пропацију грешке δy као

$$\delta y = \operatorname{tg}(\alpha) \delta x = \frac{\partial y}{\partial x} \delta x. \quad (1.7)$$

У случају да δx није блиско нули доћи ће до погрешне процене δy , видети увеличани део на слици 1.3, јер функција (1.6) на интервалу $x_{max} = x + \delta x$ није линеарна.

1.3.1 Сигурне границе грешке

Приликом индиректног мерења у већини случајева индиректно мерена величина y је зависна од n улазних величина. Нека је индиректно мерена величина дефинисана изразом

$$y = f(x_1, x_2 \dots x_n), \quad (1.8)$$

где су x_1, x_2, \dots, x_n директно мерене величине на основу којих се одређује вредност y . У већини случајева приликом мерења познате су само границе грешака, тј. интервали одступања мерене величине од тачне вредности. На основу измерених величина могуће је одредити грешку сваког од елемената као

$$\delta x_i = G_{x_i}, \quad i \in \{1, 2 \dots n\}, \quad (1.9)$$

где G_{x_i} представља границе грешке сваке од улазних величина.

На основу израза (1.7) и (1.9) могуће је одредити допринос сваке од мерених величина у одређивању грешке индиректно мерене величине y као

$$\delta y = \sum_i^n \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} G_{x_i} \right|. \quad (1.10)$$

У изразу (1.10) допринос грешке сваке од мерених величина сабран је по апсолутној вредности јер се може десити да допринос грешке буде и негативан. Одређена вредност представља сигурне границе грешке, тј. дефинише интервал $(y - \delta y, y + \delta y)$ у ком ће се тачна вредност y_t наћи.

1.3.2 Статистичке границе грешке

Сигурне границе грешке представљају интервал у ком ће се мерена вредност сигурно налазити. Нпр. за случај дат изразом (1.10) мале су шансе да ће допринос сваке од грешака бити максималан, што доводи до прецењивања грешке мерења δy . Што је број утицајних величина већи мања је вероватноћа да ће све грешке утицајних величина имати максималну вредност и исти знак. Зато се за разлику од аритметичке суме грешака утицајних величина, грешка δy одређује као корен из суме квадрата грешака утицајних величина. Израз за статистичке границе грешке је дат са

$$\delta y = \sqrt{\sum_i^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 G_{x_i}^2}. \quad (1.11)$$

Применом израза (1.11) процена грешке индиректно мерене величине y је мања, па је могуће да ће се тачна вредност наћи изван опсега $(y - \delta y, y + \delta y)$. Стога је важно дефинисати ниво поузданости процењене грешке. У случају статистичких граница грешке тешко је јасно дефинисати ниво поузданости, јер ће он зависити од односа стандардне девијације и граница грешке сваког мерења, као и од броја мерених величина. Нпр. ако се мере две величине и ако су њихове стандардне девијације два пута мање од граница грешака ($G_1 = 2s_1$ и $G_2 = 2s_2$) онда је ниво поузданости око 95%, док је, у случају да су стандардне девијације 2, 5 пута мање од граница грешака, ниво поузданости 99% [4].

Како би се стандардизовао начин аналитичког одређивања грешке мерења објављен је GUM као стандардно решење за приказивање мерне несигурности.

1.4 Мерна несигурност

Мерна несигурност представља параметар који се саопштава уз резултат мерења и представља меру расипања мерене вредности [5]. Мерну несигурност је могуће одредити аналитичким и симулационим методама. У даљем тексту као алат за аналитичко одређивање мерне несигурности биће коришћене препоруке дате у GUM-у, док ће за случај одређивања мерне несигурности симулационом методом бити коришћен Монте Карло метод.

1.4.1 Одређивање мерне несигурности коришћењем GUM-а

Ако се приликом одређивања мерне несигурности полази од мерених величина које имају присутну само случајну грешку, извршена је корекција ради елиминације систематске грешке и случајни ефекти се могу моделовати одговарајућом расподелом. Придодавањем одговарајуће функције расподеле свака улазна величина окарактерисана је средњом вредношћу и стандардном девијацијом. Стандардна девијација се још назива и стандардна мерна несигурност и означава се са $u(x)$ [18].

Улазне величине могу бити одређене на два начина и то:

- директним мерењем, где се вредности најчешће добијају понављањем мерења и
- преузимањем вредности из других извора: референтних приручника, резултата еталонирања и сл.

Свака од компонената мерних несигурности се дели на мерну несигурност типа А и мерну несигурност типа Б [25].

1.4.1.1 Мерна несигурност типа А

Мерна несигурност типа А подразумева одређивање оптималне вредности као средње вредности скупа мерења (1.3), уз претпоставку да су мерења понављана са истом мерном опремом и у истим условима. Одређује се искључиво методом статистичке обраде резултата, па ће мерна несигурност типа А постојати само у случају да је мерење поновљено више пута. По дефиницији мерна несигурност типа А представља експерименталну стандардну девијацију средње вредности, па се из израза (1.4) и (1.5) добија

$$u_A = s_{x_{opt}} = \sqrt{\frac{\sum_i^n (x_i - x_{opt})^2}{N(N-1)}}. \quad (1.12)$$

Пошто се ради о већем броју мерења, средња вредност испуњава услове централне граничне теореме, па јој се додељује нормална расподела (у случајевима да је узорак мањи од 30 уместо нормалне користи се Студентова t расподела) [5, 26, 27].

1.4.1.2 Мерна несигурност типа Б

У случајевима када није могуће одредити стандардну мерну несигурност из поновљених мерења неопходно је проценити њену вредност. Вредност стандардне мерне несигурности се може одредити из претходно измерених резултата, спецификације произвођача, података датих у извештајима о калибрацији, података из референтних приручника итд. [5, 28].

Како би се одредила мерна несигурност типа Б неопходно је познавати и расподелу грешке преузете из документације. У случају када расподела није позната узима се униформна расподела и при томе се добија већа вредност процењене мерне несигурности.

1.4.1.3 Комбинована мерна несигурност

Нека се жели индиректно мерити физичка величина y која зависи од више измерених физичких величина и дата је изразом (1.8). Ако се зна да је најбоља процена тачне вредности средња вредност скупа мерења сваке од мерених величина \bar{x}_i и ако је функција $f(x_1, \dots, x_n)$ диференцијабилна у тачки $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, онда се функција f може развити у Тејлоров ред као

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} \frac{(x_1 - \bar{x}_1)^{i_1} \dots (x_n - \bar{x}_n)^{i_n}}{i_1! \dots i_n!} \left(\frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \right) (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n). \quad (1.13)$$

Под претпоставком да $x_i - \bar{x}_i \approx 0$, за свако $i = 1, \dots, n$, развој функције (1.8) у Тејлоров ред дат са (1.13) се своди на

$$f(x_1, \dots, x_n) \approx f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - \bar{x}_i). \quad (1.14)$$

Како је $y = f(x_1, \dots, x_n) = \bar{y} + \delta y$ и $\delta y = y - \bar{y}$, израз дат (1.14) се своди на

$$y - \bar{y} = \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} (x_i - \bar{x}_i). \quad (1.15)$$

Квадрирањем леве и десне стране израза (1.15) добија се

$$(y - \bar{y})^2 = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 (x_i - \bar{x}_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} (x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j). \quad (1.16)$$

Како очекивање $E[(y - \bar{y})^2]$ представља варијансу s_y^2 , израз (1.16) се своди на

$$s_y^2 = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 s_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} s_i s_j \rho_{ij}, \quad (1.17)$$

где ρ_{ij} представља Пирсонов коефицијент корелације величина x_i и x_j и дат је изразом

$$\rho_{ij} = \frac{E[(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)]}{s_i s_j}.$$

Узимајући у обзир да је мерна несигурност $u(x_i)$ једнака стандардној девијацији s_i и да $E[(x_i - \bar{x}_i)(x_j - \bar{x}_j)]$ представља естимирану коваријансу означену са $u(x_i, x_j)$, једначина дата изразом (1.17) се своди на

$$u_c^2(y) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j). \quad (1.18)$$

Израз (1.18) представља израз за комбиновану мерну несигурност и узима у обзир корелисаност улазних величина.

У пракси приликом одређивања мерне несигурности најчешће се претпоставља да улазне величине нису корелисане. Тако се процедура процене мерне несигурности поједностављује, али то може довести до погрешне процене мерне несигурности. Постојање корелације између улазних величина потиче од систематских грешака које утичу на две или више мерених величина, а оне се у разматрањима сматрају случајним, тј. немогуће их је препознати и отклонити. На пример, као узрок систематске грешке може се јавити деловање електромагнетних сметњи из окружења, температуре вибрација, флукуација мрежног напајања итд. Уколико лице које врши мерење утицај ових величина не држи под контролом, неће бити ни свесно њиховог утицаја на резултат мерења, односно на прорачун мерне несигурности. Ако би било могуће побољшати мерења тако да се утицај ових величина коригује, последице ових величина више не би били случајне него систематске.

У случају да улазне величине нису корелисане израз (1.18) се своди на

$$u_c^2(y) = \sum_{i=0}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i). \quad (1.19)$$

У литератури је чест случај да се уместо парцијалног извода $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ користи ознака c_i и тај параметар се назива коефицијент осетљивости.

Мерне несигурности типа А и типа Б, представљају независне случајне величине јер се добијају независним методама [21], где се након одређивања вредности за $u_A(x)$ статистичком обрадом података и $u_B(x)$ проценом на основу доступних информација, може одредити комбинована мерна несигурност $u_c(x)$ као

$$u_c(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)}.$$

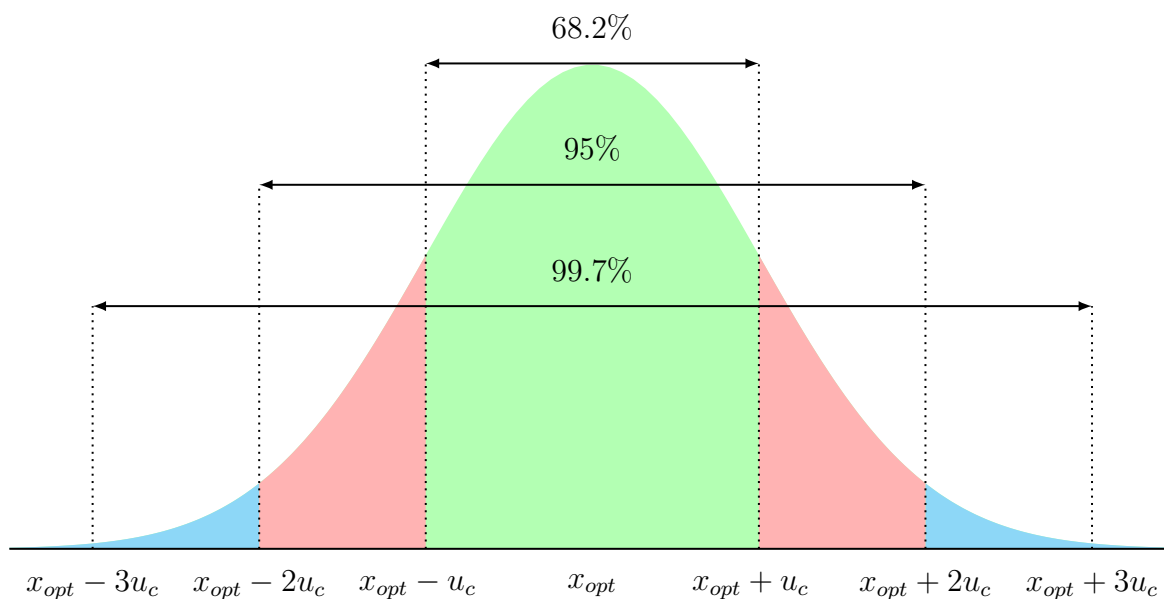
1.4.1.4 Проширена мерна несигурност

Предност исказивања грешке мерења комбинованом мерном несигурношћу огледа се у томе што је могуће, ако се познаје расподела индиректно мерене величине, одредити интервал поверења. Под претпоставком да су задовољени услови централне граничне теореме индиректно мерена величина y ће имати нормалну расподелу. Под претпоставком да y има нормалну расподелу, тачна вредност ће се налазити у интервалу $(y - u_c(y), y + u_c(y))$ са вероватноћом од 68,2%. У случајевима када се саопштава мерна несигурност за сврхе комерцијалних или индустријских апликација, интервал поверења од 68,2% некада није довољан, пре свега у областима заштите и здравства. Како би се проширио интервал поверења, уводи појам проширене мерне несигурности који се дефинише као

$$U = k u_c(y), \quad (1.20)$$

где k представља фактор обухвата, а $u_c(y)$ представља комбиновану мерну несигурност индиректно мерене величине y .

На слици 1.4 приказани су интервали поверења у случају да је фактор обухвата $k = 1, k = 2$ и $k = 3$ и износе 68,2%, 95% и 99,7%, редом. У пракси најчешће фактор обухвата износи између 2 и 3 [5, 29].



Слика 1.4: Интервал поверења у зависности од фактора обухвата за нормалну расподелу

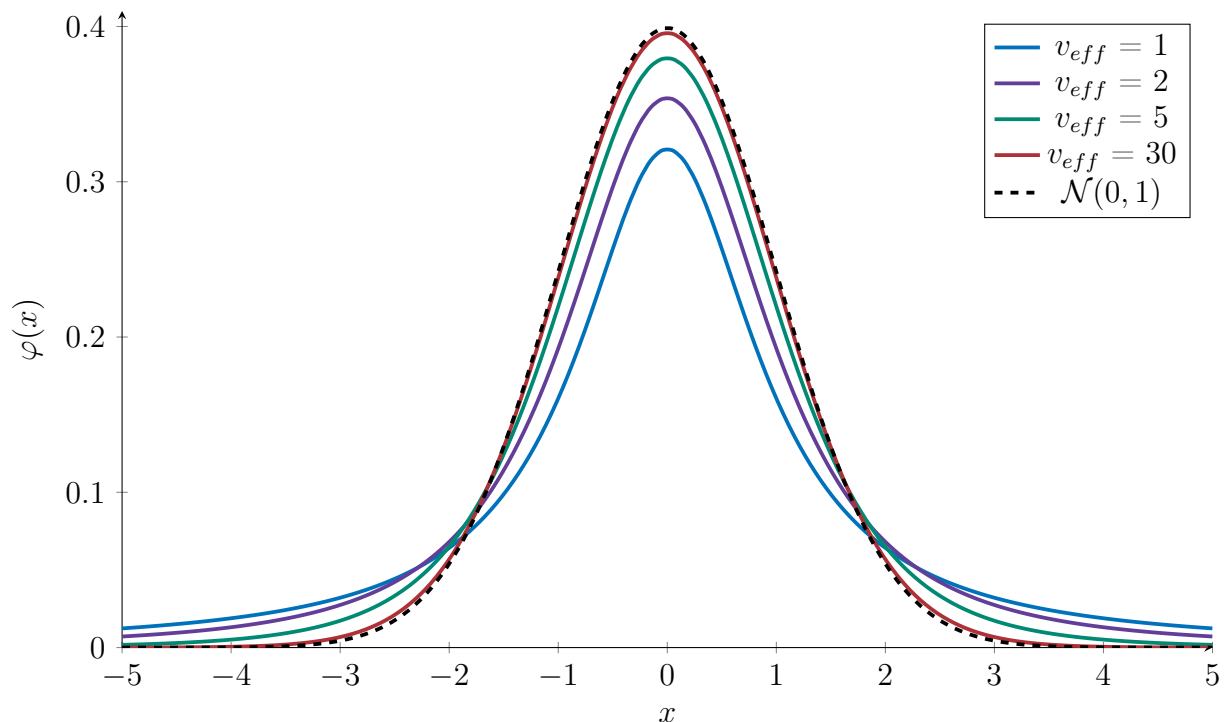
У случајевима када је број одбирака мерених величина мањи од 30 расподела се не може апроксимирати нормалном расподелом, већ се у тим случајевима користи Студентова t расподела. Тада се ефективни број степени слободe прорачунава коришћењем Велч-Сатервајт (енг. *Welch – Satterthwaite*) формуле

$$v_{eff} = \frac{\left(\frac{u_c(y)}{y}\right)^4}{\sum_{i=1}^N \frac{\left(\frac{u(x_i)}{x_i}\right)^4}{v_i}}$$

где v_i представља степен слободe сваке од улазних величина и једнак је броју одбирака умањеном за 1 [30, 31].

На основу одређеног ефективног броја степени слободe из таблица t расподеле се може одредити интервал поузданости за одговарајући фактор обухвата.

На слици 1.5 приказана је функција густине нормалне $\mathcal{N}(0, 1)$ расподеле и функције густине Студентове t расподеле за вредности ефективног броја степени v_{eff} 1, 2, 5 и 30.



Слика 1.5: Функција густине Студентове t расподеле за различите вредности ефективног броја степени слободе и густина нормалне $\mathcal{N}(0, 1)$ расподеле

1.4.1.5 Ограничења GUM-а

Приликом одређивања комбиноване и проширене мерне несигурности GUM-а неопходно је обратити пажњу на следеће:

- У случају када функција $y = f(x_1, \dots, x_n)$ нија линеарна, није довољно развити функцију у Тејлоров ред само у првом степену (1.15), већ се морају узети и виши степени.
- Морају бити испуњени услови централне граничне теореме, тј. индиректно мерена величина y ће имати нормалну или Студентову t расподелу. У одређеним случајевима може се десити да је функција густине индиректно мерене величине асиметрична, тј. да не тежи нормалној расподели.
- Након одређивања стандардне мерне несигурности, како би се одредила проширена мерна несигурност, неопходно је одредити фактор обухвата k . Фактор обухвата ће варирати у зависности од добијене расподеле. За одређивање фактора обухвата потребно је одредити расподелу случајне променљиве $Y = f(X_1, \dots, X_n)$ [32].

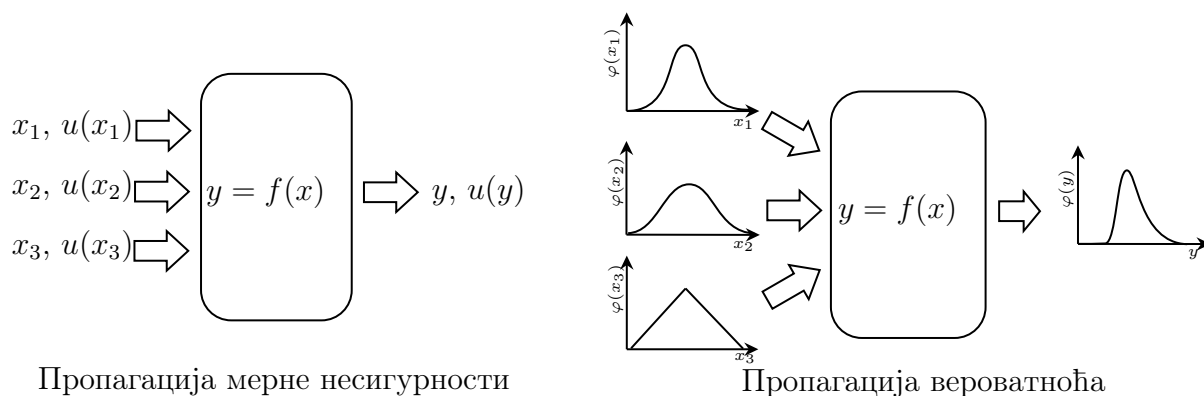
- У специфичним ситуацијама одређивање коефицијената осетљивости рачунањем парцијалних извода може бити компликовано [33].
- У ситуацијама када је процењена тачна вредност излазне величине самерљива са мерном несигурношћу исте.

Како би се превазили поменути проблеми GUM предлаже коришћење Монте Карло методе [5].

1.4.2 Одређивање мерне несигурности коришћењем Монте Карло методе

Монте Карло метода представља симулациону методу и једна од примена јој је одређивање мерне несигурности. Први кораци у раду са развојем Монте Карло методе направљени су у симулацијама за потребе тестирања нуклеарног наоружања почетком 1945. Реализовали су је Џон фон Нојман (мађ. Margittai Neumann Janos Lajos) и Станислав Улам (пољ. Stanisław Marcin Ulam). Пошто је новонастала метода коришћена у војне сврхе додељено јој је кодно име Монте Карло [34].

За разлику од препорука GUM-а, који користи пропагацију мерних несигурности улазних величина, Монте Карло метода користи пропагацију вероватноћа, што је приказано на слици 1.6.



Слика 1.6: Пропагација мерне несигурности и пропагација вероватноће као метода за одређивање мерне несигурности за три независна мерења

Монте Карло симулациона метода полази од функција густина којима се моделује n улазних случајних променљивих X_1, X_2, \dots, X_n . Коришћењем генератора случајних бројева генерише се k одбирака $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$ за сваку случајну променљиву

X_1, X_2, \dots, X_n , помоћу којих се коришћењем математичког модела који описује одговарајућу физичку појаву $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ генеришу и одбирци индиректно мерене величине y . Симулација се понавља M пута.

Монте Карло симулација се састоји из следећих корака:

- Дефинисати адекватан број понављања M .
- Генерисати M вектора, сваки дужине n од којих сваки садржи реализације случајних променљивих $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$.
- За сваки вектор одредити вредност реализације индиректно мерене величине y , тако да се добије M вредности.
- Да би се одредила узорачка функција расподеле случајне променљиве Y потребно је сортирати добијене реализоване вредности случајне променљиве Y у неоппадајући редослед. Добијена функција је степенаста функција и случајна променљива Y је дискретног типа. На основу добијене узорачке функције расподеле могуће је одредити функцију расподеле непрекидне случајне променљиве којом ће се случајна променљива Y апроксимирати.
- Одредити најбољу естимацију y_{opt} и стандардну мерну несигурност $u(y)$ одређивањем средње вредности и стандардне девијације резултата садржаних у Y вектору.
- На основу одређене функције расподеле случајне променљиве Y одредити жељени интервал поузданости [33, 35].

Апроксимација функције густине случајне променљиве Y као и одређивање y_{opt} и $u(y)$, зависе од броја извршених симулација. Што је број симулација већи апроксимација функције густине ће бити боља. Како би се правилно одабрао број симулација M неопходно је користити формулу

$$M > \frac{10^4}{1-p}, \quad (1.21)$$

где p представља интервал поверења. На пример, у случају да се жели одредити интервал поверења $p = 0.95$ било би неопходно извршити више од 200000 симулација. Монте Карло симулациона метода зависи само од перформанси рачунара на коме се врше симулације, па ће већи број симулација захтевати више времена. Због широке распрострањености и бољих перформанси персоналних рачунара данас, уобичајено је извршавање 10^6 и више симулација. Временској ефикасности доприноси и развој програмских језика који су оптимизовани за статистичке прорачуне, као што је R

програмски језик, као и библиотеке за обраду података, на пример *numpy* за програмски језик Пајтон. Време извршавања симулације зависи пре свега од комплексности математичког модела, али што је број симулација већи, удео у времену извршавања ће узимати сортирање добијених резултата како би се одредила расподела случајне променљиве Y [32, 36, 37].

Предности симулационе Монте Карло методе у односу на аналитичко решење дате у GUM-у су:

- Није потребно одређивати коефицијенте осетљивости што у ситуацијама када је функција зависности нелинеарна (узимају се виши степени развоја у Тејлоров ред) може бити компликовано.
- За већи број симулација добија се боља процена случајне променљиве Y код нелинеарних модела.
- Могуће је одредити мерну несигурност у ситуацијама када функција густине случајне променљиве Y није симетрична.
- Није неопходно одредити фактор обухвата како би се одредио интервал поверења [33, 38].

Чест је случај да се резултати добијени пропагацијом мерне несигурности потврђују коришћењем Монте Карло методе [39].

1.5 Преглед литературе

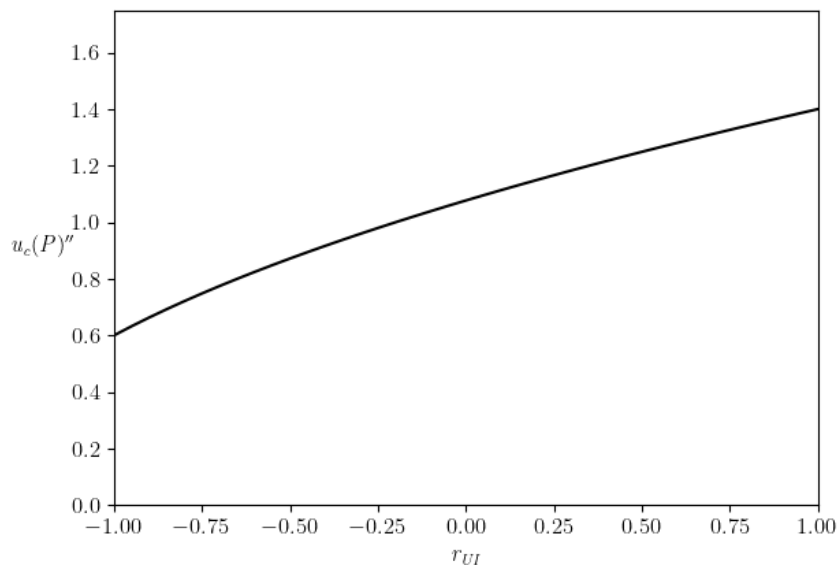
Прегледни рад [6] даје увид у 114 радова који се баве одређивањем мерне несигурности. Радови су објављени у периоду од 2004. до 2010. године у часописима: *IEEE Transaction on Instrumentation and Measurement*, *Flow Measurement and Instrumentation* и *Precision Engineering*. Од 114 анализираних радова проблем корелације мерених величина узет је у обзир у само три рада.

У раду [18] посматран је случај корелираних улазних величина. Разматран је проблем одређивања снаге на основу напона и струје. Измерена је вредност струје $I=2$ А са мерном несигурношћу $u(I)=0,01$ А, а измерена вредност напона је $U=100$ V са мерном несигурношћу $u(U)=0,2$ V. На основу израза (1.18) одређена је мерна несигурност индиректног мерења снаге

$$u(P)'' = \sqrt{I^2 u^2(U) + U^2 u^2(I) + 2UIr_{UI}}, \quad (1.22)$$

где r_{UI} представља коефицијент корелације напона и струје. У случају разматраном у раду највећа вредност мерне несигурности добија се за случај када је $r_{UI} = 1$ и њена вредност је поређена са мерном несигурношћу када је коефицијент корелације $r_{UI} = 0$. Мерна несигурност снаге је $u(P)'=1,08$ W за случај када је коефицијент корелације струје и напона $r_{UI} = 0$, а $u(P)''=1,4$ W за случај када је $r_{UI} = 1$. Показано је да у случају када је претпостављено да мерене величине I и U нису корелисане ($r_{UI} = 0$) долази до прецењивања комбиноване мерне несигурности, што се може закључити из израза (1.18) и (1.19).

За разлику од резултата разматраних у раду [18], потребно је разматрати коефицијенте корелације за све његове могуће вредности. На слици 1.7 приказана је зависност мерне несигурности $u(P)''$ за различите коефицијенте корелације r_{UI} , за вредности напона и струја преузетих из експеримента у раду [18].



Слика 1.7: Зависност мерне несигурности $u(P)''$ од коефицијента корелације r_{UI}

Мерна несигурност снаге се налази уопсегу између 0,6 W, што одговара вредности $r_{UI} = -1$ и 1,4 W, што одговара $r_{UI} = 1$. Релативно исказана мерна несигурност ће се налазити у опсегу од 0,3% до 0,7%. Неузимањем коефицијента корелације у обзир долази до потцењивања мерне несигурности у случају када је коефицијент корелације $r_{UI} > 0$, односно прецењивања када је коефицијент корелације $r_{UI} < 0$.

У раду [40] је разматрано одређивање коефицијента корелације на основу измерених вредности и одређивања стандардне мерне несигурности методом

развијеном у раду. Извршена је провера резултата коришћењем Монте Карло методе. Спроведен је експеримент мерења отпорности, мерењем напона на напонском разделнику. Претпостављено је да корелација улазних величина потиче од мерења напона истим инструментом.

