



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA  
U NOVOM SADU

---



**Stjepan Galamboš**

**UTICAJ OBLIKA I VRSTE  
AERODINAMIČKE OPREME PRIVREDNIH  
MOTORNIH VOZILA NA OTPOR  
VAZDUHA**

**DOKTORSKA DISERTACIJA**

Novi Sad, 2020.



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ ● ФАКУЛТЕТ ТЕХНИЧКИХ НАУКА  
21000 НОВИ СА Д, Трг Доситеја Обрадовића 6

## КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, <b>РБР:</b>	
Идентификациони број, <b>ИБР:</b>	
Тип документације, <b>ТД:</b>	Монографска публикација
Тип записа, <b>ТЗ:</b>	Текстуални штампани материјал
Врста рада, <b>ВР:</b>	Докторска дисертација
Аутор, <b>АУ:</b>	Стјепан Галамбош
Ментор, <b>МН:</b>	др Јован Дорић
Наслов рада, <b>НР:</b>	Утицај облика и врсте аеродинамичке опреме привредним моторних возила на отпор ваздуха
Језик публикације, <b>ЈП:</b>	српски
Језик извода, <b>ЈИ:</b>	српски
Земља публикавања, <b>ЗП:</b>	Република Србија
Уже географско подручје, <b>УГП:</b>	Војводина
Година, <b>ГО:</b>	2020.
Издавач, <b>ИЗ:</b>	Факултет техничких наука, Универзитет у Новом Саду
Место и адреса, <b>МА:</b>	Нови Сад, Трг Доситеја Обрадовића 6
Физички опис рада, <b>ФО:</b> (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	9/276/81/60/155/0/0
Научна област, <b>НО:</b>	Машинско инжењерство
Научна дисциплина, <b>НД:</b>	Аеродинамика моторних возила
Предметна одредница/Кључне речи, <b>ПО:</b>	Аеродинамика, оптимизација, планирање експеримента, ваздушни тунел
<b>УДК</b>	
Чува се, <b>ЧУ:</b>	Библиотека Факултета техничких наука у Новом Саду
Важна напомена, <b>ВН:</b>	
Извод, <b>ИЗ:</b>	Усавршавање аеродинамике привредним моторних возила путем оптимизације аеродинамичких додатака у сврху постизања бољих аеродинамичких перформанси у виду умањења силе отпора ваздуха. Простирање ваздушне струје око модела је унапређено оптимизационим додацима што се све огледа у смањеној потрошњи горива привредног моторног возила. Осим виртуелних симулација рачуарске динамике флуида, у раду је приказана валидација резултата путем експерименталног мерења у ваздушном тунелу.
Датум прихватања теме, <b>ДП:</b>	
Датум одбране, <b>ДО:</b>	
Чланови комисије, <b>КО:</b>	Председник: др Драган Ружић, ванредни професор
	Члан: др Александар Бегин, редовни професор
	Члан: др Бобан Николић, доцент
	Члан: др Синиша Бикић, ванредни професор
	Члан, ментор: др Јован Дорић, ванредни професор

Образац Q2.НА.06-05- Издање 1



UNIVERSITY OF NOVI SAD ● FACULTY OF TECHNICAL SCIENCES  
21000 NOVI SA D, Trg Dositeja Obradoviha 6

## KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, <b>ANO</b> :	
Identifikation number, <b>INO</b> :	
Document type, <b>DT</b> :	Monograph documentation
Type of record, <b>TR</b> :	Textual printed material
Contents code, <b>CC</b> :	Ph.D. thesis
Author, <b>AU</b> :	Stjepan Galamboš
Mentor, <b>MN</b> :	Half-full Professor Jovan Dorić, Ph.D.
Title, <b>TI</b> :	The impact of shape and type of aerodynamics equipment on the commercial vehicle's drag force reduction
Language of text, <b>LT</b> :	Serbian
Language of abstract, <b>LA</b> :	Serbian/English
Country of publication, <b>CP</b> :	Republic of Serbia
Locality of publication, <b>LP</b> :	AP Vojvodina
Publication year, <b>PY</b> :	2020
Publisher, <b>PB</b> :	Faculty of Technical Sciences
Publication place, <b>PP</b> :	Trg Dositeja Obradovica 6, 21000 Novi Sad, Serbia
Physical description, <b>PD</b> : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	9/276/81/60/155/0/0
Scientific field, <b>SF</b> :	Mechanical Engineering
Scientific discipline, <b>SD</b> :	Vehicle aerodynamics
Subject/Key words, <b>S/KW</b> :	Aerodynamics, Optimization, Design of Experiments, Wind Tunnel
<b>UC</b>	
Holding data, <b>HD</b> :	Library of Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovica 6, 21000 Novi Sad
Note, <b>N</b> :	
Abstract, <b>AB</b> :	The improvement of commercial motor vehicle's aerodynamics through optimization process of aerodynamic equipments in order to achieve better aerodynamic performance in the form of drag force reduction. The expansion of the air flow around the model is enhanced by optimization accessories, which is all reflected in the reduced of fuel consumption of the commercial motor vehicle. In addition to virtual simulations of computational fluid dynamics, the paper presents the validation of results by experimental measurement in the wind tunnel.
Accepted by the Scientific Board on, <b>ASB</b> :	
Defended on, <b>DE</b> :	
Defended Board, <b>DB</b> :	President: Half-Time Professor Dragan Ruzic, Ph.D.
	Member: Full-Time Professor Aleksandar Begin, Ph.D.
	Member: Docent Boban Nikolic, Ph.D.
	Member: Half-Time Professor Sinisa Bikic, Ph.D.
	Member, Mentor: Half-Time Professor Jovan Doric, Ph.D.

Obrazac Q2.NA.06-05- Izdanje 1

## Zahvalnica

*Ovu zahvalnicu posvećujem svima koji su bili uz mene, saosećali se samnom, radili, pomagali mi i pružali svoju nesebičnu i bezuslovnu podršku. Pre svega bih želeo da izrazim da ogromnu zahvalnost dugujem svojoj dragoj porodici i prijateljima koji su uvek bili uz mene, a naročito u trenucima padova i spoticanja i uvek mi pružali ruku, podizali me i vraćali na pravi put. Veliku zahvalnost dugujem mentoru profesoru Jovanu Doriću, koji je nesebičnim zalaganjem doprineo ideji i realizaciji ovog rada. Takođe ogromnu zahvalnost želim da uputim i ostalim kolegama, profesorima sa katedre za motore i vozila Fakulteta tehničkih nauka u Novom Sadu, na nesebičnom zalaganju i podršci. Želeo bih da istaknem posebnu zahvalnost profesorima Nenadu Poznanoviću, Draganu Ružiću i Borisu Stojiću na neprocenjivom trudu i ukazanoj podršci i poverenju u zajedničkom radu. Ovaj rad svakako ne bi imao potpunost bez kolega sa Mašinskog fakulteta u Beogradu. Ovom prilikom bih želeo da izrazim svoju duboku zahvalnost profesorima Goranu Vorotoviću i Aleksandru Benginu i ostalom timu divnih ljudi na ukazanoj podršci u sprovođenju eksperimentalnog rada u vazdušnom tunelu. I za kraj, zahvalnost dugujem gospodinu Vladimiru Čipčiću iz Kikinde, koji je svojim vrsnim modelarskim sposobnostima doprineo da se ispitivani model pokaže u punom svetlu tokom eksperimentalnog merenja. Još jednom, hvala svima na pomoći, podršci kao i razumevanju u ostvarivanju mojih želja i ambicija.*

*Reči autora rada...*

## Rezime

U radu je izvršeno postavljanje, kreiranje, implementacija i provera novog koncepta optimizacione metode u svrhu dobijanja oblika aerodinamičkih dodataka koji će obezbediti bolje opstrujavanje vazdušne stuje i obaranje sile otpora vazduha ispitivanog modela. Objekat ispitivanja je umanjeni i delimično uprošćeni model kamiona i poluprikolice, kreirani po uzoru na stvarne primere u praksi. Optimizacioni proces obuhvata potpunu faktorijsku strukturu, parcijalnu faktorijsku strukturu planiranja eksperimenta i još nekoliko postupaka poput metode odgovorne površine i centralne kompenzacione metode. Optimizacija se primenjuje na četiri odvojena tipa aerodinamičkih dodataka na modelu kamiona i poluprikolice. Optimalni geometrijski oblici aerodinamičkih dodataka dobijeni putem niza virtuelnih CFD simulacija su provereni na stvarnom umanjenom modelu, testiranom u vazдушnom tunelu. Dobijeni rezultati su pokazali značajno poboljšanje aerodinamičkih karakteristika ispitivanog modela, dodavanjem pojedinačnih i grupnih aerodinamičkih dodataka. Umanjenje sile otpora vazduha ispitivanog modela se kreće od 4 do 24% dodavanjem pojedinačnih aerodinamičkih dodataka i 25% prilikom dodavanja svih zajedno aerodinamičkih dodataka na ispitivani model kamiona i poluprikolice. Obaranjem sile otpora vazduha se direktno utiče na smanjenje potrošnje goriva, što je prikazano orijentacionim proračunom na stvarnom modelu, dodavanjem aerodinamičkih dodataka kreiranih optimizacionim procesom u toku rada. Ušteda u potrošnji goriva stvarnog modela dodavanjem svih projektovanih aerodinamičkih dodataka je oko 15%. Sa ovim orijentacionim proračunom potrošnje goriva, potvrdom rezultata putem merenja u vazдушnom tunelu i vizuelizacijom toka vazdušne struje oko modela virtuelnim putem je potvrđena funkcionalnost i validnost kreiranog optimizacionog postupka u okviru ovog rada.

## **Abstract**

In this paper has been done a new concept of an optimization method which include creation, implementation and testing in order to obtain the best shape of the aerodynamics equipments that will provide a better air flow around the test model and reducing of the drag force of the tested model. The object of testing process is a scaled and little simplified model of a commercial vehicle which is created as a real model. The optimization process includes a few methods as Full factorial and Partial factorial methods of Design of experiment (DoE), also Response surface method and Central-composite method. The optimization is done on four different types of aerodynamic equipments which are located on the test model. The best shapes of the equipments which are created by geometry optimization process and a lot of individual virtual experiments by CFD simulations are proved in a real testing of a scaled wooden model in the wind tunnel. The results are shown significantly impact on the aerodynamic characteristics of test model, adding individual and grouped aerodynamic equipments. The drag force reduction of the model with separately adding aerodynamics equipments are between 4 and 24 percentages, but combination of test model with all aerodynamics equipments are shown 25 percentage of the drag force reduction. That drag force reduction is directly joined with the fuel consumption of the test model, which is shown in the paper by an orientation numerical process. The fuel consumption is reduced by 15 percentage with combining all aerodynamics equipments with test model. The orientation numerical process of fuel consumption, the proof of the wind tunnel testing and the air flow visualization by CFD are shown a major impact of the optimization concept which is done in the Ph.D. thesis.

## Sadržaj

ZAHVALNICA .....	I
REZIME .....	II
ABSTRACT .....	III
SPISAK TABELA .....	VII
SPISAK SLIKA .....	IX
SKRAĆENICE .....	XIV
1. UVOD .....	1
1.1. DEFINISANJE PREDMETA ISTRAŽIVANJA .....	1
1.2. CILJ ISTRAŽIVANJA I RADNE HIPOTEZE .....	2
1.3. PRIMENJENE METODE U DISERTACIJI .....	4
1.4. OČEKIVANI REZULTATI I MOGUĆNOST PRIMENE .....	4
1.5. KRATAK SADRŽAJ DISERTACIJE .....	5
2. AKTUELNO STANJE U OBLASTI .....	8
3. AERODINAMIKA VOZILA .....	12
3.1. OSNOVNE AERODINAMIČKE POJAVE I RAZMATRANJA .....	13
3.1.1. <i>Vazdušne strujnice</i> .....	13
3.1.2. <i>Odvajanje vazdušne struje</i> .....	14
3.1.3. <i>Granični sloj</i> .....	14
3.1.4. <i>Laminarno i turbulentno strujanje</i> .....	15
3.1.5. <i>Osnovna svojstva fluida</i> .....	15
3.1.6. <i>Jednačine kontinuiteta</i> .....	20
3.1.7. <i>Navije – Stoksove jednačine</i> .....	22
3.1.8. <i>Rejnoldsov broj</i> .....	23
3.1.9. <i>Bernulijeva jednačina</i> .....	24
3.2. TURBULENTNO STRUJANJE .....	25
3.2.1. <i>Direktna numerička simulacija (DNS)</i> .....	26
3.2.2. <i>Simulacija velikih vrtloga (LES)</i> .....	27
3.2.3. <i>Primer: Strujanje oko kocke</i> .....	28
3.2.4. <i>RANS model</i> .....	30
3.3. AERODINAMIČKE SILE NA VOZILU .....	31
3.1.1. <i>Sila otpora vazduha <math>F_w</math> i vertikalnog izdizanja vozila <math>F_L</math></i> .....	33
3.1.2. <i>Preraspodela pritiska oko vozila</i> .....	35
3.1.3. <i>Uticajni parametri sile otpora vazduha</i> .....	37
3.1.4. <i>Poboljšanje aerodinamičkih performansi na vozilu</i> .....	39
4. RAČUNARSKA DINAMIKA FLUIDA – CFD .....	42
4.1. GEOMETRIJSKI MODEL .....	42
4.2. MREŽNI MODEL .....	43
4.2.1. <i>Površinska mreža</i> .....	43
4.2.2. <i>Zapreminska mreža</i> .....	44
4.3. FIZIČKA SVOJSTVA MODELA .....	47
4.3.1. <i>Prostor, vreme i kretanje</i> .....	47
4.3.2. <i>Materijal</i> .....	49

4.3.3.	<i>Strujanje i energija</i> .....	49
4.3.4.	<i>Prenos toplote</i> .....	54
5.	OPTIMIZACIJA .....	58
5.1.	OSNOVNA RAZMATRANJA .....	58
5.1.1.	<i>Istorijska podloga</i> .....	59
5.1.2.	<i>Primeri optimizacije u inženjerskoj praksi</i> .....	60
5.1.3.	<i>Predstavljanje optimizacionog problema</i> .....	61
5.1.4.	<i>Klasifikacija optimizacionih problema</i> .....	65
5.2.	KLASIČNE OPTIMIZACIONE METODE.....	69
5.2.1.	<i>Optimizacija pri jednoj promenljivoj</i> .....	69
5.2.2.	<i>Optimizacija pri više promenljivih bez ograničenja</i> .....	72
5.2.3.	<i>Optimizacija pri više promenljivih sa ravnopravnim ograničenjima</i> .....	76
5.2.4.	<i>Optimizacija pri više promenljivih sa neravnopravnim ograničenjima</i> .....	80
5.3.	METODA PLANIRANJA EKSPERIMENTA - DOE .....	82
5.3.1.	<i>Eksperiment</i> .....	82
5.3.2.	<i>Nasumičnost i plan eksperimenta</i> .....	85
5.3.3.	<i>Potpuno nasumični plan eksperimenta</i> .....	95
5.3.4.	<i>Faktorijska struktura procedure</i> .....	103
5.3.5.	<i>Potpuni blok plan eksperimenta</i> .....	113
5.3.6.	<i>Parcijalna faktorijska struktura procedure</i> .....	119
5.3.7.	<i>Metoda odgovorne površine</i> .....	123
6.	SPROVOĐENJE OPTIMIZACIONOG PROCESA .....	130
6.1.	AERODINAMIKA PRIVREDNIH MOTORNIH VOZILA.....	130
6.1.1.	<i>Klasifikacija privrednih motornih vozila i priključnih vozila</i> .....	130
6.1.2.	<i>Opšte o aerodinamici privrednih vozila</i> .....	131
6.2.	AEROPROFIL.....	134
6.2.	OBJEKAT ISPITIVANJA .....	140
6.2.1.	<i>Usvajanje objekta ispitivanja</i> .....	140
6.2.2.	<i>Kreiranje CAD modela</i> .....	141
6.2.3.	<i>Kreiranje CFD modela</i> .....	145
6.3.	OPTIMIZACIJA AERODINAMIČKIH DODATAKA NA MODELU .....	150
6.3.1.	<i>Optimizacija aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona</i> .....	150
6.3.2.	<i>Optimizacija bočnih aerodinamičkih dodataka iza kabine kamiona</i> .....	167
6.3.3.	<i>Optimizacija aerodinamičkog dodatka iza poluprikolice</i> .....	179
6.3.4.	<i>Optimizacija horizontalnog aerodinamičkog dodatka iza kabine kamiona</i> .....	192
7.	EKSPERIMENTALNO MERENJE .....	205
7.1.	OPŠTE O EKSPERIMENTALNOM MERENJU U VAZDUŠNOM TUNELU .....	205
7.1.1.	<i>Tipovi vazdušnih tunela</i> .....	205
7.1.2.	<i>Uticajni faktori na merenje u vazdušnom tunelu</i> .....	207
7.2.	SASTAVNI DELOVI EKSPERIMENTA .....	209
7.2.1.	<i>Model eksperimentalnog ispitivanja</i> .....	210
7.2.2.	<i>Postrojenje za ispitivanje modela u vazdušnom tunelu</i> .....	217
7.3.	VAZDUŠNI TUNEL "MIROSLAV NENADOVIĆ" .....	220
7.4.	SPROVOĐENJE EKSPERIMENTALNOG MERENJA U VAZDUŠNOM TUNELU.....	221
7.4.1.	<i>Plan eksperimenta</i> .....	221
7.4.2.	<i>Konfiguracije ispitivanih modela</i> .....	222



8. REZULTATI I DISKUSIJA .....	234
8.1. UPOREDNI PRIKAZ REZULTATA.....	234
8.2. VIZUELIZACIJA VAZDUŠNE STRUJE OKO MODELA.....	240
8.3. ORIJENTACIONA POTROŠNJA GORIVA.....	245
9. ZAKLJUČAK .....	249
10. KORIŠĆENA LITERATURA.....	252

## Spisak Tabela

TABELA 1 – GUSTINA FLUIDA.....	17
TABELA 2 – KOEFICIJENT STIŠLJIVOSTI ZA TEČNOSTI I GASOVE.....	18
TABELA 3 – TIPIČNE VREDNOSTI ZA $C_w$ I $C_L$ .....	34
TABELA 4 – GLAVNI IZVORI OTPORA VAZDUHA NA VOZILU.....	37
TABELA 5 – POTREBNO VREME ZA RADNU OPERACIJU 30 RADNIKA SA STANDARDNIM – S I ERGONOMSKI UNAPREĐENIM RADNIM MESTOM – E.....	89
TABELA 6 – RAZLIKE IZMEĐU STANDARDNOG I ERGONOMSKI UNAPREĐENOG RADNOG MESTA.....	90
TABELA 7 – T-TEST ZA POSLEDNJIH 10 I SVIH 30 RADNIKA.....	90
TABELA 8 – 10 RAZLIKA U VREMENU ZA POSLEDNJIH 10 RADNIKA .....	93
TABELA 9 – PODACI KOLIČINE FOSFORA U BILJKAMA NAKON 15 I 28 DANA.....	94
TABELE 9 – FORMULE ZBIRA KVADRATNIH ODSTUPANJA.....	101
TABELA 10 – OPŠTI OBLIK ANOVA ISPISA .....	101
TABELA 11 – Približna greška verovatnoće za različite p-vrednosti koristeći nižu granicu.....	102
TABELA 12 – REZULTATI FAKTORIJSKOG EKSPERIMENTA KLIJANJA JEČMA .....	104
TABELA 13 – FAKTORIJSKA STRUKTURA PROCEDURE SA 4 PO 3 FAKTORA .....	105
TABELA 14 – MATRIČNO PRIKAZIVANJE OČEKIVANIH VREDNOSTI (A), SREDNIH VREDNOSTI (B) I RECIPROČNIH KOEFICIJENATA (C) U FAKTORIJSKOM OBLIKU 4X3 .....	105
TABELA 15 – PRIMER GLAVNOG EFEKTA I INTERAKCIJE 4X3 FAKTORIJSKE STRUKTURE PREKO KOEFICIJENATA OGRANIČENJA.....	106
TABELA 16 – PRIMER PREBACIVANJA FAKTORIJSKOG OBLIKA 3 <sup>2</sup> U OBLIK FAKTORIJSKIH EFEKATA .....	108
TABELA 17 – PRIMER UKUPNE KOLIČINE AMINO KISELINE U SIRU NAKON 56 DANA ZRENJA .....	109
TABELA 18 – ZBIR KVADRATA URAVNOTEŽENOG FAKTORIJSKOG PROBLEMA SA DVA FAKTORA .....	110
TABELA 19 – ANOVA REZULTATI ZA FAKTORIJSKU STRUKTURA SA DVA FAKTORA.....	110
TABELA 20 – REZULTATI EKSPERIMENTA KROZ PROMENU BROJA INSEKATA NA BILJKAMA NAKON TRETMANA .....	114
TABELA 21 – PRIMER LK PRIKAZA ZA 2, 3 I 4 PROCEDURE .....	116
TABELA 22 – ANOVA ŠEMA ZA LK PLAN EKSPERIMENTA .....	118
TABELE 23 – POTPUNA FAKTORIJSKA STRUKTURA 23 .....	120
TABELA 24 – POTPUNA FAKTORIJSKA STRUKTURA 22 .....	122
TABELA 25 – POTPUNA FAKTORIJSKA STUKTURA 22 SA DODATOM INTERAKCIJOM $X_1 \cdot X_2$ .....	122
TABELA 26 – POTPUNA FAKTORIJSKA STUKTURA 22 SA DODATOM INTERAKCIJOM $X_3$ .....	122
TABELA 27 - KOORDINATE AEROPROFILA NACA 65.3-818 .....	136
TABELA 28 - REZULTATI SIMULACIJE .....	149
TABELA 29 - USVOJENE VREDNOSTI PARAMETARA ZA TRI POLOŽAJA .....	153

TABELA 30 - POTPUNA FAKTORIJSKA STRUKTURA PARAMETARA 34 ZA DODATAK NA KABINI KAMIONA .....	154
TABELA 31 - ZASTUPLJENOST GLAVNI FAKTORA I INTERAKCIJE U MODELU .....	159
TABELA 32 - VREDNOST KOEFICIJENATA $\beta$ U ZAVISNOSTI OD FAKTORA .....	160
TABELA 33 - USVOJENE VREDNOSTI PARAMETARA ZA PET NIVOA .....	163
TABELA 34 - METODA ODGOVORNE POVRŠINE ZA DODATAK NA KABINI KAMIONA .....	163
TABELA 35 - ZASTUPLJENOST FAKTORA I INTERAKCIJE .....	165
TABELA 36 - USVOJENE VREDNOSTI PARAMETARA NA TRI NIVOA .....	169
TABELA 37 - REZULTATI POTPUNE FAKTORIJSKE STRUKTURE ZA SLUČAJ VERTIKALNIH AERODINAMIČKIH DODATAKA IZA KABINE KAMIONA .....	169
TABELA 38 - UTICAJNI FAKTORI I NJIHOVA INTERAKCIJA .....	174
TABELA 39 - VREDNOST KOEFICIJENATA $\beta$ U TEORIJSKOG FUNKCIJI ODZIVA SISTEMA .....	175
TABELA 40 - USVOJENE VREDNOSTI PARAMETARA NA PET NIVOA .....	176
TABELA 40 - REZULTATI METODE ODGOVORNE POVRŠINE SA KOMBINACIJAMA EKSPERIMENTATA.....	177
TABELA 42 - ZASTUPLJENOST FAKTORA I INTERAKCIJE 2. REDA.....	178
TABELA 43 - USVOJENE VREDNOSTI PARAMETARA POTPUNE FAKTORIJSKE STRUKTURE .....	182
TABELA 44 - REZULTATI POTPUNE FAKTORIJSKE STRUKTURE AERODINAMIČKOG DODATKA IZA POLUPRIKOLICE .....	182
TABELA 45 - ZASTUPLJENOST REZULTATA FAKTORA I NJIHOVE INTERAKCIJE.....	186
TABELA 46 - VREDNOST KOEFICIJENATA B TEORIJSKOG MODELA .....	187
TABELA 47 - USVOJENE VREDNOSTI PARAMETARA NA PET NIVOA .....	189
TABELA 48 - REZULTATI METODE ODGOVORNE POVRŠINE ZA 53 STRUKTURU .....	189
TABELA 49 - REZULTATI ANALIZE UTICAJNIH FAKTORA I NJIHOVE INTERAKCIJE.....	190
TABELA 50 - USVOJENE VREDNOSTI PARAMETARA PO NIVOIMA .....	194
TABELA 51 - REZULTATI POTPUNE FAKTORIJSKE STRUKTURA HORIZONTALNOG AERODINAMIČKOG DODATKA IZA KABINE KAMIONA.....	195
TABELA 52 - ZASTUPLJENOST FAKTORA I NJIHOVIH INTERAKCIJA .....	199
TABELA 53 -VREDNOST KOEFICIJENATA B U TEORIJSKOM MODELU .....	200
TABELA 54 - VREDNOST PARAMETARA NA PET NIVOA .....	201
TABELA 55 - REZULTATI METODE ODGOVORNE POVRŠINE ZA SLUČAJ HORIZONTALNOG AERODINAMIČKOG DODATKA IZA KABINE KAMIONA.....	202
TABELA 56 - REZULTATI ANALIZE UTICAJNIH FAKTORA I NJIHOVE INTERAKCIJE.....	203
TABELA 57 - KONFIGURACIJE SPROVEDENOG EKSPERIMENTALNOG MERENJA .....	221
TABELA 58 - UPOREDNI PRIKAZ REZULTATA ZA KONFIGURACIJE I - V.....	235
TABELA 59 - UPOREDNI PRIKAZ REZULTATA ZA KONFIGURACIJE VI I VII.....	236
TABELA 60 - USVOJENE VREDNOSTI PARAMETARA ZA PRORAČUN POTROŠNJE GORIVA .....	246

## Spisak slika

SLIKA 3.1 – PEUGEOT IZ 1913. GODINE .....	12
SLIKA 3.2 – MARLBORO PENSKE PC22 IZ 1993. GODINE .....	12
SLIKA 3.3 – VIZUELIZACIJA VAZDUŠNE STRUJE POMOĆU DIMA.....	14
SLIKA 3.4 – PRERASPODELA BRZINE I GRANIČNI SLOJ OKO NEPOMIČNE PLOČE.....	15
SLIKA 3.5 – RELATIVNI I ATMOSFERSKI PRITISAK.....	16
SLIKA 3.6 - ŠEMATSKI PRIKAZ TURBULENTNOG STRUJANJA (LEVO), VREMENSKI ZAPIS SIMULACIJE (DESNO) ...	27
SLIKA 3.7 – GEOMETRIJA KOCKE I VAZDUŠNOG TUNELA .....	28
SLIKA 3.8 – STRUJNO POLJE U BLIZINI PODA, POGLED ODOZGO .....	29
SLIKA 3.9 – STRUJNO POLJE, POGLED SA STRANE .....	29
SLIKA 3.10 – STRUJNO POLJE, POGLED OD NAZAD U ZONI IZA KOCKE .....	30
SLIKA 3.11 – VREMENSKO OSREDNJAVANJE ZA STACIONARNO (LEVO) I NESTACIONARNO (DESNO) STRUJANJE .....	31
SLIKA 3.12 – AERODINAMIČKE SILE NA VOZILU.....	32
SLIKA 3.13 – GRADIJENT PRITISKA I BRZINE FLUIDNE STRUJE PRILIKOM PRESTRUJAVANJA PREKO PREPREKE... 33	33
SLIKA 3.14 – PRERASPODELA PRITISKA PREKO KAROSERIJE VOZILA .....	36
SLIKA 3.15 – VERTIKALNO IZDIZANJE I OTPOR VAZDUHA U ZAVISNOSTI OD OBLIKA KAROSERIJE .....	37
SLIKA 3.16 – UTICAJ UGLA VETROBRANSKOG STAKLA NA OTPOR VAZDUHA .....	38
SLIKA 3.17 – CIRKULACIJA FLUIDNE STRUJE OKO TOČKA VOZILA.....	39
SLIKA 3.18 – POLOŽAJ NOSEĆIH STUBOVA NA VOZILU .....	40
SLIKA 3.19 – PRELAZAK FLUIDNE STRUJE PREKO A STUBA VOZILA.....	40
SLIKA 3.20 – PRIMER „GLATKOG PODA“ NA VOZILU FERRARI F355 IZ 1995. ....	41
SLIKA 4.1 – PRIMER 3D CAD MODELA .....	43
SLIKA 4.2 – POVRŠINSKI MREŽNI MODEL .....	44
SLIKA 4.3 – PRIMER PRIZMATIČNE ZAPREMINSKE MREŽE MODELA .....	45
SLIKA 4.4 – PRIMER TETRAEDARSKO ZAPREMINSKE MREŽE MODELA [39] .....	46
SLIKA 4.5 – OTSEČENI TIP HEKTAEDARSKO ZAPREMINSKE MREŽE MODELA [39].....	47
SLIKA 5.1 – MINIMUM FUNKCIJE $f(x)$ I MAKSIMUM FUNKCIJE $-f(x)$ .....	58
SLIKA 5.2 – OPTIMALNE VREDNOSTI FUNKCIJA $cf(x) + c + f(x)$ ISTE KAO U $f(x)$ .....	59
SLIKA 5.2 – PRIMER OPTIMIZACIONOG VEKTORA KOD ZUPČASTOG PARA.....	62
SLIKA 5.3 – OGRANIČAVAJUĆA POVRŠINA DVODIMENZIONALNOG PROSTORA.....	63
SLIKA 5.4 – KONTURE POVRŠINA TRAŽENE FUNKCIJE CILJA.....	65
SLIKA 5.5 – PRIMER SAVIJANJA GREDE USLED KONTINUALNOG OPTEREĆENJA .....	66
SLIKA 5.6 – LOKALNI I GLOBALNI MINIMUM FUNKCIJE .....	70

SLIKA 5.7 – NEDEFINISANI IZVOD U TAČKI $x^*$ .....	71
SLIKA 5.8 – STACIONARNA TAČKA .....	72
SLIKA 5.9 – PREVOJNA TAČKA FUNKCIJE $f(x, y) = x^2 - y^2$ .....	76
SLIKA 5.10 – VARIRANJE OKO TAČKE A.....	78
SLIKA 5.11 – KUTIJASTI DIJAGRAMI ZA GRUPU OD 10 RADNIKA.....	91
SLIKA 5.12 – HISTOGRAM NASUMIČNE DISTRIBUCIJE ZA POSLEDNJIH 10 RADNIKA .....	93
SLIKA 5.13 – INTERAKCIONI DIJAGRAM DVA FAKTORA .....	108
SLIKA 5.14 – MODELI ZA POTPUNO NASUMIČNI BLOK EKSPERIMENTA .....	115
SLIKA 5.15 – FAKTORIJSKA STRUKTURA 2 <sup>3</sup> .....	121
SLIKA 5.15 - JEDNOSTAVNI PRIKAZ ODGOVORNE POVRŠINE SISTEMA DVA FAKTORA .....	124
SLIKA 5.16 - JEDNOSTAVLJE POVRŠINE MODELA DRUGOG REDA .....	127
SLIKA 5.17 - CENTRALNA KOMPOZITNA METODA ZA $q = 3$ .....	128
SLIKA 5.18 - SIMPLEKS REŠETKA 3,4 A) I TROKOMPONENTNA SIMPLEKS CENTRIRANA KOMBINACIJA B) .....	129
SLIKA 6.1 - TEGLJAČ SA POLUPRIKOLICOM .....	132
SLIKA 6.2 - CFD MODEL TEGLJAČA I POLUPRIKOLICE SA NAZNAČENIM ZONAMA VRTLOŽNOG KRETANJA.....	133
SLIKA 6.3 - KINETIČKA TURBULENTNA ENERGIJA NA CFD MODELU .....	133
SLIKA 6.4 - OSNOVNI OBLIK AEROPROFILA.....	134
SLIKA 6.5 - GEOMETRIJSKI PARAMETRI AEROPROFILA .....	135
SLIKA 6.6 - PROJEKTOVANJE AEROPROFILA .....	136
SLIKA 6.7 - IZVEDENE FAZE TRANSFORMACIJE AEROPROFILA I IZRAČUNAVANJE PREPASPODELE PRITISKA.....	137
SLIKA 6.8 - TEORIJSKA PRERASPODELA PRITISKA AEROPROFILA ZA NEKOLIKO VREDNOSTI KOEFICIJENATA UZGONA.....	139
SLIKA 6.9 - USVOJENI MODEL KAMIONA TEGLJAČA DAF CF 4X2.....	141
SLIKA 6.10 - PRIKAZ USVOJENOG MODELA POLUPRIKOLICE .....	142
SLIKA 6.11 - KREIRANI 3D CAD MODEL KAMIONA TEGLJAČA U IZOMETRIJSKOG POGLEDU.....	142
SLIKA 6.12 - KREIRANI 3D CAD MODEL KAMIONA TEGLJAČA U GEOMETRIJSKIM POGLEDIMA.....	143
SLIKA 6.13 - KREIRANI 3D CAD MODEL POLUPRIKOLICE U IZOMETRIJSKOG POGLEDU .....	144
SLIKA 6.14 - KREIRANI 3D CAD MODEL POLUPRIKOLICE U GEOMETRIJSKIM POGLEDIMA .....	144
SLIKA 6.15 - OBJEDINJENI MODEL KAMIONA I POLUPRIKOLICE .....	144
SLIKA 6.16 - CAD MODEL VAZDUŠNOG TUNELA.....	145
SLIKA 6.17 - MREŽNI MODEL VAZDUŠNOG TUNELA.....	146
SLIKA 6.18 - MREŽNI PRIKAZ ISPITIVANOG MODELA.....	147
SLIKA 6.19 - OBJEDINJENI MREŽNI PRIKAZ MODELA .....	147
SLIKA 6.20 - GRAFIK SIMULACIONIH OSTATAKA NAKON 500 ITERACIJA .....	148
SLIKA 6.21 - GRAFIČKI PRIKAZ SILE OTPORA VAZDUHA MODELA PRI 90 KM/H .....	149

SLIKA 6.22 - POLJE BRZINE VAZDUŠNE STRUJE OKO ISPITIVANOG MODELA .....	150
SLIKA 6.23 - POLJE BRZINE I PRITISKA OKO KABINE KAMIONA.....	151
SLIKA 6.24 - GEOMETRIJSKI OBLIK OSNOVNOG AERODINAMIČKOG DODATKA NA KABINI KAMIONA .....	152
SLIKA 6.25 - OSNOVNI OBLIK AERODINAMIČKOG DODATKA NA KABINI KAMIONA.....	153
SLIKA 6.26 - DIJAGRAM NORMALNE PRERASPODELE SILE OTPORA VAZDUHA.....	156
SLIKA 6.27 - KUTIJASTI DIJAGRAM DOBIJENIH REZULTATI SILE OTPORA VAZDUHA.....	157
SLIKA 6.28 - HISTOGRAM DOBIJENIH REZULTATA SILE OTPORA VAZDUHA .....	158
SLIKA 6.29 - GRAFIK ZASTUPLJENOSTI FAKTORA I NIVOVA .....	158
SLIKA 6.30 - CENTRALNA KOMPOZITNA METODA.....	162
SLIKA 6.31 - ŠEMATSKI PRIKAZ PET NIVOVA FAKTORA .....	162
SLIKA 6.32 - ZASTUPLJENOST GLAVNIH FAKTORA .....	164
SLIKA 6.33 - IZGLED OPTIMALNOG AERODINAMIČKOG DODATKA NA KABINI KAMIONA .....	166
SLIKA 6.34 - TURBULENTNA KINETIČKA ENERGIJA U ZONI IZA KABINE KAMIONA.....	167
SLIKA 6.35 - GEOMETRIJSKI PARAMETRI VERTIKALNOG DODATKA IZA KABINE KAMIONA .....	168
SLIKA 6.36 - VERTIKALNI AERODINAMIČKI DODACI IZA KABINE KAMIONA U NULTOM POLOŽAJU.....	169
SLIKA 6.37 - DIJAGRAM NORMALNE DISTRIBUCIJE SILE OTPORA VAZDUHA .....	172
SLIKA 6.38 - KUTIJASTI DIJAGRAM NIZA REZULTATA SILE OTPORA VAZDUHA .....	172
SLIKA 6.39 - HISTOGRAM DOBIJENIH VREDNOSTI SILE OTPORA VAZDUHA.....	173
SLIKA 6.40 - ZASTUPLJENOST FAKTORA.....	173
SLIKA 6.41 - ZASTUPLJENOST PARAMETARA PO NIVOIMA.....	178
SLIKA 6.42 - OPRIMALNI OBLIK VERTIKALNIH AERODINAMIČKIH DODATAKA IZ KABINE KAMIONA .....	179
SLIKA 6.43 - VRTLOŽNO KRETANJA SA ZADNJE STRANE POLUPRIKOLICE.....	180
SLIKA 6.44 - KONTURA AERODINAMIČKOG DODATKA SA ZADNJE STRANE POLUPRIKOLICE.....	180
SLIKA 6.45 - IZGLED AERODINAMIČKOG DODATKA SA ZADNJE STRANE POLUPRIKOLICE.....	181
SLIKA 6.46 - GRAFIK NORMALNE PRERASPODELE DOBIJENIH REZULTATA .....	184
SLIKA 6.47 - KUTIJASTI DIJAGRAM DOBIJENIH REZULTATA .....	185
SLIKA 6.48 - HISTOGRAM DOBIJENIH REZULTATA .....	185
SLIKA 6.49 - ZASTUPLJENOST FAKTORA PO NIVOIMA .....	186
SLIKA 6.50 - ZASTUPLJENOST REZULTATA FAKTORA PO NIVOIMA.....	190
SLIKA 6.51 - OPTIMALNI OBLIK AERODINAMIČKOG DODATAKA IZA POLUPRIKOLICE.....	191
SLIKA 6.52 - TOK VAZDUŠNE STRUJE OKO KABINE KAMIONA .....	192
SLIKA 6.53 - KONTURNI OBLIK HORIZONTALNOG AERODINAMIČKOG DODATKA IZ KABINE KAMIONA.....	193
SLIKA 6.54 - IZGLED HORIZONTALNOG AERODINAMIČKOG DODATKA IZA KABINE KAMIONA .....	194
SLIKA 6.55 - GRAFIK NORMALNE PRERASPODELE DOBIJENIH REZULTATA .....	197
SLIKA 6.56 - KUTIJASTI DIJAGRAM SILE OTPORA VAZDUHA .....	197

SLIKA 6.57 - HISTOGRAM DOBIJENIH REZULTATA .....	198
SLIKA 6.58 - ZASTUPLJENOST FAKTORA PO NIVOIMA .....	199
SLIKA 6.59 - ZASTUPLJENOST FAKTORA PO NIVOIMA .....	202
SLIKA 6.60 - IZGLLED OPTIMALNOG OBLIKA HORIZONTALNOG AERODINAMIČKOG DODATKA IZA KABINE KAMIONA.....	204
SLIKA 7.1 - OTVORENI TIP VAZDUŠNOG TUNELA.....	206
SLIKA 7.2 - ZATVORENI TIP VAZDUŠNOG TUNELA .....	206
SLIKA 7.3 - PRIMER ODIGNUTOG MODELA OD PODLOGE VAZDUŠNOG TUNELA .....	208
SLIKA 7.4 - POKRETNOST TRAKA NA PODU VAZDUŠNOG TUNELA .....	209
SLIKA 7.5 - DELOVI MODELA KAMIONA IZRAĐENI 3D CNC OBRADOM .....	210
SLIKA 7.6 - OBJEDINJENI DELOVI DONJEG SKLOPA KAMIONA .....	211
SLIKA 7.7 - MODEL KAMIONA .....	211
SLIKA 7.8 - TOVARNI PROSTOR MODELA POLUPRIKOLICE U FAZI IZRADE.....	212
SLIKA 7.9 - DETALJI MODELA POLUPRIKOLICE .....	212
SLIKA 7.10 - MODEL POLUPRIKOLICE.....	213
SLIKA 7.11 - AERODINAMIČKI DODAKAT NA KABINI KAMIONA .....	213
SLIKA 7.12 - ODVOJENI VERTIKALNI I HORIZONTALNI AERODINAMIČKI DODACI IZA KABINE KAMIONA .....	214
SLIKA 7.13 - SVI AERODINAMIČKI DODACI NA MODELU KAMIONA .....	214
SLIKA 7.14 - AERODINAMIČKI DODATAK IZ POLUPRIKOLICE PRE I POSLE SPAJANJA .....	215
SLIKA 7.15 - RAZMATRANI SLUČAJEVI OBLIKA NAPADNE STRANE DASKE.....	215
SLIKA 7.16 - NOSAČI ZA PRIČVRŠĆENJE MODELA NA DASKU .....	216
SLIKA 7.17 - MODEL KAMIONA I POLUPRIKOLICE SA DODACIMA PRIČVRŠĆEN NA DASCIMA.....	216
SLIKA 7.18 - ŠEMATSKI PRIKAZ MERNOG POSTROJENJA .....	217
SLIKA 7.19 - KLIZNA VOĐICA I LINEARNI LEŽAJ .....	218
SLIKA 7.20 - MERNI ČELIJA.....	219
SLIKA 7.21 - MERNI POJAČALO.....	219
SLIKA 7.22 - MERNI POSTROJENJE .....	219
SLIKA 7.23 - VAZDUŠNI TUNEL "MIROSLAV NENADOVIĆ" .....	220
SLIKA 7.24 - ISPITIVANI MODEL U VAZDUŠNOM TUNELU, I KONFIGURACIJA .....	223
SLIKA 7.25 - GRAFIK DOBIJENIH REZULTATA MERENJA ZA BRZINU OD 60 DO 90 KM/H.....	223
SLIKA 7.26 - GRAFIK DOBIJENIH VREDNOSTI MERENJA ZA BRZINU OD 90 DO 60 KM/H.....	224
SLIKA 7.27 - ISPITIVANI MODEL U VAZDUŠNOM TUNELU, II KONFIGURACIJA .....	225
SLIKA 7.28 - GRAFIK DOBIJENIH REZULTATA MERENJA ZA BRZINU OD 60 DO 90 KM/H.....	225
SLIKA 7.29 - GRAFIK DOBIJENIH VREDNOSTI MERENJA ZA BRZINU OD 90 DO 60 KM/H.....	226
SLIKA 7.30 - ISPITIVANI MODEL U VAZDUŠNOM TUNELU, III KONFIGURACIJA .....	226

SLIKA 7.31 - GRAFIK DOBIJENIH REZULTATA MERENJA ZA BRZINU OD 60 DO 90 KM/H.....	227
SLIKA 7.32 - GRAFIK DOBIJENIH VREDNOSTI MERENJA ZA BRZINU OD 90 DO 60 KM/H.....	227
SLIKA 7.33 - ISPITIVANI MODEL U VAZDUŠNOM TUNELU, IV KONFIGURACIJA.....	228
SLIKA 7.34 - GRAFIK DOBIJENIH REZULTATA MERENJA ZA BRZINU OD 60 DO 90 KM/H.....	228
SLIKA 7.35 - GRAFIK DOBIJENIH VREDNOSTI MERENJA ZA BRZINU OD 90 DO 60 KM/H.....	229
SLIKA 7.36 - ISPITIVANI MODEL U VAZDUŠNOM TUNELU, V KONFIGURACIJA.....	229
SLIKA 7.37 - GRAFIK DOBIJENIH REZULTATA MERENJA ZA BRZINU OD 60 DO 90 KM/H.....	230
SLIKA 7.38 - GRAFIK DOBIJENIH VREDNOSTI MERENJA ZA BRZINU OD 90 DO 60 KM/H.....	230
SLIKA 7.39 - ISPITIVANI MODEL U VAZDUŠNOM TUNELU, VI KONFIGURACIJA.....	231
SLIKA 7.40 - GRAFIK DOBIJENIH REZULTATA MERENJA ZA BRZINU OD 60 DO 90 KM/H.....	231
SLIKA 7.41 - GRAFIK DOBIJENIH VREDNOSTI MERENJA ZA BRZINU OD 90 DO 60 KM/H.....	232
SLIKA 7.42 - ISPITIVANI MODEL U VAZDUŠNOM TUNELU, VII KONFIGURACIJA.....	232
SLIKA 7.43 - GRAFIK DOBIJENIH REZULTATA MERENJA ZA BRZINU OD 60 DO 90 KM/H.....	233
SLIKA 7.44 - GRAFIK DOBIJENIH VREDNOSTI MERENJA ZA BRZINU OD 90 DO 60 KM/H.....	233
SLIKA 8.1 - GRAFIČKI UPOREDNI PRIKAZ DOBIJENIH REZULTATA .....	238
SLIKA 8.2 - VIZUELIZACIJA BRZINE VAZDUŠNE STRUJE OKO MODELA.....	241
SLIKA 8.3 - POLJE VAZDUŠNE STRUJE IZNAD KABINE KAMIONA .....	242
SLIKA 8.4 - POLJE VAZDUŠNE STRUJE OKO MODELA SA AERODINAMIČKIM DODATKOM NA KABINI .....	243
SLIKA 8.5 - POLJE VAZDUŠNE STRUJE OKO MODELA KAMIONA SA SVIM AERODINAMIČKIM DODACIMA.....	243
SLIKA 8.6 - POLJE VAZDUŠNE STRUJE IZA POLUPRIKOLICE .....	244
SLIKA 8.7 - POLJE VAZDUŠNE STRUJE IZA POLUPRIKOLICE POSTAVLJANJEM AERODINAMIČKOG DODATKA....	244
SLIKA 8.8 - "ŠKOLJKASTI" DIJAGRAM SPECIFIČNE EFEKTIVNE POTROŠNJE.....	247



## Skraćenice

<i>Oznaka</i>	<i>Značenje</i>
DoE	Metoda planiranja eksperimenta ( <i>eng. Design of Experiments Method</i> )
CFD	Računarska dinamika fluida ( <i>eng. Computer Fluid Dynamics</i> )
CAD	( <i>eng. Computer Aided Design</i> )
LES	Simulacija velikih vrtloga ( <i>eng. Large Eddy Simulation</i> )
RANS	( <i>eng. Reynolds-Averaged-Navier-Stokes</i> )
DNS	Direktna numerička simulacija ( <i>eng. Direct numerical simulation</i> )
(motor) SUS	Motor sa unutrašnjim sagorevanjem
RST	( <i>eng. Reynolds-Stress Transport Model</i> )
PNPE	Potpuno nasumični plan eksperimenta
ANOVA	( <i>eng. Analysis of variance</i> )
LK	Metoda latinskih kvadrata ( <i>eng. Latin Squares Method</i> )
G-LK	Metoda Grčko-latinskih kvadrata ( <i>eng. Graeco-Latin Squares Method</i> )
MOP	Metoda odgovorne površine ( <i>eng. Response Surface Method</i> )
CKM	Centralna kompenzaciona metoda ( <i>eng. Central-Compensation Method</i> )
NACA	( <i>eng. National Advisory Committee for Aeronautics</i> )
CNC	Računarsko numerički upravljena mašina ( <i>eng. Computerized numerical control mashine</i> )

## 1. Uvod

U okviru uvodnog dela rada je definisan predmet istraživanja, ciljevi sprovođenja istraživanja, očekivani rezultati sa mogućnošću primene u naučno inženjerskoj oblasti. Definisanje radnih hipoteza i primenjenih metoda. Na kraju poglavlja je dat kratak sadržaj disertacije.

### 1.1. Definisanje predmeta istraživanja

Predmet istraživanja predstavlja uticaj, analiza i optimizacija geometrijskih površina na modelu privrednog motornog vozila sa poluprikolicom u svrhu dobijanja boljih aerodinamičkih performansi, uz primenu metode planiranja eksperimenata.

Aerodinamika motornih vozila predstavlja veoma značajan deo automobilske svete jer se u velikoj meri bavi pitanjima koja direktno utiču na dizajn, ekološke karakteristike, performanse vozila, itd. Opstrujavanjem vazdušne struje oko vozila u kretanju stvaraju se sile i momenti koji mogu značajno da utiču na ponašanje vozila na putu. Stabilnost, ubrzanje, udobnost mogu biti narušeni ukoliko postoje delovi vozila na kojem vazdušne strujnice nisu pravilno usmerene. Uprkos svim prethodno pomenutim oblastima u kojima aerodinamika ima svoj uticaj, otpor vazduha koji se generiše prilikom opstrujavanja vazdušne struje oko modela predstavlja jedan od najznačajnijih oblasti kojima se bavi aerodinamika u primeni na motornim vozilima. Sile otpora vazduha predstavlja horizontalnu komponentu otpora koji deluju na vozilo i kao njen najuticajniji faktor je geometrijski oblik tela preko kojeg vazdušna struja prelazi. Kao i ostali otpori koje je moguće pronaći na vozilu (otpor kotrljanja točkova, otpor savladavanja uspona, inercijalni otpori i otpor priključnog vozila) otpor vazduha svakako predstavlja negativan uticaj na vozilo u kretanju jer je njegovo uvećanje direktno srazmerno kvadratu brzine kretanja vozila. Na pojedine parametre koji utiču na stvaranje sile otpora vazduha (gustina vazduha i brzina kretanja vozila) je teško uticati. Jedini parametri koji ostavljaju prostora da se sa njihovom modifikacijom može doprineti umanjenu sile otpora vazduha su oblik površina preko kojih vazdušna struja opstrujava oko vozila, sadržanih kroz parametre veličine čeone površine vozila i koeficijenta otpora vazduha.

Privredna motorna vozila i autobusi predstavljaju vozila velikih gabaritnih dimenzija i mase, koja su predviđena da u toku svoje eksploatacije prelaze više stotina hiljada kilometara što je svakako nekoliko puta više od standardnog putničkog vozila. Nisu baš predviđena za kretanje pri brzinama sličnim putničkim vozilima, ali sa aspekta dugolinijskog transporta putnika ili tereta, mogu se svrstati u vozila koja se kreću na autoputu, odnosno njihova brzina se može smatrati relevantnom sa aspekta uticaja aerodinamičkih sila i momenata. Svakako pomenute gabaritne dimenzije i veličina čeone površine doprinosi da sila otpora vazduha ne predstavlja komponentu otpora koja se sme zanemariti. Sa aspekta mnogo pređenih kilometara u toku eksploatacije i najmanje smanjenje potrošnje goriva predstavlja veliku uštedu na globalnom nivou. Privredna vozila su najčešće karakteristična po oblicima karoserije koji nisu najpogodniji sa aspekta aerodinamike. Velike površine, oštri uglovi i veliki zazori između kamiona i poluprikolice u mnogome doprinose stvaranju i uvećanju sile otpora vazduha. U upotrebi se mogu pronaći razni dodaci koji doprinose poboljšanju aerodinamičnosti privrednih vozila, kao što su razni tipovi spojlera ili dodataka koji sprečavaju prodor vazdušne struje u određene oblasti i uvećanje sile otpora vazduha. Optimizacijom aerodinamičkih dodataka na karoseriji privrednog vozila se može značajno uticati na smanjenje sile otpora vazduha i uštede goriva.

Metode optimizacije predstavljaju aktuelnu oblast izučavanja pre svega zbog velike primene i želje za postizanjem najboljih rezultata odabirom optimalne ponuđene kombinacije ulaznih parametara. Metoda koja je svakako zauzela značajno mesto u mnoštvu optimizacionih postupaka je metoda *planiranja eksperimenata* (eng. *DoE – Design of Experiments*). Ova metoda je karakteristična što zaključke o tome koji od mnoštvo ulaznih parametara ima najveći uticaj na rezultat, ostvaruje preko niza postavljenih eksperimenata. Analizom dobijenih rezultata, moguće je na jasan način uvideti prioritete u odabiru ulaznih parametara, kao i nivoe njihovih pojedinačnih i kombinovanih uticaja na rezultat. Ukoliko postoji mogućnost brzog pokretanja većeg broja eksperimenata, ova metoda predstavlja veoma značajan optimizacioni alat.

Osim realnih aerodinamičkih eksperimenata koji svakako predstavljaju najbolji vid validacije dobijenih rezultata, zahvaljujući naprednoj tehnologiji i savremenim računarima i računarskim softverima, moguće je izvršiti veliki broj virtuelnih eksperimenata putem simulacija za relativno kratko vreme. Softveri za analizu su na zavidnom nivou kvaliteta i moguće je gotovo identično simulirati neki realni uticaj. U oblasti aerodinamike motornih vozilima, realan eksperiment u vazдушnom tunelu svakako predstavlja najvalidniji oblik dobijenih rezultata i ne bi trebalo ga izbegavati. Vazdušni tuneli su najčešće nedovoljnih gabaritnih dimenzija kako bi se moglo analizirati realno putničko vozilo, a svakako još teže privredno vozilo. Iz tog razloga se preusmerava metodama geometrijske sličnosti, preko kojih se za analizirano realno vozilo prave u što većoj meri sličnosti umanjeni modeli. Step en umanj enja u najvećoj meri zavisi od veličine realnog modela i dimenzija vazdušnog tunela. Pravilnim postavljanjem eksperimenta na umanjenom modelu, moguće je postići veoma precizne rezultate i zaključke koji su direktno primenjivi na realnom modelu.

## 1.2. Cilj istraživanja i radne hipoteze

Osnovni cilj istraživanja predstavlja kreiranje, analiza i primena optimizacionog postupka u svrhu postizanja boljih aerodinamičkih performansi u primeni na modelu privrednog motornog vozila sa poluprikolicom. Primenom parametarski definisanog osnovnog oblika aeroprofila se vrši projektovanje aerodinamičkih dodataka na usvojenom modelu istraživanja. Uz pomoć optimizacionih metoda, planiranja virtuelnih i stvarnih eksperimenata, pristupa se kreiranju optimalnih aerodinamičkih oblika na umanjenom ispitivanom modelu kamiona i poluprikolice, u svrhu poboljšanja aerodinamičkih performansi i umanj enju sile otpora vazduha modela. Krajnji ciljevi ovog rada, osim pomenutih, mogli bi biti kreiranje aerodinamičkih dodataka i potvrda njihove funkcionalnosti putem virtuelnih i stvarno sprovedenih eksperimentalnih istraživanja u vazdušnom tunelu, kao i njihove eventualne primene na modelu privrednih vozila stvarnih dimenzija.

Na početku rada je veoma bitno usvojiti glavne pretpostavke ili radne hipoteze, koje će usmeriti sprovedeno istraživanje na pravu stranu. Odgovaranjam na postavljene hipoteze se teži istaći naučno inženjerski značaj rada i njegove šire primene. Početne pretpostavke su usvojene pregledom relevantne literature i željom za postizanjem inovativne i korisne studije. U nastavku je navedeno par početnih pretpostavki ili hipoteza, na koje će se potražiti odgovor u daljem toku rada.

Opšti značaj aerodinamičkih dodataka i opreme privrednih motornih vozila i njihovih poluprikolica je veoma poznat i prisutan u istraživanjima i eksploataciji. Postoji veliki broj postupaka kojima se dolazi do aerodinamičkih dodataka na motornim vozilima u svrhu poboljšanja opštih karakteristika vozila. Autor uvodi oblik aeroprofila kao oblik aerodinamičkog dodatka koji predstavlja osnovu za sprovođenje optimizacionog procesa.

Uvođenjem ovog oblika se smatra opravdanim sa aspekta njegove jednostavnosti, efikasnosti i veoma male zastupljenosti u istraživanjima aerodinamičkih uticaja privrednih motornih vozila. Kroz rad i analizu dobijenih rezultata će se pokušati utvrditi da li je ova početna pretpostavka uvedena opravdano.

Dolazak do optimalnih oblika aerodinamičkih dodataka na privrednom vozilu sa poluprikolicom se u velikoj meri povezuje sa postupcima planiranja eksperimenata. U radu je veliki deo posvećen značaju optimizacionih metoda. Pregledom relevantne literature, autor dolazi do saznanja da postoji veliki broj aktuelnih optimizacionih metode, koje su efikasne u manjoj ili većoj meri, u zavisnosti od problematike. Potpuna faktorijska struktura eksperimenata je uvek najpouzdanije rešenja jer daje kompletnu sliku problema. Negativna strana je velika kompleksnost u sprovođenju eksperimenata kroz veliki broj eksperimentalnih prolaza. Sa druge strane, raznim parcijalnim faktorijskim strukturama eksperimenata se dolazi do zaključaka ponašanja sistema veoma brzo, ali uz izvesno odstupanje od tačnosti. Pregledom aktuelnih metoda, autor kao početnu pretpostavku uvodi objedinjenu upotrebu optimizacionih metoda kao opravdanog alata ka postizanju najboljeg rezultata. Pod ovim postupkom se podrazumeva upotreba potpune faktorijske strukture kao sredstva osnovne spoznaje funkcionisanja sistema, a nakon toga uvođenje detaljne analize uz pomoć nekoliko parcijalnih postupaka uz opravdano smanjenje broja eksperimentalnih prolaza.

U analizi uticaja spoljašnje aerodinamike privrednih vozila, jedna od najvećih poteškoća predstavlja sprovođenje realnog eksperimentalnog procesa na modelu u punoj veličini. Ovakvo ispitivanje bi verovatno pokazalo najbolje rezultate, ali veoma često zbog veličine i ostalih poteškoća je gotovo nemoguće za izvesti. Iz tog razloga se pristupa eksperimentalnom ispitivanju na umanjenim modelima. U okviru ovog rada se planira sprovođenje ispitivanja na umanjenom modelu privrednog vozila, kamiona sa poluprikolicom. Uz sva poštovanja modelske sličnosti i aerodinamičkih zakona, autor smatra opravdanim sprovođenje ispitivanja na umanjenom modelu, a dobijeni rezultati i zaključci se mogu primeniti i na modelu stvarnih dimenzija.

U okviru rada se planira sprovođenje optimizacionog procesa u svrhu kreiranja nekoliko različitih aerodinamičkih dodataka na umanjenom modelu kamiona i poluprikolice u svrhu poboljšanja opšte aerodinamike vozila i umanjenju sile otpora vazduha. Uvođenje više aerodinamičkih dodataka na model se smatra opravdanim sa aspekta globalnog umanjena sile optora vazduha. Pregledom postojećih rešenja aerodinamičke opreme na ovom tipu vozila, autor smatra da nije neophodno da pojedinačni aerodinamički dodaci doprinose umanjenu sile otpora vazduha čitavog modela, već u kombinaciji sa ostalim aerodinamičkim dodacima da se postigne željeni cilj. Prema tome, u radu se planira sprovođenje detaljne analize uticaja pojedinačnih, grupnih i potpuno objedinjenih aerodinamičkih dodataka na ispitivanom modelu.

Brzina kretanja vozila na putu veoma utiče na aerodinamičke performanse. Drugim rečima, brzina vazdušne struje prilikom računarskih simulacija ili realnog eksperimenta u vazdušnom tunelu ima značajnog udela u formiranju sile otpora vazduha ispitivanog modela. Pregledom literature i zakonskih regulativa za privredna motorna vozila sa prikolicom se utvrđuje maksimalna ispitivana vrednost vazdušne struje od 90 km/h. Sa druge strane, analizom radova drugih autora brzine vazdušne struje ispod 60 km/h se smatraju da imaju veoma mali uticaj na aerodinamiku vozila. Autor smatra opravdanom startnom pretpostavkom da se ispitivani model u okviru rada testira za brzinski opseg vazdušne struje od 60 do 90 km/h. Ukoliko se kroz testiranja putem virtuelnih simulacija ili realnog eksperimenta utvrdi potreba za izlaženjem iz definisanog brzinskog opsega, isti će biti naknadno definisan.

### 1.3. Primenjene metode u disertaciji

U okviru doktorske disertacije primenjuje se veći broj metoda koje se vezuju za deo optimizacije aerodinamičkih dodataka ispitivanog modela kamiona i poluprikolice i deo računarske dinamike fluida. U delu rada koji se bavi optimizacijom geometrijskih oblika karoserije modela, kao i dodataka u svrhu poboljšanja aerodinamičkih karakteristika, najzastupljenija je metoda planiranja eksperimenata. Ova metoda je karakteristična po tome što se optimizacioni zaključci donose na osnovu velikog broja individualnih eksperimenata. Problem se postavlja tako što se usvajaju ulazni geometrijski parametri od interesa za ispitivanje. Vrednost svakog od ulaznih parametara se varira na zadati broj nivoa. Na osnovu odabira i usvajanja ulaznih parametara i nivoa njihovog variranja, formira se veliki broj individualnih kombinacija. U okviru doktorske disertacije, svaki od individualnih kombinacija predstavlja zaseban eksperiment koji se sprovodi pomoću virtuelnih CFD simulacija. Kao ulazni parametri, odnosno ulazni oblik za geometrijsku optimizaciju je usvojen oblik aeroprofila krila. Modifikacijom njegovog oblika putem optimizacionih metode se teži postizanju najboljeg oblika sa aspekta aerodinamičkih karakteristika. Na početku analiziranog procesa se pristupa potpunoj faktorijskoj strukturi eksperimenta, koja uzima u obzir sve razmatrane kombinacije. Ovaj proces je svakako najtačniji zato što uzima u obzir svaku pojedinačnu kombinaciju ulaznih parametara, ali je dosta dug. Dalji tok rada pravi druge optimizacione metode poput parcijalnih faktorijskih struktura, metode odgovorne površine, centralne kompenzacione metode, itd. Na osnovu ovih metoda i postupaka se tok istraživanja usmerava na najuticajnije parametre, odnosno najuticajnije kombinacije. Ovim postupkom se značajno smanjuje broj individualnih kombinacija, odnosno eksperimenata, kao i potrebno vreme za analizu. Dobijeni rezultati imaju opravdano malo odstupanje u odnosu na potpunu faktorijsku strukturu, ali svakako su prihvatljivi i dovoljno dobri da se iz njih mogu izvoditi neophodni zaključci.

U okviru dela rada koji se bavi računarskom dinamikom fluida – CFD su zastupljene metode i postupci na osnovu kojih se CFD bazira i funkcioniše. U najvećoj meri su skrivene u pozadini CFD softvera i predstavljaju veoma značajan deo njegovog funkcionisanja. U radu će biti objašnjeni i kroz primere prikazani neki od postupaka kao što su Direktna numerička simulacija, Simulacija velikih vrtloga, Reynoldsov osrednjeni model itd.

U delu rada koji predstavlja analizu dobijenih rezultata putem virtuelnih CFD simulacija i eksperimentalnim putem, koriste se neke statističke metode kojima se jasno zaključuju postupci optimizacionog procesa i definiše put ka najboljem rezultatu. Neki od tih postupaka su ANOVA, metoda najmanjih kvadrata, normalna preraspodela verovatnoće rezultata, kutijasti dijagrami i dr.

U radu je objedinjeno više disciplina koje za sobom povlače i različite postupke obrade dobijenih rezultata. Osim raznovrsnosti primenjenih metoda analize i obrade podataka, nekoliko veoma kompleksnih softvera su zajednički primenjeni u radu. Za 3d CAD kreiranje modela - CatiaV5, računarska dinamika fluida - Star CCM+, statistička obrada rezultata i sprovođenje optimizacionog procesa - Minitab 17, obrada rezultata eksperimentalnog merenja - CatmanEasy-AP i pisanje rada sa grafičkim sređivanjem - Microsoft Office 2007.

### 1.4. Očekivani rezultati i mogućnost primene

Usvojenim početnim pretpostavki i radnih hipoteza, u radu se teži postizanju cilja koji će imati značaja u daljem naučno istraživačkom radu. Postavljanjem optimizacionog problema i njegovim sprovođenjem na umanjenom modelu kamiona sa poluprikolicom sa

ciljem dobijanja aerodinamičkih unapređenja. Kreirani geometrijski oblici aerodinamičkih dodataka optimizacionim postupcima imaju za cilja bolje preusmerenje toka vazdušne struje oko modela i kao krajnji efekat, obaranje ukupne sile otpora vazduha ispitivanog modela. Umanjenjem sile otpora vazduha, kao vodeće komponente otpora pri većim brzinama kretanja vozila se postiže značajna ušteda u prosečnoj potrošnji goriva kod ispitivane vrste teretnih vozila. U radu će problem biti predstavljen preko posebno analiziranih oblasti na modelu, u kojima postoji prostora za sprovođenje aerodinamičkih poboljšanja. Očekivani rezultati na osnovu postavljenog problema i sličnih rešenja u praksi obećavaju opadanje sile otpora vazduha pri svakom pojedinačnom aerodinamičkom dodatku postavljenom na ispitivanom modelu. Vrednost poboljšanja sile otpora vazduha se očekuje od nekoliko procenata, do par desetina procenata u zavisnosti od mesta pozicioniranja aerodinamičkog dodatka na ispitivanim modelu. Najveći procentualni učinak poboljšanja se očekuje pri konfiguraciji koja objedinjuje sve projektovane aerodinamičke dodatke na modelu. Osim poboljšanja dobijenih virtuelnim CFD simulacijama, očekuje se dobro poklapanje rezultata i stvarnim eksperimentam, sprovedenim u svrhu verifikacije rezultata dobijenih virtuelnim putem. Obaranjem sile otpora vazduha umanjenog ispitivanog modela, preko teorije sličnosti modela i aerodinamičkih pravila, uočeni fenomeni i zaključci se prenose na model stvarnih dimenzija. Proračun prosečne potrošnje goriva stvarnog ispitivanog modela, na osnovu preliminarnih rezultata i usvojenih pretpostavki predviđa poboljšanje u potrošnji goriva za više od deset procenata, što se smatra veoma dobrim.

Primenom optimizacionih metoda se skraćuje potrebno vreme i put dolaska do optimalnog oblika, odnosno najboljeg rešenja sa aspekta postavljenog problema. Ovaj pristup geometrijske optimizacije ima veliki potencijal mogućih mesta primene kako u oblasti aerodinamike motornih vozila, tako i u velikom spektru drugih istraživačkih oblasti gde je potrebna precizna modifikacija geometrijskih oblika od interesa. Osim spoljašnje aerodinamike motornih vozila gde je težište istraživanja usmereno ka spoljašnjem obliku modela, unutrašnja aerodinamika takođe predstavlja oblast u kojoj je geometrijska optimizacija veoma prisutna. Pravilno vođenje vazdušne struje do delova pogonskog agregata u svrhu snabdevanja vazduhom za proces sagorevanja i hlađenja komponenti, kao i do kočnih sistema na vozilu zbog odvođenja toplote, veoma je značajan deo aerodinamike. Geometrijska optimizacija kanala i puteva kojima se vazdušna struja sprovodi do elemenata od interesa je direktno moguća primenom ovakvog optimizacionog procesa. Sa druge strane, ušteda energije je stalno aktuelna i prisutna oblast naročito ukoliko se istraživanje sprovodi u oblast motornih vozila koja koriste alternativna pogonska goriva, kao što je u najvećoj meri električna energija. Iz stalne potrebe za produženjem opsega vožnje i uštede električne energije, neophodno je sprovoditi optimizaciju komponenti koje direktno ili indirektno utiču. Jedan od najznačajnijih oblasti u kojima je moguće sprovesti uštedu energije je spoljašnji oblik modela, odnosno direktna primena geometrijske optimizacione metode. Osim primene u osbalsti motornih i priključnih vozila, avioindustrija, nautika i balistika su veoma sklone usavršavanju oblika delova izloženih vazdušnoj struji.

U radu se planira definisanje univerzalnog optimizacionog procesa sa velikom mogućnošću primene u različitim oblastima naučno inženjerskog sveta.

## **1.5. Kratak sadržaj disertacije**

Ovaj deo rada obezbeđuje uvid u doktorsku disertaciju, prolaskom kroz ključne delove svakog od poglavlja.

Prvi deo rada se bavi opštim uvodnim pitanjima, vezanim za definisanje cilja, teme i predmeta doktorske disertacije. Osim toga, dat je uvid u naučne metode primenjene u radu, kao i kombinaciju korišćenih alata i softverskih paketa. Na osnovu zadatih početnih pretpostavki i radnih hipoteza, naznačen je potencijal sprovedenog oblika istraživanja i eventualne mogućnosti njene primene u naučno inženjerskoj praksi, kroz preliminarni uvid očekivanih rezultata.

Drugi deo rada se bavi aktuelnim stanjem u naučno inženjerskoj praksi, koja je direktno povezana sa temom doktorske disertacije. Uvidom u relevantnu literaturu se stiču osnovna znača iz oblasti, uočavaju delovi nedovoljno istraženi, koji ostavljaju prostor za sprovođenje istraživanja u okviru doktorske disertacije.

Trećim deolom rada, autor stavlja do znanja značaj osnovnih aerodinamičkih saznanja u oblasti primene motornih vozila, kao i ostala aerodinamička teorijska razmatranja neophodna za razumevanje istraživačke problematike. Prikazane su osnovne zakonitosti na osnovu kojih se pristupa aerodinamičkom istraživanju i analizi fenomena iz oblasti aerodinamike motornih vozila. Uvode se aerodinamičke sile i momenti na motornom vozilu u razmatranje, kao i mogući pravci umanjavanja loših aerodinamičkih pojava u praksi kod motornih vozila.

Četvrti deo rada se bavi računarskom dinamikom fluida - CFD. Ova naučna oblast predstavlja osnovu za sva savremena istraživanja u oblasti aerodinamike, pa je zbog toga detaljno predstavljena u radu. Softver za CFD analizu korišten u radu je na veoma precizan i adekvatan način objašnjen u ovom delu rada, kao i njegova direktna primena za virtuelno istraživanje sprovedeno u nastavku rada. Stavljen je osvrt na značaj pravilnog odabira i upotrebe strujnog režima vazduha i tipa mreže za kreiranje virtuelnog modela.

Peti deo rada je predviđen za upoznavanje čitaoca sa najpre osnovama i prednostima optimizacionog procesa, a kasnije i sa njenom detaljnom analizom i primenom u praktičnim rešenjima. Detaljno su predstavljene bazne optimizacione metode, kao i aktuelna savremena rešenja nastala na osnovu prethodno definisanih postupaka. Dat je veoma značajan prikaz analize dobijenih podataka putem optimizacionih metoda, kao i značaj usvojenih metoda primenjenih u nastavku rada.

Šestim poglavljem rada je ulazi u njegovu suštinu, objedinjavanjem svih prethodno prikazanih i definisanih teorijskih osnova. Na veoma detaljan i pristupačan načina je prikazan tok sprovođenja optimizacionog procesa na usvojenom modelu kamiona i poluprikolice, kao i virtuelnih eksperimenata putem CFD simulacija. Dobijeni rezultati za svaki od četiri razmatrana aerodinamička dodatka su jasno statistički obrađeni i prikazani. Dat je kompletan postupak sprovođenja geometrijske optimizacije aerodinamičkih dodatka od početnih usvajanja i pretpostavki, do krajnje dobijenih oblika sa iznetim zaključcima ispitivanja.

Sedmi deo rada prati kompletan tok eksperimentalnog ispitivanja u vazдушnom tunelu sa aspekta verifikacije dobijenih rezultata virtuelnim putem. Postavljene su osnove postupka merenja u vazдушnom tunelu, mernog postrojena i opreme, kao i samog procesa merenja. Obrada i akvizicija dobijenih rezultata merenja, njihova tačnost i validnost su detaljno objašnjeni u ovom delu rada. Dat je kompletan osvrt na eksperimentalno merenje sa uočenim nedostacima i savetima za naredna istraživanja u ovom oblasti.

Osmi deo rada predstavljaju rezultati i diskusija. U ovom delu rada su prikazani svi rezultati dobijeni u radu virtuelnim i eksperimentalnim putem. Izvršeno je njihovo prikazivanje numerički i grafički u svrhu poređenja i dolaska do zaključaka. Data je veoma detaljana analiza rezultata i diskusija svih uočenim fenomena i specifičnih zapažanja prilikom

ispitivanja i obrade rezultata. Vizuelizacija toka vazdušne struje oko virtuelnih modela je prikazana u svrhu analize njenog uticaja na ispitivani model i sve njegove razmatrane konfiguracije. Na kraju poglavlja je izvršen orijentacioni proračun potrošnje goriva stvarnog modela prema podacima dobijenim procesom ispitivanja.

Deveto ili poslednje poglavlje rada se bavi izvođenjem i prikazom opštih zaključaka kompletnog rada, počevši od usvojenih startnih pretpostavki, sprovođenja optimizacionog procesa, virtuelnih simulacija, eksperimentalnog merenja i obrade podataka. Prikazan je opšti stav autora o izvršenom istraživanju u okviru rada i osvrt na dalja istraživanja iz ove oblasti.



## 2. Aktuelno stanje u oblasti

Uvidom u aktuelnu i relevantnu literaturu, javno dostupnu iz oblasti spoljašnje aerodinamike motornih i priključnih vozila, optimizacije i ostalih naučnih disciplina koje imaju velikog značaja sa aspekta teme ovog rada, pristupljeno je detaljnoj analizi postojećih metoda i postupaka koje će poslužiti kao osnova za sagledavanje stanja i pronalaska mogućnosti za sprovođenje inovativnog procesa ispitivanja, koji će imati naučno inženjerski karakter i primenu.

Aerodinamika predstavlja veoma živu i aktuelnu oblast ispitivanja u oblasti motornih vozila usled intenzivne potrebe za kreiranjem i analizom novih, unapređenih oblika karoserije vozila, ili pojedinih njenih delova pomoću kojih se doprinosi poboljšanju opstrujavanja vazdušne struje oko vozila i smanjenju negativnih aerodinamičkih uticaja. Pod negativnim uticajima u najvećem meri se smatraju otpor vazduha i rasipanje strujnica vazdušne struje usled lošeg vođenja, što doprinosi stvaranju intenzivnog vrtložnog kretanja u pojedinim oblastima modela. Sa aspekta privrednih motornih vozila čije brzine kretanja se smatraju dovoljnim vrednostima u kojima aerodinamika i strujanje vazduha imaju značajnog uticaja. Takođe njihova veličina i veliki broj pređenih kilometara ih ubrajaju u značajne objekte istraživanja. Najmanje poboljšanje oblika karoserije kamiona ili autobusa se manifestuje smanjenjem otpora vazduha što za posledicu ima umanjene potrošnje goriva. Veliki broj pređenih kilometara u toku eksploatacije karakterističan za dugolinijski transport privrednih vozila direktno generiše značajnu uštedu. Autori Mohamed Z. i Filippone A. u svom radu [1] jasno stavljaju do znanja značaj aerodinamike u oblasti privrednih motornih vozila za dugolinijski transport. Otpor vazduha komercijalnog vozila na autoputu predstavlja vodeći otpor kretanja vozila i zbog toga autori predstavljaju numerički model izračunavanja potrošnje goriva i ušteda na godišnjem nivou sa aspekta 130.000 pređenih kilometara što predstavlja prosek privrednih vozila ove vrste. Uz pomoć pravilnog pristupa i sagledavanja uticajnih faktora aerodinamike, moguće je postići uštedu u potrošnji goriva do 9%. Ubacivanjem i analizom tri jednostavna aerodinamička dodatka na karoseriju privrednog motornog vozila sa poluprikolicom doprinosi se umanjenoj sili otpora vazduha i uštedi goriva od 10%, pri razmatranim brzini kretanja vozila od 20, 40 i 60 mph (milja na čas), autori Wood R. i Bauer S. su prikazali kroz svoj rad [2]. Autor Tyrrelli C. kroz svoj rad [3] sprovodi veoma značajno istraživanje u kome se ističu prednosti uticaja aerodinamike kod privrednog vozila i definišu značajne hipoteze za sprovođenje ispitivanja. Naime, privredno vozilo je sposobno da se kreće na putu u dosta velikom opsegu brzina kretanja. Uticaj aerodinamike se značajno menja od najnižih do najviših brzina kretanja i iz tog razloga autor skreće pažnju da se ispitivanje sprovede pri tačno definisanim i kontrolisanim brzinama kretanja vozila. Takođe bačen je osvrt na značaj računarskih simulacija u oblasti aerodinamike motornih vozila. Uz pomoć aerodinamičkih dodatka projektovanih i postavljenih na stvarno privredno vozilo se postiglo obaranje koeficijenta otpora vazduha sa 0,8 na 0,45 što predstavlja značajno poboljšanje sa aspekta ove vrste motornih vozila. Autor Wood R. u radu [4] definiše oblasti u kojima dolazi do stvaranja lokalnih gubitaka usled lošeg vođenja vazdušne struje oko modela kamiona sa poluprikolicom. Autor daje prikaz istraživanja nekoliko jednostavnih oblika aerodinamičkih dodatka pozicioniranih na kraj poluprikolice i prostor između kamiona i poluprikolice. Osim virtuelnog ispitivanja, autor prikazuje validaciju svojih aerodinamičkih dodatka putem istraživanja na stvarnom modelu kamiona i poluprikolice. Moguća rešenja dodatka koja se postavljaju na pojedine delove karoserije kamiona i poluprikolice, kao i kod sličnih oblika karoserija vozila u svrhu umanjivanja otpora vazduha prikazuju autori Choi H., Lee J. i Park H. u svom radu [5]. U radu osim aerodinamičkih dodatka koji su na kraju rada prikazani, autori prikazuju detaljnu analizu toka vazdušne

struje oko različitih modela, sa osvrtom na oblasti vrtložnog turbulentnog kretanja vazdušne struje. Uticaj graničnog sloja podloge i vrednost Rejnoldsovog broja je prikazana u radu za različite analizirane slučajeve modela. Pojedini oblici aerodinamičkih dodataka, prikazanih u radu [5] su poslužili kao idejno rešenje u kreiranju pojedinih aerodinamičkih dodataka u okviru doktorske disertacije. Ušteda u potrošnji goriva kroz demonstraciju novog numeričkog postupka simulacije i analizu prostiranja vazdušne struje oko modela kamiona prikazuje grupa autora u svom radu [6]. U radu se autori bave kreiranjem unapređene metode simulacija velikih vrtloga (*eng. LES – Large Eddy Simulation*) za čiju validaciju rezultata koriste umanjeni uprošćeni model ispitivan u vazдушnom tunelu. Veoma sličan pristup numeričkoj analizi ispitivanja modela kamiona sa prikolicom uz upotrebu LES metode simulacije prikazuju autori Nakamura S., Hively E.M. i Conlisk A.T. u svom radu [7] u kome osim uticaja aerodinamičkih dodataka na modelu, se bave uticajem bočnog vetra, odnosno vazdušne struje koja pod različitim uglovima nailazi na ispitivani model. Sličan pristup analize ispitivanog modela oblika kamiona sa poluprikolicom uz upotrebu LES metode simulacije prikazuju autori Verzicco R., Fatica M., Iaccarino G. i Moin P. u radu [8]. Autori upotrebu LES metode usmeravaju na komplikovanije modele koji imaju preko 10 miliona ispitivanih ćelija ali Rejnoldsov broj ostaje u relativno malim granicama do  $10^5$ . Značaj i upotreba optimizacionih metoda je prikazana kroz veliki broj radova u kojima autori skreću pažnju na neke od najbitnijih tipova i postupaka dolaženja do optimalnih rezultata. Kroz doktorsku disertaciju autora Williams N.A. [9] je dat veoma značajan pregled optimizacionih metoda, direktno primenjenih za optimizaciju oblika u svrhu smanjenja otpora vazduha kod lakih teretnih vozila. Osim smanjenja otpora vazduha, u disertaciji je analiziran i tok vazdušne struje oko modela uz pomoć softverskih alata za simulaciju. Dobijeni optimizovani dodaci su projektovani uz pomoć optimizacionih metoda, koji su naknadno postavljeni na stvarno vozilo u svrhu verifikacije rezultata. Geometrijska optimizacija modela uz pomoć CFD softvera prikazuju autori Soto O. i Lohner R. kroz rad [10]. Pristup optimizacionoj metodi koji je prikazan u ovom radu se zasniva na rešavanju Ojlerovih jednačina za nekompresibilan fluid. Autori istražuju i stavljaju do znanja značaj inovativne metode koja uključuje osetljivost mreže modela, kako kod 2d, tako i kod 3d modela. Sama upotreba CFD simulacija je veoma rasprostranjena u velikom broju slučajeva gde su metode 1d ili 2d nedovoljne da se u potpunosti sagleda suština problema. Jedna od najznačajnijih prednosti koju dobijamo upotrebom savremenih CFD simulacija je 3d slika analiziranog procesa i istovremeno praćenje većeg broja fluidnih strujnica. Veoma lep primer pristupa analize uz pomoć CFD simulacija daju autori Huminic A. i Huminic Gabriela u radu [11] gde su izvršene simulacije i analiza prostiranja vazdušne struje ispod poda vozila, odnosno u zoni između puta i poda vozila. Ova zona predstavlja veoma problematičnu oblast sa aspekta aerodinamike vozila jer se upravo u njoj generišu veliki otpori vazduha. Osim pomenute zone, autori skreću pažnju i na ostale delove karoserije putničkog vozila koje su od velikog značaja za spoljašnje i unutrašnje aerodinamičke performanse vozila. Simulacije su izvršene pomoću Ansis softvera za brzine vazdušne struje od 30 do 180 km/h i različite vrednosti Rejnoldsovog broja od  $2,3 \times 10^6$  do  $13,8 \times 10^6$ . Takođe simulacija je izvršena za potpuni RANS (*eng. Reynolds-Averaged Navier-Stokes*) model. 3d simulacija opstrujavanja vazdušne struje oko kabine kamiona uz rešavanje Navier-Stoksovih jednačina za nestacionarno strujanje prikazuju autori Subrata R. i Pradeep S. u radu [12]. Takođe u radu se pažnja usmerava na upotrebu specifičnog modela turbulentnog strujanja pod nazivom  $k - \epsilon$ , koji se pokazao kao dobro rešenje tokom simulacijama u okviru doktorske disertacije. U simulaciji objašnjenjooj kroz rad [12] model je podeljen na 1,78 miliona analiziranih ćelija i postignuta izračunata prosečna ušteda goriva je 35%. Model turbulentnog strujanja autora Galambos S., Nikolić N., Ružić D. i Dorić J. u radu [13], iskorišćen za formiranje CFD strujnog režima modela u doktorskoj disertaciji. Autori koriste  $k - \epsilon$  tip turbulentnog strujanja za simulaciju toka

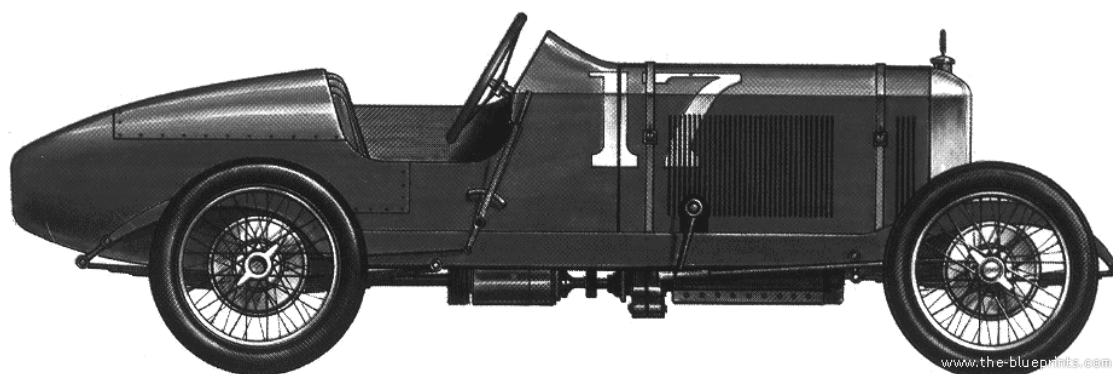
vazdušne struje kroz usisni kolektor motora sa unutrašnjim sagorevanjem. Tip zapremisnskog mrežnog modela korištenog u radu [13] je prizmatična polihedralska mreža sa oko 470.000 mrežnih ćelija. Ovaj tip zapreminske mreže se pokazao veoma dobrom polaznom osnovom za istraživanja u okviru doktorske disertacije. Vrednost Reynoldsovog broja u radu [13] iznosi između  $7,7 \times 10^4$  i  $1,8 \times 10^5$ . Optimizaciona metoda bazirana na kontrolnoj teoriji iskorišćena na složenim geometrijskim oblicima krila i ostalih delova aviona prikazuju autori Reuther J., Jameson A., Farmer J., Martinelli L. i Saunders D. kroz rad [14]. Rešavanje Ojlerovih jednačina za stišljiv fluid sa akcentom na postupke mapiranja mreže su takođe prikazani u radu [14]. Mapiranje obuhvata analitički pristup rešavanja, kao i rešavanje pomoću metode konačnih zapremina. Optimizaciona metoda poput metode planiranja eksperimenta (DoE) predstavlja veoma aktuelnu i rasprostranjenu metodu zbog svog velikog spektra primene i jednostavnosti postavke problema. U kombinaciji sa savremenim softverskim alatima postižu se rezultati visoke tačnosti optimizacije. Primena DoE optimizacione metode za smanjenje otpora vazduha i potrošnje goriva kod komercijalnih vozila je prikazano u radu [15], autora Salari K. Osim analize svih prisutnih otpora na privrednom vozilu, DoE metoda je sprovedena za optimizovanje aerodinamičkih dodataka na kabini kamiona. Osim toga, u radu je izvršena analiza uticaja različitim oblika poluprikolica u kombinaciji sa kamionom. Uticaj više ispitivanih modela postavljenih jedan iza drugog je takođe prikazano u radu [15] u svrhu prikaza polja vazdušne struje oko modela, kao i njihovog međusobnom uticaja na silu otpora vazduha. Verifikacija postignutih rezultata je izvršena eksperimentalnim merenjem na umanjenom modelu u vazдушnom tunelu. Još jedan primer upotrebe DoE metode za rešavanje geometrijskih optimizacionih problema kod kamiona sa poluprikolicom je priazan od strane autora Rose McCallen, Salari K., Ortega J. u radu [16]. U radu su jasno naglašeni razlozi nastajanja odvajanja vazdušnih strujnica od modela i generisanja dodatnih otpora, kao i dobijanje novih, unapređenih geometrijskih oblika primenom DoE metode. Rad obuhvata istraživanje putem simulacija i eksperimentalnog postrojenja na umanjenom i uprošćenom modelu kamiona sa prikolicom. Upotrebom ovog optimizacionog pristupa, autori rada [16] su postigli uštedu u potrošnji goriva od 11%. Pregled praktičnih dodataka na karoseriji kamiona i poluprikolice u svrhu umanjavanja otpora vazduha i poboljšanja aerodinamičkih karakteristika vozila daju autori Schoon R. i Fongloon P. u svom radu [17]. Takođe je dat veoma koristan osvrt na potencijalne oblasti kamiona i poluprikolice na kojima dolazi do generisanja lokalnih otpora i mesta gde bi eventualni aerodinamički dodaci mogli značajno doprineti poboljšanju aerodinamičkih karakteristika. Postupak analize i merenja performansi aeroprofila krila SM701 u vazдушnom tunelu za oblasti Reynoldsovog broja od  $7 \times 10^5$  do  $1,3 \times 10^6$  je prikazan u radu [18], autora Steen G., Nicks O. i Heffner M. Osim meranja sila i momenata na modelu krila, izvršena je i vizuelizacija prostiranja vazdušne struje u svrhu uočavanja prelaznih režima strujanja iz laminarnog u turbulentno. Pregled aeroprofila koji će poslužiti kao bazni model za dalji tok istraživanja u okviru doktorske disertacije je dat kroz detaljan izveštaj u radu [19]. Numeričko istraživanje u svrhu smanjenja otpora vazduha kod srednje teških privrednih vozila je prikazano u radu [20], autora Norouzi M., Pooladi M.A. i Mahmoudi M. Polje prostiranja vazdušne struje i pritiska oko analiziranih modela je simulirano metodom konačnih zapremina. Projektovani aerodinamički dodaci su grupisani u dve zone modela, a to su zona iznad kabine kamiona i zona iznad poluprikolice, gde dolazi do nepravilnog prostiranja vazdušne struje. Istraživanje je sprovedeno za samo jedan brzinski režim od 30 m/s. Pravilno prostiranje vazdušne struje oko modela predstavlja veoma bitan deo spoljašnje aerodinamike. Ukoliko vazдушna struja nailazi na oblasti modela u kojima dolazi do naglog skretanja sa prethodne putanje, ili ulaska u oblast sa velikom razlikom pritiska, dolazi do generisanja velikih vrtložnih strujanja. Ovakva pojava je karakteristična za turbulentno strujanje i praćena je lokalnim otporom uz kinetičke gubitke energije turbulentnog strujanja. U radu [21], autori Bonitz Sabine, Larsson L. i Lofdahf L. se bavi uticajem dodataka na

karoseriji vozila koji negativno utiču na pravilno prostiranje vazdušne struje i doprinose stvaranju lokalnih gubitaka. Kompletna analiza je sprovedena uz korišćenje CFD simulacija. Kompletno istraživanje je sprovedeno na automobilu Volvo S60. U radu je korišćen tip turbulentnog strujanja  $k - \epsilon$ , dok je za mrežni model usvojena zapreminska mreža sa ćelijama prizmatičnog oblika veličine bazne ćelije između 3 i 7 mm. Pošto je istraživanje sprovedeno na putničkom vozilu u razmeri 1:1, broj mrežnih ćelija je veoma velik i iznosi 96 miliona. U radu su prikazana veoma korisna podešavanja CFD simulacije poput dužine trajanja simulacije potrebnog da se rezultati u potpunosti ustale. Ova vrednost u radu iznosi 500 iteracija. Kroz narednih nekoliko radova je dat prikaz veoma zanimljive i korisne upotrebe CFD simulacija u oblasti motornih vozila. Značaj analize aerodinamičkih dodataka na kamionu sa poluprikolicom u svrhu obaranja sile otpora vazduha je prikazano u radu [22], autora Hakansson C. i Lenngren M. U radu je analizirano više tipova dodataka postavljenih u kritične zone kamiona i prikolice. Geometrijska optimizacija bočnih retrovizora na putničkom vozilu uz upotrebu velikog broja analiziranih modela je prikazana u radu [23], autora Olsson M. Analiza je sprovedena putem CFD simulacije, a konačna verifikacija metode i njenih dobijenih rezultata je izvršena eksperimentalnim merenjem u vazdušnom tunelu. U radu su takođe date bitne smernice za postavljanje CFD simulacije. Značaj analize i projektovanja dodataka koji doprinose umanjenoj aerodinamičkoj otporu u zoni ispod vozila je prikazano u radu [24], autora Koitrana Sofie i Rehnberg S, kao i u radu [25], autora Levin J. i Rigdal R. Oblik i hrapavost poda vozila i visina klirensa vozila ima velikog značaja na količinu vazdušne struje koja tokom vožnje prodre u zonu ispod vozila. Ulaskom vazdušne struje u oblast različitog pritiska i brzine, kao i neravnina na podu vozila doprinose stvaranju lokalnih vrtloga i otpora koji se veoma negativno prenose na vozilo u celini. Opstrujavanje vazdušne struje oko rotirajućeg točka na vozilu u kretanju je prikazano u radu [26], autora Vdovin A. i u radu [27], autora Cavusoglu O. Autori razmatraju različite oblike naplataka i njihov individualni uticaj na tok vazdušne struje oko točka u svrhu pronalaska optimalnog oblika sa stanovišta umanjavanja lokalnih otpora vazduha i pravilnog dovođenja vazdušne struje do kočnica i njihovog hlađenja.

Na osnovu detaljnog pregleda relevantne literature iz oblasti spoljašnje i unutrašnje aerodinamike motornih vozila, optimizacionih postupaka i metoda, CFD simulacija i dr., autor je stekao opšta saznanja o aktuelnom stanju nauke i inženjerske prakse u svetu. Analizom radova su utvrđene oblasti u kojima po utisku autora postoji prostora za sprovođenje istraživanja ili njegovog nastavka na postojeće. Neke od uočenih stvari koje se mogu smatrati veoma bitnim, a po mišljenju autora izostavljenim u prethodno navedenim radovima i mnoštvu drugih koji nisu prikazani, su upotreba kombinovanih optimizacionih postupaka u cilju pronalaska najboljeg aerodinamičkog oblika. U velikom broju radova se autori opredeljuju samo za analizu modela pri jednom brzinskom režimu vazdušne struje i to najčešće maksimalnom. Takođe kroz radove, autor nije pronašao direktnu upotrebu aeroprofila kao osnovu za kreiranje aerodinamičkih oblika, a veoma je jasan njegov pozitivni uticaj na tok vazdušne struje i jednostavnost projektovanja. Upotreba metode planiranja eksperimenta nije dovoljno primenjena u oblasti spoljašnje aerodinamike privrednih vozila, što po mišljenju autora ostavlja prostora za istraživanje u toj naučnoj oblasti.

### 3. Aerodinamika vozila

Značaj aerodinamike na vozilima je najbolje prikazati poređenjem dva trkačka vozila čiji je primarni zadatak bio da pobjede. Vozila predstavljaju vrhunske proizvode automobilske industrije svog vremena. Prvi automobil potiče sa početka dvadesetog veka i 1916. godine je krasio pobjedničko postolje trke „Indian 500“. U pitanju je *Peugeot* iz 1913. godine. Pored veoma slabih kočnica, jakog pogonskog agregata i uzanih točkova, ovaj automobil je imao dosta loše aerodinamičke performanse zahvaljujući obliku karoserije sa oštrim ivicama i velikom čeonom površinom. Jedini zaobljeni oblik koji je doprinio poboljšanju aerodinamičkih performansi je rep vozila, čiji je oblik preuzet iz brodske industrije. Zahvaljujući oštrim ivicama, vazdušne strujnice nisu uspevale da prate karoseriju vozilu u toku vožnje, što je doprinisilo do njihovog odvajanja na mestima gde to nije bilo predviđeno. Takođe, ista pojava je doprinosila stvaranju vrtloga koji značajno remete vazdušni pritisak oko vozila [28].



Slika 3.1 – Peugeot iz 1913. godine [28][29]

Zahvaljujući velikoj ekonomskoj krizi koja je pogodila svet sedamdesitih godina prošlog veka, automobilska industrija je bila prinuđena da uvede nove regulative koje će istaći potrošnju goriva kao važan parametar pri projektovanju vozila. Takav osvrt je prisutan i u auto-moto sportu (30). Osim ubacivanja manjih i ekonomičnijih pogonskih agregata, značaj aerodinamike je postajao sve izraženiji. Drugo trkačko vozilo potiče sa početka devedesetih godina prošlog veka i takođe predstavlja pobjedničko vozilo „Indian 500“ trke za sezonu 1993.



Slika 3.2 – Marlboro Penske PC22 iz 1993. godine [28][31]

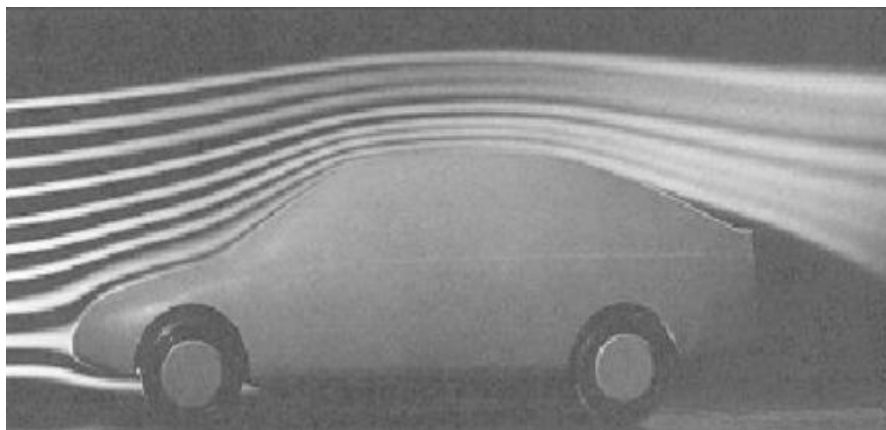
Od oštih ivica i velikih delova sa prednje strane vozila, došlo se do zaobljenih elemenata karoserije sa glatkim prelazima. To je svakako dovelo do boljeg opstrujavanja vazdušne struje oko vozila. Glatka karoserija i prednji deo vozila u obliku metka svakako dovode do smanjenja otpora koji je veoma zastupljen pri većim brzinama kretanja vozila. Smanjenje sile otpora vazduha (*eng. Drag force*) doprinosi do povećanja brzine kretanja vozila što je svakako jedan od vodećim uslova u trkačkim vozilima. Značajan napredak u dizajnu oblika karoserije se ogleda u dodatnim elementima kao što su spojleri, odnosno krilca sa prednje i zadnje strane vozila. Osim sile otpora vazduha, značajana sila svakako predstavlja i aerodinamička sila izdizanja vozila ili uzgona (*eng. Lift force*). Prilikom kretanja vozila kroz vazдушnu struju, izvesna količina vazduha opstrujava sa donje strane vozila. Ova pojava doprinosi povećanju pritiska ispod vozila, što kao posledicu imamo rasterećenje vertikalne sile na osovima vozila. Smanjenje sile osovinskih reakcija doprinosi umanjenu performansi vozila. Kako bi se ova pojava redukovala, na trkačkim vozilima kod kojih su performance posebno značajne se podleže ugradnji dodatnih usmerivača vazduha koji će preusmeriti tok vazdušne struje i smanjiti njeno proticanje ispod vozila. Takođe ugradnja spojlera sa zadnje strane vozila koji ima karakterističan oblik, doprinosi umanjenu sile vertikalnog izdizanja vozila, pa čak i značajnom povećanju sile reakcije na podlogu. Ugradnje dodatnih spojlera na repu vozila je naročito opravdano kod vozila sa zadnjim pogonom, jer značajno doprinosi poboljšanju vučnih performansi vozila [28][30].

### 3.1. Osnovne aerodinamičke pojave i razmatranja

U ovom poglavlju su izvršena osnovna razmatranja vezana za pojave i termine koji su veoma značajni za razumevanje. Najveći akcenat je stavljen na sile i fenomene koji okružuju vozilo u kretanju izloženo uticajima vazdušne struje.

#### 3.1.1. Vazdušne strujnice

Kako bi se opisalo postojanje ove pojave, pristupalo se različitim metodama vizuelizacije. Od velikog je značaja pravilno sagledati tok vazdušne struje koji okružuje analizirani objekat u trenucima kretanja kroz sredinu ispunjenu fluidom. Bez obzira da li se radi o jednostavnom prizmatičnom predmetu, ili kompleksnom automobilu, veoma je značajno uvideti kako se vazдушna struja koja nailazi i prolazi oko posmatranog predmeta ponaša u njegovom okruženju i da li postoji uticaj jednog na drugo. Vazdušne strujnice predstavljaju izolovane delove fluidne struje koje se najčešće prikazuju kao linije. Glavna uloga vazdušnih strujnica je proces vizuelizacije toka fluidne struje. Pomoću vazdušnih strujnica se sa velikom tačnošću mogu uočiti značajni fenomeni u procesu strujanja fluida oko neke prepreke, odnosno analiziranog predmeta. Začeci procesa vizuelizacije potiču iz vremena kada je aerodinamika postajala značajna i konkurentna nauka, a sam proces se zasnivalo na puštanju različitih fluida u glavnu vazдушnu struju. Dodatni fluidi su bivali različitih boja, kako bi se postigao efekat vizuelizacije glavne vazdušne struje. Ukoliko je analizirani predmet bio okružen vazduhom, česti korišćeni medij za vizuelizaciju toka vazdušne struje oko predmeta je bio dim koji se ubacivao u glavni tok vazdušne struje. Ukoliko je bilo potrebno analizirati tok tečnosti u nekom cevocodu vizuelizacija se zasnivala na ubacivanju fluida veoma sličnih fizičkih svojstava kao medij od koga je sačinjena glavna struja, sa dodatkom boja sa veoma izraženim kontrastom. Na slici 3.3 je dat prikaz vizuelizacije modela automobila u vazdušnom tunelu putem dima koji se pušta u glavni tok vazdušne struje. Sa upotrebom računara, proces vizuelizacije se značajno pojednostavio. Današnji softveru su veoma razvijeni i omogućuju postizanje potpune slobode u smislu vizuelizacije i analize posmatranih fenomena.



Slika 3.3 – Vizuelizacija vazdušne struje pomoću dima [28][32]

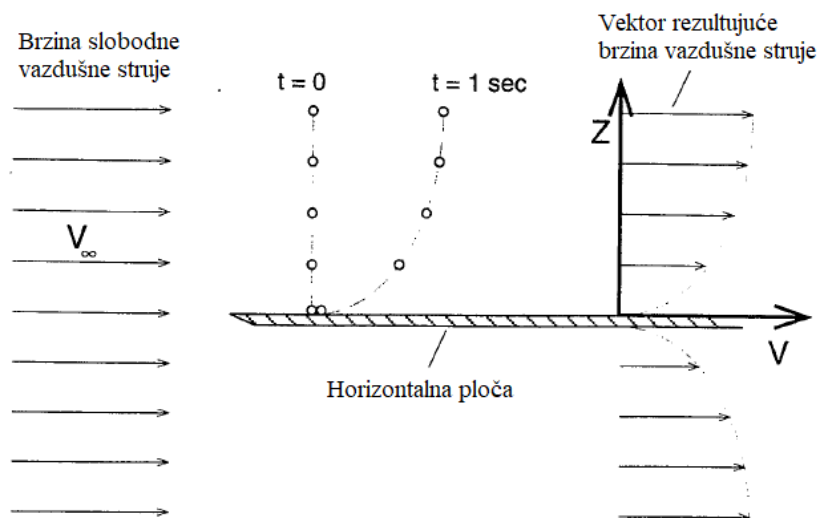
### 3.1.2. Odvajanje vazdušne struje

Kako bi proces vizuelizacije bio što tačniji i pružio što precitniji uvid u ponašanje toka vazdušne struje nailaskom na analizirani model, neophodno je povećati broj strujnica koje opstrujavaju oko njega. Na taj način je moguće uočiti da vazdušne strujnice u potpunosti prate konturu analiziranog modela, kao što je moguće uočiti na slici 3.3 sa prednje strane vozila i u predelu prelaska preko krova vozila. Za takvo strujanje kažemo da je prijanjajuće (*eng. Attached flow*). Najbitnija karakteristika ovog tipa strujanja je prilično ravnomerna preraspodela pritiska oko analiziranog modela. Ukoliko se tok vazdušne struje u nekim delovima odvajaju od površine analiziranog modela uz intenzivnije stvaranje vrtloga može se reći da je u pitanju odvojivi tip strujanja. Ovaj tip strujanja ima za posledicu stvaranje zona oko analiziranog predmeta sa velikim odstupanjem pritisaka. U nastavku je detaljnije opisan uticaj pritiska na aerodinamičke procese oko analiziranog modela. Odvojivi tip strujanja je kod vozila prisutan u zoni sa zadnje strane, nakon završetka repa vozila. Naročito u slučajevima kratkog i odsečenog repa. Vazdušna struja prati profil vozila do trenutka naglog zaobljenja na karoseriji vozila, nakon čega nije u mogućnosti da nastavi da sledi profil. To prouzrokuje odvajanje vazdušne struje i formiranje zone oko vozila u kojoj dolazi do formiranja vrtloga, odnosno vrtložnog strujanja. Pri projektovanju vozila se mora voditi računa da je na vozilu značajno umanjeno prisustvo zona prouzrokovanih odvajanjem vazdušne struje od profila vozila. Ova pojava za posledicu ima uvećanje sile verikalnog izdizanja i sile otpora vazduha [28].

### 3.1.3. Granični sloj

Granični sloj predstavlja formiranu zonu u blizini površine oko koje opstrujava vazdušna struja. Efekat graničnog sloja je najbolje objašnjiv preko preraspodele brzine vazdušne struje u zoni neposrednoj oko analiziranog modela. Fenomen graničnog sloja i preraspodele brzine vazdušne struje je prikazan na slici 3.4. U ustaljenu vazdušnu struju u kojoj je brzina jednaka u svim delovima analizirane oblasti, ubačena je prepreka u vidu nepomične horizontalne ploče zanemarive debljine. Nailaskom vazdušne struje na ploču dolazi do preraspodele brzine vazdušne struje u zoni oko ploče. Ova preraspodela je karakteristična smanjenjem brzine vazdušne struje u zoni oko ploče. Uzrok ove pojave je postojanje tzv. uslova strujanja bez klizanja. Nepostojanje relativne brzine između ploče i vazdušne struje koja opstrujava oko nje dovodi do efekta zaustavljanja vazdušne struje u kontaktu sa površinom ploče. Vazdušne strujnice koje nisu u strogoj blizini ploče poseduju brzinu koja se nije menjala zbog nailaska na ploču. Debljina graničnog sloja  $\delta$  može biti

promenjiva, tako da na modelu automobila je moguće pronaći debljinu od svega nekoliko milimetara sa prednje strane vozila, pa sve do nekoliko centimetara u zoni krova vozila.



Slika 3.4 – Preraspodela brzine i granični sloj oko nepomične ploče [28]

#### 3.1.4. Laminarno i turbulentno strujanje

Za objašnjenje pojave različitih tipova strujanja upotrebljena je šema preraspodele brzina, prikazana na slici 3.4, pod preduslovom da je model horizontalne ploče izbačen i da vazдушna struja cirkuliše bez nailaska na prepreku. Praćenjem puta kojim se vazдушna struja kreće, pretpostavlja se da će sve strujnice biti paralelne srednjoj vrednosti vektora brzine. Ukoliko su strujnice zaista paralelne i protok je dobro organizovan duž kompletnog analiziranog preseka, radi se o *laminarnom strujanju*. Ukoliko je srednja vrednost brzine strujanja jednaka za kompletan tok fluidne struje, može se desiti da pojedine strujnice imaju različite pravce i smerove kretanja u odnosu referentni vektor vazdušne struje. Ovakav tip strujanja se naziva *turbulentno strujanje*. Važnost postojanja i analize tipova strujanja je veoma značajno sa aspekta odvajanja strujnica od graničnog sloja. Sile otpora vazduha i vertikalnog izdizanja vozila veoma zavise od izabranog tipa strujanja. Za vozilo koje se kreće kroz okruženje u kome nema dodatnih uticaja na strujanje vazduha, može se smatrati da je vozilo izloženo laminarnom strujanju. Ovakvi kontrolisani uslovi su mogući u vazдушnim tunelima gde na vozilo deluje samo jedan tip strujanja. U realnim okruženju kroz koje se vozilo kreće je veoma teško izolovati samo laminarno strujanje. Mnogo dodatnih činilasa narušava laminarnu vazдушnu struju kao što su vetar koji duva iz promenljivog pravca, vazдушna struja od drugog vozila koji se mimoilaze, prisustvo bliskih objekata pri prolasku vozila... Svi ovi dodatni uticaju remete ustaljeno laminarno strujanje i njegove pojedine delove pretvaraju u turbulentno strujanje. Pojedini delovi karoserije vozila na kojima postoje nagle promene oblika ili oštre ivice, dovode do stvaranja poremećaja u laminarnom strujanju koji najčešće dovode do stvaranja vrtloga. Nastale vrtloge ili vortekse karakteriše povećanje brzine koja za posledicu ima gubitak kinetičke energije strujanja fluida [28].

#### 3.1.5. Osnovna svojstva fluida

Izučavanje fluida se vrši poznavanjem njihovih fizičkih svojstvima. Sva svojstva fluida su makroskopsko predstavljena mikroskopskih struktura i kretanja. Sve poznate stvari u prirodi je moguće pronaći u čvrstom ili fluidnom stanju. Pod fluidnim stanjem se podrazumeva agregatno stanje karakteristično za tečnosti i gasove. Pre predstavljanja fizičkih

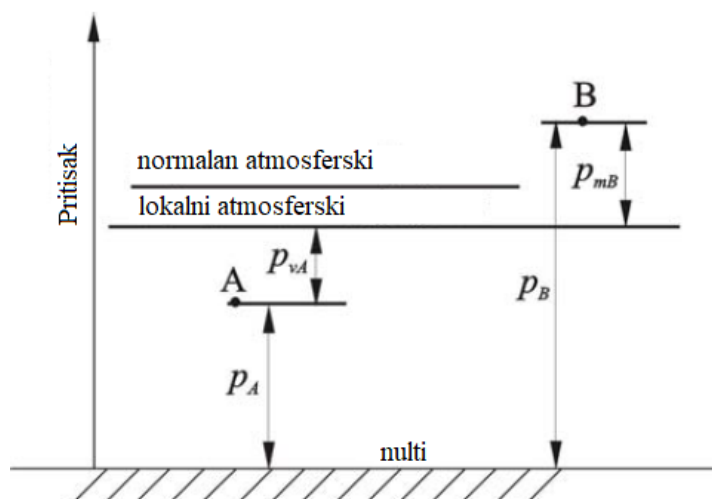


svojstva fluida, neophodno je uočiti da ukoliko analiziramo tangencijalne sile izdvojene zapremine fluida koja prijanja o nepomičnu površinu, fluidna zapremina nastavlja sa deformisanjem sve dok na nju deluju sile. Pri prestanku delovanja sila, izdvojena fluidna zapremina se neće vratiti u svoje početno stanje, što je razlika ukoliko se čvrsto telo izloži dejstvu sile, a pri tome se ne pređe granica elastičnog deformisanja. Uočeni proces stalne deformacije izdvojene fluidne zapremine se naziva *strujanje*. Prirodno svojstvo fluida je da teče, odnosno da se kreće, pa su u nastavku analizirane pojave koje nastaju i deluju na fluid u toku kretanja. Fizička svojstva fluida je moguće podeliti na:

- mehanička (gustina  $\rho$ , pritisak  $p$ ),
- termička (temperatura  $t$ , unutrašnja energija  $e$ , entalpija  $h$ ),
- uzrokovana (viskoznost  $\eta$  ili  $\nu$ , stišljivost  $s$  ili  $\varepsilon$ , površinski napon  $\gamma$ , napon pare  $p_k$ , toplotno širenje  $\beta$ , kavitacija  $\kappa$ ).

### Pritisak

Ova mehanička karakteristika fluida predstavlja se kao skalar koji se vezuje za jednu tačku u analiziranoj fluidnoj struji. Označava se sa  $p$  i ima dimenziju Paskal ( $p_a = N/m^2$ ). Razlikuje se unutrašnji i spoljašnji pritisak, pri čemu se unutrašnji pritisci elementarne izdvojene zapremine međusobno poništavaju. Dejstvo spoljašnjih sila karakteriše spoljašnji pritisak. Tačna definicija pritiska je povezana naponskim stanjem, odnosno poznavanjem tenzora napona. Pritisak je fizička veličina koja povezuje sve ostale strujne veličine fluida. Postupci merenja pritiska se zasnivaju na izražavaju vrednosti neke referentne vrednosti. Zbog toga je moguće meriti apsolutni  $p_A$  ili  $p_B$ , manometarski nadpritisak  $p_{mB}$ , vakuumski potpritisak  $p_{vA}$ , odnosno pritisak od nule ili od neke druge referentne vrednosti. Zbog atmosferskog pritiska i nadpritiska ili razlika atmosferskog pritiska i potpritiska jednaki su apsolutnom pritisku, što je šematski prikazano na slici 3.5.



Slika 3.5 – Relativni i atmosferski pritisak [33]

Najčešći mehanički uređaji za merenje statičkog pritiska su manometar sa Burdonovom cevi i aneroidni barometar. Instrumenti kod kojih se relativni pritisak meri pomoću stuba tečnosti su različite izvedbe U-cevi, od kojih je dobro poznat živin stub tečnosti takođe pogodan za merenje vrednosti apsolutnog pritiska [33].

### Gustina

Najznačajnije fizičko svojstvo fluida koje reprezentuje njegovu masu je gustina. Definiše se kao masa po jedinici zapremine i ima dimenziju ( $\rho = \text{kg}/\text{m}^3$ ). Na 4 °C gustina vode je 1000  $\text{kg}/\text{m}^3$ , a na 20 °C gustina vode je 998,2  $\text{kg}/\text{m}^3$ . Vazduh pri atmosferskom pritisku od 101325 Pa i temperaturi od 15 °C ima gustinu od 1,226  $\text{kg}/\text{m}^3$ . Gustina vazduga se određuje iz jednačine idealnog gasa 3.1., gde  $p$  predstavlja pritisak (Pa),  $\rho$  – gustina ( $\text{kg}/\text{m}^3$ ),  $T$  – temperatura (K),  $R$  – specifična gasna konstanta (J/kgK). U tabeli 1 je dat pregled gustina fluida. Jednačina stanja idealnog gasa povezuje osnovna fizička svojstva gasa u jednoj tački. Za poznatu specifičnu gasnu konstantu  $R$ , gustina  $\rho$  se određuje merenjem pritiska  $p$  i temperature  $T$ . Ukoliko tečnost miruje, njena gustina se određuje na različite načine kao što su merenje mase i zapremine, hidrostatičkim merenjem (merenjem sile potiska), pomoću „U“ cevi ili vagom.

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (3.1.)$$

Tabela 1 – Gustina fluida [33]

Fluid	$\rho = \text{kg}/\text{m}^3$	Fluid	$\rho = \text{kg}/\text{m}^3$
Glicerin	1260	Benzol	875
Naftalin	1145	Špiritus	830
Lož ulje	890-1020	Alkohol (na 15 °C)	790
Mleko	1030	Benzin	680-760
Laneno ulje	940	Živa (na 0 °C)	13595
Ulje za cilindre	930	Azot (na 0 °C i 1 bar)	1,251
Morska voda	1020-1030	Ugljen-dioksid	1,977
Mast	910-960	Vazduh	1,292
Maslinovo ulje	914-919	Kiseonik	1,429
Nafta	700-1040	Vodonik	0,090

Gustina smeše tečnosti se određuje zavisno od količinskih ili zapreminskih delova. Ukoliko su poznati maseni udeli pojedinih delova i njihove gustine, gustina smeše se dobija iz jednačine 3.2.

$$\rho_s = \frac{\rho_1 \rho_2 m_s}{m_1 \rho_2 + m_2 \rho_1} \quad (3.2.)$$

Ako su poznati zapreminski udeli i gustina pojedinih delova, gustina smeše tečnosti se dobija na osnovu jednačine 3.3.

$$\rho_s = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_s} \quad (3.3.)$$

U praksi se veoma često koristi specifična gustina koja se definiše kao gustina posmatranog fluida svedena na gustinu vode. Na osnovu određivanja specifične gustine nekog fluida lako se dolazi do zaključka da ukoliko je vrednost manja od 1, fluid pliva na vodi. Ređi fluidi plivaju na gušćim fluidima [33].

### Stišljivost

Stišljivost je osobina koja važi za sve fluide, bilo da su tečnosti ili gasovi. Definiše se kao mera promene zapremine usled promene pritiska. Često se uvodi aproksimacija da je fluid nestišljiv, pogotovo ukoliko je reč o tečnostima. Za gasove je specifično da se gustina neznatno menja usled male promene pritiska. Ukoliko se pritisak promeni za 1% pri

konstantnoj temperaturi, gustina će se promeniti za 1%. U standardnim atmosferskim uslovima, promene pritiska od 1% odgovara promeni nadmorske visine od 85 metara, tako da se kod visokih zgrada smatra da su pritisak i gustina vazduha po kompletnoj visini konstantni. Koeficijent stišljivosti  $s$  predstavlja količnik promene zapremine  $\Delta V$  i prvobitne zapremine  $V_0$ , podeljen razlikom pritisa  $\Delta p$ . Ima konstantnu vrednost za svaki fluid i izražen je u jednačini 3.4.

$$s = -\frac{\Delta V}{V_0} \frac{1}{\Delta p} [\text{Pa}^{-1}] \quad (3.4.)$$

Znak – (minus) u jednačini 3.4. prikazuje da se zapremina smanjuje ukoliko se pritisak povećava i obrnuto. Recipročna vrednost koeficijenta stišljivosti se naziva Modul stišljivosti i može se porediti sa modulom elastičnosti kod čvrstih tela. Jednačina 3.5. predstavlja modul stišljivosti.

$$\varepsilon = \frac{1}{s} = -\frac{V}{dV} dp [\text{Pa}] \quad (3.5.)$$

U zavisnosti od promene pritiska i dubine, sa poznatim koeficijentom stišljivosti je moguće odrediti gustinu tečnosti. Pod pretpostavkom da se masa fluida ne menja, važi  $m = \rho V = \text{const.}$

Modul stišljivosti gasne sredine zavisi od karaktera promene stanja gasa. Karakter promene između dva gasna stanja opisuje jednačine promene gasa. Najčešće se sreću *izotermna* promena kod koje važi  $T = \text{const.}$  odnosno promena pri konstantnoj temperaturi i *adijabatska* promena kod koje se promena vrši bez odvođenja i dovođenja toplote,  $Q = \text{const.}$  Adijabatska promena može da bude izentropska koja predstavlja reverzibilnu promenu (bez gubitaka) i politropsku koja je stvarna sa gubicima. Za oba slučaja adijabatska promene je karakterističan eksponent izentropije ili politropije  $\kappa$ . Eksponent izentropije:

- za jednoatomne gasove (helijum)  $\kappa = 1,66$
- za dvoatomne gasove (vazduh, azot, kiseonik)  $\kappa = 1,40$
- za tro i višeatomne gasove (metan)  $\kappa = 1,30$ .

Modul stišljivosti za izotermnu promenu je jednak vrednosti statičkog pritiska  $p$ , dok je za izentropsku promenu proizvodu  $\kappa p$ . Jednačina promene karakteristična za izotermnu promenu je data kroz jednačinu 3.6.

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{p_2}{\rho_2} = \text{const.} \rightarrow \frac{p}{\rho} = \text{const.} \quad (3.6.)$$

Za izentropsku promenu važi jednačina 3.7.

$$\frac{p_1}{\rho_1^\kappa} = \frac{p_2}{\rho_2^\kappa} = \text{const.} \rightarrow \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const.} \quad (3.7.)$$

Tabela 2 prikazuje vrednost koeficijenta stišljivosti za neke tečnosti i gasove.

Tabela 2 – Koeficijent stišljivosti za tečnosti i gasove [33]

Tečnost	$s$ [GPa <sup>-1</sup> ]	Tečnost	$s$ [GPa <sup>-1</sup> ]
Etar	1,948	Ulje	(0,484 – 0,637)
Alkohol	1,222	Voda	(0,419 – 0,479)
Benzin (benzol)	0,966	Morska voda	(0,50 – 0,51)
Ugljeniktetrahlorid	0,907	Glicerin	0,230
Nafta	0,705	Živa	0,038

## Brzina zvuka

Zvuk predstavlja slabe elastične poremećaje koji prilikom kretanja kroz homogenu sredinu poseduju brzinu kretanja. Brzina koju čestice poseduju tokom prolaska kroz homogeno okruženje nazivamo *brzina zvuka*  $c$  i određuje se preko jednačine 3.8., gde su  $dp$  i  $d\rho$  elementarne promene pritiska i gustine sredine kroz koju se prenose elastični poremećaji, odnosno zvučni talas.

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \text{ [m/s]} \quad (3.8.)$$

Brzina rasprostiranja zvučnog talasa kroz tečna i čvrsta tela se izražava preko modula stišljivosti  $\varepsilon$  [Pa] i preko modula elastičnosti  $E$  [N/m<sup>2</sup>]. Proširenjem jednačine 3.8. dobijamo izraze za brzinu zvuka za tečnost, jednačina 3.9. i za čvrsta tela, jednačina 3.10.

$$c^2 = \frac{\varepsilon}{\rho} \quad (3.9.)$$

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (3.10.)$$

Rasprostiranje zvučnih talasa kroz gasove zavisi od karaktera promene koju izaziva zvuk. Praćeni su nizom kompresija i ekspanzija sa izentropskim i izotermkim promenama. Za izentropsku promenu brzina zvuka dobija oblik kao u jednačini 3.11., dok je pri izotermskoj promeni kao u jednačini 3.12.

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p}{\rho} = \kappa RT \quad (3.11.)$$

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{p}{\rho} = RT \quad (3.12.)$$

Brzina zvuk za određene sredine:

- vazduh na 15 °C je 342 m/s
- voda na 15 °C je 1445 m/s
- čelik na 15 °C je 4120 m/s
- vodena para oko 500 m/s.

## Viskoznost

Viskoznost predstavlja prirodno stanje fluida zbog kojeg se u dodirnoj površini dva fluidna sloja proizvodi napon smicanja. Izraz za napon smicanja u dodirnim slojevima za jednoliko ravansko strujanje prema Njutnovom zakonu je dat u jednačini 3.13., gde  $\tau$  predstavlja tangencijalni napon [Pa],  $\eta$  dinamička viskoznost [Pa · s],  $\frac{dv}{dy}$  [ $\frac{m/s}{m}$ ] promena brzine fluida u pravcu normalnom na strujanje.

$$\tau = \eta \frac{dv}{dy} \quad (3.13.)$$

Zakoničnost iz jednačine 3.13. važi isključivo za slučaj laminarnog strujanja njutnovskog fluida kod kojeg je tangencijalni napon srazmeran gradijentu intenziteta brzine. Količnik  $\frac{dv}{dy}$  se često naziva gradijent brzine. Deljenjem dinamičke viskoznosti sa gustinom dobija se kinematska viskoznost  $\nu$ , data jednačinom 3.14.

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \left[ \frac{m^2}{s} \right] \quad (3.14.)$$

Eksperimentalno se viskoznost određuje viskozitetom. Tangencijalni naponi nisu primetni u mirnom fluidu i iz tog razloga svi fluidi u tom stanju su neviskozni. Nosioći viskoznih svojstava kod tečnosti su međimolekulske sile, dok je kod gasova intenzitet sudara između molekula. Iz tog razloga viskoznost kod tečnosti opada, a gasova raste sa porastom temperature [33].

### 3.1.6. Jednačine kontinuiteta

Analiza toka fluidne struje se vrši upotrebom jednačina kontinuiteta u koje se ubrajaju zakon održanja mase, zakon održanja kretanja i zakon održanja energije. U nastavku rada je dato objašnjenje za svaku od prethodno pomenutih jednačina kontinuiteta.

#### Zakon održanja mase

Kako bi se objasnio prvi slučaj jednačine kontinuiteta u slučaju održanja mase, neophodno je osvrnuti se na osnovni maseni zakon koji govori da će masa nekog zatvorenog sistema ostati konstantna, odnosno neće se menjati sa vremenom. Ta tvrdnja se može zapisati jednačinom 3.15.

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad (3.15.)$$

Prethodno pomenuta tvrdnja o konstantnosti mase se može primeniti i na bilo koji hemijski proces u zatvorenom sistemu, reaktivna masa mora biti jednaka masi produkata. Ovaj zakon je glavna ideja i za prvi zakon termodinamike.

Kako bi se potvrdile prethodne tvrdnje, usvojena je elementarna zapremina  $\Delta V$  koja se sastoji od zapreminskih elemenata u sva tri koordinatna pravca  $\Delta x \Delta y \Delta z$ . Ako se usvoji da je u pitanju slučaj stacionarnog, trodimenzionalnog strujanja, komponente brzine fluida su date jednačinama 3.16.

$$\begin{aligned} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.16.)$$

Maseni protok u pravcu svake od prethodno definisanih pravaca se dobija ako se izvrši prvi izvod mase elementarne zapremine, jednačina 3.17.

$$\begin{aligned} \dot{m}_x &= \rho \cdot u \\ \dot{m}_y &= \rho \cdot v \\ \dot{m}_z &= \rho \cdot w \end{aligned} \quad (3.17.)$$

Za slučaj stacionarnog strujanja i nestišljivog fluide (pri čemu je gustina  $\rho = const.$ ) jednačina održanja mase poprima modifikovani oblik, jednačina 3.18.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.18.)$$

### Zakon održanja kretanja

Jednačine koje karakterišu zakon održanja kretanja se vezuju za drugi Njutnov zakon koji važi pri uspostavljanju ravnoteže između spoljašnjih i unutrašnjih sila koje deluju na posmatrano telo. U slučaju strujnog polja, sile koje deluju na poslatranu elementarnu zapreminu se mogu podeliti na površinske i zapreminske. Kao i u prethodnom slučaju, elementarnu zapreminu  $\Delta V$  karakterišu komponente u sva tri koordinatna pravca  $\Delta x \Delta y \Delta z$ . Masa elementarne zapremine je data jednačinom 3.19.

$$m = \rho \cdot \Delta V = \rho \cdot \Delta x \Delta y \Delta z \quad (3.19.)$$

Zapreminske sile (npr. sila gravitacija) mogu delovati u sva tri koordinatna pravca što je u nastavku označeno indeksima uz veličinu  $F$ . Površinske sile deluju na određenu površinu fluida i u ovom slučaju su sile pritiska i viskozne sile. Naponi unutar fluida koji se javljaju mogu biti normalni na površinu u pravcu  $x$ ,  $y$  ili  $z$  i tangencijalni (smičući) u ravni površine i u pravcu  $x$ ,  $y$  i  $z$ , ali pravac takođe leži u ravni površine. Normalni i tangencijalni naponi su međusobno povezani brzinom fluida koju je moguće razložiti u tri koordinatna pravca  $u$ ,  $v$  i  $w$  preko pritiska i dinamičke viskoznoti fluida  $\eta$ . Za slučaj stacionarnog strujanja je moguće izvesti jednačine održanja kretanja za sva tri koordinatna pravca  $x$ ,  $y$  i  $z$ . U sledećim izrazima, sa leve strane se nalaze inercijalne sile, a sa desne zapreminske sile, sile pritiska i sile usled viskoznosti fluida, jednačine 3.20.

$$\begin{aligned} \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= F_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= F_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \rho \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= F_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.20.)$$

U slučaju kada je fluid nestišljiv, ove nelinearne diferencijalne jednačine drugog reda se nazivaju Navije-Stoksove jednačine, o kojima će biti više reči u narednim poglavljima rada. Jednačine kontinuiteta predstavljaju osnovu za rešavanje nepoznatih članova Navije-Stoksovih jednačina, kao što su pritisak i brzina u  $x$ ,  $y$  i  $z$  pravcu.

### Zakon održanja energije

Prema bilansu energije iz prvog zakona termodinamike za elementarnu zapreminu, temperaturno polje u fluidnoj struji mora da bude u skladu sa energijskom jednačinom. Ako se pretpostavi da nema uticaja zračenja niti dodatnog generisanja toplote u elementarnoj zapremini fluida, suma toplotnih protoka koji su ušli provođenjem i energija dovedena u elementarnu zapreminu u jedinici vremena, dejstvoj rada spoljašnjih sila, jednako je povećanju akumulirane energije u konačnoj zapremini u jedinici vremena. Dva bitna činioca za dalji tok razmatranja su specifična toplota fluida pri izobarnim okruženju  $C_p$  i koeficijent provodljivosti toplote  $\lambda$ . Za nestišljiv fluid u kojem nema izvora ili ponora toplote, dobija se energijska jednačina 3.21., gde je  $\phi$  funkcija viskozne disipacije i računa se prema jednačini 3.22.

$$\rho C_p \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \phi \quad (3.21.)$$

$$\phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \quad (3.22.)$$

U slučaju da su brzine strujanja fluida veoma male, član viskozne disipacije se može zanemariti. Prethodne dve jednačine se odnose na slučaj Dekartovog pravouglom koordinatnog sistema i to u situaciji koja je specifična za Ojlerov pristup, koordinatni sistem miruje u prostoru u toku vremena, dok se fluidna struja kreće [34].

### 3.1.7. Navije – Stoksove jednačine

Navije-Stoksove jednačine su dobile naziv po slavnim naučnicima *Claude-Louise Navieru* i *Georgeu Gabrielu Stokesu*. Ove jednačine se vezuju za kretanje viskoznih, nestišljivih fluida a dobijaju se primenom Drugog Njutnovog zakona za kretanje fluida. Navije-Stoksove jednačine imaju veoma širok spektar upotrebe, a zbog same kompleksnosti, matematičari još nisu uspjeli da dokažu neke od njenih primena vezanih pre svega za rešenje problema u tri dimenzije. Navije-Stoksove jednačine u najvećem broju slučajeva predstavljaju nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine.

Kako bi se što detaljnije pristupilo objašnjenju i primeni Navije-Stoksovih jednačina, izvršena je analiza sila i napona koji se nalaze i deluju na elementarnu zapreminu unutar fluidne struje.

Projekcije unutrašnje sile na koordinatnim osama izražene preko projekcija brzine, jednačina 3.23. za  $x$  osu.

$$\begin{aligned} X_u &= -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\eta \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{v} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} + \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{3}\eta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (3.23.)$$

Primenom vektorskog oblika na prethodnu jednačinu 3.23. dobija se novi oblik izraza 3.24. u kome su objedinjeni izrazi sa sve tri koordinatne ose.

$$\begin{aligned} X_u &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x + \frac{1}{3}\eta \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{v} \\ Y_u &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \Delta v_y + \frac{1}{3}\eta \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{v} \\ Z_u &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v_z + \frac{1}{3}\eta \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{v} \end{aligned} \quad (3.24.)$$

Izraz za unutrašnju silu (po jedinici zapremine) u vektorskom obliku glasi kao u jednačini 3.25.

$$\vec{F}_u = -\operatorname{grad} p + \eta \Delta \vec{v} + \frac{\eta}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} \quad (3.25.)$$

Sa  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  je označena kinematska viskoznost. Dodavanjem člana  $\nu \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}$  koji je karakterističan za jednačinu kretanja viskoznog fluida Ojlerovoj jednačini, dobija se jednačina za kretanje viskoznog fluida. Oblik ove jednačine je dat jednačinom 3.26. i predstavlja jedan od oblika Navije-Stoksove jednačine.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} \quad (3.26.)$$

Ukoliko je fluid nestišljiv, jednačina  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  i jednačina 3.26. dobija uprošćeni oblik koji je dat jednačinom 3.27.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v} \quad (3.27.)$$

U skalarnom obliku jednačina 3.27. dobija oblik karakterističan za svaku od koordinatnih osa, prikazano u jednačinama 3.28.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) \\ \frac{d\vec{v}}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.28.)$$

Vektorska jednačina 3.26. zajedno sa 3.27. jednačinom kontinuiteta i karakterističnom jednačinom predstavlja sistem diferencijalnih jednačina koje služe za određivanje  $p, \rho$  i  $\vec{v}$  i koje uz pomoć početnih i graničnih uslova u potpunosti mogu definisati kretanje viskozno fluida.

Kao što je već naglašeno na početku poglavlja, primena Navije-Stoksovih jednačina je veoma raznolika. Zbog svoje kompleksnosti, njeno rešavanje je bilo gotovo nemoguće do pojave kompjuterskih tehnologija. Na prethodnom primeru primene jednog tipa jednačine za elementarnu zapreminu unutar fluidne struje se mogla uvideti složenost materije. Tema ovog rada predstavlja uticaj aerodinamike oblika karoserije modela na aerodinamičke parametre: koeficijente i sile otpora vazduha unutar vazdušnog tunela. Primena Navije-Stoksovih jednačina na ovako velikom mernom polju predstavlja veoma složen postupak kako postavljanja, tako i rešavanja problema uticaja vazdušne struje na pojedine delove modela. Još jedna otežavajuća okolnost koja se u mogućnosti primene je uticaj turbulentnog, vrtložnog strujanja unutar vazdušnog tunela. Navije-Stoksove jednačine su u primeni za laminarni tip strujanja, dok se za rešavanje problema vezanih za turbulentno strujanje uvode mnoge pretpostavke u vidu usvojenih koeficijenata. Tako da se tačnost postavlja kao diskutabilna. CFD softveri u svojoj bazi podataka poseduju prethodno usvojene „šablone“ za veliki broj mogućih situacija koje se dotiču problema iz Navije-Stoksovih jednačina. Najveći deo pretpostavki je dobijen eksperimentalnim putem i usvojen empirijski. U sadašnje vreme, bez savremenih kompjuterskih CFD softvera, primena Navije-Stoksovih jednačina se svodi na baznu upotrebu rešavanja primera za pojedine tipove laminarnog strujanja [34].

