UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Biljana Jolevska-Tuneska

Neutriks proizvodi i konvolucije distribucija i primene

- doktorska disertacija -

Novi Sad, 2002

Sadržaj

3

Uvod

Teorija uopštenih funkcija kao deo funkcionalne analize obiluje različitim rezultatima i mnoštvom različitih metoda koje mogu da se primene u drugim oblastima matematičke analize. Istoriski gledano, nastala je u želji da se matematičkim modeliranih procesa, koji nisu bili matematički jasno zasnovani, nadje pravilan matematički pristup i omoguće matematička rešenja koja će imati i prirodan smisao.

Koncepcija funkcija i operacija sa funkcijama u klasičnoj analizi nije uvek omogućavala adekvatno rešenje tih modela. To je imalo za posledicu više pokušaja generalizacije pojma funkcije i operacija sa njome.

U monografiji "Theorie des distributions I i II" iz 1950. godine, Laurent Schwartz je u prvi objavio sistematizovanu teoriju jedne klase uopštenih funkcija-distribucija. Teorije vektorsko-topoloških prostora, koje su sa tada već bile razvijane, omogućile su Schwartz-u izgradnju njegove teorije. On je razvio i unificirao ideju koja se ranije mogla naći i u radovima Hadamard-a, Böchner-a, Sobolev-a i dr.

Iz današnjeg aspekta, možemo reći da postoje dva komplementarna pristupa proučavanju distribucija. Prvi, da je distribucija neprekidni linearni funkcional na prostoru kompaktno glatkih funkcija (test funkcije). Drugi, da se distribucija dobija regularizacijom, pomoću konvolucije koja slabo konvergira ka originalnoj distribuciji. Na taj način dobijamo sekvencijalnu reprezentaciju prostora distribucija.

Naziv distribucija koristi se za elemente Shcwartz-ovog prostora $\mathcal{D}'$ ili nekog njegovog potprostora, a ako se posmatraju neprekidne linearne funkcionele nad proizvoljnim prostorom osnovnih funkcija, koristi se naziv uopštena funkcija.

Teorija distribucija, i šire, teorija oupštenih funkcija , pretstavlja matematički aparat za razne oblasti matematičke fizike, teoriju parcijalnih diferencijalnih jednačina, harmonijsku analizu, teoriju pseudodiferencijalnih i Furijeovih operatora.

Problem proizvoda, odnosno konvolucije distribucija, pojavio se na samom početku razvitka teorije distribucija, i kako zbog razvoja ove oblasti, tako i zbog njene primene, do danas je ostao aktuelan. Prvu definiciju proizvoda i konvolucije distribucija dao je L. Schwartz. Jedna od najpoznatijih definicija proizvoda i konvolucije distribucija data je u knjigama I.M. Gelfanda i G.E. Shilov-a [35], koje daju originalan i sveobuhvatan način razvitka teorije distribucija i njihove primene.

Van der Corput je 1959. godine uveo pojam o neutriks računu. Neutriks N je komutativna aditivna grupa funkcija koje preslikavaju iz skupa N' u komutativnu aditivnu grupu N'' sa svojstvom da ako je $f \in N$ i $f(\xi) = \gamma$ za sve $\xi \in N'$ tada je $\gamma = 0$. Funkcije iz N zovu se zanemarljive funkcije. Koristeći van der Corput-ove rezultate o neutriksu, engleski matematičar B. Fisher je osamdesetih godina definisao neutriks proizvod i neutriks konvoluciski proizvod. Pokazalo se da tako uvedene operacije postoje za šire klase parova distribucija. Može se smatrati da je ova disertacija deo razvitka u tom smeru. Delimično je proširenje ranijih radova Fisher-a, Kuribayashi-a, Itano-a i drugih.

U prvom delu disertacije biće dat pregled osnovnih pojmova teorije distribucija i osnovni pojmovi o neutriks računu.

Dalje, u drugoj glavi, nakon definicije neutriks proizvoda distribucija, dati su dovoljni uslovi za egzistenciju neutriks proizvoda distribucija $x_+^\lambda \ln^p x_+$ i $x_-^{-\lambda-r} \ln^q x_-$.

Treća glava disertacije posvećena je konvolucionom proizvodu distribucija. On može biti definisan na više načina. Jedna od najpoznatijih definicija je Gelfand-Shilov-a, a kasnije je Vladimirov dao i definicija bez ograničenje na nosač. Moguće je dokazati da ako su f i g dve lokalno integrabilne funkcije sa kompaktibilnim nosačima, onda njihovi konvolucioni proizvod postoji skoro svugde i ponovo je lokalno integrabilna funkcija. Konvolucioni proizvod funkcije f i g koincidira sa konvolucionim proizvodom ako su f i g posmatrane kao distribucije. Ipak za veliki broj parova distribucija ovaj proizvod ne postoji. U 1987. godine definisan je neutriks konvolucioni proizvod $f \boxed{*} g$ tako da postoji za veću klasu parova distribucija. Dalje, dati su dovoljni uslovi za egzistenciju neutriks konvolucionog proizvoda u kome učestvuje kosinusni integral $\mathrm{Ci}(x)$, (sinusni integral $\mathrm{Si}(x)$) kako i njegove asocirane funkcije $\mathrm{Ci}(x)_+$ i $\mathrm{Ci}(x)_-$, $(\mathrm{Si}(x)_+$ i $\mathrm{Si}(x)_-)$. Posebno se obradjuje i neutriks konvolucioni proizvod distribucija $x_+^\lambda L(x)$ i x_-^μ koje su definisane preko sporo, odnosno regularno promenljivih funkcija.

Četvrta glava bavi se kompozicijom distribucija u neutriks smislu. Razmatrane su distribucije $\operatorname{sgn} x|x|^{-\lambda}$ i $|x|^{(2r+1)/\lambda}$ i dobijeni su dovoljni uslovi za egzistenciju njihove kompozicije. Pored toga proučene su i kompozicije $\left(|x|^{r-1/2}\right)^{-4s}$ i $\left(\operatorname{sgn}|x|^{r-1/2}\right)^{-4s+2}$.

U pettoj glavi disertacije razmatra se Colombeau-ova teorija uopštenih funkcija i njena primena na rešavanje jedne klase nelinearnih običnin diferencijalnih jednačina.

Napomenimo da su neki od rezultata iz 2.,3. i 4. glave publikovani u radovima [21],[41],[42],[43],[44], [45] i [46].

Na kraju je dat i spisak literature koja je korišćena prilikom pisanja ovog rada.

Svu zahvalnost za usmerenje ka ovom području istraživanja, neprestano vodjenje i pomoć, uz veoma objektivne kritike i konstruktivne sugestije, dugujem profesorima dr Arpad Takači i dr Brian Fisher. Zahvaljujem se takodje na korisnim savetima profesorima dr S.Pilipović-u, dr D. Perišić i dr B. Jovanović-u.

Glava 1

Osnovni pojmovi

Prvi matematičar koji je koristio distribucije u eksplicitnom, i sada prihvaćenom obliku, bio je S. L. Sobolev u 1936 godine, kada je proučavao jedinstvenost rešenja Košievog problema za linearne hiperbolične jednačine. U 1950-1951, Schwartz publikovao je monografiju "Teorija distribucija". Ova teorija imala je dva važna efekta u matematičkoj analizi. Prvo, dala je matematičko opravdanje brojnim formalnim računima koji su bili veoma česti u tehničkoj literaturi. Drugo, i važnije, otvorila je nove prostore za matematičko istraživanje, naročito u oblastima kao što su: obične i parcijalne diferencijalne jednačine, teorija transformacija, funkcionalna analiza, i druge. U svojoj knjizi Schwartz je sistematizirao teoriju distribucija koristeći osnove teorije linearnih topoloških prostora. Dve do tri godine nakon pojavljivanja njegove knjige, teorija distribucija doživela je veliku popularnost. Neki matematičari veruju da je teorija distribucija jedna od najvećih dostignuća 20-tog veka. Oni misle da je to kompletiranje diferencijalnog računa, kao što je bila i Lebesgue-ova teorija integracije.

Neki tipovi distribucija (kao δ-funkcija i njene izvode), korišćeni su u fizičke i inženerske nauke neko vreme pre pojave teorija distribucija. Zaista, δ-funkciju prvi je definisao njemački matematičar Kirchoff [49] sa

$$\delta(x) = \lim_{\mu\to\infty} \pi^{-1/2}\mu \exp(-\mu^2 x^2).$$

Jasno, $\delta(x) = 0$ za $x \neq 0$ i $\delta(0) = \infty$. Isto, definisao je

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(t)\, dt = \lim_{\mu\to\infty} \pi^{-1/2}\mu \int_{-\infty}^{x} \exp(-\mu^2 t^2)\, dt,$$

odakle sledi da

$$\int_{-\infty}^{x} \delta(t)\,dt = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

U ovom obliku jasno je da δ-funkcija nije funkcija u uobičajenom smislu.

Heaviside-ova funkcija H, definisana je sa

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}.$$

Analizirajući ovu funkciju, Heaviside je zaključio da je njen izvod jednak, u nekom smislu, δ-funkciji.

Kasnije, Dirak je smatrao da je δ-funkcija jednaka nuli, svugde osim u nuli, gde je beskonačna i zadovoljava relaciju

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1.$$

1.1 Distribucije

Definicija 1.1 *Neka je $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ otvoren skup. Nosač neprekidne funkcije $f : \Omega \to \mathbf{R}$ je adheretan skup za skup $\{x \in \Omega; f(x) \neq 0\}$. Nosač funkcije skraćeno označimo sa $\mathrm{supp} f$.*

Definicija 1.2 *Test funkcija $\varphi : \Omega \to \mathbf{C}$ je beskonačno diferencijabilna funkcija sa kompaktnim nosačem. Skup svih test funkcija je vektorski prostor, kojeg označavamo sa $\mathcal{D}(\Omega)$.*

Posebno, ako je $\Omega = \mathbf{R}$, onda odgovarajući prostor označavamo sa $\mathcal{D}$. Primer test funkcije u $\mathcal{D}$ je:

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ \exp \frac{1}{x^2-1} & |x| < 1 \end{cases}. \tag{1.1}$$

Lako je pokazati da svaki izvod ove funkcije postoji i da je jednak nuli za $x = \pm 1$.

Definicija 1.3 *Neka je $\{\varphi_n\}$ niz test funkcija u $\mathcal{D}(\Omega)$. Niz $\{\varphi_n\}$ konvergira ka nuli ako postoji otvoreni interval (a, b) sa* $\mathrm{supp}\varphi_n \subseteq (a, b)$ *za svako $n \in \mathbf{N}$, tako da $\lim_{n\to\infty} \varphi_n^{(r)}(x) = 0$ za sve $x \in \Omega$ i $r = 0, 1, 2, \cdots$. Ako je f linearna funkcionela nad $\mathcal{D}(\Omega)$ onda njenu vrednost za $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ označavamo sa $\langle f, \varphi \rangle$.*

Neka je f linearna funkcionela nad $\mathcal{D}(\Omega)$. Onda, f je neprekidna ako $\lim_{n\to\infty}\langle f, \varphi_n\rangle = 0$ gde je $\{\varphi_n\}$ niz u $\mathcal{D}(\Omega)$ koji konvergira ka nuli.

Definicija 1.4 *Neprekidna linearna funkcionela nad $\mathcal{D}(\Omega)$ naziva se distribucija. Skup svih distribucija je vektorski prostor i označava se sa $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Jedan od načina da dobijemo distribuciju je sledeći. Neka je $f(x)$ lokalno integrabilna funkcija. Tada definiramo distribuciju koja odgovara funkciji f sa konvergentnim integralom

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle f(x), \varphi(x)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx. \tag{1.2}$$

Jasno je da je (1.2) linearna funkcionela. Neprekidnost može biti dokazana na sledeći način. Neka je $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ niz test funkcija koja konvergira ka $\varphi(x)$ u $\mathcal{D}$. Posmatrajmo

$$\begin{aligned} |\langle f, \varphi\rangle - \langle f, \varphi_n\rangle| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\varphi(x) - \varphi_n(x)\right] dx\right| \\ &\leq \int_a^b |f(x)||\varphi(x) - \varphi_n(x)|dx \end{aligned} \tag{1.3}$$

gde su a i b realni brojevi izabrani tako da su $\varphi(x)$ i $\varphi_n(x)$ jednaki nuli izvan intervala $a < x < b$. Za $\epsilon > 0$, postoji dovoljno veliko n_0 tako da za $n \geq n_0$ važi $|\varphi(x) - \varphi_n(x)| < \epsilon$. Zamenujući ovu nejednakost u (1.3) i koristeći činjenicu da $\int_a^b f(x)dx$ postoji, dobijamo da

$$\lim_{n\to\infty} |\langle f, \varphi\rangle - \langle f, \varphi_n\rangle| = 0,$$

šta smo i hteli pokazati.

Distribucije koje dobijamo iz lokalno integrabilnih funkcija pomoću relacije (1.2) nazivamo *regularnim distribucijama.* Činjenica je da su dve neprekidne funkcije koje daju jednu regularnu distribuciju, identične. Znači, svaka test funkcija na jedinstveni način daje regularnu distribuciju, t.j., $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$.

Primer distribucije koja nije regularna je δ-funkcija, definirana jednačinom:

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0). \tag{1.4}$$

Ovako definisana δ-funkcija je neprekidna linearna funkcionela nad $\mathcal{D}$. Ali, ova distribucija ne može se dobiti iz neke lokalno integrabilne funkcije pomoću relacije (1.2). Ako takva lokalno integrabilna funkcija postoji onda bi imali

$$\varphi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\varphi(x)dx, \tag{1.5}$$

za sve $\varphi(x) \in \mathcal{D}$. Ako izaberemo $\varphi(x)$ da bude $\zeta(x/a)$, gde je $a > 0$ i ζ je funkcija iz primera (1.1), iz (1.5) dobijamo

$$\frac{1}{e} = \int_{-a}^{a} \delta(x) \exp \frac{1}{a^2 - x^2} dx. \tag{1.6}$$

Ako je $\delta(x)$ lokalno integrabilna funkcija, onda bi prema Lebesgue-ovoj teoremi o konvergenciji dobili da desna da desna strana (1.6) konvergira ka nuli kada $a \to 0$. Ovo je kontradikcija. Zato δ-funkcija nije regularna distribucija. Sve distribucije koje nisu regularne nazivaju se *singularne distribucije.*

Definicija 1.5 *Niz distribucija $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira u $\mathcal{D}'$, ako za svako $\varphi \in \mathcal{D}$ brojni niz $\{\langle f_n, \varphi\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira u običnom smislu. Granica nize $\{\langle f_n, \varphi\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ koju označavamo sa $\langle f, \varphi\rangle$ definira funkcionelu f nad $\mathcal{D}$. Kažemo da je f granica u $\mathcal{D}'$ nize $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, t.j.,* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

Kako nije očigledno da je f distribucija, dajemo sledeću poznatu teoremu:

Teorema 1.1 *Ako niz distribucija $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira u $\mathcal{D}'$ ka funkcioneli f, tada je f takodje distribucija.*

Da bi definisali izvod distribucije, prvo ćemo razmatrati regularnu distribuciju $f(x)$ dobijenu iz funkcije koja je diferencijabilna svugde i ima neprekidni izvod. Njen izvod generira regularnu distribuciju $f'(x)$ i za svako φ u $\mathcal{D}$ parcijalnom integracijom dobijamo

$$\langle f', \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = \langle f, -\varphi'\rangle. \tag{1.7}$$

Primetimo da je φ' u $\mathcal{D}$ kade je φ u $\mathcal{D}$. Znači sa (1.7) definisana je f' kao funkcionela nad $\mathcal{D}$.

Definicija 1.6 *Prvi izvod $f'(x)$, proizvoljne distribucije $f(x)$ je funkcionela nad $\mathcal{D}$ data sa*

$$\langle f'(x), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), -\varphi'(x)\rangle.$$

Teorema 1.2 *Ako niz distribucija* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergira ka* f, *tada niz distribucija* $\left\{f_n^{(k)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergira ka* $f^{(k)}$ *za* $k = 1, 2, \ldots$.

Primer 1.1 Pokažimo da je izvod distribucije koja definiše Heaviside-ova funkcija, δ-distribucija. Za svako φ u $\mathcal{D}$ važi

$$\langle H'(x), \varphi(x)\rangle = -\langle H(x), \varphi'(x)\rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x)\rangle.$$

Primer 1.2 Neka je x_+ lokalno integrabilna funkcija definisana sa

$$x_+ = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}.$$

Tada je njen izvod Heaviside-ova funkcija H, jer

$$-\langle x_+, \varphi'(x)\rangle = -\int_0^{\infty} x\varphi'(x)\,dx = -x\varphi(x)\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx = \langle H(x), \varphi(x)\rangle.$$

Primer 1.3 Neka je x_+^{λ} $(\lambda > -1)$ lokalno integrabilna funkcija definisana sa

$$x_+^{\lambda} = \begin{cases} x^{\lambda}, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Ako je $\lambda > 0$ onda njen izvod je lokalno integrabilna funkcija $\lambda x_+^{\lambda-1}$, ali ako $-1 < \lambda < 0$, onda $x_+^{\lambda-1}$ nije lokalno integrabilna funkcija i, i dalje ćemo smatrati da $(x_+^{\lambda})' = \lambda x_+^{\lambda-1}$ ali izvod mora biti definisan sa

$$\begin{aligned}\langle (x_+^{\lambda})', \varphi(x)\rangle &= -\langle x_+^{\lambda}, \varphi'(x)\rangle = -\int_0^{\infty} x^{\lambda} d[\varphi(x) - \varphi(0)] \\ &= \lambda \int_0^{\infty} x^{\lambda-1}[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx.\end{aligned}$$

Zato, ako $-2 < \lambda < -1$ onda treba definisati x_+^{λ} sa

$$\langle x_+^{\lambda}, \varphi(x)\rangle = \int_0^{\infty} x^{\lambda}[\varphi(x) - \varphi(0)]\,dx.$$

U opštem slučaju indukcijom može biti pokazano da ako $-r-1 < \lambda < -r$, onda

$$\langle x_+^{\lambda}, \varphi(x)\rangle = \int_0^{\infty} x^{\lambda}\Big[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{x^i}{i!}\varphi^{(i)}(0)\Big]\,dx.$$

Primer 1.4 Lokalno integrabilna funkcija $\ln x_+$ definisana je sa

$$\ln x_+ = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Definirajmo distribuciju x_+^{-1} tako da bude izvod funkcije $\ln x_+$.. Zato

$$\begin{aligned}
\langle x_+^{-1}, \varphi(x)\rangle &= \langle (\ln x_+)', \varphi(x)\rangle = -\langle \ln x_+, \varphi'(x)\rangle \\
&= -\int_0^1 \ln x d\Big[\varphi(x) - \varphi(0)\Big] - \int_1^\infty \ln x d\varphi(x) \\
&= \int_0^1 x^{-1}\Big[\varphi(x) - \varphi(0)\Big]\, dx + \int_1^\infty x^{-1}\varphi(x)\, dx \\
&= \int_0^\infty x^{-1}\Big[\varphi(x) - \varphi(0)H(1-x)\Big]\, dx.
\end{aligned}$$

Takodje, definirajmo distribuciju x_+^{-r} pomoću indukcije sa

$$x_+^{-r} = (-r+1)^{-1}(x_+^{-r+1})'$$

za $r = 2, 3, \cdots$, ([14]), a ne kao što je definirana u Gel'fand i Shilov [35]. Ako označimo Gelfand-Shilov-ovu definiciju $x_+{}^{-r}$ sa $F(x_+, -r)$, onda sledi da

$$x_+^{-r} = F(x_+, -r) + \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\phi(r-1)\delta^{(r-1)}(x)$$

za $r = 2, 3, \cdots$, gde

$$\phi(r) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} i^{-1}, & r = 1, 2, \cdots \\ 0, & r = 0 \end{cases}.$$

Indukcijom može biti pokazano da

$$\begin{aligned}
\langle x_+^{-r}, \varphi(x)\rangle &= \int_0^\infty x^{-r}\Big[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{r-2}\frac{x^i}{i!}\varphi^{(i)}(0) - \frac{x^{r-1}}{(r-1)!}\varphi^{(r-1)}(0)H(1-x)\Big]\, dx - \\
&- \frac{1}{(r-1)!}\phi(r-1)\varphi^{(r-1)}(0)
\end{aligned}$$

za $r = 2, 3, \cdots$. (Fisher, [14])

Neka je sada f lokalno integrabilna funkcija. Onda

$$\begin{aligned}
\langle f(-x), \varphi(x)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(-x)\, dx \\
&= \langle f(x), \varphi(-x)\rangle.
\end{aligned}$$

Ovo sugerira sledeću defuniciju:

Definicija 1.7 *Neka je f proizvoljna distribucija. Onda $f(-x)$ je distribucija definisana sa*

$$\langle f(-x), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), \varphi(-x)\rangle.$$

Primer 1.5 Distribucija x_-^λ definisana sa $x_-^\lambda = (-x)_+{}^\lambda$ tako da

$$\langle x_-^\lambda, \varphi(x)\rangle = \langle x_+^\lambda, \varphi(-x)\rangle.$$

Zato

$$\langle x_-^\lambda, \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty x^\lambda \varphi(-x)\,dx,$$

za $\lambda > -1$, i

$$\langle x_-^\lambda, \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty x^\lambda \Big[\varphi(-x) - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-x)^i}{i!}\varphi^{(i)}(0)\Big]\,dx,$$

za $-r-1 < \lambda < -r$. Dalje,

$$\langle x_-^{-1}, \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty x^{-1}\Big[\varphi(-x) - \varphi(0)H(1-x)\Big]\,dx,$$

i

$$\begin{aligned}\langle x_-^{-r}, \varphi(x)\rangle &= \int_0^\infty x^{-r}\Big[\varphi(-x) - \sum_{i=0}^{r-2}\frac{(-x)^i}{i!}\varphi^{(i)}(0) - \\ &- \frac{(-x)^{r-1}}{(r-1)!}\varphi^{(r-1)}(0)H(1-x)\Big]\,dx + \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\phi(r-1)\varphi^{(r-1)}(0)\end{aligned}$$

za $r = 2, 3, \cdots$.

Definicija 1.8 *Definirajmo nekoliko različitih distribucija*

(i) $|x|^\lambda = x_+^\lambda + x_-^\lambda$;

(ii) $\mathrm{sgn} x|x|^\lambda = x_+^\lambda - x_-^\lambda$;

(iii) $x^r = x_+^r + (-1)^r x_-^r$, *za* $r = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

Specijalno

$$\langle x^{-2r}, \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty x^{-2r}\Big[\varphi(x) + \varphi(-x) - 2\sum_{i=0}^{r-1}\frac{x^{2i}}{(2i)!}\varphi^{(2i)}(0)\Big]\,dx$$

i

$$\langle x^{-2r+1}, \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty x^{-2r+1}\Big[\varphi(x) - \varphi(-x) - 2\sum_{i=0}^{r-1}\frac{x^{2i-1}}{(2i-1)!}\varphi^{(2i-1)}(0)\Big]\,dx$$

za $r = 1, 2, \cdots$. Sledi da ako $\ln|x| = \ln x_+ + \ln x_-$, onda

$$(\ln|x|)' = x^{-1}, \quad (x^{-r})' = -rx^{-r-1}$$

za $r = 1, 2, \cdots$, [35].

Definicija 1.9 *Niz funkcija $\{f_n\}$ je nula-niz ako važi:*

(i) nosač funkcije f_n je u neki fiksirani domen $\mathcal{D}$ nezavisno od $n \in \mathbf{N}$,

(ii) niz $\{f_n^{(m)}\}$ uniformno konvergira ka nuli u $\mathcal{D}$, kada n teži ka beskonačnosti, za svako m.

Definicija 1.10 *Niz funkcija $\{f_n\}$ je regularna ako*

(i) f_n je beskonačno diferencijabilna za sve $n \in \mathbf{N}$,

(ii) niz $\{\langle f_n, \varphi\rangle\}$ konvergira ka $\langle f, \varphi\rangle$ za svaku test funkciju $\varphi \in \mathcal{D}$, i

(iii) $\langle f, \varphi\rangle$ je neprekidna u smislu $\lim_{n\to\infty}\langle f, \varphi_n\rangle = 0$ za svaki nula-niz test funkcija $\{\varphi_n\}$. (Temple [65])

Definicija 1.11 *Dve regularne nize $\{g_n\}$ i $\{h_n\}$ su ekvivalentne ako*

$$\lim_{n\to\infty}\langle g_n - h_n, \varphi\rangle = 0$$

za svaku test funkciju $\varphi \in D$.

1.2 Neutriks račun

U 1932, Hadamard je posmatrao divergentni integral

$$\int_0^1 \frac{A(x)}{x^{p+1/2}}\,dx, \tag{1.8}$$

gde je p prirodni broj ili nula, a $A(x)$ beskonačno diferencijabilna funkcija. Onda je razdvoio integral

$$\int_\epsilon^1 \frac{A(x)}{x^{p+1/2}}\,dx,$$

$\epsilon > 0$, na dva dela, i to

$$F(\epsilon) = \int_\epsilon^1 \frac{A(x) - B(x)}{x^{p+1/2}}\,dx$$

i

$$I(\epsilon) = \int_{\epsilon}^{1} \frac{B(x)}{x^{p+1/2}}\, dx,$$

gde je

$$B(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{A^{(i)}(0)}{i!} x^i.$$

Integral $F(\epsilon)$ teži ka konačnoj granici $F(0)$ kada ϵ teži ka 0, i integral $I(\epsilon)$ divergira kada ϵ teži ka nuli. Definisao je $F(0)$ kao *finite part (konačni deo)* integrala (1.8), t.j.,

$$\text{f.p.} \int_0^1 \frac{A(x)}{x^{p+1/2}}\, dx = F(0).$$

Dalje,

$$I(\epsilon) \;=\; -\sum_{i=0}^{p-1} \frac{A^{(i)}(0)}{i!(p-i-\frac{1}{2})} + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{A^{(i)}(0)\epsilon^{-p+i+\frac{1}{2}}}{i!(p-i-\frac{1}{2})} = K + I_1(\epsilon),$$

i divergentni integral

$$\int_0^1 \frac{B(x)}{x^{p+1/2}}\, dx$$

ima konačni dio K i divergentni dio $I_1(\epsilon)$. Dobili smo da

$$\text{f.p.} \int_0^1 \frac{B(x)}{x^{p+1/2}}\, dx = K$$

pa se postavlja pitanje da li je Hadamard trebao napisati

$$\text{f.p.} \int_0^1 \frac{A(x)}{x^{p+1/2}}\, dx = F(0) + K\ ?$$

Proučavajući asimptotska ponašanja funkcija, van der Corput [6], sreo se sa sličnim problemima. Neke funkcije koje je dobio prosto je zanemario. Naravno nazvao je te funkcije zanemarljivim, i tako razvio neutriks račun. U disertaciji, koristićemo neutriks račun za računanje neutriks proizvode, neutriks konvolucionih proizvoda i kompozicije distribucija.

