UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Mr Mirko Budinčević

DOKTORSKA DISERTACIJA

ASIMPTOTSKO PONAŠANJE REŠENJA NEKIH KLASA DIFERENCIJALNIH I DIFERENCNIH JEDNAČINA

Novi Sad, 1985.

S A D R Ž A J

I UVOD

Počeci diferencijalnih jednačina datiraju s kraja sedamnaestog veka izučavanjem nekih problema mehanike kao i nekih geometriskih problema. Naziv je potekao od G. Leibniza (1646-1716) 1676 godine a medju prvima radove su imali G. Leibniz, J. Bernoulli i I. Newton, da bi se u ovoj oblasti ogledali mnogi velikani matematike.

Obične diferencijalne jednačine imaju veliki značaj u primenama, javljaju se moćnim orudjem u rešavanju mnogih problema iz prirode i tehnike, široko se koriste u mehanici, astronomiji, fizici i mnogim problemima hemije i biologije. Najveću primenu nalaze u teoriji kolebanja i teoriji automatskog upravljanja.

Za razliku od samih početaka, kada je težište bilo na rešivosti i kada se uvidelo da je egzaktno rešenje moguće dobiti samo u manjem broju slučajeva, vrlo brzo su se kao glavni problemi pojavili egzistencija, jedinstvenost, asimptotika i razne vrste stabilnosti.

Diferencijalne jednačine sa otklonjenim argumentom pojavljuju se takodje veoma rano, 1771 godine, u radu Condorceta vezanim za rešenje geometriskog problema koji je postavio Euler. Dugo su predstavljale previše tvrd orah za proučavanje a nije se ni u praksi pokazivala neka veća potreba njihovog izučavanja. Poslednjih pedeset godina obnovilo se interesovanje za njih, kako zbog različitih primena, tako i zbog efikasnosti odredjenog matematičkog aparata u njihovom rešavanju.

Problem interpolacije je doveo do velikog interesovanja za konačne razlike još u sedamnaestom veku, ali se prva diferencna jednačina pojavljuje u radu Brooka Taylora (1685-1731) tek 1715, pri rešavanju odredjenog problema atmosferske refrakcije. 1759 J. Lagrange rešava linearnu jednačinu sa promenljivim koeficijentima, da bi sve to uopštio P. S. Laplace u radovima iz 1774 i 1776. Tim problemima su se zatim bavili Condorcet, G. Monge, J. A. C. Charles kao i mnogi drugi. Interes za njihovim proučavanjem pojačan je razvojem numeričkih metoda i diskretne matematike uopšte. Posebno su postale interesantne sa stanovišta analize jer je uočeno da se problem asimptotike i L^p pripadnosti može, u odredjenim slučajevima, izučavati metodama razradjenim pri proučavanju običnih diferencijalnih jednačina.

Ideja da se, pri rešavanju nekih problema vezanih za diferencne jednačine, koriste metode razradjene pri rešavanju odgovarajućih diferencijalnih jednačina potakla je verovanje da će se dobiti analogni rezultati. Prvi radovi su pospešivali takvo uverenje, ali su se ubrzo pojavili primeri gde se za rešenja diferencne jednačine dobijaju fenomeni koji su nepoznati za rešenja odgovarajuće diferencijalne jednačine (videti |20|, |22| i |38|). Ni sam pojam "odgovarajuća" diferencna jednačina nije jednoznačno definisan pa se, u zavisnosti od izbora, mogu dobiti različita ponašanja rešenja (videti |36| i |37|).

Namera ove disertacije je da se neki noviji rezultati vezani za asimptotsko ponašanje rešenja diferencijalne jednačine dokažu, uz odgovarajuće modifikacije, za odgovarajuću diferencnu jednačinu, takodje, uopštavaju se i proširuju neki dobro poznati rezultati vezani za L^p-perturbaciju linearne diferencijalne jednačine da bi se na kraju oni preneli i na diferencne jednačine, u kom slučaju se dobija interesantno objedinjavanje rezultata.

Doktorska disertacija pored uvoda sadrži dve glave. Prva ima naslov "Asimptotska analiza nelinearne diferencne jednačine drugog reda" i podeljena je na sedam paragrafa. Prva dva su uvodna i daju formulaciju problema, neka poznata tvrdjenja koja će se se koristiti u daljem radu, kao i dve leme koje impliciraju uvodjenje pojma minimalnog i maksimalnog rešenja. U trećem paragrafu se dobija karakterizacija neoscilatornih rešenja minimalnog i maksimalnog tipa. Paragraf 4 sadrži neke oscilatorne rezultate u zavisnosti od toga da li je p(n) konstantnog znaka. U paragrafu 5 primenjujemo dobivene rezultate na diskretnu Emden-Fowlerovu diferencnu jednačinu i dobijamo kompletnu informaciju o oscilatornom i neoscilatornom ponašanju te jednačine. Pokazuje se da, pod odredjenim uslovima, ona ima samo neoscilatorna rešenja minimalnog ili maksimalnog tipa. Takodje, dobijaju se i odredjeni stabilizacioni rezultati za linearni slučaj. Šesti paragraf sadrži neke komparacione rezultate Sturmovog tipa. U poslednjem paragrafu ove glave se daju neka uopštenja prethodnih rezultata, diskutuju mogući pravci proširenja i osvetljava pojam "odgovarajuće diferencne jednačine". Navedeni su i primeri kada za diferencijalnu jednačinu i njoj odgovarajuću diferencnu jednačinu ne važe analogne tvrdnje.

U trećoj glavi proučavamo L^p pripadnost rešenja i njihovih izvoda obične diferencijalne jednačine i pridruženih diferencijalnih operatora. Pored uvodnih napomena o značaju ove problematike i o dosadašnjim rezultatima u ovoj oblasti, u drugom paragrafu su data obeležavanja kao i neke pomoćne tvrdnje. U trećem paragrafu se daju uopštenja poznatih rezultata Weyla i Dini-Hukuhare za, u praksi najinteresantniji, slučaj linearne perturbacije, da bi se u sledećim paragrafima sve to prenelo tako na nelinearne perturbacije, tako i na linearne perturbacije sa otklonjenim argumentom. Posle opširne diskusije o značaju ovih rezultata i mogućim poboljšanjima ili daljim pravcima uopštavanja, u poslednjem paragrafu se većina rezultata iz trećeg paragrafa, uz odgovarajuće modifikacije, prenosi i na odgovarajuće diferencne jednačine. U diskusiji se ukazuje na pravce mogućih uopštenja.

Deo rezultata iz ove teze je već publikovan (|34|,|35|) ili primljen u štampu (|31|,|15|).

Na kraju, želio bih da se zahvalim svojim profesorima, akademiku Bogoljubu Stankoviću za niz korisnih saveta koji su doprireli poboljšanju kvaliteta disertacije i profesoru Marić dr Vojislavu za višegodišnji interes i pomoć koju mi je pružao u mom naučnom radu a posebno pri izradi ove doktorske disertacije brojnim korisnim savetima i predlozima.

Takodje se zahvaljujem Kulenović dr Mustafi, sa kojim sam uspešno saradjivao poslednjih godina i čije mi je iskustvo i znanje iz oblasti diferencijalnih i diferencnih jednačina veoma pomoglo pri izboru teme doktorske disertacije i njenoj izradi i akademiku Olgi Hadžić za podršku koju mi je pružala u mom naučnom radu.

II ASIMPTOTSKA ANALIZA NELINEARNE DIFERENCNE JEDNAČINE DRUGOG REDA

1. UVOD

U ovoj glavi ćemo se pozabaviti oscilatornošću i asimptotskim ponašanjem rešenja nelinearne diferencne jednačine drugog reda oblika

(1) $\Delta(r(n)\Delta y(n))+p(n+1)f(y(n+1))=o$, $n=o,1,\dots$,

gde su $\{r(n)\}_o^\infty$ i $\{p(n)\}_o^\infty$ dati realni nizovi i $r(n)>o$ za $n=o,1,\dots$, a Δ diferencni operator definisan sa $\Delta y(n)=y(n+1)-y(n)$. Za funkciju f predpostavljamo da zadovoljava sledeći uslov

(2) f je neopadajuća i $uf(u)>o$ za $u\neq o$.

Poznato je (videti |21|) da se opšti linearni diferencni operator drugog reda može predstaviti kao prvi član jednačine (1).

Pod rešenjem jednačine (1) podrazumevamo realni niz $\{y(n)\}_o^\infty$ koji je zadovoljava. Očigledno, rešenje $\{y(n)\}_o^\infty$ od (1) je jednoznačno odredjeno početnim vrednostima $y(o)$ i $y(1)$ ili , što je ekvivalentno, sa bilo koje dve uzastopne vrednosti $y(k)$ i $y(k+1)$ i može se definisati za sve $n=o,1,\dots$.

Sledeće obeležavanje će se koristiti u nizu.

Realni niz $\{g(n)\}_o^\infty$ ima <u>finalno</u> neku osobinu ako postoji $N\geq o$ tako da $g(n)$ ima tu osobinu za $n=N,N+1,\dots$. Kroz čitavu ovu glavu obeležavaćemo rešenje $\{y(n)\}_o^\infty$ jednačine (1) jednostavno samo sa y i posmatraćemo samo netrivijalna rešenja y . Netrivijalno rešenje y diferencne jednačine (1) ćemo zvati <u>neoscilatornim</u> ako je $y(n)$ finalno stalnog znaka. U suprotnom ćemo y zvati <u>oscilatornim</u> .

Jednačina (1) se zove <u>oscilatornom</u> ako je svako njeno rešenje oscilatorno. U suprotnom ona se zove <u>neoscilatornom</u>.

Detaljna diskusija o različitim problemima kvalitativne teorije diferencnih jednačina, uključujući oscilacije i probleme stabilnosti, može se naći u |19| i |32|. Takodje navodimo radove |21| , |22| i |29| za neka dalja proučavanja problema oscilacija i asimptotskog ponašanja rešenja jednačine (1).

2. POMOĆNE TVRDNJE

U ovom paragrafu ćemo nabrojati neke tvrdnje koje ćemo koristiti u paragrafima koji slede.

Prva od njih je jedna jednostavna teorema fiksne tačke koja potiče od Knästera a može se naći u radovima |25| i |33|.

Teorema FT. Neka je $(A, \leq)$ parcijalno uredjen skup i pretpostavimo da za svaki podskup B , $B \subseteq A$, vredi $\inf B, \sup B \in A$. Pretpostavimo da F preslikava A u A na taj način da za sve x,y iz A , $x \leq y$ povlači da je $Fx \leq Fy$. Tada je $Fx=x$ za neko $x \in A$.

U daljem radu će se koristiti i sledeća jednostavna formula za sumiranje po delovima

$$(3) \qquad \sum_{i=m}^{n-1} u(i)\Delta v(i) = u(n)v(n)-u(m)v(m)-\sum_{i=m}^{n-1} v(i+1)\Delta u(i) \quad .$$

Sledeće tvrdnje daju korisne informacije o ograničenjima neoscilatornih rešenja jednačine (1).

<u>Lema 1</u>. Neka su zadovoljeni uslovi

(C_1) $p(n) \geq 0$ za $n=0,1,\ldots$ i $p(n)$ nije finalno nula , i

$$(C_2) \qquad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{r(i)} < \infty \quad .$$

Tada, svako neoscilatorno rešenje y jednačine (1) zadovoljava finalno ocenu

$$(4) \qquad aq(n) \leq |y(n)| \leq A$$

za neke pozitivne konstante a i A (koje zavise od y) gde je

$$q(n)=\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{r(i)} \quad .$$

Dokaz: Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $y > o$ finalno, što povlači da je $\Delta(r(n)\Delta y(n)) \leq o$ finalno, što daje da je $\Delta y(n)$ finalno konstantnog znaka.

Prvo, pretpostavimo da je $\Delta y(n) \geq o$ finalno, tj. $\Delta y(n) \geq o$ za $n \geq N \geq o$. Tada, očigledno je $y(n) \geq y(N)$ i štaviše za $n \geq N$

$$o \leq r(n)\Delta y(n) \leq C \Longrightarrow y(n) \leq y(N)+C\sum_{i=N}^{n-1} \frac{1}{r(i)} \leq$$

$$\leq y(N)+C\sum_{i=o}^{\infty} \frac{1}{r(i)} = C_1 \quad .$$

Pretpostavimo sada da je $\Delta y(n) < o$ finalno, tj. $\Delta y(n) < o$ za $n \geq N \geq o$. Očigledno, možemo pretpostaviti da je $y(n) > o$ za $n \geq N$. Stoga, dobijamo da je $y(n) \leq y(N)$ za $n \geq N$ i $r(n)\Delta y(n) \leq -C$ za neku konstantu $C > o$ i $n \geq N$. Sada, imamo za $n \geq N$

$$y(k)-y(n) \leq -C\sum_{i=n}^{k-1} \frac{1}{r(i)} \Longrightarrow y(n) \geq y(k)+C\sum_{i=n}^{k-1} \frac{1}{r(i)}$$

koje, kada $\longrightarrow \infty$, povlači da je $y(n) \geq C_1 > o$ ako je $y(\infty) > o$ i $y(n) \geq aq(n)$ ako je $y(\infty)=o$.

<u>Lema 2</u>. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i

$$(C_3) \qquad R(n)=\sum_{i=o}^{n-1} \frac{1}{r(i)} \longrightarrow \infty \quad za \quad n \longrightarrow \infty \ .$$

Tada, svako neoscilatorno rešenje y jednačine (1) zadovoljava finalno sledeću apriornu ocenu

$$(5) \qquad a \leq |y(n)| \leq AR(n) \quad ,$$

za neke pozitivne konstante a i A (koje zavise od y).

Dokaz: Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $y > o$ finalno, što implicira da je $\Delta(r(n)\Delta y(n)) \leq o$ finalno, što znači da je $\Delta y(n)$ finalno konstantnog znaka.

Prvo, pokažimo da $\Delta y(n) < o$ finalno, ne može da važi. Kada bi moglo, imali bismo

$$r(n)\Delta y(n) \leq -M < o \quad \text{finalno},$$

što vodi ka

$$y(n)-y(n_1) \leq -M\sum_{i=n_1}^{n-1} \frac{1}{r(i)} \longrightarrow -\infty \quad , \quad n \longrightarrow \infty \quad ,$$

što je neposredna kontradikcija.

Stoga, zaključujemo da je $\Delta y(n) \geq o$ finalno, što vodi ka $y(n) \geq a > o$ finalno i

$$r(n)\Delta y(n) \leq A_1 \quad \text{finalno}.$$

Prema tome

$$y(n) \leq y(n_1)+A_1\sum_{i=n_1}^{n-1} \frac{1}{r(i)} \leq AR(n) \quad ,$$

što je i trebalo pokazati.

Leme 1. i 2. nas prirodno navode da uvedemo pojam <u>maksimalnog</u> i <u>minimalnog</u> <u>tipa</u> rešenja. U slučaju kada je zadovoljen uslov (4) , rešenje asimptotski ekvivalentno sa $aq(n)$ će se zvati rešenjem minimalnog tipa, dok će se rešenje koje je asimptotski ekvivalentno sa, od nule različitom, konstantom zvati rešenjem maksimalnog tipa. Slično se, ako je zadovoljen uslov (5), rešenje asimptotski ekvivalentno sa, od nule različitom, konstantom naziva rešenjem minimalnog tipa, dok je rešenje koje je asimptotski ekvivalentno sa $AR(n)$ naziva rešenjem maksimalnog tipa.

3. KARAKTERIZACIJA MINIMALNOG I MAKSIMALNOG TIPA REŠENJA

U ovom paragrafu ćemo dati potrebne i dovoljne uslove koji obezbedjuju postojanje minimalnog i maksimalnog tipa rešenja.

<u>Teorema 1.</u> Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_2). Tada diferencna jednačina (1) ima neoscilatorno rešenje maksimalnog tipa ako i samo ako je zadovoljen sledeći uslov

$$(C_4) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q(n)p(n) < \infty \quad .$$

Dokaz: Prvo, pretpostavimo da (C_4) važi. Tada, postoji $N > 0$ takvo da je

$$f(2K)\sum_{n=N}^{\infty} q(n)p(n) \leq K \quad ,$$

gde je $K>0$ proizvoljna konstanta.

Neka je S skup svih nerastućih nizova x sa osobinom

$$K \le x(n) \le 2K \quad \text{za} \quad n \ge N \ .$$

Skup S snabdevamo uobičajenim tačkastim uredjenjem $\le$ kao što sledi:

$$x_1 \le x_2 \implies x_1(n) \le x_2(n) \quad \text{za svako} \quad n \ge N \ .$$

Dalje, posmatrajmo preslikavanje F na S definisano na sledeći način:

$$(Fx)(n)=K+q(n)\sum_{i=N}^{n-1} p(i+1)f(x(i+1))+\sum_{i=n}^{\infty} q(i+1)p(i+1)f(x(i+1)) \ ,$$

$$n=N,N+1,\ldots \ .$$

Sledeća kalkulacija

$$(Fx)(n)=K+q(n)\sum_{i=N}^{n-1} p(i+1)f(x(i+1))+\sum_{i=n}^{\infty} q(i+1)p(i+1)f(x(i+1)) \le$$

$$\le K+\sum_{i=N}^{n-1} q(i+1)p(i+1)f(x(i+1))+\sum_{i=n}^{\infty} q(i+1)p(i+1)f(x(i+1))=$$

$$=K+\sum_{i=N}^{\infty} q(i+1)p(i+1)f(x(i+1)) \le K+f(2K)\sum_{i=N}^{\infty} q(i+1)p(i+1) \le 2K$$

pokazuje da je preslikavanje zatvoreno. Monotoniju proveravamo kao što sledi

$$\Delta((Fx)(n))=q(n+1)\sum_{i=N}^{n} p(i+1)f(x(i+1))-q(n)\sum_{i=N}^{n-1} p(i+1)f(x(i+1))+$$

$$+\sum_{i=n+1}^{\infty} q(i+1)p(i+1)f(x(i+1))-\sum_{i=n}^{\infty} q(i+1)p(i+1)f(x(i+1))=$$

$$=q(n+1)\sum_{i=N}^{n} p(i+1)f(x(i+1)) \pm q(n+1)\sum_{i=N}^{n-1} p(i+1)f(x(i+1)) +$$

$$-q(n)\sum_{i=N}^{n-1} p(i+1)f(x(i+1)) - q(n+1)p(n+1)f(x(n+1)) =$$

$$= -\frac{1}{r(n)}\sum_{i=N}^{n-1} p(i+1)f(x(i+1)) < o \quad .$$

Očigledno, svi uslovi teoreme FT. su zadovoljeni, što povlači da postoji $w \in S$ takvo da je $Fw=w$, tj.

$$w(n)=K+q(n)\sum_{i=N}^{n-1} p(i+1)f(w(i+1)) + \sum_{i=n}^{\infty} q(i+1)p(i+1)f(w(i+1)) \quad , \quad n \geq N \ .$$

Kako je

$$\Delta(r(n)\Delta w(n)) = \Delta\Big(-\sum_{i=N}^{n-1} p(i+1)f(w(i+1))\Big) = -p(n+1)f(w(n+1)) \quad ,$$

sledi da je w traženo neoscilatorno rešenje jednačine (1).