У раду [41] приказан је утицај корелације на калибрацију платинијумских сензора температуре коришћењем ITS-90 (*International Temperature Scale of 1990.*) стандарда за карактеризацију Pt100 сензора [42]. На примеру прорачуна показан је утицај коефицијента корелације на пропагацију мерне несигурности.

У примеру Н.2. датог у [5] разматран је случај у ком су одређени импеданса Z , отпорност R и реактанса X , на основу мерења напона на импеданси V , струје кроз непознату импедансу I и фазног угла ϕ између напона и струје. На основу мерења одређена је мерна несигурност као и коефицијент корелације између мерених величина. Узимајући у обзир корелацију, тј. коришћењем израза (1.18) одређена је мерна несигурности отпорности $u'_c(R)$, реактансе $u'_c(X)$ и импедансе $u'_c(Z)$. Ако се за прорачун мерне несигурности користи израз (1.19), тј. ако мерене величине нису корелисане, мерна несигурности отпорности је $u'_c(R)$, реактансе $u'_c(X)$ и импедансе $u'_c(Z)$. У табели 1.1 (подаци преузети из примера Н.2 датог у [5]) приказано је да је узимањем у обзир коефицијента корелације мерна несигурност отпорности за 174% већа, реактансе је за 32% мања и импедансе је 14% мања у односу на случај када корелација није узета у обзир.

Табела 1.1: Процењене мерне несигурности примера Н.2 датог у GUM-у

| | u'_c | u''_c | $\left(\frac{u''_c}{u'_c} - 1\right)100\%$ |
|-----|----------------|----------------|--|
| R | 0,071 Ω | 0,195 Ω | 174% |
| X | 0,295 Ω | 0,201 Ω | -32% |
| Z | 0,236 Ω | 0.204 Ω | -14% |

У раду [43] описан је начин одређивања мерне несигурности коришћењем копула приликом генерисања корелисаних величина коришћењем Монте Карло методе. У раду је дискутован пример GUM Н.2 и дата је имплементација кода у R програмском језику. Генерисане случајне променљиве имају Студентову t расподелу.

У докторској тези [44] у 4.2.2.2 одређена је мерна несигурност фазне разлике коришћењем развијеног MSAL (*Modified simple algorithm*). Извршен је експеримент одабирањем напона коришћењем волтметара Agilent 3458A на основу чијих одбирака је одређен фазни став два напона, а затим и мерна несигурност.

Пропагација мерне несигурности корелисаних улазних величина поред примене у области електричних мерења проналази примену и у другим областима. У области

хемије рад [45] разматра коришћење коефицијента корелације како би се редуковала мерна несигурност. Радови [46, 47] баве се одређивањем мерне несигурности корелисаних величина у одређивању PIV (*Particle Image Velocimetry*). Поређење Монте Карло методе и GUM-а за одређивање мерне несигурности користећи Бринелов и Викерсов тест приказано је у раду [48]. Показано је да се у случају датом у раду, узимајући у обзир корелацију, вредност мерне несигурности смањује за 10%. Одређивање мерне несигурности коришћењем UPV (*Ultrasonic Pulse Velocity*) теста дато је у раду [49]. Разматране су различите методе за одређивање мерне несигурности: GUM, Монте Карло, Крагтен и K2 метод, као и случајеви са и без корелације између улазних величина.

Глава 2

Теоријске основе

У потпоглављу 2.1 представљено је тренутно стање у области. Представљена је MULTIRNG метода као стандардно решење за генерисање корелисаних случајних променљивих са униформном расподелом. У потпоглављу 2.2 дат је приказ нове методе за генерисање корелисаних случајних променљивих са униформном расподелом. У делу 2.2.1 приказане су теоријске основе развијене методе, у 2.2.2 описан је поступак имплементације методе и на крају у деловима 2.2.3 и 2.2.4 дато је одређивање Пирсоновог коефицијента корелације, као и његово одступање од задатог коефицијента корелације на основу чега је дат предлог за корекцију одступања.

Математичка извођења су дата у додатку А.

2.1 Стање у области

Нека је X случајна променљива непрекидног типа са функцијом расподеле F_X . Случајна променљива Y дефинисана са $Y = F_X(X)$ има униформну $\mathcal{U}(0, 1)$ расподелу. Примењена трансформација назива се интегрална трансформација вероватноће (*Probability Integral Transform* – PIT) [50–52].

Ако је X случајна променљива са униформном $\mathcal{U}(0, 1)$ расподелом и ако је Y непрекидна случајна променљива, онда случајна променљива $F_Y^{-1}(X)$, где је F_Y функција расподеле случајне променљиве Y , има исту функцију расподеле као и случајна променљива Y . Примењена трансформација $F_Y^{-1}(X)$ назива се инверзна интегрална трансформација вероватноће (*Inverse Probability Integral Transform* - IPIT) [53, 54].

За реализацију вишедимензионалне случајне променљиве са дефинисаним коефицијентима корелације као стандардно решење користи се NORTA трансформација (*NORmal To Anything*). Циљ NORTA трансформације је да генерише n -димензионалну случајну променљиву (случајни вектор) $Z = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n]$ полазећи од случајног вектора $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$, који има нормалну n -димензионалну расподелу. За случајни вектор који се генерише $Z = [Z_1, Z_2, \dots, Z_n]$ захтева се:

- да су маргиналне расподеле Z_i случајне променљиве непрекидног типа и да имају задате теоријске функције расподела F_{Z_i} , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ и
- да корелациона матрица $\text{Corr}[X]$ буде једнака задатој матрици Σ , где је

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & 1 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, за $i \neq j$ и $\sigma_{ij} \in [-1, 1]$.

n -димензионална случајна променљива Z је генерисана полазећи од мултиваријантне нормалне случајне променљиве $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$, чија је корелациона матрица Σ_X .

Дакле,

$$Z = [F_{Z_1}^{-1}(\Phi(X_1)), F_{Z_2}^{-1}(\Phi(X_2)), \dots, F_{Z_n}^{-1}(\Phi(X_n))], \quad (2.2)$$

где је Φ функција расподеле случајне променљиве са стандардном нормалном расподелом, $F_{Z_i}^{-1}$ представља инверзну функцију функције расподеле F_{Z_i} , $\rho_{X_i X_j}$ је Пирсонов коефицијент корелације између случајних променљивих X_i и X_j за $i \neq j$ и $\rho_{X_i X_i} = \sigma_{ii}$.

Трансформацијом (2.2) n -димензионална случајна променљива $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ прво се трансформише у случајну променљиву $[\Phi(X_1), \Phi(X_2), \dots, \Phi(X_n)]$ чија свака координата има униформну расподелу, применом PIT трансформације. Затим се вишедимензионална случајна променљива $[\Phi(X_1), \Phi(X_2), \dots, \Phi(X_n)]$ трансформише у вишедимензионалну случајну променљиву Z са задатом расподелом применом IPIT трансформације [55–58].

На примеру $n = 2$ илуструје се примена NORTA методе јер је то од интереса за истраживање приказано у оквиру тезе. Прво се генерише помоћна дводимензионална случајна променљива $Y = [Y_1, Y_2]$, где су Y_1 и Y_2 независне случајне променљиве са стандардном нормалном расподелом.

Следећи корак је генерисање дводимензионалне случајне променљиве $X = [X_1, X_2]$, где су X_1 и X_2 случајне променљиве са стандардном нормалном расподелом такве да је Пирсонов коефицијент корелације $\rho_{X_1 X_2} = \rho$.

Применом трансформације $X = YL$,¹ где је

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1 - \rho^2} \end{bmatrix},$$

добија се

$$X = YL = [Y_1 \ Y_2] \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1 - \rho^2} \end{bmatrix} = [Y_1 \ \rho Y_1 + \sqrt{1 - \rho^2} Y_2].$$

Применом PIT трансформације на дводимензионалну случајну променљиву $X = [X_1, X_2]$ добија се дводимензионална случајна променљива $[\Phi(X_1), \Phi(X_2)]$, где случајне променљиве $\Phi(X_1)$ и $\Phi(X_2)$ имају униформне расподеле на интервалу $(0, 1)$ и за њихов Пирсонов коефицијент корелације важи $\rho_{\Phi(X_1)\Phi(X_2)} \approx \rho$.

Имплементација NORTA трансформације дата је у програмском језику R, као део пакета MultiRNG (*Multivariate Pseudo-Random Number Generation*) [60].

NORTA трансформација није ефикасан метод јер захтева генерисање случајне променљиве са нормалном расподелом. Алгоритми за генерисање случајних бројева са нормалном расподелом заснивају се на генераторима случајних бројева са униформном расподелом. Такође, примена PIT трансформације може бити временски захтевна због великог броја инструкција за израчунавање. Због наведених разлога, развијена је нова метода за генерисање случајних бројева са дефинисаним коефицијентом корелације која полази од униформне $\mathcal{U}(-1, 1)$ расподеле, примењујући једноставне трансформације.

2.2 FOLD метода

Полазећи од две независне случајне променљиве X и Y са униформном расподелом на интервалу $(-1, 1)$ и задатим коефицијентом корелације k генерише се

¹Како би се извршила NORTA трансформација неопходно применити декомпозицију Холеског на корелациону матрицу. Декомпозиција Холеског представља факторизацију матрице на производ доње троугаоне матрице и њене конјуговано транспоноване матрице [59]. Применом декомпозиције Холеског добија се матрица

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{1 - \rho^2} \end{bmatrix}.$$

случајна променљива V која, такође има униформну $\mathcal{U}(-1, 1)$ расподелу. Примењена трансформација за добијање случајне променљиве V подсећа на пресавијање папира, од чега је и проистекао назив за FOLD методу. У [7] дефинисана је FOLD метода и она представља и један од главних резултата тезе. У овом поглављу су детаљно објашњене теоријске основе, а затим и имплементација FOLD методе.

Као резултат примене FOLD методе, добијени Пирсонов коефицијент корелације ρ_{XV} треба да буде једнак задатом коефицијенту корелације k . Одређивање Пирсоновог коефицијента корелације између случајних променљивих X и V дато је у 2.2.3. Након ученог одступања предложен је начин корекције грешке како би се задовољио услов $\rho_{XV} = k$, што је дискутовано у 2.2.4.

Резултати приказани у овом делу представљају оригинални део тезе и публиковани су у [7].

2.2.1 Теоријске основе FOLD методе

Нека су X и Y независне случајне променљиве са униформном расподелом на интервалу $(-1, 1)$. Посматра се случајна променљива W дефинисана са

$$W = kX + \sqrt{1 - k^2} Y, \quad 0 < |k| < 1, \quad (2.3)$$

где је k задати коефицијент корелације између случајних променљивих X и W . Случајна променљива W дата изразом (2.3) представља се у облику

$$W = X_1 + Y_1,$$

где је $X_1 = kX$ и $Y_1 = \sqrt{1 - k^2} Y$.

Случајна променљива X_1 има униформну $\mathcal{U}(-|k|, |k|)$ расподелу и случајна променљива Y_1 има униформну $\mathcal{U}(-\sqrt{1 - k^2}, \sqrt{1 - k^2})$ расподелу, поглавље А.2.

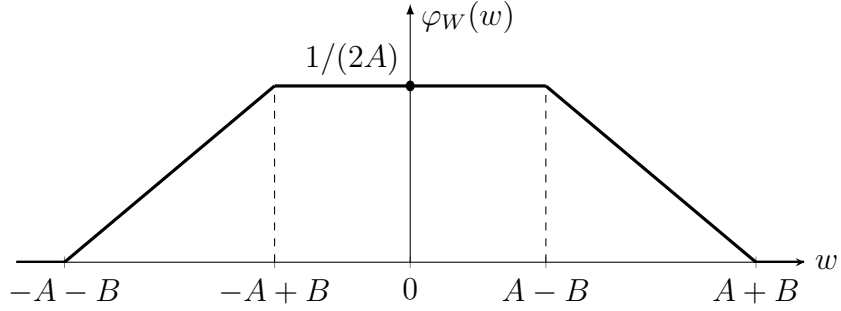
Из независности случајних променљивих X и Y , следи независност случајних променљивих X_1 и Y_1 .

Функција густине случајне променљиве W одређена је у потпоглављу А.3. Функције густине дате са (А.1) и (А.2) се могу записати као

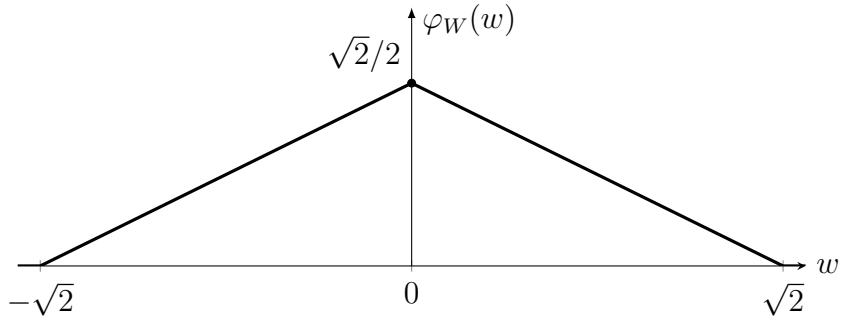
$$\varphi_W(w) = \begin{cases} \frac{w+A+B}{4AB}, & w \in (-A - B, -A + B) \\ \frac{1}{2A}, & w \in [-A + B, A - B] \\ \frac{-w+A+B}{4AB}, & w \in [A - B, A + B) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (2.4)$$

где је $A = \max(|k|, \sqrt{1 - k^2})$ и $B = \min(|k|, \sqrt{1 - k^2})$.

Добијена функција густине случајне променљиве W , за $k \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, приказана је на слици 2.1, а за $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, приказана је на слици 2.2.



Слика 2.1: Функција густине случајне променљиве W за $k \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$



Слика 2.2: Функција густине случајне променљиве W за $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Функција расподеле случајне променљиве W , чије је извођење дато у потпоглављу А.3, је

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w \in (-\infty, -A - B] \\ \frac{w^2 + 2(A+B)w + (A+B)^2}{8AB}, & w \in (-A - B, -A + B] \\ \frac{w+A}{2A}, & w \in (-A + B, A - B] \\ 1 + \frac{-w^2 + 2(A+B)w - (A+B)^2}{8AB}, & w \in (A - B, A + B] \\ 1, & w \in (A + B, \infty) \end{cases} . \quad (2.5)$$

Даље се посматра случајна променљива

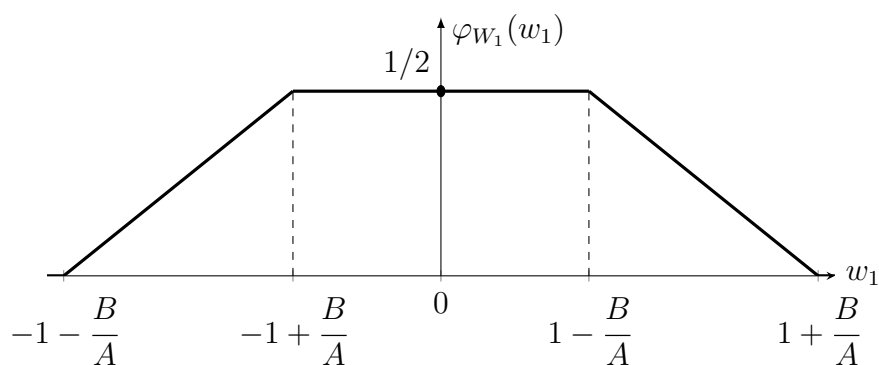
$$W_1 = \frac{W}{A}, \quad (2.6)$$

чија је функција густине

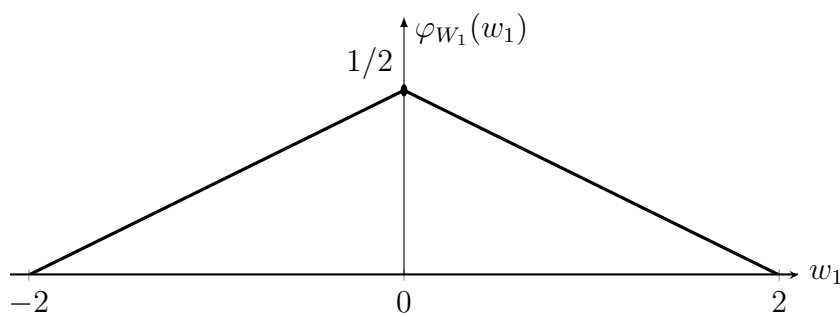
$$\varphi_{W_1}(w_1) = \begin{cases} \frac{Aw_1+A+B}{4B}, & -1 - \frac{B}{A} < w_1 \leq -1 + \frac{B}{A} \\ \frac{1}{2}, & -1 + \frac{B}{A} \leq w_1 \leq 1 - \frac{B}{A} \\ \frac{-Aw_1+A+B}{4B}, & 1 - \frac{B}{A} \leq w_1 < 1 + \frac{B}{A} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (2.7)$$

а извођење је дато у потпоглављу А.4.

Функција густине случајне променљиве W_1 за задати коефицијент корелације $k \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ приказана је на слици 2.3, док је за задати коефицијент корелације $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ приказана на слици 2.4.



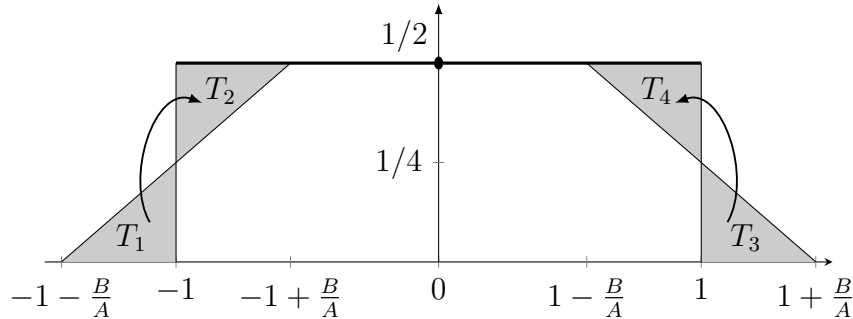
Слика 2.3: Функција густине случајне променљиве W_1 за $k \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$



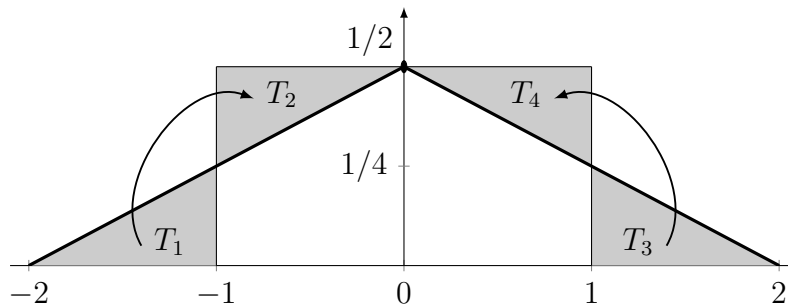
Слика 2.4: Функција густине случајне променљиве W_1 за $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

За добијање случајне променљиве са униформном $\mathcal{U}(-1, 1)$ расподелом, неопходно је извршити одговарајућу геометријску трансформацију.

На сликама 2.5 и 2.6 приказане су геометријске трансформације за $k \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ и за $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, редом.



Слика 2.5: Геометријска трансформација примењена на функцију густине случајне променљиве W_1 за $k \neq \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$



Слика 2.6: Геометријска трансформација примењена на функцију густине случајне променљиве W_1 за $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

На слици 2.3 је приказан трапез одређен графиком функције густине $\varphi_{W_1}(w_1)$ и w_1 -осом за $w_1 \in [-1 - \frac{B}{A}, 1 + \frac{B}{A}]$. Једна бочна страница трапеза је одређена тачкама $(-1 - \frac{B}{A}, 0)$ и $(-1 + \frac{B}{A}, \frac{1}{2})$ и њена средина је одређена тачком $(-1, \frac{1}{4})$. Слично, друга бочна страница је одређена тачкама $(1 - \frac{B}{A}, \frac{1}{2})$ и $(1 + \frac{B}{A}, 0)$ и њена средина је одређена тачком $(1, \frac{1}{4})$.

Површина троугла T_1 , чија темена припадају скупу $\{(-1 - \frac{B}{A}, 0), (-1, 0), (-1, \frac{1}{4})\}$ једнака је површини троугла T_2 , чија темена припадају скупу $\{(-1, \frac{1}{4}), (-1, \frac{1}{2}), (-1 + \frac{B}{A}, \frac{1}{2})\}$. Такође, троугао T_3 , чија темена припадају скупу $\{(1, 0), (1, \frac{1}{4}), (1 + \frac{B}{A}, 0)\}$ и за троугао T_4 , чија темена припадају скупу $\{(1 - \frac{B}{A}, \frac{1}{2}), (1, \frac{1}{4}), (1, \frac{1}{2})\}$, имају међусобно једнаке површине. Како би се случајна променљива W_1 са трапезном расподелом трансформисала у случајну променљиву са униформном $\mathcal{U}(-1, 1)$ расподелом неопходно је троугао T_1 прсликати на троугао T_2 , као и троугао T_3 прсликати на троугао T_4 , као што је приказано на слици 2.5.

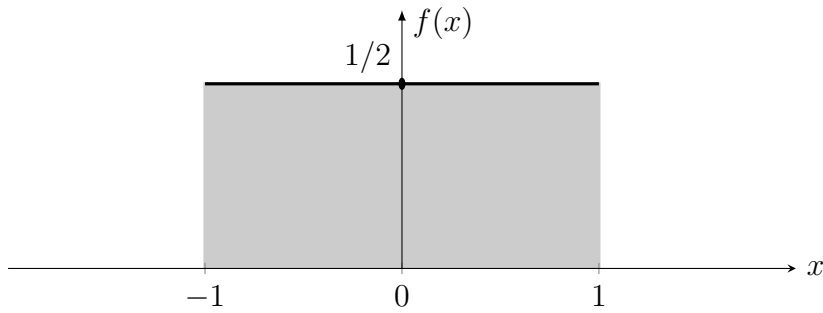
За свако $w_1 \in (-1 - \frac{B}{A}, -1]$ је $w_1 = -1 - d$, где је $d = |-1 - w_1|$ растојање w_1 од -1 . Нека је $w'_1 = -1 + d, w'_1 \in [-1, -1 + \frac{B}{A})$. Тада је

$$\varphi_{W_1}(w_1) + \varphi_{W_1}(w'_1) = \frac{1}{2}. \quad (2.8)$$

Слично, за свако $w_1 \in [1, 1 + \frac{B}{A})$ где је $w_1 = 1 + d$, где је $d = |1 - w_1|$ важи (2.8), где је $w'_1 = 1 - d, w'_1 \in [1 - \frac{B}{A}, 1)$.

У случају када је $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ геометријска трансформација се примењује слично, као што је и приказано на слици 2.6. Троугао T_1 се пресликава на троугао T_2 и троугао T_3 се пресликава на троугао T_4 , тако да важи једнакост (2.8).

Описана геометријска трансформација, траpez, тј. троугао трансформише у полуотворени правоугаоник $(-1, 1) \times (0, \frac{1}{2}]$, приказан на слици 2.7, ограничен x -осом и хоризонталном линијом $f(x) = \frac{1}{2}$ за $x \in (-1, 1)$.



Слика 2.7: Полуотворени правоугаоник добијен након примене геометријске трансформације на траpez и троугао

Посматра се функција

$$\varphi_V(v) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & v \in (-1, 1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}. \quad (2.9)$$

Ова функција је ненегативна и $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_V(v) dv = 1$, одакле се може закључити да функција $\varphi_V(v)$ представља функцију густине случајне променљиве са униформном расподелом на интервалу $(-1, 1)$. У даљем тексту случајна променљива одређена са (2.9) је означена са V , тј. случајна променљива V је трансформација случајне променљиве W_1 . Као што је показано, случајна променљива V има униформну $\mathcal{U}(-1, 1)$ расподелу.

Описана геометријска трансформација случајне променљиве W_1 у случајну променљиву V може се записати изразом

$$V = \begin{cases} -2 - W_1, & W_1 \leq -1 \\ 2 - W_1, & 1 \leq W_1 \\ W_1, & \text{иначе} \end{cases} . \quad (2.10)$$

2.2.2 Имплементација FOLD методе

Како би се потврдили резултати добијени теоријским извођењем у претходном потпоглављу, реализован је код у ком је имплементиран описани поступак. Алгоритам извршавања дат је псеудокодом у алгоритму 1.

Алгоритам 1: Псеудокод имплементације FOLD методе

```

постави  $k$  на задату вредност корелације у опсегу  $(-1, 1) \setminus \{0\}$ 
постави  $l$  на  $\sqrt{1 - k^2}$ 
постави  $A$  на  $\max(|k|, l)$ 
преузми  $X$  позивом функције numpy.random.uniform
преузми  $Y$  позивом функције numpy.random.uniform
постави  $V$  на празан низ
за сваки елемент  $y$   $X$  и  $Y$ 
    постави  $W_1$  на  $(kX + lY)/A$ 
    ако је  $W_1 \leq -1$  онда
        | додај  $(-2 - W_1)$  на  $V$ 
    а ако је  $W_1 \geq 1$  онда
        | додај  $(2 - W_1)$  на  $V$ 
    у супротном
        | додај  $W_1$  на  $V$ 
крај

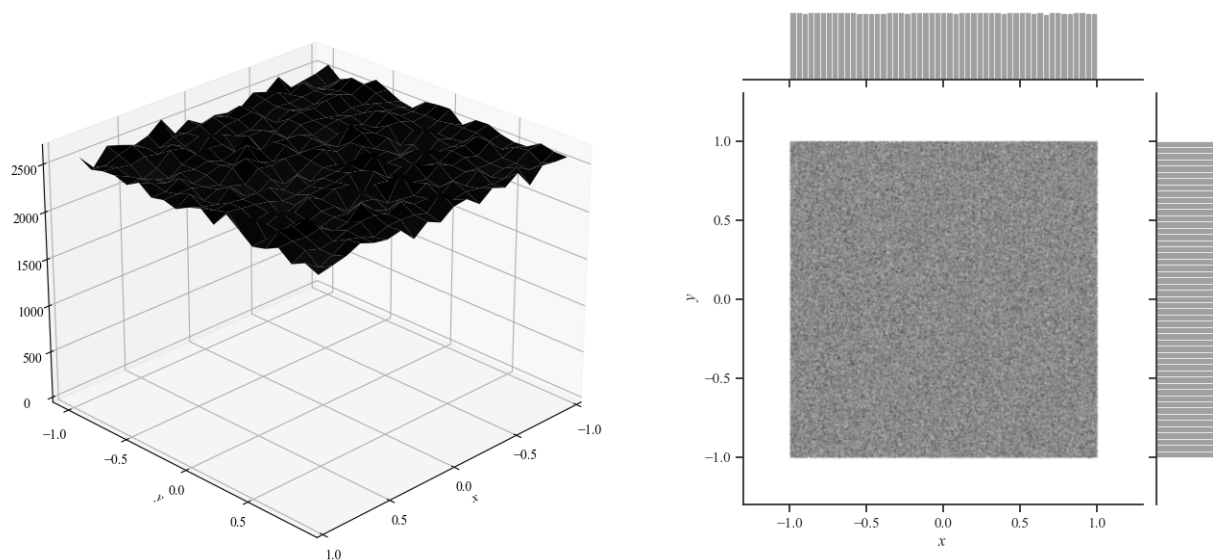
```

Првобитно је код написан у Пајтон програмском језику због једноставности имплементације. Проблем који се јавио је непостојање реализације стандардне методе, па је стога код реализован и у R програмском језику. Због коришћења већ реализованих функција у Пајтон и R програмском језику чијим реализацијама је тешко приступити, а како би се добијени резултати додатно потврдили, извршена је реализација и у C++ програмском језику без коришћења додатних функција. Реализовани кодови дати су у Б.1, Б.2 и Б.3.

Симулације су извршаване на рачунару са 16 GB RAM меморије радног такта 2667 MHz и процесором Intel i7 8700 радног такта 3,2 GHz. Како би се смањио утицај

оперативног система са позадинским процесима, код је покретан на Манџаго оперативном систему базираном на Arch Linux дистрибуцији. Сви кодови су покретани без графичког интерфејса из командне линије како би се вероватноћа за појавом позадинског програма, који би продужио време извршавања кода svela на минимум.

