УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Бојан М. Јеремић

РЕАЛИЗАЦИЈА БРАХИСТОХРОНОГ КРЕТАЊА МЕХАНИЧКИХ СИСТЕМА ПРОМЕНЉИВЕ МАСЕ ИДЕАЛНИМ ВЕЗАМА СА ОГРАНИЧЕНИМ РЕАКЦИЈАМА

ДОКТОРСКА ДИСЕРТАЦИЈА

Београд, 2019.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Bojan M. Jeremić

REALIZATION OF THE BRACHISTOCHRONIC MOTION OF VARIABLE MASS MECHANICAL SYSTEMS BY IDEAL CONSTRAINTS WITH RESTRICTED REACTIONS

DOCTORAL DISSERTATION

Belgrade, 2019.

Комисија за преглед, оцену и одбрану докторске дисертације

Ментори: др Александар Обрадовић, редовни професор,
Универзитет у Београду, Машински факултет
др Радослав Радуловић, доцент,
Универзитет у Београду, Машински факултет

Чланови комисије: др Оливера Јеремић, редовни професор,
Универзитет у Београду, Машински факултет
др Зоран Митровић, редовни професор,
Универзитет у Београду, Машински факултет
др Славиша Шалинић, ванредни професор,
Универзитет у Крагујевцу, Факултет за машинство и грађевинарство у Краљеву

Датум одбране:

Мојој породици

Изрази захвалности

Аутор особито захваљује својим менторима проф. др Александру Обрадовићу и доценту др Радославу Радуловићу на неограниченом стрпљењу и неизмерној стручној помоћи приликом писања докторске дисертације, као и изузетној подршци током целокупног бављења научноистраживачким радом.

Аутор у великој мери захваљује проф. др Оливери Јеремић и проф. др Славиши Шалинићу на корисним саветима и стручној подршци приликом израде докторске дисертације.

Аутор захваљује шефу катедре за Механику проф. др Зорану Митровићу на безрезервној помоћи и саветима током целокупних докторских студија.

Аутор нарочито захваљује колеги Александру Томовићу на веома вредним саветима.

Аутор изузетно захваљује својим родитељима Милану и Драгици, супрузи Љиљани, и посебно сину Василију на неограниченој моралној подршци.

Ова докторска дисертација урађена је у оквиру пројекта ТР35006 „Одрживост и унапређење машинских система у енергетици и транспорту применом форензичког инжењерства, еко и робуст дизајна”, чији је руководилац проф. др Срђан Бошњак.

РЕАЛИЗАЦИЈА БРАХИСТОХРОНОГ КРЕТАЊА МЕХАНИЧКИХ СИСТЕМА ПРОМЕНЉИВЕ МАСЕ ИДЕАЛНИМ ВЕЗАМА СА ОГРАНИЧЕНИМ РЕАКЦИЈАМА

Резиме

У овој докторској дисертацији уопштење класичног проблема брахистохроног кретања материјалне тачке у вертикалној равни, чије се кретање реализује идеалном везом без активних управљачких сила, односи се на холономне и нехолономне механичке системе у оквиру којих постоје и тачке променљиве масе. Брахистохроно кретање реализује се, у складу са класичним брахистохроним проблемом, без активних управљачких сила. Улогу управљања преузимају реакције идеалних веза, где треба имати у виду да је снага управљачких сила током брахистохроног кретања једнака нули.

Предмет истраживања у оквиру докторске дисертације је реализација брахистохроног кретања механичких система променљиве масе идеалним везама са ограниченим реакцијама. Део тезе је посвећен одређивању диференцијалних једначина кретања механичких система променљиве масе и одабиром најподеснијих облика истих. Посебна пажња у дисертацији је посвећена одређивању реакција ограниченог интензитета. Формулисани проблеми су решени у оквиру теорије оптималног управљања, применом Понтрјагиновог принципа максимума. Проблем оптималног управљања кретањем састоји се у одређивању функција управљања тако да разматрани механички систем из почетног стања пређе у крајње стање при ограниченим реакцијама веза за минимално време. На основу формираних једначина стања, које описују кретање разматраног система у простору стања, добија се одговарајући двотачкасти гранични проблем (TPBVP) система нелинеарних диференцијалних једначина првог реда у нормалном облику, који је у општем случају неопходно нумерички решити. Ради одређивања решења TPBVP у докторској дисертацији је примењен нумерички алгоритам заснован на методи погађања (shooting method). Како скаларно управљање у проблемима ове врсте линеарно фигурише у једначинама стања, приликом решавања било је неопходно размотрити могућност појаве сингуларних решења. Она се, у зависности од могућности веза, односно допуштеног интензитета реакције веза, могу појавити на целом интервалу или на појединим деловима. То додатно усложњава решавање TPBVP.

Према томе, посматрајући наведене проблеме, чије је решавање представљало циљ истраживања ове докторске дисертације, пронађена су одговарајућа решења и тиме је дат научни допринос проналаском истих.

Кључне речи: брахистохрона, променљива маса, механички систем, нехолономне везе, холономне везе, реализација кретања, ограничене реакције, Понтрјагинов принцип максимума, оптимално управљање, TPBVP

Научна област: Машинство

Ужа научна област: Механика

УДК број:

REALIZATION OF THE BRACHISTOCHRONIC MOTION OF VARIABLE MASS MECHANICAL SYSTEMS BY IDEAL CONSTRAINTS WITH RESTRICTED REACTIONS

Abstract

In this doctoral dissertation, the generalization of the classical problem of brachistochronic motion of the particle in a vertical plane, whose motion is realized by an ideal constraint without active control forces, refers to holonomic and nonholonomic mechanical systems within which there are also variable mass particles. The brachistochronic motion is realized in accordance with the classical brachistochrone problem, without active control forces. The role of control is assumedby the reactions of ideal constraints, where one should bear in mind that the power of the control forces during brachistochronic motion is equal to zero.

The subject of research in the doctoral dissertation is the realization of the brachistochronic motion of variable mass mechanical systems with limited reactions of ideal constraints. Part of the thesis is dedicated to determining the differential equations of motion of variable mass mechanical systems and selecting their most suitable forms. Special attention in the dissertation is directed to determining the intensity of limited reactions. Formulated problems are solved within the theory of optimal control, using Pontrjagin's maximum principle. The problem of optimal control of motion consists in determining the control functions, so that the considered mechanical system moves in the minimum time from the initial state to the end state with the limited constraint reactions. On the basis of created state equations that describe the motion of the considered system in the state space, an appropriate two-point boundary-value problem (TPBVP) of non-linear first order differential equations system in the normal form is obtained, which, in general, should be numerically solved. In order to determine the TPBVP solution, a numerical algorithm based on the shooting method is applied in the doctoral dissertation. As scalar control in the problems of this kind is linearly represented in state equations, in solving the problem it was necessary to consider the possibility of the emergence of singular solutions. Depending on the possibilities of constaints, i.e. the permissible intensity of the constraint reactions, they may emerge

over the entire interval or on certain parts. This additionally complicates the solution of TPBVP.

Hence, by observing the mentioned problems, the solution of which was the research goal of this doctoral dissertation, appropriate solutions were found and thus a scientific contribution was made by finding them.

Key words: brachistochrone, variable mass, mechanical system, non-holonomic constraints, holonomic constraints, motion realization, limited reactions, Pontrjagin's maximum principle, optimal control, TPBVP

Scientific discipline: Mechanical engineering

Scientific subdiscipline: Mechanics

UDC number:

Садржај

Увод

Проблем кретања механичког система из почетне конфигурације до крајњег положаја за најкраће време, познатог као брахистохроно кретање система, разматра се од времена када је Бернули формулисао брахостохрони проблем кретања тачке у хомогеном пољу теже [1]. Да је проблем уопштавања класичног проблема брахистохроног кретања материјалне тачке у вертикалној равни, чије се кретање реализује идеалном везом без управљачких сила, и даље веома актуелан може се видети из докторске дисертације са МГУ Ломоносов [2].

У докторској дисертацији [2] извршено је уопштавање брахистохроног проблема материјалне тачке, где су, у оквиру прегледа актуелне литературе, позитивно приказани и радови [3], [4] и [5] као доприноси уопштавању овог проблема, који се односе на сложеније механичке системе. Сама дисертација [2] није разматрала механичке системе, већ су рађена уопштења само за брахистохроно кретање тачке. Треба напоменути да је решење класичног брахистохроног проблема циклоида.

У решавању брахистохроног проблема приступало се са две стране: помоћу варијационог рачуна [6], односно теорије оптималног управљања [7, 8]. У радовима [9-14] проблем брахистохроног кретања приказан је за различита поља сила. У радовима [15-17] решаван је брахостохрони проблем тачке променљиве масе. Материјална тачка која се креће по храпавој кривој нашла је своју примену при оптимизацији у инсталацијама за транспорт грануластог материјала [18-21]. Брахистохроно кретање тачке у тродимензионалном простору разматрано је у докторској дисертацији [22], где је приказан и детаљан преглед литературе везан за брахистохроно кретање тачке. Први резултати у литератури који се односе на брахистохроно кретање механичког система могу се наћи у [23, 24]. У радовима [25-27] посматра се брахостохроно кретање крутог тела. Докторска дисертација [28] разматрала је брахистохроно кретање материјалне тачке и система крутих тела у присуству Кулонове силе трења применом варијационог рачуна. Проблем брахистохроног кретања веома је чест код робота и дизалица [29-32]. Даља разматрања везана за брахистохроно кретање система материјалних тачака и крутих тела приказана су у [33-36]. У радовима [37-39] приказано је брахистохроно кретање крутог тела, док је у радовима [40, 41] приказано брахистохроно кретање система крутих тела. У раду [42] приказано је брахистохроно кретање механичког система кога ограничавају линеарне хомогене нехолономне везе. У раду [41] први пут је детаљно приказано брахистохроно кретање система крутих тела са Кулоновим трењем.

У овој докторској дисертацији уопштење брахистохроног кретања односиће се на холономне и нехолономне механичке системе у оквиру којих постоје и тачке променљиве масе. Брахистохроно кретање реализује се, у складу са класичним брахистохроним проблемом, без активних управљачких сила. Улогу управљања преузимају реакције идеалних веза, где треба имати у виду да је снага управљачких сила током брахистохроног кретања једнака нули.

Предмет истраживања у оквиру докторске дисертације представља реализација брахистохроног кретања механичких система променљиве масе идеалним везама са ограниченим реакцијама. Посебна пажња у дисертацији посвећена је одређивању реакција ограниченог интензитета. Формулисани проблеми решени су у оквиру теорије оптималног управљања, применом Понтрјагиновог принципа максимума (*Лев Семёнович Понтрягин, 1908-1988.*) и теорије сингуларних оптималних управљања.

Теорија оптималног управљања, а посебно Понтрјагинов принцип максимума [7] представља проширење класичног варијационог рачуна, односно уопштење његове примене на ширу класу проблема оптималног управљања. Недостатак Понтрјагиновог принципа максимума односио се на потешкоће везане за нумеричко израчунавање двотачкастих граничних проблема (TPBVP), које су развојем рачунара увелико умањене. Из тог разлога овај принцип може се користити као изузетно моћан алат приликом анализе оптималних трајекторија кретања. Такође треба рећи да класична механика проучава проблеме у чијој основи се налазе природни услови оптималности на којима су постављени принципи механике. Чак је и Леонард Ојлер рекао да се у природи ништа не дешава у чему не постоји неки облик минимума или максимума [43]. О теорији оптималног управљања посебно се може пронаћу у [44, 45], док се савремена примена Понтрјагиновог принципа максимума може наћи у [46].

Проблем оптималног управљања кретањем у докторској дисертацији састоји се у одређивању функција управљања тако да разматрани механички систем из почетног стања пређе у крајње стање при ограниченим реакцијама веза за минимално време. На основу формираних једначина стања, које описују кретање разматраног система у простору стања, добија се одговарајући двотачкасти гранични проблем (TPBVP) система нелинеарних диференцијалних једначина првог реда у нормалном облику, који је у општем случају неопходно нумерички решити. Ради одређивања решења TPBVP у докторској дисертацији примењен је нумерички алгоритам заснован на методи погађања (shooting method). Највећи проблем методе погађања је што је конвергенција веома осетљива на почетну итерацију недостајућих граничних услова [47].

Како управљања у проблемима ове врсте линеарно фигуришу у једначинама стања, приликом решавања биће неопходно размотрити могућност појаве сингуларних решења. Она се, у зависности од могућности веза, односно допуштеног интензитета реакција веза, могу појавити на целом интервалу или на појединим деловима. То додатно усложњава решавање TPBVP. Познато је да Понтрјагинов принцип максимума није ефективан за одређивање сингуларних екстремалних управљања јер управљања не фигуришу експлицитно у његовим условима. Овакав случај се често среће у практичним проблемима услед сложености самог проблема. Тада је неопходно користити и друге потребне услове оптималности, који нису обухваћени овим принципом. У овој докторској дисертацији појављују се само сингуларна управљања првог реда, и за њих потребне услове оптималности задовољавају Келијеви услови [48]. Сингуларна оптимална управљања обрађена су у докторској дисертацији [49].

Када се узме у обзир све претходно написано, докторска дисертација се састоји од три поглавља.

У првом поглављу извршено је математичко моделирање механичких система промењиве масе, одређивањем диференцијаних једначина кретања, применом савремених метода аналитичке механике и механике система променљиве масе. При томе одабрани су најподеснији облици диференцијалних једначина кретања у зависности од посматраног механичког система за који ће исте бити примењене. Треба напоменути да ће бити разматрани нехолономни механички систем, као и механички систем који се састоји од крутог тела и тачака променљиве масе.

Прегледом литературе установљено је да нема великог броја радова на тему нових облика једначина кретања механичких система променљиве масе. Кејнове једначине кретања нехолономног механичког система променљиве масе изведене су у раду [50], док су у раду [51] приказане Раутове једначине нехолономног система променљиве масе. У раду [52] изведене су Гибс-Апелове једначине, а у раду [53] Хамилтонов принцип за нехолономни механички систем променљиве масе. У раду [54] приказана је примена Лагранж-Даламберовог принципа. У докторској дисертацији [55] приказане су Лагранжеве једначине друге врсте за нестационарне нехолономне механичке системе, док су у докторској дисертацији [22] приказане диференцијалне једначине кретања за најопштији случај нехолономног механичког система променљиве масе помоћу квазибрзина, као и доказивање еквивалентности истих једначина са Мецијевим, Волтериним, Вороњчевим, Чапљигиновим, Апеловим, Болцман-Хамеловим, као и Лагранжевим једначинама друге врсте са неодређеним множитељима. Литература у вези холономних механичких система променљиве масе најопширније је приказана у [56-58]. У раду [59] приказане су једначине кретања за нехолономне механичке системе, али константне масе. У раду [60] су изведене једначине кретања механичких система за најопштији случај тј. за случај нелинеарних нехолономних веза и за случај нелинеарних релација између стварних брзина и квазибрзина. Уобичајено је да се те једначине кретања називају једначине кретања у променљивим Поенкаре-Четајева (могло би се рећи једначине записане у „групној“ променљивој). На крају, у истом раду, изведене су једначине кретања система тачака променљиве масе за најопштији случај реактивних сила и за случај веза које зависе од промене масе.

У другом поглављу докторске дисертације посматрају се сингуларни и несингуларни случајеви оптималног управљања брахистохроног кретања нехолономног система промењљиве масе. Реализација кретања остварена је накнадним наметањем механичке везе једној тачки чије кретање ће бити одређено претходном нумеричком интеграцијом одговарајућих диференцијалних једначина кретања. На тај начин брахистохроно кретање остварено је без утицаја активних сила. При томе се истражује утицај смањивања границе реакције везе на промену структуре самог управљања. Тиме се из сингуларног управљања прелази у спрегнуто сингуларно и несингуларно управљање и потом у релејно управљање (bang-bang).

У раду [3] разматрано је брахистохроно кретање тачке промењљиве масе, док се у раду [61] посматра брахистохроно кретање система промењљиве масе. У радовима [61] и [62] посматрана су брахистохрона кретања нехолономних система промењљиве масе, при чему су разматрани само сингуларни случајеви управљања, без икаквих ограничења на реакције веза. За функције управљања узети су први изводи по времену квазибрзина [61], односно брзине [62], које одговарају одређеним тачкама система, док је у другом делу ове докторске дисертације за функцију управљања узета реакција наметнуте везе, па је на тај начин било могуће да се уведу и ограничења на њен интензитет. У раду [63] приказано је управљање механичким системом промењљиве масе. У раду [64] разматран је брахистохрони проблем кретања тачке с неограниченом и ограниченом нормалном компонентом реакције везе, док је у докторату испитана промена структуре управљања за различита ограничења реакције везе за механички систем промењљиве масе. Према томе овај део докторске дисертације представља својеврсни наставак истраживања започетих у радовима [3], [61], [62] и [64].

У трећем поглављу рада истражује се могућност реализације брахистохроног кретања тела промењљиве масе помоћу центроида - котрљањем рулете по бази, без клизавања. Помоћу претходно одређеног брахистохроног равног кретања, могуће је једнозначно одредити базу и рулету, као и нормалну и тангенцијалну компоненту реакције. На основу њих, да би овакво кретање било могуће, може се одредити и услов за Кулонов коефицијент трења. Такође, при промени одређених параметара може се показати како се мења нормална компонента реакције везе и показати који услов параметри требају да задовоље како би кретање било могуће и са овог аспекта за случај једнострано задржавајуће везе.

У раду [56] посматрана је реализација брахистохорног кретања тела променљиве масе помоћу центроида (базе и рулете), али као функције управљања узета су убрзања одговарајућих тачака док су у трећем делу ове докторске дисертације за функције управљања узете генералисане управљачке силе, које одговарају компонентама реакције везе, и на тај начин директно се може посматрати њихов утицај на коефицијент трења и одредити услов који он мора да задовољи. У раду [5] извршена је реализација кретања материјалне тачке по реалној вези и утицај коефицијента трења клизања. У раду [65, 66] настављена су разматрања брахистохроног кретања тачке из [5], где су посматране и једнострано задржавајуће идеалне везе, што је овде проширено за случај тела. У докторској дисертацији посматра се једнострано задржавајућа идеална веза тела променљиве масе и одређивање минимално потребног коефицијента трења да не дође до проклизавања. Како се ради о једнострано задржавајућој вези показаће се како параметри система, попут почетне енергије система, утичу на промену нормалне компоненте реакције везе и тиме на могућност реализације овог кретања. Дакле, овај део докторске дисертације представља својеврсни наставак истраживања из радова [5], [56] и [65, 66]

У раду [4] брахистохроно кретање је остварено без утицаја активних сила и посматрана су два случаја оптималног управљања: први случај представља сингуларно оптимално управљање, а други представља комбинацију сингуларног и несингуларног управљања услед наметнутог ограничења реакције нехолономне везе. Све набројано у раду [4] обрађено је за случај крутог тела константне масе, а у трећем делу ове дисертације разматраће се тело променљиве масе. И у раду [67] брахистохроно кретање крутог тела константне масе, без ограничења реакција веза, остварено је без утицаја активних сила. На тај начин, докторска дисертација представљаће и наставак истраживања из радова [4] и [67].

Литература

[1] Bernoulli J.: *Problema novum, ad cujus solutionem Mathematici invitantur,* - Acta Eruditorum, June issue, 1696., pp. 264.

[2] Vladimirovna Z. A.: *Оптимизация управляемого спуска и обобщенные задачи о брахистохроне,* - Doctoral dissertation, Mechanical and Mathematical, Moscow State University - Lomonosov, 2018.

[3] Jeremić O., Šalinić S., Obradović A., Mitrović Z.: *On the brachistochrone of a variable mass particle in general force fields,* - Math Comput Model, Vol 54, No 11-12, 2011., pp. 2900-2912.

[4] Šalinić S., Obradović A., Mitrović Z., Rusov S.: *On the brachistochronic motion of the Chaplygin sleigh*, - Acta Mech, Vol 224, No 9, 2013., pp. 2127-2141.

[5] Šalinić S.: *Contribution to the brachistochrone problem with Coulomb friction,* - Acta Mech, Vol 208, No 1-2, 2009., pp. 97–115.

[6] Elsgolc L. E.: *Calculus of Variations,* - Oxford: Pergamon Press, 1963.

[7] Pontryagin L., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., et al.: *The mathematical theory of optimal processes*, - New York: Interscience, 1962.

[8] Gabasov R., Kirillova F. M.: *Singular optimal controls*, - Moscow: Nauka, 1973.

[9] Ashby N., Brittin W. E., Love W. F., Wyss W.: *Brachistochrone with Coulomb friction*, - Am. J. Phys., Vol 43, No 10, 1975., pp. 902–906.

[10] Van der Heijden A. M. A., Diepstraten J. D.: *On the brachistochrone with dry friction*, - Int. J. Non-Linear Mech, Vol 10, No 2, 1975., pp. 97-112.

[11] Shevchenko K. N.: *Brachistochrone and the principle of least action*, - Mech. Solids, Vol 21, No 2, 1986., pp. 36–42.

[12] Drummond J. E., Downes G. L.: *The brachistochrone with acceleration: A running track*, - Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 7, No 6, 1971., pp. 444-449.

[13] Hayen J. C.: *Brachistochrone with Coulomb friction*, - International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol 40, No 8, 2005, pp. 1057-1075.

[14] Vratanar B., Saje M.: *On the analytical solution of the brachistochrone problem in a non-conservative field*, - International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol 33, No 3, 1998., pp. 489-505.

[15] Ivanov A. I.: *On the brachistochrone of a variable mass point with constant relative rates of particle throwing away and adjoining*, - Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR Ser. A, 1968., pp. 683–686.

[16] Russalovskaya A. V., Ivanov G. I., Ivanov A. I.: *On brachistochrone of the variable mass point during motion with friction with an exponential rule of mass rate flow*, - Dokl. Akad. Nauk Ukr. SSR Ser. A, 1973., pp. 1024–1026.

[17] Mureșan M.: *Some remarks on the brachistochrone problem with Coulomb friction*, - Filomat, Vol 24, No 4, 2012., pp. 697-711.

[18] Charlton W. H., Chiarella C., Roberts A. W.: *Gravity flow of granular materials in chutes: optimizing flow properties*, - Journal of Agricultural Engineering Research, Vol 20, No 1, 1975., pp. 39-45.

[19] Parbery R. D.: *Optimization of gravity flow discharge chutes for maximum exit velocity under Coulomb friction*, - Engineering Optimization, Vol 10, No 4, 1987., pp. 297-307.

[20] Wensrich C. M.: *Evolutionary solutions to the brachistochrone problem with Coulomb friction*, - Mechanics Research Communications, Vol 31, No 2, 2004., pp. 151-159.

[21] Wensrich C. M.: *Evolutionary optimisation in chute design*, - Powder Technology, Vol 138, No 2, 2003., pp. 118-123.

[22] Radulović R.: *Global minimum time for the motion of mechanical systems with limited controls and constraint reactions*, - Doctoral dissertation, Faculty of Mechanical engineering, University of Belgrade, 2017.

[23] Pennachietti G.: *Sul moto brachistochrono d'un sistema qualunque di punti material*, - Rend. Circ. Mat. Palermo, 1892., pp. 52-62.

[24] Mc Connel A.: *The Brachistochronic Motion of a Dynamical System*, - Proc. Roy. Irish Acad. XXXIX, Sect A, No 4, 1930., pp. 31-48.

[25] Obradović A., Mladenović N., Marković S.: *Brachistochronic Rigid Body General Motion*, - FME Transactions, Vol 36, No 3, 2008., pp. 109-112.

[26] Obradović A., Marković S.: *Brahistohrono ravno kretanje krutog tela*, *Zbornik radova Simpozijuma opšte mehanike*, Novi Sad 1994.

[27] Akulenko L. D.: *An analog of the classical brachistochrone for a disk*, - Doklady Physics, Vol 53, No 3, 2008., pp. 156-159.

[28] Šalinić S., *Brahistohrono kretanje mehaničkih sistema sa realnim vezamai primene na tehničke objekte*, - Doktorska disertacija, Mašinski fakultet Kraljevo, Univerzitet u Kragujevcu, 2009.

[29] Черноусько Ф. Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г., *Манипуляционые роботы: Динамика, управление, оптимизация*, Москва: Наука, 1989.

[30] Formal'skii A. M.: *The time-optimal control of the bending of a plane two-link mechanism*, - Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM), Vol 60, No 2, 1996, pp. 243-251.