Pretpostavimo sada da (1) ima neoscilatorno rešenje y takvo da je $\lim_{n\to\infty} y(n) = A > o$. Tada, na osnovu leme 1., zaključujemo da je $\Delta y(n)$ finalno konstantnog znaka. Prema tome, postoji $N > o$ takvo da

$$n \geq N \Longrightarrow y(n) \geq \frac{A}{2} \quad i \quad \Delta y(n) \geq o \quad ili \quad \Delta y(n) \leq o \quad .$$

Ako je $\Delta y(n) \geq o$, uvodimo niz $u(n)=q(n)r(n)\Delta y(n)$ i dobijamo

$$\Delta u(n) = q(n+1)\Delta(r(n)\Delta y(n)) - \Delta y(n) = -q(n+1)p(n+1)f(y(n+1)) - \Delta y(n) \ ,$$

koje, sumiranjem od N do k-1 ($k > N$), vodi ka

$$0 \leq u(k) \leq u(N)+y(N)-y(k)-\sum_{n=N}^{k-1} q(n+1)p(n+1)f(y(n+1)) \leq$$

$$\leq C-\sum_{n=N}^{k-1} q(n+1)p(n+1)f(y(n+1)) \quad ,$$

gde je $C=u(n)+\frac{A}{2}$. Stoga, dobijamo

$$f(\tfrac{A}{2})\sum_{n=N}^{\infty} q(n+1)p(n+1) \leq \sum_{n=N}^{\infty} q(n+1)p(n+1)f(y(n+1)) \leq C \quad .$$

U slučaju kada je $\Delta y(n) \leq 0$, ponovo dobijamo relaciju

$$u(k) \leq C-\sum_{n=N}^{k-1} q(n+1)p(n+1)f(y(n+1)) \quad , \quad k > N \quad ,$$

koja povlači

$$u(k) \leq C-f(A)\sum_{n=N}^{k-1} q(n+1)p(n+1) \quad , \quad k > N \quad .$$

Ako (C_4) ne bi bilo zadovoljeno, poslednja relacija bi dala da je $u(k) \leq -1$ za $k \geq M \geq N$, što neposredno povlači

$$\Delta y(k) \leq -\frac{1}{r(k)q(k)} \quad , \quad k \geq M \quad ,$$

pa sumiranjem od M do $n > M$ dobijamo

$$y(n) \leq y(M)-\sum_{k=M}^{n-1} \frac{1}{r(k)q(k)} = y(M)+\sum_{k=M}^{n-1} \frac{\Delta q(k)}{q(k)} \sim$$

$$\sim y(M)+\ln q(n-1) \quad \text{dok} \quad n \to \infty \quad .$$

Prema tome $\lim_{n\to\infty} y(n) = -\infty$, što je kontradikcija.

Teorema 2. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_2). Tada diferencna jednačina (1) ima neoscilatorno rešenje minimalnog tipa ako i samo ako je

$$(C_5) \qquad \sum_{n=o}^{\infty} p(n)|f(\alpha q(n))| < \infty \quad , \text{ za neku konstantu } \alpha \neq o \ .$$

Dokaz: Prvo, pretpostavimo da (C_5) važi. Tada postoji $N \geq o$ tako da

$$\sum_{n=N}^{\infty} p(n)|f(\alpha q(n))| \leq \frac{\alpha}{2} \ .$$

Neka je S skup svih nerastućih nizova takvih da je

$$\frac{\alpha}{2}q(n) \leq x(n) \leq \alpha q(n) \quad , \quad n \geq N \ .$$

S snabdevamo uobičajenim tačkastim uredjenjem $\leq$ kao i u dokazu prethodne teoreme. Dalje, posmatramo preslikavanje G na S definisano na sledeći način:

$$(Gx)(n) = \frac{\alpha}{2}q(n) + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{r(i)} \sum_{j=N}^{i-1} p(j+1)f(x(j+1)) \quad , \quad n=N+1, N+2, \ldots \ .$$

Očigledno, svi uslovi teoreme FT. su zadovoljeni, što povlači da G ima fiksnu tačku z , tj. $Gz=z$, i jasno je da je z traženo rešenje od (1).

Pretpostavimo sada da je y neoscilatorno rešenje minimalnog tipa. Uzimajući u obzir lemu 1. zaključujemo da je y nerastući niz za koji postoji konstanta $N \geq o$ takva da

$n \geq N \Longrightarrow y(n) \geq \alpha q(n)$ i $\Delta y(n) \leq o$ gde je $\alpha > o$ konstanta.

Sada, (1) povlači

$$r(n)\Delta y(n) + \sum_{i=N}^{n-1} p(i+1)f(y(i+1)) = r(N)\Delta y(N) \quad \text{za} \quad n > N \ .$$

Koristeći sledeći identitet

$$(6)\qquad y(k+1)=y(N+1)-r(M)\Delta y(M)\sum_{i=k+1}^{N}\frac{1}{r(i)}+$$

$$+\Big(\sum_{i=k+1}^{N}\frac{1}{r(i)}\Big)\sum_{i=M}^{k-1}p(i+1)f(y(i+1))+$$

$$+\sum_{n=k}^{N}\Big(\sum_{i=n}^{N}\frac{1}{r(i)}\Big)p(n+1)f(y(n+1))\quad,\quad M<k<N\quad,$$

koji odmah povlači

$$y(k+1)\geq\Big(\sum_{i=k+1}^{N}\frac{1}{r(i)}\Big)\sum_{i=M}^{k-1}p(i+1)f(y(i+1))\quad,\quad M<k<N$$

i, shodno tome,

$$(7)\qquad y(k+1)\geq q(k+1)\sum_{i=M}^{k-1}p(i+1)f(y(i+1))\quad .$$

Odavde, dobijamo

$$\sum_{i=M}^{\infty}p(i)f(\alpha q(i))\leq\sum_{i=M}^{\infty}p(i)f(y(i))\leq\lim_{k\to\infty}\frac{y(k)}{q(k)}<\infty\quad ,$$

što kompletira dokaz teoreme.

Teorema 3. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_3). Tada diferencna jednačina (1) ima neoscilatorno rešenje minimalnog tipa ako i samo ako je zadovoljen sledeći uslov

$$(C_6)\qquad \sum_{i=o}^{\infty}R(i)p(i)<\infty\quad .$$

Dokaz: Prvo, pretpostavimo da je uslov (C_6) zadovoljen. Tada, postoji $N\geq o$ tako da je

$$f(2K)\sum_{i=N}^{\infty} R(i)p(i) \le K \quad ,$$

za neku proizvoljnu konstantu $K > 0$.

Neka je S skup svih neopadajućih nizova x sa osobinom da je

$$K \le x(n) \le 2K \quad \text{za} \quad n \ge N \ .$$

Skup S snabdevamo uobičajenim tačkastim uredjenjem kao i u dokazu teoreme 1. Očigledno, za svako $B \subseteq S$, $\inf B, \sup B \in S$. Sada, posmatrajmo preslikavanje F na S definisano kao što sledi:

$$(Fx)(n)=K+R(n)\sum_{i=n}^{\infty} p(i)f(x(i))+\sum_{i=N}^{n-1} R(i)p(i)f(x(i)) \quad , \quad n > N \ .$$

Jasno je da su svi uslovi teoreme FT zadovoljeni što povlači da postoji $z \in S$ takvo da je $Fz=z$ tj.

$$z(n)=K+R(n)\sum_{i=n}^{\infty} p(i)f(z(i))+\sum_{i=N}^{n-1} R(i)p(i)f(z(i)) \quad , \quad n > N \ .$$

Očigledno, niz z je traženo neoscilatorno rešenje od (1).

Sada, pretpostavimo da (1) ima neoscilatorno rešenje y tako da $y(n) \to a > 0$ dok $n \to \infty$, što na osnovu leme 2 povlači da je $\Delta y(n) \ge 0$ finalno. Stoga, postoji $N \ge 0$ tako da je za $n \ge N$

$$y(n) \ge \frac{\alpha}{2} \quad \text{i} \quad y(n) \ge 0 \ .$$

Obeležavajući $u(i)=R(i)r(i)\Delta y(i)$ i koristeći (1) dobijamo

$$\Delta u(i)=\Delta y(i)+R(i+1)\Delta(r(i)\Delta y(i))=\Delta y(i)-R(i+1)p(i+1)f(y(i+1)) \quad ,$$

koje, posle sumiranja od N do n-1, vodi do

$$0 \le u(n)=u(N)+y(n)-y(N)-\sum_{i=N}^{n-1} R(i+1)p(i+1)f(y(i+1)) \le$$

$$\leq u(N)+a-y(N)-f(\tfrac{a}{2})\sum_{i=N}^{n-1} R(i+1)p(i+1) \quad .$$

Odavde

$$f(\tfrac{a}{2})\sum_{i=N}^{n-1} R(i+1)p(i+1) \leq u(N)+a-y(N) \quad ,$$

što kompletira dokaz teoreme.

Teorema 4. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_3). Tada diferencna jednačina (1) ima neoscilatorno rešenje maksimalnog tipa ako i samo ako je zadovoljen uslov

$$(C_7) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} p(n)|f(\alpha R(n))| < \infty \quad ,$$

za neku konstantu $\alpha \neq 0$.

Dokaz: Prvo, pretpostavimo da je uslov (C_7) zadovoljen. Tada, postoji $N \geq 0$ tako da je

$$\sum_{i=N}^{\infty} p(i)f(\alpha R(i)) \leq \frac{\alpha}{2} \quad .$$

Neka je S skup svih neopadajućih nizova x takvih da je

$$\frac{\alpha}{2}R(n) \leq x(n) \leq \alpha R(n) \quad \text{za} \quad n > N \quad .$$

Skup S snabdevamo tačkastim uredjenjem kao i u dokazu teoreme 1.

Dalje, posmatrajmo preslikavanje G na S definisano na sledeći način:

$$(Gx)(n)= \frac{\alpha}{2} R(n)+\sum_{i=N}^{n-1} \frac{1}{r(i)} \sum_{j=i+1}^{\infty} p(j)f(x(j)) \quad , \quad n > N \quad .$$

Očigledno, svi uslovi teoreme FT su zadovoljeni, što povlači da G ima fiksnu tačku z tj. $Gz=z$. Odavde, dobijamo

$$(8) \qquad \Delta z(n)=\frac{\alpha}{2}\frac{1}{r(n)}+\frac{1}{r(n)}\sum_{j=n+1}^{\infty}p(j)f(z(j)) \quad \text{za} \quad n>N \ ,$$

što povlači da je z traženo neoscilatorno rešenje od (1).

Sada, pretpostavimo da (1) ima neoscilatorno rešenje maksimalnog tipa y tako da $y(n)\sim AR(n)$ dok $n\to\infty$, gde je $A>0$ konstanta. Lema 2 povlači da je $\Delta y(n)\geq 0$ finalno. Tako, postoji $N\geq 0$ takvo da je za $n>N$

$$y(n)\geq\frac{A}{2}R(n) \quad \text{i} \quad \Delta y(n)\geq 0 \ .$$

Sada, iz (1) dobijamo sumiranjem od N do n-1

$$(9) \qquad r(N)\Delta y(N)-r(n)\Delta y(n)=\sum_{i=N}^{n-1}p(i+1)f(y(i+1)) \ ,$$

što vodi ka

$$\sum_{i=N}^{\infty}p(i+1)f(\tfrac{A}{2}R(i+1))\leq\sum_{i=N}^{\infty}p(i+1)f(y(i+1))\leq r(N)\Delta y(N) \ ,$$

i dokaz je kompletan.

Primedba 1. Teorema 3 je povezana sa rezultatom Hookera i Patule |22,teorema 4.2.|, koji predstavlja diskretni analogon Atkinsonovog rezultata |19|. Štaviše, teorema 4 je poboljšanje i uopštenje rezultata Hookera i Patule |22,teorema 4.4.|, dok je očigledno da je rešenje, koje ima asimptotski pozitivno ograničene diferencije u smislu definisanom u |4|, rešenje maksimalnog tipa.

Primedba 2. Lako je dokazati da se u dovoljnom delu teoreme 3, uslov (C_6) može zameniti sledećim

$$(C_6') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r(n)} \sum_{i=n}^{\infty} p(i) < \infty \ .$$

4. OSCILACIONE TEOREME

U ovom paragrafu ćemo dati neke oscilacione rezultate jednačine (1) koji su komplementarni rezultatima prethodnog paragrafa.

<u>Teorema 5</u>. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1),(C_2),

$$(C_8) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} q(n)p(n) = \infty$$

i

$$(C_9) \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{q(m)r(m)} \sum_{i=0}^{m} q(i)p(i) = \infty \ .$$

Ako je zadovoljen sledeći uslov

$$(C_{10}) \qquad \int_0^{\pm\delta} \frac{du}{f(u)} < \infty \quad , \quad \delta > 0 \quad ,$$

tada je diferencna jednačina (1) oscilatorna.

Dokaz: Neka je x neoscilatorno rešenje od (1). Tada, x je konstantnog znaka finalno, recimo za $n \geq N$. Neka je

$$w(n) = \frac{r(n)\Delta x(n)}{f(x(n))} q(n) \quad , \quad n \geq N \ .$$

Tada imamo

$$\Delta w(n) = q(n+1)\Delta\left(\frac{r(n)\Delta x(n)}{f(x(n))}\right) + \frac{r(n)\Delta x(n)}{f(x(n))}\Delta q(n) =$$

$$= q(n+1)\left[\frac{\Delta r(n)\Delta x(n)}{f(x(n+1))} - \frac{r(n)\Delta x(n)\Delta f(x(n))}{f(x(n))f(x(n+1))}\right] - \frac{\Delta x(n)}{f(x(n))} =$$

$$= -q(n+1)p(n+1) - q(n+1)\frac{r(n)\Delta x(n)\Delta f(x(n))}{f(x(n))f(x(n+1))} - \frac{\Delta x(n)}{f(x(n))} \quad ,$$

što povlači

$$w(n) \leq -q(n+1)p(n+1) - \frac{\Delta x(n)}{f(x(n))} \quad , \quad n \geq N \quad ,$$

pa posle sumiranja od N do $m-1$, $m > N$, dobijamo

$$(1o) \qquad w(m) \leq w(N) - \sum_{n=N}^{m-1} q(n+1)p(n+1) - \sum_{n=N}^{m-1} \frac{\Delta x(n)}{f(x(n))} \;, \quad m > N \;.$$

Sada, uzimajući u obzir uslove (C_8) i (C_{1o}) zaključujemo da je $\lim_{m\to\infty} w(m) = -\infty$ i prema tome postoji $M > N$ takvo da je $x(n)\Delta x(n) \leq o$ za svako $n \geq M$. Shodno tome $\lim_{n\to\infty} |x(n)| = \delta$, $\delta \geq o$.

Odavde, koristeći uslove (C_8) i (C_{1o}), relacija (1o) povlači da je

$$w(m) \leq -\frac{1}{2} \sum_{n=\bar{N}+1}^{m} q(n)p(n) \quad \text{za} \quad m \geq \bar{N} \;,$$

gde je $\bar{N}$ pogodno izabrano. Stoga, imamo da je

$$\frac{\Delta x(m)}{f(x(m))} \leq -\frac{1}{2} \frac{1}{q(m)r(m)} \sum_{n=\bar{N}+1}^{m} q(n)p(n) \;, \quad m \geq \bar{N} \;,$$

što daje

$$\sum_{m=\bar{N}}^{k} \frac{\Delta x(m)}{f(x(m))} \leq -\frac{1}{2} \sum_{m=\bar{N}}^{k} \frac{1}{q(m)r(m)} \sum_{n=\bar{N}+1}^{m} q(n)p(n) \;, \quad k > \bar{N} \;.$$

Puštajući da $k \to \infty$ i koristeći (C_9) i (C_{1o}) dobijamo kontradikciju, čime je kompletiran dokaz teoreme.

<u>Teorema 6.</u> Neka su zadovoljeni uslovi (C_1),(C_2) i

$$(C_{11}) \qquad \sum_{n=o}^{\infty} q(n)p(n)|f(\alpha q(n))| = \infty \quad \text{za sve} \quad \alpha \neq o \;.$$

Tada je diferencna jednačina (1) oscilatorna.

Dokaz: Neka je y neoscilatorno rešenje jednačine (1). Tada je ono konstantnog znaka finalno i ocena (4) važi, što znači da postoji $N \geq o$ takvo da

$n \geq N \Longrightarrow aq(n) \leq |y(n)| \leq A$ i $\Delta y(n)$ je konstantnog znaka.

Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $y > o$.
Stoga, na osnovu (C_{11}), zaključujemo da je

$$(11) \qquad \sum_{n=o}^{\infty} q(n)p(n)f(y(n)) = \sum_{n=o}^{\infty} q(n)p(n) = \infty \quad ,$$

i sumirajući (1) od N do n-1, nalazimo da je

$$r(n)\Delta y(n) - r(N)\Delta y(N) + \sum_{i=N}^{n-1} p(i+1)f(y(i+1)) = o \quad ,$$

koje, na osnovu relacije (11), povlači da je $\lim_{n\to\infty} r(n)\Delta y(n) = -\infty$.
Tako, $\Delta y(n) \leq o$ finalno. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je $\Delta y(n) \leq o$ za $n \geq N$. Uvodeći niz $u(n)$, kao u dokazu teoreme 1, dobijamo relaciju

$$u(k) + y(k) \leq C - \sum_{n=N}^{k-1} q(n+1)p(n+1)f(y(n+1)) \quad ,$$

gde je $C = u(N) + y(N)$.

Sada je lako pokazati da je $u(k)+y(k) \geq o$ finalno, u kom slučaju poslednja nejednakost povlači traženi zaključak.

Stvarno, množeći (1) sa $\sum_{i=n+1}^{k} \frac{1}{r(i)}$ i sumirajući tada od m-1 do k-1, dobijamo

$$\sum_{n=m-1}^{k-1} \Big(\sum_{i=n+1}^{k} \frac{1}{r(i)} \Big) \Delta(r(n)\Delta y(n)) + \sum_{n=m-1}^{k-1} \Big(\sum_{i=n+1}^{k} \frac{1}{r(i)} \Big) p(n+1)f(y(n+1)) = o$$

koje, posle primene formule za sumiranje po delovima, povlači

$$y(m)+\left(\sum_{i=m}^{k}\frac{1}{r(i)}\right)r(m)\Delta y(m)= \tag{12}$$

$$y(k+1)+\sum_{n=m-1}^{k-1}\left(\sum_{i=n+1}^{k}\frac{1}{r(i)}\right)p(n+1)f(y(n+1)) \geq o \quad .$$

Stoga, dobijamo

$$y(m)+q(m)r(m)\Delta y(m) \geq o \quad ,$$

što kompletira dokaz teoreme.

<u>Posledica 1</u>. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1),(C_2) i (C_{1o}). Tada je diferencna jednačina (1) oscilatorna ako i samo ako je zadovoljen uslov (C_8).

Dokaz: Sledi neposredno iz teoreme 1 i teoreme 5, ako se uzme u obzir činjenica da (C_2) i (C_8) povlače (C_8) i (C_9).

<u>Teorema 7</u>. Neka su zadovoljeni uslovi

$$\sum_{n=o}^{\infty} p(n) = \infty \tag{C_{12}}$$

i

$$\sum_{n=o}^{\infty}\frac{1}{r(n)}\sum_{i=o}^{n}p(i) = \infty \quad . \tag{C_{13}}$$

Ako je zadovoljen uslov (C_{1o}) tada je diferencna jednačina (1) oscilatorna.

Dokaz: Neka je x neoscilatorno rešenje od (1). Tada je x konstantnog znaka finalno, recimo za $n \geq N$. Neka je

$$w(n)=\frac{r(n)\Delta x(n)}{f(x(n))} \quad , \quad n \geq N \quad .$$

Sada, imamo

$$\Delta w(n)=\frac{f(x(n))\Delta(r(n)\Delta x(n))-r(n)\Delta x(n)\Delta f(x(n))}{f(x(n))f(x(n+1))} =$$

$$= \frac{\Delta(r(n)\Delta x(n))}{f(x(n+1))} - \frac{r(n)\Delta x(n)\Delta f(x(n))}{f(x(n))f(x(n+1))}$$

i

$$\Delta w(n)=-p(n+1)- \frac{r(n)\Delta x(n)\Delta f(x(n))}{f(x(n))f(x(n+1))} \quad , \quad n \geq N \quad ,$$

što vodi ka

$$\Delta w(n) \leq -p(n+1) \quad , \quad n \geq N \quad ,$$

i

(13) $$w(m+1)-w(N) \leq -\sum_{n=N}^{m} p(n+1) \quad .$$

Stoga $\lim_{m\to\infty} w(m)=-\infty$ i prema tome postoji $N_1 \geq N$ takvo da je

$$o \geq x(n)\Delta x(n) \quad \text{za svako} \quad n \geq N_1 \quad ,$$

pa je $\lim_{n\to\infty} |x(n)|=d$, $d \geq o$.

