UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Borivoj Subotić

GRAFOVSKE METODE U GEOMETRIJI I GEOMETRIJSKE METODE U GRAFOVIMA

- Doktorska disertacija -

Novi Sad, 2004.

Sadržaj

PROROK
"Pun duhovne ja lutah žeđi
pustinjom što je mračna bila,
i Serafim se sa šest krila
ukaza meni na razmeđi
A.S.Puškin

PREDGOVOR

Kada matematičar rešava geometrijske probleme, vrlo lako može da ih svede na algebarske, topološke ili numeričke. Zato i izgleda čudno to, da iz kruga geometrijskih problema u teoriju grafova, kao da nema izlazne tačke. Ni geometrija ni teorija grafova nemaju svesilni, sverešavajući metod za probleme koji se u njima pojavljuju. Tako se nameće zaključak da su te dve oblasti uglavnom nezavisne, osim što graf ima svoj geometrijski model. Na toj činjenici se uglavnom i završava znanje geometrijskog ili grafovskog teoretičara.

Međutim, mi nikako ne smemo zaboraviti poruke velikog ruskog svetitelja i tajnovidca Serafima Sarovskog (upokojenog 2. januara 1883. godine) u razgovoru sa učenim arhimandritom Makarijem, rektorom seminarije kada je objašnjavao da u prirodi uvek postoji bolje od boljega.

"Ima bolje od boljega, radosti moja", govorio je on. Ovu svoju tezu on je stavio na dugačku liniju svečovečanske drame od početka do kraja.

"Ima bolje od boljega, radosti moja", govorio je on. "Ovo je istina i pod vodom i na zemlji i na nebesima. Pod vodom alge su dobre, ribe su bolje, biser je najbolji. Na zemlji rastinje je dobro, životinje su bolje, čovek je najbolji. Na nebu stoji čin nad činom, lik nad likom, kolo nad kolima, sve bolje od boljega. Taj poredak važi i za svu istoriju i nauku roda ljudskog".

Sada možemo verovati da postoji izlazna tačka iz kruga geometrijskih problema u krug grafovskih i obrnuto. Njihova sveprožimajuća veza, ostaje za nas velika tajna.

Ovaj skroman rad samo je mali pokušaj da ukažemo na postojanje duboke veze geometrije i teorije grafova.

Veoma sam zahvalan prof. dr Dragoslavu Hercegu rukovodiocu Instituta za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, koji me je ohrabrio da radim na ovoj temi i koji se vrlo rado prihvatio i pored svojih velikih obaveza da bude predsednik Komisije. Zahvaljujem prof. dr Nenadu Petroviću,redovnom profesoru Učiteljskog fakulteta u Somboru koji me je podržao u radu. Veoma sam zahvalan pokojnom dr Draganu Acketi na nizu divnih sugestija koje mi je dao i ljudskoj toplini koju je ostavio za sobom.

Posebno se zahvaljujem dr Siniši Crvenkoviću na nizu korisnih saveta, literaturi i podršci koju mi je nesebično dao.

Iznad svih hvala mom mentoru prof. dr Ratku Tošiću bez čije velike pomoći u stručnom delu i njegovog divnog dugogodišnjeg prijateljstva ovaj rad ne bi bio napisan.

Ocu Dositeju Arhimandritu igumanu manastira Grgeteg dugujem najveću zahvalnost za duhovne odrednice ovoga rada.

Irig, ... 2002. god.

A u t o r

U V O D

Sadržaj rada je podeljen u nekoliko poglavlja.

Napominjemo najpre da ćemo se u ovom radu, baviti isključivo konačnim grafovima. Pored lema i teorema koje se pojavljuju u tekstu, dato je i nekoliko ilustrativnih zadataka. Njihov kraj ćemo označiti simbolom Δ, a kraj dokaza teoreme sa $\Box$.

Geometrija je najstarija, dok su grafovi jedna od najmlađih matematičkih disciplina. Bez obzira na to, te dve matematičke oblasti imaju veoma mnogo dodirnih tačaka.

Graf kao struktura je veoma amorfna matematička struktura, i najčešće se definiše kao uredjen par (V, E) dva skupa objekata. Elementi jednog skupa su čvorovi, a elementi drugog skupa su grane grafa. Iako se najčešće predstavlja grafički, tj. crtežom (odakle i ime), apstraktna svojstva grafa ni u kom slučaju ne zavise od njegovog geometrijskog modela u ravni. Bez obzira na to, često je moguće, koristeći specijalan način geometrijskog predstavljanja grafa, ispitivati neke njegove osobine čisto geometrijskim metodama.

S druge strane, niz geometrijskih problema u ravni i prostoru, moguće je rešavati koristeći metode teorije grafova. Po pravilu, takva rešenja, kad su moguća, elegantnija su i kraća od klasičnih geometrijskih postupaka.

Cilj ovog rada je da istraži navedene metode i ukaže na mogućnosti njihove primene. Posebna pažnja obratiće se na rešavanje nestandardnih zadataka takmičarskog karaktera.

Iz grafovskog ugla, naglasak će bitu na problemima koji se odnose na planarnost, stabla, bojenje, Ojlerove i Hamiltonove grafove, bojenje grana grafa, faktorizaciju i teoriju Ramzeja. Što se tiče geometrijske komponente, posebno će se istaći uloga geometrijskih transformacija, mnogouglova (posebno pravilnih) i bojenja, tj. razbijanja ravni. U vezi s tim. naći će svoje mesto i takve nestandardne metode, kao što su Dirihleov princip i metod invarijanti. Svi ti problemi biće tretirani i sa gledišta njihove metodičke transformacije.

U prvom poglavlju date su osnovne definicije i tvrđenja koja se koriste u radu.

Drugo poglavlje ima za cilj da poveća aksiološke lestvice matematike makar za jedan stepenik. Tu su našli svoje mesto Štajnerov zadatak na grafovima, teorema Erdös-Sekereša bojenje mnogouglova, jedan zadatak o rasporedu tačaka, i jedno verujem originalno rešenje geometrijskog zadatka. Nije zaobiđen problem "Kako čuvati muzej", "O vetrenjačama i političarima", kao i stavovi tipa Silvestera.

Dok se u drugom poglavlju grafovski dokazuju geometrijska tvrđenja u trećem poglavlju se čini obratno. Geometrijski se dokazuju grafovska tvrđenja. Jasno je sada da Teorija grafova i Geometrija čine živi dvosmerni savez. U ovom delu rada naglasak je na primeni Pikove teoreme.

Četvrto poglavlje čine metodičke transformacije u kome su prethodni problemi obrađeni metodički.

Ponuđeno je, verujem dosta matematičkih uopštenja, otvorenih problema i metodičkih novina.

Svakako bi taj deo bio nepotpun da u njemu nisu našli svoje mesto Lakatoševa teorija dokazivanja i opovrgavanja i Ešerova demonstracija virtuelne stvarnosti i Neeuklidskih geometrija.

I kao što su biseri razbacani pod morem, i kao što se svetitelji pojavljuju u raznim vremenima i kod raznih naroda, tako su i biseri dokaza matematičkih teorema veoma retki. Sticajem okolnosti neki od njih našli su se u knjizi [1], odakle su preuzeti u ovom radu.

Peto poglavlje sadrži neka mišljenja G.H.Hardija i još nekih savremenih matematičara filozofa i drugih o matematici. U njemu je sadržana i preporuka UNESCO od 1992. godine.

Hardijevo mišljenje da je lepota prvi test i reči I.P.Pavlova poznatog ruskog fiziologa kojima se završava ovaj rad, daje mi verovatno za pravo da verujem da je ovom tezom postignut i drugi cilj.

Da shvatimo da su radovi tipa "Teorema-dokaz" samo jedna slika naše matematičke snage. Da je zaista krajnje vreme da bez stida izvršimo naše matematičko preumljenje. Ako to ne učinimo verujem da naša dela, ma koliko se trudili neće preživeti vreme. Setimo se samo knjige našeg verovatno najvećeg intelekta današnjice. Vladete Jerotića "Samo dela ljubavi ostaju".

Vrednosnu matricu disertacije daće vreme.

On prstom lakim kao san
Zenica mojih kosnu dan
Vidovitost mi prenu zene
Ko u orlice preplašene
Moga se uha kosnu on
I ispuni ga šum i zvon
A.S.Puškin

Glava 1

1. Osnovni pojmovi, definicije i teoreme

Definicija 1.1 *Neka je X neprazan skup i ρ binarna relacija na X. Uređen par $G = (X, \rho)$ se naziva graf. Elementi skupa X su čvorovi grafa, a elementi skupa ρ grane grafa. Svaka grana određena je parom čvorova. Čvorove označavamo simbolima $v_1, v_2, \ldots$ a grane $e_1, e_2, \ldots$ Grana koja polnje i završava se u istom čvoru naziva se* petlja. *Graf se označava i sa $G = (V, E)$ gde je V skup čvorova a E skup grana grafa.*

Definicija 1.2 *Graf je* prost *ako nema petlji ni paralelnih grana. Graf G je reda n ako skup njegovih čvorova ima n elemenata.*

Definicija 1.3 Stepen čvora *$d(v_1)$ je broj grana incidentnih čvoru v_i.*

Definicija 1.4 *Graf $G = (V, E)$ se naziva* bipartitnim *ako se skup njegovih čvorova V može razbiti na takva dva podskupa V_1 i V_2 da svaka grana ima jedan krajnji čvor u podskupu V_1 a drugi u V_2.*

Definicija 1.5 *Neka su $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ dva grafa a V_1' podskup od V_1 koji pripada granama E_1, a V_2' podskup odV_2 koji pripada granama E_2. Graf $G_3 = (V_1' \oplus V_2',\ E_1 \oplus E_2)$ naziva se* prstenska suma *grafova G_1 i G_2. Prstenska suma se označava sa $G_1 \oplus G_2$ i to je graf G_3 indukovan na skupu grana $R_1 \oplus E_2$. Drugim rečima graf G_3 nema* *izolovanih čvorova i sastoji se samo iz grana koje se nalaze ili u G_1 ili u G_2, ali ne u oba grafa istovremeno.*

Definicija 1.6 *Za dva različita čvora neorijentisanog grafa kažemo da su* **susedna** *ako su spojena granom.*

Definicija 1.7 *Graf je* **regularan** *ako iz svakog njegovog čvora izlazi isti broj grana.*

Definicija 1.8 *Regularni grafovi sa n čvorova stepena $n-1$ nazivaju se* **potpuni grafovi.** *Potpun graf sa n čvorova označavamo sa K_n.*

Definicija 1.9 *Konačan povezan regularan graf stepena dva zove se* **kontura** - C_n.

Definicija 1.10 **Stablo** *je povezan graf sa $n(>1)$ čvorova i $m = n-1$ grana.*

Definicija 1.11 **Pravolinijskim grafom** *se naziva ravan graf, kod koga je svaka grana odsečak prave linije.*

Definicija 1.12 *Ako je svaka oblast ravnog grafa ograničena ciklusom od tri grane, onda se takav graf naziva* **ravna triangulacija.**

Definicija 1.13 *S je najveće pokrivajuće stablo grafa G.*

Teorema 1.1 *([58]) Za povezan orijentisan graf G sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

1) G - orijentisan Ojlerov graf;

2) za proizvoljan čvor v grafa G važi jednakost $d^-(v) = d^+(v)$.

3) G - je unija nekoliko gransko disjunktnih kontura.

I Fari je dokazao sledeću teoremu.

Teorema 1.2 *([9]) Svaki prost ravan graf je izomorfan pravolinijskom grafu.*

Teorema 1.3 *([9]) Svaki konačan prost graf (graf bez petlji i paralelnih grana) se može predstaviti u trodimenzionalnom prostoru, pravolinijski.*

Dokazaćemo Teoremu 1.2 pomoću niza od pet lema.

Lema 1.1 *Ako je graf G izomorfan pravolinijskom grafu, tada je svaki njegov podgraf takođe izomorfan pravolinijskom grafu.*

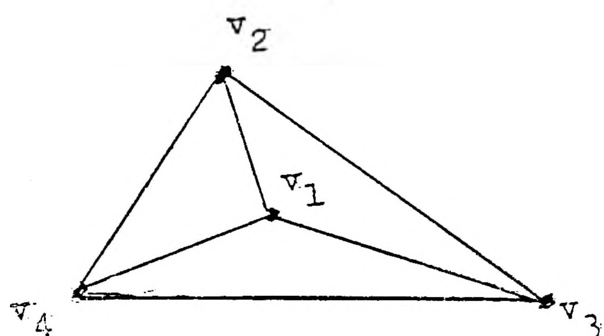
Dokaz. Ako je G izomorfan pravolinijskom grafu $\overline{G}$, a podgraf iz G se dobija udaljavanjem temena i grana, koji ne pripadaju tom podgrafu, to odgovarajuća operacija u $\overline{G}$ daje pravolinijski podgraf, koji je izomorfan posmatranom podgrafu u G. (Ovde $\overline{G}$ nije komplement grafa G). □

Lema 1.2 *Svaki prost ravan graf G je podgraf ravne triangulacije sa tim istim skupom čvorova.*

Dokaz. Pretpostavimo da G ima makar četiri čvora. Konstruišimo ravnu trijangulaciju G' koja sadrži G u ulozi podgrafa. Ako je R - oblast od G, a v_1 i v_2 dva čvora iz R, koji nisu povezani granom, spojimo v_1 i v_2 granom koja potpuno leži u R. Dobijamo nov graf, koji opet mora biti prost. Produžimo taj proces spajanjem nepovezanih parova čvorova granama dok svaki par čvorova ne bude spojen granom. Posle završetka procesa dobijamo prost graf G' sa tim istim brojem čvorova.

Očigledo je G' povezan, jer u protivnom slučaju postoji oblast R, susedna sa dve komponente iz G, za koju se može izabrati v_1 unutar jedne od komponenti a v_2 unutar druge i povezati ih granom u R. što je suprotno sa konstrukcijom G'.

Pokažimo, da je G' - ravna triangulacija. Prethodno primetimo da ako je neka trijangulacija ograničena samo jednom granom, graf se sastoji iz te grane i dva njegova čvora. Oblast ne može biti ograničena sa dve grane, jer bi tada graf sadržao samo tri čvora. Oba slučaja protivureče pretpostavci o četiri čvora. Zbog toga se granica svake oblasti R' sastoji u krajnjem slučaju iz tri grane e_1, e_2, e_3. Ako one ne obrazuju ciklus, to postoji makar četiri čvora v_1, v_2, v_3, v_4 na granici R. Sada G' sadrži grane koje povezuju te čvorove, tj. $v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4$ (kao na narednoj slici) koje dele ravan na



Slika 1.

četiri oblasti, a granica svake od njih sadrži samo tri čvora. Ali to je dalje razbijanje R', koja i sama jeste oblast G'. Dobili smo kontradikciju. Dakle, e_1, e_2, e_3 formiraju ciklus i svaka oblast G' je ograničena ciklusom od tri grane. □

Lema 1.3 *Neka je prost graf G ravna triangulacija i ima najmanje četiri čvora. Ako su $vv_1, vv_2, ..., vk_k$ - grane koje izlaze iz v i raspoređene u cikličnom poredku (tj. u smeru kretanja kazaljke na satu), grane $C_v = (v_1v_2, v_2v_3, ..., v_kv_1)$ pripadaju G i formiraju ciklus koji odvaja v od drugih temena iz G.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati lemu pod pretpostavkom da v ne leži na granici beskonačne oblasti, koja sadrži potrebnu tačku u beskonačnosti, jer pomoću sferne projekcije može se postići to da v leži na granici unutrašnje oblasti. Kako je graf ravna triangulacija, to v mora ležati unutar nekih ciklusa dakle, postoji unutrašnji ciklus C_v^1 sa temenima $v_1^1, v_2^1, ..., v_m^1$, koji uključuje v. Svaki niz parova čvorova v_i', v_{i+1}' leži na granici trougaone oblasti koja dakle, sadrži treći čvor. Mi zaključujemo da je $v' = v$, u protivnom slučaju ciklus $(v_1'v_2', v_2'v_3', ..., v_i, v'vv_{i+1}', ..., v_m'v_1')$ sadrži unutar sebe v i leži unutar C_v', što protivureči gornje rečenom. Dakle, trougaone oblasti, susedne sa C_v', uključuje zajednički čvor v, a kako je G prost graf, to C_v' mora da se poklapa sa C_v i lema je dokazana. □

Ako se čvor v u Lemi 3. (pretpostavlja se da on leži na unutrašnjoj oblasti R) i povezane sa njim grane uklone obrazuje se prazna oblast unutar C_v, i ako zatim v_1 spojimo sa $v_3, ..., v_{k-1}$ granama od kojih se nikoje dve ne seku i leže unutar C_v. dobijen graf $\overline{G}$ ne mora biti prost. U tom slučaju važi sledeće tvrđenje.

Lema 1.4 *Ako graf G nije prost, tada G sadrži ciklus od tri grane koji razdvaja dva čvora.*

Dokaz. $\overline{G}$ može biti prost samo u tom slučaju ako je v_1 spojen sa nekim čvorom v_i $(3 \leq i \leq k-1)$ novom granom i granom koja se nalazi naspram C_v, ciklus (v_1v, vv_i, v_iv_1) u grafu G sa granom v_iv_1 nalazi se naspram C_v i razdvaja v_2 i v_k. Lema je dokazana. □

Lema 1.5 *Svaka ravna triangulacija prostog ravnog grafa izomorfna je pravolinijskom grafu.*

Dokaz. Očigledno je lema tačna za grafove sa tri čvora. Pretpostavimo da je ona tačna za grafove sa n čvorova i neka je G graf sa $n + 1$ čvorova.

Konstruišimo $\overline{G}$, kako smo prethodno opisali, pri uslovu, da čvor v grafa G leži na granici unutrašnje oblasti R.

Beskonačna oblast je ograničena istom granicom u grafu $\overline{G}$ kao u grafu G. Ako je $\overline{G}$ - prost graf, to po induktivnoj hipotezi postoji pravolinijski graf $\overline{S}$, izomorfan $\overline{G}$. Sada treba dokazati da čvor

$\overline{v}$, koji odgovara v, može biti izabran na taj način, da se on može povezati odsečcima prave sa potrebnim čvorovima, ne presecajući pri tome druge odsečke. Posmatrajmo ciklus $\overline{C}_v = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, ..., \overline{v}_k, \overline{v}_1)$ grafa $\overline{S}$, koji odgovara C_v, u Lemi 3. gde $\overline{v}_i$ u $\overline{S}$ odgovara v_i u $\overline{G}$. Prave linije $\overline{v}_i\overline{v}_{i+1}$ $(2 \leq i \leq k-1)$ ne prolaze kroz $\overline{v}_1$, inače bi $\overline{v}_1\overline{v}_i$ u $\overline{v}_1\overline{v}_{i+1}$ imale zajednički odsečak. Zbog toga, $\overline{v}_1$ pripada jednoj od dve poluravni koje formira prava $\overline{v}_i\overline{v}_{i+1}$ $(2 \leq i \leq k+1)$, i presek tih poluravni obrazuje konveksnu oblast sa unutrašnjim tačkama. Razmotrimo zajednički deo k te oblasti i unutrašnje oblasti $\overline{C}_v$.

Odsečak koji spaja proizvoljnu tačku iz k sa graničnim čvorovima $\overline{C}_v$, leži unutar $\overline{C}_v$, osim njegove granične tačke. Ako bi odsečci $\overline{v}_1\overline{v}_3$, $\overline{v}_1\overline{v}_4, ..., v_1 v_{k-1}$ bili udaljeni iz $\overline{S}$, onda bi unutrašnja oblast $\overline{C}_v$ postala prazna. Odabirajući tačku $\overline{v}$ unutar k i formirajući odsečke $\overline{v}_2, \overline{v}_2, ... \overline{v}_k$, dobija se graf izomorfan sa G.

Ako G nije prost, to po Lemi 4. u G postoji ciklus Δ od tri grane, koji razdvaja dva čvora. Ciklus Δ zajedno sa konstruisanim granama obrazuje ravnu trijangulaciju grafa G_1, a sa unutrašnjim granama - ravnu trijangulaciju grafa G_2. Oba grafa sadrže najviše n čvorova i dakle, po induktivnoj hipotezi, oni su izomorfni sa pravolinijskim grafovima $\overline{S}_1$ i $\overline{S}_2$. U grafu $\overline{S}_1$ unutrašnja oblast $\overline{\Delta}_1$, koja odgovara Δ, postaje prazna. S druge strane $\overline{S}_2$ leži unutar ciklusa $\overline{\Delta}_2$, koji odgovara Δ u $\overline{S}_2$.

Pri odgovarajućem izboru afine transformacije, Δ_2 se može preslikati na $\overline{\Delta}_1$ tako da se susedne grane u G preslikaju na susedne grane. Kao rezultat dobijamo pravolinijski graf izomorfan G. Ovim je teorema dokazana. □

Glava 2

Treptanje čuh u nebu sila
I anđeoskih krila let
Nemani morskih skriven svet
I klijanje pod zemljom žila
On priniče uz moje usne
I jezika mi grehe gnusne
A.S.Puškin

1. Grafovski dokazi geometrijskih tvrđenja

U ovom delu ćemo geometrijska tvrđenja smestiti u prostor teorije grafova, i pokazati kako grafovi rešavaju geometrijske probleme.

Teorema 1.1 *Od pet tačaka u ravni u opštem položaju (nikoje tri nisu kolinearne) četiri su temena konvesknog četvorougla.*

Dokaz. Graf K_5 nije planaran. Posmatrajmo dve grane koje se seku. Njihovi krajevi su temena traženog konveksnog četvorougla. □

Teorema 1.2 *([35]) Konveksan poliedar sa n temena i m ivica ima $f = m - n + 2$ strane.*

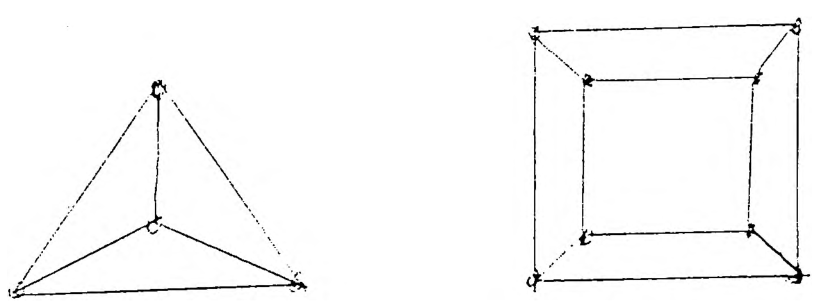
Mada se ova teorema može dokazati čisto geometrijskim putem, njen grafovski dokaz je jednostavniji. Naime, ova teorema je primena Ojlerove teoreme za planarne grafove u geometriji. Ona glasi:

Teorema (L.Euler, 1752.). *Povezan planaran graf sa n čvorova i m grana deli ravan na $f = m - n + 2$ oblasti.*

Dokažimo sada Ojlerovu jednakost za konveksne poliedre.

Dokaz. Ovaj stav je direktna posledica Ojlerove teoreme za planarne grafove, ako se primeti da je graf formiran od temena i ivica poliedara planaran graf.

Svaki poliedar može se deformisati tako da mu se ne menja broj temena, ivica i strana, a da se oko njega može opisati sfera. Ovo se može izvesti tako da se posle projektovanja temena i ivica poliedra zracima iz centra sfere, na njoj dobija graf (koji odgovara poliedru) čije se grane ne seku. Sa sfere se graf može stereografskom projekcijom preslikati u ravan. Centar projekcije se pri tom ne nalazi na nekoj grani ili u nekom čvoru grafa sa sfere. Projektovani graf u ravni ima osobinu da mu se grane ne presecaju, pa je dakle, planaran graf. Dakle, svakom poliedru P može da se pridruži planaran graf $G(P)$ koji se dobija kao njegova stereografska projekcija. Na primer, tetraedru i kocki odgovaraju grafovi, na slici 1.



Slika 1.

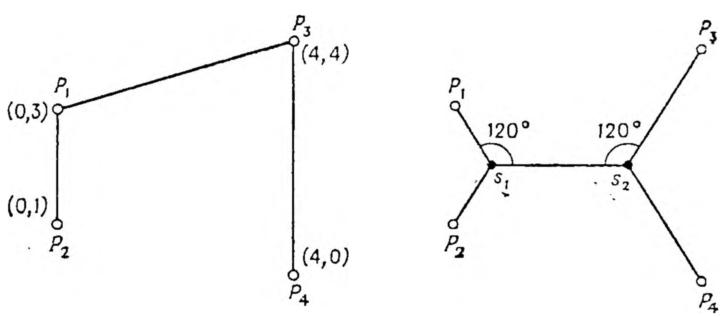
Poznato je da obrat nije tačan. Naime, ako je G proizvoljan povezan planaran graf, ne mora da postoji poliedar P, takav da je $G(P) \cong G$. □

2. Štajnerov zadatak na grafovima

U Štajnerovom zadatku treba naći najkraće stablo (drvo) T, koje pokriva dati podskup $P \subset X$ čvorova grafa G. Drugi čvorovi koji pripadaju $X \setminus P$, mogu ili biti pokriveni drvetom T, ili ne, u zavisnosti od potrebe minimizacije dužine drveta T. Dakle, zadatak Štajnera ekvivalentan je nalaženju najkraćeg pokrivajućeg stabla proizvoljnog podgrafa $G' = (X', \Gamma)$ grafa G pri uslovu $P \subseteq X' \subseteq X$.

Euklidski zadatak Štajnera prvo je bio postavljen kao geometrijski u kome je trebalo skup tačaka P u euklidskoj ravni spojiti linijama tako da zbir dužina odsečaka bude minimalan. Ako se ne dopušta presek proizvoljne dve linije u tačkama van zadatog skupa P, to se zadatak svodi na neki od zadataka definisanja S ekvivalentnog grafa na $|P|$ čvorova sa matricom težina izračunatih kao euklidsko rastojanje među tačkama skupa P.

Ako se u ravni dopušta uvođenje dopunskih "prirodnih" čvorova (koji se nazivaju tačke Štajnera) to se dužina S na skupu tačaka $P' \supset P$ može umanjiti odgovarajućim izborom tačaka. Na primer, za četiri tačke, na slici 1, S ima dužinu veću nego S grafa, dobijenog posle dodavanja dve nove tačke S_1 i S_2, koje se nalaze "između" datih tačaka.



Slika 1.