[31] Van Willigenburg L. G., Loop R. P. H.: *Computation of time-optimal controls applied to rigid manipulators with friction*, - International Journal on Control, Vol 54, No 5, 1991., pp. 1097-1117.

[32] Hu G. S., Ong C. J., Teo C. L.: *Minimum-time control of a crane with simultaneous traverse and hoisting motions.*, - Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 120, No 2, 2004., pp. 395-416.

[33] Zeković D., Čović V.: *On the brachistochronic motion of mechanical systems with linear nonholonomic nonhomogeneous constraints*, - Mechanics Research Communications, Vol 20, No 1, 1993., pp. 25-35.

[34] Djukić D.: *On the brachistochronic motion of a dynamic system*, - Acta Mechanica, Vol 32, No 1-3, 1979., pp. 181-186.

[35] Čović V., Lukačević M.: *On brachistochronic motions of non-conservative dynamical systems*, - Theoretical and Applied Mechanics, Vol 7, 1981., pp. 41-50.

[36] Čović V., Vesković M.: *Extension of the Bernoulli's case of brachistochronic motion to the multibody system having the form of a kinematic chain with external constraints*, - European Journal of Mechanics A/Solids, Vol 21, No 2, 2002., pp. 347-354.

[37] Legeza P. V.: *Quickest-descent curve in the problem of rolling of a homogeneous cylinder*, - Int. Appl.Mech, Vol 44, No 12, 2008., pp. 1430–1436.

[38] Legeza P. V.: *Conditions for pure rolling of a heavy cylinder along a brachistochrone*, - Int. Appl. Mech, Vol 46, No 6, 2010., pp. 730–735.

[39] Đukic Đ.: *The brachistochronic motion of a gyroscope mounted on the gimbals*, - Theor. Appl. Mech, 1976., pp. 37-40.

[40] Čović V., Lukačević M., Vesković M.: *On Brachistochronic Motions*, Budapest: Budapest University of Technology and Economics, 2007.

[41] Čović V., Vesković M.: *Brachistochronic motion of a multibody system with Coulomb friction*, - Eur. J. Mech. A, Solids, Vol 28, No 9, 2009., pp. 882–890.

[42] Čović V., Lukačević M., *On the brachistochronic motion of non-holonomic mechanical systems*, - Proceedings of the 16th Yugoslavia Congress of Theoretical and Applied Mechanics, Bečići 1984.

[43] Grattan-Guinness I.: *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840: From the Calculus and Mechanics to Mathematical Analysis and Mathematical Physics vol. 1*, Springer, 1990.

[44] Kirk D. E.: *Optimal control theory: An introduction*, - New York: Dover Publications, 2004.

[45] Hull D.: *On the variational process in optimal control theory*, - J Optimiz Theory Appl, Vol 67, No 3, 1990., pp. 447–462.

[46] Safari A. R., Sharifov Y. A., Gasimov Y. S.: *Necessary Optimality Condition for the Singular Controls in an Optimal Control Problem with Nonlocal Conditions*, - Filomat, Vol 32, No 3, 2018., pp. 749-757.

[47] Stoer J., Bulirsch J.: *Introduction to numerical analysis*, New York: Springer-Verlag, 1993.

[48] Gabasov R., Kirillova, F. M.: *High order necessary conditions for optimality*, - SIAM J Control, Vol 10, No 1, 1972, pp. 127–168.

[49] Obradović A.: *Singularna optimalna upravljanja mehaničkih sistema*, - Doktorska disertacija, Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu, 1994.

[50] Chang Y. H., Ge Z. M.: *Extended Kane's equations for nonholonomic variable mass system*, - J Appl Mech (TransASME), Vol 49, No 2, 1982., pp. 429-431.

[51] Luo Y. H., Zhao Y.D.: *Routh's equations for general nonholonomic mechanical systems of variable mass*, - Appl Math Mech-Engl, Vol 14, No 3, 1993., pp. 285-298.

[52] Qiao Y. F.: *Gibbs-Appell's equations of variable mass nonlinear nonholonomic mechanical systems,* - Appl. Math. Mech.-Engl, Vol 11, No 10, 1990., pp. 973-983.

[53] Ge Z. M., Cheng Y. H.: *The Hamilton's principle of nonholonomic variable mass systems,* - Appl Math Mech-Engl, Vol 4, No 2, 1983., pp. 291-302.

[54] Ge Z. M.: *The equations of motion of nonlinear nonholonomic variable mass system with applications,* - J ApplMech (Trans ASME), Vol 51, No 2, 1984., pp. 435-437.

[55] Jeremić O.: *Prilog dinamici reonomnih sistema,* - Doktorska disertacija, Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu, 1998.

[56] Obradović A., Šalinić S., Jeremić O., Mitrović Z.: *On the brachistochronic motion of a variable-mass mechanical system in general force fields,* - Math Mech Solids, Vol 19, No 4, 2014., pp. 398-410.

[57] Cvetićanin L., *Dynamics of bodies with time-variable mass,* Switzerland: Springer, 2016.

[58] Irschik H., Belyaev A. K. (eds.): *Dynamics of mechanical systems with variable mass,* New York: Springer, 2014.

[59] Zeković D.: *Dynamics of mechanical systems with nonlinear nonholonomic constraints – III Analysis of motion,* - ZAMM, Vol 98, No 8, 2013., pp. 550–574.

[60] Zeković D.: *Dynamics of mechanical systems with nonlinear nonholonomic constraints – II Differential equations of motion,* - ZAMM, Vol 91, No 11, 2011., pp. 899–922.

[61] Jeremić B., Radulović R., Obradović A., Šalinić S., Dražić M.: *Brachistochronic motion of a nonholonomic variable-mass mechanical system in general force fields,* - Mathematics and Mechanics of Solids, Vol 24, No 1, 2019., pp. 281–298.

[62] Jeremić B., Radulović R., Obradović A.: *Analysis of the brachistochronic motion of a variable mass nonholonomic mechanical system,* - Theoretical and Applied Mechanics, Vol 43, No 1, 2016., pp. 19-32.

[63] Azizov A. G.: *On the motion of a controlled system of variable mass,* - PMM J Appl Math Mec+, Vol 50, No 4, 1986., pp. 433-437.

[64] Radulović R., Jeremić B., Šalinić S., Obradović A., Dražić M.: *A new approach for the determination of the global minimum time for the brachistochrone with preselected interval for the normal reaction force value*, - International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol 101, 2018., pp. 26-35.

[65] Šalinić S., Obradović A., Mitrović Z., Rusov S.: *Brachistochrone with limited reaction of constraint in an arbitrary force field*, - Nonlinear Dynamics, Vol 69, No 1-2, 2012., pp. 211-222.

[66] Šalinić S., Obradović A., Mitrović Z., Rusov S.: *Erratum: Brachistochrone with limited reaction of constraint in an arbitrary force field (Nonlinear Dynamics, Vol 69, 2012, pp. 211-222)*, - Nonlinear Dynamics, Vol 70, No 1, 2012., pp. 891-892.

[67] Obradović A., Čović V., Vesković M., Dražić M.: *Brachistochronic motion of a nonholonomic rheonomic mechanical system*, - Acta Mech, Vol 214, No 3-4, 2010., pp. 291-304.

Поглавље 1

Математичко моделовање механичких система промењиве масе применом аналитичке механике и механике система промењиве масе одабиром најподеснијих облика диференцијалних једначина кретања

Приликом формирања диференцијалних једначина кретања механичких система може се приступити на различите начине. Савремена литература то и показује, што је у уводу ове докторске дисертације и приказано. Уколико се крене од варијационих принципа механике, коришћењем варијационог рачуна, могу се одредити разне форме диференцијалних једначина кретања механичког система. Ова методологија је веома добро позната у оквиру аналитичке механике.

У поглављу 2 докторске дисертације биће приказана реализација брахистохроног кретања нехолономног система промењиве масе помоћу идеалне холономне везе, а у поглављу 3 реализација брахистохроног кретања крутог тела са тачкама промењиве масе, такође помоћу идеалне холономне везе. У литератури [1, 2] је приказано како је, у задацима оптималног управљања, формирање и даље коришћење диференцијалних једначина кретања помоћу квазибрзина доста погодније из перспективе нумеричког израчунавања брахистохроног кретања нехолономних механичких система. Примена квазибрзина у диференцијалним једначинама кретања није неопходна код холономних система, као ни код слободног крутог тела са тачкама промењиве масе чије ће брахистохроно кретање бити реализовано накнадним наметањем идеалне холономне везе. Имајући у виду претходне исказе у овом раду ће се, поред диференцијалних једначина кретања материјалних система промењиве масе у квазибрзинама, користити и диференцијалне једначине у геометријски независним координатама.

1.1. Диференцијалне једначине кретања механичког система који се састоји и од тачака промењиве масе

Посматра се кретање механичког система који се састоји од N материјалних тачака чије је кретање ограничено идеалним холономним стационарним везама, тако да материјални систем има n степени слободе. Конфигурација система одређена је помоћу n генералисаних координата $\boldsymbol{q} = \left(q^1,\, q^2, ..., q^n\right)^T$, које су независне у геометријском смислу. Зарад општости проблема све тачке материјалног система могу се сматрати тачкама промењиве масе, при чеми се може сматрати да су закони промена маса материјалних тачака познати:

$$m_l = m_l(t), \qquad l = 1, ..., N, \tag{1.1}$$

где су $m_l(t)$ непрекидне и диференцијабилне функције времена. Промена масе може се остварити припајањем или одвајањем честица, и при томе се претпоставља да је процес припајања, односно одвајања честица непрекидан у посматраном интервалу времена.

Сматра се да су и релативне брзине припајања, односно одвајања честица познате:

$$\vec{v}_l^{rel} = \vec{v}_l^{rel}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t), \qquad l = 1, \ldots, N, \tag{1.2}$$

где је $\dot{\boldsymbol{q}} = \left(\dot{q}^1,\, \dot{q}^2, ..., \dot{q}^n\right)^T$ вектор генералисаних брзина. Кинетичка енергија механичког система је хомогена квадратна форма генералисаних брзина [3, 4]:

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{1.3}$$

где су $a_{ij} = a_{ij}(\boldsymbol{q}, t)$ коваријантне координате инерционог метричког тензора проширеног риманског простора функције генералисаних координата и времена t. С обзиром да у литератури не постоји прецизна и једнозначна одредница за назив величине a_{ij} биће дат кратак преглед назива ове величине у литератури.

Рецимо у монографији [5] на страни 24 за једну тачку масе m величине:

$$a_{ij} = m g_{ij} = m \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^j} = a_{ij}(m, q), \tag{1.4}$$

називају се инерциони тензори. У [6] на страни 28 за величине:

$$a_{ik} = m g_{ik}, \tag{1.5}$$

користи се назив инерциони коефицијенти или инерцијски тензор. У фусноти на истој страни пише: „У литератури је уобичајен назив метрички тензор конфигурационог простора". У књизи [7], на страни 222, величине a_{ij} за систем од N тачака маса m_ε дефинисане су као:

$$a_{ij} = \sum_{\varepsilon=1}^{3N} m_\varepsilon \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial q^i} \frac{\partial y_\varepsilon}{\partial q^j}, \tag{1.6}$$

док се величина:

$$ds^2 = a_{ij} dq^i dq^j, \tag{1.7}$$

сматра метричком формом уведеног конфигурационог простора. Затим се каже да се она, иако у њој фигуришу динамичке величине m_ε, зове кинематичка метричка форма. У уџбенику [8] уводи се уопштена метрика (дужина елемента криве) изразом:

$$ds^* = ds\sqrt{2(E_0 - U)}, \tag{1.8}$$

где је E_0 укупна механичка енергија за једну материјалну тачку, а U потенцијална енергија. За елемент $d\sigma$ сразмерном дужини лука ds у [9] се наводи да је он одређен изразом:

$$d\sigma = \sqrt{m}\, ds, \tag{1.9}$$

а да релација:

$$d\sigma^2 = m\, ds^2, \tag{1.10}$$

такође представља метрику простора. Одмах треба нагласити да употреба термина инерциони (инерцијски) тензор за координате a_{ij} може бити проблематична с обзиром да се у [10] на страни 59 тензор инерције:

$$J = \begin{bmatrix} J_x & \Pi_{xy} & \Pi_{xz} \\ \Pi_{yx} & J_y & \Pi_{yz} \\ \Pi_{zx} & \Pi_{zy} & J_z \end{bmatrix}, \tag{1.11}$$

такође назива инерциони тензор, што може изазивати одређене дилеме у погледу једнозначности разматраног појма. По субјективном мишљењу аутора овог рада за координате a_{ij} најквалитетнији и најпрецизнији назив био би да су то коваријантне координате инерционог метричког тензора, јер они у себи садрже и својства инертности, имају тензорски карактер, а у одређеном смислу одређују метрику простора.

Са друге стране у уџбенику [11] и монографији [6] за величине a_{ij} се користи и термин инерциони коефицијенти или коефицијенти инерције. Термин се може прихватити као коректан и прецизан из следећих разлога: ако израз за величине a_{ij} у случају кретања једне тачке масе m у n-димензионом конфигурационом простору напишемо на следећи начин:

$$a_{ij} = m g_{ij} = m\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j, \tag{1.12}$$

где су базни вектори $\vec{g}_i$ дати изразима:

$$\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}, \tag{1.13}$$

тада величине a_{ij} могу имати различите димензије. Наиме, када координата q^i има димензију дужине тада је базни вектор $\vec{g}_i$ бездимензиони, док у случају када је координата q^i угао базни вектор $\vec{g}_i$ има димензију дужине. Тако да коефицијенти a_{ij} могу имати следеће димензије:

а) обе координате имају димезију дужине - тада израз $a_{ij} = m\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$ има димензију [M];

б) ако једна координата има димензију дужине, а друга је угао - тада израз $a_{ij} = m\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$ има димензију [ML];

в) ако су обе координате угао - тада израз $a_{ij} = m\vec{g}_i \cdot \vec{g}_j$ има димензију [ML^2].

У случају а) коефицијенте a_{ij} можемо сматрати величинама које су аналогне маси; у случају б) коефицијенте a_{ij} можемо разматрати као величине аналогне линеарним статичким моментима маса, а у случају в) коефицијенте a_{ij} можемо разматрати као величине аналогне моментима инерције. На основу претходно изреченог назив коефицијенти инерције или инерциони коефицијенти може се прихватити као коректан.

У докторској дисертацији се користи позната Ајнштајнова конвенција о сумирању по поновљеним индексима, и при томе индекси у поглављу 1.1 имају следећи опсег вредности: $i, j, k, r, \delta = 1, 2, ..., n.$

Посматрани механички систем се креће у пољу познатих потенцијалних сила чија је потенцијална енергија једнака:

$$\Pi = \Pi(\boldsymbol{q}, t), \tag{1.14}$$

при чему на систем дејствују и познате непотенцијалне силе, чије су генералисане силе:

$$Q_i^w = Q_i^w(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t). \tag{1.15}$$

Како би се формирале диференцијалне једначине кретања механичког система у генералисаним координатама q^i поћи ће се од Лагранж-Даламберовог принципа [3, 4]:

$$\left(a_{ij} a^j - Q_i\right) \delta q^i = 0, \tag{1.16}$$

где су Q_i коваријантне генералисане силе које одговарају независним координатама, а a^j контраваријантне координате убрзања репрезентативне тачке механичког система које су дате изразима:

$$a^j = \ddot{q}^j + \Gamma^j_{kr} \dot{q}^k \dot{q}^r, \tag{1.17}$$

у којима су Γ^j_{kr} Кристофелови симболи друге врсте. Услед независности варијација генералисаних координата q^i у (1.16), а с обзиром на (1.17), добијају се диференцијалне једначине кретања разматраног система у коваријантном облику, које после сређивања гласе [12]:

$$a_{ij} \ddot{q}^j + \Gamma_{kr,i} \dot{q}^k \dot{q}^r = Q_i \ , \tag{1.18}$$

где су $\Gamma_{kr,i}$ Кристофелови симболи прве врсте и имају следећу вредност [3]:

$$\Gamma_{kr,i} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ri}}{\partial q^k} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial q^r} - \frac{\partial a_{kr}}{\partial q^i}\right). \tag{1.19}$$

Генарализане силе које одговарају генералисаним координатама q^i могу се приказати у општем случају у следећем облику [13, 14]:

$$Q_i(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^{\,w} + Q_i^{\,\mathrm{var}}. \tag{1.20}$$

Генералисане реактивне силе које настају услед припајања, односно одвајања честица могу се записати као [13, 14]:

$$Q_i^{\mathrm{var}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=\sum_{l=1}^{N}\dot{m}_l\vec{v}_l^{\,rel}\cdot\frac{\partial\vec{r}_l}{\partial q^i}\,, \tag{1.21}$$

где величине $\vec{r}_l$ ($l=1,\ldots,N$) представљају векторе положаја тачака у којима долази до припајања, односно одвајања честица.

Контраваријантни облик диференцијалних једначина кретања добија се множењем леве и десне стране сваке од једначина (1.18) контраваријантним координатама инерционог метричког тензора $a^{i\delta}$ и сабирањем по индексу *i*:

$$\ddot{q}^{\delta}+\Gamma_{kr}^{\delta}\dot{q}^{k}\dot{q}^{r}=Q^{\delta}, \tag{1.22}$$

где су:

$$Q^{\delta}=a^{i\delta}Q_i\,, \tag{1.23}$$

генералисане силе у контраваријантном облику.

Диференцијалне једначине кретања (1.22) представљају облик једначина који ће бити коришћен за одређивање брахистохроног кретања механичког система који се састоји од слободног крутог тела и тачака промењиве масе.

1.2. Диференцијалне једначине кретања механичког система промењиве масе чије је кретање ограничено линеарним, хомогеним нехолономним везама

Посматра се кретање система *N* материјалних тачака чије је кретање ограничено линеарним, хомогеним нехолономним везама. Конфигурација система одређена је помоћу *n* генералисаних координата $\boldsymbol{q}=\left(q^1,\,q^2,\ldots,\,q^n\right)^T$, које су независне у геометријском смислу. Зарад општости проблема претпоставља се да су све тачке материјалног система промењљиве масе при чему су закони промена маса материјалних тачака познати:

$$m_e = m_e(t), \qquad e = 1, \ldots, N, \tag{1.24}$$

где су $m_e(t)$ непрекидне и диференцијабилне функције времена. Као што је већ написано у поглављу 1.1, промена масе тачака може се остварити тако да се честице припајају или одвајају, при чему важи претпоставка да је у посматраном интервалу времена процес припајања, односно одвајања честица непрекидан. На исти начин могу се сматрати познатим и релативне брзине припајања, односно одвајања честица:

$$\vec{v}_e^{\,rel} = \vec{v}_e^{\,rel}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t), \qquad e = 1, \ldots, N, \tag{1.25}$$

где је $\dot{\boldsymbol{q}} = \left(\dot{q}^1, \dot{q}^2, \ldots, \dot{q}^n\right)^T$ вектор генералисаних брзина. Кинетичка енергија механичког система је хомогена квадратна форма генералисаних брзина [3, 4]:

$$T_{nhol} = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{1.26}$$

где су $a_{ij} = a_{ij}(\boldsymbol{q}, t)$ координате коваријантног инерционог метричког тензора функције генералисаних координата и времена *t*. Постојање тачака промењљиве масе (1.24) представља разлог зашто и време *t* фигурише у координатама инерционог метричког тензора. Индекси у овом поглављу узимају следеће вредности: $i, j, k, r = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, m$; $\nu = m+1, \ldots, n$. Кретање разматраног механичког система ограничено је помоћу *p* идеалних независних стационарних нехолономних хомогених механичких веза облика:

$$\gamma^\nu(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \equiv \dot{q}^\nu - c_\alpha^\nu \dot{q}^\alpha = 0, \tag{1.27}$$

где су $c_\alpha^\nu = c_\alpha^\nu(\boldsymbol{q})$. Број степени слободе кретања механичког система је $m=n-p$, при чему је *m* истовремено и број кинематски независних генералисаних координата q^{α} које одговарају независним генералисаним брзинама $\dot{q}^{\alpha}$. Увођењем m независних квазибрзина V^{β} независне генералисане брзине $\dot{q}^{\alpha}$ се могу, према [3, 4], представити у облику:

$$\dot{q}^{\alpha} = b^{\alpha}_{\beta} V^{\beta}. \tag{1.28}$$

Водећи рачуна о (1.27) и (1.28), зависне генералисане брзине могу се записати на следећи начин:

$$\dot{q}^{\nu} = b^{\nu}_{\beta} V^{\beta}, \tag{1.29}$$

где је $b^{\nu}_{\beta} = c^{\nu}_{\alpha} b^{\alpha}_{\beta}$. На основу израза (1.28) и (1.29) следи да се све генералисане брзине, како зависне тако и независне, могу представити линеарним формама по m независних квазибрзина:

$$\dot{q}^{i} = b^{i}_{\alpha} V^{\alpha}, \tag{1.30}$$

где су $b^{i}_{\alpha} = b^{i}_{\alpha}(\boldsymbol{q})$ непрекидне функције са непрекидним првим изводима у области у којој се разматра кретање механичког система. Коришћењем претходног израза (1.30), израз (1.26) за кинетичку енергију у случају нехолономног механичког система добија облик хомогене квадратне форме по независним квазибрзинама:

$$T^{*} = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} V^{\alpha} V^{\beta}, \tag{1.31}$$

где је:

$$G_{\alpha\beta}(\boldsymbol{q},t) = a_{ij} b^{i}_{\alpha} b^{j}_{\beta}\ , \tag{1.32}$$

при чему су $G_{\alpha\beta}$ коваријантне координате инерционог метричког тензора у квазибрзинама (у литератури квазикоординате се понекад називају и нехолономне координате).

Посматрани механички систем креће се у пољу познатих потенцијалних сила чија је потенцијална енергија дата са (1.14) при чему на материјални систем дејствују познате произвољне непотенцијалне силе, а чије су генералисане силе једнаке (1.15). Како би се формирале диференцијалне једначине кретања механичког система по кинематски независним координатама поћи ће се од Лагранж-Даламберовог принципа (1.6) [3, 4]. Применом принципа Херца-Хедлера [15, 16], а сагласно са (1.30) може се записати:

$$\delta q^i = b^i_\alpha \delta\pi^\alpha, \tag{1.33}$$

где су $\delta\pi^\alpha$ варијације независних квазикоордината, при чему се формално може писати $\dot{\pi}^\alpha = V^\alpha$. Услед независности синхроних варијација $\delta\pi^\alpha$ (односно $\delta\pi^\alpha \neq 0$), а узимајући у обзир (1.16), (1.17), (1.30) и (1.33), уз коришћење контраваријантних координата инерционог метричког тензора $G^{\alpha\beta}$, после срећивања добијају се диференцијалне једнчине кретања разматраног система [1, 2]:

$$\dot{V}^\beta = G^{\alpha\beta}\Delta_\alpha, \tag{1.34}$$

где су:

$$\Delta_\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V},t) = \tilde{Q}_\alpha - a_{ij} b^i_\alpha b^k_\gamma \left(\frac{\partial b^j_\beta}{\partial q^k} + \Gamma^j_{kr} b^r_\beta \right) V^\gamma V^\beta, \tag{1.35}$$

док су генералисане силе које одговарају кинематски независним координатама приказане као:

$$\tilde{Q}_\alpha\left(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V},t\right) = b^i_\alpha Q_i, \tag{1.36}$$

где је $\boldsymbol{V} = \left(V^1, V^2, \ldots, V^m\right)^T$.

Генералисане силе које одговарају геометријски независним координатама могу се приказати у општем случају у следећем облику [13, 14]:

$$Q_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i{}^w + Q_i{}^{\mathrm{var}} + Q_i{}^{\Lambda}. \tag{1.37}$$

Генералисане реактивне силе које настају услед припајања, односно одвајања честица могу се сада дати изразом [13, 14]:

$$Q_i^{\mathrm{var}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = \sum_{e=1}^{N} \dot{m}_e \vec{v}_e^{\,rel} \cdot \frac{\partial \vec{r}_e}{\partial q^i}\,. \tag{1.38}$$

Како се генералисане силе реакција наметнутих нехолономних веза (1.27) могу записати у следећем облику:

$$Q_i^{\Lambda}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \Lambda_\nu \frac{\partial \gamma^\nu}{\partial \dot{q}^i}\,, \tag{1.39}$$

где су Λ_ν Лагранжеви множитељи веза, то одговарајуће генералисане силе реакција нехолономних веза по квазикоординатама, $\tilde{Q}_\alpha^\Lambda$, на основу (1.27), (1.36) и (1.39) гласе:

$$\tilde{Q}_\alpha^\Lambda = b_\alpha^\beta Q_\beta^\Lambda + b_\alpha^\nu Q_\nu^\Lambda = \Lambda_\nu \left(b_\alpha^\nu - b_\alpha^\beta c_\beta^\nu \right) = 0. \tag{1.40}$$

На основу ових једначина може се закључити да се Лагранжеви множитељи веза не појављују у диференцијалним једначинама кретања (1.34), па је према томе поступак одређивања реакција нехолономних веза потпуно раздвојен од поступка одређивања кретања система.