Код описан алгоритмом 1 започиње дефинисањем вредности задатог коефицијента корелације, који мора бити у опсегу $(-1, 1) \setminus \{0\}$ и додељује се променљивој означеној са k . Пошто се у генерисању случајне променљиве V више пута рачуна $\sqrt{1 - k^2}$, а како би се код максимално оптимизовао, ова константа је одређена на почетку извршавања кода и додељује се променљивој l . Након тога се одређује константа A као $\max(|k|, \sqrt{1 - k^2})$. Реализације случајних променљивих, у псеудокоду означене са X и Y , се добијају као низови бројева који представљају реализоване вредности случајних променљивих X и Y са униформном $\mathcal{U}(-1, 1)$ расподелом. У Пајтон програмском језику се добијају реализоване вредности случајне променљиве са униформном расподелом коришћењем функције *random.uniform* из пакета *numpy*, у R програмском језику коришћењем функције *runif* и у C++ програмском језику коришћењем класе *uniform_real_distribution* из библиотеке *random*. У симулацијама за поређење перформанси алгоритма за генерисање случајних бројева са задатим коефицијентом корелације симулирани вектори су садржали 10^6 елемената. На слици 2.8 приказане су функције густине случајне променљиве (X, Y) , као и пројекција функције густине на xy -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и Y .

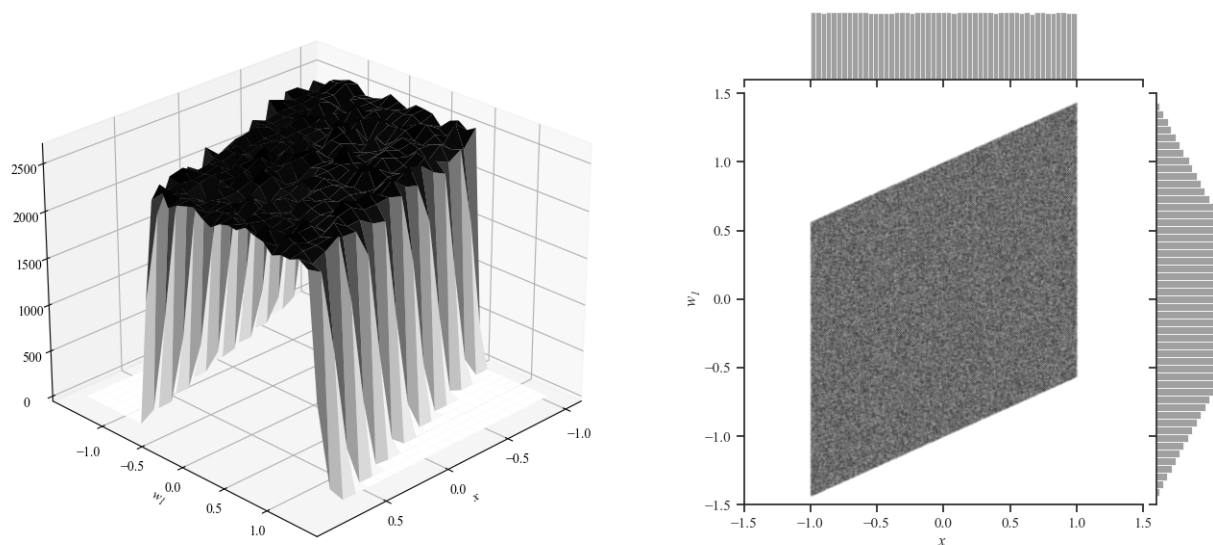


Слика 2.8: Функција густине случајне променљиве (X, Y) , пројекција функције густине на xy -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и Y

На слици 2.8 десно може се уочити равномерна расподела на квадрату чија су темена $(-1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, -1)$ и $(1, 1)$ за генерисане независне случајне променљиве X и Y .

Након генерисања формиран је низ за смештање резултата добијених трансформацијом FOLD методом и означен је са V . У међукораку су реализоване вредности случајне променљиве W_1 , која је дефинисана изразом (2.6).

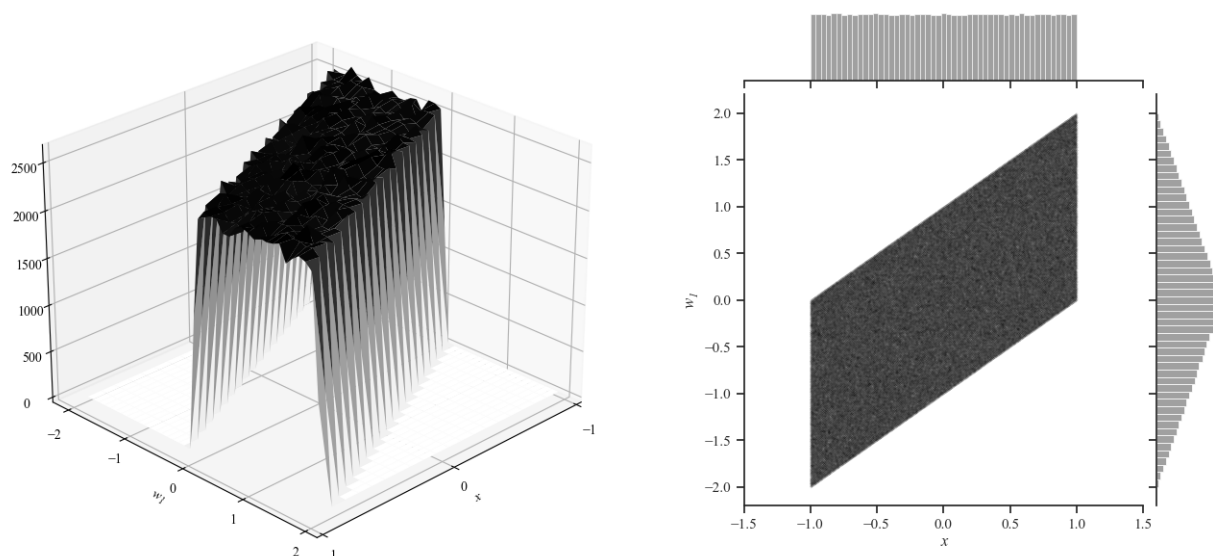
Функција густине случајне променљиве (X, W_1) , пројекција функције густине на xw_1 -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и W_1 за коефицијент корелације $k = 0,4$ приказани су на слици 2.9.



Слика 2.9: Функција густине случајне променљиве (X, W_1) , пројекција функције густине на xw_1 -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и W_1 за $k = 0,4$

Функција густине случајне променљиве (X, W_1) , пројекција функције густине на xw_1 -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и W_1 за коефицијент корелације $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ приказани су на слици 2.10.

Прикази хистограма реализованих вредности случајне променљиве W_1 добијених симулационим путем приказаних на сликама 2.9 и 2.10 су у сагласности са резултатима добијеним теоријским путем датим изразом за функцију густине (2.7) и приказаним на сликама 2.3 и 2.4. Важно је истаћи да се троугаона расподела добија само за коефицијент корелације $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

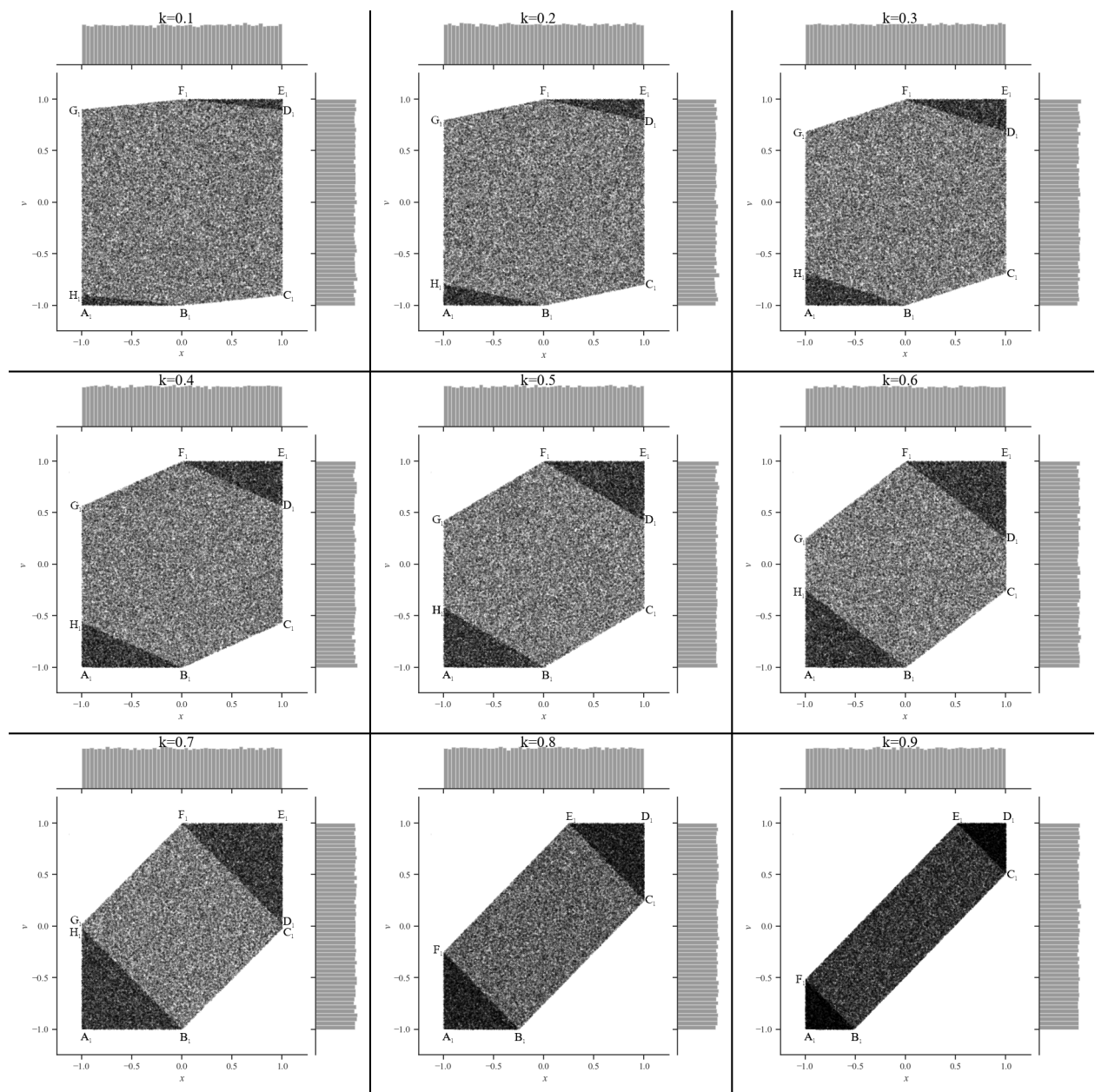


Слика 2.10: Функција густине случајне променљиве (X, W_1) , пројекција функције густине на xw_1 -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и W_1 за $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Након генерисања променљиве W_1 у коду њена вредност се проверава и у случају да је мања од -1 или већа од 1 врши се трансформација описана једначином (2.10). Резултујући низ V представља низ 10^6 реализација случајне променљиве V , која има униформну $\mathcal{U}(-1, 1)$ расподелу.

Пројекција функције густине на xv -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и V за коефицијенте корелације у опсегу између $0, 1$ и $0, 9$ са кораком $0, 1$ приказани су на слици 2.11.

На слици 2.11 се могу уочити тамнији троуглови, ограничени тачкама $A_1B_1H_1$ и $F_1E_1D_1$ за задати коефицијент корелације мањи од $\frac{\sqrt{2}}{2}$, као и троуглови $A_1B_1F_1$ и $C_1D_1E_1$ у случају да је задати коефицијент корелације већи од $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ови троуглови су директна последица геометријске трансформације FOLD методе. Такође, битно је истаћи да за било коју вредност задатог коефицијента корелације маргинална густина случајне променљиве V је униформна на интервалу $(-1, 1)$.



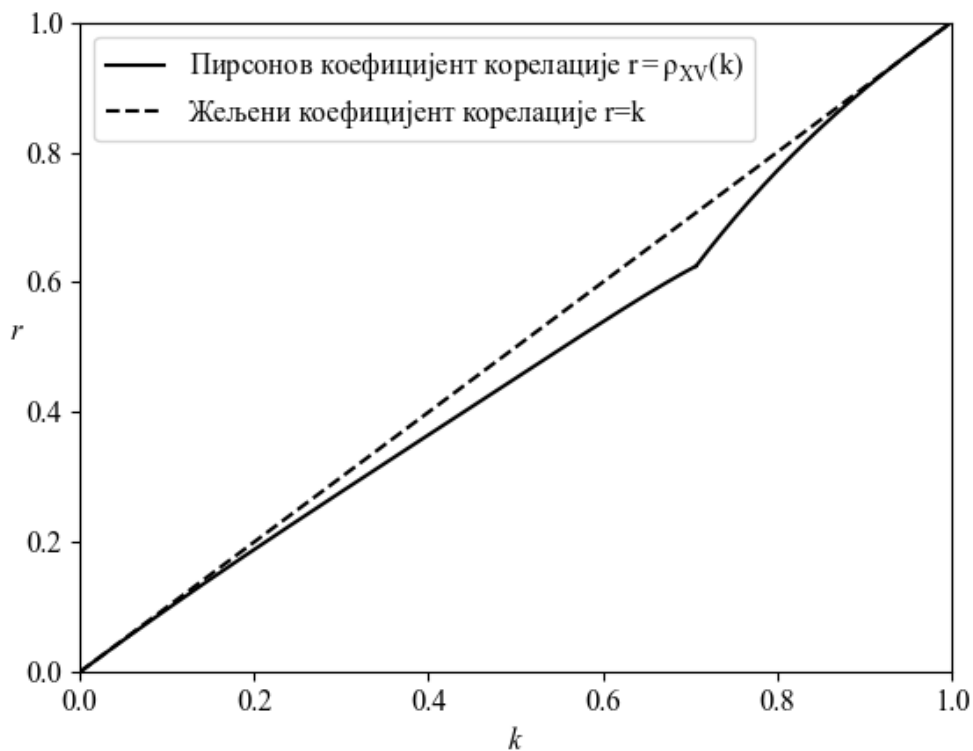
Слика 2.11: Пројекција функције густине на xv -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и V за различите вредности задатог коефицијента корелације

2.2.3 Пирсонов коефицијент корелације

Пирсонов коефицијент корелације између случајних променљивих X и V дат је са

$$\rho_{XV}(k) = \begin{cases} -\frac{3}{8} \left(\frac{|k|}{\sqrt{1-k^2}} \right)^2 + \frac{|k|}{\sqrt{1-k^2}}, & 0 < |k| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{8} \left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{|k|} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{|k|} \right)^2 + 1, & \frac{\sqrt{2}}{2} < |k| < 1 \end{cases}. \quad (2.11)$$

Целокупно извођење ρ_{XV} дато је у потпоглављу А.5.



Слика 2.12: Зависност Пирсоновог од задатог коефицијента корелације и зависност жељеног од задатог коефицијента корелације

На основу израза (2.11) уочено је да постоји разлика између задатог коефицијента корелације k , који је дефинисан на почетку алгоритма, и Пирсоновог коефицијента корелације након трансформације ρ_{XV} . На слици 2.12 је приказан график $\rho_{XV}(k)$, као и график који представља жељену вредност $\rho_{XV} = k$.

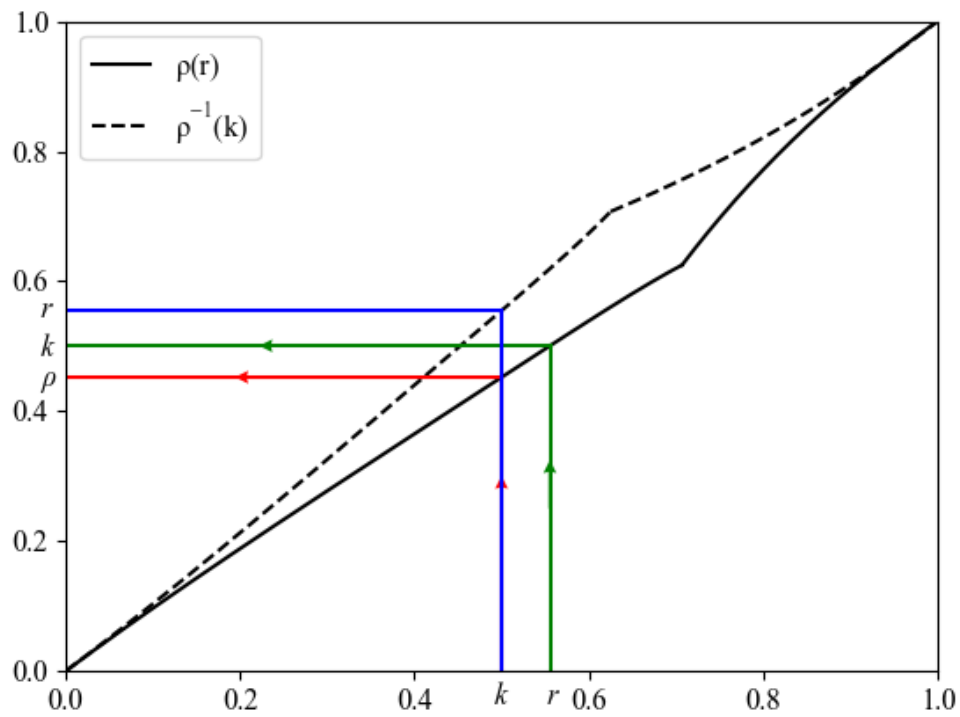
2.2.4 Корекција одступања добијеног Пирсоновог коефицијента корелације од задатог коефицијента корелације

Услед одступања Пирсоновог коефицијента корелације ρ_{XV} од задатог коефицијента корелације k , извршена је корекција коришћењем инверзне функције $\rho_{XV}^{-1}(k)$. Одређивање инверзне функције је описано у потпоглављу А.6. Добијена инверзна функција дата је са

$$\rho_{XV}^{-1}(k) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{3}{2}k}}{\sqrt{(\sqrt{1 - \frac{3}{2}k} - 1)^2 + \frac{9}{16}}}, & 0 < |k| \leq \frac{5}{8} \\ \frac{6}{\sqrt{(-\sqrt[3]{4}((1 - \sqrt{3}i)^{\frac{1}{3}\Sigma - \Delta} + (1 + \sqrt{3}i)^{\frac{1}{3}\Sigma + \Delta}) + 8)^2 + 36}}, & \frac{5}{8} < |k| < 1 \end{cases}, \quad (2.12)$$

где је $\Sigma = 27k - 11$ и $\Delta = 3\sqrt{3}\sqrt{27k^2 - 22k - 5}$.

Задати коефицијент корелације k се прослеђује као параметар инверзној функцији $\rho_{XV}^{-1}(k)$, а добијена вредност се прослеђује као кориговани задати коефицијент корелације r алгоритму описаном у алгоритму 1. На пример, у случају да се жели добити Пирсонов коефицијент корелације $\rho_{XV} = 0.5$ између случајних променљивих X и V неопходно је одредити $r = \rho_{XV}^{-1}(k) = 0.5547$ и та вредност се прослеђује као улазни параметар FOLD методе. Након корекције и примене FOLD трансформације, Пирсонов коефицијент корелације између случајних променљивих X и V је $\rho_{XV}(k) = 0.5$. Поменути пример приказан је на слици 2.13. Такође, приказане су и зависности $r = \rho_{XV}^{-1}(k)$, као и $k = \rho_{XV}(r)$. Важно је истаћи да у (2.12) инверзна функција за $\frac{5}{8} < |k| < 1$ је комплексна, али је кодомен за $\frac{\sqrt{2}}{2} < |k| < 1$ подскуп скупа реалних бројева. Да би се применила корекција неопходно је користити или реализовати библиотеку за рад са комплексним бројевима што би додатно закомпликовало и продужило време извршавања FOLD методе.



Слика 2.13: Зависност коефицијента корелације $k = k(r)$ коришћењем инверзне функције $\rho_{XV}^{-1}(r)$

Глава 3

Поређење постојеће и развијене методе

У овом поглављу описано је поређење постојеће MVUD и развијене FOLD методе. Поређење на основу емпиријских података је извршено по два параметра: брзини извршавања алгорита и поређењу одступања задатог од узорачког коефицијента корелације. Поређење по брзини детаљно је дискутовано у потпоглављу 3.1. Одступање задатог од узорачког коефицијента корелације изложено је у потпоглављу 3.2.

На основу резултата добијених у делу 2.2.4 извршена је корекција резултата и добијени резултати приказани су у делу 3.3.1. Како би се избегла потреба за коришћењем математичког апарата комплексне анализе за одређивање инверзне функције, а самим тим и убрзао алгоритам одређивања корекције, на основу резултата добијених симулацијама апроксимирана је инверзна функција коришћењем полиномијалне функције што је приказано у делу 3.3.2.

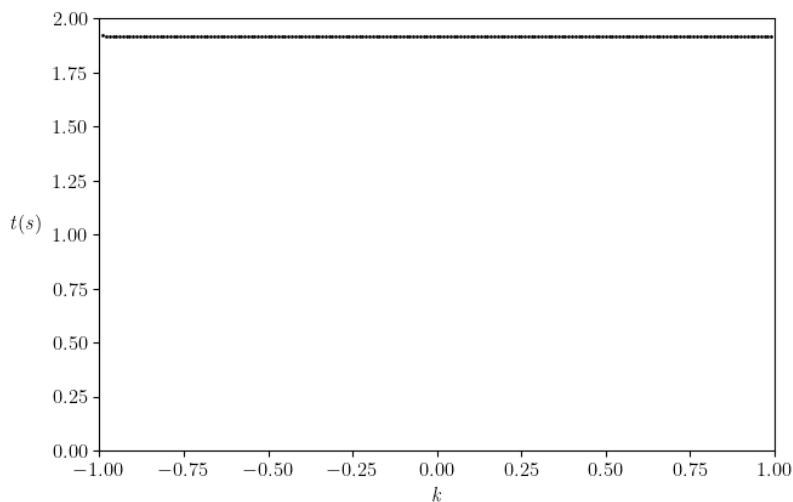
На крају је у потпоглављу 3.4 дат приказ одступања задатог од узорачког коефицијента корелације након примењених корекција. Такође, извршено је поређење стандардне и развијене методе по одступању задатог од узорачког коефицијента након корекције развијене методе.

3.1 Поређење по брзини извршавања

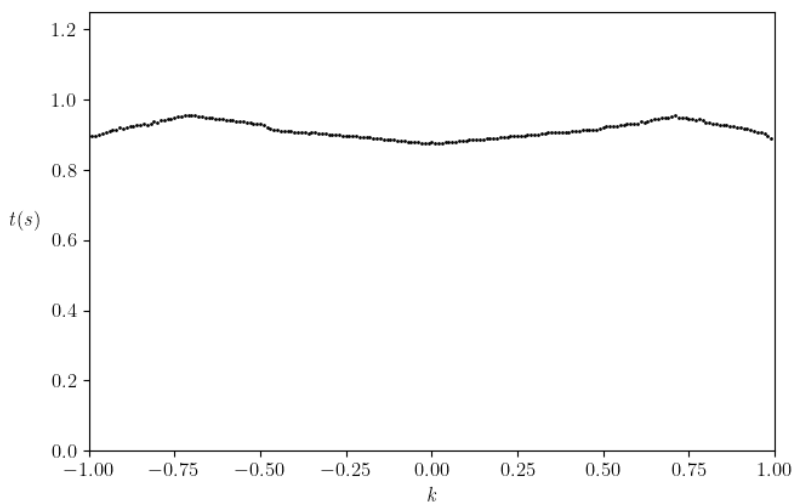
Како би се извршило поређење MVUD и FOLD методе, симулације су извршене у R програмском језику. Разлог за коришћење R програмског језика је библиотека MULTIRNG која се може преузети са CRAN (Comprehensive R Archive Network) репозиторијума библиотека. MULTIRNG библиотека садржи функцију

`draw.d.variate.uniform` која на основу прослеђених параметара, корелационе матрице и броја елемената који ће се генерисати генерише низове бројева са међусобно дефинисаним коефицијентом корелације, види [61].

Реализација FOLD методе у програмском језику R извршена је на основу кода датог у потпоглављу Б.2.



(a) MVUD метода



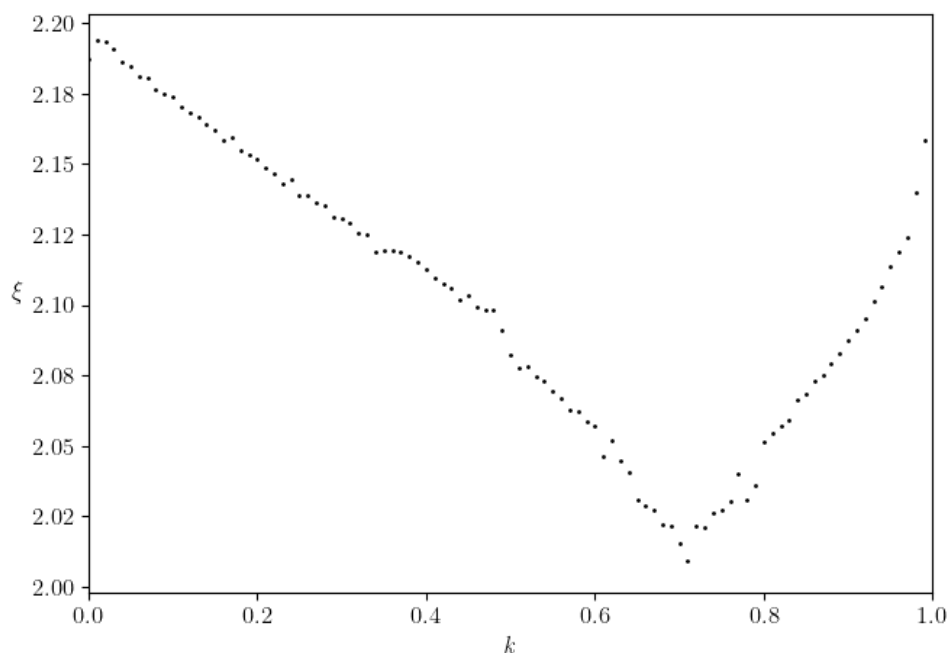
(б) FOLD метода

Слика 3.1: Зависност времена извршавања од задатог коефицијента корелације

Зависно од коефицијента корелације посматрано је време потребно за генерисање 10^7 вредности по MVUD и FOLD методи. Прослеђени коефицијент је мењан између -1 и 1 са кораком $0,05$. На слици 3.1 приказани су добијени резултати зависности времена извршавања алгорита од задатог коефицијента корелације. За сваку вредност коефицијента корелације извршено је 30 понављања са по 10^7 вредности у сваком понављању. Зато су на графицима приказане средње вредности времена потребног за генерисање како би се минимализовао утицај позадинских процеса оперативног система.

Добијени резултати приказани на слици 3.1 показују да је развијена FOLD метода временски ефикаснија од стандардне MVUD методе. MVUD метода примењује идентичну трансформацију без обзира на задати коефицијент корелације, па је због тога и време неопходно за генерисање константно. FOLD метода највише инструкција извршава у случају троугаоне расподеле за $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$, па је тада и време неопходно за генерисање случајне променљиве највеће.

На слици 3.2 приказан је однос времена извршавања ξ као количник времена потребног за генерисање MVUD и FOLD методе. Резултати указују да је развијена метода бар два пута временски ефикаснија од стандардне методе.