Definicija 1.12 *Neka je N' skup i neka je N komutativna aditivna grupa funkcija koje preslikavaju N' u komutativnu aditivnu grupu N''. Ako je nulta funkcija jedina konstantna funkcija u N, onda N nazivamo neutriks, a funkcije u N zanemarljive funkcije.*

Primer 1.6 Neka je N' zatvoreni interval $[0,1] = \{x : 0 \leq x \leq 1\}$ i neka je N skup svih funkcija definisanih na N' oblika

$$a \sin x + bx^2,$$

gde su a i b proizvoljni realni brojevi. Onda je N neutriks, jer ako

$$a \sin x + bx^2 = c$$

za svako $x \in N'$, onda $a = b = c = 0$.

Sada, pretpostavimo da je N' potprostor topološkog prostora X i da postoji granična tačka y koja ne pripada u N'. Dalje, neka je N'' polje realnih (kompleksnih) brojeva i neka je N komutativna, aditivna grupa funkcija koje preslikavaju N' u N'' sa svojstvom da ako N sadrži funkciju f koja konvergira ka konačnoj granici c, kada x teži ka y, onda $c = 0$. U tom slučaju N je neutiks, jer ako je f u N i $f(x) = c$ za sve x u N', onda $f(x)$ konvergira ka konačnoj granici c kada x teži ka y i tako $c = 0$.

Definicija 1.13 *Neka je $f : N' \to \mathbf{R}$ ili $(f : N' \to \mathbf{C})$ i neka postoji konstanta c takva da je $f(x) - c$ zanemarljiva funkcija u N. Onda se c naziva neutriks granica ili N-granica funkcije f, kada x teži ka y, tj ,*

$$\mathrm{N}-\lim_{x \to y} f(x) = c.$$

Primetimo da ako neutriks granica c postoji, onda je ona jedinstvena, jer ako $f(x) - c$ i $f(x) - c'$ su u N, tada konstantna funkcija $c - c'$ je isto u N pa $c = c'$.

Ako je N neutriks koji sadrži skup svih funkcija koje konvergiraju ka nuli u normalnim smislu, kada x teži ka y, onda

$$\lim_{x \to y} f(x) = c \quad \Rightarrow \quad \mathrm{N}-\lim_{x \to y} f(x) = c.$$

Primer 1.7 Neka je N' skup i neka je N skup svih funkcija definisanih nad N' koje konvergiraju ka nuli u običnim smislu kada x teži ka y. Onda je N neutriks i neutriks granica je ista kao i uobičajena granica kada x teži ka y.

Primer 1.8 Neka je N' otvoreni interval $(0,1) = \{\epsilon : 0 < \epsilon < 1\}$, $y = 0$ i neka je N skup svih funkcija definisanih nad N' oblika

$$a \ln \epsilon + b\epsilon^{-1} + o(\epsilon),$$

gde su a i b proizvoljni realni brojevi i $o(\epsilon)$ je proizvoljna funkcija koja konvergira ka nuli kada ϵ teži ka nuli. Onda

$$f(\epsilon) = \ln \epsilon + 2\epsilon^{-1} - \cos \epsilon - 1 = \ln \epsilon + 2\epsilon^{-1} - (\cos \epsilon - 1) - 2,$$

gde je

$$\ln \epsilon + 2\epsilon^{-1} - (\cos \epsilon - 1)$$

zanemarljiva funkcija. Sledi da neutriks granica $f(\epsilon)$, kada ϵ teži ka nuli, postoji i

$$N - \lim_{\epsilon \to 0} f(\epsilon) = -2.$$

U sledećim primerima neutriks N koji koristimo ima domen N', koji se sastoji od pozitivnih realnih brojeva, kodomen N'', koji se sastoji od realnih brojeva, i zanemarljive funkcije koje su konačne linearne sume funkcija

$$\epsilon^{\lambda} \ln^{r-1} \epsilon, \quad \ln^r \epsilon \quad (\lambda < 0, \quad r = 1, 2, \cdots) \tag{1.9}$$

zajedno sa svim funkcijama koje konvergiraju ka nuli u običnom smislu kada ϵ teži ka 0.

Primer 1.9 Gama funkcija $\Gamma(\lambda)$ je definisana za $\lambda > 0$ sa

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{-t}\, dt$$

i za $-r < \lambda < -r+1, r \in \mathbf{N}$, sa

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} \Big[e^{-t} - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-t)^i}{i!}\Big]\, dt.$$

Primetimo da

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^{\infty} t^{\lambda-1} e^{-t}\, dt &= \int_{\epsilon}^{\infty} t^{\lambda-1} [e^{-t} - \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-t)^i}{i!}]\, dt + \\ &- \sum_{i=0}^{r-1} \frac{(-1)^i \epsilon^{\lambda+i}}{i!(\lambda+i)}, \end{aligned}$$

pa sledi da

$$\Gamma(\lambda) = \mathrm{N}-\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}\,dt = \mathrm{f.p.} \int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}\,dt,$$

gde f.p. $\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}\,dt$ označava Hadamard-ov konačni dio od $\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{-t}\,dt$. Lako je pokazati da

$$\Gamma^{(r)}(\lambda) = \mathrm{N}-\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^\infty t^{\lambda-1}\ln^r te^{-t}\,dt = \mathrm{f.p.} \int_0^\infty t^{\lambda-1}\ln^r te^{-t}\,dt,$$

za $\lambda \neq 0,-1,-2,\cdots$ i $r = 0,1,2,\cdots$. Ova neutriks granica definira $\Gamma^{(r)}(\lambda)$ za $\lambda = 0,-1,-2,\cdots$ i $r = 0,1,2,\cdots,$. (Fisher i Kuribayashi [29])

Primer 1.10 Beta funkcija obično definisana je sa

$$B(\lambda,\mu) = \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^{\mu-1}\,dt$$

za $\lambda,\mu > 0$. Za njeno uopštenje

$$B_{r,s}(\lambda,\mu) = \frac{\partial^{r+s}}{\partial\lambda^r\partial\mu^s}B(\lambda,\mu),$$

Fisher i Kuribayashi [28]) su pokazali da

$$B_{r,s}(\lambda,\mu) = \mathrm{N}-\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^{1-\epsilon} t^{\lambda-1}\ln^r t(1-t)^{\mu-1}\ln^s(1-t)\,dt$$

za $\lambda,\mu \neq 0,-1,-2,\cdots$ i $r,s = 0,1,2,\cdots$. Ova neutriks granica definira $B_{r,s}(\lambda,\mu)$ za $\lambda,\mu = 0,-1,-2,\cdots$ i $r,s = 0,1,2,\cdots$.

Na kraju, primetimo da pri promeni skupa zanemarljivih funkcija, menja se i neutriks granica. Recimo, ako pogledamo Hadamard-ov integral (1.8), onda važi

$$\int_\epsilon^1 \frac{A(x)}{x^{p+1/2}}\,dx = \int_\epsilon^1 \frac{A(x)-B(x)}{x^{p+1/2}}\,dx + \sum_{i=0}^{p-1} \frac{A^{(i)}(0)}{i!(p-i-\frac{1}{2})}(\epsilon^{-p+i+1/2}-1).$$

Koristeći skup zanemarlivih funkcija (1.9) sledi

$$\mathrm{N}-\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 \frac{A(x)}{x^{p+1/2}}\,dx = F(0)+K.$$

Ali, ako se skup zanemarljivih funkcija sastoji iz

$$(\epsilon^\lambda - 1)\ln^{r-1}\epsilon, \ln^r\epsilon \quad (\lambda < 0, r = 1,2,\cdots) \tag{1.10}$$

dobijamo

$$\mathrm{N}-\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 \frac{A(x)}{x^{p+1/2}}\,dx = F(0).$$

Glava 2

Neutriks proizvod distribucija

U ovoj glavi disertacije biće definisan neutriks proizvod distribucija $f \circ g$, a zatim dati su dovoljni uslovi za egzistenciju neutriks proizvoda $(x_+^\lambda \ln^p x_+) \circ (x_-^{-\lambda-r} \ln^q x_-)$. Rezultati su i publikovani u [41].

2.1 Osnovne definicije

Proizvod proizvoljnih distribucija sa beskonačno diferencijabilnom funkcijom definisan je na sledeći način.

Definicija 2.1 *Neka je f distribucija i neka je g beskonačno diferencijabilna funkcija. Onda proizvod $fg = gf$ definisan je sa*

$$\langle fg, \varphi \rangle = \langle gf, \varphi \rangle = \langle f, g\varphi \rangle$$

za svako φ u $\mathcal{D}$.

Neka sada $f, g \in C^r$. Indukcijom je lako pokazati da

$$f^{(r)}g = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i \left[f g^{(i)} \right]^{(r-i)}$$

za $r = 1, 2, \cdots$. Ovo sugerira sledeće proširenje definicije 2.1.

Definicija 2.2 *Neka je f r-ti izvod lokalno integrabilne funkcije F iz $L^p(a,b)$ i neka je $g^{(r)}$ lokalno integrabilna funkcija u $L^q(a,b)$ gde $1/p+1/q=1$. Onda, proizvod $fg = gf$ na intervalu (a,b) definisan je na sledeći način*

$$fg = gf = \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^i \left[F g^{(i)} \right]^{(r-i)}.$$

Ovako definisan proizvod u opštem slučaju nije asocijativan. (Schwartz [64].)

Dalje, neka je $\rho(x)$ fiksirana beskonačno diferencijabilna funkcija u $\mathcal{D}$ sa sledećim svojstvima:

(i) $\rho(x) = 0$ za $|x| \geq 1$;

(ii) $\rho(x) \geq 0$;

(iii) $\rho(x) = \rho(-x)$; i

(iv) $\int_{-1}^{1} \rho(x)\, dx = 1$.

Primer 2.1 Funkcija ρ može biti definisana na sledeći način:

$$\rho(x) = \begin{cases} k \exp\{-(1-x^2)^{-1}\} & \text{za } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{za } |x| \geq 1, \end{cases}$$

gde je

$$k^{-1} = \int_{-1}^{1} \exp\left\{-(1-t^2)^{-1}\right\} dt.$$

Definirajmo funkciju δ_n sa $\delta_n(x) = n\rho(nx)$, $n = 1, 2, \cdots$. Sledi da je $\{\delta_n\}$ regularni niz beskonačno diferencijabilnih funkcija koja konvergira ka dirakovu δ-funkciju. Sada, neka je f proizvoljna distribucija u $\mathcal{D}'$. Definiramo funkciju f_n sa

$$f_n(x) = f * \delta_n(x) = \langle f(t), \delta_n(x-t) \rangle,$$

$n = 1, 2, \cdots$. Sledi da je $\{f_n\}$ regularni niz beskonačno diferencijabilnih funkcija koja konvergiraja ka distribucii f.

Fisher je u [13] uopštio definiciju 2.1 na sledeći način:

Definicija 2.3 *Neka su f i g proizvoljne distribucije u $\mathcal{D}'$ i neka*

$$f_n(x) = (f * \delta_n)(x), \quad g_n = (g * \delta_n)(x).$$

Proizvod $f \cdot g$ distribucija f i g postoji i jednak je distribuciji h na intervalu (a, b) ako $\{f_n g_n\}$ je regularni niz koja konvergira ka h na otvorenom intervalu (a, b).

Ovaj proizvod je očigledno komutativan, ako postoji. Kasnije, u [15], Fisher je ovako definisao nekomutativni proizvod distribucija:

Definicija 2.4 *Neka su f i g distribucije u $\mathcal{D}'$ i neka je $g_n(x) = (g * \delta_n)(x)$. Kažemo da proizvod $f \cdot g$ distribucija f i g postoji i jednak je distribuciji h na intervalu (a, b) ako*

$$\lim_{n \to \infty} \langle f(x) g_n(x), \varphi(x) \rangle = \langle h(x), \varphi(x) \rangle,$$

za svako $\varphi \in \mathcal{D}$ sa nosačem u intervalu (a, b).

U [15] dokazano je da ako proizvod fg postoji prema Definiciji 2.2 onda postoji i proizvod $f \cdot g$ prema Definiciji 2.4 i važi $fg = f \cdot g$.

Definicija 2.4 uopštio je Fisher u [16] na sledeći način:

Definicija 2.5 *Neka su f i g distribucije u $\mathcal{D}'$ i neka je $g_n(x) = (g * \delta_n)(x)$. Kažemo da neutriks proizvod $f \circ g$ distribucija f i g postoji i jednak je distribuciji h na intervalu (a, b) ako*

$$\mathrm{N}\!-\!\lim_{n \to \infty} \langle f(x) g_n(x), \varphi(x) \rangle = \langle h(x), \varphi(x) \rangle,$$

za sve funkcije $\varphi \in \mathcal{D}$ sa nosačem u intervalu (a, b), gde je N neutriks (van der Corput [6]) sa domenom $N' = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$, kodomenom skup realnih brojeva i zanemarljivim funkcijama koje su konačne linearne sume funkcija

$$n^{\lambda} \ln^{r-1} n, \quad \ln^r n : \quad \lambda > 0, \quad r = 1, 2, \cdots,$$

zajedno sa svim funkcijama koje konvergiraju ka nuli u običnom smislu kada n teži ka beskonačnosti.

Ova definicija o neutriks proizvodu je u opštim slučaju nekomutativna. Očigledno je da ako proizvod $f \cdot g$ postoji tada i neutriks proizvod $f \circ g$ postoji i $f \cdot g = f \circ g$.

2.2 Neutriks proizvod $(x_+^\lambda \ln^p x_+) \circ (x_-^{-\lambda-r} \ln^q x_-)$

Sledeće teoreme dokazane su u [15], [16] i [9].

Teorema 2.1 *[15] Neka su f i g distribucije i pretpostavimo da neutriks proizvodi $f \circ g$ i $f \circ g'$ postoje na intervalu (a, b). Onda neutriks proizvod $f' \circ g$ postoji i*

$$(f \circ g)' = f' \circ g + f \circ g'$$

na intervalu (a, b).

Teorema 2.2 *[16] Neutriks proizvod $x_+^\lambda \circ x_-^{-\lambda-r}$ postoji i*

$$x_+^\lambda \circ x_-^{-\lambda-r} = -\frac{\pi \operatorname{cosec}(\pi\lambda)}{2(r-1)!}\delta^{(r-1)}(x)$$

za $\lambda \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$ i $r = 1, 2, \ldots$.

Teorema 2.3 *[9] Neutriks proizvod $(x_+^\lambda \ln x_+) \circ x_-^{-\lambda-r}$ postoji i*

$$(x_+^\lambda \ln x_+) \circ x_-^{-\lambda-r} = -\frac{\pi \operatorname{cosec}(\pi\lambda)}{2(r-1)!}[2c(\rho) + \psi(\lambda + r) - \Gamma'(1)]\delta^{(r-1)}(x)$$

za $\lambda \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$ i $r = 1, 2, \ldots$, gde je Γ Gama funkcija i

$$\psi(\lambda + r) = \frac{\Gamma'(\lambda + r)}{\Gamma(\lambda + r)}, \qquad c(\rho) = \int_0^1 \ln t\rho(t)dt.$$

Sledeća teorema pretstavlja uopštenje rezultata prethodne dve.

Teorema 2.4 *Neutriks proizvod $(x_+^\lambda \ln^p x_+) \circ (x_-^{-\lambda-r} \ln^q x_-)$ postoji kada važi: $\lambda \neq 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $r = 1, 2, \ldots$ i $p, q = 0, 1, 2, \ldots$.*

Dokaz. Razmotrimo neutriks proizvod $(x_+^\lambda \ln^p x_+) \circ x_-^{-\lambda-r}$, gde je $s - 1 < \lambda < s$ i s nenegativni ceo broj. Onda su $x_+^\lambda \ln^p x_+$ i $x_-^{-\lambda+s-1}$ lokalno integrabilne funkcije i

$$x_-^{-\lambda-r} = \frac{\Gamma(\lambda - s + 1)}{\Gamma(\lambda + r)}(x_-^{-\lambda+s-1})^{(r+s-1)}.$$

Zato

$$(x_-^{-\lambda-r})_n = x_-^{-\lambda-r} * \delta_n(x) = \frac{\Gamma(\lambda - s + 1)}{\Gamma(\lambda + r)} \int_x^{1/n} (t - x)^{-\lambda+s-1}\delta_n^{(r+s-1)}(t)\, dt$$

za $r = 1, 2, \ldots$, i imamo

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\lambda+r)}{\Gamma(\lambda-s+1)} \int_{-\infty}^{\infty} & x_+^{\lambda} \ln^p x_+ (x_-^{-\lambda-r})_n x^m \, dx = \\
&= \int_0^{1/n} x^{\lambda+m} \ln^p x \int_x^{1/n} (t-x)^{-\lambda+s-1} \delta_n^{(r+s-1)}(t) \, dt \, dx \\
&= \int_0^{1/n} \delta_n^{(r+s-1)}(t) \int_0^t x^{\lambda+m} \ln^p x (t-x)^{-\lambda+s-1} \, dx \, dt \\
&= \int_0^{1/n} t^{m+s} \delta_n^{(r+s-1)}(t) \int_0^1 v^{\lambda+m} \ln^p(tv)(1-v)^{-\lambda+s-1} \, dv \, dt \\
&= \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} B_{j,0}(\lambda+m+1, -\lambda+s) \int_0^{1/n} t^{m+s} \ln^{p-j} t \delta_n^{(r+s-1)}(t) \, dt,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

pomoću smene $x = tv$, gde B označava Beta funkciju i

$$
B_{p,q}(\lambda, \mu) = \frac{\partial^{p+q}}{\partial^p \lambda \partial^q \mu} B(\lambda, \mu).
$$

Dalje, pomoću smene $nt = y$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
\int_0^{1/n} & t^{m+s} \ln^k t \delta_n^{(r+s-1)}(t) \, dt = \\
&= n^{r-m-1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \ln^j n \int_0^1 y^{m+s} \ln^{k-j} y \rho^{(r+s-1)}(y) \, dy
\end{aligned}
$$

za $m = 0, 1, 2, \ldots$. Sledi da

$$
\mathrm{N}\text{-}\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_+^{\lambda} \ln^p x_+ (x_-^{-\lambda-r})_n x^m \, dx = 0 \tag{2.2}
$$

za $m = 0, 1, 2, \ldots, r-2$.

Za $m = r-1$, lako je pokazati indukcijom da

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 y^{r+s-1} \rho^{(r+s-1)}(y) \, dy &= \tfrac{1}{2}(-1)^{r+s-1}(r+s-1)!, \\
\int_0^1 y^{r+s-1} \ln y \rho^{(r+s-1)}(y) \, dy &= (-1)^{r+s-1}(r+s-1)![\tfrac{1}{2}\phi(r+s-1) + c(\rho)],
\end{aligned}
$$

za $r + s = 1, 2, \ldots$, gde

$$
\phi(r) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{r} i^{-1}, & r = 1, 2, \ldots \\ 0, & r = 0 \end{cases}
$$

i

$$c(\rho) = \int_0^1 \ln t \rho(t)\, dt.$$

Neka sada

$$\int_0^1 y^{r+s-1} \ln^p y \rho^{(r+s-1)}(y)\, dy = c_{r+s,p}(\rho),$$

i iz (2.1) dobijamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_+^\lambda \ln^p x_+ (x_-^{-\lambda-r})_n x^{r-1}\, dx &= \\
&= \frac{\Gamma(\lambda - s + 1)}{\Gamma(\lambda + r)} \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} B_{j,0}(\lambda + r, -\lambda + s) c_{r+s,p-j}(\rho) \\
&= b_{r,p}(\lambda, \rho) \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

za $r = 1, 2, \ldots$ i za $p = 0, 1, 2, \ldots$.

Dalje, neka

$$K = \frac{\Gamma(\lambda - s + 1)}{\Gamma(\lambda + r)} \sup_x \{|\rho^{(r+s-1)}(x)|\}.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
|(x_-^{-\lambda-r})_n| &= \frac{\Gamma(\lambda - s + 1)}{\Gamma(\lambda + r)} \Big| \int_{nx}^{1} n^{\lambda+s+1} (u - nx)^{-\lambda+s-1} n^{r+s-1} \rho^{(r+s-1)}(u)\, du \Big| \\
&\le K n^{\lambda+r} \int_{nx}^{1+nx} (u - nx)^{-\lambda+s-1}\, du \\
&= \frac{K n^{\lambda+r}}{s - \lambda}
\end{aligned}$$

i tako za $m = r$ dobijamo

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |x_+^\lambda \ln^p x_+ (x_-^{-\lambda-r})_n x^r|\, dx &\le \frac{K}{s - \lambda} \int_0^{1/n} |\ln^p x|\, dx \\
&= O(n^{-1} \ln^p n). \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Neka je sada φ proizvoljna funkcija u $\mathcal{D}$. Onda

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{r-1} \frac{x^m}{m!} \varphi^{(m)}(0) + \frac{x^r}{r!} \varphi^{(r)}(\xi x),$$

gde $0 < \xi < 1$ i dobijamo

$$\begin{aligned}
\langle x_+^\lambda \ln^p x_+, (x_-^{-\lambda-r})_n \varphi(x) \rangle &= \sum_{m=0}^{r-1} \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} \int_{-\infty}^{\infty} x_+^\lambda \ln^p x_+ (x_-^{-\lambda-r})_n x^m\, dx + \\
&+ \frac{1}{r!} \int_{-\infty}^{\infty} x_+^\lambda \ln^p x_+ (x_-^{-\lambda-r})_n x^r \varphi^{(r)}(\xi x)\, dx.
\end{aligned}$$

Koristeći nejednakost (2.4) sledi

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} x_+^\lambda \ln^p x_+ (x_-^{-\lambda-r})_n x^r \varphi^{(r)}(\xi x)\, dx\right| = O(n^{-1}\ln^p n) \tag{2.5}$$

i iz jednačina (2.2), (2.3), (2.4) i (2.5) imamo da

$$\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\langle x_+^\lambda \ln^p x_+, (x_-^{-\lambda-r})_n, \varphi(x)\rangle = \frac{b_{r,p}(\lambda,\rho)}{(r-1)!}\varphi^{(r-1)}(0).$$

Ovo pokazuje da

$$(x_+^\lambda \ln^p x_+)\circ x_-^{-\lambda-r} = \frac{(-1)^{r-1}b_{r,p}(\lambda,\rho)}{(r-1)!}\delta^{(r-1)}(x) = a_{r,p,0}(\lambda,\rho)\delta^{(r-1)}(x) \tag{2.6}$$

za $\lambda > -1$, $\lambda \neq 0,1,2,\dots$, $r = 1,2,\dots$ i $p = 0,1,2,\dots$.

Sada pretpostavimo da je jednačina (2.6) tačna za neko p i sve $\lambda \neq 0,\pm1,\pm2,\dots$. Ovo je sigurno tačno za $p=0$ i $p=1$ prema teoremama 2.2 i 2.3. Isto tako, pretpostavimo da je jednačina (2.6) tačna za sve p kada $-s < \lambda < -s+1$. Ovo je tačno od onoga što smo malopre dokazali za $s=1$. Zato, kada $-s < \lambda < -s+1$, imamo

$$(x_+^\lambda \ln^{p+1} x_+)\circ x_-^{-\lambda-r} = a_{r,p+1,0}(\lambda,\rho)\delta^{(r-1)}(x). \tag{2.7}$$

Diferenciranjem jednačine (2.7) dobijamo

$$\begin{aligned}&[\lambda x_+^{\lambda-1}\ln^{p+1} x_+ + (p+1)x_+^{\lambda-1}\ln^p x_+]\circ x_-^{-\lambda-r} + \\ &\qquad + (\lambda+r)(x_+^\lambda \ln^{p+1} x_+)\circ x_-^{-\lambda-r-1} = a_{r,p+1,0}(\lambda,\rho)\delta^{(r)}(x)\end{aligned}$$

i iz naše pretpostavke dobijemo da

$$\begin{aligned}\lambda(x_+^{\lambda-1}\ln^{p+1} x_+)\circ x_-^{-\lambda-r} &= [a_{r,p+1,0}(\lambda,\rho) - (p+1)a_{r+1,p,0}(\lambda-1,\rho) - \\ &- (\lambda+r)a_{r+1,p+1,0}(\lambda,\rho)]\delta^{(r)}(x),\end{aligned}$$

čime smo pokazali da jednačina (2.6) važi za $p+1$ kada $-s-1 < \lambda < -s$. Indukcijom dobijamo da jednačina (2.6) važi za $p = 0,1,2,\dots$, $r = 1,2,\dots$ kada $\lambda \neq 0,\pm1,\pm2,\dots$.

Na kraju, pretpostavimo da

$$(x_+^\lambda \ln^p x_+)\circ (x_-^{-\lambda-r}\ln^q x_-) = a_{r,p,q}(\lambda,\rho)\delta^{(r-1)}(x) \tag{2.8}$$

za neko q kada $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $p = 0, 1, 2, \ldots$ i $r = 1, 2, \ldots$. Ovo je tačno za $q = 0$. Diferenciranjem jednačine (2.8) parcijalno u odnosu na λ dobijamo

$$(x_+^\lambda \ln^{p+1} x_+) \circ (x_-^{-\lambda-r} \ln^q x_-) - (x_+^\lambda \ln^p x_+) \circ (x_-^{-\lambda-r} \ln^{q+1} x_-) = \\ = \frac{\partial}{\partial \lambda} a_{r,p,q}(\lambda, \rho) \delta^{(r-1)}(x)$$

i iz pretpostavke imamo

$$(x_+^\lambda \ln^p x_+) \circ (x_-^{-\lambda-r} \ln^{q+1} x_-) = \left[a_{r,p+1,q}(\lambda, \rho) - \frac{\partial}{\partial \lambda} a_{r,p,q}(\lambda, \rho)\right] \delta^{(r-1)}(x).$$

Indukcijom dobijamo da jednačina (2.8) važi za $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $p, q = 0, 1, 2, \ldots$ i $r = 1, 2, \ldots$, čime smo kompletirali dokaz teoreme.

