UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA U NOVOM SADU

Ksenija Doroslovački

Generalizovana dijagonalna dominacija za blok matrice i mogućnosti njene primene

Doktorska disertacija

Novi Sad, 2014

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● **ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА**
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, **РБР**:	
Идентификациони број, **ИБР**:	
Тип документације, **ТД**:	Монографска документација
Тип записа, **ТЗ**:	Текстуални штампани материјал
Врста рада, **ВР**:	Докторска теза
Аутор, **АУ**:	Ксенија Дорословачки
Ментор, **МН**:	Проф. др Љиљана Цветковић
Наслов рада, **НР**:	Генерализована дијагонална доминација за блок матрице и могућности њене примене
Језик публикације, **ЈП**:	српски
Језик извода, **ЈИ**:	српски / енглески
Земља публиковања, **ЗП**:	Србија
Уже географско подручје, **УГП**:	Војводина
Година, **ГО**:	2014.
Издавач, **ИЗ**:	Ауторски репринт
Место и адреса, **МА**:	Нови Сад, Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, **ФО**: (поглавља/страна/цитата/табела/слика/графика/прилога)	7/152/114/31/34/0/0
Научна област, **НО**:	Математика
Научна дисциплина, **НД**:	Нумеричка математика
Предметна одредница/Кључне речи, **ПО**:	Примена линеарне алгебре, дијагонална доминација, Х-матрице, блок матрице, оцена норме бесконачно за инверзне матрице, локализација карактеристичних корена, оцена спектралног радијуса.
УДК	
Чува се, **ЧУ**:	У библиотеци Факултета техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, Нови Сад
Важна напомена, **ВН**:	
Извод, **ИЗ**:	Ова докторска дисертација изучава матрице записане у блок форми. Она систематизује постојећа и представља нова тврђења о особинама таквих матрица, која се базирају на идеји генерализоване дијагоналне доминације. Познати резултати у тачкастом случају добра су основа за блок генерализације, које су изведене на два различита начина, први због своје једноставније примењивости, а други због обухватања шире класе матрица на коју се резултати односе.
Датум прихватања теме, **ДП**:	30.05.2013.
Датум одбране, **ДО**:	

Чланови комисије, **КО**:	Председник:	Проф. др Мила Стојаковић, редовни професор
	Члан:	Проф. др Илија Ковачевић, редовни професор
	Члан:	др Владимир Костић, доцент
	Члан:	Проф. др Лев А Крукиер, редовни професор
	Члан, ментор:	Проф. др Љиљана Цветковић, редовни професор

Потпис ментора

Образац **Q2.HA.06-05**- Издање 1

UNIVERSITY OF NOVI SAD ● **FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES**
21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, **ANO**:	
Identification number, **INO**:	
Document type, **DT**:	Monograph type
Type of record, **TR**:	Printed text
Contents code, **CC**:	PhD thesis
Author, **AU**:	Ksenija Doroslovački
Mentor, **MN**:	Professor Ljiljana Cvetković, PhD
Title, **TI**:	Generalized diagonal dominance for block matrices and possibilites of its application
Language of text, **LT**:	Serbian
Language of abstract, **LA**:	Serbian / English
Country of publication, **CP**:	Serbia
Locality of publication, **LP**:	Vojvodina
Publication year, **PY**:	2014.
Publisher, **PB**:	Authors reprint
Publication place, **PP**:	Novi Sad, Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6
Physical description, **PD**: (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	7/152/114/31/34/0/0
Scientific field, **SF**:	Mathematics
Scientific discipline, **SD**:	Numerical Mathematics
Subject/Key words, **S**/**KW**:	Applied Linear Algebra, Diagonal Dominance, H-matrices, Block matrices, Infinity norm bounds for the inverse matrices, Localization of eigenvalues, spectral radius estimation
UC	
Holding data, **HD**:	Library of the Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, Novi Sad
Note, **N**:	
Abstract, **AB**:	This thesis is related to matrices written in their block form. It systematizes known and represents new knowledge about properties of such matrices, which is based on the idea of generalized diagonal dominance. Known results in the point case serve as a good basis for block generalization, which is done in two different ways, the first one because of its simple usability, and the other for capturing wider class of matrices which are treated.
Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:	30.05.2013
Defended on, **DE**:	

Defended Board, **DB**:	President:	Mila Stojaković, PhD, Full Professor	
	Member:	Ilija Kovačević, PhD, Full Professor	
	Member:	Vladimir Kostić, PhD, Assistant Professor	Menthor's sign
	Member:	Lev A. Krukier, PhD, Full Professor	
	Member, Mentor:	Ljiljana Cvetković, PhD, Full Professor	

Abstrakt

Ova doktorska disertacija izučava matrice zapisane u blok formi i sistematizuje postojeća i predstavlja nova tvrđenja o osobinama takvih matrica, koja se baziraju na ideji generalizovane dijagonalne dominacije. Motivi za ovakva istraživanja leže pre svega u mogućnosti primene, i to na sasvim aktuelne probleme ne samo u okviru drugih oblasti primenjene i numeričke linearne algebre, već i u inženjerstvu, medicini, farmaciji, ekologiji, ekonomiji i drugim naukama.

Disertacija je bazirana na dve osnovne ideje:

- poznati rezultati u „tačkastom” slučaju služe kao osnova za blok generalizacije,
- te generalizacije su izvedene na dva različita načina.

Pri tome, pomenuta dva načina generalizacije rezultata na blok slučaj imaju oba opravdanje za svoje postojanje. U disertaciji su, stoga, detaljno predstavljena oba, prvi zbog svoje jednostavnije primenljivosti, a drugi zbog obuhvatanja šire klase matrica na koju će se rezultati odnositi.

Disertacija je koncipirana na sledeći način:

Prvo poglavlje predstavlja uvod, u kome je dat pregled aktuelnog stanja u oblasti i objašnjena motivacija za istraživanja obuhvaćena ovom disetracijom.

Drugo poglavlje predstavlja pregled nekih potklasa klase generalizovano dijagonalno dominantnih matrica i to u tačkastom slučaju, sa njihovim osobinama, kao i tehnikama na osnovu kojih se dobijaju dobri rezultati. U literaturi su neke od ovih potklasa dobro poznate, na primer SDD matrice [74], Ostrovski matrice [87], Dašnjic-Zusmanovič matrice [34], $\alpha 1$ matrice [88], Nekrasov matrice [44], a neke su relativno novijeg datuma, na primer $PH-$matrice [68], $S-$Nekrasov matrice [30] ili $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrice [29].

Treće poglavlje objašnjava dva moguća tipa blok uopštenja i rasvetljava njihov međusobni odnos. Prvi tip blok uopštenja može se naći, na primer, u knjizi [108], a drugi, na primer, u [2].

Četvrto poglavlje predstavlja mogućnost primene na ocenu norme beskonačno inverzne matrice. Najpre je dat pregled rezultata u „ta-

čkastom" slučaju, među kojima značajan deo predstavljaju autorovi originalni rezultati [19] i [27], a zatim je razmatran blok slučaj, u kome su prezentovani potpuno novi rezultati. Numerički primeri birani su tako da rasvetljavaju odnose između različitih ocena i, još važnije, da prikazuju efikasnost svake novodokazane ocene za normu inverzne matrice. S obzirom da je sa blokovskom strukturom matrice direktno povezana i ideja na kojoj se bazira definicija $PH-$matrica, odnosu „tačkaste" PH klase i potklasa blok generalizovano dijagonalno dominantnih matrica, u slučaju da su obe bazirane na istoj particiji indeksa, posvećeno je posebna sekcija.

Peto poglavlje odnosi se na primenu u oblasti lokalizacije karakterističnih korena. Najpre je dat jedan deo poznatih rezultata u „tačkastom" slučaju, a zatim i neki rezultati u blok slučaju. Iz veoma iscrpne analize jednog od moguća dva pristupa u blok generalizaciji, date u knjizi [108], prikazan je samo jedan deo, a zatim je, slično tehnici korišćenoj u radu [70], dokazano nekoliko interesantnih rezultata, koji su potom ilustrovani numeričkim primerima.

Šesto poglavlje dodiruje problem ocene spektralnog radijusa. Osim generalnog pristupa, pokazano je na koji način jedna od „tačkastih" potklasa $H-$matrica može poslužiti za izvođenje gornje ocene spektralnog radijusa proizvoljne matrice, kao što je to urađeno u radu [70], a zatim je pokazano, što je opet sasvim nov rezultat, kako se ona može iskoristiti za ocenu spektralnog radijusa proizvoljne nenegativne blok matrice.

Disertacija se završava zaključnim razmatranjima i spiskom korišćene literature.

Abstract

This thesis relates to matrices written in their block form and it systematizes its existence and presents new knowledge about properties of such matrices based on the idea of generalized diagonal dominance. Motivation for this research lies primarily in possible applications to very actual investigations, not only within other areas of applied and numerical linear algebra, but also in engineering, medicine, pharmacy, ecology, economics and other sciences.

The thesis is based on two main ideas :

- known results in the "point-wise" case can serve as a good basis for block generalization,
- this generalization is done in two different ways.

In addition, the two mentioned ways of generalization to the block case both have a justification for its existence. The thesis, therefore, presents them both, the first one because of its simple application, and the other for capturing wider class of matrices which can be treated.

The outline of the thesis is the following:

The first chapter is an introduction, which provides an overview of current situation in the field and describes the motivation for research in this dissertation.

The second chapter presents an overview of some subclasses of generalized diagonally dominant matrices in the "point-wise" case, with their properties, and the techniques by which one can get accurate results. Some of these subclasses are well-known in the references, like SDD matrices [74], Ostrowsky matrices [87], Dashnjic-Zusmanovich matrices [34], $\alpha 1$ matrices [88], Nekrasov matrices [44], while some are relatively new, such as $PH-$matrices [68], $S-$Nekrasov matrices [30], or P_1, P_2 $-$Nekrasov matrices [29].

The third chapter explains two possible ways of block generalizations and highlights their relationship. The first type of block generalization can be found in the book [108], while the other one is less known, for example, in [2].

The fourth chapter presents an application to estimation of max norm of the inverse matrix. At first, an overview of the results in the

"point-wise" case is given, and significant part of them are the author's original results [19] and [27]. Then, the block case is discussed, and this part consists of completely new results. Numerical examples are chosen to illustrate relations between various estimations, but more important, to show the efficiency of every new estimation. Since a block structure of the matrix is directly related to idea of PH matrix definition, the relationship between "point-wise" PH class and subclasses of block generalized diagonally dominant matrices, if they are both based on the same partition, is presented as a separate section.

The fifth chapter concerns the application in the field of eigenvalue localization. At first, it provides some of the known results in the "point-wise" case, and then some of the results in the block case. From the detailed analysis of one of the block generalization ways, given in the book [108], only a part is shown here, and then, similar to the technique used in the paper [70], some interesting results are proven, and then illustrated by numerical examples.

The sixth chapter is related to spectral radius estimation. In addition to a general approach, it is shown how one of the "point-wise" subclasses of $H-$matrices can be used for proving an upper bound of the spectral radius of arbitrary matrices, as it was done in the paper [70]. Then, again as a completely new result, it was shown how it can be used for estimating the spectral radius of an arbitrary nonnegative block matrix.

The thesis ends with concluding remarks and observations and with a list of cited references.

Sadržaj

1

Uvod

Numerička matematika generalno, a posebno numerička linearna algebra, doživela je svoju ekspanziju razvojem računara i vremenom je postala sastavni deo nekih od najbitnijih algoritama u nauci. Numerička linearna algebra se bavi proučavanjem algoritama za izračunavanja u oblasti linearne algebre, pre svega matričnih operacija, i to na računarima. To je često temeljni deo inženjerskih i računarskih problema, kao što su obrada slike i signala, telekomunikacije, strukturna biologija, data mining, bioinformatika, dinamika fluida, i mnogih drugih područja. Korisnički softver u tim oblastima se oslanja na razvoj, analizu i primenu najsavremenijih algoritama za rešavanje raznih problema numeričke linearne algebre, velikim delom zbog uloge matrica u odgovarajućim matematičkim modelima.

Najčešći problemi numeričke linearne algebre uključuju računanje neke od dekompozicija matrice, kao i računanje ili utvrđivanje nekih unapred željenih osobina singularnih vrednosti ili karakterističnih korena matrice.

Pri tome je jedan od veoma važnih aspekata teorija perturbacije, u kojoj jednu od krucijalnih uloga igra takozvani *uslovni broj* matrice. To je veličina koja zavisi od neke matrične norme i jednaka je proizvodu norme matrice i norme njene inverzne. Ne ulazeći u detaljno objašnjenje uloge uslovnog broja, zadržaćemo se samo na konstataciji da je veoma korisno unapred znati neku gornju ocenu za uslovni broj posmatrane matrice. Očigledno, izračunavanje norme matrice nije računski skupo, međutim izračunavanje inverzne matrice, da bi se izračunala njena norma, sasvim je neracionalno. Umesto toga, nalaze se razni načini da se ta norma inverzne matrice na neki način oceni sa gornje strane. Jednom od mogućih načina (u slučaju norme beskonačno) biće posvećen značajni deo ove disertacije. Osim već poznatih rezultata ovog tipa, publikovanih u radovima [1], [19], [27], [29], [58], [68], [84], [102], biće prezentovani i novi rezultati.

Moćno oruđe u diskusiji linearnih matematičkih modela, kao i onih koji se mogu linearizovati, jeste poznavanje singularnih vrednosti ili, pak, karakterističnih korena matrice. Njihovo efektivno izračunavanje, međutim, nije uvek neophodno, u smislu da je isuviše računski skupo, a da za izvođenje zaključaka o nekim bitnim osobinama problema koji model opisuje nije potrebno poznavanje njihove tačne vrednosti, već samo njihove pozicije u kompleksnoj ravni. Na primer, za utvrđivanje stabilnosti dinamičkih sistema dovoljno je utvrditi da se svi karakteristični koreni određene matrice nalaze u jednoj poluravni (desnoj ili levoj). I ovaj deo numeričke linearne algebre - lokalizacija karakterističnih korena - biće obrađen u disertaciji u vidu pregleda poznatih, vidi [3], [4], [10], [12], [13], [14], [17], [18], [20], [21], [23], [32], [33], [34], [35], [37], [38], [39], [43], [46], [47], [48], [53], [59], [60], [61], [63], [65], [69], [70], [75], [80], [85], [87] [97], [99], [103], [106], [107], [108], [109], [110], [111], [112], kao i nekih novih rezultata.

S obzirom na složenost problema koji opisuje neki matematički model, gotovo je izvesno da postupak za rešavanje linearnog sistema ili problema linearne komplementarnosti mora biti iterativni. Time se automatski postavlja pitanje njegove konvergencije, u čemu ključnu ulogu igra spektralni radijus iterativne matrice. I njega je potrebno što bolje oceniti sa gornje strane, čemu će, takođe biti posvećena dužna pažnja u ovoj disertaciji. Rezultati ovog tipa brojni su u literaturi, vidi [15], [16], [24], [25], [51], [55], [62], [67], [70], [100], [114], pa će ovde biti prikazan samo njihov mali deo.

Svakoj od napred navedenih oblasti numeričke linearne algebre moguće je pristupiti na razne načine. O tome svedoči iscrpna literatura, navedena na kraju disertacije. Ono što u ovoj disertaciji povezuje sve tri oblasti - nalaženje gornje ocene norme inverzne matrice, lokalizaciju karakterističnih korena i ocenu spektralnog radijusa - jeste *način* na koji su rezultati izvedeni, tj. dokazani. To je ideja

generalizovane dijagonalne dominacije.

Uslovi uopštene ili generalizovane dijagonalne dominacije koji obezbeđuju regularnost matrice su tema koja je izučavana s više različitih aspekata. Brojni rezultati ovog tipa našli su svoju primenu ne samo u okviru drugih oblasti primenjene i numeričke linearne algebre, već i u inženjerstvu, medicini, farmaciji, ekologiji, ekonomiji i drugim naukama. Generalizovana dijagonalna dominacija čini, u određenom smislu, objedinjujući okvir spomenutih istraživanja i do danas predstavlja aktivno polje istraživanja, na primer, [9], [26], [29], [31], [64], [69].

Predmet istraživanja u ovoj doktorskoj disertaciji jeste razrada ideje koja je u osnovi generalizovane dijagonalne dominacije na slučaj **blok matrica,** *s ciljem da se pokaže kako se mogu ostvariti korisni novi rezultati primenjene i numeričke linearne algebre, kao i nove mogućnosti primene.*

Od do sada poznatih rezultata o blok matricama i njihovoj ulozi u kontekstu raznih oblasti primenjene linearne algebre, spomenimo samo [38], [55], [56], [57], [60], [61], [64], [90], [95], [114].

Još od prvih rezultata na temu dijagonalne dominacije početkom dvadesetog veka, pa sve do aktuelnih istraživanja u poslednjih nekoliko godina, uočeno je da, između ostalog, postoji tesna veza između ovih rezultata i rezultata u oblasti lokalizacije karakterističnih korena, zatim u teoriji konvergencije iterativnih postupaka, oceni Peronovog korena nenegativnih matrica, kao i gornjoj oceni norme beskonačno inverzne matrice. Generalizovana dijagonalna dominacija u osnovi potiče iz radova Šnajdera, Fidlera i Ptaka iz 1962. godine, gde je rasvetljena snažna veza uslova dijagonalne dominacije, koji datira još s kraja devetnaestog veka, sa teorijom nenegativnih matrica, što se kasnije u literaturi javlja pod nazivom teorija $M-$matrica i $H-$matrica. Izuzetan i iscrpan pregled ovih odnosa dat je u [7], što je jedno od ključnih dela u ovoj oblasti.

U poslednjih nekoliko godina ostvaren je značajan napredak u pravcu raznih mogućnosti uopštavanja osobine stroge dijagonalne dominacije, na primer, u radovima [17], [22], [24], [29], [30], [40], [41], [54], [69], [71], [76], [77] i nekih mogućih primena [9], [18], [19], [20], [23], [25], [26], [27], [28], [33]. Detaljan pregled i sistematizacija rezultata koji se odnose na „tačkasti” slučaj dat je u [69].

Prvo uopštenje dijagonalne dominacije za *blok matrice* desilo se gotovo istovremeno u radovima Ostrovskog (1961), Fidlera i Ptaka (1962) i Fajngolda i Varge (1962). Iz ovih rezultata prirodno su sledili njima odgovarajući rezultati koji se odnose na lokalizaciju karakterističnih korena, koje nazivamo rezultatima blok Geršgorinovog tipa. Postojao je, zatim, poduži prekid u daljnjem razvoju ove oblasti, kada su u pitanju blok matrice. Detaljan pregled dostupnih rezultata koji se odnose na lokalizaciju karakterističnih korena za blok matrice može se naći u knjizi [108] Ričarda Varge „Geršgorin i njegovi krugovi” iz 2004. godine.

S obzirom da ogroman broj matematičkih modela zaista ima blokovsku strukturu, potrebno je tu činjenicu iskoristiti na što bolji način, kako bi se dokazale razne osobine matrice, kao i modela u čijem predstavljanju ona učestvuje.

Stoga ova disertacija sistematizuje postojeće rezultate i kompletira ih novim, da bi se ideja generalizovane dijagonalne dominacije u blok varijanti kompletirala zajedno s mogućnostima njene primene.

Kao osnova za blok generalizacije, kao što smo već napomenuli, poslužiće ne samo čitava „tačkasta” klasa generalizovano dijagonalno dominantnih matrica, već i njene razne potklase, o čemu postoji obimna literatura, da spomenemo samo [5], [13], [14], [17], [22], [24], [29], [30], [34], [40], [41], [44], [54], [56], [57], [64], [65], [69], [70], [76], [77], [78], [86], [87], [88], [91], [95], [98], [104]. Važno je naglasiti da se sličnom tehnikom na blok slučaj mogu generalizovati i neke tačkaste klase regularnih matrica, koje nisu podskup $H-$matrica, na primer klasa opisana u radu [71], ali to prevazilazi okvire ove disertacije.

Predstavljena su dva, u praksi prihvaćena, pristupa blokovskom uopštenju „tačkastog” slučaja i pokazano da svaki rezultat „blokovskog” tipa, u opštem slučaju, ravnopravno konkuriše svom „tačkastom” originalu, u smislu da je nekad primenljiv samo jedan od njih, a kada su primenljiva oba, bolji može biti bilo koji od njih.

Svi zaključci su potkrepljeni numeričkim primerima.

2

GDD: Tačkast slučaj

Koncept generalizovane dijagonalne dominacije proizašao je, sa jedne strane, od stroge dijagonalne dominacije, a sa druge strane iz teorije $M-$matrica. Stroga dijagonalna dominacija ispitivana je u raznim oblicima još od kraja devetnaestog veka, kada je pokazano da je ona dovoljan uslov za regularnost matrica ([74], [83], [36] i [45]). Kasnije, 1931. godine, ona se pojavljuje u nešto drugačijem obliku u vidu Geršgorinove teoreme. Generalizovana dijagonalna dominacija jeste osobina koja se dobija iz stroge dijagonalne dominacije pomoću tehnike skaliranja i tome će biti posvećen jedan deo razmatranja u ovom poglavlju.

Generalizovano dijagonalno dominantne matrice (GDD) takođe se mogu smatrati uopštenjem $M-$matrica, koje su prirodno nastale u nekim diskretizacijama diferencijalnih operatora i detaljno su izučavane u oblasti koja se i danas intenzivno razvija - scientific computing. Detaljan pregled osobina $M-$matrica dat je u knjizi [7]. Taj pravac generalizacije, međutim, sa stanovišta prakse nema veliki praktični značaj, barem ne u kontekstu primena koje su predmet izučavanja u ovoj disertaciji, pa će mu u ovom poglavlju biti posvećeno manje pažnje.

Na samom početku daćemo pregled oznaka:

- $\mathbb{C}^n$ kompleksni n-dimenzioni vektorski prostor
- $\mathbb{R}^n$ realan n-dimenzioni vektorski prostor

- $\mathbb{C}^{m,n}$ skup svih kompleksnih matrica formata $m \times n$
- $\mathbb{R}^{m,n}$ skup svih realnih matrica formata $m \times n$
- $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- n-dimenzioni vektor je vektor kolona $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\top$
- $m \times n$ matrica A ima m vrsta i n kolona i zapisuje se kratko $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{m,n}$ ili

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

- $\mathbf{x} > 0$ označava da su sve komponente vektora $\mathbf{x}$ pozitivne
- $\mathbf{x} \geq 0$ označava da su sve komponente vektora $\mathbf{x}$ nenegativne
- $A > 0$ označava da su svi elementi matrice A pozitivni
- $A \geq 0$ označava da su svi elementi matrice A nenegativni
- Ako je $D = \operatorname{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$, oznaka $D > 0$ znači da je $d_i > 0$ za svako $i \in N$
- $$r_i(A) := \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}| \quad \text{za svako } i \in N \tag{2.2}$$

  je uobičajena oznaka za zbir modula vandijagonalnih elemenata $i-$te vrste matrice A. U slučaju da je matrica formata 1×1, odnosno reda 1, definišemo $r_1(A) := 0$

- $$r_i^S(A) := \sum_{j \in S \setminus \{i\}} |a_{i,j}| \quad \text{za svako } i \in S \tag{2.3}$$

  gde je $S \subseteq N$ neprazan podskup skupa indeksa. U slučaju da je S jednočlan skup $S = \{i\}$, definišemo $r_i^{\{i\}} := 0$

- $\pi = \{p_j\}_{j=0}^{\ell}$ je oznaka za particiju skupa indeksa, pri čemu nenegativni brojevi p_j, $j = 1, 2, \ldots, \ell$, zadovoljavaju uslov

$$p_0 := 0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_\ell := n.$$

2.1 Strogo dijagonalno dominantne matrice

Definicija 2.1. *Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ naziva se strogo dijagonalno dominantna (SDD) ako važi*

$$|a_{i,i}| > r_i(A) \quad \textit{za svako } i \in N. \tag{2.4}$$

Ova klasa matrica pojavljuje se prvi put daleke 1881. godine, u radu [74], a kasnije, 1900. godine, u radu [83], u oba slučaja vezano za realne matrice. Kompleksni slučaj razmatran je 1887. godine u radu [36] i kasnije, 1903. godine, u knjizi [45]. U svim navedenim radovima pokazano je da je u pitanju klasa regularnih matrica. Taj rezultat ćemo ovde formulisati u vidu sledeće teoreme.

Teorema 2.2. *Svaka SDD matrica je regularna.*

Kao što ćemo videti u nastavku disertacije, ova klasa regularnih matrica zauzimaće centralno mesto u razmatranjima koja slede. Važno je napomenuti da je ona, sama za sebe, klasa koja se često susreće u praksi, u matematičkim modelima, kao što su, na primer, razni dinamički sistemi. Stoga ova klasa već iz tog razloga zaslužuje detaljno razmatranje.

Međutim, u ovoj disertaciji pokazaćemo da SDD klasa ima i drugu ulogu. Ona će poslužiti i kao izvor brojnih generalizacija i to na takav način da se (zahvaljujući načinu na koji se vrše generalizacije), dobijaju novi rezultati o regularnosti koji omogućavaju kvalitetnu mogućnost primene.

2.2 Generalizovano dijagonalno dominantne matrice

Termin generalizovana dijagonalna dominacija pojavljuje se još u ranim sedamdesetim godinama, kada je teorija konvergencije iterativnih postupaka bila veoma popularno polje istraživanja. Ovaj termin je korišćen u radu Jamesa i Riha iz 1974. godine [62]. Po njima, matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je generalizovano dijagonalno dominantna ako postoji pozitivan vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$, takav da je

$$|a_{i,i}|x_i > \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{i,j}|x_j \quad \text{za svako } i \in N. \tag{2.5}$$

Ova definicija, očigledno uopštava definiciju SDD matrica. Naime, za $\mathbf{x} = [1, 1, \ldots, 1]^T$, uslov (2.5) postaje uslov kojim se definišu SDD matrice. Ova ista ideja se implicitno pojavljuje i ranije, u radovima Geršgorina iz 1931. godine, o lokalizaciji karakterističnih korena [43], a mi je ovde navodimo u nešto izmenjenom obliku.

Definicija 2.3. *Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ naziva se generalizovano dijagonalno dominantna (GDD) ako postoji pozitivna dijagonalna matrica X takva da je AX strogo dijagonalno dominantna.*

Kao što smo već napomenuli, klasa GDD matrica može se posmatrati i kao generalizacija $M-$matrica. Od njihovog prvog pojavljivanja pod tim imenom, u radovima Ostrovskog iz 1937. godine, pa do danas, dato je preko sedamdeset različitih ekvivalentnih definicija regularnih $M-$matrica. Ovde navodimo jednu od osnovnih.

Definicija 2.4. *Matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ je matrica $L-$oblika ako su joj svi vandijagonalni elementi nepozitivni.*

Definicija 2.5. *Realna matrica $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ koja je $L-$oblika zove se $M-$matrica ako je regularna i njena inverzna matrica je nenegativna, tj. $A^{-1} \geq O$.*

Napomenimo da u ovoj disertaciji pod pojmom $M - matrica$ podrazumevamo *uvek regularnu* $M-$matricu. Takođe, napomenimo da je očigledno da svaka $M-$matrica ima sve dijagonalne elemente pozitivne.

Prirodno uopštenje ove definicije daje nam definiciju $H-$matrica, i to na sledeći način.

Definicija 2.6. *Neka je data proizvoljna matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$. Tada je njena pridružena matrica $\mathcal{M}(A) := [\alpha_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ definisana sa*

$$\alpha_{i,j} := \begin{cases} |a_{i,i}|, & i = j, \\ -|a_{i,j}|, & \text{inače}. \end{cases} \tag{2.6}$$

Definicija 2.7. *Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ se zove $H-$matrica ako i samo ako je njena pridružena matrica $M-$matrica tj. ako je $\mathcal{M}(A)$ regularna i $\mathcal{M}(A)^{-1} \geq O$.*

Dakle, i u slučaju $H-$matrica, uvek pod tim terminom podrazumevamo regularne $H-$matrice. Takođe, jasno je da svaka $H-$matrica ima sve dijagonalne elemente različite od nule.

Na osnovu rezultata Fidlera i Ptaka iz 1962. godine, [39], sledi

Teorema 2.8. *Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ je $H-$matrica ako i samo ako je generalizovano dijagonalno dominantna.*

Dakle, klasa (regularnih) $H-$matrica i klasa GDD matrica su jedna te ista klasa.

2.3 Potklase GDD matrica

Generalizacija SDD matrica odvijala se u više različitih pravaca. Prvi među njima je slučaj kada su sve vrste u posmatranoj matrici, osim jedne, strogo dijagonalno dominantne. Taj slučaj se dalje generalizuje na postojanje više od jedne ne$-SDD$ vrste.

Sledeći prirodan pravac zasniva se na ideji kombinovanja vrsta i kolona posmatrane matrice, s obzirom da su matrica i njena transponovana ili obe regularne ili obe singularne.

Pored toga, posebno mesto zauzimaju matrice koje imaju sličnu vezu sa Gaus-Zajdelovim iterativnim postupkom, kao što SDD matrice imaju sa Jakobijevim postupkom.

U narednim podsekcijama biće dat pregled svih navedenih pravaca generalizacije.

2.3.1 Ostrovski matrice

Jedno od prvih uopštenja stroge dijagonalne dominacije odnosi se na slučaj kada matrica ima sve vrste strogo dijagonalno dominantne osim, eventualno, jedne. Dovoljan uslov da bi takva matrica bila regularna dat je u radu Ostrovskog [86]. Tim uslovom definisaćemo klasu matrica koju ćemo zvati Ostrovski matrice.

Definicija 2.9. *Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, naziva se Ostrovski matrica ako za svaka dva različita indeksa $i, j \in N$ važi*

$$|a_{i,i}||a_{j,j}| > r_i(A)r_j(A). \tag{2.7}$$

Teorema 2.10. *Svaka Ostrovski matrica je $H-$matrica i samim tim je i regularna.*

2.3.2 Dašnjic-Zasmanovič matrice

Dalje uopštenje stroge dijagonalne dominacije, koje je istovremeno i uopštenje Ostrovski matrica, može se naći u radu [34] iz 1970. godine.

Definicija 2.11. *Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, naziva se Dašnjic-Zasmanovič (DZ) matrica, ako postoji indeks $i \in N$, tako da za svako $j \in N \setminus \{i\}$ važi*

$$|a_{i,i}| \cdot (|a_{j,j}| - r_j(A) + |a_{j,i}|) > r_i(A)|a_{j,i}|. \tag{2.8}$$

Teorema 2.12. *Svaka Dašnjic-Zasmanovič (DZ) matrica je $H-$matrica i samim tim je regularna.*

2.3.3 $S - SDD$ matrice

Ova generalizacija vođena je idejom da matrica može da ima više ne$-SDD$ vrsta, a da i dalje bude regularna. Osnovna ideja ove generalizacije evoluirala je u više oblika, a ovde je navodimo u obliku koji je prezentovan u radu [21] 2004. godine.

Definicija 2.13. *Neka je $S \subseteq N$ neprazan podskup skupa indeksa. Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, naziva se $S - SDD$ matrica ako za svako $i \in S$, i za svako $j \in \overline{S} := N \setminus S$, važi*

$$|a_{i,i}| > r_i^S(A) \;\; i \tag{2.9}$$

$$\big(|a_{i,i}| - r_i^S(A)\big) \cdot \big(|a_{j,j}| - r_j^{\overline{S}}(A)\big) > r_i^{\overline{S}}(A) r_j^S(A), \tag{2.10}$$

gde je $r_i^S(A)$ definisano sa (2.3).

Definicija 2.14. *Matrica A naziva se $\Sigma - SDD$ ako postoji neprazan podskup skupa indeksa S takav da je matrica A $S - SDD$ matrica.*

Teorema 2.15. *Svaka $\Sigma - SDD$ matrica je $H-$matrica i samim tim je regularna.*

Napomenimo da do sada navedene potklase $H-$matrica stoje u sledećem međusobnom odnosu.

$$\text{SDD} \subseteq \text{Ostrovski} \subseteq \text{DZ} \subseteq \Sigma - SDD$$

2.3.4 $PH-$matrice

Prirodno uopštenje klase $S-SDD$ matrica jesu takozvane $PH-$matrice, definisane u radu [68]. Uvodimo oznaku

$$R_i(A) = \sum_{j=1}^{s} a_{i,j}, \quad i = 1, \ldots, t,$$

za sumu *svih* elemenata $i-$te vrste proizvoljne matrice $A = [a_{i,j}]$ formata $t \times s$.

Za datu particiju $\pi = \{p_j\}_{j=0}^{\ell}$, kojom je skup indeksa N podeljen na ℓ disjunktnih nepraznih podskupova $S_1, S_2, \ldots, S_\ell$, gde je $S_j = \{p_{j-1}+1, p_{j-1}+2, \ldots, p_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, \ell$ i matricu A reprezentovanu u blok formi

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,\ell} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{\ell,1} & A_{\ell,2} & \cdots & A_{\ell,\ell} \end{bmatrix} = [A_{i,j}]_{\ell \times \ell}, \tag{2.11}$$

definišemo kolekciju agregacionih matrica reda ℓ:

$$A^{(i_1,i_2,\ldots,i_\ell)} = \begin{bmatrix} R_{i_1}(A_{1,1}) & R_{i_1}(A_{1,2}) & \cdots & R_{i_1}(A_{1,\ell}) \\ R_{i_2}(A_{2,1}) & R_{i_2}(A_{2,2}) & \cdots & R_{i_2}(A_{2,\ell}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{i_\ell}(A_{\ell,1}) & R_{i_\ell}(A_{\ell,2}) & \cdots & R_{i_\ell}(A_{\ell,\ell}) \end{bmatrix}, \tag{2.12}$$

gde je $i_k \in S_k, \;\; k = 1, \ldots, \ell$. Kažemo da je A $PM-$matrica u odnosu na particiju π, ako je A $L-$oblika i ako su sve agregacione matrice (2.12) $M-$matrice. Takođe, kažemo da je A $PH-$matrica ako je $\mathcal{M}(A)$ $PM-$matrica.

Za particiju $\pi = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $PM-(PH-)$matrice predstavljaju, u suštini, klasu (regularnih) $M-$matrica ($H-$matrica). Ako je $\ell = 1$, dakle, za particiju $\pi = \{0, n\}$ klasa $PH-$matrica je, u suštini, klasa SDD matrica.

Ako je $\pi = \{0, m, n\}$, dakle, ako je njom skup indeksa N podeljen na dva disjunktna podskupa:

$$S = \{1, 2, \ldots, m\} \quad \text{i} \quad \overline{S} = \{m+1, m+2, \ldots, n\},$$

onda agregacione matrice (2.12) imaju sledeći oblik:

$$A^{(i_1,i_2)} = \begin{bmatrix} R_{i_1}(A_{1,1}) & R_{i_1}(A_{1,2}) \\ R_{i_2}(A_{2,1}) & R_{i_2}(A_{2,2}) \end{bmatrix} \quad i_1 \in S, \; i_2 \in \overline{S}.$$

U našim ranijim oznakama, agregacione matrice za $\mathcal{M}(A)$ izgledaju ovako:

$$\mathcal{M}(A)^{(i_1,i_2)} = \begin{bmatrix} |a_{i_1,i_1}| - r_{i_1}(A_{1,1}) & -R_{i_1}(|A_{1,2}|) \\ -R_{i_2}(|A_{2,1}|) & |a_{i_2,i_2}| - r_{i_2}(A_{2,2}) \end{bmatrix}, \; i_1 \in S, \; i_2 \in \overline{S}.$$

Matrica A će biti $PH-$matrica u ovom slučaju, ako su sve agregacione matrice $\mathcal{M}(A)^{(i_1,i_2)}$ $M-$matrice, odnosno ako su svi njihovi glavni minori pozitivni, tj.

$$|a_{i_1,i_1}| - r_{i_1}(A_{1,1}) > 0, \;\; i_1 \in S, \tag{2.13}$$

$$(|a_{i_1,i_1}| - r_{i_1}(A_{1,1}))(|a_{i_2,i_2}| - r_{i_2}(A_{2,2})) - R_{i_1}(|A_{1,2}|)R_{i_2}(|A_{2,1}|) > 0, \quad i_1 \in S, \; i_2 \in \overline{S} \tag{2.14}$$

Kako je za svako $i_1 \in S, i_2 \in \overline{S}$

$$r_{i_1}(A_{1,1}) = r_{i_1}^{S}(A), \quad R_{i_1}(|A_{1,2}|) = r_{i_1}^{\overline{S}}(A),$$

$$R_{i_2}(|A_{2,2}|) = r_{i_2}^{S}(A), \;\; \text{i} \;\; r_{i_2}(A_{2,2}) = r_{i_2}^{\overline{S}}(A),$$

vidimo da uslovi (2.13) i (2.14) predstavljaju, u stvari, definiciju $S-SDD$ matrica.

Sledeći rezultat je pokazan u radu [68].

Teorema 2.16. *Ako postoji particija π takva da je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ $PH-$matrica u odnosu na tu particiju, onda je ona $H-$matrica i samim tim je i regularna.*

2.3.5 $\alpha 1$ matrice

Poznato je da je proizvoljna matrica A regularna ako i samo ako je njena transponovana matrica $A^\top$ takođe regularna. Zahvaljujući toj činjenici, još jedan dovoljan uslov za regularnost matrice je

$$|a_{i,i}| > c_i(A) := r_i(A^\top) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{j,i}| \;\; \text{za svako } i \in N, \tag{2.15}$$

koji je, u stvari, uslov stroge dijagonalne dominacije za $A^\top$. Stoga je logično pitanje da li i uslov da je svaki dijagonalni element strogo veći od konveksne kombinacije suma odgovarajuće vrste i kolone takođe obezbeđuje regularnost matrice. Odgovor je pozitivan i dao ga je Ostrovski 1951. godine u radu [87].

Definicija 2.17. *Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, naziva se $\alpha 1$ matrica ako postoji $\alpha \in [0,1]$, takav da važi*

$$|a_{i,i}| > \alpha r_i(A) + (1-\alpha) c_i(A) \ \text{ za svako } \ i \in N. \tag{2.16}$$

Teorema 2.18. *Svaka $\alpha 1$ matrica je $H-$matrica i samim tim je regularna.*

2.3.6 $\alpha 2$ matrice

U istom radu [87], Ostrovski je definisao još jednu klasu regularnih matrica, koju ćemo ovde zvati $\alpha 2$ matricama.

Definicija 2.19. *Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, naziva se $\alpha 2$ matrica ako postoji $\alpha \in [0,1]$, takav da važi*

$$|a_{i,i}| > (r_i(A))^\alpha (c_i(A))^{1-\alpha} \ \text{ za svako } \ i \in N. \tag{2.17}$$

Teorema 2.20. *Svaka $\alpha 2$ matrica je $H-$matrica i samim tim je regularna.*

Zbog odnosa između uopštene aritmetičke i geometrijske sredine, očigledno važi

$$\text{SDD} \subseteq \alpha 1 \subseteq \alpha 2.$$

2.3.7 Nekrasov matrice

Iz teorije iterativnih postupaka poznata je bliska veza između Jakobijevog iterativnog postupka i klase strogo dijagonalno dominantnih matrica. Preciznije rečeno, norma beskonačno Jakobijeve iterativne matrice manja je od jedan ako i samo ako je matrica strogo dijagonalno dominantna. U slučaju Gaus-Zajdelovog iterativnog postupka, klasa matrica koja ima analognu ulogu jeste klasa Nekrasovih matrica. Veličine pomoću kojih se ta klasa opisuje, zbog prirode Gaus-Zajdelovog postupka, moraju biti definisane rekurentno.