### 3.1.8. Rejnoldsov broj

Pri analizi fluidnog protoka, veliki uticaj imaju pritisak, brzina, gustina, viskoznost, njihova međusobna interakcija i variranje. Dimenzije, oblik i sredina u kojoj se odvija strujanje fluida su veoma bitni za njegovo ponašanje. Rejnoldsov broj uzima u obzir zavisnost izdvojenog uzorka protoka od brzine, gustine, viskoznosti i dužine na kojoj se protok odvija. Predstavlja bezdimenzionu konstantu koja pruža informacije o aerodinamičkom protoku i definiše se odnosom inercije i viskoznosti unutar fluidnog protoka. Opšti karakter fluida u kretanju u kontaktu sa čvrstom površinom zavisi od relacije između fizičkog kontakta fluida i proizvoda linearne dimenzije prostora koji je zauzet fluidom i brzinom koju poseduje. Jednačina 3.29. predstavlja izraz za određivanje vrednosti Rejnoldsovog broja.

$$Re = \frac{\rho V_{\infty} l}{\mu} \quad (3.29.)$$

Sa aspekta aerodinamike koja se odnosi na vozila,  $V_{\infty}$  predstavlja brzinu kretanja vozila,  $\rho$  je gustina vazduha,  $l$  je karakteristična dužina na kojoj se vrši merenje i  $\mu$  je dinamička viskoznost fluida. Rejnoldsov broj može biti definisan odnosom inercije i viskoznih sila za



dati fluid. Iz toga sledi da je Reynoldsov broj veoma velik kod protoka oko vozila jer su inercijalne sile veoma dominantne nad viskoznom. Ukoliko je slučaj strujanja kroz visoku viskoznu sredinu (ulje), vrednost Reynoldsovog broja će biti mala. Vrednost dobijenog Reynoldsovog broja je ključna za određivanje tipa strujanja fluida. Kritična vrednost Reynoldsovog broja u kojoj dolazi do prelaska iz laminarnog u turbulentno strujanje se dešava oko  $Re=5 \times 10^4$ . Potpuno turbulentno strujanje u vazdušnoj sredini je karakteristično za vrednosti Reynoldsovog broja preko  $10^5$ . Za vozilo uobičajene dužine od 5 metara, karakteristične za manje dostavno vozilo, koje se kreće brzinom od 26 m/s (oko 94 km/h), kroz standardnu atmosferu gustine  $1,225 \text{ kg/m}^3$  i dinamičke viskoznosti vazduha od  $1,85 \times 10^{-5}$  Pas, poseduje Reynoldsov broj od  $9,02 \times 10^6$ , što u potpunosti predstavlja turbulentno strujanje [30].

### 3.1.9. Bernulijeva jednačina

Za analizu fluidnog strujanja, Bernulijeva jednačina predstavlja veoma bitan alat. Njen značaj se ogleda u sadržaju koji predstavlja bilans pojedinih vrsta fluidne energije. Često se koristi direktna upotreba Bernulijeve jednačine za rešavanje problema, ali u nekim situacijama se koristi zajedno sa jednačinama kontinuiteta. Strogo govoreći, Bernulijeva jednačina se koristi za jednu fluidnu strujnicu, ali pri ustaljenim protocima se uvode pojedina usvajanja. Opšti oblik Bernulijeve jednačine bez gubitaka je dat kroz jednačinu 3.30.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.} \quad [J/kg] \quad (3.30.)$$

Svaki član jednačine sa leve strane predstavlja energiju koju u sebi sadrži jediničnu masu fluidne struje. Član jednačine  $gz$  predstavlja ubrzanje Zemljine teže, usmereno naviše u smeru  $z$  ose. Ovaj člana sa aspekta energije se naziva član položajne energije. Član  $\frac{v^2}{2}$  je kinetička energija, a  $\frac{p}{\rho}$  energiju pritiska. Konstantni član sa desne strane govori da je zbir svih pomenutih energija za jednu strujnicu jednak. Delimičnim ograničenjem člana kinetičke energije, moguće je sa jedne strujnice preći na strujno vlakno, strujni cev, zamišljene ili stvarne protočne preseke, između kojih postoji fluidni kontinuitet. Drugi veoma česti vid upotrebe Bernulijeve jednačine je dat u jednačini 3.31.

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + z = \text{const.} \quad [J/kg] [mST] \quad (3.31.)$$

Sa  $mST$  su označeni metri stuba tečnosti, najčešće vode. U ovom slučaju pojedini članovi jednačine, odnosno energije su date u metrima stuba tečnosti koja struju kroz analizirane fluidne preseke. Pogodna je za kvantitativno i dijagramsko poređenje svih vrsta energija preko odgovarajućih visina stubova protočne tečnosti. Redom članovi u jednačini 3.31. predstavljaju brzinsku visinu, pritisnu visinu i geodezijsku visinu. Snaga analizirane fluidne struje se dobija množenjem svakog člana jednačine sa masenim protokom  $\rho Q$ , što je prikazano u jednačini 3.32.

$$P = \frac{1}{2} \rho Q v^2 + pQ + z \rho g Q = \text{const.} [W] \quad (3.32.)$$

Prvi član jednačine predstavlja snagu fluidne struje pri atmosferskom pritisku. Druga dva člana se odnose na snagu kada postoji razlika pritisaka u fluidnoj struji i okolini u odnosu na koju se snaga meri.

Osnovni oblik Bernulijeve jednačine se odnosi na strujanje idealnog fluida bez gubitaka, dok prošireni oblik daje sliku energetske promene realnog viskoznog fluida sa gubicima. Gubici

pri strujanju stvarnog fluida su prikazani uz pomoć eksperimentalnih podataka u procentima kinetičke energije glavne fluidne struje [33].

### 3.2. Turbulentno strujanje

U mnogim inženjerskim aplikacijama je prisutno turbulentno strujanje, koje karakterišu neke od sledećih svojstava. Turbulentno strujanje je nestacionalno strujanje kod koga se grafik brzine u funkciji od vremena pojavljuje u slučajnim tačkama u fluidnom strujanju. U poslednje vreme je izbačena reč „haotično strujanje“ koje je bilo dosta dugo karakterisala turbulentno strujanje. Ovaj tip strujanje se odvija u tri dimenzije. Vremenski osrednjena brzina može biti u funkciji samo dve koordinate, međutim trenutna polja istraživanja naglo ubacuju u upotrebu sve tri dimenzije. Turbulentno strujanje je praćeno pojavom vrtloženja, koje je jedan od principijalnih mehanizama preko kojih se određuje intenzitet turbulencije. Turbulentno strujanje doprinosi intenzivnom mešanju čestica unutar fluidne struje. Mešanje predstavlja proces u kome čestice fluida različite koncentracije i sastava dolaze u međusobni kontakt. Stvarno mešanje se ostvaruje preko difuzije, koja se često naziva i turbulentna difuzija. Prilikom turbulentnog strujanja se smanjuje gradijent brzine kao posledica viskoznosti, što dovodi do smanjenja kinetičke energije fluidne struje. Na osnovu toga se zaključuje da je turbulentno strujanje disipativni proces pri kome je gubitak energije ireverzibilano pretvoren u unutrašnju energiju fluidne struje. Svi procesi i svojstva turbulentnog strujanja su važna i mogu biti veoma korisna, u zavisnosti od namene u kojoj se upotrebljavaju. Intenzivno mešanje može biti veoma korisno ukoliko se primenjuju u procesima hemijskog mešanja ili razmene toplote. Sa druge strane, intenzivno mešanje dovodi do povećanja unutrašnjeg trenja među molekulima fluidne struje što doprinosi povećanju otpora u pumpi koja vrši potiskivanje fluidne struje ili povećanju otpora automobilu u pokretu. Inženjeri moraju biti u stanju da sagledaju sve prednosti ovih procesa, kako bi ih mogli primeniti u aplikacijama na pravilan način.

U prošlosti, jedini način izučavanja turbulentnog strujanja se svodio na eksperimentalno. Pojedini parametri kao što su prenos toplote i vremenski osrednjeni otpori su relativno jednostavni za merenje, ali problem predstavljaju savremene inženjerske aplikacije koje imaju mnogo detalja i zahtevaju veliku tačnost i preciznost. Ta usložnjavanja tehnologije prevalizale klasična merenja pojedinih parametara. Optimizacija veličine i oblika modela su neophodni za razumevanje neželjenih efekata. Optimizacija za sobom povlači veliki broj merenja i eksperimenata kako bi se došlo do validnog modela. To veoma poskupljuje i vremenski produžuje način ispitivanja. Pojedina merenja, kao što su fluktuacije pritiska u fluidnoj struji je moguće izvršiti u realnom vremenu. Složenija merenja koja zahtevaju viši nivo preciznosti iziskuju složenije procese analize pa se pristupa numeričkim metodama. Pre nastavka diskusije vezane za numeričke metode turbulentnog strujanja prikazana je klasifikacija analiziranih pristupa turbulentnog strujanja.

- Prvi pristup predstavljaju korelacije kao što su one koje daju frikcioni element u Reynoldsovom broju ili Nuseltovom broju vezanom za prenos toplote. Ovaj pristup je veoma koristan, ali i ograničen na jednostavne tipove strujanja, koji su definisani samo preko nekoliko parametara. Za rešavanje problema preko ovog pristupa nije neophodna upotreba savremenih računara, iz razloga što sam proces nije veoma složen.

- Drugi pristup predstavlja integralne jednačine koje mogu biti izvedene iz jednačina kretanja preko integracije u jednoj ili više koordinata. Preko ove metode se problem svodi na jednu ili više običnih diferencijalnih jednačina koju se jednostavno rešavaju.

- Treći pristup se zasniva na osrednjavanju jednačina kretanja u funkciji od vremena preko koordinata koje upućuju na stacionarno stujanje. Ovaj pristup se još naziva i zatvaranje u jednoj tački (eng. *one-point closure*) i vodi ka rešavanju parcijalnih diferencijalnih jednačina poznatih pod nazivom (eng. *Reynolds-averaged Navier-Stokes, RANS*). Neki modeli turbulencije koji se često koriste danas su povezani sa numeričkim metodama rešavanja jednačina.

- Četvrti pristup je zatvaranje u dve tačke (eng. *two-points closure*) i koristi jednačine komponenata korelacije brzine u dve prostorne tačke ili češće Furijevu transformaciju tih jednačina. Ovakav tip pristupa se retko koristi osim u situacijama homogenog tipa turbulentnog strujanja.

- Peti pristup je simulacija velikih vrtloga (eng. *Large eddy simulation - LES*) preko kojeg je moguće analizirati kretanje unutar velikih turbulentnih protoka, aproksimacijom i modelovanjem uprošćenih manjih sistema. Ovaj pristup predstavlja kompromisno rešenje između pristupa zatvaranja u jednoj tački i direktne numeričke simulacije.

- Šesti, poslenji pristup predstavlja direktna numerička simulacija kod koje se Navier-Stoksove jednačine rešavaju za sva kretanja fluida u turbulentnoj struji. Predstavlja najkompleksniji metod analize i u velikoj meri zahteva složenu računarsku simulaciju.

Sve metode objašnjene u prethodnoj podeli se svode na rešavanje tipskih jednačina za masu, impuls, energiju, ili neke hemijske specifikacije. Glavna teškoća rešavanja jednačina vezanih za turbulentno stujanje predstavlja postojanje velikog broja promenljivih koje nisu prisutne kod laminarnog strujanja. To u mnogome poskupljuje i produžuje rešavanje problema vezanih za turbulentno strujanje [34].

### 3.2.1. Direktna numerička simulacija (DNS)

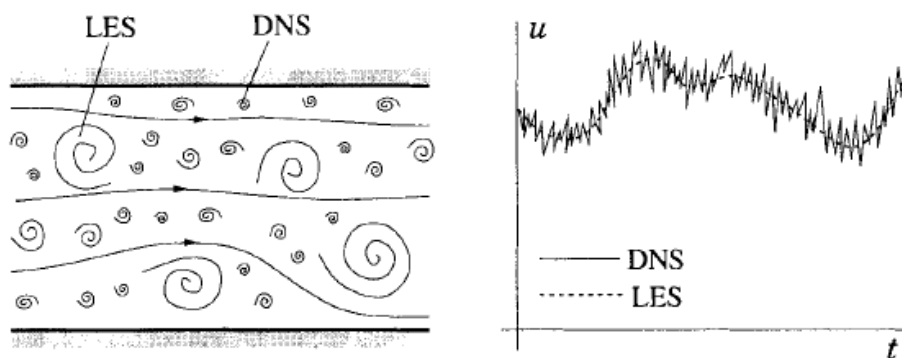
Rešavanje Navier-Stoksovih jednačina bez osrednjavanja i aproksimacija predstavlja veoma složen proces. Numerička diskretizacija podiže rešavanje ovih jednačina na viši nivo, pod uslovom da su dobijene greške u prihvatljivim i kontrolisanim granicama. Ovakvim pristupom su uspešno rešene jednačine za sva kretanja unutar fluidne struje. Izračunato strujno polje je ekvivalentno jednostavnoj realizaciji strujanja ili kratkotrajnom eksperimentu. Kako bi se obezbedilo da svi bitni delovi fluidne struje budu pravilno analizirani, oblasti na kojima se vrši računanje moraju biti u najmanju ruku iste veličine kao fizička oblast, ili veličine najvećih vrtloga u strujanju. Validna simulacija mora uhvatiti i zabeležiti sva rasipanja kinetičke energije tokom procesa. Ovo se događa pri najmanjim česticama na kojima deluje viskoznost. Iz tog razloga veličina mreže ne sme biti veća od veličine najmanjih viskoznih čestica. Kod homogenog izotropnog turbulentnog strujanja, koji se smatra najjednostavnijim tipom turbulentnog strujanja, ne postoji razlog upotrebe bilo kod drugog tipa mreže osim jednolične. U tom slučaju, na osnovu datih argumenata, broj tačaka u mreži u svakom pravcu mora biti najmanje u odnosu  $L/\eta$ , gde je sa  $L$  označena integralna veličina, a sa  $\eta$  dinamička viskoznost fluida. Ovaj odnos je proporcijalan  $Re_L^{3/4}$ , gde je  $Re_L$  Reynoldsov broj baziran na rezultujućoj fluktuaciji brzine i integralnoj veličini. Vrednost tog parametra je obično oko 0,01 puta makroskopski Reynoldsov broj i inženjeri ga često koriste za opisivanje protoka. Dobijeni broj tačaka u mreži mora biti raspoređen u sva tri koordinatna pravca. Korak uzorkovanja simulacije je povezan sa veličinom mreže, pa se iz tog razloga trajanje simulacije određuje sa  $Re_L^3$ . Veliki broj tačaka u mreži usložnjava proces obrade podataka, pa je neophodna veoma jaka računarska oprema, koja je do skoro predstavljala ozbiljan problem pri upotrebi direktne numeričke simulacije. To je razlog zbog

koga se simulacija ograničavala na analizu strujanja sa relativno niskim Rejnoldsovim brojem i jednostavnim ispitivanim objektima. Današnji računari su sposobni za rešavanje problema pomoću direktne numeričke simulacije za homogene turbulentne protoke čija vrednost Rejnoldsovog broja ne prelazi pet stotina. Moguće je izvršiti usvajanje Rejnoldsovog broja za stvarni ispitivani model na osnovu Rejnoldsovog broj iz simulacije putem ekstrapulacije.

Direktna numerička simulacija sadrži velik broj korisnih informacija o ispitivanom turbulentnom strujanju. To svakako predstavlja veoma korisnu bazu dobijenih rezultata, ali ponekad predstavljaju poteškoću za inženjere da se snađu u njima. Takođe zbog svoje složenosti, ova metoda je često previše skupa, ukoliko se ne radi baš o rešavanju problema gde se isključuje upotreba neke druge, jednostavnije metode. Zahvaljujući ovoj metodi, dobija se veliki broj podataka o brzinama, pritiscima i bilo kojim drugim parametrima od interesa, uzorkovanim sa velikog broja tačaka u mreži. Dobijeni rezultati su ekvivalentni eksperimentalnim podacima i kao takvi mogu biti upotrebljeni u procesu statističke informacija, ili kreiranja vizuelizacije numeričke simulacije. Uz pomoć direktne numeričke simulacije je unapređeno razumevanje procesa unutar turbulentnog strujanja, kao što su prenos energije i njeno rasipanje unutar turbulentnog strujanja. Takođe izvršene su simulacije dokazivanja postojanja aerodinamičke buke, kao i kontrola i smanjenje otpora vazduha na površinama čvrstih tela [34].

### 3.2.2. Simulacija velikih vrtloga (LES)

Turbulentno strujanje se sastoji od velikog broja vrtloga koji se razlikuju po obliku i dužini trajanja. Na slici 3.6 (levo) je dat šematski prikaz turbulentne struje i veličina karakterističnih vrtloga. Na istoj slici sa desne strane je prikazan vremenski zapis simulacije za karakterističnu brzinu jedne tačke unutar turbulentne struje, analizirane preko DNS i LES metode.



Slika 3.6 - Šematski prikaz turbulentnog strujanja (levo), vremenski zapis simulacije (desno) [34]

Kretanje čestica većih razmera generalno je dosta energičnije u odnosu na manje čestice. Ista povezanost se vezuje i za veličinu vrtloga unutar fluidne struje. Veći vrtlozi poseduju veću unutrašnju snagu koja im pomeže da budu mnogo efikasniji u kretanju. Manji vrtlozi imaju manju snagu koja je dovoljna samo za mala pomeranja unutar fluidne struje. LES uzima u obzir analizu i razmatranja vezana za pojave kod velikih vrtloga koji su veoma bitni za fluidnu struju. LES su trodimenzionalne simulacije, zavisne od vremena. Jeftinije su od DNS, iziskuju kraće vreme trajanja simulacije i slabije računare za analizu istih turbulentnih strujanja. LES simulacijom je moguće analizirati veoma složene modele, kao i područja većih Rejnoldsovih brojeva zahvaljujući usmeravanju i ograničavanju na oblasti od interesa. Moguće je podesiti preciznost simulacije što može dosta da utiče na kvalitet dobijenih

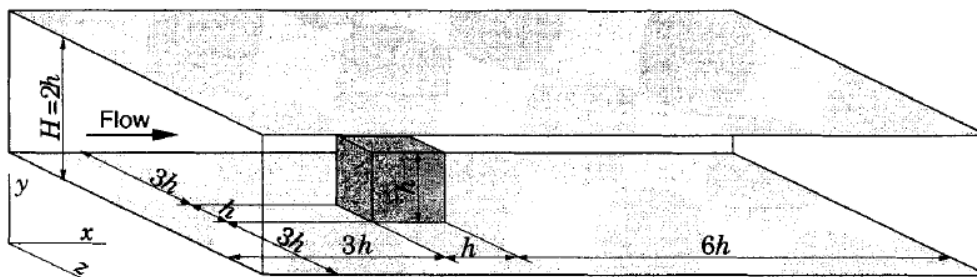
rezultata i vreme trajanje simulacije. Simulacije se tako podesi da se iz kompletne fluidne struje uzorkuju samo veći vrtlozi. Po potrebi je moguće analizirati protok u samo jednoj dimenziji, ako postoji potreba za tim tipom pojednostavljenja. Filtriran, odnosno pojednostavljeni izraz za brzinu je prikazan u jednačini 3.33.

$$\bar{u}_i(x) = \int G(x, x') u_i(x') dx' \quad (3.33.)$$

U jednačiti 3.33.  $G(x, x')$  je lokalna funkcija i predstavlja propustljivost primenjenog filtera. Ovaj filter uključuje kutijasti filter koji radi na principu lokalnog osrednjavanja vrednosti i filter koji odsece i eliminiše sve Furijeve koeficijente koji pripadaju lokalnom uzorku. Sa filterom se usvaja referentna dužina, odnosno veličina uzorkovanih elemenata. Ukoliko je veličina elemenata manja od referentne veličine filtera, takvi elementi neće biti analizirani u simulaciji. Ukoliko se izvrši filtriranje Navier-Stoksovih jednačina za protok konstantne gustine, dobijaju se jednačine veoma slične dobijenim putem RANS postupka [34].

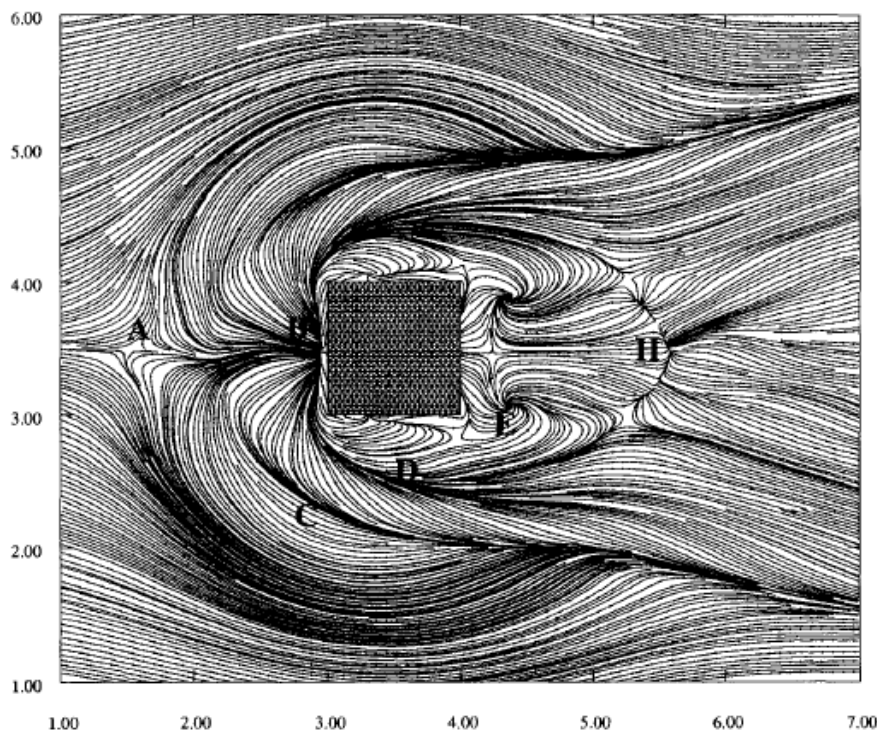
### 3.2.3. Primer: Strujanje oko kocke

U nastavku je dat primer simulacije strujanja oko kocke koja je postavljena na pod prizmatičnog vazdušnog tunela. Geometrija kocke i tunela su dati na slici 3.7. Rejnoldsov broj je izračunat na osnovu najveće brzine unutar fluidne struje pri opstrujavanju oko kocke visine 3200 mm. Analiza modela vazdušnog tunela je izvršena u posebnoj simulaciji. Zidovi tunela su predstavljeni kao granične površine bez klizanja.



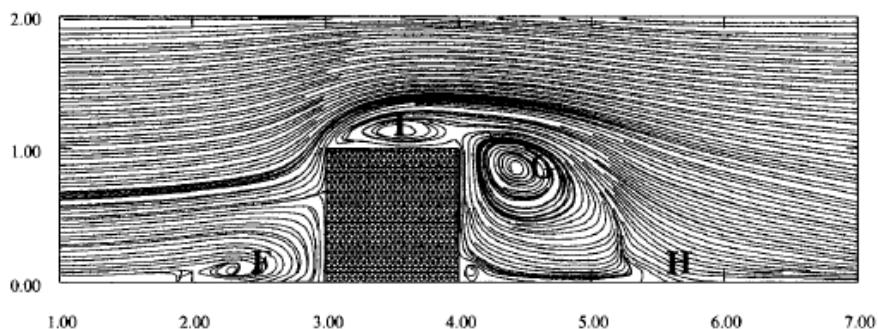
Slika 3.7 – Geometrija kocke i vazdušnog tunela [34]

Za simulaciju je korišten LES metod simulacije čija je referentna veličina zapremine uzorkovanja dimenzija 240x128x128 mm. Analiza pritisaka je vršena rešavanjem *Poisson*-ove jednačine za različitu veličinu mreže. Na slici 3.8 je dat prikaz vazdušnih strujnica unutar vazdušnog tunela koji nailaze na kocku kao prepreku. Ova slika prikazuje pogled od gore, u ravni koja se nazali na polovini visine kocke u odnosu na pod. Nailazeća vazдушna struja je u potpunosti raspoređena i homogena duž celokupnog preseka vazdušnog tunela. Na slici su označene zone od interesa koje su objašnjene u nastavku. Zona označena sa A je tačka u kojoj nailazeća vazдушna struja počinje da njenja pravac od potpuno pravolinijskog. Strujnice koje direktno nailaze na čeonu stranu kocke bivaju odbijene i za kratno vreme se kreću u suprotnom smeru u odnosu na glavnu vazдушnu struju, što se karakteristično za oblast B na slici 3.8. Ista zona odgovara mestu odvajanja strujnica koja počinu da obilaze oko kocke. Sa obe bočne strane kocke dolazi do grupisanja strujnica koje su označene sa C i D. Oblast D je karakteristična postojanjem tzv. galopirajućih strujnica koja imaju izraženu veću brzinu strujanja. Iz kocke je moguće pronaći dve zone kovitlanja strujnica, označene sa E. Na kraju je sa H označena zona u kojoj dolazi do stagnacije fluidne struje i vraćanja na prvobitni pravolinijski tok.



Slika 3.8 – Strujno polje u blizini poda, pogled odozgo [34]

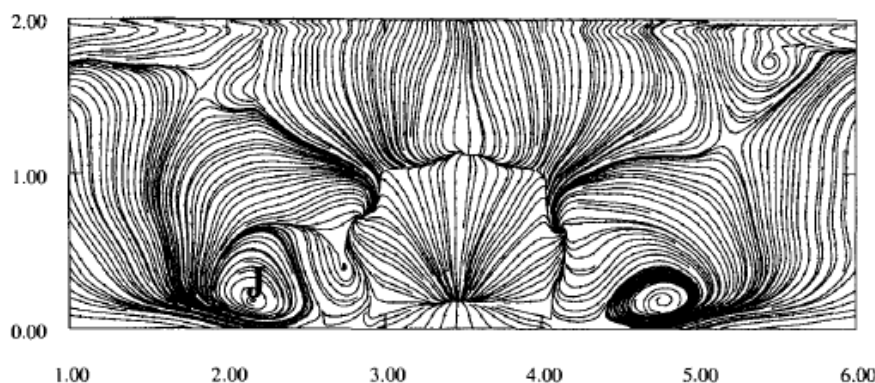
Slika 3.9 prikazuje strujno polje unutar modela vazdušnog tunela u pogledu sa strane. Na osnovu ove slike je moguće jasno uočiti zone odvajanja strujnica prilikom nailaska na kocku i formiranja vrtloga, označeno sa F. Ova zona predstavlja centar vrtloženja nailazećih strujnica koje bivaju odbijene od kontakta sa kockom. Zona prestrujavanja preko kocke, označena sa I, je karakteristična formiranjem vrtloga od stane povećanja brzine strujnica nailaskom na prepreku. Zona G predstavlja središte vrtloga. Ovi vrtlozi su formirani zbog nemogućnosti strujnica da naglo promene pravac nakon prelaska preko kocke. Zbog toga se javlja zona niskog pritiska, neposredno iza kocke, što dovodi do stvaranja vrtloga u zoni G.



Slika 3.9 – Strujno polje, pogled sa strane [34]

Naredna slika 3.10 prikazuje strujno polje u oblasti nakon prelaska preko kocke, u ravni koja je paralelna sa zadnjom stranom kocke. Zona J označava oblasti formiranja glavnih vrtloga sa bočnih strana kocke. Treba naglasiti da trenutno strujno polje tokom simulacije izgleda dosta drugačije od vremenski osrednjenog polja, koja su prikazanja na prethodnim slikama. U trenutnim prikazima simulacije nije moguće uočiti glavne vrtloge kao u zoni J na slici 3.10 iz razloga što su oni tokom simulacije asimertični u odnosu na strane kocke. Na slici 3.8 je

prikazano gotovo simetrično stanje u odnosu na kocku. To govori da je vreme osrednjavanja bilo dovoljno dugo kako bi se proces ustalio.



Slika 3.10 – Strujno polje, pogled od nazad u zoni iza kocke [34]

Na osnovu prikazane simulacije se zaključuje da LES metod obezbeđuje dovoljnu količinu podataka od naznačenom strujanju. Takođe dobijeni podaci su bliski vrednostima dobijenim eksperimentalnim putem, što potvrđuje validnost prikazanih metada simulacije [34].

#### 3.2.4. RANS model

Inženjeri su vremenom izučavali kvantitativne osobine strujanja kao što su osrednjavanje sila koje deluju na neki objekat unutar fluidne struje, stepene mešanja između dve nadolazeće fluidne struje i kako jedna fluidna struja deluje na drugu pri mešanju. U situacijama kada ostale metode ne daju dovoljnu količinu podataka, ili su previše komplikovane za implementaciju, pristupa se metodi koju je pre gotovo jednog veka definisao Osborn Reynolds i naziva se Reynoldsova osrednjena metoda. Ova metoda primenjena na turbulentno strujanje podrazumeva osrednjavanje svih nestabilnosti u sistemu, odnosno sve nestabilnosti su smatrane kao deo turbulentnog strujanja. Osrednjavanje nelinearnosti Navier-Stoksovih jednačina prerasta u jednačine koje se mogu modelovati. Složenost turbulentnog strujanja, koja je objašnjena u prethodnim poglavljima, se predstavlja preko pojedinačnih Reynoldsovih osrednjenih modela i oni će predstavljati kompletno turbulentno strujanje.

#### RANS jednačine

U statistikama rešavanja stacionarnih protoka, svaka promena može biti zapisana preko sume vremenski osrednjenih vrednosti i njihovog variranja oko te vrednosti, jednačina 3.34 i 3.35.

$$\phi(x_i, t) = \bar{\phi}(x_i) + \phi'(x_i, t) \quad (3.34.)$$

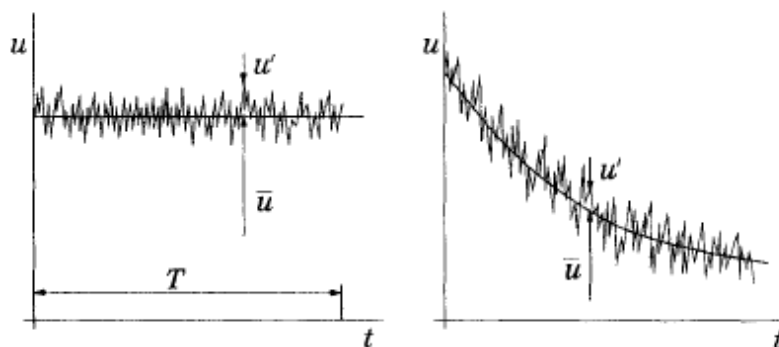
Gde je:

$$\bar{\phi}(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi(x_i, t) dt \quad (3.35.)$$

Sa  $t$  je označeno vreme, a sa  $T$  interval osrednjavanja. Interval osrednjavanja mora biti veći od standardnog variranja oko zadate vrednosti. Ukoliko je interval osrednjavanja dovoljno velik  $\bar{\phi}$  ne zavisi od vremena od koga je započeto osrednjavanje. U slučaju nestacionarnog protoka, vremensko osrednjavanje ne može biti primenjeno na ovakav način, već mora biti zamenjeno sa celokupnim osrednjavanjem, jednačina 3.36.

$$\bar{\phi}(x_i, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \phi(x_i, t) \quad (3.36.)$$

Sa  $N$  je označen broj članova koji učestvuju u urednjavanju i njihov broj mora biti dovoljno velik da eliminiše greške prilikom variranja vrednosti. Ovaj tip osrednjavanja vrednosti može biti primenjen na bilo koji tip strujanja. Na slici 3.11 je ilustrovano vremensko osrednjavanje vrednosti pri stacionarnom i nestacionarnom strujanju. Primenom Rejnoldsovog urednjavanja na Navier-Stoksove jednačine, dobija se RANS (*eng. Reynolds-averaged Navier-Stokes*) jednačine.



Slika 3.11 – Vremensko osrednjavanje za stacionarno (levo) i nestacionarno (desno) strujanje [34]

Ukoliko se usvoji da je  $\bar{\phi} = 0$  iz jednačine 3.35., osrednjavanje bilo kod linearnog elementa jednačine jednostavno daje identičan izraz za prosečnu količinu. Od kvadratnog elementa dobija se dva elementa kao proizvod osrednjavanja i nasumično biranih elemenata merenih za isti period vremena, jednačina 3.37.

$$\overline{u_i \phi} = \overline{(\bar{u}_i + u'_i) \phi} = \bar{u}_i \bar{\phi} + \overline{u'_i \phi} \quad (3.37.)$$

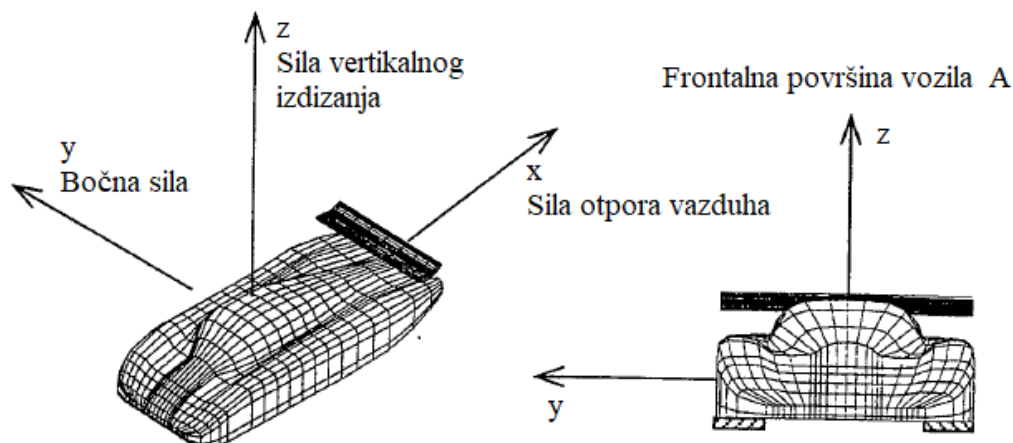
Moguće je izvesti jednačine za druge vidove osrednjavanja ali je neophodno uvođenje novih, nepoznatih aproksimacije koje su definisane složenim modelovanjem turbulentnih strujanja [34].

### 3.3. Aerodinamičke sile na vozilu

Automobil predstavlja složeni objekat koji se pri kretanje kreće kroz fluidnu struju. Na automobil kao celinu deluju sile koje pokušavaju da ga usporu, ubrzaju, izbace iz stacionarnog kretanje, kao i utiču na njegovu stabilnost i upravljivost. Sile koje žele da usporu ili zaustave automobil se ubrajaju u grupu sila otpora kretanja vozila. U nastavku rada, akcentat je stavljen na analizu sila na vozilu prouzrokovanih kretanjem vozila kroz fluidnu struju, odnosno aerodinamičke sile.

Postoje dve osnovne grupe aerodinamičkih sila koje deluju na vozilo. Prva grupa sila je direktno uzrokovana delovanjem pritiska na vozilo, koji deluje normalno na površinu vozila i čine ga sila uzgona ili vertikalnog izdizanja vozila (*eng. Lift force*) i deo sile otpora vazduha (*eng. Drag force*). Drugu grupu sila čine sile smicanja koje deluju paralelno na površini vozila i ubrajaju se takođe u silu otpora vazduha. Nastaju usled viskoznih osobina vazdušne struje kroz koju vozilo prolazi. Ukoliko se objedine prethodno pomenute sile i primene na vozilo može se definisati tri glavne sile i koeficijenti koji iz njih proizilaze. Na slici 3.12 su prikazane sile koje deluju na vozilo prema definisanom koordinatnom sistemu.





Slika 3.12 – Aerodinamičke sile na vozilu [28]

U nastavku su razmatrane sile otpora vazduha i vertikalnog izdizanja vozila. Bočna sila na vozilu je prouzrokovana prisustvom bočnog vetra.

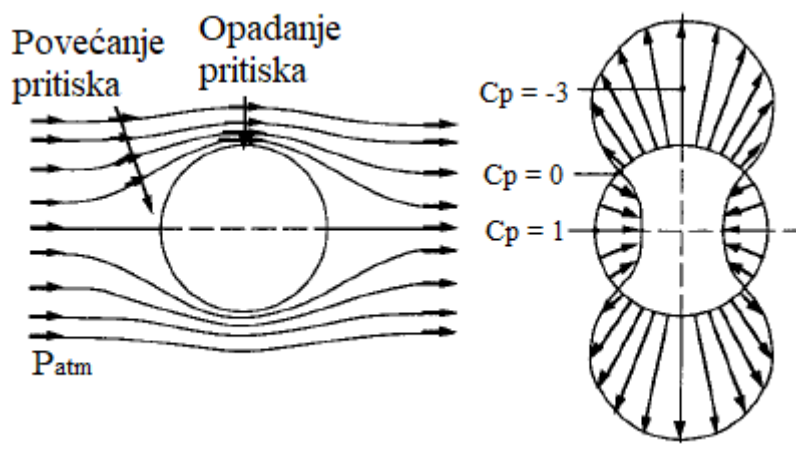
Sila otpora vazduha deluje u pravcu kretanja vozila, a usmerena je ka zadnjem delu vozila u pozitivnom pravcu x ose, kao što je prikazano na slici 3.12. Bočna sila deluje normalno na pravac kretanja vozila i ima pozitivnu vrednost u smeru y ose. Sila izdizanja vozila deluje u vertikalnom pravcu i ima pozitivnu vrednost u smeru z ose sa slike 3.12. Vrlo često se spominje i sila sabijanja vozila, koja je veoma bitna kod sportskih vozila i ima isti pravac delovanja kao sila izdizanja vozila, samo suprotan smer [28].

Ukupno strujanje oko vozilo prilikom kretanja kroz fluidnu struju prouzrokovano je uzajamnom vezom između brzine i pritiska. Taj odnos je opisan preko Bernulijeve jednačine, koja se primenjuje u oblasti nestišljivog protoka, što je veoma pogodno sa aspekta vozila. Ukupni pritisak je jednak zbiru statičkog i dinamičkog pritiska, jednačina 3.38.

$$p_{\text{statički}} + p_{\text{dinamički}} = p_{\text{ukupni}} \rightarrow p_s + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_u \quad (3.38.)$$

Gde je sa  $\rho$  označena gustina vazduha, a sa  $V$  brzina vazduha relativna na vozilo. Relacija iz jednačine 3.38. je izvedena iz Drugog Nutnovog zakona za tela koja se nalaze u „glatkoj“ fluidnoj struji. Pod pojmom „glatka“ fluidna struja se podrazumeva da okruženje u kome se frickioni uticaj fluidne struja na telo oko kojeg struji može biti zanemaren. Bernulijeva jednačina podrazumeva da je suma pritisaka iz jednačine 3.38. konstantna. Na vozilo kao objekat u fluidnoj struji deluje statički pritisak koji predstavlja atmosferski pritisak okoline i dinamički pritisak, koji je proizvod relativne brzine. Sve strujnice koje opstrujavaju oko vozila imaju istu relativnu brzinu, a prema jednačini 3.38. i istu vrednost dinamičkog pritiska. Ukupna fluidna struja koja nailazi na vozilo, mora biti podeljena na grupe strujnica iz razloga što je vozilo dosta kompleksan objekat. Na osnovu toga je moguće uočiti da deo fluidne struje odlazi ispod vozila, deo nastavlja da struje preko karoserije, dok deo struje koja se direktno sudara sa vozilo, biva zaustavljena. Na mesto gde je relativna brzina strujnica jednaka nuli, ukupan pritisak je jednak statičkom, odnosno atmosferskom. Strujnice koje nailaze na vozilo i bivaju usmerene da prestrujavaju preko poklopca motornog prostora (haube), najpre su usmerene ka gore zahvaljujući radijusu karoserije vozila. Na tim delovima karoserije gde su strujnice usmerene na gore, statičkom pritisku raste vrednost što prouzrokuje stvaranje sile koja skreće fluidnu struju. Iz uslova Bernulijeve jednačine, ukoliko je statički pritisak viši u nekoj oblasti, brzina strujanja mora biti niža. Suprotno tome, na mestima gde fluidna struja prestrujava preko ivica karoserije vozila, dolazi do opadanja vrednosti statičkog pritiska iz uslova skretanja fluidne struje, što prouzrokuje povećanje

relativne brzine fluidne struje. Ova pojava je prikazana na slici 3.13 na primeru opstrujavanja fluidne struje oko prepreke cilindrično poprečnog preseka.



Slika 3.13 – Gradijent pritiska i brzine fluidne struje prilikom prestrujavanja preko prepreke [35]

Prema prethodno pomenutom, Bernulijeva jednačina objašnjava kako pritisak i brzina moraju varirati u ukupnoj fluidnoj struji koja opstrujava oko vozila. Fluidna struja se jednostavno penje i prestrujava preko krova vozila, potom se spušta na zadnjem delu vozila, razmenjujući pritisak i brzinu, kao što je bio slučaj na prednjoj strani. U tom slučaju sile pritiska na zadnjoj strani vozila bivaju uravnotežene sa silama sa prednje strane, što onemogućuje stvaranje dodatnih otpora vazduha. Iz iskustva, postojanje otpora vazduha je veoma prisutno. Opor vazduha je uključen u deo trenja vazduha na površinama vozila i u deo koji zahvaljujući trenju obara pravac glavne fluidne struje na zadnjoj strani vozila. Ova pojava je u velikoj meri povezana sa postojanjem graničnog sloja oko karoserije vozila, što je objašnjeno u poglavlju 3.1.3.

### 3.1.1. Sila otpora vazduha $F_W$ i vertikalnog izdizanja vozila $F_L$

Kretanjem vozila po podlozi praćeno je pojavom otpora kretanja koji utiču na umanjenje performansi vozila, stoga moraju biti uzeti u obzir u svaki vid analize dinamike kretanja vozila. Osim prethodno pomenutog otpora vazduha, na vozilo u kretanju utiču otpor kotrljanja prouzrokovan kontaktom pneumatika sa podlogom, otpor usled savladavanja uspona i inercijalni otpori. Na otpor kotrljanja vozila utiče ukupna masa vozila, dok promena brzine kretanja utiče veoma malo preko promene vrednosti koeficijenta otpora kotrljanja. Ovaj otpor predstavlja vodeći otpor kretanja vozila pri malim brzinama kretanja vozila po horizontalnoj podlozi.

Povećanjem brzine kretanja vozila, dolazi do povećanja otpora vazduha. Sila otpora vazduha uz silu izdizanja vozila, predstavljaju glavne aerodinamičke sile. Njihove vrednosti skreću pažnju na validnost izabranog oblika pojedinih delova karoserije vozila. Sila otpora vazduha  $F_W$  se izračunava prema jednačini 3.39.

$$F_W = \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot c_W \cdot V^2 \quad (3.39.)$$

Deo izraza  $\frac{1}{2} \rho V^2$  predstavlja dinamički pritisak, prikazau u jednačini 3.38. Element  $A$  čini frontalnu (čeonu) površinu analiziranog elementa, upravnog na pravac kretanja fluidne struje, slika 3.12, a sa  $c_W$  je označen koeficijent otpora vazduha. Vrednost koeficijenta otpora


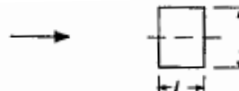
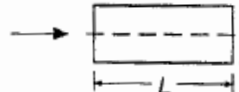
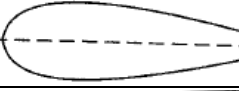
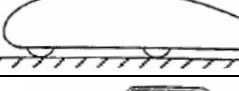
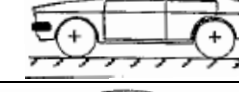
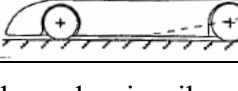
vazduha se izračunava eksperimentalno ili empirijski za jednostavnije geometrijske oblike. Ne postoji jasno definisan izraz za njegovo izračunavanje iz razloga uticaja niza faktora, najčešće prouzrokovanih oblikom posmatranog objekta.

Sila vertikalnog izdizanja vozila ili uzgona  $F_L$  je usmerena naviše i uz silu otpora vazduha veoma precizno otisuju uticaj i ponašanje analiziranog objekta unutar vazdušne struje. Izračunava se prema jednačini 3.40.

$$F_L = \frac{1}{2} \rho \cdot A \cdot c_L \cdot V^2 \quad (3.40.)$$

Izračunavanje se vrši na isti način kao i sila otpora vazduha uz upotrebu bezdimenzionog koeficijenta izdizanja vozila  $c_L$  koji se dobija na veoma sličan način kao i koeficijent otpora vazduha. Vrednost sile izdizanja vozila je veoma bitna, naročiti pri većim brzinama kretanja vozila jer na osnovu njene izračunate vrednosti je moguće zaključiti i predvideti ponašanje vozila. Koeficijenti otpora vazduha i vertikalnog izdizanja vozila su osnovne veličine preko kojih je brzo i jednostavno stiže utisak aerodinamičnosti analiziranog objekta. U tabeli 3 je dat prikaz vrednosti koeficijenata karakterističnih geometrijskih oblika. Svi razmatrani oblici iz tabele imaju istu vrednost čeonice površine.

Tabela 3 – Tipične vrednosti za  $C_W$  i  $C_L$  [28]

		$C_L$	$C_W$
Kružna ploča		0	1,17
Kružni cilindar $L/D < 1$		0	1,15
Kružni cilindar $L/D > 2$		0	0,82
Simetrično telo „kapljica“		0	0,04
Asimetrično telo u blizini tla		0,18	0,15
Automobil oblika limuzina		0,32	0,43
Prototip trkačkog vozila		-3,00	0,75

Sa aspekta koeficijenta otpora vazduha, jedan od najgorih razmatranih slučajeva je primer kružne ploče, beskonačno male debljine koja je upravno postavljena na pravac fluidne struje. To dovodi do pojave snažnog otpora usled odvajanja fluidne struje po obimu, dok je vertikalno izdizanje jednako nuli. Povećanjem debljine analiziranog objekta, fluidna struja ima više vremena da se vrati i približi objektu, što dovodi do smanjenja koeficijenta otpora vazduha. Najbolji oblik tela sa aspekta koeficijenta otpora vazduha je oblik „simetrične kapljice“ jer se fluidna struja ne odvaja sa površine objekta, što za posledicu ima generisanje veoma malog otpora vazduha. Uvođenjem nepokretnog tla po kojem se vozilo kreće, uz ukidanje simetričnosti modela, dovodi do pojave otpora vertikalnog izdizanja vozila. Ova pojava je praćena prolaskom fluidne struje ispod vozila, što doprinosi njegovim odizanjem

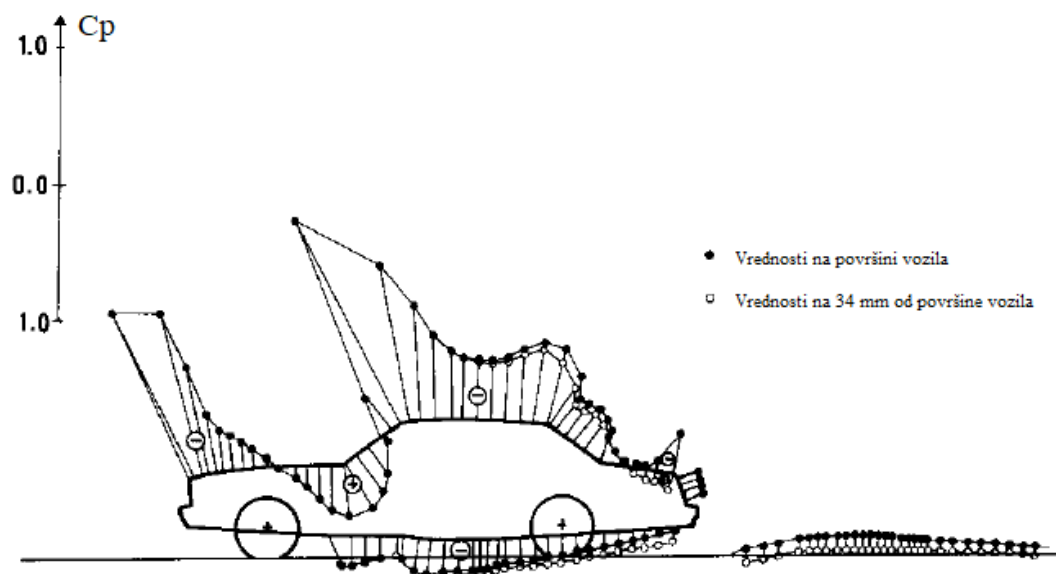
od tla. Vozilo je i dalje dugačko u obliku „asimetrične kapljice“ što dovodi do zadržavanja malih vrednosti koeficijenta otpora vazduha. Stvarni automobil predstavlja složeni objekat na kojim postoji dosta mesta na kojima dolazi do odvajanja fluidne struje. To za posledicu ima povećanje oba koeficijenta. Sa aspekta povećanja performansi vozila, kod trkačkih vozila se teži smanjenju sila (koeficijenta) vertikalnog izdizanja vozila, najčešće ubacivanjem spojlera na zadnjem delu vozila. To dovodi do jačeg sabijanja vozila o podlogu, što kao rezultat ima bolje prijanjanje vozila. Iz tog razloga koeficijent vertikalnog izdizanja vozila ima negativnu vrednost i veoma često radi lakše vizuelizacije se obrće smer vertikalne ose, pa se uvodi pojam vertikalne potisne sile čiji pozivivan smer ima ka dole.

Na osnovu prethodnog razmatranja vezanog za tabelu 3, moguće je izvesti zaključak.

- ✓ Za primer simetričnog oblika tela (simetrična kapljica), preraspodela pritiska je ujednačena sa gornje i donje strane, prouzrokovana pravilnim opstrujavanjem fluidne struje, bez pojave odvajanja strujnica. Iz tog razloga, veoma mali generisani koeficijent otpora vazduha ( $C_w \approx 0,04$ ) prouzrokovao je isključivo površinskim trenjem fluidne struje o objekat.
- ✓ Duža tela imaju nižu vrednost koeficijenta otpora vazduha.
- ✓ Kretanje objekta u blizini tla dovodi do stvaranja koeficijenta vertikalnog izdizanja vozila. Smanjenje zazora između tla i poda vozila utiče na smanjenje oba koeficijenta [28].

### 3.1.2. Preraspodela pritiska oko vozila

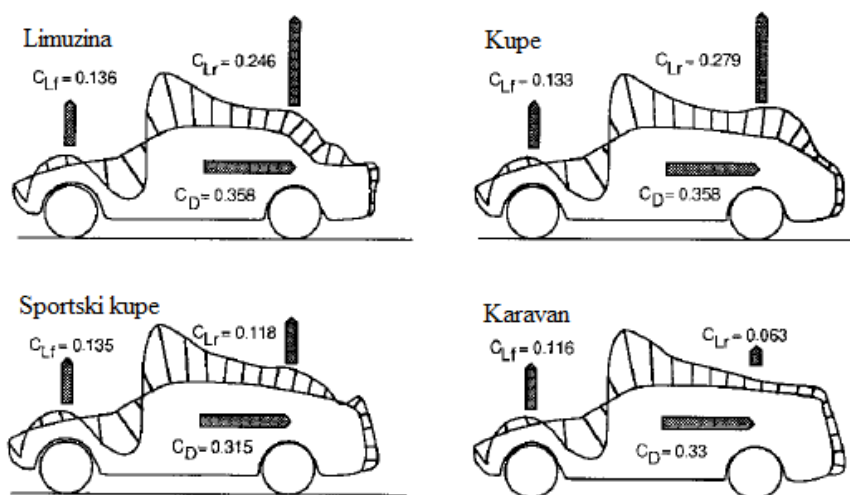
Osnovni način objašnjenja pojave preraspodele pritiska oko vozila se zasniva na analizi statičkog pritiska. Slika 3.14 prikazuje grafičku preraspodelu statičkog pritiska oko karoserije vozila dobijenu eksperimentalnim merenjem. Vektori statičkog pritiska su upravni na merenu površinu vozila. Zabeležene vrednosti pritiska su pozitivne i negativne s obzirom da je vrednost pritiska okoline merena na određenom rastojanju od vozila. Negativna vrednost pritiska je primetna najpre prilikom prelaska preko prednje ivice haube, a zatim i u zoni prelaska preko krova vozila. Razlog postojanja negativne vrednosti pritiska je gotovo horizontalan pravac strujanja fluidne struje u tim oblastima. Negativna vrednost pritiska može imati štetan efekat usled oparanja brzine fluidne struje i mogućnosti stvaranja otpora. Stilski detalji na prednjoj strani vozilu pokušavaju da umanje efekat stvaranja većih vrednosti negativnog pritiska i stvaranje dodatnih otpora. Pri nailasku na vetrobransko staklo, fluidna struja je primorana da menja pravac kretanja na gore, što prouzrokuje povećanje pritiska. Oblasti visokog pritiska su idealne za postavljanje različitih usisnika i difuzora vazduha, koji koriste fluidnu struju za svoje funkcionisanje (npr. sistem za ventilaciju i klimatizaciju kabine, hlađenje motora...). Visok pritisak je praćen slabijom brzinom strujanja fluidne struje što je u oblasti vetrobranskog stakla povoljno jer smanjuje uticaj aerodinamičkih sila na pomeranje i habanje brisača vetrobranskog stakla. Efekat negativne vrednosti pritiska prestrujavanjem fluidne struje preko krova vozila je primetan talasanjem fleksibilnog krova kod kabrioleta. Pritisak nastavlja sa opadanjem, odnosno zadržavanjem negativne vrednosti nailaskom fluidne struje na zadnje vetrobransko staklo i poklopac prtljažnog prostora. U ovim oblastima je izraženo odvajanje fluidne struje od karoserije vozila. Dizajn uglova i detalja na zadnjem delu vozila igra značajnu ulogu za aerodinamiku.



Slika 3.14 – Preraspodela pritiska preko karoserije vozila [35]

Niski pritisak je prisutan duž bočnih strana vozila što ostavlja mogućnost odvajanja fluidne struje od vozila i formiranju vrtloga iza vozila. Zbog oblika zadnjeg dela vozila, odvajanje fluidne struje je neizbežna pojava, koja može biti smanjena skraćanjem karakteristične oblasti, što doprinosi smanjenju sile otpora vazduha. Teorijski najidealniji slučaj sa aspekta aerodinamike je oblik suze na zadnjem delu vozila koji će značajno smanjiti odvajanje fluidne struje. Tupi zadnji deo vozila je takođe veoma povoljan sa gledišta aerodinamike jer ostavlja prostor iznad glave putnika na zadnjem sedištu, uz smanjeni efekat stvaranja otpora na zadnjem delu vozila.

Dok veličina i oblik oblasti odvajanja fluidne struje od karoserije vozila ima direktnog uticaja na stvarnja dodatnih otpora vazduha, efekat stvaranja vertikalne sile izdizanja na zadnjem delu vozila je takođe prouzrokovan opstrujavanjem fluidne struje oko vozila. Slika 3.15 prikazuje efekat vertikalnog izdizanja vozila i otpora vazduha u zavisnosti od oblika karoserije vozila. Pod nazivom „Sportski kupe“ se podrazumevaju vozila koja imaju naglo opadanje visine karoserije u oblaci nakon vozača. Tipično vozilo iz ove kategorije je Ford Mustang GT. Oznake sa slike  $C_{Lf}$  i  $C_{Lr}$  predstavljaju koeficijente vertikalnog izdizanja vozila za prednju i zadnju osovinu, dok je  $C_w$  koeficijent otpora vazduha. Koeficijenti i njihov značaj je detaljno objašnjeno u nastavku rada. Kontrola proticanja fluidne struje oko vozila doprinosi smanjenje oblasti odvajanja fluidne struje, koja prouzrokuje stvaranje sile vertikalnog izdizanja vozila za zadnjoj osovini, iz razloga što je pritisak u toj oblasti smanjen. Još jedna pojava u dizajnu zadnjeg dela vozila ima veoma bitnu ulogu. Veliki ugao turbulencije u zoni odvajanja fluidne struje doprinosi podizanju i kovitlanju vlage i nečistoća sa puta od strane točkova. Zbog stvaranja velikih vrtloga usled jake turbulencije naročito kod vozila sa naglo odsečenim zadnjim delom vozila, dovodi do zadržavanja nečistoća na zadnjem vetrobranskom staklu. Iz tog razloga vozila koja imaju takav karakterističan oblik zadnjeg kraja vozila, imaju dodatni brisač zadnjeg vetrobranskog stakla (npr. hečbek i karavan), dok vozila sa odvojenim poklopcem prtljažnog prostora od zadnjeg vetrobranskog stakla nemaju potrebu za brisačem (npr. limuzina). Najnepovoljniji efekat ove pojave predstavlja zaprljanost zadnjeg vetrobranskog stakla na vozilu, jer to značajno utiče za preglednost i orijentaciju učesnika u saobraćaju.



Slika 3.15 – Vertikalno izdizanje i otpor vazduha u zavisnosti od oblika karoserije [35]

### 3.1.3. Uticajni parametri sile otpora vazduha

Pri kretanju putničkog automobila na autoputu, najveća i najvažnija komponenta otpora kretanja vozila je otpor vazduha. Sveukupni otpor vazduha na vozilu dolazi od mnogo pojedinačnih izvora. Razni dodaci na karoseriji vozila, imaju ulogu da umanje efekat otpora vazduha i pretvore ga u korisno strujanje fluidne struje. U tabeli 4 je data lista najznačajnijih elemenata i delova na vozilu koji prouzrokuju otpor vazduha. Vrednosti su izražene preko koeficijenta otpora vazduha.

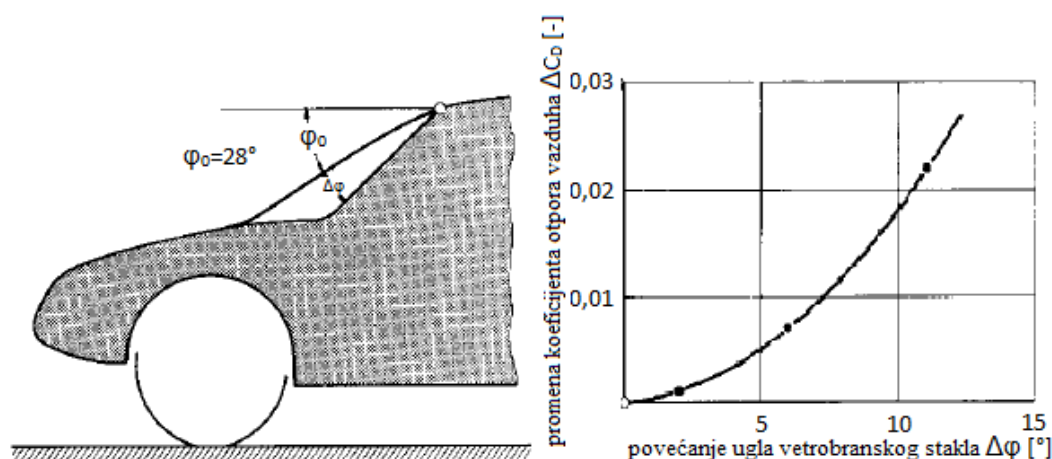
Tabela 4 – Glavni izvori otpora vazduha na vozilu [35]

Uticajna komponenta na vozilu	$C_w$
Prednji deo vozila	0,05
Zadnji deo vozila	0,14
Ispod vozila	0,06
Trenje površine karoserije	0,025
Točkovi i blatobrani	0,09
Lajsne oko vrata i prozora	0,01
Zazor između vrata i karoserije	0,01
Spoljašnji retrovizori	0,01
Rashladni sistem motora	0,025
Ukupan unutrašnji otpor	0,025
<b>Sveukupni otpor vazduha</b>	<b>0,42</b>
<i>Vozila iz 1980-tih godina</i>	
Putnička vozila	0,30 – 0,35
Dostavna vozila	0,33 – 0,35
Pikap vozila	0,42 – 0,46

Iz prethodne tabele se može zaključiti da preko 65% otpora vazduha dolazi od oblika karoserije i dodatnih elemenata na karoseriji. Veliki doprinos povećanju otpora vazduha dolazi sa zadnje strane vozila iz razloga postojanja velike oblasti odvajanja fluidne struje od karoserije vozila. Ali sa druge strane, ova oblast predstavlja i najpogodniju oblast za smanjenje otpora. Otpor na prednjem delu vozila je prouzorovan oblikom prednjeg dela vozila kojim se probija fluidna struja kretanjem vozila. Ugao postavljanja prednjeg vetrobranskog stakla ima značajan efekat na koncentraciju otpora na tom delu vozila. Visina

prednjeg dela vozila kojim se vrši probijanje fluidne struje je značajna jer se u toj oblasti dešava zaustavljanje lokalne fluidne struje. Ta oslast bi trebala biti što manja i što zaobljenija kako bi se umanjio efekat zaustavljenih lokalnih fluidnih strujnice koje generišu otpor. Najmanji generisani otpor na prednjoj strani vozila je ukoliko je tačka zaustavljanja pomerene skroz dole ka putu, jer se tada gotovo sve fluidne strujnice usmeravaju da struje preko gornje strane vozila, a jako malo ispod vozila. Pravilno zaobljeni prednji deo doprinosi smanjenju od 5 – 15% ukupnog otpora vazduha vozila [35].

Vetrobransko stakla direktno usmerava fluidnu struju ka ravnoj površini krova. Ugao postavljanja vetrobranskog stakla predstavlja veoma bitak faktor ka formiranju otpora vazduha. Ova pojava je naročito značajna kod kamiona, jer je kod njih vertobransko staklo postavljeno gotovo vertikalno, sa čime se generiše značajan otpor kretanju fluidne struje. Smanjene ugla postavljanja vetrobranskog stakla, odnosno približavanje horizontalnom položaju svakako smanjuje otpor, ali komplikuje estetsku i funkcionalnu osobinu vozila. Vetrobransko staklo nema ulogu samo da usmeri fluidnu struju ka krovu, već omogućuje vizuelni pregled vozača i putnika, kao i zaštitu od direktnog sunčevog zračenja. Ukoliko je vetrobransko staklo postavljeno u položaj blizak horizontalnom, osim estetskih poteškoća, sunčevo zračenje i refleksija od drugih učesnika u saobraćaju bi bila povećana. Na slici 3.16 je ilustrovan optimalni ugao postavljanja vetrobranskog stakla od  $28^\circ$ , kao i uticanje na otpor vazduha variranjem tog ugla. Sa povećanjem ugla vetrobranskog stakla dolazi do smanjenja brzine prestrujavanja fluidne struje što doprinosi povećanju pritiska u toj oblasti [36].

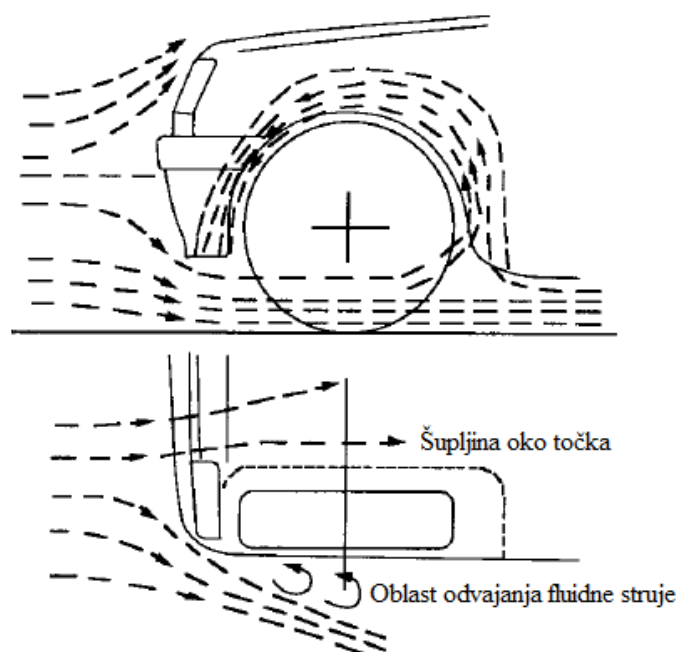


Slika 3.16 – Uticaj ugla vetrobranskog stakla na otpor vazduha [36]

Oblast ispod vozila predstavlja kritičnu zonu za stvaranje otpora vazduha na vozilu. Sistem oslanjanja i upravljanja na vozilu, kao i izduvni sistem značajno doprinose stvaranju otpora. Fluidna struja biva zarobljena u uzanoj oblasti između puta, čija je relativna brzina jednaka nuli i poda vozila koji poseduje izvesnu brzinu, uz neprestano menjanje pravca usled naletanja na prethodno pomenute sisteme na vozilu. Postupak smanjenja otpora u ovoj oblasti se zasniva na zatvaranju poda vozila sa donje strane pomoću glatkih ploča gde god je to moguće. Na ovaj način se sprečava zaustavljanje fluidne struje, formiranje vrtloga koji doprinose stvaranju vertikalne sile izdizanja vozila.

Oblast točkova i blatobrana predstavlja veoma nepovoljne oblasti sa aspekta formiranja dodatnih oprora vazduha. Primarni razlog predstavlja formiranje vrtložnog kretanja fluidne struje u oblasti branika vozila je obrtanje točka. Fluidna struja koja ispod vozila nailazi na točak koji se obrće, zahvaljujući ostrim ivicama pneumatika, biva otsečena u horizontalnom pravcu, a primorana da se kreće rotaciono u vertikalnom pravcu, slika 3.17. Ovi efekti

značajno povećavaju otpor vazduha i ne smeju biti zanemareni, uzimajući uticaj točkova samo preko čeine površine vozila. Zatvaranje i smanjene oblasti oko točkova svakako doprinosi smanjenju otpora vazduha i primenjivo je na zadnjim točkovima koji vrše isključivo rotaciono kretanje uz translatorno pomeranje u vertikalnom pravcu. Problem predstavljaju prednji točkovi jer osim pomeranja poput zadnjih, imaju dodatak rotiranjem oko vertikalne ose zbog mogućnosti skretanja vozila. Eksperimentalna istraživanja su pokazala da smanjenjem klirensa vozila (rastojanja između donjeg dela vozila i puta) i sužavanjem šupljina oko točkova značajno doprinosi umanjenu ukupnog otpora vazduha vozila.



Slika 3.17 – Cirkulacija fluidne struje oko točka vozila [35]

Sistem za hlađenje motora uključujući i kompletan motorni prostor na vozilu, predstavlja poslednji značajni element koji doprinosi stvaranju dodatnih otpora vazduha. Fluidna struja koja dospeva na prednju stranu vozila delimično bila usmerena kroz hladnjak motora, smešten vertikalno sa prednje strane vozila u motornom prostoru. Nakon prolaska kroz hladnjak, fluidna struja ulazi u oblast motornog prostora koja je veoma gusto popunjena mnoštvom elemenata koji opslužuju rad motora. Odbijanjem od komponenti i požarnog zida, fluidna struja izlazi iz ove oblasti sa donje strane i usmerena je ispod vozila. Otpor vazduha generisan u ovoj oblasti je oko 6% od ukupnog otpora vazduha vozila i mora biti pravilno kontrolisan. Pravilno dizajniranje otvora za prijem fluidne struje je ključan element poboljšanja generisanih otpora u ovoj oblasti. Takođe zatvaranjem otvora i sprečavanje protoka fluidne struje kroz hladnjak motora i motorni prostor u trenucima kada je to moguće, značajno doprinosi poboljšanju ovog efekta [35].

#### 3.1.4. Poboljšanje aerodinamičkih performansi na vozilu

Kako bi se umanjio negativan uticaj usled delovanja aerodinamičkih sila, kao i poboljšanje performansi vozila, pristupa se ugradnji pojedinih elemenata na vozila.

##### **Prednji spojler**

Prednji spojler predstavlja dodatnu površinu koja je postavljena ispod postojećeg branika na prednjoj strani vozila. Uloga ovog dodatka je da preusmeri tok fluidne struje i smanji njen



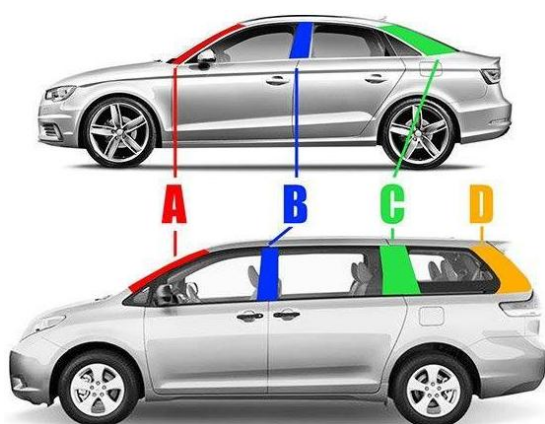
protok ispod vozila. Fluidna struja koja protiče ispod vozila, kao što je već naglašeno, ima negativan efekat jer doprinosi uvećanju sile vertikalnog izdizanja vozila. Prednji spojler ima ulogu da preusmeri fluidnu struju na mesta gde je zaista potrebna. Savremena rešenja u svojoj konstrukciji imaju dodatne difuzore, odnosno usmerivače fluidne struje koji je odvede do točkova, tj. do kočni elemenata i doprinose njihovom hlađenju. Iako prednji spojler predstavlja dodatnu površinu koja povećava čeonu površinu vozila, pa samim tim otpor vazduha, njegov efekat smanjenja proticanja fluidne struje ispod vozila je neuporedivo veći.

### Zadnji spojler na prtljažniku

Spojleri i krila na zadnjem delu vozila mogu imati veoma značajnu ulogu pri poboljšanju aerodinamičkih karakteristika vozila. Postavljanjem malog dodatnog izbočenja na samom kraju prtljažnika doprinosi usmeravanju fluidne struje na gore i pomeranje zone odvajanja strujnica od karoserije vozila. Na taj način zona formiranja vrtloga usled niskog pritiska, odvodi od zadnjeg dela vozila, što smanjuje otpore. Drugi značajni doprinos ugradnje je smanjene sile vertikalnog izdizanja, odnosno stvaranje značajnog poraste iste sile ali u suprotnom smeru. Na ovaj način sila vertikalnog spuštanja doprinosi jačem opterećenju zadnje osovine, što svakako povoljno utiče na prijanjanje i vučne karakteristike vozila. Povećanju sile opterećenja zadnje osovine je odgovoran porast pritiska u zoni spojlera. Spojleri doprinose povećanju otpora vazduha, ali značajno doprinose povećanju sile vertikalnog spuštanja vozila. U nastavku rada je detaljnije objašnjen efekat spojlera na primeru krila.

### Prostor između prozora i stubova vozila

U zavisnosti od tipa karoserije vozila, moguće je pronaći tri ili četiri noseća stuba na vozilu, čija je primarna uloga da spoji donji deo karoserije vozila sa krovnom konstrukcijom. Obično se označavaju slovima A, B, C i D. Na slici 3.18 je prikazan položaj studova na vozilu u zavisnosti od oblika karoserije. Posmatrajući čeonu površinu vozila, moguće je uočiti da postoji zazor između nosećih stubova i prozora na vozilu, odnosno da su površine prozora uvučene u odnosu na stubove. Prestrujavanje fluidne struje preko A stuba je prikazano na slici 3.19. Nailaskom fluidne struje na stub A, dolazi do nagle promene pravca kretanja. Kao posledica takvih naglih skretanja, dolazi do pojave vrtložnog turbulentnog kretanja. Ovoj pojavi doprinosi položaj bočnih stakala, koja su uvek uvučena u odnosu na bočne gabarite vozila, pri čemu se stvara dodatni prostor za formiranje vrtložnog kretanja fluidne struje.



Slika 3.18 – Položaj nosećih stubova na vozilu [37]

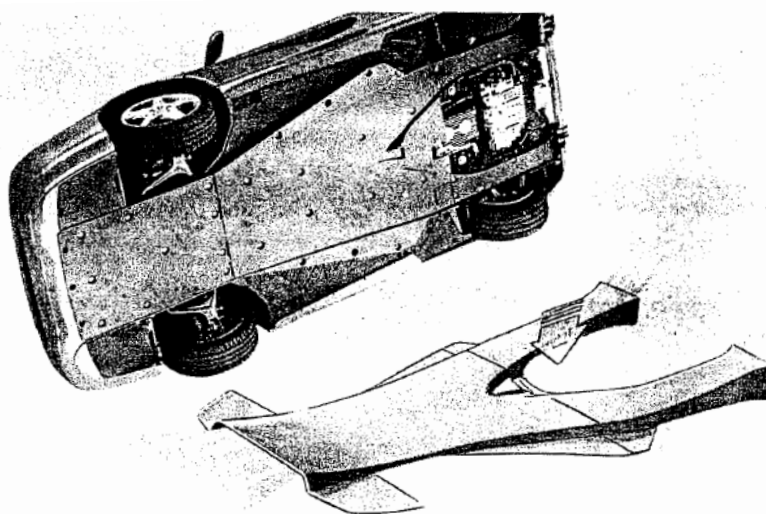


Slika 3.19 – Prelazak fluidne struje preko A stuba vozila [38]

### Smanjenje klirensa vozila i glatki pod

Prostor između donje strane vozila i puta je oblast u kojoj dolazi do pojave otpora vazduha, najčešće prouzrokovanih vrtložnim kretanjem fluidne struje. Kao što je već predstavljeno u prethodnim poglavljima, oblast ispod vozila je zahvaćena potpritiskom, prouzrokovanim povećanjem brzine kretanja fluidne struje nailaskom na suženi prostor ograničen podom vozila i putem. Sa aspekta smanjenja ovog negativnog efekata koji za posledicu ima povećanje ukupnog otpora vazduha, najefikasnije rešenje je delimično ili potpuno zatvaranje ove oblasti. Ovaj postupak nije moguć sa aspekta geometrije vozila, jer je neophodno da postoji propisani minimum visine vozila (klirensa), odnosno rastojanja između poda vozila i puta. Ubacivanjem dodatnih elastičnih spojlera ili usmerivanja sa prednje strane vozila se teži smanjenju prostora između poda vozila i puta. Na ovaj način se smanjuje količina fluidne struje koja protiče ispod vozila.

Vozilo sa donje strane je najčešće veoma razučeno usled postojanja raznih elemenata i sklopova pozicioniranih u toj oblasti (npr. izduvni sistem, sistem za oslanjanje, sistem za upravljanje, rezervoar vozila...). Sve te neravnine sa donje strane vozila negativno utiču na proticanje fluidne struje. Nailaskom na neravnine (izbočine ili ulegnuća), fluidna struja naglo menja pravac kretanja, što za posledicu ima stvaranje vrtložnog kretanja, odnosno povećanje otpora vazduha. Na novijim konstrukcijama vozila je moguće pronaći dodatne profilicane elemente na donjoj strani vozila čija je uloga da prekriju oblasti u kojima fluidna struja skreće sa normalnog pravca strujanja. Na slici 3.20 je dat prikaz primera ugradnje dodatnog elementa sa donje strane vozila, pod nazivom „glatki pod“ na vozilu *Ferrari F355* iz 1995. godine.



Slika 3.20 – Primer „Glatkog poda“ na vozilu *Ferrari F355* iz 1995. [28]

## 4. Računarska dinamika fluida – CFD

Jednačine mehanike fluida, koje su poznate više od jednog veka, mogu se rešiti samo za određene slučajeve. Ti slučajevi su opšti, jednostavni i teško se mogu primeniti u složenim inženjerskim problemima. U tim problemima moraju se primenjivati drugi pristupi, kao što je pojednostavljenje jednačina bazirano na kombinaciji aproksimacija i dimenzionih analiza, potpomognuto empirijskim ulaznim podacima. Računari omogućuju rešavanje parcijalnih diferencijalnih jednačina numeričkim putem, i za te metode je u literaturi uobičajena primena skraćenice CFD, od (eng. *Computational Fluid Dynamics*), tj. računarska dinamika fluida. Približno rešenje parcijalnih diferencijalnih jednačina numeričkim putem dobija se metodom diskretizacije kojom se diferencijalne jednačine aproksimiraju sistemom algebarskih jednačina. Aproksimacija se vrši nad malim prostornim (i vremenskim) domenima, pa se i rešenja odnose na diskretne lokacije u prostoru (i u vremenu). Poput eksperimenta, gde tačnost veoma zavisi od primenjene opreme i umeća rukovanja, tačnost numeričkog rešenja zavisi od primenjenog metoda diskretizacije.

Dinamika fluida je oblast mehanike fluida koja se bavi protokom fluida, odnosno analizom objekata unutar fluidne struje koja se kreće. Obuhvata više oblasti izučavanja od kojih su najzastupljenije aerodinamika (proučavanje vazduha i drugih gasova u kretanju) i hidrodinamika (proučavanje tečnosti u kretanju) [28].

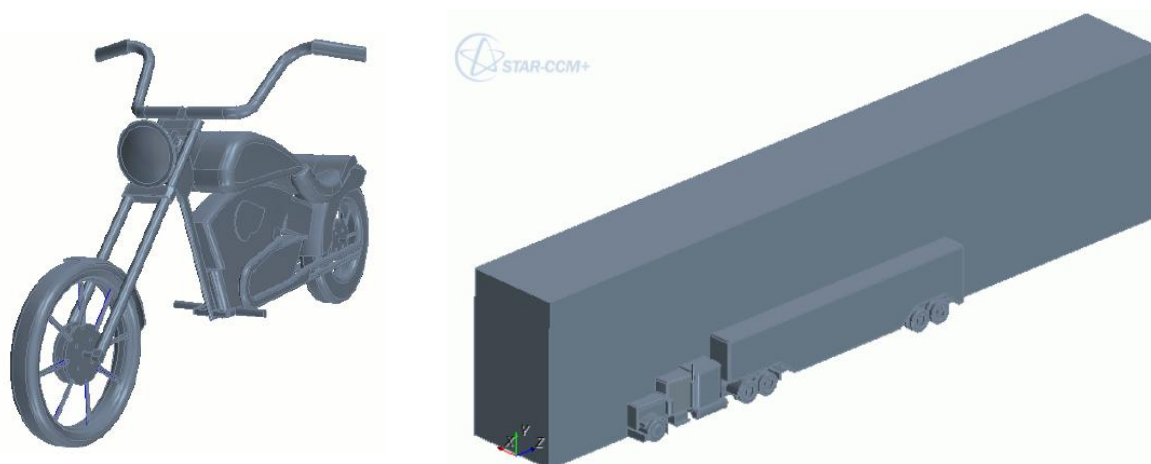
Ovo poglavlje rada se bavi izučavanjem teorijskih zakonitosti računarske dinamike fluida. Oblasti koju su pokrivena su:

- Modelovanje geometrijskog modela
- Kreiranje mrežnog modela
- Modelovanje fizičkih svojstava modela
- Simulacije i analiza rezultata

### 4.1. Geometrijski model

Za mnoge CFD simulacije, prvi korak predstavlja kreiranje 3d modela, koji će služiti kao bazni element u procesu dalje analize. 3d-CAD (eng. *Computer-aided design*) predstavlja alat za kreiranje trodimenzionalnih virtuelnih modela, uz pomoć nekih od softverskih paketa (*Catia*, *ProEngineer*, *Solid Works*, *AutoDesk Inventor*, itd.). Drugi način kreiranja 3d virtuelnih modela na kojima će biti izvršeno dalje istraživanje je direktno u softveru za simulaciju CFD procesa. CFD alat koji je korišten u ovom radu je *Star CCM+*, dok je modelovanje 3d CAD modela vršeno uz pomoć softvera *CatiaV5*. Ovaj pristup je usvojen iz razloga jednostavnijeg postupka kreiranja CAD modela. *CatiaV5* predstavlja softver čija je primarna uloga kreiranje virtuelnih 3d CAD modela koji će dalje biti pogodni i prilagođeni za razne inženjerske namene (kreiranje 2d crteža, kreiranje realnih modela putem 3d štampe ili CNC obradnih centara...). Nasuptot *CatiaV5* softveru, CFD softver *Star CCM+* se bazi prvenstveno problemima vezanim za računarsku dinamiku fluida, dok je deo kreiranja 3d CAD modela u samom softveru nešto komplikovaniji za rad. Iz tog razloga je primenjen multi-softverski pristup kreiranja modela. Kreirani CAD model se ubacuje u CFD softver na osnovu kreiranja površinske mreže modela. Ovoj postupk predstavlja diskretno predstavljanje kompletne geometrije CAD modela i njihovu transformaciju u oblik koji je prepoznatljiv CFD softveru. Ovim postupkom se takođe vrši upravljanje geometrijskim granicama modela i regionima od interesa. Geometrijske granice modela su pojedini delovi CAD modela

(površine, ivice, zaobljenja...) koji se izdvajaju od ostatka modela, jer su od interesa za dalji tok analize. Grupisanjem više geometrijskih granica, moguće je kreirati jedan ili više različitih regiona, na kojima je moguće zadavanje različitih uticaja od interesa. Na slici 4.1 je dat prikaz dva 3d CAD modela, ubačenih u CFD softver za dalju analizu [39].



Slika 4.1 – Primer 3D CAD modela [39]

## 4.2. Mrežni model

Mreža u CFD (*eng. Mesh*) modelu predstavlja diskretno prikazivanje računarskih domena, koji potpomažu rešavanju numeričkih problema. Drugim rečima, kompletan CAD model ubačen u CFD softver se deli na veliki broj konačnih zapremina, koji se u daljem toku analize ponašaju kao zasebne merne čelije. U zavisnosti od složenosti CAD modela i željenog toka dalje analize, moguće je kreirati nekoliko karakterističnih tipova mreža. Postoje dva osnovna oblika mreže, površinska i zapreminska. Ukoliko je bitno prikazivanje i analiza aerodinamičkih uticaja samo po spoljašnjim delovima modela, bez analize šta se dešava unutar njega, koristi se površinska mreža. Ukoliko je neophodne analizirati npr. kompletnu sliku strujanja unutar nekog objekta, kao i uticaj i ponašanje zidova koji ga okružuju, neophodno je kreiranje zapremisne mreže. Takav tip mreže deli kompletnu zapreminu modela na mnogo manjih, konačnih zapremina.

### 4.2.1. Površinska mreža

Površinska mreže (*eng. Surface Mesh*) se koristi za analizu aerodinamičkih uticaja ograničenih samo na površinsku zonu omotača modela. Ukoliko je u pitanju model veoma složene geometrije i neophodno kreiranje zapremisne mreže, površinska mreža se koristi kao prvi korak kreiranja mreže. Ovaj postupak značajno pomaže u kreiranju kvalitetnije konačne zapremisne mreže. U daljem tekstu su predstavljena dva pristupa kreiranja površinske mreže.

#### ➤ Površinski omotak

Ovaj pristup kreiranja površinske mreže modela (*eng. Surface Wrapper*) se zasniva na kreiranju omotača oko modela ili zatvorenog filma (sloja). Koristi se ukoliko model ima mnogo preklapnih zajedničkih površina, otvora ili zlebova na komplikovanim mestima (npr. u blizini ivica modela), ili ukoliko pojedini delovi modela nisu dobro spojeni i postoji zazor ili odstupanje. Takođe ukoliko model sadrži složenu geometriju sa mnogo detalja, ovaj pristup potpomaže kreiranju površinskog mrežnog modela. Ovim pristupom se sagledava kompletan model i obraća posebna pažnja na delove modela gde postoji neko odstupanje. Ukoliko postoje pukotine ili neravnine na modelu usled nezadovoljavajućeg načina

modelovanja, zahvaljujući ovom pristupu neće biti uzeti u obzir pri kreiranju mrežnog omotača.

➤ **Ponovni pristup kreiranja površinske mreže**

Ovim postupkom (*eng. Surface Remesher*) se poboljšava kvalitet površinske mreže na modelu i vrši njena optimizacija i priprema za kreiranje zapreminske mreže. Kao bazni element na osnovu kojeg se ovim postupkom kreira kvalitet mreže je dužina karakteristične ivice modela u blizini zone kreiranja mreže. Za razliku od prethodnog pristupa, oblik čelija (konačnih zapremina) poprimaju u velikoj meri uniformni oblik. Ukoliko postoje odstupanja ili greške u geometriji modela, ovim postupkom će biti uočeni i naznačeni. Iz tog razloga se koristi i kao kontrolni postupak pre kreiranja zapreminske mreže modela, a nakon postupka kreiranja površinske mreže postupkom omotača. Na slici 4.2 je dat izgled površinskog mrežnog modela kreiranog postupkom površinskog omotača (levo) i njen unapređeni oblik nakon drugog, ponovnog pristupa kreiranja površinske mreže modela (desno).



Slika 4.2 – Površinski mrežni model [39]

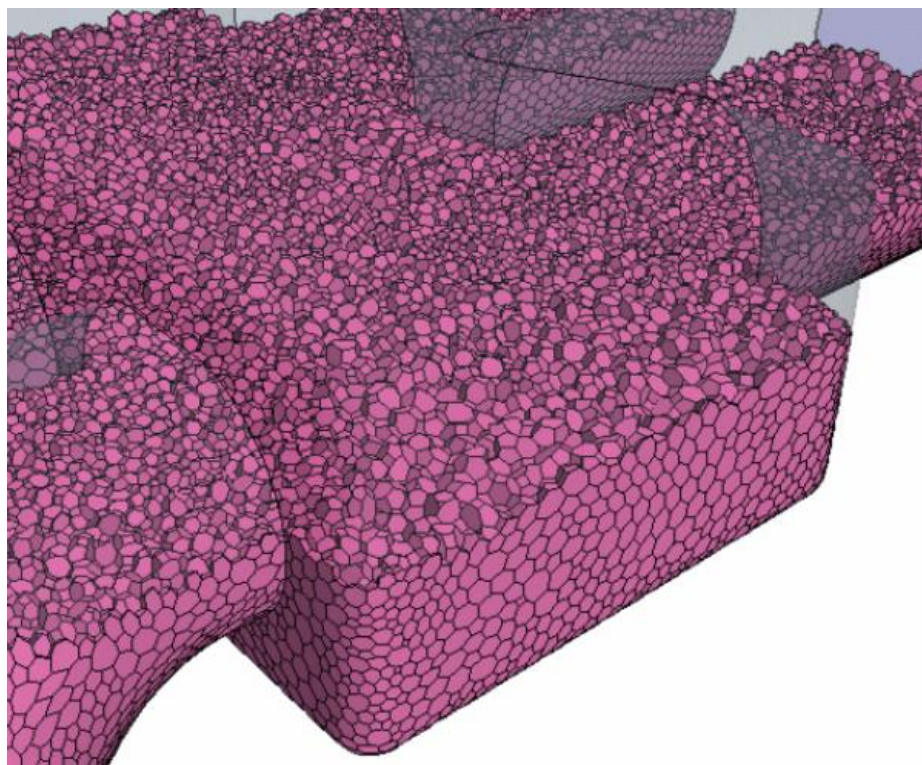
#### 4.2.2. Zapreminska mreža

Prvi korak za kreiranje zapreminske mreže CFD modela je kreiranje odgovarajuće površinske mreže. U nastavku je prikazano pet osnovnih tipovi zapreminske mreže upotrebljeni za dalji tok istraživanje. Imena najčešće potiču od oblika čelija, odnosno konačnih zapremina koje dele analizirani model. Tetraedarska (*eng. Tetrahedral mesh*), poliedarska (*eng. Polyhedral mesh*), otsečena heksaedarska mreža (*eng. Trimmed mesh*), tanka mreža (*eng. Thin mesh*) i poliedarska mreža poboljšanog sloja (*eng. Advancing Layer mesh*). Prizmatični oblik čelija u blizini zida modela može biti postignum upotrebom prva tri tipa zapreminske mreže. Ukoliko je model izdelfen na više regionu, ograničenih zasebnim granicama, preporučuje se upotreba tetraedarske ili poliedarske zapreminske mreže. Za kompleksnije geometrijske modele, moguće je primeniti različite tipove mreže u okviru jednog modela. Na ovaj način je moguće postići optimalni odnos u pogledu kvaliteta izabrane mreže i postignutih rezultata simulacije.

➤ **Poliedarska zapreminska mreža**

Ovaj tip mreže predstavlja kompromisno rešenje u smislu dobijenih rezultata i brzine njenog generisanja. Jednostavna i brza za kreiranje i ne zahteva dodatno pripremanje površine, što nije slučaj sa tetraedarskom mrežom. Takođe za postizanje istih rezultata, broj čelija kod

poliedarske mreže je pet puta manji u odnosu na tetraedarsku mrežu. Kod poliedarske mreže broj stranica jedne prizmatične ćelije se automatski podešava u svrhu postizanja što bolje pokrivenosti i popunjenosti zapremine analiziranog modela. Na slici 4.3 je dat primer poliedarske mreže čiji je prosečan broj stranica u okviru jedne prizmatične ćelije iznosio 14.

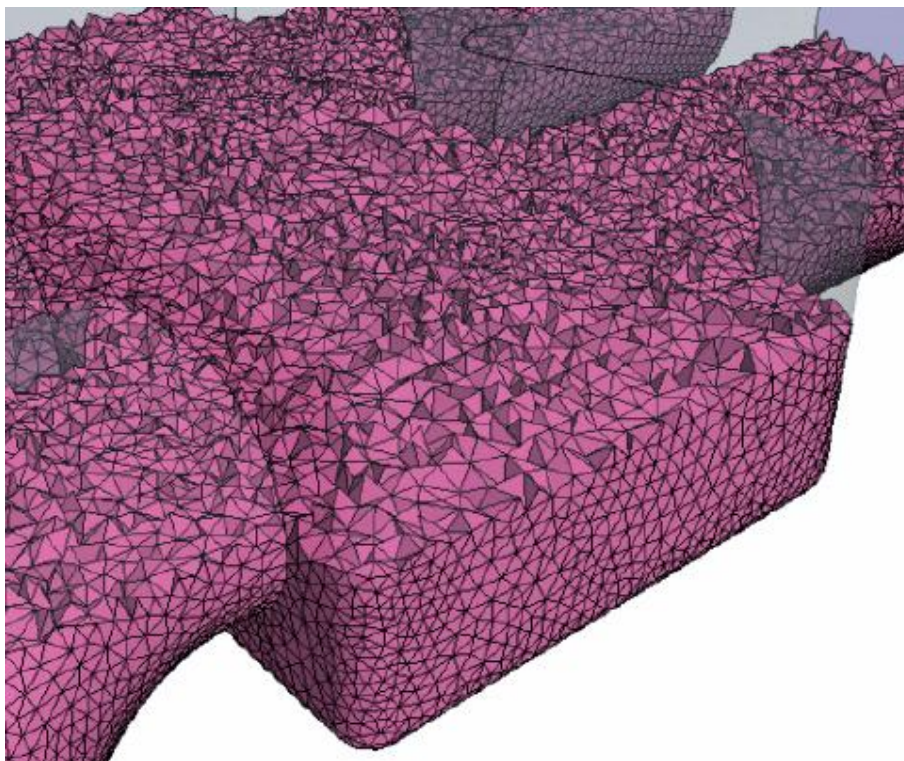


Slika 4.3 – Primer prizmatične zapreminske mreže modela [39]

Gustinu mreže je moguće podešavati preko faktora gustine zapreminske mreže. Ukoliko postoji potreba za preciznijim prikazom rezultata u nekoj oblasti modela, moguće je podesiti lokalnu gustinu mreže u toj oblasti. Povećanjem gustine ćelija u nekoj lokalizovanoj oblasti modela dovodi do povećanja broj ćelija, odnosno povećanje uzorkovanih (merenih) kontrolnih zapremina.

#### ➤ Tetraedarska zapreminska mreža

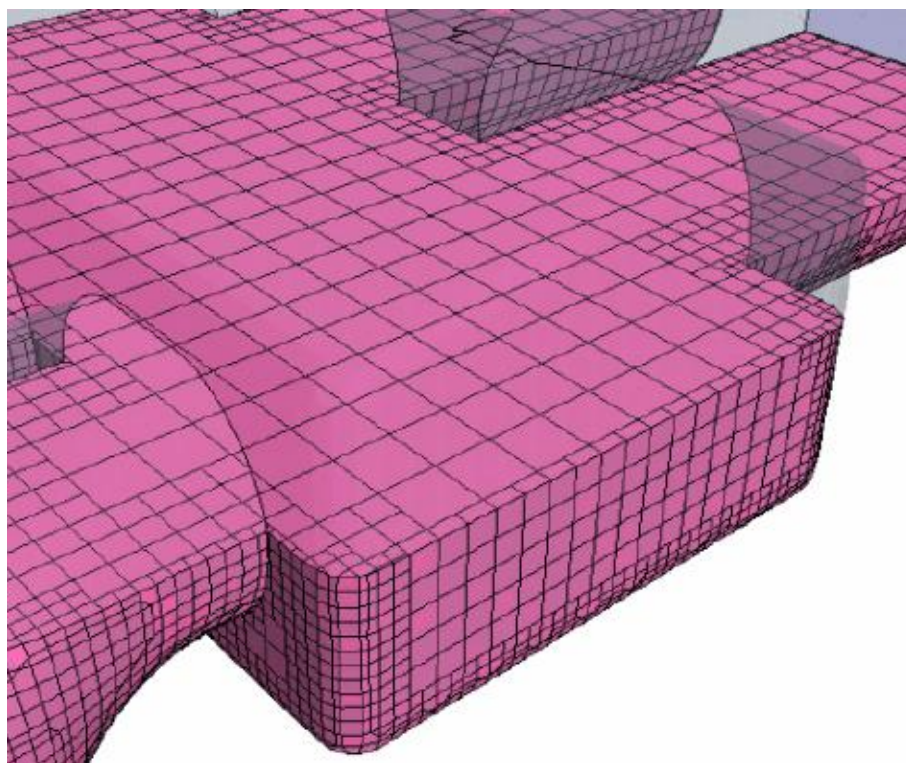
Ovaj tip zapreminske mreže obezbeđuje najbrže generisanje mreže, uz najmanje opterećenje računara na kojem se proces simulacije izvodi. Za razliku od poliedarske mreže, oblik ćelije kod tetraedarske mreže je jednak za kompletnu zapreminu modela i sastoji je od četiri trougla koji sačinjavaju oblik prizmatičnog tetraedra. Delauney metod (*eng. Delaunay*) se koristi kao baza za kreiranje tetraedarske mreže, a zasniva se na ubacivanju dodatnih tačaka u domen, što doprinosi kreiranju visokokvalitetne tetraedarske mreže. Unapređeni metod kreiranja tetraedarske zapreminske mreže uz pomoć Delaunejeva modeta je prikazan kroz referencu (40). Dodatno unapređenje kvaliteta ćelija je moguće uz pomoć faktora zapreminske gustine ćelije. Primer tetraedarske zapreminske mreže je prikazan na slici 4.4.



Slika 4.4 – Primer tetraedarske zapreminske mreže modela [39]

#### ➤ Otsečena mreža

Otsečena mreža (*eng. Trimmed Mesh*) je robusan i efikasan metod generisanja mreže koji obezbeđuje visoko kvalitetnu podelu zapremine modela na ćelije kako kod jednostavnih, tako i kod veoma složenih modela. Njen kvalitet se najviše ogleda kroz heksaedarsku mrežu sa minimalnim brojem zakrivljenja ćelija, preciznosti direktno proporcijalnoj kvalitetu površinske, prethodno pripremljene mreže i mogućnošću kreiranja mreže različitog kvaliteta za svaku površinu modela posebno. Zbog svojih univerzalnih karakteristika predstavlja početni upotrebljivani tip mreže, ukoliko korisnik nema posebne definisane zahteve. U osnovi se koristi heksaedarska mreža sa potpuno otsečenim, ili delimično uklonjenim delovima tipične heksaedarske mrežne ćelije. Veoma je pogodna za kreiranje graničnih oblasti u kojima vlada velika razlika u brzinama strujanja fluidne struje. Prepoznatljiva je sa kombinacijom heksaedarske mreže u središnjem delu modela, daleko od površine i heksaedarskom mrežom sa otsečenim delovima ćelija u svrhu dobijanja ravne mreže na površini modela. Otsečene ćelije su poliedarskog oblika, ali se često definišu kao heksaedarske sa jasno otsečenom jednom ili više strana ćelije. Izgled ovog tipa mreže je dat kroz primer na slici 4.5.



Slika 4.5 – Otsečeni tip hektaedarske mreže modela [39]

### 4.3. Fizička svojstva modela

Nakon usmešno definisane i kreirane mreže, neophono je modelu dodeliti fizička svojstva koja podrazumevaju podešavanje prostora, vremena i kretanja, materijala, strujanja i energije, zračenja, akustike, sagorevanja, višefaznog strujanja, elektromagnetizma, elektrohemijska svojstva i dr. U zavisnosti od prirode modela i njegove složenosti, podešavanje fizike može da objedinjuje više prethodno pomenutih podešavanja. Podešavanjem fizike modela definišu se najpre konstante i promenjive (npr. pritisak, temperatura, brzina...) koje otisuju prirodne fenomene koji prate problem koji se želi simulirati. CFD softveri koriste različita podešavanja fizike modela koji se razlikuju po kompleksnosti i funkcionalnosti, ali osnovna svrha je stvarni problem predstaviti matematičkim putem jasnim softveru, a za uzvrat dobiti sve neophodne izračunate informacije i podatke. Tipičano podešavanje fizike objedinjuje pravljanje relevantnih funkcija i njihovu implementaciju na kreirani model, uz dodeljivanje fizičkih vrednosti poput pritiska, temperature, brzine... Savremeni CFD softveri nude pomoć pri podešavanju fizičkih svojstava modela, u svrhu pravilnog odabira ponuđenih vrednosti, kao i predlozima tipičnih vrednosti parametara i koeficijenata. U nastavku je dat prikaz najznačajnijih parametara koji imaju veoma bitnu ulogu na kreirani model u okviru disertacije.

#### 4.3.1. Prostor, vreme i kretanje

##### ➤ Prostor

Osnovna uloga podešavanja radnog prostora unutar modela u CFD softveru je uvođenje ograničenja mrežnom modelu u smislu deljenja zapreminskog prostora prema tačno definisanim uslovima. Definisani mrežni model se deli na površine i/ili zapremine od interesa kojima se dodeljuju podešavanja. U zavisnosti od uslova analize predstavljenog problema i složenosti traženih informacija, podešavanje radnog prostora je moguće izvršiti na nekoliko



tipičnih načina. Radni prostor je moguće podesiti prema prirodi analiziranog modela i daljeg toka ispitivanja na: *osnosimetrični model*, *dvodimenzionalni* i *trodimenzionalni model*.

Osnosimetrični model podešavanja fizike je predviđen da radi sa dvodimensionalnom osnosimetričnom mrežom. Upotrebom ovog modela, orijentacija mreže je takva da osa rotacije je  $y = 0$  u globalnom koordinatnom sistemu. Iz tog razloga, svi delovi mreže moraju biti iznad  $y$  ose. Za podešavanje granica mrežnog modela koji koriste kao ulazni parametar npr. maseni protok, isti je dat u tipičnoj jedinici  $kg/rad\ s$ . To predstavlja činjenicu da se protok deli oko  $y$  ose i da svaki inicijalni prostor predstavlja jedan radijan. Ukoliko je potrebno izvršiti podešavanje prostora u svrhu analize kompletnog kruga oko  $y$  ose ( $360^\circ$ ), neophodno je pomnožiti sa  $2\pi$ .

Dvodimenzionalno podešavanje prostora je predviđeno da radi sa prethodno kreiranom dvodimenzionalnom mrežom i koristi se samo u slučajevima kada je potrebna analiza dvodimenzionalnog modela. Podešavanje ovog tipa prostora predviđa definisanje dubine modela, pa iz tog razloga svaka zapreminska ili površinska vrednost se unosi u funkciji po metru.

Trodimenzionalno podešavanje prostora je najkompleksnije podešavanje koje se koristi kod složenih modela koji poseduju trodimenzijalnu zapreminsku mrežu. Prostor se tako deli da su sve tri ose aktivne i iziskuju zasebno podešavanje.

#### ➤ **Vreme**

Uloga uvođenja pojma vremena u proces podešavanja fizike simulacionog modela je veoma značajan. Trajanje fizičkih procesa, priroda ponavljanja se definiše preko broja iteracija, odnosno zasebnih koraka trajanja simulacije, ili ubacivanjem stvarnog vremenskog intervala. Na osnovu tog uslova, procese prema trajanju je moguće podeliti na stacionarne (koji se ne menjaju tokom vremena) i njihovo trajanje se definiše direktno preko zadatog broja iteracija, i nestacionarne (imaju promene tokom vremena) kod kojih se definisane promene dešavaju u stvarnom vremenu i neophodno je njegovo podešavanje. Kod kontinualnih stacionarnih procesa podešavanje vremenskog koraka je nepotrebno. Primer za kontinualnog stacionarnog strujanja bi bila analiza proticanja fluidne struje kroz cevovod, s akcentom stavljenim samo na njegovo prostiranje i ponašanje unutar cevovoda. Proces se iznova ponavlja i njegovo trajanje se definiše samo preko broja iteracija simulacije što predstavlja broj analiziranih koraka neophodnih da se proces u potpunosti ustali. Sa druge strane kod procesa koji doživljavaju promene u funkciji vremene predstavljaju implicitno nestacionarne sisteme. Primer ovakvog tipa simulacije je model ubrizgavanja radne smeše u cilindar motora SUS. Trajanje kompletne simulacije direktno zavisi od dužine trajanja pojedinačnog ubrizgavanja i broja ponavljanja tog procesa. Trajanje procesa se definiše preko vremenskog koraka, odnosno količine individualnih delova procesa u funkciji vremena.

#### ➤ **Kretanje**

Ukoliko neki deo mreže, ili kompletna mreža modela iziskuje pomeranje (kretanje) u toku trajanja procesa simulacije, neophodno je uvesti podešavanje njegovog kretanja. Osnovna tri tipa kretanja koji se mogu podesiti su translacija, rotacija i zajedno translacija i rotacija. Kao mesto upotrebe uvođenja ovog tipa podešavanja bi moglo da bude ljučenje broda na talasima, rotacija blendi unutar mlaznog motora i dr. Podešavanje kretanja je direktno povezano sa njegovim trajanjem, odnosno podešavanjem vremena trajanja. Iz tog razloga i dužina trajanja kretanje se definiše kao stacionarno ili nestacionarno.

### 4.3.2. Materijal

Ubacivanje materijala, odnosno dodeljivanje radnog medija izdelfjenom mrežnom prostoru predstavlja veoma bitan deo podešavanja fizičkih svojstava modela i bez njega nije moguće pokrenuti proces simulacije i analize. Radni mediji predstavljaju skup fizičkih veličina koji opisuju stvarni razmatrani fluid ili čvrsti materijal. Najčešće korišćeni radni materijal ukoliko je reč o prostoru je gas ili tečnost, kao i njihova kombinacija. Takođe veoma česta kombinacija više različitih gasova po hemijskom sastavu, kao i više različitih tečnosti mogu sačinjavati radni prostor. Svaki dodeljeni materijal sadrži svoja termodinamička i fizička svojstva koja ga definišu kroz niz parametara. U CFD softverima najčešće je moguće pronaći tri različite grupe materijala. Prva grupa su pojedinačni materijali koji se mogu izabrati iz niza prethodno definisanih po karakterističnim fizičkim svojstvima, ili formirati novi po sopstvenim podešavanjima. Drugu grupu čine grupno izabrani materijali koji se sastoje od više pojedinačno usvojenih materijala istog agregatnog stanja. Najčešće više različitih gasova ili tečnosti. Treća grupa je karakteristična po višefaznoj kombinaciji materijala koji su različitog agregatnog stanja, npr. voda i vazduh. Ukoliko se analizira proces strujanje fluida unutar nekog sistema, ili prenos toplote, podešavanje materijala je neophodno.

### 4.3.3. Strujanje i energija

Veliki deo aerodinamičkih procesa koji se simuliraju pomoću CFD softvera sadrže neki vid strujanja fluidne struje i transformaciju i praćenja energetskih fenomena. Iz razloga velike učestalosti i potrebe za analizom ovakvih pojava, CFD softveri sadrže veoma razvijene matematičke modele zahvaljujući kojima je moguće simulirati veliki spektar problema kod kojih je strujanje bitan element. Najznačajniji matematički modeli, odnosno dva spektra podešavanja koji se koriste kao osnova za prikazivanje i opisivanje strujnih režima su simultani (*eng. Coupled flow*) model strujanja i energije i odvojeni (*eng. Segregated flow*) model strujanja i energije. Simultani model strujanja i energije rešava jednačine očuvanja mase i momenata istovremeno sa vremenom (ili pseudo vremenom), odnosno u funkciji vremena. Sve jednačine se rešavaju istovremeno i povezano. Ovo je vrlo složen pristup koji iziskuje više vremena i predviđen je za rešavanje strujanja poput kompresibilnih, strujanja kod kojih na posmatrani predmet deluju velike površinske sile ili neki energetski izvori. Dobra strana ovog režima je što se vreme trajanja simulacije ne menja sa usložnjavanjem mreže. Dobijena rešenja su veoma precizna, ali često i suviše detaljna ukoliko se radi o nekom jednostavnijem problemu gde strujanje nije presudno na proces simulacije. Odvojeni model strujanja rešava jednačine strujanja pojedinačno (po jednu za svaku komponentu brzine i pritiska). Koristi se za prikazivanje nekompresibilnih strujnih režima ili blago kompresibilnih režima, pri nižim vrednostima Reynoldsovog broja. Oba prethodno pomenuta modela strujanja sadrže neke obavezne oblasti i podešavanja kao što su: viskozni režim, jednačine stanja, gravitacija, itd.

#### ➤ Viskozni strujni režimi

Zahvaljujući viskoznim režimima, putem CFD simulacija moguće je tačno podesiti strujni režim koji u potpunosti odgovara stvarnom analiziranom problemu. Kod viskoznih režima najznačajniji su laminarno i turbulentno strujanje, prelazni strujni režimi i idealizovani strujni režim. Najjednostavniji režim strujanja predstavlja idealizovani oblik strujanja kod koga se mogu zanemariti viskozni uticaji u jednačinama kretanja. Ovim postupkom pojednostavljenja Ojlerovih jednačina značajno se lakše dolazi do rešenja uz uštedu vremena i računarskih resursa. Granični slojevi modela, kao i ostali viskozni efekti su zanemareni. Upotreba ovog

pojednostavljenog strujnog režima je opravdana pri određenim fizičkim fenomenima, kao što su velike vrednosti Reynoldsovog broja u kompresibilnoj aerodinamici. Laminarni i turbulentni strujni režimi su stvarni i prisutni u prirodi i iz tog razloga su i najviše u upotrebi u procesu simulacija. Dobro poznati laminarni strujni režim je karakterističan sa nižim vrednostima Reynoldsovog broja, dovoljnim da ne dolazi do formiranja vrtložnog kretanja, karakterističnog za turbulentni režim strujanja. Laminarni strujni režim se koristi isključivo u situacijama kad se tačno zna da vrednost Reynoldsovog broja u toku simulacije neće izaći iz laminarne oblasti. Ukoliko se dogodi se se izađe iz laminarne oblasti, simulacije se neće moći završiti. Za simulacije kod kojih se ne zna tačan ishod strujnog režima, preporučuje se upotreba prelaznog strujnog režima kod koje je moguće analizirati i laminarno i turbulentno strujanje. Takođe ukoliko se vrednost Reynoldsovog broja kreće u oblasti izlaska iz laminarnog režima i početka turbulentnog, pogodan je prelazni strujni režim. S aspekta spoljašnje aerodinamike motornih vozila najznačajniji strujni režim je turbulentno strujanje i u nastavku je detaljno prikazano njegovo podešavanje.

Turbulentno strujanje je karakteristično sa stalnim, promenjivim, nestabilnim stanjem kretanja fluidne struje, uz česte promene malih razmera sa velikom frekvencijom ponavljanja kako u prostornom, tako i u vremenom domenu. Moguće je simulirati turbulentno strujanje direktnim rešavanjem jednačina uz pomoć direktna numeričke simulacije, koja je objašnjena u prethodnim poglavljima. Ovakav postupak iziskuje veoma složenu analizu i veliku angažovanost kompjuterkih resursa, uz dugo trajanje simulacije. Simuliranje realnog turbulentnog strujanja uz pomoć direktna numeričke simulacije predstavlja preveliko opterećenje. Iz tog razloga se praktikuje selektivno podešavanje turbulentnog strujnog modela. Osim standardnih podešavanja i analize turbulentnih strujanja poput modela Simulacije velikih vrtloga – LES, Reynoldsovog osrednjenog Navijer-Stoksovog modela – RANS, koji su prikazani kroz prethodna poglavlja, koriste se i dodatna podešavanja, tj. predefinisani modeli. U CFD softverima ta dodatna podešavanja se označavaju kao podešavanje tipova turbulentnog strujnog režima, dok se prethodno pomenuti modeli (LES, RANS...) smatraju podrazumevanim po kojima softver vrši izračunavanja i iz tog razloga ih nije potrebno dodatno odabirati. Prema CFD softveru je moguće pronaći nekoliko modela turbulentnog strujanja poput Spalart-Allmaras model, K-Epsilon, K-Omega, Reynolds Stress Transport model.

#### *Spalart-Allmaras model*

Spalart-Allmaras model turbulentnog strujanja [41] rešava pojedinačnu jednačinu transporta koja određuje turbulentnu viskoznost. Ovaj pristup se dosta razlikuje od prethodno objašnjenih jedno-jednačinskih modela za rešavanje jednačina transporta kinetičke energije turbulentnog strujanja koje su zahtevale algebarski definisanu dužinsku veličinu analiziranog modela. Ovakav originalni model je razvijen najviše zbog potreba avionske industrije, a prednost mu se ogleda u lakoj čitljivosti rezultata i brzom implementaciji u CFD softveru, što je do tada predstavljao ozbiljan problem kroz upotrebu modela poput *Baldwin-Lomax* [42] i *Johnson-King* [43] modela. Autori originalnog Spalart-Allmaras modela su rezultate za analizirani granični sloj ili strujanje prikazivali odvojeno, kao na primeru strujanja neposredno iza krila aviona. Ovakav pristup se pokazao opravdanim nakon postizanja veoma dobrih rezultata. Ipak pri simuliranju strujanja u oblastima slobodnog širenja fluidne struje, kao što je npr. oblast izlaska fluidne struje iz mlaznih motora, nije postignut zadovoljavajući rezultat [44]. Transportna jednačina Spalart-Allmaras modela turbulentnog strujanja je prikazana u izrazu 4.1., gde je sa  $S_{\bar{v}}$  označen definisani izvor,  $\bar{v}$  izmenjena turbulentna difuznost,  $G_{\bar{v}}$  turbulentni proizvod,  $Y_{\bar{v}}$  turbulentno rasipanje (disepacija),  $\sigma_{\bar{v}}$  turbulentni Šmitov broj. Desna strana nakon znaka jednakosti označava difuziju, proizvod i rasipanje energije

[39]. Takvi problemi kod kojih je izraženo složenije kružno strujanje i sile koje deluju na model, iziskuju rešavanje dvo-jednačinskih modela kao što su K-Epsilon, K-Omega i Reynolds Stress Transport model.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V \rho \tilde{v} dV + \int_A \rho \tilde{v} (V - V_g) \cdot da = \\ & = \frac{1}{\sigma_{\tilde{v}}} \int_A (\mu + \rho \tilde{v}) \nabla \tilde{v} \cdot da + \int_V [C_{b2} \rho (\nabla_{\tilde{v}} \cdot \nabla_{\tilde{v}}) + G_{\tilde{v}} - Y_{\tilde{v}} + S_{\tilde{v}}] dV \end{aligned} \quad (4.1.)$$

### *K-Epsilon model*

Ovaj model turbulentnog strujanja se zasniva na dvo-jednačinskom pristupu za rešavanje jednačine transporta kinetičke energije  $k$  i stopu njegovog odvajanja  $\varepsilon$ . Veliki broj varijanti K-Epsilon modela turbulentnog strujanja je u upotrebi poslednjih decenija i predstavlja najširi rasprostranjeni model strujanja koji je našao upotrebu u industriji. U originalnoj formi, K-Epsilon model je korišćen u kombinaciji sa podešavanjima vezanim za granične uslove, koji predstavljaju niz matematičkih jednačina za opisivanje pojava u neposrednoj blizini prostornih granica modela. Daljim unapređenjem ovog modela turbulentnog strujanja došlo se do niza podmodela koji u osnovi koriste standardni K-Epsilon model, ali je konačno izvođenje modela prilagođeno konačnoj upotrebi. Iz tog razloga su razvijeni K-Epsilon model za niske vrednosti Rejnoldsovog broja, kao i za Dvoslojni K-Epsilon model. Standardni K-Epsilon model predstavlja originalna podešavanja turbulentnog strujnog režima koji se sastoji od dvo-jednačinskog pristupa rešavanja transporta kinetičke energije  $k$  i stope njenog odvajanja  $\varepsilon$ . Transportnu jednačinu su razvili Jones i Launder [45], dok su koeficijenti razvijeni od strane Launder i Sharma [46]. K-Epsilon model za niske vrednosti Rejnoldsovog broja se koristi za rešavanje jednačina viskoznih podslojeva. Najznačajniji pristup po čemu se ovaj model razlikuje od ostalih je uvođenje prigušne funkcije za neke, ili sve koeficijente u modelu ( $C_\mu, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}$ ). Ove prigušne funkcije menjaju koeficijente kao funkcije turbulentnog Rejnoldsovog broja, često uključujući i raspojanje od prostornih granica. Dvoslojni K-Epsilon model, koji je prvi put prikazao Rodi [47], predstavlja alternativu za K-Epsilon model za niske vrednosti Rejnoldsovog broja i dozvoljava K-Epsilon modelu da primenu u viskoznim podslojevima. Pomoću ovog pristupa računarski se turbulentni sloj deli na dva sloja, od kojih je jedan lociran tik uz prostornu granicu (zid), a drugi na rastojanju koji odgovara debljini prvog sloja. Sloj uz prostornu granicu je definisan svojom stopom turbulentnog odvajanja  $\varepsilon$  i turbulentnom viskoznošću  $\mu_t$  koje su u funkciji rastojanja od prostorne granice. Jednačina turbulentne kinetičke energije se rešava na osnovu ulazne turbulentne struje. Model transporta kinetičke energije K-Epsilon turbulentnog strujanja je dat kroz jednačine 4.2. i 4.3.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V \rho k dV + \int_A \rho k (v - v_g) \cdot da = \\ & = \int_A \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \cdot da + \int_V [G_k + G_{nl} + G_b - \rho ((\varepsilon - \varepsilon_0) Y_M) + S_k] dV \end{aligned} \quad (4.2.)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V \rho \varepsilon dV + \int_A \rho \varepsilon (v - v_g) \cdot da \\ & = \int_A \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \cdot da + \int_V \frac{1}{T} [C_{\varepsilon 1} (G_k + G_{nl} + C_{\varepsilon 3} G_b) - C_{\varepsilon 2} \rho (\varepsilon - \varepsilon_0) + \rho Y_\varepsilon + S_\varepsilon] dV \end{aligned} \quad (4.3.)$$

Sa  $\varepsilon_0$  je označena vrednost turbulentnog strujanja koja vlada u okolini,  $S_k$  i  $S_\varepsilon$  predstavljaju izvore turbulentnog strujanja,  $k$  kinetička energije turbulentne struje,  $Y_M$  dilataciono rasipanje energije.

### K-Omega

K-Omega model turbulentnog strujanja predstavlja dvo-jadnačinski model, napravljen kao alternativa za prethodno objašnjen K-Epsilon model. Transportna jednačina se rešava za kinetičku energiju  $k$ , ali drugi element nije stopa odvajanja  $\varepsilon$ , kao što je bio slučaj sa K-Epsilon modelom, već preko čelijske količine  $\omega$ . Čelijska količina je definisana preko stope specifičnog odvajanja, što zapravo predstavlja stopu odvajanja po jedinici turbulentne kinetičke energije ( $\omega \approx \frac{\varepsilon}{k}$ ). Knjiga D.C. Wilcox [44] predstavlja najkompetentniji izvor za K-Omega model turbulentnog strujanja u kojoj se osim prikaza originalnog modela stavlja akcenat na poređenje sa ostalim modelima turbulentnog strujanja. Kao sam tvorac K-Omega modela, Wilcox jasno stavlja do znanja superiornost svog modela u odnosu na ostale, pre svega K-Epsilon, najviše u smislu transportne jednačine kinetičke energije. Jedan od značajnih prednosti ovog modela se ogleda u unapređenju karakteristika graničnog sloja ispod štetnog gradijenta pritiska. Ipak možda najznačajnija prednost je mogućnost primene modela kroz granični sloj, uključujući i oblast sa dominantnom viskoznošću bez dodatnih modifikacija. Standardni K-Omega model se može koristiti bez zahteva o definisanju rastojanja od prostorne granice. Najveći nedostatak K-Omega modela u originalnoj formi se ogleda u činjenici da je granični sloj računarski veoma osetljiv na vrednost  $\omega$  u slobodnoj fluidnoj struji. Ovaj problem ne postoji kod K-Epsilon modela. Postoji više tipova K-Omega turbulentnog modela od koji su najznačajniji Standardni K-Omega model i SST K-Omega model.

Usavršavanjem svog prvobitnog K-Omega modela iz 1998. godine, Wilcox uvodi poboljšanja koja sprovodi 2006. kroz standardni K-Omega model [48]. Usavršavanja se sastoje od korigovanja koeficijenata, osetljivosti modela u slobodnoj fluidnoj struji, kompresibilnost i poboljšanje rada modela za niske vrednosti Rejnoldsovog broja i prelaznih strujnih režima. Transportne jednačine za standardni K-Omega model su prikazane jednačinama 4.4. i 4.5. [49]. Sa  $\omega_0$  i  $k_0$  su označene vrednosti turbulentne struje koje vladaju na izvoru pri ambijentalnim uslovima.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V \rho k dV + \int_A \rho k (\mathbf{v} - \mathbf{v}_g) \cdot d\mathbf{a} = \\ & = \int_A (\mu + \sigma_k \mu_t) \nabla k \cdot d\mathbf{a} + \int_V (G_k - \rho \beta^* f_{\beta^*} (\omega k - \omega_0 k_0) + S_k) dV \end{aligned} \quad (4.4.)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V \rho \omega dV + \int_A \rho \omega (\mathbf{v} - \mathbf{v}_g) \cdot d\mathbf{a} \\ & = \int_A (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \nabla \omega \cdot d\mathbf{a} + \int_V (G_\omega - \rho \beta f_\beta (\omega^2 - \omega_0^2) + S_\omega) dV \end{aligned} \quad (4.5.)$$

Kroz model SST K-Omega (*eng. Shear-Stress-Transport*) Menter [50] u potpunosti rešava problem osetljivosti modela u slobodnoj fluidnoj struji tako što prepoznaje da  $\varepsilon$  u transportnoj jednačini standardnog K-Epsilon modela može biti transformisan sa  $\omega$  transportnoj jednačinom preko zamene promenljivih. Dobijeni oblik transportne jednačine je veoma sličan K-Omega modelu uz dodavanje elemenata koji sadrže proizvod  $\nabla k \cdot \nabla \omega$ . Ovim

dodavanjem K-Omega model se približava rezultatima koji su bili mogući samo upotrebom K-Epsilon modela. K-Omega SST model je našao svoje mesto primene u avionskog industriji gde je prisutno viskozno strujanje i turbulentni modelu se koriste za granične slojeve.

#### *Rejnoldsov naponsko transportni model*

Rejnoldsov naponsko transportni model (*eng. Reynolds Stress Transport model-RST*) predstavlja jedan od najkompleksnijih modela koji opisuju turbulentno strujanje u CFD softverima. Rešavanjem transportnih jednačina za sve komponente specifičnog Rejnoldsovog naponskog vektor  $R = -T_t/\rho \equiv \overline{v'v'}$ , analiziraju se razne pojave kao što su anizotropija snažnih vrtložnih kretanja, prostiranje strujnica, itd. Ovaj model značajno usložnjava postupak obrade rezultata što utiče na neophodnu performanse računara, kao i vreme trajanja simulacija. Složenost se ogleda u činjenici da se istovremeno rešavaju dodatnih sedam jednačina u tri dimenzije, u odnosu na dve jednačine kod K-Epsilon modela. Razlog ovako složenog rešavanja je simetrični Rejnoldsov naponski vektor i samo šest od ukupno devet članova su konstantni. Kao dodatak na šest jednačina za Rejnoldsov naponski vektor je transportna jednačina za izotropsko turbulentno odvajanje  $\epsilon$ . Ova dodatna jednačina predstavlja istu koja je u upotrebi kod standardnog K-Epsilon modela. Kod rešavanja problema u dve dimenzije, Rejnoldsov naponski vektor se računa preko četiri jednačine. Početak razvoja RST modela se vezuje za diferencijalne transportne jednačine Rejnoldsovih napona i usložnjavanjem Navijer-Stoksovih jednačina. Upotreba ovog modela turbulentnog strujanja je u velikom usponu poslednjih decenija [51][52]. Transportna jednačina za specifičan Rejnoldsov naponski vektor  $R \equiv \overline{v'v'}$  je data kroz jednačinu 4.6., gde desna strana od znaka jednakosti predstavlja difuziju, turbulentni proizvod, turbulentno rasipanje, dilataciono rasipanje i naponski pritisak [39].

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_V \rho R dV + \int_A \rho R (\mathbf{v} - \mathbf{v}_g) \cdot d = \\ & = \int_A D \cdot da + \int_V \left[ P + G - \frac{2}{3} \rho I (\epsilon + Y_M) + \Phi + S_R \right] dV \end{aligned} \quad (4.6.)$$

#### ➤ **Jednačine stanja**

Jednačine stanja se koriste za izračunavanje parametara sredine, kao što je vrednost gustine ili njeno dobijanje preko temperature i pritiska. U CFD softverima je moguće pronaći veliki broj izvedenih modela za opisivanje sredine putem jednačina stanja, od kojih je nekoliko značajnih za ovaj rad prikazano u nastavku.

#### *Model konstantne gustine*

Podešavanjem ovog modela se postiže vrednost konstantke gustine zadatoj prostornoj granici i njena vrednost se neće menjati u vremenu duž trajanja simulacije. Konstantna gustina se može dodeliti gasovima, tečnostima ili čvrstim prostornim granicama.

#### *IAPWS-IF97 model*

Model IAPWS-IF97 (*eng. International Association for the Properties of Water and Steam – Industrial Formulation 1997*) se koristi za simulacije tečnih i gasovitih strujanja. Model uključuje izračunavanje gustine i druga termodinamička svojstva sredine, preko osnovnih polinomskih jednačina za specifičnu Gibsovu slobodnu energiju (*eng. Specific Gibbs Free*

Energy)  $G(p, T)$ . Pod Gibsovom slobodnom energijom se podrazumeva termodinamički potencijal koji izražava meru korisnosti ili inicijalni rad dobijen termodinamičkim procesom na konstantnoj temperaturi i pritisku (izotermni i izobarski proces). Takođe je maksimalna količina neekspanzionog rada koji se može dobiti u zatvorenom sistemu. Jednačina 4.7. predstavlja definiciju Gibsove slobodne energije, gde su sa  $U$  označeni unutrašnja energija,  $p$  pritisak,  $V$  zapremina,  $T$  temperatura,  $S$  entropija i sa  $H$  entalpija [53].

$$G(p, T) = U + pV - TS$$

ili

$$G(p, T) = H - TS \quad (4.7.)$$

Specifična zapremina, unutrašnja energija, entropija, entalpija, toplotni kapacitet i brzina zvuka se izračunavaju preko osnovne jednačine uzimajući odgovarajuću kombinaciju bezdimenzionalne Gibsove slobodne energije i njenih izvoda. Model IAPWS-IF97 je jedino tačan i upotrebljiv za precizno definisan opseg temperature i pritiska. U dodatna podešavanja modela ulaze i podešavanje vrednosti kritičnog pritiska, kritične temperature, dinamičke viskoznosti, molekularne težine, brzine zvuka i toplotna provodljivost [39].

#### Model idealnog gasa

Model idealnog gasa je dostupan za gasnu agregatnu sredinu, koristi jednačinu stanja idealnog gasa za opisivanje gustine, u funkciji pritiska i temperature. Jednačina stanja idealnog gasa uz neka ograničenja veoma dobro opisuje ponašanje velikog broja realnih gasova. Jednačina 4.8. predstavlja jednačinu idealnog gasa prema kojoj je formiran model.

$$pV = nRT \quad (4.8.)$$

Sa  $n$  je označen broj mologa gasa, dok  $R$  predstavlja univerzalnu gasnu konstantu koja iznosi  $8,314472 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ .

#### Model stvarnog gasa

Ovaj model se koristi u situacijama gde podešavanja idealnog gasa nisu dovoljna za opisivanje realnog stanja, npr. gas u blizini tačke kondenzacije, u blizini kritičnih vrednosti prelaznih režima, i u slučajevima ekstremnih vrednosti pritiska. Stvarni model gasa uzima u obzir fenomene koji prevazilaze oblast idealnog gasa, kao što je kompresibilnost, specifični toplotni kapacitet, itd. U CFD softverima je moguće pronaći nekoliko definisanih modela stvarnog gasa: Peng-Robinson model, Redlich-Kwong model, Soave-Redlich-Kwong model i već pomenuti IAPWS-IF97 model [39].

#### 4.3.4. Prenos toplote

Prenos toplote predstavlja proces prelaska toplotne energije preko temperaturnih razlika u medijumu ili između različitih medijuma. Prenos toplote obuhvata termodinamičku analizu kroz režime energetskog transfera i razvoja relacija za njihovo izračunavanje. Ovaj proces se sastoji od tri režima: Provodljivost, Prelaženje i Zračenje. U mnogim situacijama, prenos toplote se opisuje preko prelaženja i termodinamičkih podešavanja fluida (npr. gustina, materijal i fluidna viskoznost) i faza promene (npr. kondenzacija, topljenje, isparavanje i zamrzavanje).

##### ➤ Toplotna provodljivost

Toplotna provodljivost (*eng. Heat conduction*) predstavlja proces toka unutrašnje energije iz oblasti sa višom temperaturom u oblast sa nižom temperaturom uz međusobnu vezu između susednih čestica (npr. atoma, molekula, jona ili elektrona). Ovaj proces se može zapisati kao

prelazak energije sa viših energetske nivoa na niže energetske nivoa određene supstance sa međusobnom vezom između njih. Toplotna provodljivost je prisutna kod svih agregatnih stanja materije, kao što su gas, tečnost, čvrsta faza i plazma. Kod čvrstih tela, toplotna provodljivost se manifestuje kombinacijom molekularnih vibracija u rešetci i rasprostiranjem slobodnih elektrona. Kod tečnosti i gasova se predstavlja kao veza između molekula i rasprostiranja molekula tokom njihovog nasumičnog kretanja. Toplotna provodljivost je najizraženije kod čvrstih tela jer je veza između atoma najjača i atomi su na najmanjem međusobnom rastojanju, što nije slučaj kod gasova i tečnosti. Izračunavanje toplotne provodljivosti se vrši preko zakona toplotne provodljivosti ili preko Furijeovog zakona koji obezbeđuje izračunavanje lokalnog toplotnog fluksa. Zakon može biti održiv u dva oblika: integralnom obliku koji obuhvata količinu toplotne energije koja izlazi ili ulazi u analizirano telo (celo telo), ili diferencijalnom obliku koji obuhvata energetska stopu ili fluks za određeni deo (lokalno). Diferencijalni oblik je zapisan preko jednačine 4.9. u kojoj je sa  $q'' [W/m^2]$  označen lokalni vektor toplotnog fluksa, sa  $k [W/mK]$  toplotna provodljivost materijala i sa  $T$  temperatura.

$$q'' = -k\nabla T \quad (4.9.)$$

Toplotna provodljivost materijala može biti u funkciji temperature i pritiska. Negativan znak u jednačini 4.9. dolazi zato što je  $k > 0$  i toplota uvek prelazi iz oblasti više temperature u oblast sa nižom temperaturom (Drugi zakon termodinamike). Toplotna provodljivost zavisi od materijala do materijala i najveća je za metalne čvrste predmete, manja za čvrste nemetalne predmete, mala za tečnosti i veoma mala za gasove.

### ➤ Toplotno prelaženje

Toplotno prelaženje (*eng. Heat convective*) predstavlja proces prelaska toplotne energije između površine i fluida koji struji oko površine. U osnovnoj je upotrebi za podešavanje graničnih uslova kada je rešavanje toplotnih problema prouzrokovano od strane fluida ili čvrstog tela. Primeri toplotnih prelazaka se mogu pronaći kod hlađenja električnih uređaja, izmenjivače toplote i sl. Toplotno prelaženje se sastoji od dva pristupa: energetska prelazak uz nasumično kretanje molekula (difuzija) i energetska prelazak uz kretanje fluida većih razmera (kretanje većih grupa molekula fluida zajedno). Energetska prelazak uz nasumično kretanje molekula je dominantan u blizini površina gde je fluidna viskoznost veoma mala. Toplotni prelazak se može opisati kao prirodni (slobodni) ili prinudni.

#### *Prirodno toplotno prelaženje*

U prostoru gde vladaju gravitacione sile, prirodno toplotno prelaženje je pojava usled temperaturnih razlika koja ima uticaja na gustinu i tečljivost fluida. Prirodno toplotno prelaženje je značajno izraženije ukoliko postoji veća razlika u gustinama između fluida, većim ubrzanjima čestica fluida i većim rastojanjima predviđenim za toplotno prelaženje. S druge strane, ukoliko je fluid viskozniji (lepljiviji), prirodno toplotno prelaženje će biti manje prisutno. Do određene količine prirodno toplotno prelaženje je moguće i može se smatrati da je bezdimenzioni Rejljev broj određen i predstavlja odnos tečljivosti i viskoznih sila pomnoženih odnosom momenta i toplotne difuznosti. Prirodno toplotno prelaženje se smatra mogućim ukoliko je vrednost Rejljevog broja prelazi  $10^5$ .

#### *Prinudno toplotno prelaženje*

Kod prinudnog toplotnog prelaženja, fluidno kretanje je rezultovano nekim spoljašnjim izvorom (npr. ventilatorom, pumpom, propelerom i sl.). Prinudno toplotno prelaženje se obično koristi za povećanje stope toplotnog prelaska na površine u uređajima za hlađenje ili



grejanje. U slučajevima kombinovanog toplotnog prelaženja, gde je prisutno i prirodno i prinudno toplotno prelaženje, moguće je odrediti količinu pojedinačnih prelaženja preko relativnih rezultanti Rejljevog, Prandtlovog i Rejnoldsovog broja. U jednačinama 4.10. i 4.11. je prikazano utvrđivanje tipa toplotnog prelaženja preko pomenutih bezdimenzionalnih brojeva.

$$\frac{R_e}{R_r R_a^2} \gg 1 \rightarrow \text{prirodno toplotno prelaženje} \quad (4.10.)$$

$$\frac{R_e}{R_r R_a^2} \ll 1 \rightarrow \text{prinudno toplotno prelaženje} \quad (4.11.)$$

Ukoliko je dobijena vrednost iz prethodnih jednačina veoma bliska 1, oba toplotna prelazna režima su prisutna. Toplotno prelaženje se može zapisati preko Njutnovog zakona hlađenja i dobija oblik kao u jednačini 4.12.

$$q_s'' = h(T_s - T_{ref}) \quad (4.12.)$$

U jednačiji 4.12. sa  $q_s'' [W/m^2]$  je izražen lokalni toplotni fluks na površini,  $h [W/m^2K]$  je lokalni koeficijent toplotnog prelaženja,  $T_s$  temperatura površine, a sa  $T_{ref}$  karakteristična temperatura prelaska fluida preko površine. Njutnov zakon hlađenja prikazuje linearnu zakonitost između toplotnog lokalnog fluksa površine i razlike između lokalne površine i fluidne temperature. Ova linearna zavisnost je samo aproksimacija, u stvarnosti ona može veoma odstupati od linearnosti. Uslovi koji vladaju u fluidnoj struji mogu biti različiti od tačke do tačke, što implicira da  $q_s''$  i  $h$  variraju u funkciji vremena i prostora.

### ➤ Zračenje

Toplotno zračenje (*eng. Thermal radiation*) predstavlja emisiju elektromagnetnih talasa od strane svih tela koja imaju temperaturu višu od apsolutne nule i manifestuje se kao prelazak toplotne energije u elektromagnetnu. Ovaj proces je prouzrokovan toplotnim kretanjem naelektrisanih delova tela, što za posledicu ima ubrzanje naelektrisanja i dipolarno oscilovanje. Ovo elektrodinamičko kretanje u kombinaciji sa električnim i magnetnim poljem prouzrokuje emitovanje toplotnog zračenja. Svi tipovi agregatnih stanja tela emituju određenu količinu toplotnog zračenja. Kod gasova ili nekih polu prozirni materijala (npr. staklo ili kristali soli na povišenoj temperaturi) zračenje je zapreminski fenomen (zračenje ima integralni karakter lokalnog zračenja kroz zapreminu). Kod većine čvrstih tela i tečnosti, zračenje dolazi od unutrašnjih molekularnih veza koje su dosta čvršće povezane nego kod gasova. Iz razloga što je zračenje najizraženije između molekula u blizini površine tela, često se zračenje smatra kao površinski fenomen. Širenje elektromagnetne energije se može opisivati na raznim nivoima složenosti, ali u najvećoj meri zavisi od karakteristika polja zračenje koje se predstavlja. Na primer ukoliko je polarizacija značajna za analizu, preko Tokesovih parametara će biti opisan intenzitet polja polarizacije. Ako je efekat talasa od interesa, intenzitet vektora količine talasa dobijen iz teorije elektromagnetizma se izračunava kao električni vektor i magnetni vektor. Efekat talasa je veoma značajan kada karakteristična dužina razmere za kretanje (npr. rastojanje između površina) ima istu vrednost kao i sama dužina talasa. Za većinu uređaja u kojima dolazi do kretanja toplotnih čestica, odnosno razmene toplote, toplotno zračenje se opisuje kao nepolarizovano (višestruko odbijanje – refleksija i rasipanje dovodi do ukidanja efekta polarizacije) i inkoherentno (talasi i/ili fotoni su često izvan faze). Maksimalni fluks pri kojem zračenje može biti emitovano sa površine je dato preko Stefan-Bolcmanovog zakona, koji je prikazan u jednačini 4.13.

$$q_{bb}'' = \sigma T_s^4 \quad (4.13.)$$

U prethodnoj jednačini se površinom smatra idealno grejno telo ili tzv. zračenje crnog tela i sa  $q_{bb}'' [W/m^2]$  je označen lokalni toplotni fluks površine,  $T_s$  je temperatura površine,  $\sigma$  je

Stefan-Bolcmanova konstanta ( $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} [W/m^2 K^4]$ ). Toplotno zračenje stvarnih tela je manje nego kod idealnog grejnog tela i izraz za toplotni fluks je dat u jednačini 4.14.

$$q_e'' = \varepsilon q_{bb}'' = \varepsilon \sigma T_s^4 \quad (4.14.)$$

Sa  $\varepsilon$  je izražena mera relativne površinske sposobnosti da emituje toplotno zračenje i kreće se u granicama  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ .

U slučaju toplotnog zračenja na neku površinu, deo energije se apsorbuje, deo se odbija i emituje dalje, a deo propušta kroz materijal. U tom slučaju izraz dobija oblika kao u jednačini 4.15.

$$q_{inc}'' = q_{abs}'' + q_{ref}'' + q_{trans}'' = \alpha q_{inc}'' + \rho q_{inc}'' + \tau q_{inc}'' \quad (4.14.)$$

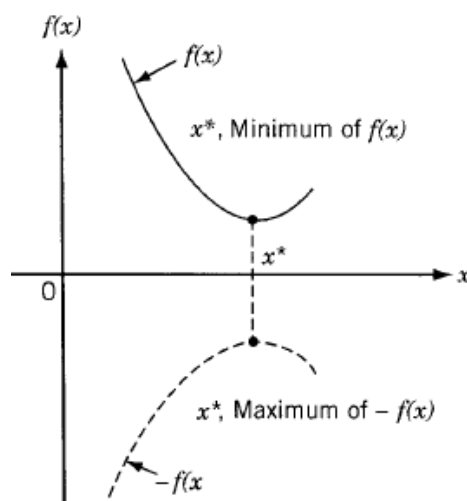
Sa  $\alpha$  je označen koeficijent površinske apsorpcije ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ),  $\rho$  je koeficijent odbijanja, odnosno refleksije ( $0 \leq \rho \leq 1$ ) i  $\tau$  je koeficijent površinske propustljivosti ( $0 \leq \tau \leq 1$ ). Apsorbicija, refleksija i propustljivost zavise od temperature površine, površinske hraparosti, ugla pod koji se vrši emitovanje zračenja na površinu i talasne dužine zračenja [39].

U okviru podešavanja fizičkih svojstava modela, CFD softveri osim prethodno navedenih i objašnjenih podešavanja modela za prostor, vreme i kretanje, materijala, strujanja i energije i njihovih podmodela, svakako predstavljaju najznačajnija podešavanja, postoji i veliki broj dodatnih modela podešavanja. Njihovo aktiviranje i ubacivanje u simulaciju direktno zavisi od zahteva korisnika i njegovih afiniteta. Neki od takvih modela mogu biti: Model akustike, sagorevanja, elektromagnetizma, elektrohemijski model, model baterija, itd. Ovi modeli nisu korišćeni u okviru doktorske disertacije i iz toga razloga nisu dalje razmatrani.

## 5. Optimizacija

### 5.1. Osnovna razmatranja

Optimizacija predstavlja umetnost pribavljanja najboljih rezultata unutar zadatih okolnosti. U dizajnu, konstruisanju, održavanju svakog inženjerskog sistema, inženjeri moraju donositi mnoge tehnološke i menadžmentske odluke kroz svaku od faza proizvodnje, rada i kontrole finalnog proizvoda. Krajnji cilj je postizanje željenih, maksimalnih koristi uz minimalno uloženi napor. Uloženi napor ili ostvarena korist u bilo kojoj praktičnoj situaciji može biti izražen kao funkcija određenih promenljivih definisanih preko odluka korisnika. Iz tog razloga, optimizacijom se može smatrati proces traženja uslova koji daju maksimalnu ili minimalnu vrednost zadate funkcije. Na slici 5.1 je prikazan slučaj u kome tačka  $x^*$  predstavlja minimalnu vrednost funkcije  $f(x)$ , ali istovremeno ista tačka  $x^*$  predstavlja maksimalnu vrednost negativne funkcije  $-f(x)$ . Uzimajući prethodni slučaj u obzir, optimizacijom se može podrazumevati minimalizacija jer se maksimum funkcije može pronaći i preko minimuma negativne vrednosti iste funkcije.

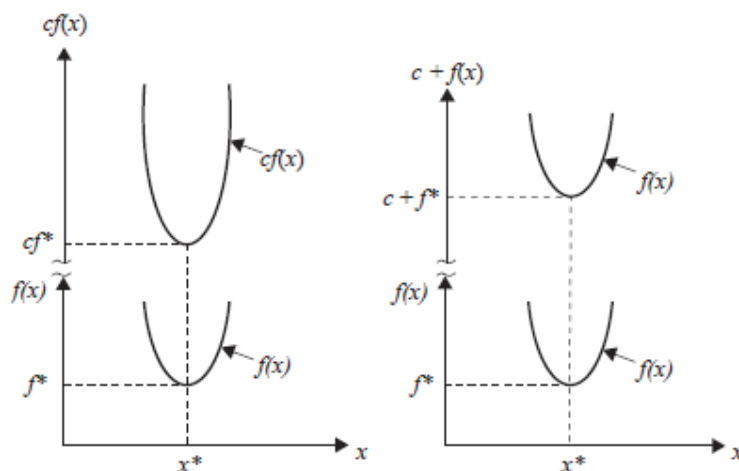


Slika 5.1 – Minimum funkcije  $f(x)$  i maksimum funkcije  $-f(x)$  [54]

Optimalna vrednost funkcija sa slike 5.1 u tački  $x^*$  neće biti promenjena ukoliko se funkcija  $f(x)$  pomnoži poznatom pozitivnom konstantom  $c$ , ili ukoliko se funkciji  $f(x)$  pridoda poznata pozitivna konstanta  $c$ . Slika 5.2 prikazuje prvobitnu funkciju  $f(x)$  i novoformirane funkcije  $cf(x)$  nakon množenje i  $c + f(x)$  nakon sabiranja funkcije  $f(x)$  poznatom konstantom  $c$ .

U praksi ne postoji jedinstvena optimizaciona metoda za rešavanje svih optimizacionih problema. Stoga, broj optimizacionih metoda je razvijen za rešavanje različitih tipova optimizacionih problema. Metode traženja optimalnih rešenja, poznate i kao matematičke programske tehnike, se izučavaju kao deo operativnih istraživanja. Operativno istraživanje je deo matematike koja koristi različite naučne metode i tehnike za izražavanje problema donošenja odluka i predviđanja najboljih, optimalnih rešenja. Početak operativnog istraživanja se vezuje za period Drugog Svedskog Rata. Tokom rata Britanska vojska se susretala sa problemima organizacije i rasporeda pozicioniranja veoma ograničenih sredstava (borbeni avioni, podmornice, radari...) prema nekoliko aktivnosti (raspodela prema brojčanim ciljevima i destinacijama). Iz razloga što nije postojalo sistematičkih metoda za rešavanje problema ovog tipa, vojska je okupila tip matematičara kako bi razvili metode za

rešavanje vojnih problema kroz naučni pristup. Razvijene metode su se pokazale ključne za razne vazdušne pobjede Britanije tokom rada. Jedna od razvijenih metoda je linearno programiranje koja je direktno uključena u planiranje vojnih operacija i još je poznata kao začetnih metoda operativnih istraživanja.



Slika 5.2 – Optimalne vrednosti funkcija  $cf(x)$  i  $c + f(x)$  iste kao u  $f(x)$  [54]

Tehnike matematičkog programiranja su veoma korisne za pronalaženje minimuma funkcija sa nekoliko promenljivih unutar propisanog skupa ograničenja. Stohastičke tehnike se mogu koristiti za analizu problema opisanih preko skupa nasumično biranih promenljivih, još poznatih kao raspodela verovatnoće. Statističke metode uključuju analizu eksperimentalnih podataka i kreiranje empirijskih modela za najtačnije prikazivanje fizičkih stanja [54].

### 5.1.1. Istorijska podloga

Postojanje optimizacionih metoda se vezuje za vreme Njutna, Lagranža i Košija. Razvoj diferencijalnih računskih optimizacionih metoda je bio moguć zahvaljujući Njutnovoj i Lajbnikovoj raspodeli. Otkrićem računskih varijacija, korišćenih za traženje minimuma funkcija doprineli su Bernuli, Ojler i Lagranž. Optimizacione metode za rešavanje problema definisanih preko tačnih ograničenja, koje uključuju dodavanje nepoznatih množilaca, postaju poznate po imenu svog tvorca, kao Lagranžove metode. Uprkos ranom periodu svog nastanka, optimizacione metode su veoma malo napredovale do sredine dvadesetog veka, kada se upotreba digitalnih računara uključila u optimizacione procedure i stimulisala buduće istraživače da nastave sa njihovim razvojem i unapređenjem. Interesantan pogatak govori da je značajan razvoj u oblasti numeričkih optimizacionih metoda za probleme bez jasno definisanih ograničenja vezan za Britaniju šezdesetih godina prošlog veka. Dantzig je 1947. godine razvio jednostavan model linearnog programiranja i najavio razvoj optimizacione metode koju je 1957. sa Bellman-om razvio za dinamičko programiranje i rešavanje problema sa definisanim ograničenjima. Rad Kuhn-a i Tucker-a 1951. godine na uslovima neophodnosti i dovoljnosti optimalnih rešenja za programerske probleme, postali su osnova za buduća istraživanja u oblasti nelinearnih sistema. Iako ni jedna razvijena tehnika nije predstavljala univerzalni alat za rešavanje nelinearnih problema, Carroll, Fiacco i McCormick uspevaju razviti metod za rešavanje teških problema upotrebom dobro poznatih tehnika za rešavanje problema bez definisanim ograničenjima. Geometrijska programska tehnika razvijena je sredinom šezdesetih od strane Duffin, Zener i Peterson. Gomory je razvio osnovu celobrojnog programiranja, što predstavlja jedan od najznačajnijih oblasti modernog razvoja optimizacionih metoda. Potreba za optimizacijom koja uključuje više o jednog razmatranog

rešenja, odnosno objekata ispitivanja, uz zadovoljavanje fizičkih ograničenja, dovodi po razvoju više-objektivnih programskih metodata optimizacije. Ciljne metode spadaju u red veoma korišćenih više-objektivnih metoda i baziraju se na unapred definisanim ograničenjima i nekoliko mogućih rešenja, od kojih se daljom analizom odabira ono najbolje. Originalni oblik ciljnih optimizacionih tehnika, razvijenih 1961. od strane Charnes i Cooper su usmereni isključivo za rešavanje linearnih problema.

### ***Moderne optimizacione metode***

Moderne optimizacione metode, poznate i pod nazivom ne tradicionalne metode, su doživele nagli napredak i veliku popularnost od druge polovine prošlog veka. Poslednjih godina se koriste za rešavanje složenih inženjerskih problema, a uključuju genetički algoritam, metode bazirane na prirodnih fenomenima poput rojenja pčela u košnici ili kolonije mrava u mravinjaku, neuronske mreže, itd. Genetički algoritam je kompjuterizovan pristup pretrage optimizacionih algoritama, zasnovanih na mehanizmima genetike i prirodne selekcije. Genetički algoritam je prvi kreirao i upotrebio John Holland 1975. godine. Metode bazirane na pripodnoj socijalnoj organizaciji i ponašanju unutar kolonije insekata (pčele, termiti, mravi, ose), ptica ili riba postaju veoma upotrebljive u poslednjoj deceniji prošlog veka. Ovakav pristup optimizacije su razvili Kennedy i Eberhart 1995. godine. Optimizaciona metoda mravlje kolonije je zasnovana na organizaciji, hierarhiji i ponašanju mrava unutar mravinjaka, odnosno svoje kolonije. Korisna je za brzo rešavanje problema, kao u slučaju pronalaženja najbližeg puta do izvora hrane u svetu mrava. Značaj mravlje organizacije i implementacije iste u programsko istraživanje razvio je Marco Dorigo 1992. godine. Metode neuronskih mreža su zasnovane na moći računara da uz pomoć mnogo senzora analiziraju ponašanje nekog sistema preko snimanja velikog broja podataka. Podaci se posle obrađuju u svrhu dobijanja zaključaka o ponašanju sistema i njegovog daljem unapređenja ili uočavanja anomalija. Ova metoda je razvijena 1985. godine od strane Hopfield i Tank [54].

#### 5.1.2. Primeri optimizacije u inženjerskoj praksi

Optimizacione metode mogu biti upotrebljene za rešavanje velikog spektra inženjerskih problema i u svakodnevnoj upotrebi se mogu pronaći. U nastavku su navedena neka mesta u inženjerskom svetu gde se problemi rešavaju uz pomoć nekih od prethodno pomenutih optimizacionih metoda.

- Projektovanje aviona i ostalih vazduhoplovnih konstrukcija pri minimalizaciji težine
- Traženje optimalnih trajektorija za kosmičke letelice
- Projektovanje građevinskih struktura (zgrada, mostova, puteva...) pri najboljem iskorišćenju resursa, a najmanjoj ceni
- Dizajniranje optimalnih oblika turbina vetro generatora za smanjenje otpora i povećanje efikasnosti
- Optimizacija mašinskih elemenata i sklopova (zupčanika, vratila, ležajeva...) za smanjenje gubitaka, materijala, vremena izrade i cene, pri zadovoljavanju kvaliteta
- Projektovanje pumpi, turbina i izmenjivača toplote sa većom efikasnošću
- Optimalno projektovanje električnih mašina (elektro motora, generatora, transformatora) kako bi se povećala korisnost i životni vek, a smanjili troškovi i vreme proizvodnje

- Optimizacija planova proizvodnje, kontrole i rasporeda operacija unutar velikih proizvodnih pogova
- Analiza statističkih podataka i kreiranje empirijskih modela iz eksperimentalnih rezultata za najtačnije opisivanje nekog fizičkog fenomena
- Projektovanje mreže električnih vodova unutar velikih postrojenja uz najmanju količinu resursa i najmanje smetnje između njih
- Planiranje održavanja i zamene rezervnih delova velikih mašinskih sklopova
- Smanjenje vremena proizvoda provedenog na proizvodnoj traci traženjem najosetljivijih mesta u proizvodnom lancu
- ...

### 5.1.3. Predstavljanje optimizacionog problema

Svaki proces koji iziskuje optimizaciju može biti prikazan kao u izrazu 5.1.:

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \rightarrow \min f(x) \quad (5.1.)$$

uz ograničenja, izraz 5.2.:

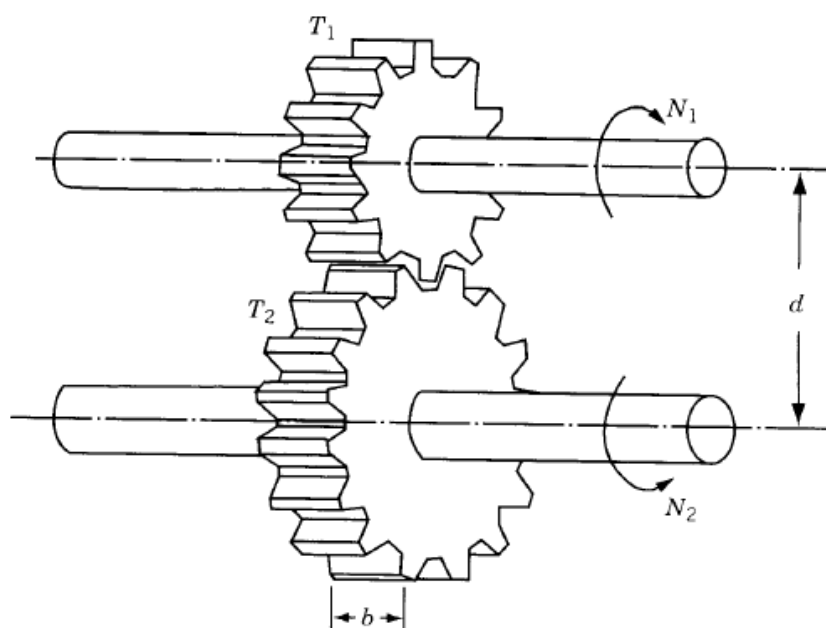
$$\begin{aligned} g_j(X) &\leq 0, & j &= 1, 2, \dots, m \\ l_j(X) &\leq 0, & j &= 1, 2, \dots, p \end{aligned} \quad (5.2.)$$

$X$  predstavlja optimizacioni vektor, zadat kao  $n$ -dimenzionalni vektor (*eng. Design vector*) koji je sklon menjanu u procesu optimizacije,  $f(x)$  označava traženu optimizacionu funkciju cilja, a  $g_j(X)$  neravnopravna zadata ograničenja i  $l_j(X)$  su ravnopravna zadata ograničenja. Nije neophodno da su broj promenljivih  $n$  i broj zadatih ograničenja  $m$  i/ili  $p$  povezani. Opisani problem preko tačno definisanih ograničenja (jednačina 5.2.) se naziva Ograničeni optimizacioni problem (*eng. Constrained Optimization problem*). Neki problemi koji iziskuju optimizacioni proces se ne mogu definisati putem ograničenja, pa iz tog razloga njihovo jedino opisivanje je putem 5.1. izraza. Ovakvi problemi se nazivaju Neograničeni optimizacioni problemi (*eng. Unconstrained Optimization problem*).

#### **Optimizacioni vektor**

Svaki inženjerski sistem ili njegova komponenta se mogu definisati preko niza vrednosti (parametara) od kojih se neke ponašaju kao promenljive tokom procesa. U suštini, parametri su najčešće nepromenljivi i prikazani su kao niz izlaznih vrednosti, u optimizacionom procesu nazvanih predefinisanim parametrima. Svi ostali parametri se tretiraju kao promenljivi u procesu optimizacije  $x_i$   $i = 1, 2, \dots, n$  i nazivaju se optimizacione promenljive. Optimizacione promenljive se objedinjuju u optimizacioni vektor  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ . U nastavku je dat prikaz optimizacionog vektora kroz primer dva spregnuta zupčanika i njihovim parametrima. Na slici 5.3 je dat prikaz spregnutih zupčanika i njihovih konstrukcionih parametara. Zupčanici su definisani preko nazivne širine  $b$ , broja zubaca  $T_1$  i  $T_2$ , međuosovinskog rastojanja  $d$ , ugla dodira  $\psi$ , profila zuba i materijala. Ako su međuosovinsko rastojanje, ugao dodira, profil zuba i materijal nepromenljivi, nazivamo ih predefinisanim parametrima. Preostali parametri mogu biti obuhvaćeni optimizacionim vektorom  $X = \{x_1, x_2, x_3\}^T = \{b, T_1, T_2\}^T$ . Ukoliko ne postoje posebna ograničenja u odabiru  $b$ ,  $T_1$  i  $T_2$  svaki niz od tri broja može uticati na projektovanje zupčastog para. Ako je  $n$ -dimenzionalni

Dekartov prostor za svaku pojedinačnu koordinatnu osu uzet u obzir za optimizacioni vektor  $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$  prostor se naziva optimizacioni promenljivi prostor, ili kraće samo optimizacioni prostor.



Slika 5.2 – Primer optimizacionog vektora kod zupčastog para [54]

Svaka tačka u  $n$ -dimenzionalnom optimizacionom prostoru predstavlja optimizacionu tačku i ona je moguće ili nemoguće rešenje optimizacionog problema. U slučaju spregnutih zupčanika, optimizaciona tačka  $\{1.0, 20, 40\}^T$  na primer može predstavljati moguća rešenja, dok tačka  $\{1.0, -20, 40.5\}^T$  može predstavljati nemoguće rešenje jer je vrednost nekog od parametara negativna (npr. broj zuba zupčanika ne može biti negativan broj).

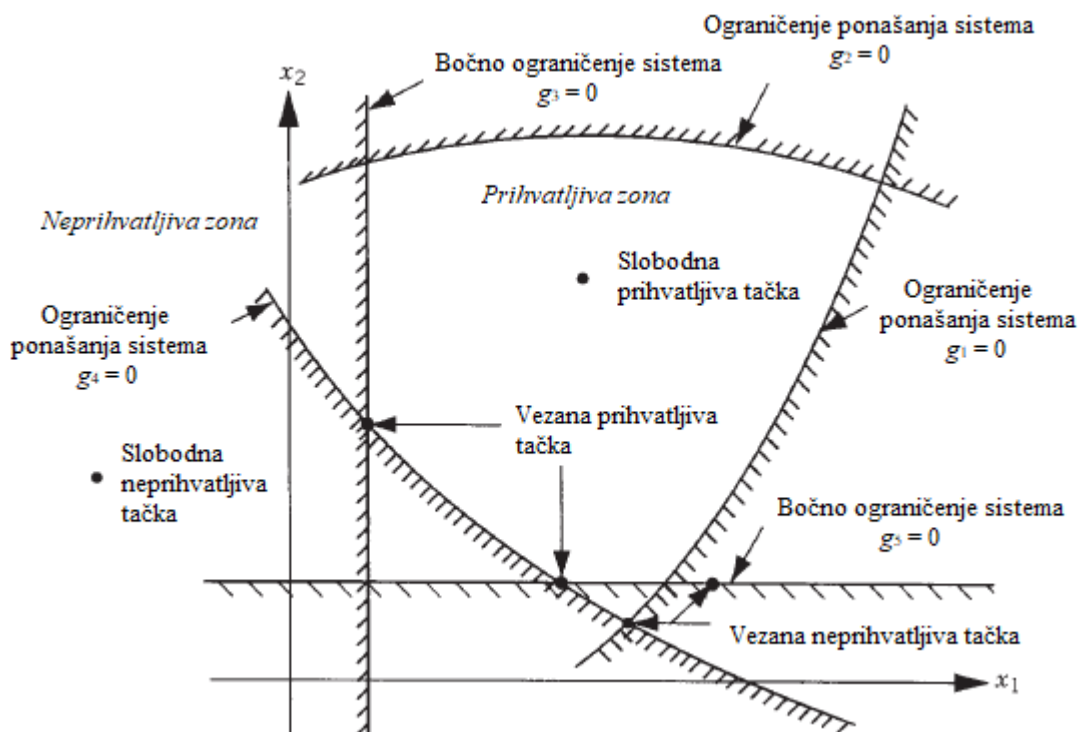
### Optimizaciona ograničenja

U mnogim praktičnim rešenjima, optimizacione promenljive ne mogu biti birane proizvoljno, bez tačno definisanog cilja. One moraju zadovoljiti specifične funkcionalne i druge zahteve. Pojedinačna ograničenja koja moraju biti zadovoljena, stvaraju jedan objedinjeni set ograničenja, koji se naziva optimizaciona ograničenja. Usvojena ograničenja treba da suze analizirano područje i usmere ponašanje sistema prema željenim performansama. Ovakva ograničenja se nazivaju funkcionalna ograničenja. Ograničenja koja se odnose na fizičko sužavanje radnog opsega, kao što su dostupnost, obradivost, transportnost spadaju u grupu fizičkih ograničenja. Na primeru zupčastog para sa slike 5.2 nazivna širina zupčanika  $b$  se ne može usvojiti manja nego što je to moguće sa aspekta strogih fizičkih ograničenja. Veoma slično, prenosni odnos zupčanika je definisan odnosom brojeva zuba zupčanika  $T_1/T_2$  što direktno utiče na odnos broja obrtaja ulaznog  $N_1$  i izlaznog vratila  $N_2$ . Ovakav tip ograničenja koji isključivo zavisi od performansi zupčastog para, predstavljaju primer funkcionalnih ograničenja. Vrednost broja zuba zupčanika u paru ne može biti realan broj, već isključivo ceo broj. Takođe minimalni i maksimalni usvojeni broj zuba je ograničen proizvođačkim zahtevima. Ovakva ograničenja spadaju u fizička ograničenja.

### Ogrničavajuća površina

Za ilustraciju objašnjenja ograničavajuće površine, razmatra se optimizacioni problem koji se sastoji samo od neravnopravnih zadatih ograničenja i to  $g_j(X) \leq 0$ . Niz vrednosti za  $X$  koji treba da zadovolji uslov  $g_j(X) = 0$  u obliku hiperpovršine u optimizacionom prostoru predstavlja ograničavajuću površinu. Takođe ograničavajući prostor se definiše kao  $(n - 1)$  dimenzionalni podprostor, gde je  $n$  broj optimizacionih promenljivih. Ograničavajući prostor se deli na dve zone: jedna prema uslovu  $g_j(X) < 0$  i druga prema uslovu  $g_j(X) > 0$ . Ukoliko tačka leži na hiperpovršini zadovoljiće uslov  $g_j(X)$  kritično, ukoliko leži u zoni gde je  $g_j(X) > 0$  uslov je nezadovoljavajući, a ukoliko leži u zoni gde je  $g_j(X) < 0$  uslov je zadovoljen i prihvatljiv. Skup svih ograničavajućih površina  $g_j(X) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  koje razdvajaju prihvatljivu zonu naziva se složena ograničavajuća površina. Slika 5.3 prikazuje hipotetički dvodimenzionalni ograničavajući prostor gde je nemoguća (neprihvatljiva) zona izvan oblasti okružene linijom sa crticama. Ako tačka leži na jednoj ili više linije ograničena umesto da se nalazi unutar ograničavajuće površine, naziva se vezana (ograničena) tačka i ograničenja vezana za nju se nazivaju aktivna ograničenja. Tačka koja leži van bilo koje ograničavajuće površine se naziva slobodna tačka. U zavisnosti od toga da li tačka pripada prihvatljivoj ili neprihvatljivoj zoni, moguće je definisati četiri moguća slučaja, prikazana na slici 5.3:

1. Slobodna i prihvatljiva tačka
2. Slobodna i neprihvatljiva tačka
3. Vezana i prihvatljiva tačka
4. Vezana i neprihvatljiva tačka



Slika 5.3 – Ograničavajuća površina dvodimenzionalnog prostora [54]

### Tražena funkcija cilja



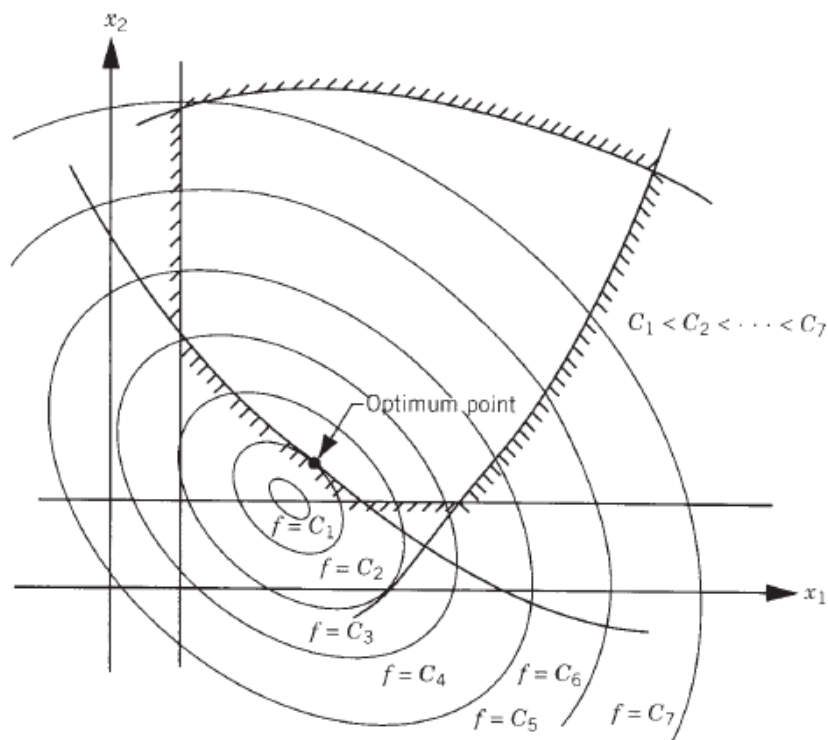
Konvencionalne matematičke procedure imaju za cilj traženje prihvatljivih ili adekvatnih funkcija koje će omogućiti dovoljno dobro rešenje, zahtevano preko niza ograničenja. Uopšteno gledajući, veoma često je moguće pronaći više od jednog prihvatljivog rešenja i svrha optimizacionog procesa je odabir najboljeg među mnogo prihvatljivih. Prema zadatim kriterijumima vrši se poređenje različitih mogućih rešenja i usvaja najbolje. Najbolje, odnosno optimalno rešenje koje se usvoji kao merodavno se prikazuje kao funkcija optimizacionih promenljivih i poznata je pod nazivom tražena funkcija cilja. Odabir tražene funkcije cilja je najčešće vođen samom prirodom problema. Tražena funkcija cilja predstavlja minimalizovanu funkciju težine na primeru konstrukcije avionskih ili kosmičkih letelica. Isto tako, tražena funkcija cilja poprma maksimalizovani oblik ukoliko se traži povećanje efikasnosti složenih mašinskih sklopova. Međutim u nekim slučajevima najbolje dobijen rezultat putem optimizacionog procesa vodi ka rešenju koje nije prihvatljivo sa aspekta drugog, takođe važnog uslova. Na primeru projektovanja menjačkog prenosnika za zadovoljavanje uslova maksimalnog mogućeg prenošenja obrtnog momenta, neće biti zadovoljen uslov minimalne težine konstrukcije. Takođe kod građevinskog konstrukcija minimalna težina konstrukcije neće biti dovoljna da zadovolji uslov maksimalnog predviđenog opterećenja. Na osnovu toga, pravilan odabir tražene funkcije cilja predstavlja jedan od najznačajnijih uslova u optimizacionom procesu. U nekim slučajevima moguće je pronaći dva ili više kriterijuma koja utiču podjednako na optimizacioni proces. Na primeru zupčastog para, projektovanje zupčanika iziskuje više zahteva, minimalna težina zupčanika zbog manjih gabarita konstrukcije i manje mase, a maksimalnu efikasnost pri prenošenju tačno definisanih parametara snage. Ovakav problem iziskuje više traženih funkcija cilja objedinjenih u jedan višeciljani optimizacioni pristup. Sa ovakvim pristupom se dolazi do pojave podudaranja ili konflikata između zadatih uslova i najjednostavnije se rešava kreiranjem opšte tražene funkcije cilja koja je linearna kombinacija konfliktiranih višeciljnih funkcija. Ukoliko  $f_1(X)$  i  $f_2(X)$  su dve tražene funkcije cilja, njihovim spajanjem je moguće dobiti jednu novu višeciljnu funkciju cilja koja dobija oblik kao u jednačini 5.3.

$$f(X) = \alpha_1 f_1(X) + \alpha_2 f_2(X) \quad (5.3.)$$

U jednačini 5.3.  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  su konstante čija vrednost nagnalašava značaj jednog parametra u odnosu na drugi, odnosno njihov pojedinačni značaj na optimizacioni proces.

### ***Površina tražene funkcije cilja***

Mesto u kome se tačke zadovoljavaju konstantan uslov  $f(X) = C = const.$ , odnosno konstantnu formu unutar hiperpovršine optimizacionog prostora i svaka od  $C$  je odgovorna za različitog člana koji se nalaze na površini. Ove površine se nazivaju površine tražene funkcije cilja i prikazane su u dvodimenzionalnoj formi na slici 5.4. Jedna od traženih površina funkcije cilja je prikazana duž površina koje predstavljaju ograničenja, a optimalna tačka može biti određena bez mnogo problema. Ali problem nastaje ukoliko je broj optimizacionih promenljivih prelazi dve ili tri i tada ograničenja i površina tražene funkcije cilja postaje složena za prikaz. U ovom slučaju nije moguće grafički ilustrovati i rešiti optimizacioni problem, već isključivo matematičkim rešavanjem.



Slika 5.4 – Konture površina tražene funkcije cilja [54]

#### 5.1.4. Klasifikacija optimizacionih problema

Optimizacioni problemi se mogu klasifikovati u nekoliko mogućih slučajeva koji su prikazani u nastavku.

##### Klasifikacija zasnovana na postojanju ograničenja

Kao što je prikazano i objašnjeno u ranijim poglavljima rada, ova podela se zasniva na problemima koja su definisana preko postojanja ograničenja ali ne i tipu definisanog ograničenja.

##### Klasifikacija zasnovana na prirodi optimizacionih promenljivih

Optimizacioni problemi u ovoj klasifikaciji se mogu podeliti u dve grupe. U prvoj grupi problem se predstavlja pomaću vrednosti niza optimizacionih parametara što čini neku propisanu funkciju od njihovih minimuma do tačnih promenljivih. Na primer, problem optimizacije prizmatične grede za minimalnu težinu je prikazan na slici 5.5a. Zahtev ograničenja se ogleda u maksimalnom savijanju grede i u zapisu je prikazan kroz jednačinu 5.4.

$$\text{naći } X = \begin{Bmatrix} b \\ d \end{Bmatrix} \rightarrow \min f(x) = \rho l b d \quad (5.4.)$$

Ograničenja su data u obliku:

$$\delta_{tip}(X) \leq \delta_{max}$$

$$b \geq 0$$

$$d \geq 0$$

Gustina je označena sa  $\rho$ ,  $\delta_{tip}$  krajnje dozvoljeno savijanje grede,  $d$  visina,  $b$  širina poprečnog preseka grede,  $l$  dužina grede. Ovakav problem se naziva parametarski ili statički optimizacioni problem. U drugoj grupi, traženi element se dobija preko niza optimizacionih promenljivih, koji su svi u funkciji nekog drugog parametra, što minimizira traženu funkciju do niza promenljivih. Ukoliko je elementima koji grade poprečni presek prizmatične grede dozvoljeno da njihova prednost varira u funkciji dužine, slika 5.5b, optimizacioni problem može biti predstavljen kao u jednačini 5.5.

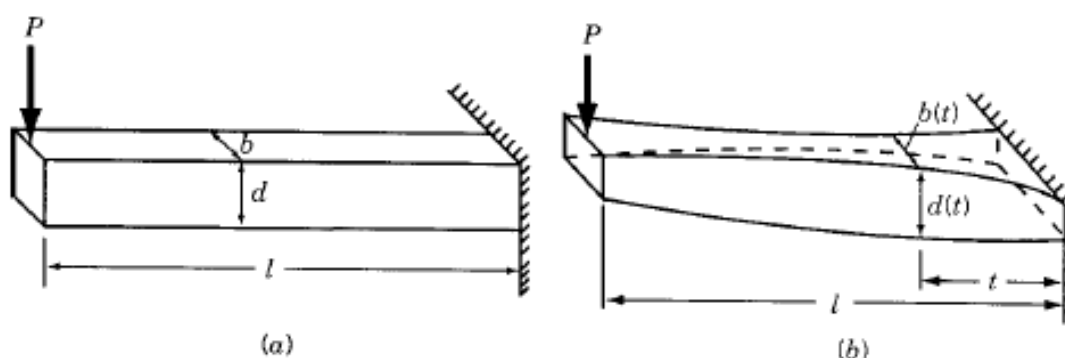
$$\text{naći } X(t) = \begin{cases} b(t) \\ d(t) \end{cases} \rightarrow \min f[X(x)] = \rho \int_0^l b(t) d(t) dt \quad (5.5.)$$

Ograničenja su data u obliku:

$$\delta_{tip}[X(t)] \leq \delta_{max} \quad 0 \leq t \leq l$$

$$b(t) \geq 0 \quad 0 \leq t \leq l$$

$$d(t) \geq 0 \quad 0 \leq t \leq l$$



Slika 5.5 – Primer savijanja grede usled kontinualnog opterećenja [54]

U ovom slučaju optimizacione promenljive su u funkciji dužinskog parametra  $t$ . Tip problema gde je svaka optimizaciona promenljiva u funkciji jednog ili više parametara se naziva dinamički optimizacioni problem [54].

### Klasifikacija zasnovana na fizičkoj strukturi problema

U zavisnosti od fizičke strukture problema, optimizacioni problemi se dele na optimalne kontrolisane i optimalne nekontrolisane probleme. Optimalno kontrolisani problem je matematički problem koji uključuje jedan broj faza, gde se svaka od faza rešava na propisani način od prethodne faze. Obično se opisuje sa dva tipa promenljivih: kontrolnih i faznih. Kontrolne promenljive definišu sistem i vode računa o napretku iz jedne u drugu fazu, dok fazne promenljive opisuju ponašanje ili status sistema u nekoj fazi. Problem predstavlja doći do minimalizovane funkcije cilja preko niza kontrolnih ili optimizacionih promenljivih tražene funkcije, što je prikazano kroz jednačinu 5.6.

$$\text{naći } X \text{ koji minimizuje } f(X) = \sum_{i=1}^l f_i(x_i, y_i) \quad (5.6.)$$

Ograničenja su data u obliku:

$$q_i(x_i, y_i) + y_i = y_{i+1} \quad i = 1, 2, \dots, l$$

$$\begin{aligned} g_j(x_j) &\leq 0 & j &= 1, 2, \dots, l \\ h_k(y_k) &\leq 0 & k &= 1, 2, \dots, l \end{aligned}$$

Gde je sa  $x_i$  data  $i$ - ta kontrolna promenljiva, sa  $y_i$  je data  $i$ - ta fazna promenljiva i sa  $f_i$  je prikazan udeo  $i$ - te faze na ukupnu traženu funkciju cilja. Sa  $g_j$ ,  $h_k$  i  $q_i$  su date funkcije  $x_j$ ,  $y_k$ ,  $x_i$  i  $y_i$  redom i  $l$  je ukupan broj faza. Kontrolne i fazne promenljive  $x_i$  i  $y_i$  mogu biti vektori u nekim slučajevima.

### Klasifikacija zasnovana na prirodi upotrebljenih jednačina

Naredna značajna klasifikacija predstavljanja optimizacionih problema je bazirana na prirodi izražavanja tražene funkcije cilja i ograničenja. Prema tome, optimizacioni problemi se mogu podeliti na linearne, nelinearne, geometrijske i kvadratne. Ova klasifikacija je veoma korisna sa aspekta upotrebe računara od kada su posebne metode za efikasno rešavanje problema postale dostupne.

*Nelinearni optimizacioni problem.* Ukoliko je neka od funkcija između funkcije cilja i ograničenja iz jednačina 5.1. i 5.2. nelinearna, problem se naziva nelinearnim. Ovo predstavlja najčešći optimizacioni problem i svi ostali problemi mogu biti razmatrani kao specijalni slučaj nelinearnih optimizacionih problema.

*Geometrijski optimizacioni problem.* Funkcija  $h(X)$  je posinominalne funkcija (što predstavlja funkciju kod koje su sve koordinate koje je opisuju i svi koeficijeni su pozitivni realni brojevi) gde se sa  $h$  opisuje suma uslova u obliku:

$$c_i x_1^{a_{i1}} x_2^{a_{i2}} \dots x_n^{a_{in}}$$

gde su sa  $c_i$  i  $a_{ij}$  izražene konstante u obliku  $c_i > 0$  i  $x_j > 0$ . Posinominalna funkcije sa  $N$  uslova se može zapisati u obliku kao u jednačini 5.7.

$$h(X) = c_1 x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \dots x_n^{a_{1n}} + \dots + c_N x_1^{a_{N1}} x_2^{a_{N2}} \dots x_n^{a_{Nn}} \quad (5.7.)$$

U geometrijskom optimizacionom problemu tražena funkcija cilja i ograničenja su predstavljene preko posinominalne funkcije  $X$ . Problem koji se rešava preko ovog modela i ima za cilj pronaći pri kojim vrednostima  $X$  će tražena funkcija cilja imati minimalizovani uslov kao u jednačini 5.8.

$$f(X) = \sum_{i=1}^{N_0} c_i \left( \prod_{j=1}^n x_j^{p_{ij}} \right), \quad c_i > 0, \quad x_j > 0 \quad (5.8.)$$

pri:

$$g_k(X) = \sum_{i=1}^{N_k} c_{ik} \left( \prod_{j=1}^n x_j^{p_{ijk}} \right) > 0, \quad a_{ik} > 0, \quad x_j > 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

gde su sa  $N_0$  i  $N_k$  prikazani brojevi posinominalnih uslova u traženoj funkciji cilja i  $k$ -toj ograničavajućoj funkciji.

*Kvadratni optimizacioni problem.* Ovaj tip problema predstavlja nelinearni problem sa jednom kvadratnom funkcijom cilja i linearnim ograničenjima. Obično se zapisuje u obliku kao u jednačini 5.9.

$$F(X) = c + \sum_{i=1}^n q_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Q_{ij} x_i x_j \quad (5.9.)$$

pri:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = b_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

gde su  $c$ ,  $q_i$ ,  $Q_{ij}$  i  $b_j$  konstante.

*Linearni optimizacioni problem.* Ukoliko tražena funkcija cilja i sva ograničenja u jednačini 5.1. su linearne funkcije optimizacionih promenljivih, matematički problem se opisuje kao linearni optimizacioni problem. Zapisuje se u obliku:

$$\text{traženo } X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \rightarrow \text{što minimizuje } f(X) = \sum_{i=1}^n c_i x_i$$

ograničenja su data u obliku:

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = b_j \quad , \quad j = 1, 2, \dots, m$$

$$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

gde su  $c_i$ ,  $a_{ij}$  i  $b_j$  konstante.

### **Klasifikacija zasnovana na dozvoljenim vrednostima optimizacionih promenljivih**

U zavisnosti od dozvoljenih vrednosti optimizacionih promenljivih, optimizacioni problemi se mogu svrstati u celobrojne i realne brojeve vrednosti. Ukoliko su neki ili svi od optimizacionih promenljivih  $x_1, x_2, \dots, x_n$  unutar razmatranog optimizacionog problema ograničeni samo na celobrojne vrednosti, optimizacioni problem se naziva celobrojnim. U suprotnom, ukoliko je neke od promenljivih u obliku realnog broja, optimizacioni problem se naziva realnim.

### **Klasifikacija zasnovana na determinističkoj prirodi optimizacionih promenljivih**

Bazirano na determinističkoj prirodi promenljivih, optimizacioni problem se deli na deterministički i stohastički. Stohastički optimizacioni problem je onaj u kome neki ili svi parametri su u funkciji verovatnoće (neterministički ili stohastički).

### **Klasifikacija zasnovana na odvojivosti funkcija**

Prema ovoj klasifikaciji, optimizacioni problemi se mogu podeliti na odvojive i neodvojive prema uslovu odvojivosti tražene funkcije cilja i ograničavajućih funkcija.

Odvojivi optimizacioni problem se definiše preko funkcije  $f(X)$  koju nazivamo odvojjivom i može se predstaviti kao zbir  $n$ -tih jednoznačnih promenljivih funkcija  $f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)$  u obliku kao u jednačini 5.10.

$$f(X) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (5.10.)$$

Odvojivi optimizacioni problem je jedini u kome su tražena funkcija cilja i ograničenja odvojivi i mogu biti zapisano u standardnom obliku kao u jednačini 5.11.

$$\text{traženo } X \rightarrow \text{što minimizuje } f(X) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \quad (5.11.)$$

pri uslovu:

$$g_j(X) = \sum_{i=1}^n g_{ij}(x_i) \leq b_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

gde je  $b_j$  konstanta.

### Klasifikacija zasnovana na broju traženih funkcija cilja

U zavisnosti od broja traženih funkcija cilja koje trebaju biti minimalizovane, optimizacioni problemi se mogu podeliti na jednociljne ili višeciljne.

Višeciljni optimizacioni problemi se mogu zapisati u obliku kao u jednačini 5.12.

$$\text{traženo } X \rightarrow \text{što minimizuje } f_1(X), f_2(X), \dots, f_k(X) \quad (5.12.)$$

pri uslovu:

$$g_j(X) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

gde  $f_1, f_2, \dots, f_k$  označavaju tražene funkcije cilja koje se minimalizuju istovremeno (54).

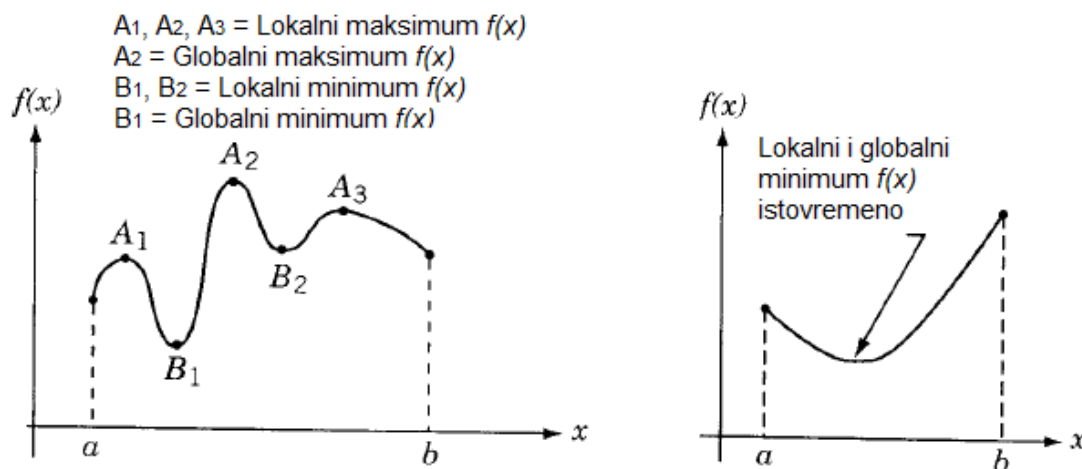
## 5.2. Klasične optimizacione metode

Klasične optimizacione metode su korisne za traženje optimalnih rešenja kod kontinualnih i promenljivih funkcija. Ove metode su analitičke i mogu se koristiti kao tehnike izračunavanja lokacije optimalnih tačaka funkcija. Iz razloga što neki praktični problemi imaju tražene funkcije cilja u obliku koji nije kontinualan ili promenljiv, klasične metode imaju limitiran spektar mogućih mesta primene. Međutim, izučavanje i razumevanje klasičnih metoda predstavlja osnovu za razvijanje velikog broja numeričkih tehnika koje imaju veoma rasprostranjenu primenu. U nastavku su prikazani neophodni i dovoljni uslovi za lociranje optimalnih rešenja u obliku jednociljne promenljive funkcije, višeciljne promenljive funkcije bez ograničenja i višeciljne promenljive funkcije sa zadatim ograničenjima.

### 5.2.1. Optimizacija pri jednoj promenljivoj

Funkcija jedne promenljive  $f(x)$  ima relativni ili lokalni minimum u  $x = x^*$  ako  $f(x^*) \leq f(x^* + h)$  za sve prilično male pozitivne i negativne vrednosti  $h$ . Slično tome, tačka  $x^*$  zvana relativni ili lokalni maksimum ako  $f(x^*) \geq f(x^* + h)$  za sve vrednosti  $h$  u blizini nule. Funkcija  $f(x)$  ima globalni ili apsolutni minimum u  $x^*$  ako  $f(x^*) \leq f(x)$  sa svako  $x$  osim za  $x$  koje je u blizini  $x^*$ , u domenu preko kojeg je  $f(x)$  definisana. Takođe, tačka  $x^*$  će biti globalni maksimum od  $f(x)$  ako je  $f(x^*) \geq f(x)$  za sve vrednosti  $x$  u domenu. Slika 5.6 prikazuje razlike između lokalne i globalne optimizacione tačke.

Problem optimizacije pri jednoj promenljivoj je ukoliko je  $x = x^*$  i njihovo rešenje može biti pronađeno u intervalu  $[a, b]$  pri tome što je  $x^*$  minimizira  $f(x)$ . U nastavku su date dve teoreme koje obezbeđuju neophodne i dovoljne uslove za izračunavanje relativnog minimuma funkcije pri jednoj promenljivoj.



Slika 5.6 – Lokalni i globalni minimum funkcije [54]

#### Teorema 1. Neophodni uslov

Ako je funkcija  $f(x)$  definisana u intervalu  $a \leq x \leq b$  i ima lokalni minimum u  $x = x^*$ , gde je  $a \leq x^* \leq b$ , kao i ako izvod  $df(x)/dx = f'(x)$  postoji kao konačni broj  $x = x^*$  onda  $f'(x^*) = 0$ . Dokaz ove teoreme je dat u jednačini 5.13.

$$f'(x^*) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h} \quad (5.13.)$$

Dokaz iz jednačine 5.13 je zadovoljen za neki određeni broj, koji se u nastavku izjednačava sa nulom. Ukoliko je  $x^*$  relativni minimum, dobija se:

$$f(x^*) \leq f(x^* + h)$$

za sve vrednosti  $h$  koje su u blizini nule. Iz tog razloga se može zapisati:

$$\frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h} \geq 0 \text{ ako je } h > 0$$

$$\frac{f(x^* + h) - f(x^*)}{h} \leq 0 \text{ ako je } h < 0$$

Prema jednačini 5.13. se zadaju ograničenja, kao što je za  $h$  da prilazi nuli kroz pozitivnu vrednost u obliku jednačine 5.14.:

$$f'(x^*) \geq 0 \quad (5.14.)$$

dok je ograničenje za  $h$  da prilazi nuli kroz negativnu vrednost u obliku jednačine 5.15.:

$$f'(x^*) \leq 0 \quad (5.15.)$$

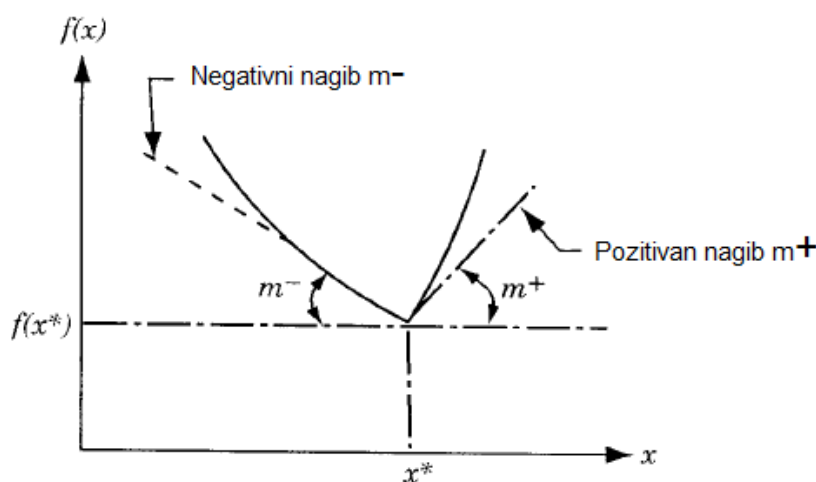
Jedni način da se zadovolje obe jednačine 5.14. i 5.15. je da postoji uslov prikazan u jednačini 5.16.

$$f'(x^*) = 0 \quad (5.16.)$$

Na osnovu prethodnih jednačina, teorema je zadovoljena i potvrđena njena neophodnost.

Dodatna pojašnjenja teoreme:

1. Ova teorija može biti potvrđena samo ako je  $x^*$  lokalni maksimum.
2. Teorema ne govori tačno šta se dešava ako se minimum ili maksimum nađu kod tačke  $x^*$  gde izvod ne uspeva da postoji. Ovu situaciju ilustruje slika 5.7 na kojoj važi uslov  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^*+h)-f(x^*)}{h} = m^+$  (pozitivno) ili  $m^-$  (negativno) i zavisi od toga da li  $h$  prilazi nuli kroz pozitivnu ili negativnu vrednost. Ukoliko brojevi  $m^+$  i  $m^-$  su tačni, izvod  $f'(x^*)$  ne postoji i teorema nije upotrebljiva.



Slika 5.7 – Nedefinisani izvod u tački  $x^*$  [54]

3. Teorema ne govori šta se dešava ukoliko se minimum ili maksimum nađu kod krajnje tačke intervala koji definiše funkciju. U tom slučaju  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^*+h)-f(x^*)}{h}$  postoji samo za pozitivnu vrednost  $h$ , ili samo za negativnu vrednost  $h$ , što znači da izvod ne definiše krajnje tačke funkcije.
4. Teorema ne precizira da će funkcija neophodnosti imati minimum ili maksimum u bilo kojoj tački gde je izvod jednak nuli. Na primer: izvod  $f'(x^*) = 0$  u  $x = 0$  za funkciju prikazanu na slici 5.8. Međutim, ta tačka nije ni minimum, ni maksimum. Tačka  $x^*$  u kojoj je  $f'(x^*) = 0$  se naziva stacionarna tačka.

Ako funkcija  $f(x)$  poseduje neprekidne izvode za svaki uslov koji dolazi u pitanje u blizini  $x = x^*$ , razmatrana teorema obezbeđuje zadovoljavajući uslov za minimalnu ili maksimalnu vrednost funkcije.

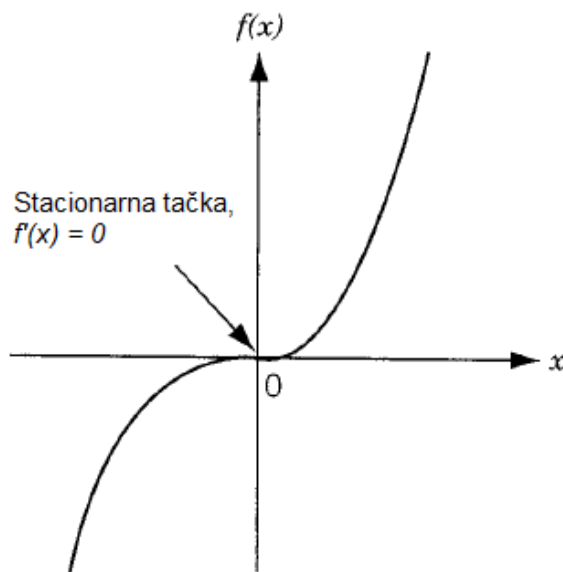
*Teorema 2. Dovoljan uslov*

Neka je  $f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(n-1)}(x^*) = 0$ , ali i  $f^{(n)}(x^*) \neq 0$ . U nastavku funkcija  $f(x^*)$  treba da ispuni sledeće:

- 1) Minimalna vrednost  $f(x)$  ukoliko je  $f^{(n)}(x^*) > 0$  i  $n$  ima parnu vrednost,
- 2) Maksimalna vrednost  $f(x)$  ukoliko je  $f^{(n)}(x^*) < 0$  i  $n$  ima parnu vrednost,



- 3) Funkcija  $f(x)$  nema ni minimalnu, ni maksimalnu vrednost, ukoliko  $n$  ima neparnu vrednost.



Slika 5.8 – Stacionarna tačka [54]

Dokaz postojanja ove teoremne je dat u jednačini 5.17. preko uključenja Tejlorove teoreme sa ostatkom nakon ubacivanja vrednosti  $n$ .

$$f(x^* + h) = f(x^*) + hf'(x^*) + \frac{h^2}{2!}f''(x^*) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x^*) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x^* + \theta h) \quad \text{za } 0 < \theta < 1 \quad (5.17.)$$

Ukoliko  $f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(n-1)}(x^*) = 0$ , iz jednačine 5.17. se dobija:

$$f(x^* + h) - f(x^*) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x^* + \theta h)$$

Pri  $f^{(n)}(x^*) \neq 0$  postoji interval oko vrednosti  $x^*$  za svaku vrednost  $x$  u kojoj  $n$ -ti izvod funkcije  $f^{(n)}(x)$  ima isti predznak. Prema tome svaka tačka  $x^* + h$  intervala  $f^{(n)}(x^* + \theta h)$  ima isti predznak kao i  $f^{(n)}(x^*)$ . Kada  $n$  ima pozitivnu vrednost,  $h^n/n!$  je pozitivno bez obzira da li  $h$  ima pozitivnu ili negativnu vrednost, odakle sledi da će  $f(x^* + h) - f(x^*)$  imati isti predznak kao i  $f^{(n)}(x^*)$ . Vrednost za  $x^*$  će biti lokalni minimum ukoliko je  $f^{(n)}(x^*)$  pozitivno, kao i lokalni maksimum za  $f^{(n)}(x^*)$  negativno. Kada je  $n$  neparan broj, odnos  $h^n/n!$  menja predznak sa promenom predznaka  $h$  što se dalje odrazi da tačka  $x^*$  ne predstavlja ni minimum, ni maksimum. U tom slučaju tačka  $x^*$  se naziva tačkom promene.

### 5.2.2. Optimizacija pri više promenljivih bez ograničenja

U ovom delu rada se razmatra postojanje minimalnih i maksimalnih vrednosti funkcija bez zadatih ograničenja kroz neophodni i dovoljni uslov, kao što je bio slučaj u prethodnom poglavlju za optimizaciju pri jednoj promenljivoj.

Definisanje ovog tipa optimizacije se vrši preko  $r$ -tog diferencijala funkcije  $f$ . Ako su svi parcijalni izvodi funkcije  $f$  definisani preko uslova  $r \geq 1$  i stalni su za tačku  $X^*$ , preko polinoma u jednačini 5.18. je moguće zapisati:

$$d^r f(X^*) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \dots \sum_{k=1}^n h_i h_j \dots h_k \frac{\partial^r f(X^*)}{\partial x_i \partial x_j \dots \partial x_k} \quad (5.18.)$$

Polinom iz jednačine 5.18. se naziva  $r$ -ti diferencijal funkcije  $f$  za tačku  $X^*$ . Prema tome postoje  $r$  zbirova i jedan  $h_i$  koji je pridružen sa svakim zbirom iz jednačine 5.18.

Primer: Kad je  $r = 2$  i  $n = 3$  može se zapisati sledeće:

$$\begin{aligned} d^2 f(X^*) &= d^2 f(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 h_i h_j \frac{\partial^2 f(X^*)}{\partial x_i \partial x_j} = \\ &= h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(X^*) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(X^*) + h_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}(X^*) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(X^*) + 2h_2 h_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}(X^*) + \\ &\quad + 2h_1 h_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3}(X^*) \end{aligned}$$

Širenje funkcije  $f(X)$  oko tačke  $X^*$  je dato u jednačini 5.19.

$$f(X) = f(X^*) + df(X^*) + \frac{1}{2!} d^2 f(X^*) + \frac{1}{3!} d^3 f(X^*) + \dots + \frac{1}{N!} d^N f(X^*) + R_N(X^*, h) \quad (5.19.)$$

Poslednji član jednačine 5.19. se naziva ostatak i dat je u obliku kao u jednačini 5.20.

$$R_N(X^*, h) = \frac{1}{(N+1)!} d^{N+1} f(X^* + \theta h) \quad (5.20.)$$

gde je  $0 < \theta < 1$  i  $h = X - X^*$

### Teorema 3. Neophodan uslov

Ako funkcija  $f(X)$  ima jednu ekstremnu tačku (maksimalnu ili minimalnu) u  $X = X^*$  i ako prvi parcijalni izvod od  $f(X)$  postoji u  $X^*$ , može se zapisati jednačina 5.21.

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X^*) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(X^*) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(X^*) = 0 \quad (5.21.)$$

Dokaz dat kroz teoremu 1 može lako prerasti u dokaz teoreme 3. Međutim, u nastavku je dat malo drugačiji pristup dokazivanja teoreme 3. Može se pretpostaviti da jedan od prvih parcijalnih izvoda ( $k$ -ti parcijalni izvod) ne nestaje u tački  $X^*$ . Zbog toga, preko Tejlorove teoreme se može zapisati sledeće:

$$f(X^* + h) = f(X^*) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X^*) + R_1(X^*, h)$$

što je:

$$f(X^* + h) - f(X^*) = h_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(X^*) + \frac{1}{2!} d^2 f(X^* + \theta h), \quad 0 < \theta < 1$$

Ako je  $d^2 f(X^* + \theta h)$  reda  $h_i^2$ , uslov reda  $h$  će biti dominantan pri višim redovima za male vrednosti  $h$ . Predznak  $f(X^* + h) - f(X^*)$  je odlučan preko predznaka  $h_k \partial f(X^*) / \partial x_k$ , pod pretpostavkom da se  $h_k \partial f(X^*) / \partial x_k > 0$ . U tom slučaju predznak  $f(X^* + h) - f(X^*)$  će biti pozitivan za  $h_k > 0$  i negativan za  $h_k < 0$ . Ovo znači da  $X^*$  ne može biti ekstremna tačka. Do sličnog zaključka se može doći ako se pretpostavi da  $\partial f(X^*) / \partial x_k < 0$ . Ovaj zaključak se kosi sa originalnim u kome je  $X^*$  ekstremna tačka, što govori da  $\partial f / \partial x_k = 0$  u tački  $X = X^*$ . Stoga se može zaključiti da je teorema potvrđena.

#### Teorema 4. Dovoljan uslov

Dovoljan uslov za stacionarnu tačku  $X^*$  može imati ekstrem i to u obliku matrice drugog parcijalnog izvoda funkcije  $f(x)$  u tački  $X^*$  i to za:

- 1) pozitivno određen kad je  $X^*$  lokalni minimum,
- 2) negativno određen kad je  $X^*$  lokalni maksimum.

Dokaz ove tvrdnje je zapisan u jednačini 5.22. preko Tejlorove teorem:

$$f(X^* + h) = f(X^*) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X^*) + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{X=X^*+\theta h}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (5.22.)$$

Tačka  $X^*$  je stacionarna tačka, neophodni uslov dat kroz teoremu 3:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Jednačina 5.22. dobija uprošćeni oblik:

$$f(X^* + h) - f(X^*) = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{X=X^*+\theta h}, \quad 0 < \theta < 1$$

Stoga, predznak  $f(X^* + h) - f(X^*)$  će biti isti kao i  $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{X=X^*+\theta h}$ .

Drugi parcijalni izvod od  $\partial^2 f(X) / \partial x_i \partial x_j$  je stalan u blizini tačke  $X^*$  i ima oblik  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{X=X^*+\theta h}$  koji ima isti predznak kao i  $\partial^2 f(X) / \partial x_i \partial x_j \Big|_{X=X^*}$  za sve male vrednosti  $h$ .

Prema tome  $f(X^* + h) - f(X^*)$  će biti pozitivan, a tačka  $X^*$  će biti lokalni minimum, ako izraz u jednačini 5.23. ima pozitivnu vrednost

$$Q = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{X=X^*} \quad (5.23.)$$

Izraz za  $Q$  predstavlja kvadratni oblik koji se može zapisati i u matričnom obliku kao u jednačini 5.24.:

$$Q = h^T J h \Big|_{X=X^*} \quad (5.24.)$$

Matrični oblik drugog parcijalnog izvoda se takođe naziva i Hesianova matrica (*eng. Hessian matrix*) funkcije  $f(x)$  i ima oblik kao u jednačini 5.25.

$$J|_{X=X^*} = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{X=X^*} \right] \quad (5.25.)$$

Poznato je iz algebre matrica da kvadratni oblik jednačine 5.23. ili 5.24. će biti pozitivan za sve vrednosti  $h$  ukoliko je  $[J]$  pozitivno definisano u  $X = X^*$ . Ovo znači da će dovoljan uslov za stacionarnu tačku  $X^*$  biti lokalni minimum. Ovo predstavlja ispunjen minimalizovani uslov funkcije.

### Poludefinicani slučaj:

U nastavku je predstavljen problem određivanja dovoljnog uslova za slučaj kada je Hesianova matrica razmatrane funkcije poludefinisana. U slučaju da je funkcija sa jednom promenljivom, problem se određuje preko dovoljnog uslova za slučaj kada je drugi parcijalni izvod jednak nuli. Slična procedura se koristi za funkcije sa  $n$  promenljivih. Na osnovu teoreme 2, dobijaju se dovoljni uslovi za ekstremne tačke funkcije od nekoliko promenljivih.

*Teorema 5.* Parcijalni izvodi funkcije  $f$  su definicani preko  $k \geq 2$  i stalne vrednosti u okolini stacionarne tačke  $X^*$  u obliku:

$$\begin{aligned} d^r f|_{X=X^*} &= 0, & 1 \leq r \leq k-1 \\ d^k f|_{X=X^*} &\neq 0 \end{aligned}$$

Sa  $d^k f|_{X=X^*}$  je predstavljen prvi nepostojani diferencijal višeg reda funkcije  $f$  u tački  $X^*$ . U slučaju da je  $k$  pozitivno moguće je zaključiti sledeće:

- 1) Tačka  $X^*$  je lokalni minimum ako je  $d^k f|_{X=X^*}$  pozitivno,
- 2) Tačka  $X^*$  je lokalni maksimum ako je  $d^k f|_{X=X^*}$  negativno,
- 3) Ako je  $d^k f|_{X=X^*}$  poludefinisano, nije moguće izvući jednoznačni zaključak (da li je pozitivno ili negativno).

Sa druge strane, ukoliko je  $k$  negativno, tačka  $X^*$  nije ekstremna tačka funkcije  $f(X)$ .

### Prevojna tačka

U slučaju funkcije definisane preko dve promenljive  $f(x, y)$ , Hesianova matrica ne mora biti ni pozitivna ni negativna u tački  $(x^*, y^*)$  u obliku:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

U ovakvom slučaju definisana tačka preko  $(x^*, y^*)$  se naziva prevojna tačka. Karakteristika prevojne tačke je da odgovara lokalnom minimumu ili maksimumu od  $f(x, y)$  sa akcentom na jednu promenljivu, npr.  $x$  (druga promenljiva je  $y = y^*$ ) i lokalni maksimum ili minimum od  $f(x, y)$  sa akcentom na drugu promenljivu  $y$  (pri čemu je  $x$  nepromenljivo u  $x^*$ ).

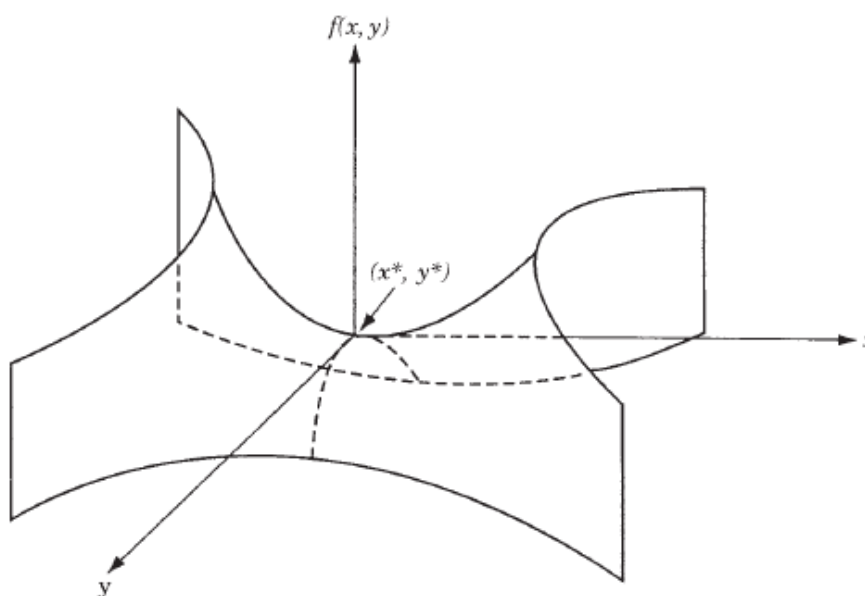
Kao primer se razmatra funkcija  $f(x, y) = x^2 - y^2$  za koju se može zapisati:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

Prvi izvodi za  $x^*$  i  $y^*$  su jednaki nuli, što u nastavku Hessianova matrica funkcije  $f$  u tački  $(x^*, y^*)$  dobija oblik:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ukoliko matrica nije ni pozitivno ni negativno definisana ( $x^* = 0, y^* = 0$ ), tačka se naziva prevojnima. Funkcija je prikazana grafički na slici 5.9. i sa nje se može videti da je  $f(x, y^*) = f(x, 0)$  i ima lokalni minimum i  $f(x^*, y) = f(0, y)$  i ima lokalni maksimum u prevojnoj tački  $(x^*, y^*)$ . Prevojne tačke mogu postojati kod funkcija sa više od dve promenljive. Karakteristike prevojne tačke koje su prethodno navedene i dalje važe i u slučaju kao na slici 5.9.  $x$  i  $y$  su prikazani kao vektori u višedimenzionalnim okruženju (54).



Slika 5.9 – Prevojna tačka funkcije  $f(x, y) = x^2 - y^2$  [54]

### 5.2.3. Optimizacija pri više promenljivih sa ravnopravnim ograničenjima

U ovom delu rada se razmatra optimizacija neprekidnih funkcija pri ravnopravno definisanim ograničenjima, prikazanim kroz jednačinu 5.26.

$$\text{minimizirati } f = f(X)$$

$$g_j(X) = 0, \quad \text{ako je: } j = 1, 2, \dots, m$$

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \quad (5.26.)$$

Vrednost  $m$  je manja ili jednaka od  $n$ , ukoliko je  $m > n$  problem postaje predefinisani i nije moguće doći do rešenja. Postoje nekoliko dostupnih metoda pomoću kojih je moguće rešiti ovakav tip problema i u nastavku su prikazane.

## Metoda direktne zamene

Za probleme sa  $n$  promenljivih i  $m$  ravnopravno definisanih ograničenja, teorijski je moguće istovremeno rešavanje  $m$  ravnopravno definisanih ograničenja i izraziti bilo koji niz od  $m$  promenljivih od preostalih promenljivih od  $n$  do  $m$ . Kada se ove izražene promenljive zamane u originalnu traženu funkciju cilja, kao rezultat se dobija nova funkcija cilja koja uključuje  $n$  do  $m$  promenljive. Nova funkcija cilja nije izražena preko ograničenja i njen optimum je moguće pronaći preko metoda bez definisanih ograničenja, pomenutih u prethodnom poglavlju rada 5.2.2. Metoda direktne zamene iako je u teorijskom obliku dosta jednostavna, u praktičnoj primeni može biti složena za rešavanje. Razlog ove tvrdnje se može pronaći u činjenici da većina ograničenja koji se zadaju i definišu funkciju nisu linearna kod realnih problema. U tom slučaju problemi postaju nerešivi i neophodno je izvršiti zamenu neke od  $m$  promenljivih sa nizom  $n$  do  $m$  promenljivih.

## Metoda sa ograničenim variranjem

Osnovna ideja koja se koristi u metodi sa ograničenim variranjem je traženje najbližeg oblika za izražavanje diferencijala prvog reda funkcije  $f(df)$  za svaku tačku gde su ograničenja zadovoljena  $g_j(X) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Kreiranje optimalnih tačaka je moguće ukoliko se diferencijal  $df$  izjednači sa nulom. Pre nego što se pristupi detaljnom objašnjenju metode, neophodno je naglasiti par osnovnih karakteristika kroz jednostavni primer rešavanja problema sa  $n = 2$  i  $m = 1$  definisanog kroz jednačinu 5.27. i ograničenja data u obliku jednačine 5.28.

$$\text{minimizirati } f(x_1, x_2) \quad (5.27.)$$

$$g(x_1, x_2) = 0 \quad (5.28.)$$

Neophodni uslov za funkciju  $f$  da ima minimum u nekoj tački  $(x_1^*, x_2^*)$  je to da ukupni izvod od  $f(x_1, x_2)$  sa oslanjanjem na  $x_1$  mora biti jednak nuli u  $(x_1^*, x_2^*)$ . Podešavanjem ukupnog diferencijala funkcije  $f(x_1, x_2)$  da je jednak nuli, dobija se oblik kao u jednačini 5.29.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (5.29.)$$

Kada je  $g(x_1^*, x_2^*) = 0$  u minimalnoj tački, svaka promena tj. varijacija  $dx_1$  i  $dx_2$  oko tačke  $(x_1^*, x_2^*)$  se naziva prihvatljivo variranje, što dokazuje ukoliko se novodobijena tačka definisana preko ograničenja u jednačini 5.30.:

$$g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2) = 0 \quad (5.30.)$$

Tejlorova teorema primenjena na jednačinu 5.30. oko tačke  $(x_1^*, x_2^*)$  daje novi oblik, prikazan kroz jednačinu 5.31.:

$$g(x_1^* + dx_1, x_2^* + dx_2) \approx g(x_1^*, x_2^*) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*) dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) dx_2 = 0 \quad (5.31.)$$

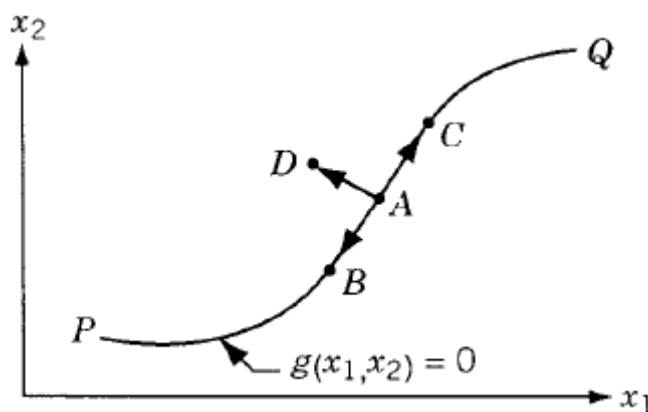
Gde se za  $dx_1$  i  $dx_2$  pretpostavlja da imaju malu vrednost. Ukoliko je  $g(x_1^*, x_2^*) = 0$ , jednačina 5.31. dobija uprošćeni oblik prikazan kroz jednačinu 5.32.

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad \text{za } (x_1^*, x_2^*) \quad (5.32.)$$

Uslov dat kroz jednačinu 5.32. mora biti zadovoljen kroz sva prihvatljiva variranja. Na slici 5.10 je prikazana kriva ograničena tačkama  $P$  i  $Q$ . U svakoj tački obuhvaćenoj krivom je prema jednačini 5.28. zadovoljen uslov. Ako je sa tačkom  $A$  označena bazna tačka sa

koordinatama  $(x_1^*, x_2^*)$ , njeno variranje u  $x_1$  i  $x_2$  dovodi do tačaka  $B$  i  $C$  koje se nazivaju tačkama prihvatljivog variranja. Sa druge strane, variranje u  $x_1$  i  $x_2$  se može ostvariti i u tački  $D$ , ali se ona ne može smatrati prihvatljivim variranjem iz razloga što tačka  $D$  ne leži na krivi koja predstavlja ograničenje tačaka  $P$  i  $Q$ . Iz razloga što nema vrednosti u nizu variranja koja zadovoljavaju uslov iz jednačine 5.32., kao što je slučaj sa tačkom  $D$  neophodno je ubaciti uslov  $\partial g/\partial x_2 \neq 0$  na osnovu kojeg se dobija novi oblik jednačine 5.32., prikazan kroz jednačinu 5.33.

$$dx_2 = -\frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2}(x_1^*, x_2^*)dx_1 \quad (5.33.)$$



Slika 5.10 – Variranje oko tačke  $A$  [54]

Na osnovu jednačine 5.33. se može zaključiti da je jedna vrednost izabrana proizvoljno. Variranje u  $x_2$  ( $dx_2$ ) je usvojeno automatski prema uslovu da je  $dx_1$  i  $dx_2$  niz prihvatljivih variranja. Ubacivanjem jednačine 5.33. u jednačinu 5.29. dobija se novi oblik prikazan kroz jednačinu 5.34.

$$df = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial g/\partial x_1}{\partial g/\partial x_2} \right) \Big|_{(x_1^*, x_2^*)} dx_1 = 0 \quad (5.34.)$$

Leva strane od znaka jednakosti jednačine 5.34. se naziva ograničeno variranje funkcije  $f$ .

### Neophodan uslov za rešavanje uopštenog problema

Procedura prikazana u nastavku se može smatrati uopštenom kod problema koji se sastoje od  $n$  promenljivih i  $m$  ograničenja. U ovom slučaju jednačina koja odgovara za svako ograničenje  $g_j(X) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  daje porast linearnoj jednačini u pogledu variranja  $dx_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Bilo koje  $m$  variranje se može zameniti sa variranjem iz niza  $n-m$ . Na ovaj način je moguće prikazati diferencijalni oblik tražene funkcije  $df$  iz niza  $n-m$  nezavisnih variranja. Ukoliko se koeficijenti nezavisnih variranja zanemare zbog uslova  $df = 0$ , neophodni uslov za dobijanje optimuma dobija oblik kao u jednačini 5.35. gde je  $k = m + 1, m + 2, \dots, n$ . Variranje prve vrednosti  $m$  promenljivih ( $dx_1, dx_2, \dots, dx_m$ ) je zamenjeno sa nizom  $n-m$  promenljivih ( $dx_{m+1}, dx_{m+2}, \dots, dx_n$ ) kroz jednačinu 5.35. Ovo podrazumeva da je zadovoljena relacija u jednačini 5.36. Izrazi  $n-m$  prikazani kroz jednačinu 5.35. predstavljaju neophodne uslove za ekstrem funkcije  $f(x)$  unutar  $m$  ograničenja.

$$J\left(\frac{f, g_1, g_2, \dots, g_m}{x_k, x_1, x_2, x_3, \dots, x_m}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_k} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_k} & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_k} & \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_k} & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} = 0 \quad (5.35.)$$

$$J\left(\frac{g_1, g_2, \dots, g_m}{x_1, x_2, \dots, x_m}\right) \neq 0 \quad (5.36.)$$

### Dovoljan uslov za rešavanje uopštenog problema

Eliminisanjem prve  $m$  promenljive korišćenjem  $m$  ograničenja (na osnovu prethodnog neophodnog uslova), funkcija cilja  $f$  se može kreirati samo na osnovu preostalih promenljivih  $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ . Tejlorov oblik jednačine se proširuje sa funkcijom  $f$  preko promenljivih oko ekstremne tačke  $X^*$  što dobija oblik kao u jednačini 5.37.

$$f(X^* + dX) \approx f(X^*) + \sum_{i=m+1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_g dx_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=m+1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_g dx_i dx_j \quad (5.37.)$$

U prethodnoj jednačini 5.37. sa  $(\partial f / \partial x_i)_g$  je označen parcijalni izvod funkcije  $f$  sa akcentom stavljenim na  $x_i$  pri čemu se sve ostale promenljive ostavljaju konstantnim. Vrednosti  $x_1, x_2, \dots, x_m$  je moguće korigovati kako bi se ispunio uslov  $g_j(X^* + dX) = 0$   $j = 1, 2, \dots, m$ .

### Metoda Lagranžovih umnožaka

Osnovni značaj metode Lagranžovih umnožaka se ogleda u rešavanju jednostavnih problema koji se sastoje od dve promenljive i jednog ograničenja. U nastavku je dat primer rešavanja opšteg problema sa  $n$  promenljivih i  $m$  ograničenja. Osnovni uslov problema je dat kroz jednačinu 5.38.

$$\begin{aligned} &\text{minimizirati } f(x_1, x_2) \\ &\text{za} \\ &g(x_1, x_2) = 0 \end{aligned} \quad (5.38.)$$

Za rešavanje ovog problema, koristi se neophodni uslov iz prethodnog poglavlja za postojanje ekstremne tačke u  $X = X^*$ , zapisan kroz jednačinu 5.39.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f / \partial x_2}{\partial g / \partial x_2} \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) \Bigg|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \quad (5.39.)$$

Kroz jednačinu 5.40. se definiše veličina  $\lambda$ , koja se naziva Lagranžov umnožak.

$$\lambda = - \left(\frac{\partial f / \partial x_2}{\partial g / \partial x_2}\right) \Bigg|_{(x_1^*, x_2^*)} \quad (5.40.)$$

Jednačini 5.39. se može napisati i u obliku datom kroz jednačinu 5.41.



$$\left. \left( \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \right|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \quad (5.41.)$$

Takođe jednačina 5.40. se može zapisati u drugom obliku, datom kroz jednačinu 5.42.

$$\left. \left( \frac{\partial f}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \right|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \quad (5.42.)$$

U nastavku, uslov zadatih ograničenja će biti ispunjen u ekstremnoj tački prema jednačini 5.43.

$$g(x_1, x_2)|_{(x_1^*, x_2^*)} = 0 \quad (5.43.)$$

Jednačine 5.41. do 5.43. prikazuju neophodni uslov tačke  $(x_1^*, x_2^*)$  kako bi postala ekstremna tačka.

Prethodno navedene jednačine za neophodni uslov 5.41. do 5.43. se češće zapisuju u obliku funkcije  $L$ , poznate pod nazivom Lagranžova funkcija. Lagranžova funkcija je prikazana u narednoj jednačini 5.44.

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2) \quad (5.44.)$$

Ukoliko se  $L$  funkcija predstavi sa tri promenljive  $x_1, x_2, \lambda$  neophodni uslov dobija oblik kao u jednačini 5.45.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) &= \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, x_2) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3}(x_1, x_2, \lambda) &= \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_3}(x_1, x_2) = 0 \end{aligned} \quad (5.45.)$$

#### 5.2.4. Optimizacija pri više promenljivih sa neravnopravnim ograničenjima

U ovom delu rada su razmatrani optimizacioni problemi koji za cilj imaju:

Minimizirati  $f(X)$

Preko ograničenja datih u jednačini 5.46.

$$g_j(X) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.46.)$$

Neravnopravna ograničenja, kao u jednačini 5.46. mogu biti transformisani u oblik raznapravnih ograničenja dodavanjem promenljivih koje imaju isključivo pozitivan predznak. Jednačina 5.47. dobija transformisani oblik, dodavanjem promenljive  $y_j^2$ , koja za sad ima nepoznatu vrednost.

$$g_j(X) + y_j^2 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.47.)$$

Optimizacioni problem nakon transformacije dobija novi oblik:

Minimizirati  $f(X)$

Preko ograničenja datih u jednačini 5.48.

$$G_j(X, Y) = g_j(X) + y_j^2 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.48.)$$

U jednačini 5.48. sa  $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}^T$  je označen vektor transformisane promenljive.

Ovakav tip problema se može rešiti metodom Lagranžovih umnožaka. Jednačina 5.49. predstavlja oblik Lagranžove funkcije  $L$ .

$$L(X, Y, \lambda) = f(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j G_j(X, Y) \quad (5.49.)$$

Sa  $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}^T$  je prikazan vektor Lagranžovih umnožaka. Stacionarne tačke Lagranžove funkcije mogu biti pronađene rešavanjem sledećih jednačina 5.50., 5.51. i 5.52., koje predstavljaju neophodni uslov.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(X, Y, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(X) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.50.)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(X, Y, \lambda) = G_j(X, Y) = g_j(X) + y_j^2 = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.51.)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_j}(X, Y, \lambda) = 2\lambda_j y_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.52.)$$

Može se uvideti da jednačine 5.50. do 5.52. prikazuju  $(n + 2m)$  jednačine u kojima su  $(n + 2m)$  nepoznate. Rešenje jednačina 5.50. do 5.52. daje optimalni vektor rešenja  $X^*$ , Lagranžom vektor umnožka  $\lambda^*$ , promenljivi vektor  $Y^*$ . Jednačine u okviru 5.51. obezbeđuju da ograničenja  $g_j(X) \leq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  budu zadovoljena, dok jednačine u okviru 5.52. podrazumevaju da su  $\lambda_j = 0$  ili  $y_j = 0$ . Ukoliko je  $\lambda_j = 0$  to znači da je  $j$ -to ograničenje neaktivno i može biti zanemareno. Sa druge strane, ukoliko je  $y_j = 0$  to znači da je ograničenje aktivno ( $g_j = 0$ ) u optimalnoj tački [54].

### Kuhn-Tuckerovi uslovi

Kao što je prikazano u prethodnim poglavljima, ograničenja mogu biti zadovoljena u konstantnoj minimalnoj tački  $X^*$ , pa se problem postavljen jednačinom 5.46. može predstaviti izrazom 5.53. i ograničenjima izrazom 5.54.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j \in J_1} \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.53.)$$

$$\lambda_j > 0, \quad j \in J_1 \quad (5.54.)$$

Sa simbolom  $\in$  je označena pripadnost. Izrazi 5.53. i 5.54. se nazivaju Kuhn-Tuckerovi uslovi koje matematičari izvode kroz zadovoljavanje neophodnog uslova u lokalnom minimumu funkcije  $f(X)$ . Ovi uslovi generalno nisu dovoljni za jedan lokalni minimum, ipak ovakav tip problema se naziva konveksnim optimizacionim problem, za koji su Kuhn-Tuckerovi uslovi neophodni i zadovoljeni za globalni minimum. U slučaju da je niz aktivnih ograničenja nepoznat, Kuhn-Tuckerovi uslovi se mogu zapisati kao u izrazu 5.55.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} &= 0, & i &= 1, 2, \dots, n \\ \lambda_j g_j &= 0, & j &= 1, 2, \dots, m \\ g_j &= 0, & j &= 1, 2, \dots, m \\ \lambda_j &= 0, & j &= 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (5.55.)$$

Ukoliko je problem tako definisan da je potrebno pronaći maksimalnu vrednost zadate funkcije ili su ograničenja u obliku  $g_j \geq 0$ , nije moguće da  $\lambda_j$  u jednačini 5.55. ima pozitivnu vrednost [55].

### 5.3. Metoda planiranja eksperimenta - DoE

Metoda planiranja eksperimenta (*eng. Design of Experiment – DoE*) predstavlja metodologiju primene statistike u procesu izvođenja eksperimenta. U nastavku rada je u upotrebi skraćeni oblik DoE. Ovaj postupak se može podjednako koristiti i u laboratorijskim uslovima, kao i u industriji, odnosno proizvodnji, u cilju njenog poboljšanja. Kod DoE se koristi statistički set alata za razvoj matematičkih modela koji će nadalje opisati zavisnost i uticaj ulaznih promenljivih na izlazne promenljive. Pod izlaznim promenljivima se podrazumeva odziv sistema. Dobijeni model ima za cilj da prikaže na koji način su ulazi i odzivi u vezi, a za njegovo dobijanje je zadužen veliki broj opita, koji se nazivaju planom eksperimenta. Matematički model pomaže istraživačima da predvide u kojoj zavisnosti se menjaju odzivi i u kakvoj su vezi sa ostalim uticajnim faktorima. Kao merilo opisivanja kvaliteta dobijenog matematičkog modela u odnosu na stvarne eksperimente se uzima greška preko koje se definiše odstupanje.

Sprovođenje eksperimenta iziskuje plansku promenu kontrolnih faktora ili nezavisnih promenljivih kako bi se procenio njihov uticaj na odziv, tj. zavisno promenljivu. Moguće je razlikovati dva tipa postavljanja eksperimenta: klasični i planski pristup. Klasičan pristup je pouzdan i konzervativan i može se često susresti u većini istraživačkih procesa. Ovim pristupom se izračunava efekat jednog faktora na odziv sistema. Svaki naredni faktor iziskuje zasebno postavljanje eksperimenta. Poređenjem ostvarenih pojedinačnih rezultata dobija se globalna slika ponašanja sistema. U praktičnoj primeni proces upoređivanja rezultata je često bez značenja za razumevanje procesa, što onemogućuje precizno oslikavanje sistema. Iz tog razloga se može zaključiti da je klasičan pristup veoma neefikasan. Klasičnim pristupom nije moguće analizirati interakciju faktora što često unosi konfuziju u pogledu efekata faktora na odziv sistema. Sa druge strane, planirani eksperiment (DoE) omogućuje jednostavan i efikasan plan variranja faktora i nezavisne promenljive kako bi se odgovorilo na prethodno definisan cilj istraživanja. Rezultat ovakvog eksperimentalnog pristupa omogućuje maksimalne informacije po svakom pojedinačnom prolazu i objektivno razumevanje sistema u celini. Primena DoE metode više ne predstavlja strogo ograničenu upotrebu samo na profesionalne statističare. Uz kvalitetnu obuku ova metoda može veoma lako da se uključi u rešavanje velikog broja različitih problema iz inženjerskih, ekonomskih oblasti, itd. Osnovna ideja na kojoj se zasniva DoE metoda je definisanje najmanjeg mogućeg broja pojedinačnih eksperimenata u kojima će svaki faktor biti variran na sistematički način. Analiza dobijenih podataka će utvrditi optimalne uslove, odnosno faktore koji su najznačajniji za odziv, kao i faktore koji nisu značajni i mogu biti zanemareni [56].

#### 5.3.1. Eksperiment

##### Značaj eksperimenta

Upotreba eksperimenta je prikazana kroz primer nasilnog ponašanja pojedinaca u okviru neke zajednice ljudi. Kako bi se smanjila stopa nasilja, psiholozi moraju najpre sprovesti istraživanje zbog čega dolazi do potencijalnog konflikta i na koji način se isti može izbeći ili predvideti. Takođe na koji način se ophoditi prema nasilnicima. Akcija se sprovodi za tri različita pristupa. Prvi pristup se svodi na opominjanje nasilnika nakon konflikta, drugi je slanje nasilnika na program savetovanja i praćenja njegovog stanja, dok je treći najradikalniji, hapšenje i sprovođenje nasilnika u određenu ustanovu. Pitanje je koji od ovih pristupa daje najbolje rezultate? U ovom primeru, kao i u nastavku eksperimentalnog istraživanja će se sprovođiti i analizirati tzv. uporedivi eksperimenti. Upoređivanjem postupaka se dolazi do zaključaka. Na prethodnom primeru, pod postupcima se podrazumevaju tri sprovedene

akcije. Upoređivanje postupaka se sprovodi njihovim pozivanjem ili upotrebom i njihovim uticajem na postignuti rezultat. Tri zadata postupka se pretvaraju u eksperimentalne jedinice čijim se pozivanjem (merenjem) dobijaju jedan ili više odgovora. Na primeru sa nasiljem, nasilnici predstavljaju eksperimentalne jedinice, a jedan od mogućih odgovora bi moglo biti vreme trajanja između napada. Upoređivanjem postupaka preko ostvarenih odgovora putem istraživanja sprovedenih sa eksperimentalnim jedinicama u različitim grupama je karakterističan eksperimentalni pristup istraživanja. Na ovaj način se može doći do zaključaka da li postoje izvesne razlike u ostvarenim odgovorima postignutim sprovođenjem većeg broja postupaka, predvideti veličine razlika među postupcima i koji od postupaka daje najprihvatljivije rezultate eksperimenata. Svaki eksperiment je okarakterisan definisanjem postupka sprovođenja eksperimenta i korišćenih eksperimentalnih jedinica, njihovom vezom i odgovorima dobijem sprovođenjem merenja. Eksperimentima su bitni zbog:

- 1) Dozvoljavaju postavljanje i direktno poređenje među eksperimentalnim postupcima od interesa.
- 2) Kreiranje eksperimenata u svrhu umanjavanja subjektivnog odlučivanja
- 3) Kreiranje eksperimenata kod kojih su odstupanja u rezultatima poređenja mala
- 4) I veoma značajno, moguće je upravljati i kontrolisati eksperimente što dovodi do jasne spoznaje prirode problema i dobijenih razlika kroz rezultate eksperimenata [57].

### **Elementi eksperimenta**

Svaki eksperiment se sastoji od procedura, eksperimentalnih jedinica, odgovora i metode koja povezuje procedure i jedinice. U literaturi se često mogu pronaći različita označavanje i imenovanje elemenata eksperimenata, tako da se uz pojam procedura pridodaje plan, pa se dobija plan procedure, a takođe i za eksperimentalne jedinice koje se poveruju sa procedurama zajedno sačinjavaju plan eksperimenta.

Mora se napomenuti da ne postoji jedinstveni metod analize postignutih rezultata tokom eksperimenta. Analiza ne pripada direktno planu eksperimenta, međutim igra značajnu ulogu na njegovo postavljanje. U odnosu na usvojenu metoda analize, često se plan eksperimenta razlikuje. Dva postavljena eksperimenta sa sličnim planom se mogu analizirati na različite načine, dok se dva potpuno različito postavljena eksperimenta mogu analizirati na identične načine. Tačna analiza zavisi pre svega od postavljenog plana eksperimenta, kao i od usvojenog tipa statističkog modela za koji se veruje da će na najbolji način predstaviti postignute rezultate.

Dobar eksperiment bi trebalo da:

- izbegava sistematičke greške
- bude što precizniji
- odstupanje bude u predviđenim granicama
- ima jasnu validaciju.

Kod uporedivih eksperimenata postoje razlike u odgovorima među procedurama. Ukoliko eksperiment ima sistematičku grešku, elementi koje poredimo tokom eksperimenta će biti orijentisani, odnosno naklonjeni nekom od eksperimentalnih jedinica, što rezultuje pogrešnim zaključcima i značaj preciznosti eksperimentalnog merenja i količine ponavljanja prestaju da

imaju važnost. Na primer, ukoliko se eksperimentalno merenje jednog postupka vrši pomoći instrumenta A, a drugi postupak merenja sa instrumentom B, nije moguće sa tačnošću usvojiti rezultate iz razloga što se ne zna da li uzrok odstupanja u merenju potiče od različitih postupaka ili greške u instrumentima. Ukoliko se postavi eksperiment koji ne sadrži sistematičku grešku, moguće je ostvariti nasumičnu grešku u odgovoru, koja dalje vodi ka nasumičnim greškama u procedurama koje se porede. Eksperimenti se smatraju tačnim i preciznim ukoliko je nasumično odstupanje (greška) u krajnjim procedurama koje se upoređuju veoma mala. Preciznost eksperimenta zavisi od nasumičnog odstupanja u odgovorima sistema, broju eksperimentalnim jedinica koje su upotrebljene i od korišćenog plana eksperimenta. Eksperimenti moraju biti planirani na osnovu čega se može proceniti veličina nasumičnog odstupanja. Postignuti zaključci nakon sprovođenja eksperimenta se direktno odnose na eksperimentalne jedinice. Ukoliko se statistička metoda pokaže validnom na jednom delu eksperimentalnih uzoraka, postignuti zaključci se mogu odnositi na kompletnu grupu eksperimentalnih uzoraka. Prema tome, zaključivanje na osnovu uzorka može biti veoma korisno, ali istovremeno i rizično [57].

### **Termini i koncept eksperimenta**

U prethodnom delu su pomenuti osnovni pojmovi vezani za eksperiment poput procedure, eksperimentalne jedinice i odgovora. Ovo poglavlje se bavi detaljnijim prikazivanjem i pojašnjenjem neophodnih elemenata eksperimenta za dalje razumevanje.

*Procedure* predstavljaju različite elemente istraživanja ili faktore koje se upoređuju. Mogu biti različitog oblika definisanja, poput na primer količine hraniva u poljoptivredi, temperature reaktanta u hemijskoj reakciji ili različitog vremenskog trajanja procesa starenja materijala...

*Eksperimentalne jedinice* su stvari koje pridodajemo procedurama, odnosno potpomažu da se na njima sprovede ispitivanje. Mogu na primer biti tačna parcela na kojoj se vrši prihranjivanje zemljišta, grupa medicinskih preparata kod kojih se meri temperatura reaktanta hemijske reakcije, ili vremensko starenje određene grupe čeličnih profila.

*Odgovori* su odzivi odnosno rezultati koje dobijamo ukoliko procedure primenimo na određene eksperimentalne jedinice. Često postoji veći broj postignutih odgovora na osnovu sprovođenja eksperimenta. Na osnovu prethodnih primera, odgovori mogu biti da je biomasa najbolje hranivo za određenu parcelu, ili da ispitivana vrsta čelika pod zadatim okolnostima gubi svojstva nakon 8 godina.

*Nasumičnost* se koristi kao poznati, razumljivi mehanizam verovatnoće pomoću kojeg se ostvaruje veza između procedura i eksperimentalnih jedinica. Kao primer nasumičnosti može biti redosled ocenjivanja postignutih odgovora eksperimentalnih jedinice.

*Eksperimentalna greška* je nasumičko prisutno odstupanje u svim eksperimentalnim rezultatima. Različite eksperimentalne jedinice mogu dati različite odgovore za iste definisane procedure, kao i ponovnim pokretanjem istih procedura za iste eksperimentalne jedinice rezultuje različitim odgovorima. Eksperimentalna greška ne mora biti merilo pogrešnog vođenja eksperimenta.

*Merive jedinice* predstavljaju aktuelne objekte na kojima se vrši merenje i dolazi do odgovora. Mogu se razlikovati od eksperimentalnim jedinica. Na primer, uticaj prihrane zemljišta na udeo azota kod kukuruza. Različite parcele predstavljaju eksperimentalne

jedinice, ali merive jedinice mogu biti određena grupa biljaka kukuruza na parceli, ili određeni deo pojedinačne biljke (list, stablo, koren...).

*Kontrola* ima nekoliko različitih mesta primene na planiranje eksperimenta. Prvo, eksperiment je kontrolisan zato što se procedure dodeljuju eksperimentalnim jedinicama. U suprotnom postojalo bi umesto eksperimenta samo posmatranje neke pojave ili sistema bez postignutih zaključaka. Drugo, kontrolna procedura predstavlja osnovu uporedivih eksperimentalnih istraživanja. Ova procedura se može smatrati neophodnom i često se naziva „nultom procedurom“ pre bilo kakvog pokretaka eksperimenta. Na primeru istraživanja novih lekova protiv bolova, kao nulta procedura se koriste zaključci postignuti na osnovu poznatih lekova protiv bolova.

Kombinovanjem *faktora* se formiraju procedure. Na primeru pečenja kolača, procedura se sastoji od kombinacije temperature i vremena pečenja. Vreme i temperatura se mogu posebno zadavati. Prema tome se može reći da imamo vremenski faktor i temperaturni faktor. Individualna podešavanje svakog faktora se nazivaju *nivoima* faktora.

Veoma je retko pokretati eksperimentalno ispitivanje u svrhu dobijanja samo jednog odgovora. Obično se jednim eksperimentom teži pokriti veći broj odgovora, čak je poželjno doći do više različitih odgovora na svako prethodno definisano pitanje. Odgovori poput ovih se nazivaju *primarnim odgovorima*, sve dok se njihovo postojanje vezuje za primarni interes eksperimentalne jedinice. Nekada je teško doći do primarnog odgovora. Na primer, ukoliko se razvijaju lekovi koji poboljavaju način života pacijentima nakon srčanog udara i „produžavaju“ njihov životni vek, svakako primarni odgovor eksperimenta bi bile godine života koje je pacijent živeo zahvaljujući leku. Međutim da bi se došlo do tog odgovora, moraju proći godine ili decenije kako bi se sa sigurnošću utvrdio njihov značaj na ispitivanike. Studiju nije moguće završiti veoma dugo što joj svakako ne ide u prilog. Iz tog razloga se koriste *zamenski odgovori* koji ne daju odgovor na primarno postavljeno pitanje, ali svakako doprinose dubljem razumevanju problema tokom dužeg vremenskog perioda. Na osnovu niza zamenskih odgovora se često može predvideti primarni odgovor na postavljeni problem. Na prethodnom primeru sa zamenskim odgovorima bi se mogla napraviti analiza pacijenata koji su i dalje živi nakon 5 ili 10 godina od srčanog udara. Zamenski odgovori su veoma česti i korisni kod dužih eksperimenata, ali takođe mogu nositi izvesnu dozu rizika jer preko njih se dolazi do zaključaka pre konačnog zaključka [57].

### 5.3.2. Nasumičnost i plan eksperimenta

Eksperiment je okarakterisan procedurama i korišćenim eksperimentalnim jedinicama, kao i načinom povezivanja procedura i jedinica, odgovorima koje najčešće dobijmo merenjem. Eksperiment se smatra nasumičnim (*eng. Randomized*) ukoliko se metoda pomoću koje se ostvaruje veza između procedura i eksperimentalnih jedinica smatra poznatom, odnosno dobro razumljivom u okviru šeme verovatnoće. Šema verovatnoće se još naziva i nasumičnost. Eksperiment može imati nekoliko odlika nasumičnosti pored zadatka procedura i eksperimentalnih jedinica. Nasumičnost je jedna od najznačajnijih elemenata dobro planiranog eksperimenta. Neophodno je naglasiti postojanost razlike između nasumične šeme i slučajne šeme. Razmatra se nekoliko potencijalnih mehanizama u kojima postoje 4 procedure koje treba da se povežu sa 16 eksperimentalnih jedinica. Prvi slučaj sadrži 16 identičnih komada papira, koji su podeljeni u četiri grupe A, B, C i D svaka po četiri papira. Stavljanjem svih papira u kutiju i mešanjem se izvlače pojedinačni papiri koji predstavljaju eksperimentalne jedinice. Drugi slučaj se sastoji od mehanizma koji proceduru A dodeljuje za prva četiri papira, naredna četiri papira su dodeljena proceduri B i tako sve do procedure D.

Treći slučaj se zasniva na mehanizmu koji zakonitost spajanja eksperimentalnih jedinica i procedura vrši čitanjem sekundi na časovniku u obliku brojeva između 1 i 15, 16 i 30, 31 i 45, 46 do 60. Prvi postupak koristi precizno definisani metod verovatnoće. Jasno razumevanje načina funkcionisanja spajanja eksperimentalnih jedinica i procedura, uz obuhvatanje statistički ekvivalentne nasumičnosti uzorkovanja i ponavljanja predstavlja veoma značajnu karakteristiku ovog mehanizma. Druge dve metode se mogu predstaviti kao slučajnim zbog toga što se ne mogu smatrati predvidivim i determinističkim, ali ne koriste nasumičnost kao prva metoda. Povezivanje eksperimentalnih jedinica i procedura zavisi od reda pozivanja eksperimentalnih jedinica, proteklog vremena između pozivanja jedinica, načina označavanja procedura sa A, B, C i D i od potencijalnih drugih faktora. Slučajnost se ne može smatrati istim kao i nasumičnost. Uprkos svemu, uvek postoji stalno nadmetanje sa nasumičnom eksperimentalnom greškom. Ipak, nasumično povezivanje procesura i eksperimentalnih jedinica ima dve korisne posledice:

- 1) Nasumičnost štiti od zbunjenosti,
- 2) Nasumičnost je osnovni oblik smetnje.

Nasumičnost se retko koristi u praksi za rešavanje smetnji, iz razloga što se smetnje u toku izvođenja praktičnih eksperimenata gotovo neobjašnjive ili teško uočljive. Ova pojave se najčešće vezuje za virtuelne eksperimente izvođene uz pomoć računara. Međutim, neki statističari se ne slažu sa bezvrednošću nasumičnosti kao osnovne forme smetnji. Ipak uspeh nasumičnosti u borbi protiv zbunjenosti je mnogo više zastupljeni element i u nastavku je detaljnije objašnjen.

### **Nasumičnost protiv zbunjenosti**

Zbunjenost nekog sistema se definiše kroz pojavu kada se jedan efekat nekog faktora ili procedure ne može izdvojiti od drugog faktora ili procedure. U nastavku je objašnjen slučaj i potencijalni problemi ukoliko se ne vodi računa o nasumičnosti sistema. Razmatra se nova terapija kao prevencija arterijske bolesti srca. Potrebno je porediti terapiju lekovima u odnosu na bajpas operaciju srca. Svaka procedura je praćena svojim prednostima i nedostacima. Nedostatak operacije srca bajpas metodom iziskuje jaču fizičku pripramljenost pacijenta i sama komplikovanost operacije može povlačiti rizike, koji mogu biti fatalni za pojedine pacijente. Sa druge strane ista metoda statistički gledano, ostvaruje bolji efekat na pacijente sa aspekta dugotrajnosti i postojanosti. Zaključak je da operacija srca predstavlja rizičan čin, koji ukoliko sve protekne kako treba, ostvaruje dugoročno bolje rezultate po pacijenta. Situacija sa tretmanima lekovima je obrnuta u odnosu na operaciju bajpas metodom. Pacijenti nisu izloženim stresnim posledicama operacije, ali lekovi nemaju tako dobar efekat na dužem vremenskom periodu. Istraživanje se sprovodi na 100 ispitivanika koji su podeljeni u dve celine, odnosno dve procedure. Praćenjem i ocenjivanjem stanja pacijenata u trajanju od 5 godina se dolazi do odgovora eksperimenta. Šta može biti potencijalni problem ukoliko se napravi greška u nasumičnosti? Kao što je već rečeno, bajpas operacija je veoma ozbiljan zahvat koji nosi rizike i pacijenti koji imaju još neko dodatno oboljenje najčešće nisu dovoljno jaki da budu podvrgnuti operaciji. Na osnovu prethodnog se može uvesti prva podela koja fizički jače pacijente usmerava na operaciju, a slabije na terapiju lekovima. Ova podela se zasniva na fizičkoj spremnosti pacijenta. Terapija lekovima na osnovu podele zasnovane na fizičkoj spremnosti pacijenta govori da je manji procenat pacijenata koji su duže poživeli iz razloga što se samo fizički slabiji pacijenti usmeravaju na nju. Ovakav zaključak može biti veoma opasan, zato što dovodi do zaključka koji je donet samo na osnovu jedne grube podele. Sa druge strane, pošto istraživanje iziskuje vreme, vrlo je moguće

da nije isti kvalitet lekova na početku eksperimenta i u njegovoj daljoj fazi zbog stalnog usavršavanja lekova. Takođe, da li su pacijenti na početku istraživanja u istom stanju kao i pacijenti u krajnjoj fazi istraživanja? Pacijenti mogu biti različitog uzrasta, pola, socijalnog statusa i drugih faktora koji značajno mogu uticati da tok lečenja i vreme provedeno u životu nakon operacije ili na terapiji lekovima. U nastavku su izdvojene dve potencijalne nasumične šeme ovog eksperimenta:

- 1) Šema „novčića“ – pismo opredeljuje pacijente na operaciji, a glava na terapiju lekovima
- 2) Šema „korpe sa kuglicama“ – u korpu je stavljeno 50 belih i 50 crvenih kuglica. Pacijenti nasumično izvlače kuglice i bela izvučena kuglica predstavlja operaciju, a crvena terapiju lekovima.

Treba naglasiti da u šemi pomoću novčića broj pacijenata podeljenih u dve grupe, odnosno procedure je potpuno nasumičan, dok je u slučaju korpe sa kuglicama tačno definisan odnosom 50-50.

Na ovaj način nasumičnost pomaže. Nije bitno koje karakteristike među eksperimentalnim jedinicama (ispitivanicima) su uključene u krajnji odgovor eksperimenta, pomoću nasumičnog pristupa, grubo polovina pacijenata sa tim karakteristikama je uvrštena u svaku od grupa. Grubo polovina od muške populacije je na terapiji lekovima, kao i grubo polovina od starije populacije pacijenata je na istoj terapiji. Grubo polovina od snažnijih pacijenata je takođe na terapiji lekovima, itd. Na osnovu toga je podela tačno 50/50, ali odstupanje od svake podele ja praćeno pravilima verovatnoće koji se mogu koristiti kad pravi zaključak o procedurama. Ovaj primer predstavlja svakako uprošćeni oblik. Stvarni plan eksperimenta bi svakako uključio veći broj analiziranih faktora (godine, pol, intenzitet bolesti i dr.). Lepa strana nasumičnosti je svakako ta da pomaže u prevenciji zbunjenosti, čak i kod faktora kod kojih se ne zna njihova važnost za sistem [57].

### **Nasumičnost ostalih elemenata eksperimenta**

Veoma često se eksperiment prikazuje jednostavno, kao veza procedura i eksperimentalnih jedinica u svrhu dobijanja odgovora, preskačući mnoštvo potencijalnih koraka i izbora koji bi trebali da budu uključeni. Mnogi od tih dodatnih koraka se može odabrati nasumično, što takođe može da vodi ka zbunjenosti. Na primer:

- Ukoliko se eksperimentalne jedinice ne pozivaju po tačnom redosledu, njihovo pozivanje može biti nasumično,
- Ukoliko se eksperimentalne jedinice ne vrše na istoj lokaciji, lokacija se takođe može bitati nasumično,
- Ukoliko se u toku eksperimenta koristi veći broj instrumenata, njihov odabir i spajanje sa eksperimentalnim jedinicama može biti nasumičan.

Kada se očekuje da neki od dodatnih koraka može voditi ka promeni odgovora sistema (odzivu sistema), oni se uključuju u plan eksperimenta.

### **Sprovođenje nasumičnosti**

Nasumičnost najčešće obuhvata nasumični redosled pozivanja objekata eksperimenata (na primer: sprovođenje analize prema nasumičnom redosledu) ili nasumično pozivanje niza



parametara koji se mogu svrstati u okviru samo jednog od objekata. Prema tome, potrebno je definisati metode preko kojih se objekti eksperimenta pozivaju nasumičnim redosledom, kao i njihovi nasumični nizovi od svakog objekta posebno. Kada su u pitanju jednostavne veličine vrednosti niza u okviru objekta koje su poznate, moguće je odabrati nasumični niz preko prvog odabranog nasumičnog redosleda. Nasumične metode mogu biti fizičke ili numeričke. Fizičke nasumične metode su definisane preko stvarne fizičke zakonitosti koja ima za proizvod nasumične rezultate sa poznatim karakteristikama. Primer fizičke nasumične metode mogu biti novčići koji su predstavljeni u prethodnom poglavlju. Za ovaj tip metode se tvrdi da mogu biti predvidive, s toga njihova nasumičnost se može definisati kao veština na primer iskusnog madžioničara koji uspeva svaki put da jednako baci novčić i uvek dobije “glavu” kao rezultat. Veoma je važno biti siguran da je fizički postavljena nasumična metoda sprovedena na pravilan način. Ovu metodu je lako predstaviti preko primera izvlačenja karata iz šešira. Potrebno je napraviti nasumični redosled od  $N$  objekata. Uzima se  $N$  karata, koje su numerisane po jedna za  $N$  i dobro promešane u šeširu. Prvi objekat tako je dodeljen broju prve karte i tako nadalje. Objekti su tako sortirani da je njihova veza sa brojevima izvršena prema rastućem redosledu. Sa dobrim mešanjem, svi redosledi objekata su jednako verovatni.

Ukoliko jednom definišemo nasumični redosled za objekte, lako je definisati i nasumični redosled za svako od objekata posebno. Ukoliko se pretpostavi da je  $N$  objekata, od kojih se svaki sastoji od  $g$  elemenata sa veličinama  $n_1, \dots, n_g$  sa  $n_1 + \dots + n_g = N$ . Na primer: Osam studenata su podeljeni u jednu grupu po četiri studenta i dve grupe od po dva studenta. Prvi zahtev je objekte postaviti u nasumični redosled. Ukoliko su objekti u nasumičnom redosledu, povezani sa prvim  $n_1$  objektima do prve grupe, sledeći  $n_2$  objekti do druge grupe i tako dalje. Ako se osam studenata ubace u nasumični redosled 3, 1, 6, 8, 5, 7, 2, 4 onda će tri grupe studenata izgledati (3, 1, 6, 8), (5, 7) i (2, 4).

Numerička nasumična metoda koristi brojeve preuzete iz tablice nasumičnih brojeva ili su generisani preko računarskih softvera. Koristi se tabela ili generator iz softvera kako bi se dobio nasumični redosled za  $N$  objekata, koji se dalje ponašaju kao kod metode fizičke nasumičnosti ukoliko je potrebno definisati redosled za svaki od objekata posebno. Uzima se nasumični redosled preko dodeljivanja nasumičnog broja sa svaki objekat i nakon toga se sortiranje objekata ostvaruje preko nasumičnih brojeva u rastućem redosledu. Ukoliko dođe do ponavljanje nekog broja koji je već ranije upotrebljen, zamenjuje se ponavljanje sa sledećim brojem iz liste i na taj način se dobija  $N$  različitih brojeva. Na primer ukoliko je potrebno izdvojiti 5 brojeva uz pomoć niza iz tabele datog u obliku (4, 3, 7, 4, 6, 7, 2, 1, 9, ...). Potrebni 5 brojeva će biti (4, 3, 7, 6, 2) zbog dupliranja broja 4 i 7, koji su izbačeni.

U ovom obliku se rečju “nasumičnost” ne može u potpunosti smatrati pravo nasumično pozivanje brojeva. Ova činjenica potiče iz toga da tabele i softverski generatori sadrže uvek iste kombinacije brojeva iz kojih se kasnije generiše neki nasumični niz. Ukoliko se nauči algoritam brojeva u tabeli, pozivani nasumični niz postaje predvidiv. Iz tog razloga se ova metoda još naziva i pseudonasumična metoda [57].

### Nasumičnost za zaključak

Gotovo sve analize koje su prikazane i sprovedene u okviru rada su bazirane ne normalnoj distribuciji i linearnim modelima, koji koriste *t-testove*, *F-testove*, ili neke slične. U nastavku je prikazan značaj ovih postupaka koji obezbeđuju na primer odgovore kao što su: „Odgovori u proceduri grupe A je nezavisnost od eksperimentalne jedinice do jedinice i praćeno normalnom distribuciji sa srednjom vrednošću  $\mu$  i varijacijom  $\sigma^2$ “. Činjenica je da nasumičnost sama po sebi može biti upotrebljena kao osnova za zaključivanje. Dobra strana

nasumičnog pristupa je u tome što se oslanja samo na zadati nasumični oblik. Ne zahteva metode koje se vezuju uz linearne modele poput nezavisnosti i normalnosti. Loša strana nasumičnog pristupa može biti teška implementacija, čak ako se radi o relativno malim problemima. Ipak uz pomoć računara se može postići lakši efekat. Štaviše, zaključak koji nasumičnost obezbeđuje je često veoma sličan kao kod standardnih tehnika kao što je ANOVA, o kojoj će biti više reči u nastavku. Zahvaljujući moći računara, zaključci procedura dobijenih uz pomoć nasumičnosti mogu biti prihvatljiviji, dobijeni bez mnogo muke. Primer zaključaka dobijenih uz pomoć nasumičnosti je prikazan u nastavku i sastoji se od dva slučaja, od kojih je jedan izvršen preko *uparenog t-testa*, a drugi preko *t-testa sa dva uzorka*.

### Upareni t-test

Bezjak i Knez su 1995. godine obezbedili podatke o dužini vremeskog trajanja potrebnog da radnici u jednoj tekstilnoj industriji zašiju kragu na mušku košulju koristeći uobičajeno radno mesto i radno mesto sa unapređenom ergonomijom. Tabela 5 prikazuje vreme po ušivenoj kragu u sekundama za 30 radnika u odnosu na oba radna mesta.

Tabela 5 – Potrebno vreme za radnu operaciju 30 radnika sa standardnim – S i ergonomski unapređenim radnim mestom – E [57]

#	S	E	#	S	E	#	S	E
1	4,9	3,87	11	4,7	4,25	21	5,06	5,54
2	4,5	4,54	12	4,77	5,57	22	4,44	5,52
3	4,86	4,6	13	4,75	4,36	23	4,46	5,03
4	5,57	5,27	14	4,6	4,35	24	5,43	4,33
5	4,62	5,59	15	5,06	4,88	25	4,83	4,56
6	4,65	4,61	16	5,51	4,56	26	5,05	5,5
7	4,62	5,19	17	4,66	4,84	27	5,78	5,16
8	6,39	4,64	18	4,95	4,24	28	5,1	4,89
9	4,36	4,35	19	4,75	4,33	29	4,68	4,89
10	4,91	4,49	20	4,67	4,24	30	6,06	5,24

Jedno pitanje koje se postavlja bi bilo da li je prosečno potrebno vreme jednako u oba razmatrana slučaja. Formalno, testirana je nulta hipoteza koja pokazuje da je prosečno vreme na standardnom radnom mestu, jednako kao i prosečno vreme na ergonomski unapređenom radnom mestu.

Upareni t-test je standardna procedura za testiranje nulte hipoteze. Koristi se upareni t-test iz razloga što se vreme rada svakog zaposlenog merilo dva puta zbog dva radna mesta. Brži radnik je verovatno brži na oba radna mesta, dok je sporiji radnik sporiji na oba radna mesta. Ono što je potrebno je izračunati razlike (standardnog u odnosu na ergonomsko radno mesto) za svakog radnika i testirati nultu hipotezu tako da srednje njihovo odstupanje bude nula koristeći jedan jednostavni t-test na razlikama. Tabela 6 prikazuje razlike između standardnog i ergonomski unapređenog radnog mesta. Ponovo se pristupa podešavanju jednog jednostavnog t-testa. Neka  $d_1, d_2, \dots, d_n$  budu  $n$  razlika u testu. Pretpostavlja se da su razlike nezavisne od normalne distribucije sa srednjom vrednošću  $\mu$  i varijacijom  $\sigma^2$  i obe vrednosti su nepoznate. Nulta hipoteza pokazuje da je srednja vrednost  $\mu$  jednaka preciziranom  $\mu_0 = 0$  ( $H_0: \mu = \mu_0 = 0$ ) i alternativa je  $H_1: \mu > 0$  zato što se očekuje da će radnici brže raditi na ergonomski unapređenom radnom mestu.

Tabela 6 – Razlike između standardnog i ergonomske unapređenog radnog mesta [57]

1,03	-0,04	0,26	0,30	-0,97	0,04	-0,57	1,75	0,01	0,42
0,45	-0,80	0,39	0,25	0,18	0,95	-0,18	0,71	0,42	0,43
-0,48	-1,08	-0,57	1,10	0,27	-0,45	0,62	0,21	-0,21	0,82

Izraz za jedan jednostavni t-test je dat u formuli 5.56.

$$t = \frac{\bar{d} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \quad (5.56.)$$

U formuli 5.56.  $\bar{d}$  predstavlja srednju vrenost podatka (u ovom slučaju razlika  $d_1, d_2, \dots, d_n$ ), a  $n$  predstavlja veličinu uzorkovanja i  $s$  je standardno odstupanje (od razlika u vremenu). Parametar  $s$  se izračunava prema formuli 5.57.

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2} \quad (5.57.)$$

Ukoliko je nulta hipoteza tačna i pretpostavka bude ispunjena, tada t-statističko prati t-distribuciono sa  $n - 1$  stepenom slobode.

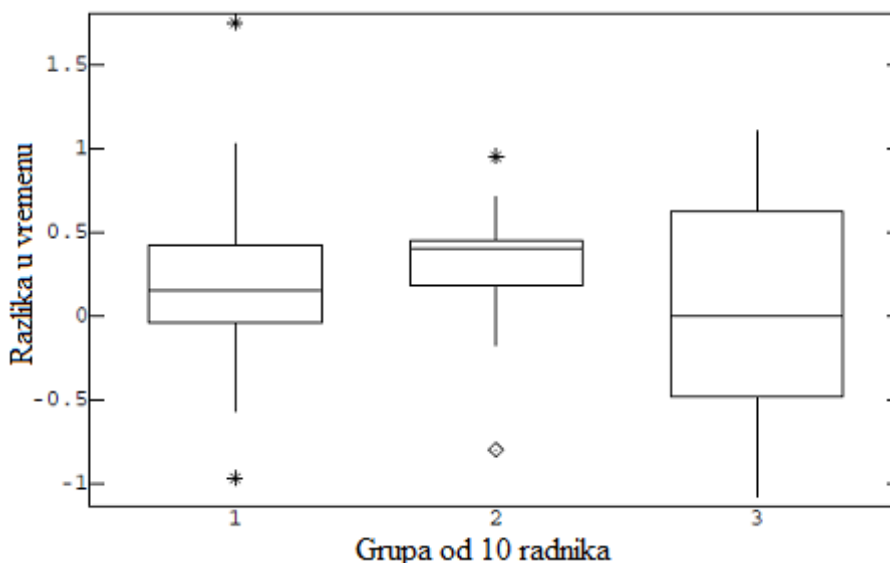
Verovatnoća se izražava sa *p-testom*, pretpostavljajući da je nulta hipoteza tačna, daje statistički test kao ekstrem ili više ekstrema. Pod ekstremom se podrazumeva udaljavanje od nulte hipoteze prema nekim alternativnim hipotezama. Na primeru radnika, alternativna hipoteza je tačna ukoliko je srednja vrednost veća nego u nultoj hipotezi. Veće vrednosti od statističkog testa su ekstremi. Prema tome, p-vrednost je površina unutar t-krive sa  $n - 1$  stepenom slobode do posmatrane t-vrednosti. Kako bi se prikazao t-test, koriste se podaci za poslednjih 10 radnika i za sve radnike. Tabela 7 prikazuje te rezultate vremena. Prema podacima za poslednjih 10 radnika, p-vrednost je 0,46 što znači da bi moglo značiti da je t-statistički veće ili vće za 46% od svih testova kada je nulta hipoteza tačna, odnosno zadovoljena. Prema tome, malo je dokaza protiv nulte hipoteze. Kada se razmatraju svih 30 radnika, p-vrednost je 0,074 što predstavlja blagi dokaz protiv nulte hipoteze. Činjenica je da su ove dve različite verovatnoće prikazuju da radnici nisu sortirani prema nasumičnom redu.

Tabela 7 – t-test za poslednjih 10 i svih 30 radnika [57]

	$n$	df	$\bar{d}$	$s$	$t$	$p$
Poslednji 10 radnika	10	9	0,023	0,695	0,10	0,459
Svih 30 radnika	30	29	0,175	0,645	1,49	0,074

Slika 5.11 prikazuje *kutijasti dijagram* (eng. *box-plot*) za razlike po grupama od po 10 radnika. Manje brojčane vrednosti razlika imaju tendenciju da postanu veće, što je objašnjeno u nastavku. Prema Chambers [58], kutijasti dijagram predstavlja odličan alat za prikazivanje različitih informacija kroz nizove podataka, posebno za pronalaženje i ilustraciju lokacija i razlika između analiziranih grupa podataka. Svaki kutijasti dijagram se formira preko vertikalne ose koja predstavlja odgovornu promenljivu i horizontalne ose koja predstavlja faktore od interesa. Izračunava se srednja vrednost (preko median funkcije) i četvrtina vrednosti (manje vrednosti od prve četvrtine ukupne vrenosti, tj. manje od 25% i veće vrednosti od 75% od ukupne vrednosti). Obavezno se postavlja simbol na kutijastom dijagramu koji predstavlja srednju median vrednost od analiziranog niza vrednosti (najčešće pravom linijom), između nižih i viših četvrtina. Povlači se linija od niže četvrtine (od 25%)

do minimalne vrednosti niza i od više četvrtine (od 75%) do maksimalne vrednosti niza vrednosti. Prema tome, kutijasti dijagram prikazuje srednju median vrednost niza analiziranih vrednosti (50%) i ekstremne tačke (minimalna i maksimalna vrednost). Jedan kutijasti dijagram može prikazivati vrednosti niza jednog faktora, dok se vrlo često prikazuje više kutijastih dijagrama, kako bi se istovremeno analiziralo više uticajnih parametara. Debljina kutijastog dijagrama može biti proizvoljna, ali može biti i proporcijalna broju tačaka koji sačinjavaju grupu podataka, što je karakteristično za prikaz više dijagrama istovremeno. Kutijastim dijagramom je moguće odgovoriti na pitanja poput, da li je analizirani faktor značajan, da li rezultati značajno variraju između faktora, da li neki faktor odstupa po rezultatima od ostalih?



Slika 5.11 – Kutijasti dijagrami za grupu od 10 radnika [57]

Razmatra se analiza bazirana na nasumičnosti. Nasumična nulta hipoteza je tačna ukoliko su dva razmatrana radna mesta u potpunosti jednaka i samo deluju na označavanje odgovora koju su postavljani. Na primer, prvi radnik ostvari vreme od 4,90 sekundi na standardnom radnom mestu i 3,87 na ergonomski unapređenom radnom mestu. Unutar nulte hipoteze, odgovor bi mogao biti 4,90 i 3,87 bez obzira kako se preko nasumičnosti izvršile procedure. Jedina stvar koja bi mogla biti drugačija je koja od dva dobijena rezultata označiti kao standardnu, a koju kao ergonomski unapređenu. Prema tome, unutar nasumičnosti nulte hipoteze bi se moglo, sa jednakom verovatnoćom proglasiti rezultat 3,87 za standardni i 4,90 za ergonomski unapređeni.

Šta zapravo predstavljaju razlike, koje su prikazane na dijagramu sa slike 5.11? Utvrđeno je da je razlika od 1,03 za prvog radnika. Unutar nasumičnosti nulte hipoteze se veoma lako može predstaviti razlika i kao -1,03 što je slično za sve ostale razlike. Prema analogiji nasumičnosti kod uparenog t-testa, apsolutne vrednosti razlika se uzimaju i predznak (pozitivan ili negativan) može biti nasumično usvojen iz razloga što ima jednak uticaj na verovatnoću. Pokretanjem nasumičnog testa, bira se opisna statistika za podatke i nakon toga se analizira distribucija statistike unutar nasumičnosti nulte hipoteze. Nasumičnost p-vrednosti je verovatnoća (unutar nasumične distribucije) koja daje opisnu statistiku kao ekstrem ili više ekstrema od koji će jedan biti razmatran.

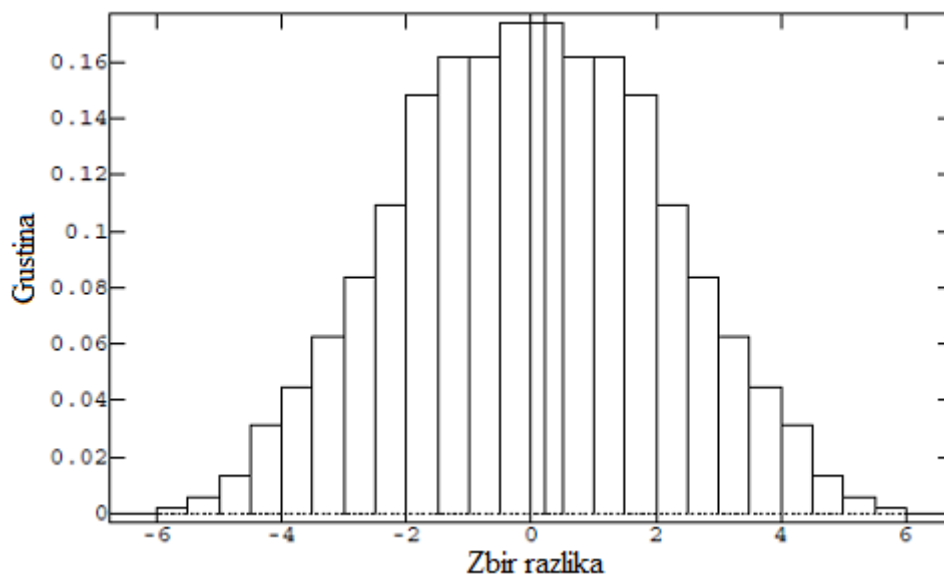
Sabiranjem svih razlika u ostvarenom vremenu, predstavlja još jedna korak u opisnoj statistici. Očitana srednja vrednost (preko funkcije *average*) bi mogla voditi ka istoj p-

vrednosti i zbog toga se koristi srednje vrednosti preko funkcije *median*. Za početak se razmatraju poslednjih 10 radnika. Zbir razlika u vremenu za poslednjih 10 radnika iznosi 0,23. Za dobijanje nasumične distribucije, mora se dobiti zbir svih mogućih kombinacija razlika prema predznacima. Postoje dve mogućnosti za svakog razliku, a razmatra se 10 vremena, što daje ukupno  $2^{10} = 1024$  različitih vrednosti za zbir unutar nasumične distribucije. Da bi se dobila nasumična p-vrednost, mora se razmatrati svih 1024 vrednosti.

Slika 5.12 prikazuje **histogram** nasumične distribucije za poslednjih 10 radnika. Prema Chambers [58], histogram predstavlja grafički prikazivanje zbira distribucije niza vrednosti. Svaki histogram treba da sadrži centralni podatak (njegovu lokaciju na dijagramu), razmeru širenja (prostiranja) podataka, meru asimetrije distribucije verovatnoće od realne nasumične vrednosti (može biti pozitivno, negativno ili nedefinisano). Preko histograma je moguće uočiti da li neki od analiziranim podataka u velikoj meri odstupa od ostalih vrednosti. Sve ove karakteristike prave jasnu sliku distribucije niza podataka. Najčešći oblik histograma je kreiran deljenjem analiziranog niza podataka u grupe po nivoima učestalosti. Svaka grupa (ili klasa) ima definisanu minimalnu i maksimalnu vrednost podatka koji je čini (opseg). Nakon toga se podaci razvrstavaju po grupama i analizira njihova zastupljenost. Histogram se sastoji od vertikalne ose na koju se najčešće nanosi frekvencija učestalosti pojavljivanja podatka i horizontalne ose gde se nanosi odgovorna promenljiva. Klase se zadaju ili proizvoljno prema nahodanju korisnika ili prema nekom sistematičkom pravilu. Teorijski izvedena pravila za kreiranje histograma se mogu pronaći u radu autora Scott iz 1992. godine [59]. Kumulativni histogram predstavlja varijantu histograma u kome vertikalna osa ne prikazuje samo frekvenciju učestalosti razmatranog niza podataka za svaku klasu posebno, već i frekvenciju svih klasa čiji su podaci manji od odgovorne promenljive. Oba navedena tipa histograma mogu imati dodatni oblik u kome su brojevi učestalosti naznačenog parametra zamenjeni normalizovanim brojevima. Ovakav tip histograma se naziva relativni histogram ili relativni kumulativni histogram. Postoji nekoliko pristupa pomoću kojih se mogu normalizovati brojevi. Kod prvog pristupa, pod normalizovanim brojevima se podrazumevaju brojevi u klasi koji su podeljeni ukupnom količinom niza podataka. U tom slučaju relativni brojevi su normalizovani zbirom jednog (ili 100 ukoliko se koristi procentualna skala). Ovaj pristup predstavlja intuitivni pristup u kome visina pojedinačne grupe u histogramu reprezentuje proporciju podatka za svaku klasu. Drugi pristup normalizacije brojeva je dosta sličan prethodnom, uz dodatak što se osim deljenja ukupnom količinom niza podataka, isti prethodno množe sa debljinom klase. Kod ovog pristupa, površina (ili integral) unutar histograma je jednak nuli. Sa tačke gledišta verovatnoće, normalizovani rezultati u relativnom histogramu su najrodniji funkciji gustine verovatnoće i rezultati u relativnom kumulativnom histogramu su najrodniji kumulativnoj funkciji distribucije. Ukoliko se želi prevući gustina verovatnoće ili kumulativna funkcija distribucije na vrh histograma, koristi se normalizacija. Prema slici 5.12 se jasno može uočiti da je vrednost 0,23 u centru distribucije i na osnovu nje se može očekivati velika vrednost p-vrednosti. Činjenica je da je 465 vrednosti od ukupnih 1024 su veće ili jednake od 0,23 pa je nasumična p-vrednost jednaka  $465/1024 = 0,454$  što je vrlo blizu p-vrednosti u t-testu.

Potrebno je uraditi test značaja 10 brojeva što zahteva računanje 1024 različita zbira 10 brojeva. Za neke nizove podataka, moguće je računanje nasumične p-vrednosti ručno. Poslednjih 10 razlika su prikazani kroz tabelu 8. Samo jedna od vrednosti je negativna (-0,21) i sedam su pozitivne i imaju apsolutnu vrednost veću od 0,21. Svaka promena neke od ovih sedam vrednosti, čini zbir manjim, zbog čega se ne razmatra njihova promena predznaka, osim kod 0,21, 0,01 i -0,21. Ovo predstavlja mali problem koji vodi da četiri od osam mogućih predznaka koji su potencijalni za testiranje tri razlike, vode do zbira koji je velik ili

veći od njihovog razmatranog zbira. Prema tome nasumična p-vrednost je  $4/1024 = 0,004$  što je manje od vrednosti 0,007 koja bi se dobila korišćenjem t-testa.



Slika 5.12 – Histogram nasumične distribucije za poslednjih 10 radnika [57]

Tabela 8 – 10 razlika u vremenu za poslednjih 10 radnika [57]

0,62	1,75	0,71	0,21	0,01	0,42	-0,21	0,42	0,43	0,82
------	------	------	------	------	------	-------	------	------	------

Gledaju ulazne podatke niza vrednosti, postoji  $2^{30} = 1.073.741.824$  različitih nizova vrednosti. Ova količina nizova je previše za izračunavanje, čak i za računare. Nasuprot izračunavanja svih vrednosti, računar odabira nasumični uzorak iz niza ukupne distribucije preko nasumičnog niza predznaka i nakon toga se ti uzorci koriste za računanje nasumičnih p-vrednosti, ukoliko postoji kompletna distribucija. Razuman broj uzoraka od 10.000 se smatra dovoljnim. Koristio se nasumični uzorak veličine 10.000 i dobijena je p-vrednost od 0,069 što je opravdano blizu p-vrednosti iz t-testa. Dva dodatna nasumična uzorkovanja po 10.000 uzoraka su dali p-vrednosti od 0,073 i 0,068. Binomna distribucija predviđa standardnu devijaciju oko 0,0026 prema:

$$\sqrt{p \cdot (1 - p) / 10000} \approx \sqrt{0,07 \cdot 0,93 / 10000} \approx 0,0026$$

### T-test sa dva uzorka

Prema radu Hunt-a iz 1973. godine [60] obezbeđeni su podaci eksperimentalnog istraživanja apsorpcije forfora u biljkama. Tabela 9 prikazuje rezultate količine forfora u 8 biljaka, od kojih su 4 analizirane nakon 15 dana tretiranja, a druge 4 biljke su nakon 28 dana tretiranja. Postoji 8 biljaka koje su nasumično podeljene u dve grupe po 4 biljke, od kojih je svaka grupa drugačije tretirana. Osnovno pitanje je da li je prosečna vrednost forfora jednaka ukoliko se uzorkovanje vrši u dva različita vremenska intervala. Testira se nulta hipoteza sa pretpostavkom da će uzorci dobijeni nakon 15 i 28 dati iste prosečne vrednosti rezultata.