Odavde, na osnovu uslova (C_{12}), relacija (13) povlači da je

$$w(m+1) \leq -\frac{1}{2} \sum_{n=N}^{m} p(n+1) \quad \text{za svako} \quad m > N_2 \quad ,$$

gde je $N_2 \geq N_1$ pogodno izabrano. Štaviše, za svako $m > N_2$,

$$\frac{\Delta x(m+1)}{f(x(m+1))} \leq -\frac{1}{2}\,\frac{1}{r(m+1)} \sum_{n=N}^{m} p(n+1) \quad ,$$

koje, posle sumiranja od N_2 do $n > N_2$, daje

$$\sum_{m=N_2}^{n} \frac{\Delta x(m+1)}{f(x(m+1))} \leq -\frac{1}{2} \sum_{m=N_2}^{n} \frac{1}{r(m+1)} \sum_{n=N+1}^{m+1} p(n) \quad .$$

Puštajući da $n \to \infty$, na osnovu (C_{13}), dobijamo

$$\int_{x(N_2)}^{d} \frac{du}{f(u)} = -\infty$$

što je, na osnovu (C_{10}), kontradikcija.

<u>Teorema [illegible]</u>. Neka su zadovoljeni uslovi (C_3)

$$(C_{14}) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} R(n)p(n) = \infty$$

i

$$(C_{15}) \qquad \int_{\pm c}^{\pm\infty} \frac{du}{f(u)} < \infty \quad , \quad c > 0 \quad .$$

Tada, diferencna jednačina (1) je oscilatorna.

Dokaz: Neka je x neoscilatorno rešenje od (1). Tada je x konstantnog znaka finalno, recimo za $n \geq N$. Ako je

$$v(n) = \frac{r(n)\Delta x(n)}{f(x(n))} R(n) \quad , \quad n \geq N \quad ,$$

tada je $\Delta v(n) =$

$$= R(n+1)\frac{f(x(n))\Delta(r(n)\Delta x(n)) - r(n)\Delta x(n)\Delta f(x(n))}{f(x(n))f(x(n+1))} + \frac{r(n)\Delta x(n)}{f(x(n))}\Delta R(n) =$$

$$= R(n+1)\frac{\Delta(r(n)\Delta x(n))}{f(x(n+1))} - R(n+1)\frac{r(n)\Delta x(n)\Delta f(x(n))}{f(x(n))f(x(n+1))} + \frac{r(n)\Delta x(n)}{f(x(n))}\Delta R(n) \leq$$

$$\leq -R(n+1)p(n+1) + \frac{\Delta x(n)}{f(x(n))} \quad , \quad n \geq N \quad .$$

Sumirajući poslednju nejednakost od N do $m > N$, dobijamo

$$v(m+1) \leq v(N) - \sum_{n=N}^{m} R(n+1)p(n+1) + \sum_{n=N}^{m} \frac{\Delta x(n)}{f(x(n))} \quad \text{za} \quad m > N \quad .$$

Uzimajući u obzir uslove (C_{14}) i (C_{15}) zaključujemo da je $\lim_{n\to\infty} |x(n)| = d$, $d \geq 0$ i $x(n)\Delta x(n) < 0$ za svako $n \geq N_1 > N$.

Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $x(n) > 0$, što povlači da je $\Delta x(n) \leq 0$.

Sad, uvodeći niz $u(n) = R(n)r(n)\Delta x(n)$ za $n > N_1$ imamo da je $\Delta u(n) =$

$$=R(n+1)\Delta(r(n)\Delta x(n))+r(n)\Delta x(n)\Delta R(n)=-p(n+1)R(n+1)f(x(n+1))=\Delta x(n)$$

za $n > N_1$, što posle sumiranja od N_1 do $m > N_1$, vodi ka

$$u(m+1)=u(N_1)+x(m+1)-x(N_1)-\sum_{n=N_1}^{m+1} p(n+1)R(n+1)f(x(n+1))=$$

$$=u(N_1)+x(m+1)-x(N_1)-\sum_{n=N_1}^{m} f(x(n+1))\Delta(\sum_{i=N_1}^{n} R(i)p(i)) \quad .$$

Sada, primenom relacije (3), dobijamo

$$u(m+1)=u(N_1)+x(m+1)-x(N_1)+\sum_{n=N_1}^{m}(\sum_{i=N_1}^{n+1} R(i)p(i))\Delta f(x(n+1))-$$

$$-f(x(m+2))\sum_{i=N_1}^{m+1} R(i)p(i) \leq u(N_1) < o \quad \text{za} \quad m > N_1 \quad .$$

Stoga, dobijamo

$$\Delta x(m+1) \leq u(N_1)\frac{1}{r(m+1)R(m+1)} = u(N_1)\frac{\Delta R(m+1)}{R(m+1)} \quad \text{za} \quad m > N_1 \quad ,$$

što povlači

$$x(k+1) \leq x(N_2+1)+u(N_1)\sum_{m=N_2}^{k}\frac{\Delta R(m+1)}{R(m+1)} \quad .$$

Sada, uzimajući u obzir uslov (C_3), dobijamo $\lim_{k\to\infty} x(k) = -\infty$, što je kontradikcija.

<u>Posledica 2</u>. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1),(C_3) i (C_{15}). Tada je diferencna jednačina (1) oscilatorna ako i samo ako važi (C_{14}).

Dokaz: To je neposredna posledica teoreme 3 i teoreme 8.

Primedba 3. Teorema 5 se može posmatrati kao delimični diskretni analogon rezultata Kulenovića i Grammatikopoulosa |23| koji se odnosi na odgovarajuću diferencijalnu jednačinu. Štaviše, teorema 6 je diskretni analogon rezultata Kulenovića |30|.

Primedba 4. Posledica 2 poboljšava i uopštava u različitim pravcima rezultat Hookera i Patule |22, teorema 4.1.|.

Takodje, napomenimo da su teoreme 7 i 8 diskretni analogoni odgovarajućih rezultata za diferencijalne jednačine i nejednačine datih od Kulenovića i Grammatikopoulosa |23|.

Konačno, teoreme 7 i 8 su, u zajedničkim tačkama, opštije od rezultata Szmande |26|.

5. PRIMENA NA EMDEN-FOWLEROVU JEDNAČINU

U ovom paragrafu ćemo posmatrati Emden-Fowlerovu diferencnu jednačinu

$$\Delta(r(n)\Delta y(n))+p(n+1)|y(n+1)|^{\nu}\operatorname{sgn} y(n+1)=0 \quad , \qquad \nu>0 \quad , \quad n=0,1,\ldots \quad , \tag{14}$$

i dobiti neke dalje rezultate o opštem asimptotskom ponašanju njenih oscilatornih i neoscilatornih rešenja.

Teorema 9. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_2). Ako važi (C_4) i ako je $\nu \geq 1$, tada je svako neoscilatorno rešenje diferencne jednačine (14) ili minimalnog ili maksimalnog tipa.

Dokaz: Pošto je $\nu \geq 1$, uslov (C_4) povlači (C_5) i na osnovu teorema 1 i 2 jednačina (14) ima oba tipa rešenja. Sada ćemo dokazati da (14) nema drugih tipova rešenja.

Neka je y proizvoljno neoscilatorno rešenje od (14). Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $y>0$ finalno, što povlači da je $\Delta y(n)$ finalno konstantnog znaka. Ako je $\Delta y(n) \geq 0$ finalno, imamo tvrdnju teoreme. U suprotnom, $\Delta y(n) \leq 0$ finalno i možemo pretpostaviti da je $\lim\limits_{n\to\infty} y(n)=0$. Stoga, postoji $N \geq 0$ tako da

$$n \geq N \Longrightarrow y(n) > 0 \quad \text{i} \quad \Delta y(n) \leq 0 \quad \text{i ocena (4) važi.}$$

Polazeći od relacije (12) i puštajući da $N \longrightarrow \infty$, dobijamo

$$y(m)= \sum_{n=m-1}^{\infty} q(n+1)p(n+1)(y(n+1))^{\nu} -q(m)r(m)\Delta y(m) \quad , \quad m \geq N \quad ,$$

što na osnovu ocene (4) i uslova (C_4) vodi na

$$y(m) \leq y(m) \sum_{n=m}^{\infty} q(n)p(n)(y(n))^{\nu -1}-q(m)r(m)\Delta y(m) \leq$$

$$\leq A^{\nu -1}y(m) \sum_{n=N}^{\infty} q(n)p(n)-q(m)r(m)\Delta y(m) \leq$$

$$\leq \varepsilon y(m)-q(m)r(m)\Delta y(m) \quad , \quad m \geq N \quad ,$$

ako je N dovoljno veliko da bi bilo zadovoljeno

$$A^{\nu -1} \sum_{n=N}^{\infty} q(n)p(n) \leq \varepsilon \quad ,$$

za proizvoljno, unapred dato $\varepsilon > 0$. Stoga, dobijamo

$$-q(m)r(m)\Delta y(m) \geq (1-\varepsilon)y(m) \quad , \quad m \geq N \quad .$$

Sada, uzimajući u obzir ovu relaciju, ocenu (4) i (C_4) dobijamo

$$(1-\varepsilon)\left[r(N)\Delta y(N)-r(n)\Delta y(n)\right]=(1-\varepsilon) \sum_{m=N}^{n-1} q(m+1)(y(m+1))^{\nu} \leq$$

$$\leq -\sum_{m=N}^{n-1} p(m+1)(y(m+1))^{\nu-1} q(m+1) r(m+1) \Delta y(m+1) \leq$$

$$\leq -A^{\nu-1} r(n)\Delta y(n) \sum_{m=N}^{n} q(m)p(m) \leq$$

$$\leq -A^{\nu-1} r(n)\Delta y(n) \sum_{m=N}^{\infty} q(m)p(m) \leq -\varepsilon r(n)\Delta y(n) \quad .$$

Stoga, zaključujemo da je

$$(1-\varepsilon)\left[r(N)\Delta y(N) - r(n)\Delta y(n)\right] \leq -\varepsilon r(n)\Delta y(n) \quad ,$$

što povlači

$$r(n)\Delta y(n) \geq \frac{1-\varepsilon}{1-2\varepsilon} r(N)\Delta y(N) \quad ,$$

i tako je $\lim_{n\to\infty} r(n)\Delta y(n) = \delta \in (-\infty, 0]$, što na osnovu Stolzove teoreme daje

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y(n)}{q(n)} = -\lim_{n\to\infty} r(n)\Delta y(n) = -\delta \quad ,$$

čime je kompletiran dokaz teoreme.

Sličnim rezonovanjem dolazimo do odgovarajućeg rezultata za sublinearnu $(\nu \leq 1)$ diferencnu jednačinu (14).

Teorema 10. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_2). Ako je $\nu \leq 1$ i važi uslov (C_5), tada je svako neoscilatorno rešenje diferencne jednačine (14) ili minimalnog ili maksimalnog tipa.

Sada ćemo posmatrati medjurešenja i za njih dobiti nešto oštriju ocenu nego (4).

Teorema 11. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_2). Ako važi sledeći uslov

$$(C_{17}) \qquad \liminf_{n\to\infty} (q(n))^{\lambda} \sum_{k=0}^{n} p(k) > 0$$

tada, za svako neoscilatorno rešenje diferencne jednačine (14), važi sledeća ocena

$$a(q(n))^{\frac{1-\lambda}{1-\nu}} \leq |y(n)| \leq A \quad \text{finalno}, \quad o < \nu < \lambda \leq 1 \quad .$$

Ako važi dodatni uslov

$$(C_{18}) \qquad \limsup_{n\to\infty} (q(n))^{\lambda} \sum_{k=o}^{n} p(k) = \infty \quad ,$$

tada važi sledeća ocena

$$(15) \qquad aq(n) \leq |y(n)| \leq A(q(n))^{\frac{\lambda-1}{\nu-1}} \quad \text{finalno}, \quad 1 < \lambda \leq \nu \quad ,$$

za neke odgovarajuće konstante a i A (koje zavise od rešenja y).

Dokaz: Pretpostavimo da je y neoscilatorno rešenje od (14). Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $y > o$ finalno. Tada, lako je zaključiti da je $\Delta y(n) \leq o$ finalno.

Stvarno, ako je $\Delta y(n) \geq o$, u prvom slučaju tada imamo traženi zaključak. U drugom slučaju, koristeći (C_{18}), imamo

$$\sum_{k=N}^{n} q(k)p(k) \geq \sum_{k=N}^{n} (q(k))^{\lambda} p(k) \geq (q(n))^{\lambda} \sum_{k=N}^{n} p(k) \to \infty \quad ,$$

što na osnovu teoreme 1 povlači da je $\lim\limits_{n\to\infty} y(n)=o$ i prema tome $\Delta y(n) \leq o$ finalno.

Neka je $M \geq o$ takvo da

$$n \geq M \Longrightarrow y(n) > o \quad i \quad \Delta y(n) \leq o \quad .$$

Polazeći od identiteta (6) dobijamo nejednakost (7) koja povlači

$$y(k+1) \geq q(k+1) \sum_{i=M}^{k-1} p(i+1)(y(i+1))^{\nu} \geq q(k+1)(y(k+1))^{\nu} \sum_{i=M}^{k-1} p(i) \quad ,$$

pa na osnovu uslova (C_{17}) dobijamo

$$1 \geq q(k+1)(y(k+1))^{\nu-1}\sum_{i=M}^{k-1} p(i) =$$

$$= \frac{(y(k+1))^{\nu-1}}{(q(k+1))^{\lambda-1}}\, q(k+1)^{\lambda}\sum_{i=M}^{k-1} p(k) \geq C\frac{(y(k+1))^{\nu-1}}{(q(k+1))^{\lambda-1}} ,$$

za neko $C > o$, što odmah povlači traženu ocenu.

Primedba 6. Pošto uslov (C_{1o}) povlači uslov (C_9), drugi deo teoreme 11 može se shvatiti na sledeći način: ako postoji neoscilatorno rešenje od (14) tada ocena (15) važi.

Posledica 3. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_2). Ako je $\nu > 1$, tada je diferencna jednačina (14) oscilatorna ako i samo ako važi sledeći uslov

$$(C_{1o}) \qquad \sum_{n=o}^{\infty} p(n)(q(n))^{\nu} = \infty .$$

Dokaz: Potreban deo sledi iz teoreme 2 dok se dovoljan deo može dobiti na sličan način kao u dokazu teorema 5 i 6.

Sada ćemo dati rezultat koji se tiče opšteg ponašanja oscilatornih rešenja od (1).

Teorema 12. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1),(C_2) i

$$(C_{2o}) \qquad \sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{r(n)} \sum_{k=n+1}^{\infty} p(k) < \infty .$$

Ako je f slabo sublinearno, tj. $\limsup_{|u|\to\infty} u^{-1}f(u) < \infty$, tada sva oscilatorna rešenja diferencne jednačine (1) teže nuli.

Dokaz: Ako naša tvrdnja nije tačna, tada postoje nizovi prirodnih brojeva $\{t(n)\}_o^\infty$ i $\{\pi(n)\}_o^\infty$ i oscilatorno rešenje x, tako da je $\lim_{n\to\infty} t(n)=\lim_{n\to\infty} \pi(n)= \infty$, $t(n+1)> t(n)+1$ i $\pi(n)\epsilon$

$\in (t(n-1),t(n))$ sa osobinama $x(t(n))x(\pi(n)) \le 0$ i $|x(t(n))| > \delta > 0$. Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $x(\pi(n)) \le 0$ i $x(t(n))=\max\{x(m):\ t(n-1) < m < t(m+1)\}$.

Sada, sumirajući (1) od k do t(n)-1, dobijamo

$$r(t(n))\Delta x(t(n))=r(k)\Delta x(k)-\sum_{i=k}^{t(n)-1} p(i+1)f(x(i+1)) \quad , \quad n=1,2,\ldots .$$

Uzimajući u obzir činjenicu da je $\Delta x(t(n))=x(t(n)+1)-x(t(n)) \le 0$ poslednja relacija povlači

$$r(k)\Delta x(k) \le \sum_{i=k}^{t(n)-1} p(i+1)f(x(i+1)) \quad , \quad n=1,\ldots,t(n-1) \le k < t(n) ,$$

što vodi ka

$$\Delta x(k) \le \frac{1}{r(k)} \sum_{i=k}^{t(n)-1} p(i+1)f(x(i+1)) \quad , \quad n=1,\ldots,t(n-1) \le k < t(n)$$

pa, sumirajući od $\pi(n)$ do t(n)-1, imamo

$$x(t(n)) \le x(\pi(n))+\sum_{k=\pi(n)}^{t(n)-1} \frac{1}{r(k)} \sum_{i=k}^{t(n)-1} p(i+1)f(x(i+1)) \le$$

$$\le f(x(t(n)))\sum_{k=\pi(n)}^{t(n)-1} \frac{1}{r(k)} \sum_{i=k}^{t(n)-1} p(i+1) \le$$

$$\le f(x(t(n)))\sum_{k=\pi(n)}^{\infty} \frac{1}{r(k)} \sum_{i=k+1}^{\infty} p(i) .$$

Stoga, dobijamo

$$1 \le \frac{f(x(t(n)))}{x(t(n))} \sum_{k=\pi(n)}^{\infty} \frac{1}{r(k)} \sum_{i=k+1}^{\infty} p(i) ,$$

što je, na osnovu (C_{20}) i pretpostavki o funkciji f, kontradikcija.

Primedba 7. Očigledno, uslov (C_{20}) je posledica uslova

$$(C_{20}') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r(n)} < \infty \;, \quad \sum_{n=0}^{\infty} p(n) < \infty \;,$$

kao i uslova

$$(C_{20}'') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r(n)} = \infty \;, \quad \sum_{n=0}^{\infty} R(n)p(n) < \infty \;.$$

Pošto (C_{20}') povlači uslove (C_4) i (C_5), možemo dobiti sledeći rezultat.

Posledica 4. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_{20}'). Ako je $\nu \leq 1$, tada je svako neoscilatorno rešenje diferencne jednačine (14) ili minimalnog ili maksimalnog tipa i svako oscilatorno rešenje teži nuli. Ako je $\nu = 1$, to znači da su sva rešenja od (14) stabilna.

Takodje, u svetlu teoreme 12, možemo dobiti sledeći rezultat.

Posledica 5. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_{20}''). Ako je $\nu \leq 1$, tada svako neoscilatorno rešenje diferencne jednačine (14) je ili asimptotski ekvivalentno sa, od nule različitom, konstantom ili sa $AR(n)$ ($A \neq 0$) i svako oscilatorno rešenje teži ka nuli.

Primedba 8. Neki dalji rezultati o stabilnosti i asimptotskoj stabilnosti linearne jednačine (14) ($\nu = 1$) mogu se dobiti uporedjivanjem uslova naših rezultata sa prethodnim rezultatima Hoopera i Patule [29], gde su dati neki rezultati stabilnosti. Napomenimo da se linearna diferencna jednačina drugog reda

$$c(n+1)y(n+2)+c(n)y(n)=b(n+1)y(n+1) \quad , \quad n=o,1,\dots \quad ,$$

gde je $c(n)>o$, $n=o,1,\dots$, može uvek redukovati na jednačinu (14) sa $\nu=1$

$$\Delta(c(n)\Delta x(n))+a(n+1)x(n+1)=o \quad , \quad n=o,1,\dots \quad ,$$

gde je $a(n)=c(n)+c(n-1)-b(n)$, $n=1,2,\dots$ (videti |21| i |29|).

Koristeći tu činjenicu i oscilacione i neoscilacione rezultate iz |21| i |29| možemo dati neke dalje rezultate o stabilnosti i asimptotskoj stabilnosti jednačine (14).

Teorema 13. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_3). Ako je $\nu \geq 1$ i važi uslov (C_7), tada svako neoscilatorno rešenje diferencne jednačine (14) je ili minimalnog ili maksimalnog tipa.

Dokaz: Pošto je $\nu \geq 1$, uslov (C_7) povlači (C_6) pa prema teoremama 3 i 4 jednačina (14) ima oba tipa rešenja. Sad ćemo pokazati da (14) nema drugih tipova rešenja.

