УНИВЕРЗИТЕТ У КРАГУЈЕВЦУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Невена М. Васовић

НЕКЕ МОДИФИКАЦИЈЕ КЛАСИЧНИХ МЕРА, ОДГОВАРАЈУЋИ ОРТОГОНАЛНИ ПОЛИНОМИ И КВАДРАТУРЕ ГАУСОВОГ ТИПА

докторска дисертација

Крагујевац, 2021.

UNIVERSITY OF KRAGUJEVAC
FACULTY OF SCIENCE

Nevena M. Vasović

SOME MODIFICATIONS OF CLASSICAL MEASURES, CORRESPONDING ORTHOGONAL POLYNOMIALS AND QUADRATURES OF GAUSSIAN TYPE

Doctoral Dissertation

Kragujevac, 2021.

Идентификациона страница докторске дисертације

Аутор
Име и презиме: Невена М. Васовић
Датум и место рођења: 30.07.1986., Крагујевац
Садашње запослење: Универзитет у Крагујевцу-Факултет за хотелијерство и туризам у Врњачкој Бањи
Докторска дисертација
Наслов: Неке модификације класичних мера, одговарајући ортогонални полиноми и квадратуре Гаусовог типа
Број страница: 86
Број библиографских јединица: 73
Установа и место где је рад израђен: Универзитет у Крагујевцу, Природно-математички факултет
Научна област (УДК): Нумеричка анализа и теорија апроксимације (519.6)
Ментор: Академик др Градимир В. Миловановић, редовни професор у пензији, Математички институт САНУ, Београд
Оцена и одбрана
Датум пријаве теме: 08.07.2020.
Број одлуке и датум прихватања теме докторске дисертације: IV-01-715/3 од дана 14.10.2020.
Комисија за оцену научне заснованости теме и испуњености услова кандидата:
1. Академик др Градимир В. Миловановић, редовни професор у пензији, Математички институт САНУ, Београд 2. др Марија Станић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу 3. др Дејан Бојовић, ванредни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу
Комисија за оцену и одбрану докторске/уметничке дисертације: 1. др Марија Станић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу 2. др Татјана Томовић, доцент, Природно-математички факултет, Универзитет у Крагујевцу 3. др Марјан Матејић, доцент, Електронски факултет, Универзитет у Нишу
Датум одбране дисертације: ...

Захвалница

Овом приликом посебно желим да се захвалим ментору, академику др Градимиру Миловановићу, на помоћи, личном ангажовању, идејама, критикама, пренетом знању и указаном поверењу.

Захваљујем се члановима Комисије за оцену и одбрану докторске дисертације на корисним сугестијама, предлозима и корекцијама које су унапредиле изглед овог рада.

На крају, највећу захвалност дугујем својој породици и пријатељима на неисцрпном извору снаге. Докторат посвећујем својој мајци која је у сваком тренутку била уз мене.

Аутор

Сажетак

Предмет ове дисертације јесу полиноми реалне променљиве ортогонални у односу на полиномске модификације Чебишевљевих мера прве и друге врсте, њихова симболичка израчунавања и диференцне особине. Поред овога, предмет дисертације јесте и ефикасан нумерички алгоритам за конструкцију параметара генерализованих Гаус-Рисових квадратурних формула и нумеричка конструкција одговарајућих класа ортогоналних полинома.

За полиноме ортогоналне у односу на модификоване Чебишевљеве мере прве и друге врсте одређени су коефицијенти трочлане рекурентне релације у симболичком облику и испитиване су њихове диференцно-диференцијабилне особине. Поред овога, претпостављајући логаритамски потенцијал дата је електростатичка интерпретација нула полинома ортогоналних у односу на модификовану Чебишевљеву меру прве врсте.

У раду Миловановића [48] дат је ефикасан нумерички алгоритам за конструкцију Рисових квадратура. У овом истраживању по први пут су проучаване тзв. генерализоване Гаус-Рисове квадратуре у односу на производ експоненцијалне функције $\exp(-xt^2)$ и ултрасферне Гегенбауерове тежинске функције на $[-1,1]$, с посебним освртом на важне Чебишевљеве случајеве.

Сви добијени резултати дисертације софтверски су проверени у програму MATHEMATICA уз интезивно коришћење пакета OrthogonalPolynomials.

Кључне речи: Ортогонални полиноми, Чебишевљеве мере, Чебишевљеви полиноми, рекурентна релација, диференцијална једначина, квадратурно правило, чворови, тежине

Abstract

In this thesis we consider the polynomials of real variable orthogonal with respect to the polynomial modifications of the Chebyshev measures of the first and second kind, its symbolic calculations and difference properties. In addition, the subject of this dissertation is an efficient numerical algorithm for the construction of parameters of the generalized Gauss-Rys quadrature formulas and numerical construction of the corresponding orthogonal polynomials.

For polynomials orthogonal with respect to the modified Chebyshev measures of the first and second kind, the coefficients of the three-term recurrence relation are obtained in their symbolic form and also the difference properties are examined. Furthermore, assuming a logarithmic potential, we gave an electrostatic interpretation of the zeros of the polynomials orthogonal with respect to the modified Chebyshev measure of the first kind.

In a recent paper by Milovanović [48], an efficient numerical algorithm for the construction of Guass-Rys quadratures was given. In this study, the so-called generalized Gauss-Rys quadrature formulas with respect to the product of the exponential function $\exp(-xt^2)$ and the ultraspherical Gegenbauer weight function are studied, with a special attention to the important Chebyshev cases.

All obtained results have been checked in the software Mathematica with intensive use of the package OrthogonalPolynomials.

Keywords: Orthogonal polynomials, Chebyshev measures, Chebyshev polynomials, recurrence relation, differential equation, Quadrature rule, nodes, weights

Садржај

Листа слика

Листа табела

Предговор

Једну од најважнијих класа ортогоналних полинома чине ортогонални полиноми на реалној правој и њима припада област истраживања ове дисертације. Како је теорија класичних ортогоналних полинома (Јакобијеви, Лежандрови, Ермитови) у доброј мери развијена, шира класа полинома је и даље непознаница, као и разни аспекти примене таквих полинома.

Полиноми ортогонални у односу на нестандардне тежине и мере имају много мању примену. Разлог овоме је у бројним тешкоћама која прате њихово симболичко и нумеричко генерисање. Један од најважнијих проблема конструктивне теорије ортогоналних полинома јесте одређивање коефицијената трочлане рекурентне релације за некласичне тежинске функције, као и конструкција ортогоналних полинома за модификоване мере. Истраживања некласичних ортогоналних полинома су у пракси у великој мери олакшана постојањем програмских пакета развијаних у специјализованим софтверима какви су: Matlab и Mathematica.

Важна примена ортогоналних полинома је у конструкцији квадратурних формула, а посебно Гаусових квадратурних формула са максималним алгебарским степеном тачности и њихових модификација, па због тога један део дисертације припада и овој области.

***

Ова дисертација је организована у пет глава. Списак коришћене литературе, који се састоји од 73 референце, дат је на крају дисертације.

Прве две секције су прегледног карактера и представљају теоријску основу истраживања у овој дисертацији. У првој глави дат је кратак преглед основних резултата теорије ортогоналних полинома на реалној правој. Дате су и основне особине класичних ортогоналних полинома. На крају ове главе дати су методи за конструкцију ортогоналних полинома.

У другој глави дат је кратак осврт на интерполационе процесе који се користе приликом нумеричке интеграције, а посебно су описане интерполационе квадратурне формуле и међу њима најбитније Гаусове квадратурне формуле. У овој глави дат је и кратак преглед неких класа модификованих Гаусових квадратурних формула.

У главама 3, 4 и 5 дати су оригинални резултати који су публиковани или прихваћени за штампу (видети [11], [12] и [56]).

Трећа глава бави се изучавањем полинома ортогоналних у односу на модификоване Чебишевљеве мере прве и друге врсте. Ови проблеми третирани су у симболичком облику. Дати су коефицијенти трочлане рекурентне релације за полиноме ортогоналне у односу на меру

$$\mathrm{d}\mu(x) = \frac{|\widehat{T}_n(x)|^{2s}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x, \quad x \in (-1,1),$$

али када је $n = 2$ и $s > -1/2$ реалан број и $\widehat{T}_n(x)$ је моничан Чебишевљев полином прве врсте $n-$тог степена. Размотрене су разне диференцно-диференцијалне особине ових полинома. У раду [12], Миловановић и његови сарадници су истраживали полиноме ортогоналне у односу на ову меру, али када је параметар s природан број. Специјалан случајеви дате мере разматрани су у радовима [21] и [32]. У овој глави разматране су и особине полинома који су ортогонални у односу на модификовану Чебишевљеву мере друге врсте

$$\mathrm{d}\mu(x) = |\widehat{U}_n(x)|^{2s}(1-x^2)^{s+1/2}\,\mathrm{d}x, \quad x \in (-1,1),$$

али када је $n = 1$ и $n = 2$ и $s > -1/2$ реалан број и $\widehat{U}_n(x)$ је моничан Чебишевљев полином друге врсте n-тог степена.

У четвртој глави најпре је дат преглед познатих резултата електростатичке интерпретације нула Јакобијевих полинома. Почеци истраживања у овој области налазе се у радовима [66] и [70]. Полазећи од претпоставке да се ради о логаритамском потенцијалу изведена је електростатичка интерпретација нула полинома ортогоналних у односу на модификовану Чебишевљеву меру прве врсте. На крају ове главе наведене су неке примене имплементиране у софтверу Mathematica у проблемима конструктивне теорије ортогоналних полинома.

У петој глави проучаване су модификоване Гаусове квадратуре и одговарајући ортогонални полиноми. Недавно је у раду Миловановића [48], дат ефикасан нумерички алгоритам за конструкцију тзв. Гаус-Рисових квадратура. Ослањајући се на овај рад успели смо да добијемо нумерички стабилан алгоритам за конструкцију генерализованих Гаус-Рисових квадратурних формула, што је даље омогућило нумеричку конструкцију одговарајуће класе ортогоналних полинома у односу на тежинску функцију на интервалу $(-1,1)$

$$\omega(t;x) = \exp(-xt^2)(1-x^2)^{\lambda-1/2},$$

када су $x > 0$ и $\lambda > -1/2$.

1 Ортогонални полиноми на реалној правој

1.1 Основне особине ортогоналних полинома

Једну од најбитнијих класа ортогоналних полинома чине ортогонални полиноми на реалној правој. У овом делу наводимо само основна својства ове класе полинома.

Нека је μ неопадајућа ограничена функција на реалној правој $\mathbb{R}$ таква да индукована позитивна мера $\mathrm{d}\mu$ има коначне све моменте

$$\mu_k = \int_{\mathbb{R}} x^k \,\mathrm{d}\mu(x), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.1.1}$$

при чему је $\mu_0 > 0$. Осим тога, претпоставимо да функција (дистрибуција) $\mu : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ има бесконачно много тачака раста, тј. да скуп

$$\Xi = \{x \in \mathbb{R} \,\big|\, \mu(x + \varepsilon) - \mu(x - \varepsilon) > 0 \,\text{за све}\, \varepsilon > 0\}$$

има бесконачно много елемената. Скуп тачака Ξ, раста функције μ, зове се носач мере $\mathrm{d}\mu$ и обележава се са $\mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu)$. Кажемо да је $\mathrm{d}\mu$ мера на $[a, b]$ ако је интервал $[a, b]$ носач мере $\mathrm{d}\mu$, тј. ако је $\mathrm{d}\mu(x) = 0$ за све x ван интервала $[a, b]$.

Обележимо са $\mathcal{P}$ простор свих реалних полинома и $\mathcal{P}_d \subset \mathcal{P}, d \in \mathbb{N}_0$, простор свих полинома степена не вишег од d. Са $\widehat{\mathcal{P}}_d$ обележаваћемо скуп свих моничних полинома степена d, тј. $\widehat{\mathcal{P}}_d = \{x^d + q(x) \,\big|\, q(x) \in \mathcal{P}_{d-1}\}$.

Уведимо скаларни производ у односу на меру $\mathrm{d}\mu$ са

$$(p, q) = \int_{\mathbb{R}} p(x)q(x) \,\mathrm{d}\mu(x), \quad p, q \in \mathcal{P}. \tag{1.1.2}$$

Претпоставка да дистрибуција $\mu : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ има бесконачно много тачака раста обезбеђује позитивну дефинитност скаларног производа (1.1.2).

Норма индукована скаларним производом (1.1.2) је

$$||u|| = \sqrt{|(u, u)|} = \Big(\int_{\mathbb{R}} u(x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x)\Big)^{1/2}. \tag{1.1.3}$$

Систем полинома $\{p_n\}$, где је

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \gamma_n x^n + \text{чланови нижег степена}, \quad \gamma_n > 0, \\ (p_n, p_m) &= \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m,\, n,\, m \geq 0, \end{cases} \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

је систем ортонормираних полинома у односу на меру $\mathrm{d}\mu$. Број γ_n је водећи коефицијент полинома p_n.

У многим разматрањима и применима се користи систем моничних ортогоналних полинома у односу на меру $\mathrm{d}\mu$

$$\pi_n(x) = \frac{p_n(x)}{\gamma_n} = x^n + \text{чланови нижег степена}. \tag{1.1.5}$$

Дефиниција 1.1.1. Низ моничних реалних полинома $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ је ортогоналан у односу на меру $\mathrm{d}\mu$ ако важи $\deg \pi_n = n$ и $(\pi_n, \pi_m) = 0$ ако и само ако је $n \neq m$.

Лема 1.1.1. *Скуп* $\{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n\}$ *моничних ортогоналних полинома у односу на меру* $\mathrm{d}\mu$ *формира једну базу простора* $\mathcal{P}_n$.

Теорема 1.1.1. *Ако је скаларни производ* (1.1.2) *позитивно дефинитан на* $\mathcal{P}$, *тада постоји јединствен низ* $\{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *моничних ортогоналних полинома.*

За доказе претходних тврђења видети [7].

Када желимо да нагласимо меру тада уместо $p_n(\cdot)$, $\pi_n(\cdot)$ и γ_n, редом користимо ознаке $p_n(\cdot;\,\mathrm{d}\mu)$, $\pi_n(\cdot;\,\mathrm{d}\mu)$ и $\gamma_n(\,\mathrm{d}\mu)$. Ови полиноми се могу добити Грам-Шмитовим поступком ортогонализације, полазећи од базиса $U = \{1, x, x^2, \dots\}$. Одговарајућа Грамова матрица се може изразити преко момената μ_k $(k = 0, 1, \dots, 2n)$ у облику

$$H_{n+1} = \begin{bmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{bmatrix}. \tag{1.1.6}$$

Како је систем $U = \{1, x, x^2, \dots\}$ линеарно независан важи $\Delta_n = \det H_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Одговарајући ортонормиран полином степена $n \in \mathbb{N}$ се може представити као

$$p_n(x) = p_n(x;\,\mathrm{d}\mu) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n \Delta_{n+1}}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix},$$

где је $\Delta_0 = 1$. Водећи коефицијент је $\gamma_n = \gamma_n(\,\mathrm{d}\mu) = \sqrt{\Delta_n/\Delta_{n+1}}$. Матрице облика (1.1.6) називају се Хенкелове матрице, а одговарајуће детерминанте Хенкелове детерминанте.

Ако је дистрибуција μ апсолутно непрекидна функција, тада се функција $\omega(x) = \mu'(x)$ зове тежинска функција. У том случају меру $\mathrm{d}\mu$ можемо представити у облику $\mathrm{d}\mu(x) = \omega(x)\,\mathrm{d}x$, где је $x \mapsto \omega(x)$ ненегативна функција, мерљива у Лебеговом смислу на $\mathbb{R}$, за коју сви моменти μ_n, $n \in \mathbb{N}_0$, постоје и $\mu_0 > 0$. Тада уместо $p_n(\cdot;\,\mathrm{d}\mu)$, $\pi_n(\cdot;\,\mathrm{d}\mu)$, $\gamma_n(\,\mathrm{d}\mu)$, $\mathrm{supp}(\,\mathrm{d}\mu)$,..., пишемо $p_n(\cdot;\omega)$, $\pi_n(\cdot;\omega)$, $\gamma_n(\omega)$, $\mathrm{supp}(\omega)$,..., респективно. Ако је $\mathrm{supp}(\omega) = [a, b]$, где је $-\infty < a < b < +\infty$, тада кажемо да је ω тежинска функција на $[a, b]$ и кажемо да су полиноми $p_n(\cdot;\omega)$, тј. $\pi_n(\cdot;\omega)$, ортонормирани, односно монични ортогонални, на $[a, b]$ у односу на тежинску функцију ω. Интервал (a, b) зове се интервал ортогоналности.

1.2 Трочлана рекурентна релација

Трочлана рекурентна релација је својство ортогоналних полинома и најзначајнија информација за њихову конструкцију. Основни разлог егзистенције трочлане рекурентне релације се налази у својству

$$(tu, v)_{\mathrm{d}\mu} = (v, tu)_{\mathrm{d}\mu}, \quad p, q \in \mathcal{P},$$

које задовољава скаларни производ (1.1.2).

Теорема 1.2.1. *Систем ортонормираних полинома $\{p_n(x)\}$ у односу на меру $\mathrm{d}\mu(x)$, задовољава трочлану рекурентну релацију*

$$xp_n(x) = b_{n+1}p_{n+1}(x) + a_n p_n(x) + b_{n-1}p_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.2.1}$$

где је $p_{-1}(x) = 0$, а коефицијенти $a_n = a_n(\mathrm{d}\mu)$ и $b_n = b_n(\mathrm{d}\mu)$ су дати са

$$a_n = \int_{\mathbb{R}} xp_n(x)^2 \,\mathrm{d}\mu(x) \quad \text{и} \quad b_n = \int_{\mathbb{R}} xp_{n-1}(x)p_n(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \frac{\gamma_{n-1}}{\gamma_n}.$$

Како је $p_0(x) = \gamma_0 = 1/\sqrt{\mu_0}$ и $\gamma_{n-1} = b_n\gamma_n$, имамо $\gamma_n = \gamma_0/(b_1b_2\cdots b_n)$ за $n \in \mathbb{N}$. Приметимо да је $b_n > 0$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Супротно, за било која два дата реална низа $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ и $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, где је $b_n > 0$ за све $n \in \mathbb{N}$, може се конструисати низ полинома помоћу трочлане рекурентне релације (1.2.1), полазећи од $p_{-1}(x) = 0$ и $p_0(x) = 1$. Према Фавардовој теореми (видети [7]), постоји позитивна мера $\mathrm{d}\sigma(x)$ на $\mathbb{R}$, таква да је

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x)p_m(x)\,\mathrm{d}\sigma(x) = C_n\delta_{nm}, \quad C_n > 0,\ n, m \geq 0.$$

Довољан услов за јединственост мере $\mathrm{d}\sigma$ је Карлеманов услов $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{b_n} = +\infty$. Очигледно, претходно важи ако је $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ограничен низ.

Теорема 1.2.2. *Систем моничних ортогоналних полинома $\{\pi_n\}$ задовољава трочлану рекурентну релацију*

$$\pi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\pi_n(x) - \beta_n\pi_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad \pi_{-1}(x) = 0, \tag{1.2.2}$$

где је $\alpha_n = a_n$ и $\beta_n = b_k^2 > 0$.

Због ортогоналности је

$$\alpha_n = \frac{(x\pi_n, \pi_n)}{(\pi_n, \pi_n)},\ n \geq 0, \quad \beta_n = \frac{(\pi_n, \pi_n)}{(\pi_{n-1}, \pi_{n-1})},\ n \geq 1.$$

Коефицијент β_0 у (1.2.2) се може узети произвољно, а обично се узима $\beta_0 = \mu_0 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu(x)$. Тада је $||\pi_n|| = \sqrt{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n}$. Докази теорема 1.2.1 и 1.2.2 се могу наћи у [41], [7], [17] и [38].

Напомена 1.2.1. Рекурзивни коефицијенти α_n и β_n у (1.2.2) се могу представити преко Хенкелових детерминанти

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-2} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta'_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-2} & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n-1} & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-3} & \mu_{2n-1} \end{vmatrix},$$

где су $\Delta_0 = 1$ и $\Delta'_0 = 0$. Тада,

$$\alpha_n = \frac{\Delta'_{n+1}}{\Delta_{n+1}} - \frac{\Delta'_n}{\Delta_n},\ n \geq 0, \quad \beta_n = \frac{\Delta_{n-1}\Delta_{n+1}}{\Delta_n^2},\ n \geq 1.$$

Нека је
$$K_n(x,t)=\sum_{k=0}^{n} p_k(x)p_k(t), \quad n \geq 0.$$
Приметимо да важи $K_n(t,x)=K_n(x,t)$. Важна последица трочлане рекурентне релације је следећа теорема.

Теорема 1.2.3. *Нека је $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ систем ортонормираних полинома у односу на меру $\mathrm{d}\mu$. Тада је*

$$K_n(x,t)=b_{n+1}\frac{p_{n+1}(x)p_n(t)-p_n(x)p_{n+1}(t)}{x-t}. \tag{1.2.3}$$

Коефицијент b_{n+1} је дефинисан у теореми 1.2.1.

Формула (1.2.3) позната је као Кристофел-Дарбуова формула. Узимајући граничну вредност кад $t\to x$ у (1.2.3), добијамо

$$K_n(x,x)=\sum_{k=0}^{n} p_k(x)^2=b_{n+1}\Big(p'_{n+1}(x)p_n(x)-p'_n(x)p_{n+1}(x)\Big). \tag{1.2.4}$$

Последица 1.2.1. *Нека је $\{\pi_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ систем моничних ортогоналних полинома у односу на меру $\mathrm{d}\mu$. Тада је*
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\pi_k(x)\pi_k(t)}{\beta_0\beta_1\cdots\beta_k}=\frac{1}{\beta_0\beta_1\cdots\beta_n}\cdot\frac{\pi_{n+1}(x)\pi_n(t)-\pi_n(x)\pi_{n+1}(t)}{x-t}.$$

Последица 1.2.2. *Из једнакости (1.2.4) следи неједнакост*

$$p'_{n+1}(x)p_n(x)-p'_n(x)p_{n+1}(x)>0. \tag{1.2.5}$$

За доказ теореме 1.2.3 видети, на пример, [38].

1.3 Кристофелова формула

Следећи резултат у литератури познат је као Кристофелова формула (видети [70]).

Теорема 1.3.1. *Нека су $p_n(x)$ ортонормирани полиноми у односу на меру $\mathrm{d}\mu(x)$ на интервалу $[a,b]$. Такође, нека је*

$$\rho(x)=c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_l), \quad c\neq 0,$$

полином ненегативан на интервалу $[a,b]$ са различитим нулама x_k, $k=1,\ldots,l$, ван интервала (a,b). Тада се ортогонални полиноми $q_n(x)$ у односу на меру $\mathrm{d}\sigma(x)=\rho(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$, могу изразити преко полинома $p_n(x)$:

$$\rho(x)q_n(x)=\begin{vmatrix} p_n(x) & p_{n+1}(x) & \cdots & p_{n+l}(x)\\ p_n(x_1) & p_{n+1}(x_1) & \cdots & p_{n+l}(x_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_n(x_l) & p_{n+1}(x_l) & \cdots & p_{n+l}(x_l)\end{vmatrix}.$$

Напомена 1.3.1. У случају да је x_k нула, вишеструкости $s(>1)$, одговарајуће врсте у претходној детерминанти треба заменити изводима реда $0,1,\ldots,s-1$, полинома $p_n(x),p_{n+1}(x),\ldots,p_{n+l}(x)$ у тачки $x=x_k$.

1.4 Нуле ортогоналних полинома

Нека је $\operatorname{supp}(\,d\mu)$ ограничен и нека је $\Delta(\,d\mu) = \operatorname{Co}(\operatorname{supp}(\,d\mu))$ најмањи затворен интервал који садржи $\operatorname{supp}(\,d\mu)$.

Теорема 1.4.1. *Све нуле полинома $p_n(\cdot;\,d\mu)$, $n \in \mathbb{N}$ су реалне и различите и леже у унутрашњости интервала $\Delta(\,d\mu)$.*

Доказ. Нека полином $p_n(\cdot;\,d\mu)$ има m различитих нула $x_1, \ldots, x_m$ непарног реда у унутрашњости интервала $\Delta(\,d\mu)$ и нека је полином $q(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_m)$. Тада, за све $x \in \Delta(\,d\mu)$, имамо $p_n(\cdot;\,d\mu)q(x) \geq 0$, одакле следи

$$\int_{\mathbb{R}} p_n(x)q(x)\,d\mu(x) > 0.$$

Са друге стране, ако је $m < n$ претходни интеграл је нула због ортогоналности. Из контрадикције следи $m = n$, што значи да су све нуле просте и налазе се у унутрашњости интервала $\Delta(\,d\mu)$. □

Обележимо са $x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n}$ нуле полинома $p_n(\cdot;\,d\mu)$ у растућем поретку.

Дефиниција 1.4.1. Нуле полинома p_n и p_{n+1} се међусобно раздвајају, тј. важи

$$x_{n+1,k} < x_{n,k} < x_{n+1,k+1}, \quad k = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Доказ претходне теореме следи из неједнакости (1.2.5) (видети [38]).

Узимајући рекурентне релације (1.2.1) за $k = 0, 1, \ldots, n-1$, добијамо следећи систем једначина:

$$x\mathbf{p}_n(x) = J_n(\,d\mu)\mathbf{p}_n(x) + b_n p_n(x)\mathbf{e}_n, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.4.1}$$

где су

$$J_n(\,d\mu) = \begin{bmatrix} a_0 & b_1 & & & \mathbf{O} \\ b_1 & a_1 & b_2 & & \\ & b_2 & a_2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ \mathbf{O} & & & b_{n-1} & a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_n(x) = \begin{bmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_{n-1}(x) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица $J_n = J_n(\,d\mu)$ назива се Јакобијева матрица реда $n \times n$. Из (1.4.1) добија се $p_n(x) = 0$ ако и само ако је

$$x\mathbf{p}_n(x) = J_n\mathbf{p}_n(x), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{1.4.2}$$

тј. нуле $x_{n,k}$ полинома $p_n(x)$ су једнаке сопственим вредностима Јакобијеве матрице J_n. Сопствени вектори који одговарају сопственој вредности $x_{n,k}$ су $\mathbf{p}_n(x_{n,k})$, $k = 1, \ldots, n$. Важи следеће тврђење (видети [42] и[7]).

Лема 1.4.1. *Нуле $x_{n,k}, k = 1, \ldots, n$, полинома $p_n(\cdot;\,d\mu)$, су сопствене вредности Јакобијеве матрице $J_n(\,d\mu)$ реда n. Одговарајући сопствени вектори су $\mathbf{p}_n(x_{n,k})$.*

Монични полином $\pi_n(x)$ може се представити у облику

$$\pi_n(x) = \det(xI_n - J_n),$$

где је I_n јединична матрица реда n.

1.5 Специјалне тежине

У овом делу најпре ћемо дати резултат који се односи на полиноме ортогоналне у односу на монотону тежинску функцију на интервалу $[a,b]$ (видети [70]).

Теорема 1.5.1. *Нека је $x \mapsto \omega(x)$ неопадајућа тежинска функција на $[a,b]$, где је b коначно. Ако је $\{q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ одговарајући систем ортогоналних полинома, тада функција $x \mapsto \sqrt{\omega(x)}|q_n(x)|$ постиже свој максимум на $[a,b]$ за $x=b$.*

Претходно тврђење важи за било који подинтервал $[x_0,b]\subset[a,b]$, на коме је $x\mapsto \omega(x)$ неопадајућа функција. Наредно тврђење се односи на полиноме $\{q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ортогоналне у односу на парну тежинску функцију $x\mapsto\omega(x)$ на симетричном интервалу $[-a,a]$. Нека је $q_n(-x)=(-1)^n q_n(x)$, тј. $q_n(x)$ је полином чија парност зависи од парности n. Монични полиноми $\{q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ задовољавају рекурентну релацију (1.2.2), са $\alpha_n=0$, тј.

$$q_{n+1}(x)=xq_n(x)-\beta_n q_{n-1}(x),\quad n=0,1,\dots, \tag{1.5.1}$$

са почетним условима $q_0(x)=1$ и $q_{-1}=0$.

Теорема 1.5.2. *Нека је $\{q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ систем полинома ортогоналан у односу на парну тежинску функцију $\omega(x)$ на $(-a,a)$. Тада:*

(а) *$\{p_n^{(1)}(t)\}_{n\in\mathbb{N}_0}=\{q_{2n}(\sqrt{t})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ је систем полинома ортогоналан на $[0,a^2]$ у односу на тежинску функцију $\omega_1(t)=\omega(\sqrt{t})/\sqrt{t}$;*

(б) *$\{p_n^{(2)}(t)\}_{n\in\mathbb{N}_0}=\{q_{2n+1}(\sqrt{t})/\sqrt{t}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ је систем полинома ортогоналан на $[0,a^2]$ у односу на $\omega_2(t)=\sqrt{t}\omega(\sqrt{t})$.*

Доказ. (а) Нека је $n\neq k$. Како

$$\int_{-a}^{a} q_{2n}(x)q_{2k}(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a q_{2n}(x)q_{2k}(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x=0,$$

сменом $x^2=t$, добијамо

$$\int_0^{a^2} q_{2n}(\sqrt{t})q_{2k}(\sqrt{t})\frac{\omega(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=0,\quad n\neq k.$$

Дакле, систем полинома $\{q_{2n}(\sqrt{t})\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ је ортогоналан на $[0,a^2]$ у односу на тежинску функцију $\omega_1(t)=\omega(\sqrt{t})/\sqrt{t}$. Доказ дела (б) је аналоган. □

Теорема 1.5.3. *Ако систем ортогоналних полинома $\{q_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ задовољана трочлану-рекурентну релацију* (1.5.1), *тада системи $\{p_n^{(\nu)}(t)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, $\nu=1,2$, из теореме* 1.5.2, *задовољавају рекурентне релације*

$$p_{n+1}^{(\nu)}(t)=(t-\alpha_n^{(\nu)})p_n^{(\nu)}(t)-\beta_n^{(\nu)}p_{n-1}^{(\nu)}(t),\quad n=0,1,\dots,$$

са $p_0^{(\nu)}(t)=1$ и $p_{-1}^{(\nu)}(t)=0$, где је $\alpha_0^{(1)}=\beta_1$, $\alpha_0^{(2)}=\beta_1+\beta_2$, и за $n\in\mathbb{N}$,

$$\alpha_n^{(1)}=\beta_{2n}+\beta_{2n+1},\quad \beta_n^{(1)}=\beta_{2n-1}\beta_{2n},$$

и

$$\alpha_n^{(2)}=\beta_{2n+1}+\beta_{2n+2},\quad \beta_n^{(2)}=\beta_{2n}\beta_{2n+1}.$$

Доказ. Према релацији (1.5.1) и теореми 1.5.2, лако се види

$$p_{n+1}^{(1)}(t) + \beta_{2n+1} p_n^{(1)}(t) = t p_n^{(2)}(t)$$

и

$$p_{n+1}^{(2)}(t) + \beta_{2n+2} p_n^{(1)}(t) = p_{n+1}^{(1)}(t).$$

Комбиновањем претходних релација добијамо тражене резултате. □

Да бисмо одредили асимптотске особине ортогоналних полинома када њихов степен тежи бесконачности, посебно за полиноме на коначном интервалу, потребно је да важе одређене рестрикције за одговарајућу тежинску функцију (видети [70]).