T-test sa dva uzorka predstavlja standardnu metodu za dobijanje odgovora na pitanja kao na primeru fosfora u biljkama. Sa  $y_{11}, \dots, y_{14}$  su označeni odgovori za prvi uzorak i sa  $y_{21}, \dots, y_{24}$  označeni odgovori za drugi uzorak. Uobičajene pretpostavke za t-test sa dva uzorka su da podaci  $y_{11}, \dots, y_{14}$  su uzorak iz normalne distribucije sa srednjom vrednošću  $\mu_1$  i

varijacijom  $\sigma^2$ , a podaci  $y_{21}, \dots, y_{24}$  su uzorak iz normalne distribucije sa srednjom vrednošću  $\mu_2$  i varijacijom  $\sigma^2$  i oba uzorka su nezavisni jedan od drugog. Srednje vrednosti mogu biti različite, ali varijacije su jednake. Nulta hipoteza je:  $H_0: \mu_1 = \mu_2$  i alternativa:  $H_1: \mu_1 < \mu_2$ .

Tabela 9 – Podaci količine fosfora u biljkama nakon 15 i 28 dana [57]

	15 dana				28 dana			
[ $\mu\text{g/biljci}$ ]	4,3	4,6	4,8	5,4	5,3	5,7	6,0	6,3

Izraz za izračunavanje statističkog t-testa za dva uzorka je dat u formuli 5.58.

$$t = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}} \quad (5.58.)$$

Gde  $\bar{y}_1$  i  $\bar{y}_2$  predstavljaju srednje vrednosti prvog i drugog uzorka, a  $n_1$  i  $n_2$  su veličina uzorkovanja i  $s_p^2$  je zbirna procena odstupanja definisana prema formuli 5.59.

$$s_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_1} (y_{1i} - \bar{y}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (y_{2i} - \bar{y}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}} \quad (5.59.)$$

Ako je nulta hipoteza tačna, kao i postavljena pretpostavka, tada je statistički t-test praćen t-distribucijom sa  $n_1 + n_2 - 2$  stepena slobode. P-vrednost za jednostranu alternativu je površina unutar t-distribucije kriva sa  $n_1 + n_2 - 2$  stepenom slobode, što je tačno sa t-statistično.

Za podatke  $\bar{y}_1 = 4,775$ ;  $\bar{y}_2 = 5,825$ ;  $s_p = 0,446$  i  $n_1 = n_2 = 4$  se dobija t-statističko:

$$t = \frac{5,825 - 4,775}{0,446 \sqrt{1/4 + 1/4}} = 3,33$$

I p-vrednost je 0,008, površina unutar t-krive sa 6 stepeni slobode je 3,33. Ovo predstavlja veoma jak dokaz protiv postojanja nulte hipoteze i može se zaključiti da je nulta hipoteza pogrešna (netačna).

Pristupa se nasumičnoj analizi. Prema nasumičnoj nultoj hipotezi, rastuće vreme tretmana biljke je u potpunosti jednako i služi isključivo za označavanje. Dobijeni odgovori za 8 jedinica će biti isti bez obzira koja procedura je primenjena i svaka grupa od po 4 jedinice će verovatno biti jednaka za 15-dnevni tretman. Na primer: unutar nasumičnosti nulte hipoteze sa 15-dnevnim tretiranjem, odgovori su (4,3; 4,6; 4,8; 5,4), (4,3; 4,6; 5,3; 5,7) i (5,4; 5,7; 6,0; 6,3).

Postavljanjem nasumičnog testa, odabira se opisna statistika za podatke i nakon toga se dobija statistička distribucija unutar nasumične nulte hipoteze. Nasumična p-vrednost je verovatna za postizanje opisne statistike kao ekstrem ili više ekstrema, od kojih će jedan biti upotrebljen.

Sa aspekta prethodnog problema, uzima se prosečan odgovor od 28 dana minus prosečan odgovor od 15 dana za statistiku. Dobijena vrednost statistike je 1,05. Postoji  ${}_8C_4 = 70$  različitih načina kako 8 biljaka mogu biti raspoređene između dve procedure. Samo 2 od 70 daju razliku prosečne vrednosti veliku ili veću od jedne razmatrane. Prema nasumičnoj p-vrednosti se dobija  $2/70 = 0,029$  što predstavlja vrednost malo veću od izračunate na osnovu t-testa, ali ove vrednosti vode protiv nulte hipoteze. Najmanja moguća nasumična p-vrednost za eksperiment je  $1/70 = 0,014$  [57].

## Nasumični zaključak i standardni zaključak

Na osnovu predhodnih primera se moglo videti da p-vrednosti za nasumične testove su bile veoma bliske vrednosti dobijene putem t-testa, kao i slučajeve gde su p-vrednosti bile različite od t-testa. Opšte govoreći, nasumične p-vrednosti su bliske standardnim p-vrednostima. Dva slučaja u kojima pretenduju da budu veoma bliske vrednosti su kada je veličina uzorka velika i tada su pretpostavke standardnih metoda ispunjena. Za male veličine uzoraka, nasumični zaključak je grublji, zbog postojanja veoma malo p-vrednosti. Nasumična p-vrednost je obično veoma bliska normalnoj teorijskoj p-vrednosti [57].

## Dodatna razmatranja

Nasumični testovi, često zvani i permutacioni testovi, su objašnjeni i prvi put se pojavljuju 1935. godine u knjizi autora Fisher [61], a kasnije dopunjeni 1937. i 1938. u radovima autora Pitman [62][63]. Teorijska razmatranja ovih testova su razvili Kempthorne 1955. [64] i Lehmann 1959. [65] godine. Knjiga autora Fisher [61] predstavlja klasik, temelj na kome se baziraju sve moderne knjige iz oblasti DoE.

Nasumična distribucija za statistički test je diskretna, što znači da postoje vrednosti različite od nule u verovatnoći. Računanjem p-vrednosti preko uključivanja svih verovatnoća u razmatranu vrednost kroz ekstrem ili više ekstrema. Jedna potencijalna varijacija na p-vrednost bi moglo biti razdvajanje verovatnoće na polovinu razmatrane vrednosti. Ovaj postupak ponekad može biti zanimljiv poboljšanjem veze između nasumičnosti i standardnih metoda. Nasumičnost spada u uobičajeni postupak pri planiranju eksperimenta, takođe se može naglasiti da postoji alternativni model statističkog zaključka u kome nasumičnost nije neophodna za validaciju plana eksperimenta i unutar koje nasumičnost ne predstavlja osnovu za zaključivanje. Takav model statističkog zaključivanja se naziva Baesianov model (*eng. Bayesian model*). Nedostatak ovog pristupa je analiza koja zahteva model svih faktora koji se preko nasumičnosti uspevaju izbeći. Ključna pretpostavka u Baesianovoj analizi predstavlja izmenjivost, koja se može povezati sa nezavisnošću kod klasične analize. U mnogim postupcima Baesianove analize se dopušta da se preko nasumičnosti pomogne kreiranju izmenjivosti sa opravdanom pretpostavkom. Ipak, Baesianov model ne zahteva nasumičnost pa je moguće razmotriti jače drugi kriterijum, kao što je etički kriterijum. U radu autora Berry [66] se razmatra značaj ovog pristupa.

### 5.3.3. Potpuno nasumični plan eksperimenta

Najjednostavniji nasumični eksperiment za poređenje nekoliko procedura predstavlja Potpuno nasumični plan eksperimenta – PNPE (*eng. Completely Randomized Design*). U nastavku je objašnjen princip funkcionisanja i analiza dobijenih rezultata pomoću PNPE, pre razmatranja drugih metoda, jer su često komplikovanije metode zasnovane na PNPE.

## Struktura PNPE

Razmatra se eksperiment koji se sastoji od  $g$  procedura koje se porede i  $N$  eksperimentalnih jedinica. Za formiranje PNPE potrebno je:

- 1) Označiti veličine uzoraka  $n_1, n_2, \dots, n_g$  sa  $n_1, n_2, \dots, n_g = N$
- 2) Odabrati  $n_1$  jedinice nasumično za dobijanje procedure 1 i  $n_2$  jedinice nasumično od  $N - n_1$  za dobijanje procedure 2, itd.



Ovom nasumičnošću se formira PNPE za sva moguća uključanja  $N$  jedinica u  $g$  grupa sa veličinama  $n_1$  iako su  $n_g$  podjednako verovatni. Treba naglasiti da PNPE zahteva povezivanje procedura i eksperimentalnih jedinica, odabir procedura, eksperimentalnih jedinica i odgovora, kao što je bio slučaj u prethodnim razmatranjima nasumičnosti.

Wood i Borman su u radu [67] iz 1974. godine istraživali efekat štetnosti kisele kiše na drveće. Normalna kiselost zemljišta se kreće u granicama 5,0 do 5,5 pH, ali u severnim oblastima Novog Hempšira često je kiselost između 3,0 i 4,0. Pitanje je da li ova pojačana kiselost zemljišta štetno utiče na drveće, i ukoliko utiče štetno, da li količina zagađenja zavisi od pH sadržanog u kiši? Jedan od njihovih eksperimenata se sastojao od 240 mladih sadnica starosti od šest nedelja. Sadnice su podeljene u 5 grupa sa po 48 sadnica nasumično i unutar svake grupe su sadnice tretirane šestočasovnim prskanjem kiselinom nedeljno u ukupnom trajanju od 17 nedelja. Razlika u tretiranju sadnica po grupama se sastojala u drugačijim vrednostima pH, kao što su: 4,7; 4,0; 3,3; 3,0 i 2,3. Nakon 17 nedelja eksperimenta, sadnicama je merena masa i ukupna masa suvih biljaka je predstavljala odgovor ispitivanja. Prema tome, u okviru ovog PNPE ima 5 grupa sa po 48 sadnica koje predstavljaju eksperimentalne jedinice i suva masa biljaka predstavlja odgovor. Sada je potrebno osvrnuti se na mesta u planu eksperimenta gde su izvršeni značajni izbori i kompromisi. Pretpostavljeno je da šteta varira sa pH nivoom, stanjem razvijenosti sadnice i vrstom biljke. U ovom eksperimentu se isključivo analizira uticaj nivoa pH na štetnost biljaka, tako da su ostali pomenuti uticaju zanemareni. Mnogo faktora utiče na rast biljaka. Eksperiment je kontrolisan tipom zemljišta, poreklom semena sadnice, količinom svetlosti, vlage i hraniva u zemljištu. Željena procedura bi bila praćenja stvarnom kiselom kišom, ali jedino dostupna varijanta je sintetički rastvor destilovane vode i sumporne kiseline. Eksperiment je sproveden samo na jednoj sorti drvenaste biljke, a pitanje je kako bi druge biljke reagovala na njega? Ukupna masa biljaka je važan odgovor na postavljen eksperiment, ali takođe su i drugi odgovori zadovoljeni eksperimentom. Prema tome, istraživači su suzili jedno veliko pitanje zagađenosti koristeći veštačku kiselu kišu na sadnicama biljaka jedne vrste unutar kontrolisanih uslova. Razmatrana količina ne statističnog pozadinskog rada i kompromisa sprovedenih u planiranje jednostavnog eksperimenta predstavlja PNPE.

### **Preliminarna istraživačka analiza**

Preporučljivo je sprovesti istraživački rad ili grafičku analizu podataka pre bilo kakvog zvaničnog modelovanja, testiranja ili procene. Preliminarna analiza bi trebala da obuhvata:

- Jednostavnu opisnu statistiku kao što je srednja vrednost, median srednju vrednost, standardnu grešku;
- Dijagrame x-y i kutijaste dijagrame;
- Gornji postupci se primenjuju za svaku proceduru posebno.

Opisni primer ovih istraživačkih tehnika su prikazanu u knjizi autora Moore i McCabe [68].

Preliminarnom analizom je moguće prikazati nekoliko mogućnosti. Na primer, niz kutijastih dijagrama sa po jednim za svaku proceduru može indikovati na veličinu relativnog odstupanja srednje vrednosti procedure i eksperimentalnu grešku. Ovim postupkom se često dobija bolje razumevanje podataka, od bilo koje zvanične procedure. Takođe, preliminarna analiza može biti od pomoći u otkrivanju neočekivanih odgovora ili problema u podacima.

### **Modeli i parametri**

Pod *modelom* nekog podatka se podrazumeva njegova karakteristika statističke distribucije. Na primer: broj dobijenih „glava“ pri 10 uzastopnih bacanja novčića može imati binomni oblik distribucije (10;0,5), gde 0,5 daje verovatnoću uspešnosti i 10 je broj pokušaja. U ovom slučaju, distribucija zavisi od dva broja, koji se nazivaju parametrima i to su verovatnoća uspešnosti i broj pokušaja. Za deset bacanja novčića su poznata oba parametra. U analizi eksperimentalnih podataka, moguće je postaviti nekoliko različitih modela za podatke, sve sa nepoznatim parametrima. Ciljevi eksperimenta mogu često biti opisani kao odlučujućim, odnosno koji model obezbeđuje najbolju distribuciju podatka i pravi zaključke u vezi sa parametrima u modelima.

Modeli eksperimentalnih podataka se sastoje iz dva dela. Prvi deo opisuje kao prosečne ili očekivane vrednosti podataka. Često se nazivaju i „model srednjih vrednosti“ ili „struktura srednjih vrednosti“. Na primeru uticaja štetnosti kisele kiše na sadnice biljaka se može reći da sve procedure imaju istu srednju vrednost koja označava odgovor, ili da svaka procedura ima svoju srednju vrednost, ili da srednje vrednosti u procedurama su prave linije funkcije tretiranja pH. Svaki od ovih modela srednjih vrednosti ima sopstvene parametre, zajedničku srednju vrednost, pet odvojenih srednjih vrednosti procedura, kao i nagib i opseg linearne veze. Drugi osnovni deo modela podataka opistuje na koji način podatak varira oko srednje vrednosti procedure. Još se naziva i „model grešaka“ ili „struktura grešaka“. Razmatra se odstupanje srednje vrednosti procedure koje je nezavisno za različite vrednosti podatka, ima srednju vrednost nule i sva odstupanja imaju istu varijaciju  $\sigma^2$ . Ovo objašnjenje modela greške je nepotpuno, zato što nije opisana distribucija grešaka. Standardne analize PNPE su ispunjene strukturom srednjih vrednosti. Potrebno je doći do zaključka da li su sve srednje vrednosti iste, ili postoji nema razlika među njima, kao i ukoliko postoji razlika, uočiti prirodu njenog nastanka. Struktura greške je poznata, osim za varijaciju  $\sigma^2$ , koja mora biti procenjena. Mora se naglasiti da ove metode u standardnoj analizi ne moraju biti jedine metode od interesa. Na primer ukoliko postoji podatak koji ne prati normalnu distribuciju. Ipak kod uobičajenih eksperimenata traganje za srednjim vrednostima opravdano predstavlja jedan od početnih koraka analize podataka [57].

### Procena parametara

Veliki broj sprovedenih analiza u današnje vreme se radi uz pomoć računara. Malo istraživača svoje analize radi ručnim izračunavanjem parametara. Poznavanje osnovnih formula i ideja koja se kriju u pozaditi računarske analize je veoma važno za razumevanje načina funkcionisanja sistema i očekivanih odgovora. Parametri koji pripadaju grupi modela srednjih vrednosti se sastoje od procedure srednjih vrednosti  $\mu_i$  i varijacije  $\sigma^2$ , plus izvedeni parametri  $\mu^*$  i  $\alpha_i$ . Potrebno je uraditi objektivnu procenu ovih parametara. Objektivne srednje vrednosti se dobijaju kada su procenjene srednje vrednosti pozicioniranje duž potencijalnih nasumičnih grešaka  $\epsilon_{ij}$ . Ovim postupkom se lakše dolazi do tačnih vrednosti parametara. Uobičajeno obeležavanje procenjene vrednosti nekog parametra u statistici se sastoji od postavljanje simbola  $\hat{\mu}$  iznad parametra. Prema tome  $\hat{\mu}$  je procenjena vrednost parametra  $\mu$ . Zbog toga što parametri zadovoljavaju  $\mu_i = \mu^* + \alpha_i$ , njihov procenjeni oblik će biti  $\hat{\mu}_i = \hat{\mu}^* + \hat{\alpha}_i$ . U nastavku je dat primer obeležavanja srednjih vrednosti uzorka. Zbir zapažanja u i-toj proceduri grupe je dat u obliku:

$$y_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}$$

Srednja vrednost zapažanja u i-toj proceduri grupe je dat u obliku:

$$\bar{y}_{i\bullet} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = y_{i\bullet}/n_i$$

Linija iznad parametra upućuje da je u pitanju srednja vrednost, dok (•) govori da je izvršeno osrednjavanje preko naznačenog parametra. Zbir svih zapažanja je dat u obliku:

$$y_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \sum_{i=1}^g y_{i\bullet}$$

Glavna srednja vrednost svih zapažanja je u obliku:

$$\bar{y}_{\bullet\bullet} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = y_{\bullet\bullet}/N$$

Zbir kvadratnih odstupanja podataka od srednjih vrednosti grupe su u obliku:

$$SS_E = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2$$

Sa  $SS_E$  se izračunava ukupno variranje podataka oko srednje vrednosti grupe.

Razmatra se slučaj u kome se prvo model srednje vrednosti odvaja pojedinačnom procedurom grupe sa sopstvenom srednom vrednošću  $\mu_i$ . Prirodni procenjeni parametar od  $\mu_i$  je  $\bar{y}_{i\bullet}$  što predstavlja srednju vrednost parametara u okviru jedne procedure grupe. Procenjeni očekivani odgovor u i-toj proceduri grupe dobijen preko srednje vrednosti u i-toj proceduri grupe odgovora. Prema tome se može zapisati:

$$\hat{\mu}_i = \bar{y}_{i\bullet}$$

Uzorak srednje vrednosti je objektivno procenjeni parametar unutar komplete količine srednjih vrednosti, a  $\hat{\mu}_i$  predstavlja objektivni procenjeni parametar od  $\mu_i$ . Model pojedinačne srednje vrednosti obezbeđuje da jedini parametar u modelu srednje vrednosti je  $\mu$ . Prirodni procenjeni parametar od  $\mu$  je  $\bar{y}_{\bullet\bullet}$  što predstavlja glavnu srednju vrednost svih odgovora. Ovo znači da ukoliko se nasluti da svi podaci koji se koriste za odgovore određene količine podataka, procenjena srednja vrednost te pojedinačne grupe podataka se dobija preko glavne srednje vrednosti. Prema tome se može zapisati:

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{\bullet\bullet}$$

Glavna srednja vrednost je objektivna procenjena vrednost od  $\mu$  kada se svi podaci dobijaju od jedne grupe podataka. Uvodi se ograničenje prema kojem je  $\mu^* = \sum_i n_i \mu_i / N$  za parametar  $\mu^*$  se dobija njena objektivna procenjena vrednost  $\hat{\mu}^*$  koja ima oblik:

$$\hat{\mu}^* = \frac{\sum_{i=1}^g n_i \hat{\mu}_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^g n_i \bar{y}_{i\bullet}}{N} = \frac{y_{\bullet\bullet}}{N} = \bar{y}_{\bullet\bullet}$$

Ovo predstavlja isti oblik procenjene vrednosti parametra  $\mu$  u modelu pojedinačne srednje vrednosti.

Efekti procedure su  $\alpha_i = \hat{\mu}_i - \mu$  i mogu biti procenjeni preko  $\hat{\alpha}_i = \hat{\mu}_i - \hat{\mu} = \bar{y}_{i\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot}$ . Ovim efektima procedure i procenjem parametrima se uvodi odnaničenje:

$$\sum_{i=1}^g n_i \alpha_i = \sum_{i=1}^g n_i \hat{\alpha}_i = 0$$

Jedini preostali parametar za procenu je  $\sigma^2$ , koju u procenjen obliku je:

$$\widehat{\sigma^2} = MS_E = \frac{SS_E}{N - g} = \frac{\sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2}{N - g}$$

Ponekad se sa  $s$  obeležava  $\hat{\sigma}$  u analogiji sa uzorkom standardnog odstupanja. Odstupanja od grupe srednjih vrednosti  $y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}$  se pridodaju nuli u svakoj proceduri grupe i prema tome za svako  $n_i - 1$  od njih se određuju preostali. Drugim rečima, postoji  $n_i - 1$  stepeni slobode za grešku u svakoj grupi, ili  $N - g = \sum_i (n_i - 1)$  stepeni slobode za grešku eksperimenta. Prema tome  $N - g$  stepeni slobode za procenjenu vrednost  $\widehat{\sigma^2}$ . Ovo predstavlja analogiju sa formulom  $n_1 + n_2 - 2$  za broj stepeni slobode u t-testu za dva uzorka.

### Poređenje modela: Analiza varijacije

U standardnim analizama PNPE značajnu ulogu imaju srednje vrednosti dobijenih odgovora određenih grupa procedura. Na početku analize je neophodno utvrditi da li su srednje vrednosti sve iste i u čemu se zasniva njihova razlika ukoliko postoji. Ukoliko se ovo pitanje prenese na modele, moglo bi se utvrditi da li određeni podatak može biti adekvatao opisan preko modela zasebne srednje vrednosti, ili je potrebno koristiti model odvojenih procedura srednje vrednosti grupe. Prema tome, moguće je odabrati parametre modela srednje vrednosti grupe tako da se zapravo koriste iste srednje vrednosti za sve grupe. Analize varijacija se često sprovode pomoću ANOVA postupka, koji predstavlja model upoređivanja sposobnosti dva modela, tako što je jedan umanjena verzija drugog. ANOVA je aritmerička procedura za deljenje variranja niza podataka u male frakcije koje upućuju na različite srednje vrednosti struktura i veličinu ostatka. Kada je struktura ostataka nezavisna od konstantnog odstupanja, informacije dobijene od ANOVA-e pomažu za kreiranje statističkog testa poređenja različitih srednjih vrednosti struktura ili modela srednjih vrednosti koji su prikazani u ANOVA-i. Veza između ANOVA-e variranja i testova modela je uska, ipak često se govori da testiranje preko ANOVA-e ne predstavlja deo ANOVA-e.

Koristi se najjednostavniji model koji je u dobroj povezanosti sa podacima. Komplikovaniji modeli se koriste isključivo kada se na osnovu dobijenih podataka utvrdi da je neophodna njihova upotreba. Na koji način se može utvrditi da je analizirani model suviše jednostavan? Ostaci  $r_{ij}$  su razlike između podatka  $y_{ij}$  i podešene srednje vrednosti modela. Za pojedinačan model srednje vrednosti, podešene vrednosti su sve vrednosti  $\bar{y}_{\cdot\cdot}$  pa su ostaci  $r_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{\cdot\cdot}$ , a kod modela odvojenih srednjih vrednosti podešene vrednosti su grupa srednjih vrednosti  $\bar{y}_{i\cdot}$  pa su ostaci  $r_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot}$ . Izračunava se bliskost podatka podešenoj vrednosti preko traženja zbira kvadrata ostataka (ili odstupanja). Za poređenje se odabiraju srednje vrednosti parametara u modelu koji podrazumeva da su zbir kvadrata ostataka parametra čija se vrednost predviđa što manji mogući. Zbir kvadratnih odstupanja za model odvojenih srednjih vrednosti je obično manji nego što je slučaj kod modela pojedinačnih srednjih vrednosti. Može se zaključiti da je složeniji modela odvojenih srednjih vrednosti potreban ukoliko je zbir kvadrata odstupanja znatno manji nego kod modela pojedinačnih srednjih vrednosti. Neophodno je ustanoviti kriterijum na osnovu kojeg se utvrđuje da li je vrednost zbira

kvadrata odstupanja zadovoljavajuće mali. Jedan način za kreiranje kriterijuma upoređivanja modela je preko statističkog testa sa nultom hipotezom, tako da je pojedinačni model srednje vrednosti istinit, naspram alterantive koja govori da je odvojeni model srednjih vrednosti istinit (tačan). U praksi se nulta i alternativne hipoteze češće prinjenuju u formi parametara nego modela. Koristeći  $\mu_i = \mu + \alpha_i$  za obeležavanje grupe srednjih vrednosti, nulta hipoteza  $H_0$  od pojedinačne srednje vrednosti se može zapisati u obliku  $H_0: \alpha_i = 0$  za sve  $i$  kao i alternativa u obliku  $H_A: \alpha_i \neq 0$  za neke  $i$ . Napomena je da za  $\sum n_i \alpha_i = 0$ ,  $\alpha_i$  je član čija je vrednost različita on nule i podrazumeva da svako  $\alpha_i$  nema istu vrednost sa ostalim članovima. Alternativna hipoteza ne znači da su svi  $\alpha_i$  različiti, već samo da nisu svi jednake vrednosti. Uporedni model govori da se treba odlučiti za odvojeni model srednjih vrednosti ako model ima dovoljno malo variranje ostataka, dok sa aspekta parametarskog testiranja se treba odlučiti za odvojeni model srednjih vrednosti ako model ima dovoljno veliko variranje između srednjih vrednosti grupe. Ovo na prvi pogled deluje kao potpuno dva različiti odgovora, ali u nastavku je prikazano da ANOVA zapravo upućuje na istu stvar, zato što malo variranje pojedinačne srednje vrednosti podrazumeva veće variranje između srednjih vrednosti grupe kada je ukupno variranje ustaljeno.

### ANOVA - mehanizam funkcionisanja

ANOVA radi na principu deljenja ukupnog odstupanja podataka po grupama koje oponašaju model. Model odvojenih srednjih vrednosti govori da podatak nije jednak glavnoj srednjoj vrednosti zato što efekti procedure i nasumična greška se zapisuju kao:

$$y_{ij} - \mu = \alpha_i + \epsilon_{ij}$$

ANOVA razlaže podatke istovremeno u jednu grupu koja ima veze sa srednjim vrednostima grupe i drugu grupu koja ima veze sa odstupanjem od srednjih vrednosti grupe, što se može zapisati u obliku:

$$y_{ij} - \bar{y}_{..} = (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i.}) = \hat{\alpha}_i + r_{ij}$$

Razlika koja je prikazana sa leve strane jednačine predstavlja odstupanje odgovora od glavne srednje vrednosti. Ukoliko se svi parametri podignu na kvadrat i dodaju jedni drugima, dobija se  $SS_T$  koji se naziva ukupnim zbirom kvadrata. Prva razlika sa desne strane jednačine je predviđeni efekat procedure  $\hat{\alpha}_i$ . Ukoliko se svi podignu na kvadrat (jedan od svake vrednosti podatka  $N$ ) i dodaju jedni drugima, dobiće se  $SS_{Trt}$  koje se naziva zbirom kvadrata procedure, zapisane u obliku:

$$SS_{Trt} = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_1} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^g n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_{i=1}^g n_i \hat{\alpha}_i^2$$

Druga razlika na desnoj strani je  $ij$ -ti ostatak od modela, koji daje neke informacije o  $\epsilon_{ij}$ . Ukoliko se podignu na kvadrat i pridodaju  $r_{ij}$ , dobija se  $SS_E$  što predstavlja zbir kvadrata greške i zapisuje se u obliku:

$$SS_E = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_1} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2$$

Prikazano  $SS_E$  ima isti oblik kao i pri procenjivanju kvadrata varijacije  $\sigma^2$ . Ako se ponovo zapiše osnovni oblik  $y_{ij} - \bar{y}_{..} = \hat{\alpha}_i + r_{ij}$  tako da se kvadriranjem dobije  $(y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \hat{\alpha}_i^2 + r_{ij}^2 + 2\hat{\alpha}_i r_{ij}$ , dodavanjem preko  $i$  i  $j$  se dobija:

$$SS_T = SS_{T_{rt}} + SS_E + 2 \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_1} \hat{\alpha}_i r_{ij}$$

Na osnovu prethodnog se može zaključiti da je zbir unakrsnih proizvoda jednak nuli, što se može zapisati kao:

$$SS_T = SS_{T_{rt}} + SS_E$$

Razmatra se veza između testiranja jednakosti srednjih vrednosti grupe i uporednih modela preko zbira kvadratnih odstupanja. Za zadati niz podataka, više varijacija između srednjih vrednosti grupe podrazumeva veću vrednost  $SS_{T_{rt}}$  koja takođe znači da  $SS_E$  mora biti manje, a zapravo je zbir kvadratnih odstupanja odvojenih srednjih vrednosti modela.

Tabela 9 prikazuje krajnje formule zbirnih kvadratnih odstupanja koje su u primeni kod PNPE. Ove formule nisu previše komplikovane za pamćenje, ali je veoma korisno ih imati na jednom mestu. Preko njih se može uvudeti značaj ANOVA-e.

Tabela 9 – Formule zbira kvadratnih odstupanja [57]

$$SS_{T_{rt}} = \sum_{i=1}^g n_i \hat{\alpha}_i^2$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_1} (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^g \sum_{j=1}^{n_1} (y_{ij} - \bar{y}_{i\cdot})^2$$

ANOVA u tabelarnom obliku objedinjuje kolone podataka poput izvora varijacije, stepena slobode, zbira kvadrata, kvadrata srednje vrednosti i F-statistike. U tabeli svaki red predstavlja zasebni izvor varijacije u punom modelu. U PNPE izvori varijacija su procedure i greške. Neke tabele sadrže redove koji objedinjuju i glavnu srednju vrednost i ukupno varijaciju, a neke samo po jednu od njih. U sledećoj tabeli 10 je dat opšti oblik tabelarnog ispisa ANOVA-e za PNPE.

Tabela 10 – Opšti oblik ANOVA ispisa [57]

Izvor	Stepen slobode	Zbir kvadrata	Kvadrati sr. vrednosti	F-statistika
Procedure	$g - 1$	$SS_{T_{rt}}$	$SS_{T_{rt}}/(g - 1)$	$MS_{T_{rt}}/MS_E$
Greška	$N - g$	$SS_E$	$SS_E/(N - g)$	

Stepen slobode za procedure je  $g - 1$  a za grešku  $N - g$ . Formule za zbir kvadrata su prikazane u prethodnim delovima rada, a kvadrati srednjih vrednosti se računaju kao količnik zbira kvadrata i njihovih stepeni slobode. F-statistika je odnos dva kvadrata srednjih vrednosti, brojilac je kvadrat srednje vrednosti za izvor varijacije koji se želi oceniti i imenilac (ili greška) je kvadrat srednje vrednosti koji procenjuje varijaciju greške. F-statistika

(ili F-odnos) se koristi u tabelarnom ispisu ANOVA-e za kreiranje testa nulte hipoteze da su sve srednje vrednosti procedure iste (sve vrednosti  $\alpha_i$  su nula) nasuprot alternative koja tvrdi da su neke srednje vrednosti procedure različite (neke vrednosti  $\alpha_i$  su različite od nule). U slučaju da je nulta hipoteza tačna (opravdana), F-statistika ima vrednost oko 1, datu za neki nasumičnu varijaciju. U slučaju da je alternativna hipoteza tačna, F-statistika ima vrednost veću od 1. Da bi se kompletirao test do kraja, zaključak mora biti takav da se kaže koja vrednost u F-statistici predstavlja preveliku vrednost. Ako je nulta hipoteza tačna i model i pretpostavka distributivnosti se pokaže kao tačna, onda F-statistika prati F-distribuciju sa  $g - 1$  i  $N - g$  stepenom slobode. F-distribucija ima dva stepena slobode, jedan od brojioca kvadrata srednje vrednosti i jedan od imenioca kvadrata srednje vrednosti.

Da bi se uradio test, potrebno je izračunati F-statistiku i stepen slobode, a nakon toga izračunati verovatnoću koja treba da kaže da li je vrednost F-statistike velika ili veća od posmatrane vrednosti, uz pretpostavku da su sve vrednosti  $\alpha_i$  jednake nuli. Ova verovatnoća se naziva p-vrednost i računa se kao površina unutar F-distribucije od posmatrane F-statistike na desnoj strani, kada F-distribucija ima stepen slobode isti kao i stepen slobode imenioca i brojioca kvadrata srednjih vrednosti. P-vrednost se obično očitava iz tabele F-distribucije ili iz statističkih softvera. Male vrednosti p-vrednosti daju nagoveštaj da je nulta hipoteza netačna ili je pretpostavka koja je korišćena za računanje p-vrednosti pogrešna. Sada je moguće promeniti pitanje iz „Koja vrednost F-distribucije je prevelika?“, u „Koja p-vrednost je premala?“. P-vrednost koja je manja od 0,05 se naziva statistički značajnom, a ukoliko je manja od 0,01 se smatra veoma statistički značajnom. Nekad naznačena granica između značajnosti p-vrednosti može biti diskutabilna. Ukoliko se koristi prethodno naznačena granica od 0,05 ukoliko se dobije vrednost od 0,049 p-vrednost će biti statistički značajna, a naredna dobijena p-vrednost od 0,051 će se smatrati statistički nebitnom, uprkos činjenici da verovatno potiču od gotovo identičnih početnih podataka. Mala p-vrednost može poticati od male vrednosti  $\alpha_i$  ako je veličina uzorkovanja dovoljno velika ili je vrednost kvadratne varijacije  $\sigma^2$  dovoljno mala. Isto tako velike razlike između srednjih vrednosti ne moraju direktno upućivati da je veličina uzorkovanja mala ili greška varijacije velika. Prethodno navedene p-vrednosti od 0,05 ili 0,01 nose sa sobom nivelisanje značajnosti podatka na statistički značajni ili statistički veoma značajnim, ali zapravo to nije jak dokaz protiv nulte hipoteze. Ono što se može tačno zaključiti preko p-vrednosti je verovatnoća koja odbacuje nultu hipotezu u obliku greške. Autori Sellke, Bayarri i Berger [69] su definisali približno nižu granicu verovatnoće. Oni nazivaju tu granicu kao kalibrisanu p-vrednost, ali neki autori smatraju da taj naziv nije prikladan iz razloga što kalibraciona p-vrednost ne predstavlja stvarnu p-vrednost. Ukoliko se zna da obe i nulta i alternativna hipoteza imaju verovatnoću 0,5 da postatu istinite, onda se za p-vrednosti menje od  $e^{-1} \approx 0,37$  prema autorima [69] može definisati približna greška verovatnoće kao:

$$P(p) = \frac{-ep \log(p)}{1 - ep \log(p)}$$

Prikazivanje približne greške verovatnoće  $P(p)$  je p-vrednost od  $p$ , verovatnoća koja odbacuje nultu hipotezu je greška najmanje  $P(p)$ . Autori (69) upućuju da niža granica može biti dobra u velikom broju slučajeva. Tabela 11 prikazuje da verovatnoća koja odbacuje se greška koja je više od 0,1 čak i za p-vrednost od 0,01.

Tabela 11 – Približna greška verovatnoće za različite p-vrednosti koristeći nižu granicu [57]

$p$	0,05	0,01	0,001	0,0001
$P(p)$	0,29	0,11	0,018	0,0025

Kvadrat srednje vrednosti greške je nasumična promenljiva koja zavisi od nasumičnih grešaka podatka. Ukoliko se ponovi eksperiment, dobiće se različite nasumične greške, kao i različiti kvadrati srednje vrednosti greške. Ipak očekivana vrednost kvadrata srednje vrednosti greške, osrednjena preko svih mogućih ishoda nasumičnih grešaka je varijacija nasumičnih grešaka  $\sigma^2$ . Prema tome kvadratna srednja vrednost greške predviđa varijaciju greške, bez posebnog značaja koje su vrednosti  $\alpha_i$ . Kvadratna srednja vrednost procedura je takođe nasumična promenljiva, ali  $MS_{T_{rt}}$  se može zapisati kao:

$$E(MS_{T_{rt}}) = EMS_{T_{rt}} = \sigma^2 + \sum_{i=1}^g n_i \alpha_i^2 / (g - 1)$$

Iz prethodnog izraza se mogu izvući dva bitna zaključka:

- 1) Kada su sve vrednosti  $\alpha_i$  jednake nuli, kvadrat srednje vrednosti procedura takođe predviđa  $\sigma^2$ ;
- 2) Kada su neke vrednosti  $\alpha_i$  različite od nule, kvadrat srednje vrednosti procedura pretenduje da bude veći od  $\sigma^2$ .

Ukoliko je nulta hipoteza tačna, oba parametra  $MS_{T_{rt}}$  i  $MS_E$  su veoma bliske  $\sigma^2$  pa prema tome njihov odnos (F-statističko) je oko jedan. U slučaju da je nulta hipoteza netačna,  $MS_{T_{rt}}$  pretenduje da bude veće od  $\sigma^2$ , a F-statističko je veće od jedan. Prema tome se odbija nulta hipoteza za značajno velike vrednosti F-statističkog [57].

#### 5.3.4. Faktorijska struktura procedure

U prethodnom poglavlju je bilo reči o potpuno nasumičnom planu eksperimenta, gde su  $g$  procedura povezane sa nasumičnim brojem  $N$  eksperimentalnih jedinica. Do sada procedure nisu imale jasne strukture. Faktorijska struktura procedure postoji ukoliko  $g$  procedura su sastavljene od dva ili više nivoa faktora. Te kombinacije procedura se nazivaju faktor-nivo kombinacije ili faktorijske kombinacije, što naglašava da svaka procedura je kombinacija od jednog nivoa za svaki od faktora. U nastavku se razmatraju procedure koje imaju faktorijsku strukturu.

#### **Faktorijska struktura**

Najbolji prikaz faktorijske strukture je kroz nekoliko primera. Autori Lynch i Strain [70] su izvršili eksperiment koji se sastojao od 6 procedura učenja kako ishrana zasnovana na mlečnim prouzdovima i suplementi na bazi bakra utiču na hemijske elemente u pacovskoj jetri. Šest procedura su bile kombinacija tri ishrane bazirane na mlečnim prouzdovima (protein iz obranog mleka, surutka ili spororazgradivi mlečni protein) i dva suplementa na bazi bakra (sa niskim i visokim sadržajem bakra). Surutka sama po sebi nije bila procedura, kao i niski sadržaj bakra, ali kombinacija surutke i suplementa sa niskim sadržajem bakra se smatralo procedurom ishrane. Autori Nelson, Kriby i Johnson [71] su razmatrali efekte 6 različitih suplemenata u ishrani živine na deformitet nogu kod mladih jedinki. Šest procedura su bile kombinacije od dva nivoa fosfornih suplemenata i tri nivoa kalijumovih suplemenata. Na kraju, autori Hant i Larson [72] su izučavali efekte šesnaest procedura zadržavanja cinka u telu pacova. Procedure su bile kombinacija dva nivoa učestalosti cinka u uobičajenoj ishrani, dva nivoa učestalosti cinka u poslednjem obroku i četiri nivoa učestalosti proteina u poslednjem obroku. Ovo takođe predstavlja kombinaciju nivoa faktora koji čine faktorijski strukturu procedure.



Na početku prikaza faktorijske strukture plan eksperimenta se sastoji od dva faktora. Dobijeni odgovori eksperimenata, odnosno rezultati zasebnih merenje su prikazani tabelarno i to preko redova u tabeli su označeni nivoi prvog faktora (nazvanog faktor A) i preko kolona su označeni nivoi drugog faktora (faktor B). Na primer, u tabeli 12 su prikazani rezultati sprovedenog eksperimenta klijanja ječma. Semena ječma su podeljena u 30 parcela od po 100 semena u svakoj. Tih 30 parcela su nasumično podeljene u grupe od po 3 parcele, od kojih je svaka tretirana drugačijim postupkom (procedurom). Faktorijske kombinacije predstavljaju 10 procedura koje se razlikuju po količini vode koja je korištena za zalivanje semena (faktor A) i starosti semena (faktor B). Odgovori eksperimenta su u obliku brojčanog iznosa prokljalih semena ječma.

Tabela 12 – Rezultati faktorijskog eksperimenta klijanja ječma [57]

<i>ml H<sub>2</sub>O</i>	<i>Starost semena u nedeljama</i>				
	<i>1</i>	<i>3</i>	<i>6</i>	<i>9</i>	<i>12</i>
<i>4</i>	11	7	9	13	20
	9	16	19	35	37
	6	17	35	28	45
<i>8</i>	8	1	5	1	11
	3	7	9	10	15
	3	3	9	9	25

Oznaka  $y_{ijk}$  se koristi u faktorijskom strukturi i upućuje na odgovore koji se dobijaju od strane dva analizirana faktora eksperimenta. U ovom obliku  $y_{ijk}$  je  $k$ -ti odgovor procedure formirane od  $i$ -tog nivoa faktora A i  $j$ -tog nivoa faktora B. Prema tabeli 12,  $y_{2,5,3} = 25$ . Za faktorijsku strukturu četiri po tri (faktor A ima 4 nivoa, a faktor B 3 nivoa), moguće je tabelarno prikazati odgovore kao u tabeli 13. Tabelarni prikaz faktorijske strukture predstavlja veoma koristan oblik, iz razloga što se veoma brzo može uvideti međusobna zavisnost faktora. Procedure se i dalje povezane sa eksperimentalim jedinicama nasumično. Oznake u tabelama 12 i 13 govore da su isti brojevi odgovora u svakoj kombinaciji faktor-nivo. Takav oblik se još naziva i uravnoteženi. U nastavku će biti detaljnije objašnjen značaj uravnoteženog oblika za standardnu analizu faktorijskih odgovora. Za sada je potrebno naglasiti da su podaci prikazani kroz tabele 12 i 13 uravnoteženi sa  $n$  odgovora u svakoj faktor-nivo kombinaciji.

### Faktorijska analiza – Glavni efekat i interakcija

Kada se razmatraju procedure u faktorijskoj strukturi, potrebno je i analizu podataka izvršiti u faktorijskom obliku. Osnovni koncept ove analize se sprovodi preko glavnog efekta i interakcije. Ukoliko se faktorijska struktura sastoji od dva faktora, od koji prvi faktor A ima četiri nivoa, a faktor B tri nivoa, kao u tabeli 13, može se zaključiti da ima  $g = 12$  procedura, sa 11 stepeni slobode između procedura. Koriste se indeksi  $i$  i  $j$  za označavanje nivoa faktora A i B. Očekivane vrednosti u 12 procedura mogu biti označene sa  $\mu_{ij}$ , koeficijenti za recipročne srednje vrednosti 12 procedura su označeni sa  $w_{ij}$  (gde je obično  $\sum_{ij} w_{ij} = 0$ ) i recipročan zbir vrednosti je označen sa  $\sum_{ij} w_{ij} \mu_{ij}$ . Slično tome, sa  $\bar{y}_{i\cdot}$  je označena posmatrana srednja vrednost  $ij$  procedure, sa  $\bar{y}_{i\cdot}$  i  $\bar{y}_{\cdot j}$  su označene posmatrane srednje vrednosti za sve odgovore koji imaju  $i$  nivo faktora A, ili  $j$  nivo faktora B redom. Često se očekivane vrednosti, srednje vrednosti i recipročni koeficijenti prikazuju u matričnom obliku, kao u tabeli 14.

Tabela 13 – Faktorijska struktura procedure sa 4 po 3 faktora [57]

	B1	B2	B3
A1	$y_{111}$	$y_{121}$	$y_{131}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A2	$y_{11n}$	$y_{12n}$	$y_{13n}$
	$y_{211}$	$y_{221}$	$y_{231}$
A3	$y_{21n}$	$y_{22n}$	$y_{23n}$
	$y_{311}$	$y_{321}$	$y_{331}$
A4	$y_{31n}$	$y_{32n}$	$y_{33n}$
	$y_{411}$	$y_{421}$	$y_{431}$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$y_{41n}$	$y_{42n}$	$y_{43n}$

Tabela 14 – Matrično prikazivanje očekivanih vrednosti (a), srednjih vrednosti (b) i recipročnih koeficijenata (c) u faktorijskom obliku 4x3 [57]

(a)			(b)			(c)		
$\mu_{11}$	$\mu_{12}$	$\mu_{13}$	$\overline{y_{11\bullet}}$	$\overline{y_{12\bullet}}$	$\overline{y_{13\bullet}}$	$w_{11}$	$w_{12}$	$w_{13}$
$\mu_{21}$	$\mu_{22}$	$\mu_{23}$	$\overline{y_{21\bullet}}$	$\overline{y_{22\bullet}}$	$\overline{y_{23\bullet}}$	$w_{21}$	$w_{22}$	$w_{23}$
$\mu_{31}$	$\mu_{32}$	$\mu_{33}$	$\overline{y_{31\bullet}}$	$\overline{y_{32\bullet}}$	$\overline{y_{33\bullet}}$	$w_{31}$	$w_{32}$	$w_{33}$
$\mu_{41}$	$\mu_{42}$	$\mu_{43}$	$\overline{y_{41\bullet}}$	$\overline{y_{42\bullet}}$	$\overline{y_{43\bullet}}$	$w_{41}$	$w_{42}$	$w_{43}$

Na trenutak se može zaboraviti na faktor B i razmatra se eksperiment čiji je plan u potpunosti nasumičan samo preko faktora A. Analizirajući ovaj plan eksperimenta sa 4 procedure, dobijeni zbir kvadrata ima 3 stepena slobode. Prema tome ukupno preko kvadrata zbira se dobija  $SS_A$  koji zavisi samo od nivoa faktora A. Očekivana srednja vrednost odgovora u  $i$ -tom redu je  $\mu + \alpha_i$ , gde se pretpostavlja da je  $\sum_i \alpha_i = 0$ . Ukoliko se pristupi obrnuto, tako da se faktor A izostvi, plan eksperimenta će takođe biti potpuno nasumičan samo preko faktora B. Opet se razmatra eksperiment sa 3 procedure i zbir kvadrata procedure je  $SS_B$  sa 2 stepena slobode. Očekivana srednja vrednost odgovora u  $j$ -oj koloni u obliku  $\mu + \beta_j$ , ako se pretpostavi da je  $\sum_j \beta_j = 0$ . Efekti  $\alpha_i$  i  $\beta_j$  se nazivaju glavnim efektima faktora A i B. Glavni efekat faktora A opisuje varijaciju jedino preko nivoa faktora A, dok glavni efekat faktora B opisuje varijaciju jedino preko nivoa faktora B. Postoji analogija da su  $SS_A$  i  $SS_B$  glavni efekti zbira kvadrata.

Opisana varijacija koja se dobija preko glavnih efekata je varijacija koja se javlja od reda do reda ili od kolone do kolone u matrici podataka. Na primer ukoliko postoji 12 procedura i 11 stepeni slobode između procedura. Može se opisati 5 stepeni slobode koristeći glavne efekte za A i B i mora ostati 6 stepeni slobode modelu. Tih 6 stepeni slobode opisuju varijaciju koja nastaje promenom redova i kolona istovremeno. Ovakve varijacije se nazivaju interakcijom između faktora A i B, ili između redova i kolona. Najčešće se označavaju sa  $SS_{AB}$ .

Postoji i drugi način objašnjenja značaja glavnog efekta i interakcije. Glavni efekat redova govori kako se odgovor menja kretanjem od jednog reda do drugog. Glavni efekat kolone govori na koji način se odgovor menja kretanjem od jedne kolone do druge. Interakcija govori kako promena odgovora zavisi od kolona kada se kreće između redova, ili kako odgovor zavisi od redova, kretajući se između kolona. Interakcija između faktora A i B znači

da promena glavnog odgovora se kreće od nivoa  $i_1$  faktora A do nivoa  $i_2$  faktora A, koji zavisi od nivoa faktora B unutar razmatranja. Jednostavno govoreći, promena nivoa faktora A menja odgovor preko zadatog iznosa. Preciznije predstavljanje glavnog efekta i interakcije varijacije je moguće ubacivanjem ograničenja. Bilo koje ograničenja faktora A ima 4 koeficijenta  $w_i^*$  i razmatranu vrednost  $w^*({\overline{y_{i..}}})$ . Ovo ograničenje je za 4 reda srednjih vrednosti. Može se napraviti jedno ekvivalentno ograničenje u 12 procedura srednjih vrednosti preko koeficijenata  $w_{ij} = w_i^* / 3$ . Ovo ograničenje se ponavlja duž svakog reda i onda se deli brojem kolona kako bi se poklopili sa odstupanjem koje je korišćeno za izračunavanje srednjih vrednosti reda. Faktor A ima 4 nivoa, pa prema tome 3 normalna ograničenja deli  $SS_A$ . Postoje tri analogije normalnih  $w_{ij}$  ograničenja koji dele istu varijaciju. Tabela 15 prikazuje niz od tri normalna ograničenja koji opisuju varijaciju faktora A.

Tabela 15 – Primer glavnog efekta i interakcije 4x3 faktorijske strukture preko koeficijenata ograničenja [57]

A	<table border="1"><tr><td>-3</td><td>-3</td><td>-3</td></tr><tr><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	-3	-3	-3	-1	-1	-1	1	1	1	3	3	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	<table border="1"><tr><td>-1</td><td>-1</td><td>-1</td></tr><tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>-3</td><td>-3</td><td>-3</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	-1	-1	-1	3	3	3	-3	-3	-3	1	1	1
	-3	-3	-3																																				
	-1	-1	-1																																				
	1	1	1																																				
3	3	3																																					
1	1	1																																					
-1	-1	-1																																					
-1	-1	-1																																					
1	1	1																																					
-1	-1	-1																																					
3	3	3																																					
-3	-3	-3																																					
1	1	1																																					
B	<table border="1"><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1	<table border="1"><tr><td>1</td><td>-2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>-2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>-2</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>-2</td><td>1</td></tr></table>	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1													
	-1	0	1																																				
	-1	0	1																																				
	-1	0	1																																				
-1	0	1																																					
1	-2	1																																					
1	-2	1																																					
1	-2	1																																					
1	-2	1																																					
AB	<table border="1"><tr><td>3</td><td>0</td><td>-3</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>-3</td><td>0</td><td>3</td></tr></table>	3	0	-3	1	0	-1	-1	0	1	-3	0	3	<table border="1"><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	-1	0	1	1	0	-1	1	0	-1	-1	0	1	<table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>-1</td></tr><tr><td>-3</td><td>0</td><td>3</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>-3</td></tr><tr><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	-1	-3	0	3	3	0	-3	-1	0	1
	3	0	-3																																				
	1	0	-1																																				
	-1	0	1																																				
-3	0	3																																					
-1	0	1																																					
1	0	-1																																					
1	0	-1																																					
-1	0	1																																					
1	0	-1																																					
-3	0	3																																					
3	0	-3																																					
-1	0	1																																					
	<table border="1"><tr><td>-3</td><td>6</td><td>-3</td></tr><tr><td>-1</td><td>2</td><td>-1</td></tr><tr><td>1</td><td>-2</td><td>1</td></tr><tr><td>3</td><td>-6</td><td>3</td></tr></table>	-3	6	-3	-1	2	-1	1	-2	1	3	-6	3	<table border="1"><tr><td>1</td><td>-2</td><td>1</td></tr><tr><td>-1</td><td>2</td><td>-1</td></tr><tr><td>-1</td><td>2</td><td>-1</td></tr><tr><td>1</td><td>-2</td><td>1</td></tr></table>	1	-2	1	-1	2	-1	-1	2	-1	1	-2	1	<table border="1"><tr><td>-1</td><td>2</td><td>-1</td></tr><tr><td>3</td><td>-6</td><td>3</td></tr><tr><td>-3</td><td>6</td><td>-3</td></tr><tr><td>1</td><td>-2</td><td>1</td></tr></table>	-1	2	-1	3	-6	3	-3	6	-3	1	-2	1
-3	6	-3																																					
-1	2	-1																																					
1	-2	1																																					
3	-6	3																																					
1	-2	1																																					
-1	2	-1																																					
-1	2	-1																																					
1	-2	1																																					
-1	2	-1																																					
3	-6	3																																					
-3	6	-3																																					
1	-2	1																																					

Varijacija  $SS_B$  se opisuje preko dva normalno postavljena ograničenja između tri nivoa faktora B. Može se opisati  $SS_B$  sa normalnim ograničenjima u 12 srednjih vrednosti procedure, preko matrice koeficijenata ograničenja. Preko tabele 15 se može uvideti niz normalnih ograničenja faktora B. Analizom tabele 15 se može zaključiti da nisu samo ograničenja faktora A normalna jedan drugom i ograničenja faktora B jedan drugom, već da su ograničenja faktora A takođe normalna ograničenjima faktora B. Ova normalnost zavisi od uravnoteženosti podataka i ključna je stvar zbog čega su uravnoteženi podaci lakši za analizu.

### Prednosti faktorijske strukture

Pre započinjanja objašnjenja prednosti ovog pristupa, potrebno je vratiti se na razliku između faktorijske strukture procedure i faktorijske analize. Faktorijska analiza predstavlja jednu opciju koja postoji u slučaju postojanja faktorijske strukture procedure. Moguće je zanemariti glavne efekte i interakciju i samo analizirati  $g$  proceduru grupa. Najjednostavniji način prikaza prednosti faktorijske strukture procedure je preko njegovog upoređivanja sa

eksperimentom u kojem se variraju nivoi jednog faktora. Vraćanjem na podatke iz tabele 12 iz faktorijskog eksperimenta o klijanju semena, varirani su uticaji zalivanja vodom i starosti semena preko nivoa. Moguće je drugačije pristupiti planu eksperimenta i to tako što se u prvom eksperimentu pristupa zadržavanju količine zalivanje vodom na nižem nivou, a starost semena varirati na 5 nivoa. Ili drugim pristupom, koji iziskuje zadržavanje starosti semena na srednjem nivou, uz variranje količine zalivanje vodom na oba nivoa.

Faktorijska struktura procedure ima dve glavne prednosti:

- 1) Ukoliko postoji interakcija između faktora, faktorijski eksperimenti mogu predvideti tu interakciju. Drugi pristupi eksperimentima poput pristupa „jedan po jedan“ ne mogu predvideti interakciju među faktorima. Upotreba eksperimenata pozivanjem jedan po jedna u svrhu pronalaženja interakcije među faktorima, može dovesti do pogrešnog razumevanja kako odgovor varira u funkcija od faktora.
- 2) Ukoliko faktori nemaju međusobnu interakciju, faktorijski eksperimenti su efikasniji od eksperimenata jedan po jedna, zbog toga što se eksperimentalnim jedinicama mogu proceniti glavni efekti za oba faktora. Eksperimentalne jedinice u eksperimentima jedan po jedan se mogu jedino koristiti za precenu efekta jednog faktora.

### Vizuelizaciona interakcija

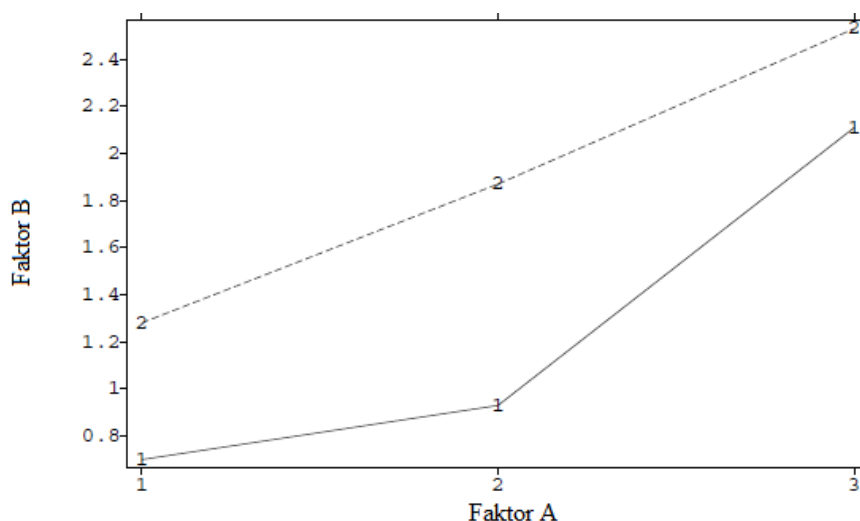
Dijagram interakcije predstavlja grafik koji upućuje na relativnu veličinu glavnih efekata i interakciju. Primer je dat kroz grafički prikaz na slici 5.13. Najpre se razmatra faktorijska struktura sa dva faktora. Dijagram interakcije je dat u obliku poznatom kao povezivanje tačaka. Odabira se prvi faktor, nazvan sa A i postavljen na horizontalnu osu. Svaka kombinacija nivoa faktora, koriste se u paru  $(i, \overline{y_{i\cdot}})$ . Prema tome, povezivanjem odgovarajućih tačaka sa istim nivoom faktora B, dobija se veza između  $(1, \overline{y_{1\cdot}})$ ,  $(2, \overline{y_{2\cdot}})$  sa  $(a, \overline{y_{a\cdot}})$ . U slučaju  $4^3$  faktorijska, nivo faktora A će biti broj između jedan i četiri, što znači da će tri tačke biti označene ispod jedan, tri tačke ispod dva, itd. Tri linije će ih povezivati, svaka za jedan nivo faktora B.

### Modeli i parametri

Razmatra se faktorijska analiza modela koji se sastoji od dva faktora. Faktor A ima  $a$  nivoa, faktor B ima  $b$  nivoa i postoji  $n$  eksperimentalnih jedinica koji povezuju svaki faktor-nivo kombinaciju.  $k$ -ti odgovor u  $i$ -tom nivou faktora A i  $j$ -ti nivo faktora B je  $y_{ijk}$ . Prema tome, model se može zapisati kao u sledećem izrazu:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

U prethodnom izrazu  $i$  se poziva od 1 do  $a$ ,  $j$  se poziva od 1 do  $b$ ,  $k$  se poziva od 1 do  $n$  i  $\epsilon_{ijk}$  je nezavisna i normalna distribucija gde je srednja vrednost jednaka nuli i varijacija  $\sigma^2$ . Parametri  $\alpha_i$ ,  $\beta_j$  i  $\alpha\beta_{ij}$  u modelu su ustaljene, nepoznate konstante. Postoji ukupno  $N = nab$  eksperimentalnih jedinica. Drugi način prikaza modela je prebacivanjem tabele odgovora u novi niz tabela, koja ukoliko se saberu svi elementi, dobija se odgovor. U tabeli 16 je dat primer prebacivanja faktorijska 3 u 2 sa  $n = 1$ .



Slika 5.13 – Interakcioni dijagram dva faktora [57]

Član  $\mu$  se naziva uopštenom srednjom vrednošću, što predstavlja očekivanu vrednost za odgovore osrednjene po svim procedurama. Član  $\alpha_i$  je glavni efekat faktora A u nivou  $i$ . To je osrednjeni efekat za nivo  $i$  faktora A. Osrednjena vrednost svih redova mora biti uopštena srednja vrednost, kao i zbir efekata reda  $\alpha_i$  mora biti jednak nuli. Isto pravilo se odnosi i na faktor B, gde je sa  $\beta_j$  označen glavni efekat faktora B u nivou  $j$ . Član  $\alpha\beta_{ij}$  predstavlja interakciju efekata A i B u  $ij$  proceduri. Efekta interakcije je mera koliko daleko su srednje vrednosti procedure od aditivnosti. Iz razloga što prosečni efekat u  $i$ -tom redu mora imati vrednost  $\alpha_i$ , zbir efekata interakcije u  $i$ -tom redu mora imati vrednost nule. Slično tome, zbir efekata interakcije u  $j$ -oj koloni mora imati vrednost nule.

Tabela 16 – Primer prebacivanja faktorijskog oblika  $3^2$  u oblik faktorijskih efekata [57]

$$\begin{array}{r}
 \text{Odgovori} \\
 \begin{bmatrix} y_{111} & y_{121} \\ y_{211} & y_{221} \\ y_{311} & y_{321} \end{bmatrix}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{r}
 \text{Uopštena sr. vrednost} \\
 \begin{bmatrix} \mu & \mu \\ \mu & \mu \\ \mu & \mu \end{bmatrix}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 \text{Efekti reda} \\
 \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_3 \end{bmatrix}
 \end{array}
 +
 \\
 +
 \begin{array}{r}
 \text{Efekti kolone} \\
 \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{r}
 \text{Efekti interakcije} \\
 \begin{bmatrix} \alpha\beta_{11} & \alpha\beta_{12} \\ \alpha\beta_{21} & \alpha\beta_{22} \\ \alpha\beta_{31} & \alpha\beta_{32} \end{bmatrix}
 \end{array}
 +
 \\
 +
 \begin{array}{r}
 \text{Nasumične greške} \\
 \begin{bmatrix} \epsilon_{111} & \epsilon_{121} \\ \epsilon_{211} & \epsilon_{221} \\ \epsilon_{311} & \epsilon_{321} \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}$$

Očekivana vrednost odgovora za proceduru  $ij$  ima oblik:

$$E y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$$

Postoje  $ab$  različite srednje vrednosti procedure i prema tome ima  $1 + a + b + ab$  parametara što predstavlja veoma predefinisani oblik. Kako model ne bi bio predefinisani,

potrebno je uvesti izvesna ograničenja, koja će biti primenjena za faktorijski model. Uvodi se sledeći niz ograničenja parametara:

$$0 = \sum_{i=1}^a \alpha_i = \sum_{j=1}^b \beta_j = \sum_{i=1}^a \alpha\beta_{ij} = \sum_{i=1}^b \alpha\beta_{ij}$$

Prethodno navedena ograničenja parametara imaju standardni oblik u kojem vrednosti  $\alpha_i$  moraju imati zbir jednak nuli, pa prema tome većina  $a - 1$  može varirati slobodno i imaju  $a - 1$  stepen slobode za faktor A. Slično tome, vrednosti  $\beta_j$  moraju imati zbir jednak nuli, što dozvoljava da većina  $b - 1$  može varirati slobodno i imati  $b - 1$  stepen slobode za faktor B. Za interakciju postoji  $ab$  efekata, koji moraju biti dodati nuli, u slučaju kreiranja zbira preko  $i$  ili  $j$ . Ovo doprinosi da interakcija ima  $(a - 1)(b - 1)$  stepen slobode.

Kada se dodaju stepeni slobode za A, B i AB, dobija se  $a - 1 + b - 1 + (a - 1)(b - 1) = ab - 1 = g - 1$ . Ovo predstavlja  $ab - 1$  stepen slobode između srednjih vrednosti  $ab$  kombinacije nivoa faktora koji su podeljeni u tri niza: A, B i AB interakcija. U svakoj faktor-nivo kombinaciji postoji  $n - 1$  stepen slobode oko srednje vrednosti procedure. Stepenslobode greške je  $N - g = N - ab = (n - 1)ab$ .

Podaci autora Lynch i Strain (70) imaju  $3^2$  faktorijsku strukturu sa  $n = 5$ . Prema tome postoji 2 stepena slobode za faktor A, 1 stepen slobode za faktor B, 2 stepena slobode za interakciju AB i 24 stepena slobode za grešku. Tabela 17 daje formule za predviđanje efekata u faktorijskom obliku. Predviđanje  $\mu$  preko srednje vrednosti svih podataka  $\bar{y}_{\dots}$ . Predviđanje  $\mu + \alpha_i$  preko srednje vrednosti svih odgovora koji postoje za proceduru A u nivou  $i$ ,  $\bar{y}_{i..}$ . Slična procedura se sprovodi i na faktor B. Predviđena vrednost u proceduri  $ij$  ima oblik  $\mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij}$ , koja se predviđa preko  $\bar{y}_{ij.}$ .

Tabela 17 – Primer ukupne količine amino kiseline u siru nakon 56 dana zrenja [57]

Kontrola	R50#10	R21#2	Mešavina
1,697	2,032	2,211	2,09
1,601	2,017	1,673	2,255
1,830	2,409	1,973	2,987

### Analiza varijacija uravnoteženih faktorijala

Kao što je već prethodno objašnjeno, analiza varijacije se definiše kao algoritam za deljenje varijabilnosti podataka, metoda za testiranje nulte hipoteze i metoda za poređenje modela podataka. Ista pravila se mogu primeniti i u analizama faktorijskih modela.

Podela varijabilnosti podataka se može sprovoditi različitim metodama, ali u nastavku je prikazana podela pomoću ANOVA-e. Postoji izvor varijabilnosti za svaki od članova modela. U slučaju analize modela sa dva faktora, postoji faktor A, faktor B, interakcija AB i greška. U slučaju jedno-faktorijske ANOVA-e, zbir kvadrata procedura se obezbeđuje tako što se prvo kvadriraju predviđeni efekti (na primer  $\hat{\alpha}_i^2$ ), nakon toga se množe sa brojem eksperimentalnih jedinica koje se odnose na taj efekat ( $n_i$ ) i na kraju je dodaju preko indeksa efekta (na primer dodavanjem  $i$  za  $\alpha_i$ ). Ukupan zbir kvadrata se dobija sabiranjem kvadratih odstupanja podataka od opšte srednje vrednosti, a zbir kvadrata greške se dobija sabiranjem kvadratnih odstupanja podataka od srednjih vrednosti procedure. U tabeli 18 su prikazani koraci rešavanja i formule za izračunavanje zbira kvadrata uravnoteženog faktorijskog problema sa dva faktora.

Tabela 18 – Zbir kvadrata uravnoteženog faktorijskog problema sa dva faktora [57]

Članovi modela	Zbir kvadrata	Stepen slobode
A	$SS_A = \sum_{i=1}^a bn(\hat{\alpha}_i)^2$	$a - 1$
B	$SS_B = \sum_{j=1}^b an(\hat{\beta}_j)^2$	$b - 1$
AB	$SS_{AB} = \sum_{i=1, j=1}^{a, b} n(\hat{\alpha}\hat{\beta}_{ij})^2$	$(a - 1)(b - 1)$
Greška	$SS_E = \sum_{i=1, j=1, k=1}^{a, b, n} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})^2$	$ab(n - 1)$
Ukupno	$SS_T = \sum_{i=1, j=1, k=1}^{a, b, n} (y_{ijk} - \bar{y}_{\dots})^2$	$abn - 1$

Zbirovi kvadrata se moraju sabrati u varijabilnom obliku, kao na primer:

$$SS_T = SS_A + SS_B + SS_{AB} + SS_E$$

Prethodno napisani zbirova kvadrata  $SS_A$ ,  $SS_B$  i  $SS_{AB}$  moraju biti sabrani sa zbirom kvadrata između procedura, pod pretpostavkom da eksperiment ima  $g = ab$  procedura, dobija se:

$$\sum_{i=1, j=1}^{a, b} n(\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{\dots})^2 = SS_A + SS_B + SS_{AB}$$

U nastavku su prikazani ANOVA rezultati razloženi u obliku tabele analize varijacije. Kao i u prethodnim prikazima rezultata ANOVA-e, mogu se pronaći podaci o analiziranom podatku, stepenu slobode, zbiru kvadrata, kvadrata srednje vrednosti i F-testa. Za faktorijsku strukturu sa dva faktora, kao analizirani podaci se mogu pronaći faktor A, faktor B, interakcija AB i greška. Prema tome, u tabeli 19 su prikazani rezultati.

Tabela 19 – ANOVA rezultati za faktorijsku strukturu sa dva faktora [57]

Podatak	Stepen slobode	Zbir kvadrata	Kvadrat sr. vrednosti	F-test
A	$a - 1$	$SS_A$	$SS_A/(a - 1)$	$MS_A/MS_E$
B	$b - 1$	$SS_B$	$SS_B/(b - 1)$	$MS_B/MS_E$
AB	$(a - 1)(b - 1)$	$SS_{AB}$	$SS_{AB}/[(a - 1)(b - 1)]$	$MS_{AB}/MS_E$
Greška	$(n - 1)ab$	$SS_E$	$SS_E/(n - 1)ab$	

Testovi ili uporedni modeli zahtevaju pretpostavke grešaka. Može se pretpostaviti da su greške nezavisne i da je normalna distribucija sa konstantnom varijacijom. Kada je pretpostavka tačna, zbirovi kvadrata kao nasumične promenljive su nezavisne od drugih i testovi su validni.

Koristi se test nulte hipoteze  $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0$  protiv alternativne da neke vrednosti od  $\alpha_i$  su različite od nule, kao i F-statistika  $MS_A/MS_E$  sa  $a - 1$  i  $(n - 1)ab$  stepenom slobode. Ovo predstavlja test glavnog efekta faktora A. P-vrednost se izračunava

kao u primerime iz prethodnih poglavlja. Za drugi test  $H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0$  protiv nulte hipoteze da je najmanje jedna vrednost  $\beta$  različita od nule se koristi F-statistika  $MS_B/MS_E$  sa  $b - 1$  i  $(n - 1)ab$  stepenom slobode. Slično tome, test statistike za nultu hipotezu da je interakcija svih  $\alpha\beta$  članova jednaka nuli je  $MS_{AB}/MS_E$  sa  $(a - 1)(b - 1)$  i  $(n - 1)ab$  stepenom slobode.

### Opšti faktorijski modeli

Model i analiza faktorijskih struktura koje se sastoje od više faktora se rešavaju veoma slično kao i strukture sa dva faktora, koji su prikazani u prethodnim poglavljima. U nastavku se razmatra faktorijska struktura koja se sastoji od četiri faktora A, B, C i D koji se u jednačinama označavaju grčkim slovima  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ . Model sa četiri faktora ima oblik:

$$\begin{aligned} y_{ijklm} = & \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + \\ & + \alpha\beta_{ij} + \alpha\gamma_{ik} + \alpha\delta_{il} + \beta\gamma_{jk} + \beta\delta_{jl} + \gamma\delta_{kl} + \\ & + \alpha\beta\gamma_{ijk} + \alpha\beta\delta_{ijl} + \alpha\gamma\delta_{ikl} + \beta\gamma\delta_{jkl} + \\ & + \alpha\beta\gamma\delta_{ijkl} + \\ & + \epsilon_{ijklm} \end{aligned}$$

Prvi red u prethodnoj jednačini modela sadrži opštu srednju vrednost i glavne efekte za sva četiri faktora. Drugi red sadrži šest interakcija faktora u kombinaciji dva faktora. Treći red kombinuje interakciju po tri faktora. Četvrti red je interakcija sva četiri faktora. Peti red je greška modela. Kao što je bio slučaj sa interakcijama dva faktora, koju su opisivali kako se glavni efekat manja u zavisnosti od nivoa drugog faktora, tako i u slučaju interakcije tri faktora, kao što je  $\alpha\beta\gamma_{ijk}$ , opisuje se kako interakcija dva faktora se menja u zavisnosti od nivoa trećeg faktora. Slično tome, interakcija četiri faktora opisuje kako se interakcija tri faktora menja u zavisnosti od četvrtog faktora i sve tako nadalje do interakcije sa najvišim redom. I dalje se usvaja pretpostavka da je greška  $\epsilon$  nezavisno normalna sa srednjom vrednošću 0 i varijacijom  $\sigma^2$ . Analogijom sa faktorijskom strukturom sa dva faktora, se uvode ograničenja efekata tako što se zbrovi izjednačavaju sa nulom. Na primer:

$$0 = \sum_l \delta_l = \sum_k \beta\gamma_{jk} = \sum_j \alpha\beta\delta_{ijl} = \sum_i \alpha\beta\gamma\delta_{ijkl}$$

Prethodna suma ograničenja sa nulom pravi parametre modela jedinstvenim. Broj stepeni slobode  $abcd - 1$  između  $abcd$  procedura su sortirani članovi kao što je prikazano u nastavku. Svaki član sadrži neki broj faktora (jedan, dva, tri ili četiri) i svaki faktor ima neki broj nivoa ( $a, b, c, d$ ). Prema tome, broj stepeni slobode za član npr. ABD je  $(a - 1)(b - 1)(d - 1)$ . Efekti u modelu se predviđaju na isti način kao što je bio slučaj kog modela sa dva faktora, tako što se razvijaju od opšte srednje vrednosti u glavne efekte, interakcije dva faktora, interakcije tri faktora, itd. Predviđena opšta srednja vrednost je  $\hat{\mu} = \sum_{ijklm} y_{ijklm} / N = \overline{y_{\dots}}$ . Glavni efekat i interakcija više faktora se predviđaju na isti način kao i kod standardne faktorijske strukture sa dva faktora, tako što se zanemare svi faktori osim dva od interesa. Na primer, za predviđanje glavnog efekta,  $k$ -tog nivoa faktora C, koristi se srednja vrednost svih odgovora koji su dobijeni u  $k$ -tom nivou faktora C i oduzimanjem predviđenih efekata nižeg reda (u ovom slučaju samo  $\hat{\mu}$ ):

$$\hat{\gamma}_k = \overline{y_{\dots k \dots}} - \hat{\mu}$$



U slučaju interakcije tri faktora, odnosno  $ijk$ -ti nivo faktora A, B i C, dobija se glavni odgovor u  $ijk$  kombinacija faktora A, B i C i nakon toga se oduzimaju sa članovima nižeg reda – opšta srednja vrednost, glavni efekat faktora A, B i C, interakcija dva faktora A, B i C:

$$\widehat{\alpha\beta\gamma}_{ijk} = \overline{y_{ijk\dots}} - (\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + \hat{\gamma}_k + \widehat{\alpha\beta}_{ij} + \widehat{\alpha\gamma}_{ik} + \widehat{\beta\gamma}_{jk})$$

Veoma jednostavno se prethodno primenjeno pravilo može proširiti i na veći broj razmatranih faktora sistema.

Ova pravila za izračunavanje zbirna kvadrata se dobijaju na uobičajeni način, kvadrat svakog pojedinačnog efekta se množi sa brojem eksperimentalnih jedinica koje se odnose na efekat i sabiranje preko nivoa.

$$SS_{ABD} = \sum_{ijl} nc(\widehat{\alpha\beta\delta}_{ijl})^2$$

Kao što je bio slučaj sa faktorijskom strukturom sa dva faktora i kod složenijih oblika sa više faktora se sprovodi analiza varijacija koja je objedinjenja u tabeli sa uobičajnim kolonama i redom za svaki analizirani član modela. Testira se nulta hipoteza tako da su efekti jednaki nuli preko uzimanja odnosa kvadrata srednje vrednosti za taj efekat i kvadrata greške. Upoređivanjem ovih vrednosti se vrši preko F-statistike i F-distribucije. Današnje analize faktorijskih struktura sa više faktora se vrše preko računarskih statističkih softvera, ali je neophodno poznavanje problematike ručnog izračunavanja.

### Pretpostavke i transformacije

Validnost dobijenih zaključaka sprovedenih procedura zavisi pre svega od tačnosti usvojenih pretpostavki. I dalje je potrebno proveriti normalnost, konstantna odstupanja i nezavisnost dobijenih rezultata, kao što je bio slučaj sa faktorijskom strukturom sa samo dva faktora. Ponekad kršenje osnovnih pretpostavki može voditi ka tačnoj faktorijskoj strukturi. Na primer ukoliko se greška kreće u konstantnim granicama u jednom nivou faktora B, ali u svim ostalim značajno varira. U tom slučaju se može smatrati da dobijena greška može biti dobar pokazatelj ustaljenosti sistema u pojedinoj tački, ili kombinaciji. Slično tome, prikladan model glavne strukture zavisi od razmere u kojoj su analizirani podaci. Interakciji članova može biti dodeljena razmera koja se odnosi samo na taj slučaj, ostali članovi modela mogu imati različite razmere. Ako se pretpostavi da srednje vrednosti za nivo kombinacija faktora prati model:

$$\mu_{ij} = M \exp \alpha_i \exp \beta_j$$

Ovaj model je multiplikativan u smislu da menjanjem nivoa faktora A ili B se menja razmera odgovora preko množenja, a ne dodavanja odgovora. Za logaritamsku transformaciju podataka, glavna struktura ima oblik:

$$\log(\mu_{ij}) = \log(M) + \alpha_i + \beta_j$$

Podaci dobijeni množenjem sada se sabiraju nakon logaritamske transformacije i nije dodat interakcijski član. Često logaritamska transformacija daje promenljive varijance.

### Model sa jednim ponavljanjem

Neki faktorijski eksperimenti se pokreću samo jednom za svaku faktor-nivo kombinaciju ( $n = 1$ ). Često ovakav pristup može voditi ka pogrešnim zaključcima, zato što ne postoje

stepeni slobode za predviđanje greške. S toga, analiza faktorijskih struktura postaje „umetnost“, iz razloga što se mora odabrati između nekoliko pristupa i varijacija među pristupima. Ni jedan od tih pristupa ne garantuje pouzdanost zato što ni jedan ne obezbeđuje dovoljno malu eksperimentalnu grešku koja se može dobiti iz ponavljanja. Ako se koristi pristup u kome se greška predviđa kao obično veća vrednost, može se reći da je procedura konzervativna. U ovom slučaju konzervativnom procedurom se smatrati ukoliko je izračunata p-vrednost uvek veća od stvarne p-vrednosti i prema tome se odbija nulta hipoteza. Najčešći pristup je kombinacija jednog ili više interakcija viših redova kvadrata srednjih vrednosti u jednu predviđenu grešku. To je zapravo odabir jednog ili više interakcijskih članova i dodati njihove zbirne kvadrata i stepene slobode, kako bi se dobila zamena zbira kvadrata greške i stepena slobode. Drugi pristup sa jednim ponavljanjem je korišćenje spoljašnje predviđene greške. Ovo je veoma slično prethodnom slučaju i zna se koja veličina nasumične greške je bila u zadatim eksperimentima. Prema tome se može koristiti  $MS_E$  od sličnog eksperimenta na mestu  $MS_E$  od analiziranog eksperimenta. Ovaj pristup može biti koristan, ali takođe nosi izvesnu dozu rizika. Rizik se ogleda u tome što je neophodno biti siguran da je spoljašnja predviđena greška zaista odgovarajuća vrednost za analizirani eksperiment. Ako veličina nasumičnih grešaka nije stabilna, kao i ako se veličina grešaka menja od eksperimenta do eksperimenta, ili zavisi od uslova unutar kojih je eksperiment sproveden, tada će spoljašnja predviđena greška verovatno predvideti nešto drugo, a ne grešku eksperimenta [57].

### 5.3.5. Potpuni blok plan eksperimenta

U ovom poglavlju rada je akcent stavljen na plan eksperimenta sa umanjnim varijacijama. Eksperimentalna greška često čini zaključak teškim za razumevanje. Varijacija eksperimentalne greške  $\sigma^2$  uvećava dužinu trajanja eksperimenta i odabir pouzdanih rezultata. Prema tome, u nastavku su sprovedeni eksperimenti sa eksperimentalnim jedinicama koje su homogene, što čini  $\sigma^2$  veoma malom. Na žalost, sve druge stvari su retko jednake. Na primer, može postojati mali broj eksperimentalnih jedinica dostupnih i zbog toga donešene odluke često nisu dovoljno dobre. Ukoliko postoji mogućnost upotrebe homogenih eksperimentalnih jedinica, koje umanjuju opšti zaključak i orijentišu se samo ka pojedinim jedinicama od interesa. Plan eksperimenta sa umanjnim varijacijama ima dosta koristi za male vrednosti  $\sigma^2$ , bez neophodnog ograničenja na podgrupe eksperimentalnih jedinica.

#### **Prizak putem blokova**

Plan eksperimenta sa umanjnom varijacijom se gotovo uvek povezuje sa tehnikom poznatom kao blok prikaz. Blok prikaz neke eksperimentalne jedinice predstavlja niz jedinica koje su homogene u nekom smislu. Blok prikazi (ili kraće blokovi) su polje dijagrama pozicioniranih u istoj opštoj zoni, ili analizirani uzorci u sličnom vremenu, ili su jedinice koje dolaze od istog izvora. Ove sličnosti između eksperimentalnih jedinice vode ka zaključku da jedinice unutar jednog bloka mogu lako imati veoma sličan odgovor. Prema tome, pri postavljanju bloka se vodi računa od homogenosti eksperimentalnih jedinica unutar njega, dok eksperimentalne jedinice iz različitih blokova mogu takođe biti različite.

Plan eksperimenta preko blokova nije u potpunosti nasumični plan. U nastavku je prikazan potpuno nasumični blok plan eksperimenta u kojem se uvode neki tipovi umanjenja nasumičnosti. Kada se planira eksperiment, zna se koji se pristup koristi, kao i nasumičnost. Postoji velik broj različitih izvedni i pristupa blok eksperimenta, ali u nastavku je najviše pažnje posvećeno potpunom blok planu eksperimenta.

#### **Potpuno nasumični blok plan eksperimenta**

Ovaj plan eksperimenta predstavlja osnovni oblik upotrebe blokova. Ukoliko postoji  $g$  procedura i svaka od njih je povezana sa  $r$  eksperimentalnih jedinica, što ukupno daje  $N = gr$  jedinica. Deljenjem  $N$  u grupe od po  $g$  jedinica, dobija se  $r$  grupa koje predstavljaju blokove. Deljenjem u blokove se na neki način vodi računa da jedinice unutar bloka budu što približnije, što će kasnije voditi ka sličnim odgovorima. U prvom bloku se nasumično povezuje  $g$  procedura sa  $g$  eksperimentalnih jedinica. Za kreiranje svakog narednog blok se koristi nezavisni nasumični pristup povezivanja procedura i eksperimentalnih jedinica. Kreirani blokovi postoje u vremenu nasumičnom od procedura i jedinica, što onemogućuje dalje unapređenje blok strukture. Ovaj pristup je odjašnjen na sledećem primeru.

Moderni zoološki vrtovi se trude da što više unaprede prostore predviđene za životinje, kako bi bili što sličniji realnom okruženju odakle životinje dolaze. Sadnja novih, egzotičnih biljaka karakterističnih za određeno životno stanište je čest proces kojim se oplemenjuje stanište i čini da se životinje osećaju prijatnije. Nove vrste su podložne drugačijim titovima bolesti i insektima, koje ne mogu biti tretirani standardnim preparatima zbog velike učestalosti različitih životinja i biljaka koje mogu biti osetljive. Palme mogu biti opustošene insektima za čije suzbijanje je potrebno analizirati nekoliko potencijalnih mogućnosti. Prva mogućnost u borbi je voda, odnosno tretiranje čistom vodom. Drugo bi bilo tretiranje cvetnim uljima koji teraju insekte i treća procedura iziskuje ubacivanje preparata u vodu na bazi gljiva koje loše utiču na insekte. Sve tri procedure su prirodna rešenja koja nemaju štetnih uticaja na ostale biljke i životinje u zoološkom vrtu. Treba sprovesti istraživanje koja procedura će postići najbolje rezultate. Pet zaraženih palmi su uzete i na njima je sprovedeno istraživanje. Po tri grane su nasumično odabrane sa svake palme i na svakoj od njih je obeležena zona 3x3 cm gde će biti sprovedeno tretiranje. Rezultat istraživanja će biti praćenje količine insekata u naznačenoj zoni tokom tretiranja. Tri grane svake biljke se nasumično povezuju sa tri procedure. Nakon tri dana se sprovodi prebrojavanje insekata i dolazi do zaključka pre i posle, što zapravo predstavlja odgovor eksperimenta. Rezultati eksperimenta su prikazani u tabeli 20.

Tabela 20 – Rezultati eksperimenta kroz promenu broja insekata na biljkama nakon tretmana [57]

Tretman	Biljka				
	1	2	3	4	5
Voda	-9	18	10	9	-6
	-6	5	9	0	13
Gljive u vodi	-4	29	4	-2	11
	7	10	-1	6	-1
Biljno ulje	4	29	14	14	7
	11	36	16	18	15

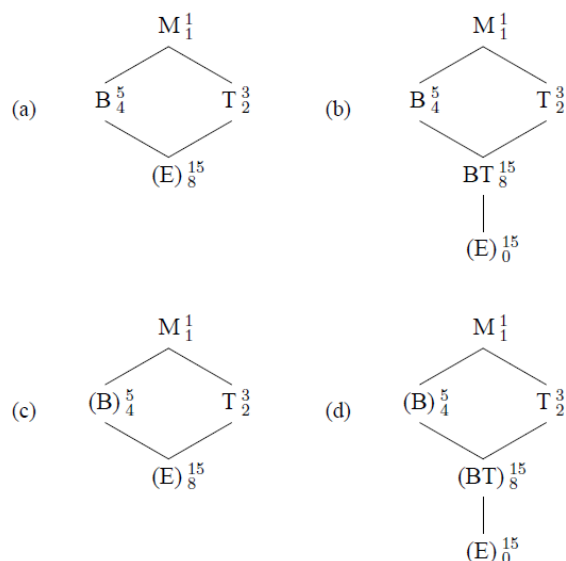
Najbolji način za razumevanje rezultata tabele je praćenjem nasumičnosti. Gledajući nasumičnost može se uvideti da su procedure povezane sa granama. Prema tome grane moraju biti eksperimentalne jedinice. Nasumičnost je tako sprovedena da je svaka procedura korišćena jednom na svakoj palmi. Nije bilo moguće da su dve grane iste biljke tretirane istom procedurom. Sa predstavljanjem palmi kroz blok prikaz, utiče se na umanjene nasumičnosti. Zone na granama gde je sprovedeno tretiranje predstavljaju merive jedinice. Analizom dobijenih merivih podataka se može dobiti srednja vrednost ili zbir insekata u dve zone iste grane, kao i odgovor za celu granu. Može se zamisliti da postoje  $g = 3$  procedure povezane sa  $N = 15$  eksperimentalnih jedinica u  $r = 5$  blokova veličine 3 prema potpuno

nasumičnom blok planu eksperimenta. Takođe postoje po dve merive jedinice za svaku eksperimentalnu jedinicu. Zbog čega je korisno ovakav tip eksperimenta predstaviti putem blok prikaza? Iskustvo i intuicija vodi ispitivače ka verovanju da grane iste palme imaju tendenciju da budu sličnije u odnosu na grane različitih palmi u opštem i ekološkom smislu. Važno je shvatiti da tabelarni prikaz rezultata poput tabele 20, može prikriti nasumičnost koja se razmatra. Na osnovu tabele se može steći utisak da prva jedinica u svakom bloku je povezana sa tretmanom vodom, druga tretmanom vodom sa primesama gljiva, itd. Ovo ne mora biti tačno. Tretman vodom može biti dodeljen bilo kojoj od tri jedinice u bloku, odabran nasumično. Nije dobro donositi zaključke samo na osnovu rezultata iz tabele. Potrebno je poznavati nasumičnost. Mogu se dobiti isti rezultati za potpuno različite postavke eksperimenta, na osnovu kojih nije moguće sprovesti pravilnu analizu.

Analiza rezultata potpuno nasumičnog blok eksperimenta se sprovodi na isti način kao i u slučaju PNPE. Kada se jednom formira dobar model, vrši se tačka predviđanja, međusobna poređenja, testirana, analiza ostataka, odnosno greške, itd. Neka  $y_{ij}$  bude odgovor modela  $i$ -te procedure u  $j$  bloku. Standardni model u potpuno nasumičnom blok planu ima glavnu srednju vrednost, efekat procedure, efekat bloka i eksperimentalnu grešku, kao u izrazu:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ij}$$

Standardni model garantuje da su procedure i blokovi aditivni, što znači da procedure imaju isti efekat u svakom bloku, a blokovi služe isključivo za pomeranje glavnog odgovora gore ili dole. Heseova šema pod  $a$  i  $c$  na slici 5.14 predstavljaju standardni model.



Slika 5.14 – Modeli za potpuno nasumični blok eksperimenta [57]

Da bi se kompletirao model, potrebno je pre svega odlučiti koji članovi su nasumični, a koji fiksni, kao i to da li se koristi aditivni model ili se ostavlja mogućnost interakcije procedura i blokova. Srećom sve varijacije vode ka istoj operativno proceduri analize kod potpuno nasumičnog blok eksperimenta. Slika 5.14 prikazuje Heseove dijagrame za četiri različita niza pretpostavki. Šeme  $a$  i  $b$  prikazuju blokove birane tačnim (fiksni) redom, dok  $c$  i  $d$  prikazuju blokove birane nasumično. Šeme  $a$  i  $c$  predstavljaju blokove koji nisu u interakciji sa procedurama, dok šeme  $b$  i  $d$  prikazuju blokove koji su u interakciji sa procedurama. Za sva četiri razmatrana slučaja postoji  $(r - 1)(g - 1)$  stepena slobode članu ispod procedura kao imenilac procedura. Ovo je tačno i u slučaju fiksnih i nasumičnih blok šema. U šemama

$a$  i  $c$  kod kojih su procedure i blokovi aditivni stepen slobode  $(r - 1)(g - 1)$  člana je uobičajena greška i samo nasumični član je ispod procedura. U šemi  $d$  član u bloku je u interakciji sa procedurama i prirodni je imenilac procedura. U šemi  $b$  tačan imenilac za procedure je greška koja ne može biti procenjena iz razloga što postoji 0 stepeni slobode greške. Umesto toga se mora koristiti blok preko interakcije procedure koja koristi zamenu za grešku. Prema tome se dolazi do istih zaključaka bez obzira na nasumičnost blokova i interakciju između blokova i procedura. Jedna razlika između potpuno nasumičnog blok plana eksperimenta i faktorijskog plana eksperimenta je to što se ne pokušava doći do zaključaka o blokovima, čak i u slučaju kada savremeni statistični programi to dozvoljavaju. Razlog toga dolazi od F-testova koji su aproksimacija nasumičnih testova. Unutar nasumičnosti potpuno nasumičnog blok plana eksperimenta eksperimentalne jedinice su nasumično povezane sa procedurama, ali jedinice uvek ostaju u okvirima jednog bloka. Prema tome, efekti bloka i zbira kvadrata nisu nasumični i ne postoji test blokova. Kaže se da blokovi jednostavno postoje.

### Latinski kvadrati (*eng. Latin Squares*)

Potpuno nasumični blok plan eksperimenta dozvoljava blok prikaz podataka koji potiču samo od jednog izvora varijacije u okviru odgovora. Postoje eksperimenti sa više od jednog izvora varijacije, koji iziskuju drugačiju postavku eksperimenta. Latinski kvadrat (LK) predstavlja plan eksperimenta za dva izvora varijacije. LK za  $g$  procedura koristi  $g^2$  eksperimentalnih jedinica i na taj način se utiče na umanjenje veličine eksperimenta. LK se obično prikazuje u tabelarnom obliku sa latiničnim slovima kao ispunama. U tabeli 21 je dat prikaz LK za 2, 3 i 4 procedure.

Tabela 21 – Primer LK prikaza za 2, 3 i 4 procedure [57]

B	A	A	B	C	A	B	C	D
A	B	B	C	A	C	D	A	B
		C	A	B	D	C	B	A

Eksperimentalne jedinice  $g^2$  su predstavljene kao kvadrati. Slova A, B, itd. , predstavljaju  $g$  različitih procedura. Postoje dva blok faktora u LK koju su predstavljeni preko redova i kolona kvadrata. Svaka procedura se pojavljuje jednom u svakom redu i svakoj koloni. Ukoliko se zanemari blok faktor reda, LK plan eksperimenta predstavlja potpuno nasumični blok plan eksperimenta za blok faktor kolone. Slično tome, ukoliko se zanemari blok faktor kolone, LK plan eksperimenta predstavlja potpuno nasumični blok plan eksperimenta za blok faktor reda. Redovi i kolone su uravnotežene zahvaljujući kvadratu eksperimentalnih jedinica. LK blokovi redova i kolona se koriste istovremeno. Prednost ovog pristupa se ogleda u tome što se dozvoljava formiranje blokova iz dva različita izvora varijacije. Ovaj sistem svakako ima i svojih nedostataka. Prvi nedostatak bi mogao biti to što pojedinačni LK ima tačno  $g^2$  eksperimentalnih jedinica. Ovo u nekom slučaju može biti premalo ili čak previše eksperimentalnih jedinica. Drugi nedostatak bi bilo premalo stepeni slobode u okviru LK eksperimenta. Ovaj problem je ozbiljniji kod manjih eksperimenata.

Jedna od veoma čestih upotreba LK se pronalazi kada je niz procedura dat nekom subjektu preko nekoliko perioda vremena. Potrebno je definisati blok subjekata zato što svaki subjekat teži različitom odgovoru, kao i blok za vremeniski period iz razloga što mogu postojati razlike u vremenu. *Unakrsni LK plan* ima svaku proceduru datu jednom svakom subjektu, kao i svaka procedura se pojavljuje u tačnom broju u vremenu, u svakom vremenskom periodu. Sa

$g$  procedura dodaljenih  $g$  subjektima preko  $g$  vremenskog perioda je tipičan oblik unakrsnog LK plana eksperimenta.

#### Nasumičnost LK plana eksperimenta

Jednostavno je kreirati LK za bilo koji broj procedura  $g$ . Povezivanjem procedura u prvi red po redosledu. U preostalim redovima se pomere ulevo sve procedure u red ispod, stavljajući prvi element reda ispod na kraj tog reda. U kvadratu  $3 \times 3$  iz tabele 21, je primenjen ovaj postupak. Malo komplikovanije je odabrati LK nasumično. Povezivanje procedura i eksperimentalnih jedinica nasumično se odnosi na to da se subjekat ograničenja u proceduri pojavljuje jednom u svakom redu i jednom u svakoj koloni. Preporučena nasumičnost su opisali autori Fisher i Yates [73]. Njihova preporuka započinje sa standardnim kvadratima, koji su ispunjeni slovima u prvom redu i prvoj koloni po redosledu. Kvadrati  $3 \times 3$  i  $4 \times 4$ , kao u tabeli 21, predstavljaju standardne kvadrate. Za  $g$  sa 2, 3, 4, 5 i 6 postoji 1, 1, 4, 56 i 9408 standardnih kvadrata. Za vrednosti  $g$  od 3, 4 ili 5 najpre se standardni kvadrati biraju nasumično. Nakon toga se nasumično permutuju svi redovi osim prvog, sve kolone i nasumično se procedurama dodele slovne oznake. U slučaju da je  $g$  6, označi se standardni kvadrat nasumično, a nakon toga se nasumično permutuju svi redovi i kolone, kao i nasumično povežu procedure sa slovnim oznakama. U slučaju da je  $g$  7 ili veće, odabira se bilo koji kvadrat, nasumično se permutuju redovi i kolone, kao i nasumično povežu procedure sa slovnim oznakama.

#### Analiza LK plana eksperimenta

Standardni model LK ima glavnu srednju vrednost, efekte blokova i procedura reda i kolone i eksperimentalnu grešku. Neka  $y_{ijk}$  bude odgovor jedinice date u  $i$ -toj proceduri,  $j$ -om blok redu i  $k$ -toj blok koloni. Standardni model ima oblik:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \epsilon_{ijk}$$

U prethodnom izrazu  $\alpha_i$  predstavlja efekat  $i$ -te procedure,  $\beta_j$  je efekat  $j$ -tog blok reda, a  $\gamma_k$  je efekat  $k$ -te blok kolone. Prema potpuno nasumičnom blok planu eksperimenta, blok efekti se pretpostavljaju da budu aditivni. U nastavku je dat kompleksniji prikaz koji do sada nije razmatran, a to je  $g^3$  od kombinacije  $i, j, k$  u okviru jednog LK. Do sada su razmatrani slučajevi sa  $g^2$ . LK je tako kreiran da postoji uravnoteženost u pogledu redova i kolona, redova i procedura, kao i kolona i procedura. Ova uravnoteženost implicira da razlike između redova, kolona i procedura su ortogonalne i uobičajena izračunavanja efekata, zbir kvadrata, razlika i dr. se rade za LK. U nastavku je dat primer.

$$\hat{\alpha}_i = \overline{y_{i..}} - \overline{y_{...}}$$

$$SS_{Procedure} = \sum_{i=1}^g g \hat{\alpha}_i^2$$

U prethodnim izrazima  $\overline{y_{i..}}$  i  $\overline{y_{...}}$  su srednje vrednosti preko  $g^2$  i  $g$  eksperimentalnih jedinica nasumično. Zbir kvadrata greške se traži uobičajeno preko niza zbrova kvadrata procedura, redova i kolona od ukupnog zbir kvadrata. Tabela analize varijacije za LK plan eksperimenta sadrži izvore redova, kolona, procedura i grešku. Testira se nulta hipoteza efekata procedure preko F-odnosa formiranog na osnovu srednje vrednosti kvadrata procedura preko srednje vrednosti greške. Šematski prikaz ANOVA-e za LK je dat u okviru tabele 22.

Tabela 22 – ANOVA šema za LK plan eksperimenta [57]

Izvor	Zbir kvadrata	Stepen slobode	Sr. vrednost kvadrata	F-test
Redovi	$SS_{redova}$	$g - 1$	$SS_{redova}/(g - 1)$	$\frac{MS_{procedura}}{MS_{greške}}$
Kolone	$SS_{kolona}$	$g - 1$	$SS_{kolona}/(g - 1)$	
Procedure	$SS_{procedura}$	$g - 1$	$SS_{procedura}/(g - 1)$	
Greška	$SS_{greške}$	$(g - 2)(g - 1)$	$SS_{greške}/[(g - 2)(g - 1)]$	

### Ponovljivost LK plana eksperimenta

Uvođenjem više ponavljanja vodi ka boljoj proceni greške i dubljem razumevanju ponašanja sistema. Često je potrebno bolje proceniti grešku u LK planu eksperimenta zato što pojedinačni LK ima relativno malo stepeni slobode greške. Prema tome se koristi više LK u okviru jednog eksperimenta. U slučaju ponavljanja LK, potrebno je biti u stanju uvideti ponovnu upotrebu i značaj blokova kolone ili reda. Na primer, može se verovati da će period efekata u unakrsnom planu biti jednak u svim kvadratima. Ponovljeni LK može ponovo upotrebiti blokove reda i kolone, ili izbeći njihovu ponovnu upotrebu, kao i formirati ponovnu upotrebu određenih redova ili kolona. Bez obzira da li se ponavljanjem upotrebe svih redova i kolona, ili ni jednog od njih, ponavljanje LK zavisi od eksperimentalnih i logičkih konstanti. Iz pogleda analize, prednost ponovne upotrebe blok faktora je u tome što se dobija više stepeni slobode greške. Mana ovog pristupa može biti promenljivost blok efekata prilikom ponovne upotrebe, pa se pretpostavljena konstantnost efekata blokova duž kvadrata može smatrati netačnom.

Analiza ponovljenog LK plana eksperimenta u velikoj meri zavisi od toga koji blok se ponovno koristi. Neka  $y_{ijkl}$  bude odgovor  $i$ -te procedure u  $j$  redu,  $k$  koloni, kvadrata  $l$ . Postoji  $g$  procedura (kolona i redova za svaki blok) i  $m$  kvadrata. Prethodni izgled modela:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_{j(l)} + \gamma_{k(l)} + \delta_l + \epsilon_{ijkl}$$

Ovaj model se sastoji od glavne srednje vrednosti  $\mu$ , efekata procedure  $\alpha_i$ , kvadrata efekata  $\delta_l$ , kao i reda i kolone blok efekata  $\beta_{j(l)}$  i  $\gamma_{k(l)}$ . Ono što je karakteristično za blok plan eksperimenta je to da su blok efekti aditivni. Prikazani model ima red i kolonu efekata smeštenih u kvadratu, pa prema tome svaki kvadrat ima sopstveni niz efekata reda i kolone. Broj stepeni slobode ovog modela je jedan za glavnu srednju vrednost,  $g - 1$  između procedura,  $m - 1$  između kvadrata,  $m(g - 1)$  za svaki red i kolonu i  $(mg - m - 1)(g - 1)$  za grešku. Termini koje se koriste u medelu, kao i stepen slobode reda i kolone blok efekata zavisi od toga da li se ponovo koriste blokovi reda i/ili kolone. Ako se pretpostavi da se ponovo koriste blokovi reda a ne blokovi kolone, model se imati oblik:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{k(l)} + \delta_l + \epsilon_{ijkl}$$

Stepen slobode ovog modela će imati oblik: jedan za glavnu srednju vrednost,  $g - 1$  između procedura,  $m - 1$  između kvadrata,  $g - 1$  između redova,  $m(g - 1)$  između kolona i  $(mg - 2)(g - 1)$  za grešku. Ukoliko se ponovo koriste blokovi i reda i kolone, model dobija oblik:

$$y_{ijkl} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_l + \epsilon_{ijkl}$$

U modelu stepen slobode ima oblik: jedan za glavnu srednju vrednost,  $g - 1$  između procedura, redova i kolona,  $m - 1$  između kvadrata i  $(mg + m - 3)(g - 1)$  za grešku.

### Graeco-Latinski kvadrati (eng. *Graeco-Latin Squares*)

Potpuno nasumični blok plan eksperimenta dozvoljava kontrolu jednog stranog izvora varijacije u okviru eksperimentalnih jedinica. LK dozvoljava kontrolu dva izvora. Ukoliko postoji potreba za proširenjem broja izvora varijacije, potrebno je izvršiti nadogradnju na postojeće LK i dobiti Graeco-Latinski kvadrati ili skraćeno G-LK. U ovom obliku se dozvoljava uvođenje tri različita izvora varijacija u model. Ukoliko postoji potreba za četiri i više izvora varijacija, koristi se Latinski-Hiper Kvadrati (eng. *Latin Hyper Squares*). G-LK dozvoljava testiranje  $g$  procedura koristeći  $g^2$  eksperimentalnih jedinica stavljajući ih u blokove na tri različita načina.

G-LK je predstavljen kao  $g^g$  tabela ili kvadrat. U tabelu su ubačene  $g^2$  eksperimentalne jedinice. Redovi i kolone predstavljaju blokove, kao što je bio slučaj kod LK. Svaka oznaka bloka se sastoji od jednog latiničnog slova i jednog grčkog slova (simbola). Latinska slova predstavljaju procedure, kao što je bio slučaj u LK, dok grčka slova predstavljaju treći faktor bloka. Latinična slova se pojavljuju po jednom u svakom redu i koloni, kao što je slučaj i sa grčkim slovima. U nastavku je dat primer G-LK prikaza za  $4^4$  blokova:

$A \alpha$	$B \gamma$	$C \delta$	$D \beta$
$B \beta$	$A \delta$	$D \gamma$	$C \alpha$
$C \gamma$	$D \alpha$	$A \beta$	$B \delta$
$D \delta$	$C \beta$	$B \alpha$	$A \gamma$

Svaka procedura se pojavljuje jednom u svakom bloku reda, svakom bloku kolone i jednom u svakom bloku koji sadrži grčko slovo [57].

#### 5.3.6. Parcijalna faktorijska struktura procedure

U prethodnim poglavljima rada sve procedure su se sastojale od dva i više faktora. Faktori su bili fiksni ili nasumično birani i pozivani, ali ono što im je bilo zajedničko je tačno određen niz kombinacije faktora koji sačinjavaju proceduru. Drugim rečima, sve procedure su obuhvatale sve faktore sa maksimalnim brojem razmatranih kombinacija. U ovom delu rada je izvršeno istraživanje drugačijeg pristupa odabira kombinacije faktora i njihovo objedinjavanje u zadatu proceduru. Parcijalna faktorijska struktura predstavlja upotrebu niza faktor-nivo kombinacije u faktorijsku strukturu procedure. Ukoliko se eksperiment sastoji od većeg broja uticajnih faktora, koji se pri tome variraju na više nivoa, klasična faktorijska struktura bi zahtevala pokretanje velikog broja eksperimenata. Parcijalna faktorijska struktura uzima u obzir manji broj eksperimenata po tačno definisanom načinu uzorkovanja.

Potpuna faktorijska struktura ima dosta prednosti jer daje veliki broj korisnih informacija kao što je dobro razumevanje uticaja glavnih efekata sistema i njihove interakcije. Mana može svakako biti već prethodno pomenuta preobimnost. Na primer ukoliko se razmatra plan eksperimenta koji se sastoji od 7 faktora koji se mogu varirati na najmanji mogući broj nivoa, a to je dva, ukupno se dobija  $2^7 = 128$  mogućih kombinacija procedura i eksperimentalnih jedinica. Na osnovu toga postoji 127 stepeni slobode ovakva konfiguracije eksperimenta, sa 7 stepeni slobode glavnih efekata, 21 stepen slobode za interakciju dva faktora, 35 stepeni slobode za interakciju tri faktora i 64 stepena slobode za interakciju četiri, pet, šest i sedam faktora. Potpuna faktorijska struktura daje veliku veličinu uzorkovanja za procenjivanje glavnih efekata i njihove interakcije. Analiza međusobne interakcije faktora je veoma precizna upotrebom potpune faktorijske strukture. Ova karakteristika u nekim slučajevima može predstavljati i suvišne informacija koje nepotrebno guše model. Veliki broj uzorkovanja



uvek daje najbolju sliku ponašanja sistema. U nekim slučajevima potpuna faktorijska struktura predstavlja previše precizan put dolaska do odgovora koji nisu toliko bitni za funkcionisanje sistema u celosti. Ukoliko se u eksperimentu odluči da se interakcija faktora viših redova izuzme, potpuna faktorijska struktura gubi smisao. Takođe ukoliko postoje ograničeni resursi i nije moguće pokrenuti veliki broj eksperimenata, neophodno je odustati od potpune faktorijske strukture.

Parcijalna faktorijska struktura predstavlja modifikovani oblik standardne (potpune) faktorijske strukture, koja omogućuje dolaženje do informacija o glavnim efektima i njihovim interakcijam na nižim nivoima bez pokretanja maksimalnog broja eksperimenata, zadatih potpunom faktorijskom strukturom [57].

### Dvo-serijska parcijalna struktura

Potpuna faktorijska struktura  $2^k$  može biti predstavljena kao dva bloka veličine  $2^{k-1}$ , ili četiri bloka veličine  $2^{k-2}$ , ili u opštem obliku  $2^q$  blokova veličine  $2^{k-q}$ . Parcijalna faktorijska struktura  $2^{k-1}$  se sastoji od  $k$  faktora od kojih svaki ima dva nivoa koji koriste  $2^{k-1}$  eksperimentalnih jedinica i kombinacije faktor-nivo. U suštini, blok  $2^k$  se deli u dva bloka, ali se samo jedan pokreće. Parcijalna faktorijska struktura  $2^{k-q}$  predstavlja plan eksperimenta sa  $k$  faktora od kojih svaki ima dva nivoa koji koriste  $2^{k-q}$  eksperimentalnih jedinica i kombinacije faktor-nivo. Postavljanje faktorijske strukture  $2^k$  je moguće preko jednog ili više definisanih razlika. Označavanje razlika je moguće na više načina, od kojih se najčešći  $\pm 1$ , 0/1 ili +/- . Ukoliko se usvoji prikaz razlika +/-, u punoj faktorijskoj strukturi je moguće pronaći sve četiri kombinacije (++, --, +- i -+). Parcijalna faktorijska struktura razmatra samo jednu od prethodno navedenih četiri kombinacije, npr. ++ [57].

Parcijalna faktorijska struktura je prikazana kroz primer za slučaj  $2^{3-1}$ . Najpre je neophodno uraditi analizu potpuno faktorijske strukture u obliku  $2^3$ . Struktura se sastoji od tri uticajna faktora koji mogu da variraju na dva nivoa. Ukupan broj mogućih kombinacija postavljanja eksperimenta je  $2^3 = 8$ . Raspored kombinacija i dobijenih rezultata eksperimenta je prikazano u tabeli 23.

Tabela 23 – Potpuna faktorijska struktura  $2^3$  [74]

	X1	X2	X3	Y
1	-1	-1	-1	$y_1 = 33$
2	+1	-1	-1	$y_2 = 63$
3	-1	+1	-1	$y_3 = 41$
4	+1	+1	-1	$y_4 = 57$
5	-1	-1	+1	$y_5 = 57$
6	+1	-1	+1	$y_6 = 51$
7	-1	+1	+1	$y_7 = 59$
8	+1	+1	+1	$y_8 = 53$

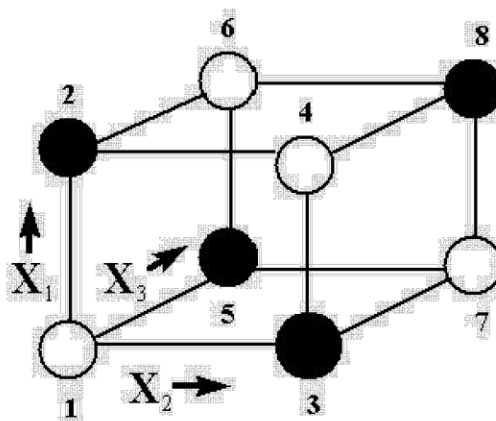
Tri faktora su označeni sa X1, X2, X3, a dobijeni rezultati eksperimenta su označeni sa Y tj. ( $y_1 \dots y_8$ ). Pošto svaki faktor čine dve njegove vrednosti, u tabeli 23 su označene sa -1 i +1, što zapravo predstavlja zadatu manji i zadatu veću vrednost za svaki faktor. Na osnovu podataka iz tabele 23 je moguće izračunati sve neophodne uticaje sistema, kao što su glavni efekti, interakcija prvog reda, itd. Na primer za izračunavanje glavnog predviđenog efekta  $c_1$  faktora X1, potrebno je izračunati srednju vrednost svih dobijenih rezultata u kojima X1 ima

veću vrednost (+1) i oduzeti od izračunate srednje vrednosti svih dobijenih rezultata u kojima  $X_1$  ima manju vrednost (-1). Prema tome se može zapisati:

$$c_1 = \frac{y_2 + y_4 + y_6 + y_8}{4} - \frac{y_1 + y_3 + y_5 + y_7}{4}$$

$$c_1 = \frac{63 + 57 + 51 + 53}{4} - \frac{33 + 41 + 57 + 59}{4} = 8,5$$

Isti postupak se može ponoviti i za faktore  $X_2$  i  $X_3$ . Pitanje je da li je moguće doći do približno tačnog rezultata ukoliko se umanjuje broj izvršenih eksperimenata. Na primer, ukoliko se prethodna potpuna faktorijska struktura  $2^3$  zameni parcijalnom faktorijskom strukturom  $2^{3-1}$ . Parcijalna faktorijska struktura  $2^{3-1}$  zapravo je  $2^{3-1} = 2^2 = 4$  što predstavlja upola manje eksperimentalnih postupaka, odnosno prolaza. Faktorijske strukture sa manjim brojem faktora i nivoa se osim tabelarno mogu prikazati i putem rešetkaste strukture u obliku kocke. Takva jedna struktura je prikazana na slici 5.15.



Slika 5.15 – Faktorijska struktura  $2^3$  [74]

Ukoliko se pretpostavi da su sa prethodne slike uzete samo svetle tačke u uglovima kocke i ukoliko se primeni isti postupak dobijanja predviđenih vrednosti glavnih efekata pojedinih faktora, može se zapisati:

$$c_1 = \frac{y_4 + y_6}{2} - \frac{y_1 + y_7}{2}$$

$$c_1 = \frac{57 + 51}{2} - \frac{33 + 59}{2} = 8$$

Na sličan način je moguće izračunati i predviđene glavne efekte za faktore  $X_2$  i  $X_3$ . Veoma slični rezultati i postupak se može sprovesti ukoliko se u startu odluči da se u razmatranje uzmu rezultati eksperimenta označeni tamnim tačkama u rešetkastom prikazu kocke. U svakom slučaju, moguće je doći do predviđenih efekata faktora, sa malim odstupanjem uz daleko manji broj eksperimenata.

### Kreiranje parcijalne faktorijske strukture $2^{3-1}$

Prvi korak čini matematički zaključiti šta zapravo predstavlja parcijalna struktura  $2^{3-1}$ . Postoji tri faktora, koji mogu da variraju na dva nivoa. Potpuna faktorijska struktura iziskuje 8 eksperimentalnih prolaza. Ukoliko se reši parcijalni izraz  $2^{3-1}$  dobija se  $2^2$  što je zapravo

puna faktorijska struktura koju čine dva faktora koji se variraju na dva nivoa. Standardna tabela potpune faktorijske strukture  $2^2$  je data u narednoj tabeli 24.

Tabela 24 – Potpuna faktorijska struktura  $2^2$  [74]

	X1	X2
1	-1	-1
2	+1	-1
3	-1	+1
4	+1	+1

Iz tabele 24 se vidi da prema strukturi  $2^2$  postoji ukupno 4 eksperimentalna prolaza za dva faktora. Ovim postupkom je parcijalna faktorijska struktura  $2^{3-1}$  svedena na potpunu faktorijsku strukturu, ali u umanjenom obliku koji isključuje uticaj trećeg faktora X3 koji se ne pojavljuje u tabeli 24. Kako bi se uticaj trećeg faktora ipak uključio u razmatranje ovog eksperimenta, neophodno je formirati još jednu kolonu koja će biti pridodata tabeli 24. Nova kolona koja predstavlja šemu pozivanja manje ili veće vrednosti faktora (+1/-1) se dobija na osnovu interakcije prva dva faktora, odnosno njihovim međusobnim proizvodom  $X1 \cdot X2$ , što je prikazano u tabeli 25.

Tabela 25 – Potpuna faktorijska struktura  $2^2$  sa dodatom interakcijom  $X1 \cdot X2$  [74]

	X1	X2	$X1 \cdot X2$
1	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1

Desna kolona tabele 25 se može zameniti i rasporedom faktora X3, što je prikazano u tabeli 26.

Tabela 26 – Potpuna faktorijska struktura  $2^2$  sa dodatom interakcijom X3 [74]

	X1	X2	X3
1	-1	-1	+1
2	+1	-1	-1
3	-1	+1	-1
4	+1	+1	+1

Na ovaj način se značajno šteti u eksperimentalnim prolazima, zato što su isti u ovom slučaju prepolovljeni. Što se tiče procenjenih glavnih efekata  $c_1, c_2, c_3$  za sva tri faktora, njihova vrednost može u nekoj meri da odstupa od vrednosti koje bi se dobile potpunom faktorijskom strukturom, što je i očekivano pošto se osrednjavanje vrednosti vrši sa upola manje eksperimentalnih uzoraka, što zapravo i predstavlja cenu ovog pristupa [74].

### Analiza parcijalne faktorijske strukture $2^{k-q}$

Analiza parcijalne faktorijske strukture  $2^{k-q}$  je veoma slična potpunoj faktorijskog strukturi  $2^k$  pri čemu se mora voditi računa da se radi o strukturi koja ne uzima u obzir kompletnu količinu eksperimentalnih prolaza. Većina parcijalnih faktorijskih struktura ima samo jedno ponavljanje eksperimentalnih prolaza iz razloga što se značajno teži uštedi vremena i resursa. Zbog toga se izračunavanje greške i odstupanja mora sprovesti preko interakcije faktora,

upotrebom grafičkog pristupa ili neke druge metode. U analizi parcijalne faktorijske strukture ponekad subjektivno rasuđivanje može imati značajnu ulogu, zbog toga što se ne uzima u obzir kompletan broj eksperimentalnih prolaza. Na primer, može se naći da samo stepen slobode  $D = ABC$  se pojavljuje kao značajan u strukturi  $2^{4-1}$ . Najrazumniji pristup predstavlja pronalaženje glavnog efekta faktora  $D$ , dok se interakcija faktora  $ABC$  može zanemariti kao i interakcije nižih redova. Može biti slučaj da je interakcija  $ABC$  veća nego pojedinačni efekti faktora  $A, B, C$  ili interakcije drugog reda  $AC, BC$  ukoliko su oni jednaki nuli.

### Rezolucija i projektovanje parcijalne faktorijske strukture

Parcijalne faktorijske strukture se klasifikuju preko njihove rezolucije, što zapravo govori koji od tipova efekata je izostavljen. Rezolucija parcijalne strukture  $R$  sa vrednošću 1 predstavlja da ni jedan od interakcije faktora  $j$  nije izostavljen i zamenjen sa interakcijom faktora nižeg reda od  $R - j$ . Na primer, u rezolucija 3 ni jedan od glavnih efekata ( $j = 1$ ) nije izostavljen i zamenjen sa drugim glavnim efektima, ali glavni efekti mogu biti zamenjeni sa interakcijom dva faktora ( $R - j = 2$ ). U rezolucija parcijalne strukture 4, ni jedan od glavnih efekata ( $j = 1$ ) nije izostavljen i zamenjen sa drugim glavnim efektima i interakcijom dva faktora, ali glavni efekti mogu biti zamenjeni sa interakcijom tri faktora ( $R - j = 3$ ).

Rezolucija parcijalne faktorijske strukture  $R$  ima  $R$  slova u najkraćem obliku  $I$ . Ovo bi bio najlakši način da se zapamti značaj rezolucije. Obično se veličina rezolucije označava rimskim slovom i piše u parcijalnom faktorijskom zapisu. Na primer ukoliko postoji parcijalna faktorijska struktura  $2^{8-4}$  koja ima 14 kombinacija sa četiri slova i 1 kombinaciju sa osam slova, rezolucija je IV i zapisuje se kao  $2_{IV}^{8-4}$ . Sa rezolucijom nije moguće u potpunosti opisati sve zakonitosti sistema. Ukoliko se razmatra parcijalna faktorijska struktura  $2^{7-2}$  sa definisanim relacijama  $I = ABCF = BCDG = ADCF$ ,  $I = ABCF = ADEG = BCDEFG$ ,  $I = ABCDF = ABCEG = DEFG$ . Svi prethodni slučajevi imaju rezoluciju IV, ali se preporučuje uzeti u obzir poslednji slučaj iz razloga što jedino u njemu se nalazi jedna relacija sa četiri slova. Sve ostale kombinacije imaju dve ili više kombinacija sa četiri slova. Struktura koja sadrži minimalno mogući broj kratkih relacija se naziva kombinacijom sa minimalnim odstupanjem. Prema tome, uvek se teži maksimalno mogućoj rezoluciji i minimalnim odstupanjima.

Projektovanje faktorijske strukture je nešto što se smatra rezervnim procesom, a predstavlja obaranje parcijalne faktorijske strukture u potpunu faktorijsku strukturu preko niza faktora. Parcijalna faktorijska struktura  $2^{k-q}$  sa rezolucijom  $R$  sadrži potpunu faktorijsku strukturu u svakom nizu koji ima  $R - 1$  faktora. Ukoliko je  $R$  manje od  $k - q$  može se reći da je faktorijska struktura ponovljivi. Na primer, parcijalna faktorijska struktura  $2_{IV}^{7-2}$  je definisana relacijom  $I = ABCDF = ABCEG = DEFG$ . Ova forma sadrži ponovljivu potpunu faktorijsku strukturu u svakom nizu koji sadrži tri faktora. Takođe isto se odnosi i na sve nizove koji sadrže četiri faktora, osim  $D, E, F, G$  koji ne mogu biti u formi potpune faktorijske strukture zato što njihova interakcija četiri faktora je izostavljena u  $I$ .

#### 5.3.7. Metoda odgovorne površine

Mnogi eksperimenti imaju za cilj da opišu na koji način se dobijeni odgovori sistema menjaju, šta na njih utiče, kao i to da li je ta promene u funkciji procedura ili nekog od njenih faktora. U nekim procedurama je bitno doći do optimalnih odgovora sistema, kao što su lokalni ili globalni minimumi ili maksimumi. Faktorijske strukture eksperimenata se mogu

koristiti u ove svrhe, ali u slučajevima kada faktori procedure variraju duž konstantnog opsega vrednosti, druge metode su pokazale više efikasnosti. Metode odgovorne površine - MOP (*eng. Response Surface Methods*) predstavljaju postupke kreiranja plana eksperimenta i modela koji upravo mogu da rade sa kontinualnim procedurama, kada je traženje optimalnih rešenja ili njihovo opisivanje primarni cilj sprovođenja eksperimenta [57].

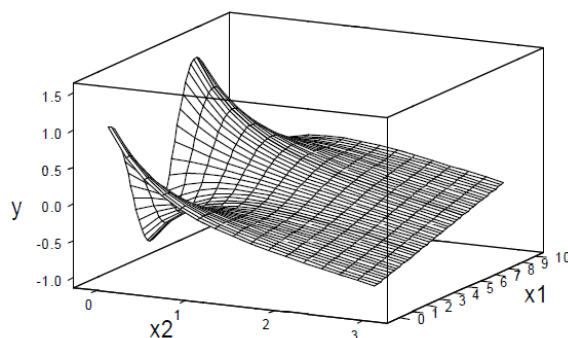
### Vizuelizacija dobijenih odgovora

U nekim eksperimentima faktori procedure mogu varirati konstantno. Na primer, ukoliko se peče kolač, potrebno je peći neko vreme na određenoj temperaturi. Vreme  $x_1$  i temperatura  $x_2$  se mogu konstantno menjati. U suštini, moguće je peći kolač pri bilo kojoj temperaturi i za bilo koje vreme. Ukoliko se pretpostavi da je testo uvek isto, kvalitet kolača  $y$  će zavisiti od vremena i temperature pečenja. Prema tome se može zapisati:

$$y_{ij} = f(x_{1i}, x_{2i}) + \epsilon_{ij}$$

Odgovor sistema  $y$  je neka funkcija  $f$  promenljivih  $x_1$  i  $x_2$ , plus eksperimentalna greška. U ovom slučaju indeksi  $j$  su ponavljanje  $i$ -tog jedinstvenog niza promenljivih.

Jedan česti cilj kada se pristupa MOP je pronalaženje podešavanja promenljivih kako bi se dobio optimalni odgovor sistema (minimum ili maksimum). Često postoje izvesne komplikacije u sprovođenju ovog cilja. Na primer, moguće je da postoji više odgovora i potrebno je pronaći najbolji kompromis među njima koji čini sve odgovore prihvatljivim ali najčešće ne i optimalnim. Drugi cilj pristupa MOP je razumevanje "topografije" odgovorne površine. Moguće je vizuelizovati funkciju  $f$  kao površinu čiju visinu karakteriši ravni faktora promenljivih  $x_1$  i  $x_2$ , kao u slučaju mapa za prikazivanje reljefa terena ili neke oblasti. Grafik perspektive prikazuje površinu kada se gleda sa strane. Na slici 5.16 je prikazan grafik koji objedinjuje dva faktora promenljivih  $x_1$  i  $x_2$ . Konturna ravan prikazuje konture površine u kojoj se objedinjuje oba faktora koji imaju zajedničku vrednost odgovora.



Slika 5.15 - Jednostavni prikaz odgovorne površine sistema dva faktora [57]

Grafičke i vizuelizacione tehnike su svakako jedan od najboljih načina razumevanja odgovornih površina. Na žalost, odgovorne površine su veoma teške za vizuelizaciju kada postoji tri promenljive, a gotove neizvodljive za prikaz ukoliko ima više od tri promenljive.

### Modeli prvog reda

"Svi modeli su pogrešni, neki od njih su korisni", George Box.

Veoma često se ne zna ništa o obliku i formi funkcije  $f$ , pa bilo koji matematički model koji se pretpostavlja za funkciju  $f$  je sigurno pogrešan. Sa druge strane, iskustvo pokazuje da

jednostavni modeli koji koriste polinome nižih redova u promenljivima mogu biti korisni za opisivanje i prikazivanje delova površine odgovora. Drugim rečima, funkcije koje treba da opisuju modele su gotovo uvek veoma složene i nije ih moguće u potpunosti opisati jednostavnim matematičkim funkcijama, ali uz pomoć polinoma se mogu opisati pojedini delovi površine odgovora koji mogu biti dovoljni da se uoče traženi fenomeni i dođe do zaključaka. Razmatraju se modeli prvog i drugog reda površine odgovora. Model prvog reda sa  $q$  promenljivih ima oblik:

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \beta_0 + \beta_{1x_{1i}} + \beta_{2x_{2i}} + \dots + \beta_{qx_{qi}} + \epsilon_{ij} = \\ &= \beta_0 + \sum_{k=1}^q \beta_{kx_k} + \epsilon_{ij} = \\ &= \beta_0 + x_i' \beta + \epsilon_{ij} \end{aligned}$$

U prethodnom izrazu  $x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi})'$  i  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)'$ . Model prvog reda predstavlja običan višeregresivni model, sa promenljivima kao pokazateljima i vrednostima parametara  $\beta_q$  kao regresivnim koeficijentima. Model ovog tipa je aproksimacija za opisivanje delova površine odgovora, koji je odvojen od maksimuma, minimuma, prevojnih delova i drugih zakrivljenih regiona. Na primer, bočni nagib planine može biti opravdana aproksimacija sa aspekta leta aviona i drugih letelica. Ova aproksimacija je lokalna u smislu što je potrebno više različitih aproksimacija ovog tipa, kako bi se topografija planine opisala sa što manjim odstupanjem. Ovakva aproksimacija i upotreba modela prvog reda je opravdana ukoliko se želeo opisati jedan deo krive površine, na primer sa slike 5.15.

Od MOP je potrebno dobiti tri osnova odgovora. Prvi predstavlja mogućnost dobijanja, odnosno predviđanja parametara modela. Drugi predstavlja mogućnost predviđanja najmanje vrednosti greške i nedostataka. Treće je efikasnost sistema, kako u smislu variranja oko željenih tačaka, pa sve do variranja oko razumnih zadatih vrednosti. Sam koncept postojanja najmanje vrednosti greške zahteva dodatno objašnjenje. Podaci možda ne mogu pristajati uz model zbog nasumične greške. Ovo može biti primer male vrednosti greške. Podaci takođe ne mogu pristajati uz model zbog toga što je model pogrešno preciziran i ne opisuje tačno glavnu strukturu. Ovo može biti primer uočenog nedostatka.

MOP se često prikazuje u obliku kodiranih promenljivih. To zapravo predstavlja da razmatrane promenljive se tako nivelišu da se sa 0 označi tačna razmatrana vrednost promenljive, dok se sa  $\pm 1$  označe i pridodaju dve vrednosti koje se za isti korak udaljavaju od centralne, nulte vrednosti. Tako da kod primera pečenja kolača, ako se za vreme pečenja proglasi 35 minuta kao centralna (0 vrednost), korak od  $\pm 2$  minuta može može predstavljati kodiranje promenljivih. Dobija se  $-1 \rightarrow 33$ , a  $+1 \rightarrow 37$  minuta.

Analiza modela prvog reda obuhvata tri cilja. Prvo je određivanje uticaja promenljivih na odgovor sistema. Drugo je utvrđivanje da li postoje nedostaci sistema. Treće je uočavanje tendencije naginjanja rezultata. Neki eksperimenti zahtevaju zadovoljavanje nekog od prethodnih ciljeva, dok je kod drugih neophodno strogo zadovoljiti sve. U svakom slučaju, sprovođenje analize se vrši upotrebom višestruke linearne regresije. Promenljive u modelu su nezavisne ili predviđene promenljive regresije. Predviđeni koeficijenti regresije se predviđaju na osnovu parametara modela  $\beta_k$ . Model prvog reda koristi podatke od  $2^q$  faktorijala sa ili bez centralne tačke. Predviđeni regresioni nagib koristi kodirane promenljive čija je vrednost tačna glavnim efektima za faktorijski model. Testiranje modela se smatra završenim sa F-

testovima srednjih vrednosti kvadrata od ANOVA regresije. Svaki član ima zasebni red u ANOVA tabeli. Test nulte hipoteze koji govori da koeficijenti niza članova modela su jednaki nuli. U mnogim MOP eksperimentima, sve promenljive su veoma bitne za eksperiment. Preliminarnim prikazivanjem rezultata preko površina se uočavaju nivoi važnosti svake od promenljivih. Pravac širenja rezultata, odnosno njihova tendencija širenja u modelima prvog reda je proporcionalna koeficijentima  $\beta$ .

### Modeli drugog reda

Modeli drugog reda se koriste kada je deo odgovorne površine zakrivljen. Ovi modeli sadrže sve članove modela prvog reda, sa dodatkom svih kvadratnih članova kao na primer  $\beta_{11}x_{1i}^2$  i svih proizvoda ukrštanja članova kao što je  $\beta_{12}x_{1i}x_{2i}$ . Model drugog reda ima oblik:

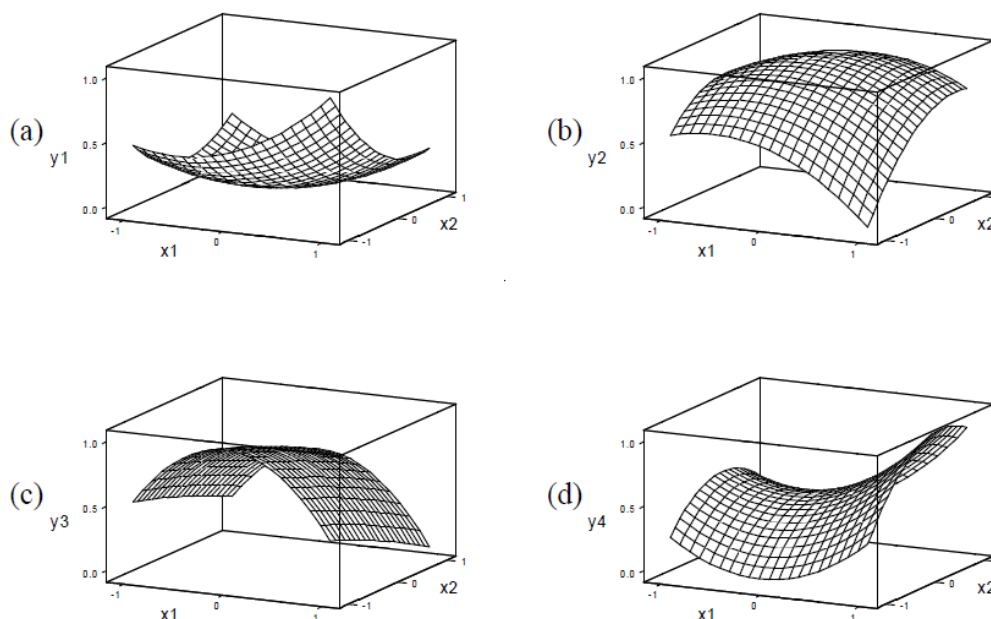
$$\begin{aligned} y_{ij} &= \beta_0 + \beta_1x_{1i} + \beta_2x_{2i} + \dots + \beta_qx_{qi} + \\ &+ \beta_{11}x_{1i}^2 + \beta_{22}x_{2i}^2 + \dots + \beta_{qq}x_{qi}^2 + \\ &+ \beta_{12}x_{1i}x_{2i} + \beta_{13}x_{1i}x_{3i} + \dots + \beta_{1q}x_{1i}x_{qi} + \\ &+ \beta_{23}x_{2i}x_{3i} + \beta_{24}x_{2i}x_{4i} + \dots + \beta_{2q}x_{2i}x_{qi} + \dots + \beta_{(q-1)q}x_{(q-1)i}x_{qi} + \epsilon_{ij} \\ &= \beta_0 + \sum_{k=1}^q \beta_{kk}x_{ki}^2 + \sum_{k=1}^q \sum_{l=k+1}^q \beta_{kl}x_{ki}x_{li} + \epsilon_{ij} \\ &= \beta_0 + x_i'\beta + x_i'\mathbf{B}x_i + \epsilon_{ij} \end{aligned}$$

U prethodnim izrazima sa  $x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{qi})'$  i  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)'$ ,  $\mathbf{B}$  je matrica  $q \times q$  sa  $\mathbf{B}_{kk} = \beta_{kk}$  i  $\mathbf{B}_{kl} = \mathbf{B}_{lk} = \beta_{kl}/2$  za  $k < l$ . Model uključuje samo  $kl$  unakrsni proizvod za  $k < l$ . Matrični oblik sa  $\mathbf{B}$  uključuje oba oblika  $kl$  i  $lk$ . Model drugog reda opisuje kvadratne površine koje mogu imati nekoliko oblika. Slika 5.16 prikazuje četiri osnovna oblika kvadratnih površina. Slika 5.16a prikazuje jednostavni oblik kvadratne površine sa koje se jasno uočava minimum. Slika 5.16b prikazuje jednostavni oblik kvadratne površine sa koje se jasno uočava maksimum. Slika 5.16c prikazuje oblik kvadratne površine na kojoj se može uočiti grebenasti oblik površine. Slika 5.16d prikazuje oblik kvadratne površine na kojoj se može uočiti sedlasti oblik površine.

Model drugog reda je lak za razumevanje ukoliko se originalne promenljive  $x_1$  i  $x_2$  zamene kanonskim oblikom promenljivih  $v_1$  i  $v_2$ , što predstavlja zameniti originalne promenljive i zarotirati koordinatne ose ka površini drugog reda. Model drugog reda dobija oblik:

$$f_v(v) = f_v(0) + \sum_{k=1}^q \lambda_k v_k^2$$

U prethodnom izrazu sa  $v = (v_1, v_2, \dots, v_q)'$  su prikazane promenljive izvedene u kanonske koordinate,  $f_v$  je odgovor u funkciji kanonskih promenljivih i  $\lambda_k$  su brojevi izračunati od  $\mathbf{B}$  matrice. Vrednost  $x$  je pozicionirana kao nulta tačka u kanonskom koordinatnom sistemu i naziva se stacionarnom tačkom koja se pojavljuje u obliku  $x_0$ , pa je prema tome  $f_v(0) = f(x_0)$ .