Za matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, definišemo veličine $h_i(A)$:

$$h_1(A) := \sum_{j \neq 1} |a_{1,j}|, \quad h_i(A) := \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{j,j}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}|, \;\; i = 2, \ldots, n. \tag{2.18}$$

Definicija 2.21. *Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, naziva se Nekrasov matrica ako je*

$$|a_{i,i}| > h_i(A) \;\; \text{za svako} \;\; i \in N. \tag{2.19}$$

U radu Roberta [95] pokazano je sledeće tvrđenje:

Teorema 2.22. *Svaka Nekrasov matrica je $H-$matrica i samim tim je regularna.*

Uočimo da potreban uslov da matrica bude Nekrasov matrica jeste da joj je prva vrsta SDD, što navodi na sledeću prirodnu generalizaciju ove klase, koju ćemo nazvati po autoru (Gudkov) u čijem radu [44] se prvi put pojavljuje ova ideja. Međutim, pre nego što definišemo klasu Gudkov matrica, definišimo takozvane $P-$Nekrasov matrice.

Definicija 2.23. *Ako je za datu permutacionu matricu P, $P^\top AP$ Nekrasov matrica, tada ćemo matricu A zvati $P-$Nekrasov matrica.*

Uniju svih $P-$Nekrasov matrica, po svim permutacionim matricama P, zvaćemo Gudkov matrice. Očigledno, važi sledeći odnos između navedenih klasa:

$$\text{Nekrasov} \subseteq \text{Gudkov}.$$

Teorema 2.24. *Svaka Gudkov matrica je $H-$matrica i samim tim je regularna.*

Takođe, lako je uočiti da je klasa SDD matrica podskup klase Nekrasov matrica. Naime, važi teorema:

Teorema 2.25. *Svaka SDD matrica je istovremeno i Nekrasov matrica.*

Dokaz: Kako je $h_1(A) = r_1(A)$, ako je matrica A SDD matrica, onda je $\frac{h_1(A)}{|a_{1,1}|} < 1$, odakle se indukcijom lako dokazuje da je $h_i(A) \leq r_i(A)$ za svako $i \in N$. Tada je i $|h_i(A)| < |a_{i,i}|$ za svako $i \in N$, što znači da je A Nekrasov matrica. $\square$

Dakle, važi:

$$SDD \subseteq \text{Nekrasov} \subseteq \text{Gudkov}.$$

2.3.8 $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrice

Za datu matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ i date dve permutacione matrice $P_1, P_2 \in \mathbb{C}^{n,n}$, pretpostavimo da matrica A nije ni P_1-Nekrasov ni P_2-Nekrasov matrica.

Prirodno se nameće pitanje može li se korišćenjem već izračunatih vrednosti, nekom njihovom kombinacijom, dobiti dovoljan uslov za regularnost matrice A. Odgovor je pozitivan i prikazaćemo ga u ovoj podsekciji na način kako je to urađeno u radu [29].

Za datu matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, vektor modula dijagonalnih elemenata označimo sa

$$\mathbf{d}(A) := [|a_{1,1}|, \ldots, |a_{n,n}|]^T, \tag{2.20}$$

a vektor vrednosti $h_i(A)$ za $i \in N$, gde su $h_i(A)$ definisani u (2.18) sa

$$\mathbf{h}(A) := [h_1(A), \ldots, h_n(A)]^T. \tag{2.21}$$

Definicija 2.26. *Ako za matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ važi uslov*

$$\mathbf{d}(A) > \min\{\mathbf{h}^{P_1}(A), \mathbf{h}^{P_2}(A)\}, \tag{2.22}$$

gde je

$$\mathbf{h}^{P_k}(A) = P_k \mathbf{h}(P_k^T A P_k) \quad k = 1, 2, \tag{2.23}$$

tada matricu A zovemo $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica.

U radu [29] pokazano je da važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.27. *Ako je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica, onda je ona $H-$matrica i samim tim je regularna.*

Kasnije ćemo se vratiti na ovo tvrđenje i prikazati njegov dokaz. Ovde se zadržavamo samo na komentaru da umesto dve permutacije, možemo posmatrati p proizvoljnih permutacionih matrica i tako definisati novo svojstvo Nekrasovog tipa:

$$\mathbf{d}(A) > \min_{k=1,\dots,p} \mathbf{h}^{P_k}(A), \tag{2.24}$$

za koje se može pokazati da obezbeđuje regularnost matrice, međutim, sa stanovišta primene, postavlja se pitanje opravdanosti korišćenja takvog pristupa.

2.3.9 $S-$Nekrasov matrice

Ova klasa matrica definisana je u radu [30], odakle navodimo neke od rezultata. Za matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i neprazan skup indeksa $S \subseteq N$, definišemo $h_i^S(A)$ na sledeći način:

$$h_1^S(A) := r_1^S(A),$$

$$h_i^S(A) := \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| \frac{h_j^S(A)}{|a_{j,j}|} + \sum_{\substack{j = i+1 \\ j \in S}}^{n} |a_{i,j}|, \quad i = 2, \dots, n. \tag{2.25}$$

Definicija 2.28. *Neka je S neprazan podskup skupa indeksa $S \subseteq N$. Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, naziva se S-Nekrasov matrica ako je*

$$|a_{i,i}| > h_i^S(A) \;\; \textit{za svako} \;\; i \in S \;\; i \tag{2.26}$$

$$\big(|a_{i,i}| - h_i^S(A)\big)\big(|a_{j,j}| - h_j^{\overline{S}}(A)\big) > h_i^{\overline{S}}(A) h_j^S(A) \;\; \textit{za sve} \;\; i \in S \;,\; j \in \overline{S}. \tag{2.27}$$

Teorema 2.29. *Svaka $S-$Nekrasov matrica je $H-$matrica i samim tim je regularna.*

Teorema 2.30. *Svaka Nekrasov matrica je istovremeno i S-Nekrasov matrica za svaki neprazan podskup skupa indeksa $S \subseteq N$.*

Dokaz: Ako je $S = N$, tada je $h_i^S(A) = h_i^N(A) = h_i(A)$, pa se uslov da je matrica $S-$Nekrasov matrica svodi na uslov (2.26) i zadovoljen je. Ako je S proizvoljan neprazan pravi podskup od N, tada iz $|a_{i,i}| > h_i(A)$ očevidno sledi

$$|a_{i,i}| - h_i^S(A) > h_i^{\overline{S}}(A),$$

$$|a_{j,j}| - h_j^{\overline{S}}(A) > h_j^S(A),$$

što ima za posledicu da je

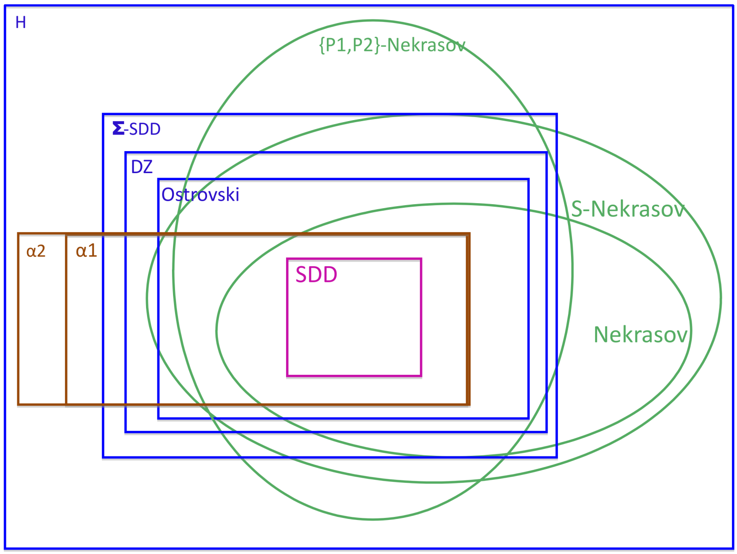
$$\big(|a_{i,i}| - h_i^S(A)\big)\big(|a_{j,j}| - h_j^{\overline{S}}(A)\big) > h_i^{\overline{S}}(A) h_j^S(A) \;\; \text{za svako} \;\; i \in S \; j \in \overline{S},$$

dakle, matrica jeste $S-$Nekrasov matrica. □

Prema tome, za proizvoljan neprazan podskup S skupa indeksa, važi sledeći (međusobni) odnos

$$\text{SDD} \subseteq \text{Nekrasov} \subseteq S\text{−Nekrasov}.$$

Na Slici 2.1 prikazan je odnos između najvažnijih (sa stanovišta primene) u ovoj disertaciji do sada spomenutih klasa.



Slika 2.1: Odnos između klasa

2.4 Tehnika skaliranja

Tehnika skaliranja bazira se na Teoremi 2.8. To je, dakle, ideja svođenja matrice A koja nije strogo dijagonalno dominantna, na matricu koja jeste SDD matrica, množenjem polazne matrice A pozitivnom dijagonalnom matricom X sa desne strane. S obzirom da su generalizovano dijagonalno dominantne matrice (GDD) generisane od SDD matrica upravo množenjem sa desne strane pozitivnom dijagonalnom matricom, ova tehnika je omogućila lepe rezultate o klasi GDD, odnosno $H-$matrica.

Množenje date matrice A pozitivnom dijagonalnom matricom X sa desne strane zvaćemo *skaliranje*. Takođe ćemo koristiti termine *skalirajuća matrica* X i *skalirana matrica* AX. Ispostavlja se da može biti veoma korisno ako se unapred zna struktura skalirajuće matrice X. Uvodimo sledeće oznake:

$$\mathbb{D} := \{X = \operatorname{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n,n} : \ x_i > 0, \ i \in N\} \tag{2.28}$$

$$\mathbb{D}^S := \big\{X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n,n} :\ x_i = \gamma,\\ x_j = 1,\ \ i \in S;\ j \in \overline{S} \text{ za neko } \gamma > 0\big\} \tag{2.29}$$

gde je S neprazan podskup skupa indeksa N,

$$\mathbb{D}^{S_1,S_2\ldots,S_\ell} := \big\{X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n,n} : x_j = \gamma_i \ za\ j \in S_i,\\ i \in \{1, 2, \ldots, \ell\},\ \text{za neke } \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_\ell > 0\big\} \tag{2.30}$$

gde su, kao i ranije, $S_1, S_2, \ldots, S_\ell$ definisani particijom $\pi = \{p_j\}_{j=0}^{\ell}$ skupa indeksa.

U opštem slučaju, ako bismo izabrali sasvim proizvoljnu familiju $\mathcal{D}$ pozitivnih dijagonalnih matrica kao skalirajuće matrice, onda bismo na taj način mogli definisati i klasu matrica koje se svode na SDD oblik pomoću neke od skalirajućih matrica iz familije $\mathcal{D}$. Očigledno, tako definisana klasa matrica je potklasa $H-$matrica. Da li je nju moguće eksplicitno definisati uslovom ili uslovima koji se odnose na elemente polazne matrice, drugo je pitanje. Kao što ćemo videti kasnije, nekada je to moguće, a nekada ne.

Da bismo bili sasvim precizni, uvodimo sledeću definiciju.

Definicija 2.31. *Klasa $\mathbb{K}[\mathcal{D}]$ matrica generisana familijom $\mathcal{D}$ je skup svih matrica A za koje postoji matrica $X \in \mathcal{D}$ takva da je AX SDD matrica.*

Direktno, na osnovu ove definicije i Teoreme 2.8, sledi da važi sledeća teorema.

Teorema 2.32. *Klasa $\mathbb{K}[\mathcal{D}]$, gde je $\mathcal{D}$ proizvoljna familija pozitivnih dijagonalnih matrica, jeste potklasa $H-$matrica.*

Lako se vidi da je $\mathbb{K}[\mathbb{D}]$ u stvari, čitava klasa GDD odnosno $H-$matrica, dok je u radovima [21], [68] i [34] pokazano da je:

- $\mathbb{K}[\bigcup_{i=1}^{n}\mathbb{D}^{\{i\}}]$ klasa Dašnjic-Zasmanovič (DZ),
- $\mathbb{K}[\mathbb{D}^S]$ klasa $S-SDD$,

- $\mathbb{K}[\bigcup\limits_{S\subseteq N}\mathbb{D}^S]$ klasa $\Sigma - SDD$,
- $\mathbb{K}[\bigcup \mathbb{D}^{S_1,S_2,\ldots,S_\ell}]$ klasa PH, gde su $S_1, S_2, \ldots, S_\ell$ definisani particijom $\pi = \{p_j\}_{j=0}^{\ell}$ skupa indeksa.

Međutim, može se dokazati i više. Naime, parametar γ koji se pojavljuje u definiciji familije $\mathbb{D}^S$ za datu konkretnu matricu A mora pripadati otvorenom intervalu, čije su granice definisane na sledeći način

$$\alpha_S(A) := \max_{i\in S} \frac{r_i^{\overline{S}}(A)}{(|a_{i,i}| - r_i^S(A))}, \tag{2.31}$$

i

$$\beta_S(A) := \min_{j\in\overline{S},\, r_j^S(A)\neq 0} \frac{|a_{j,j}| - r_j^{\overline{S}}(A)}{r_j^S(A)}, \tag{2.32}$$

pri čemu se definiše $\beta_S(A) = +\infty$ u slučaju da je $r_j^S(A) = 0$ za svako $j \in \overline{S}$. Za dato S, klasa $S - SDD$ matrica je, u stvari, klasa generisana familijom $\mathbb{D}^S$, s tim što se dodatno zna da parametar γ pripada intervalu $(\alpha_S(A), \beta_S(A))$. Za više detalja pogledati [110].

U slučaju kada je $S = \{i\}$ dobijamo da je

$$\alpha_{\{i\}}(A) := \frac{r_i(A)}{|a_{i,i}|}, \tag{2.33}$$

i

$$\beta_{\{i\}}(A) := \min_{j\neq i, a_{j,i}\neq 0} \frac{|a_{j,j}| - r_j(A) + |a_{j,i}|}{|a_{j,i}|}, \tag{2.34}$$

što su gornja i donja granica za parametar γ koji se nalazi na i-tom mestu u skalirajućoj matrici za klasu Dašnjic-Zasmanovič matrica.

Za razliku od prethodnog slučaja, kako eksplicitno izraziti granice za parametre koji se pojavljuju u definiciji familije $\mathbb{D}^{S_1,S_2,\ldots,S_\ell}$ još uvek je otvoreno pitanje.

Na kraju ovog dela potrebno je primetiti da postoje i klase matrica koje jesu potklase $H-$matrica definisane eksplicitnim uslovom na njihove elemente, ali se, pri tome, eksplicitna forma familija dijagonalnih pozitivnih matrica koja ih generiše ne može utvrditi. Takva je, na primer, klasa Ostrovski matrica opisana uslovom

$$|a_{i,i}||a_{j,j}| > r_i(A)r_j(A), \ i \neq j.$$

Poznato je da je ova klasa podskup Dašnjic-Zasmanovič klase, to jest da postoji indeks i takav da za svako $j \neq i$ važi

$$|a_{i,i}| \cdot (|a_{j,j}| - r_j(A) + |a_{j,i}|) > r_i(A)|a_{j,i}|.$$

Samim tim, ako je matrica Ostrovski matrica, ona je, dakle, i Dašnjic-Zasmanovič matrica za neko i, pa za nju postoji skalirajuća matrica iz familije $\mathbb{D}^{\{i\}}$, pri čemu se γ bira iz odgovarajućeg intervala datog sa (2.33) i (2.34). Međutim, ova klasa nije klasa *svih* matrica A za koje postoji matrica $X \in \mathbb{D}^{\{i\}}$ takva da je AX SDD matrica. Na primer, matrica

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ne pripada klasi Ostrovski matrica, jer uslov

$$2 \cdot 4 = |a_{1,1}||a_{2,2}| > r_1(A)r_2(A) = 3 \cdot 3$$

nije zadovoljen. Međutim, za $i = 1$ matrica A jeste Dašnjic-Zasmanovič matrica, jer je za svako $j \neq 1$ nejednakost (2.8) zadovoljena. Naime, važi

$$2 \cdot (4 - 3 + 1) = |a_{1,1}| \cdot (|a_{2,2}| - r_2(A) + |a_{2,1}|) > r_1(A)|a_{2,1}| = 3 \cdot 1,$$

$$2 \cdot (4 - 2 + 0) = |a_{1,1}| \cdot (|a_{3,3}| - r_3(A) + |a_{3,1}|) > r_1(A)|a_{3,1}| = 3 \cdot 0,$$

$$2 \cdot (4 - 3 + 1) = |a_{1,1}| \cdot (|a_{4,4}| - r_4(A) + |a_{4,1}|) > r_1(A)|a_{4,1}| = 3 \cdot 1.$$

Da bismo odredili skalirajuću matricu, kako je $S = \{1\}$, zaključujemo da γ treba birati iz intervala (α, β) gde je

$$\alpha_{\{1\}}(A) = \frac{r_1(A)}{|a_{1,1}|} = \frac{3}{2} = 1.5,$$

i

$$\beta_{\{1\}}(A) = \min_{j \neq i, a_{j,1} \neq 0} \frac{|a_{j,j}| - r_j(A) + |a_{j,1}|}{|a_{j,1}|} = \frac{4-3+1}{1} = 2.$$

Dakle, skalirajuća matrica je oblika $W = \mathrm{diag}(\gamma, 1, 1, 1)$, gde je parametar $\gamma \in (1.5, 2)$. Za svako tako izabrano γ, matrica AW biće SDD matrica.

3

GDD: Blok slučaj

Tokom svih razmatranja koja slede, bićemo svesni činjenice da particija $\pi = \{p_j\}_{j=0}^{\ell}$ skupa indeksa N, u stvari, predstavlja i particiju skupa $\mathbb{C}^n$, u smislu konačne kolekcije $\{W_i\}_{i=1}^{\ell}$, gde su svaka dva linearna potprostora W_i međusobno disjunktna, gde je svaki dimenzije bar jedan i čija direktna suma je $\mathbb{C}^n$:

$$\mathbb{C}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_\ell. \tag{3.1}$$

Naime, nenegativni brojevi $\{p_j\}_{j=0}^{\ell}$ zadovoljavaju uslov

$$p_0 := 0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_\ell := n$$

pa je

$$W_j = span\{\mathbf{e}^k : p_{j-1} + 1 \le k \le p_j\}, \quad j \in L := \{1, 2, \cdots, \ell\}. \tag{3.2}$$

Vektori $\{\mathbf{e}^k\}_{k=1}^{n}$ su vektori standardne baze $\mathbb{C}^n$, odnosno

$$\mathbf{e}^j = [\delta_{j,1}, \delta_{j,2}, \ldots, \delta_{j,n}]^T,$$

gde je $\delta_{i,j}$ Kronekerova delta funkcija. Na osnovu toga imamo

$$\dim W_j = p_j - p_{j-1}, \quad j \in L.$$

Kao što smo i ranije naveli, za proizvoljnu matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$ i datu particiju $\pi = \{p_j\}_{j=0}^{\ell}$, matrica A se može predstaviti u blok formi

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,\ell} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,\ell} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline A_{\ell,1} & A_{\ell,2} & \cdots & A_{\ell,\ell} \end{array}\right] = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}, \tag{3.3}$$

gde svaka blok podmatrica $A_{i,j}$ predstavlja linearnu transformaciju potprostora W_j u potprostor W_i.

U ovom poglavlju ćemo za svaku od ranije navedenih *tačkastih* potklasa $H-$matrica navesti uopštenje na *blok varijantu.*

Označili smo već sa $L := \{1, 2, \ldots, \ell\}$, a za potencijalno pravougaone blokove koristimo oznaku $\|A_{i,j}\|_\infty$ u sledećem smislu:

$$\|A_{i,j}\|_\infty := \sup_{\substack{x \in W_j \\ x \neq 0}} \frac{\|A_{i,j}\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} = \sup_{\|x\|_\infty = 1} \|A_{i,j}\mathbf{x}\|_\infty. \tag{3.4}$$

Dalje, uvodimo oznaku

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|_\infty)^{-1} := \inf_{\substack{x \in W_i \\ x \neq 0}} \frac{\|A_{i,i}\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}, \quad i \in L, \tag{3.5}$$

koja je u skladu sa uobičajenom definicijom prirodne norme, u slučaju da je $A_{i,i}$ regularna matrica. Ako je $A_{i,i}$ singularna matrica, veličina $\inf\limits_{\substack{x \in W_i \\ x \neq 0}} \dfrac{\|A_{i,i}\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$ jednaka je nuli.

Svakoj blok matrici $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ oblika (3.3) dodelićemo pridruženu matricu formata $\ell\times\ell$. Međutim, to možemo uraditi na dva različita načina. U oba slučaja pridružena matrica zavisi od particije π kojom je polazna matrica zapisana u obliku (3.3), pa ćemo, shodno tome, uvesti oznake koje naglašavaju tu zavisnost:

- *Pridruženu matricu I tipa* označavamo sa $\rangle A\langle^{\pi} = [p_{i,j}]$, gde je:

$$p_{i,i} = (\|A_{i,i}^{-1}\|_\infty)^{-1}, \quad p_{i,j} = -\|A_{i,j}\|_\infty, \quad i, j \in L, \quad i \neq j. \tag{3.6}$$

- *Pridruženu matricu II tipa* označavamo sa $\langle A\rangle^{\pi} = [m_{i,j}]$, gde je:

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \ \text{ i } \ det(A_{i,i}) \neq 0, \\ \\ -\|A_{i,i}^{-1} A_{i,j}\|_{\infty}, & i \neq j \ \text{ i } \ det(A_{i,i}) \neq 0, \\ \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Zbog toga će svaka tačkasta potklasa $H-$matrica imati po dve svoje blok varijante, I i II tipa.

3.1 Blok SDD matrice

Najranija uopštenja osobine stroge dijagonalne dominacije na blok matrice javljaju se istovremeno i nezavisno jedan od drugog u radovima Ostrovskog [90] iz (1961), Fidlera i Ptaka [39] iz (1962) i Fajngolda i Varge [38] iz (1962).

U ovoj disertaciji formulisaćemo rezultate u skladu sa oznakama koje smo upravo naveli.

3.1.1 Prvi tip blok uopštenja

Definicija 3.1. *Za datu particiju π, blok matricu $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ zovemo blok π SDD matrica I tipa ($B_I^{\pi}SDD$) ako je njena pridružena matrica prvog tipa $\rangle A\langle^{\pi}$ SDD matrica.*

Drugim rečima, za datu particiju π, matrica A je $B_I^{\pi}SDD$ matrica, ako važi

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|_{\infty})^{-1} > \sum_{j\in L\setminus\{i\}} \|A_{i,j}\|_{\infty} \ \text{ za svako } \ i \in L. \tag{3.8}$$

Teorema 3.2. *Svaka $B_I^{\pi}SDD$ matrica je regularna.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, da je A singularna matrica, tj. da postoji neko $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ iz $\mathbb{C}^n$ tako da je $A\mathbf{x} = 0$. Bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $\|\mathbf{x}\|_{\infty} = 1$. Zapišimo vektor $\mathbf{x}$ u blok formi

$\mathbf{x} = [X_1, X_2, \ldots, X_\ell]^T$, pri čemu je dimenzija vektora X_j jednaka redu dijagonalnog bloka $A_{j,j}$ za svako $j \in L$.
Tada je $\sum_{j \in L} A_{i,j} X_j = 0$ za svako $i \in L$, odnosno

$$A_{i,i} X_i = - \sum_{j \in L \setminus \{i\}} A_{i,j} X_j, \qquad i \in L. \tag{3.9}$$

Kako je $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$, možemo odabrati indeks k takav da je $\|X_k\|_\infty = 1$. Tada iz (3.9) za $i = k$, korišćenjem nejednakosti trougla i (3.4), sledi

$$\|A_{k,k} X_k\|_\infty \leq \sum_{j \in L \setminus \{k\}} \|A_{k,j} X_j\|_\infty \leq \sum_{j \in L \setminus \{k\}} \|A_{k,j}\|_\infty \|X_j\|_\infty \leq$$
$$\leq \sum_{j \in L \setminus \{k\}} \|A_{k,j}\|_\infty.$$

Međutim, iz (3.5) sledi

$$\|A_{k,k} X_k\|_\infty \geq (\|A_{k,k}^{-1}\|_\infty)^{-1} \|X_k\|_\infty = (\|A_{k,k}^{-1}\|_\infty)^{-1},$$

pa zaključujemo da je

$$(\|A_{k,k}^{-1}\|_\infty)^{-1} \leq \sum_{j \in L \setminus \{k\}} \|A_{k,j}\|_\infty,$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom da je $\rangle A \langle^\pi$ SDD matrica. Dakle, A je regularna matrica. $\square$

3.1.2 Drugi tip blok uopštenja

Definicija 3.3. *Za datu particiju π, blok matricu $A = [A_{i,j}]_{\ell \times \ell}$ zovemo blok π SDD matrica II tipa ($B_{II}^\pi SDD$) ako je njena pridružena matrica drugog tipa $\langle A \rangle^\pi$ SDD matrica.*

Pokažimo da smo na ovaj način ostali u klasi regularnih matrica. Naime, pokažimo da važi sledeća teorema.

Teorema 3.4. *Svaka $B_{II}^\pi SDD$ matrica je regularna.*

Dokaz: Primetimo, najpre, da iz uslova da je $\langle A\rangle^{\pi}$ SDD matrica, sledi da su njeni dijagonalni elementi svi različit od nule, što znači da su svi dijagonalni blokovi polazne blok matrice A regularni.
Dokaz ćemo izvesti kontradikcijom. Pretpostavimo suprotno, da je A singularna matrica, tj. da postoji neko $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ iz $\mathbb{C}^n$ tako da je $A\mathbf{x} = 0$. Neka je $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$, što ne umanjuje opštost. Zapišimo vektor $\mathbf{x}$ u blok formi $\mathbf{x} = [X_1, X_2, \cdots, X_\ell]^T$, kao i ranije, pri čemu je dimenzija vektora X_j jednaka redu dijagonalnog bloka $A_{j,j}$ za svako $j \in L$.
Tada je $\sum\limits_{j\in L} A_{i,j}X_j = 0$ za svako $i \in L$, odnosno

$$A_{i,i}X_i = -\sum_{j\in L\setminus\{i\}} A_{i,j}X_j, \qquad i \in L,$$

$$\text{tj.} \quad X_i = -\sum_{j\in L\setminus\{i\}} A_{i,i}^{-1}A_{i,j}X_j, \qquad i \in L. \tag{3.10}$$

Kako je $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$, neka je $k \in L$ takav da je $\|X_k\|_\infty = \max\limits_{j\in L} \|X_j\|_\infty = 1$. Primenjujući normu beskonačno na (3.10) za $i = k$, dobijamo:

$$1 = \|X_k\|_\infty \leq \sum_{j\in L\setminus\{k\}} \|A_{k,k}^{-1}A_{k,j}X_j\|_\infty \leq \sum_{j\in L\setminus\{k\}} \|A_{k,k}^{-1}A_{k,j}\|_\infty \|X_j\|_\infty \leq$$

$$\leq \sum_{j\in L\setminus\{k\}} \|A_{k,k}^{-1}A_{k,j}\|_\infty = \sum_{j\in L\setminus\{k\}} |m_{k,j}|,$$

što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $\langle A\rangle^{\pi}$ strogo dijagonalno dominantna. Dakle, A je regularna matrica. □

3.1.3 Diskusija odnosa prvog i drugog tipa blok uopštenja

Pre daljih razmatranja, naglasimo činjenicu da, ako blok matrica A oblika (3.3) pripada bilo klasi $B_I^{\pi}SDD$, bilo klasi $B_{II}^{\pi}SDD$, u oba slučaja svi njeni dijagonalni blokovi $A_{i,i}, i \in L$, su regularne matrice. Naime, u suprotnom, ako bi neki dijagonalni blok (na primer $A_{k,k}$) bio singularan, i u pridruženoj matrici I tipa, i u pridruženoj matrici II tipa, k-ti dijagonalni element bio bi jednak nuli, što je nemoguće.

Neka je π data particija i neka je A $B_I^\pi SDD$ matrica. Dakle, $\rangle A \langle^\pi$ je SDD matrica, odnosno važi

$$(\|A_{i,i}^{-1}\|_\infty)^{-1} > \sum_{j \in L \setminus \{i\}} \|A_{i,j}\|_\infty \text{ za svako } i \in L. \tag{3.11}$$

Uslov (3.11) može se zapisati i kao

$$1 > \|A_{i,i}^{-1}\|_\infty \sum_{j \in L \setminus \{i\}} \|A_{i,j}\|_\infty. \tag{3.12}$$

Kako je

$$\|A_{i,i}^{-1}\|_\infty \sum_{j \in L \setminus \{i\}} \|A_{i,j}\|_\infty = \sum_{j \in L \setminus \{i\}} \|A_{i,i}^{-1}\|_\infty \|A_{i,j}\|_\infty \geq$$

$$\geq \sum_{j \in L \setminus \{i\}} \|A_{i,i}^{-1} A_{i,j}\|_\infty = \sum_{j \in L \setminus \{i\}} |m_{i,j}|,$$

to znači da je

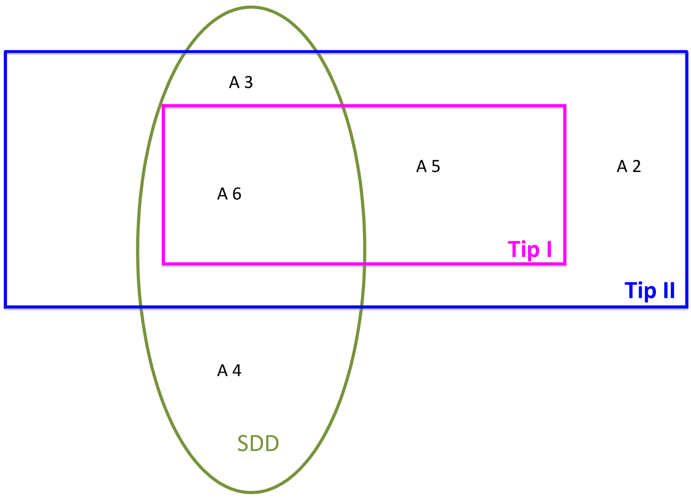
$$1 > \sum_{j \in L \setminus \{i\}} |m_{i,j}|,$$

to jest $\langle A \rangle^\pi$ je SDD matrica, odnosno A je $B_{II}^\pi SDD$ matrica.

Odnos SDD blok matrica I i II tipa, za istu particiju π, dat je na Slici 3.1. Na istoj slici prikazan je njihov odnos sa tačkastom SDD klasom. Da je on takav pokazuju sledeći primeri:

Primer 3.5.

$$A_2 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$



Slika 3.1: Odnos $B_I^\pi SDD$ i $B_I^\pi SDD$ matrica za istu particiju π i njihov odnos sa tačkastom SDD klasom.

$$\rangle A_2 \langle^\pi = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}, \qquad \langle A_2 \rangle^\pi = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica A_2 nije SDD matrica u *tačkastom smislu*. Za particiju $\pi = \{0, 3, 6\}$, ova matrica nije $B_I^\pi SDD$ matrica, ali jeste $B_{II}^\pi SDD$ matrica, jer je $\langle A_2 \rangle^\pi$ SDD matrica.

Primer 3.6.

$$A_3 = \left[\begin{array}{rr|rr} 8 & 1 & -0.2 & 3.3 \\ 7 & 13 & 2 & -3 \\ \hline -1.3 & 6.7 & 13 & -2 \\ 0.5 & 3 & 1 & 6 \end{array} \right]$$

$$\rangle A_3 \langle^\pi = \begin{bmatrix} 6.4667 & -5 \\ -8 & 5.7143 \end{bmatrix}, \qquad \langle A_3 \rangle^\pi = \begin{bmatrix} 1 & -0.6649 \\ -0.6625 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica A_3 je SDD matrica u *tačkastom smislu*. Za particiju $\pi = \{0, 2, 4\}$, ova matrica nije $B_I^\pi SDD$ matrica, ali jeste $B_{II}^\pi SDD$ matrica, jer je $\langle A_3 \rangle^\pi$ SDD matrica.

Primer 3.7.

$$A_4 = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 4 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\rangle A_4\langle^{\pi} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2.6667 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \langle A_4\rangle^{\pi} = \begin{bmatrix} 1 & -0.25 & 0 & -0.5 \\ -0.25 & 1 & -0.25 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.375 \\ -0.5 & -0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica A_4 je SDD matrica u *tačkastom smislu*, a za particiju $\pi = \{0, 2, 4, 6\}$, ova matrica nije ni $B_I^{\pi}SDD$ matrica ni $B_{II}^{\pi}SDD$ matrica.

Primer 3.8.

$$A_5 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

$$\rangle A_5\langle^{\pi} = \begin{bmatrix} 2.3333 & -1 \\ -2 & 3.1724 \end{bmatrix}, \qquad \langle A_5\rangle^{\pi} = \begin{bmatrix} 1 & -0.3651 \\ -0.3913 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica A_5 nije SDD matrica u *tačkastom smislu*, a za particiju $\pi = \{0, 3, 6\}$, ova matrica je i $B_I^{\pi}SDD$ matrica i $B_{II}^{\pi}SDD$ matrica, pošto su matrice $\rangle A_5\langle^{\pi}$ i $\langle A_5\rangle^{\pi}$ obe SDD matrice.

Primer 3.9.

$$A_6 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 8 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 11 & 2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

$$\rangle A_6 \langle^\pi = \begin{bmatrix} 5.0707 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \langle A_6 \rangle^\pi = \begin{bmatrix} 1 & -0.3227 \\ -0.3333 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrica A_6 je primer matrice koja je istovremeno SDD matrica *u tačkastom smislu*, i za particiju $\pi = \{0, 3, 6\}$ ona je i $B_I^\pi SDD$ matrica i $B_{II}^\pi SDD$ matrica.

Navedeni primeri opravdavaju odnos SDD, $B_I^\pi SDD$ i $B_{II}^\pi SDD$ klasa matrica, koji je prikazan na Slici 3.1.

3.2 Blok $H-$matrice

3.2.1 Prvi tip blok uopštenja

Analogno načinima na koje smo uopštili klasu *tačkastih* SDD matrica na blok matrice, isto ćemo učiniti i sa klasom *tačkastih* $H-$matrica.

Definicija 3.10. *Za datu particiju π, blok matricu $[A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ zovemo blok π $H-$matrica I tipa ($B_I^\pi H$) ako je njoj pridružena matrica prvog tipa $\rangle A \langle^\pi$ H-matrica.*

Primetimo da, na osnovu ove definicije, sledi da ako je blok matrica A iz klase $B_I^\pi H$, tada su svi njeni dijagonalni blokovi regularne matrice. Inače, na dijagonali pridružene matrice I tipa bi se pojavila 0, pa ona ne bi mogla biti $H-$matrica.

Teorema 3.11. *Svaka $B_I^\pi H-$matrica je regularna.*

Dokaz: Ako je $[A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ $B_I^\pi H-$matrica, tj. ako je $\rangle A\langle^\pi$ $H-$matrica, onda postoji pozitivna dijagonalna matrica

$$X = \mathrm{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_\ell), \tag{3.13}$$

takva da je $\rangle A\langle^\pi$ X SDD matrica. Drugim rečima, za svako $i \in L$ važi:

$$x_i(\|A_{i,i}^{-1}\|_\infty)^{-1} > \sum_{j\in L\setminus\{i\}} \|A_{i,j}\|_\infty x_j.$$

Definišimo matricu $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (n je dimenzija matrice A) na sledeći način:

$$W = \mathrm{diag}(x_1 I_{m_1}, x_2 I_{m_2}, \ldots, x_\ell I_{m_\ell}), \tag{3.14}$$

gde je I_{m_k} jedinična matrica formata $m_k \times m_k$, a m_k je dimenzija bloka $A_{k,k}$, $k \in L$. Tada je

$$AW = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,\ell} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{\ell,1} & A_{\ell,2} & \cdots & A_{\ell,\ell} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 I_{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 I_{m_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_\ell I_{m_\ell} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 A_{1,1} & x_2 A_{1,2} & \cdots & x_\ell A_{1,\ell} \\ x_1 A_{2,1} & x_2 A_{2,2} & \cdots & x_\ell A_{2,\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 A_{\ell,1} & x_2 A_{\ell,2} & \cdots & x_\ell A_{\ell,\ell} \end{bmatrix},$$

te je AW $B_I^\pi SDD$ matrica, jer je njena pridružena matrica prvog tipa $\rangle AW\langle^\pi$ SDD matrica, pošto je

$$(\|\left(\rangle AW\langle^\pi\right)_{i,i}^{-1}\|_\infty)^{-1} = x_i(\|A_{i,i}^{-1}\|_\infty)^{-1},$$

$$\|\left(\rangle AW\langle^\pi\right)_{i,j}\|_\infty = x_j\|A_{i,j}\|_\infty. \ \square$$

3.2.2 Drugi tip blok uopštenja

Definicija 3.12. *Za datu particiju π, blok matricu $[A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ zovemo blok π $H-$matrica II tipa ($B_{II}^{\pi}H$), ako je njoj pridružena matrica drugog tipa $\langle A\rangle^{\pi}$ $H-$matrica.*

Primetimo i ovde da, na osnovu definicije, sledi da ako je blok matrica A iz klase $B_{II}^{\pi}H$, tada su svi njeni dijagonalni blokovi regularne matrice. Inače, elementi bar jedne čitave vrste pridružene matrice II tipa bili bi jednaki 0, pa ona ne bi mogla biti $H-$matrica.