Pretpostavimo da je y neograničeno rešenje od (14). Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $y>o$ finalno, tj. $y(n)>o$ za $n \geq N$. Tada, na osnovu leme 2, zaključujemo da je $\Delta y(n) \geq o$ finalno i da važi ocena (5). Možemo pretpostaviti da je $\Delta y(n) \geq o$ za $n \geq N$. Sada, na osnovu Stolzove teoreme, dobijamo da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y(n)}{R(n)} = \lim_{n\to\infty} r(n)\Delta y(n) = L \in [o,\infty) \quad .$$

Množeći (14) sa $\sum\limits_{i=N}^{n} \frac{1}{r(i)}$ i sumirajući, nalazimo da je

$$\sum_{k=N}^{n-1}\Delta(r(k)\Delta y(k))\sum_{i=N}^{k} \frac{1}{r(i)} + \sum_{k=N}^{n-1} p(k+1)(y(k+1))^{\nu} \sum_{i=N}^{k} \frac{1}{r(i)} = o \quad ,$$

i

$$(16)\quad r(n)\Delta y(n)\sum_{k=N}^{n-1}\frac{1}{r(k)}-y(n)+y(N)+\sum_{k=N}^{n-1}p(k+1)(y(k+1))^{\nu}\sum_{i=N}^{k}\frac{1}{r(i)}=0\ ,$$

što, na osnovu $\Delta y(n)\geq 0$ za $n\geq N$, vodi do

$$(17)\quad y(n)\leq y(N)+\sum_{k=N}^{n-1}R(k+1)p(k+1)(y(k+1))^{\nu}+R(n)r(n)\Delta y(n)\ ,\ n>N\ .$$

Stoga, imamo da je

$$y(n)\leq y(N)+y(n)\sum_{k=N}^{n-1}R(k+1)p(k+1)(y(k+1))^{\nu-1}+R(n)r(n)\Delta y(n)\ ,\ n>N$$

i

$$(18)\quad 1\leq\frac{y(N)}{y(n)}+\sum_{k=N}^{n-1}R(k+1)p(k+1)(y(k+1))^{\nu-1}+\frac{R(n)r(n)\Delta y(n)}{y(n)}\ ,\ n>N\ .$$

Sada, koristeći ocenu (5), nalazimo da je

$$\sum_{k=N+1}^{n}R(k)p(k)(y(k))^{\nu-1}\leq\sum_{k=N}^{n}R(k)p(k)(AR(k))^{\nu-1}\leq A^{\nu-1}\sum_{k=N}^{\infty}(R(k))^{\nu}p(k)\ .$$

Ako je N izabrano dovoljno veliko, da bi zadovoljilo, da je

$$A^{\nu-1}\sum_{k=N}^{\infty}(R(k))^{\nu}p(k)\leq\varepsilon\ ,$$

za proizvoljno unapred dato $\varepsilon>0$, tada (18) povlači da je

$$\frac{y(N)}{y(n)}+\frac{R(n)r(n)\Delta y(n)}{y(n)}\geq 1-\varepsilon\ ,$$

što neposredno daje

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{R(n)r(n)\Delta y(n)}{y(n)}\geq 1-\varepsilon_1\ ,$$

i

$$(19)\qquad R(n)r(n)\Delta y(n)\geq(1-\varepsilon_1)y(n)\ \text{ za svako }\ n\geq M\geq N\ .$$

Sada, koristeći relaciju (19), iz (14) dobijamo

$$(1-\varepsilon_1)\left[r(M)\Delta y(M)-r(n)\Delta y(n)\right]=(1-\varepsilon_1)\sum_{k=N}^{n-1}p(k+1)(y(k+1))^{\nu}\leq$$

$$\leq\sum_{k=M+1}^{n}p(k)(y(k))^{\nu-1}r(k)R(k)\Delta y(k)\leq$$

$$\leq A^{\nu-1}\sum_{k=M}^{n-1}p(k)(R(k))^{\nu-1}r(k)R(k)\Delta y(k)\leq$$

$$\leq A^{\nu-1}r(M)\Delta y(M)\sum_{k=M}^{\infty}(R(k))^{\nu}p(k)<\varepsilon_1 r(M)\Delta y(M)\quad ,$$

ako je M dovoljno veliko da bi važilo

$$A^{\nu-1}\sum_{k=M}^{\infty}(R(k))^{\nu}p(k)<\varepsilon_1\quad .$$

Stoga, dobijamo

(2o) $$(1-\varepsilon_1)\left[r(M)\Delta y(M)-r(n)\Delta y(n)\right]<\varepsilon_1 r(M)\Delta y(M)$$

i

$$r(n)\Delta y(n)>\frac{(1-2\varepsilon_1)r(M)\Delta y(M)}{1-\varepsilon_1}\quad \text{finalno},$$

što povlači da je $\lim\limits_{n\to\infty} r(n)\Delta y(n)=L>0$ i prema tome $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y(n)}{R(n)}=L>0$, čime je kompletiran dokaz teoreme.

Odgovarajući rezultat za sublinearni slučaj je sledeći.

<u>Teorema 14</u>. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_3). Ako je $\nu\leq 1$ i važi uslov (C_6), tada svako neoscilatorno rešenje diferencne jednačine (14) je ili minimalnog ili maksimalnog tipa.

Dokaz: Pošto je $\nu\leq 1$, uslov (C_6) povlači (C_7) pa na osnovu teorema 3 i 4, jednačina (14) ima oba tipa rešenja.

Pretpostavimo da je y neograničeno rešenje od (14). Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $y > o$ finalno, što povlači da je $\Delta y(n) \geq o$ finalno, tj. postoji $N \geq o$ takvo da je $y(n) > o$ i $\Delta y(n) \geq o$ za $n \geq N$. Polazeći od relacije (16) dobijamo (17) što, na osnovu $\Delta y(n) \geq o$ i ocene (5), vodi ka

$$y(n) \leq y(N) + \sum_{k=N}^{n-1} R(k+1)p(k+1)(y(k+1))^{\nu} + R(n)r(n)\Delta y(n) \leq$$

$$\leq y(N) + y(n) \sum_{k=N}^{n-1} R(k+1)p(k+1)(y(k+1))^{\nu-1} + R(n)r(n)\Delta y(n) \leq$$

$$\leq y(N) + a^{\nu-1} y(n) \sum_{k=N}^{n} R(k)p(k) + R(n)r(n)\Delta y(n) \quad .$$

Sada, nalazimo da je

$$1 \leq \frac{y(N)}{y(n)} + a^{\nu-1} \sum_{k=N}^{n} R(k)p(k) + \frac{R(n)r(n)\Delta y(n)}{y(n)} \leq$$

$$\leq \frac{y(N)}{y(n)} + a^{\nu-1} \sum_{k=N}^{\infty} R(k)p(k) + \frac{R(n)r(n)\Delta y(n)}{y(n)} \leq$$

$$\leq \frac{y(N)}{y(n)} + \varepsilon + \frac{R(n)r(n)\Delta y(n)}{y(n)} \quad , \text{za} \quad n \geq N \quad ,$$

gde je N dovoljno veliko da bi važilo

$$a^{\nu-1} \sum_{k=N}^{\infty} R(k)p(k) < \varepsilon \quad ,$$

za proizvoljno $\varepsilon > o$. Koristeći iste argumente kao u dokazu prethodne teoreme dobijamo relaciju (19), koja daje

$$(1-\varepsilon_1)\left[r(M)\Delta y(M)-r(n)\Delta y(n)\right]=(1-\varepsilon_1)\sum_{k=M+1}^{n} p(k)(y(k))^{\nu}=$$

$$=(1-\varepsilon_1)\sum_{k=M+1}^{n} y(k)p(k)(y(k))^{\nu-1}\le \sum_{k=M+1}^{n} r(k)\Delta y(k)R(k)p(k)(y(k))^{\nu-1}\le$$

$$\le a^{\nu-1}\sum_{k=M}^{n} R(k)p(k)r(k)\Delta y(k)\le a^{\nu-1}r(M)\Delta y(M)\sum_{k=M}^{\infty} R(k)p(k)\le$$

$$\le \varepsilon_1 r(M)\Delta y(M) \quad ,$$

gde je M izabrano tako da bude zadovoljeno

$$a^{\nu-1}\sum_{k=M}^{\infty} R(k)p(k)\le \varepsilon_1 \quad .$$

Stoga, nalazimo relaciju (20) i dokaz teče istim tokom kao i dokaz prethodne teoreme.

Sledeći rezultat daje oštriju ocenu asimptotskog ponašanja neoscilatornih rešenja jednačine (14).

Teorema 15. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_3). Ako važi sledeći uslov

$$(C_{21}) \qquad \liminf_{n\to\infty} (R(n))^{\lambda}\sum_{k=n}^{\infty} p(k) > 0 \quad , \text{ za neko } 0<\lambda\le\nu$$

tada, za svako neoscilatorno rešenje diferencne jednačine (14), važi sledeća ocena

$$(21) \qquad a\le |y(n)|\le A(R(n))^{\frac{\lambda}{\nu}} \quad , \text{ finalno,}$$

gde su a i A odgovarajuće pozitivne konstante koje zavise od y.

Dokaz: Pretpostavimo da je y neoscilatorno rešenje od (14). Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $y > o$ finalno, što na osnovu leme 2, povlači da je $\Delta y(n) \geq o$ finalno tj. postoji $N \geq o$ takvo da je $y(n) > o$ i $\Delta y(n) \geq o$ za $n \geq N$.

Množeći (14) sa $\sum_{i=N}^{n} \frac{1}{r(i)}$ i sumirajući od N do $k-1$, dobijamo

$$\sum_{n=N}^{k-1} \Delta(r(n)\Delta y(n)) \sum_{i=N}^{n} \frac{1}{r(i)} + \sum_{n=N}^{k-1} p(n+1)(y(n+1))^{\gamma} \sum_{i=N}^{n} \frac{1}{r(i)} = o \quad . \tag{22}$$

Primenjujući relaciju (3) na drugi sabirak poslednje relacije, dobijamo

$$\sum_{n=N}^{k-1} \Delta(r(n)\Delta y(n)) \sum_{i=N}^{n} \frac{1}{r(i)} =$$

$$= r(k)\Delta y(k) \sum_{i=N}^{k} \frac{1}{r(i)} - \sum_{n=N}^{k-1} \left(\Delta \sum_{i=N}^{n} \frac{1}{r(i)}\right) r(n+1)\Delta y(n+1) - r(N)\Delta y(N) \frac{1}{r(N)} =$$

$$= r(k)\Delta y(k) \sum_{i=N}^{k} \frac{1}{r(i)} - \Delta y(N) - \sum_{n=N}^{k-1} \Delta y(n+1) = r(k)\Delta y(k) \sum_{i=N}^{k} \frac{1}{r(i)} - \sum_{n=N}^{k} \Delta y(n) =$$

$$= r(k)\Delta y(k) \sum_{i=N}^{k} \frac{1}{r(i)} - y(k+1) + y(N) \quad .$$

Stoga, nalazimo da je

$$\sum_{n=N}^{k-1} \Delta(r(n)\Delta y(n)) \sum_{i=N}^{n} \frac{1}{r(i)} = r(k)\Delta y(k) \sum_{i=N}^{k} \frac{1}{r(i)} - y(k+1) + y(N) \quad . \tag{23}$$

S druge strane iz (14) imamo

$$(24) \qquad r(M)\Delta y(M)-r(k)\Delta y(k)+\sum_{n=k}^{M-1} p(n+1)(y(n+1))^{\nu}=0 \quad .$$

Koristeći (23) i (24), relacija (22) vodi ka

$$(25) \quad y(k+1)=y(N)+r(M)\Delta y(M)\sum_{i=N}^{k}\frac{1}{r(i)}+\Big(\sum_{i=N}^{k}\frac{1}{r(i)}\Big)\sum_{n=k}^{M-1}p(n+1)(y(n+1))^{\nu}+$$

$$+\sum_{n=N}^{k-1}p(n+1)(y(n+1))^{\nu}\sum_{i=N}^{n}\frac{1}{r(i)} \quad , \text{ finalno,}$$

što neposredno povlači da je

$$y(k+1) \geq \sum_{i=N}^{k}\frac{1}{r(i)}\sum_{n=k}^{M-1}p(n+1)(y(n+1))^{\nu} \geq$$

$$\geq CR(k)\sum_{n=k}^{M-1}p(n+1)(y(n+1))^{\nu} \quad , \text{ finalno,}$$

za neku odgovarajuću konstantu $C \in (0,1)$. Puštajući da $M \to \infty$ dobijamo

$$y(k+1) \geq CR(k)\sum_{n=k}^{\infty}p(n)(y(n))^{\nu} \geq CR(k)(y(k))^{\nu}\sum_{n=k}^{\infty}p(n) \quad , \text{finalno,}$$

što, na osnovu (C_{21}) i ocene (5) vodi ka

$$y(k) \geq C\frac{(y(k))^{\nu}}{(R(k))^{\lambda}}(R(k))^{\lambda+1}\sum_{n=k}^{\infty}p(n) \geq \bar{C}y(k)\frac{(y(k))^{\nu}}{(R(k))^{\lambda}} \quad , \text{ finalno,}$$

za neku pogodno izabranu konstantu $\bar{C}$, čime je kompletiran dokaz teoreme.

Na sličan način, možemo dokazati sledeću tvrdnju.

<u>Teorema 16</u>. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1),(C_3) i (C_{21}).

Tada, za svako neoscilatorno rešenje diferencne jednačine (14), važi sledeća ocena

$$a \leq |y(n)| \leq A(R(n))^{\frac{\lambda-1}{\nu-1}} \quad \text{, finalno, za} \quad 1 < \lambda \leq \nu$$

i

$$B(R(n))^{\frac{1-\lambda}{1-\nu}} \leq |y(n)| \leq bR(n) \quad \text{, finalno, za} \quad o < \nu < \lambda < 1 \quad .$$

Posledica 6. Posmatrajmo diferencnu jednačinu (14) i neka su zadovoljeni uslovi (C_1),(C_3) i (C_7). Ako je

(a) $\nu > 1$, tada svako rešenje, sa ograničenim diferencijama, jednačine (14) je ili minimalnog ili maksimalnog tipa.

(b) $o < \nu < 1$ i $\Delta y(n)$ ne teži nuli dok $n \to \infty$, tada svako rešenje od (14) je ili minimalnog ili maksimalnog tipa.

Dokaz: To je neposredna posledica teorema 13 i 14 kao i |22, teorema 5.1.|.

6. KOMPARACIONI REZULTAT

U ovom paragrafu dobijamo komparacioni rezultat Sturmovog tipa za nelinearnu jednačinu. Posmatrajmo diferencnu jednačinu

(26) $$\Delta(R(n)\Delta y(n))+P(n+1)F(y(n+1))=o \quad , \quad n=o,1,\ldots \quad ,$$

gde je $R(n) > o$ i $P(n) \geq o$ za $n=o,1,\ldots$ a F neopadajuća funkcija takva da je $uF(u) > o$ za $u \neq o$.

Teorema 17. Neka su ispunjeni uslovi

(27) $$\sum_{n=o}^{\infty} \frac{1}{R(n)} = \infty \quad ,$$

(28) $$r(n) \geq R(n) \quad \text{i} \quad P(n) \geq p(n) \quad \text{za} \quad n=o,1,\ldots$$

i

(29) $$(F-f)[o,\infty) \geq o \quad \text{i} \quad (F-f)(-\infty,o] \leq o \quad .$$

Ako je diferencna jednačina (1) oscilatorna, tada je i diferencna jednačina (26) oscilatorna takodje.

Dokaz: Neka je y neoscilatorno rešenje od (26). Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $y > o$ finalno što, na osnovu leme 2, povlači da je $\Delta y(n) \geq o$ finalno tj. postoji $N \geq o$ takvo da je $y(n) > o$ i $\Delta y(n) \geq o$ za $n \geq N$. Odavde, na osnovu (28) i (29), imamo

$$P(n)F(y(n)) \geq p(n)f(y(n)) \quad \text{za} \quad n \geq N \quad ,$$

i

$$\Delta(R(n-1)\Delta y(n-1)) + p(n)f(y(n)) \leq o \quad , \quad n \geq N \quad ,$$

što povlači

$$R(m-1)\Delta y(m-1) \geq \sum_{n=m}^{N-1} p(n)f(y(n)) \quad , \quad m \geq N$$

i na osnovu (28)

$$\Delta y(m-1) \geq \frac{1}{R(m-1)} \sum_{n=m}^{\infty} p(n)f(y(n)) \geq \frac{1}{r(m-1)} \sum_{n=m}^{\infty} p(n)f(y(n)) \quad .$$

Sumirajući poslednju nejednačinu od N do k, nalazimo da je

$$y(k) \geq y(N-1) + \sum_{m=N}^{k} \frac{1}{r(m-1)} \sum_{n=m}^{\infty} p(n)f(y(n)) \quad , \quad k > N \quad .$$

Neka je X skup svih neopadajućih nizova x, takvih da je

$$y(N-1) \leq x(k) \leq y(k) \quad \text{za svako} \quad k \geq N \quad .$$

Skup X snabdevamo uobičajenim tačkastim uredjenjem kao u dokazu teoreme1. Posmatramo preslikavanje H na X definisano sa

$$(Hx)(k) = y(N) + \sum_{m=N}^{k} \frac{1}{r(m-1)} \sum_{n=m}^{\infty} p(n)f(x(n)) \quad , \quad k > N \quad .$$

Uzimajući u obzir sve pretpostavke, lako se proverava da su svi uslovi za primenu teoreme FT ispunjeni, što povlači da H ima fiksnu tačku z tj. $(Hz)(k)=z(k)$ za svako $k > N$. Očigledno z je neoscilatorno rešenje od (1), što je kontradikcija.

7. ZAKLJUČNA RAZMATRANJA

Primedba 9. U slučaju Thomas-Fermijeve diferencne jednačine (1), tj. u slučaju kada je uslov (C_1) zamenjen sledećim

(C_1') $\qquad p(n) \leq 0$ za $n=0,1,\ldots$ i $p(n)$ nije finalno nula,

koristeći slične metode kao u dokazu teoreme 1 i 2, možemo dokazati, uz odgovarajuće uslove, postojanje rešenja asimptotski ekvivalentnih konstanti i $q(n)$. Dokazaćemo sledeće.

Teorema 18. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_2). Tada diferencna jednačina (1) ima neoscilatorno rešenje minimalnog tipa ako i samo ako važi sledeći uslov

$$(C_{22}) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r(n)} \sum_{k=0}^{n} p(k) < \infty .$$

Diferencna jednačina (1) ima rešenje maksimalnog tipa ako i samo ako važi uslov (C_5).

Primedba 10. Lako se vidi da su u slučaju Thomas-Fermijeve diferencne jednačine sva rešenja neoscilatorna (videti |22|). Koristeći slične metode kao u dokazima teorema 13 i 14 možemo dokazati, pod odgovarajućim pretpostavkama, egzistenciju rešenja asimptotski ekvivalentnih konstanti i $R(n)$. Odgovarajući rezultat se može formulisati kao što sledi.

Teorema 19. Neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_3). Tada diferencna jednačina (1) ima neoscilatorno rešenje

(a) minimalnog tipa ako i samo ako je zadovoljen uslov (C_{22}).

(b) maksimalnog tipa ako i samo ako je zadovoljen uslov (C_7).

Na žalost, u slučaju Thomas-Fermijeve diferencne jednačine apriorne ocene (4) ili (5) ne važe.

Primedba 11. Većina dobivenih rezultata se može proširiti na diferencnu nejednačinu

(3o) $y(n)\left[\Delta(r(n)\Delta y(n))+p(n+1)f(y(n+1))\right] \leq 0 \quad , \quad n=0,1,\ldots \quad ,$

gde nizovi r i p i funkcija f zadovoljavaju iste uslove kao i u slučaju diferencne jednačine (1). Preciznije, svi rezultati paragrafa 2 - 4 i 6 mogu se proširiti, pod istim pretpostavkama, na slučaj nejednačine (3o). Štaviše, kao i u slučaju odgovarajućih diferencijalnih jednačina i nejednačina, možemo dokazati sledeću tvrdnju o ekvivalenciji od (1) i (3o) s obzirom na oscilatornost (videti |23| i |27| za detaljnije proučavanje toga predmeta).

Teorema 2o. Posmatrajmo diferencnu jednačinu (1) i odgovarajuću nejednačinu (3o) i neka su zadovoljeni uslovi (C_1) i (C_3). Tada važi sledeći zaključak

$$(1) \text{ je oscilatorna } \Longleftrightarrow (3o) \text{ je oscilatorna} \quad .$$

Dalje, u slučaju linearne diferencne jednačine i nejednačine možemo dobiti oštriji zaključak (videti |24| za analognu tvrdnju u neprekidnom slučaju).

