UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

NATAŠA KREJIĆ

PROŠIRENJE OBLASTI I UBRZANJE KONVERGENCIJE DVOPARAMETARSKIH RELAKSACIONIH POSTUPAKA

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

Novi Sad 1994.

Sadržaj

1. Uvodni deo

1.1. Uvod

Pri rešavanju gotovo svih matematičkih modela iz tehnike, prirodnih i društvenih nauka javljaju se sistemi linearnih i nelinearnih jednačina, pa su numerički postupci za odredjivanje rešenja sistema jednačina veoma interesantni. Značaj ove grane numeričke matematike se povećava u poslednjih par decenija zahvaljujući intenzivnoj primeni sve razvijenije računarske tehnike. Pri rešavanju modela iz prakse uglavnom nastaju sistemi velikih dimenzija u linearnom slučaju i sistemi nelinearnih jednačina koji se ne mogu rešiti direktnim postupcima, te je neophodno koristiti iterativne postupke za njihovo rešavanje.

Iterativni postupak za rešavanje sistema jednačina obuhvata izbor početne aproksimacije i iterativnog pravila, čijom primenom se dobija niz aproksimacija koje konvergiraju ka rešenju posmatranog sistema jednačina. Kod sistema linearnih jednačina postupci koji se definišu su globalno konvergentni, (kada su konvergentni), pa je izbor početne aproksimacije proizvoljan, dok kod postupaka za rešavanje sistema nelinearnih jednačina razlikujemo lokalno i globalno konvergentne. Kako se u modelima iz tehnike i prirodnih nauka javljaju uglavnom sistemi sa specijalnim osobinama, nastoji se da se postupak prilagodi tim osobinama sistema u cilju što brže konvergencije i jednostavnije primene. U praksi se javljaju i veliki i retki sistemi bez specijalne strukture, pa je za njihovo rešavanje potrebno definisati postupke sa što opštijim uslovima za konvergenciju. Pored toga, postupci treba da su definisani tako da je njihova implementacija na računaru što jednostavnija.

Posebnu klasu iterativnih postupaka čine relaksacioni postupci, kod kojih se javlja jedan ili više relaksacionih parametara. Relaksacioni parametri se uvode iz dva razloga. Prvo, pomoću relaksacionih parametara je moguće postići konvergenciju kada osnovni postupak nije konvergentan i drugo, pogodnim izborom parametara konvergencija postupka se može ubrzati. To je razlog što se kod relaksacionih postupaka razmatra oblast konvergencije i brzina konvergencije. U ovoj disertaciji su razmatrani najpoznatiji dvoparametarski relaksacioni postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina, AOR i nesimetrični SOR, nastali kao generalizacija SOR postupka, i njihova uopštenja na sisteme nelinearnih jednačina.

U prvom delu su navedene oznake, definicije i teoreme koje se koriste u disertaciji.

Drugi deo je posvećen rešavanju sistema linearnih jednačina. Prvo je dat pregled definicija najpoznatijih jednoparametarskih i dvoparametarskih postupaka, a zatim su razmotrene neke specijalne klase matrica, kao što su SDD, H - matrice, M - matrice, nerazložive matrice i njihove osobine. Ove klase su izdvojene jer se sistemi sa takvim matricama često javljaju u praksi, a njihove specijalne osobine su značajne pri dokazu konvergencije posmatranih postupaka.

Nesimetrični SOR postupak se dobija primenom dve poluiteracije, od kojih je jedna SOR sa parametrom σ, a druga obrnuti SOR sa parametrom ω. Za ovaj postupak je odredjena oblast konvergencije za sisteme sa H - matricom, [57]. SDD matrice su potklasa H - matrica, pa dokazani rezultat važi i za sisteme sa ovakvim matricama. Pokazalo se da je moguće dokazati i posebno tvrdjenje za ovu potklasu. Oblast konvergencije dokazana za SDD matrice, [20], [21], ima neprazan presek sa oblasti konvergencije za H - matrice i nijedna od njih nije podskup druge, no uslovi dati za SDD matrice su lakši za proveru jer zavise samo od elemenata matrice sistema. Odnos dokazanih oblasti konvergencije je ilustrovan odgovarajućim numeričkim primerima.

U radu [76] je predložena kombinacija jednog koraka Gausovog (Gauss) postupka eliminacije i Jakobijevog (Jacobi), odnosno Gaus-Zajdelovog (Gauss - Seidel) postupka. Dokazano je da takva kombinacija može ubrzati postupak. Ovde je razmatrana kombinacija jednog koraka Gausove eliminacije i SOR, odnosno AOR postupka. Dokazano je da se takvom kombinacijom proširuje oblast konvergencije AOR postupka za sisteme sa SDD matricom, [56], i SOR postupka za sisteme sa nerazloživom H - matricom.

Za sisteme bez specijalne strukture, sa velikom i retkom matricom, definisan je dvoparametarski postupak relaksacije po kolonama, kao specijalan slučaj AOR postupka. Ovaj postupak je generalizacija poznatog Kačmarcovog (Kaczmarz) postupka. Odredjeni su dovoljni uslovi za konvergenciju, [54], i dati numerički rezultati za sistem sa matricom slučajnih brojeva.

Za primenu iterativnog postupka je veoma važna i brzina kojim postupak konvergira. U tu svrhu se definiše asimptotski i prosečni red konvergencije. Pokazano je da se primenom već opisane kombinacije jednog koraka Gausove eliminacije i SOR, odnosno AOR postupka, smanjuje spektralni radijus iterativne matrice, odnosno povećava asimptotski red konvergencije, ako je matrica sistema nerazloživa M - matrica, čime je u potpunosti opravdano posmatranje takve kombinacije, [65]. Dat je numerički primer koji ilustruje postignuto ubrzanje konvergencije.

Hibridni postupci, definisani u radu [25], sastoje se iz ciklusa sa p iteracija osnovnog postupka i q iteracija sekundarnog postupka. Ovako definisani postupci imaju osobinu da maksimalno koriste početni red konvergencije koji može biti brži od prosečnog i asimptotskog. Poznati su uslovi za konvergenciju hibridnog Gaus - Zajdel - SOR postupka ako je matrica sistema simetrična i pozitivno semidefinitna. Ovde je razmatran hibridni postupak, pri čemu su osnovni i sekundarni postupak bili postupak dvoparametarske relaksacije po kolonama, ali sa različitim parametrima. Dati su dovoljni uslovi za konvergenciju, [54], a efikasnost postupka je ilustrovana numeričkim primerom.

Treći deo je posvećen numeričkom rešavanju sistema nelinearnih jednačina. Najpoznatiji postupak za rešavanje nelinearnih sistema jednačina je Njutnov (Newton) postupak. Dat je pregled tvrdjenja o konvergenciji Njutnovog postupka i opisane su moguće modifikacije u cilju pojednostavljenja postupka. Zatim je definisan nesimetrični SORN postupak, koji spada u klasu linearno - nelinearnih postupaka i dokazana lokalna konvergencija ovog postupka primenom rezultata koji su dobijeni za nesimetrični SOR postupak, [22].

Odredjeni su uslovi za globalnu konvergenciju ovog postupka za sistem jednačina kod kog je nelinearnost izražena samo na dijagonali, primenom Banahovog principa kontrakcije i rezultata o nesimetričnom SOR postupku, [22]. Uticaj nelinearnosti na oblast konvergencije je ilustrovan na numeričkom primeru.

Parcijalno relaksirani postupci, predloženi u ovom radu, mogu se posmatrati i kao specijalan slučaj postupka paralelne sečice, [81]. Ovaj postupak zahteva rešavanje jednog sistema linearnih jednačina pri svakoj iteraciji, što je bio motiv za njegovu modifikaciju. Pogodnim izborom matrice ometanja, sistem se transformiše na oblik koji sadrži SOR ili AOR matricu, odnosno matricu simetričnog ili nesimetričnog SOR postupka, pa se u svakoj iteraciji primenjuje samo jedan korak odgovarajućeg postupka za rešavanje sistema linearnih jednačina. Tako je dobijen globalno konvergentan postupak za rešavanje sistema nelinearnih jednačina. Uslovi za konvergenciju su odredjeni primenom Banahovog principa kontrakcije i rezultata o konvergenciji postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina, [64]. Oblast konvergencije je ilustrovana na primeru sistema jednačina nastalog diskretizacijom eliptične diferencijalne jednačine.

Nelinearni AOR postupak je uopštenje postupka za rešavanje sistema linearnih jednačna. Dokazana je konvergencija ovog postupka za sisteme specijalnog oblika, kod kojih je linearni deo H - matrica sa pozitivnom dijagonalom, a nelinearni deo dijagonalno i izotono preslikavanje, [67]. Ovaj rezultat je proširenje dosada poznatih, jer kao specijalne slučajeve sadrži rezultate date u [81].

Svi numerički rezultati u ovoj disertaciji su dobijeni primenom programskog paketa *Mathematica*.

Posebno se zahvaljujem dr Dragoslavu Hercegu, redovnom profesoru Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu, koji me je uputio u ovu oblast numeričke matematike, a svojim idejama, savetima i predlozima konstantno i nesebično pomogao moj celokupni naučni rad, kao i izradu ove disertacije.

Zahvaljujem se dr Ljiljani Cvetković, vanrednom profesoru Prirodno - matematičkog fakulteta u Novom Sadu, na korisnim idejama, sugestijama i zainteresovanosti kojom je svesrdno pomagala i pratila moj rad.

Takodje se zahvaljujem dr Miodragu Petkoviću, redovnom profesoru Elektronskog fakulteta u Nišu, na interesovanju sa kojim je pratio moj rad i korisnim predlozima prilikom izrade ove disertacije.

1.2 . Neke oznake, definicije i teoreme

U radu se koriste sledeće oznake:

$\mathcal{C}$ - skup kompleksnih brojeva

$\mathcal{R}$ - skup realnih brojeva

$\mathcal{N}$ - skup prirodnih brojeva

$\mathcal{C}^{nm}$ - skup kompleksnih matrica formata $n \times m$

$\mathcal{R}^{nm}$ - skup realnih matrica formata $n \times m$

$\mathcal{C}^{n}$ - skup kompleksnih vektora kolona formata n

$\mathcal{R}^{n}$ - skup realnih vektora kolona formata n

A^{-1} - inverzna matrica za matricu A

A^{T} - transponovana matrica za matricu A

A^{H} - transponovano konjugovana matrica za matricu A

$A = [a_{ij}]$ - matrica iz $\mathcal{C}^{nm}$ sa elementima a_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$

E - jedinična matrica

$\mathcal{C}^{nn}_{\pi}$ - skup matrica iz $\mathcal{C}^{nn}$ sa osobinom $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$

$\rho(A)$ - spektralni radijus matrice A

$A = D - T - S$ - standardno razlaganje matrice A na dijagonalnu matricu D, strogo donju trougaonu matricu $-T$ i strogo gornju trougaonu matricu $-S$.