Teorema 3.13. *Svaka $B_{II}^{\pi}H-$matrica je regularna.*

Dokaz: Ako je $A=[A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ $B_{II}^{\pi}H-$matrica, tj. ako je $\langle A\rangle^{\pi}$ $H-$matrica, onda postoji pozitivna dijagonalna matrica oblika(3.13) takva da je $\langle A\rangle^{\pi}\ X\ \ SDD$ matrica, što znači da za svako $i\in L$ važi:

$$x_i>\sum_{j\neq i}\|A_{i,i}^{-1}A_{i,j}\|_{\infty}x_j.$$

Definišimo regularnu dijagonalnu matricu $W\in\mathbb{R}^{n\times n}$ (n je dimenzija matrice A) na isti način kao i u dokazu Teoreme 3.11:

$$W=\operatorname{diag}(x_1I_{m_1},x_2I_{m_2},\dots,x_\ell I_{m_\ell}),$$

gde je I_{m_k} jedinična matrica formata $m_k\times m_k$, a m_k je dimenzija bloka $A_{k,k}$, $k\in L$. Tada je

$$W^{-1}AW=$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{x_1}I_{m_1} & 0\cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{x_2}I_{m_2}\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0\cdots & \frac{1}{x_\ell}I_{m_\ell}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}A_{1,1}\,A_{1,2}\cdots A_{1,\ell}\\ A_{2,1}\,A_{2,2}\cdots A_{2,\ell}\\ \vdots\quad\vdots\quad\vdots\\ A_{\ell,1}\,A_{\ell,2}\cdots A_{\ell,\ell}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1I_{m_1} & 0\cdots & 0\\ 0 & x_2I_{m_2}\cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0\cdots x_\ell I_{m_\ell}\end{bmatrix}=$$

$$=\left[\begin{array}{r|r|c|r} A_{1,1} & \frac{x_2}{x_1}A_{1,2} & \cdots & \frac{x_\ell}{x_1}A_{1,\ell}\\ \hline \frac{x_1}{x_2}A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & \frac{x_\ell}{x_2}A_{2,\ell}\\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots\\ \hline \frac{x_1}{x_\ell}A_{\ell,1} & \frac{x_2}{x_\ell}A_{\ell,2} & \cdots & A_{\ell,\ell}\end{array}\right],$$

a $\langle W^{-1}AW\rangle^{\pi} = [\mu_{i,j}]$, pri čemu je

$$\mu_{i,i} = 1 = m_{i,i},$$

$$\mu_{i,j} = -\|(W^{-1}AW)_{i,i}^{-1}(W^{-1}AW)_{i,j}\|_{\infty} = -\|\frac{x_j}{x_i}A_{i,i}^{-1}A_{i,j}\|_{\infty} = -\frac{x_j}{x_i}m_{i,j},$$

za $i \neq j$. Kako je $\langle A\rangle^{\pi}\ X \ \ SDD$ matrica, to je i $X^{-1}\langle A\rangle^{\pi}\ X$, čiji su elementi

$$(X^{-1}\langle A\rangle^{\pi}\ X)_{i,i} = 1, \ \ i \in L,$$

$$(X^{-1}\langle A\rangle^{\pi}\ X)_{i,j} = -\frac{x_j}{x_i}m_{i,j}, \ \ i \neq j, \ \ i,j \in L.$$

Dakle, $\langle W^{-1}AW\rangle^{\pi} = X^{-1}\langle A\rangle^{\pi}\ X$, pa zaključujemo da je $\langle W^{-1}AW\rangle^{\pi}$ SDD matrica, odnosno, $W^{-1}AW$ je $B_{II}^{\pi}SDD$ matrica, pa time i regularna. Tada je i A regularna matrica. □

3.3 Potklase blok $H-$matrica

Prateći isti put generalizacije, kao što smo to uradili sa SDD i $H-$matricama, jasno je da možemo definisati blok π analogone I i II tipa svim ranije navedenim *tačkastim* potklasama $H-$matrica. Naime, ako sa $\mathbb{K}$ označimo proizvoljnu potklasu $H-$matrica, onda je na sledeća dva načina možemo generalizovati na blok slučaj:

Definicija 3.14. *Za datu particiju π, blok matricu $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ zovemo blok π $\mathbb{K}$ matrica I tipa ($B_I^{\pi}\mathbb{K}$), ako je njoj pridružena matrica prvog tipa $\rangle A\langle^{\pi}\mathbb{K}$ matrica.*

Definicija 3.15. *Za datu particiju π, blok matricu $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ zovemo blok π $\mathbb{K}$ matrica II tipa ($B_{II}^{\pi}\mathbb{K}$), ako je njoj pridružena matrica drugog tipa $\langle A\rangle^{\pi}\mathbb{K}$ matrica.*

Kako je $\mathbb{K}$ potklasa H matrica, na osnovu prethodne sekcije očigledno važi:

Teorema 3.16. *Svaka $B_I^{\pi}\mathbb{K}$ matrica je regularna.*

Teorema 3.17. *Svaka $B_{II}^{\pi}\mathbb{K}$ matrica je regularna.*

Ulogu klase $\mathbb{K}$ može igrati bilo koja od potklasa $H-$matrica opisanih u drugom poglavlju. Tada se na osnovu skalirajuće matrice X (3.13), koja će pridruženu matricu skalirati na SDD matricu, može formirati matrica W oblika (3.14), koja će polaznu matricu A skalirati na blok SDD matricu AW ili $W^{-1}AW$. To je bitno posebno u slučajevima u kojima se zna oblik i osobine skalirajuće matrice, kao što su Dašnjic-Zasmanovič (DZ), $S-SDD$, $PH-$matrice. Isti princip važi kako za blok matrice I tipa, tako i za blok matrice II tipa.

Pokazaćemo u nastavku na koji način potklase blok $H-$matrica mogu imati značajnu ulogu i u nekim drugim oblastima linearne algebre, a ne samo kao rezultati o regularnosti matrica.

Radi preglednosti navodimo sve potklase blok $H-$matrica koje ćemo ovde razmatrati.

Definicija 3.18. *Neka je data particija π i njom generisana blok matrica $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$. Tada kažemo da je A:*

- *blok π Ostrovski matrica I tipa ako je $\rangle A\langle^\pi$ Ostrovski matrica,*
- *blok π DZ matrica I tipa ako je $\rangle A\langle^\pi$ DZ matrica,*
- *blok π $S-SDD$ matrica I tipa ako je $\rangle A\langle^\pi$ $S-SDD$ matrica,*
- *blok π $\alpha 1$ matrica I tipa ako je $\rangle A\langle^\pi$ $\alpha 1$ matrica,*
- *blok π $\alpha 2$ matrica I tipa ako je $\rangle A\langle^\pi$ $\alpha 2$ matrica,*
- *blok π Nekrasov matrica I tipa ako je $\rangle A\langle^\pi$ Nekrasov matrica,*
- *blok π $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica I tipa ako je $\rangle A\langle^\pi$ $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica,*
- *blok π $S-$Nekrasov matrica I tipa ako je $\rangle A\langle^\pi$ $S-$Nekrasov matrica,*

Definicija 3.19. *Neka je data particija π i njom generisana blok matrica $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$. Tada kažemo da je A:*

- *blok π Ostrovski matrica II tipa ako je $\langle A\rangle^\pi$ Ostrovski matrica,*
- *blok π DZ matrica II tipa ako je $\langle A\rangle^\pi$ DZ matrica,*

- *blok* π $S-SDD$ *matrica* II *tipa ako je* $\langle A\rangle^{\pi}$ $S-SDD$ *matrica,*
- *blok* π $\alpha 1$ *matrica* II *tipa ako je* $\langle A\rangle^{\pi}$ $\alpha 1$ *matrica,*
- *blok* π $\alpha 2$ *matrica* II *tipa ako je* $\langle A\rangle^{\pi}$ $\alpha 2$ *matrica,*
- *blok* π *Nekrasov matrica* II *tipa ako je* $\langle A\rangle^{\pi}$ *Nekrasov matrica,*
- *blok* π $\{P_1, P_2\}-$*Nekrasov matrica* II *tipa ako je* $\langle A\rangle^{\pi}$ $\{P_1, P_2\}-$*Nekrasov matrica,*
- *blok* π $S-$*Nekrasov matrica* II *tipa ako je* $\langle A\rangle^{\pi}$ $S-$*Nekrasov matrica,*

Njihovi međusobni odnosi ostaju isti kao i odnosi u tačkastom slučaju. To jasno proizilazi iz načina definisanja ovih blok generalizacija.

Takođe, slično komentaru o odnosu blok π SDD matrica I i II tipa, datom ranije, lako se može zaključiti i da je svaka blok π $\mathbb{K}$ matrica I tipa istovremeno i blok π $\mathbb{K}$ matrica II tipa.

Što se tiče odnosa između tačkaste i njoj odgovarajuće blok klase za unapred zadatu particiju π, on je, u opštem slučaju, takav da niti je tačkasta klasa podskup blok klase niti važi obrnuto.

4

Primena: Ocena $\|A^{-1}\|_\infty$

Da bismo preglednije predstavili ocene koje su vezane za blok matrice, kao i da bismo bili u mogućnosti da ih poredimo sa *tačkastim* ocenama, u slučajevima kada je to moguće, u ovom poglavlju ćemo se najpre pozabaviti *tačkastim* slučajem. Pri tome ćemo pod pojmom *ocene* norme beskonačno inverzne matrice uvek podrazumevati *gornju ocenu* norme beskonačno inverzne matrice.

Od do sada u literaturi poznatih ocena za $\|A^{-1}\|_\infty$ navodimo nekoliko najvažnijih. To su one koje se odnose na sledeće potklase $H-$matrica: SDD matrice, $S-SDD$ matrice, Nekrasov matrice, $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrice i $S-$Nekrasov matrice. Napomenimo da smo od čitave klase PH matrica izabrali samo slučaj $S-SDD$ matrica, dakle, slučaj podele indeksa na dva disjunktna podskupa. Razlog leži u činjenici da u slučaju podele skupa indeksa na tri ili više disjunktnih podskupova, broj operacija potrebnih za izračunavanje ocene norme beskonačno inverzne matrice se značajno povećava. Takođe, napomenimo da smo u ovoj disertaciji izostavili neke druge ocene norme beskonačno inverzne matrice za određene potklase $H-$matrica, kao, na primer, ocene iz radova [79], [84], [58]. Razlog tome je činjenica da su neke od njih već obuhvaćene nekom od navedenih ocena, a neke nisu sasvim povoljne za blok uopštenja.

Ocena (Varah) za SDD matrice, [1]:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\min\limits_{i\in N}\big(|a_{i,i}| - r_i(A)\big)}. \tag{Var}$$

Ocena (Kolotilina) za $S-SDD$ matrice, [68] :

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{i\in S, j\in \overline{S}} \max\{\rho^S_{i,j}(A), \rho^{\overline{S}}_{j,i}(A)\}, \tag{Kol}$$

gde je

$$\rho^S_{i,j}(A) := \frac{|a_{i,i}| - r_i^S(A) + r_j^S(A)}{\big(|a_{i,i}| - r_i^S(A)\big)\big(|a_{j,j}| - r_j^{\overline{S}}(A)\big) - r_i^{\overline{S}}(A) r_j^S(A)}. \tag{4.1}$$

Prva ocena (Cvetković, Dai, Doroslovački, Li) za Nekrasov matrice, [19]:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in N} z_i(A)}{\min\limits_{i\in N}\big(|a_{i,i}| - h_i(A)\big)}, \tag{CDDL1}$$

gde je

$$z_1(A) := 1, \quad z_i(A) := \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{j,j}|} z_j(A) + 1, \quad i = 2, 3, \dots n. \tag{4.2}$$

Druga ocena (Cvetković, Dai, Doroslovački, Li) za Nekrasov matrice, [19]:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in N} \dfrac{z_i(A)}{|a_{i,i}|}}{1 - \max\limits_{i\in N} \dfrac{h_i(A)}{|a_{i,i}|}}, \tag{CDDL2}$$

gde je $z_i(A)$ definisano u (4.2).

Prva ocena (Cvetković, Kostić, Nedović) za $\{P_1, P_2\}$-Nekrasov matrice, [29]:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in N}\{z_i^{P_{k_i}}(A)\}}{\min\limits_{i\in N}\big[|a_{i,i}| - \min\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\}\big]}, \tag{CKN1}$$

gde je $z_i(A)$ definisano u (4.2), $\mathbf{z}(A) := [z_1(A), \ldots, z_n(A)]^T$, $\mathbf{z}^P(A) = P\mathbf{z}(P^TAP)$, indeks $k_i \in \{1,2\}$ je izabran tako da je

$$\min\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\} = h_i^{P_{k_i}}(A),$$

a $\mathbf{h}^{P_k}(A)$, $k = 1,2$, definisano u (2.23).

Druga ocena (Cvetković, Kostić, Nedović) za $\{P_1, P_2\}$-Nekrasov matrice, [29]:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in N}\{\dfrac{z_i^{P_{k_i}}(A)}{|a_{i,i}|}\}}{\min\limits_{i\in N}\left[1 - \min\{\dfrac{h_i^{P_1}(A)}{|a_{i,i}|}, \dfrac{h_i^{P_2}(A)}{|a_{i,i}|}\}\right]}, \tag{CKN2}$$

gde je $z_i(A)$ definisano u (4.2), $\mathbf{z}(A) := [z_1(A), \ldots, z_n(A)]^T$, $\mathbf{z}^P(A) = P\mathbf{z}(P^TAP)$, indeks $k_i \in \{1,2\}$ je izabran tako da je

$$\min\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\} = h_i^{P_{k_i}}(A),$$

a $\mathbf{h}^{P_k}(A)$, $k = 1,2$, definisano u (2.23).

Prva ocena (Cvetković, Kostić, Doroslovački) za S-Nekrasov matrice, [27]:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{i\in N} z_i(A) \cdot \max_{i\in S, j\in \overline{S}} \max\{\chi_{i,j}^S(A), \chi_{j,i}^{\overline{S}}(A)\}, \tag{CKD1}$$

gde je $z_i(A)$ definisano u (4.2) i

$$\chi_{i,j}^S(A) := \frac{|a_{i,i}| - h_i^S(A) + h_j^S(A)}{\big(|a_{i,i}| - h_i^S(A)\big)\big(|a_{j,j}| - h_j^{\overline{S}}(A)\big) - h_i^{\overline{S}}(A)h_j^S(A)}.$$

Druga ocena (Cvetković, Kostić, Doroslovački) za S-Nekrasov matrice, [27]:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{i\in N} \frac{z_i(A)}{|a_{i,i}|} \cdot \max_{i\in S, j\in \overline{S}} \max\{\widetilde{\chi}_{i,j}^S(A), \widetilde{\chi}_{j,i}^{\overline{S}}(A)\}, \tag{CKD2}$$

gde je $z_i(A)$ definisano u (4.2) i

$$\widetilde{\chi}_{i,j}^S(A) := \frac{|a_{i,i}||a_{j,j}| - |a_{j,j}|h_i^S(A) + |a_{i,i}|h_j^S(A)}{\big(|a_{i,i}| - h_i^S(A)\big)\big(|a_{j,j}| - h_j^{\overline{S}}(A)\big) - h_i^{\overline{S}}(A)h_j^S(A)}.$$

Očevidno je da se ocena za $\|A^{-1}\|_\infty$ izvedena za šire klase matrica može primeniti i na sve klase koje su sadržane u njoj.

S obzirom da su ocene za $\|A^{-1}\|_\infty$ u slučaju Nekrasovih i $S-$Nekrasovih matrica autorovi originalni rezultati, a, sa druge strane, ocene u slučaju $\{P_1, P_2\}-$Nekrasovih matrica još nisu publikovane, posvetićemo im posebnu pažnju u ovoj disertaciji i detaljno ih prezentovati. Za više detalja pogledati radove [27], [19] i [29].

4.1 Tačkast slučaj

4.1.1 Nekrasov matrice

Za dokaz ocena (CDDL1) i (CDDL2) koristi se sledeće svojstvo $H-$matrica, dato u Berman Plemmons [7] :

Teorema 4.1. *Neka je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ (regularna) $H-$matrica. Onda važi*

$$|A^{-1}| \le (\mathcal{M}(A))^{-1}, \tag{4.3}$$

gde je $\mathcal{M}(A)$ pridružena matrica matrici A (vidi Definiciju 2.6).

Takođe, koristićemo i rezultat Roberta iz [95] koji formulišemo u vidu sledeće leme:

Lema 4.2. *Za proizvoljnu matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \ge 2$, za koju je $a_{i,i} \neq 0$ za svako $i \in N$, važi*

$$h_i(A) = |a_{i,i}|\big[(|D| - |L|)^{-1}|U|\mathbf{e}\big]_i\ , \tag{4.4}$$

gde je $\mathbf{e}$ vektor čije su sve komponente jednake jedan.

Neposredna posledica ove leme je svojstvo Nekrasov matrica, koje je pokazao Šulc u radu [98]:

Teorema 4.3. *Matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ je Nekrasov matrica ako i samo ako je*

$$(|D| - |L|)^{-1}|U|\mathbf{e} < \mathbf{e}. \tag{4.5}$$

Tada je $I - (|D| - |L|)^{-1}|U|$ SDD matrica.

Prvi pokušaj da se oceni norma beskonačno inverzne matrice za Nekrasov matricu dat je u radu [19]. Navodimo ga ovde sa dokazom.

Teorema 4.4. *Neka je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ Nekrasov matrica. Onda je:*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in N} z_i(A)}{\min\limits_{i\in N} \big(|a_{i,i}| - h_i(A)\big)}\ , \tag{CDDL1}$$

i

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in N} \dfrac{z_i(A)}{|a_{i,i}|}}{1 - \max\limits_{i\in N} \dfrac{h_i(A)}{|a_{i,i}|}} \tag{CDDL2}$$

gde je $h_i(A)$ definisano u (2.18), a $z_i(A)$ su definisani sa (4.2).

Dokaz: Pre svega, uočimo da su svi elementi matrice $(|D| - |L|)^{-1}|U|$ nenegativni, zato što je matrica $(|D| - |L|)$ iz klase $M-$matrica. Pretpostavimo da je A Nekrasov matrica. Iz nejednakosti (4.5) vidimo da je suma svih elemenata u svakoj vrsti manja od 1, stoga možemo zaključiti da su svi dijagonalni elementi manji od 1. Dalje, na osnovu Teoreme 4.3, znamo da je

$$I - (|D| - |L|)^{-1}|U| =: C \tag{4.6}$$

SDD matrica, pa je i

$$B := |D|\ C = |D| - |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|$$

takođe SDD matrica, jer množenje sa leve strane dijagonalnom matricom $|D|$ neće narušiti svojstvo SDD. Sada možemo koristiti Varahovu ocenu za normu beskonačno za matricu B^{-1}:

$$\|B^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\min\limits_{i\in N} \big(|b_{i,i}| - r_i(B)\big)}.$$

Znajući da su svi dijagonalni elementi matrice $(|D|-|L|)^{-1}|U|$ manji od 1, dobijamo:

$$|b_{i,i}| = |a_{i,i}| - |a_{i,i}|\big[(|D|-|L|)^{-1}|U|\big]_{i,i},$$

$$r_i(B) = \sum_{j\neq i}^{n} |a_{i,i}|\big[(|D|-|L|)^{-1}|U|\big]_{i,j},$$

$$|b_{i,i}| - r_i(B) = |a_{i,i}| - \sum_{j=1}^{n} |a_{i,i}|\big[(|D|-|L|)^{-1}|U|\big]_{i,j} =$$

$$= |a_{i,i}| - |a_{i,i}|\big[(|D|-|L|)^{-1}|U|\mathbf{e}\big]_{i} = |a_{i,i}| - h_i(A).$$

Dakle,

$$\|B^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\min\limits_{i\in N}\big(|a_{i,i}| - h_i(A)\big)}.$$

Da bismo dobili ocenu za $\|A^{-1}\|_\infty$, ostaje da nađemo vezu između matrica B^{-1} i A^{-1}. Kako je

$$B = |D|(|D|-|L|)^{-1}\mathcal{M}(A),$$

odnosno

$$\mathcal{M}(A) = (I - |L||D|^{-1})B, \tag{4.7}$$

na osnovu Teoreme 4.1 sledi da je

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty \leq \|B^{-1}\|_\infty \|(I-|L||D|^{-1})^{-1}\|_\infty.$$

Konačno, da bismo izveli ocenu za $\|(I-|L||D|^{-1})^{-1}\|_\infty$, polazimo od

$$\|(I-|L||D|^{-1})^{-1}\|_\infty = \|(I-|L||D|^{-1})^{-1}\mathbf{e}\|_\infty,$$

što je tačno, jer je matrica $I-|L||D|^{-1}$ iz klase $M-$ matrica. Očigledno je da važi $\mathbf{z}(A) := (I-|L||D|^{-1})^{-1}\mathbf{e}$, tako da je

$$\|(I-|L||D|^{-1})^{-1}\|_\infty = \|\mathbf{z}(A)\|_\infty = \max_{i\in N} z_i(A), \tag{4.8}$$

čime je prva ocena (CDDL1) dokazana.

Da bismo dokazali drugu ocenu (CDDL2), najpre direktno primenjujemo Varahovu ocenu za normu beskonačno za inverznu matricu matrici C:

$$\|C^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\min\limits_{i\in N}\big(|c_{i,i}| - r_i(C)\big)}.$$

Koristeći činjenicu da su svi dijagonalni elementi matrice $(|D|-|L|)^{-1}|U|$ manji od 1, dobijamo:

$$|c_{i,i}| = 1 - \big[(|D| - |L|)^{-1}|U|\big]_{i,i},$$

$$r_i(C) = \sum_{j\neq i}^{n} \big[(|D| - |L|)^{-1}|U|\big]_{i,j},$$

i stoga je:

$$|c_{i,i}| - r_i(C) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \big[(|D| - |L|)^{-1}|U|\big]_{i,j} =$$

$$= 1 - \big[(|D| - |L|)^{-1}|U|\mathbf{e}\big]_i = 1 - \frac{h_i(A)}{|a_{i,i}|}.$$

Dakle,

$$\|C^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \max\limits_{i\in N}\dfrac{h_i(A)}{|a_{i,i}|}}.$$

Da bismo dokazali ocenu za $\|A^{-1}\|_\infty$, preostaje nam još da nađemo vezu između matrica C^{-1} i A^{-1}.
Kako je

$$C = (|D| - |L|)^{-1}\mathcal{M}(A),$$

sledi da je

$$\mathcal{M}(A) = (|D| - |L|)C,$$

pa je, na osnovu Teoreme 4.1,

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \|(\mathcal{M}(A))^{-1}\|_\infty \leq \|C^{-1}\|_\infty \|(|D| - |L|)^{-1}\|_\infty.$$

Kako je matrica $|D|-|L|$ iz klase $M-$matrica, to je

$$\|(|D|-|L|)^{-1}\|_\infty = \|(|D|-|L|)^{-1}\mathbf{e}\|_\infty,$$

i, ako uvedemo oznaku $\mathbf{y} := (|D|-|L|)^{-1}\mathbf{e}$, tada je $\mathbf{e} = (|D|-|L|)\mathbf{y}$, ili, po komponentama:

$$|a_{1,1}|y_1 = 1, \quad |a_{i,i}|y_i = 1 + \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}|y_j, \quad i \in N \setminus \{1\}.$$

Kako je $|a_{i,i}|y_i = z_i(A)$, $i \in N$, dobijamo da je

$$\|(|D|-|L|)^{-1}\|_\infty = \|\mathbf{y}\|_\infty = \max_{i\in N} \frac{z_i(A)}{|a_{i,i}|},$$

čime je i druga ocena (CDDL2) dokazana. $\square$

Obe ocene, (CDDL1) i (CDDL2), mogu se koristiti kao ocene norme beskonačno inverzne matrice za klasu SDD matrica, jer je klasa SDD matrica podskup klase Nekrasov matrica. Poredićemo navedene dve ocene (CDDL1) i (CDDL2) za Nekrasov matrice sa Varahovom ocenom (Var), u slučaju kada je i ona primenljiva.

Sledeći primer ilustruje odnos između navedenih ocena:

Primer 4.5. *Posmatrajmo sledećih 5 matrica:*

$$A_7 = \begin{bmatrix} -7 & 1 & -0.2 & 2 \\ 7 & 88 & 2 & -3 \\ 2 & 0.5 & 13 & -2 \\ 0.5 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A_8 = \begin{bmatrix} 21 & -9.1 & -4.2 & -2.1 \\ -0.7 & 9.1 & -4.2 & -2.1 \\ -0.7 & -0.7 & 4.9 & -2.1 \\ -0.7 & -0.7 & -0.7 & 2.8 \end{bmatrix}, \qquad A_9 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0.2 & 2 \\ 1 & 21 & 1 & -3 \\ 2 & 0.5 & 6.4 & -2 \\ 0.5 & -1 & 1 & 9 \end{bmatrix},$$

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -1 & 11 & -8 \\ -7 & -3 & 10 \end{bmatrix}, \qquad A_{11} = \begin{bmatrix} 8 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -9 & 16 & -5 & -5 \\ -6 & -4 & 15 & -3 \\ -4.9 & -0.9 & -0.9 & 6 \end{bmatrix}.$$

Prve tri matrice su SDD matrice, pa je za njih primenljiva i Varahova ocena, kao i (CDDL1) i (CDDL2). Matrice A_{10} i A_{11} nisu SDD, ali jesu Nekrasov matrice, pa su primenljive samo ocene (CDDL1) i (CDDL2).

U tabeli je dat prikaz ocena za $\|A^{-1}\|_\infty$. Znak $-$ znači da ocena nije primenljiva.

Matrica	$\|A^{-1}\|_\infty$	(Var)	(CDDL1)	(CDDL2)
A_7	0.1921	0.6667	0.5263	**0.3805**
A_8	0.8759	1.4286	**0.9676**	1.8076
A_9	0.2707	**0.5556**	0.7937	0.6200
A_{10}	1.1519	-	2.4848	**1.4909**
A_{11}	0.4474	-	**0.5702**	1.1557

Završimo ovu podsekciju sa nekoliko komentara.

Prvo, za Nekrasov matrice koje nisu SDD, jedine primenljve ocene su (CDDL1) i (CDDL2), koje su u opštem slučaju neuporedive, nekada je bolja prva a nekada druga ocena.

Drugo, za klasu SDD matrica možemo koristiti i Varahovu ocenu (Var), kao i ocene (CDDL1) i (CDDL2). Iako je za svaku SDD matricu

$$h_1(A) = r_1(A), \qquad h_i(A) \leq r_i(A), \qquad i \in N \setminus \{1\}$$

zbog

$$\max_{i \in N} z_i(A) \geq 1$$

ne možemo zaključiti da je ocena (CDDL2) uvek bolja od Varahove (Var). To pokazuje primer matrice A_9. Međutim, za matricu A_7 ocena (CDDL2) je značajno bolja od Varahove ocene (Var).

4.1.2 $S-$Nekrasov matrice

Podsetimo se na definiciju $S-$Nekrasovih matrica. Ako su vrednosti $h_i^S(A)$, $i \in N$ definisane rekurentno:

$$h_1^S(A) := r_1^S(A), \quad h_i^S(A) := \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| \frac{h_j^S(A)}{|a_{j,j}|} + \sum_{j=i+1, j \in S}^{n} |a_{i,j}|,$$

tada se A naziva $S-$Nekrasov matrica ako važi:

$$|a_{i,i}| > h_i^S(A) \text{ za sve } i \in S \text{ i}$$

$$\big(|a_{i,i}| - h_i^S(A)\big)\big(|a_{j,j}| - h_j^{\overline{S}}(A)\big) > h_i^{\overline{S}}(A) h_j^S(A) \text{ za sve } i \in S\ ,\ j \in \overline{S}\ .$$

Pre svega, dokažimo lemu analognu Lemi 4.2.

Lema 4.6. *Ako je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, takva da je $a_{i,i} \neq 0$ za sve $i \in N$ i ako je S proizvoljan neprazan podskup od N, tada je*

$$h_i^S(A) = |a_{i,i}| \big[(|D| - |L|)^{-1} |U| \mathbf{e}^S\big]_i, \tag{4.9}$$

gde je $\mathbf{e}^S$ definisano sa:

$$e_i^S = \begin{cases} 1, & i \in S, \\ 0, & i \in \overline{S}. \end{cases}$$

Dokaz: Definišimo vektor $\mathbf{x}$ preko njegovih komponenti

$$x_i := |a_{i,i}| \big[(|D| - |L|)^{-1} |U| \mathbf{e}^S\big]_i, \quad i \in N,$$

i primetimo da je

$$|D|^{-1}\mathbf{x} = (|D| - |L|)^{-1} |U| \mathbf{e}^S.$$

Dakle,

$$\mathbf{x} = |L||D|^{-1}\mathbf{x} + |U|\mathbf{e}^S,$$

ili, ekvivalentno,

$$x_i = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{j,j}|} x_j + \sum_{j=i+1, j \in S}^{n} |a_{i,j}|, \quad \text{za sve } i \in N. \tag{4.10}$$

Pomoću matematičke indukcije, pokazaćemo da za svako $i \in N$ važi $h_i^S(A) = x_i$.
Očigledno, za $i = 1$, važi

$$x_1 = \sum_{j \in S \setminus \{1\}} |a_{1,j}| = r_1^S(A) = h_1^S(A).$$

Pretpostavimo da je $h_i^S(A) = x_i$, za svako $i \leq k-1$ i dokažimo da je $h_k^S(A) = x_k$.
Zaista, iz (4.10), dobijamo

$$x_k = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|a_{k,j}|}{|a_{j,j}|} x_j + \sum_{j=k+1, j \in S}^{n} |a_{k,j}| =$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|a_{k,j}|}{|a_{j,j}|} h_j^S(A) + \sum_{j=k+1, j \in S}^{n} |a_{k,j}| = h_k^S(A),$$

čime je dokaz završen. □

Prvi rezultati o oceni norme beskonačno inverzne matrice za $S-$Nekrasov matricu (ocene (CKD1) i (CKD2)) dati su u radu [27]. Navodimo ih ovde sa dokazom.

Teorema 4.7. *Neka je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ $S-$Nekrasov matrica i neka je $z_i(A)$ definisano sa (4.2). Tada važi:*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{i \in N} z_i(A) \cdot \max_{i \in S, j \in \overline{S}} \max\{\chi_{i,j}^S(A), \chi_{j,i}^{\overline{S}}(A)\}, \tag{CKD1}$$

gde je

$$\chi_{i,j}^S(A) := \frac{|a_{i,i}| - h_i(A)^S + h_j^S(A)}{(|a_{i,i}| - h_i^S(A))(|a_{j,j}| - h_j^{\overline{S}}(A)) - h_i^{\overline{S}}(A) h_j^S(A)}. \tag{4.11}$$

Takođe, važi

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{i \in N} \frac{z_i(A)}{|a_{i,i}|} \cdot \max_{i \in S, j \in \overline{S}} \max\{\widetilde{\chi}_{i,j}^S(A), \widetilde{\chi}_{j,i}^{\overline{S}}(A)\}, \tag{CKD2}$$

gde je

$$\widetilde{\chi}_{i,j}^S(A) := \frac{|a_{i,i}||a_{j,j}| - |a_{j,j}| h_i^S(A) + |a_{i,i}| h_j^S(A)}{(|a_{i,i}| - h_i^S(A))(|a_{j,j}| - h_j^{\overline{S}}(A)) - h_i^{\overline{S}}(A) h_j^S(A)}. \tag{4.12}$$

Dokaz: Neka je A $S-$Nekrasov matrica. Tada postoji dijagonalna matrica $W = diag(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, definisana sa

$$w_i = \begin{cases} \gamma > 0, & i \in S, \\ 1, & i \in \overline{S}, \end{cases} \tag{4.13}$$

takva da je AW Nekrasov matrica (vidi [30]). Na osnovu Teoreme 4.3, zaključujemo da je

$$I - (|D|W - |L|W)^{-1}|U|W = W^{-1}(I - (|D| - |L|)^{-1}|U|)W$$

SDD matrica, što je ekvivalentno sa činjenicom da je $(I - (|D| - |L|)^{-1}|U|)$ $S - SDD$ matrica (vidi [30]).
Množenjem dijagonalnom matricom $|D|$ sa leve strane, dobijamo matricu

$$B := |D| - |D|(|D| - |L|)^{-1}|U|, \tag{4.14}$$

koja je takođe $S - SDD$ matrica, tako da možemo primeniti ocenu Kolotiline (Kol) koja važi za $S - SDD$ matrice:

$$\|B^{-1}\|_\infty \leq \max_{i \in S, j \in \overline{S}} \max\{\rho^S_{i,j}(B), \rho^{\overline{S}}_{j,i}(B)\}.$$

Kako znamo da su svi dijagonalni elementi matrice $(|D| - |L|)^{-1}|U|$ manji od 1 (što smo objasnili u dokazu Teoreme 4.4), imamo da je:

$$|b_{i,i}| = |a_{i,i}| - |a_{i,i}|\big[(|D| - |L|)^{-1}|U|\big]_{i,i},$$

$$r^S_i(B) = \sum_{j \in S \setminus \{i\}} |a_{i,i}|\big[(|D| - |L|)^{-1}|U|\big]_{i,j},$$

i, takođe, za $i \in S$:

$$|b_{i,i}| - r^S_i(B) = |a_{i,i}| - \sum_{j \in S} |a_{i,i}|\big[(|D| - |L|)^{-1}|U|\big]_{i,j} =$$

$$= |a_{i,i}| - |a_{i,i}|\big[(|D| - |L|)^{-1}|U|\mathbf{e}^S\big]_i = |a_{i,i}| - h^S_i(A).$$

Slično dobijamo:

$$|b_{j,j}| - r^{\overline{S}}_j(B) = |a_{j,j}| - h^{\overline{S}}_j(A), \quad j \in \overline{S},$$

$$r_i^{\overline{S}}(B) = h_i^{\overline{S}}(A), \;\; i \in S, \;\; \text{i} \;\; r_j^S(B) = h_j^S(A), \;\; j \in \overline{S}.$$

Stoga je

$$\rho_{i,j}^S(B) = \chi_{i,j}^S(A) \;\; \text{i} \;\; \rho_{j,i}^{\overline{S}}(B) = \chi_{j,i}^{\overline{S}}(A), \;\; \text{za svako} \;\; i \in S, j \in \overline{S}.$$

Matrica B ista je kao i u dokazu Teoreme 4.4, pa važi (4.7), na osnovu čega zaključujemo

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \|(\mathcal{M}(A))^{-1}\|_\infty \leq \|B^{-1}\|_\infty \|(I - |L||D|^{-1})^{-1}\|_\infty.$$

Takođe, važi i (4.8), odnosno

$$\|(I - |L||D|^{-1})^{-1}\|_\infty = \|\mathbf{z}(A)\|_\infty = \max_{i \in N} z_i(A),$$

i time je prva ocena (CKD1) dokazana.

Da bismo dokazali i drugu ocenu za $\|A^{-1}\|_\infty$, umesto matrice B definisane sa (4.14), koristimo maticu $C = I - (|D| - |L|)^{-1}|U|$ definisanu isto kao u (4.6).

Na ovaj način, za svako $i \in S, \;\; j \in \overline{S}$, dobijamo:

$$|c_{i,i}| - r_i^S(C) = 1 - \frac{h_i^S(A)}{|a_{i,i}|}, \quad r_i^{\overline{S}}(C) = \frac{h_i^{\overline{S}}(A)}{|a_{i,i}|},$$

$$|c_{j,j}| - r_j^{\overline{S}}(C) = 1 - \frac{h_j^{\overline{S}}(A)}{|a_{j,j}|}, \quad r_j^S(C) = \frac{h_j^S(A)}{|a_{j,j}|},$$

$$\rho_{i,j}^S(C) = \widetilde{\chi}_{i,j}^S(A) \;\; \text{i} \;\; \rho_{j,i}^{\overline{S}}(C) = \widetilde{\chi}_{j,i}^{\overline{S}}(A).$$

Kako je

$$\mathcal{M}(A) = (|D| - |L|)C,$$

a iz

$$|D|^{-1}\mathbf{z}(A) = (|D| - |L|)^{-1}\mathbf{e},$$

sledi

$$\|(|D| - |L|)^{-1}\|_\infty = \||D|^{-1}\mathbf{z}(A)\|_\infty = \max_{i \in N} \frac{z_i(A)}{|a_{i,i}|},$$

time je dokazana i druga ocena (CKD2). $\square$

Primer 4.8. *Da bismo uporedili do sada navedene ocene, posmatrajmo sledećih* 6 *matrica:*

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 50 & -30 & -10 & 0 \\ -10 & 40 & -10 & -20 \\ -10 & -20 & 50 & -20 \\ -90 & 0 & 0 & 70 \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} 6 & 5.6 & 0 & 0 \\ 1.4 & 4 & 3.1 & 0 \\ 0 & 2.2 & 7 & 2.9 \\ 0 & -0.4 & -0.4 & 3 \end{bmatrix},$$

$$A_{14} = \begin{bmatrix} 40 & 8 & 7 & 0 \\ 3 & 3.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 5 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 4.5 & 4 \end{bmatrix}, \quad A_{15} = \begin{bmatrix} 60 & -15 & -15 & -15 \\ -75 & 105 & -45 & 0 \\ -60 & -60 & 120 & -15 \\ -15 & -15 & -15 & 45 \end{bmatrix},$$

$$A_{16}=\begin{bmatrix} 12 & 8 & -0.8 & 0 \\ -0.8 & 3 & -0.8 & 0.5 \\ 0 & 5 & 6 & -0.8 \\ 0 & -0.8 & -3.6 & 5 \end{bmatrix}, A_{17}=\begin{bmatrix} 21 & -9.1 & -4.2 & -2.1 \\ -0.7 & 9.1 & -4.2 & -2.1 \\ -0.7 & -0.7 & 4.9 & -2.1 \\ -0.7 & -0.7 & -0.7 & 2.8 \end{bmatrix}.$$

Lako se može uočiti da je matrica A_{12} $S-$Nekrasov matrica za $S = \{2, 3\}$. Matrica A_{12}, međutim, nije Nekrasov matrica, dakle, nije ni SDD matrica, tako da jedine ocene koje se mogu primeniti su ocene (CKD1) i (CKD2). Ocena (CKD2) je bolja od ocene (CKD1).

Matrica A_{13} je $S-$Nekrasov matrica za $S = \{3\}$, nije Nekrasov, nije SDD matrica, te i za nju postoje samo ocene (CKD1) i (CKD2), ali u ovom primeru je bolja ocena (CKD1) od ocene (CKD2).

Matrica A_{14} je Nekrasov matrica, što implicira da je onda i $S-$Nekrasov za proizvoljan izbor skupa S. Dakle, moguće je primeniti ocene: (CDDL1), (CDDL2), (CKD1) i (CKD2), među kojima je najbolja ocena (CKD2).

Matrica A_{15} je isto Nekrasov matrica, što implicira da je onda i $S-$Nekrasov za proizvoljan izbor skupa S. Moguće je primeniti ocene: (CDDL1), (CDDL2), (CKD1) i (CKD2), među kojima je sada najbolja ocena (CKD1).

Konačno, matrica A_{16} pripada klasi SDD matrica, što implicira da ona pripada i klasi Nekrasov i $S-$Nekrasov matrica, za bilo koji izbor skupa S. Dakle, u ovom primeru sve ocene mogu biti primenjene, a najbolja je ocena (CKD2).

Matrica A_{17} pripada klasi SDD matrica, te je moguće primeniti ocene: (Var), (CDDL1), (CDDL2), (CKD1) i (CKD2), među kojima je sada najbolja ocena (CKD1).

U slučaju da je data matrica $S-$Nekrasov matrica za više različitih skupova S, u tabeli je prikazan onaj izbor za koji se dobija najbolja ocena norme beskonačno inverzne matrice.

U tabeli je dat prikaz svih pomenutih ocena za svaku od navedenih matrica.

Matrica	$\|A^{-1}\|_\infty$	Var	CDDL1	CDDL2	CKD1	CKD2
A_{12}	1.4800	-	-	-	2.6320 $S=\{2,3\}$	**1.7680** $S=\{2,3\}$
A_{13}	1.3618	-	-	-	**4.6297** $S=\{3\}$	6.0962 $S=\{3\}$
A_{14}	1.0618	-	6.6047	5.5767	4.4239 $S=\{2,3\}$	**4.4064** $S=\{2,3\}$
A_{15}	0.6843	-	1.5333	2.4667	**1.1176** $S=\{2,4\}$	1.6864 $S=\{2,4\}$
A_{16}	0.4813	5.0000	2.6507	2.2133	2.4008 $S=\{1,3\}$	**1.8536** $S=\{1\}$
A_{17}	0.8759	1.4286	0.9676	1.8076	**0.9109** $S=\{2,3\}$	1.7672 $S=\{1,3\}$

4.1.3 $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrice

Primetimo da, iako su obe klase - i SDD i Nekrasov matrice - generisane idejom dijagonalne dominacije, među njima postoji značajna razlika. Klasa SDD je zatvorena u odnosu na permutacije sličnosti (istovrsne permutacije vrsta i kolona), a klasa Nekrasov matrica nije. Naime, istovrsne permutacije vrsta i kolona nemaju efekta na sume modula vandijagonalnih elemenata, dok prilikom izračunavanja rekurentno definisanih Nekrasovih suma redosled *jeste* bitan i zavisno od njega, komponente vektora $\mathbf{h}(A)$ se mogu značajno promeniti.