Na taj način za rešenje zadatka Štajnera može se dodati na proizvoljnim mestima u ravni toliko tačaka Štajnera, koliko je neophodno za konstruisanje najkraćeg drveta koje pokriva skup od P tačaka. Dobijeno najkraće drvo se naziva *najkraće drvo Štajnera.*

Zadatak Štajnera u euklidskoj ravni dovoljno je dobro izučen i poznat je veliki broj osobina najkraćeg drveta Štajnera. Najvažnija su sledeća svojstva:

1) Tačka Štajnera S_i ima stepen $d(S_i) = 3$. To se može lako dokazati pomoću geometrijske konstrukcije, jer ugao između grana koje su incidentne tački Štajnera S_i, mora biti jednak 120^0 i tačno tri grane su incidentne proizvoljnoj tački Štajnera S_i. Dakle, ta tačka je "centar" (cen-

tar Štajnera) formiranog trougla, čija su temena tri druge tačke drveta, s kojima je ona povezana pomoću najkraćeg drveta Štajnera. Neke tačke, koje su temena takvog trougla, mogu biti druge tačke Štajnera. Na primer, na prethodnoj slici tačka Štajnera S_2 je centar formiranog trougla sa temenima P_3, P_4 i S_1.

2) Za temena $P_i \in P$ stepen $d(P_i) \leq 3$. Ako je $d(p_i) = 3$, to ugao između proizvoljnih dveju grana, koje su incidentne sa P_i, mora biti jednak 120^0. Ako je $d(P_i) = 2$, ugao između dve grane incidentne P_i mora biti veći ili jednak 120^0.

3) Broj tačaka Štajnera u najkraćem drvetu Štajnera k zadovoljava uslov

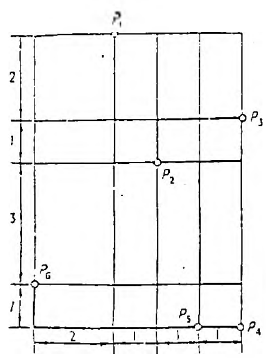
$$0 \leq k \leq n-2, \quad \text{gde je } n = |P|.$$

Ipak, euklidski zadatak Štajnera rešen je samo za mali broj tačaka u P (ne više od 10) pomoću odgovarajućih algoritama. Zato euklidski zadatak Štajnera možemo smatrati nerešenim. U kasnijim varijantama zadatka Štajnera u ravni, koristi se obično *linearno* (umesto euklidskog) rastojanje među tačkama. Takvu postavku zadatka je predložio Henom. Rastojanje između tačaka sa koordinatama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ u tom slučaju definiše se na sledeći način:

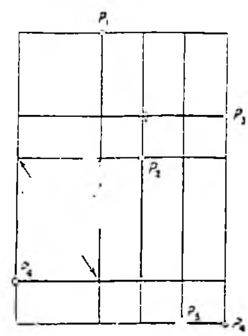
$$d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Pri takvim uslovima moguće je lako pokazati da ako kroz svaku tačku iz skupa P povučemo horizontalne i vertikalne linije, rešenje zadatka Štajnera moguće je dobiti, posmatrajući kao moguće tačke Štajnera, tačke preseka dobijene mreže linija.

Neka je graf G konstruisan tako, da skup njegovih čvorova X bude skup tačaka preseka neke mreže linija i grane grafa G odgovaraju linijama mreže koje spajaju dve tačke preseka. Tada zadatak Štajnera u ravni sa linearnom metrikom, prelazi u zadatak Štajnera za konačan graf. Na prvoj narednoj slici pokazan je primer najkraćeg drveta Štajnera za linearan zadatak sa šest tačaka, a na drugoj S tog zadatka.



Slika 2.



Slika 3.

Zadatak Štajnera za obične neorijentisane grafove izučavali su Hakimi, Drejfus i Vagner. Oni su našli tačne algoritme rešenja takvih zadataka. Ali ti algoritmi sa tačke stanovišta izračunljivosti su neefikasne procedure. U svakom slučaju (kao i u slučaju zadatka sa euklidskim rastojanjem) maksimalan broj čvorova nije veći od deset, u skupu P. Tako posmatran zadatak Štajnera na grafu možemo smatrati nerešenim.

Zadatak. U ravni je dato n tačaka. Iz svake tačke polazi po 2000 vektora do ostalih tačaka i u svakoj tački završava 2000 vektora iz ostalih tačaka. Dokazati da je zbir svih ovih vektora jednak nuli.

REŠENJE. Posmatrajmo tačke u ravni kao čvorove, a vektore kao grane orijentisanog grafa G. Graf G je orijentisan Ojlerov graf jer je za proizvoljan čvor v grafa G ispunjena jednakost $d^-(v) = d^+(v)$. Ovo zaključujemo jer važi teorema:

Orijentisan Ojlerov graf ima orijentisanu zatvorenu konturu koja sadrži sve grane grafa. Dakle, ako krenemo iz proizvoljnog čvora, usmerenom granom koja izlazi iz njega možemo obići sve grane grafa i vratiti se u polazni čvor.

Dakle, zbir vektora u zadatku je zaista jednak nuli. $\triangle$

3. Bojenje mnogouglova

Teorema 3.1 *([59]) Neka su stranice i dijagonale pravilnog $n-$ tougla X, obojene su sa k boja tako da važi sledeće:*

a) Za svaku boju a i svaka dva temena A i B ili je AB obojeno bojom a ili postoji teme C tako da su AC i BC obojeni bojom a.

b) Stranice svakog trougla čija su temena temena mnogougla X obojena su sa najviše dve boje.

Tada je $k \leq 2$.

Dokaz. Primetimo da ako možemo da dobijemo kontradikciju za $k = 3$ to će nam biti dovoljno. Možemo redukovati svaki slučaj za $k > 3$, a slučaj za $k = 3$ odabravši 3 od k boja, recimo crvenu plavu i zelenu, koje ćemo zadržati i prebojivši u zeleno svaku ivicu koja nije ni zelena ni plava ni crvena. □

Lema 3.1 *Pretpostavimo da imamo 4 temena W, X, Y, Z, takva da su WX, XZ, i YZ obojeni različito i WY je obojeno isto kao WX. Tada WZ mora biti iste boje kao WX i WY.*

Dokaz. Po uslovu b) svaki od trouglova WXZ i WYZ ne može da sadrži sve 3 boje. Dakle jedino bojenje koje ispunjava uslov je kada je WZ iste boje kao WX i WY.
□

Pokazaćemo da odatle sledi da naš mnogougao ima beskonačno mnogo strana što je kontradikcija sa polaznim. Sledi konstrukcija.

Po pretpostavci mora biti najmanje jedna crvena ivica. Neka ona spaja temena X i R_1. Po uslovu a) postoji teme B_1 tako da su XB_1 i RB_1 plavi. Takođe po uslovu a) postoji teme G_1 tako da su XG_1 i B_1G_1 zeleni. Na osnovu leme 4.1. G_1R_1 mora biti zelena. Primetimo da smo konstruisali ova temena u redosledu X, R_1, B_1, G_1. Nastavićemo da konstruišemo temena u redosledu $R_iB_iG_iR_{i+1}B_{i+1}G_{i+1} \ldots$ tako da kad god konstruišemo teme ono mora imati ivice te boje prema svim već postojećim čvorovima. Ipak pokazaćemo da nikada ne možemo završiti (tj. uslov a nikad neće biti potpuno zadovoljen). Primer: Predpostavimo da smo konstruisali sva temena do G_n. Dodajmo R_{n+1}. Na osnovu induktivne hipoteze za svako teme $Y = G_nB_n$ koje je već konstruisano, YB_n mora biti plavo. Takođe za svako teme $Y = G_n$ koje je već konstruisano. YG_n mora biti zeleno. Prema tome uslov a) nije zadovoljen za temena G_nB_n i zelenu boju. Dakle, mora da postoji neko R_{n+1} tako da su $R_{n+1}B_n$ i $R_{n+1}G_n$ zeleni. Ali sada primetimo da za svako teme P (različito od R_{n+1,B_n} i G_n) našeg grafa, možemo primeniti našu lemu sa $W = R_{n+1}, X = B_n, Y = G_n$, $Z = P$, i $R_{n+1}P$ je takođe crveno. Slično možemo primetiti da mora postojati B_{n+1} tako da su $B_{n+1}R_{n+1}$ i $B_{n+1}G_n$ plavi i zaključiti da B_{n+1} mora biti povezan sa svim postojećim temenima plavom ivicom. Konačno mora da postoji G_{n+1} tako da su $G_{n+1}R_{n+1}$ i $G_{n+1}B_{n+1}$ zeleni. Takođe zaključujemo da G_{n+1} mora biti povezan sa svim postojećim temenima zelenom ivicom. Sa ovim možemo nastaviti beskonačno pošto posle svakog "ciklusa" G_n i B_n neće zadovoljavati uslov a). Prema tome naš poligon ima beskonačno mnogo temena, i time je dokaz završen. □

Zadatak 1. U ravni je dato nekoliko jediničnih kvadrata, čije su stranice međusobno paralelne tako da među svakih n od njih postoje 4 kvadrata koji imaju zajedničku tačku. Dokazati da se svi kvadrati mogu razbiti na najviše $n-3$ grupa, tako da svi kvadrati iz jedne grupe imaju zajedničku tačku.

REŠENJE. Uočimo prvo da u svakom skupu kvadrata sa paralelnim stranicama, ukoliko svaka dva imaju neprazan presek, svaka 3 imaju neprazan presek. To povlači da je presek svih kvadrata neprazan: Helijeva teorema tvrdi da ako svaka 3 člana jedne kolekcije od konačno mnogo ograničenih konveksnih skupova imaju neprazan presek, tada je presek svih članova kolekcije neprazan. Drugo, uočimo da ako konačan skup jediničnih kvadrata ne sadrži $k+1$ međusobno disjunktnih kvadrata, tada se može razbiti na $2k-1$ grupa takvih da je presek svih kvadrata svake grupe neprazan.

Slučaj $k = 1$ je trivijalan. Dokaz nastavljamo indukcijom. Uočimo kvadrat S čija je leva stranica najviše levo od svih kvadrata. Kolekcija kvadrata čiji je presek sa S prazan ne sadrži k disjunktnih kvadrata. Po induktivnoj hipotezi ona se može razbiti na $2k-3$ kvadrata. Preostali kvadrati sadrže ili desni gornji ili desni donji ugao kvadrata S tako da mogu da se podele u 2 grupe pri čemu je presek svake grupe neprazan. Time je induktivni dokaz završen. $\triangle$

Vratimo se na osnovni problem. Neka je Γ graf čiji su čvorovi kvadrati pri čemu su 2 čvora povezana granom akko je presek odgovarajućih kvadrata neprazan.

Na osnovu prvog paragrafa dovoljno je dokazati da se čvorovi grafa mogu razbiti na $n-3$ ili manje kompletnih podgrafova. Neka je Γ_1 prazan podgraf grafa Γ sa maksimalnim brojem čvorova. Neka je Γ_2 prazan podgraf grafa $\Gamma - \Gamma_1$ sa maksimalnim brojem čvorova i slično neka je Γ_3 prazan podgraf grafa $\Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2$ sa maksimalnim brojem čvorova. Uzmimo da graf Γ_2 ima n_i čvorova. Ako je $n_1 + n_2 + n_3 \geq n$, tada prema Dirihleovom principu među svaka 4 čvora 2 su u istom Γ_i pa ne mogu biti susedni što je kontradikcija sa uslovom zadatka. Stoga mora da važi $n_1 + n_2 + n_3 \leq n - 1$. Graf $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ je bipartitan pa se može razbiti na n_1 kompletnih podgrafova na osnovu Holove teoreme. (U protivnom za neko k postoje k čvorova u Γ_2 koji obrazuju prazan podgraf sa najmanje $n_1 - k + 1$ čvorova u Γ_1 što je suprotno izboru grafa Γ_1). Dalje $\Gamma - \Gamma_1 - \Gamma_2$ može se razbiti na $2n_3 - 1$ kompletnih podgrafova na osnovu drugog zapažanja. Na taj način dokaz je završen ukoliko ne važi nejednakost $n_1 + 2n_3 - 1 \geq n - 2$.

Kombinujući dve naznačene nejednakosti dobijamo $n_3 \geq n_2$, a kako je očigledno $n_1 \geq n_2 \geq n_3$ zaključujemo da je $n_2 = n_3$. Ponovo na osnovu drugog zapažanja $\Gamma - \Gamma_1$ može da se razbije na $2n_2 - 1$ kompletnih podgrafova. Neka je Ω jedan od njih. Primetimo da $\Gamma_1 \cup \Omega$ može da se razbije na n_1 kompletnih podgrafova uzimajući svaki čvor iz Γ_1 zajedno sa svim onim čvorovima sa kojima je susedan. (Ako bi neki čvor Ω preostao. on bi se mogao dodati grafu Γ_1 i tako dobiti veći prazan podgraf, što je kontradikcija sa izborom Γ_1. To čini jednu dekompoziciju grafa Γ na $2n_2 - 2$ kompletnih podgrafova koji obrazuju graf $\Gamma - \Gamma_1 - \Omega$, i n_1 kompletnih podgrafova koji obrazuju $\Gamma_1 \cup \Omega$. Sve ukupno to je $n_1 + 2n_2 - 2 = n_1 + n_2 + n_3 - 2 \leq n - 3$ kompletnih podgrafova što je i trebalo da se dokaže. $\square$

Teorema 3.2 *([59]) Iz svakog konačnog skupa tačaka u ravni može da se ukloni jedna tačka, tako da se ostatak skupa može podeliti na 2 podskupa od kojih svaki ima prečnik manji od prečnika početnog skupa.*

U dokazu ćemo koristiti sledeće leme:

Lema 3.2 *Ne postoji ciklus dužine* 4.

Dokaz. Dokazaćemo to kontradikcijom. Neka je $AB = BC = CD = DA = q$. Onda je $ABCD$ romb i jedan od njegovih uglova npr. $ABC = 90^0$. Na osnovu kosinusne teoreme imamo da je $AC \geq q\sqrt{2}$ što je kontradikcija. $\square$

Lema 3.3 *Ako postoji ciklus* $[M]$, *onda svaka grana ima zajednički čvor sa tim ciklusom.*

Dokaz. Za svaku tačku X neka je O_X krug sa centrom u X poluprečnika q. Neka je tačka *ciklusna tačka* ako je u $[M]$. Za svaku ciklusnu tačku P nacrtajmo O_p. Neka je R presek svih unutrašnjosti i granica tih krugova. Taj skup R mora da sadrži sve tačke ovog skupa pošto bilo koje dve tačke nisu dalje od q, i taj skup je konveksan jer je presek konveksnih skupova. Rub ovog skupa R čine mali lukovi iz O_p, i njegovi čvorovi su tačke u ciklusu.

Neka je $AB = q$ ali neka niti A niti B ne pripadaju $[M]$. Imamo dva slučaja:

(i) jedna od tačaka A i B je na granici R.

(ii) Nijedna nije na granici R.

(i) Bez gubitka opštosti možemo uzeti da je A na granici od R. Tada je A na malom luku kružnice čiji je centar u nekoj ciklusnoj tački C i taj luk je ograničen sa 2 ciklusne tačke D i E. Neka krug O_A seče O_C u tačkama S i T, i neka je S u unutrašnjosti O_D ali ne u unutrašnjosti O_E i obrnuto T je u unutrašnjosti O_E ali ne pripada unutrašnjosti O_B.

Pošto je $AB = q$, B leži na O_A. Pošto je $BC \leq q$, B ne leži izvan O_C. Dalje $B \neq C$ jer B nije ciklusna tačka. Tada B leži ili na luku SC ili CT kruga O_A. U prvom slučaju tačka B ne pripada O_E pa je $BE > q$ što je kontradikcija. U drugom slučaju B leži izvan O_D pa je $BD > q$. Time zaključujemo da ako je A na rubu onda je i B na rubu. Kontradikcija.

(ii) Neka AB leži u unutrašnjosti R. Produžimo zrak AB tako da preseče granicu od R u nekoj tački P. Ako je P čvor onda je $PA > q$ a to je kontradikcija. U suprotnom neka je Q tačka na zraku PA tako da je $PQ = q$ segment. Pošto je Q na PA i R je konveksan skup. onda Q pripada R, takođe. Odavde sledi da je PQ dužine q koji je sadržan u R i P je na rubu od R. Ali ovo je nemoguće prema gornjem.

Dakle, gde god da je duž AB, imamo kontradikciju. Znači, ili A ili B je čvor kako smo tvrdili. □

Lema 3.4 *Postoji najviše jedan ciklus.*

Dokaz. Izvedimo dokaz kontradikcijom. Neka je $[P]$ ciklus sa minimalnom dužinom. Svaki drugi ciklus $[Q]$ mora imati bar jedno teme V koje ne pripada $[P]$. Ovaj čvor je susedan čvor za neke čvorove W i X. (Prema Lemi 2) W i X su u $[P]$.

Ako 2 ili više čvorova razdvajaju W i X u ciklusu $[P]$, tada njihovom zamenom u $[P]$ sa V dobijamo manji ciklus. Kontradikcija.

Ako samo jedan čvor Y razdvaja W i X u ciklusu $[P]$, tada je $WYXV$ ciklus dužine 4 što prema lemi 1 ne može biti.

Ako nema čvorova između W i X koji ih razdvajaju onda je $VWX-$ 3 ciklus. Pošto je $[P]$ minimalni ciklus on mora biti $3-$ ciklus i W i X susedne za neko teme Y. Tada je $WYXV$ ciklus dužine 4 (kontradikcija sa lemom 1). Dakle, naša početna pretpostavka je bila pogrešna i postoji najviše jedan ciklus kao što smo i tvrdili. □

Neka je Q prečnik skupa, a tačke čvorovi grafa.

Dokaz teoreme.

Ako postoji ciklus izvadimo bilo koju tačku iz njega. U protivnom ako nema ciklusa, uklonimo proizvoljnu tačku. Pošto je postojao najviše jedan ciklus, sada nema više ciklusa. Svaki poseban povezan podgraf novog grafa mora biti drvo, pošto nema ciklusa. U svakom podgrafu obojimo proizvoljnu tačku V u crveno. Onda iz tačke V do bilo koje tačke W u podgrafu postoji jedinstven put. Ako ta staza ima neparno mnogo ivica, obojimo W u plavo. U suprotnom, obojimo W u crveno. Dva susedna čvora uvek imaju različitu boju. Razdvojmo tačke po boji. U istom skupu nikoje dve tačke nisu na rastojanju 2 jedna od druge, kako smo i želeli. □

Zadatak 2. Dat je segment dužine 1. Na koliko najmanje delova se on može iseći tako da se od tih delova može sastaviti pravilan $n-$ tougao obima jedan i pravilan $m-$ tougao obima jedan ? (pravilan n_i - ugao obima 1, za svako $i = 1, 2, ..., k$)

Rešenje. Podelimo jediničnu duž 1, na m jednakih deleova. Skup tih delova označimo sa A. Dakle, $|A| = m$. Zatim tu jediničnu duž podelimo na n jednakih delova. Skup tih delova neka je označen sa B, a njegov kardinalni broj $|B| = n$. Zadatak zahteva da odredimo kardinalni broj od $|A \cup B|$. Neka je još $NZD(m, n) = d$.

Po formuli uključivanja i isključivanja dobijamo da važi jednakost:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

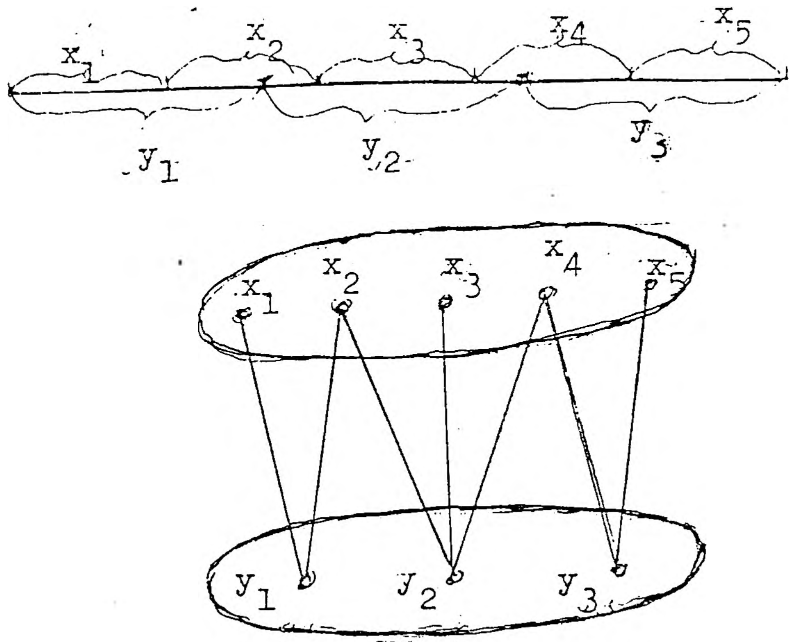
Kako je $|A \cap B| = d$, dolazimo do jednakosti

$$(*) \qquad |A \cup B| = m + n - NZD(m, n).$$

Ta jednakost ima svoju reprezentaciju na bipartitnim grafovima. Dužima iz prve podele pridružimo čvorove koje stavimo u jednu klasu. Analogno dužima iz druge podele odgovaraće čvorovi iz druge klase.

Granama ćemo spajati čvorove u klasama ako je presek duži kojima oni odgovaraju neprazan i nije tačka nego neka duž. Tako nastaje stablo čiji je broj grana određen baš formulom $(*)$.

Primer: Neka je $m = 3$ i $n = 5$. Jedinična duž tada ima 7 delova. Bipartitni graf određen na gornji način pretstavlja stablo sa 7 grana.



Slika 1

U ovom primeru je $NZD(3,5) = 1$, pa formula $(*)$ daje $|A \cup B| = 3 + 5 - 1 = 7$. Δ

Ako je od jedinične duži potrebno konstruisati n_1- tougao, n_2 - tougao n_3 - tougao, naravno pravilan, tada formula uključivanja i isključivanja daje,

$$|A \cup B \cup C| = |A| - |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Kako je

$$|A| = n_1, |B| = n_2, |C| = n_3, |A \cap B| = NZD(n_1, n_2)$$
$$|B \cap C| = NZD(n_2, n_3), |C \cap A| = NZD(n_3, n_1),$$
$$|A \cap B \cap C| = NZD(n_1, n_2, n_3)$$

ili

$$|A \cup B \cup C| = n_1 + n_2 + n_3 - NZD(n_1, n_2) -$$
$$-NZD(n_2, n_3) - NZD(n_3, n_1) + NZD(n_1, n_2, n_3).$$

Primer: Neka je $n_1 = 4, n_2 = 6, n_3 = 10$. Tada je najmanji broj delova $4 + 6 + 10 - NZD(4,6) - NZD(6,10) - NZD(10,4) + NZD(4,6,10) = 4 + 6 + 10 - 2 - 2 - 2 + 2 = 16$. Δ

Jasno je da u slučaju da treba sastaviti pravilan n_i - ugao obima 1 za svako $i = 1, 2, ..., k$ treba koristiti opštu formulu uključivanja i isključivanja

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k| = \Sigma_{j=1}^{k}|A_j| - \Sigma_{1 \leq i < j \leq k}|A_i \cap A_j| +$$

$$+\Sigma_{1 \leq i < j < l < k}|A_i \cap A_j \cap A_\ell| - ... + (-1)^{k-1}|A_i \cap A_2 \cap ... \cap A_k|.$$

4. Kako Ojlerova formula za povezane planarne grafove rešava jedan poznat geometrijski zadatak

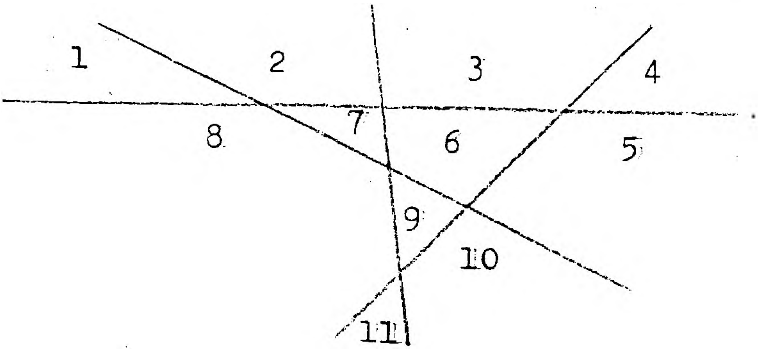
[Kako Ojlerova formula za povezane...]

Zadatak koji je u domenu skoro svakog dobrog srednjoškolskog takmičara, glasi: Broj delova na koje $n-$ pravih u opštem položaju dele ravan je $\frac{n(n+1)}{2} + 1$. To tvrđenje može se dokazati lako matematičkom indukcijom ili pomoću funkcija izvodnica. Da li je moguć drugačiji pristup? Naredni tekst pokazuje da je taj rezultat posledica Ojlerove formule. Dokažimo to.

Prave u ravni u opštem položaju (svake dve se seku i nikoje tri ne prolaze kroz istu tačku) dele ravan na oblasti od kojih su neke zatvorene a neke otvorene. Ako ih ima n, onda ako njihove preseke shvatimo kao čvorove planarnog grafa, a duži koje spajaju njihove preseka kao grane grafa zaključujemo da na svakoj pravoj u grafu određenom na gornji način, postoje dve grane koje su takve da svaka od njih prolazi kroz svoju beskonačno daleku tačku, koje su sve međusobno različite. Transformišimo graf na sledeći način: Sve te beskonačno daleke čvorove spojimo u jedna čvor. Broj oblasti se ne menja. U tom novom grafu G. broj grana je n^2 a broj čvorova $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ plus jedan beskonačno daleki čvor. Tada nam Ojlerova formula daje broj oblasti koji je jednak

$$f = n^2 - (\binom{n}{2} + 1) + 2 = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} - 1 + 2 = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Ovim je dokaz završen. Na slici 1. dat je primer kada je $n = 4$. Tada je broj oblasti 11. Ojlerova formula daje $f = 4^2 - (\binom{4}{2} + 1) + 2 = 16 - 6 - 1 + 2 = 11$. $\triangle$



Slika 1.

5. Teorema Erdös-Szekeres

Teorema 5.1 *([68]) Za svaki prirodan broj m postoji prirodan broj n takav da u svakom skupu od n tačaka u ravni u opštem položaju možemo naći m tačaka koje obrazuju konveksni poligon.*

Dokaz. Neka je $n = (m)^2_3$ i neka su $P_1, ..., P_n$ date tačke u ravni tako da se nikoje tri od njih ne nalaze na istoj pravoj. Za $1 \leq i < j < k \leq n$ stavimo da $f(\{i, j, k\}) = 0$ ako je $P_iP_jP_k$ orijentisan u pravcu kazaljke na satu; neka je $f(\{i, j, k\}) = 1$ ako je orijentacija obrnuta.

