УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Марко Д. Пешовић

КОМБИНАТОРИКА УОПШТЕНИХ ПЕРМУТОЕДАРА

докторска дисертација

Београд, 2021.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Marko D. Pešović

COMBINATORICS OF GENERALIZED PERMUTOHEDRA

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2021.

Ментор:

проф. др Владимир Грујић, вандредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Александар Липковски, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Зоран Петрић, научни саветник
Математички институт САНУ

доц. др Тања Стојадиновић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

Посвећено родитељима

Наслов дисертације: Комбинаторика уопштених пермутоедара

Сажетак: Разним комбинаторним објектима се на природан начин могу придружити одговарајуће комбинаторне Хопфове алгебре. Многе класичне енумеративне инваријанте комбинаторних објеката се добијају као резултат универзалног морфизма из одговарајућих комбинаторних Хопфових алгебри у комбинаторну Хопфову алгебру квазисиметричних функција.

Са друге стране, комбинаторним објектима можемо доделити и неки геометријски објекат, хиперравански аранжман или конвексни политоп. Тако, на пример, простим графовима одговарају графички зонотопи, а матроидима политопи база матроида. Наведене класе политопа припадају класи политопа знаних као уопштени пермутоедри. Одређеном уопштеном пермутоедру се може доделити тежински квазисиметрични енумератор целобројних тачака који за различите класе уопштених пермутоедара представља уопштења класичних енумеративних инваријанти као што су Стенлијева хроматска симетрична функција графа и Биљера–Јиа–Рајнерова квазисиметрична функција матроида.

Тежински квазисиметрични енумератор целобројних тачака придружен уопштеном пермутоедру је квазисиметрична функција. У случају одређених класа уопштених пермутоедара овај енумератор се поклапа са резултатом универзалног морфизма из одговарајуће комбинаторне Хопфове алгебре.

Кључне речи: уопштени пермутоедри, квазисиметричне функције, политопи, Хопфова алгебра, матроиди, хиперграфови, графови

Научна област: алгебра

Ужа научна област: алгебарска комбинаторика

УДК број:

Dissertation title: Combinatorics of generalized permutohedra

Abstract: The combinatorial objects can be joined in a natural way with the corresponding combinatorial Hopf algebras. Many classical enumerative invariants of combinatorial objects are obtained as a result of universal morphism from the corresponding combinatorial Hopf algebras to the combinatorial Hopf algebra of quasisymmetric functions.

On the other hand, to combinatorial objects we can assign some geometric objects such as hyperplane arrangement or convex polytope. For example, simple graph corresponds to graphical zonotope and matroid corresponds to matroid base polytope. These classes of polytopes belong to the class of polytopes known as generalized permutohedra. For a generalized permutohedron there is a weighted quasisymmetric enumerator which for different classes of generalized permutohedra represents generalizations of classical enumerative invariants such as Stanley's chromatic symmetric function for graph and Billera−Jia−Rainer quasisymmetric function for matroid.

A weighted quasisymmetric enumerator associated with a generalized permutohedron is a quasisymmetric function. For certain classes of generalized permutohedra this enumerator coincides with the result of the universal morphism from corresponding combinatorial Hopf algebra.

Keywords: generalized permutohedra, quasisymmetric functions, polytopes, Hopf algebra, matroids, hypergraphs, graphs

Research area: algebra

Research sub-area: algebraic combinatoric

UDC number:

Захвалница

Користим ову прилику да се, пре свега, захвалим ментору, професору Владимиру Грујићу, на великодушној помоћи, издвојеном времену и преданости током трајања докторских студија. Посебно задовољство ми је да истакнем и захвалност др Тањи Стојадиновић на драгоценим саветима и истрајној подршци. Изразио бих захвалност и осталим члановима комисије за оцену и одбрану дисертације, професорима др Зорану Петрићу и др Александру Липковском који су дали корисне савете и тиме допринели квалитету написане дисертације.

На крају, највећу захвалност дугујем породици, девојци и пријатељима који су све ово време имали разумевање за мене и мој развојни пут.

Марко Пешовић

Садржај:

Увод

...сви који имају иоле разборитости увек
на неки начин призивају богове кад год
започињу било малу било велику ствар.
Платон, *Тимај*

Предмет проучавања ове дисертације су квазисиметричне инваријанте хиперграфова, градивних скупова, простих графова, матроида и посета. Поменутим комбинаторним објектима се на природан начин придружују комбинаторне Хопфове алгебре, појам који је заснован и проучаван у раду Агиара, Бержерона и Сотила из 2006. године, видети [2]. Линеарну базу тако одређених комбинаторних Хопфових алгебри чине класе изоморфних комбинаторних објеката, док множење и комножење произилазе из начина композиције и декомпозиције наведених објеката. Поред поменутих, један од најзначајнијих примера је и комбинаторна Хопфова алгебра квазисиметричних функција $(\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$, које се јављају као генераторне функције разних енумеративних инваријанти комбинаторних објеката, међу којима се издваја Стенлијева хроматска симетрична функција графа. Алгебарска дефиниција квазисиметричног енумератора целобројних тачака Ψ_q означава проширење основног поља коефицијената на поље рационалних функција по параметру q универзалног морфизма Ψ из одговарајуће комбинаторне Хопфове алгебре у $(\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$.

Квазисиметрични енумератор целобројних тачака је уведен у раду [5] Биљере, Јиа и Рајнера из 2009. године и исти је примењен у случају матроида, док је случају нестоедара квазисиметрични енумератор уведен и проучаван у раду [16] Грујића из 2017. године, Геометријска интерпретација поменутих енумератора зависи од темена одговарајућег уопштеног пермутоедра, политопа који се добија померањем хиперстрана стандардног пермутоедра тако да је нормална лепеза добијеног политопа профињена нормалном лепезом стандардног пермутоедра. Наведена класа политопа је највише проучавана од стране Постникова, Рајнера и Вилијамса у [30] и [31].

Геометријска интерпретација квазисиметричног енумератора Ψ_q одговара енумератору позитивних целобројних тачка F_q које зависе од целе мреже страна нормалне лепезе одговарајућег уопштеног пермутоедра. Сходно томе, F_q представља уопштење наведених енумератора. Тако се, на пример, уопштење Стенлијеве хроматске симетричне функције графа може пронаћи у раду [15] Грујића из 2017. године.

У првом поглављу дисертације је дат преглед основне теорије Хопфових алгебри. Градуисаној Хопфовој алгебри H придружујемо мултипликативни морфизам, карактер, $\zeta : H \to \mathbb{K}$ и тако одређен уређени пар (H, ζ) зовемо комбинаторна Хопфова алгебра. Детаљно описујемо Хопфову алгебру квазисиметричних функција $(\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$ и потом показујемо постојање јединственог морфизма Ψ из произвољне комбинаторне Хопфове алгебре (H, ζ) у $(\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$. На крају се, као стандардни пример, наводи Ротина Хопфова алгебра коначних градуисаних посета која представља мотивацију теорије комбинаторних Хопфових алгебри.

У другом поглављу је изложена теорија конвексних политопа. Поред основних појмова и особина, дефинисане су и лепеза страна и нормална лепеза политопа које заузимају значајно место у овој дисертацији. Други део овог поглавља је посвећен комбинаторним особинама политопа, пре свега f и h вектору. Као пример истичемо Ојлерову формулу:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_k \,=\, 1,$$

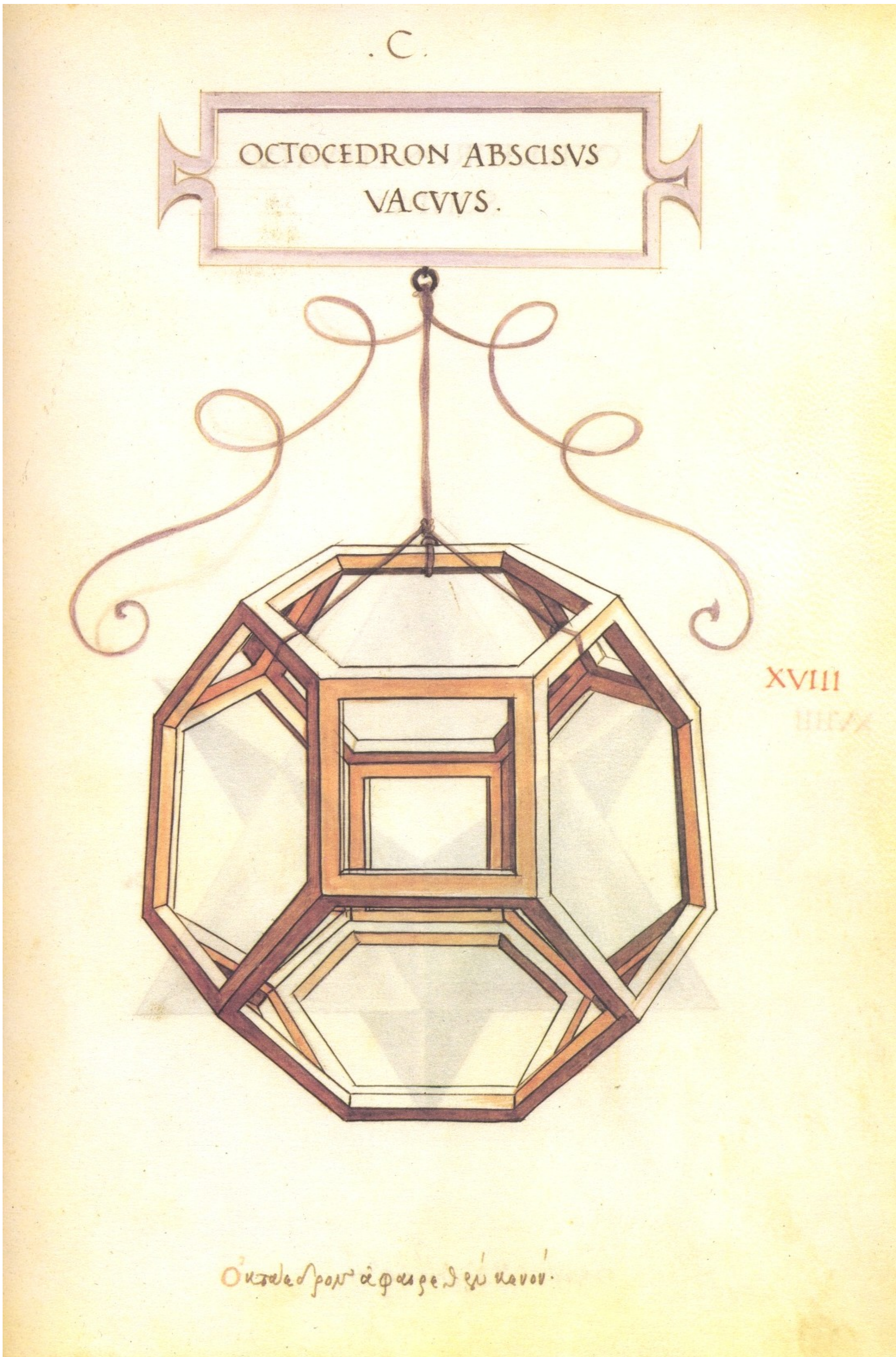
где је f_k, за $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, број $k-$страна $n-$димензионалног политопа.

Последње поглавље представља централни део ове дисертације и засновано је на радовима [17], [28] и [29]. Дефинише се појам уопштеног пермутоедра, а потом се наводе најзначајније особине ове класе политопа који имају богату комбинаторну структуру. Даље, уопштеном пермутоедру Q се додељује тежински квазисиметрични енумератор позитивних целобројних тачака $F_q(Q)$ које се налазе у нормалној лепези истог и чија вредност главне специјализације одговара $f-$полиному уопштеног пермутоедра Q, то јест

$$f(Q, q) \,=\, (-1)^n \,\mathbf{ps}^1(F_{-q}(Q))(-1).$$

Наведена једнакост представља уопштење Стенлијеве формуле за број ацикличних оријентација графа, видети [38]. Даље се излаже основна теорија хиперграфова, градивних скупова и матроида и детаљно описују одговарајући уопштени пермутоедри: хиперграфички политопи, нестоедри и политопи база матроида. Наведеним објектима се додељују одговарајуће комбинаторне Хопфове алгебре и показује да квазисиметрични енумератор F_q, за сваку од њих понаособ, одговара универзалном морфизму Хопфове алгебре у $\mathcal{Q}Sym$. Случај графичких градивних скупова производи нову инваријанту графа која има интерпретацију квазисиметричног енумератора уређених бојења простог графа, и која је уведена и проучавана у [16]. На крају, наводе се и примери који показују до које мере квазисиметрични енумератори разликују неизоморфне комбинаторне објекте.

Коначном посету додељујемо полиедарни конус чија је нормална лепеза грубља од неке подлепезе стандардног пермутоедра. Овакве полиедре ћемо звати проширеним уопштеним пермутоедрима. Квазисиметрични енумератор позитивних целобројних тачака које се налазе у нормалној лепези наведеног полиедра је уведен и проучаван у раду [29], и у овом случају, одговара универзалном морфизму Хопфове алгебре посета у Хопфову алгебру квазисиметричних функција. Добијена је интерпретација, као и уопштење Геселовог енумератора $\mathsf{P}-$партиција.



Слика 1: *Пресечени октаедар, илустрација коју је Леонардо да Винчи скицирао за књигу De divina proportione италијанског математичара Пачолија* (L. Pacioli)

Глава 1

Комбинаторне Хопфове алгебре

1.1 Хопфове алгебре

Хопфове алгебре се први пут појављују у раду немачког математичара Хопфа (H. Hopf) 1941. године. Иако је израз *Хопфова алгебра*, *algèbre de Hopf*, установљен од стране швајцарског математичара Борела (A. Borel) тринаест година касније, прву дефиницију ове алгебарске структуре, под називом *хипералгебра*, уводи француски математичар Картие (P. Cartier) 1956. године. Основне дефиниције и особине Хопфових алгебри изложићемо ослањајући се на монографије [8] и [14].

1.1.1 Алгебра

Дефиниција 1.1.1 $\mathbb{K}-$*алгебра* је уређена тројка (A, m, u), где је A векторски простор над пољем $\mathbb{K}$ карактеристике нула, а $m : A \otimes A \to A$ и $u : \mathbb{K} \to A$ два $\mathbb{K}$–линеарна пресликавања таква да следећи дијаграми комутирају[1]

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{Id} \otimes m"] \arrow[d, "m \otimes \mathrm{Id}"'] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\
A \otimes A \arrow[r, "m"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
\mathbb{K} \otimes A \arrow[ur, "u \otimes \mathrm{Id}"] \arrow[dr] & & A \otimes \mathbb{K} \arrow[ul, "\mathrm{Id} \otimes u"'] \arrow[dl] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

Пресликавање m називамо *множењем*, а пресликавање u *јединицом* у алгебри A. Напоменимо да комутативност првог дијаграма представља *асоцијативност* алгебре A, а да комутативност другог дијаграма даје егзистенцију јединице, другим речима

$$u(1_{\mathbb{K}}) = 1_A.$$

За алгебру A кажемо да је *комутативна* ако и само ако комутира дијаграм

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "m"] & & A \otimes A \arrow[dl, "m"] \\
& A &
\end{tikzcd}
$$

где је $T : A \otimes A \to A \otimes A$ *транспозиција*, то јест $T(a_1, a_2) := (a_2, a_1)$.

[1]Пресликавања $A \otimes \mathbb{K} \to A$ и $\mathbb{K} \otimes A \to A$ су канонска, а Id је пресликавање идентитета.

Дефиниција 1.1.2 Нека су (A, m_A, u_A) и (B, m_B, u_B) алгебре над пољем $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}$–линеарно пресликавање $f : A \to B$ је *морфизам алгебри* уколико комутирају следећи дијаграми

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "m_A"] & B \otimes B \arrow[d, "m_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & \mathbb{K} \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] & \end{tikzcd}$$

1.1.2 Коалгебра

Дефиниција 1.1.3 $\mathbb{K}$–*коалгебра* је уређена тројка (C, Δ, ε), где је C векторски простор над пољем $\mathbb{K}$, а $\Delta : C \to C \otimes C$ и $\varepsilon : C \to \mathbb{K}$ два $\mathbb{K}$–линеарна пресликавања таква да следећи дијаграми комутирају[2]

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\Delta \otimes \mathrm{Id}"'] \\ C \otimes C \arrow[u, "\mathrm{Id} \otimes \Delta"] & C \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[u, "\Delta"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dl, "\varepsilon \otimes \mathrm{Id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Id} \otimes \varepsilon"] & \\ \mathbb{K} \otimes C & & C \otimes \mathbb{K} \\ & C \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu, "\Delta"] & \end{tikzcd}$$

Пресликавање Δ називамо *комножењем,* а пресликавање ε *којединицом.* При том, комутативност првог дијаграма представља *коасоцијативност* коалгебре.

Пошто је $\Delta(c) \in C \otimes C$ облика $\sum_{i=1}^{n} c_{i,1} \otimes c_{i,2}$, убудуће ћемо исти израз краће означавати са

$$\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2.$$

У вези са тим, претходни запис зовемо *сигма нотација.* Тако се, на пример, комутативност другог дијаграма, у сигма нотацији, може записати

$$\sum \varepsilon(c_1)c_2 = c = \sum c_1 \varepsilon(c_2).$$

За коалгебру (C, Δ, ε) кажемо да је *кокомутативна* ако и само ако комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd} C \otimes C \arrow[rr, "T"] & & C \otimes C \\ & C \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] & \end{tikzcd}$$

где је $T : C \otimes C \to C \otimes C$ транспозиција. Користећи сигма нотацију, кокомутативност коалгебре записујемо на следећи начин

$$\sum c_1 \otimes c_2 = \sum c_2 \otimes c_1.$$

Дефиниција 1.1.4 Нека су $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ и $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ две коалгебре над пољем $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}$–линеарно пресликавање $g : C \to D$ је *морфизам коалгебри* уколико следећи дијаграми комутирају

[2] Пресликавање $C \to C \otimes \mathbb{K}$ је дефинисано са $c \mapsto c \otimes 1$, а $C \to \mathbb{K} \otimes C$ са $c \mapsto 1 \otimes c$.

$$
\begin{tikzcd}
C \otimes C \arrow[r, "g\otimes g"] & D \otimes D \\
C \arrow[u, "\Delta_C"] \arrow[r, "g"] & D \arrow[u, "\Delta_D"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "g"] & & D \\
& \mathbb{K} \arrow[ul, "\varepsilon_C"] \arrow[ur, "\varepsilon_D"'] &
\end{tikzcd}
$$

Краће записано

$$\Delta_D(g(c)) = \sum g(c)_1 \otimes g(c)_2 = \sum g(c_1) \otimes g(c_2).$$

1.1.3 Биалгебра

Нека је (A, m, u) једна алгебра над пољем $\mathbb{K}$. Тада и $A \otimes A$ има структуру алгебре, где је множење дефинисано као на тензорском производу две алгебре A_1 и A_2 композицијом

$$A_1 \otimes A_2 \otimes A_1 \otimes A_2 \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes T\otimes \mathrm{Id}} A_1 \otimes A_1 \otimes A_2 \otimes A_2 \xrightarrow{m_{A_1}\otimes m_{A_2}} A_1 \otimes A_2.$$

Надаље, јединица алгебре $A \otimes A$ је дефинисана са

$$\mathbb{K} \to \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \xrightarrow{u_{A_1}\otimes u_{A_2}} A_1 \otimes A_2.$$

Слично, уколико је (C, Δ, ε) једна коалагебра над пољем $\mathbb{K}$, тада и $C\otimes C$ има структуру коалгебре. Комножење је, у том случају, дефинисано као на тензорском производу две коалгебре C_1 и C_2 следећом композицијом

$$C_1 \otimes C_2 \xrightarrow{\Delta_{C_1}\otimes \Delta_{C_2}} C_1 \otimes C_1 \otimes C_2 \otimes C_2 \xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes T\otimes \mathrm{Id}} C_1 \otimes C_2 \otimes C_1 \otimes C_2,$$

док је којединица дефинисана композицијом

$$C_1 \otimes C_2 \xrightarrow{\varepsilon_{C_1}\otimes \varepsilon_{C_2}} \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \to \mathbb{K}.$$

За нас су овде од интереса посебно векторски простори, над пољем $\mathbb{K}$, који имају и структуру алгебре и структуру колагебре. Тада важи следећи

Став 1.1.1 ([14], Proposition 1.12.) *Посматрајмо $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$, где је (H, m, u) алгебра, а (H, Δ, ε) једна коалгебра над пољем $\mathbb{K}$. Тада су еквивалентна следећа тврђења:*

1. *Пресликавања m и u су морфизми коалгебре (H, Δ, ε).*

2. *Пресликавања Δ и ε су морфизми алгебре (H, m, u), то јест*

$$\Delta(hg) = \sum h_1 g_1 \otimes h_2 g_2 \qquad и \qquad \Delta(1) = 1 \otimes 1,$$

$$\varepsilon(hg) = \varepsilon(h)\varepsilon(g) \qquad и \qquad \varepsilon(1) = 1.$$

Дефиниција 1.1.5 *Биалгебра* $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ је $\mathbb{K}-$векторски простор H такав да је (H, m, u) алгебра, а (H, Δ, ε) колгебра над пољем $\mathbb{K}$, уз то да важи бар једно, а тиме и оба тврђења претходног става.

Дефиниција 1.1.6 Нека су H_1 и H_2 биалгебре над пољем $\mathbb{K}$. $\mathbb{K}-$линеарно пресликавање $f : H_1 \to H_2$ је *морфизам биалгебри* ако је морфизам алгебри и морфизам коалгебри одређених биалгебрама H_1 и H_2.

1.1.4 Хопфова алгебра

Ако је $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ једна биалгебра над пољем $\mathbb{K}$ са (H^A, m, u), односно $(H^C, \Delta, \varepsilon)$, означимо одговарајућу алгебру, односно коалгебру, над пољем $\mathbb{K}$. На линеарном простору $Hom(H^C, H^A)$ дефинишимо *конволуцијску алгебру* са *конволуцијским производом*

$$(f * g)(h) := \sum f(h_1)g(h_2),$$

где је $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$, за $h \in H$ и $f, g \in Hom(H^C, H^A)$. Посебно, операцију $*$ можемо посматрати и као композицију

$$H^C \xrightarrow{\Delta} H^C \otimes H^C \xrightarrow{f \otimes g} H^A \otimes H^A \xrightarrow{m} H^A.$$

Пре свега, приметимо да $u\varepsilon \in Hom(H^C, H^A)$. Будући да важи

$$(f * (u\varepsilon))(h) = \sum f(h_1)(u\varepsilon)(h_2) = \sum f(h_1)\varepsilon(h_2)1_H = f(h),$$

$$((u\varepsilon) * f)(h) = \sum (u\varepsilon)(h_1)f(h_2) = \sum \varepsilon(h_1)1_H f(h_2) = f(h),$$

закључујемо да је

$$f * (u\varepsilon) = f = (u\varepsilon) * f,$$

за свако $f \in Hom(H^C, H^A)$. Сходно томе, $u\varepsilon$ је јединица у простору $Hom(H^C, H^A)$.

Дефиниција 1.1.7 За биалгебру H кажемо да је *Хопфова алгебра* ако постоји *антипод* $S : H \to H$ који је инверз за пресликавање идентитета Id у односу на конволуцијски производ у алгебри $Hom(H^C, H^A)$. Другим речима, уколико комутира дијаграм

$$\begin{tikzcd}
 & H \otimes H \arrow[rr, "S \otimes \mathrm{Id}"] & & H \otimes H \arrow[dr, "m"] & \\
H \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbb{K} \arrow[rr, "u"] & & H \\
 & H \otimes H \arrow[rr, "\mathrm{Id} \otimes S"] & & H \otimes H \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Користећи сигма нотацију, претходну дефиницију записујемо у облику

$$\sum S(h_1)h_2 = (u\varepsilon)(h) = \varepsilon(h)1_H = \sum h_1 S(h_2).$$

Дефиниција 1.1.8 Нека су H_1 и H_2 две Хопфове алгебре. За пресликавање $f : H_1 \to H_2$ кажемо да је *морфизам Хопфових алгебри* уколико је морфизам биалгебри H_1 и H_2.

Став 1.1.2 ([8], *Proposition* 4.2.5.) *Нека је S_{H_1} антипод у H_1 и S_{H_2} антипод у H_2. Ако је $f : H_1 \to H_2$ морфизам биалгебри, тада важи*

$$S_{H_2} f = f S_{H_1}.$$

Доказ. Посматрајмо алгебру $Hom(H_1^C, H_2^A)$, где је конволуцијски производ за $f,\ g \in Hom(H_1^C, H_2^A)$ дефинисан са

$$(f * g)(h) := \sum f(h_1)g(h_2),$$

за $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$.

Јасно је да $S_{H_2}f, fS_{H_1} \in Hom(H_1^C, H_2^A)$, као и да важе следеће две једнакости

$$\begin{aligned}((S_{H_2}f) * f)(h) &= \sum S_{H_2}f(h_1)f(h_2) = \sum S_{H_2}(f(h)_1)f(h)_2 \\ &= \varepsilon_{H_2}(f(h))1_{H_2} = \varepsilon_{H_1}(h)1_{H_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f * (fS_{H_1}))(h) &= \sum f(h_1)f(S_{H_1}(h_2)) = f\left(\sum h_1 S_{H_1}(h_2)\right) \\ &= f(\varepsilon_{H_1}(h)1_{H_1}) = \varepsilon_{H_1}(h)1_{H_2}.\end{aligned}$$

То посебно значи да је $S_{H_2}f$ леви, а fS_{H_1} десни инверз за пресликавање f. Пошто је f конволуцијски инвертибилан у простору $Hom(H_1^C, H_2^A)$, леви и десни инверз пресликавања f су међусобно једнаки. *Q.E.D.*

Последица 1.1.1 *Претпоставимо да је H Хопфова алгебра са антиподом S. За сваку алгебру A и морфизам алгебри $f : H \to A$, пресликавање $f^{*-1} := fS$ је конволуцијски инверз за морфизам f у простору $Hom(H^C, A)$.*

Став 1.1.3 ([8], Proposition 4.2.6) *Нека је $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ Хопфова алгебра. Тада, за све $h, g \in H$, важе следећа тврђења:*

1. $S(hg) = S(g)S(h)$.
2. $S(1_H) = 1_H$.
3. $\Delta(S(h)) = \sum S(h_2) \otimes S(h_1)$, *где је* $\Delta(h) = \sum h_1 \otimes h_2$.
4. $\varepsilon(S(h)) = \varepsilon(h)$. .

Последица 1.1.2 ([8], Corollary 4.2.8) *Уколико је Хопфова алгебра H комутативна или кокомутативна тада је $S^2 = \mathrm{Id}$.*

1.1.5 Градуисана Хопфова алгебра

Дефиниција 1.1.9 Хопфова алгебра $(H, m, u, \Delta, \varepsilon, S)$ је *градуисана* уколико задовољава следеће услове:

1. H је директна сума $\mathbb{K}-$потпростора H_n, то јест
$$H = \bigoplus_{n \geq 0} H_n;$$
2. H је градуисана као коалгебра, то јест ако за свако $n > 0$ важи
$$\Delta(H_n) \subseteq \bigoplus_{i+j=n} H_i \otimes H_j \quad \text{и} \quad \varepsilon(H_n) = 0;$$
3. за свако $m, n \geq 0$ важи
$$m(H_n \otimes H_m) \subseteq H_{n+m}, \quad u(\mathbb{K}) \subseteq H_0 \quad \text{и} \quad S(H_n) \subseteq H_n.$$

Уколико је још и $H_0 \cong \mathbb{K}$, за H кажемо да је *повезана и градуисана Хопфова алгебра.*

На биалгебри H дефинишимо низ пресликавања $\Delta_n : H \to \underbrace{H \otimes \cdots \otimes H}_{n+1}$ са

$$\Delta_0 := \mathrm{Id}, \quad \Delta_1 := \Delta, \quad \ldots \quad \Delta_n := (\Delta_{n-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta.$$

На сличан начин, дефинишимо и низ пресликавања $m_n : \underbrace{H \otimes \cdots \otimes H}_{n+1} \to H$ са

$$m_0 := \mathrm{Id}, \quad m_1 := m, \quad \ldots \quad m_n := m \circ (m_{n-1} \otimes \mathrm{Id}).$$

Уз то, нека је и

$$m_{-1} := u \quad \text{и} \quad \Delta_{-1} := \varepsilon.$$

Став 1.1.4 ([14], Proposition 1.36.) *Повезано−градуисана биалгебра је Хопфова алгебра, то јест повезано−градуисана биалгебра има јединствени антипод.*

Доказ. Нека је $H = \bigoplus_{n \geq 0} H_n$. За сваку хомогену компоненту H_n, за $n \geq 0$, дефинишимо леви конволуцијски инверз S_L који одговара пресликавању Id. На основу Става 1.1.3, за $n = 0$ можемо дефинисати $S_L(1) := 1$. Претпоставимо да смо дефинисали антипод S_L за све елементе степена строго мањих од n. Пошто за сваки елемент h степена $n > 0$ важи

$$\Delta(h) = h \otimes 1 + \sum h_1 \otimes h_2,$$

где је степен од h_1 строго мањи од n, користећи једнакост $S_L * \mathrm{Id} = u\varepsilon$ добијамо да је

$$S_L(h) \cdot 1 + \sum S_L(h_1) h_2 = u\varepsilon(h) = 0.$$

Сходно томе, антипод S_L на хомогеном елемнту h степена n дефинишимо са

$$S_L(h) := \sum S_L(h_1) h_2.$$

На сличан начин, дефинишемо и десни конволуцијски инверз S_D. Према томе, важи да је $S_L = S_D$ јединствени конволуцијски инверз за пресликавање Id. *Q.E.D.*

Став 1.1.5 ([40], Lemma 14, [14], Proposition 1.44.) *Претпоставимо да је $(H, m, u, \Delta, \varepsilon)$ повезано − градусиана Хопфова алгебра и нека је $\pi := \mathrm{Id} - u\varepsilon \in Hom(H^C, H^A)$. Важи следећа једнакост*

$$S = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(m_{n-1} \circ \left(\underbrace{\pi \otimes \pi \otimes \cdots \otimes \pi}_{n} \right) \circ \Delta_{n-1} \right). \tag{1.1}$$

Једнакост (1.1) је позната и као *формула Такеучија.*

1.2 Квазисиметричне функције

Квазисиметричне функције се први пут појављују 1972. године у раду „*Ordered structures and partitions*" америчког математичара Стенлија (R. Stanley), видети [37], и од тада заузимају значајно место у комбинаторици с обзиром на то што се јављају као генераторне функције разних комбинаторних објеката. Амерички математичар Гесел (I. Gessel) 1984. године уводи *Хопфову алгебру квазисиметричних функција,* терминални објекат у категорији комбинаторних Хопфових алгебри. Основна литература у излагању теорије квазисиметричних функција су [13], [14] и [36].

1.2.1 Композиције и партиције

Композиције и партиције скупа

Дефиниција 1.2.1 *Партиција скупа* X је колекција $\mathcal{P}$ непразних подскупова скупа X, које називамо *блоковима,* таквих да се сваки елемент скупа X налази у тачно једном блоку. Скуп свих партиција скупа X означимо са Par_X.

За нас ће од посебног интереса бити скупови облика $[\,n\,] := \{1, 2, \ldots, n\}$, за $n \in \mathbb{N}_0$. Напоменимо да је $[\,0\,] := \emptyset$ скуп који има само једну партицију $\mathcal{P}_1 = \emptyset$. Слично, и скуп $[\,1\,] = \{1\}$ има само једну партицију $\mathcal{P}_1 = \{\{1\}\}$.

Стирлингови бројеви друге врсте $S(n, k)$ представљају број партиција скупа $[\,n\,]$ разврстаних у k блокова. При том, важи следећи

Став 1.2.1 *Формула рекурзије за Стирлингове бројеве друге врсте гласи:*

1. $S(0, 0) = 1$.
2. $S(n, 0) = 0$ *и* $S(0, k) = 0$, *за* $n \geq 1$ *и* $k \geq 1$.
3. $S(n, k) = k \cdot S(n-1, k) + S(n-1, k-1)$, *за* $n \geq 1$ *и* $k \geq 1$.

Табела 1. Стирлингови и Белови бројеви.

$\left\{{n \atop k}\right\}$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	B_n
$n=0$	1	0	0	0	0	0	1
$n=1$	0	1	0	0	0	0	1
$n=2$	0	1	1	0	0	0	2
$n=3$	0	1	3	1	0	0	5
$n=4$	0	1	7	6	1	0	15
$n=5$	0	1	15	25	10	1	52

Југословенски математичар Јован Карамата је за Стирлингове бројеве $S(n, k)$ користио ознаку $\left\{{n \atop k}\right\}$. У складу са тим, може се показати да важе следећи идентитети

$$\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = 1 = \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} = 2^{n-1} - 1 \quad \text{и} \quad \begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = \binom{n}{2}.$$

Белов број B_n представља број свих партиција скупа $[\,n\,]$, то јест

$$B_n := \left|Par_{[n]}\right| = \begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} + \cdots + \begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix}.$$

Може се показати да важи следећа једнакост

$$B_n \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} B_i.$$

Нека су $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ две партиције скупа $[\,n\,]$. Кажемо да је $\mathcal{P}_1$ *финија* од партиције $\mathcal{P}_2$, у запису $\mathcal{P}_1 \preceq \mathcal{P}_2$, уколико су блокови партиције $\mathcal{P}_1$ подскупови блокова партиције $\mathcal{P}_2$. Тада је $\preceq$ једна релација поретка на скупу свих партиција скупа $[\,n\,]$. Напоменимо да је минимални елемент у тако добијеном посету $\mathcal{P}_{min} = \{\{1\},\{2\},\dots,\{n\}\}$, а максимални елемент партиција $\mathcal{P}_{max} = \{1,2,\dots,n\}$.

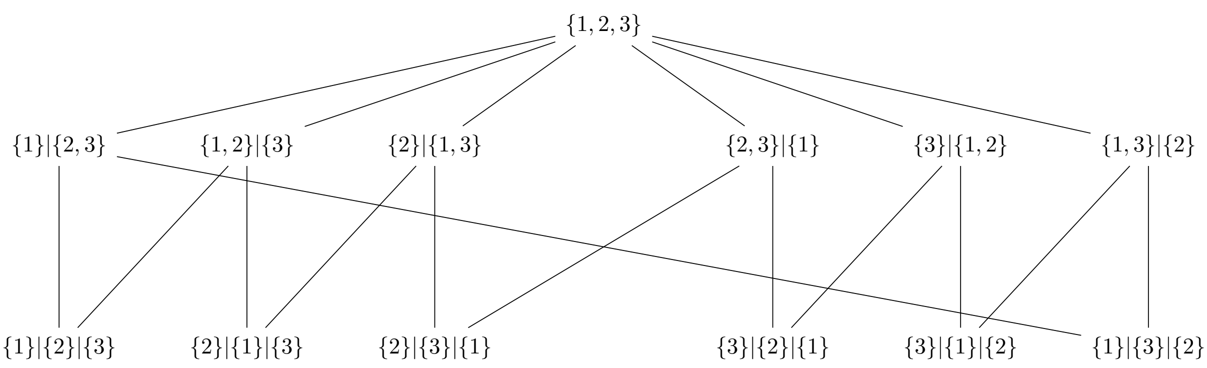
Дефиниција 1.2.2 Уколико су блокови партиције скупа X тотално уређени, за исту кажемо да је *композиција скупа* или *уређена партиција.* При том, за тотално уређење $C_1 < C_2 < \cdots < C_k$ на скупу блокова скупа X користимо ознаку $\mathcal{C} := C_1|C_2|\cdots|C_k$.

Пример 1.2.1 Скупу $[\,2\,]$ можемо придружити партиције $\mathcal{P}_1 = \{\{1,2\}\}$ и $\mathcal{P}_2 = \{\{1\},\{2\}\}$, док су одговарајуће композиције $\mathcal{C}_1 = \{1,2\}$, $\mathcal{C}_2 = \{1\}|\{2\}$ и $\mathcal{C}_3 = \{2\}|\{1\}$. $\square$

Скуп свих композиција скупа $[\,n\,]$ означимо са $Comp_{[\,n\,]}$. Како се k блокова партиције скупа $[\,n\,]$ може на $k!$ начина тотално уредити, следи да укупан број композиција скупа $[\,n\,]$ разврстаних у k блокова одговара броју $\left\{ {n \atop k} \right\} \cdot k!$. Сходно томе, број свих композиција скупа $[\,n\,]$ износи

$$\left|Comp_{[\,n\,]}\right| \;=\; \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \cdot k!.$$

Нека су $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ две композиције на скупу $[\,n\,]$. Кажемо да је композиција $\mathcal{C}_1$ *финија* од композиције $\mathcal{C}_2$, у ознаци $\mathcal{C}_1 \preceq \mathcal{C}_2$, ако и само су блокови композиције $\mathcal{C}_2$ уније суседних блокова композиције $\mathcal{C}_1$. Тако дефинисана релација $\preceq$ је једна релација поретка на скупу $Comp_{[\,n\,]}$.



Слика 1.1: *Хасеов дијаграм посета* $(Comp_{[\,3\,]}, \preceq)$

Композицији $\mathcal{C} = C_1|C_2|\cdots|C_k \in Comp_{[\,n\,]}$ можемо једнозначно придружити *заставу* $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ *подскупова* скупа $[\,n\,]$, која је одређена са

$$\mathcal{F}_{\mathcal{C}} \;:\; \emptyset = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k = [\,n\,], \quad \text{где је} \quad F_i := \bigcup_{j-1}^{i} C_i.$$

Кажемо да је застава $\mathcal{F}_1$ *финија* од заставе $\mathcal{F}_2$, у ознаци $\mathcal{F}_1 \preceq \mathcal{F}_2$, ако је композиција $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_1}$ финија од композиције $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_2}$. Тада је $\preceq$ једна релација поретка на скупу свих застава подскупова скупа $[n]$.

Композиције и партиције природног броја

Дефиниција 1.2.3 *Композиција*[3] $\alpha \models n$ *природног броја* n *дужине* l је уређена $l-$торка природних бројева $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ за коју важи следећа једнакост

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_l = n.$$

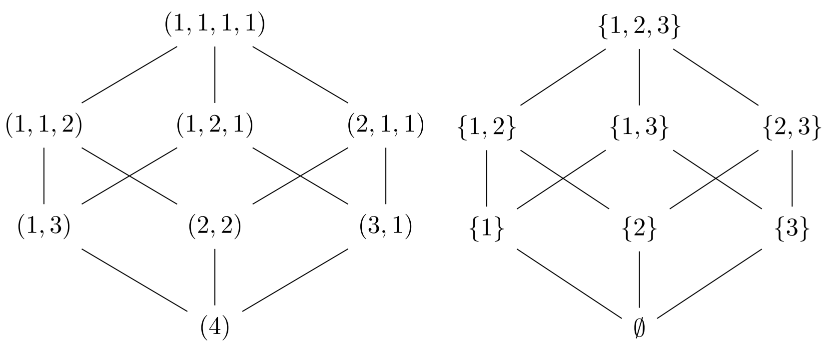
Скуп свих композиција природног броја n означимо са $Comp_n$, а са $Comp$ обележимо унију $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} Comp_n$. Произвољној композицији природног броја n $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) \models n$ можемо придружити *скуп парцијалних сума*

$$D(\alpha) := \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{l-1}\}.$$

Ово придруживање представља бијекцију између композиција природног броја n и подскупова скупа $[n-1]$, па закључујемо да је $|Comp_n| = 2^{n-1}$. Напоменимо још да је број композиција броја n дужине l једнак $\binom{n-1}{l-1}$.

За композицију $\alpha_1 \in Comp_n$ кажемо да је *финија* од $\alpha_2 \in Comp_n$, илити α_2 је *грубља* од α_1, ако и само ако је $D(\alpha_2) \subseteq D(\alpha_1)$. У том случају, користимо ознаку $\alpha_1 \preceq \alpha_2$. Претходна релација је једна релација поретка на скупу $Comp_n$.

Тако је, на пример, Хасеов дијаграм посета на скупу $Comp_4$ приказан са леве стране, док су на десном дијаграму приказани одговарајући скупови парцијалних сума.



Слика 1.2: *Хасеов дијаграм посета* $(Comp_4, \preceq)$ *и одговарајућих парцијалних сума*

Обрнута композиција $\mathrm{rev}(\alpha)$ композиције α је одређена са

$$\mathrm{rev}(\alpha) := (\alpha_l, \ldots, \alpha_2, \alpha_1),$$

док је *надовезивање* и *скоро−надовезивање композиција* дефинисано на следећи начин:

$$\alpha \cdot \beta := (\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s) \quad \text{и} \quad \alpha \odot \beta := (\alpha_1, \ldots, \alpha_{r-1}, \alpha_r + \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s).$$

Уколико за композицију $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) \models n$ важи још и $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_l > 0$, исту називамо *партицијом природног броја* n и означавамо са $\alpha \vdash n$. Скуп свих партиција природног броја n означимо са Par_n, а са Par обележимо унију $\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} Par_n$.