Iz tog razloga, u ovoj podsekciji prezentovaćemo rezultate dobijene u radu [29], koji se odnose na novu klasu regularnih matrica, koja je potklasa $H-$matrica, a nadklasa Nekrasov matrica. Kao što smo naveli u Posdekciji 2.3.8, motiv za definisanje ovakve klase leži u sledećoj činjenici: Nekrasov matrice, do na permutaciju vrsta i kolona, su regularne matrice. Međutim, testiranje svih mogućih permutacija vrsta i kolona suviše je računski skupo. Stoga, ako smo već testirali permutaciju P_1, a zatim i neku drugu permutaciju P_2, i zaključili da ni matrica $P_1^T AP$ ni matrica $P_2^T AP$ nije Nekrasov matrica, postavlja se pitanje možemo li nekom kombinacijom već izračunatih veličina, dakle, bez dodatnog računskog troška, pokušati da izvedemo zaključak o regularnosti? Odgovor je potvrdan: u nekim slučajevima, to jeste moguće.

Na ovaj način dobijamo novu potklasu $H-$matrica, za koju je, kao što ćemo videti, moguće izvesti ocenu norme beskonačno inverzne matrice.

Podsetimo se oznaka uvedenih u Podsekciji 2.3.8:

$$\mathbf{d}(A) := [|a_{1,1}|, \ldots, |a_{n,n}|]^T, \quad \mathbf{h}(A) := [h_1(A), \ldots, h_n(A)]^T.$$

U tim oznakama, klasa Nekrasov matrica opisana je uslovom

$$\mathbf{d}(A) > \mathbf{h}(A),$$

klasa $P-$Nekrasov matrica uslovom

$$\mathbf{d}(A) > \mathbf{h}(P^T AP),$$

a klasa $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica uslovom

$$\mathbf{d}(A) > \min\{\mathbf{h}^{P_1}(A), \mathbf{h}^{P_2}(A)\}.$$

Sledeći primer pokazuje da se može desiti da matrica nije ni P_1-Nekrasov ni P_2-Nekrasov, ali jeste $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica.

Primer 4.9. *Neka je*

$$A_{18} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 4.3 \\ 5 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

P_1 identička permutacija, a P_2 permutacija „unazad", tj. neka je $P_1 = I$, a

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da A_{18} nije ni P_1-Nekrasov, niti P_2-Nekrasov, ali jeste $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica.

Za $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrice, u radu [29] dokazana je lema analogna Lemama 4.2 i 4.6:

Lema 4.10. *Za datu matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, takvu da je $a_{i,i} \neq 0$ za sve $i \in N$, i za datu permutacionu matricu P_k, važi*

$$h_i^{P_k}(A) = |a_{i,i}| \big[P_k(|D_k| - |L_k|)^{-1} |U_k| \mathbf{e} \big]_i, \tag{4.15}$$

gde je $\mathbf{e}$ vektor čije su sve komponente jednake 1, a (D_k), $(-L_k)$ i $(-U_k)$ su, redom, dijagonalni, strogo donji i strogo gornji trougaoni deo matrice $P_k^T A P_k$.

Dokaz : Po definiciji je

$$h_i^{P_k}(A) = \big[P_k \mathbf{h}(P_k^T A P_k) \big]_i.$$

Primetimo da je

$$h_i^{P_k}(A) = h_j(P_k^T A P_k),$$

pri čemu su indeksi i i j takvi da je $(P_k)_{i,j} = 1$. Na osnovu Leme 4.2, zaključujemo da je

$$h_j(P_k^T A P_k) = |(P_k^T A P_k)_{j,j}| \big[(|D_k| - |L_k|)^{-1} |U_k| \mathbf{e} \big]_j =$$

$$= |a_{i,i}| \big[P_k(|D_k| - |L_k|)^{-1} |U_k| \mathbf{e} \big]_i,$$

i, kako je $\mathbf{e} = P_k^T \mathbf{e}$, sledi

$$h_i^{P_k}(A) = |a_{i,i}| \big[P_k(|D_k| - |L_k|)^{-1} |U_k| P_k^T \mathbf{e} \big]_i. \ \square$$

Konstruišimo sada matricu $C \in \mathbb{C}^{n,n}$, na sledeći način:

$$C = \begin{bmatrix} \underline{C(1)} \\ \underline{C(2)} \\ . \\ . \\ \underline{.} \\ C(n) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}$$

gde je

$$C(i) = (\mathbf{e}^i)^T P_{k_i}(|D_{k_i}| - |L_{k_i}|)^{-1}|U_{k_i}|P_{k_i}^T,$$

a $\mathbf{e}^i$ je vektor standardne baze, čije su sve komponente jednake nuli, osim $i-$te komponente, koja je jednaka 1, a za svaki indeks i izabran je njemu odgovarajući indeks $k_i \in \{1, 2\}$ tako da je

$$\min\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\} = h_i^{P_{k_i}}(A).$$

Drugim rečima, matricu C konstruišemo tako da svaka vrsta te matrice bude izabrana kao vrsta iz matrice $P_1(|D_1| - |L_1|)^{-1}|U_1|P_1^T$ ili iz matrice $P_2(|D_2| - |L_2|)^{-1}|U_2|P_2^T$, zavisno od odnosa u kome stoje $h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)$, tj. biramo vrstu iz one matrice za koju je dostignut minimum ove dve sume.

Lema 4.11. *Ako je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica, tada je matrica $I - C$ SDD matrica.*

Dokaz: Pretpostavimo da je A $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica. Tada je

$$\mathbf{d}(A) > \min\{\mathbf{h}^{P_1}(A), \mathbf{h}^{P_2}(A)\}.$$

Za proizvoljno i, i-ta komponenta gornje nejednakosti je

$$|a_{i,i}| > \min\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\},$$

pri čemu, na osnovu Leme 4.10, zaključujemo

$$h_i^{P_k}(A) = |a_{i,i}|\big[P_k(|D_k| - |L_k|)^{-1}|U_k|P_k^T\mathbf{e}\big]_i.$$

Iz ovoga sledi

$$|a_{i,i}| > \min\{|a_{i,i}|\big[P_1(|D_1|-|L_1|)^{-1}|U_1|P_1^T\mathbf{e}\big]_i,\ |a_{i,i}|\big[P_2(|D_2|-|L_2|)^{-1}|U_2|P_2^T\mathbf{e}\big]_i\}.$$

Kako iz uslova da je A $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica sledi da je $a_{i,i} \neq 0$, $i \in N$, dobijamo

$$1 > \min\{\left[P_1(|D_1| - |L_1|)^{-1}|U_1|P_1^T\mathbf{e}\right]_i, \ \left[P_2(|D_2| - |L_2|)^{-1}|U_2|P_2^T\mathbf{e}\right]_i\},$$

što znači da matrica $I - C$ ima sve sume po vrstama pozitivne. Kako je $(|D_k| - |L_k|)$ za $k = 1, 2$ (regularna) $M-$matrica, sledi da su svi vandijagonalni elementi matrice $I - C$ nepozitivni, dakle, $I - C$ je SDD matrica. □

Konačno dolazimo do tvrđenja o regularnosti, koje smo formulisali u uvodnom delu kao Teoremu 2.27, a ovde je navodimo sa dokazom.

Teorema 4.12. *Ako je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica, tada je ona regularna. Štaviše, ona je $H-$matrica.*

Dokaz: Pretpostavimo suprotno, da je A singularna. Tada postoji nenula vektor $\mathbf{x}$ takav da je $A\mathbf{x} = 0$. Za $k = 1, 2$, važi:

$$P_k^T A P_k P_k^T \mathbf{x} = 0,$$

što se može zapisati kao

$$D_k P_k^T \mathbf{x} = L_k P_k^T \mathbf{x} + U_k P_k^T \mathbf{x}, \tag{4.16}$$

pri čemu su (D_k), $(-L_k)$ i $(-U_k)$, redom, dijagonalni, strogo donji i strogo gornji trougaoni deo matrice $P_k^T A P_k$.
Korišćenjem relacije trougla, iz (4.16) sledi

$$(|D_k| - |L_k|)|P_k^T \mathbf{x}| \leq |U_k||P_k^T \mathbf{x}|.$$

Iz uslova da je A $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica sledi da su svi dijagonalni elementi matrice A različiti od nule i da je $|D_k| - |L_k|$ $M-$matrica, pa, dakle,

$$|P_k^T \mathbf{x}| \leq (|D_k| - |L_k|)^{-1}|U_k||P_k^T \mathbf{x}|.$$

Pošto je $|P_k^T \mathbf{x}| = |P_k^T||\mathbf{x}| = P_k^T|\mathbf{x}|$, množenjem poslednje nejednakosti sa leve strane matricom P_k, dobijamo

$$\Big(I - P_k(|D_k| - |L_k|)^{-1}|U_k|P_k^T\Big)|\mathbf{x}| \leq 0. \tag{4.17}$$

Ako se setimo ranije definisane matrice C, zaključujemo da je

$$\big(I - C\big)|\mathbf{x}| \leq 0. \tag{4.18}$$

Međutim, u dokazu Leme 4.11 pokazali smo da je $I-C$ SDD matrica, da je i $L-$oblika, dakle, to je $M-$matrica. Stoga iz (4.18) sledi da za nenula vektor $\mathbf{x}$ važi $|\mathbf{x}| \leq 0$, što je očigledno kontradikcija. Dakle, dokazali smo da je A regularna matrica.
Dokažimo sada da je ona i $H-$matrica. U tu svrhu pokažimo da je $\rho(D^{-1}B) < 1$, pri čemu je $\mathcal{M}(A) = D - B$ Jakobijevo razlaganje matrice $\mathcal{M}(A)$ na dijagonalni i vandijagonalni deo.
Pretpostavimo suprotno, da je $\rho(D^{-1}B) \geq 1$, dakle, da postoji karakteristični koren $\lambda \in \sigma(D^{-1}B)$ takav da je $|\lambda| \geq 1$. Tada je

$$\det(\lambda I - A) = 0,$$

tj.

$$\det(D^{-1})\det(\lambda D - B) = 0,$$

odakle, kako je D regularna matrica, sledi

$$\det(\lambda D - B) = 0.$$

Drugim rečima, matrica $F := \lambda D - B$ je singularna.
Međutim, za svako $i \in N$,

$$|f_{i,i}| = |\lambda||a_{i,i}| \geq |a_{i,i}| > \min\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\} \geq \min\{h_i^{P_1}(F), h_i^{P_2}(F)\},$$

što znači da je F takođe $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica, i zbog toga regularna. Dobili smo kontradikciju, te zaključujemo da je $\rho(D^{-1}B) < 1$. Sada iz $\big(D^{-1}\mathcal{M}(A)\big)^{-1} = (I - D^{-1}B)^{-1} = \sum_{k\geq 0}(D^{-1}B)^k \geq 0$, sledi $\mathcal{M}(A)^{-1} \geq 0$, pa je, dakle, A $H-$matrica. □

Na kraju, sledi rezultat koji se odnosi na ocenu norme beskonačno inverzne matrice.

Teorema 4.13. *Neka je za dati skup od dve permutacione matrice* $\{P_1, P_2\}$, $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, $\{P_1, P_2\}-$*Nekrasov matrica. Tada važi*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in N}\{z_i^{P_{k_i}}(A)\}}{\min\limits_{i\in N}\big[|a_{i,i}| - \min\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\}\big]}, \qquad \text{(CKN1)}$$

i

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in N}\{\dfrac{z_i^{P_{k_i}}(A)}{|a_{i,i}|}\}}{\min\limits_{i\in N}\big[1 - \min\{\dfrac{h_i^{P_1}(A)}{|a_{i,i}|}, \dfrac{h_i^{P_2}(A)}{|a_{i,i}|}\}\big]}, \qquad \text{(CKN2)}$$

pri čemu je

$$z_1(A) := 1, \quad z_i(A) := \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| \frac{z_j(A)}{|a_{j,j}|} + 1, \quad i = 2, 3, \dots n,$$

$\mathbf{z}(A) := [z_1(A), \dots, z_n(A)]^T$, $\mathbf{z}^P(A) = P\mathbf{z}(P^TAP)$, *a indeks* $k_i \in \{1, 2\}$ *je izabran tako da je*

$$\min\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\} = h_i^{P_{k_i}}(A).$$

Dokaz: Dokažimo najpre drugu ocenu (CKN2).
Neka je A $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica. Iz Leme 4.11 sledi da je matrica $B := I - C$ SDD matrica, pa za njenu inverznu važi Varahova ocena:

$$\|B^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\min\limits_{i\in N}(|b_{i,i}| - r_i(B))}.$$

Kako je

$$|b_{i,i}| - r_i(B) = 1 - \min\{\big[P_1(|D_1| - |L_1|)^{-1}|U_1|P_1^T\mathbf{e}\big]_i, \big[P_2(|D_2| - |L_2|)^{-1}|U_2|P_2^T\mathbf{e}\big]_i\} =$$

$$= 1 - \min\{\frac{h_i^{P_1}(A)}{|a_{i,i}|}, \frac{h_i^{P_2}(A)}{|a_{i,i}|}\}, \ i \in N,$$

ostaje da se nađe veza između matrica B^{-1} i A^{-1}. Lako se vidi da je

$$I - P_k(|D_k| - |L_k|)^{-1}|U_k|P_k^T = P_k(|D_k| - |L_k|)^{-1}P_k^T\mathcal{M}(A),$$

jer za fiksirano k važi

$$P_k(|D_k| - |L_k|)P_k^T(I - P_k(|D_k| - |L_k|)^{-1}|U_k|P_k^T) =$$
$$= P_k(|D_k| - |L_k|)P_k^T - P_k|U_k|P_k^T =$$
$$= P_k(|D_k| - |L_k| - |U_k|)P_k^T = P_k\langle P_k^T A P_k\rangle P_k^T = P_k P_k^T \langle A\rangle P_k P_k^T = \langle A\rangle.$$

Sa $\widetilde{C}$ označimo sledeću matricu

$$\widetilde{C} = \begin{bmatrix} \widetilde{C}(1) \\ \hline \widetilde{C}(2) \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline \widetilde{C}(n) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n,n}$$

gde je

$$\widetilde{C}(i) = (\mathbf{e}^i)^T P_{k_i}(|D_{k_i}| - |L_{k_i}|)^{-1}P_{k_i}^T,$$

$\mathbf{e}^i$ vektor standardne baze, a za svaki indeks i, odgovarajući indeks $k_i \in \{1, 2\}$ je izabran tako da je

$$\min\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\} = h_i^{P_{k_i}}(A).$$

Očigledno je

$$B = I - C = \widetilde{C}\mathcal{M}(A),$$

odnosno,

$$\mathcal{M}(A)^{-1} = B^{-1}\widetilde{C},$$

i

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty = \|B^{-1}\widetilde{C}\|_\infty \leq \|B^{-1}\|_\infty \|\widetilde{C}\|_\infty \leq$$

$$\leq \frac{1}{\min\limits_{i\in N}(1-\min\{\frac{h_i^{P_1}(A)}{|a_{i,i}|},\frac{h_i^{P_2}(A)}{|a_{i,i}|}\})}\|\widetilde{C}\|_\infty.$$

Kao i ranije, zaključujemo da je $(I-|L||D|^{-1})^{-1}\mathbf{e}=\mathbf{z}(A)$ i ako označimo $\mathbf{z}^P(A)=P\mathbf{z}(P^TAP)$, zaključujemo da je

$$\|\widetilde{C}\|_\infty=\|\widetilde{C}\mathbf{e}\|_\infty=\max_{i\in N}\{\frac{z_i^{P_{k_i}}(A)}{|a_{i,i}|}\},$$

gde je za svaki indeks i, odgovarajući indeks $k_i\in\{1,2\}$ izabran tako da je

$$\min\{h_i^{P_1}(A),h_i^{P_2}(A)\}=h_i^{P_{k_i}}(A).$$

Naime,

$$\|\widetilde{C}\|_\infty=\|\widetilde{C}\mathbf{e}\|_\infty=\max_{i\in N}(P_{k_i}(|D_{k_i}|-|L_{k_i}|)^{-1}P_{k_i}^T\mathbf{e})_i=$$

$$=\max_{i\in N}(P_{k_i}|D_{k_i}|^{-1}(I-|L_{k_i}||D_{k_i}|^{-1})^{-1}\mathbf{e})_i=\max_{i\in N}(P_{k_i}|D_{k_i}|^{-1}\mathbf{z}(A_{k_i}))_i=$$

$$=\max_{i\in N}(P_{k_i}P_{k_i}^T|D|^{-1}P_{k_i}\mathbf{z}(P_{k_i}^TAP_{k_i}))_i=\max_{i\in N}(|D|^{-1}\mathbf{z}^{P_{k_i}}(A))_i=$$

$$=\max_{i\in N}\{\frac{z_i^{P_{k_i}}(A)}{|a_{ii}|}\}.$$

Time je ocena (CKN2) dokazana.

Dokažimo sada i prvu ocenu (CKN1).

Umesto matrice B, posmatrajmo matricu $B'=|D|B$. Tada je

$$|b'_{i,i}|-r_i(B')=|a_{i,i}|-\min\{h_i^{P_1}(A),h_i^{P_2}(A)\},$$

i

$$\mathcal{M}(A)^{-1}=(B')^{-1}|D|\widetilde{C}.$$

Dakle,

$$\|A^{-1}\|_\infty\leq\|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_\infty=\|(B')^{-1}|D|\widetilde{C}\|_\infty\leq\|B^{-1}\|_\infty\|\,|D|\widetilde{C}\,\|_\infty\leq$$

$$\leq \frac{1}{\min\limits_{i\in N}(|a_{i,i}| - \min\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\})} \| \, |D|\widetilde{C}\|_\infty,$$

pri čemu je

$$\| \, |D|\widetilde{C} \, \|_\infty = \| \, |D|\widetilde{C}\mathbf{e} \, \|_\infty = \max_{i\in N}\{z_i^{P_{k_i}}(A)\},$$

a za svaki indeks i, odgovarajući indeks $k_i \in \{1, 2\}$ je izabran tako da je

$$\min\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\} = h_i^{P_{k_i}}(A).$$

Time je ocena (CKN1) dokazana. $\square$

Primer 4.14. *Matrica*

$$A_{19} = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.6 & 0 \\ 1 & 0.1 & 1 & 0.7 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pokazuje da nalaženje permutacije vrsta i kolona koja transformiše polaznu matricu u Nekrasov matricu uopšte nije lak zadatak, kako se može učiniti na prvi pogled. Naime, uzimajući u obzir način na koji se formiraju Nekrasove sume $h_i(A)$, može izgledati logično da permutovanje vrsta i kolona izvršimo tako da sortiramo vrste po „jačini" dijagonalne dominacije od prve ka poslednjoj. Međutim, ovaj primer pokazuje da takvo sortiranje neće matricu transformisati u Nekrasovu. Sa druge strane, ako poslednju vrstu postavimo na drugo mesto, matrica će postati Nekrasova! Dakle, čak i kad smo sigurni da postoji permutacija koja matricu prevodi u Nekrasovu, i dalje je otvoreno i komplikovano pitanje kako tu permutaciju naći.

Primer 4.15. *Da bismo ilustrovali efikasnost navedenih ocena, posmatrajmo sledeće 4 matrice.*

$$A_{20} = \begin{bmatrix} 12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 114 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 14 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 814 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 4 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} -1.5 & -0.1 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 2 & -0.1 & -1.9 & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & 23 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 44 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 44 & -0.4 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 5.6 & 5.6 & 0 & 0 \\ 1.4 & 4 & 3.1 & 0 \\ 0 & 2.2 & 7 & 2.9 \\ 0 & -0.4 & -0.4 & 3 \end{bmatrix}$$

Matrica A_{20} je SDD matrica, te za nju postoje ocene: (Var), (Kol), (CDDL1), (CDDL2), (CKN1) i (CKN2).

Matica A_{21} nije SDD matrica ali je $S-SDD$ matrica i Nekrasov matrica, te za nju postoje ocene: (Kol), (CDDL1), (CDDL2), (CKN1) i (CKN2).

Matrica A_{22} nije ni SDD ni Nekrasov, ali jeste $S-SDD$ i $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov te za nju postoje ocene: (Kol), (CKN1) i (CKN2).

Kako matrica A_{23} pripada samo klasi $\{P_1, P_2\}-$ Nekrasov matrica i nijednoj drugoj navedenoj klasi, za ovu matricu postoje samo ocene (CKN1), (CKN2).

U sledećoj tabeli dajemo pregled ocena (Var), (Kol), (CDDL1), (CDDL2), (CKN1) i (CKN2), pri čemu, u slučaju da neka od njih nije primenljiva, to označavamo simbolom $-$.

Mat	$\|A^{-1}\|_\infty$	Var	Kol	CDDL1	CDDL2	CKN1	CKN2
A_{20}	0.1796	0.5	0.3462 S={6,10,11}	0.2443	0.3108	0.2443	**0.2132**
A_{21}	0.3445	-	1.4286 S={1,4,5,10}	2.2282	2.8729	**0.5992**	0.7726
A_{22}	1.0578	-	4.5455 S={4,5}	-	-	1.1255	**1.114**
A_{23}	1.5490	-	-	-	-	2.8205	**2.0146**

U ovom primeru izostavili smo poređenje ocena za klase $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov i $S-$Nekrasov, pošto ove dve klase stoje u opštem odnosu, a za matrice koje pripadaju i jednoj i drugoj klasi, nijedna od ocena (CKN1), (CKN2), (CKD1) i (CKD2) generalno nije bolja od ostalih. To će biti ilustrovano primerima u narednoj sekciji, s obzirom da će oni prikazivati i tačkaste i blok ocene.

4.2 Blok slučaj

4.2.1 Preliminarna razmatranja

U ovoj podsekciji dokazaćemo vezu između norme beskonačno inverzne matrice za blok matricu A (u odnosu na particiju π) i norme beskonačno inverzne matrice za pridruženu matricu I, odnosno II tipa ($\rangle A \langle^{\pi}$ odnosno $\langle A \rangle^{\pi}$). To će nam poslužiti kao alat za izvođenje ocena normi za blok matrice koje pripadaju nekoj od potklasa blok π $H-$matrica I tipa i blok π $H-$matrica II tipa.

Robert je u svom radu [95] dokazao rezultat koji se može smatrati uopštenjem Teoreme 4.1. Naime, ako označimo sa

$$M(A) = \begin{bmatrix} \|A_{1,1}\|_\infty & \|A_{1,2}\|_\infty & \cdots & \|A_{1,\ell}\|_\infty \\ \|A_{2,1}\|_\infty & \|A_{2,2}\|_\infty & \cdots & \|A_{2,\ell}\|_\infty \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \|A_{\ell,1}\|_\infty & \|A_{\ell,2}\|_\infty & \cdots & \|A_{\ell,\ell}\|_\infty \end{bmatrix},$$

$$N(A) = N_1(A) \cdot N_2(A), \quad \text{gde je:}$$

$$N_1(A) = \begin{bmatrix} \|A_{1,1}^{-1}\|_\infty^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \|A_{2,2}^{-1}\|_\infty^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|A_{\ell,\ell}^{-1}\|_\infty^{-1} \end{bmatrix},$$

$$N_2(A) = \begin{bmatrix} 1 & -\|A_{1,1}^{-1}A_{1,2}\|_\infty & \cdots & -\|A_{1,1}^{-1}A_{1,\ell}\|_\infty \\ -\|A_{2,2}^{-1}A_{2,1}\|_\infty & 1 & \cdots & -\|A_{2,2}^{-1}A_{2,\ell}\|_\infty \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -\|A_{\ell,\ell}^{-1}A_{\ell,1}\|_\infty & -\|A_{\ell,\ell}^{-1}A_{\ell,2}\|_\infty & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

onda za svaku blok $H-$matricu A važi

$$M(A^{-1}) \leq \big(N(A)\big)^{-1}.$$

Napomenimo da je u Robertovom radu pojam blok $H-$matrice definisan na sledeći način: *Matrica A naziva se blok $H-$matrica ako je $N(A)$ $M-$matrica*, dakle, na isti način kao što je u ovoj disertaciji definisan pojam blok π $H-$matrice II tipa, pa dakle, obuhvata i slučaj blok π $H-$matrica I tipa.

Teoremu iz rada Roberta [95], formulisaćemo u terminologiji koju koristimo u ovoj disertaciji.

Teorema 4.16. *Ako je A $B^\pi_{II}H-$matrica, onda je*

$$M(A^{-1}) \leq \big(N(A)\big)^{-1}. \tag{4.19}$$

Posledica 4.17. *Ako je A $B^\pi_I H-$matrica, onda je*

$$M(A^{-1}) \leq \big(N(A)\big)^{-1}. \tag{4.20}$$

U oznakama koje koristimo u ovoj disertaciji, očigledno je:

$$\rangle A\langle^\pi = N_1(A) \ - \ \text{offdiag (M(A))},$$
$$\langle A\rangle^\pi = N_2(A),$$

gde smo sa offdiag (A) označili vandijagonalni deo matrice A. Stoga, lako pokazujemo da važe sledeća dva tvrđenja. Pre toga, navodimo poznat rezultat iz [7], koji ćemo koristiti u daljem radu.

Teorema 4.18. *([7]) Ako su A i B dve $M-$matrice sa osobinom*

$$A \geq B,$$

tada je

$$A^{-1} \leq B^{-1}.$$

Teorema 4.19. *Ako je $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ $B^\pi_I H-$matrica i $\rangle A\langle^\pi$ njoj pridružena matrica I tipa (definisana u (3.6)) onda važi*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \| \ (\rangle A\langle^\pi)^{-1}\|_\infty.$$

Dokaz: Pre svega, konstatujmo da su $N(A)$ i $\rangle A\langle^\pi$ matrice $L-$oblika koje stoje u odnosu

$$N(A) \geq \ \rangle A\langle^\pi,$$

jer na dijagonali imaju iste elemente, a za svako $i \neq j$ važi

$$\|A_{i,i}^{-1}\|_\infty^{-1}\|A_{i,i}^{-1}A_{i,j}\|_\infty \leq \|A_{i,j}\|_\infty.$$

S obzirom da je A $B^{\pi}_{I}H-$matrica, onda je ona, takođe, $B^{\pi}_{II}H-$matrica, odnosno blok $H-$matrica u smislu Roberta, odnosno $N(A)$ je $M-$matrica. Zbog toga, na osnovu Teoreme 4.18, sledi

$$\big(N(A)\big)^{-1} \leq \ (\rangle A\langle^{\pi})^{-1}.$$

Dalje, zbog definicije norme beskonačno, očigledno važi

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \|M(A^{-1})\|_{\infty}.$$

Konačno, na osnovu Posledice 4.17, zaključujemo

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \|M(A^{-1})\|_{\infty} \leq \|\big(N(A)\big)^{-1}\|_{\infty} \leq$$

$$\leq \| \ (\rangle A\langle^{\pi})^{-1}\|_{\infty}. \ \square$$

Analogan rezultat dokazujemo i za $B^{\pi}_{II}H-$matrice.

Teorema 4.20. *Ako je $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ $B^{\pi}_{II}H-$matrica i ako je $\langle A\rangle$ njoj pridružena matrica II tipa (definisana u (3.7)), onda važi*

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \max_{i\in L} \|A^{-1}_{i,i}\|_{\infty} \cdot \| \ (\langle A\rangle^{\pi})^{-1}\|_{\infty}.$$

Dokaz: S obzirom da je A $B^{\pi}_{II}H-$matrica, zaključujemo da je $N_2(A)$ $M-$matrica, pa je i $N(A)$ $M-$matrica. Na osnovu definicije norme beskonačno, očigledno važi

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \|M(A^{-1})\|_{\infty},$$

a na osnovu Teoreme 4.16 dalje sledi

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \|M(A^{-1})\|_{\infty} \leq \|(N(A))^{-1}\|_{\infty} \leq$$

$$\leq \|(N_1(A))^{-1}\|_{\infty} \cdot \|(N_2(A))^{-1}\|_{\infty} = \max_{i\in L} \|A^{-1}_{i,i}\|_{\infty} \cdot \| \ (\langle A\rangle^{\pi})^{-1}\|_{\infty},$$

što je i trebalo dokazati. $\square$

4.2.2 Ocena za blok SDD matrice I i II tipa

Iako se u literaturi pod pojmom *Varahov rezultat* uglavnom podrazumeva (Var), dakle *tačkast slučaj*, njegov pravi rezultat u radu [102] je baš blok varijanta. Navodimo ga ovde u našim terminima i oznakama. Najpre, kao lemu, radi preglednosti, navodimo *tačkast slučaj* (napomenimo da je to, u stvari ocena (Var)).

Lema 4.21. *Ako je matrica A SDD matrica, tada važi*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\min\limits_{i\in N}(|a_{i,i}| - r_i(A))}. \tag{Var}$$

Na osnovu Leme 4.21 i Teoreme 4.19, direktno sledi:

Teorema 4.22. *Ako je matrica A (za neku particiju π) $B_I^\pi SDD$ matrica, tada važi*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\min\limits_{1\leq k\leq \ell}\left(\|A_{k,k}^{-1}\|_\infty^{-1} - \sum\limits_{j\in L\setminus\{k\}} \|A_{k,j}\|_\infty\right)}. \tag{B_I Var}$$

Na osnovu Leme 4.21 i Teoreme 4.20, opet direktno sledi:

Teorema 4.23. *Ako je matrica A (za neku particiju π) $B_{II}^\pi SDD$ matrica, tada važi*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{1\leq k\leq \ell}\|A_{k,k}^{-1}\|_\infty}{\min\limits_{1\leq k\leq \ell}\left(1 - \sum\limits_{j\in L\setminus\{k\}} \|A_{k,k}^{-1}A_{k,j}\|_\infty\right)}. \tag{B_{II} Var}$$

Kako ćemo kasnije videti, ova ocena, iako je sama po sebi važna i vrlo često veoma dobra za $B_I^\pi SDD$ matrice i $B_{II}^\pi SDD$ matrice, njen značaj leži još u jednoj činjenici: ona će poslužiti kao polazna tačka za dokazivanje novih ocena i to za šire klase matrica, koje se, samim tim, mogu primenjivati i na klasu $B_I^\pi SDD$ matrica i na klasu $B_{II}^\pi SDD$ matrica.

U nastavku disertacije svaku novu ocenu (njene tri varijante: tačkastu, blok I tipa i blok II tipa) poredićemo sa prethodno već izvedenim ocenama, ako su one uporedive. Plavom bojom označene su *tačkaste ocene*, crvenom ocene blok I tipa i zelenom blok II tipa. Horizontalna linija ljubičaste boje predstavlja tačnu vrednost norme beskonačno inverzne matrice.

U primerima koji slede, radi preglednosti najpre navodimo tabelu iz koje se čita kojoj klasi matrica pripada posmatrana matrica. Činjenica da matrica pripada datoj klasi označena je znakom $+$, a činjenica da ne pripada znakom $-$.

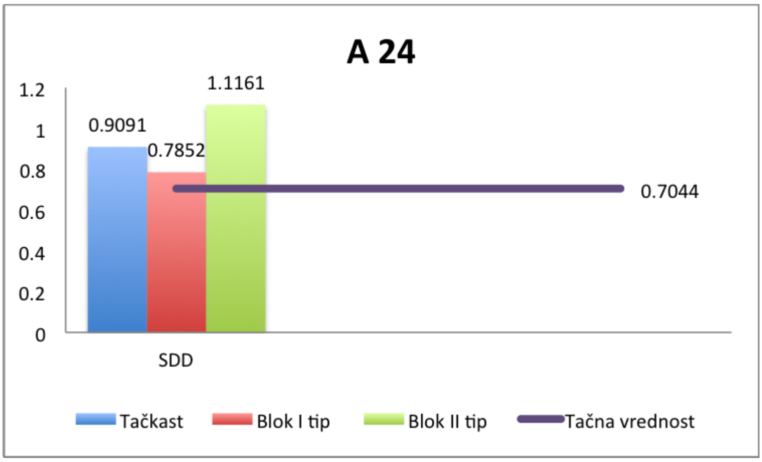
U slučaju blok matrica nećemo posebno naglašavati o kojoj particiji indeksa je reč, jer se ona vidi iz posmatrane matrice, koja je već podeljena u blokove.

Takođe, osim u prvom primeru koji sledi, nećemo posebno komentarisati koje su ocene bile primenljive, a koje ne, kao ni koja od ocena je najbolja. Sve te informacije vide se iz tabele i odgovarajućeg grafika, a primeri su odabrani na takav način da svaki prezentuje neku novu „situaciju” u odnosu na sve prethodne.

Primer 4.24.

$$A_{24} = \left[\begin{array}{cc|cc|cccc} 21 & -9.1 & 2 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 10 & 0 & -2.1 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ \hline -0.1 & -0.7 & 9 & -2.1 & 0 & 0 & -0.1 & 0 \\ -0.2 & -0.7 & -0.1 & 2.6 & 0 & 0 & 0 & -0.1 \\ \hline -0.1 & 0 & 0 & 0 & 19 & 0 & -4.2 & -2.1 \\ 0 & 0 & -0.1 & 0 & -0.1 & 8 & -4.2 & -2.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & -0.7 & 4.9 & -2.1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & -0.2 & -0.7 & -0.7 & 2.8 \end{array}\right]$$

A_{24}	SDD
Tačkast	+
Blok I tip	+
Blok II tip	+



Slika 4.1: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{24}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.24

Gornja tabela, dakle, sadrži sledeću informaciju: Matrica A_{24} je SDD matrica u *tačkastom smislu* i ona je takođe i $B_I^\pi SDD$ matrica za particiju $\pi = \{0, 2, 4, 8\}$ i ona je $B_{II}^\pi SDD$ matrica za particiju $\pi = \{0, 2, 4, 8\}$.

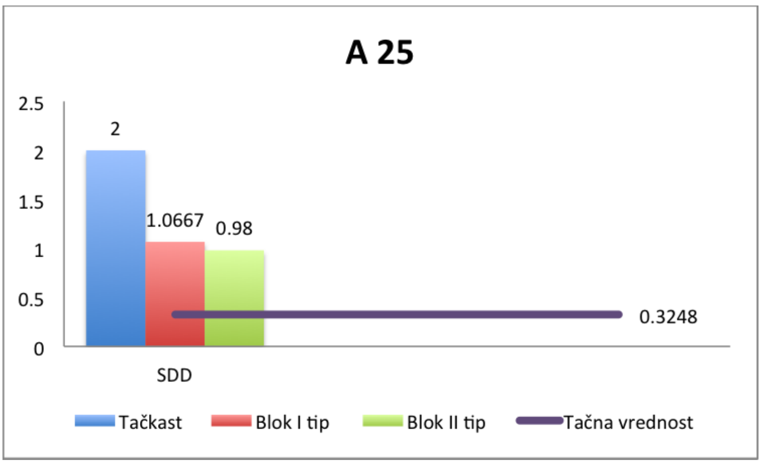
Tačna vrednost norme inverzne matrice je $\|A_{24}^{-1}\|_\infty = 0.7044$, njena *tačkasta* ocena (Var) je 0.09091, a njene blok ocene za $\pi = \{0, 2, 4, 8\}$

su: (B_I Var) je 0.7852 i (B_{II} Var) je 1.1161. U ovom primeru najbolja ocena je (B_I Var). Sve ove informacije su prikazane na grafiku, Slika 4.1.

Primer 4.25.

$$A_{25} = \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 0.3 & -0.7 & 1 \\ 1 & 5 & -2.1 & 0 \\ \hline -2 & 2 & 5.5 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & 7 \end{array}\right];$$

A_{25}	SDD
Tačkast	+
Blok I tip	+
Blok II tip	+



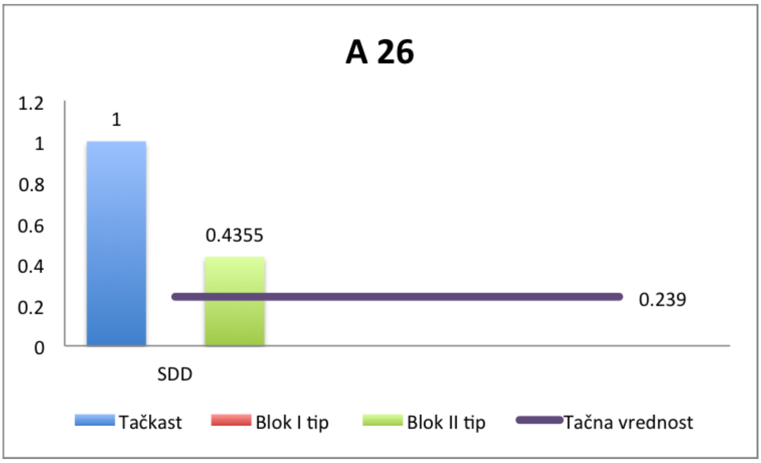
Slika 4.2: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{25}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.25

Za matricu A_{25} najbolja ocena je (B_{II} Var).

Primer 4.26.

$$A_{26} = \left[\begin{array}{r|rrr} 8 & 1 & -0.2 & 3.3 \\ \hline 7 & 13 & 2 & -3 \\ -1.3 & 6.7 & 13 & -2 \\ 0.5 & 3 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

A_{26}	SDD
Tačkast	+
Blok I tip	-
Blok II tip	+



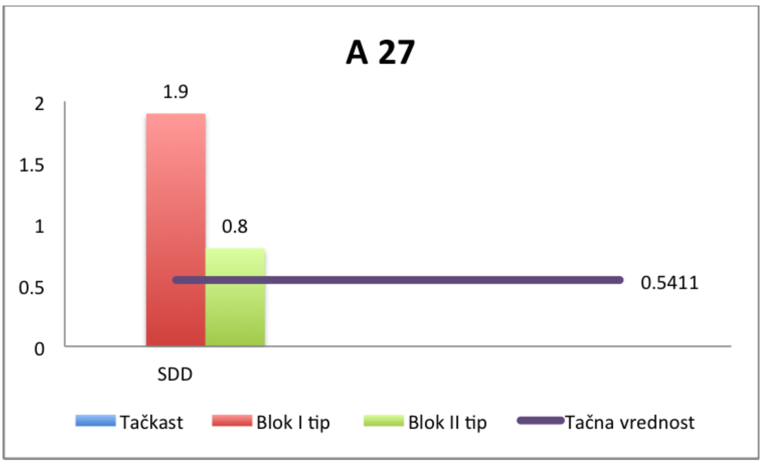
Slika 4.3: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{26}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.26

Matrica A_{26} ilustruje situaciju u kojoj nije primenljiva ocena blok I tipa, dok je blok ocena II tipa (B_{II} Var) značajno bolja od *tačkaste ocene* (Var).