Дефиниција 1.5.1. Тежинска функција ω дефинисана на $(-1, 1)$ припада Сегеовој класи функција ($\omega \in \mathcal{S}$) ако

$$\int_{-1}^{1} \frac{\log \omega(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x > -\infty. \tag{1.5.2}$$

1.6 Стилтјесова трансформација мере и Кристофелови бројеви

Нека је

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{d}\mu(t)}{z-t}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp}(\mathrm{d}\mu). \tag{1.6.1}$$

Ова функција се анулира у бесконачности, тј. $F(\infty) = 0$, и аналитичка је у целој комплексној равни, при чему z не припада носачу мере. Када је носач мере $\mathbb{R}$, функција $F(z)$ је одвојено аналитичка у горњој и доњој полуравни, са различитим гранама у општем случају. Развијмо функцију $F(z)$ по опадајућим степенима од z, тј.

$$F(z) \sim \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_1}{z^2} + \frac{\mu_2}{z^3} + \cdots, \tag{1.6.2}$$

где су μ_k моменти мере $\mathrm{d}\mu$. Функција $F(z)$ је позната као Стилтјесова трансформација мере $\mathrm{d}\mu$. Јакобијев верижни разломак за меру $\mathrm{d}\mu$ је заправо верижни разломак придружен степеном реду (1.6.2) функције $F(z)$, тј.

$$F(z) \sim \cfrac{\beta_0}{z-\alpha_0 - \cfrac{\beta_1}{z-\alpha_1 - \cfrac{\beta_1}{z-\alpha_2-\dots}}} = \frac{\beta_0}{z-\alpha_0}\frac{\beta_1}{z-\alpha_1}\dots, \tag{1.6.3}$$

где су α_n и β_n коефицијенти који се јављају у трочланој рекурентној релацији (1.2.2).

За $n-$ти конвергент верижног разломка важи

$$\frac{\beta_0}{z-\alpha_0}\frac{\beta_1}{z-\alpha_1}\cdots\frac{\beta_{n-1}}{z-\alpha_{n-1}} = \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)}, \tag{1.6.4}$$

где су σ_n придружени полиноми дефинисани са

$$\sigma_n(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_k(z)-\pi_k(x)}{z-x}\, \mathrm{d}\mu(x), \quad k \geq 0. \tag{1.6.5}$$

Придружени полиноми задовољавају исту трочлану рекурентну релацију као и монични полиноми $\pi_k(x)$. Наиме, важи

$$\sigma_{k+1}(z) = (z - \alpha_k)\sigma_k(z) - \beta_k \sigma_{k-1}(z), \quad k \geq 0,$$

уз почетне вредности $\sigma_0(z) = 0$, $\sigma_{-1}(z) = -1$.

Приметимо да рационална функција (1.6.4) има само просте полове у тачкама $z = x_{n,k}$, $k = 1, \ldots, n$, које су нуле полинома $\pi_n(x)$. Нека су $\lambda_{n,k}$ одговарајући резидууми

$$\lambda_{n,k} = \operatorname*{Res}_{z=x_{n,k}} \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)} = \lim_{z \to x_{n,k}} (x - x_{n,k}) \frac{\sigma_n(z)}{\pi_n(z)} = \frac{\sigma_n(x_{n,k})}{\pi_n'(x_{n,k})}.$$

На основу формуле (1.6.5) имамо

$$\lambda_{n,k} = \frac{1}{\pi_n'(x_{n,k})} \int_{\mathbb{R}} \frac{\pi_n(t)}{t - x_{n,k}} \, \mathrm{d}\mu(t), \tag{1.6.6}$$

па из (1.6.4), следи

$$\frac{\sigma_n(x)}{\pi_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n,k}}{x - x_{n,k}}.$$

Коефицијенти $\lambda_{n,k}$ имају битну улогу у нумеричкој интеграцији. Они се појављују у Гаус-Кристофеловим квадратурним формулама као тежински коефицијенти (Котесови бројеви).

Интеграл (1.6.6) се може изразити преко Кристофелове функције $\lambda_n(x; \mathrm{d}\mu)$,

$$\lambda_n(x; \mathrm{d}\mu) = \frac{1}{K_{n-1}(x, x)} = \Big(\sum_{k=0}^{n-1} [p_k(x)]^2 \Big)^{-1}. \tag{1.6.7}$$

Према теореми 1.2.3 и коришћењем релације $p_n(x) = \gamma_n \pi_n(x)$, из Кристофел-Дарбуове формуле (1.2.3) за $x = x_{n,k}$ следи

$$K_{n-1}(x, x_{n,k}) = \gamma_{n-1}^2 \frac{\pi_n(x)\pi_{n-1}(x_{n,k})}{x - x_{n,k}},$$

одакле, интеграцијом у односу на меру $\mathrm{d}\mu$, имамо

$$\int_{\mathbb{R}} K_{n-1}(x, x_{n,k}) \, \mathrm{d}\mu(x) = \gamma_{n-1}^2 \pi_{n-1}(x_{n,k}) [\pi_n'(x_{n,k}) \lambda_{n,k}]. \tag{1.6.8}$$

Због ортогоналности лева страна у (1.6.8) је једнака јединици. Са друге стране, из формуле (1.2.4) за $x = x_{n,k}$ следи

$$K_{n-1}(x_{n,k}, x_{n,k}) = \gamma_{n-1}^2 \pi_n'(x_{n,k}) \pi_{n-1}(x_{n,k}).$$

Комбиновањем претходних једнакости добијамо $1 = K_{n-1}(x_{n,k}, x_{n,k})\lambda_{n,k}$, тј.

$$\lambda_{n,k} = \lambda_n(x_{n,k}; \mathrm{d}\mu), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Коефицијенти $\lambda_{n,k}(x_{n,k}; \mathrm{d}\mu)$ су вредности Кристофелове функције у нулама ортогоналних полинома $\pi_n(x; \mathrm{d}\mu)$ и називају се Кристофелови бројеви или Котес-Кристофелови коефицијенти. Кристофелови бројеви су увек позитивни, тј. $\lambda_{n,k} > 0$, $k = 1, \ldots, n$.

1.7 Класични ортогонални полиноми

Најважнију класу ортогоналних полинома на реалној правој чине тзв. класични ортогонални полиноми (видети нпр. [4], [57] и [69]). Како се сваки интервал (a, b) линеарним пресликавањем може трансформисати на један од интервала $(-1, 1)$, $(0, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, посматраћемо само њих.

Дефиниција 1.7.1. Тежинска функција $x \mapsto \omega(x)$ је класична ако задовољава диференцијалну једначину

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(A(x)\omega(x)) = B(x)\omega(x), \tag{1.7.1}$$

при чему је $B(x)$ полином првог степена, а $A(x)$ у зависности од a и b има облик

$$A(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{ако је } (a, b) = (-1, 1), \\ x, & \text{ако је } (a, b) = (0, +\infty), \\ 1, & \text{ако је } (a, b) = (-\infty, +\infty). \end{cases}$$

Класични ортогонални полиноми се могу класификовати као:

1. Јакобијеви полиноми $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(\alpha, \beta > -1)$ на $(-1, 1)$;
2. генералисани Лагерови полиноми $L_n^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha > -1)$ на $(0, +\infty)$;
3. Ермитови полиноми $H_n(x)$ на $(-\infty, +\infty)$.

Тежинске функције и одговарајући полиноми $A(x)$ и $B(x)$ дати су у Табели 1.1.

Табела 1.1: Класификација класичних ортогоналних полинома

(a, b)	$\omega(x)$	$A(x)$	$B(x)$	λ_n
$(-1, 1)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	$(1-x^2)$	$\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x$	$n(n+\alpha+\beta+1)$
$(0, +\infty)$	$x^\alpha \mathrm{e}^{-x}$	x	$\alpha + 1 - x$	n
$(-\infty, +\infty)$	e^{-x^2}	1	$-2x$	$2n$

Специјални случајеви Јакобијевих полинома су:

- Гегенбауерови полиноми $C_n^\lambda(x)$, $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$, $\lambda > -1/2$;
- Лежандрови полиноми $P_n(x)$, $\alpha = \beta = 0$;
- Чебишевљеви полиноми прве врсте $T_n(x)$, $\alpha = \beta = -1/2$;
- Чебишевљеви полиноми друге врсте $U_n(x)$, $\alpha = \beta = 1/2$;
- Чебишевљеви полиноми треће врсте $V_n(x)$, $\alpha = -\beta = -1/2$;
- Чебишевљеви полиноми четврте врсте $W_n(x)$, $\alpha = -\beta = 1/2$.

Како је највећи део дисертације посвећен модификацијама Чебишевљевих мера прве и друге врсте, у овом делу дајемо кратак преглед неких особина ових полинома. Чебишевљеви полиноми прве и друге врсте су дефинисани са

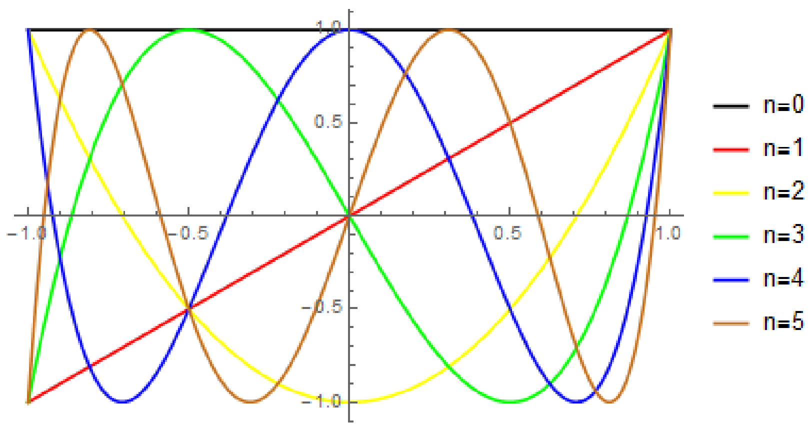
$$T_n(x) = \cos(n\theta) \quad \text{и} \quad U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta}, \quad x = \cos\theta, \tag{1.7.2}$$

и задовољавају рекурентну релацију $p_{n+1}(x) = 2xp_n(x) - p_{n-1}(x), p_0(x) = 1$, са различитим стартним вредностима $p_1 = x$, $2x$, редом за Чебишевљеве полиноме прве и друге врсте.

Даћемо примере експлицитних израза Чебишевљевих полинома прве и друге врсте за $n = 0, 1, \dots, 6$:

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1, & U_0(x) &= 1,\\
T_1(x) &= x, & U_1(x) &= 2x,\\
T_2(x) &= 2x^2 - 1, & U_2(x) &= 4x^2 - 1,\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x, & U_3(x) &= 8x^3 - 4x,\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, & U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1,\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, & U_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x,\\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1. & U_6(x) &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1.
\end{aligned}$$

Чебишевљеви полиноми прве врсте $T_n(x)$ су дати на слици 1.1, док су на слици 1.2 приказани Чебишевљеви полиноми друге врсте $U_n(x)$ за $n = 0, 1, \dots, 5$.

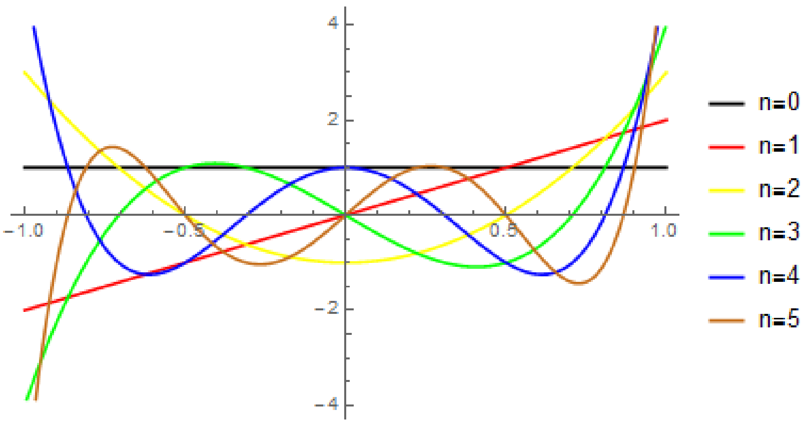


Слика 1.1: Графици функција $y = T_n(x)$ за $n = 0, 1, \dots, 5$, $-1 \le x \le 1$

Чебишевљеви полиноми прве и друге врсте припадају општијој класи Гегенбауерових полинома, па имамо

$$C_n^\lambda = \frac{(2\lambda)_n}{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x), \quad \alpha = \lambda - 1/2, \tag{1.7.3}$$

$$T_n(x) = \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{(-1/2,-1/2)}(x), \tag{1.7.4}$$



Слика 1.2: Графици функција $y = U_n(x)$ за $n = 0, 1, \ldots, 5, \quad -1 \le x \le 1$

$$U_n(x) = \frac{(n+1)!}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} P_n^{(1/2,1/2)}(x), \tag{1.7.5}$$

где је $(s)_n$ Поххамеров симбол дефинисан са $(s)_n = s(s+1)\cdots(s+n-1)$.

Чебишевљеви полиноми прве врсте $T_n(x)$ задовољавају диференцијалну једначину

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0, \tag{1.7.6}$$

док одговарајућа диференцијална једначина за Чебишевљеве полиноме друге врсте $U_n(x)$ јесте

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0. \tag{1.7.7}$$

1.8 Модификован Чебишевљев алгоритам

Коефицијенти трочлане рекурентне релације експлицитно су познати за класичне ортогоналне полиноме. Ортогонални полиноми за које коефицијенти трочлане рекурентне релације нису познати зову се строго некласични полиноми. Конструктивна теорија ортогоналних полинома бави се следећим проблемом: За дату меру $\mathrm{d}\mu(x)$ и природан број n потребно је одредити првих n коефицијената $\alpha_k(\mathrm{d}\mu)$ и $\beta_k(\mathrm{d}\mu)$ у трочланој рекурентној релацији. Највећу примену у нумеричкој конструкцији моничних ортогоналних полинома $\{\pi_k(x)\}$ има модификован Чебишевљев алгоритам.

Нека је $\{\pi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ систем моничних ортогоналних полинома у односу на меру $\mathrm{d}\mu(x)$ на реалној правој и нека су $\mu_k = \int_{\mathbb{R}} x^k \,\mathrm{d}\mu(x)$, $k \in \mathbb{N}_0$, одговарајући моменти. Првих $2n$ момената $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{2n-1}$, јединствено одређује првих n коефицијената $\alpha_k(\mathrm{d}\mu)$ и $\beta_k(\mathrm{d}\mu)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Међутим, пресликавање $\mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ дефинисано Чебишевљевим алгоритмом

$$[\,\mu_0\ \mu_1\ \mu_2\ \cdots\ \mu_{2n-1}\,]^T \mapsto [\,\alpha_0\ \beta_0\ \alpha_1\ \beta_1\ \cdots\ \alpha_{n-1}\ \beta_{n-1}\,]^T,$$

врло често показује карактеристике слабе условљености, посебно када се ради о бесконачном интервалу ортогоналности (видети [17]). Слаба условљеност долази до изражаја са порастом броја n. Увођењем погодних модификованих момената

$$m_k = \int_{\mathbb{R}} q_k(x)\,\mathrm{d}\mu(x),\ k = 0, 1, \ldots, \tag{1.8.1}$$

при чему је $\{q_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ $(\deg q_k(x) = k)$ систем полинома одабран да у неком смислу буде близак са ортогоналним полиномима $\{\pi_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$, могуће је за пресликавање

$$[\, m_0\; m_1\; m_2\; \cdots\; m_{2n-1}\,]^T \mapsto [\, \alpha_0\; \beta_0\; \alpha_1\; \beta_1\; \cdots\; \alpha_{n-1}\; \beta_{n-1}\,]^T,$$

у извесним условима добити бољу нумеричку стабилност, нарочито ако се ради о коначном интервалу на коме је подржана мера (видети [16]). Овакав алгоритам зовемо модификован Чебишевљев алгоритам (видети [15], [17] и [72]).

Претпоставимо да монични полиноми q_k задовољавају трочлану рекурентну релацију

$$q_{k+1}(x) = (x - a_k)q_k(x) - b_k q_{k-1}(x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1.8.2}$$

са $q_{-1}(x) = 0$ и $q_0(x) = 1$, где су $a_k \in \mathbb{R}$ и $b_k \geq 0$ познати коефицијенти. Напоменимо да у случају $q_k = x^k$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$, тј. $a_k = b_k = 0$ модификован Чебишевљев алгоритам се своди на основни Чебишевљев алгоритам. Према [17], уводимо величине

$$\sigma_{k,i} = (\pi_k, q_i) = \int_{\mathbb{R}} \pi_k(x) q_i(x)\, \mathrm{d}\mu(x), \quad k, i \geq -1.$$

Тада, $\sigma_{0,i} = m_i$, $\sigma_{-1,i} = 0$ и због ортогоналности $\sigma_{k,i} = 0$, за $k > i$. Узмимо, $\sigma_{0,0} = m_0 := \beta_0$. На основу (1.2.2), имамо

$$(\pi_{k+1}, q_i) = (\pi_k, x q_i) - \alpha_k(\pi_k, q_i) - \beta_k(\pi_{k-1}, q_i).$$

Сада, из (1.8.2), тј. $x q_i(x) = q_{i+1}(x) + a_i q_i(x) + b_i q_{i-1}(x)$, добијамо

$$\sigma_{k+1,i} = \sigma_{k,i+1} - (\alpha_k - a_i)\sigma_{k,i} - \beta_k \sigma_{k-1,i} + b_i \sigma_{k,i-1}. \tag{1.8.3}$$

Коначно, ставимо $i := k-1$ и $i := k$, из (1.8.3), добијамо

$$0 = \sigma_{k,k} - \beta_k \sigma_{k-1,k-1} \quad \text{и} \quad 0 = \sigma_{k,k+1} - (\alpha_k - a_k)\sigma_{k,k} - \beta_k \sigma_{k-1,k},$$

респективно, тј.

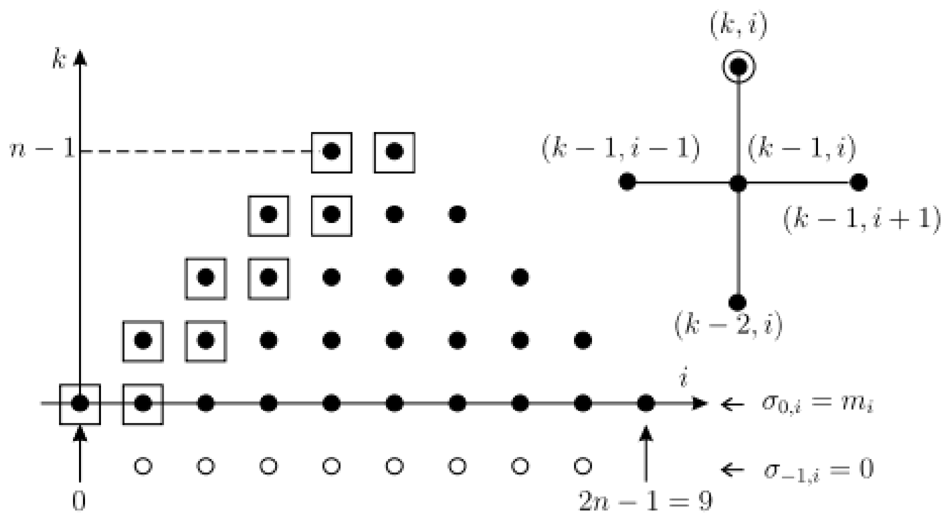
$$\alpha_k = a_k + \frac{\sigma_{k,k+1}}{\sigma_{k,k}} - \frac{\sigma_{k-1,k}}{\sigma_{k-1,k-1}} \quad \text{и} \quad \beta_k = \frac{\sigma_{k,k}}{\sigma_{k-1,k-1}}, \quad k \geq 1.$$

За $k = 0$, имамо

$$\alpha_0 = a_0 + \frac{m_0}{m_1} \quad \text{и} \quad \beta_0 = m_0.$$

Овај алгоритам као улаз захтева $2n$ модификованих момената m_i, $i = 0, 1, \ldots, 2n-1$, датих са (1.8.1) и коефицијенте a_k и b_k, $k = 0, 1, \ldots, 2n-2$, у рекурентној релацији (1.8.2). Алгоритам за резултат даје коефицијенте α_k и β_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

На слици 1.3 дата је шема која илуструје примену модификованог Чебишевљевог алгоритма у случају $n = 5$.



Слика 1.3: Модификован Чебишевљев алгоритам

2 Квадратурне формуле

2.1 Увод

Нека мера $\mathrm{d}\mu$ има бесконачан носач и нека задовољава све особине дате на почетку поглавља 1.1. Квадратурна формула са n тачака је формула облика

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f), \tag{2.1.1}$$

где квадратурна сума дата са

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k),$$

обезбеђује апроксимацију интеграла $I(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$ и $R_n(f)$ је одговарајући остатак. Тачке x_k, $k = 1,\ldots,n$, су чворови, а A_k, $k = 1,\ldots,n$, су тежине квадратурне формуле (2.1.1).

Дефиниција 2.1.1. Квадратурна формула (2.1.1) са n-тачака има алгебарски степен тачности d, ако за све полиноме $p \in \mathcal{P}_d$ важи $R_n(p) = 0$. Алгебарски степен тачности квадратурне формуле (2.1.1) је тачно d, ако она има алгебарски степен тачности d, а нема алгебарски степен тачности $d+1$, тј. ако је $R_n(p) \neq 0$ за неки полином $p \in \mathcal{P}_{d+1}$.

2.2 Интерполационе квадратурне формуле

За дате међусобно различите чворове x_k, $k = 1,\ldots,n$, тежине квадратурне формуле A_k, $k = 1,\ldots,n$, се могу одредити тако да квадратурна формула има степен тачности $n-1$.

Нека је q_n монични полином степена n, са нулама у тачкама x_k, $k = 1,\ldots,n$,

$$q_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k). \tag{2.2.1}$$

Интеграцијом Лагранжове интерполационе формуле

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) l_k(x) + r_n(f;x)$$

где је

$$l_k(x) = \frac{q_n(x)}{q_n'(x)(x - x_k)}, \quad k = 1,\ldots,n, \tag{2.2.2}$$

добијамо (2.1.1), са тежинама квадратурне формуле

$$A_k = \frac{1}{q_k'(x)} \int_{\mathbb{R}} \frac{q_n(x)}{x - x_k} \, \mathrm{d}\mu(x), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2.2.3}$$

и остатком

$$R_n(f) = \int_{\mathbb{R}} r_n(f; x) \, \mathrm{d}\mu(x). \tag{2.2.4}$$

Приметимо да за све $f \in \mathcal{P}_{n-1}$, имамо $r_n(f; x) = 0$ и одатле $R_n(f) = 0$. Квадратурна формула добијена на овај начин је интерполациона. Интерполациона квадратурна формула

$$\int_{-1}^{1} f(x)\omega(x) \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f), \tag{2.2.5}$$

са унапред датим чворовима $x_k \in [-1, 1]$ назива се тежинска Њутн-Котесова формула. Класична Њутн-Котесова квадратурна формула је она за коју је $\omega(x) = 1$ и чворови су еквидистантни $x_k = -1 + \dfrac{2(k-1)}{n-1}$, $k = 1, \ldots, n$.

Класичне Њутн-Котесове формуле су драматично побољшане 1814. године од стране Гауса. Било је то највеће откриће у 19. веку у Нумеричкој анализи. Степен тачности Њутнових формула је практично удвостручен.

Елегантно алтернативно извођење Гаусових формула, које је Гаус извео за тежину $\omega(x) = 1$, дао је Јакоб Јакоби (Jacob Jacobi), а генерализацију за произвољну тежинску функцију (меру) дао је Кристофел.

Битна примена ортогоналних полинома у конструкцији квадратурних формула је повећање алгебарског степена тачности за квадратурне формуле. Наредну теорему доказао је Јакоби 1826. године (видети [15], [17], [38]).

Теорема 2.2.1. *За дати природан број $m (\leq n)$, квадратурна формула* (2.1.1) *има алгебарски степен тачности $d = n - 1 + m$ ако и само ако важи:*

(1) *формула* (2.1.1) *је интерполациона;*

(2) *полином q_n, дефинисан са* (2.2.1), *задовољава*

$$(q_n, p) = \int_{\mathbb{R}} p(x) q_n(x) \, \mathrm{d}\mu(x) = 0 \quad \text{за све} \quad p \in \mathcal{P}_{m-1}.$$

2.3 Гаус-Кристофелове квадратурне формуле

Према теореми 2.2.1, формула (2.1.1) у односу на позитивну меру $\mathrm{d}\mu(x)$ има максимални алгебарски степен тачности $2n - 1$, тј. вредност $m = n$ је оптимална. Вредности $m > n$ нису могуће. Због услова (2) из теореме 2.2.1, када је $m = n + 1$ полином q_n би морао бити ортогоналан самом себи, што је немогуће.

Квадратурна формула (2.1.1) са максималним алгебарским степеном тачности $(2n - 1)$ назива се Гаусова (или Гаус–Кристофелова) квадратурна формула у односу на меру $\mathrm{d}\mu$.

За $m = n$, из услова ортогоналности (2) теореме 2.2.1, имамо да полином q_n мора бити монични ортогонални полином у односу на меру $\mathrm{d}\mu$. Чворови Гаусове квадратурне формуле су нуле моничног $q_n(x) = \pi_n(x; \mathrm{d}\mu)$ ортогоналног (или ортонормираног) полинома у односу на меру $\mathrm{d}\mu$. Тежине A_k су Кристофелови бројеви и добијају се из (2.2.3).

Теорема 2.3.1. *Параметри Гаусове квадратурне фурмуле* (2.1.1) *у односу на позитивну меру* $\mathrm{d}\mu$ *су*

$$x_k = x_{n,k}, \quad A_k = \lambda_{n,k} = \lambda_n(x_{n,k};\, \mathrm{d}\mu) > 0, \quad k = 1, \ldots, n,$$

тј. чворови су нуле ортогоналног полинома $\pi_n(x;\, \mathrm{d}\mu)$*, а тежине су вредности Кристофелове функције* (1.6.7) *у нулама ортогоналног полинома* $\pi_n(x;\, \mathrm{d}\mu)$.

За нумеричку конструкцију Гаусових квадратура користи се више метода. Најпознатији је метод Голуб и Велча дат у [24]. Овај метод се заснива на одређивању сопствених вредности и првих компоненти сопствених вектора симетричне тродијагоналне Јакобијеве матрице, користећи QR алгоритам.

Теорема 2.3.2. *Чворови* $x_k, k = 1, \ldots, n$*, у Гаусовој квадратурној формули* (2.1.1) *у односу на позитивну меру* $\mathrm{d}\mu$ *су сопствене вредности Јакобијеве матрице реда* n

$$J_n(\mathrm{d}\mu) = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \sqrt{\beta_1} & & & \mathbf{O} \\ \sqrt{\beta_1} & \alpha_1 & \sqrt{\beta_2} & & \\ & \sqrt{\beta_2} & \alpha_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \sqrt{\beta_{n-1}} \\ & \mathbf{O} & & \sqrt{\beta_{n-1}} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix},$$

где су α_k *и* β_k*,* $k = 0, 1, \ldots, n-1$*, коефицијенти трочлане рекурентне релације* (1.2.2) *за моничне ортогоналне полиноме* $\pi_k(\,\cdot;\, \mathrm{d}\mu)$*. Тежине* A_k *су дате са*

$$A_k = \beta_0 v_{k,1}^2, \quad k = 1, \ldots, n,$$

при чему је $\beta_0 = \mu_0 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu(x)$*, а* $v_{k,1}$ *прва компонента нормализованог сопственог вектора* $\mathbf{v}_k$ *који одговара сопственој вредности* x_k*, тј.*

$$J_n(\mathrm{d}\mu)\mathbf{v}_k = x_k \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{v}_k^T \mathbf{v}_k = 1, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Нека је $[a, b] = \mathrm{supp}(\mathrm{d}\mu)$. За остатак $R_n(f)$ Гаусове квадратурне формуле (2.1.1) важи наредни резултат (видети [38], [41], [17]).

Теорема 2.3.3. *Нека је* $f \in C^{2n}[a, b]$*, тада постоји* $\xi \in (a, b)$*, тако да за остатак* $R_n(f)$ *у Гаусовој квадратурној формули* (2.1.1) *важи*

$$R_n(f) = \frac{||\pi_n||^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi),$$

при чему је π_n *монични ортогонални полином у односу на меру* $\mathrm{d}\mu$.

Оцене остатка $R_n(f)$ у разним класама функција могу се наћи у монографији [38], одељак 5.1.

2.4 Гаус-Радау-ове и Гаус-Лобато-ове квадратурне формуле

У овом делу размотрићемо квадратурне формуле сличне Гаусовим. Нека за носач $[a, b]$ мере $\mathrm{d}\mu$ важи $a > -\infty$ и $b \leq \infty$. Можемо узети да крај интервала a буде чвор квадратурне формуле. Ако је $b < \infty$, тада међу чворове можемо укључити и a и b. То је нарочито погодно урадити, ако је функција једнака нули у тим чворовима.

2.4.1 Гаус-Радау-ове квадратурне формуле

Нека је функција $g(x)$ дата једнакошћу

$$f(x) = f(a) + (x-a)g(x),$$

тако да

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = f(a)\mu_0 + \int_a^b g(x)(x-a)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

где је $\mu_0 = \int_a^b \mathrm{d}\mu(x)$. Уведимо нову меру $\mathrm{d}\mu_1 := (x-a)\,\mathrm{d}\mu(x)$ и конструшемо одговарајућу Гаусову квадратурну формулу са n чворова. Тада добијамо

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \mu_0 f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k^G g(x_k^G) + R_n^G(\mathrm{d}\mu_1; g),$$

где су према теореми 2.3.1, $x_k^G = x_k^G(\mathrm{d}\mu_1)$ нуле ортогоналног полинома $\pi_n(x;\,\mathrm{d}\mu_1)$, тежине су $A_k^G = A_k^G(\mathrm{d}\mu_1) = \lambda_n(x_k^G,\,\mathrm{d}\mu_1) > 0$, за $k = 1,\dots,n$, а $R_n^G(g;\,\mathrm{d}\mu_1)$ је остатак у одговарајућој Гаусовој формули.