Диференцијалне једначине (1.34) представљају облик једначина који ће бити коришћен за одређивање брахистохроног кретања нехолономног механичког система промењиве масе.

Литература

[1] Jeremić B., Radulović R., Obradović A., Šalinić S., Dražić M.: *Brachistochronic motion of a nonholonomic variable-mass mechanical system in general force fields,* - Mathematics and Mechanics of Solids, Vol 24, No 1, 2019., pp. 281–298.

[2] Radulović R.: *Global minimum time for the motion of mechanical systems with limited controls and constraint reactions*, - Doctoral dissertation, Faculty of Mechanical engineering, University of Belgrade, 2017.

[3] Lurie A. I.: *Analytical mechanics*, - Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.

[4] Papastavridis J. G.: *Analytical mechanics*. New York: Oxford University Press, 2002.

[5] Vujičić V.: *Preprincipi mehanike*, Monografija - drugo izdanje, Beograd: Matematički institut Srpske akademije nauka i umetnosti, 2013.

[6] Vujičić V.: *Kovarijantna dinamika*, Monografija, Beograd: Matematički institut Srpske akademije nauka i umetnosti, 1981.

[7] Anđelić T.: *Tenzorski račun*, Beograd: Naučna knjiga, 1973.

[8] Петкевич В. В.: *Теоретическая механика*, Москва: Наука, 1981.

[9] Vuković J.: *Odabrana poglavlja iz Mehanike - Doktorske studije*, Beograd: Mašinski fakultet, 2012.

[10] Bilimović A.: *Racionalna mehanika II - Mehanika sistema,* Beograd: Naučna knjiga, 1951.

[11] Петкевич В. В.: Курс *Теоретической механики Том II*, Москва: Наука, 1977.

[12] Obradović A., Šalinić S., Jeremić O., Mitrović Z.: *On the brachistochronic motion of a variable-mass mechanical system in general force fields,* - Math Mech Solids, Vol 19, No 4, 2014., pp. 398-410.

[13] Pesce C. P.: *The application of Lagrange equations to mechanical systems with mass explicitly dependent on position*, - J Appl Mech (Trans ASME), Vol 70, No 5, 2003., pp. 751–756.

[14] Cvetićanin L.: *Conservation laws in systems with variable mass*, - J Appl Mech (Trans ASME), Vol 60, No 4, 1993., pp. 954–958.

[15] Baird D., Hughes R. I. G., Nordmann A. (eds): *Heinrich Hertz: classical physicist, modern philosopher*, - Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.

[16] Vujanović B. D., Atanacković T. M.: *An introduction to modern variational techniques in mechanics and engineering*, - Boston, MA: Birkhäuser, 2004.

Поглавље 2

Реализација брахистохроног равног кретања нехолономног механичког система промењиве масе помоћу идеалне холономне везе ограничене реакције

У овом поглављу[1] разматра се реализација брахистохроног кретања нехолономног маханичког система, који се састоји од тачака промењиве масе, помоћу идеалне холономне везе ограничене реакције. Претпоставља се да систем врши равно кретање у произвољном пољу сила и да има две кинематске независне генералисане координате. При томе су познати закони промене маса тачака, као и релативне брзине припајања, односно одвајања честица. За скаларно управљање узета је ограничена реакција холономне везе. Проблем брахистохроног кретања решен је, коришћењем Понтрјагиновог принципа максимума и теорије сингуларног оптималног управљања, као двотачкасти гранични проблем. Како је реакција везе ограничена, испитани су различити типови структура управљања од сингуларних до потпуно несингуларних. Целокупна теорија илустрована је примером. Разматрања у овом поглављу ослањају се на рад [2] и представљају његов својеврсни наставак.

2.1. Поставка проблема

Посматра се равно кретање механичког система који се састоји од N материјалних тачака, чије је кретање ограничено линеарним, хомогеним нехолономним везама. Сама конфигурација система дефинисана је помоћу n генералисаних координата $\boldsymbol{q} = \left(q^1, q^2, ..., q^n\right)^T$, које су независне у геометријском

[1] ово поглавље објављено је у раду [1]

смислу, и на основу тога положај механичког система је једнозначно одређен. Може се претпоставити да све тачке материјаног система могу бити променљиве масе, при чему су закони промена маса материјалних тачака познати:

$$m_z = m_z(t), \qquad z = 1, ..., N, \tag{2.1}$$

где су $m_z(t)$ непрекидне и диференцијабилне функције времена. Промену масе тачака могуће је остварити припајањем или одвајањем честица. при чему је тај процес непрекидан у посматраном интервалу времена. Такође, сматра се да су познате и релативне брзине припајања, односно одвајања честица:

$$\vec{v}_z^{rel} = \vec{v}_z^{rel}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t), \qquad \mathrm{z} = 1, \ldots, N, \tag{2.2}$$

где је $\dot{\boldsymbol{q}} = \left(\dot{q}^1, \dot{q}^2, ..., \dot{q}^n\right)^T$ вектор генералисаних брзина. Кинетичка енергија посматраног механичког система је хомогена квадратна форма генералисаних брзина [3, 4]:

$$T(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t) = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{2.3}$$

где су $a_{ij} = a_{ij}\left(\boldsymbol{q}, t\right)$ коваријантне координате инерционог метричког тензора функције генералисаних координата и времена t. У овом поглављу индекси узимају следеће вредности: $i, j, k, r = 1, \ldots, n;\ \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2;\ \vartheta, \rho = 3, \ldots, n$. Равно кретање разматраног механичког система ограничено је помоћу p идеалних независних стационарних нехолономних хомогених механичких веза облика:

$$\gamma^\vartheta\left(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}\right) \equiv \dot{q}^\vartheta - d_\alpha^\vartheta \dot{q}^\alpha = 0, \tag{2.4}$$

где су $d_\alpha^\vartheta = d_\alpha^\vartheta\left(\boldsymbol{q}\right)$. Број p узима се тако да број степена слободе кретања механичког система буде m=n-p=2, па је p=n-2. Уједно m=2 представља број кинематски независних генералисаних координата q^α које одговарају независним генералисаним брзинама $\dot{q}^\alpha$. Ако се уведе m независних квазибрзина V^β, на основу (1.28) и (1.29), све генералисане брзине $\dot{q}^i$ могу се, у складу са [3, 4], представити у облику:

$$\dot{q}^i = c^i_\beta V^\beta, \tag{2.5}$$

где су $c^i_\beta = c^i_\beta(\boldsymbol{q})$ непрекидне функције са непрекидним првим изводима у области у којој се разматра кретање механичког система. Употребом израза (2.5), израз за кинетичку енергију нехолономног механичког система (2.3), у складу са (1.31), добија облик хомогене квадратне форме по независним квазибрзинама:

$$T^*(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V},t) = \frac{1}{2} G_{\alpha\beta} V^\alpha V^\beta, \tag{2.6}$$

Посматрани механички систем креће се у пољу познатих потенцијалних сила са потенцијалном енергијом која је једнака (1.14) и на материјални систем дејствују познате непотенцијалне силе, чије су генералисане силе изражене са (1.15). Непотенцијалне силе у овом поглављу ће бити означене са Q_i^{npot} при чему у њих неће ући управљачке силе због практичнијег даљег излагања. Као што је приказано у поглављу 1 диференцијалне једначине кретања нехолономног механичког система формиране су, помоћу Лагранж-Даламберовог принципа (1.16), у функцији кинематски независних координата [3, 4]. Ако се примени принцип Херца-Хедлера [5, 6], сагласно са (1.33) и (2.5) може се записати:

$$\delta q^i = c^i_\beta \delta\pi^\beta. \tag{2.7}$$

Према (1.34), добијају се диференцијалне једначине кретања разматраног система [2, 7]:

$$\dot{V}^\alpha = G^{\alpha\beta} \Delta_\beta, \tag{2.8}$$

где су:

$$\Delta_\beta(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V},t) = \tilde{Q}^*_\beta - a_{ij} c^i_\beta c^k_\gamma \left(\frac{\partial c^j_\delta}{\partial q^k} + \Gamma^j_{kr} c^r_\delta \right) V^\gamma V^\delta. \tag{2.9}$$

Генералисане силе у изразу (2.9), које одговарају кинематски независним координатама, у складу са (1.36) приказане су као:

$$\tilde{Q}^{*}_{\beta}\left(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V},t\right)=c^{i}_{\beta}Q^{*}_{i}, \tag{2.10}$$

где је $\boldsymbol{V}=\left(V^{1},V^{2}\right)^{T}$.

Осим тога, генералисане силе које одговарају геометријски независним координатама, у општем случају, приказане су у следећем облику [8, 9]:

$$Q^{*}_{i}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=-\frac{\partial\Pi}{\partial q^{i}}+Q_{i}^{npot}+Q_{i}^{\mathrm{var}}+Q_{i}^{c}+Q_{i}^{\Lambda}. \tag{2.11}$$

Генералисане реактивне силе које настају услед припајања, односно одвајања честица дате су изразом [8, 9]:

$$Q^{\mathrm{var}}_{i}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)=\sum_{z=1}^{N}\dot{m}_{z}\vec{v}_{z}^{rel}\cdot\frac{\partial\vec{r}_{z}}{\partial q^{i}}, \tag{2.12}$$

док су уједно $Q^{c}_{i}=Q^{c}_{i}(t)$ - генералисане управљачке силе, чија је укупна снага током брахистохроног кретања једнака нули:

$$Q^{c}_{i}\dot{q}^{i}=0, \tag{2.13}$$

при чему се, сагласно са (2.5) и (2.10) може записати:

$$\tilde{Q}^{c}_{\alpha}V^{\alpha}=0. \tag{2.14}$$

Генералисане силе, услед наметнутих нехолономних веза (2.4), могу се записати у следећем облику:

$$Q^{\Lambda}_{i}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=\Lambda_{\vartheta}\frac{\partial\gamma^{\vartheta}}{\partial\dot{q}^{i}}, \tag{2.15}$$

где су Λ_{ϑ} Лагранжеви множитељи веза. Сада се може на основу (1.40), (2.4), (2.10) и (2.15) закључити да се Лагранжеви множитељи веза не појављују у диференцијалним једначинама кретања (2.8) па је, као што је већ објашњено у поглављу 1, поступак одређивања реакција нехолономних веза потпуно раздвојен од поступка одређивања кретања система.

Поставља се питање реализације кретања приказаног механичког система. Одговор је нађен у накнадном наметању идеалне холономне везе. Након нумеричке интеграције диференцијалних једначина кретања, имајући у виду да се ради о систему са две кинематски независне генералисане координате, кретање система се може остварити наметањем глатких вођица једној тачки чије је кретање познато. Без губитка општости проблема нека то буде тачка *S* система. На тај начин брахистохроно кретање је остварено без утицаја активних сила, што је у складу са основним проблемом брахистохроне тачке у вертикалној равни.

Може се сматрати да су задате вредности генералисаних координата, као и вредност механичке енергије механичког система које одговарају почетном тренутку:

$$t_0 = 0, \quad \boldsymbol{q}(t_0) = \boldsymbol{q}_0, \tag{2.16}$$

$$T^*(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{V}_0, t_0) + \Pi(\boldsymbol{q}_0, t_0) = E_0, \tag{2.17}$$

као и вредности генералисаних координата које одговарају крајњем положају механичког система:

$$\boldsymbol{q}(t_f) = \boldsymbol{q}_f, \tag{2.18}$$

где су $E_0 \in \mathbb{R}$ и $t_f \in \mathbb{R}$. Проблем брахистохроног равног кретања нехолономног механичког система променљиве масе, чије су диференцијалне једначине кретања дате у облику (2.8), састоји се у одређивању генералисаних управљачких сила $Q_i^c = Q_i^c(t)$, које се у овом случају своде на одређивање реакције наметнуте идеалне холономне везе која у општем случају може бити ограничена, као и одговарајућих једначина кретања система $q_i = q_i(t)$, тако да систем за најкраће време t_f из почетног стања дефинисаног са (2.16) и (2.17), пређе у крајњи положај дефинисан са (2.18).

2.2. Брахистохрони проблем као задатак оптималног управљања

Приказани брахистохрони проблем може се формулисати као задатак оптималног управљања увођењем скаларног управљања u:

$$u=R_S \tag{2.19}$$

где је R_S пројекција реакције наметнуте идеалне холономне везе у тачки S механичког система[2]. При томе је вектор реакције везе, узевши у обзир да је укупна снага управљачких сила на брахистохроном кретању једнака нули, дефинисан са:

$$\vec{R}_S = u\frac{\vec{v}_S'}{\left|\vec{v}_S\right|} = u\frac{-\dot{y}_S\vec{i} + \dot{x}_S\vec{j}}{\sqrt{\dot{x}_S^2 + \dot{y}_S^2}}\ , \tag{2.20}$$

где је $\vec{v}_S$ вектор брзине тачке S, $\vec{v}_S'$ вектор за који важи $\left|\vec{v}_S\right| = \left|\vec{v}_S'\right|$, $\vec{v}_S \cdot \vec{v}_S' = 0$. Како би одредили генералисане управљачке силе потребно је одредити вирутални рад реакције везе:

$$\delta A\left(\vec{R}_S\right) = \vec{R}_S \cdot \delta\vec{r}_S\,, \tag{2.21}$$

где је $\delta\vec{r}_S = \delta x_S\vec{i} + \delta y_S\vec{j}$ варијација вектора положаја тачке S. Имајући у виду да се ради о нехолономном склерономном систему важе следећи изрази [3]:

$$\begin{aligned}
\delta x_S &= \frac{\partial x_S}{\partial q^i}\delta q^i,\\
\delta y_S &= \frac{\partial y_S}{\partial q^i}\delta q^i,\\
\dot{x}_S &= \frac{\partial x_S}{\partial q^j}\dot{q}^j,\\
\dot{y}_S &= \frac{\partial y_S}{\partial q^j}\dot{q}^j.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

[2] Као што је већ објашњено, веза се намеће накнадно и на тај начин дати систем задржава исти број степени слободе који је имао, а управљачка сила мења дејство реакције те везе у виду вођице која се поклапа са путањом тачке S.

Сада се на основу (2.20), (2.21) и (2.22) могу изразити генералисане управљачке силе:

$$Q_i^c = u\frac{e_{ij}\dot{q}^j}{\sqrt{\left(\frac{\partial x_S}{\partial q^j}\dot{q}^j\right)^2+\left(\frac{\partial y_S}{\partial q^j}\dot{q}^j\right)^2}} = uD_i\left(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V}\right), \tag{2.23}$$

где су $e_{ij} = \frac{\partial x_S}{\partial q^j}\frac{\partial y_S}{\partial q^i} - \frac{\partial y_S}{\partial q^j}\frac{\partial x_S}{\partial q^i}$. Узимајући у обзир (2.10) следи:

$$\tilde{Q}_\alpha^c = D_i c_\alpha^i u = g_\alpha\left(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V}\right)u. \tag{2.24}$$

Диференцијалне једначине првог реда у нормалном облику, у теорији оптималног управљања познате као једначине стања, увођењем реономне координате $q^{n+1} \triangleq t$ могу се записати на следећи начин:

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= f_i(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V},q^{n+1},u) \equiv c_\alpha^i V^\alpha, \\ \dot{q}^{n+1} &= f_{n+1}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V},q^{n+1},u) \equiv 1, \\ \dot{V}^\alpha &= h_\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V},q^{n+1},u) \equiv c^\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V},q^{n+1}) + d^\alpha(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V},q^{n+1})u, \end{aligned} \tag{2.25}$$

где су:

$$\begin{aligned} c^\alpha &= G^{\alpha\beta}\left(\tilde{Q}_\beta^\Pi + \tilde{Q}_\beta^{npot} + \tilde{Q}_\beta^{\mathrm{var}} - a_{ij}c_\beta^i c_\gamma^k\left(\frac{\partial c_\delta^j}{\partial q^k} + \Gamma_{kr}^j c_\beta^r\right)V^\gamma V^\delta\right), \\ d^\alpha &= G^{\alpha\beta}g_\beta. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Кретање разматраног нехолономног система описано једначинама стања (2.25) представља брахистохрони проблем, који се састоји у одређивању оптималног скаларног управљања u и одговарајућих оптималних трајекторија у простору стања $q^i(t)$, тако да механички систем из почетног стања одређеног са (2.16) и (2.17) пређе у крајњи положај (2.18), за минимално време. Описани проблем може се изразити помоћу услова да функционал [10]:

$$J\left(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V},q^{n+1},u\right)=\int_0^{t_f} dt, \tag{2.27}$$

на интервалу [0, t_f] има минималну вредност. Како би проблем оптималног управљања био решен применом Понтрјагиновог принципа максимума [11], формира се Хамилтонијан облика Хамилтон-Понтрјагин [10]:

$$H\left(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V},q^{n+1},u,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}\right)=-1+\lambda_j c_\alpha^j V^\alpha+\lambda_{n+1}\dot{q}^{n+1}+\nu_\alpha(c^\alpha+d^\alpha u), \tag{2.28}$$

где су $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_{n+1})^T$, $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\nu_2)^T$ док су $\lambda_i(\cdot):\left[0,t_f\right]\to\mathbb{R}$, $\lambda_{n+1}(\cdot):\left[0,t_f\right]\to\mathbb{R}$ и $\nu_\alpha(\cdot):\left[0,t_f\right]\to\mathbb{R}$ спрегнуте променљиве, па спрегнути систем диференцијалних једначина има облик:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_i&=-\frac{\partial H}{\partial q^i}=-\lambda_j\frac{\partial c_\alpha^j}{\partial q^i}V^\alpha-\nu_\alpha\left(\frac{\partial c^\alpha}{\partial q^i}+\frac{\partial d^\alpha}{\partial q^i}u\right),\\
\dot{\lambda}_{n+1}&=-\frac{\partial H}{\partial q^{n+1}}=-\lambda_j\frac{\partial c_\alpha^j}{\partial q^{n+1}}V^\alpha-\nu_\alpha\left(\frac{\partial c^\alpha}{\partial q^{n+1}}+\frac{\partial d^\alpha}{\partial q^{n+1}}u\right),\\
\dot{\nu}_\beta&=-\frac{\partial H}{\partial V^\beta}=-\lambda_j c_\beta^j-\nu_\alpha\left(\frac{\partial c^\alpha}{\partial V^\beta}+\frac{\partial d^\alpha}{\partial V^\beta}u\right).
\end{aligned} \tag{2.29}$$

На основу (2.28) може се записати:

$$H\left(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V},q^{n+1},u,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}\right)=H_0+H_1u, \tag{2.30}$$

где су:

$$\begin{aligned}
H_0&=-1+\lambda_j c_\alpha^j V^\alpha+\lambda_{n+1}\dot{q}^{n+1}+\nu_\alpha c^\alpha,\\
H_1&=\nu_\alpha d^\alpha.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

У општем случају реакција идеалне холономне везе може бити ограничена, а тиме је ограничено и управљање:

$$|u|\le C, \tag{2.32}$$

где је C ограничење реакције везе. Пошто скаларно управљање линеарно фигурише у једначинама стања, приликом решавања неопходно је размотрити могућност појаве сингуларних решења. Она се, у зависности од могућности веза (допуштеног интензитета реакције веза) могу појавити на целом интервалу или на појединим деловима. Према томе управљање може узимати следеће облике:

$$u = \begin{cases} u_{sing}, & H_1 = 0 \\ C * \operatorname{sgn} H_1, & H_1 \neq 0 \end{cases} \tag{2.33}$$

где је sgn() сигнум функција. Дакле, потребно је решити симултано системе (2.25) и (2.29), при чему се у зависности од граничне вредности C може појавити сингуларно решење на целом интервалу, комбинација сингуларних и несингуларних решења, као и релејно управљање (bang-bang). У случају управљања познатог у теорији оптималног управљања као сингуларно управљање, било да се јавља на делу било на целом интервалу, неопходни услов оптималности Понтрјагиновог принципа максимума има облик [12]:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = H_1 = 0, \tag{2.34}$$

одакле се сингуларно оптимално управљање u не може експлицитно одредити. Према томе захтева се да H_1 буде идентички једнако нули дуж оптималне трајекторије у простору стања. Сингуларно оптимално управљање u одређује се [13] даљим диференцирањем по времену (2.34) узевши у обзир (2.25) и (2.29):

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\partial H}{\partial u}\right] = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots . \tag{2.35}$$

Приликом одређивања релација (2.35) примениће се формализам Поасонових заграда [13]:

$$\dot{H}_1 = \{H_1, H\} = \{H_1, H_0\} + \{H_1, H_1\} u = 0. \tag{2.36}$$

Узевши у обзир (2.34) као и да $\{H_1, H_1\} = 0$ [13] добија се:

$$\left\{H_1, H_0\right\} = \sum_{\theta=1}^{n+3}\left(\frac{\partial H_1}{\partial y^\theta}\frac{\partial H_0}{\partial \zeta^\theta} - \frac{\partial H_1}{\partial \zeta^\theta}\frac{\partial H_0}{\partial y^\theta}\right) = 0, \tag{2.37}$$

где су $\boldsymbol{y} = (y^1, y^2, \ldots, y^{n+3})^T \triangleq (q^1, q^2, \ldots, q^{n+1}, V^1, V^2)^T$ и $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta^1, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n+3})^T \triangleq (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}, \nu_1, \nu_2,)^T$. Даљим диференцирањем (2.37) добија се:

$$\left\{\left\{H_1, H_0\right\}, H_0\right\} + \left\{\left\{H_1, H_0\right\}, H_1\right\} u = 0. \tag{2.38}$$

На основу тога може се изразити сингуларно управљање као:

$$u = -\frac{\left\{\left\{H_1, H_0\right\}, H_0\right\}}{\left\{\left\{H_1, H_0\right\}, H_1\right\}}\,. \tag{2.39}$$

Осим тога услови трансверзалности могу се приказати у следећем облику:

$$\left(\lambda_i \Delta q^i + \lambda_{n+1}\Delta q^{n+1} + \nu_\alpha \Delta V^\alpha\right)\Big|_0^{t_f} = 0, \tag{2.40}$$

$$\left(H\Delta t\right)\Big|_0^{t_f} = 0, \tag{2.41}$$

где $\Delta(\cdot)$ представља асинхрону варијацију [3, 4] величине $(\cdot)$. На основу услова (2.34) могу се изразити спрегнута променљива ν_1 као функција спрегнуте променљиве ν_2:

$$\nu_1 = -\nu_2 \frac{d^2}{d^1}\,. \tag{2.42}$$

Сада из једначина (2.37) узимајући у обзир (2.31) и (2.42) може се изразити [7]:

$$\lambda_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{V}, q^{n+1}, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n, \nu_2) = \frac{1}{c_\beta^1 d^\beta}\left(\nu_\gamma \varphi^\gamma - \lambda_2 c_\alpha^2 d^\alpha - \lambda_\rho c_\alpha^\rho d^\alpha\right), \tag{2.43}$$

где је:

$$\varphi^{\gamma} = \frac{\partial d^{\gamma}}{\partial q^{i}} c_{\alpha}^{i} V^{\alpha} + \frac{\partial d^{\gamma}}{\partial q^{n+1}} \dot{q}^{n+1} + \frac{\partial d^{\gamma}}{\partial V^{\alpha}} c^{\alpha} - \frac{\partial c^{\gamma}}{\partial V^{\alpha}} d^{\alpha}. \tag{2.44}$$

Како је почетни положај механичког система према (2.16) одређен следи:

$$\Delta t(t_0) = 0, \qquad \Delta q^{i}(t_0) = 0\,, \qquad \Delta q^{n+1}(t_0) = 0. \tag{2.45}$$

Ако се узме у обзир (2.45) и примени се оператор асинхроне варијације на (2.17) може се добити:

$$G_{\alpha\beta}(t_0) V^{\beta}(t_0) \Delta V^{\alpha}(t_0) = 0, \tag{2.46}$$

и на крају, након замене (2.42) и (2.45) у (2.40), под условом да је сингуларно управљање у почетном тренутку, добија се:

$$\nu_{\alpha}(t_0) \Delta V^{\alpha}(t_0) = \nu_2(t_0) G_{\alpha\beta}(t_0) V^{\beta}(t_0) \Delta V^{\alpha}(t_0) = 0. \tag{2.47}$$

На основу (2.45), (2.46) и (2.47) очигледно се види да су услови транверзалности (2.40) и (2.41) у почетној конфигурацији система задовољени. У крајњој конфигурацији (2.18) механичког система време није познато и на основу тога произилази услов трансверзалности из (2.41):

$$H\left(t_f\right) = 0, \tag{2.48}$$

а како величине $V^{\alpha}(t_f)$ и $q^{n+1}(t_f)$ нису унапред одређене ($\Delta V^{\alpha}(t_f) \neq 0$, $\Delta q^{n+1}(t_f) \neq 0$), наредни услови трансверзалности добијају се из (2.40)

$$\nu_{\alpha}(t_f) = 0, \quad \lambda_{n+1}(t_f) = 0. \tag{2.49}$$

На основу (2.28), (2.43), (2.48) и (2.49) може се успоставити следећа зависност у аналитичком облику:

$$\lambda_e(t_f) = \lambda_e(\boldsymbol{V}(t_f), q^{n+1}(t_f), \lambda_{i, i \neq 1, i \neq e}(t_f)), \tag{2.50}$$

где су $\boldsymbol{V}(t_f)=(V^1(t_f),\, V^2(t_f))^T$ и $q^{n+1}(t_f)=t_f$.