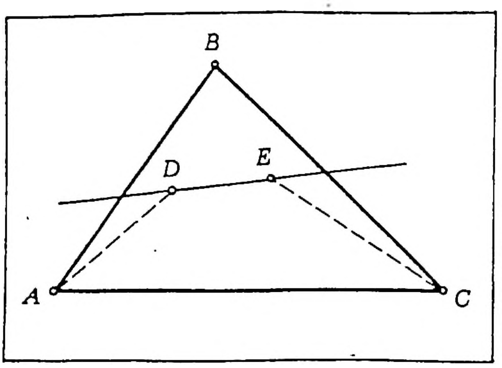
Pošto $n \rightarrow (m)^2_3$, postoji $A \subseteq \{1, ..., n\}$ moći m tako da je f konstantna na $[A]^3$. To znači da je svaki trougao formiran od tačaka skupa $\{P_i;\ i \in A\}$ isto orijentisan. Iz toga lako sledi da taj skup tačaka formira konveksni poligon. $\square$

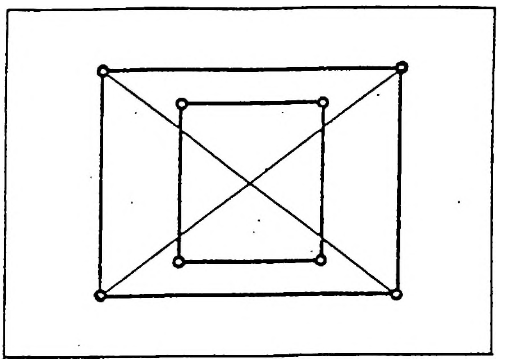
6. Jedan zadatak o rasporedu tačaka

Neka je u ravni dato n tačaka od kojih nikoje tri ne leže na jednoj pravoj (samo takve skupove tačaka ćemo posmatrati). Jasno je da ako je $n \geq 3$, postoji prost konveksan mnogougao - trougao - sa temenima u tri od datih tačaka.

Da li se uvek za $n > 3$, može naći konveksan četvorougao sa temenima u tim tačkama? Ako je $n = 4$ i tačke su temena nekonveksnog četvorougla to se ne može uraditi. Ako je $n \geq 5$, za proizvoljan raspored tačaka može se naći konveksan četvorougao. Jasno, ako je konveksni omotač (ljuska) našeg skupa $k-$ tougao, gde je $k > 3$, proizvoljna četiri temena tog $k-$ tougla su temena traženog četvorougla.

Neka je $k = 3$, konveksni omotač je tada trougao ABC. Tada se mogu naći makar dve tačke - D i E - koje leže unutar tog trougla (sl. 1).





Slika 1. Slika 2.

Prva DE ne prolazi kroz temena trougla ABC. Zbog toga dva temena tog trougla (recimo A i C) se nalaze sa jedne strane prve DE. Tada je $ACED$ - konveksan četvorougao.

Dakle, dovoljno je da n bude veće od četiri. Kakvo treba da bude

n, da bi bilo moguće izdvojiti konveksan petougao? Naš je cilj da objasnimo to pitanje. Iz slike 2, jasno je da mora biti n veće od 8.

Zbog toga, ako mi dokažemo da skup tačaka, od kojih nikoje tri ne leže na jednoj pravoj i nikojih pet nisu temena konveksnog petougla, sadrži ne više od osam tačaka, zadatak će biti potpuno rešen. Neka je N - takav skup tačka.

Označimo sa K njegov konveksni omotač, sa L- konveksni omotač skupa $N \setminus K$, a sa M– skupa $(N \setminus K) \setminus L$.

Razmotrimo sledeće mogućnosti:

1) skup M je prazan

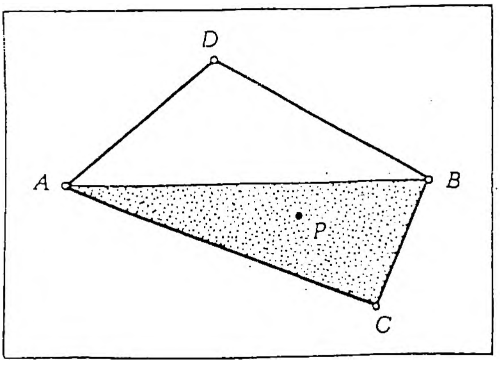
2) skup M se sastoji iz jedinstvene tačke

3) skup M sadrži ne manje od dve tačke.

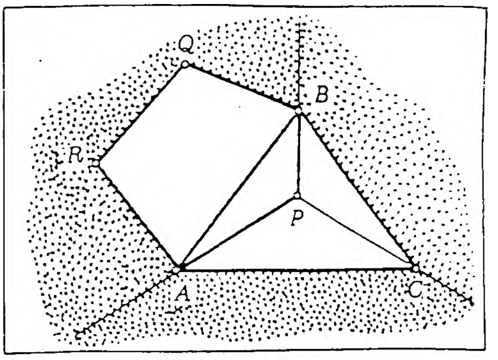
1) Skup M je prazan. Tada N sarži samo temena mnogouglova K i L, odnosno ne više od 8 tačaka (pošto svaki od mnogouglova K i L, ili je trougao ili četvorougao).

2) Skup M sadrži jedinstvenu tačku. Označimo je sa P. Ako je L - četvorougao, konstruišemo jednu njegovu dijagonalu. Tada je on rastavljen na dva trougla. Tačka P leži unutar jednog od njih. (sl. 3). Označimo temena tog trougla slovima A, B, C.

Ako je L trougao, označimo njegova temena sa A, B, C. Tačka P leži unutar tog trougla. U svakom slučaju među temenima mnogougla L, naći će se takva tri temena A, B, C da P - bude unutrašnja tačka trougla ABC. Konstruišemo iz tačke P zrake PA, PB, PC. Oni razbijaju ravan na tri ugla APB, BPC, CPA. Lako se vidi da u svakom od tih uglova leži najviše jedno teme mnogougla K. Neka na primer ugao APB sadrži dva temena mnogougla K, a znači sadrži neku stranu RQ mnogougla K. Tada su tačke A, P, B, Q, R temena konveksnog petougla (sl. 4) što je nemoguće. Dakle, K ima najviše tri temena (po jedno u svakom od razmotrenih uglova). Kako L ima najviše četiri temena, a M, po pretpostavici se sastoji iz jedne tačke P, skup N sadrži ne više od osam tačaka.



Slika 3.



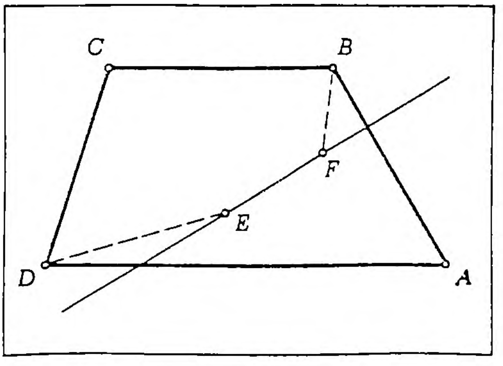
Slika 4.

3) Skup M sadrži ne manje od dve tačke. Označimo sa E i F proizvoljne dve tačke skupa M.

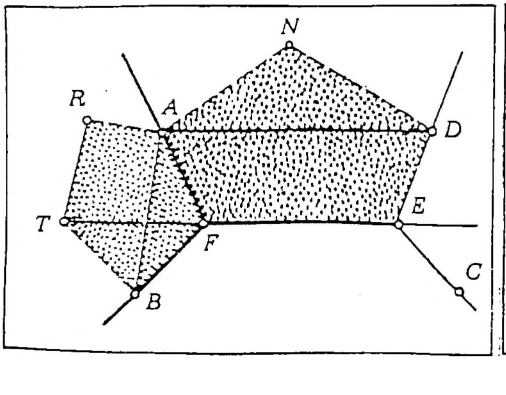
Pretpostavimo prvo da je $L-$ četvorougao. Prava EF ne prolazi kroz temena mnogougla L i seče dve njegove strane. Ako bi EF sekla dve susedne strane četvorougla L (sl. 5), onda bi tri druga temena B, C, D četvorougla L zajedno sa E i F bila temena konveksnog petougla. Sledi da EF seče dve suprotne strane četvorougla L. Neka na primer zrak EF seče stranu AB a zrak FE seče stranu CD (sl. 6). Konstruišemo zrake FA, FB, EC i ED. Zajedno sa duži EF oni razbijaju ravan na 4 dela. Ako bi unutar ugla AFB (koji je jedan od četiri dela) ležala dva temena mnogougla K, a znači i neka strana TR mnogougla K, tačke A, F, B, T, R bile bi temena konveksnog petougla (sl.7). Sledi da unutar ugla AFB leži ne više od jednog temena mnogougla K. Takođe unutar ugla CED leži ne više od jednog temena mnogougla K. Što se tiče ostala dva dela, u njima se ne mogu rasporediti temena mnogougla K (inače zajedno sa tačkama $A, F, E. D$ ili B, F, E, C oni bi formirali konveksni petougao (sl.6). Dobija se da K ima ne više od dva temena (po jedno unutar uglova $AFB. CDE$), što je nemoguće, jer je K - trougao ili četvorougao. Pretpostavimo na kraju, da je L - trougao. Prva EF izdvaja jedno teme tog trougla. Neka na primer zrak EF seče stranu AB, a zrak FE- stranu AC (sl.7). Rezonujući kao i ranije, nalazimo da u uglovima AEC i AFB leži ne više od jednog temena mnogougla K, a deo ravni, ograničen zracima EC, FB i duži

EF, uopšte ne sadrži temena mnogouglova K. Tako pretpostavka, da M sadrži ne manje od dve tačke, dovodi do kontradikcije. Ako je M prazan ili sadrži jednu tačku, onda N ima ne više od osam tačaka. Time se i završava dokaz. □

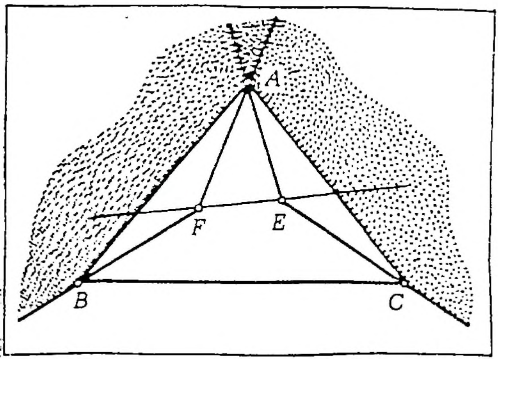
Slika 5.



Slika 6.



Slika 7.

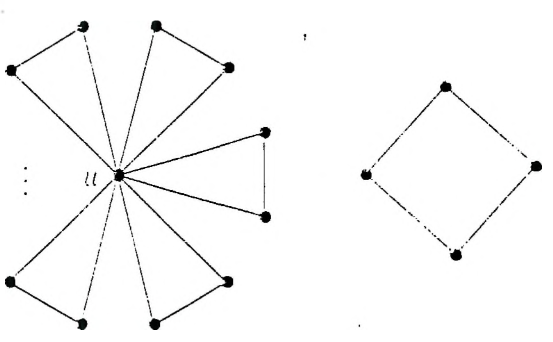


7. O vetrenjačama i političarima

"Pretpostavimo da imamo grupu ljudi u kojoj svaki par ljudi ima tačno jednog zajedničkog prijatelja. Tada postoji osoba (političar) koji je svačiji prijatelj".

Matematičkim žargonom ovo zovemo *teorema o prijateljstvu.* (frienship theorem).

Formulišimo ovaj problem jezikom teorije grafova. Predstavimo ljude čvorovima grafa $G = (V, E)$ i spojimo dva čvora granom ako su odgovarajući ljudi prijatelji. Pretpostavimo da je prijateljstvo uzajamno. Dalje, nijedna osoba nema samo jednog prijatelja. Posmatrajmo sledeću geometrijsku figuru, koju ćemo nazvati "vetrenjača" (sl. 1). Zapazimo da graf koji odgovara vetrenjači zadovoljava uslove našeg problema. Odmah se nameće pitanje: Da li su grafovi "vetrenjače" jednini takvi grafovi?



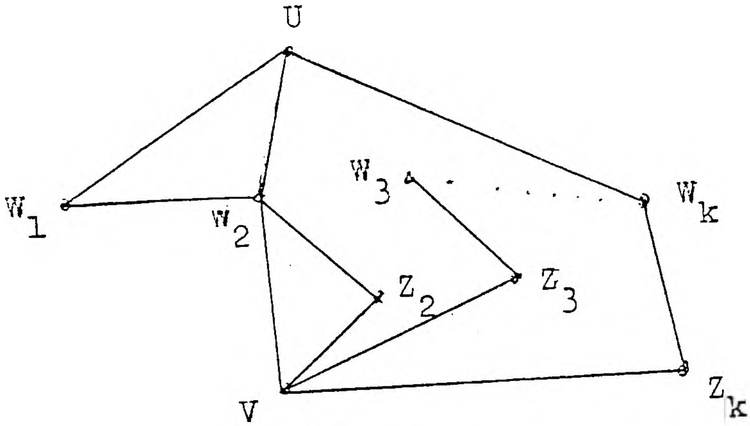
Slika 1.

Prvi potvrdan odgovor na ovo pitanje dali su Paul Erdös, Alfred Renyi i Vera Sós.

Teorema 7.1 *([1]) Pretpostavimo da je G graf u kome bilo koja dva čvora imaju tačno jednog suseda. Tada postoji čvor koji ima zajedničku granu sa svakim čvorom grafa.*

Dokaz. Dokazaćemo teoremu svođenjem na apsurd. Pretpostavimo da tvrđenje nije tačno i da je G kontraprimer tj. da nijedan čvor od G nije spojen sa svim čvororima. Do kontradikcije ćemo doći u dva koraka. Prvi deo je kombinatorni a drugi je linearna algbra.

(1) Tvrdimo da je G regularan graf. tj. $d(u) = d(v)$ za bilo koje $u, v \in V$. Primetimo da uslov teoreme implicira da ne postoje ciklusi dužine četiri u G. Nazovimo ovo C_4 - *ciklus uslov.* Dokažimo prvo da bilo koja dva čvora, koja nisu spojena granom, u i v imaju $d(u) = d(v)$. Neka je $d(u) = k$, gde su $w_1, w_2, \ldots, w_k$ susedi od u. Sl. 2.



Slika 2.

Tačno jedan od w_i, recimo w_2, je povezan granom sa v i w_2 je povezan granom sa tačno jednim od w_i, recimo w_1, tako da imamo situaciju kao na gornjoj slici. U suprotnom u bi imao još jednog suseda više. Čvor v ima sa w_1 zajedničkog suseda w_2 i sa $w_i (i \geq 2)$ zajedničkog suseda $z_i (i \geq 2)$. Po uslovu C_4 svi z_i su različiti. Zaključujemo $d(v) \geq k = d(u)$ i prema tome $d(u) = d(v) = k$ zbog simetričnosti.

Da dovršimo dokaz (1), primetimo da bilo koji čvor, različit od w_2, koji nije spojen granom sa u ili v ima stepen k. prema prethodnom. Ali, obzirom da i w_2 ima ne-suseda, onda i $d(w_2) = k$, pa je G, k - regularan. Ako saberemo sve stepene suseda od u dobijamo k^2. Kako svaki čvor (sem u) ima tačno jednog suseda sa u, mi smo prebrojali jednom sve čvorove, sem u, koje je brojano k puta. Dobijamo da je ukupan broj čvorova od G

$$n = k^2 - k + 1. \qquad (*)$$

(2) Ostatak dokaza je lepa primena linearne algebre. Primetimo prvo da k mora biti veće od 2, jer za $k \leq 2$ samo su $G = K_1$ i $G = K_3$ i oba su trivijalni primeri vetrenjače.

Posmatrajmo matricu incidencije grafa $G, A = (a_{ij})$. Prema (1) u svakoj vrsti matrice A imamo k jedinica. Po uslovu teoreme za bilo koje dve vrste postoji tačno jedna kolona u kojoj obe imaju 1. Zapažamo da se glavna dijagonala sastoji od nula. Sledi da imamo

$$A^2 = \begin{bmatrix} k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k & \dots & 1 \\ & & \dots & \\ 1 & & \dots\dots & k \end{bmatrix} = (j-1)E + J,$$

gde je E jedinična matrica a J matrica u kojoj su sve jedinice. Odmah vidimo da J ima karakteristične korene n (multipliciteta 1) i 0 (multipliciteta $n-1$)

Sledi da A^2 ima karakteristične korene $k - 1 + n = k^2$, zbog $(*)$ (multipliciteta 1) i $k-1$ (multipliciteta $n-1$). Kako je A simetrična i prema tome dijagonalizabilna (slična dijagonalnoj) zaključujemo da A ima karakteristične korene k (multipliciteta 1) i $\pm\sqrt{k-1}$. Neka je r karakterističnih korena jednako $\sqrt{k-1}$ a s od njih jednako $-\sqrt{k-1}$, gde je $r+s = n-1$. Zbir karaketrističnih korena jednak je tragu matrice (koji je 0) pa imamo

$$k + r\sqrt{k-1} - s\sqrt{k-1} = 0$$

i obzirom da je

$$r \neq s, \sqrt{k-1} = \frac{k}{s-r}.$$

Sledi da je $\sqrt{k-1}$ ceo broj h (ako je $\sqrt{m}$ racionalan, onda je ceo broj) i dobijamo da je

$$h(s-r) = k = h^2 + 1.$$

Kako h deli $h^2 + 1$ i h^2 sledi da je $h = 1$ i prema tome $k = 2$, što smo već isključili. Tako smo došli do kontradikcije i dokaz je kompletan. □

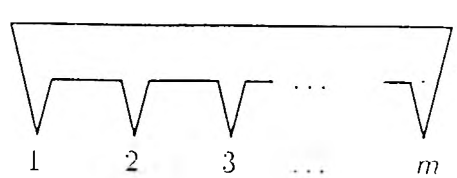
Međutim, priča nije završena. Ako razmatramo staze u grafu koje su duže od dva, Anton Kotzig je 1983. godine dao sledeću hipotezu: *Neka je $\ell > 2$. Tada ne postoje grafovi sa osobinom da su svaka dva čvora spojena tačno jednom stazom dužine ℓ.*

Kotzig je ovu hipotezu proverio za $\ell \leq 8$. Xing i Hu su 1994. godine pokazali da je hipoteza tačna za $\ell \geq 12$. Preostale slučajeve su rešili Yang, Lin, Wang i Li 2000. godine. Tako je Kotzigova hipoteza postala teorema.

8. Kako čuvati muzej

Jedan interesantan problem postavio je Viktor Kli (Victor Klee) 1973. godine. Direktor muzeja želi da je sve vreme svaka tačka u muzeju posmatrana od strane čuvara. Čuvari su postavljeni na fiksna mesta i mogu se okretati. Koliko je potrebno čuvara?

Zamislimo muzej kao mnogougao od n strana. Jasno, ako je mnogougao konveksan, dovoljan je jedan čuvar. U tom slučaju čuvar se može postaviti u bilo koju tačku muzeja. U opštem slučaju, zidovi muzeja mogu imati oblik bilo kog zatvorenog poligona. Posmatrajmo muzej u obliku "češlja" $n = 3m$ zidova, kao na slici

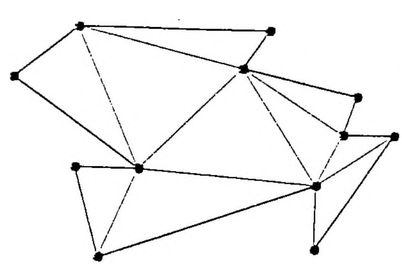


Slika 1.

Lako se pokazuje da je potrebno najmanje $m = \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ čuvara. Tada je broj zidova n. Primetimo da se tačka 1 može videti samo iz osenčenog trougla čije teme je 1. Za druge tačke $2, 3, \ldots, m$ je slično. Kako su svi ovi trouglovi disjunktni, zaključujemo da je potrebno najmanje m čuvara. Međutim m čuvara je i dovoljno jer se mogu rasporediti na gornjoj stranici trougla. Ako sklonimo jedan ili dva zida na krajevima, zaključujemo da za svako n postoji muzej sa n zidova kome je potrebno $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ čuvara. Sledeći rezultat kaže da je to najgori slučaj.

Teorema 8.1 *([1]) Za svaki muzej koji ima n zidova, dovoljno je $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ čuvara.*

Dokaz. Pre svega, nacrtajmo $n-3$ dijagonale poligona, koje se ne seku, dok ne dobijemo triangulaciju unutrašnjosti. Na primer možemo povući 9 dijagonala u muzeju na slici 2.



Slika 2

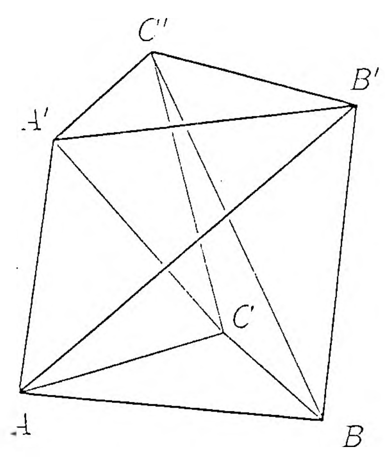
(Slika 2. Muzej sa $n = 12$ zidova) i dobiti jednu trijangulaciju. Nije važno koju triangulaciju biramo, bilo koja će biti dobra. Zamislimo ovo kao planaran graf.

Teorema 8.2 *([1]) Graf koji se dobija triangulacijom bilo kog mnogougla se može obojiti sa tri boje.*

Dokaz. Za $n = 3$ je jasno. Ako je $n > 3$ odaberimo dva temena u i v da su spojena dijagonalom. Ta dijagonala će podeliti graf na dva manja trijangulisana grafa sa zajedničkom granom uv. Po induktivnoj hipotezi možemo obojiti oba dela sa 3 boje.

Zajedno možemo odabrati boju I za teme u i boju II za teme v u svakom bojenju. Tako dobijamo bojenje celog grafa sa 3 boje. Ostalo je lako dokazati. Pošto imamo n temena, svaka grupa temena obojenih istom bojom ima najmanje bar $[\frac{n}{3}]$ elementa. Neka je to boja I. Čuvare postavljamo u te tačke poligona. Pošto svaki trougao ima boju I, zaključujemo da oni kontrolišu ceo muzej. □

Nužno je, naravno, utvrditi da li triangulacija proizvoljnog mnogougla postoji. Primetimo da prirodna generalizacija ovog problema na 3 - dimenzionalni prostor ne postoji, kao što se to može videti iz Šenhardovog poliedra (Schönhardt) na slici 3.



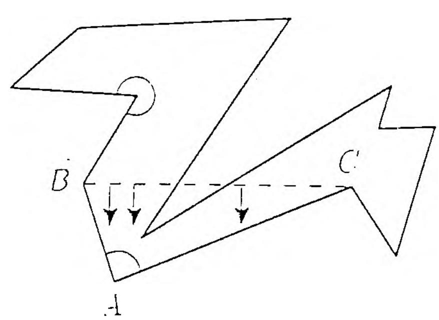
Slika 3.

Dobija se od trostrane prizme rotiranjem gornjeg trougla, tako da se svaka četvorougaona strana razbije na dva trougla sa nekonveksnom ivicom. Zapažamo da svaki tetraedar koji sadrži trougao ABC mora sadržati jedno od temena A, B, C. Ali rezultujući tetraedar neće pripadati (ceo) Šenhardovom poliedru.

Egzistenciju trijangulacije nekonveksnog mnogougla dokažimo indukcijom po broju n temena mnogouglova. Za $n = 3$ mnogougao je trougao. Neka je $n \geq 4$. Da iskoristimo indukciju, moramo naći jednu dijagonalu koja deli mnogougao P na manje delove koji se mogu slepiti. Nazovimo teme A konveksno, ako je unutrašnji ugao kod njega manji od 180^0. Kako je zbir unutrašnjih uglova mnogougla P, $(n-2)180^0$, mora postojati konveksno teme A. U stvari mora biti najmanje 3 takva temena. To je u suštini primena Dirihleovog principa.

Sada pogledajmo dva susedna temena od A. Neka su to tačke B i C. Ako duž BC leži sva u unutrašnjosti od P, onda je ona tražena dijagonala. Ako nije, onda trougao ABC sadrži druga temena. Pomerajmo duž BC prema A paralelno sa BC dok ne dodirne poslednje teme Z u trouglu ABC. Sada je AZ unutar P i imamo dijagonalu.

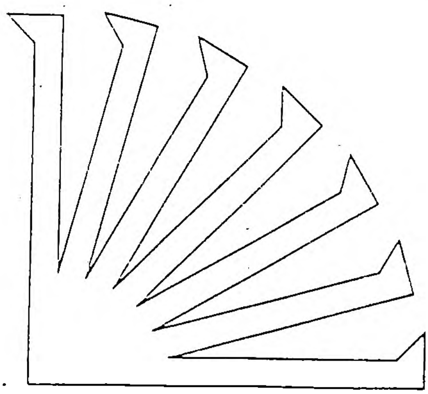
Dijagonala AZ deli mnogougao na dva mnogougla čiji je broj strana manji od broja strana posmatranog mnogougla. Neka su to mnogouglovi P_i i P_j, $i+j=n$. Indukcijska hipoteza važi za P_i i P_j pa dobijamo dve triangulacije koje zajedno daju triangulaciju mnogougla P_n.



Slika 4.

Postoji mnogo varijanti teoreme o čuvarima muzeja. Na primer, možemo samo želeti da čuvamo zidove (jer tu su sve slike) ili su čuvari svi smešteni u temenima. Posebno lepa (nerešena) varijanta glasi: *Pretpostavimo da svaki čuvar patrolira (čuva) jedan zid muzeja, tako da on šeta duž svog zida i može da vidi sve što se vidi iz bilo koje tačke zida. Koliko onda treba čuvara da održavamo kontrolu?* Gotfrid Tusen

(Gottfried Toussant) je konstruisao primer muzeja kao na slici 5 koji pokazuje da je neophodno $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ čuvara:



Slika 5.

Ovaj poligon ima 20 strana (i u opštem slučaju $4m$ strana) i lako se verifikuje da je potrebno m čuvara. Hipoteza je, sem za neke male vrednosti n, da je ovo i dovoljno.