Primer 4.27.

$$A_{27} = \left[\begin{array}{cc|c|cccccc} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 22 \end{array}\right]$$

A_{27}	SDD
Tačkast	-
Blok I tip	$+$
Blok II tip	$+$



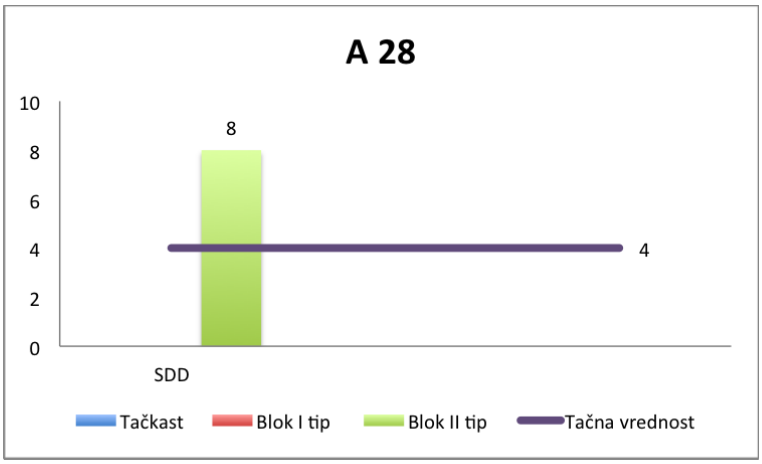
Slika 4.4: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{27}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.27

Matrica A_{27} ilustracija je situacije u kojoj nije primenljiva *tačkasta* ocena. Stoga je ovo primer koji, između ostalog, opravdava korišćenje blok pristupa.

Primer 4.28.

$$A_{28} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0.5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A_{28}	SDD
Tačkast	-
Blok I tip	-
Blok II tip	+



Slika 4.5: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{28}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.28

Matrica A_{28} nije SDD matrica u *tačkastom smislu*. Tačna vrednost je $\|A_{28}^{-1}\|_\infty = 4$. Za particiju $\pi = \{0, 3, 6\}$, ova matrica nije $B_I^\pi SDD$, ali jeste $B_{II}^\pi SDD$. Dakle, primenljiva je samo ocena (B_{II} Var) čija vrednost je 8.

4.2.3 Ocena za blok $S-$SDD matrice I i II tipa

Potklasa $H-$matrica (*tačkasti slučaj*) koju u ovoj disertaciji nazivamo $S-SDD$, poznata je u literaturi i pod drugim imenima i razmatrana je od strane više autora. Za tu potklasu $H-$matrica više autora dokazalo je i neke ocene za normu beskonačno inverzne matrice, vidi [58], [84] i [68]. Uz manje modifikacije, sve se one mogu smatrati, u suštini, istom ocenom, koja je najpreglednije zapisana u radu [68], gde klasa $S-SDD$ predstavlja specijalan slučaj PH matrica, kada je skup indeksa podeljen u dva disjunktna podskupa S i $\overline{S}$.

Ocena za $\|A^{-1}\|_\infty$ ako je A iz $S-SDD$ klase, izvedena je u radu [68] i označena u ovoj disertaciji sa (Kol). Ovde je radi preglednosti, navodimo u obliku sledeće Leme.

Lema 4.29. *Ako je A $S-SDD$ matrica, za neki neprazan pravi podskup $S \subset N$ onda je*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{i \in S, j \in \overline{S}} \max\{\rho^S_{i,j}(A), \rho^{\overline{S}}_{j,i}(A)\}, \tag{Kol}$$

gde je

$$\rho^S_{i,j}(A) = \frac{|a_{i,i}| - r^S_i(A) + r^S_j(A)}{(|a_{i,i}| - r^S_i(A))(|a_{j,j}| - r^{\overline{S}}_j(A)) - r^{\overline{S}}_i(A) r^S_j(A)},$$

i gde je

$$r^S_i(A) = \sum_{j \in S \setminus \{i\}} |a_{i,j}| \ .$$

Na osnovu ove leme, izvodimo ocenu za blok π $S-SDD$ matrice I i II tipa.

Naime, na osnovu Leme 4.29 i Teoreme 4.19, direktno sledi:

Teorema 4.30. *Ako je matrica $A = [A_{i,j}]_{\ell \times \ell}$ $B^\pi_I S-SDD$ matrica za neki neprazan pravi podskup $S \subset L$, tada je:*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{i \in S, j \in \overline{S}} \max\{\rho^S_{i,j}(\rangle A\langle^\pi), \rho^{\overline{S}}_{j,i}(\rangle A\langle^\pi)\}. \tag{B_I Kol}$$

Isto tako, na osnovu Leme 4.29 i Teoreme 4.20, direktno sledi:

Teorema 4.31. *Ako je matrica* $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ $B^{\pi}_{II}S-SDD$ *matrica za neki neprazan pravi podskup* $S \subset L$, *tada je:*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{1\leq k\leq \ell} \|A^{-1}_{k,k}\|_\infty \cdot \max_{i\in S, j\in \overline{S}} \max\{\rho^{S}_{i,j}(\langle A\rangle^{\pi}), \rho^{\overline{S}}_{j,i}(\langle A\rangle^{\pi})\}. \qquad (B_{II}\ \text{Kol})$$

Ovu podsekciju završavamo navođenjem ilustrativnih

- opravdavaju postojanje novih ocena blok tipa, pošto su moguče situacije da su blok ocene primenljive, a tačkaste nisu,
- prikazuju efikasnost novodobijenih ocena u slučajevima kada su primenljive i neke „stare" ocene.

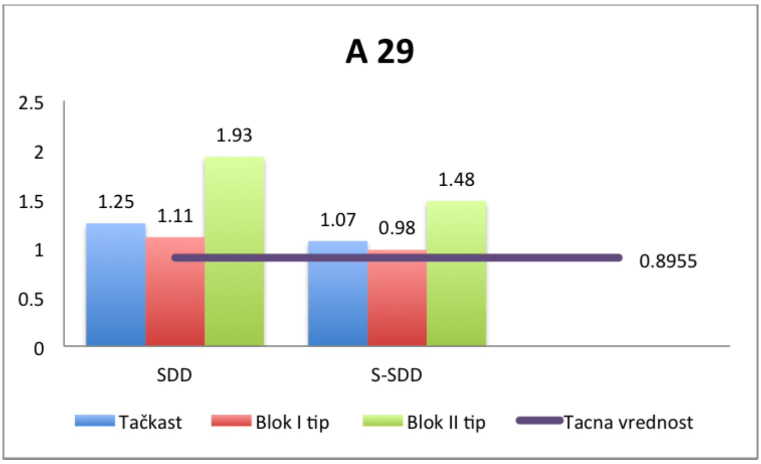
U primerima koji slede, zadržaćemo isti pristup kao i u ranijim primerima:

- Matrica je već izdeljena na blokove i iz te podele se vidi odgovarajuća particija indeksa,
- u vidu tabele prikazana je pripadnost do sada razmatranim klasama, kao i izbor skupa S,
- u vidu grafika prikazane su primenljive ocene kao i tačna vrednost norme inverzne matrice.

Primer 4.32.

$$A_{29} = \left[\begin{array}{cc|cc} 15 & -8 & -3.5 & -1.1 \\ -0.4 & 7 & -3.5 & -1.1 \\ \hline -0.4 & -0.4 & 3.7 & -1.1 \\ -0.4 & -0.4 & -0.4 & 2 \end{array}\right]$$

A_{29}	SDD	$S-SDD$
Tačkast	$+$	$+$ $S=\{1,2,3\}$
Blok I tip	$+$	$+$ $S=\{1\}$
Blok II tip	$+$	$+$ $S=\{1\}$



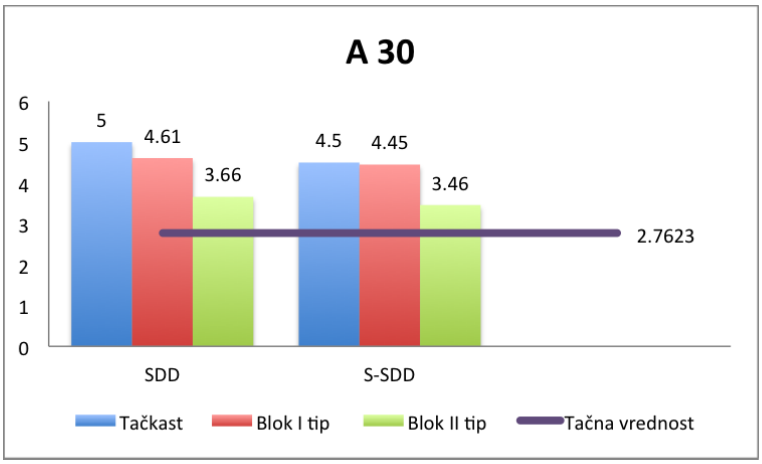
Slika 4.6: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{29}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.32

Matrica A_{29} je takva da su sve dosadašnje ocene primenljive i u *tačkastom smislu*, i u smislu blok I i II tipa. Najbolja među njima je ocena $(B_I$ Kol).

Primer 4.33.

$$A_{30} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -0.2 & 0.7 & -0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 & 0.5 & -0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.2 & 2.2 \end{array}\right]$$

A_{30}	SDD	$S-SDD$
Tačkast	$+$	$+$ $S=\{4,6\}$
Blok I tip	$+$	$+$ $S=\{1\}$
Blok II tip	$+$	$+$ $S=\{1\}$



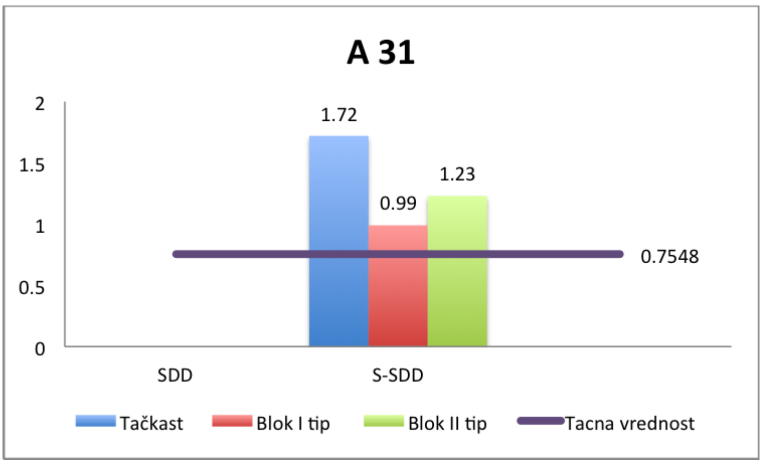
Slika 4.7: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{30}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.33

Matrica A_{30} je, takođe, takva da su sve dosadašnje ocene primenljive i u *tačkastom smislu*, i u smislu blok I i II tipa, ali ovog puta najbolja među njima je ocena (B_{II} Kol).

Primer 4.34.

$$A_{31} = \left[\begin{array}{cc|cc} 22 & -8 & -1 & 0 \\ 0.1 & 3 & -2 & -1.1 \\ \hline 0.1 & 0.1 & 3 & -2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 3 \end{array}\right]$$

A_{31}	SDD	$S-SDD$
Tačkast	-	$+$ $S=\{2\}$
Blok I tip	-	$+$ $S=\{1\}$
Blok II tip	-	$+$ $S=\{1\}$



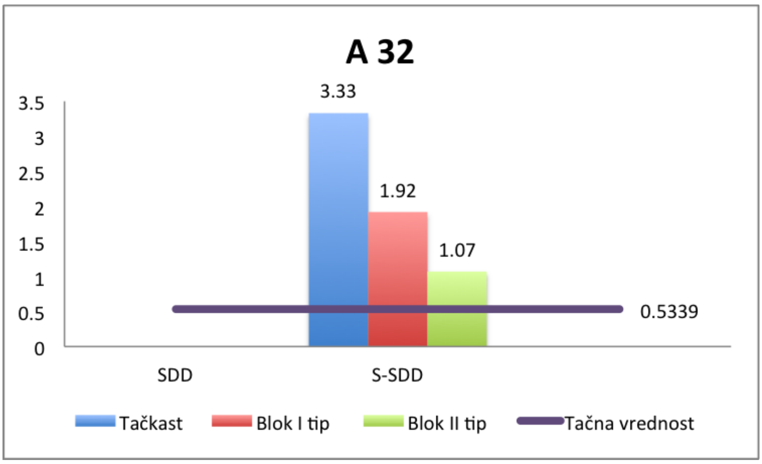
Slika 4.8: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{31}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.34

Za matricu A_{31} nije moguće primeniti Varahovu ocenu, ni u *tačkastom* ni u blok smislu. Ocene tipa $S-SDD$ su sve tri primenljive, a najbolja među njima je ocena (B_I Kol).

Primer 4.35.

$$A_{32} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

A_{32}	SDD	$S-SDD$
Tačkast	-	$+$ $S=\{2,4,5\}$
Blok I tip	-	$+$ $S=\{1\}$
Blok II tip	-	$+$ $S=\{1\}$



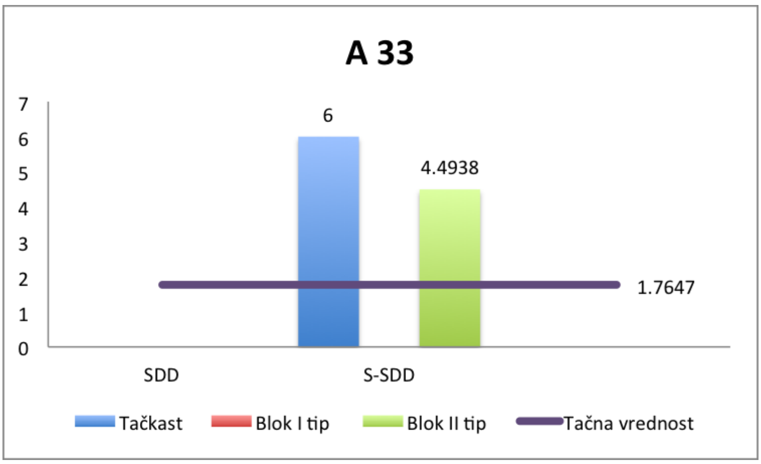
Slika 4.9: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{32}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.35

Za matricu A_{32}, situacija je slična kao u prethodnom primeru, samo je sada značajno bolja ocena (B_{II} Kol).

Primer 4.36.

$$A_{33} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1.5 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1.5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1.5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.5 & 2 \end{array}\right]$$

A_{33}	SDD	$S-SDD$
Tačkast	-	$+$ $S=\{2,3\}$
Blok I tip	-	-
Blok II tip	-	$+$ $S=\{1\}$



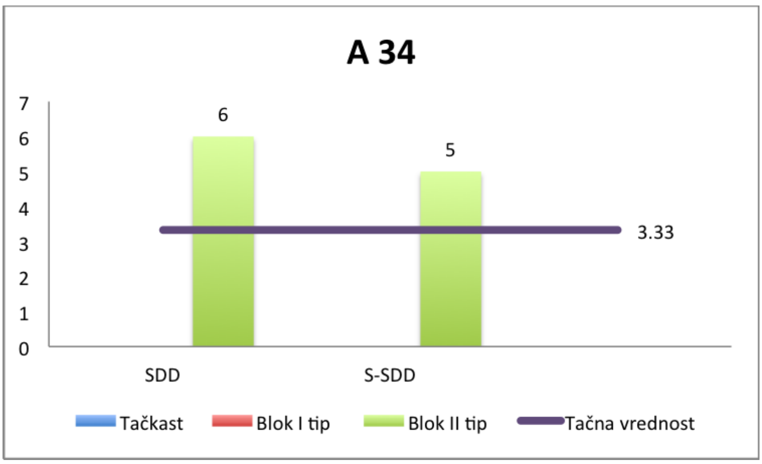
Slika 4.10: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{33}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.36

Matrica A_{33} je takva da su za nju primenljive samo ocene (Kol) i (B_{II} Kol), i bolja od njih je (B_{II} Kol).

Primer 4.37.

$$A_{34} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 0 & -0.5 & -0.5 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

A_{34}	SDD	$S-SDD$
Tačkast	-	-
Blok I tip	-	-
Blok II tip	$+$	$+$ $S=\{1\}$



Slika 4.11: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{34}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.37

Za matricu A_{34} primenljive su ocene (B_{II} Var) i (B_{II} Kol), a bolja je (B_{II} Kol).

4.2.4 Ocena za blok Nekrasov matrice I i II tipa

Radi preglednosti, ponavljamo ovde Teoremu 4.4, koju ćemo sada proglasiti Lemom, dakle, tvrđenjem koje se odnosi na *tačkast slučaj*, na osnovu koga, kao i ranije, dokazujemo tvrđenja za blok slučaj I i II tipa.

Lema 4.38. *Neka je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ Nekrasov matrica. Onda je:*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in N} z_i(A)}{\min\limits_{i\in N}(|a_{i,i}| - h_i(A))}, \tag{CDDL1}$$

i

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in N} \dfrac{z_i(A)}{|a_{i,i}|}}{1 - \max\limits_{i\in N} \dfrac{h_i(A)}{|a_{i,i}|}}, \tag{CDDL2}$$

gde je $h_i(A)$ definisano sa

$$h_1(A) = \sum_{j\neq 1} |a_{1,j}|, \quad h_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| \frac{h_j(A)}{|a_{j,j}|} + \sum_{j=i+1}^{n} |a_{i,j}|, \ \ i = 2, \dots, n,$$

a $z_i(A)$ je definisano sa

$$z_1(A) = 1, \ \ z_i(A) = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{i,j}|}{|a_{j,j}|} z_j(A) + 1, \ \ i = 2, 3, \dots n.$$

Na osnovu Leme 4.38 i Teoreme 4.19, direktno sledi:

Teorema 4.39. *Ako je matrica $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ B_I^πNekrasov matrica, tada je*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in L} z_i(\rangle A \langle^{\pi})}{\min\limits_{i\in L}\left(\|A_{i,i}^{-1}\|_\infty^{-1} - h_i(\rangle A \langle^{\pi})\right)} \tag{B_I CDDL1}$$

i

$$\|A^{-1}\|_\infty \le \frac{\max\limits_{i\in L} \|A_{i,i}^{-1}\|_\infty z_i(\rangle A\langle^{\pi})}{1-\max\limits_{i\in L} \|A_{i,i}^{-1}\|_\infty h_i(\rangle A\langle^{\pi})}, \qquad (B_I \text{ CDDL2})$$

gde su $z_i(A)$ i $h_i(A)$ definisani kao u Lemi 4.38.

Na osnovu Leme 4.38 i Teoreme 4.20, direktno sledi:

Teorema 4.40. *Ako je matrica $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ B_{II}^{π}Nekrasov matrica, tada je*

$$\|A^{-1}\|_\infty \le \max_{i\in L} \|A_{i,i}^{-1}\|_\infty \cdot \frac{\max\limits_{i\in L} z_i(\langle A\rangle^{\pi})}{\min\limits_{i\in L}\big(1-h_i(\langle A\rangle^{\pi})\big)}\ , \qquad (B_{II} \text{ CDDL1})$$

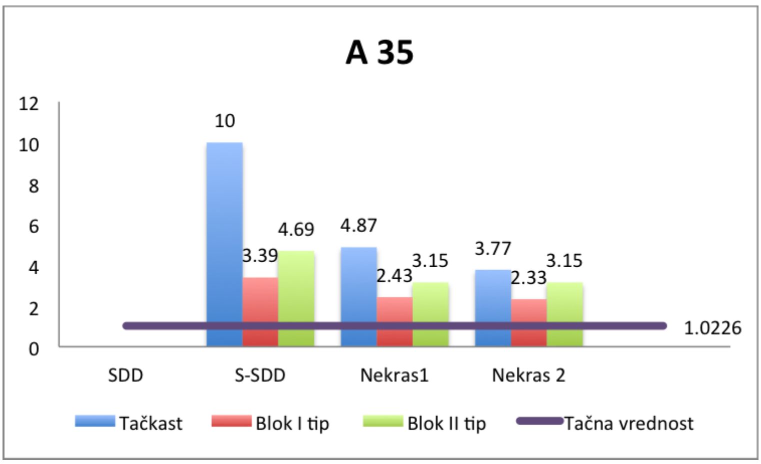
gde su $z_i(A)$ i $h_i(A)$ definisani kao u Lemi 4.38.

Kod B_{II}^{π}Nekrasovih matrica postoji samo jedna ocena, iako su postojale dve (CDDL1) i (CDDL2) ocene u *tačkastom* slučaju. Prva ocena (B_{II} CDDL1) je ista kao druga (B_{II} CDDL2), jer su dijagonalni elementi pridružene matrice II tipa svi jednaki 1.

Primer 4.41.

$$A_{35} = \left[\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 9 & -4 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 12 & -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -2 & 8 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -3 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 9 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 10 & -1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & -3 & 7 \end{array}\right]$$

A_{35}	SDD	$S-SDD$	Nekrasov
Tačkast	-	$+$ $S=\{4,5,7,8\}$	$+$
Blok I tip	-	$+$ $S=\{2,4\}$	$+$
Blok II tip	-	$+$ $S=\{1\}$	$+$



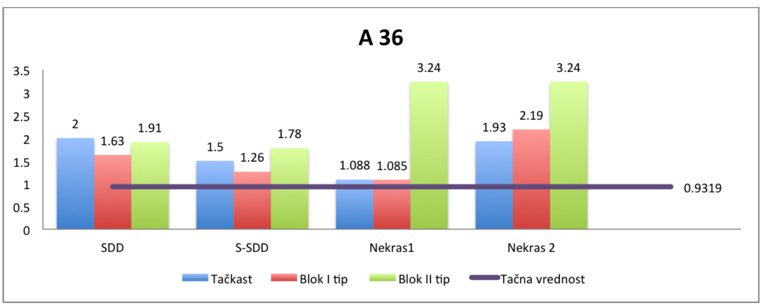
Slika 4.12: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{35}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.41

Matrica A_{35} je primer matrice za koju su primenljive sve ocene $S-SDD$ tipa i Nekrasov tipa, a ocene Nekrasov tipa su generalno bolje.

Primer 4.42.

$$A_{36} = \left[\begin{array}{rr|rr|rr|rr} 21 & -9.1 & -4.2 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7 & 10 & -4.2 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -0.7 & -0.7 & 4.9 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7 & -0.7 & -0.7 & 2.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & -9.1 & -4.2 & -2.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7 & 9.1 & -4.2 & -2.1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7 & -0.7 & 4.9 & -2.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7 & -0.7 & -0.7 & 2.8 \end{array}\right]$$

A_{36}	SDD	$S-SDD$	Nekras 1	Nekras 2
Tačkast	+	+ $S=\{1\}$	+	+
Blok I tip	+	+ $S=\{1\}$	+	+
Blok II tip	+	+ $S=\{2,4\}$	+	+



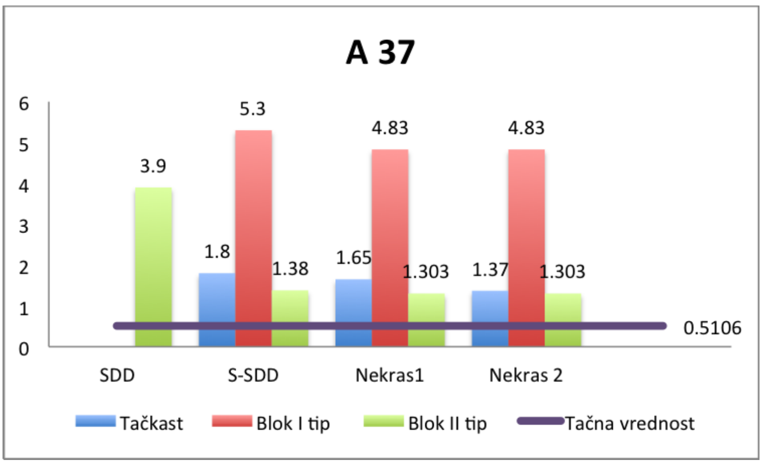
Slika 4.13: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{36}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.42

Matrica A_{36} je takva da su sve do sada navedene ocene primenljive, a najbolja je ocena (B_I CDDL1).

Primer 4.43.

$$A_{37} = \left[\begin{array}{cc|cc|ccccc}
6 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 9 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 1 & -1 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 6 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 7
\end{array}\right]$$

A_{37}	SDD	$S-SDD$	Nekrasov
Tačkast	-	$+$ $S=\{8\}$	$+$
Blok I tip	-	$+$ $S=\{3\}$	$+$
Blok II tip	$+$	$+$ $S=\{1,2\}$	$+$



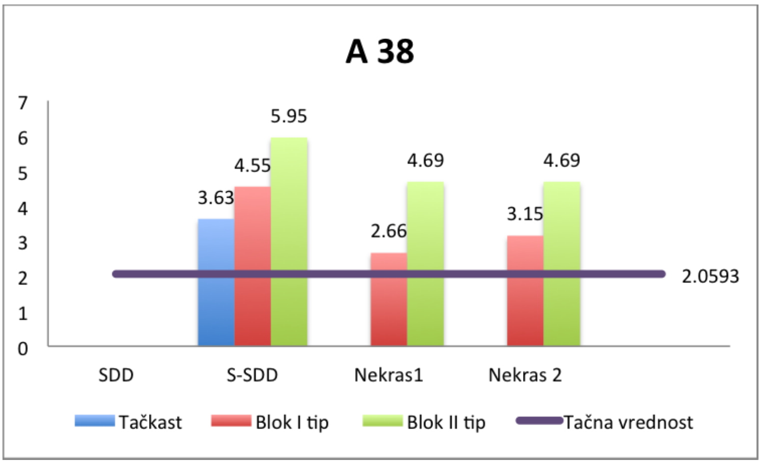
Slika 4.14: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{37}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.43

Matrica A_{37} je primer matrice za koju su generalno bolje ocene blok II tipa od ocena blok I tipa, kao i od *tačkastih* ocena.

Primer 4.44.

$$A_{38} = \left[\begin{array}{r|rr|rr} 21 & -9.1 & 0 & -2.1 & 0 \\ \hline -0.7 & 6.6 & -4.2 & -2.1 & 0 \\ -0.7 & -0.7 & 4.9 & -2.1 & 0 \\ \hline -0.7 & -0.7 & -0.7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

A_{38}	SDD	$S-SDD$	Nekrasov
Tačkast	-	$+$ $S=\{1,3\}$	-
Blok I tip	-	$+$ $S=\{1\}$	$+$
Blok II tip	-	$+$ $S=\{1\}$	$+$



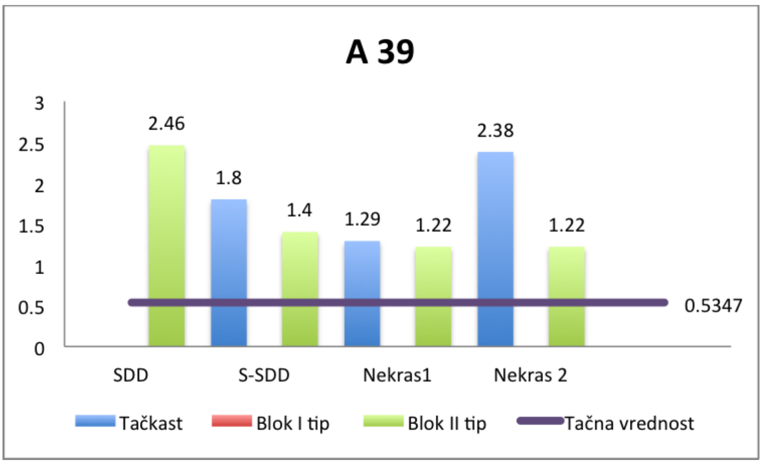
Slika 4.15: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{38}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.44

Matrica A_{38} je, suprotno od prethodnog primera, matrica za koju bolju ocenu daje pristup blok I tipa, nego blok II tipa. Primetimo da je ocena (B_I CDDL1) bliska tačnoj vrednosti norme inverzne matrice.

Primer 4.45.

$$A_{39} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 11 & -7 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 6 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right]$$

A_{39}	SDD	$S-SDD$	Nekrasov
Tačkast	-	+ $S=\{8\}$	+
Blok I tip	-	-	-
Blok II tip	+	+ $S=\{1,2\}$	+



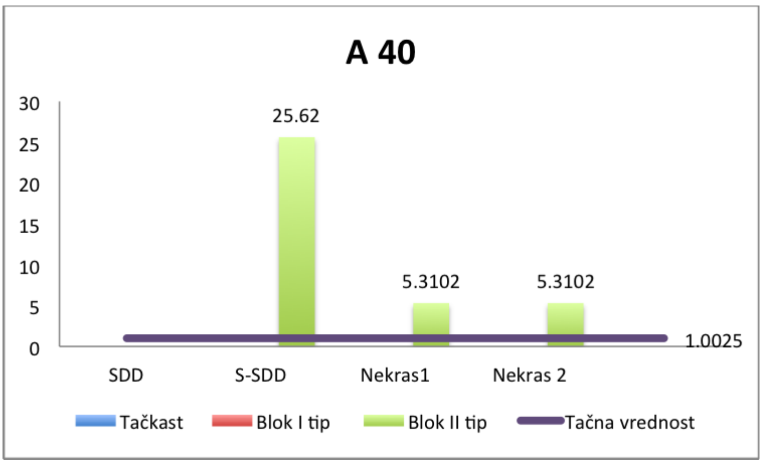
Slika 4.16: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{39}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.45

Matrica A_{39} pokazuje da je moguće da ni jedna od blok ocena I tipa nije primenljiva, a da su sve ocene II tipa primenljive. Među njima je najbolja (B_{II} CDDL1), koja je jednaka sa ocenom (B_{II} CDDL2).

Primer 4.46.

$$A_{40} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 12 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

A_{40}	SDD	$S-SDD$	Nekrasov
Tačkast	-	-	-
Blok I tip	-	-	-
Blok II tip	-	+ $S=\{3\}$	+



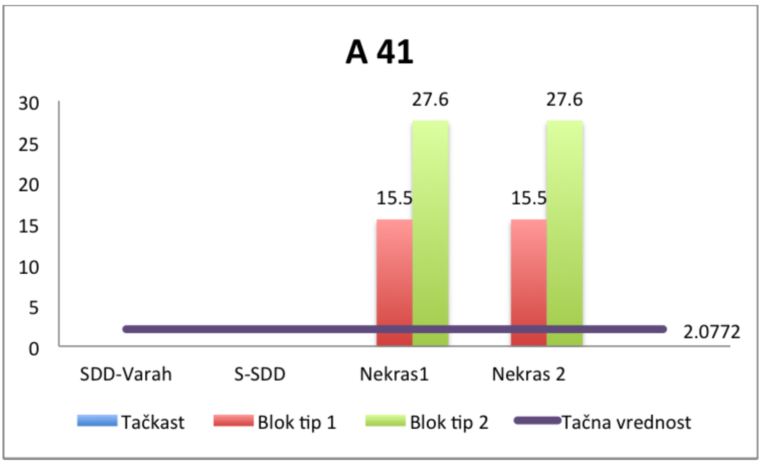
Slika 4.17: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{40}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.46

Matrica A_{40} ilustruje sličnu situaciju kao i matrica A_{39} samo što za nju nije primenljiva nijedna *tačkasta* ocena.

Primer 4.47.

$$A_{41} = \left[\begin{array}{r|rr|rr} 21 & 5.5 & -4.2 & -2.1 & 0 \\ \hline -0.7 & 7 & -4.2 & -2.1 & 0 \\ -0.7 & -0.7 & 4.9 & -2.1 & 0 \\ \hline -0.7 & -0.7 & -0.7 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

A_{41}	SDD	$S-SDD$	Nekrasov
Tačkast	-	-	-
Blok I tip	-	-	+
Blok II tip	-	-	+



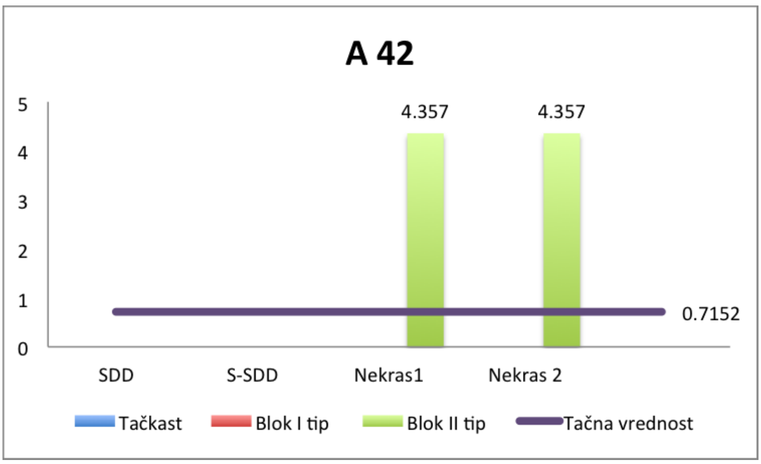
Slika 4.18: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{41}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.47

Matrica A_{41} je primer matrice za koju su primenljive samo Nekrasove ocene blok I i II tipa. Bolja od njih je Nekrasova ocena blok I tipa.

Primer 4.48.

$$A_{42} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 9 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 44 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 7 & 22 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

A_{42}	SDD	$S-SDD$	Nekrasov
Tačkast	-	-	-
Blok I tip	-	-	-
Blok II tip	-	-	+



Slika 4.19: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{42}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.48

Jedina ocena koja je primenljiva za matricu A_{42} je blok Nekrasova II tipa (to je istovremeno i ocena (B_{II} CDDL1) i (B_{II} CDDL2)).

4.2.5 Ocena za blok $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrice I i II tipa

Ocena za $\|A^{-1}\|_\infty$ ako je matrica A iz klase $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica, izvedena je u radu [29] i označena je u ovoj disertaciji sa (CKN1) i (CKN2). Ovde je radi preglednosti, navodimo u obliku sledeće Leme.

Lema 4.49. *Neka je za dati skup od dve permutacione matrice* $\{P_1, P_2\}$, $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$, $\{P_1, P_2\}-$*Nekrasov matrica. Tada važi*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in N}\{z_i^{P_{k_i}}(A)\}}{\min\limits_{i\in N}\big[|a_{i,i}| - \min\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\}\big]}, \tag{CKN1}$$

i

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in N}\{\dfrac{z_i^{P_{k_i}}(A)}{|a_{i,i}|}\}}{\min\limits_{i\in N}\big[1 - \min\{\dfrac{h_i^{P_1}(A)}{|a_{i,i}|}, \dfrac{h_i^{P_2}(A)}{|a_{ii}|}\}\big]}, \tag{CKN2}$$

pri čemu je

$$z_1(A) := 1, \quad z_i(A) := \sum_{j=1}^{i-1} |a_{i,j}| \frac{z_j(A)}{|a_{j,j}|} + 1, \quad i = 2, 3, \ldots n,$$

$\mathbf{z}(A) := [z_1(A), ..., z_n(A)]^T$, $\mathbf{z}^P(A) = P\mathbf{z}(P^TAP)$, *a indeks* $k_i \in \{1, 2\}$ *je izabran tako da je*

$$\min\{h_i^{P_1}(A), h_i^{P_2}(A)\} = h_i^{P_{k_i}}(A).$$

Na osnovu Leme 4.49, izvodimo ocene za blok π $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrice I i II tipa.

Naime, na osnovu Leme 4.49 i Teoreme 4.19, direktno sledi:

Teorema 4.50. *Ako je matrica* $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ $B_I^\pi\{P_1, P_2\}-$*Nekrasov matrica, tada je*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in L}\{z_i^{P_{k_i}}(\rangle A\langle^\pi)\}}{\min\limits_{i\in L}\Big[\|A_{i,i}^{-1}\|_\infty^{-1} - \min\big\{h_i^{P_1}(\rangle A\langle^\pi), h_i^{P_2}(\rangle A\langle^\pi)\big\}\Big]}. \tag{B_I CKN1}$$

Takođe, važi

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max\limits_{i\in L}\big\{\|A_{i,i}^{-1}\|_\infty z_i^{P_{k_i}}\big(\rangle A\langle^{\pi}\big)\big\}}{\min\limits_{i\in L}\Big[1-\min\big\{\|A_{i,i}^{-1}\|_\infty h_i^{P_1}(\rangle A\langle^{\pi}), \|A_{i,i}^{-1}\|_\infty h_i^{P_2}\big(\rangle A\langle^{\pi}\big)\big\}\Big]}, \tag{B_I CKN2}$$

gde su $\mathbf{z}(A)$ *i* $\mathbf{z}^P(A)$ *i indeks* k_i *definisani u Lemi 4.49.*

Na osnovu Leme 4.49 i Teoreme 4.20, direktno sledi:

Teorema 4.51. *Ako je matrica* $A=[A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ $B^{\pi}_{II}\{P_1,P_2\}-$*Nekrasov matrica, tada je*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{i\in L}\|A_{i,i}^{-1}\|_\infty\cdot\frac{\max\limits_{i\in L}\big\{z_i^{P_{k_i}}\big(\langle A\rangle^{\pi}\big)\big\}}{\min\limits_{i\in L}\Big[1-\min\big\{h_i^{P_1}\big(\langle A\rangle^{\pi}\big), h_i^{P_2}\big(\langle A\rangle^{\pi}\big)\big\}\Big]}, \tag{B_{II} CKN1}$$

gde su $\mathbf{z}(A)$ *i* $\mathbf{z}^P(A)$ *i indeks* k_i *definisani u Lemi 4.49.*

Kod $B^{\pi}_{II}\{P_1,P_2\}-$Nekrasov matrica postoji samo jedna ocena, iako su postojale dve (CKN1) i (CKN2) ocene u *tačkastom slučaju.* Prva ocena (B_{II} CKN1) je ista kao druga (B_{II} CKN2), jer su dijagonalni elementi pridružene matrice II tipa svi jednaki 1.

Radi preglednosti, iako za normu beskonačno inverzne matrice Nekrasov matrice imamo dve ocene (CDDL1) i (CDDL2), u nastavku prikazujemo samo bolju od njih.

S obzirom da je izbor permutacionih matrica otvoreno pitanje, a ispitivanje $\{P_1,P_2\}-$Nekrasov osobine za sve moguće izbore permutacionih matrica P_1 i P_2 računski je veoma skupo, u nastavku ove podsekcije, a i do kraja ovog poglavlja, ograničićemo se samo na jedan izbor permutacionih matrica P_1 i P_2:

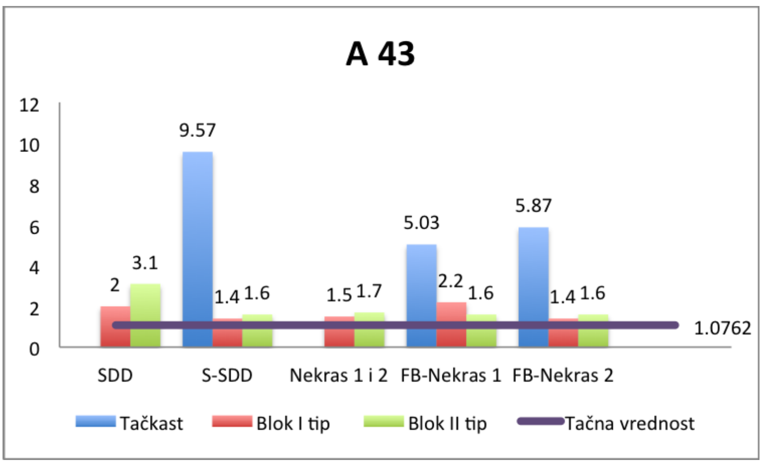
$$P_1 = I, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0\ldots 1 \\ \vdots & \vdots\ddots\vdots \\ 0 & 1\ldots 0 \\ 1 & 0\ldots 0 \end{bmatrix}.$$

Za ovakav izbor permutacionih matrica P_1 i P_2, klasu $\{P_1,P_2\}-$Nekrasov matrica zvaćemo $FB-$Nekrasov matrice (ForwardBackward-Nekrasov).