Teorema 21. Posmatrajmo linearnu diferencnu jednačinu (1) i linearnu nejednačinu (3o). Tada,

$$(1) \text{ je oscilatorna } \Longleftrightarrow (3o) \text{ je oscilatorna} \quad .$$

Dokazi poslednje dve teoreme se u ideji ne razlikuju od odgovarajućih dokaza za neprekidni slučaj, koji se mogu naći u radovima |23| i |24|, samo su potrebne odgovarajuće modifikacije zbog diskretne promenljive, pa će biti izostavljeni.

Konačno, primetimo da u slučaju Thomas-Fermijeve diferencne jednačine (1), tj. u slučaju kada je $p(n) \leq o$, $n=o,1,\dots$ odgovarajuća jednačina ima oblik

(31) $y(n)\left[\Delta(r(n)\Delta y(n))+p(n+1)f(y(n+1))\right] \geq o$, $n=o,1,\dots$,

pa se teorema 18, rezultat iz primedbe 10, kao i rezultat iz |22|, koji se odnose na ovu jednačinu, mogu proširiti na ovaj opštiji slučaj.

Primedba 12. Uvodeći diskretni analogon standardne Liouvilleove transformacije jednačine (1) se može redukovati na oblik

$$\Delta^2 x(n)+\overline{p}(m+1)\overline{f}(x(n+1))=o \quad , \quad n=o,1,\dots \quad ,$$

ali mi radije operišemo sa oblikom (1) zbog tehničke jednostavnosti.

Napomenimo da se svi dobijeni rezultati mogu proširiti na sledeća dva oblika diferencnih jednačina drugog reda

$$\Delta(r(n)\Delta y(n))+p(n)f(y(n))=o \quad , \quad n=o,1,\dots$$

i

$$\Delta(r(n)\Delta y(n))+p(n+2)f(y(n+2))=o \quad , \quad n=o,1,\dots \quad ,$$

u kojim slučajevima, uslove koje smo koristili, moramo zameniti odgovarajućima, dok metode ostaju iste.

Takodje, dobiveni rezultati paragrafa 2 - 4 i 6 važe i kada se uslov (2), na funkciji f, zameni sa uslovom da je f sublinearna ($u^{-1}f(u)$ je neopadajuća za $u<o$ i nerastuća za $u>o$) ili superlinearna ($u^{-1}f(u)$ je neopadajuće za $u<o$ i nerastuće za $u>o$).

Na osnovu prethodnih izlaganja dalo bi se pretpostaviti da se za diferencijalnu jednačinu i njoj odgovarajuću diferencnu jednačinu dobijaju analogni rezultati.

Već sam termin "odgovarajuća" diferencna jednačina nije precizan što ćemo ilustrovati sledećim primerom. U biologiji ima veliku primenu nelinearna diferencijalna jednačina Verhulsta

$$x'=x-x^2$$

koja se koristi kao model jednostruke populacije ekološkog sistema sa faktorom rasta x koji se menja usled sprečavajućeg člana $-x^2$, čije rešenje je dobro poznata logistička kriva

$$x(t)=\left[1-(1-x_o^{-1})e^{-t}\right]^{-1} .$$

Uobičajena diskretizacija je

$$\Delta x(n)=(x(n)-x^2(n))\Delta t(n) \quad , \quad n=o,1,\ldots ,$$

ali i ona kao i

$$\Delta x(n)=(x(n+1)-x(n)x(n+1))h \quad , \quad n=o,1,\ldots ,$$

ili

$$x(n+1)-x(n-1)=(x(n)-x^2(n))h \quad , \quad n=o,1,.. ,$$

imaju tzv. "fantomska" rešenja, rešenja sa oscilatornim ponašanjem. Tek jednačina

$$\Delta x(n)=(x(n)-x(n)x(n+1))(e^h-1) \quad , \quad h>o \quad , \quad n=o,1,\ldots$$

sa rešenjem

$$x(n)=\left[1-(1-x^{-1}(o))e^{-nh}\right]^{-1} ,$$

daje diskretne tačke pravog rešenja (i, prema tome, fantomskih rešenja nema). Više o ovom problemu videti u radu B. Pottsa |37|.

Posmatrajmo sada Emden-Fowlerovu diferencijalnu jednačinu

(33) $$y''+g(t)y^{\gamma}=o \quad , \quad \gamma>o \quad , \quad t \geq o \quad ,$$

i njoj odgovarajuću diskretizaciju

(34) $$\Delta^2 y(n)+g(n)y^{\gamma}(n+1)=o \quad , \quad n=o,1,\ldots \ .$$

U radu Utza |3 ,teorema 1.| je dokazano da ako je $g(t)>o$ i neopadajuća, ili nerastuća i ograničena sa donje strane pozitivnom konstantom, da su sva rešenja od (33) ograničena. U diskretnom slučaju analogna tvrdnja ne važi, kao što pokazuje primer dat u radu Hookera i Patule |22|.

Primer 1. Neka je $\gamma=\frac{1}{5}$ a $g(n)=(n+1)^{\frac{-4}{5}}((n+2)^4+2(n+1)^4+n^4)$. Lako se proverava da je $y(n)=(-1)^n(n+1)^4$ rešenje jednačine (34) koje nije ograničeno.

U radu Atkinsona |20| je pokazano da ako je $\gamma>1$, $g(t)\geq o$ i $g(t)$ nije jednako nuli finalno, $g'(t)\leq o$ i $\int^{\infty} x^{\gamma}g(x)dx<\infty$, tada jednačina (33) nema oscilatornih rešenja.

Analogna tvrdnja u diskretnom slučaju ne važi kao što pokazuje sledeći primer iz istog rada |38|.

Primer 2. Neka je $\gamma=5$ a $g(n)=(n+1)^{-10}(4n^2+8n+6)$. Sada je $g(n)$ pozitivno i opadajuće, $\sum^{\infty} n^5 g(n)<\infty$ pa ipak postoji oscilatorno rešenje $y(n)=(-1)^n(n+1)^2$.

III L^p-PERTURBACIJE LINEARNIH DIFERENCIJALNIH I DIFERENCNIH JEDNAČINA

1. UVOD

Pozabavićemo se L^p-ograničenošću ($p \geq 2$) rešenja i njihovih izvoda običnih diferencijalnih jednačina i pridruženih diferencijalnih operatora. U suštini, naći ćemo uslove koji će implicirati da svi j-ti izvodi ($o \leq j \leq n-1$) rešenja perturbirane diferencijalne jednačine pripadaju $L^p[o,\infty)$, za neko $p \geq 2$, pod pretpostavkom da svi j-ti izvodi rešenja neperturbirane jednačine poseduju istu osobinu. Odgovarajuće tvrdnje će se pokazati i za slučaj diferencnih jednačina.

Takvi rezultati su potstaknuti LJapunovljevim istraživanjima stabilnosti sistema diferencijalnih jednačina |2| kao i osnovnim rezultatima Weylovih istraživanja singularnih rubnih problema za (jednodimenzionalnu talasnu) jednačinu drugog reda

(1) $$y''+p(t)y=o \quad , \quad t \geq o \quad ,$$

videti |6|,|8| i njihove reference.

Tipični rezultati te vrste su sledeći:

Teorema A (Dini-Hukuhara |2,str. 36|). Ako su $q_i(t)$, $t \in [o,\infty)$ merljive funkcije i $q_i(t) \in L[o,\infty)$, $i=o,1,\ldots,n-1$, i ako su c_{ik} realni brojevi takvi da su sva rešenja jednačine

(2) $$Ky \equiv y^{(n)}+c_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+c_o y=o$$

ograničena na $[o,\infty)$, tada su i sva rešenja jednačine

(3) $$L_p y \equiv Ly+q_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\ldots+q_o(t)y=o$$

takodje ograničena.

Teorema B (Weyl |6|,|8| i |9|). Posmatrajmo jednačinu (1) zajedno sa perturbiranom linearnom jednačinom

(4) $$y''+[p(t)+q(t)]y=o \quad , \quad t \geq o \quad ,$$

gde su p(t) i q(t) lokalno integrabilne funkcije na $[o,\infty)$. Tada važi sledeća Weylova alternativa: Ako sva rešenja jednačine (1) pripadaju (ne pripadaju) $L^2[o,\infty)$ i ako je $q(t) \in L^\infty[o,\infty)$ tada i sva rešenja jednačine (4) pripadaju (ne pripadaju) $L^2[o,\infty)$.

Uzimajući u obzir činjenicu da je stabilnost (2) i (3) ekvivalentna sa ograničenošću (2) i (3), videti |2|, zaključujemo da je teorema A perturbacioni rezultat vezan za stabilnost.

Weylov alternativni rezultat je, u nekom smislu, uopšten od Patule i Wonga |9| da uključi proizvoljnu $L^p[o,\infty)$ perturbaciju q(t). Takodje, Mironov |7| je uopštio teoremu B na slučaj diferencijalne jednačine sa kašnjenjem, dok je Wyrwinska |12| posmatrala nešto opštije slučajeve perturbacija. Konačno, Wong |11| je dobio odgovarajuće rezultate teoreme B za specijalan slučaj samoadjungovane jednačine 2n-tog reda, dok je Zettl |13|,|14| dao neka uopštenja teoreme B za opštu linearnu diferencijalnu jednačinu n-tog reda. Na žalost, Wongovi rezultati |11| važe za veoma restriktivnu klasu diferencijalnih jednačina 2n-tog reda dok Zettlovi rezultati |13|,|14| važe samo za linearne perturbacije.

Naša je namera da sve ove, gore spomenute rezultate, proširimo na slučaj opšte linearne diferencijalne jednačine n-tog reda

(5) $\quad Dy \equiv y^{(n)}+p_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\dots+p_o(t)y=o \quad , \quad t \geq o \quad ,$

i pridruženih linearnih i nelinearnih perturbacija

(6) $\quad D_L y \equiv Dy+q_{n-1}(t)y^{(n-1)}+\dots+q_o(t)y=o \quad , \quad t \geq o \quad ,$

i

(7) $\quad D_N y \equiv Dy+q_{n-1}(t)(y^{(n-1)})^{r_{n-1}}+\dots+q_o(t)y^{r_o}=o \quad , \quad t \geq o \quad ,$

gde su $r_i \geq o$, $i=o,\dots,n-1$ dok realne funkcije $p_i(t)$ i $q_i(t)$, $i=o,\dots,n-1$, zadovoljavaju uobičajene uslove glatkosti tako da rešenja (7) postoje za svaki izbor početnih uslova i mogu da se produže na čitav interval $[o,\infty)$.

2. OBELEŽAVANJA I POMOĆNE TVRDNJE

Uvedimo neka obeležavanja i nabrojmo neke rezultate koje ćemo koristiti u daljem radu.

Neka je $\mathcal{D}$ ma koji od diferencijalnih operatora K, K_n, D, D_L ili D_N . Obeležimo sa

$$S^k(\mathcal{D})=\{y^{(k)}: \mathcal{D}y=o\} \quad \text{za} \quad k=o,\dots,n-1 .$$

Prema tome, $S(\mathcal{D})$ označava skup svih rešenja jednačina (2),(3),(5),(6) ili (7), $S'(\mathcal{D})$ označava skup prvih izvoda rešenja tih jednačina, itd. Dalje, neka su y_i za $i=1,\dots,n$ rešenja od (5) odredjena početnim uslovima $y_i^{(j)}(o)=\delta_{i,j+1}$ za $j=o,\dots,n-1$, gde je δ Kroneckerov simbol.

Prvi od rezultata koje koristimo je reprezentacija vezana za formulu za varijaciju konstanti.

<u>Lema 1</u> (Goldberg[3,str.14o]). Pretpostavimo da je funkcija

f lokalno L^p, $p \geq 1$, i da je y rešenje jednačine $Dy=f(t)$. Tada

$$y^{(j)}(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(j)}(t)+\int_0^t \frac{\partial^j G(s,t)}{\partial t^j} f(s)ds \quad , \quad \text{za } j=0,\dots,n-1 \; ,$$

gde je

$$G(s,t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & \dots & y_n(s) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & y_2^{(n-2)}(s) & \dots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \end{vmatrix}}{W(s)} \; ,$$

a $W(s)=\exp(-\int_0^s p_{n-1}(u)du)$ je Vronskijan od $y_1,\dots,y_n$.

Sledeći rezultat je tehničke prirode.

Lema 2 (Beckenbach, Bellman |1,str.170|). Ako $u \in L^p$, $u^{(n)} \in L^r$ za $p,r \geq 1$ i $n>1$ tada $u^{(k)} \in L^m$ za $m \geq \max\{p,r\}$ i $k=0,\dots,n-1$.

Sledeći rezultat je uopštenje Gronwall-Bellmanove nejednačine kao i nekih njenih nelinearnih varijanti.

Lema 3 (Cesari |2,str.35| i Willet, Wong |9|). Neka su $u(t)$, $v(t)$ dve nenegativne funkcije, lokalno integrabilne na $[0,\infty)$. Tada sledeća nejednačina

$$u(t) \leq C+\int_0^t v(s)u^p(s)ds \quad , \quad C \geq 0 \quad \text{za} \quad p \in [0,1)$$

$$u(t) \leq C+\int_0^t v(s)u(s)ds \quad , \quad C \geq 0 \quad \text{za} \quad p=1$$

povlači da je

$$u(t) \leq \left[C^{1-p}+(1-p)\int_0^t v(s)ds\right]^{\frac{1}{1-p}} \quad , \quad \text{za} \quad p \in [o,1)$$

i

$$u(t) \leq C\exp(\int_0^t v(s)ds) \quad , \quad \text{za} \quad p=1 \quad ,$$

respektivno.

Navedimo sada nejednakost koju ćemo često koristiti.

Lema 4 (Hardy, Littlewood i Polya |5,str.26|). Neka su $a_i \geq o$ za $i=1,\dots,m$. Tada je

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^p \leq m^{1-p}(\sum_{i=1}^{m} a_i)^p \quad , \quad \text{za} \quad o < p \leq 1 \ ,$$

odnosno

$$m^{p-1}\sum_{i=1}^{m} a_i^p \geq (\sum_{i=1}^{m} a_i)^p \quad \text{za} \quad p \geq 1 \ .$$

3. LINEARNE PERTURBACIJE

Prvi rezultat je opšta verzija Weylove alternativne teoreme.

Teorema 1. Neka je $S(D) \cup S^{n-1}(D) \subseteq L^2[o,\infty)$ i $q_i(t) \in L^\infty[o,\infty)$ za $i=o,\dots,n-1$. Ako je $p_{n-1}^+(t) \in L[o,\infty)$, tada $S(D_L) \cup S^{n-1}(D_L) \subseteq L^2[o,\infty)$, gde je $p_{n-1}^+(t)=\max\{p_{n-1}(t),o\}$.

Dokaz: Na osnovu leme 1 zaključujemo da se sva rešenja od (6) mogu predstaviti kao

$$y(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t)+\sum_{i=1}^{n} y_i(t)\int_0^t(-1)^{n+i}W_i(s)\exp(\int_0^s p_{n-1}(u)du)f(s)ds$$

gde W_i označava Vronskijan od $y_1,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_n$ i

$$f(s) = -\sum_{i=0}^{n-1} q_i(s) y^{(i)}(s) \quad .$$

Uzimajući u obzir činjenicu da je $G(t,t)=0$ dobijamo

$$(8)\quad y^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^{n} y_i^{(k)}(t) \int_0^t (-1)^{n+i} e^{\int_0^s p_{n-1}(u)du} f(s)ds$$

za $k=0,\dots,n-1$.

S druge strane, lema 2 povlači da je $\bigcup_{k=0}^{n} S^k(D) \subseteq \bigcap_{p=1}^{\infty} L^p[0,\infty)$, što daje

$$|W_i(s)| \le L \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |y_j(s)| \le L \sum_{j=1}^{n} |y_j(s)| \quad ,$$

za svako $i=1,\dots,n$ i neko $L>0$. Tako, pomoću (8), dobijamo

$$(9)\quad |y^{(k)}(t)| \le \sum_{i=1}^{n} |y_i^{(k)}(t)| \left[K_1 + L\int_0^t \sum_{j=1}^{n} |y_j(s)| e^{\int_0^s p_{n-1}(u)du} |f(s)|ds\right] ,$$

$$t \ge 0 \ , \ k=0,\dots,n-1 \ .$$

ili

$$(10)\quad |y^{(k)}(t)| \le C\phi_k(t)\left[1+\int_0^t \phi_0(s) e^{\int_0^s p_{n-1}(u)du} |f(s)|ds\right] \ , \quad t \ge 0 \ ,$$

$$k=0,\dots,n-1 \ ,$$

gde smo uveli obeležavanje $\phi_k(t)=\max\{|y_i^{(k)}(t)| : i=1,\dots,n\}$ za $k=0,\dots,n-1$, što zbog $p_{n-1}^{+}(t) \in L[0,\infty)$ neposredno povlači

$$(11)\quad |y^{(k)}(t)| \le C_1 \phi_k(t)\left[1+\int_0^t \phi_0(s)|f(s)|ds\right] \ , \ t \ge 0 \ , \ k=0,\dots,n-1 \ .$$

Odavde, na osnovu Cauchy-Schwarzove nejednačine, sledi

$$|y^{(k)}(t)| \le C_1\phi_k(t)\left[1+\left(\int_o^t\phi_o^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_o^t f^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad , \quad t \ge o \quad ,$$

$$k=o,\dots,n-1 \ ,$$

što u svetlu činjenice da $\phi_o(t) \in L^2[o,\infty)$, povlači da je

$$(12) \quad \underline{|y^{(k)}(t)|} \le C_2\phi_k(t)\left[1+\left(\int_o^t f^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}\right] \ , \ t \ge o \ , \ k=o,\dots,n-1$$

i

$$|y^{(k)}(t)|^2 \le C_3\phi_k^2(t)\left[1+\int_o^t f^2(s)ds\right] \quad , \quad t \ge o \quad , \quad k=o,\dots,n-1 \ .$$

Sada, uzimajući u obzir činjenicu da je $q_i(t) \in L^{\infty}[o,\infty)$, imamo

$$|y^{(k)}(t)|^2 \le C_3\phi_k^2(t)\left[1+\int_o^t\left|\sum_{i=o}^{n-1} q_i(s)y^{(i)}(s)\right|^2 ds\right] \le$$

$$\le C_4\phi_k^2(t)\left[1+\int_o^t \sum_{i=o}^{n-1}|q_i(s)|^2|y^{(i)}(s)|^2 ds\right] \le$$

$$\le C_5\phi_k^2(t)\left[1+\sum_{i=o}^{n-1}\int_o^t|y^{(i)}(s)|^2 ds\right] \quad , \quad t \ge o \quad , \quad k=o,\dots,n-1 \ ,$$

što neposredno povlači

$$(13) \quad \int_o^t \sum_{k=o}^{n-1}|y^{(k)}(s)|^2 ds \le C_5 \int_o^t \sum_{k=o}^{n-1}\phi_k^2(s)\left[1+\int_o^s \sum_{i=o}^{n-1}|y^{(i)}(u)|^2 du\right]ds \ ,$$

$$t \ge o \ .$$

Koristeći činjenicu da $\phi_k(t) \in L^2[o,\infty)$ za svako $k=o,\dots,n-1$, dobijamo

$$\int_0^t \sum_{k=0}^{n-1} |y^{(k)}(s)|^2 ds \le C_6 + C_6 \int_0^t (\sum_{k=0}^{n-1} \phi_k^2(s))(\int_0^s \sum_{i=0}^{n-1} |y^{(i)}(u)|^2 du) ds \quad ,$$

$$t \ge 0 \quad ,$$

što zbog leme 3 daje $y^{(k)}(t) \in L^2[0,\infty)$ za svako $k=0,\ldots,n-1$, čime je kompletiran dokaz teoreme.

Posledica 1. Neka $S(D) \cup S^{n-1}(D) \notin L^2[0,\infty)$ i $q_i(t) \in L^\infty[0,\infty)$ za $i=0,\ldots,n-1$. Ako $p_{n-1}^{+}(t) \in L[0,\infty)$, tada $S(D_L) \cup S^{n-1}(D_L) \notin L^2[0,\infty)$.