9. Prave u ravni i dekompozicija grafova

Možda najpoznatiji problem o konfiguraciji tačaka postavio je J.J. Sylvester (Silvester) 1893. godine u časopisu The Educational Times 46(1893). 156. 11851 (Professor Sylvester) - *Dokazati da nije moguće rasporediti konačan broj realnih tačaka tako da prava koja prolazi kroz bilo koje dve tačke mora prolaziti kroz treću tačku, sem ako sve tačke ne pripadaju istoj pravoj.*

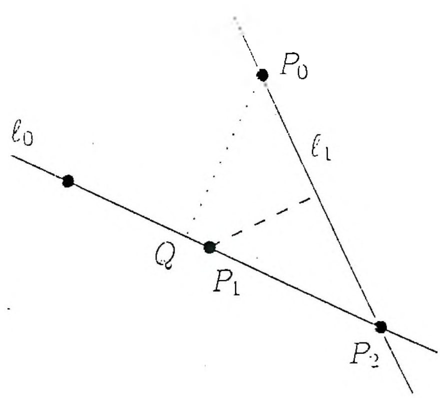
Da li je Silvester imao dokaz nije jasno, međutim korektan dokaz je dao Tibor Gallai (Grunwald) 40 godina kasnije. Prema tome, sledeća teorema se pripisuje Silvestru i Galaiju. Posle Galaijevog dokaza pojavilo se nekoliko drugih ali sledeći argumet L.M.Kelija (Kelly) smatra se najjednostavniji.

Teorema 9.1 *([1]) U bilo kom rasporedu od n tačaka u ravni, koje nisu sve na istoj pravoj, postoji prava koja sadrži tačno dve od ovih tačaka.*

Dokaz. Neka je **P** dati skup tačaka i posmatrajmo skup **L** svih pravih koje prolaze kroz najmanje dve tačke skupa **P**. Od svih parova (A, ℓ) gde A nije na ℓ, izaberimo par (A_0, ℓ_0) tako da je rastojanje A_0 do ℓ_0 najmanje i neka je Q tačka na ℓ_0 najbliža A_0 (to znači na pravoj kroz A_0 normalnoj na ℓ_0).

Dokazaćemo da je ℓ_0 tražena prava.

Ako nije, ℓ_0 sadrži najmanje tri tačke iz **P** i prema tome, bar dve od njih leže, recimo A_1 i A_2, sa iste strane tačke Q. Pretpostavimo da je $Q - A_1 - A_2$ gde se A_1 možda poklapa sa Q. Prikažimo ovo na slici 1.

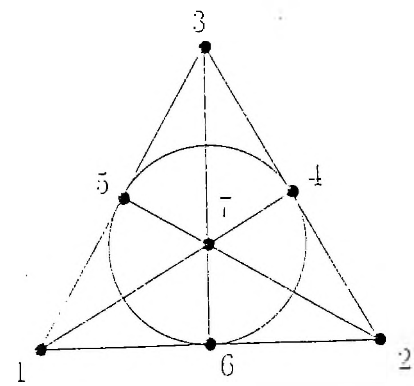


Slika 1.

Sledi da je rastojanje A_1 od ℓ_1 (koja je određena sa A_0 i A_2) manje od rastojanja A_0 od ℓ_0 i to je u suprotnosti sa našim izborom para (A_0, ℓ_0).

U dokazu smo koristili aksiome metrike (najkraće rastojanje) i druge aksiome (A_1 leži između Q i A_2) realne prave. Da li nam stvarno trebaju ove osobine osim uobičajenih aksioma incidencije tačaka i pravih?

Neki dodatni uslov je potreban, kao što poznata Fano ravan na slici demonstrira.



Slika 2.

Ovde je $\mathbf{P} = \{1, 2, ..., 7\}$ i $\mathbf{L}$ se sastoji od 7 troelementnih pravih, kao što je prikazano na slici 2, uključujući i pravu $\{4, 5, 6\}$. Bilo koje dve tačke određuju pravu, tako da važe aksiome incidencije, ali nema pravih sa samo dve tačke. Silvester - Galaijeva teorema, prema tome pokazuje da Fano konfiguracija ne može biti smeštena u realnu ravan tako da sedam kolinearnih trojki leži na realnim pravama: mora postojati "kvarna" prava.

Međutim, Coxter (Kokster) je pokazao da su aksiome poretka dovoljne da se dokaže Silvester - Galaijeva teorema. Prema tome može se dati dokaz koji ne koristi osobine metrike.

Silvester - Galaijeva teorema direktno implicira još jedan poznati rezultat o tačkama i pravama u ravni, koji su dobili Pal Erdeš (Paul Erdös) i Nikolas de Brijn (Nicolas de Brujin). Ali u ovom slučaju rezultat važi opštije za prozvoljne tačka - prava sisteme.

Teorema 9.2 *([1]) Neka je* $\mathbf{P}$ *skup od* $n \geq 3$ *tačke u ravni, koje nisu na istoj pravoj. Tada skup* $\mathbf{L}$ *pravih koje prolaze kroz najmanje dve tačke sadrži najmanje* n *pravih.*

Dokaz. Za $n = 3$ nema šta da se dokazuje. Nastavljamo indukcijom po n. Neka je $|\mathbf{P}| = n + 1$. Prema prethodnoj teoremi, postoji prava $\ell_0 \in \mathbf{L}$ koja sadrži tačno dve tačke P i Q od $\mathbf{P}$. Posmatrajmo skup $\mathbf{P}' = \mathbf{P} \setminus \{Q\}$ i skup $\mathbf{L}'$ pravih određenih sa $\mathbf{P}'$. Ako tačke $\mathbf{P}'$ ne leže na jednoj pravoj onda je $|\mathbf{L}'| \leq n$, po induktivnoj pretpostavci, i prema tome $|\mathbf{L}| \leq n + 1$ zbog dodatne prave $\ell_0 \notin \mathbf{L}'$. Ako, s druge strane, tačke $\mathbf{P}$ leže sve na jednoj pravoj, onda imamo "pramen" pravih koji ima tačno $n + 1$ pravu. $\square$

Evo rezultata, koji se može primeniti na mnogo opštije "geometrijske incidencije".

Teorema 9.3 *([1]) Neka je X skup od $n \geq 3$ elementa, i $A_1, \ldots, A_m$ pravi podskupovi od X, tako da je svaki par elemenata iz X sadržan u tačno jednom skupu A_i. Tada je $m \geq n$.*

Dokaz. Sledeći dokaz pripisuje se Mockinu (Motzkin) i Konveju (Conway) i stvarno je jednostavan.

Za $x \in X$ neka je r_x broj skupova A_i koji sadrže x. Primetimo da je $2 \leq r_x < m$ po pretpostavci. Sada ako $x \notin A_i$, onda je $r_x \geq |A_i|$ jer $|A_i|$ skupova koji sadrže x i element od A_i moraju biti različiti. Pretpostavimo da je $m < n$. Tada je $m \cdot |A_i| < nr_x$ i prema tome $m(n - |A_i|) > n(m - r_x)$ za $x \notin A_i$.

Neka je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i neka
x_1 ne pripada skupovima $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1i_1}$
x_2 ne pripada skupova $A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2i_2}$
$\vdots$
x_n ne pripada skupovima $A_{n1}, A_{n2}, \ldots, A_{ni_n}$ gde je A_{ij} neki od skupova $A_1, \ldots, A_m$.

$$i_1 = m - r_{x_1}$$

$$i_2 = m - r_{x_2}$$

$$\vdots$$

$$i_n = m - r_{x_n}.$$

Iz dobijene nejednakosti imamo:

$$\left.\begin{array}{ccc}\frac{1}{n(m-r_{x_1})} & > & \frac{1}{m(n-|A_{11}|)}\\ & \vdots & \\ \frac{1}{n(m-r_{x_1})} & > & \frac{1}{m(n-|A_{1i_1}|}\end{array}\right\} i_1$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{array}{ccc}\frac{1}{n(m-r_{x_n})} & > & \frac{1}{m(n-|A_{n_1}|)}\\ & \vdots & \\ \frac{1}{n(m-r_{x_n})} & > & \frac{1}{m(n-|A_{ni_n}|)}\end{array}\right\} i_n$$

Ako saberemo sve leve strane ovih nejednakosti dobijamo

$$i_1\frac{1}{n(m-r_{x_1})}+i_2\frac{1}{n(m-r_{x_2})}+\ldots+i_n\frac{1}{n(m-r_{x_n})}=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{n}=1.$$

Sabiranjem desnih strana dobijamo

$$\left[\frac{1}{m(n-|A_{11}|)}+\ldots+\frac{1}{m(n-|A_{1i_1}|)}\right]+\ldots+\left[\frac{1}{m(n-|A_{n1}|)}+\ldots+\frac{1}{m(n-|A_{ni_n}|)}\right].$$

Neki od skupova A_{ij} i A_{kl} su isti jer na primer, x_1 i x_2 ne moraju biti u A_5 pa su na primer sabirci

$$\frac{1}{m(n-|A_{12}|)} \text{ i } \frac{1}{m(n-|A_{27}|)}$$

isti i jednaki

$$\frac{1}{m(n-|A_5|)}.$$

U gornjoj sumi sabirak $\frac{1}{m(n-|A_5|)}$ se javlja onoliko puta koliko ima x - ova koji nisu u A_5 tj. $n-|A_5|$ puta. Kako u suštini imamo samo m skupova A_i, dobijamo da je desna suma $m\cdot\frac{1}{m}=1$. Kontradikcija! $\square$

Postoji još jedan dokaz ove teoreme koji koristi linearnu algebru. Neka je B matrica incidencije za $(x, A_1, A_2, ..., A_m)$ tj.

$$B_{xA} = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & \dots & A_m \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \dots & 0 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}$$

što bi značilo da $x_1 \in A_2, x_2 \in A_1, x_4 \in A_3$ itd. Posmatrajmo proizvod BB^T. Dobijamo matricu $n \times n$,

$$C = \begin{bmatrix} r_{x_1} & 1 & \dots & 1 \\ 1 & r_{x_2} & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & & \vdots & r_{x_n} \end{bmatrix}$$

element c_{12} matrice C dobija se skalarnim množenjem vektora prve vrste matrice B i vektora druge vrste. Ovi vektori ne mogu imati dve iste koordinate

010...10...1...0

010...10...0...0

jer bi to značilo da su x_1 i x_2 u A_2 i u nekom A_k što je suprotno pretpostavci. Matrica C se može prikazati kao zbir,

$$C = \begin{bmatrix} r_{x_1} - 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_{x_2} - 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & & & r_{x_n} - 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Prvi sabirak je pozitivno definitna matrica (ima samo pozitivne karakteristične korene) a drugi je pozitivno semi-definitna matrica (ima karakteristične korene n i 0).

Sledi da je BB^T regularna matrica. Ovo implicira da je rang BB^T jednak n. Sledi da rang $n \times m$ matrice B mora biti najmanje n. Zaključujemo da je $n \leq m$, jer rang matrice ne može biti veći od broja kolona. □

Pogledajmo determinantu matrice C. Označimo r_{x_i} sa a_i, $i = 1, 2, ..., n$

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & a_3 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & a_n \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1-a_1 & a_2-1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1-a_1 & 0 & a_3-1 & \ldots & 0 \\ & \vdots & \vdots & & \\ 1-a_1 & 0 & 0 & \ldots & a_n-1 \end{vmatrix}.$$

gde smo prvu vrstu oduzeli od ostalih,

$$= \begin{vmatrix} a_1 - \frac{1-a_1}{a_n-1} & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 1-a_1 & a_2-1 & 0 & \ldots & \\ 1-a_1 & 0 & & & \\ \vdots & & & & a_{n-1} \\ 1-a_1 & & & & \end{vmatrix}$$

gde smo poslednju vrstu pomnožili sa $-\frac{1}{a_n-1}$ i dodali prvoj. Dalje, svaku i - tu vrstu množimo sa $-\frac{1}{a_i-1}$ i dodajemo prvoj. Dobijamo trougaonu (gornju) determinatu čija je vrednost

$$(a_1 - \frac{1-a_1}{a_n-1} - \frac{1-a_1}{a_{n-1}-1} - \ldots - \frac{1-a_1}{a_2-1}) \cdot (a_2-1)\ldots(a_n-1).$$

Ovo prikažimo kao

$$\left(a_1 + \frac{a_1-1}{a_2-1} + \ldots + \frac{a_1-1}{a_{n-1}-1} + \frac{a_1-1}{a_n-1}\right) \cdot \left(a_2-1\right)\ldots(a_n-1) =$$

$$= \left(a_1 - 1 + \frac{a_1 - 1}{a_1 - 1} + \frac{a_1 - 1}{a_2 - 1} + ... + \frac{a_1 - 1}{a_n - 1}\right) \cdot (a_2 - 1)...(a_n - 1) =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{a_1 - 1} + \frac{1}{a_2 - 1} + ... + \frac{1}{a_n - 1}\right) \cdot (a_1 - 1) \cdot (a_2 - 1)...(a_n - 1).$$

Vrednost ovog izraza je veća od 0 jer je $a_i \geq 2, i = 1, 2, ..., n$.

Krenimo malo dalje prema Teoriji grafova. Odmah vidimo da sledeća teorema tvrdi isto što i Teorema 3.

- Ako razložimo kompletan graf K_n na m klika (kompletan podgraf) različitih od K_n, tako da je svaka grana samo u jednoj kliki, onda je $m \geq n$.

Naravno, neka X odgovara skupu čvorova od K_n i skupovi A_i čvorovima klika. Onda su tvrđenja identična.

Naš sledeći zadatak je da razložimo K_n na kompletne bipartitne grafove tako da je ponovo svaka grana u tačno jednom od ovih grafova. Postoji jednostavan način da to uradimo. Numerišimo čvorove sa $1, 2, ..., n$. Prvo uzimamo kompletan bipartitni graf koji spaja 1 sa ostalim čvorovima. Tako dobijamo graf $K_{1,n-1}$, koji se zove *zvezda.*

Sledeće, spajamo 2 sa $3, ..., n$ i dobijamo zvezdu $K_{1,n-2}$. Nastavljajući tako dobijamo razlaganje K_n na zvezde $K_{1,n-1}, K_{1,n-2}, ..., K_{1,1}$.

Ova dokompozicija koristi $n - 1$ kompletan bipartitan graf.

Možemo li ovo uraditi bolje? Možemo li ovo uraditi sa manje grafova? Ne, kaže sledeći rezultat Rona Grema (Ron Graham) i Henrija Polaka (Henry O. Pollak).

Teorema 9.4 *([1]) Ako je K_n razložen na kompletne bipartitne grafove $H_1, H_2, ..., H_m$, onda je $m \geq n - 1$.*

Interesantna stvar je da nasuprot teoreme Erdeš - De Brijna, nije poznat nijedan kombinatorni dokaz ovog rezultata. Svi dokazi koriste linearnu algebru na ovaj ili onaj način. Od nekoliko manje više ekvivalentnih ideja pogledajmo dokaz Tverberga (Tverberg).

Dokaz. Neka su čvorovi od K_n $\{1, 2, ..., n\}$ i neka su L_j, R_j skupovi čvorova kompletnog bipartitnog grafa $H_j, j = 1, 2, ..., m$. Svakom čvoru i dodelimo promenljivu x_i. Kako $H_1, ..., H_m$ razlažu K_n, imamo

$$\sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{a \in L_k} x_a \cdot \sum_{b \in R_k} x_b \Big). \tag{1}$$

Pretpostavimo suprotno, $m < n-1$. Tada sistem linearnih jednačina

$$x_1 + ... + x_n = 0$$

$$\sum_{a \in L_k} x_a = 0$$

ima više jednačina nego promenljivih, pa postoji netrivijalno rešenje $c_1, ..., c_n$.

Iz (1) zaključujemo

$$\sum_{i<j} c_i c_j = 0.$$

Ali ovo implicira,

$$0 = (c_1 + ... + c_n)^2 = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 + 2 \sum_{i<j} c_i c_j = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 > 0.$$

Kontradikcija! □

Zadatak. (R.Tošić) U prostoru je dato 18 tačaka tako da su svake četiri temena tetraedra sa ivicama različite dužine. Dokazati da se među tim tetraedrima mogu naći dva takva da je nakraća ivica jednog istovremeno i najduža ivica drugog.

Ovo je verovatno najlepši zadatak u ovom radu. Da bismo ga rešili, koristićemo deo Ramzejeve teorije.

1930. godine engleski matematičar i logičar Frank P. Ramsey (1903-1930) je dokazao teoremu za koju je Dirihleov pricip samo specijalan slučaj.

Osnovni problem **Ramzejeve teorije grafova** može se formulisati na sledeći način.

Za dati graf G treba odrediti najmanji broj $N = N(G)$, takav da za svako 2–bojenje grana grafa K_n postoji jednobojni podgraf izomorfan datom grafu G.

Da bismo dobili osećaj o čemu je reč, dokazaćemo sledeću jednostavniju teoremu iz Ramzejeve teorije, koja će nam koristiti u rešavanju postavljenog zadatka.

Teorema 9.5 *(Frank P.Ramsey) Za svako 2-bojenje grana grafa K_6, postoji jednobojni podgraf (kontura C_3).*

Dokaz. Označimo čvorove grafa K_6 sa $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Obojimo grane grafa sa dve boje, na primer plavom i crvenom. S obzirom na čvor označenog sa 1, ostale možemo podeliti u dva skupa $P = \{$čvorovi spojeni plavom granom sa 1$\}$ i $N = \{$čvorovi spojeni crvenom granom sa 1$\}$. Tada je $P \cup N = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Tih pet čvorova raspoređeno je u dva skupa, pa prema jekoj formi Dirihleovog principa, bar jedan skup sadrži barem $\lfloor \frac{5-1}{2} \rfloor + 1 = 3$ čvora. Ako P sadrži tri čvora onda su oni povezani granama obojenim crveno, ili među njima postoji par čvorova koji su povezani plavom granom. Ako postoji takav par, onda ta dva čvora sa čvorom 1 određuju tri čvora spojena plavim granama, dakle, postoji kontura C_3, čije su grane obojene plavom bojom.

Ako pak, N sadrži tri čvora, onda su oni ili spojeni plavim granama ili među njima postoji par čvorova koji su spojeni crvenom granom. U ovom zadnjem slučaju, ta dva čvora sa čvorom 1 određuju konturu C_3 čije su sve tri grane crvene boje.

Dokazaćemo sada tri pomoćne leme.

Lema 9.1 *Dato je 6 tačaka tako da su svake tri temena trougla, tj. ne postoje među njima tri kolinearne. Svaka duž određena datim tačkama obojena je jednom od dve boje: crveno ili plavo. Za svako takvo bojenje postoji jednobojni trougao, tj. trougao sa temenima u datim tačkama čije su sve stranice iste boje.*

Dokaz. Dokaz je direktna posledica prethodno dokazane Ramzejeve teoreme, ako tačke smatramo čvorovima grafa a duži granama grafa K_6..

Lema 9.2 *U prostoru je dato 9 tačaka tako da su svake četiri temena tetraedra, tj. među njima ne postoje tri tačke koje leže u istoj ravni. Svaka duž određena datim tačkama obojena je jednom od dve boje: crveno ili plavo. Za svako takvo bojenje postoji ili crveni tetraedar (tj. tetraedar čije su sve ivice obojene crveno) ili pravi trougao (tj. trougao čije su sve stranice obojene plavo).*

Dokaz. Ako među datim tačkama postoji takva tačka A iz koje izlazi šest crvenih duži, uočimo šest tačaka koje su drugi krajevi tih duži. Posmatrajmo duži sa krajevima u tih šest tačaka. Prema prethodnoj lemi među njima postoji tri iste boje koje obrazuju trougao. Ako je to crveni trougao, onda on sa tri crvene duži, koje spajaju njegova temena sa tačkom A obrazuju crveni tetraedar. U protivnom imamo plavi trougao. □

Napomena: Jasno je da boje mogu zameniti uloge, tako da važi da za svako bojenje postoji ili plavi tetraedar ili crveni trougao.

Lema 9.3 *U prostoru je dato 18 tačaka tako da su svake 4 temena tetraedra. Svaka duž određena datim tačkama obojena je jednom od dve boje: crveno ili plavo. Za svako takvo bojenje postoji jednobojni tetraedar, tj. tetraedar čije su sve ivice obojene istom bojom.*

Dokaz. Neka je A jedna od datih tačaka. Iz nje izlazi 17 duži. Među njima postoji 9 duži iste boje, na promer, plave. Uočimo 9 tačaka koje su drugi krajevi tih duži. Posmatrajmo duži sa krajevima u uočenim tačkama. Prema prethodnoj lemi, među tim dužima postoji 6 koje obrazuju crveni tetraedarili postoje tri koje obrazuju plavi trougao. U drugom slučaju, taj plavi trougao zajedno sa tri plave duži koje spajaju njihova temena sa tačkom A, obrazuju plavi tetraedar. □

Prelazimo sada na rešenje zadatka.

Obojimo crveno svaku duž koja je najkraća ivica u nekom od tetraedara. Ostale duži obojimo plavo. Prema prethodnoj meli dobićemo bar jedan tetraedar čije su sve ivice iste boje. Plavi tetraedar ne postoji jer je u svakom tetraedru bar jedna ivica (najkraća) crvena. Dakle, postoji crveni tetraedar. Njegova najduža ivica je najkraća ivica u nekom drugom tetraedru.

Glava 3

Svu brbljivost i podlost smrvi
I tada žalac mudre zmije
U obamrla usta mi je
Rinuo rukom punom krvi
I zario u grudi mač
I ustreptalo srce trgo
I žišku plamenu uz plač
U otvorene grudi vrgo."
A.S.Puškin

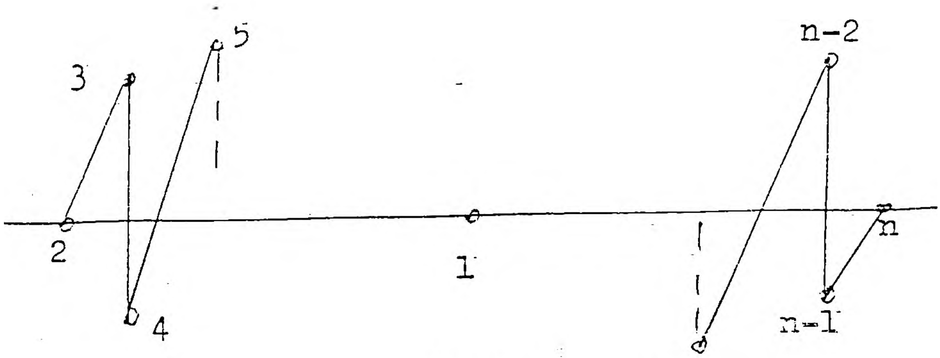
1. Geometrijski dokazi u grafovima

U ovom delu rada ćemo grafovske probleme smestiti u geometrijski prostor i pokazati kako geometrija pomaže teoriji grafova.

Teorema 1.1 *([16]) U kompletnom grafu sa n temena postoji k gransko - disjunktnih Hamiltonovih kontura, ako je n neki neparan broj i $n \geq 3$.*

Dokaz. Kompletan graf G sa n temena ima $\frac{n(n-1)}{2}$ grana i Hamiltonova kontura u G se sastoji od n temena. Prema tome broj gransko disjunktnih Hamiltonovih kontura u G ne može da pređe $\frac{n-1}{2}$. To da postoji $\frac{n-1}{2}$ gransko disjunktnih Hamiltonovih kontura kada je n neparan broj može se pokazati na sledeći način:

Podgraf (kompletnog grafa sa n temena) na slici 2. je Hamiltonova kontura.



Slika 2.

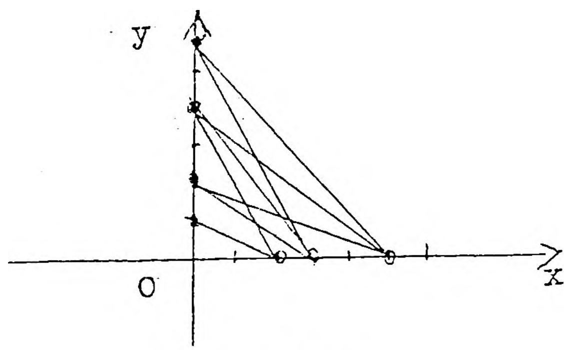
Zadržavajući temena fiksnim na kružnici, rotiramo poligonalni uzorak u smeru kazaljke na satu za

$$\frac{360}{n-1}, \frac{2\cdot 360}{n-1}, \ldots, \frac{n-3}{2}\cdot\frac{360}{n-1} \text{ stepeni.}$$

Primetimo da svaka rotacija daje Hamiltonovu konturu koja nema zajedničke grane ni sa jednom prethodnom. Prema tome, imamo $\frac{n-1}{2}$ novih Hamiltonovih kontura, sve gransko disjunktne međusobno. Otuda tvrđenje. $\square$

Teorema 1.2 *([16]) Granica broja sečenja pri pravolinijskom predstavljanju potpunog bipartitnog grafa $K_{m,n}$ je $4\binom{k}{2}\binom{\ell}{2}$.*

Dokaz. Razmotrimo slučaj kad su m i n parni brojevi, $n = 2k$ i $m = 2\ell$. Smestimo temena grafa na koordinatne ose x i y, tako da k čvorova budu sa raznih strana koordinatnog početka na x-osi, a po ℓ sa raznih strana koordinatnog početka na y-osi.



Slika 3.

Tada je broj preseka očigledno

$$4\binom{k}{2}\binom{\ell}{2}$$

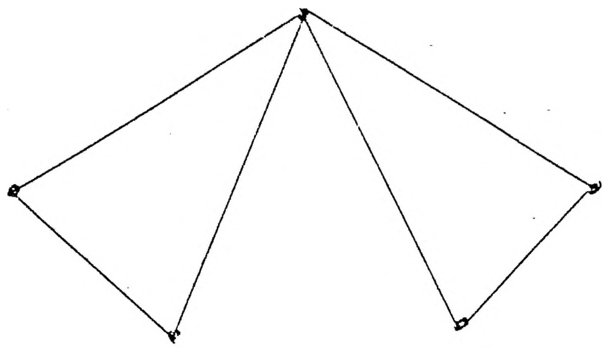
Dokaz u ostalim slučajevima je analogan. □

Nejednakost Cauchy - Schwarza može vrlo lako da se dokaže geometrijski:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + .. + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2)$$

Pretpostavimo da graf $G = (V, E)$ ima n čvorova i ne sadrži cikluse dužine 4 (označene sa C_4), to jest nema podgrafove oblika C_4, koliko najviše grana može imati graf G?