Пример 1.2.2 Партиције природног броја 4 су (4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1) и (1, 1, 1, 1), док су композиције истог броја (4), (3, 1), (2, 2), (1, 3), (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2) и (1, 1, 1, 1). □

[3] Кажемо и да је α композиција природног броја $|\alpha| := n$.

1.2.2 Мономијалне квазисиметричне функције

Претпоставимо да је бесконачни скуп променљивих $\mathbf{x} = (x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots)$ тотално уређен са $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ и нека је $\alpha = (\alpha_1,\, \alpha_2,\, \alpha_3\, \ldots) \in \mathbb{N}_0^\infty$ уређени низ природних бројева са коначним бројем ненула елемената. Дефинишимо *моном* $\mathbf{x}^\alpha$, степена $\deg(\mathbf{x}^\alpha) := \sum_i \alpha_i$, на следећи начин

$$\mathbf{x}^\alpha \ := \prod_i x_i^{\alpha_i}.$$

Нека је $R(\mathbf{x})$ *алгебра формалних степених редова* $f(\mathbf{x}) = \sum_\alpha c_\alpha \mathbf{x}^\alpha$, где су коефицијенти c_α из поља $\mathbb{K}$ *ограничених степена.* Другим речима, постоји неко ограничење $d(f)$ такво да је $c_\alpha = 0$ ако је $\deg(\mathbf{x}^\alpha) > d(f)$.

Дефиниција 1.2.4 *Алгебра квазисиметричних функција* $\mathcal{Q}Sym$ на скупу $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ је $\mathbb{K}-$подалгебра алгебре $R(\mathbf{x})$ која садржи оне елементе који имају исте коефицијенте уз мономе $x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_l}^{\alpha_l}$ и $x_{j_1}^{\alpha_1} x_{j_2}^{\alpha_2} \cdots x_{j_l}^{\alpha_l}$, кад год у скупу $\mathbf{x}$ важи

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_l \quad \text{и} \quad j_1 < j_2 < \cdots < j_l.$$

Једну базу квазисиметричних функција чине *мономијалне квазисиметричне функције,* дефинисане са

$$M_\alpha \quad := \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_l} x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_l}^{\alpha_l},$$

где је $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) \in \mathbb{N}^{\,l}$ композиција природног броја. У том случају, кажемо да је мономијална функција M_α *индексирана* композицијом α. Посебно, уколико је $\alpha \models n$, скуп $\{M_\alpha\}_{\alpha \in Comp_n}$ чини $\mathbb{K}-$базу за $\mathcal{Q}Sym_n$, $\mathbb{K}-$векторски простор хомогених квазисиметричних функција степена n. Сходно томе, $\mathcal{Q}Sym$ је једна градуисана $\mathbb{K}-$алгебра коначног типа, то јест

$$\mathcal{Q}Sym = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{Q}Sym_n.$$

Тако, на пример, мономијалне квазисиметричне функције које чине базу за $\mathcal{Q}Sym_3$ гласе:

$$\begin{array}{rclrcl} M_{(3)} & = & x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \cdots & M_{(2,1)} & = & x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3 + \cdots \\ M_{(1,2)} & = & x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3^2 + \cdots & M_{(1,1,1)} & = & x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_4 + \cdots \end{array}$$

Посматрајмо произвољне композиције $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$, уз то и три ланца $(i_1 < i_2 < \cdots < i_r)$, $(j_1 < j_2 < \cdots < j_s)$ и $(k_1 < k_2 < \cdots)$. Множење $m : \mathcal{Q}Sym \otimes \mathcal{Q}Sym \to \mathcal{Q}Sym$ је на мономијалној бази задато са

$$M_\alpha \cdot M_\beta = \sum_f M_{wt(f)},$$

где је сума по свим природним бројевима $p \in \mathbb{N}$ и сурјективним пресликавањима

$$f \ : \ (i_1 < i_2 < \cdots < i_r) \sqcup (j_1 < j_2 < \cdots < j_s) \mapsto (k_1 < k_2 < \cdots < k_p)$$

која *чувају уређење*[4], где је $wt(f) = (wt_1(f), \ldots, wt_p(f))$ композиција броја таква да важи

$$wt_m \quad := \sum_{i_u \in f^{-1}(k_m)} \alpha_u \quad + \sum_{j_v \in f^{-1}(k_m)} \beta_v.$$

[4]Кажемо да пресликавање f *чува уређење* ако из $x < y$ следи $f(x) < f(y)$.

У терминологији квазисиметричних функција, горе описано множење зовемо и *квази−шафл множење.*

Пример 1.2.3 Производ квазисиметричних функција $M_{(1)}$ и $M_{(2,3)}$ је једнак

$$\begin{aligned} M_{(1)} \cdot M_{(2,3)} &= (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots) \cdot (x_1^2 x_2^3 + x_1^2 x_3^3 + x_2^2 x_3^3 + \cdots) \\ &= (x_1^3 x_2^3 + x_1^3 x_3^3 + x_1 x_2^2 x_3^3 + \cdots) + (x_1^2 x_2^4 + x_1^2 x_2 x_3^3 + x_2^3 x_3^3 + \cdots) \\ &+ \ (x_1^2 x_2^3 x_3 + x_1^2 x_3^4 + x_2^2 x_3^4 + \cdots) \\ &= M_{(1,2,3)} + M_{(3,3)} + M_{(2,1,3)} + M_{(2,4)} + M_{(2,3,1)}. \end{aligned}$$

□

Надаље, квазисиметричне функције $\mathcal{Q}Sym$ можемо разматрати и као једну коалгебру. Тада је комножење $\Delta : \mathcal{Q}Sym \to \mathcal{Q}Sym \otimes \mathcal{Q}Sym$ дефинисано са

$$\Delta(M_\alpha) \quad := \quad \sum_{k=0}^{l} M_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)} \otimes M_{(\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_l)} \quad = \sum_{(\beta,\gamma)\,:\,\beta\cdot\gamma=\alpha} M_\beta \otimes M_\gamma.$$

Наравно, комножење Δ је коасоцијативно, јер за свако $M_\alpha \in \mathcal{Q}Sym$ важи

$$((\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta)(M_\alpha) \ = \ ((\mathrm{Id} \otimes \Delta) \circ \Delta)(M_\alpha).$$

Пример 1.2.4 $\Delta(M_{(1,2,3)}) = M_{(1,2,3)} \otimes 1 + M_{(1,2)} \otimes M_{(3)} + M_{(1)} \otimes M_{(2,3)} + 1 \otimes M_{(1,2,3)}$. □

Даље, којединицу $\varepsilon : \mathcal{Q}Sym \to \mathbb{K}$ дефинишимо на следећи начин

$$\varepsilon(M_\alpha) := M_\alpha(0,0,0,\ldots) = \begin{cases} 1, & \alpha = (), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Јасно је да су Δ и ε морфизми алгебре $\mathcal{Q}Sym$, што посебно значи да је иста биалгебра. Такође, биалгебра је и повезана и градуисана, па према Ставу 1.1.4 биће да је $\mathcal{Q}Sym$ и једна Хопфова алгебра. Прецизније, важи следећа

Теорема 1.2.1 ([14], Proposition 5.8.) *Алгебра квазисиметричних функција $\mathcal{Q}Sym$ је повезана и градуисана комутативна Хопфова алгебра коначног типа.*

Применом Такеучијеве формуле се може показати да за антипод $S : \mathcal{Q}Sym \to \mathcal{Q}Sym$ важи следећа теорема.

Теорема 1.2.2 ([14], Theorem 5.11.) *Ако је $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) \in Comp_n$, тада је*

$$S(M_\alpha) = (-1)^l \sum_{\substack{\gamma \in Comp_n \\ \mathrm{rev}(\alpha) \preceq \gamma}} M_\gamma,$$

где је сума по свим композицијама које су грубље од $\mathrm{rev}(\alpha)$*, обрнуте композиције која одговара композицији α.*

Пример 1.2.5 $S(M_{(1,2,3)}) = -M_{(3,2,1)} - M_{(5,1)} - M_{(3,3)} - M_{(6)}$. □

1.2.3 Симетричне функције

Подсетимо се да за функцију $f \in R(\mathbf{x})$ кажемо да је квазисиметрична ако има једнаке коефицијенте уз мономе $x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_l}^{\alpha_l}$ и $x_{j_1}^{\alpha_1} x_{j_2}^{\alpha_2} \cdots x_{j_l}^{\alpha_l}$, кад год важи $i_1 < i_2 < \cdots < i_l$ и $j_1 < j_2 < \cdots < j_l$. Посебно, ако су коефицијенти једнаки за било који низ различитих природних бројева $\{i_1, i_2, \ldots, i_l\}$ и $\{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$ добијамо Хопфову подалгебру $\mathcal{S}ym$ Хопфове алгебре $\mathcal{Q}Sym$. Подалгебру $\mathcal{S}ym$ називамо *алгебром симетричних функција.*

Надаље, са $\lambda(\alpha)$ означимо партицију која настаје разврставањем компоненти композиције α у опадајући низ. Тако, на пример, композицији $(1,1,3,1,2,3)$ одговара партиција $(3,3,2,1,1,1)$.

Једну базу симетричних функција чине *мономијалне симетричне функције*

$$m_\lambda \quad := \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_l} x_{i_1}^{\lambda_1} x_{i_2}^{\lambda_2} \cdots x_{i_l}^{\lambda_l} \quad = \sum_{\lambda(\alpha)=\lambda} M_\alpha,$$

где је $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ партиција неког природног броја.

Скуп $\{m_\lambda\}_{\lambda \in Par_n}$ представља једну $\mathbb{K}-$базу за $\mathcal{S}ym_n$, $\mathbb{K}-$векторски простор хомогених симетричних функција степена n. Према томе, $\mathcal{S}ym$ је градуисана $\mathbb{K}-$алгебра коначног типа, то јест

$$\mathcal{S}ym = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{S}ym_n.$$

Приметимо да је $m_{()} = M_{()}$ и $m_{(1)} = M_{(1)}$. Мономијалне симетричне функције које чине базу за $\mathcal{S}ym_3$ гласе:

$$\begin{array}{rcll} m_{(3)} & = & x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \cdots & = \; M_{(3)}, \\ m_{(2,1)} & = & x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 + x_1^2 x_3 + x_3^2 x_1 + \cdots & = \; M_{(1,2)} + M_{(2,1)}, \\ m_{(1,1,1)} & = & x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 + \cdots & = \; M_{(1,1,1)}. \end{array}$$

Поред мономијалних симетричних функција, велику примену имају и:

1. *степене симетричне функције* дефинисане са

$$p_\lambda := p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \cdots p_{\lambda_l}, \quad \text{где је} \quad p_{\lambda_i} := m_{(\lambda_i)}.$$

2. *елементарне симетричне функције* дефинисане са

$$e_\lambda := e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_l}, \quad \text{где је} \quad e_{\lambda_i} := m_{\underbrace{(1,1,\ldots,1)}_{\lambda_i}}.$$

3. *комплетно−хомогене симетричне функције* дефинисане са

$$h_\lambda := h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_l}, \quad \text{где је} \quad h_{\lambda_i} := \sum_{\gamma \in Par_{\lambda_i}} m_\gamma.$$

Пример 1.2.6 За партицију $(2,1)$ важе следеће једнакости:

$$\begin{aligned} p_{(2,1)} &= (x_1^2 + x_2^2 + \cdots) \cdot (x_1 + x_2 + \cdots) = m_{(3)} + m_{(2,1)}, \\ e_{(2,1)} &= (x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots) \cdot (x_1 + x_2 + \cdots) = m_{(2,1)} + 3m_{(1,1,1)}, \\ h_{(2,1)} &= (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots) \cdot (x_1 + x_2 + \cdots) = m_{(3)} + 2m_{(2,1)} + 3m_{(1,1,1)}. \quad \square \end{aligned}$$

1.2.4 Фундаменталне квазисиметричне функције

Другу битну базу простора квазисиметричних функција $\mathcal{Q}Sym$ чине фундаменталне квазисиметричне функције. Такође, исте представљају и специјалан случај *енумератора* $\mathsf{P}-$*партиција*, о чему ће детаљније бити у следећој секцији.

Дефиниција 1.2.5 За композицију $\alpha \in Comp_n$ *фундаментална квазисиметрична функција* $L_\alpha \in \mathcal{Q}Sym$ је дефинисана са

$$L_\alpha \quad := \sum_{\substack{\beta \in Comp_n \\ \beta \preceq \alpha}} M_\beta.$$

Тако, на пример, важе следеће једнакости

$$L_{(1,1,\ldots,1)} \quad = \quad M_{(1,1,\ldots,1)} \qquad \text{и} \qquad L_{(n)} \quad = \sum_{\alpha \in Comp_n} M_\alpha.$$

Јасно је да $\{L_\alpha\}_{\alpha \in Comp}$ представља једну $\mathbb{K}-$базу за Хопфову алгебру $\mathcal{Q}Sym$, јер се мономијална квазисиметрична функција M_α може приказати као линеарна комбинација фундаменталних функција, и то

$$M_\alpha \quad = \sum_{\substack{\beta \in Comp_n \\ \beta \preceq \alpha}} (-1)^{l(\beta)-l(\alpha)} L_\beta.$$

Приметимо да се M_α, за $\alpha \in Comp_n$, може записати у следећем облику

$$M_\alpha \quad = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_l} x_{i_1}^{\alpha_1} x_{i_2}^{\alpha_2} \cdots x_{i_l}^{\alpha_l} \qquad = \sum_{\substack{i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n \\ i_j < i_{j+1} \text{ ако и само ако } j \in D(\alpha)}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}.$$

У вези са овим последњим, имамо следећи

Став 1.2.2 ([14], Proposition 5.17.) *За* $\alpha \in Comp_n$ *важи*

$$L_\alpha \quad = \sum_{\substack{i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n \\ i_j < i_{j+1} \text{ ако } j \in D(\alpha)}} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}.$$

Размотримо сада ближе множење фундаменталних функција. Наиме, нека је $\omega := (\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n)$ један ланац на скупу $[\,n\,]$. Скуп дефинисан са

$$\mathrm{Des}(\omega) := \{i : \omega_i >_{\mathbb{Z}} \omega_{i+1}\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n-1\},$$

називамо *скуп силаска* ланца ω. Даље, нека су $\alpha \models n$ и $\beta \models m$ композиције природних бројева n и m. Са ω_α означимо ланац на скупу $\{1, 2, \ldots, n\}$ такав да је $\mathrm{Des}(\omega_\alpha) = D(\alpha)$, а са ω_β ланац на скупу $\{n+1, n+2, \ldots, n+m\}$ за који је $\mathrm{Des}(\omega_\beta) = D(\beta)$. Слично, уколико је ω један ланац на скупу $[\,n\,]$, са $\gamma(\omega)$ означимо композицију скупа $[\,n\,]$ такву да је $D(\gamma(\omega)) = \mathrm{Des}(\omega)$. Тада је

$$L_\alpha \cdot L_\beta \quad := \sum_{\omega \in \omega_\alpha || \omega_\beta} L_{\gamma(\omega)},$$

где $\omega \in \omega_\alpha || \omega_\beta$ означава ланац на скупу $\{1, 2, \ldots, n+m\}$, за који важи $(i <_{\omega_\alpha} j \;\Rightarrow\; i <_\omega j)$ и $\left(k <_{\omega_\beta} l \Rightarrow\; k <_\omega l\right)$.

Пример 1.2.7 Ланац који одговара фундаменталној функцији $L_{(1,1)}$, односно $L_{(2)}$, гласи $\omega_\alpha = (2 < 1)$, односно $\omega_\beta = (3 < 4)$. Према томе,

$$\begin{aligned} L_{(1,1)} \cdot L_{(2)} = \sum_{\omega \in (2<1)||(3<4)} L_{\gamma(\omega)} &= L_{\gamma(2<1<3<4)} + L_{\gamma(2<3<1<4)} + L_{\gamma(3<2<1<4)} \\ &+ L_{\gamma(2<3<4<1)} + L_{\gamma(3<2<4<1)} + L_{\gamma(3<4<2<1)} \\ &= L_{(1,3)} + L_{(2,2)} + L_{(1,1,2)} + L_{(3,1)} + L_{(1,2,1)} + L_{(2,1,1)}. \quad \square \end{aligned}$$

Наравно, преостаје да се објасни како комножење $\Delta : \mathcal{QS}ym \to \mathcal{QS}ym \otimes \mathcal{QS}ym$ дејствује на фундаменталној бази.

$$\Delta(L_\alpha) \quad := \sum_{\beta\cdot\gamma=\alpha \text{ или } \beta\odot\gamma=\alpha} L_\beta \otimes L_\gamma.$$

Пример 1.2.8 Утврдимо да $\Delta(L_{(2,3)})$ износи

$$1 \otimes L_{(2,3)} + L_{(1)} \otimes L_{(1,3)} \otimes L_{(2)} \otimes L_{(3)} + L_{(2,1)} \otimes L_{(2)} + L_{(2,2)} \otimes L_{(1)} + L_{(2,3)} \otimes 1. \quad \square$$

Став 1.2.3 ([14], Proposition 5.23.) *За композицију $\alpha \in Comp_n$ важи следећа једнакост*

$$S(L_\alpha) = (-1)^n L_{\omega(\alpha)},$$

где је $\omega(\alpha) \in Comp_n$ таква да је $D(\omega(\alpha)) = \{1, 2, \ldots, n-1\} \setminus D(\mathrm{rev}(\alpha))$.

Пример 1.2.9 Посматрајмо композицију $\alpha = (5, 2, 3) \in Comp_{10}$. Тада је $\mathrm{rev}(\alpha) = (3, 2, 5)$ и $D(\mathrm{rev}(\alpha)) = \{3, 5\} \subset [10 - 1]$. Утврдимо да је онда $D(\omega(\alpha)) = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$, то јест $\omega(\alpha) = (1, 1, 2, 2, 1, 1, 1, 1)$. Према претходном ставу закључујемо да је

$$S(L_{(5,2,3)}) = (-1)^{10} L_{(1,1,2,2,1,1,1,1)}. \quad \square$$

1.2.5 $\mathsf{P}-$партиција

Дефиниција 1.2.6 *Означени посет* је парцијално уређен скуп P на неком коначном скупу целих бројева. Тада, за функцију $f : \mathsf{P} \to \mathbb{N}$ кажемо да је $\mathsf{P}-$*партиција* уколико задовољава услове:

1. ако је $i <_{\mathsf{P}} j$ и $i <_{\mathbb{Z}} j$, тада је $f(i) \le f(j)$ и
2. ако је $i <_{\mathsf{P}} j$ и $i >_{\mathbb{Z}} j$, тада је $f(i) < f(j)$.

Посебно, за посет P кажемо да је *добро означен* уколико из $i <_{\mathsf{P}} j$ следи $i >_{\mathbb{Z}} j$. У том случају, функција f је једна $\mathsf{P}-$партиција ако и само ако

$$i <_{\mathsf{P}} j \quad \Rightarrow \quad f(i) < f(j) \tag{1.2}$$

Скуп свих $\mathsf{P}-$партиција f означимо са $\mathcal{A}(\mathsf{P})$. Функција дефинисана са

$$F_{\mathsf{P}}(\mathbf{x}) \quad := \sum_{f \in \mathcal{A}(\mathsf{P})} x_{f(1)} x_{f(2)} \cdots x_{f(n)},$$

је елемент алгебре $\mathbb{K}[[\mathbf{x}]] := \mathbb{K}[[x_1, x_2, \ldots]]$. При том, исту називамо и једним *енумератором* $\mathsf{P}-$*партиција.*

Став 1.2.4 ([14], Proposition 5.18.) *Ако је* $\omega = (\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n)$ *ланац, функција* $F_\omega(\mathbf{x})$ *зависи само од скупа силаска ланца* ω*, то јест*

$$F_\omega(\mathbf{x}) = L_{\alpha(\omega)},$$

где је $\alpha(\omega) \in Comp_n$ *композиција таква да је* $D(\alpha(\omega)) = \mathrm{Des}(\omega)$.

Доказ. Утврдимо да важи следећа једнакост

$$F_\omega(\mathbf{x}) \quad = \sum_{f \in \mathcal{A}(\mathsf{P})} x_{f(\omega_1)} x_{f(\omega_2)} \cdots x_{f(\omega_n)}.$$

Наиме, $\mathsf{P}-$партиције су низови $f(\omega_1) \leq f(\omega_2) \leq \cdots \leq f(\omega_n)$ такви да за $i \in \mathrm{Des}(\omega)$ важи $f(\omega_i) < f(\omega_{i+1})$. Применом Става 1.2.2 имамо тражену једнакост. *Q.E.D.*

Пример 1.2.10 Нека је $\omega = (4 < 2 < 5 < 1 < 6 < 3)$ и $\mathrm{Des}(\omega) = \{1, 3, 5\}$. У том случају, композиција α, за коју је $D(\alpha) = \mathrm{Des}(\omega)$, гласи $\alpha = (1, 2, 2, 1)$.

$$\begin{aligned} F_\omega(\mathbf{x}) &= \sum_{f(4)<f(2)\leq f(5)<f(1)\leq f(6)<f(3)} x_{f(4)}x_{f(2)}x_{f(5)}x_{f(1)}x_{f(6)}x_{f(3)} \\ &= \sum_{i_1<i_2\leq i_3<i_4\leq i_5<i_6} x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}x_{i_5}x_{i_6} \\ &= L_{(1,2,2,1)} = M_{(1,2,2,1)} + M_{(1,1,1,2,1)} + M_{(1,2,1,1,1)} + M_{(1,1,1,1,1,1)}. \end{aligned}$$

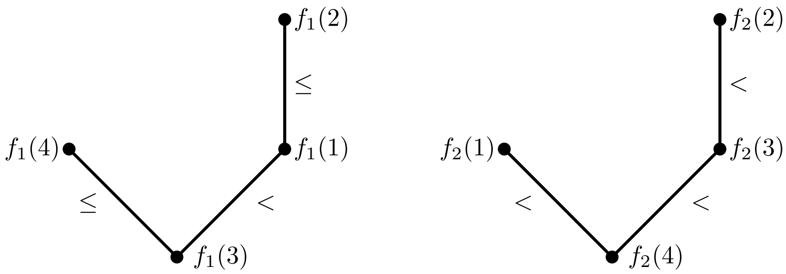
□

Теорема 1.2.3 ([13], Theorem 1, [14], Theorem 5.19.) *За означени посет* P *имамо следећу једнакост*

$$F_{\mathsf{P}}(\mathbf{x}) = \sum_{\omega \in \mathcal{L}(\mathsf{P})} F_\omega(\mathbf{x}) = \sum_{\omega \in \mathcal{L}(\mathsf{P})} L_{\alpha(\omega)},$$

где је $\mathcal{L}(\mathsf{P})$ *свуп свих линеарних раширења посета* P.

Пример 1.2.11 Посматрајмо посет P_1 и добро означен посет P_2.



Слика 1.3: P_1-*партиција и* P_2-*партиција*

Приметимо да је скуп линеарних раширења посета P_1

$$\mathcal{L}(\mathsf{P}_1) = \{(3 < 1 < 2 < 4),\ (3 < 1 < 4 < 2),\ (3 < 4 < 1 < 2)\}.$$

Применом претходне теореме, добијамо да је $F_{\mathsf{P}_1}(\mathbf{x}) = L_{(1,3)} + L_{(1,2,1)} + L_{(2,2)}$. Слично, за добро означен посет P_2 важи

$$\mathcal{L}(\mathsf{P}_2) = \{(4 < 3 < 2 < 1),\ (4 < 3 < 1 < 2),\ (4 < 1 < 3 < 2)\},$$

одакле имамо да је $F_{\mathsf{P}_2}(\mathbf{x}) = L_{(1,1,1,1)} + L_{(1,1,2)} + L_{(1,2,1)}$. □

Претпоставимо да је $F_\omega(\mathbf{x}) = L_\alpha$, за неку композицију $\alpha \models n$. Тада је

$$\mathrm{Des}(\omega) = D(\alpha) \quad \text{ако и само ако} \quad \mathrm{Des}(\omega^{\mathrm{op}}) = D(\omega(\alpha)),$$

где је ω^{op} *дуални ланац*[5] ланца ω. Другим речима, ако и само ако је $F_{\omega^{\mathrm{op}}} = L_{\omega(\alpha)}$. Стога, применом Става 1.2.3 добијамо следећу једнакост

$$S(F_\omega(\mathbf{x})) = (-1)^n F_{\omega^{\mathrm{op}}}(\mathbf{x}).$$

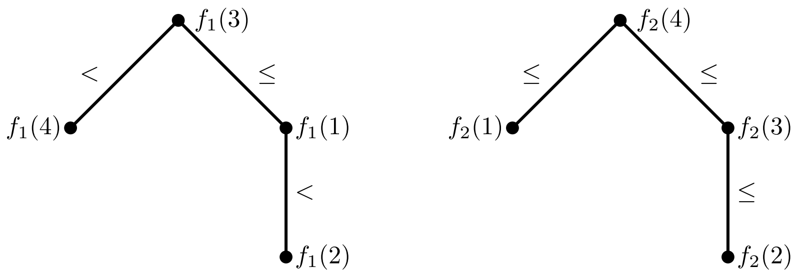
На значај претходне једнакости указује и следећа последица.

Последица 1.2.1 *За означени посет* P *на скупу* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *важи*

$$S(F_{\mathsf{P}}(\mathbf{x})) = (-1)^n F_{\mathsf{P}^{\mathrm{op}}}(\mathbf{x}),$$

где је P^{op} *дуални посет посета* P.

Пример 1.2.12 За посете P_1 и P_2, из Примера 1.2.11, одговарајући дуални посети су



Слика 1.4: $\mathsf{P}_1^{\mathrm{op}}-$*партиција и* $\mathsf{P}_2^{\mathrm{op}}-$*партиција*

и још важи $S(F_{\mathsf{P}_1}(\mathbf{x})) = (-1)^4(L_{(1,1,2)} + L_{(2,2)} + L_{(1,2,1)})$. Слично се може показати да је $S(F_{\mathsf{P}_2}(\mathbf{x})) = (-1)^4(L_{(4)} + L_{(1,3)} + L_{(2,2)})$. $\square$

[5] *Дуални ланац* ланца $\omega = (\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n)$ дефинишимо са $\omega^{\mathrm{op}} := (\omega_n < \cdots < \omega_2 < \omega_1)$.

1.3 Комбинаторне Хопфове алгебре

Седамдесетих година прошлог века амерички математичар, италијанског порекла, Ђан−Карло Рота (G. C. Rota) је пронашао примену Хопфових алгебри у комбинаторици. Посебно, Хопфова алгебра на коначно−градуисаним посетима је послужила за налажење примена и у комбинаторним инваријантама композиција, партиција, посета, графова, матроида, политопа.

Дефиниција 1.3.1 *Комбинаторна Хопфова алгебра* је пар (H, ζ), где је H једна повезано−градуисана и *локално−коначна*[6] $\mathbb{K}$−Хопфова алгебра, а $\zeta : H \to \mathbb{K}$ *карактер*, то јест морфизам алгебри:

1. $\zeta(1_H) = 1_{\mathbb{K}}$,
2. ζ је $\mathbb{K}$−линеарно пресликавање,
3. $\zeta(h_1 h_2) = \zeta(h_1)\zeta(h_2)$, за све $h_1, h_2 \in H$.

На пример, дефинишимо карактер $\zeta_{\mathcal{Q}} : \mathcal{Q}Sym \to \mathbb{K}$ са

$$\zeta_{\mathcal{Q}}(f(\mathbf{x})) := f(1, 0, 0, \ldots,).$$

Јасно је да тада важи следећа једнакост

$$\zeta_{\mathcal{Q}}(M_\alpha) = \zeta_{\mathcal{Q}}(L_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{ако је } \alpha = () \text{ или } \alpha = (n) \text{ за неко } n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 1.3.1 ([2], Theorem 4.1, [14], Theorem 7.3.) *За сваку комбинаторну Хопфову алгебру (H, ζ) постоји јединствени морфизам*

$$\Psi \ : \ (H, \zeta) \to (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}}).$$

Морфизам Ψ је, за свако $h \in H_n$, одређен са

$$\Psi(h) \ := \sum_{\alpha \in Comp_n} \zeta_\alpha(h) M_\alpha, \tag{1.3}$$

за $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l)$ и $\zeta_\alpha := \zeta^{\otimes l} \circ \pi_\alpha \circ \Delta_{l-1} : H_n \to \mathbb{K}$, где је $\pi_\alpha : H^{\otimes l} \to H_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes H_{\alpha_l}$ канонска пројекција на хомогене компоненте.

Пример 1.3.1 Нека је $(\mathcal{Q}Sym, \zeta)$ комбинаторна Хопфова алгебра, где је ζ произвољни карактер. Тада, за $\alpha, \beta \models n$ важи

$$\zeta_\alpha(M_\beta) = \begin{cases} \zeta(M_{\beta_1})\zeta(M_{\beta_2}) \cdots \zeta(M_{\beta_s}), & \text{ако је } \alpha \preceq \beta, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где су $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ композиције такве да је $\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_s$ (надовезивање композиција) и $\alpha = (|\beta_1|, |\beta_2|, \ldots, |\beta_s|)$. У том случају, формула (1.3) гласи

$$\Psi(M_\beta) \ = \sum_{\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdots \beta_s} \zeta(M_{\beta_1})\zeta(M_{\beta_2}) \cdots \zeta(M_{\beta_s}) M_{(|\beta_1|, |\beta_2|, \ldots, |\beta_s|)}. \qquad \square$$

[6] Хопфова алгебра $H = \oplus_{n \geq 0} H_n$ је *локално−коначна* ако је свако H_n коначне димензије.

Главна специјализација

Алгебра полинома $\mathbb{K}[m]$ је Хопфова алгебра. При том је m *примитивни елемент*, што значи да задовољава следеће једнакости

$$\Delta(m) = 1 \otimes m + m \otimes 1, \quad \varepsilon(m) = 0 \quad \text{и} \quad S(m) = -m.$$

Како је $\mathbb{K}[m]$ комутативна алгебра, за сваки полином $g(m) \in \mathbb{K}[m]$ важи и

$$S(g(m)) = g(-m).$$

Тиме је $\mathbb{K}[m]$ једна Хопфова алгебра. У терминологији Хопфових алгебри, исту називамо *биномном Хопфовом алгебром.*

Дефиниција 1.3.2 За $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{Q}Sym$ и природан број $m \in \mathbb{N}$, са $\mathbf{ps}^1(f)(m)$ означимо елемент добијен *главном специјализацијом*

$$\mathbf{ps}^1(f)(m) := f(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m}, 0, 0, \ldots).$$

То посебно значи да за композицију $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) \in Comp_n$ важи

$$\mathbf{ps}^1(M_\alpha)(m) = M_\alpha(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m}, 0, \ldots) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_l \le m} [x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots x_{i_l}^{\alpha_l}]_{\substack{x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 1, \\ x_{m+1} = x_{m+1} = \cdots = 0.}}$$

одакле закључујемо да је

$$\mathbf{ps}^1(M_\alpha)(m) = \binom{m}{l}. \tag{1.4}$$

Посебно, на основу претходне једнакости дефинишимо главну специјализацију и за $m = -1$ са

$$\mathbf{ps}^1(M_\alpha)(-1) := \binom{-1}{l} = (-1)^l.$$

Пошто је $\{M_\alpha\}_{\alpha \in Comp}$ база Хопфове алгебре $\mathcal{Q}Sym$ и $\binom{m}{l}$ полином по промењљивој m степена $l \le n$, следи да је за сваку функцију $f(\mathbf{x}) \in \mathcal{Q}Sym_n$ полином $\mathbf{ps}^1(f)(m)$ степена највише n.

Применом Става 1.2.2 добијамо да за композицију $\alpha \in Comp_n$ важи

$$\begin{aligned}\mathbf{ps}^1(L_\alpha)(m) = L_\alpha(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m}, 0, \ldots) &= \sum_{\substack{1 \le i_1 < \cdots < i_n \le m \\ i_k < i_{k+1} \text{ ако } k \in D(\alpha)}} [x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}]_{\substack{x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 1, \\ x_{m+1} = x_{m+1} = \cdots = 0}} \\ &= |\{1 \le j_1 \le j_2 \le \cdots \le j_n \le m - l + 1\}|,\end{aligned}$$

одакле следи да је

$$\mathbf{ps}^1(L_\alpha)(m) = \binom{n - l + m}{n}. \tag{1.5}$$

Даље, главна специјализација за фундаменталну квазисиметричну функцију L_α и $m = -1$ је одређена са:

$$\mathbf{ps}^1(L_\alpha)(-1) := \binom{n - l - 1}{n}.$$

Став 1.3.1 ([14], Proposition 7.7.) *За пресликавање* $\mathbf{ps}^1 : \mathcal{Q}Sym \to \mathbb{K}[m]$ *важи:*

1. $\mathbf{ps}^1$ *је Хопфов морфизам у биномну Хопфову алгебру.*

2. *За свако* $m \in \mathbb{Z}$ *и* $f \in \mathcal{Q}Sym$ *важе следеће једнакости*

$$\zeta_{\mathcal{Q}}^{*m}(f) = \mathbf{ps}^1(f)(m) \quad и \quad \zeta_{\mathcal{Q}}^{*(-m)}(f) = \mathbf{ps}^1(S(f))(m) = \mathbf{ps}^1(f)(-m).$$

3. *За комбинаторну Хопфову алгебру* (H,ζ) *и произвољно* $h \in H_n$, *полином* $\mathbf{ps}^1(\Psi(h))(m) \in \mathbb{K}[m]$ *је степена највише* n, *и још је*

$$\zeta^{*m}(h) = \mathbf{ps}^1(\Psi(h))(m).$$

Доказ. 1. Пре свега, пресликавање $\mathbf{ps}^1$ је морфизам алгебри. Сама провера је рутинске природе. Да бисмо показали да је $\mathbf{ps}^1$ морфизам колагебри, довољно је утврдити да, за свако M_α, важи $\Delta \circ \mathbf{ps}^1 = (\mathbf{ps}^1 \otimes \mathbf{ps}^1) \circ \Delta$. Наиме, нека је $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l) \models n$.

$$((\mathbf{ps}^1 \otimes \mathbf{ps}^1) \circ \Delta)(M_\alpha) = \sum_{k=0}^{l} \mathbf{ps}^1(M_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)}) \otimes \mathbf{ps}^1(M_{(\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_l)}) = \sum_{k=0}^{l} \binom{m}{k} \otimes \binom{m}{l-k}.$$

С друге стране, користећи *Вандермондов идентитет*

$$\binom{A+B}{l} = \sum_k \binom{A}{k}\binom{B}{l-k}$$

добијамо следећу једнакост

$$(\Delta \circ \mathbf{ps}^1)(M_\alpha) = \Delta\binom{m}{l} = \binom{m\otimes 1 + 1\otimes m}{l} = \sum_{k=0}^{l} \binom{m\otimes 1}{k}\binom{1\otimes m}{l-k}$$
$$= \sum_{k=0}^{l} \binom{m}{k} \otimes \binom{m}{l-k}.$$

Сходно томе, $\mathbf{ps}^1$ је један морфизам Хопфових алгебри.

2. Како је $\zeta_{\mathcal{Q}}(f) = f(1,0,0,\ldots)$, то значи да је

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{Q}}^{*m}(f) &= \zeta_{\mathcal{Q}}^{\otimes m} \circ \Delta_{m-1} f(\mathbf{x}) = \zeta_{\mathcal{Q}}^{\otimes m}\left(f(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)})\right) \\ &= \left[f(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)})\right]_{x_1^{(1)}=x_1^{(2)}=\cdots=x_1^{(n)}=1 \text{ и } x_j^{(1)}=x_j^{(2)}=\cdots=x_j^{(n)}=0 \text{ за } j\neq 1.} \\ &= f(1,0,0,\ldots,1,0,0,\ldots,\ldots,1,0,0,\ldots) = \mathbf{ps}^1(f)(m).\end{aligned}$$

Користећи Последицу 1.1.1, закључујемо да је

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathcal{Q}}^{*(-m)}(f) &= \left(\zeta_{\mathcal{Q}}^{*(-1)}\right)^{*m}(f) = (\zeta_{\mathcal{Q}} \circ S)^{*m}(f) = \zeta_{\mathcal{Q}}^{*m}(S(f)) \\ &= \mathbf{ps}^1(S(f))(m) = S(\mathbf{ps}^1(f))(m) = \mathbf{ps}^1(f)(-m).\end{aligned}$$

3. Применом Теореме 1.3.1, Става 1.1.1 и претходне тачке добијамо да је

$$\zeta^{*m}(h) = (\zeta_{\mathcal{Q}} \circ \Psi)^{*m}(h) = (\zeta_{\mathcal{Q}}^{*m})(\Psi(h)) = \mathbf{ps}^1(\Psi(h))(m).$$

Q.E.D.

1.3.1 Ротина Хопфова алгебра

Кажемо да је $\hat{0}_{\mathsf{P}}$ *минимални елемент*, односно $\hat{1}_{\mathsf{P}}$ је *максимални елемент*, посета P ако за свако $x \in \mathsf{P}$ важи $\hat{0} \leq_{\mathsf{P}} x$, односно $x \leq_{\mathsf{P}} \hat{1}$. Надаље, посматрајмо само оне посете који имају и минимални и максимални елемент. Уколико је још и сваки максимални ланац у посету P исте дужине, рећи ћемо да је P један *градуисани посет.*

У том случају, јединствено је одређено пресликавање $r : \mathsf{P} \to \mathbb{N}$ које називамо *ранг функција посета* P. Наиме, за $x \neq \hat{0}_{\mathsf{P}}$ вредност функције $r(x)$ одговара дужини максималног ланца од $\hat{0}_{\mathsf{P}}$ до x, док се вредност функције r у тачки $\hat{0}_{\mathsf{P}}$ дефинише са $r(\hat{0}_{\mathsf{P}}) := 0$. Посебно, за број $r(\hat{1}_{\mathsf{P}})$ користимо ознаку $r(\mathsf{P})$.

Даље, дефинишимо *интервал* $[x, y]$ на следећи начин

$$[x, y] := \{z \in V \ : \ x \leq_{\mathsf{P}} z \leq_{\mathsf{P}} y\}.$$

Дефиниција 1.3.3 Посети $\mathsf{P}_1 \subseteq V_1 \times V_1$ и $\mathsf{P}_2 \subseteq V_2 \times V_2$ су *изоморфни*, и пишемо $\mathsf{P}_1 \sim \mathsf{P}_2$, уколико постоји бијекција $f : V_1 \to V_2$ таква да $x \leq_{\mathsf{P}_1} y$ ако и само ако $f(x) \leq_{\mathsf{P}_2} f(y)$.

Приметимо да је $\sim$ једна релација еквиваленције на скупу свих посета. Одговарајуће класе еквиваленције зовемо и *класама изоморфних посета.* Даље, нека је $\mathcal{R}$ векторски простор над пољем $\mathbb{K}$ који садржи све линеарне комбинације изоморфних класа посета. Тада је $\mathcal{R}$ једна повезана и градуисана Хопфова алгебра. Множење и комножење су, у том случају, дефинисани са

$$[\mathsf{P}_1] \cdot [\mathsf{P}_2] := [\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2] \quad \text{и} \quad \Delta([\mathsf{P}]) := \sum_{\hat{0}_{\mathsf{P}} \leq z \leq \hat{1}_{\mathsf{P}}} [\hat{0}_{\mathsf{P}}, z] \otimes [z, \hat{1}_{\mathsf{P}}],$$

где је $\mathsf{P}_1 \times \mathsf{P}_2$ ознака за Декартов производ посета, док је којединица задана са

$$\varepsilon([\mathsf{P}]) := \begin{cases} 1, & \text{ако је } \hat{0}_{\mathsf{P}} = \hat{1}_{\mathsf{P}}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Став 1.3.2 ([14], Proposition 7.11.) *Антипод S је у Хопфовој алгебри $\mathcal{R}$ одређен са*

$$S([\mathsf{P}]) \quad = \quad \sum_{k \geq 0} (-1)^k \sum_{\hat{0}_{\mathsf{P}} = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = \hat{1}_{\mathsf{P}}} [x_0, x_1] \cdot [x_1, x_2] \cdots [x_{k-1}, x_k].$$

Надаље, посматрајмо карактер $\zeta : \mathcal{R} \to \mathbb{K}$ који је дефинисан са $\zeta([\mathsf{P}]) := 1$, за сваки посет P. Тада је пар $(\mathcal{G}, \zeta)$ једна комбинаторна Хопфова алгебра и у теорији је позната као *Ротина Хопфова алгебра.* Применом Теореме 1.3.1, закључујемо да постоји универзални морфизам $\Psi : (\mathcal{G}, \zeta) \to (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$ и још важи следећа теорема.