$A = D(E - L - U)$ - standardno razlaganje matrice $A \in \mathcal{C}^{nn}_{\pi}$ na dijagonalnu matricu D, strogo donju trougaonu matricu $-L$ i strogo gornju trougaonu matricu $-U$.

$P_i(A) = \sum_{j \in \{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} |a_{ij}|$, $i = 1, \ldots, n$

$l_i = P_i(L)$, $u_i = P_i(U)$, $i = 1, \ldots, n$

$Q_i(A) = \sum_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} |a_{ji}|, \;\; i = 1,\ldots,n$

$P_{i,\alpha}(A) = \alpha P_i(A) + (1-\alpha)Q_i(A), \;\; \alpha \in [0,1], \;\; i = 1,\ldots,n$

$Q_i^*(A) = \max_{j\in\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}} |a_{ij}|, \;\; i = 1,\ldots,n$

$Q_i^r(A) = \max_{t_r\in\Theta_r} \sum_{j\in t_r} |a_{ji}|$, gde $i, r \in \{1,\ldots,n\}$, $\alpha \in [0,1]$ i Θ_r je skup svih izbora $t_r = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ različitih indeksa iz $\{1,\ldots,n\}$.

$x, y \in \mathcal{R}^n, \;\; x \le (<) y \Leftrightarrow x_i \le (<) y_i, \;\; i = 1,\ldots,n$

$A, B \in \mathcal{R}^{nm}, \;\; A \le (<) B \Leftrightarrow a_{ij} \le (<) b_{ij}, \;\; i = 1,\ldots,n, \;\; j = 1,\ldots,m$

$A \in \mathcal{R}^{nm}, \;\; A > (\ge) 0 \Leftrightarrow a_{ij} > (\ge) 0, \;\; i = 1,\ldots,n, \;\; j = 1,\ldots,m$

$B(x,r)$ - otvorena lopta u $\mathcal{R}^n$ sa centrom u x i poluprečnikom r

$\overline{B(x,r)}$ - zatvorena lopta u $\mathcal{R}^n$ sa centrom u x i poluprečnikom r

$C^n(D)$ - skup svih n- puta neprekidnih i diferencijabilnih funkcija nad oblasti D

Definicija 1.2.1. *Matrica $A = [a_{ij}] \in \mathcal{R}^{nn}$ sa osobinom $a_{ij} \le 0$, $i \ne j$, $i, j = 1, \ldots, n$, naziva se L_0 - matrica.*

Definicija 1.2.2. *L_0 matrica $A = [a_{ij}]$ sa osobinom $a_{ii} > 0$, $i = 1,\ldots,n$, naziva se L - matrica.*

Definicija 1.2.3. *Matrica $A \in \mathcal{R}^{nn}$ koja je L_0 oblika je M - matrica ako je nesingularna i $A^{-1} \ge 0$.*

Definicija 1.2.4. *Za $A \in \mathcal{C}^{nn}$ matrica poredjenja $\mathcal{M}(A) = [m_{ij}] \in \mathcal{R}^{nn}$ je definisana sa*

$$m_{ii} = |a_{ii}|, \;\; m_{ij} = -|a_{ij}|, \;\; i \ne j, \;\; i, j = 1,\ldots,n.$$

Definicija 1.2.5. *Skup ekvimodularnih matrica povezanih sa matricom $A \in \mathcal{C}^{nn}$ je*

$$\Omega(A) = \{B = [b_{ij}] \in \mathcal{C}^{nn} : |b_{ij}| = |a_{ij}|,\ i,j = 1,...,n\}.$$

Definicija 1.2.6. *Matrica $A \in \mathcal{C}^{nn}$ se naziva H - matrica ako je njena matrica poredjenja, $\mathcal{M}(A)$, M - matrica.*

Definicija 1.2.7. *Matrica $A \in \mathcal{C}^{nn}$ je razloživa ako i samo ako postoji permutaciona matrica $P \in \mathcal{R}^{nn}$ takva da je*

$$P^T AP = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix},$$

gde su B_{11} i B_{22} kvadratne matrice formata manjeg od n. Matrica je nerazloživa ako nije razloživa.

Definicija 1.2.8. *Matrica $A \in \mathcal{R}^{nn}$ koja je L oblika je Stiltjesova matrica ako je simetrična i pozitivno definitna.*

Definicija 1.2.9. *Razlaganje matrice $A = M - N$ je regularno ako je M nesingularna matrica i $M^{-1} \geq 0,\ N \geq 0.$*

Definicija 1.2.10. *Matrica $A \in \mathcal{C}^{nn}$ je konvergentna ako je $\rho(A) < 1$, a slabo konvergentna ako je $\rho(A) \leq 1$.*

Definicija 1.2.11. *Preslikavanje $F : D \subset \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$ naziva se Freše – diferencijabilno (F – diferencijabilno) u unutrašnjoj tački $x \in int(D)$ oblasti D ako i samo ako postoji matrica $A \in \mathcal{R}^{nn}$ takva da je*

$$\lim_{h\to 0} \frac{||F(x+h) - F(x) - Ah||}{||h||} = 0.$$

Matrica A se naziva F – izvodom preslikavanja F u tački x, $A = F'(x)$.

Definicija 1.2.12. *Jakobijan preslikavanja* $F = [f_1, \ldots, f_n]^T : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$ *u tački* x *je matrica* $F'(x) = [f_{ij}]$, $f_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Definicija 1.2.13. *Preslikavanje* $F : D \subset \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$ *zadovoljava Lipšicov uslov na* D *sa konstantom* γ *ako za sve* $x, y \in D$ *važi*

$$||Fx - Fy|| \leq \gamma ||x - y||.$$

Definicija 1.2.14. *Preslikavanje* $F : D \subset \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$ *se naziva*

(i) izotono (antitono) (na Q*) ako važi implikacija*

$$x, y \in Q, \;\; x \leq y \Rightarrow Fx \leq Fy \;\; (Fx \geq Fy);$$

(ii) striktno izotono (striktno antitono) (na Q*) ako pored (i) važi implikacija*

$$x, y \in Q, \;\; x < y \Rightarrow Fx < Fy \;\; (Fx > Fy);$$

(iii) inverzno izotono (na Q*) ako je tačna implikacija*

$$x, y \in Q, \;\; Fx \leq Fy \Rightarrow x \leq y;$$

(iv) striktno inverzno izotono (na Q*), ako pored (iii) važi implikacija*

$$x, y \in Q, \;\; Fx < Fy \Rightarrow x < y.$$

Definicija 1.2.15. *Neka je* $F : D \subset \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$, *i* $x^{k+1} = Fx^k$. *Tačka* x^* *je tačka atrakcije za niz* $\{x^k\}$ *ako postoji otvorena okolina* S *tačke* x^* *tako da je* $S \subset D$ *i za svako* $x^0 \in S$, *članovi niza* $\{x^k\}$ *pripadaju* D *i konvergiraju ka* x^*.

Definicija 1.2.16. *Neka je* $F : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$. *Tačka* x^* *je nepokretna tačka preslikavanja* F *ako je*

$$x^* = Fx^*.$$

Definicija 1.2.17. *Neka je* $F : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$. *Ako postoji konstanta* $q \in [0,1)$ *tako da je*

$$||F(x) - F(y)|| \leq q||x - y||, \quad x, y \in D,$$

preslikavanje F *se naziva kontrakcija sa konstantom kontrakcije* q.

Teorema 1.2.1. *[6] Neka je* $x^{k+1} = Hx^k + f, \ \ k = 0, 1 \ldots,$ $H \in \mathcal{C}^{nn}, \ \ \rho(H) < 1 \ \ i \ \ x = Hx + f$. *Tada je*

$$\alpha = sup\{\lim_{n\to\infty} ||x^k - x||^{\frac{1}{k}} : x_0 \in \mathcal{C}^n\} = \rho(H).$$

Teorema 1.2.2. *[75] Za matricu* $H = (E - L)^{-1}U, \ \ L, U \in \mathcal{R}^{nn}, \ \ L \geq 0, \ \ U \geq 0$, *sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(a) $0 < \rho(H)$;

(b) $\rho(L + tU), \ \ t \geq 0$, *je neograničena funkcija;*

(c) Postoji pozitivan broj t_1 *takav da je* $\rho(L + t_1 U) = 1$.

Teorema 1.2.3. *[85] Stiltjesova matrica je* M *- matrica.*

Teorema 1.2.4. *[85] Ako je* $A \leq 0$, *onda su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(1) $\alpha > \rho(A)$;

(2) $\alpha E - A$ *je nesingularna matrica i* $(\alpha E - A)^{-1} \geq 0$.

Teorema 1.2.5. *[85] Ako je* $A = M - N$ *regularno razlaganje i* $A^{-1} \geq 0$, *onda je*

$$\rho(M^{-1}N) < 1.$$

Teorema 1.2.6. *[8] Neka je B M - matrica, $A \geq B$ i A je L oblika. Tada je A takodje M - matrica.*

Teorema 1.2.7. *[85] Neka su A i B dve matrice koje zadovoljavaju $0 \leq |B| \leq A$. Tada je*

$$\rho(B) \leq \rho(A).$$

Teorema 1.2.8. *[85] Neka je $A = M - N \in C^{nn}$, pri čemu su A i M nesingularne matrice. Tada za $H = M^{-1}N$ i $c = M^{-1}b$, iterativni postupak*

$$x^{k+1} = Hx^k + c, \quad k = 0, 1, \ldots$$

konvergira ka rešenju sistema $Ax = b$ za svaki početni vektor $x^0 \in C^n$ ako i samo ako je $\rho(H) < 1$.

Teorema 1.2.9. *(Teorema ekstrapolacije). Neka je M konvergentna matrica. Tada da je ekstrapolirana matrica $H = (1-\omega)E + \omega M$ takodje konvergentna za $0 < \omega < 2/(1 + \rho(M))$ i*

$$\rho(H) \leq |1 - \omega| + \omega\rho(M) < 1.$$

Teorema 1.2.10. *[26] Neka je $x^{k+1} = Hx^k + c, \quad k = 0, 1, \ldots$ Sledeća tvrdjenja su ekvivalentna:*

(1) Niz $\{x^k\}$ konvergira za svaki izbor x^0;

(2) $\lim_{k\to\infty} ||x^{k+1} - x^k|| = 0$, za svaki izbor x^0;

(3) H je slabo konvergentna matrica i sistem linearnih jednačina

$$(E - H)x = c$$

je rešiv.

