

ПРИМЉЕНО: 26 АПР 2001	
ОРГАНИЗ ЈЕД	Б Р О Ј
0603	110/11

REFERAT  
za ocenu doktorske disertacije  
"PRILOG TEORIJI POLUPRSTENA"  
kandidata  
mr VJEKOSLAVA BUDIMIROVIĆA

Na XXVII sednici Nastavno-naučnog veća Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu održanoj 26. 4. 2001. određeni smo u Komisiju za ocenu doktorske disertacije pod naslovom: "PRILOG TEORIJI POLUPRSTENA" kandidata mr VJEKOSLAVA BUDIMIROVIĆA.

Na osnovu uvida u priloženu disertaciju, dajemo sledeću ocenu.

Rad je izložen na 80 strana kucanog teksta. Sadrži četiri poglavlja:

1. Uvod
2.  $p$ -polugrupe
3.  $p$ -poluprsteni
4. Varijeteti  $p$ -polugrupa i  $p$ -poluprstena

Na kraju se navodi 87 bibliografskih jedinica.

Tema rada je algebarska, radi se o posebnim klasama poluprstena, koji se uvode pomoću odgovarajuće klase polugrupa.

Algebarska struktura poluprsten spada među one koje su trenutno u centru algebarskih istraživanja u svetu. Posebno je značajna njihova primena u teorijskom računarstvu i teoriji rasplnutih (fuzzy) skupova. O tome govore brojni radovi i dve nedavno objavljene monografije:

J.S. Golan, *The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer sciences*, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992.

U. Hebish, H.J. Weinert, *Semirings, Algebraic theory and applications in computer sciences*, World Scientific, Singapore - London - New Jersey - Hong Kong, 1999.

Poluprsten je algebarska struktura  $(S, +, \cdot)$ , sa dve binarne operacije u

kojoj su  $(S, +)$  i  $(S, \cdot)$  polugrupe (tj. obe operacije su asocijativne) i druga je distributivna prema prvoj sa obe strane. Po pojedinim autorima prva operacija je komutativna, a zahteva se i neutralni elemenat u odnosu na prvu, a kod nekih i u odnosu na drugu operaciju.

Poluprsteni su veoma prirodna struktura: primer su prirodni brojevi u odnosu na operacije sabiranja i množenja. Ipak oni se tek od nedavno intenzivno izučavaju. Prvo su korišćeni u izučavanju ideala u teoriji prstena, zatim u rešavanju problema optimizacije. Sada se koriste u teoriji kodiranja i automata, u opisivanju baza podataka i drugim oblastima teorijskog računarstva. Druga aktuelna oblast primene je teorija rasplnutih struktura. Kolekcija svih rasplnutih skupova na nosaču  $A$ , pri čemu je skup vrednosti jedinični interval realne prave, ima strukturu poluprstena u odnosu na operacije izvedene iz uopštenja unije i preseka. Pokazuje se da rasplnute strukture značajno zavise upravo od svojstava spomenutog poluprstena.

U uvodnom delu (Glava 1) autor navodi hronološki razvoj i motive za uvođenje i istraživanje posebnih klasa polugrupa i poluprstena. Tu su navedeni i osnovni algebarski pojmovi i notacija koji se koriste u radu.

U drugoj glavi uvodi se klasa  $p$ -polugrupa. Autor je uopštio pojam anti-inverzne polugrupe, uvedene pre desetak godina u radovima S. Bogdanovića, S. Milića i V. Pavlovića. Anti-inverzna polugrupa je tako specijalan slučaj  $p$ -polugrupe, za  $p = 1$ .

Prema definiciji koju uvodi kandidat, polugrupa  $(S, +)$  je  $p$ -polugrupa,  $p \in \mathbb{N}$ , ako za svako  $x \in S$  postoji  $y \in S$  tako da budu ispunjene jednakosti

$$x + py + x = y \quad \text{i} \quad py + x + py = x.$$

Detaljno se ispituju svojstva ovih polugrupa, koja zavise od prirodnog broja  $p$ , odnosno od njegove deljivosti sa 4. Pored ostalog, pokazuje se da svaki elemenat  $p$ -polugrupe, kao i posebne klase elemenata, imaju svoju jedinicu. Podskup  $p$ -elemenata nekog elementa  $p$ -polugrupe, generiše grupu. Kako taj podskup može biti i prazan, sledi da takav element generiše grupu.