Теорема 1.3.2 ([14], Theorem 7.19.) *Нека је P градуисани посет ранга $r(\mathsf{P})$. Тада је вредност универзалног морфизма Ψ једнака*

$$\Psi([\mathsf{P}]) = \sum_{\alpha \models r(\mathsf{P})} f_{D(\alpha)}(\mathsf{P}) M_\alpha,$$

где коефицијент $f_{D(\alpha)}$ одговара броју ланаца $\hat{0}_{\mathsf{P}} <_{\mathsf{P}} x_1 <_{\mathsf{P}} \cdots <_{\mathsf{P}} x_s <_{\mathsf{P}} \hat{1}_{\mathsf{P}}$ таквих да је $\{r(x_1), \ldots, r(x_s)\} = D(\alpha)$.[7]

[7] $D(\alpha)$ је скуп парцијалних сума композиције $\alpha \models r(P)$.

Функција $\Psi([\mathsf{P}])$ је позната и као *Еринборгова квазисиметрична функција градуисаних посета* (видети [9]).

Дефиниција 1.3.4 Нека је P један градуисани посет на скупу темена V. *Ранг−генераторна функција* $RGF(\mathsf{P},q)$ је дефинисана са

$$RGF(\mathsf{P},q) := \sum_{x\in V} q^{r(x)},$$

док је *зета−полином* $Z(\mathsf{P},m)$ одређен на следећи начин

$$Z(\mathsf{P},m) := \sum_{s=0}^{r(\mathsf{P})-1} \binom{m}{s+1} \left|\left\{\hat{0}_{\mathsf{P}} <_{\mathsf{P}} x_1 <_{\mathsf{P}} \cdots <_{\mathsf{P}} x_s <_{\mathsf{P}} \hat{1}_{\mathsf{P}}\right\}\right|$$

Може се показати (видети [14], Proposition 7.19.) да важе следеће једнакости

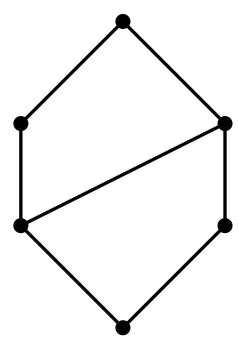
$$RGF(\mathsf{P},q) = [\Psi([\mathsf{P}])]_{\substack{x_1=q,\, x_2=1,\\ x_3=x_4=\cdots=0}} \quad \text{и} \quad Z(\mathsf{P},m) = \mathbf{ps}^1(\Psi([\mathsf{P}]))(m).$$

Пример 1.3.2
Вредност универзалног морфизма Ψ на посету P (Слика 1.5) гласи

$$\Psi([\mathsf{P}]) = M_{(3)} + 2M_{(2,1)} + 2M_{(1,2)} + 3M_{(1,1,1)},$$

док су ранг−генераторна функција и зета−полином једнаки

$$RGF(\mathsf{P},q) = \frac{q^2(q+1)}{2},$$
$$Z(\mathsf{P},m) = 1 + 2m + 2m^2 + m^3.$$



Слика 1.5: *Посет* P

Глава 2

Конвексни политопи

Тако смо доделили земљи облик коцке...
...сматраћемо облик тетраедра елементом и семеном ватре...
...октаедар ћемо прогласити обликом ваздуха,
а икосаедар обликом воде.
Постоји још додекаедар; бог га је употребио за свемир.
Платон, *Тимај*

Конвексни политопи представљају фундаменталне геометријске објекте који имају широку примену у различитим гранама математике, посебно у теорији игâра, линеарном програмирању и теорији конвексних скупова. Године 1967. амерички математичар, југословенског порекла, Бранко Грунбаум (B. Grunbaum) је објавио [20], која је поред [41] и [21] основна литература у излагању теорије конвексних политопа. Такође, погледати [6], монографију посвећену торусној топологији, поглавље 1, у којем се излажу основе теорије политопа.

2.1 Конвексни политопи

Са $\mathbb{R}^n$ означимо $n-$димензионални еуклидски простор са стандардним скаларним производом $\langle\, , \rangle\ :\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Ако су $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$, скуп тачака $x \in \mathbb{R}^n$ које задовољавају неједнакост

$$\langle\, a,\, x \,\rangle \,\leq\, b,$$

називамо *затворени полупростор простора* $\mathbb{R}^n$. Коначан пресек затворених полупростора зовемо $\mathcal{H}-$*полиедар.* Уз то, ако $\mathcal{H}-$полиедар не садржи полуправу, кажемо да је *ограничен.* У терминологији политопа исти је познат и као $\mathcal{H}-$*политоп.*

$\mathcal{V}-$*политоп* је конвексни омотач коначног скупа тачака $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ у простору $\mathbb{R}^n$. Другим речима, то је скуп тачака

$$\mathrm{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} := \left\{ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m \ :\ \lambda_i \geq 0 \ \text{ и } \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Дефиниције $\mathcal{H}-$политопа и $\mathcal{V}-$политопа су еквивалентне. Сама еквивалентност није тривијална и доказ исте се може пронаћи у [41], (Theorem 1.1).

Дефиниција 2.1.1 *Политоп P* је скуп тачака који се може представити као $\mathcal{V}-$политоп или као $\mathcal{H}-$политоп.

Димензија политопа $P \subseteq \mathbb{R}^n$, у ознаци $\dim(P)$, одговара димензији његовог афиног омотача. Посебно, уколико је $\dim(P) = n$ кажемо да је политоп *потпуне димензије*. Без губитка општости, надаље можемо претпоставити да су сви политопи потпуне димензије. Наиме, за амбијентални простор политопа можемо посматрати његов афини омотач.

За два политопа $P \subset \mathbb{R}^{n_1}$ и $Q \subset \mathbb{R}^{n_2}$ кажемо да су *афино изоморфна*, и користимо запис $P \cong Q$, уколико постоји афино пресликавање $\pi : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ које је бијекција између тачака политопа P и политопа Q.

Регуларни $d-$*симплекс* Δ_d дефинишемо са

$$\Delta_d := \left\{x \in \mathbb{R}^{d+1} \ : \ \langle 1, x\rangle = 1 \ \text{ и } \ x_i \geq 0\right\} = \operatorname{conv}\{e_1, e_2, \dots, e_{d+1}\},$$

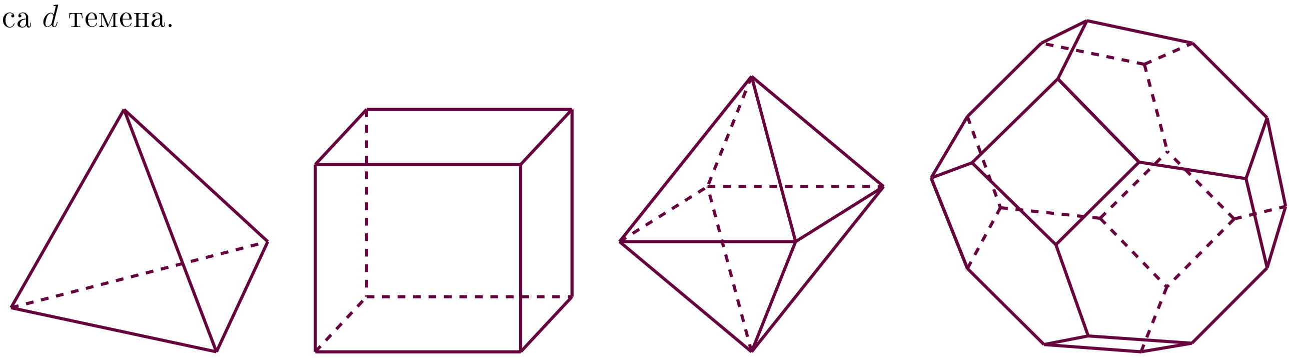
где су $e_1, e_2, \dots e_{d+1}$ стандардни базни вектори у простору $\mathbb{R}^{d+1}$. Политоп дефинисан са

$$\square_d := \{x \in \mathbb{R}^d \ : \ -1 \leq x_i \leq 1\} = \operatorname{conv}\left\{\{+1, -1\}^d\right\}$$

се назива $d-$*димензионална хиперкоцка,* док је $d-$*димензионални хипероктаедар* политоп дефинисан на следећи начин

$$\diamond_d := \left\{x \in \mathbb{R}^d \ : \ \sum_{i=1}^{d} |x_i| \leq 1\right\} = \operatorname{conv}\left\{\pm e_1, \pm e_2, \dots, \pm e_d\right\}.$$

Конвексни омотач тачака које настају пермутацијом координата тачке $(1, 2, \dots, d+1)$ је $d-$димензионали политоп који називамо *пермутоедар* Pe^d, уз напомену да су два темена повезана ако и само ако се координате једног темена могу добити транспозицијом суседних координата другог темена. То посебно значи да је свако теме пермутоедра Pe^d повезано са d темена.



Слика 2.1: *Симплекс* Δ_3*, хиперкоцка* $\square_3$*, хипероктаедар* $\diamond_3$ *и пермутоедар* Pe^3

2.1.1 Стране политопа

Нека је $P \subset \mathbb{R}^n$ конвексни политоп. Ако за сваку тачку x политопа P важи $\langle a, x\rangle \leq b$, кажемо да је неједнакост *валидна* за политоп P.

Дефиниција 2.1.2 Уколико је неједнакост $\langle a, x\rangle \leq b$ валидна за политоп P,

$$F := P \cap \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle a, x\rangle = b\}$$

називамо *страном политопа* P *димензије* k,[1] где k одговара димензији афиног омотача стране F.

[1] Користимо и назив $k-$страна политопа

Другим речима, страна политопа P је пресек политопа P и хиперравни H такве да се цео политоп P налази у једној од два заторена полупростора одређена посматраном хиперравни H.

Неједнакости $\langle 0, x\rangle \leq 0$ одговара сам политоп P, док неједнакости $\langle 0, x\rangle \leq -1$ одговара $\emptyset$. То тачно значи да су P и $\emptyset$ стране политопа P. Уз то, за исте кажемо да су *тривијалне стране политопа*, док све друге називамо *нетривијалним* или *правим странама* политопа P. Посебно, стране политопа P димензија 0, 1 и $\dim(P)-1$ називамо *теменима, ивицама* и *максималним странама*.

Став 2.1.1 ([41] Proposition 2.2.) *Сваки политоп је конвексни омотач скупа својих темена, то јест ако је* $\mathrm{vert}(P)$ *скуп темена политопа* P *тада важи*

$$P = \mathrm{conv}\{\mathrm{vert}(P)\}.$$

Став 2.1.2 ([41], Proposition 2.3.) *Нека је* $P \subset \mathbb{R}^n$ *конвексни политоп.*

1. *Произвољна страна* F *је политоп за који важи*

$$\mathrm{vert}(F) = F \cap \mathrm{vert}(P).$$

2. *Пресек произвољне две стране политопа* P *је страна политопа* P.

На основу претходног става можемо увести једну релацију поретка на скупу страна политопа. Тако одређен посет $L(P)$ зовемо *посет страна* политопа P.

Уопште, градуисани посет L је *мрежа* уколико за свако $x, y \in L$ постоји *највеће доње ограничење*, у ознаци $x \wedge y$, и *најмање горње ограничење*, у ознаци $x \vee y$. Уз то, за мрежу L кажемо да је *атомична* ако се сваки елемент $x \in L$ може записати у облику $x = a_1 \vee a_2 \vee \cdots \vee a_k$, где су a_i *атоми*, то јест елементи ранга једнаког јединици. Слично, мрежа је *коатомична* ако се сваки елемент може записати у облику $x = c_1 \wedge c_2 \wedge \cdots \wedge c_k$, где су c_i *коатоми*, елементи ранга једнаког броју $\mathrm{rank}(L)-1$.

У вези са овим последњим, није тешко утврдити да је $L(P)$ једна мрежа. Због тога, за $L(P)$ користимо и назив *мрежа страна политопа* P.

Теорема 2.1.1 ([41], Theorem 2.7.) *Нека је* P *конвексни политоп.*

1. *Мрежа страна* $L(P)$ *политопа* P *је градуисана мрежа дужине* $\dim(P)+1$ *и ранга дефинисаног са* $\mathrm{rank}(F) := \dim(F)+1$.

2. *Сваки интервал дужине* 2 *има тачно четири елемента. То јест, ако је* $F \subseteq G$ *и* $\mathrm{rank}(G) - \mathrm{rank}(F) = 2$, *тада постоје тачно две стране* H_1 *и* H_2 *такве да је* $F \subset H_1 \subset G$ *и* $F \subset H_2 \subset G$.

3. *Дуални посет* $L(P)^{\mathrm{op}}$ *је мрежа страна конвексног политопа.*

4. *Мрежа страна* $L(P)$ *политопа* P *је и атомична и коатомична.*

То посебно значи да је сам политоп P максимални елемент у мрежи страна политопа, што означавамо са $\hat{1} = P$, док је празан скуп минимални елемент, у ознаци $\hat{0} = \emptyset$. И још су атоми у мрежи страна $L(P)$ темена политопа P, док коатоми одговарају максималним странама.

Пример 2.1.1 Пошто произвољних k темена симплекса Δ_d формира праву страну симплекса, за $k \in \{1, 2, \ldots, d\}$, мрежа страна политопа Δ_d је изоморфна *Буловој мрежи*

$$B^{d+1} := (2^{[d+1]}, \subseteq).$$

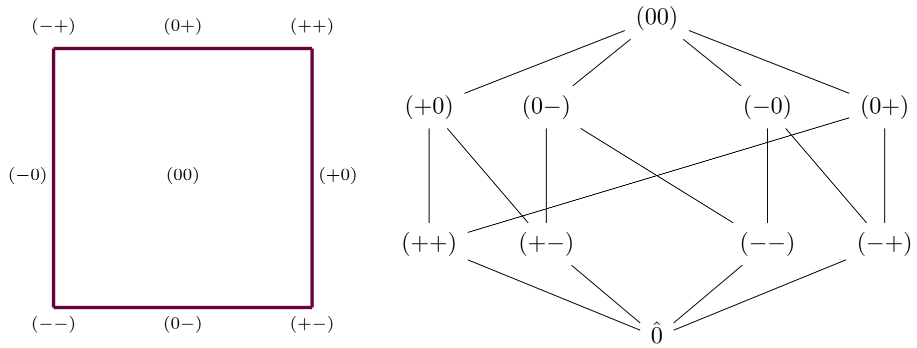
□

Пример 2.1.2 Произвољној страни F хиперкоцке $\square_d$ доделимо *вектор знака* $\sigma(F) \in \{+, 0, -\}^d$ такав да се F може приказати као скуп тачака облика

$$x = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i \quad \text{где је} \quad \begin{cases} \lambda_i = +1 & \text{за } \sigma_i = +, \\ \lambda_i \in [-1, 1] & \text{за } \sigma_i = 0, \\ \lambda_i = -1 & \text{за } \sigma_i = -. \end{cases}$$

На скупу $\{+, 0, -\}^d$ уведимо релацију поретка са $0 \geq -$ и $0 \geq +$. Тиме је мрежа страна хиперкоцке $\square_d$ изоморфна са

$$(L(\square_d), \subseteq) \cong \{\hat{0}\} \cup (\{+, 0, -\}^d, \geq).$$



Слика 2.2: *Мрежа страна хиперкоцке* $\square_2$

Према претходном разматрању, имамо да је мрежа страна хиперкоцке $\square_d$ изоморфна посету дефинисаном на скупу

$$\{(X, Y) \ : \ X, Y \in B^d \ \text{ и } \ X \cap Y = \emptyset\},$$

где је релација поретка $\leq$ дефинисана са:

$$(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2) \quad \text{ако и само ако} \quad X_2 \subseteq X_1 \quad \text{и} \quad Y_2 \subseteq Y_1.$$

□

Пример 2.1.3 У даљем раду (види Теорема 3.1.1) ћемо показати да постоји изоморфизам између максималних страна пермутоедра $Pe^{d-1} \subseteq \mathbb{R}^d$ и правих подскупова скупа $[d]$. Штавише, постоји изоморфизам између правих страна пермутоедра и композиција скупа $[d]$. У вези са тим, мрежа страна Pe^{d-1} је изоморфна посету дефинисаном на скупу $Comp_{[d]}$.

□

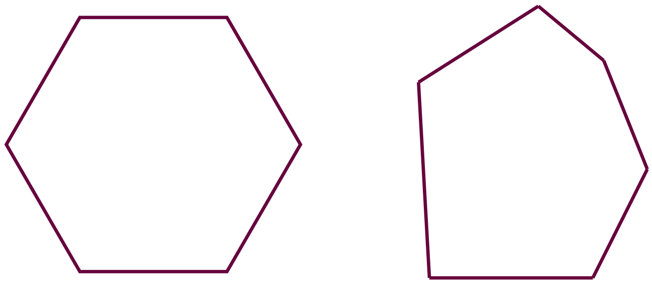
Два политопа P и Q су *комбинаторно изоморфна*, и користимо запис $P \simeq Q$, ако постоји изоморфизам између њихових мрежа страна, то јест уколико је

$$L(P) \cong L(Q).$$

Према томе, $\simeq$ је једна релација еквиваленције на скупу конвексних политопа.

Дефиниција 2.1.3 *Комбинаторни политоп* је класа комбинаторно еквивалентних политопа.

Напомена 2.1.1 Два афино изоморфна политопа су и комбинаторно еквивалентна, док обрнуто не мора да важи.



Слика 2.3: *Комбинаторно еквивалентни и афино неизоморфни политопи*

2.1.2 Полар и дуал политопа

Нека је $P \subseteq \mathbb{R}^n$ произвољни $\mathcal{H}-$полиедар. *Полар* $\mathcal{H}-$полиедра P, у ознаци P^*, је скуп тачака дефинисан са

$$P^* := \{a \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle a, x\rangle \leq 1 \quad \text{за свако } x \in P\}.$$

Тако дефинисани скуп је $\mathcal{H}-$полиедар који садржи нулу. Дефинишимо још и

$$P^{**} := (P^*)^*.$$

Теорема 2.1.2 ([41], Theorem 2.11, [6], Theorem 1.1.5) *Претпоставимо да је P један $\mathcal{H}-$полиедар у простору* R^n.

1. *P^* је ограничен ако и само ако* $0 \in \mathrm{int}(P)$.[2]

2. *$P \subseteq P^{**}$ и $P = P^{**}$ ако и само ако* $0 \in P$.

Штавише, важи следећа једнакост

$$P^{**} \ = \ \mathrm{conv}\{P \, , \, 0\}.$$

Теорема 2.1.3 ([41], Theorem 2.11) *Нека је $P \subseteq \mathrm{R}^n$ политоп такав да се нула налази у унутрашњости политопа, то јест* $0 \in \mathrm{int}(P)$.

1. *Ако је политоп P задат као конвексни омотач коначног скупа тачака, то јест* $P = \mathrm{conv}\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, *тада је*

$$P^* = \{x \in \mathrm{R}^n \ : \ \langle x, a_i\rangle \leq 1, \quad \text{за} \ \ i = 1, \ldots, m\}.$$

2. *Уколико је политоп P скуп тачака $x \in \mathbb{R}^n$ таквих да задовољавају неједначине* $\langle a_i, x\rangle \leq 1$, *за* $i = 1, \ldots, m$, *тада је*

$$P^* = \mathrm{conv}\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}.$$

Напомена 2.1.2 Уколико се 0 не налази у унутрашњости политопа P, дуал P^* је $\mathcal{H}-$полиедар, али не и политоп. У вези са тим, размотримо ближе следећи пример.

[2] *Унутрашњост политопа* P, у ознаци $\mathrm{int}(P)$, се дефинише као релативна унутрашњост у односу на афини омотач политопа P.

Пример 2.1.4 Нека је $\Delta_2 = \mathrm{conv}\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$. Уочимо да $0 \in P$ као и да $0 \notin \mathrm{int}(P)$. Применом прве тачке претходне теореме, следи да је Δ_2^* описан неједнакостима

$$0 \cdot x + 0 \cdot y \leq 1, \quad 0 \cdot x + \cdot y \leq 1 \quad \text{и} \quad 1 \cdot x + 0 \cdot y \leq 1.$$

Утврдимо да је Δ_2^* неограничени $\mathcal{H}-$полиедар, то јест Δ_2^* није политоп. $\square$

Надаље, претпоставимо да је $P \subset \mathbb{R}^n$ један политоп димензије n који садржи нулу у унутрашњости. За страну F, политопа P, дефинишимо скуп

$$F^* := \{a \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle a, x\rangle \leq 1 \ \text{за свако}\ x \in P \ \text{ и } \ \langle a, x\rangle = 1 \ \text{за свако}\ x \in F\}.$$

Став 2.1.3 ([41], Corollary 2.13) *Нека су F и G стране политопа $P \subseteq \mathbb{R}^n$ који садржи нулу у унутрашњости. Тада:*

1. *F^* је страна политопа P^*.*

2. *$F^{**} = F$.*

3. *$F \subseteq G$ ако и само ако је $G^* \subseteq F^*$.*

Посматрајмо комбинаторни политоп P. Без губитка општости, можемо претпоставити да $0 \in \mathrm{int}(P)$ (ако $0 \notin \mathrm{int}(P)$, политоп P можемо транслирати тако да садржи нулу у унутрашњости). Тада је P^* политоп такав да

$$0 \in P^* \quad \text{и} \quad P^{**} = P.$$

У том случају, за P^* кажемо да је *дуал политопа*[3] P, или кажемо да су P и P^* *дуални политопи*. На њихов значај, указује и следећа теорема.

Теорема 2.1.4 ([6], Theorem 1.1.7) *Ако су P и P^* дуални политопи, тада су и посети $L(P^*)$ и $L(P)$ међусобно дуални, то јест*

$$L(P^*) \cong L(P)^{\mathrm{op}}.$$

Тако су, на пример, политопи $\square_d$ и $\diamond_d$ међусобно дуални, док је симплекс Δ_d *само−дуалан* политоп. Другим речима политопи Δ_d и Δ_d^* су комбинаторно еквивалентни.

Уопште, на основу претходне теореме, закључујемо да постоји бијекција између максималних страна политопа P и темена политопа P^*.

Пример 2.1.5 Максималне стране пермутоедра Pe^{d-1} одговарају правим подскуповима скупа $[\,d\,]$, па теменима политопа $(Pe^{d-1})^*$ можемо придружити исте подскупове. Другим речима, политоп $(Pe^{d-1})^*$ је симплицијално изоморфан првој барицентричној подели симплекса Δ_d. $\square$

[3] Напоменимо да је поларност геометријска, а дуалност комбинаторна особина политопа.

2.1.3 Прости и симплицијални политопи

Дефиниција 2.1.4 За политоп чије су све праве стране симплекси кажемо да је један *симплицијални политоп.*

Тако су, на пример, хипероктаедар $\Diamond_d$ и симплекс Δ_d симплицијални политопи. Још један пример је и *икосаедар.*

Пример 2.1.6 *Момент крива* је пресликавање $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ одређено са

$$x(t) := (t, t^2, \ldots, t^d).$$

Конвексни омотач $m > d$ различитих тачака $x(t_i)$, за $t_1 < \cdots < t_m$, се назива *циклични политоп* и користимо ознаку $C^d(t_1, \ldots, t_m)$. Исти је један симплицијални политоп (видети [41], Theorem 0.7). Уз то, било којих $k \leq \lfloor d/2 \rfloor$ темена чине страну политопа $C^d(t_1, \ldots, t_m)$. У вези са тим, назовимо такве политопе $\lfloor d/2 \rfloor-$*суседским политопима.* $\square$

Став 2.1.4 *Нека је P $d-$димензионални политоп. Следећа тврђења су еквивалентна:*

1. *политоп P је симплицијалан,*
2. *све максималне стране политопа P су симплекси,*
3. *свака максимална страна политопа P има d темена,*
4. *свака $k-$страна политопа P, за $k \leq d - 1$, има $k + 1$ темена,*
5. *сваки интервал $[\hat{0}, F] \subseteq L(P)$, за $F \neq \hat{1}$, је Булов посет.*

Дефиниција 2.1.5 Уколико се свако теме $d-$димензионалног политопа налази у тачно d максималних страна, за исти кажемо да је један *прост политоп.*

Такви су, рецимо, хиперкоцка $\square_d$, симплекс Δ_d и пермутоедар Pe^d. Још један пример је и *додекаедар.*

Став 2.1.5 *Нека је P $d-$димензионални политоп. Следећа тврђења су еквивалентна:*

1. *политоп P је прост,*
2. *свака страна простог политопа P је прост политоп,*
3. *свака $k-$страна, за $k \geq 0$, се налази у $d - k$ максималних страна,*
4. *сваки интервал $[F, \hat{1}] \subseteq L(P)$, за $F \neq \hat{0}$, је Булов посет.*

Теорема 2.1.5 ([41], Proposition 2.16) *Политоп P је прост ако и само ако је њему дуални политоп P^* симплицијални политоп.*

Природно се поставља питање да ли политоп може бити уједно и симплицијалан и прост. Политопи димензије 2, познатији као *полигони*, су у исто време симплицијални и прости, док за политопе димензије веће од 2 важи следећи став.

Став 2.1.6 ([6], Proposition 1.1.8) *Једини политоп димензије $d \geq 3$, који је уједно и прост и симплицијалан политоп, јесте симплекс Δ_d.*

Даље, темена и ивице политопа P одређују граф $\Gamma(P)$ који називамо *граф политопа* P. У вези са тим, важи следећа:

Теорема 2.1.6 ([41], Theorem 3.4) *Комбинаторни тип простог политопа P је одређен графом $\Gamma(P)$, то јест два проста политопа су комбинаторно еквивалентна ако и само ако су њихови графови међусобно изоморфни.*

2.1.4 Операције на политопима

Пирамида и бипирамида

Нека је политоп P димензије d и x_0 тачка изван афиног омотача посматраног политопа. Политоп дефинисан као конвексни омотач

$$\mathrm{pyr}(P, x_0) := \mathrm{conv}\{P, x_0\}$$

је политоп димензије $(d+1)$ и у теорији је познат као *пирамида над политопом P*. Јасно је да стране политопа $\mathrm{pyr}(P, x_0)$ одговарају странама P, као и пирамидама над странама политопа P. Тако је, на пример, симплекс Δ_{d+1} пирамида над симплексом Δ_d.

Ако изаберемо две тачке x_1 и x_2 изван афиног омотача политопа P такве да сегмент $[x_1, x_2]$ има пресечних тачака са P, можемо дефинисати

$$\mathrm{bipyr}(P, x_1, x_2) := \mathrm{pyr}(P, x_1) \cup \mathrm{pyr}(P, x_2)$$

$(d+1)-$димензионални политоп који називамо *бипирамидом над политопом P*. Предочимо да је $\Diamond_{d+1}$ бипирамида на хипероктаедру $\Diamond_d$.

Производ политопа

Производ политопа $P \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ и $Q \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ се дефинише са:

$$P \times Q := \{(x, y) \ : \ x \in P \quad \text{и} \quad y \in Q\}\,.$$

Тако добијени политоп је димензије $\dim(P) + \dim(Q)$, чије непразне стране одговарају производу непразних страна посматраних политопа. Специјално, уколико је $Q = \Delta_1$ политоп

$$\mathrm{prism}(P) := P \times \Delta_1$$

називамо *призма над политопом P*. Приметимо да је $\square_{d+1} = \square_d \times [-1, 1]$.

Није тешко утврдити да је производ два проста политопа такође један прост политоп. Према томе, дуална операција на симплицијалним политопима се може описати на следећи начин. Нека су $P \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ и $Q \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ симплицијални политопи који садрже 0 у својој унутрашњости. Тада је симплицијалан и

$$P_1 \circ P_2 := \mathrm{conv}\{P_1 \times 0 \cup 0 \times P_2\} \subseteq \mathbb{R}^{n_1+n_2}.$$

При том, за два проста политопа P и Q, који садрже 0 у унутрашњости, важи следећа једнакост

$$P^* \circ Q^* = (P \times Q)^*.$$

Хиперравански пресеци политопа

Посматрајмо $d-$димензионални политоп $P \subseteq \mathbb{R}^n$, који је одређен са

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle a_i, x\rangle \leq b_i \quad \text{за} \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}\}.$$

Уз то, нека је H хиперраван која не садржи теме политопа P одређена са

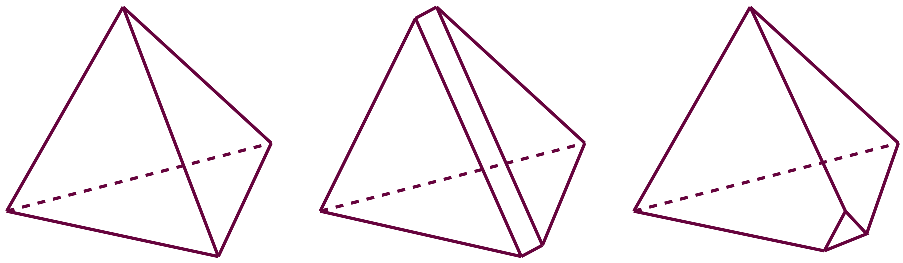
$$H = \{x \in \mathbb{R}^p \ : \ \langle a, x\rangle = b\},$$

за неко $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$. Тада, хиперраван H дели простор $\mathbb{R}^n$ на два затворена полупростора

$$H_{\geq} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \geq b\} \quad \text{и} \quad H_{\leq} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x\rangle \leq b\}.$$

У терминологији политопа, политопе $P \cap H_{\geq}$ и $P \cap H_{\leq}$ називамо *хиперраванским пресецима политопа* P.

Даље, ако хиперраван H сва темена произвољне $k-$стране F раздваја од преосталих темена политопа P, и ако је (на пример) $F \subseteq H_{\geq}$, политоп $P \cap H_{\leq}$ називамо *сечење политопа* P *по страни* F. Специјално, ако је $k = 0$, то јест уколико је F теме политопа P, одговарајуће сечење зовемо и *сечењем политопа* P *по темену* F.



Слика 2.4: *Симплекс* Δ_3*, сечење симплекса* Δ_3 *по ивици и сечење по темену*

Наравно, ако је политоп P прост, тада су прости и $P \cap H_{\geq}$ и $P \cap H_{\leq}$. Штавише, нова темена тако добијених политопа настају пресеком хиперравни H и ивица политопа P. Како је P прост политоп, према Ставу 2.1.5, свака таква ивица се налази у пресеку $d-1$ максималних страна. Дакле, „нова темена” садржана су у d максималних страна.

Нека је $P' := P \cap H_{\leq}$ сечење простог политопа P по $k-$страни G. Уз то је и

$$P \cap H_{\geq} \simeq G \times \Delta_{d-k}.$$

Претпоставимо да су $F_1, F_2, \dots, F_m$ максималне стране политопа P. Пошто је P прост, без губитка општости, можемо претпоставити да је $G = F_1 \cap \dots \cap F_k$. Уочимо да тада политоп P' има m максималних страна које одговарају странама F_1, F_2, $\dots$, F_m, то јест које настају сечењем тих страна, и максималну страну $F := P \cap H$. Указујемо на следеће:

$$\begin{aligned}
F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_l} \neq \emptyset \quad \text{у} \quad P' \quad & \text{ако и само ако} \quad F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_l} \neq \emptyset \quad \text{у} \quad P \quad \text{и} \\
& \qquad\qquad\qquad\; F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_l} \nsubseteq G, \\
F \cap F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_l} \neq \emptyset \quad \text{у} \quad P' \quad & \text{ако и само ако} \quad G \cap F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_l} \neq \emptyset \quad \text{у} \quad P \quad \text{и} \\
& \qquad\qquad\qquad\; F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_l} \nsubseteq G.
\end{aligned}$$

Приметимо да $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_l} \nsubseteq G$ ако и само ако $\{i_1, \dots, i_l\} \nsubseteq \{1, \dots, k\}$.

Пројекција и сума Минковског политопа

Посматрајмо политоп $P \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ и једно афино пресликавање $\pi : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$, које је задато са

$$\pi(x) := Ax + z,$$

где су $A \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ и $z \in \mathbb{R}^{n_2}$. Ако је пресликавање π инјективно, то јест ако је ранг матрице A једнак n_1, тада је $\pi(P) \cong P$. И још, за пресликавање π кажемо да је *афина трансформација политопа* P. Уколико, пак, π није инјективно и ако је $\dim(P) = n_1$, димензија политопа $Q := \pi(P)$ одговара рангу матрице A. Уз то, кажемо да је π *пројекција политопа* P *на политоп* Q.

Лема 2.1.1 ([41], Lemma 7.10) *Нека је $\pi : P \to Q$ пројекција политопа. Тада за сваку страну $F \in L(Q)$ важи*

$$\pi^{-1}(F) := \{y \in P \ : \ \pi(y) \in Q\} \in L(P).$$

Специјално, за стране $F, G \in L(Q)$ важи

$$F \subseteq G \quad \text{ако и само ако} \quad \pi^{-1}(F) \subseteq \pi^{-1}(G).$$

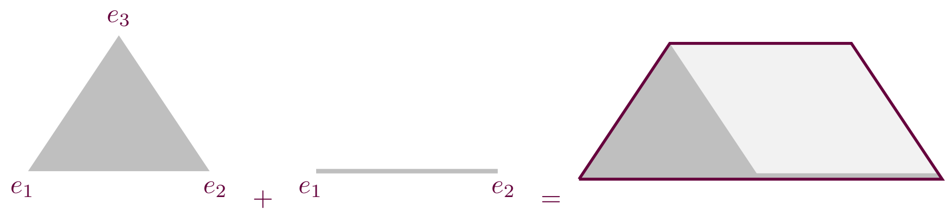
У вези са претходном лемом, закључујемо да је сваки $\mathcal{V}-$политоп пројекција симплекса. Прецизније, нека је $P = \operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ и нека је афино пресликавање $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ одређено са $\pi(e_i) := x_i$, где је e_i стандардни базни вектор у простору $\mathbb{R}^m$. То тачно значи да је

$$P = \pi(\Delta_{m-1}).$$

Став 2.1.7 ([6], Proposition 1.5.1) *Сума Минковског*[4] *два политопа P и Q је политоп. Прецизније, ако је $P = \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ и $Q = \operatorname{conv}\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$, тада*

$$P + Q = \operatorname{conv}\{x_1 + y_1, x_1 + y_2, \ldots, x_m + y_n\}.$$

Пример 2.1.7 Уколико је $\Delta_{123} = \operatorname{conv}\{e_1, e_2, e_3\}$ и $\Delta_{12} = \operatorname{conv}\{e_1, e_2\}$, где су e_1, e_2 и e_3 стандардни базни вектори у $\mathbb{R}^3$, тада је $\Delta_{123} + \Delta_{12}$ полигон приказан на следећој слици.



Слика 2.5: *Сума Минковског симплекса* Δ_{123} *и* Δ_{12}

□

Напомена 2.1.3 Посматрајмо афино пресликавање $\pi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$ које је дефинисано са $\pi(x, y) := x + y$, за $x, y \in \mathbb{R}^n$. Тада је

$$P + Q := \pi(P \times Q),$$

то јест сума Минковског се може приказати и као пројекција политопа $P \times Q$.

[4] *Сума Минковског* подскупова $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ се дефинише са $A + B := \{a + b \ : \ a \in A \ \text{ и } \ b \in B\}$.

Дефиниција 2.1.6 Нека је $n-$политоп Z пројекција хиперкоцке $\Box_d$. Другим речима, нека је политоп Z описан са

$$Z = Z(A) := A \cdot C_d + z = \{Ax + z \ : \ x \in \Box_d\} = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ y = \sum_{i=1}^{m} x_i a_i + z, \quad -1 \leq x_i \leq 1\},$$

за неку матрицу $A = (a_1, a_2, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{n \times d}$. Тада кажемо да је политоп Z један *зонотоп.*

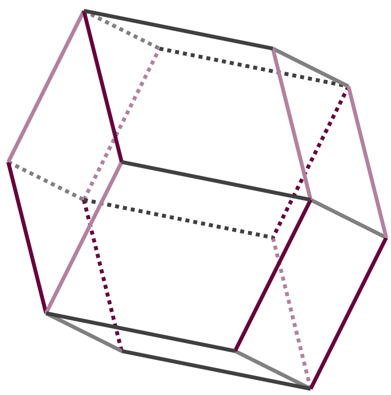
Како је $\Box_d = \Box_1 \times \Box_1 \times \cdots \times \Box_1$ и како је пресликавање π линеарно, следи да је

$$Z(A) = \pi(\Box_1 \times \Box_1 \times \cdots \times \Box_1) = \pi(\Box_1) + \pi(\Box_1) + \cdots + \pi(\Box_1).$$

У вези са овим последњим, $Z(A)$ се може приказати и као сума Минковског

$$Z(A) = [-a_1, a_1] + [-a_2, a_2] + \cdots + [-a_d, a_d] + z, \tag{2.1}$$

где је одговарајућа афина пројекција π одређена са $\pi(x) = Ax + z$.



Слика 2.6: *Зонотоп*

Пример 2.1.8 Пермутоедар је зонотоп димензије $n-1$, који настаје при афиној пројекцији хипрекоцке $\Box_{\binom{n}{2}}$, то јест

$$Pe^{n-1} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left[-\frac{e_j - e_i}{2}, \frac{e_j - e_i}{2} \right] + \frac{n+1}{2} \cdot 1. \qquad \Box$$

2.2 Лепеза страна и нормална лепеза политопа

Дефинишимо *конус над скупом* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ на следећи начин:

$$\mathrm{cone}(X) := \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k \;:\; \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq X \text{ и } \lambda_i \geq 0\}.$$

Специјално, ако је X један коначан скуп, то јест $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, тада важи

$$\mathrm{cone}(X) := \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m \;:\; \lambda_i \geq 0\} \quad \text{и} \quad \mathrm{cone}(\emptyset) := 0.$$

Уколико су још вектори $x_1, x_2, \ldots, x_m$ линеарно независни, за конус $\mathrm{cone}(\{x_1, x_2, \ldots, x_m\})$ кажемо да је један *симплицијални конус.*

Мотивисани претходном дефиницијом, за скуп тачака C простора $\mathbb{R}^n$ кажемо да је *конус* уколико се исти може приказати као конус неког коначног скупа вектора X у простору $\mathbb{R}^n$.

Димензија конуса C, у ознаци $\dim(C)$, одговара димензији афиног омотача конуса C. Уз то, конус димензије k називаћемо и $k-$*конусом.* Посебно, за конус $C \subseteq \mathbb{R}^n$ кажемо да је *потпуне димензије* уколико је $\dim(C) = n$.

Сваки конус се може приказати као коначан пресек затворених полупростора. На основу тога, закључујемо да је конус један $\mathcal{H}-$полиедар. На сличан начин, као у случају политопа, могу се дефинисати и стране конуса. Наравно, страна конуса је поново један конус.

Дефиниција 2.2.1 *Лепеза конуса* у $\mathbb{R}^n$ је фамилија непразних конуса

$$\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_m\}$$

таквих да задовољавају следеће особине:

1. свака непразна страна конуса у $\mathcal{C}$ је такође конус у $\mathcal{C}$;
2. пресек два конуса у $\mathcal{C}$ је страна оба конуса.

Уколико је још и $\bigcup_i C_i = \mathbb{R}^n$, кажемо да је лепеза *комплетна.*

Ако друкчије не нагласимо, надаље ћемо под појмом лепеза подразумевати комплетну лепезу конуса. За исту ћемо рећи да је *тачкаста*, односно *симплицијална лепеза*, ако је $\{0\}$ конус у $\mathcal{C}$ (сходно томе, и страна сваког конуса), односно уколико су сви конуси у $\mathcal{C}$ симплицијални.

Политопу $P \subseteq \mathbb{R}^n$ који садржи нулу у својој унутрашњости, можемо придружити *лепезу страна политопа* $\mathcal{C}(P)$, то јест скуп свих конуса разапетих странама политопа P, изузев политопа P. Прецизније,

$$\mathcal{C}(P) := \{\mathrm{cone}(F) \;:\; F \in L(P) \setminus P\}.$$

Напоменимо да је лепеза $\mathcal{C}(P)$ тачкаста. Уз то, иста је и комплетна у простору $\mathbb{R}^n$ уколико је $\dim(P) = n$.