Teorema 1.2.11. *(Ostrowski) [81] Neka preslikavanje* $F : D \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ *ima nepokretnu tačku* x^* *u unutrašnjosti skupa* D *i neka je* F F *- diferencijabilno u* x^*. *Ako je* $\rho(F'(x^*)) = \alpha < 1$, *onda je* x^* *tačka atrakcije za niz definisan iterativnim pravilom*

$$x^0 \in D, \ \ x^{k+1} = Fx^k.$$

Teorema 1.2.12. *(Banach) [81] Neka je preslikavanje* $F : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$ *kontrakcija sa konstantom kontrakcije* q. *Tada postoji jedna i samo jedna nepokretna tačka* x^* *preslikavanja* F, *i ona je granična vrednost niza definisanog iterativnim pravilom*

$$x^0 \in \mathcal{R}^n, \ \ x^{k+1} = F(x^k).$$

Takodje je

$$||x^k - x|| \leq \frac{q^k}{1-q}||x^1 - x^0||.$$

2. Relaksacioni postupci za rešavanje sistema linearnih jednačina

2.1. Definicija nekih relaksacionih postupaka

Neka je dat sistem linearnih jednačina

$$Ax = b, \tag{2.1.1}$$

gde je $A = [a_{ij}] \in C_{\pi}^{nn}$, a $b \in C^n$. Treba odrediti nepoznati vektor x. Pretpostavka je da je sistem jednoznačno rešiv, odnosno da je matrica A regularna, a tada je rešenje vektor

$$x = A^{-1}b.$$

Opšte razlaganje matrice A se može zapisati u obliku

$$A = M - N,$$

pri čemu je matrica M nesingularna. Sistemi jednačina $x = Hx + c$ i $Ax = b$, gde je

$$H = M^{-1}N, \quad c = M^{-1}b,$$

su ekvivalentni, što sugeriše iterativno pravilo

$$x^0 \in C^n, \ x^{k+1} = Hx^k + c, \ k = 0, 1, \dots \tag{2.1.2}$$

za rešavanje sistema jednačina (2.1.1). Različitim izborom matrice H dobijaju se različiti iterativni postupci.

Postupci kod kojih iterativna matrica zavisi od jednog ili više relaksacionih parametara se nazivaju relaksacioni postupci. Za uvodjenje relaksacionih parametara postoje dva razloga. Prvo, relaksacioni postupak može biti konvergentan kada osnovni postupak ne konvergira. Druga važna osobina relaksacionih postupaka jeste da se pogodnim izborom parametara konvergencija može ubrzati.

Najpoznatiji postupci, koji zavise od jednog ili dva parametra, se definišu na sledeći način.

Ako je

$$M = \frac{1}{\omega}(D - \omega T), \ N = \frac{1}{\omega}\left((1-\omega)D + \omega S\right), \ \omega \neq 0,$$

iterativno pravilo (2.1.2) postaje

$$x^{k+1} = \mathcal{L}_\omega x^k + \omega(D - \omega T)^{-1} b,$$

gde je

$$\mathcal{L}_\omega = (E - \omega L)^{-1}\left((1-\omega)E + \omega U\right). \tag{2.1.3}$$

Ovaj postupak se naziva postupak sukcesivne gornje relaksacije (SOR - Successive Overrelaxation). Specijalni slučaj ovog postupka za $\omega = 1$ je poznati Gaus - Zajdelov postupak.

Kada je

$$M = \frac{1}{\omega}D, \ N = \frac{1}{\omega}\left((1-\omega)D + \omega T + \omega S\right),$$

dobija se postupak zajedničke gornje relaksacije (JOR - Simultaneous Overrelaxation) sa iterativnom matricom

$$\mathcal{J}_\omega = (1-\omega)E + \omega(L + U). \tag{2.1.4}$$

Odgovarajuće iterativno pravilo je

$$x^{k+1} = \mathcal{J}_\omega x^k + \omega D^{-1} b.$$

Za $\omega = 1$ JOR postupak se svodi na Jakobijev iterativni postupak.

Svi do sad spomenuti postupci mogu se posmatrati kao specijalan slučaj ubrzanog postupka gornje relaksacije (AOR - Accelerated Over-relaxation). Za parametre $\omega \neq 0$, σ i razlaganje

$$M = \frac{1}{\omega}(D - \sigma T), \ N = \frac{1}{\omega}\left((1-\omega)D + (\omega - \sigma)T + \omega S\right),$$

iterativno pravilo (2.1.2) postaje

$$x^{k+1} = \mathcal{H}_{\sigma\omega} x^k + \omega(D - \sigma T)^{-1} b,$$

gde je

$$\mathcal{H}_{\sigma\omega} = (E - \sigma L)^{-1}\left((1-\omega)E + (\omega - \sigma)L + \omega U\right). \tag{2.1.5}$$

Očigledno je

$$\mathcal{H}_{01} = \mathcal{J} \text{ - Jakobijeva matrica},$$

$$\mathcal{H}_{11} = \mathcal{B} \text{ - Gaus-Zajdelova matrica},$$

$$\mathcal{H}_{\omega\omega} = \mathcal{L}_\omega \text{ - SOR matrica},$$

$$\mathcal{H}_{0\omega} = \mathcal{J}_\omega \text{ - JOR matrica.}$$

Sledeća dva postupka se definišu preko dve poluiteracije. Prvi od njih, simetrični SOR (SSOR) postupak nastaje tako što se prva poluiteracija izračuna SOR postupkom,

$$x^{k+\frac{1}{2}} = \mathcal{L}_\omega x^k + \omega(D - \omega T)^{-1} b,$$

a naredna iteracija se računa pomoću te poluiteracije, primenom SOR postupka sa jednačinama u obrnutom redosledu, odnosno

$$x^{k+1} = \mathcal{U}_\omega x^{k+\frac{1}{2}} + \omega(D - \omega S)^{-1} b,$$

pri čemu je

$$\mathcal{U}_\omega = (E - \omega U)^{-1} \left((1-\omega)E + \omega L\right). \tag{2.1.6}$$

Iterativna matrica za SSOR postupak je

$$\mathcal{S}_{\omega\omega} = \mathcal{U}_\omega \mathcal{L}_\omega, \tag{2.1.7}$$

a odgovarajuće razlaganje

$$M = \frac{1}{\omega(2-\omega)}(D - \omega T)(D - \omega S),$$

$$N = \frac{1}{\omega(2-\omega)}\left((1-\omega)D + \omega T\right)\left((1-\omega)D + \omega S\right).$$

Ako se u prvoj poluiteraciji koristi parametar σ, a u drugoj poluiteraciji parametar ω, dobija se nesimetrični SOR (USSOR) postupak,

$$x^{k+\frac{1}{2}} = \mathcal{L}_\sigma x^k + \sigma(D - \sigma T)^{-1} b,$$

$$x^{k+1} = \mathcal{U}_\omega x^{k+\frac{1}{2}} + \omega(D - \omega S)^{-1} b,$$

sa iterativnom matricom

$$\mathcal{S}_{\sigma\omega} = \mathcal{U}_\omega \mathcal{L}_\sigma \tag{2.1.8}$$

i razlaganjem

$$M = \frac{1}{\omega + \sigma - \sigma\omega}(D - \sigma T)(D - \omega S),$$

$$N = \frac{1}{\omega + \sigma - \sigma\omega}\left((1-\omega)D + \omega T\right)\left((1-\sigma)D + \sigma S\right).$$

Svi navedeni postupci su veoma pogodni za rešavanje sistema jednačina čije matrice imaju specijalnu strukturu, kao što su M - i H - matrice, simetrične, nenegativne, dijagonalno dominantne, nerazložive matrice, što je motivisalo proučavanje tih postupaka. U delu 2.2 ovog rada su razmatrane mogućnosti za proširenje oblasti konvergencije, a u delu 2.3 su dati neki od načina za ubrzanje konvergencije opisanih relaksacionih postupaka.

2.2. Oblast konvergencije

2.2.1. Neke klase matrica

Pri rešavanju raznih matematičkih modela iz primenjenih disciplina nastaju sistemi linearnih jednačina čija matrica ima specijalnu strukturu, zavisno od prirode problema. To su najčešće M - i H - matrice, nerazložive matrice, i dijagonalno dominantne matrice. Kako oblast konvergencije relaksacionih postupaka zavisi od matrice sistema, proučavanje navedenih klasa je veoma značajno. U ovom delu je dat pregled osobina matrica iz tih klasa.

H - matrice su, kao što se vidi iz definicije 1.2.6, generalizacija M - matrica. Sledeća teorema daje neke od dovoljnih uslova da bi matrica pripadala toj klasi.

Teorema 2.2.1. *[14] Neka je A matrica iz C^{nn} koja zadovoljava bar jedan od uslova za neko $\alpha \in [0,1]$:*

1. $|a_{ii}| > P_{i,\alpha}(A), \;\; i \in \{1,2,\dots,n\}$;

2. $|a_{ii}| > P_i^{\alpha} Q_i^{1-\alpha}(A), \;\; i \in \{1,2,\dots,n\}$;

3. $|a_{ii}||a_{jj}| > P_i(A)P_j(A), \;\; i \in \{1,2,\dots,n\}, \; j \in \{1,2,\dots\}\backslash\{i\}$;

4. $|a_{ii}||a_{jj}| > P_i^{\alpha}(A)Q_i^{1-\alpha}P_j^{\alpha}(A)Q_j^{1-\alpha}(A), \;\; i \in \{1,2,\dots,n\}$, $j \in \{1,2,\dots,n\}\backslash\{i\}$;

5. $|a_{ii}| > P_{i,\alpha}(A)$ *ili* $|a_{ii}| + \sum_{j\in J}|a_{jj}| > Q_i(A) + \sum_{j\in J} Q_j(A)$, $J := \{i \in \{1,2,\dots,n\} : |a_{ii}| \leq Q_i(A)\}$;

6. $|a_{ii}| > \min(P_i(A), Q_i^*(A)), i \in \{1,2,\dots,n\}$ *i* $|a_{ii}| + |a_{jj}| > P_i(A) + P_j(A), \;\; i \in \{1,2\dots,n\}, \;\; j \in \{1,2,\dots,n\}\backslash\{i\}$;

7. $|a_{ii}| > Q_i^p(S+T), \;\; i \in \{1,2,\dots,n\}$ *i* $\sum_{i\in t_p}|a_{ii}| > \sum_{i\in t_p} P_i(A)$, $t_p \in \theta_p$, *za neko* $p \in \{1,2,\dots,n\}$;

8. *Postoji* $i \in \{1,2,\dots,n\}$ *tako da je* $|a_{ii}|(|a_{jj}| - P_j(A) + |a_{ji}|) > P_i(A)|a_{ji}|, \;\; j \in \{1,2,\dots,n\}\backslash\{i\}$.

Tada je A H - matrica.

Strogo dijagonalno dominantne matrice, (kraće SDD), zadovoljavaju svaki od uslova navedenih u teoremi, na primer, prvi uslov za $\alpha = 1$, a imaju poseban značaj zbog sledećeg tvrdjenja.