Primer 4.52.

$$A_{43} = \left[\begin{array}{ccccc|ccccc} -4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 & 1 & -0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.1 & 2 & -0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -0.5 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -0.4 & 14 \end{array}\right]$$

A_{43}	SDD	$S-SDD$	Nekras	$FB-$Nekras 1	$FB-$Nekras 2
Tačkast	-	$+$ $S=\{3,7,9\}$	-	$+$	$+$
Blok I tip	$+$	$+$ $S=\{1\}$	$+$	$+$	$+$
Blok II tip	$+$	$+$ $S=\{1\}$	$+$	$+$	$+$



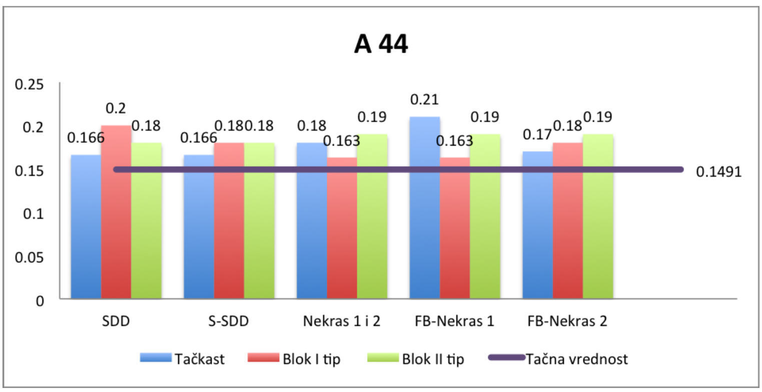
Slika 4.20: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{43}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.52

Matrica A_{43} pokazuje efikasnost blok pristupa u odnosu na tačkasti pristup. Takođe, ovaj primer služi za poređenje ocena $S-SDD$ tipa, Nekrasov tipa i $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov tipa. Najbolja ocena dobija se u slučaju (B_I Kol) i (B_I CKN1).

Primer 4.53.

$$A_{44} = \left[\begin{array}{c|c|c|ccc} 12 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 12 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 12 \end{array}\right]$$

A_{44}	SDD	$S-SDD$	Nekras	$FB-$Nekras 1	$FB-$Nekras 2
Tačkast	$+$	$+$ $S=\{1\}$	$+$	$+$	$+$
Blok I tip	$+$	$+$ $S=\{2,3\}$	$+$	$+$	$+$
Blok II tip	$+$	$+$ $S=\{1\}$	$+$	$+$	$+$



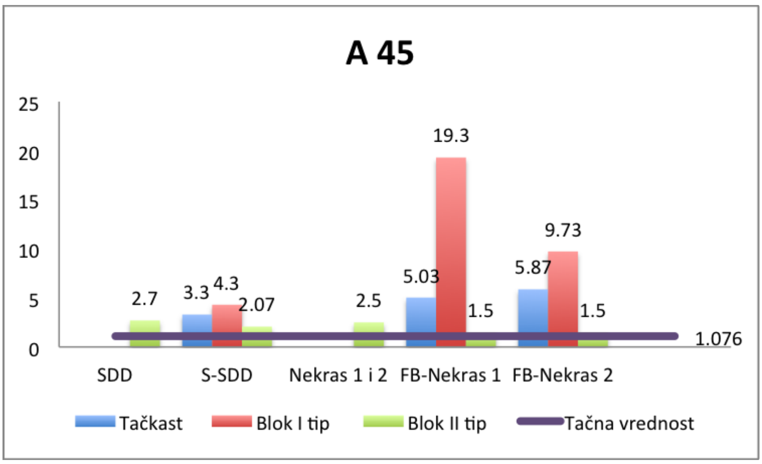
Slika 4.21: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{44}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.53

Matrica A_{44} je primer matrice za koju su primenljive sve do sada navedene ocene, a među njima su najbolje (B_I CDDL1) i (B_I CKN1).

Primer 4.54.

$$A_{45} = \left[\begin{array}{c|ccc|c|c} -4 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 4 & 1 & -0.1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -0.1 & 2 & -0.4 \\ \hline 0 & 0 & -0.5 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

A_{45}	SDD	$S-SDD$	Nekras	$FB-$Nekras 1	$FB-$Nekras 2
Tačkast	-	+ $S=\{3,6\}$	-	+	+
Blok I tip	-	+ $S=\{2,4\}$	-	+	+
Blok II tip	+	+ $S=\{1,2\}$	+	+	+



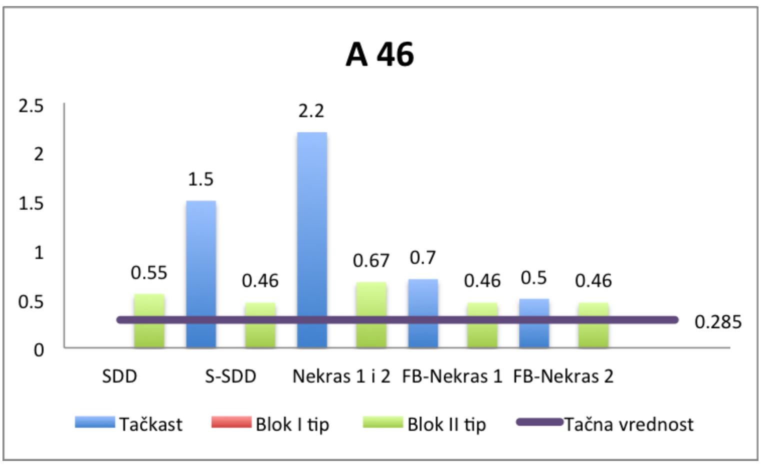
Slika 4.22: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{45}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.54

Matrica A_{45} pokazuje da se ponekad isplate dodatna računanja prouzrokovana korišćenjem $FB-$Nekrasov pristupa, jer se njime dobija značajno bolja ocena norme inverzne matrice. U ovom slučaju to je ocena (B_{II} CKN1).

Primer 4.55.

$$A_{46} = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
8 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 11 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 22 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & -1 & 1 & 17 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 8
\end{array}\right]$$

A_{46}	SDD	$S-SDD$	Nekras	$FB-$Nekras 1	$FB-$Nekras 2
Tačkast	-	$+$ $S{=}\{1,2,3,4,12\}$	$+$	$+$	$+$
Blok I tip	-	-	-	-	-
Blok II tip	$+$	$+$ $S{=}\{1\}$	$+$	$+$	$+$



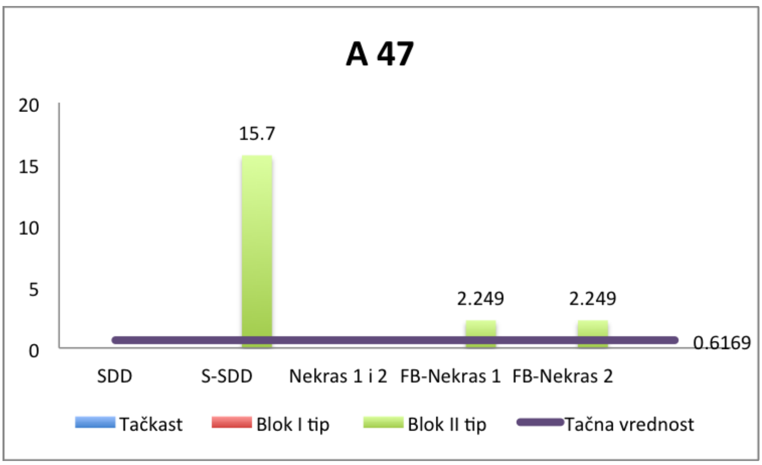
Slika 4.23: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{46}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.55

Matrica A_{46} opravdava pristup blok II tipa u odnosu na blok I tip.

Primer 4.56.

$$A_{47} = \left[\begin{array}{r|rr|r|rr} 7 & 6 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 6 & 11 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 15 & 4 & 1 & -2 \\ \hline -2 & 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

A_{47}	SDD	$S-SDD$	Nekras	$FB-$Nekras 1	$FB-$Nekras 2
Tačkast	-	-	-	-	-
Blok I tip	-	-	-	-	-
Blok II tip	-	+ $S=\{3\}$	-	+	+



Slika 4.24: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{47}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.56

Matrica A_{47} je jedan od primera koji opravdava, generalno, blok pristup ovoj tematici.

4.2.6 Ocena za blok $S-$Nekrasov matrice I i II tipa

Radi preglednosti, ponavljamo ovde Teoremu 4.7, koju ćemo sada proglasiti Lemom, dakle, tvrđenjem koje se odnosi na *tačkast slučaj*, na osnovu koga, kao i ranije, dokazujemo tvrđenja za blok slučaj I i II tipa.

Lema 4.57. *Neka je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ $S-$Nekrasov matrica i neka je $z_i(A)$ definisano u (4.2). Tada važi:*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{i\in N} z_i(A) \cdot \max_{i\in S, j\in \overline{S}} \max\{\chi^S_{i,j}(A), \chi^{\overline{S}}_{j,i}(A)\}, \tag{CKD1}$$

i

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{i\in N} \frac{z_i(A)}{|a_{i,i}|} \cdot \max_{i\in S, j\in \overline{S}} \max\{\widetilde{\chi}^S_{i,j}(A), \widetilde{\chi}^{\overline{S}}_{j,i}(A)\}, \tag{CKD2}$$

gde je

$$\chi^S_{i,j}(A) = \frac{|a_{i,i}| - h^S_i(A) + h^S_j(A)}{\big(|a_{i,i}| - h^S_i(A)\big)\big(|a_{j,j}| - h^{\overline{S}}_j(A)\big) - h^{\overline{S}}_i(A) h^S_j(A)},$$

a

$$\widetilde{\chi}^S_{i,j}(A) = \frac{|a_{i,i}||a_{j,j}| - |a_{j,j}|h^S_i(A) + |a_{i,i}|h^S_j(A)}{\big(|a_{i,i}| - h^S_i(A)\big)\big(|a_{j,j}| - h^{\overline{S}}_j(A)\big) - h^{\overline{S}}_i(A) h^S_j(A)}.$$

Na osnovu Leme 4.57 i Teoreme 4.19, direktno sledi:

Teorema 4.58. *Ako je matrica $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ $B^\pi_I S-$Nekrasov matrica, tada*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{i\in L} z_i(\rangle A\langle^\pi) \cdot \max_{i\in S, j\in \overline{S}} \max\{\chi^S_{i,j}(\rangle A\langle^\pi), \chi^{\overline{S}}_{ji}(\rangle A\langle^\pi)\}. \tag{B_I CKD1}$$

i

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{i\in L} \|A^{-1}_{i,i}\|_\infty z_i(\rangle A\langle^\pi) \cdot \max_{i\in S, j\in \overline{S}} \max\{\widetilde{\chi}^S_{i,j}(\rangle A\langle^\pi), \widetilde{\chi}^{\overline{S}}_{j,i}(\rangle A\langle^\pi)\}. \tag{B_I CKD2}$$

Na osnovu Leme 4.57 i Teoreme 4.20, direktno sledi:

Teorema 4.59. *Ako je matrica $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ $B_{II}^{\pi}S-$Nekrasov matrica, tada*

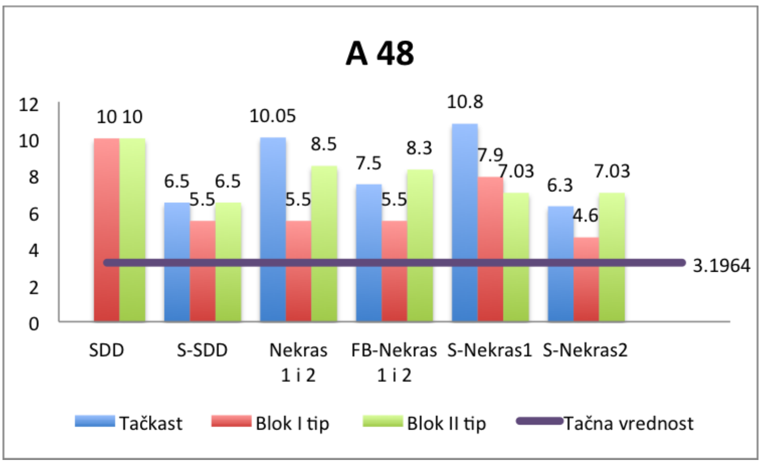
$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{i\in L} \|A_{i,i}^{-1}\|_\infty \cdot \max_{i\in L} z_i(\langle A\rangle^\pi) \cdot \max_{i\in S, j\in \overline{S}} \max\{\chi_{i,j}^{S}(\langle A\rangle^\pi), \chi_{j,i}^{\overline{S}}(\langle A\rangle^\pi)\}, \tag{B_{II} CKD1}$$

Napomenimo da kod blok $S-$Nekrasov matrica II tipa postoji samo jedna ocena, jer su dijagonalni elementi pridružene matrice II tipa svi jednaki 1. Takođe, kao i ranije, umesto obe ocene za Nekrasov matrice, prikazujemo samo bolju od njih, a isti princip primenjujemo i na slučaj $\{P_1, P_2\}-$Nekrasov matrica. Za pripadnost klasi $S-$Nekrasov matrica koristimo dve kolone, kako bismo naglasili koji izbor skupa S se odnosi na koju od dve moguće ocene.

Primer 4.60.

$$A_{48} = \left[\begin{array}{rr|rr|rr} -1.5 & -0.1 & 0 & -0.1 & 0 & 0 \\ -0.1 & 44 & -0.1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -0.1 & 0.4 & -0.1 & -0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 & -0.5 & 44 & 0 & 0 \\ \hline -0.1 & 0 & 0 & -0.1 & 44 & -0.4 \\ 0 & 0 & -0.5 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

A_{48}	SDD	$S-SDD$	Nekras	$FB-$ Nekras	S-Nekras 1	S-Nekras 2
Tačkast	-	$+$ $S=\{2,4,5\}$	$+$	$+$	$+$ $S=\{2,4,6\}$	$+$ $S=\{1,4,6\}$
Blok I tip	$+$	$+$ $S=\{1\}$	$+$	$+$	$+$ $S=\{1,3\}$	$+$ $S=\{1,3\}$
Blok II tip	$+$	$+$ $S=\{1\}$	$+$	$+$	$+$ $S=\{1,3\}$	$+$ $S=\{1,3\}$



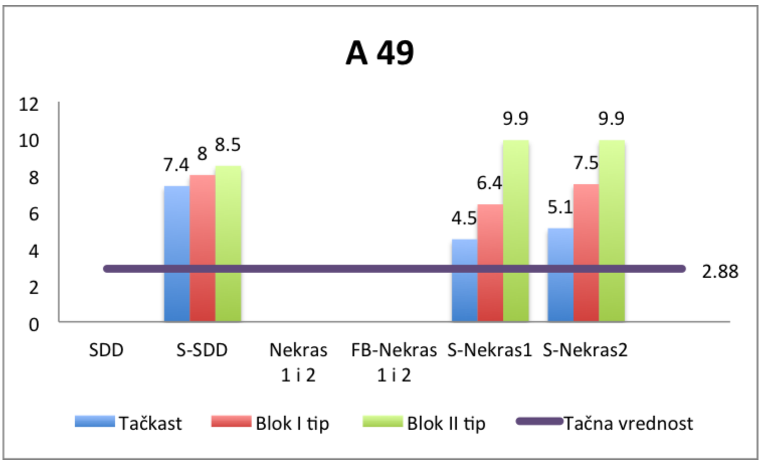
Slika 4.25: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{48}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.60

Primer matrice A_{48}, za koju su primenljive sve ocene osim Varahove *tačkaste* ocene opravdava postojanje ocene blok $S-$Nekrasov I tipa. Naime, ocena (B_I CKD2) je najbolja.

Primer 4.61.

$$A_{49} = \left[\begin{array}{r|rr|rr} 21 & -9.1 & -4.2 & -2.1 & 0 \\ \hline -0.7 & 5 & -4.2 & -2.1 & 0 \\ -0.7 & -0.7 & 4.9 & -2.1 & 0 \\ \hline -0.7 & -0.7 & -0.7 & 2.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

A_{49}	SDD	$S-SDD$	Nekras	$FB-$ Nekras	S-Nekras 1	S-Nekras 2
Tačkast	-	$+$ $S=\{1,3,4,5\}$	-	-	$+$ $S=\{2\}$	$+$ $S=\{3,4,5\}$
Blok I tip	-	$+$ $S=\{2\}$	-	-	$+$ $S=\{2\}$	$+$ $S=\{2\}$
Blok II tip	-	$+$ $S=\{2\}$	-	-	$+$ $S=\{2\}$	$+$ $S=\{2\}$



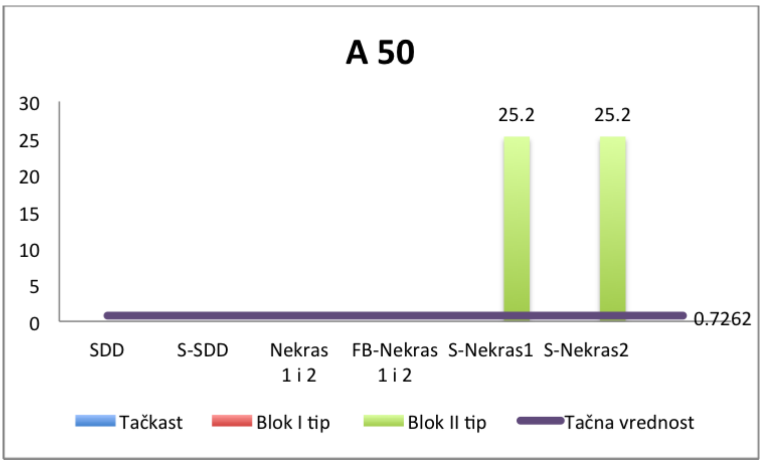
Slika 4.26: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{49}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.61

Matrica A_{49} je primer matrice za koju funkcioniše samo pristup baziran na izdvajanju posebnog podskupa S skupa indeksa N. Pri tome $S-$Nekrasov pristup daje bolje ocene od $S-SDD$ pristupa.

Primer 4.62.

$$A_{50} = \left[\begin{array}{cc|c|c|c} 5 & 8 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 4 & -1 & -2 \\ \hline 0 & -1 & -2 & 5 & -2 \\ \hline 0 & -9 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right]$$

A_{50}	SDD	$S-SDD$	Nekras	$FB-$ Nekras	S-Nekras 1	S-Nekras 2
Tačkast	-	-	-	-	-	-
Blok I tip	-	-	-	-	-	-
Blok II tip	-	-	-	-	$+$ $S=\{2,3\}$	$+$ $S=\{2,3\}$



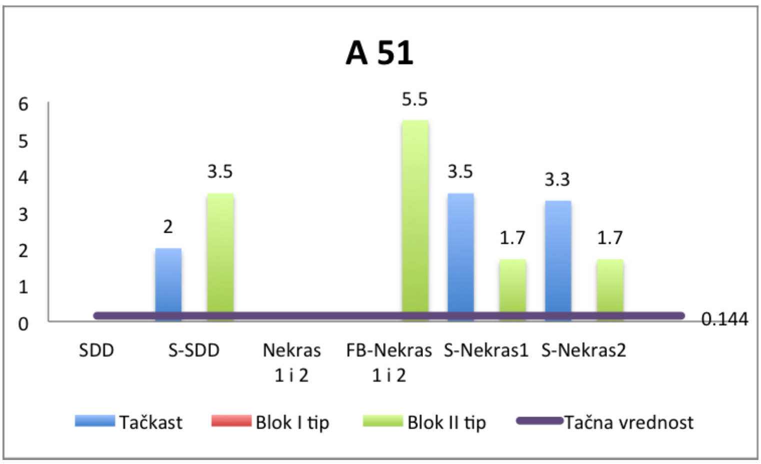
Slika 4.27: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{50}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.62

Matrica A_{50} verifikuje potrebu postojanja ocena blok pristupa $S-$Nekrasov II tipa, pošto nijedna druga ocena nije primenljiva.

Primer 4.63.

$$A_{51}=\left[\begin{array}{cc|cc|cc} -16 & 2 & 1 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 16 & 5 & 4 & 3 & 2\\ \hline 1 & 2 & 16 & 3 & 4 & 5\\ 5 & 4 & 2 & 14 & 3 & 1\\ \hline 1 & 5 & 3 & 2 & 16 & 4\\ 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 16 \end{array}\right]$$

A_{51}	SDD	$S-SDD$	Nekras	$FB-$ Nekras	S-Nekras 1	S-Nekras 2
Tačkast	-	-	-	-	+ $S=\{4\}$	+ $S=\{4\}$
Blok I tip	-	-	-	-	-	-
Blok II tip	-	+ $S=\{3\}$	-	+	+ $S=\{3\}$	+ $S=\{3\}$



Slika 4.28: Prikaz gornjih ocena za $\|A_{51}^{-1}\|_\infty$, iz Primera 4.63

Matrica A_{51} prikazuje situaciju u kojoj nije primenljiva nijedna ocena blok I tipa, za razliku od ocena blok II tipa, koje su bolje od *tačkastog* slučaja.

4.3 Pregled svih ocena

U prethodnim sekcijama prikazali smo razne vrste *tačkastih*, blok I i blok II ocena norme beskonačno inverzne matrice, koje su, svaka za sebe primenljive samo za odgovarajuće tačkaste, blok I i blok II potklase $H-$matrica. S obzirom da tačkasta klasa stoji u opštem odnosu sa odgovarajućom blok I i blok II klasom, i s obzirom da svaka od istovrsnih tačkastih, blok I i blok II ocena norme beskonačno inverzne matrice može biti bolja od ostale dve, dobijeni rezultati imaju dvostruki značaj:

- prvo, proširuju se klase za koje postoji *neka* ocena norme inverzne matrice i
- drugo, za klase za koje su već poznate neke ocene, povećava se katalog primenljivih ocena.

Tako, na primer, za klasu SDD matrica (koja je potklasa svih navedenih klasa) katalog primenljivih ocena je, u suštini, spisak svih do sada navedenih ocena:

- (Var), (B_I Var), (B_{II} Var),
- (Kol), (B_I Kol), (B_{II} Kol),
- (CDDL1), (CDDL2), (B_I CDDL1), (B_I CDDL2), (B_{II} CDDL1), (B_{II} CDDL2),
- (CKN1), (CKN2), (B_I CKN1), (B_I CKN2), (B_{II} CKN1), (B_{II} CKN2),
- (CKD1), (CKD2), (B_I CKD1) i (B_I CKD2), (B_{II} CKD1) i (B_{II} CKD2).

4.4 Poređenje PH i blok H matrica

Kao što smo naveli u uvodnom delu, klasa $PH-$matrica je potklasa $H-$matrica, koja se bazira na particiji skupa indeksa na disjunktne podskupove. Kada je to particija na samo dva podskupa, ako ih nazovemo S i $\bar{S}$, uverili smo se da je u pitanju, u stvari, klasa koju u ovoj disertaciji zovemo $S-SDD$ matrice.

Naime, u slučaju $\ell = 2$ i $N = S \bigcup \overline{S}$, gde je

$$S = \{1, 2, \ldots, m\} \quad \text{i} \quad \overline{S} = \{m+1, m+2, \ldots, n\},$$

matrica

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix} \tag{4.21}$$

je $PH-$matrica ako i samo ako su sve matrice

$$\mathcal{M}(A)^{(i,j)} = \begin{bmatrix} |a_{i,i}| - r_i^S(A) & -r_i^{\bar{S}}(A) \\ -r_j^S(A) & |a_{j,j}| - r_j^{\bar{S}}(A) \end{bmatrix}, \quad i \in S, j \in \overline{S}, \tag{4.22}$$

regularne $M-$matrice, to jest

$$|a_{i,i}| > r_i^S(A) \ \text{ za svako } \quad i \in S,$$

i

$$(|a_{i,i}| - r_i^S(A))(|a_{j,j}| - r_j^{\bar{S}}(A)) > r_i^{\bar{S}}(A) r_j^S(A) \ \text{ za sve } i \in S, j \in \overline{S}.$$

U ovom slučaju gornja ocena norme beskonačno inverzne matrice je

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{i \in S, j \in \overline{S}} \left\| \Big(\mathcal{M}(A^{(i,j)}) \Big)^{-1} \right\|_\infty,$$

i to je ocena koju smo u ovoj disertaciji označili sa (Kol). Poređenje ove ocene sa ostalim ocenama, uključujući i ocene blok prvog i drugog tipa, već je prikazano u ovom poglavlju. Stoga ćemo ovde komentarisati samo slučaj kada je $\ell \geq 3$.

Kada je broj disjunktnih podskupova koji deli skup indeksa veći od dva, odnosno kada je $N = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_\ell$, $\ell \geq 3$, čime je definisana i particija π koja polaznu matricu prikazuje u blok formi $A = [A_{i,j}]_{\ell \times \ell}$, onda se može desiti da je posmatrana matrica istovremeno:

- iz klase $PH-$matrica,

- iz neke potklase blok π matrica I tipa ili

- iz neke potklase blok π matrica II tipa.

U tom slučaju za ocenu norme beskonačno inverzne matrice možemo koristiti i ocenu Kolotiline iz rada [68]:

$$\|A^{-1}\|_\infty \le \max_{i_1,\dots,i_\ell} \|\big(\mathcal{M}(A)^{(i_1,\dots,i_\ell)}\big)^{-1}\|_\infty, \tag{4.23}$$

kao i odgovarajuće ocene blok tipa, prezentovane u ovoj disertaciji. Postavlja se pitanje koja od tih ocena je efikasnija, u smislu - bliža tačnoj vrednosti, ali i u smislu manjeg računskog troška.

Pre svega, može se desiti da je neki od dijagonalnih elemenata posmatrane matrice jednak nuli, a da su svi dijagonalni blokovi regularne matrice. To znači da polazna matrica nije $H-$matrica u *tačkastom* smislu, pa ne može biti ni $PH-$matrica, te se ocena (4.23) ne može primeniti. Međutim, može se desiti da je polazna matrica iz neke potklase blok π I ili II tipa, pa se odgovarajuća ocena može primeniti.

Generalno, kada se mogu primeniti i ocena (4.23) i neke ocene blok tipa, poređenje potrebnog broja izračunavanja je u korist ocena blok tipa.

Na primer, ako je matrica A dimenzije $n = 100$, a skup indeksa podeljen na 10 jednakih podskupova, tada je za (4.23) potrebno izračunati 10^{10} inverza dimenzije 10×10. Sa druge strane, za ocene date Teoremama 4.19 i 4.20 potrebno je izračunati 11 inverza dimenzije 10×10, dok ocene pomoću potklasa blok π $H-$matrica I i II tipa svode ovaj broj na računanje 10 inverza.

5

Primena: Lokalizacija karakterističnih korena

Generalizovana dijagonalna dominacija (u tačkastom slučaju) predstavlja elegantan način da se dođe do značajnih rezultata iz oblasti lokalizacije karakterističnih korena. Do sada, njena blokovska varijanta je nedovoljno ispitana, a kako ogroman broj matematičkih modela ima blokovsku strukturu, potrebno je na što bolji mogući način iskoristiti blok generalizovanu dijagonalnu dominaciju, kako bi se dokazale razne osobine matrica, kao i modela koji su njima predstavljeni.

U ovom poglavlju prikazaćemo kako se osobine potklasa blok $H-$matrica mogu iskoristiti za konstrukciju oblasti lokalizacija karakterističnih korena. Pre toga, polazimo od tačkastog slučaja, koji je osnova za blok varijante lokalizacionih skupova.

5.1 Tačkast slučaj

Polazimo od čuvenog rezultata Geršgorina iz 1931. godine, koji je predstavljen u knjizi [108] Varge o lokalizaciji karakterističnih korena date matrice. Osnovna prednost Geršgorinove teoreme, u smislu alata za lokalizaciju karakterističnih korena, proizilazi iz njene jednostavnosti. Zbog toga su ovaj i brojni drugi slični rezultati našli primenu u okviru drugih oblasti, na primer u inženjerstvu, medicini, farmaciji, ekologiji i drugim naukama.

U daljem tekstu, skup svih karakterističnih korena matrice $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ zovemo *spektar* i označavamo ga sa $\sigma(A)$, to jest,

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : det(\lambda I_n - A) = 0\}. \tag{5.1}$$

Uz oznake:

$$\Gamma_i(A) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - a_{i,i}| \leq r_i(A)\}\,, \quad i \in N,$$
$$\Gamma(A) := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i(A),$$

poznata Geršgorinova teorema iz rada [43], može biti formulisana na sledeći način (vidi [108], Teorema 1.1).

Teorema 5.1. (Geršgorin) *Za svaku kvadratnu matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i svaki karakterističan koren $\lambda \in \sigma(A)$ postoji indeks $k \in N$ takav da je*

$$|\lambda - a_{k,k}| \leq r_k(A). \tag{5.2}$$

Stoga je $\lambda \in \Gamma_k(A)$, odakle sledi da je $\lambda \in \Gamma(A)$. Kako ovo važi za svaki karakterističan koren λ, važi:

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma(A). \tag{5.3}$$

Dakle, kao što smo već napomenuli, lepota Geršgorinove teoreme leži u njenoj jednostavnosti. Naime, za proizvoljnu matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, lako se izračunavaju vrednosti $\{r_i(A)\}_{i \in N}$, koje predstavljaju poluprečnike (radijuse) n krugova čija unija sadrži čitav spektar (n karakterističnih korena) matrice A. Pri tome, raspored karakterističnih korena u pojedinačnim krugovima nije ravnomeran, već to varira od slučaja do slučaja. Međutim, Geršgorin je u svom radu [43] iz 1931. godine takođe naveo i tvrđenje koje pod određenim uslovima opisuje raspored karakterističnih korena matrice u Geršgorinovom skupu. Preduslov koji je pri tome potreban je da se Geršgorinov skup sastoji iz više disjunktnih delova. Na taj način, ova druga Geršgorinova teorema nam daje mogućnost da izolujemo karakteristične korene, ako je jedan od Geršgorinovih krugova disjunktan sa ostalima. U specijalnom slučaju, kada su svi krugovi međusobno disjunktni, dolazi se do zaključka da svaki od njih sadrži tačno jedan karakterističan koren, implicirajući, između ostalog, dijagonalizabilnost matrice.

Neka je $n \geq 2$ i $S \subseteq N$, tada sa $|S|$ označimo *kardinalni broj* skupa S, to jest, broj elemenata skupa S, a komplement skupa S označen je sa $\overline{S} := N \setminus S$. Za datu matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, skup $\Gamma_S(A) := \bigcup_{i \in S} \Gamma_i(A)$ predstavlja uniju krugova koja „odgovara" indeksima iz skupa S.

Teorema 5.2. (druga Geršgorinova teorema) *Ako za matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ i skup indeksa $0 \neq S \subsetneq N$, važi*

$$\Gamma_S(A) \bigcap \Gamma_{\overline{S}}(A) = \emptyset, \tag{5.4}$$

tada $\Gamma_S(A)$ sadrži tačno $|S|$ karakterističnih korena matrice A i, shodno tome, $\Gamma_{\overline{S}}(A)$ sadrži preostale karakteristične korene matrice A.

Geršgorinova teorema inspirisala je mnoga dalja istraživanja u oblasti lokalizacije karakterističnih korena, kako u prošlosti, tako i u savremenoj literaturi. Međutim, prva generalizacija Geršgorinove teoreme može se naći već u njegovom radu [43] iz 1931. godine. Ona je bazirana na invarijantnosti spektra matrice pri transformacijama sličnosti. Preciznije, Geršgorinova teorema se može primeniti i na matricu oblika $X^{-1}AX$, za proizvoljnu regularnu matricu X. Pri tome je posebno interesantan slučaj kada je X dijagonalna matrica.

Naime, za proizvoljan vektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T > 0$, definišimo odgovarajuću (regularnu) dijagonalnu matricu $X := \operatorname{diag}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Skup svih takvih pozitivnih dijagonalnih matrica označili smo sa $\mathbb{D}$.

Kako je matrica

$$X^{-1}AX = \left[\frac{a_{i,j}x_j}{x_i}\right]$$

slična sa A, sledi da je $\sigma(A) = \sigma(X^{-1}AX)$, tako da, ako želimo da lokalizujemo karakteristične korene matrice A, možemo primeniti Geršgorinovu teoremu na matricu $X^{-1}AX$. Međutim, ta matrica zavisi od n pozitivnih parametara, koji mogu biti odabrani proizvoljno i, samim tim, mogu uticati na oblik i veličinu lokalizacionog skupa.

Ako za dato $\mathbf{x} > 0$ označimo sa

$$r_i^{\mathbf{x}}(A) := r_i(X^{-1}AX) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \frac{|a_{i,j}| x_j}{x_i}, \quad i \in N, \tag{5.5}$$

i-tu uopštenu sumu po vrstama matrice A, i sa

$$\Gamma_i^X(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z - a_{i,i}| \leq r_i(X^{-1}AX) \right\}, \;\; i \in N,$$

$$\Gamma^X(A) := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i^X(A),$$

onda ćemo $\Gamma_i^X(A)$ zvati *i-ti uopšteni Geršgorinov krug* matrice A, a $\Gamma^X(A)$ *uopšteni Geršgorinov skup* matrice A.

Sledeće tvrđenje je direktna posledica Geršgorinove teoreme:

Posledica 5.3. *Za svaku kvadratnu matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \neq 2$, i pozitivnu dijagonalnu matricu $X \in \mathbb{D}$, važi*

$$\sigma(A) \subseteq \Gamma^X(A), \tag{5.6}$$

pa sledi da je

$$\sigma(A) \subseteq \mathrm{MGS}(A) := \bigcap_{X \in \mathbb{D}} \Gamma^X(A). \tag{5.7}$$

Presekom uopštenih Geršgorinovih skupova po svim mogućim izborima vektora $\mathbf{x}$ dobijamo takozvani *minimalni Geršgorinov skup* (MGS). Više informacija o minimalnom Geršgorinovom skupu može se naći u [108], [110]. Ovde ćemo samo kratko napomenuti da je jedan od osnovnih metoda za crtanje minimalnog Geršgorinovog skupa dat u radu [110] i bazira se na izračunavanju Peronovog korena esencijalno nenegativne matrice $-\mathcal{M}(A)$. Ova posebno interesantna osobina minimalnog Geršgorinovog skupa će nam omogućiti da konstruišemo odgovarajući lokalizacioni skup baziran na blokovskoj podeli, a koji se može numerički odrediti i prikazati u kompleksnoj ravni.

Još od prvih rezultata na temu dijagonalne dominacije početkom dvadesetog veka, pa sve do aktuelnih istraživanja u poslednjih nekoliko godina, uočeno je da, između ostalog, postoji tesna veza između rezultata o regularnosti matrica i rezultata u oblasti lokalizacije karakterističnih korena. Iako je sama ideja bila prisutna, implicitno, u mnogim ranijim radovima, tek u knjizi [108], ona je jasno formulisana kao ekvivalencija između tvrđenja o lokalizaciji karakterističnih korena i tvrđenja o regularnosti matrica.

Da bismo naglasili značaj ove ekvivalencije, navodimo sledeću teoremu koja je u [69] nazvana *Vargin princip ekvivalencije* i formulisana na sledeći način:

Teorema 5.4. (Vargin princip ekvivalencije) *Neka je $\mathbb{K}$ klasa kompleksnih kvadratnih matrica i neka je za proizvoljnu kvadratnu matricu A definisan skup kompleksnih brojeva $\Theta^{\mathbb{K}}(A)$ na sledeći način:*

$$\Theta^{\mathbb{K}}(A) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, zI - A \notin \mathbb{K}\}\,. \tag{5.8}$$

Tada su sledeća dva uslova ekvivalentna:

- *Sve matrice iz klase $\mathbb{K}$ su regularne.*
- *Za proizvoljnu kvadratnu matricu A važi $\sigma(A) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(A)$.*

Dokaz: Pretpostavimo da su sve matrice u klasi $\mathbb{K}$ regularne. Neka je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljna matrica i $\lambda \in \sigma(A)$ njen proizvoljan karakteristični koren. Tada je matrica $\lambda I - A$ singularna, pa, dakle, ne može pripadati klasi $\mathbb{K}$, tj. $\lambda I - A \notin \mathbb{K}$. Zbog toga je $\lambda \in \Theta^{\mathbb{K}}(A)$. Kako je λ proizvoljan karakteristični koren matrice A, sledi $\sigma(A) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(A)$.
Implikaciju u suprotnom smeru dokazujemo kontradikcijom. Neka za svaku matricu A važi $\sigma(A) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}(A)$. Pretpostavimo da postoji matrica $A \in \mathbb{K}$ koja je singularna. Tada je $0 \in \sigma(A)$ i shodno tome je $0 \in \Theta^{\mathbb{K}}(A)$. Međutim, ovo je ekvivalentno sa činjenicom da je $0 \cdot I - A = -A \notin \mathbb{K}$, što je kontradikcija. Prema tome, svaka matrica A iz klase $\mathbb{K}$ je regularna matrica. $\square$

U slučaju kada je $\mathbb{K}$ klasa *svih* regularnih matrica, tada se lako može pokazati, na osnovu postojanja Žordanove kanoničke forme, da za svaku matricu A važi $\Theta^{\mathbb{K}}(A) = \sigma(A)$. Sužavanjem klase $\mathbb{K}$, širimo skup $\Theta^{\mathbb{K}}(A)$, odnosno dobijamo lokalizacioni skup za spektar matrice.

Tačnije, ako je $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$, onda iz (5.8) sledi $\Theta^{\mathbb{K}_2}(A) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}_1}(A)$, što možemo razumeti kao određeni princip *monotonosti* kom se podvrgavaju lokalizacione oblasti nastale na osnovu dijagonalne dominacije.

U slučaju kad je $\mathbb{K}$ klasa SDD matrica, tada je $\Theta^{\mathbb{K}}(A) = \Gamma(A)$, odnosno odgovarajuća teorema o lokalizaciji karakterističnih korena je Geršgorinova teorema. To je motivacija da uvedemo sledeća dva termina:

- **Skup Geršgorinovog tipa** je skup $\Theta^{\mathbb{K}}(A)$, ako je klasa $\mathbb{K}$ potklasa generalizovano dijagonalno dominantnih, tj. (regularnih) $H-$matrica.

- **Teorema Geršgorinovog tipa** je teorema koja tvrdi da skup Geršgorinovog tipa sadrži spektar date matrice.