Ако се разматрање ограничи на сингуларна управљања првог реда при чему је $\{\{H_1,H_0\},H_1\}\neq 0$, уз коришћење (2.42) и (2.43), сингуларно скаларно управљање u_{sing} из (2.39) може се приказати у следећем облику:

$$u_{sing} = u_{sing}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{V},q^{n+1},\lambda_2,\lambda_3,...,\lambda_n,\nu_2). \tag{2.51}$$

Такође, неопходни Келијев услов оптималности за сингуларно управљање првог реда дат је у облику [13]:

$$-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial H}{\partial u}\right]\right)\leq 0. \tag{2.52}$$

Применом Поасонових заграда овај услов се своди на:

$$K=\{\{H_1,H_0\},H_1\}>0. \tag{2.53}$$

У случају несингуларног управљања не важи (2.34) тј. $H_1\neq 0,$ па управљање, било на делу или на целом интервалу (у случају релејног управљања), има вредност $C\,\mathrm{sgn}\,H_1$. Како не важи (2.34) следи да не важи ни (2.35)-(2.39) па се не може изразити ни (2.43). Из тог разлога у изразу (2.50) фигурише и $\lambda_1(t_f)$. Такође пошто не важи (2.34) ни израз за услов трансверзалности на почетку интервала (2.47) не важи већ се на основу (2.40) и (2.46) може записати само:

$$\left(\nu_\alpha(t_0)-G_{\alpha\beta}(t_0)V^\beta(t_0)\right)\Delta V^\alpha(t_0)=0, \tag{2.54}$$

а како $V^\alpha(t_0)$ није унапред одређено ($\Delta V^\alpha(t_0)\neq 0$) следи:

$$\nu_\alpha(t_0)-G_{\alpha\beta}(t_0)V^\beta(t_0)=0. \tag{2.55}$$

Треба напоменути да је у случају постојања сингуларних и несингуларних делова потребно задовољити услове спрезања. Одговарајући услови за спрезање између сингуларног и несингуларног дела екстремалног управљања, који представљају неопходне услове за оптимално спрезање, морају бити задовољени, што је одређено Теоремом 1 из [7, 14]. Наиме, уколико је $2q$ најнижи ред извода по времену функције прекида H_1, који садржи експлицитно управљање u, и $u^{(r)}\left(r \geq 0\right)$ најнижи ред извода управљања u који има прекид у тренутку спрезања t^*, у складу са Теоремом 1 [7, 14], неопходан услов за спрезање између сингуларног и несингуларног дела екстремалног управљања изражава се условом да је збир q+r непаран цео број. Уколико је q=1 (управљање првог реда) и r=0 ($u(t)$ има прекид у тачки спрезања), услови су задовољени, што ће и бити случај у овде разматраном примеру.

Такође потребно је истаћи да се смањивањем границе (2.32) структура управљања мења. Тако да ће кроз пример бити покушано да се објасни како се за различите вредности границе (2.32) могу добити различите структуре управљања.

Заменом (2.33) у (2.25) и (2.29) добија се двотачкасти гранични проблем (TPBVP) са $2n$+6 нелинеарних диверенцијалних једначина првог реда у нормалном облику. Услед нелинеарности у општем случају неопходна је примена одговарајућих нумеричких метода [15]. У овом раду примениће се метод погађања (shooting method).

У случају да на управљање није наметнуто ограничење (2.32), оно је сингуларно на целом интервалу [0, t_f]. Метод погађања у овом случају најподесније је извршити нумеричком интеграцијом уназад одабиром (n+1) вредности $\lambda_{i,i\neq 1,i\neq e}(t_f), V^{\alpha}(t_f), t_f$, које ће обезбедити испуњење исто толико почетних услова (2.16) и (2.17). Вредност $\lambda_1(t_f)$ одређена је преко (2.43) за t=t_f, а $\lambda_e(t_f)$ из израза (2.50).

Уколико постоји ограничење (2.32) неопходно је размотрити и појаву делова екстремалне трајекторије на којима је $u(t)$=$C\mathrm{sgn}H_1$ и у овом случају први корак при решавању је да се одреди сингуларно решење. Уколико је u^*=$u_{sing,\,max}(t) \leq C$, онда је сингуларно управљање и екстремално. Ако то није случај, треба испитати шта се догађа са структуром управљања даљим снижавањем границе испод u^*, а све до испуњења (2.32). Приликом тражења решења претпоставиће се да су делови на којима је $u(t)=C\text{sgn}H_1$ тамо где је сингуларно управљање на целом интервалу прешло преко границе. То се може догодити на крајевима интервала или негде у средини.

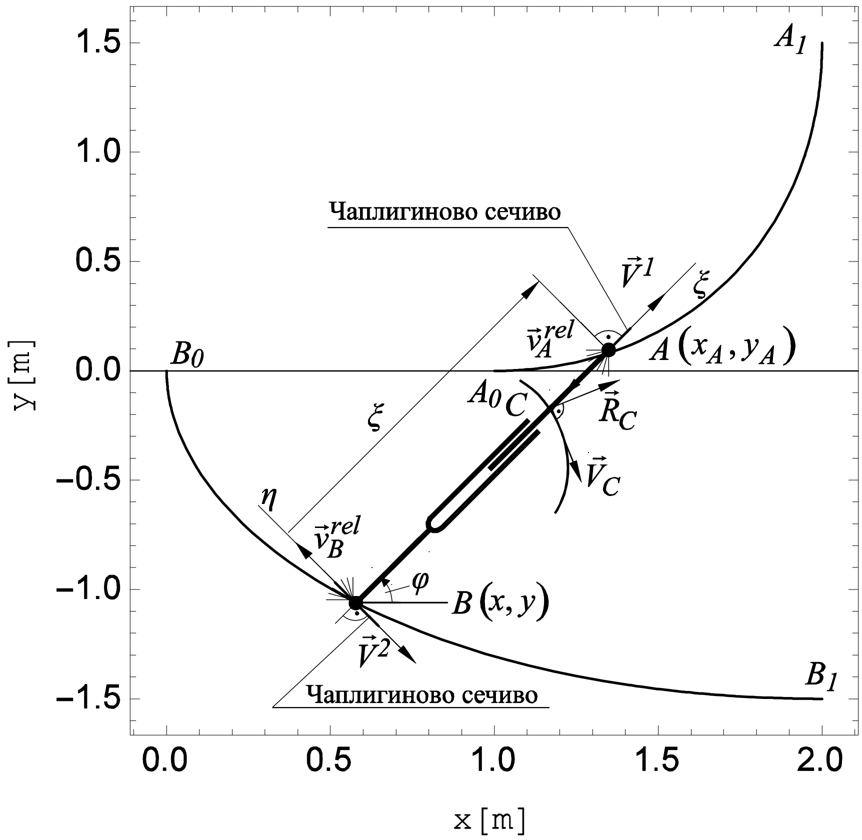
Уколико је структура управљања таква да је $u(t)=C\text{sgn}H_1$ на крају интервала $[0, t_f]$, онда се метода погађања састоји у одабиру (n+1) вредности $\lambda_{i,i\neq 1}(t_f), V^{\alpha}(t_f), t_f$, које ће обезбедити испуњење исто толико почетних услова (2.16), (2.17) и (2.55).

У тачкама спрезања у тренуцима t^* испуњено је (2.34) и (2.36), а на сингуларним деловима треба извршити проверу Келијевих услова (2.53).

Нумеричко решавање проблема може бити извршено у програмском пакету *Wolfram Mathematica* [16] у два корака. У првом кораку успостављају се нумеричке релације у виду система једначина у којима су вредности које се бирају непознате. Приликом успостављања ових релација користе се функције *NDSolve*[] и *First*[]. У другом кораку одређују се непознате граничне вредности применом функције *FindRoot*[]. Након одређивања одговарајућих граничних вредности решава се систем диференцијалних једначина применом функције *NDSolve*[]. Тиме је дати проблем решен што ће бити приказано на примеру.

2.3. Нумерички пример

За пример је узет нехолономни механички систем који чине две материјалне тачке *A* и *B* променљиве масе, којима је, посредством Чаплигинових сечива занемарљивих маса, наметнуто ограничење кретања у виду управности брзина, што се види на слици 1 [17, 18]. У првом кораку, а услед даљих разматрања, намеће се увођење два Декартова референтна координатна система. Први, непокретни координатни систем *Oxyz*, чија се координатна раван *Oxy* поклапа са хоризонталном равни кретања система, и други, покретни координатни систем *Bξηζ*, чији је координатни почетак везан за тачку *B* система, а при чему се координатна раван $B\xi\eta$ поклапа са равни Oxy. Поред тога, оса покретног координатног система $B\xi$ одређена је правцем BA, односно $A \in B\xi$. Јединични вектори оса покретног координатног система су $\vec{\lambda}, \vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$, респективно. Материјалне тачке променљиве масе A и B међусобно су спојене механизмом занемарљиве масе типа „вила“, који дозвољава да се растојање између тачака мења, тј. $\overline{BA} = \xi(t)$.



Слика 2.1. Нехолономни механички систем променљиве масе и трајекторије тачака A и B.

Конфигурација посматраног система дефинисана је помоћу Лагранжевих координата $\boldsymbol{q} = \left(q^1, q^2, q^3, q^4\right)^T$, где су $q^1 \triangleq x$ и $q^2 \triangleq y$ Декартове координате тачке B, $q^3 \triangleq \varphi$ угао између оса Ox и $B\xi$ и $q^4 \triangleq \xi$ релативна координата тачке A у односу на покретни координатни систем.

Промене маса тачака A и B задате су у следећем облику:

$$m_A(t) = m_0 e^{-k_A t},$$
$$m_B(t) = m_0 e^{-k_B t}, \tag{2.56}$$

где је m_0 маса тачака A и B у почетном тренутку, а k_A и k_B одређене позитивне константе. Интензитети релативних брзина одвајања честица од тачака A и B константни су и међусобно једнаки:

$$v_A^{rel} = v_B^{rel} = v_r , \tag{2.57}$$

где је v_r одређена позитивна константа, а $\vec{v}_A^{rel} = -v_r \vec{\lambda}$ и $\vec{v}_B^{rel} = v_r \vec{\mu}$.

Према ограничењу кретања тачака A и B система, а у складу са (2.4), нехолономне хомогене везе могу се записати на следећи начин:

$$\gamma^3 \equiv \dot{q}^1 \cos(q^3) + \dot{q}^2 \sin(q^3) = 0,$$
$$\gamma^4 \equiv -\dot{q}^1 \sin(q^3) + \dot{q}^2 \cos(q^3) + q^4 \dot{q}^3 = 0. \tag{2.58}$$

За независне квазибрзине узете су брзине тачака A и B:

$$V^1 = V_A = \dot{q}^4,$$
$$V^2 = V_B = \dot{q}^1 \sin(q^3) - \dot{q}^2 \cos(q^3). \tag{2.59}$$

Сада се, према (2.5), (2.58) и (2.59), све генералисане брзине могу изразити преко независних квазибрзина:

$$\dot{q}^1 = \sin(q^3) V^2,$$
$$\dot{q}^2 = -\cos(q^3) V^2,$$
$$\dot{q}^3 = \frac{1}{q^4} V^2,$$
$$\dot{q}^4 = V^1. \tag{2.60}$$

Кинетичка енергија система, према (2.6), записује се у следећем облику:

$$T^* = \frac{1}{2}\left(m_A V_A^2 + m_B V_B^2 \right). \tag{2.61}$$

У тачки C система наметнута је идеална холономна стационарна механичка веза у виду глатких вођица па је управљање остварено без активних управљачких сила, посредством реакције везе $\vec{R}_C$, при чему је веза изведена тако да је задовољен услов $\vec{R}_C \cdot \vec{v}_C = 0$ при брахистохроном кретању. Према томе линија путање вођице поклапа се са линијом путање тачке C, која се налази на правцу AB, па су параметарске једначине линије вођице задате у следећем облику:

$$\begin{aligned} x_C(t) &= q^1 + \left(q^4 - \overline{AC}\right)\cos(q^3), \\ y_C(t) &= q^2 + \left(q^4 - \overline{AC}\right)\sin(q^3). \end{aligned} \tag{2.62}$$

Сада се на основу (2.8)-(2.15), (2.19), (2.23), (2.24) и (2.56)-(2.62) могу формирати диференцијалне једначине кретања система:

$$\begin{aligned} \dot{V}^1 &= c^1 + d^1 u = k_A v_r + \frac{\overline{AC} V^2 u}{m_A \sqrt{\left(\overline{AC} V^2\right)^2 + \left(q^4 V^1\right)^2}}, \\ \dot{V}^2 &= c^2 + d^2 u = k_B v_r - \frac{\overline{AC} V^1 u}{m_B \sqrt{\left(\overline{AC} V^2\right)^2 + \left(q^4 V^1\right)^2}}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Након тога може се увести реономна координата и помоћу (2.60) и (2.63) може се одредити (2.28) и (2.29), као и све остале потребне величине како би се решио представљени проблем.

За почетне и крајње услове (2.16), (2.17) и (2.18) узето је:

$$\begin{aligned} &t_0 = 0, \quad q^1(t_0) = 0, \quad q^2(t_0) = 0, \quad q^3(t_0) = 0, \quad q^4(t_0) = a, \\ &T^*(t_0) + \Pi(t_0) = \frac{1}{2}\left(m_A(t_0) V_A^2(t_0) + m_B(t_0) V_B^2(t_0)\right) = E_0, \\ &q^1(t_f) = 2a, \quad q^2(t_f) = -1{,}5a, \quad q^3(t_f) = \pi/2, \quad q^4(t_f) = 3a. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Решење проблема, користећи описани нумерички поступак у претходном одељку, нађено је за следеће параметре:

$$
\begin{aligned}
&E_0 = 100\frac{\mathrm{kgm}^2}{\mathrm{s}^2}, \quad a = 1\mathrm{m}, \quad k_A = 0,5\frac{1}{\mathrm{s}}, \quad k_B = 0,25\frac{1}{\mathrm{s}}, \\
&v_r = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad m_0 = 100\mathrm{kg}, \quad \overline{AC} = 1/3\mathrm{m}.
\end{aligned} \tag{2.65}
$$

Како се у стварности не може остварити веза са неограниченом реакцијом у примеру је испитано како се структура скаларног управљања мења са смањењем опсега ограничења реакције везе. Након спороведеног нумеричог поступка добијају се решења система диференцијалних једначина кретања система, као и спрегнутог система у нумеричком облику:

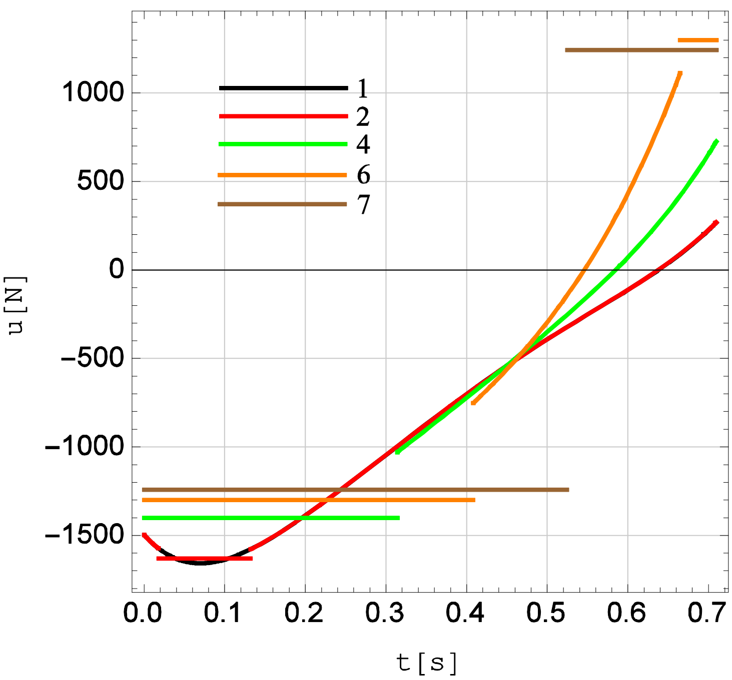
$$
\begin{aligned}
&q^1(t),\ q^2(t),\ q^3(t),\ q^4(t),\ V^1(t),\ V^2(t), \\
&\lambda_1(t),\ \lambda_2(t),\ \lambda_3(t),\ \lambda_4(t),\ \nu_1(t),\ \nu_2(t),
\end{aligned} \tag{2.66}
$$

као и време брахистохроног кретања t_f, и одговарајућа времена t_1 и t_2 која одговарају прекидима где долази до спрезања сингуларних и несингуларних управљања. На слици 2.1 дате су трајекторије тачака A и B.

Табела 2.1. Нумеричка решења TPBVP при промени ограничења реакције везе

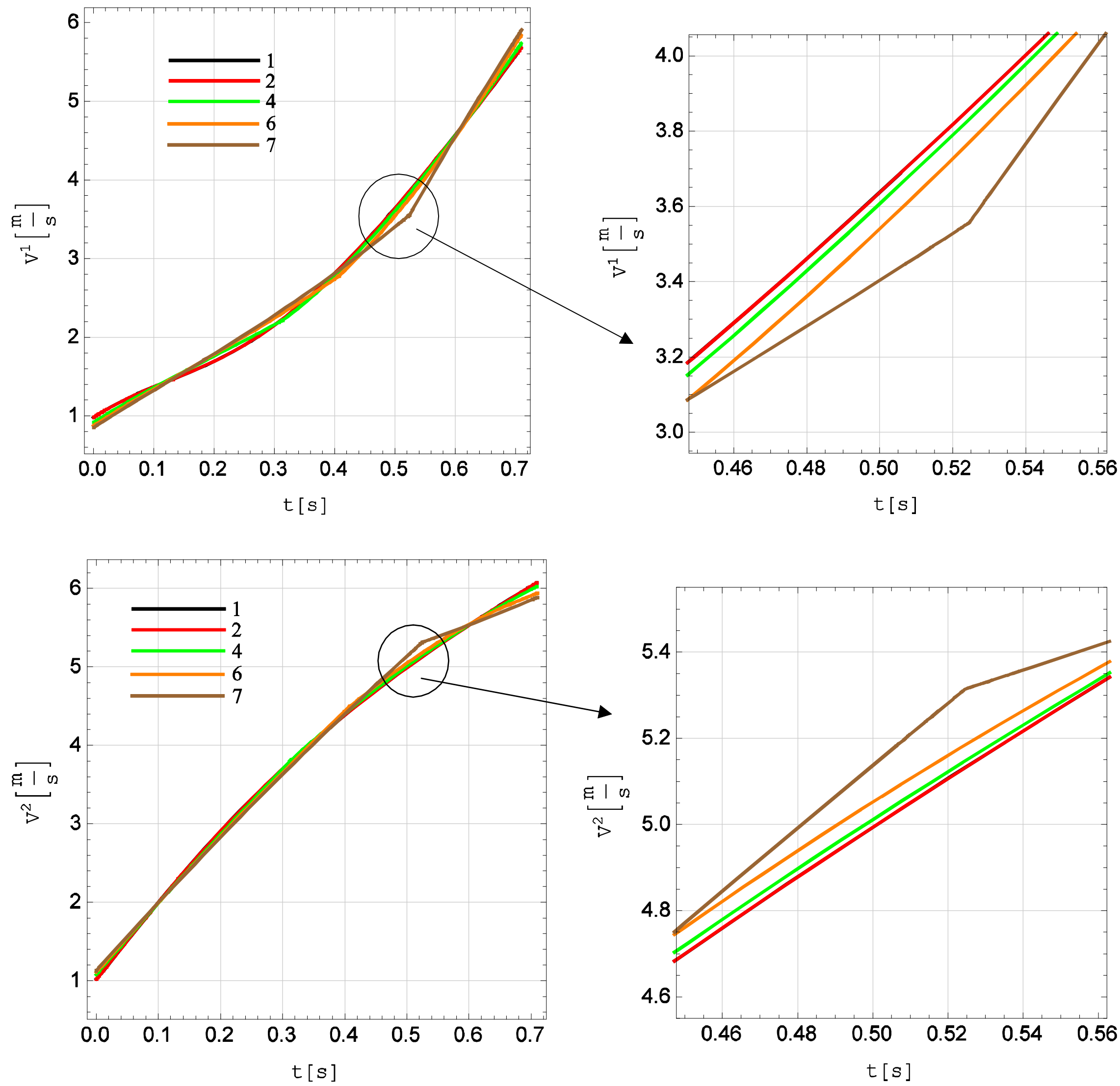
	$\lvert R_C^* \rvert$ [N]	$t_f[\mathrm{s}]$	$V_f^1[\mathrm{m/s}]$	$V_f^2[\mathrm{m/s}]$	$\lambda_2[\mathrm{s/m}]$	$\lambda_{3_f}[\mathrm{s}]$	$t_1[\mathrm{s}]$	$t_2[\mathrm{s}]$
1	>1657,38	0,70928	5,677637	6,074301	0,019224	0,096375	/	/
2	1630	0,70928	5,677809	6,074164	0,019217	0,096401	0,132072	0,017985
3	1604,96	0,709281	5,678575	6,073552	0,019184	0,096521	0,160024	/
4	1400	0,709375	5,736696	6,027092	0,01334	0,108238	0,314127	/
5	1327	0,709494	5,806047	5,97074	0,004958	0,123753	0,378098	/
6	1300	0,70956	5,84072	5,942111	0,000717	0,133814	0,664786	0,407962
7	1242,55	0,709782	5,905594	5,887498	0,05321	0,223104	0,524526	/

У Табели 2.1 дате су вредности недостајућих граничних вредности за различите вредности ограничења (2.32). При томе се јасно види да при смањењу опсега ограничења (2.32) долази до повећања времена брахистохроног кретања t_f, повећања брзине тачке A и смањења брзине тачке B. Вредности 1 одговарају ограничењу при коме је на целом интервалу кретања сингуларно управљање. Вредности 2 одговарају ограничењу при коме се јавља структура типа сингуларно - минимално - сингуларно управљање. Овакво управљање важи до смањења границе до вредности 3, које представљају граничну вредност при којој ишчезава једно сингуларно управљање па је структура управљања минимално - сингуларно, а такав тип управљања имају и вредности 4. Вредности 5 одговарају ограничењу реакције везе, која представља граничну вредност при којој се јавља ограничење и са горње стране и тиме почиње структура минимално - сингуларно - максимално управљање. Овај тип управљања јавља се и при даљем снижењу границе приказано вредностима 6. Вредности 7 одговарају ограничењу које одговара новој граници при којој ишчезава и други део сингуларног управљања па имамо структуру управљања минимум - максимум, која се јавља и нижим вредностима границе реакције везе. Даљим снижењем границе за одређену вредност долази до структуре релејног управљања.