Slika 5.16 - Jednostavljive površine modela drugog reda [57]

a) Minimalna, b) Maksimalna, c) Grebenasta i d) Sedlasta

Ključna stvar za razumevanje kanonskih promenljivih je stacionarna tačka površine drugog reda. Stacionarna tačka se definiše kombinacijom projektovanih promenljivih gde površina ima jedan maksimum ili jedan minimum u svim pravcima. Ukoliko je stacionarna tačka maksimum po svim pravcima, tada je stacionarna tačka maksimum odgovor cele kreirane površine. Isti slučaj je i kada je stacionarna tačka minimum po svim pravcima. Ukoliko je stacionarna tačka maksimum za samo neke pravce, a za druge je minimum, onda je u pitanju sedlasta tačka i za površinu se ne može reći da ima jednoznačni maksimum ili minimum. Ovo objašnjenje površina drugog reda se naziva geometrijsko. Sa dijagrama se može lako odrediti koji od moguća četiri slučaja površine je reč. Pa slike ili dijagrama je teško izračunati tačan položaj određene tačke, pa je potrebno uvesti algebarsko objašnjenje površina drugog reda. Za početak, potrebno je ponovo napisati opštu jednačinu funkcije površine drugog reda:

$$f(x) = \beta_0 + x'\beta + x'Bx$$

Algebarsko objašnjenje površine zavisi od sledećih činjenica:

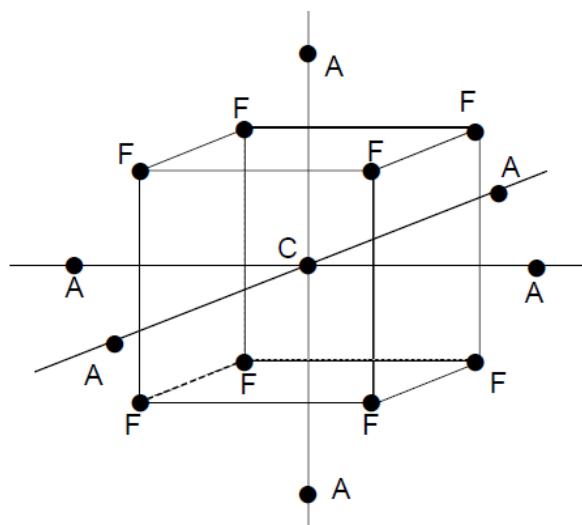
- 1) Stacionarna tačka kvadratne površine je  $x_0 = -\frac{1}{2}B^{-1}\beta$ , gde je sa  $B^{-1}$  označena inverzna matrica  $B$ .
- 2) Za simetričnu  $q \times q$  matricu  $B$  moguće je pronaći  $q \times q$  matricu  $H$  tako što  $H'H = HH' = I_q$  i  $H'BH = \Lambda$ , gde je  $I_q$  gotovo identična  $q \times q$  matrica i  $\Lambda$  je matrica sa elementima  $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ .

Brojevi  $\lambda_k$  su svojstvene vrednosti  $B$ , a kolone  $H$  su odgovorne svojstvene vrednosti.

Postoji nekoliko načina za kreiranje odgovorne MOP uz pomoć površine drugog reda. Jedan od najpopularnijih načina je uz pomoć Centralne kompozitne metode - CKM (*eng. Central composite design*). CKM predstavlja spoj faktorijskih tačaka, tačaka osa i centralnih tačaka. Faktorijske tačke su tačke od  $2^q$  sa nivoima kodiranim kao  $\pm 1$  ili parcijalne tačke  $2^{q-k}$  sa



rezolucijom  $V$  ili većom. Centralne tačke su ponovo  $m$  u originalu. Tačke osa imaju jednu promenljivu u  $\pm\alpha$  i sve ostale promenljive su 0. Postoji  $2q$  tačaka osa. Slika 5.17 prikazuje CKM za  $q = 3$ .



Slika 5.17 - Centralna kompozitna metoda za  $q = 3$  [57]

Jedan od razloga zbog čega je CKM tako poznata je to što se može započeti sa modelom prvog reda koristeći faktorijsku strukturu  $2^q$  i nakon toga je dopuniti sa tačkama osa i možda ukoliko je potrebno povećati sa još centralnih tačaka kako bi se dobio model drugog reda. Pri postavljanju CKM vrši se odabir  $\alpha$  i broja centralnih tačaka  $m$ . Pod pretpostavkom da se pokreće CKM u nekompletnim blokovima, sa prvim blokom se postižu faktorijske tačke i centralne tačke, dok se sa drugim blokom postižu tačke osa i ostale centralne tačke. Postoji nekoliko hierarhijskih principa odabira  $\alpha$  i broja centralnih tačaka kada CKM nije u bloku. Ukoliko preciznost predviđene odgovorne površine u nekoj tački  $x$  zavisi samo od rastojanja  $x$  do kraja, ne i od pravca, tada se može zaključiti da je CKM rotirajuća. Prema tome rotirajuća CKM ne favorizuje jedan pravac od drugih u slučaju istraživanja površine. Ovo može biti značajno kada se zna malo o površini pre eksperimenta. Postavlja se rotirajuća CKM odabirom  $\alpha = 2^{q/4}$  za potpunu faktorijsku strukturu ili  $\alpha = 2^{(q-k)/4}$  za parcijalnu faktorijsku strukturu.

*Box-Behnken* postupak je drugi tip kreiranja plana eksperimenta u okviru odgovorne površine. Ovaj postupak je rotirajući, drugog reda sa nekompletnim faktorijalima  $3^q$ . Predstavlja kombinaciju nekompletnih blokova sa faktorijalima. Za  $q$  faktora se vrši pronalaženje nekompletnih blokova za  $q$  procedura u blokovima veličine dva. Kada se dva faktora ubacuju u jedan blok, koristi se kombinacija u kojoj su faktori nivoa  $\pm 1$ , dok su svi ostali faktori 0. Kombinacije od strane svih blokova se spajaju sa nekim centralnim tačkama i dobija se forma Box-Behnken postupka.

Analiza modela drugog reda se sprovodi zadovoljavajući tri moguća cilja. Prvi je uočavanje kako promenljive utiču na odgovor sistema. Drugi je traženje nedostataka sistema i treći predstavlja traženje stacionarnih tačaka u zavisnosti od tipa odgovorne površine. Kao što je bio slučaj i sa modelom prvog reda, testiranje se sprovodi pomoću višestruke linearne regresije u okviru F-testa. Traženje i analiza uticajnih faktora na ponašanje sistema je malo komplikovanije nego u slučaju modela prvog reda. Za testiranje uticaja na sistem, na primer Promenljive 1, potrebno je sprovesti linearni test, pa zatim kvadratni i test unakrsnih proizvoda koeficijenata. Svi koeficijenti bi trebali da imaju vrednost 0 kako bi nulta hipoteza

bila potvrđena sa  $q + 1$  stepenom slobode. Traženje nedostataka sistema se sprovodi na identičan način kao u slučaju modela prvog reda. Kanonička analiza se koristi za određivanje tipa površine drugog reda, pozicioniranje stacionarne tačke i određivanje kanoničnih pravaca. Ove vrednosti su u funkciji predviđenih koeficijenata i određuju se višefaznom regresijom. Rezultat kanoničke analize ima dosta preciznosti. Mnogi savremeni softveri izračunavaju i prikazuju računski i grafički poziciju stacionarne tačke, ali malo njih daje vrednost standardne greške. Razlog za to je činjenica da je postupak izračunavanja vrednosti standardne greške komplikovan i koristi se samo u neophodnim situacijama.

### Kombinovani eksperimenti

Kombinovani eksperimenti predstavljaju specifičan slučaj MOP u kojem odgovor zavisi od učestalosti variranja komponenti, a ne od njihovih apsolutnih vrednosti. Na primer, ukus punča će zavistiti od učestalosti njegovih sastojaka, ne od količine punča koji je stavljen. Kao i jačina legure će pre zavistiti od učestalosti različitih metala, a ne od ukupne količine proizvedene legure. Promenljive  $x_1, x_2, \dots, x_q$  u kombinovanom eksperimentu imaju proporciju (učestalost), pa prema tome ne mogu biti negativne i ukupna količina mora biti 1 (100%).

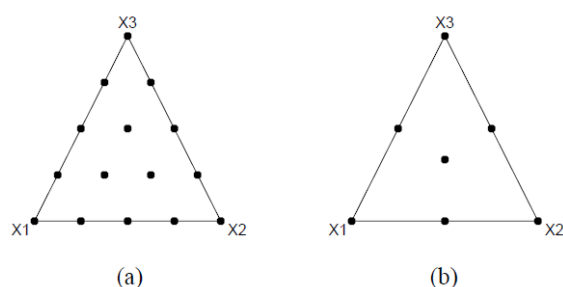
$$x_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, q$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_q = 1$$

Prostor unutar eksperimenta se naziva simpleks (*eng. Simplex*) u  $q$  dimenzija. U dve dimenzije eksperimentalni prostor je u rasponu od (1,0) do (0,1). U tri dimenzije zauzima oblik trougla sa koordinatama (0,0,1), (0,1,0) i (1,0,0). Za model se koristi polinom nižeg reda iz razloga što se ne zna tačno koja je forme modela. Upotreba ovog modela može biti različita: za predviđanje odgovora u bilo kojoj kombinaciji promenljivih, za pronalažanje kombinacije promenljivih koja daje najbolje odgovore i za izračunavanje efekata variranja faktora na odgovor.

Kombinacija  $\{q, m\}$  simpleks rešetke za  $q$  komponenti koje sadrži sve simpleks tačke gde je svaka komponenta u formi  $r/m$ , za neke vrednosti broioca  $r = 0, 1, 2, \dots, m$ . Na primer, za simpleks rešetku  $\{3, 2\}$  postoji šest kombinacija (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1/2, 1/2, 0), (1/2, 0, 1/2) i (0, 1/2, 1/2). Vrednost  $m$  treba da bude u najmanju ruku jednaka  $q$ .

Druga klasa modela predstavlja simpleks centrirani model. U ovom modelu postoji  $2^q - 1$  tačaka za  $q$  faktora. Tačke su slabo kombinovane, sve 1/2 – 1/2 dvokomponentne kombinacije, sve 1/3 – 1/3 – 1/3 trokomponentne kombinacije, itd. Na slici 5.18 su prikazane simpleks rešetka  $\{3, 4\}$  i trokomponentna simpleks centrirana kombinacija (57).



Slika 5.18 - Simpleks rešetka  $\{3, 4\}$  a) i trokomponentna simpleks centrirana kombinacija b) [57]

## 6. Sprovođenje optimizacionog procesa

Ovaj deo rada predstavlja sprovođenje teorijskih razmatranja vezanih za opštu aerodinamiku motornih vozila, CAD i CFD modele i optimizacione tehnike, u postupak ispitivanja na usvojenom modelu. Detaljna teorijska podloga je postavljena kroz prethodna poglavlja, pre svega vezana za optimizacione metode i CFD modele i njihovo podešavanje. Prvi delovi ovog poglavlja se bave opštom aerodinamikom motornih vozila, pre svega privrednih motornih vozila, na kojima je u nastavku i izvršeno ispitivanje. Značaj i potreba usavršavanja aerodinamičkih oblika na privrednim vozilima je razmatrana. U nastavku je postavljen temelj modela ispitivanja, odnosno usvojenog modela na kome je izvršeno ispitivanje, kako virtuelno i računsko, tako i eksperimentalno. Na usvojenom objektu ispitivanja su uočene oblasti ili zone u kojima postoji prostor za usavršavanje i sprovođenje aerodinamičke optimizacije opreme i dodataka. Aerodinamički profil krila ima velikog uticaja u formiranju ovog rada, pa je u okviru ovog poglavlja sprovedeno njegovo prikazivanje i implementacija u dalji proces ispitivanja. Usvajanjem objekta ispitivanja na osnovu stvarnih modela privrednih vozila, izvršeno je kreiranje virtuelnog 3d CAD modela, na kojem je u nastavku sprovedeno ispitivanje. Postupak kreiranja virtuelnog modela po uzoru na stvarni model je prikazano u ovom delu rada. Za sprovođenje virtuelnih aerodinamičkih eksperimenata na kreiranom CAD modelu je korišćen CFD softverski paket, o kome je već bilo reći u prethodnim poglavljima rada. Podešavanje i kreiranje CFD modela za postavljanje virtuelnih aerodinamičkih eksperimenata, odnosno simulacija je prikazano u ovom delu rada. Optimizacioni postupci i metode koji su prikazani u prethodnom poglavlju rada su u velikoj meri primenjeni za usavršavanje aerodinamičkih dodataka i opreme na usvojenom modelu privrednog vozila. Postupak kombinovanih optimizacionih metoda je prikazan u ovom delu rada i njegova direktna upotreba na ispitivanom modelu.

Kao što se može uvideti, ovo poglavlje predstavlja spoj gotovo svih prethodno prezentovanih teorijski osnova rada i baš zbog toga je veoma bitno, jer se kroz njega može uočiti doprinos u naučno inženjerskom smislu.

### 6.1. Aerodinamika privrednih motornih vozila

Pre nego što se započne oblast aerodinamike privrednih vozila, neophodno je izvršiti klasifikaciju ove grupe vozila, pre svega privrednih motornih vozila (teretnih vozila) i priključnih vozila (prikolica).

#### 6.1.1. Klasifikacija privrednih motornih vozila i priključnih vozila

*Privredna motorna vozila* ili teretna prema pravilniku o klasifikaciji motornih vozila predstavljaju motorna vozila koja su opremljena sa najmanje četiri točka, čija masa prelazi 550 kg i snaga pogonskog agregata je preko 15 kW. Ovaj tip motornog vozila može biti namenjen: prevozu tereta, vršenju rada na način da se vozilom ne može nositi nikakav drugi teret i vuči priključnih vozila. Prema najvećoj dozvoljenoj masi vozila, teretna vozila se dele na:

N1 - najveća dozvoljena masa ne prelazi 3,5 t - lako teretno vozilo

N2 - najveća dozvoljena masa prelazi 3,5 t, ali ne prelazi 12 t - srednje teretno vozilo

N3 - najveća dozvoljena masa prelazi 12 t - teško teretno vozilo

Vozila vrste N se prema obliku karoserije dele na:

BA - kamion,

BB - van, teretno vozilo kod koga je tovarni prostor i prostor za vozača u istoj celini,

BC - tegljač, vučno vozilo koje je projektovano i konstruisano prvenstveno za vuču poluprikolice

BD - vozilo za vuču (drumski traktor) - vučno vozilo koje je projektovano i konstruisano za vuču isključivo prikolica,

BE - pikap (pick-up) - vozilo najveće dozvoljene mase koja ne prelazi 3,5 t kod koga tovarni prostor i mesta za sedenje nisu u istoj ravni,

BX - šasija teretnog vozila, nekompletno vozilo sa šasijom, kabinom, pogonom i osovinama koje je namenjeno da se kompletira sa karoserijom.

*Priključno vozilo* može biti projektovano i konstruisano za prevoz tereta ili lica kao i za smeštaj lica. Prema najvećoj dozvoljenoj masi vozila, priključna vozila se dele na:

O1 - lako priključno vozilo, najveća dozvoljena masa ne prelazi 750 kg,

O2 - malo priključno vozilo, najveća dozvoljena masa prelazi 750 kg, ali ne prelazi 3,5 t,

O3 - srednje priključno vozilo, najveća dozvoljena masa prelazi 3,5 t, ali ne prelazi 10 t,

O4 - veliko priključno vozilo, najveća dozvoljena masa prelazi 10 t.

Priključna vozila vrste O2, O3 i O4 se razvrstavaju prema sledećim klasama:

DA - poluprikolica - priključno vozilo koje je konstruisano da se priključi na tegljač sa sedlom ili na konverter prikolicu pri čemu prenosi znatno vertikalno opterećenje na vučno vozilo ili konverter,

DB - prikolica sa rudom - priključno vozilo koje ima najmanje dve osovine od kojih je najmanje jedna upravljana osovina, opremljeno sa vučnim uređajem koji se može pokretati vertikalno u odnosu na prikolicu i koje prenosi manje od 100 kg statičke vertikalne mase na vučno vozilo,

DC - prikolica sa centralnom osovnom - priključno vozilo kod koga je osovina rastavljena blizu težišta vozila tako da vertikalno opterećenje koje se prenosi na vučno vozilo ne prelazi 10% od najveće dozvoljene mase prikolicе, odnosno najviše 1000 kg pri raznomernom opterećenju vozila,

DE - prikolica sa krutom rudom - priključno vozilo sa jednom osovnom ili grupom osovine, opremljeno sa krutom rudom koja prenosi statično opterećenje ne više od 4000 kg na vučno vozilo na osnovu svoje konstrukcije i koje ne spada u prikolicе sa centralnom osovnom [75].

Sa stanovišta ove doktorske teze, najznačajnije vrste vozila su teško privredno (teretno) vozilo N3, oblika karoserije BC što predstavlja tegljač i veliko priključno vozilo O4, klase DA, odnosno poluprikolica.

#### 6.1.2. Opšte o aerodinamici privrednih vozila

Kao što je rečeno u klasifikaciji motornih vozila, kamioni sa prikolicama predstavljaju velike mašine koje se predviđene pre svega za prevoz tereta i robe. Kamion tegljač je

karakterističan po tome što sam po sebi nema svoj tovarni prostor, već predstavlja neki vid univerzalnog vučnog uređaja. Za tegljač se priključuju prikolice tzv. poluprikolice koje nemaju rudu ni prednje točkove i osovine, već se isključivo spajaju sa tegljačem. Na slici 6.1 je dat prikaz standardnog tegljača sa poluprikolicom.

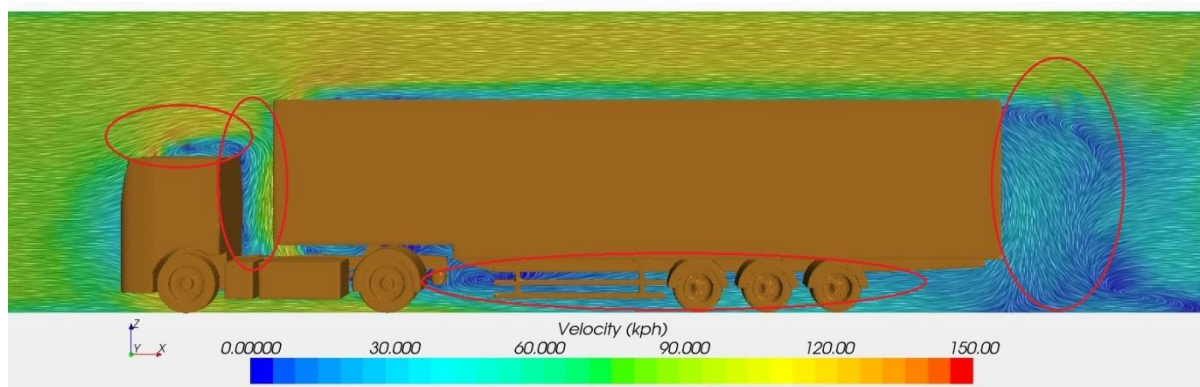


Slika 6.1 - Tegljač sa poluprikolicom [76]

Ono što ovaj sklop vozila čini tako dragocnim je veličina, brzina i laka upravljivost. Kod prevoza tereta uvek je značajna stvar imati veliki i organizovan tovarni prostor. Sa poluprikolicom kao što je prikazana na slici 6.1 se dobija tovarni prostor dimenzija 14x2,5x3 m što svakako predstavlja skladište na točkovima ozbiljne zapremine. Pod tovarnog prostora je obično ravan, što svakako pomaže pri manipulaciji robom koja se utovara ili istovara. Tegljač predstavlja univerzalno sredstvo vuče, za koga mogu da se zakače poluprikolice različitih namena (zatvoreni sanduk, cisterna, hladnjača, kiper, itd.). Pošto poluprikolica nema svoju rudu i prednje upravljive točkove, njeno manevrisanje se vrši isključivo preko tegljača, što je dosta lakše u odnosu na klasičnu prikolicu sa prednjim točkovima. Veza tegljača i poluprikolice se vrši preko spoja sedla (koji se nalazi na tegljaču) i tzv. trna (koji se nazlazi na poluprikolici). Što se tiče brzine kretanja, sklop tegljača i poluprikolice ukoliko je predviđen za dugolinijski transport, njegovo zakonsko ograničenje u pogledu brzine kretanja na autoputu iznosi 90 km/h. Ova brzina svakako ulazi u oblast aerodinamike u kojoj se ne može izostaviti u pogledu izračunavanja otpora. Relativno velika brzina kretanja, plus velike gabaritne dimenzije i najčešće loši aerodinamički oblici, čine ovaj sklop vozila interesantnim sa aspekta izučavanja aerodinamike. Velika frontalna (čeaona) površina vozila značajno utiče na povećanje sile otpora vazduha. Ova klasa vozila je predviđena da veći deo svog radnog veka provede na autoputu, pri čemu će se kretati brzinama u okviru zakonskih regulativa. Veliki broj pređenih kilometara u togu života za sobom povlači i veliku količinu potrošenog goriva. Velike mašine, iziskuju i velike pogonske agregate koji troše veliku količinu goriva. Vremenom su se pogonski agregati u tolikoj meri usavršavali da je njihov životni vek značajno produžen, potrošnja goriva smanjena, kao i zagađenje. U poslednje vreme je ostalo malo prostora za poboljšanje performansi pogonskog agregata i na taj način doprineti uštedi potrošnje goriva. Oblast u kojoj svakako ostaje prostora da se izvrši poboljšanje koje će uticati na umanjenje potrošnje goriva je spoljašnja aerodinamika. Zbog nepovoljnih aerodinamičkih oblika (velikih površina, oštih uglova, velikih zazora, itd.) ostaje prostora da se njihovim usavršavanjem doprinese umanjenu sile otpora vazduha i uštedi goriva.

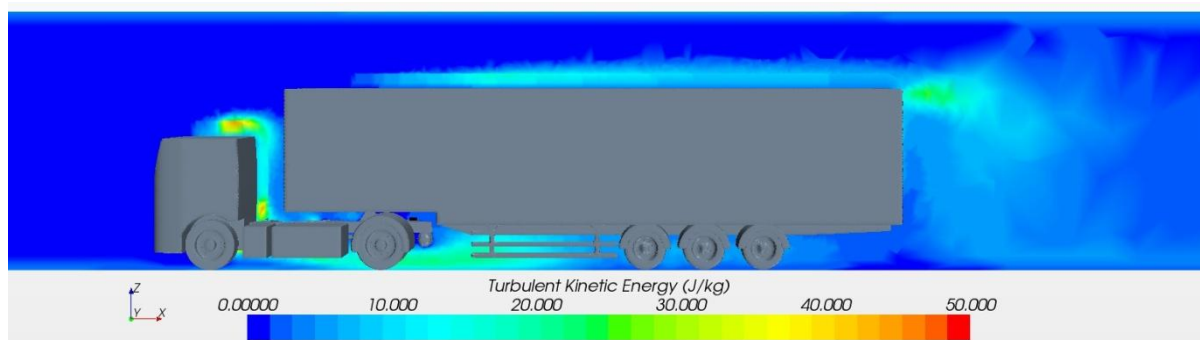
Karakteristične zone u sklopu tegljača i poluprikolice u kojima dolazi do lokalnog povećanja sile otpora vazduha su zona iznad i iza kabine tegljača, prostor ispod tegljača i poluprikolice, zona iza poluprikolice i iznad nje. Sve ove oblasti generišu dodatne lokalne otpore iz nekoliko razloga. Prvi razlog bi bila velika izložena površina kabine tegljača, na koju se

nadovezuje isto tako nepovoljna pravugaona površina čela poluprikolice. Zahvaljujući takvim delovima kabine i poluprikolice, dolazi do nepoželjnog skretanja vazdušnih strujnica, koja zalazi u prostor između tegljača i poluprikolice, stvarajući vrtložno turbulentno kretanje, koje generiše otpor. Zona iza poluprikolice je takođe veoma aerodinamički nepovoljna zato što vazdušne strujnice prelaskom preko dugih strana poluprikolice naglo menjaju pravac usled oštrog, pravugaonog kraja poluprikolice. Usled čega dolazi do naglog vrtložnog kretanja u zoni iza poluprikolice, što za posledicu ima obaranje pritiska i uvećanje lokalnog otpora vazduha. Na slici 6.2 je prikazan model tegljača sa poluprikolicom u CFD simulaciji, gde se jasno vide oblasti u kojima dolazi do vrtložnog kretanja vazdušne struje i stvaranja lokalnih otpora.



Slika 6.2 - CFD model tegljača i poluprikolice sa naznačenim zonama vrtložnog kretanja

Usled vrtložnog kretanja vazdušne struje u zonama modela sa slike 6.2, dolazi do stvaranja turbulentne kinetičke energije koja ima za posledicu uvećanje lokalnih sila otpora vazduha. Na slici 6.3 je dat prikaz oblasti u kojima dolazi do stvaranja kinetičke turbulentne energije na modelu.

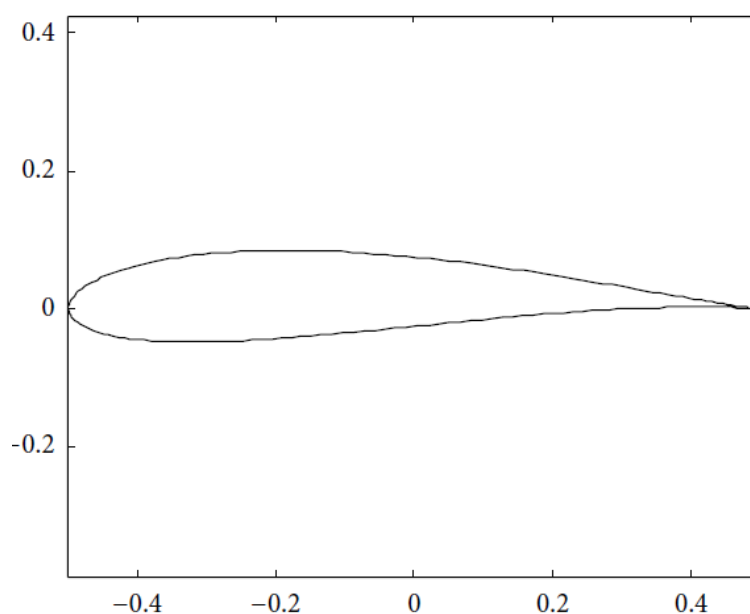


Slika 6.3 - Kinetička turbulentna energija na CFD modelu

Sa slike 6.3 se jasno vide oblasti u kojima dolazi do stvaranja lokalnih otpora. Najizraženiji gubicu su vidljivi u zoni kabine tegljača i iza nje, kao i u oblasti iza poluprikolice. Ove oblasti predstavljaju potencijalna mesta na kojima bi se uz postavljanje adekvatnog aerodinamičkog dodatka i opreme moglo uticati na drugačiju usmerenost vazdušne struje i umanjeње otpora vazduha, što bi se svakako pozitivno odrazilo na potrošnju goriva.

## 6.2. Aeroprofil

Aeroprofil predstavlja strogo definisani profil koji u poprečnom preseku ima oblik "povijene suze". Osnovna ideja odakle potiče ovakav oblik dolazi od činjenice da ukoliko na telo izloženo vazduhnoj struji deluju dve različite brzine opstrujavanja (jedna sa donje strane, a druga sa gornje) dolazi do različite preraspodele pritiska sa gornje i donje strane tele. Kao posledica efekta ove pojave je generisanje sile uzgona koja u zavisnosti od potrebe ima ulogu da pomogne avionu da poleti, ili suprotno, da onemogući sportskom automobilu da se odvoji od podloge pri većim brzinama. Osim ove uloge, aeroprofil predstavlja idealan oblik koji potpomaže pravilnom usmerenju i vođenju vazdušne struje. Na slici 6.4 je dat prikaz osnovnog oblika aeroprofila.

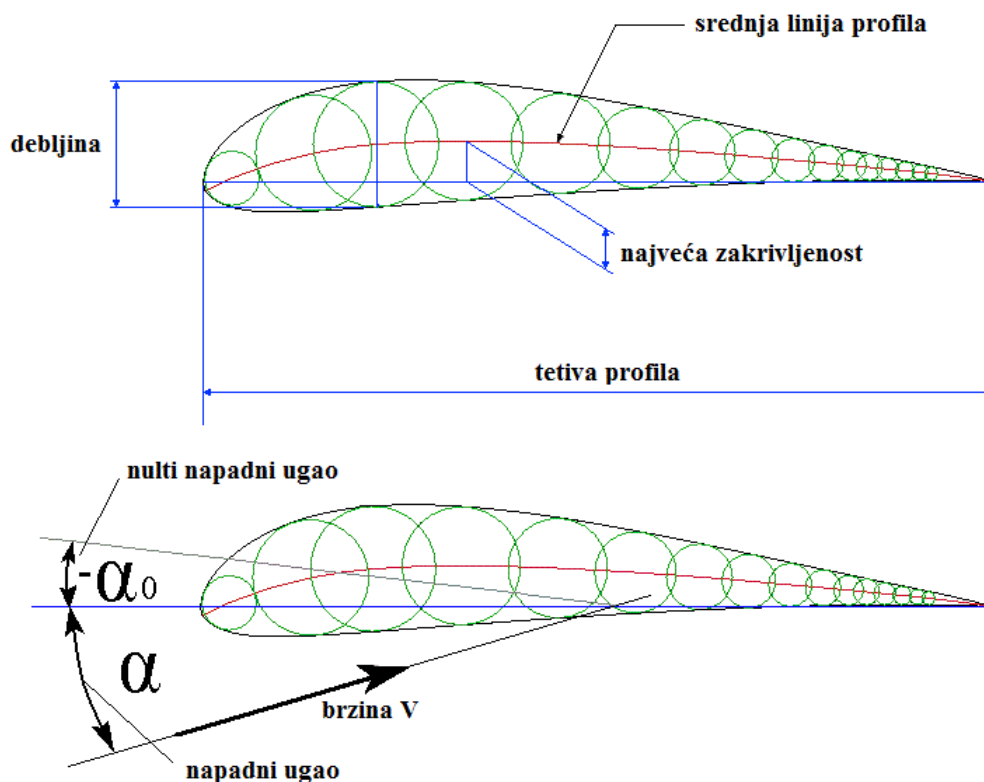


Slika 6.4 - Osnovni oblik aeroprofila [77]

Geometrija aeroprofila značajno utiče na preraspodelu brzina kojom će se vazdušne strujnice kretati oko profila pri nailasku na njega. Osnovni geometrijski parametri aeroprofila su zaobljenost nosnog dela, relativna debljina i zakrivljenost. Prva upotreba aeroprofila se vezuje za sam početak dvadesetog veka, kada je primećeno da opstrujavanje vazdušne struje oko nesimetričnog oblika stvara dodatnu silu koja teži da pomeri profil u stranu gde vazdušna struja ima veću brzinu. Nakon sticanja osnovnih saznanja o postojanju sile uzgona, počela je veća upotreba aeroprofila u raznim granama industrije na mestima rotorskih lopatica turbinskih kola, raznim propelerima i elisama. Samo projektovanje aeroprofila se svodilo na intuitivno i iskustveno postavljanje i podešavanje osnovne geometrije, koje je trajalo do perioda oko 1915 godine. Daleko ozbiljniji pristup projektovanju i analizi aeroprofila se vezuje za period Prvog svedskog rata, kada su Nemački inženjeri u gradu Getingenu počeli razvijati seriju aeroprofila koji su svi počinjali oznakom G. Jedan od najpoznatijih proizvođača aeroprofila je NACA (*eng. National Advisory Committee for Aeronautics*). Njihova proizvodnja započinje 1929. godine sa prvim sistematičnim razvojem familije aeroprofila u *Langley* vazdušnom tunelu promenljive gustine vazduha. Od tada svi aeroprofilni ovog proizvođača nose četvorocifrenu oznaku (npr. NACA 4412). Razvijena serija 4. familije aeroprofila je predstavljala revolucionarno otkriće zato što po prvi put je uspostavljena tačno projektovana veza između sile uzgona i sile otpora vazduha.

### Geometrijsko predstavljanje aeroprofila

Svaki aeroprofil se može predstaviti preko geometrijskih parametara koji služe za postizanje tačno definisanog oblika. Osnovni geometrijski parametri koji čine aeroprofil su prikazani na slici 6.5.



Slika 6.5 - Geometrijski parametri aeroprofila [77]

Tetiva aeroprofila predstavlja najveću dužinu prostiranja profila, odnosno dužinu između početne i krajnje tačke profila. Kao što je prikazano na prethodnoj slici, aeroprofil se može predstaviti preko niza kružnica. U zavisnosti od oblika aeroprofila, neke kružnice se samo dodiruju, dok se druge preklapaju. Povezivanjem njihovih centara se dobija srednja linija profila, koja je veoma bitna za predstavljanje profila. Najveća zakrivljenost profila se definiše kao najveće rastojanje između srednje linije i tetive aeroprofila. Napadni ugao se postiže između vektora brzine i tetive aeroprofila. Nulti napadni ugao se zaklapa između pravca aeroprofila pri nultom uzgonu i pravca tetive. U ovom slučaju, brzina se definiše kao pravac rezultujućeg vektora brzine, odnosno vazdušne struje koja nije poremećena opstrujavanjem. Poluprečnik prednjeg (napadnog) zaobljenja je debljina od tetive profila na udaljenosti 1% od početne tačke profila.

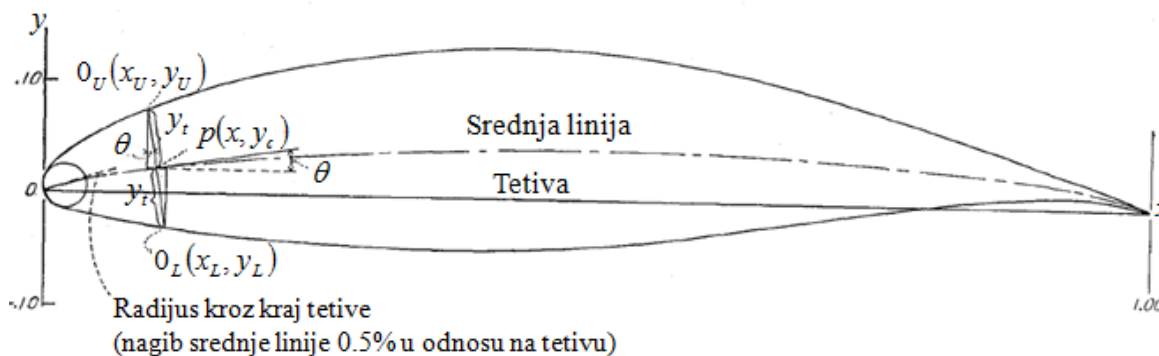
Postizanje optimalnog oblika aeroprofila se vrši na više načina. Familije aeroprofila NACA proizvodnje praktikuju metodu koja objedinjuje srednju liniju i prostiranje debljine aeroprofila. Neophodni geometrijski podaci, kao i neki teorijski aerodinamički podaci o srednjoj liniji i prostiranju debljine aeroprofila se mogu obezbediti dopunskim vrednostima preko metoda karakterističnih za svaku od familija aeroprofila posebno. Proces projektovanja aeroprofila preko metode kombinovanja podataka o srednjoj liniji i prostiranju debljine profila je veoma česta metoda i na osnovu nje se postiže optimalna savijenost aeroprofila u svrhu postizanja zadovoljavajućih vrednosti sile uzgona i sile otpora vazduha. Na slici 6.6 je predstavljeno projektovanje aeroprofila uz pomoć metode srednje linije i prostiranja debljine. Vodeća (napadna) i zadnja ivica aeroprofila su definisane kao prednji i zadnji ekstremiteti srednje linije. Tetiva je definisana kao prava linija koja povezuje napadnu i zadnju ivicu.



Zakrivljenost profila je predstavljena ordinatnim rastojanjem i to sa tendencijom opadanja preraspodele debljine normalno u odnosu na središnju liniju. Apcisna osa prikazuje nagib srednje linije, koja je projektovana preko  $x_c$ ,  $y_c$  i  $\tan \theta$ . Ako  $x_U$  i  $y_U$  predstavljaju koordinate tačke koja se nalazi na gornjoj ivici profila i  $y_t$  je ordinatno raspojanje simetrične preraspodele debljine sa pozicijom  $x$  na tetivi, koordinate gornje površine su date preko izraza:

$$x_U = x - y_t \sin \theta$$

$$y_U = y_c + y_t \cos \theta$$



Slika 6.6 - Projektovanje aeroprofila [19]

Koordinate površine sa donje strane su date izrazima:

$$x_L = x + y_t \sin \theta$$

$$y_L = y_c - y_t \cos \theta$$

Centar radijusa napadne ivice se pronalazi povlačenjem linije kroz kraj tetive i napadne ivice sa tačnim nagibom kao i nagib srednje linije u toj tački i sa tendencijom opadanja rastojanja od napadne ivice duž linije u tačnoj veličini radijusa napadne ivice. Ova metoda projektovanja zakrivljenosti aeroprofila uvek pomera tačku napadne ivice blago unapred. Ova pojava je praćena nagibom napadne ivice koji je teorijski neograničen za srednje linije koje imaju teorijski ograničenu putanju na napadnoj ivici. Radijus na kraju tetive za takvu srednje linije je obično dat kao nagib srednje linije u odnosu  $x/c = 0,005$ . Ovaj postupak je opravdan sa stanovišta ponašanja nagiba koji raste do teorijski neograničene vrednosti odnosa  $x/c$  koji teži 0. Nagib raste veoma sporo sve do veoma male vrednosti  $x/c$ . Velike vrednosti nagiba su prema tome ograničene na vrednosti  $x/c$  koja je veoma bliska 0, a može biti i negativna u praktičnoj izvedbi aeroprofila. U tabeli 27 su date koordinatne vrednosti parametara aeroprofila NACA 65.3-818 sa slike 6.6.

Tabela 27 - Koordinate aeroprofila NACA 65.3-818 [19]

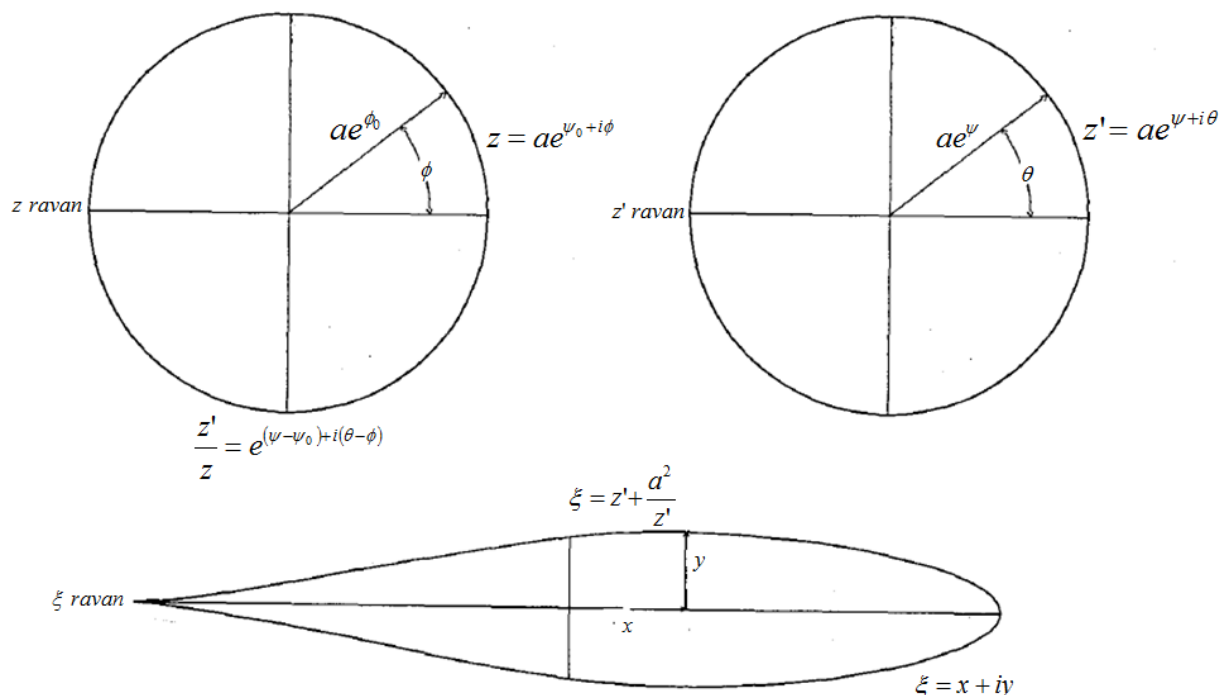
$x$	$y_t$	$y_c$	$\tan \theta$	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$y_t \sin \theta$	$y_t \cos \theta$	$x_U$	$y_U$	$x_L$	$y_L$
0	0	0	----	----	----	0	0	0	0	0	0
0,005	0,01324	0,00200	0,33696	0,31932	0,94765	0,00423	0,01255	0,00077	0,01455	0,00923	-0,01055
0,05	0,03831	0,01264	0,18744	0,18422	0,98288	0,00706	0,03765	0,04294	0,05029	0,05706	-0,02501
0,25	0,08093	0,03580	0,06996	0,06979	0,99756	0,00565	0,08073	0,24435	0,11653	0,25565	-0,04493
0,50	0,08593	0,04412	0	0	1,00000	0	0,08593	0,50000	0,13005	0,50000	-0,04183
0,75	0,04456	0,03580	-0,06996	-0,06979	0,99756	-0,00311	0,04445	0,75311	0,08025	0,74689	-0,00865
1,00	0	0	----	----	----	0	0	1,00000	0	1,00000	0

Numeričko označavanje NACA aeroprofila sa četiri cifre se bazira na geometriji aeroprofila. Prvi karakter predstavlja maksimalnu vrednost ordinatne koordinate srednje linije  $y_c$  u procentima tetive. Drugi karakter predstavlja rastojanje između napadne ivice do mesta maksimalnog nagiba tetive u deseticama. Poslednja dva karaktera predstavljaju debljinu aeroprofila u procentima tetive. Prema tome, aeroprofil NACA 2415 ima nagib od 2% na rastojanju 0,4 tetive od napadne ivice i sa 15% debljine tetive [19].

### Prostiranje pritiska oko aeroprofila

Dobro poznavanje polja prostiranja pritiska oko aeroprofila je veoma bitno, pre svega sa strane konstrukcije. Takođe sa aspekta predviđanja maksimalne vrednosti Mahovog broja i naponskih koeficijenata je veoma korisno dobro poznavati polje pritiska koje se generiše oko aeroprofila prilikom prolaska vazdušne struje oko njega. Uticaj veličine graničnog sloja ima značajnu ulogu u aerodinamici, kao što je predstavljeno u prethodnim poglavljima rada. Pravilno projektovanje aeroprofila značajno utiče na formiranje graničnog sloja u kome su odvajanja strujnica minimalne.

Osnovna simetrična preraspodela debljine, zajedno sa odgovarajućom preraspodelom pritiska za neke aeroprofile NACA 6 i 7. serije se predstavljaju preko upotrebe konforme transformacije, što u matematičkom smislu predstavlja funkciju koja lokalno čuva uglove, ali ne nužno i dužine. Ova transformacija upućuje na poznato strujanje vazdušne struje oko objekta kružnog poprečnog preseka, što se može lako preusmeriti na oblik aeroprofila. Na slici 6.7 su šematski prikazane faze ovog procesa.



Slika 6.7 - Izvedene faze transformacije aeroprofila i izračunavanje preraspodele pritiska [19]

Kružnica oko koje je izvršeno izračunavanje ima poluprečnik  $ae^{\psi_0}$ . Jednačina kružnice preko kompleksnih koordinata ima oblika kao u jednačini 6.1.:

$$z = ae^{\psi_0 + i\phi} \quad (6.1.)$$

U prethodnom izrazu  $z$  je kompleksna promenljiva u ravni kružnice,  $\phi$  je ugaona koordinata  $z$ ,  $a$  je vrednost osnovna dužina i  $\psi_0$  je konstantni definisani poluprečnik kružnice. Tačna kružnica se pretvara u proizvoljnu, najčešće kružnu krivu preko relacije prikazane u jednačini 6.2.

$$\frac{z'}{z} = e^{(\psi - \psi_0) + i(\theta - \phi)} \quad (6.2.)$$

Jednačina koja opisuje gotovo kružnu krivu je data jednačinom 6.3.

$$z = ae^{\psi + i\theta} \quad (6.3.)$$

Sa  $z'$  je označena kompleksna promenljiva u blizini ravni kružnice,  $ae^{\psi}$  je radijalna koordinata  $z'$  i  $\theta$  je ugaona koordinata  $z'$ .

Zbog transformacije jednačine 6.2. u oblik konforme funkcije, neophodno je da veličina  $\theta - \phi$  (koja je u nastavku označena simbolom  $\epsilon$ ) bude konjugovana funkcija od veličine  $\psi - \psi_0$ . Ako se  $\epsilon$  predstavi preko Furijeovog oblika koji je prikazan u jednačini 6.4., veličina  $\psi - \psi_0$  dobija oblik kao u jednačini 6.5.

$$\epsilon = \sum_1^{\infty} A_n \sin n\phi - \sum_1^{\infty} B_n \cos n\phi \quad (6.4.)$$

$$(\psi - \psi_0) = \sum_1^{\infty} A_n \cos n\phi + \sum_1^{\infty} B_n \sin n\phi \quad (6.5.)$$

Ova veza govori da ukoliko se funkcija  $\epsilon(\phi)$  zadata,  $(\psi - \psi_0)$  se može izračunati kao funkcija od  $\phi$ . Transformacija koja se odnosi da skoro kružnu krivu oblika aeroprofila ima oblik kao u jednačini 6.6.

$$\xi = z' + \frac{a^2}{z'} \quad (6.6.)$$

Gde je sa  $\xi$  označena kompleksna promenljiva u ravni aeroprofila. Koordinate aeroprofila  $x$  i  $y$  su stvarni i zamišljeni delovi  $\xi$ . Koordinate  $x$  i  $y$  su date u obluku jednačine 6.7.

$$\begin{aligned} x &= 2a \cosh \psi \cos \theta \\ y &= 2a \sinh \psi \sin \theta \end{aligned} \quad (6.7.)$$

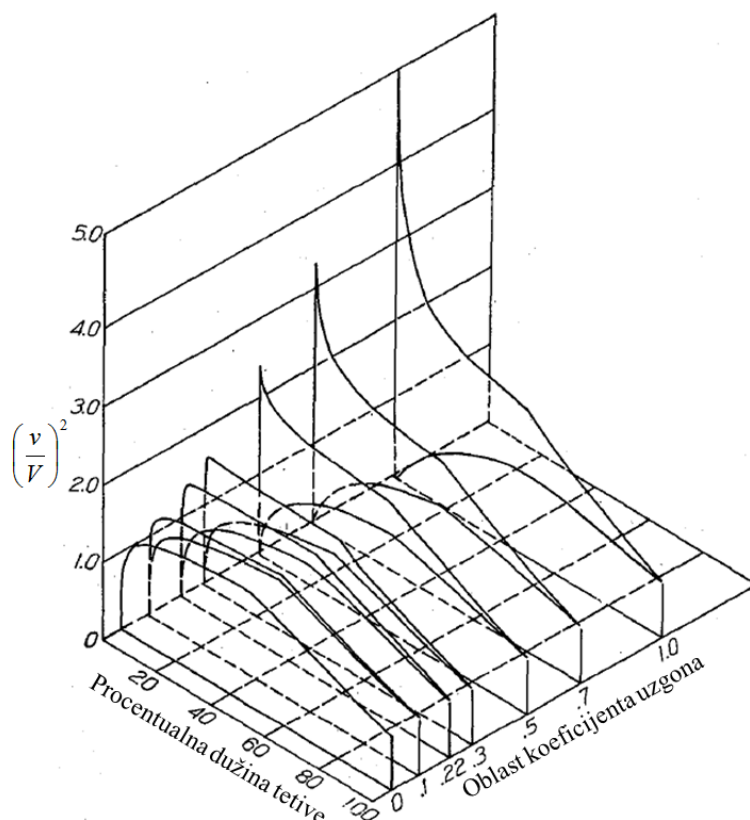
Preraspodela polja brzine u obliku parametara  $\psi$  i  $\epsilon$  aeroprofila za idealnu vazдушnu struju je prikazana u okviru jednačine 6.8.

$$\frac{v}{V} = \frac{[\sin(\alpha_0 + \phi) + \sin(\alpha_0 + \epsilon_{TE})]e^{\psi_0}}{\sqrt{(\sin h^2 \psi + \sin^2 \theta) \left[ \left(1 - \frac{d\epsilon}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{d\phi}\right)^2 \right]}} \quad (6.8.)$$

Sa  $v$  je predstavljena lokalna brzina preko površine aeroprofila,  $V$  je brzina neporemećene vazdušne struje,  $\alpha_0$  je nulti napadni ugao,  $\psi_0$  je srednja vrednost od  $\psi$   $\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi d\phi\right)$ ,  $\epsilon_{TE}$  vrednost  $\epsilon$  zadnje (repne) ivice aeroprofila. Osnovni simetrični oblici aeroprofila su izvedeni preko prikladno pretpostavljenih vrednosti  $d\epsilon/d\phi$  koje su u funkciji  $\phi$ . Te vrednosti su birane na osnovu prethodnih izraza i subjektivnog uslova  $\int_0^{\pi} \frac{d\epsilon}{d\phi} = 0$  i vrednost  $\frac{d\epsilon}{d\phi}$  u  $\phi$  je jednaka kao i  $\frac{d\epsilon}{d\phi}$  u  $-\phi$ . Nakon sprovođenja ovog tipa izračunavanja, može se zaključiti da

postoji jedna optimalna vrednost radijusa napadne ivice koja zavisi od debljine aeroprofila i pozicije minimalnog pritiska. Sa pravilno dobijenim radijusom preraspodela polja pritiska postaje skoro ravna preko prednjeg dela aeroprofila, pre nego što formirani vrh napadne ivice prouzrokuje povećanje koeficijenta uzgona.

Preraspodela pritiska za jednu od osnovnih simetričnih preraspodela debljine pri različitim vrednostima koeficijenta uzgona je prikazano na slici 6.8.



Slika 6.8 - Teorijska preraspodela pritiska aeroprofola za nekoliko vrednosti koeficijenata uzgona [19]

Za nultu vrednost koeficijenta uzgona preraspodela pritiska preko gornje i donje površine je jednaka. Ako koeficijent uzgona ima tendenciju porasta, nagib preraspodele pritiska oko prednjeg dela gornje površine opada, sve dok je postane ravan pri koeficijentu uzgona od 0,22. U slučaju porasta koeficijenta uzgona preko ove vrednosti, dolazi do uobičajenog skoka u vrednosti preraspodele pritiska na napadnoj ivici.

### Ugao nulte vrednosti uzgona

Idealna vrednosti napadnog ugla  $\alpha_i$  koja je odgovarana za stvaranje koeficijenta uzgona  $c_{l_i}$  uključuje podatke o vrednostima srednje linije aeroprofila. Okvirne vrednosti napadnog ugla usled kojih dolazi do stvaranja nulte vrednosti uzgona su dostupne iz niza teorijskih podataka za nagib krive uzgona tankih aeroprofila. Vrednosti napadnog ugla u stepenima pri nultom uzgonu je moguće dobiti iz jednačine 6.9.

$$\alpha_{l_0} = \alpha_i - \frac{57.3}{2\pi} c_{l_i} \quad (6.9.)$$

Tabelarne vrednosti  $\alpha_i$  mogu biti skalirane linearno sa vrednošću koeficijenta uzgona ili ordinatne vrednosti srednje linije. Ove teorijske vrednosti napadnog ugla pri nultom uzgonu

mogu biti veoma korisne za postizanje preliminarnih rezultata i objašnjenje fenomena aeroprofila. Međutim njihova primena na realnom modelu ne bi trebali biti implementirana bez izvršenog eksperimentalnog merenja, iz razloga što se velikim delom bazira na empirijskim koeficijentima.

### **Kritična vrednost Mahovog broja**

Kritična vrednost brzine se definiše kao brzina unutar neporemećene vazdušne struje u kojoj bilo koja tačka duž površine aeroprofila ima tendenciju da se lokalno približi brzini zvuka. Ukoliko je maksimalna vrednost niskobrzinskog koeficijenta pritiska  $S$  poznata iz eksperimentalnih ili teorijskih podataka, kritična vrednost Mahovog broja se može pretpostaviti na osnovu Von Karmanove metode. Izračunavanje ove kritične vrednosti može biti komplikovano i prevazilaziti empirijska očekivanja ukoliko postoji oštar skok u vrednosti pritiska na napadnoj ivici. Postoje krive pomoću kojih se mogu predvideti kritične vrednosti Mahovog broja prema niskobrzinskim delovima koeficijenta uzgona. Za visokobrzinske vrednosti koeficijenta uzgona, potrebno je izvršiti množenje niskobrzinskih vrednosti koeficijenta uzgona sa  $\frac{1}{\sqrt{1-M^2}}$ . Takođe, kritična vrednost Mahovog broja se može predvideti preko teorijske preraspodele polja pritiska oko aeroprofila. Podaci pokazuju da za bilo koji tip aeroprofila, maksimalna kritična vrednost Mahovog broja drastično opada sa porastom debljine aeroprofila.

### **Naponski koeficijenti**

Teorijske vrednosti naponskih koeficijenata se mogu izvesti direktno iz podataka koji opisuju srednju liniju aeroprofila. Ove vrednosti su dostupne na osnovu teorije tankih aeroprofila i mogu biti po potrebi skalirane u obe strane linearno sa vrednostima koeficijenta uzgona ili ordinatnim vrednostima srednje linije aeroprofila. Kao i u slučaju određivanja napadnog ugla za nultu vrednost uzgona, dobijene vrednosti mogu biti korisne za preliminarna istraživanja, ali za praktičnu primenu moraju biti u kombinaciji sa eksperimentalnim istraživanjem [19].

## **6.2. Objekat ispitivanja**

Ispitivanje uticaja aerodinamičkih dodataka i opreme u okviru ovog rada je izvršeno na modelu kamiona (tegljača) sa poluprikolicom. Kako bi ispitivanje bilo moguće sprovesti, a nakon toga analizirati i obraditi postignute rezultata, na osnovu kojih bi se došlo do eventualnih zaključaka, ispitivanje je sprovedeno sledećim koracima:

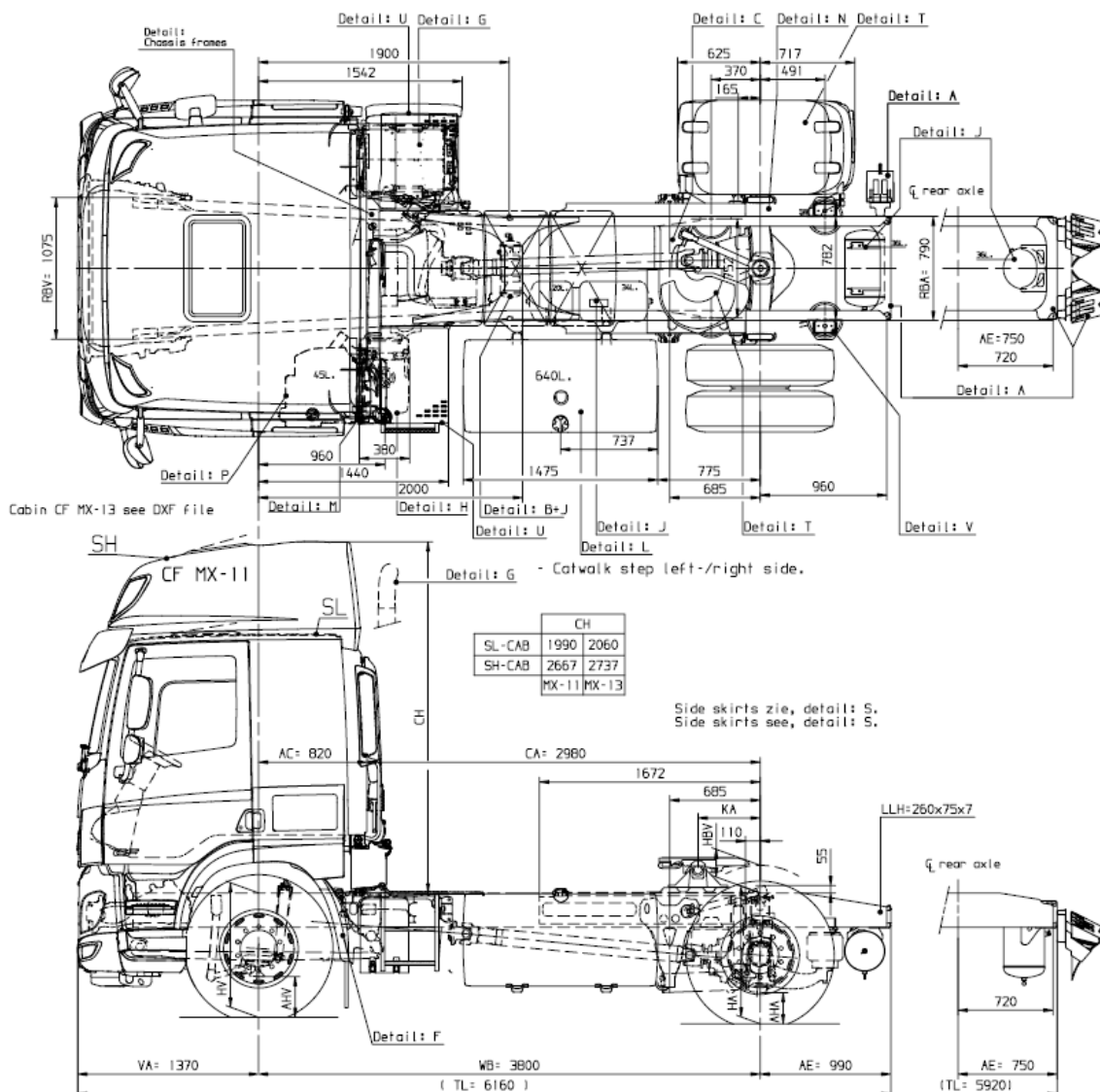
- 1) Usvajanje objekta ispitivanja
- 2) Kreiranje CAD 3d modela
- 3) Kreiranje CFD modela.

Prethodno navedeni koraci se odnose na kreiranje virtuelnih eksperimenata, na osnovu kojih se dolazi do rezultata, za čiju validaciju se pristupa realnom eksperimentu.

### **6.2.1. Usvajanje objekta ispitivanja**

Kao što je već prethodno napomenuto, ispitivanje u okviru rada je sprovedeno na modelu kamiona tegljača sa poluprikolicom. Kao osnova za usvajanje modela, poslužili su katalogi proizvođača kamiona i poluprikolica. Na osnovu najobuhvatnije dostupne tehničke dokumentacije i ostalih potrebnih relevantnih podataka, kamion tegljač koji je poslužio kao bazni model je proizvođača DAF, oznake CF. U pitanju je tegljač pogonske šeme 4x2 sa

manjom kabinom, bez aerodinamičkih dodataka na kabini. Na slici 6.9 je dat prikaz tehničkog crteža usvojenog modela kamiona isečenog iz kataloga proizvođača vozila.



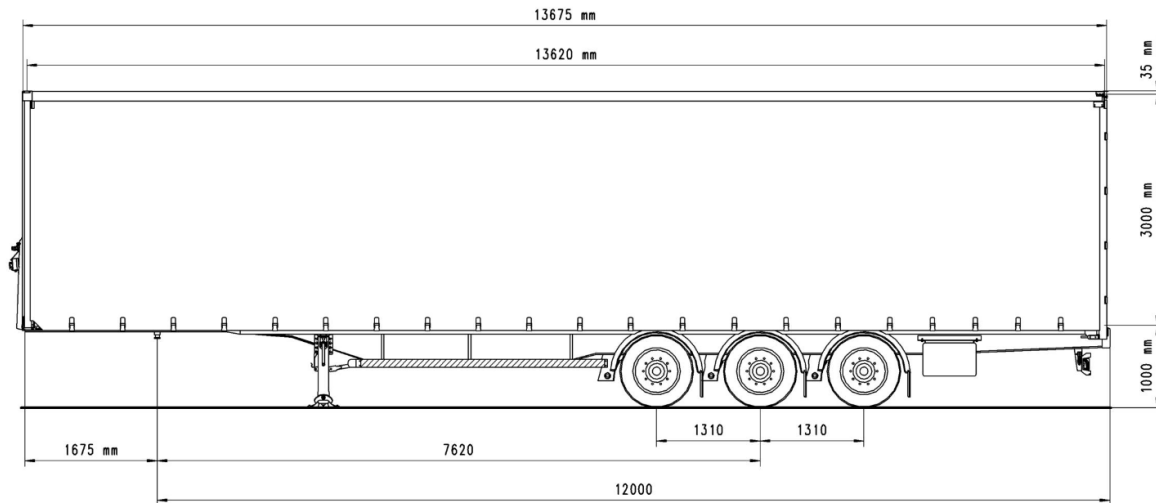
Slika 6.9 - Usvojeni model kamiona tegljača DAF CF 4x2 [78]

Nakon usvajanja modela kamiona, isti postupak je sproveden za model poluprikolice. Prilikom pretrage mogućih rešenja, autor se opredelio da bude poluprikolica koja će imati zatvorenu nadgradnju zbog najčešće primene i prostora za sprovođenje daljeg toga eksperimentalnog ispitivanja. Pregledom kataloga vodećih kompanija koje se bave proizvodnjom poluprikolica, usvojena je poluprikolica proizvođača Schwarcmuller sa tri osovine, oznake RH160. Na slici 6.10 je dat prikaz tehničkog crteža sa dimenzijama usvojenog modela poluprikolice, isečenog iz kataloga proizvođača. Na osnovu usvojenih modela kamiona i poluprikolice, pristupilo se kreiranju CAD 3d modela.

### 6.2.2. Kreiranje CAD modela

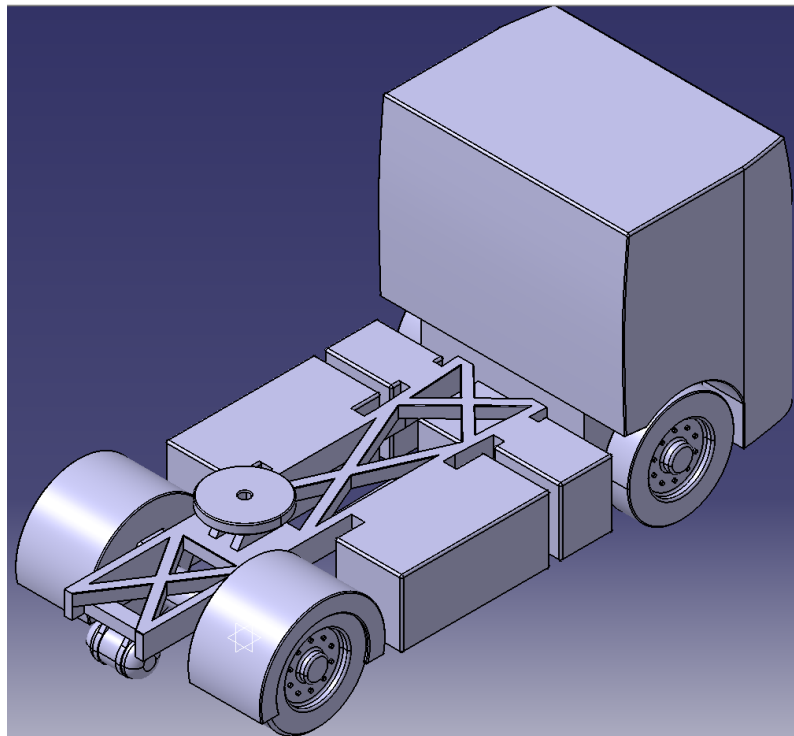
CAD (*eng. Computer aided design*) je postupak kreiranja virtuelnih 2d ili 3d modela. U okviru ovog rada, uloga CAD modelovanja je kreiranje virtuelnih 3d modela koji će poslužiti za sprovođenje virtuelnih eksperimenata u okviru aerodinamike. Softverski paket koji je korišćen za izradu 3d virtuelnog modela je *Catia V5* zbog mnoštvo svojih prednosti. Glavna

prednost se ogleda u direktnoj kompatibilnosti sa softverom za sprovođenje CFD simulacija, koje zapravo predstavljaju virtuelne aerodinamičke eksperimente.



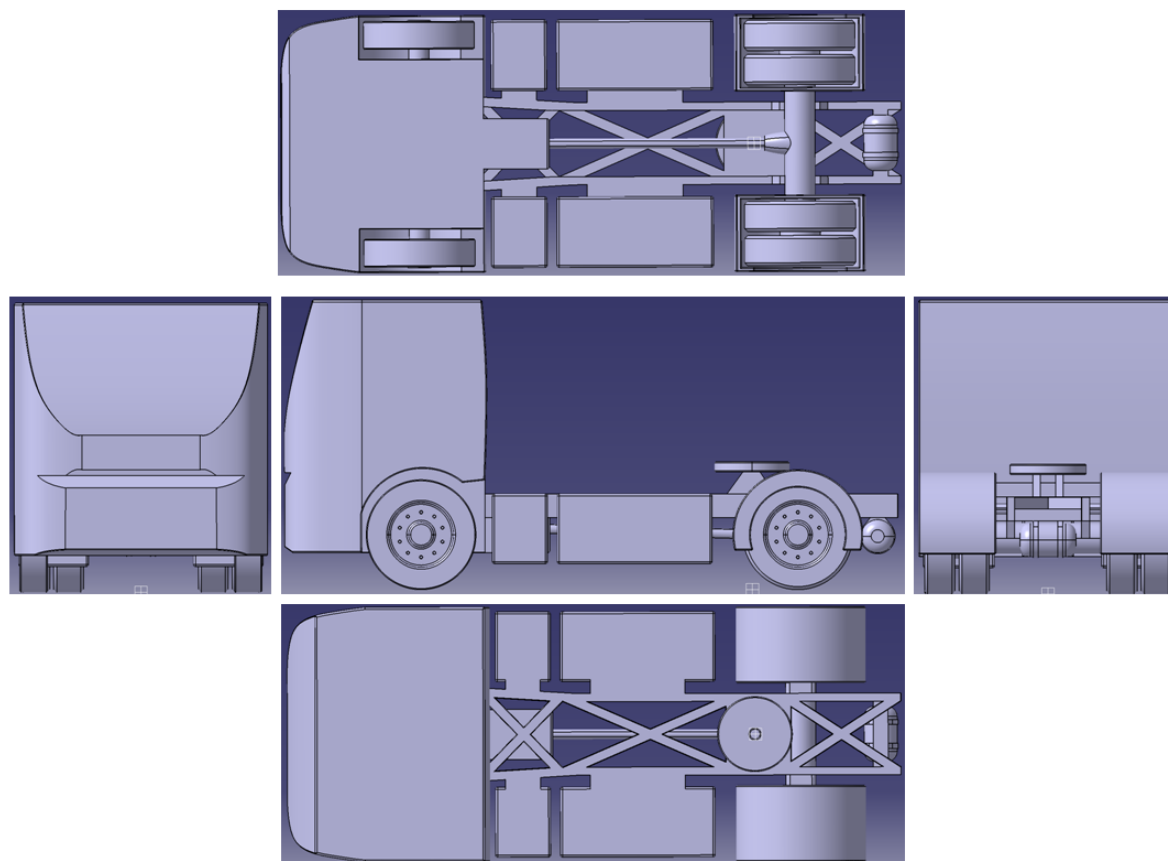
Slika 6.10 - Prikaz usvojenog modela poluprikolice [79]

Na osnovu usvojenih modela kamiona tegljača i poluprikolice i njihove dostupne tehničke dokumentacije, sprovodi se kreiranje virtuelnih 3d modela. Usvojena razmera modela je 1:10 iz razloga tehničkih karakteristika i mogućnosti vazdušnog tunela u kome je sproveden realni eksperiment na modelu kreiranom po uzoru na virtuelni 3d model. Eksperimentalno ispitivanje u vazdušnom tunelu je sprovedeno iz razloga i potrebe validacije rezultata. Postupak kreiranja virtuelnog modela u softveru Catia V5 se svodio na ubacivanje tehničkih crteža u razmeri, na osnovu kojih se izvršeno kreiranje uprošćenih 3d modela. Na slici 6.11 je dat prikaz kreiranog CAD 3d modela kamiona tegljača u izometriji.



Slika 6.11 - Kreirani 3d CAD model kamiona tegljača u izometrijskog pogledu

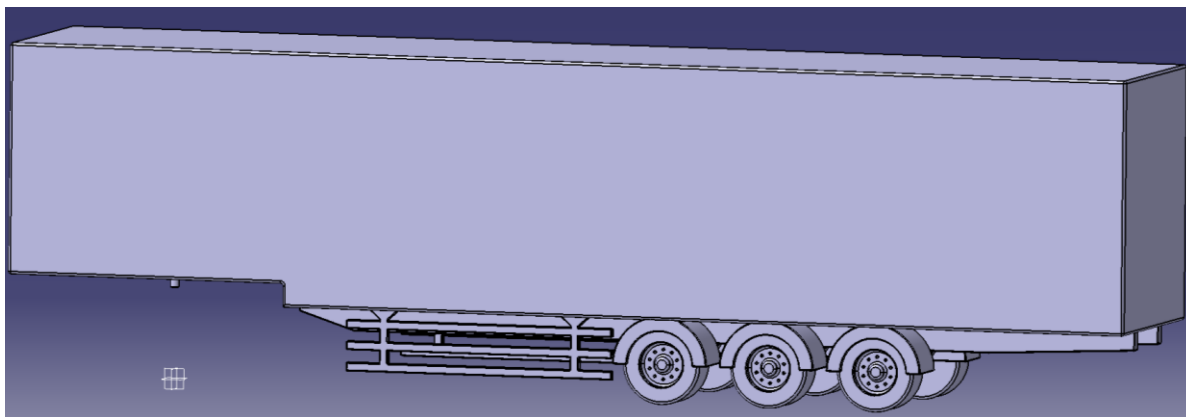
Sa slike 6.11, kao i sa naredne slike 6.12 gde je model kamiona prikazan u svim geometrijskim pogledima se može zaključiti da je model uprošćen i da su izbačeni svi nepotrebni detalji. Ovaj postupak je sproveden iz potrebe pojednostavljenja izgleda modela, kako bi se umanjilo opterećenje računara pri sprovođenju virtuelni CFD eksperimenata, a posle svakako umanjile poteškoće pri kreiranju stvarnog modela po uzoru na CAD model. Uprošćenja modela u maloj meri utiču na aerodinamičke karakteristike, pa se na osnovu toga mogu zanemariti, a svakako i prevazilaze razmatranu temu rada. Validacija rezultata je sprovedena na stvarnom modelu koji je urađen po uzoru na CAD model, što isključuje uticaj detalja i različitosti modela. Gabaritne dimenzije umanjenog modela kamiona tegljača su: 615x255x290 mm.



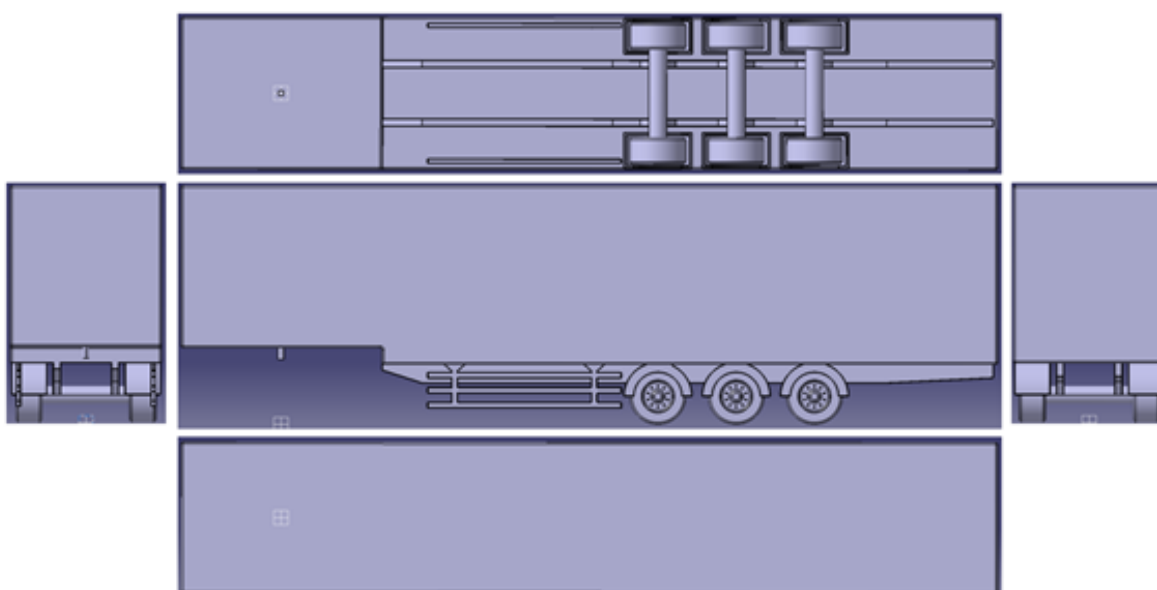
Slika 6.12 - Kreirani 3d CAD model kamiona tegljača u geometrijskim pogledima

Istim postupkom je izvršeno kreiranje virtuelnog 3d modela poluprikolice, po uzoru na tehničku dokumentaciju. Model poluprikolice je umanjen 10x kao i model kamiona. Izgled kreiranog 3d modela poluprikolice u softveru Catia V5 u izometrijskom pogledu je prikazano na slici 6.13. Oba kreirana modela su urađena kao puni modeli, zbog lakše manipulacije u CFD softveru. Model poluprikolice takođe ima svojih uprošćenja koja su manja nego na modelu kamiona, iz razloga što je samo po sebi konstrukcija prikolice jednostavnija, odnosno sastavljena iz velikog broja osnovnih geometrijskih oblika. Na slici 6.14 je dat prikaz modela poluprikolice u nekoliko geometrijskih pogleda. Gabaritne dimenzije umanjenog modela poluprikolice su: 1368x255x400 mm. Na slici 6.15 je dat prikaz objedinjenih modela kamiona tegljača i poluprikolice, zato što su o okviru istraživanja ovog rada analizirani kao objedinjeni model. Gabaritne dimenzije objedinjenog umanjenog modela su: 1669x255x400 mm.

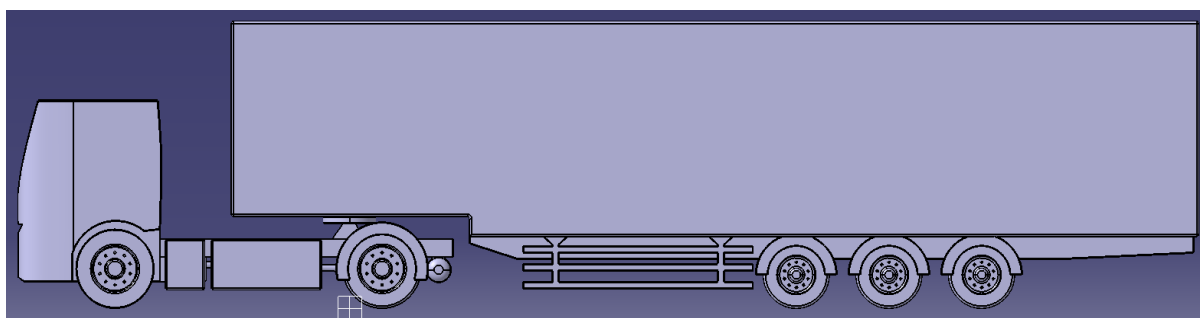




*Slika 6.13 - Kreirani 3d CAD model poluprikolice u izometrijskog pogledu*



*Slika 6.14 - Kreirani 3d CAD model poluprikolice u geometrijskim pogledima*



*Slika 6.15 - Objedinjeni model kamiona i poluprikolice*

Uloga kreiranih CAD modela je analiza aerodinamičkih uticaj. Realni modeli se u praksi ispituju u vazдушnim tulenima, što je izvršeno i u okviru ovog rada. Ova faza rada se vezuje za pripremu virtuelnih CFD eksperimenata. Kako bi se kreirani model sa slike 6.15 ubacio u CFD simulaciju, koja po karakteristikama u što većoj meri odgovara realnom ispitivanju u vazдушnom tunelu, neophodno je kreirati okruženje koje se slično vazдушnom tunelu. Sa ovim se pre svega misli na kreiranje dodatnog CAD modela koji po dimenzijama i obliku opisuje

realni vazdušni tunel. Na slici 6.16 je dat izgled modela čija je uloga da predstavi virtuelni vazdušni tunel.



Slika 6.16 - CAD model vazdušnog tunela

CAD model vazdušnog tunela ima oblik poluvaljka sa dimenzijama osnove: 5000x1200 mm i lukom poluprečnika 600 mm. Dimenzije i oblik modela vazdušnog tunela su usvojene na osnovu niza sprovedenih CFD simulacije, do te mere da su gabaritne dimenzije svedene na minimalnu vrednost, uz uslov da blizina zidova tunela ne utiču na vazdušnu struju unutar njega. Povećavanjem dimenzija tunela se nije uticalo na aerodinamičke parametre ispitivanog modela sa slike 6.15 i iz tog razloga se smatralo zadovoljavajućim. Postupak objedinjavanja ispitivanog modela i modela vazdušnog tunela je izvršen u CFD softveru.

### 6.2.3. Kreiranje CFD modela

Kompjuterska dinamika fluida (*eng. Computational Fluid Dynamics-CFD*) predstavlja nauku koja se bavi u najvećoj meri izučavanjem fenomena mehanike fluida. Zasniva se na virtuelnim simulacijama pomoću kojih se sprovode i analiziraju različite pojave vezane za mehaniku fluida, aerodinamiku, aeroakustiku, termodinamiku, itd. Detaljno predstavljanje CFD pristupa je dato u prethodnim poglavljima rada.

CFD virtuelni eksperimenti ili simulacije se sprovode u svrhu izračunavanja sile otpora vazduha, koeficijenta otpora vazduha ispitivanog modela kamiona i poluprikolice, kao i analizu prostiranja vazdušne struje oko modela. U nastavku je predstavljen postupak kreiranja CFD simulacije na objedinjenom modelu kamiona tegljača i poluprikolice. Softver koji je korišćen za virtuelna CFD ispitivanja u okviru ovog rada je *CD Adapco - Star CCM+*.

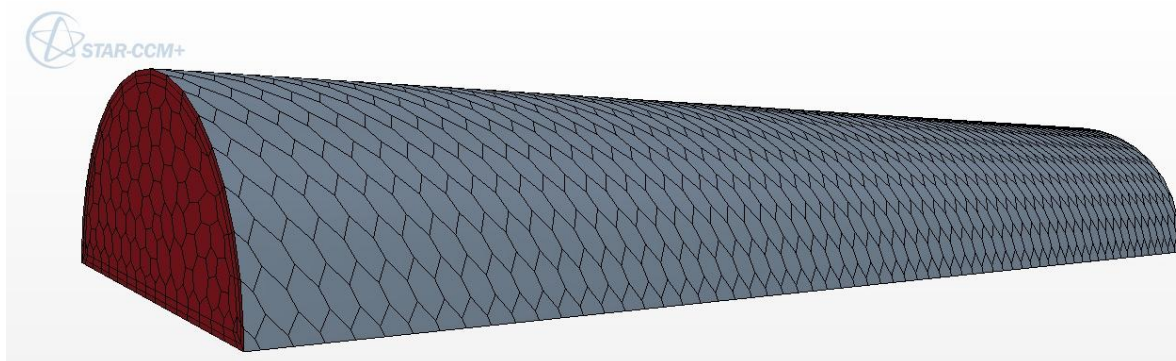
#### **Podేశavanje geometrijskog modela**

Prvi korak u kreiranju CFD simulacije je ubacivanje prethodno napravljenih CAD modela. Kreirani CAD modeli se ubacuju kao dva zasebna dela, jedan je model kamiona i poluprikolice (koji se u nastavku smatraju objedinjenim modelom), a drugi je model vazdušnog tunela. Oba dela su objedinjena u jedan radni region, koji je podeljen na veći deo granica. U okviru rada je izvršeno istraživanje aerodinamičkih uticaja na modelu kamiona i poluprikolice, u shvrhu dobijanja sile otpora vazduha. Na osnovu toga, model je postavljen paralelno sa bočnim stranama modela vazdušnog tunela u njegovoj sredini, gde je najveća udaljenost modela od gornje strane tunela. Model je postavljen tako iz razloga što se u okviru rada analizira uticaj čeone (frontalne) vazdušne struje koja direktno nailazi na model. Bočni vetar, ili intenzitet vetra pod nekim uglom u odnosu na model nije razmatran u okviru rada. Kako bi se umanjio efekat nepokretnog poda vazdušnog tunele, model je podignut u odnosu na pod tunela za vrednost od 5 mm. Usvojena vrednost je rastojanja modela od poda tunela je dobijena na osnovu nekoliko različitih postavki simulacija sa različitim vrednostima.

Najmanji efekat uticaja poda tunela je uočen na usvojenom rastojanju. Granice modela su tako usvojene da je tunel podeljen na tri granice, koje su njegov ulaz, izlaz i zid tunela. Za ulaz je proglašen tip granice: *Velocity Inlet* kako bi se mogla podesiti tačna vrednost brzine vazdušne struje na ulasku u tunel. Suprotna strana vazdušnog tunela je izlaz i tu je podešen tip granice: *Pressure Outlet*. Ovaj tip izlazne granice je usvojen na osnovu velikog broja urađenih simulacija i pokazao se kao najbolje rešenje u kombinaciji sa brzinskim ulazom i virtuelnim vazdušnim tunelom. Ostale stranice tunela, kao i kompletan model su podešeni kao čvrsta granica, odnosno *Wall*.

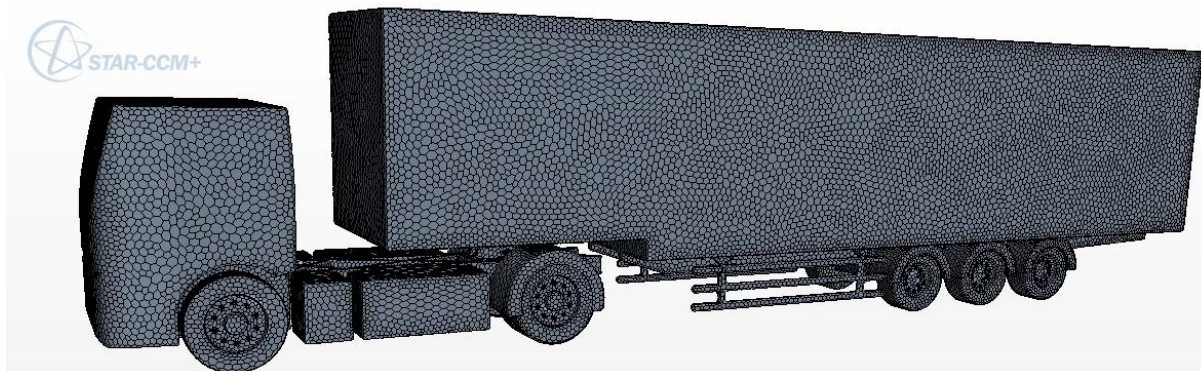
### Podešavanje mrežnog modela

Kao što je predstavljeno u prethodnim poglavljima rada, mreža predstavlja jedan od najvažnijih podešavanja simulacije. Mreža (*eng. Mesh*) predstavlja postupak deljenja analiziranog modela na veliki broj konačnih površina ili zapremina u zavisnosti da li se radi o površinskoj ili zapreminskoj mreži. U slučaju modela analiziranog u ovom radu, moglo bi se pristupiti kreiranju mreže na više načina. Tunel predstavlja prostor kroz koji je potrebno da prolazi zadata vazdušna struja. Zbog toga je potrebno definisati zapreminsku mrežu, jer se kompletan proces dešava u samoj unutrašnjosti tunela, odnosno njegovoj zapremini. S druge strane, ispitivani model kamiona i poluprikolice se može predstaviti preko površinske mreže iz razloga što je sa aspekta analize otpora vazduha i vazdušnih strujnica potreban samo spoljašnji oblik modela, ne i njegova unutrašnjost. Površinska mreža manje opterećuje simulaciju, odnosno računar zato što se model deli na mnogo manji deo ispitivanih ćelija. Ispitivani model sam po sebi nije previše komplikovan i zahtevan sa mrežne strane. Zapreminska mreža takođe otvara veći spektar mogućih alata za merenje i analizu podataka. Analizirajući sve prednosti i nedostatke površinske i zapreminske mreže, usvojeno je da se i ispitivani model kamiona i poluprikolice izdela preko zapreminske mreže zato što uz malo veće opterećenje simulacije se dobija stabilnija i kompleksnija slika analiziranih rezultata. Pregledom relevantne literature i sopstvenim iskustvom na osnovu više pokrenutih simulacija sa različitim tipovima mreže, najstabilnije rezultate iz više ponavljanja se postiglo poliedralskom prizmatičnom mrežom sa ponovnim pristupom kreiranja površinske mreže. Osnovna veličina bazne ćelije koja se odnosi na model vazdušnog tunela iznosi 100 mm, dok je ista veličina značajno sitnija za ispitivani model. Veličina ćelije modela kamiona i poluprikolice je podešena na vrednost 5% u odnosu na osnovnu ćeliju vazdušnog tunela, što zapravo iznosi 5 mm. Veličina bazne ćelije tunela i modela su usvojeni takođe velikim brojem ponavljanja postupaka menjanja veličine kroz simulacije, dok se nije došlo do zaključka da se dobijeni rezultati simulacije ne menjaju sa daljim sitnjenjem mreže. To je tačka u kojoj veličina bazne ćelije sa daljim smanjivanjem više ne utiče na kvalitet dobijenih rezultata. Na slici 6.17 je dat prikaz mrežnog modela vazdušnog tunela.

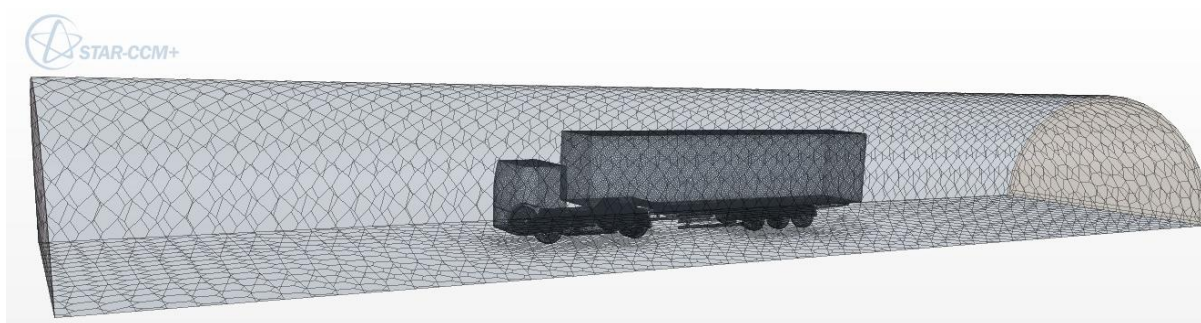


Slika 6.17 - Mrežni model vazdušnog tunela

Na slici 6.18 je prikazan mrežni model ispitivanog kamiona i poluprikolice, dok slika 6.19 prikazuje objedinjeni mrežni model vazdušnog tunela i ispitivanog modela unutar njega.



Slika 6.18 - Mrežni prikaz ispitivanog modela



Slika 6.19 - Objedinjeni mrežni prikaz modela

Kreirana mreža modela vazdušnog tunela i ispitivanog modela se ukupno sastoji od 252.686 ispitivanih zapreminskih ćelija.

### Podešavanje fizičkih svojstava modela

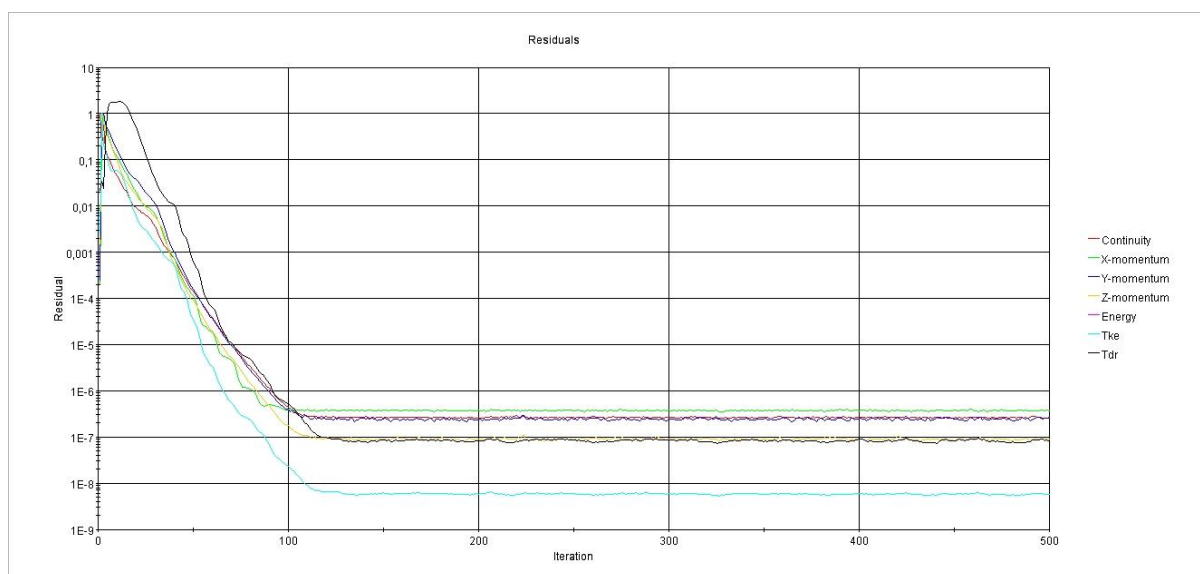
Pod fizičkim svojstvima CFD simulacije se podrazumeva podešavanje radnog okruženja u kome se simulacija sprovodi, tipovi radne materije, agregatnih stanja, tipova strujanja, itd.

Vazдушna struja koja protiče kroz vazdušni tunel je gasovitog agregatnog stanja, a kao tip gasa je usvojen standardni CFD model idealnog gasa. Na osnovu izračunavanja vrednosti Reynoldsovog broja za ispitivani model u vazdušnom tunelu, došlo se do podatka koji govori da vrednost  $Re$  prelazi 2,7 miliona. Izračunavanje  $Re$  se izvršilo za poznate fizičke veličine koje vladaju u modelu vazdušnog tunela, a to su gustina vazduha od  $1,18 \text{ kg/m}^3$ , najveće predviđene brzine vazdušne struje unutar tunela od  $90 \text{ km/h}$ , odnosno  $25 \text{ m/s}$ , dužine ispitivanog modela od približno  $1,7 \text{ m}$  i dinamičke viskoznosti od  $1,85508 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . Za minimalnu brzinu vazdušne struje u tunelu od  $60 \text{ km/h}$ , odnosno  $16,67 \text{ m/s}$ , vrednost  $Re$  iznosi 1,8 miliona. Obe krajnje vrednosti dobijenog  $Re$  su velike vrednosti koja govore da se radi o turbulentnom tipu strujanja u vazdušnom tunelu. Na osnovu preporuka iz literatura [30] i [80], kao i na osnovu sopstvenog iskustva pokretanjem velikog broja različitih CFD simulacija, usvojen je K-Epsilon tip turbulentnog strujanja, o kome je bilo dosta reči u prethodnim poglavljima rada. Stacionarno, odvojivo, trodimenzionalno strujanje je primenjeno u radu, sa aktivnim uticajem gravitacije. U radu nije razmatran uticaj temperature, kao i prenosa toplote, tako da je usvojen izotermni model.

### Podešavanje ostalih parametara simulacije

Nakon podešavanja objekta ispitivanja i okruženja, potrebno je podesiti parametre koji će se tokom simulacije meriti i snimati. Merene su tri stvari, odnosno parametra koji su u velikoj meri međusobno povezani. Prvi parametar je izračunavanje vrednosti čeone površine modela. Ovaj parametar ima konstantnu vrednost tokom simulacije i veoma je bitan zbog izračunavanja koeficijenta otpora vazduha, koji ujedno predstavlja drugi parametar. Sila otpora vazduha ispitivanog modela predstavlja treći i najbitniji parametar koji se prati tokom ispitivanja i služi za direktno poređenje i kvalifikovanje rezultata. Koeficijent otpora vazduha i sila otpora vazduha su dva međusobno povezana parametra koji direktno utiču jedan na drugog. Samom tim bi se moglo pratiti samo jednog od njih. Podešavanje funkcija iz palete alata CFD softvera za očitavanje prethodnih parametara, moguće je uključiti grafičko praćenje i očitavanje rezultata, kao i potpunu scensku vizuelizaciju. Takođe podešavanjem vizuelizacije strujnica u funkciji nekog parametra (npr. brzine vazdušne struje) moguće je pratiti prostiranje vazdušne struje oko ispitivanog modela tokom simulacije. Poslednji bitan parametar u podešavanju simulacije pre njenog startovanja je kriterijum zaustavljanja simulacije. Postoji nekoliko mogućih podešavanja ovog parametra, od kojih je usvojen parametar maksimalnog broja iteracija. Prilikom prvog podešavanja simulacije, ovaj parametar je podešen na vrednost 500 iteracija.

Startovanjem simulacije se prati njen tok i analiziraju parametri. Prvi pokazatelj kvalitetnog rada simulacije se vidi na osnovu dijagrama ostataka simulacije (*eng. Residuals*). Na slici 6.20 je dat grafički prikaz prostiranja ostataka simulacije tokom 500 iteracija.



Slika 6.20 - Grafik simulacionih ostataka nakon 500 iteracija

Sa slike 6.20 se može uočiti tendencija opadanja rezultata, kao i period stagnacije nakon 130 iteracija. Takođe u periodu stagniranja rezultata su sve vrednosti ostataka manje od  $1^{-4}$ . Ovo potvrđuje pravilan rad simulacije, odnosno da simulacije u toku svog rada nema smetnji prouzrokovanih matematičkim izračunavanjem samog softvera ili lošeg kvaliteta kreirane mreže. Zbog velikog broja urađenih simulacija u toku sprovođenja nastavka istraživanja u okviru ovog rada, maksimalni broj simulacija je ograničen na 300, zato što ostavlja dovoljno vremena da se simulacija ustali, a značajno skraćuje vremene trajanja simulacije.

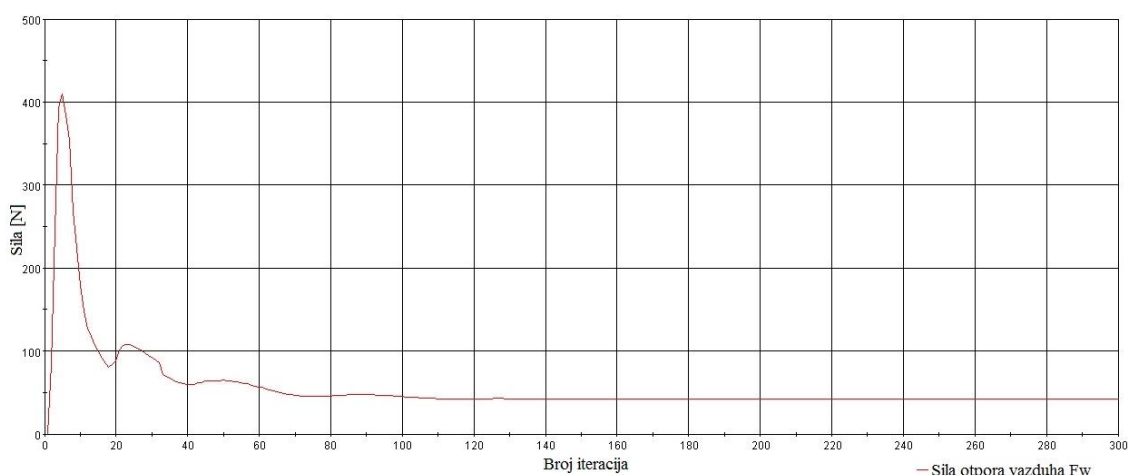
### Prikaz dobijenih rezultata

Puštanjem simulacije u trajanju od 300 iteracija se došlo do sledećih rezultata. Najvažniji podatak sa aspekta istraživanja u ovom radu je sila otpora vazduha ispitivanog modela. Njena vrednost iznosi 41,92 N pri maksimalno testiranoj brzini vazdušne struje od 90 km/h. U tabeli 28 su dati i ostali numerički rezultati postignuti tokom simulacije za parametre veličina frontalne površine i koeficijenta otpora vazduha u funkciji brzine vazdušne struje.

Tabela 28 - Rezultati simulacije

Brzina vazdušne struje	Sila otpora vazduha	Koeficijent otpora vazduha	Frontalna površina modela	Broj ćelija mreže modela
$v$ [km/h]	$F_w$ [N]	$c_w$ [-]	$A$ [m <sup>2</sup> ]	$n$ [kom]
90	41,92	1,161	0,097934	252686
85	37,47	1,163		
80	33,22	1,164		
75	29,22	1,165		
70	25,48	1,166		
65	21,99	1,168		
60	18,81	1,172		

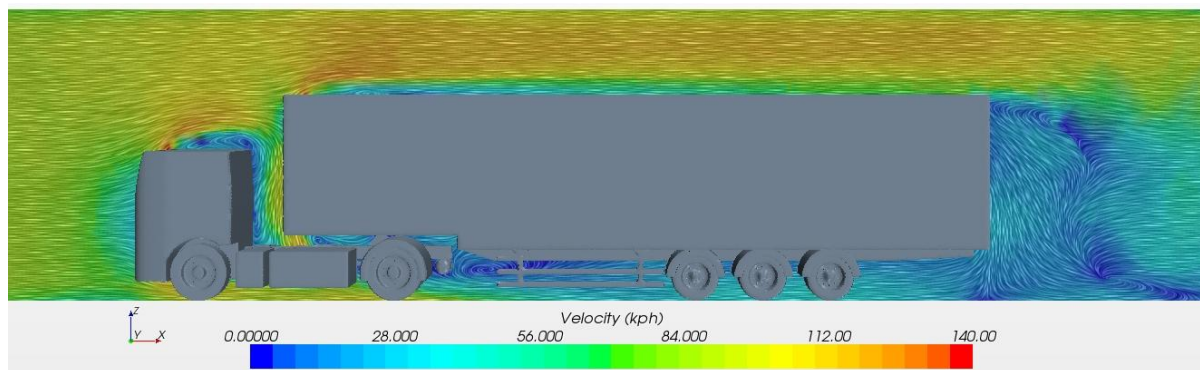
Iz prethodne tabele se može uočiti da je model testiran za opseg brzine vazdušne struje od 60 do 90 km/h, odnosno od 16,67 do 25 m/s. Usvojeni opseg brzina vazdušne struje je utvrđen sa aspekta maksimalne zakonsko definisane brzine kretanja ove vrste vozila na autoputu od 90 km/h, a minimalna vrednost na osnovu aerodinamičkog praga na kojem uticaj otpora vazduha počinje da ima značaja na performanse vozila i ukupne njegove otpore. Ispod brzine od 60 km/h, vrednost sile otpora vazduha je zanemariva u odnosu na ostale otpore kretanja vozila i nema potrebe da se razmatra. Dobijena vrednost sile otpora vazduha ima očekivanu kvadratnu zavisnost u odnosu na brzinu, jer zapravo brzina i predstavlja jedini kvadratni element u jednačini određivanja sile otpora vazduha. Koeficijent otpora vazduha ima tendenciju malog opadanja sa porastom brzine. Na slici 6.21 je prikazan dijagram sile otpora vazduha u odnosu na broj iteracija i period njegove stagnacije. Prikazani dijagram je za vrednost sile otpora vazduha modela pri maksimalnoj brzini vazdušne struje.



Slika 6.21 - Grafički prikaz sile otpora vazduha modela pri 90 km/h

Kao i sa slike 6.20, tako se period stagnacije rezultata jasno vidi i na slici 6.21. Na sici 6.22 je dat grafički prikaz polja brzine vazdušne struje oko ispitivanog modela čiji je intenzitet 90

km/h i deluje u pravcu  $x$  ose. Na slici se javno vide oblasti u kojima dolazi do formiranja vrtložnog kretanja vazdušne struje usled nailaska na određene delove ispitivanog modela. Rezultujuća brzina vazdušne struje dosta varira u odnosu na neporemećenu vazдушnu struju i njenu brzinu od 90 km/h. Kritične zone u kojima dolazi do značajnog odvajanja vazдушnih strujnica od modela, kao i njihovog vrtložnog kretanja su zona iznad kabine kamiona, zona iza kabine kamiona i oblast iza prikolice. Zona ispod prikolice je takođe karakteristična vrtložnim kretanjem vazdušne struje usled velikog zazora između poda prikolice i podloge. Ova oblast ima mnogo većeg značaja na formiranje otpora vazduha pri bočnom vetru, čiji se uticaj ne razmatra direktno u ovom radu, pa je samim tim i ova zona isključena iz dalje analize.



Slika 6.22 - Polje brzine vazdušne struje oko ispitivanog modela

Na osnovu simulacije su dobijene polazne vrednosti sile otpora vazduha i grafički pokazatelji prostiranja polja brzine vazdušne struje oko modela. Takođe su utvrđeni parametri podešavanja simulacije i neophodna dužina njenog trajanja. Ustanovljene su oblasti na modelu u kojima je potrebno izvršiti dodatna poboljšanja aerodinamičkih uticaja, kako bi se umanjio efekat sile otpora vazduha i poboljšao protok i opstrujavanje vazdušne struje oko modela. U nastavku rada je prikazan optimizacioni proces kreiranja aerodinamičkih dodataka čija je uloga upravo smanjenje sile otpora vazduha modela i bolje vođenje vazdušne struje oko njega.

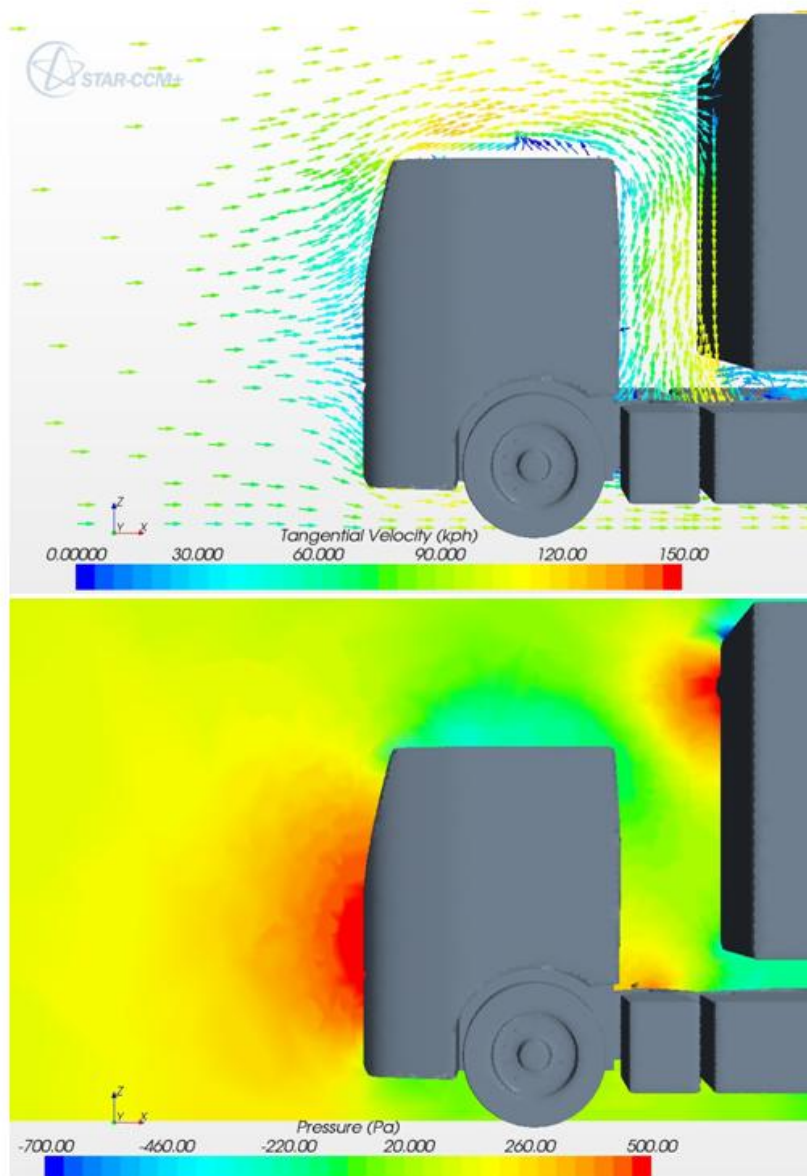
### 6.3. Optimizacija aerodinamičkih dodataka na modelu

Na osnovu prethodno uočenih oblasti na ispitivanom modelu u kojima postoji remećenje toka vazdušne struje, pristupa se kreiranju aerodinamičkih oblika koji će doprineti umanjenoj sili otpora vazduha. Kreiranje aerodinamičkih dodataka na modelu kamiona tegljača i poluprikolice, sprovedeno je u više faza koje su prikazane i objašnjene u okviru ovog dela rada.

#### 6.3.1. Optimizacija aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona

Oblast kabine kamiona je praćena raznim aerodinamičkim fenomenima koji značajno utiču na performanse kamiona. Čeonu stranu kabine kamiona ima nepovoljan oblik sa aspekta aerodinamike, jer sa oblikom koji je veoma sličan kvadru velikih dimenzija i ostrim ivicama, teško se probija kroz vazдушnu struju, odnosno prolaskom kroz nju značajno narušava njeno prethodno nenarušeno stanje. Na slici 6.23 je dat prikaz polja brzine i pritiska oko kabine kamiona. U oblasti iznad kabine kamiona dolazi do povećanja brzine vazdušne struje, početka njenog vrtloženja i odvajanja od kabine modela. Povećanje brzine je praćeno smanjenjem pritiska. Veliki deo vazdušne struje je usmeren direktno u čeonu stranu

poluprikolice, što značajno povećava silu otpora. Vazдушna struja koja se odbije od poluprikolice, u velikoj meri se povija na dole i ulazi u oblast iza kabine kamiona.



Slika 6.23 - Polje brzine i pritiska oko kabine kamiona

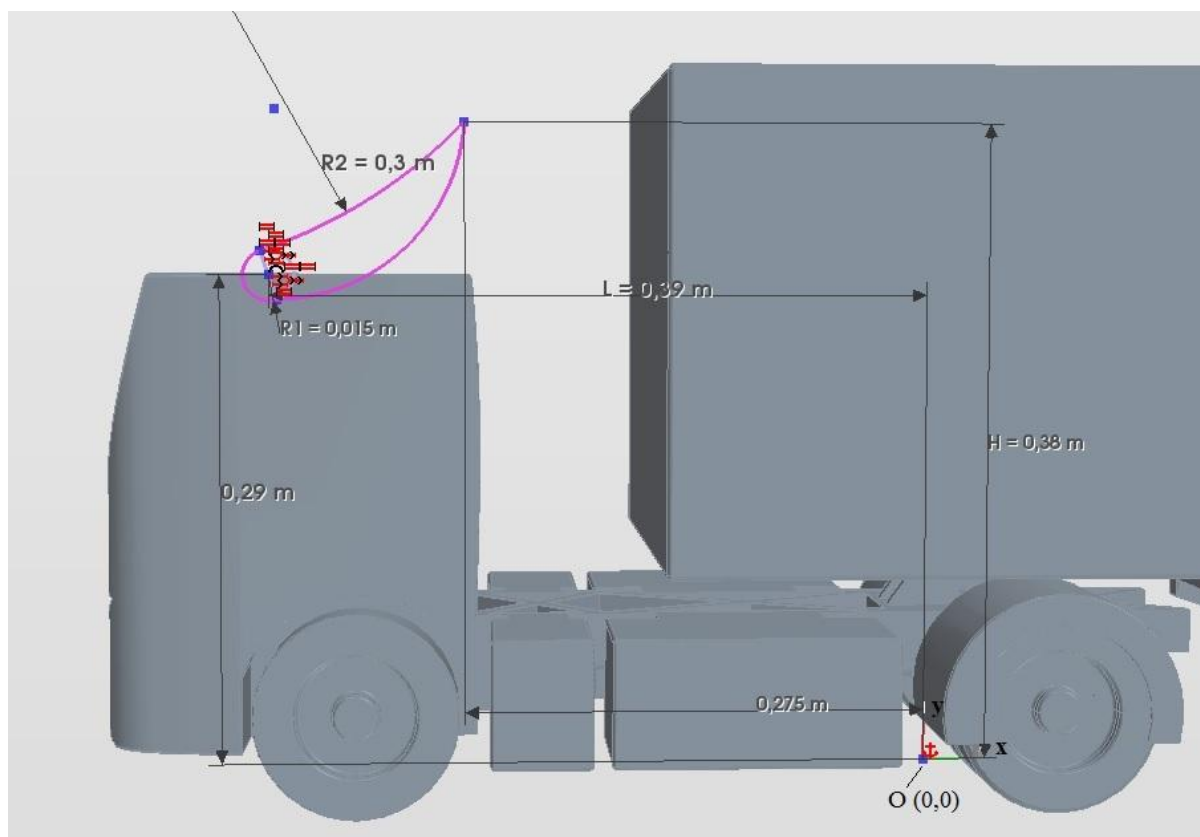
Uloga aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona je pre svega da preusmeri tok vazdušne struje, kako bi se umanjilo njeno prostiranje iza kabine i direktnog naletanja na čeonu stranu poluprikolice.

#### Upotreba aeroprofila za kreiranje osnovnog oblika aerodinamičkog dodatka

Kao što je prikazano u prethodnim poglavljima rada, aeroprofil ima veliku ulogu u aerodinamici. Osim uloge stvaranja sile uzgona, koja nije od uticaja u ovom radu, aeroprofil predstavlja veoma korisno rešenje kada je reč o pravilnom usmerenju i vođenju vazdušne struje. Kreiranje osnovnog oblika aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona je urađeno u okviru CFD softvera, odnosno u njegovom delu koji se naziva 3d-CAD Geomerty. U ovom delu softvera je moguće kreirati 3d CAD modele na kojima se vrši dalje CFD testiranje. Osnovni model kamiona i poluprikolice je ipak urađen u Catia V5 softveru zato što



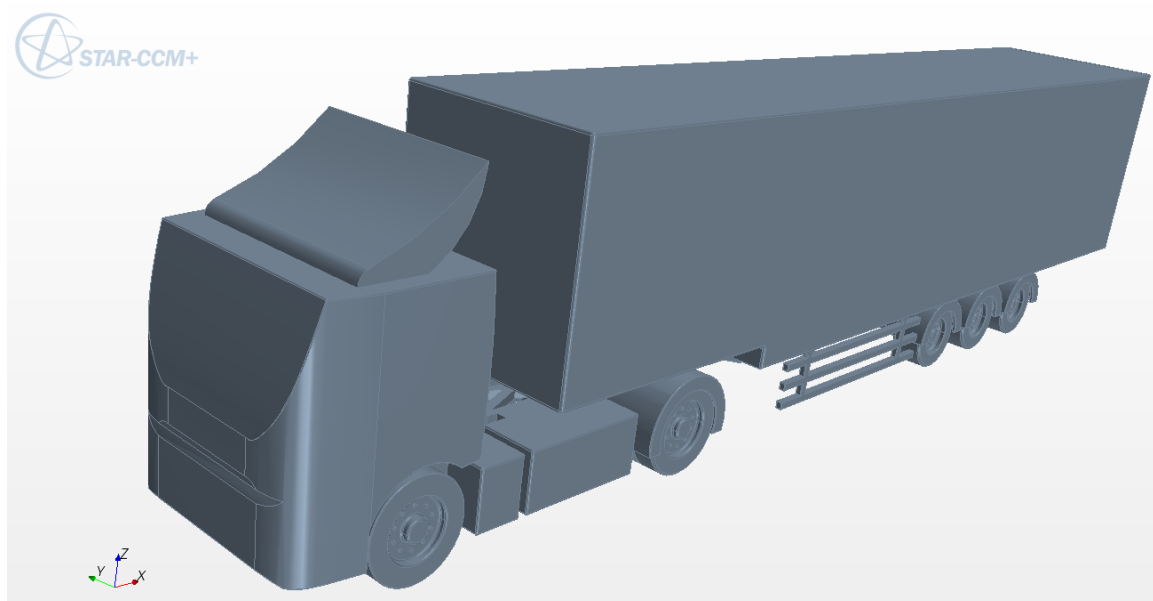
predstavlja komplikovaniji model, koji bi predstavljao poteškoću za kreiranje u CFD softveru direktno. Razlog zbog čega se kreiranje dodatka vrši u CFD softveru je brza mogućnost modifikacije preko parametrizacije o čemu će biti reči u nastavku. Na osnovni model kamiona i poluprikolice je izvršeno kreiranje skice osnovnog dodatka na kabini preko aeroprofila. Na slici 6.24 je prikazano postavljanje osnovnog oblika dodatka na kabini modela kamiona i njegovo osnovno dimenzionisanje.



Slika 6.24 - Geometrijski oblik osnovnog aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona

Kreirani oblik dodatka na kabini kamiona ima oblik asimetričnog aeroprofila. Neki od parametara su usvojeni i ne menjaju se tokom eksperimenta, poput visine centra kružnice (radijusa) napadnog ugla od 0,29 m i horizontalno rastojanje vrha aeroprofila od tačke O u vrednosti od 0,275 m. Tačka O ima koordinate (0,0). Prethodno pomenuti geometrijski parametri su usvojeni na osnovu graničnih uslova prostiranja aerodinamičkog dodatka na kabini, a da se pri tome ne naruši geometrijski oblik osnovnog modela, kao i da se ne izađe iz gabaritnih dimenzija osnovnog modela. Osim pomenutih konstantnih vrednosti, dodatak na kabini kamiona u obliku aeroprofila definišu četiri osnovna parametra, sa slike 6.24 označeni kao L, H, R1 i R2. Parametar L predstavlja rastojanje centra kružnice napadnog ugla aeroprofila i tačke O. Njegova vrednost se može naknadno podešavati zato što je parametarsku definisana. Nulta vrednost parametra L iznosi 0,39 m. Sledeći parametar koji opisuje geometriju aeroprofila je H koji predstavlja vertikalno rastojanje vrha aeroprofila i tačke O. H je takođe parametarski definisan i njegova nulta vrednost iznosi 0,38 m. Treći parametar je R1 koji predstavlja poluprečnik kružnice napadnog ugla i parametarski je definisan sa nultom vrednošću od 0,015 m. Poslednji parametar je R2 i predstavlja poluprečnik gornje ivice aeroprofila. Definisan je parametarski sa nultom vrednošću od 0,3 m. Osnovnim podešavanjem parametara kao na slici 6.24 pristupa se kreiranju punog profila sa konturom zadatom preko parametara. To se vrši "izvlačenjem" konture (*eng. extrude*). Sa

aspenta širine kabine kamiona, usvojena je jedna vrednost širine dodatka na kabini kamiona od 0,22 m i nije se menjala tokom procesa optimizacije. Kreiranjem dodatka na kabini kamiona, dobija se novi oblik ispitivanog modela, koji je prikazan na slici 6.25.



Slika 6.25 - Osnovni oblik aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona

### Potpuno faktorijska optimizacija aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona

Prvi korak prilaska optimalnog obliku aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona predstavlja sprovođenje potpune faktorijske strukture eksperimenta. Potpuna faktorijska struktura se sprovodi sa četiri prethodno parametarski definisana elementa (faktora), H, L, R1 i R2. Svaki od faktora ima mogućnost variranja u dva položaja u odnosu na nulti položaj, što zapravo predstavlja ukupno tri položaja -1, 0 i 1. Postoji četiri parametra sa mogućnošću variranja u tri položaja što zapravo daje  $3^4$  mogućnosti, odnosno 81 eksperimentalni prolaz kako bi potpuni faktorijski uslov bio zadovoljen. Usvojena tri moguća položaja su dovoljna sa aspekta sticanja znanja o uticajnim parametrima i njihovoj međusobnoj interakciji. U tabeli 29 je dat prikaz usvojenih vrednosti parametara za sva tri položaja.

Tabela 29 - Usvojene vrednosti parametara za tri položaja

	L [m]	H [m]	R1 [m]	R2 [m]
<b>-1</b>	0,35	0,35	0,01	0,1
<b>0</b>	0,38	0,39	0,015	0,3
<b>1</b>	0,4	0,42	0,02	0,5

Na osnovu pravilne raspodele potpune faktorijske strukture  $3^4$  formirana je tabelarna šema kombinacija sprovođenja eksperimenta, koja je prikazana kroz tabelu 30. Svaka kombinacija predstavlja drugačiju konfiguraciju parametara što predstavlja kreiranje novog oblika aerodinamičkog dodatka na kabini modela kamiona. Postupak sprovođenja virtuelnog eksperimenta, odnosno CFD simulacije je sledeći. Unošenjem vrednosti podataka koji odgovaraju razmatranoj kombinaciji iz tabele 30 se formira novi geometrijski izgled ispitivanog modela. Svaka izmena parametarskih podataka unutar geometrijskog modela iziskuje kreiranje nove zapraminske mreže modela. Dobijanjem novog razmatranog oblika ispitivanog modela i preko zapreminske mreže, vrši se očitavanje vrednosti novonastale

čeoone površine modela. Ova vrednost se upisuje u softver i služi za izračunavanje koeficijenta otpora vazduha. Postupak podešavanja simulacije je izvršen i pristupa se pokretanju simulacije u dužini od 300 koraka iteracije. Svaka kombinacija zahteva ponavljanje prethodnog postupka u smislu podešavanja parametara, kreiranja geometrijskog i mrežnog modela i puštanja simulacije. U tabeli 30 su osim kombinacija potpune faktorijske strukture, prikazani i dobijeni rezultati simulacija u vidu sile otpora vazduha, koeficijenta otpora vazduha i vrednosti čeoone površine ispitivanog modela. Postupak potpune faktorijske strukture je sproveden za najveću razmatranu brzinu vazdušne struje od 90 km/h.

Tabela 30 - Potpuna faktorijska struktura parametara  $3^4$  za dodatak na kabini kamiona

Potpuna faktorijska struktura					Rezultati simulacije		
Broj kombinacije	L	H	R1	R2	Čeoona površina modela $A [m^2]$	Koeficijent otpora vazduha $c_w [-]$	Sila otpora vazduha $F_w [N]$
1	-1	-1	-1	-1	0,097935	0,942	34,02
2	-1	-1	-1	0	0,097935	0,942	34,01
3	-1	-1	-1	1	0,097934	0,950	34,30
4	-1	-1	0	-1	0,097934	0,934	33,75
5	-1	-1	0	0	0,097934	0,937	33,85
6	-1	-1	0	1	0,097936	0,937	33,85
7	-1	-1	1	-1	0,097935	0,933	33,71
8	-1	-1	1	0	0,097936	0,939	33,92
9	-1	-1	1	1	0,097934	0,938	33,88
10	-1	0	-1	-1	0,097936	0,950	34,32
11	-1	0	-1	0	0,097933	0,931	33,62
12	-1	0	-1	1	0,097937	0,933	33,69
13	-1	0	0	-1	0,097932	0,942	34,02
14	-1	0	0	0	0,097934	0,934	33,73
15	-1	0	0	1	0,097936	0,943	34,06
16	-1	0	1	-1	0,097935	0,913	32,98
17	-1	0	1	0	0,097937	0,948	34,25
18	-1	0	1	1	0,097934	0,952	34,38
19	-1	1	-1	-1	0,097936	0,943	34,07
20	-1	1	-1	0	0,097936	0,929	33,56
21	-1	1	-1	1	0,097934	0,944	34,10
22	-1	1	0	-1	0,097936	0,953	34,42
23	-1	1	0	0	0,097934	0,944	34,10
24	-1	1	0	1	0,097934	0,957	34,57
25	-1	1	1	-1	0,097930	0,966	34,87
26	-1	1	1	0	0,097931	0,957	34,55
27	-1	1	1	1	0,097936	0,967	34,91
28	0	-1	-1	-1	0,097937	1,073	38,74
29	0	-1	-1	0	0,097932	1,033	37,31
30	0	-1	-1	1	0,097935	1,033	37,29
31	0	-1	0	-1	0,097935	1,065	38,44

32	0	-1	0	0	0,097939	1,035	37,38
33	0	-1	0	1	0,097934	1,018	36,77
34	0	-1	1	-1	0,097935	1,071	38,69
35	0	-1	1	0	0,097933	1,033	37,32
36	0	-1	1	1	0,097935	1,022	36,92
37	0	0	-1	-1	0,097937	1,048	37,83
38	0	0	-1	0	0,097934	1,029	37,17
39	0	0	-1	1	0,097934	1,012	36,56
40	0	0	0	-1	0,097936	1,080	38,99
41	0	0	0	0	0,097934	1,023	36,96
42	0	0	0	1	0,097933	0,995	35,95
43	0	0	1	-1	0,097934	1,075	38,82
44	0	0	1	0	0,097934	0,998	36,05
45	0	0	1	1	0,097933	0,989	35,73
46	0	1	-1	-1	0,097933	1,034	37,33
47	0	1	-1	0	0,097933	1,007	36,35
48	0	1	-1	1	0,097937	0,995	35,93
49	0	1	0	-1	0,097934	1,049	37,88
50	0	1	0	0	0,097933	0,991	35,79
51	0	1	0	1	0,097933	0,973	35,13
52	0	1	1	-1	0,097934	1,040	37,55
53	0	1	1	0	0,097930	0,989	35,70
54	0	1	1	1	0,097936	0,955	34,48
55	1	-1	-1	-1	0,097935	1,197	43,24
56	1	-1	-1	0	0,097933	1,157	41,80
57	1	-1	-1	1	0,097934	1,081	39,05
58	1	-1	0	-1	0,097938	1,213	43,79
59	1	-1	0	0	0,097938	1,152	41,61
60	1	-1	0	1	0,097933	1,149	41,51
61	1	-1	1	-1	0,097932	1,182	42,67
62	1	-1	1	0	0,097935	1,160	41,88
63	1	-1	1	1	0,097937	1,128	40,74
64	1	0	-1	-1	0,097937	1,239	44,73
65	1	0	-1	0	0,097933	1,133	40,93
66	1	0	-1	1	0,097935	1,101	39,77
67	1	0	0	-1	0,097935	1,149	41,50
68	1	0	0	0	0,097935	1,107	39,98
69	1	0	0	1	0,097936	1,107	40,00
70	1	0	1	-1	0,097935	1,107	39,98
71	1	0	1	0	0,097935	1,109	40,06
72	1	0	1	1	0,097936	1,091	39,40
73	1	1	-1	-1	0,097931	1,178	42,55
74	1	1	-1	0	0,097933	1,098	39,64
75	1	1	-1	1	0,097936	1,086	39,23

76	1	1	0	-1	0,097934	1,267	45,74
77	1	1	0	0	0,097934	1,267	45,74
78	1	1	0	1	0,097934	1,072	38,70
79	1	1	1	-1	0,097934	1,080	39,02
80	1	1	1	0	0,097932	1,082	39,09
81	1	1	1	1	0,097934	1,064	38,41

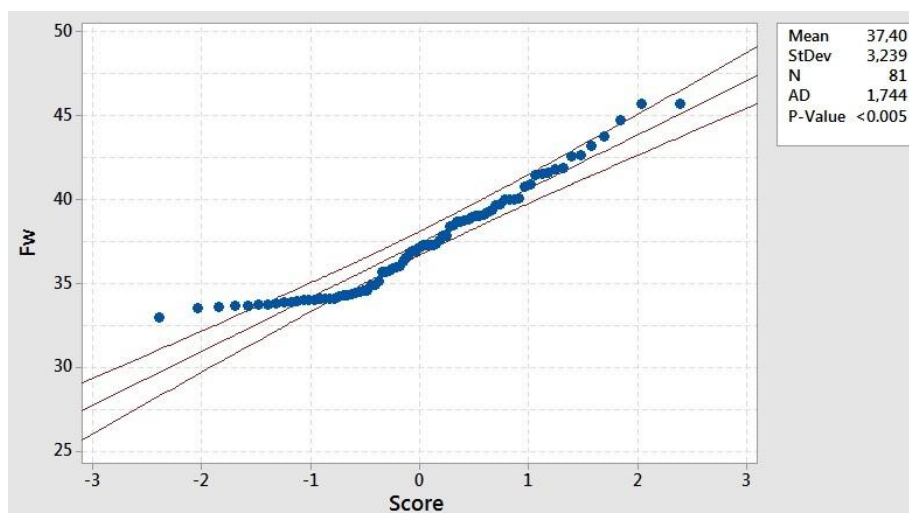
Na osnovu dobijeni rezultata simulacija prikazanih u tabeli 30, pristupa se analizi dobijenih rezultata uz pomoć softvera Minitab 17, koji predstavlja vrlo koristan statistički alat. Iz tabele 30 se može uvideti variranje rezultati simulacija u odnosu na zadatu kombinaciju. Najmanju silu otpora vazduha je ostvarila kombinacija broj 16 sa sledećim izdvojenim podacima:

Broj kombinacije	L	H	R1	R2	Čeona površina modela $A [m^2]$	Koeficijent otpora vazduha $c_w [-]$	Sila otpora vazduha $F_w [N]$
16	-1	0	1	-1	0,097935	0,913	32,98

Sa kombinacijom broj 16 su ostvareni najbolji rezultati simulacije sa vrednošću sile otpora vazduha od 32,98 N. Neophodno je izvršiti analizu dobijenih rezultata, kako bi se utvrdila zavisnost međusofnih faktora i kako bi se uvidelo da li je neka od usvojenih varijacija faktora pogrešna.

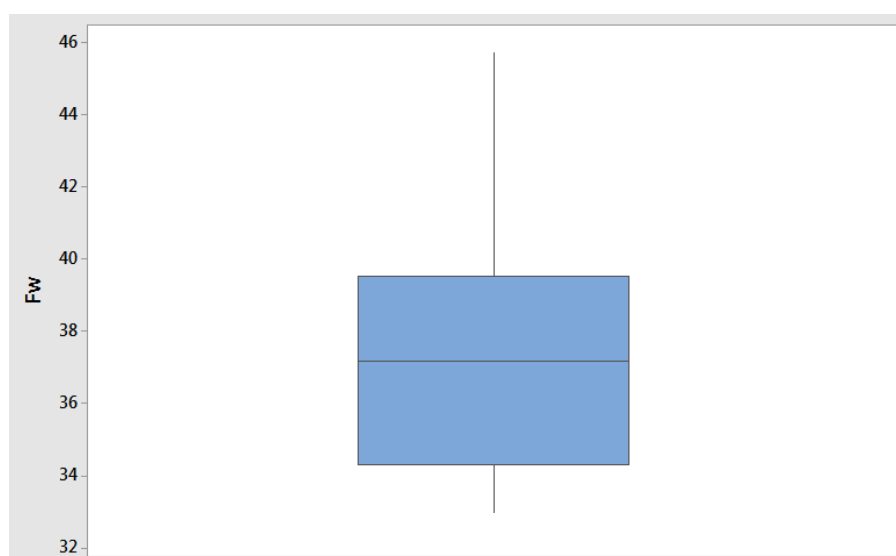
#### Analiza dobijenih rezultata potpune faktorijske strukture

Statistička analiza dobijenih rezultata se vrši uz pomoć softvera Minitab 17. Na početku se unose dobijeni rezultati putem simulacija u statistički softver. Analiza se sprovodi u nekoliko koraka. Prvi korak analize predstavlja sagledavanje dobijenih odgovora sistema prema faktorima i njihovim nivoima. Ovaj korak analize se sprovodi preko statističkih dijagrama. Prvi dijagram predstavlja dijagram verovatnoće (eng. *Normal Probability Plot*). Na osnovu ovog dijagrama se može zaključiti da li analizirani niz podataka zadovoljava normalnu preraspodelu. Na slici 6.26 je dat dijagram normalne preraspodele dobijenih vrednosti sile otpora vazduha.



Slika 6.26 - Dijagram normalne preraspodele sile otpora vazduha

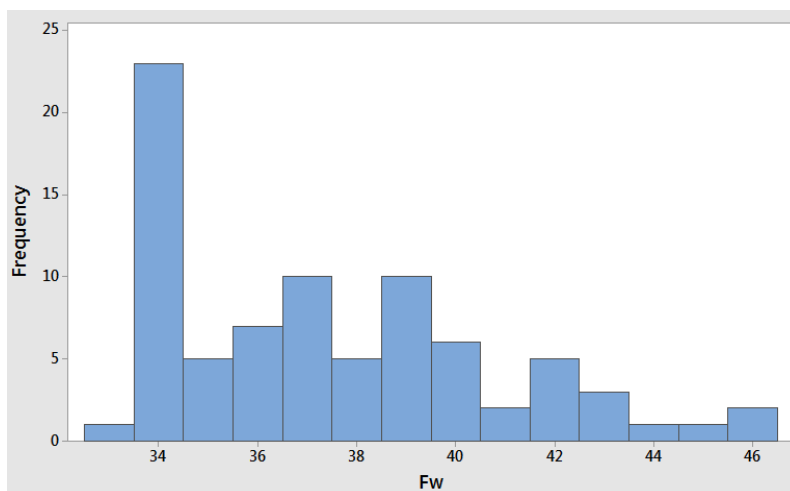
Na slici 6.26 se mogu uočiti plave tačke koje predstavljaju dobijeni niz rezultata sile otpora vazduha. Tri crvene dijagonalne krive predstavljaju teorijsku preraspodelu u odnosu na koju se vrši poređenje dobijenih vrednosti. Rezultati sa dijagrama predstavljaju srednju vrednost niza dobijenih rezultata sile otpora vazduha od 37,40 N (*eng. Mean*), vrednost standardnog odstupanja od 3,239% (*eng. StDev*), broj vrednosti koje sačinjavaju analizirani niz podataka od 81 (*eng. N*), površina između srednje dijagonalne krive i empirijski kreirane krive od dobijenih rezultata u iznosu 1,744 (*eng. AD*) i P-vrednost koja je manja od 0,005 (*eng. P-Value*). Na osnovu P-vrednosti se može zaključiti da li je analizirani podatak ili niz podataka statistički značajni. Ukoliko je P-vrednost manja od teorijski zadate P-vrednosti od 0,05 za podatak ili niz podataka se može reći da su značajni za analizu. Sledeći korak analize predstavlja prikazivanje niza dobijenih vrednosti sile otpora vazduha preko kutijastog dijagrama (*eng. Boxplot*), koji se koristi za prikazivanje učestalosti rezultata u odnosu na njihovu srednju vrednost. Na slici 6.27 je prikazan kutijasti dijagram dobijenih rezultata sile otpora vazduha.



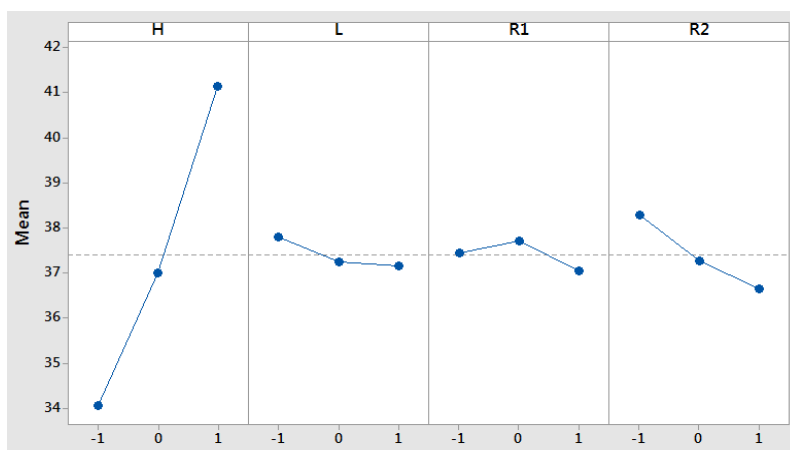
Slika 6.27 - Kutijasti dijagram dobijenih rezultata sile otpora vazduha

Na kutijastom dijagramu sa slike 6.27 se može uočiti horizontalna linija u sredini plavog pravugaonika. Ona predstavlja *Median* srednju vrednost niza podataka sile otpora vazduha. U odnosu na nju se gleda koliko podataka iz niza odstupa u rasponu od 25 do 75%, koji i predstavlja vertikalne granice plavugaonika. Vertikalne linije ispod i iznad pravugaonika predstavljaju minimalnu i maksimalnu vrednost niza analiziranih podataka. Učestalost dobijenih podataka se može prikazati i preko histograma. Na njemu se može uočiti koliko podataka iz niza ima približnu vrednost i odrediti kojoj grupi podataka je niz naklonjen. Na slici 6.28 se može videti histogram podataka sile otpora vazduha. Sa slike histograma se može videti zastupljenost podataka tokom kompletnog rastojanja podataka sa značajnom učestalošću oko vrednosti sile otpora vazduha od 34 N. Čak 23 kombinacije su prikazale vrednost oko 34 N. Ovo upućuje da eksperiment više naklonjen nižim vrednostima sile otpora vazduha, što je svakako veoma dobro. Veoma bitan korak analize predstavlja grafik zastupljenosti faktora i njihovih nivoa u dobijanju rezultata. Na slici 6.29 se može videti grafik zastupljenosti faktora. Ovim grafikom se može uočiti koji od faktora najviše utiče na ishod eksperimenta i koji od nivoa faktora teži postizanju rezultata koji su bitni sa aspekta eksperimenta. Takođe ukoliko neki faktor veoma malo utiče na rezultat, na osnovu ovog dijagrama se može isključiti iz daljeg toka analize. Sa slike 6.29 se može uvideti velika dominacija faktora H u odnosu na ostale faktore. To znači da on najviše utiče na rezultate

eksperimenta i da se treba obratiti posebna pažnja na njega. Ostali faktori manje utiču na rezultate eksperimenta, ali zbog velike sličnosti se ne mogu isključiti iz daljeg toka analize.