Kao primer grafa bez 4 - ciklusa uzimamo graf na slici 4.



Slika 4.

On ima 5 čvorova i 6 grana. Može se lako pokazati da grafovi bez 4 - ciklusa koji imaju 5 čvorova ne mogu imati više od 6 grana.

Pogledajmo opšti slučaj. Neka je $S = \{(u, \{v, w\})\}$ gde je u spojeno sa v i w, i $v \neq w$.

Odredićemo broj elemenata skupa S, drugim rečima brojimo sva pojavljivanja

$$\begin{array}{ccc} & u & \\ / & & \backslash \\ v & & w \end{array}$$

u G. Odmah vidimo da je $|S| = \sum_{u \in V} \binom{d(u)}{2}$. S druge strane, svaki par $\{v, w\}$ ima najviše jednog zajedničkog suseda (jer je G bez C_4). Prema tome je

$$|S| \leq \binom{n}{2}.$$

Zaključujemo

$$\sum_{u \in V} \binom{d(u)}{2} \leq \binom{n}{2},$$

ili

$$(*) \qquad \sum_{u \in V} d(u)^2 \leq n(n-1) + \sum_{u \in V} d(u).$$

Označimo sa $\vec{a} = (d(u_1), d(u_2), ..., d(u_n))$ i $\vec{b} = (1, 1, ..., 1)$ gde je $u_i \in V$. Cauchy - Schwarzova nejednakost daje

$$\left[\sum_{u\in V} d(u)\right]^2 \leq n \sum_{u\in V} d(u)^2.$$

Iz $(*)$ sledi

$$\left[\sum_{u\in V} d(u)\right]^2 \leq n^2(n-1) + n \sum_{u\in V} d(u).$$

Koristeći poznatu relaciju $\sum_{u\in V} d(u) = 2|E|$, dobijamo

$$4|E|^2 \leq n^2(n-1) + 2n|E|.$$

ili

$$|E|^2 - \frac{n}{2}|E| - \frac{n^2(n-1)}{4} \leq 0.$$

Ova nejednakost daje

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3}) \right\rfloor.$$

Ovim je dokazano tvrđenje koje je pokazao Istvan Reiman 1958. god. □

Teorema 1.3 *([1]) Ako graf G od n čvorova nema 4-ciklusa, tada je*

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3}) \right\rfloor.$$

Za $n = 5$ ovo daje $|E| \leq 6$, i naš primer pokazuje da jednakost može da važi.

Jedna od osnovnih teorema Teorije grafova je teorema Turána iz 1941. godine koja je inicirala stvaranje ekstremalne Teorije grafova. Turánova teorema je otkrivena više puta u različitim okruženjima i sa različitim dokazima. Uvedimo sledeću notaciju

$V = \{v_1, ..., v_n\}$ i ako su v_i i v_j susedni čvorovi onda pišemo $v_i v_j \in E$. $p-$ klika u G je potpun podgraf od G sa p čvorova koji označavamo sa K_p.

Paul Turán je postavio sledeći problem:

Neka je G prost graf koji ne sadrži p-klike. Koji je najveći broj grana koji G može imati?

Teorema 1.4 *([1]) Ako je $G = (V, E)$ graf sa n čvorova, koji nema p−klike, $p \geq 2$, tada*

$$|E| \leq (1 - \frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2}.$$

Dokaz. Za $p = 2$ imamo trivijalni slučaj. Prvi interesantan slučaj je $p = 3$ koji smo već obradili koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine. Takav graf sadrži najviše $\frac{n^2}{4}$ grana. Takođe za $p = 4$ imamo gore naveden dokaz koji koristi nejednakost Cauchy - Schwarza. Dokazaćemo opšti slučaj indukcijom po n.

Za $n = 1$ trivijalno. Neka je G graf sa maksimalnim brojem grana. G sigurno sadrži $(p-1)$-klike, jer u protivnom možemo dodavati još grana. Neka je A $(p-1)-$klika i neka je $B = V \setminus A$. A sadrži $\binom{p-1}{2}$ grana i odredimo broj grana u B, e_B, i broj grana koje povezuju A i B, $e_{A,B}$.

Po indukcijskoj pretpostavci je $e_B \leq \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p-1})(n-p+1)^2$. Pošto G nema p-klika, svaki čvor $v_j \in B$ je vezan najviše sa $p-2$ čvora u A. Dobijamo

$$e_{A,B} \leq (p-2)(n-p+1).$$

Zajedno, ovo daje

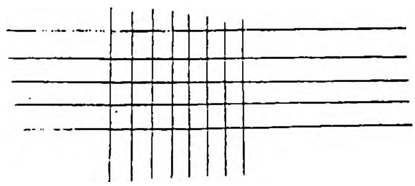
$$|E| \leq \binom{p-1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p-1})(n-p+1)^2 + (p-2)(n-p+1),$$

što je tačno

$$\left(1 - \frac{1}{p-1}\right)\frac{n^2}{2}. \quad \Box$$

2. Primena Pikove teoreme

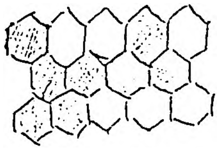
Pod celobrojnom kvadratnom mrežom u ravni podrazumevaćemo skup svih tačaka u ravni sa obe celobrojne koordinate. Ako se takve tačke posmatraju kao čvorovi grafa, pri čemu su dva čvora spojena granom ako i samo ako su na rastojanju 1, dobija se beskonačan graf koji je planaran, regularan, stepena 4. Svaka oblast takvog grafa je ograničena konturom dužine 4 (sl. 1).

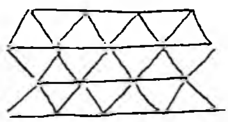


Slika 1.

Opisana mreža se može interpretirati i kao pokrivanje ravni sa podudarnim kvadratima bez zajedničkih unutrašnjih tačaka. Svaka dva kvadrata u takvom pokrivanju su ili disjunktna, ili imaju jednu zajedničku stranicu. ili imaju jedno zajedničko teme.

Poznato je da se ravan osim sa podudarnim kvadratnima može pokriti i sa podudarnim pravilnim šestouglovima i sa podudarnim jednakostraničnim trouglovima. To su jedine tri mogućnosti za pokrivanje ravni sa podudarnim pravilnim mnogouglovima. Šestougaona i trougaona mreža prikazane su na sl. 2a,b.





Slika 2. a) b)

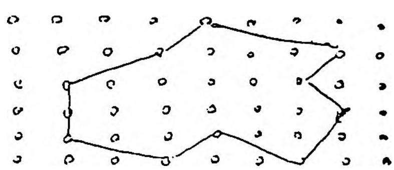
Austrijski matemtičar Pik Georg Aleksandrov (1859-1943) dokazao je jednu interesantnu teoremu koja se odnosi na površinu prostog mnogougla sa temenima u čvorovima (celobrojnim tačkama) kvadratne mreže.

Pikova teorema. *Neka je M prost mnogougao sa temenima u čvorovima kvadratne mreže. Tada je površina mnogougla M jednaka*

$$a + \frac{b}{2} - 1,$$

gde je a broj čvorova u unutrašnjosti mnogougla a b broj tačaka na granici mnogougla.

Više detalja o ovoj teoremi može se naći u [1]. Primer.



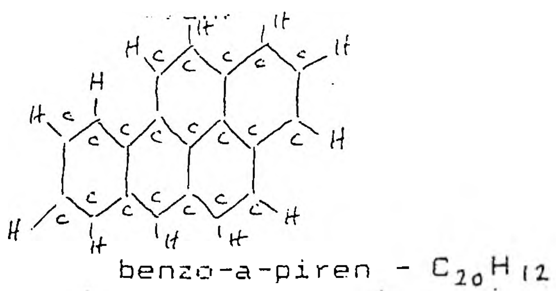
Slika 3.

Za mnogougao na sl. 3 je $a = 16, b = 11$, pa je njegova površina

$$16 + \frac{11}{2} - 1 = 20,5.$$

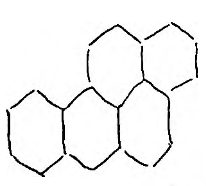
Benzenoidni hidrokarbonati su jedinjenja sa hemijskom formulom C_nH_s, pri čemu su atomi ugljenika povezani u šestougaone (heksagonalne) prstenove. Primer jednog takvog benzenoida dat je na sl. 4.

(benzo-a-piren):



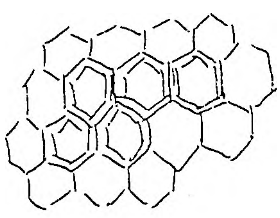
Slika 4.

Strukturna formula benzenoidnog hidrokarbonata predstavljena je grafom u kome atomima vodonika odgovaraju viseći čvorovi a atomima ugljenika čvorovi stepena tri. Odstranjivanjem visećih čvorova dobija se novi graf sa n čvorova, bez visećih čvorova u kome svaki čvor pripada nekom šestouglu. Na taj način pridružen graf grafu sa slike 4 dat je na slici 5



Slika 5.

Svaki takav graf može se posmatrati kao podgraf šestougaone mreže i to onaj njen deo koji je obuhvaćen jednom konturom te mreže (zatvorenim putem bez samopreseka) i delom koji leži unutar te konture (sl. 6.)



Slika 6.

Dužina te konture (broj grana konture) uvek je paran broj. Sam graf naziva se **heksagonalni sistem** (HS) a kontura koja ga ograničava je njegov perimetar. Termin perimetar koristimo i za dužinu konture i za to koristimo oznaku p. Sa h označavamo broj heksagona datog HS.

Koristićemo i sledeće oznake:

n - ukupan broj čvorova HS (tj. broj atoma ugljenika u odgovarajćem benzenoidu).

m - broj grana.

n_i - broj unutrašnjih čvorova, tj. broj čvorova unutar perimetra.

n_2 - broj čvorova stepena 2.

Jasno je da se svi čvorovi stepena 2 nalaze na perimetru i da je

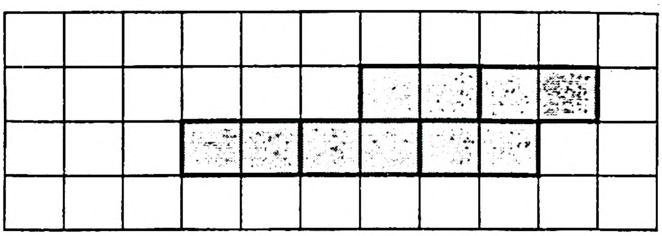
$$n_2 = s,$$

gde je s broj atoma vodonika u odgovarajućem benzenoidu.

Teorema 2.1 *(R. Tošić) Za HS važi*

$$h = \frac{n}{2} - \frac{p}{4} - \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Dokaz. Predstavimo heksagonalni sistem kao podrgraf kvadratne mreže. Kao primer, posmatrajmo sliku 7. koja predstavlja HS sa sl 6.



Slika 7.

Ako za jediničnu površinu uzmemo površinu jednog kvadrata te mreže, onda jedan heksagon ima površinu 2. Perimetar HS ima dužinu p i na njemu se nalazi tačno p celobrojnih tačaka (čvorova kvadratne mreže). Broj čvorova unutar perimetra je $n-p$. Na osnovu Pikove teoreme zaključujemo da je površina mnogougla određenog perimetrom HS jednaka:

$$2h = (n-p) + \frac{p}{2} - 1,$$

odakle sledi (1). □

Teorema 2.2 *(R. Tošić) Za HS važi:*

$$s = \frac{p}{2} + 3. \tag{2}$$

Dokaz. HS ima h oblasti ograničenih sa 6 grana i 1 oblast (beskonačnu - spoljašnju) ograničenu sa p grana (perimetrom). Obilazeći svaku oblast po jedanput, svakom granom proći ćemo dva puta, jer je svaka grana granična za dve oblasti. Dakle, dvostruki broj grana je

$$2m = 6h + p. \tag{3}$$

S druge strane, u svakom grafu je zbir stepena čvorova jednak dvostrukom broju grana. Kako je broj čvorova stepena dva jednak

s, a broj čvorova stepena 3 jednak $n - s$, to je

$$3(n - s) + 2s = 2m,$$

tj.

$$3n - s = 2m. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) sledi

$$6h + p = 3n - s,$$

tj.

$$3n - 6h = p + s. \tag{5}$$

Međutim, iz (1) dobijamo da je

$$3n - 6h = \frac{3}{2p} + 3,$$

što sa (5) daje

$$p + s = \frac{3}{2p} + 3,$$

odakle sledi (2). □

Teorema 2.3 *(R. Tošić) Iz teorema* 1 *i* 2, *tj. iz (1) i (2) dobija se*

$$h = \frac{1}{2}(n - s + 2). \tag{6}$$

Ako posmatramo parametre h i p vidimo da između njih postoji sledeća veza:

$$h = \frac{1}{2}(n - s + 2), p = 2s - 6, \tag{7'}$$

odnosno,

$$n = 2h + \frac{p}{2} + 1, s = \frac{p}{2} + 3. \tag{7''}$$

Prema napred izloženom, određivanje broja izomera benzenoida $CnHs$, može se svesti na određivanje broja neizomorfnih HS sa h heksagona i sa perimetrom dužine p, gde između navedenih parametara važe veze (7') i (7").

U svetu trenutno radi nekoliko istraživačkih grupa na problemima generisanja i prebrojavanja različitih izomera bezenoida $CnHs$, tj. odgovarajućih HS. To su:

Grupa u Novom Sadu je razvila softver koji ne samo da generiše i prebrojava heksagonalne sisteme, nego ih i klasifikuje po parametrima h i p. Prvi rad u toj oblasti je gde je data tablica brojeva koji su kasnije u literaturi dobili naziv STD - brojevi.

Glava 4

Ko trup u pustinji sam pao
I boga glas je mene zvao:
"Proroče ustaj, motri, vnemlji,
Ispunjen mojom voljom budi,
I hodeći po moru, zemlji,
Rečima žezi srca ljudi."
A.S.Puškin

Metodičke transformacije

1. Prave u ravni i dekompozicije grafova

Možda najpoznatiji problem o konfiguraciji tačaka postavio je J.J. Sylvester čiji dokaz se čini krajnje elementaran i koga smo prezentirali. Četrdest godina kasnije Erdeš ponovo postavlja isti problem i pretpostavlja da je odgovor pozitivan. Galai ga rešava 1933. godine.

Erdeš je 1943. ponovo postavio problem u časopisu American Mathematical Monthly. Među prispelim rešenjima bilo je i L.M.Kelijevo rešenje koga je Erdeš smatrao za najelegantnije.

Dualiziranjem Silvesterovog i Erdeš - Da Brijnovog tvrđenja dobijamo da u bilo kom rasporedu od n pravih u ravni, koje nisu sve iz istog pramena i među kojima nema paralelnih, postoji tačka u kojoj se seku tačno dve prave. Neka je $\mathbf{P}$ skup od $n \geq 3$ pravih u ravni koje se sve međusobno seku i ne pripadaju istom pramenu. Tada skup $\mathbf{L}$ presečnih tačaka ima najmanje n elemenata.

Sledeće tvrđenje pripada Erdešu.

Neka je $\mathbf{P}$ *konačan skup tačaka u ravni, tako da bilo koje tri tačke nisu kolinearne i sve ne pripadaju istoj kružnici. Tada postoji bar jedna kružnica koja sadrži tačno tri tačke skupa* $\mathbf{P}$.

Dokaz. Neka je P_1 tačka skupa $\mathbf{P}$ i neka je c proizvoljna kružnica u ravni sa centrom u $\mathbf{P}_1$. Označimo sa α inverziju u odnosu na c. Slike tačaka skupa $\mathbf{P}$ različitih od P_1 u odnosu na α čine nekolinearni skup $\mathbf{P}'$. Prema Silvester - Galaijevoj teoremi postoji prava l' kojoj pripadaju tačno dve tačke skupa $\mathbf{P}$, recimo P_2 i P_3. P_1 ne pripada ℓ' jer bi u protivnom $l = \alpha(l')$ sadržavala $P_1, P_2 = \alpha(P_2')$ i $P_3 = \alpha(P_3')$, suprotno pretpostavci tvrđenja. Sledi da je $\alpha(l')$ kružnica koja sadrži tačno P_1, P_2 i P_3. $\square$

Prethodni dokaz preuzet je iz knjige Judite Cofman *What to Solve?* Oxford, 1990. U delu 4 koji je nazvan *Selekcija elementarnih problema koje su rešavali eminentni matematičari dvadesetog veka,* možemo naći i priču o Silvestrovom problemu.

Jednostavna generalizacija Silvesterovog trvrđenja glasi:

Dato je $n \geq 3$ paralelnih pravih u prostoru tako da ne pripadaju sve jednoj ravni. Tada postoji ravan koja sadrži tačno dve od datih pravih.

Sledeće uopštenje problema Silvester-Galija je u knjizi Judite Cofman pripisano Motzkinu.

Neka je $\mathbf{P}$ *konačan skup tačaka u prostoru tako da ne pripadaju sve istoj ravni.*

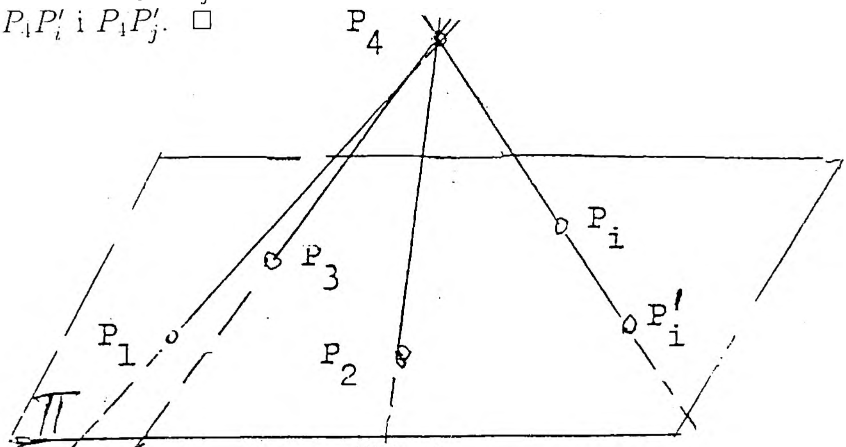
(a) Dokazati da postoji ravan π u prostoru tako da su tačke iz $\mathbf{P}$ *koje su u π raspoređene na ne više od dve prave u π.*

(b) Pokazati, konstruišući kontraprimer, da je sledeće tvrđenje netačno:

Postoji ravan u prostoru koja sadrži tačno tri nekolinearne tačke iz $\mathbf{P}$.

Dokaz. (a). Kako tačke skupa $\mathbf{P}$ nisu sve u istoj ravni, $\mathbf{P}$ mora sadržavati najmanje četiri tačke P_1, P_2, P_3 i P_4 koje nisu u istoj ravni. (Ovo implicira da bilo koje tri tačke od P_1, P_2, P_3, P_4 nisu kolinearne). Neka je π ravan kroz P_1, P_2 i P_3. Za bilo koju tačku $P \in \mathbf{P}$, različitu od P_4 označimo tačku u kojoj prava P_4P seče π (ako seče) sa P'. Neka je $\mathbf{P}'$ skup svih takvih tačaka P. Skup $\mathbf{P}'$ nije prazan jer je $P_1' = P_1, P_2' =$

$P_2, P_3' = P_3$. Štaviše, obzirom da P_1, P_2 i P_3 nisu kolinearne, tačke $\mathbf{P}'$ nisu sve kolinearne. Prema tvrđenju Silvester-Galaija, postoji prava l' u π koja sadrži tačno dve tačke iz $\mathbf{P}'$, recimo P_i' i P_j'. Prema tome, u ravni kroz P_4, P_i' i P_j' sve tačke iz $\mathbf{P}$ moraju ležati na jednoj (ili obe) prave P_4P_i' i P_4P_j'. □



Slika 1.

Lako se uveravamo da skup $\mathbf{P} = \{S, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, P, Q, R\}$ ima tražene osobine. Ne postoji ravan u prostoru koja sadrži tačno tri nekolinearne tačke iz $\mathbf{P}$.

Sledeće uopštenje teoreme Silvester-Galaija tj. tvrđenje dokazano od strane Motzkina i Conwaya odnosi se na blok-dizajne. Postoje razne vrste blok - dizajna. U knjizi Judite Cofman predložena je sledeća definicija:

Blok - dizajn $\mathcal{D}$ se sastoji od n elementa, nazvanih tačkama i izvesnih podskupova tačaka koji se zovu blokovi, tako da

svaki blok sadrži najmanje dve tačke

bilo koje dve tačke sadržane su u tačno jednom bloku.

Primeri blok-dizajna su konačne projektivne ravni. Skupovi $\mathbf{P}$ i $\mathbf{L}$ iz teoreme Silvester - Galaija su tačke i blokovi.

U ovom kontekstu, ranije dokazana teorema glasi:

Teorema 1.1 *Ako blok dizajn $\mathcal{D}$ sadrži n tačaka i m blokova tako da* *je $m > 1$, onda je $m \geq n$.*

Analizirajući dokaz prethodne teoreme, koji korisri linearnu algebru dolazimo do sledećeg tvrđenja:

Teorema 1.2 *Neka je X skup od $n \geq 3$ elemenata, i $A_1, A_2, ..., A_m$ pravi podskupovi od X, tako da je svaki par elemenata iz X sadržan u tačno $\lambda < m - 1$ skupova A_i. Tada je $m \geq n$.*

Dokaz. Posmatrajmo matricu incidencije B za $(X, A_1, A_2, ..., A_m)$ tj.

$$B_{x_i A_j} = \begin{cases} 1, & x_i \in A_j \\ 0, & x_i \in A_j \end{cases} \quad i = 1, 2, ..., n; \quad j = 1, 2, ..., m$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & . & . & & A_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array}$$

Primetimo da vrste elemenata x_i i x_j sadrže jedinice u λ istih kolona. U ostalim kolonama se razlikuju tj. ako je, na primer, u nekoj od preostalih kolona jedinica u vrsti x_i, onda u toj koloni stoji nula u vrsti x_j. Matrica BB^T ima oblik

$$\begin{bmatrix} r_{x_1} & \lambda & \lambda & \ldots & \lambda \\ \lambda & r_{x_2} & \lambda & \ldots & \lambda \\ \vdots & \vdots & & & \\ \lambda & \lambda & & \ldots & r_{x_n} \end{bmatrix}$$

r_{x_i}, kao i ranije, označava broj pojavljivanja elemenata x_i u skupovima $A_1, A_2, ..., A_m$.

$$r_{x_i} > \lambda,$$

jer se proizvoljan element $y \in X$, $y \neq x_i$, zajedno sa x_i javlja u λ skupova. Postoji treći element $t \neq y \neq x_i \neq t$ koji nije u svim skupovima u kojima su x_i i y. U protivnom A_i skupovi bi bili ceo X.

x_i i t moraju biti u λ podskupova pa je x_i sadržan u bar još jednom skupu pored λ skupova u kojima je zajedno sa y.

Vrednost determinante matrice BB^T je

$$\begin{vmatrix} r_{x_1} & \lambda & \dots & \lambda \\ r_{x_2} & \dots\lambda & & \\ \vdots & & & \\ \lambda & & & r_{x_n} \end{vmatrix} =$$

$$(r_{x_1}-\lambda)(r_{x_2}-\lambda)\dots(r_{x_n}-\lambda)\times\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{r_{x_1}-\lambda}+\frac{1}{r_{x_2}-\lambda}+\dots+\frac{1}{r_{x_n}-\lambda}\right).$$

što znači da je matrica BB^T regularna. Sledi, kao i u dokazu teoreme za $\lambda = 1$, da je $m \geq n$.

Pogledajmo neke primere:

$X = \{1, 2, 3, 4\}$
$A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{1, 2, 4\}$, $A_3 = \{1, 3, 4\}$, $A_4 = \{2, 3, 4\}$

$$\begin{array}{lcl} \{1,2\} \subseteq A_1 & \text{i} & \{1,2\} \subseteq A_2 \\ \{1,3\} \subseteq A_1 & \text{i} & \{1,3\} \subseteq A_3 \\ \{1,4\} \subseteq A_2 & \text{i} & \{1,4\} \subseteq A_3 \\ \{2,3\} \subseteq A_1 & \text{i} & \{2,3\} \subseteq A_4 \\ \{2,4\} \subseteq A_2 & \text{i} & \{2,4\} \subseteq A_4 \\ \{3,4\} \subseteq A_3 & \text{i} & \{3,4\} \subseteq A_4. \end{array}$$

Ovo je primer tzv. $(4, 4, 3, 3, 2)$ - konfiguracije (videti knjigu R.Tošića: *Kombinatorika,* str. 201)

Sledeći primer nije blok - dizajn.

$X = \{1, 2, 3, 4\}$
$A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{1, 2, 4\}$, $A_3 = \{1, 3\}$, $A_4 = \{1, 4\}$ $A_5 = \{2, 3, 4\}$

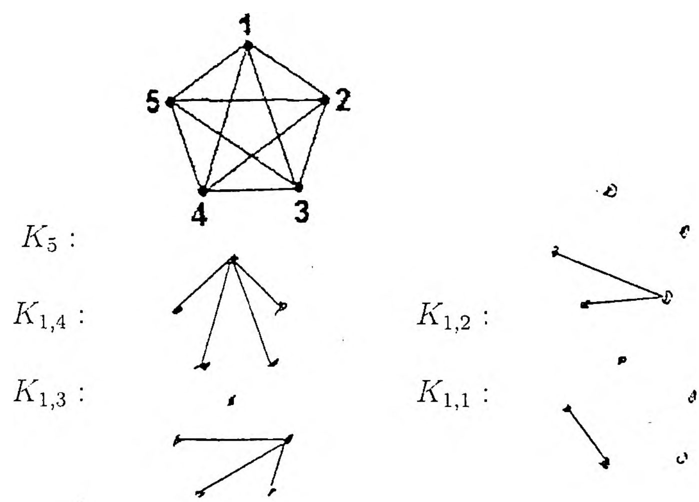
$$A_6 = \{3,4\}.$$

$$\begin{array}{lcl}
\{1,2\} \subseteq A_1 & \text{i} & \{1,2\} \subseteq A_2 \\
\{1,3\} \subseteq A_1 & \text{i} & \{1,3\} \subseteq A_3 \\
\{1,4\} \subseteq A_2 & \text{i} & \{1,4\} \subseteq A_4 \\
\{2,3\} \subseteq A_1 & \text{i} & \{2,3\} \subseteq A_5 \\
\{2,4\} \subseteq A_2 & \text{i} & \{2,4\} \subseteq A_5 \\
\{3,4\} \subseteq A_5 & \text{i} & \{3,4\} \subseteq A_6.
\end{array}$$

Sada bi grafovska interpretacija teoreme u "λ verziji" glasila:

Teorema 1.3 *Ako razložimo kompletan graf K_n na m različitih kompletnih podgrafova od K_n, tako da je svaka grana u tačno $\lambda < m-1$ kompletnih podgrafova, onda je $m \geq n$.*

Ako razložimo K_n na kompletne bipartitne grafove $H_1, H_2, ..., H_m$ tako da je svaka grana u tačno jednom od ovih grafova, tada je kao što smo videli $m \geq n-1$. Pogledajmo primer za K_5.