На сличан начин, политопу P можемо придружити и *нормалну лепезу*

$$\mathcal{N}(P) := \{N_F \ : \ F \in L(P) \setminus \emptyset\},$$

где је N_F скуп вектора из $\mathbb{R}^n$ који максимизирају страну $F \in L(P) \setminus \emptyset$, то јест

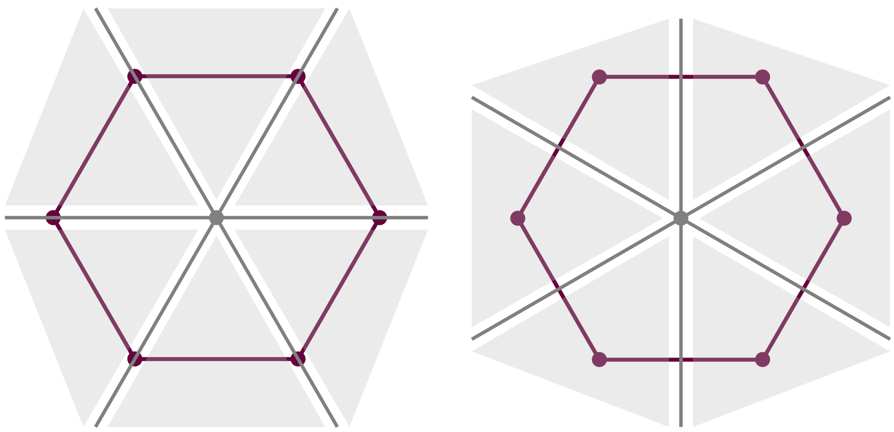
$$N_F := \{c \in \mathbb{R}^n \ : \ F \subseteq \{x \in P \ : \ cx = \max cy \ : y \in P\}\}.$$

Утврдимо да је $\mathcal{N}(P)$ комплетна лепеза у $\mathbb{R}^n$, као и да је лепеза тачкаста ако је политоп P потпуне димензије (тада је $N_P = \{0\}$). Са друге стране, ако је $\dim(P) < n$ дефинишимо потпростор $P^\perp \subseteq \mathbb{R}^n$ са

$$P^\perp := \{a \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle a, x\rangle = \text{const} \ \text{за свако}\ x \in P\}.$$

Приметимо да је тада у простору $\mathbb{R}^n/P^\perp$ политоп P потпуне димезије, а одговарајућа лепеза тачкаста.

За лепезу кажемо да је *политопијална*, односно *неполитопијална*, уколико је облика $\mathcal{N}(P)$ за неки политоп P, односно уколико такав политоп не постоји.



Слика 2.7: *Лепеза страна и нормална лепеза пермутоедра* Pe^2

Подсетимо се да политопу P можемо придружити мрежу страна која је парцијално уређена у односу на инклузију. Са друге стране, политопу P можемо придружити и нормалну лепезу страна $\mathcal{N}(P)$. Тиме је пресликавање $F \mapsto N_F$ бијекција, обрнута у односу на инклузију, између страна политопа P и страна у нормалној лепези $\mathcal{N}(P)$.

Операције на конусима

Даље, уколико је $\mathcal{C}_1$ лепеза у простору $\mathbb{R}^{n_1}$, а $\mathcal{C}_2$ лепеза у простору $\mathbb{R}^{n_2}$ *директну суму* лепеза $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ дефинишемо са:

$$\mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2 := \{C_1 \times C_2 \ : \ C_1 \in \mathcal{C}_1 \ \text{ и } \ C_2 \in \mathcal{C}_2\}.$$

Уколико су $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ лепезе истог простора $\mathbb{R}^n$, *заједничко уситњене* лепеза $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ је лепеза

$$\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2 := \{C_1 \cap C_2 \ : \ C_1 \in \mathcal{C}_1 \ \text{ и } \ C_2 \in \mathcal{C}_2\}.$$

Кажемо још да је $\mathcal{C}_1$ *финија* од лепезе $\mathcal{C}_2$, односно да је $\mathcal{C}_2$ *грубља* од $\mathcal{C}_1$, ако и само ако се конуси лепезе $\mathcal{C}_2$ могу приказати као уније конуса из $\mathcal{C}_1$. Тако је, на пример, $\mathcal{C}_1 \wedge \mathcal{C}_2$ финија и од лепезе $\mathcal{C}_1$ и од лепезе $\mathcal{C}_2$.

Лема 2.2.1 ([41], Lemma 7.7) *Нека су $P \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ и $Q \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ два политопа. Нормална лепеза политопа $P \times Q \subseteq \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ је*

$$\mathcal{N}(P \times Q) = \mathcal{N}(P) \otimes \mathcal{N}(Q).$$

Надаље, нека је $\mathcal{C}$ лепеза у простору $\mathbb{R}^n$ и нека је $V \subseteq \mathbb{R}^n$ један векторски потпростор простора $\mathbb{R}^n$. *Рестрикција лепезе $\mathcal{C}$ на потпростор V* је лепеза

$$\mathcal{C}|_V := \{C \cap V \ : \ C \in \mathcal{C}\}.$$

Лема 2.2.2 ([41], Lemma 7.11) *Нормална лепеза политопа $Q = \pi(P)$, где је π пројекција политопа $P \subseteq \mathbb{R}^n$ је одређена са*

$$\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(P)|_{\pi(\mathbb{R}^n)}.$$

Последица 2.2.1 ([41], Proposition 7.12) *Нормална лепеза Минковски суме политопа P и Q је заједничко уситњење лепеза $\mathcal{N}(P)$ и $\mathcal{N}(Q)$, то јест*

$$\mathcal{N}(P + Q) = \mathcal{N}(P) \wedge \mathcal{N}(Q).$$

Пример 2.2.1 Посматрајмо *аранжман хиперравни* $\mathcal{A} = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ дефинисаних са:

$$H_i := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i = 0\}.$$

Хиперравни из $\mathcal{A}$ дефинишу лепезу конуса у $\mathbb{R}^n$ која одговара нормалној лепези хиперкоцке $\square_n$. $\square$

Теорема 2.2.1 ([41], Theorem 7.16) *Нека је $Z = Z(A)$ један зонотоп у $\mathbb{R}^n$. Нормална лепеза $\mathcal{N}(Z)$ зонотопа Z је индукована аранжманом хиперравни $\mathcal{A}_A = \{H_1, H_2, \dots, H_d\}$ одређених са*

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x, a_i \rangle = 0\},$$

за све колоне a_i матрице $A = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{n \times d}$.

Приметимо да је политоп P, потпуне димензије, прост ако и само ако је нормална лепеза $\mathcal{N}(P)$ симплицијална. Тада, политопу P можемо доделити симплицијални комплекс који настаје као пресек јединичне сфере и нормалне лепезе $\mathcal{N}(P)$. Добијени симплицијални комплекс називамо *дуални симплицијални комплекс*, и користимо ознаку Δ_P. Приметимо да тада $i-$симплекс комплекса Δ_P једнозначно одговара страни $n-$политопа P димензије $n - i - 1$.

Важи и општије. Политоп $P \subseteq \mathbb{R}^n$ је прост ако и само ако је $\mathcal{N}(P)|_{P^\perp}$ симплицијална лепеза.

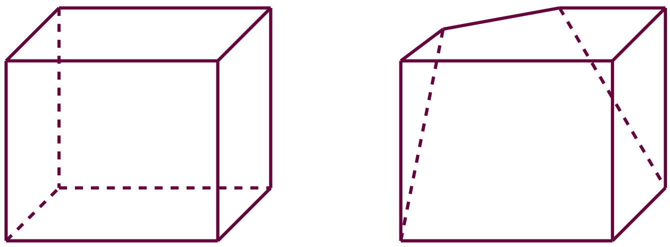
2.3 Комбинаторна својства политопа

2.3.1 $f-$вектор и $h-$вектор политопа

Дефиниција 2.3.1 Нека је f_i број $i-$страна $n-$димензионалног политопа P. Вектор $f(P) := (f_0,\, f_1,\, f_2\, \ldots,\, f_n)$ се назива *$f-$вектор полимпопа P,* док је *$f-$полином политопа* P одређен са

$$f(P,\, q) \;:=\; f_0 + f_1 q + f_2 q^2 + \cdots + f_n q^n.$$

Напоменимо да је $f_n = 1$, као и да је $f-$вектор једна комбинаторна инваријанта политопа. Но, уколико два политопа имају исти $f-$вектор не значи да су и комбинаторно еквивалентни.



Слика 2.8: *Комбинаторно нееквивалентни политопи са истим $f-$вектором*

Приметимо да за дуални политоп P^* политопа P важи следећа једнакост

$$f_i(P^*) = f_{n-i-1}(P). \tag{2.2}$$

Дефиниција 2.3.2 Полином $h(P,\, q) := h_0 + h_1 q + h_2 q^2 + \cdots + h_n q^n$ за који је

$$f(P,\, q) \;=\; h(P,\, 1+q)$$

се назива *$h-$полином политопа P*, док је одговарајући вектор $h(P) := (h_0, h_1, h_2, \ldots, h_n)$ коефицијената познат и као *$h-$вектор политопа P.*

У вези са претходном дефиницијом, за $0 \le i \le n$, важе следеће једнакости

$$h_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{n-i}{n-k} f_{n-i} \quad \text{и} \quad f_k = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} h_{n-i}. \tag{2.3}$$

Пример 2.3.1 $f-$полином и $h-$полином $n-$димензионалног симплекса Δ_n гласе

$$f(\Delta_n, q) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i+1} q^i \quad \text{и} \quad h(\Delta_n, q) = \sum_{i=0}^{n} q^i. \qquad \square$$

Став 2.3.1 ([6], Proposition 1.3.6) *За политопе P и Q важи*

$$f(P \times Q, q) = f(P, q) \cdot f(Q, q) \quad \text{и} \quad h(P \times Q, q) = h(P, q) \cdot h(Q, q).$$

Пример 2.3.2 Подсетимо се да је $\square_d = \Delta_1 \times \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_1$. Према претходном ставу важи

$$f(\square_d, q) = (2+q)^d \quad \text{и} \quad h(\square_d, q) = (1+q)^d. \qquad \square$$

2.3.2 Комбинаторика простих политопа

Пре свега, за произвољан политоп P важи $h_0 = 1$. Уз то, користећи *Ојлерову формулу*, можемо утврдити да је и

$$h_n = (-1)^0 f_0 + (-1)^1 f_1 + (-1)^2 f_2 + \cdots + (-1)^n f_n = 1.$$

Теорема 2.3.1 ([6], Theorem 1.3.4) *За прост политоп P одговарајући $h-$полином јесте симетричан, то јест за $0 \leq i \leq n$ важи*

$$h_i(P) = h_{n-i}(P). \tag{2.4}$$

Претходна теорема је такође позната и као *Ден−Сомервилова релација*.

Доказ. Нека је $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ пресликавање дефинисано са $\varphi(x) := \langle a, x \rangle$, за $a \in \mathbb{R}^n$ такво да φ разликује темена политопа P. Сходно томе, вектор a није паралелан ивицама политопа, те пресликавање φ можемо посматрати и као функцију висине на политопу P. На $1-$скелетону политопа P можемо увести оријентацију од темена са мањом вредношћу функције φ ка темену са већом вредношћу функције φ. У вези са тим, сваком темену v можемо придружити природан број $\text{index}_a(v)$ који одговара броју ивица које су оријентисане ка темену v. Са $I_a(i)$ означимо број темена чији је индекс једнак броју i. Показаћемо да је $I_a(i) = h_{n-i}(P)$.

Приметимо да произвољна $k-$страна G има јединствено теме у којем је вредност функције φ максимална. Теме са том особином називамо *врх стране* G и означавамо са v_{top}. Пошто је P прост политоп, следи да се тачно k ивица стране G сусрећу у темену v_{top} (подсетимо се да је свака страна простог политопа прост политоп), па је $\text{index}_a(v_{top}) \geq k$. С друге стране, свако теме индекса $q \geq k$ је врх за $\binom{q}{k}$ страна димензије k. Сходно томе, број $k-$страна политопа P износи:

$$f_k(P) = \sum_{q \geq k} \binom{q}{k} I_a(q).$$

На основу једнакости (2.3) то тачно значи да је $I_a(q) = h_{n-q}(P)$. Како $I_a(q)$ не зависи од избора вектора a, то је $\text{index}_{-a}(v) = n - \text{index}_a(v)$, за свако теме v. Тиме је одређена следећа једнакост:

$$h_{n-q}(P) = I_a(q) = I_{-a}(n-q) = h_q(P). \qquad Q.E.D.$$

Даље, пошто је свако теме простог политопа P повезано са n темена, важи и

$$2f_1(P) = nf_0(P).$$

Применом претходне теореме, се може показати да f-полином простог политопа димензије n задовољава и следећу једнакост

$$f_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n-i}{n-k} f_i. \tag{2.5}$$

Доказ горе наведене једнакости се може пронаћи у [6], док се у [23] може пронаћи доказ следеће теореме.

Теорема 2.3.2 *Нека је P прост $n-$димензионални политоп. Тада важи*

$$h_0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_{\lfloor n/2 \rfloor}. \tag{2.6}$$

Како $h-$вектор простог политопа задовољава (2.4) и (2.6), природно се поставља питање да ли су исте довољан услов да би произвољан вектор био $h-$вектор неког простог политопа. Не би ли одговорили на питање, неопходно је дефинисати појам *псеудо−степена.*

За позитивне бројеве a и i постоји јединствено представљање броја a

$$a = \binom{a_i}{i} + \binom{a_{i-1}}{i-1} + \cdots + \binom{a_j}{j},$$

где је $a_i > a_{i-1} > \cdots > a_j \geq j \geq 1$. Тако дефинисано представљање се назива *биномно i–представљање броја a.*

Дефиниција 2.3.3 Нека су a и i позитивни бројеви, тада је, *$i-$ти псеудо−степен броја* a дефинисан са

$$a^{\langle i \rangle} := \binom{a_i+1}{i+1} + \binom{a_{i-1}+1}{i} + \cdots + \binom{a_j+1}{j+1}.$$

Теорема 2.3.3 ([6], Theorem 1.4.14) *Вектор $f = (f_0, f_1, f_2, \ldots, f_n)$ је $f-$вектор простог политопа димензије n ако и само ако за одговарајући $h-$вектор важи:*

1. $h_i = h_{n-i}$, *за* $0 \leq i \leq n$;
2. $h_0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_{\lfloor n/2 \rfloor}$;
3. $h_0 = 1$ *и* $h_{i+1} - h_i \leq (h_i - h_{i-1})^{\langle i \rangle}$, *за* $1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1$.

Како је $h-$вектор простог политопа симетричан, природно се дефинише вектор $g = (g_0, g_1, \ldots, g_{\lfloor n/2 \rfloor})$ на следећи начин

$$g_0 := 1 \quad \text{и} \quad g_i := h_i - h_{i-1}.$$

Тако дефинисан вектор називамо *$g-$вектор политопа P.* У вези са тим, услов 3. Теореме 2.3.3 се може заменити следећим исказом:

$$g_0 = 1 \quad \text{и} \quad g_{i+1} = q_i^{\langle i \rangle}, \quad \text{за} \quad 1 \leq i \leq \lfloor n/2 \rfloor - 1.$$

Сходно томе, претходна теорема се назива и **g**−*теорема.*

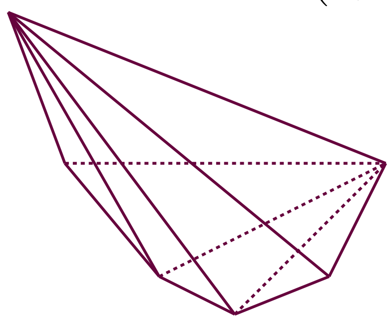
2.3.3 Комбинаторика симплицијалних политопа

Подсетимо се да је политоп P симплицијалан ако и само ако је политоп P^* прост. Применом једнакости (2.2) и (2.5), f-полином симплицијалног политопа, за $1 \leq k \leq n+1$, задовољава следећу једнакост

$$f_{k-1} = \sum_{i=k}^{n} (-1)^{n-i} \binom{i}{k} f_{i-1}.$$

Пример 2.3.3 Циклични политоп $C^d(x_1, x_2, \dots, x_m)$ је симплицијални и $\lfloor d/2 \rfloor$-суседски политоп. Сходно томе, за $0 \leq i \leq \lfloor d/2 \rfloor - 1$ важи

$$f_i(C^d(x_1, x_2, \dots, x_m)) = \binom{m}{i+1}.$$



Слика 2.9: *Циклични политоп* $C^3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

Може се показати (видети [6], Lemma 1.4.5) да важи следећа формула

$$f_i = \sum_{j=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} \binom{j}{d-1-i}\binom{m-d+j-1}{j} + \sum_{j=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} \binom{d-j}{d-1-j}\binom{m-d+j-1}{j},$$

за $0 \leq i \leq d$, где је $\binom{p}{q} = 0$ за $p < q$ или $q < 0$. □

Теорема 2.3.4 ([6], Theorem 1.4.4) *Међу свим симплицијалним политопима P са m темена чија је димензија n, циклични политоп $C^n(m)$ има максималан број $i-$страна за $1 \leq i \leq n$, то јест за $1 \leq i \leq n$ важи следећа неједнакост*

$$f_i(P) \leq f_i(C^n(m)).$$

У теорији конвексних политопа претходна теорема је позната и као *Теорема горњег ограничења за симплицијалне политопе.* Горе наведена теорема важи и за произвољни политоп, и у том случају се означава са UBT (*Upper Bound Theorem*).

Симплицијални $n-$димензионални политоп P се назива *наслагани политоп* уколико постоји низ

$$\Delta_{n+1} =: P_0,\ P_1,\ P_2,\ \dots,\ P_k := P$$

n-димензионалних политопа код којих се политоп P_{i+1} добија тако што на неку максималну страну политопа P_i додамо пирамиду над истом.

Теорема 2.3.5 ([6], Theorem 1.4.9) *Међу свим симплицијалним политопима P са m темена чија је димензија n, наслагани политоп има минималан број $i-$страна за $2 \leq i \leq n-1$, то јест за $1 \leq i \leq n-2$ важе следеће неједнакости*

$$f_i(P) \geq \binom{n}{i}m - \binom{n+1}{i+1}i \quad и \quad f_{n-1}(P) \geq (n-1)m + (n+1)(n-2).$$

Наведена теорема је позната и као *Теорема доњег ограничења за симплицијалне политопе.*

Глава 3

Уопштени пермутоедри

Централно место у овој дисертацији заузимају уопштени пермутоедри, фамилија политопа са богатом комбинаторном структуром. Пермутоедар се први пут појавио 1911. године у раду „*Analytic treatment of the polytopes regularly derived from the regular polytopes*" холандског математичара Соута (P. H. Schoute), док је сам назив *permutoèdre* установљен педесет две године касније, од стране француских математичара Розенштила (P. Rosenstiehl) и Жилбоа (G. Guilbaud). Рад [31], заједно са [30] представља основну литературу у излагању теорије уопштених пермутоедара.

3.1 Пермутоедар

Дефиниција 3.1.1 Нека је $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ тачка за чије координате важи $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Конвексни омотач тачака које настају пермутацијом координата тачке $\mathbf{a}$ је политоп димензије $n-1$ који називамо *пермутоедар.* Другим речима

$$Pe^{n-1}(\mathbf{a}) := \mathrm{conv}\left\{(a_{\omega(1)},\, a_{\omega(2)},\, \ldots,\, a_{\omega(n)}) \;:\; \omega \in \mathfrak{S}_n\right\} \subset \mathbb{R}^n,$$

где је $\mathfrak{S}_n$ скуп свих пермутација на скупу $[\,n\,]$. Посебно, ако је $\mathbf{a} = (1,\, 2,\, \ldots,\, n)$ добијамо *стандардни пермутоедар* Pe^{n-1}.

Став 3.1.1 ([30], Proposition 2.5) *Тачка* $(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *се налази у пермутоедру* $Pe^{n-1}(\mathbf{a})$ *ако и само ако је*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{3.1}$$

и ако за сваки прави подскуп $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset [n]$ *важи*

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k} \geq a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}.$$

Следећа теорема детаљније описује стране пермутоедра $Pe^{n-1}(\mathbf{a})$. Уз то, показује и да комбинаторна својства пермутоедра не зависе од избора тачке $\mathbf{a}$.

Теорема 3.1.1 ([30], Proposition 2.6) *Страна димензије* k*, пермутоедра* $Pe^{n-1}(\mathbf{a}) \subseteq \mathbb{R}^n$*, је у* $1{-}1$ *коресподенцији са композицијом* $\mathcal{C} = C_1|C_2|\cdots|C_{n-k}$ *скупа* $[\,n\,]$*. Тачке посматране стране задовољавају једнакост*

$$\sum_{i \in C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_j} x_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_{|C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_j|}, \quad \textit{за} \quad j \in \{1, 2, \ldots, n-k\}.$$

Специјално, темена $u_\omega = (a_{\omega(1)}, a_{\omega(2)}, \ldots, a_{\omega(n)})$ *и* $u_v = (a_{v(1)}, a_{v(2)}, \ldots, a_{v(n)})$*, за* $\omega, v \in \mathfrak{S}_n$*, су повезана ако и само ако је* $v = \omega \circ s_i$ *за неку транспозицију* $s_i := \lfloor i, i+1 \rfloor \in \mathfrak{S}_n$.

На основу претходне теореме закључујемо да је мрежа страна пермутоедра $L(Pe^{n-1}(\mathbf{a}))$ изоморфна посету $Comp_{[n]}$. Посебно, постоји бијекција између максималних страна пермутоедра и правих подскупова скупа $[n]$. Према томе, број максималних страна пермутоедра $Pe^{n-1}(\mathbf{a})$ износи $2^n - 2$.

Како је број транспозиција облика $\lfloor i, i+1 \rfloor$ једнак $n-1$ закључујемо да је свако теме пермутоедра $Pe^{n-1}(\mathbf{a})$ повезано са $n-1$ других темена. Пошто је и димензија пермутоедра једнака $n-1$, следи да је $Pe^{n-1}(\mathbf{a})$ један прост политоп. Поред тога, за два повезана темена v_ω и $v_{\omega\circ s_i}$ важи следећа једнакост

$$v_\omega - v_{\omega\circ s_i} = k_{\omega,i}\left(e_{\omega(i)} - e_{\omega(i+1)}\right), \tag{3.2}$$

где су $e_1, e_2, \ldots, e_n$ стандардни базни вектори у $\mathbb{R}^n$, а $k_{\omega,i}$ позитивни реални бројеви.

Користећи Теорему 3.1.1, закључујемо да је $f-$полином пермутоедра Pe^{n-1} једнак

$$f(Pe^{n-1}, q) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ {n \atop n-k} \right\} (n-k)!\, q^k.$$

Даље, *Ојлеров полином* $A_n(q)$ је дефинисан са

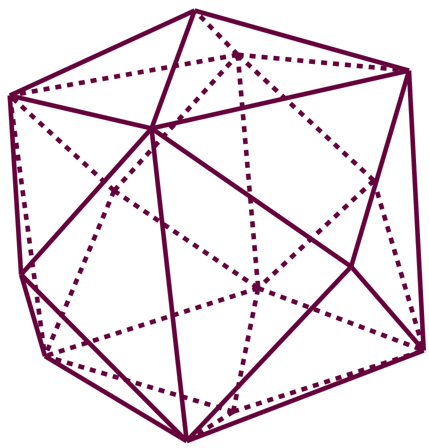
$$A_n(q) := \sum_{\omega\in\mathfrak{S}_n} q^{|\mathrm{Des}(\omega)|},$$

где је $\mathrm{Des}(\omega)$ скуп силаска пермутације $\omega \in \mathfrak{S}_n$. Може се показати (видети Теорему 3.2.1) да се $h-$полином пермутоедра Pe^{n-1} и Ојлеров полином $A_n(q)$ подударају, то јест

$$h(Pe^{n-1}, q) \;=\; A_n(q) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} A(n,k) q^k,$$

где је $A(n,k)$ број пермутација $\omega \in \mathfrak{S}_n$ таквих да је $|\mathrm{Des}(\omega)| = k$.

Нека је $(Pe^{n-1})^*$ дуал политопа Pe^{n-1}. Тада постоји бијекција између темена политопа $(Pe^{n-1})^*$ и правих подскупова скупа $[n]$. Како је пермутоедар прост политоп, следи да је $(Pe^{n-1})^*$ један симплицијалан политоп. Уз то, исти је симплицијално изоморфан првој барицентричној подели симплекса Δ_n.



Слика 3.1: *Дуал пермутоедра* Pe^3

Лепеза аранжмана плетеница

Аранжман плетеница је аранжман хиперравни $\{H_{i,j}\}_{1\leq i<j\leq n}$ у простору $\mathbb{R}^n$ одређених са

$$H_{i,j} := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i = x_j\}.$$

Одговарајуће регионе, које називамо *Вејловим коморама*, означавамо пермутацијама

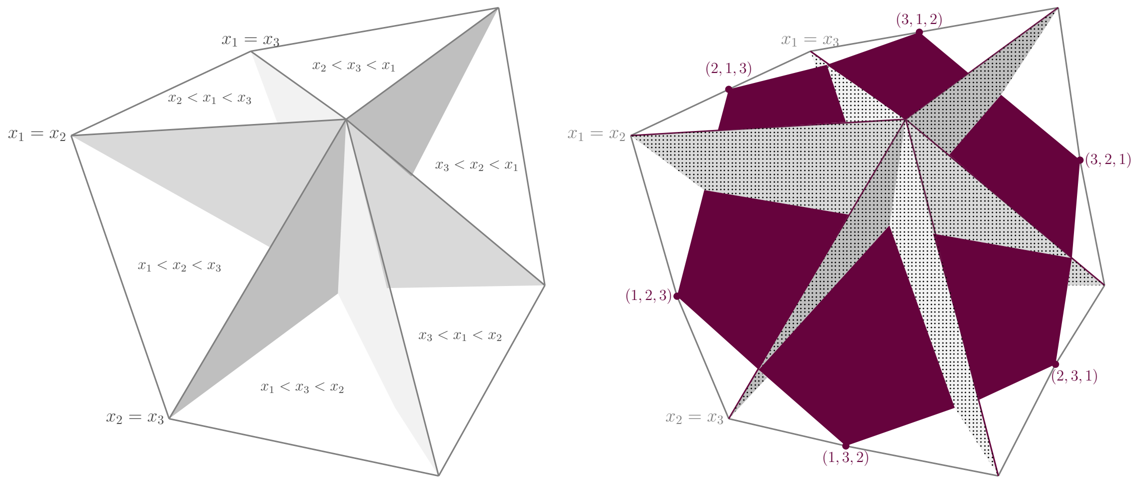
$$C_\omega := \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_{\omega(1)} \leq x_{\omega(2)} \leq \cdots \leq x_{\omega(n)}\right\}.$$

Уопште, аранжман плетеница индукује лепезу простора $\mathbb{R}^n/\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^{n-1}$, коју називамо *лепезом аражмана плетеница.*

Пошто је Pe^{n-1} политоп димензије $n-1$ у простору $\mathbb{R}^n$, на основу једнакости (3.1) закључујемо да је

$$(Pe^{n-1})^\perp = \mathbb{R}(\underbrace{1,\, 1,\, \ldots,\, 1}_{n}).$$

Лепеза аражмана плетеница је и нормална лепеза $\mathcal{N}(Pe^{n-1})/(Pe^{n-1})^\perp$ пермутоедра Pe^{n-1}. У вези са тим, Вејлова комора C_ω представља нормални конус темена v_ω.



Слика 3.2: *Лепеза аранжмана плетеница и пермутоедар Pe^2*

У поглављу 1.2.1 смо показали да постоји изоморфизам између композиција и застава подскупова на скупу $[\,n\,]$. Дакле, свакој застави подскупова $\mathcal{F}$, дужине $|\mathcal{F}|$,

$$\mathcal{F} \ : \ \emptyset =: F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{|\mathcal{F}|} := [\,n\,]$$

можемо придружити одговарајућу страну коју ћемо такође означити са $\mathcal{F}$. На основу Теореме 3.1.1 можемо утврдити да је тада

$$\dim(\mathcal{F}) \ = \ n \ - \ |\mathcal{F}|.$$

Поред тога, нормални конус $C_\mathcal{F}$ стране $\mathcal{F}$ је задат на следећи начин:

- $x_p = x_q$ ако $p, q \in F_{i+1} \setminus F_i$ за неко $i \in \{0, 1, 2, \ldots, |\mathcal{F}| - 1\}$,
- $x_p \leq x_q$ ако $p \in F_i \setminus F_{i-1}$ и $q \in F_{i+1} \setminus F_i$ за неко $i \in \{0, 1, 2, \ldots, |\mathcal{F}| - 1\}$.

И још је димензија посматраног конуса $C_\mathcal{F}$ стране $\mathcal{F}$ једнака

$$\dim(C_\mathcal{F}) \ = \ |\mathcal{F}| \ - \ 1.$$

На сличан начин, $k-$конусу C можемо једнозначно придружити заставу

$$\mathcal{F}_C \, : \, \emptyset =: F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k =: [\, n \,]$$

одређену са

$$p \in F_{i+1} \setminus F_i \quad \text{и} \quad q \in F_{j+1} \setminus F_j,$$

за $0 \leq i < j \leq k$, кад год је $x_p < x_q$ за све тачке из релативне унутрашњости конуса C°.

Мултипликативно инверзни степени редови

Наведимо сада једну врло лепу и занимљиву интерпретацију пермутоедара. Наиме, за степене редове

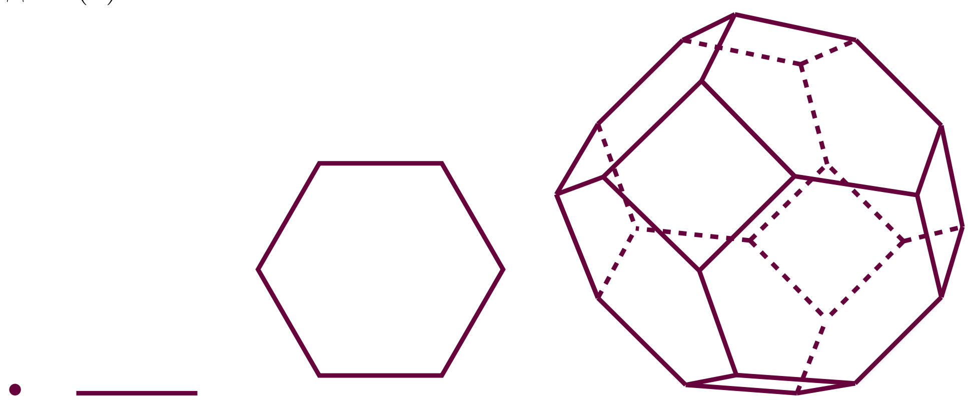
$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \quad \text{и} \quad B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n \frac{x^n}{n!}$$

кажемо да су *мултипликативно инверзни* уколико је $A(x) \cdot B(x) = 1$.

Уз претпоставку да је $a_0 = 1$, прва четири коефицијента реда $B(x)$ износе:

$$\begin{aligned}
b_1 &= -a_1, \\
b_2 &= -a_2 + 2a_1^2, \\
b_3 &= -a_3 + 6a_2a_1 - 6a_1^3, \\
b_4 &= -a_4 + 8a_3a_1 + 6a_2^2 - 36a_2a_1^2 + 24a_1^4.
\end{aligned}$$

Приметимо да, на пример, формула за коефицијент b_3 произилази из страна пермутоедра Pe^2. Прецизније, стране пермутоедра Pe^2 су: један шестоугао $\mathfrak{p}_3$, шест ивица $\mathfrak{p}_2 \times \mathfrak{p}_1$ и шест темена $\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{p}_1$. Слично, стране пермутоедара Pe^3 су: један *пресечени октаедар*[1] $\mathfrak{p}_4$, осам шестоуглова $\mathfrak{p}_3 \times \mathfrak{p}_1$, шест квадрата $\mathfrak{p}_2 \times \mathfrak{p}_2$, тридесет шест ивица $\mathfrak{p}_2 \times \mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{p}_1$ и двадесет четири темена $\mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{p}_1 \times \mathfrak{p}_1$. У вези са тим, произилази и формула за коефицијент b_4 степеног реда $B(x)$.



Слика 3.3: *Пермутоедри* $\mathfrak{p}_1 := Pe^0$, $\mathfrak{p}_2 := Pe^1$, $\mathfrak{p}_3 := Pe^2$ *и* $\mathfrak{p}_4 := Pe^3$

[1] Пермутоедар Pe^3 је у теорији конвексних политопа познат и као *пресечени октаедар*.

Теорема 3.1.2 ([1], Theorem 11.1, Theorem 11.2) *Мултипликативни инверз степеног реда $A(x)$ је степени ред $B(x)$ такав да је*

$$b_n = \sum_{F \in L(\mathfrak{p}_n)} (-1)^{n-\dim F} a_F,$$

где је $\mathfrak{p}_n = Pe^{n-1}$ и $a_F = a_{f_1} a_{f_2} \cdots a_{f_k}$ за сваку страну $F = \mathfrak{p}_{f_1} \times \mathfrak{p}_{f_2} \times \cdots \times \mathfrak{p}_{f_k}$ пермутоедра $\mathfrak{p}_n$. Другим речима,

$$b_n = \sum_{(1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots) \vdash n} (-1)^m \binom{n}{\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m_1}, \underbrace{2,2,\ldots,2}_{m_2}, \ldots} \binom{m}{m_1, m_2, \ldots} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots$$

где је сума по свим партицијама $(1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots) = (\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m_1}, \underbrace{2,2,\ldots,2}_{m_2}, \ldots) \vdash n$ и где је $m = m_1 + m_2 + \cdots$.

3.2 Уопштени пермутоедар

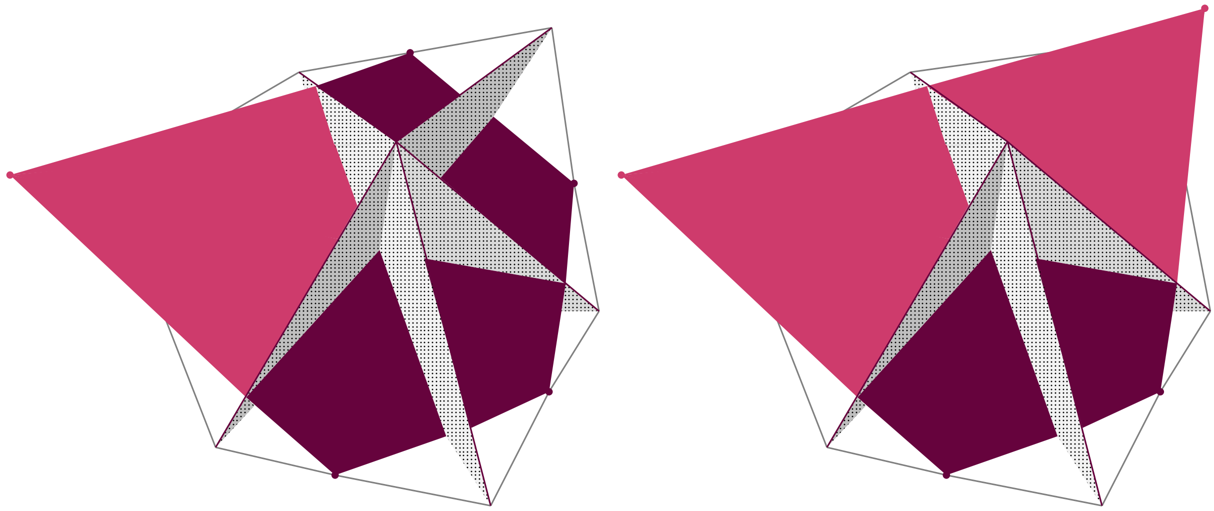
Уколико темена пермутоедра померимо тако да правци ивица остану исти добијамо политоп који називамо *уопштени пермутоедар*. Прецизније,

Дефиниција 3.2.1 За политоп $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ кажемо да је $(n-1)-$димензионални *уопштени пермутоедар* уколико је нормална лепеза пермутоедра Pe^{n-1} финија од нормалне лепезе политопа Q.

Другим речима, уопштени пермутоедар Q је конвексни омотач $n!$ тачака $v_\omega \in \mathbb{R}^n$ тако да за сваку пермутацију $\omega \in \mathfrak{S}_n$ и транспозицију $s_i := \lfloor i, i+1 \rfloor$ важи

$$v_\omega - v_{\omega s_i} = k_{\omega,i} \cdot (e_{\omega(i)} - e_{\omega(i+1)}), \tag{3.3}$$

где су $k_{\omega,i}$ ненегативни бројеви, а e_1, e_2, ..., e_n стандардни базни вектори, уз напомену да је у горе наведеној формули, за разлику од (3.2), допуштено да $k_{\omega,i}$ узима вредност нула.



Слика 3.4: *Уопштени пермутоедри и одговарајуће нормалне лепезе*

3.2.1 Конуси плетеница

Конусе који се налазе у нормалној лепези уопштеног пермутоедра називамо *конусима плетеница*. Даље, пошто је нормална лепеза уопштеног пермутоедра грубља од лепезе аранжмана плетеница, конуси плетеница се могу приказати као уније Вејлових комора или страна Вејлових комора. Као такви, они су задати неједнакостима $x_i - x_j \geq 0$.

Предуређење

Нека је R једна бинарна, рефлексивна и транзитивна релација на коначном скупу S. Тада, за пар (S, R) кажемо да је *предуређење*. Уколико не постоје елементи $x, y \in S$ такви да $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$, пар (S, R) називамо и *посетом* на скупу S. Уз то, посет (S, R) је *повезан* ако је повезан граф чија су темена елементи скупа S, а ивице спајају оне елементе који су у релацији R.

Нека су R_1 и R_2 две бинарне релације на скупу S. Тада је и њихова *унија*, у ознаци $R_1 \cup R_2$, бинарна релација на скупу S (бинарне релације су подскупови скупа $S \times S$). Али, ако су R_1 и R_2 два предуређења на скупу S, то не значи да је и $R_1 \cup R_2$ једно предуређење. С друге стране, *транзитивно затворење* $\overline{R_1 \cup R_2}$, јесте предуређење на скупу S.

За предуређење (S, R_2) кажемо да је *контракција* предуређења (S, R_1) ако постоји бинарна релација $R \subseteq R_1$ таква да је

$$R_2 = \overline{R_1 \cup R^{\mathrm{op}}},$$

где је R^{op} дуал посета R. Ако је $\overline{R_1 \cup R_2}$ контракција предуређења R_1 и предуређења R_2, кажемо да се предуређења R_1 и R_2 *ваљано секу.* У вези с тим, колекцију различитих посета на скупу S који се по паровима ваљано секу и чија линеарна раширења покривају сва линеарна уређења на скупу S називамо *комплетна лепеза посета* на скупу S.

Бијекција између предуређења и конуса плетеница

Нека је R једно предуређење на скупу $[n]$. Дефинишимо конус $C_R \subseteq \mathbb{R}^n$ са

$$x_i \leq x_j \quad \text{ако и само ако} \quad (i, j) \in R.$$

И обрнуто, из произвољног конуса C, који се налази у лепези аранжмана плетеница, можемо конструисати предуређење R_C на следећи начин:

$$(i, j) \in R_C \quad \text{ако и само ако} \quad x_i \leq x_j \ \text{ за све тачке из } C.$$

Горе наведена придруживања представљају бијекцију између предуређења на скупу $[\,n\,]$ и конуса плетеница у простору $\mathbb{R}^n$. Посебно, важи следећи став.

Став 3.2.1 ([31], Proposition 3.5) *Уколико конуси плетеница C и C' одговарају неким предуређењима R и R', тада важе следећа тврђења:*

1. *Предуређене $\overline{R \cup R'}$ одговара конусу $C \cap C'$.*
2. *Предуређене R је контракција посета R' ако и само ако је C страна C'.*
3. *Предуређене R је посет ако и само ако је* $\dim(C) = n - 1$.
4. *Предуређене R је повезан ако и само ако је конус C тачкаст.*
5. *Предуређене R је дрво–посет*[2] *ако и само ако је* $\dim(C) = n - 1$ *и уколико је C симплицијални конус.*
6. *Конус C садржи Вејлову комору C_ω, за $\omega \in \mathfrak{S}_n$, ако и само ако је R посет чије је линеарно раширење ω.*

На основу претходног става, конусу C димензије $n-1$ одговара један посет R, па исти можемо описати на следећи начин

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i \leq x_j \ \text{ за } \ (i,j) \in R\} = \bigcup_{\omega \in \mathcal{L}(R)} C_\omega,$$

где је $\mathcal{L}(R)$ скуп линеарних раширења посета R.

Последица 3.2.1 ([31], Corollary 3.7) *Нека је Q један уопштени пермутоедар. Тада је колекција посета темена $\{R_v \ : \ v \in \mathrm{vert}(Q)\}$ лепеза посета.*

[2] Посет на скупу S чији је Хасеов дијаграм разапињујуће дрво на S називамо *дрво–посет*.

