



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI  
FAKULTET  
DEPARTMAN ZA  
MATEMATIKU I INFORMATIKU



Ernest Šanca

# Dinamička analiza kompleksnih sistema u svetlu $H$ -matrica

· doktorska disertacija ·

MENTOR:  
PROF. DR LJILJANA CVETKOVIĆ

NOVI SAD, 2021.





КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА<sup>1</sup>

Врста рада:	докторска дисертација
Име и презиме аутора:	Ернест Шанца
Ментор (титула, име, презиме, звање, институција)	др Љиљана Цветковић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
Наслов рада:	Динамичка анализа комплексних система у светлу X-матрица
Језик публикације (писмо):	Српски ( латиница )
Физички опис рада:	Страница 198 Поглавља 5 Референци 119 Табела 0 Слика 41 Графикона 0 Прилога 1
Научна област:	Математика
Ужа научна област (научна дисциплина):	Нумеричка математика
Кључне речи / предметна одредница:	динамичка анализа, динамички системи, X-матрице, блок матрице, спектар, оцена норме инверзне матрице, псеудоспектар
Резиме на језику рада:	Предмет истраживања ове докторске дисертације је систематско повезивање динамичких својстава комплексних система (као што су стабилност, робусност, реактивност, транзиционо понашање, амплификациони оквир) са теоријом X-матрица, које је мотивисало нове резултате из области локализације блок и фракционог псеудоспектра, као и оцене норме инверзне матрице, како у тачкастој, тако и у блок форми, али и примену ових резултата у динамичкој анализи комплексних система.
Датум прихватања теме од стране надлежног већа:	24.2.2020.
Датум одбране: (Попуњава одговарајућа служба)	
Чланови комисије: (титула, име, презиме, звање, институција)	Председник: др Владимир Костић, ванредни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду Ментор: др Љиљана Цветковић, редовни професор, Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду Члан: др Маја Недовић, доцент, Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду
Напомена:	

<sup>1</sup> Аутор докторске дисертације потписао је и приложио следеће Обрасце:

5б – Изјава о ауторству;

5в – Изјава о истоветности штампане и електронске верзије и о личним подацима;

5г – Изјава о коришћењу.

Ове Изјаве се чувају на факултету у штампаном и електронском облику и не кориче се са тезом.

KEY WORD DOCUMENTATION<sup>1</sup>

Document type:	Doctoral dissertation	
Author:	Ernest Šanca	
Supervisor (title, first name, last name, position, institution)	Ph. D. Ljiljana Cvetković, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad	
Thesis title:	Dynamical analysis of complex systems in light of $H$ -matrices	
Language of text (script):	Serbian language ( latin )	
Physical description:	Pages 198 Chapters 5 References 119 Tables 0 Illustrations 41 Graphs 0 Appendices 1	
Scientific field:	Mathematics	
Scientific subfield (scientific discipline):	Numerical mathematics	
Subject, Key words:	dynamical analysis, dynamical system, $H$ -matrix, block matrix, spectrum, bound for the norm of the inverse, pseudospectrum	
Abstract in English language:	This thesis provides a systematic link between the dynamical properties of complex systems (such as stability, robustness, reactivity, transient behavior, amplification envelope) and the theory of $H$ -matrices, which has motivated new results as far as block and fractional pseudospectrum localizations are concerned, as well as some new upper bounds for the inverse of certain subclasses of $H$ -matrices, both in the point-wise and block case, and the overall collective application of these results in the dynamical analysis of complex systems.	
Accepted on Scientific Board on:	February 24, 2020.	
Defended: (Filled by the faculty service)		
Thesis Defend Board: (title, first name, last name, position, institution)	President:	Ph. D. Vladimir Kostić, Associate Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
	Supervisor:	Ph. D. Ljiljana Cvetković, Full Professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
	Member:	Ph. D. Maja Nedović, Assistant Professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad
Note:		

<sup>1</sup> The author of doctoral dissertation has signed the following Statements:

56 – Statement on the authority,

5B – Statement that the printed and e-version of doctoral dissertation are identical and about personal data,

5r – Statement on copyright licenses.

The paper and e-versions of Statements are held at the faculty and are not included into the printed thesis.

*Svima koji pronalaze lepotu  
u plovidbi naučnim morem.*

*Lj.C, za sve dragocene savete  
koji su doprineli i doprinose  
“jačanju elemenata na glavnoj dijagonali”.  
Za svakodnevna “skaliranja”,  
ali i ona koja tek predstoje.*



# Sadržaj

<b>Oznake</b>	<b>7</b>
<b>1 Teorija <math>H</math>-matrica</b>	<b>11</b>
1.1 $M$ -matrice . . . . .	11
1.2 SDD matrice . . . . .	17
1.3 GDD i skaliranje na SDD . . . . .	19
1.3.1 Potklase identifikovane skalirajućom matricom . .	21
1.3.2 Ostale potklase . . . . .	24
1.4 Blok $H$ -matrice . . . . .	30
<b>2 Dinamički sistemi</b>	<b>37</b>
2.1 Matematički model i klasifikacija . . . . .	37
2.2 Glavna dinamička svojstva . . . . .	40
2.2.1 Stabilnost . . . . .	41
2.2.2 Rastojanje do nestabilnosti . . . . .	44
2.3 Ostala dinamička svojstva . . . . .	45
2.3.1 Vreme povratka i rezilijentnost . . . . .	46
2.3.2 Tranziciono ponašanje i reaktivnost . . . . .	47
2.4 Model empirijskih mreža ishrane . . . . .	49
2.5 Frakcioni dinamički sistemi . . . . .	52
2.5.1 Frakcioni diferencijalni operatori . . . . .	52
2.5.2 Stabilnost sistema linearnih frakcionih diferencijal- nih jednačina . . . . .	53

---

<b>3</b>	<b>Lokalizacije spektra</b>	<b>57</b>
3.1	Faktorizacije koje otkrivaju spektar . . . . .	59
3.2	Numerički raspon . . . . .	61
3.3	Lokalizacije spektra . . . . .	63
3.4	Blok uopštenje lokalizacija spektra . . . . .	73
3.5	Primena u dinamičkoj analizi kompleksnih sistema . . . .	74
3.5.1	Asimptotska stabilnost . . . . .	74
3.5.2	Ostala dinamička svojstva . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Ocene <math>\ell_p</math> norme inverzne matrice</b>	<b>85</b>
4.1	Slučaj norme $\ell_\infty$ . . . . .	86
4.2	Slučaj norme $\ell_1$ . . . . .	89
4.3	Ocene za najmanju singularnu vrednost . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Pseudospektar</b>	<b>97</b>
5.1	Lokalizacije pseudospektra . . . . .	101
5.2	Blok uopštenje lokalizacija pseudospektra u $\ell_p$ normi . . .	114
5.3	Od pseudospektara dijagonalnih blokova do pseudospektra pune matrice . . . . .	117
5.4	Frakcioni pseudospektar i njegove lokalizacije . . . . .	124
5.5	Primena u dinamičkoj analizi kompleksnih sistema . . . .	136
5.5.1	Aproksimacija rastojanja do nestabilnosti . . . . .	136
5.5.2	Aproksimacija rastojanja do nestabilnosti blok matrica . . . . .	138
5.5.3	Ostala dinamička svojstva . . . . .	142
5.5.4	Aproksimacija rastojanja do nestabilnosti SLFDJ . .	143
	<b>Zaključna razmatranja</b>	<b>151</b>
	<b>Literatura</b>	<b>153</b>
	<b>A Katalog MATLAB kodova</b>	<b>165</b>
	<b>Popis slika</b>	<b>193</b>

# Apstrakt

U realnom okruženju svakodnevno susrećemo raznovrsne kompleksne mreže, poput finansijskih, neuralnih, elektro-energetskih, društvenih, bioloških, ekoloških i mnogih drugih. Ove mreže se obično odlikuju velikim brojem međusobno povezanih dinamičkih celina. Kao posledica izuzetno visokog stepena složenosti, one mogu ispoljiti veoma različita dinamička svojstva, pa je od ključnog interesa uspostaviti vezu između topološkog i dinamičkog aspekta ovakvih sistema. Među mnogobrojnim pristupima uspostavljanju takve veze izdvaja se onaj koji je zasnovan na implementaciji alata primenjene (numeričke) linearne algebre koja u jeku savremene "Big Data" ere, uz eksponencijalni rast računskih kapaciteta savremenih računara, sve više dobija na značaju.

Primarni cilj ove disertacije je da sveobuhvatnim pristupom poveže teoriju  $H$ -matrica sa raznim dinamičkim svojstvima složenih sistema. U tom smislu, disertacija je kompoziciono sastavljena iz pet poglavlja.

Fundamentalni rezultati iz oblasti teorije  $H$ -matrica u okviru prvog dela započinju detaljnom sistematizacijom relacija postojećih potklasa generalizovano dijagonalno dominantnih matrica, kao i njihovih blok uopštenja.

Drugo poglavlje služi da se uvedu osnovni koncepti iz teorije dinamičkih sistema, konciznim osvrtom na delove iz pomenute teorije, za čije detaljnije proučavanje čitaoca upućujemo na [60]. Pri tome, akcenat stavljam na neprekidne kompleksne sisteme invarijantne u vremenu, čija se dinamička analiza u praksi sprovodi izvođenjem zaključaka o *lokalnim* svojstvima *nelinearnih* sistema na osnovu odgovarajućih osobina matrice Jakobijana u ekvilibrijumu, odnosno donošenjem zaključaka o *globalnim* svojstvima *linearnih* sistema na osnovu osobina matrice sistema diferencijalnih jednačina. Imajući u vidu dominantno nelinearni karakter feno-

mena u prirodi i društvu, koji se analiziraju na okolini ravnotežne tačke na kojoj važi linearizacija, bavićemo se isključivo neprekidnim linearnim autonomnim dinamičkim sistemima. Osim toga, u ovom poglavlju je predstavljen i model empirijskih mreža ishrane ekosistema tla, a poglavlje se završava postavkom modela frakcionih dinamičkih sistema, sa posebnim naglaskom na benefite koje njihova upotreba pruža.

Treće poglavlje donosi pregled lokalizacija matičnog spektra koje su u bliskoj vezi sa konceptom generalizovane dijagonalne dominacije. Nakon pregleda rezultata u oblasti, ono se završava primenom u dinamičkoj analizi kompleksnih sistema u svojstvu dovoljnih uslova za asimptotsku stabilnost, kao i pregledom još nekih dinamičkih svojstava.

U četvrtoj glavi bavimo se sistematizacijom postojećih ocena normi inverza matrica iz nekih specijalnih potklasa  $H$ -matrica. Originalni naučni doprinos predstavljen ovim delom obuhvata nove ocene matične norme jedan pod pretpostavkom pripadnosti odgovarajućoj klasi, njihovom primenu u oceni najmanje singularne vrednosti matrice, kao i blok ekstenziju rezultata [37]. Svoj puni smisao ovo poglavlje dobija u kontekstu naredne glave, čiji tehnički alat upravo i predstavlja.

Peto i ujedno zaključno poglavlje posvećeno je matičnom pseudospektru, kao i njegovim blok i frakcionim varijantama. Pored pregleda postojećih i formulacije originalnih naučnih doprinosa, ovaj moćan alat numeričke linearne algebre analiziramo u svojstvu donjih granica za rastojanje do nestabilnosti blok matrica [73], kao i sistema linearnih frakcionih diferencijalnih jednačina, [104].

Numerička algoritamska rešenja za sprovođenje izračunavanja ocena normi inverza ali i reprodukciju vizualizacija lokalizacionih oblasti spektra, blok i frakcionog pseudospektra u programskom paketu MATLAB obuhvaćena su katalogom kodova. Disertacija se završava spiskom slika i korišćenih relevantnih bibliografskih izvora.

Sasvim je očekivano da prezentovana saznanja nađu svoj put do novih potencijalnih primena u oblastima prirodnih, tehničko-tehnoloških ali i društvenih nauka, i na taj način usmere pravac budućih istraživanja.



# Abstract

In the real environment, we encounter various complex networks on a daily basis, such as financial, neural, electricity, social, biological, ecological and many others. These networks are usually characterized by a plenty of interconnected dynamic entities. As a consequence of this extremely high degree of complexity, they can exhibit very different dynamic properties, so the necessity to establish a link between the topological and dynamic aspects of such systems is of key interest. Among many approaches to establishing such a connection, the one based on the implementation of the tools of Applied (Numerical) Linear Algebra seems to stand out, which is gaining importance in the midst of the modern "Big Data" era, boasting with the exponential growth in the computational capacity of contemporary computers.

The primary goal of this thesis is to connect the theory of  $H$ -matrices with various dynamic properties of complex systems via comprehensive approach. In that sense, this dissertation is composed of five chapters.

The fundamental results in the field of  $H$ -matrix theory within the first part begin with a detailed systematization of the relations among the existing subclasses of generalized diagonally dominant matrices, as well as their block generalizations.

The second chapter serves to introduce the basic concepts from the theory of dynamic systems, with a concise review of the parts from it, whereas the eager reader may refer to [60] for a more detailed study. In doing so, we emphasize continuous complex systems invariant in time, whose dynamic analysis in practice is carried out by drawing conclusions about the *local* properties of *nonlinear* systems based on the corresponding properties of the Jacobian matrix evaluated at the equilibrium, or by drawing conclusions about the *global* properties of *linear* systems via properties of the system matrix of differential equations. Having

in mind the predominantly nonlinear character of phenomena in nature and society, which are analyzed in the neighbourhood of the equilibrium point at which linearization applies, we will deal exclusively with continuous linear autonomous dynamical systems. Additionally, this chapter presents a model of empirical food networks of the soil ecosystem, and the chapter concludes with the setting of models of fractional dynamic systems, with a special emphasis on the benefits that their use provides.

The third chapter grants an overview of the localizations of the matrix spectrum that are closely related to the concept of generalized diagonal dominance. After a detailed study of the results in the field, we bring it to an end through examples of their application in the dynamic analysis of complex systems in terms of a number of sufficient conditions for asymptotic stability, as well as providing review of some other dynamic properties.

In the fourth chapter, we deal with the systematization of existing estimates for the norms of the matrix inverse for some special subclasses of  $H$ -matrices. The original scientific contribution presented in this section includes new estimates of the matrix norm one of the inverse, their application in the estimation of the smallest singular value of the matrix, as well as the block extension of these results [37]. This chapter unlocks its full potential in the context of the next chapter, whose technical tool it represents.

The fifth and final chapter is devoted to the matrix pseudospectrum, as well as its block and fractional variants. In addition to reviewing existing and formulating original scientific contributions, we analyze this powerful tool of Numerical Linear Algebra in terms of lower bounds for the distance to instability of block matrices [73], as well as systems of linear fractional differential equations, [104].

Numerical algorithmic solutions for the calculation of the estimates for the norms of the matrix inverse, as well as codes for the reproduction of visualizations of localization areas of the spectrum, block and fractional pseudospectrum via MATLAB software package are included in the catalogue of codes. The thesis concludes with a list of images and used relevant bibliographic sources.

It is expected that the results presented in this thesis will find their way to new potential applications in the fields of natural, technical, technological and social sciences, and thus navigate the direction of prospective future research.

# Oznake

$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\mathbb{C}$	skup kompleksnih brojeva
$\mathbb{R}^n$	skup svih realnih vektora dimenzije $n$
$\mathbb{C}^n$	skup svih kompleksnih vektora dimenzije $n$
$\mathbb{R}^{m,n}$	skup svih realnih matrica formata $m \times n$
$\mathbb{C}^{m,n}$	skup svih kompleksnih matrica formata $m \times n$
$N = \{1, 2, \dots, n\}$	skup indeksa
$M = \{1, 2, \dots, m\}$	skup indeksa
$(A)_{ij} = a_{ij}$	element matrice $A$ u $i$ -toj vrsti i $j$ -toj koloni
$x_i$	$i$ -ta komponenta vektora $\mathbf{x}$
$\mathbf{0} = [0, 0, \dots, 0]^T$	nula vektor
$\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$	vektor čije su sve komponente jednake 1
$E$	jedinična matrica
$\mathbf{e}^i$	$i$ -ti vektor standardne baze ( $i$ -ta kolona jedinične matrice)
$O$	nula matrica
$\mathbf{x} \rho \mathbf{y}$	ako je $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ i ako za svako $i \in N$ važi relacija $x_i \rho y_i$ , $\rho \in \{<, \leq, =, >, \geq\}$

$A \rho B$	ako je $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$ i ako za svako $i \in M, j \in N$ važi relacija $a_{ij} \rho b_{ij}$ , $\rho \in \{<, \leq, =, >, \geq\}$
$\Delta_1 \rho \Delta_2$	ako su $\Delta_1$ i $\Delta_2$ dijagonalne matrice, tada ova relacija znači odgovarajući odnos između svih njihovih dijagonalnih elemenata, $\rho \in \{<, \leq, =, >, \geq\}$
$\Lambda(A)$	spektar matrice $A$
$W(A)$	numerički raspon matrice $A$
$\Gamma(A)$	Geršgorinov skup matrice $A$
$\rho(A) := \max_{\lambda \in \Lambda(A)}  \lambda $	spektralni radijus matrice $A$
$\alpha(A) := \max_{\lambda \in \Lambda(A)} \Re(\lambda)$	spektralna apscisa matrice $A$
$\omega(A) := \max_{z \in W(A)} \Re(z)$	numerička apscisa matrice $A$
$\gamma(A) := \max_{z \in \Gamma(A)} \Re(z)$	Geršgorinova apscisa matrice $A$
$A^T$	transponovana matrica matrici $A$
$A^H$	hermitovana (konjugovano-transponovana) matrica matrici $A$
$A^{-1}$	inverzna matrica matrici $A$
$\pi = \{\pi_j\}_{j=0}^{\ell}$	particija skupa indeksa $N$ , pri čemu je $0 =: \pi_0 < \pi_1 < \pi_2 < \dots < \pi_\ell := n$
$r_i(A) := \sum_{j \in N \setminus \{i\}}  a_{ij} $	suma modula vandijagonalnih elemenata $i$ -te vrste matrice $A$
$c_i(A) := \sum_{j \in N \setminus \{i\}}  a_{ji} $	suma modula vandijagonalnih elemenata $i$ -te kolone matrice $A$ (odnosno $c_i(A) = r_i(A^T)$ )
$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$	Kronekerov delta simbol

*“ Your work is going to fill a large part of your life,  
and the only way to be truly satisfied  
is to do what you believe is great work.  
And the only way to do great work  
is to love what you do.  
If you haven't found it yet, keep looking.  
Don't settle.  
As with all matters of the heart,  
you'll know when you find it. ”*

STEVEN JOBS, *Stanford Commencement Address, 2005.*



# Teorija $H$ -matrica

*"The essence of math is not to make simple things complicated,  
but to make complicated things simple."*

STAN GUDDER

S obzirom da obuhvata fundamentalne koncepte teorije  $H$ -matrica, ovo poglavlje predstavlja gravitaciono jezgro disertacije, pre svega zbog toga što rezultatima spektralne i pseudospektralne teorije, kao i ocenama norme inverzne matrice, poseduje preko potrebne kapacitete za davanje kvalitetnih odgovora na veliki broj pitanja iz širokog obuhvata izazova sa kojima se savremena primenjena linearna algebra suočava, u želji da teorijskim rezultatima doda aplikativnu dimenziju. Osim toga, budući da su ovi rezultati u osnovi motivisani rešavanjem realnih problema, njih u većini slučajeva prati i konkretna argumentacija u terminima svojstava kompleksnih sistema iz kojih su potekli, što dodatno pojačava njihovu praktičnu vrednost.

---

## 1.1 $M$ -matrice

Sa istorijskog aspekta, fundamenti bogate teorije  $M$ -matrica postavljeni su u prvoj polovini dvadesetog veka, premda se ni dan danas ne može pouzdano ustanoviti ko je zaista začetnik njihovog pojma. Tome dodatno doprinosi i činjenica izuzetno širokog dijapazona ranih primena

koje su nesumnjivo podstakle njihovo istraživanje, tako da je sasvim izvesno dolazilo do preklapanja suštinski istovetnih matematičkih rezultata, ali formalno različitih u terminima oblasti primena u kojima su nezavisno razvijani, sa stanovišta terminologija, notacija i samih realnih interpretacija, o čemu je svedočio i Ričard Varga (Richard Varga), [115]. Na osnovu objavljenih radova, veruje se da je pojam  $M$ -matrica prvi upotrebio Aleksandar Ostrovski (Alexander Ostrowski) u svom radu [94] iz 1937, osvrćući se na rezultate Hermana Minkovskog (Hermann Minkowski), [86, 87], u čiju čast i dan-danas, u oblasti numeričke optimizacije, ova klasa nosi naziv "Minkovski" matrice.

Sa namerom sistematizacije do tada poznatih rezultata bogate teorije  $M$ -matrica, koju je ponudio u monografiji u koautorstvu sa Abrahamom Bermanom (Abraham Berman), u kojoj su autori, između ostalog, naveli blizu 50 karakterizacija regularnih matrica iz pomenute klase, Robert Plemmons (Robert Plemmons) je u [5, 99] konstatovao da su rezultati, kako teorijskog tako i aplikativnog karaktera, pristizali prevashodno od strane pripadnika matematičkih krugova kao i eminentnih ekonomista.

Matematičke nauke su dominantan akcenat stavile na primenu teorije  $M$ -matrica u svrhu rasvetljavanja klasičnih izazova primenjene linearne algebre, koji se tiču analize spektra matrica kao i rešavanja sistema linearnih jednačina. Rezultati u prvom pravcu govore o ograničavanjima karakterističnih korena: nenegativnih matrica [105],  $M$ -matrica [15, 42, 105] kao i stohastičkih matrica [9, 46, 47]. Drugi pravac je za cilj imao utvrđivanje kriterijuma konvergencije iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina velikih dimenzija, čija matrica sistema poseduje retku (sparse) strukturu. Ovakvi sistemi se javljaju prilikom modeliranja realnih neprekidnih problema, kada je zbog implementacije rada na računaru, takav problem neophodno aproksimirati diskretnim analogonom, postupkom diskretizacije običnih, odnosno parcijalnih diferencijalnih jednačina [85]. Rešavanje dobijenih sistema u praksi se svodi na upotrebu Jakobijevog, Gaus-Zajdelovog ili SOR (successive over-relaxation) i drugih iterativnih postupaka, ali i definisanje oblasti izbora parametara za koje ti relaksacioni postupci konvergiraju. Za koncizan pregled pomenutih postupaka čitaoca upućujemo na [30]. Pored ova dva pravca, kao posebna oblast izdvaja se rešavanje problema linearne komplementarnosti [13, 67], čiji dijapazon primena obuhvata probleme linearnog i konveksnog kvadratnog programiranja [14], bimatrične modele igara [78], rubne probleme dinamike fluida [16] kao i tržišne ravnoteže [82]. Takođe, teorija verovatnoće i teorija čekanja su našle svoje



mesto u kontekstu  $M$ -matrica, izučavajući konačne lance Markova, [97].

Ekonomisti su, sa druge strane, teoriju  $M$ -matrica i rezultate iz nje razvijali i koristili u okvirima problema stabilnosti opšteg ekvilibrijuma, to jest ravnoteže tržišta kao celine, no sasvim je izvesno da najznačajniju primenu predstavlja ona u terminima međusektorske analize, vrste kvantitativne analize u ekonomiji sa ciljem utvrđivanja međusobne zavisnosti privrednih sektora. Budući da se Vasilij Leontijev (Wassily Leontief) smatra začetnikom njene savremene varijante, u literaturi se ona često može sresti i pod nazivom Leontijeva input-output analiza ekonomskih sistema, [79].

Među ostalim naučnim disciplinama u kojima je teorija  $M$ -matrica opravdala svoju upotrebnost ističu se inženjerstvo i veza sa analizom Ljapunov stabilnosti [2], zatim teorija kontrole [6, 7], dok se u računarskoj biologiji (computational biology) intenzivno primenjuje prilikom izučavanja dinamike populacija, [61].

Još u svom preglednom radu iz 1977. godine, koji se tiče sistematizacije bogate liste karakterizacija regularnih  $M$ -matrica, Plemmons svoje razmatranje započinje konstatacijom da modeli pojava u biologiji, inženjerstvu, ali i društvenim naukama neretko proizvode zapis putem matrica koje poseduju specijalnu znakovnu strukturu elemenata, ističući da je jedan od najzastupljenijih onaj kod kojeg su svi vandijagonalni elementi nepozitivni, a elementi na glavnoj dijagonali nenegativni, [99]. Način na koji se do ovog oblika stiže opisan je ilustrativnim primerom numeričkog rešavanja obične diferencijalne jednačine, tačnije aproksimacijom kontinualnog problema diskretnim analogonom, u drugoj sekciji Poglavlja 7 u [5]. Ovakav kriterijum znakovne strukture korespondira podskupu matrica koje imaju  $Z$  oblik, a čija je definicija data u nastavku.

**DEFINICIJA 1** *Za matricu  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  kažemo da je  $Z$  oblika ako su joj svi vandijagonalni elementi nepozitivni. Ako su, dodatno, svi dijagonalni elementi pozitivni, tada kažemo da matrica ima  $Z^+$  oblik.*

Ostrovski [94] je primetio da je svaku matricu  $A$  koja ima  $Z$  oblik moguće zapisati kao:

$$A = sE - B, \quad B \geq O, \quad s := \max_{i \in N} a_{ii}, \quad b_{ij} = s\delta_{ij} - a_{ij} \quad \text{za svako } i, j \in N,$$

pri čemu je  $\delta_{ij}$  uobičajena oznaka za Kronekerov delta simbol. Unutar klase  $Z$  matrica, posebno se izdvaja potklasa  $M$ -matrica, čija je definicija data u nastavku.

**DEFINICIJA 2** Svaka matrica  $A = sE - B$ ,  $B \geq O$ , zove se (regularna)  $M$ -matrica ako i samo ako je  $\rho(B) < s$ .

U sekciji 4 poglavlja 6 u [5], autori pažnju posvećuju rasvetljavanju nekih svojstava uopštenih  $M$ -matrica, koje su opisane uslovom  $\rho(B) \leq s$  u kombinaciji sa  $Z$  oblikom. Tom prilikom, oni navode da ova klasa sadrži i sve matrice oblika  $\rho(B)E - B$ ,  $B \geq O$ , koje se zovu singularne  $M$ -matrice. Čitaocu skrećemo pažnju da, od sad pa na dalje, pod  $M$ -matricama podrazumevamo isključivo regularne  $M$ -matrice.

Sa stanovišta rešavanja problema linearne komplementarnosti [5, 13], veliki značaj pripada sledećoj klasi matrica.

**DEFINICIJA 3** Za matricu  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  kažemo da je  $P$ -matrica ako su joj svi glavni minori pozitivni.

S obzirom da je glavni minor najvećeg reda matrice njena determinanta, sledi da su sve  $P$ -matrice regularne, ali i njihov pravi podskup.

Jedan od fundamentalnih rezultata značajan za izučavanje  $M$ -matrica je čuvena Peron-Frobenijusova teorema o nenegativnim matricama. Za kompletan tretman, videti [5].

**TEOREMA 1 (PERRON-FROBENIUS)** Neka je  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  proizvoljna nenegativna matrica. Tada:

- a) Matrica  $A$  ima realan nenegativan karakteristični koren koji je upravo njen spektralni radijus,  $\rho(A) \in \Lambda(A)$ , i on se zove Peronov koren,
- b) Postoji nenegativan vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ( $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  i  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ) koji odgovara Peronovom korenu, i predstavlja Peronov vektor,
- c) Peronov koren može biti višestruk,

$$d) \rho(A) = \inf_{\mathbf{x} > \mathbf{0}} \left\{ \max_{i \in N} \frac{1}{x_i} \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right\}.$$

U kontekstu rada sa realnim matricama koje van dijagonale nemaju negativnih elemenata, moguće je definisati i sledeći skup matrica.

**DEFINICIJA 4** *Matrica  $C \in \mathbb{R}^{n,n}$  zove se esencijalno nenegativna ako za svako (dovoljno veliko)  $q \in \mathbb{R}$  važi  $qE + C \geq O$ .*

Ako je matrica  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$   $Z$  oblika, to jest  $A = sE - B$  i  $B \geq O$ , tada je  $-A$  esencijalno nenegativna matrica, za koju je  $-A = -sE + B$ . Drugim rečima, karakteristični koreni matrice  $-A$  su zapravo karakteristični koreni matrice  $B$  na koje je dodat šift  $-s$ . Međutim, na osnovu Teoreme 1,  $\rho(B)$  je karakteristični koren matrice  $B$ , stoga je njemu odgovarajući (najdešnji) karakteristični koren matrice  $-A$  upravo  $\rho(B) - s$ , odakle se može zaključiti da je najlevlji karakteristični koren matrice  $A$  upravo  $-\rho(B) + s$ , što uz pretpostavku da je matrica  $A$  u klasi  $M$ -matrica ekvivalentno znači da je njen najlevlji koren pozitivan.

Značajan broj autora, među kojima su [12, 39, 40, 41, 67] se svojim naučnim radom (i to uglavnom nezavisno) bavio klasom  $M$ -matrica i izvođenjem relevantnih osobina, što je rezultovalo raznim ekvivalentnim definicijama ove klase, sistematizovanim u [5]. Neke od najznačajnijih su obuhvaćene sledećom teoremom.

**TEOREMA 2** *Neka je  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  matrica oblika  $A = sE - B$ ,  $B \geq O$ . Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

- (i)  $\rho(B) < s$ ,
- (ii)  $A$  je regularna i važi  $A^{-1} \geq O$ ,
- (iii) Postoji vektor  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{z} > \mathbf{0}$  takav da je  $A\mathbf{z} > \mathbf{0}$ ,
- (iv) Svi glavni minori matrice  $A$  su pozitivni (matrica  $A$  je  $P$ -matrica),
- (v) Najlevlji karakteristični koren matrice  $A$  je  $-\rho(B) + s$  i on je pozitivan,
- (vi)  $A$  je pozitivno stabilna: Ako je  $\lambda \in \Lambda(A)$  tada je  $\Re(\lambda) > 0$ , to jest svi karakteristični koreni matrice  $A$  se nalaze u desnoj poluravni kompleksne ravni.

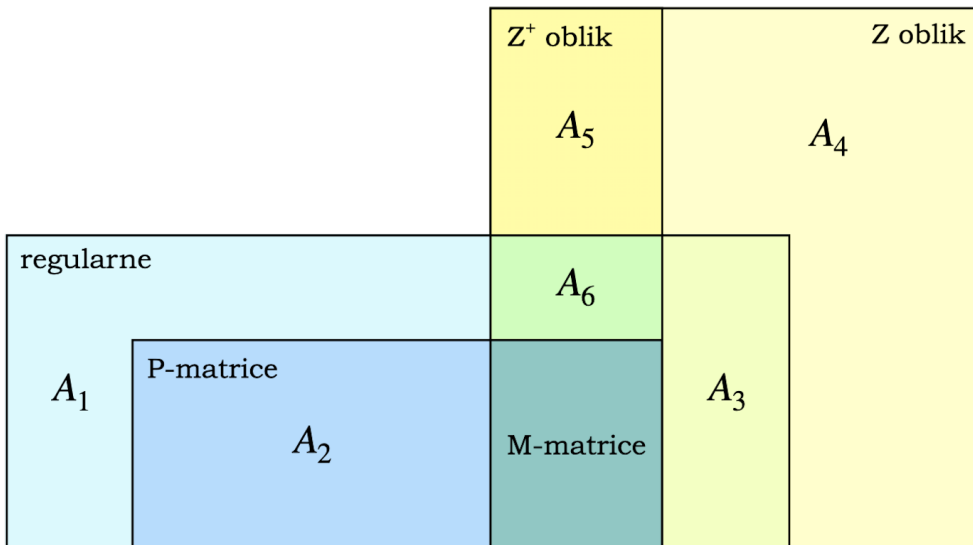
Osim toga, naredna pomoćna tvrđenja su takođe dobro poznati rezultati.

**LEMA 1** *Svaka  $M$ -matrica ima  $Z^+$  oblik.*

**LEMA 2** *Neka je  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$   $M$ -matrica i  $B \in \mathbb{R}^{n,n}$  matrica  $Z$  oblika, pri čemu je  $A \leq B$ . Tada je i  $B$  u klasi  $M$ -matrica i važi  $B^{-1} \leq A^{-1}$ .*

LEMA 3 Ako je  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  trougaona matrica  $Z^+$  oblika, tada je ona  $M$ -matrica.

Odnose koji postoje između spomenutih klasa moguće je i vizuelno predstaviti, što je učinjeno Slikom 1.1, dok su matrice  $A_1 - A_6$  navedene kao primeri koji ove relacije potvrđuju.



Slika 1.1: Odnos klase  $M$ -matrica sa nekim drugim klasama.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad A_6 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Naročito značajna potklasa regularnih matrica, koja predstavlja generalizaciju  $M$ -matrica u smislu napuštanja znakovne strukture, a i uz pretpostavku o mogućem postojanju kompleksnih elemenata, čije izučavanje nalazi uporište u širokom spektru primena a ujedno čini teorijski okvir ove disertacije, jeste klasa  $H$ -matrica.

**DEFINICIJA 5** Za proizvoljnu matricu  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ , njoj pridružena matrica  $\mathcal{M}(A) := [\mu_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$  definisana je sa

$$\mu_{ij} := \begin{cases} |a_{ii}|, & i = j, \\ -|a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases}$$

Prethodna definicija obezbeđuje Z oblik matrice  $\mathcal{M}(A)$ , pa samim tim i mogućnost da pojam  $M$ -matrica nad skupom realnih matrica uopštimo na skupu matrica sa kompleksnim elementima. Na taj način stižemo do definicije  $H$ -matrica.

**DEFINICIJA 6** Matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  zove se  $H$ -matrica ako i samo ako je njoj pridružena matrica  $\mathcal{M}(A)$   $M$ -matrica.  $H$ -matrica sa pozitivnim dijagonalnim elementima naziva se  $H^+$ -matrica.

Iz prethodnih definicija i činjenice o  $Z^+$  obliku svake  $M$ -matrice, lako zaključujemo da su svi dijagonalni elementi  $H$ -matrice različiti od nule.

## 1.2 SDD matrice

Prvi pisani trag o pojmu stroge dijagonalne dominacije seže u drugu polovinu devetnaestog veka, kada je u svom radu iz 1881, Lisjen Levi (Lucien Lévy) dokazao sledeći rezultat, u prevodu iz izvornog oblika, [80]:

*Ako su svi elementi determinante pozitivni, osim onih na glavnoj dijagonali, koji su negativni i po apsolutnoj vrednosti veći od sume elemenata vrste u kojoj se nalaze, determinanta je uvek različita od nule.*

Ovim rečima je, svega nekoliko godina kasnije (1887), J. Deplank (J. Desplanques) započeo svoju opservaciju, konstatujući da je Levijevu propoziciju moguće generalizovati na kompleksni slučaj, [36]:

*Ako je svaki dijagonalni element determinante veći po modulu od sume modula ostalih elemenata te vrste, tada je determinanta nužno različita od nule.*

Čak se i Minkovski [86] dotakao ovog rezultata u realnom obliku, doduše u nešto drugačijoj formi, a koji glasi ovako:

*Ako je determinanta sa realnim elementima takva da su joj svi vandijagonalni elementi negativni, a sume svake vrste pozitivne, tada je ona uvek pozitivna.*

Mi ćemo se, naravno, opredeliti za savremeniju formu definicije svojstva stroge dijagonalne dominacije, u terminima kompleksnih matrica.

**DEFINICIJA 7** *Matrica  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$  zove se strogo dijagonalno dominantna (SDD) matrica, ako za svako  $i \in N$  važi*

$$|a_{ii}| > r_i(A), \quad (1.1)$$

pri čemu je

$$r_i(A) := \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}|.$$

Vrlo često će, u slučajevima kada je jasno o kojoj matrici je reč, biti u upotrebi skraćena oznaka,  $r_i = r_i(A)$ . Kao očigledni benefit ove klase ističe se lakoća verifikacije pripadnosti istoj. Pored toga, bitno svojstvo SDD matrica koje govori o njihovoj regularnosti, u literaturi nosi naziv teorema Levi-Deplanka.

**TEOREMA 3** *Svaka SDD matrica je regularna.*

Razloge duboke ukorenjenosti svojstva stroge dijagonalne dominacije u vezivnom tkivu primenjene linearne algebre treba tražiti u terminima kriterijuma širokog spektra primena, opravdanog na više frontova. Sa teorijskog stanovišta, u kontekstu direktnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina metodom Gausove eliminacije, zna se da svaka SDD matrica ima jedinstvenu  $LU$  dekompoziciju, budući da definicija ove klase matrica direktno implicira da su svi vodeći glavni minori različiti od nule. Pri tome, može se konstatovati i da rezultujuća matrica  $U$  zadržava svojstvo stroge dijagonalne dominacije. Šta više, ako je matrica strogo dijagonalno dominantna po kolonama, tada je sprovođenje Gausovog postupka eliminacije sa parcijalnim pivotiranjem moguće realizovati bez zamene redosleda vrsta. Kada su iterativni postupci u pitanju, ispunjenost SDD osobine na matrici sistema predstavlja uslov koji obezbeđuje konvergenciju Jakobijevog ili Gaus-Zajdelovog iterativnog postupka ka tačnom rešenju sistema. U svetlu spektralnih lokalizacija, prethodno tvrđenje o regularnosti i čuvena Geršgorinova teorema o

lokalizaciji karakterističnih korena proizvoljne kvadratne matrice, koja će kasnije biti precizno formulisana, matematički su ekvivalentne. Aplikativna priroda SDD matrica opravdana je frekventnom pojavom u osnovi matematičkih modela i raznovrsnih dinamičkih sistema. Na osnovu rezultata [119] iz oblasti bežičnih sensor mreža, stroga dijagonalna dominacija garantuje asimptotski stabilnu strategiju kontrole napajanja i konvergencije odgovarajućeg algoritma ka jedinstvenom Nešovom ekvilibrijumu. Međutim, činjenica da se u praksi, čak mnogo češće, javljaju primeri ovakvih, ali i sličnih sistema, kod kojih je pretpostavka o strogoj dominaciji dijagonalnih elemenata u manjoj ili većoj meri narušena, dovoljna je motivacija da se upoznamo i sa konceptom koji služi da premosti navedene izazove, a nosi naziv generalizovana dijagonalna dominacija.

### 1.3 GDD i skaliranje na SDD

**DEFINICIJA 8** Matrica  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$  zove se generalizovano dijagonalno dominantna (GDD) matrica, ako postoji pozitivan vektor  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ , takav da za svako  $i \in N$  važi

$$|a_{ii}|x_i > \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}|x_j. \quad (1.2)$$

Treba napomenuti da iako je u izvornom obliku [64] pretpostavljeno da je dovoljan uslov za generalizovanu dijagonalnu dominaciju egzistencija nenula skalara koji množeći kolone polazne matrice čine da ona postane strogo dijagonalno dominantna, zarad jednostavnosti, ove skalare možemo birati da budu pozitivni, i kao takve ih učiniti komponentama vektora  $\mathbf{x}$ .

Osim što je poslužila kao moćan alat da Cvetković i Kostić u [23] uopšte rezultat o stabilnosti i konvergenciji ka stabilnom stanju strategije kontrole napajanja u uslovima postojanja smetnji svojstvenih topološkoj strukturi same mreže, koje ne narušavaju funkcionalni integritet pomenutog algoritma, upotrebna vrednost Definicije 8 prevazilazi te okvire, time što nudi mogućnost novih rezultata o regularnosti, pa samim tim i nove kvalitetne primene, od kojih neke novijeg datuma u ekologiji [70, 104].

Znajući da dijagonalna matrica  $D = \text{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$  množi kvadratnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  sa desne strane tako što element  $d_{kk}$  skalira  $k$ -tu kolonu matrice  $A$ ,  $k \in N$ , uslov (1.2) moguće je ekvivalentno preformulisati u matričnom zapisu i u terminima stroge dijagonalne dominacije.

**DEFINICIJA 9** Matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  zove se GDD matrica ako i samo ako postoji pozitivna dijagonalna matrica  $X$  takva da je  $AX$  SDD matrica.

Zaista, birajući da su komponente pozitivnog vektora  $x$  iz Definicije 8 elementi dijagonalne matrice  $X$ , nije teško proveriti da uslov (1.2) zapravo znači da matrica  $AX$  ispunjava kriterijum (1.1).

Ako malo bolje analiziramo uslov (1.2), videćemo da on zapravo znači da je  $\mathcal{M}(A)x > \mathbf{0}$ . To je upravo i kompleksno uopštenje veoma važnog rezultata do kojeg su, u realnom slučaju, došli Miroslav Fiedler (Miroslav Fiedler) i Vlastimil Ptak (Vlastimil Pták) [42] (Teorema 4.3).

**TEOREMA 4** Matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  je  $H$ -matrica ako i samo ako je generalizovano dijagonalno dominantna.

Jedna od mnogobrojnih i korisnih osobina  $H$ -matrica data je sledećom teoremom.

**TEOREMA 5** Ako je matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$   $H$ -matrica, tada važi:

- (i)  $A$  je regularna,
- (ii)  $|A^{-1}| \leq \mathcal{M}(A)^{-1}$ .

Drugi rezultat prethodne teoreme, koji uspostavlja relaciju između modula inverza i inverza pridružene matrice za svaku  $H$ -matricu je poznata teorema Ostrovsčkog, [94].

Neka od bitnih svojstava klase  $H$ -matrica, kao neposredna posledica definicije, jesu zatvorenost u odnosu na operaciju hermitovanja, kao i zatvorenost u odnosu na množenje proizvoljnim dijagonalnim matricama sa leve, odnosno sa obe strane.

**LEMA 4** Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna  $H$ -matrica. Tada je:

- (i)  $A^H$  takođe  $H$ -matrica,
- (ii)  $D_1 A D_2$  u klasi  $H$ -matrica za svake dve regularne dijagonalne matrice  $D_1$  i  $D_2$ .



### 1.3.1 Potklase identifikovane skalirajućom matricom

Naglašena konekcija GDD i SDD matrica, opisana Definicijom 9, u osnovi je tehnike "skaliranja", koja je izuzetno koristan alat sa ciljem rasvetljavanja mnogih svojstava same klase  $H$ -matrica, a samim tim i nekih njenih potklasa. Pri tome, pod terminom *skaliranje* podrazumevamo množenje matrice  $A$  pozitivnom dijagonalnom matricom  $X$  (koju zovemo *skalirajuća* matrica), pri čemu nastaje *skalirana* matrica  $AX$ , čije su kolone skalarni umnošci polazne matrice  $A$ , pomnoženi odgovarajućim dijagonalnim elementom u  $X$ .

U startu je jasno da je pretraživanje skupa svih pozitivnih dijagonalnih matrica, koje imaju zadatak da "poprave" narušenu strogu dijagonalnu dominaciju posmatrane matrice, neoptimalno rešenje, i od njega se, pogotovo u visoko-dimenzionalnim problemima, odustaje. Umesto toga, prednost se, onda kada je to moguće, daje određivanju elemenata matrice  $X$  upotrebom saznanja o postojećim funkcionalnim vezama između elemenata matrice koja se skalira, a koje impliciraju bitne činjenice o svojstvima matrice, kao što je regularnost.

Uopštenje svojstva stroge dijagonalne dominacije moguće je pratiti u nekoliko pravaca. Prvi od njih, za koji se ispostavlja da obuhvata potklase  $H$ -matrica identifikovane skupom skalirajućih matrica, predstavlja *particija indeksnog skupa*. Preostali pravci, među kojima su *multiplikativni pristup*, *rekurzivne sume*, kao i *kombinacija suma vrsta i kolona*, biće analizirani u narednoj podsekciji.

#### Dašnjic-Zusmanovič matrice

Prva klasa matrica koju navodimo u smislu generalizacije osobine stroge dijagonalne dominacije u pravcu particije indeksnog skupa, tiče se činjenice da je uslov (1.1) moguće oslabiti, a da pri tome matrica i dalje ostane regularna. Uslovom ovog tipa prvi su se bavili L. Dašnjic (Dashnits) i M. Zusmanovič (Zusmanovich) u [33], u čiju čast je klasa matrica i ponela naziv.

**DEFINICIJA 10** *Matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , zove se Dašnjic-Zusmanovič (DZ) matrica ako postoji indeks  $k \in N$  takav da za svako  $j \in N \setminus \{k\}$  važi*

$$|a_{kk}| \left( |a_{jj}| - r_j(A) + |a_{jk}| \right) > r_k(A) |a_{jk}|. \quad (1.3)$$

Kao preliminarni rezultat kojim su otvorili svoj rad, Dašnjic i Zusmanović su pokazali da je uslov (1.3) dovoljan da obezbedi regularnost. Pri tome, može se pokazati da je svaka SDD matrica istovremeno i DZ, ali o tome da obrat ne važi govori matrica

$$A_7 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O nešto konkretnijem rezultatu, u smislu identifikacije skalirajućom matricom, a koji kao posledicu potvrđuje da je svaka DZ matrica ujedno i generalizovano dijagonalno dominantna, govori sledeća teorema.

**TEOREMA 6** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , i neka je*

$$\mathbb{D}_{DZ} := \{X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n,n}, x_k = \gamma > 0, x_j = 1, j \neq k\}.$$

*Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

- (i) *A pripada DZ klasi,*
- (ii) *AX je SDD matrica za svako  $X \in \mathbb{D}_{DZ}$  za koje je*

$$\frac{r_k(A)}{|a_{kk}|} < \gamma < \min_{\substack{j \neq k \\ a_{jk} \neq 0}} \frac{|a_{jj}| - r_j(A) + |a_{jk}|}{|a_{jk}|}.$$

Prema tome, za svaku DZ matricu moguće je konstruisati odgovarajuću dijagonalnu matricu  $X$  koja je skalira na SDD. Šta više, važi i obrnuto, da je svaka matrica koja se može skalirati na SDD na opisan način upravo DZ matrica. Karakterizacija ovog tipa neće biti moguća za svaku potklasu  $H$ -matrica.

### S-SDD matrice

Sada ćemo analizirati korak dalje u pravcu particije indeksnog skupa, i prezentovati ga onako kako su ga predstavili Cvetković, Kostić i Varga u [17]. Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ . Uočimo neprazan pravi podskup  $S$  skupa  $N$ , i sa  $\bar{S} := N \setminus S$  označimo komplement skupa  $S$  u  $N$ . Tada je, imajući u vidu sprovedenu particiju, sumu modula vandijagonalnih elemenata svake vrste  $i \in N$  moguće zapisati kao

$$r_i(A) = r_i^S(A) + r_i^{\bar{S}}(A),$$

pri čemu su

$$r_i^S(A) = \sum_{j \in S \setminus \{i\}} |a_{ij}| \quad \text{i} \quad r_i^{\bar{S}}(A) = \sum_{j \in \bar{S} \setminus \{i\}} |a_{ij}|.$$

**DEFINICIJA 11** Matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , zove se *S-SDD matrica* ako postoji neprazan podskup  $S$  indeksnog skupa  $N$  takav da, za svako  $i \in S$  i  $j \in \bar{S}$ , istovremeno važe sledeći uslovi:

- (i)  $|a_{ii}| > r_i^S(A)$ ,
- (ii)  $\left(|a_{ii}| - r_i^S(A)\right) \left(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right) > r_i^{\bar{S}}(A)r_j^S(A)$ .

Specijalno, ako je  $S = N$ , tada je klasa  $N$ -SDD matrica zapravo klasa SDD, u kom slučaju uslova (ii) nema.

Ova klasa matrica praktičnu primenu potvrđuje na primerima realnih sistema kod kojih je struktura matrice interakcija takva da se mogu uočiti dve komplementarne podgrupe sistema koje, osim unutrašnjih individualnih interakcija među članovima, ispoljavaju i zajedničko međudejstvo, načinom koji prirodno indukuje izbor indeksnih podskupova,  $S$  i  $\bar{S}$ . Neki od primera takvih sistema koji ispunjavaju uslov prethodne definicije, razmatrani su u ekološkom modeliranju i analizi dinamičke stabilnosti empirijskih trofičkih mreža u ekosistemu tla [70], kao i optimizaciji napajanja energetski nestabilnih kontrolnih sistema, [23].

Slično kao i Dašnjic-Zusmanovič matrice, i  $S$ -SDD matrice je moguće okarakterisati tehnikom skaliranja na SDD.

**TEOREMA 7** Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , i

$$\mathbb{D}_{S\text{-SDD}} := \{X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad x_i = \gamma > 0 \ (i \in S), \quad x_i = 1 \ (i \in \bar{S})\}.$$

Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

- (i)  $A$  pripada  $S$ -SDD klasi,
- (ii)  $AX$  je SDD matrica za svako  $X \in \mathbb{D}_{S\text{-SDD}}$  za koje je

$$\max_{i \in S} \frac{r_i^{\bar{S}}(A)}{|a_{ii}| - r_i^S(A)} < \gamma < \min_{\substack{j \in \bar{S} \\ r_j^S(A) \neq 0}} \frac{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)}{r_j^S(A)}.$$

Dokaz ovog tvrđenja čitalac može pronaći u [17], gde su razmatrani i dodatni benefiti koje ova klasa matrica pruža. U specijalnom slučaju, kada je skup  $S = \{k\}$  jednočlan, u pitanju je klasa DZ matrica. Međutim, postoje matrice koje nisu u klasi DZ, ali jesu  $S$ -SDD. Na primer, za matricu

$$A_8 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 3 & -2 & -1.1 \\ 0.5 & 2 & 3 & 0.5 \\ 2 & 0.5 & 0.1 & 3 \end{bmatrix}$$

ne postoji indeks  $k \in N$  takav da je uslov (1.3) ispunjen, ali jeste  $S$ -SDD matrica za  $S = \{2,3\}$ .

**DEFINICIJA 12** Matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , zove se  $\Sigma$ -SDD matrica ako postoji neprazan podskup  $S$  skupa njenih indeksa takav da je matrica  $A$   $S$ -SDD matrica.

**TEOREMA 8** Svaka  $\Sigma$ -SDD matrica pripada klasi GDD matrica pa je samim tim i regularna.

Za kraj ove sekcije, skrećemo pažnju da je ideju o upotrebi particije indeksnog skupa moguće proširiti na slučajeve  $k$ -točlane particije,  $3 \leq k \leq n$ , pri čemu se granični i ujedno najveći broj particija postiže u slučaju izbora singletona,  $S_i = \{i\}$ ,  $i \in N$ . Kriterijumi koji u ovakvim uslovima garantuju regularnost definišu klasu  $PH$ -matrica, [75].

### 1.3.2 Ostale potklase

Ova podsekcija posvećena je potklasama  $H$ -matrica koje za sada nemaju dokazanu potpunu karakterizaciju oblikom skalirajuće matrice. Međutim, u praksi to ponekad i ne predstavlja problem, s obzirom da je dovoljno odrediti barem jednu skalirajuću matricu.

#### Ostrovski matrice

Jedno od mogućih uopštenja svojstva stroge dijagonalne dominacije tiče se matrica kod kojih postoji najviše jedna vrsta u kojoj uslov (1.1) nije ispunjen. Ovom klasom se prvobitno bavio Ostrovski [94], po kojem je i nazvana, dok se u brojnim radovima može naći i pod nazivom duplo

strogo dijagonalno dominantne (*dSDD*) matrice. Definiciju Ostrovske matrice navodimo kao što je učinjeno u [116].

**DEFINICIJA 13** *Matrica*  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , zove se *Ostrovska matrica* ako za svako  $i, j \in N$ ,  $i \neq j$  važi

$$|a_{ii}||a_{jj}| > r_i(A)r_j(A). \quad (1.4)$$

Uslov (1.4) zapravo predstavlja ekstenziju stroge dijagonalne dominacije u kontekstu multiplikativnosti i dovoljan je da obezbedi regularnost.

**TEOREMA 9** *Svaka Ostrovska matrica je i H-matrica, pa samim tim i regularna.*

Ako je matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  Ostrovska, to znači da postoji najviše jedan indeks  $k \in N$  za koji je  $|a_{kk}| \leq r_k(A)$ , pri čemu je  $|a_{kk}| \neq 0$ . Ali u tom slučaju, upravo za taj indeks  $k$  matrica je i DZ, jer je za svako  $j \neq k$ :

$$\begin{aligned} |a_{kk}| \left( |a_{jj}| - r_j(A) + |a_{jk}| \right) &= |a_{kk}||a_{jj}| - |a_{kk}| \left( r_j(A) - |a_{jk}| \right) \\ &\geq |a_{kk}||a_{jj}| > r_k(A)r_j(A) \geq r_k(A)|a_{jk}|. \end{aligned}$$

Prema tome, svaka Ostrovska matrica pripada DZ klasi, ali da obrnuto ne važi, pokazuje primer

$$A_9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 \end{bmatrix}.$$

### Nekrasov matrice

Potklase H-matrica u neposrednoj su vezi i sa analizom konvergencije iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina. Naime, pod pretpostavkom razlaganja matrice  $A$  oblika

$$A = D - B, \quad D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}),$$

može se pokazati da karakterizacija stroge dijagonalne dominacije matrice  $A$  u terminima matrice norme beskonačno glasi

$$\|D^{-1}B\|_\infty < 1. \quad (1.5)$$

Kako matrica  $D^{-1}B$  zapravo odgovara Jakobijevoj iterativnoj matrici, u teoriji iterativnih postupaka kriterijum (1.5) predstavlja dovoljan uslov za konvergenciju pomenutog postupka.

U kontekstu Gaus-Zajdelovog postupka, sličnu, ali ne potpuno istu ulogu umesto  $SDD$  matrica preuzima nova klasa koju je, prema korespondenciji Rudolfa Memkea (Rudolf Mehmke) i Pavela Nekrasova (Pavel Nekrassov), formulisao V. Gudkov [52].

Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , proizvoljna matrica. Definišimo i rekurentne veličine

$$h_1(A) := r_1(A), \quad h_i(A) := \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{h_j(A)}{|a_{jj}|} + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|, \quad i \geq 2. \quad (1.6)$$

**DEFINICIJA 14** Matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , zove se Nekrasov matrica ako za svako  $i \in N$  važi  $|a_{ii}| > h_i(A)$ .

Iz načina na koji su definisane (1.6), matematičkom indukcijom je moguće pokazati da za svaku  $SDD$  matricu  $A$ , za svako  $i \in N$ , važi odnos suma  $h_i(A) \leq r_i(A)$ . To znači da je svaka  $SDD$  matrica ujedno i Nekrasova. Da su  $SDD$  matrice pravi podskup klase Nekrasov, pokazuje primer matrice

$$A_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Bitan rezultat koji rasvetljava odnos Nekrasov matrica sa jedne, i  $GDD$  matrica sa druge strane, dokazan je u [52].

**TEOREMA 10** Svaka Nekrasov matrica je i  $H$ -matrica, pa samim tim i regularna.

Rekurentna relacija u osnovi definicije Nekrasov matrica predstavlja jasan izazov za identifikaciju svih mogućih skalirajućih matrica, koje bi dale potpunu karakterizaciju skaliranja, kao što je to bio slučaj sa  $DZ$  i  $S$ - $SDD$  matricama. Motivisani ovim problemom, Tomas Šulc (Tomasz Szulc), Cvetković i Nedović [106] su ustanovili metod konstrukcije skalirajuće matrice za proizvoljnu matricu iz pomenute klase sa jednim dodatnim ograničenjem na veličine (1.6), ističući da je u relevantnim primenama dovoljno poznavanje barem jedne takve dijagonalne matrice, a ne kompletno tvrđenje o karakterizaciji. Njihov rezultat je sledeći.