Slika 6.28 - Histogram dobijenih rezultata sile otpora vazduha



Slika 6.29 - Grafik zastupljenosti faktora i nivoa

Na osnovu ovakvog dijagrama kao sa slike 6.29 se mogu predvideti u koju stranu treba pregrupisati nivoe faktora, kako bi se rezultati pomerili u željenu stranu. Kod faktora H je jasno uočena veza nižih rezultata sile optora vazduha sa nižom vrednošću nivoa. Ostali faktori pokazuju da je postizanje niže vrednosti sile otpora vazduha karakteristično kod njihovih srednjih i viših nivoa.

#### *Analiza uticajnih faktora i kreiranje teorijskog modela*

Uticaj glavnih faktora, kao i njihova međusobna interakcija je veoma bitan deo analize jer daje kompletnu sliku njihovog pojedinačnog i međusobnog uticaja na dobijanje odgovora sistema. Teorijski model predstavlja funkciju koja opisuje eksperiment. Teorijski model u slučaju potpune faktorijske strukture  $3^4$  objedinjuje glavnu srednju vrednost, glavne efekte faktora, interakciju faktora drugog reda, interakciju faktora trećeg reda, interakciju faktora četvrtog reda i grešku. Za slučaj potpune faktorijske strukture  $3^4$  faktora H, L, R1 i R2, teorijski model ima oblik:

$$\begin{aligned}
 & \beta_0 + && \text{Glavna srednja} \\
 & +\beta_H H + \beta_L L + \beta_{R1} R1 + \beta_{R2} R2 + && \text{vrednost} \\
 & +\beta_{HL} HL + \beta_{HR1} HR1 + \beta_{HR2} HR2 + \beta_{LR1} LR1 + \beta_{LR2} LR2 + \beta_{R1R2} R1R2 + && \text{Glavni faktori} \\
 y = & +\beta_{HLR1} HLR1 + \beta_{HLR2} HLR2 + \beta_{HR1R2} HR1R2 + \beta_{LR1R2} LR1R2 + && \text{Interakcija 2.} \\
 & +\beta_{HLR1R2} HLR1R2 + && \text{reda} \\
 & +\epsilon && \text{Interakcija 3.} \\
 & && \text{reda} \\
 & && \text{Interakcija 4.} \\
 & && \text{reda} \\
 & && \text{Greška}
 \end{aligned}$$

Uz svaki razmatrani faktor, stoji i njegov koeficijent koji se izračunava kao nagib krive funkcije koja opisuje taj faktor. U tabeli 31 je dat prikaz glavnih faktora, njihovih interakcija i procentualne zastupljenosti u eksperimentu. Podaci su dobijeni statističkim softverom Minitab 17.

Tabela 31 - Zastupljenost glavni faktora i interakcije u modelu

Izvor	Stepen slobode	Zbir kvadrata	Zastupljenost
Ukupan model	80	839,343	100,00%
Linearni model	8	733,465	87,39%
H	2	683,720	81,46%
L	2	6,404	0,76%
R1	2	6,276	0,75%
R2	2	37,065	4,42%
Interakcija 2. reda	24	57,656	6,87%
H*L	4	10,230	1,22%
H*R1	4	11,255	1,34%
H*R2	4	24,662	2,94%
L*R1	4	7,143	0,85%
L*R2	4	1,365	0,16%
R1*R2	4	3,001	0,36%
Interakcija 3. reda	32	34,359	4,09%
H*L*R1	8	17,059	2,03%
H*L*R2	8	3,056	0,36%
H*R1*R2	8	9,058	1,08%
L*R1*R2	8	5,186	0,62%
Interakcija 4. reda	16	13,864	1,65%
H*L*R1*R2	16	13,864	1,65%
Greška	0	*	*
Ukupno	80	839,343	100,00%

Na osnovu tabele 31 se može zaključiti da faktor H ima najveći uticaj na ishod eksperimenta i gde god se H pojavljuje kao član interakcije, ta kombinacija ima veliki procentualni udeo u kreiranju eksperimentalnih rezultata. Na osnovu zastupljenosti faktora i njihovih interakcija moguće je kreirati teorijsku funkciju modela. Pošto je u pitanju potpuna faktorijska struktura u kojoj su sve eksperimentalne kombinacije razmatrane, proverom  $R^2$  kvadratnog odstupanja



teorijskog modela funkcije od stvarno dobijenih rezultata simulacije se dobija idealno poklapanje, odnosno  $R^2 = 1$ .

Količina koeficijenata  $\beta$  iz teorijske funkcije modela je veoma velika zbog potpune faktorijske strukture, zato što se koeficijenti izračunavaju za sve faktore, njihove interakcije i sve nivoe. Ukupan broj izračunatih vrednosti koeficijenata  $\beta$  u svrhu dobijanja teorijske funkcije potpune faktorijske strukture  $3^4$  faktora iznosi 255, koji su prikazani u okviru tabele 32.

Tabela 32 - Vrednost koeficijenata  $\beta$  u zavisnosti od faktora

Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$
<b>H</b>		1 1	-0.2921	-1 0 1	-0.1221	-1 0 0	-0.2476	0 -1 0 0	0.4028
-1	-3.343	<b>L*R2</b>		-1 1 -1	0.03155	-1 0 1	0.3671	0 -1 0 1	-0.3077
0	-0.3966	-1 -1	-0.1176	-1 1 0	-0.3121	-1 1 -1	0.1730	0 -1 1 -1	-0.3983
1	3.740	-1 0	0.008776	-1 1 1	0.2806	-1 1 0	0.005598	0 -1 1 0	0.1034
<b>L</b>		-1 1	0.1088	0 -1 -1	-0.1604	-1 1 1	-0.1786	0 -1 1 1	0.2950
-1	0.3952	0 -1	0.007415	0 -1 0	0.01004	0 -1 -1	0.2431	0 0 -1 -1	-0.5787
0	-0.1599	0 0	-0.1409	0 -1 1	0.1504	0 -1 0	0.05118	0 0 -1 0	0.2165
1	-0.2354	0 1	0.1335	0 0 -1	0.1729	0 -1 1	-0.2943	0 0 -1 1	0.3622
<b>R1</b>		1 -1	0.1101	0 0 0	0.08085	0 0 -1	-0.09322	0 0 0 -1	0.1995
-1	0.05129	1 0	0.1321	0 0 1	-0.2538	0 0 0	-0.1850	0 0 0 0	0.2251
0	0.3124	1 1	-0.2423	0 1 -1	-0.01250	0 0 1	0.2782	0 0 0 1	-0.4246
1	-0.3636	<b>R1*R2</b>		0 1 0	-0.09089	0 1 -1	-0.1499	0 0 1 -1	0.3792
<b>R2</b>		-1 -1	0.2023	0 1 1	0.1034	0 1 0	0.1338	0 0 1 0	-0.4416
-1	0.8845	-1 0	-0.1684	1 -1 -1	0.1020	0 1 1	0.01611	0 0 1 1	0.06240
0	-0.1265	-1 1	-0.03399	1 -1 0	-0.1101	1 -1 -1	-0.1895	0 1 -1 -1	0.08526
1	-0.7579	0 -1	0.1304	1 -1 1	0.008104	1 -1 0	-0.2932	0 1 -1 0	0.2897
<b>H*L</b>		0 0	0.09780	1 0 -1	-0.08297	1 -1 1	0.4827	0 1 -1 1	-0.3750
-1 -1	-0.5306	0 1	-0.2282	1 0 0	-0.2929	1 0 -1	0.2126	0 1 0 -1	-0.1045
-1 0	-0.000778	1 -1	-0.3327	1 0 1	0.3759	1 0 0	0.4326	0 1 0 0	-0.6279
-1 1	0.5314	1 0	0.07056	1 1 -1	-0.01904	1 0 1	-0.6453	0 1 0 1	0.7324
0 -1	0.2551	1 1	0.2621	1 1 0	0.4030	1 1 -1	-0.02313	0 1 1 -1	0.01919
0 0	0.2750	<b>H*L*R1</b>		1 1 1	-0.3840	1 1 0	-0.1394	0 1 1 0	0.3382
0 1	-0.5301	-1 -1 -1	0.3728	<b>H*R1*R2</b>		1 1 1	0.1625	0 1 1 1	-0.3574
1 -1	0.2754	-1 -1 0	0.1345	-1 -1 -1	0.006055	<b>H*L*R1*R2</b>		1 -1 -1 -1	-0.3432
1 0	-0.2742	-1 -1 1	-0.5073	-1 -1 0	0.03309	-1 -1 -1 -1	-0.1502	1 -1 -1 0	0.7190
1 1	-0.001252	-1 0 -1	-0.2629	-1 -1 1	-0.03915	-1 -1 -1 0	-0.2129	1 -1 -1 1	-0.3758
<b>H*R1</b>		-1 0 0	0.3680	-1 0 -1	-0.06725	-1 -1 -1 1	0.3631	1 -1 0 -1	0.01057
-1 -1	-0.1408	-1 0 1	-0.1051	-1 0 0	-0.1420	-1 -1 0 -1	0.08451	1 -1 0 0	-0.7235
-1 0	-0.3290	-1 1 -1	-0.1098	-1 0 1	0.2092	-1 -1 0 0	0.3207	1 -1 0 1	0.7130
-1 1	0.4698	-1 1 0	-0.5025	-1 1 -1	0.06119	-1 -1 0 1	-0.4052	1 -1 1 -1	0.3326
0 -1	0.1155	-1 1 1	0.6123	-1 1 0	0.1089	-1 -1 1 -1	0.06571	1 -1 1 0	0.004501
0 0	-0.2827	0 -1 -1	0.05654	-1 1 1	-0.1701	-1 -1 1 0	-0.1079	1 -1 1 1	-0.3371
0 1	0.1672	0 -1 0	0.07298	0 -1 -1	-0.6543	-1 -1 1 1	0.04215	1 0 -1 -1	0.4622
1 -1	0.02523	0 -1 1	-0.1295	0 -1 0	0.2772	-1 0 -1 -1	0.1165	1 0 -1 0	-0.06950
1 0	0.6117	0 0 -1	-0.4297	0 -1 1	0.3770	-1 0 -1 0	-0.1470	1 0 -1 1	-0.3927

1 1	-0.6370	0 0 0	0.4589	0 0 -1	0.02410	-1 0 -1 1	0.03049	1 0 0 -1	-0.4357
<b>H*R2</b>		0 0 1	-0.02914	0 0 0	-0.08771	-1 0 0 -1	0.2361	1 0 0 0	-0.2740
-1 -1	-0.9228	0 1 -1	0.3732	0 0 1	0.06361	-1 0 0 0	0.04887	1 0 0 1	0.7096
-1 0	0.02689	0 1 0	-0.5318	0 1 -1	0.6302	-1 0 0 1	-0.2850	1 0 1 -1	-0.02654
-1 1	0.8959	0 1 1	0.1587	0 1 0	-0.1895	-1 0 1 -1	-0.3526	1 0 1 0	0.3435
0 -1	0.3651	1 -1 -1	-0.4293	0 1 1	-0.4406	-1 0 1 0	0.09809	1 0 1 1	-0.3169
0 0	-0.2051	1 -1 0	-0.2075	1 -1 -1	0.6482	-1 0 1 1	0.2545	1 1 -1 -1	-0.1190
0 1	-0.1600	1 -1 1	0.6368	1 -1 0	-0.3103	-1 1 -1 -1	0.03375	1 1 -1 0	-0.6495
1 -1	0.5576	1 0 -1	0.6927	1 -1 1	-0.3379	-1 1 -1 0	0.3598	1 1 -1 1	0.7685
1 0	0.1782	1 0 0	-0.8269	1 0 -1	0.04315	-1 1 -1 1	-0.3936	1 1 0 -1	0.4251
1 1	-0.7359	1 0 1	0.1342	1 0 0	0.2297	-1 1 0 -1	-0.3207	1 1 0 0	0.9975
<b>L*R1</b>		1 1 -1	-0.2634	1 0 1	-0.2728	-1 1 0 0	-0.3696	1 1 0 1	-1.423
-1 -1	-0.09393	1 1 0	1.034	1 1 -1	-0.6914	-1 1 0 1	0.6903	1 1 1 -1	-0.3061
-1 0	-0.2233	1 1 1	-0.7710	1 1 0	0.08064	-1 1 1 -1	0.2869	1 1 1 0	-0.3480
-1 1	0.3172	<b>H*L*R2</b>		1 1 1	0.6107	-1 1 1 0	0.009770	1 1 1 1	0.6541
0 -1	0.3342	-1 -1 -1	0.05839	<b>L*R1*R2</b>		-1 1 1 1	-0.2967		
0 0	-0.3091	-1 -1 0	0.1001	-1 -1 -1	-0.05360	0 -1 -1 -1	0.4934		
0 1	-0.02509	-1 -1 1	-0.1585	-1 -1 0	0.2420	0 -1 -1 0	-0.5062		
1 -1	-0.2403	-1 0 -1	-0.08994	-1 -1 1	-0.1885	0 -1 -1 1	0.01274		
1 0	0.5324	-1 0 0	0.2120	-1 0 -1	-0.1194	0 -1 0 -1	-0.09508		

### Zaključak potpune faktorijske strukture

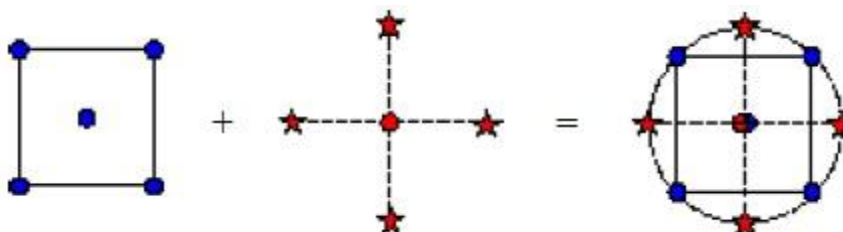
Sprovedenjem potpune faktorijske strukture eksperimenta za četiri geometrijska faktora koji imaju mogućnost variranja na tri nivoa, dobija se količina od 81 urađenog eksperimenta. Zahvaljujući potpunoj faktorijskoj strukturi, dobila se teorijski idealna funkcija koja opisuje eksperiment 100%. Dobijena je eksperimentalna kombinacija geometrijskog podešavanja aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona koja obezbeđuje najmanju vrednost sile otpora vazduha. Nameće se pitanje da li je moguće postići još bolji rezultat uz manji broj postavljenih eksperimenata. Takođe potpunom faktorijskom strukturom je moguće dobiti kombinaciju koja se sastoji samo od celobrojnih usvojenim vrednosti parametara koji odgovaraju -1, 0 i 1. Tako da se ne može sa sigurnošću utvrditi da li kombinacija neke vrednosti između npr. 0 i 1 bi dala još bolji konačni rezultat.

### Metoda odgovorne površine u svrhu optimizacije aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona

Na osnovu prethodno sprovedene potpuno faktorijske strukture se došlo do zaključka da su svi faktori H, L, R1 i R2 bitni za sprovođenje eksperimenta sa naglašenom važnošću faktora H. Utvrđeno je da bi bilo veoma korisno sprovesti novi niz eksperimenata sa blago pomerenim vrednostima faktora. Osim pomeranja faktora, bilo bi poželjno uključiti više nivoa faktora, kako bi se što preciznije odredila najbolja kombinacija za kreiranje još niže vrednosti sile otpora vazduha. Povećavajući broj nivoa faktora sa 3 na 5, dobija se potpuna faktorijska struktura u obliku  $5^4$  što predstavlja 625 zasebnih eksperimenata. Ovo svakako predstavlja preveliki broj eksperimenata i pristupa se kreiranju nove strukture eksperimenta preko metode odgovorne površine.

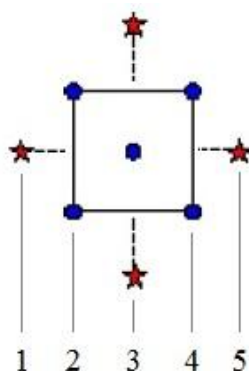
### Postavljanje metode odgovorne površine

Metoda odgovorne površine - MOP se sprovodi na više načina, koji su objašnjeni u prethodnim poglavljima rada. Postupak, ili metoda koja se sprovedena u ovom delu rada je tzv. Centralna kompozitna metoda - CKM. Ono što je doprinelo usvajanju ove metode je njena mogućnost da radi sa većim brojem faktora, koji takođe mogu da variraju na veći broj nivoa. U ovom slučaju je potrebno kreirati CKM tako da postoji četiri faktora koji variraju na pet nivoa. Podešavanje CKM se svodi na usvajanje minimalne i maksimalne vrednosti nivoa za svaki od faktora, centralne vrednosti i vrednosti koeficijenta  $\alpha$ , šematski prikazano na slici 6.30.



Slika 6.30 - Centralna kompozitna metoda [74]

Slika 6.30 predstavlja šematsko prikazivanje uzorkovanja za dva faktora pomoću CKM. Plave tačke u uglovima kvadrata predstavljaju minimalnu i maksimalnu vrednost nivoa faktora. Plava centralna tačka kvadrata predstavlja centralnu tačku eksperimenta (nultu vrednost). Crvene zvezdice predstavljaju koeficijent  $\alpha$  sa čijom vrednošću se podešava udaljenost zvezdica od centralne tačke. Takođe se može primetiti da i druga šema ima svoju crvenu centralnu tačku. Spajanjem ova dva postupka dobija se Centralna kompozitna metoda uzorkovanja, prikazana kao desna šema slike 6.30. Za tri razmatrana faktora desna šema sa slike 6.30 dobija oblik kocke dodavanjem još jednog kvadrata sa centralnom tačkom i zvezdicama. Za četiri faktora se oko kocke za tri faktora dodaje još jedna kocka sa svojim plavim i crvenim tačkama i zvezdicama. Dobijanje pet nivoa za svaki od faktora se postiže podešavanjem vrednosti minimalnog i maksimalnog nivoa faktora, vrednosti centralne (nulte) tačke i koeficijenta  $\alpha$ . Kako bi se dobilo pet nivoa sa linearnim porastom, potrebno je parametre podesiti tako što se kreće od minimalne i maksimalne vrednosti nivoa faktora, koji se podese na vrednosti 2 i 4. Centralna tačka se podisi da ima vrednost 3, a koeficijent udaljenosti od centralne tačke  $\alpha$  na vrednost 2. Sa tim se dobije niz od pet brojeva sa konstantnim porastom koji predstavljaju pet linearnih nivoa faktora. Nivoi su šematski prikazani na slici 6.31 i u okviru ovog dela su označeni sa 1-5.



Slika 6.31 - Šematski prikaz pet nivoa faktora

Usvajanje geometrijskih vrednosti parametara H, L, R1 i R2 je izvršeno na osnovu zastupljenosti faktora u potpunoj faktorijskog strukturi. Ukoliko bi faktor pokazao najveću zastupljenost oko npr. -1 u potpunoj faktorijskoj strukturi, usvajanje vrednosti je izvršeno prema geometrijskog vrednosti koja odgovara nivou -1 iz potpune strukture. Tako da je izvršeno kreiranje novih pet vrednosti koje su grupisane oko zastupljene vrednosti iz potpune strukture. U tabeli 33 su prikazane usvojene vrednosti parametara za pet nivooa.

Tabela 33 - Usvojene vrednosti parametara za pet nivooa

Nivo	Parametar			
	H [m]	L [m]	R1 [m]	R2 [m]
1	0,34	0,38	0,01	0,3
2	0,35	0,39	0,015	0,4
3	0,36	0,40	0,02	0,5
4	0,37	0,41	0,025	0,6
5	0,38	0,42	0,03	0,7

Kao što je već prethodno rečeno, ukoliko bi se radila potpuna faktorijska struktura za  $5^4$  bilo bi potrebno 625 eksperimenata. Zahvaljujući MOP i CKM broj eksperimentalnih prolaza je sveden na 31 u konfiguracijama kao u tabeli 34. Takođe u tabeli 34 su dati rezultati simulacija prema definisanim konfiguracijama.

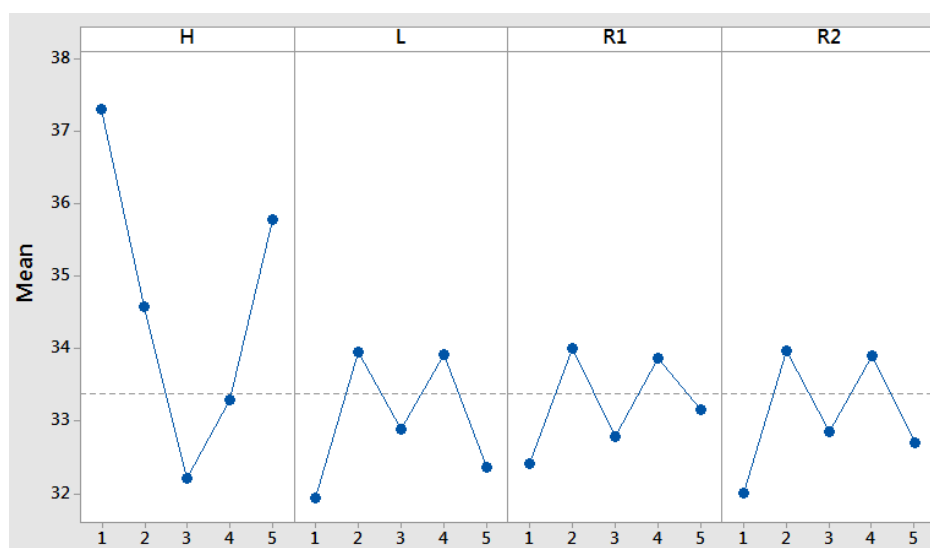
Tabela 34 - Metoda odgovorne površine za dodatak na kabini kamiona

Broj kombinacije	Metoda odgovorne površine				Rezultati simulacije		
	H	L	R1	R2	Čeona površina modela A [m <sup>2</sup> ]	Koeficijent otpora vazduha $c_w$ [-]	Sila otpora vazduha $F_w$ [N]
1	2	2	2	2	0,097935	0,945	34,11
2	4	2	2	2	0,097932	0,943	34,06
3	2	4	2	2	0,097934	0,948	34,23
4	4	4	2	2	0,097937	0,936	33,79
5	2	2	4	2	0,097936	0,966	34,88
6	4	2	4	2	0,097932	0,917	33,10
7	2	4	4	2	0,097934	0,970	35,03
8	4	4	4	2	0,097936	0,901	32,55
9	2	2	2	4	0,097935	0,946	34,15
10	4	2	2	4	0,097930	0,940	33,95
11	2	4	2	4	0,097937	0,949	34,26
12	4	4	2	4	0,097934	0,926	33,45
13	2	2	4	4	0,097935	0,962	34,74
14	4	2	4	4	0,097937	0,904	32,64
15	2	4	4	4	0,097936	0,977	35,26
16	4	4	4	4	0,097934	0,908	32,79
17	1	3	3	3	0,097933	1,033	37,32
18	5	3	3	3	0,097939	0,991	35,78
19	3	1	3	3	0,097938	0,884	31,93
20	3	5	3	3	0,097934	0,896	32,36

21	3	3	1	3	0,097936	0,897	32,41
22	3	3	5	3	0,097935	0,918	33,15
23	3	3	3	1	0,097936	0,886	31,99
24	3	3	3	5	0,097933	0,905	32,69
25	3	3	3	3	0,097934	0,887	32,03
26	3	3	3	3	0,097934	0,887	32,03
27	3	3	3	3	0,097934	0,887	32,03
28	3	3	3	3	0,097934	0,887	32,03
29	3	3	3	3	0,097934	0,887	32,03
30	3	3	3	3	0,097934	0,887	32,03
31	3	3	3	3	0,097934	0,887	32,03

### Analiza dobijenih rezultata

Na osnovu dobijenih rezultata simulacija prikazanih u tabeli 34 se može zaključiti da rezultati variraju u dosta manjem opsegu. Već sa ovim korakom se dobija nova geometrijska konfiguracija dodatka na kabini kamiona koja je obezbedila silu od 31,93 N što je za 1 N bolje nego u potpunoj faktorijskoj strukturi. Zbog načina kreiranja ovog tipa MOP postoji veći broj centralnih tačaka koje se poklapaju u konfiguraciji i zbog toga poslednjih 7 kombinacija su iste i sastoje se od svih parametara postavljenih u centralni (nulti) položaj. Zbog toga su poslednjih 7 rezultata jednakih. Grafik zastupljenosti faktora je prikazan na slici 6.32.



Slika 6.32 - Zastupljenost glavnih faktora

Sa slike 6.32 se može zaključiti da parametar H daje najmanju vrednost sile otpora vazduha pri njegovoj srednjoj vrednosti. Ostali parametari manje utiču na vrednost sile otpora vazduha, pa je njihova tačna vrednost dobijena preko teorijskog modela.

### Analiza uticajnih faktora i kreiranje teorijskog modela

Analiza uticajnih faktora je urađena za glavne faktore i njihovu interakciju 2. reda. Sa ovim postupkom se dobio teorijski model koji odstupa od stvarnog modela za 4,2%, odnosno poklapanje  $R^2 = 95,8\%$ . Za razliku od potpune strukture, u ovom slučaju analiza modela i

teorijski model se dobija uz pomoć kvadratne funkcije, tj. funkcije 2. reda. Veoma dobro poklapanje teorijskog modela uz značajno smanjenje broja uticajnih elemenata i broja koeficijenata  $\beta$  u teorijskom modelu. Zastupljenost uticajnih faktora i njihove interakcije 2. reda su prikazane u tabeli 35.

Tabela 35 - Zastupljenost faktora i interakcije

Izvor	Stepen slobode	Zbir kvadrata	Zastupljenost
Ukupan model	14	53,887	95,80%
Linearni model	4	7,5656	13,45%
H	1	7,5078	13,35%
L	1	0,0148	0,03%
R1	1	0,0094	0,02%
R2	1	0,0336	0,06%
Kvadratni model	4	42,569	75,68%
H*H	1	39,8636	70,87%
L*L	1	0,1405	0,25%
R1*R1	1	1,8342	3,26%
R2*R2	1	0,7307	1,30%
Interakcija 2. reda	6	3,7524	6,67%
H*L	1	0,2667	0,47%
H*R1	1	3,3527	5,96%
H*R2	1	0,0438	0,08%
L*R1	1	0,0421	0,07%
L*R2	1	0,0431	0,08%
R1*R2	1	0,0041	0,01%
Greška	10	2,3636	4,20%
Ukupno	24	56,2506	100,00%

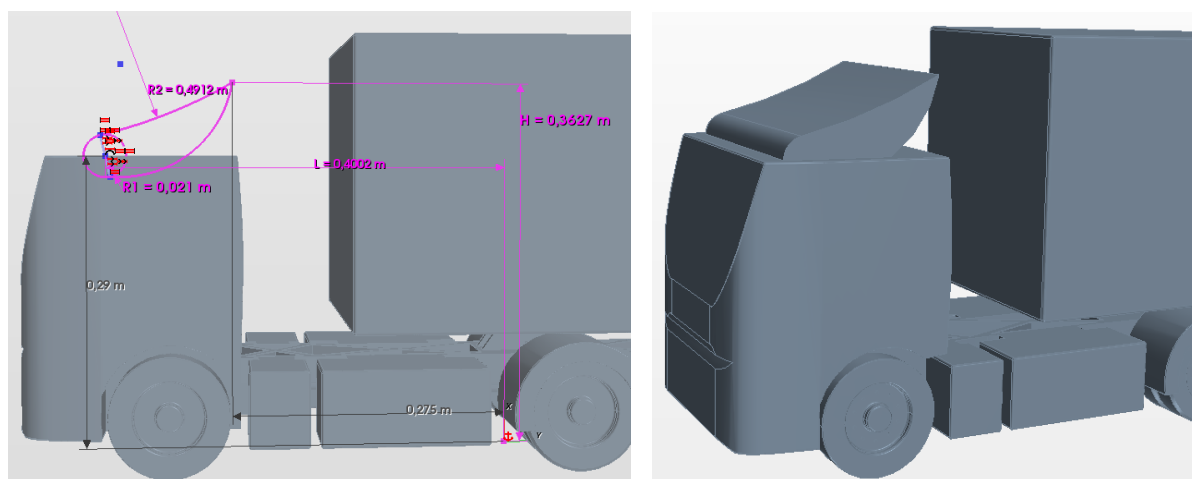
Teorijska funkcija sa koeficijentima ima sledeći oblik:

$$F_{W \text{ teor.}} = 44,53 - 5,910H - 0,561L - 0,422R1 - 0,968R2 + 1,2114H^2 + 0,1106L^2 + 0,2688R1^2 + 0,1599R2^2 - 0,1291HL - 0,4578HR1 - 0,0523HR2 + 0,0513LR1 + 0,0519LR2 + 0,0159R1R2$$

Matematičkom minimalizacijom teorijske funkcije preko variranja parametara H, L, R1 i R2 se dobijaju vrednosti parametara koje se nalaze između pet strogo definisanih nivoa. Dobijene vrednosti parametara koji teorijski kreiraju model dodatka na kabini kamiona za vrednost najmanje sile otpora vazduha od 31,95 N su:

$$H = 0,3627 \text{ m} \quad L = 0,4002 \text{ m} \quad R1 = 0,0210 \text{ m} \quad R2 = 0,4912 \text{ m}$$

Kreiranje geometrijskog oblika aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona prema prethodno definisanim parametrima i puštanje simulacije je izvršeno u svrhu potvrde rezultata. Dobijena vrednost sile otpora vazduha putem simulacije iznosi 31,75 N. Veoma slične vrednosti dobijenih vrednosti sila otpora vazduha govore o stabilnom radu sprovedene metode. Na slici 6.33 je dat prikaz geometrijskog oblika dodatka na kabini kamiona prema izračunatim vrednostima parametara.



Slika 6.33 - Izgled optimalnog aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona

### Rezime optimizacionog procesa

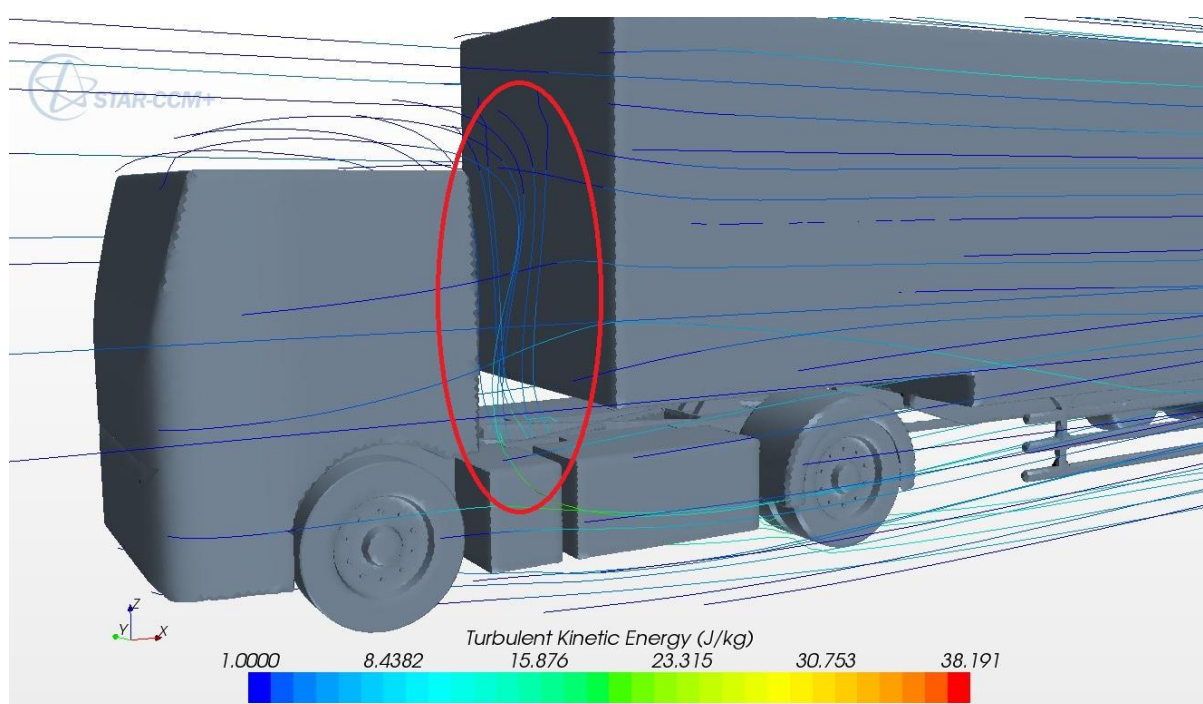
Sprovedeni optimizacioni proces na aerodinamičkom dodatku na kabini kamiona je izvršen na sledeći način.

- 1) Uz pomoć aeroprofila se definiše osnovni oblik dodatka preko stalnih i promenljivih geometrijskih parametara
- 2) Definišu se nivoi variranja promenljivih parametara i pristupa potpunoj faktorijskoj strukturi eksperimenta
- 3) Sprovode se virtuelne CFD simulacije prema kombinaciji eksperimenata potpune faktorijske strukture
- 4) Analizom dobijenih rezultata poptune faktorijske strukture, utvrđuje se da li su parametri značajni za eksperiment (grafik verovatnoće, kutijasti dijagrami, histogram)
- 5) Utvrđuje se zastupljenost faktora (procentualna učestalost faktora i njihovih interakcija)
- 6) Određuju se koeficijenti i kreira teorijski model potpune faktorijske strukture
- 7) Na osnovu učestalosti faktora potpune faktorijske strukture, geometrijski parametri se pomeraju u smeru veće zastupljenosti (odnosno oblasti gde se očekuje manja vrednost sile otpora vazduha) i podižu sa tri na pet linearno postavljenih nivoa
- 8) Nivoi se definišu preko metode odgovorne površine, tj. centralne kompozitne metode
- 9) Sprovode se virtuelne CFD simulacije prema novokreiranom planu eksperimnta i novim vrednostima parametara
- 10) Analiziraju se dobijeni rezultati preko zastupljenosti parametara i njihovih interakcija (ali samo do 2. reda interakcije) preko kvadratne funkcije
- 11) Kreiranje teorijskog modela i koeficijenata parametara
- 12) Na osnovu dobijenog teorijskog modela (odziva sistema) vrši se matematička optimizacija (minimalizacija) dobijene funkcije variranjem geometrijskih parametara

- 13) Za dobijene vrednosti geometrijskih parametara se vrši CFD simulacija u svrhu provere dobijenih optimizacionih rezultata.

### 6.3.2. Optimizacija bočnih aerodinamičkih dodataka iza kabine kamiona

Pregledom i analizom toka vazdušne struje oko modela kamiona (najviše kabine) se dolazi do zaključka da deo strujnica nakon obilaska oko kabine bivaju privučeni u prostor iza kabine, odnosno u prostor između kabine i poluprikolice, poljem nižeg pritiska. Ova pojava je praćena vrtložnim kretanjem vazdušne struje i stvaranjem lokalnih otpora preko generisanja kinetičke energije usled vrtložnog turbulentnog kretanja vazdušne struje. Kako bi se umanjio efekat ove pojave, pristupilo se kreiranju bočnih vertikalnih aerodinamičkih dodataka čija je uloga upravo odbijanje i preusmerenje vazdušne struje iz ove oblasti ka spoljašnjoj strani. Na slici 6.34 je dat prikaz polja stvaranja kinetičke energije usled turbulentnog strujanja u zoni iza kabine kamiona.



Slika 6.34 -Turbulentna kinetička energija u zoni iza kabine kamiona

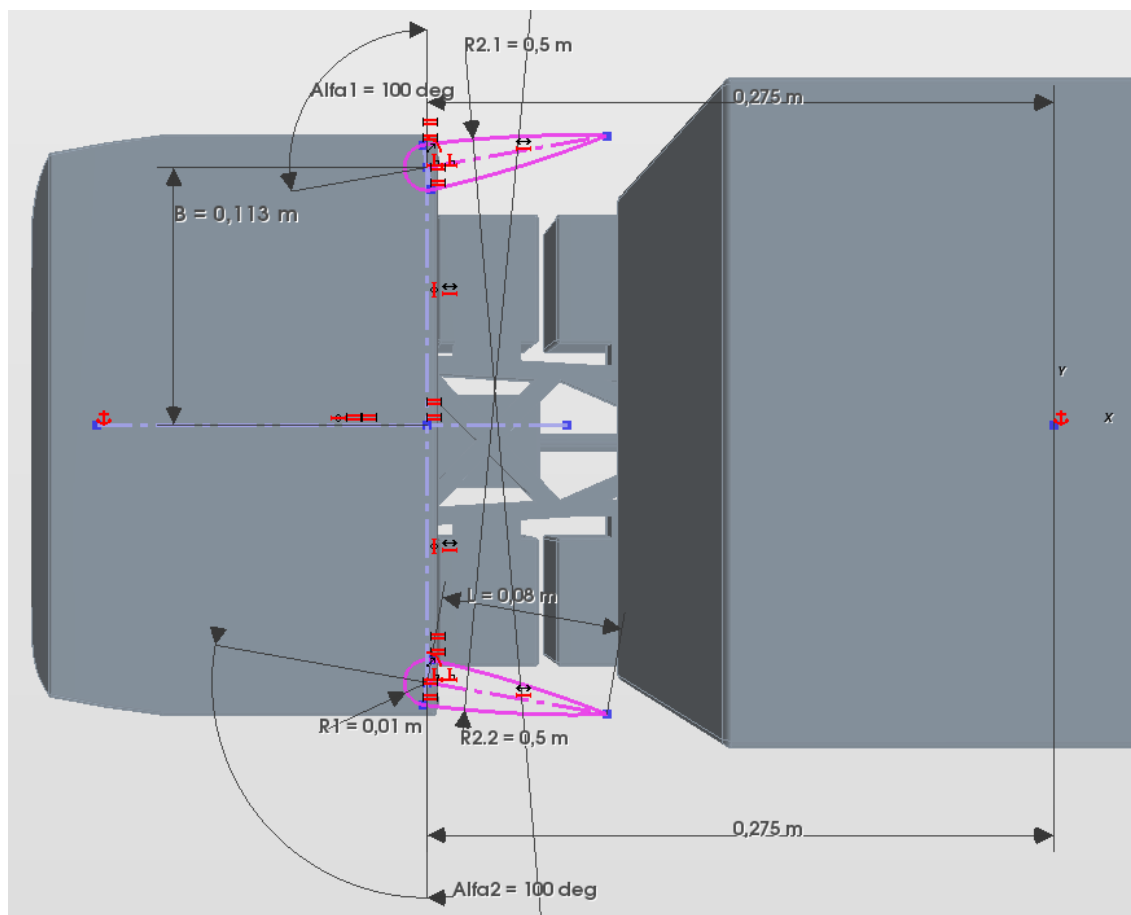
Postupak optimizacije ovog tipa aerodinamičkog dodatka se svodi na usvajanje osnovnog aeroprofila i sprovođenje optimizacionog procesa kao u slučaju aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona.

#### Usvajanje osnovnog oblika dodatka preko aeroprofila

U svrhu kreiranja vertikalnog aerodinamičkog dodatka koristi se simetrični aeroprofil. Na slici 6.35 je prikazan izgled kreiranog dodatka u pogledu odozgo sa svim parametrima koji imaju konačnu vrednost i čija vrednost je predviđena da se manje kroz sprovođenje eksperimentalnog procesa. Usvojeni geometrijski parametri, čija se vrednost ne menja tokom simulacija je horizontalna udaljenost centra radijusa napadnog ugla od tačke O od 0,275 m i radijus napadne ivice aeroprofila sa vrednošću od 0,5 m. Udaljenost od 0,275 m je usvojena na osnovu položaja kabine kamiona. Kao i u prethodnom slučaju, tačka O predstavlja nultu



fiksnu referentnu tačku sa koordinatama (0,0) i u odnosu na nju se vrši merenje svih potrebnih parametara.

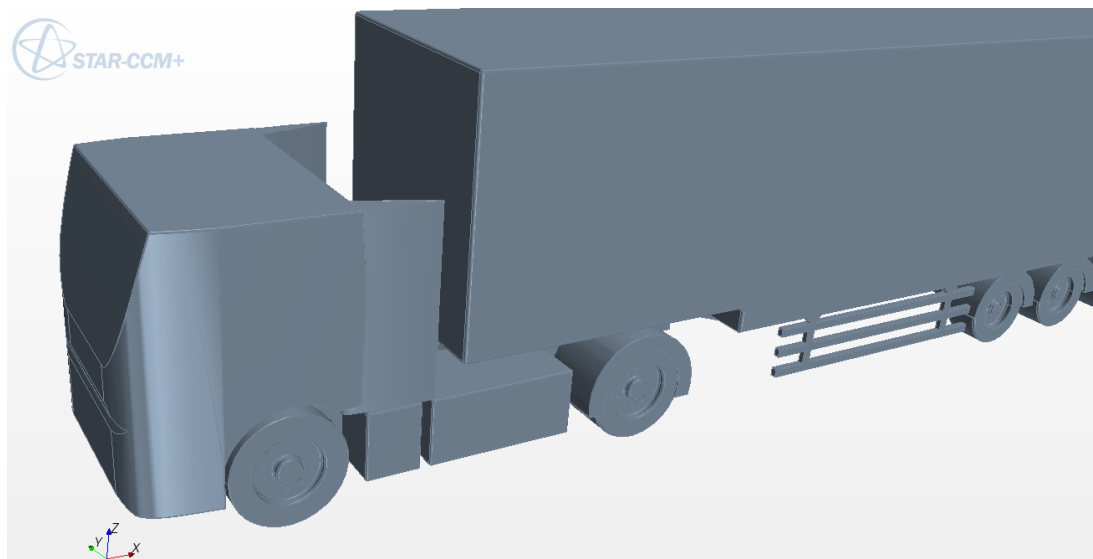


Slika 6.35 - Geometrijski parametri vertikalnog dodatka iza kabine kamiona

Geometrijski parametri koji su predviđeni da se menjaju tokom eksperimenta su parametar  $L$  koji predstavlja srednju liniju aeroprofila, odnosno rastojanje od centra radijusa napadnog ugla do vrha aeroprofila. Sa  $R1$  je označen parametar koji predstavlja radijus napadnog ugla. Ugao  $\alpha$  (u nekim delovima analize stoji oznaka "alfa") predstavlja ugao između srednje linije aeroprofila i vertikalne ose (poprečne) kamiona. Parametar  $B$  predstavlja vertikalno rastojanje centra radijusa napadnog ugla i tačke  $O$ . Kao što se može uočiti sa slike 6.35 parametarski su definisana dva vertikalna aerodinamička dodatka na krajevima kabine kamiona. Parametri su objedinjeni tako da podešavanjem jednog se automatski sve prenosi i na drugi, koji se zapravo ponaša kao njegov odraz u ogledaju. Svi parametri sa slike su podešeni u nulti položaj. Kreiranjem konture aerodinamičkih dodataka, vrši se njihovo izvlačenje ka dole do usvojene dužine od 0,19 m. Pri usvajanju vrednosti parametara se vodilo računa da aerodinamički dodaci ne izlaze iz gabaritnih dimenzija modela, odnosno da ne naruše zakonsku regulativu o najvećoj dozvoljenoj širini vozila na putu. Takođe se vodilo računa da vertikalni aerodinamički dodaci iza kabine ne smetaju prikolici pri zakretanju. Vrednost usvojenih nultih vrednosti parametara iznosi:  $L = 0,08\text{ m}$ ,  $R1 = 0,01\text{ m}$ ,  $\alpha = 100^\circ$ ,  $B = 0,113\text{ m}$ . Na slici 6.36 je dat prikaz modela kamiona i poluprikolice sa vertikalnim aerodinamičkim dodacima u nultom usvojenom položaju.

### Potpuno faktorijska struktura vertikalnog aerodinamičkog dodatka

Potpuna faktorijska struktura se sprovodi na sličan način kao u prethodnom slučaju optimizacije aerodinamičkog dodatka.



Slika 6.36 - Vertikalni aerodinamički dodaci iza kabine kamiona u nultom položaju

Formira se struktura koja se sastoji od četiri razmatrana parametra koja se variraju na tri nivoa. Ponovo se dobija količina od 81 eksperimenta potpune faktorijske strukture. U tabeli 36 se prikazane usvojene vrednosti parametara na tri nivoa.

Tabela 36 - Usvojene vrednosti parametara na tri nivoa

	$\alpha$ [°]	B [m]	L [m]	R1 [m]
<b>-1</b>	90	0,1	0,06	0,005
<b>0</b>	100	0,113	0,08	0,01
<b>1</b>	110	0,126	0,1	0,015

Sprovodi se potpuna faktorijska struktura eksperimenta za svih 81 razmatranih položaja putem CFD simulacija. Opet se beleže tri vrednosti rezultata za svaku simulaciju, vrednost frontalne površine modela, sila otpora vazduha i koeficijent otpora vazduha. U tabeli 37 su prikazani rezultati potpune faktorijske strukture eksperimenta sa kombinacijama uzorkovanja.

Tabela 37 - Rezultati potpune faktorijske strukture za slučaj vertikalnih aerodinamičkih dodataka iza kabine kamiona

Broj kombinacije	Potpuna faktorijska struktura				Rezultati simulacije		
	$\alpha$	B	L	R1	Čeona površina modela A [m <sup>2</sup> ]	Koeficijent otpora vazduha $c_w$ [-]	Sila otpora vazduha $F_w$ [N]
1	-1	-1	-1	-1	0,097933	1,012	36,55
2	-1	-1	-1	0	0,097936	1,008	36,39
3	-1	-1	-1	1	0,097933	1,003	36,22
4	-1	-1	0	-1	0,097934	1,017	36,72
5	-1	-1	0	0	0,097934	1,017	36,72
6	-1	-1	0	1	0,097931	1,015	36,64
7	-1	-1	1	-1	0,097933	1,031	37,23
8	-1	-1	1	0	0,097937	1,023	36,93

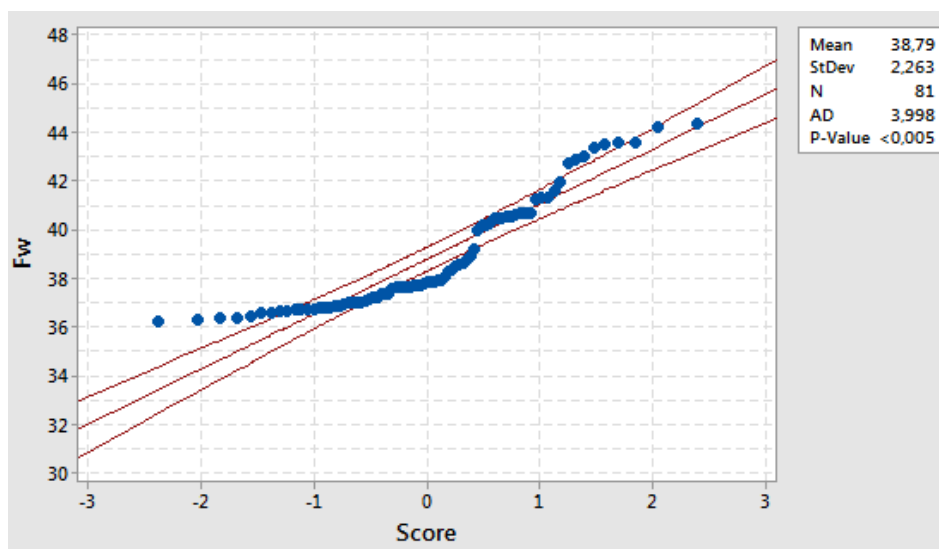
9	-1	-1	1	1	0,097934	1,025	37,01
10	-1	0	-1	-1	0,097932	1,025	37,01
11	-1	0	-1	0	0,097935	1,019	36,81
12	-1	0	-1	1	0,098034	1,020	36,86
13	-1	0	0	-1	0,097935	1,025	37,01
14	-1	0	0	0	0,097935	1,026	37,05
15	-1	0	0	1	0,098042	1,033	37,34
16	-1	0	1	-1	0,097932	1,042	37,62
17	-1	0	1	0	0,097935	1,017	36,72
18	-1	0	1	1	0,098083	1,024	37,02
19	-1	1	-1	-1	0,099245	1,033	37,82
20	-1	1	-1	0	0,101071	1,017	37,90
21	-1	1	-1	1	0,102959	0,991	37,61
22	-1	1	0	-1	0,099291	1,026	37,57
23	-1	1	0	0	0,101118	1,014	37,83
24	-1	1	0	1	0,102988	0,996	37,82
25	-1	1	1	-1	0,099511	1,027	37,68
26	-1	1	1	0	0,101165	1,010	37,66
27	-1	1	1	1	0,103028	0,990	37,63
28	0	-1	-1	-1	0,097937	1,019	36,81
29	0	-1	-1	0	0,097934	1,013	36,58
30	0	-1	-1	1	0,097934	1,008	36,41
31	0	-1	0	-1	0,097934	1,019	36,82
32	0	-1	0	0	0,097937	1,014	36,61
33	0	-1	0	1	0,097934	1,016	36,68
34	0	-1	1	-1	0,097932	1,020	36,83
35	0	-1	1	0	0,097936	1,008	36,39
36	0	-1	1	1	0,097934	1,005	36,29
37	0	0	-1	-1	0,097935	1,045	37,72
38	0	0	-1	0	0,097932	1,033	37,32
39	0	0	-1	1	0,097997	1,034	37,35
40	0	0	0	-1	0,097935	1,062	38,34
41	0	0	0	0	0,097936	1,054	38,07
42	0	0	0	1	0,098507	1,039	37,74
43	0	0	1	-1	0,099019	1,054	38,48
44	0	0	1	0	0,099082	1,039	37,95
45	0	0	1	1	0,099558	1,027	37,71
46	0	1	-1	-1	0,101322	1,088	40,65
47	0	1	-1	0	0,101575	1,080	40,45
48	0	1	-1	1	0,102968	1,052	39,94
49	0	1	0	-1	0,102654	1,071	40,55
50	0	1	0	0	0,102731	1,074	40,69
51	0	1	0	1	0,103455	1,060	40,44
52	0	1	1	-1	0,103953	1,057	40,51

53	0	1	1	0	0,104010	1,055	40,45
54	0	1	1	1	0,104514	1,045	40,28
55	1	-1	-1	-1	0,097931	1,042	37,65
56	1	-1	-1	0	0,097934	1,031	37,22
57	1	-1	-1	1	0,097933	1,028	37,14
58	1	-1	0	-1	0,097931	1,073	38,76
59	1	-1	0	0	0,097934	1,069	38,60
60	1	-1	0	1	0,097936	1,061	38,30
61	1	-1	1	-1	0,100488	1,057	39,18
62	1	-1	1	0	0,100488	1,049	38,89
63	1	-1	1	1	0,100488	1,041	38,58
64	1	0	-1	-1	0,100222	1,086	40,15
65	1	0	-1	0	0,100229	1,098	40,59
66	1	0	-1	1	0,100225	1,100	40,64
67	1	0	0	-1	0,102818	1,088	41,26
68	1	0	0	0	0,102816	1,090	41,31
69	1	0	0	1	0,102817	1,060	40,19
70	1	0	1	-1	0,105428	1,079	41,96
71	1	0	1	0	0,105427	1,070	41,61
72	1	0	1	1	0,105428	1,063	41,31
73	1	1	-1	-1	0,105160	1,106	42,87
74	1	1	-1	0	0,105157	1,110	43,04
75	1	1	-1	1	0,105158	1,102	42,73
76	1	1	0	-1	0,107775	1,096	43,54
77	1	1	0	0	0,107774	1,096	43,56
78	1	1	0	1	0,107775	1,090	43,34
79	1	1	1	-1	0,110363	1,087	44,24
80	1	1	1	0	0,110365	1,090	44,36
81	1	1	1	1	0,110364	1,071	43,58

Na osnovu rezultata sile otpora vazduha iz prethodne tabele se može zaključiti da njena najmanja vrednost je postignuta sa kombinacijom broj 3.

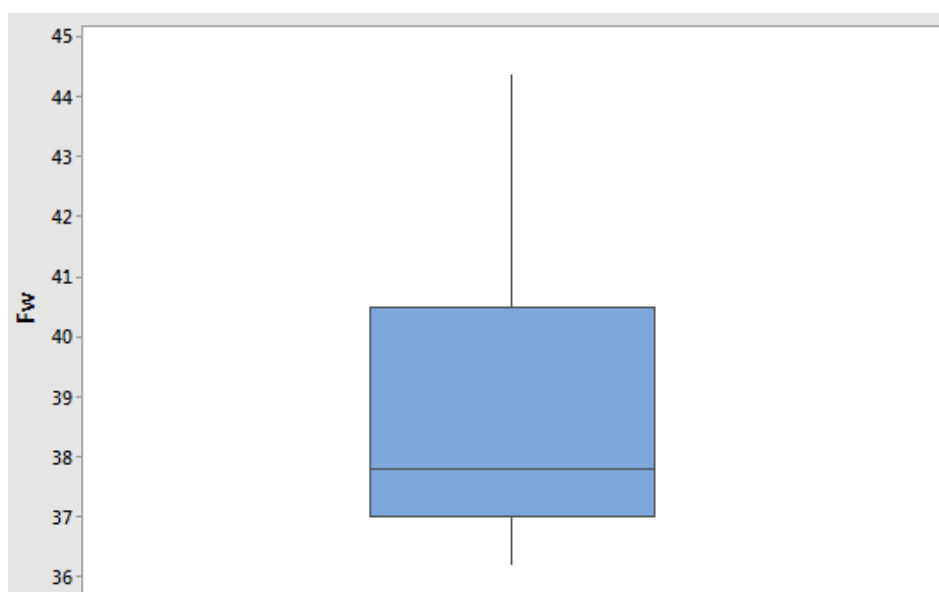
#### *Analiza dobijenih rezultata potpune faktorijske strukture*

Analiza dobijenih rezultata potpune faktorijske strukture je sprovedena pomoću statističkog softvera Minitab 17. Najpre je kreiran dijagram verovatnoće, odnosno normalne distribucije parametara. Analiza se vrši za kolonu iz tabele 37 koja se odnosi na silu otpora vazduha. Na slici 6.37 se može videti grafik normalne distribucije niza dobijenih vrednosti sile otpora vazduha. Sa slike se može zaključiti da kao i u prethodnom analiziranom dodatku ne postoji veliko odstupanje u iznosu od 2,263%. Srednja vrednost niza vrednosti sile otpora vazduha iznosi 38,79 N, dok je broj eksperimentalnih prolaza, odnosno analiziran broj podataka kao i u prethodnom slučaju 81. Površina između srednje dijagonalne krive i empirijski kreirane krive od dobijenih rezultata iznosi 3,998. Ono što je najbitnije je P-vrednost koja i u ovom slučaju je manja od 0,005 što govori da je u pitanju opravdana analiza, odnosno dobro postavljen eksperiment.



Slika 6.37 - Dijagram normalne distribucije sile otpora vazduha

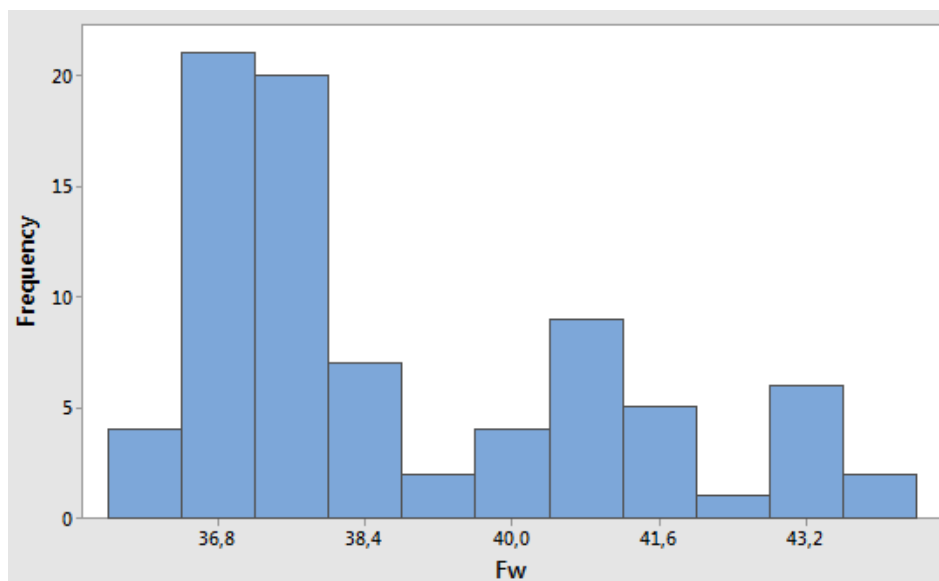
Sledeći korak analize je prikazivanje kutijastog dijagrama dobijenih rezultata niza vrednosti sile otpora vazduha. Na slici 6.38 je prikazan kutijasti dijagram za niz vrednosti sile otpora vazduha.



Slika 6.38 - Kutijasti dijagram niza rezultata sile otpora vazduha

Sa slike kutijastog dijagrama se može zaključiti da su dobijeni podaci u velikoj meri zastupljeni u plavom pravugaoniku, što zapravo predstavlja odstupanje u vrednosti od 25 do 75% u odnosu na srednju vrednost niza vrednosti. Ipak gornji deo pravugaonika čini više vrednosti što znači da su vrednosti više orijentisane vrednosti odstupanja od 75% u odnosu na srednju vrednost. U nekoj od poslednjih kombinacija je ostvarena velika vrednost sile otpora vazduha što ilustruje gornja vertikalna linija, koja dosta odstupa od srednje vrednosti. Ovakva pojava je dobra zato što vrlo mali deo uzoraka puno odstupa od rezultata grupisanih oko srednje vrednosti. Kompletan pravugaonik je pomeren ka nižim vrednostima što je svakako veoma dobro sa aspekta cilja eksperimenta. Grupisanje rezultata se takođe može jasno videti

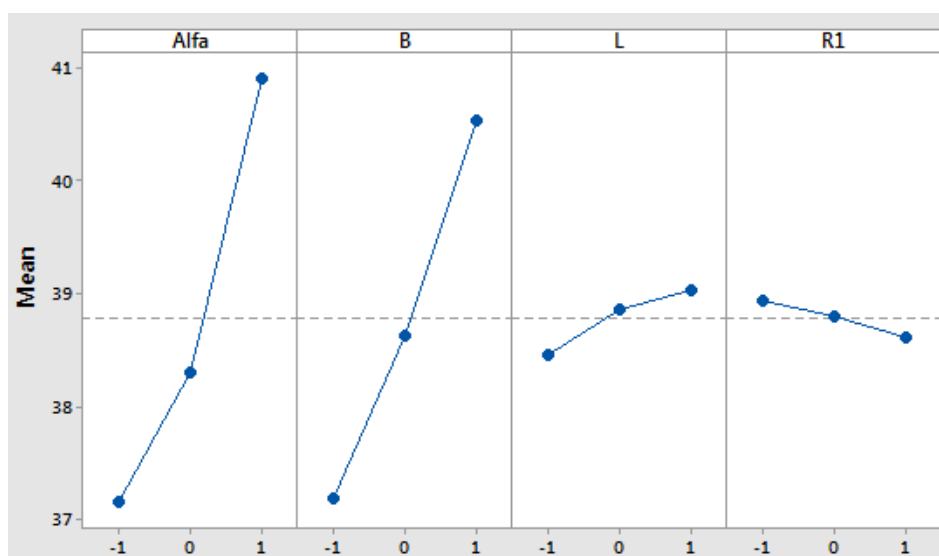
sa histograma. Na slici 6.39 je prikazan histogram za vrednosti niza podataka sile otpora vazduha.



Slika 6.39 - Histogram dobijenih vrednosti sile otpora vazduha

Grafik histograma potvrđuje prethodnu tvrdnju da je najveći deo dobijenih rezultata eksperimenta orijentisan nižim vrednostima sile otpora vazduha, što govori od pravilnom usvajanju geometrijskih parametara aerodinamičkog dodatka u okviru potpune faktorijske strukture.

Grafički prikaz zastupljenosti faktora po nivoima i njihov uticaj na rezultate sile otpora vazduha predstavlja veoma bitan deo prikaza rezultata. Na osnovu prikaza ovog tipa se jasno vide oblasti nivoa parametara koji daju najbolje rezultate. Na slici 6.40 je dat prikaz zastupljenosti faktora.



Slika 6.40 - Zastupljenost faktora

Sa slike 6.40 se može zaključiti da parametri Alfa i B jasno daju najniže vrednosti sile otpora vazduha u oblastima nižih nivoa, što znači da u nastavku analize treba parametre orijentisati

oko vrednosti nižih nivoa. Što se tiče parametara L i R1, njihova zastupljenost se ne ogleda u velikoj meri na rezultate sile otpora vazduha. Preko njih se dobijaju rezultati koje su grupisani oko srednje vrednosti niza sile otpora vazduha. Parametar L ipak u malo većoj meri utiče na rezultate i teži nižim vrednostima, pa je iz tog razloga zadržan kao parametarski faktor koji će biti razmatran u okviru metode odgovorne površine. Parametar R1 zbog svoje male zastupljenosti se neće razmatrati kao parametarski, već će biti usvojen kao jedna vrednost i to ona pri kojoj je dobijena najniža sila otpora vazduha, nivo 1 ili vrednosti od 0,015 m.

#### *Analiza uticajnih faktora i kreiranje teorijskog modela*

Uticajni parametri i njihova interakcija su bitan deo analize rezultata. Teorijski model ili funkcija opisuje rad sismema i zapravo predstavlja njegov odziv. Pošto je u pitanju potpuna faktorijska struktura, analiza je sprovedena za međusobnu interakciju faktora 4. reda uz primenu linearnog modela analize. Dobijeni rezultati su prikazani u okviru tabele 38.

*Tabela 38 - Uticajni faktori i njihova interakcija*

<i>Izvor</i>	<i>Stepen slobode</i>	<i>Zbir kvadrata</i>	<i>Zastupljenost</i>
Ukupan model	80	409,577	100,00%
Linearni model	8	358,792	87,60%
Alfa	2	199,663	48,75%
B	2	152,919	37,34%
L	2	4,803	1,17%
R1	2	1,408	0,34%
Interakcija 2. reda	24	48,225	11,77%
Alfa*B	4	43,317	10,58%
Alfa*L	4	3,577	0,87%
Alfa*R1	4	0,473	0,12%
B*L	4	0,336	0,08%
B*R1	4	0,268	0,07%
L*R1	4	0,255	0,06%
Interakcija 3. reda	32	2,115	0,52%
Alfa*B*L	8	1,06	0,26%
Alfa*B*R1	8	0,199	0,05%
Alfa*L*R1	8	0,438	0,11%
B*L*R1	8	0,417	0,10%
Interakcija 4. reda	16	0,445	0,11%
Alfa*B*L*R1	16	0,445	0,11%
Greška	0	*	*
Ukupno	80	409,577	100,00%

Najveća zastupljenost je unutar linearnog modela što je svakako za očekivati. Interakcija 3 i 4. reda je veoma mala i mogla bi se izbaciti iz analize, ali pošto se od modela traži potpuna analiza i oni su uzeti u obzir. Samim tim se dobila greška od 0%, odnosno dobijeni teorijski model opisuje eksperiment u potpunosti jer je kvadrat odstupanja  $R^2 = 1$ . Izraz teorijskog modela ima oblik:

$$y = \beta_0 + \beta_\alpha \alpha + \beta_B B + \beta_L L + \beta_{R1} R1 + \beta_{\alpha B} \alpha B + \beta_{\alpha L} \alpha L + \beta_{\alpha R1} \alpha R1 + \beta_{BL} BL + \beta_{BR1} BR1 + \beta_{LR1} LR1 + \beta_{\alpha BL} \alpha BL + \beta_{\alpha BR1} \alpha BR1 + \beta_{\alpha LR1} \alpha LR1 + \beta_{BLR1} BLR1 + \beta_{\alpha BLR1} \alpha BLR1 + \epsilon$$

Vrednost dobijenih koeficijenata  $\beta$  po svim nivoima faktora je prikazano u tabeli 39.

Tabela 39 - Vrednost koeficijenata  $\beta$  u teorijskog funkciji odziva sistema

Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$
<b>Alfa</b>		1 0	-0,03229	-1 0 -1	0,0321	-1 -1 0	-0,00526	0 -1 -1 -1	-0,09996
-1	-1,629	1 1	-0,08659	-1 0 0	-0,096	-1 -1 1	-0,05353	0 -1 -1 0	0,06151
0	-0,4917	<b>B*R1</b>		-1 0 1	0,0639	-1 0 -1	-0,01465	0 -1 -1 1	0,03845
1	2,121	-1 -1	0,04899	-1 1 -1	-0,02063	-1 0 0	-0,01738	0 -1 0 -1	0,004575
<b>B</b>		-1 0	-0,05674	-1 1 0	0,02087	-1 0 1	0,03203	0 -1 0 0	-0,03715
-1	-1,6	-1 1	0,007753	-1 1 1	-0,00024	-1 1 -1	-0,04414	0 -1 0 1	0,03258
0	-0,1556	0 -1	0,04812	0 -1 -1	-0,05497	-1 1 0	0,02264	0 -1 1 -1	0,09538
1	1,755	0 0	-0,04469	0 -1 0	-0,001	-1 1 1	0,02151	0 -1 1 0	-0,02436
<b>L</b>		0 1	-0,00343	0 -1 1	0,05597	0 -1 -1	-0,1476	0 -1 1 1	-0,07103
-1	-0,3301	1 -1	-0,09711	0 0 -1	0,05317	0 -1 0	-0,0053	0 0 -1 -1	0,04906
0	0,07996	1 0	0,1014	0 0 0	-0,0093	0 -1 1	0,1529	0 0 -1 0	-0,0664
1	0,2501	1 1	-0,00433	0 0 1	-0,04386	0 0 -1	0,03765	0 0 -1 1	0,01734
<b>R1</b>		<b>L*R1</b>		0 1 -1	0,001804	0 0 0	0,08617	0 0 0 -1	0,01587
-1	0,1546	-1 -1	-0,03511	0 1 0	0,0103	0 0 1	-0,1238	0 0 0 0	-0,02982
0	0,013	-1 0	0,004369	0 1 1	-0,0121	0 1 -1	0,11	0 0 0 1	0,01395
1	-0,1676	-1 1	0,03074	1 -1 -1	0,06644	0 1 0	-0,08087	0 0 1 -1	-0,06493
<b>Alfa*B</b>		0 -1	-0,07293	1 -1 0	-0,07413	0 1 1	-0,02912	0 0 1 0	0,09622
-1 -1	1,151	0 0	0,05441	1 -1 1	0,007697	1 -1 -1	0,08886	0 0 1 1	-0,03129
-1 0	0,04252	0 1	0,01852	1 0 -1	-0,08526	1 -1 0	0,01056	0 1 -1 -1	0,0509
-1 1	-1,193	1 -1	0,108	1 0 0	0,1053	1 -1 1	-0,09941	0 1 -1 0	0,004895
0 -1	-0,09746	1 0	-0,05878	1 0 1	-0,02004	1 0 -1	-0,02301	0 1 -1 1	-0,05579
0 0	-0,2885	1 1	-0,04926	1 1 -1	0,01883	1 0 0	-0,06879	0 1 0 -1	-0,02045
0 1	0,386	<b>Alfa*B*L</b>		1 1 0	-0,03117	1 0 1	0,0918	0 1 0 0	0,06697
1 -1	-1,053	-1 -1 -1	-0,0955	1 1 1	0,01234	1 1 -1	-0,06585	0 1 0 1	-0,04652
1 0	0,246	-1 -1 0	-0,09216	<b>Alfa*L*R1</b>		1 1 0	0,05824	0 1 1 -1	-0,03045
1 1	0,8073	-1 -1 1	0,1877	-1 -1 -1	0,05801	1 1 1	0,007615	0 1 1 0	-0,07186
<b>Alfa*L</b>		-1 0 -1	0,01808	-1 -1 0	0,06001	<b>Alfa*B*L*R1</b>		0 1 1 1	0,1023
-1 -1	0,1868	-1 0 0	0,07221	-1 -1 1	-0,118	-1 -1 -1	-1,04041	1 -1 -1 -1	0,1404
-1 0	-0,05304	-1 0 1	-0,09029	-1 0 -1	-0,09866	-1 -1 -1 0	-0,02502	1 -1 -1 0	-0,03649
-1 1	-0,1338	-1 1 -1	0,07743	-1 0 0	0,005472	-1 -1 -1 1	0,06543	1 -1 -1 1	-0,1039
0 -1	0,1685	-1 1 0	0,01995	-1 0 1	0,09318	-1 -1 0 -1	0,09135	1 -1 0 -1	-0,09592
0 0	0,06003	-1 1 1	-0,09737	-1 1 -1	0,04064	-1 -1 0 0	0,01785	1 -1 0 0	0,0193
0 1	-0,2285	0 -1 -1	0,2468	-1 1 0	-0,06549	-1 -1 0 1	-0,1092	1 -1 0 1	0,07662
1 -1	-0,3553	0 -1 0	-0,08545	-1 1 1	0,02485	-1 -1 1 -1	-0,05094	1 -1 1 -1	-0,04445
1 0	-0,006992	0 -1 1	-0,1613	0 -1 -1	0,06748	-1 -1 1 0	0,007169	1 -1 1 0	0,01719
1 1	0,3623	0 0 -1	-0,1954	0 -1 0	-0,00581	-1 -1 1 1	0,04377	1 -1 1 1	0,02726
<b>Alfa*R1</b>		0 0 0	0,07164	0 -1 1	-0,06167	-1 0 -1 -1	0,07696	1 0 -1 -1	-0,126
-1 -1	-0,07167	0 0 1	0,1238	0 0 -1	-0,02105	-1 0 -1 0	0,04688	1 0 -1 0	0,01953



-1 0	-0,06248	0 1 -1	-0,05133	0 0 0	-0,0149	-1 0 -1 1	-0,1238	1 0 -1 1	0,1065
-1 1	0,1341	0 1 0	0,01381	0 0 1	0,03594	-1 0 0 -1	-0,151	1 0 0 -1	0,1351
0 -1	0,06906	0 1 1	0,03752	0 1 -1	-0,04643	-1 0 0 0	-0,04215	1 0 0 0	0,07196
0 0	-0,03196	1 -1 -1	-0,1513	0 1 0	0,0207	-1 0 0 1	0,1931	1 0 0 1	-0,2071
0 1	-0,0371	1 -1 0	0,1776	0 1 1	0,02573	-1 0 1 -1	0,07404	1 0 1 -1	-0,0091
1 -1	0,002605	1 -1 1	-0,02634	1 -1 -1	-0,1255	-1 0 1 0	-0,00473	1 0 1 0	-0,09149
1 0	0,09444	1 0 -1	0,1774	1 -1 0	-0,05421	-1 0 1 1	-0,06931	1 0 1 1	0,1006
1 1	-0,09705	1 0 0	-0,1439	1 -1 1	0,1797	-1 1 -1 -1	-0,03655	1 1 -1 -1	-0,01434
<b>B*L</b>		1 0 1	-0,03351	1 0 -1	0,1197	-1 1 -1 0	-0,02186	1 1 -1 0	0,01696
-1 -1	-0,0868	1 1 -1	-0,0261	1 0 0	0,009423	-1 1 -1 1	0,05841	1 1 -1 1	-0,00262
-1 0	0,046	1 1 0	-0,03376	1 0 1	-0,1291	-1 1 0 -1	0,05965	1 1 0 -1	-0,03921
-1 1	0,04079	1 1 1	0,05986	1 1 -1	0,005786	-1 1 0 0	0,0243	1 1 0 0	-0,09126
0 -1	-0,03208	<b>Alfa*B*R1</b>		1 1 0	0,04479	-1 1 0 1	-0,08395	1 1 0 1	0,1305
0 0	-0,01372	-1 -1 -1	-0,01147	1 1 1	-0,05057	-1 1 1 -1	-0,0231	1 1 1 -1	0,05355
0 1	0,0458	-1 -1 0	0,07513	<b>B*L*R1</b>		-1 1 1 0	-0,00244	1 1 1 0	0,0743
1 -1	0,1189	-1 -1 1	-0,06366	-1 -1 -1	0,05879	-1 1 1 1	0,02554	1 1 1 1	-0,1279

### Metoda odgovorne površine u svrhu optimizacije vertikalnog aerodinamičkog dodatka iza kabine kamiona

Na osnovu dobijenih vrednosti potpune faktorijske strukture, pristupa se kreiranju metode odgovorne površine u svrhu dobijanja optimalne vrednosti sile otpora vazduha pri konfiguraciji parametara eksperimenata koji će biti podešeni na veći broj nivoa. Dobijeni rezultati potpune faktorijske strukture su pokazali da parametar R1 nije previše značajan za ishod eksperimenta, tako da je njegova vrednost usvojena na konačnu vrednost od 0,015 m i neće biti parametarski razmatran u okviru MOP. Takođe na osnovu zastupljenosti ostalih parametara, usvojene su vrednosti novih nivoa koji će biti sprovedeni u okviru MOP. Podaci su usvojeni grupisanjem oko onih nivoa koji su pokazali najveću tendenciju opadanju sile otpora vazduha. Broj nivoa u okviru MOP je 5, a broj razmatranih parametara je 3. Potpunom faktorijskom strukturom bi se ostvarilo  $5^3 = 125$  kombinacija. U tabeli 40 su prikazani nivoi parametara koju su razmatrani u okviru MOP. Usvojene vrednosti parametara imaju linearni porast.

Tabela 40 - Usvojene vrednosti parametara na pet nivoa

Nivo \ Parametar	$\alpha$ [°]	$B$ [m]	$L$ [m]
1	80	0,09	0,04
2	85	0,095	0,05
3	90	0,1	0,06
4	95	0,105	0,07
5	100	0,11	0,08

Postupak kreiranja nivoa faktora, kao i sprovođenje eksperimentalnog procesa je veoma sličan kao u slučaju prethodnog aerodinamičkog dodatka. Sprovodi se Centralna kompozitna metoda koja se u ovom slučaju kreira sa istom vrednošću koeficijenta  $\alpha$  od 2, minimalnom i maksimalnom vrednošću nivoa faktora od 2 i 4, kao i centralnom vrednošću od 3. Na ovaj način se dobija 5 nivoa sa linearnim porastom od 1. Pošto u ovom slučaju postoji tri umesto

četiri faktora što je bio slučaj u prethodnom eksperimentu, broj uzorkovanja se smanjuje na 20. Ovih 20 eksperimentalnih prolaza se dobija ponovnim objedinjavanjem tačaka kocke i njihovih centralnih tačaka, kao i tačaka na osama koje su definisane koeficijentom  $\alpha$ . U tabeli 41 su prikazane kombinacije eksperimentalnih prolaza, kao i dobijene vrednosti frontalne površine modela, sile otpora vazduha i koeficijenta otpora vazduha putem simulacije.

Tabela 40 - Rezultati metode odgovorne površine sa kombinacijama eksperimenata

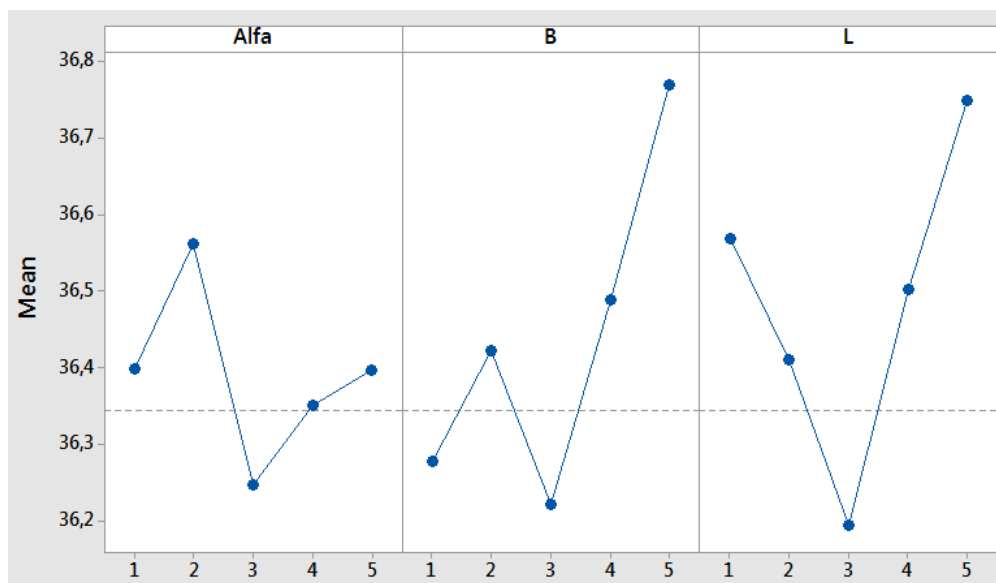
Metoda odgovorne površine				Rezultati simulacije		
Broj kombinacije	$\alpha$	B	L	Čeona površina modela A [m <sup>2</sup> ]	Koeficijent otpora vazduha $c_W$ [-]	Sila otpora vazduha $F_W$ [N]
1	2	2	2	0,097931	1,013	36,59
2	4	2	2	0,097935	1,007	36,37
3	2	4	2	0,097933	1,006	36,31
4	4	4	2	0,097934	1,007	36,36
5	2	2	4	0,097933	1,015	36,66
6	4	2	4	0,097936	0,999	36,06
7	2	4	4	0,097931	1,016	36,67
8	4	4	4	0,097932	1,014	36,60
9	1	3	3	0,097935	1,008	36,40
10	5	3	3	0,097935	1,008	36,40
11	3	1	3	0,097934	1,005	36,28
12	3	5	3	0,097933	1,018	36,77
13	3	3	1	0,097934	1,013	36,57
14	3	3	5	0,097933	1,018	36,75
15	3	3	3	0,097934	0,997	36,02
16	3	3	3	0,097934	0,997	36,02
17	3	3	3	0,097934	0,997	36,02
18	3	3	3	0,097934	0,997	36,02
19	3	3	3	0,097934	0,997	36,02
20	3	3	3	0,097934	0,997	36,02

Može se uvideti kao i u prethodnom slučaju sprovođenja centralne kompozitne metode da postoji sedam eksperimentalnih kombinacija sa istim uzorkovanjem koji su posledica preklapanja tačaka unutar kocke.

#### Analiza dobijenih rezultata

Na osnovu pregleda dobijenih rezultata može se zaključiti da je veoma suženo polje vrednosti dobijene sile otpora vazduha. Sve dobijene vrednosti su unutar vrednosti od 1 N. Ovo predstavlja veliki pomak u eksperimentalnom smislu zato što ovako malo područje rezultata govori o pravilnom usvajanju geometrijskih parametara aerodinamičkog oblika dodatka. U nastavku je sprovedeno kreiranje teorijskog modela u svrhu dobijanja optimalnih vrednosti parametara matematičkim putem. Na slici 6.41 je dat prikaz zastupljenosti faktora prema pet nivoa. Sa slike 6.41 se može zaključiti da se vrednosti kreću kroz sve nivoe, što govori da su vrednosti veoma slične i veoma bliske optimalnoj vrednosti. Ono što je takođe veoma dobro

je to što su najmanje vrednosti sile otpora vazduha zabeležene kod srednjih nivoa faktora, što potvrđuje dobru geometrijsku postavljenoost nivoa i vrednosti.



Slika 6.41 - Zastupljenost parametara po nivoima

#### Analiza uticajnih faktora i kreiranje teorijskog modela

Analiza uticajnih parametara je sprovedena kvadratnom funkcijom (funkcijom 2. reda) za parametre do 2. reda međusobne interakcije. Sa ovim postavkom dobio se teorijski model koji dosta dobro opisuje ponašanje eksperimenata sa vrednošću odstupanja od 6,73%. Tabela 42 prikazuje zastupljenost faktora i njihove interakcije 2. reda.

Tabela 42 - Zastupljenost faktora i interakcije 2. reda

Izvor	Stepen slobode	Zbir kvadrata	Zastupljenost
Ukupno model	9	1	93,27%
Linearni model	3	0,1755	11,96%
Alfa	1	0,04486	3,06%
B	1	0,09738	6,63%
L	1	0,03327	2,27%
Kvadratni model	3	0,99538	67,81%
Alfa*Alfa	1	0,06165	4,20%
B*B	1	0,24471	16,67%
L*L	1	0,68902	46,94%
Interakcija 2. reda	3	0,1981	13,50%
Alfa*B	1	0,08075	5,50%
Alfa*L	1	0,03079	2,10%
B*L	1	0,08656	5,90%
Greška	5	0,09884	6,73%
Ukupno	14	1	100,00%

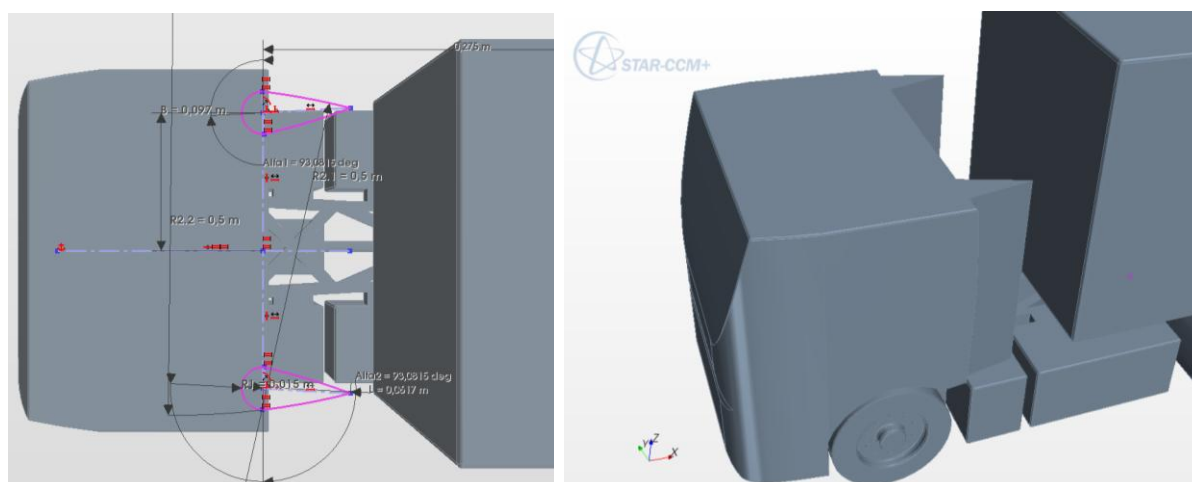
Teorijska funkcija (model) sa koeficijentima ima oblik:

$$F_{W \text{ teor.}} = 40,674 + 0,769\alpha - 1,326B - 1,074L + 0,1001\alpha^2 + 0,1318B^2 + 0,1655L^2 + 0,1005\alpha B - 0,0620\alpha L + 0,1040BL$$

Matematičkom minimalizacijom teorijske funkcije preko variranja parametara  $\alpha$ ,  $B$  i  $L$  se dobijaju vrednosti parametara koje se nalaze između pet strogo definisanih nivoa. Dobijene vrednosti parametara koji teorijski kreiraju model vertikalnog dodatka iza kabine kamiona za vrednost najmanje sile otpora vazduha od 35,99 N su:

$$\alpha = 93,0815^\circ \quad B = 0,0970 \text{ m} \quad L = 0,0617 \text{ m}$$

Podešavanjem geometrijskih parametara prema prethodnim vrednostima faktora, izvršena je simulacija koja je pokazala veliku sličnost u dobijenim rezultatima sile otpora vazduha. Na slici 6.42 je dat prikaz oblika aerodinamičkih dodataka iza kabine kamiona podešenih prema optimalno dobijenim vrednostima parametara.



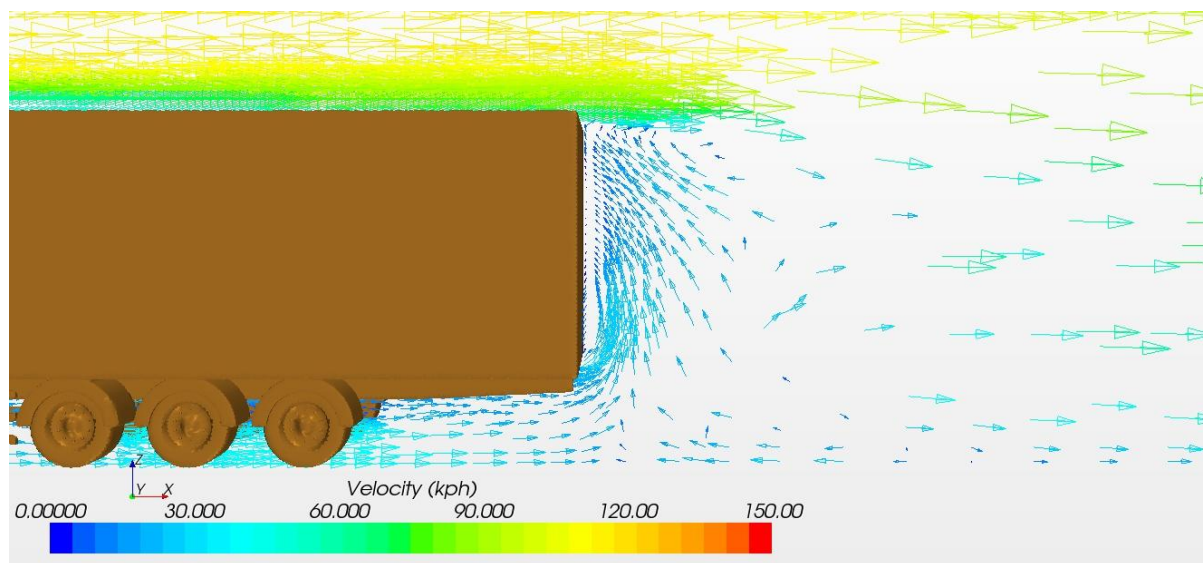
Slika 6.42 - Optimalni oblik vertikalnih aerodinamičkih dodataka iz kabine kamiona

### 6.3.3. Optimizacija aerodinamičkog dodatka iza poluprikolice

Zona iza poluprikolice je karakteristična naglim prinudnim skretanjem vazdušne struje usled strmog završetka poluprikolice. Kao što je već naglašeno u prethodnih poglavljima rada, poluprikolica svojim oblikom nije baš idealno rešenje sa aspekta aerodinamike. Sastavljena je od površina koje su velike i veoma izložene vazdušnoj struji, kao i nagli prelasci (često pod pravim uglom) između površina. Oblast iza poluprikolice naročito je nepovoljna iz ugla aerodinamike jer vazdušne strujnice nisu u stanju da naglo skrenu usled završetka poluprikolice, nastavljaju dalje još neko vreme. Pri tome sa zadnje strane poluprikolice se stvara polje niskog pritiska (podpritiska) u kome nastaje vrtložno kretanja i generisanje lokalnog otpora u vidu turbulentne energije vrtložnog kretanja vazdušne struje. Kako bi se umanjio ovaj efekat, pristupa se kreiranju aerodinamičkog dodatka sa zadnje strane poluprikolice koji će imati ulogu da preusmeri vazdušnu struju dalje od samog kraja poluprikolice, što bi trebalo doprineti umanjenu lokalnih otpora i stvaranju manje vrednosti sile otpora vazduha. Na slici 6.43 je dat prikaz vrtložnog kretanja sa zadnje strane poluprikolice.

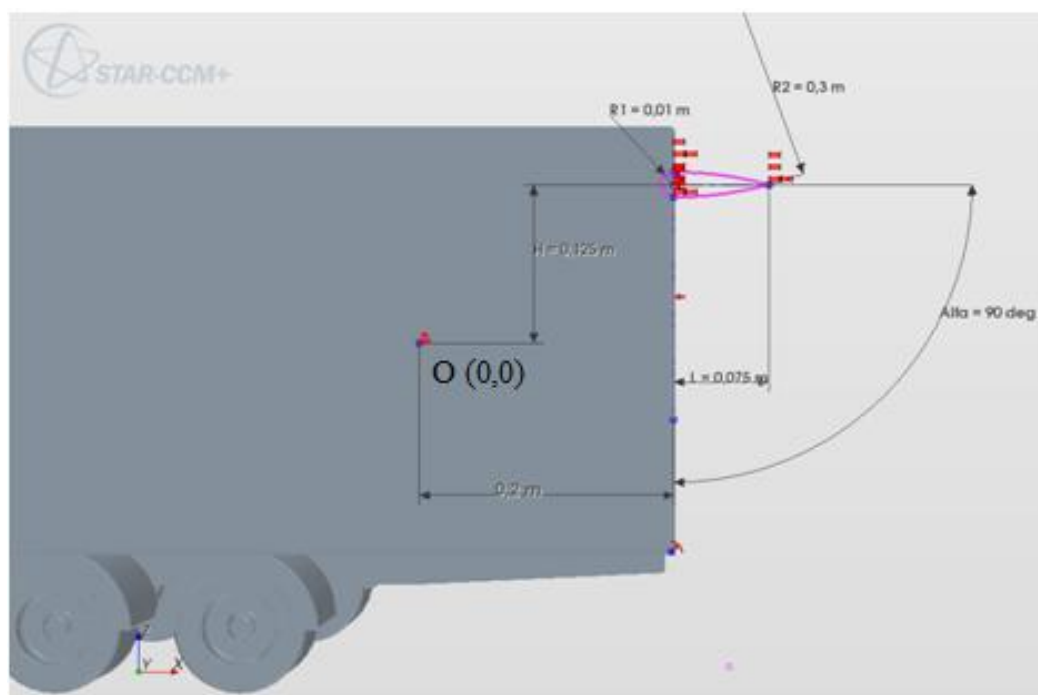
*Usvajanje osnovnog oblika dodatka preko aeroprofila*

Kako bi se vazдушna struja odvela od zadnje strane poluprikolice, vrši se kreiranje aerodinamičkog dodatka. Oblik aerodinamičkog dodatka se tako projektuje da u sebi sadrži osnovni oblik simetričnog aeroprofila.



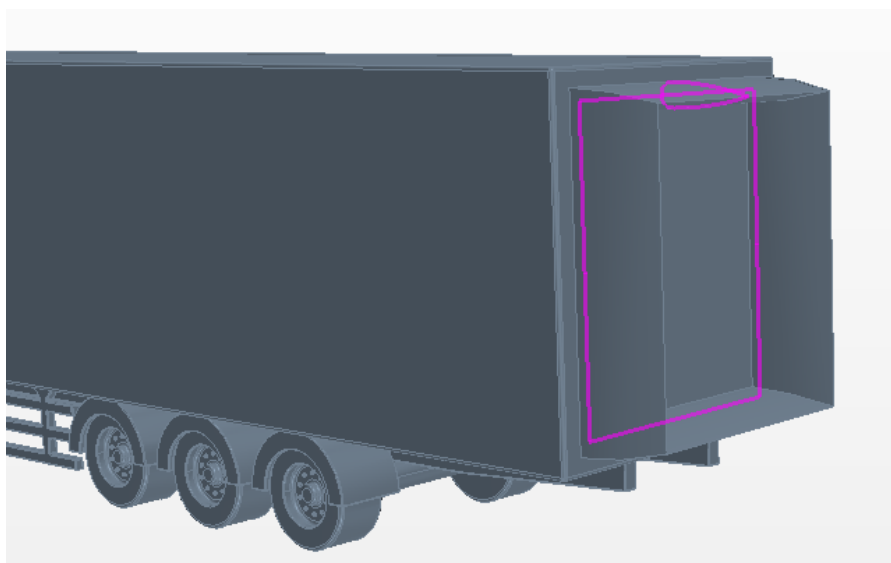
Slika 6.43 - Vrtložno kretanja sa zadnje strane poluprikolice

Kako bi se umanjio efekat sloma vazdušne struje sa sve četiri strana poluprikolice (kada se gleda od nazad, dve bočne, gornja i donja strana) pristupa se kreiranju dodatka koji će imati takav oblik da će uticati na opstrujavanja sa svih pomenutih strana poluprikolice. Aerodinamički dodatak je kreiran u uzdužnoj ravni poluprikolice (pogled sa strane) koja prolazi kroz centar širine poluprikolice. Definiše se preko stalnih i promenljivih parametara, u svrhu lake promene oblika putem geometrijske parametrizacije. Na slici 6.44 je prikazana kontura aerodinamičkog dodatka sa zadnje strane poluprikolice.



Slika 6.44 - Kontura aerodinamičkog dodatka sa zadnje strane poluprikolice

Sa slike 6.44 se može videti postupak dimenzionisanja i postavljanja dodatka sa zadnje strane poluprikolice. Najpre je postavljena nepomična tačka na vertikalnom rastojanju od polovine visine zadnje strane poluprikolice (samo tovarnog prostora bez nosećeg rama). Horizontalno rastojanje tačke je takođe dimenzionisano sa 0,2 m. Ova tačka predstavlja nultu tačku O u odnosu na koju se vrši dalje dimezionisanje i parametrizacija. Centar radijusa napadnog ugla aeroprofila je strogo postavljen na horizontalnom rastojanju od 0,2 m od tačke O, što zapravo predstavlja sam kraj poluprikolice. Radijus napadnog ugla aeroprofila se označen sa R1 i predstavlja parametarski element. Dužina srednje linije aeroprofila takođe predstavlja parametarski element i označen je sa L. Ugao  $\alpha$  (alfa) je ugao koji zaklapa srednja linija aeroprofila sa vertikalnom osom (vertikalnom ivicom zadnje strane poluprikolice) i predstavlja parametarski element. Visina na kojoj je postavljen aeroprofil, odnosno centar kružnice napadnog ugla u odnosu na tačku O je parametarski element, označen sa H. Radijus napadne ivice aeroprofila predstavlja usvojeni parametar, koji ima vrednost 0,3 m i na slici 6.44 je označen kao R2. Kontura aeroprofila sa slike 6.44 nakon parametrizacije i podešavanja se izvlači po drugoj konturi pravugaonika (pogled od nazad), kao bi kreirani dodatak bio sa sve četiri strane poluprikolice, uz uvek iste parametre konture aeroprofila. Na slici 6.45 je prikazan izgled kreiranog aerodinamičkog dodatka sa zadnje strane poluprikolice u nultom parametarskom položaju. Na slici se takođe vide i ode konture (kontura aeroprofila i kontura pravugaonika po kojoj je vršeno izvlačenje). Kreirani dodatak je tako parametarski podešen da uvek zauzima isto rastojanje od gornje i bočne ivice poluprikolice, s tim što je simetričan u odnosu na središnju ravan poluprikolice, kao i tačku O.



Slika 6.45 - Izgled aerodinamičkog dodatka sa zadnje strane poluprikolice

Nulta vrednost parametara koji se u nastavku eksperimenta variraju i prikazani su na slici 6.45 iznose:  $\alpha = 90^\circ$ ;  $H = 0,125 \text{ m}$ ;  $L = 0,075 \text{ m}$ ;  $R1 = 0,01 \text{ m}$ .

### Potpuno faktorijska struktura aerodinamičkog dodatka iza poluprikolice

Potpuna faktorijska struktura ovog aerodinamičkog dodatka je sprovedena na veoma sličan način kao i kroz primere do sada. Prethodno navedene vrednosti četiri parametra predstavljaju njihove nulte vrednosti (vrednosti nivoa 0) i kroz potpunu faktorijsku strukturu se variraju na još dva nivoa -1 i +1. Tako da se opet dobija potpuna faktorijska struktura  $3^4$  što daje 81 maksimalnu kombinaciju eksperimenata. Prikaz usvojenih vrednosti parametara za preostala dva nivoa je dat u tabeli 43.

Tabela 43 - Usvojene vrednosti parametara potpune faktorijske strukture

	$\alpha$ [°]	H [m]	L [m]	R1 [m]
<b>-1</b>	80	0,1	0,05	0,005
<b>0</b>	90	0,125	0,075	0,01
<b>1</b>	100	0,15	0,1	0,015

Potpuna faktorijska struktura eksperimenta se sprovodi putem niza CFD simulacije preko parametarskog podešavanja vrednosti četiri usvojena elementa. Eksperimentalne kombinacije su usvojene standardnim redosledom, koji je zajedno sa dobijenim rezultatima simulacija, vrednosti frontalne površine ispitivanog modela, sile otpora vazduha i koeficijenta otpora vazduha prikazan u okviru tabele 44.

Tabela 44 - Rezultati potpune faktorijske strukture aerodinamičkog dodatka iza poluprikolice

Potpuna faktorijska struktura					Rezultati simulacije		
Broj kombinacije	$\alpha$	H	L	R1	Čeona površina modela A [m <sup>2</sup> ]	Koeficijent otpora vazduha $c_w$ [-]	Sila otpora vazduha $F_w$ [N]
1	-1	-1	-1	-1	0,097936	1,151	41,58
2	-1	-1	-1	0	0,097936	1,141	41,21
3	-1	-1	-1	1	0,097933	1,144	41,32
4	-1	-1	0	-1	0,097936	1,142	41,23
5	-1	-1	0	0	0,097937	1,140	41,18
6	-1	-1	0	1	0,097935	1,138	41,09
7	-1	-1	1	-1	0,097937	1,124	40,60
8	-1	-1	1	0	0,097935	1,122	40,50
9	-1	-1	1	1	0,097935	1,122	40,51
10	-1	0	-1	-1	0,097934	1,149	41,49
11	-1	0	-1	0	0,097935	1,147	41,42
12	-1	0	-1	1	0,097932	1,144	41,29
13	-1	0	0	-1	0,097934	1,194	43,14
14	-1	0	0	0	0,097935	1,202	43,41
15	-1	0	0	1	0,097933	1,191	43,00
16	-1	0	1	-1	0,097935	1,183	42,71
17	-1	0	1	0	0,097936	1,189	42,94
18	-1	0	1	1	0,097935	1,172	42,32
19	-1	1	-1	-1	0,100358	1,172	43,38
20	-1	1	-1	0	0,105022	1,154	44,70
21	-1	1	-1	1	0,109804	1,121	45,38
22	-1	1	0	-1	0,100476	1,148	42,52
23	-1	1	0	0	0,105033	1,130	43,75
24	-1	1	0	1	0,109805	1,097	44,40
25	-1	1	1	-1	0,100594	1,140	42,29
26	-1	1	1	0	0,105043	1,100	42,59
27	-1	1	1	1	0,109799	1,078	43,66
28	0	-1	-1	-1	0,097936	1,151	41,57

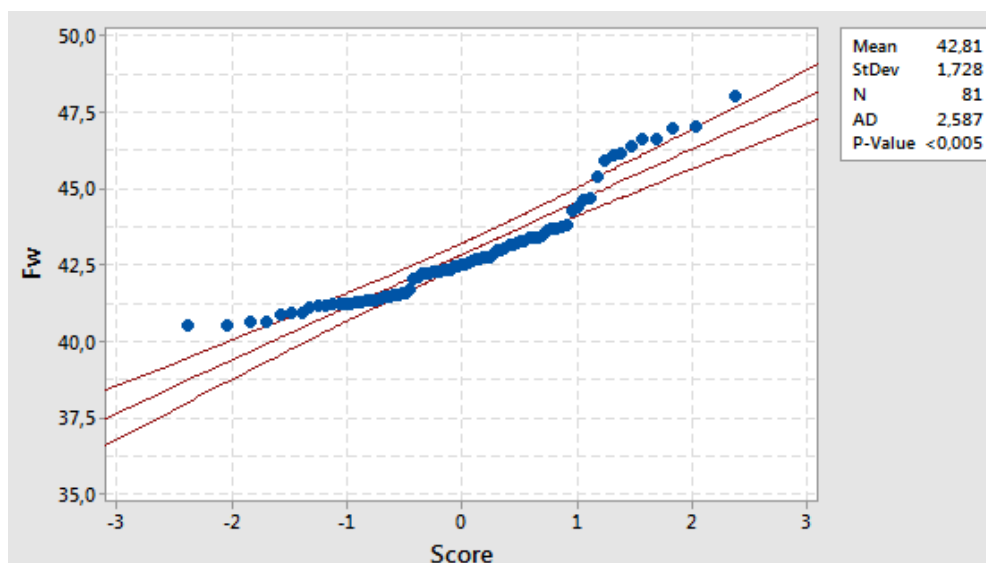
29	0	-1	-1	0	0,097936	1,145	41,35
30	0	-1	-1	1	0,097935	1,148	41,44
31	0	-1	0	-1	0,097935	1,133	40,91
32	0	-1	0	0	0,097937	1,164	42,04
33	0	-1	0	1	0,097936	1,140	41,17
34	0	-1	1	-1	0,097937	1,133	40,90
35	0	-1	1	0	0,097937	1,144	41,32
36	0	-1	1	1	0,097935	1,169	42,22
37	0	0	-1	-1	0,097936	1,155	41,70
38	0	0	-1	0	0,097933	1,207	43,61
39	0	0	-1	1	0,097935	1,150	41,52
40	0	0	0	-1	0,097939	1,198	43,26
41	0	0	0	0	0,097933	1,182	42,69
42	0	0	0	1	0,097934	1,186	42,84
43	0	0	1	-1	0,097935	1,191	43,01
44	0	0	1	0	0,097936	1,181	42,66
45	0	0	1	1	0,097935	1,169	42,20
46	0	1	-1	-1	0,100729	1,146	42,56
47	0	1	-1	0	0,105095	1,119	43,36
48	0	1	-1	1	0,109769	1,103	44,64
49	0	1	0	-1	0,101224	1,145	42,72
50	0	1	0	0	0,105269	1,118	43,38
51	0	1	0	1	0,109888	1,136	43,66
52	0	1	1	-1	0,102602	1,157	43,76
53	0	1	1	0	0,105933	1,108	43,27
54	0	1	1	1	0,110072	1,091	44,29
55	1	-1	-1	-1	0,097934	1,141	41,20
56	1	-1	-1	0	0,097935	1,142	41,24
57	1	-1	-1	1	0,097937	1,146	41,37
58	1	-1	0	-1	0,097934	1,168	42,18
59	1	-1	0	0	0,097936	1,132	40,87
60	1	-1	0	1	0,097937	1,184	42,76
61	1	-1	1	-1	0,097934	1,124	40,61
62	1	-1	1	0	0,097935	1,166	42,10
63	1	-1	1	1	0,097936	1,176	42,49
64	1	0	-1	-1	0,097933	1,175	42,45
65	1	0	-1	0	0,097934	1,195	43,17
66	1	0	-1	1	0,097935	1,172	42,33
67	1	0	0	-1	0,097936	1,176	42,45
68	1	0	0	0	0,097937	1,172	42,34
69	1	0	0	1	0,097935	1,196	43,18
70	1	0	1	-1	0,097933	1,171	42,28
71	1	0	1	0	0,097938	1,170	42,26
72	1	0	1	1	0,097933	1,140	41,17



73	1	1	-1	-1	0,104084	1,196	45,90
74	1	1	-1	0	0,105679	1,182	46,08
75	1	1	-1	1	0,109739	1,141	46,16
76	1	1	0	-1	0,108159	1,179	47,02
77	1	1	0	0	0,109130	1,159	46,63
78	1	1	0	1	0,111388	1,130	46,39
79	1	1	1	-1	0,112580	1,156	48,00
80	1	1	1	0	0,113598	1,121	46,97
81	1	1	1	1	0,115381	1,096	46,63

### Analiza dobijenih rezultata potpune faktorijske strukture

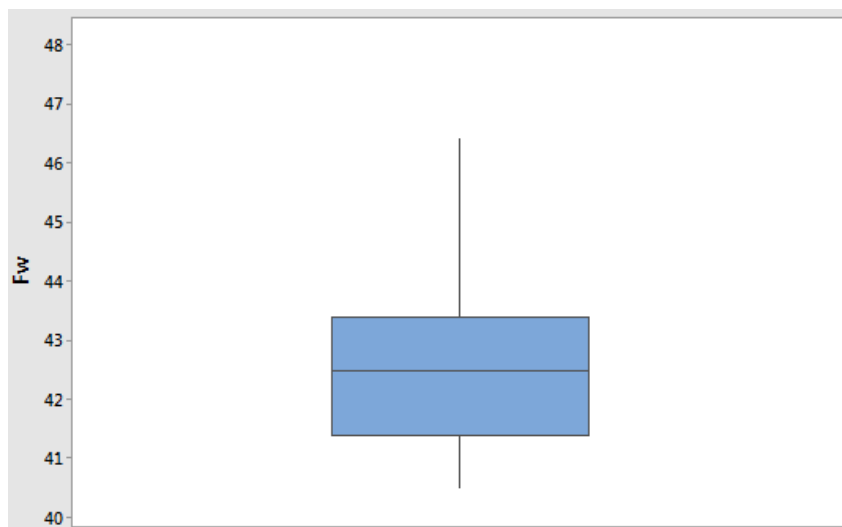
Pregledom dobijenih rezultata sile otpora vazduha iz prethodne tabele se može zaključiti da kombinacija pomoću koje je ostvarena njena najmanja vrednost je kombinacija broj 8, sa vrednošću sile otpora vazduha od 40,5 N. Dobijeni rezultati takođe pokazuju da ovaj aerodinamički dodatak malo utiče na umanjenje sile otpora vazduha, čak u nekim kombinacijama dolazi do njenog povećanja. Analiza rezultata je stpovedena u nastavku u cilju dobijanja optimalnog oblika dodatka koji će ipak za neku vrednost oboriti silu otpora vazduha ispitivanog modela. Prvi korak analize predstavlja prikazivanje rezultata kroz dijagram verovatnoće, odnosno normalne preraspodele. Na slici 6.46 je dat prikaz dijagrama normalne preraspodele dobijenih rezultata.



Slika 6.46 - Grafik normalne preraspodele dobijenih rezultata

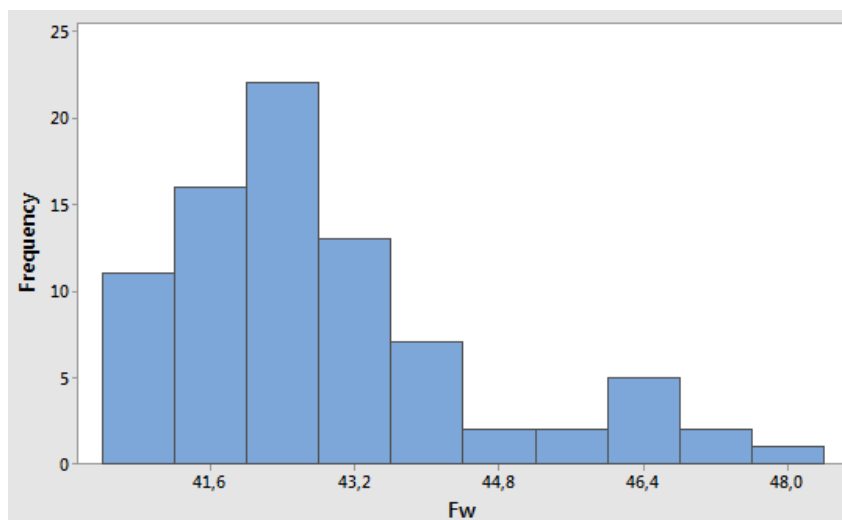
Sa slike normalne preraspodele rezultata se može uvideti da je srednja vrednost dobijenih rezultata sile otpora vazduha vrlo visoka 42,81 N. Ovaj podatak govori da su dobijeni rezultati grupisani oko većih vrednosti što nije najbolje rešenje sa aspekta minimalizacije sile otpora vazduha. Eksperiment ipak pokazuje veliki značaj pošto je P-vrednost i u ovom slučaju daleko ispod 0,05. Standardno odstupanje tokom eksperimenta je veoma dobro sa vrednošću od svega 1,728%. Sledeći korak analize dobijeh rezultata predstavlja njihov prikaz kroz kutijasti dijagram. Na slici 6.47 je prikazan kutijasti dijagram dobijenih rezultata sile otpora vazduha. Sa slike se može uvideti veoma dobra preraspodela rezultata u oblasti pravugaonik. U odnosu na srednju vrednost niza dobijenih rezultata, skoro podjednako su

grupisani rezultati u odstupanju od 25 do 75%. Još jedna dobra strana koja se može uvideti na osnovu kutijastog dijagrama je to da je pravugaonik rezultata bliži minimalnoj dobijenoj vrednosti nego maksimalnoj. Što govori da su rezultati više naklonjeni nižim vrednostima.



Slika 6.47 - Kutijasti dijagram dobijenih rezultata

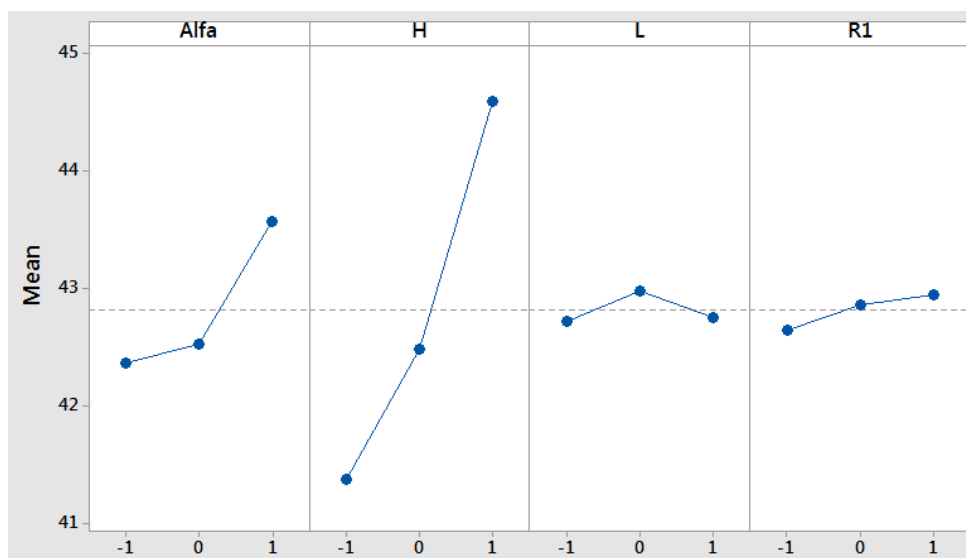
Na slici 6.48 je prikazan histogram dobijenih rezultata. Sa slike se može videti frekvencija zastupljenosti rezultata. Najviše dobijenih rezultata pretenduje nižim vrednostima, dok je značajno manje rezultata zastupljeno pri višim vrednostima sile otpora vazduha. Ovo potvrđuje dobro definisane vrednosti geometrijskih parametara eksperimenta.



Slika 6.48 - Histogram dobijenih rezultata

Grafički prikaz zastupljenosti faktora po nivoima predstavlja veoma bitan deo analize rezultata. Na osnovu ovog prikaza se može uvideti koji nivoi faktora obezbeđuju najmanju vrednost sile otpora vazduha i predstavljaju ulaz za dalji tok analize. Prikaz zastupljenosti rezultata po nivoima je dat na slici 6.49. Sa slike se vidi jasna dominacija parametra H i u pogledu stvaranja najmanje i najveće sile otpora vazduha. To potvrđuje da pomeranjem aerodinamičkog dodatka po visini i širini se najviše može doprineti poboljšanju rezultata. Sledeći faktor po važnosti je  $\alpha$ . Ovim faktorom se može doprineti umanjenu sile otpora vazduha ukoliko se njegova vrednost ograniči na vrednosti koje odgovaraju blizini nivoa -1.

Ista situacija je praćena i kod faktora H, gde se vidi značajno umanjeње sile otpora vazduha sa vrednostima oko nivoa -1. Faktori L i R1 u manjoj meri utiču na ishod eksperimenta. Faktor R1 je pokazao izvesni tendenciju stvaranju niže vrednosti sile otpora vazduha od faktora L i zbog toga je zadržan u daljem toku analize. Faktor L je proglašen faktorom konstantne vrednosti koja odgovara nivou -1, jer je na tom nivou obezbeđena najniža vrednost sile otpora vazduha.



Slika 6.49 - Zastupljenost faktora po nivoima

#### Analiza uticajnih faktora i kreiranje teorijskog modela

Analizom dobijenih vrednosti koja je sprovedena za potpunu faktorijsku strukturu linearnim modelom za sve redove interakcije faktora su dobijeni rezultati prikazani u tabeli 45.

Tabela 45 - Zastupljenost rezultata faktora i njihove interakcije

Izvor	Stepen slobode	Zbir kvadrata	Zastupljenost
Ukupni model	80	238,93	100,00%
Linearni model	8	170,625	71,41%
Alfa	2	23,128	9,68%
H	2	145,228	60,78%
L	2	1,014	0,42%
R1	2	1,254	0,52%
Interakcija 2. reda	24	44,527	18,64%
Alfa*H	4	35,445	14,83%
Alfa*L	4	1,853	0,78%
Alfa*R1	4	0,609	0,25%
H*L	4	2,489	1,04%
H*R1	4	3,535	1,48%
L*R1	4	0,596	0,25%
Interakcija 3. reda	32	20,674	8,65%
Alfa*H*L	8	9,728	4,07%
Alfa*H*R1	8	5,264	2,20%
Alfa*L*R1	8	1,766	0,74%

H*L*R1	8	3,917	1,64%
Interakcija 4. reda	16	3,105	1,30%
Alfa*H*L*R1	16	3,105	1,30%
Greška	0	*	*
Ukupno	80	238,93	100,00%

Pregledom dobijenih rezultata iz tabele 45 se može uvideti velika dominacija faktora H, kao i analize linearnog modela. Interakcija 3 i 4. reda zajedno zauzima oko 10% analize, što predstavlja vrednost koja bi eventualno mogla biti izostavljena. Ne bi se mnogo uticalo na kvalitet sprovedene analize rezultata i stvaranje teorijskog modela, ali bi se značajno umanjio broj koeficijenata i članova teorijskog modela. Pošto se u okviru ove analize teži obezbediti teorijski model koji 100% opisuje eksperimentalne podatke, analiza je sprovedena za maksimalni broj redova interakcije faktora. Teorijski model potpune faktorijske strukture eksperimenta ima oblik:

$$y = \beta_0 + \beta_\alpha \alpha + \beta_H H + \beta_L L + \beta_{R1} R1 + \beta_{\alpha H} \alpha H + \beta_{\alpha L} \alpha L + \beta_{\alpha R1} \alpha R1 + \beta_{HL} HL + \beta_{HR1} HR1 + \beta_{LR1} LR1 + \beta_{\alpha HL} \alpha HL + \beta_{\alpha HR1} \alpha HR1 + \beta_{\alpha LR1} \alpha LR1 + \beta_{HLR1} HLR1 + \beta_{\alpha HLR1} \alpha HLR1 + \epsilon$$

Vrednost dobijenih koeficijenata teorijskog modela je prikazana u okviru tabele 46.

Tabela 46 - Vrednost koeficijenata  $\beta$  teorijskog modela

Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$
<b>Alfa</b>		1 0	-0,2568	-1 0 -1	0,09316	-1 -1 0	-0,185	0 -1 -1 -1	0,2597
-1	-0,4571	1 1	0,07492	-1 0 0	-0,0836	-1 -1 1	-0,1963	0 -1 -1 0	-0,2977
0	-0,2926	<b>H*R1</b>		-1 0 1	-0,00956	-1 0 -1	0,09667	0 -1 -1 1	0,03801
1	0,7497	-1 -1	-0,00248	-1 1 -1	-0,4594	-1 0 0	0,01579	0 -1 0 -1	-0,2814
<b>H</b>		-1 0	-0,09631	-1 1 0	0,1031	-1 0 1	-0,1125	0 -1 0 0	0,4414
-1	-1,445	-1 1	0,09879	-1 1 1	0,3563	-1 1 -1	-0,478	0 -1 0 1	-0,16
0	-0,3381	0 -1	0,1909	0 -1 -1	-0,05171	-1 1 0	0,1692	0 -1 1 -1	0,02169
1	1,783	0 0	0,2064	0 -1 0	0,1199	-1 1 1	0,3088	0 -1 1 0	-0,1437
<b>L</b>		0 1	-0,3973	0 -1 1	-0,06823	0 -1 -1	-0,127	0 -1 1 1	0,122
-1	-0,09433	1 -1	-0,1884	0 0 -1	0,1092	0 -1 0	0,2312	0 0 -1 -1	-0,2753
0	0,1572	1 0	-0,1101	0 0 0	0,05901	0 -1 1	-0,1042	0 0 -1 0	0,4776
1	-0,06288	1 1	0,2986	0 0 1	-0,1682	0 0 -1	-0,01925	0 0 -1 1	-0,2023
<b>R1</b>		<b>L*R1</b>		0 1 -1	-0,05746	0 0 0	-0,2664	0 0 0 -1	0,2684
-1	-0,1685	-1 -1	-0,1257	0 1 0	-0,179	0 0 1	0,2856	0 0 0 0	-0,4226
0	0,04014	-1 0	0,1449	0 1 1	0,2364	0 1 -1	0,1463	0 0 0 1	0,1542
1	0,1283	-1 1	-0,01912	1 -1 -1	-0,3146	0 1 0	0,03511	0 0 1 -1	0,006876
<b>Alfa*H</b>		0 -1	0,02255	1 -1 0	-0,1005	0 1 1	-0,1814	0 0 1 0	-0,05497
-1 -1	0,1135	0 0	-0,08976	1 -1 1	0,415	1 -1 -1	-0,2543	0 0 1 1	0,04809
-1 0	0,3948	0 1	0,06721	1 0 -1	-0,2023	1 -1 0	-0,04625	0 1 -1 -1	0,01558
-1 1	-0,5083	1 -1	0,1032	1 0 0	0,02459	1 -1 1	0,3005	0 1 -1 0	-0,1799
0 -1	0,3594	1 0	-0,0551	1 0 1	0,1777	1 0 -1	-0,07742	0 1 -1 1	0,1643
0 0	0,4279	1 1	-0,04809	1 1 -1	0,5169	1 0 0	0,2506	0 1 0 -1	0,01298
0 1	-0,7873	<b>Alfa*H*L</b>		1 1 0	0,07586	1 0 1	-0,1731	0 1 0 0	-0,01881

1 -1	-0,4729	-1 -1 -1	0,1904	1 1 1	-0,5928	1 1 -1	0,3317	0 1 0 1	0,005825
1 0	-0,8227	-1 -1 0	-0,1017	<b>Alfa*L*R1</b>		1 1 0	-0,2043	0 1 1 -1	-0,02857
1 1	1,296	-1 -1 1	-0,0887	-1 -1 -1	0,1097	1 1 1	-0,1274	0 1 1 0	0,1987
<b>Alfa*L</b>		-1 0 -1	-0,8007	-1 -1 0	-0,1771	<b>Alfa*H*L*R1</b>		0 1 1 1	-0,1701
-1 -1	0,1573	-1 0 0	0,1984	-1 -1 1	0,0674	-1 -1 -1 -1	-0,2664	1 -1 -1 -1	0,006669
-1 0	0,1214	-1 0 1	0,6023	-1 0 -1	-0,1114	-1 -1 -1 0	0,1201	1 -1 -1 0	0,1777
-1 1	-0,2787	-1 1 -1	0,6103	-1 0 0	0,1793	-1 -1 -1 1	0,1463	1 -1 -1 1	-0,1843
0 -1	-0,009909	-1 1 0	-0,09671	-1 0 1	-0,06793	-1 -1 0 -1	-0,05827	1 -1 0 -1	0,3397
0 0	-0,1582	-1 1 1	-0,5136	-1 1 -1	0,001675	-1 -1 0 0	-0,03335	1 -1 0 0	-0,4081
0 1	0,1681	0 -1 -1	0,03201	-1 1 0	-0,00221	-1 -1 0 1	0,09163	1 -1 0 1	0,06841
1 -1	-0,1474	0 -1 0	-0,02777	-1 1 1	0,000535	-1 -1 1 -1	0,3247	1 -1 1 -1	-0,3464
1 0	0,03683	0 -1 1	-0,00424	0 -1 -1	-0,09383	-1 -1 1 0	-0,08671	1 -1 1 0	0,2304
1 1	0,1106	0 0 -1	0,04011	0 -1 0	0,1007	-1 -1 1 1	-0,238	1 -1 1 1	0,1159
<b>Alfa*R1</b>		0 0 0	0,03179	0 -1 1	-0,00683	-1 0 -1 -1	0,2001	1 0 -1 -1	0,07517
-1 -1	-0,08338	0 0 1	-0,07189	0 0 -1	0,009881	-1 0 -1 0	-0,3589	1 0 -1 0	-0,1187
-1 0	0,01576	0 1 -1	-0,07212	0 0 0	0,1634	-1 0 -1 1	0,1588	1 0 -1 1	0,04355
-1 1	0,06762	0 1 0	-0,00401	0 0 1	-0,1733	-1 0 0 -1	0,03111	1 0 0 -1	-0,2995
0 -1	-0,08626	0 1 1	0,07613	0 1 -1	0,08395	-1 0 0 0	0,2274	1 0 0 0	0,1952
0 0	0,07093	1 -1 -1	-0,2224	0 1 0	-0,264	-1 0 0 1	-0,2585	1 0 0 1	0,1043
0 1	0,01532	1 -1 0	0,1295	0 1 1	0,1801	-1 0 1 -1	-0,2312	1 0 1 -1	0,2244
1 -1	0,1696	1 -1 1	0,09293	1 -1 -1	-0,01587	-1 0 1 0	0,1315	1 0 1 0	-0,07649
1 0	-0,08669	1 0 -1	0,7606	1 -1 0	0,07644	-1 0 1 1	0,09978	1 0 1 1	-0,1479
1 1	-0,08294	1 0 0	-0,2302	1 -1 1	-0,06057	-1 1 -1 -1	0,06626	1 1 -1 -1	-0,08184
<b>H*L</b>		1 0 1	-0,5304	1 0 -1	0,1015	-1 1 -1 0	0,2388	1 1 -1 0	-0,05894
-1 -1	0,09064	1 1 -1	-0,5382	1 0 0	-0,3427	-1 1 -1 1	-0,3051	1 1 -1 1	0,1408
-1 0	-0,03441	1 1 0	0,1007	1 0 1	0,2412	-1 1 0 -1	0,02716	1 1 0 -1	-0,04014
-1 1	-0,05623	1 1 1	0,4375	1 1 -1	-0,08563	-1 1 0 0	-0,1941	1 1 0 0	0,2129
0 -1	-0,2725	<b>Alfa*H*R1</b>		1 1 0	0,2663	-1 1 0 1	0,1669	1 1 0 1	-0,1727
0 0	0,2912	-1 -1 -1	0,3663	1 1 1	-0,1806	-1 1 1 -1	-0,09342	1 1 1 -1	0,122
0 1	-0,01869	-1 -1 0	-0,01949	<b>H*L*R1</b>		-1 1 1 0	-0,04475	1 1 1 0	-0,1539
1 -1	0,1819	-1 -1 1	-0,3468	-1 -1 -1	0,3813	-1 1 1 1	0,1382	1 1 1 1	0,03195

### Metoda odgovorne površine u svrhu optimizacije aerodinamičkog dodatka iza poluprikolice

Na osnovu dobijenih rezultata zastupljenosti faktora u potpunoj faktorijskoj strukturi eksperimenta, utvrđeni su parametri koji su veoma bitni za sprovođenje eksperimenta, dok su pojedini izostavljeni iz daljeg toka analize. Grupisanjem parametara oko utvrđenih vrednosti nivoa u potpunoj faktorijskoj strukturi gde je ostvarena najniža vrednost sile otpora vazduha, postavlja se novih pet nivoa faktora unutar metode odgovorne površine. Parametri su usvojeni tako da im je korak između nivoa linearan. Sprovedena je centralna kompenzaciona metoda koja je detaljno objašnjena u prethodnim delovima rada. Usvojeni parametri koji su razmatrani u okviru MOP su  $\alpha, H, R1$ . Usvojene vrednosti parametara na pet nivoa su prikazani u okviru tabele 47.

Tabela 47 - Usvojene vrednosti parametara na pet nivoa

Nivo \ Parametar	$\alpha$ [°]	$H$ [m]	$R1$ [m]
1	40	0,08	0,002
2	50	0,09	0,003
3	60	0,1	0,004
4	70	0,11	0,005
5	80	0,12	0,006

Sprovedene MOP je veoma slično kao u prethodnom analiziranom slučaju pošto je isti broj faktora, kao i broj njihovih nivoa. Centralna kompenzaciona metoda je sprovedena i u tabeli 48 se mogu videti kombinacije faktora i nivoa unutar eksperimenata, kao i dobijeni rezultati. Dobijeni rezultati su u obliku tri podatka, vrednosti frontalne površine ispitivanog modela, sile otpora vazduha i koeficijenta otpora vazduha.

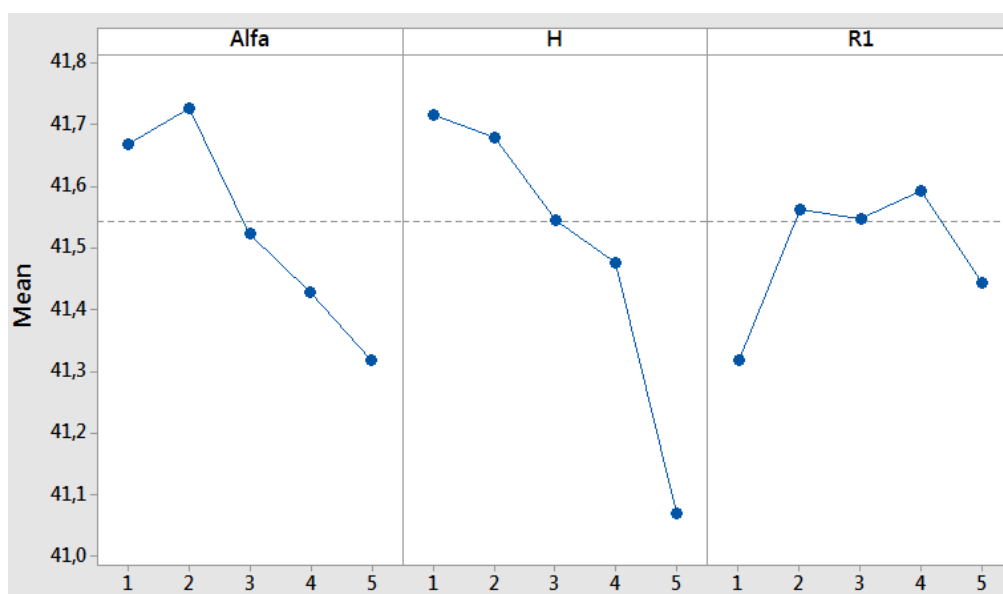
Tabela 48 - Rezultati metode odgovorne površine za  $5^3$  strukturu

Metoda odgovorne površine				Rezultati simulacije		
Broj kombinacije	$\alpha$	B	L	Čeona površina modela	Koeficijent otpora vazduha	Sila otpora vazduha
				$A$ [m <sup>2</sup> ]	$c_w$ [-]	$F_w$ [N]
1	2	2	2	0,097936	1,160	41,91
2	4	2	2	0,097933	1,157	41,78
3	2	4	2	0,097934	1,151	41,56
4	4	4	2	0,097935	1,150	41,52
5	2	2	4	0,097936	1,151	41,56
6	4	2	4	0,079735	1,171	42,30
7	2	4	4	0,097935	1,143	41,29
8	4	4	4	0,097934	1,144	41,30
9	1	3	3	0,097937	1,169	42,21
10	5	3	3	0,097934	1,147	41,42
11	3	1	3	0,097935	1,161	41,92
12	3	5	3	0,097936	1,149	41,51
13	3	3	1	0,097936	1,150	41,52
14	3	3	5	0,097936	1,150	41,52
15	3	3	3	0,097938	1,152	41,61
16	3	3	3	0,097938	1,152	41,61
17	3	3	3	0,097938	1,152	41,61
18	3	3	3	0,097938	1,152	41,61
19	3	3	3	0,097938	1,152	41,61
20	3	3	3	0,097938	1,152	41,61

#### Analiza dobijenih rezultata

Broj eksperimentalnih prolaza je 20, kao u prethodnom slučaju. Poslednjih 7 eksperimentalnih kombinacija su iste zbog preklapanja tačaka unutar kocke centralne kompenzacione metode. Dobijeni rezultati su veoma slični, što govori da je izvršeno dobro

postavljanje usvojenih geometrijskih vrednosti faktora. Grafički prikaz zastupljenosti rezultata faktora po nivoima je prikazan na slici 6.50. Sa slike se može videti da faktori imaju najniže vrednosti sile otpora vazduha pri početnim ili krajnjim vrednostima nivoa. Ovo predstavlja razliku u odnosu na prethodne slučajeve u kojima se težilo postići najbolji rezultat oko vrednosti središnjeg nivoa faktora. U ovom slučaju se može zaključiti da sa pomeranjem područja prostiranja nivoa bi se dobili još povoljniji rezultati. To je verovatno i tačno. Razlog zbog koga nije to i sprovedeno je nemogućnost fizičkog kreiranja takvih oblika. Najveći problem predstavlja veoma mala vrednost radijusa napadnog ugla R1 od svega 0,002 m i tendencijom da još opada. Slična priča je i sa ostala dva faktora. Uprkos eventualnog ostvarenja boljeg rezultata, zbog fizičke nemogućnosti kreiranja geometrijskog oblika dodatka, analiza se nastavlja sa dobijenim rezultatima sa slike 6.50.



Slika 6.50 - Zastupljenost rezultata faktora po nivoima

#### Analiza uticajnih faktora i kreiranje teorijskog modela

Analiza uticajnih faktora i njihove međusobne interakcije je sprovedena kvadratnim modelom sa interakcijama do 2. reda. Rezultati su prikazani u tabeli 49.