Овако добијамо Гаус-Радау-ову $(n+1)$-квадратурну формулу

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = A_0^R f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k^R f(x_k^R) + R_{n,1}^R(f;\,\mathrm{d}\mu), \tag{2.4.1}$$

са чворовима $x_0^R = a$, $x_k^R = x_k^G$, за $k = 1,\dots,n$ и тежинама,

$$A_0^R = \mu_0 - \sum_{k=1}^{n} A_k^R \quad \text{и} \quad A_k^R = \frac{A_k^G}{x_k^G - a}, \quad k = 1,\dots,n.$$

Алгебарски степен тачности формуле (2.4.1) је $d = 2n$.

Напомена 2.4.1. Чворови и тежине формуле (2.4.1) се могу добити модификацијом Голуб-Велчовог алгоритма из теореме 2.3.2. Матрица $J_n(\mathrm{d}\mu)$ треба да се модификује тако да се добије матрица реда $n+1$:

$$J_{n+1}^R(\mathrm{d}\mu) = \begin{bmatrix} J_n(\mathrm{d}\mu) & \sqrt{\beta_n}\mathbf{e_n} \\ \sqrt{\beta_n}\mathbf{e_n^T} & \alpha_n^R \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_n^T = [0\,0\,\cdots\,1]^T \in \mathbb{R}^n,$$

где је

$$\alpha_n^R = a - \beta_n(\mathrm{d}\mu)\frac{\pi_{n-1}(a;\,\mathrm{d}\mu)}{\pi_n(a;\,\mathrm{d}\mu)}.$$

2.4.2 Гаус-Лобато-ове квадратурне формуле

Нека је функција $g(x)$ дата са

$$f(x) - L_1(f;x) = (x-a)(b-x)g(x),$$

где је

$$L_1(f;x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b).$$

Уведимо меру $\mathrm{d}\mu_{1,1}(x) = (x-a)(b-x)\,\mathrm{d}\mu(x)$. Тада важи

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \frac{f(a)}{b-a}\int_a^b (b-x)\,\mathrm{d}\mu(x) + \frac{f(b)}{b-a}\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\mu_{1,1}(x).$$

Квадратурна формула Гаусовог типа са n-чворова у односу на меру $\mathrm{d}\mu_{1,1}$ је

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\mu_{1,1}(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k^G g(x_k^G) + R_n^G(g;\,\mathrm{d}\mu_{1,1}),$$

где су чворови $x_k = x_k^G(\,\mathrm{d}\mu_{1,1})$ нуле ортогоналног полинома $\pi_n(x;\,\mathrm{d}\mu_{1,1})$, тежине $A_k^G = A_k^G(\,\mathrm{d}\mu_{1,1}) = \lambda_n(x_k^G;\,\mathrm{d}\mu_{1,1}) > 0$ за $k = 1,\dots,n$, а $R_n^G(g;\,\mathrm{d}\mu_{1,1})$ је одговарајући остатак. На овај начин добијамо Гаус-Лобато-ову квадратурну формула

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = A_0^L f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k^L f(x_k^L) + A_{n+1}^L f(b) + R_{n,1,1}(f;\,\mathrm{d}\mu), \tag{2.4.2}$$

са чворовима $x_0^L = a$, $x_k^L = x_k^G$, $k = 1,\dots,n$, $x_{n+1}^L = b$ и тежинама

$$A_k^L = \frac{A_k^G}{(x_k^G - a)(b - x_k^G)},\ k = 1,\dots,n,$$

и

$$A_0^L = \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b (b-x)\,\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{k=1}^{n}(b - x_k^G)A_k^L\right\},$$

$$A_{n+1}^L = \frac{1}{b-a}\left\{\int_a^b (x-a)\,\mathrm{d}\mu(x) - \sum_{k=1}^{n}(x_k^G - a)A_k^L\right\}.$$

Напомена 2.4.2. Чворови и тежине формуле (2.4.2) се могу добити модификацијом Голуб-Велчовог алгоритма из теореме 2.3.2, из сопствених вредности и вектора матрице реда $n+2$:

$$J_{n+2}^L(\,\mathrm{d}\mu) = \begin{bmatrix} J_{n+1}(\,\mathrm{d}\mu) & \sqrt{\beta_{n+1}^L}\mathbf{e_{n+1}} \\ \sqrt{\beta_{n+1}^L}\mathbf{e_{n+1}^T} & \alpha_{n+1}^L \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_{n+1}^T = [0\,0\cdots 1]^T \in \mathbb{R}^{n+1},$$

где су α_{n+1}^L и β_{n+1}^L дати следећим системом једначина

$$\begin{bmatrix} \pi_{n+1}(a;\,\mathrm{d}\mu) & \pi_n(a;\,\mathrm{d}\mu) \\ \pi_{n+1}(b;\,\mathrm{d}\mu) & \pi_n(b;\,\mathrm{d}\mu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{n+1}^L \\ \beta_{n+1}^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\pi_{n+1}(a;\,\mathrm{d}\mu) \\ b\pi_{n+1}(b;\,\mathrm{d}\mu) \end{bmatrix}.$$

Алгебарски степен тачности формуле (2.4.2) је $d = 2n+1$.

2.5 Рисови полиноми и одговарајуће квадратуре

Израчунавање двоелектронских Кулонових интеграла одбијања

$$(\eta_i\eta_j|r_{12}^{-1}|\eta_k\eta_l) = \iint \eta_i(1)\eta_j(1)\frac{1}{r_{12}}\eta_k(2)\eta_l(2)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2, \tag{2.5.1}$$

који за интегранде имају функције

$$\eta = x^{n_x} y^{n_y} z^{n_z} \exp(-ar^2), \quad \lambda = n_x + n_y + n_z, \tag{2.5.2}$$

захтева познавање параметара $n-$тачкасте квадратурне формуле.

Ове квадратурне формуле предмет су бројних истраживања, с обзиром да је проналажење стабилног нумеричког алгоритма за одређивање њихових параметара представљао прави рачунски изазов. У радовима [6] и [71], показано је да се двоелектронски интеграл одбијања може изразити у следећој форми

$$(\eta_i \eta_j \, |r_{12}^{-1}| \, \eta_k \eta_l) = \sum_{m=0}^{L} c_m F_m(x), \tag{2.5.3}$$

где је

$$F_m(X) = \int_0^1 t^{2m} \exp(-xt^2) \, \mathrm{d}t, \tag{2.5.4}$$

и $L = \lambda_i + \lambda_j + \lambda_k + \lambda_l$. Параметар x је позитиван реалан број и његова вредност зависи од експоненцијалних параматара a_i, a_j, a_k, и a_l и позиције центара четири Гаусове функције, али не зависи од вредности 12 индекса n_x, n_y, n_z. Из (2.5.3) имамо

$$(\eta_i \eta_j | \, |\eta_k \eta_l) = \int_0^1 P_L(t) \exp(-xt^2) \, \mathrm{d}t, \tag{2.5.5}$$

где је $P_L(t)$ паран алгебарски полином степена $2L$ са коефицијентима c_m. Рисови полиноми, $r_n(t; x)$, су алгебарски полиноми парног степена $2n$, промењиве t који су ортогонални у односу на тежинску функцију $\exp(-xt^2)$, тј. важи

$$\int_0^1 r_t(t, x) r_m(t, x) \exp(-xt^2) \, \mathrm{d}t = \delta_{nm}. \tag{2.5.6}$$

Интеграл (2.5.5) се може израчунати тачно, преко $n-$тачкасте квадратурне формуле са

$$\int_0^1 P_L(t) \exp(-xt^2) \, \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} P_L(t_k) A_k, \tag{2.5.7}$$

где је $n > L/2$, t_k је нула Рисовог полинома n-тог степена и A_k су тежински квадратурни коефицијенти који зависе од позитивног параметра x.

Како је $\exp(-xt^2)$ парна функција на $(-1, 1)$, интеграл у (2.5.7) се може представити као половина одговарајућег интеграла на симетричном интервалу $(-1, 1)$. Рисове квадратурне формуле се могу интепретирати као Гаусове на коначном интервалу $(-1, 1)$ у односу на тежинску функцију $\exp(-xt^2)$. У случају $x \to 0$, Рисова квадратурна формула се може свести на Гаус-Лежандрово квадратурно правило. За $x \to +\infty$, ове квадратуре се асимптот ски понашају као Гаус-Ермитове квадратуре (видети [38]). Напоменимо да тежинска функција $\exp(-xt^2)$ припада Сегеовој класи функција (видети [38]).

Полиноми парног степена $p_k(t^2; x) = \pi_{2k}(t; x)$ и одговарајуће квадратурне формуле на интервалу $(0, 1)$ предмет су истраживања дугог низа година (видети [14], [61], [63] и [62]).

У раду [64] дате су методе конструкције Рисових квадратурних формула, као и квадратурних формула са истом тежинском функцијом на $(0, 1)$, преко дискретне Стилтјес-Гаучијеве процедуре (видети [38]).

Кинг је у свом прегледном раду [29], разматрао постојеће интеграционе шеме за конструкцију ортогоналних полинома, односно проблеме које се односе на ефикасност и прецизност нумеричких израчунавања. Предложио је стабилан интеграциони метод за конструкцију коефицијената трочлане рекурентне релације Рисових полинома коришћењем Гаус-Рисових квадратура (видети још [30]).

У свом скоријем истраживању [48], Миловановић је дао ефикасан нумерички алгоритам за израчунавање параметара ових квадратура интерпретирајући их као квадратуре Гаусовог типа.

3 Полиномске модификације Чебишевљевих мера прве и друге врсте

Модерна теорија ортогоналних полинома бави се конструкцијом и анализом њихових нових класа. Истраживачи инспирацију налазе у класичним ортогоналним полиномима. Њихова уопштења су најчешћи приступ у процесу конструкције, који се своди на измену носача класичне мере или модификацију тежинске функције или њихову комбинацију. У радовима [1], [5], [23], [26] и [2] су разматране класе ортогоналних полинома на фрагментираном носачу мере.

У овом поглављу бавићемо се параметризацијом Чебишевљевих мера прве и друге врсте. Део резултата ове главе презентован је у [12] и [11].

При добијању резултата у овој секцији делимично је, као помоћно средство, коришћен програмски систем Mathematica (видети [73] и [65]) и програмски пакет OrthogonalPolynomials који је детаљно описан у радовима [8] и [10].

3.1 Полиноми ортогонални у односу на модификовану Чебишевљеву меру прве врсте

Нека је $\mathrm{d}\sigma(x)$ позитивна мера на $\mathbb{R}$ са коначним или неограниченим носачем која има коначне моменте свих редова и нека је $\{p_k\}$ одговарајући низ моничних ортогоналних полинома

$$p_k(x) = p_k(x;\, \mathrm{d}\sigma),\ k \in \mathbb{N}_0.$$

Ови полиноми задовољавају трочлану рекурентну релацију (1.2.2), тј.

$$p_{k+1}(x) = (x-\alpha_k)p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.1.1}$$

са $p_0(x) = 1$ и $p_{-1}(x) = 0$, где је $\alpha_k = \alpha_k(\mathrm{d}\sigma) \in \mathbb{R}, \beta_k = \beta_k(\mathrm{d}\sigma) > 0$ и $\beta_0 = \beta_0(\mathrm{d}\sigma) = \mathrm{d}\sigma(\mathbb{R})$. Ако је $\mathrm{d}\mu$ симетрична мера на $\mathbb{R}$, тј. $\mathrm{d}\sigma(x) = \mathrm{d}\sigma(-x)$, важи $\alpha_k = 0$.

За фиксни реалан број $s > -\frac{1}{2}$, уводимо меру

$$\mathrm{d}\sigma^{2,s}(x) = \omega^{2,s}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{|\widehat{T}_2(x)|^{2s}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x, \tag{3.1.2}$$

где је $\widehat{T}_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ моничан Чебишевљев полином прве врсте другог степена. Одговарајући низ (моничних) ортогоналних полинома $p_k^{2,s}(x) = p_k^{2,s}(x;\, \mathrm{d}\sigma^{2,s}), k \in \mathbb{N}_0$, је јединствен, јер је мера $\mathrm{d}\sigma^{2,s}(x)$ позитивна за свако реално $s > -\frac{1}{2}$.

Када је параметар s из скупа природних бројева ($s \in \mathbb{N}$), Миловановић и његови сарадници су у раду [9] разматрали полиноме ортогоналне у односу на меру $\mathrm{d}\sigma^{n,s}(x) = \widehat{T}_n(x)^{2s}/\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, где је $n \geqslant 2\,(n \in \mathbb{N})$ и показали да важи следећи резултат.

Теорема 3.1.1 ([9]). *За било које* s, $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, *полиноми* $p_k^{n,s}(x) = p_k^{n,s}(x; \mathrm{d}\sigma^{n,s})$, $k \in \mathbb{N}_0$, *задовољавају трочлану рекурентну релацију*

$$p_{k+1}^{n,s}(x) = xp_k^{n,s}(x) - \beta_k^{n,s} p_{k-1}^{n,s}(x), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{3.1.3}$$

са почетним условима $p_0^{n,s}(x) = 1$, $p_{-1}^{n,s}(x) = 0$, *где је* $\beta_0^{n,s} = \dfrac{\pi}{2^{2ns}}\dbinom{2s}{s}$ *и за* $k \in \mathbb{N}$,

$$\beta_k^{n,s} = \begin{cases} \dfrac{k}{4(k+ns)}, & \text{ако је } k \equiv 0 \pmod{2n}, \\ \dfrac{k+2ns-1}{4(k+ns-1)}, & \text{ако је } k \equiv 1 \pmod{2n}, \\ \dfrac{k+2ns}{4(k+ns)}, & \text{ако је } k \equiv n \pmod{2n}, \\ \dfrac{k-1}{4(k+ns-1)}, & \text{ако је } k \equiv n+1 \pmod{2n}, \\ \dfrac{1}{4}, & \text{у осталим случајевима.} \end{cases} \tag{3.1.4}$$

Напомена 3.1.1. Специјалан случај $s = 1$ је доказан у раду Гаучија и Лија (видети [21]).

Напомена 3.1.2. Када је $n = 1$ и $s > -\frac{1}{2}$, тј. за меру $\mathrm{d}\sigma^{1,s}(x) = |x|^{2s}/\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, коефицијенти одговарајуће трочлане рекурентне релације су

$$\beta_0^{1,s} = \sqrt{\pi}\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)/\Gamma(s+1),\ \beta_1^{1,s} = \left(s+\frac{1}{2}\right)/(s+1)$$

и

$$\beta_k^{1,s} = \begin{cases} \dfrac{k(k-1)}{4(k+s)(k+s-1)}, & \text{ако је } k \text{ парно } (\geq 2), \\ \dfrac{(k+2s)(k+2s-1)}{4(k+s)(k+s-1)}, & \text{ако је } k \text{ непарно } (\geq 3). \end{cases}$$

Овај резултат, као и један општији за генерализовану Гегенбауерову тежину је доказан у [32] (видети такође [7, стр. 156] и [38, стр. 147]).

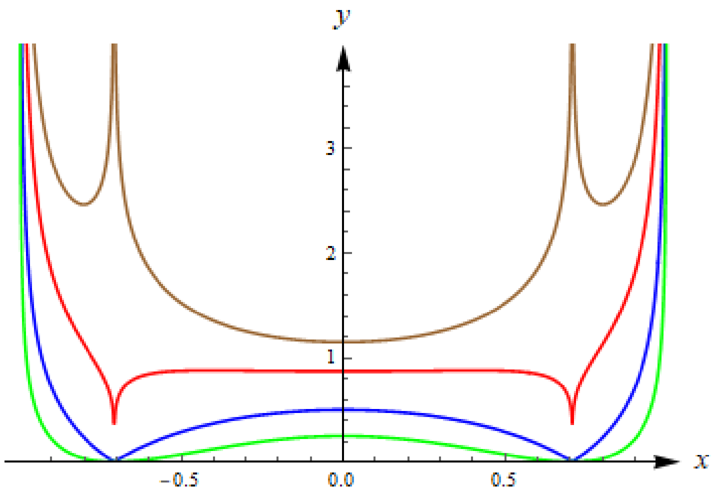
3.1.1 Моменти и моментне детерминанте

У овом делу размотрићемо моменте тежинске функције

$$\omega^{2,s}(x) = \frac{|\widehat{T}_2(x)|^{2s}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x, \quad s > -\frac{1}{2}. \tag{3.1.5}$$

График тежинске функције за одређене вредности параметра s је дат на слици 3.1.

Најпре ћемо одредити моменте μ_m $(m \geqslant 0)$ за парне тежинске функције $x \mapsto \omega^{2,s}(x)$, дате са (3.1.5). Очигледно, $\mu_m^{2,s} = 0$ за непарно m.



Слика 3.1: Графици тежинске функције $x \mapsto w^{2,s}(x)$ на $(-1,1)$, за $s = -1/10$ (браон линија), $s = 1/10$ (црвена линија), $s = 1/2$ (плава линија) и $s = 1$ (зелена линија)

За парно m имамо

$$\mu_m^{2,s} = \frac{2}{4^s}\int_0^1 x^m \frac{|T_2(x)|^{2s}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4^s}\int_0^\pi \cos^m\frac{\theta}{2}\,|\cos\theta|^{2s}\,\mathrm{d}\theta,$$

након смене $x = \cos(\theta/2)$. Последњи интеграл се може редуковати на интервал $[0,\pi/2]$, пресликавањем $\theta \mapsto \cos\theta$,

$$\begin{aligned}
\mu_m^{2,s} &= \frac{1}{4^s}\left\{\int_0^{\pi/2} + \int_{\pi/2}^{\pi}\right\}\cos^m\frac{\theta}{2}\,|\cos\theta|^{2s}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4^s}\int_0^{\pi/2}\left[\cos^m\frac{\theta}{2} + \sin^m\frac{\theta}{2}\right]\cos^{2s}\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{4^s}\int_0^{\pi/2}\left[\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{m/2} + \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^{m/2}\right]\cos^{2s}\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2^{2s+m/2}}\int_0^{\pi/2}\sum_{j=0}^{m/2}\binom{m/2}{j}\left[1+(-1)^j\right]\cos^{j+2s}\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2^{2s+m/2-1}}\sum_{j=0}^{\lfloor m/4\rfloor}\binom{m/2}{2j}\int_0^{\pi/2}\cos^{2(j+s)}\theta\,\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

где $\lfloor a\rfloor$ означава највећи цео број мањи или једнак реалном броју a.

Како је

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2(j+s)}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(j+s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(j+s+1)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(j+s+1)}\left(s+\frac{1}{2}\right)_j,$$

где је Поххамеров симбол дефинисан са

$$(c)_0 = 1, \quad (c)_j = c(c+1)\cdots(c+j-1) = \frac{\Gamma(c+j)}{\Gamma(c)}, \tag{3.1.6}$$

и $\Gamma(c)$ је Ојлерова гама функција дефинисана са

$$\Gamma(c) = \int_0^\infty t^{c-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \quad \text{за} \quad \mathrm{Re}(c) > 0. \tag{3.1.7}$$

Даље, имамо

$$\mu_m^{2,s} = \frac{C(s)}{(s+1)_{\lfloor m/4\rfloor}2^{m/2}} \sum_{j=0}^{\lfloor m/4\rfloor} \binom{m/2}{2j}\left(s+\frac{1}{2}\right)_j (s+1+j)_{\lfloor m/4\rfloor-j}, \tag{3.1.8}$$

где је

$$\mu_0^{2,s} = C(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{4^s}\cdot\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s+1)}. \tag{3.1.9}$$

У наставку, без губљења општости, заједнички фактор $C(s)$ у (3.1.8) се може елиминисати (тј. ставимо $C(s) = 1$) и означимо одговарајуће моменте $\mu_m^{2,s}$ са μ_m.

Посматрајмо Хенкелове детерминанте

$$\Delta_0 = 1, \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{k-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \mu_{k-1} & \mu_k & \cdots & \mu_{2k-2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.1.10}$$

где су моменти дати са (3.1.8), као и две детерминанте (са не-нула елементима),

$$E_m = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_2 & \cdots & \mu_{2m-2} \\ \mu_2 & \mu_4 & \cdots & \mu_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{2m-2} & \mu_{2m} & \cdots & \mu_{4m-4} \end{vmatrix}, \quad F_m = \begin{vmatrix} \mu_2 & \mu_4 & \cdots & \mu_{2m} \\ \mu_4 & \mu_6 & \cdots & \mu_{2m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{2m} & \mu_{2m+2} & \cdots & \mu_{4m-2} \end{vmatrix}.$$

Циљ је да израчунамо моментне детерминанте Δ_k, које се могу изразити помоћу детерминанти E_m и F_m.

Лема 3.1.1. *За Хенкелове детерминанте* (3.1.10) *имамо*

$$\Delta_{2m} = E_m F_m \quad \textit{и} \quad \Delta_{2m+1} = E_{m+1}F_m. \tag{3.1.11}$$

Доказ. Слично као у [22] и [43] користимо Лапласов развој за детерминанте (3.1.10). Нека је k парно ($k = 2m$). Развојем по колонама 1, 3, …, $k-1$, имамо да један не нула елемент одређује резултате, наиме из минор и коминор пара

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \cdots & k-1 \\ 1 & 3 & \cdots & k-1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & \cdots & k \\ 2 & 4 & \cdots & k \end{pmatrix}.$$

Како је матрица Δ_k симетрична и знак који одговара овом пару је $(-1)^{k^2/2}$, директно добијамо да важе формуле (3.1.11).

Слично, Лапласовим развојем по колонама 1, 3, ..., k добијамо резултат за непарно k. $\square$

У зависности од парности m, за детерминанте E_m и F_m, као и за њихове количнике, важе следећи резултати. Доказ се може извести развојем детерминанти по последњој врсти, помоћу дужег рачуна, који је овде делимично одрађен помоћу симболичког израчунавања у софтверу Mathematica.

Лема 3.1.2. *Важи*

$$
\begin{aligned}
E_{2\nu} &= \frac{\prod_{j=1}^{\nu-1}[(2j)!]^2}{2^{7\nu^2-4\nu}[(1+s)_{\nu-1}]^{2\nu}} \prod_{j=1}^{\nu}\left(\frac{2j-1+2s}{\nu+j-1+s}\right)^{2\nu-2j+1}, \\
E_{2\nu+1} &= \frac{\prod_{j=1}^{\nu}(2j)!(2j-2)!}{2^{7\nu^2+3\nu}[(1+s)_{\nu}]^{2\nu+1}} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{\nu}(2j-1+2s)^{2\nu-2j+2}}{\prod_{j=1}^{\nu}(\nu+j+s)^{2\nu-2j+1}}
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
F_{2\nu} &= \frac{\prod_{j=1}^{\nu}(2j-1)!(2j-2)!}{2^{7\nu^2-\nu}[(1+s)_{\nu}]^{2\nu}} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{\nu}(2j-1+2s)^{2\nu-2j+1}}{\prod_{j=1}^{\nu-1}(\nu+j+s)^{2\nu-2j}}, \\
F_{2\nu+1} &= \frac{\prod_{j=1}^{\nu}(2j)!(2j-1)!}{2^{7\nu^2+6\nu+1}[(1+s)_{\nu}]^{2\nu+1}} \prod_{j=1}^{\nu}\left(\frac{2j-1+2s}{\nu+j+s}\right)^{2\nu-2j+2}.
\end{aligned}
$$

Лема 3.1.3. *За $E/F-$количнике важе следеће једнакости:*

$$
\begin{aligned}
\frac{E_{2\nu+1}}{F_{2\nu}} &= \frac{\nu!}{2^{3\nu}(1+s)_{\nu}} \prod_{j=1}^{\nu}\frac{2j-1+2s}{\nu+j+s}, \\
\frac{E_{2\nu}}{F_{2\nu-1}} &= \frac{(\nu-1)!}{2^{3\nu-1}(1+s)_{\nu-1}} \prod_{j=1}^{\nu}\frac{2j-1+2s}{\nu+j-1+s}, \\
\frac{E_{2\nu}}{F_{2\nu}} &= \frac{(\nu-1)!2^{4\nu-1}}{(2\nu-1)!} \prod_{j=1}^{\nu}(\nu+j-1+s), \\
\frac{E_{2\nu+1}}{F_{2\nu+1}} &= \frac{\nu!2^{4\nu+1}}{(2\nu)!} \prod_{j=1}^{\nu}(\nu+j+s).
\end{aligned}
$$

3.1.2 Рекурентни коефицијенти за модификовану Чебишевљеву меру прве врсте

Рекурентни коефицијенти $\beta_k = \beta_k^{2,s}$ у (3.1.1) за полиноме ортогоналне у односу на меру (3.1.5) се могу изразити помоћу Хенкелових детерминанти (3.1.10) (видети [38])

(3.1.12)
$$\beta_k^{2,s} = \frac{\Delta_{k-1}\Delta_{k+1}}{\Delta_k^2}, \quad k \geq 1.$$

Доказаћемо следећи резултат.

Теорема 3.1.2. *За било које реално* $s > -\frac{1}{2}$, *полиноми* $p_k^{2,s}(x) = p_k^{2,s}(x;\, \mathrm{d}\sigma^{2,s})$, $k \in \mathbb{N}_0$, *где је* $\mathrm{d}\sigma^{2,s}(x) = |T_2(x)|^{2s}/\sqrt{1-x^2}$, *задовољавају трочлану рекурентну релацију*

$$
\begin{aligned}
p_{k+1}^{2,s}(x) &= x p_k^{2,s}(x) - \beta_k^{2,s} p_{k-1}^{2,s}(x), \quad k \in \mathbb{N}_0, \\
p_0^{2,s}(x) &= 1,\ p_{-1}^{2,s}(x) = 0,
\end{aligned}
\tag{3.1.13}
$$

где је

$$
\beta_0^{2,s} = \frac{\sqrt{\pi}}{4^s} \cdot \frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{\Gamma(s+1)},
\tag{3.1.14}
$$

а за $k \in \mathbb{N}$,

$$
\beta_k^{2,s} = \frac{2(k+s)\,\mathrm{Re}\,(\gamma) + k(k+1) - s\big[(\gamma + k\delta) + (-1)^k \overline{(\gamma + k\delta)}\big]\mathrm{i}^k}{4(k+2s)(k+2s-1)},
\tag{3.1.15}
$$

где су $\gamma = 2s - 1 + 2s\mathrm{i}$, $\delta = 1 + \mathrm{i}$ *и* $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

Доказ. Најпре, имамо $\beta_0^{2,s} = \mu_0^{2,s} = C(s)$, које је дато са (3.1.9), тј. (3.1.14), где је реално $s > -1/2$. Приметимо да се (3.1.14) своди на $\beta_0^{2,s} = \dfrac{\pi}{2^{4s}}\dbinom{2s}{s}$ за $s \in \mathbb{N}$.

У складу са (3.1.12) и лемом 3.1.1 имамо

$$
\beta_{2m}^{2,s} = \frac{E_m F_{m-1}}{E_m F_m} \cdot \frac{E_{m+1} F_m}{E_m F_m} = \frac{E_{m+1}}{F_m}\left(\frac{E_m}{F_{m-1}}\right)^{-1}
\tag{3.1.16}
$$

и

$$
\beta_{2m+1}^{2,s} = \frac{E_m F_m}{E_{m+1} F_m} \cdot \frac{E_{m+1} F_{m+1}}{E_{m+1} F_m} = \frac{E_m}{F_m}\left(\frac{E_{m+1}}{F_{m+1}}\right)^{-1}.
\tag{3.1.17}
$$

Сада, користећи лему 3.1.3, из (3.1.16) и (3.1.17) за $m = 2\nu$ и $m = 2\nu+1$, добијамо

$$
\beta_{4\nu+\ell}^{2,s} = \begin{cases}
\dfrac{\nu}{2(2\nu+s)}, & \ell = 0, \\
\dfrac{\nu+s}{2(2\nu+s)}, & \ell = 1, \\
\dfrac{2\nu+1+2s}{4(2\nu+1+s)}, & \ell = 2, \\
\dfrac{2\nu+1}{4(2\nu+1+s)}, & \ell = 3.
\end{cases}
$$

За $k = 4\nu + \ell$, $\ell = 0, 1, 2, 3$, претходно се може приказати да је

$$
\beta_k^{2,s} = \begin{cases}
\dfrac{k}{4(k+2s)}, & k = 4\nu, \\
\dfrac{k+4s-1}{4(k+2s-1)}, & k = 4\nu+1, \\
\dfrac{k+4s}{4(k+2s)}, & k = 4\nu+2, \\
\dfrac{k-1}{4(k+2s-1)}, & k = 4\nu+3.
\end{cases}
\tag{3.1.18}
$$

Сада ћемо показати да је релација (3.1.15) за рекурентне коефицијенте у сагласности са (3.1.18). Како је $\gamma + k\delta = 2s + k - 1 + \mathrm{i}(2s+k)$ и

$$v_k = \mathrm{i}^k\big[(\gamma + k\delta) + (-1)^k\overline{(\gamma+k\delta)}\big] = \begin{cases} 2(2s+k-1), & k = 4\nu, \\ -2(2s+k), & k = 4\nu+1, \\ -2(2s+k-1), & k = 4\nu+2, \\ 2(2s+k), & k = 4\nu+3, \end{cases}$$

(3.1.15) се своди на

$$\beta_k^{2,s} = \frac{2(k+s)(2s-1) + k(k+1) - sv_k}{4(k+2s)(k+2s-1)},$$

тј. (3.1.18). □

Напомена 3.1.3. Случај када је s природан број, али $n \in \mathbb{N}$ је решен у [12].