Teorema 2.2.2. *[14] Matrica A je H - matrica ako i samo ako postoji regularna dijagonalna matrica W tako da je AW SDD matrica.*

Iterativne matrice $\mathcal{L}_\omega$, $\mathcal{H}_{\sigma\omega}$ i $\mathcal{S}_{\sigma\omega}$ za sistem jednačina sa matricom A i sistem sa matricom AW su slične:

$$AW = DW(E - W^{-1}LW - W^{-1}UW),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\omega(AW) &= (E - \omega W^{-1}LW)^{-1}\Big((1-\omega)E + \omega W^{-1}UW\Big)\\ &= \Big(W^{-1}(W - \omega LW)\Big)^{-1}\Big(W^{-1}\left((1-\omega)W + \omega UW\right)\Big)\\ &= W^{-1}\mathcal{L}_\omega(A)W,\end{aligned}$$

slično je

$$\mathcal{U}_\omega(AW) = W^{-1}\mathcal{U}_\omega(A)W,$$

pa je i

$$\mathcal{S}_{\sigma\omega}(AW) = W^{-1}\mathcal{S}_{\sigma\omega}(A)W.$$

Takodje je

$$\mathcal{H}_{\sigma\omega}(AW) = (E - \sigma W^{-1}LW)\left((1-\omega)E\right.$$

$$\left.+(\omega - \sigma)W^{-1}LW + \omega W^{-1}UW\right) = W^{-1}\mathcal{H}_{\sigma\omega}(A)W.$$

Spektralni radijusi odgovarajućih iterativnih matrica za sistem jednačina sa matricom A i sistem sa matricom AW su jednaki, pa iz konvergencije postupka za rešavanje sistema sa matricom A sledi konvergencija postupka za rešavanje sistema sa matricom AW i obrnuto.

Zahvaljujući ovoj osobini, oblast konvergencije odredjena za SDD matrice se može preneti na H - matrice, kao što je uradjeno u radovima [48], [49] i [37], kada je matrica W poznata, [37].

Primer jedne potklase, koja nije obuhvaćena teoremom 2.2.1, a za koju je poznata matrica W dat je u sledećoj teoremi. Neka je $A \in C_{\pi}^{nn}$,

$$N_1 = \{i \in \{1, \dots, n\}, |a_{ii}| > P_i(A)\},$$

$$N_2 = \{i \in \{1, \dots, n\}, |a_{ii}| \leq P_i(A)\},$$

$$\alpha_i = \sum_{j \in N_1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}, \quad \beta_i = \sum_{j \in N_2} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$r_{ij} = \alpha_i + \beta_j + \alpha_j \beta_i - \alpha_i \beta_j, \quad i \in N_1, \quad j \in N_2.$$

Teorema 2.2.3. *[48] Ako elementi matrice $A \in C_{\pi}^{nn}$ zadovoljavaju uslov*

$$r_{ij} < 1, \quad i \in N_1, \quad j \in N_2,$$

onda je A H - matrica.

Matrica $W = diag(w_1, w_2, \dots, w_n)$ za ovu potklasu je odredjena na sledeći način, [48]:

$$w_i = \begin{cases} 1, & i \in N_1 \\ \gamma, & i \in N_2 \end{cases}, \quad \gamma \in \left(\max_{j \in N_2} \frac{\alpha_j}{1 - \beta_j}, \min_{i \in N_1} \frac{1 - \alpha_i}{\beta_i} \right).$$

Nerazložive matrice su opisane u definiciji 1.2.7. Ova klasa se može okarakterisati i preko teorije grafova.

Za matricu $A \in C^{nn}$ usmereni graf $\Gamma(A)$ se definiše kao par (V, F), gde je $V = \{1, 2, \dots, n\}$ skup čvorova i $F = \{(i, j) : a_{ij} \neq 0, i, j = 1, \dots, n\}$ skup grana. Put od i_1 do i_s je uredjeni niz čvorova $(i_1, i_2, \dots, i_s)$ takvih da za svako p, $(i_p, i_{p+1}) \in F$. Usmereni graf je jako povezan ako za svaki par čvorova (i, j) postoji put od čvora i do čvora j.

Teorema 2.2.4. *[85] Matrica $A \in C^{nn}$ je nerazloživa ako i samo ako je njen usmereni graf $\Gamma(A)$ jako povezan.*

Sledeće dve teoreme imaju veliku primenu u analizi konvergencije relaksacionih postupaka.

Teorema 2.2.5. *(Perron - Frobenius) [85]*

(a) Ako je A pozitivna matrica, onda je $\rho(A)$ pozitivan, jednostruki karakteristični koren matrice A, a odgovarajući karakteristični vektor je pozitivan;

(b) Ako je A nenegativna i nerazloživa matrica, onda je $\rho(A)$ jednostruki karakteristični koren matrice A. Šta više, svaki karakteristični koren modula $\rho(A)$ je takodje jednostruki i A ima pozitivan karakteristični vektor x koji odgovara korenu $\rho(A)$.

Teorema 2.2.6. *[85] Neka je $A \in \mathcal{R}^{nn}$, $A = [a_{ij}] \geq 0$ nerazloživa matrica i P^* hiperoktant vektora $x > 0$. Tada, za svako $x \in P^*$, važi*

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{x_i} \right] < \rho(A) < \max_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{x_i} \right]$$

ili

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j}{x_i} = \rho(A), \quad i = 1, \ldots, n.$$

2.2.2. Nesimetrični SOR postupak

Nesimetrični SOR (USSOR) postupak je dvoparametarska generalizacija SOR postupka. Primena ovog postupka je posebno interesantna kada optimalni parametar za SOR postupak nije poznat, što je u praksi čest slučaj. Prednosti USSOR postupka su detaljno opisane u [87]. Dovoljni uslovi za konvergenciju ovog postupka su odredjeni za neke specijalne klase matrica kao što su p-ciklične matrice, [82], [61], tzv. "crno-crvene" (red - black) matrice, [62], [72], simetrične pozitivno definitne matrice, [87].

Ovde je odredjena oblast konvergencije nesimetričnog SOR postupka za klasu H - matrica, koja zavisi od spektralnog radijusa odgovarajuće Jakobijeve matrice. Zatim je za klasu SDD matrica dokazana oblast konvergencije koja je izražena preko elemenata matrice sistema, pa je lako proverljiva. Kako je svaka SDD matrica i H - matrica, interesantno je uporediti ove dve oblasti. Može se videti da one imaju neprazan presek i da nijedna od njih nije pravi podskup druge. Tvrdjenje dokazano za klasu SDD matrica je moguće uopštiti za one H - matrice za koje je poznata matrica W koja H - matricu prevodi u SDD matricu.

Matrica USSOR postupka je data sa

$$\mathcal{S}_{\sigma\omega} = \mathcal{U}_{\omega}\mathcal{L}_{\sigma}.$$

Sledeća teorema daje oblast konvergencije ovog postupka za H - matrice.

Teorema 2.2.7. *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{C}_{\pi}^{n,n}$, $n \geq 2$. Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(1) A je nesingularna H - matrica;

(2) USSOR postupak za rešavanje sistema $Cx = f$ je konvergentan za sve $C \in \Omega(A)$ i sve $\sigma, \omega \in \mathcal{O}(\rho)$,

gde je $\rho = \rho(|L| + |U|)$, a oblast $\mathcal{O}(\rho)$ je odredjena sa:

$$\sigma \in (-\frac{1-\rho}{2\rho}, \frac{\rho+1}{2\rho})$$

$$\omega \in (max\{\tfrac{|1-\sigma|+|\sigma|\rho-1}{|1-\sigma|+\rho(|\sigma|+1)}, \tfrac{|1-\sigma|+|\sigma|\rho-1}{|1-\sigma|(1-\rho)}\}, min\{\tfrac{1+|1-\sigma|+\rho|\sigma|}{\rho(1+|\sigma|)+|1-\sigma|}, \tfrac{1+|1-\sigma|-\rho|\sigma|}{|1-\sigma|(1+\rho)}\}).$$

Dokaz. (1) $\rightarrow$ (2).
Ako je A H - matrica, onda je $\mathcal{M}(A)$ M-matrica, pa je

$$\rho(J(\mathcal{M}(A))) = \rho(|J(C)|) < 1$$

za sve $C \in \Omega(A)$. Matrica C se razlaže na standardni način

$$C = D(E - L - U).$$

Kako je

$$\mathcal{S}_{\sigma\omega} = (E - \omega U)^{-1}((1-\omega)E + \omega L)(E - \sigma L)^{-1}((1-\sigma)E + \sigma U)$$

i

$$((1-\omega)E + \omega L)(E - \sigma L)^{-1} = (E - \sigma L)^{-1}((1-\omega)E + \omega L),$$

$\mathcal{S}_{\sigma\omega}$ se može zapisati u obliku

$$\mathcal{S}_{\sigma\omega} = (E - \omega U)^{-1}(E - \sigma L)^{-1}((1-\omega)E + \omega L)((1-\sigma)E + \sigma U).$$

Koristeći nejednakosti

$$|(E - \omega U)^{-1}| \leq (E - |\omega||U|)^{-1},$$

$$|(E - \sigma L)^{-1}| \leq (E - |\sigma||L|)^{-1},$$

dobija se

$$|\mathcal{S}_{\sigma\omega}| \leq \mathcal{S},$$

gde je

$$\mathcal{S} = (E - |\omega||U|)^{-1}(E - |\sigma||L|)^{-1}(|1-\omega|E + |\omega||L|)(|1-\sigma|E + |\sigma||U|).$$

Za matricu B definisanu sa

$$B = \frac{1 - |1-\omega||1-\sigma|}{|\omega| + |\sigma||1-\omega|}E - \frac{|\sigma| + |\omega||1-\sigma|}{|\omega| + |\sigma||1-\omega|}|L| - |U|$$

i njeno razlaganje

$$B = M - N,$$

$$M = \frac{1}{|\omega| + |\sigma||1-\omega|}(E - |\sigma||L|)(E - |\omega||U|),$$

$$N = \frac{1}{|\omega| + |\sigma||1-\omega|}(|1-\omega|E + |\omega||L|)(|1-\sigma|E + |\sigma||U|),$$

očigledno je

$$\mathcal{S} = M^{-1}N,$$

a kako je $M^{-1} \geq 0, \;\; N \geq 0$, po definiciji 1.2.9, to razlaganje matrice B je regularno.

Uočena su sledeća dva slučaja:

$$(i) \quad 1. \;\; 1 - |1-\omega||1-\sigma| > 0,$$

$$2. \; \frac{|\sigma| + |\omega||1-\sigma|}{|\omega| + |\sigma||1-\omega|} \leq 1,$$

$$3. \;\; \frac{|\omega| + |\sigma||1-\omega|}{1 - |1-\omega||1-\sigma|}\rho < 1,$$

$$(ii) \quad 1. \;\; 1 - |1-\omega||1-\sigma| > 0,$$

$$2. \; \frac{|\sigma| + |\omega||1-\sigma|}{|\omega| + |\sigma||1-\omega|} \geq 1,$$

$$3. \;\; \frac{|\sigma| + |\omega||1-\sigma|}{1 - |1-\omega||1-\sigma|}\rho < 1.$$

Ove dve grupe uslova definišu oblast $\mathcal{O}(\rho)$.