Tabela 49 - Rezultati analize uticajnih faktora i njihove interakcije

Izvor	Stepen slobode	Zbir kvadrata	Zastupljenost
Ukupni model	9	0,686263	88,67%
Linearni model	3	0,509827	65,87%
Alfa	1	0,22458	29,02%
H	1	0,276415	35,71%
R1	1	0,008831	1,14%
Kvadratni model	3	0,094301	12,18%
Alfa*Alfa	1	0,000477	0,06%
H*H	1	0,033563	4,34%
R1*R1	1	0,060261	7,79%
Interakcija 2.	3	0,082135	10,61%

reda			
Alfa*H	1	0,042045	5,43%
Alfa*R1	1	0,028883	3,73%
H*R1	1	0,011206	1,45%
Greška	5	0,087709	11,33%
Ukupno	14	0,773972	100,00%

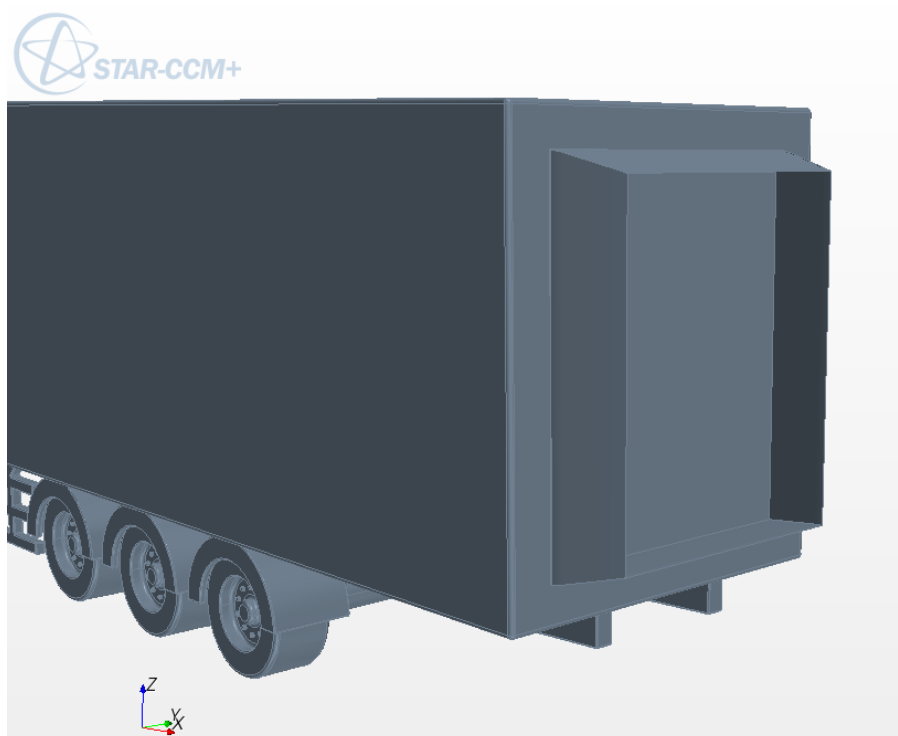
Sprovedena kvadratna analiza do interakcije 2. reda faktora doprinosi stvaranju teorijskog modela, odnosno teorijske funkcije koja opisuje stvarno ponašanje eksperimenata sa vrednošću odstupanja od 11,33%. Terijski model funkcije sa koeficijentima ima oblik:

$$F_{W \text{ teor.}} = 41,718 - 0,030\alpha - 0,184H + 0,385R1 - 0,0210\alpha^2 - 0,0462H^2 - 0,0490R1^2 + 0,0725\alpha H - 0,0601\alpha R1 + 0,0374HR1$$

Matematičkom optimizacijom parametara teorijskog modela u svrhu dobijanja najmanjem moguće vrednosti sile otpora vazduha se dolazi do istih rezultata kao i na osnovu preliminarnog izgleda sa slike 6.50. Najmanja sila otpora vazduha se dobija postavljanjem parametra  $\alpha$  u krajnji nivo, kao i parametar H, dok se parametar R1 postavlja u položaj koji odgovara nivou 1. Geometrijske vrednosti dobijenih parametara su:

$$\alpha = 80^\circ \quad H = 0,12 \text{ m} \quad R1 = 0,002 \text{ m}$$

Dobijena vrednost sile otpora vazduha pri ovoj konfiguraciji parametara daje optimalnu vrednost od 40,96 N. Proverom u CFD simulaciji za istu konfiguraciju se dobila približna vrednost sile otpora vazduha. Na slici 6.51 je dat prikaz usvojenih vrednosti parametara aerodinamičkog dodatka iza poluprikolice nakon sprovođenja optimizacionog procesa.

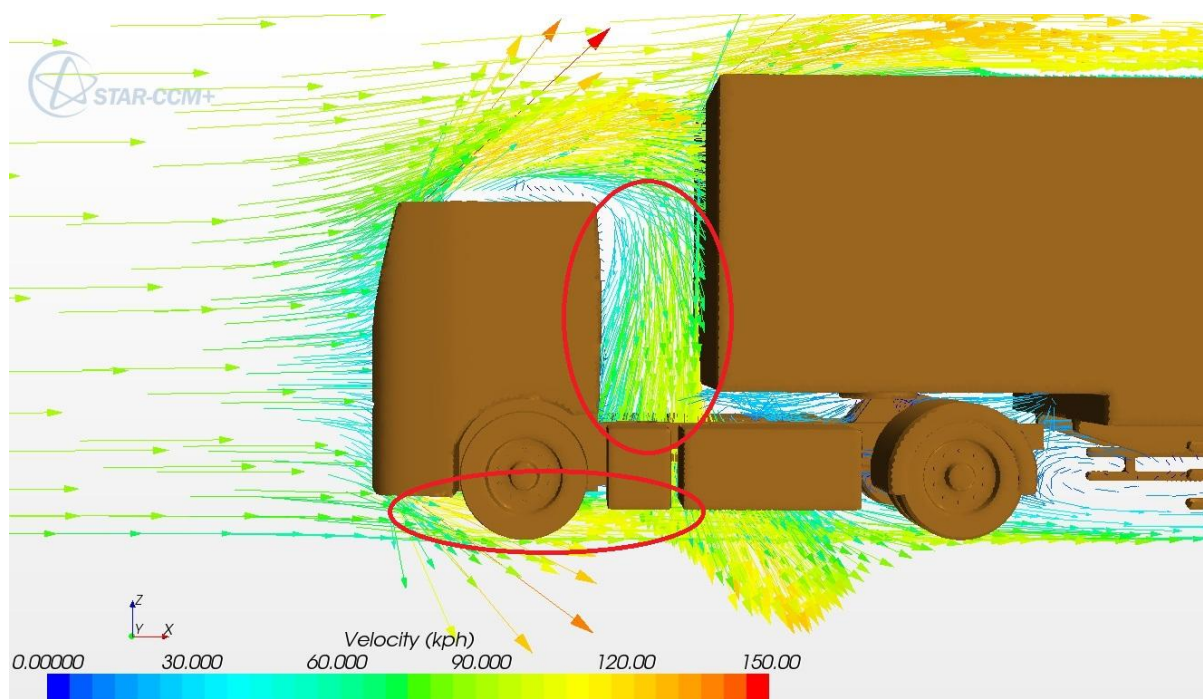


Slika 6.51 - Optimalni oblik aerodinamičkog dodatka iza poluprikolice



### 6.3.4. Optimizacija horizontalnog aerodinamičkog dodatka iza kabine kamiona

Pregledom i analizom toka vazdušne struje oko kabine kamiona se uvidelo da značajan deo vazdušne struje ulazi u oblast između kabine kamiona i čeonu strane poluprikolice. Deo tih strujnica dolazi sa gornje strane preko kabine i zadržava se u toj oblasti, a drugi deo prolazi ispod kabine kamiona i od dole ulazi u oblast između kamiona i poluprikolice. Ovoj pojavi svakako doprinosi noseći ram kamiona koji je napravljen iz profila i koji ostavlja delove koji nisu popunjeni, kroz koje vazdušna struja može da prolazi. Vertikalni aerodinamički dodaci koji su kreirani u prethodnom delu rada značajno utiču na umanjavanje prolaska vazdušne struje koja obilazi oko kabine i ulazi u oblast između kabine i poluprikolice. Ali svakako uprkos vertikalnim aerodinamičkim dodacima deo vazdušne struje prolazi. Na slici 6.52 je prikazan tok vazdušne struje oko kabine kamiona.

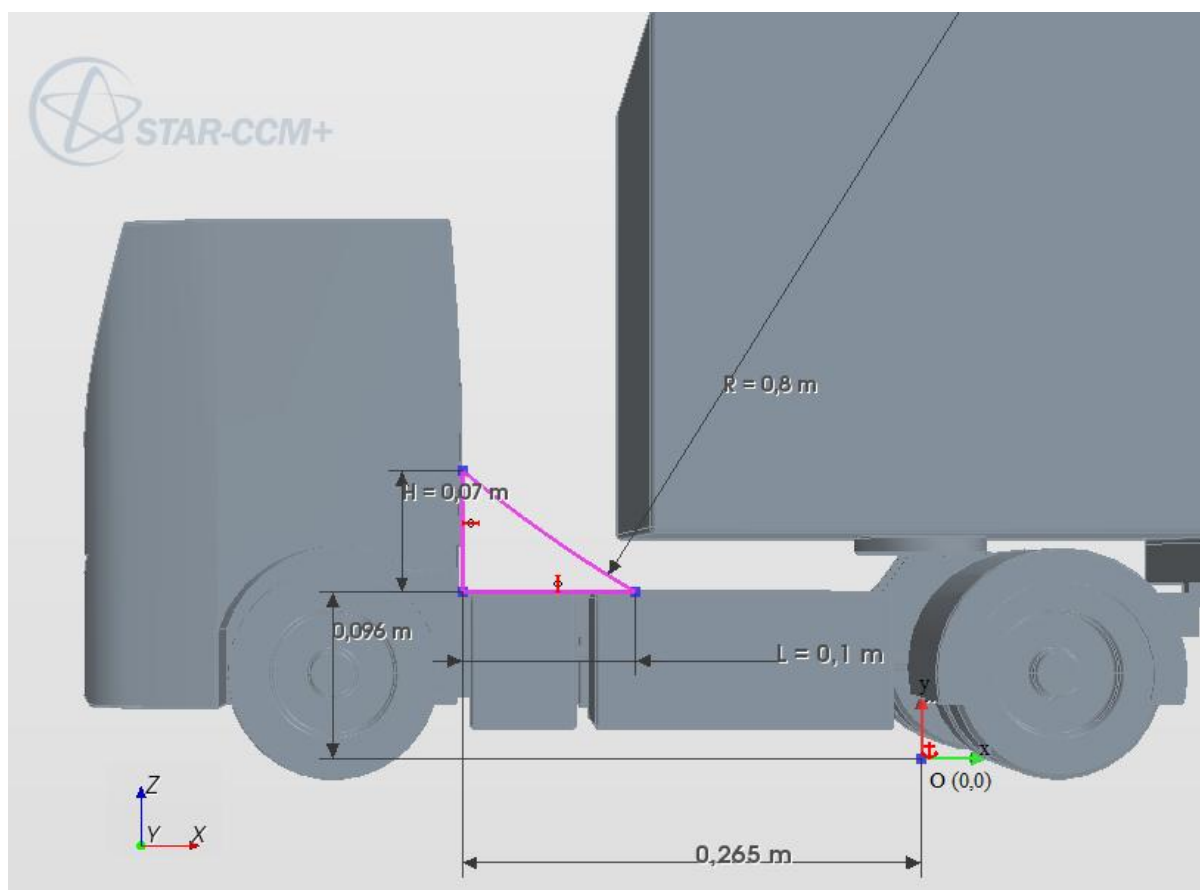


Slika 6.52 - Tok vazdušne struje oko kabine kamiona

Sa slike 6.52 se mogu videti dva kritična kraka vazdušne struje. Gornji krak predstavlja vazdušnu struju koja prelazi kabinu kamiona i biva usmerena na dole, prilikom čega prolazi kroz noseću konstrukciju kamiona i nastavlja dalje. Drugi krak vazdušne struje predstavlja donji tok koji se usmerava na dole prilikom nailaska na čeonu stranu kabine kamiona i biva usmeren na dole, prilikom čega nastavlja da se kreće ispod kamiona. Dolaskom do oblasti u kojoj je prostor između kabine i poluprikolice i nailaskom na vazdušnu struju koja dolazi od gore, dolazi do njihovog mešanja. Posledica ovog mešanja dva toka vazdušne struje je stvaranje vrtložnog kretanja i povećanja rezultujuće brzine strujnica u oblasti iza kabine kamiona i neposredno ispod noseće konstrukcije kamiona. Stvaranje vrtložnog kretanja doprinosi generisanju lokalnih otpora u smislu sile otpora vazduha. Na osnovu ove analize, dolazi se do zaključka da osim vertikalnih aerodinamičkih dodataka treba kreirati novi aerodinamički dodatak koji će umanjiti efekat prodora i mešanja ova dva toka vazdušne struje.

*Usvajanje osnovnog oblika dodatka preko aeroprofila*

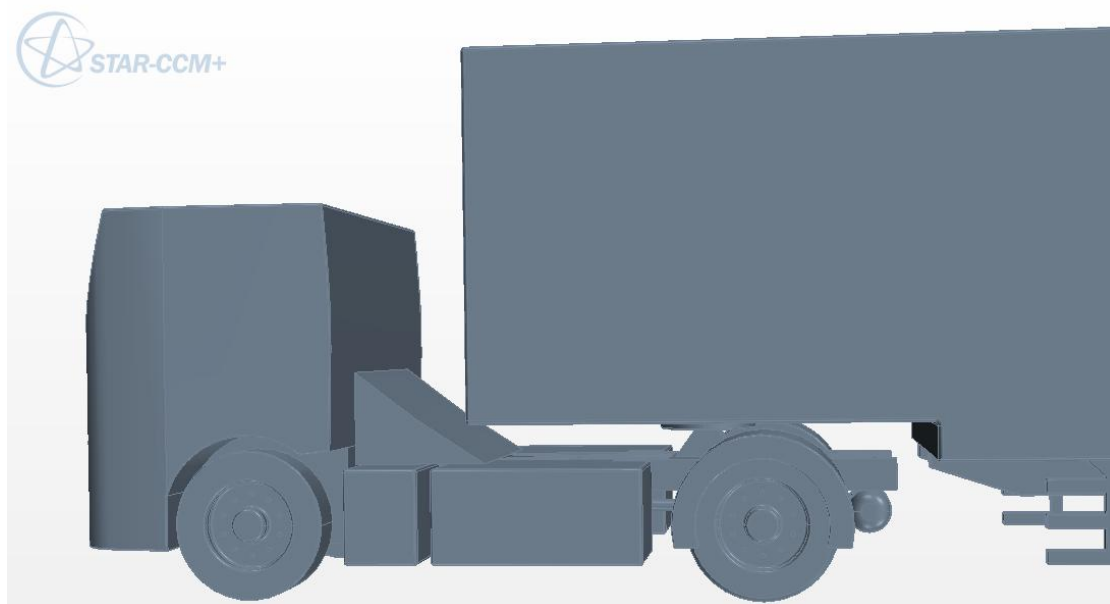
Kao i u prethodnim slučajevima, aeroprofil se koristi za kreiranje osnovnog oblika aerodinamičkog dodatka. U ovom slučaju zbog položaja ubacivanja novog aerodinamičkog dodatka, njegov izgled malo odstupa od dosadašnjih aerodinamičkih dodataka u čijoj osnovi se jasno mogao naslutiti aeroprofil. Ovaj dodatak će biti sastavljen od parcijalnih geometrijskih elemenata koji su uglavnom viđeni u prethodnih slučajevima, ali uz njihovu modifikaciju ka kreiranju konturnog oblika koji odgovara mestu ugradnje. Konturni oblik aerodinamičkog dodatka se postavlja u prostor iza kabine kamiona u uzdužnu ravan modela. Na slici 6.53 se vidi konturni oblik aerodinamičkog dodatka sa konstantnim i parametarskim geometrijskim vrednostima.



Slika 6.53 - Konturni oblik horizontalnog aerodinamičkog dodatka iz kabine kamiona

Konstantne vrednosti parametara koje učestvuju u pozicioniranju konture aerodinamičkog dodatka su vertikalno rastojanje donje stranice konture od tačke O u iznosu od 0,096 m. Ova visina je usvojena i predstavlja gornju vrednost noseće karoserije kamiona u odnosu na tačku O. Što zapravo govori da se aerodinamički dodatak svojom donjom stranom naslanja na noseću konstrukciju kamiona. Druga vrednost predstavlja horizontalno rastojanje uspravne stranice aerodinamičkog dodatka u odnosu na tačku O. Ova vrednost je usvojena tako da se aerodinamički dodatak naslanja na zadnju stranu kabine kamiona i iznosi 0,265 m. Osim ovih konstantnih parametara, u kreiranju konture učestvuju i četiri elementa čija se vrednost menja tokom eksperimenata. Prvi parametar ili faktor je dužina donje stranice dodatka L, čijim se podešavanjem pomera desna tačka po horizontalnoj osi. Drugi parametar je visina aerodinamičkog profila H, čijom promenom vrednosti gornja tačka se pomera duž vertikalne ose. Treći parametar je radijus napadnog ugla ili treće stranice aerodinamičkog dodatka, označen sa R. Nakon podešavanja parametara, kontura aerodinamičkog dodatka se izvlači simetrično u odnosu na uzdužnu ravan kamiona i vrednost tog izvlačenja predstavlja širinu

odatka koja je četvrti parametar čija se vrednost menja tokom eksperimenata i označen je sa B. Širina B se unosi kao polovina stvarne vrednosti, zato što je dodatak kreiran simetričnim izvlačenjem konture. Na slici 6.54 je dat prikaz kreiranog horizontalnog aerodinamičkog dodataka iza kabine kamiona u nultom položaju parametara. Pri kreiranju ovog aerodinamičkog dodatka se vodilo računa o njegovom položaju, kako se ne bi uticalo na funkcionalne mogućnosti modela, kao što su radijus zakretanja poluprikolice u odnosu na kamion.



Slika 6.54 - Izgled horizontalnog aerodinamičkog dodatka iza kabine kamiona

### Potpuno faktorijska struktura horizontalnog aerodinamičkog dodatka iza kabine kamiona

Potpuna faktorijska struktura i u ovom slučaju je kreirana na isti način, sačinjena od četiri parametra koji se variraju na tri nivoa. Postoji 81 moguća kombinacija eksperimenata koji su sprovedeni CFD simulacijama u svrhu dobijanja frontalne površine modela, sile otpora vazduha i koeficijenta otpora vazduha. U tabeli 50 su prikazane geometrijske vrednosti parametara po nivoima.

Tabela 50 - Usvojene vrednosti parametara po nivoima

	$B [m]$	$H [m]$	$L [m]$	$R [m]$
<b>-1</b>	0,05	0,04	0,05	0,6
<b>0</b>	0,075	0,07	0,1	0,8
<b>1</b>	0,1	0,1	0,15	1

Sprovođenjem 81 virtuelnog CFD eksperimenta sa kombinacijama složenim standardnim redosledom, dobijene su vrednosti rezultata frontalne površine modela, sile otpora vazduha i koeficijenta otpora vazduha, prikazane u tabeli 51.

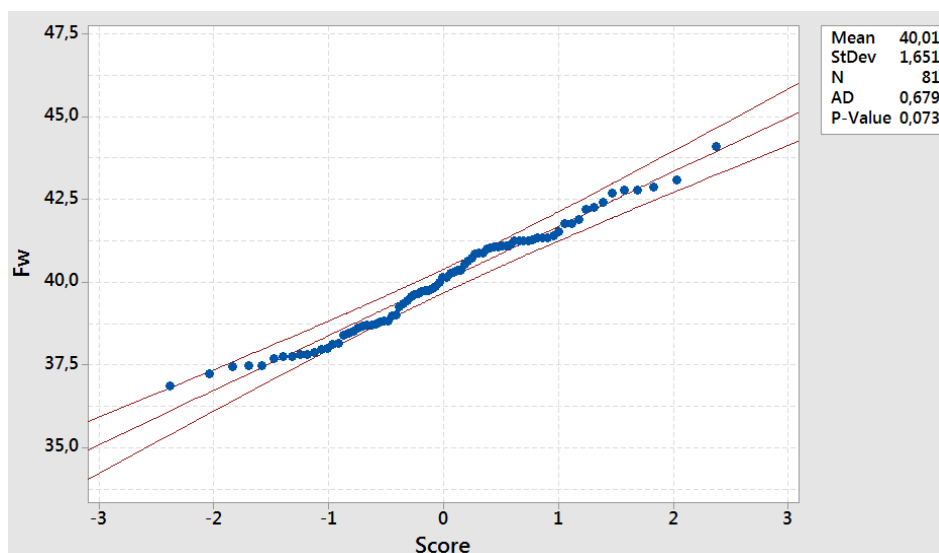
Tabela 51 - Rezultati potpune faktorijske struktura horizontalnog aerodinamičkog dodatka iza kabine kamiona

Potpuna faktorijska struktura					Rezultati simulacije		
Broj kombinacije	B	H	L	R	Čeona površina modela $A [m^2]$	Koeficijent otpora vazduha $c_w [-]$	Sila otpora vazduha $F_w [N]$
1	-1	-1	-1	-1	0,097934	1,142	41,25
2	-1	-1	-1	0	0,097932	1,137	41,06
3	-1	-1	-1	1	0,097934	1,135	40,99
4	-1	-1	0	-1	0,097935	1,193	43,09
5	-1	-1	0	0	0,097936	1,174	42,40
6	-1	-1	0	1	0,097937	1,182	42,69
7	-1	-1	1	-1	0,097937	1,183	42,76
8	-1	-1	1	0	0,097937	1,184	42,79
9	-1	-1	1	1	0,097933	1,187	42,85
10	-1	0	-1	-1	0,097929	1,137	41,05
11	-1	0	-1	0	0,097937	1,138	41,10
12	-1	0	-1	1	0,097934	1,142	41,25
13	-1	0	0	-1	0,097933	1,147	41,41
14	-1	0	0	0	0,097932	1,131	40,83
15	-1	0	0	1	0,097934	1,137	41,07
16	-1	0	1	-1	0,097934	1,160	41,89
17	-1	0	1	0	0,097933	1,170	42,26
18	-1	0	1	1	0,097934	1,144	41,32
19	-1	1	-1	-1	0,097933	1,132	40,89
20	-1	1	-1	0	0,097932	1,132	40,88
21	-1	1	-1	1	0,097934	1,122	40,52
22	-1	1	0	-1	0,097933	1,101	39,75
23	-1	1	0	0	0,097935	1,100	39,73
24	-1	1	0	1	0,097937	1,102	39,81
25	-1	1	1	-1	0,097933	1,143	41,27
26	-1	1	1	0	0,097932	1,157	41,77
27	-1	1	1	1	0,097930	1,149	41,51
28	0	-1	-1	-1	0,097932	1,140	40,63
29	0	-1	-1	0	0,097933	1,144	41,12
30	0	-1	-1	1	0,097932	1,124	40,36
31	0	-1	0	-1	0,097933	1,099	39,69
32	0	-1	0	0	0,097930	1,142	41,24
33	0	-1	0	1	0,097934	1,127	40,72
34	0	-1	1	-1	0,097934	1,136	41,35
35	0	-1	1	0	0,097930	1,134	41,33
36	0	-1	1	1	0,097933	1,142	41,23
37	0	0	-1	-1	0,097932	1,051	37,95
38	0	0	-1	0	0,097931	1,065	38,46

39	0	0	-1	1	0,097932	1,063	38,40
40	0	0	0	-1	0,097937	1,071	38,66
41	0	0	0	0	0,097933	1,075	38,82
42	0	0	0	1	0,097930	1,069	38,59
43	0	0	1	-1	0,097934	1,107	39,99
44	0	0	1	0	0,097936	1,112	40,14
45	0	0	1	1	0,097934	1,136	41,03
46	0	1	-1	-1	0,097936	1,052	38,00
47	0	1	-1	0	0,097930	1,038	37,48
48	0	1	-1	1	0,097930	1,043	37,67
49	0	1	0	-1	0,097933	1,073	38,73
50	0	1	0	0	0,097934	1,055	38,11
51	0	1	0	1	0,097934	1,048	37,86
52	0	1	1	-1	0,097934	1,097	39,60
53	0	1	1	0	0,097931	1,118	40,36
54	0	1	1	1	0,097932	1,087	39,24
55	1	-1	-1	-1	0,097934	1,094	39,32
56	1	-1	-1	0	0,097934	1,102	39,64
57	1	-1	-1	1	0,097934	1,100	38,98
58	1	-1	0	-1	0,097937	1,074	38,77
59	1	-1	0	0	0,097931	1,080	39,00
60	1	-1	0	1	0,097933	1,071	38,68
61	1	-1	1	-1	0,097934	1,086	39,43
62	1	-1	1	0	0,097932	1,096	40,12
63	1	-1	1	1	0,097934	1,115	40,28
64	1	0	-1	-1	0,097934	1,047	37,82
65	1	0	-1	0	0,097932	1,036	37,43
66	1	0	-1	1	0,097932	1,056	38,14
67	1	0	0	-1	0,097930	1,067	38,52
68	1	0	0	0	0,097935	1,071	38,69
69	1	0	0	1	0,097936	1,075	38,81
70	1	0	1	-1	0,097934	1,095	39,56
71	1	0	1	0	0,097932	1,103	39,85
72	1	0	1	1	0,097937	1,168	42,20
73	1	1	-1	-1	0,097933	1,045	37,75
74	1	1	-1	0	0,097933	1,031	37,22
75	1	1	-1	1	0,097935	1,021	36,86
76	1	1	0	-1	0,097931	1,045	37,75
77	1	1	0	0	0,097931	1,038	37,48
78	1	1	0	1	0,097932	1,047	37,82
79	1	1	1	-1	0,097935	1,157	41,77
80	1	1	1	0	0,097936	1,221	44,10
81	1	1	1	1	0,097934	1,115	40,26

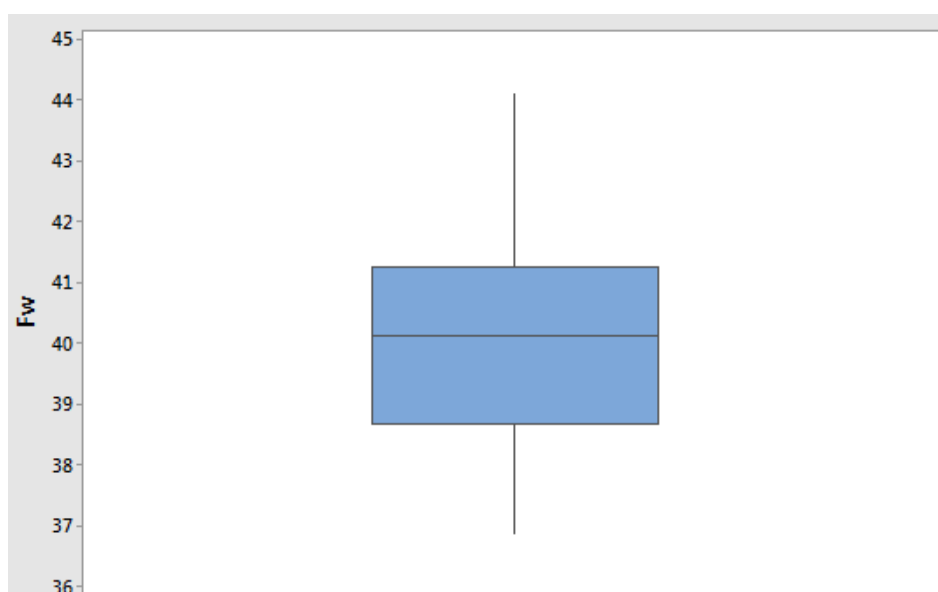
*Analiza dobijenih rezultata potpune faktorijske strukture*

Kao i u prethodnim slučajevima, analiza dobijenih rezultata je sprovedena za vrednosti sile otpora vazduha. Prvi korak analize predstavlja kreiranje dijagrama normalne preraspodele dobijenih rezultata koji je prikazan na slici 6.55.



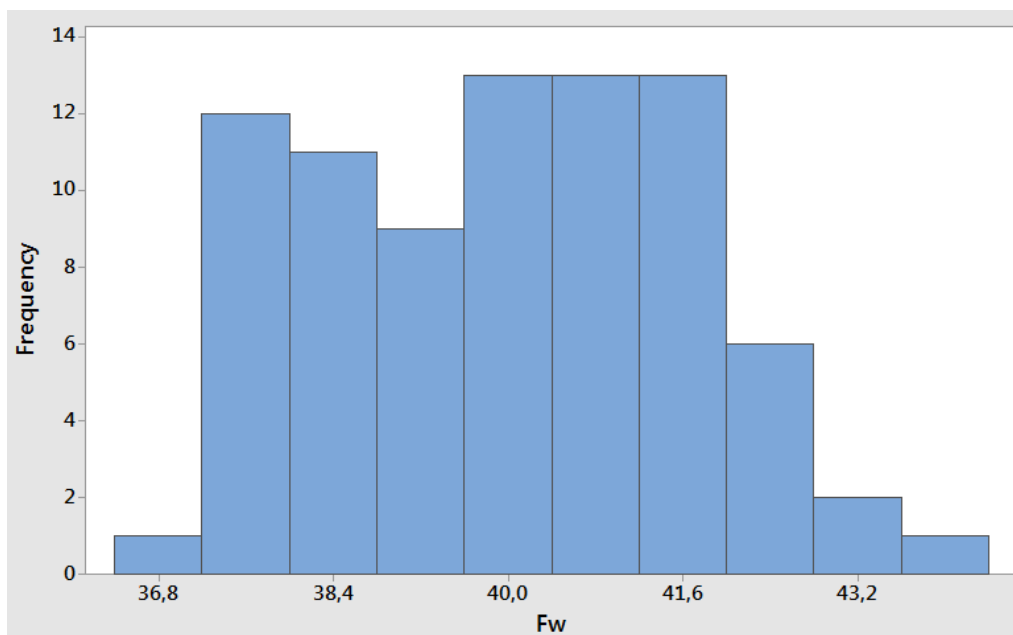
Slika 6.55 - Grafik normalne preraspodele dobijenih rezultata

Sa slike normalne preraspodele rezultata sile otpora vauduha se može videti veoma mala vrednost odstupanja od svega 1,651%. Srednja vrednost sile otpora vazduha od 81 vrednosti iznosi 40,01 N što govori da su dobijeni rezultati gripisani ka višim vrednostima. P-vrednost je 0,073 što za malu vrednost prelazi granicu od 0,05 do koje se smatra da je eksperiment veoma značajan, odnosno da ima veliki potencijal. Sledeći korak analize je prikaz dobijenih rezultata kutijastim dijagramom. Na slici 6.56 je prikazan kutijasti dijagram niza vrednosti sile otpora vazduha.



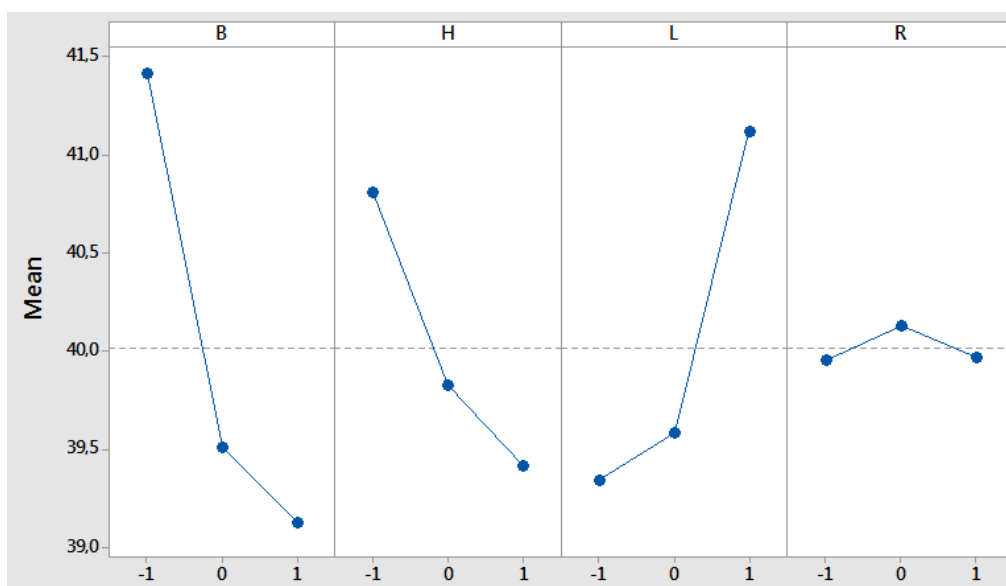
Slika 6.56 - Kutijasti dijagram sile otpora vazduha

Na slici 6.56 se može videti dobra preraspodela rezultata unutar pravugaonika. U odnosu na srednju vrednost, većim delom su rezultati grupisani oko vrednosti koje su niže za 25% u odnosu na srednju vrednost. Kompletni rezultati su više orijentisani ka višim vrednostima sile otpora vazduha, što znači da aerodinamički dodatak ima manji uticaj na obaranje sile otpora vazduha. Ono što se još može zaključiti sa kutijastog dijagrama je to da iako su rezultati kompletno oko viših vrednosti sile otpora vazduha, sam pravugaonik kutijastog dijagrama je spušten ka nižoj vrednosti, što govori da se iz ovakve postavke eksperimenta ipak može doprineti do obaranja sile otpora vazduha u nekim vrednostima. Histogram sa slike 6.57 pozazuje gde je najveća koncentracija dobijenih rezultata. U oblasti nižih i srednjih vrednosti rezultata je najveća učestalost.



Slika 6.57 - Histogram dobijenih rezultata

Zastupljenost faktora po nivoima je sledeći korak analize rezultata. Sa slike 6.58 se može videti kako faktori i njihovi nivoi utiču na rezultat sile otpora vazduha.



## Slika 6.58 - Zastupljenost faktora po nivoima

Sa slike 6.58 se može uvideti jasna dominacija faktora B, H i L na formiranje rezultata, Faktor R u maloj meri utiče na rezultat, tako da će u nastavku analize se smatrati konstantnim parametrom sa vrednošću koja odgovara vrednosti od 0,8 m. Faktor B je pokazao da najviše utiče na rezultat i da se njegovim podešavanjem mogu dobiti veoma različiti rezultati sile otpora vazduha. Veoma slična priča je i sa faktorom L koji u velikoj meri utiče na rezultat. Faktor H utiče manje na rezultat, ali će u nastavku analize biti upotrebljen kao parametarski element.

## Analiza uticajnih faktora i kreiranje teorijskog modela

Analiza uticajnih faktora i kreiranje teorijskog modela je izvršeno linearnim modelom sa faktorima maksimalnog reda interakcije. Dobijene vrednosti zastupljenosti faktora u modelu su prikazani u tabeli 52.

Tabela 52 - Zastupljenost faktora i njihovih interakcija

Izvor	Stepen slobode	Zbir kvadrata	Zastupljenost
Ukupni Model	80	218,049	100,00%
Linearni model	8	159,854	73,31%
B	2	81,383	37,32%
H	2	27,695	12,70%
L	2	50,261	23,05%
R	2	0,514	0,24%
Interakcija 2. reda	24	31,252	14,33%
B*H	4	9,352	4,29%
B*L	4	8,409	3,86%
B*R	4	0,414	0,19%
H*L	4	9,316	4,27%
H*R	4	2,672	1,23%
L*R	4	1,09	0,50%
Interakcija 3. reda	32	21,765	9,98%
B*H*L	8	13,817	6,34%
B*H*R	8	3,252	1,49%
B*L*R	8	0,985	0,45%
H*L*R	8	3,711	1,70%
Interakcija 4. reda	16	5,179	2,37%
B*H*L*R	16	5,179	2,37%
Greška	0	*	*
Ukupno	80	218,049	100,00%

Iz tabele 52 se može zaključiti velika zastupljenost linearnog modela i interakcije 2. reda. Interakcije 3 i 4. reda su ukupno oko 10% što govori da bi se i bez njih mogao kreirati dovoljno dobar teorijski model, ali zbog sigurnosti i potpune analize sistema, sprovedena je potpuna analiza sa maksimalnim brojem reda interakcija, što dovodi do kreiranja teorijskog modela sa 100% poklapanja sa eksperimentalnim vrednostima. Takođe se i kroz procentualne



vrednosti iz tabele 52 može zaključiti zastupljenost faktora. Na osnovu dobijenih vrednosti sprovedene analize, teorijski model ima oblik:

$$y = \beta_0 + \beta_B B + \beta_H H + \beta_L L + \beta_R R + \beta_{BH} BH + \beta_{BL} BL + \beta_{BR} BR + \beta_{HL} HL + \beta_{HR} HR + \beta_{LR} LR + \beta_{BHL} BHL + \beta_{BHR} BHR + \beta_{BLR} BLR + \beta_{HLR} HLR + \beta_{BHLR} BHLR + \epsilon$$

Vrednost dobijenih koeficijenata  $\beta$  u teorijskom modelu je data u tabeli 53.

Tabela 53 - Vrednost koeficijenata  $\beta$  u teorijskom modelu

Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$	Faktor	$\beta$
<b>B</b>		1 0	-0,4222	-1 0 -1	0,1366	-1 -1 0	0,151	0 -1 -1 -1	0,1442
-1	1,4	1 1	0,578	-1 0 0	0,2359	-1 -1 1	-0,157	0 -1 -1 0	-0,0702
0	-0,5051	<b>H*R</b>		-1 0 1	-0,3726	-1 0 -1	-0,1518	0 -1 -1 1	-0,07397
1	-0,8945	-1 -1	-0,04253	-1 1 -1	-0,2675	-1 0 0	0,1268	0 -1 0 -1	-0,3902
<b>H</b>		-1 0	0,0487	-1 1 0	-0,05119	-1 0 1	0,02503	0 -1 0 0	0,1162
-1	0,7923	-1 1	-0,00618	-1 1 1	0,3187	-1 1 -1	0,1458	0 -1 0 1	0,274
0	-0,1912	0 -1	-0,1081	0 -1 -1	-0,1432	-1 1 0	-0,2778	0 -1 1 -1	0,246
1	-0,6012	0 0	-0,2048	0 -1 0	0,1644	-1 1 1	0,132	0 -1 1 0	-0,04601
<b>L</b>		0 1	0,3129	0 -1 1	-0,02119	0 -1 -1	-0,08142	0 -1 1 1	-0,2
-1	-0,6732	1 -1	0,1506	0 0 -1	-0,03005	0 -1 0	0,09882	0 0 -1 -1	-0,06188
0	-0,4321	1 0	0,1561	0 0 0	0,06589	0 -1 1	-0,0174	0 0 -1 0	0,1077
1	1,105	1 1	-0,3067	0 0 1	-0,03584	0 0 -1	0,1327	0 0 -1 1	-0,04584
<b>R</b>		<b>L*R</b>		0 1 -1	0,1733	0 0 0	0,1555	0 0 0 -1	0,1053
-1	-0,06518	-1 -1	0,1298	0 1 0	-0,2303	0 0 1	-0,2882	0 0 0 0	-0,1181
0	0,1122	-1 0	-0,07662	0 1 1	0,05703	0 1 -1	-0,05124	0 0 0 1	0,01276
1	-0,04697	-1 1	-0,05317	1 -1 -1	0,01235	0 1 0	-0,2544	0 0 1 -1	-0,04343
<b>B*H</b>		0 -1	0,07965	1 -1 0	0,0203	0 1 1	0,3056	0 0 1 0	0,01034
-1 -1	0,001983	0 0	-0,1049	1 -1 1	-0,03265	1 -1 -1	0,07538	0 0 1 1	0,03308
-1 0	0,1302	0 1	0,02529	1 0 -1	-0,1066	1 -1 0	-0,2498	0 1 -1 -1	-0,08229
-1 1	-0,1322	1 -1	-0,2094	1 0 0	-0,3018	1 -1 1	0,1744	0 1 -1 0	-0,03752
0 -1	0,5502	1 0	0,1816	1 0 1	0,4084	1 0 -1	0,01919	0 1 -1 1	0,1198
0 0	-0,2027	1 1	0,02787	1 1 -1	0,09423	1 0 0	-0,2824	0 1 0 -1	0,2849
0 1	-0,3475	<b>B*H*L</b>		1 1 0	0,2815	1 0 1	0,2632	0 1 0 0	0,001849
1 -1	-0,5521	-1 -1 -1	-0,9347	1 1 1	-0,3758	1 1 -1	-0,09456	0 1 0 1	-0,2867
1 0	0,07252	-1 -1 0	0,412	<b>B*L*R</b>		1 1 0	0,5322	0 1 1 -1	-0,2026
1 1	0,4796	-1 -1 1	0,5227	-1 -1 -1	-0,1351	1 1 1	-0,4376	0 1 1 0	0,03567
<b>B*L</b>		-1 0 -1	0,2809	-1 -1 0	0,08096	<b>B*H*L*R</b>		0 1 1 1	0,1669
-1 -1	0,2584	-1 0 0	-0,1327	-1 -1 1	0,05414	-1 -1 -1 -1	-0,00907	1 -1 -1 -1	-0,1351
-1 0	0,2152	-1 0 1	-0,1482	-1 0 -1	0,06925	-1 -1 -1 0	-0,06791	1 -1 -1 0	0,1381
-1 1	-0,4736	-1 1 -1	0,6538	-1 0 0	-0,1155	-1 -1 -1 1	0,07698	1 -1 -1 1	-0,00301
0 -1	0,06004	-1 1 0	-0,2794	-1 0 1	0,04628	-1 -1 0 -1	0,2099	1 -1 0 -1	0,1803
0 0	0,08096	-1 1 1	-0,3745	-1 1 -1	0,06585	-1 -1 0 0	-0,1051	1 -1 0 0	-0,01115
0 1	-0,141	0 -1 -1	0,2275	-1 1 0	0,03457	-1 -1 0 1	-0,1048	1 -1 0 1	-0,1692
1 -1	-0,3184	0 -1 0	-0,2764	-1 1 1	-0,1004	-1 -1 1 -1	-0,2008	1 -1 1 -1	-0,0452
1 0	-0,2962	0 -1 1	0,04893	0 -1 -1	-0,05773	-1 -1 1 0	0,173	1 -1 1 0	-0,127

1 1	0,6146	0 0 -1	-0,1502	0 -1 0	0,03591	-1 -1 1 1	0,02783	1 -1 1 1	0,1722
<b>B*R</b>		0 0 0	-0,1703	0 -1 1	0,02182	-1 0 -1 -1	-0,08994	1 0 -1 -1	0,1518
-1 -1	0,1339	0 0 1	0,3205	0 0 -1	-0,09936	-1 0 -1 0	-0,1807	1 0 -1 0	0,07293
-1 0	-0,1002	0 1 -1	-0,07727	0 0 0	0,1725	-1 0 -1 1	0,2706	1 0 -1 1	-0,2248
-1 1	-0,03371	0 1 0	0,4467	0 0 1	-0,07311	-1 0 0 -1	-0,07419	1 0 0 -1	-0,03112
0 -1	-0,04341	0 1 1	-0,3695	0 1 -1	0,1571	-1 0 0 0	-0,2526	1 0 0 0	0,3707
0 0	0,05118	1 -1 -1	0,7072	0 1 0	-0,2084	-1 0 0 1	0,3268	1 0 0 1	-0,3396
0 1	-0,007776	1 -1 0	-0,1356	0 1 1	0,05129	-1 0 1 -1	0,1641	1 0 1 -1	-0,1207
1 -1	-0,09048	1 -1 1	-0,5716	1 -1 -1	0,1928	-1 0 1 0	0,4333	1 0 1 0	-0,4436
1 0	0,049	1 0 -1	-0,1307	1 -1 0	-0,1169	-1 0 1 1	-0,5974	1 0 1 1	0,5643
1 1	0,04149	1 0 0	0,303	1 -1 1	-0,07596	-1 1 -1 -1	0,09901	1 1 -1 -1	-0,01672
<b>H*L</b>		1 0 1	-0,1723	1 0 -1	0,03011	-1 1 -1 0	0,2486	1 1 -1 0	-0,211
-1 -1	0,2406	1 1 -1	-0,5766	1 0 0	-0,05693	-1 1 -1 1	-0,3476	1 1 -1 1	0,2278
-1 0	0,3239	1 1 0	-0,1674	1 0 1	0,02683	-1 1 0 -1	-0,1357	1 1 0 -1	-0,1492
-1 1	-0,5645	1 1 1	0,7439	1 1 -1	-0,2229	-1 1 0 0	0,3577	1 1 0 0	-0,3595
0 -1	-0,08485	<b>B*H*R</b>		1 1 0	0,1738	-1 1 0 1	-0,222	1 1 0 1	0,5087
0 0	0,09832	-1 -1 -1	0,1309	1 1 1	0,04913	-1 1 1 -1	0,03667	1 1 1 -1	0,1659
0 1	-0,01347	-1 -1 0	-0,1847	<b>H*L*R</b>		-1 1 1 0	-0,6063	1 1 1 0	0,5706
1 -1	-0,1558	-1 -1 1	0,05384	-1 -1 -1	0,006048	-1 1 1 1	0,5696	1 1 1 1	-0,7365

### Metoda odgovorne površine u svrhu optimizacije horizontalnog aerodinamičkog dodatka iza kabine kamiona

Prema dobijenim rezultatima potpune faktorijske strukture, pristupa se usvajanju novih vrednosti parametara koji će kao i u prethodnim slučajevima biti podešeni na pet nivoa. Parametri koji su se pokazali veoma značajnim za kreiranje aerodinamičkog dodatka su B, H i L, dok se parametar R neće analizirati parametarski već kao konstantni. Nivoi su grupisani oko vrednosti koji su kroz potpunu faktorijsku strukturu pokazali najviše sklonositi na nižim vrednostima sile otpora vazduha. U tabeli 54 su date vrednosti usvojenih parametara na pet nivoa linearnom preraspodelom.

Tabela 54 - Vrednost parametara na pet nivoa

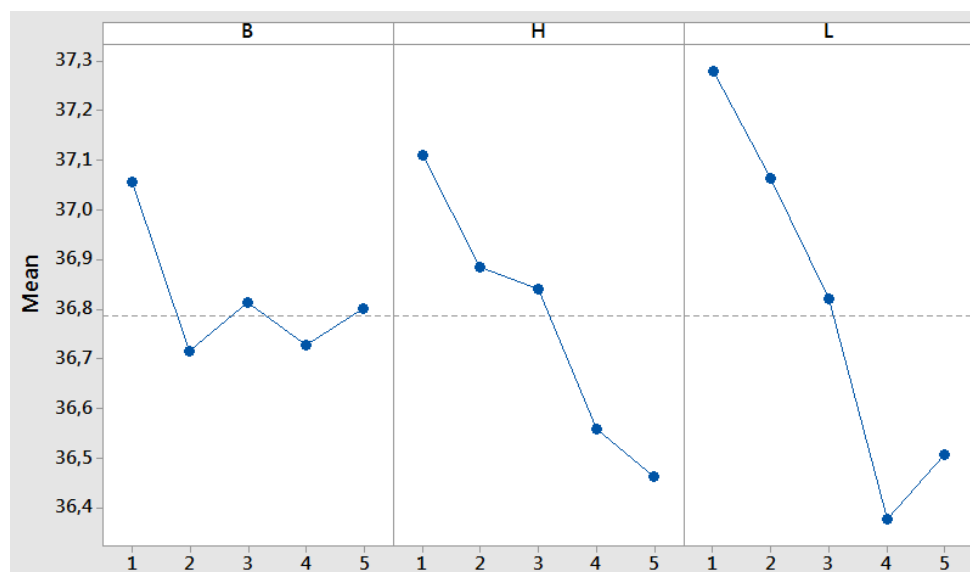
Nivo	Parametar		
	B [m]	H [m]	L [m]
1	0,08	0,08	0,04
2	0,085	0,09	0,05
3	0,09	0,1	0,06
4	0,095	0,11	0,07
5	0,1	0,12	0,08

Kao i u prethodnim slučajevima formira se metoda odgovorne površine sa tri parametra koji se variraju na pet nivoa. Koristi se centralna kompenzaciona metoda, koja se sastoji od 20 eksperimentalnih prolaza za pomenutu količinu faktora i nivoa. Kombinacije MOP i dobijenih rezultata su prikazani u tabeli 55. Kao i do sada su rezultati prikazani za vrednost frontalne površine modela, sile otpora vazduha i koeficijenta otpora vazduha, dok se za dalju analizu rezultata usvaja niz vrednosti sile otpora vazduha.

Tabela 55 - Rezultati metode odgovorne površine za slučaj horizontalnog aerodinamičkog dodatka iza kabine kamiona

Metoda odgovorne površine				Rezultati simulacije		
Broj kombinacije	B	H	L	Čeona površina modela $A [m^2]$	Koeficijent otpora vazduha $c_W [-]$	Sila otpora vazduha $F_W [N]$
1	2	2	2	0,097932	1,020	36,85
2	4	2	2	0,097935	1,038	37,48
3	2	4	2	0,097933	1,022	36,92
4	4	4	2	0,097934	1,025	37,01
5	2	2	4	0,097934	1,023	36,95
6	4	2	4	0,097935	1,004	36,25
7	2	4	4	0,097931	1,001	36,14
8	4	4	4	0,097933	1,001	36,16
9	1	3	3	0,097937	1,026	37,06
10	5	3	3	0,097932	1,019	36,80
11	3	1	3	0,097933	1,028	37,11
12	3	5	3	0,097932	1,010	36,46
13	3	3	1	0,097935	1,032	37,28
14	3	3	5	0,097932	1,011	36,51
15	3	3	3	0,097933	1,019	36,79
16	3	3	3	0,097933	1,019	36,79
17	3	3	3	0,097933	1,019	36,79
18	3	3	3	0,097933	1,019	36,79
19	3	3	3	0,097933	1,019	36,79
20	3	3	3	0,097933	1,019	36,79

Dobijeni rezultati iz tabele 55 pokazuju mnogo manje rasipanje rezultata sile otpora vazduha. Zastupljenost rezultata faktora po nivoima je data na slici 6.59.



Slika 6.59 - Zastupljenost faktora po nivoima

Sa prethodne slike se može uvideti kako variranje parametara kroz nivoe utiče na vrednost dobije sile otpora vazduha. Parametar B je pokazao značajnu razliku u odzivu u odnosu na isti parametar u potpunoj faktorijskoj strukturi. Ovde se može uvideti da je pokazao tendenciju opadanja sile otpora vazduha oko 2 i 4 nivoe, ali sa veoma sličnim ishodom. Ovo govori da se sa novim podešavanjem vrednosti nivoe parametra B dobila njegova učestalost i manji odziv na odgovor sistema. Pošto su vrednosti veoma bliske po nivoeima, skoro bilo koja vrednost od 2 do 5. nivoe neće značajno uticati na rezultat. Faktor H je pokazao sličan odziv kao i u slučaju potpune faktorijske strukture, što govori da je pomeranje i grupisanje vrednosti oko najvećeg nivoea bilo korisno. Takođe rezultat pokazuje da bi trebalo vrednost tog parametra još povećati kako bi se verovatno uticalo na silu otpora vazduha. Zbog geometrijskih ograničenja nije moguće povećati vrednost parametra H od vrednosti koja odgovara nivou 5. Tako da će se verovatno kroz dalju analizu i pokazati kao optimalna. Faktor L je pokazao potpuno drugačiji odziv u odnosu na potpunu faktorijsku strukturu. Iz porasta vrednosti sile sa nivoeima se dolazi do potpuno drugačije oblika, koji pokazuje tendenciju opadanja sile sa porastom nivoea. Ovo govori da je izvršeno dobro grupisanje i usvajanje rezultata za novih pet nivoea. Najbolja vrednost sile otpora vazduha je primećena na višim nivoeima, što će biti utvrđeno daljom analizom.

#### *Analiza uticajnih faktora i kreiranje teorijskog modela*

Analiza dobijenih rezultata i kreiranje teorijskog modela je urađena kvadratnim modelom sa 2. redom međusobne interakcije faktora. Dobijene vrednosti zastupljenosti faktora su prikazani u tabeli 56.

*Tabela 56 - Rezultati analize uticajnih faktora i njihove interakcije*

<i>Izvor</i>	<i>Stepen slobode</i>	<i>Zbir kvadrata</i>	<i>Zastupljenost</i>
Ukupni model	9	1,89064	83,34%
Linearni model	3	1,58468	69,85%
B	1	0,01328	0,59%
H	1	0,4199	18,51%
L	1	1,1515	50,76%
Kvadratni model	3	0,02451	1,08%
B*B	1	0,0132	0,58%
H*H	1	0,00714	0,31%
L*L	1	0,00417	0,18%
Interakcija 2. reda	3	0,28144	12,41%
B*H	1	0,00428	0,19%
B*L	1	0,24574	10,83%
H*L	1	0,03142	1,39%
Greška	5	0,37799	16,66%
Ukupno	14	2,26863	100,00%

Dobijene vrednosti iz tabele 56 pozazuju značajnu dominaciju učestalosti faktora L u odzivu modela. Analizom dobijenih vrednosti kreiran je teorijski model, odnosno teorijska funkcija odziva sistema koja sa greškom od 16,66% opisuje ponašanje eksperimenata i ima oblik:

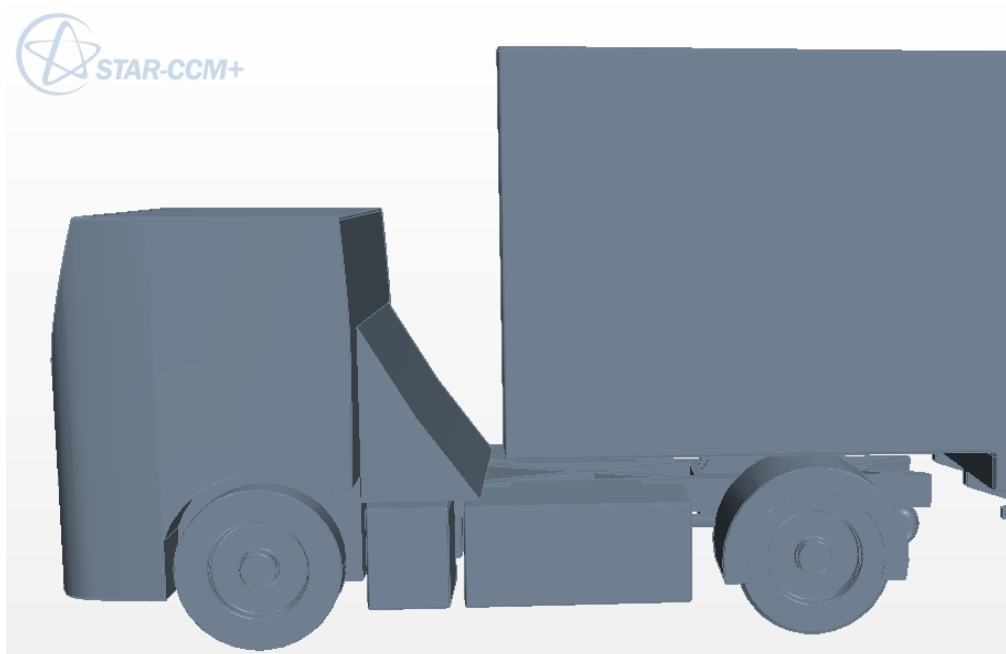
$$F_{W \text{ teor.}} = 36,40 + 0,296B + 0,039H + 0,368L + 0,0219B^2 - 0,0137H^2 + 0,0129L^2 + 0,0231BH - 0,1753BL - 0,0627HL$$

U prethodnom izrazu teorijske funkcije odziva sistema su navedene vrednosti svih koeficijenata  $\beta$ .

Na osnovu teorijske funkcije se pristupa matematičkoj optimizaciji parametara u svrhu dobijanja manje vrednosti sile otpora vazduha. Matematičkom optimizacijom se dolazi do zaključaka da najniža vrednost sile otpora vazduha se ostvaruje sa sve tri granične vrednosti parametara B, H i L. Dobijena je vrednost teorijske sile otpora vazduha od 35,07 N. Zbog geometrijskih ograničenja dobijene vrednosti se usvajaju, iako se smatra da bi se bolji rezultat postigao proširenjem vrednosti nivoa. Kreiranjem oblika aerodinamičkog dodatka prema dobijenim vrednostima matematičkom optimizacijom i puštanjem virtuelnog CFD eksperimenta potvrđeno je dobijanje veoma slične vrednosti sile otpora vazduha. Usvojene vrednosti parametara su:

$$B = 0,1 \text{ m} \quad H = 0,12 \text{ m} \quad L = 0,08 \text{ m}$$

Kreiranjem aerodinamičkog oblika horizontalnog dodatka iza kabine kamiona prema prethodno usvojenim parametrima se dobija izgled kao što je prikazan na slici 6.60.



*Slika 6.60 - Izgled optimalnog oblika horizontalnog aerodinamičkog dodatka iza kabine kamiona*

## 7. Eksperimentalno merenje

Pod eksperimentalnim merenjem, odnosno postupkom se podrazumeva stvarni proces istraživanja sproveden u vazдушnom tunelu. Svrha ovog postupka je validacija dobijenih vrednosti sile otpora vazduha pomoću CFD simulacija. U ovom delu radu su predstavljeni postupci merenja u vazдушnom tunelu, karakteristike vazдушnih tunela i tipovi, osnovne informacije o vazдушnom tunelu "Miroslav Nenadović" u Beogradu u kome je sprovedeno eksperimentalno istraživanje. Predstavljen je postupak kreiranja stvarnog modela kamiona tegljača sa poluprikolicom i svih aerodinamičkih dodataka. Prikazano je kompletno eksperimentalno postrojenje sa svom mernom opremom za merenje sile otpora vazduha u vazдушnom tunelu. A kao najbitniji deo ovog poglavlja je sam postupak merenja u vazдушnom tunelu, razmatrani slučajevi i konfiguracije modela i aerodinamičkih dodataka, sprovođenje merenja i snimanje rezultata.

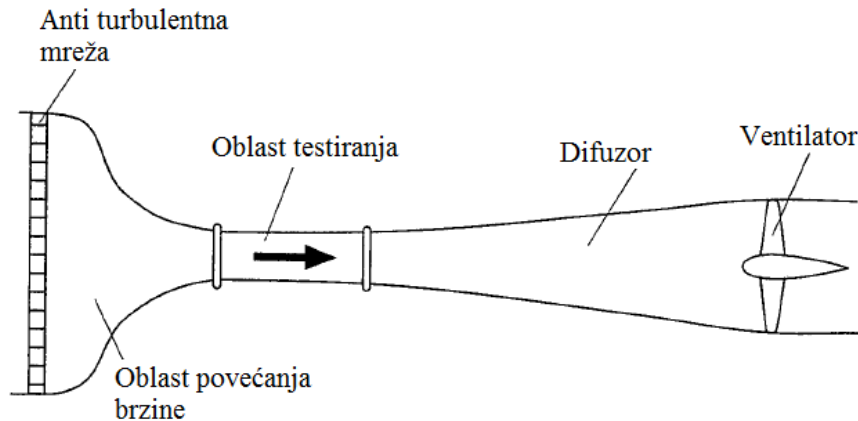
### 7.1. Opšte o eksperimentalnom merenju u vazдушnom tunelu

Značaj eksperimentalnog merenja u vazдушnom tunelu se ogleda su tome što se na najpribližniji mogući način realnom okruženju simuliraju i izučavaju aerodinamičke pojave i fenomeni. Samim tim pod vazдушnim tunelom se može smatrati eksperimentalno postrojenje u kome se veštačkim putem stvara vazдушna struja koja se kreće, odnosno opstrujava oko statički fiksiranog modela ispitivanja. Ovo predstavlja reverzibilni proces, pošto je u stvarnosti model taj koji se kreće određenom brzinom, a vazдушna struja je ta koja stoji (ili poseduje izvešno kretanje usled sopstvenih poremećaja, npr. vetra). Na osnovu ovog reverzibilnog procesa, mogu se izučavati veoma složene aerodinamičke pojave na realnom modelu, ili umanjem u zavisnosti od veličine i namene vazdušnog tunela. Osnovna ideja vazdušnog tunela se pojavila zbog velike složenosti merenja na modelu koji se morao sa svom opremom i instrumentima kretati na putu kako bi se uradila analiza nekog aerodinamičkog uticaja. Takođe kod izučavanja fenomena vezanih za letelice, veoma je bilo opasno neku novu projektovanu geometriju ili prototip letelice testirati u realnoj eksploataciji. Velika prednost testiranja u vazдушnom tunelu je kontrolisanost uslova, zato što se tačno može podesiti i usmeriti testiranje na objekat ispitivanja, izolovanjem od spoljašnjih atmosferskih uslova.

#### 7.1.1. Tipovi vazдушnih tunela

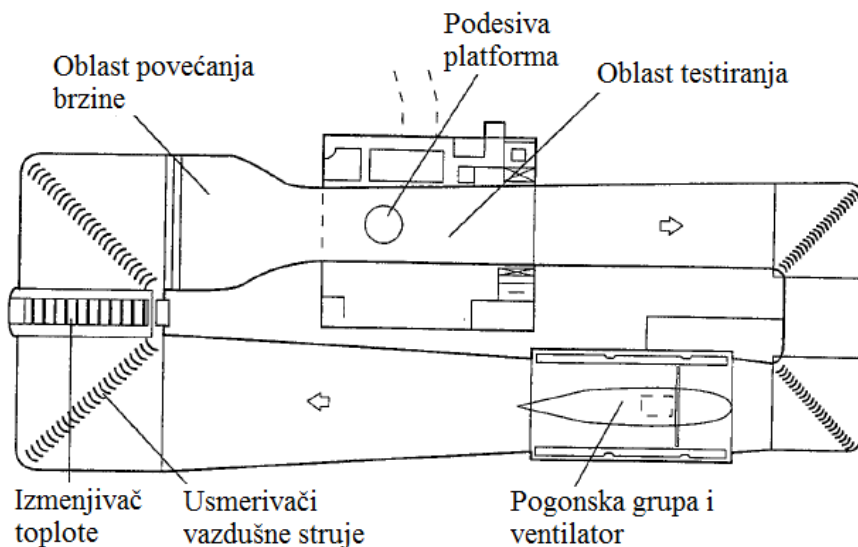
Podelu vazдушnih tunela je moguće izvršiti prema više faktora. Prva podela se može zasnivati na obliku vazdušnog tunela i prema tome se mogu pronaći otvoreni i zatvoreni vazdušni tuneli. U osnovnom obliku vazdušnog tunela, kretanje vazdušne struje se stvara pomoću ventilatora ili mlaznog motora. U nastavku je pažnja usmerena ka vazдушnim tunelima koji se koriste u svrhu ispitivanja aerodinamičkih pojava kod vozila. Osnovni oblik otvorenog tipa vazdušnog tunela je dat na slici 7.1. Pod otvorenim tipom vazdušnog tunela se smatra takva konstrukcija kod koje postoje ulaz i izlaz i uvek se koristi "novi" vazduh za stvaranje vazdušne struje. Na slici 7.1 se mogu uočiti osnovni delovi otvorenog vazdušnog tunela. Kao što je već naglašeno, osnovni element za stvaranja vazdušne struje je ventilator koji je u ovom slučaju postavljen na desni kraj tunela. Svojom rotacijom povlači vazdušnu struju u smeri strelice sa slike. U ovoj konstrukciji ventilator izvlači vazdušnu struju iz tunela. Druga strana tunela je opremljena anti turbulentnom zaštitom koja sprečava stvaranje vrtložnog kretanja vazdušne struje usled rotacionog kretanja ventilatora. U oblasti u kojoj se vrši testiranje ispitivanog modela je veoma bitno da postoji laminarno pravolinijsko strujanje, koje se postiže kreiranjem mreže u obliku pčelinjeg saća, kako bi se prolaskom vazdušne struje kroz njega dobilo pravolinijsko kretanje. Nakon anti turbulentne mreže se nailazi na

značajno sužavanje poprečnog preseka vazdušnog tunela, što je karakteristično pojavom obaranja pritiska, ali uvećanjem brzine vazdušne struje. Na taj način se dobijaju veće brzine vazdušne struje što realno ventilator može da proizvede. Odnos veličina poprečnog preseka na ulazu i u oblasti testiranja je veoma bitan, jer sa njegovim povećavanjem se doprinosi mirnoći vazdušne struje koja ulazi u oblast u kojoj se vrši testiranje. Oblast testiranja ima najmanji poprečni presek u odnosu na ostale delove vazdušnog tunela, iz razloga postizanja najvećih brzina vazdušne struje i najmirnijeg strujanja. Obično može imati različiti poprečni presek (kružni, pravugaoni, višegaoni poprečni presek). Između oblasti testiranja i ventilatora se postepeno povećava poprečni presek, kako bi se uticalo na umanjenje brzine vazdušne struje pre nailaska na ventilator.



Slika 7.1 - Otvoreni tip vazdušnog tunela [28]

Nedostatak ovog tipa vazdušnog tunela je u tome što je potrebno obezbediti dotok velike količine vazduha, što je jedino moguće povezivanjem ulaza i izlaza tunela sa spoljašnjom atmosferom. To ponekad može uticati na karakteristike vazdušne struje unutar tunela, pa je često potrebno njeno dodatno hlađenje i grejanje, kao i sušenje u slučajevima promenljivih spoljašnjih vremenskih uslova. Zatvoreni tip vazdušnog tunela je prikazan na slici 7.2.



Slika 7.2 - Zatvoreni tip vazdušnog tunela [28]

Osnovna razliku u odnosu na prethodno otvoreni tip vazdušnog tunela je u tome što vazdušna struja cirkuliše kroz zatvoreni tip vazdušnog tunela. Na ovaj način se značajno umanjuje potrebna snaga pogonske grupe koja pogoni ventilator nakon postizanja konstantne brzine vazdušne struje. Osim osnovnih elemenata vazdušnog tunela koji su objašnjeni na prethodnom primeru, u zatvorenom tipu vazdušnog tunela postoje usmerivači vazdušne struje na svakom uglu. Njihova uloga je veoma slična anti turbulentnoj mreže s tim što u ovom slučaju osim umanjivanja stvaranja vrtložnog kretanja, doprinosi pravolinijskom usmerenju vazdušne struje nakon skretanja pod pravim uglom. U nekim konstrukcijama tunela je moguće pronaći i izmenjivač toplote sa kojim se tačno podešava temperatura vazdušne struje unutar tunela. Podesiva platforma u oblasti testiranja može biti značajna ukoliko se želi ispitivati uticaj vazdušne struje na model koja deluje pod nekim uglom različitim od čisto pravolinijskog kretanja. Prednosti ovakvog tipa vazdušnog tunela su bolje kontrolisanje uslova unutar njega, zbog mogućnosti potpune izolacije u odnosu na spoljašnje atmosferske uslove. Ovaj tip vazdušnog tunela je obično većih dimenzija u odnosu na otporeni tip što svakako povećava cenu izrade.

Osim konstrukcionih razlika otporenog i zatvorenog tipa vazdušnog tunela, dodatne razlike se mogu uvesti podelom u odnosu na mogućnost postizanja različitih brzina vazdušne struje. Prema brzini vazdušne struje unutar tunela, može se izvršiti podela na sledeće tipove:

- Nisko brzinski vazdušni tuneli ili nisko subsonični - kod kojih se brzina vazdušne struje kreće daleko od vrednosti brzine zvuka odnosno Mahovog broja  $M$  i to je najčešće do maksimalne brzine od  $0,4 M$  ili  $134 \text{ m/s}$ . Ovaj tip tunela je svakako najzanimljiviji sa aspekta analize vozila.
- Visoko brzinski vazdušni tuneli ili visoko subsonični - kod kojih se brzina vazdušne struje kreće u opsegu od  $0,4$  do  $0,75 M$ . Najčešće se koriste za analizu ponašanja letelica u oblasti kretanja ispod brzine zvuka.
- Transonični - opseg brzine je od  $0,75$  do  $1,2 M$ . U vazdušnim tunelima ovog tipa se analiziraju letelice i balistika koja prelazi brzinu zvuka, odnosno kreće se u prelaznoj oblasti.
- Supersonični vazdušni tuneli - kod kojih je brzina vazdušne struje u opsegu između  $1,2$  i  $5 M$ . Koriste se za izučavanje balistike i svemirskih letelica.
- Hipersonični vazdušni tuneli - kod kojih se opseg brzine vazdušne struje kreće između  $5$  i  $15 M$  [28].

#### 7.1.2. Uticajni faktori na merenje u vazdušnom tunelu

Kako bi se okruženje u vazdušnom tunelu što više približilo stvarnim, kao i ispitivani model stvarnom modelu, potrebno je voditi računa o nekoliko bitnih stvari. Faktori koji imaju uticaja na kvalitet sprovedenog merenja i dobijenih rezultata su prikazani u ovom delu rada.

#### Umanjenje modela

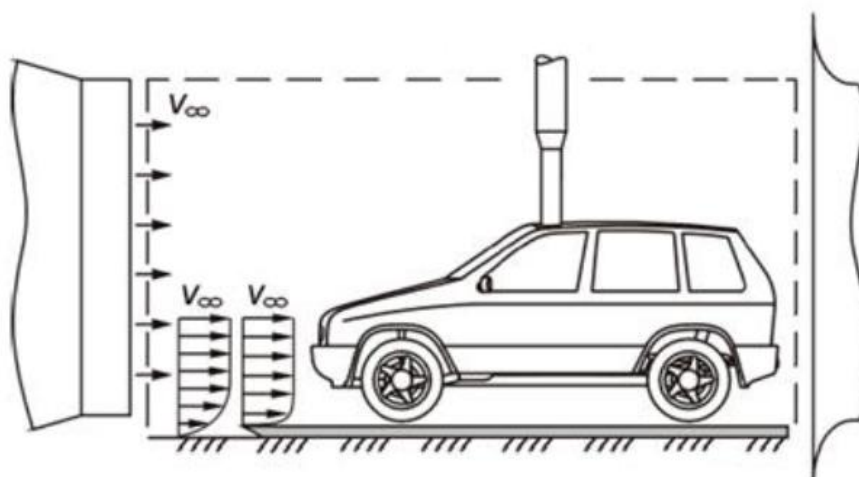
Umanjenje modela ispitivanja je veoma često ako se radi od modelima koji su veoma veliki u stvarnosti, ili ako je vazdušni tunel u kome se radi ispitivanje manjih dimenzija. Prilikom umanjivanja ispitivanog modela, treba voditi računa o vrednosti Reynoldsovog broja, koji predstavlja bitan element na tip strujanja vazdušne struje. Kao što je prethodno objašnjeno na vrednost Reynoldsovog broja utiče gustina vazduha, brzina vazdušne struje, dužina



ispitivanog modela i dinamička viskoznost sredine u kojoj se vrši ispitivanje. Sa umanjnjem ispitivanog modela značajno se menja ispitivana dužina modela, što se odražava na opadanje vrednosti Rejnoldsovog broja. Kako bi se izvršilo ispitivanje na umanjenom modelu, a zatim uočene zakonitosti i fenomeni preneli na stvarni model, jedan od preporučenih uslova je da se vrednost Rejnoldsovog broja ne menja, ili da promena bude mala. Kako bi se vrednost Rejnoldsovog broja povećala na umanjenom modelu potrebno je korigovati ostale uticajne parametre. Na vrednost gustine se može uticati promenom temperature unutar tunela, ali se ne može u velikoj meri uticati na povećanje vrednosti Rejnoldsovog broja. Veoma slična stvar je i sa dinamičkom viskoznošću kod koje je sa pritiskom može malo doprineti promeni Rejnoldsovog broja. Najznačajnija promena je moguća sa povećanjem brzine vazdušne struje unutar tunela. Ali to je izvodljivo jedino ako je brzina vazdušne struje kod modela potpune veličine jako mala, u suprotnom bi se brzina vazdušne struje u tunelu lako približila brzini zvuka, što je veoma teško postići.

### Uticaj stacionarnog poda

Prilikom vožnje vozila po putu, uticaj graničnog sloja između nepomične podloge i vazdušne struje oko njega ne postoji sve do trenutka dok neki spoljašnji faktor ne poremeti vazdušnu struju, pri čemu se ostvari njeno relativno kretanje u odnosu na podlogu. Okolnosti u vazdušnom tunelu su malo drugačije. Vazduh prinudno cirkuliše preko nepomoćnog poda, čine se stvara granični sloj i u uslovima kada ne postoji ispitivani model. U slučaju ubacivanja modela, uticaj graničnog sloja se odražava i na njega jer je model pričvršćen za podlogu. Postoje neke preporuke pomoću kojih se može uticati na umanjnje ovog efekta. Prvi slučaj bi mogao biti udaljavanje ispitivanog modela od podloge, tako što bi isti na neki način bio pričvršćen za konstrukciju koja bi ga držala u sredini vazdušne struje, bez kontakta sa podlogom. Na slici 7.3 je dat primer ispitivanja modela automobila koji je pričvršćen za vertikalni nosač i izbegnut kontakt modela i poda tunela.

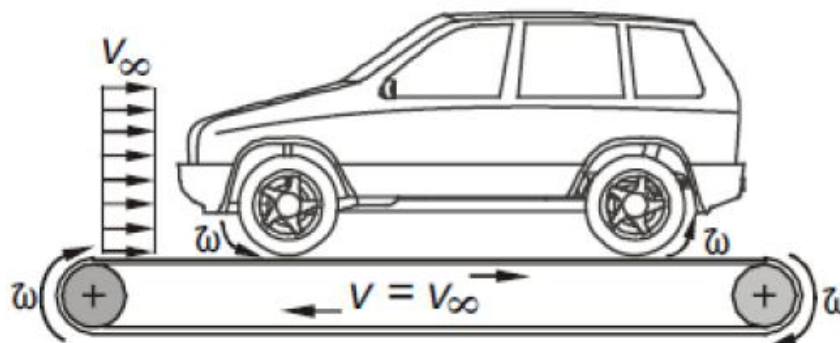


Slika 7.3 - Primer odignutog modela od podloge vazdušnog tunela [30]

Ovim postupkom se značajno umanjuje efekat graničnog sloja podloge tunela, ali je često ograničen samo na male ispitivane modele, zbog problema sa pričvršćenjem modela.

Drugi postupak koji umanjuje efekat stacionarnog poda vazdušnog tunela je kreiranje pokretnog poda tunela. Ovo je moguće postavljanjem trake na dva valjka čime bi se gornja površina trake poravnala sa podom vazdušnog tunela. Postavljanjem ispitivanog modela na traku koja se pogoni istom brzinom kao i vazdušna struja u tunelu, u potpunosti se gubi

granični sloj između poda i ispitivanog modela. Na slici 7.4 je dat primer ispitivanja modela automobila u vazдушnom tunelu koji na podu ima pokretnu traku.



Slika 7.4 - Pokretna traka na podu vazdušnog tunela [30]

Osim teorijskih prednosti ovog postupka, postoji izvestan broj problema u praktičnoj primeni. Vibriranje trake prilikom većih brzina mogu veoma uticati na merene rezultate. Prilikom pucanja trake dolazi do veoma značajnih oštećenja ispitivanog modela i merne oprema. Uprkos nevedenim problemima, ovim postupkom je moguće veoma dobro simulirati ponašanje vozila na putu.

### Blokiranje vazdušnog tunela

Prilikom ubacivanja ispitivanog modela u vazdušni tunela i postavljanjem u ispitivanu oblast, svojom veličinom frontalne površine model umanjuje površinu poprečnog preseka vazdušnog tunela, odnosno ispitivanje oblasti. Ovaj postupak za posledicu ima značajno povećanje lokalne brzine vazdušne struje u oblasti oko ispitivanog modela. Ova posledica je prisutna ukoliko je frontalna površina ispitivanog modela, bliska površini poprečnog preseka ispitivane oblasti vazdušnog tunela. Takođe ukoliko je model veoma približen zidovima tunela, efekat stacionarnog poda se može primeniti i na zidovima tunela. Vrednost blokirane oblasti vazdušnog tunela se izračunava odnosom površine poprečnog preseka ispitivane oblasti vazdušnog tunela i frontalne površine ispitivanog modela. Ukoliko se želi izraziti procentualni udeo blokirane površine ispitivane oblasti vazdušnog tunela sa modelom ispitivanja, to se može uraditi preko jednostavnog izraza:

$$\text{blokirana oblast} = 100 - \left( 1 - \frac{A_{\text{model}}}{A_{\text{tunel}}} \cdot 100 \right) [\%]$$

Ukoliko je dobijena vrednost blokirane oblasti manja od 5% može se smatrati da model ne utiče na blokiranje protoka vazdušne struje unutar tunela. Ukoliko je vrednost veća od 5% pristupa se ubacivanju korekcionog faktora koji učestvuje u izračunavanju konačne vrednosti koeficijenta otpora vazduha ispitivanog modela i računa se prema izrazu:

$$c_W = c_{W(\text{izmereno})} \cdot \left( 1 - \frac{1,3 \cdot A_{\text{model}}}{A_{\text{tunel}}} \right)$$

### 7.2. Sastavni delovi eksperimenta

U ovom delu rada je prikazano kreiranje modela kamiona tegljača i poluprikolice sa svim aerodinamičkim dodacima u svrhu eksperimentalnog ispitivanja u vazдушnom tunelu.

Takođe osim samog modela, izvršeno je i kreiranje ispitnog postrojenja, kao i postavljanje i povezivanje merne opreme.

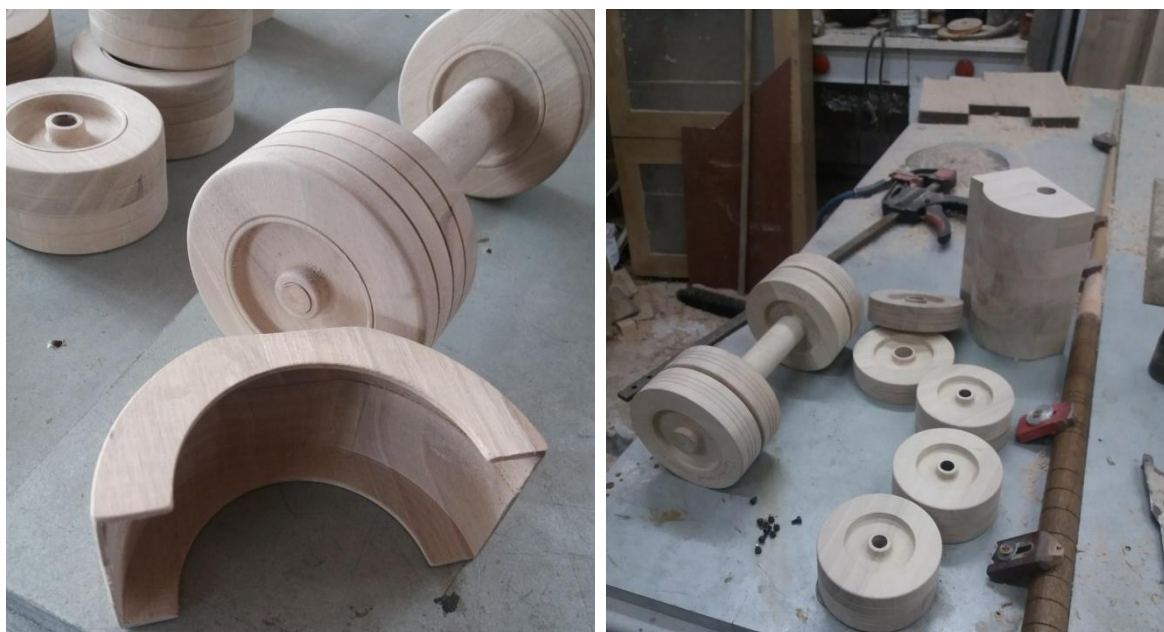
### 7.2.1. Model eksperimentalnog ispitivanja

Svrha eksperimentalnog istraživanja u vazdušnom tunelu je validacija podataka dobijenih putem virtuelnih CFD simulacija. Virtuelne simulacije su izvršene za model kamiona tegljača i poluprikolice, kao i za sve aerodinamičke dodatke kreirane optimizacionim metodama. Na osnovu simulacija su dobijene vrednosti sile otpora vazduha modela za sve analizirane slučajeve.

Kako bi se izvršila validacija rezultata, neophodno je kreirati stvarni model koji će biti testiran u vazdušnom tunelu. Stvarni model kamiona tegljača, poluprikolice i svih dodataka je urađen po uzoru na 3d CAD model, koji se koristio kao osnova za CFD simulacije. Zbog velikih dimenzija modela koji je u istoj razmeri kao i CAD model (1:10 u odnosu na realni model kamiona i poluprikolice), nije bilo moguće pronaći dovoljno velike 3d štampače koji bi kreirali model od plastike ili nekih drugih kompozitnih materijala. Na osnovu složenosti modela i gabaritnih dimenzija usvojen je postupak 3d CNC obrade, a kao materijal je usvojeno drvo različite tvrdoće i strukture.

#### Model kamiona

Na osnovu 3d CAD modela kamiona i detaljnih tehničkih crteža pristupilo se kreiranju modela od drveta. Zbog složenosti kompletan model je podeljen na delove koji su pojedinačno pravljani 3d CNC obradom ili ručno. Model je podeljen na kabinu, noseću konstrukciju i točkove. Kabina kamiona je napravljena 3d CNC obradom iz delova, odnosno stranica, koje su se lepljenjem objedinile u celinu. Ovo je urađeno kako bi kabina ostala šuplja zbog smanjenja mase modela. Svi uglovi i dimenzije kabine su urađeni sa velikom preciznošću u odnosu na CAD model. Noseća konstrukcija je urađena ručno, zato što je takođe zbog složenosti rađena iz više delova. Točkovi i blatobrani su urađeni 3d CNC obradom zbog preciznosti izrade. Na slici 7.5 su prikazani delovi modela kamiona urađeni 3d CNC obradom.



Slika 7.5 - Delovi modela kamiona izrađeni 3d CNC obradom

Na slici 7.5 se vide točkovi sa blatobranima, osovine i deo karoserije koji se nalazi ispod kabine kamiona. Na slici 7.6 su prikazani svi delovi modela kamiona sklopljeni bez kabine.



*Slika 7.6 - Objedinjeni delovi donjeg sklopa kamiona*

Sa slika se može uvideti velika preciznost i kvalitet obrade modela. Na slici 7.7 je prikazan kompletni model kamiona.

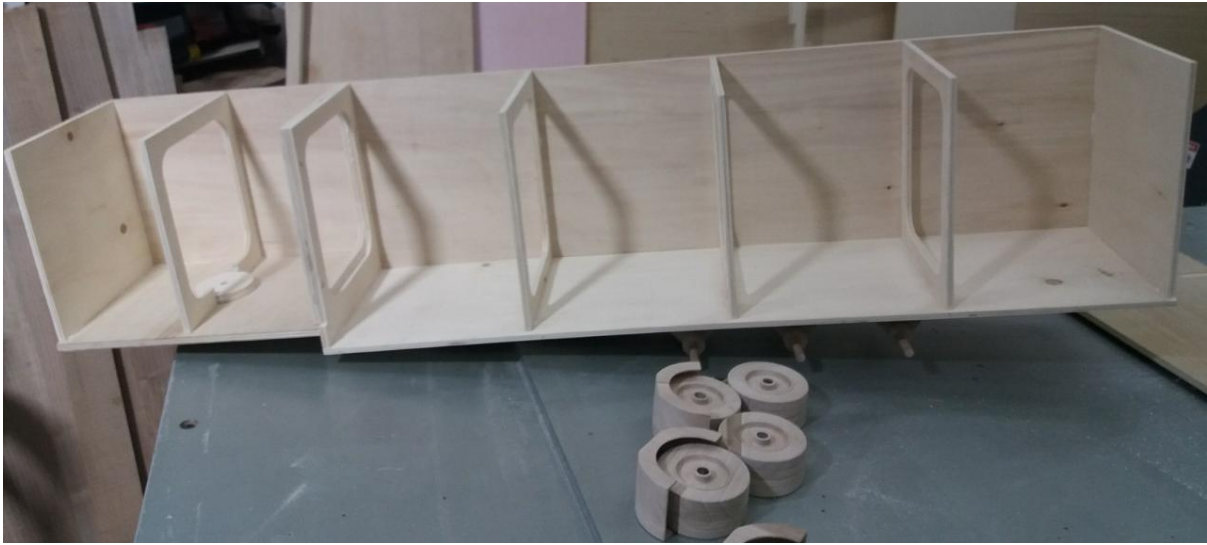


*Slika 7.7 - Model kamiona*

### **Model poluprikolice**

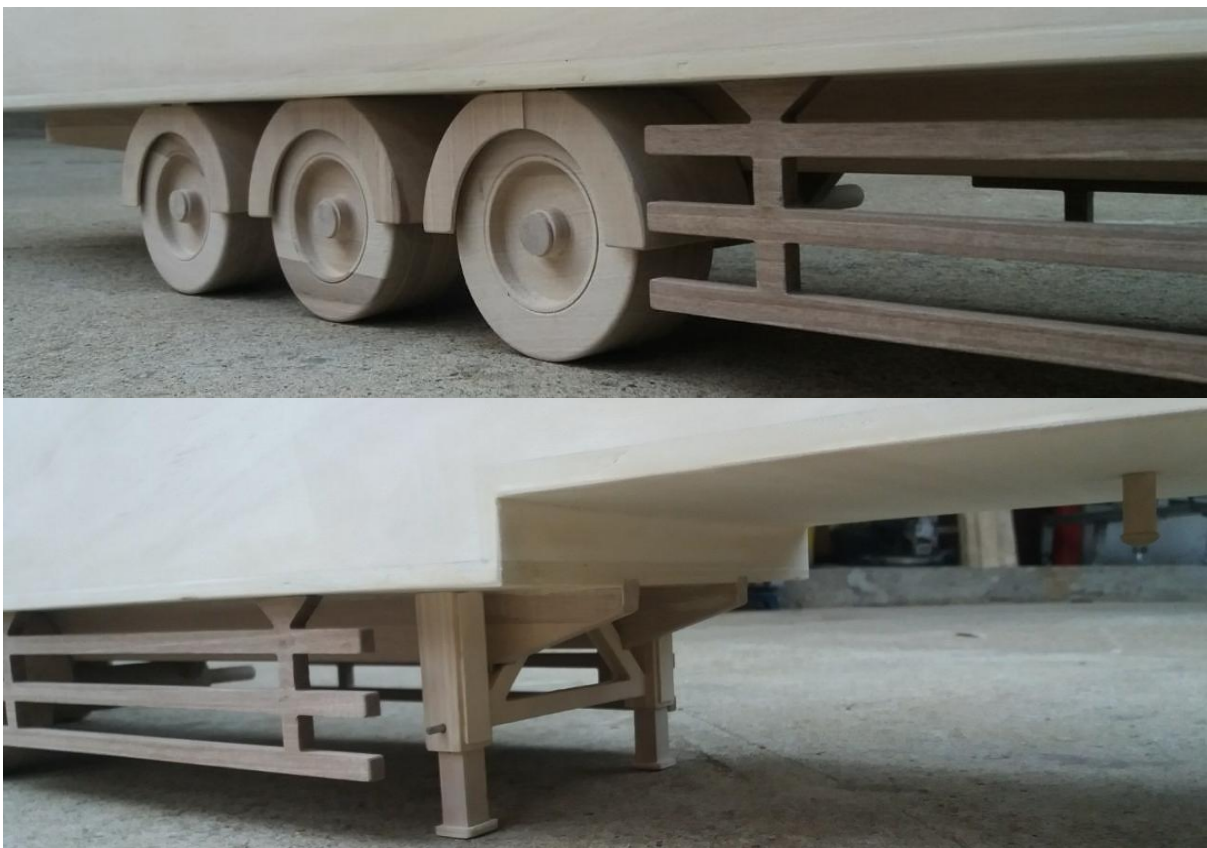
Model poluprikolice je urađen na sličan način kao i model kamiona. Podeljen je na delove zbog primene različitih metoda obrade drveta. Najveći deo poluprikolice čini sanduk

tovarnog prostora koji je napravljen iz segmenata kao šuplji element kako bi se umanjila masa modela. U sredini sanduka je kreirana ojačanja na koja se vršilo pričvršćenje bočnih stranica. Na slici 7.8 je prikazan izgled otvorenog sanduka tovarnog prostora u fazi izrade.



*Slika 7.8 - Tovarni prostor modela poluprikolice u fazi izrade*

Osim tovarnog prostora model poluprikolice sa sastoji i od noseće konstrukcije, točkova sa osovinama i blatobranima i trnom za spajanje sa sedlom kamiona. Na slici 7.9 su prikazani detalji modela poluprikolice.



*Slika 7.9 - Detalji modela poluprikolice*

Na slici 7.10 je prikazan kompletan izgled modela poluprikolice.



*Slika 7.10 - Model poluprikolice*

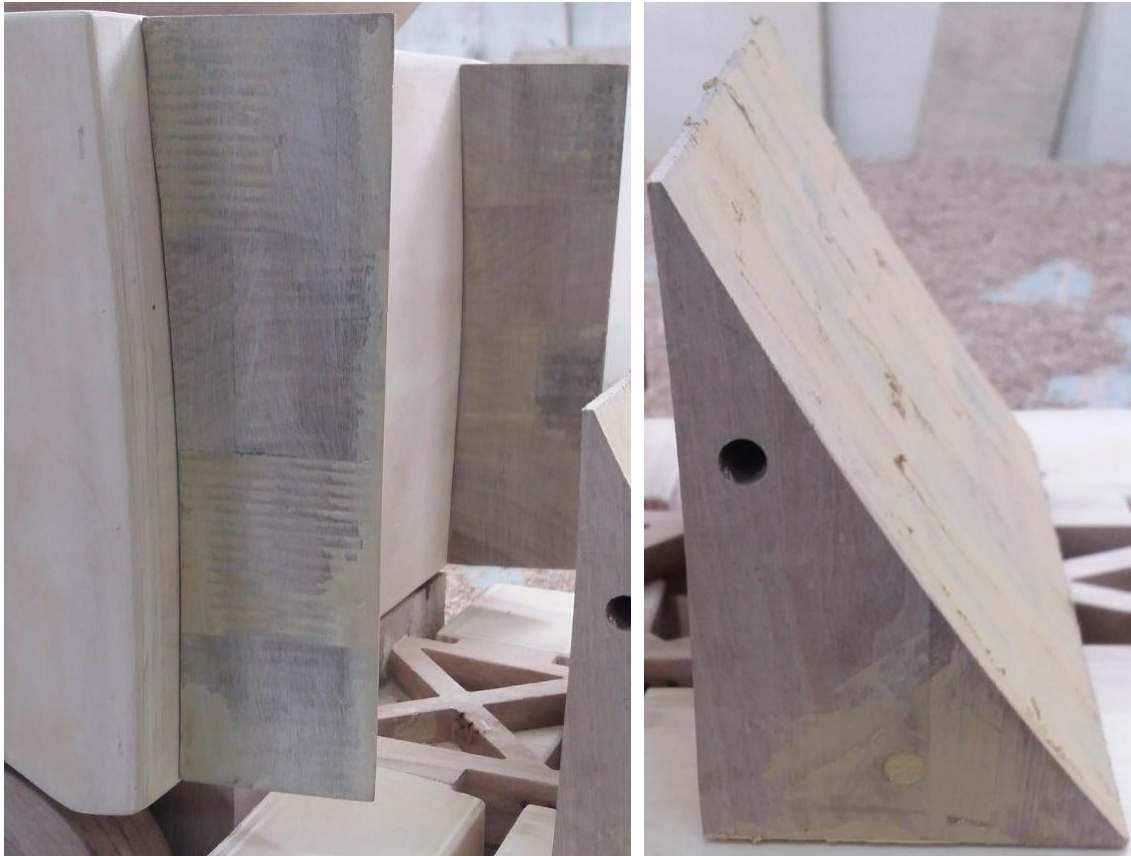
### **Aerodinamički dodaci**

Zbog složenosti oblika aerodinamičkih dodataka na modelu kamiona i poluprikolice, njihovo pravljenje je izvršeno 3d CNC obradom. Neki od dodataka su pravljene iz više delova koji su spajanjem objedinjeni u model koji je urađen prema CAD modelu i tehničkoj dokumentaciji. Na sici 7.11 (levo) je prikazan postupak pravljenja jednog segmenta aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona 3d CNC obradom. Spajanjem više segmenata dobijena je puna širina aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona, što je prikazano na slici 7.11 (desno).

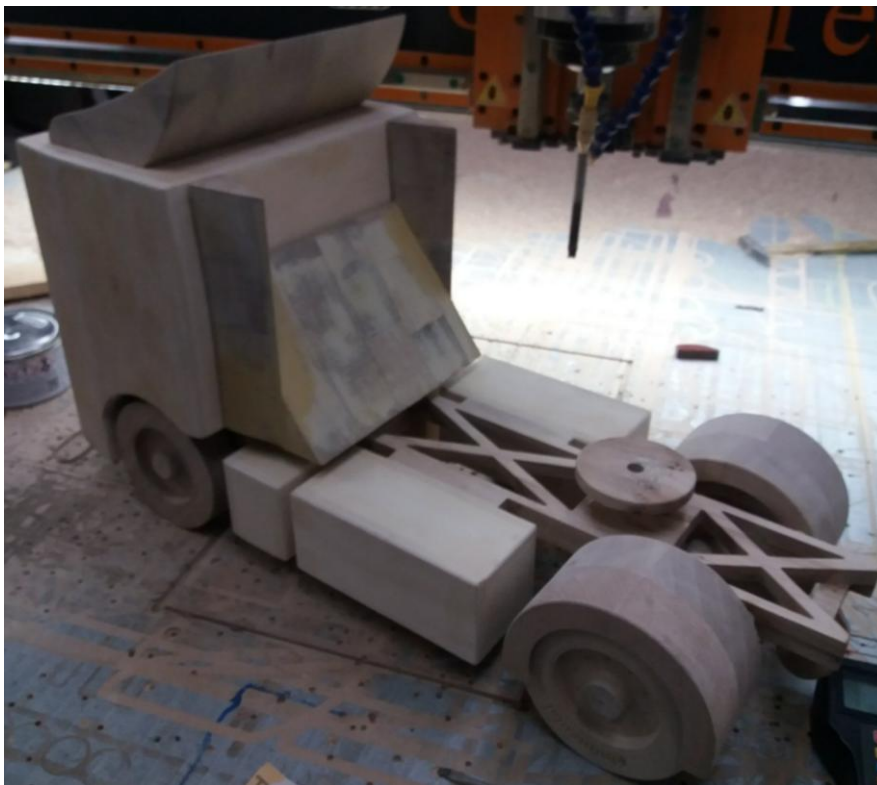


*Slika 7.11 - Aerodinamički dodakat na kabini kamiona*

Bočni vertikalni i horizontalni aerodinamički dodaci iza kabine kamiona su napravljeni 3d CNC obradom iz više segmenata koji su spajanjem dobili zadati oblik. Oba tipa aerodinamičkih dodataka su napravljeni odvojena kao što je i izvršena analiza putem CFD simulacija. Odvojeni aerodinamički dodaci iza kabine kamiona su prikazani na slici 7.12. Zbog složenosti vertikalnih aerodinamičkih dodataka i praktičnosti montaže u vazдушnom tunelu, ova dva tipa aerodinamičkih dodataka su objedinjeni u jedan, koji je kao takav objedinjeni testiran u vazдушnom tunelu. Naknadno su prilagođene CFD simulacije ovoj maloj promeni konfiguracije modela. Izgled objedinjenih bočnih vertikalnih i horizontalnog aerodinamičkog dodatka iza kabine kamiona je prikazan na slici 7.13. Na slici je takođe prikazan i aerodinamički dodakat na kabini kamiona.



Slika 7.12 - Odvojeni vertikalni i horizontalni aerodinamički dodaci iza kabine kamiona



Slika 7.13 - Svi aerodinamički dodaci na modelu kamiona

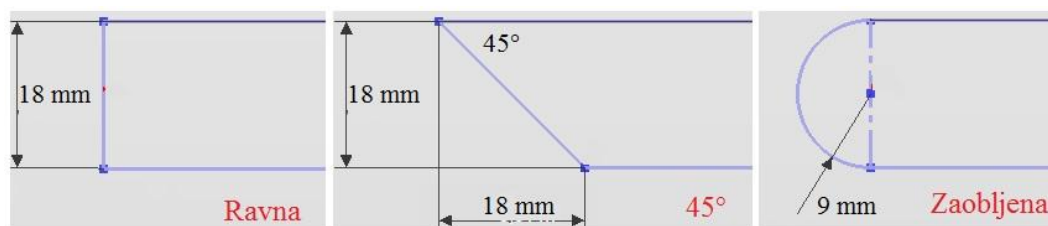
Aerodinamički dodatak iza poluprikolice je napravljen iz segmenata 3d CNC obradom. Izgled aerodinamičkog dodatka iza poluprikolice pre spajanja i nakon spajanja u jedan element je prikazano na slici 7.14.



Slika 7.14 - Aerodinamički dodatak iz poluprikolice pre i posle spajanja

### Daska i nosači modela

Napravljeni model kamiona i poluprikolice su u potpunosti nezavisni jedan u odnosu na drugi. Sa aspekta cilja rada je od velike važnosti da su objedinjeni i da se ponašaju kao jedinstveni model koji je u celini testiran kroz CFD simulacije. Kako bi se dva odvojena modela objedinila u jednu celinu, izvršeno je njihovo spajanje. Spajanje se sastojalo u kreiranju daske dimenzija 1550x250x18 čija je uloga da se na nju pričvrste oba modela i da se kao celina postavljaju i analiziraju u vazдушnom tunelu. Pre samog pravljenja daske, izvršena je detaljna CFD analiza koja je obuhvatala veličinu daske, napadnu ivicu i potrebno rastojanje modela kamiona i poluprikolice od nje, kako bi se umanjio efekat stacionarnog poda. Testiranje je sprovedeno za više oblika napadne ivice (stranice) daske u svrhu dobijanja najmanjeg njenog otpora i najmanjeg uticaja na tok vazdušne struje oko ispitivanog modela. Na slici 7.15 su prikazani analizirani slučajevi oblika napadne ivice (stranice) daske.



Slika 7.15 - Razmatrani slučajevi oblika napadne strane daske

Na osnovu slike 7.15 se vidi da su razmatrana tri oblika napadne strane daske. Sprovedenim istraživanjem i analizom putem CFD simulacija, najmanju silu otpora vazduha, kao i najmanji uticaj vazdušne struje od ivice daske na model je pokazao slučaj zaobljene napadne strane daske, pa je kao takva i usvojena i napravljena. Sledeći korak istraživanja uticaja daske na ispitivani model je rastojanje između daske i modela. Razmatrano je više slučajeva rastojanja putem CFD simulacija, a to su 0, 5, 10 i 20 mm rastojanja. Analizom je utvrđeno da je jedino slučaj u kome su spojeni model i daska nepovoljan sa aspekta prostiranja vazdušne struje, dok su ostali slučajevi pokazali slične rezultate. Usvojeno rastojanje modela

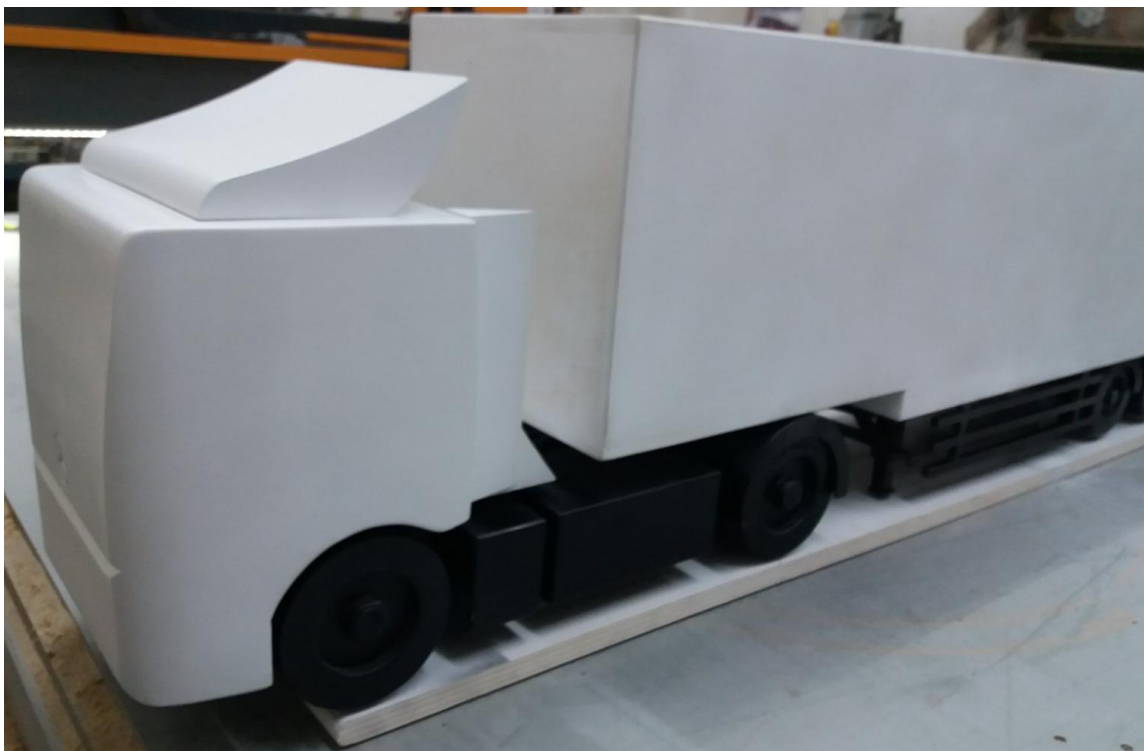


i daske je 5 mm. Nosači koji treba da drže model kamiona i prikolice pričvršćen za dasku na tačnom rastojanju od 5 mm su paravljeni 3d CNC obradom od materijala aluminijuma debljine 2 mm. Na slici 7.16 (levo) je dat prikaz aluminijumskog nosača u toku procesa pravljenja CNC obradom, dok je na istoj slici (desno) prikazan položaj montiranih nosača i odignutost modela od daske.



*Slika 7.16 - Nosači za pričvršćenje modela na dasku*

Nakon pravljenja svih delova modela, aerodinamičkih dodataka, nosača i daske, pristupilo se njihovom konačnom sređivanju, farbanju, glačanju i lakiranju. Svi ovi postupci su urađeni u svrhu smanjenja hrapavosti modela do najbolje moguće mere, kako bi što manje uticalo na rezultate merenja u vazдушnom tunelu. Model kamiona i poluprikolice sa aerodinamičkim dodacima pričvršćen na dasku je prikazan na slici 7.17.



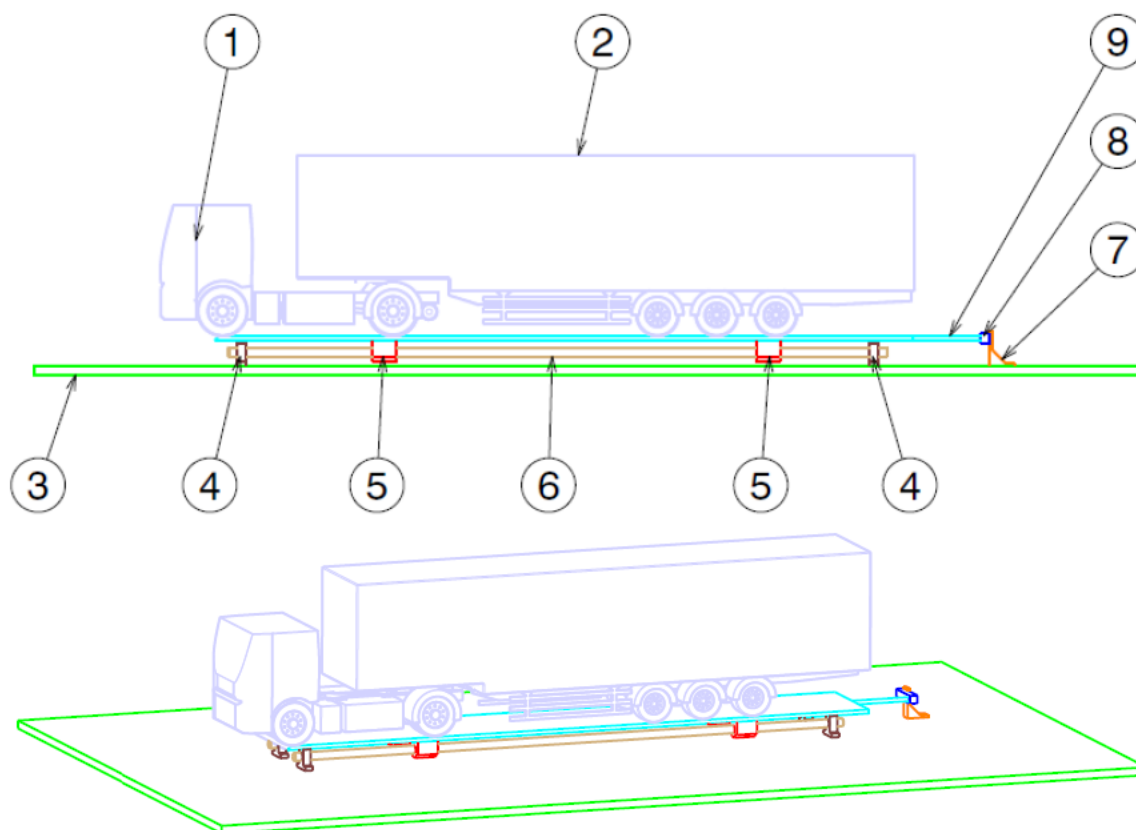
*Slika 7.17 - Model kamiona i poluprikolice sa dodacima pričvršćen na dasci*

### 7.2.2. Postrojenje za ispitivanje modela u vazdušnom tunelu

U svrhu eksperimentalnog ispitivanja modela kamiona, poluprikolice i aerodinamičkih dodataka u vazdušnom tunelu, neophodno je kreirati merno postrojenje koje će obuhvarati ispitivani model i mernu opremu, postavljenu u skladu sa standardima ispitivanja u vazdušnom tunelu. U ovom delu rada je prikazano postrojenje za eksperimentalno merenje sile otpora vazduha u vazdušnom tunelu.

Ukoliko se vratimo na silu otpora vazduha kao komponentu ukupnog otpora vozila, njen vektor intenziteta predstavlja horizontalnu komponentu ukupnog otpora. Sa aspekta ispitivanog modela u vazdušnom tunelu, sila otpora vazduha deluje direktno na model u smeru delovanja vazdušne struje. Ispitivani model sa daskom se postavlja u vazdušni tunel tako da vazdušna struja deluje direktno na model kako bi se simulirao uticaj vazdušne struje na vozilo u kretanju. Prema tome, pošto je model taj koji je stacionaran u vazdušnom tunelu, a vazdušna struja nailazi direktno na njega, sila otpora vazduha želi da pomeri ispitivani model unazad. Na osnovu ovog razmatranja, treba osmisliti postrojenje koje će obuhvatiti ispitivani model i mernu opremu koja će biti u stanju da izmeri i sačuva izmerenu vrednost sile otpora vazduha.

U svrhu merenja sile otpora vazduha, neophodno je obezbediti da model poseduje jedan stepen slobode kretanja, a to je translatorno pravolinijsko kretanje duž svoje uzdužne ose. Ukoliko model ima mogućnost translatornog kretanja, mogao bi se postaviti merni uređaj na koji bi se model naslanjao u trenucima delovanja vazdušne struje i očitavala horizontalna komponenta otpora, tj. sila otpora vazduha. Na slici 7.18 je dat šematski prikaz postrojenja za merenje sile otpora vazduha ispitivanog modela u vazdušnom tunelu.

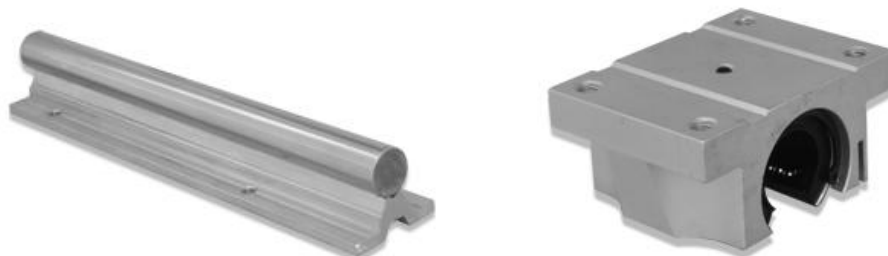


Slika 7.18 - Šematski prikaz mernog postrojenja

Na slici 7.18, sa pozicijama 1 i 2 su označeni ispitivani modeli (kamion tegljač pozicija 1 i poluprikolica pozicija 2) koju su međusobno povezani. Sa pozicijom 3 je označena podna ploča koja ima ulogu noseće platforme na koju će biti pozicionirani svi neophodni elementi. Dimenzije podne platforme su 2500x1460x22 mm, iz razloga tačnog postavljanja na predviđeno mesto u vazdušnom tunelu. Kako bi model mogao da se kreće uzdužno, neophodno je postaviti klizače. Dve vođice kružnog poprečnog preseka prečnika 16 mm su obeleženi pozicijom 6. Sa pozicijom 4 su označeni četiri elementa koja imaju ulogu da fiksiraju vođice za podnu platformu 3 pomoću vijaka. Elementi 5 predstavljaju linearne ležajeve čija je uloga da klize duž vođica i omoguće linearno uzdužno kretanje modela. Četiri linearna ležaja 5 se pomoću vijaka fiksiraju za gornju dasku, označenu sa 9, čija je uloga da objedini i poveže model kamiona tegljača 1 i poluprikolice 2. Gornja daska 9 na svom desnom kraju (prema slici 7.18) ima produžetak u obliku šipke. Uloga tog dodatka je da se uz pomoć njega prenese horizontalna vrednost sile otpora vazduha na merni davač sile, označen sa 8. Merni davač sile radi na pricipu savijanja mernih traka unutar njega i iz tog razloga je neophodno kruto povezati jedan njegov kraj, dok drugi služi za nanošenje merene sile. Za fiksiranje jednog kraja mernog davača sile 8 se koristi ugaoni profil 7, koji se pomoću vijaka fiksira za podnu ploču 3. Merni davač sile 8 se dalje povezuje za računar na kome se vrši snimanje očitanih rezultata merenja. Postupak merenja uz pomoć prethodno objašnjenog postrojenja se započinje pravilnim postavljanjem i pozicioniranjem svih elemenata. Kada se postave svi elementi u pravilan položaj, model zajedno sa gornjom platformom se postavi u položaj da se blago naslanja na merni davač sile (krajnji desni položaj prema slici 7.18). Nakon toga se merni davač nulira, odnosno resetuje kako bi proglasili nultu vrednost horizontalne komponente sile otpora. Nakon toga se pušta i kontrolisano pojačava intenzitet vazdušne struje u smeru direktnom na prednju čeonu stranu modela. Otpor generisan vazdušnom strujom na modelu se manifestuje horizontalnim pomeranjem modela ka nazad (na desno prema slici 7.18), pri čemu se isti oslanja i pritiska merni davač sile na kome se vrši očitavanje sile. Pošto se merenje vrši uz pomoć linearnih ležajeva koji klize preko vođica, neophodno je uzeti u obzir trenje koje se generiše između njih.

### Elementi mernog postrojenja

Podna platforma je precizno isečena na pomenute dimenzije kako bi se u potpunosti uklopila u pod vazdušnog tunela i stvorila ravnu podlogu unutar mernog dela vazdušnog tunela u kojoj će samo ispitivani model biti u vazdušnoj struji. Materijal koji se koristio za izradu podle platforme je presovano drvo ili medijapan debljine 22 mm. Vođice po kojima je potrebno da klize linearni ležajevi su korišćene četiri odvojene dužine po 250 mm. Postavljene su na mestima jednako udaljenih u odnosu na težište ispitivanog modela. Na slici 7.19 je dat prikaz vođica i linearnih ležajeva koji su korišćeni u toku eksperimenta.



Slika 7.19 - Klizna vođica i linearni ležaj

Merna ćelija koja je korišćena u eksperimentu je CZL623B-20kg. Kao što se može videti iz oznake merne ćelije, maksimalna merena vrednost je 20 kg. Ova merna ćelija je projektovana

da meri masenu vrednost u kilogramima, tako da je u softveru mernog pojačala na koji je priključena izvršeno prebacivanje u sila u Njutnima. Konverzija je izvršena množenjem merene vrednosti mase na vrednošću gravitacionog ubrzanja koji je bio u funkciji geografske širine i dužine, prema poziciji gde je sprovedeno eksperimentalno merenje. Na slici 7.20 je prikazana merna ćelija.



Slika 7.20 - Merna ćelija

Merno pojačalo na koje je priključena merna ćelija i koje je korišćeno za snimanje dobijenih vrednosti sile otpora vazduha je HBM QuantumX-MX840A sa osam kanala. Na slici 7.21 je dat prikaz mernog pojačala.



Slika 7.21 - Merno pojačalo

Fotografija kompletnog postrojenja sa mernom ćelijom i podnom platformom je prikazano na slici 7.22.

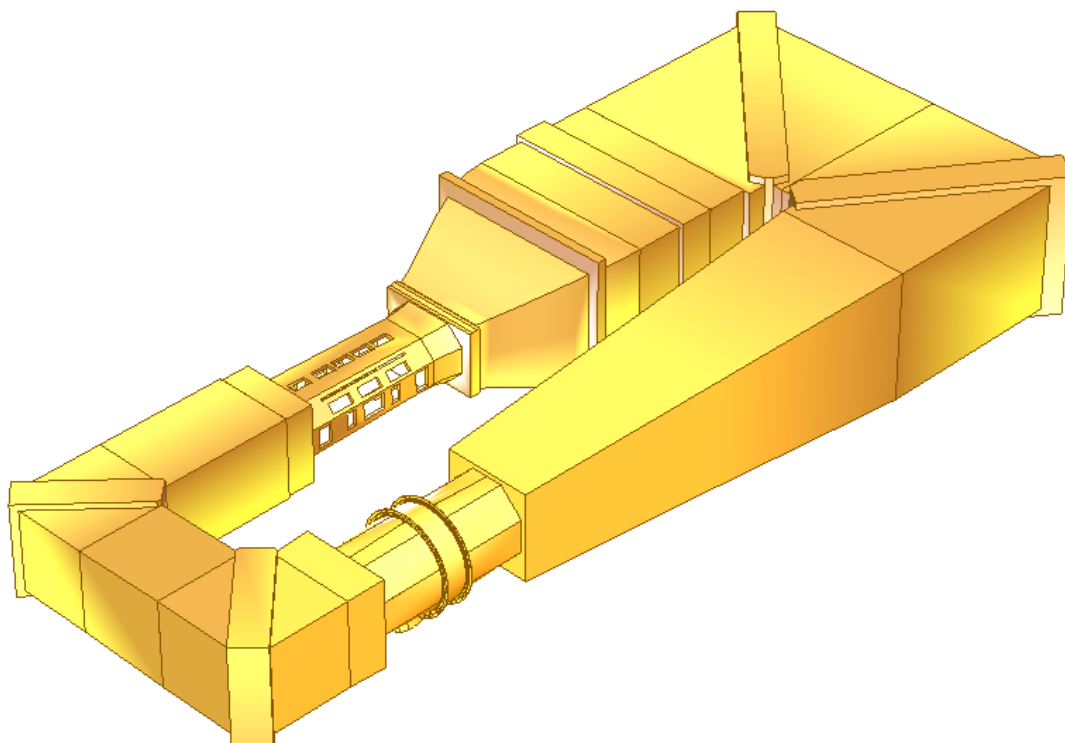


Slika 7.22 - Merno postrojenje

### 7.3. Vazdušni tunel "Miroslav Nenadović"

Ekperimentalno ispitivanje u svrhu validacije rezultata dobijenih putem virtuelnih CFD simulacije je sprovedeno u vazдушnom tunelu "Miroslav Nenadović". Vazdušni tunel ili aerotunel "Miroslav Nenadović" se nalazi u Beogradu, na Mašinskom fakultetu u okviru Aerotehničkog instituta. U nastavku su date osnovne karakteristike vazdušnog tunela.

Vazdušni tunel "Miroslav Nenadović" predstavlja vazdušni tunel sa povratnim kanalom, odnosno zatvoreni tip vazdušnog tunela. Najvećim delom je pozicioniran ispod površine zemlje, pa se smatra podzemnim tipom vazdušnog tunela. Poprečni presek vazdušnog tunela se menja u zavisnosti od njegovog dela, tako da u delu komore za umirenje vazdušne struje je najvećeg poprečnog preseka, dok je u delu gde se vrši testiranje najmanjeg poprečnog preseka zbog potrebe za ubrzanjem neporemećenog dela vazdušne struje, uz minimalne gubitke i lokalne devijacije brzine. Vazдушna struja se stvara pomoću pogonske grupe koju čini trofazni elektromotor snage 200 kW i revitalizovana četvorokraka elisa aviona Tanderbolt P47A. Dimenzije radnog dela u kome se vrši pozicioniranje ispitivanog modela i njegovo testiranje je 2,9x2,1x6 m. Osnovni zadatak radnog dela za testiranje je da se ostvari što homogenije strujno polje vektora brzine, po pravcu i intenzitetu, sa što manjim stepenom turbulencije. Pritisak i temperatura se takođe podešavaju kako bi se stvorili uslovi kao u slobodnoj atmosferi. Zbog najužeg poprečnog preseka vazdušnog tunela u radnom delu, ostvaruje se najveća brzina vazdušne struje od 116 m/s. Ova brzina je najveća sa stanovišta pogonske grupe, dok elisa i konstrukcija vazdušnog tunela mogu podneti i veće brzine vazdušne struje. Vazdušni tunel je opremljen elektronskom mernom opremom i namenjen je velikom spektru ispitivanja od fundamentalnih do eksploatacijsko-industrijskih ispitivanja. Na slici 7.23 je šematski prikazan oblik vazdušnog tunela "Miroslav Nenadović".



Slika 7.23 - Vazdušni tunel "Miroslav Nenadović" [81]

Sistem za akviziciju i ekskviziciju podataka se sastoji od digitalnog anemometra PCM-PFM 2 koji je povezan na stacionarnu Pitoovu cev, pozicioniranu u radnom ispitnom delu vazdušnog

tunela. Osmokanalno merno pojačalo QuantumX MX840A se koristi za praćenje svih pomoćnih parametara. Šezdesetokanalni multimanometar sa senzorima Bosch BMP280 za praćenje pritiska vazdušne struje u ispitnom delu. PIV Litron Lasers sa sistemom kamera modela 640050 i u kombinaciji sa super računarskom stanicom Dell Precision T7600 (Cores 24, 256GB RAM memorije) se koristi za praćenje i čuvanje svih parametara senzora u realnom vremenu.

U vazдушnom tunelu se lako vrši postavljanje i pozicioniranje ispitivanih modela zahvaljujući ratirajućoj platformi sa čime se postižu optimalni uslovi ispitivanja širokog dijapazona merenja, kao i različitosti ispitivanih modela. Ovo značajno povećava ekonomičnost rada vazdušnog tunela, a samim tim i efikasnost njegovog iskorišćenja [81].

#### 7.4. Sprovođenje eksperimentalnog merenja u vazдушnom tunelu

Svrha sprovođenja eksperimentalnog merenja u vazдушnom tunelu "Miroslav Nenadović" u Beogradu na napravljenom modelu kamiona, poluprikolice i aerodinamičkih dodataka od drveta je validacija rezultata virtuelnog merenja sile otpora vazduha putem CFD simulacija. Zahvaljujući CFD simulacijama su sprovedena virtuelna merenja za sve konfiguracije modela i aerodinamičkih dodataka. U ovom delu rada se prikazuje plan sprovođenja eksperimentalnog merenja u vazдушnom tunelu, postavljanje različitih konfiguracija modela i aerodinamičkih dodataka i prikaz dobijenih rezultata eksperimentalnog merenja.

##### 7.4.1. Plan eksperimenta

U svrhu sprovođenja eksperimentalnog merenja u vazдушnom tunelu vodilo se računa da merenje bude što preciznije sprovedeno, uz što racionalniju upotrebu resursa i vremena. Eksperimentalno merenje je sprovedeno 06.03.2020. u Beogradu. Kako bi se eksperimentalnim merenjem obuhvatile sve konfiguracije modela i aerodinamičkih dodataka, uz zadovoljavanje opsega brzine vazdušne struje i ponovljivosti rezultata, utvrđen je sledeći plan sprovođenja eksperimenta. Eksperimentalno merenje je izvršeno u sedam faza različitih konfiguracija modela i aerodinamičkih dodataka. Prikaz različitih konfiguracija modela i aerodinamičkih dodataka je dato u tabeli 57. Pod modelom se smatra model kamiona i poluprikolice objedinjeni sa daskom za povezivanje.

Tabela 57 - Konfiguracije sprovedenog eksperimentalnog merenja

<b>Konfiguracija</b>	<b>Objašnjenje</b>
I	Model sa svim aerodinamičkim dodacima (i na kamionu i na poluprikolici)
II	Model sa aerodinamičkim dodacima na kamionu (bez aerodinamičkog dodatka na poluprikolici)
III	Model samo sa aerodinamičkim dodatkom na kabini kamiona
IV	Model samo sa aerodinamičkim dodacima iza kabini kamiona
V	Model samo sa aerodinamičkim dodatkom iza poluprikolice
VI	Model bez aerodinamičkih dodataka
VII	Merenje otpora vazduha daske sa nosačima (bez modela)

Kao što se može videti iz tabele 57, eksperimentalnim merenjem su pokrivena sve konfiguracije modela i aerodinamičkih dodataka. Treba napomenuti da zbog neophodnog postupka izrade i postavljanja aerodinamičkih dodataka iza kabine kamiona (vertikalni bočni

i horizontalni aerodinamički dodatak), isti su izrađeni i postavljeni kao spojeni, zbog toga se u konfiguracijama ne može videti eksperimentalno merenje sa svaki posebno.

Što se tiče brzine vazdušne struje unutar vazdušnog tunela, merenje je sprovedeno za opseg brzine od 60 do 90 km/h (od 16,67 do 25 m/s). Korak porasta brzine je 5 km/h. Kako bi eksperiment imao svoju ponovljivost rezultata, merenje je sprovedeno dva puta za svaku brzinu, odnosno prvo sa tendencijom porasta brzine od 60 do 90 km/h, a zatim sa tendencijom opadanja brzine od 90 do 60 km/h.

Postupak merenje jedne konfiguracije modela i aerodinamičkog dodatka se sastojao u sledećem. Postavljanjem podne platforme sa modelom, izabranom konfiguracijom aerodinamičkih dodataka i mernom opremom je prvi korak. Naslanjanjem modela na mernu ćeliju u uslovima bez puštanja vazdušne struje je izvršeno nuliranje merne ćelije preko softvera za praćenje rezultata dobijenih od mernog pojačala. Nakon startnih podešavanja modela i opreme, kao i nuliranjem sile na mernoj ćeliji, započinje se očitavanje podataka koji se automatski čuvaju na računar u realnom vremenu. Startovanjem merenja se započinje sa povećanjem brzine vazdušne struje u tunelu. Prva referentna brzina je 60 km/h (16,67 m/s) i nakon postizanja potrebne brzine, vrši se beleženje početnog i krajnjeg vremene snimljenog zapisa koji odgovara toj brzini. Nakon toga se povećava brzina na sledeću referentnu brzinu i nakon umirenja vazdušne struje i ustaljenosti vrednosti brzine, ponovo se vrši beleženje početne i krajnje vrednosti trajanja mernog zapisa koji odgovara toj brzini. Nakon postizanja maksimalne vrednosti brzine od 90 km/h i beleženja rezultata koji odgovara toj brzini, proces se ponavlja sa opadanjem brzine. Kompletno merenje jedne konfiguracije je sačuvano kao jedan merni zapis, na kome je vremenskim markerima označeno koji rezultat odgovara kojoj brzini. Ovaj postupak sa jednim merenjem po konfiguraciji je usvojen iz razloga efikasnosti merenje, da se ne mora iznova započinjati merenje za svaku brzinu posebno, već se jednim merenjem obuhvati ceo opseg brzine sa njenim porastom i opadanjem. Nakon poslednjeg merenja na 60 km/h, isključuje se motor pogonske grupe vazdušnog tunela i čeka se njegovo potpuno zaustavljanje, pri čemu se i dalje pušta merenje vrednosti sile otpora vazduha. Nakon postizanja vrednosti brzine unutar tunela od približne nuli, vrši se zaustavljanje snimanja. Ovaj postupak je sproveden u cilju provere mernog instrumenta, da li se nakon merenja vraća u prvobitni, nulti položaj. Ulaskom u vazdušni tunel, pristupa se postavljanju sledeće konfiguracije modela i započinje postupak iz početka, sa nuliranjem davača. Poslednja konfiguracija je sprovedena samo sa daskom i nosačima zbog uvida u vrednost sile otpora vazduha koju oni stvaraju.

#### 7.4.2. Konfiguracije ispitivanih modela

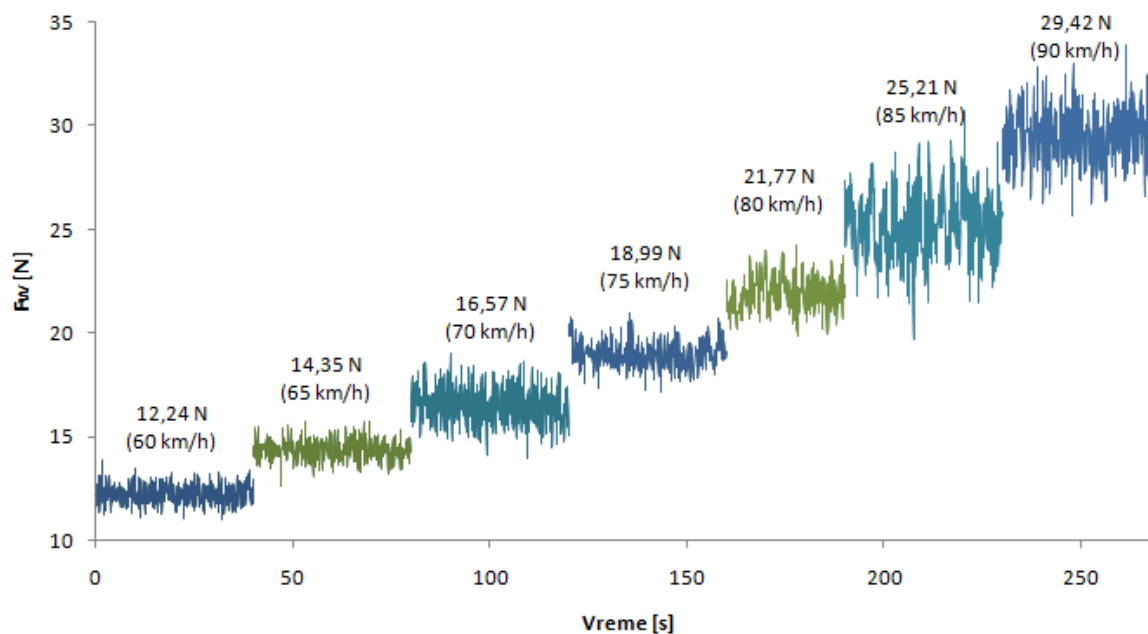
### I konfiguracija

Prva konfiguracija modela koja je razmatrana u eksperimentalnom ispitivanju u vazdušnom tunelu je model sa svim aerodinamičkim dodacima. Nakon postavljanja modela i startnog podešavanja izvršeno je merenje sile otpora vazduha. Kompletno merenje prve konfiguracije je trajalo 2170 sekundi (oko 36 minuta). Vazdušnoj struji je trebalo 120 sekundi da se ustali na prvoj merenoj brzini od 60 km/h (16,67 m/s). Dužina trajanja merenja pri svakoj brzini nakon postizanja ustaljene vazdušne struje je 30 ili 40 sekundi. Osrednjavanjem vrednosti u trajanju od 30 ili 40 sekundi, dobija se vrednost sile otpora vazduha pri razmatranoj brzini vazdušne struje. Na slici 7.24 je dat prikaz modela u razmatranoj konfiguraciji, postavljenog u ispitni deo vazdušnog tunela. Merenje je sprovedeno za sve predviđene brzine vazdušne struje. Na slici 7.25 i 7.26 su grafički prikazani dobijeni rezultati merenja modela pri konfiguraciji sa svim aerodinamičkim dodacima. Slika 7.25 prikazuje rezultate kompletnog

zapisa merenja u trajanju od po 30 ili 40 sekundi, za sve brzine vazdušne struje od 60 do 90 km/h. Takođe su navedene osrednjene vrednosti sile otpora vazduha za svaki od grafika.



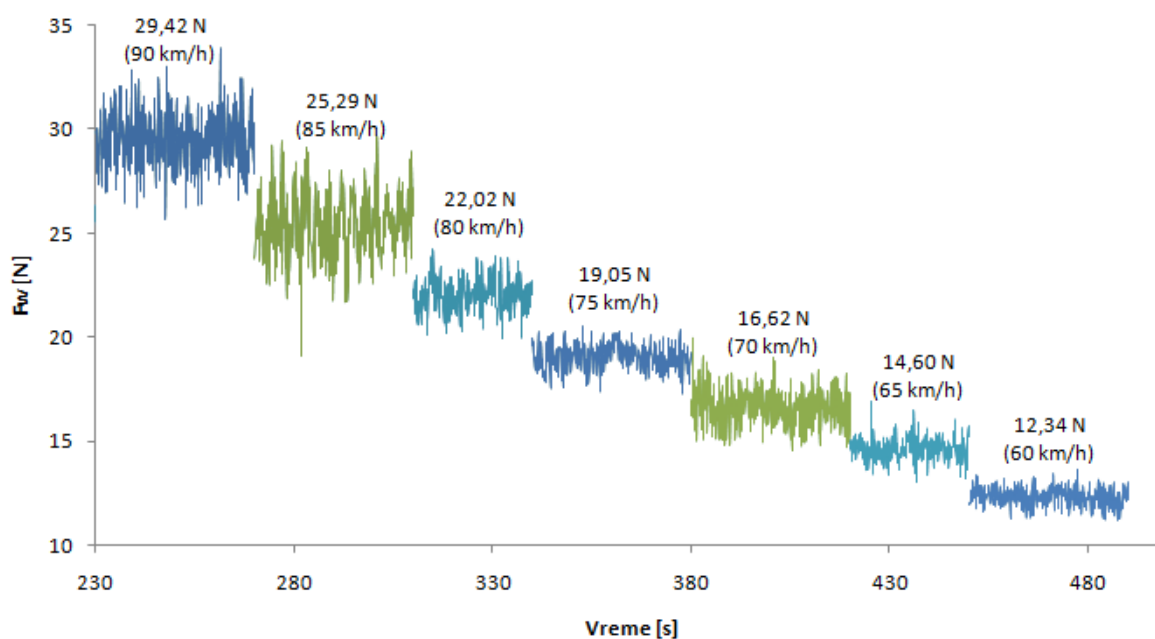
Slika 7.24 - Ispitivani model u vazdušnom tunelu, I konfiguracija



Slika 7.25 - Grafik dobijenih rezultata merenja za brzinu od 60 do 90 km/h



Slika 7.26 predstavlja nastavak prethodne slike, odnosno mernog zapisa i na njoj se mogu videti merenja sa tendencijom opadanja brzine od 90 do 60 km/h. Na obe slike su izbačeni delovi grafika koji su bili potrebni vazdušnoj struji da se ustali, zbog toga je ukupno snimanje svedeno na oko 500 sekundi, u odnosu na kompletan zapis od 2170 sekundi.

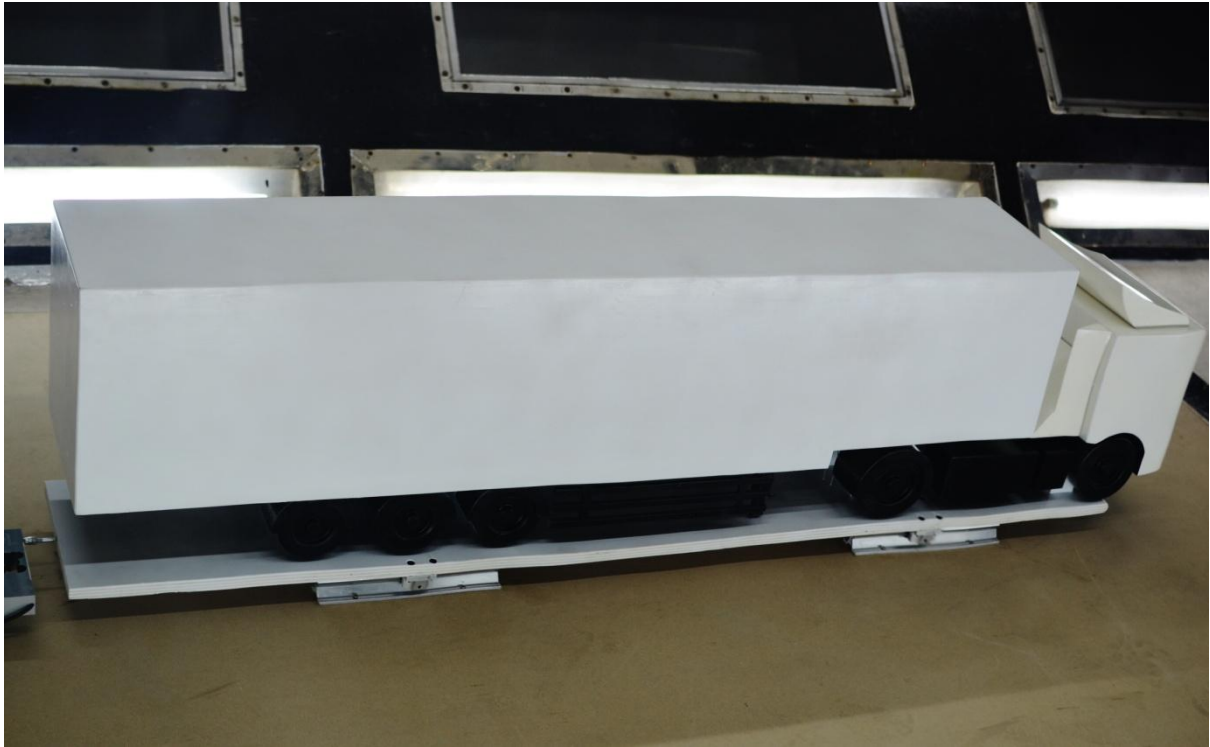


Slika 7.26 - Grafik dobijenih vrednosti merenja za brzinu od 90 do 60 km/h

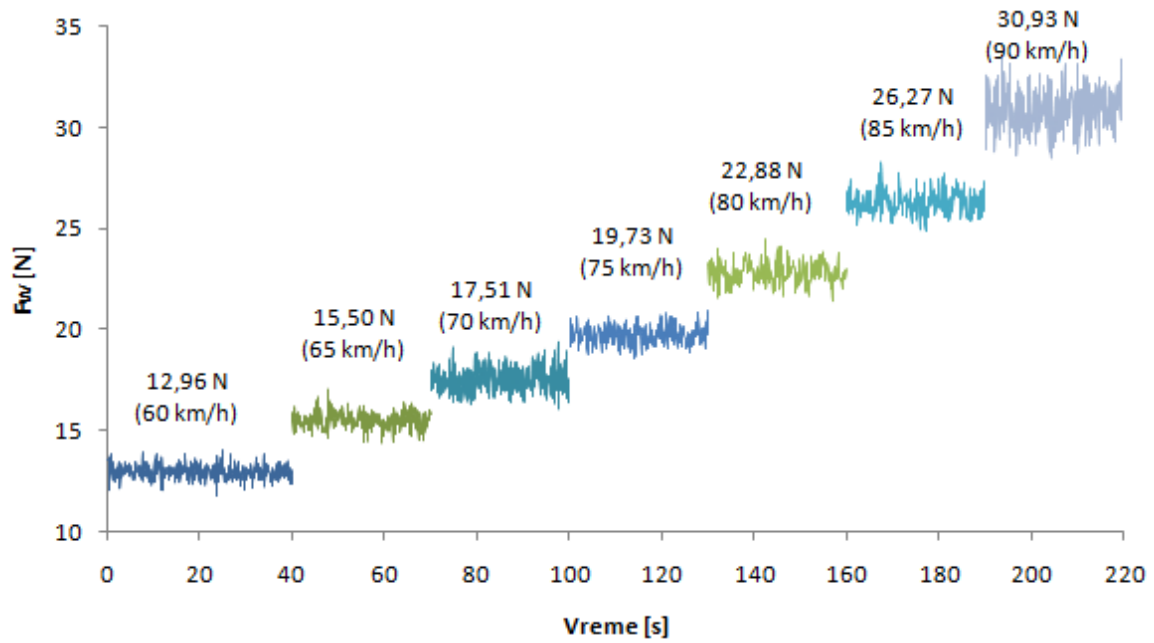
Grafički prikaz na slici 7.26 predstavlja drugo merenje sile otpora vazduha pri istoj konfiguraciji modela. Sa slika 7.25 i 7.26 se može uočiti veće rasipanje rezultata pri većim brzinama vazdušne struje što je karakteristično povećanim vibracijama modela zbog veće brzine vazdušne struje koja opstrujava oko modela.