Iz dokaza teoreme o kompletnim bipartitnim grafovima vidimo da možemo zahtevati da je svaka grana, na primer, tačno u dva grafa.

Tada se suma (1) iz dokaza menja u sumu

$$2\sum_{i<j} x_i x_j = \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{a\in L_k} x_a \sum_{b\in R_k} x_b\right). \tag{2}$$

Sistem linearnih jednačina ostaje isti

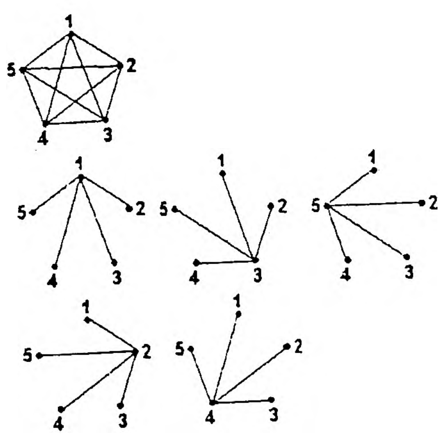
$$x_1 + \ldots + x_n = 0$$

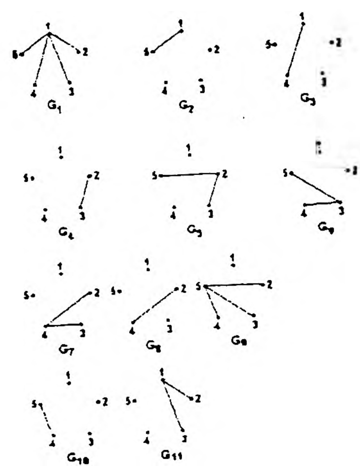
$$\sum_{a\in L_k} x_a = 0$$

pa dobijamo sledeće tvrđenje:

Teorema 1.4 *Ako je K_n razložen na kompletne bipartitne grafove $H_1, \ldots, H_m$, tako da je svaka grana u tačno dva bipartitna grafa, tada je $m \geq n-1$.*

Pogledajmo primer:





Slike

2. Dokazi i opovrgavanja

Ojler je 1758 godine došao do formule o odnosu temena, ivica i pljosni poliedara ali se ovaj rezultat mogao dobiti i iz Dekatrovih rukopisa iz 1639. godine. Istina, Dekart nije sam izveo do kraja ono što se danas naziva *Ojlerova formula.*

Knjiga *Dokazi i opovrgavanja*, Imre Lakatoša u suštini je sažetak njegove filozofije matematičkog otkrića. Kao što je poznato, Lakatoš na primeru dokaza Ojlerove formule $v - e + f = 2$ pokazuje kako se iz, naizgled nepreciznih pretpostavki, može na neformalan način doći do tačnog matematičkog otkrića.

Dokazi i opovrgavanja su se na našim prostorima pojavili u poznatoj seriji "Moderna matematika" krajem sedamdesetih godina prošlog veka. Vrlo brzo ova knjiga je postala bestseler medju matematičarima i praktično razgrabljena.

O Lakatošu su napisane mnogobrojne studije iz matematičke filozofije, metodike, pedagogije, psihologije. Interesantno je da se dokaz Ojlerove formule danas nalazi i u udžbenicima algebre. Ovu temu smo uvrstili u našu tezu jer na lep način ilustruje vezu geometrija - grafovi, grafovi - geometrija. Kako je sama tema dosta eksploatisana, mi ćemo se osvrnuti na neke kritike Lakatoševe filozofije.

Lakatoš otkriva "karte" već u uvodu svoje knjige: *Možda ovde treba spomenuti paradoksalan položaj matematičara: prema formalističkim, ili čak deduktivističkim merilima, on nije častan matematičar. Dieudonné govori o "apsolutnoj nužnosti nametnutoj bilo kom matematičaru koji se brine za intelektualnu čestitost" da svoje zaključivanje izloži u aksiomatskom obliku.*

Pod sadašnjom prevlašću formalizma podstaknuti smo da parafraziramo Kanta: istorija matemtike, gubeći vodstvo filozofije, postala je slepa, a filozofija matematike, okrećući ledja najzanimljivijim pojavama u istoriji matematike, postala je prazna. "Formalizam" je branik filozofije logičkog pozitivizma. Prema logičkom pozitivizmu, rečenica je smislena samo ako je ili "tautologija" ili empirijska. Budući da neformalna matematika nije ni "tautologija" ni empirijska, mora biti besmislena, krajnja glupost.

Te dogme logičkog pozitivizma bile su štetne za istoriju i filozofiju matematike.

Svrha ovih eseja je približavanje nekim problemima metodologije matematike. Reč "metod" je grčkog porekla i znači put ka istini. Ovde *reč "metodologija" upotrebljavam u smislu bliskom Polyainoj i Bernaysovoj "heuristika" i Popperovom "logika otkrića" ili "situaciona logika".*

U knjizi *Razumevanje u matematici*, 1994, Ana Sierpinska (Anna Sierpinska), govoreći u uvodu kaže o Lakatošu:

"Ovaj pogled na matematiku zahtevao je premišljanje proučavanja i ocenjivanja učeničkog razumevanja. On je relativizovao njihove greške. Neke od njihovih grešaka uzrokovane su načinima razmišljanja sasvim legitimnim u okviru izvesnog mišljenja, izvesnog konteksta problema i izvesnog verovanja u ono šta je istina u matematici. Postalo je jasno da bar neka učenička razumevanja zaslužuju više poštovanja i pažnje i da umesto da pokuša da zameni učeničko "pogrešno" znanje tačnim, učiteljski trud treba da se ulaže u pregovaranje sa učenicima o značenjima, pronalaženje posebnih izazovnih problema kroz koje će učenik iskusiti mentalni konflikt, koji će ga dovesti do svesti da njegov ili njen način razumevanja verovatno nije jedini, da nije univerzalan".

Jasno je da ovakav pristup proučavanju zahteva "didaktički inženjering" koji će pružiti uslove učenicima da razumeju matemtičke sadržaje bolje i dublje.

Na strani 167 navedene knjige Ana Sierpinska kaže: *"Posle Gödela neki filozofi su pokušali da nađu izlaz iz ovog osećanja nesigurnosti. U stvari, neki od njih su nastavili da grade sigurnost na ovoj nesigurnosti. Ovako se može opisati filozofija Lakatoša.*

U godinama 1960-70 Lakatoš je počeo da promoviše filozofiju pogrešne matematike: matematike kao "kvazi-empirijske nauke". Prema Lakatošu (1978) osnovni matemtički protok nije prenos istine kroz kanale dedukcije od aksioma do teorema. već pre svega preusmeravanje netačnosti od specijalnih tvrdjenja (tzv. "osnovnih tvrdjenja") prema aksiomama. U ovom pristupu, aksiomi su "radne hipoteze" i ako ispadne, na osnovu aksioma, da neko od osnovnih tvrdjenja ne važi, onda ćemo pre menjati aksiome nego osnovna tvrdjenja".

U knjizi Matematika: *Izgubljena sigurnost,* 1980, M.Klajn (M.Klein) na neki način nastavlja Lakatošev argument kada kaže: *"U stvari matematičar se ne oslanja na rigorozne dokaze kako se to normalno pret-*

postavlja. Njegove tvorevine imaju za njega značenje koje prethodi bilo kojoj formalizaciji, i ovo značenje daje tvorevinama postojanje ili realnost ipso facto (samo po sebi). Pokušaj da se odrede precizne granice rezultata izvodeći ga iz aksiomatske strukture može pomoći na naki način ali mu u stvari ne povećavaju vrednost"

Naša tema nije kritika filozofije Imre Lakatoša ali pogledajmo neka razmišljanja Solomona Fefermana iz knjige *U svetlosti logike (In the light of Logic,* Oxford, 1998).

Šta čini polazni dokaz? Odakle on dolazi?

Lakatoš kaže da je to misaoni eksperiment ili naivni dokaz - ideja. Ali u primerima koje nam daje, ideja dokaza je već uveliko napredovala. Ima značajnu strukturu i korake, pretvara se da je racionalan lanac od hipoteze do zaključka. Ne možemo zamisliti da takav dokaz izvire u punoj snazi samo iz formulacije hipoteza.

Koja je forma hipoteze?

U svim primerima hipoteze koje nam daje Lakatoš su oblika:

(1) Za sve objekte koji zadovoljavaju hipoteze A, zaključak B važi, što je logički ekvivalentno sa

(2) $(\forall x)[A(x) \rightarrow B(x)]$.

Ali, postoje mnogobrojna matematička tvrdjenja od istorijskog značaja. na primer tvrdjenje $e^{i\pi} = -1$ ili

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4},$$

$641 | 2^{2^5} + 1$, koja nemaju formu (2).

Zar nema kristalno jasnih matematičkih koncepata? Lakatoš kaže da nema kristalno jasnih matematičkih koncepta.

Šta je to posebno kod matematike?

Lakatoš ne čini nikakav napor da nam objasni šta je to o konceptualnom sadržaju ili o verifikacionoj strukturi matematike što je čini posebnom u odnosu na druge oblasti znanja.

Može li se običnom logičkom analizom doći do istih primera kao metodom dokaza i opovrgavanja?

Po svemu sudeći može. Postupak obične logizacije Lakatoševog metoda dat je u knjizi Fefermana.

Šta čini poboljšanje u dokazu?

Lakatoš ne daje teorijski kriterijum za ovo. On jednostavno proizvodi primere i pokazuje promenu koja se dešava kao odgovor na kritiku ili kontraprimere. Evidentno i za njega i za nas poboljšanje se desilo.

Lakatoševa metodologija uspeva u ograničenim delovima matematike nastalim aktivnim i rastućim intelektualnim naporima koji su podložni konfuziji, nesigurnosti i greškama. Nasuprot tome, logika daje koherentnu sliku matematike ali koja se na prvi pogled čini idealnom i statičnom i koja je irelevantna svakodnevnoj praksi. Međutim logika sama objašnjava šta je to posebno kod matematike, njene koncepte i ideje, i metode.

Solomon Feferman dalje kaže: *"Verujem da nas Lakatošev uspeh inspiriše da tražimo više realističnu teoriju matematike. Ali njegovi propusti i neuspesi treba da nas osveste da mnogo više logike mora biti priznato i ugrađeno u takvu teoriju. Trebalo bi rezervisati ime "logika matematičkog otkrića" za ono što dolazi. "*

3. O problemima i njihovom rešavanju

Prethodno izloženi problemi i njihova rešenja predstavljaju, po mišljenju mnogih matematičara primere lepog u matematici.

Poznati engleski matematičar G.H.Hardy (Hardi) u svojoj autobiografiji *A Mathematicians Apolagy* (Opravdanje jednog matematičara) kaže:

"Matematičar, kao i slikar ili pesnik, stvaralac je ornamenata. Matematički ornamenti moraju biti kao i slikarski ili pesniči lepi: ideje kao boje ili reči moraju se slagati na harmoničan način. Lepota je prvi

test".

Ono što uzbudjuje umove matematičara, ono o čemu oni govore kada kažu da matematika ima svoju lepotu može se ilustrovati na primeru lepog dokaza:

- videti nešto kao nešto drugo

- izvući ga iz uobičajenog konteksta

- uvesti u priču nešto poznato ali učiniti to na neočekivan način

- promeniti tačku gledišta i dopustiti da ta promena razotkrije novi vid interpretacije.

Izloženi problemi u našoj tezi, odnosno njihova rešenja, koriste između ostalog, metodu zamene uzroka i posledice: pretpostavimo da je ono što hoćemo da dokažemo tačno da bismo videli kakve posledice to proizvodi, a potom ćemo iz tih posledica možda izvući pouke koje će nam (uz malo sreće) ukazati na put ka formalnom dokazu.

Zameniti konkretno apstraktnim, ili se baviti apstraktnim kao da je to nešto sasvim konkretno, to su bitna odličja *Matemtičkog stila*.

Jedna od osnovnih heurističkih metoda matematike mogla bi se opisati na sledeći način: pronaći ključni primer, onaj koji u neku ruku predstavlja čitav "svet" objekata, i ispitati hipotezu na njemu.

Primetimo da se ovde ne radi o formalno korektnom mišljenju već o *logici matematičkog stila*. Na primer, ništa nam ne daje za pravo da iz jednog "kritičnog" slučaja izvodimo opšte zaključke. Naše rezonovnaje tu se oslanja samo na intuiciju, na sasvim neosnovano uverenje da i jedan primer može biti dovoljan da se uspostavi ili izmeni čitav dokaz. O upotrebi analogije i "namernih grešaka" u matematici, Imre Lakatoš i Djerdj Poja napisali su čitave knjige. Na žalost iz razloga tradicije njome uslovljenih vidova matematičkog obrazovanja i prihvaćenih oblika naučne komunikacije, ovi aspekti kreativnog procesa u matematičkom mišljenju obično bivaju izbrisani iz udžbenika i stručne problematike.

Matematika, kao i književnost, bavi se jednom "paradoksalnom" ontologijom. pričanjem priče o svetovima i objektima koji ne postoje ali imaju identitet.

To je nešto mnogo više od prostog manipulisanja brojevima: matematika je način mišljenja o stvarima.

Pitanje kako predavati matematiku staro je koliko i matematika kao samostalna nauka. Istorijski gledano matemtika se razvijala i predavala onako kako je to želeo jedan ili više "autoriteta" vremena u kome se živelo.

Da li se povoditi za autoritetima ili predavati matematiku po svom osećaju? U knjizi *Otvoreno društvo i njegovi neprijatelji* (Čar Platona Karl R. Poper kaže:

"Ne postoje nadljudi. Postoje neki veliki mislioci ali ni oni njaveći su skloni pravljenju velikih grešaka. Moramo da budemo skromni i da ispitujemo svoj put kao što bi to činio slep čovek, pipajući svojim rukama i stopalima, krećući se pažljivo i koristeći svoj razum, uvek svesni da možemo pogrešiti. Mi moramo da izbegavamo nasilje".

Zašto smo u našoj tezi odabrali baš navedene probleme a ne neke druge? Dobar deo navedenih problema prezentiran je. kao što je rečeno u knjizi Aignera (Ajgnera) i Zieglera (Ciglera) *Proofs from The Book.*

Smatra se da su navedeni dokazi pravi biseri u matematičkoj literaturi. Ovo kazuje da naša tema krije lepotu povezivanja više matematičkih oblasti, korišćenje mnoštva matematičkih tehnika i jednostavnost jezika kojim je prezentiran svaki problem.

Naglasićemo kod svakog problema ključne momente. Prethodno primetimo da smo u rešavanju koristili

- generalizaciju

- specijalizaciju

- analogiju

Prema Djerdju Poji, generalizacija je prelaženje sa razmatranja datog skupa objekata na veći skup. koji sadrži dati. Često generališemo prelazeći sa jednog objekta na čitavu klasu koja sadrži dati objekat.

Specijalizacija je prelaženje sa razmatranja datog skupa objekta na manji skup, sadržan u datom. "Kada govorimo o analogiji nalazimo se na manje sigurnom tlu" kaže Poja. Analogija je vrsta sličnosti. Slični objekti se slažu jedan sa drugim. Ako želimo da svedemo aspekt po kome se objekti slažu na neki koncept onda gledamo slične objekte kao analogne. Poja kao primer navodi da pesnici porede mlade žene sa cvetom i to njima znači sličnost. Oni ne idu na analogije, na nešto što se konceptualno definiše.

U svom čuvenom članku *Generalizacija, specijalizacija, analogija*, Djerdj Poja kaže:

"Ako smo u prirodnjačkom muzeju gde su kosturi različitih sisara, svi nam se čine zastrašujući. Ako je ovo sličnost koju nalazimo medju njima, onda ne vidimo mnogo analogije. Ipak, možemo videti lepu analogiju izmedju čovečije ruke šape mačke, krila slepog miša".

Kod specijalizacije razlikujemo još i

- Slučaj ekstremne specijalizacije

- Glavni specijalni slučaj

Sposobnost rešavanja problema očigledno mora da se stekne dugoročnim rešavačkim iskustvom (videti Friedrich Zech, *Metodika matematike,* str. 413) (Fridrih Ceh).

Teškoće na koje učenici nailaze kod rešavanja problema prema Goldbergu (1992) mogu se klasifikovati kao:

- teškoće u stručnom izražavanju

- teškoće u upotrebi varijabli i simbola

- nedovljno shvatanje jezičko-logičkog razumevanja za egzistencijalno i nedvosmisleno (na primer značenje "Postoji jedan ... ")

- mehaničko umesto heurističkog učenja dokazivanja

- prenaglašenost formalnog prikazivanja dokaza

Walsch (1992) (Volš) izmedju ostalog. zaključuje da bi se trebalo orijentisati prema jednom drugom pojmu dokaza koji obuhvata svaku vrstu argumentacije i obrazloženja i koji se. u nekoj datoj situaciji. mogu smatrati "doslednim", "dovoljnim" i "ubedljivim" (videti knjigu Imre Lakatoša: *Dokazi i opovrgavanja)*.

U odeljku 11. 7. 2 knjiga Fridriha Ceha, koji nosi naslov *O rešavanju konkretnih zadataka u osnovnoj školi,* data su heuristička pravila za rešavanje problema. Ova pravila, naravno. važe i za ostale uzraste. Navedeno je *šest postupaka*, koji se prema mišljenju autora dopunjavaju:

1. *Impulsi,* pitanja i upotstva nastavnika za vreme rešavanja problema.

2. *Refleksija,* nakon rešavanja problema i povremeno fiksiranje nekih zapamćenih pravila.

3. *Kognitivno modelovanje* postupaka pri rešavanju problema (od strane nastavnika)

4. Rad učenika prema *pismenim uputstvima.*

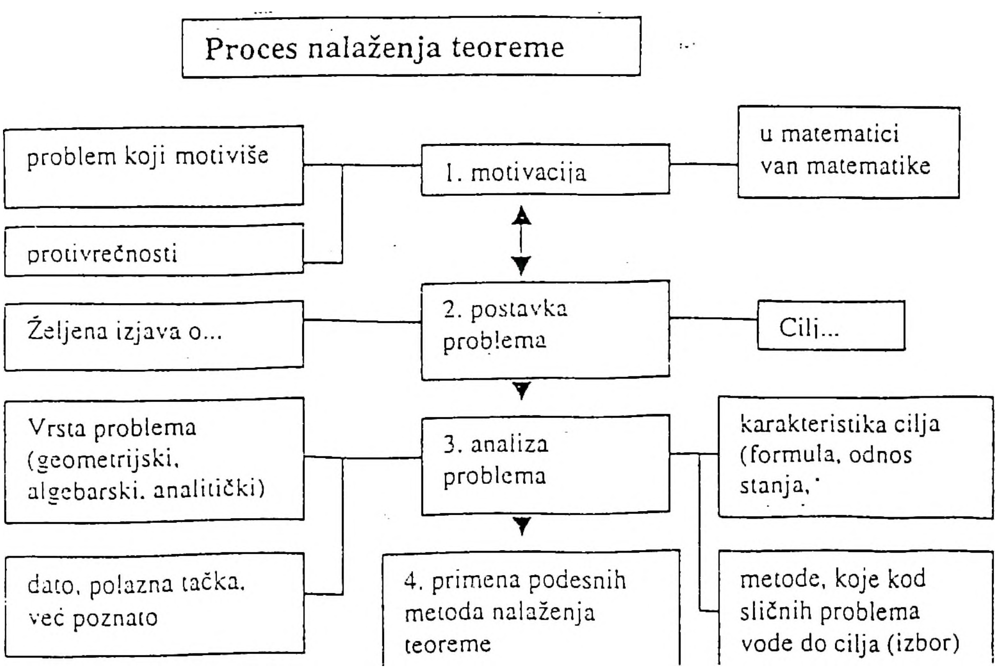
5. Ciljno uvežbavanje *parcijalnih radnji.*

6. Po mogućstvu, samostalno učeničko *rešavanje problema.*

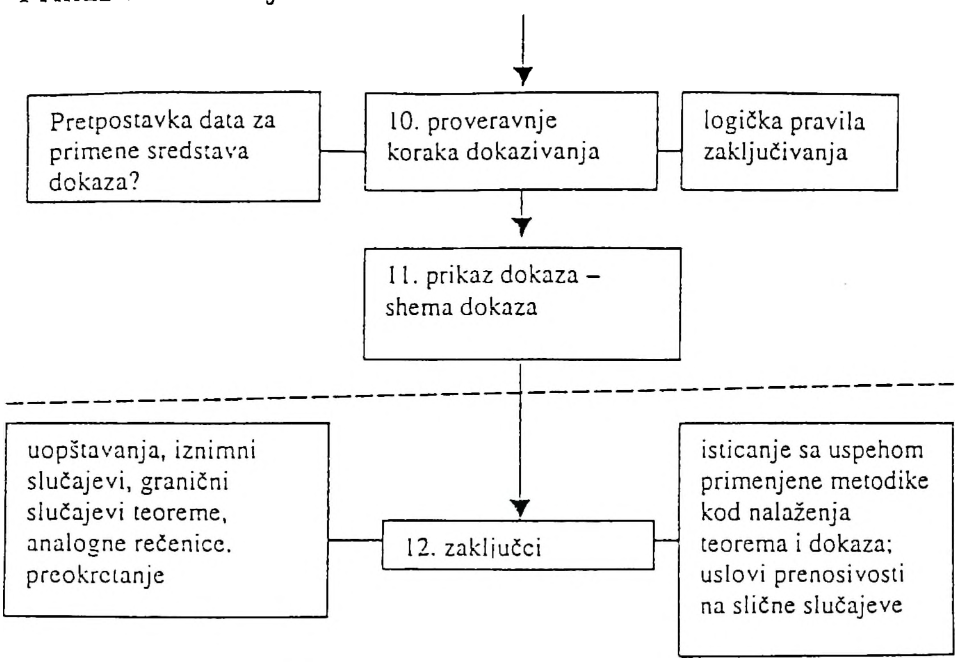
Prednosti i mane ovih metoda mogu se ukratko iskazati tabelom:

Metode	Prednost?	Opasnost?
1.impulsi	fleksibilno i primenljivo sa ciljem	mali stepen svesnosti u postupanju
2.refleksija	učenici postaju svesni sopstvenog mišljenja	suviše se, možda, vezuju za pojedinačne zadatke
3.modelovanje	može dobro da pojasni moguće procese mišljenja	malo obraća pažnju na pojedinačnog učenika
4.uputstvo za rad	naročito pojačava svest o značaju pravila nevezanih za zadatak	malo prilagođeno pojedinačnim učenicima i zadacima
5.vežba parcijalnih radnji	redukcija kompleksnosti celokupne radnje	u određenim okolnostima je previše izolovana od celokupne radnje
6.rešavanje problema	učenje o postupku na osnovu sopstvenog iskustva	frustracija ako je nedovoljna priprema

(Tabela 1. Proces nalaženja teoreme)



Prikaz dokazivanja



(Tab. 2. Prikaz dokazivanja)

4. Podsticanje kreativnog ponašanja

Pre svega da kažemo: "Kreativnost je jedan od najneodredjenijih, najambivalentnijih i najzamršenijih pojmova današnje psihologije i pedagogije" (Ausubel i dr. 1981., str. 650).

Pod "kreativnošću" ćemo prosto shvatiti sposobnost i spremnost neke osobine da stvori nešto (za sebe) novo (vidi različite pokušaje definisanja kod Schifflera (Šifler) 1973, str. 10). Ovde ćemo svesno izaći iz okvira kognitivne strane matematičkog rešavanja problema i preći na opšte ljudsko ponašanje sa kognitivnom i afektivnom dimenzijom.

"Pospešivanje kreativnog ponašanja" se može shvatiti kao sumereni pokušaj da se unaprede određene sposobnosti i spremnosti čoveka da bolje izađe na kraj sa (svojim) problemima.

Utoliko je matematička sposobnost rešavanja problema deo kreativnog ponašanja. Obrnuto, može se očekivati da opšte podsticanje kreativnog ponašanja povratno deluje na matematičku sposobnost rešavanju problema tako što će bar stvoriti uslove za to.

Skoro uopšte nije sporno da se kreativnost, u odredjenom obimu može naučiti i to odgovara proširenom uverenju, iako je vrlo teško naći dokaze za to. Oslanjajući se na istraživanja u vezi sa tim, Hallmann daje nekoliko ideja za "kreativne nastavnike", koje i danas vrede. Ovi saveti delom upućuju daleko van okvira neke situacije obučavanja i predmeta matematike, ali vrlo dobro dopunjuju ranija izlaganja.

1. Kreativni nastavnik se zalaže za samoinicijativno učenje, samoaktivnost, ohrabruje učenike da se iskažu, da se upuste u *eksperimentisanje*, da stvaraju hipoteze.

2. Kreativni nastavnik uspostavlja *ne-autoritarnu okolinu* za učenje. Slobodni uslovi olakšavaju stvaralačko delovanje.

3. Kreativni nastavnik ohrabruje učenike da se preučavaju (overlearn), da se zasite informacijama, utiscima i značenjima ... Preučavanje deluje kreativno tako što dopušta učeniku da se odvoji od materijala, tako da gradivo može da postane plastično i predmet nove izgradnje.

4. Kreativni nastavnik podstiče kreativne procese mišljenja. On podstiče učenike da nadju nove veze izmedju podataka, da stvaraju asocijacije, da maštaju ...

5. Kreativni nastavnik odlaže ocenu. On ne blokira istraživačke napore tako što najavljuje rezultate ili daje rešenja... Kreativni nastavnik umanjuje značaj grešaka. On stavlja do znanja da su *greške očekivane kao i neophodne.*

6. Kreativni nastavnik podstiče intelektualnu fleksibilnost kod učenika. On ohrabruje učenike da promene svoje pozicije posmatranja ... i da izbegnu da se učvrste na jednoj jedinoj liniji, kada krenu na rešavanje zadataka.