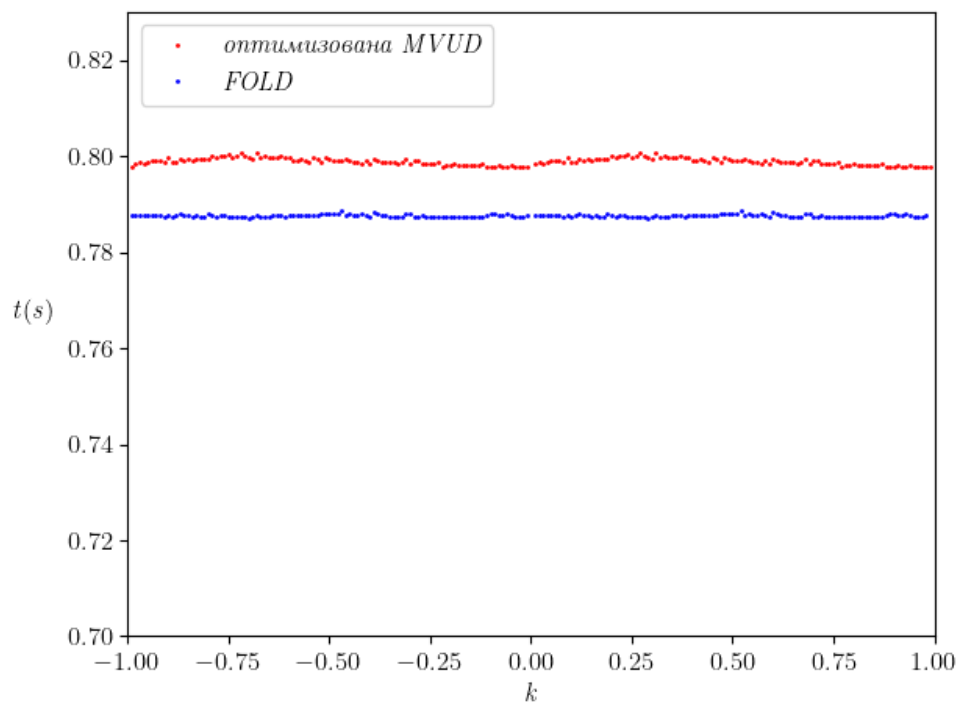


Слика 3.2: Однос времена извршавања MVUD и FOLD методе

Овде је важно истаћи да се *draw.d.variate.uniform* функција може користити за

генерисање случајне променљиве са униформном расподелом и дефинисаним коефицијентом корелације (дате корелационом матрицом), види потпоглавље 2.1, полазећи од две униформне расподеле било којих граница, док за генерисање FOLD метода мора полазити од случајних променљивих са униформном $\mathcal{U}(-1, 1)$ расподелом, види потпоглавље 2.2. Такође, MVUD метода може генерисати вишедимензионалну случајну променљиву, док FOLD метода може генерисати само дводимензионалну случајну променљиву. Због наведених разлога, MVUD метода *draw.d.variate.uniform* имплементирана је и оптимизирана само за случај генерисања дводимензионалне случајне променљиве са дефинисаним коефицијентом корелације. Имплементација је извршена у C++ програмском језику, а код је дат у листингу кода Б.4.

На слици 3.3 приказана је зависност времена од коефицијента корелације за FOLD методу и оптимизовану MVUD методу.



Слика 3.3: Зависност времена извршавања од задатог коефицијента корелације након оптимизације MVUD у C++ програмском језику

Оптимизација је извршена тако да MVUD метода сада полази од две униформне $\mathcal{U}(-1, 1)$ расподеле, где се уз помоћ њих на сличан начин као и код FOLD методе, израз (2.3), добија случајна променљива са трапезном расподелом. Након генерисања

трапезне случајне променљиве она се применом РИТ трансформације, види потпоглавље 2.1, трансформише у униформну $\mathcal{U}(-1, 1)$ расподелу.

Оптимизација је пре свега извршена при генерисању случајних променљивих. Како би се генерисала случајна променљива нормалне расподеле неопходно је генерисати више случајних променљивих са униформном расподелом [62–64]. Зато је потребно више времена за генерисање случајне променљиве нормалне расподеле, него у случају генерисања случајне променљиве униформне расподеле. Такође, важно је истаћи да је за овај случај коришћена функција расподеле трапезне случајне променљиве (2.5), где је прорачун коефицијената максимално оптимизован (константе c_1 , c_2 и c_3 у листингу кода Б.4).

Након оптимизације, извршавање MVUD методе је знатно брже, али је и даље FOLD метода бржа јер се извршава мањи број инструкција због тога што FOLD метода користи мање захтевне трансформације. Важно је истаћи да се у резултатима приказаним на слици 3.3 узимало у обзир и време неопходно за генерисање полазних случајних променљивих са униформном $\mathcal{U}(-1, 1)$ расподелом, па због тога сам допринос једноставности трансформације не долази до изражаја.

3.2 Поређење одступања задатог од узорачког коефицијента корелације

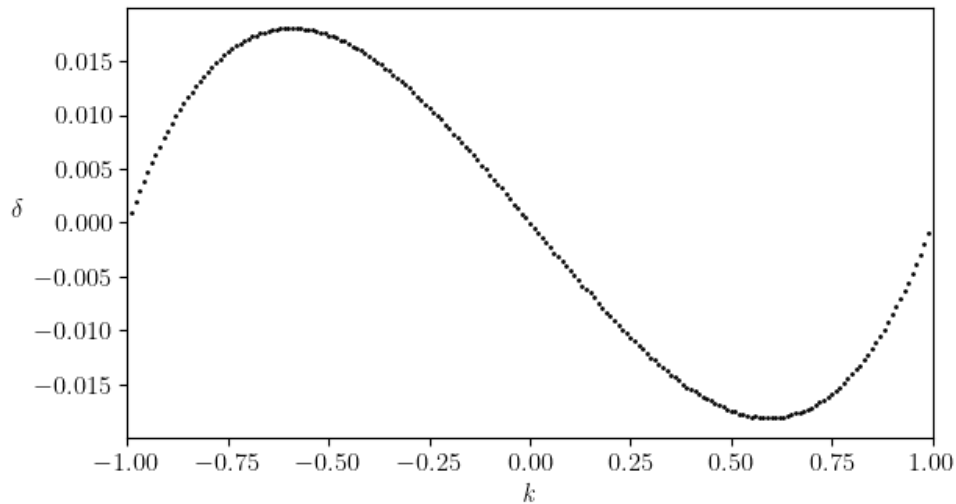
Приликом генерисања случајних променљивих са задатим коефицијентом корелације, поред мерења времена добијена су и значајна одступања задатог и добијеног коефицијента корелације. На слици 3.4 приказана је грешка дефинисана као разлика добијеног и задатог коефицијента корелације ($\delta = r_{XV}(k) - k$), и то за MVUD методу на слици 3.4(а), а за FOLD методу слика 3.4(б).

Одступање задатог од добијеног коефицијента корелације је и до четири пута веће у случају коришћења FOLD методе у односу на MVUD методу.

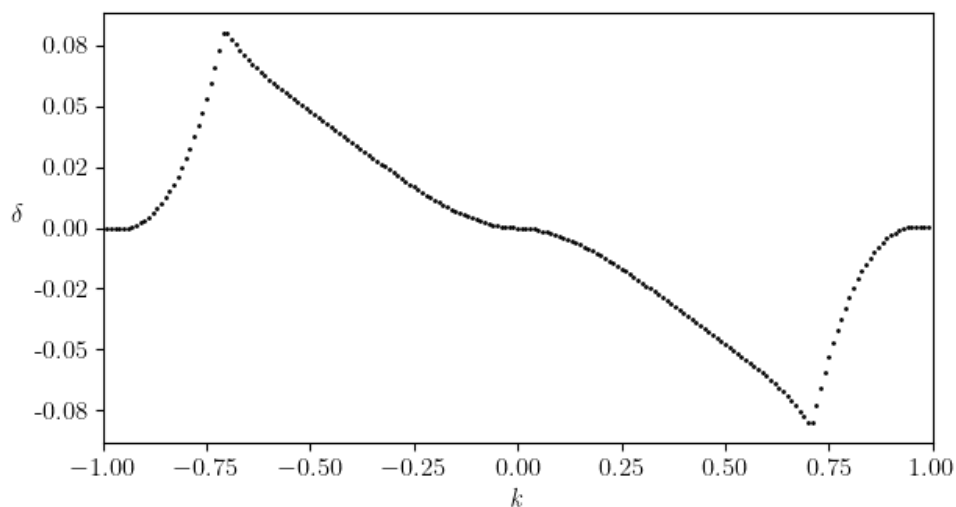
3.3 Корекција одступања задатог од узорачког коефицијента корелације

На основу резултата добијених симулацијама уочено је присуство систематске грешке и у случају коришћења MVUD и у случају коришћења FOLD методе. Због тога је предложена корекција резултата добијених FOLD методом, и то на основу

добијених теоријских резултата датих у делу 2.2.4, као и интерполацијом функције на основу резултата добијених симулацијама. Кориговање резултата биће приказано за $k > 0$, јер се због симетрије за вредности $k < 0$ добијају исти резултати.



(a) MVUD метода



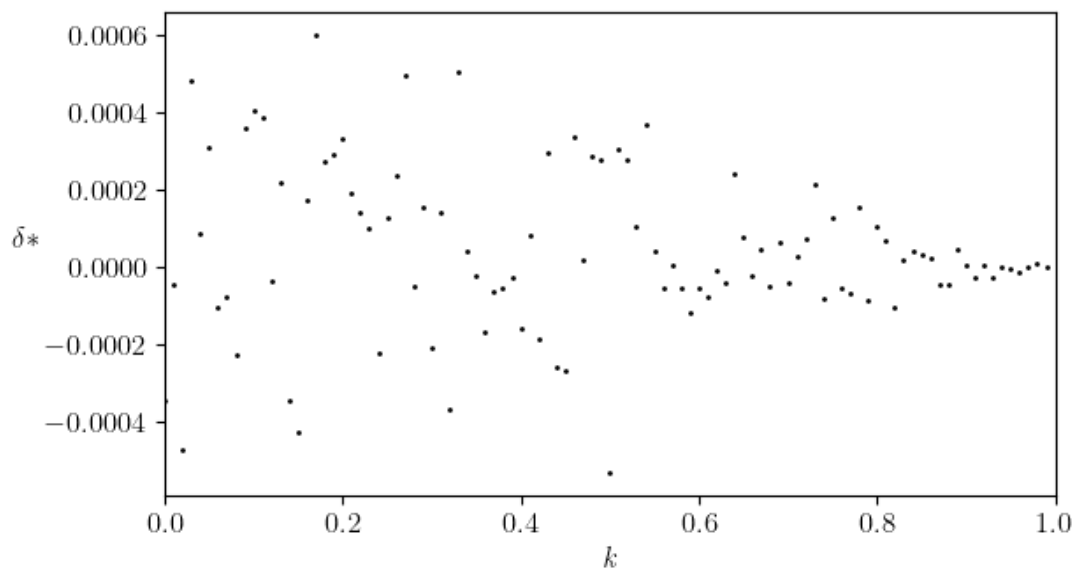
(б) FOLD метода

Слика 3.4: Зависност грешке од задатог коефицијента корелације

MVUD метода је имплементирана у посебном пакету у R програмском језику и на њене резултате није примењена корекција. Важно је истаћи да се на MVUD методу могу применити исте методе за корекцију као и код FOLD методе, али ће у даљем раду бити разматран само случај корекције FOLD методе.

3.3.1 Кориговање одступања тражењем инверзне функције

У потпоглављу А.6 одређена је инверзна функција $\rho_{XV}^{-1}(k)$ применом које је извршена корекција одступања задатог од жељеног коефицијента корелације. Разлика задатог од добијеног коефицијента корелације након примењене корекције приказана је на слици 3.5 за симулираних 10^7 елемената са променом задатог коефицијента корелације од 0 до 1 са кораком 0,01.



Слика 3.5: Одступање задатог од добијеног коефицијента корелације (δ^*) у зависности од задатог коефицијента корелације након примењене корекције помоћу инверзне функције $\rho_{XV}^{-1}(k)$

Проблем који се јавља приликом коришћења оваквог начина корекције је потреба за коришћењем алата комплексне анализе како би се одредила коригована вредност коефицијента корелације коју је потребно задати алгоритму. У R програмском језику, као и у Пајтону могуће је без коришћења додатних библиотека вршити израчунавања са комплексним бројевима, док то, на пример, није могуће у C++.

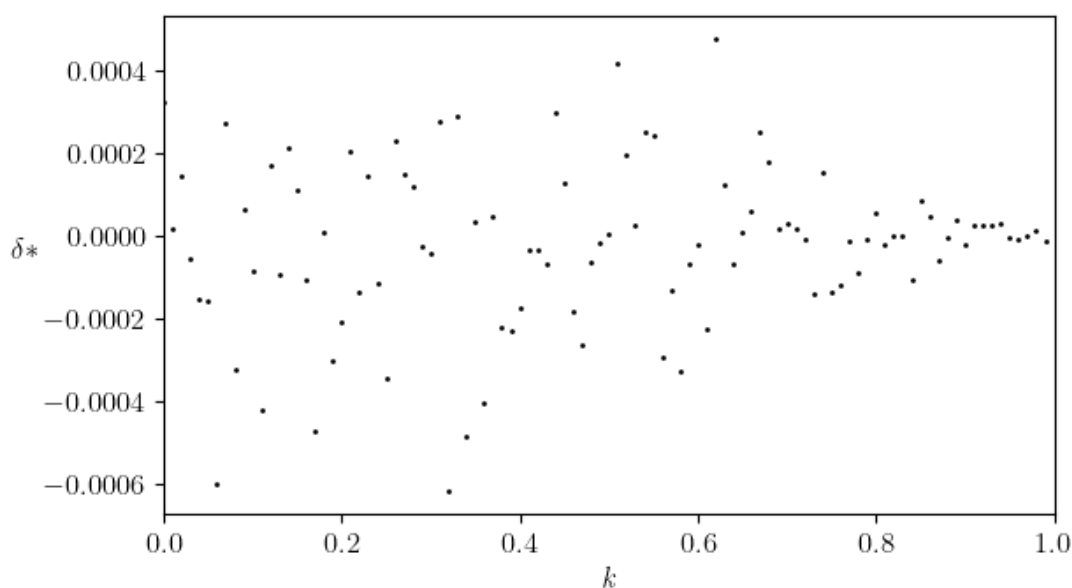
Због наведеног проблема предложено је једноставније решење где ће се, на основу резултата добијених емпиријским путем, интерполирати инверзна функција помоћу које ће се извршити корекција коефицијента корелације.

3.3.2 Кориговање одступања интерполацијом

Нека је добијени коефицијент корелације дефинисан као $r = g(k)$, где $g(\cdot)$ представља функцију зависности коефицијента корелације између случајних променљивих X и V од задатог коефицијента корелације k . У идеалном случају задати и добијени коефицијент корелације би требало да буду једнаки. Одступање добијеног од задатог коефицијента корелације приказано је на слици 3.4(б). Да би се грешка редуковала, неопходно је пронаћи инверзну функцију $g^{-1}(k)$. Како би се смањио број операција приликом вршења корекције, одређена је псеудоинверзна функција $g^{(-1)}(k)$ на основу резултата симулације коришћењем функције *polyfit* из пакета *numpy*. Псеудоинверзна функција је интерполирана полиномијалном функцијом шестог степена кроз тачке са координатама (r_{XV}, k) , [65].

Одређена полиномијална функција дата је са $g^{(-1)}(k) = 7,2852673k^6 - 10,533441k^5 + 5,8459962k^4 - 1,9026393k^3 + 0,59244862k^2 + 0,9881977k + 0,000216031$ за $|k| \in (0, \frac{5}{8}]$ и са $g^{(-1)}(k) = -23,631979k^6 + 111,21638832k^5 - 217,168627k^4 + 225,7227k^3 - 131,39157k^2 + 41,039752k - 4,7865495$ за $|k| \in (\frac{5}{8}, 1)$.

На основу одређене полиномијалне функције извршена је корекција и резултати су приказани на слици 3.6.



Слика 3.6: Одступање задатог од добијеног коефицијента корелације (δ^*) у зависности од задатог коефицијента корелације након примењене корекције полиномијалном функцијом

3.4 Поређење одступања задатог од узорачког коефицијента корелације након корекције

На основу резултата приказаних на слици 3.4(б) разлика задатог и узорачког коефицијента корелације је и до 0,082. Применом корекције коришћењем инверзне функције добијене теоријским извођењем добијена вредност разлике задатог и узорачког коефицијента корелације је до 0,0006. У случају примене инверзне функције добијене интерполацијом разлика задатог и узорачког коефицијента корелације је до 0,00061. Пошто је одступање задатог и узорачког коефицијента корелације након примене инверзне функције по обе методе истог реда величине, у коду датом у потпоглављу Б.7 коришћена је инверзна функција одређена интерполацијом због једноставних аритметичких операција. На тај начин постојање систематске грешке приказано на слици 3.4(б) је отклоњено, па је одступање сведено на ниво случајне грешке применом инверзних функција.

Поређењем одступања задатог и добијеног коефицијента корелације MVUD методе и FOLD методе, добија се да је након примењене корекције одступање добијено FOLD методом и до 25 пута мање у односу на MVUD методу. Важно је истаћи да се корекција може применити на MVUD методу, али то још увек није имплементирано у функцији *draw.d.variate.uniform*.

Глава 4

Експериментална евалуација FOLD методе

GUM представља стандардно аналитичко решење за одређивање мерне несигурности. Како би се додатно потврдили добијени резултати мерне несигурности најчешће се користи Монте Карло метода, јер обе методе користе различите методологије за одређивање мерне несигурности.

У потпоглављу 4.1 приказана је експериментална поставка за одређивање фактора дељења коришћењем рациометријске методе. Пошто се напон напајања разделника, као и напон на излазу разделника мере идентичним инструментом из добијених резултата, уочено је присуство корелације. Утицај корелације у рациометријској методи разматран је у радовима [66–68].

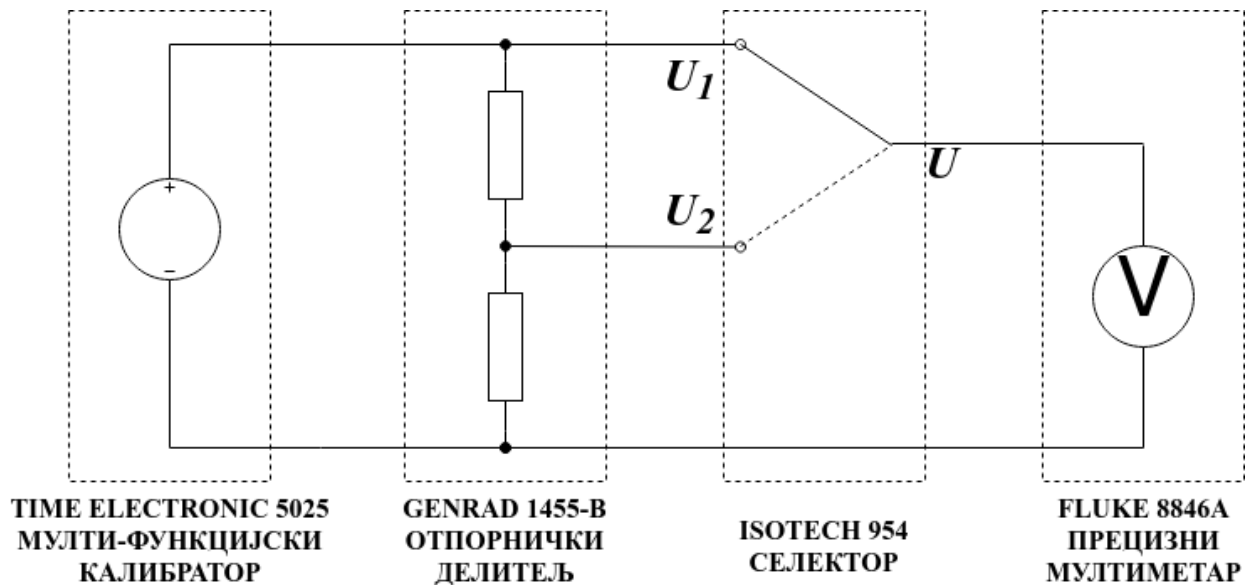
У потпоглављу 4.2 одређена је комбинована мерна несигурност коришћењем методе пропагације мерне несигурности дефинисане GUM-ом. Мерна несигурност је одређена и у случају да су улазне величине некорелисане и у случају да су корелисане.

Одређивање мерне несигурности коришћењем Монте Карло методе дато је у потпоглављу 4.3. Монте Карло симулације извршене су у случају корелисаних улазних величина. На основу добијених резултата одређена је и апроксимација функције густине расподеле индиректно мерене величине.

У потпоглављу 4.4 дато је поређење резултата мерне несигурности одређене GUM-ом и Монте Карло методом. Такође, на основу добијених резултата приказана је важност разматрања корелације улазних величина јер у супротном може доћи до потцењивања или прецењивања мерне несигурности.

4.1 Експериментална поставка

Експериментална потврда примене FOLD методе у Монте Карло симулацијама извршена је на примеру одређивања фактора дељења декадног делитеља отпорности, тачније одређена је мерна несигурност фактора дељења. Шема експерименталне поставке приказана је на слици 4.1.



Слика 4.1: Шема експерименталне поставке

Експериментална поставка се састоји од:

- Time Electronics 5025 мултифункционалног калибратора [69],
- Genrad 1455-B отпорничког делитеља [70],
- Isotech 954 селектора [71] и
- Fluke 8846A мултиметра [72].

Time Electronics 5025 се у експерименту користи као извор једносмерног напона, који се доводи на отпорнички делитељ Genrad 1455-B. Напон се мери помоћу Fluke 8846A $6^{1/2}$ цифарског мултиметра. Како би се посматрао утицај корелације на резултат мерења било је неопходно обезбедити да мултиметар мери напон и на излазу извора, као и на излазу делитеља напона, што је обезбеђено коришћењем селектора Isotech 954.

Целокупан процес управљања селектором и очитавања вредности мултиметром извршен је посредством RS232 протокола. За контролу селектора и очитавање

мултиметра написана је скрипта у Пајтон програмском језику, која је дата листингом кода Б.5. У експерименту извор једносмерног напона подешен је на 10 V, док се са канала 1 (напон на излазу извора) и канала 2 (напон на излазу делитеља) селектора напон доводи на мултиметар. На мултиметру су искључени дигитални филтри како би се избегао њихов утицај на резултат мерења, а самим тим и на корелацију између мерених напона. Напонски опсег је подешен на 10 V, па су и мерења за све факторе дељења добијена на датом опсегу. Нпр. за фактор дељења 1 : 10, напон на излазу делитеља износио би 1 V па би се напонски опсег могао спустити на 1 V. Напонски опсег није промењен како би се избегао утицај промене опсега на коефицијент корелације. Након слања команде READ, мултиметар врши читавање напона на улазу. У листингу кода Б.5 приликом читавања напона шаљу се узастопно 2 команде READ. Приликом промене канала 1 и канала 2 селектора долази до појаве шума који уноси грешку у резултат мерења. Како би се грешка елиминисала, први читани податак се одбацује, док се други користи као валидан. Због поменутог проблема узастопно се врше два читавања по сваком од канала селектора, а користи се по један податак у даљим анализама. Измерени резултати се бележе у .csv фајл.

У експерименту је за сваки однос дељења, извршено по 300 мерења напона на напонском извору U_1 и на излазу делитеља U_2 . Коефицијент vr дељења је вариран од 0,05 до 0,95, са кораком 0,05.



Слика 4.2: Експериментална поставка

Експериментална поставка приказана је на слици 4.2, где је са А означен мултифункционални калибратор Time Electronics 5025, са В напонски делитељ Genrad 1455-В, са С селектор Isotech 954 и са D мултиметар Fluke 8846А.

4.2 Одређивање мерне несигурности по GUM-у

На основу експерименталне поставке формиран је математички модел. Фактор дељења напонског делитеља дат је изразом

$$vr = \frac{U_2}{U_1}, \quad (4.1)$$

где U_1 представља напон на излазу калибратора и U_2 напон на излазу напонског делитеља.

Сваки одбирок напона U_1 се може описати као

$$U_1 = U_{1m} + \delta U_1, \quad (4.2)$$

где U_{1m} представља измерену вредност напона U_1 , а δU_1 представља корекцију коју је неопходно додати као естимацију грешке инструмента. Пошто је експеримент понављан 300 пута, најбољу оцену U_{1m} представља средња вредност измерених вредности напона \bar{U}_{1m} .

Компонента мерне несигурности типа А дефинисана је изразом

$$u_A(U_{1m}) = \frac{s(U_{1m})}{\sqrt{n}}, \quad (4.3)$$

где је $s(U_{1m})$ стандардна девијација напона U_{1m} , а n број одбирака (у овом случају 300).

Компонента мерне несигурности типа В дефинисана је изразом

$$u_B(\delta U_1) = \frac{\Delta U_1}{\sqrt{3}}, \quad (4.4)$$

где ΔU_1 представља границе грешке узроковане инструментом које су дефинисане у спецификацији инструмента [72] као $\Delta U_1 = \pm(24 \text{ ppm}$ измерене величине $+5 \text{ ppm}$ мерног опсега инструмента). Пошто у спецификацији инструмента није наглашена расподела грешке, претпостављено је да је она униформна, па се због тога ΔU_1 дели са $\sqrt{3}$.

На основу вредности добијених из израза (4.3) и (4.4) могуће је одредити комбиновану мерну несигурност напона U_1

$$u_C(U_1) = \sqrt{u_A(U_{1m})^2 + u_B(\delta U_1)^2}. \quad (4.5)$$

Такође, на исти начин могуће је одредити комбиновану мерну несигурност напона U_2 .

Релативно исказана мерна несигурност одређивања коефицијента дељења напонског разделника vr може се посматрати у два случаја:

- Напони U_1 и U_2 су некорелисани и
- Напони U_1 и U_2 су корелисани.

У случају некорелисаности напона U_1 и U_2 мерна несигурност vr је дата изразом

$$u'_C(vr) = \sqrt{\left(\frac{\partial vr}{\partial U_1} u_C(U_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial vr}{\partial U_2} u_C(U_2)\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{U_2}{U_1^2} u_C(U_1)\right)^2 + \left(\frac{1}{U_2} u_C(U_2)\right)^2}. \quad (4.6)$$

На основу израза (4.6) релативно исказана мерна несигурност vr је

$$\frac{u'_C(vr)}{vr} = \sqrt{\left(\frac{u_C(U_1)}{U_1}\right)^2 + \left(\frac{u_C(U_2)}{U_2}\right)^2}. \quad (4.7)$$

Ако се узме у обзир да су вредности напона U_1 и U_2 корелисане, израз за мерну несигурност vr је тада

$$\begin{aligned} u''_C(vr) &= \sqrt{\left(\frac{\partial vr}{\partial U_1} u_C(U_1)\right)^2 + \left(\frac{\partial vr}{\partial U_2} u_C(U_2)\right)^2 + 2\frac{\partial vr}{\partial U_1} \frac{\partial vr}{\partial U_2} u_C(U_1) u_C(U_2) r_{U_1 U_2}} \\ &= \sqrt{\left(-\frac{U_2}{U_1^2} u_C(U_1)\right)^2 + \left(\frac{1}{U_2} u_C(U_2)\right)^2 - 2\frac{1}{U_1^2} u_C(U_1) u_C(U_2) r_{U_1 U_2}}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $r_{U_1 U_2}$ представља израчунати коефицијент корелације између 300 парова напона U_1 и U_2 .

На основу израза (4.8) релативно исказана мерна несигурност vr у случају корелисаних вредности напона U_1 и U_2 је

$$\frac{u''_C(vr)}{vr} = \sqrt{\left(\frac{u_C(U_1)}{U_1}\right)^2 + \left(\frac{u_C(U_2)}{U_2}\right)^2 - 2\left(\frac{u_C(U_1)}{U_1}\right)\left(\frac{u_C(U_2)}{U_2}\right)r_{U_1 U_2}}, \quad (4.9)$$

где $r_{U_1 U_2}$ представља узорачки коефицијент корелације између напона U_1 и U_2 .

У изразима (4.7) и (4.9) важно је уочити да ће у случају када U_1 и U_2 нису корелисане долазити до смањења, односно повећања мерне несигурности коефицијента дељења у зависности од предзнака коефицијента корелације између напона U_1 и U_2 .