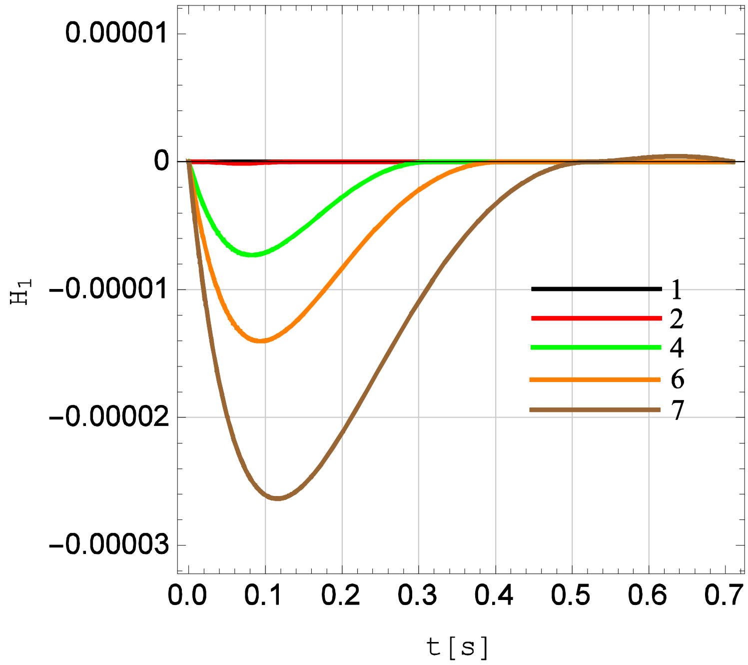
Слика 2.2. График управљања $u(t)$

На слици 2.2 дати су графици управљања за одговарајуће вредности из табеле 2.1. На слици 2.3 дат је упоредни графички приказ вредности брзина V^1 и V^2 за неколико различитих вредности граница реакције везе које одговарају бројевима из табеле 2.1.



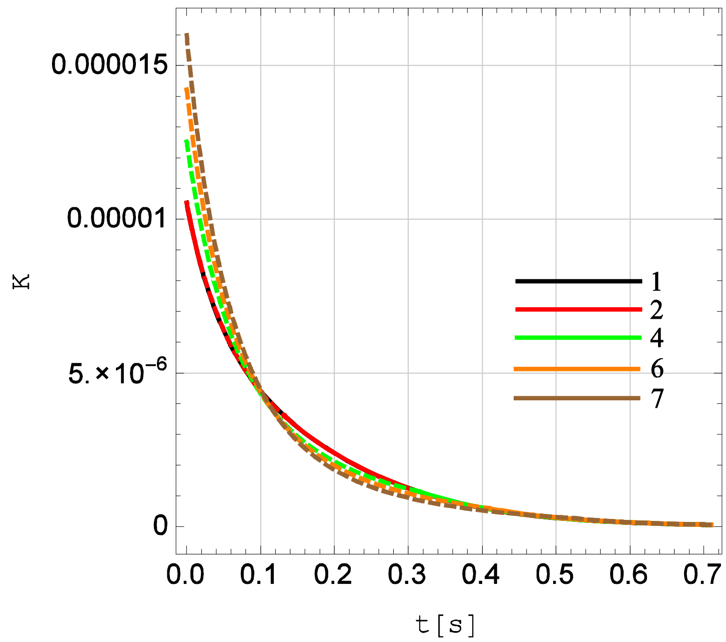
Слика 2.3. Графици брзина V^1 и V^2

На слици 2.4 дат је упоредни приказ функције H_1, такозване функције прекида (switching function) за неколико вредности ограничења реакције везе. Тиме се види испуњеност израза (2.33).



Слика 2.4. График функције прекида H_1

Како је управљање у овом примеру сингуларно управљање првог реда потребно је задовољити Келијев услов оптималности (2.53). На слици 2.5 дат је закон промене функције K за различите вредности ограничења везе где се види да је Келијев услов оптималности испуњен.



Слика 2.5. Потврда Келијевог услова оптималности

Литература

[1] Jeremić B., Radulović R., Zorić N., Dražić M.: *Realizing brachistochronic planar motion of a variable mass nonholonomic mechanical system by an ideal holonomic constraint with restricted reaction*, - Filomat, Vol 33, No 14, 2019., pp. 4387–4401.

[2] Jeremić B., Radulović R., Obradović A., Šalinić S., Dražić M.: *Brachistochronic motion of a nonholonomic variable-mass mechanical system in general force fields*, - Mathematics and Mechanics of Solids, Vol 24, No 1, 2019., pp. 281–298.

[3] Lurie A. I.: *Analytical mechanics*, - Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.

[4] Papastavridis J. G.: *Analytical mechanics*, - New York: Oxford University Press, 2002.

[5] Baird D., Hughes R. I. G., Nordmann, A. (eds): *Heinrich Hertz: classical physicist, modern philosopher*, - Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.

[6] Vujanović B. D., Atanacković T. M.: *An introduction to modern variational techniques in mechanics and engineering*, - Boston, MA: Birkhäuser, 2004.

[7] Radulović R.: *Global minimum time for the motion of mechanical systems with limited controls and constraint reactions*, - Doctoral dissertation, Faculty of Mechanical engineering, University of Belgrade, 2017.

[8] Pesce C. P.: *The application of Lagrange equations to mechanical systems with mass explicitly dependent on position*, - J Appl Mech (Trans ASME), Vol 70, No 5, 2003., pp. 751–756.

[9] Cvetićanin L.: *Conservation laws in systems with variable mass*, - J Appl Mech (Trans ASME), Vol 60, No 4, 1993., pp. 954–958.

[10] Kirk D. E.: *Optimal control theory: An introduction*, - New York: Dover Publications, 2004.

[11] Pontryagin L., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., et al.: *The mathematical theory of optimal processes,* - New York: Interscience, 1962.

[12] Gabasov R., Kirillova F. M.: *Singular optimal controls*, - Moscow: Nauka, 1973.

[13] Gabasov R., Kirillova, F. M.: *High order necessary conditions for optimality*, - SIAM J Control, Vol 10, No 1, 1972, pp. 127–168.

[14] Odia A., Bell D.: *Junction point on partially singular trajectories*, - International Journal of Control, Vol 85, No 12, 2012., pp. 1996-2003.

[15] Stoer J., Bulirsch J.: *Introduction to numerical analysis*, New York: Springer-Verlag, 1993.

[16] Wolfram S.: *The Mathematica Book*, *5th ed.Champaign*, IL: Wolfram Media, 2003.

[17] Zeković D.: *Examples of nonlinear nonholonomic constraints in classical mechanics*, - Vest. Mosk, Un-ta, 1, Math. Mech, Vol 1, 1991., pp. 100–103 (in Russian).

[18] Zeković D.: *Dynamics of mechanical systems with nonlinear nonholonomic constraints – II Differential equations of motion*, - ZAMM, Vol 91, No 11, 2011., pp. 899–922.

Поглавље 3

Реализација брахистохроног кретања тела промењљиве масе помоћу центроида

У овом поглављу[3] разматра се реализација брахистохроног кретања маханичког система, који се састоји од слободног крутог тела и тачака промењљиве масе, помоћу идеалне везе у облику центроида. Претпоставља се да систем врши равно кретање у произвољном пољу сила и да има три степена слободе. При томе су познати закони промене маса тачака, као и релативне брзине припајања, односно одвајања честица. Реакције везе центроида изражене су помоћу генералисаних управљачких сила. Проблем брахистохроног кретања решен је, коришћењем Понтрјагиновог принципа максимума и теорије сингуларног оптималног управљања, као двотачкасти гранични проблем. Резултати теорије илустровани су примером, где је испитано како промена почетне енергије система утиче на нормалну реакцију везе и тиме на потребни коефицијент трења котрљања. Разматрања у овом поглављу ослањају се на рад [2] и представљају његов својеврсни наставак.

3.1. Поставка проблема

Посматра се равно кретање механичког система који чине слободно круто тело и N материјалних тачака круто везаних за тело. Конфигурација система одређена је помоћу три генералисане координате $\boldsymbol{q} = \left(q^1, q^2, q^3\right)^T$, које су геометријски независне, па је на основу њих једнозначно одређен положај

[3] ово поглавље представља проширење рада [1]

посматраног механичког система. Без губитка општости проблема може се сматрати да су све тачке материјалног система променљиве масе, као и да су закони промена маса материјалних тачака познати:

$$m_s = m_s(t), \qquad s = 1, ..., N, \tag{3.1}$$

где су $m_s(t)$ непрекидне и диференцијабилне функције времена. Промена масе остварује се припајањем или одвајањем честица, и при томе, претпоставка је да се процес припајања, односно одвајања честица одвија непрекидно у посматраном интервалу времена.

Проблем је посматран, као и у претходном поглављу, тако да су релативне брзине припајања, односно одвајања честица познате:

$$\vec{v}_s^{rel} = \vec{v}_s^{rel}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t), \qquad s = 1, \ldots, N, \tag{3.2}$$

где је $\dot{\boldsymbol{q}} = \left(\dot{q}^1, \dot{q}^2, \dot{q}^3\right)^T$ вектор генералисаних брзина. Кинетичка енергија посматраног механичког система је хомогена квадратна форма генералисаних брзина [3, 4]:

$$T = \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \qquad i, j = 1, 2, 3, \tag{3.3}$$

где су $a_{ij} = a_{ij}\left(\boldsymbol{q}, t\right)$ коваријантне координате инерционог метричког тензора функције генералисаних координата и времена t. Разлог томе је постојање тачака променљиве масе (3.1) које се морају узети у разматрање. Индекси у овом поглављу имају следеће вредности: $i, j, k, r, \delta = 1, 2, 3;\ \alpha, \beta = 1, 2$.

Као што је приказано у поглављу 1, може се сматрати да се посматрани механички систем креће у пољу познатих потенцијалних сила са потенцијалном енергијом (1.14) и да на систем дејствују познате непотенцијалне силе, са дефинисаним генералисаним силама (1.15). Непотенцијалне силе у овом поглављу ће бити означене са Q_i^{npot} при чему у њих неће ући управљачке силе због практичнијег даљег излагања. Диференцијалне једначине кретања посматраног механичког система формирају се у функцији генералисаних координата q^i полазећи од Лагранж-Даламберовог принципа како је приказано у поглављу 1 [3, 4], и после сређивања добијају се једначине кретања разматраног система у коваријантном облику [2]:

$$a_{ij}\ddot{q}^j + \Gamma_{kr,i}\dot{q}^k\dot{q}^r = Q`_i\,, \tag{3.4}$$

где, на основу [3], Кристофелови симболи прве врсте имају вредност као у (1.19), а генералисане силе које одговарају генералисаним координатама q^i у општем случају приказане су у следећем облику [5, 6]:

$$Q`_i(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^{npot} + Q_i^{\mathrm{var}} + Q_i^c. \tag{3.5}$$

Генералисане реактивне силе услед припајања, односно одвајања честица записују се у следећем облику [5, 6]:

$$Q_i^{\mathrm{var}}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = \sum_{s=1}^{N} \dot{m}_s \vec{v}_s^{\,rel} \cdot \frac{\partial \vec{r}_s}{\partial q^i}\,, \tag{3.6}$$

док су уједно $Q_i^c = Q_i^c(t)$ - генералисане управљачке силе, чија је укупна снага током брахистохроног кретања једнака нули:

$$Q_i^c \dot{q}^i = 0. \tag{3.7}$$

Сада се може добити контраваријантни облик диференцијалних једначина кретања множењем леве и десне стране сваке од једначина (3.4) контраваријантним координатама $a^{i\delta}$ и сабирањем по индексу *i*:

$$\ddot{q}^\delta + \Gamma_{kr}^\delta \dot{q}^k \dot{q}^r = \overline{Q}^\delta, \tag{3.8}$$

где су:

$$\overline{Q}^\delta = a^{i\delta} Q`_i\,, \tag{3.9}$$

генералисане силе у контраваријантном облику.

Поставља се питање реализације брахистохроног кретања приказаног механичког система. Биће испитана могућност реализације брахистохорног кретања механичког система промењиве масе помоћу центроида - котрљањем рулете по бази без клизања. На основу претходно одређеног брахистохроног кретања, могуће је једнозначно одредити базу и рулету, као и нормалну и тангенцијалну компоненту реакције. На основу њих, да би овакво кретање било могуће, може се одредити и услов за Кулонов коефицијент трења. На тај начин брахистохроно кретање може се остварити без утицаја активних сила, што је у складу са основним проблемом брахистохроне тачке у вертикалној равни.

Нека су задате вредности генералисаних координата, као и вредност механичке енергије механичког система које одговарају почетном тренутку:

$$t_0 = 0, \quad \boldsymbol{q}(t_0) = \boldsymbol{q}_0, \tag{3.10}$$

$$T\left(\boldsymbol{q}_0, \dot{\boldsymbol{q}}_0, t_0\right) + \Pi\left(\boldsymbol{q}_0, t_0\right) = E_0, \tag{3.11}$$

као и вредности генералисаних координата које одговарају крајњем положају механичког система:

$$\boldsymbol{q}\left(t_f\right) = \boldsymbol{q}_f, \tag{3.12}$$

где су $E_0 \in \mathbb{R}$ и $t_f \in \mathbb{R}$. Проблем брахистохроног кретања механичког система промењиве масе, чије су диференцијалне једначине кретања дате у облику (3.4), састоји се у одређивању генералисаних управљачких сила $Q_i^c = Q_i^c(t)$, као и одговарајућих једначина кретања система $q^i = q^i(t)$, тако да систем за најкраће време t_f из почетног стања дефинисаног са (3.10) и (3.11), пређе у крајњи положај дефинисан са (3.12).

3.2. Брахистохрони проблем као задатак оптималног управљања

Приказани брахистохрони проблем може се формулисати као задатак оптималног управљања увођењем управљања u_i:

$$u_i = Q_i^C \ , \tag{3.13}$$

где су Q_i^C генералисане управљачке силе. Како током брахистохроног кретања важи (3.7), може се изразити једно управљање преко осталих:

$$u_3 = -\frac{u_\alpha \dot{q}^\alpha}{\dot{q}^3} \ . \tag{3.14}$$

Неопходно је записати диференцијалне једначине првог реда у нормалном облику, познате као једначине стања у теорији оптималног управљања. На основу (3.5), (3.8), (3.9), (3.13) и (3.14), као и увођењем реономне координате $q^4 \triangleq t$ диференцијалне једначине се могу изразити на следећи начин:

$$\begin{aligned}
\dot{q}^i &= f_i(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, q^4, \boldsymbol{u}) \equiv p^i, \\
\dot{q}^4 &= f_4(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, q^4, \boldsymbol{u}) \equiv 1, \\
\dot{p}^\delta &= g_\delta(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, q^4, \boldsymbol{u}) \equiv c^\delta(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, q^4) + d^{\alpha\delta}(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, q^4) u_\alpha \, ,
\end{aligned} \tag{3.15}$$

где су:

$$\begin{aligned}
c^\delta &= -\Gamma^\delta_{kr} \dot{q}^k \dot{q}^r + a^{i\delta} \left(-\frac{\partial \Pi}{\partial q^i} + Q_i^{npot} + Q_i^{\mathrm{var}} \right), \\
d^{\alpha\delta} &= \left(a^{\alpha\delta} - a^{3\delta} \frac{p^\alpha}{p^3} \right).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Брахистохрони проблем кретања разматраног механичког система описан једначинама стања (3.15), састоји се у одређивању оптималних управљања u_α и одговарајућих оптималних трајекторија у простору стања $q^i(t)$, тако да механички систем из почетног стања одређеног са (3.10) и (3.11) пређе у крајњи положај (3.12), за минимално време што се може изразити помоћу услова да функционал [7]:

$$J\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, q^4, u\right) = \int_0^{t_f} dt, \tag{3.17}$$

на интервалу [0, t_f] има минималну вредност. Како би проблем оптималног управљања био решен применом Понтрјагиновог принципа максимума [8], формира се Понтрјагинова функција [7]:

$$H\left(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},q^4,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}\right)=-1+\lambda_i p^i+\lambda_4\dot{q}^{n+1}+\nu_\delta(c^\delta+d^{\alpha\delta}u_\alpha), \tag{3.18}$$

где су $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)^T$, $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\nu_3)^T$ док су $\lambda_i(\cdot):\left[0,t_f\right]\to\mathbb{R}$, $\lambda_4(\cdot):\left[0,t_f\right]\to\mathbb{R}$ и $\nu_\delta(\cdot):\left[0,t_f\right]\to\mathbb{R}$ спрегнуте променљиве, па се спрегнути систем диференцијалних једначина може записати у следећој форми:

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_i&=-\frac{\partial H}{\partial q^i}=-\nu_\delta\left(\frac{\partial c^\delta}{\partial q^i}+\frac{\partial d^{\alpha\delta}}{\partial q^i}u_\alpha\right),\\
\dot{\lambda}_4&=-\frac{\partial H}{\partial q^4}=-\nu_\delta\left(\frac{\partial c^\delta}{\partial q^4}+\frac{\partial d^{\alpha\delta}}{\partial q^4}u_\alpha\right),\\
\dot{\nu}_i&=-\frac{\partial H}{\partial p^i}=-\lambda_i-\nu_\delta\left(\frac{\partial c^\delta}{\partial p^i}+\frac{\partial d^{\alpha\delta}}{\partial p^i}u_\alpha\right).
\end{aligned} \tag{3.19}$$

На основу (3.18) може се записати:

$$H\left(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},q^4,u,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\nu}\right)=H_0+H^\alpha u_\alpha, \tag{3.20}$$

где су:

$$\begin{aligned}
H_0&=-1+\lambda_i p^i+\lambda_4\dot{q}^{n+1}+\nu_\delta c^\delta,\\
H^\alpha&=\nu_\delta d^{\alpha\delta}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Како управљања линеарно фигуришу у једначинама стања, такав случај назива се сингуларни у теорији оптималног управљања. Тада, неопходни услови оптималности Понтрјагиновог принципа максимума имају облик [9]:

$$\frac{\partial H}{\partial u_\alpha}=H^\alpha=0. \tag{3.22}$$

Из једначина (3.22) је очигледно да се сингуларна оптимална управљања u_α не могу експлицитно одредити. Дакле, захтева се да H_α буду идентички једнаки нули дуж оптималне трајекторије у простору стања. Сингуларна оптимална управљања u_α се одређују [10] даљим диференцирањем по времену (3.22) узевши у обзир (3.15) и (3.19):

$$\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\partial H}{\partial u_\alpha}\right]=0, \quad k=0,1,2,\dots \ . \tag{3.23}$$

Приликом одређивања релација (3.23) примениће се формализам Поасонових заграда [10]:

$$\dot{H}^\alpha=\left\{H^\alpha,H\right\}=\left\{H^\alpha,H_0\right\}+\left\{H^\alpha,H^\beta\right\}u_\beta=0. \tag{3.24}$$

Узевши у обзир (3.22) као и да за вишедимензиона сингуларна управљања важи $\left\{H^\alpha,\ H^\beta\right\}=0$ [10] добија се:

$$\left\{H^\alpha,H_0\right\}=\sum_{\theta=1}^{7}\left(\frac{\partial H^\alpha}{\partial y^\theta}\frac{\partial H_0}{\partial \zeta^\theta}-\frac{\partial H^\alpha}{\partial \zeta^\theta}\frac{\partial H_0}{\partial y^\theta}\right)=0, \tag{3.25}$$

где су $\boldsymbol{y}=(y^1,y^2,\dots,y^7)^T\triangleq(q^1,q^2,q^3,q^4,p^1,p^2,\ p^3)^T$ и $\boldsymbol{\zeta}=(\zeta^1,\zeta^2,\dots,\zeta^7)^T\triangleq(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\nu_1,\nu_2,\ \nu_3)^T$. Даљим диференцирањем (3.24) добија се:

$$\left\{\left\{H^\alpha,H_0\right\},H_0\right\}+\left\{\left\{H^\alpha,H_0\right\},H^\beta\right\}u_\beta=0. \tag{3.26}$$

Осим тога, услови трансверзалности приказују се у следећем облику:

$$\left(\lambda_i\Delta q^i+\lambda_4\Delta q^4+\nu_i\Delta p^i\right)\Big|_0^{t_f}=0, \tag{3.27}$$

$$\left(H\Delta t\right)\Big|_0^{t_f}=0, \tag{3.28}$$

где $\Delta(\cdot)$ представља асинхрону варијацију [3, 4] величине $(\cdot)$. На основу услова (3.22) могу се изразити спрегнуте променљиве ν_α као функције спрегнуте променљиве ν_3:

$$\nu_\alpha = \nu_\alpha\left(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, q^4, \nu_3\right). \qquad (3.29)$$

Сада из једначина (3.25) узимајући у обзир (3.21) и (3.29) може се изразити:

$$\lambda_\alpha = \lambda_\alpha(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, q^4, \lambda_3, \nu_3). \qquad (3.30)$$

Како је почетни положај механичког система према (3.10) одређен следи:

$$\Delta t(t_0) = 0, \qquad \Delta q^i(t_0) = 0, \qquad \Delta q^4(t_0) = 0. \qquad (3.31)$$

Ако се узме у обзир (3.31) и примени се оператор асинхроне варијације на (3.11) може се добити:

$$a_{ij}(t_0) p^i(t_0) \Delta p^j(t_0) = 0, \qquad (3.32)$$

и на крају, након замене (3.31) и (3.22) у (3.27), добија се:

$$\nu_j(t_0)\Delta p^j(t_0) = \frac{\nu_\delta(t_0) a^{3\delta}(t_0)}{p^3(t_0)} a_{ij}(t_0) p^i(t_0) \Delta p^j(t_0) = 0. \qquad (3.33)$$

На основу (3.31), (3.32) и (3.33) очигледно се види да су услови транверзалности (3.27) и (3.28) у почетној конфигурацији система задовољени. Време није познато у крајњој конфигурацији (3.12) механичког система, па на основу тога произилази услов трансверзалности из (3.28):

$$H\left(t_f\right) = 0, \qquad (3.34)$$

а како величине $p^i(t_f)$ и $q^4(t_f)$ нису унапред одређене ($\Delta p^i(t_f) \neq 0$, $\Delta q^4(t_f) \neq 0$), наредни услови трансверзалности добијају се из (3.27)

$$\nu_i(t_f) = 0, \;\; \lambda_4(t_f) = 0. \qquad (3.35)$$

На основу (3.18), (3.30), (3.34) и (3.35) успоставља се следећа зависност у аналитичком облику:

$$\lambda_3(t_f) = \lambda_3(\boldsymbol{p}(t_f), q^4(t_f), \lambda_\alpha(t_f)), \tag{3.36}$$

где су $\boldsymbol{p}(t_f) = (p^1(t_f), p^2(t_f), p^3(t_f))^T$ и $q^4(t_f) = t_f$.

Ако се разматрање ограничи на сингуларна управљања првог реда при чему је $\left\{\left\{H^\alpha, H_0\right\}, H^\beta\right\} \neq 0$, уз коришење (3.26), (3.29) и (3.30), сингуларна управљања u_β могу се приказати у следећем облику:

$$u_\beta = u_\beta(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, q^4, \lambda_3, \nu_3). \tag{3.37}$$

Осим тога, неопходни Келијеви услови оптималности за сингуларна управљања првог реда дати су у облику [10]:

$$-\sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \frac{\partial}{\partial u_\beta}\left(\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\partial H}{\partial u_\alpha}\right]\right) \leq 0. \tag{3.38}$$

Применом Поасонових заграда овај услов је испуњен ако је матрица $K = \left[\partial / \partial u_\beta \left(d^2(\partial H / \partial u_\alpha) / dt^2\right)\right]$ позитивно дефинитна [11].

Заменом (3.37) у (3.15) и (3.19) и узимајући у обзир (3.29) и (3.30) добија се двотачкасти гранични проблем (TPBVP) са девет нелинеарних диференцијалних једначина првог реда у нормалном облику. У општем случају, услед нелинеарности, неопходна је примена одговарајућих нумеричких метода [12]. У овом раду примењена је метода погађања (shooting method). Метода погађања у овом случају најприкладније се извршава нумеричком интеграцијом уназад одабиром четири вредности $p^i(t_f), t_f$, које ће обезбедити испуњење исто толико почетних услова (3.10) и (3.11). Вредности $\lambda_3(t_f)$ одређене су из израза (3.36). Имајући у виду (3.12) и (3.35) преостале вредности промењљивих у крајњем положају су познате.