**TEOREMA 11** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , Nekrasov matrica, takva da je  $h_i(A) \neq 0$  za svako  $i \in N$ . Ako elemente dijagonalne matrice  $X$  izaberemo kao  $x_i := \varepsilon_i h_i(A) / |a_{ii}|$ , za svako  $i \in N$ , gde je  $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$  rastući niz brojeva takav da je  $\varepsilon_1 = 1$  i  $\varepsilon_i \in (1, |a_{ii}| / h_i(A))$ , za  $i \geq 2$ , tada je matrica  $AX$  SDD matrica.*

### $\alpha 1$ i $\alpha 2$ matrice

Ovu podsekciju završavamo osvrtom na dva rezultata koji se tiču regularnosti matrica, a do kojih se dolazi kombinacijom suma vrsta i kolona. Naime, poznato je da je klasa regularnih matrica zatvorena u odnosu na transponovanje. Drugim rečima, ako neke "lako-proverljive" uslove koji garantuju invertibilnost matrice  $A$  primenimo na  $A^T$ , to će rezultovati novim kriterijumima regularnosti. Konkretno, u svetlu uslova (1.1), možemo zaključiti da je svaka matrica  $A$ , takva da je  $A^T$  strogo dijagonalno dominantna, takođe regularna. Zapravo, ovakve matrice opisane su argumentom da je za svako  $i \in N$  ispunjeno

$$|a_{ii}| > c_i(A), \quad c_i(A) := \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ji}|, \quad (1.7)$$

i pripadaju klasi *strogo dijagonalno dominantnih matrica po kolonama*. Međutim, ako pomenute uslove pokušamo da "ukombinujemo" na način koji glasi

$$|a_{ii}| > r_i(A) \quad \text{ili} \quad |a_{ii}| > c_i(A), \quad \text{za svako } i \in N,$$

što je ekvivalentno sa kriterijumom da je za svako  $i \in N$  ispunjeno

$$|a_{ii}| > \min\{r_i(A), c_i(A)\},$$

na primeru matrice

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0.5 & 4 \end{bmatrix},$$

zaključujemo da ovakav uslov nije dovoljan za invertibilnost. Međutim, postoji način "kombinovanja" suma po vrstama i po kolonama koji će biti dovoljan da obezbedi regularnost. Preciznije, postoje bar dva takva načina.

Dve poznate generalizacije svojstva stroge dijagonalne dominacije potekle su iz rada Ostrovskog, [95].

**DEFINICIJA 15** *Matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , zove se  $\alpha 1$  matrica ako postoji parametar  $\alpha \in [0, 1]$  takav da za svako  $i \in N$  važi*

$$|a_{ii}| > \alpha r_i(A) + (1 - \alpha)c_i(A). \quad (1.8)$$

**DEFINICIJA 16** *Matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , zove se  $\alpha 2$  matrica ako postoji parametar  $\alpha \in [0, 1]$  takav da za svako  $i \in N$  važi*

$$|a_{ii}| > r_i(A)^\alpha c_i(A)^{1-\alpha}. \quad (1.9)$$

Među pomenutim klasama postoji relacija, koja je posledica odnosa težinske aritmetičke i težinske geometrijske sredine za  $a_i \geq 0$ , kao i težine  $r_i \geq 0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , sa osobinom  $r_1 + r_2 = 1$ , koji tvrdi  $r_1 a_1 + r_2 a_2 \geq a_1^{r_1} a_2^{r_2}$ . Prema tome, svaka  $\alpha 1$  matrica je ujedno i  $\alpha 2$  matrica. Na osnovu regularnosti matrica koje ispunjavaju uslov (1.9) kao i uobičajene procedure za dokaz monotonosti, moguće je proveriti da je svaka od njih zapravo  $H$ -matrica.

Ispitivanje pripadnosti date matrice  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  klasi  $\alpha 1$  odnosno  $\alpha 2$  matrica je, u skladu sa definicijama, krajnje nepraktično, budući da takav zadatak iziskuje prolazak parametra  $\alpha$  čitavim intervalom  $[0, 1]$ . Stoga su Cvetković, Kostić, Rafael Bru i Francisko Pedroče (Francisco Pedroche) u [22] ponudili alternativnu karakterizaciju pomenutih potklasa  $H$ -matrica, nezavisnu od parametra  $\alpha$ . S tim u vezi, među elementima indeksnog skupa  $N$  izvršena je sledeća particija:

$$\mathcal{R} := \{i \in N : r_i(A) > c_i(A)\},$$

$$\mathcal{C} := \{i \in N : r_i(A) < c_i(A)\},$$

$$\mathcal{E} := \{i \in N : r_i(A) = c_i(A)\}.$$

Rezultati o karakterizacijama pomenutih klasa dati su teoremama.

**TEOREMA 12** *Matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , zove se  $\alpha 1$  matrica ako i samo ako su istovremeno ispunjeni sledeći uslovi:*

(i)  $|a_{ii}| > \min\{r_i(A), c_i(A)\}$ , za svako  $i \in N$ ,

(ii)  $\frac{|a_{ii}| - c_i(A)}{r_i(A) - c_i(A)} > \frac{c_j(A) - |a_{jj}|}{c_j(A) - r_j(A)}$ , za svako  $i \in \mathcal{R}, j \in \mathcal{C}$ .



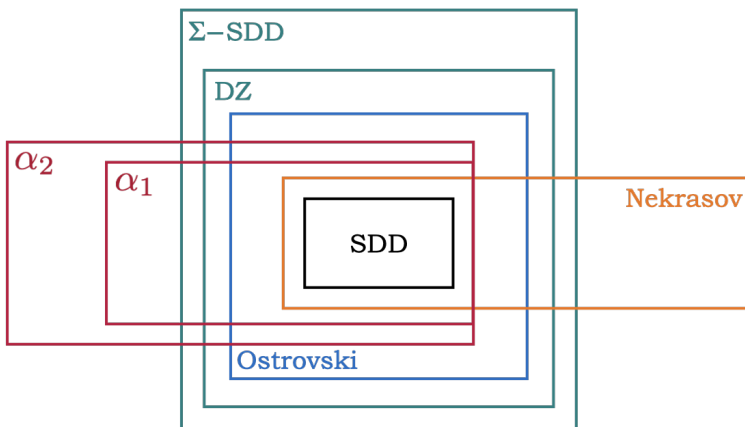
**TEOREMA 13** Matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , zove se  $\alpha_2$  matrica ako i samo ako su istovremeno ispunjeni sledeći uslovi:

(i)  $|a_{ii}| > \min\{r_i(A), c_i(A)\}$ , za svako  $i \in N$ ,

(ii)

$$\log_{\frac{r_i(A)}{c_i(A)}} \frac{|a_{ii}|}{c_i(A)} > \log_{\frac{c_j(A)}{r_j(A)}} \frac{c_j(A)}{|a_{jj}|},$$

za svako  $i \in \mathcal{R}$  takvo da je  $c_i(A) \neq 0$  i svako  $j \in \mathcal{C}$  za koje je  $r_j(A) \neq 0$ .



Slika 1.2: Međusobni odnos raznih potklasa  $H$ -matrica.

Sa namerom vizuelne retrospektive, ilustracija prezentovanih pravaca uopštenja svojstva stroge dijagonalne dominacije i potklasa  $H$ -matrica koje su tom prilikom nastale, prikazana je slikom 1.2. Zelenom bojom označene su klase nastale u pravcu particije indeksnog skupa, plava boja odgovara multiplikativnom, narandžasta rekurentnom pristupu, dok crvena korespondira ideji kombinacije suma vrsta i kolona.

## 1.4 Blok $H$ -matrice

Potreba za konceptom blok matrica opravdana je činjenicom da mnogi aplikativni problemi u raznim sistemima u startu poseduju specijalne strukture, koje govore u prilog međudejstava unutar pojedinačnih funkcionalnih grupa, kao i interakcije grupa u celini (strukturirane mreže). Ako tome dodamo i visoku dimenzionalnost ovakvih sistema, mogućnost iznalaženja postupka kojim bi se problem "optimizovao" u smislu radne dimenzije i prilagodio računskim kapacitetima bez gubitka informacija koje su u njemu sadržane, opredeljenje za ovu tematiku biva još veće. Da je pristup putem particije neizostavni rezultat i teorijskih okvira ilustruje činjenica da rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina primenom postupaka diskretizacije, metodama konačnih elemenata ili konačnih razlika, takođe implicira blokovski oblik.

S obzirom da teorijski okvir ove disertacije i njenih rezultata počiva na konceptu dijagonalne dominacije, pođimo od prve generalizacije u svetlu blok slučaja koje su se desile u drugoj polovini 20. veka, [96, 43, 45].

Neka je  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ . Pod uslovom da nenegativni brojevi  $\pi_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, \ell\} =: L$ , ispunjavaju uslov

$$\pi_0 := 0 < \pi_1 < \pi_2 < \dots < \pi_\ell := n,$$

kolekciju  $\pi = \{\pi_j\}_{j=0}^\ell$  zovemo *particijom* indeksnog skupa posmatrane matrice. Njena upotreba omogućava strukturalnu podelu matrice  $A$  na  $\ell \times \ell$  blokova,

$$A = \left[ \begin{array}{c|c|c|c} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,\ell} \\ \hline A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,\ell} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{\ell,1} & A_{\ell,2} & \cdots & A_{\ell,\ell} \end{array} \right] = [A_{i,j}]_{\ell \times \ell}, \quad (1.10)$$

pri čemu su  $A_{i,j} \in \mathbb{C}^{\pi_i - \pi_{i-1}, \pi_j - \pi_{j-1}}$ , za svako  $i, j \in L$ . Jedan specijalan slučaj particije je izbor singltona (tačkast slučaj),  $\pi^0 = \{0, 1, \dots, n\}$ , za koji je  $L = N$ .

Za proizvoljno  $p \geq 1$ , funkcionalu  $\|\cdot\|_p$  na prostoru  $\mathbb{C}^n$  zovemo *vek-*

torska  $p$ -norma i definišemo na sledeći način

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left( \sum_{i \in N} |x_i|^p \right)^{1/p}, \text{ za svako } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n.$$

Sa druge strane, funkcionala  $\|\cdot\|_p$  na prostoru  $\mathbb{C}^{m,n}$  data sa

$$\|A\|_p := \sup_{\mathbf{y} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{y}\|_p}{\|\mathbf{y}\|_p} = \max_{\|\mathbf{y}\|_p=1} \|A\mathbf{y}\|_p, \text{ za svako } A \in \mathbb{C}^{m,n}, \quad (1.11)$$

predstavlja *matričnu  $p$ -normu indukovanu vektorskom  $p$ -normom*. Specijalno,  $\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{i \in N} |x_i|$  i  $\|A\|_\infty = \max_{i \in M} \sum_{j \in N} |a_{ij}|$ . Dodatno, restrikcijom na prostor  $\mathbb{C}^{n,n}$ , može se pokazati da je

$$\|A^{-1}\|_p^{-1} = \inf_{\mathbf{y} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{y}\|_p}{\|\mathbf{y}\|_p} = \min_{\|\mathbf{y}\|_p=1} \|A\mathbf{y}\|_p, \text{ za svako } A \in \mathbb{C}^{n,n},$$

uz napomenu da za singularne matrice ovu veličinu smatramo jednakom 0.

Poznato je da za nenegativne matrice  $p$ -norma ispunjava svojstvo *monotonosti*, [73].

**LEMA 5** Za svake dve matrice  $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$  i preslikavanje (1.11) važi implikacija

$$O \leq A \leq B \implies \|A\|_p \leq \|B\|_p.$$

U istom radu [73] dokazali smo sledeću korisnu relaciju.

**LEMA 6** Za svaku matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi

$$\|A\|_p \leq \|N_\pi^{(p)}(A)\|_p,$$

gde je

$$N_\pi^{(p)}(A) = \begin{bmatrix} \|A_{1,1}\|_p & \|A_{1,2}\|_p & \cdots & \|A_{1,\ell}\|_p \\ \|A_{2,1}\|_p & \|A_{2,2}\|_p & \cdots & \|A_{2,\ell}\|_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \|A_{\ell,1}\|_p & \|A_{\ell,2}\|_p & \cdots & \|A_{\ell,\ell}\|_p \end{bmatrix}.$$

**DOKAZ:** Zaista, polazeći od definicije  $p$ -norme, znamo da postoji vektor  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , takav da je  $\|\mathbf{x}\|_p = 1$  i  $\|A\|_p = \|A\mathbf{x}\|_p$ . Ako zapišemo uočeni vektor spram particije  $\pi$  kao  $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_\ell]^T$ , tada je

$$\begin{aligned} \|A\|_p^p &= \|A\mathbf{x}\|_p^p = \left\| \begin{bmatrix} \sum_{j \in L} A_{1,j} \mathbf{x}_j \\ \vdots \\ \sum_{j \in L} A_{\ell,j} \mathbf{x}_j \end{bmatrix} \right\|_p^p = \sum_{i \in L} \left\| \sum_{j \in L} A_{i,j} \mathbf{x}_j \right\|_p^p \\ &\leq \sum_{i \in L} \left( \sum_{j \in L} \|A_{i,j}\|_p \|\mathbf{x}_j\|_p \right)^p = \sum_{i \in L} \left( N_\pi^{(p)}(A) \begin{bmatrix} \|\mathbf{x}_1\|_p \\ \vdots \\ \|\mathbf{x}_\ell\|_p \end{bmatrix} \right)_i^p \\ &\leq \max_{\|\mathbf{y}\|_p=1} \sum_{i \in L} \left| \left( N_\pi^{(p)}(A) \mathbf{y} \right)_i \right|^p = \max_{\|\mathbf{y}\|_p=1} \|N_\pi^{(p)}(A) \mathbf{y}\|_p^p = \|N_\pi^{(p)}(A)\|_p^p. \end{aligned}$$

△

**DEFINICIJA 17** Za matricu  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$  njoj blok pridružena matrica spram particije  $\pi$  i matične  $p$ -norme, u oznaci  $\langle A \rangle_\pi^{(p)} := [m_{ij}] \in \mathbb{R}^{\ell,\ell}$ , definisana je sa

$$m_{ij} := \begin{cases} \|A_{i,i}^{-1}\|_p^{-1}, & i = j, \\ -\|A_{i,j}\|_p, & i \neq j. \end{cases}$$

Prethodna definicija, osim smanjenja dimenzije i garantovanog  $Z$  oblika, predstavlja način da klasa  $H$ -matrica (i njene potklase) dobiju odgovarajuće blok analogone. U slučaju da je neki od dijagonalnih blokova  $A_{ii}$  singularan, tada je  $m_{ii} = 0$ .

Matrica  $\langle A \rangle_\pi^{(p)}$  se u relevantnim izvorima [26, 27] zove *prva pridružena matrica* i potiče iz Vargine monografije [116], jer osim ovog postoji još jedan način formiranja takozvane *druge pridružene matrice*, koji je predložio Fransoa Rober (François Robert), [103]. Mi ćemo se zadržati samo na prvom obliku.

Za proizvoljnu "tačkastu" klasu  $\mathbb{K}$  matrica, označimo sa  $B_\pi^{(p)} \mathbb{K}$  klasu blok matrica, definisanu na sledeći način.

**DEFINICIJA 18** Matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  je  $B_\pi^{(p)}\mathbb{K}$  matrica ako i samo ako  $\langle A \rangle_\pi^{(p)}$  pripada klasi  $\mathbb{K}$  matrica.

Prema tome, birajući za  $\mathbb{K}$  ma koju od prethodno razmatranih (pot)klasa  $H$ -matrica, direktna posledica ove definicije je svojstvo monotonosti,

$$\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \implies B_\pi^{(p)}\mathbb{K}_1 \subseteq B_\pi^{(p)}\mathbb{K}_2.$$

Međutim, iako odnos između potklasa blok  $H$ -matrica korespondira onom u tačkastom slučaju, odnos blok i njoj odgovarajuće tačkaste klase unapred nije poznat. O tome svedoče sledeći primeri. Naime, matrica

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

nije SDD, ali izborom particije  $\pi = \{0, 2, 4\}$  nalazimo

$$\langle A_{12} \rangle_{\{0,2,4\}}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.2500 \\ -0.2500 & 0.3333 \end{bmatrix}$$

koja to jeste. Sa druge strane, matrica

$$A_{13} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 6 & 10 & 3 \\ 0.1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

jeste SDD, ali njene pridružene matrice u normi beskonačno to nisu ni za jednu netrivialnu particiju,

$$\langle A_{13} \rangle_{\{0,1,3\}}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -6 & 3.9231 \end{bmatrix}, \quad \langle A_{13} \rangle_{\{0,2,3\}}^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 4.8571 & -5 \\ -3.1 & 6 \end{bmatrix}.$$

U nastavku navodimo blok analogon Teoreme 3, koji su dokazali Dejvid Frajngold (David Freingold) i Varga, Teoremom 1 u [45].

**TEOREMA 14** Ako je za uočenu particiju  $\pi = \{\pi_j\}_{j=0}^\ell$  i  $p \geq 1$  matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  u klasi  $B_\pi^{(p)}$  SDD, tada je ona regularna.

Najširi skup blok matrica koji razmatramo je klasa  $B_\pi^{(p)}H$ -matrica, čija su esencijalna svojstva, po ugledu na tačkasti slučaj (Teorema 5), data tvrdjenjem u nastavku, a dokazali smo ih u [73].

**TEOREMA 15** *Ako je za uočenu particiju  $\pi = \{\pi_j\}_{j=0}^\ell$  i  $p \geq 1$  matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  u klasi  $B_\pi^{(p)}H$ , tada je ona regularna i važi*

$$\|A^{-1}\|_p \leq \|(\langle A \rangle_\pi^{(p)})^{-1}\|_p. \quad (1.12)$$

**DOKAZ:** Neka je  $\pi$  particija indeksnog skupa koja matricu  $A$  čini  $B_\pi^{(p)}H$ -matricom. Prema tome,  $\langle A \rangle_\pi^{(p)}$  je  $H$ -matrica što znači da postoji pozitivna dijagonalna matrica  $X \in \mathbb{R}^{\ell,\ell}$ ,  $X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_\ell)$ , za koju je  $\langle A \rangle_\pi^{(p)}X$  SDD matrica. Međutim, ako definišemo blok dijagonalnu matricu  $\tilde{X} \in \mathbb{R}^{n,n}$  kao

$$\tilde{X} = \text{diag}(X_1, X_2, \dots, X_\ell), \quad X_i = x_i E_{m_i}, \quad i \in L,$$

gde su  $E_{m_i}$  jedinične matrice reda  $m_i = \pi_i - \pi_{i-1}$ , lako se proverava da je  $\langle A\tilde{X} \rangle_\pi^{(p)} = \langle A \rangle_\pi^{(p)}X$ , odakle sledi da je  $A\tilde{X}$   $B_\pi^{(p)}$  SDD matrica, što implicira regularnost matrice  $A$ .

Za potrebe dokaza relacije (1.12), najpre pokazujemo da važi

$$N_\pi^{(p)}(A^{-1}) \leq (\langle A \rangle_\pi^{(p)})^{-1}, \quad (1.13)$$

imajući u vidu pripadnost matrice  $A$  klasi  $B_\pi^{(p)}H$ . S tim u vezi, posmatrajući istu particiju  $\pi$ , označimo sa  $B_{ij}$  element u  $i$ -toj blok vrsti i  $j$ -toj blok koloni matrice  $A^{-1}$ , tj.  $A^{-1} = [B_{i,j}]_{\ell \times \ell}$ . Iz  $A^{-1}A = E$  očigledno sledi da je

$$\left\| \sum_{j \in L} B_{i,j} A_{j,k} \right\|_p = \begin{cases} 1 & , \quad i = k \\ 0 & , \quad i \neq k \end{cases}.$$

Na osnovu

$$\left\| \sum_{j \in L} B_{i,j} A_{j,k} \right\|_p \geq \|B_{i,k} A_{k,k}\|_p - \sum_{j \in L \setminus \{k\}} \|B_{i,j} A_{j,k}\|_p \geq$$

$$\begin{aligned} &\geq \|B_{i,k}A_{k,k}\|_p \|A_{k,k}^{-1}\|_p \|A_{k,k}^{-1}\|_p^{-1} - \sum_{j \in L \setminus \{k\}} \|B_{i,j}\|_p \|A_{j,k}\|_p \geq \\ &\geq \|B_{i,k}\|_p \|A_{k,k}^{-1}\|_p^{-1} - \sum_{j \in L \setminus \{k\}} \|B_{i,j}\|_p \|A_{j,k}\|_p, \end{aligned}$$

imamo

$$\|B_{i,k}\|_p \|A_{k,k}^{-1}\|_p^{-1} - \sum_{j \in L \setminus \{k\}} \|B_{i,j}\|_p \|A_{j,k}\|_p \leq \begin{cases} 1 & \text{za } i = k \\ 0 & \text{za } i \neq k \end{cases},$$

odnosno,

$$\begin{bmatrix} \|B_{1,1}\|_p & \|B_{1,2}\|_p & \cdots & \|B_{1,\ell}\|_p \\ \|B_{2,1}\|_p & \|B_{2,2}\|_p & \cdots & \|B_{2,\ell}\|_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \|B_{\ell,1}\|_p & \|B_{\ell,2}\|_p & \cdots & \|B_{\ell,\ell}\|_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|A_{1,1}^{-1}\|_p^{-1} & -\|A_{1,2}\|_p & \cdots & -\|A_{1,\ell}\|_p \\ -\|A_{2,1}\|_p & \|A_{2,2}^{-1}\|_p^{-1} & \cdots & -\|A_{2,\ell}\|_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\|A_{\ell,1}\|_p & -\|A_{\ell,2}\|_p & \cdots & \|A_{\ell,\ell}^{-1}\|_p^{-1} \end{bmatrix} \leq E,$$

ili, drugim rečima,

$$N_{\pi}^{(p)}(A^{-1}) \langle A \rangle_{\pi}^{(p)} \leq E. \quad (1.14)$$

Nakon množenja (1.14) sa  $(\langle A \rangle_{\pi}^{(p)})^{-1}$  (koja je nenegativna, budući da je  $A$  u klasi  $B_{\pi}^{(p)}H$ ), dobijamo (1.13). Za kraj, na osnovu rezultata Leme 6 primenjene na matricu  $A^{-1}$  i monotonosti matrice  $p$ -norme primenjene na nejednakost (1.13), tvrđenje sledi.  $\triangle$

Skrećemo pažnju da relacija (1.12) predstavlja okosnicu rezultata u vezi sa ocenom matrice  $p$ -norme inverza raznih potklasa  $B_{\pi}^{(p)}H$ -matrica.





# Dinamički sistemi

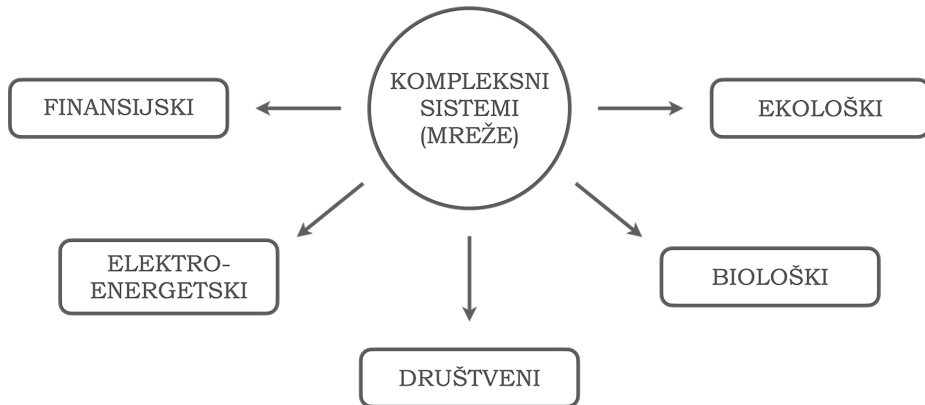
*"E pur si muove."*  
GALILEO GALILEI

U ovom poglavlju prezentujemo opšti koncept dinamičkog sistema kao i kriterijume spram kojih se isti mogu klasifikovati. Pri tome, skrećemo pažnju da primarni cilj nije formalni doprinos teorijskim rezultatima u oblasti dinamičkih sistema, već bolje razumevanje dinamičkih svojstava koje ćemo u narednim poglavljima analizirati u terminima *osobina* odgovarajućih *matrica* primenom kako poznatih tako i razvijenih alata numeričke linearne algebre.

## 2.1 Matematički model i klasifikacija

Svaki fizički sistem čija su stanja podložna promenama u vremenu reprezentuje dinamički sistem. S obzirom da smo i sami deo materijalnog sveta koji je u stalnoj metamorfozi, primeri ovakvih kompleksnih sistema su izdašni, a uključuju prirodne, ali i društvene fenomene koji evoluiraju u vremenu, u šarolikom prostornom dijapazonu - od makro (kretanje planeta) pa do mikro nivoa (međudejstva mikroorganizama). Pri tome, sudejstva su vrlo često - osim unutar same celine (intra-reakcije), praćena i veoma složenom komunikacijom sa ostalim sistemima iz bliže ili dalje okoline (inter-reakcije), pa je jasno da je reč o *kompleksnim* sistemima, čiji su primeri ilustrovani Slikom 2.1.

Uočimo proizvoljan fizički sistem (entitet, jedinka ili celina) i neki trenutak vremena  $t \in \mathbb{R}$ . Tada je "položaj" ovog sistema, odnosno njegovo



Slika 2.1: Primeri kompleksnih mreža.

stanje koje ga određuje, definisano vektorom stanja sistema u trenutku  $t$ :

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T, \quad (2.1)$$

čije komponente  $x_i(t)$ ,  $i \in N$  u najjednostavnijem slučaju odgovaraju nekoj fizičkoj karakteristici sistema koju je moguće kvantifikovati. Ako je opservacija započela u trenutku  $t = 0$ , tada je *vremenski domen*  $T$  skup svih trenutaka u kojima su registrovane vrednosti svake komponente vektora (2.1). Prema tome, komponente  $x_i(t)$ ,  $i \in N$  je prirodno tretirati kao skalarne funkcije jedne realne promenljive na vremenskom domenu  $T$ . Promene kojima je sistem (to jest njegova stanja) izložen prate izvesne zakonitosti koje povezuju elemente skupa mogućih stanja i zovu se *upravljajuće jednačine*. Ako se ponašanje sistema registruje u diskretnim trenucima vremena, tada one odgovaraju rekurentnim relacijama između stanja sistema u dve susedne vremenske tačke,

$$x_i(t+1) - x_i(t) = \Phi_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad i \in N, \quad (2.2)$$

dok tretmanom vremena kao neprekidne kategorije zakonitosti otkrivaju brzinu promene stanja  $x_i(t)$  tokom vremena, to jest

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \quad i \in N. \quad (2.3)$$

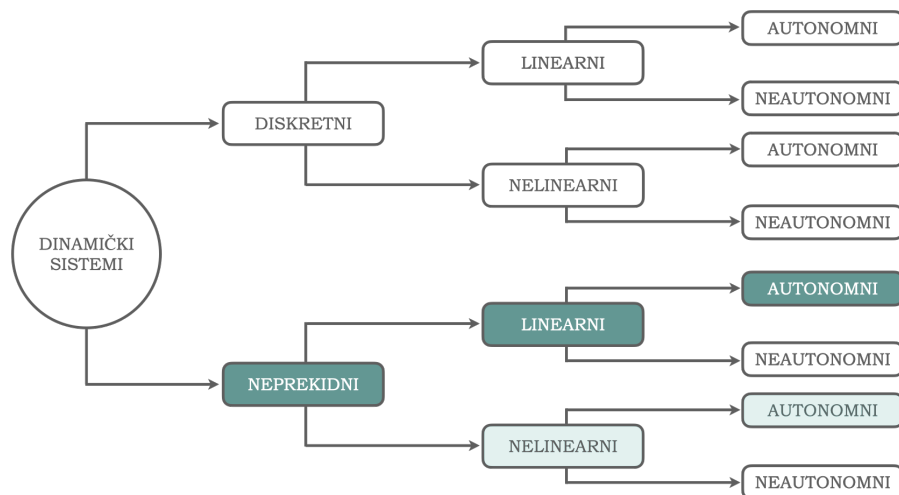
Dakle, *dinamički sistem* je zapravo kolekcija ovih zakonitosti (pravila) po kojima do promena dolazi, a jednačine (2.2) odnosno (2.3) na domenu  $T$

opisuju *evoluciju sistema*. Pri tome, dinamički sistemi (2.2) predstavljeni sistemom diferencnih jednačina zovu se *diskretni*, nasuprot *neprekidnih* (2.3) definisanih sistemom običnih diferencijalnih jednačina prvog reda sa  $n$  nepoznatih funkcija. Mi ćemo se, od sad pa na dalje, baviti isključivo dinamičkom analizom poslednjih.

Uz oznake  $\dot{\mathbf{x}} = [\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n]^T$  i  $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]^T$ , sistem jednačina (2.3) postaje

$$\dot{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{x}(t)). \quad (2.4)$$

Ako su sve komponente vektora  $\Phi$  linearne funkcije po svim stanjima  $x_i$ , tada je sistem (2.4) *linearan*, u suprotnom je *nelinearan*. U slučaju da se upravljajuće zakonitosti  $\Phi_i$  ne menjaju protokom vremena govorimo o dinamičkim sistemima invarijantnim u vremenu (*autonomni sistemi*).



Slika 2.2: Razni kriterijumi klasifikacija dinamičkih sistema.

Sa stanovišta dinamičke analize, od svih stanja sistema posebnu pažnju privlače ona koja kada se jednom postignu, sistem u njima ostaje. Takva stanja zovu se *ravnotežna stanja* ili *ekvilibrijumi*. Dakle, stanje  $\mathbf{x}^*$  je ekvilibrijum dinamičkog sistema (2.4) ako i samo ako je brzina promene u toj tački po svim komponentama jednaka nuli, što je ekvivalentno sa  $\Phi(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ .

Iako je linearnost "elegantnija" za matematičku analizu, nelinearnost predstavlja precizniji alat za opis "realnog stanja stvari", ali isto tako i izvor potencijalnih izazova koji mogu da nastanu u tretmanu problema. Sa stanovišta dinamičke analize, ponašanje kompleksnih sistema nas naj-

češće interesuje na nekoj (dovoljno maloj) okolini ekvilibrijuma. Standardna tehnika za analizu lokalnog ponašanja je tehnika *linearizacije*, odnosno aproksimacije modela linearnim analogonom. Naime, poznato je da, uz tehničku pretpostavku o diferencijabilnosti vektorske funkcije  $\Phi$ , važi:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}^*) + A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + o(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2^2), \quad (2.5)$$

pri čemu je  $A = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$  *matrica Jakobijana* u tački  $\mathbf{x}^*$ , odnosno

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*).$$

Zbog toga ćemo u nastavku analizirati glavna dinamička svojstva linearnih autonomnih neprekidnih dinamičkih sistema oblika

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (2.6)$$

a u poglavljima koja slede dati i njihovu analizu kao i interpretaciju u smislu karakteristika matrice  $A$ .

## 2.2 Glavna dinamička svojstva

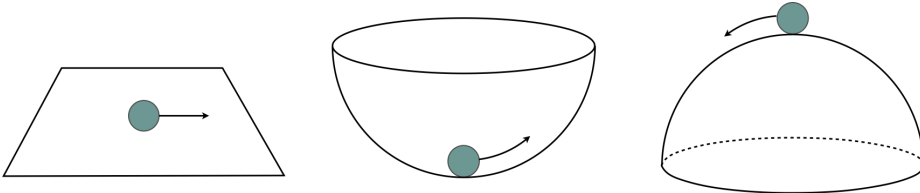
Šansu da teorija matrica, pa i teorija  $H$ -matrica nađe bitnu primenu u dinamičkoj analizi kompleksnih sistema pružio je klasični pristup njihovoj dinamičkoj analizi, tačnije njihovog ponašanja u okolini ravnotežne tačke, koji se zasniva na analizi *asimptotske stabilnosti*, koja je u literaturi poznata i pod nazivom *Ljapunov stabilnost*. Ona se sastoji u određivanju položaja karakterističnih korena *matrice* u kompleksnoj ravni i to matrice sistema za linearne, odnosno Jakobijana u ravnotežnoj tački za nelinearne dinamičke sisteme. Međutim, isto tako se zna da su zaključci izvedeni isključivo na osnovu informacija iz spektra pre svega asimptotske prirode, što znači da mogu iziskivati duge vremenske okvire realizacije. Šta više, u momentu kada dinamički sistem generiše funkcionalni odgovor na tekuće promene postoji mogućnost takozvanog *tranzicionog ponašanja*, koje može ugroziti integritet sistema ili nepovratno izmeniti njegovu strukturu, pa time staviti pod znak pitanja validnost izvedene očekivane asimptotske prognoze.

U nastavku se upoznajemo sa osnovnim dinamičkim svojstvima kompleksnih sistema i njihovim fizičkim interpretacijama.

### 2.2.1 Stabilnost

Stabilnost kompleksnih sistema jedna je od nezaobilaznih stanica na putu njihove dinamičke analize i inspirativna tema, na konto koje su upečatljive doprinose, između ostalih, dali Žozef-Luj Lagranž (Joseph-Louis Lagrange) (1788) proučavanjem mehaničkih sistema i Džejms Klark Maksvel (James Clerk Maxwell) (1868) koji je aparatom diferencijalnog računa opisao ponašanje centrifugalnog regulatora i formulisao kriterijum o stabilnosti njegove linearizovane aproksimacije na osnovu položaja karakterističnih korena odgovarajuće matrice. Pa ipak, najveći doprinos razvoju teorije stabilnosti dao je Aleksandr Ljapunov (Aleksandr Lyapunov) svojom doktorskom tezom (1892) pod nazivom "Opšti problem stabilnosti kretanja" u kojoj je precizno definisao koncept stabilnosti kako za linearne, tako i za nelinearne sisteme.

Ako je  $\mathbf{x}^*$  ekvilibrijum dinamičkog sistema (2.6), interesuje nas na koji način će on odgovoriti na kontrolisane "šokove" iz spoljašnje sredine. Moguće slučajeve najbolje ćemo razumeti ako ekvilibrijum zamislimo kao lopticu postavljenu u tri moguća specifična slučaja, kao na Slici 2.3.



Slika 2.3: Vrste ekvilibrijuma: neutralan (levo), stabilan (u sredini) i nestabilan (desno).

Dakle, ako je ravnotežna tačka takva da odoleva uticaju perturbacija, tada govorimo o *neutralnom* ekvilibrijumu (slika levo). Kapacitet ravnotežne tačke da se u konačnom vremenu umiri i vrati u prvobitno stanje govori u prilog njene *stabilnosti* (slika u sredini). U suprotnom, infinitezimalna promena ireverzibilno će izmeniti stanje sistema i tada je reč o *nestabilnom* ekvilibrijumu (slika desno).

Ako je  $\mathbf{x}$  proizvoljna tačka u prostoru  $\mathbb{R}^n$ , tada za proizvoljnu vektorsku normu  $\|\cdot\|$  i pozitivan broj  $\delta$ , skup svih tačaka koje su od uočene tačke na udaljenosti manjoj od  $\delta$  predstavlja njenu  $\delta$ -okolinu,

$$\mathcal{O}_\delta(\mathbf{x}) := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < \delta\}.$$

U nastavku navodimo precizne definicije stabilnosti dinamičkog sistema

u ekvilibrijumu, kao i njenih specijalnih oblika.

DEFINICIJA 19 *Dinamički sistem je u ekvilibrijumu  $\mathbf{x}^*$  :*

- **stabilan** ako svaka trajektorija  $\mathbf{x}(t)$  koja počne u  $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{x}^*)$  ostaje u  $\mathcal{O}_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ , odnosno

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \mathbf{x}(0) : \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon, t > 0),$$

- **asimptotski stabilan** pod uslovom da svaka trajektorija  $\mathbf{x}(t)$  koja počne u  $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{x}^*)$  teži da se vrati u  $\mathbf{x}^*$ , to jest ako je stabilan i važi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0,$$

- **eksponencijalno stabilan** ako svaka trajektorija  $\mathbf{x}(t)$  koja počne u  $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{x}^*)$  teži da se vrati u  $\mathbf{x}^*$  eksponencijalnom brzinom, odnosno ako je asimptotski stabilan i postoje konstante  $M > 0$  i  $K > 0$  takve da važi sledeća implikacija

$$\forall \mathbf{x}(0) : \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| < Me^{-Kt}\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\|, t > 0.$$

Ilustracije ovih definicija prikazane su na Slici 2.4. Ako sa  $\mathbb{C}^-$  označimo otvorenu levu poluravan kompleksne ravni,

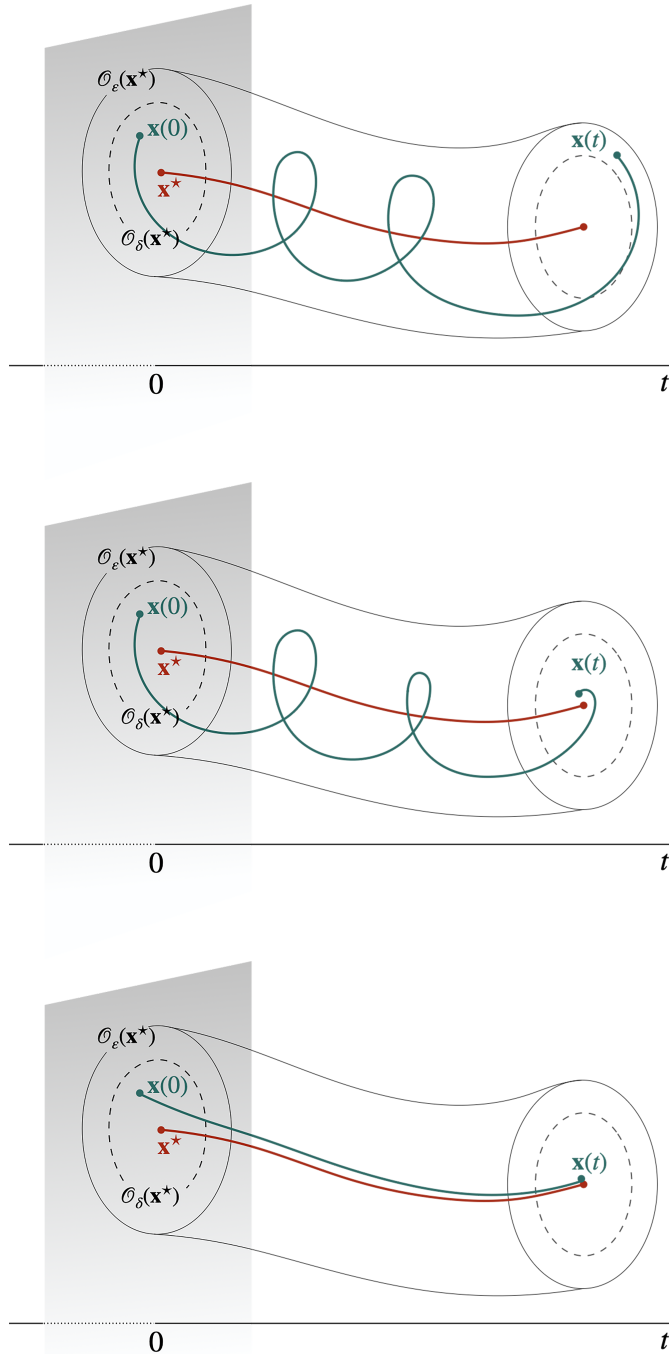
$$\mathbb{C}^- := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) < 0\},$$

tada je moguće definisati pojam *stabilnih* matrica.

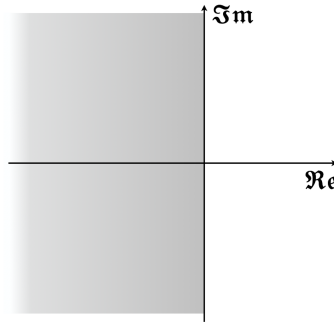
DEFINICIJA 20 *Matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  je stabilna ako su realni delovi svih njenih karakterističnih korena negativni.*

$$A_{14} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{15} = \begin{bmatrix} -1 & 21 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dakle, ispunjenost inkluzije  $\Lambda(A) \subseteq \mathbb{C}^-$ , pri čemu je sa  $\Lambda(A)$  označen spektar matrice  $A$ , odnosno skup svih njenih karakterističnih korena, definiše stabilnost matrice  $A$ , što je potreban i dovoljan uslov za (asimptotsku) stabilnost kontinualnog linearnog autonomnog dinamičkog sistema oblika (2.6). Budući da matrice  $A_{14}$  i  $A_{15}$  imaju sve korene u  $\mathbb{C}^-$ , možemo zaključiti da su one stabilne, a ovde smo ih naveli radi kasnijeg poređenja.



Slika 2.4: Tipovi stabilnosti: klasična (gore), asimptotska (u sredini) i eksponencijalna (dole).



Slika 2.5: Region asimptotske (Ljapunov) stabilnosti kontinualnih dinamičkih sistema je skup  $\mathbb{C}^-$ .

### 2.2.2 Rastojanje do nestabilnosti

Izučavajući problem stabilnosti matrica i dinamičkih procesa koje one opisuju, Čarls Van Loan (Charles Van Loan) je u [112] istakao da za stabilne matrice takve da im je najdešnji koren veoma blizu imaginarne ose, uticaj kontrolisanih perturbacija ima potencijal da posmatranu matricu učini nestabilnom, i time se dotakao teme *robustne stabilnosti*. Ipak, osvrćući se na ovu konstataciju, Nik Trefeten (Nick Trefethen) i Mark Embri (Mark Embree) [111] podsećaju da čak i kada su koreni matrice u  $\mathbb{C}^-$  i svi veoma daleko od imaginarne ose, to ne znači da je matrica *daleko od nestabilnosti*, osim - ako poseduje svojstvo normalnosti, o kojoj će biti reči kasnije. Godinu dana nakon publikacije Van Loana, Diderih Hinrichsen (Diederich Hinrichsen) i Entoni Pričard (Anthony Pritchard) u svojoj studiji [59] nude nezavisnu analizu ove tematike, a u nameri da kvantifikuju rastojanje do nestabilnosti, najpre uvode pojam *kolekcije kompleksnih nestabilnih matrica* reda  $n$  :

$$\mathcal{N}_n := \{K \in \mathbb{C}^{n,n} : \Lambda(K) \cap \overline{\mathbb{C}^+} \neq \emptyset\},$$

pri čemu je  $\overline{\mathbb{C}^+} := \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) \geq 0\}$ , zatvorena desna poluravan kompleksne ravni.

**DEFINICIJA 21** Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i proizvoljnu matričnu normu  $\|\cdot\|$ , veličina

$$\delta(A) := \inf\{\|K - A\| : K \in \mathcal{N}_n\} \tag{2.7}$$

zove se *rastojanje do nestabilnosti (radijus stabilnosti) matrice A*.



Drugim rečima,  $\delta(A)$  predstavlja najkraću distancu matrice  $A$  od skupa  $\mathcal{N}_n$ , merenu matricnom normom  $\|\cdot\|$ . Izračunavanje ove veličine tematski pripada oblasti *robustne kontrole*, a naročiti interes je probudilo tokom osamdesetih godina prošlog veka [10, 58, 57, 44, 53], koje za cilj ima razumevanje ponašanja dinamičkog sistema (2.6) i njemu odgovarajućeg evolucionog procesa  $e^{tA}$ .

## 2.3 Ostala dinamička svojstva

Ako pretpostavimo da je potrebno rešiti sistem oblika (2.6) uz početni uslov  $\mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0)$ , tada trajektorija koja rešava odgovarajući početni problem glasi

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}(0), \quad t \geq 0.$$

odakle primenom proizvoljne vektorske norme na obe strane jednakosti možemo izvesti sledeći zaključak

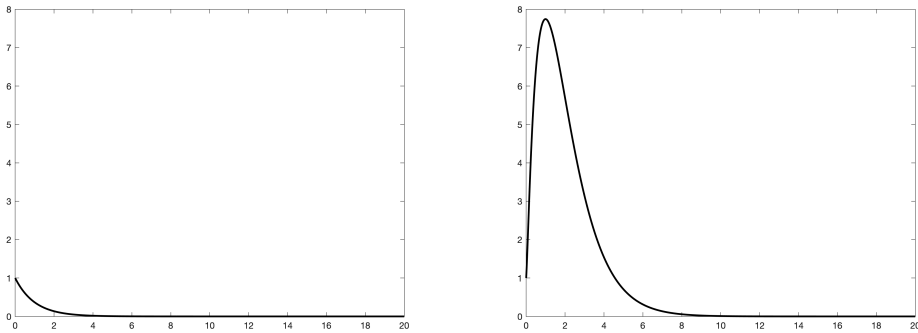
$$\frac{\|\mathbf{x}(t)\|}{\|\mathbf{x}(0)\|} \leq \|e^{tA}\|, \quad t \geq 0.$$

Štaviše,

$$\sup_{\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{x}(t)\|}{\|\mathbf{x}(0)\|} = \sup_{\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{0}} \frac{\|e^{tA}\mathbf{x}(0)\|}{\|\mathbf{x}(0)\|} = \|e^{tA}\| =: \phi_A(t), \quad t \geq 0. \quad (2.8)$$

Preslikavanje  $\phi_A(t)$  nosi naziv *funkcija evolucije* dinamičkog sistema (2.6) određenog matricom  $A$  i proizvoljnom matricnom normom  $\|\cdot\|$ , a njen grafik zove se *amplifikacioni omotač* koji je prikazan za dve test matrice  $A_{14}$  i  $A_{15}$  Slikom 2.6. Amplifikacioni omotač u trenutku  $t$  predstavlja maksimalnu amplifikaciju (relativni odnos stanja meren vektorskom  $p$ -normom) koju proizvoljna perturbacija može da proizvede.

Nakon analize Slike 2.6, možemo zaključiti da dinamički sistemi opisani matricama  $A_{14}$  i  $A_{15}$  postižu asimptotsku stabilnost, s jasnom razlikom u pogledu karaktera početnih odgovora. Dok prvi sistem na poremećaj ravnoteže gotovo da i ne reaguje (u smislu jasne tendencije postepenog umirivanja), drugi sistem ima značajniju (ali ipak kontrolisanu) reakciju na uticaj "spoljašnjeg šoka".



Slika 2.6: Amplifikacioni omotač u Euklidskoj normi ( $\phi_A^{(2)}(t)$ ) za matricu  $A_{14}$  (levo) i matricu  $A_{15}$  (desno).

### 2.3.1 Vreme povratka i rezilijentnost

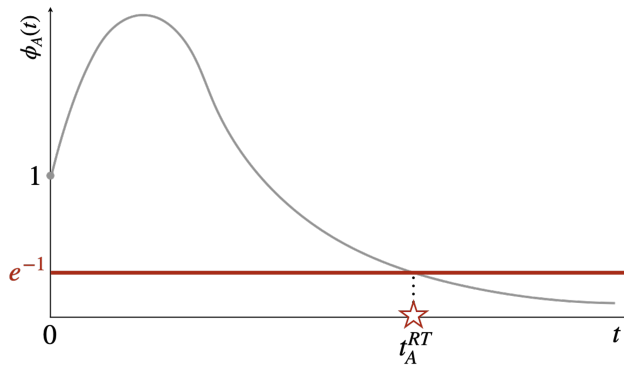
Pretpostavimo da je sistem u ravnotežnom stanju  $\mathbf{x}^*$  i da je u trenutku  $t = 0$  perturbovan u smislu da je prešao u novo stanje  $\mathbf{x}(0) \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{x}^*)$ . U slučaju asimptotske stabilnosti, osim što znamo da će se sistem u nekom trenutku opet naći u dovoljno maloj okolini ekvilibrijuma i time povratiti inicijalnu stabilnost, sa stanovišta prakse je korisno imati predstavu koje je to najkraće vreme za koje se sistem relativno stabilizuje. Kao jedna takva mera koristi se veličina

$$t_A^{RT} := \min \left\{ t > 0 : \max_{\mathbf{x}(0) \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{x}^*) \setminus \{\mathbf{x}^*\}} \frac{\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\|} \leq e^{-1} \right\},$$

koja se zove *vreme povratka* (*return time*) u ravnotežno stanje  $\mathbf{x}^*$  i po konvenciji ono odgovara prvom trenutku  $t$  u kojem je najveća relativna promena stanja po svim mogućim inicijalnim perturbovanim stanjima iz  $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{x}^*)$  ispod  $e^{-1}$ . Uz odgovarajuću smenu (translaciju) stanja, iz (2.8) možemo zaključiti i da je

$$\phi_A(t) = \max_{\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{x}^*} \frac{\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\|}, \quad t \geq 0,$$

odakle je  $t_A^{RT} := \min\{t > 0 : \phi_A(t) \leq e^{-1}\}$ , što je ilustrovano na Slici 2.7. S obzirom da je prethodna veličina zavisna od norme za koju se opredelimo, moguće je definisati i *vreme povratka invarijantno u odnosu na*

Slika 2.7: Vreme povratka u ravnotežno stanje ( $t_A^{RT}$ ).

normu (norm-invariant return time),

$$t_A^{NIRT} := \min \left\{ t_A^{RT} : \|\cdot\| \text{ je vektorska norma} \right\},$$

čija je recipročna vrednost poznata kao *rezilijentnost* ili *otpornost* ekvilibrijuma (na uticaje)

$$\rho_A := \frac{1}{t_A^{NIRT}}. \quad (2.9)$$

Osim što je invarijantna u pogledu izbora norme, rezilijentnost služi kao veličina koja pojačava zaključak o asimptotskoj stabilnosti ekvilibrijuma (kao i sistema na koji se odnosi). Što je stabilnost izraženija (u smislu bržeg postizanja ravnoteže nakon perturbacije), to je vreme povratka  $t_A^{NIRT}$  kraće i otpornost veća. U suprotnom, ako je sistem nestabilan (što znači da se nikada neće stabilizovati) tada vreme povratka teži beskonačnosti, a otpornost je jednaka nuli.

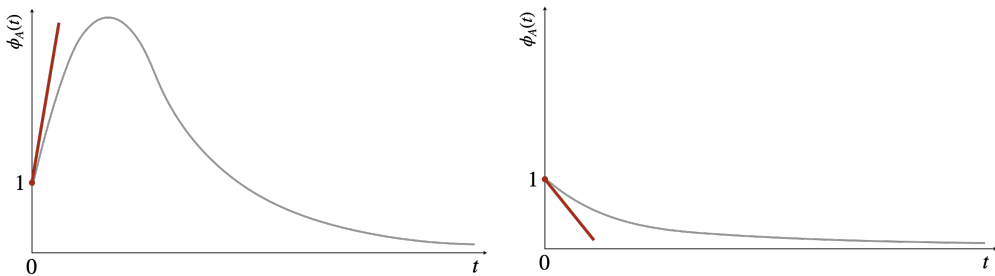
### 2.3.2 Tranziciono ponašanje i reaktivnost

Videli smo da asimptotska stabilnost ekvilibrijuma implicira njegovu otpornost na perturbacije. Međutim, sve dok se ne ispolji asimptotika, sistem tokom generisanja funkcionalnog odgovora na promenu koja je narušila njegovu ravnotežu može proći kroz različite promene, pa čak i one koje mu trajno mogu izmeniti strukturu ili staviti znak pitanja na realnu validnost asimptotske procene. Vreme koje protekne od momenta perturbacije ekvilibrijuma pa do stabilizacije predstavlja *tranzicioni pe-*

riod, a ponašanje sistema tokom istog nosi naziv *tranziciono ponašanje*. Kao kritičan momenat izdvaja se početni trenutak  $t = 0$  u kojem ima smisla pratiti brzinu promene relativne promene stanja na  $\mathcal{O}_\delta(\mathbf{x}^*)$ . Preciznije, veličina od interesa je

$$\psi_A := \frac{d^+}{dt} \left[ \max_{\mathbf{x}(0) \in \mathcal{O}_\delta(\mathbf{x}^*) \setminus \{\mathbf{x}^*\}} \frac{\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}^*\|} \right] \Big|_{t=0} = \frac{d^+}{dt} [\phi_A(t)] \Big|_{t=0}$$

i ona nosi naziv *reaktivnost* ekvilibrjuma. Sa geometrijskog aspekta, reaktivnost odgovara nagibu tangente na amplifikacioni omotač u momentu uticaja. Ako je pozitivna, ekvilibrjum je reaktivan, što znači da će doći do amplifikacije izazvane perturbacijom pre njenog smanjenja i postizanja asimptotike. U suprotnom, ravnotežna tačka je nereaktivna. Ovo je prikazano Slikom 2.8.



Slika 2.8: Reaktivan ekvilibrjum (levo) i nereaktivan ekvilibrjum (desno).

## 2.4 Model empirijskih mreža ishrane

Za model dinamičkog sistema na kojem ćemo najčešće analizirati potencijalne primene uzećemo model *empirijskih mreža ishrane*, koji je detaljno analiziran u [29]. Pod pojmom empirijske mreže ishrane podrazumeva se unija lanaca ishrane koji učestvuju u procesu prenosa energije između vrsta koje je konstituišu. Primer jednog takvog modela je empirijska trofička mreža u ekosistemu tla, koja pretpostavlja postojanje izvesnog broja funkcionalnih grupa živih organizama pored kojih postoji i određena količina nežive organske materije (detritus). Za matematički opis protoka materije i energije u takvom kompleksnom sistemu moguće je iskoristiti uopšteni Lotka-Voltera predator-plen model. Zainteresovanog čitaoca upućujemo na [88, 91, 92, 29] za detaljan i sveobuhvatan tretman ove tematike.

Uočimo grupu živih organizama u ekosistemu tla. Za jedinke koje dele slične izvore hrane, režime ishrane, karakteristike životnog veka i staništa kažemo da pripadaju istoj funkcionalnoj grupi. Neka je broj takvih grupa  $n$ . Tada je  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$  skup indeksa funkcionalnih grupa koje konstituišu datu populaciju  $\mathbf{N}$ , unutar koje model predviđa egzistenciju sledećih subpopulacija:

**P** - *proizvođači*: autotrofi koji proizvode energiju sebi i drugima (kojima služe kao hrana)

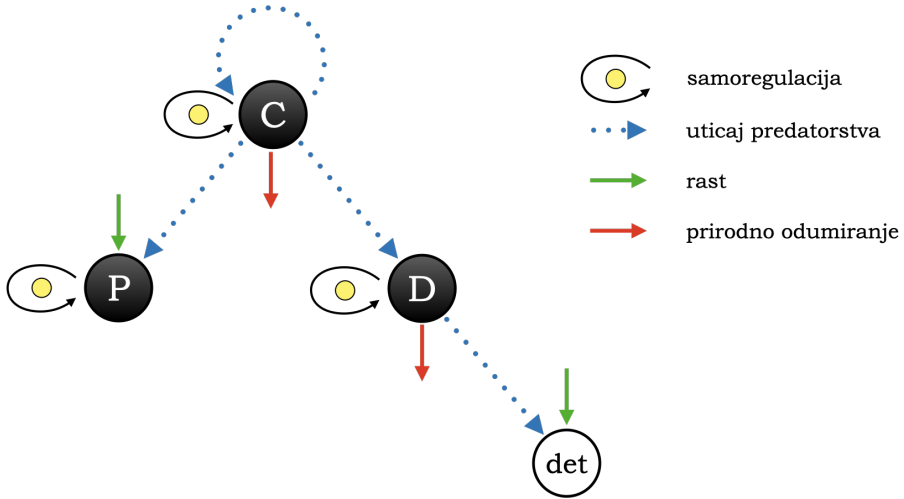
**C** - *potrošači*: heterotrofi koji nemaju sposobnost stvaranja energije, već je uzimaju ishranom

**D** - *detritivori*: heterotrofi koji se hrane detritusom (razlagači)

čije skupove indeksa označavamo sa  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{D}$ , respektivno. Prema tome,  $\mathcal{N} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ . Osim toga, u postavci je pristuan i *detritus*, to jest neživa organska materija, koji u sistem ulazi jednim delom kao postojeća biomasa, a drugim delom se stvara prirodnim odumiranjem jedinki kao i prilivom neasimilovane biomase (na primer, nesvareni ostaci hrane).

Na nivou svake funkcionalne grupe kao i između njih, odvijaju se interakcije koje obezbeđuju transfer materije i protok energije kroz sistem, što je ilustrovano Slikom 2.9.

Ako sa  $x_i(t)$ ,  $i \in \mathcal{N}$ , označimo gustinu biomase  $i$ -te grupe u trenutku  $t \geq 0$ , a sa  $x_{n+1}(t)$  onu koja odgovara detritusu tada je, prema [88], matematički model koji opisuje mehanizam njihovih međudejstava dat



Slika 2.9: Šema interakcija funkcionalnih grupa uključujući i neživu organsku materiju (detritus).

sledećim sistemom nelinearnih običnih diferencijalnih jednačina, to jest upravljajućih zakonitosti.

grupa	brzina promene gustine biomase	direktan rast	indirektan rast	prirodna smrt	direktna konzumacija od strane predatora	samoregulacija
P	$\dot{x}_i =$	$g_i x_i$			$-\sum_{j \in \mathcal{C}} f_j(x_i) x_j$	$-f_i(x_i) x_i$
C	$\dot{x}_i =$		$a_i p_i \sum_{\substack{j \in \mathcal{N} \\ j \neq i}} f_j(x_j) x_j$	$-b_i x_i$	$-\sum_{\substack{j \in \mathcal{C} \\ j \neq i}} f_j(x_i) x_j$	$-f_i(x_i) x_i$
D	$\dot{x}_i =$		$a_i p_i f_i(x_{n+1}) x_i$	$-b_i x_i$	$-\sum_{j \in \mathcal{C}} f_j(x_i) x_j$	$-f_i(x_i) x_i$
detritus	$\dot{x}_{n+1} =$	$g_d$	$\sum_{\substack{j \in \mathcal{C} \\ k \in \mathcal{N} \\ k \neq j}} (1 - a_j) f_j(x_k) x_j$	$+\sum_{j \in \mathcal{N}} b_j x_j$	$-\sum_{j \in \mathcal{D}} f_j(x_{n+1}) x_j$	
	brzina promene gustine biomase	alohton izvor	autohton izvor		direktna konzumacija od strane predatora	

Slika 2.10: Sistem nelinearnih običnih diferencijalnih jednačina koji opisuje dinamiku međudejstava funkcionalnih grupa u trofičkoj mreži ekosistema tla.

