

Наставно-научном већу
Математичког факултета
Универзитета у Београду

На седници Наставно-научног већа Математичког факултета одржаној 3. јула 2020. године у Београду одређени смо за преглед и оцену рукописа

Некомутативне групе и симплицијални комплекси

који је предат као докторска дисертација Александре Костић. Кандидаткиња је предала текст, комисија је исти прегледала и подноси Већу следећи

ИЗВЕШТАЈ

1. Биографија кандидата

Александра Костић уписала је Математички факултет, смер Рачунарство и информатика, 2008. године. Дипломирала је 2012. године, са просечном оценом 9,60. Исте године уписала је Мастер студије на Математичком факултету у Београду, смер Теоријска математика и примене. Мастер рад „Ефективна хомологија према Francis Sergeraert-у” одбранила је 2014. године, под менторством проф. др Зорана Петровића, са оценом 10. Докторске студије на Математичком факултету у Београду, смер Математика, уписала је 2014. године. Положила је све испите предвиђене планом и програмом докторских студија са просечном оценом 10.

2. Списак научних радова кандидаткиње

1. A. Kostić, Z. Z. Petrović, Z. S. Pucanović, M. Roslavcev, *A generalization of nil-clean rings*, Miskolc Mathematical Notes, 19:2 (2018), 969-981 ISSN: 1787-2405, DOI: 10.18514/MMN.2018.2585, IF 2017: 0,574, **M23**
2. A. Kostić, Z. Z. Petrović, Z. S. Pucanović, M. Roslavcev, *Note on strongly nil clean elements in rings*, Czechoslovak Mathematical Journal, 69:1 (2019), 87-92 ISSN: 0011-4642, DOI: 10.21136/CMJ.2018.0167-17, IF 2018: 0,447, **M23**
3. A. Kostić, Z. Z. Petrović, Z. S. Pucanović, M. Roslavcev, *On a generalized Jordan form of an infinite upper triangular matrix*, Linear and Multilinear Algebra, (2019) објављен online, 9 стр. ISSN: 0308-1087, DOI: 10.1080/03081087.2019.1632783, IF 2019: 1,112, **M21**
4. A. Kostić, N. Milošević, Z. Z. Petrović, *Note on the cyclotomic polynomial topologically*, Experimental Mathematics, (2019) објављен online, 7 стр. ISSN: 1058-6458, DOI:10.1080/10586458.2019.1680464, IF 2018: 0,766, **M22**

5. A. Kostić, Z. Z. Petrović, Z. S. Pucanović, M. Roslavcev, *On the generalized strongly nil clean property of matrix rings*, Algebra Colloquium, прихваћен за објављивање, 12 стр. IF 2019: 0,421, **M23**
6. A. Kostić, *On the simplicial complexes associated to the cyclotomic polynomial*, Kragujevac Journal of Mathematics, 47:2 (2023), 309-329, објављен online, **M51**

3. Излагања на научним конференцијама

1. *Effective homology computation using symbolic software*, XIII српски математички конгрес, 22–25. мај 2014, Врњачка бања, Србија
2. *The free calculus and non-isomorphism of finitely presented groups*, XIV српски математички конгрес, 16–19. мај 2018, Крагујевац, Србија
3. *Циклотомични полиноми, фундаменталне групе и Фоксов рачун*, IX симпозијум „Математика и примене”, 30. новембар – 1. децембар 2018, Математички факултет Универзитета у Београду, Београд, Србија

4. Предмет докторске дисертације

Предмет изучавања докторске дисертације су две врсте симплицијалних комплекса – комплекси придружени циклотомичним полиномима и комплекси придружени скупу иредуцибилних карактера коначне некомутативне решиве групе.

Први део дисертације посвећен је анализи симплицијалних комплекса придружених циклотомичном полиному $\Phi_n(x)$. Разматрање оваквих типова комплекса значајно је јер даје тополошку интерпретацију циклотомичних полинома. Питање величине коефицијената у циклотомичном полиному је значајно и отворено питање. У раду *G. Musiker, V. Reiner., „The cyclotomic polynomial topologically”, J. Reine Angew. Math, 687 (2014), 113–132* уведени су ови комплекси и показано је да имају правилну структуру у свим случајевима. Наиме, коефицијенти циклотомичног полинома су одређени хомолошким групама придружених комплекса у одговарајућим димензијама, осим када је n производ три непарна проста броја. Тај део је остао неразјашњен и постављено је питање у наведеном раду шта се дешава у том случају. У фокусу истраживања у овом раду су управо симплицијални комплекси придружени циклотомичним полиномима чији је степен производ три непарна проста броја. Разматра се хомотопски тип оваквих комплекса, када је то могуће. У случајевима када није могуће одредити хомотопски тип анализира се фундаментална група.

У другом делу дисертације изучавају се два типа симплицијалних комплекса придружених произвољном коначном скупу природних бројева – комплекс заједничког делиоца и комплекс простих делитеља. Добијени резултати примењују се на скуп иредуцибилних карактера коначне решиве некомутативне групе. Посебно се разматра фундаментална група комплекса придружених скуп иредуцибилних карактера коначне решиве некомутативне групе. Анализа фундаменталне групе корисна је за боље разумевање структуре скупа иредуцибилних карактера коначне групе.

5. Приказ дисертације

Ова дисертација састоји се од увода на 2 стране, текста од 109 страна, који је подељен на 9 глава и Додатак, и списка литературе од 45 библиографских јединица.