Ako se izaberu σ, ω tako da je slučaj (i) zadovoljen, onda je

$$B \geq \frac{1 - |1-\omega||1-\sigma|}{|\omega| + |\sigma||1-\omega|}E - (|L| + |U|) = W$$

i $W^{-1} \geq 0$. Odavde, primenjujući teoremu 1.2.6, može se zaključiti da je $B^{-1} \geq 0$.

U slučaju (ii) je

$$B \geq \frac{1-|1-\omega||1-\sigma|}{|\omega|+|\sigma||1-\omega|}E - \frac{|\sigma|+|\omega||1-\sigma|}{|\omega|+|\sigma||1-\omega|}(|L|+|U|) = W$$

i $W^{-1} \geq 0$, pa po teoremi 1.2.6 sledi $B^{-1} \geq 0$.

Tako je pokazano da je za sve $(\sigma,\omega) \in \mathcal{O}(\rho)$ matrica B M-matrica. Kako je razlaganje $B = M - N$ regularno, ispunjene su pretpostavke teoreme 1.2.5, što znači da je

$$\rho(\mathcal{S}) < 1.$$

Na osnovu teoreme 1.2.7 može se zaključiti da je

$$\rho(\mathcal{S}_{\sigma\omega}) \leq \rho(|\mathcal{S}_{\sigma\omega}|) \leq \rho(\mathcal{S}) < 1,$$

pa je USSOR postupak konvergentan za sve $(\sigma,\omega) \in \mathcal{O}(\rho)$.

(2) $\rightarrow$ (1).
Treba pokazati da je za sve parametre $(\sigma,\omega) \in \mathcal{O}(\rho)$ zadovoljeno

$$\rho(J(\mathcal{M}(A))) < 1.$$

Posmatra se deo oblasti $\mathcal{O}(\rho)$ u kom važi uslov (i). Neka je $\rho = \rho(J(\mathcal{M}(A)))$. Za onaj deo u kom važe nejednakosti

$$0 < \omega \leq \frac{\rho+1}{2\rho}$$

i

$$\frac{|1-\omega|+\rho|\omega|-1}{|1-\omega|(1-\rho)} < \sigma \leq 1$$

je

$$\rho\omega - 1 < -\rho|1-\omega|,$$

odnosno

$$\rho(\omega + |1-\omega|) < 1.$$

Ako je $\omega < 1$, onda je

$$\rho < \frac{1}{\omega + 1 - \omega} = 1,$$

a kada je $\omega > 1$, dobija se

$$\rho < \frac{1}{2\omega - 1} < 1,$$

i tako je pokazano da je $\rho < 1$ u oba slučaja. Sličnim razmatranjem se pokazuje da je $\rho < 1$ i za ostale delove oblasti (i), kao i za onaj deo oblasti $\mathcal{O}(\rho)$ u kom važe uslovi (ii). Na osnovu toga može se zaključiti, primenom teoreme 1.2.4, da je $\mathcal{M}(A)$ M - matrica, što znači da je A H - matrica. Ovim je dokaz završen. □

Ako je matrica hermitska i pozitivno definitna, onda je USSOR postupak konvergentan za $\sigma \in (0,2)$, $\omega \in (0,2)$, [87]. Prethodna teorema omogućava proširenje ovog rezultata za klasu Stiltjesovih matrica.

Posledica 2.2.1. *Neka je A Stiltjesova matrica. Tada je USSOR postupak konvergentan za $\sigma \in (0,2)$, $\omega \in (0,2)$ i $(\sigma, \omega) \in \mathcal{O}_1 \bigcup \mathcal{O}_2$, gde je*

$$\mathcal{O}_1 : \begin{cases} 0 < \sigma < \frac{2}{1+\rho}, \\ \\ 0 \geq \omega \geq \frac{|1-\sigma|+\sigma\rho-1}{|1-\sigma|+\rho(1+\sigma)}, \end{cases}$$

$$\mathcal{O}_2 : \begin{cases} 0 \geq \sigma > -\frac{1-\rho}{2\rho}, \\ \\ \frac{(1-\sigma)-\rho\sigma-1}{(1-\sigma)(1-\rho)} < \omega < \frac{1+(1-\sigma)+\rho\sigma}{(\rho+1)(1-\sigma)}. \end{cases}$$

Oblast konvergencije odredjena u teoremi 2.2.7 zavisi od veličine $\rho = \rho(|L| + |U|)$, koja je ista za sve matrice iz skupa $\Omega(A)$, ali je najčešće nepoznata. Ovaj problem se može prevazići ako je A SDD matrica, korišćenjem ocene za spektralni radijus.

Lema 2.2.1. *[10] Neka je A SDD matrica i $1 - |\omega|u_i > 0$, $1 - |\sigma|l_j > 0$, $i, j = 1, \ldots, n$. Tada za iterativnu matricu USSOR postupka važi*

$$\rho(\mathcal{S}_{\sigma\omega}) \leq \max_{1\leq i,j\leq n} \frac{|1-\omega|+|\omega|l_i}{1-|\omega|u_i} \cdot \frac{|1-\sigma|+|\sigma|u_j}{1-|\sigma|l_j}.$$

Da bi se ova lema iskoristila za odredjivanje oblasti konvergencije definišu se sledeće funkcije:

$$f(x,l_i,u_i,l_j,u_j) = \frac{x(1-l_i-u_i)}{1+l_j+u_j-x(1+u_j-l_i-l_iu_j+l_ju_i)}$$

$$g(x,l_i,u_i,l_j,u_j) = \frac{2-x(1-l_i+u_i)}{1+l_j+u_j-x(1+u_j-l_i-l_iu_j+l_ju_i)}$$

$$h(x,l_i,u_i,l_j,u_j) = \frac{2-x(1+l_i+u_i)}{x(1+l_i+u_j+l_iu_j-l_ju_i)-(1-l_j+u_j)}$$

$$s(x,l_i,u_i,l_j,u_j) = \frac{x(1-l_j+u_j)}{x(1+l_i+u_j+l_iu_j-l_ju_i)-(1+l_i-u_i)}$$

$$f1(x) = \min_{1\leq i,j\leq n} f(x,l_i,u_i,l_j,u_j)$$

$$f2(x) = \min_{1\leq i,j\leq n} f(x,u_j,l_j,u_i,l_i)$$

$$g1(x) = \min_{1\leq i,j\leq n} g(x,l_i,u_i,l_j,u_j)$$

$$g2(x) = \min_{1\leq i,j\leq n} g(x,u_j,l_j,u_i,l_i)$$

$$h1(x) = \min_{1\leq i,j\leq n} h(x,l_i,u_i,l_j,u_j)$$

$$h2(x) = \min_{1\leq i,j\leq n} h(x,u_j,l_j,u_i,l_i)$$

$$s1(x) = \min_{1\le i,j\le n} s(x, l_i, u_i, l_j, u_j)$$

$$t = \min_{1\le i\le n} \frac{2}{1 + l_i + u_i}$$

Teorema 2.2.8. *Ako je A SDD matrica, onda je USSOR postupak konvergentan za sve* (σ, ω) *koji zadovoljavaju jedan od sledećih uslova*

(a) $0 < \omega \le 1, \ -f1(\omega) < \sigma < g1(\omega)$;

(b) $0 < \sigma \le 1, \ -f2(\sigma) < \omega < g2(\sigma)$;

(c) $1 < \sigma < g1(1), \ 1 < \omega < s1(\sigma)$;

(d) $1 < \omega < t, \ -h1(\omega) < \sigma < 0$;

(e) $1 < \sigma < t, \ -h1(\sigma) < \omega < 0.$

Dokaz. Neka parametri σ i ω zadovoljavaju uslov (a). To znači da je $0 < \omega \le 1$ i

$$-\min_{1\le i,j\le n} \frac{\omega(1 - l_i - u_i)}{1 + l_j + u_j - \omega(1 + u_j - l_i - l_i u_j + l_j u_i)} < \sigma$$

$$< \min_{1\le i,j\le n} \frac{2 - \omega(1 - l_i + u_i)}{1 + l_j + u_j - \omega(1 + u_j - l_i - l_i u_j + l_j u_i)}.$$

Lako se vidi da je $1 + l_j + u_j - \omega(1 + u_j - l_i - l_i u_j + l_j u_i) > 0$ za sve $0 < \omega \le 1$. Sada postoje dve mogućnosti: $\sigma < 0$ ili $\sigma > 0$. Ako je $\sigma < 0$, dobija se

$$-\omega(1 - l_i - u_i) - \sigma(1 + l_j + u_j - \omega(1 + u_j - l_i - l_i u_j + l_j u_i)) < 0,$$

za sve $i, j = 1, \ldots, n$, što je ekvivalentno sa

$$\frac{1 - \sigma - \sigma u_j}{1 + \sigma l_j} \cdot \frac{1 - \omega + \omega l_i}{1 - \omega u_i} < 1, \ \ i, j = 1, \ldots, n.$$

Kako je $0 < \omega \le 1$ i $\sigma < 0$, onda je

$$\frac{|1-\omega|+|\omega|l_i}{1-|\omega|u_i}\cdot\frac{|1-\sigma|+|\sigma|u_j}{1-|\sigma|l_j}<1,\ \ i,j=1,\ldots,n$$

i

$$\max_{1\le i,j\le n}\frac{|1-\omega|+|\omega|l_i}{1-|\omega|u_i}\cdot\frac{|1-\sigma|+|\sigma|u_j}{1-|\sigma|l_j}<1.$$

Na osnovu leme 2.2.1 može se zaključiti da je $\rho(\mathcal{S}_{\sigma\omega})<1$, tj. USSOR postupak je konvergentan. Slično, ako je $\sigma>0$,

$$\sigma\left(1+l_j+u_j-\omega(1-l_i+u_j-l_iu_j+u_il_j)\right)-2-\omega(1-l_i+u_i)<0,$$

za sve $i,j=1,\ldots,n$, ili

$$\frac{1-\sigma+\sigma u_j}{1-\sigma l_j}\cdot\frac{1-\omega+\omega l_i}{1-\omega u_i}<1,\ \ i,j=1,\ldots,n.$$

Kako je $g1(\omega)<1$ za $0<\omega\le1$, dobija se

$$\frac{|1-\omega|+|\omega|l_i}{1-|\omega|u_i}\cdot\frac{|1-\sigma|+|\sigma|u_j}{1-|\sigma|l_j}<1,\ \ i,j=1,\ldots,n,$$

što znači da je

$$\max_{1\le i,j\le n}\frac{|1-\omega|+|\omega|l_i}{1-|\omega|u_i}\cdot\frac{|1-\sigma|+|\sigma|u_j}{1-|\sigma|l_j}<1,$$

i USSOR postupak je konvergentan na osnovu leme 2.2.1.