Posledica 2.1 *Neutriks proizvod* $(x_-^\lambda \ln^p x_-) \circ (x_+^{-\lambda-r} \ln^q x_+)$ *postoji kada važi:* $\lambda \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $r = 1, 2, \ldots$ *i* $p, q = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Zamenjujući x sa $-x$ u jednačini (2.8) dobijamo

$$(x_-^\lambda \ln^p x_-) \circ (x_+^{-\lambda-r} \ln^q x_+) = (-1)^{r-1} a_{r,p,q}(\lambda, \rho) \delta^{(r-1)}(x),$$

čime smo pokazali postojanje proizvoda $(x_-^\lambda \ln^p x_-) \circ (x_+^{-\lambda-r} \ln^q x_+)$.

Glava 3

Konvolucija distribucija

U ovoj glavi, na početku, biće definisan neutriks konvolucioni proizvod $f \boxed{*} g$. Dalje, dati su dovoljni uslovi egzistencija neutriks konvolucionog proizvoda u kome učestvuje kosinusni integral ili njegove asocirane funkcije. Slični rezultati dati su i za sinusni integral. Obradjuje se i neutriks konvolucioni proizvod distribucija $x_+^\lambda L(x)$ i x_-^μ koje su definisane preko sporo, odnosno regularno promenljivih funkcija. Rezultati su publikovani u [44], [46] i [45].

3.1 Neutriks konvolucioni proizvod

Klasična definicija konvolucionog proizvoda funkcija f i g data je sledećom definicijom:

Definicija 3.1 *Neka su f i g funkcije. Onda konvolucioni proizvod $f * g$ dat je sa*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,dt,$$

za sve tačke x za koje integral postoji.

Jasno je iz definicije da ako $f * g$ postoji onda $g * f$ postoji i

$$f * g = g * f, \tag{3.1}$$

i ako $(f * g)'$ i $f * g'$ (ili $f' * g$) postoji onda

$$(f * g)' = f * g' \quad (\text{ili } f' * g). \tag{3.2}$$

Definicija 3.1 može biti proširena da definira konvolucioni proizvod $f * g$ dve distribucije f i g iz $\mathcal{D}'$ sa sledećom definicijom (Gel'fand i Shilov [35].)

Definicija 3.2 *Neka su f i g distribucije iz $\mathcal{D}'$. Onda konvolucioni proizvod $f * g$ definisan je jednačinom*

$$\langle (f * g)(x), \varphi \rangle = \langle f(y), \langle g(x), \varphi(x + y)\rangle\rangle$$

za proizvoljno $\varphi \in \mathcal{D}$, i još f i g zadovoljavaju bar jedan od sledećih uslova:

(i) f ili g imaju ograničeni nosač;

(ii) nosači distribucija f i g su ograničeni sa iste strane.

Konvolucioni proizvod distribucija može biti definisan i u opštem smislu, bez restrikcije na nosače koje su date u Definiciji 3.2. Ali, konvolucioni proizvod distribucija u smislu Definicije 3.2 ne postoji za mnoge parove distribucije. U [12] (i u drugim radovima) definisan je neutriks konvolucioni proizvod tako da postoji za veću klasu parova distribucija. U definiciji, korišćene su jedinične nize funkcija iz $\mathcal{D}$, što dozvoljava da aproksimiramo datu distribuciju sa niz distribucija sa ograničenim nosačem.

Neka je τ fiksirana funkcija u $\mathcal{D}$ sa sledećim svojstvima:

(i) $\tau(x) = \tau(-x)$;

(ii) $0 \leq \tau(x) \leq 1$;

(iii) $\tau(x) = 1$ za $|x| \leq \frac{1}{2}$; i

(iv) $\tau(x) = 0$ za $|x| \geq 1$.

Dalje, funkcija τ_ν definisana je sa

$$\tau_\nu(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \nu \\ \tau(\nu^\nu x - \nu^{\nu+1}), & x > \nu \\ \tau(\nu^\nu x + \nu^{\nu+1}), & x < -\nu \end{cases},$$

za svako realno $\nu > 0$.

Sledeća definicija neutriks konvolucionog proizvoda data je u [26].

Definicija 3.3 *Neka su f i g distribucije u $\mathcal{D}'$ i neka $f_\nu = f\tau_\nu$ i $g_\nu = g\tau_\nu$ za $\nu > 0$. Onda, neutriks konvolucioni proizvod $f \boxed{*} g$ definisan je kao neutriks granica nize $\{f_\nu * g_\nu\}$, pod pretpostavkom da granica h postoji u smislu da*

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{N-lim}}\langle f_\nu * g_\nu, \varphi\rangle = \langle h, \varphi\rangle,$$

za sve $\varphi \in \mathcal{D}$, gde je N neutriks (van der Corput [6]*) sa domenom N'-skup svih pozitivnih realnih brojeva, kodomenom N''-skup realnih brojeva i zanemarljivim funkcijama koje su konačne linearne sume funkcije*

$$\nu^\lambda \ln^{r-1}\nu,\ \ln^r \nu, \quad (\lambda \neq 0,\ r = 1, 2, \cdots)$$

zajedno sa svim funkcijama koje konvergiraju ka nuli u običnom smislu, kada ν teži ka beskonačnosti.

Lako je pokazati da rezultati dobijeni Definicijom 3.2 važe i za Definiciju 3.3. Sledeća teorema, dokazana u [26], tvrdi da neutriks konvolucioni proizvod je uopštenje konvolucionog proizvoda.

Teorema 3.1 *Neka su f i g distribucije u $\mathcal{D}'$ koje zadovoljavaju bar jedan od uslova (i) ili (ii) Definicije 3.2. Onda neutriks konvolucioni proizvod $f \boxed{*} g$ postoji i*

$$f \boxed{*} g = f * g.$$

Teorema 3.2 *Neka su f i g distribucije u $\mathcal{D}'$ i pretpostavimo da neutriks konvolucioni proizvod $f \boxed{*} g$ postoji. Onda neutriks konvolucioni proizvod $f \boxed{*} g'$ postoji i*

$$(f \boxed{*} g)' = f \boxed{*} g'.$$

Primetimo da jednačina (3.2) važi za neutriks konvolucionog proizvoda, ali u opštem slučaju, $(f \boxed{*} g)'$ nije jednako sa $f' \boxed{*} g$, pa imamo sledeću lemu dokazanu u [32].

Lema 3.1 *Neka su f i g distribucije u $\mathcal{D}'$ i pretpostavimo da neutriks konvolucioni proizvod $f \boxed{*} g$ postoji. Ako $\underset{n\to\infty}{\mathrm{N-lim}}\langle (f\tau_n') * g_n, \varphi\rangle$ postoji i jednak je sa $\langle h, \varphi\rangle$ za sve $\varphi \in \mathcal{D}$, onda $f' \boxed{*} g$ postoji i*

$$(f \boxed{*} g)' = f' \boxed{*} g + h. \tag{3.3}$$

3.2 Kosinusni integral

Kosinusni integral $\mathrm{Ci}(x)$ definisan je za $x > 0$ sa

$$\mathrm{Ci}(x) = -\int_x^\infty u^{-1}\cos u\,du,$$

(Sneddon [62]), i integral divergira za $x \le 0$. U opštem slučaju ([10]), ako $\lambda \neq 0$, $\mathrm{Ci}(\lambda x)$ može biti definisan na realnoj pravi sa

$$\mathrm{Ci}(\lambda x) \equiv \mathrm{Ci}(\lambda, x) = -\int_{\lambda x}^\infty u^{-1}[\cos u - H(1-u)]\,du + H(1-\lambda x)\ln|\lambda x|,$$

gde H označava Hevisajdovu funkciju. Dalje, definirajmo $\mathrm{Ci}_+(\lambda x)$ i $\mathrm{Ci}_-(\lambda x)$ sa

$$\mathrm{Ci}_+(\lambda x) = H(x)\,\mathrm{Ci}(\lambda x), \quad \mathrm{Ci}_-(\lambda x) = H(-x)\,\mathrm{Ci}(\lambda x),$$

tako da

$$\mathrm{Ci}(\lambda x) = \mathrm{Ci}_+(\lambda x) + \mathrm{Ci}_-(\lambda x).$$

Tako, za $\lambda > 0$, imamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ci}(\lambda x) &= -\int_x^\infty u^{-1}[\cos(\lambda u) - H(1-\lambda u)]\,du + H(1-\lambda x)\ln|\lambda x|,\\
\mathrm{Ci}_+(\lambda x) &= -\int_x^\infty u^{-1}\cos(\lambda u)\,du, \quad x > 0,\\
\mathrm{Ci}_-(\lambda x) &= -c - \int_x^0 u^{-1}[\cos(\lambda u) - 1]\,du + \ln|\lambda x|, \quad x > 0,
\end{aligned}$$

gde

$$\begin{aligned}
c &= \int_0^\infty u^{-1}[\cos(\lambda u) - H(1+\lambda u)]\,du, \quad \lambda < 0\\
&= \int_0^\infty u^{-1}[\cos(\lambda u) - H(1-\lambda u)]\,du, \quad \lambda > 0\\
&= \int_0^\infty u^{-1}[\cos u - H(1-u)]\,du.
\end{aligned}$$

Dalje, za $\lambda < 0$, imamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ci}(\lambda x) &= -\int_{-x}^\infty u^{-1}[\cos(\lambda u) - H(1+\lambda u)]\,du + H(1-\lambda x)\ln|\lambda x|\\
\mathrm{Ci}_+(\lambda x) &= -c + \int_0^x u^{-1}[\cos(\lambda u) - 1]\,du + \ln|\lambda x|, \quad x > 0,\\
\mathrm{Ci}_-(\lambda x) &= \int_{-\infty}^x u^{-1}\cos(\lambda u)\,du, \quad x < 0.
\end{aligned}$$

Primetimo da ako zamenimo x sa $-x$ u $\mathrm{Ci}(\lambda(x))$, $\mathrm{Ci}_+(\lambda(x))$ i $\mathrm{Ci}_-(\lambda(x))$, dobijamo

$$\begin{aligned}\mathrm{Ci}(\lambda(-x)) &= \mathrm{Ci}((-\lambda)x),\\ \mathrm{Ci}_+(\lambda(-x)) &= H(-x)\,\mathrm{Ci}(\lambda(-x)) = \mathrm{Ci}_-((-\lambda)x),\\ \mathrm{Ci}_-(\lambda(-x)) &= H(x)\,\mathrm{Ci}_+((-\lambda)x).\end{aligned}$$

Dokazano je u [10] da

$$\begin{aligned}[\mathrm{Ci}(\lambda x)]' &= \cos(\lambda x)x^{-1},\\ [\mathrm{Ci}_+(\lambda x)]' &= \cos(\lambda x)x_+^{-1} - (c - \ln|\lambda|)\delta(x)\\ [\mathrm{Ci}_-(\lambda x)]' &= -\cos(\lambda x)x_-^{-1} + (c - \ln|\lambda|)\delta(x).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Sada, definirajmo lokalno integrabilne funkcije $\sin_\pm(\lambda x)$ i $\cos_\pm(\lambda x)$ na sledeći način:

$$\begin{aligned}\sin_+(\lambda x) &= H(x)\sin(\lambda x), \quad \sin_-(\lambda x) = H(-x)\sin(\lambda x),\\ \cos_+(\lambda x) &= H(x)\cos(\lambda x), \quad \cos_-(\lambda x) = H(-x)\cos(\lambda x).\end{aligned}$$

Onda sledi da

$$\begin{aligned}\sin_+(\lambda(-x)) &= \sin_-((-\lambda)x), \quad \sin_-(\lambda(-x)) = \sin_+((-\lambda)x),\\ \cos_+(\lambda(-x)) &= \cos_-((-\lambda)x), \quad \cos_-(\lambda(-x)) = \cos_+((-\lambda)x).\end{aligned}$$

Sledeće dve jednačine dokazane su u [10]:

$$\mathrm{Ci}_+(\lambda x)*x_+^r = -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}a_{r-i}(x,\lambda)x_+^i + \frac{1}{r+1}x^{r+1}\,\mathrm{Ci}_+(\lambda x), \tag{3.5}$$

$$\mathrm{Ci}_-(\lambda x)*x_-^r = \frac{(-1)^r}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}(-1)^i a_{r-i}(x,\lambda)x_-^i + \frac{(-x)^{r+1}}{r+1}\,\mathrm{Ci}_-(\lambda x) \tag{3.6}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$, gde

$$a_i(x,\lambda) = \int_0^x (-u)^i\cos(\lambda u)\,du,$$

za $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Za potrebe dokaza sledeće teoreme povećavamo skup zanemarljivih funkcija i uključujemo konačne linearne sume funkcija

$$\nu^\mu\cos(\lambda\nu), \quad \nu^\mu\sin(\lambda\nu), \quad \nu^\mu\,\mathrm{Ci}(\lambda\nu) \quad (\lambda \neq 0).$$

Teorema 3.3 *Ako $\lambda \neq 0$, onda*

$$\mathrm{Ci}_+(\lambda x) \boxed{*} x^r = -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i} L_{r-i}x^i, \tag{3.7}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$, gde

$$L_{2i} = 0, \quad L_{2i+1} = (2i+1)!(-1)^i\lambda^{-2i-2},$$

za $i = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Neka $[\mathrm{Ci}_+(\lambda x)]_\nu = \mathrm{Ci}_+(\lambda x)\tau_\nu(x)$ i $(x^r)_\nu = x^r\tau_\nu(x)$. Onda konvolucioni proizvod $[\mathrm{Ci}_+(\lambda x)]_\nu * (x^r)_\nu$ postoji prema Definiciji 3.1 i

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Ci}_+(\lambda x)]_\nu * (x^r)_\nu &= \int_0^\nu \mathrm{Ci}_+(\lambda t)(x-t)^r\tau_\nu(x-t)\,dt + \\
&+ \int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Ci}_+(\lambda t)(x-t)^r\tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\,dt.
\end{aligned}$$

Ako $\lambda > 0$ i $0 \le x \le \nu$, onda imamo

$$\begin{aligned}
\int_0^\nu \mathrm{Ci}_+(\lambda t)(x-t)^r\tau_\nu(x-t)\,dt &= -\int_0^\nu (x-t)^r\int_t^\infty u^{-1}\cos(\lambda u)\,du\,dt \\
= -\int_0^\nu u^{-1}\cos(\lambda u)\int_0^u (x-t)^r\,dt\,du &+ \int_\nu^\infty u^{-1}\cos(\lambda u)\int_0^\nu (x-t)^r\,dt\,du \\
= -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}x^i\Big[\int_0^\nu (-u)^{r-i}&\cos(\lambda u)\,du + (-\nu)^{r-i+1}\,\mathrm{Ci}(\lambda\nu)\Big]. \quad (3.8)
\end{aligned}$$

Neka sada

$$\begin{aligned}
I_i(\nu) &= \int_0^\nu (-u)^i\cos(\lambda u)\,du \\
&= \lambda^{-1}(-\nu)^i\sin(\lambda\nu) - i\lambda^{-2}(-\nu)^{i-1}\cos(\lambda\nu) - i(i-1)\lambda^{-2}I_{i-2}
\end{aligned}$$

ako $i \ge 2$ i specijalno

$$I_0(\nu) = \lambda^{-1}\sin(\lambda\nu), \quad I_1(\nu) = -\lambda^{-1}\nu\sin(\lambda\nu) - \lambda^{-2}\cos(\lambda\nu) + \lambda^{-2}.$$

Zato

$$L_i = \operatorname*{N-lim}_{\nu\to\infty} I_i(\nu) = -i(i-1)\lambda^{-2}L_{i-2}$$

ako $i \ge 2$ i

$$L_0 = 0, \quad L_1 = \lambda^{-2}.$$

Dalje, dobijamo da

$$L_{2i} = 0, \quad L_{2i+1} = (2i+1)!(-1)^i \lambda^{-2i-2}$$

za $i = 0, 1, 2, \dots$. Sada, iz jednačine (3.8) dobijamo da

$$\operatorname*{N-lim}_{\nu\to\infty} \int_0^\nu \mathrm{Ci}_+(\lambda t)(x-t)^r \tau_\nu(x-t)\, dt = -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r} \binom{r+1}{i} L_{r-i} x^i. \quad (3.9)$$

Neka sada $-\nu \le x \le 0$, pa imamo

$$\begin{aligned}\int_0^\nu \mathrm{Ci}_+(\lambda t)(x-t)^r \tau_\nu(x-t)\, dt &= \int_0^{\nu+x} \mathrm{Ci}_+(\lambda t)(x-t)^r\, dt + \\ &+ \int_{\nu+x}^{\nu+\nu^{-\nu}+x} \mathrm{Ci}_+(\lambda t)(x-t)^r \tau_\nu(x-t)\, dt \quad (3.10)\end{aligned}$$

gde

$$\begin{aligned}\int_0^{\nu+x} \mathrm{Ci}_+(\lambda t)(x-t)^r\, dt &= -\int_0^{\nu+x} (x-t)^r \int_t^\infty u^{-1}\cos(\lambda u)\, du\, dt \\ &= -\int_0^{\nu+x} u^{-1}\cos(\lambda u) \int_0^u (x-t)^r\, dt\, du - \\ &\quad - \int_{\nu+x}^{\nu} u^{-1}\cos(\lambda u)\int_0^{\nu+x} (x-t)^r\, dt\, du - \\ &\quad - \int_\nu^\infty u^{-1}\cos(\lambda u)\int_0^{\nu+x}(x-t)^r\, dt\, du \\ &= -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i} x^i I_{r-i}(\nu+x) - \\ &\quad - \frac{x^{r+1}-(-\nu)^{r+1}}{r+1}\int_{\nu+x}^{\nu} u^{-1}\cos(\lambda u)\, du - \\ &\quad - \frac{x^{r+1}-(-\nu)^{r+1}}{r+1}\mathrm{Ci}(\lambda\nu). \quad (3.11)\end{aligned}$$

Uzimajući u obzir činjenice da su funkcije $\nu^i \sin[\lambda(\nu+x)]$ i $\nu^i \cos[\lambda(\nu+x)]$ zanemarljive, sledi

$$\operatorname*{N-lim}_{\nu\to\infty} I_i(\nu+x) = I_i(\nu) = L_i. \quad (3.12)$$

Dalje, ono što treba dokazati je:

$$\operatorname*{N-lim}_{\nu\to\infty} \nu^r \int_{\nu+x}^{\nu} u^{-1}\cos(\lambda u)\, du = 0, \quad (3.13)$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$. Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\begin{aligned}
\nu^r \int_{\nu+x}^{\nu} u^{-1} \cos(\lambda u)\, du &= \frac{\nu^{r-1}\sin(\lambda\nu)}{\lambda} - \frac{\nu^r \sin[\lambda(\nu+x)]}{\lambda(\nu+x)} + \\
&+ \frac{\nu^r}{\lambda} \int_{\nu+x}^{\nu} u^{-2} \sin(\lambda u)\, du,
\end{aligned}$$

gde je desna strana suma zanemarljive funkcije i proizvoda oblika $\nu^r \int_{\nu+x}^{\nu} u^{-2} \sin(\lambda u)\, du$. Produžavamo parcijalno integrirati i vidimo da je leva strana zadnje jednačine suma zanemarljive funkcije i proizvoda oblika

$$\nu^r \int_{\nu+x}^{\nu} u^{-r-1} \sin(\lambda u)\, du \quad \text{ili} \quad \nu^r \int_{\nu+x}^{\nu} u^{-r-1} \cos(\lambda u)\, du.$$

Lako je proveriti da

$$\lim_{\nu\to\infty} \nu^r \int_{\nu+x}^{\nu} u^{-r-1} \sin(\lambda u)\, du = \lim_{\nu\to\infty} \nu^r \int_{\nu+x}^{\nu} u^{-r-1} \cos(\lambda u)\, du = 0$$

odakle sledi jednačina (3.13).

Zbog

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{x+\nu}^{\nu} u^{-1} \cos(\lambda u)\, du = 0,$$

iz jednačina (3.11), (3.12) i (3.13) sledi

$$\mathrm{N}-\lim_{\nu\to\infty} \int_0^{\nu+x} \mathrm{Ci}_+(\lambda t)(x-t)^r\, dt = -\frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r} \binom{r+1}{i} L_{r-i} x^i. \tag{3.14}$$

Dalje, lako dobijamo da za svako fiksirano x,

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Ci}_+(\lambda t)(x-t)^r \tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\, dt = 0, \text{i} \tag{3.15}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\nu+x}^{\nu+\nu^{-\nu}+x} \mathrm{Ci}_+(\lambda t)(x-t)^r \tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\, dt = 0 \tag{3.16}$$

pa jednačina (3.7) sledi direktno iz jednačina (3.8), (3.9), (3.14), (3.15) i (3.16) za slučaj $\lambda > 0$.

Ako $\lambda < 0$ i $0 \leq x \leq \nu$ jednačina (3.8) i dalje važi, ali sada imamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\nu} \mathrm{Ci}_+(\lambda t)(x-t)^r \tau_\nu(x-t)\, dt &= (\ln|\lambda| - c) \int_0^{\nu} (x-t)^r\, dt + \\
&+ \int_0^{\nu} (x-t)^r \int_0^t u^{-1}[\cos(\lambda u) - 1]\, du\, dt + \\
&+ \int_0^{\nu} (x-t)^r \ln t\, dt \\
&= J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}$$

Sada

$$\int_0^\nu (x-t)^r\,dt = -\frac{(x-\nu)^{r+1} - x^{r+1}}{r+1}$$

i sledi da

$$\operatorname*{N-lim}_{\nu\to\infty} J_1 = 0. \tag{3.17}$$

Dalje,

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^\nu (x-t)^r \int_0^t u^{-1}[\cos(\lambda u)-1]\,du\,dt \\
&= \int_0^\nu u^{-1}[\cos(\lambda u)-1]\int_u^\nu (x-t)^r\,dt\,du \\
&= -\frac{1}{r+1}\int_0^\nu [(x-\nu)^{r+1}-(x-u)^{r+1}]u^{-1}[\cos(\lambda u)-1]\,du \\
&= -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^r \binom{r+1}{i}(-\nu)^{r-i+1}x^i\int_0^\nu u^{-1}[\cos(\lambda u)-1]\,du - \\
&\quad -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^r \binom{r+1}{i}x^i\int_0^\nu (-u)^{r-i}[\cos(\lambda u)-1]\,du \\
&= -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^r \binom{r+1}{i}x^i(-\nu)^{r-i+1}[\mathrm{Ci}_+(\lambda\nu)+c-\ln|\lambda\nu|] - \\
&\quad -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^r \binom{r+1}{i}x^i[I_{r-i}+(r-i+1)^{-1}(-\nu)^{r-i+1}]
\end{aligned}$$

i dobijamo da

$$\operatorname*{N-lim}_{\nu\to\infty} J_2 = -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^r \binom{r+1}{i}L_{r-i}x^i. \tag{3.18}$$

Konačno imamo

$$\begin{aligned}
J_3 &= -\frac{1}{r+1}\int_0^\nu \ln t\, d[(x-t)^{r+1}-x^{r+1}] \\
&= -\frac{\ln\nu}{r+1}[(x-\nu)^{r+1}-x^{r+1}] + \frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^r \binom{r+1}{i}\frac{x^i(-\nu)^{r-i+1}}{r-i+1}
\end{aligned}$$

i sledi da

$$\operatorname*{N-lim}_{\nu\to\infty} J_3 = 0. \tag{3.19}$$

Kada je $-\nu \le x \le 0$ jednačina (3.10) važi, ali sada imamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\nu+x} \mathrm{Ci}_+(\lambda t)(x-t)^r\,dt &= (\ln|\lambda|-c)\int_0^{\nu+x}(x-t)^r\,dt + \\
&\quad + \int_0^{\nu+x}(x-t)^r\int_0^t u^{-1}[\cos(\lambda u)-1]\,du\,dt +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \int_0^{\nu+x} (x-t)^r \ln t \, dt \\
&= J_1' + J_2' + J_3'.
\end{aligned}
$$

gde

$$
J_1' = -(\ln|\lambda| - c)\frac{(-\nu)^{r+1} - x^{r+1}}{r+1}, \tag{3.20}
$$

$$
\begin{aligned}
J_3' &= -\frac{1}{r+1}\int_0^{\nu+x} \ln t \, d[(x-t)^{r+1} - x^{r+1}] \\
&= -\frac{\ln(\nu+x)}{r+1}[(-\nu)^{r+1} - x^{r+1}] + \\
&+ \frac{1}{r+1}\int_0^{\nu+x} t^{-1}[(x-t)^{r+1} - x^{r+1}] \, dt
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

i pomoću jednačina (3.20) i (3.21)

$$
\begin{aligned}
J_2' &= \int_0^{\nu+x} (x-t)^r \int_0^t u^{-1}[\cos(\lambda u) - 1] \, du \, dt \\
&= \int_0^{\nu+x} u^{-1}[\cos(\lambda u) - 1] \int_u^{\nu+x} (x-t)^r \, dt \, du \\
&= -\frac{1}{r+1}\int_0^{\nu+x} [(-\nu)^{r+1} - (x-u)^{r+1}] u^{-1}[\cos(\lambda u) - 1] \, du \\
&= -\frac{(-\nu)^{r+1} - x^{r+1}}{r+1}\int_0^{\nu} u^{-1}[\cos(\lambda u) - 1] \, du + \\
&+ \frac{(-\nu)^{r+1} - x^{r+1}}{r+1}\int_{\nu+x}^{\nu} u^{-1}[\cos(\lambda u) - 1] \, du - \\
&- \frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i} x^i \int_0^{\nu+x} (-u)^{r-i}\cos(\lambda u) \, du - \\
&- \frac{1}{r+1}\int_0^{\nu+x} u^{-1}[(x-u)^{r+1} - x^{r+1}] \, du \\
&= -\frac{(-\nu)^{r+1} - x^{r+1}}{r+1}[\mathrm{Ci}_+(\lambda\nu) + c - \ln|\lambda| - \ln\nu] + \\
&+ \frac{(-\nu)^{r+1} - x^{r+1}}{r+1}\Big[\int_{\nu+x}^{\nu} u^{-1}\cos(\lambda u) \, du - \ln\nu + \ln(\nu+x)\Big] - \\
&- \frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i} x^i I_{r-i}(\nu+x) \\
&- \frac{1}{r+1}\int_0^{\nu+x} u^{-1}[(x-u)^{r+1} - x^{r+1}] \, du \\
&= -\frac{(-\nu)^{r+1} - x^{r+1}}{r+1}\mathrm{Ci}_+(\lambda\nu) - J_1' +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{(-\nu)^{r+1} - x^{r+1}}{r+1} \int_{\nu+x}^{\nu} u^{-1} \cos(\lambda u)\, du - \\
&- \frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r} \binom{r+1}{i} x^i I_{r-i}(\nu + x) - J_3'. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Konačno, jednačina (3.7) sledi direktno iz jednačina (3.10), (3.17), (3.18), (3.19), (3.20), (3.21) i (3.22) za slučaj $\lambda < 0$, što kompletira dokaz teoreme.