Pored toga, parametri koji učestvuju u jednačinama su sledeći:

$g_i > 0$  - stopa rasta proizvođača

$b_i > 0$  - stopa smrtnosti zbog netrofičkih razloga svih (živih) funkcionalnih grupa

$a_i \in (0, 1)$  - procenat energetske efikasnosti asimilacije

$p_i \in (0, 1)$  - procenat efikasnosti produktivnosti

$g_d \geq 0$  - stopa rasta biomase detritusa po vremenu (alohton ulaz u sistem)

$f_j(x_i)$  - funkcionalni odgovor predatora  $j$  koji opisuje kako se on adaptira promenama u gustini biomase plena,  $x_i$ .

Detaljno obrazloženje ovih veličina kao i način njihovog dobijanja iz empirijskih podataka može se pronaći u [88, 29].

Kako glavna uloga u dinamičkoj analizi pripada matrici Jakobijana izračunatoj u tački ekvilibrijuma (koja se zove i *community matrix*), ovde ćemo je samo navesti onako kako je to jednim izborom seta parametara učinjeno u [70]:

$$A_{16} = \begin{bmatrix} -6.0000 & 0 & 0 & 0 & 0.0200 & 0 & 0.0200 & 0 \\ 0 & -1.8400 & 0 & 0 & 0 & 0.0015 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.9200 & 0 & 0 & 0.0016 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.6800 & 0 & 0.0045 & 0 & 0 \\ -0.0263 & 0 & 0 & 0 & -6.0000 & 0 & 0.0101 & 0 \\ 0 & -10.5143 & -13.6558 & -12.0721 & 0 & -1.2000 & 0 & 0.9302 \\ -15.7632 & 0 & 0 & 0 & -15.7618 & 0 & -1.2000 & 0.9591 \\ 6.7895 & 7.0971 & 10.3866 & 7.5088 & 6.6331 & -2.9147 & -3.0590 & -6.2977 \end{bmatrix}.$$

## 2.5 Frakcioni dinamički sistemi

Ovu sekciju posvetićemo kratkom opisu fundamentalnih pojmova frakcionog računa, bez namere ekspanzije formalnih teorijskih rezultata u toj oblasti, već sa naglaskom na aplikativnu dimenziju dinamičke analize složenih sistema opisanih frakcionim diferencijalnim jednačinama.

Osim duge tradicije, veliki značaj frakcionog diferencijalnog računa objašnjava se frekventnim ali ništa manje uspešnim primenama u opisu i predikcijama modela tehničkih i fizičkih procesa. Razlog njihove široke upotrebe u pomenutim disciplinama, u dobroj meri jeste direktna posledica činjenice da frakcioni izvodi daju neposredne odgovore na pitanja poput naslednih osobina i istorije ponašanja dinamičkih sistema, što nije slučaj u radu sa običnim izvodima koji, u vremenskom smislu, ispoljavaju "lokalni" karakter. Drugim rečima, prednost opisa dinamičkih sistema pomoću frakcionih diferencijalnih jednačina, osim većeg stepena slobode u modelu, jeste činjenica da cela "prošlost" ima uticaj na "buduće" ponašanje. Prema tome, frakcioni izvodi, nasuprot običnim izvodima, uzimaju u obzir "istorijsku memoriju" procesa, i nisu lokalni u tom smislu. Za detaljniji pregled konceptualnih benefita koji upotreba frakcionog računa donosi, čitaocu preporučujemo studiju [101], dok se o nekim primenama novijeg datuma u oblasti modeliranja dinamike populacije može informisati u [31]. Celishodna i detaljna studija stabilnosti linearnih sistema frakcionih diferencijalnih jednačina može se naći u [93].

### 2.5.1 Frakcioni diferencijalni operatori

Prema istraživanju sprovedenom u [93], postoji nekoliko načina na koje je moguće definisati frakcioni izvod reda  $\alpha > 0$ , vidi [100, 11]. Kao što je tamo učinjeno, podsećamo se definicije Riman-Lijuvil (Riemann-Liouville) frakcionog integralnog operatora reda  $\alpha > 0$  funkcije  $f(t)$ , definisanog na sledeći način

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad \alpha > 0, t > 0.$$

Tada se, na osnovu ove definicije kao i izvoda celog reda, frakcioni izvod



funkcije  $f(t)$  u Kaputo (Caputo) smislu, definiše kao

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = D^\alpha f(t) = J^{m-\alpha} D^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{D^m f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau, \quad (2.10)$$

za  $m-1 < \alpha \leq m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  i  $t > 0$ .

## 2.5.2 Stabilnost sistema linearnih frakcionih diferencijalnih jednačina

Kao i u slučaju izvoda pozitivnog celog reda, pitanje stabilnosti ekvilibrijuma dinamičkih sistema opisanih frakcionim diferencijalnim jednačinama je od izuzetnog značaja u teoriji kontrole [93], pa je otuda ovo dinamičko svojstvo bilo predmet detaljnih analiza u više navrata, vidi [84, 35, 107, 98]. Na ovom mestu ćemo spomenuti najpoznatiju karakterizaciju stabilnosti opisanu položajem karakterističnih korena odgovarajuće matrice u kompleksnoj ravni. S tim u vezi, uočimo sledeći neprekidni autonomni sistem linearnih frakcionih diferencijalnih jednačina (SLFDJ)

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad t \geq 0, \quad (2.11)$$

u kojem  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{C}^n$ , predstavlja vektor stanja sistema sa matricom  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , dok je  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$  vektor frakcionih redova za operator izvoda

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \left[ \frac{d^{\alpha_1}}{dt^{\alpha_1}}, \frac{d^{\alpha_2}}{dt^{\alpha_2}}, \dots, \frac{d^{\alpha_n}}{dt^{\alpha_n}} \right]^T$$

zadat Kaputo frakcionim izvodima  $\frac{d^{\alpha_k}}{dt^{\alpha_k}}$  reda  $\alpha_k \in (0, 1]$ , za  $k = 1, 2, \dots, n$ , definisanim sa (2.10). Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i proizvoljno  $\gamma \in (0, 1]$ , definišimo skup tačaka u kompleksnoj ravni oblika

$$\Omega_\gamma(A) := \left\{ \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \gamma \frac{\pi}{2} < \varphi < 2\pi - \gamma \frac{\pi}{2}, \rho \in [0, +\infty) \right\}. \quad (2.12)$$

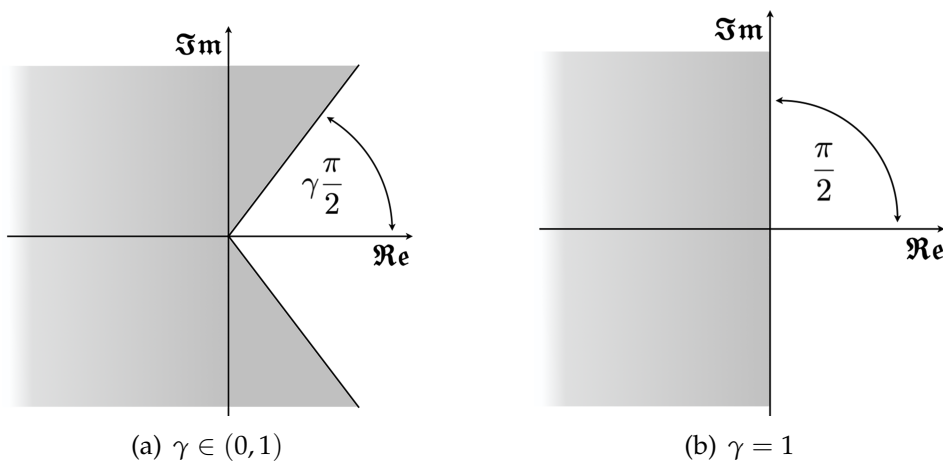
U specijalnom slučaju kada je  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \gamma$ , sistem (2.11) se zove *SLFDJ sa proporcionalnim redom izvoda* ( $\gamma$ -proporcionalan SLFDJ), čija je *karakterizacija* stabilnosti obuhvaćena rezultatom iz [98], koji navodimo u nastavku.

**TEOREMA 16** *Neka je  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \gamma \in (0, 1]$ . Autonomni proporcionalni sistem linearnih frakcionih diferencijalnih jednačina (2.11) je asimptotski stabilan ako i samo ako je  $|\arg(\lambda)| > \gamma \frac{\pi}{2}$  za svako  $\lambda \in \Lambda(A)$ , to jest ako i samo ako*

$$\Lambda(A) \subseteq \Omega_\gamma(A).$$

*U ovom slučaju, komponente  $x_k(t)$  za svako  $k = 1, 2, \dots, n$  opadaju ka 0 kao  $t^{-\gamma}$ , kako  $t \rightarrow \infty$ .*

Prema tome, skup tačaka  $\Omega_\gamma$  je oblast stabilnosti za  $\gamma$ -proporcionalan SLFDJ. Očigledno, za  $\gamma = 1$  ova oblast redukuje na levu poluravan kompleksne ravni, što odgovara oblasti stabilnosti u slučaju sistema linearnih (običnih) diferencijalnih jednačina, kao što je ilustrovano na Slici 2.11.



Slika 2.11: Oblasti stabilnosti u frakcionom smislu (levo) i u običnom smislu (desno).

Pod pretpostavkom da su  $\alpha_k \in (0, 1]$  (ne nužno jednaki) racionalni brojevi, sistem (2.11) je *neproporcionalan*. Neka su veličine  $\alpha_k$  zapisane u obliku nesvodljivih razlomaka  $\alpha_k = \frac{p_k}{q_k}$ , za svako  $k = 1, 2, \dots, n$ , što znači da su  $p_k, q_k \in \mathbb{N}$  uzajamno prosti. Označimo najmanji zajednički sadržalac brojeva  $q_k$  sa  $m$  i definišimo veličinu  $\gamma := \frac{1}{m}$ . Sada možemo uvesti pojam *spektra  $\alpha$ -reda* matrice  $A$ , u oznaci  $\Lambda_\alpha(A)$ , kao skupa rešenja polinomnog problema karakterističnih korena

$$A_\alpha(\lambda)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \neq \mathbf{0},$$

gde je

$$A_\alpha(\lambda) := \text{diag}(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}, \dots, \lambda^{m\alpha_n}) - A, \quad (2.13)$$

ili, ekvivalentno,

$$\Lambda_\alpha(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(A_\alpha(\lambda)) = 0\}.$$

Takođe, od sad pa na dalje, uz notaciju

$$D_\alpha^m(\lambda) := \text{diag}(\lambda^{m\alpha_1}, \lambda^{m\alpha_2}, \dots, \lambda^{m\alpha_n}),$$

sledi da je  $A_\alpha(\lambda) = D_\alpha^m(\lambda) - A$ .

Tada o *dovoljnom* uslovu za stabilnost odgovarajućeg neproporcionalnog SLFDJ govori Teorema iz [98].

**TEOREMA 17** *Neka su  $\alpha_k = \frac{p_k}{q_k} \in (0, 1]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Tada je autonomni  $\gamma$ -neproporcionalni sistem linearnih frakcionih diferencijalnih jednačina (2.11) asimptotski stabilan ako je  $|\arg(\lambda)| > \gamma \frac{\pi}{2}$  za svako  $\lambda \in \Lambda_\alpha(A)$ , to jest ako*

$$\Lambda_\alpha(A) \subseteq \Omega_\gamma(A).$$

Primetimo da je u slučaju proporcionalnog sistema skup  $\Lambda_\alpha(A)$  upravo  $\Lambda(A)$ .

Od sad pa na dalje, matricu  $A$  koja odgovara asimptotski stabilnom SLFDJ (2.11) zvaćemo  *$\alpha$ -frakciono stabilnom matricom*.



## Lokalizacije spektra

*"Mathematics is the music of reason."*

JAMES JOSEPH SYLVESTER

Još je d'Alamber (Jean-Baptiste le Rond d'Alambert) u svojoj *Enciklopediji* (*Encyclopédie*), osvrćući se na stanje u oblasti matematike na prelazu između 17. i 18. veka, zaključio da je većina njenih teorijskih rezultata našla primenu u oblasti mehanike, koja je dala dodatni impuls istraživanjima tog vremena. Upravo u ovom periodu, znatno pre postanka matrične teorije (sredinom 19. veka), treba tražiti začetke spektralne analize, budući da su intenzivna izučavanja diskretnih mehaničkih sistema motivisala brojne algebarske probleme, između ostalog i problem "karakterističnih korena", koji su u prvoj polovini 18. veka inspirisali radove Johana Bernulija (Johann Bernoulli) i njegovog naslednika Danijela Bernulija (Daniel Bernoulli), zatim d'Alamberta i Leonarda Ojlera (Leonhard Euler), dok je u drugoj polovini istog veka dominantan naučni pečat Lagranža i Pjer-Simon Laplasa (Pierre-Simon Laplace). Početkom narednog veka vodama spektralne teorije zaplovio je i Ogisten-Luj Koši (Augustin-Louis Cauchy), koji je 1829. godine dokazao da su karakteristični koreni simetrične matrice (odnosno simetričnog sistema kako ih je on zvao) realni, da bi 1839. godine uveo pojam karakteristične jednačine, o čemu svedoči autor u [56]. U svojim radovima Koši se služio terminom *racine caractéristique* da označi karakteristične vrednosti, dok naziv koji je danas u upotrebi datira s početka 20. veka, a usvojen je na inicijativu Davida Hilberta koji je predložio naziv *eigenvalue*, što u prevodu znači karakteristična (svojtvena) vrednost.

**DEFINICIJA 22** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ . Ako postoje  $\lambda \in \mathbb{C}$  i  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , takvi da je  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ , tada se  $\lambda$  zove karakteristični koren matrice  $A$ , dok je  $\mathbf{x}$  njemu odgovarajući karakteristični vektor.*

Dakle, karakteristični koreni se mogu interpretirati kao skalari koji čine da su njima odgovarajući karakteristični vektori netrivialna rešenja homogenog sistema linearnih jednačina sa matricom  $\lambda E - A$ , odnosno za koje posmatrana matrica postaje singularna. Skup svih takvih vrednosti predstavlja *spektar* matrice  $A$ ,

$$\Lambda(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda E - A) = 0\}. \quad (3.1)$$

Posebno mesto pripada dominantnom karakterističnom korenu po modulu, koji se zove *spektralni radijus* matrice  $A$

$$\rho(A) := \max_{\lambda \in \Lambda(A)} |\lambda|,$$

koji predstavlja infimum nad kolekcijom svih prirodnih matričnih normi, dok je realni deo "najdešnjeg" korena poznat pod nazivom *spektralna apscisa* matrice  $A$

$$\alpha(A) := \max_{\lambda \in \Lambda(A)} \{\Re(\lambda)\}, \quad (3.2)$$

koja ima krucijalnu ulogu u utvrđivanju asimptotske stabilnosti dinamičkih sistema.

Poznato je da, u većini slučajeva, matrični spektar pruža sasvim adekvatnu količinu informacija o ponašanju i dinamičkim svojstvima kompleksnih sistema opisanih matricom ili linearnim operatorom, osim kada je struktura matrice takva da nije u stanju da amortizuje efekat malih perturbacija na inače osetljive korene (kao u slučaju ne-normalnih matrica), prilikom kojih spektralna analiza može rezultovati nekompletnim (pa i pogrešnim) zaključcima. Karakteristični koreni predstavljaju svojevrzni "genetski kod" matrica koji, napuštajući apstraktni okvir, otkriva njihov "karakter" i oslikava im "genetski portret" u kompleksnoj ravni.

I premda su karakteristični koreni bili prisutni daleko pre ekspanzije teorije matrica, u čijem se kontekstu danas intenzivno izučavaju, mnoge discipline savremene nauke ne mogu se zamisliti bez njih. Predstavljanjem naprednih računara sredinom 20. veka ispunili su se tehnički preduslovi za početak moderne ere u tretmanu problema karakterističnih korena, kao i razvoja iterativnih algoritama za njihovu identifikaciju. Za

pregled stanja u oblasti na prelazu iz 20. u 21. vek, čitaoca upućujemo na [50]. Sinergija naučne metodologije i mogućnosti realnih primena (industrija, ekonomija, medicina, ekologija, društvene nauke) učinila je ovaj segment primenjene linearne algebre još interesantnijim. Naučni interes za ovu oblast je i dan-danas visoko pozicioniran, a podstaknut je potrebom realnih primena, kao što su dinamička analiza kompleksnih sistema i perturbaciona analiza.

Numerički postupci za izračunavanje karakterističnih korena imaju dugu tradiciju. Sa jedne strane, najbolji postupci zasnivaju se na implementaciji odgovarajućih matričnih dekompozicija, u kojima se koreni javljaju kao elementi faktora u zapisu razlaganja. Isto tako, u praksi se vrlo često koriste i spektralni solveri, koji su iterativne prirode.

Informacija o "egzaktnim" vrednostima (jednog ili svih) karakterističnih korena nije uvek dostupna, međutim, sa aplikativnog stanovišta nije uvek ni neophodna, budući da je odgovor na mnoga interesantna pitanja objašnjen prostornim rasporedom istih. Tako se u analizi stabilnosti diskretnih dinamičkih sistema zna da je stabinost obezbeđena pripadnošću spektra jediničnom krugu, dok region stabilnosti u slučaju kontinualnih dinamičkih sistema postaje leva poluravan kompleksne ravni. Stoga, umesto traganja za "tačnim" vrednostima, u fokusu sekcije o lokalizacijama spektra je rasvetljavanje načina na koji teorija  $H$ -matrica uspešno pomaže u tretmanu ovog problema.

### 3.1 Faktorizacije koje otkrivaju spektar

Važno je napomenuti i da postoje dekompozicije koje "otkrivaju" karakteristične korene, a zasnovane su na činjenici da je matrični spektar invarijantan u odnosu na transformacije sličnosti.

#### Dijagonalizacija

Ako posmatrana matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  ima  $n$  linearno nezavisnih karakterističnih vektora, tada će matrica  $X$  čije su kolone ti karakteristični vektori biti punog ranga, te je moguće izvršiti dekompoziciju tipa

$$A = X\Lambda X^{-1}, \quad (3.3)$$

pri čemu je  $\Lambda$  dijagonalna matrica sa karakterističnim korenima matrice  $A$  duž glavne dijagonale. Razlaganje (3.3) zove se *dijagonalizacija* ili *de-*

*kompozicija preko karakterističnih korena*, a zna se da je njena egzistencija ekvivalentna uslovu da je matrica na koju se odnosi *nedefektna*, odnosno da za svaki karakteristični koren postoji poklapanje između algebarske i geometrijske višestrukosti.

#### Unitarna dijagonalizacija

Najpre definišimo jednu posebnu vrstu matrica, koja će igrati veoma bitnu ulogu u ponašanju odgovarajućih dinamičkih sistema.

**DEFINICIJA 23** *Matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  je normalna ako i samo ako komutira sa svojom hermitovanom, odnosno ako je ispunjeno  $A^H A = A A^H$ .*

Ako se, pored uslova da su svi karakteristični koreni matrice  $A$  međusobno nezavisni desi da su oni i uzajamno ortogonalni, tada matrica  $X$  postaje unitarna matrica  $Q$ , stoga dekompozicija (3.3) glasi

$$A = Q\Lambda Q^H, \quad (3.4)$$

i nosi naziv *unitarna dijagonalizacija*. Pri tome, s obzirom da su matrice  $A$  i  $\Lambda$  unitarno slične, karakteristični koreni matrice  $A$  čitaju se na dijagonali u  $\Lambda$ . Pored toga, zna se da je uslov (3.4) ekvivalentan svojstvu normalnosti.

Prednost normalnih matrica ogleda se u činjenici da je  $\|Q\|_2 \|Q^H\|_2 = 1$ , što je poželjna osobina za mnoga numerička izračunavanja koja uključuju rad sa normalnim matricama.

#### Unitarna triangularizacija

Matrična dekompozicija koja je u najširoj upotrebi, iz prostog razloga što postoji za svaku kvadratnu matricu, nosi naziv *Šurova dekompozicija* ili *unitarna triangularizacija*, a znači da je uočenu matricu moguće predstaviti u obliku

$$A = QTQ^H,$$

pri čemu je  $T$  gornja trougaona, a  $Q$  unitarna matrica. I ovde je reč o unitarnoj sličnosti, što znači da se karakteristični koreni matrice  $A$  nalaze na dijagonali matrice  $T$ .



## 3.2 Numerički raspon

Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica. Ako svakoj tački  $\mathbf{x}$  jediničnog kruga u  $\mathbb{C}^n$  pridružimo skalar oblika  $\mathbf{x}^H A \mathbf{x}$ , tada je kodomen ovako definisane neprekidne funkcionele

$$W(A) := \{\mathbf{x}^H A \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbf{x}\|_2 = 1\},$$

i on se zove *numerički raspon* ili *polje vrednosti* matrice  $A$ . Ovaj skup možemo definisati i kao

$$W(A) := \left\{ r(A, \mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \right\}, \quad r(A, \mathbf{x}) := \frac{\mathbf{x}^H A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^H \mathbf{x}},$$

pri čemu veličinu  $r(A, \mathbf{x})$  zovemo *Rejljev količnik* pridružen vektoru  $\mathbf{x}$ . Ispostavlja se da ovaj skup predstavlja jednu moguću lokalizacionu oblast spektra proizvoljne matrice.

**TEOREMA 18** Za svaku matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi  $\Lambda(A) \subseteq W(A)$ .

**DOKAZ:** Ako je  $\lambda \in \Lambda(A)$  proizvoljan karakteristični koren matrice  $A$ , tada postoji  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  za koji je  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ . Množeći ovu jednakost sa  $\mathbf{x}^H$  sa leve strane, dobijamo  $\mathbf{x}^H A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^H \mathbf{x}$ , odakle sledi da je  $\lambda = r(A, \mathbf{x})$ .  $\triangle$

Upotrebnost vrednost informacija o skupu  $W(A)$ , naročito zbog konekcije sa dinamičkim svojstvima spektra koji lokalizuje, opravdala je njegovo široko izučavanje. Tako se, između ostalog, zna da za svaku hermitsku matricu važi  $W(A) = [\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)]$ , odnosno njeno polje vrednosti je zatvoren interval čije su granice najmanji i najveći element spektra. Sa stanovišta primena, posebno se izdvaja najdešnja tačka skupa  $W(A)$

$$\omega(A) := \max_{z \in W(A)} \{\Re(z)\},$$

koja se zove *numerička apscisa* matrice  $A$ .

Ako sa

$$H_A = (A + A^H)/2,$$

označimo hermitski deo proizvoljne matrice  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , tada se numeričko izračunavanje numeričke apscise matrice  $A$  svodi na određivanje spektralne apscise matrice  $H_A$ .

**TEOREMA 19** Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbf{C}^{n,n}$  važi  $\omega(A) = \alpha(H_A)$ .

**DOKAZ:** Neka je  $A \in \mathbf{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica. Primitimo najpre da je

$$r(H_A, x) = \frac{x^H A x}{2x^H x} + \frac{x^H A^H x}{2x^H x} = \frac{x^H A x}{2x^H x} + \frac{(x^H A x)^H}{2x^H x} = \Re(r(A, x)),$$

što implicira da je  $W(H_A) = \Re(W(A)) := \{\Re(z) : z \in W(A)\}$ . Odatle je  $\omega(A) = \max\{z : z \in W(H_A)\} = \alpha(H_A)$ , budući da je  $W(H_A) = [\lambda_{\min}(H_A), \lambda_{\max}(H_A)]$ .  $\triangle$

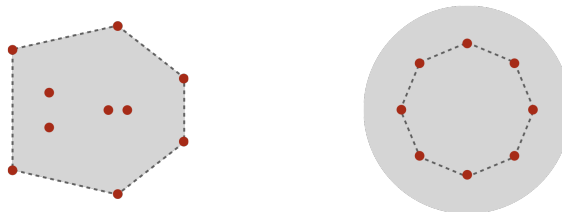
Specijalno, ako pretpostavimo da je  $A \in \mathbf{C}^{n,n}$  normalna matrica, tada na osnovu (3.4) i definicije Rejljevog količnika sledi da je

$$r(A, x) = \frac{x^H Q \Lambda Q^H x}{x^H Q Q^H x} = \frac{y^H \Lambda y}{y^H y} = \sum_{i \in N} \left( \frac{|y_i|}{\|y\|_2} \right)^2 \lambda_i,$$

uz oznaku  $y := Q^H x$ . Definišući konveksnu obvojnici skupa tačaka  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  sa

$$c_o(S) := \left\{ \sum_{i \in N} \alpha_i s_i : \alpha_i \geq 0 \text{ za } i \in N \text{ i } \sum_{i \in N} \alpha_i = 1 \right\}, \quad (3.5)$$

jasno je da za normalne matrice važi  $W(A) = c_o(\Lambda(A))$ , dok u opštem slučaju, za proizvoljnu kvadratnu matricu  $A$ , važi  $W(A) \supseteq c_o(\Lambda(A))$ . Grafička ilustracija odnosa ovih skupova za normalne i ne-normalne matrice data je Slikom 3.1.



Slika 3.1: Odnos matričnog spektra i numeričkog raspona u slučaju normalne matrice (levo) i ne-normalne matrice (desno). Skup  $\Lambda(A)$  čine crvene tačke, isprekidana linija je njegova konveksna obvojnica  $c_o(\Lambda(A))$ , dok je skup  $W(A)$  osenčen.

### 3.3 Lokalizacije spektra

Istorijska prekretnica na polju determinacije prostornog rasporeda karakterističnih korena matrice u kompleksnoj ravni dogodila se 1931. godine, kada je profesor Instituta mehaničkog inženjerstva, Semjon Aronovič Geršgorin (Semyon Aranovich Geršgorin), u nastojanju da proceni karakteristične korene proizvoljne kompleksne matrice reda  $n$ , formulisao i dokazao niz rezultata, [49], koji su podstakli interesovanje naučne zajednice i rezultovali velikim brojem naučnih radova na ovu temu. Međutim, ništa manje značajna uloga u afirmaciji ove oblasti, u smislu koncizne i preko potrebne sistematizacije rezultata, koja je doprinela da lepota Geršgorinovog doprinosa ostvari svoj pun potencijal, pripada profesoru Ričardu Vargi i njegovoj čuvenoj monografskoj publikaciji "Geršgorin i njegovi krugovi", [116].

Pre formulacije originalnog Geršgorinovog rezultata, uvešćemo par oznaka.

**DEFINICIJA 24** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ . Za svako  $i \in N$ , skup tačaka u kompleksnoj ravni koji odgovara krugu sa centrom u dijagonalnom elementu  $a_{ii}$  i poluprečnikom  $r_i(A)$  zove se  $i$ -ti Geršgorinov krug matrice  $A$ ,*

$$\Gamma_i(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i(A)\},$$

*dok unija svih takvih krugova čini njoj odgovarajući Geršgorinov skup,*

$$\Gamma(A) := \bigcup_{i \in N} \Gamma_i(A).$$

Naredno tvrđenje moguće je pronaći u [116], kao Teoremu 1.1, ili u originalnoj formi u [49] kao Stav II.

**TEOREMA 20 (PRVA GERŠGORINOVA TEOREMA)** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ . Za svaki njen karakteristični koren  $\lambda$  postoji indeks  $i \in N$  takav da je*

$$|\lambda - a_{ii}| \leq r_i(A),$$

*što znači da  $\lambda \in \Gamma_i(A)$ , pa samim tim i  $\lambda \in \Gamma(A)$ . Kako je ovo tačno za ma koji karakteristični koren, sledi da je*

$$\Lambda(A) \subseteq \Gamma(A).$$

Sa teorijskog stanovišta, prethodna teorema predstavlja fundamentalni rezultat u vezi sa lokalizacijom spektra proizvoljne kvadratne matrice. Njenu eleganciju dodatno pojačava činjenica da je crtanje takvih oblasti računski prihvatljiv i nezahtevan zadatak.

Od svih tačaka skupa  $\Gamma(A)$ , posebno mesto pripada najdešnjoj tački Geršgorinovog skupa koja se zove *Geršgorinova apscisa*

$$\gamma(A) := \max_{z \in \Gamma(A)} \{\Re(z)\} = \max_{i \in N} \{\Re(a_{ii}) + r_i\}.$$

Sa analitičkog stanovišta, skup  $\Gamma(A)$  kao unija  $n$  krugova predstavlja kompaktnu, zatvorenu oblast, pri čemu nije moguće sa preciznošću dati odgovor na pitanje o broju karakterističnih korena u nekom njegovom delu, osim u specijalnom slučaju kada jedan ili grupa krugova postane disjunktna u odnosu na preostali deo skupa  $\Gamma(A)$ . Tvđenje u nastavku, u originalnoj verziji formulisano kao Stav III u [49] rasvetljava ovaj slučaj, a njegov dokaz u generalizovanom obliku detaljno je izveden u [116].

**TEOREMA 21 (DRUGA GERŠGORINOVA TEOREMA)** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ . Ako postoji neprazan pravi podskup  $S$  indeksnog skupa  $N$  za koji je*

$$\Gamma_S(A) \cap \Gamma_{\bar{S}}(A) = \emptyset,$$

*tada je skupom  $\Gamma_S(A)$  lokalizovano tačno  $\text{card}(S)$  karakterističnih korena matrice  $A$ , dok preostalih  $n - \text{card}(A)$  korena pripadaju  $\Gamma_{\bar{S}}(A)$ .*

U specijalnom slučaju, kada su svi krugovi disjunktni, zna se da se u svakom od njih nalazi tačno jedan karakteristični koren.

Uprkos relativno jednostavnom načinu konstrukcije, jasno je da lokalizacioni skupovi dobijeni na ovaj način mogu biti veoma neprecizni i neupotrebljivi sa aplikativnog stanovišta. Primer tog tipa predstavljaju matrice koje imaju vrstu u kojoj je suma vandijagonalnih elemenata velika, što se odražava i na sam rezultujući Geršgorinov skup.

Imajući u vidu činjenicu da je matični spektar invarijantan u odnosu na transponovanje, jedan od pokušaja "popravke" leži u kombinaciji primene Geršgorinove lokalizacije na originalnu matricu kao i na njoj transponovanu. S obzirom da oba tako dobijena skupa sadrže karakteristične korene od interesa, to implicira da je

$$\Lambda(A) \subseteq \Gamma(A) \cap \Gamma(A^T).$$

Pored navedenih rezultata, u svom radu [49], Geršgorin je naglasio i ideju korišćenja transformacija sličnosti, koje čuvaju spektar, sa namerom poboljšanja rezultata Teoreme 20. Budući da je  $\Lambda(A) = \Lambda(X^{-1}AX)$ , za ma koju regularnu kvadratnu matricu  $X$ , to znači da

$$\Lambda(A) \subseteq \Gamma(X^{-1}AX) =: \Gamma^X(A).$$

Uzimajući presek ovih skupova za svaku matricu  $X$  iz uočene familije  $\mathbb{B}$  regularnih matrica, stižemo do lokalizacionog skupa za spektar koji je definisan kao

$$\Gamma^{\mathbb{B}}(A) := \bigcap_{X \in \mathbb{B}} \Gamma^X(A),$$

i nosi naziv *minimalni Geršgorinov skup indukovan familijom regularnih matrica*  $\mathbb{B}$ . Jedna od detaljno analiziranih Varginih ideja bila je da se za ovaj skup uzme familija svih pozitivnih dijagonalnih matrica,

$$\mathbb{D} := \{X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n), x_i > 0, i \in N\},$$

i taj izbor je iznedrio veliki broj teorijskih rezultata u vezi sa osobinama skupa  $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$ , koji ćemo zvati *minimalnim Geršgorinovim skupom* za  $A$ :

$$\Gamma^{\mathbb{D}}(A) := \bigcap_{x > \mathbf{0}} \bigcup_{i \in N} \Gamma_i^x(A), \quad (3.6)$$

pri čemu je

$$\Gamma_i^x(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i^x(A) \right\} \quad \text{i} \quad r_i^x(A) := \frac{1}{x_i} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| x_j.$$

Ono što predstavlja izazov je činjenica da eksplicitna formula za crtanje ovakvog skupa ne postoji, što svrstava zadatak njegove aproksimacije u red izuzetno atraktivnih oblasti istraživanja. Postoji dobar deo radova na temu algoritama koji rešavaju pomenuti problem, među kojima isti ćemo rezultate rada grupe autora u [117], kao i unapređenu varijantu u [72].

Dominantna teorijska (ali i ništa manje dragocena upotrebna) vrednost Geršgorinove teoreme o lokalizaciji spektra *proizvoljne* matrice leži u njegovoj *ekvivalenciji* sa Levi-Deplankovom teoremom o regularnosti *SDD* matrica. Prvi formalni pisani trag na tu temu ostavio je Varga u svojoj knjizi [116], budući da u relevantnoj literaturi do tog momenta

nije postojala eksplicitna konstatacija o matematičkoj ekvivalenciji ovih, naočigled nespojivih rezultata, iako je i sam autor podsetio da je Brauer 1946. godine polazeći od Geršgorinovog rezultata uspeo da izvede zaključak o regularnosti klase  $SDD$ .

Ova rekurentna tema i ideja dokaza o ekvivalenciji, kao i veliki broj radova iz ove oblasti, analizirani su u preglednom radu [18], da bi kasnije poslužili i Kostiću u [68] da uopšti dotadašnje rezultate i analizira univerzalne principe lokalizacije karakterističnih korena zasnovanih na konceptu dijagonalne dominacije, uz mnoge druge teorijske benefite. Iz pijeteta prema profesoru Vargi, u želji da mu oda počast, jedinstveni teorijski okvir koji pruža mogućnost sistematskog uopštenja rezultata o regularnosti potklasa  $GDD$  matrica na rezultate o oblastima lokalizacija spektra proizvoljne matrice, Kostić je nazvao *Varginim principom ekvivalencije*, u nadi da će ova terminologija zaživeti u okvirima naučne zajednice.

**TEOREMA 22 (VARGIN PRINCIP EKVIVALENCIJE)** *Neka je  $\mathbb{K}$  klasa kompleksnih kvadratnih matrica i neka je za proizvoljnu kvadratnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  definisan skup kompleksnih brojeva*

$$\Theta^{\mathbb{K}}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{M}(zE - A) \notin \mathbb{K}\}. \quad (3.7)$$

*Tada su sledeća dva tvrđenja ekvivalentna:*

- (i) *Sve matrice iz klase  $\mathbb{K}$  su regularne.*
- (ii) *Spektar proizvoljne kvadratne matrice  $A$  sadržan je u skupu  $\Theta^{\mathbb{K}}(A)$ .*

Trivijalno, ako je  $\mathbb{K}$  familija svih regularnih matrica, oblast  $\Theta^{\mathbb{K}}(A)$  proizvoljne matrice  $A$  koincidira sa njenim spektrom. Redukujući skup svih regularnih matrica na klasu  $H$ -matrica, oblast (3.7) postaje  $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$  koja je vrlo često veoma dobra aproksimacija spektra, ali izuzetno teška za crtanje. Uzimajući da je  $\mathbb{K}$  klasa  $SDD$  matrica, lokalizaciona oblast je zapravo  $\Gamma(A)$ , često veoma gruba ali laka za crtanje.

Ako za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i proizvoljno  $z \in \mathbb{C}$  definišemo matricu  $Q(A, z) := -\mathcal{M}(zE - A)$ , tada je ona esencijalno nenegativna. Naime, dovoljno je definisati veličinu  $q(z) := \max_{i \in N} |z - a_{ii}|$  i matricu  $B := q(z)E + Q(A, z)$ , koja je po konstrukciji nenegativna. Tada je najdešnji

koren matrice  $Q(A, z)$  dat sa

$$v(z) = \inf_{\mathbf{x} > \mathbf{0}} \left\{ \max_{i \in N} \frac{(Q(A, z)\mathbf{x})_i}{(\mathbf{x})_i} \right\},$$

to jest, za svako  $\lambda \in \Lambda(Q(A, z))$  je ispunjeno  $\Re(\lambda) \leq v(z)$ . Naročito značajan rezultat koji, između ostalog, pomaže u vizualizaciji skupa  $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$ , dat je teoremom u nastavku.

**TEOREMA 23** *Za svaku matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i proizvoljno  $z \in \mathbb{C}$  važi:*

$$zE - A \text{ nije } H\text{-matrica} \iff z \in \Gamma^{\mathbb{D}}(A) \iff v(z) \geq 0,$$

gde je  $v(z)$  Peronov koren esencijalno nenegativne matrice  $Q(A, z)$ .

**DOKAZ:** Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica i  $z$  proizvoljan kompleksan broj takav da  $zE - A$  nije u klasi  $H$ . To znači da  $\mathcal{M}(zE - A)$  nije  $M$ -matrica, odnosno da za svako  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$  postoji indeks  $k \in N$  takav da je  $(\mathcal{M}(zE - A)\mathbf{x})_k \leq 0$ , što je ekvivalentno sa

$$|z - a_{kk}| \leq r_k^{\mathbf{x}}(A).$$

Drugim rečima, za svako  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$  važi  $z \in \Gamma^{\mathbf{x}}(A)$ , odnosno  $z \in \Gamma^{\mathbb{D}}(A)$ . Sa druge strane, ako pretpostavimo da  $z \in \Gamma^{\mathbb{D}}(A)$ , to znači da za svako  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$  postoji indeks  $k \in N$  za koji je

$$0 \leq -|z - a_{kk}| + r_k^{\mathbf{x}}(A),$$

odnosno da za svako  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$  postoji  $k \in N$  za koji je  $\frac{(Q(A, z)\mathbf{x})_k}{(\mathbf{x})_k} \geq 0$ , što je ekvivalentno sa  $v(z) \geq 0$ . △

Šta više, može se pokazati da je (3.7) monotono opadajuća funkcija po klasi  $\mathbb{K}$ , to jest

$$\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \implies \Theta^{\mathbb{K}_2}(A) \subseteq \Theta^{\mathbb{K}_1}(A).$$

Drugim rečima, pomenuti princip monotonosti, formulisan u [68], pruža mogućnost da, polazeći od  $SDD$  matrica, proširenjem klase u okvirima klase  $H$ -matrica, lokalizacioni skup spektra proizvoljne matrice  $A$ , nadje mesto između graničnih skupova,  $\Gamma(A)$  i  $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$ . Pri tome, ako je  $\mathbb{K}$

potklasa  $H$ -matrica, skup  $\Theta^{\mathbb{K}}(A)$  zove se *skup Geršgorinovog tipa*, dok odgovarajuće tvrđenje da  $\Theta^{\mathbb{K}}(A)$  sadrži spektar proizvoljne matrice nosi naziv *Teorema Geršgorinovog tipa*.

Prateći hronologiju publikovanja rezultata u vezi sa skupovima Geršgorinovog tipa, prvi doprinos u tom pogledu, nakon Geršgorinovog rada iz 1931. godine, pripisuje se Alfredu Braueru, koji je 1947. godine u [8] izveo lokalizacioni skup koji njemu u čast zovemo Brauerov skup, a predstavlja uniju Kazinijevih ovala. Rezultat u nastavku korespondira, u smislu ekvivalencije, Teoremi 9 o regularnosti klase Ostrovskog.

**TEOREMA 24** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ . Za svaki njen karakteristični koren  $\lambda$  postoji par međusobno različitih indeksa  $i, j \in N$ ,  $i \neq j$ , takvih da*

$$\lambda \in \mathcal{K}_{i,j}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \cdot |z - a_{jj}| \leq r_i(A) \cdot r_j(A)\},$$

*prema tome,*

$$\lambda \in \mathcal{K}(A) := \bigcup_{i \in N} \bigcup_{j < i} \mathcal{K}_{i,j}(A),$$

*odakle sledi da je  $\Lambda(A) \subseteq \mathcal{K}(A)$ .*

Proširenje klase Ostrovskog (ili duplo strogo dijagonalno dominantnih matrica) nas upućuje na klasu Dašnjic-Zusmanovič matrica, a odgovarajuće ekvivalentno tvrđenje o lokalizaciji spektra proizvoljne matrice publikovao je isti par autora 1970. godine radom [33] u kojem je spomenuta klasa i predstavljena.

**TEOREMA 25** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ . Tada je*

$$\Lambda(A) \subseteq \mathcal{D}(A) := \bigcap_{i \in N} \bigcup_{j \in N \setminus \{i\}} \mathcal{D}_{i,j}(A),$$

*pri čemu su, za svako  $i \in N$  i svako  $j \in N \setminus \{i\}$ ,*

$$\mathcal{D}_{i,j}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \cdot (|z - a_{jj}| - r_j(A) + |a_{ji}|) \leq r_i(A) \cdot |a_{ji}|\}.$$

U slučaju uopštenja  $DZ$  matrica povećanjem kardinalnosti podskupa  $S$  indeksnog skupa  $N$ , klasa  $\Sigma$ -SDD matrica po principu Teoreme 22 proizvodi lokalizaciju spektra proizvoljne matrice, poznatu pod nazivom (Cvetković-Kostić-Varga) CKV skup. Za detalje, čitaoca upućujemo na [17] i reference u istom.



TEOREMA 26 *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ . Tada je*

$$\Lambda(A) \subseteq \mathcal{C}(A) := \bigcap_{\emptyset \neq S \subseteq N} \mathcal{C}^S(A),$$

gde je

$$\mathcal{C}^S(A) := \left( \bigcup_{i \in S} \Gamma_i^S(A) \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S}}} V_{i,j}^S(A) \right),$$

a skupovi

$$\Gamma_i^S(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i^S(A)\}, \text{ za svako } i \in S,$$

$i$  za svako  $i \in S, j \in \bar{S}$

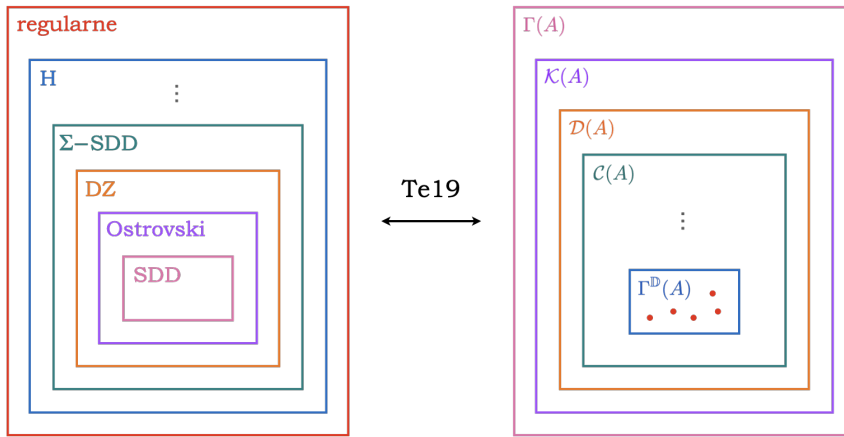
$$V_{i,j}^S(A) := \{z \in \mathbb{C} : (|z - a_{ii}| - r_i^S(A))(|z - a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) \leq r_i^{\bar{S}}(A)r_j^S(A)\}.$$

Kao napomenu, navešćemo samo dva teorijska rezultata u vezi sa skupovima iz Teoreme 25 i Teoreme 26. Naime, ispostavlja se da skup:

- $\mathcal{D}(A)$  odgovara minimalnom Geršgorinovom skupu indukovanom familijom dijagonalnih matrica, čiji su svi elementi jedinice osim jednog, koji je proizvoljan pozitivan vektor, rezultat iz [32],
- $\mathcal{C}(A)$  korespondira minimalnom Geršgorinovom skupu indukovanom familijom dijagonalnih matrica koje na dijagonali imaju jedinice ili proizvoljan pozitivan skalar  $x$ , kao što je detaljno razmatrano u [19].

Ilustracija odnosa oblasti lokalizacije karakterističnih korena proizvoljne kvadratne matrice  $A$ , na putu od Geršgorinovog skupa ( $\Gamma(A)$ ) ka minimalnom Geršgorinovom skupu ( $\Gamma^{\mathbb{D}}(A)$ ), indukovanih ekvivalentnim rezultatima o regularnosti poznatih potklasa  $H$ -matrica, na osnovu Teoreme 22, data je Slikom 3.2.

U sklopu bavljenja uslovima na elemente matrice koji obezbeđuju njenu regularnost, u smislu kombinacija vandijagonalnih suma vrsta i kolona, u svom radu [95] iz 1951. godine, Aleksandar Ostrovski se, pri likom definisanja i dokazivanja teorijskih svojstava klasa  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  matrica, dotakao i rezultata o lokalizacijama spektra proizvoljne matrice.



Slika 3.2: Odnos odabranih potklasa regularnih  $H$ -matrica sa jedne, i njima indukovanih lokalizacija spektra proizvoljne kvadratne matrice  $A$ , sa druge strane.

**TEOREMA 27** Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ . Svi njeni karakteristični koreni  $\lambda$  pripadaju skupu

$$\mathcal{A}_1(A) := \bigcap_{0 \leq \alpha \leq 1} \bigcup_{i \in N} \Gamma^{\alpha_1}(A),$$

gde je, za svako  $i \in N$ ,

$$\Gamma^{\alpha_1}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \alpha r_i(A) + (1 - \alpha)c_i(A)\}.$$

Čitalac je sada već u stanju da jednostavnom proverom utvrdi da važi jednakost  $\mathcal{A}_1(A) = \Theta^{\alpha_1}(A)$ . Imajući na umu da je klasa  $\alpha_2$  matrica šira, princip monotonosti najavljuje uži odgovarajući lokalizacioni skup,  $\Theta^{\alpha_2}(A)$  za proizvoljnu matricu  $A$ .

**TEOREMA 28** Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ . Svi njeni karakteristični koreni  $\lambda$  pripadaju skupu

$$\mathcal{A}_2(A) := \bigcap_{0 \leq \alpha \leq 1} \bigcup_{i \in N} \Gamma^{\alpha_2}(A),$$

gde je, za svako  $i \in N$ ,

$$\Gamma^{\alpha_2}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i(A)^\alpha c_i(A)^{1-\alpha}\}.$$

Premda teorijski jasni, ovi rezultati imaju očiglednu aplikativnu manu, s obzirom da je za konstrukciju obe pomenute oblasti nužno napraviti

beskonačan broj preseka, krećući se dopustivim intervalom za parametar  $\alpha$ . Kao što smo konstatovali, Cvetković, Kostić, Bru i Pedroče su u [22] ponudili ekvivalentnu karakterizaciju klasa  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  matrica nezavisnu od  $\alpha$  i konstruisali oblasti lokalizacija koje su sa računskog stanovišta daleko poželjnije, a poklapaju se sa skupovima  $\mathcal{A}_1(A)$  i  $\mathcal{A}_2(A)$ . Zarad jednostavnosti zapisa, koristimo oznake poput  $r_i(A) = r_i$ .

Za proizvoljnu kvadratnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  za sve  $i \in N$  definišimo skupove

$$\bar{\Gamma}_i(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \min\{r_i, c_i\}\},$$

čija je unija

$$\bar{\Gamma}(A) := \bigcup_{i \in N} \bar{\Gamma}_i(A).$$

Sa druge strane, svakom paru indeksa  $i \in \mathcal{R}$  i  $j \in \mathcal{C}$  pridružimo oblast u kompleksnoj ravni

$$\hat{\Gamma}_{i,j}(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \cdot (c_j - r_j) + |z - a_{jj}| \cdot (r_i - c_i) \leq c_j r_i - c_i r_j\},$$

koja unijom daje

$$\hat{\Gamma}(A) := \bigcup_{\substack{i \in \mathcal{R} \\ j \in \mathcal{C}}} \hat{\Gamma}_{i,j}(A).$$

Tada važi sledeće tvrđenje.

**TEOREMA 29** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ . Za svaki njen karakteristični koren  $\lambda$  postoji indeks  $i \in N$  za koji je*

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \min\{r_i, c_i\},$$

*odakle zaključujemo da  $\lambda \in \bar{\Gamma}_i(A)$ , pa samim tim  $\lambda \in \bar{\Gamma}(A)$ , ili postoje indeksi  $i \in \mathcal{R}$  i  $j \in \mathcal{C}$  takvi da je*

$$|\lambda - a_{ii}| \cdot (c_j - r_j) + |\lambda - a_{jj}| \cdot (r_i - c_i) \leq c_j r_i - c_i r_j,$$

*što znači da  $\lambda \in \hat{\Gamma}_{i,j}(A)$ , to jest  $\lambda \in \hat{\Gamma}(A)$ . Kako je ovo tačno za svaki karakteristični koren, sledi da je*

$$\Lambda(A) \subseteq \bar{\Gamma}(A) \cup \hat{\Gamma}(A) =: \mathcal{A}_1(A).$$

Kao što su autori prethodnog rezultata ustanovili, isti je moguće po-

boljšati, u smislu suženja skupa  $\mathcal{A}_1(A)$ . S tim u vezi, definišimo za svako  $i \in \mathcal{R}$  sa osobinom  $c_i \neq 0$  i svako  $j \in \mathcal{C}$  takvo da je  $r_j \neq 0$ , skupove

$$\tilde{\Gamma}_{i,j}(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{|z - a_{ii}|}{c_i} \left( \frac{|z - a_{jj}|}{c_j} \right)^{\log_{\frac{c_j}{r_j}} \frac{r_i}{c_i}} \leq 1 \right\},$$

koji zajedno čine

$$\tilde{\Gamma}(A) := \bigcup_{\substack{i \in \mathcal{R}: c_i \neq 0 \\ j \in \mathcal{C}: r_j \neq 0}} \tilde{\Gamma}_{i,j}(A).$$

**TEOREMA 30** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ . Za svaki njen karakteristični koren  $\lambda$  postoji indeks  $i \in N$  za koji je*

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \min\{r_i, c_i\},$$

*odakle zaključujemo da  $\lambda \in \bar{\Gamma}_i(A)$ , pa samim tim  $\lambda \in \bar{\Gamma}(A)$ , ili postoje indksi  $i \in \mathcal{R}$  i  $j \in \mathcal{C}$ , takvi da su  $c_i \neq 0$  i  $r_j \neq 0$ , i da važi*

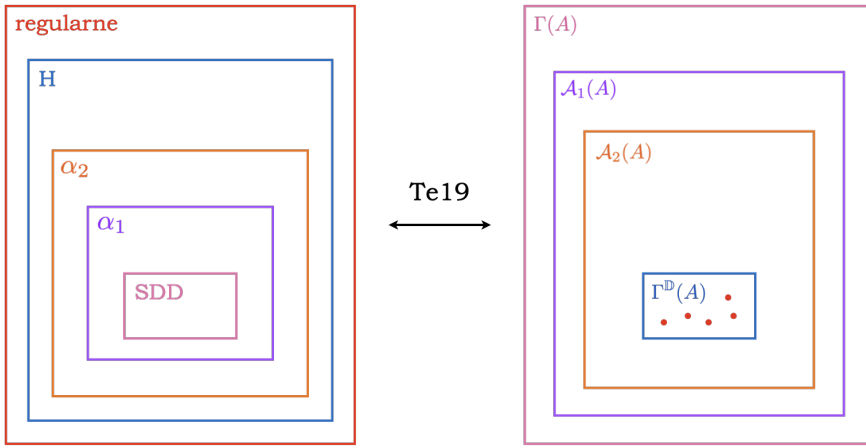
$$\frac{|\lambda - a_{ii}|}{c_i} \left( \frac{|\lambda - a_{jj}|}{c_j} \right)^{\log_{\frac{c_j}{r_j}} \frac{r_i}{c_i}} \leq 1,$$

*što znači da  $\lambda \in \tilde{\Gamma}_{i,j}(A)$ , to jest  $\lambda \in \tilde{\Gamma}(A)$ . Kako je ovo tačno za svaki karakteristični koren, sledi da je*

$$\Lambda(A) \subseteq \bar{\Gamma}(A) \cup \tilde{\Gamma}(A) =: \mathcal{A}_2(A).$$

Kao što je ustanovljeno, oblast  $\mathcal{A}_2(A)$  u opštem slučaju predstavlja bolju lokalizaciju spektra od  $\mathcal{A}_1(A)$ , a njihov odnos u svetlu Varginog principa ekvivalencije, prikazan je slikom 3.3.

Ovu sekciju završavamo napomenom da klasa Nekrasov matrica, zbog rekurentne definicije, nije pogodna za indukciju odgovarajuće lokalizacije spektra proizvoljne matrice.



Slika 3.3: Odnos klasa  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  matrica sa jedne, i njima indukovane lokalizacije spektra proizvoljne kvadratne matrice  $A$ ,  $\mathcal{A}_1(A)$  i  $\mathcal{A}_2(A)$ , sa druge strane.

### 3.4 Blok uopštenje lokalizacija spektra

Rezultatima o lokalizaciji spektra proizvoljne kvadratne matrice, izloženim u prethodnoj podsekciji, moguće je dodati i nove, upotrebom blok generalizovane dijagonalne dominacije. Značajan broj istih sistematizovan je u monografskoj publikaciji [116]. Kombinacijom Definicije 18 i Teoreme 22, direktno dobijamo informacije o skupovima koji sadrže spektar *proizvoljne matrice*.

**TEOREMA 31** ( $B_\pi^{(p)}$  VARGIN PRINCIP EKVIVALENCIJE) *Neka je  $\mathbb{K}$  klasa realnih kvadratnih matrica reda  $\ell$  i neka je za proizvoljnu kvadratnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq \ell$ , proizvoljnu partciju  $\pi = \{\pi_j\}_{j=0}^\ell$  i matičnu normu  $p$ , definisan skup kompleksnih brojeva*

$$\Theta_{B_\pi^{(p)}}^{\mathbb{K}}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \langle zE - A \rangle_\pi^{(p)} \notin \mathbb{K}\}. \quad (3.8)$$

Tada su sledeća dva tvrđenja ekvivalentna:

(i) Sve matrice iz klase  $B_\pi^{(p)}\mathbb{K}$  su regularne.

(ii) Spektar proizvoljne kvadratne matrice  $A$  sadržan je u skupu  $\Theta_{B_\pi^{(p)}}^{\mathbb{K}}(A)$ .

Kao i ranije, trivijalno sledi da šira blok klasa definiše užu lokalizacionu oblast spektra proizvoljne matrice, odnosno da za ma koje  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i proizvoljne dve klase blok matrica,  $B_\pi^{(p)}\mathbb{K}_1$  i  $B_\pi^{(p)}\mathbb{K}_2$  važi

$$B_\pi^{(p)}\mathbb{K}_1 \subseteq B_\pi^{(p)}\mathbb{K}_2 \implies \Theta_{B_\pi^{(p)}}^{\mathbb{K}_2}(A) \subseteq \Theta_{B_\pi^{(p)}}^{\mathbb{K}_1}(A).$$

Primetimo, međutim, da oblici lokalizacionih oblasti zavise kako od izbora particije tako i od matrične norme. Činjenica da međusobni odnos tačkastih potklasa  $H$ -matrica i njihovih blok analogona nije poznat apriori za proizvoljnu kvadratnu matricu povlači isti zaključak i u kontekstu odnosa tačkastih i blok lokalizacija spektra arbitrarne matrice.

## 3.5 Primena u dinamičkoj analizi kompleksnih sistema

### 3.5.1 Asimptotska stabilnost

Dinamička analiza kompleksnih sistema u praksi najčešće počinje utvrđivanjem asimptotske (Ljapunov) stabilnosti. Podsetimo se, potreban i dovoljan uslov za (asimptotsku) stabilnost ekvilibrijuma kontinualnog linearnog autonomnog dinamičkog sistema je pripadnost skupa  $\Lambda(A)$  levoj poluravni kompleksne ravni, što u kontekstu Definicije 20 ekvivalentno glasi  $\alpha(A) < 0$ .