Između ostalog, u [69] je pokazano i da verzija druge Geršgorinove teoreme važi i za sve skupove Geršgorinovog tipa, što je nazvano *princip izolacije.*

Među mnogim uopštenjima klase SDD matrica nalaze se, kao što smo već naveli u Podsekciji 2.3.1, Ostrovski matrice, tj. matrice $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ za koje važi

$$|a_{i,i}||a_{j,j}| > r_i(A)r_j(A) \quad \text{za svako } i, j \in N,\ i \neq j. \tag{5.9}$$

Kako smo već utvrdili da Ostrovski matrice čine potklasu (regularnih) $H-$matrica, na osnovu njih može se formirati lokalizacioni skup Geršgorinovog tipa. Ako označimo sa $\mathbb{O}$ klasu Ostrovski matrica, tada je

$$\Theta^{\mathbb{O}}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{i,i}||z - a_{j,j}| \leq r_i(A)r_j(A),\ \text{za neko } i, j \in N,\ i \neq j\},$$

što je u literaturi poznato kao Brauerov lokalizacioni skup (konstruisan kao unija Brauer-Kazinijevih ovala) i uobičajeno se označava sa:

$$\mathcal{K}_{i,j}(A) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z - a_{i,i}||z - a_{j,j}| \leq r_i(A)r_j(A)\}\,,\ i, j \in N,\ i \neq j,$$

$$\mathcal{K}(A) := \bigcup_{i \in N} \bigcup_{j < i} \mathcal{K}_{i,j}(A).$$

U preostalom delu ovog poglavlja bavićemo se blok lokalizacijama karakterističnih korena matrice, koje nastaju upotrebom blok SDD, blok Ostrovski i blok $H-$matrica, dok se sličan postupak može sprovesti i na osnovu ostalih potklasa blok $H-$matrica, koristeći opšti pristup koji ćemo predložiti. Na kraju, dobijene lokalizacione oblasti (blok Geršgorinovi skupovi I i II tipa, blok Brauerovi skupovi I i II tipa i blok minimalni Geršgorinovi skupovi I i II tipa) ilustrovaćemo primerima nekoliko poznatih matrica koje se sreću u literaturi, a odnose se na problem karakterističnih korena.

5.2 Blok matrice I tipa

Uopštenje Geršgorinove teoreme i nekih teorema Geršgorinovog tipa na blok matrice dato je u knjizi [108] i odnosi se upravo na slučaj koji u ovoj disertaciji nazivamo *I tip blok uopštenja.* Deo tih rezultata navodimo u nastavku.

Za datu particiju $\pi = \{p_j\}_{j=0}^{\ell}$ i datu blok matricu $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ u odnosu na particiju π, definišemo skupove

$$\Gamma_I^{\pi}(A) := \bigcup_{i\in L} \Gamma_{I,i}^{\pi}(A), \tag{5.10}$$

$$\Gamma_{I,i}^{\pi}(A) := \{z \in \mathbb{C} : (\|(zI_i - A_{i,i})^{-1}\|_\infty)^{-1} \leq \sum_{j\in L\setminus\{i\}} \|A_{i,j}\|_\infty\}$$

gde I_i označava jediničnu matricu potprostora W_i, $i \in L$.

Primetimo da je, shodno oznaci (3.5), za $i \in L$, skup $\Gamma_{I,i}^{\pi}(A)$ dobro definisan kada $z \in \sigma(A_{i,i})$, jer je u tom slučaju

$$(\|(zI_i - A_{i,i})^{-1}\|_\infty)^{-1} = 0.$$

Skup $\Gamma_I^{\pi}(A)$ zovemo B_I^{π} *Geršgorinov skup* za matricu A.

Sledeća teorema, dokazana u [108], direktna je posledica činjenice da su $B_I^{\pi} SDD$ matrice regularne (Teorema 3.4).

Teorema 5.5. *Neka je data particija* $\pi = \{p_i\}_{i=0}^{\ell}$ *i blok matrica* $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ *u odnosu na particiju* π*. Ako je* $\lambda \in \sigma(A)$*, tada postoji* $i \in L$ *takav da je* $\lambda \in \Gamma_{I,i}^{\pi}(A)$*. Kako je ovo tačno za svako* $\lambda \in \sigma(A)$*, tada* $\sigma(A) \subseteq \Gamma_I^{\pi}(A)$*.*

Međutim, kao i u tačkastom slučaju, ovaj odnos je samo specijalan slučaj šireg konteksta odnosa između regularnih klasa matrica i lokalizacionih oblasti karakterističnih korena. Kao okvir za izgradnju poboljšanih oblasti lokalizacija na osnovu uopštenja $B_I^{\pi}SDD$ matrica, formulisaćemo i dokazati sledeću teoremu, koja do sada nije navedena u dostupnoj literaturi, a koju ćemo zvati B_I^{π} *Vargin princip ekvivalencije.* Tim povodom, podsetimo se notacije iz Definicije 3.14:

$A \in B_I^{\pi}\mathbb{K}$ ako i samo ako $\rangle A\langle^{\pi} \in \mathbb{K}$.

Teorema 5.6. *(*B_I^{π}**Vargin princip ekvivalencije***) Neka je* $\mathbb{K}$ *proizvoljna klasa kvadratnih matrica reda* ℓ*,* $A \in \mathbb{C}^{n,n}$*,* $n \geq \ell$*, proizvoljna matrica i* $\pi = \{p_i\}_{i=0}^{\ell}$ *particija skupa indeksa* N*. Definišimo skup kompleksnih brojeva* $\Theta_{\mathrm{B}_\mathrm{I}^{\pi}}^{\mathbb{K}}(A)$ *na sledeći način:*

$$\Theta_{\mathrm{B}_\mathrm{I}^{\pi}}^{\mathbb{K}}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \rangle zI - A\langle^{\pi} \notin \mathbb{K}\}. \tag{5.11}$$

Tada su sledeća dva tvrđenja ekvivalentna:

- *Sve matrice iz klase* $B_I^{\pi}\mathbb{K}$ *su regularne.*
- *Za proizvoljnu blok matricu* $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ *u odnosu na particiju* π *važi* $\sigma(A) \subseteq \Theta_{\mathrm{B}_\mathrm{I}^{\pi}}^{\mathbb{K}}(A)$*.*

Dokaz: Dovoljno je konstatovati da je

$$\Theta_{\mathrm{B}_\mathrm{I}^{\pi}}^{\mathbb{K}}(A) = \Theta^{B_I^{\pi}\mathbb{K}}(A),$$

pri čemu je $\Theta^{\mathbb{K}}(A)$ definisano sa (5.8). Tvrđenje teoreme direktno sledi na osnovu Teoreme 5.4, uzimajući klasu $B_I^{\pi}\mathbb{K}$ u ulozi klase $\mathbb{K}$. □

Lako je uočiti da se Teorema 5.5 može tretirati kao tvrđenje ekvivalentno tvrđenju da su sve $B_I^{\pi}SDD$ matrice regularne. Stoga, po uzoru na tačkasti slučaj, možemo uvesti pojmove:

- **Skup B_I^{π}Geršgorinovog tipa** je skup $\Theta_{\mathrm{B}_\mathrm{I}^{\pi}}^{\mathbb{K}}(A)$, ako je klasa $\mathbb{K}$ potklasa generalizovano dijagonalno dominantnih, tj. (regularnih) $H-$matrica.

- **Teorema B_I^πGeršgorinovog tipa** je teorema koja tvrdi da skup B_I^πGeršgorinovog tipa sadrži spektar date matrice.

Kao i u tačkastom slučaju, ako je $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$, tada iz (5.11) sledi $\Theta_{\mathrm{B}_{\mathrm{I}}^\pi}^{\mathbb{K}_2}(A) \subseteq \Theta_{\mathrm{B}_{\mathrm{I}}^\pi}^{\mathbb{K}_1}(A)$, za proizvoljnu blok matricu A u odnosu na particiju π. Dakle, princip *monotonosti* važi za skupove B_I^πGeršgorinovog tipa.

Kao što smo najavili, primenićemo sada Teoremu 5.6 na klase Ostrovski matrica i $H-$matrica (u ulozi klase $\mathbb{K}$), kako bismo formirali odgovarajuće lokalizacione skupove B_I^πGeršgorinovog tipa.

Za proizvoljnu blok matricu $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ u odnosu na particiju π, skup $\Theta_{\mathrm{B}_{\mathrm{I}}^\pi}^{\mathbb{O}}(A)$ nazivamo *B_I^πBrauerov skup* i u daljem tekstu označavamo ga sa $\mathcal{K}_I^\pi(A)$. Lako se može utvrditi da ovaj lokalizacioni skup ima sledeću formu:

$$\mathcal{K}_I^\pi(A) = \bigcup_{i\in L}\bigcup_{j<i}\mathcal{K}_{I,i,j}^\pi(A)$$

gde $z \in \mathcal{K}_{I,i,j}^\pi(A)$, $i,j \in L$, $i \neq j$, ako i samo ako

$$\big(\|(zI_i - A_{i,i})^{-1}\|_\infty\big)^{-1}\big(\|(zI_j - A_{j,j})^{-1}\|_\infty\big)^{-1} \leq r_i\big(\rangle A\langle^\pi\big) r_j\big(\rangle A\langle^\pi\big).$$

Kao i u slučaju B_I^πGeršgorinovog skupa, tako su i ovde skupovi $\mathcal{K}_{I,i,j}^\pi(A)$ dobro definisani.

Kako znamo da su Ostrovski matrice nadklasa SDD matrica, na osnovu principa monotonosti, sledi da za svaku particiju π i svaku matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ važi $\mathcal{K}_I^\pi(A) \subseteq \Gamma_I^\pi(A)$, tj. B_I^πBrauerov skup predstavlja bolju lokalizacionu oblast od B_I^πGeršgorinovog skupa.

Prateći ovaj princip monotonosti, lako zaključujemo da od svih skupova B_I^πGeršgorinovog tipa, najbolju oblast lokalizacije dobijamo primenom Teoreme 5.6 na celu klasu $H-$matrica (tj. za izbor $\mathbb{K} = \mathbb{H}$). Time, za datu blok matricu A u odnosu na particiju π, dobijamo skup $\Theta_{\mathrm{B}_{\mathrm{I}}^\pi}^{\mathbb{H}}(A)$ koji nazivamo *B_I^πMinimalni Geršgorinov skup* i u daljem tekstu označavamo sa $\mathrm{MGS}_I^\pi(A)$. Ovaj skup, iako pruža dobre lokalizacije karakterističnih korena, do sada nije posebno razmatran u literaturi, prevashodno zbog nedostataka efikasnih numeričkih metoda za njegovo određivanje. Međutim, pomoću B_I^πVarginog principa ekvivalencije, koji smo ustanovili u ovoj disertaciji, možemo prevazići pomenute nedostatke, primenjujući pristup za izračunavanje minimalnog Geršgorinovog skupa u tačkastom slučaju, koji je predložen u [110].

Ključni argument predstavlja sledeća teorema o karakterizaciji B_I^πMinimalnog Geršgorinovog skupa.

Teorema 5.7. *Za proizvoljnu particiju π i proizvoljnu blok matricu $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ u odnosu na particiju π,*

$$\mathrm{MGS}_I^\pi(A) = \left\{z \in \mathbb{C} : \mu\big(\rangle zI - A\langle^\pi\big) \leq 0\right\}, \tag{5.12}$$

gde je, za $T \in \mathbb{C}^{\ell,\ell}$, $\mu(T) = \min\{\Re(\lambda) : \lambda \in \sigma(T)\}$ minimalni realni deo karakterističnih korena matrice T. Pri tome, za svako $z \in \mathbb{C}$, $\mu\big(\rangle zI - A\langle^\pi\big)$ pripada spektru matrice $\rangle zI - A\langle^\pi$.

Dokaz: Na osnovu B_I^πVarginog principa ekvivalencije, $z \in \mathrm{MGS}_I^\pi(A)$ ako i samo ako $\rangle zI - A\langle^\pi \notin \mathbb{H}$. Međutim, kako je $\rangle zI - A\langle^\pi$ $L-$oblika, to je ekvivalentno sa činjenicom da $\rangle zI - A\langle^\pi$ nije regularna $M-$matrica, što je, prema [7], ekvivalentno sa činjenicom da $\rangle zI - A\langle^\pi$ ima bar jedan karakterističan koren čiji je realni deo nepozitivan, tj., $\mu\big(\rangle zI - A\langle^\pi\big) \leq 0$. Pored toga, za svako $z \in \mathbb{C}$ postoji realan broj $\alpha > 0$ takav da je $\alpha I - \rangle zI - A\langle^\pi \geq 0$. Stoga je $\rho\big(\alpha I - \rangle zI - A\langle^\pi\big)$, prema Peron-Frobenijusovoj teoremi za nenegativne matrice, realni karakteristični koren matrice $\alpha I - \rangle zI - A\langle^\pi$, što implicira da $\mu\big(\rangle zI - A\langle^\pi\big) = \alpha - \rho\big(\alpha I - \rangle zI - A\langle^\pi\big)$ pripada spektru matrice $\rangle zI - A\langle^\pi$. $\square$

Ova karakterizacija je ključna pri numeričkom određivanju B_I^πMinimalnog Geršgorinovog skupa, jer se za svako $z \in \mathbb{C}$ veličina $\mu\big(\rangle zI - A\langle^\pi\big)$ može numerički dobro aproksimirati. Pored toga, prednost nalaženja B_I^πMinimalnog Geršgorinovog skupa je i u tome što se, za razliku od tačkastog slučaja, ekstremni (najlevlji) karakteristični koreni izračunavaju za matrice $\rangle zI - A\langle^\pi$, $z \in \mathbb{C}$, koje su dimenzije $\ell \times \ell$, koja je, u principu, mnogo manja od dimenzije n početne matrice. Na taj način, numerički najskuplji deo algoritma predloženog u [110] je značajno pojednostavljen. U primerima koji slede na kraju ovog poglavlja, za crtanje B_I^πMinimalnog Geršgorinovog skupa koristili smo upravo ovaj pristup, izračunavajući vrednosti $\mu\big(\rangle zI - A\langle^{\pi}\big)$ u čvornim tačkama na diskretnoj mreži zadate pravougaone oblasti u kompleksnoj ravni.

5.3 Blok matrice II tipa

Za datu particiju $\pi = \{p_j\}_{j=0}^{\ell}$ i datu blok matricu $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ u odnosu na particiju π, definišemo skupove

$$\Gamma_{II}^{\pi}(A) := \bigcup_{i\in L} \Gamma_{II,i}^{\pi}(A) \tag{5.13}$$

$$\Gamma_{II,i}^{\pi}(A) := \{z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A_{i,i}) : 1 \leq \sum_{j\in L\setminus\{i\}} \|(zI_j - A_{i,i})^{-1}A_{i,j}\|_\infty\} \bigcup \sigma(A_{i,i}),$$

gde I_i označava jediničnu matricu potprostora W_i, za $i \in L$.

Skup $\Gamma_{II}^{\pi}(A)$ zovemo B_{II}^{π}*Geršgorinov skup* za matricu A.

U [108] dokazana je i sledeća teorema koja je direktna posledica činjenice da su $B_{II}^{\pi}SDD$ matrice regularne (Teorema 3.4).

Teorema 5.8. *Neka je data particija $\pi = \{p_i\}_{i=0}^{\ell}$ i blok matrica $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ u odnosu na particiju π. Ako je $\lambda \in \sigma(A)$, tada postoji $i \in L$ takav da je $\lambda \in \Gamma_{II,i}^{\pi}(A)$. Kako je ovo tačno za svako $\lambda \in \sigma(A)$, tada $\sigma(A) \subseteq \Gamma_{II}^{\pi}(A)$.*

Kako smo u Podsekciji 3.1.3 utvrdili da je svaka $B_I^{\pi}SDD$ matrica ujedno i $B_{II}^{\pi}SDD$, jednostavno se izvodi da je $\Gamma_{II}^{\pi}(A) \subseteq \Gamma_I^{\pi}(A)$, za svaku particiju π i svaku blok matricu A u odnosu na particiju π. Međutim, za efikasnu numeričku konstrukciju B_{II}^{π}Geršgorinovog skupa potrebno je značajno više izračunavanja nego za konstrukciju B_I^{π}Geršgorinovog skupa, jer, pored invertovanja matrica $zI_i - A_{i,i}$ za svako fiksirano $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(A_{i,i})$, $\Gamma_{II}^{\pi}(A)$ zahteva računanje sume

$$\sum_{j\in L\setminus\{i\}} \|(zI_i - A_{i,i})^{-1}A_{i,j}\|_\infty,$$

dok je u slučaju skupa $\Gamma_I^{\pi}(A)$, suma

$\sum_{j\in L\setminus\{i\}} \|A_{i,j}\|_\infty$ invarijantna u odnosu na z.

Pored toga, za matrice kod kojih je invertovanje trivijalno izvršiti, na primer one kod kojih su svi dijagonalni blokovi skalarni umnošci jedinične matrice, B^π_{II}Geršgorinovi krugovi $\Gamma^\pi_{II,i}(A)$, a time i B^π_IGeršgorinovi krugovi $\Gamma^\pi_{I,i}(A)$, nažalost, ne daju bolju lokalizaciju od originalne Geršgorinove teoreme.

Upravo zbog navedenih komentara, mogućnost primene blok $H-$matrica na lokalizaciju karakterističnih korena ostaje za neka dalja istraživanja. Ovde ćemo se zadržati samo na formulaciji principa i lokalizacionih oblasti, kao i u prethodnoj sekciji, koje ćemo u poslednjoj sekciji ovog poglavlja ilustrovati, dok složenija pitanja o numeričkim metodama za njihovo kostruisanje ostaju otvorena.

Pre nego što formulišemo B^π_{II} *Vargin princip ekvivalencije,* čiji se dokaz izvodi analogno dokazu Teoreme 5.6, podsetimo se oznake iz Definicije 3.15:
$A \in B^\pi_{II}\mathbb{K}$ ako i samo ako $\langle A\rangle^\pi \in \mathbb{K}$.

Teorema 5.9. *(B^π_{II}**Vargin princip ekvivalencije**) Neka je $\mathbb{K}$ proizvoljna klasa kvadratnih matrica reda ℓ , $A \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq \ell$, proizvoljna matrica i $\pi = \{p_i\}_{i=0}^{\ell}$ proizvoljna particija. Definišimo skup kompleksnih brojeva $\Theta^{\mathbb{K}}_{\mathrm{B}^\pi_{\mathrm{II}}}(A)$ na sledeći način:*

$$\Theta^{\mathbb{K}}_{\mathrm{B}^\pi_{\mathrm{II}}}(A) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \langle zI - A\rangle^\pi \;\notin \mathbb{K}\}\,. \tag{5.14}$$

Tada su sledeća dva tvrđenja ekvivalentna:

- *Sve matrice iz klase $B^\pi_{II}\mathbb{K}$ su regularne.*
- *Za proizvoljnu blok matricu $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ u odnosu na particiju π važi $\sigma(A) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}}_{\mathrm{B}^\pi_{\mathrm{II}}}(A)$.*

Kao i u prethodnoj sekciji, uvodimo pojmove:

- **Skup B^π_{II}Geršgorinovog tipa** je skup $\Theta^{\mathbb{K}}_{\mathrm{B}^\pi_{\mathrm{II}}}(A)$, ako je klasa $\mathbb{K}$ potklasa generalizovano dijagonalno dominantnih, tj. (regularnih) $H-$matrica.

- **Teorema B_{II}^{π}Geršgorinovog tipa** je teorema koja tvrdi da skup B_{II}^{π}Geršgorinovog tipa sadrži spektar date matrice.

Kao i ranije, važi princip *monotonosti*, tj. ako je $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$, tada iz (5.14) sledi $\Theta_{\mathrm{B}_{\mathrm{II}}^{\pi}}^{\mathbb{K}_2}(A) \subseteq \Theta_{\mathrm{B}_{\mathrm{II}}^{\pi}}^{\mathbb{K}_1}(A)$, za proizvoljnu blok matricu A u odnosu na particiju π.

Dalje, formiramo B_{II}^{π}Brauerov skup i B_{II}^{π}Minimalni Geršgorinov skup.

Za proizvoljnu blok matricu $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ u odnosu na particiju π, skup $\Theta_{\mathrm{B}_{\mathrm{II}}^{\pi}}^{\mathbb{O}}(A)$ nazivamo B_{II}^{π}*Brauerov skup* i u daljem tekstu označavamo sa $\mathcal{K}_{II}^{\pi}(A)$. Pri tome,

$$\mathcal{K}_{II}^{\pi}(A) := \bigcup_{i\in L}\bigcup_{j<i}\mathcal{K}_{II,i,j}^{\pi}(A)$$

gde $z \in \mathcal{K}_{II,i,j}^{\pi}(A)$, $i, j \in L$, $i \neq j$, ako i samo ako je

- $z \in \sigma(A_{i,i})$ ili
- $1 \leq \sum\limits_{k\in L\setminus\{i\}} \|(zI_i - A_{i,i})^{-1}A_{i,k}\|_\infty \sum\limits_{k\in L\setminus\{j\}} \|(zI_i - A_{j,j})^{-1}A_{j,k}\|_\infty,$
  za $z \notin \sigma(A_{i,i})$.

Pored toga, očigledno, $\mathcal{K}_{II}^{\pi}(A) \subseteq \Gamma_{II}^{\pi}(A)$ važi za svaku particiju π i svaku blok matricu $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ u odnosu na particiju π.

Ponovo, od svih skupova B_{II}^{π}Geršgorinovog tipa najbolju oblast lokalizacije dobijamo primenom Teoreme 5.9 na celu klasu $H-$matrica, čime se dobija B_{II}^{π}*Minimalni Geršgorinov skup,* koji za datu blok matricu A u odnosu na particiju π, označavamo sa $\mathrm{MGS}_{II}^{\pi}(A)$. Kao i u prethodnoj sekciji, za numeričko određivanje skupa MGS_{II}^{π} koristićemo sledeću teoremu, čiji je dokaz analogan dokazu Teoreme 5.7, jer i pridružena matrica II tipa takođe ima $L-$oblik.

Teorema 5.10. *Za proizvoljnu particiju π i proizvoljnu blok matricu $A = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}$ u odnosu na particiju π,*

$$\mathrm{MGS}_{II}^{\pi}(A) = \left\{z \in \mathbb{C} : \mu\big(\langle zI - A\rangle^{\pi}\big) \leq 0\right\}. \tag{5.15}$$

Pri tome, za svako $z \in \mathbb{C}$, $\mu\big(\langle zI - A\rangle^{\pi}\big)$ pripada spektru matrice $\langle zI - A\rangle^{\pi}$.

Kao i u slučaju B^{π}_{II}Geršgorinovog skupa, numeričko određivanje skupova $\mathcal{K}^{\pi}_{II}(A)$ i $\mathrm{MGS}^{\pi}_{II}(A)$ je zahtevnije od određivanja skupova $\mathcal{K}^{\pi}_{I}(A)$ i $\mathrm{MGS}^{\pi}_{I}(A)$, respektivno.

Utvrđeni odnosi između potklasa $H-$matrica iz prethodnih sekcija imaju za posledicu činjenicu da za proizvoljnu particiju π i proizvoljnu blok matricu A u odnosu na particiju π, važi:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{MGS}^{\pi}_{II}(A) & \subseteq & \mathcal{K}^{\pi}_{II}(A) & \subseteq & \Gamma^{\pi}_{II}(A) \\ \cap\!\!| & & \cap\!\!| & & \cap\!\!| \\ \mathrm{MGS}^{\pi}_{I}(A) & \subseteq & \mathcal{K}^{\pi}_{I}(A) & \subseteq & \Gamma^{\pi}_{I}(A). \end{array}$$

Pored toga, u tačkastom slučaju takođe važi $\mathrm{MGS}(A) \subseteq \mathcal{K}(A) \subseteq \Gamma(A)$, za svaku matricu A. Međutim, lokalizacije dobijene blokovskim pristupom stoje u opštem odnosu sa originalnim lokalizacijama (dobijenim tačkastim pristupom).

5.4 Primeri lokalizacionih oblasti

Primer 5.11.

Počećemo sa jednostavnim primerom malih dimenzija. Neka je matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ razbijena particijom $\pi = \{0, 2, 4\}$ na sledeći način:

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & i & 0 \\ -1 & 3 & 0 & -i \\ \hline i & 0 & 5 & -1 \\ 0 & -i & -1 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{1,1} & A_{1,2} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} \end{array}\right]. \qquad (5.16)$$

Spektar ove matrice i njenih dijagonalnih blokova je:

$$\sigma(A) = \{2.2679, 4+i, 4-i, 5.7321\},\ \sigma(A_{1,1}) = \{2, 4\} \ \text{ i } \ \sigma(A_{2,2}) = \{4, 6\}.$$

Karakteristični koreni su zaokruženi na prve četiri decimale. Očigledno je

$$(zI_1 - A_{1,1})^{-1} = \frac{1}{(z-2)(z-4)} \begin{bmatrix} z-3 & -1 \\ -1 & z-3 \end{bmatrix},$$
$$(zI_2 - A_{2,2})^{-1} = \frac{1}{(z-4)(z-6)} \begin{bmatrix} z-5 & -1 \\ -1 & z-5 \end{bmatrix},$$

za svako $z \notin \{2,4\}$ u prvom slučaju i $z \notin \{4,6\}$ u drugom slučaju. Dakle,

$$(\|(zI_1 - A_{1,1})^{-1}\|_\infty)^{-1} = \frac{|z-2| \cdot |z-4|}{1+|z-3|}, \tag{5.17}$$

$$(\|(zI_2 - A_{2,2})^{-1}\|_\infty)^{-1} = \frac{|z-4| \cdot |z-6|}{1+|z-5|}, \tag{5.18}$$

pa sledi

$$\begin{cases} \Gamma^{\pi}_{I,1}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| \cdot |z-4| \leq |z-3| + 1\}, \\ \Gamma^{\pi}_{I,2}(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z-4| \cdot |z-6| \leq |z-5| + 1\}. \end{cases} \tag{5.19}$$

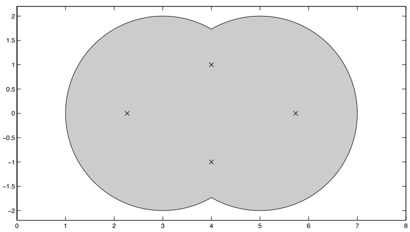
Stoga je $\Gamma^{\pi}_{I}(A) = \{|z-2| \cdot |z-4| \leq |z-3| + 1\} \cup \{|z-4| \cdot |z-6| \leq |z-5| + 1\}$.

Na sličan način se dobija da je u ovom slučaju $\Gamma^{\pi}_{I}(A) = \Gamma^{\pi}_{II}(A)$, što je i prikazano na Slici 5.1(b), dok je

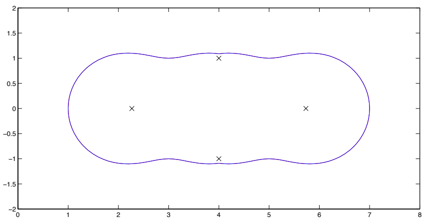
$$\mathcal{K}^{\pi}_{I}(A) = \mathcal{K}^{\pi}_{II}(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} \, : \, \frac{|z-2| \cdot |z-4|}{1+|z-3|} \cdot \frac{|z-4| \cdot |z-6|}{1+|z-5|} \geq 1 \right\}$$

prikazano na Slici 5.1(d). Radi poređenja, originalni Geršgorinov skup $\Gamma(A)$ je prikazan na Slici 5.1(a), a originalni Brauerov skup $\mathcal{K}(A)$ na Slici 5.1(c).

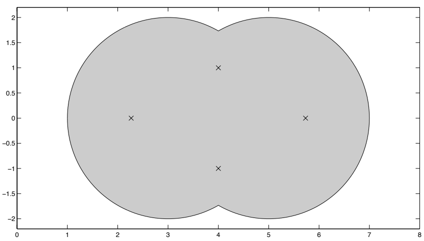
Kako je za matrice 2×2 minimalni Geršgorinov skup jednak Brauerovom skupu, tada je i $\mathrm{MGS}^{\pi}_{I}(A) = \mathrm{MGS}^{\pi}_{II}(A) = \mathcal{K}^{\pi}_{I}(A)$, što se može uočiti na Slici 5.1(f). Ponovo, radi poređenja, originalni minimalni Geršgorinov skup $\mathrm{MGS}(A)$ je prikazan na Slici 5.1(e).



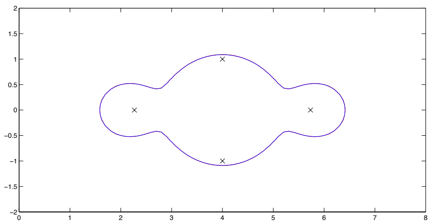
(a) Geršgorinov skup



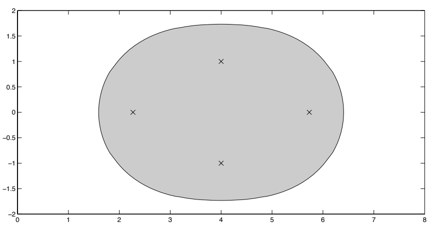
(b) B_I^π i B_{II}^π Geršgorinovi skupovi



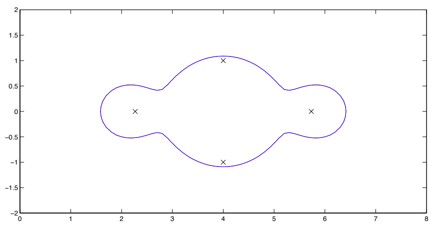
(c) Brauerov skup



(d) B_I^π i B_{II}^π Brauerovi skupovi



(e) Minimalan Geršgorinov skup



(f) B_I^π i B_{II}^π Minimalni Geršgorinovi skupovi

Slika 5.1: Lokalizacione oblasti za matricu A (5.16)

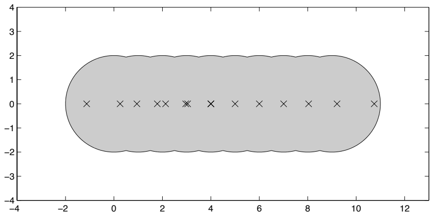
Primer 5.12. *Posmatrajmo sledeću matricu:*

$$W = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}. \tag{5.20}$$

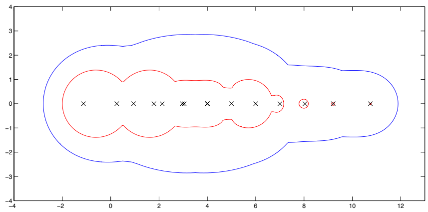
U literaturi ova tridijagonalna matrica je poznata kao Vilkinsonova matrica reda $n = 21$ i javlja se kao karakterističan primer u oblastima numeričke linearne algebre i procesiranja signala. Uzimajući particiju $\pi = \{0, 10, 12, 16, 21\}$, na Slici 5.2 prikazani su lokalizacioni skupovi razmatrani u ovom poglavlju. Sa leve strane (Slike 5.2(a), 5.2(c) i 5.2(e)) date su tačkaste lokalizacione oblasti $\Gamma(W)$, $\mathcal{K}(W)$ i $\mathrm{MGS}(W)$, redom, dok su sa desne strane date B_I^π i B_{II}^π lokalizacione oblasti i to $\Gamma_I^\pi(W)$ i $\Gamma_{II}^\pi(W)$ na Slici 5.2(b), $\mathcal{K}_I^\pi(W)$ i $\mathcal{K}_{II}^\pi(W)$ na Slici 5.2(d) i $\mathrm{MGS}_I^\pi(W)$ i $\mathrm{MGS}_{II}^\pi(W)$ na Slici 5.2(f). Pri tome su lokalizacione oblasti B_I^π prikazane plavom bojom, a lokalizacione oblasti B_{II}^π crvenom bojom.

Primer 5.13. *Posmatrajmo Lotkinovu matricu reda n=100, koju ćemo podeliti na $\ell = 10$ blokova jednakih dimenzija. Lotkinova matrica se dobija od Hilbertove matrice zamenom vrednosti u prvoj vrsti tako da nove vrednosti iznose svuda 1. Ona je nesimetrična, loše uslovljena i ima veliki broj malih karakterističnih korena.*

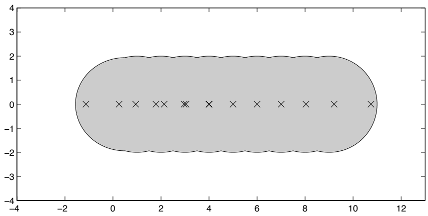
Dakle, neka je particija $\pi = \{0, 10, 20, \ldots, 100\}$ i



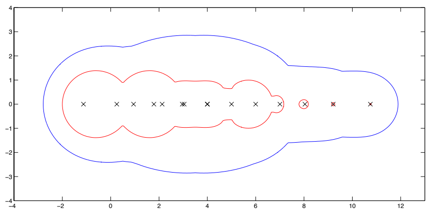
(a) Geršgorinov skup



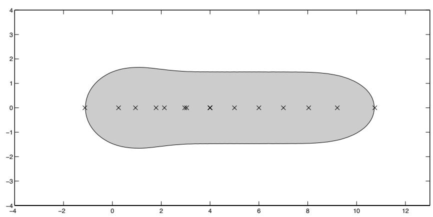
(b) B_I^π i B_{II}^π Geršgorinovi skupovi



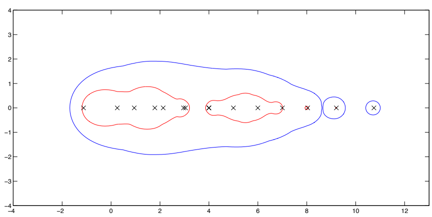
(c) Brauerov skup



(d) B_I^π i B_{II}^π Brauerovi skupovi



(e) Minimalan Geršgorinov skup



(f) B_I^π i B_{II}^π Minimalni Geršgorinovi skupovi

Slika 5.2: Lokalizacione oblasti za Vilkinsonovu matricu W (5.20)

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{100} & \frac{1}{101} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{101} & \frac{1}{102} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{99} & \frac{1}{100} & \frac{1}{101} & \cdots & \frac{1}{197} & \frac{1}{198} \\ \frac{1}{100} & \frac{1}{101} & \frac{1}{102} & \cdots & \frac{1}{198} & \frac{1}{199} \end{bmatrix}. \tag{5.21}$$

Kao i ranije, na Slici 5.3 prikazani su lokalizacioni skupovi razmatrani u ovom poglavlju. Sa leve strane, Slike 5.3(a), 5.3(c) i 5.3(e) predstavljaju tačkaste lokalizacione oblasti $\Gamma(T)$, $\mathcal{K}(T)$ i $\mathrm{MGS}(T)$, redom. Pri tome, primetimo da je $\Gamma(T)$ približno krug poluprečnika 99, dok je $\mathcal{K}(T)$ približno krug poluprečnika 20, a $\mathrm{MGS}(T)$ približno krug poluprečnika 3 i sadrži najveći karakteristični koren na svom rubu. Slične odnose možemo primetiti i za B_I^π i B_{II}^π lokalizacione oblasti koje su prikazane na Slici 5.3 sa desne strane, i to $\Gamma_I^\pi(T)$ i $\Gamma_{II}^\pi(T)$ na Slici 5.3(b), $\mathcal{K}_I^\pi(T)$ i $\mathcal{K}_{II}^\pi(T)$ na Slici 5.3(d) i $\mathrm{MGS}_I^\pi(T)$ i $\mathrm{MGS}_{II}^\pi(T)$ na Slici 5.3(f), gde su B_I^π lokalizacione oblasti prikazane plavom bojom, a B_{II}^π lokalizacione oblasti crvenom bojom. Pri tome, primetimo da ovaj primer, zajedno sa prethodna dva, ilustruje činjenicu da se tačkaste i blok lokalizacione oblasti ne mogu uporediti u opštem smislu, već da njihov odnos varira od slučaja do slučaja.

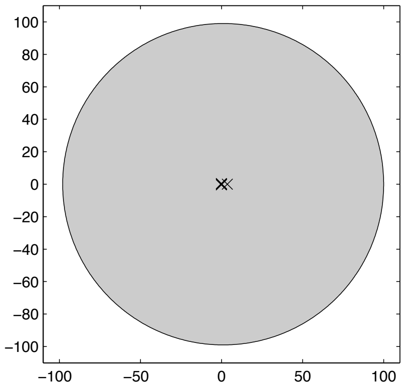
Primer 5.14. *Kao poslednji primer, posmatrajmo Poasonovu matricu reda $n = 100$, koja se dobija diskretizacijom Poasonove parcijalne diferencijalne jednačine i ima veliku primenu u elektrostatici, mehanici i teorijskoj fizici. Poasonova matrica je blok tridijagonalna matrica*

$$P = \begin{bmatrix} D & -I & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -I & D & -I & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -I & D & -I \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -I & D \end{bmatrix}_{10\times 10}, \tag{5.22}$$

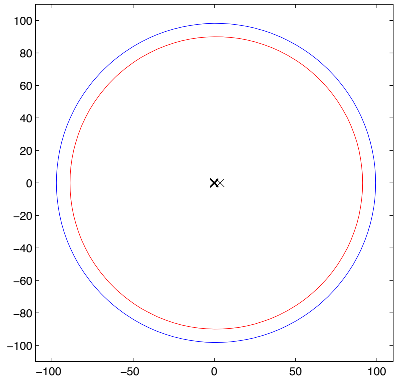
gde je

$$D = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{10\times 10}.$$

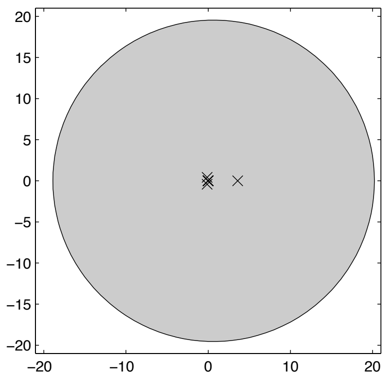
Jasno, prirodna podela na blokove ove matrice je podela particijom $\pi = \{0, 10, 20, \ldots, 100\}$. Kao i u prethodnim primerima, Slika 5.4 prikazuje lokalizacione oblasti razmatrane u ovom poglavlju. Primetimo da se, poput prvog primera, B_I^π i B_{II}^π lokalizacije podudaraju, dok se blokovskim pristupom u sva tri slučaja dobija određeno poboljšanje lokalizacione oblasti u odnosu na tačakasti slučaj. Ovim primerom ilustrovana je situacija da ni u tačkastom ni u blok smislu upotreba širih klasa matrica od SDD klase ne vodi značajnim poboljšanjima lokalizacionih oblasti.