U slučajevima (b) - (e) dokaz se izvodi analogno. □

Kao specijalan slučaj mogu se posmatrati SDD matrice sa osobinom da postoji $k\in\{1,\ldots,n\}$ tako da je

$$||L||_\infty=P_k(L)=l,\ \ ||U||_\infty=P_k(U)=u. \tag{2.2.9}$$

Tada se spektralni radijus može oceniti sa

$$\rho(\mathcal{S}_{\sigma\omega})\le\frac{|1-\omega|+|\omega|l}{1-|\omega|u}\cdot\frac{|1-\sigma|+|\sigma|u}{1-|\sigma|l},$$

a analizom uslova pod kojima je ova ocena manja od 1 dobija se oblast konvergencije formulisana u sledećoj teoremi.

Teorema 2.2.9. *Neka je A SDD matrica sa osobinom (2.2.9). Tada je USSOR postupak konvergentan za sve* (σ, ω) *koji zadovoljavaju jedan od sledećih uslova:*

(a) $0 < \omega \leq 1, \quad -\frac{\omega(1-l-u)}{1+l+u-\omega(1-l+u)} < \sigma < \frac{2-\omega(1-l+u)}{1+l+u-\omega(1-l+u)},$

(b) $0 < \sigma \leq 1, \quad -\frac{\sigma(1-l-u)}{1+l+u-\sigma(1+l-u)} < \omega < \frac{2-\sigma(1+l-u)}{1+l+u-\sigma(1+l-u)},$

(c) $1 < \sigma < \frac{1+l-u}{2l}, \quad 1 < \omega < \frac{\sigma(1-l+u)}{\sigma(1+l+u)-(1+l-u)},$

(d) $1 < \omega < \frac{2}{1+l+u}, \quad -\frac{2-\omega(1+l+u)}{\omega(1+l+u)-(1-l+u)} < \sigma < 0,$

(e) $1 < \sigma < \frac{2}{1+l+u}, \quad -\frac{2-\sigma(1+l+u)}{\sigma(1+l+u)-(1+l-u)} < \omega < 0.$

Poznato je da za svaku H - matricu A postoji regularna dijagonalna matrica W tako da je AW SDD matrica i da je

$$\rho(\mathcal{S}_{\sigma\omega}(A)) = \rho(\mathcal{S}_{\sigma\omega}(AW)).$$

Koristeći ovu činjenicu teoreme 2.2.8 i 2.2.9 se mogu primeniti na sisteme sa H - matricom, pri čemu je

$$l_i = P_i(W^{-1}LW), \quad u_i = P_i(W^{-1}UW), \quad i = 1, \ldots, n,$$

što ima praktičan značaj kada je matrica W poznata.

Rezultati dobijeni u teoremama 2.2.7, 2.2.8 i 2.2.9 su ilustrovani na slikama 1 i 2. Neka je data matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/9 \\ 1/4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Za ovu matricu je $\rho(|L|+|U|) = 1/6$. Slika 1 predstavlja oblasti dobijene u teoremi 2.2.7 i teoremi 2.2.8 Zasenčena oblast je dobijena primenom teoreme 2.2.8.

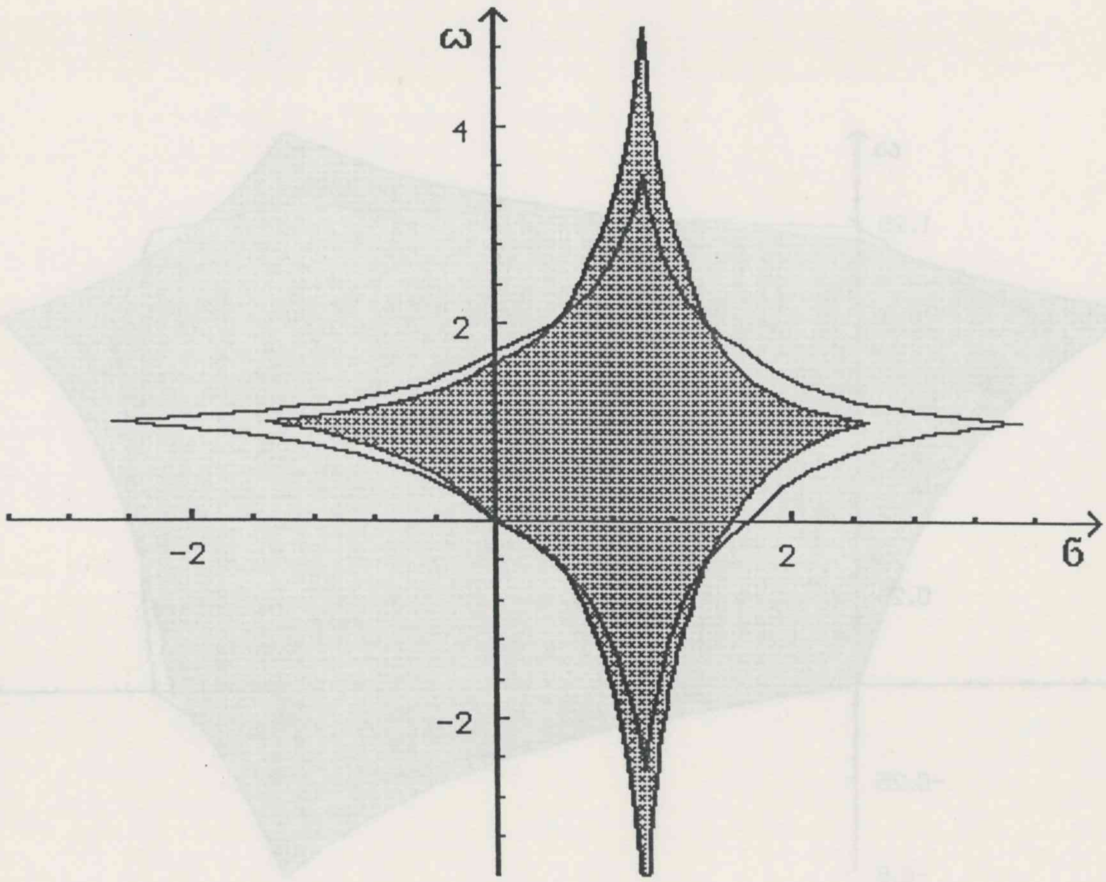
Za ilustraciju teoreme 2.2.9 može se posmatrati blok tridijagonalna matrica B formata $mn \times mn$

$$B = \begin{bmatrix} R & -E & 0 & \dots & 0 \\ -E & R & -E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & R & -E \\ 0 & 0 & \dots & -E & R \end{bmatrix},$$

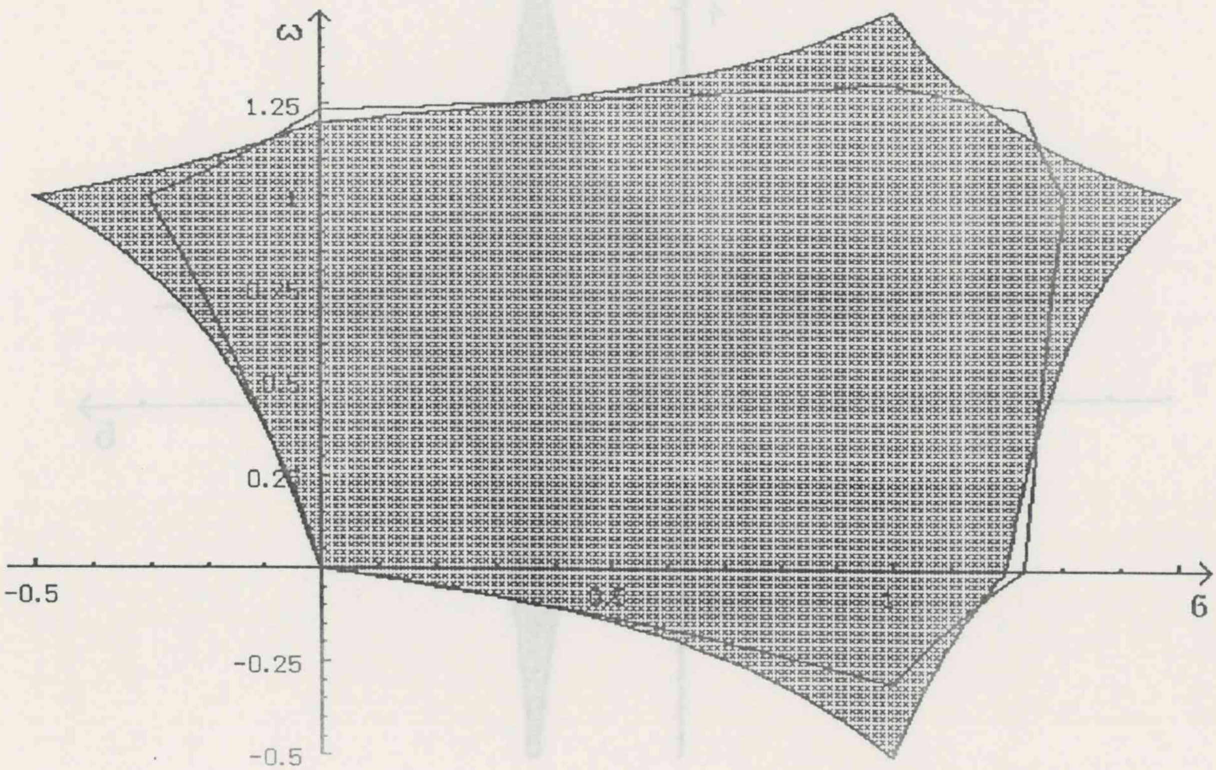
gde je R $m \times m$ matrica

$$R = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 6 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 6 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 6 \end{bmatrix},$$

i E je jedinična matrica formata $m \times m$. Za $m = 6$ i $n = 100$, spektralni radijus Jakobijeve matrice je $\rho(|L| + |U|) = 0.6218472286921422\ldots$, a $l = u = 1/3$. Oblasti dobijene primenom teoreme 2.2.7 i teoreme 2.2.9 su prikazane na slici 2. Zasenčena oblast je dobijena primenom teoreme 2.2.9.



Slika 1.



Slika 2.

2.2.3. Proširenje oblasti konvergencije primenom Gausove eliminacije

Gausov postupak eliminacije je najpoznatiji direktan postupak za rešavanje sistema linearnih jednačina, ali je praktično neprimenljiv za sisteme velikih dimenzija koji se najčešće javljaju u praksi. U radu [76] je predložena kombinacija jednog koraka Gausove eliminacije i Jakobijevog ili Gaus - Zajdelovog postupka. Pokazano je da za modifikovani sistem, nastao posle primene jednog koraka Gausove eliminacije, Jakobijev i Gaus - Zajdelov postupak brže konvergiraju nego za polazni sistem, ako matrica sistema ima odredjene osobine.