Напомена 3.1.4. Наводимо првих девет ортогоналних полинома $p_k^{2,s}$, $k = 0, 1, \ldots, 8$:

$$\begin{aligned}
p_0^{2,s}(x) &= 1,\ p_1^{2,s}(x) = x^2 - \frac{1}{2},\ p_3^{2,s}(x) = x^3 - \frac{(4s+3)x}{4(s+1)}, \\
p_4^{2,s}(x) &= x^4 - x^2 + \frac{1}{8(s+1)},\ p_5^{2,s} = x^5 - \frac{(2s+5)x^3}{2(s+2)} + \frac{5x}{8(s+2)}, \\
p_6^{2,s}(x) &= x^6 - \frac{3x^4}{2} + \frac{(4s+9)x^2}{8(s+2)} - \frac{1}{16(s+2)}, \\
p_7^{2,s}(x) &= x^7 - \frac{(8s+21)x^5}{4(s+3)} + \frac{(8s+21)x^3}{8(s+3)} - \frac{3(4s+7)x}{32(s+2)(s+3)}, \\
p_8^{2,s}(x) &= x^8 - 2x^6 + \frac{(4s+15)x^4}{4(s+3)} - \frac{3x^2}{4(s+3)} + \frac{3}{64(s+2)(s+3)}.
\end{aligned}$$

Очигледно, за $s = 0$ ови полиноми се своде на моничне Чебишевљеве полиноме прве врсте $\widehat{T}_k(x)$.

3.1.3 Диференцно-диференцијалне особине ортогоналних полинома

У овом делу извешћемо диференцијалну једнакост за израз $-(1-x^2)\widehat{T}_2(x)(p_k^{2,s}(x))'$, помоћу два ортогонална полинома $p_k^{2,s}(x)$ и $p_{k-1}^{2,s}(x)$, као и линеарну диференцијалну једначину другог реда за ортогоналне полиноме $p_k^{2,s}(x)$. Одговарајућа тежинска функција

$$\omega^{2,s}(x) = \frac{|\widehat{T}_2(x)|^{2s}}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{3.1.19}$$

је семикласична (видети [25]).

Теорема 3.1.3. *За сваки полином $p_k^{2,s}$, постоје два полинома $P_k^{2,s}$ и $Q_k^{2,s}$ степена 3 и 2, респективно, тако да важи*

$$-(1-x^2)\widehat{T}_2(x)(p_k^{2,s}(x))' = P_k^{2,s}(x)p_k^{2,s}(x) + Q_k^{2,s}(x)p_{k-1}^{2,s}(x). \tag{3.1.20}$$

Доказ. Нека је $\phi(x) = 1 - x^2$. Тада, имамо

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\frac{\phi(x)\widehat{T}_2(x)|\widehat{T}_2(x)|^{2s}p_k^{2,s}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right\} &= \frac{|\widehat{T}_2(x)|^{2s}}{\sqrt{1-x^2}}\Big\{-x\widehat{T}_2(x)(x)p_k^{2,s}(x)\\ &\quad +\phi(x)\Big[(2s+1)\widehat{T}_2'(x)p_k^{2,s}(x)+\widehat{T}_2(x)(x)(p_k^{2,s}(x))'\Big]\Big\}\end{aligned}$$

или

$$\big(\phi(x)\widehat{T}_2(x)p_k^{2,s}(x)w^{2,s}(x)\big)' = w^{2,s}(x)R_{k,2}(x),$$

при чему је $\omega^{2,s}(x)$ дато са (3.1.19) и $R_{k,2}(x)$ је полином степена $k+3$ дефинисан са

$$R_{k,2}(x) = \big[-x\widehat{T}_2(x) + \phi(x)(2s+1)\widehat{T}_2'(x)\big]p_k^{2,s}(x) + \phi(x)\widehat{T}_2(x)[p_k^{2,s}(x)]'. \tag{3.1.21}$$

Користећи парцијалну интеграцију и ортогоналност полинома $p_k^{2,s}(x)$ у односу на тежинску функцију (3.1.19), добијамо

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\big(\phi(x)\widehat{T}_2(x)p_k^{2,s}(x)w^{2,s}(x)\big)'p_j^{2,s}(x)\,\mathrm{d}x &= \phi(x)\widehat{T}_2(x)p_k^{2,s}(x)w^{2,s}(x)p_j^{2,s}(x)\Big|_{-1}^{1}\\ &\quad -\int_{-1}^{1}\phi(x)\widehat{T}_2(x)p_k^{2,s}(x)w^{2,s}(x)(p_j^{2,s}(x))'\,\mathrm{d}x = 0\end{aligned}$$

за $k > j+3$. Са друге стране, имамо

$$\int_{-1}^{1}\Big(\phi(x)\widehat{T}_2(x)p_k^{2,s}(x)\omega^{2,s}(x)\Big)'p_j^{2,s}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}R_{k,2}(x)p_j^{2,s}(x)\omega^{2,s}(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

за $j > k+3$. На основу претходне две једнакости, закључујемо да се $R_{k,2}(x)$ може представити као линеарна комбинација ортогоналних полинома $p_j^{2,s}(x)$ за $0 \leqslant k-3 \leqslant j \leqslant k+3$, тј.

$$R_{k,2}(x) = \sum_{j=\max\{k-3,0\}}^{k+3}\alpha_j p_j^{2,s}(x). \tag{3.1.22}$$

Ова врста релација као карактеристика семикласичних полинома је разматрана у радовима [35] и [36].

Користећи трочлану рекурентну релацију (3.1.13) можемо изразити полиноме $p_j^{2,s}(x)$, за $j = k+1, k+2, k+3$, као и за $j = k-2$ и $j = k-3$, помоћу полинома $p_k^{2,s}(x)$ и $p_{k-1}^{2,s}(x)$. Дакле, имамо

$$\begin{aligned}p_{k+1}^{2,s}(x) &= xp_k^{2,s}(x) - \beta_k^{2,s}p_{k-1}^{2,s}(x),\\ p_{k+2}^{2,s}(x) &= (x^2-\beta_{k+1}^{2,s})p_k^{2,s}(x) - \beta_k^{2,s}xp_{k-1}^{2,s}(x),\\ p_{k+3}^{2,s}(x) &= x(x^2-\beta_{k+1}^{2,s}-\beta_{k+2}^{2,s})p_k^{2,s}(x) - \beta_k^{2,s}(x^2-\beta_{k+2}^{2,s})p_{k-1}^{2,s}(x),\end{aligned}$$

као и

$$\begin{aligned}p_{k-2}^{2,s}(x) &= -\frac{1}{\beta_{k-1}^{2,s}}\big[p_k^{2,s}(x) - xp_{k-1}^{2,s}(x)\big],\\ p_{k-3}^{2,s}(x) &= -\frac{1}{\beta_{k-1}^{2,s}\beta_{k-2}^{2,s}}\big[xp_k^{2,s}(x) - \big(x^2-\beta_{k-1}^{2,s}\big)p_{k-1}^{2,s}(x)\big].\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

Сада, сменом претходних израза у (3.1.22) добијамо

$$R_{k,2}(x) = r_k^{2,s}(x)p_k^{2,s}(x) + s_k^{2,s}(x)p_{k-1}^{2,s}(x), \tag{3.1.24}$$

где су $r_k^{2,s}(x)$ и $s_k^{2,s}(x)$ полиноми трећег и другог степена, респективно.

Коначно, из (3.1.21) и (3.1.24) добијамо (3.1.20), где је

$$P_k^{2,s}(x) = (2s+1)\phi(x)\widehat{T}_2'(x) - x\widehat{T}_2(x) - r_k^{2,s}(x), \quad Q_k^{2,s}(x) = -s_k^{2,s}(x).$$

Као што видимо $\deg(P_k^{2,s}(x)) = 3$ и $\deg(Q_k^{2,s}(x)) = 2$. □

Напомена 3.1.5. Како је тежинска функција (3.1.19) на $(-1,1)$ парна, (монични) ортогонални полиноми $p_k^{2,s}(x)$ имају особину $p_k^{2,s}(-x) = (-1)^k p_k^{2,s}(x)$ за све $k \in \mathbb{N}_0$ ([38, стр. 102]). Са друге стране, у складу са (3.1.20), можемо закључити да водећи коефицијент полинома $P_k^{2,s}(x)$ јесте k, као и да полиноми $P_k^{2,s}(x)$ и $Q_k^{2,s}(x)$ имају следеће облике

$$P_k^{2,s}(x) = kx^3 + a_k x \quad \text{и} \quad Q_k^{2,s}(x) = b_k x^2 + c_k, \tag{3.1.25}$$

где су a_k, b_k, c_k константе које зависе од k и s.

За $k = 1$ и $k = 2$, полиноми (3.1.25) нису јединствени. Заправо, једнакост (3.1.20), тј.

$$\Big(x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\Big)(p_k^{2,s}(x))' = (kx^3 + a_k x)p_k^{2,s} + (b_k x^2 + c_k)p_{k-1}^{2,s}(x),$$

за $k = 1$ и $k = 2$ се редукује на

$$x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} = x^4 + (a_1 + b_1)x^2 + c_1$$

и

$$2x^5 - 3x^3 + x = 2x^5 + (a_2 - 1 + b_2)x^3 + (c_2 - \frac{1}{2}a_2)x,$$

респективно, одакле добијамо $a_1 = \alpha, b_1 = -3/2 - \alpha, c_1 = 1/2$ и $a_2 = \alpha$, $b_2 = -2 - \alpha, c_2 = 1 + \alpha/2$, где је α слободан параметар.

Међутим, за $k \geqslant 3$ ови полиноми су јединствени. Показаћемо јединственост за $k = 3$. Користећи ортогоналне полиноме дате у напомени 3.1.4, за $k = 3$ једнакост (3.1.20) се своди на

$$\begin{aligned}\Big(x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\Big)\Big(3x^2 - \frac{4s+3}{4(s+1)}\Big) \quad &= \quad (3x^3 + a_3 x)\Big(x^3 - \frac{(4s+3)x}{4(s+1)}\Big) \\ &\quad +(b_3 x^3 + c_3)\Big(x^2 - \frac{1}{2}\Big),\end{aligned}$$

одакле добијамо јединствена решења

$$a_3 = -\frac{3}{2}, \quad b_3 = -\frac{3+2s}{2(1+s)}, \quad c_3 = \frac{3+4s}{4(1+s)}. \tag{3.1.26}$$

Пре него одредимо експлицитне изразе за полиноме дате са (3.1.25) потребан је следећи помоћни резултат.

Лема 3.1.4. *Нека је*

$$F_k(x) = (d_k x^2 + e_k) p_k^{2,s}(x) + (f_k x^3 + g_k x) p_{k-1}^{2,s}(x),$$

где су d_k, e_k, f_k, g_k константе и $p_{k-1}^{2,s}(x)$ и $p_k^{2,s}(x)$ су два узастопна ортогонална полинома. Тада за $k \geqslant 4$ важи следећа еквивалентност

$$F_k(x) \equiv 0 \iff d_k = e_k = f_k = g_k = 0.$$

Доказ. Тврђење се може показати користећи линеарну независност полинома $p_j^{2,s}(x)$. Како је $x p_{k-1}^{2,s}(x) = p_k^{2,s}(x) + \beta_{k-1}^{2,s} p_{k-2}^{2,s}(x)$, имамо

$$\begin{aligned} F_k(x) &= (d_k x^2 + e_k) p_k^{2,s}(x) + (f_k x^2 + g_k)(x p_{k-1}^{2,s}(x)) \\ &= [(d_k + f_k) x^2 + e_k + g_k] p_k^{2,s}(x) + \beta_{k-1}^{2,s} (f_k x^2 + g_k) p_{k-2}^{2,s}(x). \end{aligned}$$

Даље, претпоставимо да је $k \geqslant 4$. Тада имамо

$$\begin{aligned} x^2 p_k^{2,s}(x) &= x(p_{k+1}^{2,s}(x) + \beta_{k-1}^{2,s} p_{k-2}^{2,s}(x)) \\ &= p_{k+2}^{2,s}(x) + \beta_{k+1}^{2,s} p_k^{2,s}(x) + \beta_k^{2,s}(p_k^{2,s}(x) + \beta_{k-1}^{2,s} p_{k-2}^{2,s}(x)) \end{aligned}$$

и

$$x^2 p_{k-2}^{2,s}(x) = p_k^{2,s}(x) + (\beta_{k-1}^{2,s} + \beta_{k-2}^{2,s}) p_{k-2}^{2,s}(x) + \beta_{k-2}^{2,s} \beta_{k-3}^{2,s} p_{k-4}^{2,s}(x),$$

тако да се $F_k(x)$ може изразити као линеарна комбинација полинома $p_j^{2,s}(x)$ за $j = k-4, k-2, k, k+2$, тј.

$$\begin{aligned} F_k(x) = \; & \beta_{k-1}^{2,s} \beta_{k-2}^{2,s} \beta_{k-3}^{2,s} f_k p_{k-4}^{2,s}(x) \\ & + \beta_{k-1}^{2,s} [(\beta_{k-1}^{2,s} + \beta_{k-2}^{2,s}) f_k + g_k + \beta_k^{2,s}(d_k + f_k)] p_{k-2}^{2,s} \\ & + [e_k + g_k + \beta_{k-1}^{2,s} f_k + (d_k + f_k)(\beta_{k+1}^{2,s} + \beta_k^{2,s})] p_k^{2,s} \\ & + (d_k + f_k) p_{k+2}^{2,s}(x). \end{aligned}$$

Због линеарне независности ортогоналних полинома закључујемо да $F_k(x) = 0$, ако и само ако

$$f_k = 0, \quad (\beta_{k-1}^{2,s} + \beta_{k-2}^{2,s}) f_k + g_k + \beta_k^{2,s}(d_k + f_k) = 0,$$

$$e_k + g_k + \beta_{k-1}^{2,s} f_k + (d_k + f_k)(\beta_{k+1}^{2,s} + \beta_k^{2,s}) = 0, (f_k + d_k) = 0,$$

одакле добијамо $f_k = 0, d_k = 0, g_k = 0, e_k = 0$. □

Теорема 3.1.4. *Коефицијенти a_k, b_k, c_k јединствених полинома $P_k^{2,s}(x)$ и $Q_k^{2,s}$ у*

(3.1.25) *су дати са*

$$a_k = \begin{cases} -\dfrac{k}{2}, & k=4\nu \quad \textit{или} \quad k=4\nu+3,\\ -\dfrac{k}{2}+2s, & k=4\nu+1 \quad \textit{или} \quad k=4\nu+2,\end{cases}$$

$$b_k = -2(k+2s)\beta_k^{2,s} = \begin{cases} -\dfrac{k}{2}, & k=4\nu,\\ -\dfrac{(k+2s)(k+4s-1)}{2(k+2s-1)}, & k=4\nu+1,\\ -\dfrac{k}{2}-2s, & k=4\nu+2,\\ -\dfrac{(k-1)(k+2s)}{2(k+2s-1)}, & k=4\nu+3,\end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{k}{4}, & k=4\nu,\\ \dfrac{k(k+4s-1)}{4(k+2s-1)}, & k=4\nu+1,\\ \dfrac{k}{4}+s, & k=4\nu+2,\\ \dfrac{(k-1)(k+4s)}{4(k+2s-1)}, & k=4\nu+3,\end{cases}$$

за $k \geqslant 4$.

Доказ. Полазећи од трочлане рекурентне релације

$$p_{k+1}^{2,s}(x) = xp_k^{2,s}(x) - \beta_k^{2,s}p_{k-1}^{2,s}(x), \tag{3.1.27}$$

имамо

$$(p_{k+1}^{2,s}(x))' = p_k^{2,s}(x) + x(p_k^{2,s}(x))' - \beta_k^{2,s}(p_{k-1}^{2,s}(x))'.$$

Сада, множећи претходну једнакост са $-(1-x^2)\widehat{T}_2(x)$ добијамо

$$H_{k+1}(x) = -(1-x^2)\widehat{T}_2(x)p_k^{2,s}(x) + xH_k(x) - \beta_k^{2,s}H_{k-1}(x), \tag{3.1.28}$$

где према (3.1.20), имамо

$$\begin{aligned} H_j(x) &= -(1-x^2)\widehat{T}_2(x)(p_j^{2,s}(x))' \\ &= P_j^{2,s}(x)p_j^{2,s}(x) + Q_j^{2,s}(x)p_{j-1}^{2,s}(x). \end{aligned}$$

Сада, из (3.1.28) следи

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{2,s}(x)p_{k+1}^{2,s}(x) + Q_{k+1}^{2,s}(x)p_k^{2,s}(x) &= -(1-x^2)\widehat{T}_2(x)p_k^{2,s}(x) \\ &\quad +xP_k^{2,s}(x)p_k^{2,s}(x) + xQ_k^{2,s}(x)p_{k-1}^{2,s}(x) \\ &\quad -\beta_k^{2,s}(P_{k-1}^{2,s}(x)p_{k-1}^{2,s}(x) + Q_{k-1}^{2,s}(x)p_{k-2}^{2,s}(x)). \end{aligned}$$

Сменом $p_{k+1}^{2,s}(x)$ и $p_{k-2}^{2,s}(x)$ датих у (3.1.27) и (3.1.23), респективно, користећи претходни израз добијамо

$$A_k(x)p_k^{2,s}(x) + B_k(x)p_{k-1}^{2,s}(x) = 0, \tag{3.1.29}$$

где је

$$A_k(x) = x\big(P^{2,s}_{k+1}(x) - P^{2,s}_k(x)\big) + Q^{2,s}_{k+1}(x) - \frac{\beta^{2,s}_k}{\beta^{2,s}_{k-1}} Q_{k-1}(x)^{2,s} + (1-x^2)\widehat{T}_2(x)$$

и

$$B_k(x) = \beta^{2,s}_k\big(P^{2,s}_{k-1}(x) - P^{2,s}_{k+1}(x)\big) - x\Big(Q^{2,s}_k(x) - \frac{\beta^{2,s}_k}{\beta^{2,s}_{k-1}} Q^{2,s}_{k-1}(x)\Big).$$

Користећи (3.1.25) имамо

$$A_k(x) = \Big(a_{k+1} - a_k + b_{k+1} - \frac{\beta^{2,s}_k}{\beta^{2,s}_{k-1}} b_{k-1} + \frac{3}{2}\Big)x^2 + c_{k+1} - \frac{\beta^{2,s}_k}{\beta^{2,s}_{k-1}} c_{k-1} - \frac{1}{2}$$

и

$$B_k(x) = -\beta^{2,s}_k\Big(\frac{b_k}{\beta^{2,s}_k} - \frac{b_{k-1}}{\beta^{2,s}_{k-1}} + 2\Big)x^2 - \beta^{2,s}_k\Big(a_{k+1} - a_{k-1} + \frac{c_k}{\beta^{2,s}_k} - \frac{c_{k-1}}{\beta^{2,s}_{k-1}}\Big)x.$$

Према леми 3.1.4, једнакост (3.1.29) важи ако и само ако су следеће диференцне једначине задовољене

$$a_{k+1} - a_k + b_{k+1} - \frac{\beta^{2,s}_k}{\beta^{2,s}_{k-1}} b_{k-1} + \frac{3}{2} = 0, \tag{3.1.30}$$

$$c_{k+1} - \frac{\beta^{2,s}_k}{\beta^{2,s}_{k-1}} c_{k-1} - \frac{1}{2} = 0, \tag{3.1.31}$$

$$\frac{b_k}{\beta^{2,s}_k} - \frac{b_{k-1}}{\beta^{2,s}_{k-1}} + 2 = 0, \tag{3.1.32}$$

$$a_{k+1} - a_{k-1} + \frac{c_k}{\beta^{2,s}_k} - \frac{c_{k-1}}{\beta^{2,s}_{k-1}} = 0. \tag{3.1.33}$$

У нашем случају потребна су партикуларна решења ових диференцних једначина која задовољавају (3.1.26) и она се могу одредити користећи рекурентне коефицијенте $\beta^{2,s}_k$ дате са (3.1.15) или (3.1.18).

Најпре, размотримо једнакост (3.1.32), која се може записати у облику $\Delta y_k = -2$, при чему је $y_k = \dfrac{b_k}{\beta^{2,s}_k}$ и Δ је стандардни оператор предње разлике. Лако се види да партикуларно решење, које се своди на $y_3 = \dfrac{b_3}{\beta^{2,s}_3} = -2(3+2s)$ за $k=3$, је дато са $y_k = -2(k+2s)$. Дакле, $b_k = -2(k+2s)\beta^{2,s}_k$. Користећи (3.1.18), добијамо тражени резултат.

Сменом овог решења у једначини (3.1.30) добијамо

$$\begin{aligned}\Delta a_k &= a_{k+1} - a_k = -\frac{3}{2} + 2(k+1+2s)\beta^{2,s}_{k+1} - 2(k-1+2s)\beta^{2,s}_k \\ &= -\frac{1}{2} + s\big(1 + (-1)^k\big)\mathrm{i}^k.\end{aligned}$$

Одговарајуће партикуларно решење је дато са

$$\begin{aligned}a_k &= a_3 + \sum_{\nu=3}^{k-1}\Big(-\frac{1}{2} + s\big(1+(-1)^\nu\big)\mathrm{i}^\nu\Big) \\ &= -\frac{k}{2} + s\frac{1-\mathrm{i}}{2}(1 + \mathrm{i} - (1+(-1)^k)\mathrm{i}^k),\end{aligned} \tag{3.1.34}$$

тј. $a_k = -k/2$, за $k = 4\nu$ или $k = 4\nu+3$ и $a_k = -k/2 + 2s$ у осталим случајевима.

Најзад, једначина (3.1.33) се своди на

$$\Delta\left\{\frac{c_k}{\beta_k^{2,s}} + a_k + a_{k+1}\right\} = 0,$$

одакле добијамо партикуларно решење

$$\frac{c_k}{\beta_k^{2,s}} + a_k + a_{k+1} = \text{const} = \frac{c_3}{\beta_3^{2,s}} + a_3 + a_4,$$

тј. $c_k = \beta_k^{2,s}\big\{k + \big[2 - \mathrm{i}s\big((-1)^k - 1\big)\big]\mathrm{i}^k\big\}$, или еквивалентно у форми као што је у тврђењу теореме. Ово решење такође задовољава једначину (3.1.31). □

Користећи теорему 3.1.4 можемо извести следећи резултат.

Теорема 3.1.5. *Полиноми $P_k^{2,s}(x)$ и $Q_k^{2,s}(x)$ из једнакости* (3.1.20) *се могу изразити помоћу моничног полинома $\widehat{T}_2(x)$ на следећи начин:*

$$P_k^{2,s}(x) = \begin{cases} kx\widehat{T}_2(x), & k = 4\nu \quad \textit{или} \quad k = 4\nu+3, \\ x(k\widehat{T}_2(x) + 2s), & k = 4\nu+1 \quad \textit{или} \quad k = 4\nu+2, \end{cases} \tag{3.1.35}$$

и

$$Q_k^{2,s}(x) = \begin{cases} -\dfrac{k}{2}\widehat{T}_2(x), & k = 4\nu, \\ -\dfrac{k+4s-1}{2(k+2s-1)}\Big((k+2s)\widehat{T}_2(x) + s\Big), & k = 4\nu+1, \\ -\dfrac{k+4s}{2}\widehat{T}_2(x), & k = 4\nu+2, \\ -\dfrac{k-1}{2(k+2s-1)}\Big((k+2s)\widehat{T}_2(x) - s\Big), & k = 4\nu+3, \end{cases} \tag{3.1.36}$$

респективно.

Теорема 3.1.6. *Полином $y = p_k^{2,s}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, задовољава диференцијалну једначину*

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x) = 0, \tag{3.1.37}$$

где је

$$\begin{aligned} A_k(x) &= \frac{\phi_2(x)^2}{Q_k^{2,s}(x)} = \frac{(1-x^2)^2\widehat{T}_2(x)^2}{Q_k^{2,s}(x)}, \\ B_k(x) &= \phi_2(x)\left[\frac{\phi_2(x)}{Q_k^{2,s}(x)}\right]' + \frac{\phi_2(x)}{Q_k^{2,s}(x)}\left[P_k^{2,s}(x) + P_{k-1}^{2,s}(x) + x\frac{Q_{k-1}^{2,s}(x)}{\beta_{k-1}^{2,s}}\right], \\ C_k(x) &= \phi_2(x)\left[\frac{P_k^{2,s}(x)}{Q_k^{2,s}(x)}\right]' + \frac{P_k^{2,s}(x)}{Q_k^{2,s}(x)}\left[P_{k-1}^{2,s}(x) + x\frac{Q_{k-1}^{2,s}(x)}{\beta_{k-1}^{2,s}}\right] + \frac{Q_{k-1}^{2,s}(x)}{\beta_{k-1}^{2,s}}, \end{aligned}$$

и $\phi_2(x) = (1-x^2)\widehat{T}_2(x)$.

Доказ. Кренимо од једначине (3.1.20), за $k := k-1$, тј.,

$$-\phi_2(x)(p_{k-1}^{2,s}(x))' = P_{k-1}^{2,s}(x)p_{k-1}^{2,s}(x) + Q_{k-1}^{2,s}(x)p_{k-2}^{2,s}(x),$$

где је $\phi_2(x) = (1-x^2)\widehat{T}_2(x)$. Користећи (3.1.23) добијамо

$$-\phi_2(x)(p_{k-1}^{2,s}(x))' = -\frac{Q_{k-1}^{2,s}(x)}{\beta_{k-1}^{2,s}}p_k^{2,s}(x) + \left(P_{k-1}^{2,s}(x) + x\frac{Q_{k-1}^{2,s}(x)}{\beta_{k-1}^{2,s}}\right)p_{k-1}^{2,s}(x).$$

Поново из (3.1.20) имамо

$$p_{k-1}^{2,s}(x) = -\frac{P_k^{2,s}(x)}{Q_k^{2,s}(x)}p_k^{2,s}(x) - \frac{\phi_2(x)}{Q_k^{2,s}(x)}(p_k^{2,s}(x))',$$

тако да се претходна једнакост своди на

$$\begin{aligned}\phi_2(x)\left(\frac{P_k^{2,s}(x)}{Q_k^{2,s}(x)}p_k^{2,s}(x) + \frac{\phi_2(x)}{Q_k^{2,s}(x)}(p_k^{2,s}(x))'\right)' \quad &= \quad -\frac{Q_{k-1}^{2,s}(x)}{\beta_{k-1}^{2,s}}p_k^{2,s}(x) - \left(P_{k-1}^{2,s}(x) + x\frac{Q_{k-1}^{2,s}(x)}{\beta_{k-1}^{2,s}}\right) \\ &\quad \times\left(\frac{P_k^{2,s}(x)}{Q_k^{2,s}(x)}p_k^{2,s}(x) + \frac{\phi_2(x)}{Q_k^{2,s}(x)}(p_k^{2,s}(x))'\right)\end{aligned}$$

тј. (3.1.37), са $y = p_k^{2,s}(x)$, где за коефицијенте $A_k(x)$, $B_k(x)$, $C_k(x)$, након сређивања, добијамо изразе из тврђења теореме. □

Користећи изразе за полиноме $P_k^{2,s}(x)$ и $Q_k^{2,s}(x)$ који су дати у теореми 3.1.5, добијамо следеће резултате за $k = 4\nu + \ell$, када је $\ell = 0, 1, 2, 3$.

Последица 3.1.1. *За $k = 4\nu$ полином $y = p_k^{2,s}(x)$ задовољава диференцијалну једначину*

$$(1-x^2)\widehat{T}_2(x)y'' + x\big[2s - (1+4s)\widehat{T}_2(x)\big]y' + k(k+4s)\widehat{T}_2(x)y = 0.$$

Последица 3.1.2. *За $k = 4\nu + 1$ полином $y = p_k^{2,s}(x)$ задовољава диференцијалну једначину*

$$\begin{aligned}&(1-x^2)\big[s + (k+2s)\widehat{T}_2(x)\big]\widehat{T}_2(x)y'' \\ &+x\big[s(1+2s) - s(3+4s-2(k+2s))\widehat{T}_2(x) - (1+4s)(k+2s)\widehat{T}_2(x)^2\big]y' \\ &-\big[s(k+2s) + s(4s-k(k+4s))\widehat{T}_2(x) - k(k+2s)(k+4s)\widehat{T}_2(x)^2\big]y = 0.\end{aligned}$$

Последица 3.1.3. *За $k = 4\nu + 2$ полином $y = p_k^{2,s}(x)$ задовољава диференцијалну једначину*

$$(1-x^2)\widehat{T}_2(x)^2y'' + x\big[2s - (1+4s)\widehat{T}_2(x)\big]\widehat{T}_2(x)y' - \big[2s - k(k+4s)\widehat{T}_2(x)^2\big]y = 0.$$

Последица 3.1.4. *За $k = 4\nu + 3$ полином $y = p_k^{2,s}(x)$ задовољава диференцијалну једначину*

$$\begin{aligned}&(1-x^2)\big[s - (k+2s)\widehat{T}_2(x)\big]\widehat{T}_2(x)y'' \\ &+x\big[s(1+2s) - s(3+4s+2(k+2s))\widehat{T}_2(x) + (1+4s)(k+2s)\widehat{T}_2(x)^2\big]y' \\ &+\big[s(k+2s) - s(4s-k(k+4s))\widehat{T}_2(x) - k(k+2s)(k+4s)\widehat{T}_2(x)^2\big]y = 0.\end{aligned}$$

Напомена 3.1.6. За $s = 0$, претходне последице, за све $k \in \mathbb{N}$, дају исту диференцијалну једначину, $(1-x^2)y'' - xy' + k^2y = 0$, која је позната као Чебишевљева диференцијална једначина (видети [38]). У овом случају $y = p_k^{2,0}(x) = \widehat{T}_k(x)$.

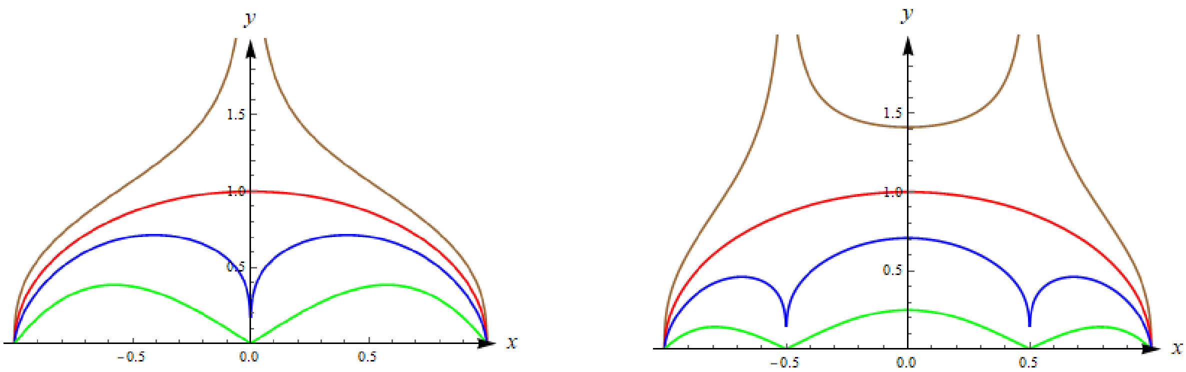
3.2 Полиноми ортогонални у односу на једну модификацију Чебишевљеве мере друге врсте

За фиксни реални број $s > -1/2$, уводимо меру

$$d\sigma^{n,s}(x) = \omega^{n,s}(x)\,dx = |\widehat{U}_n(x)|^{2s}(1-x^2)^{1/2+s}\,dx, \tag{3.2.1}$$

где је $\widehat{U}_n(x)$ моничан Чебишевљев полином друге врсте степена n. Одговарајући низ (моничних) ортогоналних полинома $p_k^{n,s}(x) = p_k^{n,s}(x; d\sigma^{n,s})$, $k \in \mathbb{N}_0$, је јединствен, јер је мера $d\sigma^{n,s}(x)$ позитивна за свако реално $s > -\frac{1}{2}$. Полиноми $p_k^{n,s}(x; d\sigma^{n,s})$ задовољавају трочлану рекурентну релацију (1.2.2), али како је $d\sigma^{n,s}(x)$ симетрична мера на $\mathbb{R}$, важи $\alpha_k = 0$.