Porast dimenzije problema koji se rešava može doprineti računskoj kompleksnosti provere ovog kriterijuma, kada eksplicitno izračunavanje spektra postaje neisplativ, a veoma često i nepotreban zadatak, imajući u vidu rezultate o lokalizacionim skupovima za spektar proizvoljne matrice. No, čak i tada treba imati na umu da će neki skupovi u obavljanju ovog zadatka biti uspešniji od drugih, ali takođe i da isti skup na jednom primeru može da odradi željeni posao, a da na nekom drugom bude sasvim neupotrebljiv. Neka je data matrica

$$A_{17} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 0 & -1 & 0.1 \\ -2 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1.5 & 2 & -5 & -1 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & -2 & -5 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ako pretpostavimo da je potrebno proveriti asimptotsku stabilnost ekvi-

librijuma sistema čija je matrica Jakobijana  $A_{17}$ , tada se ispostavlja da sam Geršgorinov skup daje potvrđan odgovor na ovo pitanje (Slika 3.4).

Sa druge strane, ako želimo da istu analizu sprovedemo na dinamičkom sistemu čija je matrica Jakobijana u ekvilibrijumu community matrica  $A_{16}$ , tada nije moguće izvesti zaključak na osnovu lokalizacije spektra Geršgorinovim skupom. Šta više, ispostavlja se da ni neke druge lokalizacije spektra, kao što su skupovi  $\mathcal{K}(A_{16})$  i  $\mathcal{D}(A_{16})$  ne uspeavaju u tome, vidi Sliku 3.5(a). Slična je situacija i sa skupovima  $\mathcal{A}_1(A_{16})$  i  $\mathcal{A}_2(A_{16})$ , Slika 3.6. Međutim, asimptotsku stabilnost implicira položaj CKV skupa (Slika 3.5(b)), i to je upravo potvrda činjenice da itekako ima smisla raditi u pravcu formulacije novih (lako sračunljivih) oblasti lokalizacija spektra proizvoljne matrice.

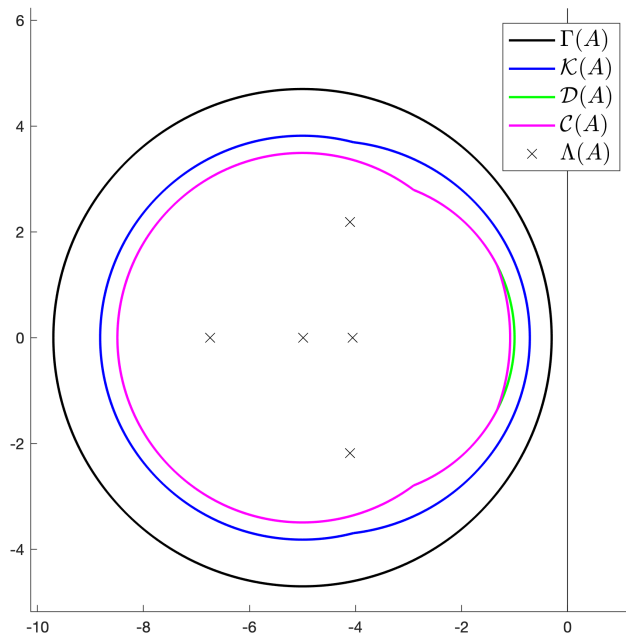
Tragom potencijalnih interesantnih i aktuelnih primera kompleksnih sistema koji bi dodatno pojačali potrebu za lokalizacijama matričnog spektra, naišli smo na primere takvih matrica na osnovu kojih je autor u [102] izvodio zaključke o stabilnosti ekvilibrijuma (*disease-free equilibrium*) koji asimptotski eliminiše bolest iz populacije SVEIRS epidemijskog modela uz sprovođenje neprekidne veštačke imunizacije (vakcinacije). Matrice tog tipa date su redom u dva granična slučaja - sa kompletiranom vakcinacijom,

$$A_{18} = \begin{bmatrix} -0.05 & 0 & 0 & -0.0302 & 0 \\ 0.01 & -0.1067 & 0.01 & 0.0092 & 0.01 \\ 0 & 0 & -0.05 & 0.0047 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0512 & 0 \\ 0 & 0.0667 & 0 & 0.997 & -0.05 \end{bmatrix},$$

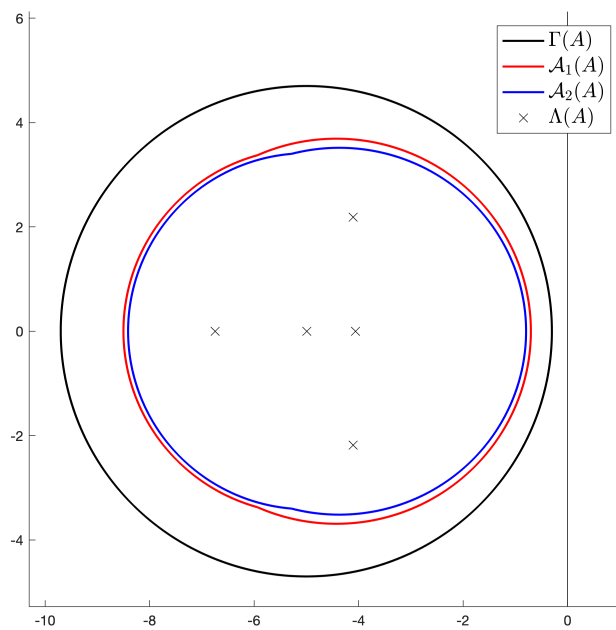
i bez nje,

$$A_{19} = \begin{bmatrix} -0.04 & 0.01 & 0.01 & -0.0423 & 0.01 \\ 0 & -0.1067 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.05 & 0.005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.0505 & 0 \\ 0 & 0.0667 & 0 & 0.997 & -0.05 \end{bmatrix}.$$

Procena parametara ovog i sličnih nelinearnih modela iz epidemiologije u praksi se, po pravilu, izvodi tako što se nakon *eksplicitnog izračunavanja* karakterističnih korena matrice Jakobijana u ravnotežnoj tački postave uslovi koji garantuju stabilnost ekvilibrijuma, nakon čega sledi diskusija slučajeva, pa je lokalizaciona tehnika u tim situacijama



(a)

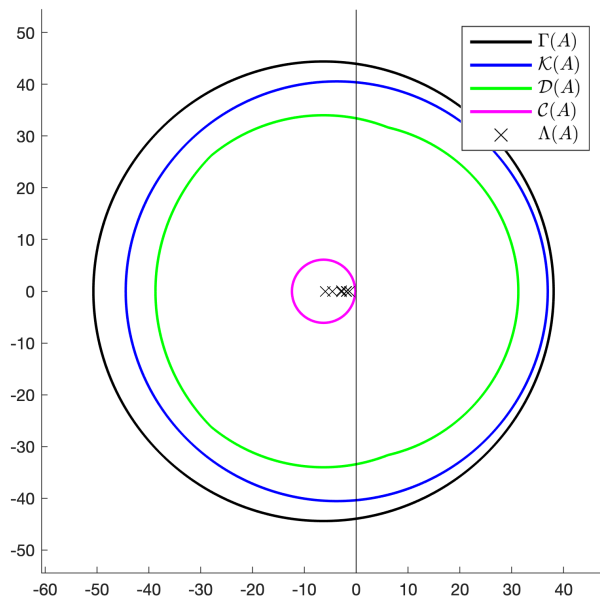


(b)

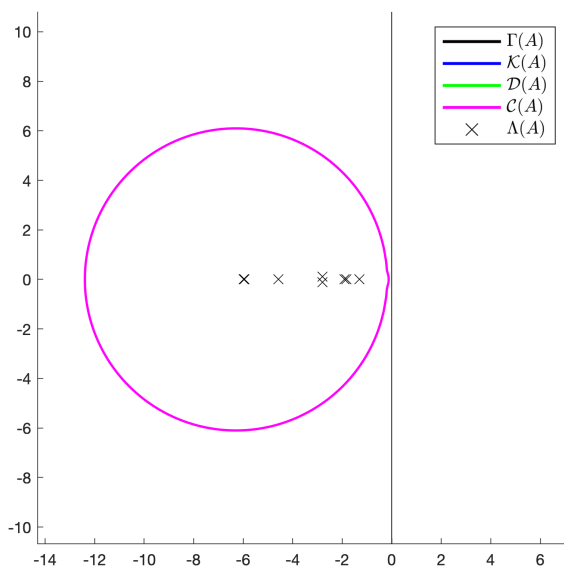
Slika 3.4: Odnos lokalizacionih skupova za  $\Lambda(A_{17})$ . Položaj Geršgorinovog skupa implicira zaključaj o asimptotskoj stabilnosti.



### 3.5. Primena u dinamičkoj analizi kompleksnih sistema

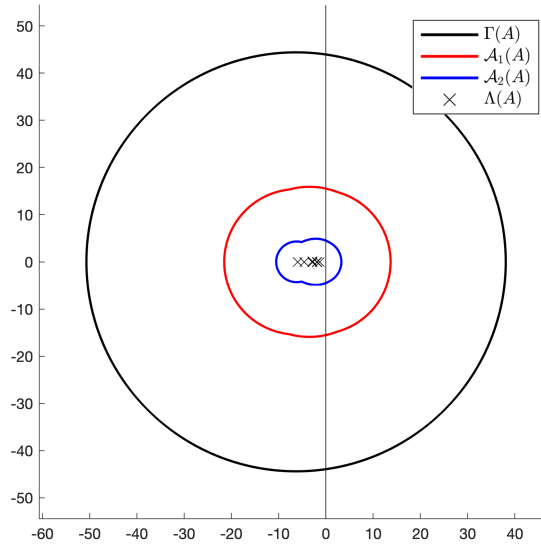


(a)



(b)

Slika 3.5: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma(A_{16})$ ,  $\mathcal{K}(A_{16})$ ,  $\mathcal{D}(A_{16})$  i  $\mathcal{C}(A_{16})$  za  $\Lambda(A_{16})$  (a) i uvećani prikaz (b). Položaj skupa  $\mathcal{C}(A_{16})$  daje odgovor na pitanje o asimptotskoj stabilnosti.

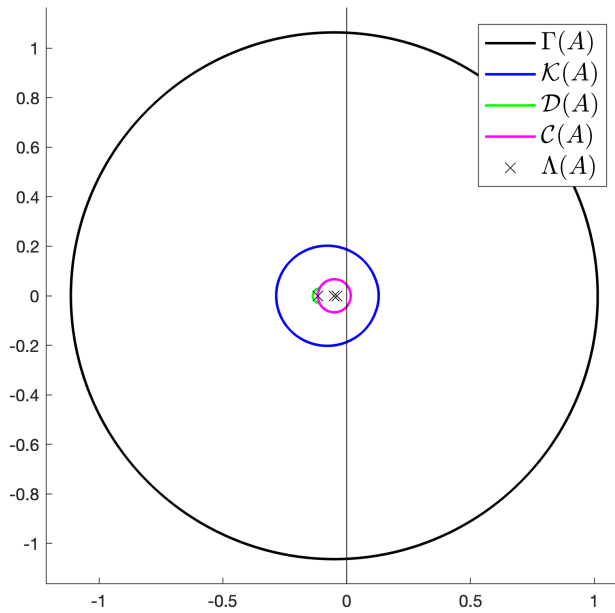


Slika 3.6: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma(A_{16})$ ,  $\mathcal{A}_1(A_{16})$  i  $\mathcal{A}_2(A_{16})$  za  $\Lambda(A_{16})$ . Nijedna od ovih lokalizacija ne daje odgovor na pitanje o asimptotskoj stabilnosti.

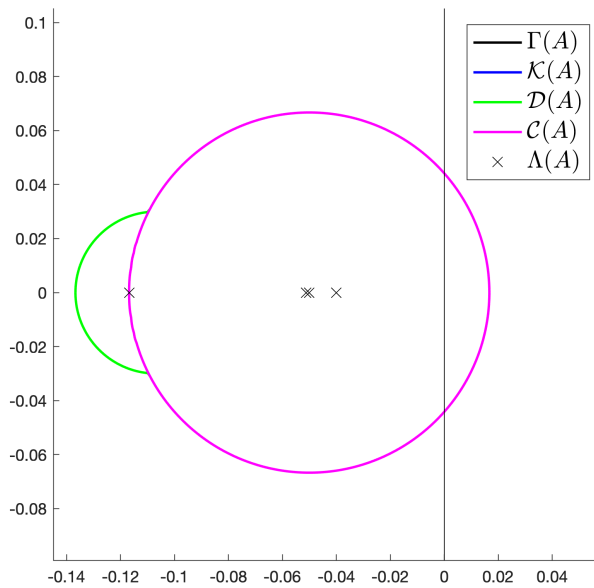
nepotrebna. Ovde želimo da naglasimo da lokalizacije spektra, koje su mnogo "jeftinije", mogu uspešno zameniti nalaženje karakterističnih korena. Slike 3.7 i 3.8 odnose se na uslove potpune vakcinacije populacije, a Slike 3.9 i 3.10 na slučaj kada vakcinacija nije sprovedena.

Međutim, u nadi da će spomenuti modeli u skorijoj budućnosti biti modernizovani, u smislu kalibracije parametara koja nije zasnovana na eksplicitnom izračunavanju karakterističnih korena (koje postaje nemoguće sa porastom dimenzije problema), za očekivati je da bi pristup pomoću lokalizacija spektra odgovarajuće matrice bio veoma poželjan i nezaobilazan alat u dinamičkoj analizi takvih i sličnih modela.

### 3.5. Primena u dinamičkoj analizi kompleksnih sistema

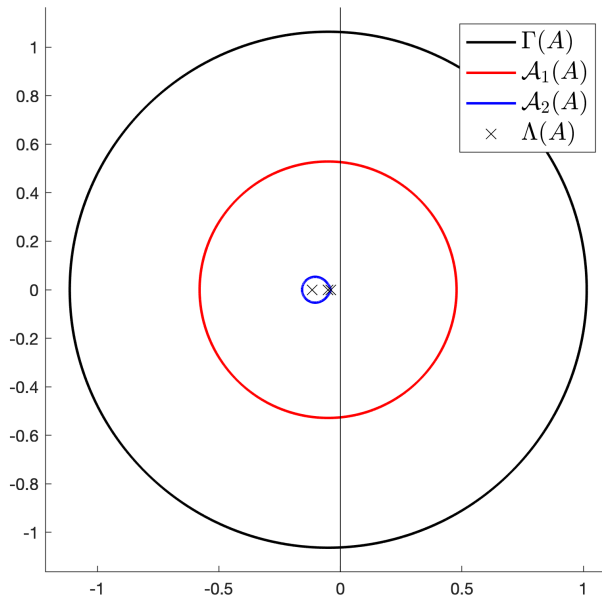


(a)

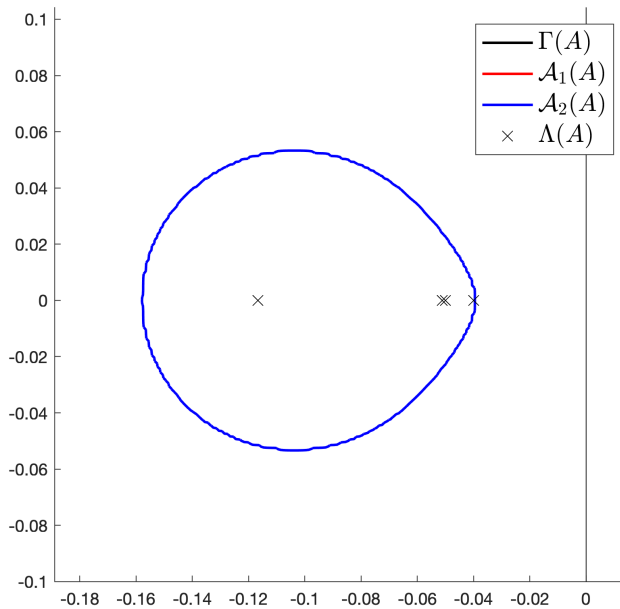


(b)

Slika 3.7: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma(A_{18})$ ,  $\mathcal{K}(A_{18})$ ,  $\mathcal{D}(A_{18})$  i  $\mathcal{C}(A_{18})$  za  $\Lambda(A_{18})$  (a) i uvećani prikaz (b). Nijedna od lokalizacija ne daje odgovor na pitanje o asimptotskoj stabilnosti.

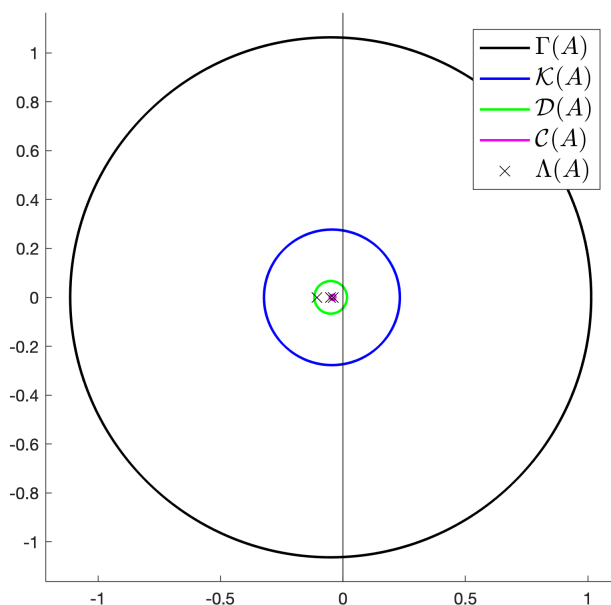


(a)

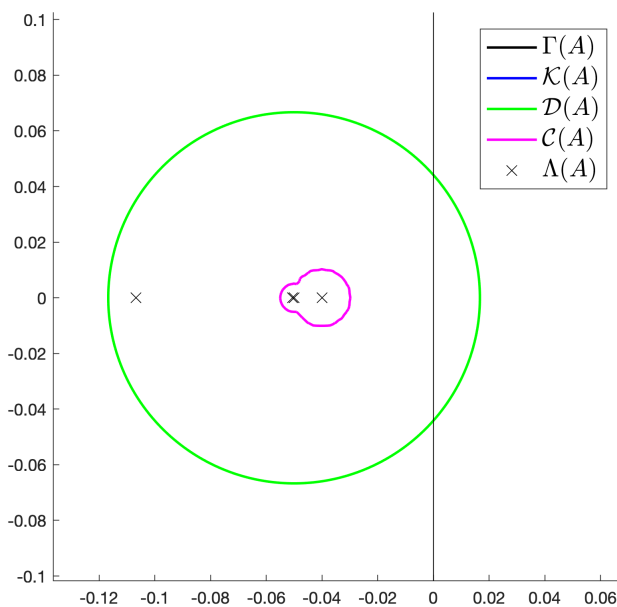


(b)

Slika 3.8: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma(A_{18})$ ,  $\mathcal{A}_1(A_{18})$  i  $\mathcal{A}_2(A_{18})$  za  $\Lambda(A_{18})$  (a) i uvećani prikaz (b). Položaj skupa  $\mathcal{A}_2(A_{18})$  daje odgovor na pitanje o asimptotskoj stabilnosti.

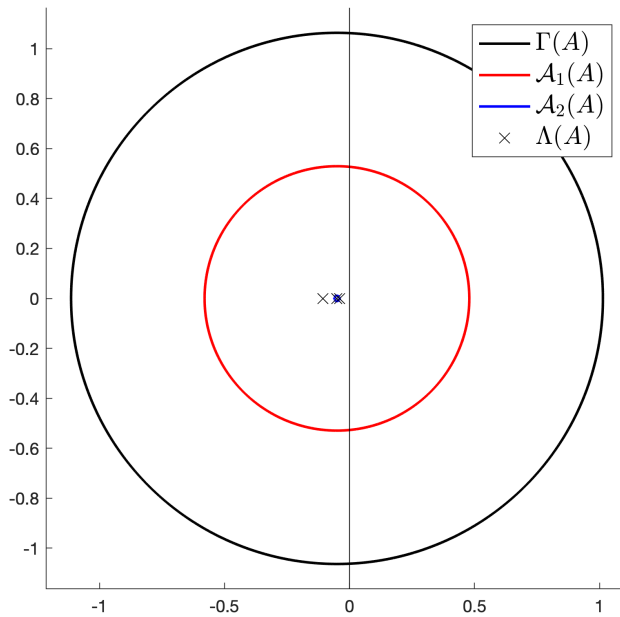


(a)

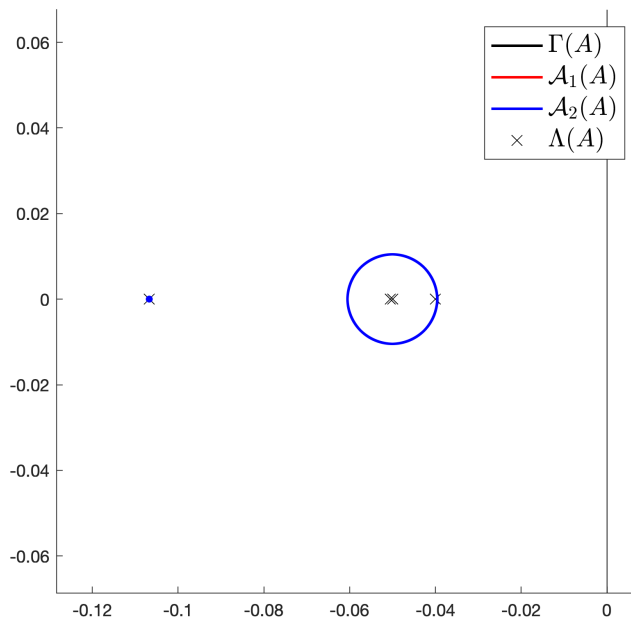


(b)

Slika 3.9: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma(A_{19})$ ,  $\mathcal{K}(A_{19})$ ,  $\mathcal{D}(A_{19})$  i  $\mathcal{C}(A_{19})$  za  $\Lambda(A_{19})$  (a) i uvećani prikaz (b). Položaj skupa  $\mathcal{C}(A_{19})$  daje odgovor na pitanje o asimptotskoj stabilnosti.



(a)



(b)

Slika 3.10: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma(A_{19})$ ,  $\mathcal{A}_1(A_{19})$  i  $\mathcal{A}_2(A_{19})$  za  $\Lambda(A_{19})$  (a) i uvećani prikaz (b). Položaj skupa  $\mathcal{A}_2(A_{19})$  daje odgovor na pitanje o asimptotskoj stabilnosti.

### 3.5.2 Ostala dinamička svojstva

Studijom relevantne literature [111] nalazimo podatak da matrice veličine, poput spektralne, numeričke i Geršgorinove apscise, kriju odgovore na pitanja o relevantnim svojstvima dinamičkih sistema i njihovih tačaka ravnoteže.

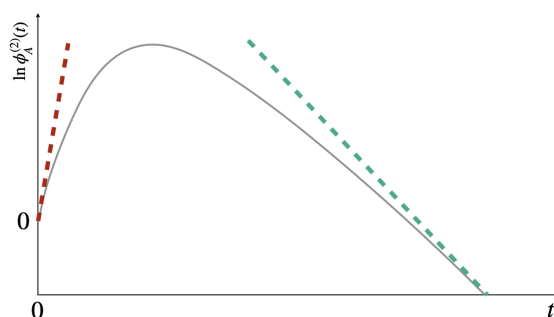
Naime, analizom prirodnog logaritma funkcije evolucije u Euklidskoj normi,  $\ln \|e^{tA}\|_2$ , došlo se do zaključka da je spektralna apscisa matrice u neposrednoj vezi sa *dugoročnim* (to jest *asimptotskim*) ponašanjem sistema (relativno spram vremena)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|e^{tA}\|_2}{t} = \alpha(A), \quad (3.9)$$

dok je nagib tangente u početnom trenutku (*trenutni odgovor*, odnosno *impuls sistema*) okarakterisan numeričkom apscisom, tačnije

$$\left. \frac{d}{dt} \left[ \ln \|e^{tA}\|_2 \right] \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln \|e^{tA}\|_2}{t} = \omega(A), \quad (3.10)$$

što je ilustrovano na Slici 3.11.



Slika 3.11: Početni impuls sistema (nagib crvene isprekidane linije) kao i asimptotsko ponašanje (nagib zelene isprekidane linije).

Pored toga, spektralna apscisa odgovarajuće matrice daje odgovor i na pitanje o rezilijentnosti ekvilibrijuma (odnosno njegove otpornosti na perturbacije), kao i vremenu koje je dinamičkom sistemu neophodno da se ponovo stabilizuje. U tom smislu, dobro je poznata veza otpornosti i spektralne apscise

$$\rho_A = -\alpha(A),$$

stoga (2.9) implicira da se vreme povratka invarijantno u odnosu na normu određuje kao recipročna vrednost spektralne apscise suprotnog znaka,

$$t_A = -\frac{1}{\alpha(A)}.$$

Ako pretpostavimo da je dinamički sistem asimptotski stabilan, već smo videli da postoji veličina koja govori o kapacitetu početne perturbacije da proizvede amplifikaciju odnosno rast funkcije evolucije, a koja predstavlja reaktivnost tačke ravnoteže. Sa stanovišta interpretacije u kontekstu osobina matrice  $A$ , u slučaju norme beskonačno reaktivnost je okarakterisana Geršgorinovom apscisom,

$$\psi_A^{(\infty)} = \gamma(A),$$

dok u radu sa normom dva tu ulogu preuzima numerička apscisa,

$$\psi_A^{(2)} = \omega(A).$$



## Ocene $\ell_p$ norme inverzne matrice

*"Wherever there is number, there is beauty."*

PROCLUS

Potreba za kvalitetnim i upotrebljivim ocenama inverza regularne matrice u posmatranoj matricnoj normi sa gornje strane proistekla je iz značajnog broja potencijalnih teorijskih i praktičnih primena u oblasti numeričke matematike. Postojanje neke od takvih ocena direktno implicira ocenu uslovnog broja matrice, koji je definisan na sledeći način

$$\kappa^{(p)}(A) := \|A\|_p \|A^{-1}\|_p,$$

a predstavlja meru *"bliskosti singularnosti"*, ili u svetlu rešavanja sistema linearnih jednačina  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , on je *najveća stopa rasta relativne promene u rešenju ( $\mathbf{x}$ ) uzrokovane relativnom promenom u podacima ( $\mathbf{b}$ )*. Drugu interesantnu primenu ova tematika nalazi u ocenama [83, 48], kao i kontroli grešaka prilikom rešavanja problema linearne komplementarnosti [28]. Ocena norme inverzne matrice je potvrdila svoj značaj i u dokazima konvergencije iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina velikih dimenzija, čija matrica poseduje neku specijalnu (na primer, retku) strukturu, a koji se zasnivaju na razlaganjima (splitinzima) i višestrukim razlaganjima (multisplitinzima) matrice sistema, [3, 62, 63]. Naročiti benefiti uopštenja ocene norme inverzne matrice biće obrađeni prilikom analize principa lokalizacije pseudospektra matrica, u narednoj glavi. U nastavku ćemo slučajeve matricnih normi beskonačno, jedan i

dva razmotriti zasebno, uz napomenu da je pretpostavka o pripadnosti nekoj od poznatih potklasa regularnih  $H$ -matrica neophodna.

## 4.1 Slučaj norme $\ell_\infty$

Prvi pisani trag o oceni norme beskonačno inverza proizvoljne SDD matrice zvanična literatura beleži u [1], u kojem su autori ovaj rezultat dokazali i koristili kao 'alat' za dokaz teoreme o konvergenciji splajna. Nešto više od decenije nakon toga, Džejms Varah (James Varah) je formulisao i dokazao ovu ocenu u obliku u kojem je i danas u upotrebi, uz proširenje na blok slučaj, [114]. Tačkasta varijanta tvrđenja, poznata kao Varahova ocena, glasi.

**TEOREMA 32** *Ako je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna SDD matrica, tada je*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\min_{i \in N} \{|a_{ii}| - r_i(A)\}} =: \tau^{(\infty)}(A). \quad (4.1)$$

Jasno je da uslov stroge dijagonalne dominacije matrice  $A$  obezbeđuje pozitivnost imenioca u izrazu za  $\tau^{(\infty)}(A)$ . S tim u vezi, ocena (4.1) je lošija što je izraz u imeniocu manji, odnosno u slučajevima kada SDD matrica ima vrstu koja je "slabo SDD". Zbog toga je korisno tražiti nove gornje ocene za širu klasu matrica, koje će važiti i za SDD, a biti u nekim slučajevima i bolje od (4.1).

Pozivajući se na Definiciju 9, Teoremu 32 moguće je uopštiti na celu klasu regularnih  $H$ -matrica.

**LEMA 7** *Za svaku  $H$ -matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  postoji vektor  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$  tako da važi*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \frac{\max_{i \in N} x_i}{\min_{i \in N} \left\{ |a_{ii}| x_i - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} |a_{ij}| x_j \right\}} =: \tau_{\mathbf{x}}^{(\infty)}(A). \quad (4.2)$$

Aplikativni izazov ove leme leži u činjenici da eksplicitni oblik vektora  $\mathbf{x}$  (u funkciji od elemenata matrice  $A$ ), odnosno skalirajuće matrice  $X$  čiji su dijagonalni elementi komponente posmatranog vektora, nije uvek poznat.

Naredno tvrđenje tiče se ocene norme beskonačno inverza Ostrovski matrica, i njegov dokaz je implicitno sadržan u dokazu Leme 3 u [70].

**TEOREMA 33** *Ako je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna Ostrovski matrica, tada je*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{\substack{i,j \in N \\ i \neq j}} \frac{|a_{ii}| + r_j(A)}{|a_{ii}||a_{jj}| - r_i(A)r_j(A)} =: \tau_O^{(\infty)}(A). \quad (4.3)$$

U slučaju  $S$ -SDD matrica, odgovarajući rezultat ponudio je Morača u [89], dok je isti zatim analiziran i uopšten, [74].

**TEOREMA 34** *Ako je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ ,  $S$ -SDD matrica za neki neprazan podskup  $S$  indeksnog skupa  $N$ , tada je*

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \max_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S}}} \max\{\theta_{i,j}^S(A), \theta_{j,i}^{\bar{S}}(A)\} =: \tau_S^{(\infty)}(A), \quad (4.4)$$

gde su

$$\theta_{i,j}^S(A) := \frac{|a_{ii}| - r_i^S + r_j^S}{(|a_{ii}| - r_i^S)(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}) - r_i^{\bar{S}}r_j^S}, \quad i \in S, j \in \bar{S}.$$

Koristeći činjenicu da je svaka SDD matrica ujedno i  $S$ -SDD (za svaki neprazan podskup indeksnog skupa), sledeće pomoćno tvrđenje je nezavisno dokazano u radovima [74] i [37].

**LEMA 8** *Ako je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna SDD matrica, tada za svaki neprazan podskup  $S$  indeksnog skupa  $N$  važi*

$$\tau_S^{(\infty)}(A) \leq \tau^{(\infty)}(A).$$

S tim u vezi, ovu lemu je moguće primeniti u smislu optimizacije ocene (4.4), što smo učinili u [37], i zaključili da za svaku SDD matricu važi ocena

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq \min_{\emptyset \neq S \subseteq N} \tau_S^{(\infty)}(A) \leq \tau^{(\infty)}(A), \quad (4.5)$$

nakon čega smo ovaj rezultat iskoristili za ocenu najmanje singularne vrednosti matrice koja zadovoljava svojstvo stroge dijagonalne dominacije.

Dva rezultata u vezi sa klasom Nekrasov matrica nalazimo u [25].

**TEOREMA 35** *Ako je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , Nekrasov matrica, tada je*

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{\max_{i \in N} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}|}}{1 - \max_{i \in N} \frac{h_i(A)}{|a_{ii}|}} =: \tau_{N_1}^{(\infty)}(A) \quad (4.6)$$

*i*

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{\max_{i \in N} z_i(A)}{\min_{i \in N} \{|a_{ii}| - h_i(A)\}} =: \tau_{N_2}^{(\infty)}(A), \quad (4.7)$$

*pri čemu su*

- $z_1(A) := 1$
- $z_i(A) := \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| \frac{z_j(A)}{|a_{jj}|} + 1$ , za svako  $i \in N \setminus \{1\}$ .

S obzirom da postoje slučajevi kada jedna od ocena radi bolje a druga ne i obrnuto, za svaku Nekrasov matricu  $A$  važi

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \min\{\tau_{N_1}^{(\infty)}(A), \tau_{N_2}^{(\infty)}(A)\}.$$

Budući da je svaka *SDD* matrica istovremeno i Nekrasov, ocene (4.6) i (4.7) moguće je koristiti i za njih, s tim da u startu za te ocene i ocenu (4.1) nije moguće unapred reći koja je najbolja.

Prethodni rezultati motivisali su novu ocenu, izvedenu u [76], koja za svaku Nekrasov matricu popravlja ocene (4.6) i (4.7).

**TEOREMA 36** *Ako je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , Nekrasov matrica, tada je*

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \max_{i \in N} \frac{z_i(A)}{|a_{ii}| - h_i(A)} =: \tau_{N_3}^{(\infty)}(A). \quad (4.8)$$

Osim toga, u istom radu dokazano je i sledeće pomoćno tvrđenje.

**LEMA 9** *Ako je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna *SDD* matrica, tada važi*

$$\tau_{N_3}^{(\infty)}(A) \leq \tau^{(\infty)}(A).$$

Dakle, za svaku *SDD* matricu ocena (4.8) nije nikad gora od (4.1).

## 4.2 Slučaj norme $\ell_1$

Ovu podsekciju posvetićemo ocenama norme jedan, koje su manje izučavane u literaturi ali koje, u kombinaciji sa prethodnim rezultatima, mogu pomoći u oceni najmanje singularne vrednosti. Pre nego što predstavimo relevantan rezultat za klasu  $H$ -matrica, kao što je to učinjeno u [37], dokazaćemo sledeće pomoćno tvrđenje.

**LEMA 10** *Ako je  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$   $M$ -matrica,  $\mathbf{w} = [w_i] \in \mathbb{R}^n$  vektor sa najmanje jednom pozitivnom komponentom,  $A^{-1}\mathbf{w} =: \delta$ ,  $(A^T)^{-1}\mathbf{w} =: \eta$ , gde je  $A^{-1} = [b_{ij}]$ , tada je*

$$\min_{i \in N} \sum_{j \in N} b_{ij} \geq \frac{\min_{i \in N} \delta_i}{\max_{i \in N} w_i} \quad i \quad \min_{j \in N} \sum_{i \in N} b_{ij} \geq \frac{\min_{i \in N} \eta_i}{\max_{i \in N} w_i}. \quad (4.9)$$

**DOKAZ:** Označimo sa  $k \in N$  indeks za koji je  $\|\mathbf{w}\|_\infty = w_k$ . Tada, na osnovu pretpostavke da  $\mathbf{w}$  ima najmanje jednu komponentu pozitivnu, zaključujemo da je  $w_k > 0$  i da je, za svako  $i \in N$ , ispunjeno

$$\delta_i = \sum_{j \in N} b_{ij} w_j \leq \sum_{j \in N} b_{ij} w_k,$$

odnosno,

$$\sum_{j \in N} b_{ij} \geq \frac{\delta_i}{w_k},$$

što implicira

$$\min_{i \in N} \sum_{j \in N} b_{ij} \geq \frac{\min_{i \in N} \delta_i}{\max_{i \in N} w_i}.$$

Druga relacija sledi direktnom primenom ovog rezultata na matricu  $A^T$ , budući da važi jednakost  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ , kao i činjenice da je klasa  $M$ -matrica invarijantna u odnosu na transponovanje.  $\triangle$

Ocene date sa (4.9) o minimalnoj sumi po vrstama (kolonama) svake  $M$ -matrice su *netrivijalne* samo pod uslovom da je  $\delta > \mathbf{0}$  (odnosno  $\eta > \mathbf{0}$ ).

Upotrebom prethodnih činjenica u mogućnosti smo da postavimo *uopšteni teorijski okvir* o oceni norme jedan inverza proizvoljne  $H$ -matrice.

**TEOREMA 37** Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna  $H$ -matrica i  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$  pozitivan vektor za koji je  $\mathcal{M}(A)\mathbf{x} > \mathbf{0}$  (takav vektor uvek postoji). Tada važi

$$\|A^{-1}\|_1 \leq \zeta + \frac{\|\mathbf{x}\|_1 - \zeta \|\mathcal{M}(A)\mathbf{x}\|_1}{\min_{i \in N} (\mathcal{M}(A)\mathbf{x})_i},$$

gde je

$$\zeta := \frac{\min_{i \in N} x_i}{\max_{i \in N} (\mathcal{M}(A^T)\mathbf{x})_i}.$$

**DOKAZ:** Pre svega, budući da  $\mathcal{M}(A)$  pripada klasi  $M$ -matrica, to garantuje postojanje vektora  $\mathbf{x} > \mathbf{0}$ , za koji je  $\mathbf{z} := \mathcal{M}(A)\mathbf{x} > \mathbf{0}$ . Pored toga,  $\mathcal{M}(A)^T$  je takođe  $M$ -matrica.

Uverimo se sada da vektor  $\mathbf{y} = \mathcal{M}(A)^T\mathbf{x}$  ima barem jednu pozitivnu komponentu. S tim u vezi, pretpostavimo suprotno, to jest da je  $y_i \leq 0$ , za svako  $i \in N$ . Kako je  $\mathbf{x} = (\mathcal{M}(A)^T)^{-1}\mathbf{y}$ , nenegativnost matrice  $(\mathcal{M}(A)^T)^{-1}$ , za svako  $i \in N$ , povlači

$$x_i = ((\mathcal{M}(A)^T)^{-1}\mathbf{y})_i \leq 0,$$

što je očigledna kontradikcija. Direktnom primenom Leme 10, birajući  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{x}$ , pri čemu je  $\mathcal{M}(A)^{-1} = [b_{ij}]$ , sledi

$$\min_{j \in N} \sum_{i \in N} b_{ij} \geq \frac{\min_{i \in N} x_i}{\max_{i \in N} (\mathcal{M}(A)^T\mathbf{x})_i} = \zeta. \quad (4.10)$$

Sa druge strane, jednakost  $\mathcal{M}(A)^{-1}\mathbf{z} = \mathbf{x}$  po komponentama izgleda ovako

$$\sum_{j \in N} b_{ij}z_j = x_i, \quad \text{za svako } i \in N,$$

odakle, uzimajući sume po  $i$ , dobijamo

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} b_{ij}z_j = \sum_{i \in N} x_i,$$

to jest,

$$\sum_{j \in N} z_j \sum_{i \in N} b_{ij} = \sum_{i \in N} x_i.$$

Primetimo da je za svako  $k \in N$

$$z_k \sum_{i \in N} b_{ik} + \sum_{j \in N \setminus \{k\}} z_j \sum_{i \in N} b_{ij} = \sum_{i \in N} x_i,$$

odakle, primenom (4.10), možemo zaključiti da je za svako  $k \in N$

$$\sum_{i \in N} x_i \geq z_k \sum_{i \in N} b_{ik} + \zeta \sum_{j \in N \setminus \{k\}} z_j.$$

Pozitivnost vektora  $z$  obezbeđuje da, nakon deljenja sa  $z_k$ , sledi

$$\sum_{i \in N} b_{ik} \leq \frac{1}{z_k} \left( \sum_{i \in N} x_i - \zeta \sum_{j \in N \setminus \{k\}} z_j \right),$$

što je ekvivalentno sa

$$\sum_{i \in N} b_{ik} \leq \frac{1}{z_k} \left( \sum_{i \in N} x_i - \zeta \sum_{j \in N} z_j + \zeta z_k \right) = \zeta + \frac{\|\mathbf{x}\|_1 - \zeta \|\mathbf{z}\|_1}{z_k}.$$

Napokon, koristeći ovaj rezultat, imamo da je

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_1 &= \max_{k \in N} \sum_{i \in N} b_{ik} \leq \max_{k \in N} \left( \zeta + \frac{\|\mathbf{x}\|_1 - \zeta \|\mathbf{z}\|_1}{z_k} \right) \\ &= \zeta + \frac{\|\mathbf{x}\|_1 - \zeta \|\mathcal{M}(A)\mathbf{x}\|_1}{\min_k (\mathcal{M}(A)\mathbf{x})_k}. \end{aligned}$$

Sada, na osnovu Teoreme 5,  $|A^{-1}| \leq \mathcal{M}(A)^{-1}$ , i monotonosti norme jedan sledi

$$\|A^{-1}\|_1 \leq \|\mathcal{M}(A)^{-1}\|_1,$$

čime je dokaz završen.  $\triangle$

Sa praktičnog stanovišta, poželjno je poznavati eksplicitan oblik vektora  $\mathbf{x}$  iz prethodne Teoreme. U slučaju SDD matrica, zna se da uloga tog vektora pripada jediničnom vektoru  $\mathbf{e}$ . Na osnovu toga, jednostavnim proverom se može pokazati da ovaj rezultat uopštava specijalan slučaj, razmatran u [90].

**TEOREMA 38** Ako je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna SDD matrica, tada je

$$\|A^{-1}\|_1 \leq \frac{n - \frac{\sum_{i \in N} (|a_{ii}| - r_i) - \min_{i \in N} \{|a_{ii}| - r_i\}}{\max_{j \in N} \{|a_{jj}| - c_j\}}}{\min_{i \in N} \{|a_{ii}| - r_i\}} =: \tau^{(1)}(A).$$

Pored ovog, i u slučaju S-SDD matrica moguće je izvesti zaključak o obliku vektora  $\mathbf{x}$ , što se može zaključiti na osnovu Teoreme 7.

Tvrđenje u nastavku, pored ove, dopušta i mogućnost da je podskup  $S$  baš jednak indeksnom skupu  $N$ .

**TEOREMA 39** Ako je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ ,  $n \geq 2$ , S-SDD matrica za neki neprazan podskup  $S$  indeksnog skupa  $N$ , za koji je  $\text{card}(S) = m \leq n$ , tada je  $\|A^{-1}\|_1 \leq \tau_S^{(1)}(A)$ , pri čemu je

$$\tau_S^{(1)}(A) := \zeta + \frac{mg + n - m - \zeta \left( g \sum_{i \in S} |a_{ii}| + \sum_{i \in \bar{S}} |a_{ii}| - g \sum_{i \in N} r_i^S - \sum_{i \in N} r_i^{\bar{S}} \right)}{\min_{i \in S} \left\{ \min_{i \in S} \{g(|a_{ii}| - r_i^S) - r_i^{\bar{S}}\}, \min_{i \in \bar{S}} \{|a_{ii}| - gr_i^S - r_i^{\bar{S}}\} \right\}},$$

gde su

$$\zeta = \frac{\min\{1, g\}}{\max \left\{ \max_{i \in S} \{g(|a_{ii}| - c_i^S) - c_i^{\bar{S}}\}, \max_{i \in \bar{S}} \{|a_{ii}| - gc_i^S - c_i^{\bar{S}}\} \right\}},$$

$$g := \frac{B_1 + B_2}{2}, \quad B_1 := \max_{i \in S} \frac{r_i^{\bar{S}}}{|a_{ii}| - r_i^S},$$

$$B_2 := \begin{cases} 2 - B_1 & , \text{ ako } \bar{S} = \emptyset, \\ 2B_1 & , \text{ ako } \bar{S} \neq \emptyset \text{ i } r_j^S = 0 \text{ za svako } j \in \bar{S}, \\ \min_{\substack{j \in \bar{S} \\ r_j^S \neq 0}} \frac{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}}{r_j^S} & , \text{ ako } \bar{S} \neq \emptyset \text{ i } r_j^S \neq 0 \text{ za neko } j \in \bar{S}, \end{cases}$$

uz uobičajenu konvenciju da su minimum, maksimum i suma nad praznim skupom nula.



DOKAZ: Neka je  $A$  proizvoljna  $S$ -SDD matrica, za neki neprazan podskup  $S$ , čija je kardinalnost  $\text{card}(S) = m \leq n$ . To implicira da postoji skalirajuća matrica

$$X = \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i = \begin{cases} g & , i \in S \\ 1 & , i \in \bar{S} \end{cases}$$

koja obezbeđuje strogu dijagonalnu dominaciju skalirane matrice  $AX$ . Šta više, dijagonalni elementi matrice  $X$  su komponente pozitivnog vektora  $\mathbf{x}$  za koji je  $\mathcal{M}(A)\mathbf{x} > \mathbf{0}$ . Mogući slučajevi su:

		$B_2$	$g$
(*)	$\bar{S} = \emptyset$	$2 - B_1$	1
(**)	$\forall j \in \bar{S} : r_j^S = 0$	$2B_1$	$\frac{3}{2}B_1$
(***)	$\bar{S} \neq \emptyset$ $\exists j \in \bar{S} : r_j^S \neq 0$	$\min_{\substack{j \in \bar{S} \\ r_j^S \neq 0}} \frac{ a_{jj}  - r_j^{\bar{S}}}{r_j^S}$	$\frac{B_1 + B_2}{2}$

Vektori  $\mathcal{M}(A)\mathbf{x}$  i  $\mathcal{M}(A)^T\mathbf{x}$  su po komponentama dati na sledeći način

$$(\mathcal{M}(A)\mathbf{x})_i = \begin{cases} g|a_{ii}| - gr_i^S - r_i^{\bar{S}} & , i \in S \\ |a_{ii}| - gr_i^S - r_i^{\bar{S}} & , i \in \bar{S} \end{cases}$$

odnosno

$$(\mathcal{M}(A)^T\mathbf{x})_i = \begin{cases} g|a_{ii}| - gc_i^S - c_i^{\bar{S}} & , i \in S \\ |a_{ii}| - gc_i^S - c_i^{\bar{S}} & , i \in \bar{S}. \end{cases}$$

Primitimo da su sve komponente vektora  $\mathcal{M}(A)\mathbf{x}$  strogo pozitivne. Naime,

- (\*) Ako je  $S = N$ , što bi značilo da je  $A$  SDD matrica, to povlači da je  $g = 1$ , pa je  $|a_{ii}| - r_i^S - r_i^{\bar{S}} = |a_{ii}| - r_i > 0$  za svako  $i \in N$ .

(\*\*) U ovom slučaju možemo zaključiti da za svako  $i \in S$  važi

$$g > \frac{r_i^{\bar{S}}}{|a_{ii}| - r_i^S},$$

što je, s obzirom na pozitivnost imenioca  $|a_{ii}| - r_i^S$  ekvivalentno sa  $g|a_{ii}| - gr_i^S - r_i^{\bar{S}} > 0$ . Sa druge strane, budući da je  $r_j^S = 0$  za svako  $j \in \bar{S}$ , to znači da je  $|a_{jj}| - gr_j^S - r_j^{\bar{S}} = |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}} > 0$ , što sledi iz  $S$ -SDD svojstva.

(\*\*\*) Ova mogućnost znači da za sve  $i \in S$  i svako  $j \in \bar{S}$  takvo da  $r_j^S \neq 0$  važi

$$\frac{r_i^{\bar{S}}}{|a_{ii}| - r_i^S} < g < \frac{|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}}{r_j^S},$$

stoga, za svako  $i \in S$  vredi  $g|a_{ii}| - gr_i^S - r_i^{\bar{S}} > 0$  i za svako  $j \in \bar{S}$  za koje je  $r_j^S \neq 0$  važi  $|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}} - gr_j^S > 0$ , dok za preostale indekse  $j \in \bar{S}$  takve da  $r_j^S = 0$  sledi  $|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}} > 0$ , po definiciji  $S$ -SDD.

Prema tome, pozivajući se na Teoremu 37, zaključujemo da je

$$\|A^{-1}\|_1 \leq \zeta + \frac{\|\mathbf{x}\|_1 - \zeta \|\mathcal{M}(A)\mathbf{x}\|_1}{\min_{i \in N}(\mathcal{M}(A)\mathbf{x})_i},$$

gde je

$$\zeta = \frac{\min_{i \in N} x_i}{\max_{i \in N} (\mathcal{M}(A)^T \mathbf{x})_i}.$$

S obzirom da je  $\text{card}(S) = m$ , to je  $\|\mathbf{x}\|_1 = mg + n - m$ . Dalje,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}(A)\mathbf{x}\|_1 &= \sum_{i \in S} (g(|a_{ii}| - r_i^S) - r_i^{\bar{S}}) + \sum_{j \in \bar{S}} (|a_{jj}| - gr_j^S - r_j^{\bar{S}}) \\ &= g \sum_{i \in S} |a_{ii}| + \sum_{i \in \bar{S}} |a_{ii}| - g \sum_{i \in N} r_i^S - \sum_{i \in N} r_i^{\bar{S}}, \end{aligned}$$

dok je strogo pozitivan minimum  $\min_{i \in N} (\mathcal{M}(A)\mathbf{x})_i$  jednak sa

$$\min \left\{ \min_{i \in S} (g(|a_{ii}| - r_i^S) - r_i^{\bar{S}}), \min_{i \in \bar{S}} (|a_{ii}| - gr_i^S - r_i^{\bar{S}}) \right\}.$$

Jasno je da je  $\min_{i \in N} x_i = \min \{1, g\}$ , dok je, na osnovu pretpostavki

$$\max_{i \in N} (\mathcal{M}(A)^T \mathbf{x})_i = \max \left\{ \max_{i \in S} (g(|a_{ii}| - c_i^S) - c_i^{\bar{S}}), \max_{i \in \bar{S}} (|a_{ii}| - gc_i^S - c_i^{\bar{S}}) \right\},$$

strogo pozitivan. Time je dokaz završen.  $\triangle$

Budući da prethodna ocena dozvoljava i granični izbor  $S = N$ , to znači da je očekivano da prolazak svim dopustivim podskupovima  $S$  u smislu optimizacije može produkovati bolju ocenu sa gornje strane.

LEMA 11 *Ako je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna SDD matrica, tada važi*

$$\|A^{-1}\|_1 \leq \min_{\emptyset \neq S \subseteq N} \tau_S^{(1)}(A) \leq \tau^{(1)}(A). \quad (4.11)$$

### 4.3 Ocene za najmanju singularnu vrednost

Kada je reč o Euklidskoj normi, gornja ocena inverzne matrice ima i dodatno tumačenje, imajući u vidu da je za proizvoljnu matricu  $A$

$$\|A^{-1}\|_2^{-1} = \sigma_{\min}(A)$$

njena najmanja singularna vrednost, pa zbog toga, o gornjim granicama za Euklidsku normu inverza možemo razmišljati u terminima donjih granica za  $\sigma_{\min}(A)$ . Međutim, zbog tehničkih izazova, ocena  $\ell_2$ -norme analizira se u svetlu prethodno razmatranih normi, budući da za svaku matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi relacija

$$\|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_\infty \|A\|_1} \leq \max\{\|A\|_\infty, \|A\|_1\}. \quad (4.12)$$

Prema tome,

$$\sigma_{\min}(A) \geq \frac{1}{\sqrt{\|A^{-1}\|_\infty \|A^{-1}\|_1}}, \quad (4.13)$$

klasa	ocena	
	$\ A^{-1}\ _\infty$	$\ A^{-1}\ _1$
S-SDD	$\tau_S^{(\infty)}(A)$	$\tau_S^{(1)}(A)$
SDD	$\tau^{(\infty)}(A)$	$\tau^{(1)}(A)$
	$\min \left\{ \min_{\emptyset \neq S \subseteq N} \tau_S^{(\infty)}(A), \tau_{N_3}^{(\infty)}(A) \right\}$	$\min_{\emptyset \neq S \subseteq N} \tau_S^{(1)}(A)$

Tabela 4.1: Uporedni pregled raznih ocena norme inverza za neke potklase  $H$ -matrica.

pa adekvatna kombinacija dobrih ocena normi  $\ell_\infty$  i  $\ell_1$  inverza sa gornje strane može dovesti do potrebnih kvalitetnih donjih ocena za  $\sigma_{\min}(A)$ . Radovi na ovu temu su mnogobrojni, a [114, 90, 37] su samo neki od njih.

Primitimo da prethodna tehnika izvođenja donjih ocena za  $\sigma_{\min}(A)$  polazi od bitne pretpostavke o pripadnosti matrice  $A$  nekoj od potklasa  $H$ -matrica. Sa druge strane, u literaturi je poznat izvestan broj ocena, videti [65, 66], koje su primenljive na proizvoljnu matricu  $A$ , s tim da u nekim slučajevima te ocene postaju trivijalne.

## Pseudospektar

*“‘Obvious’ is the most dangerous word in mathematics.”*

ERIC TEMPLE BELL

Literatura iz teorije dinamičkih sistema (ali i teorije matrica) daje nam podatke o postojanju matičnih struktura podložnih visokoj osetljivosti spektralnih osobina, kao što je na primer stabilnost, čak i u uslovima kontrolisanih promena (perturbacija). Da stvar bude interesantnija, ova osetljivost na male perturbacije u većini slučajeva oslikava tranzicionu nestabilnost inače asimptotski stabilnih kompleksnih sistema. Analiza *pseudospektra* odgovarajuće matrice se pokazala kao izuzetno koristan alat u nameri da se ovakve situacije rasvetle.

Pseudospektar je razvijen kao alat numeričke analize sa jasnim ciljem da dopuni informacije o matricama koje poseduju loše uslovljenu bazu karakterističnih vektora, što u euklidskoj normi znači da taj skup, ako je potpun, čine neortogonalni vektori. Ovaj alat je prvi put uveden u radu [77] iz 1975. godine, a naročiti interes privukao je tokom poslednje decenije prošlog veka. Kolekciju primera koji motivišu potrebu za novim konceptom nalazimo u [108], listu primena i pregled algoritama za izračunavanje (vizuelizaciju) koji nastoje da prevaziđu potencijalne vremenske i računsko–memorijske izazove u [109], a istorijski pregled u [110]. Referencu [111] ističemo kao sveobuhvatnu studiju o rezultatima koji se tiču i primena na linearne operatore.

Pojam pseudospektra najlakše ćemo razumeti kao uopštenje spektra, kroz analizu i ekstenziju uslova (3.1). Pre toga, za matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i

proizvoljan kompleksni skalar  $z$ , definišimo veličinu

$$R_A(z) := (zE - A)^{-1}$$

koja nosi naziv *rezolventa* matrice  $A$  u tački  $z$ . Prema tome, za svako  $\lambda \in \Lambda(A)$  rezolventa je nedefinisana, pa uvodimo konvenciju da je  $\|R_A(\lambda)\|_p^{-1} = 0$ . Postavlja se pitanje šta je sa onim tačkama kompleksne ravni u kojima je recipročna vrednost  $p$ -norme rezolvente *veoma mala*? Apriori izborom proizvoljno malog  $\varepsilon > 0$  kao gornje granice u toj kvantifikaciji stižemo do pojma uopštenog spektra.

**DEFINICIJA 25** Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica i  $\varepsilon > 0$ . Tada je  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A$  u  $p$ -normi, u oznaci  $\Lambda_\varepsilon^{(p)}(A)$ , definisan sa

$$\Lambda_\varepsilon^{(p)}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \|(zE - A)^{-1}\|_p^{-1} \leq \varepsilon\}. \quad (5.1)$$

Iz ove definicije je jasno da za svako  $\varepsilon > 0$  i svaku  $p$ -normu važi inkluzija

$$\Lambda(A) := \Lambda_0^{(p)}(A) \subset \Lambda_\varepsilon^{(p)}(A).$$

Posledično, važi i svojstvo *monotonosti*, u smislu implikacije

$$0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \implies \Lambda_{\varepsilon_1}^{(p)}(A) \subseteq \Lambda_{\varepsilon_2}^{(p)}(A),$$

što znači da je spektar zapravo smešten u preseku *svih*  $\varepsilon$ -pseudospektara,

$$\bigcap_{\varepsilon > 0} \Lambda_\varepsilon^{(p)}(A) = \Lambda(A).$$

Osim toga, budući da je upotreba Euklidske norme sa stanovišta numeričkih izračunavanja u praksi dominantna, specijalizovan oblik (5.1) glasi

$$\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \sigma_{\min}(zE - A) \leq \varepsilon\}. \quad (5.2)$$

Serijom paralelnih tvrđenja u [38], Trefeten i Embri ističu da su mnoge teoreme u oblasti spektra zapravo specijalni slučajevi pseudospektralnih analogona za  $\varepsilon = 0$ . S tim u vezi, uopšteni oblici tvrđenja mogu biti od koristi da "popune praznine" u razumevanju situacija kada karakteristični koreni potcene prostorni okvir informacija o matrici.

Relevantni izvori navode da je temu pseudospektra nezavisno obrađivao i Varah, koji je u svojoj nepublikovanoj tezi [113] iz 1967. godine upotrebio pojam  $\varepsilon$ -pseudo-svojstvenih vrednosti.