Posledica 3.1 *Ako $\lambda \neq 0$ onda neutriks konvolucioni proizvod $\mathrm{Ci}_+(\lambda x) \boxed{*} x_-^r$ postoji i*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ci}_+(\lambda x) \boxed{*}\, x_-^r &= \frac{(-1)^{r+1}}{r+1} \sum_{i=0}^{r} \binom{r+1}{i} [L_{r-i} x^i - a_{r-i}(x,\lambda) x_+^i] + \\
&+ \frac{(-1)^{r+1}}{r+1} x^{r+1} \mathrm{Ci}_+(\lambda x) \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Zbog distributivnosti neutriks konvolucionog proizvoda u odnosu na sabiranje, imamo

$$
\mathrm{Ci}_+(\lambda x) \boxed{*}\, x^r = \mathrm{Ci}_+(\lambda x) * x_+^r + (-1)^r \mathrm{Ci}_+(\lambda x) \boxed{*}\, x_-^r
$$

i jednačina (3.23) sledi iz jednačina (3.7) i (3.5).

Posledica 3.2 *Ako $\lambda \neq 0$ onda neutriks konvolucioni proizvod $[\cos(\lambda x) x_+^{-1}] \boxed{*}\, x^r$ postoji i*

$$
[\cos(\lambda x) x_+^{-1}] \boxed{*}\, x^r = (c - \ln|\lambda|) x^r - \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} L_{r-i-1} x^i \qquad (3.24)
$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Imamo da

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{Ci}_+(\lambda x) \tau_\nu'(x)] * (x^r)_\nu &= \int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Ci}(\lambda t)(x-t)^r \tau_\nu(x-t)\, d\tau_\nu(t) \\
&= -\mathrm{Ci}(\lambda\nu)(x-\nu)^r \tau_\nu(x-\nu) - \\
&- \int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \cos(\lambda t) t^{-1} (x-t)^r \tau_\nu(t) \tau_\nu(x-t)\, dt + \\
&+ r \int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Ci}(\lambda t)(x-t)^{r-1} \tau_\nu(t) \tau_\nu(x-t)\, dt + \\
&+ \int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Ci}(\lambda t)(x-t)^r \tau_\nu(t) \tau_\nu'(x-t)\, dt. \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Sada $\tau_\nu(x-\nu)$ je ili 0 ili 1 za dovoljno veliko ν, pa imamo

$$\mathrm{N}-\lim_{\nu\to\infty} \mathrm{Ci}(\lambda\nu)(x-\nu)^r\tau_\nu(x-\nu)=0. \tag{3.26}$$

Dalje,

$$\left|\int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \cos(\lambda t)t^{-1}(x-t)^r\tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\,dt\right| \le \nu^{-\nu-1}(|x|+2\nu)^r,$$

pa zato

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \cos(\lambda t)t^{-1}(x-t)^r\tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\,dt=0 \tag{3.27}$$

i

$$\left|\int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Ci}(\lambda t)(x-t)^{r-1}\tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\,dt\right| \le (|x|+2\nu)^{r-1}\int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} |\mathrm{Ci}(\lambda t)|\,dt.$$

Ako $\lambda>0$ i $K=\sup\{|\mathrm{Ci}(x)|: x\ge 1\}$ onda za $\nu\ge\lambda^{-1}$ imamo

$$\int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} |\mathrm{Ci}(\lambda t)|\,dt \le K\nu^{-\nu}.$$

Ako $\lambda<0$ i

$$K_1=\int_0^1 u^{-1}|\cos(\lambda u)-1|\,du,$$

onda za $\nu\ge 1$ imamo

$$\begin{aligned}\int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} |\mathrm{Ci}(\lambda t)|\,dt &= \int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \left|\ln|\lambda t|-c+\int_0^t u^{-1}[\cos(\lambda u)-1]\,du\right|dt \\ &\le [|c|+|\ln(2\lambda\nu)|+K_1+2\ln(2\nu)]\nu^{-\nu}.\end{aligned}$$

I u prvom i u drugom slučaju dobijamo da

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Ci}(\lambda t)(x-t)^{r-1}\tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\,dt=0. \tag{3.28}$$

Konačno razmotrimo

$$\int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Ci}(\lambda t)(x-t)^r\tau_\nu(t)\tau_\nu'(x-t)\,dt.$$

Ako $x\ne 0$ onda $\tau_\nu(t)\tau_\nu'(x-t)=0$ na intervalu $[\nu,\nu+\nu^{-\nu}]$ za dovoljno veliko ν pa

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Ci}(\lambda t)(x-t)^r\tau_\nu(t)\tau_\nu'(x-t)\,dt=0. \tag{3.29}$$

Ako $x = 0$ onda

$$\begin{aligned}\int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \operatorname{Ci}(\lambda t)(x-t)^r \tau_\nu(t)\tau_\nu'(x-t)\,dt &= \tfrac{1}{2}\int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \operatorname{Ci}(\lambda t)(-t)^r\,d\tau_\nu^2(t)\\ &= -\tfrac{1}{2}(-\nu)^r \operatorname{Ci}(\lambda\nu) + \int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} [\cos(\lambda t) + r\operatorname{Ci}(\lambda t)](-t)^{r-1}\tau_n^2(t)\,dt\end{aligned}$$

i slično kako malopre dobijamo da

$$\mathrm{N}\!-\!\lim_{n\to\infty} \int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \operatorname{Ci}(\lambda t)(-t)^r \tau_\nu(t)\tau_\nu'(x-t)\,dt = 0. \tag{3.30}$$

Sada, iz jednačina (3.25)-(3.30) sledi da

$$\mathrm{N}\!-\!\lim_{\nu\to\infty} [\operatorname{Ci}_+(\lambda x)\tau_\nu'(x)] * x^r = 0. \tag{3.31}$$

Koristeći Lemu 3.1 i jednačine (3.4), (3.7) i (3.31), dobijamo

$$[\cos(\lambda x)x_+^{-1} - (c - \ln|\lambda|)\delta(x)] \boxed{*}\, x^r = r\operatorname{Ci}_+(\lambda x) \boxed{*}\, x^{r-1} = -\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r}{i} L_{r-i-1}x^i$$

odakle sledi (3.24).

Posledica 3.3 *Ako $\lambda \neq 0$ onda neutriks konvolucioni proizvod $[\cos(\lambda x)x_+^{-1}] \boxed{*}\, x_-^r$ postoji i*

$$\begin{aligned}[\cos(\lambda x)x_+^{-1}] \boxed{*}\, x_-^r &= (-1)^{r-1}\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r}{i}[L_{r-i-1}x^i - a_{r-i-1}(x,\lambda)x_+^i] + \\ &+ (c - \ln|\lambda|)x_-^r + (-1)^{r-1}x^r \operatorname{Ci}_+(\lambda x)\end{aligned}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Posledica sledi iz

$$[\cos(\lambda x)x_+^{-1}] \boxed{*}\, x_-^r = (-1)^r[\cos(\lambda x)x_+^{-1}] \boxed{*}\, x^r - (-1)^r[\cos(\lambda x)x_+^{-1}] * x_+^r$$

i iz jednačina (3.5) i (3.24).

Teorema 3.4 *Ako $\lambda \neq 0$ onda neutriks konvolucioni proizvod $\operatorname{Ci}_-(\lambda x) \boxed{*}\, x^r$ postoji i*

$$\operatorname{Ci}_-(\lambda x) \boxed{*}\, x^r = -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}(-1)^{r-i}L_{r-i}x^i \tag{3.32}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Zamjenom λ sa $-\lambda$ u jednačini (3.7) dobijamo

$$\mathrm{Ci}_+((-\lambda)x) \boxed{*} x^r = -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}L_{r-i}x^i,$$

pa jednačina (3.32) sledi smenom x sa $-x$ u prethodnoj jednačini.

Posledica 3.4 *Ako $\lambda \neq 0$ onda neutriks konvolucioni proizvod* $\mathrm{Ci}_-(\lambda x)\boxed{*}x_+^r$ *postoji i*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ci}_-(\lambda x) \boxed{*} x_+^r &= -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}[(-1)^{r-i}L_{r-i}x^i + (-1)^i a_{r-i}(x,\lambda)x_-^i] \\ &\quad + \frac{1}{r+1}x^{r+1}\,\mathrm{Ci}_-(\lambda x) \qquad (3.33)\end{aligned}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Jednačina (3.33) dobija se zamjenom λ sa $-\lambda$ i onda x sa $-x$ u jednačini (3.23).

Posledica 3.5 *Ako $\lambda \neq 0$ onda neutriks konvolucioni proizvod* $\mathrm{Ci}(\lambda x)\boxed{*}x_+^r$ *postoji i*

$$\begin{aligned}\mathrm{Ci}(\lambda x) \boxed{*} x_+^r = -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}[(-1)^{r-i}L_{r-i}x^i + a_{r-i}(x,\lambda)x^i] + \\ + \frac{1}{r+1}x^{r+1}\,\mathrm{Ci}(\lambda x) \qquad (3.34)\end{aligned}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Jednačina (3.34) dobija se iz jednačina (3.5) i (3.33).

Posledica 3.6 *Ako $\lambda \neq 0$ onda neutriks konvolucioni proizvod* $\mathrm{Ci}(\lambda x)\boxed{*}x_-^r$ *postoji i*

$$\mathrm{Ci}(\lambda x)\boxed{*}x_-^r = \frac{(-1)^{r+1}}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}[L_{r-i}x^i - a_{r-i}(x,\lambda)x^i] + \frac{(-1)^{r+1}}{r+1}x^{r+1}\,\mathrm{Ci}(\lambda x) \qquad (3.35)$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Jednačina (3.35) sledi iz jednačine (3.34) zamjenom λ sa $-\lambda$ i x sa $-x$.

Posledica 3.7 *Ako* $\lambda \neq 0$ *onda neutriks konvolucioni proizvod* $[\cos(\lambda x)x_-^{-1}] \boxed{*}\, x^r$ *postoji i*

$$[\cos(\lambda x)x_-^{-1}] \boxed{*}\, x^r = (c - \ln|\lambda|)x^r - \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} (-1)^{r-i} L_{r-i-1} x^i \tag{3.36}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Jednačina (3.36) dobija se zamjenom λ sa $-\lambda$ i x sa $-x$ u jednačini (3.24).

Posledica 3.8 *Ako* $\lambda \neq 0$ *onda neutriks konvolucioni proizvod* $[\cos(\lambda x)x^{-1}] \boxed{*}\, x^r$ *postoji i*

$$[\cos(\lambda x)x^{-1}] \boxed{*}\, x^r = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} ((-1)^{r-i} - 1) L_{r-i-1} x^i \tag{3.37}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Iz

$$[\cos(\lambda x)x^{-1}] \boxed{*}\, x^r = [\cos(\lambda x)x_+^{-1}] \boxed{*}\, x^r - [\cos(\lambda x)x_-^{-1}] \boxed{*}\, x^r,$$

pomoću jednačina (3.24) i((3.36) dobijamo (3.37).

Posledica 3.9 *Ako* $\lambda \neq 0$ *onda neutriks konvolucioni proizvod* $[\cos(\lambda x)x_-^{-1}] \boxed{*}\, x_+^r$ *postoji i*

$$\begin{aligned}[\cos(\lambda x)x_-^{-1}] \boxed{*}\, x_+^r &= -\sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} [(-1)^{r-i} L_{r-i-1} x^i - (-1)^i a_{r-i-1}(x,\lambda) x_-^i] + \\ &\quad + (c - \ln|\lambda|)x_+^r - x^r \operatorname{Ci}_-(\lambda x)\end{aligned} \tag{3.38}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Jednačina (3.38) dobija se zamjenom λ sa $-\lambda$ i x sa $-x$ u jednačini (3.32).

Posledica 3.10 *Ako* $\lambda \neq 0$ *onda neutriks konvolucioni proizvod* $[\cos(\lambda x)x^{-1}] \boxed{*}\, x_+^r$ *postoji i*

$$\begin{aligned}[\cos(\lambda x)x^{-1}] \boxed{*}\, x_+^r &= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} [(-1)^{r-i} L_{r-i-1} x^i - a_{r-i-1}(x,\lambda) x^i] + \\ &\quad + x^r \operatorname{Ci}(\lambda x)\end{aligned} \tag{3.39}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Jednačina (3.39) sledi iz jednačina (3.6) i (3.37).

Posledica 3.11 *Ako* $\lambda \neq 0$ *onda neutriks konvolucioni proizvod* $[\cos(\lambda x)x^{-1}] \boxed{*} x_-^r$ *postoji i*

$$\begin{aligned}[\cos(\lambda x)x^{-1}] \boxed{*} x_-^r &= (-1)^{r-1}\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r}{i}[L_{r-i-1}x^i - a_{r-i-1}(x,\lambda)x^i] - \\ &\quad -(-1)^r x^r \operatorname{Ci}(\lambda x) \qquad (3.40)\end{aligned}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz Jednačina (3.40) dobija se zamjenom λ sa $-\lambda$ i x sa $-x$ u jednačini (3.32).

3.3 Sinusni integral

Sinusni integral $\operatorname{Si}(\lambda x)$, (Sneddon [62]), definisan je na realnoj pravi za $\lambda \neq 0$ na sledeći način

$$\operatorname{Si}(\lambda x) \equiv \operatorname{Si}(\lambda, x) = \int_0^{\lambda x} u^{-1}\sin u\, du = \int_0^x u^{-1}\sin(\lambda u)\, du. \qquad (3.41)$$

Dalje, funkcija $\operatorname{Si}_+(\lambda x)$ definisana je sa

$$\operatorname{Si}_+(\lambda x) = H(x)\operatorname{Si}(\lambda x) = \begin{cases} \int_0^x u^{-1}\sin(\lambda u)\, du, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \qquad (3.42)$$

i $\operatorname{Si}_-(\lambda x)$ sa

$$\operatorname{Si}_-(\lambda x) = H(-x)\operatorname{Si}(\lambda x) = \begin{cases} -\int_x^0 u^{-1}\sin(\lambda u)\, du, & x < 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases},$$

gde H označava Heaviside-ovu funkciju.

Primetimo da zamenom x sa $-x$ u jednačini (3.41) dolazimo do

$$\operatorname{Si}(\lambda(-x)) = \operatorname{Si}((-\lambda)x) = \operatorname{Si}(-\lambda x)$$

i zamenom x sa $-x$ u jednačini (3.42) do

$$\operatorname{Si}_+(\lambda(-x)) = H(-x)\operatorname{Si}(\lambda(-x)) = H(-x)\operatorname{Si}((-\lambda)x).$$

Zato

$$\mathrm{Si}_+(\lambda(-x)) = \mathrm{Si}_-((-\lambda)x),$$

za $\lambda \neq 0$. Slično,

$$\mathrm{Si}_-(\lambda(-x)) = \mathrm{Si}_+((-\lambda)x)$$

za $\lambda \neq 0$.

Diferencijal $\mathrm{Si}(\lambda x)$ dat je sa

$$[\mathrm{Si}(\lambda x)]' = \sin(\lambda x)x^{-1}$$

i dalje,

$$\begin{aligned} [\mathrm{Si}_+(\lambda x)]' &= \sin(\lambda x)x_+^{-1}, \\ [\mathrm{Si}_-(\lambda x)]' &= -\sin(\lambda x)x_-^{-1}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Sa oznakom

$$b_i(x,\lambda) = \int_0^x (-u)^i \sin(\lambda u)\, du,$$

$i = 0, 1, 2, \ldots$, možemo formulisati sledeće rezultate dokazane u [4]:

$$\mathrm{Si}_+(\lambda x) * x_+^r = -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i} b_{r-i}(x,\lambda)x_+^i + \frac{x^{r+1}}{r+1}\mathrm{Si}_+(\lambda x), \tag{3.44}$$

$$\left[\sin(\lambda x)x_+^{-1}\right] * x_+^r = -\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r}{i} b_{r-i-1}(x,\lambda)x_+^i + x^r\,\mathrm{Si}_+(\lambda x). \tag{3.45}$$

Za dokaz sledeće teoreme povećavamo skup zanemarljivih funkcija uključujući konačne linearne sume oblika

$$\nu^\mu \cos(\lambda\nu),\quad \nu^\mu \sin(\lambda\nu),\quad \nu^\mu\,\mathrm{Si}(\lambda\nu)\quad (\lambda \neq 0).$$

Lema 3.2 *Funkcija $\nu^\mu\,\mathrm{Si}[\lambda(\nu+\alpha)]$ je zanemarljiva.*

Dokaz. Iz

$$\nu^\mu\,\mathrm{Si}[\lambda(\nu+\alpha)] = \nu^\mu\,\mathrm{Si}(\lambda\nu) + \nu^\mu \int_{\lambda\nu}^{\lambda(\nu+\alpha)} u^{-1}\sin u\, du,$$

i iz činjenice da je $\mathrm{Si}(\lambda\nu)$ zanemarljiva funkcija, sledi da treba dokazati da

$$\mathrm{N}\!-\!\lim_{\nu\to\infty} \nu^\mu \int_{\lambda\nu}^{\lambda(\nu+\alpha)} u^{-1}\sin u\, du = 0.$$

Parcijalnom integracijom dobijamo

$$\begin{aligned}\nu^{\mu}\int_{\lambda\nu}^{\lambda(\nu+\alpha)} u^{-1}\sin u\,du &= \nu^{\mu-1}\lambda^{-1}\cos(\lambda\nu)-\lambda^{-1}\nu^{\mu}(\nu+\alpha)^{-1}\cos[\lambda(\nu+\alpha)]-\\ &- \nu^{\mu}\int_{\lambda\nu}^{\lambda(\nu+\alpha)} u^{-2}\cos u\,du.\end{aligned}$$

Desna strana ove jednačine je suma zanemarljivih funkcija i proizvoda oblika $\nu^{\mu}\int_{\lambda\nu}^{\lambda(\nu+\alpha)} u^{-2}\cos u\,du$. Daljom parcijalnom integracijom dobijamo konačnu sumu zanemarljivih funkcija i proizvoda oblika $\nu^{\mu}\int_{\lambda\nu}^{\lambda(\nu+\alpha)} u^{-r}\sin u\,du$ ili $\nu^{\mu}\int_{\lambda\nu}^{\lambda(\nu+\alpha)} u^{-r}\cos u\,du$ gde $r>\nu$. Lako je dokazati da

$$\lim_{\nu\to\infty}\nu^{\mu}\int_{\lambda\nu}^{\lambda(\nu+\alpha)} u^{-r}\cos u\,du=\lim_{\nu\to\infty}\nu^{\mu}\int_{\lambda\nu}^{\lambda(\nu+\alpha)} u^{-r}\sin u\,du=0$$

i zaključak leme sledi.

Teorema 3.5 *Ako* $\lambda\neq 0$ *onda neutriks konvolucioni proizvod* $\mathrm{Si}_+(\lambda x)\boxed{*}x^r$ *postoji i*

$$\mathrm{Si}_+(\lambda x)\boxed{*}x^r=-\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}L_{r-i}x^i \tag{3.46}$$

za $r=0,1,2,\ldots$, *gde*

$$L_{2i}=(-1)^i(2i)!\lambda^{-2i-1},\quad L_{2i+1}=0$$

za $i=0,1,2,\ldots$.

Dokaz. Neka $[\mathrm{Si}_+(\lambda x)]_\nu=\mathrm{Si}_+(\lambda x)\tau_\nu(x)$ i $(x^r)_\nu=x^r\tau_\nu(x)$. Onda konvolucioni proizvod $[\mathrm{Si}_+(\lambda x)]_\nu*(x^r)_\nu$ postoji prema Definiciji 3.1 i

$$\begin{aligned}[\mathrm{Si}_+(\lambda x)]_\nu*(x^r)_\nu &= \int_0^{\nu}\mathrm{Si}_+(\lambda t)(x-t)^r\tau_\nu(x-t)\,dt+\\ &+ \int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}}\mathrm{Si}_+(\lambda t)(x-t)^r\tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\,dt.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Ako $0\le x\le\nu$ onda

$$\int_0^{\nu}\mathrm{Si}_+(\lambda t)(x-t)^r\tau_\nu(x-t)\,dt = \int_0^{\nu}(x-t)^r\int_0^{t}u^{-1}\sin(\lambda u)\,du\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^\nu u^{-1}\sin(\lambda u)\int_u^\nu (x-t)^r\,dt\,du - \\
&- \frac{1}{r+1}\int_0^\nu u^{-1}\sin(\lambda u)[(x-\nu)^{r+1}-(x-u)^{r+1}]\,du \\
&= -\frac{1}{r+1}\int_0^\nu u^{-1}\sin(\lambda u)\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}x^i[(-\nu)^{r-i+1}-(-u)^{r-i+1}]\,du \\
&= -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}x^i\int_0^\nu [u^{-1}\sin(\lambda u)(-\nu)^{r-i+1}+(-u)^{r-i}\sin(\lambda u)]\,du \\
&= -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}x^i\left[(-\nu)^{r-i+1}\operatorname{Si}(\lambda\nu)+\int_0^\nu(-u)^{r-i}\sin(\lambda u)\right]du.
\end{aligned}
\tag{3.48}
$$

Zbog toga što je

$$
\begin{aligned}
I_i &= \int_0^\nu (-u)^i\sin(\lambda u)\,du \\
&= -\lambda^{-1}(-\nu)^i\cos(\lambda\nu)-\lambda^{-2}i(-\nu)^{i-1}\sin(\lambda\nu)-i(i-1)\lambda^{-2}I_{i-2},
\end{aligned}
$$

dobijamo

$$L_i = \operatorname*{N-lim}_{\nu\to\infty} I_i = -i(i-1)\lambda^{-2}L_{i-2},$$

za $i = 2, 3, \ldots$ i

$$L_0 = \lambda^{-1}, \quad L_1 = 0.$$

Zato

$$L_{2i} = (-1)^i(2i)!\lambda^{-2i-1}, \quad L_{2i+1} = 0$$

za $i = 0, 1, 2, \ldots$, i iz jednačine (3.48) dobijamo

$$\operatorname*{N-lim}_{\nu\to\infty}\int_0^\nu \operatorname{Si}_+(\lambda t)(x-t)^r\tau_\nu(x-t)\,dt = -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}L_{r-i}x^i. \tag{3.49}$$

Dalje, za $\nu \geq \lambda^{-1}$ i $K = \sup\{|\operatorname{Si}_+(x)| : x \geq 1\}$ imamo

$$\left|\int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}}\operatorname{Si}_+(\lambda t)(x-t)^r\tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\,dt\right| \leq K(\nu+\nu^{-\nu}+|x|)^r\nu^{-\nu},$$

za svako fiksirano x, pa

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}}\operatorname{Si}_+(\lambda t)(x-t)^r\tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\,dt = 0. \tag{3.50}$$

Konačno, za $0 \leq x \leq \nu$, jednačina (3.46) dobija se iz jednačina (3.47), (3.49) i (3.50).

Sada, za $-\nu \leq x \leq 0$ imamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\nu} \mathrm{Si}_+(\lambda t)(x-t)^r \tau_\nu(x-t)\,dt &= \int_0^{\nu+x} \mathrm{Si}_+(\lambda t)(x-t)^r\,dt + \\ &+ \int_{\nu+x}^{\nu+\nu^{-\nu}+x} \mathrm{Si}_+(\lambda t)(x-t)^r \tau_\nu(x-t)\,dt,\end{aligned}$$

gde

$$\begin{aligned}\int_0^{\nu+x} \mathrm{Si}_+(\lambda t)(x-t)^r\,dt &= \int_0^{\nu+x} (x-t)^r \int_0^t u^{-1}\sin(\lambda u)\,du\,dt \\ &= \int_0^{\nu+x} u^{-1}\sin(\lambda u) \int_u^{\nu+x} (x-t)^r\,dt\,du \\ &= -\frac{1}{r+1}\int_0^{\nu+x} u^{-1}\sin(\lambda u)[(-\nu)^{r+1} - (x-u)^{r+1}]\,du \\ &= -\frac{1}{r+1}\int_0^{\nu+x} u^{-1}\sin(\lambda u)[(-x^{r+1} + (-\nu)^{r+1}) - ((x-u)^{r+1} - x^{r+1}]\,du \\ &= \frac{1}{r+1}(x^{r+1} - (-\nu)^{r+1})\,\mathrm{Si}_+(\lambda(\nu+x)) + \\ &\quad -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i} x^i \int_0^{\nu+x} (-u)^{r-i}\sin(\lambda u)\,du.\end{aligned}$$

Zbog toga što

$$\operatorname*{N-lim}_{\nu\to\infty} I_i(\nu+x) = I_i(\nu) = L_i \tag{3.51}$$

i zbog činjenice da je $\mathrm{Si}_+[\lambda(\nu+x)]$ zanemarljiva, dobija se da

$$\operatorname*{N-lim}_{\nu\to\infty}\int_0^{\nu+x} \mathrm{Si}_+(\lambda t)(x-t)^r\,dt = -\frac{1}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i} L_{r-i}x^i. \tag{3.52}$$

Dalje, jasno je da za svako fiksirano x

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty}\int_{\nu+x}^{\nu+\nu^{-\nu}+x} \mathrm{Si}_+(\lambda t)(x-t)^r\tau_\nu(x-t)\,dt &= 0 \\ = \lim_{\nu\to\infty}\int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Si}_+(\lambda t)(x-t)^r\tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\,dt & \end{aligned} \tag{3.53}$$

i konačno, jednačina (3.46) dobija se iz (3.47), (3.51), (3.52) i (3.53).

Posledica 3.12 *Ako $\lambda \neq 0$ onda neutriks konvolucioni proizvod $\mathrm{Si}_+(\lambda x) \boxed{*}\, x_-^r$ postoji i*

$$\begin{aligned}\mathrm{Si}_+(\lambda x) \boxed{*}\, x_-^r &= \frac{(-1)^{r+1}}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}[L_{r-i}x^i - b_{r-i}(x,\lambda)x_+^i] + \\ &\quad + \frac{(-1)^{r+1}}{r+1} x^{r+1}\,\mathrm{Si}_+(\lambda x)\end{aligned} \tag{3.54}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Neutriks konvolucioni proizvod je distributivan u odnosu na sabiranje, pa zato

$$\mathrm{Si}_+(\lambda x) \boxed{*}\, x^r = \mathrm{Si}_+(\lambda x) * x_+^r + (-1)^r \,\mathrm{Si}_+(\lambda x) \boxed{*}\, x_-^r,$$

i jednačina (3.54) dobija se iz jednačina (3.44) i (3.46).