$h-$полином простог уопштеног пермутоедра

Пре свега, уколико је уопштени пермутоедар Q прост политоп, колекција

$$\{R_v \,:\, v \in \mathrm{vert}(Q)\}$$

је лепеза дрво−посета. У том случају, са $\mathrm{Des}(R_v)$ означимо скуп уређених парова $(x, y) \in R_v$ за које не постоји елемент z такав да $(x, z) \in R_v$ и $(z, y) \in R_v$ и за које је још $x >_{\mathbb{Z}} y$. Дефинишимо и $\mathrm{des}(R_v) := |\mathrm{Des}(R_v)|$.

Теорема 3.2.1 ([31], Theorem 4.2) *Нека је Q прост уопштени пермутоедар са посетом темена $\{R_v \,:\, v \in \mathrm{vert}(Q)\}$. Тада је*

$$h(Q,\, q) \;\;=\; \sum_{v\in\mathrm{vert}(Q)} q^{\,\mathrm{des}(R_v)}.$$

То посебно значи да је $f-$полином уопштеног пермутоедра Q једнак

$$f(Q,\, q) \;\;=\; \sum_{v\in\mathrm{vert}(Q)} (q-1)^{\,\mathrm{des}(R_v)}.$$

3.2.2 Тежински квазисиметрични енумератор

Пошто је нормална лепеза $\mathcal{N}(Q)$ уопштеног пермутоедра Q грубља од нормалне лепезе $\mathcal{N}(Pe^{n-1})$, дефинишимо пресликавање

$$\pi_Q \;:\; L(Pe^{n-1}) \;\rightarrow\; L(Q) \qquad \text{са} \qquad \pi_Q(\mathcal{F}) := G$$

ако и само ако је $C^\circ_{\mathcal{F}}$ садржано у C°_G, то јест ако и само ако је релативна унутрашњост нормалног конуса стране $\mathcal{F} \in L(Pe^{n-1})$ садржана у релативној унутрашњости нормалног конуса стране $G \in L(Q)$.

Став 3.2.2 ([17], Proposition 2.3) *Важи следећа једнакост*

$$\sum_{\mathcal{F}\,:\,\pi_Q(\mathcal{F})=G} (-1)^{|\mathcal{F}|} = (-1)^{n-1-\dim(G)}.$$

Доказ. Посматрајмо колекцију страна $\pi_Q^{-1}(G) = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_t\}$ политопа Pe^{n-1}. Тада је $C^\circ_G = \bigcup_{i=1}^t C^\circ_{\mathcal{F}_i}$ хомеоморфно $\mathbb{R}^{n-1-\dim(G)}$. Нека је f_i, за $1 \le i \le n-1-\dim(G)$, број $i-$димензионалних конуса садржаних у C°_G. Принципом укључења−искључења, добијамо тражену једнакост

$$f_{n-1-\dim(G)} - f_{n-1-\dim(G)-1} + \cdots + (-1)^{n-1-\dim(G)} f_0 = 1. \qquad Q.E.D.$$

Дефиниција 3.2.2 Нека је $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ уопштени пермутоедар. Пресликавање

$$\mathrm{rk}_Q : L(Pe^{n-1}) \rightarrow \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

дефинисано са

$$\mathrm{rk}_Q(\mathcal{F}) := \dim(\pi_Q(\mathcal{F}))$$

се назива *$Q-$ранг уопштеног пермутоедра Q.*

За вектор позитивних целобројних тачака $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, *тежинска функција* ω^* означава пресликавање $\omega^* : Q \to \mathbb{R}$ одређено са

$$\omega^*(u) := \langle \omega, u \rangle, \quad \text{за} \quad u \in Q.$$

Утврдимо да ω^* максимизира страну $G_\omega \in L(Q)$ која је јединствено одређена условом да се вектор ω налази у релативној унутрашњости нормалног конуса $C_{G_\omega}^\circ$. Посебно, за тежинску функцију ω^* кажемо да је $Q-$*генеричка* ако је G_ω једно теме политопа Q.

У случају када је $Q = Pe^{n-1}$ вектор $\omega \in \mathbb{Z}_+^n$ дефинише јединствену страну $\mathcal{F}$ ако и само ако $\omega \in C_{\mathcal{F}}^\circ$. У вези с тим, нека је $M_{\mathcal{F}}$ *енумератор тачака* $\omega \in \mathbb{Z}_+^n$ које се налазе у релативној унутрашњости конуса $C_{\mathcal{F}}$, то јест

$$M_{\mathcal{F}} := \sum_{\omega \in \mathbb{Z}_+^n \cap C_{\mathcal{F}}^\circ} x_{\omega_1} x_{\omega_2} \cdots x_{\omega_n}. \tag{3.4}$$

Тада је $M_{\mathcal{F}}$ једна мономијална квазисиметрична функција индексирана композицијом

$$\mathrm{type}(\mathcal{F}) := (|F_1| - |F_0|,\ |F_2| - |F_1|,\ \ldots,\ |F_{|\mathcal{F}|}| - |F_{|\mathcal{F}|-1}|) \models n.$$

Дефиниција 3.2.3 За уопштени пермутоедар $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ *тежински квазисиметрични енумератор* $F_q(Q)$ се дефинише на следећи начин

$$F_q(Q) := \sum_{\omega \in \mathbb{Z}_+^n} q^{\mathrm{rk}_Q(\mathcal{F}_\omega)} x_{\omega_1} x_{\omega_2} \cdots x_{\omega_n}.$$

Користећи (3.4) енумератор $F_q(Q)$ се може записати у облику

$$F_q(Q) = \sum_{\mathcal{F} \in L(Pe^{n-1})} q^{\mathrm{rk}_Q(\mathcal{F})} M_{\mathcal{F}}. \tag{3.5}$$

На основу дефиниције пресликавања π_Q, следи да је

$$\sum_{\omega \in \mathbb{Z}_+^n \cap C_G^\circ} x_{\omega_1} x_{\omega_2} \cdots x_{\omega_n} = \sum_{\mathcal{F} \,:\, \pi_Q(\mathcal{F}) = G} M_{\mathcal{F}},$$

па се (3.5) трансформише у

$$F_q(Q) = \sum_{G \in L(Q)} q^{\dim(G)} \sum_{\mathcal{F} \,:\, \pi_Q(\mathcal{F}) = G} M_{\mathrm{type}(\mathcal{F})}. \tag{3.6}$$

Теорема 3.2.2 ([17], Theorem 4.4) *Нека је $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ уопштени пермутоедар димензије $n-1$. Тада је $f-$полином политопа Q одређен са*

$$f(Q, q) = (-1)^n \mathbf{ps}^1(F_{-q}(Q))(-1).$$

Доказ. Како је $\mathbf{ps}^1(M_{\mathcal{F}})(-1) = (-1)^{|\mathcal{F}|+1}$, према (3.6) имамо

$$(-1)^n \mathbf{ps}^1(F_{-q}(Q))(-1) = \sum_{G \in L(Q)} q^{\dim(G)} \sum_{\mathcal{F} \,:\, \pi_Q(\mathcal{F}) = G} (-1)^{|\mathcal{F}|+1+n+\dim(G)}.$$

Применом Става 3.2.2 добијамо тражену једнакост. *Q.E.D.*

Антипод тежинског квазисиметричног енумератора

Застави $\mathcal{F} : \emptyset =: F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k := [\,n\,]$ придружимо *дуалну заставу* $\mathcal{F}^{\mathrm{op}}$ на истом скупу $[\,n\,]$ одређену са

$$\mathcal{F}^{\mathrm{op}} \ : \emptyset = ([\,n\,] \setminus F_k) \subset ([\,n\,] \setminus F_{k-1}) \subset \cdots \subset ([\,n\,] \setminus F_0) = [\,n\,].$$

Приметимо да је одговарајућа композиција заставе $\mathcal{F}^{\mathrm{op}}$ обрнута композиција заставе $\mathcal{F}$,

$$\mathrm{type}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{rev}(\mathrm{type}(\mathcal{F})).$$

За конус $C_{\mathcal{F}^{\mathrm{op}}}$ важи

$$C_{\mathcal{F}^{\mathrm{op}}} \ = \ -C_{\mathcal{F}}, \tag{3.7}$$

где $-C_{\mathcal{F}}$ означава нормални конус који садржи векторе $-z$ такве да $z \in C_{\mathcal{F}}$. Напоменимо да нормални конус стране $\mathcal{F}$ садржи и векторе чије координате нису позитивне и целобројне, али да тежински квазисиметрични енумератор F_q разматра само оне векторе из конуса $C_{\mathcal{F}}$ чије су координате и позитивне и целобројне.

Лема 3.2.1 ([17], Lemma 4.5) *Важи следећа једнакост*

$$S(M_{\mathcal{F}}) = (-1)^{|\mathcal{F}|+1} \sum_{\mathcal{G} \preceq \mathcal{F}^{\mathrm{op}}} M_{\mathcal{G}}. \tag{3.8}$$

Претходну једнакост можемо записати у следећем облику

$$(-1)^{|\mathcal{F}|+1} S(M_{\mathcal{F}}) \ = \sum_{\omega \in \mathbb{Z}_+^n \cap C^{\circ}_{\mathcal{F}^{\mathrm{op}}}} x_{\omega_1} x_{\omega_2} \cdots x_{\omega_n},$$

одакле произилази наредна теорема.

Теорема 3.2.3 ([17], Theorem 4.6) *Нека је Q један $(n-1)-$димензионални уопштени пермутоедар. Антипод S делује на тежински квазисиметрични енумератор $F_q(Q)$ на следећи начин:*

$$S(F_q(Q)) = (-1)^n \sum_{\mathcal{G}} f(\pi_Q(\mathcal{G}^{\mathrm{op}}), -q) M_{\mathcal{G}},$$

где је сума по свим заставама подскупова $\mathcal{G}$ скупа $[\,n\,]$ и $f(\pi_Q(\mathcal{G}^{\mathrm{op}}), -q)$ је $f-$полином стране $\pi_Q(\mathcal{G}^{\mathrm{op}})$.

Последица 3.2.2 ([17], Corollary 4.7) *За уопштени пермутоедар Q важи:*

$$\mathbf{ps}^1(S(F_q(Q)))(-1) = q^{\dim(Q)}.$$

$Q-$генерички тежински квазисиметрични енумератор

Подсетимо се да је тежинска функција ω^* једна $Q-$генеричка функција уколико је G_ω теме политопа Q. Тиме је дефинисан *$Q-$генерички квазисиметрични енумератор*

$$F(Q) \quad := \sum_{\substack{\omega \in \mathbb{Z}_+^n \\ \omega \text{ је } Q-\text{генеричка}}} x_{\omega_1} x_{\omega_2} \cdots x_{\omega_n}.$$

Приметимо да је $F_q(Q)$ уопштење енумератора $F(Q)$, као и да се $Q-$генерички енумератор добија у случају када је $q = 0$, то јест

$$F(Q) \; = \; F_0(Q).$$

Теорема 3.2.4 ([5] Theorem 9.2) *Нека је $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ уопштени пермутоедар. Тада важе следећа тврђења:*

1. *Функција $F(Q)$ је квазисиметрична функција.*

2. *Нека је R_v посет који одговара темену $v \in \mathrm{vert}(Q)$. Тада је*

$$F(Q) \;\; = \sum_{v \in \mathrm{vert}(Q)} F_{R_v}(\mathbf{x}),$$

   где је F_{R_v} енумератор R_v-партиција.

3. *За коефицијенте c_α такве да је $F(Q) = \sum_\alpha c_\alpha L_\alpha$ важи*

   (а) *c_α су ненегатвни бројеви такви да је $\sum_\alpha c_\alpha = n!$,*

   (б) *коефицијент $c_{(1,1,\ldots,1)}$ одоговара броју темена политопа Q.*

4. *Антипод $S \in \mathcal{Q}Sym$ задовољава*

$$S(F(Q)) = (-1)^n F^*(Q),$$

   где је $F^*(Q) = \sum_\omega |\{\omega \text{ минимизира теме од } Q\}| \cdot \mathbf{x}_\omega$.

У вези са последњом теоремом, напоменимо да је R_v транзитивно затворење бинарне релације дефинисане на скупу $[\,n\,]$ на следећи начин:

$$(i,j) \in R_v \quad \text{ако и само ако} \quad v_1 - v_2 = e_i - e_j,$$

за неку ивицу $\{v_1, v_2\}$ уопштеног пермутоедра Q.

3.3 Хиперграфички политопи

3.3.1 Хиперграфички политоп

Хиперграф H на скупу темена $[n]$ је колекција непразних подскупова $H \subseteq [n]$ које називамо *хиперивицама.* Претпоставимо да за свако $i \in [n]$ скуп $\{i\} \in \mathsf{H}$. Даље, за сваки скуп $H \in \mathsf{H}$ дефинишимо симплекс

$$\Delta_H := \mathrm{conv}\{e_i \ : \ i \in H\},$$

где су $e_1, e_2, \ldots, e_n$ стандардни базни вектори у $\mathbb{R}^n$. Приметимо да је Δ_H једна страна симплекса Δ_n. Минковски сума симплекса

$$Q_{\mathsf{H}} := \sum_{H \in \mathsf{H}} \Delta_H$$

је уопштени пермутоедар који зовемо *хиперграфички политоп* (видети [4]).

Пример 3.3.1 Нека је H фамилија свих непразних подскупова скупа $[n]$. Одговарајући хипеграфички политоп је пермутоедар $Q_{\mathsf{H}} = Pe^{n-1}(1,\, 2,\, 2^2,\, \ldots,\, 2^{n-1})$. Ако разматрамо само једночлане и двочлане подскупове скупа $[n]$ добијамо стандардни пермутоедар $Pe^{n-1}(1,\, 2,\, 3,\, \ldots,\, n)$. $\square$

Пример 3.3.2 Нека је H фамилија свих једночланих подскупова и скупа $[n]$. Тада Q_{H} одговара симплексу Δ_n транслираном за вектор $e_1 + e_2 + \cdots + e_n$. $\square$

Кажемо да је хиперграф H *повезан* уколико се не може приказати као дисјунткна унија хиперграфова H_1 и H_2 тако да за свако $H \in \mathsf{H}$ или $H \in \mathsf{H}_1$ или $H \in \mathsf{H}_2$. У супротном, кажемо да је хиперграф H *неповезан* и тада постоји декомпозиција на $c(\mathsf{H})$ повезаних хиперграфова

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}_1 \sqcup \mathsf{H}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathsf{H}_{c(\mathsf{H})},$$

које називамо *повезане компоненте* од H. Уз то, важи и следећи став.

Став 3.3.1 ([6] Proposition 1.5.2) *Уколико је* $\mathsf{H} = \mathsf{H}_1 \sqcup \mathsf{H}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathsf{H}_{c(\mathsf{H})}$ *декомпозиција хиперграфа* H *на повезане компоненте тада је*

$$Q_{\mathsf{H}} = Q_{\mathsf{H}_1} \times Q_{\mathsf{H}_2} \times \cdots \times Q_{\mathsf{H}_k} \quad \text{\textit{и}} \quad \dim(Q_{\mathsf{H}}) = n - c(\mathsf{H}).$$

Посебно, уколико је H *један повезан хиперграф на скупу* $[n]$*, важи* $\dim(Q_{\mathsf{H}}) = n - 1$.

Даље, за произвољан подскуп $S \subseteq [n]$ дефинишимо *рестрикцију хиперграфа* H *на скуп* S и *контракцију хиперграфа* H *по скупу* S са

$$\mathsf{H}|_S := \{H \in \mathsf{H} \ : \ H \subseteq S\} \quad \text{и} \quad \mathsf{H}/S := \{H \setminus S \ : \ H \in \mathsf{H}\}.$$

Став 3.3.2 ([6], Propositon 1.5.9) *Хиперграфички политоп* Q_{H} *се налази у пресеку хиперравни* H_{H} *и затворених полупростора* H_S *обележених правим подксуповима* S *скупа* $[n]$

$$H_{\mathsf{H}} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} x_i = |\mathsf{H}|\right\} \quad \text{\textit{и}} \quad H_{S,\geq} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i \in S} x_i \geq |\mathsf{H}|_S|\right\}.$$

На основу претходног става закључујемо да се политоп Q_{H} може добити пресецањем $n-$симплекса

$$H_{\mathsf{H}} \cap \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \ : \ x_i \geq 1 \quad \text{за} \quad 1 \leq i \leq n\}$$

хиперравнима $H_{S,=}$ које одговарају подскуповима $S \subset [\,n\,]$ који садрже бар два елемента. Напоменимо да то не значи да свака хиперраван $H_{S,=}$ индукује максималну страну хиперграфичког политопа Q_{H}.

Пример 3.3.3 Нека је Γ повезани граф на скупу темена $[\,n\,]$ са скупом ивица E. Ако је $\mathsf{H}(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^{n}\{\{i\}\} \cup E$ тада важи

$$Q_{\mathsf{H}(\Gamma)} \;\; = \;\; \sum_{i=1}^{n}\Delta_i \;\; + \sum_{\{i,j\}\in E(\Gamma)} \Delta_{i,j}.$$

Према (2.1) политоп $Q_{\mathsf{H}(\Gamma)}$ је један зонотоп. О истом ће бити више у поглављу 3.3.3. $\square$

Дефиниција 3.3.1 За повезани хиперграф H на скупу темена $[\,n\,]$, $\mathsf{H}-$ранг је одређен са

$$\mathrm{rk}_{\mathsf{H}}(\mathcal{F}) \;:=\; \dim(\pi_{Q_{\mathsf{H}}}(\mathcal{F})).$$

На основу претходне дефиниције следи да је тежински квазисиметрични енумератор хиперграфичког политопа одређен са

$$F_q(Q_{\mathsf{H}}) \quad = \sum_{\mathcal{F}\in L(Pe^{n-1})} q^{\mathrm{rk}_{\mathsf{H}}(\mathcal{F})} M_{\mathcal{F}}. \tag{3.9}$$

Пример 3.3.4 *Питмен–Стенлијев политоп* PS^{n-1} јесте хиперграфичи политоп који одговара хиперграфу $\mathsf{H} = \{\{1\},\{2\},[2],\{3\},[3],\ldots,\{n\},[n]\}$. Даље, застави подскупова $\mathcal{F}\,:\,\emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = [\,n\,]$ придружимо заставу

$$\widetilde{\mathcal{F}}\,:\,\emptyset =: F_0 \subset F_1\setminus\{n\} \subset F_2\setminus\{n\} \subset \cdots \subset F_m\setminus\{n\} := [n-1].$$

Утврдимо да је

$$\mathrm{rk}_{PS^{n-1}}(\mathcal{F}) = \begin{cases} \mathrm{rk}_{PS^{n-2}}(\widetilde{\mathcal{F}}) + 1, & \text{ако } n \in F_m,\\ \mathrm{rk}_{PS^{n-2}}(\widetilde{\mathcal{F}}), & \text{иначе,}\end{cases}$$

одакле произилази следећа формула рекурзије

$$F_q(PS^{n-1}) = F_q(PS^{n-2})M_1 + (q-1)\left(F_q(PS^{n-2})\right)_{+1}. \tag{3.10}$$

Пресликавање $_{+1} : \mathcal{Q}Sym \to \mathcal{Q}Sym$ је на мономијалној бази задато са

$$\left(M_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},\alpha_k)}\right)_{+1} \;:=\; M_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},\alpha_k+1)}.$$

Применом главне специјализације $\mathbf{ps}^1$ на једнакост (3.10) добијамо

$$f(PS^{n-1},q) \;=\; (2+q)f(PS^{n-2},q),$$

па је $f(PS^{n-1},q) = (2+q)^{n-1}$. Према томе, PS^{n-1} има исти $f-$полином као и хиперкоцка $\square_{n-1}$. Важи и општије, политопи PS^{n-1} и $\square_{n-1}$ су комбинаторно еквивалентани (видети [30], Proposition 8.10). $\square$

3.3.2 Хопфова алгебра хиперграфова

За хиперграфове H_1 и H_2 дефинисане на коначним скуповима $[\,n_1\,]$ и $[\,n_2\,]$ кажемо да су *изоморфни* ако постоји бијекција $f : [\,n_1\,] \to [\,n_2\,]$ таква да

$$H \in \mathsf{H}_1 \quad \text{ако и само ако} \quad f(H) \in \mathsf{H}_2.$$

Са $\mathcal{HG}$ означимо векторски простор над пољем $\mathbb{K}$ који садржи све линеарне комбинације класа изоморфних хиперграфова. Множење и комножење су дефинисани са

$$[\mathsf{H}_1] \cdot [\mathsf{H}_2] := [\mathsf{H}_1 \sqcup \mathsf{H}_2] \quad \text{и} \quad \Delta([\mathsf{H}]) := \sum_{S \subset [n]} [\mathsf{H}|_S] \otimes [\mathsf{H}/S].$$

Приметимо да је

$$\mathcal{HG} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{HG}_n,$$

где је $\mathcal{HG}_n$ потпростор разапет класама изоморфних хиперграфова на скупу $[\,n\,]$. Према томе, $\mathcal{HG}$ је једна градуисана, комутативна и некокомутативна Хопфова алгебра. Пример Хопфове алгебре хиперграфова који је кокомутативан се може пронаћи у [19].

Нека је H хиперграф на скупу $[\,n\,]$ и $\mathcal{F} : \emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = [\,n\,]$ једна застава подскупова. Дефинишимо хиперграф $\mathsf{H}/\mathcal{F}$ на следећи начин

$$\mathsf{H}/\mathcal{F} = \bigsqcup_{i=1}^{k} \mathsf{H}|_{F_i}/F_{i-1}.$$

Надаље, посматрајмо пресликавање $\zeta_q : \mathcal{HG} \to \mathbb{K}[\,q\,]$ које је одређено са

$$\zeta_q([\mathsf{H}]) := q^{\mathrm{rk}(\mathsf{H})}, \qquad \text{где је} \qquad \mathrm{rk}(\mathsf{H}) = n - c(\mathsf{H}).$$

На основу Теореме 1.3.1, постоји јединствени морфизам Хопфових алгебри

$$\Psi_q : (\mathcal{HG}, \zeta_q) \to (\mathcal{QS}ym, \zeta_{\mathcal{Q}}),$$

који је на мономијалној бази задат са

$$\Psi_q([\mathsf{H}]) = \sum_{\alpha \models n} (\zeta_q)_\alpha(\mathsf{H}) M_\alpha. \tag{3.11}$$

Коефицијент $(\zeta_q)_\alpha(\mathsf{H})$ који одговара квазисиметричној функцији M_α је једнак

$$(\zeta_q)_\alpha(\mathsf{H}) = \sum_{\mathcal{F} : \mathrm{type}(\mathcal{F}) = \alpha} \prod_{i=1}^{k} q^{\mathrm{rk}(\mathsf{H}|_{F_i}/F_{i-1})} = \sum_{\mathcal{F} : \mathrm{type}(\mathcal{F}) = \alpha} q^{\mathrm{rk}(\mathsf{H}/\mathcal{F})},$$

где је

$$\mathrm{rk}(\mathsf{H}/\mathcal{F}) := \sum_{i=1}^{k} \mathrm{rk}(\mathsf{H}|_{F_i}/F_{i-1}) = n - \sum_{i=1}^{k} c(\mathsf{H}|_{F_i}/F_{i-1}).$$

На крају, једнакост (3.11) се може записати у облику

$$\Psi_q([\mathsf{H}]) = \sum_{\mathcal{F} \in L(Pe^{n-1})} q^{\mathrm{rk}(\mathsf{H}/\mathcal{F})} M_{\mathcal{F}}. \tag{3.12}$$

Теорема 3.3.1 ([28], Theorem 4.1) *Нека је* H *хиперграф и* Q_{H} *одговарајући хиперграфички политоп. Тежински квазисиметрични енумератор* F_q *се подудара са јединственим морфизмом Хопфових алгебри* Ψ_q, *то јест*

$$F_q(Q_{\mathsf{H}}) \;=\; \Psi_q([\mathsf{H}]).$$

Доказ. Довољно је показати да за произвољну заставу подскупова $\mathcal{F}$ важи

$$\mathrm{rk}_{\mathsf{H}}(\mathcal{F}) \;=\; \mathrm{rk}(\mathsf{H}/\mathcal{F}). \tag{3.13}$$

Нека је G страна хиперграфичког политопа Q_{H} која је максимизирана тежинском функцијом ω^*, за неко $\omega \in C^\circ_{\mathcal{F}}$. Како је Q_{H} Миковски сума симплекса Δ_H за $H \in \mathsf{H}$, то је и страна G, такође, Минковски сума облика

$$G \;=\; \sum_{H\in\mathsf{H}} (\Delta_H)_{\mathcal{F}}$$

где је $(\Delta_H)_{\mathcal{F}}$ јединствена страна симплекса Δ_H која је максимизирана функцијом ω^*. Нека за $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ важи $\omega_i = j$ ако $i \in F_j \setminus F_{j-1}$. Тада $\omega \in C^\circ_{\mathcal{F}}$ и још је

$$(\Delta_H)_{\mathcal{F}} \;=\; \Delta_{H\setminus F_{j-1}}$$

где је $j = \min\{k \;:\; H \subset F_k\}$. Даље, са H_j означимо колекцију подскупова $H \in \mathsf{H}$ за које важи $j = \min\{k \;:\; H \subset F_k\}$. Према томе, страну G можемо приказати у облику

$$G = \sum_{j=1}^{m} \sum_{H\in\mathsf{H}_j} \Delta_{H\setminus F_{j-1}},$$

чиме је показано да страна G одговара хиперграфичком политопу $G = Q_{\mathsf{H}/\mathcal{F}}$. На крају, из (3.3.2) следи да је $\dim P_{\mathsf{H}/\mathcal{F}} = \mathrm{rk}(\mathsf{H}/\mathcal{F})$, чиме је показана једнакост (3.13).

Q.E.D.

Последица 3.3.1 ([28], Corollary 4.3) $f-$*полином политопа* Q_{H} *је одређен са*

$$f(Q_{\mathsf{H}}, q) \;=\; (-1)^n \mathbf{ps}^1(\Psi_{-q}([\mathsf{H}]))(-1).$$

Напомена 3.3.1 Симплицијални комплекси генеришу Хопфову подалгебру $\mathcal{SC}$ Хопфове алгебре $\mathcal{HG}$. Хиперграфички политопи Q_K и $Q_{K^{(1)}}$, где је $K^{(1)}$ $1-$скелетон симплицијаног комплекса K, су *нормално еквивалентни*[3] (видети [1], Lemma 21.2), па важи

$$F_q(Q_K) \;=\; F_q\left(Q_{K^{(1)}}\right).$$

3.3.3 Графички зонотоп

Подсетимо се да је зонотоп $Z(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ политоп који се може приказати као Минковски сума политопа димензије једнаке јединици. Прецизније,

$$Z(A) = [-a_1, a_1] + [-a_2, a_2] + \cdots + [-a_d, a_d].$$

Уз то, исти можемо добити и пројекцијом хиперкоцке $\square_d$ при линеарном пресликавању $x \mapsto A \cdot x$, где је A матрица чије су колоне вектори $a_1, a_2, \ldots, a_d$. Посебно, зонотоп $Z(A)$ је симетричан у односу на центар и све његове стране су такође зонотопи.

[3] Политопи су *нормлано еквивалентни* ако имају исту нормалну лепезу.

Подсетимо се да аранжман хиперравни $\mathcal{A} = \{H_{a_1}, H_{a_2}, \ldots, H_{a_d}\}$, које су задате са

$$H_{a_i} := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x, a_i \rangle = 0\},$$

одређује лепезу простора $\mathbb{R}^n$ која одговара нормалној лепези $\mathcal{N}(Z(A))$.

Дефиниција 3.3.2 Нека је Γ повезани граф на n темена. *Графички зонотоп*, у ознаци Z_Γ, је зонотоп дефинисан са

$$Z_\Gamma := Z(\{e_i - e_j \ : \ i < j \ \text{ и } \ \{i, j\} \text{ је ивица графа } \Gamma\}),$$

где су $e_1, e_2, \ldots, e_n$ стандардни базни вектори у простору $\mathbb{R}^n$.

Одговарајући аранжман хиперравни

$$\mathcal{A}_\Gamma := \{x_i - x_j = 0 \ : \ i < j \ \text{ и } \ \{i, j\} \text{ је ивица графа } \Gamma\}$$

се назива *графички аранжман* и одређује нормлану лепезу $\mathcal{N}(Z_\Gamma)$ графичког зонотопа. Приметимо да је Z_Γ хиперграфички политоп $Q_{\mathsf{H}(\Gamma)}$ који одговара хиперграфу описаном у Примеру 3.3.3.

Пример 3.3.5 Нека је K_n комплетан граф на n темена. Тада је графички зонотоп Z_{K_n}, заправо, стандардни пермутоедар Pe^{n-1}. □

Дефинишимо релацију $\sim$ на скупу ивица графа Γ са $e_1 \sim e_2$ ако и само ако постоји цикл графа Γ који уједно садржи и ивицу e_1 и ивицу e_2. Тада је $\sim$ једна релација еквиваленције, чије одговарајуће класе називамо и *биповезаним компонентама* графа Γ.

Став 3.3.3 ([31], Proposition 5.2) *Графички зонотоп Z_Γ, који одговара графу Γ на скупу темена $[n]$, је прост политоп ако и само ако је свака биповезана компонента графа Γ скуп ивица комплетног подграфа неког подскупа скупа темена $[n]$. Посебно, ако су $V_1, V_2, \ldots, V_k \subseteq [n]$ скупови темена комплетних графова, тада је Z_Γ изоморфан производу стандардних пермутоедара димензија $|V_i| - 1$, за $1 \leq i \leq k$.*

Специјално, $f-$полином, односно $h-$полином, простог графичког зонотопа Z_Γ је једнак производу одговарајућих $f-$полинома, односно $h-$полинома, стандардних пермутоедара чије су димензије $|V_i| - 1$, за $1 \leq i \leq k$.

Пример 3.3.6 Посматрајмо граф Γ који је задат на скупу темена $\{1, 2, 3, 4\}$ и скупом ивица $E = \{12, 13, 23, 34\}$. На основу претходног става и Примера 3.3.5 закључујемо да је $Z(\Gamma)$ једна шестострана призма. □

Хопфова алгебра графова

Дефиниција 3.3.3 Нека је $\Gamma = ([n], E)$ један граф. Пресликавање $f : [n] \to \mathbb{N}$ називамо *бојење графа* Γ. При том, за исто кажемо да је *право бојење графа* Γ уколико је $f(v_1) \neq f(v_2)$ за све ивице $\{v_1, v_2\} \in E$.

Надаље, са $\chi(\Gamma, m)$, где је $m \in \mathbb{N}$, означимо број правих бојења $f : [n] \to [m]$ графа Γ. Сходно томе, полином $\chi(\Gamma, m)$ називамо *хроматски полином графа* Γ.

Дефиниција 3.3.4 *Оријентација графа* $\Gamma = ([n], E)$ је обележавање ивица са $v_1 \to v_2$ или $v_2 \to v_1$, за сваку ивицу $\{v_1, v_2\} \in E$. Уколико постоји низ темена $v_1, v_2, \ldots, v_k$ такав да $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_1$ кажемо да оријентација има *означени цикл.* Иначе, за оријентацију кажемо да је *ациклична.*

Став 3.3.4 ([38], Corollary 1.3, [35], Corollary 2.3) *Број ацикличних оријентација графа* Γ *на* n *темена је*

$$a(\Gamma) = (-1)^n \chi(\Gamma, -1). \tag{3.14}$$

Нека је $F \subset E$ један подскуп ивица графа Γ. Са $\Gamma_{[n],F}$ означимо граф $([n], F)$, а са Γ/F граф који настаје контракцијом ивица које се налазе у подскупу F. У вези с тим, за подскуп F кажемо да је *раван графа* Γ уколико су компоненте графа $\Gamma_{[n],F}$ заправо индуковани подграфови графа Γ. И још, број компоненти графа $\Gamma_{[n],F}$ означимо са $c(F)$, а скуп свих равни графа Γ са $\mathcal{R}(\Gamma)$.

Надаље, са $\mathcal{G}$ означимо векторски простор над пољем $\mathbb{K}$ који садржи све линеарне комбинације класа изоморфних графова. Множење и комножење су дефинисани са

$$[\Gamma_1] \cdot [\Gamma_2] := [\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2] \qquad \text{и} \qquad \Delta([\Gamma]) := \sum_{I \subseteq [n]} [\Gamma|_I] \otimes [\Gamma|_{[n]\setminus I}],$$

где је $\Gamma|_I$ индуковани подграф на подскупу $I \subseteq [n]$. Уз то је и

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{G}_n,$$

где је $\mathcal{G}_n$ потпростор разапет класама изоморфних графова на скупу темена $[n]$. Дакле, $\mathcal{G}$ је једна градуисана, кокомутативна и комутативна Хопфова алгебра (видети [32]).

Теорема 3.3.2 ([22], Theorem 3.1) *Антипод у Хопфовој алгебри графова* $\mathcal{G}$ *је одређен са*

$$S([\Gamma]) = \sum_{F \in \mathcal{R}(\Gamma)} (-1)^{c(F)} a(\Gamma/F) \Gamma_{[n],F},$$

где је $a(\Gamma/F)$ *број ацикличних оријентација графа* Γ/F.

Нека је Γ граф на скупу $[n]$ и $\mathcal{F} : \emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = [n]$ једна застава подскупова. Дефинишимо граф $\Gamma/\mathcal{F}$ на следећи начин:

$$\Gamma/\mathcal{F} := \bigsqcup_{i=1}^{k} \Gamma|_{F_i \setminus F_{i-1}}.$$

Даље, напоменимо да пресликавање $\Gamma \mapsto \mathsf{H}(\Gamma)$ индукује и један Хопфов мономорфизам $\mathcal{G} \to \mathcal{HG}$ између Хопфових алгебри $\mathcal{G}$ и $\mathcal{HG}$. Индуковани карактер $\zeta_q : \mathcal{G} \to \mathbb{K}[q]$ је, у том случају, одређен са

$$\zeta_q([\Gamma]) := q^{n - c(\Gamma)},$$

где је $c(\Gamma)$ број повезаних компоненти графа Γ. Одговарајући универзални морфизам

$$\Psi_q : (\mathcal{G}, \zeta_q) \to (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$$

је у мономијалној бази одређен са

$$\Psi_q([\Gamma]) = \sum_{\alpha \models n} (\zeta_q)_\alpha(\Gamma) M_\alpha.$$

Коефицијент који одговара мономијалној функцији M_α је једнак

$$(\zeta_q)_\alpha(\Gamma) = \sum_{\mathcal{F}\,:\,\mathrm{type}(\mathcal{F})=\alpha} \prod_{i=1}^{k} q^{\mathrm{rk}\left(\Gamma|_{F_k\setminus F_{k-1}}\right)} = \sum_{\mathcal{F}\,:\,\mathrm{type}(\mathcal{F})=\alpha} q^{\mathrm{rk}_\Gamma(\mathcal{F})},$$

где је

$$\mathrm{rk}(\Gamma/\mathcal{F}) := \sum_{i=1}^{k} \mathrm{rk}(\Gamma|_{F_i\setminus F_{i-1}}) = n - \sum_{i=1}^{k} c(\Gamma|_{F_i\setminus F_{i-1}}).$$

Наводимо формулу која представља уопштење Стенлијеве формуле за број ацикличних оријентација графа приказане у (3.14).

Теорема 3.3.3 ([15], Theorem 1.1) *Нека је Γ повезан граф на скупу темена $[n]$ и Z_Γ одговарајући графички зонотоп. Тада је $f-$полином зонотопа Z_Γ једнак*

$$f(Z_\Gamma, q) = (-1)^n \mathbf{ps}^1(\Psi_{-q}([\Gamma]))(-1).$$

Пример 3.3.7 Посматрајмо граф Γ који је описан у Примеру 3.3.6. Тада је

$$\begin{aligned}\Psi_q(\Gamma) = {} & M_{(4)}q^3 + (3M_{(3,1)} + 2M_{(2,2)} + 3M_{(1,3)})q^2 \\ & + (M_{(3,1)} + 4M_{(2,2)} + M_{(1,3)} + 8M_{(2,1,1)} + 8M_{(1,2,1)} + 8M_{(1,1,2)})q \\ & + 4M_{(2,1,1)} + 4M_{(1,2,1)} + 4M_{(1,1,2)} + 24M_{(1,1,1,1)},\end{aligned}$$

одакле произилази да је $f(Z(\Gamma), q) = q^3 + 8q^2 + 18q + 12.$ □

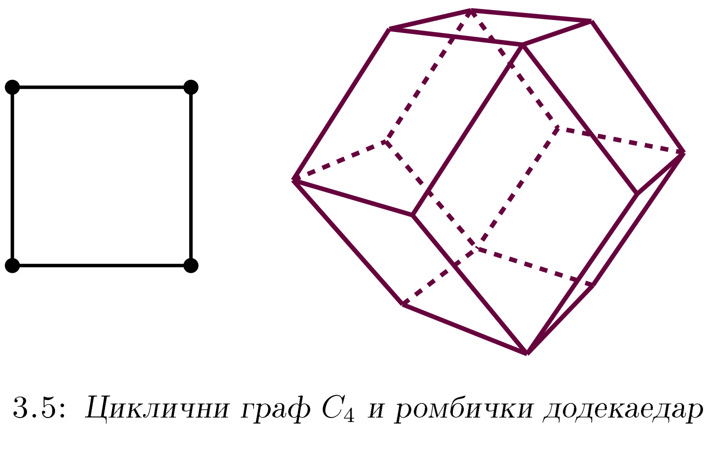
Напомена 3.3.2 Нека је T_n произвољно дрво на n темена. Одговарајући графички зонотоп Z_{T_n} је хиперкоцка $\square_{n-1}$. Према томе, граф Γ није одређен зонотопом Z_Γ.

Став 3.3.5 ([15], Proposition 5.2) *$f-$полином графичког зонотопа $Z(C_n)$, где је C_n један циклични граф, гласи*

$$f(Z(C_n),\, q) = q^n + q^{n-1} + (q+2)^n - 2(q+1)^n.$$

Пример 3.3.8 Посматрајмо граф C_4 и одговарајући графички зонотоп $Z(C_4)$. У теорији политопа исти је познат и под називом *ромбички додекаедар*. На основу претходног става закључујемо да је одговарајући $f-$полином једнак

$$f(Z(C_4),\, q) = 14 + 24q + 12q^2 + q^3.$$



Слика 3.5: *Циклични граф C_4 и ромбички додекаедар $Z(C_4)$*

Стенлијева функција

Функција $\Psi_q([\Gamma])$ је уопштење *Стенлијеве хроматске симетричне функције графа* $\Psi([\Gamma])$ која се добија у случају када је $q = 0$, то јест

$$\Psi([\Gamma]) = \Psi_0([\Gamma]).$$

Наведена функција је први пут уведена и проучавана у [39], и од тада заузима једно од значајнијих места у алгебарској комбинаторици. Надалеко чувена је и Стенлијева хипотеза да хроматска симетрична функција графа разликује дрвета.

Главна специјализација Стенлијеве хроматске симетричне функције одређује хроматски полином графа. Прецизније, важи следећи став.

Став 3.3.6 ([14], Proposition 7.36) *Нека је Γ један граф на n темена. Функција $\Psi([\Gamma])$ је симетрична функција*

$$\Psi([\Gamma]) \quad = \sum_{f \text{ је право бојење}} \prod_{i=1}^{n} x_{f(i)}.$$

И још, главна специјализација даје хроматски полином $\chi(\Gamma, m)$

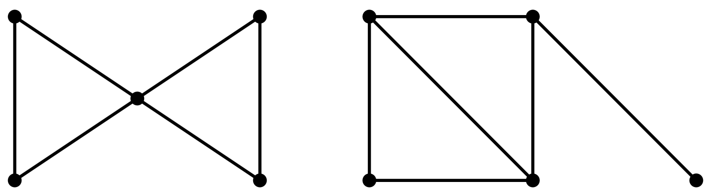
$$\mathbf{ps}^1(\Psi([\Gamma])(m) = \chi(\Gamma, m).$$

Функција $\Psi([\Gamma])$ се у бази мономијалних квазисиметричин функција може записати у облику

$$\Psi([\Gamma]) = \sum_{\alpha \models n} \zeta_\alpha(\Gamma) M_\alpha,$$

где $\zeta_\alpha(\Gamma)$ одговара броју правих бојења f таквих да је $|f^{-1}(i)| = \alpha_i$, за свако i.

Пример 3.3.9 Посматрајмо графове који су приказани на следећој слици.