У додатку В.1 дате су табеле буџета мерне несигурности за вредности фактора дељења у опсегу од 0,05 до 0,95 са кораком 0,05. У буџету мерне несигурности за процену мерне несигурности узет је у обзир коефицијент корелације одређен на основу одбирака напона U_1 и U_2 .

4.3 Одређивање мерне несигурности коришћењем Монте Карло симулационе методе

Како би се потврдили резултати добијени GUM-ом извршене су симулације коришћењем Монте Карло методе. Симулациони модели за напоне U_1 и U_2 дати су са

$$\begin{aligned} U_1 &= \bar{U}_{1m} + u_A(U_1)Q + \sqrt{3}u_B(U_1)X \\ U_2 &= \bar{U}_{2m} + u_A(U_2)R + \sqrt{3}u_B(U_2)V, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где Q и R представљају независне случајне променљиве са нормалном $\mathcal{N}(0, 1)$ расподелом помоћу којих се моделује мерна несигурност типа А. X и V представљају случајне променљиве са униформном $\mathcal{U}(-1, 1)$ расподелом и дефинисаним коефицијентом корелације помоћу којих се моделује мерна несигурност типа Б.

Пошто је експеримент вршен на основу мерења истим инструментом, на истом опсегу и каналу АД конвертора, претпостављено је да је извор корелисаности напона U_1 и U_2 грешка мерења инструмента. Такође, понављањем мерења мерна несигурност типа А је неколико десетина пута мања у односу на мерну несигурност типа Б, као што је приказано у табелама у прилогу В.1. Због тога је мерна несигурност типа Б за напоне U_1 и U_2 моделована помоћу MVUD и FOLD методе, са дефинисаним коефицијентом корелације одређеним на основу резултата мерења.

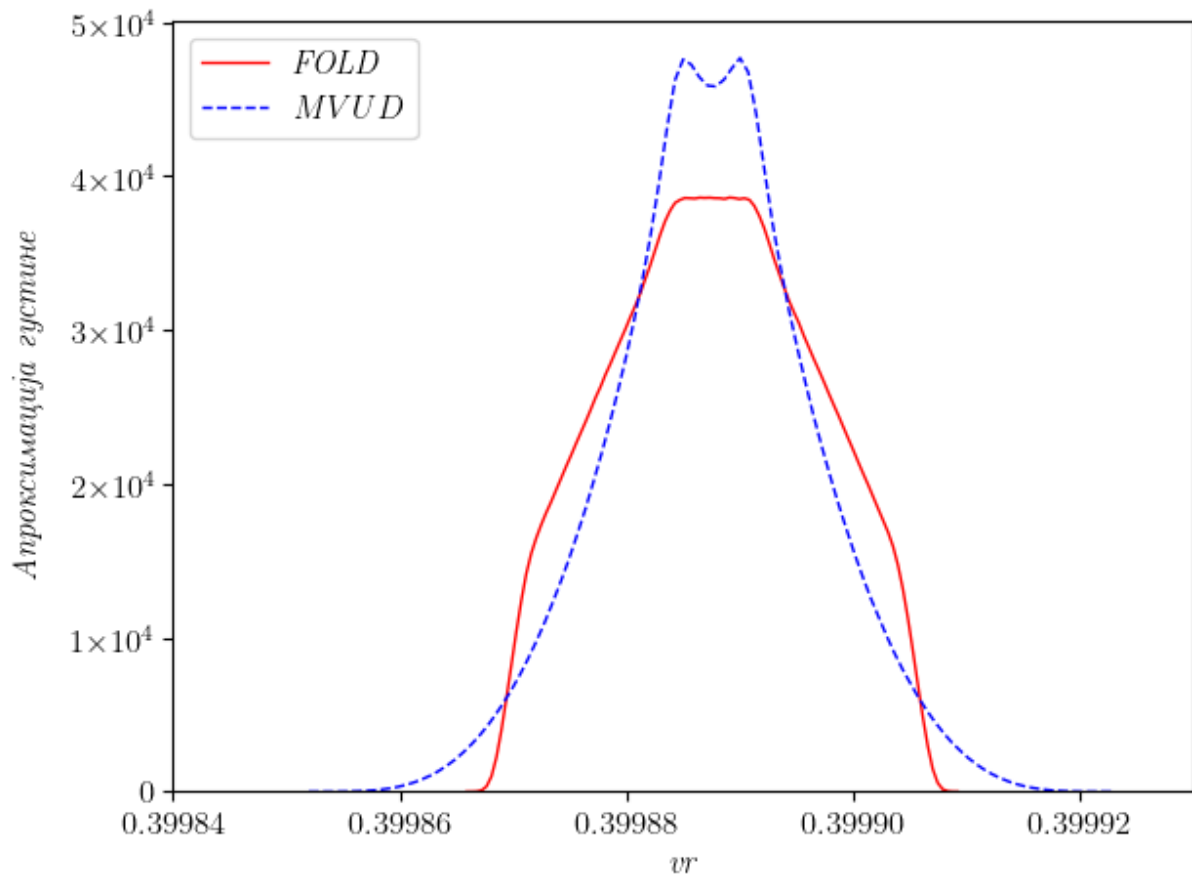
Симулирано је 100 милиона парова напона U_1 и U_2 на основу израза (4.10) након чега је одређен коефицијент дељења напонског делитеља дат изразом (4.1). Мерна несигурност vr одређена је као

$$u(vr) = s(vr), \quad (4.11)$$

где $s(vr)$ представља стандардну девијацију симулираних вредности vr .

Програмски код Монте Карло симулација по MVUD и FOLD методи дат је у додатку Б.6 и Б.7, редом.

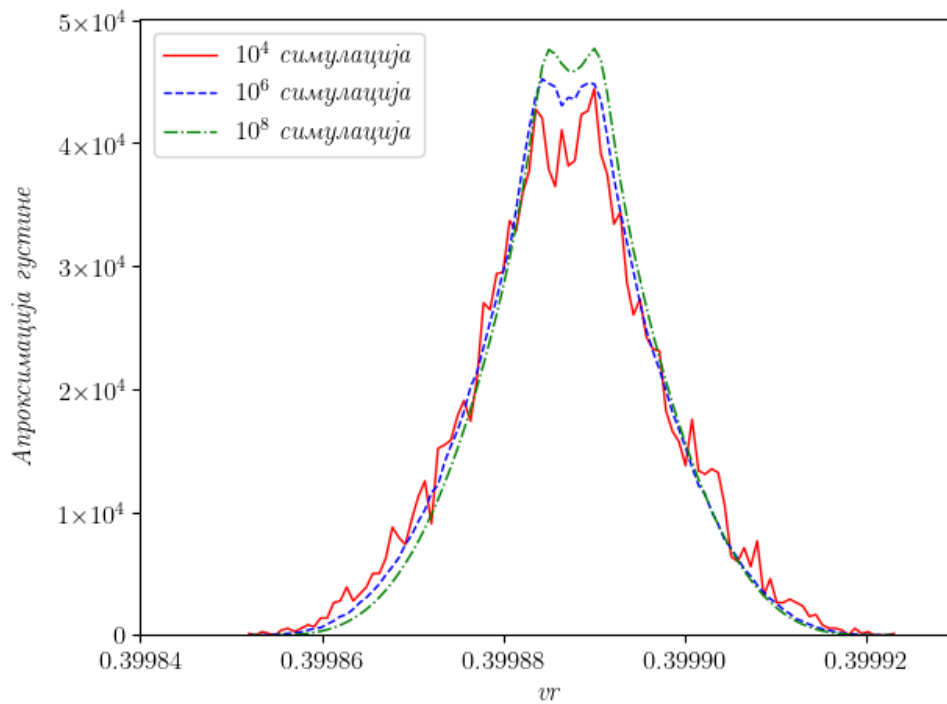
На слици 4.3 приказана је апроксимација функције густине на основу симулираних вредности vr коришћењем Монте Карло методе.



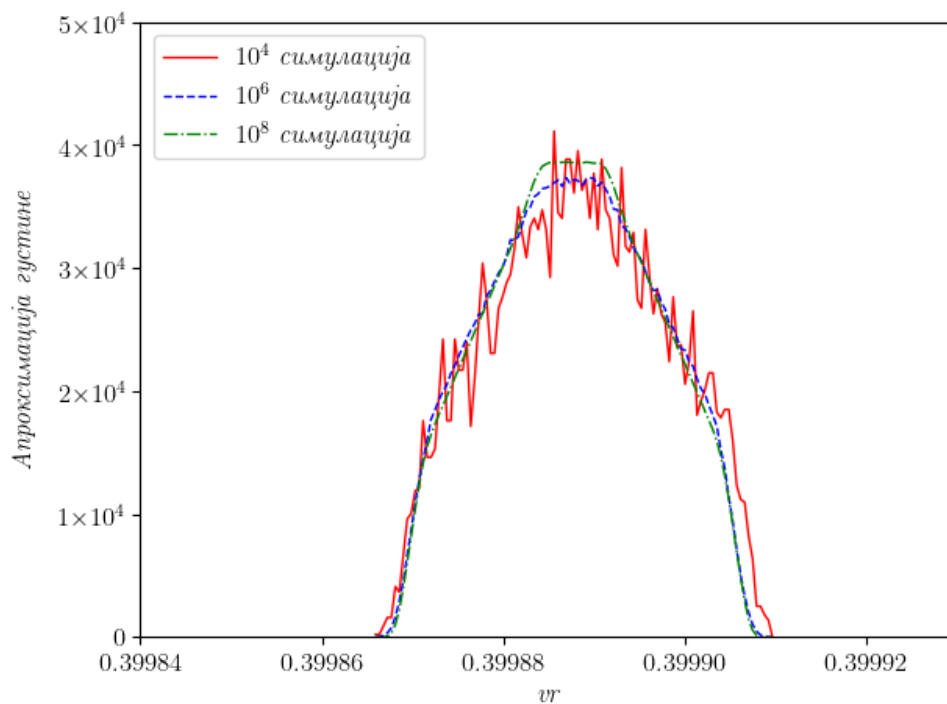
Слика 4.3: Апроксимација функције густине vr добијене Монте Карло методом примене MVUD и FOLD методе

На слици 4.4(а) и 4.4(б) приказана је апроксимација функције густине на основу симулираних вредности vr коришћем Монте Карло методе примене MVUD и FOLD методе узимајући у обзир број симулираних вредности vr . Симулације су извршене за 10^4 , 10^6 и 10^8 вредности.

На основу услова (1.21) важно је одабрати довољан број симулираних вредности. Резултати приказани на сликама 4.4(а) и 4.4(б) показују да што је број симулираних вредности већи апроксимација функције густине је боља. Са порастом броја симулираних вредности временска ефикасност FOLD методе долази до изражаја. Важно је истаћи да је узимање већег броја симулираних вредности ограничено количином RAM меморије персоналних рачунара.



(a) MVUD метода



(б) FOLD метода

Слика 4.4: Апроксимација функције густине vr добијене Монте Карло методом за различит број симулираних вредности

4.4 Поређење резултата добијених по GUM-у и Монте Карло симулационом методом

Монте Карло метода коришћена је за потврду резултата добијених коришћењем GUM-а. У табели 4.1 приказане су вредности задатог фактора дељења vr на делитељу напона, вредности узорачког коефицијента корелације $r_{U_1U_2}$ и вредности релативне мерне несигурности.

Табела 4.1: Релативна мерна несигурност за различите вредности vr одређена коришћењем GUM-а и Монте Карло методе

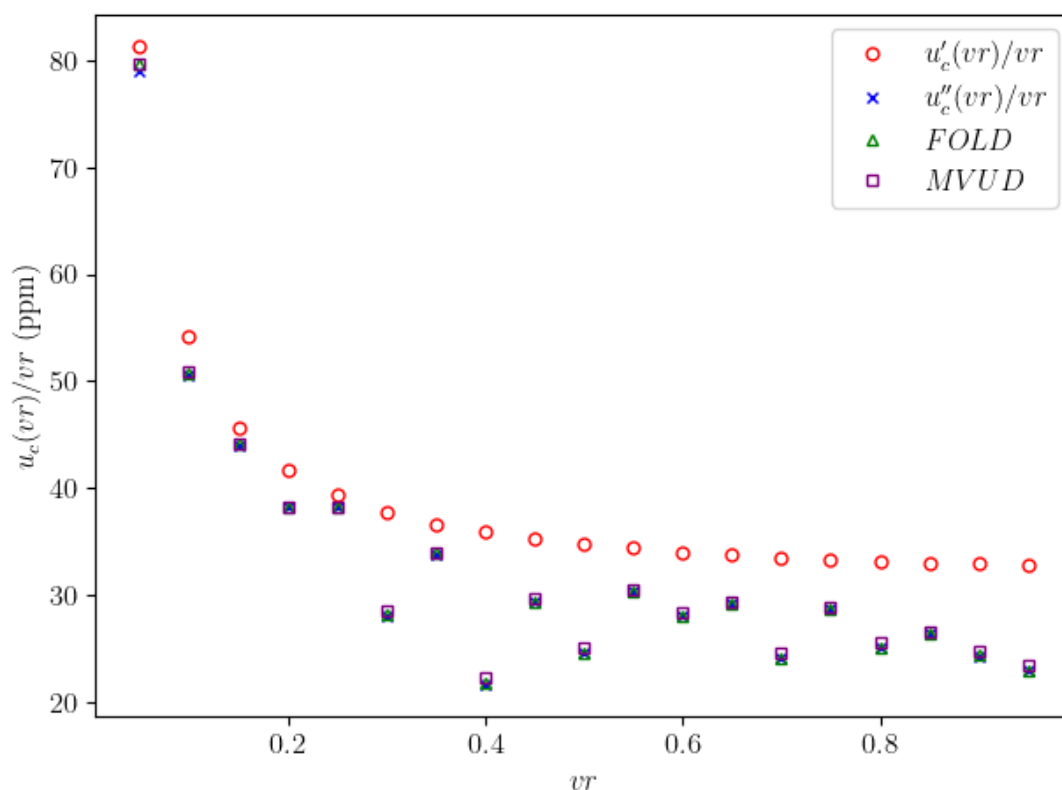
| | | GUM | | Монте Карло Метода | |
|------|--------------|-----------------------|------------------------|--------------------|------|
| vr | $r_{U_1U_2}$ | $\frac{u'_c(vr)}{vr}$ | $\frac{u''_c(vr)}{vr}$ | FOLD | MVUD |
| | | ppm | ppm | ppm | ppm |
| 0.05 | 0.101 | 81.3 | 79.0 | 79.6 | 79.7 |
| 0.10 | 0.173 | 54.2 | 50.5 | 50.8 | 50.9 |
| 0.15 | 0.086 | 45.7 | 44.0 | 44.1 | 44.2 |
| 0.20 | 0.170 | 41.6 | 38.2 | 38.3 | 38.3 |
| 0.25 | 0.058 | 39.3 | 38.2 | 38.2 | 38.3 |
| 0.30 | 0.460 | 37.7 | 28.1 | 28.2 | 28.6 |
| 0.35 | 0.151 | 36.6 | 33.8 | 33.9 | 34.0 |
| 0.40 | 0.647 | 35.9 | 21.6 | 21.7 | 22.2 |
| 0.45 | 0.311 | 35.2 | 29.3 | 29.3 | 29.6 |
| 0.50 | 0.507 | 34.8 | 24.5 | 24.5 | 25.0 |
| 0.55 | 0.224 | 34.4 | 30.3 | 30.3 | 30.5 |
| 0.60 | 0.323 | 34.0 | 28.0 | 28.1 | 28.3 |
| 0.65 | 0.253 | 33.8 | 29.2 | 29.2 | 29.4 |
| 0.70 | 0.485 | 33.5 | 24.1 | 24.1 | 24.5 |
| 0.75 | 0.258 | 33.3 | 28.7 | 28.7 | 28.9 |
| 0.80 | 0.428 | 33.2 | 25.1 | 25.1 | 25.5 |
| 0.85 | 0.368 | 33.0 | 26.3 | 26.3 | 26.6 |
| 0.90 | 0.452 | 32.9 | 24.3 | 24.4 | 24.7 |
| 0.95 | 0.509 | 32.8 | 23.0 | 23.0 | 23.4 |

Релативне мерне несигурности фактора дељења vr добијене су за:

- $\frac{u'_c(vr)}{vr}$ релативну мерну несигурност одређену применом GUM-а занемарујући корелисаност напона U_1 и U_2 ,
- $\frac{u''_c(vr)}{vr}$ релативну мерну несигурност одређену применом GUM-а урачунавајући корелисаност напона U_1 и U_2 ,

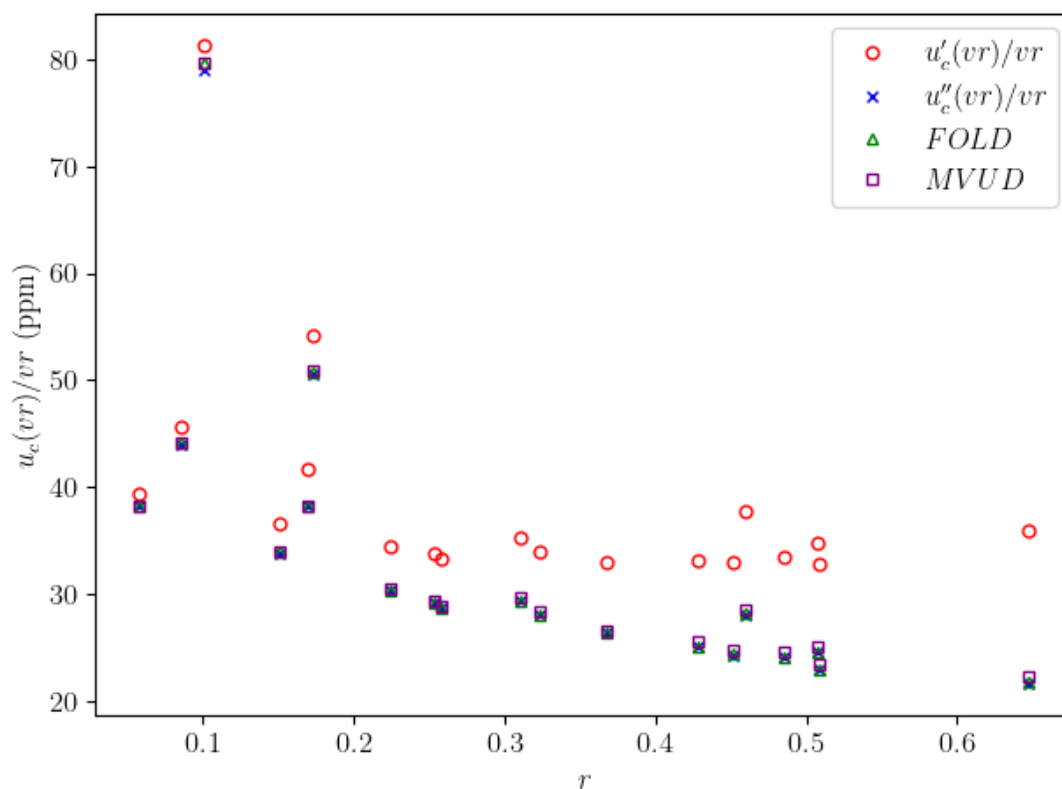
- FOLD методу, тј. релативну мерну несигурност одређену Монте Карло методом уз примену развијене FOLD методе за генерисање случајних променљивих униформне расподеле са дефинисаним коефицијентом корелације и
- MVUD методу, тј. релативну мерну несигурност одређену Монте Карло методом уз примену стандарне MVUD методе за генерисање случајних променљивих униформне расподеле са дефинисаним коефицијентом корелације.

Табела 4.1 показује да се, ако се занемари корелисаност улазних величина, долази до погрешне процене мерне несигурности. У овом случају, када је узорачки коефицијент корелације позитиван, процењена вредност мерне несигурности уз претпоставку да улазне величине нису корелисане је већа него у случају када су улазне величине корелисане. Неповољнији случај би био да се приликом процене мерне несигурности јави негативан коефицијент корелације. Тада би се приликом процене мерне несигурности добила мања вредност него у случају процене мерне несигурности корелисаних улазних величина. Приликом Монте Карло симулација FOLD методе примењена је корекција коефицијента корелације, па се због тога добијају мања одступања процењене мерне несигурности у односу на MVUD.



Слика 4.5: Зависност релативне мерне несигурности од фактора дељења vr

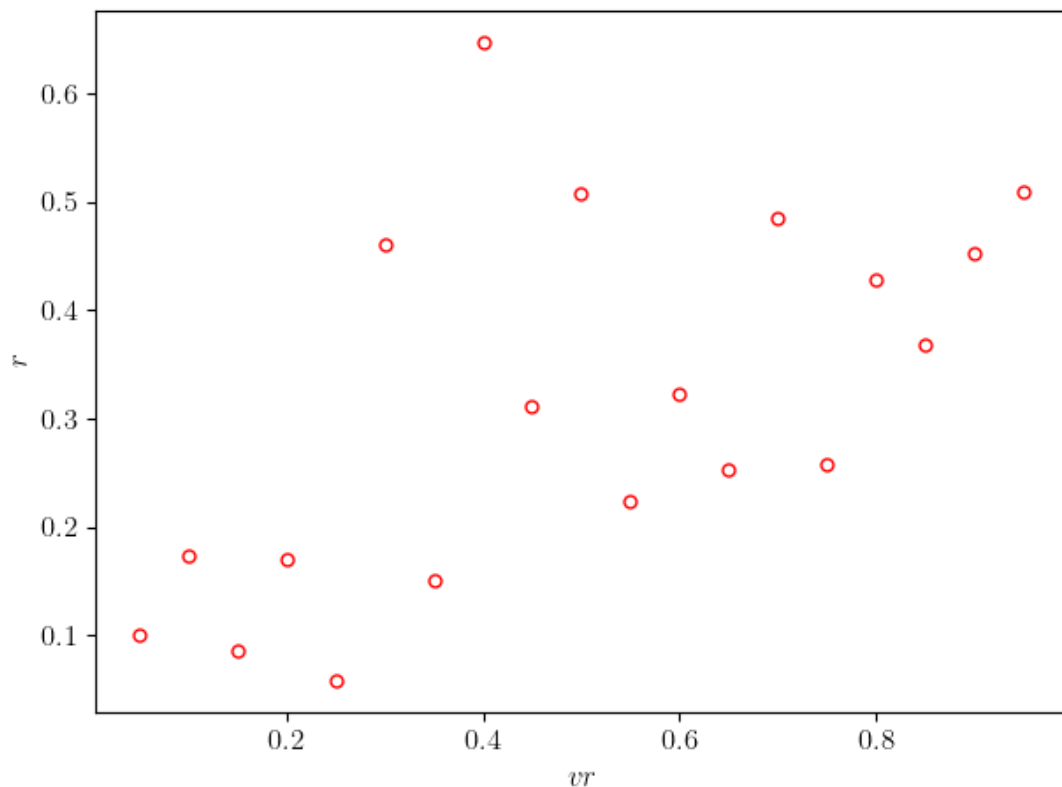
На слици 4.5 и 4.6 приказана је зависност релативне мерне несигурности од фактора дељења vr и коефицијента корелације $r_{U_1U_2}$, редом. Релативна мерна несигурност је одређена на четири начина представљених у табели 4.1.



Слика 4.6: Зависност релативне мерне несигурности од фактора дељења $r_{U_1U_2}$

За резултате приказане на слици 4.5 при мањим вредностима фактора дељења vr добијају се веће релативне мерне несигурности јер се мерење врши при дну опсега. Компонента мерне несигурности типа Б тада постаје већа. Резултати релативне мерне несигурности добијени узимањем у обзир коефицијента корелације су међусобно слични и имају мању вредност од $\frac{u'_c(vr)}{vr}$.

Занемаривањем коефицијента корелације, слика 4.6, долази до прецењивања релативне мерне несигурности ($\frac{u_c(vr)}{vr}$). Са порастом коефицијента корелације $r_{U_1U_2}$ разлика између вредности релативне мерне несигурности одређене узимањем у обзир коефицијента корелације ($\frac{u''_c(vr)}{vr}$, FOLD и MVUD) у односу на $\frac{u'_c(vr)}{vr}$ се повећава, за случај када је $r_{U_1U_2} > 0$.



Слика 4.7: Зависност узорачког коефицијента корелације $r_{U_1 U_2}$ од фактора дељења vr

На слици 4.7 приказана је зависност узорачког коефицијента корелације мерених напона U_1 и U_2 од фактора дељења. Добијене вредности коефицијента корелације $r_{U_1 U_2}$ су позитивне и не може се уочити постојање систематске појаве. Иако нису јасни узроци постојања корелисаности улазних напона U_1 и U_2 , очигледно је да корелација постоји и да треба бити урачуната приликом процене мерне несигурности. Узимајући у обзир израз (4.8) услед позитивног коефицијента корелације добија се мања мерна несигурност.

Глава 5

Закључак

У тези је изложен проблем одређивања мерне несигурности корелисаних мерених величина. Ако се претпостави да улазне величине нису корелисане, долази до погрешне процене мерне несигурности.

Као стандардно аналитичко решење за процену мерне несигурности користи се метода пропагације мерне несигурности предложена GUM-ом. За потврду мерне несигурности као симулационо решење користи се метода пропагације вероватноће, тј. Монте Карло метода. У случају корелисаних случајних променљивих неопходно је генерисање случајних узорака са дефинисаним коефицијентом корелације. У том случају као стандардно решење користи се MVUD из пакета MULTIRNG.

На основу добијених резултата предложена је нова метода – FOLD метода – за генерисање случајних променљивих униформне расподеле са дефинисаним коефицијентом корелације. Стандардна и предложена метода поређене су по два параметра: времену извршавања и одступању задатог од узорачког коефицијента корелације. Потребно време за генерисање вектора случајних бројева је и до два пута мање у односу на постојеће решење. Приликом одређивања узорачког коефицијента корелације уочено је значајно одступање, које износи и до 0,082. У тези су предложена два решења, прво на основу теоријских извођења које за одређивање вредности корекције захтева коришћење алата комплексне анализе. Након ове корекције одступање коефицијента корелације је мање од 0,0006. Друго предложено решење засновано је на основу резултата добијених симулацијама интерполацијом полиномијалне функције и ово решење се показује ефикаснијим јер не захтева коришћење додатних библиотека како би се извршила корекција. Овај метод корекције смањује одступање на вредности мање од 0,00061. Након примене корекције предложеног решења добија се да је одступање у случају FOLD методе 25 пута мање него у случају MVUD методе. Корекција коефицијента корелације би се могла

извршити и у случају MVUD методе. За потребе поређења коришћено је решење реализовано у R програмском језику, као и у Пајтон програмском језику.

Развијено решење презентовано у овој тези има могућност генерисања две случајне променљиве са дефинисаним коефицијентом корелације. Пошто стандардно решење може генерисати више случајних променљивих, постојећа библиотека је додатно оптимизирана и реализована је у C++ програмском језику. Такође, извршена је и имплементација предложеног решења у C++ програмском језику. Након оптимизовања постојећег решења и генерисања 10^7 одбирака по свакој од метода добијено је знатно скраћење времена извршавања стандардне методе. У случају већег броја одбирака време неопходно за проверу кроз *if-elif-else* контролу тока постаје доминантније у односу на време неопходно за примену трансформације. Иако је однос времена неопходног за генерисање смањен, FOLD метода је због примене мање захтевних трансформација и даље ефикаснија.

Како би се дао практичан значај развијеној методи извршен је експеримент на основу ког је одређена мерна несигурност коришћењем GUM-а и Монте Карло методе. Експеримент се састојао из одређивања фактора дељења отпорничког делитеља. У случају одређивања мерне несигурности GUM-ом разматран је случај корелираних и некорелираних мерених величина. Уочено је значајно одступање резултата, ако се корелација не узме у обзир. Применом Монте Карло методе евалуирани су резултати коришћењем FOLD и MVUD методе. Пошто FOLD метода имплементира корекцију, добија се боља процена мерне несигурности него у случају MVUD методе.