**DEFINICIJA 26** Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica i  $\varepsilon > 0$ . Tada je

$$\Lambda_\varepsilon^{(p)}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \exists B \in \mathbb{C}^{n,n} \text{ tako da } \|B\|_p \leq \varepsilon \text{ za koje } z \in \Lambda(A + B)\}. \quad (5.3)$$

Dakle, o  $\varepsilon$ -pseudospektru treba razmišljati kao o skupu u kompleksnoj ravni koji predstavlja uniju spektara perturbovanih matrica  $A + B$ , pri čemu su perturbacije kontrolisane parametrom  $\varepsilon$ , u smislu da je  $\|B\|_p \leq \varepsilon$

$$\Lambda_\varepsilon^{(p)}(A) := \bigcup_{\|B\|_p \leq \varepsilon} \Lambda(A + B). \quad (5.4)$$

Svako  $z \in \Lambda_\varepsilon^{(p)}(A)$  zove se  $\varepsilon$ -pseudo-karakteristični koren matrice  $A$ , kojem je moguće pridružiti (u opštem slučaju, ne jedinstven)  $\varepsilon$ -pseudo-karakteristični vektor  $\mathbf{v}$ ,

$$\Lambda_\varepsilon^{(p)}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \exists \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbf{v}\|_p = 1 \text{ tako da } \|(zE - A)\mathbf{v}\|_p \leq \varepsilon\}. \quad (5.5)$$

Teorema 2.1 u [111] potvrđuje ekvivalenciju definicija (5.1) i (5.4), ali ne isključuje njihovu paralelnu egzistenciju. Naime, prva definicija predstavlja osnovu za lokalizacije pseudospektra, dok druga akcentuje upotrebu kontrolisanih perturbacija sa ciljem analize spektralnih osobina. Jedna po mnogo čemu specifična tačka na rubu pseudospektra je *pseudospektralna apscisa* matrice  $A$ ,

$$\alpha_\varepsilon^{(p)}(A) := \max_{z \in \Lambda_\varepsilon^{(p)}(A)} \{\Re(z)\} \quad (5.6)$$

koja predstavlja realni deo najdešnje tačke skupa  $\Lambda_\varepsilon^{(p)}(A)$ .

Specijalno, pseudospektar proizvoljne normalne matrice  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  može se dovesti u vezu sa pseudospektrom njoj slične dijagonalne matrice  $\Lambda$ , i to

$$\Lambda_\varepsilon^{(p)}(A) = \Lambda_{\kappa^{(p)}(Q)\varepsilon}^{(p)}(\Lambda),$$

pri čemu je  $\kappa^{(p)}(Q)$  uslovni broj matrice  $Q$  iz (3.4) u  $p$ -normi. No, kako je u praksi Euklidska norma u širokoj upotrebi, njenim izborom važi

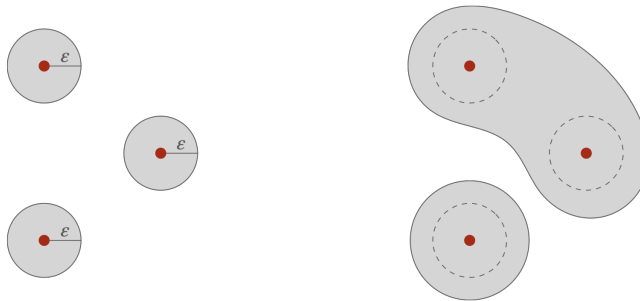
$\kappa^{(2)}(Q) = 1$ , što znači da je  $\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A) = \Lambda_\varepsilon^{(2)}(\Lambda)$ . Odatle, u svetlu (5.2) možemo zaključiti da je

$$\begin{aligned}\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A) &= \{z \in \mathbf{C} : \min_{i \in N} (z - \lambda_i) \leq \varepsilon\} \\ &= \{z \in \mathbf{C} : \text{dist}(z, \Lambda(A)) \leq \varepsilon\},\end{aligned}\tag{5.7}$$

pri čemu  $\text{dist}(z, \Lambda(A))$  predstavlja *Euklidsko rastojanje* tačke  $z$  od skupa  $\Lambda(A)$ . Drugim rečima, za svaku normalnu matricu  $A$  važi jednakost

$$\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A) = \Lambda(A) + \mathcal{O}_\varepsilon,\tag{5.8}$$

gde je sa  $\mathcal{O}_\varepsilon := \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq \varepsilon\}$  označena zatvorena  $\varepsilon$ -lopta, dok za matricu  $A$  (ne nužno normalnu) važi  $\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A) \supseteq \Lambda(A) + \mathcal{O}_\varepsilon$ . Ovi odnosi prikazani su Slikom 5.1.



Slika 5.1: Euklidski pseudospektar normalne matrice (levo) i ne-normalne matrice (desno). Skup  $\Lambda(A)$  čine crvene tačke, isprekidana linija odgovara  $\varepsilon$ -okolini spektra, (skupu  $\Lambda(A) + \mathcal{O}_\varepsilon$ ), dok je skup  $\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A)$  osenčen.

Sledeća Teorema predstavlja poznati fundamentalni rezultat o poziciji skupa  $\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A)$  nedefektnih matrica. Za dokaz, čitaoca upućujemo na [111].

**TEOREMA 40 (BAUER-FIKE)** *Ako je matrica  $A \in \mathbf{C}^{n,n}$  dijagonalizabilna, to jest ako postoji regularna matrica  $X \in \mathbf{C}^{n,n}$  takva da je  $X^{-1}AX$  dijagonalna matrica, tada za svako  $\varepsilon > 0$  važi*

$$\Lambda(A) + \mathcal{O}_\varepsilon \subseteq \Lambda_\varepsilon^{(2)}(A) \subseteq \Lambda(A) + \mathcal{O}_{\kappa^{(2)}(X)\varepsilon}.$$



Kao posledica ove Teoreme, ako je  $A$  normalna (odnosno unitarno dijagonalizabilna), tada je  $\kappa^{(2)}(X) = 1$ , što je u saglasnosti sa (5.8).

Na samom kraju ove podsekcije, navodimo relaciju pseudospektra u Euklidskoj normi sa jedne i numeričkog raspona proizvoljne matrice  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , sa druge strane:

$$\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A) \subseteq W(A) + \mathcal{O}_\varepsilon.$$

## 5.1 Lokalizacije pseudospektra

Poslednjih godina tema pseudospektra je aktuelizovana u pogledu realnih benefita koje njegova prostorna lokalizacija pruža. U literaturi novijeg datuma postoje pojedinačni uspešni pokušaji da se pomoću tih lokalizacija rasvetle dodatna dinamička svojstva kompleksnih sistema, [70, 71, 104, 81]. Imajući u vidu da je generalizovana dijagonalna dominacija vezivno tkivo ove disertacije, u nastavku ćemo dati koncizan pregled postojećih rezultata o lokalizacijama pseudospektra proisteklih upotrebom ovog principa.

Motivisani rasvetljavanjem pitanja dinamičke stabilnosti interagujućih sistema, analiziranog kroz proces razmene materije i protoka energije u ekosistemima tla, Kostić, Cvetković i Cvetković su u [70], svesni limitacija zaključaka izvedenih na osnovu spektralne analize, postavili fundamente *lokalizacija pseudospektra* zasnovane na teoriji  $H$ -matrica. Ovaj potez je sasvim opravdan imajući u vidu da računanje pseudospektra sistema velikih dimenzija može biti veoma problematičan zadatak, a da tehnika generalizovane dijagonalne dominacije, osim računski jeftinih uslova zasnovanih na specifičnim relacijama elemenata matrice, omogućava i bolje razumevanje samih interakcija.

Osnovni koncept na kojem je zasnovana ideja o lokalizaciji pseudospektra dat je sledećim pomoćnim tvrđenjem, u [70] formulisanom pod nazivom *Princip lokalizacije*, koji proizlazi iz karakterizacije (5.1).

**LEMA 12 (PRINCIP LOKALIZACIJE)** *Ako je funkcionala  $\mu^{(p)} : \mathbb{C}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$  takva da za proizvoljnu matricu  $A$  važi*

$$\mu^{(p)}(A) \leq \|A^{-1}\|_p^{-1}, \quad (5.9)$$

tada je, za svako  $\varepsilon > 0$ ,

$$\Lambda_\varepsilon^{(p)}(A) \subseteq \Theta_\varepsilon^{\mu^{(p)}}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \mu^{(p)}(zE - A) \leq \varepsilon\}. \quad (5.10)$$

Dakle, kad god je poznata neka donja ocena recipročne vrednosti inverza proizvoljne matrice  $A$  u nekoj  $p$ -normi, primenom ove leme moguće je definisati njoj odgovarajući lokalizacioni skup za  $\Lambda_\varepsilon^{(p)}(A)$ . U situacijama kada je moguća, uporedivost ocena za proizvoljnu matricu  $A$  implicira i direktni odnos njima indukovanih lokalizacionih oblasti,

$$\mu_1^{(p)}(A) \leq \mu_2^{(p)}(A) \implies \Theta_\varepsilon^{\mu_2^{(p)}}(A) \subseteq \Theta_\varepsilon^{\mu_1^{(p)}}(A). \quad (5.11)$$

S obzirom da definicija samog  $\varepsilon$ -pseudospektra zavisi od izbora matrice norme, konkretni izbori iste biće posebno tretirani. Takođe, koristimo pojednostavljene oznake  $\mu(A)$  i  $\Lambda_\varepsilon(A)$ .

### Slučaj norme $\ell_\infty$

Ova pregledna podsekcija služi kao podsetnik na postojeće rezultate, dokazane u [70], uz propratne komentare. Prvi od njih je sledeći.

LEMA 13 *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica. Tada je*

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1} \geq \mu_1(A) := \min_{i \in N} \{|a_{ii}| - r_i(A)\}. \quad (5.12)$$

Sasvim je izvesno da pažljivi čitalac primećuje sličnost ocene (5.12) sa Varahovim rezultatom (4.1) za SDD matrice. Prema tome, relacija (5.12) je svojevrsno uopštenje ocene (4.1) i lako se proverava da za svaku SDD matricu  $A$  važi  $(\tau^{(\infty)}(A))^{-1} = \mu_1(A)$ . Primenom Leme 12 u kontekstu ocene (5.12) izveden je odgovarajući lokalizacioni skup za  $\Lambda_\varepsilon(A)$ .

TEOREMA 41 ( $\varepsilon$ -PSEUDO GERŠGORINOV SKUP) *Za svako  $\varepsilon > 0$  i proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi  $\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \Gamma_\varepsilon(A)$ , pri čemu je*

$$\Gamma_\varepsilon(A) := \bigcup_{i \in N} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i(A) + \varepsilon\}. \quad (5.13)$$

Drugi rezultat tiče se generalizacije ocene (4.3) sa klase Ostrovski matrica na matricu koju kvadratnu matricu.

LEMA 14 *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica. Tada je*

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1} \geq \mu_2(A) := \min_{\substack{i \neq j \\ |a_{ii}| + r_j(A) \neq 0}} \frac{|a_{ii}| |a_{jj}| - r_i(A) r_j(A)}{|a_{ii}| + r_j(A)}, \quad (5.14)$$

dok je, po definiciji,  $\mu_2(O) = 0$ .

Za svaku Ostrovski matricu  $A$  važi  $(\tau_O^{(\infty)}(A))^{-1} = \mu_2(A)$ . Lokalizacioni skup pseudospektra spram (5.14) formulisan je na sledeći način.

**TEOREMA 42 ( $\varepsilon$ -PSEUDO BRAUEROV SKUP)** *Za svako  $\varepsilon > 0$  i proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi  $\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \mathcal{K}_\varepsilon(A)$ , pri čemu je*

$$\mathcal{K}_\varepsilon(A) := \bigcup_{i \neq j} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \cdot (|z - a_{jj}| - \varepsilon) \leq (r_i(A) + \varepsilon) \cdot r_j(A)\}. \quad (5.15)$$

Treći i ujedno poslednji u ovoj disertaciji rezultat ovog tipa u kontekstu norme beskonačno bavi se uopštenjem ocene vezane za klasu  $S$ -SDD matrica. Kako bismo pojednostavili notaciju, uz pretpostavku da je  $S$  proizvoljan podskup indeksnog skupa  $N$ , a  $\bar{S}$  njegov komplement, uvodimo oznaku

$$T := \{(i, j) \in S \times \bar{S} : |a_{ii}| > r_i^S(A) \text{ i } |a_{jj}| > r_j^{\bar{S}}(A)\},$$

a za svako  $(i, j) \in T$  definišemo

$$\varphi_{i,j}^S(A) := \frac{\left(|a_{ii}| - r_i^S(A)\right) \left(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right) - r_i^{\bar{S}}(A)r_j^S(A)}{\max\{|a_{ii}| - r_i^S(A) + r_j^S(A), |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) + r_i^{\bar{S}}(A)\}}.$$

**LEMA 15** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica i  $S$  proizvoljan podskup od  $N$ . Tada je*

$$\|A^{-1}\|_\infty^{-1} \geq \mu_3(A), \quad (5.16)$$

pri čemu je

$$\mu_3(A) := \min \left\{ \min_{i \in S} \left(|a_{ii}| - r_i^S(A)\right), \min_{j \in \bar{S}} \left(|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)\right), \min_{(i,j) \in T} \varphi_{i,j}^S(A) \right\}.$$

Primenom ovog pomoćnog tvrđenja na matricu  $A$  koja je  $S$ -SDD, u kom slučaju je  $T = S \times \bar{S}$ , moguće je pokazati  $(\tau_S^{(\infty)}(A))^{-1} = \mu_3(A)$ . Prema tome, ocena (5.16) generalizuje (4.4). Tvrđenje koje sledi daje odgovarajuću lokalizaciju za  $\Lambda_\varepsilon(A)$  proizvoljne matrice  $A$ , indukovanu pomoću (5.16).

**TEOREMA 43 ( $\varepsilon$ -PSEUDO CKV SKUPOVI)** Za ma koje  $\varepsilon > 0$ , svaku matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i proizvoljan podskup  $S$  indeksnog skupa  $N$  važi  $\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \mathcal{C}_\varepsilon^S(A)$ , pri čemu je

$$\mathcal{C}_\varepsilon^S(A) := \Gamma_\varepsilon^S(A) \cup \Gamma_\varepsilon^{\bar{S}}(A) \cup V_\varepsilon^S(A) \cup V_\varepsilon^{\bar{S}}(A), \quad (5.17)$$

dok su

$$\Gamma_\varepsilon^S(A) := \bigcup_{i \in S} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i^S(A) + \varepsilon\},$$

$$\Gamma_\varepsilon^{\bar{S}}(A) := \bigcup_{j \in \bar{S}} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq r_j^{\bar{S}}(A) + \varepsilon\},$$

$$V_\varepsilon^S(A) := \bigcup_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S}}} \{z \in \mathbb{C} : (|z - a_{ii}| - r_i^S(A) - \varepsilon)(|z - a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) \leq r_i^{\bar{S}}(A)(r_j^S(A) + \varepsilon)\},$$

$$V_\varepsilon^{\bar{S}}(A) := \bigcup_{\substack{i \in \bar{S} \\ j \in S}} \{z \in \mathbb{C} : (|z - a_{ii}| - r_i^{\bar{S}}(A))( |z - a_{jj}| - r_j^S(A) - \varepsilon) \leq (r_i^S(A) + \varepsilon)r_j^{\bar{S}}(A)\}.$$

Posledično,

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \mathcal{C}_\varepsilon(A) := \bigcap_{S \subseteq N} \mathcal{C}_\varepsilon^S(A).$$

Ocene (5.12), (5.14) i (5.16) su uporedive, što smo pokazali u [104].

**LEMA 16** Za svaku matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i proizvoljan podskup  $S$  skupa  $N$  važi:

$$i) \mu_2(A) \geq \mu_1(A), \quad ii) \mu_3(A) \geq \mu_1(A).$$

**DOKAZ:** a) Označimo sa  $k, \ell \in N$ ,  $k \neq \ell$  indekse za koje je  $|a_{kk}| + r_\ell(A) \neq 0$  i za koje je posmatrani minimum dostignut, tačnije

$$(|a_{kk}| + r_\ell(A))\mu_2(A) = |a_{kk}||a_{\ell\ell}| - r_k(A)r_\ell(A).$$

Poslednju jednakost moguće je zapisati kao

$$[\mu_2(A) - (|a_{kk}| - r_k(A))]r_\ell(A) + [\mu_2(A) - (|a_{\ell\ell}| - r_\ell(A))]|a_{kk}| = 0,$$

što pokreće analizu tri moguća slučaja:

- Ako pretpostavimo da je  $|a_{kk}| = 0$ , tada je  $r_\ell(A) > 0$ , prema tome,  $\mu_2(A) - (|a_{kk}| - r_k(A)) = 0$ , što implicira da je  $\mu_2(A) \geq$

$$\min_{i \in N} (|a_{ii}| - r_i(A)) = \mu_1(A),$$

- Analogno, kao posledica pretpostavke da je  $r_\ell(A) = 0$  imamo  $|a_{kk}| > 0$ , stoga,  $\mu_2(A) - (|a_{\ell\ell}| - r_\ell(A)) = 0$ , a time i  $\mu_2(A) \geq \mu_1(A)$ ,
- Za kraj, ako su oba faktora pozitivna, tačnije  $|a_{kk}| > 0$  i  $r_\ell(A) > 0$ , tada su ili oba člana  $\mu_2(A) - (|a_{kk}| - r_k(A))$  i  $\mu_2(A) - (|a_{\ell\ell}| - r_\ell(A))$  jednaka nuli, ili su suprotnog znaka. U svakom slučaju, opet imamo da je  $\mu_2(A) \geq \mu_1(A)$ .

b) Po definiciji,  $\mu_1(A) \leq |a_{mm}| - r_m(A)$  za svako  $m \in N$ , što znači

$$\mu_1(A) \leq \begin{cases} |a_{ii}| - r_i^S(A), & \forall i \in S \\ |a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A), & \forall j \in \bar{S} \end{cases}.$$

Drugim rečima,

$$\mu_1(A) \leq \min \left\{ \min_{i \in S} (|a_{ii}| - r_i^S(A)), \min_{j \in \bar{S}} (|a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) \right\},$$

te ostaje da se proveriti da je  $\mu_1(A) \leq \varphi_{i,j}^S(A)$  za svako  $(i, j) \in T$ . S tim u vezi, pretpostavićemo suprotno, da postoji par indeksa  $(k, \ell) \in T$  za koji je  $\mu_1(A) > \varphi_{k,\ell}^S(A)$ , to jest da za svako  $m \in N$  važi

$$|a_{mm}| - r_m(A) > \frac{(|a_{kk}| - r_k^S(A)) (|a_{\ell\ell}| - r_\ell^{\bar{S}}(A)) - r_k^{\bar{S}}(A) r_\ell^S(A)}{\max\{|a_{kk}| - r_k^S(A) + r_\ell^S(A), |a_{\ell\ell}| - r_\ell^{\bar{S}}(A) + r_k^{\bar{S}}(A)\}}.$$

Primitimo da je  $\max\{|a_{kk}| - r_k^S(A) + r_\ell^S(A), |a_{\ell\ell}| - r_\ell^{\bar{S}}(A) + r_k^{\bar{S}}(A)\}$  pozitivnog znaka budući da je  $(k, \ell) \in T$ . Nastavak dokaza raščlanićemo na dva slučaja, pri čemu se drugi pokazuje analogno. S tim u vezi, pretpostavimo da je  $|a_{kk}| - r_k^S(A) + r_\ell^S(A) \geq |a_{\ell\ell}| - r_\ell^{\bar{S}}(A) + r_k^{\bar{S}}(A)$ . Šta više, birajući  $m = \ell$  (odnosno  $m = k$  kasnije), imamo da

$$\begin{aligned} & (|a_{\ell\ell}| - r_\ell(A)) (|a_{kk}| - r_k^S(A) + r_\ell^S(A)) > \\ & (|a_{kk}| - r_k^S(A)) (|a_{\ell\ell}| - r_\ell^{\bar{S}}(A)) - r_k^{\bar{S}}(A) r_\ell^S(A). \end{aligned}$$

Sređujući izraze na obe strane nejednakosti, dobijamo

$$r_\ell^S(A) \left( |a_{\ell\ell}| - r_\ell(A) - (|a_{kk}| - r_k(A)) \right) > 0.$$

1. Trivijalno, ako je  $r_\ell^S(A) = 0$ , kontradikcija je očigledna,
2. U suprotnom, ako pretpostavimo da je  $r_j^S(A) > 0$ , tada uslov postaje  $|a_{\ell\ell}| - r_\ell(A) > |a_{kk}| - r_k(A)$ , što je ekvivalentno sa  $|a_{\ell\ell}| - r_\ell^S(A) - r_\ell^{\bar{S}}(A) > |a_{kk}| - r_k^S(A) - r_k^{\bar{S}}(A)$ , a to nije moguće.

Time je dokaz završen. △

Prema tome, prethodna lema u kombinaciji sa (5.11) povlači zaključak da za svaku matricu  $A$  važe inkluzije  $\mathcal{K}_\varepsilon(A) \subseteq \Gamma_\varepsilon(A)$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A) \subseteq \Gamma_\varepsilon(A)$ .

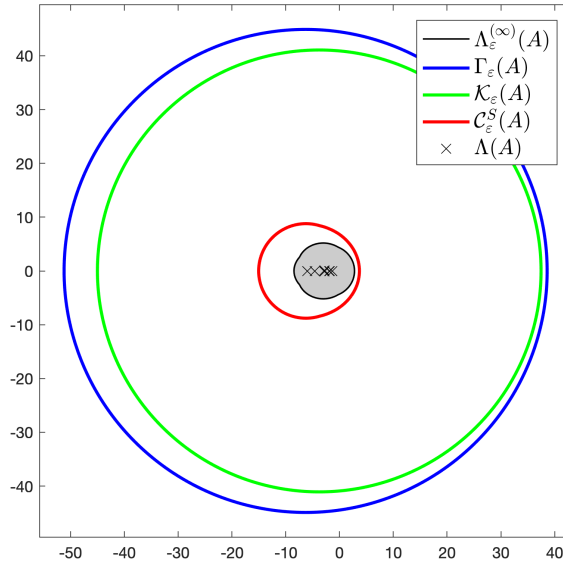
Odnos lokalizacionih oblasti za pseudospektar dajemo na primeru aproksimacije matrice Jakobijana na okolini tačke ekvilibrjuma (community matrica  $A_{16}$ ).

Primer prikazan Slikom 5.2 i izborom skupa  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  koji je takav da isfiltrira ostatak dominantnih delova matrice čini da je oblast  $\mathcal{C}_\varepsilon^S$  vidljivo bolja lokalizacija pseudospektra, dok se uključenjem indeksa  $\{6\}$  na Slici 5.3 ta situacija pogoršava, u smislu da pomenuti skup postane jednako dobar kao i ostale lokalizacije.

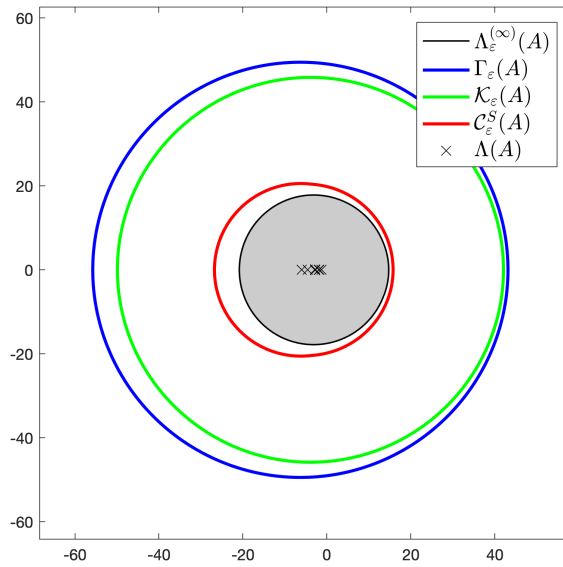
Kao drugi ilustrativni numerički primer, posmatramo matricu

$$A_{20} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0.4 & 1.9 \\ -3 & 19 & 1 & -3 \\ -3 & 0.4 & 7 & -3 \\ 0.5 & -1 & 1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Treba napomenuti da ocene (5.14) i (5.16) za fiksiranu matricu  $A$  i ma koji podskup  $S$  od  $N$  u opštem slučaju nisu uporedive, pa stoga i skupovi (5.15) i (5.17) stoje u generalnom odnosu. Ova činjenica se jasno vidi na primeru matrice  $A_{21}$  pri različitim izborima skupa  $S$  (Slike 5.4, 5.5, 5.6). Osim toga, interesantno je da je skup  $\mathcal{C}_\varepsilon^S$  na momente postaje unija disjunktne oblasti. Za kraj, napominjemo da nazivi spomenutih lokalizacionih skupova potiču od spektralnih lokalizacija pri izboru  $\varepsilon = 0$ , kada pseudospektar redukuje na spektar.

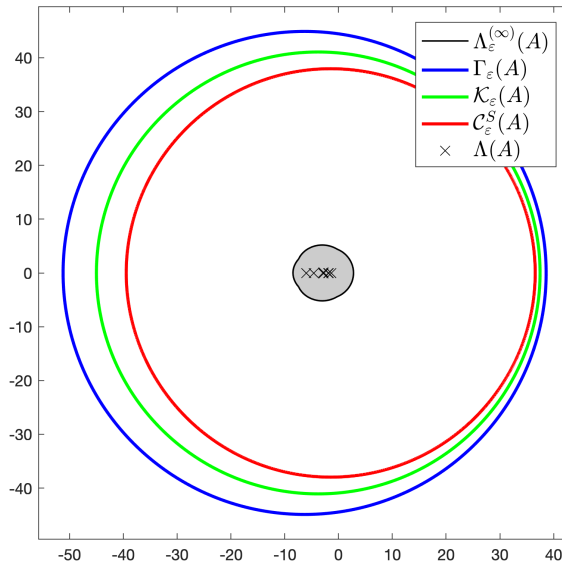


(a)  $\varepsilon/\|A_{16}\|_\infty = 10^{-2}$

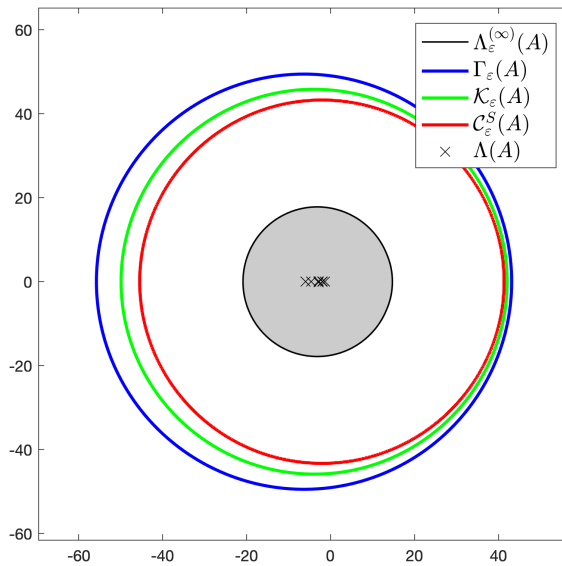


(b)  $\varepsilon/\|A_{16}\|_\infty = 10^{-1}$ ,

Slika 5.2: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_\varepsilon(A_{16})$ ,  $\mathcal{K}_\varepsilon(A_{16})$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A_{16})$  za  $\Lambda_\varepsilon^{(\infty)}(A_{16})$  i  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .



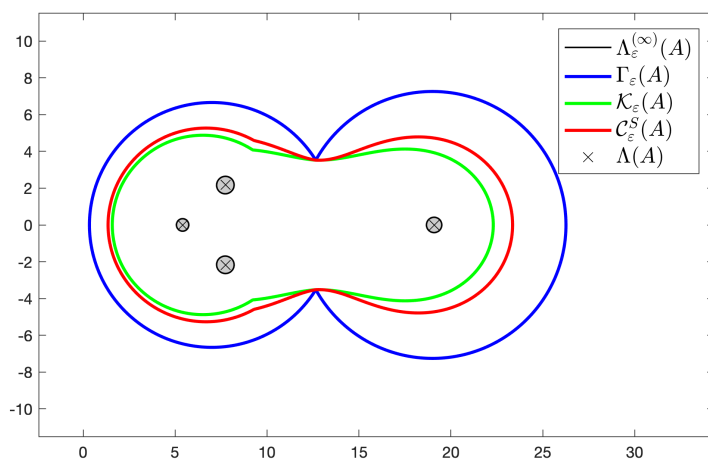
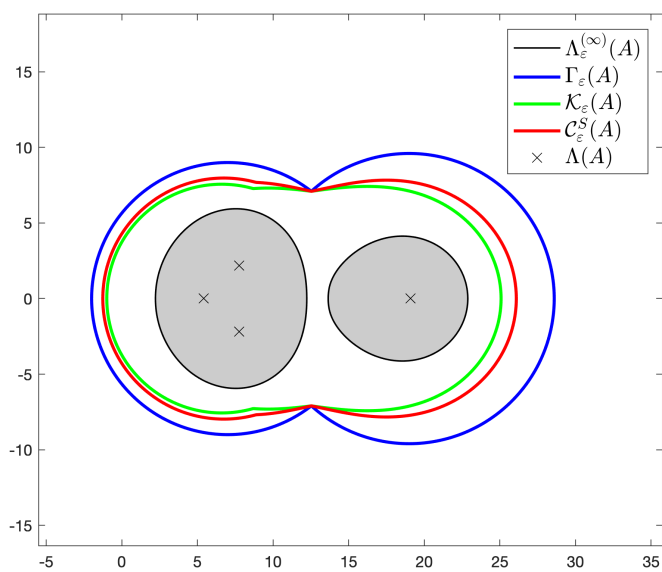
(a)  $\varepsilon/\|A_{16}\|_\infty = 10^{-2}$



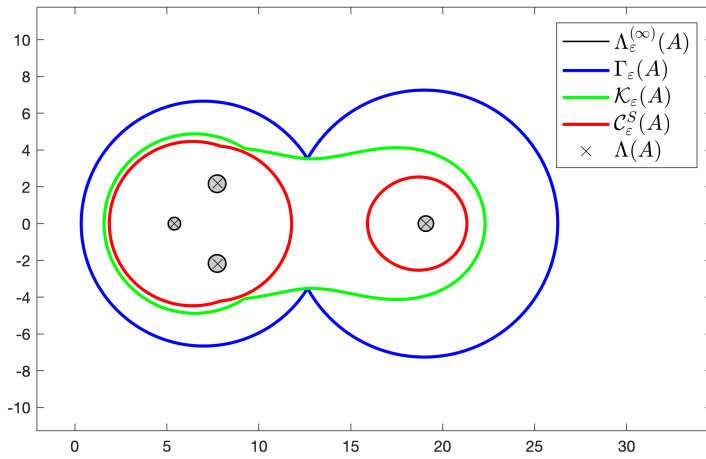
(b)  $\varepsilon/\|A_{16}\|_\infty = 10^{-1}$

Slika 5.3: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_\varepsilon(A_{16})$ ,  $\mathcal{K}_\varepsilon(A_{16})$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A_{16})$  za  $\Lambda_\varepsilon^{(\infty)}(A_{16})$  i  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

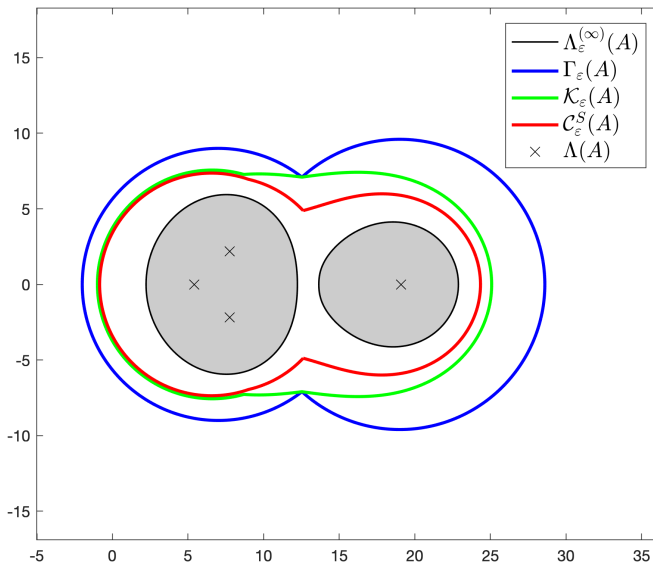


(a)  $\varepsilon/\|A_{20}\|_\infty = 10^{-2}$ (b)  $\varepsilon/\|A_{20}\|_\infty = 10^{-1}$ 

Slika 5.4: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_\varepsilon(A_{20})$ ,  $\mathcal{K}_\varepsilon(A_{20})$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A_{20})$  za  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A_{20}$  i  $S = \{1, 2\}$ .

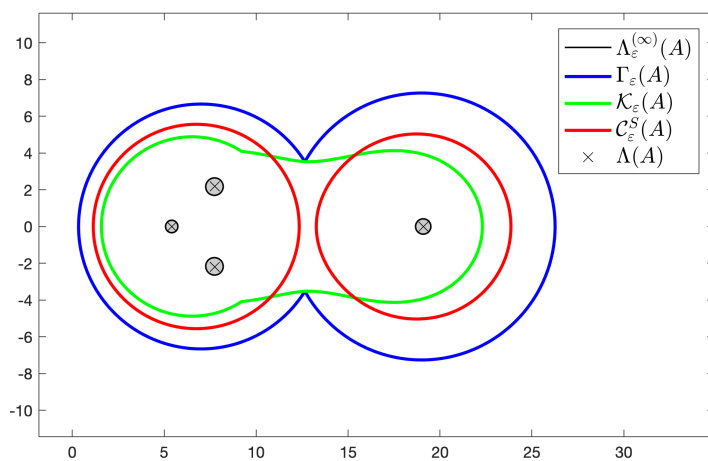
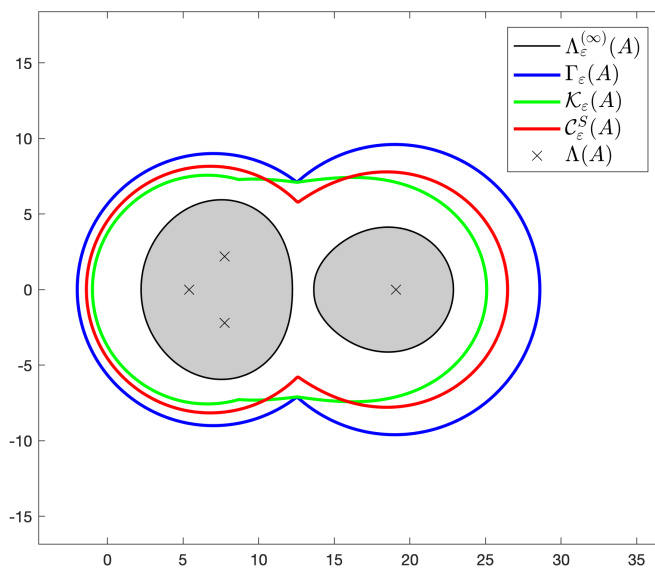


(a)  $\varepsilon/\|A_{20}\|_\infty = 10^{-2}$



(b)  $\varepsilon/\|A_{20}\|_\infty = 10^{-1}$

Slika 5.5: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_\varepsilon(A_{20})$ ,  $\mathcal{K}_\varepsilon(A_{20})$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A_{20})$  za  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A_{20}$  i  $S = \{1, 4\}$ .

(a)  $\varepsilon/\|A_{20}\|_\infty = 10^{-2}$ (b)  $\varepsilon/\|A_{20}\|_\infty = 10^{-1}$ 

Slika 5.6: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_\varepsilon(A_{20})$ ,  $\mathcal{K}_\varepsilon(A_{20})$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A_{20})$  za  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A_{20}$  i  $S = \{1\}$ .

### Slučaj norme $\ell_1$

Rezultati za normu jedan bazirani su na primeni relacije  $\|A\|_1 = \|A^T\|_\infty$ , na osnovu koje je moguće iskoristiti prethodne rezultate.

### Slučaj norme $\ell_2$

Iako je pseudospektar definisan za proizvoljnu matričnu normu, praktične primene su dominantan akcenat stavile na upotrebu Euklidske norme, te stoga ne čudi što je većina radova i razvijenih algoritama upravo bazirana na toj pretpostavci. Sa aspekta lokalizacija, postoje dva fundamentalna pravca u kojima je njihov razvoj moguće pratiti. Teoreme koje slede poznati su rezultati iz [70].

Direktna posledica relacija (4.12) i prethodnih ocena osnova je sledećeg pomoćnog tvrđenja.

LEMA 17 *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica i  $\ell \in \{1, 2, 3\}$ . Tada važi*

$$\|A^{-1}\|_2^{-1} \geq \underbrace{\sqrt{\mu_\ell(A) \mu_\ell(A^T)}}_{=:\mu_\ell^{(2)}(A)} \geq \underbrace{\min\{\mu_\ell(A), \mu_\ell(A^T)\}}_{=:\hat{\mu}_\ell^{(2)}(A)}. \quad (5.18)$$

Zbog toga je prvi pravac utemeljen na ideji primene ove dve sintetičke ocene u aparatu lokalizacionog principa. Birajući  $\ell = 1$ , sukcesivnom zamenom  $\mu_1^{(2)}(A)$  i  $\hat{\mu}_1^{(2)}(A)$ , Lema 12 generiše oblasti

$$\Gamma_\varepsilon^{(2)}(A) := \bigcup_{i,j \in N} \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 \leq (|z - a_{ii}| - r_i(A)) \left( |z - a_{jj}| - r_j(A^T) \right) \leq \varepsilon^2 \right\},$$

i

$$\hat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A) := \bigcup_{i \in N} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \max\{r_i(A), r_i(A^T)\} + \varepsilon \right\}.$$

Očekivano, odnos ocena diktira i sam odnos skupova, o kojem govori naredno tvrđenje. Oznaku norme izostavljamo, ali podrazumevamo da je reč o Euklidskom pseudospektu.

TEOREMA 44 (EUKLIDSKI  $\varepsilon$ -PSEUDO GERŠGORINOVSKI SKUPOVI) *Za svako  $\varepsilon > 0$  i proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi*

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \Gamma_\varepsilon^{(2)}(A) \subseteq \hat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A).$$

Važno je naglasiti da iako skup  $\Gamma_\varepsilon^{(2)}(A)$  bolje lokalizuje pseudospektar on je i računski kompleksniji u poređenju sa  $\widehat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A)$ . Prednost drugog skupa postaje očigledna ako primetimo da je

$$\widehat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A) = \Gamma_\varepsilon(A) \cup \Gamma_\varepsilon(A^T).$$

Prateći sličnu logiku, odnosno slučajeve  $\ell \in \{2, 3\}$ , moguće je definisati i sledeće lokalizacije Euklidskog pseudospektra:

$$\mathcal{B}_\varepsilon(A) \cup \mathcal{B}_\varepsilon(A^T) \quad \text{i} \quad \mathcal{C}_\varepsilon^S(A) \cup \mathcal{C}_\varepsilon^S(A^T),$$

koji nose nazive *Euklidski  $\varepsilon$ -pseudo Brauerov* i *Euklidski  $\varepsilon$ -pseudo CKV* skup, respektivno.

Drugi pravac lokalizacija zasniva se na direktnoj oceni najmanje singularne vrednosti, budući da važi (5.2). Jedna u nizu takvih ocena iz [65, 66], koja je upotrebljena u [70], kaže da je za proizvoljnu matricu  $A$  ispunjeno

$$\sigma_{\min}(A) \geq \xi_1(A) := \min_{i \in N} \{|a_{ii}| - g_i(A)\},$$

pri čemu je, za svako  $i \in N$ ,

$$g_i(A) := \frac{r_i(A) + r_i(A^T)}{2}.$$

Kako je

$$\xi_1(A) = \frac{1}{2} \min_{i \in N} \{|a_{ii}| - r_i(A) + |a_{ii}| - r_i(A^T)\} \geq \frac{\mu_1(A) + \mu_1(A^T)}{2},$$

iz odnosa aritmetičke i geometrijske sredine sledi da je  $\xi_1(A) \geq \mu_1^{(2)}(A)$ . To znači da

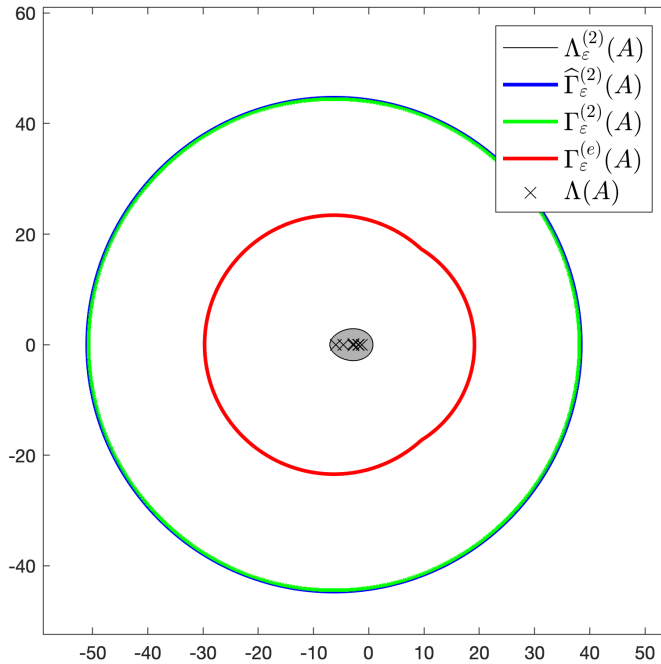
$$\Gamma_\varepsilon^{(e)}(A) := \bigcup_{i \in N} \{z \in \mathbf{C} : |z - a_{ii}| \leq g_i(A) + \varepsilon\}$$

predstavlja *optimalan* skup u pogledu da uz svako  $\varepsilon > 0$  i proizvoljnu matricu  $A$ , Euklidski pseudospektar zadovoljava

$$\Lambda_\varepsilon(A) \subseteq \Gamma_\varepsilon^{(e)}(A) \subseteq \Gamma_\varepsilon^{(2)}(A) \subseteq \widehat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A).$$

Osim toga, računski posao koji iziskuje crtanje  $\Gamma_\varepsilon^{(e)}(A)$  uporediv je sa

poslom oko vizualizacije  $\widehat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A)$ . U slučaju skoro simetričnih matrica velikih dimenzija, skup  $\Gamma_\varepsilon^{(e)}(A)$  predstavlja značajno poboljšanje skupa formulisanog Teoremom 12ε iz [38], koji je izuzetno osetljiv na porast dimenzije posmatranog sistema.



Slika 5.7: Odnos lokalizacionih skupova  $\Gamma_\varepsilon^{(e)}(A_{16})$ ,  $\Gamma_\varepsilon^{(2)}(A_{16})$  i  $\widehat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A_{16})$  za Euklidski  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A_{16}$ .

## 5.2 Blok uopštenje lokalizacija pseudospektra u $\ell_p$ normi

Budući da je pseudospektar afirmisan kao relativno nov alat matrične analize, status atraktivne teme kako sa teorijskog, tako i sa praktičnog stanovišta usledio je prirodno. Međutim, s obzirom da pseudospektralna analiza matrica velikih formata predstavlja računski zahtevan zadatak, obim naučnih rezultata je, konsekvntno, još uvek relativno mali.

Ovu podsekciju posvećujemo rezultatima koji koriste informacije o blok strukturi matrice, a u narednoj podsekciji analiziramo uticaj vandijagonalnih blokova na pseudospektar matrice, sa ciljem redukcije troškova izračunavanja, uz postizanje adekvatnih aproksimacija. Rezultati u nastavku su deo originalnog naučnog doprinosa ove disertacije, publikovani u [73].

Imajući u vidu da definicija (5.1) pseudospektra predstavlja teorijski okvir za konstrukciju njegovih lokalizacionih skupova, najpre formulišemo opšti rezultat u slučaju  $\ell_p$  norme, a potom analiziramo specijalne slučajeve, akcentujući primenljivost rezultata i troškove izračunavanja.

**TEOREMA 45** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica,  $\pi$  proizvoljna particija indeksnog skupa i  $p \geq 1$ . Tada,*

$$\Lambda_\varepsilon^{(p)}(A) \subseteq \mathcal{M}_{\pi,\varepsilon}^{(p)}(A),$$

gde je

$$\mathcal{M}_{\pi,\varepsilon}^{(p)}(A) := \left\{ z \in \mathbb{C} : \|(\langle zE - A \rangle_\pi^{(p)})^{-1}\|_p^{-1} \leq \varepsilon \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} : v_\pi^{(p)}(z) \geq 0 \right\},$$

pri čemu je  $v_\pi^{(p)}(z)$  najdešnji karakteristični (Peronov) koren esencijalno nenegative matrice  $-\langle zE - A \rangle_\pi^{(p)}$ .

**DOKAZ:** Pretpostavimo da, za uočenu proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , važi  $z \in \Lambda_\varepsilon^{(p)}(A)$ . Pre svega, ako  $zE - A$  pripada klasi  $B_\pi^{(p)}H$ -matrica, tj. ako je  $\langle zE - A \rangle_\pi^{(p)}$   $M$ -matrica, na osnovu Teoreme 15, zaključujemo da je  $\|(\langle zE - A \rangle_\pi^{(p)})^{-1}\|_p^{-1} \leq \|(zE - A)^{-1}\|_p^{-1} \leq \varepsilon$ .

U suprotnom, ako  $zE - A$  ne pripada klasi  $B_\pi^{(p)}H$ , na osnovu Teoreme 23 prilagođene blok varijanti,  $z$  pripada blok minimalnom Geršgorinovom skupu za  $A$ , što je ekvivalentno sa  $v_\pi^{(p)}(z) \geq 0$ .

Prema tome, ako je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  retka (sparse) matrica velikog formata, tada se podelom na  $\ell$  blokova (ne nužno) jednakih dimenzija može postići numerički jeftinija aproksimacija  $\mathcal{M}_{\pi,\varepsilon}^{(p)}(A)$  za  $\Lambda_\varepsilon^{(p)}(A)$ . Zaista, kako bi se utvrdilo da li uočena tačka  $z \in \mathbb{C}$  pripada ovoj aproksimaciji, neophodno je izračunati  $\ell$  normi inverza matrica reda  $\frac{n}{\ell}$ , zatim normu inverza matrice reda  $\ell$  i na kraju najdešnji karakteristični koren matrice formata  $\ell \times \ell$ . Poređenja radi, isti taj zadatak provere pripadnosti uočene tačke  $z$  pseudospektaru iziskuje izračunavanje "tačne" norme inverza reda  $n$ .

U nastavku navodimo neke od svojstava ovog novog lokalizacionog skupa za  $\varepsilon$ -pseudospektar.

**PROPOZICIJA 1** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica,  $\pi$  proizvoljna particija njenog indeksnog skupa i  $p \geq 1$ . Tada važi sledeće:*

i) Skup  $\mathcal{M}_{\pi,\varepsilon}^{(p)}(A)$  ispunjava svojstvo monotonosti u smislu implikacije

$$0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \implies \mathcal{M}_{\pi,\varepsilon_1}^{(p)}(A) \subseteq \mathcal{M}_{\pi,\varepsilon_2}^{(p)}(A).$$

ii) Ako je  $A$  blok trougaona matrica spram particije  $\pi$ , tada je

$$\mathcal{M}_{\pi,\varepsilon}^{(p)}(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \|(\langle zE - A \rangle_{\pi}^{(p)})^{-1}\|_p^{-1} \leq \varepsilon \right\}.$$

iii) Za svaku matricu  $A$  i particiju  $\pi$ ,

$$\bigcup_{j \in L} \Lambda_{\varepsilon}^{(p)}(A_{j,j}) \subseteq \Lambda_{\varepsilon}^{(p)}(A) \subseteq \mathcal{M}_{\pi,\varepsilon}^{(p)}(A),$$

pri čemu se jednakost postiže kada je  $A$  blok dijagonalna matrica spram particije  $\pi$ .

U specijalnom slučaju  $\varepsilon = 0$ , dobijamo skup

$$\mathcal{M}_{\pi}^{(p)}(A) := \mathcal{M}_{\pi,0}^{(p)}(A) = \left\{ z \in \mathbb{C} : v_{\pi}^{(p)}(z) \geq 0 \right\},$$

koji može da se posmatra kao blok minimalni Geršgorinov skup za lokalizaciju spektra matrice  $A$ . Ako dodatno pretpostavimo particiju na singltone, u oznaci  $\pi^0$ , tada  $v_{\pi^0}^{(p)}(z) = v(z)$  predstavlja najdešnji karakteristični koren esencijalno nenegativne matrice  $-\mathcal{M}(zE - A)$ , te primenom Teoreme 23, dobijamo minimalni Geršgorinov skup matrice  $A$ ,  $\Gamma^{\text{ID}}(A)$ , koji je ovde označen sa  $\mathcal{M}_{\pi^0}^{(p)}(A)$ . Takođe je interesantno primetiti da je u [70] postavljeno otvoreno pitanje u vezi sa načinom formulisanja minimalnog Geršgorinovog skupa za lokalizaciju  $\varepsilon$ -pseudospektra. Skup  $\mathcal{M}_{\pi^0,\varepsilon}^{(p)}(A)$  upravo daje odgovor na to pitanje. Analogno, oblast  $\mathcal{M}_{\pi,\varepsilon}^{(p)}(A)$  preuzima ulogu blok minimalnog Geršgorinovog skupa za lokalizaciju  $\Lambda_{\varepsilon}^{(p)}(A)$ , koji je pogodniji za upotrebu na matricama velikih formata.



## 5.3 Od pseudospektara dijagonalnih blokova do pseudospektra pune matrice

U svetlu Propozicije 1, tačka *iii*) implicira da lokalizacija  $\mathcal{M}_{\pi,\varepsilon}^{(p)}(A)$  izračunava (u smislu blok minimalnog Geršgorinovog skupa) "optimalne" vandijagonalne korekcije koje bi trebalo uzeti u obzir prilikom lokalizacije pseudospektra (velike retke) matrice na osnovu pseudospektara njenih dijagonalnih blokova. Problem ovog tipa je inicijalno postavljen u [51], pod pretpostavkom da je matrica blok formata  $2 \times 2$ , a formulisan je u sledećem obliku: za dato  $\varepsilon \geq 0$  i particiju matrice oblika

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

izračunati optimalno  $f(\varepsilon)$  za koje je  $\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A) \subseteq \Lambda_{f(\varepsilon)}^{(2)}(A_{1,1}) \cup \Lambda_{f(\varepsilon)}^{(2)}(A_{2,2})$ . Najpre ćemo navesti i dokazati originalni rezultat za proizvoljnu  $\ell_p$  normu i particiju  $\pi$ , kao uopštenje analize iz [51].

Za datu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , particiju  $\pi$  i tačku  $z \in \mathbb{C}$ , označimo sa

$$D_\pi^{(p)}(z) := \text{diag}(\|(zE - A_{1,1})^{-1}\|_p^{-1}, \|(zE - A_{2,2})^{-1}\|_p^{-1}, \dots, \|(zE - A_{\ell,\ell})^{-1}\|_p^{-1})$$

dijagonalu matrice  $\langle zE - A \rangle_\pi^{(p)}$  i definišimo  $F_\pi^{(p)} = D_\pi^{(p)}(0) - \langle A \rangle_\pi^{(p)}$ , koja je po konstrukciji nenegativna.

**TEOREMA 46** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica,  $\pi$  proizvoljna particija njenog indeksnog skupa i  $p \geq 1$ . Tada postoji funkcija  $f_\pi^{(p)} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  takva da je, za svako  $\varepsilon \geq 0$ ,  $f_\pi^{(p)}(\varepsilon)$  definisano kao najmanje  $f \geq 0$  za koje važe sledeći uslovi*

$$\begin{cases} \|(fE - F_\pi^{(p)})^{-1}\|_p^{-1} = \varepsilon \\ \rho(F_\pi^{(p)}) \leq f \leq \|F_\pi^{(p)}\|_p + \varepsilon. \end{cases} \quad (5.20)$$

Štaviše, za svako  $\varepsilon \geq 0$  važe sledeće inkluzije:

$$\Lambda_\varepsilon^{(p)}(A) \subseteq \mathcal{M}_{\pi,\varepsilon}^{(p)}(A) \subseteq \mathcal{S}_{\pi,\varepsilon}^{(p)}(A) := \bigcup_{j \in L} \Lambda_{f_\pi^{(p)}(\varepsilon)}^{(p)}(A_{j,j}).$$

DOKAZ: Za početak, ako je  $\varepsilon = 0$ , tada je  $f_\pi^{(p)}(0) = \rho(F_\pi^{(p)})$ , što zadovoljava uslove date sa (5.20). Prema tome, neka je  $\varepsilon > 0$ . Pre svega, definišimo preslikavanje

$$\Psi(f) := \|(fE - F_\pi^{(p)})^{-1}\|_p^{-1} - \varepsilon$$

koje je neprekidna funkcija po  $f$ . Birajući  $a := \rho(F_\pi^{(p)}) \geq 0$ , na osnovu činjenice  $F_\pi^{(p)} \geq O$ , zaključujemo da je  $\rho(F_\pi^{(p)})E - F_\pi^{(p)}$  singularna  $M$ -matrica, na osnovu čega je  $\Psi(a) = -\varepsilon < 0$ . Sa druge strane, uzimajući  $b := \|F_\pi^{(p)}\|_p + \varepsilon > 0$ , imamo da je  $bE - F_\pi^{(p)}$  regularna  $M$ -matrica, za koju je

$$\begin{aligned} \|(bE - F_\pi^{(p)})^{-1}\|_p &= b^{-1} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \left( b^{-1} F_\pi^{(p)} \right)^k \right\|_p \\ &\leq b^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left( b^{-1} \|F_\pi^{(p)}\|_p \right)^k = (b - \|F_\pi^{(p)}\|_p)^{-1} = \varepsilon^{-1}, \end{aligned}$$

odakle je  $\Psi(b) \geq 0$ . Na osnovu svega navedenog, zaključujemo da  $\Psi(f)$  ima barem jednu nulu na intervalu  $(a, b)$ , što implicira da je preslikavanje  $f_\pi^{(p)}(\varepsilon)$  dobro definisano.

Pokažimo sada da inkluzija  $\mathcal{M}_{\pi, \varepsilon}^{(p)}(A) \subseteq \mathcal{S}_{\pi, \varepsilon}^{(p)}(A)$  važi za svako  $\varepsilon \geq 0$ . U tom smislu, uočimo proizvoljnu tačku  $z \in \mathcal{M}_{\pi, \varepsilon}^{(p)}(A)$  i pretpostavimo suprotno, da  $z \notin \mathcal{S}_{\pi, \varepsilon}^{(p)}(A)$ . Tada za svako  $j \in L$  važi  $\|(zE - A_{j,j})^{-1}\|_p^{-1} > f_\pi^{(p)}(\varepsilon)$ , odnosno  $D_\pi^{(p)}(z) > f_\pi^{(p)}(\varepsilon)E$ , dok su vandijagonalni elementi matrica  $\langle zE - A \rangle_\pi^{(p)}$  i  $f_\pi^{(p)}(\varepsilon)E - F_\pi^{(p)}$  jednaki. Budući da uslovi (5.20) garantuju da je  $f_\pi^{(p)}(\varepsilon)E - F_\pi^{(p)}$  regularna  $M$ -matrica, to implicira da je i  $\langle zE - A \rangle_\pi^{(p)}$  takođe regularna  $M$ -matrica. Ova relacija u kontekstu Leme 5 o monotonosti matrice  $\ell_p$  norme znači

$$\|(\langle zE - A \rangle_\pi^{(p)})^{-1}\|_p^{-1} > \|(f_\pi^{(p)}(\varepsilon)E - F_\pi^{(p)})^{-1}\|_p^{-1} = \varepsilon.$$

Prema tome,  $z \notin \mathcal{M}_{\pi, \varepsilon}^{(p)}(A)$ , što je očigledna kontradikcija. Dakle,  $\mathcal{M}_{\pi, \varepsilon}^{(p)}(A) \subseteq \mathcal{S}_{\pi, \varepsilon}^{(p)}(A)$ .  $\triangle$

### 5.3. Od pseudospektara dijagonalnih blokova do pseudospektra pune matrice

Kao direktna posledica prethodne teoreme, za svako  $\tilde{\varepsilon} \geq f_{\pi}^{(p)}(\varepsilon)$  imamo da je

$$\Lambda_{\varepsilon}^{(p)}(A) \subseteq \mathcal{M}_{\pi, \varepsilon}^{(p)}(A) \subseteq \bigcup_{j \in L} \Lambda_{\tilde{\varepsilon}}(A_{j,j}),$$

te izborom matrice  $\ell_p$  norme, prilikom kojeg se izračunavanje najbolje vrednosti  $f_{\pi}^{(p)}(\varepsilon)$  svodi na rešavanje netrivialnog optimizacionog problema, možemo birati baš  $\tilde{\varepsilon} = \|F_{\pi}^{(p)}\|_p + \varepsilon$ , kao kompromis na račun dobijanja potencijalno grubih, ali lako sračunljivih aproksimacija.