Нумеричко решавање проблема може бити извршено у програмском пакету *Wolfram Mathematica* [13] у два корака. У првом кораку успостављају се нумеричке релације у виду система једначина у којима су вредности које се бирају непознате:

$$
\begin{aligned}
&q_0^i = h_i(\boldsymbol{p}_f, q_f^4),\\
&E_0 = h_4(\boldsymbol{p}_f, q_f^4).
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Функције (3.39) могу бити формиране на следећи начин:

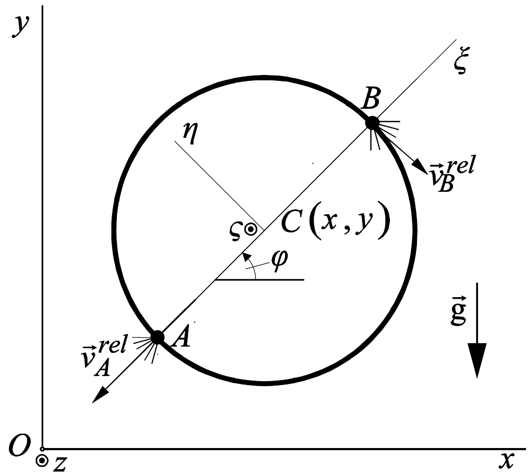
$$
\begin{aligned}
&h_i\left[q_f^4\_?\,NumberQ,\ p_f^1\_?\,NumberQ,\ p_f^2\_?\,NumberQ,\ p_f^3\_?\,NumberQ\right]\\
&:= First\left[q^i[0]\,/.\,NDSolve[...]\right],\\
&h_4\left[q_f^4\_?\,NumberQ,\ p_f^1\_?\,NumberQ,\ p_f^2\_?\,NumberQ,\ p_f^3\_?\,NumberQ\right]\\
&:= First\left[T\left(\boldsymbol{q}[0],\dot{\boldsymbol{q}}[0],t_0\right)+\Pi\left(\boldsymbol{q}[0],t_0\right)-E_0\,/.\,NDSolve[...]\right],
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

где структура аргумената коришћених функција *NDSolve*[] и *First*[] треба бити написана у складу са дефиницијом ових функција (видети [13]) заједно са (3.10), (3.11), (3.15) и (3.19).

У другом кораку решава се систем једначина (3.39) по непознатим граничним вредностима $p_i(t_f)$ и t_f применом функције *FindRoot*[]. Након одређивања одговарајућих граничних вредности решава се систем од девет диференцијалних једначина применом функције *NDSolve*[]. Тиме је дати проблем решен што ће бити приказано на примеру.

3.3. Нумерички пример

За пример је узет механички систем који чине хомогени прстен полупречника R масе M и две материјалне тачке A и B промењљиве масе које се налазе на прстену. Систем се креће у вертикалној равни. У првом кораку, а услед даљих разматрања, захтева се увођење два Декартова референтна координатна система. Први, непокретни координатни систем *Oxyz*, чија се координатна раван *Oxy* поклапа са вертикалном равни кретања система, и други, покретни координатни систем *Cξηζ*, чији је координатни почетак везан за центар прстена, а при чему се координатна раван *Cξη* поклапа са равни *Oxy*. Поред тога, оса покретног координатног система *Cξ* одређена је правцем *AB*. Јединични вектори оса покретног координатног система су $\vec{\lambda}$, $\vec{\mu}$ и $\vec{\nu}$, респективно.



Слика 3.1. Механички систем промењиве масе.

Конфигурација посматраног система дефинисана је помоћу Лагранжевих координата $\boldsymbol{q} = \left(q^1,\, q^2, q^3\right)^T$, где су $q^1 \triangleq x$ и $q^2 \triangleq y$ Декартове координате центра прстена, а $q^3 \triangleq \varphi$ угао између оса *Ox* и *Cξ*.

Промене маса тачака *A* и *B* задате су у следећем облику:

$$m_A(t) = m_B(t) = m_0 - kt, \tag{3.41}$$

где је m_0 маса тачака *A* и *B* у почетном тренутку, а k одређена позитивна константа. Без губитка на општости проблема интензитети релативних брзина одвајања честица од тачака *A* и *B* константни су и међусобно једнаки:

$$v_A^{rel} = v_B^{rel} = v_r, \tag{3.42}$$

где је v_r одређена позитивна константа, а $\vec{v}_A^{rel} = -v_r\vec{\lambda}$ и $\vec{v}_B^{rel} = -v_r\vec{\mu}$.

Кинетичка енергија система, према (3.3), записује се у следећем облику:

$$T=\frac{1}{2}\left((M+2m)\left(\dot{q}^{1}\right)^{2}+(M+2m)\left(\dot{q}^{2}\right)^{2}+(M+2m)R^{2}\left(\dot{q}^{3}\right)^{2}\right). \tag{3.43}$$

Сада се на основу (3.8), (3.13), (3.14) и (3.15) могу формирати диференцијалне једначине кретања система, односно једначине стања:

$$\begin{aligned}
&\dot{q}^{1}=p^{1},\\
&\dot{q}^{2}=p^{2},\\
&\dot{q}^{3}=p^{3},\\
&\dot{q}^{4}=1,\\
&\dot{p}^{1}=\left(\dot{m}v_{r}\left(\sin q^{3}-\cos q^{3}\right)+u_{1}\right)\Big/(M+2m),\\
&\dot{p}^{2}=\left(-\dot{m}v_{r}\left(\sin q^{3}+\cos q^{3}\right)-(M+2m)g+u_{2}\right)\Big/(M+2m),\\
&\dot{p}^{3}=\left(-\dot{m}v_{r}/R-(u_{1}p_{1}+u_{2}p_{2})/p_{3}\right)\Big/(M+2m),
\end{aligned} \tag{3.44}$$

где је $\vec{g}=-g\vec{j}$ убрзање Земљине теже. Након тога може се помоћу (3.44) одредити (3.18) и (3.19), као и све остале потребне величине како би се решио приказани проблем.

За почетне и крајње услове (3.10), (3.11) и (3.12) узето је:

$$\begin{aligned}
&t_{0}=0,\quad q^{1}(t_{0})=0,\quad q^{2}(t_{0})=0,\quad q^{3}(t_{0})=0,\\
&T(t_{0})+\Pi(t_{0})=\\
&\frac{1}{2}\left((M+2m(t_{0}))\left(\dot{q}^{1}(t_{0})\right)^{2}+(M+2m(t_{0}))\left(\dot{q}^{2}(t_{0})\right)^{2}+(M+2m(t_{0}))R^{2}\left(\dot{q}^{3}(t_{0})\right)^{2}\right)\\
&=E_{0},\\
&q^{1}(t_{f})=0,7a,\quad q^{2}(t_{f})=0,\quad q^{3}(t_{f})=\pi/2.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Решење проблема користећи описани нумерички поступак у претходном одељку нађено је за следеће параметре:

$$E_0 = 90\,\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}, \quad a = 1\text{m}, \quad k = 0,4\,\frac{1}{\text{s}}, \quad v_r = 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}},$$
$$m_0 = 10\text{kg}, \quad M = 20\text{kg}, \quad R = 0,5\,\text{m}, \quad g = 9,80665\,\text{m/s}^2. \tag{3.46}$$

На основу (3.36) може се записати:

$$\lambda_3(t_f) = p^3(t_f) \Big/ \left(\left(p^1(t_f)\right)^2 + \left(p^2(t_f)\right)^2 + \left(p^3(t_f)\right)^2 \right). \tag{3.47}$$

Након спороведеног нумеричог поступка добијају се решења система диференцијалних једначина кретања система, као и спрегнутог система у нумеричком облику:

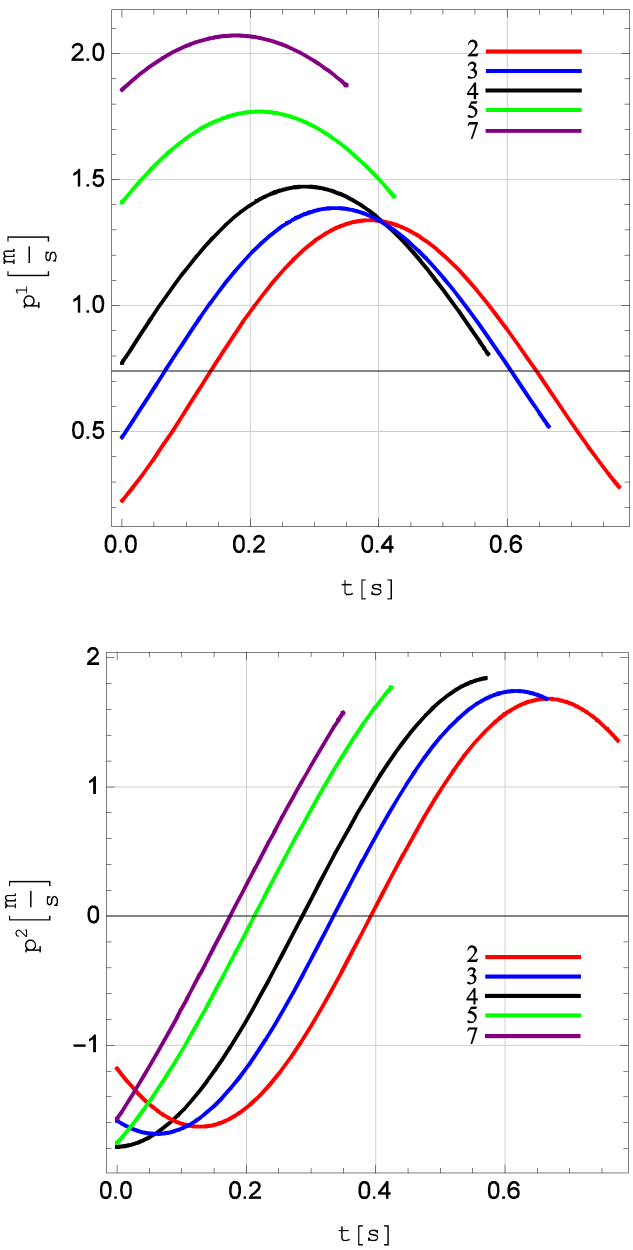
$$q^1(t),\ q^2(t),\ q^3(t),\ p^1(t),\ p^2(t),\ p^3(t), \lambda_3(t),\ v_3(t), \tag{3.48}$$

као и време брахистохроног кретања t_f.

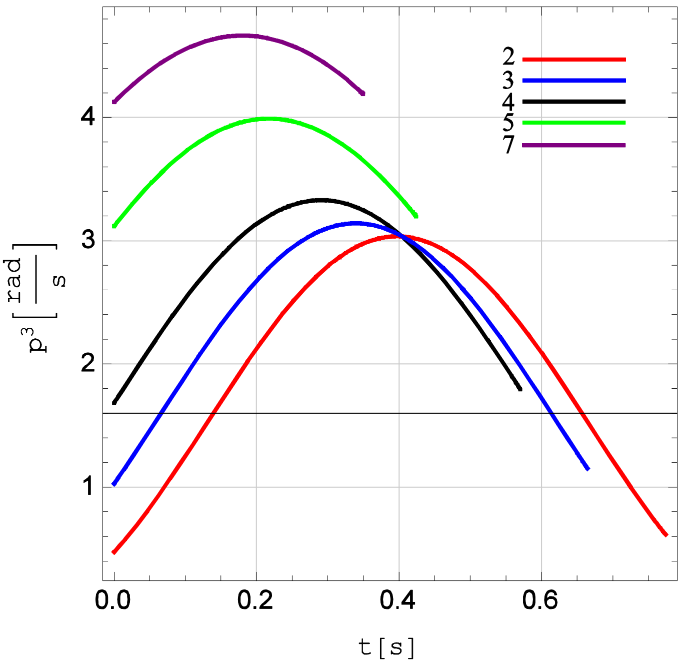
Табела 3.1. Нумеричка решења TPBVP при промени почетне енергије система

	E_0 [J]	t_f[s]	p_f^1 [m/s]	p_f^2 [m/s]	p_f^3 [rad/s]
1	10	0,8721	0,142251	1,020697	0,308147
2	30	0,774232	0,280072	1,359575	0,614382
3	60	0,664431	0,520366	1,681863	1,151118
4	90	0,570351	0,806867	1,84264	1,79308
5	150	0,424045	1,43232	1,772866	3,197759
6	201	0,352064	1,8575	1,584221	4,153642
7	203,322	0,349594	1,874221	1,576176	4,191238

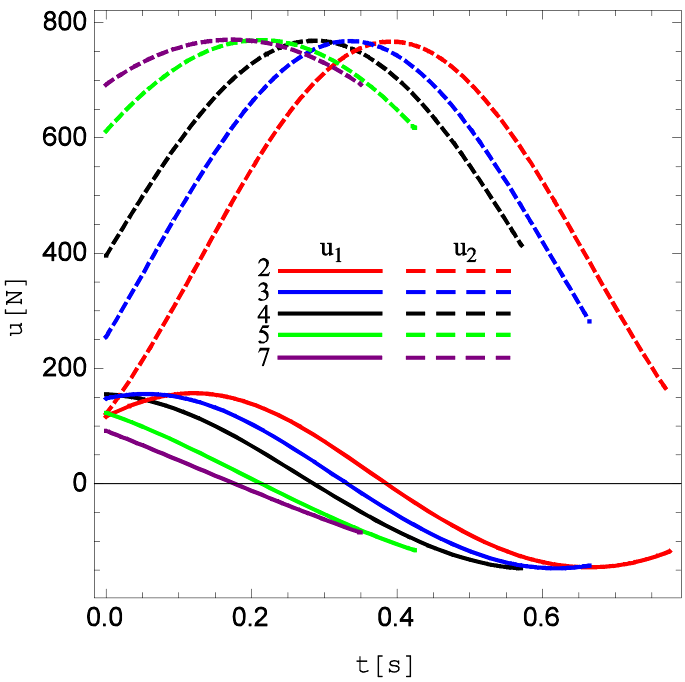
У Табели 3.1 дате су вредности недостајућих граничних вредности за различите вредности почетне енергије система. При томе се јасно види да при повећању енергије долази до смањења времена брахистохроног кретања t_f, повећања крајње хоризонталне пројекције брзине центра прстена док се крајња вертикална пројекција брзине центра прстена прво повећава па након тога смањује. Такође, крајња угаона брзина прстена се повећава приликом повећања почетне енергије система. На слици 3.2 и 3.3 дати су упоредни дијаграми пројекција брзина центра прстена као и угаона брзина центра прстена за неколико различити вредности почетне енергије које одговарају бројевима из табеле 3.1. На слици 3.4 дати су дијаграми управљачких сила при чему су пуном линијом дати дијаграми управљања u_1, а испрекиданом линијом дијаграми управљања u_2.



Слика 3.2. Графици пројекција брзине центра прстена p^1 и p^2



Слика 3.3. Графици угаоне брзине прстена p^3



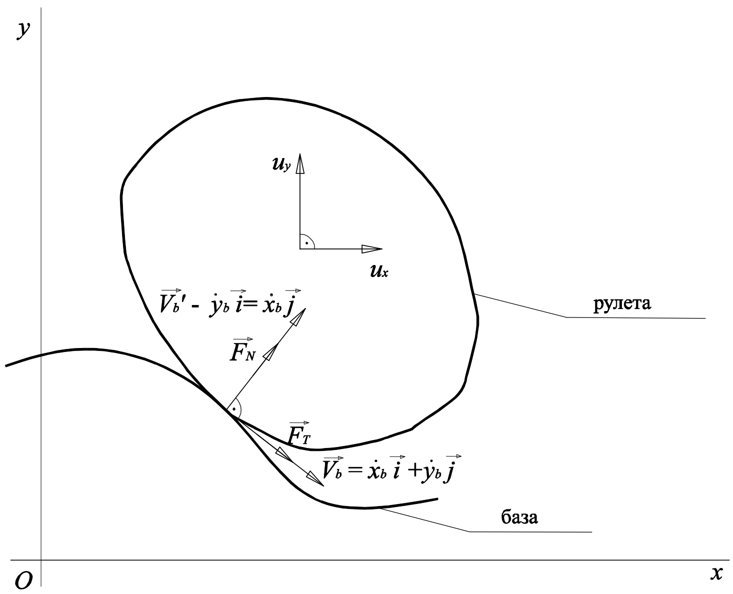
Слика 3.4. Графици управљања $u_1(t)$ и $u_2(t)$

У овом примеру биће испитана могућност реализације брахистохорног кретања механичког система променљиве масе помоћу центроида - котрљањем рулете по бази без клизања. Тиме се генералисане управљачке силе остварују помоћу реакције везе. Покретна центроида (рулета) представљена је кривом повезаном са прстеном и представља геометријско место тренутних полова брзина датог прстена. Непокретна центроида (база) представља криву повезану са равни у којој се кретање изводи и представља геометријско место тренутних полова брзина прстена у односу на непокретни координатни систем. Тиме је кретање система еквивалентно котрљању без клизања покретне по непокретној центроиди (видети [14]). На основу претходно одређеног брахистохроног кретања, могуће је једнозначно одредити базу и рулету, као и нормалну и тангенцијалну компоненту реакције. На основу њих, да би овакво кретање било могуће, мора се одредити и услов за Кулонов коефицијент трења. Параметарске једначине базе дате су у следећем облику [14]:

$$\begin{aligned} x_b(t) &= q^1(t) - \frac{p^2(t)}{p^3(t)}, \\ y_b(t) &= q^2(t) + \frac{p^1(t)}{p^3(t)}, \end{aligned} \tag{3.49}$$

док су једначине рулете [14] дате као:

$$\begin{aligned} \xi_r(t) &= \left(p^1(t)\sin q^3(t) - p^2(t)\cos q^3(t) \right) \Big/ p^3(t), \\ \eta_r(t) &= \left(p^1(t)\cos q^3(t) + p^2(t)\sin q^3(t) \right) \Big/ p^3(t). \end{aligned} \tag{3.50}$$



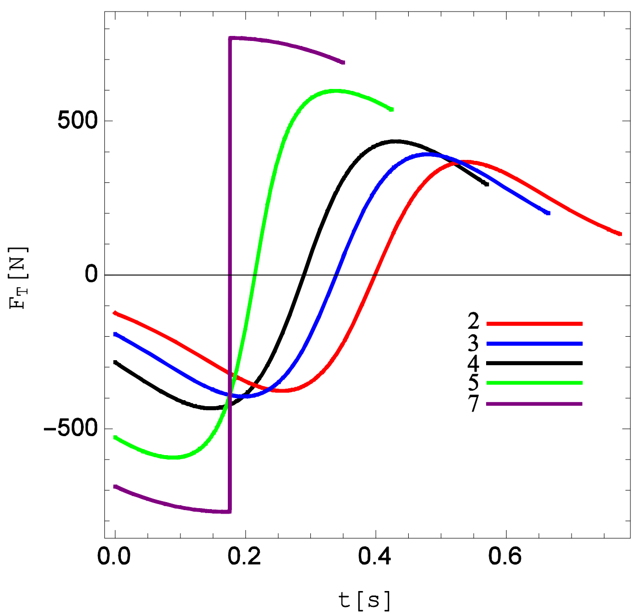
Слика 3.5. Скица базе и рулете са приказом компоненти реакције везе

Сада се компоненте реакције везе могу одредити на следећи начин:

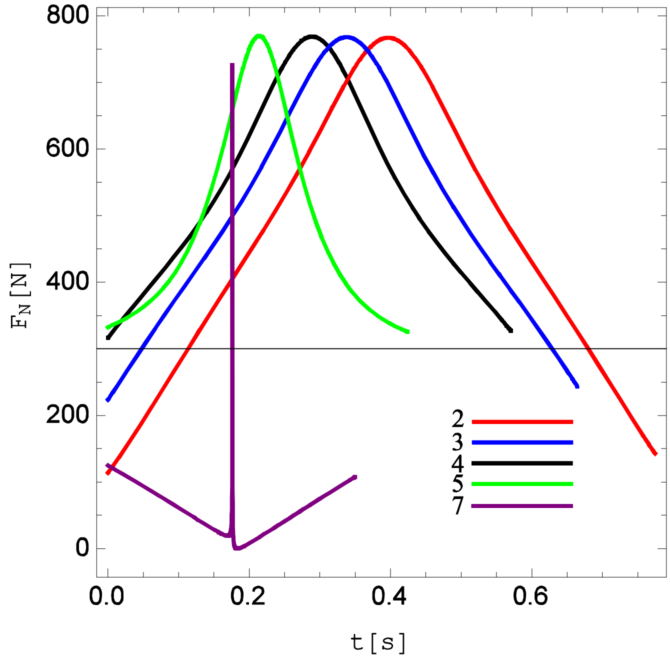
$$F_T(t) = \left(u_1(t)\dot{x}_b(t) + u_2(t)\dot{y}_b(t)\right) / \left|\vec{V}_b\right|,$$
$$F_N(t) = \left(u_1(t)\dot{y}_b(t) - u_2(t)\dot{x}_b(t)\right) / \left|\vec{V}_b\right|, \tag{3.51}$$

где је $\left|\vec{V}_b\right|$ интензитет брзине базе у тачки додира са рулетом. На слици 3.5 дата је скица базе и рулете са које се види да се претходни изрази могу извести у датом облику.

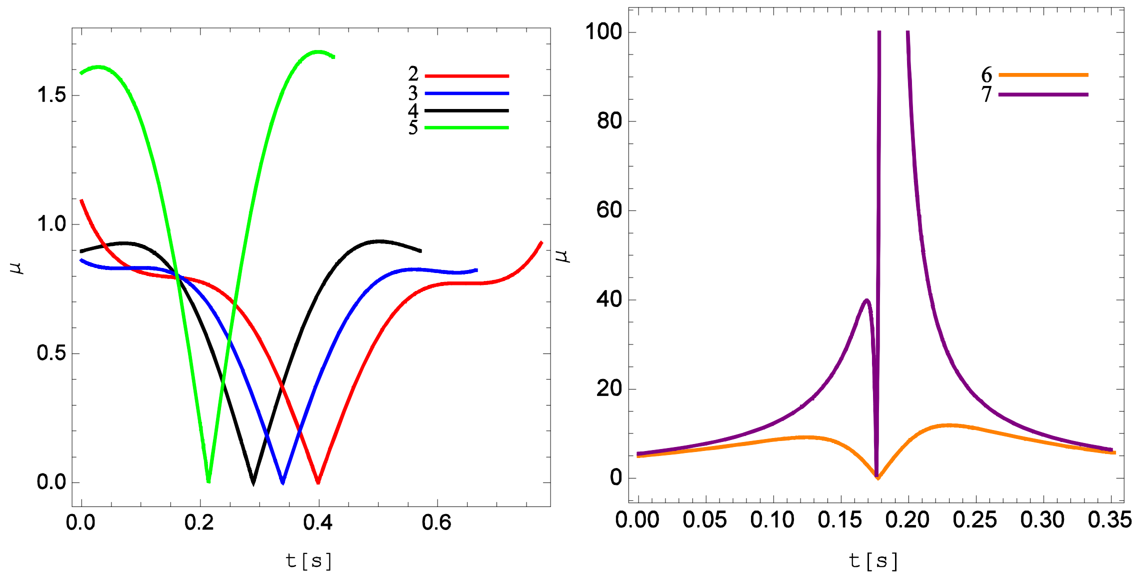
На сликама 3.6 и 3.7 дати су упоредни дијаграми компоненти реакције везе који одговарају одговарајућим бројевима из табеле 3.1. Треба напоменути да се приликом повећања почетне енергије система нормална компонента реакције непокретне центроиде смањује. Јасно се на дијаграмима види да за вредност почетне енергије E_0=203,322 [J] у једном тренутку кретања нормална компонента реакције везе достиже вредност једнаку нули. Према томе тада долази до одвајања система од везе. Дакле почетна енергија система мора бити мања од ове вредности. Треба напоменути да за реалне вредности коефицијента трења пре долази до проклизавања него до одвајања па се центроиде морају извести помоћу малих озубљења. Тада, уместо котрљања без клизања, веза је облика зупчастог пара.