Графици тежинских функција $x \mapsto \omega^{1,s}(x)$ и $x \mapsto \omega^{2,s}(x)$ за одређене вредности параметра s, дати су на слици 3.2.



Слика 3.2: Графици тежинских функција $x \mapsto \omega^{1,s}(x)$ (лево) и $x \mapsto w^{2,s}(x)$ (десно) на $(-1, 1)$, за $s = -1/8$ (браон линија), $s = 0$ (црвена линија), $s = 1/8$ (плава линија) и $s = 1/2$ (зелена линија)

3.2.1 Случај $n = 1$

Овај случај се може извести из Лашченовог резултата [32] (видети такође [38, стр. 147]). Дакле, за $n = 1$ и $s > -1/2$, тј. за меру $d\sigma^{1,s}(x) = |x|^{2s}(1-x^2)^{1/2+s}\,dx$, добијамо $\beta_0^{1,s}$ као почетни момент

$$\beta_0^{1,s} = \mu_0^{1,s} = \int_{-1}^{1} |x|^{2s}(1-x^2)^{1/2+s}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s+1}} \cdot \frac{\Gamma\big(s+\frac{1}{2}\big)}{\Gamma(s+1)}.$$

Коришћењем формула за β_{2k} и β_{2k-1} ([38, стр. 147]) за $\alpha = s + \frac{1}{2}$, $\gamma = 2s$, $\beta = -\frac{1}{2}$, добијамо директно

$$\beta_k^{1,s} = \begin{cases} \dfrac{k}{4(k+2s)}, & \text{ако је } k \text{ парно } (\geq 2), \\[2mm] \dfrac{k+4s+1}{4(k+2s+1)}, & \text{ако је } k \text{ непарно } (\geq 1). \end{cases}$$

3.2.2 Случај $n = 2$

Код израчунавања момената за тежинску функцију $x \mapsto \omega^{2,s}(x)$ на $(-1,1)$ и $s > -1/2$, тј.

$$\mu_k^{2,s} = \int_{-1}^{1} x^k |\widehat{U}_2(x)|^{2s}(1-x^2)^{s+1/2}\,\mathrm{d}x, \quad k = 0,1,\ldots, \tag{3.2.2}$$

закључујемо да су моменти за непарно k једнаки нули, док су, због парности тежинске функције, моменти парног реда једнаки

$$\mu_{2k}^{2,s} = \int_{-1}^{1} x^{2k} |\widehat{U}_2(x)|^{2s}(1-x^2)^{s+1/2}\,\mathrm{d}x, \quad k = 0,1,\ldots. \tag{3.2.3}$$

Алтернативно, уместо обичних момената (3.2.2), можемо користити модификоване моменте, за које се добијају нешто једноставније формуле у овом случају. Дакле, овде ћемо користити у конструкцији рекурентних коефицијената метод модификованих момената (видети одељак 1.8) у односу на моничне Чебишевљеве полиноме друге врсте $\widehat{U}_k(x) = (q_k(x))$, који задовољавају рекурентну релацију

$$\widehat{U}_{k+1}(x) = x\widehat{U}_k(x) - \frac{1}{4}\widehat{U}_{k-1}(x), \quad k = 0,1,\ldots,$$

са $\widehat{U}_0(x) = 1, \widehat{U}_1(x) = x$.

Дакле, модификовани моменти су

$$m_k^{2,s} = \int_{-1}^{1} |\widehat{U}_2(x)|^{2s}(1-x^2)^{s+1/2}\widehat{U}_k(x)\,\mathrm{d}x, \quad k = 0,1,\ldots.$$

Очигледно,

$$m_0^{2,s} = \mu_0^{2,s} = 2\int_{0}^{1} |\widehat{U}_2(x)|^{2s}(1-x^2)^{s+1/2}\,\mathrm{d}x.$$

За модификоване моменте непарног реда закључујемо да су једнаки нули $m_{2k+1}^{2,s} = 0$, док за оне парног реда имамо

$$m_{2k}^{2,s} = 2\int_{0}^{1} |\widehat{U}_2(x)|^{2s}(1-x^2)^{s+1/2}\widehat{U}_{2k}(x)\,\mathrm{d}x, \quad k = 0,1,\ldots.$$

Како је $\widehat{U}_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}$ и $\widehat{U}_2(x)^2 = x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{16}$, за $x = \cos\theta$ имамо

$$\begin{aligned}
\widehat{U}_2(\cos\theta)^2 &= \cos^4\theta - \frac{1}{2}\cos^2\theta + \frac{1}{16} \\
&= \frac{1}{8}(\cos 4\theta + 4\cos 2\theta + 3) - \frac{1}{4}(1+\cos 2\theta) + \frac{1}{16} \\
&= \frac{1}{16}(3 + 4\cos 2\theta + 2\cos 4\theta).
\end{aligned}$$

Тада је

$$\begin{aligned}
m_{2k}^{2,s} &= \frac{2}{2^{4s}}\int_0^{\pi/2} (3+4\cos 2\theta + 2\cos 4\theta)^s \sin^{2s+1}\theta\,\widehat{U}_{2k}(\cos\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2^{4s+2k-1}}\int_0^{\pi/2} (3+4\cos 2\theta + 2\cos 4\theta)^s \sin^{2s+1}\theta\sin(2k+1)\theta\,\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}$$

с обзиром да је $\widehat{U}_{2k}(\cos\theta) = \dfrac{\sin(2k+1)\theta}{2^{2k}\sin\theta}$.

За $k=0$ имамо

$$m_0^{2,s} = \frac{1}{2^{4s-1}}\int_0^{\pi/2}(3+4\cos 2\theta+2\cos 4\theta)^s \sin^{2s+2}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Коришћењем симболичких могућности софтвера Mathematica налазимо

$$m_0^{2,s} = \frac{\pi}{2^{4s}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_s}{(1)_s} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{4s+1}}\cdot\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s+1)},\quad s>-\frac{1}{2}.$$

Да бисмо одредили $m_{2k}^{2,s}$ за произвољно k, израчунавања ћемо поделити у три дела и то када је $k=3\nu$, $k=3\nu+1$ и $k=3\nu+2$, где је $\nu\in\mathbb{N}_0$.

Резулат тих израчунавања сумиран је у следећој теореми.

Теорема 3.2.1. *За модификоване моменте парног реда $\mu_{2k}^{2,s}$ за свако $s>-1/2$, важи*

$$m_{2k}^{2,s} = \begin{cases} (-1)^\nu m_0^{2,s}\dfrac{(s-\nu+1)_\nu}{2^{6\nu}(s+1)_\nu}, & k=3\nu,\\ 0, & k=3\nu+1,\\ (-1)^\nu m_0^{2,s}\dfrac{(s-\nu)_{\nu+1}}{2^{6\nu+4}(s+1)_{\nu+1}}, & k=3\nu+2,\end{cases}$$

где је

$$m_0^{2,s} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{4s+1}}\cdot\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s+1)}.$$

Коришћењем методе модификованих момената и команде

aChebyshevAlgorithmModified

у симболичком моду, са модификованим моментима из теореме 3.2.1 добијамо директно резултат дат у следећој теореми.

Теорема 3.2.2. *За било које реално $s>-1/2$, полиноми $p_k^{2,s}(x) = p_k^{2,s}(x;\mathrm{d}\sigma^{2,s})$ $k\in\mathbb{N}_0$, где је $\mathrm{d}\sigma^{2,s}(x) = |\widehat{U}_2(x)|^{2s}(1-x^2)^{\frac{1}{2}+s}\,\mathrm{d}x$, задовољавају трочлану рекурентну релацију*

$$\begin{aligned} p_{k+1}^{2,s}(x) &= xp_k^{2,s}(x)-\beta_k^{2,s}p_{k-1}^{2,s}(x),\quad k\in\mathbb{N}_0,\\ p_0^{2,s}(x) &= 1,\quad p_{-1}^{2,s}(x)=0,\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

где

$$\beta_0^{2,s} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{4s+1}}\cdot\frac{\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s+1)}, \tag{3.2.5}$$

и за $k\in\mathbb{N}$

$$\beta_k^{2,s} = \begin{cases} \dfrac{k}{4(k+3s)}, & \text{ако је } k\equiv 0 \pmod 3,\\ \dfrac{1}{4}, & \text{ако је } k\equiv 1 \pmod 3,\\ \dfrac{k+6s+1}{4(k+3s+1)}, & \text{ако је } k\equiv 2 \pmod 3.\end{cases} \tag{3.2.6}$$

Формални доказ претходног тврђења се може дати слично како је то учињено у поглављу 3.1 за модификовану Чебишевљеву меру прве врсте.

Напомена 3.2.1. Првих девет ортогоналних полинома $p_k^{2,s}(x)$ су:

$$
\begin{aligned}
&p_0^{2,s}(x) = 1, \;\; p_1^{2,s}(x) = x, \;\; p_2^{2,s}(x) = x^2 - \frac{1}{4}, \;\; p_3^{2,s}(x) = x^3 - \frac{(2+3s)x}{4(s+1)},\\
&p_4^{2,s}(x) = x^4 - \frac{3x^2}{4} + \frac{1}{16(s+1)}, \;\; p_5^{2,s}(x) = x^5 - x^3 + \frac{3x}{16},\\
&p_6^{2,s}(x) = x^6 - \frac{(5+3s)x^4}{(4+2s)} + \frac{3(4+2s)x^2}{16(s+2)} - \frac{1}{32(s+2)},\\
&p_7^{2,s}(x) = x^7 - \frac{3x^5}{2} + \frac{(9s+20)x^3}{32+16s} - \frac{x}{8(s+2)},\\
&p_8^{2,s}(x) = x^8 - \frac{7x^6}{4} + \frac{15x^4}{16} - \frac{(20+9s)x^2}{64(s+2)} + \frac{1}{128(s+2)}.
\end{aligned}
$$

Очигледно, за $s = 0$ ови полиноми се редукују на моничне Чебишевљеве полиноме друге врсте $\widehat{U}_k(x)$.

Алтернативни израз у затвореној аналитичкој форми за релацију (3.2.6), тј. коефицијенте $\beta_k^{2,s}$, може се добити у облику

(3.2.7)
$$
\beta_k^{2,s} = \frac{-s\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{3}}\Big((\gamma+3\delta k) - \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{3}}(\overline{\gamma+3\delta k})\Big) + 2\mathrm{i}(s\,\mathrm{Im}(\gamma) + (6s+1)\sqrt{3}k + k^2\sqrt{3})}{4(1+\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{3}})\delta(3s+k)(3s+1+k)},
$$

где су γ и δ комплексни бројеви дати са $\gamma = 9s + (9s+2)\mathrm{i}\sqrt{3}$ и $\delta = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.

3.2.3 Диференцно-диференцијалне особине ортогоналних полинома

У овом делу извешћемо диференцијалну једнакост за израз $-(1-x^2)\widehat{U}_2(x)(p_k^{2,s}(x))'$, помоћу два ортогонална полинома $p_k^{2,s}(x)$ и $p_{k-1}^{2,s}(x)$, као и линеарну диференцијалну једначину другог реда за одговарајуће ортогоналне полиноме $p_k^{2,s}(x)$. Одговарајућа тежинска функција

$$\omega^{2,s}(x) = |\widehat{U}_2(x)|^{2s}(1-x^2)^{1/2+s}$$

је семикласична.

Теорема 3.2.3. *За сваки полином $p_k^{2,s}$, постоје два полинома $P_k^{2,s}$ и $Q_k^{2,s}$ степена 3 и 2, респективно, тако да важи*

$$-(1-x^2)\widehat{U}_2(x)(p_k^{2,s}(x))' = P_k^{2,s}(x)p_k^{2,s}(x) + Q_k^{2,s}(x)p_{k-1}^{2,s}(x), \tag{3.2.8}$$

где су

$$P_k^{2,s}(x) = (2s+1)\phi(x)\widehat{U}_2'(x) - x(3+2s)\widehat{U}_2(x) - r_k^{2,s}(x) \quad \text{и} \quad Q_k^{2,s}(x) = -s_k^{2,s}(x) \tag{3.2.9}$$

и $r_k^{2,s}(x)$ и $s_k^{2,s}(x)$ су полиноми трећег и другог степена, респективно.

Доказ претходне теореме је аналоган доказу теореме 3.1.3.

Напомена 3.2.2. Тежинска функција $\omega^{2,s}(x) = |\widehat{U}_2(x)|^{2s}(1-x^2)^{1/2+s}$ је парна на $(-1,1)$, па према (3.2.8) можемо закључити да водећи коефицијент полинома $P_k^{2,s}(x)$ је k и полиноми $P_k^{2,s}(x)$ и $Q_k^{2,s}(x)$ имају следеће облике

$$P_k^{2,s}(x) = kx^3 + a_k x \quad \text{и} \quad Q_k^{2,s}(x) = b_k x^2 + c_k, \tag{3.2.10}$$

где су a_k, b_k, c_k константе које зависе од k и s.

За $k=1$ и $k=2$, полиноми (3.2.10) нису јединствени. Једнакост (3.2.8), тј.

$$\left(x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}\right)(p_k^{2,s}(x))' = (kx^3 + a_k x)p_k^{2,s}(x) + (b_k x^2 + c_k)p_{k-1}^{2,s}(x),$$

за $k=1$ и $k=2$ се редукује на

$$x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4} = x^4 + (a_1+b_1)x^2 + c_1$$

и

$$2x^5 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{1}{2}x = 2x^5 + (a_2 + b_2 - \frac{1}{2})x^3 + \left(c_2 - a_2\frac{1}{4}\right)x,$$

респективно, одакле добијамо $a_1 = \alpha$, $b_1 = -5/4 - \alpha$, $c_1 = 1/4$ и $a_2 = \alpha$, $b_2 = -2-\alpha$, $c_2 = 1/2 + \alpha/4$, где је α слободан параметар.

За $k \geq 3$ ови полиноми су јединствени. Показаћемо јединственост полинома за $k=3$. Користећи ортогоналне полиноме дате у напомени 3.2.1, за $k=3$ једнакост (3.2.8) се своди на

$$\begin{aligned}\left(x^4 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{4}\right)\left(3x^2 - \frac{3s+2}{4(s+1)}\right) \quad &= \quad (3x^3 + a_3 x)\left(x^3 - \frac{(3s+2)x}{4(s+1)}\right) \\ &\quad +(b_3x^2 + c_3)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right),\end{aligned}$$

одакле добијамо јединствена решења

$$a_3 = -\frac{3}{4}, \quad b_3 = -\frac{3s+4}{2(s+1)}, \quad c_3 = \frac{3s+2}{4(s+1)}. \tag{3.2.11}$$

Теорема 3.2.4. *Коефицијенти a_k, b_k, c_k јединствених полинома $P_k^{2,s}(x)$ и $Q_k^{2,s}(x)$ у (3.2.10) су дати са*

$$a_k \quad = \quad \begin{cases} -\dfrac{k}{4}, & k = 3\nu, \\ -\dfrac{k-6s}{4}, & k = 3\nu+1, \\ -\dfrac{k}{4} + 3s, & k = 3\nu+2, \end{cases}$$

$$b_k = \begin{cases} -\dfrac{k(k+1+3s)}{2(k+3s)}, & k = 3\nu, \\ -\dfrac{k+3s+1}{2}, & k = 3\nu+1, \\ -\dfrac{k+6s+1}{2}, & k = 3\nu+2, \end{cases}$$

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{k(k+6s+1)}{8(k+3s)}, & k = 3\nu, \\ \dfrac{k+1}{8}, & k = 3\nu+1, \\ \dfrac{k+6s+1}{8}, & k = 3\nu+2, \end{cases}$$

за $k \geq 4$.

Доказ претходне теореме аналоган је доказу теореме 3.1.4. Као последицу теореме 3.2.4 имамо следећи резултат.

Теорема 3.2.5. *Полиноми* $P_k^{2,s}(x)$ *и* $Q_k^{2,s}(x)$ *из једнакости* (3.2.8) *се могу изразити помоћу полинома* $\widehat{U}_2(x)$ *на следећи начин*

$$P_k^{2,s}(x) = \begin{cases} kx\widehat{U}_2(x), & k = 3\nu, \\ x(k\widehat{U}_2(x) + 3s/2), & k = 3\nu+1, \\ x(k\widehat{U}_2(x) + 3s), & k = 3\nu+2, \end{cases} \tag{3.2.12}$$

и

$$Q_k^{2,s}(x) = \begin{cases} -\dfrac{k}{2(k+3s)}\Big((k+3s+1)\widehat{U}_2(x) - \dfrac{3s}{4}\Big), & k = 3\nu, \\ -\dfrac{1}{2}\Big((3s+k+1)\widehat{U}_2(x) + \dfrac{3s}{4}\Big), & k = 3\nu+1, \\ -\dfrac{6s+k+1}{2}\widehat{U}_2(x), & k = 3\nu+2. \end{cases} \tag{3.2.13}$$

Теорема 3.2.6. *Полином* $y = p_k^{2,s}(x)$, $k \in \mathbb{N}$, *задовољава диференцијалну једначину*

$$A_k(x)y'' + B_k(x)y' + C_k(x)y = 0, \tag{3.2.14}$$

где је

$$\begin{aligned} A_k(x) &= \frac{\phi_2(x)^2}{Q_k^{2,s}(x)}, \\ B_k(x) &= \phi_2(x)\left[\frac{\phi_2(x)}{Q_k^{2,s}(x)}\right]' + \frac{\phi_2(x)}{Q_k^{2,s}(x)}\left[P_k^{2,s}(x) + P_{k-1}^{2,s}(x) + x\frac{Q_{k-1}^{2,s}(x)}{\beta_{k-1}^{2,s}}\right], \\ C_k(x) &= \phi_2(x)\left[\frac{P_k^{2,s}(x)}{Q_k^{2,s}(x)}\right]' + \frac{P_k^{2,s}(x)}{Q_k^{2,s}(x)}\left[P_{k-1}^{2,s}(x) + x\frac{Q_{k-1}^{2,s}(x)}{\beta_{k-1}^{2,s}}\right] + \frac{Q_{k-1}^{2,s}(x)}{\beta_{k-1}^{2,s}}, \end{aligned}$$

и $\phi_2(x) = (1-x^2)\widehat{U}_2(x)$.

Доказ теореме 3.2.6 је аналоган доказу теореме 3.1.6.

Користећи изразе за полиноме $P_k^{2,s}(x)$ и $Q_k^{2,s}(x)$ који су дати у теореми 3.2.5, добијамо следеће резултате за $k = 3\nu + \ell$, када је $\ell = 0, 1, 2$.

Последица 3.2.1. *За $k = 3\nu$ полином $y = p_{3\nu}^{2,s}(x)$ задовољава диференцијалну једначину*

$$
\begin{aligned}
&(1-x^2)\widehat{U}_2(x)y'' - \left(3x\left(1+2s-\frac{2(1+k+2s)}{3s-4(1+k+3s)\hat{U}_2(x)}\right)\widehat{U}_2(x) - \left(\frac{3}{2}+3s\right)x\right)y' \\
+ &\left(k\left(2+k+6s+\frac{2(1+k+6s)}{3s-4(1+k+3s)\hat{U}_2(x)}\right)\widehat{U}_2(x)+\frac{k}{2}\right)y = 0.
\end{aligned}
$$

Последица 3.2.2. *За $k = 3\nu + 1$ полином $y = p_{3\nu+1}^{2,s}(x)$ задовољава диференцијалну једначину*

$$
\begin{aligned}
&(1-x^2)\widehat{U}_2(x)y'' \\
- &\left(3x\left(2s+1+\frac{2(4s+k+1)}{3s+4(k+3s+1)\widehat{U}_2(x)}\right)\widehat{U}_2(x) - \left(3s+\frac{3}{2}\right)x\right)y' \\
+ &\left(\left(k(k+2+6s)+\frac{2(k+1)(k+2+6s)}{3s+4(k+3s+1)\widehat{U}_2(x)}\right)\widehat{U}_2(x) - \left(\frac{k}{2}+3s+1\right)\right)y = 0.
\end{aligned}
$$

Последица 3.2.3. *За $k = 3\nu + 2$ полином $y = p_{3\nu+2}^{2,s}(x)$ задовољава диференцијалну једначину*

$$
\begin{aligned}
&(1-x^2)\widehat{U}_2(x)y'' + \left(-3(2s+1)x\widehat{U}_2(x)+3sx\right)y' \\
+ &\left(k(k+2(3s+1)) - \frac{3s(4x^2+1)}{4\widehat{U}_2^2(x)}\right)\widehat{U}_2(x)y = 0.
\end{aligned}
$$

Напомена 3.2.3. За $s = 0$, претходне последице, за све $k \in \mathbb{N}$, се своде на исту диференцијалну једначину, $(1-x^2)y''-3xy'+k(k+2)y = 0$, која је позната као Чебишевљева диференцијална једначина [38, стр. 10]. У оваквом случају $y = p_k^{2,0}(x) = \widehat{U}_k(x)$.

4 Електростатичка интерпретација нула ортогоналних полинома. *Mathematica* пакет *RationalExpressionsESm*

4.1 Електростатичка интерпретација нула Јакобијевих полинома

Електростатичке интерпретације нула класичних ортогоналних полинома (Јакобијевих, Лагерових, Ермитових) су један од најелегантнијих резултата у теорији специјалних функција. Почеци истраживања у овој области се везују за Стилтјеса (видети [66], [67], [68]). Недавно је обновљен интерес за ову тему, мотивисан њеном везом са теоријом логаритамског потенцијала, као и због све већег интереса за проучавањем нових класа специјалних функција. Новија истраживања у овој области могу се наћи, на пример, у радовима [27], [28] и [34].

У својим радовима из 1885., Стилтјес је посматрао електростатички проблем где су p и q фиксна позитивна оптерећења постављена у тачкама -1 и 1, респективно, и n $(n \geq 2)$ јединичних слободних оптерећења су постављена у тачкама $x_1, x_2, \ldots, x_n$, унутар интервала $[-1, 1]$. Потребно је одредити у ком положају морају бити тачке $x_1, x_2, \ldots, x_n$, тако да

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} (1 - x_k)^p (1 + x_k)^q \prod_{\substack{\nu,\mu=1 \\ \nu<\mu}}^{n} |x_\nu - x_\mu|, \tag{4.1.1}$$

постиже свој максимум. Стилтјесов приступ је уско повезан са израчунавањем дискриминанте ортогоналних полинома (видети [52]).

Очигледно, $\log(T^{-1})$ се може интерпретирати као енергија у систему електростатичких маса које смо претходно увели. Ове масе делују одбојним силама према закону логаритамског потенцијала. Позиција максимума одговара стању електростатичке равнотеже. Максимум постоји, јер је T непрекидна функција по $x_1, \ldots, x_n$, за $-1 \leq x_\nu \leq 1$, $\nu = 1, \ldots n$. У n-торци $(x_1, \ldots, x_n)$ за коју функција T постиже максимум, све координате су међусобно различите и не узимају вредност ± 1. Показаћемо да је овај распоред тачака $x_1, \ldots, x_n$ на интервалу $(-1, 1)$ јединствен (видети [59, стр. 74]). Претпоставимо да су

$$\begin{aligned} &1 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > -1, \\ &1 > x_1' > x_2' > \cdots > x_n' > -1, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

два распореда која задовољавају претходно описане услове. Обележимо,

$$y_\nu = \frac{(x_\nu + x_\nu')}{2}, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Тада

$$
\begin{aligned}
|y_\nu - y_\mu| = \frac{|x_\nu - x_\mu| + |x'_\nu - x'_\mu|}{2} &\geq |x_\nu - x_\mu|^{1/2}|x'_\nu - x'_\mu|^{1/2}, \\
|1 \pm y_\nu| &\geq |1 \pm x_\nu|^{1/2}|1 \pm x'_\nu|^{1/2},
\end{aligned}
\tag{4.1.3}
$$

па имамо $T(y) \geq |T(x)|^{1/2}|T(x')|^{1/2}$. Једнакост ће важити ако и само ако $x_\nu = x'_\nu$. Одавде следи јединственост.

Теорема 4.1.1. *Нека су $p > 0$ и $q > 0$ и нека је $\{x_\nu\}$, $-1 \leq x_\nu \leq 1$, $\nu = 1, \ldots, n$, низ вредности за које израз (4.1.1) постиже максимум. Тада су x_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, нуле Јакобијевих полинома $P_n^{(\alpha,\beta)}$, при чему је $\alpha = 2p - 1$ и $\beta = 2q - 1$.*

За доказ претходне теореме потребно нам је тврђење следеће леме.

Лема 4.1.1. *Важи*

$$
\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^{n} \frac{1}{x_\nu - x_i} = \frac{\pi''_N(x_\nu)}{2\pi'_N(x_\nu)},
$$

где је

$$
\pi_N(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n). \tag{4.1.4}
$$

Доказ. На основу логаритамског извода (4.1.4) добијамо

$$
\frac{\pi'_N(x)}{\pi_N(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_\nu}, \quad x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}.
$$

Тада, за $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$,

$$
R_\nu(x) \equiv \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^{n} \frac{1}{x - x_i} = \frac{\pi'_N(x)}{\pi_N(x)} - \frac{1}{x - x_\nu} = \frac{(x - x_\nu)\pi'_N(x) - \pi_N(x)}{(x - x_\nu)\pi_N(x)}.
$$

У граничном случају $x \to x_\nu$, добијамо

$$
\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^{n} \frac{1}{x_\nu - x_i} = \lim_{x \to x_\nu} R_\nu(x) = \lim_{x \to x_\nu} \frac{\pi''_N(x)}{\frac{\pi_N(x)}{x - x_\nu} + \pi'_N(x)},
$$

тј.

$$
\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \nu}}^{n} \frac{1}{x_\nu - x_i} = \frac{\pi''_N(x)}{2\pi'_N(x)}. \tag{4.1.5}
$$

□

Сада можемо доказати теорему 4.1.1.

Доказ. Из услова максимума имамо $\frac{\partial T}{\partial x_\nu} = 0$, $\nu = 1, \ldots, n$, односно

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x_\nu - x_1} &+ \cdots + \frac{1}{x_\nu - x_{\nu-1}} + \frac{1}{x_\nu - x_{\nu+1}} + \cdots \\
&+ \frac{1}{x_\nu - x_n} + \frac{p}{x_\nu - 1} + \frac{q}{x_\nu + 1} = 0.
\end{aligned}
\tag{4.1.6}
$$

Из (4.1.4) и (4.1.5) имамо да се (4.1.6) своди на

$$\frac{1}{2}\frac{\pi''_N(x_\nu)}{\pi'_N(x_\nu)}+\frac{p}{x_\nu-1}+\frac{q}{x_\nu+1}=0, \tag{4.1.7}$$

односно

$$(1-x_\nu^2)\pi''_N(x_\nu)+[2q-2p-(2q+2p)x_\nu]\pi'_N(x_\nu)=0.$$

Из последње једнакости добијамо

$$(1-x^2)\pi''_N(x)+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]\pi'_N(x)=0, \tag{4.1.8}$$

при чему је израз са десне стране једнакости (4.1.8) моничан полином π_n степена n, чије су нуле у тачкама x_ν, $\nu=1,\ldots,n$, па следи $\pi_n=\text{ const.}\cdot\pi_N$. Упоређујући чланове уз x^n добијамо да је константни фактор $-n(n+\alpha+\beta+1)$, па се диференцијална једначина (4.1.8) своди на диференцијалну једначину коју задовољавају Јакобијеви полиноми (видети [70, стр. 60]), чије једно партикуларно решење је облика $\pi_N=\text{ const.}\cdot P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ (видети [70, стр. 61]). □

Нуле Лагерових и Ермитових полинома дозвољавају сличну интерпретацију (видети [70]). Равнотежна стања дводимензионалних електростатичких проблема разматрана су у неколико радова. У раду [44], Миловановић је разматрао електростатичку интерпретацију нула полинома ортогоналних на радијалним зрацима.

4.2 Електростатичка интерпретација нула за класу полинома ортогоналних у односу на модификовану Чебишевљеву меру прве врсте

За класу полинома $\{p_k^{2,s}(x)\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ $(s>-1/2)$, ортогоналних у односу на модификовану Чебишевљеву меру прве врсте дату са (3.1.2), тј.

$$\mathrm{d}\sigma^{2,s}(x)=\frac{|\widehat{T}_2(x)^{2s}|}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,$$

извешћемо електростатичку интерпретацију нула за специфичне вредности степена, ако претпоставимо логаритамски потенцијал у систему (видети [12] и [11]). Показаћемо ово за вредности степена $k=4\nu$ $(\nu\in\mathbb{N})$ полинома ортогоналних у односу на посматрану меру.

Нека су x_j, $j=1,2,\ldots,k$, нуле полинома $p_k^{2,s}(x)$. Оне су просте и налазе се у интервалу $(-1,1)$.

У складу са последицом 3.1.4 и једнакости (4.1.5) имамо следеће тврђење.

Теорема 4.2.1. *Нека је $k=4\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$, и нека су x_j, $j=1,\ldots,k$, нуле полинома $p_k^{2,s}(x)$. Тада, за свако $i\in\{1,2,\ldots,k\}$, имамо*

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}\frac{1}{x_i-x_j}+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{x_i-1}+\frac{1}{x_i+1}\right]+s\left[\frac{1}{x_i-z_0}+\frac{1}{x_i+z_0}\right]=0,$$

где је $z_0=\sqrt{2}/2$.