U ovom delu je ispitivan uticaj takve modifikacije na oblast konvergencije SOR i AOR postupka. Dokazana je šira oblast konvergencije za oba postupka uz dodatne pretpostavke o matrici sistema. Pored toga, pokazano je da je klasa H - matrica invarijantna u odnosu na takvu transformaciju.

Neka je $A \in C_{\pi}^{nn}$. Tada su sistemi

$$Ax = b, \tag{2.2.10}$$

i

$$D^{-1}Ax = D^{-1}b,$$

gde je $D = diag(a_{11}, \ldots, a_{nn})$ regularna dijagonalna matrica, ekvivalentni, pa se može pretpostaviti da matrica sistema ima oblik

$$A = E - L - U.$$

Za fiksno k, $1 \leq k \leq n$, izvodi se jedan korak Gausove eliminacije, odnosno anuliraju se elementi a_{ik}, $i = 1, \ldots, n$, $i \neq k$, u matrici A. Tako nastaje sistem jednačina

$$A'x = b', \tag{2.2.11}$$

gde je $A' = [a'_{ij}]$, $b' = [b'_i]$, $a'_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$, $j \neq k$, $i, j = 1, \ldots, n$, $a'_{ik} = 0$, $b'_i = b_i - a_{ik}b_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Oblast konvergencije za AOR postupak za sisteme jednačina (2.2.10) i (2.2.11) je uporedjivana za slučaj kada je A SDD matrica i $k = 1$. Tada je $A' = D'(E - L' - U')$ i

$$l'_i = \sum_{j=1}^{i-1} |l'_{ij}| = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{|l_{ij} + l_{i1}u_{1j}|}{|1 - l_{i1}u_{1i}|},$$

$$u'_i = \sum_{j=i+1}^{n} |u'_{ij}| = \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|u_{ij} + l_{i1}u_{1j}|}{|1 - l_{i1}u_{1i}|}.$$

Jedan od dovoljnih uslova za konvergenciju AOR postupka daje sledeća teorema.

Teorema 2.2.10. *[73] Neka je A SDD matrica,* $\omega \geq \sigma \geq 0$ *i*

$$0 < \omega < \frac{2}{1 + \max_{1 \leq i \leq n}(l_i + u_i)}.$$

Tada je AOR postupak za rešavanje sistema (2.2.10) konvergentan.

Na osnovu prethodne teoreme, AOR postupak za sistem (2.2.11) je konvergentan ako je

$$\omega \geq \sigma \geq 0, \; 0 < \omega < \frac{2}{1 + \max_{1 \leq i \leq n}(l'_i + u'_i)}.$$

Klasa SDD matrica je invarijantna u odnosu na Gausovu eliminaciju, kao što tvrdi sledeća lema.

Lema 2.2.2. *[60] Neka je A SDD matrica. Tada je i A′ SDD matrica.*

Neka je

$$I_\omega(A) = \left(0, \frac{2}{1 + \max_{1 \leq i \leq n}(l_i + u_i)}\right),$$

$$I_\sigma(A) = [0, \omega).$$

Proširenje oblasti konvergencije AOR postupka je dato u narednoj teoremi.

Teorema 2.2.11. *Neka je A SDD matrica i A′ matrica dobijena primenom jednog koraka Gausove eliminacije sa* $k = 1$. *Tada je*

$$I_\omega(A) \subset I_\omega(A')$$

i

$$I_\sigma(A) = I_\sigma(A').$$

Dokaz. Potrebno je dokazati sledeću nejednakost:

$$l_i' + u_i' < l_i + u_i,\ i = 1, \ldots, n. \tag{2.2.12}$$

$$l_i' + u_i' = \frac{1}{|1 - l_{i1}u_{1i}|}\left(\sum_{j=2}^{i-1}|l_{ij} + l_{i1}u_{1j}| + \sum_{j=i+1}^{n}|u_{ij} + l_{i1}u_{1j}|\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{1 - |l_{i1}u_{1i}|}\left(\sum_{j=2}^{i-1}|l_{ij}| + |l_{i1}|\sum_{j=2}^{i-1}|u_{1j}| + \sum_{j=i+1}^{n}|u_{ij}| + |l_{i1}|\sum_{j=i+1}^{n}|u_{1j}|\right).$$

Kako je

$$\sum_{j=2}^{i-1}|u_{1j}| + \sum_{j=i+1}^{n}|u_{1j}| < 1 - |u_{1i}|,$$

sledi da je

$$l_i' + u_i' < \frac{1}{1 - |l_{i1}u_{1i}|}\left(\sum_{j=2}^{i-1}|l_{ij}| + \sum_{j=i+1}^{n}|u_{ij}| + |l_{i1}|(1 - |u_{1i}|)\right)$$

i nejdnakost (2.2.12) je zadovoljena ako je

$$l_i + u_i - |l_{i1}u_{1i}| < l_i + u_i - |l_{i1}u_{1i}|(l_i + u_i).$$

Ova nejednakost je tačna jer je $l_i + u_i < 1$.

Na osnovu (2.2.12) neposredno sledi tvrdjenje teoreme. □

Klasa H - matrica sadrži kao svoju potklasu SDD matrice, za koje je poznato da su invarijantne u odnosu na opisanu transformaciju.

Korišćenjem teoreme 2.2.2, ovde se pokazuje da je i cela klasa H - matrica invarijantna u odnosu na Gausovu eliminaciju.

Teorema 2.2.12. *Neka je W regularna dijagonalna matrica. Tada je $(AW)' = A'W$.*

Dokaz. Neka je $W = diag(w_1, \ldots, w_n)$ regularna dijagonalna matrica. Elementi matrice $(AW)'$, za fiksno k, $1 \leq k \leq n$, su

$$(AW)' = [a_{ij}w_j - \frac{a_{ik}w_k}{w_k}a_{kj}w_j] = [(a_{ij} - a_{ik}a_{kj})w_j] = A'W.$$

□

Posledica 2.2.2. *Neka je A H - matrica. Tada je A′ takodje H - matrica.*

Dokaz. Ako je A H - matrica onda postoji regularna dijagonalna matrica W tako da je AW SDD matrica. Na osnovu leme 2.2.2 matrica $(AW)'$ je takodje SDD matrica, a kako je $(AW)' = A'W$, sledi da je A' H - matrica. □

Ova posledica omogućava da se rezultati teoreme 2.2.11 prenesu na čitavu klasu H - matrica u onim slučajevima kada je matrica W poznata.

U radu [76] je pokazano da ako je A nerazloživa M - matrica, A' matrica nastala posle primene jednog koraka Gausove eliminacije, a $\mathcal{J}$ i $\mathcal{J}'$ odgovarajuće Jakobijeve matrice, onda važi sledeća teorema.

Teorema 2.2.13. *[76] Ako je A nerazloživa matrica i* $\rho(\mathcal{J}) < 1$, *onda je* $\rho(\mathcal{J}') < \rho(\mathcal{J})$.

Oblast konvergencije za SOR postupak, kada je matrica sistema H - matrica, data je sledećom teoremom.

Teorema 2.2.14. *[6] Neka je* $A \in C_{\pi}^{nn}$. *Tada su sledeća tvrdjenja ekvivalentna:*

(i) A je regularna H - matrica;

(ii) SOR postupak konvergira za sve $B \in \Omega(A)$ *kada je*

$$0 < \omega < \frac{2}{1 + \rho(\mathcal{J}(\mathcal{A}))}.$$

Ako je

$$I_\omega(A) = \left(0, \frac{2}{1+\rho(\mathcal{J}(\mathcal{A}))}\right)$$

interval konvergencije SOR postupka, na osnovu prethodna dva tvrdjenja, može se zaključiti da se primenom jednog koraka Gausove eliminacije proširuje oblast konvergencije SOR postupka tj. važi sledeća teorema.

Teorema 2.2.15. *Neka je A nerazloživa H - matrica. Tada je*

$$I_\omega(A) \subset I_\omega(A').$$

2.2.4. Postupak relaksacije po kolonama

U ovom delu se posmatra problem najmanjih kvadrata

$$\min ||Ax - b||^2, \tag{2.2.13}$$

gde je $A \in \mathcal{R}^{mn}$ retka matrica bez specijalne strukture. Za rešavanje ovakvih problema klasični iterativni postupci nisu pogodni jer se uslovi za konvergenciju ne mogu lako odrediti ako se ne zna struktura matrice, a optimalni relaksacioni parametri su obično nepoznati. Zbog toga se ovakvi problemi rešavaju specijalnim iterativnim postupcima.

Ovde je definisan dvoparametarski postupak relaksacije po kolonama i odredjena oblast konvergencije tog postupka. Definisani postupak se može primeniti i na rešavanje problema sa pravougaonom matricom.

Neka je

$$A = [a_1, \dots, a_n],$$

$a_i = [a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi}]^T$, $i = 1, \dots, m$. Osnovna iteracija postupka relaksacije po kolonama se sastoji od n koraka. U i-tom koraku, $i = 1, \dots, n$, menja se samo i-ta komponenta tekuće aproksimacije, dok se ostale promenljive ne menjaju. Neka je x^k aproksimacija na kraju k-te iteracije. Tada se sledeća aproksimacija dobija po pravilu

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{a_i^T}{a_i^T a_i}\left(\omega r^k + \sigma \sum_{j=1}^{i-1} a_j(x_j^k - x_j^{k+1})\right), \ i = 1, \ldots, n, \quad (2.2.14)$$

gde je

$$r^k = b - Ax^k$$

a $\omega, \sigma \neq 0$ su realni parametri.

Problem (2.2.13) je ekvivalentan sa sistemom linearnih jednačina

$$A^T A x = A^T b. \quad (2.2.15)$$

Lako se može videti da je iterativno pravilo (2.2.14) zapravo AOR postupak za sistem (2.2.15), pa je konvergencija postupka relaksacije po kolonama dokazana na osnovu rezultata o konvergenciji AOR postupka. Kada je $\omega = \sigma$ postupak je jednoparametarska relaksacija po kolonama, što je ekvivalentno sa SOR postupkom za sistem (2.2.15), [26], a za $\omega = 1$ dobija se poznati Kačmarcov postupak.

Teorema 2.2.16. *Neka je $A \in \mathcal{R}^{mn}$. Dvoparametarski postupak relaksacije po kolonama (2.2.14) je konvergentan za*

$$0 < \sigma < 2, \ 0 \leq \omega \leq \sigma.$$

Dokaz. Poznato je da je AOR postupak konvergentan za ovakav izbor parametara ako je matrica sistema simetrična i pozitivno semidefinitna. Kako je postupak (2.2.14) ekvivalentan sa AOR postupkom za sistem (2.2.15) i matrica $A^T A$ je pozitivno semidefinitna, može se zaključiti da je postupak konvergentan. □

Numerički rezultati dati u tabeli 1 pokazuju efikasnost predloženog postupka. Matrica A je 100×100 matrica slučajnih brojeva sa četiri nenula elementa u svakoj koloni, pri čemu je mesto nenula elemenata (sem dijagonalnog) takodje slučajno. Vektor b je izabran tako da je tačno rešenje $x = [1, \ldots, 1]^T$, a izlazni kriterijum je bio

$$||x^k - x|| < 10^{-4}.$$

Broj iteracija dvoparametarskog postupka relaksacije po kolonama je označen sa k, a k_1 je broj iteracija potrebnih za ispunjenje izlaznog kriterijuma jednoparametarskim postupkom relaksacije po kolonama sa parametrom ω.