Posledica 3.13 *Ako $\lambda \neq 0$ onda neutriks konvolucioni proizvod $[\sin(\lambda x)x_+^{-1}] \boxed{*}\, x^r$ postoji i*

$$[\sin(\lambda x)x_+^{-1}] \boxed{*}\, x^r = -\sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} L_{r-i-1} x^i \tag{3.55}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Na početku

$$\begin{aligned}
[\mathrm{Si}_+(\lambda x)\tau_\nu'(x)] * (x^r)_\nu &= \int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Si}(\lambda t)(x-t)^r \tau_\nu(x-t)\, d\tau_\nu(t) \\
&= -\,\mathrm{Si}(\lambda\nu)(x-\nu)^r \tau_\nu(x-\nu) - \\
&- \int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \sin(\lambda t)t^{-1}(x-t)^r \tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\, dt + \\
&+ r\int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Si}(\lambda t)(x-t)^{r-1} \tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\, dt + \\
&+ \int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Si}(\lambda t)(x-t)^r \tau_\nu(t)\tau_\nu'(x-t)\, dt.
\end{aligned}$$

Za dovoljno veliko ν dobijamo

$$\operatorname*{N-lim}_{\nu\to\infty} \mathrm{Si}(\lambda\nu)(x-\nu)^r \tau_\nu(x-\nu) = 0 \tag{3.56}$$

zato što tada $\tau_\nu(x-\nu) = 0$. Dalje,

$$\left| \int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \sin(\lambda t)t^{-1}(x-t)^r \tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\, dt \right| \leq \nu^{-\nu-1}(|x| + 2\nu)^r,$$

pa

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \sin(\lambda t)t^{-1}(x-t)^r \tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\, dt = 0. \tag{3.57}$$

Sada, neka $K = \sup\{|\,\mathrm{Ci}(x)| : x \geq 1\}$. Onda za $\nu \geq \lambda^{-1}$, imamo

$$\left| \int_\nu^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Si}(\lambda t)(x-t)^{r-1} \tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\, dt \right| \leq K\nu^{-\nu}(|x| + 2\nu)^{r-1}$$

i

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Si}(\lambda t)(x-t)^{r-1}\tau_\nu(t)\tau_\nu(x-t)\,dt = 0. \tag{3.58}$$

Konačno, razmatramo

$$\int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Si}(\lambda t)(x-t)^{r}\tau_\nu(t)\tau_\nu'(x-t)\,dt.$$

Ako $x \neq 0$, onda za dovoljno veliko ν, $\tau_\nu(t)\tau_\nu'(x-t) = 0$ na intervalu $[\nu, \nu+\nu^{-\nu}]$ i sledi

$$\lim_{\nu\to\infty}\int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Si}(\lambda t)(x-t)^{r}\tau_\nu(t)\tau_\nu'(x-t)\,dt = 0. \tag{3.59}$$

Ako $x = 0$, onda

$$\begin{aligned}\int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Si}(\lambda t)(x-t)^{r}\tau_\nu(t)\tau_\nu'(x-t)\,dt &= \tfrac{1}{2}\int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Si}(\lambda t)(-t)^{r}\,d\tau_\nu^2(t)\\ &= -\tfrac{1}{2}(-\nu)^r\,\mathrm{Si}(\lambda\nu) + \int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} [\sin(\lambda t) + r\,\mathrm{Si}(\lambda t)](-t)^{r-1}\tau_n^2(t)\,dt\end{aligned}$$

i slično kao i malopre dobijamo da

$$\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\int_{\nu}^{\nu+\nu^{-\nu}} \mathrm{Ci}(\lambda t)(-t)^{r}\tau_\nu(t)\tau_\nu'(x-t)\,dt = 0. \tag{3.60}$$

Na kraju iz (3.56)-(3.60) dobijamo da

$$\mathrm{N}-\lim_{\nu\to\infty}[\mathrm{Si}_+(\lambda x)\tau_\nu'(x)] * x^r = 0. \tag{3.61}$$

Pomoću leme i jednačine (3.43), (3.46) i (3.61), dobija se jednačina (3.55).

Posledica 3.14 *Ako $\lambda \neq 0$ onda neutriks konvolucioni proizvod $[\sin(\lambda x)x_+^{-1}] \boxed{*}\, x_-^r$ postoji i*

$$\begin{aligned}[\sin(\lambda x)x_+^{-1}] \boxed{*}\, x_-^r &= (-1)^{r-1}\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r}{i}[L_{r-i-1}x^i - b_{r-i-1}(x,\lambda)x_+^i] +\\ &\quad +(-1)^{r-1}x^r\,\mathrm{Si}_+(\lambda x)\end{aligned} \tag{3.62}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Imamo

$$[\sin(\lambda x)x_+^{-1}] \boxed{*}\, x_-^r = (-1)^r[\sin(\lambda x)x_+^{-1}] \boxed{*}\, x^r - (-1)^r[\sin(\lambda x)x_+^{-1}] * x_+^r$$

i jednačina (3.62) sledi iz (3.45) i (3.55).

Teorema 3.6 *Ako* $\lambda \neq 0$ *onda neutriks konvolucioni proizvod* $\mathrm{Si}_-(\lambda x) \boxed{*} x^r$ *postoji i*

$$\mathrm{Si}_-(\lambda x) \boxed{*} x^r = -\frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r} \binom{r+1}{i} (-1)^{r-i} L_{r-i} x^i \tag{3.63}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Zamjenom λ sa $-\lambda$ u jednaćini (3.46) dobijamo

$$\mathrm{Si}_+((-\lambda)x) \boxed{*} x^r = -\frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r} \binom{r+1}{i} L_{r-i} x^i$$

i jednačina (3.63) sledi zamjenom x sa $-x$.

Posledica 3.15 *Ako* $\lambda \neq 0$ *onda neutriks konvoluciski proizvod* $\mathrm{Si}_-(\lambda x) \boxed{*} x_+^r$ *postoji i*

$$\begin{aligned} \mathrm{Si}_-(\lambda x) \boxed{*} x_+^r &= -\frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r} \binom{r+1}{i} [(-1)^{r-i} L_{r-i} x^i + (-1)^i b_{r-i}(x, \lambda) x_-^i] \\ &\quad + \frac{1}{r+1} x^{r+1} \, \mathrm{Si}_-(\lambda x) \end{aligned} \tag{3.64}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Jednačina (3.64) dobija se zamjenom λ sa $-\lambda$ i x sa $-x$ u jednačini (3.54).

Posledica 3.16 *Ako* $\lambda \neq 0$ *onda neutriks konvolucioni proizvod* $\mathrm{Si}(\lambda x) \boxed{*} x_+^r$ *postoji i*

$$\begin{aligned} \mathrm{Si}(\lambda x) \boxed{*} x_+^r &= -\frac{1}{r+1} \sum_{i=0}^{r} \binom{r+1}{i} [(-1)^{r-i} L_{r-i} x^i + \\ &\quad + b_{r-i}(x, \lambda) x^i] + \frac{1}{r+1} x^{r+1} \, \mathrm{Si}(\lambda x) \end{aligned} \tag{3.65}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Jednačina (3.65) dobija se iz jednačine (3.44) i (3.64).

Posledica 3.17 *Ako* $\lambda \neq 0$ *onda neutriks konvolucioniproizvod* $\mathrm{Si}(\lambda x) \boxed{*}\, x_-^r$ *postoji i*

$$\begin{aligned}\mathrm{Si}(\lambda x) \boxed{*}\, x_-^r &= \frac{(-1)^{r+1}}{r+1}\sum_{i=0}^{r}\binom{r+1}{i}[L_{r-i}x^i - b_{r-i}(x,\lambda)x^i] + \\ &\quad + \frac{(-1)^{r+1}}{r+1}x^{r+1}\,\mathrm{Si}(\lambda x)\end{aligned} \tag{3.66}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Jednačina (3.66) sledi iz (3.65) zamenom λ sa $-\lambda$ i x sa $-x$.

Posledica 3.18 *Ako* $\lambda \neq 0$ *onda neutriks konvolucioni proizvod* $[\sin(\lambda x)x_-^{-1}] \boxed{*}\, x^r$ *postoji i*

$$[\sin(\lambda x)x_-^{-1}] \boxed{*}\, x^r = -\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r}{i}(-1)^{r-i}L_{r-i-1}x^i \tag{3.67}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Jednačina (3.67) sledi zamenom λ sa $-\lambda$ i x i $-x$ u jednačini (3.55).

Posledica 3.19 *Ako* $\lambda \neq 0$ *onda neutriks konvolucioni proizvod* $[\sin(\lambda x)x^{-1}] \boxed{*}\, x^r$ *postoji i*

$$[\sin(\lambda x)x^{-1}] \boxed{*}\, x^r = \sum_{i=0}^{r-1}\binom{r}{i}((-1)^{r-i} - 1)L_{r-i-1}x^i \tag{3.68}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Imamo

$$[\sin(\lambda x)x^{-1}] \boxed{*}\, x^r = [\sin(\lambda x)x_+^{-1}] \boxed{*}\, x^r - [\sin(\lambda x)x_-^{-1}] \boxed{*}\, x^r.$$

Sada, dobijamo (3.68) pomoću (3.55) i (3.67).

Posledica 3.20 *Ako* $\lambda \neq 0$ *onda neutriks konvolucioni proizvod* $[\sin(\lambda x)x_-^{-1}] \boxed{*}\, x_+^r$ *postoji i*

$$\begin{aligned}[\sin(\lambda x)x_-^{-1}] \boxed{*}\, x_+^r &= -\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r}{i}[(-1)^{r-i}L_{r-i-1}x^i - (-1)^i b_{r-i-1}(x,\lambda)x_-^i] + \\ &\quad -x^r\,\mathrm{Si}_-(\lambda x)\end{aligned} \tag{3.69}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Jednačina (3.69) dobija se zamenom λ sa $-\lambda$ i x sa $-x$ u (3.62).

Posledica 3.21 *Ako $\lambda \neq 0$ onda neutriks konvolucioni proizvod* $[\sin(\lambda x)x^{-1}] \boxed{*}\, x_+^r$ *postoji i*

$$\begin{aligned}[\sin(\lambda x)x^{-1}] \boxed{*}\, x_+^r &= \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} [(-1)^{r-i} L_{r-i-1} x^i - b_{r-i-1}(x,\lambda)x^i] + \\ &\quad + x^r \operatorname{Si}(\lambda x) \end{aligned} \tag{3.70}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Jednačina (3.70) dobija se iz (3.45) i (3.68).

Posledica 3.22 *Ako $\lambda \neq 0$ onda neutriks konvolucioni proizvod* $[\cos(\lambda x)x^{-1}] \boxed{*}\, x_-^r$ *postoji i*

$$\begin{aligned}[\sin(\lambda x)x^{-1}] \boxed{*}\, x_-^r &= (-1)^{r-1} \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} [L_{r-i-1} x^i - b_{r-i-1}(x,\lambda)x^i] + \\ &\quad - (-1)^r x^r \operatorname{Si}(\lambda x) \end{aligned} \tag{3.71}$$

za $r = 0, 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Jednačina (3.71) sledi zamenom λ sa $-\lambda$ i x sa $-x$ u (3.70).

3.4 Neutriks konvolucioni proizvod distribucija $x_+^\lambda L(x)$ i x_-^μ

Neka je $L : (0, \infty) \to (0, \infty)$ lokalno integrabilna funkcija koja zadovoljava uslove

$$\lim_{x \to 0+} \frac{L(kx)}{L(x)} = 1, \tag{3.72}$$

za svako $k > 0$, i

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(kx)}{L(x)} = 1, \tag{3.73}$$

za svako $k > 0$. Pozitivna lokalno integrabilna funkcija koja zadovoljava uslov (3.72), odnosno (3.73), zove se *sporo promenljiva funkcija u nuli,* odnosno *sporo promenljiva funkcija u beskonačnosti.* Primer funkcije koja zadovoljava relacije (3.72) i (3.73) je logaritamska funkcija. Drugi primeri su pozitivni stepeni i iteracije logaritma, recimo, $\ln^3$ i $\ln\ln$. Osnovni pojmovi teorije sporo promenljivih funkcija dati su u [61].

Distribucija $x_+^\lambda L(x)$ definisana je za različite vrednosti realnog parametra λ sa:

$$\langle x_+^\lambda L(x), \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty x^\lambda L(x)\varphi(x)dx, \tag{3.74}$$

ako $\lambda > -1$ i

$$\langle x_+^\lambda L(x), \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty x^\lambda L(x)\left[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{x^i}{i!}\varphi^i(0)\right]dx,$$

ako $-k-1 < \lambda < -k$ i $k \in \mathbf{N}$.

U ovom delu treće glave razmotrićemo neutriks konvolucioni proizvod distribucija sa sporo promenljivim funkcijama. Zato povećavamo i skup zanemarljivih funkcija uključujući konačne linearne sume funkcija

$$n^\lambda,\ n^\lambda L(n),\ L^r(n),$$

za sve realne $\lambda \neq 0$ i $r \in \mathbf{N}$, gde L označava sporo promenljivu funkciju.

Lako je pokazati da važi sledeća lema.

Lema 3.3 *Neka je $L(x)$ sporo promenljiva funkcija u beskonačnosti. Onda je $K(x) = L(\frac{1}{x})$ sporo promenljiva funkcija u nuli.*

Teorema 3.7 *Neka je L sporo promenljiva funkcija u beskonačnosti i neka je f lokalno integrabilna funkcija na segmentu $[a,b]$ sa svojstvom da*

$$\int_a^b x^\delta |f(x)|\, dx < \infty \qquad \text{za neko} \quad \delta > 0.$$

Onda integral

$$\Phi(t) = \int_a^b f(x)L(tx)\, dx$$

postoji i

$$\Phi(t) \sim L(t)\int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{kada} \quad t \to +\infty.$$

Teorema 3.8 *Neka je $x_+^\lambda L(x)$ data sa (3.74) za $-k-1 < \lambda < -k$ i $k \in \mathbf{N}$ i neka je L sporo promenljiva funkcija u nuli i beskonačnosti. Onda postoji* *lokalno integrabilna funkcija $K : (0,\infty) \to (0,\infty)$ koja je sporo promenljiva u nuli i beskonačnosti, i zadovoljava sledeće uslove:*

$$\left(x_+^{\lambda+k}K(x)\right)^{(k)} = x_+^\lambda L(x), \qquad K(x) \sim ((\lambda+1)\cdots(\lambda+k))^{-1}L(x),$$

kada $x \to 0^+$ i $x \to +\infty$.

Teoreme 3.7 i 3.8 dokazane su u [67].

Sledeća teorema daje uslove za postojanje neutriks konvolucionog proizvoda distribucija koje sadrže sporo promenljive funkcije.

Teorema 3.9 *Neka je L sporo promenljiva funkcija u nuli i beskonačnosti, i neka parametri λ i μ zadovoljavaju uslove*

$$\lambda, \mu \neq -1, -2, \ldots \quad i \quad \lambda + \mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{3.75}$$

Onda neutriks konvolucioni proizvod

$$x_+^\lambda L(x) \boxed{*}\, x_-^\mu \tag{3.76}$$

postoji i

$$\left[x_+^\lambda L(x) \boxed{*}\, x_-^\mu\right]' = \left[x_+^\lambda L(x)\right]' \boxed{*}\, x_-^\mu. \tag{3.77}$$

Dokaz. Prvo pretpostavljamo da $\lambda, \mu > -1$ i $\lambda + \mu \neq -1, 0, 1, 2, \ldots$, tako da su $x_+^\lambda L(x)$ i x_-^μ lokalno integrabilne funkcije. Neka

$$\left[x_+^\lambda L(x)\right]_n = x_+^\lambda L(x)\tau_n(x) \quad \text{i} \quad [x_-^\mu]_n = x_-^\mu \tau_n(x).$$

Onda konvolucioni proizvod $x_+^\lambda L(x) * x_-^\mu$ postoji prema Definiciji 3.1 i tako:

$$\begin{aligned}\left[x_+^\lambda L(x)\right]_n * [x_-^\mu]_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[t_+^\lambda L(t)\right]_n [(x-t)_-^\mu]_n \, dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} t_+^\lambda L(t)(x-t)_-^\mu \tau_n(t)\tau_n(x-t)\, dt. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Za $0 \le x \le n$ važi

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} t_+^\lambda L(t)(x-t)_-^\mu \tau_n(t)\tau_n(x-t)\, dt &= \int_x^n t^\lambda L(t)(t-x)^\mu \, dt \\ &+ \int_n^{n+n^{-n}} t^\lambda L(t)(t-x)^\mu \tau_n(t)\tau_n(x-t)\, dt. \end{aligned} \tag{3.79}$$

Pomoću smene $t = xnu$ dobijamo:

$$\int_x^n t^\lambda L(t)(t-x)^\mu \, dt \;=\; x^{\lambda+\mu+1} n^{\lambda+1} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{x}} u^\lambda (nu-1)^\mu L(xnu)\, du.$$

Sada, koristeći Teoremu 3.7 vidimo da desna strana zadnje relacije ponaša se kao

$$L(xn)n^{1+\lambda}\Big[(1+\lambda+\mu)n^{-\lambda-\mu}x^{(1+\lambda+\mu)}\Gamma(-1-\lambda-\mu)\Gamma(1+\mu)+ \\ + n\Gamma(-\lambda)\,{}_2F_1(-1-\lambda-\mu,-\mu;-\lambda-\mu;x/n)\Big]/(1+\lambda+\mu)\Gamma(-\lambda),$$

gde je ${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^\infty a_k b_k / c_k z^k/k!$ hipergeometriska funkcija. Odavde imamo

$$\operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} \int_x^n t^\lambda L(t)(t-x)^\mu \, dt = 0. \tag{3.80}$$

Kada je $-n \le x \le 0$, imamo

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} t_+^\lambda L(t)(x-t)_-^\mu \tau_n(t)\tau_n(x-t)\, dt \;&=\; \int_0^{x+n} t^\lambda L(t)(t-x)^\mu \, dt \\ &+ \int_n^{n+n^{-n}} t^\lambda L(t)(t-x)^\mu \tau_n(t)\tau_n(x-t)\, dt. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Pomoću smene $t = xn(1-u)$, dobijamo:

$$\begin{aligned}\int_0^{x+n} t^\lambda L(t)(t-x)^\mu \, dt \;&=\; n^{\lambda+1}x^{\lambda+\mu+1} \times \\ &\times \int_{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{x}}^{1} (1-u)^\lambda (n-nu-1)^\mu L\left(xn(1-u)\right) du. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Slično kao u prethodnom slučaju imamo

$$\operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} \int_0^{x+n} t^\lambda L(t)(t-x)^\mu \, dt = 0. \tag{3.83}$$

Dalje, lako je videti da

$$\int_n^{n+n^{-n}} t^\lambda L(t)(t-x)^\mu \tau_n(t)\tau_n(x-t)dt = O(n^{-n+\lambda+\mu}L(n+n^{-n}))$$

i tako

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+n^{-n}} t^\lambda L(t)(t-x)^\mu \tau_n(t)\tau_n(x-t)dt = 0. \tag{3.84}$$

Sada, iz jednačina (3.78), (3.79), (3.80), (3.80), (3.81) i (3.83) sledi da neutriks konvolucioni proizvod $x_+^\lambda L(x) \boxed{*}\, x_-^\mu$ postoji i da je jednak nuli, što dokazuje teoremu za slučaj $\lambda, \mu > -1$ i $\lambda + \mu \ne -1, 0, 1, 2, \ldots$

Ostaje da ispitamo slučaj proizvoljnog $\lambda < -1$ i $\mu < -1$, koji zadovoljavaju relaciju (3.75). Pretpostavimo da jednačina (3.77) važi i da proizvod $x_+^\lambda L(x) \boxed{*}\, x_-^\mu$ postoji za $-k < \lambda < -k+1$ i i za svako $\mu > -1$, $\lambda + \mu \neq -1, 0, 1, \ldots$. Ovo je sigurno tačno prema zaključku kojeg smo dobili za $k = 1$. Ako $-k-1 < \lambda < -k$ onda proizvod

$$x_+^\lambda K(x) \boxed{*}\, x_-^\mu = \left[x_+^{\lambda+1} L(x) \boxed{*}\, x_-^\mu\right]'$$

postoji i indukcijom dobijamo da $x_+^\lambda L(x) \boxed{*}\, x_-^\mu$ postoji za $\lambda \neq -1, -2, \ldots$, $\mu > -1$ i $\lambda + \mu \neq -1, 0, 1, \ldots$. Slično, možemo pokazati i odgovarajuči slučaj za μ, pa konačno dobili smo uslove za egzistenciju neutriks konvolucionog proizvoda (3.76).

Ostaje još da pokažemo da važi jednačina (3.77). Prvo, parcijalnom integracijom dobijamo

$$\begin{aligned}
\left[x_+^\lambda L(x) \tau_n'(x)\right]_n * \left[x_-^\mu\right]_n &= \int_n^{n+n^{-n}} t^\lambda L(t)(t-x)^\mu \tau_n(x-t) d\tau_n(t) \\
&= -n^\lambda L(n)(n-x)^\mu \tau_n(x-n) - \\
&- \lambda \int_n^{n+n^{-n}} t^{\lambda-1} L(t)(t-x)^\mu \tau_n(x-t)\tau_n(t) dt \\
&- \int_n^{n+n^{-n}} t^\lambda L'(t)(t-x)^\mu \tau_n(x-t)\tau_n(t) dt \\
&- \mu \int_n^{n+n^{-n}} t^\lambda L(t)(t-x)^{\mu-1} \tau_n(x-t)\tau_n(t) dt \\
&- \int_n^{n+n^{-n}} t^\lambda L(t)(t-x)^\mu \tau_n'(x-t)\tau_n(t) dt.
\end{aligned}$$

Za dovoljno veliko n imamo

$$\operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} n^\lambda L(n)(n-x)^\mu \tau_n(x-n) = 0,$$

jer je tada $\tau_n(x-n) = 0$. Dalje, imamo

$$\left| \int_n^{n+n^{-n}} t^{\lambda-1} L(t)(t-x)^\mu \tau_n(x-t)\tau_n(t) dt \right| \leq C n^{-n+\lambda}(|x| + 2n)^\mu,$$

i tako

$$\lim_{n\to\infty} \int_n^{n+n^{-n}} t^{\lambda-1} L(t)(t-x)^\mu \tau_n(x-t)\tau_n(t) dt = 0.$$

Ovde je C konstanta koju smo dobili ocenom $|L(x)|$, koristeći svojstvo da je $L(x)$ sporo promenljiva funkcija.

Slično, imamo da

$$\left|\int_n^{n+n^{-n}} t^\lambda L'(t)(t-x)^\mu \tau_n(x-t)\tau_n(t)dt\right| \le C_1 n^{-n+\lambda}(|x|+2n)^\mu,$$

i

$$\left|\int_n^{n+n^{-n}} t^\lambda L(t)(t-x)^{\mu-1} \tau_n(x-t)\tau_n(t)dt\right| \le C_2 n^{-n+\lambda}(|x|+2n)^{\mu-1}.$$

Tako

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+n^{-n}} t^\lambda L'(t)(t-x)^\mu \tau_n(x-t)\tau_n(t)dt = 0,$$

i

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+n^{-n}} t^\lambda L(t)(t-x)^{\mu-1} \tau_n(x-t)\tau_n(t)dt = 0.$$

Konačno, razmatrimo integral

$$I_4 = \int_n^{n+n^{-n}} t^\lambda L(t)(t-x)^\mu \tau_n'(x-t)\tau_n(t)dt.$$

Ako $x \ne 0$, onda $\tau_n(t)\tau_n'(x-t) = 0$ na segmentu $[n, n+n^{-n}]$ za dovoljno veliko n. Zato

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+n^{-n}} t^\lambda L(t)(t-x)^\mu \tau_n'(x-t)\tau_n(t)dt = 0.$$

Ako $x = 0$ onda

$$\begin{aligned} I_4 &= \tfrac{1}{2}\int_n^{n+n^{-n}} t^{\lambda+\mu} L(t) d\tau_n^2(t) = -\tfrac{1}{2}\, n^{\lambda+\mu}L(n) \\ &- \int_n^{n+n^{-n}} \left[L'(t)t^{\lambda+\mu} + (\lambda+\mu)t^{\lambda+\mu-1}L(t)\right]\tau_n^2(t)dt, \end{aligned}$$

i slično dobijamo da

$$\mathrm{N}\!-\!\lim_{n\to\infty} I_4 = 0.$$

Na kraju, koristeći Lemu 3.3 i Teoremu 3.8 dobija se da

$$\left[x_+^\lambda L(x) \boxed{*}\, x_-^\mu\right]' = \left[x_+^\lambda L(x)\right]' \boxed{*}\, x_-^\mu = x_+^{\lambda-1}K(x) \boxed{*}\, x_-^\mu,$$

čime smo pokazali jednačinu (3.77).

Glava 4

Kompozicija distribucija

U ovoj glavi bavimo se kompozicijom distribucije u neutriks smislu. Deo rezultata publikovani su u [21], [42] i [43].

Neka je funkcija $\delta_n(x)$ definisana kao na početku druge glave. Neka je F distribucija u $\mathcal{D}'$ i $F_n(x) = (F * \delta_n)(x)$. Sada, definiramo kompoziciju distribucije F i lokalno integabilne funkcije f, kao u [17].

Definicija 4.1 *Neka je F distribucija i neka je f lokalno integrabilna funkcija. Distribucija $F(f(x))$ postoji i jednaka je h na intervalu (a, b) ako*

$$\operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_n(f(x))\varphi(x)dx = \langle h(x), \varphi(x)\rangle$$

za sve test funkcije φ sa kompaktnim nosačem u (a, b).

Sledeće teoreme dokazane su u [17], [19] i [53].

Teorema 4.1 *[17] Distribucije $(x_-^\mu)_-^\lambda$ i $(x_+^\mu)_-^\lambda$ postoje i*

(i) $(x_-^\mu)_-^\lambda = (x_+^\mu)_-^\lambda = 0$, *za* $\mu > 0$ *i* $\lambda\mu \neq -1, -2, \ldots$; *i*

(ii) $(x_-^\mu)_-^\lambda = (-1)^{\lambda\mu}(x_+^\mu)_-^\lambda = \frac{\pi \operatorname{cosec}(\pi\lambda)}{2\mu(-\lambda\mu-1)!}\delta^{(-\lambda\mu-1)}(x)$, *za* $\mu > 0$, $\lambda \neq -1, -2, \ldots$ *i* $\lambda\mu = -1, -2, \ldots$.