У експерименту је дељењем мерених величина одређена индиректно мерена величина. Пошто је узорачки коефицијент корелације имао позитивну вредност, један од коефицијената осетљивости је негативан, па је и процењена мерна несигурност мања у односу на мерну несигурност која би се добила када би се претпоставило да улазне величине нису корелисане. Када би индиректно мерена величина била одређена множењем, при позитивној вредности коефицијената корелације, добијала би се већа мерна несигурност.

Даљи правци развоја FOLD методе представљају додавање могућности генерисања више случајних променљивих задавањем корелационе матрице и прилагођавање даљој обради применом декомпозиције Холеског. Декомпозиција Холеског за случај више од две случајне променљиве знатно усложњава метод генерисања. Након реализације FOLD методе са могућношћу генерисања више случајних променљивих развијена метода могла би да буде предложена као адекватна замена за MVUD методу.

Додатак А

А.1 Униформна случајна променљива

n -димензионална случајна променљива $X = (X_1, \dots, X_n)$, $n \geq 2$, има униформну расподелу над области D , где је D Борелов скуп у \mathbb{R}^n позитивне коначне Лебегове мере, ако је њена функција густине

$$\varphi_{X_1, \dots, X_n}((x_1, \dots, x_n)) = \begin{cases} \frac{1}{m(D)}, & (x_1, \dots, x_n) \in D \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

где је $m(D)$ Лебегова мера скупа D .

Ако је D интервал у \mathbb{R} , онда је Лебегова мера дужина интервала, у \mathbb{R}^2 Лебегова мера је површина области D , а у \mathbb{R}^3 запремина фигуре D . У општем случају $m(D) = \int_D \dots \int dx_1 \dots dx_n$.

За истраживање спроведено у оквиру тезе посебно је значајна униформна расподела на интервалу (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. Дакле, случајна променљива X има униформну $\mathcal{U}(a, b)$ расподелу ако је њена функција густине

$$\varphi_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Функција расподеле случајне променљиве са униформном $\mathcal{U}(a, b)$ расподелом је

$$F_x(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases}.$$

Математичко очекивање $E(X)$, дисперзија (варијанса) $D(X)$ и стандардна девијација (стандардно одступање) σ_X случајне променљиве са униформном $\mathcal{U}(a, b)$ расподелом су:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad \text{и} \quad \sigma_X = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}.$$

А.2 Расподела случајне променљиве X_1 и случајне променљиве Y_1

За одређивање функције расподеле случајне променљиве X_1 треба посматрати два случаја:

1° за $0 < k < 1$

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x_1) &= P(X_1 \leq x_1) = P(kX \leq x_1) = P\left(X \leq \frac{x_1}{k}\right) = F_X\left(\frac{x_1}{k}\right) \\ &= \begin{cases} 0, & x_1 < -k \\ \frac{x_1+k}{2k}, & -k \leq x_1 < k \\ 1, & x_1 \geq k \end{cases} . \end{aligned}$$

2° за $-1 < k < 0$

$$\begin{aligned} F_{X_1}(x_1) &= P(X_1 \leq x_1) = P(kX \leq x_1) = P\left(X \geq \frac{x_1}{k}\right) \\ &= 1 - P\left(X < \frac{x_1}{k}\right) = 1 - P\left(X \leq \frac{x_1}{k}\right) = 1 - F_X\left(\frac{x_1}{k}\right) \\ &= 1 - \begin{cases} 0, & \frac{x_1}{k} < -1 \\ \frac{\frac{x_1}{k}+1}{2}, & -1 \leq \frac{x_1}{k} < 1 \\ 1, & \frac{x_1}{k} \geq 1 \end{cases} \\ F_{X_1}(x_1) &= \begin{cases} 0, & x_1 < k \\ 1 - \frac{x_1+k}{2k}, & k \leq x_1 < -k \\ 1, & x_1 \geq -k \end{cases} . \end{aligned}$$

Функција густине случајне променљиве X_1 је

$$\varphi_{X_1}(x_1) = F'_{X_1}(x_1) = \begin{cases} \frac{1}{2|k|}, & x_1 \in (-|k|, |k|) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} .$$

Функција расподеле случајне променљиве Y_1 за $k \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ је

$$\begin{aligned}
F_{Y_1}(y_1) &= P(Y_1 \leq y_1) = P(\sqrt{1-k^2} Y \leq y_1) = P\left(Y \leq \frac{y_1}{\sqrt{1-k^2}}\right) = F_Y\left(\frac{y_1}{\sqrt{1-k^2}}\right) \\
&= \begin{cases} 0, & y_1 < -\sqrt{1-k^2} \\ \frac{y_1 + \sqrt{1-k^2}}{2\sqrt{1-k^2}}, & -\sqrt{1-k^2} \leq y_1 < \sqrt{1-k^2} \\ 1, & y_1 \geq \sqrt{1-k^2} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Даље следи да је функција густине случајне променљиве Y_1

$$\varphi_{Y_1}(y_1) = F'_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}}, & y_1 \in (-\sqrt{1-k^2}, \sqrt{1-k^2}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

А.3 Расподела случајне променљиве W

Случајна променљива W добијена збиром X_1 и Y_1 има функцију густине $\varphi_W(w)$, која се може одредити као конволуција функција густине $\varphi_{X_1}(x_1)$ и $\varphi_{Y_1}(y_1)$ [73].

$$\varphi_W(w) = \varphi_{X_1}(w) * \varphi_{Y_1}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{X_1}(t) \varphi_{Y_1}(w-t) dt.$$

Такође, како би се одредила конволуција за све вредности задатог коефицијента корелације k ($k \neq 0$ и $|k| < 1$), неопходно је уочити два случаја када је $|k| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ и када је $|k| > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Случај за $|k| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$1^\circ \quad w < -|k| - \sqrt{1-k^2}$$

$$\varphi_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dt = 0,$$

$$2^\circ \quad -|k| - \sqrt{1-k^2} \leq w < |k| - \sqrt{1-k^2}$$

$$\varphi_W(w) = \int_{-\infty}^{-|k|} 0 dt + \int_{-|k|}^{w+\sqrt{1-k^2}} \frac{1}{2|k|} \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}} dt + \int_{w+\sqrt{1-k^2}}^{\infty} 0 dt = \frac{w+\sqrt{1-k^2}+|k|}{4|k|\sqrt{1-k^2}},$$

$$3^\circ \quad |k| - \sqrt{1-k^2} \leq w < -|k| + \sqrt{1-k^2}$$

$$\varphi_W(w) = \int_{-\infty}^{w-|k|} 0 dt + \int_{w-|k|}^{w+|k|} \frac{1}{2|k|} \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}} dt + \int_{w+|k|}^{\infty} 0 dt = \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}},$$

$$4^\circ \quad -|k| + \sqrt{1-k^2} \leq w < |k| + \sqrt{1-k^2}$$

$$\varphi_W(w) = \int_{-\infty}^{w-\sqrt{1-k^2}} 0 dt + \int_{w-\sqrt{1-k^2}}^{|k|} \frac{1}{2|k|} \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}} dt + \int_{|k|}^{\infty} 0 dt = \frac{-w+\sqrt{1-k^2}+|k|}{4|k|\sqrt{1-k^2}}$$

$$5^\circ \quad w \geq |k| + \sqrt{1-k^2}$$

$$\varphi_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dt = 0.$$

Функција густине случајне променљиве W , за $|k| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, је

$$\varphi_W(w) = \begin{cases} \frac{-w+\sqrt{1-k^2}+|k|}{4|k|\sqrt{1-k^2}}, & w \in (-|k| - \sqrt{1-k^2}, |k| - \sqrt{1-k^2}] \\ \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}}, & w \in [|k| - \sqrt{1-k^2}, -|k| + \sqrt{1-k^2}] \\ \frac{-w+\sqrt{1-k^2}+|k|}{4|k|\sqrt{1-k^2}}, & w \in [-|k| + \sqrt{1-k^2}, |k| + \sqrt{1-k^2}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}. \quad (\text{A.1})$$

Случај за $|k| > \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$1^\circ \quad w < -|k| - \sqrt{1-k^2}$$

$$\varphi_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dt = 0,$$

$$2^\circ \quad -|k| - \sqrt{1-k^2} \leq w < -|k| + \sqrt{1-k^2}$$

$$\varphi_W(w) = \int_{-\infty}^{-|k|} 0 dt + \int_{-|k|}^{w+\sqrt{1-k^2}} \frac{1}{2|k|} \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}} dt + \int_{w+\sqrt{1-k^2}}^{\infty} 0 dt = \frac{w+\sqrt{1-k^2}-|k|}{4|k|\sqrt{1-k^2}},$$

$$3^\circ \quad -|k| + \sqrt{1-k^2} \leq w < |k| - \sqrt{1-k^2}$$

$$\varphi_W(w) = \int_{-\infty}^{w-\sqrt{1-k^2}} 0 dt + \int_{w-\sqrt{1-k^2}}^{w+\sqrt{1-k^2}} \frac{1}{2|k|} \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}} dt + \int_{w+\sqrt{1-k^2}}^{\infty} 0 dt = \frac{1}{2|k|},$$

$$4^\circ \quad |k| - \sqrt{1-k^2} \leq w < |k| + \sqrt{1-k^2}$$

$$\varphi_W(w) = \int_{-\infty}^{w-\sqrt{1-k^2}} 0 dt + \int_{w-\sqrt{1-k^2}}^{|k|} \frac{1}{2|k|} \frac{1}{2\sqrt{1-k^2}} dt + \int_{|k|}^{\infty} 0 dt = \frac{-w+\sqrt{1-k^2}+|k|}{4|k|\sqrt{1-k^2}},$$

$$5^\circ \quad w \geq |k| + \sqrt{1 - k^2}$$

$$\varphi_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \, dt = 0.$$

Функција густине случајне променљиве W , за $|k| > \frac{\sqrt{2}}{2}$, је

$$\varphi_W(w) = \begin{cases} \frac{w + \sqrt{1 - k^2} + |k|}{4|k|\sqrt{1 - k^2}}, & w \in (-|k| - \sqrt{1 - k^2}, -|k| + \sqrt{1 - k^2}] \\ \frac{1}{2|k|}, & w \in [-|k| + \sqrt{1 - k^2}, |k| - \sqrt{1 - k^2}] \\ \frac{-w + \sqrt{1 - k^2} + |k|}{4|k|\sqrt{1 - k^2}}, & w \in [|k| - \sqrt{1 - k^2}, |k| + \sqrt{1 - k^2}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}. \quad (\text{A.2})$$

Функција расподеле случајне променљиве W се одређује преко дефиниције функције расподеле случајне променљиве непрекидног типа

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^w \varphi_W(t) \, dt,$$

где је $\varphi_W(\cdot)$ функција густине случајне променљиве W дате са (2.4).

$$1^\circ \quad w \leq -A - B$$

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^w 0 \, dt = 0,$$

$$2^\circ \quad -A - B < w \leq -A + B$$

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{-A-B} 0 \, dt + \int_{-A-B}^w \frac{t+A+B}{4AB} \, dt = \frac{w^2 + 2(A+B)w + (A+B)^2}{8AB},$$

$$3^\circ \quad -A + B < w \leq A - B$$

$$F_W(w) = \int_{-\infty}^{-A-B} 0 \, dt + \int_{-A-B}^{-A+B} \frac{t+A+B}{4AB} \, dt + \int_{-A+B}^w \frac{1}{2A} \, dt = \frac{w+A}{2A},$$

$$4^\circ \quad A - B < w \leq A + B$$

$$\begin{aligned} F_W(w) &= \int_{-\infty}^{-A-B} 0 \, dt + \int_{-A-B}^{-A+B} \frac{t+A+B}{4AB} \, dt + \int_{-A+B}^{A-B} \frac{1}{2A} \, dt + \int_{A-B}^w \frac{-t+A+B}{4AB} \, dt \\ &= 1 + \frac{-w^2 + 2(A+B)w - (A+B)^2}{8AB}, \end{aligned}$$

5° $A + B < w$

$$F_W(w) = 1.$$

Коначно, функција расподеле случајне променљиве W дата је са

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w \in (-\infty, -A - B] \\ \frac{w^2 + 2(A+B)w + (A+B)^2}{8AB}, & w \in (-A - B, -A + B] \\ \frac{w+A}{2A}, & w \in (-A + B, A - B] \\ 1 + \frac{-w^2 + 2(A+B)w - (A+B)^2}{8AB}, & w \in (A - B, A + B] \\ 1, & w \in (A + B, \infty) \end{cases},$$

где је $A = \max(|k|, \sqrt{1 - k^2})$ и $B = \min(|k|, \sqrt{1 - k^2})$.

А.4 Расподела случајне променљиве W_1

Функција расподеле случајне променљиве W_1 је

$$F_{W_1}(w_1) = P(W_1 \leq w_1) = P\left(\frac{1}{A}W \leq w_1\right) = P(W \leq Aw_1) = F_W(Aw_1)$$

$$F_{W_1}(w_1) = \begin{cases} 0, & w_1 < -1 - \frac{B}{A} \\ \frac{(Aw_1)^2 + 2(A+B)Aw_1 + (A+B)^2}{8AB}, & -1 - \frac{B}{A} \leq w_1 < -1 + \frac{B}{A} \\ \frac{w_1 + 1}{2}, & -1 + \frac{B}{A} \leq w_1 < 1 - \frac{B}{A} \\ 1 + \frac{-(Aw_1)^2 + 2(A+B)Aw_1 - (A+B)^2}{8AB}, & 1 - \frac{B}{A} \leq w_1 < 1 + \frac{B}{A} \\ 1, & w_1 \geq 1 + \frac{B}{A} \end{cases},$$

где је $A = \max(|k|, \sqrt{1 - k^2})$ и $B = \min(|k|, \sqrt{1 - k^2})$. Функција густине случајне променљиве W_1 је

$$\varphi_{W_1}(w_1) = F'_{W_1}(w_1) = \begin{cases} \frac{Aw_1 + A + B}{4B}, & -1 - \frac{B}{A} < w_1 \leq -1 + \frac{B}{A} \\ \frac{1}{2}, & -1 + \frac{B}{A} \leq w_1 \leq 1 - \frac{B}{A} \\ \frac{-Aw_1 + A + B}{4B}, & 1 - \frac{B}{A} \leq w_1 < 1 + \frac{B}{A} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

А.5 Пирсонов коефицијент корелације ρ_{XV}

Пирсонов коефицијент корелације између случајних променљивих X и V дат је са

$$\rho_{XV}(k) = \frac{E(XV) - E(X)E(V)}{\sigma_X \sigma_V}, \quad (\text{A.3})$$

где $E(\cdot)$ представља математичко очекивање случајне променљиве, а σ_X и σ_V представљају стандардне девијације случајних променљивих X и V , редом.

Случајне променљиве X и V имају униформну $\mathcal{U}(-1, 1)$ расподелу, па је $E(X) = E(V) = 0$ и $\sigma_X = \sigma_V = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Математичко очекивање случајне променљиве XV је дато са

$$E(XV) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xv \varphi_{XV}(x, v) dx dv, \quad (\text{A.4})$$

где је $\varphi_{XV}(x, v)$ функција густине дводимензионалне случајне променљиве (X, V) . Пре одређивања $E(XV)$ неопходно је одредити $\varphi_{XV}(x, v)$ и уочити када је $0 < |k| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ и када је $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |k| < 1$.

За $0 < |k| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ посматра се фигура приказана на слици А.1, где је приказана пројекција функције густине на xw_1 -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и W_1 , која је дефинисана облашћу на којој је $\varphi_{XW_1}(x, w_1) \neq 0$. $\varphi_{XW_1}(x, w_1)$ је ненегативна функција и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XW_1}(x, w_1) dx dw_1 = 1. \quad (\text{A.5})$$

У случају када је задати коефицијент корелације по апсолутној вредности мањи од $\frac{\sqrt{2}}{2}$ добија се да је функција густине $\varphi_{XW_1}(x, w_1)$ случајне променљиве (X, W_1) по целој површини равномерно распоређења. Нека је

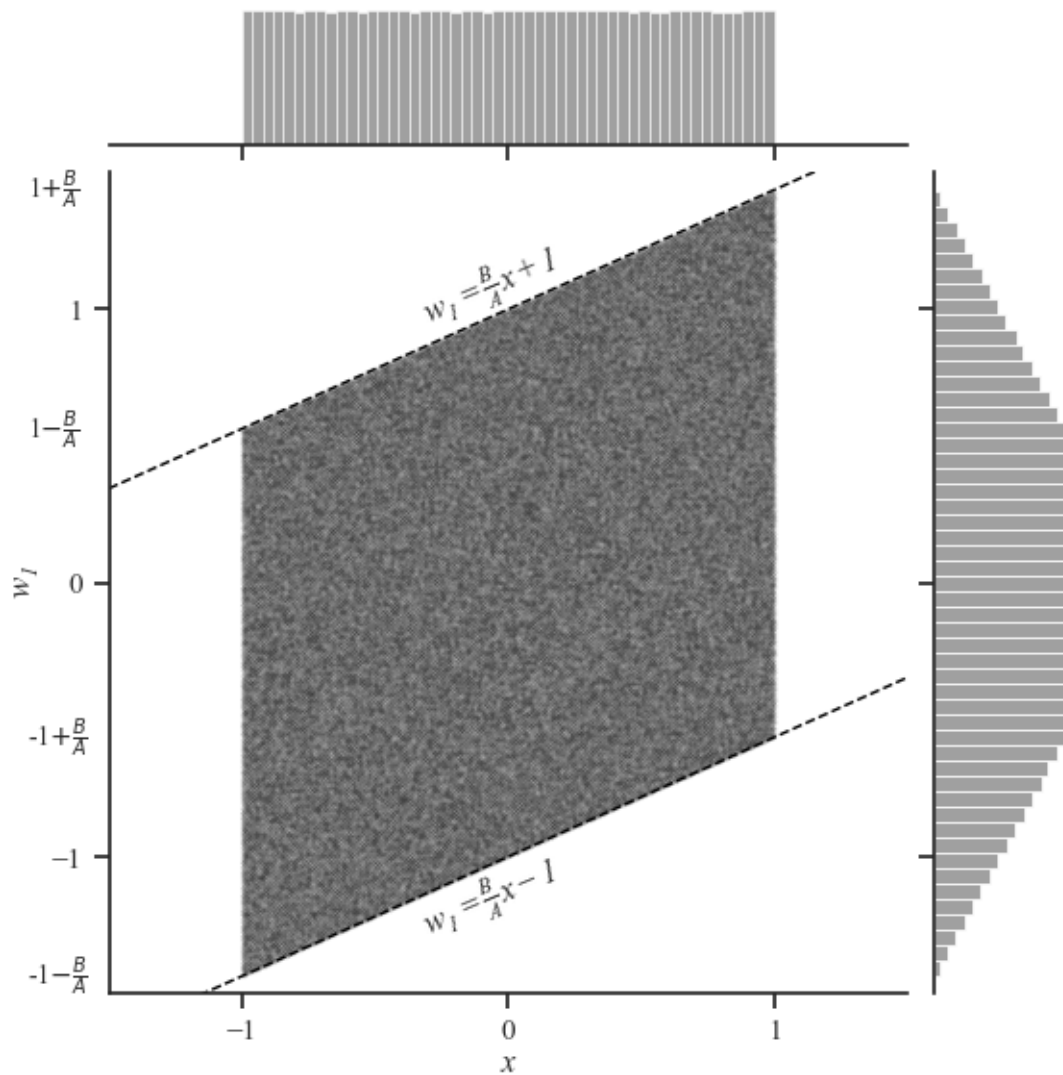
$$\varphi_{XW_1}(x, w_1) = \begin{cases} c, & (x, w_1) \in \square \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (\text{A.6})$$

где је \square област над којом је $\varphi_{XW_1}(x, w_1) \neq 0$.

Даље,

$$c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dw_1 = 1 \Leftrightarrow c P_{\square} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{P_{\square}}, \quad (\text{A.7})$$

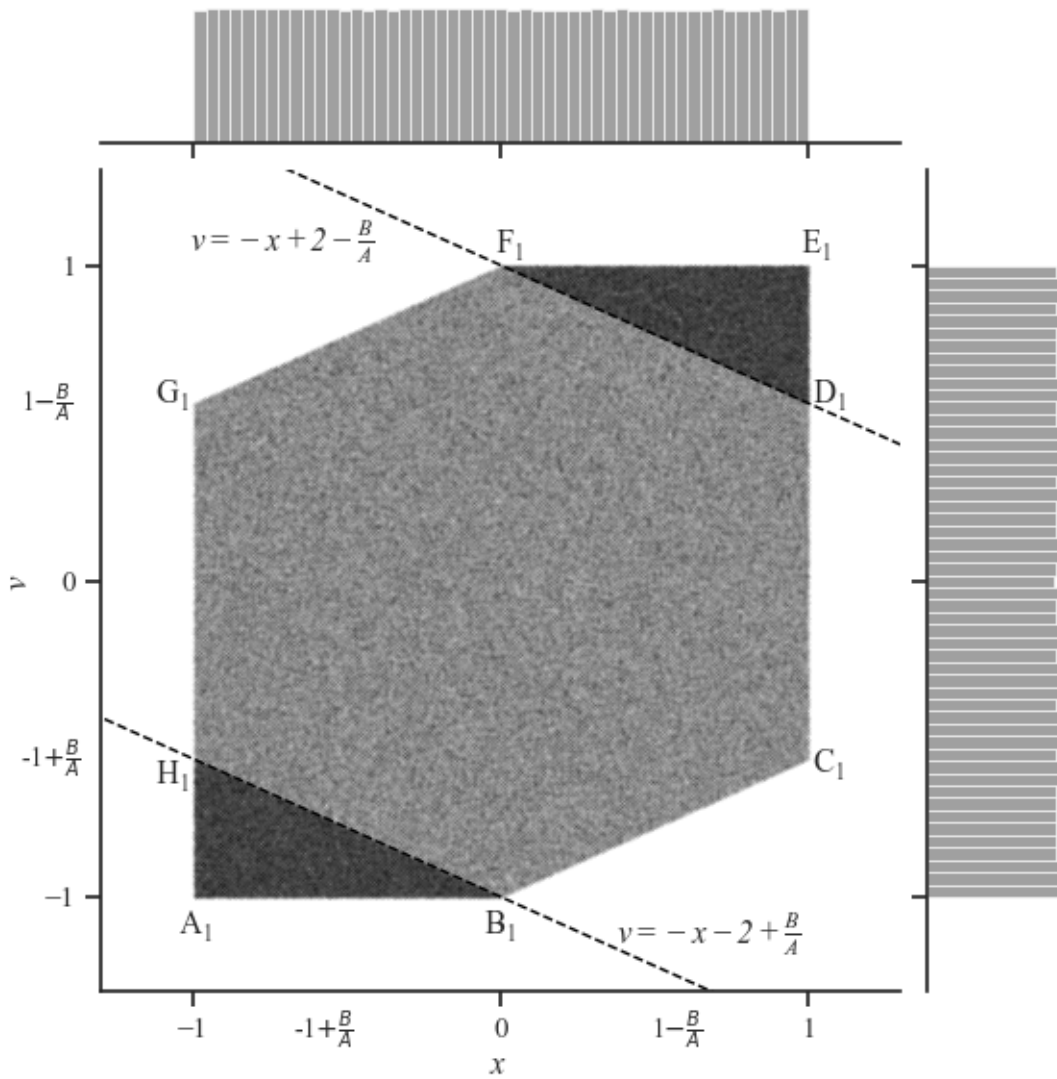
где P_{\square} представља површину паралелограма приказаног на слици А.1.



Слика А.1: Пројекција функције густине на xw_1 -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и W_1 за које је задати коефицијент корелације по апсолутној вредности мањи од $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Површина паралелограма се може одредити као $P_{\square} = qh_q$, где су q и h_q страница и одговарајућа висина паралелограма, редом. Дужина странице је $q = (1 - \frac{B}{A}) - (-1 - \frac{B}{A}) = 2$, њој одговарајућа висина је $h_q = 1 - (-1) = 2$ и површина паралелограма је $P_{\square} = 4$. Коришћењем (А.7) добија се

$$\varphi_{XW_1}(x, w_1) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & x \in (-1, 1), w_1 \in (\frac{B}{A}x - 1, \frac{B}{A}x + 1) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (\text{А.8})$$



Слика А.2: Пројекција функције густине на xv -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и V за које је апсолутна вредност задатог коефицијента корелације мања од $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Случајна променљива W_1 се трансформише у случајну променљиву V коришћењем трансформације (2.10). Ова трансформација резултује фигуром приказаном на слици А.2, где су дужи F_1E_1 као и A_1B_1 заправо странице троуглова, око којих се врши геометријска трансформација. Пошто је функција густине $\varphi_{XW_1}(x, w_1)$ константна и дефинисана са (А.8), онда ће густина над троугловима $\triangle A_1B_1H_1$ и $\triangle F_1E_1D_1$, због пресликавања троуглова, бити дупло већа. Слично као за $|k| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ добија се да је функција густине димензионалне случајне променљиве (X, V) за $0 < |k| < \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\varphi_{XV}(x, v) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, v) \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \\ \frac{1}{4}, & (x, v) \in \mathcal{F}_3 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (\text{А.9})$$

где су \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 троуглови $\triangle A_1B_1H_1$ и $\triangle D_1E_1F_1$, редом и \mathcal{F}_3 је шестоугао $B_1C_1D_1F_1G_1H_1$.