Dokaz: Pretpostavimo da je $S(D_L) \cup S^{n-1}(D_L) \subseteq L^2[0,\infty)$, što na osnovu teoreme 1 povlači da je $S(D) \cup S^{n-1}(D) \subseteq L^2[0,\infty)$, jer se Dy može posmatrati kao linearna perturbacija od D_L, tj.

$$Dy = D_L y - \sum_{i=0}^{n-1} q_i(t) y^{(i)}(t) \quad .$$

Primedba 1. U specijalnom slučaju, ako je $p_{n-1}(t) \equiv q_{n-1}(t) \equiv 0$, kada operatori D i D_L uzimaju oblike

(14) $\quad My \equiv y^{(n)} + p_{n-2}(t) y^{(n-2)} + \ldots + p_0(t) y = 0 \quad , \quad t \ge 0 \quad ,$

i

(15) $\quad M_L y \equiv My + q_{n-2}(t) y^{(n-2)} + \ldots + q_0(t) y = 0 \quad , \quad t \ge 0 \quad ,$

dobijamo iz teoreme 1 i posledice 1 strože tvrdjenje, kao što sledi.

Teorema 1'. Ako $q_i(t) \in L^\infty[0,\infty)$ za $i=0,\ldots,n-2$, tada $S(M) \cup S^{n-2}(M) \subseteq L^2 \cap L^\infty[0,\infty)$ ako i samo ako $S(M_L) \cup S^{n-2}(M_L) \subseteq L^2 \cap L^\infty[0,\infty)$.

Primedba 2. Teorema 1', u slučaju kada je $n=2$, daje proširenje klasične Weylove alternativne teoreme, dok u slučaju kada je My realni formalno samoadjungovani, linearni diferencijalni operator reda $n=2m$, dobijamo uopštenje linearnog dela rezultata Wonga |11, teorema 1.| (videti |11| za reprezentaciju opšteg rešenja samoadjungovane, linearne diferencijalne jednačine).

Sledeći rezultat je opšta verzija rezultata Dini, Hukuhara (teorema A).

<u>Teorema 2.</u> Neka je $S(D) \cup S^{n-1}(D) \subseteq L^{\infty}[o,\infty)$ i neka je $q_i(t) \in L[o,\infty)$ za $i=o,\dots,n-1$. Ako je $p_{n-1}^{+}(t) \in L[o,\infty)$, tada je $S(D_L) \cup S^{n-1}(D_L) \subseteq L^{\infty}[o,\infty)$.

Dokaz: Na isti način kao i pri dokazu teoreme 1, dobijamo relaciju (11), koja, na osnovu činjenice da $\Phi_k(t) \in L^{\infty}[o,\infty)$, za $k=o,\dots,n-1$, odmah povlači

$$|y^{(k)}(t)| \leq C_7\Phi_k(t)\left[1+\int_0^t |f(s)|ds\right] \leq$$

$$\leq C_7\Phi_k(t)\left[1+\int_0^t \sum_{i=0}^{n-1}|q_i(s)||y^{(i)}(s)|ds\right] \leq$$

$$\leq C_8\left[1+\int_0^t q(s)\sum_{i=0}^{n-1}|y^{(i)}(s)|ds\right] \quad , \quad t \geq o \quad , \quad k=o,\dots,n-1 \; ,$$

gde smo uveli obeležavanje $q(s)=\max\{|q_i(s)|:\ i=o,\dots,n-1\}$.

Gornja nejednakost daje

$$\sum_{k=0}^{n-1}|y^{(k)}(t)| \leq nC_8+n\int_0^t q(s)\sum_{i=0}^{n-1}|y^{(i)}(s)|ds \quad , \quad t \geq o \quad ,$$

koje, na osnovu leme 3 i činjenice da je $q(t) \in L[o,\infty)$, povlači

$$\sum_{k=o}^{n-1} |y^{(k)}(t)| \leq A \quad , \quad t \geq o \quad ,$$

gde je A pozitivna konstanta.

Posledica 2. Neka je $S(D) \cup S^{n-1}(D) \nsubseteq L^{\infty}[o,\infty)$ i $q_i(t) \in L[o,\infty)$ za $i=o,\ldots,n-1$. Ako je $p_{n-1}^{+}(t) \in L[o,\infty)$, tada $S(D_L) \cup S^{n-1}(D_L) \nsubseteq L^{\infty}[o,\infty)$.

Dokaz: Sledi neposredno na osnovu teoreme 2 na isti način kao i dokaz posledice 1.

Primedba 3. U specijalnom slučaju, kada operišemo sa diferencijalnim operatorima M i M_L , dobijamo opštiju tvrdnju.

Teorema 2'. Ako $q_i(t) \in L[o,\infty)$ za $i=o,\ldots,n-2$, tada $S(M) \cup S^{n-2}(M) \subseteq L^{\infty}[o,\infty)$ ako i samo ako $S(M_L) \cup S^{n-2}(M_L) \subseteq L^{\infty}[o,\infty)$.

Teorema 2' je uopštenje teoreme A što se tiče operatora M. Takodje naglasimo da se teorema A može dokazati istim modelom dokaza koji je korišćen za dokaz teoreme 2.

Sledeći rezultat je opšta verzija perturbacionog rezultata poteklog od Patule i Wonga |9| i uopštenog od Wonga |11|.

Teorema 3. Neka je $S(D) \cup S^{n-1}(D) \subseteq L^2 \cap L^{\infty}[o,\infty)$ i $q_i(t) \in L^p[o,\infty)$ za $i=o,\ldots,n-1$ i neko $p \geq 1$. Ako je $p_{n-1}^{+}(t) \in L[o,\infty)$, tada je $S(D_L) \cup S^{n-1}(D_L) \subseteq L^2 \cap L^{\infty}[o,\infty)$.

Dokaz: Na isti način kao i u dokazu teoreme 1, dolazimo do relacije (11). Dalje, lema 2 povlači da $\phi_k(t) \in L^p[o,\infty)$ za svako $k=o,\ldots,n-1$ i svako $p \geq 2$.

Prvo, pretpostavimo da je $1 \leq p \leq 2$.

Sada, iz (11), dobijamo relaciju

$$|y^{(k)}(t)| \le C_1\Phi_k(t)\Big[1+\int_0^t \Phi_0(s)\sum_{i=0}^{n-1}|q_i(s)||y^{(i)}(s)|ds\Big] \quad ,$$

$$t \ge 0 \quad , \quad k=0,\dots,n-1 \quad ,$$

koja povlači

$$\sum_{k=0}^{n-1}|y^{(k)}(t)| \le n\bar{C}_1\Big[1+\int_0^t \Phi_0(s)q(s)\sum_{i=0}^{n-1}|y^{(i)}(s)\Big]ds \quad , \quad t \ge 0 \quad .$$

Primenjujući lemu 3 i koristeći činjenicu da je $\Phi_0(t)q(t)\in$ $\in L[0,\infty)$, dobijamo da je $y^{(k)}(t)\in L^\infty[0,\infty)$ za svako $k=0,\dots,n-1$, tj. $S(D_L)\cup S^{n-1}(D_L)\subseteq L^\infty[0,\infty)$.

Imajući u vidu ovu činjenicu i relaciju (11), zaključujemo

$$|y^{(k)}(t)| \le C_1\Phi_k(t)\Big[1+\int_0^t \Phi_0(s)\sum_{i=0}^{n-1}|q_i(s)||y^{(i)}(s)|ds\Big] \le$$

$$\le C_9\Phi_k(t)\Big[1+\int_0^t \Phi_0(s)q(s)ds\Big] \le C_{10}\Phi_k(t) \quad , \quad t \ge 0 \; , \; k=0,\dots,n-1 \; ,$$

što daje $y^{(k)}(t)\in L^2[0,\infty)$, $k=0,\dots,n-1$, tj. $S(D_L)\cup S^{n-1}(D_L)\subseteq$ $\subseteq L^2[0,\infty)$.

Sada, pretpostavimo da je $p > 2$.

Definišimo $p' > 2$ tako da zadovoljava $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{2}$. Tada, $\Phi_k(t)\in L^{p'}[0,\infty)$ za $k=0,\dots,n-1$, što povlači da $q(t)\Phi_k(t)\in$ $\in L^2[0,\infty)$ za $k=0,\dots,n-1$. Odavde, (11) povlači

$$|y^{(k)}(t)| \le C_1\Phi_k(t)\Big[1+\int_0^t \Phi_0(s)|f(s)|ds\Big] \le$$

$$\le C_1\Phi_k(t)\Big[1+\int_0^t \Phi_0(s)q(s)\sum_{i=0}^{n-1}|y^{(i)}(s)|ds\Big] \quad , \quad t \ge 0 \; , \; k=0,\dots,n-1 \; ,$$

koje, na osnovu Cauchy-Schwarzove nejednačine, daje

$$(16)\qquad |y^{(k)}(t)|^2 \leq C_{11}^2\Phi_k^2(t)\Big[1+\Big(\int_0^t \Phi_0(s)q(s)\sum_{i=0}^{n-1}|y^{(i)}(s)|ds\Big)^2\Big] \leq$$

$$\leq nC_{11}^2\Phi_k^2(t)\Big[1+\int_0^t \Phi_0^2(s)q^2(s)ds\int_0^t \sum_{i=0}^{n-1}|y^{(i)}(s)|^2ds\Big] \leq$$

$$\leq C_{12}\Phi_k^2(t)\Big[1+\int_0^t \sum_{i=0}^{n-1}|y^{(i)}(s)|^2ds\Big] \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad k=0,\ldots,n-1 \quad .$$

Prema tome

$$\int_0^t \sum_{k=0}^{n-1}|y^{(k)}(s)|^2ds \leq C_{12}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^t \Phi_k^2(s)ds\Big[1+\int_0^t \sum_{i=0}^{n-1}|y^{(i)}(s)|^2ds\Big] \leq$$

$$\leq C_{13}+C_{13}\int_0^t \sum_{i=0}^{n-1}|y^{(i)}(s)|^2ds \quad , \quad t \geq 0 \quad ,$$

pa primenom leme 3 sledi da $S(D_L)\cup S^{n-1}(D_L)\subseteq L^2[0,\infty)$. Koristeći tu činjenicu, zaključujemo na osnovu relacije (17) da je

$$|y^{(k)}(t)| \leq C_{14}\Phi_k(t) \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad k=0,\ldots,n-1 \quad ,$$

čime je kompletiran dokaz teoreme.

Delimično obrnut gornjem je sledeći rezultat.

Posledica 3. Neka je $S(D)\cup S^{n-1}(D)\not\subseteq L^2[0,\infty)$ i $S(D)\cup S^{n-1}(D)\subseteq L^\infty[0,\infty)$ i $q_i(t)\in L^p[0,\infty)$ za $i=0,\ldots,n-1$ i neko $p \geq 1$. Ako je $p_{n-1}^+(t)\in L[0,\infty)$, tada $S(D_L)\cup S^{n-1}(D_L)\not\subseteq L^2[0,\infty)$.

Dokaz: Ne umanjujući opštost, možemo pretpostaviti da je $p=1$, jer se svako $q_i(t)\in L^p[0,\infty)$ može pretstaviti kao $q_i(t)=q_i^1(t)+q_i^2(t)$, $i=0,\ldots,n-1$, gde $q_i^1(t)\in L[0,\infty)$ i

$q_i^2(t) \in L^\infty[o,\infty)$ za svako $i=o,\dots,n-1$. Stvarno, definišimo za svako $i=o,\dots,n-1$

$$q_i^1(t)=\begin{cases} q_i(t) & \text{za } |q_i(t)|>1 \\ o & \text{za } |q_i(t)| \le 1 \end{cases} \quad \text{i} \quad q_i^2(t)=\begin{cases} o & \text{za } |q_i(t)|>1 \\ q_i(t) & \text{za } |q_i(t)| \le 1 \,. \end{cases}$$

Sada, u svetlu posledice 1, zaključujemo da možemo zadržati našu pažnju na slučaju $p=1$.

Pretpostavimo da naša tvrdnja nije tačna, tj. $S(D_L) \cup S^{n-1}(D_L) \subseteq L^2[o,\infty)$. Polazeći od relacije (11) i koristeći činjenicu da $\phi_k(t) \in L^\infty[o,\infty)$ dobijamo nejednačinu

$$|y^{(k)}(t)| \le C_{14}\Big[1+\int_o^t \sum_{i=o}^{n-1} |q_i(s)|\,|y^{(i)}(s)|ds\Big] \le$$

$$\le C_{14}\Big[1+\int_o^t q(s)\sum_{i=o}^{n-1}|y^{(i)}(s)|ds\Big] \quad , \quad t \ge o \quad , \quad k=o,\dots,n-1 \quad ,$$

i

$$\sum_{k=o}^{n-1}|y^{(k)}(t)| \le nC_{14}\Big[1+\int_o^t q(s)\sum_{i=o}^{n-1}|y^{(i)}(s)|ds\Big] \quad , \quad t \ge o \quad .$$

Primena leme 3 i činjenice da $q(t) \in L[o,\infty)$, neposredno povlači da $y^{(k)}(t) \in L^\infty[o,\infty)$ za svako $k=o,\dots,n-1$, tj. $S(D_L) \cup S^{n-1}(D_L) \subseteq L^\infty[o,\infty)$. Stoga, pomoću teoreme 3 dobijamo da $S(D) \cup S^{n-1}(D) \subseteq L^2 \cap L^\infty[o,\infty)$, što daje kontradikciju.

Primedba 4. Lako se vidi da teorema 3 i posledica 3 mogu biti dokazane i pod slabijim pretpostavkama o funkcijama $q_i(t)$:

$$q_i(t) \in L^{s_i}[o,\infty) \quad , \quad s_i \ge 1 \quad \text{za svako } i=o,\dots,n-1 \quad ,$$

ali bi se tada dosta izgubilo na jednostavnosti dokaza.

U specijalnom slučaju, za diferencijalne operatore M i M_L, dobijamo jaču tvrdnju kao što sledi.

Teorema 3'. Ako $q_i(t) \in L^{s_i}[o,\infty)$, $s_i \geq 1$ za svako $i=o,\ldots,n-2$ i $S(M) \cup S^{n-2}(M) \subseteq L^\infty[o,\infty)$, tada je $S(M) \cup S^{n-2}(M) \subseteq L^2[o,\infty)$ ako i samo ako $S(M_L) \cup S^{n-2}(M_L) \subseteq L^2[o,\infty)$.

U specijalnom slučaju, kada je $n=2$, dobijamo poboljšanje rezultata Patule i Wonga |9, teorema 5.1. i 5.4.|, dok u slučaju kada je My realan formalno samoadjungovan, diferencijalni operator reda $n=2m$ dobijamo poboljšanje i uopštenje rezultata Wonga |11, teorema 2.| u linearnom slučaju.

U mogućnosti smo da damo poboljšanje teoreme 3 kao što sledi.

Teorema 4. Neka je $S(D) \cup S^{n-1}(D) \subseteq L^p \cap L^\infty[o,\infty)$ za $1 \leq p \leq \infty$ i neka su $q_i(t) \in L^k[o,\infty)$ za $k \geq 1$ i $p \leq \frac{2k}{k-1}$. Ako je $p^+_{n-1}(t) \in L[o,\infty)$ tada je $S(D_L) \cup S^{n-1}(D_L) \subseteq L^p \cap L^\infty[o,\infty)$.

Dokaz: Sledeći istu liniju dokaza kao i u teoremi 1 dobijamo relaciju (11) na osnovu koje se dobija

$$(17) \qquad |y^{(k)}(t)| \leq C_1 \phi_k(t) \left[1 + \int_o^t \phi_o(s) q(s) \sum_{i=o}^{n-1} |y^{(i)}(s)| ds\right], \quad t \geq o, \quad k=o,\ldots,n-1.$$

Stavimo $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$. Razlikovaćemo sledeće slučajeve:

a) $1 \leq k \leq p'$ $(\Longrightarrow k' \geq p)$

Na osnovu relacije (17) a zbog $S(D) \cup S^{n-1}(D) \subseteq L^\infty$ sledi da je

$$\sum_{k=o}^{n-1} |y^{(k)}(t)| \leq C_{15}\left[1 + \int_o^t \phi_o(s) q(s) \sum_{i=o}^{n-1} |y^{(i)}(s)| ds\right], \quad t \geq o.$$

Kako $\Phi_o(t) \in L^{p} \cap L^{\infty}[o,\infty)$ povlači da je $\Phi_o(t) \in L^{k'}$ to je, zbog $q(t) \in L^{k}$, $\Phi_o(t)q(t) \in L[o,\infty)$. Sada, na osnovu leme [3], sledi da

$$\sum_{k=o}^{n-1} |y^{(k)}(t)| \in L^{\infty}[o,\infty) \quad , \quad t \geq o \quad .$$

Koristeći ponovo relaciju (17) dobijamo

$$|y^{(k)}(t)| \leq C_1\Phi_k(t)\left[1+C_{16}\int_o^t \Phi_o(s)q(s)ds\right] \leq C_{17}\Phi_k(t) \quad ,$$

$$t \geq o \quad , \quad k=o,\dots,n-1 \quad ,$$

što povlači da je $y^{(k)}(t) \in L^{p}[o,\infty)$, $k=o,\dots,n-1$, što je i trebalo dokazati.

b) $1 \leq p \leq 2 \leq p' < k$ $(\Longrightarrow 2 \geq p > k')$

Definišimo skupove A_t i B_t na sledeći način: $B_t=[o,t]\setminus A_t$, $A_t=\{s \in [o,t] : q(s) \leq 1\}$. Tada se, primenom Hölderove nejednačine, dobija

$$\text{(18)} \qquad \int_o^t \Phi_o(s)q(s)\sum_{i=o}^{n-1}|y^{(i)}(s)|ds = \int_{A_t} + \int_{B_t} \leq$$

$$\leq \left(\int_{A_t}\left(\sum_{i=o}^{n-1}|y^{(i)}(s)|\right)^{p}ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{A_t}(\Phi_o(s)q(s))^{p'}ds\right)^{\frac{1}{p'}} + \int_{B_t} \leq$$

$$\leq C_{18}\left(\int_o^t\sum_{i=o}^{n-1}|y^{(i)}(s)|^{p}ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_o^t\Phi_o^{p'}(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}} +$$

$$+C_{18}\left(\int_o^t\sum_{i=o}^{n-1}|y^{(i)}(s)|^{p}ds\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_o^t q(s)ds\right)^{\frac{1}{p'}} \leq C_{19}\left(\int_o^t\sum_{i=o}^{n-1}|y^{(i)}(s)|^{p}ds\right)^{\frac{1}{p}} .$$

Uvrštavanjem gornje nejednakosti u relaciju (17) dobijamo

$$(19)\qquad |y^{(k)}(t)| \le C_1\phi_k(t)\Big[1+C_{19}\big(\int_o^t \sum_{i=o}^{n-1}|y^{(i)}(s)|^p ds\big)^{\frac{1}{p}}\Big] \ ,$$

$$t \ge o \ , \quad k=o,\ldots,n-1 \ ,$$

što, posle primene leme 4, povlači

$$\sum_{k=o}^{n-1}|y^{(k)}(t)|^p \le C_{2o}\sum_{k=o}^{n-1}\phi_k^p(t)\Big[1+C_{19}\int_o^t\sum_{i=o}^{n-1}|y^{(i)}(s)|^p ds\Big] \ , \ t \ge o \ .$$

Kako je $\phi_k^p(t) \in L[o,\infty)$ za $k=o,\ldots,n-1$, to se integracijom poslednje nejednakosti od o do t i primenom Bellmanove leme, dobija da je $S(D_L) \cup S^{n-1}(D_L) \subseteq L^p[o,\infty)$ pa na osnovu relacije (19) sledi da je $S(D_L) \cup S^{n-1}(D_L) \subseteq L^\infty[o,\infty)$.

c) $1 < p' < 2 < p$, $p' < k \le \frac{p}{p-2}$

Kako je

$$\int_{A_t}(\phi_o(s)q(s))^{p'}ds \le \big(\int_{A_t}\phi_o^p(s)ds\big)^{\frac{1}{p}}\big(\int_{A_t}(q(s))^{\frac{pp'}{p-p'}}ds\big)^{\frac{p-p'}{pp'}} \le$$

$$\le \big(\int_{A_t}\phi_o^p(s)ds\big)^{\frac{1}{p}}\big(\int_{A_t}q^k(s)ds\big)^{\frac{p-p'}{pp'}} \le C_{21} \ , \quad t \ge o \ ,$$

(jer je $k \le \frac{pp'}{p-p'} = \frac{p}{p-2}$) pa se ponovo dobija relacija (18) i dokaz teče poznatim tokom.