Слика 3.6: *Графови Γ_1 и Γ_2 такви да је $\Psi([\Gamma_1]) = \Psi([\Gamma_2])$*

Стенлијева хроматска симетрична функција не разликује графове Γ_1 и Γ_2, то јест

$$\begin{aligned}\Psi(\Gamma_1) = \Psi(\Gamma_2) &= 24M_{(2,1,1,1)} + 24M_{(1,2,1,1)} + 24M_{(1,1,2,1)} + 24M_{(1,1,1,2)} \\ &+ 4M_{(2,2,1)} + 4M_{(2,1,2)} + 4M_{(1,2,2)} + 120M_{(1,1,1,1,1)} \\ &= 24m_{(2,1,1,1)} + 4m_{(2,2,1)} + 120m_{(1,1,1,1,1)}.\end{aligned}$$

Може се показати да је $\zeta_{(2,3)}(\Gamma_1) = 2q^3 + 8q^2$ и $\zeta_{(2,3)}(\Gamma_2) = 3q^3 + 6q^2 + q$, одакле следи да је $\Psi_q([\Gamma_1]) \neq \Psi_q([\Gamma_2])$. Дакле, функција Ψ_q је финија од функције Ψ. $\square$

3.4 Нестоедри

3.4.1 Градивни скуп и нестоедри

Дефиниција 3.4.1 За колекцију B непразних подскупова скупа $[n]$ кажемо да је *градивни скуп* уколико су задовољена следећа два услова:

1. ако су $S_1, S_2 \in \mathsf{B}$ два недисјунктна скупа тада $S_1 \cup S_2 \in \mathsf{B}$,
2. $\{i\} \in \mathsf{B}$ за све $1 \leq i \leq n$.

Специјално, ако B садржи само једночлане скупове за исти кажемо да је *дискретан градивни скуп.* Кажемо да је B повезан ако и само ако $[\,n\,] \in \mathsf{B}$. То посебно значи да је и $\mathsf{B}|_S$ повезан ако и само ако $S \in \mathsf{B}$.

Пример 3.4.1 *Графички градивни скуп* $\mathsf{B}(\Gamma)$ графа Γ на n темена је колекција непразних подскупова $S \subseteq [n]$ таквих да је граф $\Gamma|_S$ повезан. Како $\mathsf{B}(\Gamma)$ задовољава услове претходне дефиниције, биће да је $\mathsf{B}(\Gamma)$ један градивни скуп. Уз то, компоненте повезаности фамилије $\mathsf{B}(\Gamma)$ одговарају компонентама повезаности графа Γ, то јест $\mathsf{B}(\Gamma)|_S = \mathsf{B}(\Gamma|_S)$. $\square$

Сума Минковског симплекса градивног скупа B

$$Q_{\mathsf{B}} \;:=\; \sum_{S \in \mathsf{B}} \Delta_S,$$

је уопштени пермутоедар који називамо *нестоедром.*

Став 3.4.1 ([6], Proposition 1.5.11) *Нестоедар Q_{B} се налази у пресеку хиперравни H_{B} и затворених полупростора H_S индексираних скуповима $S \in \mathsf{B}$*

$$H_{\mathsf{B}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;:\; \sum_{i=1}^{n} x_i = |\mathsf{B}| \right\} \qquad \textit{и} \qquad H_{S,\geq} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;:\; \sum_{i \in S} x_i \geq |\mathsf{B}|_S| \right\}.$$

Даље, за непразан подскуп $S \subseteq [\,n\,]$ дефинишимо *контракцију* градивног скупа B са

$$\mathsf{B}/S := \{T \setminus S \;:\; T \in \mathsf{B} \;\text{ и }\; T \setminus S \neq \emptyset\} = \{T \subset [\,n\,] \setminus S \;:\; T \in \mathsf{B} \;\text{ или }\; T \cup S \in \mathsf{B}\}.$$

Последица 3.4.1 *Нека је B један повезан градивни скуп на n темена. Тада је свака максимална страна нестоедра Q_{B} облика $Q_{\mathsf{B}|_S} \times Q_{\mathsf{B}/S}$, за неки скуп $S \in \mathsf{B} \setminus [\,n\,]$.*

То тачно значи да за повезани градивни скуп B свака хиперраван $H_{S,=}$ индукује једну максималну страну G_S нестоедра Q_{B}. Према томе, број максималних страна уопштеног пермутоедра Q_{B} износи $|\mathsf{B}| - 1$.

Дефиниција 3.4.2 Нека је B градивни скуп на скупу $[\,n\,]$ и нека је B_{cc} скуп повезаних компоненти колекције B. Подскуп $N \subset \mathsf{B} \setminus \mathsf{B}_{cc}$ је *угњежден скуп* уколико задвољава следећа два услова:

1. за свако $S_1, S_2 \in N$ или су S_1 и S_2 дисјунктни или $S_1 \subseteq S_2$ или $S_2 \subseteq S_1$,
2. за сваку колекцију $k \geq 2$ дисјунктних подскупова $S_1, S_2, \ldots, S_k \in N$, њихова унија $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_k \notin \mathsf{B}$.

Колекцију свих угњеждених скупова градивног скупа B називамо *комплекс угњеждених скупова* и означавамо са Δ_{B}.

Теорема 3.4.1 ([30], Theorem 7.4, [31], Theorem 6.5) *Нека је B градивни скуп на скупу $[n]$. Нестоедар Q_{B} је прост политоп димензије $n-|\mathsf{B}_{cc}|$. Дуални симплицијални комплекс је изоморфан комплексу угњеждених скупова Δ_{B}.*

Штавише, свакој страни G уопштеног пермутоедра Q_{B} можемо доделити угњеждени скуп $N \in \Delta_{\mathsf{B}}$ такав да је

$$\dim(G) = n - |N| - |\mathsf{B}_{cc}|.$$

Посебно, теменима нестоедра одговарају максимални, у односу на инклузију, угњеждени подскупови у Δ_{B}. Уз то, исти садрже $n - |\mathsf{B}_{cc}|$ елемената. На значај претходне теореме указује и следећа једнакост о $f-$полиному нестоедра Q_{B}

$$f(Q_{\mathsf{B}}, q) \;=\; \sum_{N\in\Delta_{\mathsf{B}}} q^{n-|\mathsf{B}_{cc}|-|N|}.$$

Даље, нека су $\mathsf{B}_0 \subset \mathsf{B}_1$ градивни скупови на $[n]$ и нека је $S \in \mathsf{B}_1 \setminus \mathsf{B}_0$. Дефинишимо *декомпозицију скупа S на* B_0 са

$$S = S_1 \sqcup S_2 \sqcup \cdots \sqcup S_k,$$

где су скупови S_i по паровима дисјунктни елементи колекције B_0 и k минималан такав број. Уопште, таква декомпозиција постоји и јединствено је одређена.

Лема 3.4.1 ([6], Lemma 1.5.17) *Нека су $\mathsf{B}_0 \subset \mathsf{B}_1$ повезани градивни скупови на скупу $[n]$. Тада нестоедар Q_{B_1} настаје из нестоедра Q_{B_0} низом сечења по странама $G_i = \bigcap_{j=1}^{k_i} F_{S^i_j}$ које одговарају декомпозицијама $S^i = S^i_1 \sqcup S^i_2 \sqcup \cdots \sqcup S^i_{k_i}$ елемената $S^i \in \mathsf{B}_1 \setminus \mathsf{B}_0$, за које је још испуњено $S^i \subseteq S^j \Rightarrow i \geq j$.*

Теорема 3.4.2 ([6], Theorem 1.5.18.) *Нека је B повезан градивни скуп. Тада се Q_{B} може добити низом сечења по странама симплекса.*

3.4.2 Тежински квазисиметрични енумератор нестоедра

Подсетимо се да за пар $([n], \preceq)$ кажемо да је предуређење, уколико је $\preceq$ једна бинарна, рефлексивна и транзитивна релација на скупу $[n]$. Уколико је $x \preceq y$ или $y \preceq x$, за све $x, y \in [n]$, предуређење називамо *слабим уређењем* на скупу $[n]$. Није тешко увидети да слаба уређења скупа $[n]$ одговарају композицијама на истом скупу. У вези са тим да свакој композицији можемо једнозначно доделити заставу подскупова, за

$$\mathcal{F} \;:\; \emptyset =: F_0 \;\subset\; F_1 \;\subset\; F_2 \;\subset\; \cdots \;\subset F_k = [n]$$

кажемо да *проширује предуређење* $([n], \preceq)$ ако

$$i \prec j \qquad \Rightarrow \qquad i \in F_p \setminus F_{p-1} \;\text{ и }\; j \in F_q \setminus F_{q-1}$$

за неке $1 \leq p < q \leq k$. Запис $i \prec j$ означава да је $i \preceq j$ али не и $j \preceq i$.

Надаље, претпоставимо да је B један повезан градивни скуп на скупу $[n]$. Нека је $N_G = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\} \subset \mathsf{B} \setminus [n]$ угњеждени скуп који одговара страни G нестоедра Q_{B}.

Тада важи

$$\dim G = n-1-m \quad \text{и} \quad G = G_{S_1} \cap G_{S_2} \cap \cdots \cap G_{S_m},$$

где је G_{S_i} максимална страна нестоедра која се налази у хиперравни $H_{S_i,=}$. Даље, сваком скупу $S \in N_G \cup [\,n\,]$ придружимо *скуп корена* S^{root}

$$S^{\text{root}} := S \setminus \bigcup \{T \in N_G \ : \ T \subsetneq S\}.$$

У вези с претходним разматрањем, дефинишимо предуређење $\preceq_G$ на $[\,n\,]$, које одговара страни G нестоедра Q_{B}, на следећи начин

$$i \preceq_G j \quad \text{ако и само ако} \quad i \in S, j \in S^{\text{root}} \text{ за неко } S \in N_G \cup \{[n]\}.$$

Лема 3.4.2 ([17], Lemma 5.1) *Нека је* B *један градивни скуп на скупу* $[\,n\,]$. *За страну* G *нестоедра* Q_{B} *и заставу* $\mathcal{F}$ *подскупова скупа* $[\,n\,]$ *важи* $\pi_{Q_{\mathsf{B}}}(\mathcal{F}) = G$ *ако и само ако застава* $\mathcal{F}$ *проширује предуређење* $([\,n\,], \preceq_G)$.

Доказ. Приметимо да је нормални конус C_G стране G задат неједнакостима

$$x_i \leq x_j \quad \text{ако и само ако} \quad i \preceq_Q j \ \text{ за } \ i,j \in [n].$$

Утврдимо да $C^{\circ}_{\mathcal{F}} \subset C^{\circ}_G$ ако и само ако $\mathcal{F}$ проширује предуређење $([n], \preceq_G)$. *Q.E.D.*

Произвољном градивном скупу B на n темена који има $c(\mathsf{B})$ компоненти повезаности доделимо *ранг градивног скупа*

$$\operatorname{rk}(\mathsf{B}) := n - c(\mathsf{B}).$$

У вези с тим, посматрајмо заставу подскупова $\mathcal{F}$ скупа $[\,n\,]$

$$\mathcal{F} : \emptyset = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_k = [n], \tag{3.15}$$

којој можемо придружити *количнички градивни скуп* $\mathsf{B}/\mathcal{F}$ и *ранг* $\operatorname{rk}_{\mathsf{B}}(\mathcal{F})$

$$\mathsf{B}/\mathcal{F} := \bigoplus_{i=1}^{k} (\mathsf{B}|_{F_i}/F_{i-1}) \qquad \text{и} \qquad \operatorname{rk}_{\mathsf{B}}(\mathcal{F}) := \sum_{i=1}^{k} \operatorname{rk}(\mathsf{B}|_{F_i}/F_{i-1}) = n - \sum_{i=1}^{k} c(\mathsf{B}|_{F_i}/F_{i-1}).$$

Став 3.4.2 ([17], Proposition 5.2) *Нека је* B *повезани градивни скуп на скупу* $[\,n\,]$ *и* $\mathcal{F}$ *једна застава подскупова истог скупа. Тада је*

$$\operatorname{rk}_{Q_{\mathsf{B}}}(\mathcal{F}) = \operatorname{rk}_{\mathsf{B}}(\mathcal{F}).$$

Доказ. Нека је G права $m-$страна нестоедра Q_{B} и $\mathcal{F} : \emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = [\,n\,]$ застава подскупова скупа $[\,n\,]$ таква да је $\pi_{Q_{\mathsf{B}}}(\mathcal{F}) = G$. Уз то, претпоставимо да је $N_G = \{S_1, S_2, \ldots, S_{n-m-1}\} \subset \mathsf{B} \setminus [\,n\,]$ одговарајући угњеждени скуп стране G. Тада, за $1 \leq i \leq k$, важи

$$c(\mathsf{B}|_{F_i}/F_{i-1}) = \left|\{T \in N_G \cup [\,n\,] \ : \ T^{\text{root}} \subset S_i \setminus S_{i-1}\}\right|.$$

Сама провера је рутинске природе. Пошто за свако $T \in N_G \cup [\,n\,]$ постоји јединствено i такво да $T^{\text{root}} \in S_i \setminus S_{i-1}$, следи да је

$$\sum_{i=1}^{k} c(\mathsf{B}|_{F_i}/F_{i-1}) = n - m.$$

Q.E.D.

3.4.3 Хопфова алгебра градивних скупова

За градивне скупове B_1 и B_2 дефинисане на коначним скуповима $[\,n_1\,]$ и $[\,n_2\,]$ кажемо да су *изоморфни* ако постоји бијекција $f : [\,n_1\,] \to [\,n_2\,]$ таква да

$$S \in \mathsf{B}_1 \quad \text{ако и само ако} \quad f(S) \in \mathsf{B}_2.$$

Са $\mathcal{B}$ означимо векторски простор над пољем $\mathbb{K}$ који садржи све линеарне комбинације класа изоморфних градивних скупова. Множење и комножење су дефинисани са

$$[\mathsf{B}_1] \cdot [\mathsf{B}_2] := [\mathsf{B}_1 \sqcup \mathsf{B}_2] \quad \text{и} \quad \Delta([\mathsf{B}]) := \sum_{S \subset [\,n\,]} [\mathsf{B}|_S] \otimes [\mathsf{B}/S].$$

Приметимо да је

$$\mathcal{B} \;=\; \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{B}_n,$$

где је $\mathcal{B}_n$ потпростор разапет класама изоморфних градивних скупова на скупу $[\,n\,]$. Према томе, $\mathcal{B}$ је једна градуисана, комутативна и некокомутативна Хопфова алгебра. Кокомутативан пример Хопфове алгебре градивних скупова се може пронаћи у [18].

Даље, посматрајмо пресликавање $\zeta_q : \mathcal{B} \to \mathbb{K}[\,q\,]$ које је одређено са

$$\zeta_q([\mathsf{B}]) \;:=\; q^{\mathrm{rk}(\mathsf{B})}.$$

На основу Теореме 1.3.1, постоји јединствени морфизам Хопфових алгебри

$$\Psi_q \;:\; (\mathcal{B}, \zeta_q) \;\to\; (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}}),$$

који је на мономијалној бази задат са

$$\Psi_q([\mathsf{B}]) \;=\; \sum_{\alpha \models n} (\zeta_q)_\alpha(\mathsf{B}) M_\alpha. \tag{3.16}$$

Теорема 3.4.3 ([17], Proposition 5.3) *Нека је* B *један градивни скуп и* Q_{B} *одговарајући нестоедар. Тежински квазисиметрични енумератор* F_q *се подудара са јединственим морфизмом Хопфових алгебри* Ψ_q, *то јест*

$$F_q(Q_{\mathsf{B}}) = \Psi_q([\mathsf{B}]).$$

Доказ. Јединствени морфизам Хопфових алгебри Ψ_q је одређен са (3.16), па следи да је коефицијент који одговара композицији $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$

$$(\zeta_q)_\alpha(\mathsf{B}) \;=\; \sum_{\mathcal{F}\,:\,\mathrm{type}(\mathcal{F})=\alpha} \prod_{i=0}^{k} q^{\mathrm{rk}(\mathsf{B}|_{F_i+1}/F_i)} \;=\; \sum_{\mathcal{F}\,:\,\mathrm{type}(\mathcal{F})=\alpha} q^{\mathrm{rk}_{\mathsf{B}}(\mathcal{F})}, \tag{3.17}$$

где је сума по свим заставама $\mathcal{F} : \emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = [\,n\,]$ за које је $\mathrm{type}(\mathcal{F}) = \alpha$. С друге стране,

$$F_q(Q_{\mathsf{B}}) = \sum_{\mathcal{F}} q^{\mathrm{rk}_{Q_{\mathsf{B}}}(\mathcal{F})} M_{\mathcal{F}}, \tag{3.18}$$

где је сума по свим заставама подскупова скупа $[\,n\,]$. На основу претходног става и формуле (3.5), добијамо тражену једнакост. *Q.E.D.*

Последица 3.4.2 *Нека је* B *повезан градивни скуп на скупу* $[n]$ *и* Q_{B} *одговарајући нестоедар. Тада је* $f-$*полином нестоедра* Q_{B} *једнак*

$$f(Q_{\mathsf{B}},q) \;=\; (-1)^n \mathbf{ps}^1(\Psi_{-q}([\mathsf{B}]))(-1).$$

Пример 3.4.2 Нека је $\mathsf{B} = \{\{1\},\{2\},\ldots,\{n\},[n]\}$ један градивни скуп. Одговарајући нестоедар Q_{B} је заправо симплекс Δ_n. Даље, нека је $\mathcal{F}$ застава подскупова на скупу $[n]$ таква да је $\mathrm{type}(\mathcal{F}) = \alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l)$. Тада је $\mathrm{rk}_{\mathsf{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_l - 1$, па применом претходне теореме добијамо

$$\Psi_q([\mathsf{B}]) \;=\sum_{\alpha\models n}\binom{n}{\alpha}q^{\alpha_l-1}M_\alpha \;=\; \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}q^{k-1}\sum_{\alpha\models n-k}\binom{n-k}{\alpha}M_{(\alpha,k)}.$$

Приметимо да је

$$\left(M_{(1)}\right)^m = \sum_{\alpha\models m}\binom{m}{\alpha}M_\alpha,$$

одакле произилази да је[4]

$$\Psi_q([\mathsf{B}]) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}q^{k-1}\left(M_{(1)}^{n-k}\right)_k.$$

Применом Последице 3.4.2, следи да је $f-$полином симплекса Δ_n једнак

$$f(\Delta_n,q) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}q^{k-1} \;=\; \frac{(1+q)^n-1}{q}.$$

□

Формуле рекурзије

Теорема 3.4.4 ([17], Theorem 5.6) *Рекурзивна формула за квазисиметричну функцију* $F_q(Q_{\mathsf{B}}) = \Psi_q([\mathsf{B}])$ *гласи:*

1. *ако* B *садржи само једночлан скуп, тада је* $F_q(Q_{\mathsf{B}}) = M_{(1)}$,
2. *уколико су* $\mathsf{B}_1,\mathsf{B}_2,\ldots,\mathsf{B}_k$ *повезане компоненте градивног скупа* B *тада је*

$$F_q(Q_{\mathsf{B}}) \;=\; F_q(Q_{\mathsf{B}_1})\cdot F_q(Q_{\mathsf{B}_2})\cdots F_q(Q_{\mathsf{B}_k}),$$

3. *уколико је* B *повезан градивни скуп на скупу* $[n]$ *тада је*

$$F_q(Q_{\mathsf{B}}) \;=\; \sum_{S\subset[n]} q^{n-1-|S|}\cdot(F_q(Q_{\mathsf{B}|_S}))_{n-|S|}.$$

Доказ. Прво и друго тврђење произилазе из дефиниције енумератора F_q, па преостаје да доказажемо треће тврђење. Ако је B повезан, тада је и B/S повезан градивни скуп за свако $S\subset[n]$, и још важи $\mathrm{rk}(\mathsf{B}/S) = n-|S|-1$. Преуређењем суме (3.18) добијамо

$$F_q(\mathsf{B}) = \sum_{S\subset[n]} q^{n-|S|-1}\sum_{\mathcal{F}_S} q^{\mathrm{rk}_{\mathsf{B}|_S}(\mathcal{F}_S)}M_{(\mathrm{type}(\mathcal{F}_S),n-|S|)},$$

где је друга сума по свим заставама подскупова $\mathcal{F}_S$ скупа S. *Q.E.D.*

[4]Напомена. $(M_\alpha)_k := M_{\alpha\cdot(k)}$, где је $\alpha\cdot(k)$ надовезивање композиција α и (k).

Претходна формула рекурзије заједно са Теоремом 3.2.2 доказује следећу теорему.

Теорема 3.4.5 ([31], Theorem 6.12) *Рекурзивна формула за $f-$полином нестоедра Q_{B} гласи:*

1. *ако* B *садржи само једночлан скуп, тада је* $f(Q_{\mathsf{B}}, q) = 1$,
2. *уколико су* $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2, \ldots, \mathsf{B}_k$ *повезане компоненте градивног скупа* B *тада је*
$$f(Q_{\mathsf{B}}, q) \ = \ f(Q_{\mathsf{B}_1}, q) \cdot f(Q_{\mathsf{B}_2}, q) \cdots f(Q_{\mathsf{B}_k}, q),$$
3. *уколико је* B *повезан градивни скуп на скупу* $[\,n\,]$ *тада је*
$$f(Q_{\mathsf{B}}, q) \ = \ \sum_{S \subset [n]} q^{n-1-|S|} \cdot f(Q_{\mathsf{B}|_S}, q).$$

3.4.4 Граф–асоциедри

Подсетимо се да је графички градивни скуп $\mathsf{B}(\Gamma)$ графа Γ на n темена колекција подскупова $S \subseteq [\,n\,]$ таквих да је $\Gamma|_S$ један повезан граф. Одговарајући нестоедар $Q_{\mathsf{B}(\Gamma)}$ је у теорији конвексних политопа познат као *граф – асоциедар.*

Кажемо да су темена x и y графа $\Gamma = ([\,n\,], E)$ *повезана путем у скупу* $S \subset [n]$ ако постоји низ темена $z_1, z_2, \ldots, z_k \in S$ таквих да су

$$\{x,\, z_1\},\ \{z_1,\, z_2\},\ \{z_2,\, z_3\},\ \ldots,\ \{z_k,\, y\}$$

ивице посматраног графа. Даље, уколико графу $\Gamma|_{[\,n\,]\setminus S}$ придружимо ивице $\{x, y\}$ такве да су темена $x, y \in [\,n\,] \setminus S$ повезана путем у скупу S, добијамо граф Γ/S. Исти је познат и као *контракција графа* Γ *по скупу* S.

Надаље, са $\mathcal{BG}$ означимо векторски простор над пољем $\mathbb{K}$ који садржи све линеарне комбинације класа изоморфних графова. Множење и комножење су дефинисани са

$$[\Gamma_1] \cdot [\Gamma_2] := [\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2] \quad \text{ и } \quad \Delta([\Gamma]) := \sum_{S \subset [\,n\,]} [\Gamma|_S] \otimes [\Gamma/S].$$

Приметимо да је

$$\mathcal{BG} \ = \ \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{BG}_n,$$

где је $\mathcal{BG}_n$ потпростор разапет класама изоморфних графова на скупу темена $[\,n\,]$. Дакле, $\mathcal{BG}$ је једна градуисана, комутативна и некокомутативна Хопфова алгебра.

Нека је Γ граф на скупу $[\,n\,]$ и $\mathcal{F} : \emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = [\,n\,]$ једна застава подскупова. Дефинишимо граф $\Gamma/\mathcal{F}$ на следећи начин:

$$\Gamma/\mathcal{F} := \bigsqcup_{i=1}^{k} (\Gamma|_{F_i}/F_{i-1}.)$$

Даље, напоменимо да пресликавање $\Gamma \mapsto \mathcal{B}(\Gamma)$ индукује и Хопфов мономорфизам $\mathcal{BG} \to \mathcal{B}$ између Хопфових алгебри $\mathcal{BG}$ и $\mathcal{B}$. Индуковани карактер $\zeta_q : \mathcal{BG} \to \mathbb{K}[\,q\,]$ је, у том случају, одређен са

$$\zeta([\Gamma]) \;=\; q^{n-c\,(\Gamma)},$$

где је $c\,(\Gamma)$ број повезаних компоненти графа Γ. Одговарајући универзални морфизам

$$\Psi_q : (\mathcal{BG}, \zeta_q) \to (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$$

је у мономијалној бази одређен са

$$\Psi_q([\Gamma]) \;=\; \sum_{\alpha \models n} (\zeta_q)_\alpha(\Gamma) M_\alpha.$$

Коефицијент који одговара мономијалној функцији M_α је једнак

$$(\zeta_q)_\alpha(\Gamma) \;\;=\; \sum_{\mathcal{F}\,:\,\mathrm{type}(\mathcal{F})=\alpha} \prod_{i=1}^{k} q^{\mathrm{rk}(\Gamma|_{F_i}/F_{i-1})} \;\;=\; \sum_{\mathcal{F}\,:\,\mathrm{type}(\mathcal{F})=\alpha} q^{\mathrm{rk}_\Gamma(\mathcal{F})},$$

где је

$$\mathrm{rk}_\Gamma(\mathcal{F}) \;:=\; \sum_{i=1}^{k} \mathrm{rk}(\Gamma|_{F_i}/F_{i-1}) = n - \sum_{i=1}^{k} c(\Gamma_{F_i}/F_{i-1}).$$

Пример 3.4.3 Ако је K_n комплетан граф на n темена, тада је $\mathsf{B}(\mathsf{K}_n)$ скуп свих непразних подскупова на скупу $[\,n\,]$. Дакле, $Q_{\mathsf{B}(\mathsf{K}_n)} = \mathfrak{p}_n$. Пошто за заставу $\mathcal{F}$ подскупова скупа $[\,n\,]$ важи $\mathrm{rk}_{\mathcal{B}(\Gamma)} = n - |\mathcal{F}| - 1$, следи

$$\Psi_q(\mathsf{K}_n) \;=\; \sum_{\mathcal{F}} q^{n-|\mathcal{F}|-1} M_{\mathcal{F}} \;=\; \sum_{\alpha \models n} \binom{n}{\alpha} q^{n-l(\alpha)} M_\alpha.$$

Према томе, $f-$полином пермутоедра $\mathfrak{p}_n$ гласи

$$f(\mathfrak{p}_n, q) \;=\; \sum_{\alpha \models n} \binom{n}{\alpha} q^{n-l(\alpha)}. \qquad \square$$

Теорема 3.4.6 ([17], Proposition 6.1) *Рекурзивна формула за функцију $F_q(\Gamma)$, простог графа Γ, гласи:*

1. *ако је Γ прост граф на једном темену, тада је $F_q(\Gamma) = M_{(1)}$,*

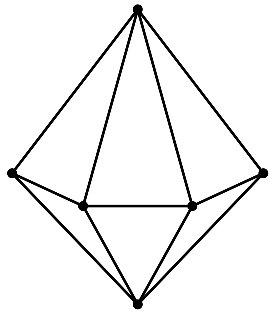
2. *уколико су $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_k$ повезане компоненте графа Γ тада је*

$$F_q(\Gamma) = F_q(\Gamma_1) \cdot F_q(\Gamma_2) \cdots F_q(\Gamma_k),$$

3. *уколико је Γ повезан граф на скупу $[\,n\,]$ тада је*

$$F_q(\Gamma) = \sum_{S \subset [n]} q^{n-|S|-1} (F_q(\Gamma|_S))_{n-|S|}.$$

Функција $F_q(\Gamma)$ је инваријанта графова која разликује неизоморфне графове на скупу темена кардиналности строго мање од 6. Сама провера је рутинске природе.



Слика 3.7: *Графови* Γ_1 *и* Γ_2 *са истом квазисиметричном функцијом* F_q

На скупу темена $[6]$ постоје три пара неизоморфних графова које квазисиметрична функција F_q не разликује. Сходно томе, и $f-$полиноми одговарајућих граф–асоциедара се подударају. Тако је, на пример,

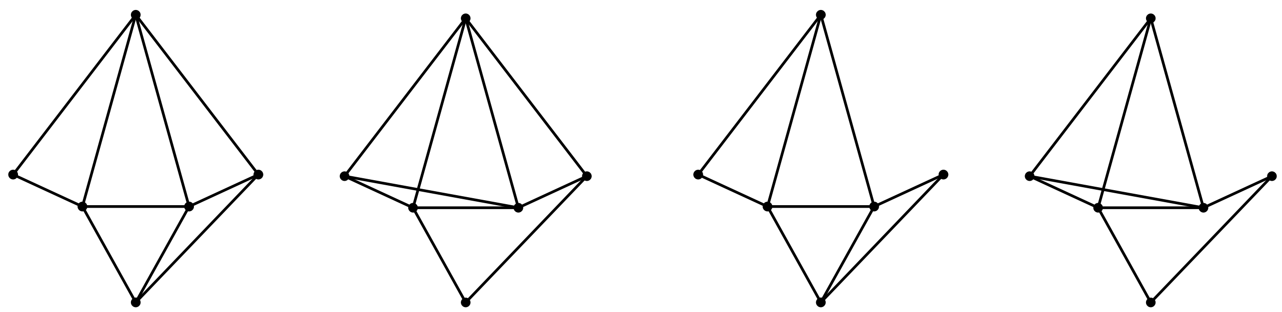
$$f(Q_{\,\Gamma_1}, q) = f(Q_{\,\Gamma_2}, q) = q^5 + 56q^4 + 462q^3 + 1308q^2 + 1500q + 600,$$

где су Γ_1 и Γ_2 графови приказани на претходној слици. Напоменимо да посматрани граф – асоциедри нису комбинаторно еквивалентни. Наиме, уколико посматрамо $1-$скелетоне дуала нестоедара $Q_{\,\Gamma_1}$ и $Q_{\,\Gamma_2}$ можемо закључити да су степени темена, тако добијених графова $(Q^*_{\Gamma_1})^{(1)}$ и $(Q^*_{\Gamma_2})^{(1)}$, различити.

Табела 2. Степени темена графова $(Q^*_{\Gamma_1})^{(1)}$ и $(Q^*_{\Gamma_2})^{(1)}$.

степен темена	30	29	28	26	25	16	15	14	13	12	11
број темена	4	2	2	2	2	9	9	3	4	6	13

степен темена	30	29	28	26	16	15	14	13	12	11
број темена	2	4	2	4	10	6	4	6	6	12



Слика 3.8: *Преостала два пара графова са истом квазисиметричном функцијом* F_q

Теорема 3.4.6 има велику примену у одређивању $f-$полинома граф – асоциедара. Пре свега уведимо следеће дефиниције. *Брисање последње компоненте* квазисиметричне функције M_α је одређено са

$$\mathrm{del}(M_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{l-1},\alpha_l)}) := M_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{l-1})} \quad \text{и} \quad \mathrm{del}(M_{(m)}) := M_{()},$$

док је *комплетирање* квазисиметричне функције M_α индексиране композицијом $\alpha \models k < n$

$$\mathrm{com}(M_\alpha) := M_{\alpha\cdot(n-k)},$$

где је $\alpha \cdot (n-k)$ надовезивање композиција α и $(n-k)$.

Асоциедар

Нека је L_n линијски граф на n темена чије су ивице облика $\{i, i+1\}$, за $1 \leq i \leq n-1$. Политоп $\mathfrak{a}_n := Q_{\mathsf{B}(\mathsf{L}_n)}$ је у теорији политопа познат као *асоциедар*. Применом Теореме 3.4.6 добијамо следећу једнакост

$$F_q(\mathfrak{a}_n) = \mathrm{com}(F_q(\mathfrak{a}_{n-1})) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{com}(F_q(\mathfrak{a}_i) \cdot F_q(\mathfrak{a}_{n-1-i})) + q \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{com}(\mathrm{del}(F_q(\mathfrak{a}_i)) \cdot F_q(\mathfrak{a}_{n-1-i})).$$

У вези претходне једнакости, важи следећа формула рекурзије за $f-$полином:

$$f(\mathfrak{a}_n, q) = f(\mathfrak{a}_{n-1}, q) + (1+q) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(\mathfrak{a}_i, q) \cdot f(\mathfrak{a}_{n-1-i}, q), \tag{3.19}$$

Посебно, за број темена асоциедра $\mathfrak{a}_n$ добијамо следећу једнакост

$$f_0(\mathfrak{a}_n) = \sum_{i=0}^{n-1} f_0(\mathfrak{a}_i) \cdot f_0(\mathfrak{a}_{n-1-i}),$$

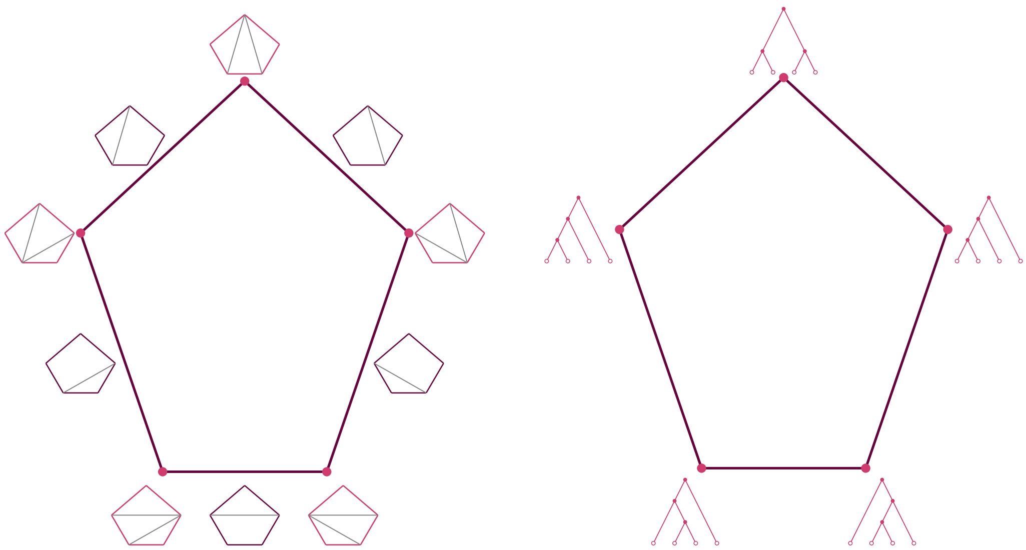
одакле произилази да је

$$f_0(\mathfrak{a}_n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}. \tag{3.20}$$

Штавише, број $k-$страна асоциедра $\mathfrak{a}_n$ износи

$$f_k(\mathfrak{a}_n) = \frac{1}{n+1}\binom{n-1}{k}\binom{2n-k}{n}.$$

Бројеви $f_k(\mathfrak{a}_n)$ су у комбинаторици познати и као *Киркман–Кејлијеви бројеви* и означавају број начина на који се могу нацртати $n-k-1$ дијагонала у $(n+2)-$тоуглу тако да се нацртане дијагонале не секу (видети [7]).



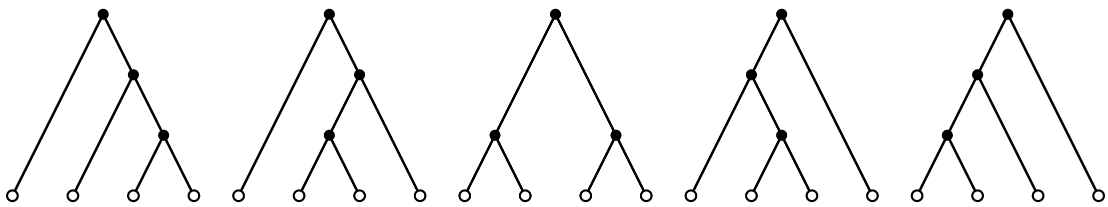
Слика 3.9: *Обележавање страна полигонима и темена бинарним дрветима асоциедра* $\mathfrak{a}_3$

Може се показати (видети [36], Exercise 6.19 и Exercise 6.36) да $h-$полином асоциедра задовољава следећу једнакост

$$h(\mathfrak{a}_n, q) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \binom{n}{k+1} \binom{n}{k} q^k. \tag{3.21}$$

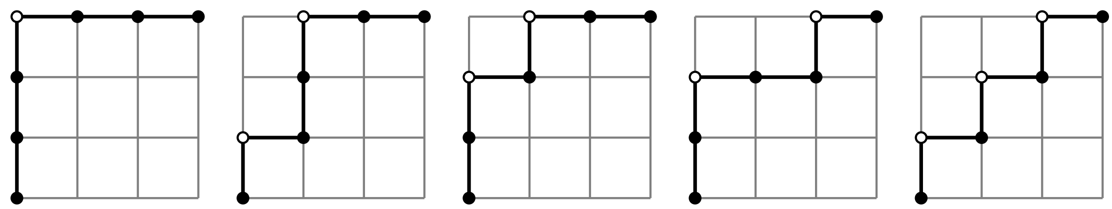
Бројеви $f_0(\mathfrak{a}_n)$ и $h_k(\mathfrak{a}_n)$ су честа комбинаторна инваријанта. Као такви, познати су и као *Каталанов број* C_n и *број Нарјане* $N(n, k-1)$. Тако, на пример, Каталанов број C_n одговара броју *комплетних бинарних дрвета са* $n+1$ *листом*[5], а број Нарјане $N(n,k)$ броју комплетних бинарних дрвета са $n+1$ листом који имају тачно k левих листова. Према томе, важи следећа једнакост

$$N(n,1) + N(n,2) + \cdots + N(n,n) = C_n.$$



Слика 3.10: *Комплетна бинарна дрвета са 4 листа*

Наведимо још један занимљив пример. *Дајкова путања дужине* $2n$ јесте путања од тачке $(0,0)$ до тачке (n,n) која садржи n *хоризонталних потеза*, потез из тачке (i,j) у тачку $(i+1,j)$, и n *вертикалних потеза*, потез из тачке (i,j) у тачку $(i,j+1)$, и таква да за координате сваке тачке (i,j), која се налази на путањи, важи $i \leq j$. За тачку (i,j) кажемо да је *врх* Дајкове путање уколико путања садржи и тачке $(i,j-1)$ и $(i+1,j)$. Каталанов број C_n одговара броју Дајкових путања дужине $2n$, а број Нарјане $N(n,k)$ броју Дајкових путања дужине $2n$ које садрже k врхова (видети [27]).



Слика 3.11: *Дајкове путање дужине 6 са означеним врховима*

У [31] је показано да се $h-$полином асоциедра $\mathfrak{a}_n$ може описати и са

$$h(\mathfrak{a}_n, q) \quad = \sum_{\omega \in \mathfrak{S}_n(231)} q^{|\mathrm{Des}(\omega)|},$$

где је $\mathfrak{S}_n(231)$ скуп свих пермутација $\omega = \omega_1\omega_2\cdots\omega_n \in \mathfrak{S}_n$ таквих да не постоје бројеви $i<j<k$ за које важи $\omega_j < \omega_k < \omega_i$. Тако је, на пример, $\mathfrak{S}_3(231) = \{123, 132, 213, 312, 321\}$. Може се показати, видети [34], да важе следеће једнакости

$$C_n = |\mathfrak{S}_n(231)| \quad \text{и} \quad N(n,k) = |\{\omega \in \mathfrak{S}_n(231) \,:\, |\mathrm{Des}(\omega)| = k\}|\,.$$

[5]Коренско бинарно дрво је *комплетно* уколико свако теме има или 2 или 0 потомака.

Композиционо инверзни степени редови

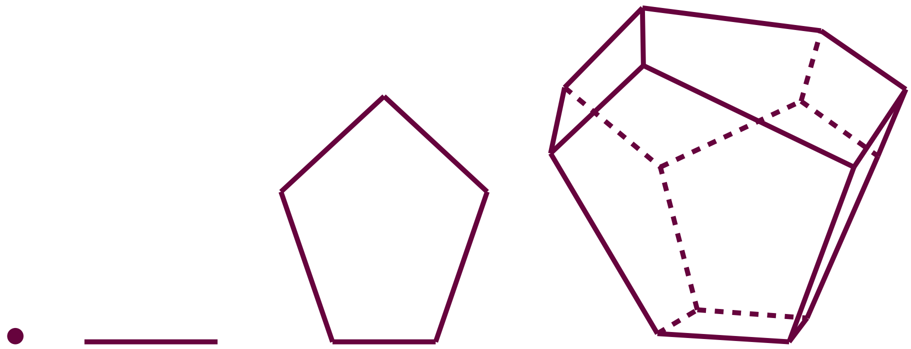
Наведимо сада једну врло лепу и занимљиву интерпретацију асоциедра. Посматрајмо формалне степене редове

$$C(x) = \sum_{n\geq 1} c_{n-1}x^n \quad \text{и} \quad D(x) = \sum_{n\geq 1} d_{n-1}x^n.$$

Кажемо да је $D(x)$ *композициони инверз* степеног реда $C(x)$ уколико је $C(D(x)) = x$, уз претпоставку да је $c_0 = 0$. Прва четири коефицијента реда $D(x)$, у том случају, гласе:

$$\begin{aligned} d_1 &= -c_1, \\ d_2 &= -c_2 + 2c_1^2, \\ d_3 &= -c_3 + 5c_2c_1 - 5c_1^3, \\ d_4 &= -c_4 + 6c_3c_1 + 3c_2^2 - 21c_2c_1^2 + 14c_1^4. \end{aligned}$$

Приметимо да, на пример, формула за коефицијент d_3 произилази из страна асоциедра $\mathfrak{a}_3$. Прецизније, стране асоциедра $\mathfrak{a}_3$ су: један петоугао $\mathfrak{a}_3$, пет ивица $\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_1$ и пет темена $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_1$. Слично, стране асоциедра $\mathfrak{a}_4$ су: један асоциедар $\mathfrak{a}_4$, шест петоуглова $\mathfrak{a}_3 \times \mathfrak{a}_1$, три квадрата $\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_2$, двадесет једна ивица $\mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_1$ и четрнаест темена $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_1$. У вези са тим, произилази и формула за коефицијент d_4 степеног реда $D(x)$. И уопште, важе следећа теорема.