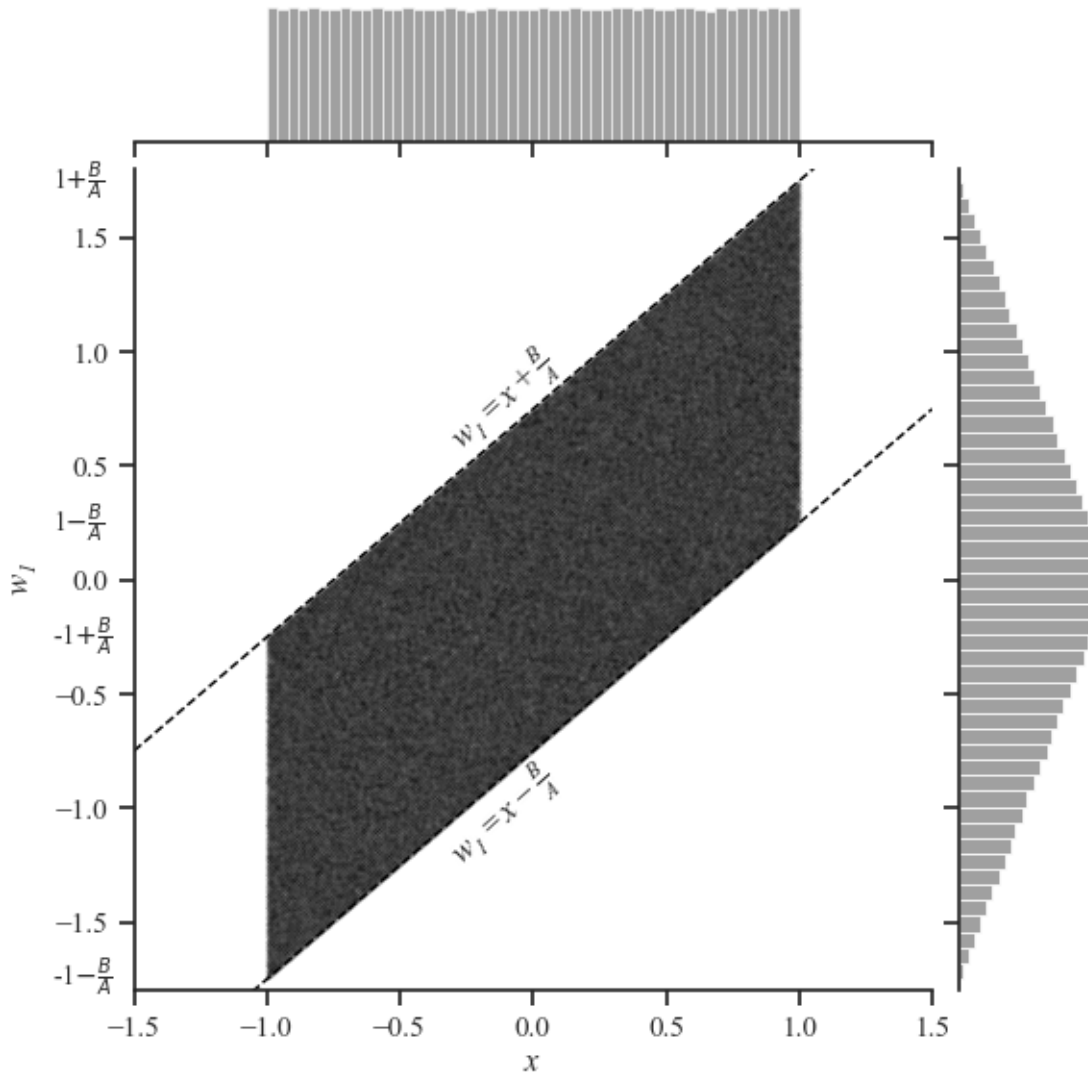
Математичко очекивање случајне променљиве XV је

$$\begin{aligned} E(XV) &= 2 \int_{-1}^0 \int_{-\frac{B}{A}x-1}^{\frac{B}{A}x+1} \frac{1}{4} xv \, dv dx + 2 \int_{-1}^0 \int_{-1}^{-\frac{B}{A}x-1} \frac{1}{2} xv \, dv dx \\ &= -\frac{1}{8} \left(\frac{B}{A} \right)^2 + \frac{1}{3} \frac{B}{A}. \end{aligned}$$

На основу вредности добијеног математичког очекивања, коришћењем (А.3) добија се вредност коефицијента корелације

$$\rho_{XV}(k) = -\frac{3}{8} \left(\frac{B}{A} \right)^2 + \frac{B}{A}, 0 < |k| < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

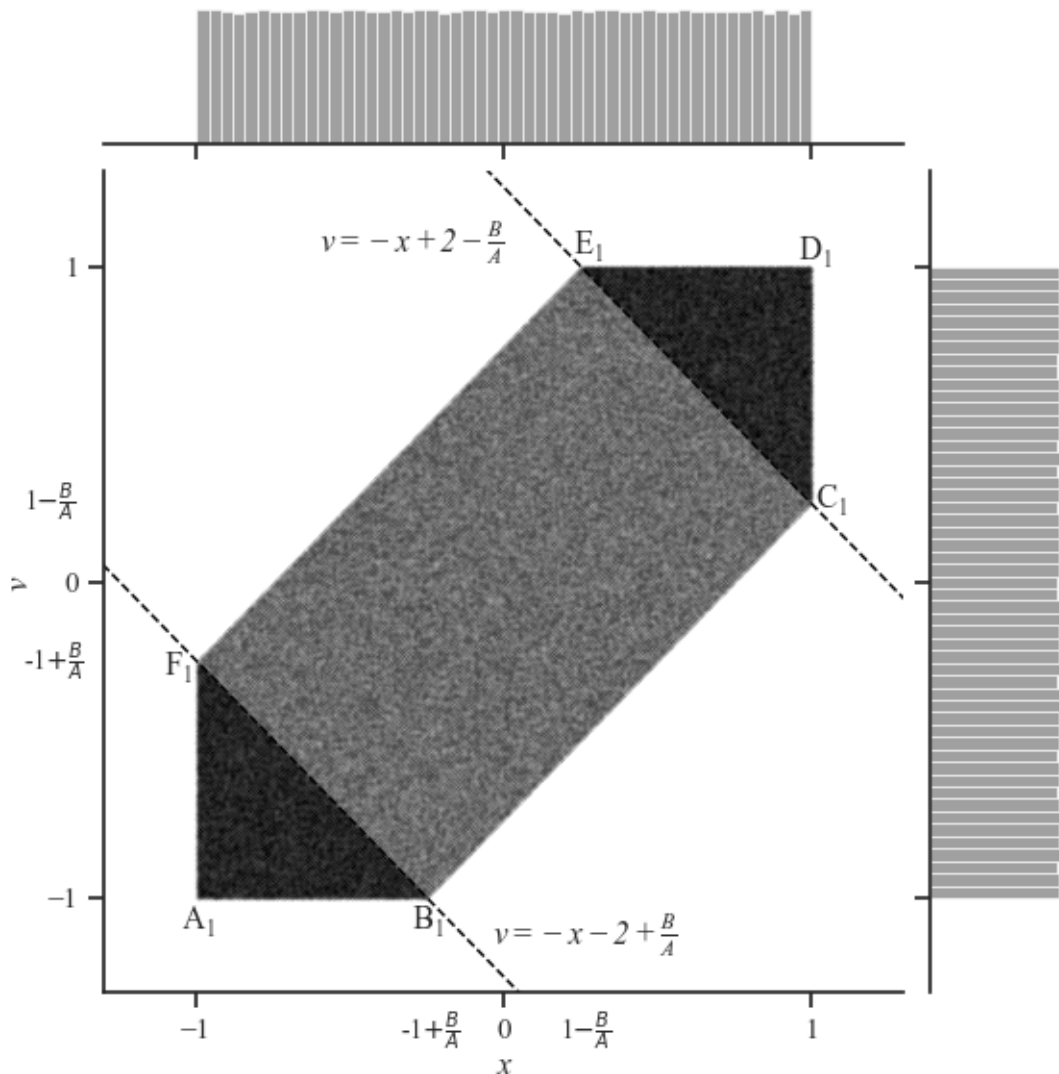
У случају $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |k| < 1$ функција густине димензионалне случајне променљиве (X, W_1) приказана је на слици А.3. Са слике А.3 на којој је приказана пројекција функције густине на xw_1 -раван може се уочити равномерно прекривање дуж целе површине паралелограма, па стога важи израз (А.7), где P_{\square} представља површину паралелограма приказаног на слици А.3.



Слика А.3: Пројекција функције густине на xw_1 -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и W_1 у случају $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |k| < 1$

Дужина странице p посматраног паралелограма је дужина дужи одређене тачкама $(-1, -1 - \frac{B}{A})$ и $(-1, -1 + \frac{B}{A})$, тако да је $p = (-1 + \frac{B}{A}) - (-1 - \frac{B}{A}) = 2\frac{B}{A}$ и одговарајућа висина је $h_p = 1 - (-1) = 2$. Површина паралелограма је $P_{\square} = ph_p = 4\frac{B}{A}$, на основу чега површина паралелограма у овом случају зависи од дефинисаног коефицијента корелације k , док је у претходном случају константна и не зависи од k . Функција густине дводимензионалне случајне променљиве (X, W_1) је

$$\varphi_{XW_1}(x, w_1) = \begin{cases} \frac{A}{4B}, & x \in (-1, 1), w_1 \in (x - \frac{B}{A}, x + \frac{B}{A}) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$



Слика А.4: Пројекција функције густине на xv -раван и хистограми реализованих вредности за случајне променљиве X и V за апсолутну вредност задатог коефицијента корелације већу од $\frac{\sqrt{2}}{2}$

На слици А.4 могу се уочити дужи E_1D_1 и A_1B_1 , око којих се врши геометријска трансформације преклапањем два подударна троугла. Такође, над троугловима $\triangle A_1B_1F_1$ и $\triangle C_1D_1E_1$, као резултат трансформације, функција густине има дупло већу вредност него на правоугаонику $B_1C_1E_1F_1$, тако да функција густине дводимензионалне случајне променљиве (X, V) за $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |k| < 1$ је

$$\varphi_{XV}(x, v) = \begin{cases} \frac{A}{2B}, & (x, v) \in \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_1 \\ \frac{A}{4B}, & (x, v) \in \mathcal{F}_3 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (\text{A.11})$$

где су \mathcal{F}_1 троугао $\triangle A_1 B_1 F_1$, \mathcal{F}_2 троугао $\triangle C_1 D_1 E_1$ и \mathcal{F}_3 правоугаоник $B_1 C_1 E_1 F_1$.

Математичко очекивање случајне променљиве XV је

$$\begin{aligned} E(XV) &= 2 \int_{-1}^{-1+\frac{B}{A}} \int_{-1}^{-x-2+\frac{B}{A}} \frac{1}{2} xv \, dv dx + 2 \int_{-1}^{-1+\frac{B}{A}} \int_{-x-2+\frac{B}{A}}^{x+\frac{B}{A}} \frac{1}{4} xv \, dv dx + 2 \int_{-1+\frac{B}{A}}^0 \int_{x-\frac{B}{A}}^{x+\frac{B}{A}} \frac{1}{4} xv \, dv dx \\ &= \frac{1}{24} \left(\frac{B}{A} \right)^3 - \frac{1}{6} \left(\frac{B}{A} \right)^2 + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

На основу (А.3) Пирсонов коефицијент корелације је

$$\rho_{XV}(k) = \frac{1}{8} \left(\frac{B}{A} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{B}{A} \right)^2 + 1, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq |k| < 1.$$

Параметри A и B за $0 < |k| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ су $A = \sqrt{1-k^2}$ и $B = |k|$, док за $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |k| < 1$ су $B = |k|$ и $A = \sqrt{1-k^2}$.

Пирсонов коефицијент корелације између случајних променљивих X и V за $|k| > 0$ је

$$\rho_{XV}(k) = \begin{cases} -\frac{3}{8} \left(\frac{|k|}{\sqrt{1-k^2}} \right)^2 + \frac{|k|}{\sqrt{1-k^2}}, & 0 < |k| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{8} \left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{|k|} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{|k|} \right)^2 + 1, & \frac{\sqrt{2}}{2} < |k| < 1 \end{cases}. \quad (\text{A.12})$$

А.6 Одређивање инверзне функције $\rho_{XV}^{-1}(k)$

Нека је (А.12) записан као

$$\rho_{XV}(k) = \begin{cases} \rho_1(k), & 0 < |k| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \rho_2(k), & \frac{\sqrt{2}}{2} < |k| < 1 \end{cases},$$

где је $\rho_1(k) = -\frac{3}{8} \left(\frac{|k|}{\sqrt{1-k^2}} \right)^2 + \frac{|k|}{\sqrt{1-k^2}}$ и $\rho_2(k) = \frac{1}{8} \left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{|k|} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{1-k^2}}{|k|} \right)^2 + 1$.

Функција $\rho_1(k)$ се може записати

$$\rho_1(k) = (\mu \circ M)(k),$$

где је $\mu(M) = -\frac{3}{8}M^2 + M$ и $M(k) = \frac{|k|}{\sqrt{1-k^2}}$.

Даље,

$$\mu^{-1}(M) = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}\sqrt{2-3M}}{3}$$

где је μ^{-1} инверзна функција функције μ .

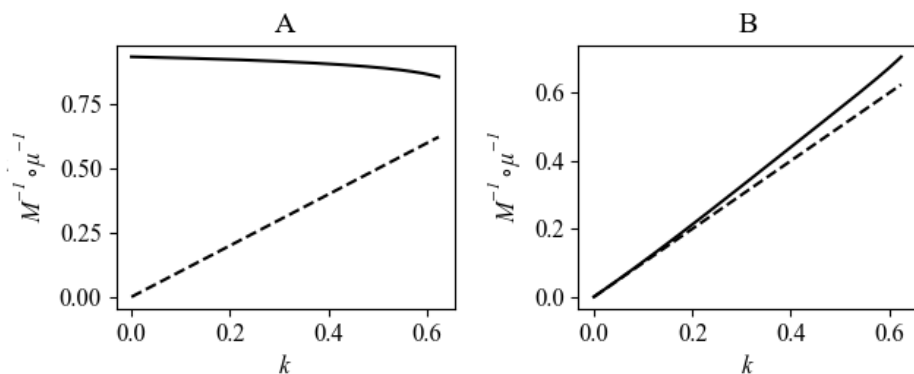
Слично, инверзна функција функције $M(k)$ је

$$M^{-1}(k) = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Инверзна функција функције $(\mu \circ M)(k)$ је

$$(M^{-1} \circ \mu^{-1})(k) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{2}k}}{\sqrt{\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{3}{2}k}\right)^2 + \frac{9}{16}}}. \quad (\text{A.13})$$

Треба приметити да су са (A.13) дате две функције, приказане на слици А.5, од којих тачно једна одговара инверсној функцији ρ_1^{-1} функције ρ_1 . Инверзна функција ρ_1^{-1} функције ρ_1 приказана је десно на слици А.5.



Слика А.5: Функције $(M^{-1} \circ \mu^{-1})(k)$ за $0 < |k| < \frac{5}{8}$

Инверзна функција функције ρ_1 за $0 < |k| < \frac{5}{8}$ је

$$\rho_1^{-1}(k) = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{3}{2}k}}{\sqrt{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{2}k}\right)^2 + \frac{9}{16}}}, \quad (\text{A.14})$$

где k представља задати коефицијент корелације који се прослеђује FOLD методи.

За $\frac{\sqrt{2}}{2} < |k| < 1$ је

$$\rho_2(k) = (\nu \circ N)(k),$$

где је $N(k) = \frac{\sqrt{1-k^2}}{|k|}$ и $\nu(N) = \frac{1}{8}N^3 - \frac{1}{2}N^2 + 1$. Као и у претходном случају, одређена је инверзна функција ρ_2^{-1} .

Инверзна функција $N^{-1}(k)$ функције $N(k)$ је

$$N^{-1}(k) = \frac{1}{\sqrt{1-k}}.$$

Даље, ради једноставности записа уместо $\nu(N)$ користи се ознака ν . Из $\nu = \frac{1}{8}N^3 - \frac{1}{2}N^2 + 1$ је

$$N^3 - 4N^2 + (1 - \nu)8 = 0. \quad (\text{A.15})$$

Једначина (A.15) решава се коришћењем кубне (Карданове) формуле¹ [74] и њено решење је

$$N = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \left[\sqrt[3]{(27\nu - 11) - 3\sqrt{3}\sqrt{27\nu^2 - 22\nu - 5}} + \sqrt[3]{(27\nu - 11) + 3\sqrt{3}\sqrt{27\nu^2 - 22\nu - 5}} \right] + \frac{4}{3}.$$

Зато што кубни корен има три решења у скупу комплексних бројева, $\nu^{-1}(N)$ ће имати девет решења и то су

(i)

$$N_1 = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \left[\sqrt[3]{\Sigma - \Delta} + \sqrt[3]{\Sigma + \Delta} \right] + \frac{4}{3},$$

¹Решења кубне једначине

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

су

$$x = \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{b}{c} - \frac{d}{2}\right) - \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{b}{c} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}} + \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{b}{c} - \frac{d}{2}\right) + \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{b}{c} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}} - \frac{b}{3}$$

(ii)

$$N_2 = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \left[\sqrt[3]{\Sigma - \Delta} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \sqrt[3]{\Sigma + \Delta} \right] + \frac{4}{3},$$

(iii)

$$N_3 = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \left[\sqrt[3]{\Sigma - \Delta} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \sqrt[3]{\Sigma + \Delta} \right] + \frac{4}{3},$$

(iv)

$$N_4 = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \sqrt[3]{\Sigma - \Delta} + \sqrt[3]{\Sigma + \Delta} \right] + \frac{4}{3},$$

(v)

$$N_5 = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \sqrt[3]{\Sigma - \Delta} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \sqrt[3]{\Sigma + \Delta} \right] + \frac{4}{3},$$

(vi)

$$N_6 = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \left[\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \sqrt[3]{\Sigma - \Delta} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \sqrt[3]{\Sigma + \Delta} \right] + \frac{4}{3},$$

(vii)

$$N_7 = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \sqrt[3]{\Sigma - \Delta} + \sqrt[3]{\Sigma + \Delta} \right] + \frac{4}{3},$$

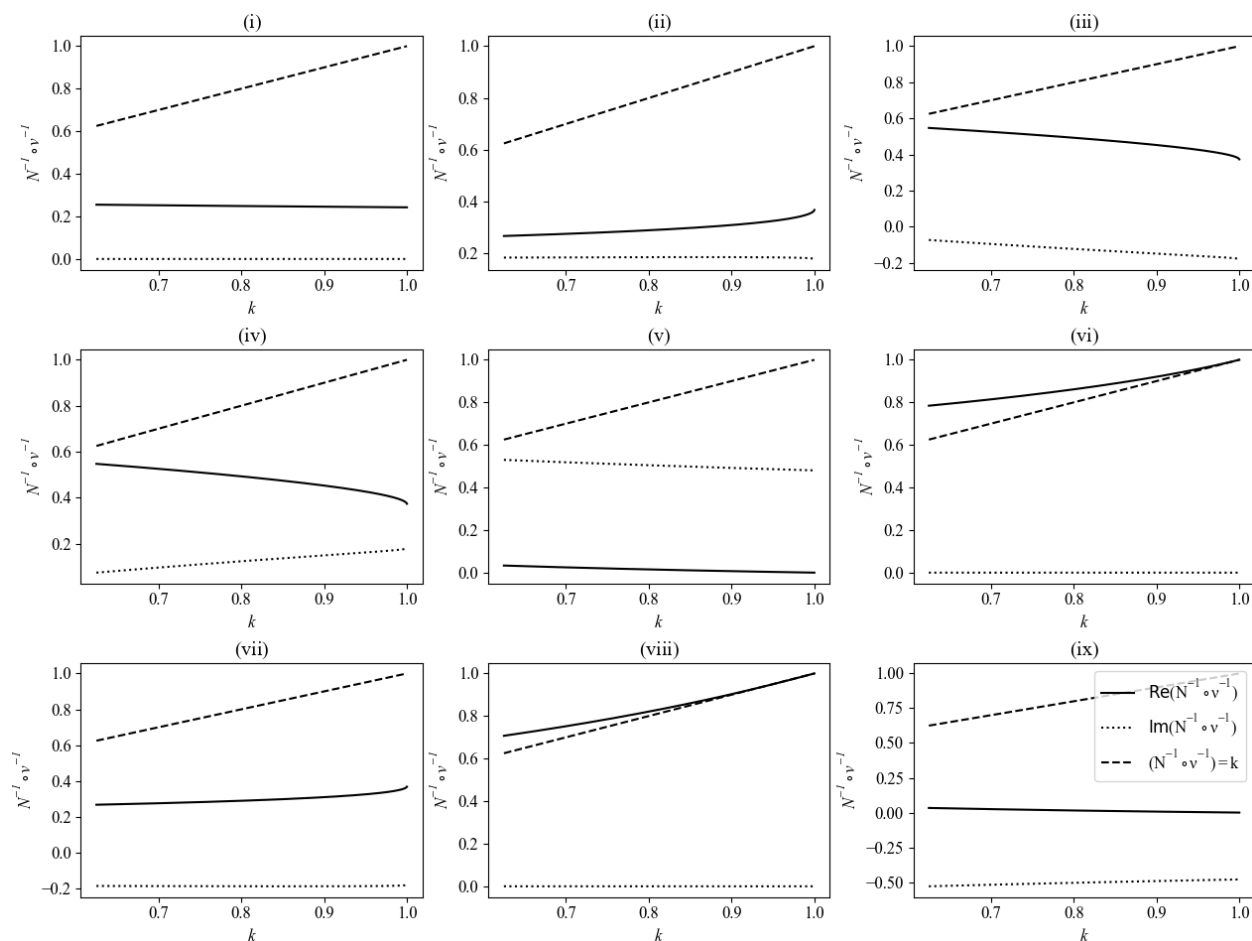
(viii)

$$N_8 = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \sqrt[3]{\Sigma - \Delta} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \sqrt[3]{\Sigma + \Delta} \right] + \frac{4}{3},$$

(ix)

$$N_9 = \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \sqrt[3]{\Sigma - \Delta} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \sqrt[3]{\Sigma + \Delta} \right] + \frac{4}{3},$$

где је $\Sigma = 27\nu - 11$ и $\Delta = 3\sqrt{3}\sqrt{27\nu^2 - 22\nu - 5}$.



Слика А.6: Функције $(N^{-1} \circ \nu^{-1})(k)$ за $0 < |k| < \frac{5}{8}$

На слици А.6 су приказане функције добијене композицијом функција N^{-1} и ν^{-1} . На свим графицима на слици А.6 са — представљен је реални део $(N^{-1} \circ \nu^{-1})(k)$, са приказан је имагинарни део $(N^{-1} \circ \nu^{-1})(k)$ и са - - - - функција $(N^{-1} \circ \nu^{-1})(k) = k$.

Функција која одговара инверзној функцији ρ_2^{-1} приказана је на графику (viii), па је

$$\rho_2^{-1}(k) = \frac{6}{\sqrt{(-\sqrt[3]{4}((1-\sqrt{3}i)\sqrt[3]{\Sigma-\Delta}+(1+\sqrt{3}i)\sqrt[3]{\Sigma+\Delta})+8)^2+36}}, \quad \frac{5}{8} < |k| < 1, \quad (\text{A.16})$$

где су $\Sigma = 27k - 11$, $\Delta = 3\sqrt{3}\sqrt{27k^2 - 22k - 5}$ и k представља коефицијент корелације који се прослеђује FOLD методи.

Инверзна функција функције ρ_{XV} , добијена на основу (A.14) и (A.16), је

$$\rho_{XV}^{-1}(k) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{3}{2}k}}{\sqrt{(\sqrt{1 - \frac{3}{2}k} - 1)^2 + \frac{9}{16}}}, & 0 < |k| \leq \frac{5}{8} \\ \frac{6}{\sqrt{(-\sqrt[3]{4}((1 - \sqrt{3}i)^{\sqrt[3]{\Sigma - \Delta}} + (1 + \sqrt{3}i)^{\sqrt[3]{\Sigma + \Delta}}) + 8)^2 + 36}}, & \frac{5}{8} < |k| < 1 \end{cases},$$

где је $\Sigma = 27k - 11$ и $\Delta = 3\sqrt{3}\sqrt{27k^2 - 22k - 5}$.

Додатак Б

Б.1 Реализација FOLD методе у Пајтон програмском језику

Б.1.1 Верзија 1

```
1 k = 0.4
2
3 l = (1-k*k)**0.5
4
5 rnd1 = np.random.uniform(-1,1,max_samples)
6 rnd2 = np.random.uniform(-1,1, max_samples)
7
8 tmp = [(k*x + l*y)/max(abs(k),l) for x, y in zip(rnd1, rnd2)]
9 vectorV = []
10
11 for i in tmp[:]:
12     if(i<-1):
13         vectorV.append(-2-i)
14     else if(i>1):
15         vectorV.append(2-i)
16     else:
17         vectorV.append(i)
```

Б.1.2 Верзија 2

```
1 def fold(max_samples=10000, cf=0.4):
```

```

2
3     k = cf
4     l = (1-k*k)**0.5
5
6     rnd1 = np.random.uniform(-1,1,max_samples)
7     rnd2 = np.random.uniform(-1,1, max_samples)
8
9     c1 = k/(max(k,l))
10    c2 = l/(max(k,l))
11
12    tmp = np.multiply(c1, rnd1) + np.multiply(c2, rnd2)
13
14    data = np.copy(tmp)
15    data[tmp < -1] = - 2 - tmp[tmp < -1]
16    data[tmp > 1] = 2 - tmp[tmp > 1]
17
18    return data
19
20 vectorV = fold()

```

Б.2 Реализација FOLD методе у R програмском језику

```

1 fold <- function(nrow,cmat)
2 {
3   result <- cbind(runif(nrow, -1, 1),runif(nrow, -1, 1))
4   result <- result %*% cmat
5
6   tmp <- result[,2]
7   result[,2][tmp< -1]=-2-tmp[tmp< -1]
8   result[,2][tmp>1]=2-tmp[tmp>1]
9
10  return(result)
11 }
12
13 k <- 0.2
14 l <- sqrt(1-k*k)
15
16 cmat <- matrix(c(1,0,k/max(k,l),l/max(k,l)), nrow=2, ncol=2)

```

```
17 vectorV = fold(1e6,cmat)
```

Б.3 Реализација FOLD методе у C++ програмском језику

```
1 #include <iostream>
2 #include <random>
3
4 using namespace std;
5
6 double max(double, double);
7 double min(double, double);
8
9 int main()
10 {
11     const long long repNum = 10000000;
12     vector<double> vectorX(repNum), vectorY(repNum), vectorV(repNum);
13     default_random_engine generator;
14     uniform_real_distribution<double> distribution(-1.0, 1.0);
15
16     double k=0.4, l, a, temp;
17
18     l = sqrt(1 - k * k);
19     a = max(abs(k), abs(l));
20     double ka = k / a, la = l / a;
21     for(int i = 0; i < repNum; i++) {
22         vectorX[i] = distribution(generator);
23         vectorY[i] = distribution(generator);
24         temp = ka*vectorX[i] + la*vectorY[i];
25
26         if(temp < -1) {
27             vectorV[i] = -2 - temp;
28         }else if(temp > 1) {
29             vectorV[i] = 2 - temp;
30         }else {
31             vectorV[i] = temp;
32         }
33     }
34 }
```

```
35     return 0;
36 }
```

Б.4 Реализација MVUD методе у С++ програмском језику

```
1  #include <iostream>
2  #include <random>
3
4  using namespace std;
5
6  double max(double, double);
7  double min(double, double);
8
9  int main()
10 {
11     const long long repNum = 10000000;
12     vector<double> vectorX(repNum), vectorY(repNum), vectorV(repNum);
13     default_random_engine generator;
14     uniform_real_distribution<double> distribution(-1.0, 1.0);
15
16     double k=0.4, l, a, b, c1, c2, c3, cond1, cond2, temp;
17
18     l = sqrt(1 - k * k);
19     a = max(abs(k), abs(l));
20     b = min(abs(k), abs(l));
21     c1 = 2 / (8 * a * b);
22     c2 = 4 * (a + b) / (8 * a * b);
23     c3 = 2 * pow((a + b), 2) / (8 * a * b) - 1;
24     cond1 = -a+b;
25     cond2 = a-b;
26
27     for(int i = 0; i < repNum; i++) {
28         vectorX[i] = distribution(generator);
29         vectorY[i] = distribution(generator);
30         temp = ka*vectorX[i] + la*vectorY[i];
31
32         if(temp < cond1) {
33             vectorV[i] = temp * (c1 * temp + c2) + c3;
```

```
34     }else if(temp > cond2) {
35         vectorV[i] = temp * (-c1 * temp + c2) - c3;
36     }else {
37         vectorV[i] = temp / a;
38     }
39 }
40
41 return 0;
42 }
```

Б.5 Експериментална поставка – код за читавање напона мултиметра и контролу селектора

```
1
2 import serial
3 import time
4 import datetime
5
6 fluke = serial.Serial()
7 fluke.baudrate = 9600
8 fluke.bytesize = 8
9 fluke.stopbits = 1
10 fluke.xonxoff = 0
11 fluke.rtscts = 0
12 fluke.timeout = None
13 fluke.port = "/dev/ttyUSB1"
14
15 selector = serial.Serial()
16 selector.baudrate = 9600
17 selector.bytesize = 8
18 selector.stopbits = 1
19 selector.xonxoff = 0
20 selector.rtscts = 0
21 selector.timeout = None
22 selector.port = "/dev/ttyUSB0"
23
24 def read_data():
25     res = ""
26     while True:
```



```
27     a = fluke.read().decode()
28     if a == '\r':
29         break
30     else:
31         res += a
32     return res
33
34 fluke.open()
35 selector.open()
36 fluke.write(b'SYST:REM \r')
37 fluke.write(b'CONF:VOLT:DC 10, MIN\r')
38 fluke.write(b'SENS:VOLT:DC:FILT:STAT OFF\r')
39 fluke.write(b'SENS:VOLT:DC:FILT:DIG:STAT OFF\r')
40 fluke.write(b'TRIG:COUN 1\r')
41 fluke.write(b'TRIG:DEL:AUTO OFF\r')
42 fluke.write(b'TRIG:DEL 1\r')
43 fluke.write(b'INIT\r')
44
45 f = open(datetime.datetime.now().strftime('%Y%m%d-%H%M')+'.csv','w')
46
47 selector.write(b'C01R')
48 for i in range(100):
49
50     fluke.write(b'READ?\r')
51     res1 = read_data()
52     fluke.write(b'READ?\r')
53     res1 = read_data()
54     selector.write(b'C02R')
55     ser.write(b'READ?\r')
56     res2 = read_data()
57     ser.write(b'READ?\r')
58     res2 = read_data()
59     f.write(str(float(res1))+','+str(float(res2))+'\n')
60     selector.write(b'C01R')
61
62 f.close()
63 ser.close()
```