Тврђење 4.2.1 има очигледну електростатичку интерпретацију, ако претпоставимо логаритамски потенцијал у систему. Нека су у тачкама ± 1 постављена фиксна оптерећења вредности $1/4$ и нека су k јединичних оптерећења распоређена на интервалу $[-1, 1]$ у тачкама $x_1, x_2, \ldots, x_k$. У складу са Стилтјесовим резултатом за Јакобијеве полиноме $P_k^{(2p-1,2q-1)}(x)$, у случају $2p-1 = 2q-1 = -1/2$, тј. $p = q = 1/4$, и $s = 0$, електростичка равнотежа се постиже када су x_j нуле Чебишевљевог полинома прве врсте. Међутим, ако је $s > 0$, да бисмо имали електростатичку равнотежу, потребно је да укључимо две додатне тачке $\pm z_0$ $(= \pm\sqrt{2}/2)$ у овај систем, са фиксним оптерећењима вредности s.

Лако се може уочити да је систем у стању минимума енергије, обзиром да је Хесијан матрица, као и у случају класичних ортогоналних полинома дијагонално доминантна, симетрична и позитивно дефинитна.

4.3 Модули *Mathematica* пакета *RationalExpressionsES.m* и примене

Конструкција ортогоналних полинома је једноставна када је експлицитно позната трочлана рекурентна релација. Одређивање коефицијената рекурентне релације је генерално веома тежак проблем. У раздобљу пре компјутера, овоме је у литератури придаван мали значај. Томе је нарочито допринело постојање теоријског решења, датог формулом преко Хенкелових детерминанти (видети [31] и [13]). Међутим, овакав приступ носи претерану рачунску цену и нумеричку нестабилност приликом конструкције рекурзивних коефицијената.

Експериментална истраживања у области некласичних ортогоналних полинома су у великој мери олакшана постојањем специјализованих програмских пакета развијаних у Matlab и Wolfram Mathematica софтверима. Развој конструктивне теорије ортогоналних полинома је у чврстој вези са ажурирањем и унапређењем оваквих специјализованих пакета.

Mathematica пакет RationalExpressionsES.m је програмска реализација неких резултата докторске дисертације. У пакету су имплементирани модули који омогућавају манипулацију са неким низовима унетих рационалних бројева (или израза) и конструкцију јединственог рационалног израза у симболичком облику кога чланови унетог низа задовољавају.

Претпоставимо да низ рационалних бројева (или израза) $\left\{\dfrac{a_k}{b_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ можемо представити у облику

$$\frac{\sum\limits_{m=0}^{N-1} (\exp^{\frac{2\pi i}{N}})^{mk} p_{n,m}(k)}{\sum\limits_{m=0}^{N-1} (\exp^{\frac{2\pi i}{N}})^{mk} q_{n,m}(k)} = \frac{a_k}{b_k}, \tag{4.3.1}$$

за вредности $k = 1, \ldots, 2N(n+1)$, при чему су коефицијенти полинома $p_{n,m}(k)$ и $q_{n,m}(k)$ непознати. Даље, претпоставимо да је најстарији коефицијент полинома

$p_{n,0}(k)$ једнак јединици, тада се (4.3.1) своди на

$$
\begin{aligned}
(4.3.2) \qquad & b_k\Big(\sum_{i=0}^{n-1} p_{n,i}k^i + \sum_{m=1}^{N-1}(\exp^{\frac{2\pi i}{N}})^{mk} p_{n,m}(k)\Big) \\
- \quad & a_k\Big(\sum_{m=0}^{N-1}(\exp^{\frac{2\pi i}{N}})^{mk} q_{n,m}(k)\Big) = -b_k k^n, \quad k = 1, \dots, 2N(n+1)-1,\ n \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}
$$

У оквиру пакета RationalExpressionsES.m имплементирана су два модула за решавање система (4.3.2), тј. одређивање непознатих коефицијената полинома $p_{n,m}$ и $q_{n,m}$, коришћењем методе LinearSolve имплементиране у софтверу Mathematica. При извршавању модула издају се непознати коефицијенти полинома $p_{n,m}(k)$ и $q_{n,m}(k)$ и на основу издатих коефицијената генерише се јединствен израз у симболичком облику кога задовољавају чланови унетог низа $\left\{\dfrac{a_k}{b_k}\right\}$ за $k = 1, \dots, 2N(n+1)$.

Израчунавање коефицијента полинома $p_{n,m}(k)$ и $q_{n,m}(k)$, као и тестирање хипотезе да ли постоје такви коефицијенти за унете вредности аргумената n и N се реализује позивом модула:

- aCheckHypothesysWithRootsOfN[beta,n,nN].

Сва три аргумента модула су обавезна. Аргумент beta је листа рационалних бројева (израза), а аргументи n и nN су позитивни цели бројеви. Извршавањем овог модула формира се тродимензиони низ $\{hyp, err, coef\}$. При томе прве две компоненте овог низа издају информацију кориснику да ли за унете аргументе модула могу да се одреде коефицијенти полиноми $p_{n,m}(k)$ и $q_{n,m}(k)$. Трећи елемент низа су листе коефицијената полинома, онда када оне постоје.

Користећи излаз модула aCheckHypothesysWithRootsOfN[beta,n,nN] могуће је формирати јединствен аналитички израз у симболичком облику што се реализује позивом модула:

- aRunTestES[beta, n, nN, k, ops].

Сва четири аргумента модула су обавезна. Извршавањем овог модула генерише се рационалан израз који зависи од параметра k у симболичком облику кога задовољавају чланови низа $\left\{\dfrac{a_k}{b_k}\right\}$ за вредност k. Аргумент *ops* је потребно поставити на метод LinearSolveMethod.

Модул aRunTestES извршава модул aCheckHypothesysWithRootsOfN[beta,n,nN] за унете вредности аргумената beta, n и nN, и издаје рационалан израз у симболичком облику, ако постоји.

Реализацијом наредби

```
In[1]:= << OrthogonalPolynomials`

In[2]:= << CrackingRationalComplexity`

In[28]:= mom = Table[Integrate[x^k Abs[aChebyshevII[2, x]]^(2×2) (1-x^2)^(1/2), {x, -1, 1}], {k, 0, 50}];

In[29]:= {alpha, beta} = aChebyshevAlgorithm[mom, Algorithm → Symbolic];

In[30]:= expression = FullSimplify[aRunTestES[Delete[beta, 1], 3, 3, k, Method → LinearSolveMethod]]
```

Out[30]=

$$\frac{594+290\,i\sqrt{3}+3k\left(5\left(25+9\,i\sqrt{3}\right)+k\left(27+5\,i\sqrt{3}+2k\right)\right)+4e^{\frac{2ik\pi}{3}}\left(27-104\,i\sqrt{3}+3k\left(2-9\,i\sqrt{3}-i\sqrt{3}\,k\right)\right)+6\,i\,e^{\frac{4ik\pi}{3}}\left(3\left(39\,i+7\sqrt{3}\right)+2k\left(13\,i+9\sqrt{3}+\sqrt{3}\,k\right)\right)}{8\left(1+(-1)^{1/3}\right)\left|162+34(-1)^{1/3}+20(-1)^{\frac{1}{3}(1+2k)}+k\left(9\left(13+(-1)^{1/3}\right)+k\left(27-6(-1)^{1/3}-\left(-2+(-1)^{1/3}\right)k\right)\right)\right|}$$

издају се коефицијенти трочлане рекурентне релације ортогоналних полинома у односу на меру $\mathrm{d}\mu_1(x)=|\widehat{U}_n(x)|^{2s}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$, када је $n=2$ и $s=2$.

Реализацијом наредби

```
In[1]:= << OrthogonalPolynomials`

In[2]:= << CrackingRationalComplexity`

In[40]:= mom = Table[Integrate[x^k Abs[aChebyshevII[2, x]]^(2×2) (1-x^2)^(1/2+2), {x, -1, 1}], {k, 0, 50}];

In[41]:= {alpha, beta} = aChebyshevAlgorithm[mom, Algorithm → Symbolic];

In[42]:= expression = FullSimplify[aRunTestES[Delete[beta, 1], 2, 3, k, Method → LinearSolveMethod]]
```

Out[42]=

$$\frac{\sqrt{3}\,(5+k)\,(8+k)+e^{\frac{2ik\pi}{3}}\left(18\,i-20\sqrt{3}-3\left(-i+\sqrt{3}\right)k\right)-e^{\frac{4ik\pi}{3}}\left(18\,i+20\sqrt{3}+3\left(i+\sqrt{3}\right)k\right)}{4\sqrt{3}\,(6+k)\,(7+k)}$$

издају се коефицијенти трочлане рекурентне релације ортогоналних полинома у односу на меру $\mathrm{d}\mu_2(x)=|\widehat{U}_n(x)|^{2s}(1-x^2)^{s+1/2}\,\mathrm{d}x$, када је $n=2$ и $s=2$.

Реализацијом наредби

```
In[1]:= << OrthogonalPolynomials`

In[2]:= << CrackingRationalComplexity`

In[48]:= mom = Table[Integrate[x^k Abs[aChebyshevI[2, x]]^(2×2) (1-x^2)^(-1/2), {x, -1, 1}], {k, 0, 50}];

In[49]:= {alpha, beta} = aChebyshevAlgorithm[mom, Algorithm → Symbolic];

In[51]:= expression = FullSimplify[aRunTestES[Delete[beta, 1], 2, 4, k, Method → LinearSolveMethod]]
```

Out[51]=

$$\frac{12+7k+k^2-2\,i^k\left((3+4\,i)+(1+i)\,k\right)+2\,i\,i^{3k}\left((4+3\,i)+(1+i)\,k\right)}{4\,(3+k)\,(4+k)}$$

издају се коефицијенти трочлане рекурентне релације ортогоналних полинома у односу на меру $\mathrm{d}\mu_3(x)=|\widehat{T}_n(x)|^{2s}(1-x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$, када је $n=2$ и $s=2$.

Релације (3.1.18) и (3.2.7) су добијене у софтверу Wolfram Mathematica помоћу модула пакета RationalExpressionsES.m.

Напоменимо још да описани модули за неке проблеме не могу да издају решење. Разлог овоме је ограниченост софтвера Mathematica, као и комплексност самог проблема.

5 Ортогонални полиноми и генерализоване Гаус-Рисове квадратурне формуле

5.1 Уводна разматрања

У овом делу дисертације дати су резултати који су презентовани у раду [56]. Обележимо са $\mathcal{P}_{2N-1}$ линеарни простор алгебарских полинома степена не вишег од $2N-1$. Размотрићемо проблем конструкције квадратурних формула Гаусовог типа на интервалу $[-1,1]$, у односу на тежинску функцију дату са два параметра

$$\omega^{\lambda}(t;x) = \exp(-xt^2)(1-t^2)^{\lambda-1/2}, \tag{5.1.1}$$

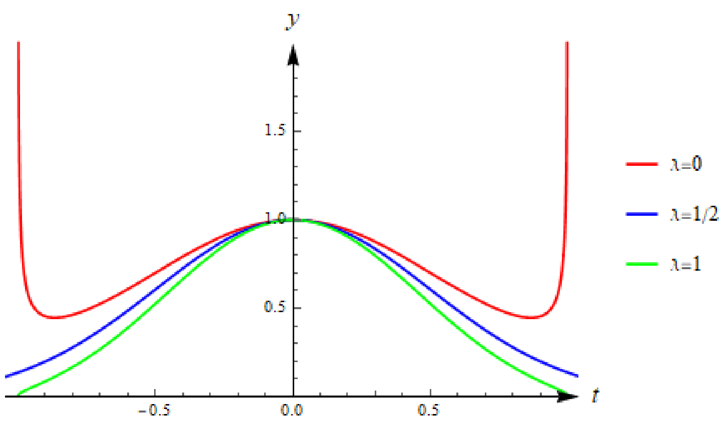
где је x позитиван параметар и $\lambda > -1/2$, тј.

$$\int_{-1}^{1} f(t)\omega^{\lambda}(t;x)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{N} A_{\nu} f(\tau_{\nu}) + R_N(f) \tag{5.1.2}$$

која је тачна за све полиноме степена највише $2N-1$, тј. са остатком $R_N(f) \equiv R_N^{\lambda}(f;x) = 0$ за све $f \in \mathcal{P}_{2N-1}$. За паран број чворова, тј. за $N = 2n$, квадратурна сума у (5.1.2) се може записати у следећој форми

$$Q_{2n}(f;x) = \sum_{k=1}^{n} A_k[f(\tau_k) + f(-\tau_k)], \tag{5.1.3}$$

где $\tau_k = \tau_k^N(x;\lambda)$, $A_k = A_k^N(x;\lambda) > 0$ и $0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n < 1$. На слици 5.1 дати су графици тежинске функције $\omega^{\lambda}(t;x)$ за различите вредности параметра λ.



Слика 5.1: Графици тежинске функције $t \mapsto \omega^{\lambda}(t;x)$, $t \in (-1,1)$ за $\lambda = 0, 1/2, 1$ и $x = 2$

Најважнији алат за конструкцију тежинских Гаусових квадратурних правила су полиноми ортогонални у односу на исту тежинску функцију. Нека су $\pi_k(t) \equiv \pi_k^\lambda(t;x)$ полиноми ортогонални на $[-1,1]$, у односу на тежинску функцију дату са (5.1.1). Како је тежинска функција парна монични ортогонални полиноми $t \mapsto \pi_k^\lambda(t;x)$ задовољавају трочлану рекурентну релацију

$$\pi_{k+1}^\lambda(t;x) = t\pi_k^\lambda(t;x) - \beta_k \pi_{k-1}^\lambda(t;x), \quad k = 0,1,\ldots, \tag{5.1.4}$$

са почетним условима $\pi_0^\lambda(t;x) = 1$ и $\pi_{-1}^\lambda(t;x) = 0$. Рекурзивни коефицијенти β_k су позитивни и зависе од параметара x и λ. Дакле, $\beta_k = \beta_k^\lambda(x) > 0$, $k = 1,2,\ldots$, где су $x > 0$ и $\lambda > -1/2$. Коефицијент $\beta_0^\lambda(x)$ у (5.1.4) је дат са

$$\begin{aligned}\beta_0^\lambda(x) &= \int_{-1}^{1} \omega^\lambda(t;x)\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1)}\,{}_1F_1\Big(\frac{1}{2},\lambda+1,-x\Big),\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

где је ${}_1F_1(a,b;z)$ Кумерова конфлуентна хипергеометријска функција (видети [58]).

Иначе, у овом делу дисертације у израчунавањима користићемо и генерализовану хипергеометријску функцију ${}_pF_q$ дефинисану са

$${}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(a_1)_\nu \cdots (a_p)_\nu}{(b_1)_\nu \cdots (b_q)_\nu}\frac{z^\nu}{\nu!},$$

за различите вредности параметара p и q, где је $(\lambda)_\nu$ Поххамеров симбол и $\Gamma(\lambda)$ је Ојлерова гама функција. У софтверу Wolfram Mathematica функција ${}_pF_q$ је имплементирана као HypergeometricPFQ и погодна је за симболичка и нумеричка израчунавања. За $p = q+1$, хипергеометријска функција ${}_pF_q$ има прекид у комплексној z равни за вредности од 1 до ∞. Када је $p \le q$ сума конвергира за све $z \in \mathbb{C}$. Више резултата о овим сумама, нарочито о трансформацијама, сумирању и другим особинама може се наћи у радовима [55], [53] и [54].

Чворови $\pm\tau_k$, $k = 1,\ldots,n$, у квадратурној формули (5.1.3) су нуле ортогоналног полинома $\pi_N^\lambda(t;x)$ степена $N = 2n$ и тежински коефицијенти A_k, $k = 1,\ldots,N$, су одговарајући Кристофелови бројеви (видети [17] и [38]).

Овакве квадратурне формуле су врло блиске Рисовим квадратурним формула које су укратко описане у делу 2.5. Међутим, у овом делу разматрамо општији случај у односу на тежинску функцију (5.1.1), која је дата као производ Гегенбауерове тежинске функције и Рисове експоненцијалне функције. Како се ова квадратурна правила своде на Рисове квадратуре за вредност $\lambda = 1/2$, зваћемо их генерализоване Гаус-Рисове квадратурне формуле.

Када $x \to 0$, проблем који разматрамо се своди на Гаус-Гегенбауерово правило, где је $\omega^\lambda(t;0) = (1-t^2)^{\lambda-1/2}$, $\lambda > -1/2$ и $\pi_k^\lambda(t;0) = \widehat{C}_k^\lambda(t)$ су монични Гегенбауерови полиноми, који задовољавају трочлану рекурентну релацију (5.1.4), са коефицијентима

$$\begin{aligned}\alpha_k^\lambda(0) &= 0,\ k \in \mathbb{N}, \quad \beta_0^\lambda(0) = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1)}, \\ \beta_k^\lambda(0) &= \frac{k(2\lambda+k-1)}{4(\lambda+k-1)(\lambda+k)},\ k \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

осим у случају $\lambda = 0$, када је $\beta_1^0(0) = 1/2$ (видети [38, стр. 102]). Иначе, тежинска функција $t \mapsto \omega^\lambda(t;x)$ припада Сегеовој класи функција, јер је вредност интеграла

$$\int_{-1}^{1} \frac{\log \omega^\lambda(t;x)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \;=\; -\frac{\pi}{2}\Big[(2\lambda-1)\log(4)+x\Big],$$

коначна ($> -\infty$) и на основу тога следи асимптотско својство

$$\lim_{k\to+\infty} \beta_k^\lambda(x) = \frac{1}{4} \tag{5.1.6}$$

(видети [38, дефиниција 2.2.1] и [33]).

Као и у раду Миловановића [48], у наредном делу показаћемо да директна конструкција коефицијената $\beta_k^\lambda(x)$ помоћу класичног Чебишевљевог алгоритма није нумерички стабилна и у нашем случају.

5.2 Условљеност класичног Чебишевљевог алгоритма

Да бисмо конструисали Гаусову формулу (5.1.2), тј. (5.1.3) са највише N чворова, коришћењем алгоритма Голуб-Велч (видети [24]), потребно нам је N рекурентних коефицијената у (5.1.4), $\beta_k = \beta_k^\lambda(x)$, $k = 0,1,\ldots,N-1$, који морају бити нумерички конструисани у овом некласичном случају. Овакви приступи припадају конструктивној теорији ортогоналних полинома, коју је у својим радовима из 1980. описао Волтер Гаучи (видети [15], [17], [45], [18] и [19]). У општем случају, у нумеричкој конструкцији рекурентних коефицијената битну улогу има осетљивост пресликавања при малим претурбацијама улазних података.

Метод момената трансформише првих $2N$ момената у $2N$ рекурентних коефицијената тј.

$$\mu = [\,\mu_0\ \mu_1\ \mu_2\ \cdots\ \mu_{2n-1}]^T \mapsto \rho = [\,\alpha_0\ \beta_0\ \alpha_1\ \beta_1\ \cdots\ \alpha_{N-1}\ \beta_{N-1}]^T,$$

али ефикасност алгоритма зависи од фактора условљености или кондиционог броја пресликавања $\mathbf{K}_N : \mathbb{R}^{2N} \mapsto \mathbb{R}^{2N}(\mu \mapsto \rho)$. Алгоритам је обично слабо условљен и у пракси израчунавања методом момената у аритметици коначне дужине су обично неефикасна због огромног раста грешке заокругљивања. Међутим, развојем аритметике произвољне дужине и симболичког израчунавања последњих година омогућено је генерисање рекурентних коефицијената директно применом методе момената, али коришћењем аритметике високе прецизност и како би се избегла нумеричка нестабилност. Понекад, можемо добити коефицијенте у симболичком облику, обично за мале вредности N. Напоменимо још да се доста софтвера за нумеричко и симболичко третирање оваквих проблема могу преузети потпуно бесплатно са интернета (видети [20], [10] и [50]).

Да бисмо одредили N рекурентних коефицијената β_k^λ у (5.1.4) ($\alpha_k^\lambda = 0$, јер је тежинска функција парна на $(-1,1)$), потребно је првих $2N$ момената $\mu_k^\lambda(x)$, $k = 0,1,\ldots,2N-1$, који се могу изразити на следећи начин:

$$\mu_k^\lambda(x) = \int_{-1}^{1} t^k \mathrm{e}^{-xt^2}(1-t^2)^{\lambda-1/2}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2}+\lambda+1)}\,{}_1F_1(\frac{k+1}{2},\frac{k}{2}+\lambda+1,-x), & k\,\text{парно},\\ 0, \ k\,\text{непарно}, \end{cases}$$

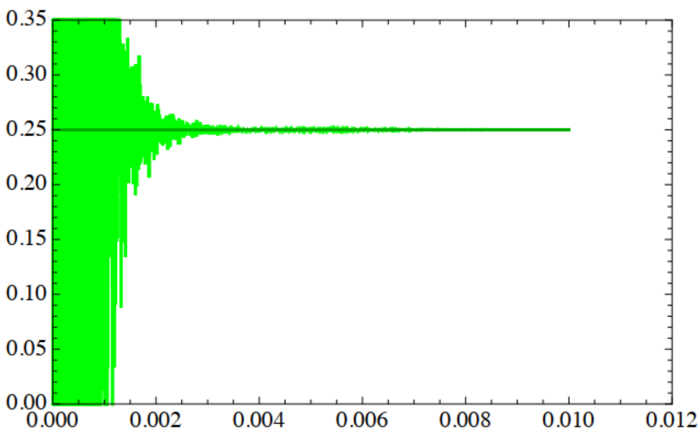
где је ${}_1F_1(a,b;z)$ Кумерова конфлуентна хипергеометријска функција чија је интегрална форма

$$ {}_1F_1(a,b;z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-a-1}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t. \tag{5.2.1} $$

Помоћу команде aChebyshevAlgorithm која је имплементирана у оквиру пакета OrthogonalPolynomials у софтверу Mathematica у симболичком моду, можемо добити коефицијенте $\beta_k^\lambda(x)$ у симболичком облику. На пример, за $\lambda = 0$ и мале вредности $k \le 10$, добијамо коефицијенте помоћу модификованих Беселових функција прве врсте $I_0(x/2)$ и $I_1(x/2)$,

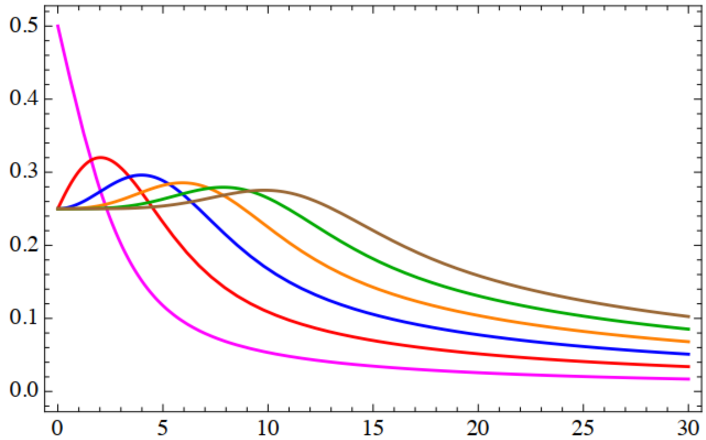
$$
\begin{aligned}
\beta_0^0(x) &= \pi \mathrm{e}^{-x/2} I_0\Big(\frac{x}{2}\Big),\\
\beta_1^0(x) &= \frac{I_0(\frac{x}{2}) - I_1(\frac{x}{2})}{2I_0(\frac{x}{2})},\\
\beta_2^0(x) &= \frac{xI_0(\frac{x}{2})^2 - 2I_1(\frac{x}{2})I_0(\frac{x}{2}) - xI_1(\frac{x}{2})^2}{2xI_0(\frac{x}{2})\Big(I_0(\frac{x}{2}) - I_1(\frac{x}{2})\Big)}, \text{ итд.}
\end{aligned}
$$

Изрази који се добијају за веће вредности k су компликовани и неупотребљиви. Њихова израчунавања за вредности x у близини нуле нису стабилна и захтевају употребу аритметике високе прецизности. На слици 5.2 је дата нестабилност у израчунавању $\beta_5^0(x)$ у аритметици стандардне двоструке прецизности, са машинском прецизношћу MP$\approx 2.22 \times 10^{-16}$.



Слика 5.2: Нестабилност у израчунавању рекурентних коефицијената за малу вредност x (случај $\beta_5^0(x)$)

Само употреба аритметике високе прецизности, овде са WP= 50 (WP-Working Precision) даје стабилну нумеричку конструкцију (тамна линија на графику 5.2). Рекурзивни коефицијенти $\beta_k^0(x)$, $k = 1, \ldots, 6$, за $x \in (0, 30)$ и WP= 50 су дати на слици 5.3.



Слика 5.3: Коефицијенти $\beta_k^0(x)$ за $x \in (0, 30)$ за $k = 1$ (љубичаста), $k = 2$ (црвена), $k = 4$ (наранџаста), $k = 5$ (зелена) и $k = 6$ (браон)

У складу са претходним, потребно је да користимо нумерички алгоритам у конструкцији рекурентних коефицијената, тј. следећи низ команди

```
<<orthogonalPolynomials`
% mom=...(sequence of the length 2N)
{alpha,beta}=aChebyshevAlgorithm[mom,
              WorkingPrecision->WP];
```

како бисмо добили низове рекурентних коефицијената (дужине N), у ознаци alpha (у овом случају то је низ нула) и beta, са максималном релативном грешком

$$\mathrm{err}_N^\lambda(x;\ \mathrm{WP}) = \max_{0\le k\le N-1}\left|\frac{\beta_k^\lambda(x) - \hat{\beta}_k^\lambda(x)}{\hat{\beta}_k^\lambda(x)}\right|.$$

Тачне вредности рекурентних коефицијената су обележене са $\hat{\beta}_k^\lambda(x)$ и њихове вредности се могу добити коришћењем исте процедуре, али са прецизношћу WP1 (на пример, WP1=2 WP).

Као и у специјалном случају ($\lambda = 1/2$) Рисових полинома, конструкција коефицијената $\beta_k^\lambda(x)$ је нестабилна, за мале вредности x (видети [48]). На пример, за одређивање првих $N = 50(100)$ коефицијената за $x = 1/10$ са више од 16 тачних цифара, тј. када је $\mathrm{err}_N^\lambda(1/10;\ \mathrm{WP}) < 10^{-16}$, потребна је радна прецизност најмање WP$= 48(86)$ за $\lambda = 0$, односно WP$= 46(84)$ за $\lambda = 1$.

У наредном делу конструисаћемо полиноме ортогоналне у односу на тежинску функцију $t \mapsto \omega^\lambda(\sqrt{t}; x)/\sqrt{t}$ на $(0, 1)$, користећи метод модификованих момената (видети [15]), као и одговарајућа квадратурна правила Гаусовог типа на $(0, 1)$. Овај приступ омогућава нам да имамо стабилну и једноставнију конструкцију рекурзивних коефицијената и квадратура оригиналног проблема дефинисаног на $(-1, 1)$, што је дато у делу 5.4.

5.3 Ортогонални полиноми и Гаусове квадратуре на интервалу $(0,1)$

Нека су $\pi_k^\lambda(t;x)$ монични ортогонални полиноми дефинисани рекурентном релацијом (5.1.4). Да бисмо проблем конструкције Гаусових квадратура (5.1.2) трансформисали на интервал $(0,1)$, користимо теорему (1.5.2) (видети [38, стр. 102]), према којој можемо посматрати два низа моничних ортогоналних полинома:

(1.) $p_k^\lambda(t;x) := \pi_{2k}^\lambda(\sqrt{t};x), k = 0,1,\ldots$, који су ортогонални у односу на тежинску функцију

$$t \mapsto \Omega^\lambda(t;x) = \frac{\omega^\lambda(\sqrt{t};x)}{\sqrt{t}} = \frac{\exp(-xt)}{\sqrt{t}}(1-t)^{\lambda-1/2} \quad \text{на} \quad (0,1);$$

(2.) $q_k^\lambda(t;x) := \pi_{2k+1}^\lambda(\sqrt{t};x)/\sqrt{t}, k = 0,1,\ldots$, који су ортогонални у односу на тежинску функцију

$$t \mapsto \Omega^\lambda(t;x) = \sqrt{t}\omega^\lambda(\sqrt{t};x) = \sqrt{t}\exp(-xt)(1-t)^{\lambda-1/2} \quad \text{на} \quad (0,1),$$

где је $\lambda > -\frac{1}{2}$.

Оваквим приступом за конструкцију N-тачкастих Гаусових формула (5.1.2), у односу на парну тежинску функцију дату у делу под (1.) претходног навођења, потребно је $N/2 = n$ чворова у одговарајућим правилима на половини интервала. На овај начин, утицај нумеричке нестабилност у процесу конструкције се може значајно смањити, модификацијом алгоритма Голуб-Велча, при чему се димензија Јакобијеве матрице редукује на половину.

Напомена 5.3.1. Конструкција квадратурних правила (5.1.2) са непарним бројем чворова, тј. $N = 2n+1$, у односу на непарну тежинску функцију дату у делу под (2.), је слична као и са парним бројем чворова. У овом случају се формуле (5.1.2) могу интерпретирати као Гаус-Радауове квадратурне формуле које су описане у делу 2.4.1.

Нека су $p_k^\lambda(t;x)$ монични ортогонални полиноми у односу на парну тежинску функцију $\Omega^\lambda(t;x)$ на $(0,1)$. Они задовољавају рекурентну релацију

$$p_{k+1}^\lambda(z;x) = (z-a_k^\lambda)p_k^\lambda(z;x) - b_k^\lambda p_{k-1}^\lambda(z;x), \quad k = 0,1,\ldots \tag{5.3.1}$$

са почетним условима $p_0^\lambda(t;x) = 1$, $p_{-1}(t;x) = 0$ (видети [38]). Рекурзивни коефицијенти у (5.3.1) зависе од параметра λ и x, у вези су са параметрима релације (5.1.4) и према теореми 1.5.3 су дати са

$$a_0 = \beta_1, \quad a_k = \beta_{2k} + \beta_{2k+1} \quad \text{и} \quad b_k = \beta_{2k-1}\beta_{2k}. \tag{5.3.2}$$

У складу са (5.1.6) имамо

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \frac{1}{2}, \quad \lim_{k\to+\infty} b_k = \frac{1}{16}. \tag{5.3.3}$$

Такође, параметри Гаус-Кристофелове формуле на $(0,1)$,

$$\int_0^1 \Omega^\lambda(t;x)g(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} B_k g(\varepsilon_k) + \widehat{R}_n(g) \tag{5.3.4}$$

која је тачна за све $g \in \mathcal{P}_{2n-1}$ су у релацији са параметрима квадратуре (5.1.2), односно

$$\pm\tau_k = \sqrt{\varepsilon_k}, \quad A_k = \frac{1}{2}B_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{5.3.5}$$

(видети [40], [37], [47], [51]).