#### Slučaj norme $\ell_{\infty}$

Izbor norme beskonačno nosi benefit koji se očituje kroz činjenicu da je vrednost  $\|A^{-1}\|_{\infty}^{-1}$  u slučaju proizvoljne  $M$ -matrice  $A$  ekvivalentna recipročnoj vrednosti najveće komponente po modulu rešenja  $\mathbf{x}^*$  linearnog sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{e}$ . S tim u vezi, za kvadratnu matricu  $A$  reda  $n$ , trošak izračunavanja  $\|A^{-1}\|_{\infty}^{-1}$  je reda veličine  $\frac{2}{3}n^3$  operacija. Zbog toga, uz pretpostavku o particiji na  $\ell \times \ell$  blokova jednake veličine, i crtanjem na mreži od  $m$  čvornih tačaka, vizualizacija skupa  $\Lambda_{\varepsilon}^{(\infty)}(A)$  bi zahtevala izvršenje  $\frac{2}{3}mn^3$  operacija, dok bi izražunavanje lokalizacionog skupa  $\mathcal{M}_{\pi, \varepsilon}^{(\infty)}(A)$  stajalo reda veličine  $\frac{2m}{3} \left( \frac{n^3}{\ell^2} + \ell^3 \right)$ . Slična analiza otkriva da je kalkulacija skupa  $\mathcal{S}_{\pi, \varepsilon}^{(\infty)}(A)$  ekonomičnija u poređenju sa crtanjem samog pseudospektra.

#### Slučaj norme $\ell_1$

Na osnovu poznate relacije  $\|A\|_1 = \|A^T\|_{\infty}$ , stavove koji uključuju izbor norme jedan moguće je izvesti direktnom primenom prethodnih rezultata na transponovanu matricu.

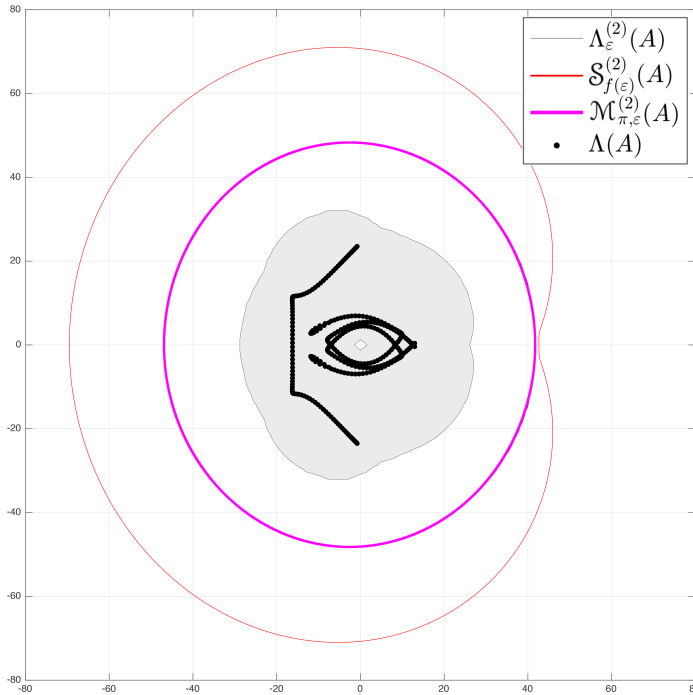
#### Slučaj norme $\ell_2$

Analiza računskih benefita pri izračunavanjima u slučaju Euklidske norme prati slične okvire kao i varijanta norme beskonačno, i pri tome stižemo do podatka da crtanje skupova  $\mathcal{M}_{\pi, \varepsilon}^{(2)}(A)$  i  $\mathcal{S}_{\pi, \varepsilon}^{(2)}(A)$  iziskuje trošak reda  $\ell^2$  puta manji nego crtanje  $\Lambda_{\varepsilon}^{(2)}$ . Uspešnost kojom pomenuti skupovi lokalizuju pseudospektar matrice ilustrovana je slikom 5.8 na

primeru matrice

$$A_{21} = \begin{bmatrix} G & G^2 & G^3 \\ G^2 & -10G & G^2 \\ -G^3 & -G^2 & E \end{bmatrix},$$

pri čemu je  $G$  Grcar matrica reda  $n = 100$ . Podela na blokove je uzeta particijom  $\pi = \{0, 100, 200, 300\}$ .



Slika 5.8: Odnos lokalizacionih skupova  $\mathcal{M}_{\pi, \epsilon}^{(2)}(A_{21})$  i  $\mathcal{S}_{f(\epsilon)}^{(2)}(A_{21})$  za  $\epsilon$ -pseudospektar matrice  $A_{21}$  i  $\epsilon = 0.1$ .

U nastavku ćemo izvesti eksplicitnu formulu za  $f(\epsilon)$  primenom Teoreme 46 za matrice oblika (5.19) i pokazati da takvi  $f(\epsilon)$  daju uporedivo bolji rezultat od Teoreme 3.2 iz [51], koji glasi

$$\Lambda_{\epsilon}^{(2)}(A) \subseteq \Lambda_{\tau(\epsilon)}^{(2)}(A_{1,1}) \cup \Lambda_{\tau(\epsilon)}^{(2)}(A_{2,2}) =: \mathcal{S}_{\tau(\epsilon)}^{(2)}(A), \quad (5.21)$$

gde je

$$\tau(\epsilon) := \sqrt{(\epsilon + \|A_{1,2}\|_2 + \|A_{2,1}\|_2)(\epsilon + \|A_{2,1}\|_2)}. \quad (5.22)$$

Naš rezultat formulisan je sledećim tvrđenjem.

### 5.3. Od pseudospektara dijagonalnih blokova do pseudospektra pune matrice

**TEOREMA 47** *Neka je na proizvoljnoj matrici  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  izvršena particija oblika (5.19). Tada je, za svako  $\varepsilon \geq 0$ ,*

$$\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A) \subseteq \Lambda_{f(\varepsilon)}^{(2)}(A_{1,1}) \cup \Lambda_{f(\varepsilon)}^{(2)}(A_{2,2}) =: \mathcal{S}_{f(\varepsilon)}^{(2)}(A), \quad (5.23)$$

pri čemu je

$$f(\varepsilon) := \sqrt{(\varepsilon + \|A_{1,2}\|_2)(\varepsilon + \|A_{2,1}\|_2)}. \quad (5.24)$$

**DOKAZ:** Na osnovu Teoreme 46, da bismo sračunali  $f(\varepsilon)$ , neophodno je da rešimo (5.20), tj. da odredimo  $f \geq \sqrt{\|A_{1,2}\|_2 \|A_{2,1}\|_2}$  takvo da je

$$\sigma_{\min} \left( \begin{bmatrix} f & -\|A_{1,2}\|_2 \\ -\|A_{2,1}\|_2 & f \end{bmatrix} \right) = \varepsilon.$$

Nastavljamo sračunavajući karakteristične korene za  $(fE - F_\pi^{(2)})^H(fE - F_\pi^{(2)})$  i postavljajući manji od njih na  $\varepsilon^2$ . Time, dolazimo do jednačine

$$f^4 - 2f^2(\varepsilon^2 + \|A_{1,2}\|_2 \|A_{2,1}\|_2) + (\varepsilon^4 + \|A_{1,2}\|_2^2 \|A_{2,1}\|_2^2 - \varepsilon^2(\|A_{1,2}\|_2^2 + \|A_{2,1}\|_2^2)) = 0,$$

koju rešavamo po  $f$ . Napokon, jedino rešenje koje ispunjava neophodne uslove glasi  $f = \sqrt{(\varepsilon + \|A_{1,2}\|_2)(\varepsilon + \|A_{2,1}\|_2)}$ , čime je tvrđenje dokazano.  $\triangle$

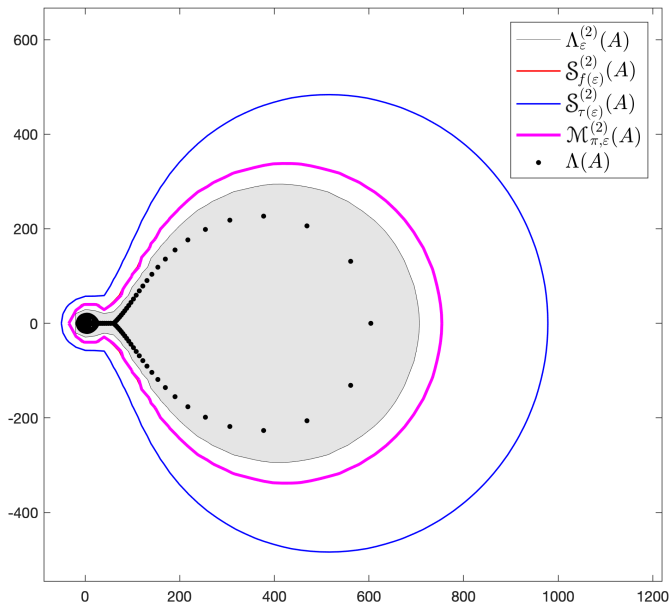
Očigledno, za proizvoljnu matricu  $A$  i svako  $\varepsilon \geq 0$ , imamo da je  $f(\varepsilon) \leq \tau(\varepsilon)$ , dok se u specijalnom slučaju  $2 \times 2$  blok trougaone matrice ove dve vrednosti podudaraju. Razliku između njih ilustrujemo na primeru matrice

$$A_{22} = \begin{bmatrix} F & 10^{-4} \mathbf{e} \mathbf{e}^T \\ 10^{-1} \mathbf{e} \mathbf{e}^T & F \end{bmatrix}, \quad (5.25)$$

gde je  $F$  Frankel matrica reda  $n = 100$ . Birajući particiju  $\pi = \{0, 100, 200\}$ , Slika 5.9 poredi lokalizacije (5.21) i (5.23) za  $\varepsilon = 0.1$ . Pri tome, optimalne vrednosti parametara su  $f(0.1) = 1.054$  i  $\tau(0.1) = 10.105$ .

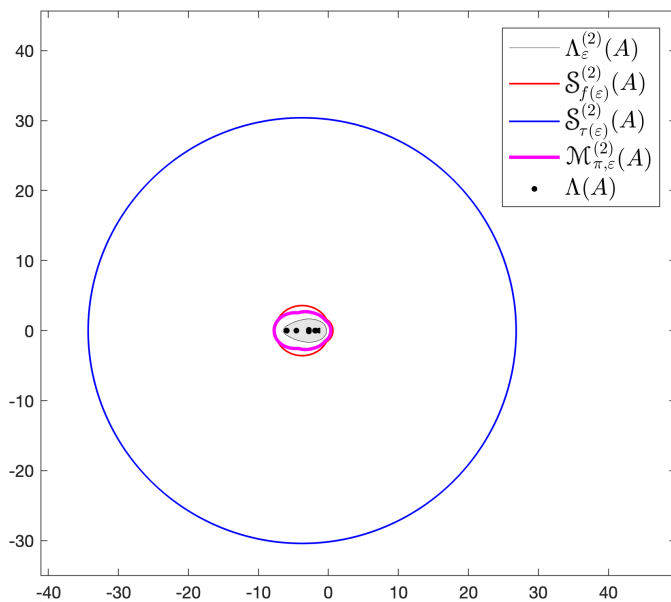
Drugi ilustrativni primer odnosa analiziranih lokalizacionih oblasti za matrični  $\varepsilon$ -pseudospektar u Euklidskoj normi i pri pretpostavljenoj blokovskoj podeli na dva bloka baziran je na primeru matrice Jakobijana (community matrica)  $A_{16}$ . Uz izbor  $\varepsilon = 0.1$ , optimalne vrednosti sračunatih parametara su  $f(0.1) = 1.8432$  i  $\tau(0.1) = 27.7655$ . Pri tome, u po-

gledu izbora particije indeksnog skupa, uzeli smo onu koja prirodno potiče od strukture samog interagujućeg sistema, a glasi  $\pi = \{0, 5, 8\}$ . Kao što se može videti sa Slike 5.10(a), skup  $\mathcal{S}_{f(\varepsilon)}^{(2)}(A_{16})$  ubedljivo je bolja lokalizacija u poređenju sa skupom  $\mathcal{S}_{\tau(\varepsilon)}^{(2)}(A_{16})$ . Sa druge strane, Slika 5.10(b) govori u prilog činjenici da je skup  $\mathcal{S}_{f(\varepsilon)}^{(2)}(A_{16})$  relativno dobra aproksimacija Euklidskog blok minimalnog Geršgorinovog skupa za  $\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A_{16})$ .

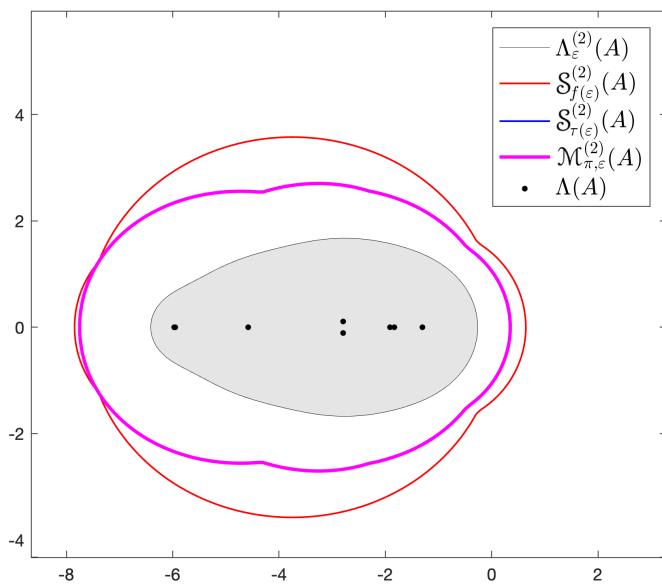


Slika 5.9: Odnos lokalizacionih skupova  $\mathcal{S}_{\tau(\varepsilon)}^{(2)}(A_{22})$  (plava) i  $\mathcal{S}_{f(\varepsilon)}^{(2)}(A_{22})$  (crvena) i  $\mathcal{M}_{\pi,\varepsilon}^{(2)}(A_{22})$  (ljubičasta oblast) za  $\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A_{22})$  (osenčena oblast), pri izboru  $\varepsilon = 0.1$  i particiji  $\pi = \{0, 100, 200\}$ . Skupovi  $\mathcal{S}_{f(\varepsilon)}^{(2)}(A_{22})$  i  $\mathcal{M}_{\pi,\varepsilon}^{(2)}(A_{22})$  se poklapaju.

### 5.3. Od pseudospektara dijagonalnih blokova do pseudospektra pune matrice



(a)



(b)

Slika 5.10: Odnos lokalizacionih skupova  $\mathcal{S}_{\tau(\varepsilon)}^{(2)}(A_{16})$ ,  $\mathcal{S}_{f(\varepsilon)}^{(2)}(A_{16})$  i  $\mathcal{M}_{\pi, \varepsilon}^{(2)}(A_{16})$  za  $\Lambda_{\varepsilon}^{(2)}(A_{16})$  (osenčena oblast), pri izboru  $\varepsilon = 0.1$  i particiji  $\pi = \{0, 5, 8\}$  (a) i uvećani prikaz (b).

## 5.4 Frakcioni pseudospektar i njegove lokalizacije

Usled potrebe da se pojam  $\varepsilon$ -pseudospektra prilagodi frakcionom ambijentu, po ugledu na zapise (5.1), (5.3) i (5.5), u nastavku uvodimo pojam  $\varepsilon$ -pseudospektra  $\alpha$ -reda matrice  $A$ , koji predstavlja osnovu rezultata koji slede.

**DEFINICIJA 27** Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica,  $\varepsilon > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1]^n$  vektor frakcionih redova i  $p \geq 1$ . Tada je  $\varepsilon$ -pseudospektar  $\alpha$ -reda matrice  $A$  u matricnoj  $p$ -normi, u oznaci  $\Lambda_{\alpha, \varepsilon}^{(p)}(A)$ , moguće definisati na sledeće načine:

1. kao skup kompleksnih brojeva za koje je recipročna vrednost  $p$ -norme rezolvente  $\alpha$ -reda ograničena sa  $\varepsilon$ ,

$$\Lambda_{\alpha, \varepsilon}^{(p)}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \|(A_{\alpha}(z))^{-1}\|_p^{-1} \leq \varepsilon\}, \quad (5.26)$$

2. kao skup kompleksnih brojeva koji predstavlja uniju spektara  $\alpha$ -reda perturbovanih matrica  $A + B$ , pri čemu je perturbacija kontrolisana parametrom  $\varepsilon$  u smislu da važi relacija  $\|B\|_p \leq \varepsilon$ ,

$$\Lambda_{\alpha, \varepsilon}^{(p)}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \exists B \in \mathbb{C}^{n,n} \text{ i } \|B\|_p \leq \varepsilon, \text{ takvo da } z \in \Lambda_{\alpha}(A + B)\}, \quad (5.27)$$

to jest,

$$\Lambda_{\alpha, \varepsilon}^{(p)}(A) := \bigcup_{\|B\|_p \leq \varepsilon} \Lambda_{\alpha}(A + B),$$

3. kao skup  $\varepsilon$ -pseudo-karakterističnih korena  $\alpha$ -reda, pri čemu su  $\mathbf{v}$  odgovarajući  $\varepsilon$ -pseudo-karakteristični vektori  $\alpha$ -reda,

$$\Lambda_{\alpha, \varepsilon}^{(p)}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \exists \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbf{v}\|_p = 1 \text{ takav da } \|(A_{\alpha}(z))\mathbf{v}\|_p \leq \varepsilon\}. \quad (5.28)$$

Tvrđenjem u nastavku pokazujemo da su prethodne definicije ekvivalentne. Pri tome, podsećamo se konvencije da je  $\|A^{-1}\|_p^{-1} = 0$  za svaku singularnu matricu  $A$ .



**TEOREMA 48** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  proizvoljna matrica,  $\alpha \in (0, 1]^n$  vektor frakcionih redova i  $\varepsilon > 0$ . Tada su tačke iz prethodne definicije ekvivalentne.*

**DOKAZ:** Pokazujemo da važi lanac sledećih implikacija.

[(5.26)  $\Rightarrow$  (5.27)] Uočimo proizvoljnu tačku  $z \in \mathbb{C}$  za koju je  $\|(A_\alpha(z))^{-1}\|_p^{-1} \leq \varepsilon$ , što implicira postojanje vektora  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  takvih da je  $\|\mathbf{u}\|_p = \|\mathbf{v}\|_p = 1$  i veličine  $s \leq \varepsilon$  za koje je  $(A_\alpha(z))\mathbf{v} = s\mathbf{u}$ . Dovoljno je da pokažemo da postoji matrica  $B \in \mathbb{C}^{n,n}$  takva da je  $\|B\|_p = s$  i  $(A_\alpha(z) + B)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

S tim u vezi, izaberimo

$$B = -\frac{1}{\|\mathbf{w}\|_D} s \mathbf{u} \mathbf{w}^H,$$

gde je vektor  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$  takav da  $\mathbf{w}^H \mathbf{v} = \|\mathbf{w}\|_D$ , a  $\|\mathbf{x}\|_D := \max_{\|\mathbf{y}\|_p=1} |\mathbf{x}^H \mathbf{y}|$

dualna norma za  $\|\cdot\|_p$ . Za tako izabrano  $B$  važi

$$\begin{aligned} \|B\|_p &= \frac{1}{\|\mathbf{w}\|_D} s \|\mathbf{u} \mathbf{w}^H\|_p = \frac{1}{\|\mathbf{w}\|_D} s \max_{\|\mathbf{x}\|_p=1} |\mathbf{w}^H \mathbf{x}| \\ &= s \frac{1}{\|\mathbf{w}\|_D} \|\mathbf{w}\|_D = s \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Šta više, važi i  $(A_\alpha(z) + B)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ .

[(5.27)  $\Rightarrow$  (5.28)] Pretpostavimo da je  $z \in \Lambda_\alpha(A + B)$ , što znači da je

$$(D_\alpha^m(z) - A - B)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

za neku matricu  $B \in \mathbb{C}^{n,n}$  takvu da je  $\|B\|_p \leq \varepsilon$  i vektor  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  koji možemo birati da je normiran, odnosno  $\|\mathbf{v}\|_p = 1$ . Tada,

$$\begin{aligned} \|A_\alpha(z)\mathbf{v}\|_p &= \|(D_\alpha^m(z) - A)\mathbf{v}\|_p \\ &= \|B\mathbf{v}\|_p \leq \|B\|_p \|\mathbf{v}\|_p \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

[(5.28)  $\Rightarrow$  (5.26)] Neka je  $A_\alpha(z)\mathbf{v} = s\mathbf{u}$ , za neke vektore  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  takve da je  $\|\mathbf{u}\|_p = \|\mathbf{v}\|_p = 1$  i  $s \leq \varepsilon$ . Prema tome,  $(A_\alpha(z))^{-1}\mathbf{u} = s^{-1}\mathbf{v}$ , odakle sledi

$$\|(A_\alpha(z))^{-1}\|_p \geq \|(A_\alpha(z))^{-1}\mathbf{u}\|_p = \|s^{-1}\mathbf{v}\|_p = s^{-1} \geq \varepsilon^{-1},$$

odnosno  $\|(A_\alpha(z))^{-1}\|_p^{-1} \leq \varepsilon$ , čime je dokaz završen.  $\triangle$

Baš kao što je to bio slučaj u radu sa klasičnim pseudospektrom, i frakcioni  $\varepsilon$ -pseudospektar se može iskoristiti sa ciljem uspostavljanja spektralnih osobina frakcionog tipa koje su *robustne* usled matricnih perturbacija u nekoj  $p$ -normi i uz parametar kontrole  $\varepsilon > 0$ . Jedno takvo svojstvo je svakako rezultat o stabilnosti iz Teoreme 17.

Naime, znajući da je SLFDJ (2.11) stabilan pod uslovom  $\Lambda_\alpha(A) \subseteq \Omega_\gamma$ , postavlja se pitanje za koje  $B \in \mathbb{C}^{n,n}$  ova inkluzija ostaje očuvana za matricu  $A + B$ ? Drugim rečima, da li je moguće dati adekvatnu procenu mere robusnosti stabilnosti matrice  $A$  izračunavajući najveće  $\varepsilon > 0$  za koje je  $\Lambda_{\alpha,\varepsilon}^{(p)}(A) \subseteq \Omega_\gamma$ , što je u klasičnom smislu poznato pod nazivom *rastojanje do nestabilnosti*, vidi [58].

Međutim, podsećajući se da izračunavanje takve veličine  $\varepsilon > 0$  u najjednostavnijem slučaju  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$  podrazumeva rešavanje nekonveksnog optimizacionog problema primenom numeričkih algoritama [10, 44, 53, 57, 111], formulacija preciznih (ali i računski isplativih) lokalizacija za frakcioni pseudospektar može poslužiti za izvođenje donjih granica radijusa stabilnosti, koje će biti dovoljno dobre procene ili dobre startne vrednosti u numeričkim algoritmima.

LEMA 18 (FRAKCIONI PRINCIP LOKALIZACIJE) *Ako je  $\mu^{(p)} : \mathbb{C}^{n,n} \rightarrow \mathbb{R}$  funkcionalna takva da za svaku matricu  $A$  važi*

$$\mu^{(p)}(A) \leq \|A^{-1}\|_p^{-1} \quad (5.29)$$

tada je

$$\Lambda_{\alpha,\varepsilon}^{(p)}(A) \subseteq \Theta_{\alpha,\varepsilon}^{\mu^{(p)}}(A) := \{z \in \mathbb{C} : \mu^{(p)}(A_\alpha(z)) \leq \varepsilon\}, \quad (5.30)$$

za svaki vektor  $\alpha \in (0, 1]^n$  frakcionih redova i svako  $\varepsilon > 0$ .

**DOKAZ:** Uočimo proizvoljnu tačku  $z \in \Lambda_{\alpha,\varepsilon}^{(p)}(A)$ , što znači da

$$\|(A_\alpha(z))^{-1}\|_p^{-1} \leq \varepsilon.$$

Ali tada je, na osnovu (5.29),  $\mu^{(p)}(A_\alpha(z)) \leq \|(A_\alpha(z))^{-1}\|_p^{-1} \leq \varepsilon$  odnosno,  $z \in \Theta_{\alpha,\varepsilon}^{\mu^{(p)}}(A)$ , što je i trebalo pokazati.  $\triangle$

Kao i ranije, jasno je da različiti izbori donjih granica  $\mu^{(p)}$  daju različite lokalizacione oblasti za frakcioni  $\varepsilon$ -pseudospektar  $\alpha$ -reda proizvoljne

matrice  $A$ . Takođe, u slučaju kada su ocene recipročne vrednosti  $p$ -norme inverza uporedive, važi svojstvo monotonosti

$$\mu_1^{(p)}(A) \leq \mu_2^{(p)}(A) \implies \Theta_{\alpha, \varepsilon}^{\mu_2^{(p)}}(A) \subseteq \Theta_{\alpha, \varepsilon}^{\mu_1^{(p)}}(A).$$

U nastavku slučajeve različitih izbora normi tretiramo ponaosob, koristeći pojednostavljenu notaciju  $\Lambda_{\alpha, \varepsilon}(A)$  bez mogućnosti zabune.

### Slučaj norme $\ell_\infty$

Na osnovu Leme 13, prvi rezultat glasi.

**TEOREMA 49 ( $\alpha$ -FRAKCIONI  $\varepsilon$ -PSEUDO GERŠGORINOV SKUP)** *Za svako  $\varepsilon > 0$ , proizvoljno  $\alpha \in (0, 1]^n$  i proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n, n}$  važi*

$$\Lambda_{\alpha, \varepsilon}(A) \subseteq \Gamma_{\alpha, \varepsilon}(A),$$

pri čemu je

$$\Gamma_{\alpha, \varepsilon}(A) := \bigcup_{i \in N} \{z \in \mathbb{C} : |a_{ii} - z^{m\alpha_i}| \leq r_i(A) + \varepsilon\}. \quad (5.31)$$

**DOKAZ:** Ako pretpostavimo da je

$$\mu_1(A_\alpha(z)) = \min_{i \in N} (|z^{m\alpha_i} - a_{ii}| - r_i(A)) \leq \varepsilon,$$

to znači da postoji indeks  $k \in N$  za koji je  $|z^{m\alpha_k} - a_{kk}| - r_k(A) \leq \varepsilon$ , odnosno

$$\begin{aligned} \Theta_{\alpha, \varepsilon}^{\mu_1}(A) &= \{z \in \mathbb{C} : \mu_1(A_\alpha(z)) \leq \varepsilon\} \\ &= \bigcup_{i \in N} \{z \in \mathbb{C} : |z^{m\alpha_i} - a_{ii}| \leq r_i(A) + \varepsilon\}, \end{aligned} \quad (5.32)$$

što kompletira dokaz. △

Očigledno, birajući  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$  i  $\varepsilon = 0$ , skup  $\Lambda_{\alpha, \varepsilon}(A)$  zapravo postaje  $\Lambda(A)$ , dok se  $\Gamma_{\alpha, \varepsilon}(A)$  svodi na Geršgorinov skup  $\Gamma(A)$ , što opravdava naziv iz prethodne Teoreme.

Koristeći ocenu iz Leme 14, kao i odnos ocena  $\mu_1$  i  $\mu_2$  iz tačke  $i$ ) Leme 16, stižemo do naredne lokalizacije.

**TEOREMA 50 ( $\alpha$ -FRAKCIONI  $\varepsilon$ -PSEUDO BRAUEROV SKUP)** Za svako  $\varepsilon > 0$ , proizvoljno  $\alpha \in (0, 1]^n$  i proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi

$$\Lambda_{\alpha,\varepsilon}(A) \subseteq \mathcal{K}_{\alpha,\varepsilon}(A) \subseteq \Gamma_{\alpha,\varepsilon}(A),$$

pri čemu je

$$\mathcal{K}_{\alpha,\varepsilon}(A) := \bigcup_{i \neq j} \{z \in \mathbb{C} : |z^{m\alpha_i} - a_{ii}|(|z^{m\alpha_j} - a_{jj}| - \varepsilon) \leq (r_i(A) + \varepsilon)r_j(A)\}. \quad (5.33)$$

**DOKAZ:** Dovoljno je pokazati da je  $\mathcal{K}_{\alpha,\varepsilon}(A) = \Theta_{\alpha,\varepsilon}^{\mu_2}(A)$ . Zaista,

$$\mu_2(A_\alpha(z)) = \min_{\substack{i \neq j \\ |z^{m\alpha_i} - a_{ii}| + r_j(A) \neq 0}} \frac{|z^{m\alpha_i} - a_{ii}| |z^{m\alpha_j} - a_{jj}| - r_i(A)r_j(A)}{|z^{m\alpha_i} - a_{ii}| + r_j(A)} \leq \varepsilon$$

ako i samo ako postoje dva različita indeksa  $i, j \in N$  takva da je  $|z^{m\alpha_i} - a_{ii}| + r_j(A) \neq 0$  i

$$|z^{m\alpha_i} - a_{ii}| |z^{m\alpha_j} - a_{jj}| - r_i(A)r_j(A) \leq \varepsilon |z^{m\alpha_i} - a_{ii}| + \varepsilon r_j(A).$$

S obzirom da poslednja nejednakost postaje jednakost samo ako je  $|a_{kk} - z^{m\alpha_k}| = r_j(A) = 0$ , sledi da je

$$\Theta_{\alpha,\varepsilon}^{\mu_2}(A) = \bigcup_{i \neq j} \{z \in \mathbb{C} : |z^{m\alpha_i} - a_{ii}|(|z^{m\alpha_j} - a_{jj}| - \varepsilon) \leq (r_i(A) + \varepsilon)r_j(A)\}.$$

Sa druge strane, budući da je  $\mu_2(A) \geq \mu_1(A)$  zaključujemo

$$\Lambda_{\alpha,\varepsilon}(A) \subseteq \mathcal{K}_{\alpha,\varepsilon}(A) \subseteq \Gamma_{\alpha,\varepsilon}(A).$$

△

Kao i ranije, birajući  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$  i  $\varepsilon = 0$ ,  $\Lambda_{\alpha,\varepsilon}(A)$  postaje  $\Lambda(A)$ , a skup  $\mathcal{K}_{\alpha,\varepsilon}(A)$  je Brauerov skup  $\mathcal{K}(A)$ .

Treći lokalizacioni skup za frakcioni pseudospektar u normi beskonačno izvodimo koristeći rezultat Leme 15 kao i tačke *ii*) iz Leme 16.

**TEOREMA 51 ( $\alpha$ -FRAKCIONI  $\varepsilon$ -PSEUDO  $\mathcal{C}^S$  SKUP)** Za svako  $\varepsilon > 0$ , proizvoljno  $\alpha \in (0, 1]^n$ , proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i ma koji podskup  $S$  indeksnog skupa  $N$  važi

$$\Lambda_{\alpha,\varepsilon}(A) \subseteq \mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon}^S(A) := \Gamma_{\alpha,\varepsilon}^S(A) \cup \Gamma_{\alpha,\varepsilon}^{\bar{S}}(A) \cup V_{\alpha,\varepsilon}^S(A) \cup V_{\alpha,\varepsilon}^{\bar{S}}(A), \quad (5.34)$$

pri čemu je

$$\Gamma_{\alpha,\varepsilon}^S(A) := \bigcup_{i \in S} \{z \in \mathbb{C} : |z^{m\alpha_i} - a_{ii}| \leq r_i^S(A) + \varepsilon\},$$

$$\Gamma_{\alpha,\varepsilon}^{\bar{S}}(A) := \bigcup_{j \in \bar{S}} \{z \in \mathbb{C} : |z^{m\alpha_j} - a_{jj}| \leq r_j^{\bar{S}}(A) + \varepsilon\},$$

$$V_{\alpha,\varepsilon}^S(A) := \bigcup_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S}}} \left\{ z \in \mathbb{C} : (|z^{m\alpha_i} - a_{ii}| - r_i^S(A) - \varepsilon)(|z^{m\alpha_j} - a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A)) \leq r_i^{\bar{S}}(A)(r_j^S(A) + \varepsilon) \right\},$$

$$V_{\alpha,\varepsilon}^{\bar{S}}(A) := \bigcup_{\substack{i \in S \\ j \in \bar{S}}} \left\{ z \in \mathbb{C} : (|z^{m\alpha_i} - a_{ii}| - r_i^S(A))( |z^{m\alpha_j} - a_{jj}| - r_j^{\bar{S}}(A) - \varepsilon) \leq (r_i^{\bar{S}}(A) + \varepsilon)r_j^S(A) \right\}.$$

**DOKAZ:** Dovoljno je primetiti da za  $z \notin \Gamma_{\alpha,\varepsilon}^S(A) \cup \Gamma_{\alpha,\varepsilon}^{\bar{S}}(A)$  važi sledeća ekvivalencija

$$\mu_3(A_\alpha(z)) \leq \varepsilon \text{ ako i samo ako } \min_{(i,j) \in S \times \bar{S}} \varphi_{i,j}^S(A_\alpha(z)) \leq \varepsilon.$$

Ostatak dokaza prati istu ideju kao i dokaz u vezi sa  $\alpha$ -frakcionim  $\varepsilon$ -pseudo Brauerovim lokalizacionim skupom.  $\triangle$

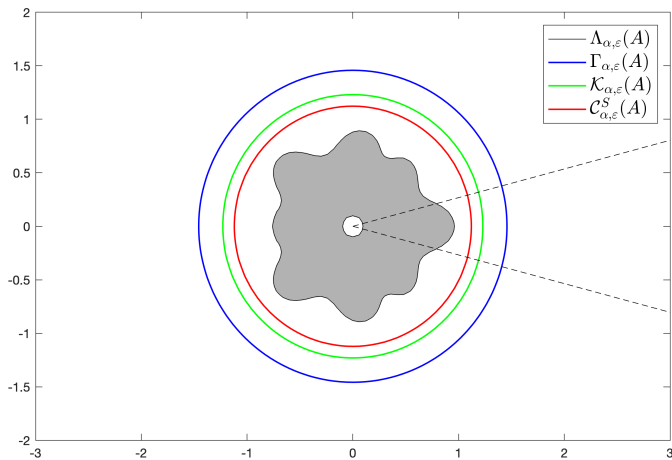
Naziv ovog lokalizacionog skupa opravdan je činjenicom da prilikom izbora  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$  i  $\varepsilon = 0$  isti postaje skup  $\mathcal{C}^S(A)$ .

U nastavku ćemo ilustrovati primene razmotrenih lokalizacionih skupova za  $\alpha$ -frakcioni  $\varepsilon$ -pseudospektar na jednostavnim primerima. Iako je matični spektar invarijantan na transformacije sličnosti, poznato je, vidi [111], da iste mogu drastično da promene pseudospektar, što je slučaj i

sa lokalizacijama spektra. Slike 5.11-5.14, daju uporedni prikaz tri lokalizaciona skupa za  $\alpha$ -frakcioni  $\varepsilon$ -pseudospektar matrica u nastavku, gde je  $s_j := 2 \sin \frac{2\pi j}{n}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ :

$$A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{24} = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 10^5 \\ & -2+i & 1 & 1 & 1 \\ & & -2-i & 1 & 1 \\ & & & -2+2i & 1 \\ & & & & -2-2i \end{bmatrix},$$

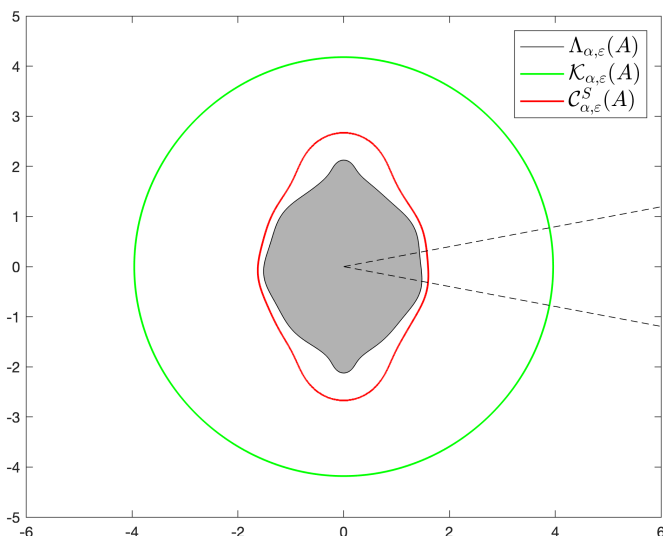
$$A_{25} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & & & \\ & -5 & & & \\ & 30 & -5 & 1 & \\ & & & -5 & \\ & & & & \end{bmatrix}, \quad A_{26} = \begin{bmatrix} s_1 & 1 & & & -1 \\ -1 & s_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & s_{n-1} & 1 \\ 1 & & & -1 & s_n \end{bmatrix}.$$



Slika 5.11: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}(A_{23})$ ,  $\mathcal{K}_{\alpha,\varepsilon}(A_{23})$  i  $\mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon}^{\{1,2\}}(A_{23})$  za  $\Lambda_{\alpha,\varepsilon}(A_{23})$  pri izboru  $\alpha = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$  i  $\varepsilon/\|A_{23}\|_\infty = 0.033$ .

Analizom Slike 5.11 moguće je utvrditi da je skup  $\mathcal{K}_{\alpha,\varepsilon}(A_{23})$  bolja lokalizacija u poređenju sa  $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}(A_{23})$ , dok je  $\mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon}^{\{1,2\}}(A_{23})$  najbolji. Ovo nije slučajno, budući da  $\mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon}^{\{1,2\}}(A_{23})$  uzima u obzir informacije na osnovu particije, pa je u mogućnosti da, na izvestan način, "profiltrira" mnogo veće vandijagonalne elemente u trećoj koloni.

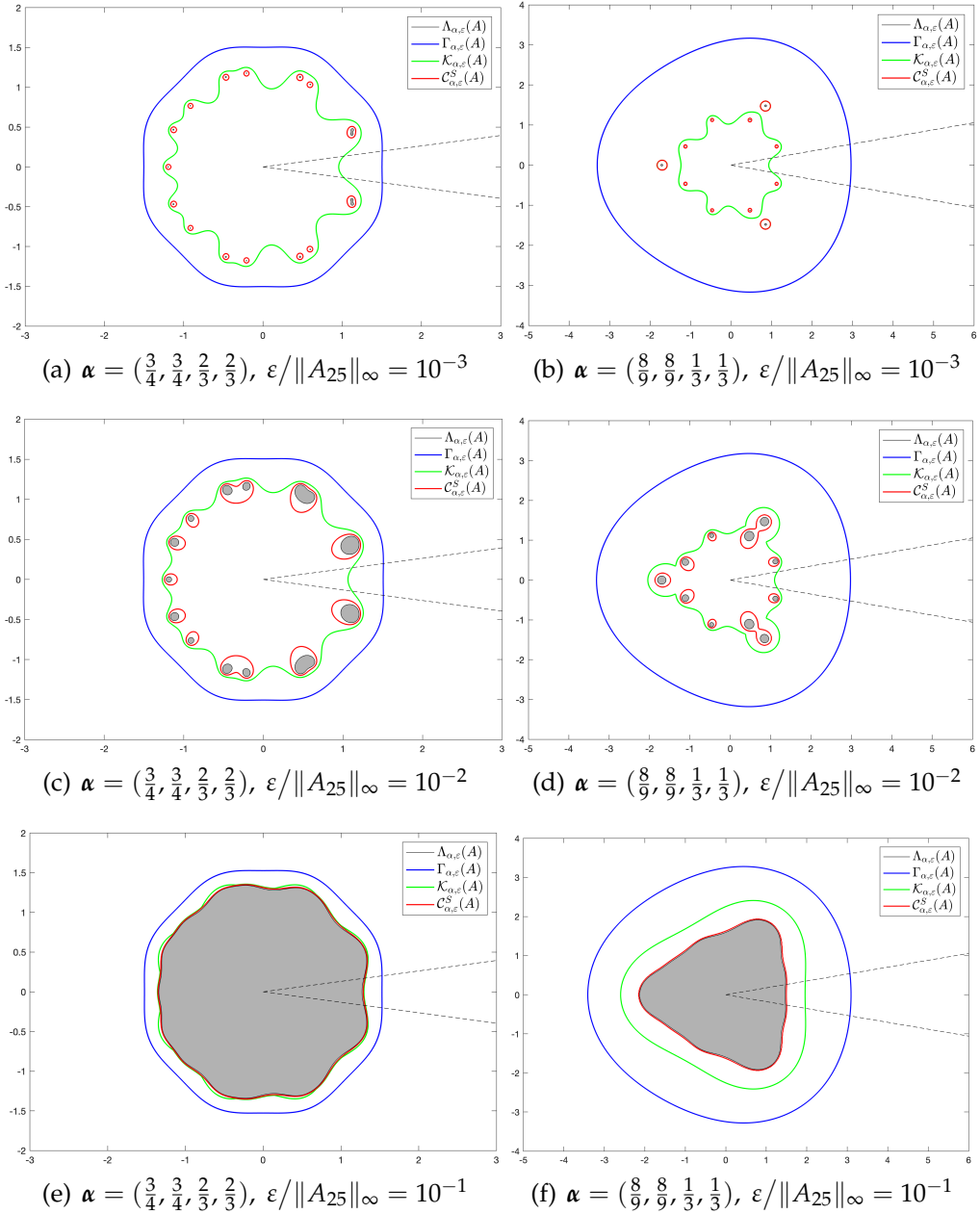
Kada je reč o matrici  $A_{24}$ , na osnovu Slike 5.12 možemo zaključiti da se  $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}(A_{24})$  i  $\mathcal{K}_{\alpha,\varepsilon}(A_{24})$  poklapaju, dok je  $\mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon}^{\{5\}}(A_{24})$  značajno bo-



Slika 5.12: Lokalizacioni skupovi  $\mathcal{K}_{\alpha, \varepsilon}(A_{24})$  i  $\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon}^{\{5\}}(A_{24})$  za  $\Lambda_{\alpha, \varepsilon}(A_{24})$  pri izboru  $\alpha = (\frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8})$  i  $\varepsilon / \|A_{24}\|_{\infty} = 10^{-8}$ .

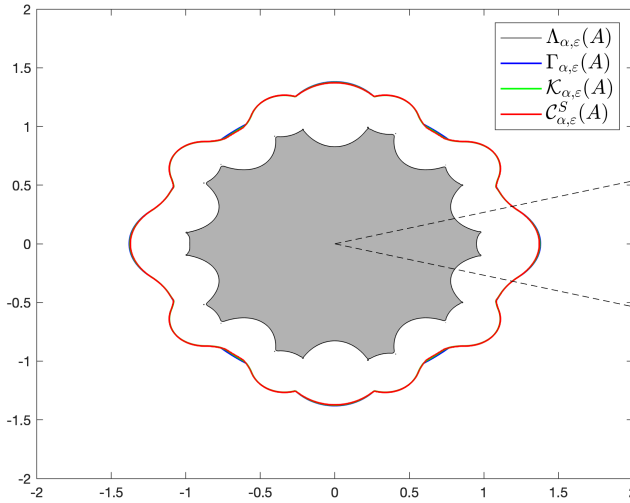
Ija aproksimacija za  $\varepsilon = 10^{-3}$  frakcioni pseudospektar. Primetimo da, u posmatranom slučaju, relativni red veličine perturbacije iznosi  $10^{-8}$ . Upravo ovo svojstvo čini  $\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon}^S$  nezamenljivim alatom u lokalizaciji frakcionog pseudospektra matrica velikih formata koje poseduju specifičnu blok strukturu.

Slika 5.13 ilustruje svojstvo monotonosti frakcionog pseudospektra i njegovih lokalizacionih skupova usled porasta veličine perturbacije  $\varepsilon$ . Pri tome, posmatrana su dva izbora frakcionih redova. U skladu sa očekivanjima, lokalizacione oblasti koje su preciznije su istovremeno i osetljivije na promene veličine perturbacije. Ali, kao što se da primetiti na osnovu formula (5.31), (5.33) i (5.34), svi skupovi ispoljavaju linearni rast po  $\varepsilon$ , ali sa različitim stopama. Dok skup  $\Gamma_{\alpha, \varepsilon}$  raste prateći veličinu perturbacije, preostala dva skupa uzimaju u obzir i veličinu elemenata matrice te su, tim pre, mnogo osetljiviji. Dodatno, možemo primetiti da se, u smislu procene robusne stabilnosti za SLFDJ skup  $\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon}^S$  pokazao kao najkorisniji. Naime, budući da za oba izbora  $\alpha = (\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  i  $\alpha = (\frac{8}{9}, \frac{8}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ , važi  $\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon}^{\{1,2\}}(A_{25}) \subseteq \Omega_{\gamma}$  za  $\varepsilon = 0.036$  (Slike 5.13(a) i 5.13(b)) i  $\varepsilon = 0.36$  (Slike 5.13(c) i 5.13(d)), možemo zaključiti, (bez eksplicitnog



Slika 5.13: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}(A_{25})$ ,  $\mathcal{K}_{\alpha,\varepsilon}(A_{25})$  i  $C_{\alpha,\varepsilon}^{\{1,2\}}(A_{25})$ . Rub oblasti stabilnosti  $\Omega_\gamma$  je prikazan crnom isprekidanom linijom.





Slika 5.14: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}(A_{26})$ ,  $\mathcal{K}_{\alpha,\varepsilon}(A_{26})$  i  $\mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon}^{\{1,\dots,15\}}(A_{26})$  za  $\alpha$ -frakcioni  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A_{26}$  ( $n = 100$ ), gde su  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{15} = \frac{2}{3}$ ,  $\alpha_{16} = \dots = \alpha_{100} = \frac{5}{6}$  i  $\varepsilon/\|A_{26}\|_\infty = 2.5 \cdot 10^{-11}$ .

izračunavanja frakcionog pseudospektra) da SLFDJ (2.11) sa matricom  $A_{25}$  ostaje stabilan pod uslovom da su elementi matrice perturbovani matricom  $B$  čija je norma beskonačno najviše 0.36. Sa druge strane, kako skupovi  $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}$  i  $\mathcal{K}_{\alpha,\varepsilon}$  ne pripadaju u potpunosti oblasti stabilnosti, oni su u ovom slučaju neupotrebljivi.

Napokon, posmatrajmo i tipičan primer nenormalne matrice date Toeplitz matricom  $A_{26}$  reda  $n = 100$ , čije su lokalizacije kao i sam skup  $\Lambda_{\alpha,\varepsilon}$  predstavljeni slikom 5.14. Zna se, vidi [111], da se centralni karakteristični koreni ove matrice menjaju eksponencijalno pri malim perturbacijama. Prema tome, izvedene lokalizacije pseudospektra zapravo kreiraju granice oblasti u kompleksnoj ravni u okviru koje koreni mogu zavistiti nelinearno od veličine perturbacije. Na ovom primeru možemo primetiti da se sva tri lokalizaciona skupa poklapaju.

### Slučaj norme $\ell_1$

Rezultati u vezi sa slučajem norme 1 izvide se direktnom primenom prethodnih rezultata primenjenih na matricu  $A^T$ .

### Slučaj norme $\ell_2$

Premda je, sa teorijske strane,  $\alpha$ -frakcioni  $\varepsilon$ -pseudospektar moguće posmatrati u kontekstu proizvoljne matrične norme, većina teorijskih rezultata motivisana praktičnim primenama je adaptirana slučaju Euklidske norme, između ostalog zbog njenih korisnih svojstava. U skladu sa važnošću i upotrebnom vrednošću dotičnog slučaja, u ovoj sekciji ćemo detaljno analizirati lokalizacione skupove za Euklidski  $\alpha$ -frakcioni  $\varepsilon$ -pseudospektar.

Ideja vodilja na putu formulisanja lokalizacija suštinski odgovara ideji prezentovanoj u sekciji o lokalizacijama Euklidskog pseudospektra, a bazira se na rezultatu Leme 17 i primene odgovarajućih ocena, (5.12), (5.14) odnosno (5.16), respektivno. Rezultati su sledeći.

**TEOREMA 52 (EUKLIDSKI  $\alpha$ -FRAKCIONI  $\varepsilon$ -PSEUDO GERŠGORINOV SKUP)** *Za svako  $\varepsilon > 0$ , proizvoljno  $\alpha \in (0, 1]^n$  i proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi*

$$\Lambda_{\alpha,\varepsilon}(A) \subseteq \Gamma_{\alpha,\varepsilon}^{(2)}(A) \subseteq \widehat{\Gamma}_{\alpha,\varepsilon}^{(2)}(A), \quad (5.35)$$

gde je

$$\Gamma_{\alpha,\varepsilon}^{(2)}(A) := \bigcup_{i,j \in N} \{z \in \mathbb{C} : (|z^{m\alpha_i} - a_{ii}| - r_i(A)) (|z^{m\alpha_j} - a_{jj}| - r_j(A^T)) \leq \varepsilon^2\},$$

i

$$\widehat{\Gamma}_{\alpha,\varepsilon}^{(2)}(A) := \bigcup_{i \in N} \{z \in \mathbb{C} : |z^{m\alpha_i} - a_{ii}| \leq \max\{r_i(A), r_i(A^T)\} + \varepsilon\}.$$

Važno je naglasiti da, iako  $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}^{(2)}(A)$  bolje lokalizuje pseudospektar, sa praktične strane u smislu lakoće izračunavanja, prednost pripada skupu  $\widehat{\Gamma}_{\alpha,\varepsilon}^{(2)}(A)$ , budući da je isti moguće definisati kao  $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}(A) \cup \Gamma_{\alpha,\varepsilon}(A^T)$ , odakle je spomenuta prednost očigledna.

**TEOREMA 53 (EUKLIDSKI  $\alpha$ -FRAKCIONI  $\varepsilon$ -PSEUDO BRAUEROV SKUP)** *Za svako  $\varepsilon > 0$ , proizvoljno  $\alpha \in (0, 1]^n$  i proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi*

$$\Lambda_{\alpha,\varepsilon}(A) \subseteq \mathcal{K}_{\alpha,\varepsilon}(A) \cup \mathcal{K}_{\alpha,\varepsilon}(A^T).$$

**TEOREMA 54 (EUKLIDSKI  $\alpha$ -FRAKCIONI  $\varepsilon$ -PSEUDO  $\mathcal{C}^S$  SKUP)** *Za svako  $\varepsilon > 0$ , proizvoljno  $\alpha \in (0, 1]^n$ , proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i ma koji podskup  $S$  indeksnog skupa  $N$  važi*

$$\Lambda_{\alpha,\varepsilon}(A) \subseteq \mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon}^S(A) \cup \mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon}^S(A^T).$$

Kao i ranije, osim kombinacija izvedenih donjih ocena recipročne vrednosti norme beskonačno i norme jedan inverza proizvoljne matrice, definisanju Euklidskog  $\alpha$ -frakcionog  $\varepsilon$ -pseudospektra moguće je pristupiti i direktnom primenom nekih poznatih donjih granica za najmanju singularnu vrednost matrice.

**TEOREMA 55 (EUKLIDSKI  $\alpha$ -FRAKCIONI  $\varepsilon$ -PSEUDO GERŠGORINOV SKUP)** *Za svako  $\varepsilon > 0$ , proizvoljno  $\alpha \in (0, 1]^n$  i proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi*

$$\Lambda_{\alpha,\varepsilon}(A) \subseteq \Gamma_{\alpha,\varepsilon}^{(e)}(A) \subseteq \Gamma_{\alpha,\varepsilon}^{(2)}(A) \subseteq \widehat{\Gamma}_{\alpha,\varepsilon}^{(2)}(A),$$

*pri čemu je*

$$\Gamma_{\alpha,\varepsilon}^{(e)}(A) := \bigcup_{i \in N} \{z \in \mathbb{C} : |z^{m\alpha_i} - a_{ii}| \leq g_i(A) + \varepsilon\}, \quad (5.36)$$

*gde je*

$$g_i(A) := \frac{r_i(A) + r_i(A^T)}{2}.$$

## 5.5 Primena u dinamičkoj analizi kompleksnih sistema

### 5.5.1 Aproksimacija rastojanja do nestabilnosti

Ako pretpostavimo da spektar matrice sistema linearnih, odnosno matrice Jakobijana u ekvilibrijumu nelinearnih autonomnih neprekidnih dinamičkih sistema ima sve karakteristične korene u  $\mathbb{C}^-$ , postavlja se pitanje koliko je ta stabilnost *robustna*, odnosno da li sistem ima kapacitet da apsorbuje uticaj kontrolisanih perturbacija i povрати narušenu ravnotežu. Uz smenu  $B = K - A$ , jednakost (2.7) je moguće zapisati na sledeći način

$$\begin{aligned} \delta^{(p)}(A) &:= \inf\{\|B\|_p : A + B \in \mathcal{N}_n\} \\ &= \sup\{\|B\|_p : \Lambda(A + B) \subseteq \mathbb{C}^-\}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Ograničavajući intenzitet uticaja kontrolisanih perturbacija na dinamički sistem u nekoj matricnoj  $p$ -normi ( $p \geq 1$ ) parametrom  $\varepsilon \geq 0$  i upotrebom matricnog pseudospektra (5.4), radijus stabilnosti (5.37) možemo definisati i kao

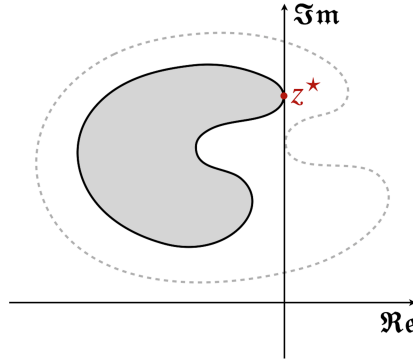
$$\delta^{(p)}(A) := \sup\{\varepsilon > 0 : \Lambda_\varepsilon^{(p)}(A) \subseteq \mathbb{C}^-\}. \quad (5.38)$$

Sama činjenica da postupak izračunavanja takvog  $\varepsilon$  predstavlja problem nekonveksne optimizacije opravdava potrebu za efikasnim numeričkim algoritmima, vidi [10, 44, 53, 57, 111], koji u radu sa retkim matricama velikih formata iziskuju značajne računarske kapacitete. Sa druge strane, upotreba postojećih kao i formulacija novih lokalizacija pseudospektra čije bi određivanje bilo računski isplativije, postaje imperativ u smislu da donje granice rastojanja do nestabilnosti izvedene iz informacija o položaju i geometrijskim svojstvima lokalizacionih skupova za  $\Lambda_\varepsilon^{(p)}(A)$  mogu biti dosta precizne, ili se mogu koristiti za akceleraciju postupaka izračunavanja spomenutih numeričkih algoritama.

Shodno (5.38), o radijusu stabilnosti možemo misliti i u terminima najmanje vrednosti  $\varepsilon$  za koju rub pseudospektra dodiruje imaginarnu osu (Slika 5.15).

Ako sa  $z^*$  označimo željenu tačku dodira, za koju istovremeno važe uslovi

$$z^* = it^*, \text{ za neko } t^* \in \mathbb{R} \text{ i } \|(z^*E - A)^{-1}\|_p^{-1} = \varepsilon^*,$$



Slika 5.15: Rastojanje do nestabilnosti kao najmanje  $\varepsilon^*$  za koje skup  $\Lambda_{\varepsilon^*}^{(p)}(A)$  dodiruje imaginarnu osu.

tada optimizacijom po svim realnim vrednostima parametra  $t$ , dobijamo da je

$$\delta^{(p)}(A) = \min_{t \in \mathbb{R}} \|(itE - A)^{-1}\|_p^{-1} = \varepsilon^*, \quad (5.39)$$

što je formulacija koju smo u [73] iskoristili za izvođenje novih rezultata u vezi sa donjim granicama za  $\delta^{(p)}(A)$ .

Dakle, možemo zaključiti da ocena rastojanja do nestabilnosti u  $p$ -normi predstavlja optimizacioni problem, za čije rešavanje je moguće primeniti rezultate izvedene u [69], a zatim i predstavljene ocene. Pre toga, definišimo sa

$$(\text{Red}(A))_{ij} := \begin{cases} |\Re(a_{ii})|, & i = j \\ -|a_{ij}|, & i \neq j \end{cases}$$

matricu  $Z$  oblika. Naredno pomoćno tvrđenje iz [69] objedinjuje slučajeve norme beskonačno i jedan.