Б.6 Монте Карло симулације MVUD метода

```
1 library(MultiRNG)
2
3 repetition <- 1E8
4 k = 0.647
5 mydata = cbind(rnorm(repetition),rnorm(repetition))
6
7 std_u1 <- 0.00000059149490
8 u1_avg <- 10.0007679000
9
10 std_u2 <- 0.00000026629126
11 u2_avg <- 0.9998572400
12
13 u10 <- mydata[,1]*std_u1 + u1_avg
14 u20 <- mydata[,2]*std_u2 + u2_avg
15
16 cmat<-matrix(c(1,k,k,1), nrow=2, ncol=2)
17 mydata<-draw.d.variate.uniform(no.row=repetition,d=2,cov.mat=cmat)
18
19 end.time <- Sys.time()
20 delta_u1 <- 0.00016744221932*mydata[,1]*sqrt(3)
21 delta_u2 <- 0.00001385442854*mydata[,2]*sqrt(3)
22
23 u1 <- u10 + delta_u1
24 u2 <- u20 + delta_u2
25 ratio <- u2 / u1
26
27 u1_mean <- mean(u1)
28 u2_mean <- mean(u2)
29
30 ratio_mean <- mean(ratio)
31 ratio_stdev <- sd(ratio)
32 uncertainty <- ratio_stdev/ratio_mean
```

Б.7 Монте Карло симулације FOLD метода

```

1 data <- matrix()
2 data1 <- c()
3
4 fold <- function(nrow,cmat){
5   result <- cbind(runif(nrow, -1, 1),runif(nrow, -1, 1))
6   data <<- result
7   result <- result %*% cmat
8   data1 <<- result[,2]
9   tmp <- result[,2]
10  result[,2][tmp< -1]=-2-tmp[tmp< -1]
11  result[,2][tmp>1]=2-tmp[tmp>1]
12  return(result)
13 }
14
15 repetition <- 1e8
16 k = 0.647
17 mydata = cbind(rnorm(repetition),rnorm(repetition))
18
19 std_u1 <- 0.00000059149490
20 u1_avg <- 10.0007679000
21
22 std_u2 <- 0.00000026629126
23 u2_avg <- 0.9998572400
24
25 uB_U1 <- 0.00016744221840
26 uB_U2 <- 0.00001385442832
27
28 u10 <- mydata[,1]*std_u1 + u1_avg
29 u20 <- mydata[,2]*std_u2 + u2_avg
30
31 if(k>0 & k<=0.625){
32   k = 7.28527*k**6 - 10.53344*k**5 + 5.846*k**4-
33   1.90263*k**3 + 0.59244*k**2 + 0.98819*k + 0.000216031
34 }else if(k>0.625 & k<1){
35   k = -23.63198*k**6 + 111.21638*k**5 - 217.16863*k**4 +
36   225.72274*k**3 - 131.39157*k**2 + 41.039752*k - 4.78655
37 }
38
39 l <- sqrt(1-k*k)
40 cmat <- matrix(c(1,0,k/max(abs(k),l),l/max(abs(k),l)), nrow=2, ncol=2)

```

```
41 mydata = fold(repetition,cmat)
42
43 delta_u1 <- uB_U1*mydata[,1]*sqrt(3)
44 delta_u2 <- uB_U2*mydata[,2]*sqrt(3)
45
46 u1 <- u10 + delta_u1
47 u2 <- u20 + delta_u2
48
49 ratio <- u2 / u1
50 ratio_mean <- mean(ratio)
51 ratio_stdev <- sd(ratio)
52 uncertainty <- ratio_stdev/ratio_mean
```

Додатак В

В.1 Резултати добијени експериментом одређивања фактора дељења

Табела В.1: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,05$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,001007 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,0001007 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 0,499965 V | 0,5 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 77,9 ppm |
| U_2 | | 0,499965 V | 77,9 ppm |
| vr | | 0,04999 | 79,0 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,101 | |

Табела В.2: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,1$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000776 V | 0,1 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000776 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 0,999877 V | 0,3 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 49,1 ppm |
| U_2 | | 0,999877 V | 49,1 ppm |
| vr | | 0,09998 | 50,5 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,172 | |

Табела В.3: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,15$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,001003 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,001003 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 1,499771 V | 0,2 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 39,5 ppm |
| U_2 | | 1,499771 V | 39,5 ppm |
| vr | | 1,4996 | 44,0 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,086 | |

Табела В.4: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,2$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000807 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000807 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 1,999687 V | 0,1 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 34,6 ppm |
| U_2 | | 1,999687 V | 34,6 ppm |
| vr | | 0,19995 | 38,2 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,170 | |

Табела В.5: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,25$

| Величина | Расподела | Очекивана вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,001004 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,001004 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 2,499543 V | 0,1 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 31,8 ppm |
| U_2 | | 2,499543 V | 31,8 ppm |
| vr | | 0,24993 | 38,2 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,058 | |

Табела В.6: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,3$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000767 V | 0,1 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000767 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 2,999393 V | 0,1 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 29,8 ppm |
| U_2 | | 2,999393 V | 29,8 ppm |
| vr | | 0,29992 | 28,1 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,460 | |

Табела В.7: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,35$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000996 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000996 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 3,499246 V | 0,1 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 28,5 ppm |
| U_2 | | 3,499246 V | 28,5 ppm |
| vr | | 0,34989 | 33,8 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,151 | |

Табела В.8: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,4$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000856 V | 0,1 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000856 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 3,999219 V | 0,1 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 27,4 ppm |
| U_2 | | 3,999219 V | 27,4 ppm |
| vr | | 0,39989 | 21,6 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,647 | |

Табела В.9: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,45$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000984 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000984 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 4,499020 V | 0,1 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 26,6 ppm |
| U_2 | | 4,499020 V | 26,6 ppm |
| vr | | 0,44986 | 29,3 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,311 | |

Табела В.10: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,5$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000894 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000894 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 4,999021 V | 0,1 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 26,0 ppm |
| U_2 | | 4,999021 V | 26,0 ppm |
| vr | | 0,49986 | 24,5 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,507 | |

Табела В.11: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,55$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000984 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000984 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 5,498829 V | 0,1 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 25,5 ppm |
| U_2 | | 5,498829 V | 25,5 ppm |
| vr | | 0,54983 | 30,3 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,224 | |

Табела В.12: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,6$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000917 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000917 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 5,998954 V | 0,1 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 25,0 ppm |
| U_2 | | 5,998954 V | 25,0 ppm |
| vr | | 0,59984 | 28,0 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,323 | |

Табела В.13: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,65$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000979 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000979 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 6,498840 V | 0,0 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 24,6 ppm |
| U_2 | | 6,498840 V | 24,6 ppm |
| vr | | 0,65000 | 29,2 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,253 | |

Табела В.14: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,7$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000927 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000927 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 6,999037 V | 0,0 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 24,3 ppm |
| U_2 | | 6,999037 V | 24,3 ppm |
| vr | | 0,69984 | 24,1 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,485 | |

Табела В.15: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,75$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000975 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000975 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 7,499007 V | 0,0 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 24,1 ppm |
| U_2 | | 7,499007 V | 24,1 ppm |
| vr | | 0,74983 | 28,7 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,258 | |

Табела В.16: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,8$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000943 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000943 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 7,999481 V | 0,0 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,8 ppm |
| U_2 | | 7,999481 V | 23,8 ppm |
| vr | | 0,79987 | 25,1 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,428 | |

Табела В.17: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,85$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000969 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000969 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 8,499540 V | 0,0 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,6 ppm |
| U_2 | | 8,499540 V | 23,6 ppm |
| vr | | 0,84987 | 26,3 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,368 | |

Табела В.18: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,9$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000949 V | 0,0 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000949 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 9,000034 V | 0,0 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,4 ppm |
| U_2 | | 9,000034 V | 23,4 ppm |
| vr | | 0,89992 | 24,3 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,452 | |

Табела В.19: Буџет мерне несигурности за $vr = 0,95$

| Величина | Расподела | Процењена вредност | Рел. мерна несиг. |
|--------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| U_{1m} | Тип А (нормална) | 10,000965 V | 0,1 ppm |
| δU_1 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,1 ppm |
| U_1 | | 10,000965 V | 23,1 ppm |
| U_{2m} | Тип А (нормална) | 9,500209 V | 0,0 ppm |
| δU_2 | Тип Б (униформна) | 0 V | 23,2 ppm |
| U_2 | | 9,500209 V | 23,2 ppm |
| vr | | 0,94993 | 23,0 ppm |
| $r_{U_1U_2}$ | | 0,509 | |

Литература

- [1] International Bureau of Weights and Measures. *International vocabulary of basic and general terms in metrology*. International organization for standardization, 1993.
- [2] Paul Tunbridge. *Lord Kelvin: his influence on electrical measurements and units*. Iet, 1992.
- [3] Prithwiraj Purkait. *Electrical and electronics measurements and instrumentation*. McGraw-Hill Education, 2013.
- [4] Vojislav Bego, Tomislav Strujić, and Srećko Prelovec. *Mjerenja u elektrotehnici*. Tehnička knjiga, 1982.
- [5] Joint Committee for Guides in Metrology. Evaluation of measurement data—guide to the expression of uncertainty in measurement. *Int. Organ. Stand. Geneva ISBN*, 50:134, 2008.
- [6] Pedro da Silva Hack and Carla Schwengber ten Caten. Measurement uncertainty: Literature review and research trends. *iee Transactions on Instrumentation and Measurement*, 61(8):2116–2124, 2012.
- [7] Đorđe Novaković, Dragan Pejić, Tatjana Grbić, Marko Pejić, Platon Sovilj, and Slavica Medić. A method for generating a sample of two uniformly distributed random variables with prescribed coefficient of correlation. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 70:1–10, 2020.
- [8] Ђ. Новаковић, Пејић Д., Т. Грбић, С. Мирковић, М. Булат, and Н. Газивода. Једноставан и ефикасан начин за генерисање два ансамбла случајних бројева униформне расподеле са дефинисаним коефицијентом корелације. *ЕТРАН - Конференција за електронику, телекомуникације, рачунарство, аутоматiku и нуклеарну технику*, 63(1):538–542, 2019.
- [9] D. Srežović, S. Spiridonović, and J. Petković. *Svet merenja*. Galerija Srpske akademije nauka i umetnosti. Srpska akademija nauka i umetnosti, 1995.
- [10] J. J. O'Connor and E. F. Robertson. *The history of measurement*, 2003.

- [11] Norman Biggs. *Quite Right: The Story of Mathematics, Measurement, and Money*. Oxford University Press, 2016.
- [12] Stephen M Stigler. *The history of statistics: The measurement of uncertainty before 1900*. Harvard University Press, 1986.
- [13] William R. Porter. A historical perspective on analytical measurement uncertainty: From cotes, laplace and gauss to gum and implications for current practice. http://www.mbswonline.com/upload/presentation_5-27-2015-8-55-11.uploaded%20bill%20porter%20mbsw.pptx, 2015. Приступљено: 28.11.2021.
- [14] Marc E Himbert. A brief history of measurement. *The European Physical Journal Special Topics*, 172(1):25–35, 2009.
- [15] Walter Bich, Maurice G Cox, and Peter M Harris. Evolution of the ‘guide to the expression of uncertainty in measurement’. *Metrologia*, 43(4):S161, 2006.
- [16] William David Cooper. *Electronic instrumentation and measurement techniques*. Prentice Hall, 1970.
- [17] H S Kalsi. *Electronic Instrumentation, 3e*. Tata McGraw-Hill Education, 2018.
- [18] Alessandro Ferrero and Simona Salicone. Measurement uncertainty. *IEEE instrumentation & measurement magazine*, 9(3):44–51, 2006.
- [19] Luca Mari. Epistemology of measurement. *Measurement*, 34(1):17–30, 2003.
- [20] John A Rice. *Mathematical statistics and data analysis*. Cengage Learning, 2006.
- [21] Предраг Осмокровић, Ковиљка Станковић, and Милош Вујисић. *Мерна несигурност*. Академска мисао, 2009.
- [22] John Taylor. *Introduction to error analysis, the study of uncertainties in physical measurements*. University Science Books, 1997.
- [23] Simona Salicone. *Measurement Uncertainty: an approach via the mathematical theory of evidence*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [24] Ronald H Dieck. *Measurement uncertainty: methods and applications*. ISA, 2007.
- [25] Ricardo Bettencourt da Silva, Ewa Bulska, Beata Godlewska-Żyłkiewicz, Martina Hedrich, Nineta Majcen, Snježana Marinčić, Ioannis Papadakis, Marina Patriarca, and Emilia Vassileva. *Analytical measurement: measurement uncertainty and statistics*. Publications Office, 2012.
- [26] Brian Martin. *Statistics for Physical Sciences: An Introduction*. Academic Press, 2012.

- [27] Kandethody M Ramachandran and Chris P Tsokos. *Mathematical statistics with applications in R*. Academic Press, 2020.
- [28] Stephanie A Bell. A beginner’s guide to uncertainty of measurement. Technical report, National Physical Laboratory, 2001.
- [29] Juan Blázquez, A García-Berrocal, C Montalvo, and M Balbás. The coverage factor in a flatten–gaussian distribution. *Metrologia*, 45(5):503, 2008.
- [30] Robin Willink. *Measurement uncertainty and probability*. Cambridge University Press, 2013.
- [31] Ignacio Lira. *Evaluating the measurement uncertainty: fundamentals and practical guidance*, 2003.
- [32] Paulo Roberto Guimarães. *Monte Carlo simulations applied to uncertainty in measurement*. IntechOpen, 2013.
- [33] JCGM. Jcgm 101: 2008 evaluation of measurement data—supplement 1 to the guide to the expression of uncertainty in measurement - propagation of distributions using a monte carlo method. *International Organisation for Standardisation, Geneva*, 2008.
- [34] Nicholas Metropolis et al. The beginning of the monte carlo method. *Los Alamos Science*, 15(584):125–130, 1987.
- [35] M Cox, P Harris, and BR-L Siebert. Evaluation of measurement uncertainty based on the propagation of distributions using monte carlo simulation. *Measurement Techniques*, 46(9):824–833, 2003.
- [36] Benjamin Peherstorfer, Philip S Beran, and Karen E Willcox. Multifidelity monte carlo estimation for large-scale uncertainty propagation. In *2018 AIAA Non-Deterministic Approaches Conference*, page 1660, 2018.
- [37] Adriaan MH van der Veen and Maurice G Cox. Getting started with uncertainty evaluation using the monte carlo method in r. *Accreditation and Quality Assurance*, pages 1–13, 2021.
- [38] D da Jornada and C ten Caten. A review of approaches and methods for calculating uncertainty. In *Proc. V Congr. Latino Amer. Metrol.*, 2007.
- [39] Gerd Wübbeler, Michael Krystek, and Clemens Elster. Evaluation of measurement uncertainty and its numerical calculation by a monte carlo method. *Measurement science and technology*, 19(8):084009, 2008.
- [40] Leopoldo Angrisani, R Schiano Lo Moriello, and Massimo D’Apuzzo. New proposal for uncertainty evaluation in indirect measurements. *IEEE transactions on instrumentation and measurement*, 55(4):1059–1064, 2006.

- [41] P Rosenkranz. Uncertainty propagation for platinum resistance thermometers calibrated according to its-90. *International Journal of Thermophysics*, 32(1-2):106–119, 2011.
- [42] Hugh Preston-Thomas et al. The international temperature scale of 1990(its-90). *metrologia*, 27(1):3–10, 1990.
- [43] Antonio Possolo. Copulas for uncertainty analysis. *Metrologia*, 47(3):262, 2010.
- [44] Nada M. Vučijak. *Algoritam za određivanje fazne razlike sinusnih signala niskih učestanosti*. PhD thesis, Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2015.
- [45] MJT Milton and RI Wielgosz. Uncertainty in si-traceable measurements of amount of substance by isotope dilution mass spectrometry. *Metrologia*, 37(3):199, 2000.
- [46] Bernhard Wieneke. Piv uncertainty quantification from correlation statistics. *Measurement Science and Technology*, 26(7):074002, 2015.
- [47] Andrea Sciacchitano and Bernhard Wieneke. Piv uncertainty propagation. *Measurement Science and Technology*, 27(8):084006, 2016.
- [48] Gouda M Mahmoud and Riham S Hegazy. Comparison of gum and monte carlo methods for the uncertainty estimation in hardness measurements. *International Journal of Metrology and Quality Engineering*, 8:14, 2017.
- [49] Bulent Tutmez. Measurement uncertainty analysis for compressive loading-based ultrasonic wave propagation. *Nondestructive Testing and Evaluation*, 32(3):269–285, 2017.
- [50] Thomas H Savits. On integration, substitution and the probability integral transform. *Statistics & Probability Letters*, 21(3):173–179, 1994.
- [51] John E Angus. The probability integral transform and related results. *SIAM review*, 36(4):652–654, 1994.
- [52] Mark J Schervish and MH DeGroot. *Probability and statistics*. Pearson Education, 2014.
- [53] Luc Devroye. Nonuniform random variate generation. *Handbooks in operations research and management science*, 13:83–121, 2006.
- [54] Sheehan Olver and Alex Townsend. Fast inverse transform sampling in one and two dimensions. *arXiv preprint arXiv:1307.1223*, 2013.
- [55] Marne C Cario and Barry L Nelson. Modeling and generating random vectors with arbitrary marginal distributions and correlation matrix. Technical report, Citeseer, 1997.

- [56] Seyed Taghi Akhavan Niaki and Babak Abbasi. Generating correlation matrices for normal random vectors in norta algorithm using artificial neural networks. *Journal of Uncertain Systems*, 2(3):192–201, 2008.
- [57] MR Niavarani and AJ Smith. Modeling and generating multi-variate-attribute random vectors using a new simulation method combined with norta algorithm. *Journal of Uncertain Systems*, 7(2):83–91, 2013.
- [58] Todd C Headrick and Shlomo S Sawilowsky. Simulating correlated multivariate nonnormal distributions: Extending the fleishman power method. *Psychometrika*, 64(1):25–35, 1999.
- [59] Nicholas J Higham. *Analysis of the Cholesky decomposition of a semi-definite matrix*. Oxford University Press, 1990.
- [60] H Demirtas, R Allozi, and R Gao. Multirng: Multivariate pseudo-random number generation. *Journal of Statistical Software*, 19, 2018.
- [61] H Demirtas and R Gao. Mixed data generation packages and related computational tools in r. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, pages 1–44, 2020.
- [62] Christian De Schryver, Daniel Schmidt, Norbert Wehn, Elke Korn, Henning Marxen, Anton Kostiuk, and Ralf Korn. A hardware efficient random number generator for nonuniform distributions with arbitrary precision. *International Journal of Reconfigurable Computing*, 2012:12, 2012.
- [63] Donald E Knuth. *Art of computer programming, volume 2: Seminumerical algorithms*. Addison-Wesley Professional, 2014.
- [64] David B Thomas, Wayne Luk, Philip HW Leong, and John D Villasenor. Gaussian random number generators. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 39(4):11, 2007.
- [65] Travis E Oliphant. *A guide to NumPy*, volume 1. Trelgol Publishing USA, 2006.
- [66] D Brynn Hibbert. The measurement uncertainty of ratios which share uncertainty components in numerator and denominator. *Accreditation and quality assurance*, 8(5):195–199, 2003.
- [67] Les Kirkup and Robert B Frenkel. *An introduction to uncertainty in measurement: using the GUM (guide to the expression of uncertainty in measurement)*. Cambridge University Press, 2006.
- [68] GJ Stein. On calibration uncertainty estimation in ratio-metric measurements. *Meas. Sci. Rev.*, 5(1):31–34, 2005.

- [69] Time Electronics. *Time Electronics 5025E Multifunction Calibrator*. доступно на https://www.timeelectronics.com/assets/upload/download_centre/documents/5025E-datasheet.pdf, приступљено 11.11.2021.
- [70] Iet Labs. *1455 Decade Voltage Divider*. доступно на <https://www.ietlabs.com/pdf/Datasheets/1455.pdf>, приступљено 11.11.2021.
- [71] Isotech. *Selector Switch 8 Way*. доступно на <https://isotech.co.uk/wp-content/uploads/2020/09/Selector-Switch-8-Way.pdf>, приступљено 11.11.2021.
- [72] Fluke Corporation. *Fluke 8845A/8846A Digital Multimeters Extended Specifications*, 2008. доступно на https://dam-assets.fluke.com/s3fs-public/2748044_6200_ENG_B_W_1.PDF?1kZ6Cz1s0Ih0LrBJgeT2Qn80ot4YX2gM, приступљено 11.11.2021.
- [73] Sheldon M Ross. *A first course in probability*. Macmillan College, 1994.
- [74] Roger L Cooke. *Classical algebra: its nature, origins, and uses*. John Wiley & Sons, 2008.

Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.

План третмана података

| |
|---|
| Назив пројекта/истраживања |
| Прилог одређивању мерне несигурности у случају корелираних величина |
| Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање |
| Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду |
| Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање |
| Истраживање се врши у оквиру израде докторске дисертације на студијском програму Енергетика, електроника и телекомуникације |
| 1. Опис података |
| <p>1.1 Врста студије</p> <p>Укратко описати тип студије у оквиру које се подаци прикупљају</p> <p><u>Докторска дисертација</u></p> |
| <p>1.2 Врсте података</p> <p><input checked="" type="radio"/> квантитативни</p> <p><input type="radio"/> квалитативни</p> |
| <p>1.3. Начин прикупљања података</p> <p>а) анкете, упитници, тестови</p> <p>б) клиничке процене, медицински записи, електронски здравствени записи</p> <p>в) генотипови: навести врсту _____</p> <p>г) административни подаци: навести врсту _____</p> <p>д) узорци ткива: навести врсту _____</p> <p>ђ) снимци, фотографије: навести врсту _____</p> <p>е) текст, навести врсту _____</p> <p>ж) мапа, навести врсту _____</p> <p><input checked="" type="radio"/> остало: описати <u>лабораторијска мерења и рачунарски експерименти</u></p> |

1.3 Формат података, употребљене скале, количина података

1.3.1 Употребљени софтвер и формат датотеке:

- Ⓐ Excel фајл, датотека .xlsx, .csv
- б) SPSS фајл, датотека _____
- Ⓒ PDF фајл, датотека .pdf
- д) Текст фајл, датотека _____
- Ⓔ JPG фајл, датотека .jpg
- Ⓕ Остало, датотека .R, .py, .cpp

1.3.2. Број записа (код квантитативних података)

- Ⓐ број варијабли велики број
- Ⓑ број мерења (испитаника, процена, снимака и сл.) велики број

1.3.3. Поновљена мерења

- а) да
- б) не

Уколико је одговор да, одговорити на следећа питања:

- Ⓐ временски размак између поновљених мера је променљив
- Ⓑ варијабле које се више пута мере односе се на време извршавања, коефицијент корелације, напон
- в) нове верзије фајлова који садрже поновљена мерења су именоване као _____

Напомене: _____

Да ли формати и софтвер омогућавају дељење и дугорочну валидност података?

- Ⓐ *Да*
- б) *Не*

Ако је одговор не, образложити _____

2. Прикупљање података

2.1 Методологија за прикупљање/генерисање података

2.1.1. У оквиру ког истраживачког нацрта су подаци прикупљени?

- а) експеримент, навести тип лабораторијска мерења и рачунарски експерименти
- б) корелационо истраживање, навести тип _____
- ц) анализа текста, навести тип анализа доступне литературе
- д) остало, навести шта _____

2.1.2 Навести врсте мерних инструмената или стандарде података специфичних за одређену научну дисциплину (ако постоје).

Fluke 8846A дигитални мултиметар

2.2 Квалитет података и стандарди

2.2.1. Третман недостајућих података

- а) Да ли матрица садржи недостајуће податке? Да **Не**

Ако је одговор да, одговорити на следећа питања:

- а) Колики је број недостајућих података? _____
- б) Да ли се кориснику матрице препоручује замена недостајућих података? Да Не
- в) Ако је одговор да, навести сугестије за третман замене недостајућих података

2.2.2. На који начин је контролисан квалитет података? Описати

Квалитет података је контролисан поређењем експерименталних и теоријских података.

2.2.3. На који начин је извршена контрола уноса података у матрицу?

Контрола уноса података је изведена на основу експертног знања.

3. Третман података и пратећа документација

3.1. Третман и чување података

3.1.1. Подаци ће бити депоновани у Репозиторијуму докторских дисертација на Универзитету у Новом Саду.

3.1.2. URL адреса <https://www.cris.uns.ac.rs/searchDissertations.jsf>

3.1.3. DOI _____

3.1.4. Да ли ће подаци бити у отвореном приступу?

- а) Да
- б) Да, али после ембарга који ће трајати до _____
- в) Не

Ако је одговор не, навести разлог _____

3.1.5. Подаци неће бити депоновани у репозиторијум, али ће бити чувани.

Образложење

3.2 Метаподаци и документација података

3.2.1. Који стандард за метаподатке ће бити примењен? Стандард који примењује Репозиторијум докторских дисертација Универзитета у Новом Саду

3.2.1. Навести метаподатке на основу којих су подаци депоновани у репозиторијум.

Ако је потребно, навести методе које се користе за преузимање података, аналитичке и процедуралне информације, њихово кодирање, детаљне описе варијабли, записа итд.

3.3 Стратегија и стандарди за чување података

3.3.1. До ког периода ће подаци бити чувани у репозиторијуму? _____

3.3.2. Да ли ће подаци бити депоновани под шифром? Да Не

3.3.3. Да ли ће шифра бити доступна одређеном кругу истраживача? Да Не

3.3.4. Да ли се подаци морају уклонити из отвореног приступа после извесног времена?

Да Не

Образложити

4. Безбедност података и заштита поверљивих информација

Овај одељак МОРА бити попуњен ако ваши подаци укључују личне податке који се односе на учеснике у истраживању. За друга истраживања треба такође размотрити заштиту и сигурност података.

4.1 Формални стандарди за сигурност информација/података

Истраживачи који спроводе испитивања с људима морају да се придржавају Закона о заштити података о личности (https://www.paragraf.rs/propisi/zakon_o_zastiti_podataka_o_licnosti.html) и одговарајућег институционалног кодекса о академском интегритету.

4.1.2. Да ли је истраживање одобрено од стране етичке комисије? Да Не

Ако је одговор Да, навести датум и назив етичке комисије која је одобрила истраживање

4.1.2. Да ли подаци укључују личне податке учесника у истраживању? Да Не

Ако је одговор да, наведите на који начин сте осигурали поверљивост и сигурност информација везаних за испитанике:

- а) Подаци нису у отвореном приступу
 - б) Подаци су анонимизирани
 - ц) Остало, навести шта
-
-

5. Доступност података

5.1. Подаци ће бити

а) јавно доступни

б) доступни само уском кругу истраживача у одређеној научној области

ц) затворени

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести под којим условима могу да их користе:

Ако су подаци доступни само уском кругу истраживача, навести на који начин могу приступити подацима:

5.4. Навести лиценцу под којом ће прикупљени подаци бити архивирани.

Ауторство-некомерцијално

6. Улоге и одговорност

6.1. Навести име и презиме и мејл адресу власника (аутора) података

Новаковић Ђорђе, djordjenovakovic@uns.ac.rs

6.2. Навести име и презиме и мејл адресу особе која одржава матрицу с подацима

Новаковић Ђорђе, djordjenovakovic@uns.ac.rs

6.3. Навести име и презиме и мејл адресу особе која омогућује приступ подацима другим истраживачима

Новаковић Ђорђе, djordjenovakovic@uns.ac.rs