Да бисмо конструисали рекурзивне коефицијенте у (5.3.1) користимо модификоване моменте тежинске функције $\Omega^\lambda(t;x)$ на $(0,1)$ у односу на систем полинома $\{\phi_k\}$ $(\deg \phi_k = k)$, који су одабрани да буду блиски у неком смислу са ортогоналним полиномима $p_k^\lambda(t;x)$. У нашем случају одговарајући систем полинома су монични Гегенбауерови полиноми $\phi_k(t) = p_k^\lambda(t;0) = \widehat{C}_{2k}^\lambda(\sqrt{t}), k \geq 0$.

Ови полиноми задовољавају трочлану рекурентну релацију

$$\phi_{k+1}(t) = (t - a_k^M)\phi_k(t) - b_k^M \phi_{k-1}(t), \tag{5.3.6}$$

за $k \geq 0$, са $\phi_0(t) = 1$ и $\phi_{-1}(t) = 0$. Рекурентни коефицијенти су дати са

$$\begin{aligned}
a_0^M &= \frac{1}{2(\lambda+1)}, \quad b_0^M = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1)}, \\
a_k^M &= \frac{4k^2+4\lambda k+\lambda-1}{2(2k+\lambda-1)(2k+\lambda+1)}, \quad k \geq 1, \\
b_1^M &= \frac{2\lambda+1}{4(\lambda+1)^2(\lambda+2)}, \\
b_k^M &= \frac{k(2k-1)(k+\lambda-1)(2k+2\lambda-1)}{4(2k+\lambda-2)(2k+\lambda-1)^2(2k+\lambda)}, \quad k \geq 2,
\end{aligned} \tag{5.3.7}$$

(видети [49]).

За конструкцију првих n рекурентних коефицијената у (5.3.1), тј. a_k и b_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, метод као улаз захтева првих $2n$ модификованих момената

$$m_k^\lambda(x) = \int_0^1 \widehat{C}_{2k}^\lambda(\sqrt{t})\Omega^\lambda(t;x)\,\mathrm{d}t, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1. \tag{5.3.8}$$

5.3.1 Израчунавање модификованих момената

У овом делу одредићемо модификоване моменте дате са (5.3.8).

Теорема 5.3.1. *Нека су $\widehat{C}_k^\lambda(t)$ монични Гегенбауреви полиноми ортогонални у односу на тежинску функцију $t \mapsto (1-t^2)^{\lambda-1/2}$, $\lambda > -1/2$, на $(-1,1)$. Модификовани моменти*

$$m_k^\lambda(x) = \int_0^1 \hat{C}_{2k}^\lambda(\sqrt{t}) \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}} (1-t)^{\lambda-1/2}\,\mathrm{d}t, \tag{5.3.9}$$

где је $k = 0, 1, 2, \ldots,$ се могу изразити преко Кумерове конфлуентне хипергеометријске функције са

$$\begin{aligned}
m_k^\lambda(x) &= \frac{(-1)^k \pi(2k+\lambda)(2k)!}{2^{4k+2}(k+\lambda)k!} \frac{\Gamma(2k+2\lambda+1)}{\Gamma(2k+\lambda+1)^2} \\
&\quad \times x^k\, {}_1F_1\Big(k+\frac{1}{2}; 2k+\lambda+1; -x\Big).
\end{aligned}$$

Алтернативно,

$$m_k^\lambda(x) = \frac{(-1)^k \mathrm{e}^{-x/2} x^k}{2^{2k+\lambda}(k+\lambda)_k} Q_k^\lambda(x), \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{5.3.10}$$

где је $Q_k^\lambda(x)$ *интеграл дат са*

$$Q_k^\lambda(x) = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}\cos\theta} \sin^{2k}\theta (1-\cos\theta)^\lambda \,\mathrm{d}\theta. \tag{5.3.11}$$

Доказ. Према [60, стр. 529, једн. (10)] полазимо од формуле за Гегенбауерове полиноме

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a x^{\alpha-1}(a^2-x^2)^{\lambda-1/2} \mathrm{e}^{-px^2} C_{2k+\varepsilon}\Big(\frac{x}{a}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^k a^{\alpha+2\lambda-1}}{2(2k+\varepsilon)!}(2\lambda)_{2k+\varepsilon}\Big(\frac{1+\varepsilon-\alpha}{2}\Big)_k \\ &\quad \times \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+\varepsilon}{2})}{\Gamma(b_2)}\, {}_2F_2\Big(a_1,a_2;b_1,b_2;-a^2p\Big), \end{aligned} \tag{5.3.12}$$

која важи за $\varepsilon = 0$ или 1, $a > 0$, $\mathrm{Re}(\alpha) > -\varepsilon$ и

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\alpha}{2}, \quad a_2 = \frac{\alpha+1}{2}, \\ b_1 &= \frac{1+\alpha-\varepsilon}{2} - k, \quad b_2 = \frac{1+\alpha+\varepsilon}{2} + \lambda + k. \end{aligned}$$

Како је

$$C_{2k}^\lambda(x) = \frac{2^{2k}(\lambda)_{2k}}{(2k)!} \widehat{C}_{2k}^\lambda(x),$$

ставимо $a = 1$, $\varepsilon = 0$ и $x = \sqrt{t}$, интеграл I у (5.3.12) се редукује на

$$\frac{2^{2k-1}(\lambda)_{2k}}{(2k)!} \int_0^1 t^{\alpha/2-1}(1-t)^{\lambda-1/2} \mathrm{e}^{-pt} \widehat{C}_{2k}^\lambda(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t,$$

и за $\alpha = 1$ и $p = x$ се своди на

$$I = \frac{2^{2k-1}(\lambda)_{2k}}{(2k)!} m_k^\lambda(x). \tag{5.3.13}$$

Међутим, десна страна у (5.3.12) је неодређена за $\alpha = 1$. Због тога ћемо извести трансформацију овог израза на десној страни и онда пустимо $\alpha \to 1$.

Са $S_k \equiv S_k^{(a,\lambda)}(x)$ обележимо израз

$$S_k = \Big(\frac{1-\alpha}{2}\Big)_k {}_2F_2(a_1,a_2;b_2,b_2;-x),$$

са уведеним параметрима a_1, a_2, b_1, b_2. Како је

$$\begin{aligned} A := \Big(\frac{1-\alpha}{2}\Big)_k &= (-1)^k \Big(\frac{\alpha+1}{2} - k\Big)_k \\ &= \frac{(-1)^k \Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2} - k)} \end{aligned}$$

имамо

$$\begin{aligned} S_k &= A\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\frac{\alpha}{2})_\nu(\frac{\alpha+1}{2})_\nu}{(\frac{\alpha+1}{2}-k)_\nu(\frac{\alpha+1}{2}+k+\lambda)_\nu}\cdot\frac{(-x)^\nu}{\nu!} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{\alpha}{2})_\nu\Gamma(\frac{\alpha+1}{2}+\nu)}{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2}-k+\nu)(\frac{\alpha+1}{2}+k+\lambda)_\nu}\cdot\frac{(-x)^\nu}{\nu!}. \end{aligned}$$

Када $\alpha\to 1$, првих k чланова у суми $S_k^{(\alpha,\lambda)}(x)$ је нула, па $S_k^{(1,\lambda)}(x)=\lim_{\alpha\to 1}S_k^{(\alpha,\lambda)}(x)$, где након замене индекса $\nu:=\nu+k$, добијамо $S_k^{(1,\lambda)}(x)$ у следећем облику

$$S_k^{(1,\lambda)}(x)=(-1)^k\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})_{\nu+k}\Gamma(1+\nu+k)}{\Gamma(1+\nu)(1+k+\lambda)_{\nu+k}}\cdot\frac{(-x)^{\nu+k}}{(\nu+k)!}.$$

Како је $(\gamma)_{\nu+k}=(\gamma)_k(\gamma+k)_\nu$, претходно се своди на

$$S_k^{(1,\lambda)}(x)=\frac{x^k(\frac{1}{2})_k}{(1+k+\lambda)_k}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}+k)_\nu}{(1+2k+\lambda)_\nu}\cdot\frac{(-x)^\nu}{\nu!},$$

тј. $S_k^{(1,\lambda)}(x)$ се може изразити помоћу Кумерове конфлуентне хипергеометријске функције

$$S_k^{(1,\lambda)}(x)=\frac{(\frac{1}{2})_k x^k}{(k+\lambda+1)_k}\,{}_1F_1\Big(k+\frac{1}{2};2k+\lambda+1;-x\Big).$$

Дакле, десна страна у (5.3.12), за $a=1$, $\varepsilon=0$, $p=x$ и $\alpha\to 1$, постаје

$$\frac{(-1)^k(2\lambda)_{2k}}{2(2k)!}\cdot\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(k+\lambda+1)}S_k^{(1,\lambda)}(x). \tag{5.3.14}$$

Коначно, изједначавањем израза у (5.3.13) и (5.3.14) и коришћењем Лежандрове дупликационе формуле

$$\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma\Big(z+\frac{1}{2}\Big),$$

као и особине гама функције, добијамо модификоване моменте $m_k^\lambda(x)$ који су дати у тврђењу теореме.

Користећи интегралну форму за Кумерову хипергеометријску функцију ${}_1F_1\Big(k+\frac{1}{2};2k+\lambda+1;-x\Big)$, дату релацијом (5.2.1), имамо

$$G_k(\lambda)\int_0^1 \mathrm{e}^{-xt}t^{k-\frac{1}{2}}(1-t)^{k+\lambda-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

где је

$$G_k(\lambda)=\frac{\Gamma(2k+\lambda+1)}{\Gamma(k+\frac{1}{2})\Gamma(k+\lambda+\frac{1}{2})},$$

и након смене променљиве $t=\cos^2\theta$, добијамо алтернативни израз (5.3.10) за модификоване моменте $m_k^\lambda(x)$. □

На основу претходне теореме два интересантна случаја са Чебишевљевим мерама прве врсте ($\lambda=0$) и друге врсте ($\lambda=1$) се могу добити као последице претходне теореме.

Последица 5.3.1. *Нека су $\widehat{T}_k(t)$ монични Чебишевљеви полиноми прве врсте ортогонални у односу на тежинску функцију $t \mapsto (1-t^2)^{-1/2}$ на $(-1,1)$. Модификовани моменти*

$$m_k^0(x) = \int_0^1 \widehat{T}_{2k}(\sqrt{t}) \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

се могу изразити преко Кумерове конфлуентне функције као

$$m_0^0(x) = \pi\, {}_1F_1\Big(\frac{1}{2}; 1; -x\Big) = \pi \mathrm{e}^{-x/2} I_0\Big(\frac{x}{2}\Big)$$

и за $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} m_k^0(x) &= \frac{(-1)^k \pi}{2^{4k-1} k!} x^k\, {}_1F_1\Big(k + \frac{1}{2}; 2k+1; -x\Big) \\ &= \frac{(-1)^k \pi}{2^{2k-1}} \mathrm{e}^{-x/2} I_k\Big(\frac{x}{2}\Big), \end{aligned} \tag{5.3.15}$$

где је $I_k(z)$ модификована Беселова функција прве врсте реда k. Алтернативно,

$$m_k^0(x) = \frac{(-1)^k \mathrm{e}^{-x/2} x^k}{2^{2k} (k)_k} Q_k^0(x), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

где је $Q_k^0(x)$ интеграл дат са (5.3.11).

Последица 5.3.2. *Нека је $\widehat{U}_k(t)$ монични Чебишевљев полином друге врсте у односу на тежинску функцију $t \mapsto (1-t^2)^{1/2}$ на $(-1,1)$. Модификовани моменти*

$$m_k^1(x) = \int_0^1 \widehat{U}_{2k}(\sqrt{t}) \mathrm{e}^{-xt} \sqrt{\frac{1-t}{t}}\,\mathrm{d}t, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

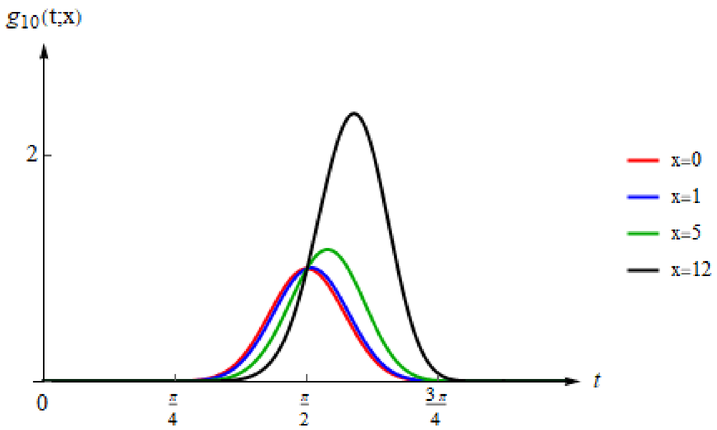
се могу изразити преко Кумерове конфлуенте хипергеометријске функције са

$$m_k^1(x) = \frac{(-1)^k \pi}{2^{4k+1} k!} x^k\, {}_1F_1\Big(k + \frac{1}{2}; 2k+2; -x\Big).$$

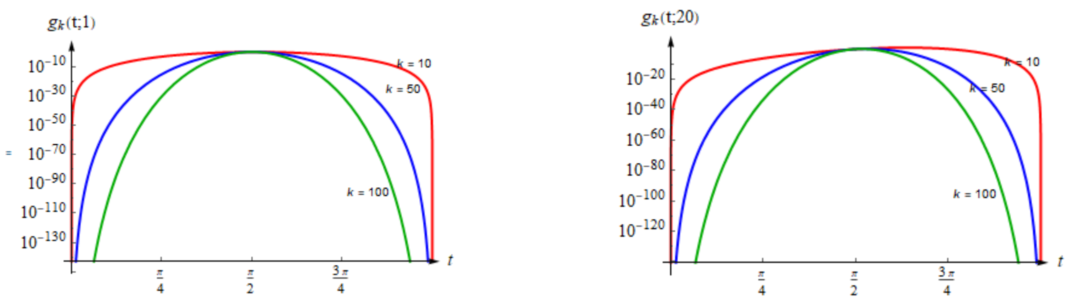
Алтернативно,

$$m_k^1(x) = \frac{(-1)^k \mathrm{e}^{-x/2} x^k}{2^{2k+1} (k+1)_k} Q_k^1(x), \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

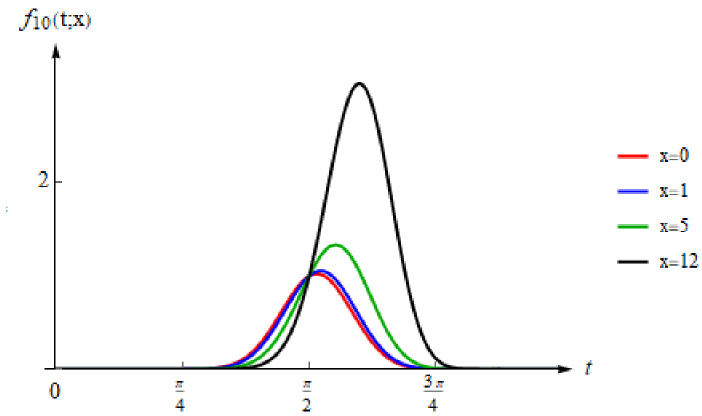
где је $Q_k^1(x)$ је интеграл дат са (5.3.11).



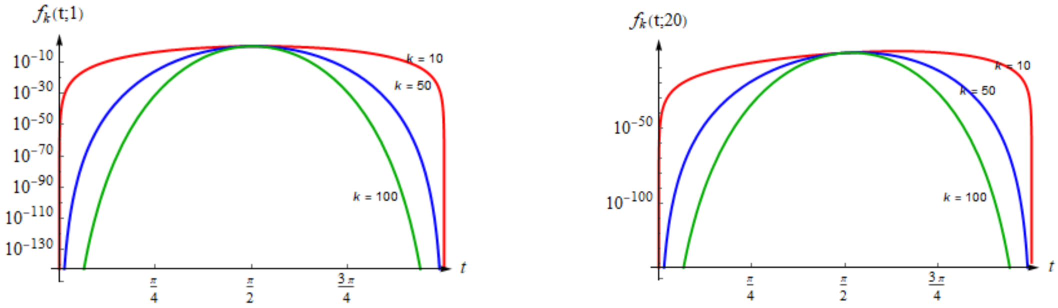
Слика 5.4: Графици интегранда $t \mapsto g_{10}(t;x)$ у интегралу $Q_k^0(x)$, $t \in (0,\pi)$ за $x = 0, 1, 5$ и 12



Слика 5.5: Графици интегранда $t \mapsto g_k(t;x)$ у интегралу $Q_k^0(x)$ за $k = 10$, 50, 100, када $x = 1$ (лево) и $x = 20$ (десно)



Слика 5.6: Графици интегранда $t \mapsto f_{10}(t;x)$ у интегралу $Q_{10}^1(x)$, $t \in (0,\pi)$ за $x = 0, 1, 5$ и 12



Слика 5.7: Графици интегранда $t \mapsto f_k(t;x)$ у интегралу $Q_k^1(x)$ за $k = 10,\ 50,\ 100$, када је $x = 1$ (лево) и $x = 20$ (десно)

На основу понашања интегранда, за одређивање вредности интеграла Q_k^λ, тј. модификованих момената m_k^λ у софтверу Mathematica можемо користити команду NIntegrate са опцијама Method$\to$ "DoubleExponential", WorkingPrecision $\to$ WP, где је WP прецизност са којом радимо.

5.3.2 Нумеричка конструкција

У оквиру пакета OrthogonalPolynomials у софтверу Mathematica омогућен је рад са модификованим моментима за генерисање рекурентних коефицијената a_k и b_k у (5.3.1). Следећи низ команди нам даје тражене коефицијенте

```
<<orthogonalPolynomials`
% akM=... (sequence of the length 2n)
% bkM=... (sequence of the length 2n)
% Mmom=...(sequence of the length 2n)
{a,b}=aChebyshevAlgorithmModified[
  Mmom,akM,bkM,WorkingPrecision->WP];
```

где су akM и bkM коефицијенти у трочланој рекурентној релацији (5.3.6) и Mmom је низ модификованих момената дат у теореми 5.3.1 са релацијом (5.3.10).

За дате вредности λ, n и x, као и нумеричку прецизност WP, коефицијенти a_k и b_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, у рекурентној релацији (5.3.1) су добијени као низови a и b. Њихове максимална релативна грешка је дата са

$$\mathrm{err}_n^\lambda(\mathrm{WP}) = \max_{0 \le k \le n-1} \left\{ \left| \frac{a_k - \widehat{a}_k}{\widehat{a}_k} \right|, \left| \frac{b_k - \widehat{b}_k}{\widehat{b}_k} \right| \right\},$$

где се тачне вредности коефицијената $\widehat{a}_k$ и $\widehat{b}_k$ могу добити коришћењем исте процедуре, али са већом прецизношћу WP1. На пример, ако узмемо $\lambda = 0, n = 100$ и $x = 1$, за WP=30 добијамо првих 100 коефицијената a_k и b_k, без губљења цифара. Као што видимо из табеле 5.1 конвергенција низова према граничној вредности (5.3.3) је веома брза. У табели 5.2 дати су коефицијенти a_k и b_k за $\lambda = 1$ и $x = 1$ када је WP= 30.

k	a_k^0	b_k^0
0	0.378750193709599027324648823248	2.026438066949355305143363055430
1	0.558108977120640683421160182517	0.114048678184139268042120835991
2	0.500638815763627602857962430445	0.0644019873749736944597342268427
3	0.500002010402165855585412829707	0.0625100250180638822043294025279
4	0.500000003001355138913484171981	0.0625000209807900172326264490836
5	0.500000000002610206433841003986	0.0625000000234725623589669607001
6	0.500000000000001484867909740311	0.0625000000000163246186141457655
7	0.500000000000000000595403462627	0.0625000000000000077372313620488
8	0.500000000000000000000177314407	0.0625000000000000000026589417479
9	0.500000000000000000000000040763	0.0625000000000000000000006928113
10	0.500000000000000000000000000007	0.0625000000000000000000000001416
$n > 10$	0.500000000000000000000000000000	0.0625000000000000000000000000000

Табела 5.1: Рекурентни коефицијенти a_k и b_k за $\lambda = 0$ и $x = 1$

k	a_k^1	b_k^1
0	0.1951707752062029452250123170681	1.25892425655178158085383628889
1	0.492369409237196312466038718076	0.0474206941240186333788208899713
2	0.499959899573717468448636688487	0.0623402673217831219733696115172
3	0.499999916076838852731234740210	0.0624994973992760160598053736493
4	0.499999999906109750563098106625	0.0624999992496612149724710448499
5	0.499999999999934701525543416533	0.0624999999999347448391539570138 6
6	0.499999999999999969051074551805	0.0624999999999996287830225649221
7	0.499999999999999999989364233008	0.0624999999999999998511491343433
8	0.499999999999999999999997228755	0.0624999999999999999999556713983
9	0.499999999999999999999999999434	0.0624999999999999999999999898093
10	0.500000000000000000000000000000	0.0624999999999999999999999999981
> 10	0.500000000000000000000000000000	0.0625000000000000000000000000000

Табела 5.2: Рекурентни коефицијенти a_k и b_k за $\lambda = 1$ и $x = 1$

Коефицијенти a_k и $b_k, k = 0, 1, \ldots, 99$, нам омогућавају конструкцију Гаусових квадратура (5.3.4) за све $n \leq 100$, као и правила (5.1.2) на $(-1, 1)$, тј. (5.1.3) за све $N = 2n \leq 200$. Приметимо да је квадратурно правило (5.1.3) са $N = 200$ чворова тачно за све полиноме степена не вишег од $2N - 1 = 399$.

Да бисмо анализирали стабилност конструкције рекурентних коефицијената користимо две различите аритметике WP= 30 и стандардну аритметику двоструке прецизности (WP=MP). У табелама 5.3 и 5.4 дате су максималне релативне грешке $\mathrm{err}_n^{\lambda}(x;\ \mathrm{WP})$ рекурентних коефицијената за $x = 15, 20, 30$, када је $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$.

Табела 5.3: Максималне релативне грешке $err_{100}^{0}(x; WP)$ рекурентних коефицијената за $x = 15, 20, 30$ и $\lambda = 0$ у две различите аритметике

WP	$x = 15$	$x = 20$	$x = 30$
30	2×10^{-29}	6.30×10^{-27}	1.29×10^{-22}
MP	1.12×10^{-13}	3.05×10^{-11}	3.74×10^{-6}

Табела 5.4: Максималне релативне грешке $err_{100}^{1}(x; WP)$ рекурентних коефицијената за $x = 15, 20, 30$ и $\lambda = 1$ у две различите аритметике

WP	$x = 15$	$x = 20$	$x = 30$
30	1.4×10^{-28}	3.03×10^{-26}	1.03×10^{-21}
MP	3.95×10^{-13}	1.26×10^{-10}	6.01×10^{-6}

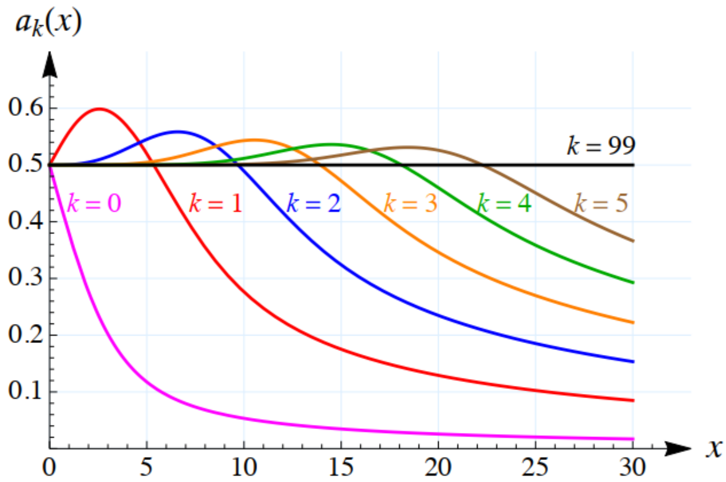
На основу података у табелама 5.3 и 5.4 губитак цифара практично не постоји за вредности $x \leq 12$ за обе вредности λ. У оба случаја имамо губитак највише две, пет или десет децималних цифара, када је $x = 15$, $x = 20$ или $x = 30$, респективно, у зависности од аритметике коју користимо. Дакле, за $x < 12$, метод је добро условљен и његов кондициони број је близу јединице. Иначе, ако је кондициони број пресликавања 10^m, тада је приближно m децималних цифара у резултату изгубљено. Одавде можемо закључити да је кондициони број приближно $10^2, 10^5$ и 10^{10}, за претходно посматране вредности $x = 15, 20$ и 30. У оваквим случајевима, ако нам је потребно l тачних децималних цифара у рекурентним коефицијентима a_k и b_k за све $k < n$, тада морамо да користимо прецизност са којом радимо најмање WP$= l + m$ (видети [46]). Ово значи да за израчунавање првих $n = 100$ рекурентних коефицијената са 16 тачних децималних цифара, за реализацију методе потребна је само аритметика стандардне двоструке прецизности (MP=WP) када је $x < 12$, али за веће вредности x је потребна радна прецизност WP=MP$+m$. На пример, за $x \leq 30$ потребна је прецизност WP$= 26$.

Сада, за дате вредности λ и $X > 0$, потребно је да одредимо коефицијенте $a_k(x)$ и $b_k(x)$ за све $x \in [0, X]$ и $k = 0, 1, \ldots, n - 1$. Према раду [64], одаберимо прво систем тачака $S = \{x_\nu\}$ на интервалу $[0, X]$, а затим одредимо одговарајуће вредности коефицијената $a_k(x_\nu)$ и $b_k(x_\nu)$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и онда конструишемо одговарајуће интерполационе функције за све коефицијенте. Цео рачун се може извести у софтверу Mathematica, коришћењем функције Interpolation$[\{\{x_1, f_1\}, \{x_2, f_2\}, \ldots\}]$. Поменута функција у софтверу конструише интерполацију вредности функције f_ν која одговара x вредностима x_ν и издаје InterpolatingFunction објекат који се може користити као било која функција. Команда Interpolation у софтверу Mathematica ради тако што уклапа полиномне криве између узастопних тачака (података), са степеном одговарајуће полиномне криве што се може задати опцијом InterpolationOrder$\to r$, са стандардним подешавањем $r = 3$, што је довољно у нашем случају.

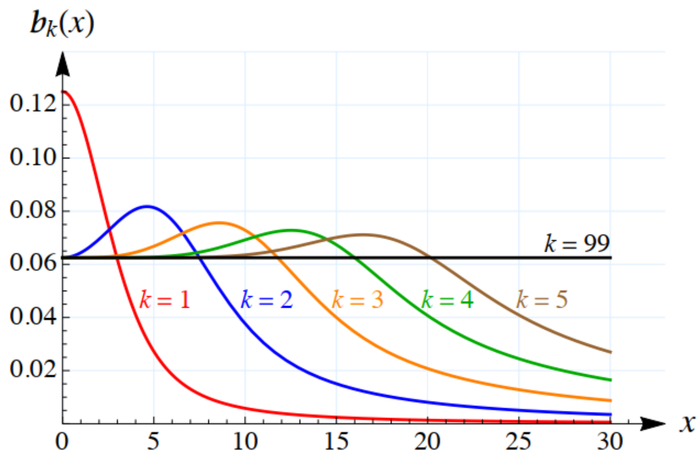
Ову процедуру ћемо показати за $\lambda = 0$, $X = 30$, и због једноставности узећемо еквидистантне тачке, на пример

$$S = \left\{ x_\nu = \frac{\nu}{10} \middle| \nu = 0, 1, \ldots, 300 \right\}.$$

Такође, могуће је одабрати скуп S и са мањим бројем тачака са знатно већим размаком у другој половини интервала. Добијене интерполационе функције за коефицијенте ћемо обележити као функције $x \mapsto a_k(x)$ и $x \mapsto b_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, 99$. На сликама 5.8 и 5.9 су дати коефицијенти ($\lambda = 0$).

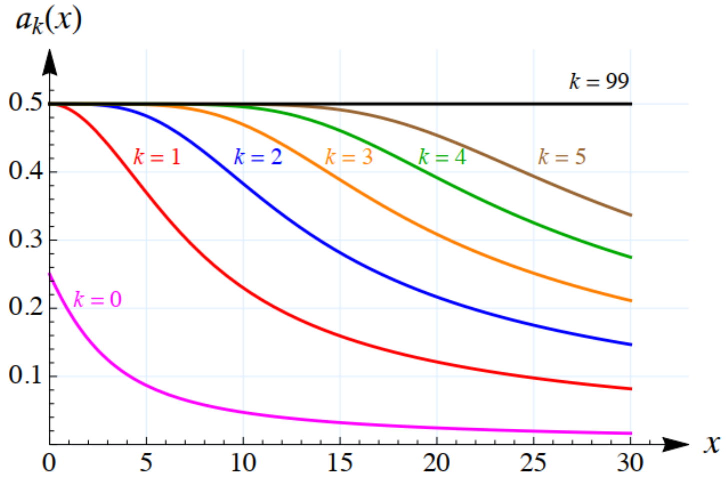


Слика 5.8: Рекурентни коефицијенти $a_k(x)$ за $x \in (0, 30)$ када је $\lambda = 0$

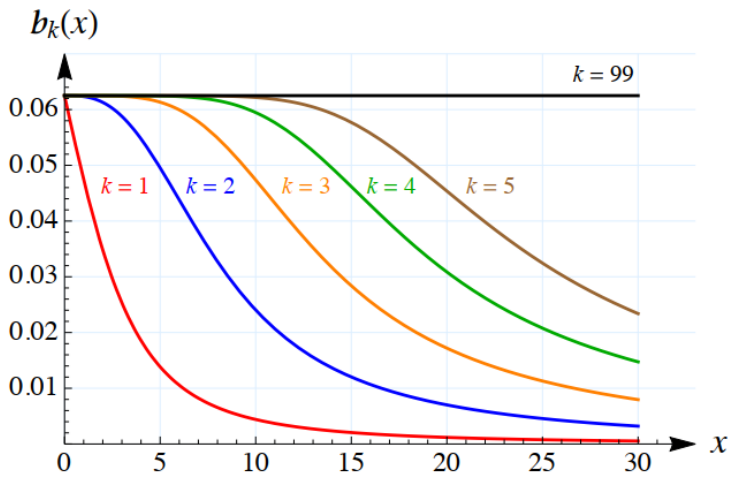


Слика 5.9: Рекурентни коефицијенти $b_k(x)$ за $x \in (0, 30)$ када је $\lambda = 0$

Одговарајући графици за $\lambda = 1$ су дати на сликама 5.10 и 5.11.