Teorema 4.2 *[19] Distribucija $(x_+^r)_-^{-s}$ postoji i*

$$(x_+^r)_-^{-s} = \frac{(-1)^{rs+s}c(\rho)}{r(rs-1)!}\delta^{(rs-1)}(x)$$

za $r, s = 1, 2, \ldots$, gde

$$c(\rho) = \int_0^1 \ln t\, \rho(t)\, dt.$$

Teorema 4.3 *[53] Distribucija* $(x^r)^{-s}$ *postoji i*

$$(x^r)^{-s} = x^{-rs} \tag{4.1}$$

za $r, s = 1, 2, \ldots$.

U Teoremi 4.2 distribucija x_-^{-s} definisana je sa

$$x_-^{-s} = -\frac{(\ln x_-)^{(s)}}{(s-1)!}$$

za $s = 1, 2, \ldots$, a ne kako je data u [35].

Trebaće nam i sledeće leme koje je lako pokazati indukcijom.

Lema 4.1 *Ako je* φ *proizvoljna funkcija u* $\mathcal{D}$ *sa nosačem u intervalu* $[-1, 1]$, *onda*

$$\langle x^{-r}, \varphi(x)\rangle = \int_{-1}^{1} x^{-r}\Big[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k\Big]\, dx + \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^{r-k-1} - 1}{(r-k)k!}\varphi^{(k)}(0), \tag{4.2}$$

za $r = 1, 2, \ldots$.

Lema 4.2 *Za* $r = 0, 1, 2, \ldots$ *važi*

$$\int_{-1}^{1} v^i \rho^{(r)}(v)\, dv = \begin{cases} 0, & 0 \le i < r \\ (-1)^r r!, & i = r \end{cases}. \tag{4.3}$$

4.1 Kompozicija $(|x|^{r-1/2})^{-4s}$

Sledeća teorema je uopštenje Teoreme 4.3.

Teorema 4.4 *Distribucija* $(|x|^{r-1/2})^{-4s}$ *postoji i*

$$(|x|^{r-1/2})^{-4s} = x^{-4rs+2s} \tag{4.4}$$

za $r, s = 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Prvo imamo

$$[(|x|^{r-1/2})^{-4s}]_n = (|x|^{r-1/2})^{-4s} * \delta_n(x) =$$
$$-\frac{1}{(4s-1)!}\int_{-1/n}^{1/n} \ln\big||x|^{r-1/2} - t\big|\delta_n^{(4s)}(t)\, dt$$

i primetimo da

$$\int_{-1}^{1} x^k[|x|^{r-1/2})^{-4s}]_n\,dx = \begin{cases} 0, & \text{za } k \text{ neparno} \\ 2\int_0^1 x^k(|x|^{r-1/2})^{-4s}]_n\,dx, & \text{za } k \text{ parno} \end{cases} \tag{4.5}$$

Dalje, neka je $\varphi(x)$ proizvoljna funkcija u $\mathcal{D}$ sa nosačem u segmentu $[-1,1]$. Prema Taylor-ovoj teoremi imamo

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{4rs-2s-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{x^{4rs-2s}}{(4rs-2s)!}\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x),$$

$0<\xi<1$. Sada,

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}\!-\!\lim_{n\to\infty}\langle[(|x|^{r-1/2})^{-4s}]_n, \varphi(x)\rangle = \\ &= \mathrm{N}\!-\!\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{4rs-2s-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \int_{-1}^{1} x^k[(|x|^{r-1/2})^{-4s}]_n\,dx + \\ &+ \mathrm{N}\!-\!\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{x^{4rs-2s}}{(4rs-2s)!}[(|x|^{r-1/2})^{-4s}]_n \varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)\,dx. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Koristeći smene $u = nx^{r-1/2}$ i $v = nt$, dobijamo

$$\begin{aligned} -(4s-1)!\int_0^1 x^k[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n\,dx &= \int_0^1 x^k \int_{-1/n}^{1/n} \ln|x^{r-1/2}-t|\delta_n^{(4s)}(t)\,dt\,dx \\ &= \int_{-1/n}^{1/n} \delta_n^{(4s)}(t) \int_0^{n^{-1/(r-1/2)}} x^k \ln|x^{r-1/2}-t|\,dx\,dt + \\ &+ \int_{-1/n}^{1/n} \delta_n^{(4s)}(t) \int_{n^{-1/(r-1/2)}}^{1} x^k \ln|x^{r-1/2}-t|\,dx\,dt \\ &= \frac{n^{(4rs-2s-k-1)/(r-1/2)}}{r-\frac{1}{2}} \int_{-1}^{1} \rho^{(4s)}(v) \int_0^1 u^{-(2r-2k-3)/(2r-1)} \times \\ &\quad \times \ln|(u-v)/n|\,du\,dv + \\ &+ \frac{n^{(4rs-2s-k-1)/(r-1/2)}}{r-\frac{1}{2}} \int_{-1}^{1} \rho^{(4s)}(v) \int_1^n u^{-(2r-2k-3)/(2r-1)} \times \\ &\quad \times \ln|(u-v)/n|\,du\,dv \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Jasno je da za $k = 0,1,\ldots,4rs-2s-2$,

$$\mathrm{N}\!-\!\lim_{n\to\infty} I_1 = 0. \tag{4.8}$$

Dalje,

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\rho^{(4s)}(v)\int_{1}^{n}u^{-(2r-2k-3)/(2r-1)}\ln|(u-v)/n|\,du\,dv &= \\
&= \int_{-1}^{1}\rho^{(4s)}(v)\int_{1}^{n}u^{-(2r-2k-3)/(2r-1)}[\ln|1-v/u|+\ln u-\ln n]\,du\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\rho^{(4s)}(v)\int_{1}^{n}u^{-(2r-2k-3)/(2r-1)}\ln|1-v/u|\,du\,dv,
\end{aligned}$$

jer prema Lemi 4.2, $\int_{-1}^{1}\rho^{(4s)}(v)\,dv=0$, za $s=1,2,\ldots$. Zbog

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\rho^{(4s)}(v)\int_{1}^{n}u^{-(2r-2k-3)/(2r-1)}\ln|1-v/u|\,du\,dv &= \\
&= -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\int_{-1}^{1}v^{i}\rho^{(4s)}(v)\int_{1}^{n}u^{-(2r-2k-3)/(2r-1)-i}\,du\,dv \\
&= -\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(2r-1)[n^{(2k-2ri+i+2)/(2r-1)}-1]}{i(2k-2ri+i+2)}\int_{-1}^{1}v^{i}\rho^{(4s)}(v)\,dv,
\end{aligned}$$

dobijamo da

$$\begin{aligned}
\operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} I_2 &= \frac{1}{4s(4rs4s-k-1)}\int_{-1}^{1}v^{4s}\rho^{(4s)}(v)\,dv \\
&= \frac{(4s-1)!}{4rs-2s-k-1}, \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

koristeći Lemu 4.2 za $k=0,1,\ldots,4rs-2s-2$. Konačno iz jednačina (4.7), (4.8) i (4.9) sledi

$$\operatorname*{N-lim}_{n\to\infty}\int_{0}^{1}x^{k}[(x^{r})^{-s}]_{n}dx = -\frac{1}{4rs-2s-k-1} \qquad (4.10)$$

za $k=0,1,\ldots,4rs-2s-2$. Sada, iz (4.5) i (4.10) vidimo da

$$\operatorname*{N-lim}_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}x^{k}[(x^{r})^{-s}]_{n}dx = \frac{(-1)^{k-1}-1}{4rs-2s-k-1}$$

za $k=0,1,\ldots,4rs-2s-1$ i

$$\begin{aligned}
\operatorname*{N-lim}_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{4rs-2s-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\int_{-1}^{1}x^{k}[(|x|^{r-1/2})^{-4s}]_{n}\,dx &= \\
&= \frac{(-1)^{k-1}-1}{(4rs-2s-k-1)k!}\varphi^{(k)}(0). \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Za $k=4rs-2s$ jednačina (4.7) i dalje važi, ali sada

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{n^{-1/(r-1/2)}}{r-1/2}\int_{-1}^{1}\rho^{(4s)}(v)\int_{0}^{1}u^{-(2r-8rs+4s-3)/(2r-1)}\ln|(u-v)/n)|\,du\,dv \\
&= O(n^{-1/(r-1/2)}),
\end{aligned}$$

pa zbog neprekidnosti funkcije $\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)$,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n^{-1/(r-1/2)}} x^{4rs-2s}[(x^{r-1/2})^{-4s}]\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)dx = 0. \tag{4.12}$$

Slično,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n^{-1/(r-1/2)}}^{0} x^{4rs-2s}[(x^{r-1/2})^{-4s}]\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)dx = 0. \tag{4.13}$$

Zatim, kada $x^{r-1/2} \geq 1/n$, imamo

$$\begin{aligned}
-(4s-1)![(x^{r-1/2})^{-4s}]_n &= \int_{-1/n}^{1/n} \ln|x^{r-1/2}-t|\delta_n^{(4s)}(t)\,dt \\
&= n^{4s}\int_{-1}^{1} \ln|x^{r-1/2}-v/n|\rho^{(4s)}(v)\,dv \\
&= n^{4s}\int_{-1}^{1} \Big[\ln x^{r-1/2} - \sum_{i=1}^{\infty}\frac{v^i}{in^i x^{(r-1/2)i}}\Big]\rho^{(4s)}(v)\,dv \\
&= -\sum_{i=4s}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{v^i}{in^{i-4s}x^{(r-1/2)i}}\,\rho^{(4s)}(v)\,dv.
\end{aligned}$$

Sledi da

$$\begin{aligned}
|(4s-1)![(x^{r-1/2})^{-4s}]_n| &\leq \sum_{i=4s}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{|v|^i}{in^{i-4s}x^{(r-1/2)i}}\,|\rho^{(4s)}(v)|\,dv \\
&\leq \sum_{i=4s}^{\infty}\frac{K_s}{in^{i-4s}x^{(r-1/2)i}},
\end{aligned}$$

gde

$$K_s = \int_{-1}^{1}|\rho^{(4s)}(v)|\,dv$$

za $s = 1, 2 \ldots$.

Ako sada $n^{-1/(r-1/2)} < \eta < 1$, onda

$$\begin{aligned}
(4s-1)!\int_{n^{-1/(r-1/2)}}^{\eta} |x^{4rs-2s}[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n|dx &\leq \\
&\leq \sum_{i=4s}^{\infty}\frac{K_s n^{4s-i}}{i}\int_{n^{-1/(r-1/2)}}^{\eta} x^{(r-1/2)(4s-i)}\,dx \\
&= K_s\sum_{i=4s}^{\infty}\frac{n^{-1/(r-1/2)}}{(r-1/2)i}\int_1^{n\eta^{r-1/2}} u^{4s-i+1/(r-1/2)-1}\,du \\
&= K_s\sum_{i=4s}^{\infty}\frac{n^{-1/(r-1/2)}[(n\eta^{r-1/2})^{4s-i+1/(r-1/2)}-1]}{(r-1/2)i(4s-i+1/(r-1/2))}.
\end{aligned}$$

Dobijamo,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{n^{-1/(r-1/2)}}^{\eta}|[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n|\,dx = O(\eta),$$

za $r, s = 1, 2, \ldots$.

Funkcija $\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)$ je neprekidna i zato

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{n^{-1/(r-1/2)}}^{\eta} x^{4rs-2s}[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)\,dx\right| = O(\eta), \tag{4.14}$$

$r, s = 1, 2, \ldots$.

Slično,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{-\eta}^{-n^{-1/(r-1/2)}} x^{(r-1/2)4s}[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)\,dx\right| = O(\eta) \tag{4.15}$$

za $r, s = 1, 2, \ldots$.

Na kraju,

$$\begin{aligned}
\langle[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n, \varphi(x)\rangle &= \int_{-1}^{1}[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n\varphi(x)\,dx \\
&= \sum_{k=0}^{4rs-2s-1}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\int_{-1}^{1}x^k[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n\,dx + \\
&+ \int_{-n^{-1/(r-1/2)}}^{n^{-1/(r-1/2)}}\frac{x^{4rs-2s}}{(4rs-2s)!}[(x^{(r-1/2)})^{-4s}]_n\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)\,dx + \\
&+ \int_{n^{-1/(r-1/2)}}^{\eta}\frac{x^{4rs-2s}}{(4rs-2s)!}[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)\,dx + \\
&+ \int_{\eta}^{1}\frac{x^{4rs-2s}}{(4rs-2s)!}[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)\,dx + \\
&+ \int_{-\eta}^{-n^{-1/(r-1/2)}}\frac{x^{4rs-2s}}{(4rs-2s)!}[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)\,dx + \\
&+ \int_{-1}^{-\eta}\frac{x^{4rs-2s}}{(4rs-2s)!}[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)\,dx.
\end{aligned}$$

Koristeći jednačine (4.11)-(4.15) i činjenica da niz $[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n$ konvergira uniformno ka $x^{-4rs-2s}$ na segmentima $[-1, -\eta]$ i $[\eta, 1]$, sledi da

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}\!-\!\lim_{n\to\infty}\langle[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n, \varphi(x)\rangle &= \sum_{k=0}^{4rs-2s-1}\frac{(-1)^{4rs-2s-k-1}-1}{(4rs-2s-k-1)k!}\varphi^{(k)}(0) + \\
&+O(\eta) + \int_{\eta}^{1}\frac{\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)}{(4rs-2s)!}dx + \int_{-1}^{-\eta}\frac{\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)}{(4rs-2s)!}\,dx.
\end{aligned}$$

Parametar η može biti proizvoljno mali, zato koristeći (4.1),

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\langle[(x^{r-1/2})^{-4s}]_n,\varphi(x)\rangle &= \sum_{k=0}^{4rs-2s-1}\frac{(-1)^{4rs-2s-k-1}-1}{(4rs-2s-k-1)k!}\varphi^{(k)}(0)+ \\
&+\int_{-1}^{1}\frac{\varphi^{(4rs-2s)}(\xi x)}{(4rs-2s)!}\,dx+ \\
&+\int_{-1}^{1}x^{-4rs-2s}\left[\varphi(x)-\sum_{k=0}^{4rs-2s-1}\frac{x^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)\right]dx+ \\
&+\sum_{k=0}^{4rs-2s-1}\frac{(-1)^{4rs-2s-k-1}-1}{(4rs-2s-k-1)k!}\varphi^{(k)}(0) \\
&= \langle x^{-4rs+2s},\varphi(x)\rangle
\end{aligned}$$

Odavde sledi da je relacija (4.4) tačna na segmentu $[-1,1]$. Jasno je da jednačina (4.4) važi u svakom segmentu koji ne sodrži nulu. Ovo kompletira dokaz teoreme.

4.2 Kompozicija $(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}$

Sledeća teorema je uopštenje Teoreme 4.3.

Teorema 4.5 *Distribucija* $(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}$ *postoji i*

$$(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2} = x^{-4rs+2s+2r-1} \tag{4.16}$$

za $r,s=1,2,\ldots$.

Dokaz. Primetimo da

$$\begin{aligned}
[(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}]_n &= (\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}*\delta_n(x) \\
&= -\frac{1}{(4s-3)!}\int_{-1/n}^{1/n}\ln|x^{r-1/2}-t|\delta_n^{(4s-2)}(t)\,dt
\end{aligned}$$

i da

$$\int_{-1}^{1}x^k[(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}]_n\,dx =$$

$$=\begin{cases} 0, & \text{za } k \text{ parno} \\ 2\int_0^1 x^k[(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}]_n\,dx, & \text{za } k \text{ neparno}\end{cases}. \tag{4.17}$$

Sada, neka je $\varphi(x)$ proizvoljna funkcija u $\mathcal{D}$ sa nosačem u segmentu $[-1,1]$. Iz Taylor-ove teoreme dobijamo da

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{4rs-2s-2r} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{x^{4rs-2s-2r+1}}{(4rs-2s-2r+1)!}\varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x),$$

$0 < \xi < 1$. Onda,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\langle[(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}]_n, \varphi(x)\rangle = \\
&= \mathrm{N}-\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{4rs-2s-2r} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \int_{-1}^{1} x^k [(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}]_n\, dx + \\
&+ \mathrm{N}-\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{x^{4rs-2s-2r+1}}{(4rs-2s-2r+1)!}[(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}]_n \qquad (4.18)\\
&\quad \times \varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x)\, dx.
\end{aligned}$$

Koristeći smene $u = nx^{r-1/2}$ i $v = nt$ imamo

$$\begin{aligned}
-(4s-3)! &\int_0^1 x^k [(\operatorname{sgn} x|x^{r-1/2}|)^{-4s+2}]_n\, dx = \\
&= \int_0^1 x^k \int_{-1/n}^{1/n} \ln|x^{r-1/2} - t|\delta_n^{(4s-2)}(t)\, dt\, dx \\
&= \int_{-1/n}^{1/n} \delta_n^{(4s-2)}(t) \int_0^{n^{-1/(r-1/2)}} x^k \ln|x^{r-1/2} - t|\, dx\, dt + \\
&\quad + \int_{-1/n}^{1/n} \delta_n^{(4s-2)}(t) \int_{n^{-1/(r-1/2)}}^{1} x^k \ln|x^{r-1/2} - t|\, dx\, dt \\
&= \frac{n^{(4rs-2s-2r-k)/(r-1/2)}}{r-\frac{1}{2}} \int_{-1}^{1} \rho^{(4s-2)}(v) \int_0^1 u^{-(2r-2k-3)/(2r-1)} \times \\
&\quad \times \ln|(u-v)/n|\, du\, dv + \\
&\quad + \frac{n^{(4rs-2s-2r-k)/(r-1/2)}}{r-\frac{1}{2}} \int_{-1}^{1} \rho^{(4s-2)}(v) \int_1^n u^{-(2r-2k-3)/(2r-1)} \times \\
&\quad \times \ln|(u-v)/n|\, du\, dv \\
&= I_1 + I_2. \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

Ovde, jasno je da za $k = 0, 1, \ldots, 4rs-2s-2r-1$,

$$\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty} I_1 = 0. \qquad (4.20)$$

Dalje,

$$\int_{-1}^{1} \rho^{(4s-2)}(v) \int_1^n u^{-(2r-2k-3)/(2r-1)} \ln|(u-v)/n|\, du\, dv =$$

$$= \int_{-1}^{1} \rho^{(4s-2)}(v) \int_{1}^{n} u^{-(2r-2k-3)/(2r-1)}[\ln|1-v/u| + \ln u - \ln n]\, du\, dv$$
$$= \int_{-1}^{1} \rho^{(4s-2)}(v) \int_{1}^{n} u^{-(2r-2k-3)/(2r-1)} \ln|1-v/u|\, du\, dv,$$

jer iz Leme 4.2, $\int_{-1}^{1} \rho^{(4s-2)}(v)\, dv = 0$ za $s = 1, 2, \ldots$. Sada,

$$\int_{-1}^{1} \rho^{(4s-2)}(v) \int_{1}^{n} u^{-(2r-2k-3)/(2r-1)} \ln|1-v/u|\, du\, dv =$$
$$= -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \int_{-1}^{1} v^i \rho^{(4s-2)}(v) \int_{1}^{n} u^{-(2r-2k-3)/(2r-1)-i}\, du\, dv$$
$$= -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2r-1)[n^{(2k-2ri+i+2)/(2r-1)} - 1]}{i(2k-2ri+i+2)} \int_{-1}^{1} v^i \rho^{(4s-2)}(v)\, dv,$$

i koristeći Lemu 4.2, za $k = 0, 1, \ldots, 4rs - 2s - 2r - 1$, dobijamo da

$$\begin{aligned} \underset{n\to\infty}{\mathrm{N-lim}}\, I_2 &= \frac{1}{(4s-2)(4rs-2s-2r+k)} \int_{-1}^{1} v^{4s-2} \rho^{(4s-2)}(v)\, dv \\ &= \frac{(4s-3)!}{4rs-2s-2r+k}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Iz jednačina (4.19), (4.20) i (4.21) vidimo da

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{N-lim}} \int_{0}^{1} x^k [(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}]_n dx = -\frac{1}{4rs-2s-2r-k}, \tag{4.22}$$

za $k = 0, 1, \ldots, 4rs - 2s - 2r - 1$. Onda, iz (4.17) i (4.22), dobijamo

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{N-lim}} \int_{-1}^{1} x^k [(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}]_n dx = \frac{(-1)^k - 1}{4rs-2s-2r-k},$$

za $k = 0, 1, \ldots, 4rs - 2s - 2r$, i sledi

$$\begin{aligned} \underset{n\to\infty}{\mathrm{N-lim}} \sum_{k=0}^{4rs-2s-2r} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \int_{-1}^{1} x^k [(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}]_n\, dx &= \\ = \frac{(-1)^k - 1}{(4rs-2s-2r-k)k!} \varphi^{(k)}(0). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Za $k = 4rs - 2s$ jednačina (4.19) i dalje važi, ali sada imamo

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{n^{-1/(r-1/2)}}{r-1/2} \int_{-1}^{1} \rho^{(4s-2)}(v) \int_{0}^{1} u^{-(2r-8rs+4s-3)/(2r-1)} \ln|(u-v)/n)|\, du\, dv \\ &= O(n^{-1/(r-1/2)}), \end{aligned}$$

pa zbog neprekidnosti funkcije $\varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x)$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{n^{-1/(r-1/2)}} x^{4rs-2s-2r+1} [(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}]_n \varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x) dx = 0. \tag{4.24}$$

Slično, dobija se da

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n^{-1/(r-1/2)}}^{0} x^{4rs-2s-2r+1}[(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}]_n\varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x)dx = 0. \tag{4.25}$$

Kada $x^{r-1/2} \geq 1/n$, imamo

$$\begin{aligned}
-(4s-3)![(\operatorname{sgn} x|x^{r-1/2}|)^{-4s+2}]_n &= \int_{-1/n}^{1/n} \ln|x^{r-1/2}-t|\delta_n^{(4s-2)}(t)\,dt \\
&= n^{4s-2}\int_{-1}^{1} \ln|x^{r-1/2}-v/n|\rho^{(4s-2)}(v)\,dv \\
&= n^{4s-2}\int_{-1}^{1}\Big[\ln x^{r-1/2}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{v^i}{in^i x^{(r-1/2)i}}\Big]\rho^{(4s-2)}(v)\,dv \\
&= -\sum_{i=4s-2}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{v^i}{in^{i-4s+2}x^{(r-1/2)i}}\,\rho^{(4s-2)}(v)\,dv.
\end{aligned}$$

Zato

$$\begin{aligned}
|(4s-3)![(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n| &\leq \sum_{i=4s-2}^{\infty}\int_{-1}^{1}\frac{|v|^i}{in^{i-4s+2}x^{(r-1/2)i}}\,|\rho^{(4s-2)}(v)|\,dv \\
&\leq \sum_{i=4s-2}^{\infty}\frac{K_s}{in^{i-4s+2}x^{(r-1/2)i}},
\end{aligned}$$

gde je

$$K_s = \int_{-1}^{1}|\rho^{(4s-2)}(v)|\,dv,$$

$s = 1, 2 \ldots.$

Ako $n^{-1/(r-1/2)} < \eta < 1$, onda

$$\begin{aligned}
(4s-3)!\int_{n^{-1/(r-1/2)}}^{\eta} &|x^{4rs-2s-2r+1}[(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n\,|dx \leq \\
&\leq \sum_{i=4s-2}^{\infty}\frac{K_s n^{4s-2-i}}{i}\int_{n^{-1/(r-1/2)}}^{\eta} x^{(r-1/2)(4s-2-i)}\,dx \\
&= K_s\sum_{i=4s-2}^{\infty}\frac{n^{-1/(r-1/2)}}{(r-1/2)i}\int_{1}^{n\eta^{r-1/2}} u^{(4s-i-1)/(r-1/2)-1}\,du \\
&= K_s\sum_{i=4s-2}^{\infty}\frac{n^{-1/(r-1/2)}[(n\eta^{r-1/2})^{(4s-i-1)/(r-1/2)}-1]}{(r-1/2)i(4s-i-1)/(r-1/2)}.
\end{aligned}$$

Zbog toga,

$$\lim_{n\to\infty}\int_{n^{-1/(r-1/2)}}^{\eta}|[(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2})^{-4s+2}]_n|\,dx = O(\eta),$$

$r, s = 1, 2, \ldots$.

Iz neprekidnosti funkcije $\varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x)$ sledi

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{n^{-1/(r-1/2)}}^{\eta} x^{4rs-2s-2r+1}[(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n \varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x)\,dx\right| = \\ = O(\eta) \quad (4.26)$$

za $r, s = 1, 2, \ldots$.

Slično, za $r, s = 1, 2, \ldots$, imamo

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{-\eta}^{-n^{-1/(r-1/2)}} x^{4rs-2s-2r+1}[(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n \varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x)\,dx\right| = \\ = O(\eta). \quad (4.27)$$

Konačno,

$$\begin{aligned}
\langle[(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n, \varphi(x)\rangle &= \int_{-1}^{1}[(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n \varphi(x)\,dx \\
= \sum_{k=0}^{4rs-2s-2r} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\int_{-1}^{1} x^k [(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n\,dx &+ \\
+ \int_{-n^{-1/(r-1/2)}}^{n^{-1/(r-1/2)}} \frac{x^{4rs-2s-2r+1}}{(4rs-2s-2r+1)!}[(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n \varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x)\,dx &+ \\
+ \int_{n^{-1/(r-1/2)}}^{\eta} \frac{x^{4rs-2s-2r+1}}{(4rs-2s-2r+1)!}[(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n \varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x)\,dx &+ \\
+ \int_{\eta}^{1} \frac{x^{4rs-2s-2r+1}}{(4rs-2s-2r+1)!}[(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n \varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x)\,dx &+ \\
+ \int_{-\eta}^{-n^{-1/(r-1/2)}} \frac{x^{4rs-2s-2r+1}}{(4rs-2s-2r+1)!}[(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n \varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x)\,dx &+ \\
+ \int_{-1}^{-\eta} \frac{x^{4rs-2s-2r+1}}{(4rs-2s-2r+1)!}[(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n \varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x)\,dx&.
\end{aligned}$$

Iz jednačina (4.23)-(4.27) i činjenice da niz $[(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n$ uniformno konvergira ka $x^{-4rs-2s-2r+1}$ na segmentima $[-1, -\eta]$ i $[\eta, 1]$, dobija se

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\langle[(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n, \varphi(x)\rangle &= \sum_{k=0}^{4rs-2s-2r} \frac{(-1)^{4rs-2s-2r-k}-1}{(4rs-2s-2r-k)k!}\varphi^{(k)}(0) + \\
&+ O(\eta) + \int_{\eta}^{1} \frac{\varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x)}{(4rs-2s-2r+1)!}dx + \int_{-1}^{-\eta} \frac{\varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x)}{(4rs-2s-2r+1)!}\,dx.
\end{aligned}$$

Parametar η je proizvoljno mali, pa koristeći relaciju (4.4),

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\langle[(\operatorname{sgn} x x^{r-1/2})^{-4s+2}]_n, \varphi(x)\rangle &= \sum_{k=0}^{4rs-2s-2r} \frac{(-1)^{4rs-2s-2r-k}-1}{(4rs-2s-2r-k)k!}\varphi^{(k)}(0) + \\
&+ \int_{-1}^{1} \frac{\varphi^{(4rs-2s-2r+1)}(\xi x)}{(4rs-2s-2r+1)!}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^{-4rs-2s-2r+1}\left[\varphi(x) - \sum_{k=0}^{4rs-2s-2r} \frac{x^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)\right] dx + \\
&+ \sum_{k=0}^{4rs-2s-2r} \frac{(-1)^{4rs-2s-2r-k}-1}{(4rs-2s-2r-k)k!}\varphi^{(k)}(0) \\
&= \langle x^{-4rs+2s+2r-1}, \varphi(x)\rangle.
\end{aligned}$$

Ovo znači da je jednačina (4.16) tačna na segmentu $[-1,1]$. Jasno je da (4.16) važi u svakom segmentu koji ne sodrži nulu. Ovo kompletira dokaz teoreme.