Слика 3.12: *Асоциедриедри* $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_3$ *и* $\mathfrak{a}_4$

Теорема 3.4.7 ([1], Theorem 11.3, Theorem 11.4) *Композициони инверз степеног реда $C(x)$ је степени ред $D(x)$ такав да је*

$$d_n = \sum_{F\in L(\mathfrak{a}_n)} (-1)^{n-\dim F} c_F,$$

где је $c_F = c_{f_1}c_{f_2}\cdots c_{f_k}$ за сваку страну $F = \mathfrak{a}_{f_1} \times \mathfrak{a}_{f_2} \times \cdots \times \mathfrak{a}_{f_k}$ асоциедра $\mathfrak{a}_n$. Другим речима,

$$d_n = \sum_{(1^{m_1},2^{m_2},\ldots)\vdash n} (-1)^m \cdot \frac{(n+m)!}{(n+1)!m_1!m_2!\cdots} \cdot c_1^{m_1}c_2^{m_2}\cdots$$

где је сума по свим партицијама $(1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots) = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m_1}, \underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{m_2}, \ldots) \vdash n$ *и где је* $m = m_1 + m_2 + \cdots$.

Звездоедар

Посматрајмо граф S_n на n темена чије су ивице облика $\{i, n\}$, за $1 \leq i \leq n-1$. Тада политоп $\mathfrak{s}_n := Q_{\mathsf{B}(\mathsf{S}_n)}$ називамо *звездоедром.* Применом Теореме 3.4.6 добијамо следећу једнакост

$$F_q(\mathfrak{s}_n) = q^{n-1} \cdot M_{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} q^{n-1-i} \cdot \left(\binom{n-1}{i-1} \cdot \mathrm{com}(F_q(\mathfrak{s}_i)) + \binom{n-1}{i} \cdot \mathrm{com}\left(M^i_{(1)}\right) \right),$$

одакле произилази формула рекурзије за $f-$полином звездоедра

$$f(\mathfrak{s}_n, q) = q^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} q^{n-1-i} \cdot \left(\binom{n-1}{i-1} \cdot f(\mathfrak{s}_i, q) + \binom{n-1}{i} \right).$$

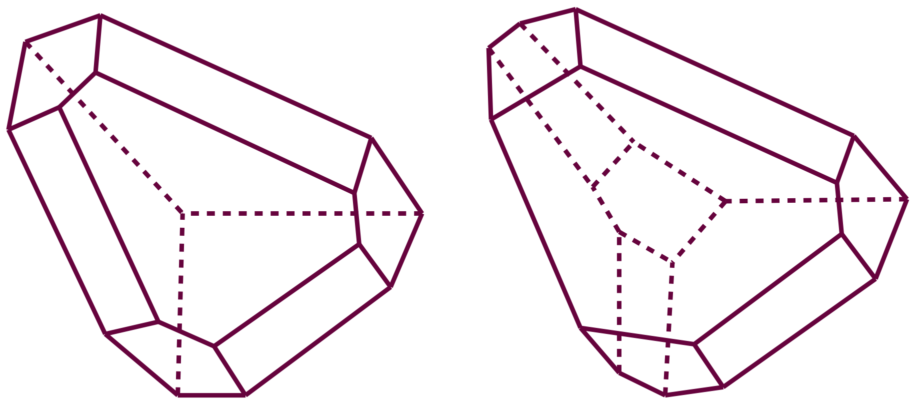
Посебно, за број темена важи

$$f_0(\mathfrak{s}_n) = (n-1) \cdot f_0(\mathfrak{s}_{n-1}) + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad f_0(\mathfrak{s}_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!}.$$

Може се показати (видети [31], Corollary 8.4) да $h-$полином граф$-$асоциедра $\mathfrak{s}_n$ задовољава следећу једнакост

$$h(\mathfrak{s}_n, q) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{j=1}^{i} A(i,j) \cdot q^j,$$

где је $A(i,j) = |\{\omega \in \mathfrak{S}_i : |\mathrm{Des}(\omega)| = j\}|$.



Слика 3.13: *Звездоедар $\mathfrak{s}_4$ и циклоедар $\mathfrak{c}_4$*

Циклоедар

Посматрајмо циклични граф C_n на n темена чије су ивице облика $\{1, n\}$ и $\{i, i+1\}$, за $1 \leq i \leq n-1$. За политоп $\mathfrak{c}_n := Q_{\mathsf{B}(\mathsf{C}_n)}$ кажемо да је један *циклоедар.* Може се показати (видети [33], Corollary 1) да важе следеће једнакости

$$f_0(\mathfrak{c}_n) = \binom{2n-2}{n-1} \qquad \text{и} \qquad h(\mathfrak{c}_n, q) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i}^2 q^i.$$

3.5 Политопи база матроида

3.5.1 Матроиди

Дефиниција 3.5.1 За пар $([n],\mathcal{I})$, где је $\mathcal{I}$ колекција подскупова скупа $[n]$, кажемо да је *матроид* уколико задовољава услове:

1. колекција $\mathcal{I}$ је непразна,
2. сваки подскуп неког елемента колекције $\mathcal{I}$ је такође елемент колекције $\mathcal{I}$,
3. ако су I_1 и I_2 елементи колекције $\mathcal{I}$ такви да $|I_1| = |I_2| + 1$, тада постоји $e \in I_1 - I_2$ такав да је и $I_2 \cup \{e\}$ елемент колекције $\mathcal{I}$.

За скуп $[n]$ кажемо да је *основни скуп,* док елементе колекције $\mathcal{I}$ називамо *независним скуповима матроида* $\mathsf{M} = ([n],\mathcal{I})$.

Подскупове скупа $[n]$ који се не налазе у колекцији $\mathcal{I}$ зовемо и *зависним скуповима матроида* M. За минималне, у односу на инклузију, зависне скупове кажемо да су *циклуси* матроида M. Надаље, са $\mathcal{C}(\mathsf{M})$ означимо скуп свих циклуса матроида M, то јест

$$\mathcal{C}(\mathsf{M}) := \{C \subseteq [n] \;:\; C \notin \mathcal{I} \;\text{ и }\; I \subset C \;\Rightarrow\; I \in \mathcal{I}\}.$$

Теорема 3.5.1 ([25], Corollary 1.1.5) *Нека је $\mathcal{C}$ једна колекција подскупова коначног скупа $[n]$. Иста је колекција циклуса матроида M ако и само ако задовољава:*

1. *$\emptyset \notin \mathcal{C}$,*
2. *ниједан елемент из $\mathcal{C}$ није прави подскуп неког другог елемента из $\mathcal{C}$,*
3. *уколико су C_1 и C_2 два различита елемента колекције $\mathcal{C}$ и ако $e \in C_1 \cap C_2$, тада $(C_1 \cup C_2) - \{e\}$ садржи циклус.*

Дефиниција 3.5.2 Максималне елементе колекције $\mathcal{I}$ називамо и *базама матроида* M. Уз то, колекцију свих база матроида M означавамо са $\mathcal{B}(\mathsf{M})$,

$$\mathcal{B}(\mathsf{M}) \;=\; \{B \in \mathcal{I} \;:\; B \subseteq A \in \mathcal{I} \;\Rightarrow\; B = A\}.$$

Став 3.5.1 ([25], Lemma 1.2.2) *Све базе матроида су исте кардиналности.*

У вези са претходним ставом, кардиналност базе матроида M означавамо са $r(\mathsf{M})$ и називамо *рангом матроида* M.

Пример 3.5.1 Нека је $\mathcal{I}$ колекција подскупова скупа $[n]$ који садрже највише r елемената, за $0 \leq r \leq n$. Тада је

$$\mathsf{U}_{r,n} := ([n],\; \{I \subseteq [n] \;:\; |I| \leq r\;\})$$

један матроид, који је у теорији познат и под именом *униформни матроид.* Посебно, матроид $\mathsf{BA}_n := \mathsf{U}_{n,n}$ се назива *Булова алгебра.* Приметимо следеће

$$\mathcal{C}(\mathsf{U}_{r,n}) = \{I \subseteq [n] \;:\; |I| = r+1\} \quad\text{и}\quad \mathcal{B}(\mathsf{U}_{r,n}) = \{I \subseteq [n] \;:\; |I| = r\}.$$

Напоменимо да је ранг униформног матроида $\mathsf{U}_{r,n}$ једнак $r(\mathsf{U}_{\mathsf{r},\mathsf{n}}) = r$. □

Теорема 3.5.2 ([25], Corollary 1.2.6) *Нека је* $\mathcal{B}$ *колекција подскупова скупа* $[\,n\,]$. *Иста је колекција база матроида* M *ако и само ако важи:*

1. *колекција* $\mathcal{B}$ *је непразна,*
2. *ако су* B_1 *и* B_2 *елементи из* $\mathcal{B}$ *и ако* $e_1 \in B_1 - B_2$, *тада постоји* $e_2 \in B_2 - B_1$ *такав да* $(B_1 - \{e_1\}) \cup \{e_2\} \in \mathcal{B}$.

У вези са претходном теоремом, за елементе $e_1, e_2 \in [\,n\,]$ кажемо да су *у релацији* и користимо ознаку $e_1 \sim e_2$. Није тешко увидети да је $\sim$ релација еквиваленције на основном скупу $[\,n\,]$, чије одговарајуће класе зовемо *повезаним компонентама матроида* M. Уз то, број повезаних компоненти матроида M означавамо са $c\,(\mathsf{M})$. Посебно, ако је $c\,(\mathsf{M}) = 1$, за матроид M кажемо да је један *повезани матроид.*

Директна сума матроида $\mathsf{M}_1 = ([\,n_1\,], \mathcal{I}_1)$ и $\mathsf{M}_2 = ([\,n_2\,], \mathcal{I}_2)$ је матроид дефинисан са

$$\mathsf{M}_1 \oplus \mathsf{M}_2 \;:=\; ([\,n_1 + n_2\,],\ \{I_1 \cup I_2 \;:\; I_1 \in \mathcal{I}_1 \text{ и } I_2 \in \mathcal{I}_2\}).$$

Уз то, за колекцију циклуса тако дефинисаног матроида важи

$$\mathcal{C}(\mathsf{M}_1 \oplus \mathsf{M}_2) \;=\; \mathcal{C}(\mathsf{M}_1) \cup \mathcal{C}(\mathsf{M}_2).$$

Колекција база матроида $\mathsf{M}_1 \oplus \mathsf{M}_2$ се може описати на следећи начин

$$\mathcal{B}(\mathsf{M}_1 \oplus \mathsf{M}_2) = \{B_1 \cup B_2 \;:\; B_1 \in \mathcal{B}(\mathsf{M}_1) \;\text{ и }\; B_2 \in \mathcal{B}(\mathsf{M}_2)\}.$$

Дефиниција 3.5.3 *Рестрикцију матроида* $\mathsf{M} = ([\,n\,], \mathcal{I})$ на подскупу T основног скупа $[\,n\,]$, дефинишимо на следећи начин

$$\mathsf{M}|_T \;:=\; (T,\ \{I \subseteq T \;:\; I \in \mathcal{I}\}).$$

Теорема 3.5.3 ([25], Corollary 4.2.13) *Уколико су* $T_1, T_2, \ldots, T_k$ *повезане компоненте матроида* M, *тада је*

$$\mathsf{M} \;=\; \mathsf{M}|_{T_1} \oplus \mathsf{M}|_{T_2} \oplus \cdots \oplus \mathsf{M}|_{T_k}.$$

У случају када су све повезане компоненте $T_1, T_2, \ldots, T_k$ једночлане, за матроид M кажемо да је *комплетно разложен.*

Теорема 3.5.4 ([26], Theorem 3.4) *Нека је* $\mathsf{M} = ([\,n\,], \mathcal{I})$ *матроид и* $\mathcal{B}(\mathsf{M})$ *одговарајућа колекција база. Колекција*

$$\mathcal{B}^* \;:=\; \{[\,n\,] - B \;:\; B \in \mathcal{B}(\mathsf{M})\}$$

је колекција база за матроид M^*, *чије је основни скуп такође скуп* $[\,n\,]$.

У вези са претходном теоремом, матроид M^* зовемо и *дуалом матроида* M. Посебно, важи следећа једнакост

$$(\mathsf{M}^*)^* \;=\; \mathsf{M}.$$

Тако је, на пример, дуални матроид униформног матроида $\mathsf{U}_{r,n}$ матроид $\mathsf{U}^*_{r,n} = \mathsf{U}_{n-r,n}$.

Дефиниција 3.5.4 Нека је T један подскуп основног скупа $[\,n\,]$ матроида M. Тада је *контракција матроида* M *по скупу* T одређена са

$$\mathsf{M}/T \;:=\; (\mathsf{M}^*|_{[\,n\,]-T})^*.$$

Уз то је, колекција независних скупова матроида M/T задата са

$$\mathcal{I}(\mathsf{M}/T) = \{I \subseteq [\,n\,] - T \ : \ \exists B \in \mathcal{B}(\mathsf{M}|_T) \ \text{ и } \ B \cup I \in \mathcal{I}(\mathsf{M})\},$$

док је колекција база одређена на следећи начин

$$\mathcal{B}(\mathsf{M}/T) = \{B' \subseteq [\,n\,] - T \ : \ \exists B \in \mathcal{B}(\mathsf{M}|_T) \ \text{ и } \ B \cup B' \in \mathcal{B}(\mathsf{M})\}.$$

Пример 3.5.2 Нека је $T \subseteq [\,n\,]$ подскуп скупа $[\,n\,]$ који садржи $t < n$ елемената. Тада је

$$\mathsf{U}_{r,n}/T \ = \begin{cases} \mathsf{U}_{r-t,n-t}, & n-r \le t \le n, \\ \mathsf{U}_{r,n-t}, & n-r > t. \end{cases}$$ □

3.5.2 Политоп база матроида

Дефиниција 3.5.5 *Политоп база матроида* M, који је одређен на основном скупу $[\,n\,]$, се дефинише са

$$Q_{\mathsf{M}} := \operatorname{conv}\{e_B \ : \ B \in \mathcal{B}(\mathsf{M})\},$$

где је $e_B := \sum_{i \in B} e_i$, а $e_1, e_2, \ldots, e_n$ стандардни базни вектори у $\mathbb{R}^n$.

Теорема 3.5.5 ([11], Theorem 1, [12], Theorem 4.1) *Претпоставимо да је $\mathcal{S}$ колекција $r-$подскупова скупа $[\,n\,]$ и $Q_{\mathcal{S}}$ политоп*

$$Q_{\mathcal{S}} = \operatorname{conv}\{e_S \ : \ S \in \mathcal{S}\},$$

где је $e_S = \sum_{i \in S} e_i$. Тада је $\mathcal{S}$ колекција база матроида ако и само ако је свака ивица политопа $Q_{\mathcal{S}}$ транслација вектора $e_i - e_j$, за неке $i, j \in [\,n\,]$.

У вези са претходном теоремом, закључујемо да је политоп Q_{M} уопштени пермутоедар, за који важи следећи став.

Став 3.5.2 ([10], Propositon 2.4) *Димензија политопа база матроида Q_{M} је једнака*

$$\dim(Q_{\mathsf{M}}) \ = \ n - c(\mathsf{M}),$$

где је $c(\mathsf{M})$ број повезаних компоненти матроида M чији је основни скуп $[\,n\,]$.

Тежински квазисиметрични енумератор политопа база матроида

Нека је $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ један вектор и $\omega^* : \mathcal{B}(\mathsf{M}) \to \mathbb{R}$ пресликавање које је на бази $B = \{i_1, i_2, \ldots, i_{r(M)}\}$ матроида M одређено са

$$\omega^*(B) := \langle \omega, e_B \rangle = \omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \cdots + \omega_{r_{r(\mathsf{M})}}.$$

Број $\omega^*(B)$ називамо и *$\omega-$тежином базе* B. Тада, са $\mathcal{B}_\omega \subset \mathcal{B}(\mathsf{M})$ означимо колекцију база матроида M које имају максималну $\omega-$тежину. У вези са тим, политоп $Q_{\mathcal{B}_\omega}$ је страна политопа Q_{M} која је максимизирана пресликавањем ω^*. Отуда, са M_ω означимо страну максимизирану пресликавањем ω^*. Посебно, ако је M_ω теме политопа Q_{M} за функцију ω кажемо да је $\mathsf{M}-$*генеричка.*

Даље, посматрајмо заставу $\mathcal{F}_\omega : \emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = [\,n\,]$ такву да је пресликавање ω^* константно на $F_i \setminus F_{i-1}$, за $1 \le i \le k$, и да за $1 \le i \le k-1$ важи $\omega|_{F_i \setminus F_{i-1}} < \omega|_{F_{i+1} \setminus F_i}$.

Став 3.5.3 ([3], Proposition 1, [17] Proposition 7.5) *Нека је $\omega \in \mathbb{Z}_n^+$ и $\mathcal{F}_\omega$ одговарајућа застава подскупова. База $B \in \mathcal{B}(\mathsf{M})$ матроида M има максималну $\omega-$тежину, то јест $B \in \mathcal{B}_\omega$ ако и само за $1 \leq i \leq k$ важи*

$$|B \cap (F_i \setminus F_i)| \,=\, r\left(\mathsf{M}|_{F_{i-1}^{\mathrm{op}}}\right) - r\left(\mathsf{M}|_{F_i^{\mathrm{op}}}\right),$$

где је $F_j^{\mathrm{op}} = [\,n\,] - F_j$ за $0 \leq j \leq k$.

На основу претходног става закључујемо да страна M_ω политопа Q_M зависи само од заставе $\mathcal{F}_\omega$ подскупова скупа $[\,n\,]$, па за исту користимо и ознаку $\mathsf{M}/\mathcal{F}_\omega$. Другим речима, пресликавање $\pi_{Q_\mathsf{M}} : L(Pe^{n-1}) \to L(Q_\mathsf{M})$ је дато на следећи начин

$$\pi_{Q_M}(\mathcal{F}) := Q_{M/\mathcal{F}}.$$

Следећи став подробније описује матроид $\mathsf{M}/\mathcal{F}$.

Став 3.5.4 ([3], Proposition 2) *Ако је $\mathcal{F}$ застава подскупова на скупу $[\,n\,]$, тада је*

$$\mathsf{M}/\mathcal{F} \,=\, \bigoplus_{i=1}^{k}(\mathsf{M}|_{F_{i-1}^{\mathrm{op}}})/F_i^{\mathrm{op}}.$$

Како за директну суму матроида важи $Q_{\mathsf{M}_1 \oplus \mathsf{M}_2} = Q_{\mathsf{M}_1} \times Q_{\mathsf{M}_2}$, користећи став 3.5.2 добијамо следећу последицу.

Последица 3.5.1 ([17], Corollary 7.7) *За заставу $\mathcal{F}$ одговарајући $Q_\mathsf{M}-$ранг износи*

$$\mathrm{rk}_{Q_\mathsf{M}}(\mathcal{F}) = \dim(Q_{\mathsf{M}/\mathcal{F}}) = n - \sum_{i=1}^{k} c((\mathsf{M}|_{F_{i-1}^{\mathrm{op}}})/F_i^{\mathrm{op}}).$$

3.5.3 Хопфова алгебра матроида

За матроиде $\mathsf{M}_1 = ([\,n_1\,], \mathcal{I}_1)$ и $\mathsf{M}_2 = ([\,n_2\,], \mathcal{I}_2)$ кажемо да су *изоморфни* ако постоји бијекција између основних скупова $f : [\,n_1\,] \to [\,n_2\,]$ таква да

$$I \in \mathcal{I}_1 \quad \text{ако и само ако} \quad f(I) \in \mathcal{I}_2.$$

Са $\mathcal{M}$ означимо векторски простор над пољем $\mathbb{K}$ који садржи све линеарне комбинације изоморфних класа матроида. Множење и комножење су дефинисани са

$$[\mathsf{M}_1] \cdot [\mathsf{M}_2] := [\mathsf{M}_1 \oplus \mathsf{M}_2] \quad \text{и} \quad \Delta([\mathsf{M}]) := \sum_{A \subseteq E} [\mathsf{M}|_A] \otimes [\mathsf{M}/A].$$

Приметимо да је

$$\mathcal{M} \,=\, \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{M}_n,$$

где је $\mathcal{M}_n$ потпростор разапет класама изоморфних матроида на основном скупу $[\,n\,]$. Према томе, $\mathcal{M}$ је градуисана, комутативна и некокомутативна Хопфова алгебра. Даље, посматрајмо пресликавање $\zeta_q : \mathcal{M} \to \mathbb{K}[\,q\,]$ које је одређено са

$$\zeta_q([\mathsf{M}]) := q^{\mathrm{rk}(\mathsf{M})}, \qquad \text{где је} \qquad \mathrm{rk}(\mathsf{M}) := n - c(\mathsf{M}).$$

Према Теореми 1.3.1, постоји јединствени морфизам Хопфових алгебри

$$\Psi_q : (\mathcal{M}, \zeta_q) \to (\mathcal{Q}Sym, \zeta_\mathcal{Q}).$$

Нека је rev : $\mathcal{QS}ym \to \mathcal{QS}ym$ пресликавање које је на мономијалној бази одређено са $\mathrm{rev}(M_\alpha) = M_{\mathrm{rev}(\alpha)}$. Важи следећа теорема.

Теорема 3.5.6 ([17], Theorem 7.9) *Нека је* M *матроид и* Q_{M} *одговарајући политоп база матроида. Тада је*

$$F_q(Q_{\mathsf{M}}) \;=\; \mathrm{rev}(\Psi_q([\mathsf{M}])).$$

Доказ. Пресликавање $\Psi_q([\mathsf{M}])$ је у мономијалној бази одређено са

$$\Psi_q([\mathsf{M}]) = \sum_{\alpha\models n} (\zeta_q)_\alpha(\mathsf{M}) M_\alpha,$$

где је коефицијент који одговара композицији $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \models n$ једнак

$$(\zeta_q)_\alpha(\mathsf{M}) \quad = \sum_{\mathcal{F}:\mathrm{type}(\mathcal{F})=\alpha} \prod_{i=1}^{k} q^{\mathrm{rk}((\mathsf{M}_{F_i})/F_{i-1})}$$

На основу Последице 3.5.1 закључујемо да је

$$(\zeta_q)_\alpha(\mathsf{M}) \quad = \sum_{\mathcal{F}:\mathrm{type}(\mathcal{F})=\alpha} q^{\mathrm{rk}_{Q_{\mathsf{M}}}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}})}.$$

Дакле,

$$\Psi_q([\mathsf{M}]) = \sum_{\mathcal{F}} q^{\mathrm{rk}_{Q_{\mathsf{M}}}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}})} M_{\mathcal{F}},$$

где је сума по свим заставама $\mathcal{F}$ подскупова скупа $[\,n\,]$. *Q.E.D.*

Из дефиниције пресликавања rev следи да је

$$\mathbf{ps}^1(M_\alpha)(-1) = \mathbf{ps}^1(M_{\mathrm{rev}(\alpha)})(-1),$$

па, према томе, за $f-$полином политопа Q_M важи следећа теорема.

Теорема 3.5.7 ([17], Theorem 10.10) *$f-$полином политопа Q_{M}, који одговара матроиду M датом на основном скупу $[\,n\,]$, гласи*

$$f(Q_{\mathsf{M}}, q) \;=\; (-1)^n \mathbf{ps}^1(\Psi_{-q}([\mathsf{M}]))(-1).$$

Тежински квазисиметрични енумератор дуала матроида

Подсетимо се да је за матроид $\mathsf{M} = ([\,n\,], \mathcal{B}(\mathsf{M}))$ одговарајући дуални матроид одређен са $\mathsf{M}^* = ([\,n\,], \mathcal{B}^*(\mathsf{M}))$. Према томе, посматрајмо пресликавање aff : $[0,1]^n \to [0,1]^n$ које је дефинисано са

$$\mathrm{aff}(x) \;:=\; \mathbf{1} - x,$$

где је $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Пресликавање aff представља афини изоморфизам између политопа Q_{M} и Q_{M^*}. И још, важи следећа лема.

Лема 3.5.1 ([17], Lemma 8.2) *За матроид* M, *који је задат на основном скупу* $[\,n\,]$, *и заставу подскупова* $\mathcal{F}$ *на истом скупу важи*

$$\mathrm{aff}(Q_{\mathsf{M}/\mathcal{F}}) \;=\; Q_{\mathsf{M}^*/\mathcal{F}^{\mathrm{op}}}.$$

Став 3.5.5 ([17], Proposition 8.3) *Ако је* M^* *дуал матроида* M, *тада је*

$$F_q([\mathsf{M}^*]) \;=\; \mathrm{rev}(F_q([\mathsf{M}])).$$

Доказ. Приметимо да је

$$F_q(\mathsf{M}^*) \;=\; \sum_{G\in L(Q_{\mathsf{M}^*})} q^{\dim(G)} \sum_{\mathcal{F}\,:\,Q_{\mathsf{M}^*/\mathcal{F}}=G} M_{\mathcal{F}}.$$

Уколико је $G^* = \mathrm{aff}(G)$, тада важи $\dim(G) = \dim(G^*)$. Према Леми 3.5.1 имамо

$$F_q(\mathsf{M}^*) \;=\; \sum_{G^*\in L(Q_{\mathsf{M}})} q^{\dim(G^*)} \sum_{\mathcal{F}\,:\,Q_{\mathsf{M}/\mathcal{F}^{\mathrm{op}}}=G^*} M_{\mathcal{F}^{\mathrm{op}}}.$$

Пошто је $\mathrm{type}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{rev}(\mathrm{type}(\mathcal{F}))$ добијамо жељену једнакост. *Q.E.D.*

M−генерички квазисиметрични енумератор

Подсетимо се да је тежинска функција ω^* једна M−генеричка функција уколико је M_ω теме политопа $Q_{\mathcal{B}_\omega}$. Тиме је дефинисан M−*генерички квазисиметрични енумератор*

$$F(\mathsf{M}) \quad := \sum_{\omega \text{ је } \mathsf{M}\text{−генеричка}} \; \prod_{i\in[n]} x_{\omega(i)}, \tag{3.22}$$

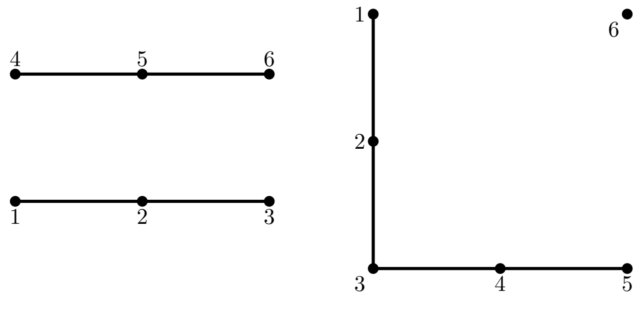
који је познат под именом *Биљера−Јиа−Рајнерова квазисиметрична функција матроида.* Приметимо да је $F_q(\mathsf{M})$ уопштење енумератора $F(\mathsf{M})$, као и да се M−генерички енумератор добија у случају када је $q = 0$, то јест

$$F(\mathsf{M}) \;=\; F_0(Q_{\mathsf{M}}).$$

При том, коефицијент $\zeta_\alpha(\mathsf{M})$, из једнакости (3.22), одговара броју M – генеричких функција ω^* таквих да је $|\omega^{*-1}(i)| = \alpha_{k-i}$. Другим речима,

Став 3.5.6 ([5], Proposition 3.3) *Коефицијент* $\zeta_\alpha(\mathsf{M})$ *одговара броју застава* $\mathcal{F}$ *за које је* $\mathrm{type}(\mathcal{F}) = \alpha$ *и сваки од матроида* $(\mathsf{M}|_{F^{\mathrm{op}}_{i-1}})/F^{\mathrm{op}}_i$ *комплетно разложен.*

Пример 3.5.3 Нека су M_1 и M_2 два матроида на основном скупу $[6]$, и нека је $\mathcal{B}(\mathsf{M}_1)$, односно $\mathcal{B}(\mathsf{M}_2)$, колекција свих трочланих подскупова скупа $[6]$ изузев $\{1,2,3\}$ и $\{4,5,6\}$, односно $\{1,2,3\}$ и $\{3,4,5\}$. Исте можемо приказати графички и као такве их називамо *афиним матроидима.* M−генерички квазисиметрични енумератор не разликује матроиде M_1 и M_2, то јест $F(\mathsf{M}_1) = F(\mathsf{M}_2)$.



Слика 3.14: *Матроиди* M_1 *и* M_2 *такви да је* $F(\mathsf{M}_1) = F(\mathsf{M}_2)$

Приметимо да је $\zeta_{(1,4,1)}(\mathsf{M}_1) = 30q^3$ и $\zeta_{(1,4,1)}(\mathsf{M}_2) = q^2 + 29q^3$, одакле произилази да је $F_q(\mathsf{M}_1) \neq F_q(\mathsf{M}_2)$. Дакле, функција F_q је финија од функције F. □

3.5.4 Униформни матроиди и одговарајући политопи

Подсетимо се да је за униформни матроид $\mathsf{U}_{r,n}$ колекција база задата са

$$\mathcal{B}(\mathsf{U}_{r,n}) = \{I \subset [\,n\,] \;:\; |I| = r\},$$

уз напомену да је $\mathcal{B}(\mathsf{U}_{0,n}) = \{\emptyset\}$ и $\mathcal{B}(\mathsf{U}_{n,n}) = [\,n\,]$. Како је $Q_{\mathcal{B}(\mathsf{U}_{0,n})} = \mathbf{0}$ и $Q_{\mathcal{B}(\mathsf{U}_{n,n})} = \mathbf{1}$, надаље претпоставимо да је $0 < r < n$. Посматрајмо заставу подскупова

$$\mathcal{F} \;:\; \emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_{k+1} = [\,n\,]$$

за коју је $\mathrm{type}(\mathcal{F}) = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots \alpha_k) \models n$. Тада, за заставу $\mathcal{F}$, дефинишимо

$$i_0 := i_0(\mathcal{F}) = \min\{\, i \;:\; \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_i \geq r\},$$

као и $\mathcal{F}-$*парцијалне суме* r' и r'' на следећи начин

$$r' := \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{i_0-1} \quad \text{и} \quad r'' := r' + \alpha_{i_0}.$$

Применом Става 3.5.4, можемо закључити да важи следећа импликација

$$\mathsf{U}_{r,n}/\mathcal{F} = \mathsf{U}_{r',r'} \oplus \mathsf{U}_{r-r',\alpha_{i_o}} \oplus \mathsf{U}_{0,n-r''} \qquad \Longrightarrow \qquad Q_{\mathsf{U}_{r,n}/\mathcal{F}} = Q_{\mathsf{U}_{r-r',\alpha_{i_o}}}.$$

То тачно значи да је $Q_{\mathsf{U}_{r,n}}-$ ранг на застави $\mathcal{F}$ одређен са

$$\mathrm{rk}_{Q_{\mathsf{U}_{r,n}}}(\mathcal{F}) = \dim(Q_{\mathsf{U}_{r,n}/\mathcal{F}}) = \begin{cases} 0, & r = r', \\ \alpha_{i_0} - 1, & r < r''. \end{cases}$$

Дакле, универзални морфизам Хопфових алгебри Ψ_q гласи

$$\begin{aligned} \Psi_q([\mathsf{U}_{r,n}]) = & \binom{n}{r}(M_1)^r \circ (M_1)^{n-r} \\ & + \sum_{0 \leq r' < r < r'+\lambda \leq n} \binom{n}{r'}\binom{n-r'}{\lambda} q^{\lambda-1}(M_1)^{r'} \circ M_\lambda \circ (M_1)^{n-r'-\lambda}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

На основу Теореме 3.5.7, закључујемо да је $f-$полином политопа $Q_{\mathsf{U}_{r,n}}$ једнак

$$f(Q_{\mathsf{U}_{r,n}}, q) \quad = \quad \binom{n}{r} \quad + \sum_{0 \leq r' < r < r'+\lambda \leq n} \binom{n}{r'}\binom{n-r'}{\lambda} q^{\lambda-1}. \tag{3.24}$$

Пример 3.5.4 Утврдимо да је политоп $Q_{\mathsf{U}_{2,4}}$ октаедар $\diamond_3$. Применом једнакости (3.23) и (3.24) добијамо да је

$$\begin{aligned} \Psi_q([\mathsf{U}_{2,4}]) = & M_{(4)}q^3 + 4(M_{(1,3)} + M_{(3,1)})q^2 + 12M_{(1,2,1)}q \\ & + 6(M_{(2,2)} + 2M_{(1,1,2)} + 2M_{(2,1,1)} + 4M_{(1,1,1,1)}), \end{aligned}$$

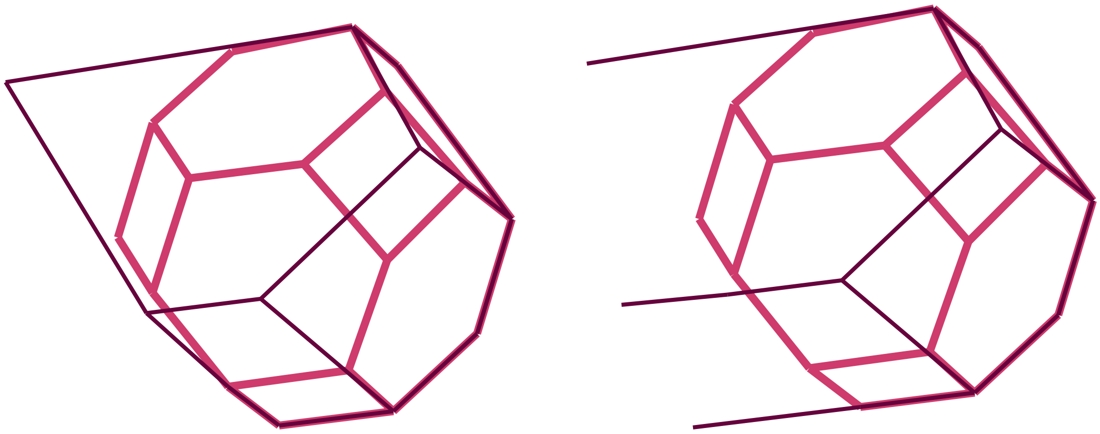
одакле следи да је $f(Q_{\mathsf{U}_{2,4}}, q) = q^3 + 8q^2 + 12q + 6$. $\square$

3.6 Конуси посета

3.6.1 Проширени уопштени пермутоедар

Подсетимо се да је политоп скуп тачака који се може представити као $\mathcal{V}-$политоп или као ограничени $\mathcal{H}-$полиедар. На сличан начин, као и у случају ограниченог полиедра, неограниченом полиедру можемо придружити мрежу страна и нормалну лепезу, уз напомену да нормална лепеза није комплетна.

Дефиниција 3.6.1 Полиедар P чија је нормална лепеза $\mathcal{N}(P)$ грубља од неке подлепезе нормалне лепезе стандардног пермутоедра се назива *проширени уопштени пермутоедар.*



Слика 3.15: *Уопштени пермутоедар и проширени уопштени пермутоедар*

Произвољној страни G проширеног уопштеног пермутоедра P можемо доделити *тежински квазисиметрични енумератор*

$$F_q(G) \;:=\; q^{\dim(G)} \sum_{\omega\,\in\mathbb{Z}_+^n\cap C_G^\circ} x_{\omega_1}x_{\omega_2}\cdots x_{\omega_3} \;=\; q^{\dim(G)} \sum_{\mathcal{F}\in \mathsf{F}(G)} M_{\mathcal{F}},$$

где је $\mathsf{F}(G) := \{\mathcal{F}\in L(Pe^{n-1})\;:\; C_{\mathcal{F}}^\circ \subseteq C_G^\circ\}$. Према Ставу 3.2.2 важи

$$\mathbf{ps}^1(F_q(G)) \;=\; q^{\dim(G)}(-1)^{n-1-\dim(G)}. \tag{3.25}$$

Дефиниција 3.6.2 *Тежински квазисиметрични енумератор* проширеног уопштеног пермутоедра P је дефинисан са

$$F_q(P) := \sum_{G\in L(P)} F_q(G),$$

где је $L(P)$ мрежа страна полиедра P.

Став 3.6.1 ([29], Proposition 3.5) *За $(n-1)$–димензионални проширени уопштени пермутоедар P, одговарајући f–полином је једнак*

$$f(P,q) \;=\; (-1)^{n-1}\mathbf{ps}^1(F_{-q}(P))(-1).$$

Доказ. Користећи (3.25) имамо да је

$$\mathbf{ps}^1(F_{-q}(P))(-1) \;=\; (-1)^{n-1}\sum_{G\in L(P)} q^{\dim(G)}. \qquad Q.E.D.$$

3.6.2 Конус посета

Посматрајмо посет P који је дефинисан на скупу темена $\mathrm{g}(\mathsf{P}) = [\,n\,]$. Са $\mathsf{P}|_S$ означимо *рестрикцију* посета P на скупу $S \subseteq [n]$. Скуп S зовемо *идеалом посета* P, и записујемо $S \lhd \mathsf{P}$, уколико не постоје елементи $p_1 \in [\,n\,] \setminus S$ и $p_2 \in S$ такви да важи $p_1 \leq_{\mathsf{P}} p_2$.

Дефиниција 3.6.3 *Конус посета* P на n темена је проширени уопштени премутоедар

$$C_{\mathsf{P}} := \mathrm{cone}\{e_i - e_j \,:\, i <_{\mathsf{P}} j\},$$

где су $e_1, e_2, \dots, e_n$ стандардни базни вектори у простору $\mathbb{R}^n$.

Став 3.6.2 ([1], Propositon 15.1) *Генераторни зраци конуса посета C_{P} су одређени векторима $e_i - e_j$ који одговарају релацијама $i \lessdot_{\mathsf{p}} j$ у посету* P.

Полиедар C_{P} се може описати (видети [1], поглавље 15) и на следећи начин:

$$C_{\mathsf{P}} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \,:\, \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \;\text{ и }\; \sum_{s \in S} x_s \geq 0 \;\text{ за све }\; S \lhd \mathsf{P} \right\}.$$

Према томе, димензија посматраног конуса је једнака

$$\dim(C_{\mathrm{P}}) = n - c(\mathrm{P}), \tag{3.26}$$

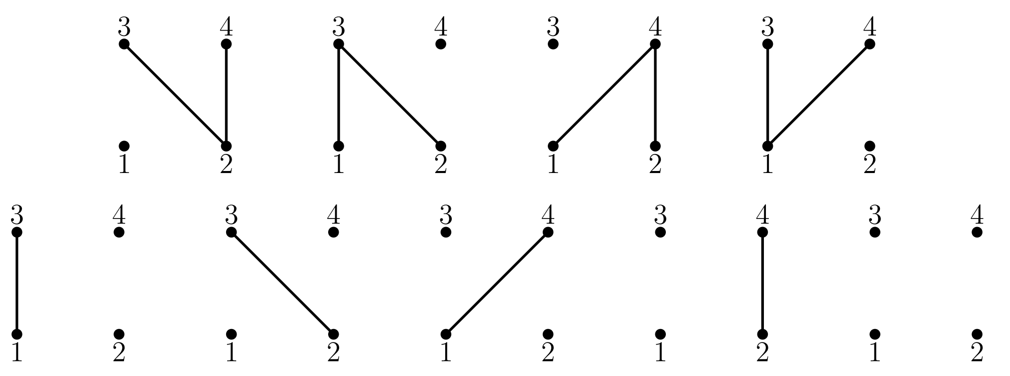
где је $c(\mathrm{P})$ број повезаних компоненти посета P.

Даље, посматрајмо циклични низ елемента $\mathsf{C} \,:\, i_1, i_2, \dots, i_n$ посета P такав да су свака два суседна елемента *циклуса* C упоредива у P. Уз то, циклус садржи *растућу ивицу*, односно *опадајућу ивицу*, ако је $i_j <_{\mathsf{P}} i_{j+1}$ или $i_n <_{\mathsf{P}} i_1$, односно $i_j >_{\mathsf{P}} i_{j+1}$ или $i_n >_{\mathsf{P}} i_1$.