7. Krativni nastavnik ohrabruje *samoprocenjivanje* individualnog napretka i postignutog ... Ko želi da postane kreativan, samostalan i odgovoran, treba stalno da vežba samoprocenjivanje.

8. Kreativni nastanvik pomaže učenika da postane osećajan čovek - senzitivniji prema socijalnim i ličnim kao i školskim problemima ...

9. Kreativni nastavnik zna kako da koristi pitanje. Svaki kreativni akt počinje pitanjima, ali pitanja moraju da budu za učenike operaciona i otvorena i da imaju smisla, da nemaju predodredjene odgovore a pogotovu da odgovori na njih ne zahtevaju izlaganje činjenica napamet.

10. Kreativni nastavnik pribavlja učenicima priliku da se zanimaju materijalima, idejama, pojmovima, alatima i strukturama ... Aktivno vladanje stvarima podstiče ono stvaralačko, jer to učeniku pomaže da shvati procese koji se odvijaju ...

11. Kreativni nastavnik pomaže učeniku da *prevazilazi frustracije i promašaje* ...

12. Konačno, kreativni nastavnik usmerava učenike da posmatraju probleme kao celinu, da prevashodno naglašavaju celokupne strukture a ne pojedinačne aditivne elemente. Konstrukcija, kao integrativna celina, daje smernice za aktuelni kreativni proces ... "

Slične ideje, ali koje se opet nešto više odnose na nastavu matematike, sažeo je Wittmann 1981. godine pod naslovom *"Uslovi za podsticanje kognitivnih strategija"*:

1. Sticati znanja putem učenja otkrivanjem.
2. Ohrabriti učenike na divergentno mišljenje.
3. Ometati automatizovane tokove misli i davati prividne paradokse.
4. Postavljati otvorene i izazovne probleme.
5. Pustiti učenike da sami postavljaju probleme i da ih vode dalje.
6. Postići preglednost problema za učenike.
7. Podsticati intuitivno argumentovanje i pretpostavljanje.
8. Učiti heurističke strategije.
9. Izgraditi konstruktivni odnos prema greškama.
10. Podsticati raspravu, refleksiju i argumentaciju.

Konačno i Winter 1991. godine polazeći od psihologije, daje istosmerne predloge za vežbanje kreativnosti, koji mu se čine *"najviše teoretski opravdanim i praktično mogućim za realizaciju"*.

1. Probleme (ne dati, nego) razviti iz konteksta koji deluje izazovno, stimulisati na pitanja

2. Ukazati na mogućnosti slobodnog eksperimentiranja, naročito čulne prirode i ohrabriti na davanje pretpostavki

3. Dovoljno daleko držati pomagala za učenje i otkrivanje, manje nuditi pomagala za nalaženje rezultata, a više pomagala za samostalno nalaženje rezultata

4. Pobrinuti se za toplu atmosferu za učenje, naročito biti uzdržan u ocenjivanju (tačno/netačno) doprinosa učenika, uklanjati stidljivosti zbog davanja neobičnih predloga

5. Predočiti heurističke strategije i govoriti uopšteno o mišljenju, izražavanju, predstavljanju, pamćenju, sećanju, zaboravljanju, greškama,

vežbanju itd.

6. Učiniti jasnim sadržajni ili "formalni" značaj teme.

Grupa autora, Steinhöfel (Štajnhefel), Reichold (Rajhold), Franzel (1975) navode jednu šemu za rad sa učenicima kod rešavanja konkretnih zadataka. Iako su dati primeri u knjizi Fridriha Ceha jednostavni i odnose se na osnovnu školu, oni se lako primenjuju u svim slučajevima:

1) Shvati i analiziraj zadatak!

Shvati date i tražene veličine!

Moraš shvatiti odnose u zadatku!

Proceni (koliko je moguće) rezultat!

2) Pronadji matematičku postavku!

Postavi formulu!

Odrediti jednačinu putem koje se može pronaći tražena veličina!

3) Reši matematičke zadatke!

4) Proveri rezultat (rezultate)!

Proces kreiranja problema može se lepo videti na primeru šeme, prezentirane u knjizi Fridriha Ceha: Videti skice na stranicama 402,403.

5. M.C.Escher

Matematika, kao zanat, mora se dobro savladati. Biti *učitelj igre* veliko je umeće. Šta je potrebno učitelju matematike da uspešno vodi decu stazama ove čudesne nauke?

- Mora voleti decu!

- Mora voleti matemtiku!

Lepota dokaza, lepota igre, draž novog, privlačnost nepoznatog, moć saznanja, sve ovo matematika ima. Smatramo da je ponekad važnije prikazati mladima neki biser u moru matematičkih tema, nego "ugnjaviti učenika tehničkim detaljima zadate teme".

Problemi koje smo prezentirali namenjeni su pre svega studentima matematike. Njima je apsolutno jasno da su oni lepi i da su dokazi elegantni i inspirativni.

Najuspešniji ilustrator matematičkih ideja, svih vremena, bio je holandski grafičar Mauritz Cornelis Escher (1898-1972). On je mogao napraviti sliku na zadatu matematičku temu kao renesansni majstori na zadatu temu iz Biblije. Kroz njegova dela matematički paradoksi postajali su"prirodne stvari". Umeo je da inspiriše istraživača, da pouči. Jednom rečju, veliki umetnik. Escher je napisao interesantnu misao: *"Pravilni poligoni imaju apsolutno nehuman karakter. Oni nisu izmišljotina ljudskog uma jer su postojali kao kristali u zemljinoj kori mnogo pre nego što se čovečanstvo pojavilo na sceni".*

Tema "kako čuvati muzej" zahvalna je za rad sa decom različitih uzrasta i zbog mogućnosti da se "na mala vrata" uvede M.C.Escher i njegova umetnsot u rad matemtičkih sekcija, a ponekad i u redovnoj nastavi.

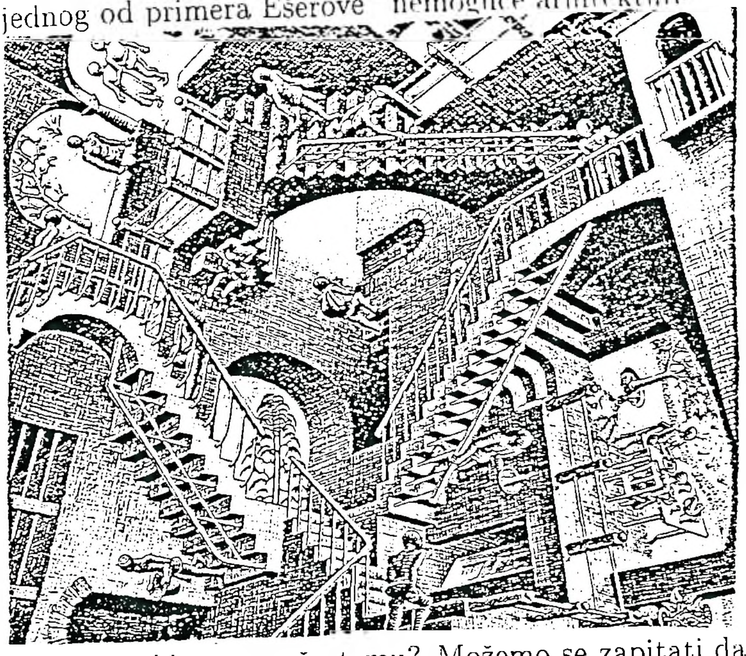
U Ešerovom svetu nalazimo tri načina da uklonimo barijeru izmedju nauke i mašte. Prvi je zasnovan na Ešerovoj "nemogućoj" arhitekturi. Ona nam omogućava da shvatimo da:

(a) naš normalan sistem pravila nije ni *jedini* ni *najbolji*.

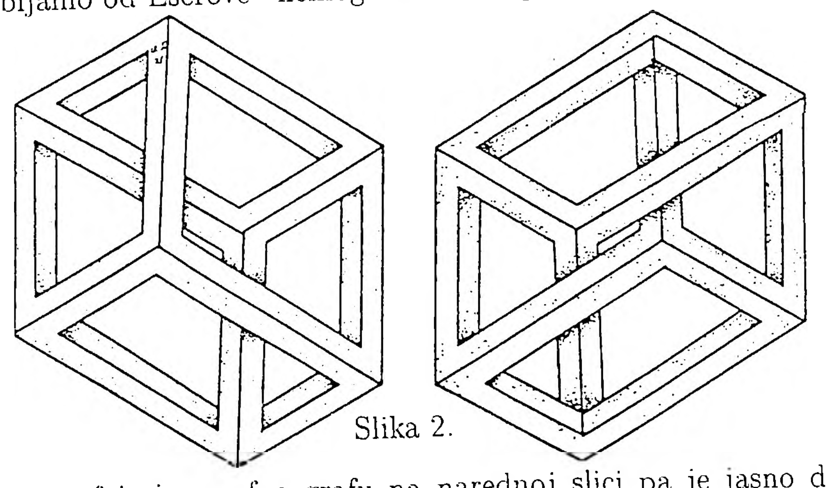
(b) čudna stvar nije uvek nonsens: ona može pripadati drugim sistemima pravila koje treba razumeti.

Tako, posmatrajući, crtajući "nemoguću arhitekturu", naša deca počinju rad na idejama različitosti i na vezama naučne teorije i magičnih elemenata.

Evo jednog od primera Ešerove "nemoguće arhitekture"

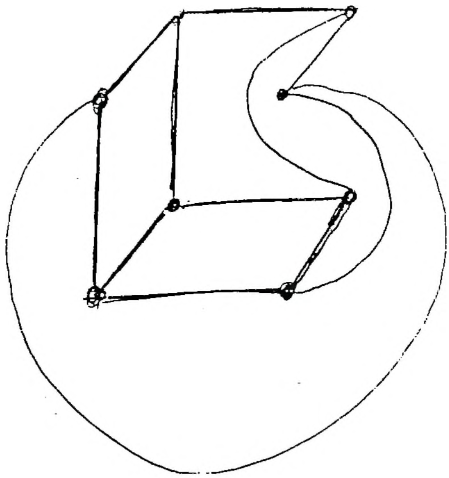


Kako se ovo uklapa u našu temu? Možemo se zapitati da li je graf koji dobijamo od Ešerove "nemoguće kocke" planaran.



Slika 2.

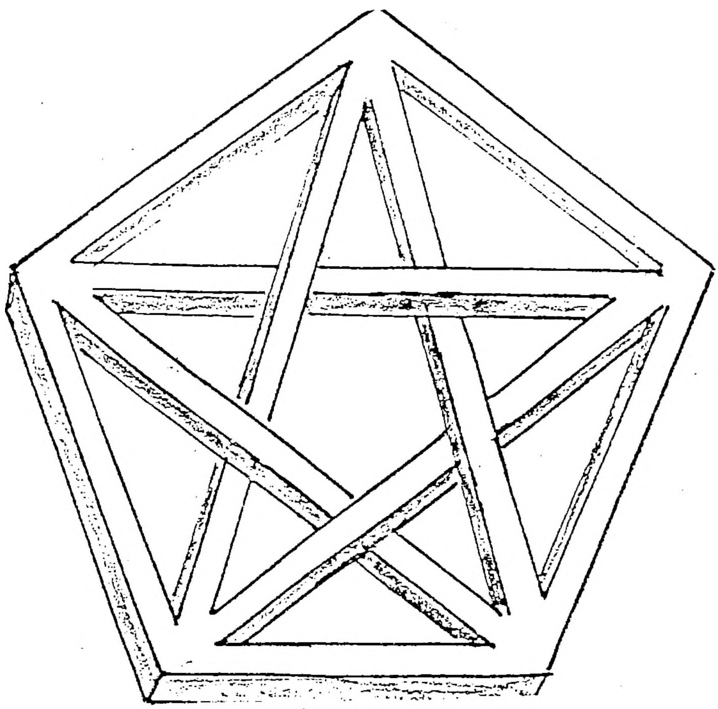
Ovaj graf je izomorfan grafu na narednoj slici pa je jasno da je planaran.



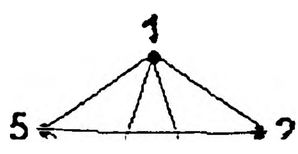
Slika 3.

Interesantno je da većina originalnih Ešerovih slika, kada se interpretiraju kao grafovi, daju planarne grafove.

Evo jedne Ešerovske slike čija "graf interpretacija" predstavlja K_5 koji, kao što znamo, nije planaran graf.



Slika 4.



U Ešerovim radovima razlikujemo pet tipova transformacija:

- funkcionalne

- slučajne

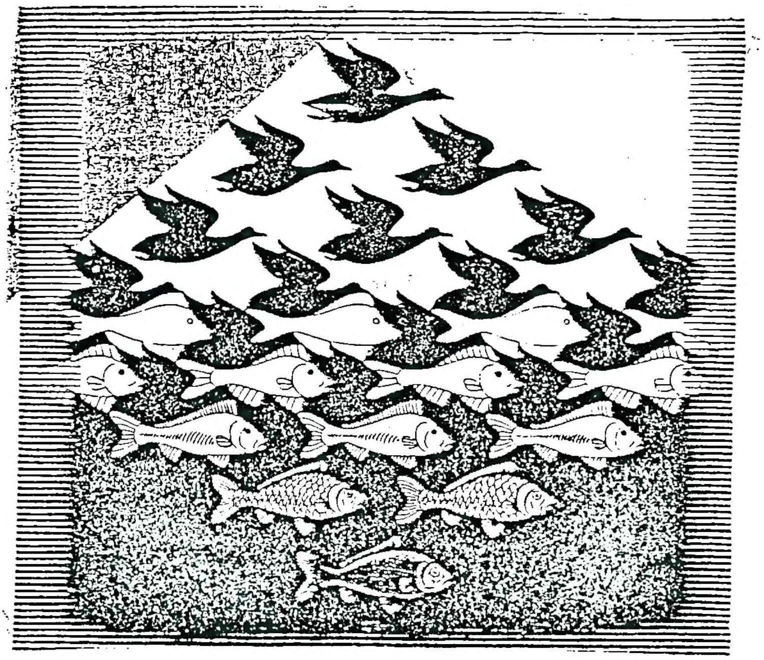
- analogne

- simulirane

- apstraktne

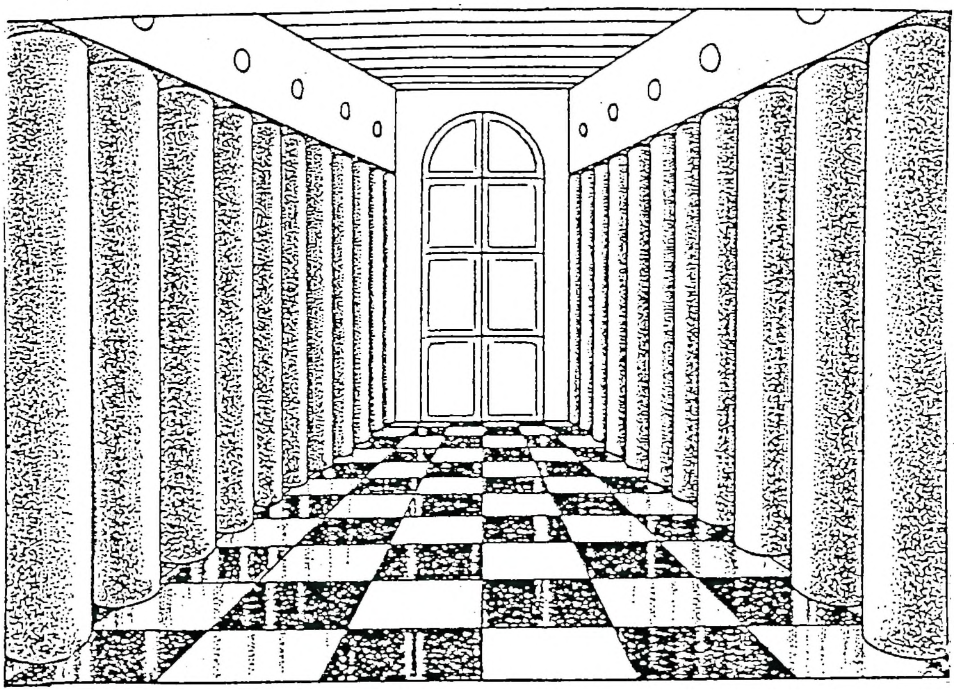
Sve ovo se može iskoristiti u različitim matemtičkim temama.

Drugi način uklanjanja barijere izmedju nauke i mašte Ešer prezentira u radovima tipa "metamorfoza"



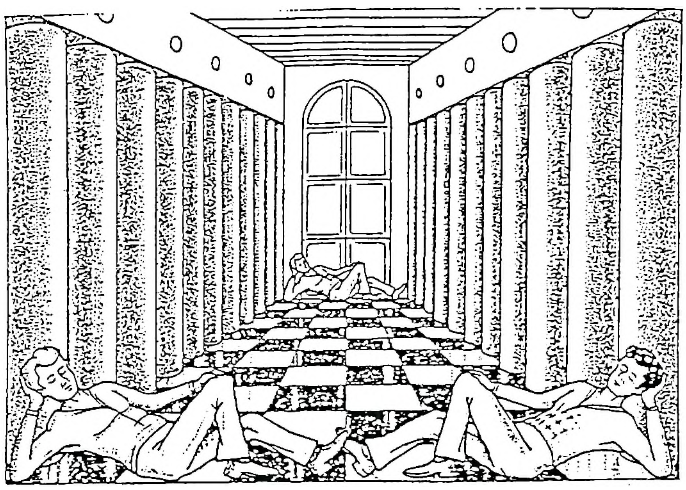
Ovde imamo primer "oživljavanja" šestougla. Treći način uklanjanja zida koji deli nauku i maštu kod Ešera su tzv. "ogledalski efekti" što predstavlja do sada neprevazidjenu ilustrciju neeuklidskih geometrija i svetova. Ali, ovo je već druga priča.

Evo predvorja jednog muzeja kome su potrebni čuvari.



(Slika muzeja)

U stvari. ovo je primer kako ne treba čuvati muzej.



(Slika muzeja)

6. O političarima i vetrenjačama

Pretpostavimo da u nekoj grupi ljudi imamo situaciju da bilo koji par osoba ima tačno jednog poznanika. Tada uvek postoji osoba "političar" koji je prijatelj sa svima.

1) Kako se matematički može prikazati dati problem?

impuls: Dati graf relacije prijateljstva.

Naglasiti da refleksivnost relacije nije bitna.

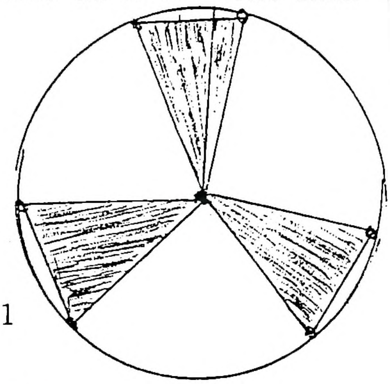
u je prijatelj sa v

kognitivno modelovanje: Primetiti da u grafu koji želimo da odgovara našoj situaciji nema podgrafa C_4 :

Posle nekoliko "pokušaja i pogrešaka" dolazimo do "vetrenjače"

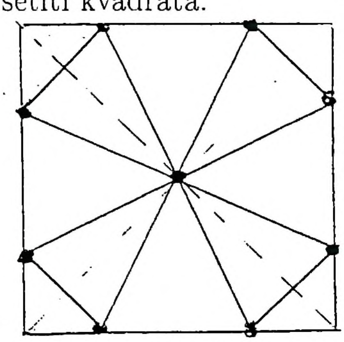
2) Nacrtati pravilnu vetrnjaču!

U osnovnoj školi to može biti zadato da se konstriše znak "mercedesa"



Slika 1

Neki učenici će se setiti kvadrata.



Slika 2.

Zahtevati da se konstruiše pravilna vetrenjača sa 6,8 krilaca.

Refleksija nakon rešenja problema:

Primetiti da se dati problem može prikazati u prostoru kao "jež", Napomenuti na kom principu "radi" Rubikova kocka.

Sledeći korak odnosi se na učenike srednje škole (specijalci ili matematička sekcija).

3) Konstruisati vetrenjaču sa proizvoljno mnogo krilaca

Vežbe parcijalnih radnji: Jasno je da se radi o konstrukciji pravilnih mnogouglova. Konstrisati sve poznate pravilne mnogougle uključujući petougao.

Pokušaj generalizcije: Od već konstruisanog pravilnog mnogougla dobiti novi polovljenjem stranica.

Šta je sa sedmouglom?

Teorema 1. *(Gaus - Wantzel). Neka je p neparan prost broj. Regularni p- mnogougao je konstruktibilan ako i samo ako je $p = 2^{2^t} + 1$ za neko $t \geq 0$.*

Gaus je konstruisao 17-tougao eksplicitno. Rezultat na kome bi mu pozavideli stari Grci. S druge strane sledi, na primer, da je nemoguće konstruisati pravilan sedmougao, 11-tougao, itd.

Naravno, svemu prethodi priča o pravilima Euklidovske konstrukcije.

Refleksija: Brojevi $F_t = 2^{2^k} + 1$, zovu se Fermatovi prosti brojevi, ako su prosti. Za $0 \leq t \leq 4$, možemo proveriti da su 3,5,17,257 i 65537 prosti.

- poznato: nekoliko narednih vrednosti za t daju složene brojeve.

- nepoznato: da li postoji još neki Fermatov broj?

Sledeći rezultat je poznat.

Teorema 2. *Regularni n-tougao je konstruktibilan ako i samo ako je n proizvod stpena dvojke i različitih Fermatovih brojeva.*

4) Formulisati *teoremu prijateljstva*

Teorema 6.1 *([21]) Neka je G graf u kome bilo koja dva čvora imaju tačno jednog suseda. Tada postoji čvor koji je direktno povezan sa svim ostalim čvorovima.*

Postoji mnogo dokaza prijateljske teoreme ali je izgleda dokaz Pala Erdeša, Alfreda Renjija, i Vere Šoš iz 1966. godine najlepši.

Prvi deo dokaza razumljiv je i srednjoškolcima.

Ovo je primer dokazivanja *svodjenjem na apsurd.*

impulsi: Podsetimo se tautologije

$$\models (a \Rightarrow (p \wedge \rceil p)) \Rightarrow \rceil a$$

Formulacija problema na nivou matematičke olipijade:

Zadatak. Ako je G graf u kome svaka dva čvora imaju tačno jednog suseda i nema čvorova koji su direktno povezani sa svim ostalim čvorovima, onda je G regualran.

Pogodnija formulacija problema:

Pretpostavimo da u nekoj grupi ljudi imamo sitaciju da bilo koji par osoba ima tačno jednog poznanika i nema osobe koja poznaje svakog iz grupe. Ako u grupi ima n osoba, koliko osoba poznaje svaki član grupe?

Ključni deo rešenja bio bi dokaz da je graf G regularan tj.

$$d(u) = d(v) = k, u, v \in V.$$

Ovo daje vezu $(*)$ iz dokaza

$$(*) \qquad n = k^2 - k + 1,$$

iz koje lako izračunavamo k,

$$k = \frac{1 + \sqrt{4n - 3}}{2}$$

Za $n = 3$, $k = 2$. Takodje za $n = 7$ imamo $k = 3$, $n = 21$, $k = 5$ itd.

Ako pokušamo da nacrtamo graf od 7 čvorova sa $d(u) = d(v) = 3$. $u, v \in V$ videćemo da takav graf ne postoji. Ali kako dokazati da u opštem slučaju postoji samo jedan takav graf K_3 za $n = 3$?

5) Drugi deo dokaza.

Ovo je materijal razumljiv studentima koji su usvojili osnovne pojmove Linearne algebre.

Neophodno predznanje:

Za graf $G = (V, E)$ definišemo *matricu susedstva* $A = (a_{ij})$ na sledeći način

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ako je} \quad v_i v_j \in E \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

A je realna simetrična matrica sa 0 na glavnoj dijagonali. Ako je $V = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$. onda je A $(m \times m)$ matrica sa m karakterističnih realnih vrednosti $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_m$ (neke mogu biti jednake).

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_m = 0,$$

pa sledi da najmanji karakteristični koren mora biti negativan.

U našem problemu matrica susedstva je $n \times n$ matrica za koju važi

$$A^2 = \begin{bmatrix} k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 & k \end{bmatrix}$$

Lako se pokazuje da je karakteristični polinom ove matrice

$$p(x) = [x - (n + k - 1)][x - (k - 1)]^{n-1}.$$

Relacija $(*)$ daje da je $k^2 = n + k - 1$ karakterističan koren. Ovo znači da je k ili $-k$ karakterističan koren od A multipliciteta 1. Za svaki karakteristični koren α matrice A sledi da je α^2 karakteristični koren matrice A^2. Kako su k^2 i $k-1$ jedini karakteristični koreni od A^2 sledi da karakteristični koreni matarice A mogu biti k, $-k$, $\sqrt{k-1}, -\sqrt{k-1}$. U najgorem slučaju sledi da imamo

$$k + r\sqrt{k-1} - s\sqrt{k-1} = 0,$$

gde mora biti $r \neq s$ jer je $k \neq 0$.

Ostalo je školski zadatak.

Zadatak. Neka su k, r, s prirodni brojevi za koje važi

$$k + r\sqrt{k-1} - s\sqrt{k-1} = 0.$$

Tada je $k = 2$. Dokazati!

Generalizacija (Kötzig)

Teorema. *(Y. Yang, J. Lin, C. Wang, 2000). Neka je $\ell > 2$. Tada ne postoje grafovi sa osobinom da su svaka dva čvora spojena tačno jednom stazom dužine ℓ.*

Glava 5

Komentari

Priče koje smo ispričali imale su dva cilja, da pouče i da prikažu lepotu teme.

Naša tema je lepa ali teška. Kako ispričati temu koja se retko obradjuje i na studijama matematike a da nešto od toga bude dostupno deci u osnovnoj školi?

Iz prethodnog izlaganja vidimo da je moguće "spustiti" neke sadržaje i na školski nivo.

Grafovi mogu i moraju zauzeti mesto koje im pripada u udžbeničkoj literaturi. Sve više je grafova u svakodnevnoj praksi. Ovo se najbolje vidi u računarstvu.