4.3 Kompozicija $F_\lambda(x|x|^{(2r+1)/\lambda})$

Teorema 4.6 *Neka je $F_\lambda(x) = \operatorname{sgn} x|x|^{-\lambda}$, $s-1 < \lambda < s$. Onda distribucija $F_\lambda(|x|^{(2r+1)/\lambda})$ postoji i*

$$F_\lambda(|x|^{(2r+1)/\lambda}) = x^{-2r-1}, \tag{4.28}$$

za $r, s = 1, 2, \ldots$.

Dokaz. Neka

$$F_{\lambda,n}(x) = F_\lambda(x) * \delta_n(x).$$

Onda

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(-\lambda+s)}{\Gamma(-\lambda+1)}F_{\lambda,n}(x) &= x_+^{-\lambda+s-1} * \delta_n^{(s-1)}(x) + (-1)^s x_-^{-\lambda+s-1} * \delta_n^{(s-1)}(x) \\
&= \begin{cases} \int_{-1/n}^{1/n}(x-t)^{-\lambda+s-1}\delta_n^{(s-1)}(t)\,dt, & x > 1/n \\ \int_{-1/n}^{x}(x-t)^{-\lambda+s-1}\delta_n^{(s-1)}(t)\,dt + \\ \quad +(-1)^s\int_{x}^{1/n}(t-x)^{-\lambda+s-1}\delta_n^{(s-1)}(t)\,dt, & |x| \le 1/n \\ (-1)^s\int_{-1/n}^{1/n}(t-x)^{-\lambda+s-1}\delta_n^{(s-1)}(t)\,dt, & x < -1/n \end{cases}
\end{aligned}$$

i imajuči u obzir da je $F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})$ neparna funkcija sledi

$$\int_{-1}^{1} F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})x^i\,dx = \begin{cases} 0, & i \text{ parno} \\ 2\int_0^1 F_{\lambda,n}(x^{(2r+1)/\lambda})x^i\,dx, & i \text{ neparno} \end{cases} \tag{4.29}$$

Dalje,

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(-\lambda+s)}{\Gamma(-\lambda+1)}\int_0^1 F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})x^i\,dx &= \\ &= \int_0^{n^{-\lambda/(2r+1)}}\int_{-1/n}^{x^{(2r+1)/\lambda}}(x^{(2r+1)/\lambda}-t)^{-\lambda+s-1}x^i\delta_n^{(s-1)}(t)\,dt\,dx+ \\ &+(-1)^s\int_0^{n^{-\lambda/(2r+1)}}\int_{x^{(2r+1)/\lambda}}^{1/n}(t-x^{(2r+1)/\lambda})^{-\lambda+s-1}x^i\delta_n^{(s-1)}(t)\,dt\,dx+ \\ &+\int_{n^{-\lambda/(2r+1)}}^{1}\int_{-1/n}^{1/n}(x^{(2r+1)/\lambda}-t)^{-\lambda+s-1}x^i\delta_n^{(s-1)}(t)\,dt\,dx \\ &= I_1+(-1)^sI_2+I_3.\end{aligned} \tag{4.30}$$

Smenom $nt = u$ i $n^{\lambda/(2r+1)}x = v$, dobijamo

$$I_1 = n^{\lambda(2r-i-1)/(2r+1)}\int_0^1\int_{-1}^{v^{(2r+1)/\lambda}}(v^{(2r+1)/\lambda}-u)^{-\lambda+s-1}v^i\rho^{(s-1)}(u)\,du\,dv$$

i sledi da

$$\operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} I_1 = 0 \tag{4.31}$$

za $i = 0, 1, \ldots, 2r-1$.

Dalje,

$$I_2 = n^{\lambda(2r-i-1)/(2r+1)}\int_0^1\int_{v^{(2r+1)/\lambda}}^1(u-v^{(2r+1)/\lambda})^{-\lambda+s-1}v^i\rho^{(s-1)}(u)\,du\,dv$$

odakle sledi da

$$\operatorname*{N-lim}_{n\to\infty} I_2 = 0 \tag{4.32}$$

za $i = 0, 1, 2, \ldots, 2r-1$. Konačno,

$$\begin{aligned}I_3 &= n^{\lambda(2r-i)/(2r+1)}\int_1^{n^{\lambda/(2r+1)}}\int_{-1}^{1}(v^{(2r+1)/\lambda}-u)^{-\lambda+s-1}\rho^{(s-1)}(u)v^i\,du\,dv \\ &= n^{\lambda(2r-i)/(2r+1)}\int_{-1}^{1}\rho^{(s-1)}(u)\int_1^{n^{\lambda/(2r+1)}}(v^{(2r+1)/\lambda}-u)^{-\lambda+s-1}v^i\,dv\,du \\ &= \lambda\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\lambda+s-1}{k}\frac{n^{s-1-k}}{(2r+1)(-\lambda+s-1-k)+i\lambda+\lambda}\times\end{aligned}$$

$$\times \int_{-1}^{1}(-u)^k\rho^{(s-1)}(u)\,du -$$

$$-\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\lambda+s-1}{k}\frac{n^{\lambda(2r-i)/(2r+1)}}{(2r+1)(-\lambda+s-1-k)+i\lambda+\lambda}\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}(-u)^k\rho^{(s-1)}(u)\,du,$$

i zato

$$\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty} I_3 = -\frac{\Gamma(-\lambda+s)}{(2r-i)\Gamma(-\lambda+1)}, \tag{4.33}$$

za $i=0,1,2,\ldots,2r-2$, koristeći da

$$\int_{-1}^{1}(-u)^{s-1}\rho^{(s-1)}(u)\,du = (s-1)!.$$

Iz jednačina (4.29), (4.30), (4.31), (4.32) i (4.33), vidimo da

$$\int_{-1}^{1}F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})x^{2i+1}\,dx = -\frac{2}{2r-2i-1} \tag{4.34}$$

za $i=0,1,2,\ldots,r-1$.

Za $i=r$,

$$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma(-\lambda+s)}{\Gamma(-\lambda+1)}\int_0^{n^{-\lambda/(2r+1)}}|x^{2r+1}F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})|\,dx\\
&=\int_0^{n^{-\lambda/(2r+1)}}\int_{-1/n}^{x^{(2r+1)/\lambda}}x^{2r+1}(x^{(2r+1)/\lambda}-t)^{-\lambda+s-1}|\delta_n^{(s-1)}(t)|\,dt\,dx+\\
&+(-1)^s\int_0^{n^{-\lambda/(2r+1)}}\int_{x^{(2r+1)/\lambda}}^{1/n}x^{2r+1}(t-x^{(2r+1)/\lambda})^{-\lambda+s-1}|\delta_n^{(s-1)}(t)|\,dt\,dx\\
&=n^{-\lambda/(2r+1)}\int_0^1\int_{-1}^{v^{(2r+1)/\lambda}}(v^{(2r+1)/\lambda}-u)^{-\lambda+s-1}v^{2r+1}|\rho^{(s-1)}(u)|\,du\,dv+\\
&+n^{-\lambda/(2r+1)}\int_0^1\int_{v^{(2r+1)/\lambda}}^{1}(u-v^{(2r+1)/\lambda})^{-\lambda+s-1}v^{2r+1}|\rho^{(s-1)}(u)|\,du\,dv\\
&=O(n^{-\lambda/(2r+1)})
\end{aligned}$$

i sledi da ako je ψ proizvoljna neprekidna funkcija, onda

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{n^{-\lambda/(2r+1)}}x^{2r+1}F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})\psi(x)\,dx = 0. \tag{4.35}$$

Slično, dobija se da

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n^{-\lambda/(2r+1)}}^{0}x^{2r+1}F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})\psi(x)\,dx = 0. \tag{4.36}$$

Sada, neka je η izabrano tako da $n^{-\lambda/(2r+1)} < \eta < 1$. Onda imamo

$$\left|\frac{\Gamma(-\lambda+s)}{\Gamma(-\lambda+1)}\right| \int_{n^{-\lambda/(2r+1)}}^{\eta} |x^{2r+1} F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})|\, dx =$$

$$= \left| \int_{n^{-\lambda/(2r+1)}}^{\eta} \int_{-1/n}^{1/n} x^{2r+1} (x^{(2r+1)/\lambda} - t)^{-\lambda+s-1} \delta_n^{(s-1)}(t)\, dt\, dx \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} \int_{n^{-\lambda/(2r+1)}}^{\eta} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\lambda+s-1}{k} x^{(2r+1)(s-1-k)/\lambda} n^{s-k-1} u^k \rho^{(s-1)}(u)\, dx\, du \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\lambda+s-1}{k} \frac{\lambda(\eta^{(2r+1)(s-1-k)/\lambda+1} n^{s-k-1} - n^{-\lambda/(2r+1)})}{(2r+1)(s-1-k)+\lambda} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-1}^{1} u^k \rho^{(s-1)}(u)\, du \right|$$

$$= \left| \frac{\Gamma(-\lambda+s)}{\Gamma(-\lambda+1)} (\eta - n^{-\lambda/(2r+1)}) + \right.$$

$$+ \sum_{k=s}^{\infty} \binom{-\lambda+s-1}{k} \frac{\lambda(\eta^{(2r+1)(s-1-k)/\lambda+1} n^{s-k-1} - n^{-\lambda/(2r+1)})}{(2r+1)(s-1-k)+\lambda} \times$$

$$\left. \times \int_{-1}^{1} u^k \rho^{(s-1)}(u)\, du \right|,$$

jer je

$$\int_{-1}^{1} u^k \rho^{(s-1)}(u)\, du = \begin{cases} 0, & 0 \le k \le s-2 \\ (-1)^{s-1}(s-1)!, & k = s-1 \end{cases}.$$

Zato, dobijamo da

$$\lim_{n\to\infty} \int_{n^{-\lambda/(2r+1)}}^{\eta} |x^{2r+1} F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})|\, dx = \eta$$

i ako je ψ neprekidna funkcija, onda

$$\lim_{n\to\infty} \int_{n^{-\lambda/(2r+1)}}^{\eta} x^{2r+1} F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda}) \psi(x)\, dx = O(\eta). \tag{4.37}$$

Slično,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\eta}^{-n^{-\lambda/(2r+1)}} x^{2r+1} F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda}) \psi(x)\, dx = O(\eta). \tag{4.38}$$

Neka je φ proizvoljna funkcija u $\mathcal{D}$ sa nosačem u segmentu $[-1,1]$. Iz Taylor-ove teoreme dobijamo da

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{2r} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{\varphi^{(2r+1)}(\xi x)}{(2r+1)!} x^{2r+1},$$

kada $0 < \xi < 1$. Onda

$$\langle F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda}), \varphi(x)\rangle = \int_{-1}^{1} F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})\varphi(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{2r} \frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}\int_{-1}^{1} F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})x^i\,dx +$$

$$+\frac{1}{(2r+1)!}\int_0^{n^{-\lambda/(2r+1)}} x^{2r+1}F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})\varphi^{(2r+1)}(\xi x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{(2r+1)!}\int_{n^{-\lambda/(2r+1)}}^{\eta} x^{2r+1}F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})\varphi^{(2r+1)}(\xi x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{(2r+1)!}\int_{\eta}^{1} x^{2r+1}F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})\varphi^{(2r+1)}(\xi x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{(2r+1)!}\int_{-n^{-\lambda/(2r+1)}}^{0} x^{2r+1}F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})\varphi^{(2r+1)}(\xi x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{(2r+1)!}\int_{-\eta}^{-n^{-\lambda/(2r+1)}} x^{2r+1}F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})\varphi^{(2r+1)}(\xi x)\,dx +$$

$$+\frac{1}{(2r+1)!}\int_{-1}^{-\eta} x^{2r+1}F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})\varphi^{(2r+1)}(\xi x)\,dx.$$

Neutriks granica ovog izraza, kada n ide u beskonačnost, korišćenjem: jednačina (4.34)-(4.38), uniformne konvergencije $x^{2r+1}F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda})$ ka 1 na segmentima $[\eta, 1]$ i $[-1, -\eta]$, činjenice da η može biti proizvoljno malo i Leme 4.1, dobija se da

$$\mathrm{N}-\lim_{n\to\infty}\langle F_{\lambda,n}(|x|^{(2r+1)/\lambda}, \varphi(x)\rangle = -\sum_{i=0}^{r-1}\frac{2\varphi^{(2i+1)}(0)}{(2i+1)!(2r-2i-1)} +$$

$$+\frac{1}{(2r+1)!}\int_{\eta}^{1}\varphi^{(2r+1)}(\xi x)\,dx + O(\eta) + O(\eta) + \frac{1}{(2r+1)!}\int_{-1}^{-\eta}\varphi^{(2r+1)}(\xi x)\,dx$$

$$= -\sum_{i=0}^{r-1}\frac{2\varphi^{(2i+1)}(0)}{(2i+1)!(2r-2i-1)} +$$

$$+\int_{-1}^{1} x^{-2r-1}\Big[\varphi(x) - \sum_{i=0}^{2r}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}x^i\Big]\,dx$$

$$= \langle x^{-2r-1}, \varphi(x)\rangle.$$

Time smo pokazali da važi relacija (4.28).

Glava 5

ODJ i teorija Colombeau-a

5.1 Prostori Colombeau-a

Neka je $\mathcal{A}$ asocijativna algebra i neka je $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ linearno preslikavanje koje zadovoljava Leibniz-ovo pravilo $D(f \circ g) = Df \circ g + f \circ Dg$. Pretpostavimo da su sledeće funkcije elementi algebre $\mathcal{A}$:

$$f_1(x) = 1, \ f_2(x) = x, \ f_3(x) = x\left(\ln|x| - 1\right),$$

$$f_4(x) = x^2\left(\ln|x| - 1\right), \ x \in \mathbf{R},$$

gde je f_1 jedinica u $\mathcal{A}$, $f_3 \circ f_2 = f_4$, i preslikavanje $D : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ je obično diferenciranje. Onda $\mathcal{A}$ ne sadrži $\delta \neq 0$ za koja važi $x \circ \delta = 0$. Ovo je poznati Schwartz-ov rezultat o nemogućnosti čime je pokazao da prostor distribucija $\mathcal{D}'(\Omega)$ nad otvorenim skupom $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ne može se potopiti u asocijativnu komutativnu algebru $(\mathcal{A}(\Omega), +, \circ)$ koja zadovoljava sledeće uslove:

(i) $\mathcal{D}'(\Omega)$ je linearno potopljen u $\mathcal{A}(\Omega)$ i $f(x) \equiv 1$ je jedinica u $\mathcal{A}(\Omega)$;

(ii) postoji diferencijalni operator $\partial_i : \mathcal{A}(\Omega) \to \mathcal{A}(\Omega)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, koji je linearan i zadovoljava Leibnitz-ovo pravilo;

(iii) $\partial_i|_{\mathcal{D}'(\Omega)}$ je običan parcijalni izvod, $i = 1, 2, \ldots, n$; i

(iv) $\circ|_{\mathcal{C}(\Omega)\times\mathcal{C}(\Omega)}$, restrikcija proizvoda, koincidira običnim proizvodom.

Konstrukcija ovakve diferencijalne algebre sa optimalnim svojstvima dao je francuski matematičar Colombeau u [5]. Potreba algebre vakvog tipa proizlazi iz, na primer, proučavanja nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine gde ili koeficienti ili moguća rešenja nisu glatke funkcije. Problemi ovakvog tipa javljaju se i u najednostavnijim dinamičkim sistemima kao što je evolucija gustine populacija grabljivce i žrtve. Klasična linearna teorija distribucija ne dozvoljava proučavanje ovih problema. Colombeau-ove algebre pokazale su se uspešnim i za primenu u numerici, matematičkoj fizici, i t.d..

Neka je $\{\phi_n\}$ niza glatkih funkcija koje konvergiraju ka dirakovoj meri. Onda, familija regularizacija $\{f_n\}$ može se dobiti konvolucijom na sledeći način

$$f_n(x) = f * \phi_n = \langle f(y), \phi_n(x-y)\rangle.$$

Ova niza slabo konvergira ka originalnoj distribuciji $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Identifikacijom dve nize $\{\phi_n\}$ i $\left\{\overline{\phi}\right\}_n$, u slučaju kada imaju istu granicu, dobijamo sekvencijalnu reprezentaciju prostora distribucija. Drugi autori koriste ekvivalentne klase mreže regularizacija. Delta mreža $\{\phi_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ definisana je sa

$$\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Regularizacijom narušava se nelinearna struktura identifikacijiom niza (mreža) koje imaju iste granice. Zato Colombeau-ova nelinearna teorija koristi regularizacije, ali manje identifikuje, što daje mogućnost primene na velike klase nelinearnih problema.

Osnovna ideja koja karakterizira Colombeau-ovu teoriju, u jednom od njenih jednostavnijih oblika, je potapanje prostora distribucija u faktor algebri $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)^I$, $I = (0,1)$, sa regularizacijom dobijenom konvolucijom sa fiksiranom funkcijom ϕ.

Prostor test funkcija je:

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{R}^n) = \left\{\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n) \ : \ \int \phi(x)dx = 1\right\}.$$

Sa $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ označavamo skup funkcija

$$u : \mathcal{A}_0(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}, \ (\phi, x) \to u(\phi, x),$$

gde $u(\phi, x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ za svako fiksirano ϕ. Praktično, sa ovom relacijom dato je funkcionalno dejstvo test funkcije. Neka sada $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ za $\phi \in \mathcal{A}_0(\mathbf{R}^n)$. Niza $(u * \phi_\epsilon)_{\epsilon\in I}$ konvergira ka u u $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Uzimajući nizu kao reprezentaciju funkcije u dobijamo potapanje $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ u algebri $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Svakako, potapanje $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ neće dati podalgebru jer u opštem slučaju $(f * \phi_\epsilon)(g * \phi_\epsilon) \neq (fg) * \phi_\epsilon$. Ideja je, zato, dobiti ideal $\mathcal{N}(\mathbf{R}^n)$ tako da ne bi bilo razlike u novo dobivenom faktor prostoru. Za konstrukciju ideala $\mathcal{N}(\mathbf{R}^n)$ dovoljno je naći ideal koji sadrži sve razlike $(f * \phi_\epsilon) - (f)_{\epsilon \in I}$.

Neka je

$$\mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n) = \left\{ \phi \in \mathcal{A}_0(\mathbf{R}^n) \ : \ \int x^\alpha \phi(x) dx = 0 \text{ za } 1 \leq |\alpha| \leq q \right\}.$$

Jasno, ako $\phi \in \mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$, $q \in \mathbf{N}_0$, onda za svako $\epsilon > 0$, $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$, $x \in \mathbf{R}^n$, pripada u $\mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$.

Definicija 5.1 *Element $u \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ je umeren ako za svako $K \subset\subset \Omega$ i $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ postoji $N \in \mathbf{N}_0$ tako da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoji $\eta > 0$ i $C > 0$ sa svojstvom*

$$|\partial^\alpha u(\phi_\epsilon, x)| \leq C\epsilon^{-N},$$

$x \in K, 0 < \epsilon < \eta$. Skup svih umerenih elemenata označavamo sa $\mathcal{E}_M(\mathbf{R}^n)$.

Definiramo i prostor funkcija $u : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{C}$ koji označavamo sa $\mathcal{E}_0(\mathbf{R}^n)$. To je podalgebra u $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ u smislu prirodne identifikacije.

Definicija 5.2 *Element $u \in \mathcal{E}_0(\mathbf{R}^n)$ je umeren ako postoji $N \in \mathbf{N}_0$ tako da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoji $\eta > 0$ i $C > 0$ sa svojstvom*

$$|u(\phi_\epsilon)| < C\epsilon^{-N},$$

$0 < \epsilon < \eta$. Skup svih umerenih elemenata označavamo sa $\mathcal{E}_{0M}(\mathbf{R}^n)$.

Koristićemo i sledeću ekvivalentnu definiciju:

Definicija 5.3 *Element $u \in \mathcal{E}_M(\mathbf{R}^n)$ je umeren ako*

$$\forall K \subset\subset \mathbf{R}^n \ \forall \alpha \in \mathbf{N}_0^n \ \exists p \geq 0 \ \textit{tako da} \ \forall \phi \in \mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n),$$

$$sup_{x \in K} |\partial^\alpha u(\phi_\epsilon, x)| = \mathcal{O}(\epsilon^{-p}) \ \textit{kada} \ \epsilon \to 0.$$

Označimo sa G skup svih rastućih nizova $\{a_q\}$ koji teže beskonačnosti.

Definicija 5.4 *Element $u \in \mathcal{E}_M(\mathbf{R}^n)$ je nulti ako za svako $K \subset\subset \Omega$ i svako $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ postoje $N \in \mathbf{N}_0$ i $\{a_q\} \in G$ takvi da za svako $q \geq N$ i svako $\phi \in \mathcal{A}_q$ postoje $\eta > 0$ i $C > 0$ sa svojstvom*

$$|\partial^\alpha u(\phi_\epsilon, x)| \leq C\epsilon^{a_q - N},$$

$x \in K, 0 < \epsilon < \eta$. Skup svih nultih elemenata označavamo sa $\mathcal{N}(\mathbf{R}^n)$.

Definicija 5.5 *Element $u \in \mathcal{E}_0(\mathbf{R}^n)$ je nulti ako postoje $N \in \mathbf{N}_0$ i $\{a_q\} \in G$ takvi da za svako $q \geq N$ i svako $\phi \in \mathcal{A}_q$ postoje $\eta > 0$ i $C > 0$ sa svojstvom*

$$|u(\phi_\epsilon)| \leq C\epsilon^{a_q - N},$$

$0 < \epsilon < \eta$. Skup svih nultih elemenata označavamo sa $\mathcal{N}_0(\mathbf{R}^n)$.

Koristićemo i sledeću definiciju:

Definicija 5.6 *Element $u \in \mathcal{N}(\mathbf{R}^n)$ zove se nulti ako*

$$\forall K \subset\subset \mathbf{R}^n \; \forall \alpha \in \mathbf{N}_0^n \; \exists p \geq 0 \text{ tako da } \forall q \geq p \text{ i } \forall \phi \in \mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n),$$

$$sup_{x \in K}|\partial^\alpha u(\phi_\epsilon, x)| = \mathcal{O}(\epsilon^{q-p}) \text{ kada } \epsilon \to 0.$$

Jasno, $\mathcal{N}(\mathbf{R}^n)$ i $\mathcal{N}_0(\mathbf{R}^n)$ su ideali u $\mathcal{E}_M(\mathbf{R}^n)$ i $\mathcal{E}_{0M}(\mathbf{R}^n)$, odgovarajuće.

Drugim rečima, umereni elementi i svi njihovi izvodi zadovoljavaju lokalnu uniformnu polinomnu ocenu kada $\epsilon \to 0$, dok nulti elementi isčezavaju brže od bilo koji stepen ϵ-na pri istim uslovima.

Takodje možemo primetiti da neke funkcije koje smo smatrali zanemarljivim pri primeni neutriks računa u prethodnim glavama (primer: n^λ) su umerene prema definiciji 5.3. Prema tome zanemarljive funkcije u neutriks računu, u opštem slučaju, nisu nulti elementi, pa zato neutriks račun nije specijalan slučaj Colombeau-ove algebre.

Definicija 5.7 *Prostor generaliziranih funkcija $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$, generaliziranih kompleksnih brojeva i generaliziranih realnih brojeva definisan je na sledeći način:*

$$\mathcal{G}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{E}_M(\mathbf{R}^n)/\mathcal{N}(\mathbf{R}^n), \quad \overline{\mathbf{C}} = \mathcal{E}_{0M}(\mathbf{C})/\mathcal{N}_0(\mathbf{C}), \quad \overline{\mathbf{R}} = \mathcal{E}_{0M}(\mathbf{R})/\mathcal{N}_0(\mathbf{R}).$$

Prostor distribucija potapan je pomoću konvolucijom:

$$i\ :\ \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{G}(\mathbf{R}^n),\ i(u) = \text{class}\left[(\phi, x) \to u * \phi(x)\right].$$

Ekvivalentne klase nize $(u_\epsilon)_{\epsilon\in I}$ in $\mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ označavamo sa $U = \text{class}\left[(u_\epsilon)_{\epsilon\in I}\right]$. Ako je G generalizirana funkcija sa kompaktnim nosačem $K \subset\subset \mathbf{R}^n$ i ako je $G_\epsilon(x)$ pretstavnik elementa G, onda njegov integral definisan je sa

$$\int G dx = \text{class}\left[\int \phi(x) G_\epsilon(x) dx\right].$$

Neka $F, G \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$. Onda:

(i) F i G su jednaki u distributivnom smislu, $G =^{\mathcal{D}'} F$, ako

$$\int (G - F)\phi dx = 0 \in \overline{\mathbf{C}},$$

za svako $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

(ii) F i G su asocirani, $F \approx G$, ako postoje pretstavnici F_ϵ i G_ϵ elemenata F i G, odgovarajuče, tako da

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int \left(G_\epsilon(x) - F_\epsilon(x)\right)\phi(x) dx = 0,$$

za svako $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$.