Дефиниција 3.6.4 За потпосет Q посета P кажемо да је *позитиван* ако за сваки циклус C све растуће ивице циклуса C су у Q ако и само ако су све опадајуће ивице циклуса C у потпосету Q. Скуп свих позитивних потпосета посета P означимо са $\mathrm{Pos}(\mathsf{P})$.

Пример 3.6.1 Циклуси посета $\mathsf{P}(1 < 3, 1 < 4, 2 < 3, 2 < 4)$ су:

$$\begin{array}{cccc} 1<4>2<3 & 1<3>2<4 & 4>2<3>1 & 3>2<4>1 \\ 2<3>1<4 & 2<4>1<3 & 3>1<4>2 & 4>1<3>2 \end{array}$$



Слика 3.16: *Позитивни потпосети посета* P

Одговарајући позитивни потпосети посета P су приказани на слици 3.16. □

Лема 3.6.1 ([1], Лемма 15.3) *Стране полиедра C_{P} су конуси посета C_{Q}, за $\mathsf{Q} \in \mathrm{Pos}(\mathsf{P})$.*

На основу претходне леме, квазисиметрични енумератор $F_q(C_{\mathsf{P}})$ се може записати у следећем облику

$$F_q(C_{\mathsf{P}}) \quad = \sum_{\mathsf{Q} \in \mathrm{Pos}(\mathsf{P})} \; \sum_{\mathcal{F} \in \mathsf{F}(C_{\mathsf{Q}})} q^{\dim(C_{\mathsf{Q}})} M_{\mathcal{F}}. \tag{3.27}$$

Став 3.6.3 ([29], Proposition 3.10) *Вектор $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ се налази у $\mathcal{N}(C_{\mathsf{P}})$ ако и само ако је $\omega_i \leq \omega_j$ за све $i \leq_{\mathsf{P}} j$.*

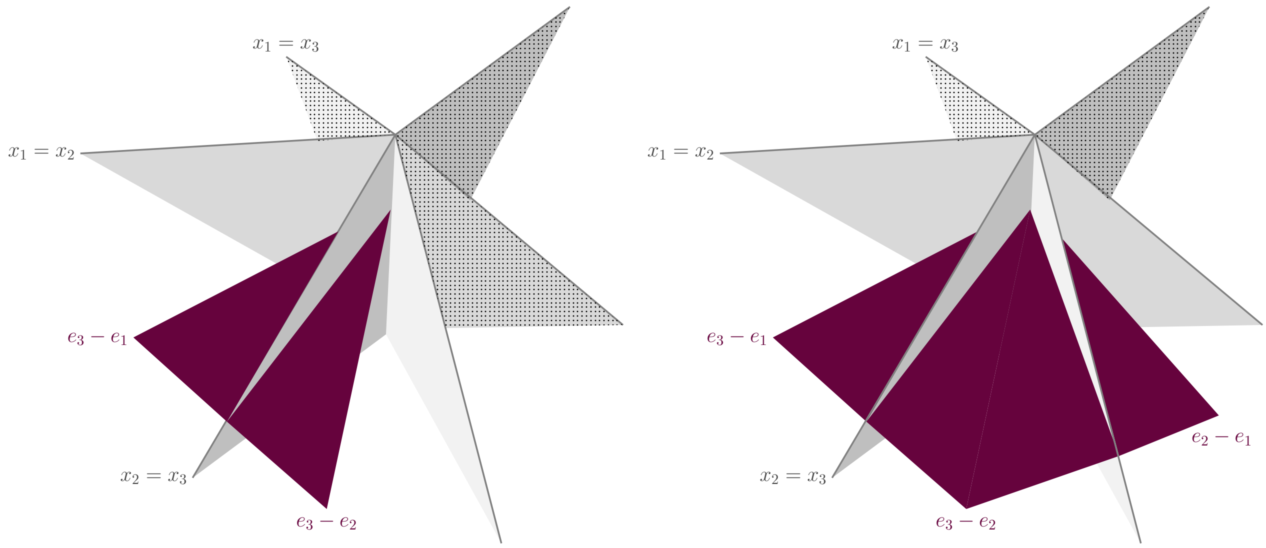
Доказ. Вектор $\omega \in \mathbb{Z}_n^+$ се налази у $\mathcal{N}(C_{\mathsf{P}})$ ако и само ако ω^* максимизира неку страну конуса посета C_{P}, то јест уколико максимизира неки генераторни зрак или теме полиедра C_{P}. Приметимо да је тежинска функција ω^* на генераторном зраку $e_i - e_j$ једнака $\omega^*(t(e_i - e_j)) = \langle \omega, t(e_i - e_j) \rangle = t(\omega_i - \omega_j)$ за $t \geq 0$. Важи следеће:

1. Ако је $\omega_i > \omega_j$ тада је $t(\omega_i - \omega_j) \geq 0$ за све $t \geq 0$. Пошто се максимум не достиже, ω^* не максимизира ниједну страну полиедра C_{P}.
2. Ако је $\omega_i < \omega_j$ тада је $t(\omega_i - \omega_j) \leq 0$ за све $t \geq 0$. Максимум се достиже за $t = 0$, па ω^* максимизира теме конус посета C_{P}.
3. Ако је $\omega_i = \omega_j$ тада је $t(\omega_i - \omega_j) = 0$ за све $t \geq 0$. Према томе, ω^* максимизира генераторни зрак $e_i - e_j$. *Q.E.D.*

Последица 3.6.1 *Застава $\mathcal{F} \in \mathsf{F}(C_{\mathsf{Q}})$, за неко $\mathsf{Q} \in \mathrm{Pos}(\mathsf{P})$, ако и само ако за свако $\omega \in C_{\mathcal{F}}^{\circ}$ важи*

1. *$\omega_i = \omega_j$ за све $i \leq_{\mathsf{Q}} j$,*
2. *$\omega_i < \omega_j$ за све $j \not\leq_{\mathsf{Q}} i$, то јест или су i и j неупоредиви у Q или је $i <_{\mathsf{Q}} j$.*

Пример 3.6.2 Посматрајмо посете $\mathsf{P}_1(3 < 1, 3 < 2)$ и $\mathsf{P}_2(3 < 2 < 1)$.



Слика 3.17: *Конуси посета C_{P_1} и C_{P_2} и одговарајуће нормалне лепезе*

Одговарајући квазисиметрични енумератори су:

$$F_q(C_{\mathsf{P}_1}) \; = \; q^2 M_{(3)} \; + \; 2q M_{(1,2)} \; + \; \left(M_{(2,1)} + 2M_{(1,1,1)}\right),$$

$$F_q(C_{\mathsf{P}_2}) \; = \; q^2 M_{(3)} \; + \; q \left(M_{(1,2)} + M_{(2,1)}\right) \; + \; M_{(1,1,1)}.$$

Приметимо да је $f(C_{\mathsf{P}_1}, q) = f(C_{\mathsf{P}_2}, q) = q^2 + 2q + 1$. $\square$

3.6.3 Хопфова алгебра посета

Са $\mathcal{P}$ означимо векторски простор над пољем $\mathbb{K}$ који садржи све линеарне комбинације класа изоморфних посета. Множење и комножење су дефинисани са

$$[\mathsf{P}_1] \cdot [\mathsf{P}_2] = [\mathsf{P}_1 \sqcup \mathsf{P}_2] \quad \text{и} \quad \Delta([\mathsf{P}]) = \sum_{S \lhd \mathsf{P}} [\mathsf{P}|_S] \otimes [\mathsf{P}|_{[n]\setminus S}].$$

Приметимо да је

$$\mathcal{P} \;=\; \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{P}_n,$$

где је $\mathcal{P}_n$ потпростор разапет класама изморфних посета на n темена. Према томе, $\mathcal{P}$ је једна градуисана, комутативна и некокомутативна Хопфова алгебра.

Став 3.6.4 ([1], Corollary 15.7) *Антипод у Хопфовој алгебри посета $\mathcal{P}$ је одређен са*

$$S([\mathsf{P}]) = \sum_{\mathsf{Q}\in \mathrm{Pos}(\mathsf{P})} (-1)^{c(\mathsf{Q})}\mathsf{Q}.$$

Дефиниција 3.6.5 За заставу подскупова $\mathcal{F} : \emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_k = [\,n\,]$ кажемо да је *застава идеала* посета P, и користимо ознаку $\mathcal{F} \lhd \mathsf{P}$, уколико је $F_i \lhd \mathsf{P}$ за све $0 < i \leq k$. Скуп свих застава идеала посета P означимо са $\mathfrak{F}(\mathsf{P})$.

Посматрајмо пресликавање $\mathfrak{F}(\mathsf{P}) \to \mathcal{P}_n$ које је дефинисано са

$$\mathcal{F} \;\mapsto\; \mathsf{P}/\mathcal{F} \;:=\; \prod_{i=1}^{k} \mathsf{P}|_{F_i\setminus F_{i-1}}.$$

Приметимо да је $\mathsf{P}/\mathcal{F}$ један потпосет посета P. Даље, нека је $\mathsf{P}/\mathcal{F} = \mathsf{P}_1 \sqcup \mathsf{P}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathsf{P}_m$ декомпозиција посматраног потпосета на повезане компоненте. Кажемо да је потпосет P_u *мањи, у односу на* P, од потпосета P_v уколико не постоје елементи $p_v \in \mathrm{g}(\mathsf{P}_v)$ и $p_u \in \mathrm{g}(\mathsf{P}_u)$ такви да је $p_v \leq_{\mathsf{P}} p_u$. Посебно, ако је и P_v мањи, у односу на P, од P_u за уочене потпосете кажемо да су *неупоредиви у посету* P.

Даље, посматрајмо пресликавање $\zeta_q : \mathcal{P} \to \mathbb{K}[\,q\,]$ које је одређено са

$$\zeta_q([\mathsf{P}]) = q^{\mathrm{rk}(\mathsf{P})}, \quad \text{где је} \quad \mathrm{rk}(\mathsf{P}) = n - c(\mathsf{P}).$$

На основу Теореме 1.3.1 постоји јединствени морфизам Хопфових алгебри

$$\Psi_q : (\mathcal{P}, \zeta_q) \;\to\; (\mathcal{Q}Sym, \zeta_{\mathcal{Q}})$$

који је на мономијалној бази задат са

$$\Psi_q([\mathsf{P}]) \;=\; \sum_{\alpha\models n} (\zeta_q)_\alpha(\mathsf{P}) M_\alpha. \tag{3.28}$$

Коефицијент $(\zeta_q)_\alpha(\mathsf{P})$ који одговара квазисиметричној функцији M_α гласи

$$(\zeta_q)_\alpha(\mathsf{P}) \quad = \sum_{\substack{\mathcal{F}\in\mathfrak{F}(\mathsf{P})\\ \mathrm{type}(\mathcal{F})=\alpha}} \prod_{j=1}^{k} q^{\mathrm{rk}(\mathsf{P}|_{F_j\setminus F_{j-1}})} \quad = \sum_{\substack{\mathcal{F}\in\mathfrak{F}(\mathsf{P})\\ \mathrm{type}(\mathcal{F})=\alpha}} q^{\mathrm{rk}_{\mathsf{P}}(\mathcal{F})},$$

где је

$$\mathrm{rk}_{\mathsf{P}}(\mathcal{F}) \;:=\; \sum_{j=1}^{k} \mathrm{rk}(\mathsf{P}|_{F_j\setminus F_{j-1}}) \;=\; n - \sum_{j=1}^{k} c(\mathsf{P}|_{F_j\setminus F_{j-1}}).$$

На крају, једнакост (3.28) се може приказати у облику

$$\Psi_q([\mathsf{P}]) \;=\; \sum_{\mathcal{F}\in\mathfrak{F}(\mathsf{P})} q^{\mathrm{rk}_{\mathsf{P}}(\mathcal{F})} M_{\mathcal{F}}. \tag{3.29}$$

Теорема 3.6.1 ([29], Theorem 4.2) *Нека је* P *један посет на скупу* $[n]$ *и* C_{P} *одговарајући конус посета. Тежински квазисиметрични енумератор* F_q *се подудара са јединственим морфизмом Хопфових алгебри* Ψ_q*, то јест*

$$F_q(C_{\mathsf{P}}) \;=\; \Psi_q([\mathsf{P}]).$$

Доказ. Тежински квазисиметрични енумератор $F_q(C_{\mathsf{P}})$ је описан са (3.27). Према томе, довољно је показати да је

$$\mathfrak{F}(\mathsf{P}) \;=\; \{\mathcal{F} : \mathcal{F}\in \mathsf{F}(C_{\mathsf{Q}}) \text{ за неко } \mathsf{Q}\in \mathrm{Pos}(\mathsf{P})\},$$

и $\mathrm{rk}_{\mathsf{P}}(\mathcal{F}) = \dim(C_{\mathsf{Q}})$, за заставу подскупова $\mathcal{F}\in \mathsf{F}(C_{\mathsf{Q}})$.

$\supseteq$: Претпоставимо да $\mathcal{F}\in \mathsf{F}(C_{\mathsf{Q}})$ за неко $\mathsf{Q}\in \mathrm{Pos}(\mathsf{P})$. Уколико је $\mathsf{Q}_1\sqcup\cdots\sqcup\mathsf{Q}_m$ декомпозиција посета Q на повезане компоненте, према једнакости (3.26) важи $\dim(C_{\mathsf{Q}}) = n-m$. Даље, нека је $\omega\in C^{\circ}_{\mathcal{F}}$. На основу Последице 3.6.1 имамо следеће разматрање:

1. ω је константно на $\mathrm{g}(\mathsf{Q}_u)$, па је $\mathrm{g}(\mathsf{Q}_u)\subseteq F_i\setminus F_{i-1}$ за неко $i=1,\dots,|\mathcal{F}|$;
2. Ако $\mathrm{g}(\mathsf{Q}_u),\mathrm{g}(\mathsf{Q}_v)\subset F_i\setminus F_{i-1}$ за неко $i=1,\dots,|\mathcal{F}|$ тада су Q_u и Q_v неупоредиви. У супротном, ако је $i<_{\mathsf{P}} j$ за неко $i\in \mathrm{g}(\mathsf{Q}_u)$ и $j\in \mathrm{g}(\mathsf{Q}_v)$ тада ω^* максимизира генераторни зрак e_i-e_j, па $\mathcal{F}\notin \mathsf{F}(C_{\mathsf{Q}})$;
3. Ако је $\mathrm{g}(\mathsf{Q}_u)\subseteq F_i\setminus F_{i-1}$, $\mathrm{g}(\mathsf{Q}_v)\subseteq F_j\setminus F_{j-1}$ и Q_u мањи од Q_v тада важи $i<_{\mathbb{Z}} j$. У супротном, из $i>_{\mathbb{Z}} j$ следи да је $\omega_i>\omega_j$ за неко $i\in\mathsf{Q}_u$, $j\in\mathsf{Q}_v$ за које важи $i<_{\mathsf{P}} j$, па тежинска функција ω^* не достиже максимум.

Сходно томе, $\mathcal{F}\in\mathfrak{F}(\mathsf{P})$ и $\mathsf{P}/\mathcal{F}=\mathsf{Q}$, па је $\mathrm{rk}_{\mathsf{P}}(\mathcal{F}) = n-m = \dim(C(\mathsf{Q}))$.

$\subseteq$: Нека је $\mathcal{F}\lhd\mathsf{P}$ застава идеала посета P и $\mathsf{C} : i_1,i_2,\dots,i_n$ циклус чије се све опадајуће ивице налазе у $\mathsf{P}/\mathcal{F}$. Посматрајмо *функцију нивоа* дефинисану са

$$l(i) \;:=\; \min\{a \,:\, i\in F_a\},$$

за $i\in[\,n\,]$. Приметимо да је l неопадајућа дуж циклуса C. Другим речима, функција l је константна на циклусу C, то јест $\mathsf{C}\subset F_a\setminus F_{a-1}$ за неко $1\le a\le|\mathcal{F}|$. Дакле, све растуће ивице циклуса C се налазе у $\mathsf{P}/\mathcal{F}$, одакле следи да је $\mathsf{P}/\mathcal{F}$ позитиван потпосет посета P. На основу Последице 3.6.1 следи да $\mathcal{F}\in\mathsf{F}(C_{\mathsf{P}/\mathcal{F}})$ и још важи $\mathrm{rk}_{\mathsf{P}}(\mathcal{F}) = \dim(C_{\mathsf{P}/\mathcal{F}})$. *Q.E.D.*

Последица 3.6.2 *Нека је* C_{P} *конус посета придружен посету* P *на скупу* $[n]$*. Тада је* $f-$*полином полиедра* C_{P} *једнак*

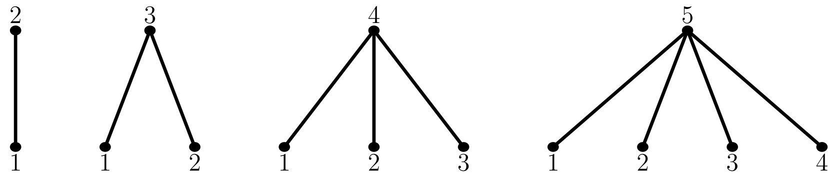
$$f(C_{\mathsf{P}},q) \;=\; (-1)^{n-1}\,\mathbf{ps}^1(\Psi_{-q}([\mathsf{P}]))(-1).$$

Став 3.6.5 ([29], Proposition 4.6) *Нека је* P *посет на скупу* $[\,n\,]$ *чији је Хасеов дијаграм дрво. Тада је* $f-$*полином одговарајућег конуса посета* C_{P} *једнак*

$$f(C_{\mathsf{P}},q) \;=\; (1+q)^{n-1}.$$

Доказ. Посет P има $n-1$ наткривајућих релација[6]. Према Ставу 3.6.1 следи да су генераторни зраци конуса посета $n-1$ линеарно независних вектора $e_i - e_j$ за које је $i \lessdot j$. Дакле, произвољну $k-$страну полиедра C_{P} генерише k генераторних зракова, па је $f_k(C_{\mathsf{P}}) = \binom{n-1}{k}$. *Q.E.D.*

Пример 3.6.3 Нека је ST_n посет на скупу $[\,n\,]$ са релацијама $i \lessdot n$, за $i \in [n-1]$.



Слика 3.18: *Посети* ST_2, ST_3, ST_4 *и* ST_5

Може се показати (видети [29], Example 4.4) да је

$$\Psi_q(\mathsf{ST}_n) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left(M_{(1)}^{n-1-i}\right)_{i+1} q^i,$$

одакле следи да је одговарајући $f-$полином једнак $f(C_{\mathsf{ST}_n}, q) = (1+q)^{n-1}$. □

Пример 3.6.4 Нека је L_n један ланац на скупу $[\,n\,]$. Важи (видети [29], Example 4.5)

$$\Psi_q(\mathsf{L}_n) \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} \left(\sum_{\alpha\,:\,k(\alpha)=n-i} M_\alpha \right) q^i.$$

Како је

$$|\{\alpha \models n \;:\; k(\alpha) = n-i\}| \;=\; \binom{n-1}{i}$$

следи да је одговарајући $f-$полином једнак $f(C_{\mathsf{ST}_n}, q) = (1+q)^{n-1}$. □

Став 3.6.6 ([29], Proposition 4.8) *Нека је* P *један посет и* P^{op} *одговарајући дуални посет. Тада важи*

$$F_q(C_{\mathsf{P}^{\mathrm{op}}}) \;=\; \mathrm{rev}(F_q(C_{\mathsf{P}})).$$

Доказ. Приметимо да $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(\mathsf{P})$ ако и само ако $\mathcal{F}^{\mathrm{op}} \in \mathfrak{F}(\mathsf{P}^{\mathrm{op}})$. Доказ наведеног става произилази из чињенице да је $\mathrm{rk}_{\mathsf{P}}(\mathcal{F}) = \mathrm{rk}_{\mathsf{P}^{\mathrm{op}}}(\mathcal{F}^{\mathrm{op}})$. *Q.E.D.*

У Теореми 3.2.3 смо показали како антипод S дејствује на квазисиметрични енумератор целобројних тачака F_q уопштеног пермутоедра. Слично тврђење важи и у случају конуса посета. Прецизније,

Теорема 3.6.2 ([29], Theorem 4.10) *Ако је* P *један посет на скупу* $[\,n\,]$*, тада антипод* S *дејствује на квазисиметрични енумератор* $F_q(C_{\mathsf{P}})$ *на следећи начин*

$$S(F_q(C_{\mathsf{P}})) \;=\; (-1)^n \sum_{\mathcal{G} \in \mathfrak{F}(\mathsf{P})} f(C_{\mathsf{P}/\mathcal{G}}, -q) M_{\mathcal{G}^{\mathrm{op}}}.$$

[6] Релација $i <_{\mathsf{P}} j$ је *наткривајућа* у посету P ако је $i \lessdot_{\mathsf{P}} j$.

3.6.4 $\mathsf{P}-$партиција

Тежински квазисиметрични енумератор $F_q(C_{\mathsf{P}})$, добро означеног посета P, рачунат у тачки $q=0$ одговара енумератору $\mathsf{P}-$партиција. За посет P на скупу $[\,n\,]$ дефинишимо

$$F(\mathsf{P}) \quad := \quad F_0(C_{\mathsf{P}}) \quad = \sum_{\substack{\mathcal{F}\in\mathfrak{F}(\mathsf{P})\\ \mathsf{P}/\mathcal{F}\text{дискретан}}} M_{\mathcal{F}},$$

где је сума по свим заставама идеала посета P таквих да је $\mathsf{P}/\mathcal{F}$ *дискретан посет*, то јест посет без наткривајућих релација.

Став 3.6.7 ([29], Proposition 5.1) *За посет* P *важи следећа једнакост*

$$\mathbf{ps}^1(F(\mathsf{P}))(-1) = (-1)^{n-1}. \tag{3.30}$$

Серијска композиција $\mathsf{P}_1 * \mathsf{P}_2$ посета P_1 и P_2 одговара посету $\mathsf{P}_1 \sqcup \mathsf{P}_2$ са додатним релацијама $i \leq_{\mathsf{P}_1*\mathsf{P}_2} j$ ако и само ако $i \leq_{\mathsf{P}_1} j$ или $i \leq_{\mathsf{P}_2} j$, за неко $i\in \mathsf{P}_1$ и $j \in \mathsf{P}_2$.

Став 3.6.8 ([29], Proposition 5.2) *Ако је* $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 * \mathsf{P}_2 * \cdots * \mathsf{P}_n$ *тада важи*

$$F(\mathsf{P}) \;=\; F(\mathsf{P}_1)\circ F(\mathsf{P}_2)\circ\cdots\circ F(\mathsf{P}_n)$$

Тако се, на пример, посет ST_n који је дефинисан у Примеру 3.6.3 може приказати у облику $\mathsf{ST}_n = \mathsf{D}_{n-1} * \mathsf{D}_1$, где је D_k дискретан посет на скупу $[\,k\,]$. На основу претходног става следи да је

$$F(\mathsf{ST}_n) \;=\; M_{(1)}^{n-1}\circ M_{(1)}.$$

Слично, за линеарни посет L_n, описан у Примеру 3.6.4, важи

$$F(\mathsf{L}_n) \;=\; M_{(1)}\circ M_{(1)}\circ\cdots\circ M_{(1)} \;=\; M_{(1^n)},$$

што произилази из чињенице да је $\mathsf{L}_n = \mathsf{D}_1 * \mathsf{D}_1 * \cdots * \mathsf{D}_1$.

Став 3.6.9 ([29], Proposition 5.4) *Посматрајмо повезани посет* P *на скупу* $[\,n\,]$. *Уколико је* $\mathrm{Max}(\mathsf{P})$ *скуп максималних елемената посета* P, *тада је*

$$F(\mathsf{P}) \quad = \sum_{\emptyset\neq A\subseteq \mathrm{Max}(\mathsf{P})} (F(\mathsf{P}|_{[n]-A}))_{|A|}.$$

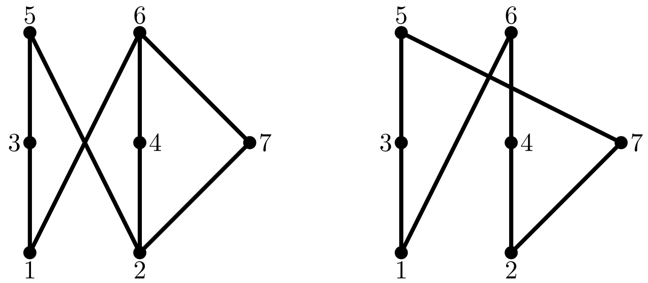
Посебно, ако је $\mathrm{Max}(\mathsf{P}) = \{v\}$ *важи* $F(\mathsf{P}) \;=\; \big(F(\mathsf{P}|_{[n]-\{v\}})\big)_1$.

Доказ. За заставу идеала $\mathcal{F}: \emptyset = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_m = [\,n\,]$ скуп F_{end} је дефинисан са $F_{\mathrm{end}} := F_m \setminus F_{m-1}$. Како је потпосет $\mathsf{P}/\mathcal{F}$ дискретан, следи да је такав и потпосет $\mathsf{P}|_{F_{\mathrm{end}}}$, и још је $F_{\mathrm{end}} \subseteq \mathrm{Max}(\mathsf{P})$. Према томе,

$$F(\mathsf{P}) \quad = \sum_{\substack{\mathcal{F}\in\mathfrak{F}(\mathsf{P})\\ \mathsf{P}/\mathcal{F}\text{дискретан}}} M_{\mathcal{F}} \quad = \sum_{\emptyset\neq A\subseteq\mathrm{Max}(\mathsf{P})}\ \sum_{\substack{\mathcal{F}\in\mathfrak{F}(\mathsf{P})\\ \mathsf{P}/\mathcal{F}\text{дискретан}\\ F_{\mathrm{end}}=A}} M_{\mathcal{F}} = \sum_{\emptyset\neq A\subseteq\mathrm{Max}(\mathsf{P})} (F(\mathsf{P}|_{[n]\setminus A}))_{|A|}.$$

Q.E.D.

Пример 3.6.5 Посматрајмо посете чији су Хасеови дијаграми приказани на следећој слици. Функција F не разликује посете P_1 и P_2, то јест $F(\mathsf{P}_1) = F(\mathsf{P}_2)$ (видети [24]).



Слика 3.19: *Посети* P_1 *и* P_2 *за које важи* $F(\mathsf{P}_1) = F(\mathsf{P}_2)$

Посматрајмо заставе облика $\emptyset \subset \{i\} \subset [6] \setminus \{j\} \subset [6]$, за $i \in \{1,2\}$ и $j \in \{5,6\}$, које су једине заставе идеала посета P_1 и P_2 такве да је $\mathrm{type}(\mathcal{F}) = (1,5,1)$. Коефицијенти који одговарају мономијалној функцији $M_{(1,5,1)}$ су једнаки

$$\zeta_{(1,5,1)}(\mathsf{P}_1) = 2q^4 + q^3 + q^2 \quad \text{и} \quad \zeta_{(1,5,1)}(\mathsf{P}_2) = q^4 + 3q^3,$$

па је $F_q(C_{\mathsf{P}_1}) \neq F_q(C_{\mathsf{P}_2})$. Дакле, функција F_q је финија од функције F. □

P−партиција добро и лоше означеног посета

Подсетимо се да је P−партиција добро означеног посета P дефинисана са

$$F_{\mathsf{P}}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{f \in \mathcal{A}(\mathsf{P})} x_{f(1)} x_{f(2)} \cdots x_{f(n)},$$

где из $i <_{\mathsf{P}} j$ произилази да је $f(i) < f(j)$. Следећи став детаљно описује скуп свих P−партиција добро означеног посета P.

Став 3.6.10 ([29], Proposition 5.7) *За добро означен посет* P *важи*

$$\mathcal{A}(\mathsf{P}) \;=\; \{\omega \in C^{\circ}_{\mathcal{F}} \;:\; \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(\mathsf{P}) \;\; \text{и} \;\; \mathsf{P}/\mathcal{F} \text{ је дискретан посет}\}.$$

Доказ. Уколико $\omega \in C^{\circ}_{\mathcal{F}}$ за неко $\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(\mathsf{P})$ такво да је $\mathsf{P}/\mathcal{F}$ дискретан посет, тада ω^* максимизира теме полиедра C_{P}. Користећи Став 3.6.3 добијамо да из $i <_{\mathsf{P}} j$ следи $\omega_i < \omega_j$, па је ω једна P−партиција за добро означен посет P. И обрнуто, за свако $f \in \mathcal{A}(\mathsf{P})$ из $i <_{\mathsf{P}} j$ произилази $f(i) < f(j)$, па f максимизира само теме конуса посета C_{P}. *Q.E.D.*

Теорема 3.6.3 ([29], Theorem 5.8) *За добро означен посет* P *важи*

$$F(\mathsf{P}) \;=\; F_{\mathsf{P}}(\mathbf{x}).$$

Доказ. Користећи претходни став добијамо да је

$$F(\mathsf{P}) \;=\; \sum_{\substack{\mathcal{F} \in \mathfrak{F}(\mathsf{P}) \\ \mathsf{P}/\mathcal{F} \text{дискретан}}} M_{\mathcal{F}} \;=\; \sum_{\substack{\omega \in \mathbb{Z}^n_+ \cap C^{\circ}_{\mathcal{F}} \\ \mathcal{F} \in \mathfrak{F}(\mathsf{P}) \\ \mathsf{P}/\mathcal{F} \text{ дискретан}}} x_{\omega_1} x_{\omega_2} \cdots x_{\omega_n} = \sum_{\omega \in \mathcal{A}(\mathsf{P})} x_{\omega_1} x_{\omega_2} \cdots x_{\omega_n},$$

што одговара дефиницији P−партиције $F_{\mathsf{P}}(\mathbf{x})$. *Q.E.D.*

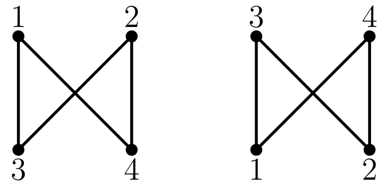
За посет P кажемо да је *лоше означен* уколико из $i <_{\mathsf{P}} j$ следи $i <_{\mathbb{Z}} j$. У том случају, функција f је једна $\mathsf{P}-$партиција ако и само ако

$$i <_{\mathsf{P}} j \quad \Rightarrow \quad f(i) \leq f(j).$$

Тада, $\mathsf{P}-$партиција одговара квазисиметричном енумератору $F_q(C_{\mathsf{P}})$ рачунатом у тачки $q = 1$, то јест

$$F_1(C_{\mathsf{P}}) \;=\; F_{\mathsf{P}}(\mathbf{x}).$$

Пример 3.6.6 Дорбо означен и лоше означен посет посета P из Примера 3.6.1 приказани су на следећој слици.



Слика 3.20: *Добро означен посет* P_1 *и лоше означен посет* P_2

Одговарајући квазисиметрични енумератор износи

$$F_q(\mathsf{P}) = q^3 M_{(4)} + 2q^2(M_{(3,1)} + M_{(1,3)}) + 4qM_{(1,2,1)} + M_{(2,2)} + 2M_{(1,1,2)} + 2M_{(2,1,1)} + 4M_{(1,1,1,1)},$$

одакле произилази да су одговарајуће $\mathsf{P}-$партиције једнаке

$$\begin{aligned} F_{\mathsf{P}_1}(\mathbf{x}) &= M_{(2,2)} + 2M_{(1,1,2)} + 2M_{(2,1,1)} + 4M_{(1,1,1,1)},\\ F_{\mathsf{P}_2}(\mathbf{x}) &= M_{(4)} + 2M_{(3,1)} + 2M_{(1,3)} + 4M_{(1,2,1)} + M_{(2,2)} + 2M_{(1,1,2)} + 2M_{(2,1,1)} + 4M_{(1,1,1,1)}. \end{aligned}$$

□

Литература

[1] M. Aguiar, F. Ardila,
Hopf monoids and generalized permutohedra,
arXiv:1709.07504

[2] M. Aguiar, N. Bergeron, F. Sottile,
Combinatorial Hopf algebras and generalized Dehn – Sommerville relations,
Compositio Mathematica 142 (2006) 1 – 30

[3] F. Ardila, C. Klivans,
The Bergman complex of a matroid and phylogenetic trees,
J. Combin. Theory Ser. B 96 (2006), 38 – 49

[4] C. Benedetti, J. Hallam, J. Machacek,
Combinatorial Hopf Algebras of Simplicial Complexes,
SIAM J. of Discrete Math. 30, (2016), 1737 – 1757

[5] L. Billera, N. Jia, V. Reiner,
A quassisymetric function for matroids,
European J. Comb. 30 (2009) 1727 – 1757

[6] V. Buchstaber, T. Panov,
Toric Topology,
Mathematical Surveys and Monographs, vol.204, AMS, Providence, RI, (2015)

[7] A. Cayley,
On the partitions of a polygon,
Proc. Lond. Math. Soc. 22 (1890) 237 – 262

[8] S. Dascalescu, C. Nastasescu, S. Raianu,
Hopf algebras, *An Introduction*,
Marcel Dekker, Inc. (2001)

[9] R. Ehrenborg
On posets and Hopf algebras
Adv. Math. 119(1) (1996) 1 – 25

[10] E. M. Feichtner, B. Sturmfels,
Matroid polytopes, *nested sets and Bergman fans*,
Port. Math. (N. S) 62 (2005) no. 4. 437 – 468

[11] I. M. Gel'fand, V. V. Serganova,
Combinatorial geometries and torus strata on homogeneous compact manifolds,
Russian Math. Surveys 42 (2) (1987) 133 – 168

[12] I. M. Gel'fand, M. Goresky, R. MacPherson, V. V. Serganova,
Combinatorial geometries, convex polyhedra, and Schubert cells,
Adv. Math. 63 (1987) 301 – 316

[13] I. Gessel,
Multipartite $P-$partitions and inner products of skew Schur functions,
Contemp. Math. AMS vol. 34 (1984) 289 – 317

[14] D. Grinberg, V. Reiner,
Hopf Algebras in Combinatorcs,
arXiv:1409.8356

[15] V. Grujić,
Counting faces of graphical zonotopes,
Ars Math. Contemporanea, 13 (2017) 227 – 234

[16] V. Grujić,
Quasisymmetric function for nestohedra,
SIAM J. Discrete Math. 31 (4) (2017) 2570 – 2585

[17] V. Grujić, M. Pešović, T. Stojadinović,
Weighted quasisymmetric enumerator for generalized permutohedra,
J. Algebr. Comb. 51 (2020) 247 – 272

[18] V. Grujić, T. Stojadinović,
Hopf algebra of building sets,
Electron. J. Combin. 19 (4) (2012) P42

[19] V. Grujić, T. Stojadinović, D. Jojić,
Generalized Dehn – Sommerville relations for hypergraphs,
Eur. J. Math., Vol. 2, (2016), 459 – 473

[20] B. Grunbaum,
Convex polytopes,
Springer (1967)

[21] M. Henk, J. Richter – Gebert, G. Ziegler,
Basic properties of convex polytopes,
Handbook of Discrete and Computational Geometry, Tylor and Francis Group (2017)

[22] B. Humpert, J. Martin,
The incidence Hopf algebra of graphs,
SIAM Journal on Discrete Mathematics 26, no.2 (2012), 555 – 570

[23] P. McMullen, D. Walkup,
A generalized lower bound conjecture for simplicial polytopes,
Mathematika 18 (1971), 264 – 273

[24] P. R. W. McNamara, R. E. Ward,
Equality of $\mathsf{P}-$partition generating functions,
Ann. Comb. 18(3) (2014) 489 – 514

[25] J. Oxley,
Matroid Theory,
Oxford University Press, (1992)

[26] J. Oxley,
What is a Matroid?,
CUBO, A Mathematical Journal, vol. 5, no. 3 (2003) 176 – 215

[27] K. Petersen,
Eulerian numbers,
Springer (2015)

[28] M. Pešović,
Integer points enumerator of hipergraphic polytopes,
arXiv:1812.09770

[29] M. Pešović, T. Stojadinović,
Weighted P *– partitions enumerator*,
arXiv:1907.00099

[30] A. Postnikov,
Permutohedra, associahedra, and beyond,
Int. Math. Res. Notices (2009) 1026 – 1106

[31] A. Postnikov, V. Reiner, L. Williams,
Faces of generalized permutohedra
Documenta Math. 13 (2008), 207 – 273

[32] W. Schmitt
Hopf algebras of combinatorial structures
Canadian Journal of Mathematics 45 (1993), 412 – 428

[33] R. Simion,
A type – B associahedron,
Adv. in Appl. Math. 30 (2003), 2 – 25

[34] R. Simion,
Combinatorial statistics on noncrossing partitions,
J. Combin. Theory Ser. A 66 (1994) 270 – 301

[35] R. Stanley,
An Intorduction to Hyperplane arrangments,
Lecture notes, IAS/Park City Mathematics Institute (2004)

[36] R. Stanley,
Enumerative combinatorics. Vol 2,
Cambrige University Press, Cambrige (1999)

[37] R. Stanley,
Ordered structures and partitions,
Memoirs of the Amer. Math. Soc. 119, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1972)

[38] R. Stanley,
Acyclic orientations of graphs,
Discrete Math. 5 (1973), 171 – 178

[39] R. Stanley,
A symmetric function generalization of the chromatic polynomial of a graph,
Adv. Math. 111 (1995), 166 – 194

[40] M. Takeuchi,
Free Hopf algebras generated by coalgebras,
J. Math Soc. Japan 23 (1971) 561 – 582

[41] G. Ziegler,
Lectures on polytopes,
Springer (1995)

Биографија аутора

Марко Пешовић је рођен 29. маја 1990. године. Гимназију у Рашки је завршио као носилац Вукове дипломе. Основне студије Математичког факултета Универзитета у Београду је уписао 2009. године и дипломирао на смеру Теоријска математика и примене 2013. године, са просечном оценом 9.14. Мастер студије, студијски програм Математика – Теоријска математика и примене, је завршио 2014. године, са просечном оценом 10.00. Докторске студије Математичког факултета Универзитета у Београду је уписао 2014. године, при Катедри за алгебру и математичку логику.

Од 2013. до 2014. године је био запослен као сарадник у настави на Математичком факултету Универзитета у Београду, Катедра за математичку анализу. Од 2014. године је запослен као асистент – студент докторских студија на Грађевинском факултету Универзитета у Београду, Катедра за математику, физику и нацртну геометрију.

Списак научних радова:

- Марко Пешовић, Тања Стојадиновић *Weighted* $\mathsf{P}-$*partitions enumerator*, прихваћен у часопису Applicable Analysis and Discrete Mathematics
- Марко Пешовић, *Integer points enumerator of hypergraphic polytopes*, прихваћен у часопису Publications de l'Institut Mathematique
- Владимир Грујић, Марко Пешовић, Тања Стојадиновић, *Weighted quasisymmetric enumerator for generalized permutohedra*, Journal of Algebraic Combinatorics, **51** (2) 2020, 247–272

Поглавља у збиркама:

- Зоран Пуцановић, Марко Пешовић, Матеја Кнежевић, Иван Лазаревић, *Збирка задатака из Математичке анализе 1*, Грађевински факултет, Универзитет у Београду, Академска мисао, 2019, ISBN 978 – 86 – 7466 – 789 – 7
- Зоран Пуцановић, Матеја Кнежевић, Марко Пешовић, *Линеарна алгебра. Аналитичка геометрија. Елементи вероватноће и статистике. Збирка решених задатака*, Грађевински факултет, Универзитет у Београду, Академска мисао, 2017, ISBN 978– –86 – 7466 – 389 – 9

Учешће на пројектима:

- „*Топологија, геометрија и глобална анализа на многострукостима и дискретним структурама*", Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије 174034 (2018 – сада)

Списак саопштења на конференцијама:

- Марко Пешовић *Хиперграфички политопи*, X симпозијум Математика и примене, Београд, Србија, 2019
- Зоран Пуцановић, Марко Пешовић, *Mathematical lectures of Dr. Milutin Milanković*, Живот и дело Милутина Миланковића: прошлост, садашњост, будућност, Београд, Србија, 2019
- Марко Пешовић, *Face enumeration on matroid base polytope*, XIV Српски математички конгрес, Крагујевац, Србија, 2018

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Марко Пешовић

број индекса 2005/2014

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Комбинаторика уопштених пермутоедара

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 19.02.2021

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Марко Пешовић

Број индекса 2005/2014

Студијски програм Математика

Наслов рада Комбинаторика уопштених пермутоедара

Ментор проф. др Владимир Грујић

Потписани/а Марко Пешовић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 19.02.2021

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Комбинаторика уопштених пермутоедара

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство
2. Ауторство - некомерцијално
3. Ауторство – некомерцијално – без прераде
4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима
5. Ауторство – без прераде
6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 19.02.2021