Glavni rezultat ovog dela jeste stav da je  $p$ -polugrupa unija grupa. Klase tih grupa su potpuno opisane: neke cikličke i njihovi direktni proizvodi, Klajnova, kvaternionska, kao i uopštena kvaternionska grupa. O kojim grupama se radi, to zavisi od svojstava deljivosti broja  $p$ . Važi i obratno tvrđenje:

proizvoljna polugrupa je za dati broj  $p$  jedna  $p$ -polugrupa, ako se može predstaviti kao unija grupa iz navedenih klasa.

U trećoj glavi uvode se  $p$ -poluprsteni. Poluprsten  $(S, +, \cdot)$  je  $p$ -poluprsten, ako je  $(S, +)$   $p$ -polugrupa i za sve  $x \in S$  važi jednakost

$$4px^2 = 4px.$$

Analogno svojstvima  $p$ -polugrupa, ovde se ispituju osnovne osobine novouvedene klase poluprstena. Daju se potrebni i dovoljni uslovi da su svaka dva elementa u relaciji kojom se definišu  $p$ -elementi. Centralno mesto i ovde zauzima opis struktura koje pokrivaju  $p$ -poluprsten. To su određene klase prstena i struktura, nazvanih pretprsteni, koje se od prstena razlikuju samo u tome što aditivna grupa nije komutativna. Pokazuje se da je tako svaki  $p$ -poluprsten unija prstena ili predprstena. Kao i za  $p$ -polugrupe, važi: svaki poluprsten koji se za dato  $p$  može predstaviti kao unija struktura iz navedenih klasa, jeste jedan  $p$ -poluprsten.

Autor navodi primere i postupak za obrazovanje  $p$ -polugrupa i  $p$ -poluprstena. Tako se može zaključiti da su uvedene klase netrivialne, kao i da se pored grupa odnosno prstena, sastoje i od slabijih struktura.

U poslednjoj, četvrtoj glavi, analiziraju se klase  $p$ -polugrupa i  $p$ -poluprstena sa stanovišta zatvorenosti za osnovne algebarske konstrukcije: homomorfizme (H), podstrukture (S) i direktne proizvode (P). Zatvorenost za  $H$  i  $P$  važi uvek, ali ne i za operator  $S$ . Pokazuje se da su za  $p$  paran broj, ili  $p = 4k + 3$ , klase ovih struktura jesu zatvorene i za  $S$ , pa su te klase varijeteti. Autor za svaki od ovih slučajeva navodi odgovarajuće identitete za obe klase.

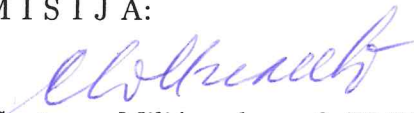

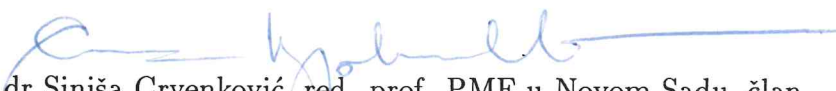
Dakle, u radu se uvode nove klase polugrupa i poluprstena, ispituju se njihova svojstva i struktura, tj. pokrivenost bogatijim strukturama (grupama, predprstenima i prstenima). Za ovo poslednje daju se potrebni i dovoljni uslovi. Najzad, pokazuje se da se u određenim slučajevima dobijaju i varijeteti. Rezultati su novi, odnose se na aktuelnu oblast i smatramo da odgovaraju težini i značaju koji se očekuje od doktorske disertacije.

Autor je ovim pokazao dobro poznavanje oblasti opšte i klasične algebre, sposobnost da kreativno pristupa izučavanju. Iz ove oblasti ima radova prihvaćenih i podnetih za štampu.

Zato pozitivno ocenjujemo doktorsku disertaciju "PRILOG TEORIJI POLUPRSTENA" kandidata MR VJEKOSLAVA BUDIMIROVIĆA i predlažemo Veću da omogući kandidatu da pristupi njenoj odbrani.

Novi Sad,

K O M I S I J A:

1. dr Svetozar Milić, red. prof. PMF u penziji, predsednik  

2. dr Branimir Šešelja, red. prof. PMF u Novom Sadu, mentor  

3. dr Siniša Crvenković, red. prof. PMF u Novom Sadu, član  

4. dr Andreja Tepavčević, vanr. prof. PMF u Novom Sadu, član  