Слика 3.6. Графици тангентне компоненте реакције везе непокретне центроиде F_T



Слика 3.7. Графици нормалне компоненте реакције везе непокретне центроиде F_N

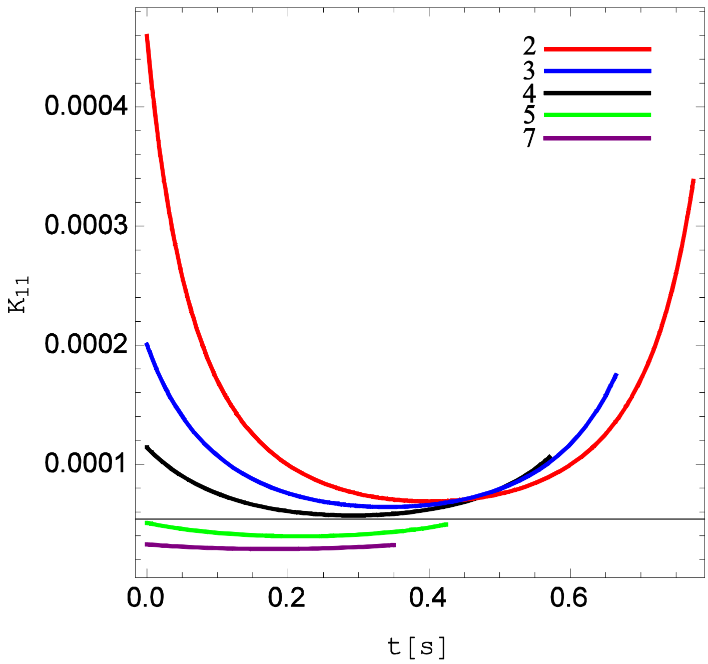


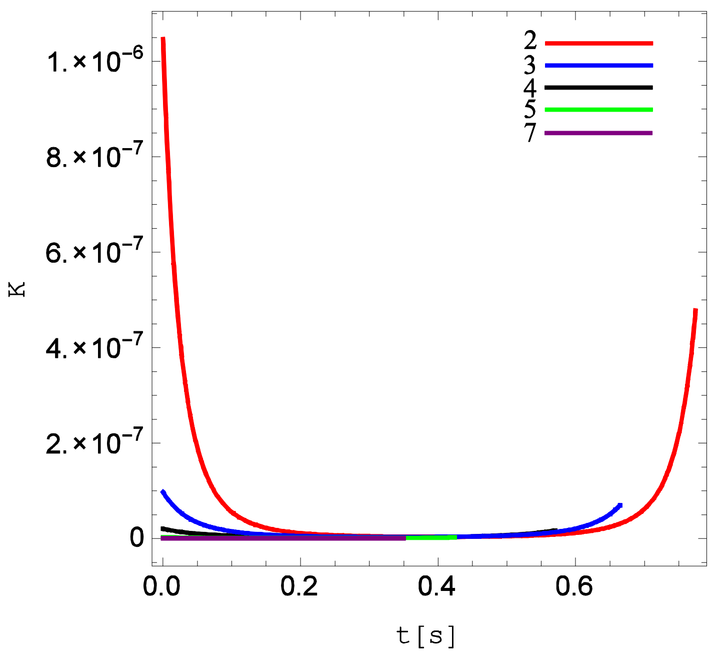
Слика 3.8. Графици коефицијента трења

На слици 3.8 дат је упоредни приказ коефицијента трења и услов који треба да испуни. Јасно се види како коефицијент трења расте са смањањем нормалне компоненте реакције везе и како за њену нулту вредност тежи бесконачности.

Такође потребно је да Келијеви услови оптималности (3.38) буду испуњени. Као што је већ напоменуто они су испуњени ако је матрица K позитивно дефинитна. Према условима за позитивно дефинитну матрицу следи [11]:

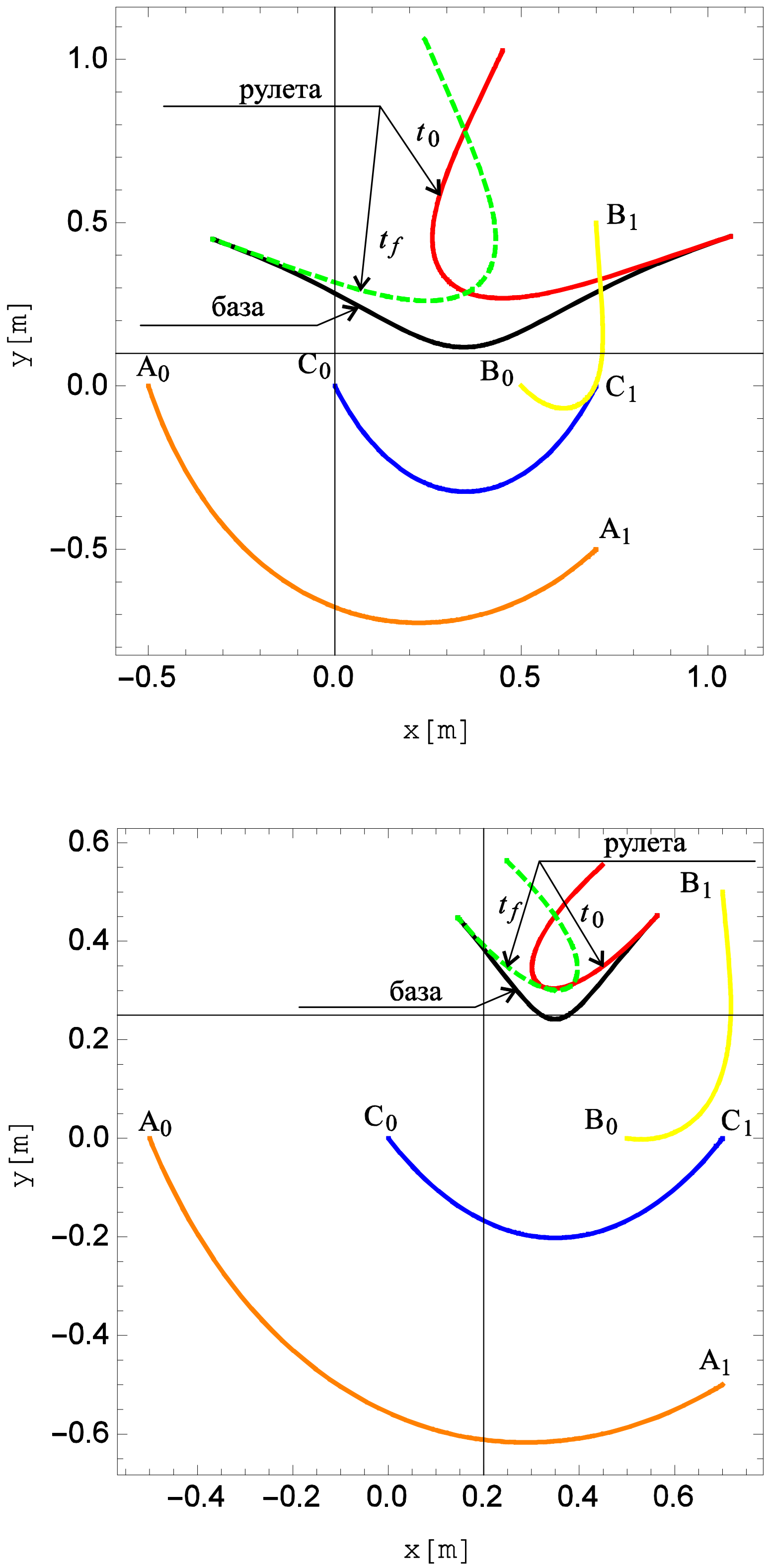
$$K_{11}>0, \quad K=K_{11}K_{22}-(K_{12})^2>0. \tag{3.52}$$





Слика 3.9. Потврда Келијевих услова оптималности

Са слике 3.9 види се да су Келијеви услови оптималности испуњени.



Слика 3.10. Центроиде и трајекторије тачака A, B и C за вредности почетне енергије система E_0=90 J односно E_0=150 J

На слици 3.10. приказане су трајекторије тачака променљиве масе, центра прстена *C*, као и графички приказ базе и рулете за вредности почетне енергије система E_0=90 J односно E_0=150 J. Дати су прикази рулета у почетним и крајњим положајима.

Литература

[1] Jeremić B., Radulović R., Obradović A.: *Realizing brachistochronic motion of a variable mass body by centrodes*, 7th International Congress of Serbian Society of Mechanics, Sremski Karlovci, Serbia, 24-26 June 2019, G3a, pp. 1-10, ISBN 978-86-909973-7-4.

[2] Obradović A., Šalinić S., Jeremić O., Mitrović Z.: *On the brachistochronic motion of a variable-mass mechanical system in general force fields,* - Math Mech Solids, Vol 19, No 4, 2014., pp. 398-410.

[3] Lurie A. I.: *Analytical mechanics,* - Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.

[4] Papastavridis J. G.: *Analytical mechanics*, - New York: Oxford University Press, 2002.

[5] Pesce C. P.: *The application of Lagrange equations to mechanical systems with mass explicitly dependent on position*, - J Appl Mech (Trans ASME), Vol 70, No 5, 2003., pp. 751–756.

[6] Cvetićanin L.: *Conservation laws in systems with variable mass*, - J Appl Mech (Trans ASME), Vol 60, No 4, 1993., pp. 954–958.

[7] Kirk D. E.: *Optimal control theory: An introduction*, - New York: Dover Publications, 2004.

[8] Pontryagin L., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., et al.: *The mathematical theory of optimal processes*, - New York: Interscience, 1962.

[9] Gabasov R., Kirillova F. M.: *Singular optimal controls*, - Moscow: Nauka, 1973.

[10] Gabasov R., Kirillova, F. M.: *High order necessary conditions for optimality*, - SIAM J Control, Vol 10, No 1, 1972, pp. 127–168.

[11] Gantmacher F. R.: *The theory of matrices vol. 1,* - Providence, RI: American Mathematical Society Chelsea Publishing, 2000.

[12] Stoer J., Bulirsch J.: *Introduction to numerical analysis*, New York: Springer-Verlag, 1993.

[13] Wolfram S.: *The Mathematica Book, 5th ed.Champaign*, IL: Wolfram Media, 2003.

[14] Zypman F. R.: *Instantaneous center of rotation and centrodes: background and new examples*, - Int J Mech Eng Educ, Vol 35, No 1, 2007., pp. 79–90.

Закључци

Циљ ове докторске дисертације био је како реализовати брахистохроно кретање одређене класе механичких система променљиве масе помоћу идеалних веза које у општем случају могу бити ограничене реакције. Као што се из приложеног могло видети, може се закључити да је то и урађено. Научна литература, у области брахистохроног кретања система променљиве масе, која је релеавантна за предмет ове докторске дисертације, пажљиво је скупљена, на одговарајући начин разврстана и дат је кратак критички осврт, како би научни допринос ове тезе, на што бољи начин био објашњен.

У првом поглављу извшено је математичко моделирање механичких система променљиве масе применом савремених метода аналитичке механике и механике система променљиве масе одабиром најподеснијих облика диференцијалних једначина кретања. Изведене су диференцијалне једначине кретања механичког система ограниченог линеарним, хомогеним, нехолономним везама помоћу квазибрзина. Изведене су и диференцијалне једначине кретања за систем променљиве масе који није ограничен холономним везама у коваријантном и затим у контраваријантом облику. Изведене једначине су након тога употребљене у наредним поглављима.

У другом поглављу решен је проблем реализације брахостохроног равног кретања нехолономног механичког система променљиве масе помоћу идеалне холономне везе ограничене реакције. Разматрања приказана у овом делу докторске дисертације ослањају се на рад [2] наведеног у литератури одговарајућег дела и тиме представљају својеврсни наставак истраживања из цитираног рада. Посматрани систем има два степена слободе кретања па се кретање може реализовати помоћу једне идеалне холономне везе. Ограничена реакција идеалне холономне везе искоришћена је као управљање па је тиме брахистохрони проблем формулисан као проблем оптималног управљања. Услед ограничености реакције везе испитано је како смањење опсега допустивог управљања утиче на промену структуре управљања и како се тиме из сингуларног управљања прелази у комбиновано сингуларно-несингуларно управљање, све док се не дође до релејног управљања.

У трећем поглављу решен је проблем реализације брахистохроног равног кретања механичког система променљиве масе помоћу идеалне везе у облику центроида. Разматрања приказана у овом раду ослањају се на рад [2] наведеног у литератури одговарајућег дела и тиме представљају својеврсни наставак истраживања из цитираног рада. Брахистохрони проблем формулисан је као проблем оптималног управљања где су реакције везе изражене преко генералисаних управљачких сила. Показано је како пораст почетне енергије система утиче на смањење нормалне реакције система. На тај начин почетна енергија система може се повећавати до одређене границе за коју се нормална компонента реакције везе у једном тренутку изједначава са нулом. За реалне вредности коефицијента трења проклизавање ће наступити пре одвајања. Даља истраживања могу ићи у смеру ограничења коефицијента трења котрљања при чему се јављају несингуларна управљања на појединим деловима.

Остварени научни доприноси

Успешном реализацијом циљева истраживања у оквиру докторске дисеретације под називом „Реализација брахистохроног кретања механичких система променљиве масе идеалним везама са ограниченим реакцијама“, остварени су следећи научни доприноси:

- Решен је проблем реализације брахистохроног кретања нехолономног механичког система променљиве масе са ограниченом реакцијом холономне идеалне везе где је разматрано како се мења структура управљања од сингуларног до релејног управљања;
- Решен је проблем реализације брахистохроног равног кретања тела променљиве масе, које се остварује котрљањем без клизања базе по рулети и дата је детаљна анализа утицаја почетне енергије система на потребну вредност коефицијента трења, као и на нормалну компоненту реакције везе чиме је показана могућност реализације оваквог кретања.

Сваки рад, а тиме и ова докторска дисертација, није савршен, не даје одговоре на сва питања у оквиру разматраних проблема и тиме може бити превазиђен. Будућа истарживања тежиће усавршавању ових, и других сличних тема, као и развијању нових метода у оквиру теорије оптималног управљања. Оквир смера у којем ће се одвијати даља истраживања може се видети и у закључцима ове докторске дисертације.

Прилози

Дати прилози представљају код у оквиру програмског пакета *Wolfram Mathematica* који су коришћени у докторској дисертацији.

Прилог 1

Прилог 1 представља нумерички код за решавање TPBVP из поглавља 2 за управљање типа минимум - сингуларно - максимум.

```
Clear[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2]

E0=100;

a=1;

kA=0.5;

kB=0.25;

AC=a/3;

Vr=20;

m0=100;

q3f=Pi/2;

umax=1300;

umin=-umax;
```

sol1[tf_?NumberQ,V1f_?NumberQ,V2f_?NumberQ,l2_?NumberQ,l3f_?NumberQ,t1_?NumberQ,t2_?NumberQ,l1_?NumberQ]:=

NDSolve[{

q1'[t]==V2[t]*Sin[q3[t]],

q2'[t]==-V2[t]*Cos[q3[t]],

q3'[t]==V2[t]/q4[t],

q4'[t]==V1[t],

q5'[t]==1,

V1'[t]==kA Vr+(AC $E^{kA\ q5[t]}$ umax V2[t])/(m0 $\sqrt{q4[t]^2\ V1[t]^2+AC^2\ V2[t]^2}$),

V2'[t]==kB Vr-(AC $E^{kB\ q5[t]}$ umax V1[t])/(m0 $\sqrt{q4[t]^2\ V1[t]^2+AC^2\ V2[t]^2}$),

l3'[t]==-(l1 Cos[q3[t]]+l2 Sin[q3[t]]) V2[t],

l4'[t]==(l3[t] V2[t])/q4[t]^2-(AC umax q4[t] V1[t]^2 ($E^{kB\ q5[t]}$ ni2[t] V1[t]-$E^{kA\ q5[t]}$ ni1[t] V2[t]))/(m0 (q4[t]^2 V1[t]^2+AC^2 V2[t]^2)$^{3/2}$),

ni1'[t]==(AC $E^{kA\ q5[t]}$ umax ni1[t] q4[t]^2 V1[t] V2[t]+AC^3 $E^{kB\ q5[t]}$ umax ni2[t] V2[t]^2-m0 l4[t] (q4[t]^2 V1[t]^2+AC^2 V2[t]^2)$^{3/2}$)/(m0 (q4[t]^2 V1[t]^2+AC^2 V2[t]^2)$^{3/2}$),

ni2'[t]==l2 Cos[q3[t]]-l3[t]/q4[t]-l1 Sin[q3[t]]-(AC $E^{kA\ q5[t]}$ umax ni1[t] q4[t]^2 V1[t]^2)/(m0 (q4[t]^2 V1[t]^2+AC^2 V2[t]^2)$^{3/2}$)-(AC^3 $E^{kB\ q5[t]}$ umax ni2[t] V1[t] V2[t])/(m0 (q4[t]^2 V1[t]^2+AC^2 V2[t]^2)$^{3/2}$),

q1[tf]==2a,

q2[tf]==-1.5a,

q3[tf]==q3f,

q4[tf]==3a,

q5[tf]==tf,

V1[tf]==V1f,

V2[tf]==V2f,

l3[tf]==l3f,

l4[tf]==(1-l1*V2f-l3f*V2f/(3*a))/V1f,

ni1[tf]==0,

ni2[tf]==0

},{q1,q2,q3,q4,q5,V1,V2,l3,l4,ni1,ni2},{t,tf,t1}];

sol2[tf_?NumberQ,V1f_?NumberQ,V2f_?NumberQ,l2_?NumberQ,l3f_?NumberQ,t1_?NumberQ,t2_?NumberQ,l1_?NumberQ]:=

NDSolve[{

q1'[t]==V2[t]*Sin[q3[t]],

q2'[t]==-V2[t]*Cos[q3[t]],

q3'[t]==V2[t]/q4[t],

q4'[t]==V1[t],

q5'[t]==1,

V1'[t]==1/m0 E$^{kA\ q5[t]}$ (E$^{-kA\ q5[t]}$ kA m0 Vr+(E$^{-kA\ q5[t]}$ m0 V2[t] (-E$^{kA\ q5[t]}$ ni1[t] q4[t]^{2} (2 kA^{2} Vr^{2} V2[t]-2 kA Vr V1[t] (kB Vr+(kA-kB) V2[t])+(kA-kB) V1[t]^{2} (2 kB Vr+(kA-kB) V2[t]))+V1[t] (l3[t] V1[t] (E$^{kB\ q5[t]}$ V1[t]^{2}+E$^{kA\ q5[t]}$ V2[t]^{2})+2 E$^{kA\ q5[t]}$ l4[t] q4[t]^{2} (-kA Vr V2[t]+V1[t] (kB Vr+(kA-kB) V2[t])))))/(q4[t]^{2} (l4[t] V1[t] (E$^{kB\ q5[t]}$ V1[t]^{2}+E$^{kA\ q5[t]}$ V2[t]^{2})+ni1[t] (E$^{kB\ q5[t]}$ kA Vr V1[t]^{2}+E$^{kB\ q5[t]}$ (-kA+kB) V1[t]^{3}+E$^{kA\ q5[t]}$ kA Vr V2[t]^{2})))),

V2'[t]==1/m0 E$^{kB\ q5[t]}$ (E$^{-kB\ q5[t]}$ kB m0 Vr-(E$^{-kA\ q5[t]}$ m0 V1[t] (-E$^{kA\ q5[t]}$ ni1[t] q4[t]^{2} (2 kA^{2} Vr^{2} V2[t]-2 kA Vr V1[t] (kB Vr+(kA-kB) V2[t])+(kA-kB) V1[t]^{2} (2 kB Vr+(kA-kB) V2[t]))+V1[t] (l3[t] V1[t] (E$^{kB\ q5[t]}$ V1[t]^{2}+E$^{kA\ q5[t]}$ V2[t]^{2})+2 E$^{kA\ q5[t]}$ l4[t] q4[t]^{2} (-kA Vr V2[t]+V1[t] (kB Vr+(kA-kB) V2[t])))))/(q4[t]^{2} (l4[t] V1[t] (E$^{kB\ q5[t]}$ V1[t]^{2}+E^{kA}

$^{q5[t]}$ V2[t]^{2})+ni1[t] (E$^{kB\ q5[t]}$ kA Vr V1[t]^{2}+E$^{kB\ q5[t]}$ (-kA+kB) V1[t]^{3}+E$^{kA\ q5[t]}$ kA Vr V2[t]^{2})))),

l3'[t]==-(1/(q4[t] V1[t]^{2})) E$^{-kB\ q5[t]}$ Csc[q3[t]] V2[t] (-E$^{kA\ q5[t]}$ Cos[q3[t]] ni1[t] q4[t] (-kA Vr V2[t]+V1[t] (kB Vr+(kA-kB) V2[t]))+V1[t] (-E$^{kB\ q5[t]}$ Cos[q3[t]] l3[t] V1[t]+q4[t] (E$^{kB\ q5[t]}$ l2 V1[t]+E$^{kA\ q5[t]}$ Cos[q3[t]] l4[t] V2[t]))),

l4'[t]==(l3[t] V2[t])/q4[t]^{2},

ni1'[t]==-((E$^{-kA\ q5[t]}$ (l4[t]^{2} q4[t]^{2} V1[t]^{2} (E$^{(kA+kB)\ q5[t]}$ V1[t]^{2}+E$^{2\ kA\ q5[t]}$ V2[t]^{2})+E$^{kA\ q5[t]}$ l4[t] ni1[t] q4[t]^{2} V1[t] (E$^{kB\ q5[t]}$ kA Vr V1[t]^{2}+E$^{kB\ q5[t]}$ (-kA+kB) V1[t]^{3}+3 E$^{kA\ q5[t]}$ kA Vr V2[t]^{2}-2 E$^{kA\ q5[t]}$ V1[t] V2[t] (kB Vr+(kA-kB) V2[t]))+E$^{kA\ q5[t]}$ ni1[t] V2[t] (-l3[t] V1[t]^{2} (E$^{kB\ q5[t]}$ V1[t]^{2}+E$^{kA\ q5[t]}$ V2[t]^{2})+E$^{kA\ q5[t]}$ ni1[t] q4[t]^{2} (2 kA^{2} Vr^{2} V2[t]-2 kA Vr V1[t] (kB Vr+(kA-kB) V2[t])+(kA-kB) V1[t]^{2} (2 kB Vr+(kA-kB) V2[t])))))/(q4[t]^{2} V1[t] (l4[t] V1[t] (E$^{kB\ q5[t]}$ V1[t]^{2}+E$^{kA\ q5[t]}$ V2[t]^{2})+ni1[t] (E$^{kB\ q5[t]}$ kA Vr V1[t]^{2}+E$^{kB\ q5[t]}$ (-kA+kB) V1[t]^{3}+E$^{kA\ q5[t]}$ kA Vr V2[t]^{2})))),

ni2'[t]==-((E$^{-kB\ q5[t]}$ (l4[t]^{2} q4[t]^{2} V1[t]^{2} V2[t] (E$^{(kA+kB)\ q5[t]}$ V1[t]^{2}+E$^{2\ kA\ q5[t]}$ V2[t]^{2})+E$^{kA\ q5[t]}$ Vr ni1[t]^{2} q4[t]^{2} (E$^{kB\ q5[t]}$ kA kB Vr V1[t]^{3}+E$^{kB\ q5[t]}$ kB (-kA+kB) V1[t]^{4}-E$^{kB\ q5[t]}$ kA^{2} Vr V1[t]^{2} V2[t]+E$^{kA\ q5[t]}$ kA^{2} Vr V2[t]^{3}-E$^{kA\ q5[t]}$ kA V1[t] V2[t]^{2} (kB Vr+(kA-kB) V2[t]))+ni1[t] V1[t] (l3[t] V1[t]^{3} (E$^{2\ kB\ q5[t]}$ V1[t]^{2}+E$^{(kA+kB)\ q5[t]}$ V2[t]^{2})+l4[t] q4[t]^{2} (E$^{(kA+kB)\ q5[t]}$ kB Vr V1[t]^{3}+2 E$^{2\ kA\ q5[t]}$ kA Vr V2[t]^{3}-E$^{2\ kA\ q5[t]}$ V1[t] V2[t]^{2} (kB Vr+(kA-kB) V2[t])))))/(q4[t]^{2} V1[t]^{2} (l4[t] V1[t] (E$^{kB\ q5[t]}$ V1[t]^{2}+E$^{kA\ q5[t]}$ V2[t]^{2})+ni1[t] (E$^{kB\ q5[t]}$ kA Vr V1[t]^{2}+E$^{kB\ q5[t]}$ (-kA+kB) V1[t]^{3}+E$^{kA\ q5[t]}$ kA Vr V2[t]^{2})))),

q1[t1]==First[Evaluate[(q1[t1])/.sol1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

q2[t1]==First[Evaluate[(q2[t1])/.sol1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

q3[t1]==First[Evaluate[(q3[t1])/.sol1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

q4[t1]==First[Evaluate[(q4[t1])/.sol1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

q5[t1]==First[Evaluate[(q5[t1])/.sol1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