Прве четири главе и глава 7 ове дисертације уводног су карактера. Прва глава (стр. 3–17) садржи преглед основних дефиниција и својстава симплицијалних комплекса и CW комплекса. Такође, у овој глави је приказан метод за рачунање фундаменталне групе симплицијалног комплекса и дато је алгоритамско решење за редуковање броја генератора и релација. Поред тога, дата је дефиниција уређајних комплекса и преглед резултата о хомотопском типу посета. У другој глави (стр. 18–23) дат је детаљан приказ дискретне теорије Морса за симплицијалне комплексе. Дискретна теорија Морса од кључног је значаја приликом одређивања топологије симплицијалних комплекса који ће се разматрати у глави 5. У трећој глави (стр. 24–30) изложен је Фоксов рачун, дата је дефиниција низа елементарних идеала и прецизирана је улога овог низа у доказивању неизоморфности група. Фоксов рачун налази примену у глави 6 ове дисертације где се користи за детекцију некомутативности одређених фундаменталних група. Четврта глава (стр. 31–34) садржи дефиницију и преглед алгебарских својстава циклотомичних полинома. Тополошко тумачење алгебарских својстава наведених у овој глави изложено је касније у глави 5. У глави 7 (стр. 82–86) дат је преглед основних дефиниција и теорема из теорије карактера коначних група које се користе у даљем раду. Посебан акценат је на резултатима који се тичу својстава карактера коначних решивих група.

Пета, шеста и осма глава већим делом посвећене су оригиналним резултатима кандидаткиње.

Пета глава (стр. 35–71) посвећена је изучавању симплицијалних комплекса придружених циклотомичним полиномима. Ову врсту симплицијалних комплекса увели су Мусикер и Рајнер у раду *The cyclotomic polynomial topologically*, *J. Reine Angew. Math.*, 687 (2014), 113–132. Аутори су потпуно описали топологију придружених комплекса и довели је у везу са коефицијентима циклотомичних полинома, у свим случајевима, осим у случају када је степен циклотомичног полинома производ три различита непарна проста броја. Својства комплекса придружених циклотомичним полиномима чији је степен производ три различита непарна проста броја остаје као отворено питање у горепоменутом раду Мусикера и Рајнера (питање 7.6). У овој глави се делимично одговара на ово питање. Конструкцијом одговарајућих ацикличних дискретних векторских поља показује се да у неким случајевима полиноми чији је степен производ три различита непарна проста броја имају иста тополошка својства као остали циклотомични полиноми.

У шестој глави (стр. 72–81) анализирају се случајеви који показују да топологија комплекса придружених циклотомичним полиномима чији је степен производ три различита непарна проста броја у генералном случају одступа од очекиване. У највећем броју случајева фундаменталне групе придружених комплекса су комутативне. Примери дати у овој глави показују да постоје случајеви у којима су фундаменталне групе придружених комплекса некомутативне. Докази некомутативности заснивају се на конструкцији одговарајућих епиморфизама, као и на употреби Фоксовог рачуна. Нестандардна структура фундаменталних група даје нове некомутативне инваријанте разматраних циклотомичних полинома.

У осмој глави (стр. 87–96) анализирају се комплекс заједничког делитеља и комплекс простих делитеља придружени коначном скупу природних бројева. Приликом анализе хомотопског типа ових комплекса користе се резултати о хомотопском типу посета. У наставку се добијени резултати примењују на конкретан скуп – скуп иредуцибилних карактера коначне (некомутативне) решиве групе. Помоћу метода за рачунање фундаменталне групе датог у глави 1 показује се да комплекси придружени скупу иредуцибилних карактера коначне некомутативне решиве групе имају слободну фундаменталну групу. Ранг фундаменталне групе ограничен је у зависности од димензије комплекса, у случају комплекса заједничког делиоца, или броја темена комплекса, у случају комплекса делитеља. Дата ограничења ранга фундаменталне групе елиминишу велики број комплекса као комплексе придружене иредуцибилним карактерима коначних решивих група.

У деветој глави (стр. 97–98) дат је кратак осврт на главне резултате ове дисертације, као и смернице за даља истраживања.

Десета глава је Додатак (стр. 99–111). У овој глави издвојени су обимни поступци рачунања фундаменталних група разматраних у шестој глави. Осим тога, у програмском пакету *Wolfram Mathematica 11.2*. дата су софтверска решења алгоритама који се користе у тези.

6. Закључак

Резултати до којих је Александра Костић дошла у свом раду и које је представила у поднетом тексту обухватају неколико области математике: комбинаторну теорију група, теорију карактера коначних група и комбинаторну топологију. У оквиру теме о циклотомичним полиномима дат је одговор на конкретно постављено питање у раду Мусикера и Рајнера и учињен је значајан корак у коначном разрешењу случаја, који је у том раду остао отворен. У оквиру друге теме, о симплицијалним комплексима придруженим карактерима коначних комутативних група, представљени су побољшани резултати, а такође и знатно бољи опис везе два типа комплекса, за које је раније показано само да имају изоморфне фундаменталне групе, док је овде доказано да су они заправо хомотопски еквивалентни. Сама теза је добро написана, са пажљиво изложеним доказима и примерима.

Због свега наведеног, предлажемо Наставно-научном већу Математичког факултета да прихвати приложени текст као докторску дисертацију Александре Костић и одреди комисију за њену јавну одбрану.

У Београду, 17. јануара 2021.

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ:

проф. др Зоран Петровић – ментор, редовни професор
Математички факултет
Универзитет у Београду

проф. др Небојша Икодиновић, ванредни професор
Математички факултет
Универзитет у Београду

проф. др Горан Банковић, ванредни професор
Математички факултет
Универзитет у Београду

др Борђе Баралић, виши научни сарадник
Математички институт у Београду

др Нела Милошевић, доцент
Факултет за информационе системе и технологије
Универзитет Доња Горица
Подгорица