Kako je sa uslovima a), b) i c) prekrivena čitava oblast $p,k \ge 1$, $p \le \frac{2k}{k-1}$, teorema je dokazana.

Za slučaj n=2 ova teorema je proširenje rezultata Butlera i Raoa |17,teorema 4.1.|, koji su u istom radu pokazali da je to i najviše što može da se uradi na teoremi B, u smislu, da za svaki par (p, k), $k > 1$, $p \geq \frac{2k}{k-1}$ postoji jednačina oblika (1) čija su sva rešenja u $L^p \cap L^\infty[o,\infty)$ i funkcija $q(t) \in L^1[o,\infty)$ tako da jednačina (4) ima rešenje koje nije u $L^p[o,\infty)$.

Primedba 5. Uslov $p_{n-1}^+(t) \in L[o,\infty)$ u teoremama 1 - 3 i posledicama 1 - 3 može da se zameni sa sledećima:

$$q_i(t)\exp\left(\int_o^t p_{n-1}^+(s)ds\right) \in L^\infty[o,\infty) \quad \text{za} \quad i=o,\ldots,n-1$$

u teoremi 1 i posledici 1,

$$q_i(t)\exp\left(\int_o^t p_{n-1}^+(s)ds\right) \in L[o,\infty) \quad \text{za} \quad i=o,\ldots,n-1$$

u teoremi 2 i posledici 2,

$$q_i(t)\exp\left(\int_o^t p_{n-1}^+(s)ds\right) \in L^p[o,\infty) \quad , \; p \geq 1 \; , \; \text{za} \; i=o,\ldots,n-1$$

u teoremi 3 i posledici 3.

4. PERTURBACIJE SA RETARDIRANIM ARGUMENTIMA

Sada ćemo dokazati neke tvrdnje, analogne onima koje su dobivene u prethodnim paragrafima, za slučaj kada perturbirana jednačina sadrži neko kašnjenje.

Posmatrajmo jednačinu (5) zajedno sa perturbiranom retardiranog tipa

$$(2o) \quad D_R y \equiv Dy + q_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t-\tau_{n-1}(t)) + \ldots + q_o(t)y(t-\tau_o(t)) = o \; , \quad t \geq o \; ,$$

gde, za svako $i=o,\ldots,n-1$, $\lim_{t\to\infty}(t-\tau_i(t)) = \infty$.

Štaviše, pretpostavimo da funkcije $q_i(t)$ zadovoljavaju uobičajene uslove glatkosti tako da rešenje jednačine (2o), za sve početne funkcije $\varphi(t)$ definisane na početnim skupovima

$E_i=\{o\} \cup \{s:\ s=t-\tau_i(t)<o$ za $t \geq o\}$, postoji (videti [4] za osnovne rezultate o problemu egzistencije rešenja za (2o)).

Sada, uvodimo sledeći uslov

(21) $\tau_i'(t) \leq B<1$ za $t \geq o$ i $\varphi^{(i)}(t) \in L^p[-\tau_i(o),o]$,
$i=o,\dots,n-1$.

Sledeći rezultati se lako mogu dokazati koristeći slične metode kao u prethodnom paragrafu.

<u>Teorema 5</u>. Posmatrajmo jednačinu (5) zajedno sa jednačinom (2o) i pretpostavimo da su zadovoljeni uslovi teorema 1 - 3, 1' - 3' i posledica 1 - 3 i da je zadovoljen dodatni uslov (21) koji važi za $p=2$ u teoremama 1, 1' i posledici 1 i za $p=\infty$ u ostalim slučajevima. Tada, sve odgovarajuće tvrdnje ostaju na snazi.

Dokaz: Pošto dokazi slede iste korake kao u odgovarajućim rezultatima prethodnog paragrafa, daćemo samo razliku dokaza analogona teoreme 1. Kao i u dokazu teoreme 1 dobijamo relaciju (13) gde je $y^{(i)}(u)$ zamenjeno sa $y^{(i)}(u-\tau_i(u))$. Sada, imamo

$$\int_o^t |y^{(i)}(u-\tau_i(u))|^2du = \int_{-\tau_i(o)}^{t-\tau_i(t)} |y^{(i)}(u)|^2 \frac{du}{1-\tau_i'(u)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(1-B)^2}\int_{-\tau_i(o)}^{t} |y^{(i)}(u)|^2du = B_1\Big[\int_{-\tau_i(o)}^{o} |\varphi^{(i)}(u)|^2du + \int_o^t |y^{(i)}(u)|^2du\Big] \leq$$

$$\leq B_2+B_2\int_o^t |y^{(i)}(u)|^2du \quad, \quad t \geq o \quad, \quad i=o,\dots,n-1 \quad,$$

i dokaz može biti nastavljen kao u dokazu teoreme 1.

5. NELINEARNE PERTURBACIJE

U ovom paragrafu ćemo se pozabaviti nelinearnim perturbacijama jednačine (5) koje su oblika (7), Preciznije, pretpostavimo da su $r_i \leq 1$ za svako $i=0,\dots,n-1$, tj. posmatrajmo sublinearnu perturbaciju (7). Rezultati koji će se dobiti proširuju i uopštavaju prethodne iz paragrafa 3. Za razliku od paragrafa 3, gde smo se, zbog tehničke jednostavnosti i očiglednosti, više upuštali u detalje, u ovom paragrafu ćemo manje detaljisati, stim pre što u dokazima koristimo slične ideje kao i u paragrafu 3.

Napomenimo da, u svim sledećim rezultatima, brojeve $\frac{1}{1-r_i}$, $i=0,\dots,n-1$ treba interpretirati kao ∞ ako su $r_i=1$.

<u>Teorema 6</u>. Posmatrajmo diferencijalne jednačine (5) i (7) i neka su zadovoljene pretpostavke teoreme 1, gde je $q_i(t)\in L^{\infty}[0,\infty)$ za $i=0,\dots,n-1$ zamenjemo sa $q_i(t)\in L^{2(1-r_i)^{-1}}[0,\infty)$ za svako $i=0,\dots,n-1$. Tada, važi zaključak teoreme 1.

Dokaz: Polazeći od relacije (12) i koristeći Hölderovu nejednačinu, dobijamo

$$|y^{(k)}(t)|^2 \leq C_3\phi_k^2(t)\Big[1+\int_0^t\Big|\sum_{i=0}^{n-1} q_i(s)(y^{(i)}(s))^{r_i}\Big|^2 ds\Big] \leq$$

$$\leq C_{22}\phi_k^2(t)\Big[1+\int_0^t \sum_{i=0}^{n-1}|q_i(s)|^2|y^{(i)}(s)|^{2r_i}ds\Big] \leq$$

$$\leq C_{22}\phi_k^2(t)\Big[1+\sum_{i=0}^{n-1}\Big(\int_0^t|q_i(s)|^{\frac{2}{1-r_i}}ds\Big)^{1-r_i}\Big(\int_0^t|y^{(i)}(s)|^2ds\Big)^{r_i}\Big] \leq$$

$$\le C_{23}\phi_k^2(t)\Big[1+\sum_{i=o}^{n-1}\Big(\int_o^t|y^{(i)}(s)|^2ds\Big)^{r_i}\Big] \quad , \quad t \ge o \ , \quad k=o,\dots,n-1 \ ,$$

što vodi ka

$$\sum_{k=o}^{n-1}\int_o^t|y^{(k)}(s)|^2ds \le C_{23}\int_o^t\sum_{k=o}^{n-1}\phi_k^2(s)\Big[1+\sum_{i=o}^{n-1}\Big(\int_o^s|y^{(i)}(u)|du\Big)^{r_i}\Big]ds \le$$

$$\le C_{24}+C_{23}\int_o^t\Big(\sum_{k=o}^{n-1}\phi_k^2(s)\Big)\Big(\sum_{i=o}^{n-1}\Big(\int_o^s|y^{(i)}(u)|^2du\Big)^{r_i}ds \quad , \quad t \ge o \ .$$

Obeležavajući

$$z_k(t)=\int_o^t|y^{(k)}(s))^2ds \quad , \quad k=o,\dots,n-1 \ ,$$

zaključujemo da su $z_k(t)$ neopadajuće funkcije što, preko poslednje nejednačine, povlači da možemo pretpostaviti da je $z_k(t) \ge 1$ za svako $k=o,\dots,n-1$ i $t \ge o$ (u suprotnom, posmatrano u poslednjoj nejednačini funkcije $1+z_k(t)$, $k=o,\dots,n-1$). Stoga, $(z_k(t))^{r_i} \le (z_k(t))^r$ za svako $k=o,\dots,n-1$ i $t \ge o$, gde je $r=\max\{r_i : o \le i \le n-1\} \le 1$. Uzimajući u obzir ovu činjenicu i lemu 4, poslednja nejednakost povlači da je

$$\sum_{k=o}^{n-1}z_k(t) \le C_{24}+C_{23}\int_o^t\Big(\sum_{k=o}^{n-1}\phi_k^2(s)\Big)\sum_{i=o}^{n-1}z_i^r(s)ds \le$$

$$\le C_{24}+C_{23}\int_o^t\Big(\sum_{k=o}^{n-1}\phi_k^2(s)\Big)\Big(\sum_{i=o}^{n-1}z_i(s)\Big)^r ds \quad , \quad t \ge o \ ,$$

što, na osnovu leme 3, uslovljava da je

$$\sum_{k=o}^{n-1}z_k(t) \le \Big[C_{24}^{1-r}+(1-r)\int_o^t\sum_{k=o}^{n-1}\phi_k^2(s)ds\Big]^{\frac{1}{1-r}} < \infty \quad , \quad t \ge o \ ,$$

čime je kompletiran dokaz teoreme.

Primedba 6. Očigledno, posledica 1 i teorema 1' se mogu proširiti i na nelinearnu perturbiranu jednačinu (7), na isti način kao i teorema 1. U svetlu te činjenice, zaključujemo da je nelinearna verzija teoreme 1' poboljšanje i uopštenje rezultata Wonga |11,teorema 1.|.

Teorema 7. Posmatrajmo diferencijalne jednačine (5) i (7) sa obzirom na pretpostavke teoreme 2. Tada, zaključci teoreme 2 ostaju na snazi.

Dokaz: Polazeći od relacije (11) i koristeći činjenicu da $\Phi_k(t) \in L^\infty[o,\infty)$, $k=o,\ldots,n-1$, dobijamo

$$|y^{(k)}(t)| \leq C_1 \Phi_k(t)\left[1+\int_o^t q(s)\sum_{i=o}^{n-1}|y^{(i)}(s)|^{r_i}ds\right] \leq$$

$$\leq C_{25}\left[1+\int_o^t q(s)\sum_{i=o}^{n-1}|y^{(i)}(s)|^{r_i}ds\right] \quad , \quad t \geq o \ , \ k=o,\ldots,n-1 \quad ,$$

što vodi ka

$$w_k(t) \leq C_{26}\left[1+\int_o^t q(s)\sum_{i=o}^{n-1}(w_i(s))^{r_i}ds\right] \quad , \quad t \geq o \ , \ k=o,\ldots,n-1 \ ,$$

gde smo uveli obeležavanje $w_k(t)=1+|y^{(k)}(t)|$, $t \geq o$, $k=o,\ldots,n-1$. Uzimajući u obzir činjenicu da je $w_k(t) \geq 1$ za svako $k=o,\ldots,n-1$ i lemu4, imamo

$$\sum_{k=o}^{n-1}(w_k(t))^{r_k} \leq C_{26}\sum_{k=o}^{n-1}\left[1+\int_o^t q(s)\sum_{i=o}^{n-1}(w_i(s))^{r_i}ds\right]^{r_k} \leq$$

$$\leq C_{26}\sum_{k=o}^{n-1}\left[1+\int_o^t q(s)\sum_{i=o}^{n-1}(w_i(s))^{r_i}ds\right]^{r} \leq nC_{19}\left[1+\int_o^t q(s)\sum_{i=o}^{n-1}(w_i(s))^{r_i}ds\right] \ ,$$

$$t \geq o \ ,$$

koje, pomoću leme 3 povlači da $w_k(t) \in L^{\infty}[o,\infty)$ za $k=o,\ldots,n-1$, čime je kompletiran dokaz teoreme.

Primedba 7. Očigledno, posledica 2 i teorema 2' se mogu proširiti na nelinearnu perturbiranu diferencijalnu jednačinu (7). Teorema 7 je proširenje teoreme A na nelinearni slučaj, i šta više, zaključak teoreme A važi za nelinearne perturbacije linearne jednačine sa konstantnim koeficijentima (2).

Teorema 8. Posmatrajmo diferencijalne jednačine (5) i (7) sa obzirom na pretpostavke teoreme 3, gde je $q_i(t) \in L^p[o,\infty)$ za $i=o,\ldots,n-1$ i $p \geq 1$ zamenjeno uslovima $q_i(t) \in L^{m_i}[o,\infty)$ za $1 \leq m_i \leq \frac{2}{1-r_i}$ i svako $i=o,\ldots,n-1$. Tada važe zaključci teoreme 3.

Dokaz: Pošto je dokaz sličan dokazu teoreme 3, a zbog nelinearnosti koriste rastavljanja demonstrirana u dokazima teorema 6 i 7, izostavljamo ga.

Primedba 8. Očigledno, posledica 3 i teorema 3' se mogu proširiti i na slučaj nelinearne perturbirane diferencijalne jednačine (7). Stoga, zaključujemo da je nelinearna verzija teoreme 3' poboljšanje i uopštenje rezultata Wonga |11, teorema 2.|.

6. PRIMEDBE I DISKUSIJA

Razmotrimo izložene rezultate i ukažimo na moguća uopštenja vezana za opštije klase diferencijalnih operatora.

Primedba 9. Svi rezultati dobiveni u paragrafima 4 - 6 mogu se proširiti na diferencijalne jednačine oblika:

(23) $\qquad Dy=F(t,y(t),\ldots,y^{(n-1)}(t)) \quad , \quad t \geq o \quad ,$

ili

(24) $Dy=F(t,y(t-\tau_1(t)),\dots,y^{(n-1)}(t-\tau_{n-1}(t)))$, $t \geq o$,

gde je

$$|F(t,u_1,\dots,u_n| \leq g(t)+h_1(t)|u_1|^{r_1}+\dots+h_n(t)|u_n|^{r_n} , \quad t \geq o ,$$

$$-\infty < u_i < \infty , \quad r_i > o , \quad i=1,\dots,n .$$

Osim toga, kašnjenja $\tau_i(t)$ zadovoljavaju uslove date u paragrafu 4, dok funkcije $h_i(t)$ zadovoljavaju iste uslove kao i perturbirani koeficijenti $q_i(t)$ iz paragrafa 3 - 5. Dodatni, nehomogeni član $g(t)$ zadovoljava različite uslove u različitim rezultatima. Lako se vidi da teoreme 1 i 6 (teoreme 2 i 7) važe za diferencijalnu jednačinu (23), ako dodatno pretpostavimo da je $g(t) \in L^p[o,\infty)$ ($g(t) \in L[o,\infty)$). Štaviše, teoreme 3 i 8 važe uz dodatni uslov $g(t) \in L^p[o,\infty)$. Sada je očigledno, kako se i ostali rezultati paragrafa 3 - 5 mogu proširiti na diferencijalne jednačine (23) i (24).

U svetlu ove činjenice, teorema 1 za $n=2$, je poboljšanje rezultata Wyrwinske |12,teoreme 1. i 2.|, dok je teorema 5 za $n=2$, poboljšanje rezultata Mironova |7|.

Konačno, svi dobiveni rezultati se mogu podesiti da glase: ako je $q_{n-j}(t) \equiv o$ za $j=1,\dots,m$ tada je dovoljno pretpostaviti da je $S(\mathcal{D}) \cup S^{n-j-1}(\mathcal{D}) \subseteq L^p[o,\infty)$ za odgovarajuće $p \geq 1$, gde je $\mathcal{D}$ bilo koji od D i M, da bi imali zaključak $S(\tilde{\mathcal{D}}) \cup S^{n-j-1}(\tilde{\mathcal{D}}) \subseteq L^p[o,\infty)$, gde je $\tilde{\mathcal{D}}$ bilo koji od D_L, D_M, M_L i D_n .

<u>Primedba 1o</u>. Verovatno, najinteresantniji slučaj u primeni je slučaj kada je $Dy \equiv Ky$. U tom slučaju lako se dobija karakterizacija kada se sva rešenja jednačine $Ky=o$ nalaze u $L^p[o,\infty)$

za neko $p \geq 1$. Obeležavajući karakteristični polinom za (2) sa $D(\lambda)$, tj.

$$D(\lambda)=\lambda^n+C_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+C_o \quad ,$$

zaključujemo sledeće: jednačina (2) ima sva rešenja u $L^p[o,\infty)$, $1 \leq p<\infty$, zajedno sa svim svojim izvodima ako i samo ako je $Re(\lambda_i)<o$, $i=1,\ldots,n$, gde je λ_i karakteristični koren a $Re(\lambda_i)$ njegov realni deo. Štaviše, jednačina (2) ima sva rešenja u $L^\infty[o,\infty)$ zajedno sa svim svojim izvodima ako i samo ako je $Re(\lambda_i) \leq o$ i višestrukost korena, čiji realni deo je nula (ako ih uopšte ima) je 1. Stoga, na osnovu dobro poznatih rezultata (videti |2| i njegove reference), zaključujemo da je $S(K) \cup S^{n-j}(K) \subseteq L^p[o,\infty)$ za neko $j=1,\ldots,n$ i neko $1 \leq p<\infty$ ako i samo ako je diferencijalna jednačina (2) asimptotski stabilna, dok je uslov $S(K) \cup S^{n-j}(K) \subseteq L^\infty[o,\infty)$ za neko $j=1,\ldots,n$ ekvivalentan sa stabilnošću jednačine (2). Detaljnije o ovom i za ovo vezanim problemima može se naći u |2,str. 19-27|.

Primedba 11. Ako želimo da izbegnemo pretpostavke o glatkosti rešenja neperturbirane jednačine u našim rezultatima, možemo koristiti oblik formule za varijaciju parametara koji koristi Zettl |13| i |14|, u kom slučaju nam trebaju neke odgovarajuće pretpostavke o rešenjima adjungovane jednačine. Sada, uzimajući u obzir ovu činjenicu, lako se mogu preneti svi rezultati ove glave da sadrže pretpostavke o rešenjima adjungovane jednačine umesto pretpostavki o $S^{n-1}(D)$ ili $S^{n-2}(M)$ ili $S^{n-1}(D_R)$.

7. PERTURBACIJE DIFERENCNIH JEDNAČINA

U ovom paragrafu ćemo posmatrati linearnu diferencnu jednačinu n-tog reda

(24) $\bar{D}y \equiv y(n+m)+p_{n-1}(m)y(n-1+m)+\ldots+p_o(m)y(m)=o$, $m=o,1,\ldots$

i njoj pridruženu perturbiranu jednačinu

(25) $\bar{D}_L y \equiv \bar{D}y+q_{n-1}(m)y(n-1+m)+\ldots+q_o(m)y(m)=o$, $m=o,1,\ldots$,

i pokušati da prenesemo rezultate analogne onima iz paragrafa 3. Zbog jednostavnije strukture skupa prostora l^p, odnosno zbog osobine da $l^p \subseteq l^q$ kad god je $1 \leq p \leq q \leq \infty$, formulacije teorema kao i neki dokazi poprimiće jednostavniju formu.

Uvedimo neka obeležavanja i navedimo neke dobro poznate rezultate koje ćemo koristiti u daljem radu.

Neka je $\mathcal{D}$ bilo koji od operatora $\bar{D}$, $\bar{D}_L$, $\bar{M}$ ili $\bar{M}_L$. Tada uvodimo obeležavanje

$$S^k(\mathcal{D})=\{\Delta^k y: \mathcal{D}y=o\} \quad \text{za} \quad k=o,\ldots,n-1 \ .$$

Tako, $S(\mathcal{D})$ označava skup svih rešenja od (24), (25), (29) ili (3o), $S'(\mathcal{D})$ označava skup svih prvih diferencija rešenja i td. Dalje, neka su $y_i(m)$, $i=1,\ldots,n$ linearno nezavisna rešenja jednačine (24).

Prvi rezultat je reprezentacija rešenja proistekla iz formule za varijaciju konstanti.