V1[t1]==First[Evaluate[(V1[t1])/.sol1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]], V2[t1]==First[Evaluate[(V2[t1])/.sol1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

l3[t1]==First[Evaluate[(l3[t1])/.sol1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

l4[t1]==First[Evaluate[(l4[t1])/.sol1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

ni1[t1]==First[Evaluate[(ni1[t1])/.sol1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

ni2[t1]==First[Evaluate[(ni2[t1])/.sol1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]]

},{q1,q2,q3,q4,q5,V1,V2,l3,l4,ni1,ni2},

{t,t1,t2}];

sol3[tf_?NumberQ,V1f_?NumberQ,V2f_?NumberQ,l2_?NumberQ,l3f_?NumberQ,t1_?NumberQ,t2_?NumberQ,l1_?NumberQ]:=

NDSolve[{

q1'[t]==V2[t]*Sin[q3[t]],

q2'[t]==-V2[t]*Cos[q3[t]],

q3'[t]==V2[t]/q4[t],

q4'[t]==V1[t],

q5'[t]==1,

V1'[t]==kA Vr+(AC $E^{kA\ q5[t]}$ umin V2[t])/(m0 $\sqrt{q4[t]^2\ V1[t]^2+AC^2\ V2[t]^2}$),

V2'[t]==kB Vr-(AC $E^{kB\ q5[t]}$ umin V1[t])/(m0 $\sqrt{q4[t]^2\ V1[t]^2+AC^2\ V2[t]^2}$),

l3'[t]==-(l1 Cos[q3[t]]+l2 Sin[q3[t]]) V2[t],

l4'[t]==(l3[t] V2[t])/q4[t]^2-(AC umin q4[t] V1[t]^2 ($E^{kB\ q5[t]}$ ni2[t] V1[t]-$E^{kA\ q5[t]}$ ni1[t] V2[t]))/(m0 (q4[t]^2 V1[t]^2+AC^2 V2[t]^2)$^{3/2}$),

ni1'[t]==(AC $E^{kA\ q5[t]}$ umin ni1[t] q4[t]^2 V1[t] V2[t]+AC^3 $E^{kB\ q5[t]}$ umin ni2[t] V2[t]^2-m0 l4[t] (q4[t]^2 V1[t]^2+AC^2 V2[t]^2)$^{3/2}$)/(m0 (q4[t]^2 V1[t]^2+AC^2 V2[t]^2)$^{3/2}$), ni2'[t]==l2 Cos[q3[t]]-l3[t]/q4[t]-l1 Sin[q3[t]]-(AC E$^{kA\ q5[t]}$ umin ni1[t] q4[t]^{2} V1[t]^{2})/(m0 (q4[t]^2 V1[t]^2+AC^2 V2[t]^2)$^{3/2}$)-(AC^{3} E$^{kB\ q5[t]}$ umin ni2[t] V1[t] V2[t])/(m0 (q4[t]^2 V1[t]^2+AC^2 V2[t]^2)$^{3/2}$),

q1[t2]==First[Evaluate[(q1[t2])/.sol2[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

q2[t2]==First[Evaluate[(q2[t2])/.sol2[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

q3[t2]==First[Evaluate[(q3[t2])/.sol2[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

q4[t2]==First[Evaluate[(q4[t2])/.sol2[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

q5[t2]==First[Evaluate[(q5[t2])/.sol2[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

V1[t2]==First[Evaluate[(V1[t2])/.sol2[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

V2[t2]==First[Evaluate[(V2[t2])/.sol2[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

l3[t2]==First[Evaluate[(l3[t2])/.sol2[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

l4[t2]==First[Evaluate[(l4[t2])/.sol2[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

ni1[t2]==First[Evaluate[(ni1[t2])/.sol2[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]],

ni2[t2]==First[Evaluate[(ni2[t2])/.sol2[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]]]

},{q1,q2,q3,q4,q5,V1,V2,l3,l4,ni1,ni2},{t,t2,0}];

xx1[tf_?NumberQ,V1f_?NumberQ,V2f_?NumberQ,l2_?NumberQ,l3f_?NumberQ,t1_?NumberQ,t2_?NumberQ,l1_?NumberQ]:=

First[(q1[0])/.sol3[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]];

xx2[tf_?NumberQ,V1f_?NumberQ,V2f_?NumberQ,l2_?NumberQ,l3f_?NumberQ,t1_?NumberQ,t2_?NumberQ,l1_?NumberQ]:=

First[(q2[0])/.sol3[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]];

xx3[tf_?NumberQ,V1f_?NumberQ,V2f_?NumberQ,l2_?NumberQ,l3f_?NumberQ,t1_?NumberQ,t2_?NumberQ,l1_?NumberQ]:=

First[(q3[0])/.sol3[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]];

xx4[tf_?NumberQ,V1f_?NumberQ,V2f_?NumberQ,l2_?NumberQ,l3f_?NumberQ,t1_?NumberQ,t2_?NumberQ,l1_?NumberQ]:=

First[(q4[0]-a)/.sol3[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]];

xx5[tf_?NumberQ,V1f_?NumberQ,V2f_?NumberQ,l2_?NumberQ,l3f_?NumberQ,t1_?NumberQ,t2_?NumberQ,l1_?NumberQ]:=

First[(0.5*m0*V1[0]^2+0.5*m0*V2[0]^2-E0)/.sol3[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]];

xx6[tf_?NumberQ,V1f_?NumberQ,V2f_?NumberQ,l2_?NumberQ,l3f_?NumberQ,t1_?NumberQ,t2_?NumberQ,l1_?NumberQ]:=

First[((AC (-$E^{kB\ q5[0]}$ ni2[0] V1[0]+$E^{kA\ q5[0]}$ ni1[0] V2[0]))/(m0 $\sqrt{q4[0]^2\ V1[0]^2+AC^2\ V2[0]^2}$))/.sol3[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]];

xx7[tf_?NumberQ,V1f_?NumberQ,V2f_?NumberQ,l2_?NumberQ,l3f_?NumberQ,t1_?NumberQ,t2_?NumberQ,l1_?NumberQ]:=

First[((AC (-$E^{kB\ q5[t1]}$ ni2[t1] V1[t1]+$E^{kA\ q5[t1]}$ ni1[t1] V2[t1]))/(m0 $\sqrt{q4[t1]^2\ V1[t1]^2+AC^2\ V2[t1]^2}$))/.sol1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]];

xx8[tf_?NumberQ,V1f_?NumberQ,V2f_?NumberQ,l2_?NumberQ,l3f_?NumberQ,t1_?NumberQ,t2_?NumberQ,l1_?NumberQ]:=

First[(AC ($E^{kB\ q5[t1]}$ l3[t1] V1[t1] ($q4[t1]^2$ $V1[t1]^2$+AC^2 $V2[t1]^2$)+$E^{kA\ q5[t1]}$ ni1[t1] q4[t1] (-q4[t1] $V1[t1]^3$ V2[t1]+AC^2 kA $V2[t1]^3$+$q4[t1]^2$ V1[t1] (kB Vr V1[t1]-kA Vr V2[t1]+kA V1[t1] V2[t1]))-q4[t1] (-$E^{kB\ q5[t1]}$ ni2[t1] q4[t1] $V1[t1]^4$+$q4[t1]^2$ $V1[t1]^2$ ($E^{kB\ q5[t1]}$ (l2 Cos[q3[t1]]+kB ni2[t1]-(l1) Sin[q3[t1]]) V1[t1]+$E^{kA\ q5[t1]}$ l4[t1] V2[t1])+AC^2 V2[t1] (-$E^{kB\ q5[t1]}$ ni2[t1] (kB V1[t1] (Vr-V2[t1])-kA Vr V2[t1])+V2[t1] ($E^{kB\ q5[t1]}$ (l2 Cos[q3[t1]]-(l1) Sin[q3[t1]]) V1[t1]+$E^{kA\ q5[t1]}$ l4[t1] V2[t1])))))/(m0 q4[t1] (q4[t1]^2 V1[t1]^2+AC^2 V2[t1]^2)$^{3/2}$)/.sol1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]];

Clear[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1];

s1=FindRoot[{

xx1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]==0,

```
   xx2[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]==0,
   xx3[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]==0,
   xx4[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]==0,
   xx5[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]==0,
   xx6[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]==0,
   xx7[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]==0,
   xx8[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]==0

},{{tf,0.7095337204479251`},{V1f,5.828208100141977`},{V2f,5.952484352995515`}
,{l2,0.0016520211134046438`},{l3f,0.12964083157628142`},{t1,0.681526793636757
4`},{t2,0.396304923189724`},{l1,0.04993428121536759`}}]
tf=tf/.s1;
V1f=V1f/.s1;
V2f=V2f/.s1;
l2=l2/.s1;
l3f=l3f/.s1;
t1=t1/.s1;
t2=t2/.s1;
l1=l1/.s1;
xx1[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]/.s1
xx2[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]/.s1
xx3[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]/.s1
xx4[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]/.s1
```

```
xx5[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]/.s1

xx6[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]/.s1

xx7[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]/.s1

xx8[tf,V1f,V2f,l2,l3f,t1,t2,l1]/.s1


ss1=First[NDSolve [identično kao sol1]];

ss2=First[NDSolve [identično kao sol2]];

ss3=First[NDSolve [identično koa sol3]];
```

Прилог 2

Прилог 2 представља нумерички код за решавање TPBVP из поглавља 3 за једну вредност почетне енергије система.

```
E0=60;

a=1;

k=0.4;

Vr=10;

m0=10;

M=20;

q3f=Pi/2;
```

```
g=9.80665;

R=0.5;


xx1[tf_?NumberQ,p1f_?NumberQ,p2f_?NumberQ,p3f_?NumberQ]:=

 First[(q1[0])/.NDSolve[{

     q1'[t]==p1[t],

     q2'[t]==p2[t],

     q3'[t]==p3[t],

     q4'[t]==1,

     p1'[t]==1/(M+2 (m0-k q4[t])) (-k Vr (-Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]])-(2 R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t]) (k R Vr (p2[t]^2+p3[t]^2) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+p1[t] (-k Vr p3[t]+R p2[t] (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]])))-k Vr ni1[t] (-R^2 p1[t]^2 p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]])+R (p2[t]^2+p3[t]^2) (2 k R p3[t] (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+2 k Vr (-Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]])-R p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))-2 p1[t] (k p3[t] (-Vr+R p3[t])+R p2[t] (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]]+k R p3[t] (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]])))))/(R (p1[t]^2+p2[t]^2+p3[t]^2) (k Vr ni1[t]+R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t])))),

     p2'[t]==1/(M+2 (m0-k q4[t])) (-g (M+2 (m0-k q4[t]))+k Vr (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]])-(-2 R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t]) (k R Vr p1[t] p2[t] (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+R p1[t]^2 (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]])+p3[t] (k Vr p2[t]+R p3[t] (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]])))+k Vr ni1[t] (2 k R p1[t] p2[t] (-Vr+R p3[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])-R p1[t]^2 (2 g M+4 g m0-2 k Vr Cos[q3[t]]-4 g k q4[t]+R p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])-2 k Vr Sin[q3[t]]+2 k R p3[t] (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))+p3[t] (-2 k p2[t] (Vr-R p3[t])-R^2 p2[t]^2 p3[t] (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+R p3[t] (-2 g M-4 g m0+2 k Vr Cos[q3[t]]+4 g k q4[t]-R p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+2 k Vr Sin[q3[t]]-2 k R p3[t]
```

(Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]])))))/(R (p1[t]^2+p2[t]^2+p3[t]^2) (k Vr ni1[t]+R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t])))),

p3'[t]==1/(M+2 (m0-k q4[t])) ((k Vr)/R-1/p3[t] (-((p2[t] (-2 R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t]) (k R Vr p1[t] p2[t] (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+R p1[t]^2 (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]])+p3[t] (k Vr p2[t]+R p3[t] (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]])))+k Vr ni1[t] (2 k R p1[t] p2[t] (-Vr+R p3[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])-R p1[t]^2 (2 g M+4 g m0-2 k Vr Cos[q3[t]]-4 g k q4[t]+R p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])-2 k Vr Sin[q3[t]]+2 k R p3[t] (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))+p3[t] (-2 k p2[t] (Vr-R p3[t])-R^2 p2[t]^2 p3[t] (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+R p3[t] (-2 g M-4 g m0+2 k Vr Cos[q3[t]]+4 g k q4[t]-R p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+2 k Vr Sin[q3[t]]-2 k R p3[t] (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))))))/(R (p1[t]^2+p2[t]^2+p3[t]^2) (k Vr ni1[t]+R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t]))))-(p1[t] (2 R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t]) (k R Vr (p2[t]^2+p3[t]^2) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+p1[t] (-k Vr p3[t]+R p2[t] (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]])))-k Vr ni1[t] (-R^2 p1[t]^2 p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]])+R (p2[t]^2+p3[t]^2) (2 k R p3[t] (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+2 k Vr (-Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]])-R p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))-2 p1[t] (k p3[t] (-Vr+R p3[t])+R p2[t] (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]]+k R p3[t] (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))))))/(R (p1[t]^2+p2[t]^2+p3[t]^2) (k Vr ni1[t]+R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t]))))),

l3'[t]==-((k Vr ni1[t] p2[t] (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]]))/(p1[t] (M+2 (m0-k q4[t]))))+(k Vr ni1[t] (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))/(M+2 (m0-k q4[t])),

ni1'[t]==-((R l3[t] p1[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t])+k Vr ni1[t] (p1[t]+R p3[t] (-Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]])))/(R p1[t] p3[t] (M+2 m0-2 k q4[t])))-(ni1[t] (2 R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t]) (k R Vr (p2[t]^2+p3[t]^2) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+p1[t] (-k Vr p3[t]+R p2[t] (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]])))-k Vr ni1[t] (-R^2 p1[t]^2 p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]])+R (p2[t]^2+p3[t]^2) (2 k R p3[t] (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+2 k Vr (-Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]])-R p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))-2 p1[t] (k p3[t] (-Vr+R p3[t])+R p2[t] (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]]+k R p3[t] (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))))))/(R p1[t] (p1[t]^2+p2[t]^2+p3[t]^2) (k Vr ni1[t]+R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t])) (M+2 (m0-k q4[t]))),

ni2'[t]==-((R l3[t] p1[t] p2[t] (M+2 m0-2 k q4[t])+ni1[t] (k Vr p2[t]+R p3[t] (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]])))/(R p1[t] p3[t] (M+2 m0-2 k q4[t])))-(ni1[t] (-2 R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t]) (k R Vr p1[t] p2[t] (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+R p1[t]^2 (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]])+p3[t] (k Vr p2[t]+R p3[t] (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]])))+k Vr ni1[t] (2 k R p1[t] p2[t] (-Vr+R p3[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])-R p1[t]^2 (2 g M+4 g m0-2 k Vr Cos[q3[t]]-4 g k q4[t]+R p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])-2 k Vr Sin[q3[t]]+2 k R p3[t] (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))+p3[t] (-2 k p2[t] (Vr-R p3[t])-R^2 p2[t]^2 p3[t] (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+R p3[t] (-2 g M-4 g m0+2 k Vr Cos[q3[t]]+4 g k q4[t]-R p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+2 k Vr Sin[q3[t]]-2 k R p3[t] (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))))))/(R p1[t] (p1[t]^2+p2[t]^2+p3[t]^2) (k Vr ni1[t]+R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t])) (M+2 (m0-k q4[t]))),

ni3'[t]==-l3[t]-(ni1[t] (-((p2[t] (-2 R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t]) (k R Vr p1[t] p2[t] (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+R p1[t]^2 (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]])+p3[t] (k Vr p2[t]+R p3[t] (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]])))+k Vr ni1[t] (2 k R p1[t] p2[t] (-Vr+R p3[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])-R p1[t]^2 (2 g M+4 g m0-2 k Vr Cos[q3[t]]-4 g k q4[t]+R p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])-2 k Vr Sin[q3[t]]+2 k R p3[t] (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))+p3[t] (-2 k p2[t] (Vr-R p3[t])-R^2 p2[t]^2 p3[t] (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+R p3[t] (-2 g M-4 g m0+2 k Vr Cos[q3[t]]+4 g k q4[t]-R p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+2 k Vr Sin[q3[t]]-2 k R p3[t] (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))))))/(R (p1[t]^2+p2[t]^2+p3[t]^2) (k Vr ni1[t]+R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t]))))-(p1[t] (2 R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t]) (k R Vr (p2[t]^2+p3[t]^2) (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+p1[t] (-k Vr p3[t]+R p2[t] (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]])))-k Vr ni1[t] (-R^2 p1[t]^2 p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]])+R (p2[t]^2+p3[t]^2) (2 k R p3[t] (Cos[q3[t]]-Sin[q3[t]])+2 k Vr (-Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]])-R p3[t]^2 (M+2 m0-2 k q4[t]) (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))-2 p1[t] (k p3[t] (-Vr+R p3[t])+R p2[t] (g M+2 g m0-k Vr Cos[q3[t]]-2 g k q4[t]-k Vr Sin[q3[t]]+k R p3[t] (Cos[q3[t]]+Sin[q3[t]]))))))/(R (p1[t]^{2}+p2[t]^{2}+p3[t]^{2}) (k Vr ni1[t]+R l3[t] p1[t] (M+2 m0-2 k q4[t])))))/(p1[t] p3[t] (M+2 (m0-k q4[t]))),

q1[tf]==0.7a,q2[tf]==0,q3[tf]==q3f,q4[tf]==tf,p1[tf]==p1f,p2[tf]==p2f,p3[tf]==p3f,l3[tf]==p3f/(p1f^2+p2f^2+p3f^2),ni1[tf]==0,ni2[tf]==0,ni3[tf]==0

},{q1,q2,q3,q4,p1,p2,p3,l3,ni1,ni2,ni3},{t,tf,0}]]

xx2[tf_?NumberQ,p1f_?NumberQ,p2f_?NumberQ,p3f_?NumberQ]:=

First[(q2[0])/.NDSolve [identično kao xx1]]

xx3[tf_?NumberQ,p1f_?NumberQ,p2f_?NumberQ,p3f_?NumberQ]:=

First[(q3[0])/.NDSolve [identično kao xx1]]

xx4[tf_?NumberQ,p1f_?NumberQ,p2f_?NumberQ,p3f_?NumberQ]:=

First[(0.5*(M+2*m0)*p1[0]^2+0.5*(M+2*m0)*p2[0]^2+0.5*(M+2*m0)*R^2*p3[0]^2-E0)/.NDSolve [identično kao xx1]]

s1=FindRoot[{

xx1[tf,p1f,p2f,p3f]==0,

xx2[tf,p1f,p2f,p3f]==0,

xx3[tf,p1f,p2f,p3f]==0,

xx4[tf,p1f,p2f,p3f]==0},{{tf,0.6644314995657453`},{p1f,0.5203661531102902`},{p2f,1.6818628508693163`},{p3f,1.1511184724955978`}}]

xx1[tf/.s1,p1f/.s1,p2f/.s1,p3f/.s1]

xx2[tf/.s1,p1f/.s1,p2f/.s1,p3f/.s1]

xx3[tf/.s1,p1f/.s1,p2f/.s1,p3f/.s1]

xx4[tf/.s1,p1f/.s1,p2f/.s1,p3f/.s1]

tf=tf/.s1

p1f=p1f/.s1

p2f=p2f/.s1

p3f=p3f/.s1

ss=First[NDSolve [identično kao xx1]]

Биографија

Аутор је рођен 24. марта 1988. године у Горњем Милановцу, Република Србија. Основну школу завршио је у Горњем Милановцу 2003. године са одличним успехом, просечном оценом 5,00, као носилац дипломе „Вук Стефановић Караџић“ и ђак генерације. Техничку школу завршио је у Горњем Милановцу 2007. године са одличним успехом, просечном оценом 5,00, као носилац дипломе „Вук Стефановић Караџић“. Исте године уписао је Основне академске студије на Машинском факултету Универзитета у Београду. Завршни испит положио је 25.06.2010. са оценом 10,00 (десет) и просечном оценом на Основним студијама 10,00 (десет), одбранивши завршни рад на тему „Биомеханички модел и карактеристике подсистема стопало-чланак-потколеница са приказом ортоза и протеза истих“ из предмета Биомеханика локомоторног система. Исте године уписује Мастер академске студије, модул Хидроенергетика, на Машинском факултету Универзитета у Београду. Положио је све испите са просечном оценом 10,00 (десет). Мастер студије завршио је 15. маја 2012. са оценом 10,00 (десет) и укупном просечном оценом током студија 10,00 (десет), одбранивши завршни рад на тему „Пројектовање инсталације за одређивање карактеристика затварача“ из предмета Хидроенергетска постројења и опрема, на Катедри за хидроенергетику, Универзитет у Београду – Машински факултет. Ментор завршног рада на мастер студијама био је проф. др Мирослав Бенишек. Докторске студије на Машинском факултету Универзитета у Београду уписао је 2012. године - бр. индекса Д3/12. Потенцијални ментор докторске дисертације је проф. др Александар Обрадовић. Од 1. јуна 2013. запослен је на Машинском факултету у Београду као сарадник на пројекту Технолошког развоја „Одрживост и унапређење машинских система у енергетици и транспорту применом форензичког инжењерства, еко и робуст дизајна“, који финансира Министарство просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије: ТР-35006, чији је руководилац проф. др Срђен Бошњак. Од 6. марта 2014. запослен је на Машинском факултету у Београду као асистент на катедри за механику. Године 2015. постаје члан Српског друштва за механику (СДМ). Од 2017. године рецензент је у часопису Mathematics and Mechanics of Solids.

Током студија добијао је следеће похвале поводом Дана Машинског факултета:

- Похвале Машинског факултета за најбољег студента на првој, другој и трећој години основних академских студија (2007/2008., 2008/2009. и 2009/2010.),

- Похвала Машинског факултета за најбољег студента на основним академским студијама из генерације уписане на студије школске 2007/2008. године са просечном оценом 10,00,

- Похвала Машинског факултета за одличан успех на првој и другој години мастер академских студија (2010/2011. и 2011/2012.),

- Похвала Машинског факултета за најбољег студента на мастер академским студијама из генерације уписане на студије школске 2010/2011. године са просечном оценом 10,00 и

- Похвала Машинског факултета – најбољи студент на мастер академским студијама, мастер инжењер машинства, из генерације уписане на студије школске 2007/2008. године - студент генерације.

Био је носилац многобројних стипендија међу којима се издвајају стипендије:

- Стипендија Фонда за младе таленте Министарства омладине и спорта Републике Србије 2009/2010.,

- Стипендија Фонда за младе таленте Министарства омладине и спорта Републике Србије – „Доситеја“ 2011/2012.,

- Стипендија Општине Горњи Милановац 2009.,2010. и 2012. и

- Стипендија Министарства просвете и спорта Републике Србије 2009. и 2011.

Аутор се служи следећим програмским пакетима: Microsoft Office (Word, Excel, PowerPoint), Autodesk AutoCAD, SolidWorks, SolidEdge, ProDeskop, MatLab, Wolfram Mathematica, основе LaTeX, Fortran и Ansys (модул CFD). Аутор влада енглеским језиком.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Бојан М. Јеремић

број индекса Д3/12

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Реализација брахистохроног кретања механичких система променљиве масе идеалним везама са ограниченим реакцијама

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 28.11.2019.

____

Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Бојан М. Јеремић

Број индекса Д3/12

Студијски програм Докторске академске студије-Машинско инжењерство

Наслов рада Реализација брахистохроног кретања механичких система промењљиве масе идеалним везама са ограниченим реакцијама

Ментор редовни проф. Александар Обрадовић и доцент Радослав Радуловић

Потписани/а Бојан М. Јеремић

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 28.11.2019.

____

Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Реализација брахистохроног кретања механичких система промењиве масе идеалним везама са ограниченим реакцијама

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 28.11.2019.

____

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.