Primer 5.1 *Neka je $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$. Onda*

$$u(\phi) = \begin{cases} z, & ako\ \ supp \in (0, \infty), \phi \in \mathcal{A}_0 \\ 0, & u\ suprotnom \end{cases}$$

pripada u $\mathcal{E}_{0M}$ i opredeljuje element iz C različit od nule koji nije inverzibilan.

Primer 5.2 *Jedan element iz $\mathcal{E}_M(\mathbf{R}^n)$ definisan je sa .*

$$\mathcal{A}_0 \times \mathbf{R}^n \ni (\phi, x) \to \check{\phi}(x),$$

gde je $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$, dok element

$$\mathcal{A}_0 \times \mathbf{R}^n \ni (\phi, x) \to \exp^{\check{\phi}(x)}$$

pripada $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)/\mathcal{E}_M(\mathbf{R}^n)$.

5.2 Primena u diferencijalnim jednačinama

U ovom delu disertacije primenićemo teoriju Colombeau-a za rešavnje nekih klasa običnih diferencijalnih jednsčina. Razmotrimo sistem

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t) \\ z_2'(t) &= z_3(t) \\ &\vdots \\ z_n'(t) &= f(t)z_1(t) \end{aligned} \tag{5.1}$$

sa početnim uslovima $z_1(0) = z_{10}$, $z_2(0) = z_{20}$, $\dots z_n(0) = z_{n0}$, gde su f i z_i, $i = 1, 2, \dots, n$ elementi Colomobeau-ove algebre $\mathcal{G}(\mathbf{R})$, a z_{10}, z_{20}, $\dots z_{n0}$ su dati elementi Colombeau-ove algebre $\overline{\mathcal{C}}$. Sistem (5.1) u njegovom ekvivalentnom matričnom obliku glasi:

$$Z'(t) = A(t)Z(t), \quad Z(0) = Z_0, \ t \in \mathbf{R}, \tag{5.2}$$

gde $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $\quad Z_0 = (z_{10}, z_{20}, \dots, z_{n0})$, i

$$A(t) = (A_{ij}(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ f(t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Sada, neka je K kompaktni skup u $\mathbf{R}$, $A(t) = class\left[a\left(\varphi_\epsilon, t\right)_{\epsilon \in I}\right]$ element Colombeau-ove algebre $\mathcal{G}(\mathbf{R})$, i $\|a\left(\varphi_\epsilon, t\right)\|_K = sup_{t \in K}\|a\left(\varphi_\epsilon, t\right)\|$. Pokazaćemo da važi sledeća teorema.

Teorema 5.1 *Neka je*

$$exp\left\{\int_0^t \|a(\varphi_\epsilon, s)\|_K ds\right\} \leq \frac{c}{\epsilon^n}.$$

Onda matrična diferenciajalna jednačina $Z'(t) = A(t)Z(t)$, $A(t) \in \mathcal{G}^n(\mathbf{R})$, sa početnim uslovom

$$Z_{|t=0} = Z_0 = \begin{pmatrix} z_{10} \\ z_{20} \\ \vdots \\ z_{n0} \end{pmatrix} \in \overline{\mathcal{C}}^n,$$

ima jedinstveno rešenje

$$Z_{|t=0} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathcal{G}^n(\mathbf{R}).$$

Dokaz. Dokaz teoreme biće podeljen na dva dela. Prvo ćemo konstruisati jedno rešenje jednačine koje pripada Colombeau-ovoj algebri, a zatim ćemo dati uslove za njegovu egzistenciju i jedinstvenost u $\mathcal{G}^n(\mathbf{R})$.

Imamo da $A(t) = (A_{ij}(t))$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, gde $A_{ij} \in \mathcal{G}(\mathbf{R})$ za $i, j = 1, 2, \dots, n$. Ako $\int \varphi(x)dx = 1$ i $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$ za $\varphi \in \mathcal{D}$ i $\epsilon \in (0,1)$, regularizirana uopštena funkcija definisana je sa $A(t) = class\,[a(\varphi_\epsilon, t)]$.

Sada razmatramo problem

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1(\varphi_\epsilon, t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1(\varphi_\epsilon, t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1(\varphi_\epsilon, t) \\ f(\varphi_\epsilon, t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}.$$

Integrirajući u odnosu na t i uključujići početne uslove, dobijamo ekvivalentni sistem integralnih jednačina

$$\begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_{10} \\ z_{20} \\ \vdots \\ z_{n0} \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 1(\varphi_\epsilon, t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1(\varphi_\epsilon, t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1(\varphi_\epsilon, t) \\ f(\varphi_\epsilon, t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(\tau) \\ z_2(\tau) \\ \vdots \\ z_n(\tau) \end{pmatrix} d\tau.$$

Neka je $Z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ i neka je

$$\|Z(\varphi_\epsilon, t)\|_K = max_{j=1,2,\dots,n} \sup_{t \in K} |z_j(\varphi_\epsilon, t)|.$$

Koristeći Gronwall-ovu nejednakost imamo

$$\|Z(\varphi_\epsilon,t)\|_K \leq \|Z_0(\varphi_\epsilon,t)\|exp\left\{\int_0^t \|a(\varphi_\epsilon,s)\|_K ds\right\} \leq \frac{c*}{\epsilon^n}, \tag{5.3}$$

$\epsilon \in (0,1)$ i $\varphi \in \mathcal{A}_{n_r}$. Postoji i $n_r \in \mathcal{N}$ takvo da $\varphi \in \mathcal{A}_{n_r}$, $\epsilon \in (0,1)$ i

$$\|d^r\left(Z(\varphi_\epsilon,t)\right)\|_K \leq \frac{c_r}{\epsilon^{n_r}}. \tag{5.4}$$

Prethodna relacija daje

$$Z(\varphi_\epsilon,t) \in \mathcal{E}^n_M(\mathcal{R}). \tag{5.5}$$

Sada, da bi dokazali jedinstvenost rešenja u $\mathcal{G}^n(\mathbf{R})$ pokazaćemo da svako drugo rešenje pripada istoj klasi Colombeau-ove algebre. Zato, pretpostavimo da je $W = class\,[w(\varphi_\epsilon,t)]$ rešenje jednačine (5.2) u $\mathcal{G}^n(\mathbf{R})$ različito od Z. Ovo znači da postoji $N = class\,[n(\varphi_\epsilon,t)]$ tako da

$$Z(t)' - W(t)' = A(t)\left(Z(t) - W(t)\right) + N(t).$$

Slično kao i ranije, koristeći da $N \in \mathcal{N}^n(\mathbf{R})$ imamo:

$$\|Z(t)-W(t)\|_K \leq \|Z(0)-W(0)\|+\|N(t)\|_K exp\left\{\int_0^t \|a(\varphi_\epsilon,s)\|_K ds\right\} \leq O(\epsilon^q) \tag{5.6}$$

i dobijamo da $Z = W$ u $\mathcal{G}^n(\mathbf{R})$, što kompletira dokaz teoreme.

Sada, pokazaćemo da je sistem (5.1) ekvivalentan jednoj klasi nelinearnih diferencijalnih jednačina. Diferenciranjem prve jednačine sistema dobijamo $z_1''(t) = z_2'(t) = z_3(t)$. Ponavljanjem ovog postupka imamo da $z_1^{(n)}(t) = z_n'(t) = f(t)z_1(t)$. Ako je z_1 rešenje jednačine $z_1'(t) = x(t)z_1(t)$, gde je x element Colombeau-ove algebre, onda koristeći Leibniz-ovu formulu dobija se

$$z_1^{(n)}(t) = f(t)z_1(t),$$

$$(x(t)z_1(t))^{(n-1)} = f(t)z_1(t),$$

$$\sum_{k_1=0}^{n-1}\binom{n-1}{k_1}x^{(n-k_1-1)}(t)z_1^{(k_1)}(t) = f(t)z_1(t), \quad \text{i}$$

$$\sum_{k_1=0}^{n-1}\binom{n-1}{k_1}x^{(n-k_1-1)}(t)\left[\sum_{k_2=0}^{k_1-1}\binom{k_1-1}{k_2}x^{(k_1-k_2-1)}(t)\left(\sum\ldots z_1^{(k_n)}(t)\right)\right] =$$

$$= f(t)z_1(t).$$

Iz $0 \leq k_1 \leq n-1$, $0 \leq k_2 \leq n-2, \ldots, 0 \leq k_{n-1} \leq 1$ dobijamo $k_n = 0$, t.j.,

$$\sum_{k_1=0}^{n-1} \binom{n-1}{k_1} x^{(n-k_1-1)}(t) \left[\sum_{k_2=0}^{k_1-1} \binom{k_1-1}{k_2} x^{(k_1-k_2-1)}(t) \ldots z_1(t) \right] = f(t) z_1(t),$$

što odgovara nelinearnoj diferencijalnoj jednačini oblika:

$$x^{(n-1)}(t) + nx(t)x^{(n-2)}(t) + \cdots + x^n(t) = f(t).$$

Za $n = 2$ dobimo poznatu Rikatievu nelinearnu diferencijalnu jednačinu

$$x'(t) + x^2(t) = f(t), \qquad x(0) = x_0, \ t \in \mathbf{R} \tag{5.7}$$

gde su f i x elementi Colombeau-ove algebre $\mathcal{G}(\mathbf{R})$; x_0 je poznati element iz Colombeau-ove algebre $\overline{\mathbf{C}}$. Rešenje jednačine (5.7) je ekvivalentno rešenju sistema diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= z_2(t) \\ z_2'(t) &= f(t) \cdot z_1(t), \end{aligned} \tag{5.8}$$

gde je z_1 rešenje jednačine $z_1'(t) = x(t) z_1(t)$. Ekvivalentna matrična forma sistemu (5.8) je

$$Z'(t) = A(t) Z(t), \qquad Z(0) = Z_0, \ t \in \mathbf{R}, \tag{5.9}$$

gde $Z = (z_1, z_2)$, $Z_0 = (z_1(0), z_2(0))$ i $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f(t) & 0 \end{pmatrix}$.

Kao rezulatat prethodne analize dobijamo sledeću:

Posledica 5.1 *Neka je* $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f(t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{G}(\mathbf{R})$ *i neka važi*

$$exp\left\{ \int_0^t \|a(\varphi_\epsilon, s)\|_K ds \right\} \leq \frac{c}{\epsilon^n}.$$

Onda diferencijalna jednačina $x'(t) + x^2(t) = f(t)$ *gde* $x \in \mathcal{G}(\mathbf{R})$, *sa početnim uslovom* $x(0) = x_0$, *ima jedinstveno rešenje u* $\mathcal{G}(\mathbf{R})$.

Literatura

[1] Aljančić, S.; Bojanić, R.; Tomić, M.: *Sur la asymptotique d'une classe des intgrales definies*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **7**(1954), 81-94.

[2] Al-Sirehy, F.; Fisher, B.: *The composition of the functions* $|x|^{-\lambda}$ *and* $|x|^{2r/\lambda}$, J. Frac. Calc. Appl. Anal., **2**(5) (1999), 575-582.

[3] Al-Sirehy, F.; Fisher, B.: *A composition of distributions*, Int. J. Appl. Math., **1**(6) (1999), 689-694.

[4] Al-Sirehy, F.; Fisher, B.: *On the sine integral*, J. Natur. Sci. Math., to appear.

[5] Colombeau, J.F.: *Elementary introduction in new generalized functions* North Holland, Amsterdam (1985)

[6] van der Corput, J.G.: *Introduction to the neutrix calculus*, J. Analyse Math., **7** (1959-60), 291-398.

[7] Farkas, E.; Grosse,r M.; Kunzinger, M.; Steinbauer, R.: *On the foundations of nonlinear generalized functions I* Mem.Am.Math.Soc.

[8] Fisher, B.; Al-Sirehy, F.: *On the non-commutative neutrix product of* x_+^λ *and* $x_+^{-\lambda-1}$, Int. J. Appl. Math., **2** (2) (2000), 265-276.

[9] Fisher, B.; Al-Sirehy, F.: *The neutrix product of the distrutions* $x_+^\lambda \ln x_+$ *and* $x_-^{-\lambda-r}$, Bull. Malaysian Math. Soc., **22** (1999), 1-10.

[10] Fisher, B.; Al-Sirehy ,F.: *On the cosine integral*, Int. Trans. Special Functions, **8** (1999), 31-42.

[11] Fisher, B.; Al-Sirehy, F.: *On the non-commutative neutrix product of* x_+^λ *and* $x_+^{-\lambda-r}$, Publ. Inst. Math. (Beograd), **65** (1999), 112-122.

[12] Fisher, B.: *Neutrices and the convolution of distributions*, Univ. U Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat., **17** (1987), 119-135.

[13] Fisher, B.: *The product of distributions*, Quart. J. Math. Oxford (2), **22** (1971), 291-298.

[14] Fisher, B.: *Some notes on distributions*, Math. Student, **48** (3)(1980), 269-281.

[15] Fisher, B.: *On defining the product of distributions*, Math. Nachr., **99** (1980), 239-249.

[16] Fisher, B.: *A non-commutative neutrix product of distributions*, Math. Nachr., **108** (1982), 117-127.

[17] Fisher, B.: *On defining the change of variable in distributions*, Rostock. Math. Kolloq., **28** (1985), 75-86.

[18] Fisher, B.: *On defining distributions* $\delta^{(r)(f(x))}$,Publ.Math.Decebren, **32** (1985), 233-241.

[19] Fisher, B.: *On defining distributions* $(x_+^r)_-^{-s}$ Univ u Novom Sadu, Zb. RAd. Prirod., Mat. Fak., Ser. Mat., **15** (1985), 119-129

[20] Fisher, B.; Itano, M.: *Some results on distributions and the change of variable,* Mem. Fac. Integrated Arts Sci., Hiroshima Univ., Ser. IV, **11** (1986), 1-15.

[21] Fisher, B.; Jolevska-Tuneska, B.; Özçağ, E.:, *Results on the composition of distributions* Integral Transforms and Special Functions, **13** (2002) 109-116.s

[22] Fisher, B.; Kamiński, A.: *The neutrix convolution product of distributions,* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (1995), Issue **3**.

[23] Fisher, B.; Kamiński, A.; Kılıçman, A.: *The neutrix convolution product* $(x_-^\lambda \ln^r x_-) \circledast (x_+^\mu \ln^s x_+)$, Zeszyty Nauk. Politech. Slaskiej, Ser. Mat.-Fiz., **82**(1997), 21-34.

[24] Fisher, B.; Kılıçman, A.; Pelivan ,S.: *The neutrix convolution product* $(x_-^\lambda \ln^r x_-) \boxed{*} (x_+^\mu \ln^s x_+)$, Integral Transforms and Special Functions, **3-4**(1998), 237-246.

[25] Fisher, B.: Kılıçman, A.: *Some commutative neutrix convolution products of distributions*, Comment. Math. Univ. Carolinae, **36** (1995), 629-639.

[26] Fisher, B.; Li, C.K.: *A commutative neutrix convolution products of distributions*, Univ. U Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat., **23** (1993), 13-27.

[27] Fisher, B.; Kuribayashi, Y.: *A theorem on the neutrix product of distributions*, Dem. Math., **17** (1984), 785-794.

[28] Fisher, B.; Kuribayashi, Y.: *Neutrices and the Beta function*, Rostock. Math. Kolloq., **32** (1987), 56-66.

[29] Fisher, B.; Kuribayashi, Y.: *Neutrices and the Gamma function*, J. Faculty Educ., Tottori Univ., **36** (1987), 1-7.

[30] Fisher, B.; Kou, H.; Özçağ ,E.: *The composition of distributions*, Proc. of Fifth International Conference on Complex Analysis and Applications with Symposium on Generalized Functions, Varna, Bulgaria, 1991, Publishing House of the Bulgarian Academy of Sciences, 1993, 63-72.

[31] Fisher, B.; Özçağ, E.: *A result on distributions and the change of variable*, Publ. Math. Debrecen, **43** (1993), 265-272.

[32] Fisher, B.; Özçağ, E.; Gülen, U.: *The exponential integral and the commutative neutrix convolution product* , J. Analysis , **7** (1999), 7-20.

[33] Fisher, B.; Savaş, E.; Pehlivan, S.; Özçağ, E.: *Results on the non-commutative neutrix product of distributions*, Math. Balkanica, **7** (1993), 347-356.

[34] Fisher, B.; Chen, Y.: *Non-commutative neutrix convolution products of functions*, Math. Balkanica, **9** (1995), 11-19.

[35] Gel'fand, I.M.; Shilov, G.E.: *Generalized Functions*, Vol. I, Academic Press (1964).

[36] Djapić, N.; Pilipović, S.: *Approximated traveling wave solutions to generalized hopf equation*, Novi Sad Journal of mathematics, **29** (1999), 103-116.

[37] Hadamard, J.: *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*, (1923).

[38] Heaviside, O.: *On operators in mathematical physics*, Proc. Royal Soc. London, **52** (1893), 504-529.

[39] Hörmann, G.; Kunzinger, M.: *Regularized derivatives in a 2- dimenzional model of self-interacting fields with singular data*, Journal of Analysis and its Applications, **19** (2000), 147-158.

[40] Jelínek ,J.: *A contribution to the equivalence results for the product of distributions*, CMUC, **35** (1994), 263-266. 6.

[41] Jolevska-Tuneska, B.; Fisher, B.: *An existence theorem for the non-commutative neutrix product of distributions*, International Journal of Applied Mathematics, **3** (2000) 63-70.

[42] Jolevska-Tuneska, B.; Fisher, B.: *Results on the composition of distributions*, International Journal of Applied Mathematics, **5** (2000) 407-418.

[43] Jolevska-Tuneska, B.; Fisher, B.: *The composition of the distributions* $sgn x|x|^{-\lambda}$ *and* $|x|^{(2r+1)/\lambda}$, Proceedings of the International Conference on Mathematics and its Applications in the New Millennium, 18-19 July, University Putra, Malaysia, 2000, 21-27.

[44] Jolevska-Tuneska, B.; Fisher, B.: *The cosine integral and the commutative neutrix convolution product*, Hacettepe Bulletin of Natural Sciences and Engineering, Series B, **30** (2001), 1-15.

[45] Jolevska-Tuneska ,B.; Takači, A.; Fisher, B.: *On some neutriks convolution product of distributions*, Integral Transforms and Special Functions, accepted for publication.

[46] Jolevska-Tuneska, B.; Fisher, B: *The sine integral and the commutative neutrix convolution product*, Contributions, Sec.Math.Tech.Sci.MANU, **1-2** (2000) 55-69.

[47] Kou, H.; Fisher, B.: *On compositions of distributions*, Publ. Math. Debrecen, **40** (1990), 279-290.

[48] Koh, E.L.; Li, C.K.: *On the distributions* δ^k *and* $(\delta')^k$, Math. Nachr, **157** (1992), 243-248.

[49] Kirchoff, G.R.: *Zur Theorie des Lichtstrahlen*, In Sitzungsberichte der Koniglichen preusseiche Akademie der Wissenschaften zu Berlin, **22** (1882), 641-669.

[50] Ligeza, J.: *Remarks on generalized solutions of ordinary linear differential equations in the Colombeau algebra*, Mathematica bohemica, **123** (1998), 301-316.

[51] Ligeza, J.; Tvrdy, M.: *On systems of linear algebraic equations in the Colombeau algebra*, Mathematica bohemica, **124** (1999), 1-14.

[52] Nedejkov, N.; Pilipović, S.; Skarpalezos D.: *The linear theory of Colombeau generalized function* Pitman Research Notes in Mathematics 385. Addison-Wesley-Longman, Harlow 1998.

[53] Nicholas, J.D.; Fisher, B.: *A result on composition of distributions*, Proc. Indian Acad.Sci.(Manth. Sci.), **103** (1999),317-323.

[54] Oberguggenberger, M.: *Generalized functions, nonlinear partial differential equations, and lie groups*, Proc. of Intern. Confer. on Geom. Anal. and Appl. August 21-24 2000 Banaras University, India.

[55] Oberguggenberger, M.: *Multiplication of distributions and application to partial differential equations* Longman group (1992).

[56] Özçağ, E.; Fisher, B.: *On partial derivatives of the Beta function*, Rostock. Math. Kolloq., **45** (1991), 43-56.

[57] Özçağ, E.: *On defining the k-th powers of the Dirac-delta distribution for negative integers.*, Appl.Math.Letters (to appear)

[58] Pilipović, S.: *Colombeau's generalized functions and pseudo-differential operators*, Lecture notes, Department of Mathematical Sciences, Novi Sad (1992)

[59] Pilipović, S.; Scarpalezos, D.: *Colombeau generalized ultradistributions*, Math.Proc.Camb.Phil.Soc. **130** (2001),541,553

[60] Pilipović, S.;Stanković, B.: *Prostori distribucija* SANU, Novi Sad 2000.

[61] Seneta, E.: *Regularly varying functions*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 508, Springer Verlag, Berlin 1976.

[62] Sneddon, I.N.: *Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry*, Oliver and Boyd (1961).

[63] Schmeelk, J.; Takaci, Dj.; Takaci, A.:*Elementary Analysis through Examples and Exercises*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1995).

[64] Schwartz, L.: *Theories des Distributions*, Hermann, Paris, (1966).

[65] Temple, G.: *Theories and applications of generalized functions*, J. London Math. Soc., **28** (1958), 134-148.

[66] Temple, G.: *100 Years of Mathematics*, Duckworth, (1981).

[67] Takači, A.: *On the equivalence at infinity of distributions*, Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat., **15**(1985), 175-187.

[68] Takači, A.; Fisher, B.: *On some neutrix products of distributions*, Publ. Inst. Math. (Beograd), **46 (60)**(1989), 101-110.

[69] Takaci, Dj.; Takaci, A.: *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*, PAMM Monographic Booklets, Technical University of Budapest,(1996).

[70] Villarreal, F.: *Colombeau's theory and shock wave solutions for systems of PDEs*, Electronic Journal of Differential Equations, **21**(2000), 1-17.

[71] Zemanian, A.H.: *Generalized Integral Transformations*, Dover Publications, Inc.,New York, (1987).

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRORODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni Broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa:
TZ
Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR

Autor: Biljana Jolevska Tuneska
AU
Mentor: prof. Dr Arpad Takači
MN

Naslov rada: Neutriks proizvodi i konvolicije distribucija i primene
NR
Jezik publikacije: srpski i engleski
JP
Jezik izvoda: engleski
JI

Zemlja publikovanja: SR Jugoslavija
ZP
Uže geografsko područje: Srbija, Vojvodina, Novi Sad
UGP
Godina: 2002
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: UNS, Prirodno-matematički fakultet
MA

Fizički opis rada: Rad se sastoji iz pet poglavja, 90 strana, 71 lit. citata.
FO

Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Analiza
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: neutriks, distribucija, konvolucija
PO
UDK:

Čuva se: U biblioteci Instituta za matematiku
ČU
Važna napomena:
VN

Izvod: After introducing the background and basic definitions in Chapter one, is second chapter existence of neutrix product of distribution $x^{\lambda}_{+} \ln^{p} x_{+}$ and $x^{-\lambda-r}_{-} \ln^{q} x_{-}$ is given. Third chapter deals with neutrix convolution product of the cosine integral and its associated functions. Similar results are given involving sine integral and its associated functions. At the end of this chapter convolution products of functions involving slowly varying function in both zero and infinity are given. Next part consider compositions of distributions in neutrix sense. Compositions of $\operatorname{sgn} x|x|^{-\lambda}$ and $|x|^{(2r+1)/\lambda}$ are evaluated. Also compositions $\left(|x|^{r-1/2}\right)^{-4s}$ and $\left(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2}\right)^{-4s+2}$ are given. In the fifth chapter Colombeau-s theory of generalized functions is used for solving one class of nonlinear ordinary differential equations.
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 04.07.2002
DP
Datum odbrane:
DO

Članovi komisije: (naučni stepen/ime i prezime/zvanje/fakultet)
KO
Predsednik: dr Stevan Pilipović, redovni profesor, PMF/IM, Novi Sad
Član: dr Arpad Takači, redovni profesor, mentor, PMF/IM, Novi Sad
Član: dr Dušanka Perišić, redovni profesor, PMF/IM, Novi Sad
Član: dr Boško Jovanović, redovni profesor, MF, Beograd

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
AN
Identification number:
IN
Document type: Monographic type
DT
Type of record: Text print material, PhD thesis
TR
Contents code:
CC

Author: Biljana Jolevska Tuneska
AU
Mentor: prof. Dr Arpad Takači
MN

Title: Neutrix product and convolution of distribution and applications
TI

Language of text: Serbian and English
LT
Language of abstract: English
LA

Country of publication: SR Yugoslavia
CP
Locality of publication: Serbia, Vojvodina, Novi Sad
LP
Publication year: 2002
PY

Publisher: Author's reprint
PU
Publ.plase: UNS, Faculty of Sciences
PP
Physical description: Thesis makes five chapters, 90 pages and 71 citation of literature
PD
Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Analysis
SD

Subject/key words: neutrix, distribution, convolution
SKW

UC:
Holding data: In the library of IM
HD
Note:
N

Abstract: After introducing the background and basic definitions in Chapter one, is second chapter existence of neutrix product of distribution $x^{\lambda}{}_{+} \ln^{p} x_{+}$ and $x^{-\lambda-r}{}_{-} \ln^{q} x_{-}$ is given. Third chapter deals with neutrix convolution product of the cosine integral and its associated functions. Similar results are given involving sine integral and its associated functions. At the end of this chapter convolution products of functions involving slowly varying function in both zero and infinity are given. Next part consider compositions of distributions in neutrix sense. Compositions of $\operatorname{sgn} x|x|^{-\lambda}$ and $|x|^{(2r+1)/\lambda}$ are evaluated. Also compositions $\left(|x|^{r-1/2}\right)^{-4s}$ and $\left(\operatorname{sgn} x|x|^{r-1/2}\right)^{-4s+2}$ are given. In the fifth chapter Colombeau-s theory of generalized functions is used for solving one class of nonlinear ordinary differential equations.

AB

Accepted by the Scientific Board on: 04.07.2002
ASB
Defended:
DE

Thesis defend board:(Degree/name and surname/title/faculty)
DB
President: dr Stevan Pilipović, professor, PMF/IM, Novi Sad
Member: dr Arpad Takači, professor, mentor, PMF/IM, Novi Sad
Member: dr Dušanka Perišić, professor, PMF/IM, Novi Sad
Member: dr Boško Jovanović, professor, MF, Beograd