Lema 5. Neka je $F(u,v)$ neprekidna funkcija nad R^2 a $y(m)$ rešenje jednačine $\bar{D}y=F(m,y(m))$. Tada je

$$\Delta^j y(m)=\sum_{i=1}^{n} c_i \Delta^j y_i(m)+\sum_{s=o}^{m-1} \Delta_m^j G(s,m)F(s,y(s)) \quad , \quad j=o,\ldots,n-1 \ ,$$

gde je

$$G(s,m)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(s+1) & \cdots & y_n(s+1)\\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots\\ y_1(s+n-1) & \cdots & y_n(s+n-1)\\ y_1(m) & \cdots & y_n(m)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(s+1) & \cdots & y_n(s+1)\\ \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots\\ y_1(s+n) & \cdots & y_n(s+n)\end{vmatrix}}=\frac{W(s,m)}{D(s+1)} \ .$$

Determinanta $D(s)$ je Casoratijeva determinanta i za nju važi sledeća tvrdnja (videti |18, str. 354-358|).

<u>Lema 6</u>. (Hejmannova teorema) Casoratijeva determinanta $D(s)$ zadovoljava linearnu diferencnu jednačinu prvog reda

$$D(s+1)=(-1)^n p_o(s)D(s) \quad .$$

Sledeći rezultat je direktna posledica leme 4.

<u>Lema 7</u>. Ako $u \in l^p$ tada i $\Delta u \in l^p$.

Sledeća lema je generalizacija diskretnog analogona Gronwall--Bellmanove leme i može se naći u radu Willeta i Wonga |10|.

<u>Lema 8</u>. Neka su $v(n)$, $w(n)$ i $u(n+1)$, $n=o,1,\ldots$, nenegativni nizovi brojeva za koje je $v(o)=w(o)=o$ a u_o i p su konstante, takve da je $p \geq o$, $p \neq 1$ i $u_o > o$. Tada, nejednačina

$$u(n+1) \leq u_o+\sum_{j=o}^{n} v(j)u(j)+\sum_{j=o}^{n} w(j)u^p(j) \quad , \quad n=o,1,\ldots ,$$

povlači da je

$$e(n)u(n+1) \leq \left[u_o^{1-p}+(1-p)\sum_{k=o}^{n} w(k)e^{1-p}(k)\right]^{\frac{1}{1-p}} \quad , \quad n=o,1,\ldots ,$$

gde je

$$e(n)=\prod_{j=o}^{n}(1+v(j))^{-1} \quad , \quad n=o,1,\dots .$$

Sada možemo da formulišemo diskretnu verziju uopštenja Weylove alternativne teoreme.

Teorema 9. Neka je $S(\overline{D})\subseteq l^2$ i $q_i \in l^\infty$ za $i=o,\dots,n-1$. Ako postoji M_1 tako da je $\prod_{m=o}^{s}|p_o(m)| \geq M_1 > o$ za $s=o,1,\dots$ tada je $S(\overline{D}_1)\subseteq l^2$.

Dokaz: Na osnovu leme 5 zaključujemo da se sva rešenja od (25) mogu pretstaviti kao

$$(26)\quad y(m)=\sum_{i=1}^{n}c_i y_i(m)+\sum_{i=1}^{n}y_i(m)\sum_{s=o}^{m-1}W_i(y_1,\dots,y_{i-1},y_{i+1},\dots,y_n)(s)\cdot$$

$$\cdot(-1)^{n+i}\frac{f(s)}{D_o\prod_{k=o}^{s}p_o(k)} \quad , \quad m=o,1,\dots ,$$

gde je $D_o=D(o)$ dok je

$$f(s)= -\sum_{i=o}^{n-1}q_i(s)y(i+s)=\sum_{i=o}^{n-1}\overline{q}_i(s)\Delta^i y(s) \quad .$$

Očigledno su $\overline{q}_i(s)$ linearne kombinacije od $q_i(s)$, pa prema tome $\overline{q}_i \in l^\infty$.

Koristeći činjenicu da je $G(s,m)=o$ za $s=m-n+1,\dots,m-1$ dobijamo

$$(27)\quad \Delta^k y(m)=\sum_{i=1}^{n}c_i\Delta^k y_i(m)+\sum_{i=1}^{n}\Delta^k y_i(m)\sum_{s=o}^{m-1}(-1)^{n+i}W_i(s)\frac{f(s)}{D_o\prod_{k=o}^{s}p_o(k)}$$

za $m=o,1,\dots$ i $k=o,\dots,n-1$.

Na osnovu leme 7, $S(\overline{D})\subseteq l^2$ povlači da je $S(\overline{D})\subseteq l^\infty$, pa je

$$|W_i(s)| \leq K\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|y_j(s+1)| \leq K\sum_{j=1}^{n}|y_j(s+1)|$$

za svako $i=1,\dots,n$ i neko $K>o$. Tako, na osnovu (26) dobijamo

$$|\Delta^k y(m)| \leq \sum_{i=1}^{n}|\Delta^k y_i(m)|\Big[K_1+K\sum_{s=o}^{m-1}\sum_{j=1}^{n}|y_j(s+1)|\frac{|f(s)|}{|D_o|\left|\prod_{k=o}^{s} p_o(k)\right|}\Big],$$

za $k=o,\dots,n-1$, $m=o,1,\dots$, odnosno

$$|\Delta^k y(m)| \leq K_2\Phi_k(m)\Big[1+\sum_{s=o}^{m-1}\Phi_o(s+1)\frac{|f(s)|}{|D_o|\left|\prod_{k=o}^{s} p_o(k)\right|}\Big],$$

$$k=o,\dots,n-1 \quad , \quad m=o,1,\dots ,$$

gde smo uveli obeležavanje $\Phi_k(m)=\max\{|\Delta^k y_i(m)|:\ i=1,\dots,n\}$ za $k=o,\dots,n-1$. Zbog pretpostavke o ograničenosti sa donje strane $\left|\prod_{m=o}^{s} p_o(m)\right|$, sledi da je

$$(28) \qquad |\Delta^k y(m)| \leq K_3\Phi_k(m)\Big[1+\sum_{s=o}^{m-1}\Phi_o(s+1)|f(s)|\Big] ,$$

$$k=o,\dots,n-1 \quad , \quad m=o,1,\dots ,$$

odakle, na osnovu Cauchy-Schwarzove nejednakosti, dobijamo

$$|\Delta^k y(m)| \leq K_3\Phi_k(m)\Big[1+\Big(\sum_{s=o}^{m-1}\Phi_o^2(s+1)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{s=o}^{m-1}f^2(s)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big] .$$

$$k=o,\dots,n-1 \quad , \quad m=o,1,\dots$$

što, zbog $\phi_o \in l^2$, povlači da je

$$|\Delta^k y(m)| \le K_4 \phi_k(m)\left[1+\left(\sum_{s=o}^{m-1} f^2(s)\right)^{\frac{1}{2}}\right] \quad k=o,\dots,n-1 \ , \ m=o,1,\dots \ ,$$

odnosno,

$$|\Delta^k y(m)|^2 \le K_5 \phi_k^2(m)\left[1+\sum_{s=o}^{m-1} f^2(s)\right] \ , \quad k=o,\dots,n-1 \ , \ m=o,1,\dots \ .$$

Koristeći činjenicu da je $\overline{q}_i \in l^\infty$, $i=o,\dots,n-1$, nalazimo da je

$$|\Delta^k y(m)|^2 \le K_5 \phi_k^2(m)\left[1+\sum_{s=o}^{m-1}\left|\sum_{i=o}^{n-1}\overline{q}_i(s)\Delta^i y(s)\right|^2\right] \le$$

$$\le K_6 \phi_k^2(m)\left[1+\sum_{s=o}^{m-1}\sum_{i=o}^{n-1}|\overline{q}_i(s)|^2|\Delta^i y(s)|^2\right] \le$$

$$\le K_7 \phi_k^2(m)\left[1+\sum_{i=o}^{n-1}\sum_{s=o}^{m-1}|\Delta^i y(s)|^2\right] \ , \quad k=o,\dots,n-1 \ , \ m=o,1,\dots \ ,$$

što posle sumiranja po k od o do n-1 povlači

$$\sum_{k=o}^{n-1}|\Delta^k y(m)|^2 \le K_7 \sum_{k=o}^{n-1}\phi_k^2(m)\left[1+\sum_{s=o}^{m-1}\sum_{i=o}^{n-1}|\Delta^i y(s)|^2\right] \ .$$

Definišimo sada

$$u(m)=\sum_{i=o}^{n-1}|\Delta^i y(m)|^2 \ , \quad m=1,2,\dots$$

pa iz poslednje relacije imamo

$$u(m) \le K_7 \sum_{k=o}^{n-1}\phi_k^2(m)\left[1+\sum_{s=o}^{m-1}u(s)\right] \ ,$$

odnosno

$$\sum_{m=0}^{p} u(m) \le K_7 \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{p} \phi_k^2(m)\left[1+\sum_{s=0}^{m-1} u(s)\right] .$$

Stavimo $w(p)=\sum_{m=0}^{p} u(m)$, pa ćemo zbog $\phi_k \in l^2$, dobiti

$$w(p) \le K_8\left[1+\sum_{m=0}^{p} \phi(m) \sum_{s=0}^{m-1} u(s)\right]=$$

$$=K_8\left[1+\sum_{m=0}^{p} \phi(m) w(m-1)\right]=K_8\left[1+\sum_{m=0}^{p-1} \phi(m+1) w(m)\right]$$

gde smo stavili $\phi(m)=\sum_{r=0}^{n-1} \phi_r^2(m)$ i $u(-1)=o$ što povlači da je $w(-1)=o$. Koristeći sada lemu 8 dobijamo $e(p-1)w(p) \le K$ što je ekvivalentno sa

$$w(p) \le \frac{K}{e(p-1)} =K\prod_{j=0}^{p-1}(1+\phi(j+1)) < \infty$$

a ovo povlači da je $\sum_{j=1}^{\infty} \phi(j+1) < \infty$, jer iz $\phi_k \in l^2$ sledi da je $\phi \in l$.

<u>Posledica 4</u>. Neka $S(\bar{D}) \nsubseteq l^2$ i neka je $q_i \in l^{\infty}$. Ako je $M_1 > o$ tako da je $\prod_{m=0}^{s} |p_o(m)| \ge M_1 > o$ za svako $s=o,1,\ldots$ tada $S(\bar{D}_L) \nsubseteq l^2$.

Dokaz: Pretpostavimo da $S(\bar{D}_L) \subseteq l^2$ što, na osnovu teoreme 9 povlači da je i $S(\overline{D}) \subseteq l^2$, jer se $\overline{D}y$ može posmatrati kao linearna perturbacija od $\overline{D}_L y$, tj.

$$\overline{D}y(m) = \overline{D}_L y(m) - \sum_{i=o}^{n-1} q_i(m) y(i+m) \quad .$$

<u>Primedba 12</u>. U specijalnom slučaju, ako je $p_o(m) \equiv 1$ i $q_o(m) \equiv o$, kada jednačine $\overline{D}y$ i $\overline{D}_L y$ primaju specijalne oblike

(29) $\overline{M}y \equiv y(n+m) + p_{n-1}(m) y(m+n+1) + \dots + y(m) = o \quad , \quad m=o,1,\dots$

i

(3o) $\overline{M}_L y \equiv \overline{M}y + q_{n-1}(m) y(m+n-1) + \dots + q_1(m) y(m+1) = o \; , \; m=o,1,\dots \; ,$

dobijamo iz teoreme 9 i posledice 4 jaču tvrdnju, kao što sledi.

<u>Teorema 9'</u>. Ako su $q_i \in l^\infty$ za $i=1,\dots,n-1$ tada je $S(\overline{M}) \subseteq l^2$ ako i samo ako je $S(\overline{M}_L) \subseteq l^2$.

Sledeći rezultat je proširenje teoreme Dini-Hukuhare za slučaj diferencne jednačine.

<u>Teorema 1o</u>. Neka je $S(\overline{D}) \subseteq l^\infty$ i neka su $q_i \in l$ za $i=o,\dots,n-1$. Ako postoji $M_1 > o$ tako da je za svako $m=o,1,\dots$ $\left|\prod_{s=o}^{m} p_o(s)\right| \geq M_1 > o$ tada i $S(\overline{D}_L) \subseteq l^\infty$.

Dokaz: Kao i u dokazu teoreme 9 dobija se relacija (28) koja, na osnovu činjenice da $\phi_k(m) \in l^\infty$ za $k=o,\dots,n-1$, neposredno povlači

$$|\Delta^k y(m)| \leq K_o \phi_k(m) \left[1 + \sum_{s=o}^{m-1} |f(s)| \right] \leq$$

$$\leq K_o \phi_k(m) \left[1 + \sum_{s=o}^{m-1} \sum_{i=o}^{n-1} |q_i(s)| \, |\Delta^i y(s)| \right] \leq$$

$$\leq K_{10}\left[1+\sum_{s=0}^{m-1} q(s) \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta^i y(s)|\right] \quad , \quad k=0,\dots,n-1 \quad , \quad m=0,1,\dots \quad ,$$

gde smo uveli obeležavanje $q(s)=\max\left\{|q_i(s)|:\ i=0,\dots,n-1\right\}$.

Prethodna nejednakost daje

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta^k y(m)| \leq K_{11}+K_{11} \sum_{s=0}^{m-1} q(s) \sum_{i=0}^{n-1} |\Delta^i y(s)| \quad , \quad m=0,1,\dots \; .$$

Stavimo $u(m)=\sum_{k=0}^{n} |\Delta^k y(m)|$ pa dobijamo

$$u(m) \leq K_{11}+K_{11} \sum_{s=0}^{m-1} q(s)u(s)$$

što, na osnovu leme [illegible], daje

$$u(m) \leq \frac{K}{e(m-1)} = K \prod_{s=0}^{m-1} (1+q(s)) < \infty \quad ,$$

što je ekvivalentno sa $\sum_{s=0}^{\infty} q(s) < \infty$, odnosno $q \in 1$.

Koristeći se istom idejom dokaza kao u posledici 4, na osnovu teoreme 1o, možemo dokazati sledeće.

<u>Posledica 5</u>. Neka $S(\bar{D}) \notin 1^\infty$ i neka je $q_i \in 1$ za $i=0,\dots,n-1$. Ako postoji $M_1 > 0$ tako da je $\left|\prod_{s=0}^{m} p_0(s)\right| \geq M_1 > 0$ za svako $m=0,1,\dots$ tada $S(\bar{D}_L) \notin 1^\infty$.

U specijalnom slučaju, za diferencne jednačine $\bar{M}$ i $\bar{M}_L$, dobija se oštriji rezultat kao što sledi.

<u>Teorema 1o'</u>. Ako je $q_i \in 1$ za $i=0,\dots,n-1$ tada $S(\bar{M}) \subseteq 1^\infty$

ako i samo ako $S(\overline{T}_-) \subseteq l^\infty$.

Ukažimo na neke primedbe kao i na moguća uopštenja.

<u>Primedba 13</u>. Dok su u slučaju diferencijalnih jednačina teorema A i teorema B bile uopštene teoremama 1 i 3, u slučaju diferencnih jednačina, njihova diskretna uopštenja su objedinjena teoremom 9.

<u>Primedba 14</u>. Primetimo da je diferencna jednačina $\overline{M}y=0$ odgovarajuća diferencijalnoj jednačini $My=0$ i u praksi od velikog značaja.

LITERATURA

|1| E. Beckenbach, R. Bellman: Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 1961.

|2| L. Cesari: Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations, Springer-Verlag, Berlin, 1963.

|3| S. Goldberg: Unbounded linear operators, Mc Graw-Hill, New York, 1966.

|4| J. K. Hale: Functional differential equations, Springer--Verlag, New York, 1976.

|5| G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

|6| E. Hille: Lectures on ordinary differential equations, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1969.

|7| N. P. Mironov: Second-order linear differential equations with lag, Differencialnye Uravnenija (Ryazan), No. 11, 116-119, 1978. (na ruskom)

|8| M. A. Naimark: Linear differential operators, Nauka, Moskva, 1969. (na ruskom)

|9| W. T. Patula, J. S. W. Wong: An L^p-analogue of The Weyl alternative, Math. Ann., 197, 9-28, 1972.

|10| D. Willett, J. S. W. Wong: On the discrete analogues of some generalizations of Gronwall's inequality, Monats. Math., 69, 362-367, 1965.

|11| J. S. W. Wong: Square integrable solutions of perturbed linear differential equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, 73, 251-254, 1974/75.

|12| A. Wyrwińska: On the existence and non-existence of solutions of certain second order nonlinear differential equation in the class L_2, Fasciculi Math., 1o, 77-84, 1978.

|13| A. Zettl: Square integrable solutions of Ly=f(t,y) , Proc. Amer. Math. Soc., 26, 635-639, 197o.

|14| A. Zettl: Perturbation of the limit circle case, Quart. J. Math. Oxford (3), 26, 355-36o, 1975.

|15| M. R. S. Kulenović, M. Budinčević: L^p-perturbations of linear differential equations, Glasnik Matematički, Zgb., (primljeno u štampu)

|16| M. K. Kwong: On boundedness of solutions of second order differential equations in the limit circle case, Proc. Amer. Math. Soc., 52, 242-246, 1975.

|17| G. J. Butler, V. S. H. Rao: Some properties of second order linear differential equations and perturbations that preserve them, SIAM J. Math. Ann. (u štampi)

|1 | L. M. Milne-Thomson: The calculus of finite differences, Mc Millan, London, 1951.

|19| F. V. Atkinson: Discrete and continuous boundary value problems, Academic Press, New York, 1964.

|2o| F. V. Atkinson: On second-order non-linear oscillations, Pacific J. Math., 5, 643-647, 1955.

|21| D. Hinton, R. T. Lewis: Spectral analysis of second order difference equations, J. Math. Anal. Appl., 63, 421-438, 1978.

|22| J. W. Hooker, W. T. Patula: A second order nonlinear difference equation: oscillation and asymptotic behavior,

J. Math. Anal. Appl., 91, 9-29, 1983.

|23| M. R. Kulenović, M. K. Grammatikopoulos: On the asymptotic behavior of second order differential inequalities with alternating coefficients, Math. Nachr., 98, 317-327, 198o.

|24| M. R. S. Kulenović: Hille-Wintner type comparison theorems for differential inequalities, Math. Nachr., 1o8, 7-21, 1982.

|25| J. D. Monk: Introduction to set theory, Mc Graw-Hill, 1969.

|26| R. Szmanda: Oscillation of solutions of second order difference equations, Publ. Inst. Mat. Beograd, 27 (41), 237-239, 198o.

|27| V. A. Staikos, C. G. Philos: Basic comparison results for the oscillatory and asymptotic behavior of differential equations with deviating arguments, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica, 9, 417-445, 1981.

|28| J. S. W. Wong: On the generalized Emden-Fowler equation, SIAM Rev., 17, 339-36o, 1975.

|29| J. W. Hooker, W. T. Patula: Riccati type transformations for second-order linear difference equations, J. Math. Anal. Appl., 82, 451-462, 1981.

|3o| M. R. S. Kulenović: Asymptotic properties of solutions of second order differential inequalities with general deviating argument. (pojaviće se)

|31| M. R. S. Kulenović, M. Budinčević: Asymptotic analysis of nonlinear second-order difference equation, Analele Stiintifice Ale Univ. "Al. I. Cuza", Sec. Math. IAŞI, (u štampi).

|32| D. I. Martynyuk: Lectures on qualitative theory of difference equations, Naukova Dumka, Kiev, 1972. (na ruskom)

|33| A. Tarski: A lattice theoretical fixed point theorem and its applications, Pacific J. Math., 5, 285-309, 1955.

|34| M. Budinčević, M. R. S. Kulenović: Asymptotic analysis of a nonlinear second order difference equation II, Zbornik Radova PMF, Univ. u N. Sadu, Vol 12, 73-92, 1982.

|35| M. Budinčević: On Wong's conjecture, Zbornik Radova PMF, Univ. u N. Sadu, Vol. 12. 69-71, 1982.

|36| R. B. Potts: Differential and difference equations, Math. Montly, 402-407, 1982.

|37| R. B. Potts: Nonlinear difference equations, J. Nonlin. Anal. Theory, Methods and Appl., 659-665, 1982.

|38| W. R. Utz: Properties of solutions of $u''+p(t)u^{2n-1}=0$, II, Monatsh. Math., 69, 353-361, 1965.