S druge strane, insistiranje samo na apstraktnim temama koje su primenljive u praksi dovelo bi nas u drugu krajnost. Matematika je civilizacijska tekovina savremenog čoveka. Ona je deo njegove kulture. Retko se pitamo koliko je neko muzičko delo korisno. Pa zašto bi to onda radili sa matematikom?

Na kraju svoje čuvene autobiografije G.H. Hardy kaže: *"Nisam nikad uradio bilo šta korisno. Nijedno moje otkriće nije učinilo, a izgleda neće ni učiniti, direktno ili indirektno, u dobru ili zlu, ni najmanji pomak za dobrobit čovečanstva. ...*

... Sudeći po svim praktičnim standardima, vrednost mog matematičkog života je ništavna, a van matematike trivijalna svakako".

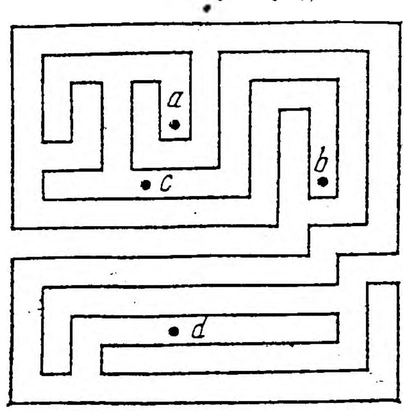
U članku *Kako zaštititi društvo od nauke* (Radical Philosophy 2, 1975. prevod iz knjige *Filozofija nauke,* Nolit, Beograd) poznati filozof Pol Fejerabend (Paul Feyerabend) kaže:

"Ja u stvari, ne stavljam primedbu samoj nestručnosti, već zameram tome što je ona praćena dosadom i zadrtošću. A to je upravo ono što se dešava. Mi ne dobijamo zanimljive lažne ideje, već dosadne ideje, ili reči koje nisu povezane ni sa kakvim idejama".

Ovo se može reći i za naše udžbenike matematike. Primer "lažne ideje" je priča o unutrašnjosti konveksnog mnogougla. Nije odmah jasno kako objasniti pojam unutrašnjosti, koja je ograničena Žordanovom krivom u srednjoj školi. Ideja sa šetnjom po krivoj je sasvim prihvatljiva. Dokaz da kod bilo kog mnogougla postoji dijagonala koja cela pripada unutrašnjosti mnogougla, može biti ispričan koristeći "lažnu" nematematičku ideju o posmatraču koji stoji u nekonveksnom uglu muzeja (Videti knjigu V.V. Prasolov, *Zadači po planimetrii,* Nauka, Moskva, 1986).

Problem unutrašnjost - spoljašnjost lepo se vidi na primeru uzetom iz knjige V.G.Boltjanski, V.A. Jefremovič, *Očigledna topologija,* Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1984.

Na slici je prikazana prosta zatvorena izlomljena linija, ali nikako nije očigledno da ona deli ravan na dve oblasti, ne može se odmah videti u kojoj oblasti (unutrašnjoj ili spoljašnjoj) leže tačke a, b, c, d.



Slika 1.

Interesanto je da je prvi dokaz o tome da poligon deli ravan na dve disjunktne oblasti, unutračnjost i spoljašnjost dao holandski matematičar B.L. fan der Varden (B.L. van der Wareden) u radu. *De logische grondslagen der euklidsche meetrunde,* Crhistian Hygensens, 13 jaargang, Nr., Groningen, 1934/35.

Kakvi treba da budu ciljevi matematičkog obrazovanja učenika srednjih škola?

- Razvijanje pravog razumevanja matemtičkih izraza, koncepata, procesa i dokaza.

- Pripremiti učenike koji žele da studiraju matematiku ili predmete koji koriste matematiku.

- Razvijanje sposobnosti logičkog mišljenja, rezonovnaja, analiziranja i preciznog izražavanja.

- Razvijanje sposobnosti primene matematike u profesionalnom životu na primer pročuvanje okoline, smanjenje zagadjenja, razvoj pravih nutricionističkih programa.

- Razvoj gemetrijskog načina razmišljanja uključujući dokaze geometrijskih tvrdjenja i veštine crtanja.

- Učiniti prelaz sa aritmetike na algebru, rešavanje problema koristeći algebarske metode.

- Razviti ljubav za predmet tako da se učenik uključi u samoobrazovanje i učešće na matematičkim takmičenjima.

- Razviti sposobnost učenika da odgovore zahtevima moderne tehnologije i inovacija, na primer računara.

- Da cene lepotu i moć matematike i da su svesni njenih organičenja.

- Da cene doprinos matemtičara sa naših prostora koji su u prošlosti dali značajne rezultate u nauci.

O ovome se može naći u knjizi *Studies in mathematics education, moving into the twenty first century*. Vol. 8, UNESCO, 1992.

Napomenimo da se dobar deo ovih ciljeva postavlja i za osnovnu školu.

Gornji ciljevi su postavljeni od strane Ministarstva za obrazovanje Indije devedesetih godina prošlog veka i mogu se od reči do reči primeniti na našu sredinu.

Na kraju, citirajmo reči I.P. Pavlova, poznatog ruskog naučnika fiziologa:

"Upamtite da nauka traži od čoveka sav njegov život. I kada biste imali dva života ni to vam ne bi bilo dovoljno. Velike napore i velike strasti iziskuje nauka. Budite strastveni u vašem radu i vašim stremljenjima. Nikad nemojte misliti da već sve znate. I ma koliko vas visoko cenili, imajte uvek hrabrosti da sebi kažete: ja sam - neznalica. Ne dozvolite da gordost ovlada vama. Zbog nje ćete, možda, biti uporni i tada kada je potrebno prihvatiti tudje mišljenje. Zbog nje ćete odbiti neki koristan savet i drugarsku pomoć. Zbog nje ćete izgubiti meru objektivnosti".

Literatura

[1] Aigner, M., Ziegler. M.G., Proofs from the book. Second Edition, Springer, 2001.

[2] Aigner, M., Combinatorial theory, Springer Verlag 1979 (ruski prevod "Mir", 1982).

[3] Aigner, M., Turan's graph theorem, Amer. Math. Monthely 102 (1995), 808-816.

[4] Ausubel, D.P., Entdeckendes Lernen, Neber, 1973.

[5] Bodroža-Pantić, O., Kombinatorna geometrija, Univerzitet u Novom Sadu, Edicijab univerzitetski udžbenik. 132, Novi Sad, 2000.

[6] de Bruijn, N.G., Erdös, P., On a combinatorial problem, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. 51 (1948), 1277-1279.

[7] Brualdi, R. A., Introduction Combinatorics, Horth - Holland, 1977.

[8] D.Bajc, T.Pisanski, Najnujejše o Grafih, DMFA SRS. 1985.

[9] R.Basaker, T.Saati, Konečnie grafi i seti "Nauka" Noskva, 1974.

[10] Baltjanskij, V.G., Jefremovič, V.A., Očigledna topologija, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1984.

[11] Banerji, R., Theory of problem solving, An Approach to Artificial Intelligence, Elsevier, New York, 1969. (ruski prevod "Mir", Moskva, 1972).

[12] Borzan, Božičević, Devide, Duković, Krnić, Kronfeld, Mardešić, Matulić - Bedenić, Pavlić, Pavlović, Stošić, Razgovori o matematici, Školska knjiga, Zagreb, 1973.

[13] Cofman, J. What to Solve ?, problems and suggesticons for young mathematicians, Oxford Science Problications, 1989.

[14] Cofman, J., Numbers and shapes revisted, more problems for young mathematicians, Oxford Science Publications, 1995.

[15] Courant, R., Robbins, H., Šta je matematika?, Naučna knjiga, Beograd, 1973.

[16] Chv'atal, V., A cominatorial theorem in plane geometry, J. Combinatorial Theory, Ser. 18(1975), 39-41.

[17] Devlin, K., Goodbye Descartes, The End pf Logic and the Seaich for a New Cosmology of the Mind, John Wiley & Sons, New York, 1997.

[18] Devlin, K., The language of mathematics, Making the invisible visible, Freeman and Co., New York, 1998.

[19] Devidé, V., "Stara" i "nova" matematika, Školska knjiga Zagreb, 1975.

[20] Denes, J., Keeswell, A.D., Latin squares and their applications, Akademiai Kaido, Budapest, 1974.

[21] Erdös, P., Problem 4065 - Three point collinearity, Amer. Math. Monthly 51 (1944), 169-171.

[22] Erdos, P., Pe'nyi, A., So's, V., On a problem of graph theory, Studia Sci.Math. 1(1966), 215-235.

[23] Egerić, M., Metodička transformacija i modeli diferencirane nastave algebre u osnovnoj školi, doktorska disertacija, Novi Sad, 2002.

[24] V.A. Emaličev,M.M. Kovalev, M.. Kravcov, Mnogograniki grafi i optimizacija

[25] Ju.M. Ermoljev, I.M.Maljnik, Ekstremaljnie zadači na grafah "Naukova dumka" Kiev - 1968.

[26] Feferman, S., In the Light of Logic, Oxford University Press, 1998.

[27] Fiks, S., A short proof of Chv'atal's watchman theorem, J. Combinatorial Theory, Ser. 24 (19978), 374.

[28] Gale, D., Shapley, L.S., College admissions and the stability of marriage, Amer. Math. Monthly 69(1962), 153-158.

[29] Goldberg, E., Beweisen in Mathematik unterricht der Sekundarstufe I, MU 1992/6, 33-35.

[30] Golvin, F., the list chvomatic index of a bipartite multigraph. J. Combinatorial Theory, Ser. B 63 (1995), 153-158.

[31] Harary, F., Graph Theory, Addison - Wesley, 1969.

[32] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Pólya, G., Inequalities, Cambridge University Press, Combridge, 1952.

[33] Hardy, G., A Mathematician's Apology, Cambridge University Press, 1996.

[34] Hersh, R., What Is Mathematics Really, Oxford University Press, 1997.

[35] Ju.A. Šaškin, Ojlerova Karakteristika, Moskva "Nauka" 1984.

[36] Janssen, J.C.M., The Dinitz problem solved for rectangles, Bulletin Amer. Math. Soc. 29(1993), 243-249.

[37] Krantz, G.S., How to Teach Mathematics Second Edition, American Mathematical Society, 1999.

[38] Kac, M., Ulam, S., Matematika i logika, Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[39] Kotzig, A., Regularly k-parth connected graphs, Congressus Numerantium 40(1983), 137-141.

[40] N.Kristofides. Teorija grafov, "Mir" Moskva 1978.

[41] Lakatoš. I., Dokazi i organizovanja, Školska knjiga Zagreb, 1976.

[42] Marjanović, M., Metodika matematike I & II. Učiteljski fakultet Beograd, 1996.

[43] Nilsson, J.N., Problem - Solving Methods in Srtificial Intelligence, McGraw - Hill, New York, 1971.

[44] Polya, G., Die Heuristik Versuch einer vernünftigen, Zielsetzung, MU 1964/1, S. 5-55.

[45] Polya, G., Schule des Denkens, Bern 1967.

[46] Polya, G., Induction and Anology in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, 1954.

[47] Polya, G., Heuristic Reasoning in the Theory of Numbers, American Mathematical Monthly, 66 (1959), 375-384.

[48] Polya, G., Generalization, Specialization, Analogy, American Mathematical Monthly, V. 55 (1948), 241-245.

[49] Polya, G., Mathematical Discovery, On understanding, learning and teaching problem solving, John Wiley & Sons, New York - London, Vol. I - 1962, Vol. II - 1965 (ruski prevod Nauka 1976).

[50] Polya, G., Kako ću riješiti matematički zadatak, Školska knjiga, Zagreb, 1966.

[51] Pinter, J., Sotirović, V., Petrović, N., Lipovac, D., Opšta metodika nastave matematike, Učiteljski fakultet Sombor, 1996.

[52] Petrović, N., Metodički priručnik iz matematike, Novi Sad, 1992.

[53] Petrović, V., Teorija grafova, Univerzitet u Novom Sadu, Edicija Univerzitetski udžbenik 69, Novi Sad, 1998.

[54] Poper, K.R., Otvoreno društvo i njegovi neprijatelji, 1. Čar Platona, BIGZ, 1993.

[55] Pick, G., Geometrisches zur Zahlenlehne, Sitzungsberishte Lotos (Prag), Natur-med. Verein Für Bohemen 19(1899), 311-319.

[56] Prasolov, V.V., Zadači po planimetrii, "Nauka", Moskva, 1986.

[57] O' Rourke, J., Art Gallery Theorems and Algorithms, Oxford University Press, 19987.

[58] M.Svami, K.Thulasiraman, Grafi, Seti i Algoritmi, Moskva "Mir" 1984.

[59] St.Petersburg, City Mathematical Olympiad (Russia) 1998.

[60] Stojaković, M., Stazama matematike, Novi Sad, 1977.

[61] Steinhöfel, W., Reichold, K., Frenzel, L., Einige Problem bei der Behandlung von Konstruktions auf gaben in klasse, Math. Schule, 1975/2, 79-86.

[62] Sierpinska, A., Understanding in Mathematics, The Falmer Press, London - Washington, 1994.

[63] Singmaster, D., Notes on Rubik's "magic cube", Fifth Edition, London, Polytechnic of the South Bank, 1980.

[64] Steen, A.L., Mathematics tomorrow, Springer Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1981.

[65] Schönhardt, E., Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern in Tetraeder, Math. Annalen 98(1928), 309-312.

[66] Sylvester, J.J., Mathematical Question 11851, The Educational Times 46(1893), 156.

[67] Sesaidić, N., Filozofija Nauke, Nolit, Beograd.

[68] Stevo Todorčević, Kratak osvrt na Teoremu Ramzeja i srodne rezultate, Matemtički institut, Kneza Mihaila 35, 11001 Beograd p.p. 367.

[69] U. Tatt, Teorija grafov, "Mir", Moskva, 1988.

[70] Zech, F., Metodika matematike, osnovni kurs, Teorijska i praktična uputstva za proučavanje i učenje, 9. izdanje, Beltz - Verlag, Wienhreim und Basel, 1999.

[71] Tarski, A., Uvod u matematičku logiku i metodologiju matematike, Rad, Beograd, 1973.

[72] Tymoczko, T., New Directions in the Philosophy of Mathematics, Princeton University Press, Princeton, New Jersy, 1998.

[73] Wittmann, E., Grundfragen des Mathematik - unterrichts, Braunschweig, 1981.

[74] Winter, H., Entdeckendes Lernen Mathematik unterricht, Braunschweig, 1991.

[75] Tasić, V., Mathematics and the Roots of Postmodern Thought, Oxford University Press, 2001.

[76] Tošić R., Matematički problemi "97, Novi Sad, 1997.

[77] Tur'an, P., On an extremal problem in graph theory, Math. Fiz. Lapok 48(1941), 436-452.

[78] Tošić, R., Kombinatorika, Univerzitet u Novom Sadu, Edicija Univerzitetski udžbenik, 88, Novi Sad, 1999.

[79] Šikić, Z., Kako je stvarana novovjekovna matematika, Školska knjiga Zagreb, 1989.

[80] Šikić, Z., Filozofija matematike, Nolit, 1987.

[81] Vizing, V.G. Coloring the vertices of a graph in prescried colours (ruski), Metody Diskret. Analiz. 101(1976), 3-10.

[82] Trerberg, H., On the decomposition of K_n into complete bipartite graphs, J. Graph Theory 6 (1982), 493-494.

[83] Xing, K., Hu, B., On Kotzig's conjecture for graphs with a regular path connectedness, Discrete Math. 135 (1994), 387-393.

[84] Yung, Y., Lin, J., Wang, C., Li, V., On Kotzigs conjecture concerning graphs with unique regular path- connectivity, Discrete Math. 211(2000), 287-298.

[85] Zech, F., Metodika matematike, osnovni kurs, Teorijska i praktična uputstva za proučavanje i učenje, 9. izdanje, Beltz - Verlag, Wienhreim und Basel, 1999.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: (RBR):

Identifikacioni broj: (IBR):

Tip dokumentacije: (TD): Monografska dokumentacija

Tip zapisa: (TZ): Tekstualni štampani materijal

Vrsta rada: (VR): Doktorska disertacija

Autor: (AU): mr Borivoj Subotić

Mentor: (MN): dr Ratko Tošić

Naslov rada: (NR): Grafovske metode u geometriji i geometrijske metode u grafovima

Jezik publikacije: (JP): srpski (latinica)

Jezik izvoda: (JI): srpski, odn. engleski

Zemlja publikovanja: (ZP): SR Jugoslavija

Uže geografsko područje: (UGP): Vojvodina

Godina: (GO): 2002

Izdavač: (IZ): Autorski reprint

Mesto i adresa: (MA): Irig, Fruškogorska 32

Fizički opis rada: (FO): 6/103 + IV/98/0/0/0/0

Naučna oblast: (NO): Matematika

Naučna disciplina: (ND): Metodika matematike

Predmetna odrednica/Ključne reči: (PO): Graf, geometrija, metod, triangulacija, matrica incidencije, susedstva, bipartitni graf, bojenje.

UDK:

Čuva se (ČU): U biblioteci Instituta za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

Važna napomena: (VN):

Izvod: (IZ): U prvoj glavi dat je prikaz osnovnih pojmova koji se koriste u tezi, sa naglaskom na osnovne pojmove teorije grafova.

U drugoj glavi daju se grafovski dokazi nekih geometrijskih problema. Na primer, dajemo dokaz poznate teoreme Silvestra, iz Kombinatorne geometrije, koristeći grafove.

Treće poglavlje sadrži neke geometrijske dokaze u grafovima. Na primer, poznatu Turanovu teoremu, Pikovu teoremu i drugo.

U četvrtom poglavlju dajemo metodičku transformaciju prethodnih problema. Neki od problema razloženi su na delove koji se mogu prezentirati od osnovne škole do poslediplomskih studija.

Peto poglavlje sadrži komentare prethodnog, kao i preporuku UNESCO-a iz 1992. godine o obrazovanju učenika u novom milenijumu.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: (DP): 21. januara 2000.

Datum odbrane: (DO):

Članovi komisije: (KO):

Predsednik: dr Dragoslav Herceg, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Ratko Tošić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor

Član: dr Nenad Petrović, redovni profesor, Učiteljskog fakulteta u Somboru

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: (ANO):

Identification number: (INO):

Document type: (DT): Monographic documentation

Type of record: (TR): Textual printed matter

Contents code: (CC): Ph.D. thesis

Author: (AU): Borivoj Subotić, M.Sc.

Mentor: (MN): Ratko Tošić, Ph.D.

Title: (TI): The graphs methods in geometry and the methods of geometry in graphs

Language of text: (LT): Serbian (latin)

Language of abstract: (LA): Serbian and English

Country of publication: (CP): FR Yugoslavia

Locality of publication: (LP): Vojvodina

Publication year: (PY): 2002.

Publisher: (PU): Author's reprint

Publ. place: (PP): Irig, Fruškogorska 32

Physical description: (PD): 6/103 + IV/98/0/0/0/0

Scientific field: (SF): Mathematics

Scientific discipline: (SD): Methodology of Mathematics

Subject/Key words: (SKW): graph, geometry, method, triangulation, matrix of incidence, bipartite graph, colouving.

UC:

Holding data: (HD):

Note: (N):

Abstract: (AB): Chapter 1 contains a shoot review of the basic notions which are used in the thesis with emphasis on the basic notions of graph theory.

In Chapter 2 we present graph proofs of some geometrical problems. For example, we present some proofs of the well known theorem of Sylvester, from Combinatorial geometry, using graph methods.

In Chapter 3 we present some proofs in graphs which use geometry. For example, famous Turan's theorem, Pick's theorem and some others.

Chapter 4 contains methodology transformations i.e. we apply the results from the previous chapters to the situations in the clossroom.

In Chapter 5 we have some comments of UNESCO, from 1992, on education of children.

Accepted by the Scientific Board on (ASb): January 21th, 2000.

Defended: (DE):

Thesis defend board: (DB):

President: dr Dragoslav Herceg, full professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad

Member: dr Ratko Tošić, full professor, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Novi Sad, advisor

Member: dr Nenad Petrović, full professor, Učiteljski faculty, of Sombor

ISPRAVKE DOKTORSKE DISERTACIJE BORIVOJA SUBOTIĆA

- Strana 11, Definicija 1.1: Data je definicija digrafa, ne grafa. Graf je simetričan digraf.
- Strana 12, Definicija 1.13: Treba da stoji '$S(G)$ je pokrivajuće stablo grafa G.'
- Strana 13, Lema 1.2: U dokazu treba da stoji da, kako je G ravan graf, a R oblast sa bar 4 čvora, mora da postoji v_1v_2 koji nisu spojeni u G.
- Strana 15, dokaz Leme 1.3: 3. red na ovoj strani treba izmeniti u:'...koji uključuje v i sadrži minimalan broj trougaonih oblasti. Svaki par čvorova $v'_i v'_{i+1}$ leži na granici trougaone oblasti u unutrašnjosti C'_v, koja, dakle sadrži treći čvor v'.'
- Strana 15, Lema 1.4: U formulaciji treba da stoji: 'Ako graf G nije prost, tada G...' Slično i u dokazu Leme 1.5 na 16. strani, treba da stoji G umesto G na početku pretposlednjeg pasusa.
- Strana 15, Lema 1.5: Treća rečenica dokaza treba da glasi: '... čvor v grafa G ne leži na granici spoljašnje oblasti.'
- Strana 17, Teorema 1.1: Dokaz treba da počne sa: 'Posmatrajmo sve duži odredjene datim tačkama - to je pravolinijska reprezentacija grafa K_5.'
- Strana 21, Zadatak: U rešenju treba se ograničiti na komponente jake povezanosti grafa. Dakle imamo disjunktnu uniju konačno mnogo Ojlerovih kontura, ali zbir vektora ostaje 0.
- Strana 23, Teorema 3.1: U dokazu u 5. i 6. redovima 23. strane treba da stoje '$\neq$' (umesto '='). Takodje, u 8. i devetom redu iste strane treba da stoji 'crvenu' i 'crveni' umesto 'zelenu' i 'zeleni', redom.
- Strana 24, drugi red, rešenje Zadatka 1: Treba da stoji '...$2k-3$ grupa kvadrata...'.
- Strana 25, Teorema 3.2: Odmah posle formulacije treba ubaciti: 'Posmatramo graf $G = (V, E)$ gde je V dati skup tačaka, a E - skup svih dijametara V (duži maksimalne dužine sa krajevima u V).'

- Strana 30, Teorema 5.3: Treba umetnuti na početak dokaza: 'Neka je $n = (m)^2_3$, Ramzejev broj za 2 boje i 3-hipergrafove (dakle, u 3-hipergrafu sa n čvorova gde su grane obojene u dve boje, postoji monohromatski podgraf sa m čvorova), i neka...'.

- Strana 45, Teorema 9.2: u 5. redu dokaza treba da stoji $\mathbf{L}' \geq n$, a u 6. redu dokaza treba da stoji $\mathbf{L} \geq n + 1$.

- Strana 52, Lema 9.2: U drugom redu tvrdjenja Leme treba da stoji 'četiri' umesto 'tri', a na kraju dokaza treba dodati sledeći pasus: 'Sa druge strane, ako postoji tačka A iz koje izlazi bar četiri plave duži, onda svaki par tačaka koje su povezane sa A plavom duži mora biti povezan crvenom duži. Ali, tada imamo crveni tetraedar. Preostali slučaj, kada iz svake tačke izlazi po tri plave i po pet crvenih duži, je nemoguć, jer zbir po čvorovima broja plavih duži koje su incidentne sa čvorom je neparan (27), a svaka plava duž je u tom zbiru brojana dva puta.'

- Strana 55, Teorema 1.1: U tvrdjenju teoreme treba zameniti k sa $\frac{\lfloor n}{2\rfloor}$.

- Strana 56, Teorema 1.2: Tvrdjenje teoreme treba zameniti sa: 'Broj sečenja grafa je minimalan broj parova grana koje se seku u pravolinijskom predstavljanju tog grafa. Gornja granica broja sečenja je $4\binom{k}{2}\binom{l}{2}$, gde je $\frac{k=\lceil n}{2\rceil}$, a $\frac{l=\lceil m}{2\rceil}$.'

- Strana 60, Teorema 1.4: Prvi pasus dokaza treba izbrisati i zameniti sa:

  '**Dokaz.** Slučaj $p = 2$ je trivijalan, a slučaj $p = 3$ ima efektan dokaz korišćenjem nejednakosti Cauchy - Schwarza. Dakle, neka je G graf bez 3-klike, i neka je $uv \in E$. Kako u G nema trouglova, svaki čvor koji je susedan sa u ne sme biti susedan sa v i obratno. Dakle, $d_u + d_v \leq n$, pa onda
  $$\sum_{uv \in E} (d_u + d_v) \leq n|E|.$$
  U ovoj sumi sa leve strane nejednakosti, stepen d_u je sabran d_u puta, pa je
  $$\sum_{u \in V} d_u^2 \leq n|E|.$$

Sada iskoristimo nejednakost Cauchy - Schwarza, na vektore $\mathbf{d} = \langle d_1, d_2, \ldots, d_n \rangle$ i $\mathbf{1} = \langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle$. Dobijamo

$$2|E| = 2\sum_{u \in V} d_u = \mathbf{d} \cdot \mathbf{1} \leq$$

$$\leq |\mathbf{d}| \cdot |\mathbf{1}| = \sqrt{n \sum_{u \in V} d_u^2}.$$

Dakle,

$$\frac{4|E|^2}{n} \leq \sum_{u \in V} d_u^2 \leq n|E|,$$

iz čega sledi tražena nejednakost.

Radi kompletnosti, prilažemo i dokaz opšteg slučaja indukcijom po n.'

- Strana 66, dokaz Teoreme 2.2: U 10. i 12. redu na ovoj strani treba zameniti $\frac{3}{2p}$ sa $\frac{2p}{3}$.
- Treba dodati sledeće autorove reference:

References

[1] B. Subotić, *Dva uopštenja Ptolomejeve teoreme.* Tangenta **19** (1999/2000) br. 3, 1-8.

[2] B. Subotić, *Komentar jednog zadatka P. Erdoša.* Tangenta **19** (2000/2001) br. 3, 18-19.

[3] S. Crvenković, D. Jojić, B. Subotić, *Dinizov problem.* Kol. Mat., Banja Luka, (u štampi).

[4] R. Tošić, B. Subotić, *Graph theoretical methods in geometry,* (u pripremi)

[5] R. Tošić, B. Subotić, *Geometrical methods in graphs,* (u pripremi)