LEMA 19 Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  i  $p \in \{1, \infty\}$  važi da je

$$\min_{t \in \mathbb{R}} \|(itE - A)^{-1}\|_p^{-1} \geq \vartheta_p(A),$$

pri čemu je

$$\vartheta_p(A) := \begin{cases} \|[Red(A)]^{-1}\|_p^{-1}, & \text{ako je Red}(A) \text{ M-matrica} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Prema tome, funkcionala  $\vartheta_p(A)$  predstavlja donju ocenu radijusa sta-

bilnosti i netrivialna je pod uslovom da je matrica  $Red(A)$  u klasi  $M$ -matrica. Ako je dodatno i u nekoj od specijalnih potklasa obuhvaćenih Tabelom 4.1, tada je moguće primeniti odgovarajuću ocenu na  $Red(A)$ .

## 5.5.2 Aproksimacija rastojanja do nestabilnosti blok matrica

Originalni doprinos doktorske disertacije koji predstavljamo ovom sekcijom publikovan je u [73], a tiče se rezultata u vezi sa donjim granicama za radijus stabilnosti matrica koje poseduju blok strukturu i koji, osim što se mogu dovesti u vezu sa rezultatima u tačkastom slučaju kao njihova uopštenja, pri specijalnom izboru particije  $\pi^0$  poboljšavaju i neke postojeće tačkaste ocene.

Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ , uočenu particiju  $\pi$  njenog indeksnog skupa i matricnu  $p$ -normu, definišemo dijagonalnu matricu:

$$\Delta_{\pi}^{(p)}(A) := \text{diag}(\delta^{(p)}(A_{1,1}), \delta^{(p)}(A_{2,2}), \dots, \delta^{(p)}(A_{\ell,\ell})),$$

koja je regularna pod uslovom da su svi dijagonalni blokovi stabilne matrice. Uz neke dodatne uslove, regularnost ove matrice je dovoljna da obezbedi stabilnost kompletne matrice  $A$ , kao i da proizvede donju granicu za  $\delta^{(p)}(A)$ .

**TEOREMA 56** *Neka je za  $p \geq 1$  i proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  particija  $\pi$  indeksnog skupa takva da su svi njeni dijagonalni blokovi  $A_{jj}$  stabilne matrice, odnosno  $\Lambda(A_{jj}) \subseteq \mathbb{C}^-$ , za svako  $j \in L$ . Ako postoji regularna dijagonalna matrica  $\Delta$  takva da je  $0 < \Delta \leq \Delta_{\pi}^{(p)}$  i  $\rho(\Delta^{-1}F_{\pi}^{(p)}) < 1$ , tada je matrica  $A$  stabilna, odnosno  $\Lambda(A) \subseteq \mathbb{C}^-$  i važi*

$$\delta^{(p)}(A) \geq \|(\Delta - F_{\pi}^{(p)})^{-1}\|_p^{-1}.$$

**DOKAZ:** Na osnovu pretpostavki zaključujemo da je  $\Delta - F_{\pi}^{(p)}$  matrica  $Z^+$  oblika, a uslov  $\rho(\Delta^{-1}F_{\pi}^{(p)}) < 1$  implicira njenu regularnost i ne-negativnost inverza. Prema tome,  $\Delta - F_{\pi}^{(p)}$  je regularna  $M$ -matrica. Sa druge strane, za svako  $t \in \mathbb{R}$  je ispunjeno

$$\langle itE - A \rangle_{\pi}^{(p)} \geq \Delta_{\pi}^{(p)}(A) - F_{\pi}^{(p)} \geq \Delta - F_{\pi}^{(p)},$$

odakle primenom Leme 2 zaključujemo da je i  $\langle itE - A \rangle_{\pi}^{(p)}$  takođe regularna  $M$ -matrica i da je

$$0 \leq (\langle itE - A \rangle_{\pi}^{(p)})^{-1} \leq (\Delta - F_{\pi}^{(p)})^{-1}.$$

Stoga, na osnovu Leme 5, zaključujemo da važi

$$\|(\langle itE - A \rangle_{\pi}^{(p)})^{-1}\|_p^{-1} \geq \|(\Delta - F_{\pi}^{(p)})^{-1}\|_p^{-1} =: \tilde{\delta} > 0.$$

što znači da skup  $\mathcal{M}_{\pi, \tilde{\delta}}^{(p)}(A)$  ne seče imaginarnu osu. Pored toga, budući da su blokovi  $A_{jj}$  stabilne matrice, na osnovu dela iii) u Propoziciji 1, zaključujemo da  $\mathcal{M}_{\pi, \tilde{\delta}}^{(p)}(A) \subseteq \mathbb{C}^-$ , što implicira da je  $\Lambda_{\tilde{\delta}}^{(p)}(A) \subseteq \mathbb{C}^-$ , pa samim tim i  $\Lambda(A) \subseteq \mathbb{C}^-$ , čime je stabilnost matrice  $A$  dokazana. Za kraj, činjenica da je  $\langle itE - A \rangle_{\pi}^{(p)}$   $M$ -matrica znači da  $itE - A$  pripada  $B_{\pi}^{(p)}$   $H$ -matricama, pa primena Teoreme 15 obezbeđuje odnos

$$\|(itE - A)^{-1}\|_p \leq \|\langle itE - A \rangle_{\pi}^{(p)}\|_p,$$

odakle, uzimanjem recipročnih vrednosti i minimizacijom po  $t \in \mathbb{R}$  sledi da je  $\delta^{(p)}(A) \geq \tilde{\delta}$ , čime je dokaz kompletiran.  $\triangle$

Primetimo da, iako je najbolji izbor za matricu  $\Delta$  očigledno  $\Delta_{\pi}^{(p)}(A)$ , ma koji izbor  $\Delta$  (pozitivne) donje granice za rastojanja do nestabilnosti dijagonalnih blokova matrice  $A$  koji ispunjava kriterijum  $\rho(\Delta^{-1}F_{\pi}^{(p)}) < 1$  je dovoljan obezbedi stabilnost matrice  $A$ .

Specijalno, znajući da je svaka trougaona matrica  $Z^+$  oblika  $M$ -matrica, zaključujemo da je kriterijum  $\rho(\Delta^{-1}F_{\pi}^{(p)}) < 1$  u slučaju blok trougaonih matrica  $A$  ispunjen za bilo koju pozitivnu dijagonalnu matricu  $\Delta$ , čiji su dijagonalni elementi proizvoljne pozitivne donje granice za rastojanje do nestabilnosti stabilnih dijagonalnih blokova. Ovo postaje naročito značajno prilikom upotrebe blok Šurove forme matrice i izbora unitarno-invarijantne matrične norme, poput Euklidske.

### Slučaj norme $\ell_{\infty}$

Proizvoljnoj matrici  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  moguće je pridružiti realnu matricu  $\langle A \rangle_{re}$  definisanu na sledeći način:

$$\langle A \rangle_{re} := -diag\left(\Re(a_{11}), \Re(a_{22}), \dots, \Re(a_{nn})\right) - F_{\pi^0}^{(p)},$$

gde je

$$F_{\pi^0}^{(p)} = D_{\pi^0}^{(p)}(0) - \mathcal{M}(A).$$

Ako pretpostavimo da je proizvoljna matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  takva da je  $\langle A \rangle_{re}$  regularna  $M$ -matrica, to implicira da su  $\Re(a_{ii}) < 0$  za svako  $i \in N$ , odakle se može zaključiti da je  $\langle A \rangle_{re} = Red(A)$ . Tada, na osnovu Leme 19, matrica  $A$  je stabilna i važi  $\delta^{(\infty)}(A) \geq \|\langle A \rangle_{re}^{-1}\|_{\infty}^{-1}$ . Sledeća posledica Teoreme 56 predstavlja generalizaciju ovog rezultata na slučaj matrica sa blok strukturom.

**POSLEDICA 1** *Neka je matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  takva da su, za particiju  $\pi$ ,  $\langle A_{j,j} \rangle_{re}$  regularne  $M$ -matrice, za svako  $j \in L$ . Ako je  $\rho(\Delta^{-1}F_{\pi}^{(\infty)}) < 1$ , za*

$$\Delta = diag(\|\langle A_{1,1} \rangle_{re}^{-1}\|_{\infty}^{-1}, \|\langle A_{2,2} \rangle_{re}^{-1}\|_{\infty}^{-1}, \dots, \|\langle A_{\ell,\ell} \rangle_{re}^{-1}\|_{\infty}^{-1}),$$

*tada je matrica  $A$  stabilna, odnosno  $\Lambda(A) \subseteq \mathbb{C}^-$  i važi*

$$\delta^{(\infty)}(A) \geq \|(\Delta - F_{\pi}^{(\infty)})^{-1}\|_{\infty}^{-1}.$$

Primetno da je trošak izračunavanja ove granice reda veličine  $\frac{2}{3}\ell^3 + \mathcal{O}(\frac{n^2}{\ell})$ , u poređenju sa činjenicom da se sračunavanje tačne vrednosti svodi na rešavanje nekonveksnog optimizacionog problema, za koji svaka iteracija nosi trošak cca.  $\frac{16}{3}n^3$ .

### Slučaj norme $\ell_1$

Kao i ranije, do rezultata koji se tiču matrične norme jedan dolazi se jednostavnom primenom prethodnog rezultata na matricu  $A^T$ .

### Slučaj norme $\ell_2$

Za kraj, prezentujemo rezultat u vezi sa granicom za rastojanje do nestabilnosti u slučaju Euklidske norme u formi posledice Teoreme 56 u slučaju kada su dijagonalni blokovi srednjih dimenzija (te da je moguće sračunati njihove Šurove forme).



POSLEDICA 2 Neka je matrica  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  takva da su, za particiju  $\pi$ , dijagonalni blokovi  $A_{j,j}$  stabilne matrice, za svako  $j \in L$ . Ako je  $\rho(\Delta^{-1}F_\pi^{(2)}) < 1$ , za

$$\Delta = \text{diag}\left(\sigma_{\min}(\langle T_{1,1} \rangle_{re}), \sigma_{\min}(\langle T_{2,2} \rangle_{re}), \dots, \sigma_{\min}(\langle T_{\ell,\ell} \rangle_{re})\right),$$

gde je sa  $T_{j,j}$  označena (kompleksna) Šurova forma matrice  $A_{j,j}$  za  $j \in L$ , tada je matrica  $A$  stabilna, odnosno  $\Lambda(A) \subseteq \mathbb{C}^-$  i važi

$$\delta^{(2)}(A) \geq \sigma_{\min}(\Delta - F_\pi^{(2)}).$$

DOKAZ: Stabilnost matrica  $A_{j,j}$  povlači da je  $\Lambda(A_{j,j}) \subseteq \mathbb{C}^-$ , za svako  $j \in L$ . Pre svega, koristeći Šurovu dekompoziciju svakog od tih blokova, znamo da je  $A_{j,j} = U_j T_{j,j} U_j^H$ , za svako  $j \in L$ , pri čemu je  $U_j$  unitarna matrica a  $T_{j,j}$  (kompleksna) Šurova forma, to jest gornja trougaona matrica čiji su dijagonalni elementi karakteristični koreni matrice  $A_{j,j}$ . S obzirom da je Euklidska norma unitarno invarijantna, za svako  $j \in L$ , imamo:

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}(A_{j,j}) &= \min_{t \in \mathbb{R}} \|(itE - A_{j,j})^{-1}\|_2^{-1} \\ &= \min_{t \in \mathbb{R}} \|(itE - T_{j,j})^{-1}\|_2^{-1} \\ &= \delta^{(2)}(T_{j,j}). \end{aligned} \tag{5.40}$$

Sa druge strane, stabilnost matrica  $A_{j,j}$  implicira pripadnost dijagonalnih elemenata matrica  $T_{j,j}$  otvorenoj levoj poluravni kompleksne ravni, na osnovu čega sledi da su matrice  $\langle itE - T_{j,j} \rangle_{re} = \langle T_{j,j} \rangle_{re}$  regularne  $M$ -matrice, za svako  $t \in \mathbb{R}$ . Međutim, kako za svako  $j \in L$  važi relacija

$$\mathcal{M}(itE - T_{j,j}) \geq \langle itE - T_{j,j} \rangle_{re},$$

na osnovu Leme 2 sledi da su i  $\mathcal{M}(itE - T_{j,j})$   $M$ -matrice, odnosno  $itE - T_{j,j}$  pripadaju klasi  $H$ -matrica. Dakle,

$$\|(\mathcal{M}(itE - T_{j,j}))^{-1}\|_2 \leq \|\langle T_{j,j} \rangle_{re}^{-1}\|_2$$

odakle zaključujemo da je

$$\sigma_{\min}(\mathcal{M}(itE - T_{j,j})) \geq \sigma_{\min}(\langle T_{j,j} \rangle_{re}).$$

Budući da je za svako  $t \in \mathbb{R}$  matrica  $itE - T_{j,j}$   $H$ -matrica, tada na osnovu (ii) iz Teoreme 5 zaključujemo da je  $\sigma_{\min}(itE - T_{j,j}) \geq \sigma_{\min}(\mathcal{M}(itE - T_{j,j}))$ . Napokon,

$$\begin{aligned} \delta^{(2)}(A_{j,j}) &= \min_{t \in \mathbb{R}} \sigma_{\min}(itE - T_{j,j}) \\ &\geq \min_{t \in \mathbb{R}} \sigma_{\min}(\mathcal{M}(itE - T_{j,j})) \\ &\geq \sigma_{\min}(\langle T_{j,j} \rangle_{re}). \end{aligned}$$

Odatle, tvrđenje sledi direktnom primenom Teoreme 56. △

Primetimo da u slučaju izbora particije na singltona ( $\pi^0$ ) prethodna posledica tvrdi da za rastojanje do nestabilnosti u Euklidskoj normi proizvoljne stabilne matrice  $A$  važi  $\delta^{(2)}(A) \geq \sigma_{\min}(\langle T \rangle_{re})$ , gde je  $T$  njena (kompleksna) Šurova forma. Ovo poboljšava tačkaste rezultate iz [69] i [70].

### 5.5.3 Ostala dinamička svojstva

Kao što smo videli u preliminarnoj glavi o dinamičkim sistemima, tokom tranzicionog perioda reaktivni dinamički sistemi na perturbaciju odgovaraju amplifikacijom odnosno tranzicionim rastom. Međutim, realne sisteme karakterišu i brojni limitirajući faktori u smislu postojanja nosivih kapaciteta, kao prirodnih ograničenja koja u ovoj kritičnoj fazi mogu biti kompromitovana, u kom slučaju zaključak o asimptotskoj stabilnosti postaje besmislen. Zbog toga ima smisla baviti se pitanjem o najvećem relativnom odnosu stanja na datom vremenskom domenu koje odgovara *maksimalnoj amplifikaciji*

$$\phi_A^{(p),max} := \max_{t \geq 0} \phi_A^{(p)}(t),$$

kao i trenutku njenog dostizanja,

$$t_{max} = \operatorname{argmin}_{t \geq 0} \phi_A^{(p)}(t).$$

Ako definišemo veličinu

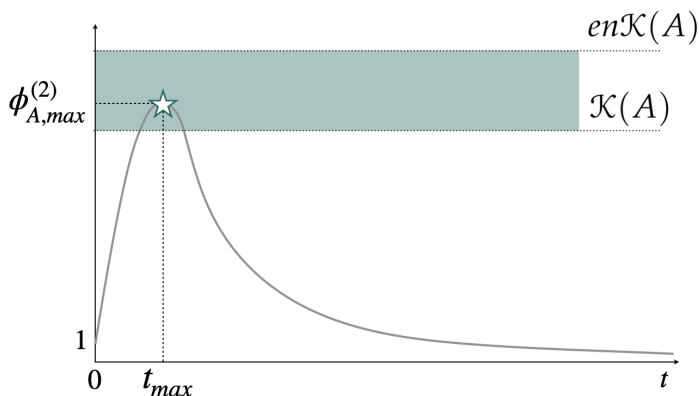
$$\mathcal{K}(A) := \sup_{\varepsilon > 0} \frac{\alpha_\varepsilon(A)}{\varepsilon} = \sup_{\Re(z) > 0} \Re(z) \| (zE - A)^{-1} \|_2$$

koja se zove *Krajsova konstanta* matrice  $A$ , tada u slučaju Euklidske norme, postoji rezultat koji govori o intervalu najmanjeg gornjeg ograničenja funkcije evolucije u normi dva.

**TEOREMA 57** [*Krajsova teorema za matrice*] Za proizvoljnu matricu  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  važi

$$\mathcal{K}(A) \leq \sup_{t \geq 0} \|e^{tA}\|_2 \leq en\mathcal{K}(A).$$

Prema tome, možemo zaključiti da je maksimalnu amplifikaciju funkcije evolucije u normi dva moguće proceniti intervalom  $[\mathcal{K}(A), en\mathcal{K}(A)]$ , što je prikazano na Slici 5.16.



Slika 5.16: Maksimalna amplifikacija ( $\phi_A^{(2),max}$ ) i trenutak njenog dostizanja ( $t_{max}$ ).

### 5.5.4 Aproksimacija rastojanja do nestabilnosti SLFDJ

Prateći sličnu logiku po ugledu na (5.37), u prilici smo da uvedemo pojam  $\alpha$ -frakcionog rastojanja do nestabilnosti u  $p$ -normi kao

$$\delta_\alpha^{(p)}(A) := \inf \left\{ \|B\|_p : B \in \mathbb{C}^{n,n}, A + B \text{ nije } \alpha\text{-frakciono stabilna matrica} \right\}.$$

Na osnovu Teoreme 48, možemo zaključiti da  $\alpha$ -frakcioni pseudo-spektar nudi alat čijom je upotrebom moguće *izračunati*  $\alpha$ -frakciono rastojanje do nestabilnosti proporcionalnog SLFDJ (posledica Teoreme 16) kao i *aproksimirati*  $\alpha$ -frakciono rastojanje do nestabilnosti neproporcionalnog linearnog SFDJ (posledica Teoreme 17). Naime,

$$\delta_{\alpha}^{(p)}(A) \geq \sup \left\{ \varepsilon > 0 : \Lambda_{\alpha, \varepsilon}(A) \subseteq \Omega_{\gamma} \right\},$$

pri čemu jednakost važi pod uslovom da je SLFDJ proporcionalan.

Sa ciljem izvođenja upotrebljivih donjih granica za  $\delta_{\alpha}^{(p)}(A)$ , krenućemo od činjenice da je rub skupa  $\Omega_{\gamma}$  moguće predstaviti na sledeći način

$$\partial\Omega_{\gamma} = \left\{ |t| i^{sgn(t)\gamma} : t \in \mathbb{R} \right\},$$

gde  $sgn(t)$  predstavlja znak realnog broja  $t$ , što povlači da je

$$\delta_{\alpha}^{(p)}(A) \geq \min_{z \in \partial\Omega_{\gamma}} \|(A_{\alpha}(z))^{-1}\|_p^{-1} = \min_{t \in \mathbb{R}} \|(A_{\alpha}(|t| i^{sgn(t)\gamma}))^{-1}\|_p^{-1}.$$

Međutim,

$$A_{\alpha}(|t| i^{sgn(t)\gamma}) = D_{\alpha}^m(|t| i^{sgn(t)\gamma}) - A = D_{\alpha}^m(|t|) D_{\alpha}^{sgn(t)}(i) - A.$$

### Slučaj norme $\ell_{\infty}$

Što se tiče norme beskonačno, imamo da je

$$\|(A_{\alpha}(|t| i^{sgn(t)\gamma}))^{-1}\|_{\infty}^{-1} = \inf_{\|\mathbf{x}\|_{\infty}=1} \|D_{\alpha}^m(|t|) D_{\alpha}^{sgn(t)}(i) \mathbf{x} - A \mathbf{x}\|_{\infty}.$$

Svakoј matrici  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  možemo pridružiti matricu  $Red^{\alpha}(A)$  definisanu kao

$$\left( Red^{\alpha}(A) \right)_{ij} = \begin{cases} \left| \Re(a_{ii}) \sin \frac{\alpha_i \pi}{2} \right| - \left| \Im(a_{ii}) \cos \frac{\alpha_i \pi}{2} \right| & , i = j, \\ -|a_{ij}| & , i \neq j, \end{cases}$$

i prisetiti se Leme 2 iz [69], koja kaže da za date  $z, \omega \in \mathbb{C}$ , važi

$$\min_{t \in \mathbb{R}} |z - it\omega| = \begin{cases} |z| & , \omega = 0, \\ |\omega| \left| \Re \left( \frac{z}{\omega} \right) \right| & , \text{inače.} \end{cases} \quad (5.41)$$

**TEOREMA 58** Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  matrica sistema neproporcionalnog SLFDJ sa vektorom frakcionih redova  $\alpha \in (0, 1]^n$ . Ako je  $\text{Red}^\alpha(A)$  u klasi  $M$ -matrica, tada je taj SLFDJ (2.11) asimptotski stabilan i za njegovo  $\alpha$ -frakciono rastojanje do nestabilnosti u normi  $\ell_\infty$  je ispunjeno

$$\delta_\alpha^{(\infty)}(A) \geq \|[Red^\alpha(A)]^{-1}\|_\infty^{-1} > 0.$$

**DOKAZ:** Činjenica da su svi  $m\alpha_k$  pozitivni celi brojevi i da je

$$\begin{aligned} \min_{t \in \mathbb{R}} \|(A_\alpha(|t| i^{\text{sgn}(t)\gamma}))^{-1}\|_\infty^{-1} &= \min_{t \in \mathbb{R}} \inf_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \|D_\alpha^m(|t|) D_\alpha^{\text{sgn}(t)}(i) \mathbf{x} - A\mathbf{x}\|_\infty \\ &= \inf_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \min_{t \in \mathbb{R}} \max_{k \in N} |t|^{m\alpha_k} i^{\text{sgn}(t)\alpha_k} x_k - (A\mathbf{x})_k|, \end{aligned}$$

u svetlu (5.41) implicira da važi

$$\begin{aligned} \min_{t \in \mathbb{R}} \|(A_\alpha(|t| i^{\text{sgn}(t)\gamma}))^{-1}\|_\infty^{-1} &= \inf_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \min_{t \in \mathbb{R}} \max_{k \in N} |i|^{m\alpha_k} i^{\text{sgn}(t)\alpha_k-1} x_k - (A\mathbf{x})_k| \geq \\ &\geq \inf_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \max_{k \in N} \min_{t \in \mathbb{R}} |i|^{m\alpha_k} i^{\text{sgn}(t)\alpha_k-1} x_k - (A\mathbf{x})_k| \geq \\ &\geq \inf_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \max_{k \in N} \min \left\{ \min_{t>0} |i t i^{\alpha_k-1} x_k - (A\mathbf{x})_k|, \min_{t>0} |i t i^{-\alpha_k-1} x_k - (A\mathbf{x})_k| \right\} \geq \\ &\geq \inf_{\|\mathbf{x}\|_\infty=1} \max_{k \in N} |x_k| \min \left\{ \left| \Re \left( \frac{(A\mathbf{x})_k}{i^{\alpha_k-1} x_k} \right) \right|, \left| \Re \left( \frac{(A\mathbf{x})_k}{i^{-\alpha_k-1} x_k} \right) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Međutim, kako je

$$\begin{aligned} \left| \Re \left( \frac{(A\mathbf{x})_k}{i^{\pm\alpha_k-1} x_k} \right) \right| &= \left| \Re \left( i^{1\mp\alpha_k} a_{kk} \right) + \sum_{j \neq k} \Re \left( i^{1\mp\alpha_k} a_{kj} \frac{x_j}{x_k} \right) \right| \geq \\ &\geq \left| \Re \left( i^{1\mp\alpha_k} a_{kk} \right) \right| - \left| \sum_{j \neq k} \Re \left( i^{1\mp\alpha_k} a_{kj} \frac{x_j}{x_k} \right) \right| \geq \left| \Re \left( i^{1\mp\alpha_k} a_{kk} \right) \right| - \sum_{j \neq k} |a_{kj}| \frac{|x_j|}{|x_k|}, \end{aligned}$$

i

$$\left| \Re \left( i^{1\mp\alpha_k} a_{kk} \right) \right| = |a_{kk}| \left| \sin \left( \arg(a_{kk}) \mp \frac{\alpha_k \pi}{2} \right) \right|, \quad (5.42)$$

dobijamo

$$\min \left\{ \left| \Re \left( i^{1-\alpha_k} a_{kk} \right) \right|, \left| \Re \left( i^{1+\alpha_k} a_{kk} \right) \right| \right\} = \left| \Re(a_{kk}) \sin \frac{\alpha_k \pi}{2} \right| - \left| \Im(a_{kk}) \cos \frac{\alpha_k \pi}{2} \right|,$$

i prema tome,

$$\begin{aligned} \min_{t \in \mathbb{R}} \|(A_{\alpha}(|t| i^{\text{sgn}(t)\gamma}))^{-1}\|_{\infty}^{-1} &\geq \inf_{\|\mathbf{x}\|_{\infty}=1} \max_{k \in N} \left\{ (Red^{\alpha}(A)|\mathbf{x}|)_k \right\} \\ &\geq \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\infty}=1} \min_{k \in N} \left\{ (Red^{\alpha}(A)|\mathbf{x}|)_k \right\}. \end{aligned}$$

Pretpostavka da je  $Red^{\alpha}(A)$  u klasi  $M$ -matrica obezbeđuje da je  $(Red^{\alpha}(A))^{-1} \geq O$ , pa definišući

$$\mathbf{x} := \frac{[Red^{\alpha}(A)]^{-1} \mathbf{e}}{\|[Red^{\alpha}(A)]^{-1} \mathbf{e}\|_{\infty}} > \mathbf{0},$$

zaključujemo da je

$$\begin{aligned} \min_{t \in \mathbb{R}} \|(A_{\alpha}(|t| i^{\text{sgn}(t)\gamma}))^{-1}\|_{\infty}^{-1} &\geq \|[Red^{\alpha}(A)]^{-1} \mathbf{e}\|_{\infty}^{-1} \\ &= \|[Red^{\alpha}(A)]^{-1}\|_{\infty}^{-1} > 0, \end{aligned}$$

čime je dokaz završen. △

### Slučaj norme $\ell_1$

Slično pređašnjim razmatranjima, a s obzirom da je klasa  $M$ -matrica invarijantna u odnosu na operaciju transponovanja, kao direktnu posledicu Teoreme 58 navodimo sledeće tvrđenje.

**TEOREMA 59** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  matrica sistema neproporcionalnog SLFDJ sa vektorom frakcionih redova  $\alpha \in (0, 1]^n$ . Ako je  $Red^{\alpha}(A)$  u klasi  $M$ -matrica, tada je taj SLFDJ (2.11) asimptotski stabilan i za njegovo  $\alpha$ -frakciono rastojanje do nestabilnosti u normi  $\ell_1$  važi*

$$\delta_{\alpha}^{(1)}(A) \geq \|[Red^{\alpha}(A)]^{-1}\|_1^{-1} > 0.$$

### Slučaj norme $\ell_2$

U slučaju Euklidske norme, koristimo (4.12) kako bismo izveli granicu za Euklidsko  $\alpha$ -frakciono rastojanje do nestabilnosti. Stoga se, kao neposredna posledica Teorema 58 i 59 može formulisati sledeći rezultat.

**TEOREMA 60** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  matrica sistema neproporcionalnog SLFDJ sa vektorom frakcionih redova  $\alpha \in (0, 1]^n$ . Ako je  $\text{Red}^\alpha(A)$  u klasi  $M$ -matrica, tada je taj SLFDJ (2.11) asimptotski stabilan i za njegovo Euklidsko  $\alpha$ -frakciono rastojanje do nestabilnosti važi*

$$\delta_\alpha^{(2)}(A) \geq \sqrt{\| [\text{Red}^\alpha(A)]^{-1} \|_\infty^{-1} \| [\text{Red}^\alpha(A)]^{-1} \|_1^{-1}} > 0.$$

Kada je reč o proporcionalnom SLFDJ, u prilici smo da ponudimo oštriju granicu primenljivu na proizvoljan takav asimptotski stabilan SLFDJ (2.11).

**TEOREMA 61** *Neka je  $A \in \mathbb{C}^{n,n}$  matrica sistema proporcionalnog SLFDJ sa frakcionim redovima  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \gamma$ . Ako je SLFDJ (2.11) asimptotski stabilan, tada je njegovo Euklidsko  $\alpha$ -frakciono rastojanje do nestabilnosti ograničeno sa*

$$\delta_\alpha^{(2)}(A) \geq \sqrt{\| [\text{Red}^\alpha(T)]^{-1} \|_\infty^{-1} \| [\text{Red}^\alpha(T)]^{-1} \|_1^{-1}} > 0,$$

*pri čemu  $T$  predstavlja (kompleksnu) Šurovu formu matrice  $A$ . Šta više, jednakost važi pod uslovom da je  $A$  normalna matrica.*

**DOKAZ:** Budući da je Euklidska norma unitarno invarijantna, u slučaju proporcionalnog SLFDJ, s obzirom da je  $D_\alpha^m(z) = zE$ ,

$$\begin{aligned} \delta_\alpha^{(2)}(A) &= \min_{z \in \partial\Omega_\gamma} \| (A_\alpha(z))^{-1} \|_2^{-1} = \min_{z \in \partial\Omega_\gamma} \| (zE - A)^{-1} \|_2^{-1} \\ &= \min_{z \in \partial\Omega_\gamma} \| (zE - T)^{-1} \|_2^{-1} \\ &= \delta_\alpha^{(2)}(T). \end{aligned}$$

Međutim, na osnovu pretpostavke da je SLFDJ asimptotski stabilan sledi da su svi karakteristični koreni  $\lambda$  unutar oblasti stabilnosti  $\Omega_\gamma$ . Prema tome, koristeći 5.42, nalazimo da je  $(\text{Red}^\alpha(T))_{kk} > 0$  za svako  $k \in N$ , što implicira da je matrica  $\text{Red}^\alpha(T)$  trougaona matrica  $Z$  oblika sa nenula dijagonalnim elementima, pa samim tim i  $M$ -matrica. Primenjujući prethodnu teoremu, tvrđenje sledi.  $\triangle$

## Primena u ekologiji

Cilj ove sekcije jeste da ukaže na primenu predstavljenih rezultata koji uključuju frakcioni pristup u modeliranju kompleksnih dinamičkih procesa u prirodi. U tom pogledu, analiziramo stabilnost dinamičkog sistema koji opisuje protok energije u kompleksnom ekosistemu tla.

Iako su rezultati iz [70] koji su značajno doprineli boljem razumevanju nekih dinamičkih svojstava i tretmanu problema ekološke stabilnosti za dobro poznate modele spomenute u [88, 91, 92] analizirani u terminima matričnog pseudospektra, primenom frakcionih izvoda smo u mogućnosti da *uzmемо u obzir činjenicu da biološki sistemi poseduju izrazite nasledne osobine, kao i činjenicu da različite funkcionalne grupe imaju različite životne vekove, pa samim tim i različite uticaje prošlosti u jednačinama kojima se opisuje dinamika*. Prema tome, koristeći informaciju da funkcionalne grupama ameba ( $i = 1$ ) i bičara ( $i = 5$ ), koje pripadaju protozoama, poseduju ćelije beskonačnog životnog veka, pristupamo modeliranju njihove dinamike kao one sa najvećom memorijom i postavljamo  $\alpha_1 = \alpha_5 = \frac{1}{5}$ . Sa druge strane, bakterije ( $i = 7$ ) imaju najkraće vreme života (oko jednog dana), zbog čega biramo  $\alpha_7 = 1$ . Kada je reč o ostalim funkcionalnim grupama, pratimo sličnu argumentaciju i biramo:  $\alpha_2 = \frac{1}{2}$  (grinje žive od nekoliko meseci do dve godine),  $\alpha_3 = \alpha_4 = \frac{2}{3}$  (nematode u proseku žive oko dve nedelje) i  $\alpha_6 = \frac{4}{5}$  (gljivice imaju životni vek oko jedne nedelje). Na kraju, za ukupan udeo nežive materije biramo  $\alpha_8 = 1$ .

Dalje, posmatramo linearizovanu formu uopštenog nelinearnog SFDJ

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{q} \end{cases},$$

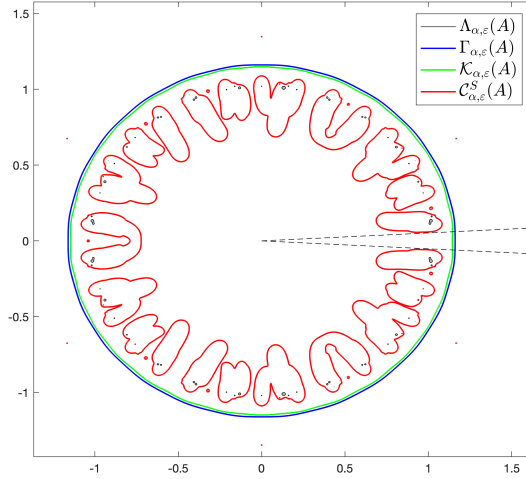
kojim se modelira propagacija male inicijalne perturbacije  $\mathbf{x} = \mathbf{q} \in \mathbb{R}^8$  ekvilibrijuma. Kada je reč o izboru norme, koristimo normu beskonačno kako bismo izmerili (po komponentama) najveće odstupanje biomase funkcionalne grupe od ravnotežnog stanja.

Dalje, crtajući skup  $\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon}^S(A_{16})$  za  $\varepsilon = 1.1576 \cdot 10^{-2}$  možemo videti da on pripada  $\Omega_\gamma$ , dok  $\Gamma_{\alpha, \varepsilon}(A_{16})$  prodire daleko u region nestabilnosti, vidi Sliku 5.17(a). Prema tome,  $\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon}^S(A) \subseteq \Omega_\gamma$  za sve  $0 < \varepsilon \leq 1.1576 \cdot 10^{-2}$  što nagoveštava da je tako izabrano  $\varepsilon = 1.1576 \cdot 10^{-2}$  donja granica za rastojanje do nestabilnosti u normi beskonačno. Kako bismo uporedili

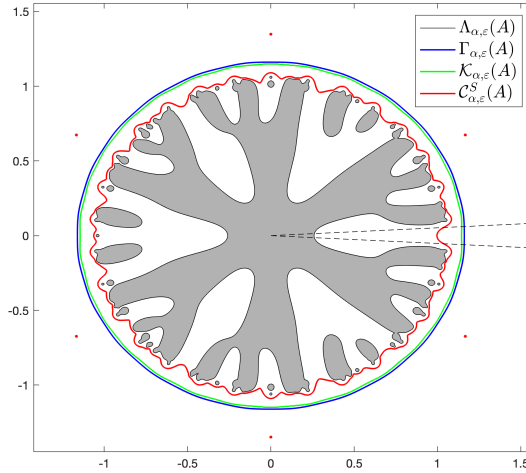


## 5.5. Primena u dinamičkoj analizi kompleksnih sistema

preciznost ove granice crtamo istu Sliku 5.17(b) za izbor  $\varepsilon = 8.1874 \cdot 10^{-2}$ , koja ilustruje granični slučaj u smislu pripadnosti  $\alpha$ -frakcionog  $\varepsilon$ -pseudospektra regionu stabilnosti.



(a)  $\varepsilon = 1.1576 \cdot 10^{-2}$



(b)  $\varepsilon = 8.1874 \cdot 10^{-2}$

Slika 5.17: Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_{\alpha, \varepsilon}(A_{16})$ ,  $\mathcal{K}_{\alpha, \varepsilon}(A_{16})$  i  $\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon}^S(A_{16})$  za  $\alpha$ -frakcionu  $\varepsilon$ -pseudospektar community matrice  $A_{16}$  za  $\alpha = (\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1)$ .



# Zaključna razmatranja

U osnovi modeliranja kompleksnih sistema i razvoja održivih strategija za njihovo očuvanje i obnovu leže pitanja vezana za *dinamička* svojstva, kao što su stabilnost, robusnost, reaktivnost, tranziciono ponašanje, amplifikacioni okvir i slično. Sistematsko povezivanje tih svojstava sa teorijom  $H$ -matrica zahtevalo je nove rezultate iz oblasti lokalizacije spektra i pseudospektra, kao i ocene norme inverzne matrice, bilo u tačkastoj, bilo u blok formi. Ti rezultati predstavljaju originalni doprinos disertacije oblasti primenjene linearne algebre i mogu se kratko rezimirati na sledeći način:

- Ocena norme inverzne matrice za neku od potklasa  $H$ -matrica, između ostalog, predstavlja dobru polaznu tačku za ocenu rezolvente, a zatim i za lokalizaciju pseudospektra *proizvoljne* matrice. U radu [37] predstavljen je generalni princip dobijanja ocena norme jedan za proizvoljnu  $H$ -matricu, kako bi se u kombinaciji sa ocenama norme beskonačno za neke specijalne potklase, dobile donje ocene minimalne singularne vrednosti. Na primeru kompleksnih sistema iz ekologije, kao i na primeru blok matrica velikih dimenzija proisteklih iz konturnih problema, ilustrovani su benefitni dobijenih rezultata.
- Pomenute matrice velikih dimenzija sa blokovskom strukturom i analiza njihovog pseudospektra poseban su izazov, s obzirom da se one javljaju u velikom broju praktičnih primena, kao na primer

prilikom diskretizacije parcijalnih diferencijalnih jednačina metodom konačnih elemenata ili konačnih razlika, zatim tokom rada sa strukturiranim mrežama, ali i kao proizvodi u međukoracima raznih numeričkih algoritama. Originalni doprinos disertacije toj problematici su rezultati prezentovani u radu [73], gde je, kao posledica, izvedena i ocena za rastojanje do nestabilnosti blok matrica, kako u normi beskonačno, tako i u Euklidskoj normi.

- Uspešna upotreba frakcionih diferencijalnih jednačina u modeliranju raznovrsnih značajnih procesa u prirodi i društvu bila je motiv za još jedan originalni naučni doprinos, koji je izložen u radu [104], u kome su razvijeni alati za potrebe praktične analize robusne asimptotske stabilnosti ekvilibrijuma kompleksnih sistema opisanih (nesrazmernim) linearnim sistemom frakcionih diferencijalnih jednačina. Uveden je pojam frakcionog pseudospektra, a potom i tehnika njegove lokalizacije. Ovaj novi pristup je implementiran i analiziran na realnom modelu empirijske trofičke mreže kako bi se uspostavila veza između asimptotske stabilnosti (koja uključuje nasledne osobine u dinamici živih organizama) sa jedne i empirijskih podataka (kao i mogućih grešaka prilikom njihovog prikupljanja) sa druge strane.

Nakon poznatih, a ovde sistematizovanih saznanja, kao i nakon svakog novog naučnog saznanja o nekoj potklasi  $H$ -matrica, dat je osvrt na moguće primene u dinamičkoj analizi kompleksnih sistema, gde je, osim dobijenih rezultata, implementiran i odgovarajući algoritam u programskom paketu MATLAB. Na taj način su analizirani kompleksni sistemi u ekologiji i epidemiologiji, a izvesno je da se slična analiza može primeniti i na druge oblasti prirodnih, tehničko-tehnoloških i društvenih nauka.

Za očekivati je da te potencijalne primene izrode potrebu za dodatnim rezultatima u teoriji  $H$ -matrica, što bi mogao biti pravac budućih istraživanja.

# Bibliografija

- [1] Ahlberg, J.H., Nilson, E.N. : *Convergence properties of the spline fit*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics 11(1) (1963), 95–104.
- [2] Araki, M. : *Application of M-matrices to the stability problems of composite dynamical systems*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 52 (1975), 309–321.
- [3] Bai, Z.Z., Wang, D.R. : *Generalized matrix multisplitting relaxation methods and their convergence*, Numerical Mathematics, A Journal of Chinese Universities (English Series) 2(1) (1993), 87–100.
- [4] Berman, A. : *m Applications of M-matrices*, Chapter 8 in: Phillips, F.Y., Rousseau, J.J. : *Systems and Management Science by Extremal Methods : Research Honoring Abraham Charnes at Age 70*, Springer Science, 1992.
- [5] Berman, A., Plemmons, R.J. : *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1994.
- [6] Berman, A., Stern, R.J. : *Linear Feedback, Irreducibility and M-matrices*, Linear Algebra and its Applications 97 (1987), 141–152.
- [7] Berman, A., Neumann, M., Stern, R.J. : *Nonnegative Matrices in Dynamic Systems*, Wiley, New York, 1989.

- [8] Brauer, A. : *Limits for the characteristic roots of a matrix II*, Duke Mathematical Journal 14 (1947), 21–26.
- [9] Brauer, A. : *Limits for the characteristic roots of a matrix IV: Applications to stochastic matrices*, Duke Mathematical Journal 19 (1952), 75–91.
- [10] Byers, R. : *A Bisection Method for Measuring the Distance of a Stable Matrix to the Unstable Matrices*, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing 9(5) (1988), 875–881. doi: 10.1137/0909059.
- [11] Caputo, M. : *Linear models of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent, Part II*, Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society 13 (1967), 529–539.
- [12] Collatz, L. : *Functional Analysis and Numerical Mathematics*, Academic Press, New York and London, 1966.
- [13] Cottle, R.W., Pang, J.S., Stone, R.E. : *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press, San Diego, 1992.
- [14] Cottle, R.W., Dantzig, G.B. : *Complementary pivot theory of mathematical programming*, Linear Algebra and its Applications 1(1) (1968), 103–125.
- [15] Crabtree, D.E. : *Characteristic Roots of  $M$ -Matrices*, Proceedings of the American Mathematical Society 17(6) (1966), 1435–1439.
- [16] Cryer, C.W. : *The method of Christopherson for solving free boundary problems in finite journal bearings by means of finite differences*, Mathematics of Computation 25(115) (1971), 435–443.
- [17] Cvetković, Lj., Kostić, V., Varga, R.S. : *A new Geršgorin-type eigenvalue inclusion set*, ETNA (Electronic Transactions on Numerical Analysis) 18 (2004), 73–80.
- [18] Cvetković, Lj. :  *$H$ -matrix theory vs. eigenvalue localization*, Numerical Algorithms 42(3-4) (2006), 229–245. doi: 10.1007/s11075-006-9029-3.
- [19] Cvetković, Lj., Kostić, V. : *Between Geršgorin and minimal Geršgorin sets*, Journal of Computational and Applied Mathematics 196 (2006), 452–458.

- [20] Cvetković, Lj., Kostić, V. : *New subclasses of block H-matrices with applications to parallel decomposition-type relaxation methods*, Numerical Algorithms 42(3-4) (2006), 325–334. doi: 10.1007/s11075-006-9031-9.
- [21] Cvetković, Lj., Kostić, V. : *A note on the convergence of the AOR method*, Applied Mathematics and Computation 194(2) (2007), 394–399. doi: 10.1016/j.amc.2007.04.030.
- [22] Cvetković, Lj., Kostić, V., Bru, R., Pedroche, F. : *A simple generalization of Geršgorin's theorem*, Advances in Computational Mathematics 35 (2011), 271–280. doi: 10.1007/s10444-009-9143-6.
- [23] Cvetković, Lj., Kostić, V. : *Application of Generalized Diagonal Dominance in Wireless Sensor Network Optimization Problems*, Applied Mathematics and Computation 218(9) (2012), 4798–4805. doi: 10.1016/j.amc.2011.10.023.
- [24] Cvetković, Lj., Nedović, M. : *Eigenvalue localization refinements for the Schur complement*, Applied Mathematics and Computation 218(17) (2012), 8341–8346. doi: 10.1016/j.amc.2012.01.058.
- [25] Cvetković, Lj., Dai, P.F., Doroslovački, K., Li, Y.T. : *Infinity norm bounds for the inverse of Nekrasov matrices*, Applied Mathematics and Computation 219 (2013), 5020–5024.
- [26] Cvetković, Lj., Doroslovački, K. : *Max norm estimation for the inverse of block matrices*, Applied Mathematics and Computation 242(3-4) (2014), 694–706.
- [27] Cvetković, Lj., Kostić, V., Doroslovački, K., Cvetković, D.Lj. : *Euclidean norm estimates of the inverse of some special block matrices*, Applied Mathematics and Computation 284 (2016), 12–23.
- [28] Cvetković, Lj., Kostić, V., Šanca, E., Saed, A. : *Error Control Based on the Novel Proof of Convergence of the MSMAOR Methods for the LCP*, East Asian Journal on Applied Mathematics 8(2) (2018), 352–364.
- [29] Cvetković, D. : *Novi indikatori stabilnosti za empirijske trofičke mreže*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2017.
- [30] Cvetković, Lj. : *NUMELA 1*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2015.

- [31] Das, S., Gupta, P.K. : *A mathematical model on fractional Lotka-Volterra equations*, Journal of Theoretical Biology 277 (2011), 1–6.
- [32] Dashnits, L.S., Zusmanovich, M.S. : *On localization of the characteristic roots of a matrix*, Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki 8(6) (1968), 1321–1327.
- [33] Dashnits, L.S., Zusmanovich, M.S. : *Criteria for matrix regularity and spectrum localization*, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics 10(5) (1970), 34–41.
- [34] Demmel, J.W. : *Applied Numerical Linear Algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 1997.
- [35] Deng, W., Li, C., Lú, J. : *Stability analysis of linear fractional differential system with multiple time delays*, Nonlinear Dynamics 48 (2007), 409–416.
- [36] Desplanques, J. : *Théorème d'Algèbre*, Journal de Mathématiques Spéciales 9 (1887), 12–13.
- [37] Doroslovački, K., Cvetković, Lj., Šanca, E. : *A New Lower Bound for the Smallest Singular Value*, Filomat 33(9) (2019), 2711–2723.
- [38] Embree, M., Trefethen, L.N. : *Generalizing Eigenvalue Theorems to Pseudospectra Theorems*, SIAM Journal on Scientific Computing 23 (2001), 583–590. doi: 10.1137/S1064827500373012.
- [39] Fan, K. : *Topological proofs for certain theorems on matrices with non-negative elements*, Monatshefte für Mathematik 62 (1958), 219–237.
- [40] Fan, K. : *Note on M-matrices*, The Quarterly Journal of Mathematics 11(1) (1960), 43–49.
- [41] Fan, K. : *Inequalities for M-matrices*, Indagationes Mathematicae (Proceedings) 67 (1964), 602–610.
- [42] Fiedler, M., Pták, V. : *On matrices with non-positive off-diagonal elements and positive principal minors*, Czechoslovak Mathematical Journal 12 (1962), 382–400.
- [43] Fiedler, M., Pták, V. : *Generalized norms of matrices and the location of the spectrum*, Czechoslovak Mathematical Journal 12(4) (1962), 558–471.



- [44] Freitag, M.A., Spence, A. : *A Newton-based method for the calculation of the distance to instability*, *Linear Algebra and its Applications* 435(12) (2011), 3189–3205. doi: 10.1016/j.laa.2011.06.012.
- [45] Freingold, D.G., Varga, R.S. : *Block diagonally dominant matrices and generalizations of the Gerschgorin circle theorem*, *Pacific Journal of Mathematics* 12 (1962), 1241–1250.
- [46] Fréchet, M. : *Comportement asymptotique des solutions d'un système d'équations linéaires et homogènes aux différences finies du premier ordre à coefficients constants*, *Publ. Fat. Sci. Univ. Masaryk (Brno)* 178 (1933), 1-24.
- [47] Fréchet, M. : *Recherches Théoriques Modernes sur la Theorie des Probabilités, Seconde Partie*, 1937; Emil Borel, *Traité du Calcul des Probabilités et ses Applications* 1, Paris.
- [48] García-Esnaola, M., Peña, J.M. : *A comparison of error bounds for linear complementarity problems of H-matrices*, *Linear Algebra and its Applications* 433 (2010), 956–964.
- [49] Geršgorin, S.A. : *Über die Abgrenzung der Eigenwerte einer Matrix*, *Izvestiya Akademii Nauk SSSR Seriya Matematicheskaya* 1 (1931), 749–754.
- [50] Golub, G.H., van der Vorst, H.A. : *Eigenvalue computation in the 20th century*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 123 (2000), 35–65.
- [51] Grammont, L., Largillier, A. : *On  $\varepsilon$ -spectra and stability radii*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 147 (2002), 453–469. doi: 10.1016/S0377-0427(02)00480-6.
- [52] Gudkov, V.V. : *On a certain test for nonsingularity of matrices*, *Latvian Mathematical Yearbook* (1965), 385–390.
- [53] Guglielmi, N., Kressner, D., Lubich, C. : *Low-rank differential equations for Hamiltonian matrix nearness problems*, *Numerische Mathematik* 129(2) (2014), 279–319. doi: 10.1007/s00211-014-0637-x.
- [54] Hadamard, J. : *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique*, *Librairie Scientifique A. Hermann*, Paris, 1903.

- [55] Hadamard, J. : *Propagation of Waves and the Equations of Hydrodynamics - translated by David Delphenich*, Birkhauser, Basel, Switzerland, 2011.
- [56] Hawkins, T. : *Cauchy and Spectral Theory*, *Historia Mathematica* 2 (1975), 1–29.
- [57] He, C., Watson, G.A. : *An algorithm for computing the distance to instability*, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 20(1) (1998), 101–116. doi: 10.1137/S0895479897314838.
- [58] Higham, N.J. : *Matrix Nearness Problems and Applications*, in Gover, M.J.C., Barnett, S., Eds, *Applications of Matrix Theory*, Oxford University Press (1989), 1–27.
- [59] Hinrichsen, D., Pritchard, A.J. : *Stability radii of linear systems*, *Systems Control Letters* 7 (1986), 1–10.
- [60] Hinrichsen, D., Pritchard, A.J. : *Mathematical Systems Theory I - Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005.
- [61] Hou, Z., Lisena, B., Pireddu, M., Zamolin, F. : *Lotka-Volterra and Related Systems*, De Gruyter, Berlin, Boston, 2013.
- [62] Hu, J.G. : *Estimates of  $\|B^{-1}A\|_{\infty}$  and their applications*, *Mathematica Numerica Sinica* 4(3) (1982), 272–282.
- [63] Hu, J.G. : *Scaling transformation and convergence of splittings of matrix*, *Mathematica Numerica Sinica* 5(1) (1983), 72–78.
- [64] James, K.R., Riha, W. : *Convergence Criteria for Successive Overrelaxation*, *SIAM Journal on Numerical Analysis* 12(2) (1975), 137–143.
- [65] Johnson, C.R. : *A Gersgorin-type lower bound for the smallest singular value*, *Linear Algebra and its Applications* 112 (1989), 1–7.
- [66] Johnson, C.R., Szulc, T. : *Further lower bounds for the smallest singular value*, *Linear Algebra and its Applications* 272 (1998), 169–179.
- [67] Kaneko, K. : *Linear complementarity problems and characterizations of Minkowski matrices*, *Linear Algebra and its Applications* 20 (1978), 111–129.

- [68] Kostić, V. : *On general principles of eigenvalue localizations via diagonal dominance*, *Advances in Computational Mathematics* 41(1) (2015), 55–75. doi: 10.1007/s10444-014-9349-0.
- [69] Kostić, V., Cvetković, Lj. : *On the inertia of the block H-matrices*, *Numerical Linear Algebra with Applications* 24(5) (2017), e2101. doi: 10.1002/nla.2101.
- [70] Kostić, V., Cvetković, Lj., Cvetković, D.Lj. : *Pseudospectra localizations and their applications*, *Numerical Linear Algebra with Applications* 23(2) (2016), 356–372. doi: 10.1002/nla.2028
- [71] Kostić, V., Cvetković, Lj., Cvetković, D.Lj. : *Improved stability indicators for empirical food webs*, *Ecological Modelling* 320 (2016), 1–8.
- [72] Kostić, V., Miedlar, A., Cvetković, Lj. : *An algorithm for computing minimal Geršgorin sets*, *Numerical Linear Algebra with Applications* 23 (2016), 272–290. doi: 10.1002/nla.2024
- [73] Kostić, V., Cvetković, Lj., Šanca, E. : *From pseudospectra of diagonal blocks to pseudospectrum of a full matrix*, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 386 (2021), 113265.
- [74] Kolotilina, L.Y. : *Bounds for the determinants and inverses of certain H-matrices*, *Journal of Mathematical Sciences* 150(2) (2008), 1961–1972.
- [75] Kolotilina, L.Y. : *Bounds for the infinity norm of the inverse for certain M- and H-matrices*, *Linear Algebra and its Applications* 430 (2009), 692–702.
- [76] Kolotilina, L.Y. : *On bounding inverses to Nekrasov matrices in the infinity norm*, *Journal of Mathematical Sciences* 199(4) (2014), 432–437.
- [77] Landau, H.J. : *On Szegő's eigenvalue distribution theorem and non-Hermitian kernels*, *Journal d'Analyse Mathématique* 28 (1975), 335–357.
- [78] Lemke, C. E. : *Bimatrix equilibrium points and mathematical programming*, *Management Science* 11(7) (1965), 681–689.
- [79] Leontief, W.W. : *The Structure of the American Economy, 1919–1929*, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1941.

- [80] Lévy, L. : *Sur la possibilité de l'équilibre électrique*, in: Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences 93 (1881), Gauthier-Villars, Paris, 706–708.
- [81] Li, C., Cvetković, Lj., Wei, Y., Zhao, J. : *An infinity norm bound for the inverse of Dashnic-Zusmanovich type matrices with applications*, Linear Algebra and its Applications 565 (2019), 99–122.
- [82] Manne, A.S. : *Economic Equilibrium: Model Formulation and Solution*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1985.
- [83] Mathias, R., Pang, J.S. : *Error bounds for the linear complementarity problem with a P-matrix*, Linear Algebra and its Applications 132 (1990), 123–136.
- [84] Matignon, D. : *Stability results of fractional differential equations with applications to control processing*, in IMACS, IEEE-SMC, Lille, France (1996), 963–968.
- [85] Meijerink, J.A., van der Vorst, H.A. : *An Iterative Solution Method for Linear Systems of Which the Coefficient Matrix is a Symmetric M-Matrix*, Mathematics of Computation 31(137) (1977), 148–162.
- [86] Minkowski, H. : *Zur Theorie der Einkerten in den algebraischen Zahlkörper*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse 1900 (1900), 90–93.
- [87] Minkowski, H. : *Diophantische Approximationen*, B.G. Teubner, Leipzig, 1907.
- [88] Moore, J.C., de Ruiter, P.C. : *Energetic Food Webs*, Oxford University Press, Oxford, 2012.
- [89] Morača, N. : *Upper bounds for the infinity norm of the inverse of SDD and S-SDD matrices*, Journal of Computational and Applied Mathematics 206 (2007), 666–678.
- [90] Morača, N. : *Bounds for norms of the matrix inverse and the smallest singular value*, Linear Algebra and its Applications 429 (2008), 2589–2601.

- [91] Neutel, A.M., Heesterbeek, J.A.P., van de Koppel, J., Hoenderboom, G., Vos, A., Kaldewey, C., Berendse, F., de Ruiter, P.C. : *Reconciling complexity with stability in naturally assembling food webs (Letter)*, Nature 449 (2007), 599–602. doi: 10.1038/nature06154.
- [92] Neutel, A.M., Thorne, M.A.S. : *Interaction strengths in balanced carbon cycles and the absence of a relation between ecosystem complexity and stability*, Ecology Letters 17(6) (2014), 651–661. doi: 10.1111/ele.12266.
- [93] Odibat, Z.M. : *Analytic study on linear systems of fractional differential equations*, Computers and Mathematics with Applications 59 (2010), 1171–1183.
- [94] Ostrowski, A.M. : *Über die Determinanten mit Überwiegender Hauptdiagonale*, Commentarii Mathematici Helvetici 10(1) (1937), 69–96. doi: 10.1007/BF01214284.
- [95] Ostrowski, A.M. : *Über das Nichtverschwinden einer Klasse von Determinanten und die Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln von Matrizen*, Compositio Mathematica 9 (1951), 209–226.
- [96] Ostrowski, A.M. : *On Some Metrical Properties of Operator Matrices and Matrices Partitioned Into Blocks*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 2 (1961), 161–209.
- [97] Pearl, M. : *Matrix Theory and Finite Mathematics*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [98] Petráš, I. : *Stability of fractional-order systems with rational orders*, in Fractional-Order Nonlinear Systems, Nonlinear Physical Science, Springer, Berlin, Heidelberg (2011), 55–101.
- [99] Plemmons, R.J. : *M-Matrix Characterizations I – Nonsingular M-Matrices*, Linear Algebra and its Applications 18(2) (1977), 175–188.
- [100] Podlubny, I. : *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.
- [101] Podlubny, I. : *Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation*, Fractional Calculus and Applied Analysis 5(4) (2002), 367–386.