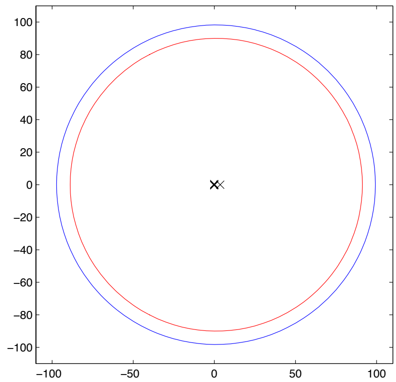
(a) Geršgorinov skup



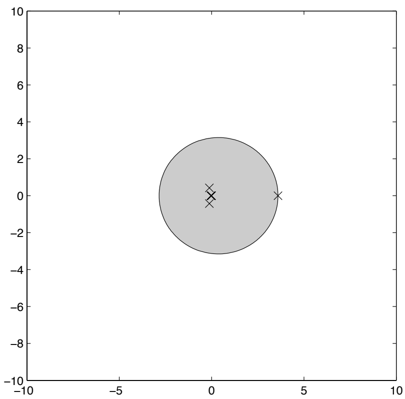
(b) B_I^π i B_{II}^π Geršgorinovi skupovi



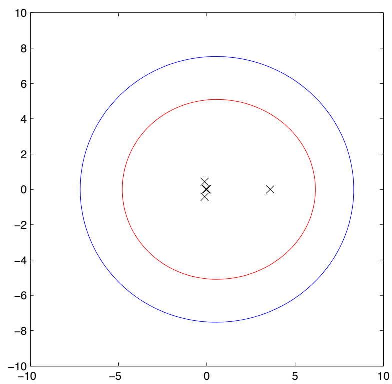
(c) Brauerov skup



(d) B_I^π i B_{II}^π Brauerovi skupovi

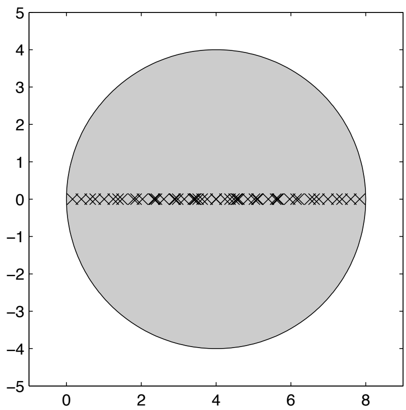


(e) Minimalan Geršgorinov skup

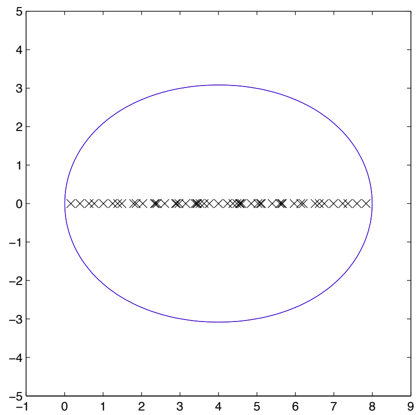


(f) B_I^π i B_{II}^π Minimalni Geršgorinovi skupovi

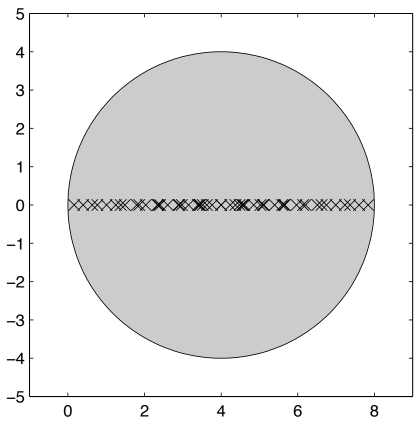
Slika 5.3: Lokalizacione oblasti za Lotkinovu matricu T (5.21)



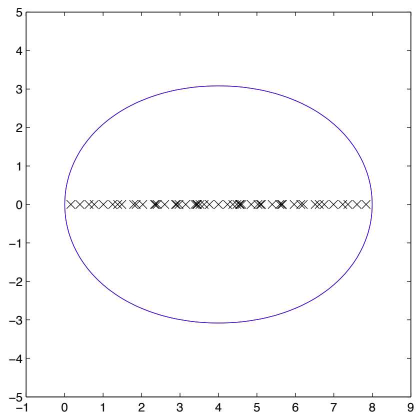
(a) Geršgorinov skup



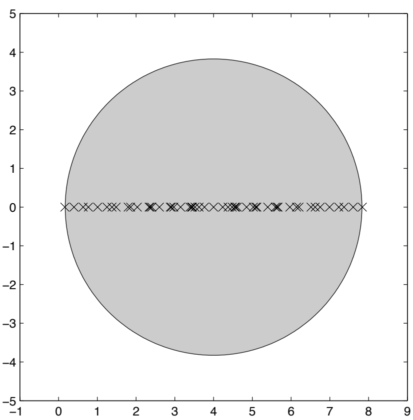
(b) B_I^π i B_{II}^πGeršgorinovi skupovi



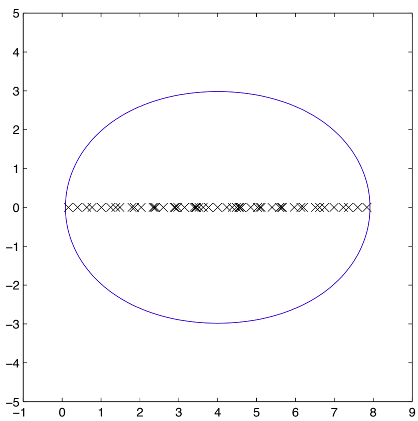
(c) Brauerov skup



(d) B_I^π i B_{II}^π Brauerovi skupovi



(e) Minimalan Geršgorinov skup



(f) B_I^π i B_{II}^π Minimalni Geršgorinovi skupovi

Slika 5.4: Lokalizacione oblasti za Poasonovu matricu P (5.22)

6

Primena: Ocena spektralnog radijusa

U mnogim primenama, kao što su ispitivanje konvergencije iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina ili, na primer, ispitivanje stabilnosti dinamičkih sistema, veoma je korisno ukoliko postoji alat za ocenu spektralnog radijusa (vidi [70]). Koncept generalizovane dijagonalne dominacije može i u ovoj oblasti da pomogne, s obzirom da je neraskidivo povezan sa konceptom lokalizacije karakterističnih korena teoremama Geršgorinovog tipa.

Kao i u ranijim poglavljima, osnovnu ideju prezentovaćemo u *tačkastom* slučaju, a zatim prokomentarisati mogućnost generalizacije na blok slučaj.

6.1 Tačkast slučaj

Kao što je pokazano u radu [70], svaka potklasa $H-$matrica koja je bila predmet razmatranja u ovoj disertaciji generiše jednu ocenu spektralnog radijusa proizvoljne matrice na sledeći način:

Neka je $\mathbb{K}$ neka od potklasa $H-$matrica definisanih u Sekciji 2.3 i $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ proizvoljna matrica. Definišemo veličinu

$$\rho^{\mathbb{K}}(A) := \sup\left\{|z| \,:\, zI - A \notin \mathbb{K},\ z \in \mathbb{C}\right\}, \tag{6.1}$$

koju zovemo *ocena spektralnog radijusa matrice A generisana klasom $\mathbb{K}$*.

Iz načina definisanja veličine $\rho^{\mathbb{K}}(A)$ sledi da za proizvoljnu matricu $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ važi
$$\rho(A) \leq \rho^{\mathbb{K}}(A).$$
Naime, ako je λ proizvoljan karakteristični koren matrice A, tada važi $\lambda I - A \notin \mathbb{K}$, pošto su sve matrice iz klase $\mathbb{K}$ regularne. Dakle, $|\lambda| \leq \rho^{\mathbb{K}}(A)$.

Osim toga, kako svaka $H-$matrica, pa time i svaka matrica iz bilo koje njene potklase ima sve dijagonalne elemente različite od 0, zaključujemo da za svaku matricu $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i svaku potklasu $\mathbb{K}$ koja se spominje u ovoj disertaciji, važi

$$\max_{i \in N} |a_{i,i}| \leq \rho^{\mathbb{K}}(A).$$

U slučaju kada je klasa $\mathbb{K}$ klasa SDD matrica, ocena $\rho^{\mathbb{K}}(A)$ svodi se na poznatu ocenu spektralnog radijusa pomoću norme beskonačno:

$$\rho(A) \leq \rho^{\mathbb{K}}(A) = \|A\|_\infty,$$

koja važi za sve matrice $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$.

Kako bismo ilustrovali način na koji se mogu izvoditi ocene spektralnog radijusa proizvoljne matrice, u ulozi klase $\mathbb{K}$ posmatraćemo klasu $\alpha 1$ matrica. Podsetimo se da matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ pripada klasi $\alpha 1$ ako i samo ako postoji parametar $\alpha \in [0, 1]$, takav da je

$$|a_{i,i}| > \alpha r_i(A) + (1 - \alpha)c_i(A) \text{ za svako } i \in N,$$

gde je $c_i(A) := r_i(A^\top) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{j,i}|$ za svako $i \in N$.

U nastavku ćemo objasniti kako možemo eksplicitno izraziti veličinu

$$\rho^{\alpha 1}(A) := \sup\{|z| : z \in \mathbb{C}, \forall \alpha \in [0, 1], \exists i \in N, \tag{6.2}$$
$$|z - a_{i,i}| \leq \alpha r_i(A) + (1 - \alpha)c_i(A)\}.$$

Neka je data (proizvoljna) matrica $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ i neka je za svako $\alpha \in [0, 1]$ veličina $w(\alpha)$ definisana sa

$$w(\alpha) := \max_{i \in N} \{|a_{i,i}| + \alpha r_i(A) + (1 - \alpha)c_i(A)\}.$$

Tada je za svako $i \in N$

$$w(\alpha) \geq |a_{i,i}| + \alpha r_i(A) + (1-\alpha)c_i(A),$$

a postoji indeks k takav da je

$$w(\alpha) = |a_{k,k}| + \alpha r_k(A) + (1-\alpha)c_k(A).$$

Neka je $\eta(\alpha) = w(\alpha)e^{i \arg a_{k,k}}$. Očigledno je tada za svako $i \in N$

$$|\eta(\alpha) - a_{i,i}| \geq \alpha r_i(A) + (1-\alpha)c_i(A),$$

a za indeks k važi

$$|\eta(\alpha) - a_{k,k}| = w(\alpha) - |a_{k,k}| = \alpha r_k(A) + (1-\alpha)c_k(A).$$

Dakle, za svako $\alpha \in [0,1]$ postoji $\eta(\alpha)$ takvo da za neki indeks k važi

$$|\eta(\alpha) - a_{k,k}| = \alpha r_k(A) + (1-\alpha)c_k(A).$$

Zbog toga je $\min\limits_{\alpha\in[0,1]} |\eta(\alpha)| = \min\limits_{\alpha\in[0,1]} w(\alpha) \leq \rho^{\alpha 1}(A)$. Kako za svako $z \in \mathbb{C}$ za koje je $|z| > \min\limits_{\alpha\in[0,1]} w(\alpha)$, postoji $\alpha \in [0,1]$, takav da je

$$|z| > |a_{i,i}| + \alpha r_i(A) + (1-\alpha)c_i(A), \quad \text{za svako } \; i \in N,$$

pa, dakle, i

$$|z - a_{i,i}| > \alpha r_i(A) + (1-\alpha)c_i(A), \quad \text{za svako } \; i \in N,$$

zaključujemo da je $zI - A$ $\alpha 1$ matrica, pa sledi da je $\min\limits_{\alpha\in[0,1]} w(\alpha) = \rho^{\alpha 1}(A)$. Dakle,

$$\rho^{\alpha 1}(A) = \min_{\alpha\in[0,1]} \max_{i\in N} \left\{|a_{i,i}| + \alpha r_i(A) + (1-\alpha)c_i(A)\right\}. \tag{6.3}$$

Napomenimo da za svako $\alpha \in [0,1]$, veličina

$$\max_{i\in N} \left\{|a_{i,i}| + \alpha r_i(A) + (1-\alpha)c_i(A)\right\}$$

predstavlja ocenu spektralnog radijusa matrice A. Najbolja od njih data je sa (6.3).

Međutim, moguće je učiniti i više - ocenu (6.3) moguće je ekvivalentno zapisati u obliku koji ne zavisi od parametra α. Da bismo to uradili, koristimo rezultat dokazan u radu [18]:

Teorema 6.1. *Proizvoljna matrica* $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$, $n \geq 2$ *je* $\alpha 1$ *matrica, ako i samo ako su zadovoljena sledeća dva uslova:*

(i) $|a_{i,i}| > \min\{r_i(A), c_i(A)\}$, *za svako* $i \in N$,

(ii) $\dfrac{|a_{i,i}| - c_i(A)}{r_i(A) - c_i(A)} > \dfrac{c_j(A) - |a_{j,j}|}{c_j(A) - r_j(A)}$, *za svako* $i \in \mathcal{R}$, *i svako* $j \in \mathcal{C}$,

gde je $\mathcal{R} := \{i \in N \ : \ r_i(A) > c_i(A)\}$ *i* $\mathcal{C} := \{i \in N \ : \ c_i(A) > r_i(A)\}$.

Uslov (ii) može se preformulisati na sledeći način:

$$[|a_{i,i}| - c_i(A)][c_j(A) - r_j(A)] + [|a_{j,j}| - c_j(A)][r_i(A) - c_i(A)] > 0, i \in \mathcal{R}, j \in \mathcal{C}$$

tako da možemo zaključiti da je

$$\rho^{\alpha 1}(A) \leq \max\{f(A), g(A)\}, \tag{6.4}$$

gde je

$$f(A) := \max_{k \in N}[|a_{k,k}| + \min\{r_k(A), c_k(A)\}]$$

i

$$g(A) := \max_{i \in \mathcal{R}, j \in \mathcal{C}} \frac{[|a_{i,i}| + c_i(A)][c_j(A) - r_j(A)] + [|a_{j,j}| + c_j(A)][r_i(A) - c_i(A)]}{c_j(A) - r_j(A) + r_i(A) - c_i(A)}.$$

Naime, za svako $z \in \mathbb{C}$, $zI - A \notin \alpha 1$ ako i samo ako:

- postoji $i \in \ N$, takvo da je $|z - a_{ii}| \leq \min\{r_i(A), c_i(A)\}$,

  ili

- postoje $i \in \mathcal{R}$ i $j \in \mathcal{C}$, takvi da $[|z - a_{i,i}| - c_i(A)][c_j(A) - r_j(A)] + [|z - a_{j,j}| - c_j(A)][r_i(A) - c_i(A)] \leq 0$.

Međutim, kako iz

$$[|z - a_{i,i}| - c_i(A)][c_j(A) - r_j(A)] + [|z - a_{j,j}| - c_j(A)][r_i(A) - c_i(A)] \leq 0$$

sledi da je

$$|z|[c_j(A) - r_j(A) + r_i(A) - c_i(A)] \leq$$
$$[|a_{i,i}| + c_i(A)][c_j(A) - r_j(A)] + [|a_{j,j}| + c_j(A)][r_i(A) - c_i(A)],$$

i pri tome je $c_j(A) - r_j(A) + r_i(A) - c_i(A) > 0$, za $i \in \mathcal{R}$ i $j \in \mathcal{C}$, dobijamo da za svako $z \in \mathbb{C}$, $zI - A \notin \alpha 1$ implicira da je $|z| \leq f(A)$ ili $|z| \leq g(A)$.

Dakle, $\max\{f(A), g(A)\}$ je gornje ograničenje za

$$\{|z| : zI - A \notin \alpha 1, z \in \mathbb{C}\}.$$

Kako ono ne zavisi od $|z|$, to je ujedno i gornje ograničenje za $\rho^{\alpha 1}(A)$.

Završićemo razmatranja u ovoj sekciji prezentovanjem jedne veoma jednostavne ocene za spektralni radijus, ali ne više proizvoljne matrice, već $H-$matrice.

U radu [55] dokazana je sledeća teorema:

Teorema 6.2. *Ako je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ $H-$matrica, onda je*

$$\rho(A) \leq 2 \max_{i \in N} |a_{i,i}|. \tag{6.5}$$

U radu [114] ocena (6.5) je popravljena na sledeći način:

Teorema 6.3. *Ako je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ $H-$matrica, onda je*

$$\rho(A) \leq \max_{\substack{i \neq j \\ i,j \in N}} (|a_{i,i}| + |a_{j,j}|) < 2 \max_{i \in N} |a_{i,i}|. \tag{6.6}$$

6.2 Nenegativne blok matrice I tipa

Kao što je dobro poznato, teorija nenegativnih, odnosno pozitivnih matrica zauzima posebno mesto u mnogim matričnim modelima raznih pojava u inženjerstvu, ekologiji, medicini, farmaciji, biologiji itd.

Dobro poznata Peron-Frobenijuseva teorema kaže da ako je A pozitivna matrica, tada je njen spektralni radijus jednak karakterističnom korenu, koji je pozitivan i jednostruk. Taj se karakteristični koren u literaturi često i naziva Peronov koren. Tvrđenje važi i za nenegativne nerazložive matrice.

U preostalom delu disertacije bavićemo se gornjom ocenom Peronovog korena. Dakle, od sada pa nadalje pretpostavljamo da je $A \geq 0$, i pokušavamo da što bolje ocenimo $\rho(A)$. I dalje ćemo pretpostaviti da particija $\pi = \{p_j\}_{j=0}^{\ell}$, deli matricu A na blokove:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,\ell} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{\ell,1} & A_{\ell,2} & \cdots & A_{\ell,\ell} \end{bmatrix} = [A_{i,j}]_{\ell\times\ell}. \tag{6.7}$$

Označimo sa B matricu reda ℓ:

$$B = \begin{bmatrix} \|A_{1,1}\|_\infty & \|A_{1,2}\|_\infty & \cdots & \|A_{1,\ell}\|_\infty \\ \|A_{2,1}\|_\infty & \|A_{2,2}\|_\infty & \cdots & \|A_{2,\ell}\|_\infty \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \|A_{\ell,1}\|_\infty & \|A_{\ell,2}\|_\infty & \cdots & \|A_{\ell,\ell}\|_\infty \end{bmatrix} = [b_{i,j}]_{\ell\times\ell}. \tag{6.8}$$

U radu [114] dokazano je da, ukoliko je A nenegativna matrica, za ovako definisanu matricu B važi

$$\rho(A) \leq \rho(B). \tag{6.9}$$

Ako je A nenegativna $B_I^\pi H-$ matrica, tada je njoj pridružena matrica I tipa $\rangle A\langle^\pi$ $M-$matrica. Međutim, s obzirom da je

$$\|A_{i,i}\|_\infty \geq \|A_{i,i}^{-1}\|_\infty^{-1} \text{ za svako } i \in L, \tag{6.10}$$

odnosno

$$\mathcal{M}(B) \geq \rangle A\langle^\pi,$$

lako zaključujemo da je matrica B takođe $H-$matrica, dakle za nju važi ocena spektralnog radijusa $\max\limits_{i\neq j}(|b_{i,i}| + |b_{j,j}|)$, koja je, u ovom slučaju i ocena spektralnog radijusa nenegativne matrice A:

$$\rho(A) \leq \max_{i\neq j}\{\|A_{i,i}\|_\infty + \|A_{j,j}\|_\infty\}.$$

Na sličan način, polazeći od nekih drugih ocena spektralnog radijusa $H-$matrica, na primer datih u radu [114], izvode se analogne ocene spektralnog radijusa nenegativne $B_I^\pi H-$matrice.

Takođe, ako je A nenegativna matrica, s obzirom da se spektralni radijus matrice B može oceniti na način sličan onom koji smo prikazali u prethodnoj sekciji za $\alpha 1$ klasu, ta ista ocena biće, istovremeno, i ocena spektralnog radijusa polazne nenegativne blok matrice A:

$$\rho(A) \leq \rho^{\alpha_1}(B).$$

6.3 Nenegativne blok matrice II tipa

Na sličan način kao i u slučaju blok I tipa, možemo izvesti ocene za čitavu klasu nenegativnih blok $H-$matrica II tipa.

Naime, ako je A nenegativna $B_{II}^\pi H-$ matrica, tada je njoj pridružena matrica II tipa $\langle A\rangle^\pi$ $M-$matrica. S obzirom da je

$$\|A_{i,i}\|_\infty \|A_{i,i}^{-1}A_{i,j}\|_\infty \geq \|A_{i,j}\|_\infty \ \text{ za svako } \ i,j \in L, i \neq j, \tag{6.11}$$

odnosno

$$\mathcal{M}(B) \geq \ D\langle A\rangle^\pi,$$

gde je $D = diag(\|A_{1,1}\|_\infty, \|A_{2,2}\|_\infty, \ldots, \|A_{\ell,\ell}\|_\infty)$, ponovo zaključujemo da je matrica B $H-$matrica, dakle za nju važi ocena spektralnog radijusa $\max\limits_{i\neq j}(|b_{i,i}| + |b_{j,j}|)$, koja je, i u ovom slučaju istovremeno i ocena spektralnog radijusa nenegativne blok matrice A. Analogno se mogu izvesti ocene spektralnog radijusa za nenegativne $B_{II}^\pi H-$matrice korišćenjem nekih drugih ocena spektralnog radijusa tačkastih $H-$matrica.

Ponovo, ako je A nenegativna matrica, s obzirom da se spektralni radijus matrice B može oceniti na način sličan onom koji smo prikazali u prethodnoj sekciji za $\alpha 1$ klasu, ta ista ocena biće, istovremeno, i ocena spektralnog radijusa polazne nenegativne blok matrice A.

7

Zaključna razmatranja

Namera da se detaljnije istražuju osobine matrica zapisanih u blok formi, koje se baziraju na ideji generalizovane dijagonalne dominacije pokazala se sasvim opravdanom, s obzirom da su dokazani rezultati koji nalaze značajnu primenu u sasvim aktuelnim problemima primenjene, odnosno numeričke linearne algebre. Te mogućnosti primene prikazane su u okviru nekoliko konkretnih problema:

- ocena norme inverzne matrice,
- lokalizacija karakterističnih korena i
- ocena spektralnog radijusa.

Najdetaljnije je razrađen prvi od njih, s obzirom da je u ovom slučaju zaista bilo moguće značajno proširiti katalog mogućih ocena za normu inverzne matrice, kako za klase matrica koje su već ispitivane, pri čemu je dobijena mogućnost poboljšanja ocene, tako i za neke sasvim nove klase, što proširuje dijapazon matematičkih modela na koje se ovakve ocene mogu primeniti. Brojnim numeričkim primerima opravdan je ovakav zaključak.

Nešto delikatnija situacija nastaje kada je u pitanju lokalizacija karakterističnih korena, ali i tada se ponekad isplati investirati u nešto više računskih operacija, da bi se koreni bolje lokalizovali.

Najmanje prostora posvećeno je oceni spektralnog radijusa, ali je i tu dat generalni okvir, na osnovu koga se mogu izvoditi nove ocene spektralnog radijusa, i to za proizvoljne matrice u tačkastom slučaju, kao i za proizvoljne nenegativne matrice u blok slučaju.

Osim navedenih i dokazanih rezultata, disertacija predstavlja i izvor opštih ideja i principa na kojima se mogu zasnivati dalje generalizacije. Predstavljena su dva moguća blok uopštenja klase generalizovano dijagonalno dominantnih matrica, ali je iz načina njihovog definisanja jasno da se analogne generalizacije mogu generisati pomoću nekih drugih normi blokova, čak i tako da se na različite blokove primenjuju različite norme, kao što je to predloženo u knjizi [108]. Isto tako, za ocenu spektralnog radijusa proizvoljne matrice, kao osnov za izvođenje ocene može poslužiti neka druga potklasa $H-$matrica, a ne samo potklasa $\alpha 1$.

Očigledno je da se istraživanja u ovoj disertaciji mogu pokazati veoma korisna i u nekim drugim oblastima primenjene linearne algebre, poput ocene determinanti, lokalizacije generalizovanih karakterističnih korena, ocene singularnih vrednosti, oblasti konvergencije iterativnih postupaka, osobina Šurovog komplementa, subdirektnih suma itd. Samim tim i moguća primena u drugim naukama nije sporna.

Literatura

[1] Ahlberg, J.H., Nilson, E.N.: Convergence properties of the spline fit. J.SIAM (1963), 95-104.

[2] Bai Z.-Z.: A class of parallel decomposition-type relaxation methods for large sparse systems of linear equations. Linear Algebra and its Applications. Vol 282, Issues 13, (1998), 124

[3] Bauer, F. L.: On the field of values subordinate to a norm, Numer. Math. 4 (1962), 103-113.

[4] Bauer, F. L.: Fields of values and Gershgorin disks. Numer. Math. 12 (1968), 91-95.

[5] Beauwens, R.: Semistrict diagonal dominance. SIAM J. Numer. Anal. 13 (1976), 109-112.

[6] Beckenbach, E.F., Bellman, R.: Inequalities. Springer-Verlag, Berlin, 1961.

[7] Berman, A., Plemmons, R.J.: Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. Classics in Applied Mathematics 9, SIAM, Philadelphia, 1994.

[8] Brauer, A.: Limits for the charasteristic roots of a matrix II. Duke Math. J. 14 (1947), 21-26.

[9] Bru, R., Cvetković, Lj., Kostić, V., Pedroche, F.: Sums of $\sum$-strictly diagonally dominant matrices. Linear and Multilinear Algebra 58(1) (2010), 7578.

[10] Brualdi, R.: Matrices, eigenvalues and directed graphs. Linear Multilinear Algebra 11 (1982), 143-165.

[11] Brualdi, R.: The symbiotic relationship of combinatorics and matrix theory. Linear Algebra Appl. 162/164 (1992), 65-105.

[12] Brualdi, R., Mellendorf, S: Regions in the complex plane containing the eigenvalues of a matrix. Amer. Math. Monthly 101 (1994), 975-985.

[13] Carlson, D. H., Varga R. S.: Minimal G-functions. Linear Algebra and Appl. 6 (1973), 97-117.

[14] Carlson, D. H., Varga, R. S.: Minimal G-functions II. Linear Algebra Appl. 7 (1973), 233-242.

[15] Chen, M. Q. and Li, X. Z.: An estimation of the spectral radius of a product of block matrices. Linear Algebra and its Applications, 379:267275, 2004.

[16] Cvetković, Lj.: Convergence theory for the relaxation methods to solve systems of equations. MB-5 PAMM. Technnical University of Budapest, 1998.

[17] Cvetković, Lj.: H-matrix theory vs. eigenvalue localization. Numer. Algor. 42 (2006), 229-245.

[18] Cvetković, Lj., Bru, R., Kostić, V., Pedroche, F.: A simple generalization of Gersgorin's theorem. Adv. Comput. Math. 35 (2011), 271-280.

[19] Cvetković, Lj., Dai, P.-F., Doroslovački, K., Li, Y.-T.: Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices. Appl. Math. Comput. 219 (2013) 5020-5024.

[20] Cvetković, Lj., Kostić, V., Pena, J.M.: Eigenvalue localization refinements related to positivity. SIAM J. Matrix Anal. Appl. 32(3) (2011), 771-784.

[21] Cvetković, Lj., Kostić, V., Varga, R.: A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion area. ETNA 18 (2004), 73-80.

[22] Cvetković, Lj., Kostić, V.: New Criteria for identifying H-matrices. J. Comput. Appl. Math. 180 (2005), 265-278.

[23] Cvetković, Lj., Kostić, V.: Between Geršgorin and minimal Geršgorin set. J. Comput. Appl. Math., 196 (2006), 452-458.

[24] Cvetković, Lj., Kostić, V.: New subclasses of block H-matrices with applications to parallel decomposition-type relaxation methods. Numerical Algorithms 42, 3-4 (2006), 325-334.

[25] Cvetković, Lj., Kostić, V.: A note on the convergence of the AOR method. Appl. Math. Comput. 194/2 (2007), 394-399.

[26] Cvetković, Lj., Kostić, V.: Application of Generalized Diagonal Dominance in Wireless Sensor Network Optimization Problems. Appl. Math. Comput. 218 (2012), 4798-4805.

[27] Cvetković, Lj., Kostić, V., Doroslovački, K.: Max-norm bounds for the inverse of S-Nekrasov matrices. Appl. Math. Comput. 218 (2012), 9498-9503.

[28] Cvetković, Lj., Kostić, V., Kovačević, M., Szulc, T.: Further results on H-matrices and their Schur complements. Appl. Math. Comput. 198(2) (2008), 506-510.

[29] Cvetković, Lj., Kostić, V., Nedović, M.: Generalizations of Nekrasov matrices and applications (submitted to CEJM).

[30] Cvetković, Lj., Kostić, V., Rauški, S.: A new subclass of H-matrices. Appl. Math. Comput. 208 (2009), 206-210.

[31] Cvetković, Lj., Nedović, M.: Special H-matrices and their Schur and diagonal-Schur complements. Appl. Math. Comput. 208 (2009) 225-230.

[32] Cvetković, Lj., Nedović, M.: Eigenvalue localization refinements for the Schur complement. Appl. Math. Comput. 218 (17) (2012), 8341-8346.

[33] Cvetković, Lj., Pena, J.M.: Mimimal sets alternative to minimal Geršgorin set. Appl. Numer. Math. 60 (2010), 442-451.

[34] Dashnic, L. S., Zusmanovich, M. S.: O nektoryh kriteriyah regulyarnosti matrici lokalizacii ih spectra. Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. 5 (1970), 1092-1097.

[35] Dashnic, L. S., Zusmanovich, M. S.: K voprosu o lokalizacii karakteristicheskih chisel matricy. Zh. vychisl. matem. i matem. fiz. 10,5 (1970), 1321-1327.

[36] Desplanques J.: Théorèm d'algébre, J. de Math. Spec. 9 (1887), 12-13.

[37] Fan, K.: Not on circular disks containing the eigenvalues of a matrix. Duke Math. J. 25 (1958), 441-445.

[38] Feingold, D. G., Varga, R. S.: Block diagonally dominant matrices and generalizations of the Gerschgorin circle theorem. Pacific J. Math. 12 (1962), 1241-1250.

[39] Fiedler, M., Ptak, V.: Generalized norms of matrices and the location of the spectrum. Czechoslovak Math. J. 12(87) (1962), 558-571.

[40] Gan, T. B., Huang, T. Z.: Symple criteria for nonsingular H-matrices. Linear Algebra Appl. 374 (2003), 317-326.

[41] Gao, Y. M., Xiao, H. W.: Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M-matrices. Linear Algebra Appl. 169 (1992), 257-268.

[42] Gao, Y. M., Xiao, H. W.: Criteria for generalized diagonally dominant matrices and M-matrices. II. Linear Algebra Appl. 248 (1996) 339-353.

[43] Geršgorin, S.: Uber die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1 (1931), 749-754.

[44] Gudkov, V.V.: On a certain test for nonsingularity of matrices. Latv. Mat. Ezhegodnik 1965, Zinatne, Riga (1966), 385-390.

[45] Hadamard, J.: Leçons sur la propagation des ondes. Hermann et fils, Paris, 1903, reprinted in (1949) by Chelsea, New York.

[46] Hoffman, A.J.: Linear G-functions. Linear and Multilinear Alg. 3 (1975), 45-72.

[47] Hoffman, A. J.: Gersgorin variations. I. On a theme of Pupkov and Solovev. Linear Algebra and Appl. 304 (2000), 173-177.

[48] Hoffman, A. J., Varga, R. S.: Patterns of dependence in generalizations of Gerschgorins theorem. SIAM J. Numer. Anal. 7 (1970), 571-574.

[49] Horn, R. A., Johnson, C. R.: Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[50] Horn, R. A., Johnson, C. R.: Topics in Matrix Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[51] Householder, A. S.: On the convergence of matrix iterations. J. Assoc. Com- put. Mach. 3 (1956), 314-324.

[52] Householder, A. S.: The Theory of Matrices in Numerical Analysis. Blaisdell Publ. Co., New York, 1964.

[53] Householder, A. S., Varga, R. S., Wilkinson, J. H.: A note on Gerschgorins inclusion theorem for eigenvalues of matrices. Numer. Math. 16 (1972), 141- 144.

[54] Huang, T. Z.: A note on generalized diagonally dominant matrices. Linear Algebra Appl., 225 (1995), 237-242.

[55] Huang, T. Z., Ran, R. S. A .: A simple estimation for the spectral radius of (block) H-matrices. Journal of Computational Applied Mathematics, 177:455459, 2005

[56] Huang, T. Z., You, Z. Y.: G block diagonal dominance of matrices. (Chinese) Gongcheng Shuxue Xuebao 10 (1993), 75-85.

[57] Huang T. Z., Zhong, S. M.: G functions and eigenvalues of block matrices. Acta Math. Sci. (Chinese) 19 (1999), 62-66.

[58] Huang, T. Z.: Estimation of $\|A^{-1}\|_\infty$ and the smallest singular value. Computers and Mathematics with Applications 55 (2008) 1075-1080.

[59] Johnson, C. R.: A Gersgorin inclusion set for the field of values of a finite matrix. Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973), 57-60.

[60] Johnston, R. L.: Block generalizations of some Gerschgorin-type theorems. Ph.D. Thesis, Case Institute of Technology, 1965.

[61] Johnston, R. L.: Gerschgorin theorems for partitioned matrices. Linear Algebra and Appl. 4 (1971), 205-220.

[62] James, K., Riha, W.: Convergence criteria for successive overrelaxation. SIAM J. Numer. Anal., 12 (1974), pp. 137143

[63] Karow, M.: Geometry of Spectral Value Sets. Ph.D. Thesis, University of Bremen, Bremen, Germany, 2003.

[64] Kolotilina L. Y.: Nonsingularity/singularity criteria for nonstrictly block diagonally dominant matrices. Linear Algebra and Appl. 359 (2003), 133-159.

[65] Kolotilina, L. Y.: Generalizations of the Ostrowski-Brauer Theorem. Linear Algebra and Appl. 364 (2003), 65-80.

[66] Kolotilina, L.Y.: Bounds for the determinants and inverses of certain H-matrices. Zap. Nauchn. Sem. POMI 346(2007), 81-102.

[67] Kolotilina, L.Y.: Improving Chistyakovs bounds for the Perron root of a nonnegative matrix, Zap. Nauchn. Semin. POMI 346 (2007) 103118.

[68] Kolotilina, L.Y.: Bounds for the infinity norm of the inverse for certain $M-$ and $H-$matrices. Linear Algebra and Appl. 430 (2009), 692-702.

[69] Kostić, V.: Benefits from the Generalized Diagonal Dominance. PhD Thesis, University of Novi Sad, 2010.

[70] Kostić, V.: On general principles of eigenvalue localisations via diagonal dominance. Advances in Computational Mathematics. (submitted).

[71] Kostić, V., Cvetković, Lj., Krukier L.: Matrix nonsingularity and diagonal dominance property (in Russian). Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennie nauki. 3 (2013), 16- 18.

[72] Kostić, V., Cvetković, Lj., Varga, R.S.: Geršgorin-type localizations of generalized eigenvalues. Numerical Linear Algebra with Applications 16,11-12 (2009), 883-898.

[73] Kostić, V., Varga, R.S., Cvetković, Lj.: Localization of Generalized Eigenvalues by Cartesian Ovals. Numerical Linear Algebra Appl. Vol. 19, 4 (2012), 728-741.

[74] Lévy, L.: Sur le possibilitè du l'equlibre èlectrique, C. R. Acad. Paris 93 (1881), 706-708.

[75] Levinger, B. W., Varga, R. S.: Minimal Gerschgorin sets II. Pacific J. Math. 17 (1966), 199-210.

[76] Li, B., Tsatsomeros, M. J.: Doubly diagonally dominant matrices. Linear Algebra Appl. 261 (1997), 221-235.

[77] Li, B., Li, L., Harada, M. Niki, H., Tsatsomeros, M. J.: An iterative criterion for H-matrices. Linear Algebra Appl. 271 (1998), 179-190.

[78] Li, W.: On Nekrasov matrices. Linear Algebra Appl. 281(1998), 87-96.

[79] Li, W.: The infinity norm bound for the inverse of nonsingular diagonal dominant matrices. Applied Mathematics Letters, 21, 3, (2008), 258263.

[80] Loewy, R.: On a theorem about the location of eigenvalues of matrices. Linear Algebra and Appl. 4 (1971), 233-242.

[81] Marcus, M., Minc, H.: A Survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities. Allyn and Bacon, Boston, 1964.

[82] Meyer, C.D.: Matrix Analysis and Applied Linear Algebra. SIAM, Philadelphia, 2000.

[83] Minkowski, H.: Zur Theorie der Einheiten in den algebraischen Zahlk orpern, 1900.

[84] Morača, N.: Upper bounds for the infinity norm of the inverse of SDD and S-SDD matrices. J. Comp. Appl. Math. 206(2007), 666-678.

[85] Newman, M.: Geršgorin revisited. Linear Algebra Appl. 30 (1980), 247-249.

[86] Ostrowski, A. M.: Uber die Determinanten mit uberwiegender Hauptdiagonale. Comment. Math. Helv. 10 (1937), 69-96.

[87] Ostrowski, A. M.: Uber das Nichtverschwinden einer Klasse von Determinanten und die Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln von Matrizen, Compositio Math. 9 (1951), 209-226.

[88] Ostrowski, A.M.: Sur les conditions generales pour la regularite des matrices, Univ. Roma. Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e. Appl. 5 ,10 (1951), 156-168.

[89] Ostrowski, A. M.: Solution of Equations and Systems of Equations. Academic Press, New York, 1960.

[90] Ostrowski, A. M.: On some metrical properties of operator matrices and matrices partitioned into blocks. J. Math. Anal. Appl. 2 (1961),161-209.

[91] Pupkov, V. A.: Some sufficient conditions for the non-degeneracy of matrices. U.S.S.R. Comput. Math. and Math. Phys. 24 (1984), 86-89.

[92] Robert, F.: Normes vectorielles de vecteurs et de matrices. Rev. Francaise Traitement Information Chiffres 7 (1964), 261-299.

[93] Robert, F.: Sur les normes vectorielles regulieres sur un espace de dimension finie. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 260 (1965), 5193-5176.

[94] Robert, F.: Recherche dune M-matrice parmi les minorantes dun operator lineaire. Numer. Math. 9 (1966), 189-199.

[95] Robert, F.: Blocs-H-matrices et convergence des methodes iteratives classiques par blocks. Linear Algebra and Appl. 2 (1969), 223-265.

[96] Rohrbach, H.: Bemerkungen zu einem Determinantensatz von Minkowski. Jahresber. Deutsch. Math. Verein. 40 (1931), 49-53.

[97] Solovev, V. N.: A generalization of Gersgorins theorem. Math. U.S.S.R. Izvestiya 23 (1984), 545-559.

[98] Szulc, T.: Some remarks on a theorem of Gudkov. Linear Algebra Appl. 225(1995), 221-235.

[99] Taussky, O.: A method for obtaining bounds for characteristic roots of matrices with applications to flutter calculations, Aero. Res. Council (Great Britain), Report 10. 508 (1947), 1-19.

[100] Taussky, O.: Bounds for characteristic roots of matrices. Duke Math. J. 15 (1948), 1043-1044.

[101] Taussky, O.: A recurring theorem on determinants. Amer. Math. Monthly 56 (1949), 672-676.

[102] Varah J. M.: A lower bound for the smallest value of a matrix. Linear Algebra Appl. 11(1975), 3-5.

[103] Varga, R. S.: Minimal Gerschgorin sets. Pacific J. Math. 15 (1965), 719-729.

[104] Varga, R. S.: On recurring theorems on diagonal dominance. Linear Algebra and Appl. 13 (1976), 1-9.

[105] Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Second revised and expanded edition, Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[106] Varga, R. S.: Gerschgorin-type eigenvalue inclusion theorems and their sharpness, ETNA (Electronic Transactions on Numerical Analysis). 12 (2001), 113-133.

[107] Varga, R. S.: Gerschgorin disks, Brauer ovals of Cassini (a vindication), and Brualdi sets. Information 4 (2001), 171-178.

[108] Varga, R. S.: Geršgorin and His Circles. Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 36, 2004.

[109] Varga, R. S., Kraustengl, A.: On Gersgorin-type problems and ovals of Cassini. ETNA (Electronic Transactions on Numerical Analysis) 8 (1999), 15-20.

[110] Varga, R.S., Cvetković, Lj., Kostić, V.: Approximation of the minimal Geršgorin set of a square complex matrix. ETNA (Electronic Transactions on Numerical Analysis) 30 (2008), 398-405.

[111] Zenger, C.: On convexity properties of the Bauer field of values of a matrix. Numer. Math. 12 (1968), 96-105.

[112] Zenger, C.: Positivity in complex spaces and its application to Gerschgorin disks. Numer. Math. 44 (1984), 67-73.

[113] Zhang, F.: The Schur Complement and Its Applications. Springer, New York, 2005.

[114] Zhang, W., Han, Z.Z.: Bounds for the spectral radius of block H-matrices. ELA. 15 (2006) 269-273.