Слика 5.10: Рекурентни коефицијенти $a_k(x)$ за $x \in (0, 30)$ када је $\lambda = 1$



Слика 5.11: Рекурентни коефицијенти $b_k(x)$ за $x \in (0, 30)$ када је $\lambda = 1$

Ови коефицијенти нам омогућавају конструкцију параметара квадратурне формуле (5.3.4), чворова ξ_k и тежинских коефицијената B_k, $k = 1, \ldots, n$, за све n (у овом случају $n \le 100$) коришћењем алгоритма Голуб-Велча, са одговарајућом тродијагоналном Јакобијевом матрицом $J_n(\Omega^\lambda(\cdot;x))$ која је дата са

$$\begin{bmatrix} a_0(x) & \sqrt{b_1(x)} & \ldots & \ldots & \mathbf{O} \\ \sqrt{b_1(x)} & a_1(x) & \sqrt{b_1(x)} & \ldots & \\ & \sqrt{b_2(x)} & a_2(x) & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \sqrt{b_{n-1}(x)} \\ \mathbf{O} & \ldots & \ldots & \sqrt{b_{n-1}(x)} & a_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

и чије сопствене вредности, чворови $\xi_k, k = 1, \ldots, n$, и тежински коефицијенти B_k, се могу одредити из прве компоненте нормализованог сопственог вектора који одговара ξ_k. Ово можемо одредити у софтверу Mathematica преко следећих линија кода:

```
{xi,B}=aGaussianNodesWeights[n,a,b,
  WorkingPrecision->WP,Precision->PR]
```

где су a и b су низови рекурентних коефицијената и PR је захтевана прецизност за низове xi (чворова) и B (тежинских коефицијената). Овај процес је стабилан, па обично стављамо WP=PR+5.

5.4 Ортогонални полиноми и Гаусове квадратуре на (-1,1)

Како смо у претходној секцији одредили параметре n-тачкастог квадратурног правила (5.3.4) на $(0,1)$, ξ_k и B_k, сада можемо једноставно добити квадратурне параметре τ_k и A_k оригиналне квадратурне формуле (5.1.2) на $(-1,1)$ коришћењем релација (5.3.5). На овај начин, добијамо параметре у $2n$-тачкастом симетричном квадратурном правилу решавањем проблема сопствених вредности Јакобијеве матрице реда само n.

Такође, лако можемо добити коефицијенте β_k у трочланој рекурентној релацији (5.1.4) за полиноме $\pi_k^\lambda(t;x)$ ортогоналне на $(-1,1)$ у односу на тежинску функцију $t \mapsto \omega^\lambda(t;x)$ дату са (5.1.1), коришћењем релација (5.3.2). Заправо, познавајући a_k и b_k за $k = 0, 1, \ldots, n-1$, имамо

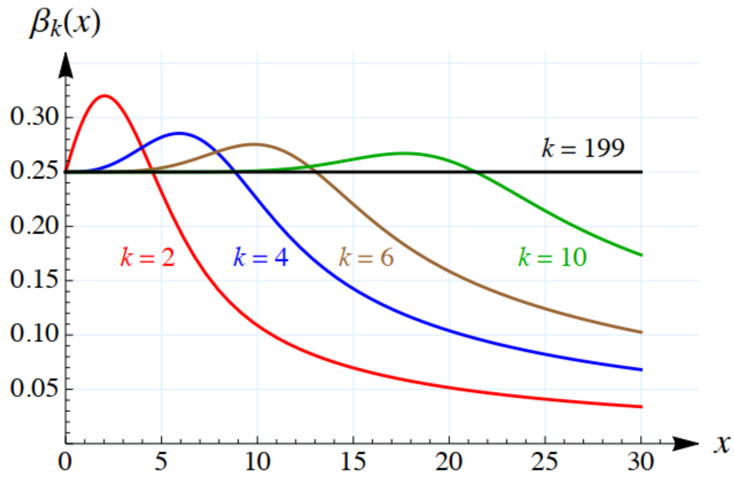
$$\beta_0 = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda+1)}\,{}_1F_1\Big(\frac{1}{2}, \lambda+1, -x\Big), \quad \beta_1 = a_0,$$

и

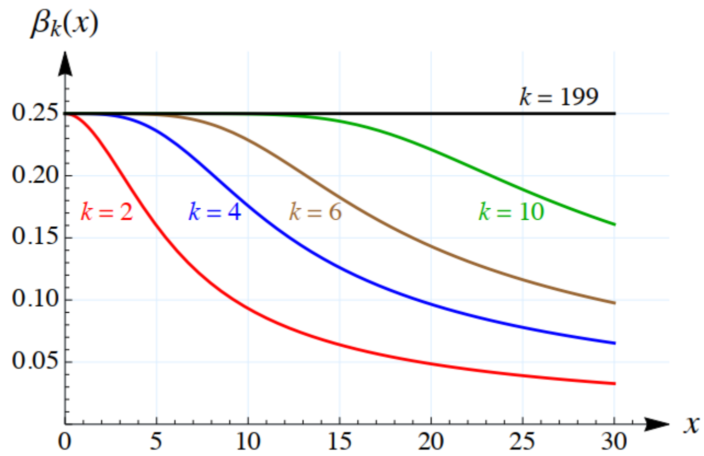
$$\beta_{2k} = \frac{b_k}{\beta_{2k-1}}, \quad \beta_{2k+1} = a_k - \beta_{2k}, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

за које такође можемо конструисати одговарајуће интерполационе функције на скупу S као и у претходном делу за коефицијенте у трочланој рекурентној релацији (5.3.1).

На сликама 5.12 и 5.13 су дати графици за неке селектоване вредности коефицијената β_k у случајевима $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$, респективно.



Слика 5.12: Случај $\lambda = 0$: Рекурентни коефицијенти $x \mapsto \beta_k(x)$, за $k = 2, 4, 6, 10$ и 199, када $x \in [0, 30]$



Слика 5.13: Случај $\lambda = 1$: Рекурентни коефицијенти $x \mapsto \beta_k(x)$, за $k = 2, 4, 6, 10$ и 199, када $x \in [0, 30]$

На крају, као једну од могућих примена генерализованих Гаус-Рисових квадратурних формула наводимо решавање Фредхолмових интегралних једначина са језгром $K(x;t) = \mathrm{e}^{-xt^2}(1-t^2)^{\lambda-1/2}$ на $[-1,1]$ (видети [3] и [39]).

Библиографија

[1] N. I. Akhiezer, Orthogonal polynomials on several intervals, Dokl. Akad. Nauk SSSR 134, 9—12 (1960).

[2] W. Al-Salam, W. R. Allaway, R. Askey, Sieved ultraspherical polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. 284, 39–55 (1984).

[3] A. Asanov, K. B. Matanova, A. R. Asanov, A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind. Kuwait J. Sci. 44 (1), 17–28 (2017) .

[4] W. Van Assche, Orthogonal polynomials in the complex plane and on the real line, In: Special Functions, q-Series and Related Topics (M. E. H. Ismail et al., eds.), Fields Institute Communications 14, 211–245 (1997).

[5] G. I. Barkov, Some systems of polynomials orthogonal in two symmetric intervals, Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika 17(4), 3–16 (1960) (на руском).

[6] S. F. Boys, Electronic wave functions - I. A general method of calculation for the stationary states of any molecular system, Proc. R. Soc. (London) A 200, 542–554 (1950).

[7] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, New York, 1978.

[8] A. S. Cvetković, Programski paket za simboličku i numeričku konstrukciju ortogonalnih polinoma i kvadraturnih formula, Magistarska teza, Univerzitet u Nišu, 2002.

[9] A.S. Cvetković, M. M. Matejić, G. V. Milovanović, Orthogonal polynomials for modified Chebyshev measure of the first kind. Results Math. 69, 443-455 (2016).

[10] A. S. Cvetković, G.V. Milovanović, The Mathematica Package "Orthogonal Polynomials", Facta Univ. Ser. Math. Inform. 19, 17–36 (2004).

[11] A. S. Cvetković, G. V. Milovanović, N. Vasović, Differential Equation for a Class of Orthogonal Polynomials, Second International Conference "Mathematics Days in Sofia", July 10—14, Sofia, Bulgaria, 2017.

[12] A. S. Cvetković, G. V. Milovanović, N. Vasović, Recurrence relation and differential equation for a class of Orthogolnal polynomials, Results Math. 73 (1), 73:16 (2018), DOI: 10.1007/s00025-018-0779-8.

[13] A. S. Cvetković, P. Rajković, M. Ivković: *Catalan numbers, the Hankel transform, and Fibonacci numbers.* Journal of Integer Sequences 5, Article 02.1.3 (2002).

[14] M. Dupuis, H. Rys, F. King, Evaluation of molecular integrals over Gaussian basis functions, J. Chem. Phys. 65, 111–116 (1976).

[15] W. Gautschi, On generating orthogonal polynomials, SIAM J. Sci. Statist. Comput. 3, 289–317 (1982).

[16] W. Gautschi, Algorithm 726: ORTHPOL - A package of routines for generating orthogonal polynomials and Gauss-type quadrature rules., ACM Trans. Math. Software 20, 21–62 (1994).

[17] W. Gautschi, Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation, Clarendon 2004.

[18] W. Gautschi, Orthogonal polynomials (in Matlab), J. Comput. Appl. Math. 178, 215–234 (2005).

[19] W. Gautschi, Orthogonal Polynomials in Matlab, Exercises and Solutions, Software–Environments–Tools, SIAM, Philadelphia, PA, 2016.

[20] W. Gautschi, A Software Repository for Orthogonal Polynomials. Software, Environments and Tools. Vol. 28. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA 2018.

[21] W. Gautschi, S. Li, A set of orthogonal polynomials induced by a given orthogonal polynomial, Aequationes Math. 46, 174–198 (1993).

[22] W. Gautschi, G. V. Milovanović, Polynomials orthogonal on the semicircle, J. Approx. Theory 46, 230-250 (1986).

[23] J. S. Geronimo, W. Van Assche: Orthogonal polynomials on several intervals via a polynomial mapping, Trans. Amer. Math. Soc. 308, 559—581 (1988).

[24] G. Golub, J. H. Welsch, Calculation of Gauss quadrature rules, Math. Comp. 23, 221–230 (1969).

[25] E. Hendriksen, H. van Rossum, Semi–classical orthogonal polynomials, In: Polynômes Orthogonaux et Applications, Bar-le-Duc, 1984, Lecture Notes in Math, Vol 1171 (C. Brezinski et al. eds.), 354-361, Springer, Berlin, 1985.

[26] M. E. H. Ismail, On sieved orthogonal polynomials, III: orthogonality on several intervals, Trans. Amer. Math. Soc. 294, 89-111 (1986).

[27] M. E. H. Ismail, An electrostatic model for zeros of general orthogonal polynomials, Pacific J. Math. 193, 355-369 (2000).

[28] M. E. H. Ismail, Functional equations and electrostatic models for orthogonal polynomials, Random Matrices and Their Applications (MSRI Publications) 40, 225-244 (2001).

[29] H. F. King, Strategies for Evaluation of Rys Roots and Weights, The Journal of Physical Chemistry A, 120 (46), 9348-9351 (2016).

[30] H. F. King, M. Dupuis, Numerical Integration Using Rys Polynomiaals, J. Compit. Phys. 21, 144-165 (1976).

[31] C. Krattenthaler, Advanced determinant calculus, The Andrews Festschhrift (Maratea, 1998), Sem. Lothar. Combin. 42, Art. B42q, 67 pp (1999). (electronic).

[32] K. V. Laščenov, On a class of orthogonal polynomials, Leningrad. Gos. Ped. Inst. Uč. Zap. 89, 167-189 (1953) (на руском).

[33] D. S. Lubinsky, Asymptotics of orthogonal polynomials: some old, some new, some identities, In: Proceedings of the International Conference on Rational Approximation, ICRA99 (Antwerp), Acta. Appl. Math. 61, 207–256 (2000).

[34] F. Marcellán, A. Martínez-Finkelshtein, P. Martínez-González, Electrostatic models for zeros of polynomials: Old, new, and some open problems, J. Comput. Appl. Math. 207 (2007) 258-272.

[35] P. Maroni, Une caractérisation des polynômes orthogonaux semi-classiques, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 301 (6), 269-272 (1985).

[36] P. Maroni, Prolégomènes à l'étude des polynômes orthogonaux semi-classiques, Ann. Mat. Pura Appl. 4 (149), 165-184 (1987).

[37] M. Masjed-Jamei, G.V. Milovanović, Construction of Gaussian quadrature formulas for even weight functions, Appl. Anal. Discrete Math. 11, 177–198 (2017).

[38] G. Mastroianni, G. V. Milovanović, Interpolation Processes, Basic Theory and Applications. Springer, Berlin (2008)

[39] G. Mastroianni, G. V. Milovanović, Wellconditioned matrices for numerical treatment of Fredholm integral equations of the second kind. Numer. Linear Algebra Appl. 16, 995– 1011 (2009).

[40] G. Meurant, A. Sommariva, Fast variants of the Golub and Welsch algorithm for symmetric weight functions in Matlab, Numer. Algorithms 67, 491–506 (2014).

[41] Г. В. Миловановић, Нумеричка анализа, I део, Научна књига, Београд, 1991.

[42] Г. В. Миловановић, Нумеричка анализа, II део, Научна књига, Београд, 1991.

[43] G.V. Milovanović, A class of orthogonal polynomials on the radial rays in the complex plane, J. Math. Anal. Appl. 206, 121–139 (1997).

[44] G. V. Milovanović, Orthogonal polynomials on the radial rays and an electrostatic interpretation of zeros. Publ. Inst. Math. 64, 53-–68 (1998)

[45] G.V. Milovanović, Numerical Analysis and Approximation Theory – Introduction to Numerical Processes and Solution of Equations, Завод за уџбенике, Београд, 2014.

[46] G.V. Milovanović, Construction and applications of Gaussian quadratures with nonclassical and exotic weight functions, Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math. 60, 211– 233 (2015).

[47] G.V. Milovanović, Generalized Gaussian quadratures for integrals with logarithmic singularity, Filomat 30, 1111–1126 (2016).

[48] G. V. Milovanović, An efficient computation of parameters in the Rys quadrature formula, Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math. 43, (2018).

[49] G.V. Milovanović, A note on extraction of orthogonal polynomials from generating function for reciprocal of odd numbers, Indian J. Pure Appl. Math. 50, 15 – 22 (2019).

[50] G.V. Milovanović, A. S. Cvetković, Special classes of orthogonal polynomials and corresponding quadratures of Gaussian type, Math. Balkanica 26, 169–184 (2012).

[51] G. V. Milovanović, T. Igić, D. Turnić, Generalized quadrature rules of Gaussians type for numerical evaluation of singular integrals, J. Comput. Appl. Math. 278, 306–325 (2015)

[52] G. V. Milovanović, D. S. Mitrinović, Th. M. Rassias, Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros, World Scientific, Singapore– New Jersey –London – Hong Kong, 1994.

[53] G. V. Milovanović, R. K. Parmer, A. K. Rathie, A study of generalized summation theorems for the series ${}_2F_1$ with an applications to Laplace transforms of convolution type integrals involving Kummer's functions ${}_1F_1$, Appl. Anal. Discrete Math. 12, 257–272 (2018).

[54] G. V. Milovanović, R. K. Parmer, A. K. Rathie, Certain Laplace trans forms of convolution type integrals involving product of two special ${}_pF_p$ functions, Demonstr. Math. 81, 264–276 (2018).

[55] G. V. Milovanović, A. K. Rathie, On a quadratic transformation due to Exton and its generalization, Hacet. J. Math. Stat., 48 (6), 1706–1711 (2019).

[56] G.V. Milovanović, N. Vasović, Orthogonal polynomials and generalized Gauss-Rys quadrature formulae, Kuwait Journal of Science, 49(1), 1-11 (2022) (прихваћен за штампу).

[57] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, Foundations of the Theory of Special Functions, Nauka, Moscow, 1974 (на руском).

[58] S. Ostrovska, M. Turan, On the powers of the Kummer distribution. Kuwait J. Sci. 44 (2), 1–8 (2017).

[59] T. Popoviciu, Sur certains probléme de maximum de Slieltjes, Bulletin Mathcmatique de Ia Societe Roumainc des Sciences, vol. 38, 73-96 (1936).

[60] A. P. Prudnikov, A. Yu. Brychkov, O. I. Marichev, Integrals and Series, Vol. 2 Special Functions, Translated from the Russian by N. M. Queen. Gordon&Breach Science Publisher, New York, 1986.

[61] J. Rys, M. Dupuis, H. F. King, Computation of electron repulsion integrals using Rys quadrature method, J. Comput. Chem. 4, 154–157 (1983).

[62] R. P. Sagar, V. H. Smith, On the calculation of Rys polynomials and quadratures, Int. J. Quant. Chem. 42(4), 827-836 (1992).

[63] R. P. Schwenke, On the computation of high order Rys quadrature weights and nodes, Comput Phys. Comm. 42, 762–763 (1992).

[64] B. D. Shizgal, A novel Rys quadrature algorithm for use in the calculation of electron repuslion integrals, Comput. Theor. Chem. 1074, 178–184 (2015).

[65] P.S. Stanimirovic, G.V. Milovanovic, Program Package Mathematica and Applications, Faculty of Electronic Engineering, Niš, XII + 242 pp (2002) (на српском).

[66] T. J. Stieltjes, Sur quelques théorèmes d'algébre, C.R. Acad. Sci. Paris 100, 439–440 (1885). [Oeuvres Complètes, Vol. 1, 440–441]

[67] T. J. Stieltjes, Sur les polynômes de Jacobi, C.R. Acad. Sci. Paris 100, 620–622 (1885). [Oeuvres Complètes, Vol. 1, 442–444]

[68] T. J. Stieltjes, Sur les racines de l'équation $X_n = 0$, Acta Math. 9, 385–400 (1890). [Oeuvres Complètes, Vol. 2, 73–88]

[69] P. K. Suetin, Classical Orthogonal Polynomials, Nauka, Moscow, 1976 (на руском).

[70] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 23, 4th ed., Amer. Math. Soc., Providence, 1975

[71] H. Taketa, S. Huzinaga, K. O. Ohato, Gaussian-Expansion Methods for Molecular Integrals, J. Phys. Soc. Japan 21, 2313-2324 (1966).

[72] J. C. Wheeler, Modified moments and Gaussian quadratures, Rocky Mountain J. Math 4, 287–196 (1974).

[73] S. Wolfram, The Mathematica Book, The fifth edition, Wolfram Media, Inc,(2003).

Прилог А: *Mathematica* **код у пакету** *RationalExpressionsES.m*

```
(*
Verzija Mathematica - e : 10.0

Ime : RationalExpressions.m

Autor : Nevena M. Vasovic
Opis : Programska podrska nekih rezultata dobijenih u disertaciji *)

BeginPackage["CrackingRationalComplexity`RationalExpressionsES`"]

aCheckHypothesysWithRootsOfN::usage="
aCheckHypothesysWithRootsOfN[beta_?ListQ,n_?IntegerQ,nN_?IntegerQ]";

aRunTestES::usage=
         "Modul aRunTestES[beta_?ListQ,n_?IntegerQ,nN_?IntegerQ,x_,ops___]
          izdaje racionalan izraz po x, u simbolickom obliku koga zadovoljavaju
          clanovi niza beta, ako takav izraz postoji za unete vrednosti
          stepena n i broja nN:";

CheckHypothesysWithRootsOfN[beta_?ListQ, n_?IntegerQ, nN_?IntegerQ] :=
Module[{mat1, num, i, ell, m, slob, den, sol, coef,
               lim, err, hyp, mat2, k},
    num = Numerator /@ beta;
    den = Denominator /@ beta;
    If[nN <= 0, Print["Third argument must be positive integer"];
          Return[];
      ];
   mat1 = {};
   For[i = 1, i < 2 nN (n + 1), ++i,
         mat1 =
          AppendTo[mat1, Join[den[[i]] Flatten[
           Table[Exp[(2 Pi I)/nN]^ (i*m) i^ell, {m, 0, nN - 1}, {ell, 0, n}]],
            -num[[i]] Flatten[
      Table[Exp[(2 Pi I)/nN]^ (i*m) i^ell, {m, 0, nN - 1}, {ell, 0, n}]]]];

      ];

   slob = Table[-den[[i]] i^n, {i, 1, 2 nN (n + 1) - 1}];
   mat1 = Transpose[mat1];
   mat1 = Delete[mat1, {n + 1}];
   mat1 = Transpose[mat1];
   coef = LinearSolve[mat1, slob];
   If[ToString[coef[[0]]] === "LinearSolve",
          Return[{False, {}, {}}];];
   lim = Length[beta];
   err = {};
```

```
hyp = True;
       For[k = 2 nN (n + 1), k <= lim, ++k,
           mat2 =
               Join[den[[k]] Table[k^ell, {ell, 0, n - 1}],
                      den[[k]]* Flatten[Table[
             Exp[(2 Pi I)/nN]^(k*m) k^ell, {m, 1, nN - 1}, {ell, 0, n}]]];
           err =
            AppendTo[err, Join[mat2, -num[[k]] Flatten[
                    Table[Exp[(2 Pi I)/nN]^ (k*m) k^ell, {m, 0, nN - 1}, {ell,
                                      0, n}]]].coef + den[[k]]*k^n];
           mat2 = {};
          If[err[[-1]] != 0, hyp = False;
                   Break[];];
    If[Join[
         num[[k]] Flatten[
           Table[Exp[(2 Pi I)/nN]^ (k*m) i^ell, {m, 0, nN - 1}, {ell,
                 0, n}]]].Take[coef, -nN*(n + 1)] == 0, hyp = False;
             Break[];];];

     Return[{hyp, err, coef}];
];

Options[aRunTestES] = {Method -> CrackingRationalComplexity`LinearSolveMethod};
aRunTestES[beta_?ListQ, n_?IntegerQ, nN_?IntegerQ, x_, ops___] :=

Module[{nn1, NN1, hyp, err, coef, ell, i, mat1, listacoef, lengthList,
 nullList,rules, izraz2, s, izraz1, mat3, mat2, t, izraz, method},

        {method} = {Method} /. {ops} /. Options[aRunTestES];
        lengthList=Length[beta];
        nullList=Table[0,{i,1,lengthList}];

        If[nullList==beta,Return[0]];
            mat1 = {};
           If[ToString[method] === "LinearSolveMethod",
                 For[NN1 = 1, NN1 <= nN, ++NN1,
                   {hyp, err, coef} = aCheckHypothesysWithRootsOfN[beta, n, NN1];
                     If[hyp,
                       For[i = 1, i <= 2 NN1, ++i,
                        If[i == 1, AppendTo[mat1, Join[Take[coef, n], {1}]],
                            AppendTo[mat1,
                     Take[coef, {(i - 1)*n + (i - 1), i*n + (i - 1)}]];
                    ];
                ];
         mat2 = Take[mat1, {1, NN1}];
         mat3 = Take[mat1, {NN1 + 1, 2 NN1}];
```

```
            izraz1 =
                Plus @@ Table[mat2[[i + 1]].Flatten[
                        Table[Exp[(2 Pi I)/NN1]^ (x*i) x^ell, {ell, 0, n}]],
                         {i, 0,NN1 - 1}];
           izraz2 =
                Plus @@ Table[mat3[[i + 1]].Flatten[
                    Table[Exp[(2 Pi I)/NN1]^(x*i) x^ell, {ell, 0, n}]],
                    {i, 0, NN1 - 1}];
         izraz = Simplify[izraz1/izraz2];
         Return[izraz];
         ];
      ];
    ];
];

End[]

EndPackage[]
```

Биографија

Невена Васовић је рођена 30.07.1986. године у Крагујевцу. Основну школу завршила је у Крагујевцу, као носилац дипломе Вук Караџић, а затим Прву крагујевачку гимназију, смер природно-математички. Дипломирала је на Природно-математичком факултету у Крагујевцу 2010. године са просечном оценом 9.15 и стекла звање дипломирани математичар-информатичар. Од школске 2011/12. године студент је докторских студија математике на Природно-математичком факултету у Крагујевцу.

Списак објављених радова:

Кандидат Невена Васовић је до сада објавила два научна рада и има једно усмено излагање на међународној научној конференцији из области дисертације. Још један рад из области дисертације је у поступку припреме.

1. A. S. Cvetković, G. V. Milovanović, N. M. Vasović: Recurrence relation and differential equation for a class of orthogonal polynomials, Results Math. 73 (2018), no. 1, 73:16 (https://doi.org/10.1007/s00025-018-0779-8)
2. G.V. Milovanović, N. Vasović, Orthogonal polynomials and generalized Gauss-Rys quadrature formulae, Kuwait Journal of Science, 49(1), 1-11 (2022) (прихваћен за штампу)
3. A. S. Cvetković, G. V. Milovanović, N. Vasović, Differential Equation for a Class of Orthogonal Polynomials, Second International Conference "Mathematics Days in Sofia", July 10—14, Sofia, Bulgaria, 2017

Results Math (2018) 73:16

1422-6383/18/010001-19
published online February 5, 2018
https://doi.org/10.1007/s00025-018-0779-8

Results in Mathematics

Recurrence Relation and Differential Equation for a Class of Orthogonal Polynomials

Aleksandar S. Cvetković, Gradimir V. Milovanović, and
Nevena Vasović

Abstract. Given real number $s > -1/2$ and the second degree monic Chebyshev polynomial of the first kind $\widehat{T}_2(x)$, we consider the polynomial system $\{p_k^{2,s}\}$ "induced" by the modified measure $\mathrm{d}\sigma^{2,s}(x) = |\widehat{T}_2(x)|^{2s}\,\mathrm{d}\sigma(x)$, where $\mathrm{d}\sigma(x) = 1/\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ is the Chebyshev measure of the first kind. We determine the coefficients of the three-term recurrence relation for the polynomials $p_k^{2,s}(x)$ in an analytic form and derive a differential equality, as well as the differential equation for these orthogonal polynomials. Assuming a logarithmic potential, we also give an electrostatic interpretation of the zeros of $p_{4\nu}^{2,s}(x) (\nu \in \mathbb{N})$.

Mathematics Subject Classification. Primary 33C45.

Keywords. Orthogonal polynomials, Chebyshev measure, Chebyshev polynomials, recurrence relation, differential equation.

1. Introduction

Let $\mathrm{d}\sigma(x)$ be a positive measure on $\mathbb{R}$, with finite or unbounded support, having finite moments of all orders and let $\{p_k\}$ be the corresponding (monic) polynomials

$$p_k(x) = p_k(x, \mathrm{d}\sigma), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

The work was supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development (No. # OI 174015) and by the Serbian Academy of Sciences and Arts (Φ-96).

Birkhäuser

مجلة الكويت للعلوم
Kuwait Journal of Science

مجلـــس النشـــر العلمـــي
Academic Publication Council

جـامعـة الكـويت
Kuwait University

18th April 2021

Nsvena Vasovi'c
University of Kragujevac
Faculty of Hotel Management and Tourism
36210 Vrnja'cka Banja Serbia

Dear *Nevena Vasovi'c*,

I am pleased to inform you and the co-author: *Gradimir V. Milovanovi'c that* paper entitled: **" Orthogonal polynomials and generalized Gauss-Rys quadrature formulae "** with **MS ID**: *10665* has been accepted on 18-01-2021 for publication in **Kuwait Journal of Science**.

Print ISSN: 2307 – 4108
Online ISSN: 2307 – 4116
DOI Prefix: 10.48129
Expected year and Month for publication: 2022, January
Expected Volume and Issue for Publication: Volume- 49, Issue-1
Expected Page numbers: 1-11

With best wishes.

Prof. Shafiqah A. Alawdhi
Editor-in-chief
Kuwait Journal of Science

Prof. Shafiqah Abdulhamid Alawadhi
Editor-in-Chief
Kuwait Journal of Science.

فاكس: 24846725 (965)
Fax: (965) 24846725
e-mail:kjs@ku.edu.kw

هاتف: 24816261 (965) - 24984625 - 24986147
Tel.: (965) 24816261 - 24984625 - 24986147

ص.ب: 17225 - الخالدية 72453 الكويت
P.O.Box: 17225 - Khaldia, 72453 Kuwait
www.journals.ku.edu.kw/kjs

Образац 1

ИЗЈАВА АУТОРА О ОРИГИНАЛНОСТИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Невена Васовић, изјављујем да докторска дисертација под насловом:

Неке модификације класичних мера, одговарајући ортогонални полиноми и квадратуре Гаусовог типа

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу представља *оригинално ауторско дело* настало као резултат *сопственог истраживачког рада*.

Овом Изјавом такође потврђујем:

- да сам *једини аутор* наведене докторске дисертације,
- да у наведеној докторској дисертацији *нисам извршио/ла повреду* ауторског нити другог права интелектуалне својине других лица,
- да умножени примерак докторске дисертације у штампаној и електронској форми у чијем се прилогу налази ова Изјава садржи докторску дисертацију истоветну одбрањеној докторској дисертацији.

У Крагујевцу, 29.6.2021. године,

Васовић Невена

потпис аутора

Образац 2

ИЗЈАВА АУТОРА О ИСКОРИШЋАВАЊУ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

Ја, Невена Васовић,

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам

Универзитетској библиотеци у Крагујевцу да начини два трајна умножена примерка у електронској форми докторске дисертације под насловом:

Неке модификације класичних мера, одговарајући ортогонални полиноми и квадратуре Гаусовог типа

која је одбрањена на Природно-математичком факултету Универзитета у Крагујевцу, и то у целини, као и да по један примерак тако умножене докторске дисертације учини трајно доступним јавности путем дигиталног репозиторијума Универзитета у Крагујевцу и централног репозиторијума надлежног министарства, тако да припадници јавности могу начинити трајне умножене примерке у електронској форми наведене докторске дисертације путем *преузимања*.

Овом Изјавом такође

☑ дозвољавам

☐ не дозвољавам[1]

[1] Уколико аутор изабере да не дозволи припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци, то не искључује право припадника јавности да наведену докторску дисертацију користе у складу са одредбама Закона о ауторском и сродним правима.

припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од следећих *Creative Commons* лиценци:

1) Ауторство

2) Ауторство - делити под истим условима

3) Ауторство - без прерада

4) Ауторство - некомерцијално

5) Ауторство - некомерцијално - делити под истим условима

6) Ауторство - некомерцијално - без прерада[2]

У Крагујевцу, 29.6.2021. године,

Васовић Невена

потпис аутора

[2] Молимо ауторе који су изабрали да дозволе припадницима јавности да тако доступну докторску дисертацију користе под условима утврђеним једном од *Creative Commons* лиценци да заокруже једну од понуђених лиценци. Детаљан садржај наведених лиценци доступан је на: http://creativecommons.org.rs/