- [102] Riobello, R.N. : *On some new Mathematical Models for Infective Diseases: Analysis, Equilibrium, Positivity and Vaccination Controls*, The Faculty of Science and Technology, University of Basque Country, Leioa, 2015.
- [103] Robert, F. : *Blocs-H-Matrices et Convergence des Methodes Iteratives Classiques par Blocs*, *Linear Algebra and its Applications* 2 (1969), 223–265.
- [104] Šanca, E., Kostić, V., Cvetković, Lj. : *Fractional pseudospectra and their localizations*, *Linear Algebra and its Applications* 559 (2018), 244–269.
- [105] Smith, R.L. : *Bounds on the Spectrum of Nonnegative Matrices and Certain Z-Matrices*, *Linear Algebra and its Applications* 129 (1990), 13–28.
- [106] Szulc, T., Cvetković, Lj., Nedović, M. : *Scaling technique for Partition-Nekrasov matrices*, *Applied Mathematics and Computation* 271 (2015), 201–208.
- [107] Tavazoei, M.S., Haeri, M. : *A note on the stability of fractional order systems*, *Mathematics and Computers in Simulation* 79(5) (2009), 1566–1576.
- [108] Trefethen, L.N. : *Pseudospectra of matrices*, *Numerical Analysis 1991*, D. F. Griffiths and G. A. Watson (Eds), Longman Scientific and Technical, Harlow, UK, 1992, 234–266.
- [109] Trefethen, L.N. : *Computation of pseudospectra*, *Acta Numerica* 8, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1999), 247–295.
- [110] Trefethen, L.N. : *Spectra and pseudospectra: The behavior of non-normal matrices and operators*, *The Graduate Student's Guide to Numerical Analysis*, M. Ainsworth, J. Levesley, and M. Marletta (Eds), Springer-Verlag, Berlin, 1999, 217–250.
- [111] Trefethen, L.N., Embree, M. : *Spectra and Pseudospectra: The Behavior of Nonnormal Matrices and Operators*, Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2005.

- [112] Van Loan, C.F. : *How near is a stable matrix to an unstable matrix?* in: *Linear Algebra and its role in systems theory* (Brunswick, Maine, 1984.), *Contemp. Math.* 47, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1985), 465–478.
- [113] Varah, J.M. : *The computation of bounds for the invariant subspaces of a general matrix operator*, Technical Report CS 66 (41), Computer Science Department, Stanford University, 1967.
- [114] Varah, J.M. : *A Lower Bound for the Smallest Singular Value of a Matrix*, *Linear Algebra and its Applications* 11 (1975), 3–5.
- [115] Varga, R.S. : *On recurring theorems on diagonal dominance*, *Linear Algebra and its Applications* 13(1-2) (1976), 1–9.
- [116] Varga, R.S. : *Geršgorin and His Circles*, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [117] Varga, R.S., Cvetković, Lj., Kostić, V. : *Approximation of the minimal Geršgorin set of a square complex matrix*, *ETNA (Electronic Transactions on Numerical Analysis)* 30 (2008), 398–405.
- [118] Wielandt, H. : *Topics in the Analytic Theory of Matrices: Lecture Notes Prepared by Robert R. Meyer from a Course by Helmut Wielandt*, Department of Mathematics, University of Wisconsin, Madison, 1967.
- [119] Yuan, J., Yu, W. : *Distributed Cross-Layer Optimization of Wireless Sensor Networks: A Game Theoretic Approach*, *Proceedings of the GLOBECOM 2006*, San Francisco, California, USA.







## Katalog MATLAB kodova

Svrha ovog tehničkog dodatka jeste katalogizacija kodova pisanih za programski jezik MATLAB, čijim reprodukovanjem je moguće potvrditi rezultate numeričkih izračunavanja kao i grafičkih vizualizacija.

FUNKCIJA 1 Program za crtanje oblasti lokalizacija spektra matrice  $A$  :  $\Gamma(A)$ ,  $\mathcal{K}(A)$ ,  $\mathcal{D}(A)$ ,  $\mathcal{C}^S(A)$  i  $\mathcal{C}(A)$ .

```
function h=evl(A,S, strng , eps)

[m,n]= size (A);
if m==n
    a=diag (A);
    B=abs (A-diag (a)) ' ;
    r=sum (B) ' ;

    h=c1f ;
    axis equal ;
    hold on ;
    lr=min (real (a)-r)-50*eps ; li=min (imag (a)-r)-50*eps ;
    ur=max (real (a)+r)+50*eps ; ui=max (imag (a)+r)+50*eps ;
    [x,y]=meshgrid (1.1*lr : eps:1.1*ur , 1.1*li : eps:1.1*ui) ;

    lgnd = {} ;

    if ~isempty (find (strng=='g' ))
        lgnd { length (lgnd)+1} = '$\Gamma(A)$ ' ;
        %G(A)
        fg=abs (x+1i*y-a(1)) - r (1) ;
```

```

    for j=2:n
        fg=min(fg,abs(x+1i*y-a(j))-r(j));
    end
    contour(x,y,-fg,[0 0], 'k', 'LineWidth', 1.5);
end

if ~isempty(find(strng=='b'))
    lgnd{length(lgnd)+1}='$\mathcal{K}(A)$';
    %K(A)
    fb=abs(x+1i*y-a(1)).*abs(x+1i*y-a(2))-r(1)*r(2);
    for j=1:n
        for k=j+1:n
            fb=min(fb,abs(x+1i*y-a(j)).*abs(x+1i*y-a(k))
                -r(j)*r(k));
        end
    end
    contour(x,y,-fb,[0 0], 'b', 'LineWidth', 1.5);
end

if ~isempty(find(strng=='d'))
    lgnd{length(lgnd)+1}='$\mathcal{D}(A)$';
    %D(A)
    fdash=NaN*ones(size(x));
    for j=1:n
        f=NaN*ones(size(x));
        for k=1:n
            if k~=j
                f=min(f,abs(x+1i*y-a(j)).*(abs(x+1i*y-a(k))
                    +abs(A(k,j))-r(k))-abs(A(k,j))*r(j));
            end
        end
        fdash=max(fdash,f);
    end
    contour(x,y,-fdash,[0 0], 'g', 'LineWidth', 1.5);
end

if ~isempty(find(strng=='s'))
    lgnd{length(lgnd)+1}='$\mathcal{C}^S(A)$';
    %C^S(A)
    Sbar=1:n;
    Sbar(S)=[];

    if size(S,2)==1
        rS=B(S,:)' ;
    else
        rS=sum(B(S,:))' ;
    end
end

```

---

```

rSbar=r-rS;

fckvS=abs(x+1i*y-a(S(1))) - rS(S(1));
for j=S
    fckvS=min(fckvS , abs(x+1i*y-a(j)) - rS(j));
    for k=Sbar
        fckvS=min(fckvS , ( abs(x+1i*y-a(j)) - rS(j)).*
            (abs(x+1i*y-a(k)) - rSbar(k)) - rSbar(j)*rS(k));
    end
end
contour(x,y,-fckvS,[0 0], 'r', 'LineWidth',1.5);
end

if ~isempty(find(strng=='c'))
    lgnd{length(lgnd)+1}='{\mathcal{C}(A)}$';
    %C(A)
    fckv=NaN*ones(size(x));
    for p=1:n
        P=nchoosek(1:n,p);

        for t=1:size(P,1)
            S=P(t,:);

            Sbar=1:n;
            Sbar(S)=[];

            if size(S,2)==1
                rS=B(S,:)';
            else
                rS=sum(B(S,:))';
            end

            if size(Sbar,2)==1
                rSbar=B(Sbar,:)';
            else
                rSbar=sum(B(Sbar,:))';
            end

            f=abs(x+1i*y-a(S(1))) - rS(S(1));

            for j=S
                f=min(f , abs(x+1i*y-a(j)) - rS(j));
                for k=Sbar
                    f=min(f , ( abs(x+1i*y-a(j)) - rS(j)).*
                        (abs(x+1i*y-a(k)) - rSbar(k)) - rSbar(j)*rS(k));
                end
            end
        end
    end
end

```

```

                end
                fckv=max(fckv , f );
            end
        end
        contour(x,y,-fckv ,[0 0] , 'm' , 'LineWidth' , 1.5);
    end

    if ~isempty( find( strng=='e' ))
        lgnd{ length( lgnd)+1} = '$\Lambda(A)$';
        eval= eig( A); plot( real( eval) , imag( eval) , 'kx' , 'MarkerSize' , 8);
    end

    set( gca , 'XLim' , [lr -50*eps ur+50*eps] , 'YLim' , [li -50*eps ui+50*eps] );
    legend( lgnd , 'Interpreter' , 'latex' , 'fontSize' , 15)
    legend( lgnd , 'Location' , 'NorthEast' );

    y=-60:60;
    x=zeros( 1 , 121);
    o=plot( x,y , 'k-' );
    o.Annotation.LegendInformation.IconDisplayStyle = 'off' ;
else
    h=NaN;
end
end

```

FUNKCIJA 2 Program za crtanje oblasti lokalizacija spektra matrice  $A$  :  
 $\Gamma(A)$ ,  $\mathcal{A}_1(A)$  i  $\mathcal{A}_2(A)$ .

```
function h=evl2(A, strng , eps)
```

```

[m,n]= size( A);
if m==n
    a=diag( A);
    B=abs( A-diag( a) )';
    r=sum( B)';
    c=sum( B')';

    R=[]; C=[];
    for i=1:n
        if r(i)>c(i)
            R=[R i];
        elseif r(i)<c(i)
            C=[C i];
        end
    end
end
end

```

---

```

Rs=[]; Cs=[];
for i=1:n
    if r(i)>c(i) && c(i)~=0
        Rs=[Rs i];
    elseif r(i)<c(i) && r(i)~=0
        Cs=[Cs i];
    end
end

h=clf; axis equal; hold on;
lr=min(real(a)-r-50*eps); li=min(imag(a)-r-50*eps);
ur=max(real(a)+r+50*eps); ui=max(imag(a)+r+50*eps);
[x,y]=meshgrid(1.5*lr:eps:1.5*ur,1.5*li:eps:1.5*ui);
dmin=min(r,c);

lgnd={};

if ~isempty(find(strng=='g'))
    lgnd{length(lgnd)+1}='$\Gamma(A)$';
    %G(A)
    fg=abs(x+1i*y-a(1))-r(1);
    for j=2:n
        fg=min(fg,abs(x+1i*y-a(j))-r(j));
    end
    contour(x,y,-fg,[0 0], 'k', 'LineWidth', 1.5);
end

if ~isempty(find(strng=='a'))
    lgnd{length(lgnd)+1}='$\mathcal{A}_1(A)$';
    %A_1
    f1a=NaN*ones(size(x));
    for j=1:n
        f1a=min(f1a,abs(x+1i*y-a(j))-dmin(j));
    end

    f2a=NaN*ones(size(x));
    for j=R
        for k=C
            f2a=min(f2a,abs(x+1i*y-a(j))*(c(k)-r(k))
                +abs(x+1i*y-a(k))*(r(j)-c(j))-c(k)*r(j)+c(j)*r(k));
        end
    end

    fa=min(f1a,f2a);
    contour(x,y,-fa,[0 0], 'r', 'LineWidth', 1.5);
end

```

```

if ~isempty(find(strng=='b'))
    lgnd{length(lgnd)+1} = '$\mathcal{A}_2(A)$';
    %A_2
    f1b=NaN*ones(size(x));
    for j=1:n
        f1b=min(f1b, abs(x+1i*y-a(j))-dmin(j));
    end

    f2b=NaN*ones(size(x));
    for j=Rs
        for k=Cs
            f2b=min(f2b, abs(x+1i*y-a(j))/c(j).*
                ((abs(x+1i*y-a(k))/c(k)).^
                (log(r(j)/c(j))/log(c(k)/r(k)))) - 1);
        end
    end

    fb=min(f1b, f2b);
    contour(x,y,-fb,[0 0], 'b', 'LineWidth', 1.5);
end

if ~isempty(find(strng=='e'))
    lgnd{length(lgnd)+1} = '$\Lambda(A)$';
    eval=eig(A); plot(real(eval), imag(eval), 'kx', 'MarkerSize', 8);
end

set(gca, 'XLim', [lr -50*eps ur+50*eps], 'YLim', [li -50*eps ui+50*eps]);
legend(lgnd, 'Interpreter', 'latex', 'fontsize', 15)
legend(lgnd, 'Location', 'NorthEast');

y=-60:60;
x=zeros(1,121);
o=plot(x,y, 'k-');
o.Annotation.LegendInformation.IconDisplayStyle = 'off';
else
    h=NaN;
end

```

FUNKCIJA 3 *Izračunavanje Varahove ocene  $\tau^{(\infty)}(A)$  norme beskonačno inverza SDD matrice  $A$  definisane sa (4.1).*

```

function [o, t]=varah(A)

t=norm(inv(A), 'inf');
n=size(A,1);

```

---

```

D=abs (diag (diag (A)));
B=-(abs (A)-D);
M=B+D;
m=min (M*ones (n, 1));

```

```

if m>0
    o=1/m;
else
    o=NaN;
end

```

FUNKCIJA 4 *Kalkulacija triju ocena norme beskonačno inverza  $\tau_{N_1}^{(\infty)}(A)$ ,  $\tau_{N_2}^{(\infty)}(A)$  i  $\tau_{N_3}^{(\infty)}(A)$  za Nekrasov matricu  $A$  datih sa (4.6), (4.7) i (4.8).*

```

function [n1, n2, n3, t]=nek(A)

```

```

t=norm(inv(A), 'inf');
n=size(A, 1);
a=abs(diag(A));
U=triu(A, 1);
hu=abs(U)*ones(n, 1);
zu=ones(n, 1);
h=hu;
z=zu;

for i=2:n
    for j=1:i-1
        h(i)=h(i)+(h(j)/a(j)*abs(A(i, j)));
        z(i)=z(i)+(z(j)/a(j)*abs(A(i, j)));
    end
end

if all(a-h>0)
    n1=(max(z./a))/(1-max(h./a));
    n2=(max(z))/(min(a-h));
    n3=max(z./(a-h));
else
    n1=NaN;
    n2=NaN;
    n3=NaN;
end

```

FUNKCIJA 5 Program za izračunavanje ocene norme beskonačno inverza  $\tau_S^{(\infty)}(A)$  za S-SDD matricu A definisane sa (4.4).

```

function [o,t]=kolotilina(A,S)

t=norm(inv(A),'inf');
n=size(A,1);

if n>=2
    a=abs(diag(A));
    B=(abs(A)-diag(a))';
    Sbar=1:n; Sbar(S)=[];

    if size(S,2)==1
        rS=B(S,:)';
    else
        rS=sum(B(S,:))';
    end

    if size(Sbar,2)==1
        rSbar=B(Sbar,:)';
    else
        rSbar=sum(B(Sbar,:))';
    end

    test=all(a(S)>rS(S)) & all(all((a(S)-rS(S))
                                *((a(Sbar)-rSbar(Sbar))')
                                >rSbar(S)*rS(Sbar)'));

    o=NaN;
    o4=NaN;

    if test
        for i=S
            for j=Sbar
                o1=(a(i)-rS(i)+rS(j))/((a(i)-rS(i))
                    *(a(j)-rSbar(j))-rSbar(i)*rS(j));
                o2=(a(j)-rSbar(j)+rSbar(i))/((a(i)-rS(i))
                    *(a(j)-rSbar(j))-rSbar(i)*rS(j));
                o3=max(o1,o2);
                o4=max(o4,o3);
            end
            o=max(o,o4);
        end
    else
        o=NaN;
    end
end

```



```

end
else
o=NaN;
end

```

FUNKCIJA 6 Program za izračunavanje optimizovane ocene norme beskonačno inverza  $\min_{\emptyset \neq S \subset N} \tau_S^{(\infty)}(A)$  za SDD matricu  $A$ .

```

function [t,o,Sopt]=kolsdd(A)

```

```

t=norm(inv(A),'inf');
n=size(A,1);
D=abs(diag(diag(A)));
B=-(abs(A)-D);
M=B+D;
m=min(M*ones(n,1));

if m>0
o=inf;
for p=1:n-1
P=nchoosek(1:n,p);
for k=1:size(P,1)
S=P(k,:);
oc=kolotilina(A,S);
if oc<=o
o=oc;
Sopt=S;
end
end
end
else
o=NaN;
Sopt=NaN;
end

```

FUNKCIJA 7 Izračunavanje ocene  $\tau^{(1)}(A)$  norme jedan inverza SDD matrice  $A$  date Teoremom 38.

```

function [o,t]=moraca(A)

```

```

t=norm(inv(A),1);
n=size(A,1);

```

```

if n>=2
    a=diag(A);
    D=diag(a);
    B=D-A;
    r=sum(abs(B)')';
    c=sum(abs(B))';
    dd=abs(a)-r;
    cdd=abs(a)-c;
    m=min(dd);

    if m>0
        l=1;
    else
        l=0;
    end

    if l
        o=(n-(sum(dd)-m)/(max(cdd)))/m;
    else
        o=NaN;
    end
else
    o=NaN;
end

```

FUNKCIJA 8 Kalkulacija ocene  $\tau_S^{(1)}(A)$  norme jedan inverza S-SDD matrice A definisane Teoremom 39.

```

function [o, t]=cdsh(A,S)

```

```

t=norm(inv(A),1);
n=size(A,1);
N=1:n;
m=size(S,2);
a=abs(diag(A));
B=(abs(A)-diag(a))';
r=sum(B)';
test1=min(a-r)>0;
Sbar=N; Sbar(S)=[];

```

```

if size(S,2)==1
    rS=B(S,:)';
    cS=B(:,S);
else

```

---

```

    rS=sum(B(S,:))';
    cS=sum(B(:,S)')';
end

if size(Sbar,2)==1
    rSbar=B(Sbar,:)';
    cSbar=B(:,Sbar);
else
    rSbar=sum(B(Sbar,:))';
    cSbar=sum(B(:,Sbar)')';
end

test2=all(a(S)>rS(S)) & all(all((a(S)-rS(S))
    *((a(Sbar)-rSbar(Sbar))')
    >rSbar(S)*rS(Sbar)'));

l=test1 | test2;

if l
    B1=max(rSbar(S)./(a(S)-rS(S)));
    if m==n
        B2=2-B1;
    elseif all(rS(Sbar)==0)
        B2=2*B1;
    else
        x=rS(Sbar);
        Sbart=Sbar(find(x));
        B2=min((a(Sbart)-rSbar(Sbart))./rS(Sbart));
    end
    g=(B1+B2)/2;
    v1=g*(a(S)-cS(S))-cSbar(S);
    oc1=max(v1);
    oc2=max(a(Sbar)-g*cS(Sbar)-cSbar(Sbar));
    ksi=(min(1,g))/(max(oc1,oc2));
    zagrada=g*sum(a(S))+sum(a(Sbar))-g*sum(rS)-sum(rSbar);
    brojilac=m*g+n-m-ksi*zagrada;
    v2=g*(a(S)-rS(S))-rSbar(S);
    oc2=min(v2);
    v3=a(Sbar)-g*rS(Sbar)-rSbar(Sbar);
    oc3=min(v3);
    imenilac=min(oc2,oc3);
    o=ksi+brojilac./imenilac;
else
    o=NaN;
end

```

FUNKCIJA 9 Program za izračunavanje optimizovane ocene norme jedan inverza  $\min_{\emptyset \neq S \subseteq N} \tau_S^{(1)}(A)$  za SDD matricu  $A$ .

```
function [t,o,Sopt]=cdshsdd(A)
```

```
t=norm(inv(A),1);
n=size(A,1);
D=abs(diag(diag(A)));
B=-(abs(A)-D);
M=B+D;
m=min(M*ones(n,1));

if m>0
    o=inf;
    for p=1:n
        P=nchoosek(1:n,p);
        for k=1:size(P,1)
            S=P(k,:);
            oc=cdsh(A,S);
            if oc<=o
                o=oc;
                Sopt=S;
            end
        end
    end
else
    o=NaN;
    Sopt=NaN;
end
```

FUNKCIJA 10 Program za crtanje oblasti lokalizacija  $\varepsilon$ -pseudospektra matrice  $A$  u matricnoj normi beskonačno  $\Gamma_\varepsilon(A)$ ,  $\mathcal{K}_\varepsilon(A)$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A)$ .

```
function h=psl(A,S,eps,ngrid,area)
```

```
[m,n]=size(A);
if m==n
    a=diag(A);
    B=abs(A-diag(a))';
    r=sum(B)';
    I=eye(n);

    Sbar=1:n; Sbar(S)=[];
```

---

```

if size(S,2)==1
    rS=B(S,:)';
else
    rS=sum(B(S,:))';
end

if size(Sbar,2)==1
    rSbar=B(Sbar,:)';
else
    rSbar=sum(B(Sbar,:))';
end

if nargin<5
    lr=min(real(a)-r-10*eps); li=min(imag(a)-r-10*eps);
    ur=max(real(a)+r+10*eps); ui=max(imag(a)+r+10*eps);
    area = [1.2*lr 1.2*ur 1.2*li 1.2*ui];
else
    lr=area(1);
    ur=area(2);
    li=area(3);
    ui=area(4);
end

dx=(ur-lr)/ngrid;dy=(ui-li)/ngrid;
[x,y]=meshgrid(1.1*lr:dx:1.1*ur,1.1*li:dy:1.1*ui);
l=size(x,1);
o=size(x,2);
ps=zeros(1,o);
lgnd={};

z=x+1i*y;
ckv=z*NaN;
g=z*NaN;
b=z*NaN;

%pseudospectra u inf normi
lgnd{length(lgnd)+1}='$\Lambda_{\varepsilon}^{(\infty)}(A)$';
for k=1:l
    for j=1:o
        zps=x(k,j)+1i*y(k,j);
        C=zps*I-A;
        ps(k,j)=1/norm(inv(C),'inf')-eps;
    end
end

%eps-gersgorin

```

```

lgnd{length(lgnd)+1}='$\Gamma_{\varepsilon}(A)$';
for j=1:n
    g=min(g,abs(z-a(j))-r(j)-eps);
end

%eps-brauer
lgnd{length(lgnd)+1}='$\mathcal{K}_{\varepsilon}(A)$';
for j=1:n
    for k=[1:(j-1) (j+1):n]
        b=min(b,(abs(z-a(j))-eps).*(abs(z-a(k))
            -r(j)*(r(k)+eps)));
    end
end

%eps-CKV_S
lgnd{length(lgnd)+1}='$\mathcal{C}_{\varepsilon}^S(A)$';
for j=S
    ckv=min(ckv,(abs(z-a(j))-rS(j)-eps));
    for k=Sbar
        ckv=min(ckv,(abs(z-a(k))-rSbar(k)-eps));
        ckv=min(ckv,(abs(z-a(j))-rS(j)-eps).*
            (abs(z-a(k))-rSbar(k))-rSbar(j)*(rS(k)+eps));
        ckv=min(ckv,(abs(z-a(j))-rS(j)).*
            (abs(z-a(k))-rSbar(k)-eps)-(rSbar(j)+eps)*rS(k));
    end
end

% drawing the sets
h=clf; axis equal; hold on;box on;

%contourf(psx,psy,-ps,-[eps(1) eps]);
contourf(x,y,-ps,[0 0], 'k', 'LineWidth',1);
contour(x,y,g,[0 0], 'b', 'LineWidth',2);
contour(x,y,b,[0 0], 'g', 'LineWidth',2);
contour(x,y,ckv,[0 0], 'r', 'LineWidth',2);
colormap([0.7 0.7 0.7; 0.8 0.8 0.8; 0.8 0.8 0.8]);
lgnd{length(lgnd)+1}='$\Lambda(A)$';
eval= eig(A); plot(real(eval),imag(eval), 'kx', 'MarkerSize',8);

set(gca, 'XLim', area(1:2), 'YLim', area(3:4));
legend(lgnd, 'Interpreter', 'latex')
s=legend(lgnd, 'Location', 'NorthEast');
set(s, 'FontSize',14);
else
h=NaN;
end

```

FUNKCIJA 11 Program za crtanje oblasti lokalizacija  $\varepsilon$ -pseudospektra matrice  $A$  u Euklidskoj matricnoj normi  $\Gamma_\varepsilon^{(2)}(A)$ ,  $\widehat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A)$  i  $\Gamma_\varepsilon^{(e)}(A)$ .

```
function h=eukpsl(A, eps , ngrid , area)
```

```
[m,n]=size(A);
```

```
if m==n
```

```
    a=diag(A);
```

```
    B=abs(A-diag(a))';
```

```
    r=sum(B)';
```

```
    c=sum(B')';
```

```
    rc=(r+c)/2;
```

```
    if nargin<5
```

```
        lr=min(real(a)-max(r,c)-10*eps);
```

```
        li=min(imag(a)-max(r,c)-10*eps);
```

```
        ur=max(real(a)+max(r,c)+10*eps);
```

```
        ui=max(imag(a)+max(r,c)+10*eps);
```

```
        area = [1.2*lr 1.2*ur 1.2*li 1.2*ui];
```

```
    else
```

```
        lr=area(1);
```

```
        ur=area(2);
```

```
        li=area(3);
```

```
        ui=area(4);
```

```
    end
```

```
    dx=(ur-lr)/ngrid;dy=(ui-li)/ngrid;
```

```
    [x,y]=meshgrid(lr:dx:ur,li:dy:ui);
```

```
    lgnd={};
```

```
    z=x+1i*y;
```

```
    gk=z*NaN;
```

```
    g=z*NaN;
```

```
    ge=z*NaN;
```

```
%pseudospectar eigtool – Euklidska norma
```

```
lgnd{length(lgnd)+1}='$\Lambda_{\varepsilon}^{(2)}(A)$';
```

```
ps_opts.ax=area;
```

```
ps_opts.npts=ngrid;
```

```
ps_opts.no_graphics=1;
```

```
[psx,psy,ps] = eigtool(full(A),ps_opts);
```

```
%gk – gamma kappa 2
```

```
lgnd{length(lgnd)+1}='$\widehat{\Gamma}_{\varepsilon}^{(2)}(A)$';
```

```
for j=1:n
```

```

gk=min(gk, abs(z-a(j))-r(j)-eps);
gk=min(gk, abs(z-a(j))-c(j)-eps);
end

%g - gamma 2
lgnd{length(lgnd)+1}='$\Gamma_{\varepsilon}^{(2)}(A)$';
for j=1:n
    g=min(g, (abs(z-a(j))-r(j)));
    for k=1:n
        g=min(g, (abs(z-a(j))-r(j)).*(abs(z-a(k))-c(k))-eps^2);
    end
end

%ge - gamma e 2, najbolji...
lgnd{length(lgnd)+1}='$\Gamma_{\varepsilon}^{(e)}(A)$';
for j=1:n
    ge=min(ge, abs(z-a(j))-rc(j)-eps);
end

% drawing the sets
h=clf; axis equal; hold on; box on;

contourf(psx,psy,-ps,-[eps(1) eps]);
colormap([0.7 0.7 0.7; 0.8 0.8 0.8; 0.8 0.8 0.8]);
contour(x,y,gk,[0 0], 'b', 'LineWidth',2);
contour(x,y,g,[0 0], 'g', 'LineWidth',2);
contour(x,y,ge,[0 0], 'r', 'LineWidth',2);
lgnd{length(lgnd)+1}='$\Lambda(A)$';
eval=eig(A); plot(real(eval), imag(eval), 'kx', 'MarkerSize',8);

set(gca, 'XLim', area(1:2), 'YLim', area(3:4));
legend(lgnd, 'Interpreter', 'latex')
s=legend(lgnd, 'Location', 'NorthEast');
set(s, 'FontSize',14);
else
    h=NaN;
end

```

FUNKCIJA 12 Program za crtanje oblasti lokalizacija  $\varepsilon$ -pseudospektra matrice  $A$  u proizvoljnoj matričnoj normi:  $\mathcal{M}_{\pi,\varepsilon}^{(p)}(A)$  i  $\mathcal{S}_{\pi,\varepsilon}^{(p)}(A)$ , kao na Slici 5.9. U slučaju izbora Euklidske norme i dvoelementne particije  $\pi$  indeksnog skupa, realizuje posebno iscrtavanje oblasti  $\mathcal{S}_{f(\varepsilon)}^{(2)}(A)$ ,  $\mathcal{S}_{\tau(\varepsilon)}^{(2)}(A)$  i skupa  $\mathcal{M}_{\pi,\varepsilon}^{(2)}(A)$ , kao što je to učinjeno Slikom 5.10.



---

```
function pseudo_block_separation(A,part ,eps ,ngrid ,strng ,area)
```

```
[~,n]=size(A);
```

```
a=diag(A);
```

```
B=abs(A-diag(a))';
```

```
r=sum(B)';
```

```
I=eye(n,n);
```

```
nrm = 2;
```

```
switch nargin
```

```
    case 1
```

```
        part = 1:n;
```

```
        eps = 1e-3;
```

```
        ngrid = 100;
```

```
        strng = 'psme';
```

```
        lr=min(real(a)-r-10*eps); li=min(imag(a)-r-10*eps);
```

```
        ur=max(real(a)+r+10*eps); ui=max(imag(a)+r+10*eps);
```

```
        area = [lr ur li ui];
```

```
    case 2
```

```
        eps = 1e-3;
```

```
        ngrid = 100;
```

```
        strng = 'psme';
```

```
        lr=min(real(a)-r-10*eps); li=min(imag(a)-r-10*eps);
```

```
        ur=max(real(a)+r+10*eps); ui=max(imag(a)+r+10*eps);
```

```
        area = [lr ur li ui];
```

```
    case 3
```

```
        ngrid = 100;
```

```
        strng = 'psme';
```

```
        lr=min(real(a)-r-10*eps); li=min(imag(a)-r-10*eps);
```

```
        ur=max(real(a)+r+10*eps); ui=max(imag(a)+r+10*eps);
```

```
        area = [lr ur li ui];
```

```
    case 4
```

```
        strng = 'psme';
```

```
        lr=min(real(a)-r-10*eps); li=min(imag(a)-r-10*eps);
```

```
        ur=max(real(a)+r+10*eps); ui=max(imag(a)+r+10*eps);
```

```
        area = [lr ur li ui];
```

```
    case 5
```

```
        strng = 'psme';
```

```
        lr=min(real(a)-r-10*eps); li=min(imag(a)-r-10*eps);
```

```
        ur=max(real(a)+r+10*eps); ui=max(imag(a)+r+10*eps);
```

```
        area = [lr ur li ui];
```

```
    case 6
```

```
        lr=area(1);
```

```
        ur=area(2);
```

```
        li=area(3);
```

```

        ui=area(4);
end

if part(end)~=n
    part = [part n];
end

m=length(part);
part = [0 part];

dx=(ur-lr)/ngrid;
dy=(ui-li)/ngrid;
[x,y]=meshgrid(lr:dx:ur,li:dy:ui);

z=x+1i*y;
g=z*NaN;
ps=z*NaN;

clf; hold on;box on;
area = [lr ur li ui];

lgnd={};

if ~isempty(find(strng=='p'))
    %pseudospectrum
    lgnd{length(lgnd)+1}='$\Lambda_{\varepsilon}^{\{2\}}(A)$';
    for k=1:size(x,1)
        for j=1:size(x,2)
            omega=x(k,j)+1i*y(k,j);
            C=A-omega*I;
            if nrm == 2
                ps(k,j)=min(svd(C));
            else
                rcnd=rcond(C);
                if rcnd < 1e-16
                    ps(k,j)=1e-16;
                else
                    ps(k,j)=1/norm(inv(C),nrm);
                end
            end
        end
    end
end
contourf(x,y,-ps,-[eps eps],'LineWidth',0.2);
end

%block pseudospectra
for j=2:(m+1)

```

---

```

for k=2:(m+1)
    if j~=k
        if part(j-1)+1==part(j) && nrm == 'inf'
            F(j-1,k-1)=sum(abs(full(A((part(j-1)+1):part(j),
                (part(k-1)+1):part(k)))));
        else
            F(j-1,k-1)=norm(full(A((part(j-1)+1):part(j),
                (part(k-1)+1):part(k))),nrm);
        end
    else
        F(j-1,k-1)=0;
    end
end
end

for p=2:(m+1)
    if p>2 && (part(p-2)-part(p-1))==(part(p)-part(p-1))
        if norm(A((part(p-2)+1):part(p-1),(part(p-2)+1):part(p-1))
            -A((part(p-1)+1):part(p),(part(p-1)+1):part(p)), 'inf')<1e-6
            ps_blocks{p-1} = ps_blocks{p-2};
        else
            ps_blocks{p-1} = z*NaN;
            for k=1:size(x,1)
                for j=1:size(x,2)
                    omega=x(k,j)+1i*y(k,j);
                    C=A((part(p-1)+1):part(p),(part(p-1)+1):part(p))-
                        omega*eye(part(p)-part(p-1),part(p)-part(p-1));
                    if nrm==2
                        ps_blocks{p-1}(k,j)=min(svd(full(C)));
                    else
                        rcond=rcond(C);
                        if rcond < 1e-16
                            ps_blocks{p-1}(k,j)=1e-16;
                        else
                            ps_blocks{p-1}(k,j)=1/norm(inv(C),nrm);
                        end
                    end
                end
            end
            end
            g = min(g, ps_blocks{p-1});
        end
    else
        ps_blocks{p-1} = z*NaN;
        for k=1:size(x,1)
            for j=1:size(x,2)
                omega=x(k,j)+1i*y(k,j);
                C=A((part(p-1)+1):part(p),(part(p-1)+1):part(p))-

```

```

        omega*eye(part(p)-part(p-1),part(p)-part(p-1));
    if nrm==2
        ps_blocks{p-1}(k,j)=min(svd(full(C)));
    else
        rcnd=rcond(C);
        if rcnd < 1e-16
            ps_blocks{p-1}(k,j)=1e-16;
        else
            ps_blocks{p-1}(k,j)=1/norm(inv(C),nrm);
        end
    end
end
end
end
g = min(g,ps_blocks{p-1});
end
end

feps=NaN;
if ~isempty(find(strng=='s'))
    %block_approximation
    if m==2
        feps = sqrt((eps+F(1,2))*(eps+F(2,1)))
        lgnd{length(lgnd)+1}=
            '$\mathcal{S}_{f(\varepsilon)}^{\{2\}}(A)$';
        contour(x,y,-g,-[feps feps], 'r', 'LineWidth',0.2);
        feps_grammont = (eps+F(2,1))*(sqrt(1+F(1,2)/(eps+F(2,1))))
        lgnd{length(lgnd)+1}=
            '$\mathcal{S}_{\tau(\varepsilon)}^{\{2\}}(A)$';
        contour(x,y,-g,-[feps_grammont feps_grammont], 'b',
            'LineWidth',0.2);
    else
        rho = max(real(eig(F)));
        s = chebfun(@(x) min(svd(x*eye(m)-F)-eps,
            [rho,norm(F,nrm)+eps]));
        feps = min(roots(s));
        if ~isnan(feps)
            lgnd{length(lgnd)+1}=
                '$\mathcal{S}_{\pi,\varepsilon}^{\{2\}}(A)$';
            contour(x,y,-g,-[feps feps], 'r', 'LineWidth',0.2);
        end
    end
end
end

if ~isempty(find(strng=='m'))
    %pseudoMGS
    lgnd{length(lgnd)+1}= '$\mathcal{M}_{\pi,\varepsilon}^{\{2\}}(A)$';
    for k=1:size(x,1)

```

---

```

    for j=1:size(x,2)
        di = [];
        for p = 1:m
            di=[di ps_blocks{p}(k,j)];
        end
        M = diag(di) - F;
        if nrm==2
            psi = min(svd(M))-eps;
        else
            if rcond(M)<1e-20
                mgs1(k,j)=0;
            else
                psi = 1/norm(inv(M),nrm)-eps;
            end
        end
        mgs1(k,j)=min(min(real(eigs(M,min(5,m),'sr'))),psi);
    end
end
contour(x,y,-mgs1,-[0 0],'m','LineWidth',2);
end

colormap([0.6 0.6 0.6;0.7 0.7 0.7; 0.8 0.8 0.8; 0.9 0.9 0.9]);

if ~isempty(find(strng=='e'))
    eval=eig(full(A)); plot(real(eval),imag(eval),'k.',
        'MarkerSize',15);
    lgnd{length(lgnd)+1}='$\Lambda(A)$';
end

box on;grid on; axis equal;
set(gca,'XLim',area(1:2),'YLim',area(3:4));
legend(lgnd,'Location','NorthEast');

```

FUNKCIJA 13 Program za crtanje oblasti lokalizacija  $\alpha$ -frakcionog  $\varepsilon$ -pseudo-spektra matrice  $A$  u matričnoj normi 'nor':  $\Gamma_{\alpha,\varepsilon}(A)$ ,  $\mathcal{K}_{\alpha,\varepsilon}(A)$  i  $\mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon}^S(A)$ .

```

function h=FDE_psl(nor,A,alpha,S,eps,ngrid,strng,area)

[m,n]=size(A);
a=diag(A);
if nor==2
    B=(abs(A-diag(a))'+abs(A-diag(a)))/2;
else if nor==1
    B=abs(A-diag(a));
else

```

```

        B=abs(A-diag(a))';
    end
end

r=sum(B)';
I=eye(n,n);

switch nargin
    case 7
        area = [-1 1 -1 1]*max((abs(a)+r).^(alpha(:,2))./
            (alpha(:,1)*m))+10*eps);
    case 6
        strng='pgbc';
        area = [-1 1 -1 1]*max((abs(a)+r).^(alpha(:,2))./
            (alpha(:,1)*m))+10*eps);
    case 5
        ngrid=100;
        strng='pgbc';
        area = [-1 1 -1 1]*max((abs(a)+r).^(alpha(:,2))./
            (alpha(:,1)*m))+10*eps);
    case 4
        eps=0;
        ngrid=100;
        strng='pgbc';
        area = [-1 1 -1 1]*max((abs(a)+r).^(alpha(:,2))./
            (alpha(:,1)*m))+10*eps);
    case 3
        S=[1];
        eps=0;
        ngrid=100;
        strng='pgbc';
        area = [-1 1 -1 1]*max((abs(a)+r).^(alpha(:,2))./
            (alpha(:,1)*m))+10*eps);
    case 2
        alpha = ones(n,2);
        S=[1];
        eps=0;
        ngrid=100;
        strng='pgbc';
        area = [-1 1 -1 1]*max((abs(a)+r).^(alpha(:,2))./
            (alpha(:,1)*m))+10*eps);
end
lr=area(1);ur=area(2);
li=area(3);ui=area(4);

m=1;
for j=1:n

```

---

```

    m=lcm(m, alpha(j,2));
end

Sbar=1:n; Sbar(S)=[];

if size(S,2)==1
    rS=B(S,:)';
else
    rS=sum(B(S,:))';
end

if size(Sbar,2)==1
    rSbar=B(Sbar,:)';
else
    rSbar=sum(B(Sbar,:))';
end

dx=(ur-lr)/ngrid; dy=(ui-li)/ngrid;
[x,y]=meshgrid(lr:dx:ur, li:dy:ui);

z=x+1i*y;
ckv=z*NaN; g=z*NaN; b=z*NaN; ps=z*NaN;

clf; hold on; box on;
area = [lr ur li ui];

lgnd={};
%pseudospectar
if ~isempty(find(strng=='p'))
lgnd{length(lgnd)+1}='$\Lambda_{\alpha, \varepsilon}(A)$';
for k=1:size(x,1)
for j=1:size(x,2);
    omega=x(k,j)+1i*y(k,j);
    C=A-diag((omega*ones(n,1)).^(m*alpha(:,1)./alpha(:,2)));
    rcnd=rcond(C);
    if rcnd < 1e-16
        ps(k,j)=1e-16;
    else
        ps(k,j)=1/norm(inv(C),nor);
    end
end
end
end
contourf(x,y,-ps,-[eps(1) eps]);
end

%eps-gersgorin
if ~isempty(find(strng=='g'))

```

```

lgnd{length(lgnd)+1}='$\Gamma_{\alpha, \varepsilon}(A)$';
for j=1:n
    g=min(g,abs(z.^(m*alpha(j,1)./alpha(j,2))-a(j))-r(j)-eps);
end
contour(x,y,g,[0 0], 'b', 'LineWidth', 1.2);
end

%eps-brauer
if ~isempty(find(strng=='b'))
lgnd{length(lgnd)+1}='$\mathcal{K}_{\alpha, \varepsilon}(A)$';
for j=1:n
    for k=[1:(j-1) (j+1):n]
        b=min(b, (abs(z.^(m*alpha(j,1)./alpha(j,2))-a(j))-eps). *
            (abs(z.^(m*alpha(k,1)./alpha(k,2))-a(k)))-r(j)*(r(k)+eps));
    end
end
contour(x,y,b,[0 0], 'g', 'LineWidth', 1.2);
end

%eps-CKV_S
if ~isempty(find(strng=='c'))
lgnd{length(lgnd)+1}='$\mathcal{C}^S_{\alpha, \varepsilon}(A)$';
for j=S
    ckv=min(ckv, (abs(z.^(m*alpha(j,1)./alpha(j,2))-a(j))-rS(j)-eps));
    for k=Sbar
        ckv=min(ckv, (abs(z.^(m*alpha(k,1)./alpha(k,2))
            -a(k))-rSbar(k)-eps));
        ckv=min(ckv, (abs(z.^(m*alpha(j,1)./alpha(j,2))
            -a(j))-rS(j)-eps). * (abs(z.^(m*alpha(k,1)./alpha(k,2))
            -a(k))-rSbar(k))-rSbar(j)*(rS(k)+eps));
        ckv=min(ckv, (abs(z.^(m*alpha(j,1)./alpha(j,2))-a(j))-rS(j)). *
            (abs(z.^(m*alpha(k,1)./alpha(k,2))-a(k))-rSbar(k)-eps)
            -(rSbar(j)+eps)*rS(k));
    end
end
contour(x,y,ckv,[0 0], 'r', 'LineWidth', 1.2);
end

%pseudoMGS
if ~isempty(find(strng=='m'))
lgnd{length(lgnd)+1}='PseudoMGS';
for k=1:size(x,1)
for j=1:size(x,2);
    omega=x(k,j)+1i*y(k,j);
    C=abs(diag(a)-diag((omega*ones(n,1)).^(m*alpha(:,1))./
        alpha(:,2))))-B;
    kk = eig(C);
end
end

```



---

```

    mgs1(k,j)=min(real(kk));
end
end
contour(x,y,-mgs1,-[eps(1) eps], 'm', 'LineWidth', 2);
end

colormap([0.7 0.7 0.7; 0.8 0.8 0.8; 0.9 0.9 0.9]);

line([0, sqrt(max(abs(area(3:4)))^2+
    max(abs(area(1:2)))^2)*cos(pi/(2*m))], [0, sqrt(max(abs(area(3:4)))^2+
    max(abs(area(1:2)))^2)*sin(pi/(2*m))], 'Color', 'k', 'LineStyle', '—');
line([0, sqrt(max(abs(area(3:4)))^2+
    max(abs(area(1:2)))^2)*cos(pi/(2*m))], [0, -sqrt(max(abs(area(3:4)))^2+
    max(abs(area(1:2)))^2)*sin(pi/(2*m))], 'Color', 'k', 'LineStyle', '—');

set(gca, 'XLim', area(1:2), 'YLim', area(3:4));

legend(lgnd, 'Interpreter', 'latex', 'fontSize', 15)
legend(lgnd, 'Location', 'NorthEast');

```



# Slike

1.1	Odnos klase $M$ -matrica sa nekim drugim klasama. . . . .	16
1.2	Međusobni odnos raznih potklasa $H$ -matrica. . . . .	29
2.1	Primeri kompleksnih mreža. . . . .	38
2.2	Razni kriterijumi klasifikacija dinamičkih sistema. . . . .	39
2.3	Vrste ekvilibrijuma: neutralan (levo), stabilan (u sredini) i nestabilan (desno). . . . .	41
2.4	Tipovi stabilnosti: klasična (gore), asimptotska (u sredini) i eksponencijalna (dole). . . . .	43
2.5	Region asimptotske (Ljapunov) stabilnosti kontinualnih dinamičkih sistema je skup $\mathbb{C}^-$ . . . . .	44
2.6	Amplifikacioni omotač u Euklidskoj normi ( $\phi_A^{(2)}(t)$ ) za matricu $A_{14}$ (levo) i matricu $A_{15}$ (desno). . . . .	46
2.7	Vreme povratka u ravnotežno stanje ( $t_A^{RT}$ ). . . . .	47
2.8	Reaktivan ekvilibrijum (levo) i nereaktivan ekvilibrijum (desno). . . .	48
2.9	Šema interakcija funkcionalnih grupa uključujući i neživu organsku materiju (detritus). . . . .	50
2.10	Sistem nelinearnih običnih diferencijalnih jednačina koji opisuje dinamiku međudejstava funkcionalnih grupa u trofičkoj mreži ekosistema tla. . . . .	50
2.11	Oblasti stabilnosti u frakcionom smislu (levo) i u običnom smislu (desno). . . . .	54

3.1	Odnos matičnog spektra i numeričkog raspona u slučaju normalne matrice (levo) i ne-normalne matrice (desno). Skup $\Lambda(A)$ čine crvene tačke, isprekidana linija je njegova konveksna obvojnica $c_o(\Lambda(A))$ , dok je skup $W(A)$ osenčen. . . . .	62
3.2	Odnos odabranih potklasa regularnih $H$ -matrica sa jedne, i njima indukovanih lokalizacija spektra proizvoljne kvadratne matrice $A$ , sa druge strane. . . . .	70
3.3	Odnos klasa $\alpha_1$ i $\alpha_2$ matrica sa jedne, i njima indukovane lokalizacije spektra proizvoljne kvadratne matrice $A$ , $\mathcal{A}_1(A)$ i $\mathcal{A}_2(A)$ , sa druge strane. . . . .	73
3.4	Odnos lokalizacionih skupova za $\Lambda(A_{17})$ . Položaj Geršgorinovog skupa implicira zaključaj o asimptotskoj stabilnosti. . . . .	76
3.5	Lokalizacioni skupovi $\Gamma(A_{16})$ , $\mathcal{K}(A_{16})$ , $\mathcal{D}(A_{16})$ i $\mathcal{C}(A_{16})$ za $\Lambda(A_{16})$ (a) i uvećani prikaz (b). Položaj skupa $\mathcal{C}(A_{16})$ daje odgovor na pitanje o asimptotskoj stabilnosti. . . . .	77
3.6	Lokalizacioni skupovi $\Gamma(A_{16})$ , $\mathcal{A}_1(A_{16})$ i $\mathcal{A}_2(A_{16})$ za $\Lambda(A_{16})$ . Nijedna od ovih lokalizacija ne daje odgovor na pitanje o asimptotskoj stabilnosti. . . . .	78
3.7	Lokalizacioni skupovi $\Gamma(A_{18})$ , $\mathcal{K}(A_{18})$ , $\mathcal{D}(A_{18})$ i $\mathcal{C}(A_{18})$ za $\Lambda(A_{18})$ (a) i uvećani prikaz (b). Nijedna od lokalizacija ne daje odgovor na pitanje o asimptotskoj stabilnosti. . . . .	79
3.8	Lokalizacioni skupovi $\Gamma(A_{18})$ , $\mathcal{A}_1(A_{18})$ i $\mathcal{A}_2(A_{18})$ za $\Lambda(A_{18})$ (a) i uvećani prikaz (b). Položaj skupa $\mathcal{A}_2(A_{18})$ daje odgovor na pitanje o asimptotskoj stabilnosti. . . . .	80
3.9	Lokalizacioni skupovi $\Gamma(A_{19})$ , $\mathcal{K}(A_{19})$ , $\mathcal{D}(A_{19})$ i $\mathcal{C}(A_{19})$ za $\Lambda(A_{19})$ (a) i uvećani prikaz (b). Položaj skupa $\mathcal{C}(A_{19})$ daje odgovor na pitanje o asimptotskoj stabilnosti. . . . .	81
3.10	Lokalizacioni skupovi $\Gamma(A_{19})$ , $\mathcal{A}_1(A_{19})$ i $\mathcal{A}_2(A_{19})$ za $\Lambda(A_{19})$ (a) i uvećani prikaz (b). Položaj skupa $\mathcal{A}_2(A_{19})$ daje odgovor na pitanje o asimptotskoj stabilnosti. . . . .	82
3.11	Početni impuls sistema (nagib crvene isprekidane linije) kao i asimptotsko ponašanje (nagib zelene isprekidane linije). . . . .	83
5.1	Euklidski pseudospektar normalne matrice (levo) i ne-normalne matrice (desno). Skup $\Lambda(A)$ čine crvene tačke, isprekidana linija odgovara $\varepsilon$ -okolini spektra, (skupu $\Lambda(A) + \mathcal{O}_\varepsilon$ ), dok je skup $\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A)$ osenčen. . . . .	100
5.2	Lokalizacioni skupovi $\Gamma_\varepsilon(A_{16})$ , $\mathcal{K}_\varepsilon(A_{16})$ i $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A_{16})$ za $\Lambda_\varepsilon^{(\infty)}(A_{16})$ i $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . . . . .	107

- 5.3 Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_\varepsilon(A_{16}), \mathcal{K}_\varepsilon(A_{16})$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A_{16})$  za  $\Lambda_\varepsilon^{(\infty)}(A_{16})$  i  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . . . . . 108
- 5.4 Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_\varepsilon(A_{20}), \mathcal{K}_\varepsilon(A_{20})$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A_{20})$  za  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A_{20}$  i  $S = \{1, 2\}$ . . . . . 109
- 5.5 Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_\varepsilon(A_{20}), \mathcal{K}_\varepsilon(A_{20})$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A_{20})$  za  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A_{20}$  i  $S = \{1, 4\}$ . . . . . 110
- 5.6 Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_\varepsilon(A_{20}), \mathcal{K}_\varepsilon(A_{20})$  i  $\mathcal{C}_\varepsilon^S(A_{20})$  za  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A_{20}$  i  $S = \{1\}$ . . . . . 111
- 5.7 Odnos lokalizacionih skupova  $\Gamma_\varepsilon^{(e)}(A_{16}), \Gamma_\varepsilon^{(2)}(A_{16})$  i  $\widehat{\Gamma}_\varepsilon^{(2)}(A_{16})$  za Euclidski  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A_{16}$ . . . . . 114
- 5.8 Odnos lokalizacionih skupova  $\mathcal{M}_{\tau, \varepsilon}^{(2)}(A_{21})$  i  $\mathcal{S}_{\tau, \varepsilon}^{(2)}(A_{21})$  za  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A_{21}$  i  $\varepsilon = 0.1$ . . . . . 120
- 5.9 Odnos lokalizacionih skupova  $\mathcal{S}_{\tau(\varepsilon)}^{(2)}(A_{22})$  (plava) i  $\mathcal{S}_{f(\varepsilon)}^{(2)}(A_{22})$  (crvena) i  $\mathcal{M}_{\tau, \varepsilon}^{(2)}(A_{22})$  (ljubičasta oblast) za  $\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A_{22})$  (osenčena oblast), pri izboru  $\varepsilon = 0.1$  i particiji  $\pi = \{0, 100, 200\}$ . Skupovi  $\mathcal{S}_{f(\varepsilon)}^{(2)}(A_{22})$  i  $\mathcal{M}_{\tau, \varepsilon}^{(2)}(A_{22})$  se poklapaju. . . . . 122
- 5.10 Odnos lokalizacionih skupova  $\mathcal{S}_{\tau(\varepsilon)}^{(2)}(A_{16}), \mathcal{S}_{f(\varepsilon)}^{(2)}(A_{16})$  i  $\mathcal{M}_{\tau, \varepsilon}^{(2)}(A_{16})$  za  $\Lambda_\varepsilon^{(2)}(A_{16})$  (osenčena oblast), pri izboru  $\varepsilon = 0.1$  i particiji  $\pi = \{0, 5, 8\}$  (a) i uvećani prikaz (b). . . . . 123
- 5.11 Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_{\alpha, \varepsilon}(A_{23}), \mathcal{K}_{\alpha, \varepsilon}(A_{23})$  i  $\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon}^{\{1, 2\}}(A_{23})$  za  $\Lambda_{\alpha, \varepsilon}(A_{23})$  pri izboru  $\alpha = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$  i  $\varepsilon / \|A_{23}\|_\infty = 0.033$ . . . . . 130
- 5.12 Lokalizacioni skupovi  $\mathcal{K}_{\alpha, \varepsilon}(A_{24})$  i  $\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon}^{\{5\}}(A_{24})$  za  $\Lambda_{\alpha, \varepsilon}(A_{24})$  pri izboru  $\alpha = (\frac{1}{4}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8}, \frac{7}{8})$  i  $\varepsilon / \|A_{24}\|_\infty = 10^{-8}$ . . . . . 131
- 5.13 Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_{\alpha, \varepsilon}(A_{25}), \mathcal{K}_{\alpha, \varepsilon}(A_{25})$  i  $\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon}^{\{1, 2\}}(A_{25})$ . Rub oblasti stabilnosti  $\Omega_\gamma$  je prikazan crnom isprekidanom linijom. . . . . 132
- 5.14 Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_{\alpha, \varepsilon}(A_{26}), \mathcal{K}_{\alpha, \varepsilon}(A_{26})$  i  $\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon}^{\{1, \dots, 15\}}(A_{26})$  za  $\alpha$ -frakcioni  $\varepsilon$ -pseudospektar matrice  $A_{26}$  ( $n = 100$ ), gde su  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{15} = \frac{2}{3}$ ,  $\alpha_{16} = \dots = \alpha_{100} = \frac{5}{6}$  i  $\varepsilon / \|A_{26}\|_\infty = 2.5 \cdot 10^{-11}$ . . . . . 133
- 5.15 Rastojanje do nestabilnosti kao najmanje  $\varepsilon^*$  za koje skup  $\Lambda_{\varepsilon^*}^{(p)}(A)$  dodiruje imaginarnu osu. . . . . 137
- 5.16 Maksimalna amplifikacija ( $\phi_A^{(2), max}$ ) i trenutak njenog dostizanja ( $t_{max}$ ). 143
- 5.17 Lokalizacioni skupovi  $\Gamma_{\alpha, \varepsilon}(A_{16}), \mathcal{K}_{\alpha, \varepsilon}(A_{16})$  i  $\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon}^S(A_{16})$  za  $\alpha$ -frakcioni  $\varepsilon$ -pseudospektar community matrice  $A_{16}$  za  $\alpha = (\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 1, 1)$ . . . 149



*“ You can't connect the dots looking forward,  
you can only connect them looking backwards.  
So you have to trust that the dots  
will somehow connect in your future. ”*

STEVEN JOBS, *Stanford Commencement Address, 2005.*





# Biografija

Rođen sam 6.5.1991. godine u Novom Sadu. Na Departmanu za matematiku i informatiku Prirodno matematičkog Fakulteta u Novom Sadu sam 2015. godine završio master studije Primenjene matematike, odbranivši rad pod nazivom *"Modulske metode za rešavanje problema linearne komplementarnosti"*.



Zaposlen sam kao asistent na Katedri za Numeričku matematiku, na Departmanu za matematiku i informatiku, PMF-a u Novom Sadu.

Učestvovao sam kao izlagač na nekoliko međunarodnih konferencija posvećenih primenjenoj linearnoj algebri u sklopu bavljenja naučnim radom, među kojima su godišnja konferencija Udruženja za primenjenu matematiku i mehaniku - GAMM 2013 (Novi Sad, Srbija), MatTriad 2013 (Herceg Novi, Crna Gora), MatTriad 2015 (Coimbra, Portugalija), uz plenarno izlaganje na konferenciji MatTriad 2017 (Bedlewo, Poljska).

Koautor sam tri naučna rada u časopisima kategorije M21, i po jednog rada u kategorijama M22 i M23.

NOVI SAD, MAJ 2021.

ERNEST ŠANCA



Овај Образац чини саставни део докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта који се брани на Универзитету у Новом Саду. Попуњен Образац укоричити иза текста докторске дисертације, односно докторског уметничког пројекта.

## План третмана података

<b>Назив пројекта/истраживања</b>
Динамичка анализа комплексних система у светлу X-матрица
<b>Назив институције/институција у оквиру којих се спроводи истраживање</b>
Природно-математички факултет, Универзитет у Новом Саду
<b>Назив програма у оквиру ког се реализује истраживање</b>
<b>1. Опис података</b>
<i>1.1 Врста студије</i> <i>У овој студији нису прикупљани подаци.</i>
<b>2. Прикупљање података</b>
<b>3. Третман података и пратећа документација</b>
<b>4. Безбедност података и заштита поверљивих информација</b>
<b>5. Доступност података</b>
<b>6. Улоге и одговорност</b>