## II konfiguracija

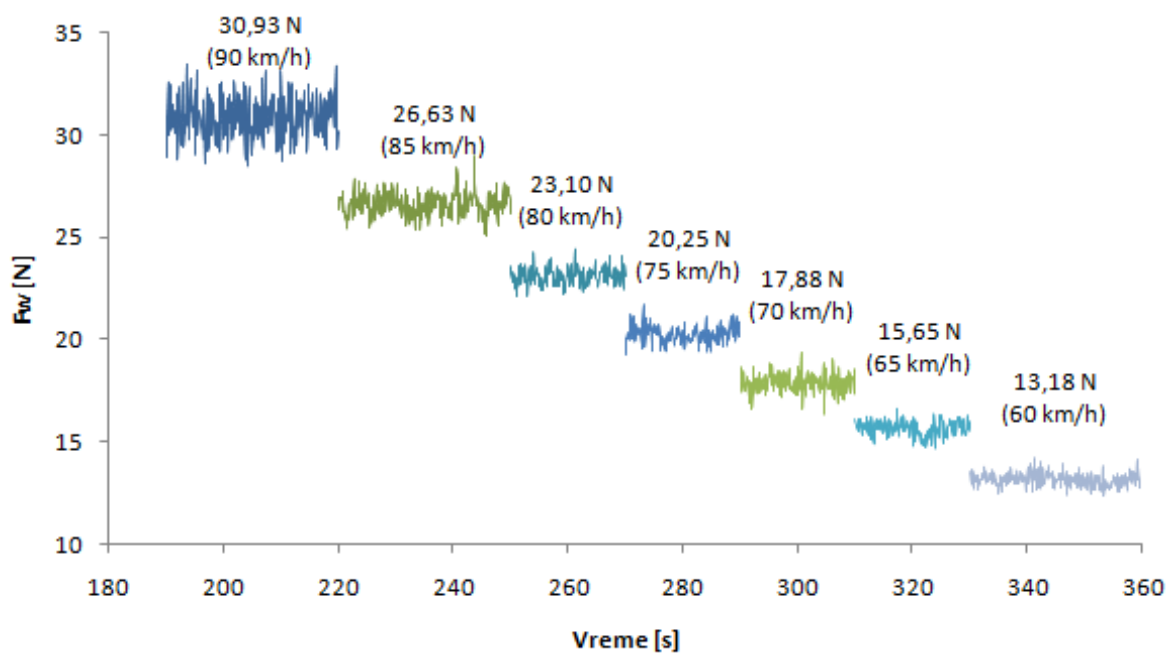
Druga razmatrana konfiguracija predstavlja ispitivani model sa svim aerodinamičkim dodacima na modelu kamiona, dok je dodatak sa poluprikolice uklonjen. Nakon postavljanja modela u ispitni deo vazdušnog tunela i obavljenih startnih podešavanja i provera merne opreme, pristupilo se merenju. Merenje se sprovodilo na isti način kao i u prethodnom slučaju sa porastom brzine vazdušne struje od 60 do 90 km/h, a nakon toga i sa opadanjem brzine od 90 do 60 km/h. Fotografija modela u vazdušnom tunelu pri drugoj konfiguraciji je prikazana na slici 7.27. Ukupna dužina trajanja mernog zapisa u ovoj konfiguraciji je iznosila 1470 sekundi. Uklanjanjem delova koji su bili potrebni da se vazdušna struja ustali na odgovarajuću vrednost brzine, dobija se dužina zapisa od 360 sekundi. Prikaz mernog zapisa druge konfiguracije sa srednjim vrednostima sile otpora vazduha su prikazani na slikama 7.28 i 7.29. Na prvom dijagramu se vide zapisi pri brzinama od 60 do 90 km/h, dok drugi grafik predstavlja ponovljeno merenje sa opadajućom brzinom od 90 do 60 km/h. Na oba grafika se vidi isti merni zapis pri brzini od 90 km/h iz razloga što je to merenje vršeno jednom, sa obično dužim vremenskim trajanjem zapisa. Prilikom završenog drugog merenja na 60 km/h, do nulte brzine vazdušne struje je bilo potrebno oko 170 sekundi, pri čemu se vrednost na mernoj ćeliji vratila u prvobitni položaj.



Slika 7.27 - Ispitivani model u vazdušnom tunelu, II konfiguracija



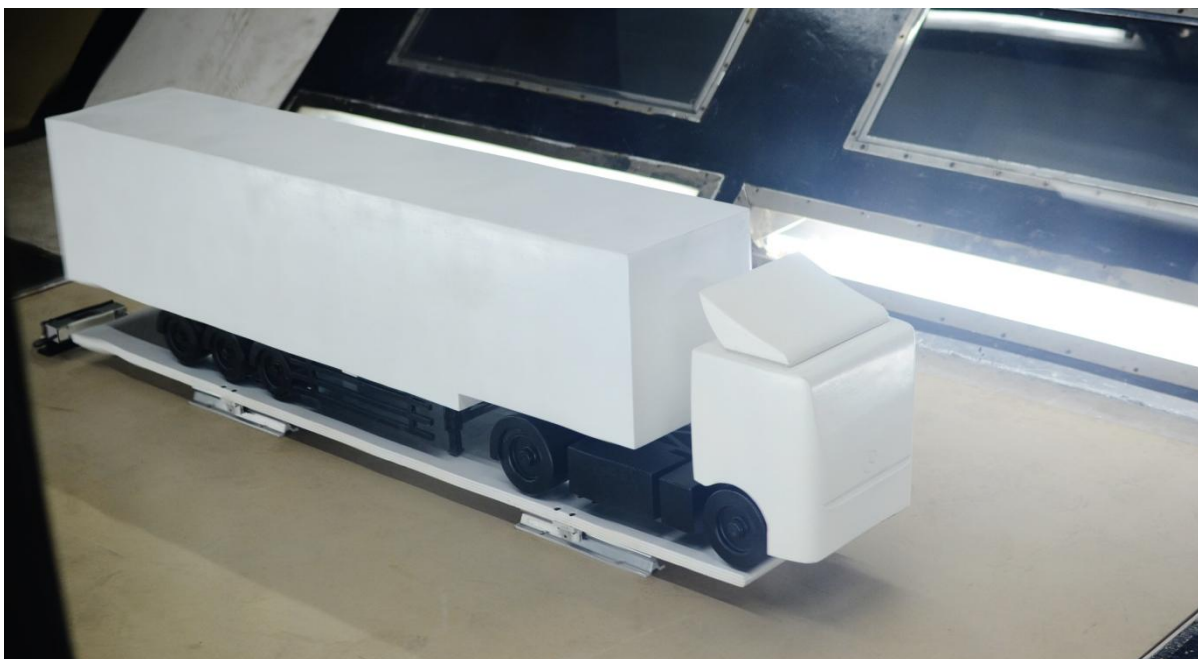
Slika 7.28 - Grafik dobijenih rezultata merenja za brzinu od 60 do 90 km/h



Slika 7.29 - Grafik dobijenih vrednosti merenja za brzinu od 90 do 60 km/h

### III konfiguracija

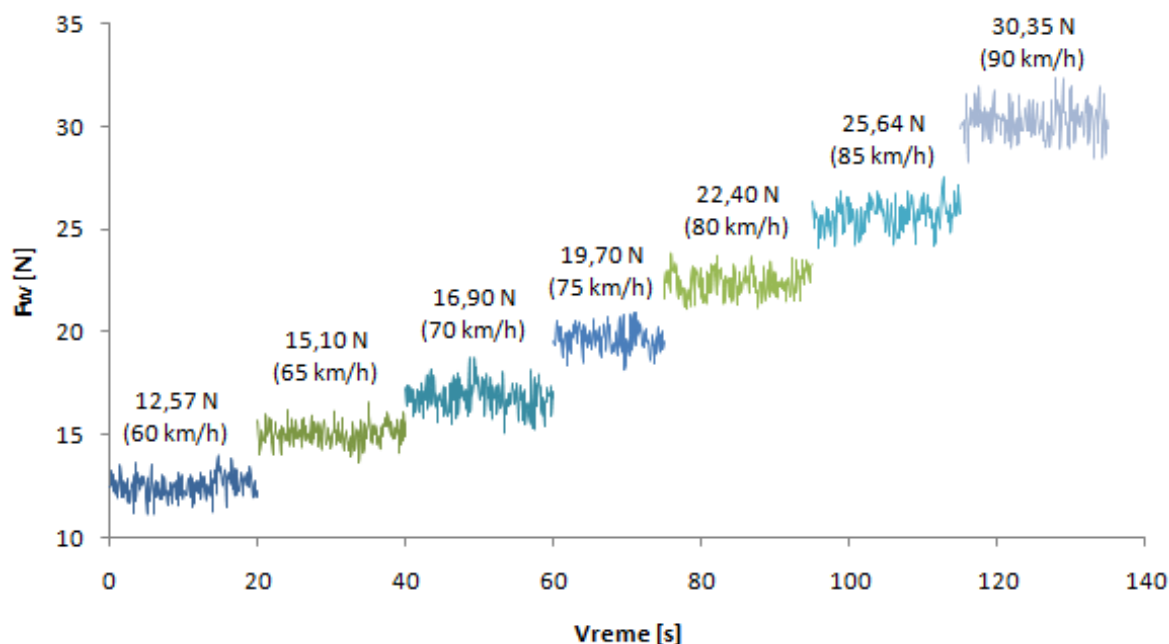
Sledeća konfiguracija koja je postavljena u vazdušni tunel i na kojoj je vršeno merenje je model koji na sebi ima samo aerodinamički dodatak na kabini kamiona. Na slici 7.30 je prikazana treća konfiguracija modela.



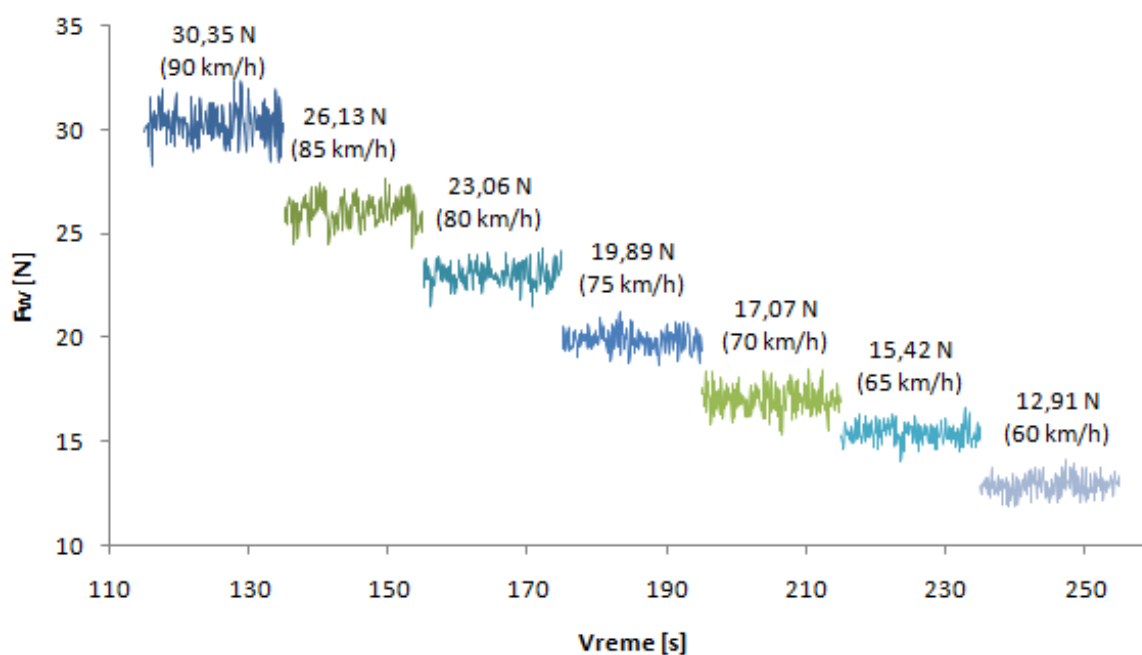
Slika 7.30 - Ispitivani model u vazdušnom tunelu, III konfiguracija

Startnim podešavanjem modela i proverom merne opreme, započeto je ispitivanje povećanjem brzine vazdušne struje do 60 km/h. Postupak merenja je veoma sličan prethodnim konfiguracijama modela. Grafički prikaz dobijenih rezultata je dat na slikama 7.31 i 7.32. Ukupni merni zapis je trajao oko 1000 sekundi, od čega su merenja pri ustaljenoj

vazdušnoj struji, bez postizanja početne vrednosti od 60 km/h, kao i bez vraćanja na 0 u trajanju od 260 sekundi, što je i prikazano na slikama 7.31 i 7.32.



Slika 7.31 - Grafik dobijenih rezultata merenja za brzinu od 60 do 90 km/h



Slika 7.32 - Grafik dobijenih vrednosti merenja za brzinu od 90 do 60 km/h

#### IV konfiguracija

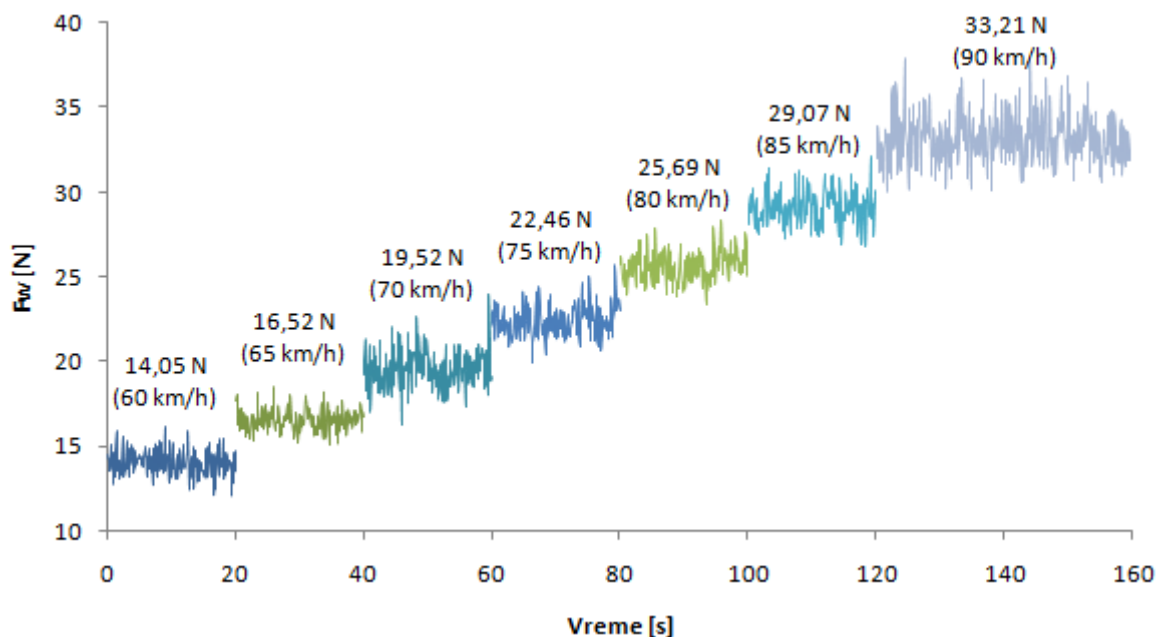
Ova konfiguracija ispitivanog modela se sastoji samo od aerodinamičkih dodataka iza kabine kamiona. Kao što je već prethodno naglašeno, zbog neophodnog načina izrade aerodinamičkih dodataka iz kabine kamiona, oba tipa dodatka (bočni vertikalni i horizontalni)

su napravljeni zajedno i kao takvi se testiraju u vazdušnom tunelu. Na slici 7.33 je prikazan izgled ispitivanog modela u razmatranoj konfiguraciji u vazdušnom tunelu.



Slika 7.33 - Ispitivani model u vazdušnom tunelu, IV konfiguracija

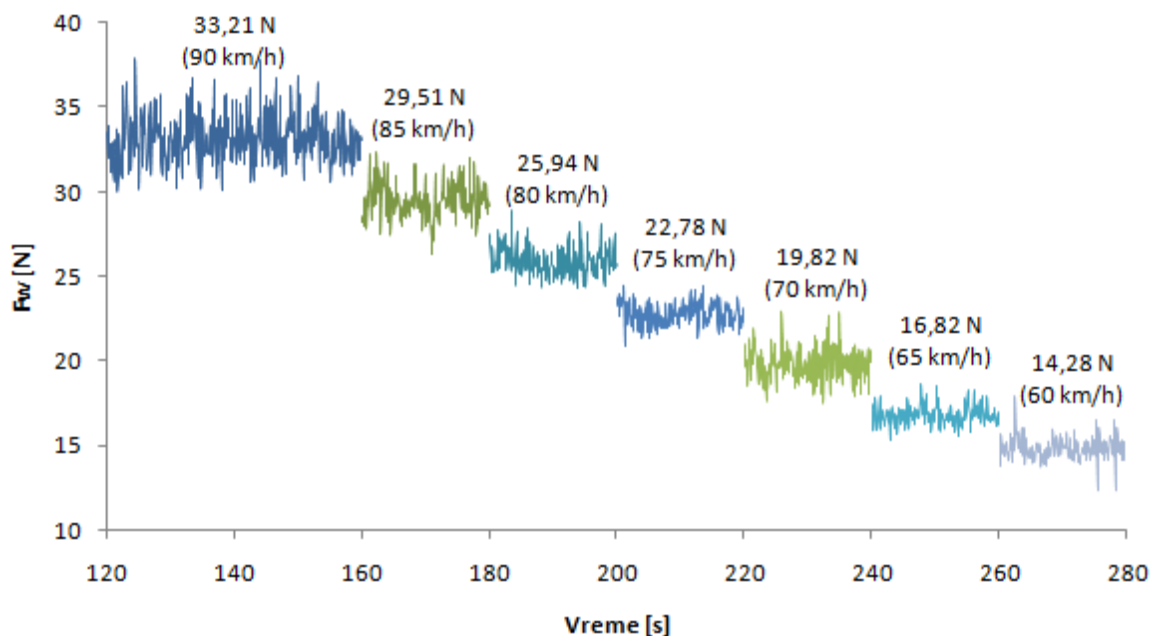
Pozicioniranjem ispitivanog modela i podešavanjem izabrane konfiguracije aerodinamičkih dodataka, pristupilo se ispitivanju. Kao i u prethodnim slučajevima, prva referentna brzina vazdušne struje je iznosila 60 km/h. Započinjanje mernog zapisa se urađeno dok je vazdušna struja imala nultu brzinu u vazdušnom tunelu. Ukupna dužina trajanja mernog zapisa pri ovoj konfiguraciji je iznosila 1400 sekundi.



Slika 7.34 - Grafik dobijenih rezultata merenja za brzinu od 60 do 90 km/h

Uklanjanjem izmerenih vrednosti koje su zabeležene u trenucima zaletanja pogonske grupe i stvaranja brzine vazdušne struje od 60 km/h, zaustavljanjem elise nakon drugog merenja od

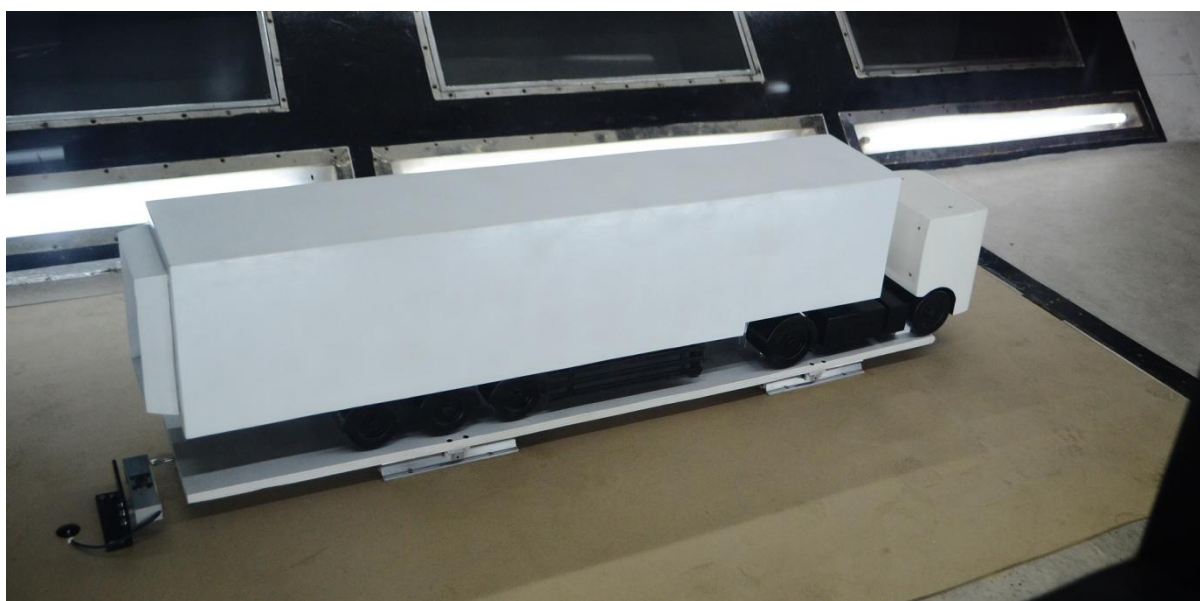
60 km/h, kao i perioda ustavljenja vazdušne struje između razmatranih brzina, dobija se merni zapis u trajanju od 280 sekundi. Sređeni merni zapis sa tendencijom povećanja brzina i sa tendencijom opadanja brzina vazdušne struje su prikazani na slikama 7.34 i 7.35. Dužina pojedinačnih zapisa je 20 ili 30 sekundi, čijim osrednjavanjem se dobijene vrednosti sile otpora vazduha, prikazane na slikama.



Slika 7.35 - Grafik dobijenih vrednosti merenja za brzinu od 90 do 60 km/h

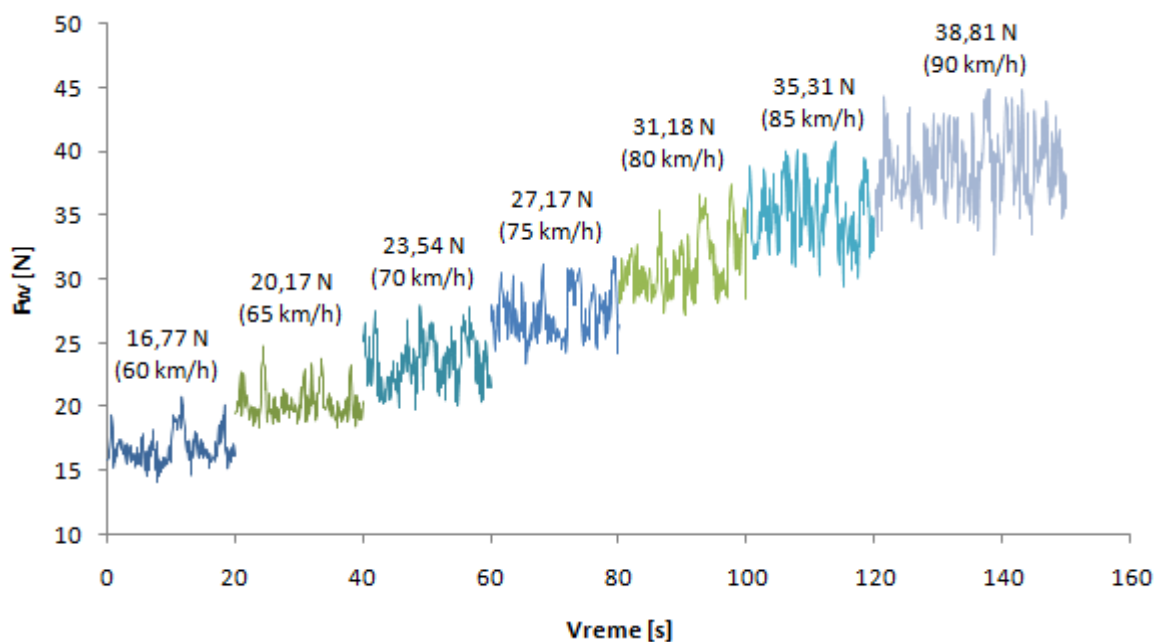
### V konfiguracija

Peta razmatrana konfiguracija ispitivanog modela i aerodinamičkih dodataka se sastoji od aerodinamičkog dodatka iza poluprikolice. Svi ostali aerodinamički dodaci sa modela kamiona su uklonjeni. Na slici 7.36 je prikazan ispitivani model u razmatranj konfiguraciji u vazdušnom tunelu u toku ispitivanja.

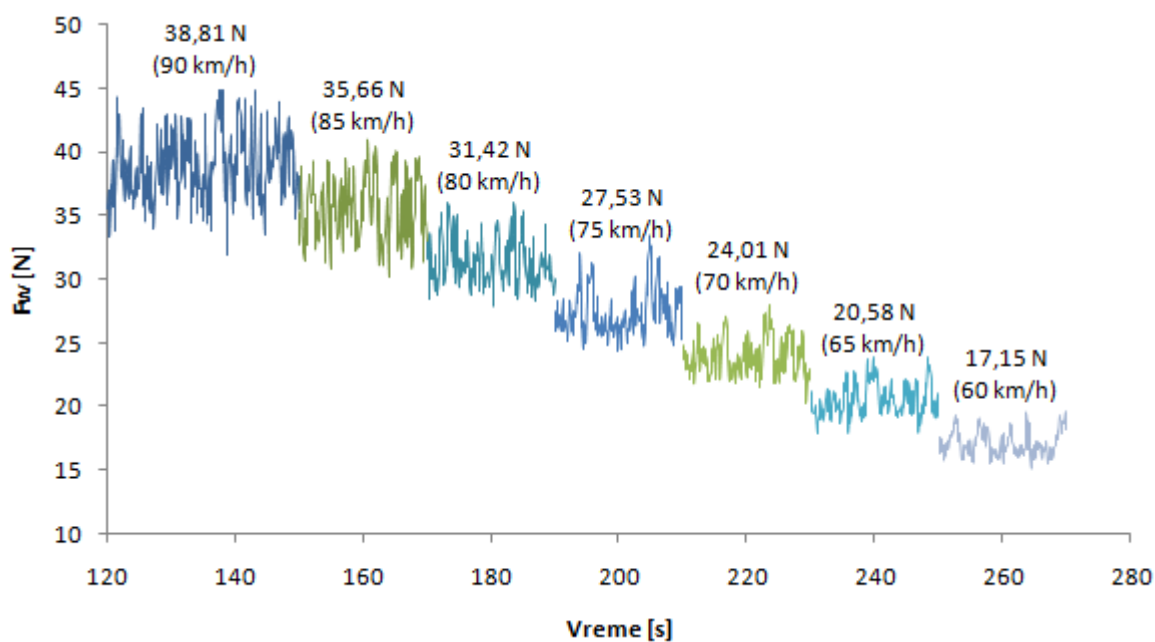


Slika 7.36 - Ispitivani model u vazdušnom tunelu, V konfiguracija

Proverom modela i merne opreme pre merenja, započet je postupak ispitivanja po istom utvrđenom rasporedu. Ukupna dužina trajanja mernog zapisa je skoro 1000 sekundi. Uklanjanjem delova zapisa pre dostizanja prve referentne brzine vazdušne struje od 60 km/h, nakon merenja pri drugoj vrednosti brzine vazdušne struje od 60 km/h do nulte vrednosti i delova zapisa između referentnih brzina, dobija se merni zapis u trajanju od 270 sekundi. Sređeni grafički prikaz rezultata merenja pri ovoj razmatranoj konfiguraciji je prikazan kroz slike 7.37 i 7.38. Na slikama su prikazane osrednjene vrednosti sile otpora vazduha za svaku od referentnih brzina vazdušne struje.



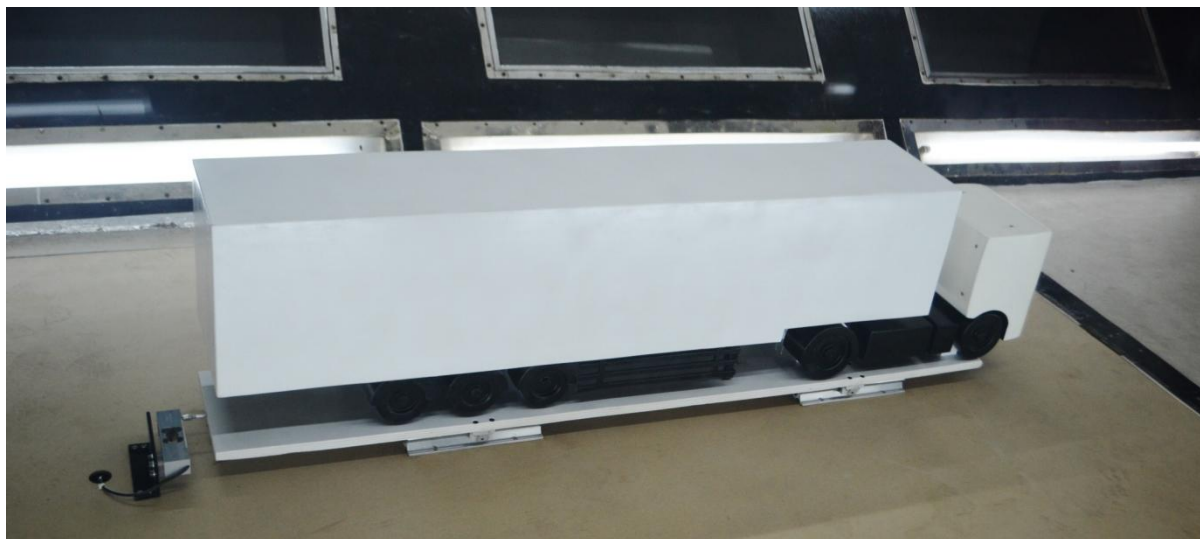
Slika 7.37 - Grafik dobijenih rezultata merenja za brzinu od 60 do 90 km/h



Slika 7.38 - Grafik dobijenih vrednosti merenja za brzinu od 90 do 60 km/h

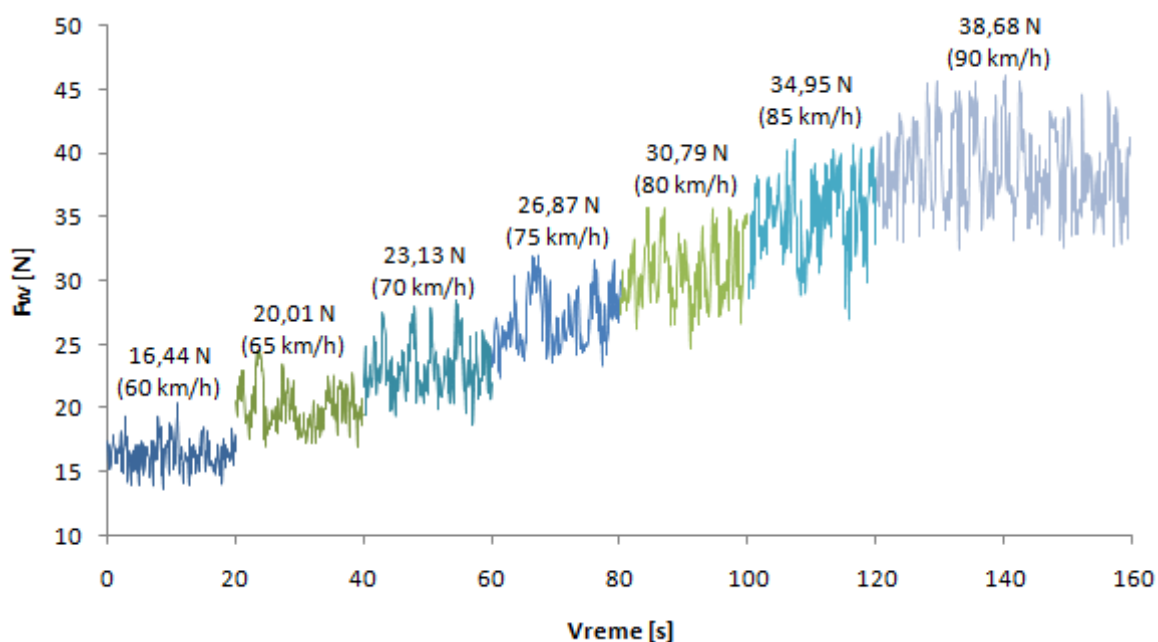
## VI konfiguracija

Konfiguracija šest predstavlja merenje sile otpora vazduha u vazdušnom tunelu za model kamiona i poluprikolice bez aerodinamičkih dodataka. Na slici 7.39 je prikazan izgled ispitivanog modela kamiona i poluprikolice baz aerodinamičkih dodataka u vazdušnom tunelu u trenutku merenja.



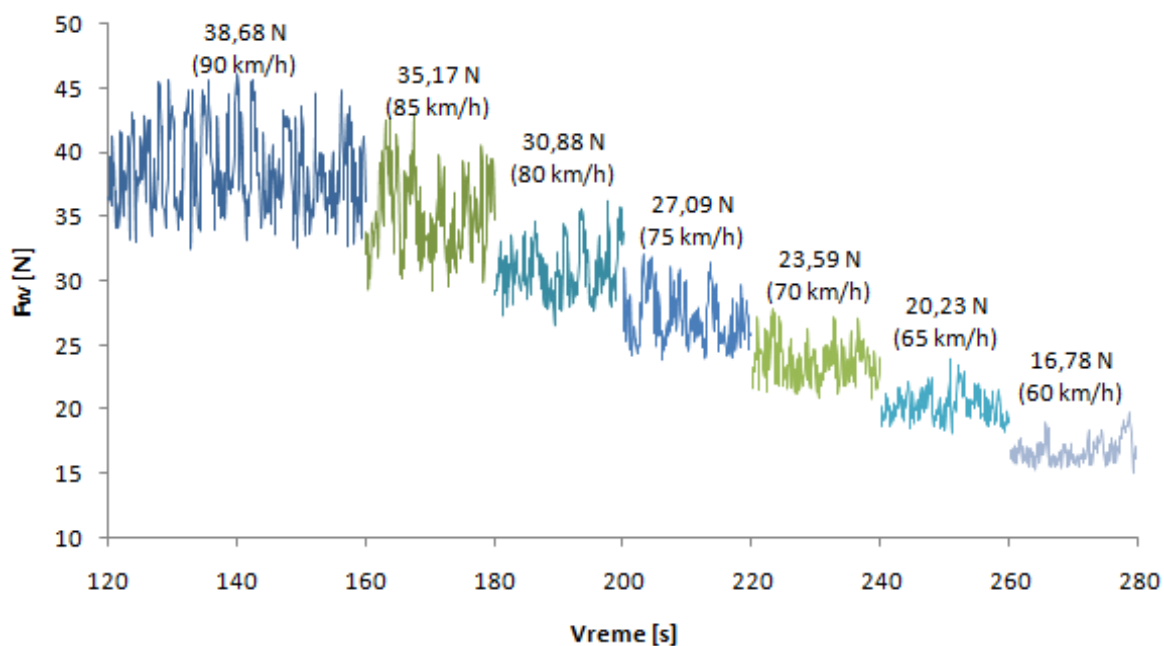
Slika 7.39 - Ispitivani model u vazdušnom tunelu, VI konfiguracija

Merenje je sprovedeno po istom planu kao i u prethodnim slučajevima. Dužina trajanja ukupnog mernog zapisa je nešto više od 900 sekundi. Uklanjanjem nepotrebnih delova zapisa i ostavljanjem samo zapisa pri referentnim brzinama u trenucima ustaljene vazdušne struje, dobija se kraći zapis u trajanju od 280 sekundi. Na slikama 7.40 i 7.41 su prikazani sređeni merni zapisi sile otpora vazduha pri referentnim brzinama vazdušne struje.



Slika 7.40 - Grafik dobijenih rezultata merenja za brzinu od 60 do 90 km/h

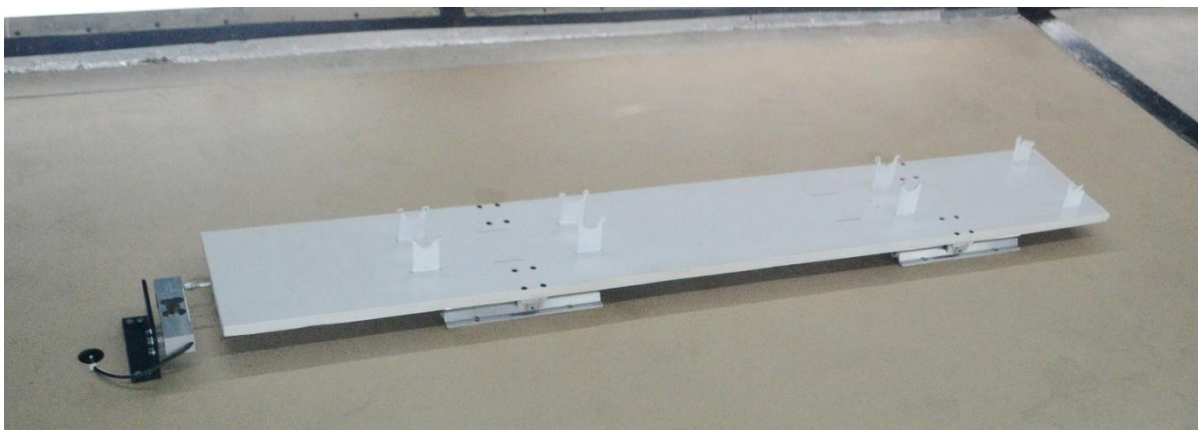




Slika 7.41 - Grafik dobijenih vrednosti merenja za brzinu od 90 do 60 km/h

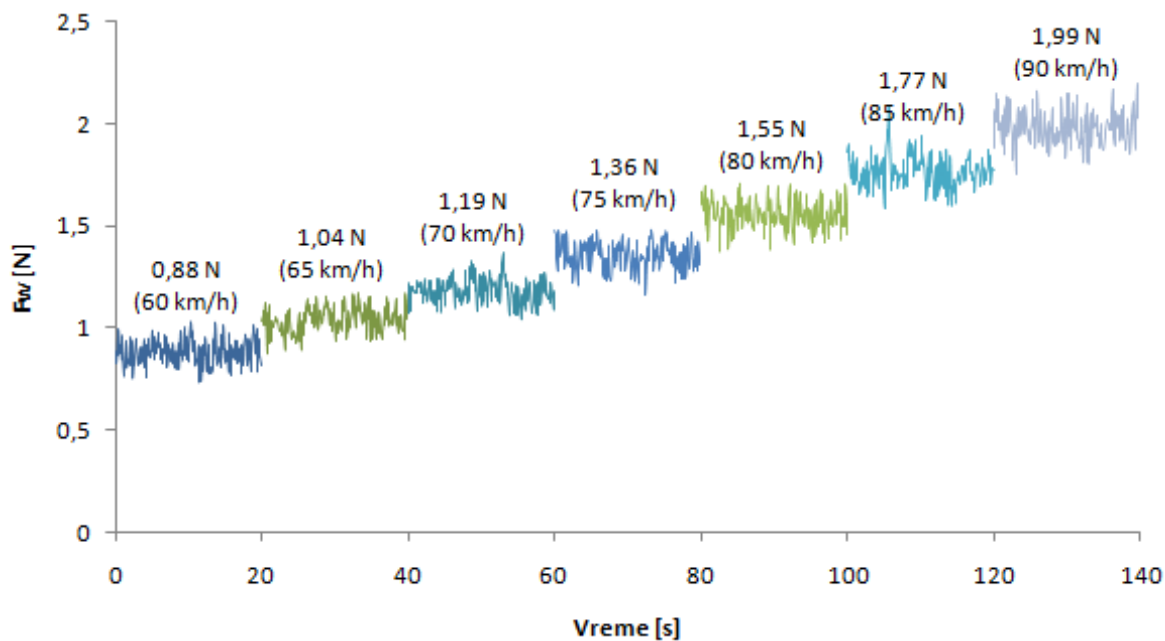
## VII konfiguracija

U svrhu dobijanja vrednosti sile otpora vazduha u zavisnosti od brzine vazdušne struje daske i nosača za spajanje modela kamiona i poluprikolice, izvršeno je merenje koje predstavlja ovu konfiguraciju. Izgled ispitivane daske sa nosačima modela u vazдушnom tunelu pri merenju je prikazano na slici 7.42.

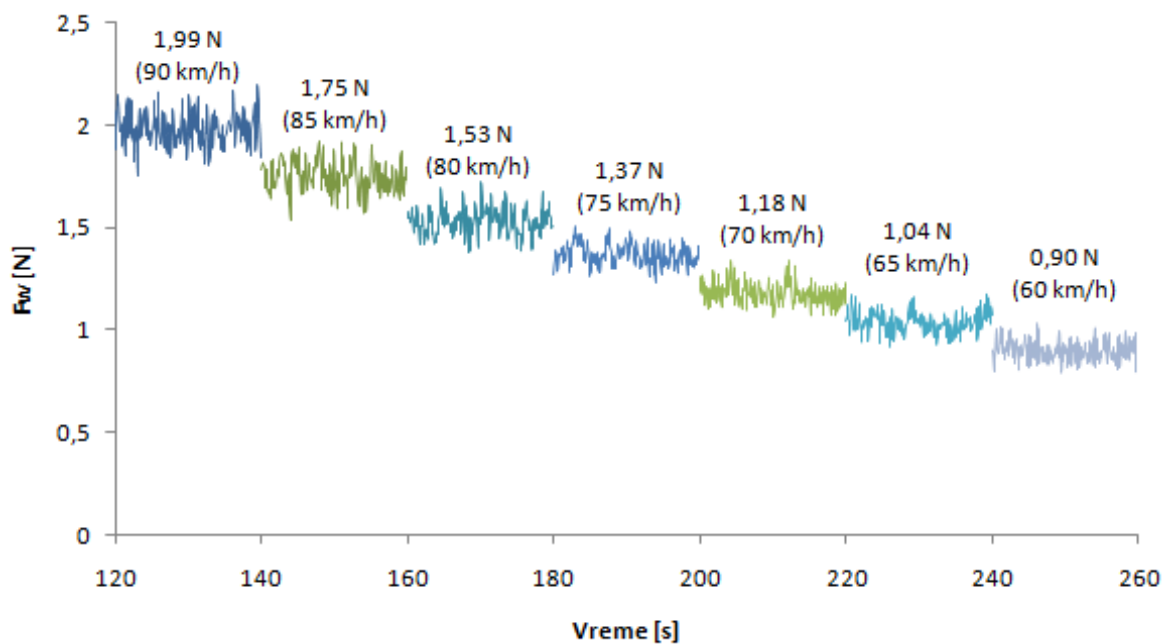


Slika 7.42 - Ispitivani model u vazдушnom tunelu, VII konfiguracija

Uklanjanjem modela kamiona i poluprikolice i oslobađanjem daske za pričvršćenje modela kao i njihovih aluminijumskih nosača, dobijen je ispitni model ove konfiguracije. Početnim podešavanjem ispitnog modela i merne opreme, započeto je ispitivanje koje je trajalo ukupno malo duže od 800 sekundi. Sređivanjem mernog zapisa kao i u prethodnim slučajevima, se dobio znatno kraći merni zapis u trajanju od 260 sekundi. Grafički prikaz sredenog mernog zapisa sa osrednjenim vrednostima sile otpora vazduha za svaku razmatranu brzinu vazdušne struje je prikazano na slikama 7.43 i 7.44.



Slika 7.43 - Grafik dobijenih rezultata merenja za brzinu od 60 do 90 km/h



Slika 7.44 - Grafik dobijenih vrednosti merenja za brzinu od 90 do 60 km/h

Sa ovom razmatranom konfiguracijom je završeno eksperimentalno merenje sile otpora vazduha u vazдушnom tunelu. Detaljna obrada dobijenih rezultata i poređenje sa rezultatima dobijenim putem virtuelnim CFD simulacija je prikazano u narednom poglavlju rada.

## 8. Rezultati i diskusija

U ovom delu rada su prikazani rezultati dobijeni putem virtuelnih CFD simulacija, a nakon toga i rezultati dobijeni eksperimentalnim merenjem u vazдушnom tunelu. Svrha eksperimentalnih merenja je bila u tome da se izvrši poređenje sa dobijem rezultatima CFD simulacija i na osnovu toga uradi validacija rezultata dobijenih virtuelnim putem. Odstupanje rezultata CFD simulacije u odnosu na rezultate dobijene eksperimentalno je prikazano greškom odstupanja koja je iskazana procentualno. Na osnovu dobijenih odstupanja izvršena je detaljna diskusija. Poređenje je urađeno za sve razmatrane konfiguracije modela i sve brzinske rezime koji su sprovedeni eksperimentalno. Drugi deo ovog poglavlja se bavi prikazom vizuelizacije vazdušne struje dobijene CFD simulacijama. Svrha ovog prikaza je promena toka vazdušne struje pri različitim konfiguracijama modela. Poslednji deo rada prikazuje proračun orijentacione potrošnje goriva teretnog vozila sa i bez aerodinamičkih dodataka dobijenih u ovom radu.

### 8.1. Uporedni prikaz rezultata

Uporedni prikaz rezultata objedinjuje rezultate sile otpora vazduha dobijene virtuelnih CFD simulacijama i eksperimentalnim merenjem u vazдушnom tunelu. Rezultati su prikazani tabelarno za sve konfiguracije modela i aerodinamičkih dodataka, kao i za sve razmatrane brzine vazdušne struje. U ovu svrhu za konfiguracije koje su sprovedene u vazдушnom tunelu su kreirane CFD simulacije. Ovo se pre svega odnosi na slučaj objedinjenih aerodinamičkih dodataka iza kabine kamiona koji su ispitivani u vazдушnom tunelu. Ista objedinjena konfiguracija aerodinamičkih dodataka je kreirana i ispitivana virtuelno pomoću CFD simulacija. Sve CFD simulacije koje su prikazane u delu rada koji se bavi optimizacijom aerodinamičkih dodataka koje su u tu svrhu analizirane samo pri brzini vazdušne struje od 90 km/h, su naknadno analizirane za sve brzinaskе režime prisutne u eksperimentalnom merenju. Pri svim eksperimentalnim merenjima temperatura unutar vazdušnog tunela je varirala u veoma uskim granicama od 19,0 do 19,2 °C, što potvrđuje veoma malu promenu gustine vazduha. Kao referentne vrednosti se uzimaju rezultati sile otpora vazduha dobijeni eksperimentalnim putem, pa procentualno odstupanje predstavlja vrednost za koliko rezultati CFD simulacija odstupaju od eksperimentalnim vrednosti. Odstupanje rezultata se izračunavalo prema izrazu:

$$\Delta F_w = \frac{F_{w \text{ sim.}} - F_{w \text{ exp.}}}{F_{w \text{ exp.}}} \cdot 100 \quad [\%]$$

U tabelama 58 i 59 su prikazani uporedni rezultati koji objedinjuju oba prolaza eksperimentalnog merenja, rezultate CFD simulacija i vrednost dobijene greške ili odstupanja između njih. Rezultati su prikazani za sve razmatrane konfiguracije modela i sve brzine vazdušne struje. Pošto postoje rezultati za dva eksperimentalna merenja pri istoj konfiguraciji modela i brzini vazdušne struje, izračunate su dve odvojene vrednosti procentualnog odstupanja, za svako od eksperimentalnih merenja posebno. Nakon toga je računata vrednost prosečnog odstupanja za razmatranu brzinu vazdušne struje. Za eksperimentalne vrednosti pri brzini od 90 km/h su prikazane objedinjene vrednosti merenja, iz razloga što je merenje pri toj brzini sprovedeno jednom, uz duže trajanje merenje. Zbog toga je objedinjena vrednost procentualnog odstupanja pri toj brzini vazdušne struje.

Tabela 58 - Uporedni prikaz rezultata za konfiguracije I - V

Konfiguracija modela	$v$ [km/h]	$F_{w\ sim.}$ [N]	$F_{w\ exp.}$ [N]		$\Delta F_{w1}$ [%]	$\Delta F_{w2}$ [%]	$\Delta F_{w\ sr.}$ [%]
			I	II			
I Model sa svim aerodinamičkim dodacima	60	14,04	12,24	12,35	14,67	13,72	14,19
	65	16,43	14,36	14,61	14,43	12,48	13,45
	70	19,02	16,58	16,63	14,73	14,38	14,55
	75	21,75	18,99	19,05	14,51	14,17	14,34
	80	24,68	21,77	22,03	13,34	12,04	12,69
	85	27,85	25,22	25,30	10,43	10,09	10,26
	90	31,67	29,43		7,62		
II Model sa svim aerodinamičkim dodacima na kamionu (bez dodatka na poluprikolici)	60	14,36	12,96	13,18	10,79	8,96	9,87
	65	16,81	15,50	15,65	8,47	7,44	7,95
	70	19,45	17,51	17,88	11,10	8,78	9,94
	75	22,27	19,73	20,25	12,86	9,95	11,40
	80	25,30	22,88	23,10	10,59	9,54	10,06
	85	28,52	26,28	26,63	8,54	7,11	7,82
	90	31,95	30,93		3,29		
III Model samo sa aerodinamičkim dodatkom na kabini kamiona	60	14,06	12,57	12,91	11,86	8,89	10,37
	65	16,48	15,10	15,42	9,17	6,85	8,01
	70	19,09	16,90	17,07	12,98	11,86	12,42
	75	21,88	19,70	19,89	11,08	9,99	10,53
	80	24,96	22,40	23,06	11,44	8,23	9,83
	85	28,13	25,64	26,13	9,70	7,66	8,68
	90	31,52	30,35		3,86		
IV Model samo sa aerodinamičkim dodacima iza kabini kamiona	60	15,68	14,05	14,28	11,57	9,82	10,69
	65	18,38	16,52	16,82	11,24	9,29	10,26
	70	21,28	19,52	19,82	9,03	7,34	8,18
	75	24,35	22,46	22,78	8,40	6,87	7,63
	80	27,67	25,69	25,94	7,71	6,68	7,19
	85	31,21	29,07	29,51	7,34	5,76	6,55
	90	34,94	33,21		5,21		
V Model samo sa aerodinamičkim dodatkom iza poluprikolice (bez dodatka na kamionu)	60	18,92	16,77	17,15	12,82	10,31	11,56
	65	22,22	20,17	20,58	10,15	7,99	9,07
	70	25,70	23,54	24,01	9,17	7,02	8,09
	75	29,48	27,17	27,53	8,48	7,10	7,79
	80	33,91	31,18	31,42	8,77	7,92	8,34
	85	38,25	35,31	35,66	8,31	7,26	7,78
	90	41,58	38,81		7,13		

Tabela 59 - Uporedni prikaz rezultata za konfiguracije VI i VII

Konfiguracija modela	$v$ [km/h]	$F_{w\ sim.}$ [N]	$F_{w\ exp.}$ [N]		$\Delta F_{w1}$ [%]	$\Delta F_{w2}$ [%]	$\Delta F_{w\ sr.}$ [%]
			I	II			
VI  Model bez aerodinamičkih podataka	60	18,81	16,44	16,78	14,40	12,08	13,24
	65	21,99	20,01	20,23	9,90	8,69	9,29
	70	25,48	23,13	23,59	10,18	8,01	9,09
	75	29,22	26,87	27,09	8,75	7,86	8,30
	80	33,22	30,79	30,88	7,88	7,58	7,73
	85	37,47	34,95	35,17	7,21	6,52	6,86
	90	41,92	38,68		8,39		
VII  Samo daska sa aluminijumskim nosačima	60	1,01	0,88	0,90	14,29	12,08	13,18
	65	1,18	1,04	1,04	13,40	13,68	13,54
	70	1,35	1,19	1,18	13,75	13,97	13,86
	75	1,55	1,36	1,37	14,24	13,14	13,69
	80	1,75	1,55	1,53	12,83	14,40	13,61
	85	1,97	1,53	1,77	11,25	12,43	11,84
	90	2,20	1,99		10,79		

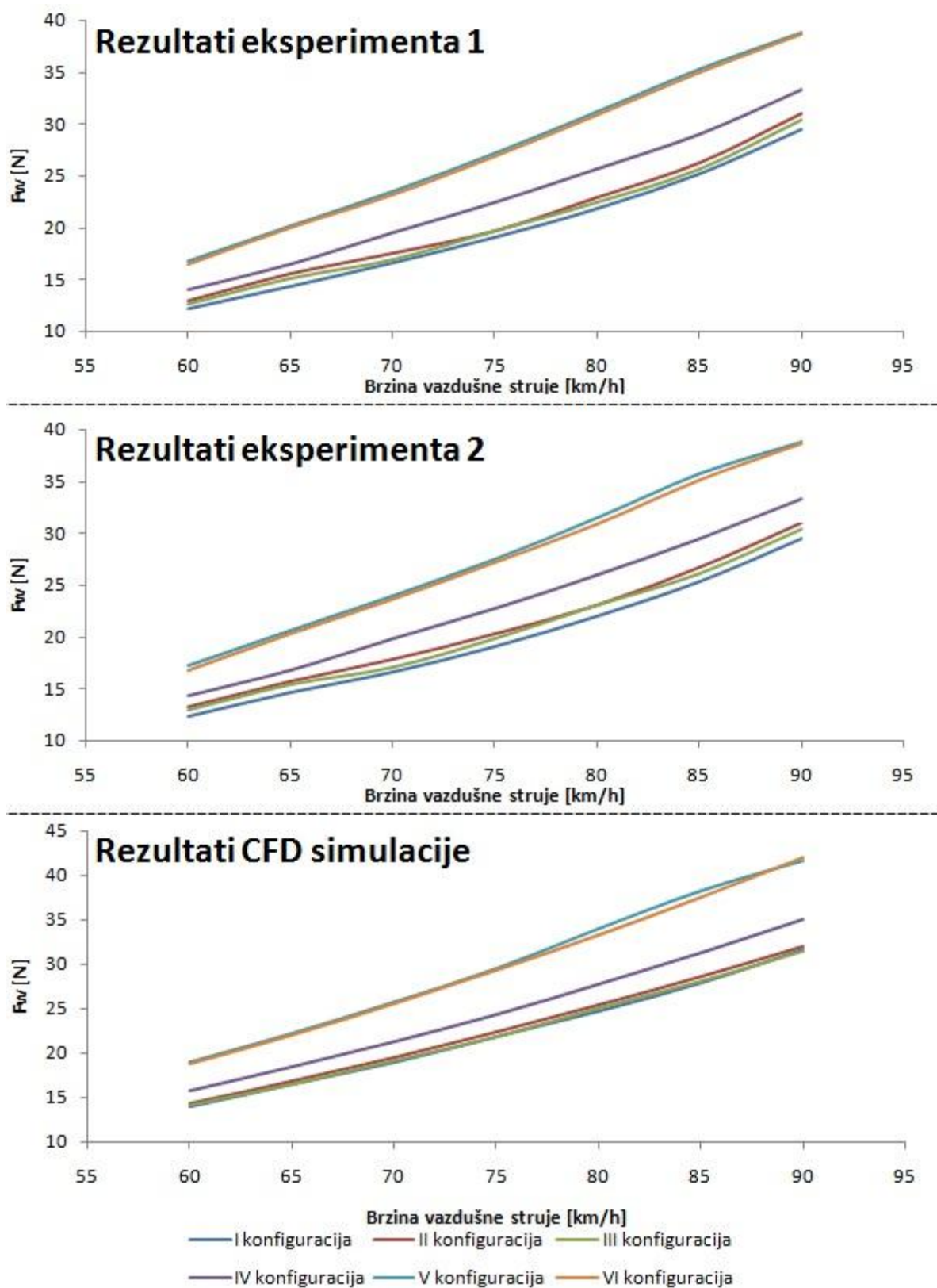
### Analiza i diskusija dobijenih rezultata

Na osnovu niza tabelarnih vrednosti rezultata može se uočiti nekoliko trendova. Srednja vrednost odstupanja rezultata simulacije u odnosu na eksperimentalne rezultate varira u intervalu od 3 do 15%. Vrednost dobijene greške ili odstupanja rezultata može biti posledica velikog broja faktora. Sa jedne strane bi se moglo prokomentarisati podešavanje CFD simulacija, a sa druge strane eksperimentalno merenje. CFD simulacije su pokazale trend dobijanja većih vrednosti sile otpora vazduha u odnosu na eksperimentalne vrednosti u proseku između 1,5 i 3 N. Veoma značajni faktori pri podešavanju CFD simulacije su veličina i tip usvojene mreže modela i podešavanje tipa turbulentnog strujanja. Tip mreže je usvojen na osnovu niza prethodnih istraživanja na jednostavnijim modelima. Veličina bazne ćelije mrežnog modela je usvojena na osnovu velikog broja pokušaja na konkretnom ispitivanom modelu kamiona i poluprikolice. Postupak se sastojao u tome da je usvojena veoma krupna mreža sa velikim baznim ćelijama. Svaka naredna simulacija je imala sitniju mrežu za nekoliko procenata. Simulacije su puštane do trenutka kada dalje usitnjavanje mreže više nije imalo uticaja na dobijeni rezultat simulacije. Tip turbulentnog strujanja je usvojen na osnovu niza preporuka iz literature u kojima su simulacije vršene na sličnim modelima. Takođe i ličnom proverom na modelu kamiona i poluprikolice, tip K-Epsilon turbulentnog strujanja je pokazivao najstabilnije rezultate. Ostali faktori u CFD simulaciji takođe mogu uticati na rezultat. Neki od njih bi svakako mogao biti i sam CAD model koji je korišćen tokom simulacije. Osim CAD modela kamiona i poluprikolice, usvojena veličina i oblik CAD modela vazdušnog tunela takođe može biti uticajna na rezultat. Sa druge strane eksperimentalno ispitivanje takođe povlači nekoliko faktora koji mogu uticati na rezultat merenja. Kao što je već napomenuto u delu rada koji se bavi prikazom eksperimentalnog postrojenja, za merenje sile otpora vazduha je bilo neophodno obezbediti translatorno pravolinijsko kretanje modela ka nazad. Pomeranje modela je bilo obezbeđeno preko linearnih ležajeva i kliznih vođica. Prilikom eksperimentalnog merenja je uočeno promenljivo trenje unutar linearnih ležajeva, što je za posledicu imalo veći otpor pri kasnijim merenjima tokom jednog mernog procesa, odnosno jedne konfiguracije. Taj trend se može uočiti na skoro svim eksperimentalnim rezultatima u smislu nešto povećanih rezultata prilikom drugog

merjenja pri istoj referentnoj brzini vazdušne struje. Pre svakog eksperimentalnog merenje se vršilo startno podešavanje modela, koje je između ostalog uključilo i nanaošnje tankog sloja spreja na vođice i ležajeve za umanjene trenja. Naknadnim razmatranjem se došlo do zaključka da je upravo to doprinelo naznačenoj razlici u rezultatima između prvog i drugog merjenja. Sprej koji je nanošen na vođice je na bazi benzina, lako isparive tečnosti koja se ponaša veoma dobro na umanjene trenja i uklanjanje nečistoća pri samom nanošenju. Ali zbog brzog isparenja i sušenja naročito zbog jake vazdušne struje u tunelu, ostaje sloj koji ima uvećano trenje nego pri samom nanošenju spreja. Takođe zbog hemijskog sastava na bazi benzina, sprej je doprineo da mast za podmazivanje linearnih ležajeva vremenom nestane, što je dovelo do uvećanja unutrašnjih otpora. Druga stvar koja je uočena prilikom pravljenja eksperimentalnog postrojenja je teško podešavanje vođica za klizanje linearnih ležajeva. Kako bi se klizanje odvijalo bez zapinjanja i blokiranja, vođice moraju biti postavljene kao idealno paralelne. To je veoma teško izvesti, zato što i najmanje odstupanje od paralelnosti dovodi do uvećanja trenja klizanja. Kako bi se ovaj efekat umanjio, vođice su blago fiksirane za podnu platformu, tako da se ostavi prostor i mogućnost da se same podese. Ovo je značajno doprinelo umanjenu trenja i pre svakog eksperimentalnog merenja se vršilo njihovo podešavanje u položaj sa najmanjim trenjem. Merna ćelija je veoma osetljiva i njeno baždarenje je urađeno u Laboratoriji za motore i vozila u Novom Sadu, uz pomoć etaloniranih tegova. Podešavanje mernog davača osim tegovima preciznih masa, urađeno je i prilikom softverskog pretvaranja masene izmerene vrednosti u prikaznu težinsku vrednost. Prilikom pretvaranja se vodilo računa o tačnoj vrednosti gravitacionog ubrzanja u odnosu na tačku geografsku poziciju merenja. Hrapavost modela je dovedena do zadovoljavajuće mere putem ručnog poliranja i lakiranja. Još boljom završnom obradom modela bi se verovatno doprinelo smanjenu otpora vazduha. Hrapavost modela takođe može biti razlika između stvarnog i virtuelnog modela koja može imati efekta na silu otpora vazduha. U CFD simulacijama hrapavost je idealizovana, što kod stvarnog modela nije moguće.

Na slici 8.1 su prikazani rezultati prvog i drugog eksperimentalnog merenja i rezultati dobijeni putem CFD simulacije. Rezultati su prikazani dijagramski jedan ispod drugog, kako bi se moglo pratiti rezultati pri istim konfiguracijama modela i istim brzinskim režimima vazdušne struje. Dijagramski prikaz je dobijen na osnovu rezultata iz tabela 58 i 59. Izostavljeni su rezultati poslednje konfiguracije modela koji objedinjuje dasku sa nosačima iz razloga odstupanja od opsega vrednosti na dijagramu, a i zbog uticaja koji nije toliko značajan kao ostale konfiguracije. Prva stvar koja se može uvideti uporednim pregledom dijagramskih rezultata je velika sličnost u oblicima krivi, kao i u dobijenim vrednostima. Rezultati eksperimenta 1 i eksperimenta 2 su veoma slični, uz prisutnu tendenciju uvećanih rezultata prilikom drugog merenja, što je posledica unutrašnjeg trenja linearnih ležajeva. Poređenjem bilo kojih eksperimentalnih rezultata sa rezultatima dobijenim CFD simulacijama, može se uočiti sličan trend napredovanja rezultata kroz konfiguracije modela. Ovo predstavlja veoma značajnu uočenu činjenicu, da trend kretanja rezultata u zavisnosti od konfiguracije modela se ponaša isto i kod virtuelnog CFD modela, kao i kod stvarnog modela u vazdušnom tunelu. Na osnovu ovog se može uvideti da se simulacija i eksperiment u velikoj meri poklapaju i dolaze do istih zaključaka. Što se tiče rezultata pojedinačnih konfiguracija se može zaključiti da I konfiguracija pri čemu su svi aerodinamički dodaci na modelu prisutni, ostvaruje najmanju vrednost sile otpora vazduha pri svim brzinama vazdušne struje. Ovo govori da su aerodinamički dodaci u celini dobro pozicionirani i projektovani što dovodi do najboljeg prostiranja vazdušne struje i za posledicu stvaranje najmanjeg otpora vazduha modela. Što se tiče konfiguracija u kojima su analizirani pojedinačni dodaci, situacija je malo drugačija. Od pojedinačnih aerodinamičkih dodataka, najmanja sila otpora vazduha je postignuta sa dodatkom na kabini kamiona (III konfiguracija) za sve brzinske režime vazdušne struje.

Objedinjeni dodaci iza kabine kamiona (IV konfiguracija) pokazuju značajni efekat umanjenja sile otpora vazduha, koji je očekivano manje izražen u odnosu na dodatak na kabini kamiona.



Slika 8.1 - Grafički uporedni prikaz dobijenih rezultata

Ovo proizilazi od samog položaja aerodinamičkih dodataka. Dodaci iza kabine kamiona imaju značajnu ulogu u preusmerenju vazdušne struje koja prodire u oblast između modela kamiona i poluprikolice. Ta količina vazdušne struje je manja nego ona koja direktno nailazi na kamion i zbog oblika kabine biva usmerena preko nje. Iz tog razloga je veoma bitno pravilno pozicioniranje pre svega aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona. Zanimljiv podatak koji se može uočiti iz tabelarnih rezultata je to da se jači efekat umanjenja sile otpora vazduha primećuje u III konfiguraciji nego u II konfiguraciji. Ispada da model kamiona samo sa aerodinamičkim dodatkom na kabini, ostvaruje povoljniju silu otpora vazduha nego u kombinaciji i sa aerodinamičkim dodacima iza kabine vozila. Objašnjenje ovog fenomena se može pronaći u prostiranju vazdušne struje oko modela, što je prikazano u nastavku rada. Aerodinamički dodatak iza poluprikolice nije postigao veliki efekat u umanjenju sile otpora vazduha u pojedinačnoj konfiguraciji. Postoji malo odstupanje u rezultatima dobijenim putem simulacije i eksperimentalnim putem. U odnosu na VI konfiguraciju bez aerodinamičkih dodataka, V konfiguracija prema rezultatima simulacije ipak pokazuje malo poboljšanje u sili otpora vazduha. Eksperimentalni rezultati upućuju da je manja sila otpora vazduha zabeležena u konfiguraciji bez aerodinamičkih dodataka, nego u konfiguraciji samo sa dodatkom iza poluprikolice. U svakom slučaju se može zaključiti da aerodinamički dodatak iza poluprikolice ima jako mali uticaj na silu otpora vazduha u pojedinačnoj konfiguraciji, dok se značajniji efekat može primetiti u kombinaciji sa ostalim aerodinamičkim dodacima. Što se tiče poslednje razmatrane konfiguracije bez modela samo sa daskom i nosačima se može uvideti trend povećanja sile otpora vazduha sa brzinom vazdušne struje, prisutan i prilikom CFD simulacije i eksperimentalno. Dobijeni rezultati pokazuju veliko poklapanje rezultata dobijenih simulacijom i eksperimentalno. Sa vrednošću greške odstupanja od oko 13% se može reći da je u pitanju veliko odstupanje, ali ukoliko se izvrši poređenje rezultata sile otpora vazduha koja se veoma mala za ovu konfiguraciju, odstupanje se kreće oko 0,4 N, što se može smatrati prihvatljivim. Zahvaljujući sprovedenom istraživanju oblika napadne stranice daske, kao i rastojanja modela i daske, dobijena vrednost sile otpora vazduha je veoma mala i kreće se do 2 N pri najvećoj razmatranoj brzini vazdušne struje. Što se tiče dobijenih vrednosti srednjeg odstupanja rezultata simulacije u odnosu na eksperimentalne rezultate, može se uočiti trend opadanja sa porastom brzine vazdušne struje. Ovaj trend zapravo se vezuje za veće vrednosti sile otpora vazduha koje ulaze u jednačinu za izračunavanje odstupanja. Što su veće vrednosti sile otpora vazduha (dobijene simulacijom i eksperimentom) opada procentualna vrednost odstupanja. Ukoliko se pogleda razlika između rezultata simulacije i eksperimenta za određenu konfiguraciju, može se zaključiti da je uvek približna razlika od oko 2 N. Ova razlika je već objašnjena u prethodnom delu poglavlja.

Optimizacioni proces definisan i sproveden u ovom radu je pokazao svoj potencijal. Definisanjem geometrijskog oblika preko relativno malog broja parametara i njihovim variranjem na tri nivoa omogućuje sprovođenje potpune faktorijske strukture. Potpuna faktorijska struktura uvek obezbeđuje najbolje upoznavanje sa funkcionisanjem sistema. Sve potpune strukture su sprovedene za 81 eksperimentalni proces, nakon čega je moguće izvršiti potpunu analizu dobijenih rezultata, kao i osvrt na najuticajnije faktore. Takođe uloga potpune strukture se ogleda u tome što se dosta precizno mogu predvideti nivoi faktora pri kojima se postiže najbolji rezultat sa aspekta sprovođenja procesa. Uvidom u oblasti nivoa faktora koji teže željenom rezultatu, vrši se postavljanje parcijalne faktorijske strukture. Parcijalna faktorijska struktura i metoda odgovorno površine obezbeđuju usvajanje većeg broja nivoa faktora u cilju dobijanja preciznijih rezultata. Veliki broj nivoa povlači za sobom i veliki broj eksperimentata koji bi se trebali izvršiti, ali taj deo je veoma dobro pokriven centralnom kompenzacionom metodom u okviru metode odgovorne površine, zahvaljujući kojoj se postavlja manji broj eksperimentalnih prolaza, veoma precizno definisanih. Na ovaj



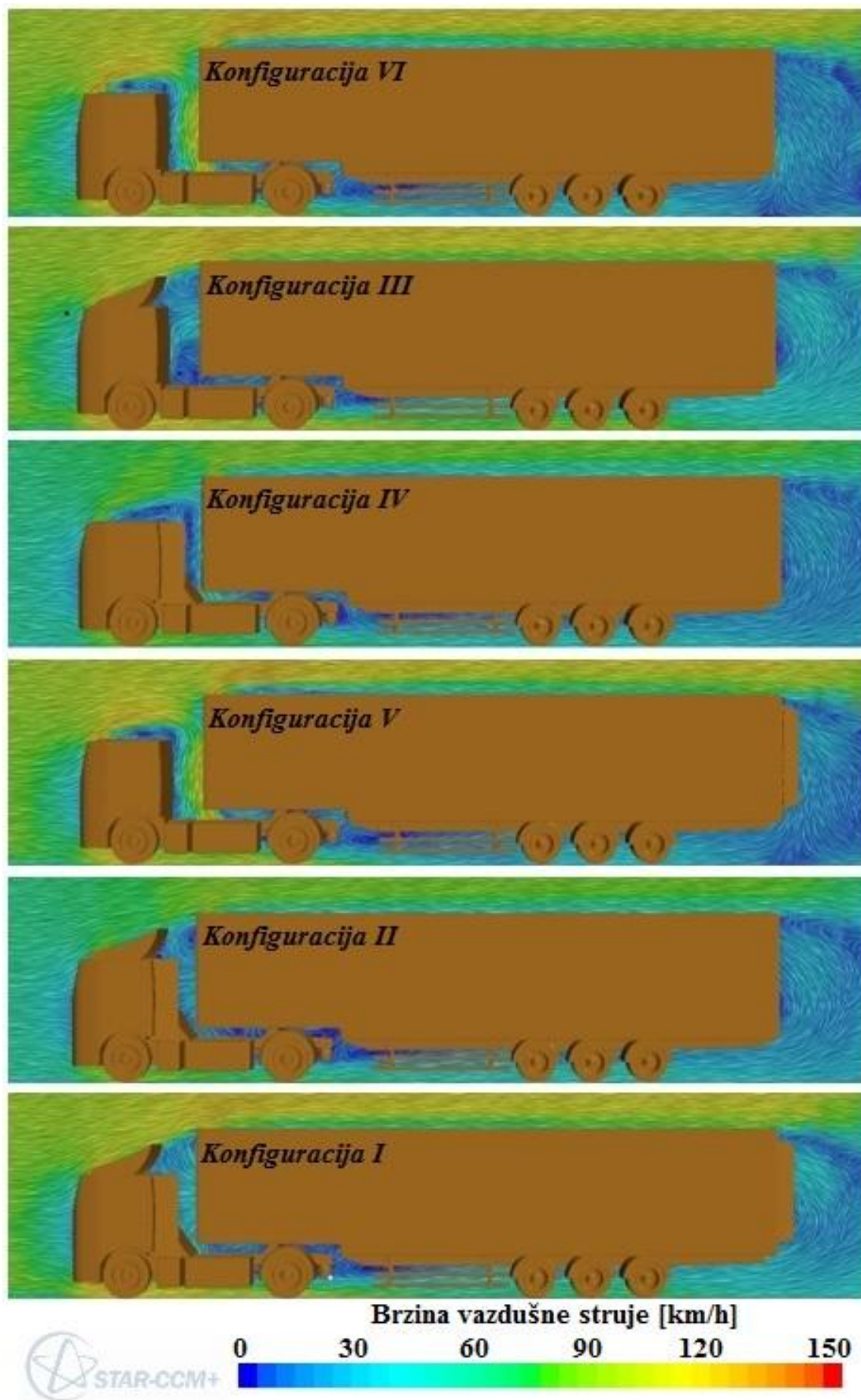
način je moguće sprovesti eksperimente sa velikim brojem faktora i nivoa uz mali broj eksperimentalnih prolaza. Analizom dobijenih podataka uz pomoć metode odgovorne površine i njenih podmetoda, obezbeđuju se veoma značajni podaci koji veoma precizno opisuju funkcionisanje sistema. Kvadratnom analizom uticajnih faktora i njihove međusobne interakcije do 2. reda, se dobijaju teorijske funkcije ili odzivi sistema koju sa preciznošću većom od 90% u proseku, opisuju funkcionisanje analiziranog sistema. Dobijanjem teorijske funkcije odziva sistema, moguće je nadalje pristupiti matematičkom optimizacionom procesu, u svrhu dobijanja optimalnih vrednosti parametara u zavisnosti od cilja sistema. Krajnjom matematičkom optimizacijom se parametri koji su do tada bili vezani isključivo za faktorijske nivoe, optimuju na tačne vrednosti pri kojima je cilj zadovoljen. Optimizacioni postupak je primenjen na aerodinamičkim dodacima modela kamiona i poluprikolice u svrhu obaranja sile otpora vazduha. Kroz ovaj rad je optimizacioni proces sproveden za četiri različita aerodinamička dodatka na modelu kamiona i poluprikolice. Kao osnovni oblik aerodinamičkog dodatka je korišćen aeroporofil zbog svojih značajnih karakteristika na tok vazdušne struje. CFD simulacije korišćene u okviru rada su se pokazale veoma korisnim i neophodnim alatom u optimizacionom procesu aerodinamičkih dodataka na modelu. Veoma je bitno sprovesti pravilno podešavanje CFD simulacija na uprošćenom modelu i tada nakon postizanja odgovarajućih rezultata na osnovu velikog broja ponavljanja, proces se primenjuje na modelu koji predstavlja objekat ispitivanja. Kombinacija usvojenih softverskih paketa se takođe pokazala kao dobro rešenje, a čine ga CatiaV5 za izradu CAD modela, Star CCM+ softver za CFD simulacije, Minitab17 kao glavni alat za statističku analizu i Microsoft Office 2007 sa Excel-om za obradu dobijenih rezultata i Word-om za pisanje i prezentovanje rezultata rada.

Kompletno istraživanje u okviru ovog rada je sprovedeno na umanjeno modelu kamiona i poluprikolice. CAD model kamiona i poluprikolice je urađen na osnovu tehničkih crteža stvarnih modela uz uprošćenja koja nisu od značaja na analizu uticaja aerodinamike u okviru rada. Kreirani modeli su urađeni u razmeri 1:10 i kao takvi je korišćeni u nastavku kompletnog istraživanja. Svi dobijeni rezultati i zaključci do kojih se došlo u radu su vezani za umanjeni model kamiona i poluprikolice. Uz izvesna dodatna podešavanja modela, vrlo lako bi se proces mogao primeniti i na modelu u stvarnoj veličini. Ono na šta se treba voditi računa prilikom povezivanja dobijenih rezultata i zaključaka na umanjenom modelu i njihove primene na modelu punih dimenzija je najpre vrednost Rejnoldsovog broja, koja se preporučuje da ostane ista u oba razmatrana slučaja, kao i ostali atmosferski uslovi prilikom ispitivanja.

Eksperimentalno ispitivanje u vazdušnom tunelu "Miroslav Nenadović" u Beogradu se pokazalo kao veoma korisno i ključno u validaciji rezultata dobijenih putem virtuelnih CFD simulacija. Postupak sprovođenja eksperimentalnog merenja, kao i prethodno kreiranje eksperimentalnog postrojenja i odabir merne opreme se može smatrati veoma značajnim za slična ispitivanja u ovoj oblasti, pa se kao takva mogu smatrati preporukama i procedurama.

## **8.2. Vizuelizacija vazdušne struje oko modela**

Vizuelizacija polja vazdušne struje oko ispitivanog modela daje potpuniju sliku numeričkih rezultata objašnjenih u prethodnom poglavlju rada. Vazdušna struja nailaskom na ispitivani model biva preusmerena sa svog pravca, što često ima za posledicu stvaranje vrtložnog kretanja. Vrtložno kretanje vazdušne struje po svojoj prirodi je odgovorno za stvaranje lokalnih otpora vazduha. Vizuelizacija polja vazdušne struje za sve razmatrane konfiguracije je prikazana na slici 8.2. Vizuelizacija je izvršena putem CFD simulacije u funkciji brzine vazdušne struje.

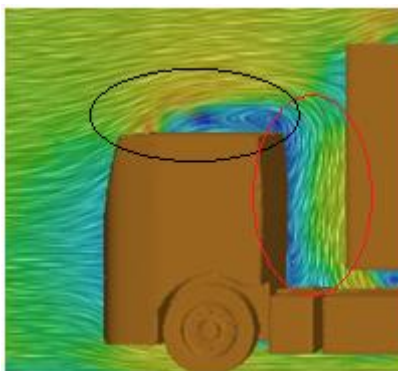


Slika 8.2 - Vizuelizacija brzine vazdušne struje oko modela

Proces vizuelizacije je sproveden samo putem CFD simulacije iz razloga što u vazдушnom tunelu u kome je sprovedeno eksperimentalno merenje postoji oprema za vizuelizaciju koja je predviđena za rad sa dosta manjim ispitivanim modelima. Na slici 8.2 je prikazano polje vazdušne struje oko ispitivanog modela u svim razmatranim konfiguracijama aerodinamičkih dodataka pri maksimalno testiranoj brzini vazdušne struje od 90 km/h. Konfiguracije su postavljene drugačijim redosledom u odnosu na prethodne prikaze iz razloga postepenog dodavanja aerodinamičkih dodataka od konfiguracije modela bez dodataka, pa sve do krajnje konfiguracije sa svim aerodinamičkim dodacima.

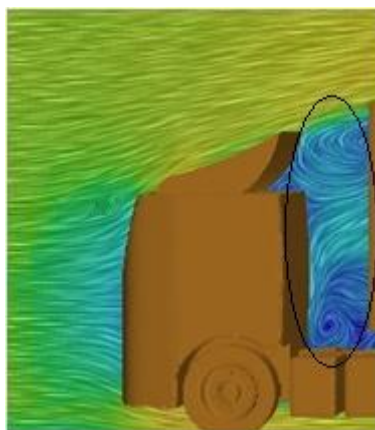
Polje vazdušne struje oko VI konfiguracije prikazuje velika vrtloženja u oblasti iznad i iza kabine kamiona, zatim u oblasti ispod i iza poluprikolice. Ovo su zapravo oblasti koje su navele autora da postavljanje aerodinamičkih dodataka usmeri baš tu. Oblast ispod poluprikolice se kasnije pokazala kao značajna sa aspekta umanjenja lokalnih otpora vazduha isključivo usled izloženosti modela bočnoj ili vazdušnoj struji koja ima pravac delovanja pod uglom u odnosu na ispitivani model. Pošto je u radu izvršena analiza vazdušne struje koja deluje isključivo u pravcu kretanja vozila, oblast ispod poluprikolice se zaobišla iz daljeg razmatranja.

Nailaskom na kabinu kamiona, vazdušna struja se preusmerava na sve četiri strane u cilju zaobilaženja. Deo vazdušne struje koji se preusmeri na prelazak preko gornjeg dela kabine, usled odbijanja od nje, počinje sa odvajanjem od modela, ostavljajući ispod sebe oblast u kojoj dolazi do blagog vrtložnog kretanja i usporenja vazdušne struje zbog kontakta sa gornjim delom kabine kamiona. Ova oblast je prikazana crnom elipsom na slici 8.3.



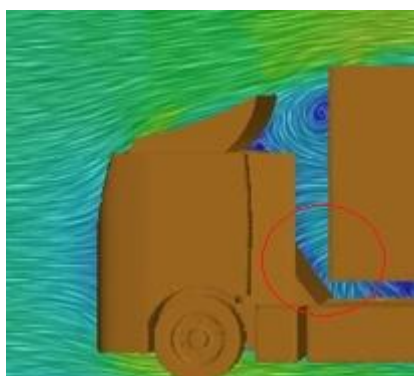
Slika 8.3 - Polje vazdušne struje iznad kabine kamiona

Nakon izlaska iz oblasti označene crnom elipsom na slici 8.3, deo vazdušne struje nailazi na čeonu stranu poluprikolice, što značajno remeti njen tok. Najveći deo vazdušne struje iz oblasti crne elipse se preusmerava ka dole u oblast između zadnje strane kabine kamiona i čeonu stranu poluprikolice, crvena elipsa na slici 8.3. Manji deo vazdušne struje u oblasti crvene elipse gubi brzinu usled neposrednog kontakta sa zadnjom stranom kabine, dok veći deo vazdušne struje biva usmeren ka dole i nastavlja se do oblasti ispod kamiona, gde se spaja sa vazdušnom strujom koja je prilikom nailaska na čeonu stranu kabine kamiona bila usmerena ispod modela. Kako bi se umanjio efekat prostiranja vazdušne struje u oblast iza kabine kamiona prilikom čega dolazi do povećanja njene brzine i stvaranja lokalnih otpora usled kinetičke energije turbulentnog strujanja, pristupa se kreiranju aerodinamičkog dodatka na kabini kamiona. Polje vazdušne struje oko kabine kamiona nakon stavljanja aerodinamičkog dodatka na kabinu kamiona je prikazano na slici 8.4, a predstavlja III konfiguraciju sa slike 8.2.



Slika 8.4 - Polje vazdušne struje oko modela sa aerodinamičkim dodatkom na kabini

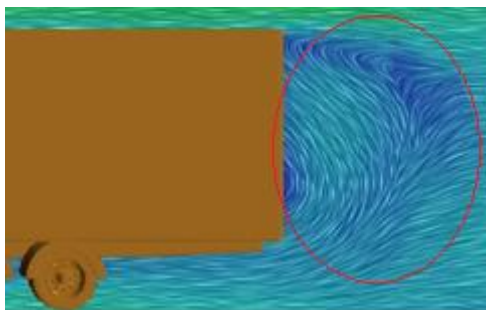
Dodavanjem aerodinamičkog dodatka na kabinu kamiona polje prostiranja vazdušne struje se drastično promenilo. Vazdušna struja koja biva usmerena na gornji deo kabine, usled nailaska na aerodinamički dodatak se usmerava naviše, prilikom čega veliki deo izbegava sudar sa čeonom stranom poluprikolice i nastavlja sa kretanjem iznad nje. Kao posledica ovog preusmerenja vazdušne struje, umanjuje se lokalni otpor vazduha usled prethodnog direktnog nailaska vazdušne struje na čeonu stranu poluprikolice. Jedan deo vazdušne struje biva zarobljen u oblast označenoj elipsom na slici 8.4. Ova vazdušna struja ima manji efekat na stvaranje lokalnog otpora usled značajnog opadanja brzine vazdušne struje. Ipak njeno kretanje u ovoj oblasti je velikim delom vrtložno, naročito u donjem delu elipse sa slike 8.4. Vazdušna struja dospeva u ovu oblast bočnim opstrujavanjem kabine i prodorom iz oblasti ispod vozila zbog otvorene noseće karoserije modela. Kako bi se umanjio efekat vrtloženja vazdušne struje u oblasti označene elipsom sa slike 8.4 i prodora iz oblasti ispod modela, pristupa se ubacivanju aerodinamičkih dodataka iza kabine kamiona. Aerodinamički dodatak iza kabine kamiona se sastoji od tri pojedinačna dodatka, dva postavljena vertikalno na zadnju stranu kabine i jedan horizontalno do noseće karoserije kamiona. Na slici 8.2 su prikazani objedinjeni u okviru IV konfiguracije. Uloga bočnih aerodinamičkih dodataka iza kabine kamiona je da umanje prodor bočne vazdušne struje u oblast iza kabine, tako što je preusmeravaju dalje iz te oblasti pri čemu vazdušna struja nastavlja kretanje duž bočnih stranica poluprikolice. Uloga horizontalnog aerodinamičkog dodatka iza kabine kamiona je umanjeenje efekta prodiranja vazdušne struje iz oblasti ispod modela i njen ulazak u oblast iza kabine kamiona. Takođe zbog samog oblika horizontalnog aerodinamičkog dodatka iza kabine, vazdušna struja koja se zadesila u oblasti iza kabine se usmerava na dole, prelaskom preko radijusa krivine horizontalnog dodatka i usmeravanjem ka oblasti ispod modela.



Slika 8.5 - Polje vazdušne struje oko modela kamiona sa svim aerodinamičkim dodacima

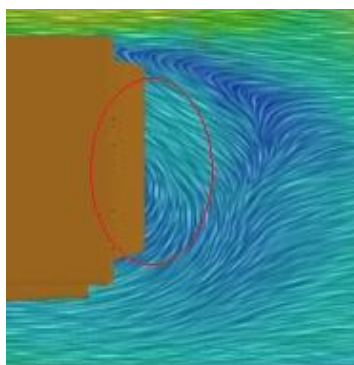
Na slici 8.5 je prikazano polje vazdušne struje oko modela usled dodavanja aerodinamičkog dodatka na i iza kabine kamiona, što zapravo predstavlja II konfiguraciju sa slike 8.2. Može se uočiti značajno umanjeno vrtloženje vazdušne struje u oblasti označenoj elipsom na slici 8.5. Ovo je prouzrokovano zaustavljanjem prodora vazdušne struje iz oblasti ispod modela u oblast iza kabine kamiona.

Oblast iza poluprikolice je karakteristična stvaranjem velikih vrtložnih struja usled naglog prekida modela poluprikolice, pod pravim uglom. Vazдушna struja koja je bila usmerena da prelazi preko strana poluprikolice (gornje i bočnih strana), nije u mogućnosti da naglo promeni usmerenost nakon kraja poluprikolice. Ovo dovodi do nastavljanja kretanja vazdušne struje sa tendencijom vraćanja u neporemećeni tok, daleko od kraja poluprikolice. U oblasti iza poluprikolice se stvara oblast vrlo niskog pritiska i izraženog vrtložnog kretanja vazdušne struje, što je prikazano na slici 8.6. Sve zajedno ima za posledicu stvaranje lokalnog otpora vazduha u toj oblasti. Kako bi se umanjio taj efekat i na neki način doprinelo odvođenju vazdušne struje dalje od kraja poluprikolice gde će započeti vrtloženje, pristupilo se kreiranju aerodinamičkog dodatka iza poluprikolice.



Slika 8.6 - Polje vazdušne struje iza poluprikolice

Kako bi aerodinamički dodatak iza poluprikolice imao efekta na vazdušnu struju koja do oblasti iza poluprikolice dolazi preko svih njenih strana (bočnih, gornje i ispod poluprikolice), pristupilo se kreiranju takvog oblika aerodinamičkog dodatka koji će postavljanjem na zadnju stranu poluprikolice delovati na delimično odvođenje vazdušne struje iz naznačene oblasti sa slike 8.6. Postavljanjem aerodinamičkog dodatka na zadnju stranu poluprikolice na jednakom rastojanju od svih ivica zadnje strane prema rezultatima optimizacionog procesa, dovelo je do delimičnog poboljšanja kretanja vazdušne struje u toj oblasti, sa aspekta kreiranja vrtložnog kretanja na malo većoj udaljenosti od kraja poluprikolice. Na ovaj način vrtložno kretanje u zoni neposrednoj iza kraja poluprikolice biva pomeren, sa čime se smanjuje uticaj na lokalni otpor u toj zoni.



Slika 8.7 - Polje vazdušne struje iza poluprikolice postavljanjem aerodinamičkog dodatka

Na slici 8.7 je dat prikaz prostiranja vazdušne struje u oblasti iza poluprikolice nakon postavljanja aerodinamičkog dodatka. Može se uvideti da je intenzitet polja vazdušne struje slabini, kao i blago pomen iz oblasti neposredno iza zadnje strane poluprikolice. Ovaj aerodinamički dodatak je pokazao najmanji uticaj na umanjeње sile otpora vazduha modela, delimično zbog malih dimenzija, ograničenih sa strane maksimalne zakonske dužine kamiona sa poluprikolicom. Ukoliko bi se dozvolilo produženje aerodinamičkog dodatka, odvođenje vazdušne struje iz oblasti iza poluprikolice bi bilo izraženije, što bi se pozitivno pokazalo na silu otpora vazduha.

### 8.3. Oriјentaciona potrošnja goriva

U ovom delu rada je sproveden uprošćeni proračun potrošnje goriva kamiona tegljača sa poluprikolicom. Spoljašnja aerodinamika kamiona ima velikog značaja na veličinu sile otpora vazduha koji predstavlja jedan od vodećih otpora vozila koji se kreću pri većim brzinama, npr. na autoputu. U radu je sproveden proces optimizacije i projektovanja aerodinamičkih dodataka na modelu kamiona i poluprikolice u svrhu obaranja sile otpora vazduha. Teretna vozila poput kamiona tegljača i poluprikolice koji su razmatrani u ovom radu su predviđeni za transport tereta pri dugolinijskom transportu pri čemu veliki deo svoje eksploatacije se dešava na autoputevima, pri brzinama većim od 80 km/h. Kao što je prikazano u ovom radu, pri toj brzini se postižu značane vrednosti sile otpora vazduha. U nastavku je prikazan pojednostavljeni proračun potrošne goriva za model kamiona i poluprikolice u stvarnoj veličini sa i bez aerodinamičkih dodataka. Prema slici 8.2, u ovom delu rada se razmatra razlika u potrošnji goriva VI i I konfiguracije, odnosno model bez aerodinamičkih dodataka i sa svim aerodinamičkim dodacima prikazanim u radu.

Kako bi bilo moguće sprovesti proračun potrošnje goriva, potrebno je izvršiti neka početna uprošćenja modela. Kompletan optimizacioni proces aerodinamičkih dodataka je sproveden na umanjem modelu kamiona i poluprikolice u razmeri 1:10. Prema teoriji sličnosti modela, uočeni fenomeni i zaključci do kojih se došlo na umanjenom modelu se mogu povezati sa modelom u stvarnoj veličini ukoliko se poštuju preporuke. Pošto je reč o aerodinamičkom ispitivanju, kao što je već napomenuto u prethodnim poglavljima rada, veza između umanjenog i stvarnog modela se ostvaruje preko pravilnog odabira tipa i načina strujanja vazdušne struje, odnosno direktno preko vrednosti Rejnoldsovog broja. Ukoliko je Rejnoldsov broj ostao približno nepromenjen pri strujanju oko umanjenog i stvarnog modela, mogu se aerodinamički fenomeni sa velikom tačnošću odnositi na oba modela. Prilikom pravilnog podešavanja parametara vazdušnog strujanja između umanjenog i stvarnog modela tako da se vrednost Rejnoldsovog broja ne menja, vrednost koeficijenta otpora vazduha treba da se promeni u maloj meri. Uprošćenje koje se uvodi kao opravdano sa aspekta orijentacionog proračuna potrošnje goriva je ista primenjena vrednost koeficijenta otpora vazduha na stvarnom modelu, kao što je dobijena na umanjenom modelu kamiona i poluprikolice. Usvojena vrednost koeficijenta otpora vazduha  $c_w$  za stvarni model kamiona i poluprikolice baz aerodinamičkih dodataka je 1,161 a za model sa svim aerodinamičkim dodacima je 0,877. Ostale usvojene vrednosti parametara za potrebe proračuna potrošnje goriva kamiona sa poluprikolicom su prikazane u tabeli 60. Neke vrednosti su usvojene na osnovu preporuka iz literature [75], neke na osnovu zakonskih normativa prema tipu vozila, a neke iz CFD proračuna sprovedenih u ovom radu. Veći deo usvojenih vrednosti parametara se odnosi na oba slučaja poređenja, dok neki zavise od toga da li model ima aerodinamičke dodatke ili ne. Kao što se može videti iz tabele 60, predviđeni model kamiona sa poluprikolicom ukupne mase 40 tona se kreće na autoputu bez uspona brzinom od 90 km/h. Pri tom se mejački prenosnik nalazi u maksimalnom stepenu prenosa pri čemu je ostvaren direktan prenos sa prenosnim odnosom 1.

Tabela 60 - Usvojene vrednosti parametara za proračun potrošnje goriva

Oznaka	1 - Vrednost za model bez aerodinamičkih dodataka	2 - Vrednost za model sa aerodinamičkim dodacima	Značenje parametra
$v$	90 km/h ili 25 m/s		Brzina kretanja vozila na putu
$A$	9,7934 m <sup>2</sup>		Čeona površina modela
$c_W$	1,161	0,877	Koeficijent otpora vazduha
$\rho_{vaz}$	1,18 kg/m <sup>3</sup>		Gustina vazduha
$m$	40000 kg		Masa kamiona i poluprikolice sa teretom
$f$	0,006		Koeficijent otpora kotrljanja
$i_m$	1		Prenosni odnos menjačkog prenosnika
$i_{GP}$	3,5		Prenosni odnos glavnog prenosnika
$\eta_{TR}$	0,95		Stepen korisnosti transmisije
$r_D$	0,537 m		Dinamički poluprečnik točka za pneumatik 315/80 R22,5
$\rho_{gor}$	0,85 kg/m <sup>3</sup>		Gustina goriva
$\alpha$	0°		Nagib puta
$g$	9,81 m/s <sup>2</sup>		Gravitaciono ubrzanje

Vučna sila na točku za kamion sa poluprikolicom koji se kreće konstantnom brzinom se izračunava kao zbir sila pojedinačnih otpora, tj. otpora kotrljanja, vazduha i uspona.

$$F_O = F_f + F_W + F_\alpha$$

Sila otpora kotrljanja je jednaka za oba razmatrana slučaja i izračunava se prema sledećem izrazu i iznosi:

$$F_f = f \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha = 0,006 \cdot 40000 \cdot 9,81 \cdot \cos 0^\circ = 2354,4 \text{ N}$$

Sila otpora vazduha zavisi od koeficijenta otpora vazduha koji se razlikuje za razmatrane slučajeve i računa se prema izrazima i iznosi:

$$F_{W1} = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \rho_{vaz} \cdot c_{W1} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,7934 \cdot 1,18 \cdot 1,161 \cdot 25^2 = 4192,7 \text{ N}$$

$$F_{W2} = \frac{1}{2} \cdot A \cdot \rho_{vaz} \cdot c_{W2} \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,7934 \cdot 1,18 \cdot 0,877 \cdot 25^2 = 3167,1 \text{ N}$$

Sila otpora uspona je jednaka nuli zato što se kamion i poluprikolica kreću na ravnom putu. Prema tome, vučna sila na točku za oba razmatrana slučaja iznosi:

$$F_{O1} = 2354,4 + 4192,7 = 6547,1 \text{ N}$$

$$F_{O2} = 2354,4 + 3167,1 = 5521,5 \text{ N}$$

Na osnovu dobijenih vrednosti vučnih sila i poznatih karakteristika transmisije, pristupa se izračunavanju potrebnog momenta motora za oba razmatrana slučaja prema izrazima i iznosi:

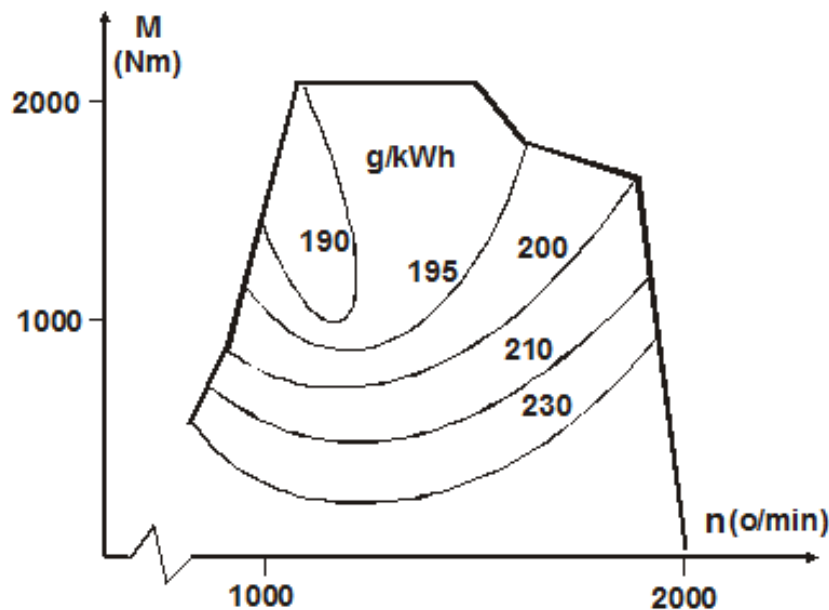
$$M_{mot 1} = \frac{F_{O 1} \cdot r_D}{i_m \cdot i_{GP} \cdot \eta_{TR}} = \frac{6547,1 \cdot 0,537}{1 \cdot 3,5 \cdot 0,95} = 1057,4 \text{ Nm}$$

$$M_{mot 2} = \frac{F_{O 2} \cdot r_D}{i_m \cdot i_{GP} \cdot \eta_{TR}} = \frac{5521,5 \cdot 0,537}{1 \cdot 3,5 \cdot 0,95} = 891,7 \text{ Nm}$$

Broj obrtaja motora se izračunava na osnovu brzine kretanja vozila i jednak je za oba razmatrana slučaja:

$$v = \frac{r_D \cdot \omega_T}{i_m \cdot i_{GP}} = \frac{r_D \cdot \frac{2\pi}{60} \cdot n_{mot}}{i_m \cdot i_{GP}} \rightarrow n_{mot} = \frac{v \cdot i_m \cdot i_{GP}}{r_D \cdot \frac{2\pi}{60}} = \frac{25 \cdot 1 \cdot 3,5}{0,537 \cdot \frac{2\pi}{60}} = 1556 \text{ o/min}$$

Nakon dobijanja radne tačke u kojoj se motor nalazi (kombinacija broja obrtaja i momenta motora), potrebno je odrediti specifičnu efektivnu potrošnju goriva  $g_E$  koja predstavlja količinu potrošenog goriva po jedinici energije koju motor proizvede. Izražava se kroz masu potrošnje goriva, a jedinica je  $g/kWh$  ili  $kg/kWh$ . Specifična efektivna potrošnja se može prikazati preko svoje brzinske karakteristike, odnosno za konstantan položaj organa za regulaciju opterećenja motora. U praksi se često ukoliko je u pitanju analiza potrošnje goriva za neko vozilo u posmatranim uslovima, pristupa usvajanju  $g_E$  sa tzv. školjkastog dijagrama, prikazanog na slici 8.8. Na slici 8.8 je prikazan opšti primer školjkastog dijagrama za motor kamiona sličnih karakteristika kao u ovom slučaju.



Slika 8.8 - "Školjkasti" dijagram specifične efektivne potrošnje [75]

Prethodno dobijene vrednosti momenta motora za oba razmatrana slučaja i broja obrtaja motora se ubacuju u školjkasti dijagram sa slike 8.8 i obe dobijene vrednosti  $g_E$  pripadaju zoni od  $200 \text{ g/kWh}$ . Potrebna snaga motora za date uslove kretanja i oba razmatrana slučaja se izračunava prema sledećim izrazima i iznosi:



$$P_{mot 1} = \frac{F_{O 1} \cdot v}{\eta_{TR}} = \frac{6547,1 \cdot 25}{0,95} = 172293,1 \text{ W} = 172,3 \text{ kW}$$

$$P_{mot 2} = \frac{F_{O 2} \cdot v}{\eta_{TR}} = \frac{5521,5 \cdot 25}{0,95} = 145303,3 \text{ W} = 145,3 \text{ kW}$$

Masena potrošnja goriva za obe razmatrane situacije se izračunava prema sledećim izrazima i obično se izražava u jedinici kg/100km:

$$pot.mas. 1 = \frac{g_E \cdot P_{mot 1}}{v} = \frac{0,200 \cdot 172,3}{25} = 0,000383 \text{ kg/m} = 38,3 \text{ kg/100km}$$

$$pot.mas. 2 = \frac{g_E \cdot P_{mot 2}}{v} = \frac{0,200 \cdot 145,3}{25} = 0,000323 \text{ kg/m} = 32,3 \text{ kg/100km}$$

Zapreminska potrošnja goriva je čest primer predstavljanja potrošnje goriva kod motornih vozila i predstavlja potrošnju goriva u litrama na pređenih 100 km puta, što je prikazano u narednim izrazima:

$$pot.zap. 1 = \frac{pot.mas. 1}{\rho_{gor}} = \frac{38,3}{0,85} = 45,04 \text{ litre/100km}$$

$$pot.zap. 2 = \frac{pot.mas. 2}{\rho_{gor}} = \frac{32,3}{0,85} = 37,99 \text{ litre/100km}$$

#### Analiza dobijenih rezultata

Na osnovu sprovedenog proračuna za model kamiona i poluprikolice stvarnih dimenzija i usvojenih specifikacija koje u što većoj meri opisuju realno teretno vozilo na putu se može zaključiti da dodavanjem aerodinamičkih dodataka koji su oblika kao u radu se postigla značajna ušteda goriva od 7 litara na 100 pređenih kilometara. Proračun potrošnje goriva je izvršen sa izvesnim uprošćenjima i pretpostavkama, kao što je zadržana ista vrednost koeficijenta otpora vazduha sa umanjjenih modela i direktno primenjvana na modele stvarnih dimenzija. Svrha ovog orijentacionog proračuna je dobijanje opšteg uvida u značaj aerodinamičkih poboljšanja na teretnim vozilima koja se kreću većim brzinama na autoputu. Dodavanjem aerodinamičkih dodataka na model kamiona i poluprikolice usvojenih karakteristika je postignuta ušteda u potrošnji goriva od 15,7%. Ovaj podatak je veoma značajan kada se u dalje izračunavanje uključi prosečan broj pređenih kilometara karakterističan za ovaj tip teretnih vozila od preko 100.000 km u toku jedne godine. Dobija se ušteda od 7.000 litara goriva godišnje po jednom kamionu, što svakako nije zanemarivo. Uz sva uprošćenja koja su primenjena u sprovedenu proračuna orijentacione potrošnje goriva, dobijene vrednosti ne odstupaju mnogo od realno očekivanih vrednosti za ovaj tip teretnog vozila i predviđene uslove vožnje, pa se mogu smatrati dobrim pokazateljem značaja aerodinamike teretnih vozila.

## 9. Zaključak

Spoljašnja aerodinamika motornih vozila je jedna od vodećih naučnih disciplina sadašnjosti zbog stalne mogućnosti kreiranja pasivnih i aktivnih aerodinamičkih dodataka koji potpomažu postizanju boljih i željenih performansi vozila. Kod putničkih vozila od presudnog značaja je umanjeno otpora vazduha i smanjenje sile uzgona. Umanjenje otpora kretanja vozila posebno dobija na značaju poslednjih godina sa ekspanzijom električno pogonjenih vozila, kod kojih i najmanja ušteda energije produžava dužinu pređenog puta između dopunjavanja baterija. Kod teretnih vozila predviđenih za dugolinijsku transport postoji još veći aerodinamički izazov. Zbog velikih gabaritnih dimezija, često ne najboljih oblika karoserije sa aspekta aerodinamike, ostavlja prostora za sprovođenje optimizacionih procesa aerodinamičke opreme i dodataka u svrhu poboljšanja polja vazdušne struje oko kamiona i prikolice, umanjujući silu otpora vazduha i kao globalnu posledicu, uštedu u potrošnji goriva. Sve ove prednosti primene inovativnosti u polju optimizacije aerodinamičke opreme i dodataka usmerava autora u oblast izučavanja spoljašnje aerodinamike kamiona tegljača sa poluprikolicom, što je i sprovedeno kroz ovaj rad.

Kao objekat ispitivanja je usvojen stvarni model kamiona tegljača i poluprikolice i na osnovu njihove tehničke dokumentacije izvršeno kreiranje virtuelnih 3d CAD modela. Zbog daljeg ispitivanja u vazдушnom tunelu, kreirani virtuelni modeli su umanjeni deset puta u odnosu na stvarne dimenzije modela i kao takvi su poslužili za kompletno istraživanje u okviru rada. Sprovođenje eksperimentalnog procesa u radu je podeljeno u dve celine. Prvu čine virtuelni CFD eksperimenti (simulacije), dok je drugi deo rezervisan za stvarni eksperimentalni proces u vazдушnom tunelu. Na osnovu kreiranog 3d CAD modela kamiona i poluprikolice, izvršen je veliki broj CFD simulacije u svrhu analize toka vazdušne struje oko modela i utvrđivanja oblasti oko ispitivanog modela gde bi eventualno dodavanje aerodinamičkih oblika doprinelo boljem prostiranju vazdušne struje i umanjeno lokalnih otpora modela. Objekat ispitivanja u radu je modeli kamiona tegljača i poluprikolice, objedinjeni u jedan sklop, koji se kao takav zajednički model ispituje i analizira. Analizom toka vazdušne struje oko modela i uočavanjem oblasti u kojima dolazi do intenzivnog stvaranja vrtložnih kretanja vazdušne struje koje je odgovorno za generisanje lokalnih otpora vazduha, utvrđene su oblasti modela u kojima postoji prostor i potreba za kreiranjem aerodinamičkih dodataka. Kritične oblasti su iznad kabine kamiona, između kabine kamiona i poluprikolice i oblast iza poluprikolice. Kreirani aerodinamički dodaci u nastavku rada su orijentisani upravo na ove kritične oblasti modela.

Pregledom relevantne literature i aktuelnog stanja u oblasti, utvrđeni su koraci optimizacionog procesa pomoću kojih je u nastavku izvršeno kreiranje aerodinamičkih dodataka na modelu kamiona i poluprikolice. Kao osnovni oblik od koga se započinje postavljanje parametarskog projektovanja aerodinamičkih dodataka je uzet aeroprofil. Usvajanje aeroprofila kao osnovnog oblika aerodinamičkih dodataka na modelu je vezano za veoma dobre karakteristike podešavanja toka vazdušne struje pomoću ovog usvojenog oblika, kao i zbog malog broja neophodnih geometrijskih parametara za njegovo kreiranje. Nakon pozicioniranja aeroprofila kao osnovnog oblika aerodinamičkog dodatka, pristupa se definisanju geometrijskih parametara za njegovo kreiranje preko zadavanja tri nivoa njegovog variranja. U zavisnosti od tipa aerodinamičkog dodatka, osnovni aeroprofil se obično sastojao od četiri parametara sa mogućnošću variranja na tri nivoa. Postavljanjem potpune faktorijske strukture eksperimenta, utvrđuje se maksimalan broj mogućih kombinacija sprovođenja eksperimenta. Usvojeni broj parametara je četiri sa variranjem na tri nivoa, postiže se ukupno 81 kombinacija eksperimenta. Sve kombinacije se razmatraju putem virtuelnih CFD

simulacija. Rezultat simulacija je objedinjen u tri bitna parametra, veličinu frontalne površine modela, sile otpora vazduha i koeficijenta otpora vazduha. Dobijanjem svih rezultata sprovedenih virtuelnim eksperimentima, pristupilo se statističnoj obradi dobijenih rezultata. Na osnovu ovog procesa se dolazi do zaključaka vezanih za uticajnost pojedinih faktora na rezultat, oblasti zastupljenosti rezultata, kao i potencijalne nivoe parametara koji obezbeđuju najbolji rezultat. U smislu ovog rada, željeni rezultat predstavlja minimalizacija sile otpora vazduha modela. Dobijanjem svih neophodnih rezultata sprovedene analize podataka potpune faktorijske strukture, pristupa se detaljnijem pristupu eksperimentalnog procesa putem metode odgovorne površine. Novim pregrupisanjem geometrijskih parametara oblika aerodinamičkog dodatka, na osnovu analize uticajnih parametara potpune faktorijske strukture, pristupa se definisanju novog plana eksperimenta. Pod novim planom eksperimenta se podrazumeva parametarsko usvajanje vrednosti na više razmatranih nivoa variranja. U ovom prolazu se definiše pet nivoa variranja za sve parametre koji utiču na kreiranje oblika aerodinamičkog dodatka. Potpuna faktorijska struktura sa ovako velikim brojem parametara i nivoa variranja predstavlja veliki broj eksperimentalnih prolaza koji se ne smatraju efikasnim, pa je utvrđen novi plan eksperimenta putem centralne komponentacione metode u okviru metode odgovorne površine. Zahvaljujući njenoj metodi uzorkovanja eksperimentada, broj eksperimentalnih prolaza se značajno umanjuje. Na osnovu definisanog plana eksperimenta pristupa se njihovoj realizaciji putem CFD simulacija. Dobijanjem rezultata od interesa (u prvom planu sile otpora vazduha) pristupa se detaljnoj statističkoj analizi podataka, na osnovu kojih se vide oblasti zastupljenosti rezultata i pri kojim parametarskim nivoima su postignuti najbolji rezultati. Veoma bitan deo analize predstavlja kreiranje teorijskog modela koji predstavlja odziv sistema i opisuje njegovo ponašanje. Zahvaljujući ovoj razmatranoj optimizacionoj metodi se dobijaju teorijski modeli sa velikom tačnošću preko 90%. Dobijeni teorijski model se koristi za krajnji optimizacioni postupak, na osnovu kojeg se dobijaju tačne vrednosti parametara koje nisu strogo vezane za nivoe variranja i predstavljaju optimalni oblik aerodinamičkog dodatka u smislu postizanja najmanje moguće sile otpora vazduha. Ovaj optimizacioni postupak je sproveden četiri puta, zbog upravo toliko različitih aerodinamičkih dodataka modela kreiranih i analiziranih u radu.

Prvi dobijeni aerodinamički dodatak na kabini kamiona je pokazao najveći uticaj na preusmerenje vazdušne struje i opadanje sile otpora vazduha modela za gotovo 24%. Drugi aerodinamički dodatak je predstavljao bočne vertikalne dodatke postavljene sa zadnje strane kabine kamiona u svrhu umanjavanja prodiranja vazdušne struje u tu oblast. Zahvaljujući optimizacionom procesu, dobijeni su aerodinamički oblici ovog dodatka koji je oborio silu otpora vazduha za 14%. Treći aerodinamički dodatak razmatran u ovom radu je predviđen za pozicioniranje na zadnju stranu poluprikolice u svrhu odvođenja vazdušne struje dalje od njenog kraja i umanjjenje lokalnog otpora vazduha u toj oblasti. Optimizacionim postupkom ovog aerodinamičkog dodatka je dobijeno opadanje sile otpora vazduha za 2%. Ovaj aerodinamički dodatak je obezbedio malo obaranje sile otpora vazduha u svojoj pojedinačnoj postavci na model, ali u kombinaciji sa ostalim aerodinamičkim dodacima se pokazao značajnim. Četvrti aerodinamički dodatak projektovan i optimizovan u ovom radu je tzv. horizontalni aerodinamički dodatak iza kabine kamiona. Analizom toka vazdušne struje u ovoj oblasti se utvrdilo da veliki deo vazdušne struje iz oblasti ispod modela prodire u oblast iza kabine kamiona, stvarajući vrtložno kretanje i lokalni otpor vazduha. Postavljanjem optimalnog oblika četvrtog aerodinamičkog dodatka sila otpora vazduha modela je spuštana za 16% što predstavlja veoma veliko obaranje. Postavljanjem svih aerodinamičkih dodataka na model kamiona i poluprikolice, CFD simulacijom je utvrđeno spuštanje sile otpora vazduha za skoro 25%.

Validacija dobijenih rezultata CFD simulacija je sprovedena eksperimentalnim merenjem u vazдушnom tunelu. Na osnovu 3d CAD modela i dobijenih optimalnih oblika aerodinamičkih dodataka, izvršeno je pravljenje stvarnog modela od drveta u svrhu ispitivanja u vazдушnom tunelu. Eksperimentalno ispitivanje je izvršeno u vazдушnom tunelu "Miroslav Nenadović" u Beogradu, u okviru Instituta za avioinženjerstvo Mašinskog fakulteta. Ispitivanje je sprovedeno sa velikom pažnjom na postupak merenja, mernu opremu i tačnost dobijenih rezultata. Postupak merenja se sastojao od sedam različitih konfiguracija modela i aerodinamičkih dodataka, ispitivanih po dva puta zbog ponovljivosti rezultata. Kompletno merenje pri svim konfiguracijama je izvršeno za opseg brzine vazdušne struje unutar tunela od 60 do 90 km/h sa korakom porasta od 5 km/h. Opseg mernih brzina odgovara brzinama analiziranim i putem virtuelnih CFD simulacija. Pregledom i analizom dobijenih rezultata eksperimentalnog merenja u vazдушnom tunelu i poređenjem sa rezultatima CFD simulacija se došlo do zaključka da se poklapaju u velikoj meri sa prosečnim odstupanjem od 8%. Dobijeno odstupanje se smatra zadovoljavajućim, sa aspekta paralelnosti ova dva postupka ispitivanja.

Vizuelizacija toka vazdušne struje je sprovedena putem CFD simulacija za sve razmatrane konfiguracije modela, u svrhu analize njenog uticaja sa stvaranje lokalnih otpora vazduha. Analizom toka vazdušne struje je utvrđeno značajano poboljšanje kako pri dodavanju pojedinačnih aerodinamičkih dodataka na model, tako i dodavanjem svih zajedno.

Na kraju rada je izvršen uprošćeni proračun u svrhu dobijanja uvida u orijentacionu potrošnju goriva kamiona sa poluprikolicom, stvarnih dimenzija, sa i bez aerodinamičkih dodataka projektovanih u ovom radu. Za kamion i poluprikolicu koji su predviđeni da se kreću na autoputu bez uspona, pri brzini od 90 km/h i maksimalno opterećeni dozvoljenim teretom se postigla ušteda od 7 litara goriva ili 15% na sto pređenih kilometara. Ovaj proračun uz sva pojednostavljenja govori o značajnom uticaju aerodinamike na ovaj tip teretnih vozila i opravdanu primenu optimizacione metode razmatrane u ovom radu.

Što se tiče razmatraneog optimizacionog postupka definisanog u ovom radu, njegova primena u naučno inženjerskom smislu je veoma moguća. Pre svega u oblasti spoljašnje i unutrašnje aerodinamike, gde god je potrebno vršiti geometrijsku optimizaciju nekog dela ili oblika u svrhu postizanja boljih rezultata. Takođe optimizacioni postupak ne iziskuje mnogo vremena pripreme i analize postignutih rezultata, koji se dobijaju sa velikom preciznošću. Veoma se dobro pokazao u kombinaciji sa CFD softverom, što ne mora biti nužno jedini tip softvera za sprovođenje virtuelnih eksperimenata.

I za kraj, autor planira dalje usavršavanje i primenu optimizacione metode razmatrane u ovom radu u oblasti spoljašnje i unutrašnje aerodinamike kako motornih vozila, tako i proširenje u oblast avioinženjerstva i nautike, zbog velike podudarnosti i primene. Što se tiče nastavka istraživanja ove razmatrane teme u radu, ostavljen je prostor za kreiranje novih aerodinamičkih dodataka koji će služiti boljem usmerenju vazdušne struje i obaranju lokalnih otpora pri uticaju bočnog vetra ili pod nekim drugim uglom. Sve zajedno može biti veoma interesantno sa aspekta uključenja aktivnih aerodinamičkih dodataka na ispitivani model.

## 10. Korišćena literatura

- [1] Fuel savings on a heavy vehicle via aerodynamic drag reduction. Zulfaa Mohamed-Kassim, Antonio Filipponi. 5, Manchester, UK : Elsevier Ltd., 2010, Elsevier, T. 15, str. 275-284. doi:10.1016/j.trd.2010.02.010.
- [2] Simple and low-cost aerodynamic drag reduction devices for tractor-trailer trucks. Richard M. Wood, Steven X. S. Bauer. s.l. : SAE International, 2003, SAE International. 2003-01-3377.
- [3] Aerodynamics and fuel economy on highway experience. Tyrrell, Charles L. Michigan : Society of automotive engineers, Inc., 1987, SAE Technical Paper , T. 872278. 0148-7191.
- [4] A discussion of a heavy truck advanced aerodynamic trailer system. Wood, Richard M. Virginia Beach : s.n., 2003, SOLUS-Solutions and Technologies LLC.
- [5] Aerodynamics of heavy vehicles. Haecheon Choi, Jungil Lee, Hyungmin Park. 441-68, s.l. : Annual Reviews , 2014, Annual Reviews of Fluid Mechanics, T. 46. doi:10.1146/annurev-fluid-011212-140616.
- [6] Progress in reducing aerodynamics drag for higher efficiency of heavy duty trucks. Rose McCallen, Richard Couch, Juliana Hsu, Anthony Leonard, Mark Brady, James Ross, Bruce Storms, J.T. Heineck, David Driver, James Bell Gregory Zilliac, Fred Browand, Mustapha Hammache, Kambiz Salari, Walter Rutledge. s.l. : SAE International, 1999, SAE Technical Paper. 1999-01-2238.
- [7] LES simulation of aerodynamics drag for heavy duty trailer trucks. Nakamura S., Hively E.M., Conlisk A.T. Montreal, Canada : ASME International, 2002. FEDSM2002-31427.
- [8] Large eddy simulation of a road vehicle with drag-reduction devices. Verzicco R., Fatica M., Iaccarino G., Moin P. 12, 2002, AIAA Journal, T. 40, str. 2447-2455. doi:10.2514/2.1613.
- [9] Nathan, Williams A. Drag optimization of light trucks using computational fluid dynamics. Monterey, USA : Naval Postgraduate School, 2003. 7540-01-280-5500.
- [10] CFD shape optimization using an incomplete-gradient adjoint formulation. Soto O., Lohner R. Fairfax, USA : John Wiley & Sons, Ltd., 2001, International journal for numerical methods in engineering, T. 51, str. 735-753.
- [11] CFD Study Concerning the Influence of the Underbody Components on Total Drag for a SUV. Huminic Angel, Huminic Gabriela. Brasov, Romania : SAE International, 2009. 2009-01-1157.
- [12] External Flow Analysis of a Truck for Drag Reduction. Subrata Roy, Pradeep Spinivasan. Kettering University, USA : SAE International, 2000, SAE Technical Paper. 2000-01-3500.
- [13] AN APPROACH TO COMPUTATIONAL FLUID DYNAMIC AIR-FLOW SIMULATION IN THE INTERNAL COMBUSTION ENGINE INTAKE

- MANIFOLD. Galamboš S., Nikolić N., Ružić D., Dorić J. 1A, Novi Sad, Serbia : s.n., 2020, Thermal Science, T. 24, str. 127-126. doi.org/10.2298/TSCI180707063G.
- [14] Aerodynamic shape optimization of complex aircraft configurations via an adjoint formulation. Reuther J., Jameson A., Farmer J., Martinelli L., Saunders D. s.l. : American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 1996, AIAA Journal. AIAA Paper 96-0094.
- [15] Kambiz, Salari. DOE's Effort to Improve Heavy Vehicle Fuel Efficiency through Improved Aerodynamics. Washington DC, USA : Lawrence Livermore National Laboratory, 2016. LLNL-PRES-688057.
- [16] DOE's Effort to Reduce Truck Aerodynamic Drag – Joint Experiments and Computations Lead to Smart Design. Rose C. McCallen, Kambiz Salari, Jason M. Ortega. Livermore, USA : American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2004, AIAA Journal. AIAA 2004-2249.
- [17] Practical Devices for Heavy Truck Aerodynamic Drag Reduction. Ron Schoon, Fongloon Peter Pan. Detroit, USA : SAE International, 2007 , SAE Technical Paper. 2007-02-1781.
- [18] Gregory Steen, Oran Nicks, Michael Heffner. FURTHER WIND TUNNEL INVESTIGATION OF THE SM701 AIRFOIL WITH AILERON AND TURBULATORS. Collage Station, Texas, USA : Texas A&M University, 1992. NASA-CR-190702.
- [19] Ira H. Abbott, Albert E. Doenhoff, Louis S. Stivers. Summary of airfoul data. s.l. : National Advisory Committee for Aeronautics, 1945. Report No. 824.
- [20] Numerical investigation of drag reduction in a Class 5 medium duty truck. Norouzi M., Pooladi M.A., Mahmoudi M. 3, Pahang, Malaysia : Universiti Malaysia Pahang, Malaysia, 2016, Journal of Mechanical Engineering and Sciences (JMES), T. 10, str. 2387-2400. https://doi.org/10.15282/jmes.10.3.2016.15.0221.
- [21] Structures of Flow Separation on a Passenger Car. Bonitz Sabine, Larsson Lars, Lofdahl Lennart. 1, Gothenburg, Sweden : SAE International, 2015, SAE International, T. 8. 2015-01-1529 , doi:10.4271/2015-01-1529.
- [22] Christoffer Hakansson, Malin J. Lenngren. CFD Analysis of Aerodynamic Trailer Devices for Drag Reduction of Heavy Duty Trucks. Gothenburg, Sweden : CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, 2010. 2010:10.
- [23] Olsson, Martin. Designing and Optimizing Side-View Mirrors. Geteborg, Sweden : CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, 2011. 2011:27.
- [24] Koitrاند Sofie, Rehnberg Sven. A Computational Investigation of Wheel and Underbody Flow Interaction. Gothenburg, Sweden : CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, 2013. 2013:24.
- [25] Levin Johan, Rigdal Rikard. Aerodynamic analysis of drag reduction devices on the underbody for SAAB 9-3 by using CFD. Gothenburg, Sweden : Chalmers University of Technology, 2011. 2011:30.

- [26] Alexey, Vdovin. Investigation of Aerodynamic Resistance of Rotating Wheels on Passenger Cars. Geteborg, Sweden : CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, 2013. 2013:13, 1652-8565.
- [27] Faruk, Cavusoglu Omer. Aerodynamics Around Wheels and Wheelhouses. Gothenburg, Sweden : CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, 2017. 2017:41.
- [28] Race Car Aerodynamics: Designing for Speed Bentley Publishers 1995 ISBN: 0-8376-0142-8
- [29] The-blueprints.com <http://www.the-blueprints.com/blueprints-depot/cars/peugeot/peugeot-gp-1919-indy-500.gif>
- [30] PhD Thassis - Computational fluid dynamics based optimisation of emergency response vehicles Leeds The University of Leeds 2015
- [31] EMERSON FITTIPALDI 1993 MARLBORO PENSKE PC22 INDIANAPOLIS 500 WINNER 500 legends.com <http://www.500legends.com/product.php?p=234>
- [32] Development of aerodynamic smoke tunnel unit for teaching and learning University of Technical Malaysia 2009
- [33] Bukurov, Maša. Mehanika fluida - prva knjiga. Novi Sad : Fakultet tehničkih nauka, 2015. ISBN: 978-86-7892-789-0.
- [34] Computational Methods for Fluid Dynamics Berlin Springer 2002 ISBN: 3-540-42074-6
- [35] Gillespie, Thomas D. Fundamentals of Vehicle Dynamics. s.l. : Society of Automotive Engineers, 1992. ISBN: 978-1-56091-199-9.
- [36] Necessity and Premises for Reducing the Aerodynamic Drag of Future Passenger Cars. Buchheim, R., Deutenback, R. K. / Luckoff, J. H. s.l. : SAE International, 1981, SAE Transactions, T. 90, str. 14.
- [37] Pillars of your car Wheels Wisdom.com <https://www.wheelswisdom.com/category/blogs/car-driving/>
- [38] The Battle for the A-pillar Exa.com <http://exa.com/en/blog-test-limits/battle-pillar>
- [39] User Guide - Star CCM+ Version 8.04. s.l. : CD-adapco, 2013.
- [40] Fast Delaunay triangulation in three dimensions. H. Borouchaki, Lo. S. H. s.l. : Elsevier Science S.A., 1995, Computer methods in applied mechanics and engineering, T. 128. 0045-7825(95)00854-3.
- [41] P.R. Spalart ; S.R. Allmaras . A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. AIAA-92-0439.
- [42] B.S., Baldwin; H. Lomax. Thin-Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows. 1978. AIAA-78-0257.
- [43] A Mathematically Simple Turbulence Closure Model for Attached and Separated Turbulent Boundary Layers. D.A. Johnson ; L.S. King. 11, 1985, AIAA Journal, T. 23, str. 1684-1692.

- [44] Wilcox, D.C. Turbulence Modeling for CFD. 2nd edition. s.l. : DCW Industries, 1998.
- [45] The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence. W.P. Jones, B.E. Launder. 1972, Int. J. Heat and Mass Transfer, T. 15, str. 301-314.
- [46] Application of the Energy Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc . B.E. Launder, B.I. Sharma. 2, 1974, Letter in Heat and Mass Transfer, T. 1, str. 131-138.
- [47] Experience with Two-Layer Models Combining the k-e Model with a One-Equation Model Near the Wall. Rodi, W. Reno : s.n., 1991. 29th Aerospace Sciences Meeting. AIAA 91-0216.
- [48] Formulation of the k- turbulence model revisited. Wilcox, D.C. 11, 2008, AIAA Journal, T. 46, str. 2823-2838.
- [49] Effective Inflow Conditions for Turbulence Models in Aerodynamic Calculations. P.R. Spalart, C.L. Rumsey. 10, 2007, AIAA Journal, T. 45, str. 2544-2553.
- [50] Two-equation eddy-viscosity turbulence modeling for engineering applications. Menter, F.R. 8, 1994, AIAA Journal, T. 32, str. 1598-1605.
- [51] S. Sarkar, L. Balakrishnan. Application of a Reynolds-stress turbulence model to the compressible shear layer. s.l. : NASA, 1990. ICASE Report. NASA CR 182002.
- [52] Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. C.G. Speziale, S. Sarkar, T.B. Gatski. 1991, J. Fluid Mech, T. 227, str. 245-272.
- [53] International Association for the Properties of Water and Steam. Revised Release on the IAPWS Industrial Formulation 1997 for the Thermodynamic Properties of Water and Steam. Lucerne : IAPWS Secretariat, 2007. Dostupno na [www.iapws.org](http://www.iapws.org).
- [54] Rao, Singiresu S. Engineering Optimization - Theory and Practice. s.l. : John Wiley & Sons, 2009. ISBN 978-0-470-18352-6.
- [55] Nonlinear Programming. H. W. Kuch, A. Tucker. Berkeley : University of California Press, 1951, Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability.
- [56] Upoznavanje sa planiranim eksperimentom. Žana, Krstić. Kragujevac : Asocijacija za kvalitet i standardizaciju Srbije, 2006. 33. Nacionalna konferencija o kvalitetu.
- [57] Oehlert, Gary W. A first course in design and analysis of experiments. s.l. : University of Minnesota, 2010. ISBN 0-7167-3510-5.
- [58] Chambers J., Cleveland W., Kleiner B., Tukey P. Graphical Methods for Data Analysis. Wadsworth : Wadsworth Publishing Co., 1983. ISBN: 053498052X.
- [59] D., Scott. Multivariate Density Estimation: Theory, Practice and Visualization. s.l. : John Wiley and Sons, 1992.



- [60] A method for estimating root efficiency. Hunt, R. 1973, *Journal of Applied Ecology*, T. 10, str. 157-164.
- [61] R.A., Fisher. *The Design of Experiments*. London : Oliver & Boyd, Ltd., 1935.
- [62] Significance tests which may be applied to samples: III. G., Pitman E. J. 1938, *Biometrika*, T. 29, str. 322-335.
- [63] Significance tests which may be applied to samples from any populations: I and II. G., Pitman E. J. 1937, *Journal of the Royal Statistical Society*, T. Series B4, str. 119-130 , 225-237.
- [64] The randomization theory of experimental inference. O., Kempthorne. 1955, *Journal of the American Statistical Association*, T. 50, str. 946-967.
- [65] E., L. Lehmann. *Testing Statistical Hypotheses*. New York : Wiley, 1959.
- [66] Investigating therapies of potentially great benefit: ECMO. D., A. Berry. 1989, *Statistical Science*, T. 4, str. 306-310.
- [67] Effects of an artificial acid mist upon the growth of *Betula alleghanensis* britt. Wood T., Bormann F. H. 1974, *Environmental Pollution*, T. 7, str. 259-268.
- [68] Moore D., McCabe G. *Introduction to the Practice of Statistics*. Third. New York : Freeman, 1999.
- [69] Sellke T., Bayarri M., Berger J. Calibration of p-values for testing precise null hypotheses. Institute of Statistics and Decision Sciences - Duke University. Durham, USA : s.n., 1999.
- [70] Effects of skimmed milk powder, whey or casein on tissue trace elements status and antioxidant enzyme activities in rats fed control and copper-deficient diets. Lynch M., Strain J. 1990, *Nutrition Research*, T. 10, str. 449-460.
- [71] Effect of minerals on the incidence of leg abnormalities in growing broiler chicks. Nelson R., Kriby L., Johnson Z. 1990, *Nutrition Research*, T. 10, str. 525-533.
- [72] Meal protein and zinc levels interact to influence zinc retention by the rat. Hunt R., Larson B. 1990, *Nutrition Research*, T. 10, str. 697-705.
- [73] *Statistical Table for Biological, Agricultural and Medical Research*. Fisher R. A., Yates F. Edinburgh : Oliver and Boyd, 1963.
- [74] Pham, Hoang. *Handbook of Engineering Statistics*. London : Springer, 2006. 978-1-84628-288-1.
- [75] Stojić B., Poznanović N., Ružić D., Dorić J. *Drumska vozila*. Novi Sad : Fakultet tehničkih nauka, 2014. 978-86-7892-660-0.
- [76] Hucho, Wolf-Heinrich. *Aerodynamics of road vehicles*. London : Butterworth-Heinemann Ltd., 1987. 0-408-01422-9.
- [77] *An Integrated Method for Designing Airfoils Shapes*. Wang Xudong, Wang Licun, Xia Hongjun. Chongqing, Chine : Hindawi Publishing Corporation, 2015, Hindawi, str. 12. [dx.doi.org/10.1155/2015/838674](https://doi.org/10.1155/2015/838674).

- [78] [Na mreži] DAF Company. [Citirano: 05 Decembar 2018.]  
<http://www.dafbfi.com/en/new-cf-and-xf/chassisdrawings-search-page-cf-xf#>.
- [79] [Na mreži] Schwarzmuller Company. [Citirano: 5 Decembar 2018.]  
<https://www.schwarzmuller.com/en/vehicles/platform-vehicles/platform-semitrailer-jumbo/3-axle-jumbo-sliding-tarpaulin-platform-semitrailer/>.
- [80] External Flow Analysis of a Truck for Drag Reduction. Subrata R., Srinivasan P. s.l. : SAE Technical Paper 2000-01-3500, 2000. doi: <https://doi.org/10.4271/2000-01-3500>.
- [81] Aerotunel "Miroslav Nenadović". Beograd : Aerotehnički Institut Mašinski fakultet.