(ω, σ)	(1,1)	(1.2,1.6)	(1.3,1.7)	(0.9,1.2)	(0.8,17)	(1.6,1.8)
k	799	309	343	748	352	**105**
k_1	799	560	513	913	1136	231

Tabela 1.

2.3 . Ubrzanje konvergencije

2.3.1. Brzina konvergencije

Prirodni kriterijum za izbor iterativnog postupka jeste brzina konvergencije. U tu svrhu se definiše prosečni i asimptotski red konvergencije.

Neka je dat iterativni postupak

$$x^{k+1} = Hx^k + c,$$

gde je $H \in C^{nn}$. Vektor greške u svakoj iteraciji je $\varepsilon^k = x^k - x$, pri čemu je $x = Hx + c$, i tada je

$$\varepsilon^k = H\varepsilon^{k-1} = \ldots = H^k\varepsilon^0, \quad k \geq 0.$$

Kako je

$$||\varepsilon^k|| \leq ||H^k||\,||\varepsilon^0||,$$

veličina $||H^k||$ daje gornju granicu za količnik $||\varepsilon^k||/||\varepsilon^0||$.

Definicija 2.3.1. *Neka su $H_1, H_2 \in C^{nn}$. Ako je za neki ceo pozitivan broj k, $||H_1^k|| < 1$, onda je*

$$R(H_1^k) = \frac{-\ln ||H_1^k||}{k}$$

prosečni red konvergencije za k iteracija sa matricom H_1. Ako je $R(H_1^k) < R(H_2^k)$ kaže se da je H_2 iterativno brža matrica za k iteracija nego matrica H_1.

Prosečni red konvergencije za k iteracija se iskazuje preko $||H^k||$ i očigledno zavisi od broja k. Može se dogoditi da je matrica H_1 iterativno brža od matrice H_2 za k_1 iteracija, a iterativno sporija za $k_2 \neq k_1$ iteracija. To je razlog za definisanje asimptotskog reda konvergencije koji zavisi od spektralnog radijusa matrice.

Definicija 2.3.2. *Neka je $H \in C^{nn}$ matrica za koju je $\rho(H) < 1$ i $x = Hx + c$. Za iterativni niz $\{x^k\}$ dat sa (2.1.2) i*

$$\alpha = \sup\{\lim_{k\to\infty} ||x^k - x||^{\frac{1}{k}} : x^0 \in C^n\},$$

broj

$$R_\infty(H) = -\ln\alpha \tag{2.3.16}$$

naziva se asimptotski red konvergencije iterativnog postupka (2.1.2).

Koristeći teoremu 1.2.1 dobija se

$$R_\infty(H) = -\ln\rho(H),$$

odakle se vidi da je asimptotski red konvergencije nezavisan od norme koja se koristi u definiciji. Takodje važi sledeća veza izmedju asimptotskog i prosečnog reda konvergencije.

Teorema 2.3.1. *[85] Neka je $H \in C^{nn}$ i $\rho(H) < 1$. Tada je*

$$\lim_{k\to\infty} R(H^k) = -\ln\rho(H) = R_\infty(H).$$

Jedna od prednosti relaksacionih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina jeste da se pogodnim izborom parametara može povećati asimptotski red konvergencije, odnosno postupak se može ubrzati. Ovde je ispitivan uticaj transformacije sistema jednačina i primene hibridnih postupaka na brzinu konvergencije. U delu 2.3.2 je pokazano da se primenom jednog koraka Gausove eliminacije mogu ubrzati SOR i AOR postupak za specijalnu klasu sistema jednačina, dok je u delu 2.3.3 pokazano ubrzanje konvergencije postupka relaksacije po kolonama primenom kombinacije sa različitim parametrima.

2.3.2. Ubrzanje konvergencije primenom Gausove eliminacije

Neka je dat sistem jednačina

$$Ax = b \tag{2.3.17}$$

pri čemu je $A \in R^{nn}$ L - matrica.

Kako je $a_{ii} > 0, i = 1, \ldots, n$, sistem (2.3.17) je ekvivalentan sa sistemom

$$D^{-1}Ax = D^{-1}b,$$

pa se u ovom delu pretpostavlja da je matrica $A = E - L - U$. Tada se sistem (2.3.17) može transformisati u oblik

$$x = Bx + b, \tag{2.3.18}$$

gde je $B = [b_{ij}] = L + U$.

Za fiksno k, $1 \leq k \leq n$, izvodi se jedan korak Gausove eliminacije tj. anuliraju se elementi b_{ik}, $1 \leq i \leq n$, $i \neq k$ u matrici B. Tako nastaje sistem jednačina

$$x = B'x + b,' \tag{2.3.19}$$

sa matricom $B' = [b'_{ij}]$, $b' = [b'_i]$, $b'_{ij} = b_{ij} + b_{ik}b_{kj}$, $j \neq k$, $i, j = 1, \ldots, n$, $b'_{ik} = 0$, $b'_i = b_i + b_{ik}b_k$, $i = 1, \ldots, n$.

Uticaj opisane transformacije na oblast konvergencije SOR i AOR postupka je pokazan u delu 2.2.3, a ovde je ispitivana mogućnost ubrzanja konvergencije tih postupaka. Poznata je sledeća teorema.

Teorema 2.3.2. *[9] Neka je A H - matrica. Tada je SOR postupak konvergentan za sve $0 < \omega \leq 1$, a AOR postupak je konvergentan za sve $0 < \omega, \sigma \leq 1$.*

Za parametar ω SOR postupka važi tvrdjenje.

Teorema 2.3.3. *[85] Neka je $B = L+U = [b_{ij}] \in \mathcal{C}^{nn}$ ma koja matrica sa nulama na dijagonali. Ako je*

$$\mathcal{L}_\omega = (E - \omega L)^{-1}((1 - \omega)E + \omega U),$$

tada je za $\omega \in \mathcal{R}$

$$\rho(H_\omega) \geq |\omega - 1|.$$

Iterativna matrica SOR postupka za sistem (2.3.17) je definisana kao

$$\mathcal{L}_\omega = (E - \omega L)^{-1}\left((1 - \omega)E + \omega U\right).$$

Ako je L' strogo donji trougaoni deo matrice B' i $U' = B' - L'$, dobija se modifikovani SOR postupak za sistem (2.3.19) sa iterativnom matricom

$$\mathcal{L}'_\omega = (E - \omega L')^{-1}\left((1 - \omega)E + \omega U'\right).$$

Za odredjivanje brzine konvergencije SOR i modifikovanog SOR postupka potrebno je odrediti odnos veličina $\rho(\mathcal{L}_\omega)$ i $\rho(\mathcal{L}'_\omega)$.

Ako su S i T nenegativne kvadratne matrice, teorema 1.2.2 implicira da ako je $\rho(S) < \rho(S+T)$, onda je funkcija $\rho(S+tT), t \geq 0$ neograničena i ako je $\rho(S) < 1$, postoji jedinstveno $t_1 > 0$ tako da je $\rho(S + t_1T) = 1$ koje zadovoljava i jednakost $\rho((E - S)^{-1}T) = t_1^{-1}$.

Sledeće tvrdjenje je uopštenje teoreme 3.1 iz rada [76].

Teorema 2.3.4. *Ako je B nerazloživa matrica sa osobinom $\rho(B) < 1$, $0 < \omega \leq 1$, onda je*

$$\rho(\mathcal{L}'_\omega) < \rho(\mathcal{L}_\omega) < 1.$$

Dokaz. Kako je $\rho(B) < 1$, $L \geq 0$, $U \geq 0$ postoji jedinstveno t_1 tako da je $\rho(\omega L + t_1((1-\omega)E + \omega U)) = 1$ i $\rho(\mathcal{L}_\omega) = t_1^{-1} < 1$, po teoremi 2.3.2. Dakle, potrebno je dokazati da je $\rho(\mathcal{L}'_\omega) < \rho(\mathcal{L}_\omega)$.

Matrica $\omega L + t_1((1-\omega)E + \omega U)$ je nerazloživa i za neko $x > 0$ je

$$x = (\omega L + t_1((1-\omega)E + \omega U))x.$$

Mogu se uočiti dva slučaja.

(a) Za $i > k$ važi

$$x_i = \omega \sum_{s<i, s\neq k} b_{is}x_s + \omega b_{ik}x_k + (1-\omega)t_1 x_i + t_1\omega \sum_{s>i} b_{is}x_s,$$

$$x_k = \omega \sum_{m<k} b_{km}x_m + (1-\omega)t_1 x_k + t_1\omega \sum_{m>k} b_{km}x_m.$$

Kako je $0 < \omega \leq 1$, $t_1 > 1$, i po teoremi 2.3.3, $t_1^{-1} \geq \omega - 1$, sledi da je

$$1-(1-\omega)t_1 > 0 \quad \text{i} \quad \frac{\omega}{1-(1-\omega)t_1} \geq 1, \tag{2.3.20}$$

pa je zadovoljena nejednakost

$$x_i \geq \omega \left[\sum_{s<i, s\neq k} (b_{is} + b_{ik}b_{ks})x_s + t_1 \sum_{s\geq i} (b_{is} + b_{ik}b_{ks})x_s \right] \tag{2.3.21}$$
$$+\omega(t_1 - 1) \sum_{k<s<i} b_{ik}b_{ks}x_s + (1-\omega)t_1 x_i.$$

(b) Ako je $i < k$ onda je

$$x_i = \omega \sum_{s<i} b_{is}x_s + t_1\omega b_{ik}x_k + (1-\omega)t_1 x_i + t_1\omega \sum_{s>i, s\neq k} b_{is}x_s,$$

$$x_k = \omega \sum_{m<k} b_{km}x_m + (1-\omega)t_1 x_k + t_1\omega \sum_{m>k} b_{km}x_m.$$

Koristeći (2.3.20), dobija se

$$\begin{aligned} x_i \geq \omega & \left[\sum_{s<i} (b_{is} + t_1 b_{ik} b_{ks}) x_s + t_1 \sum_{s>k} (b_{is} + t_1 b_{ik} b_{ks}) x_s \right] + \\ & + \omega t_1 \sum_{i \leq s < k} (b_{is} + b_{ik} b_{ks}) x_s + (1-\omega) t_1 x_i. \end{aligned} \tag{2.3.22}$$

U oba slučaja, iz (2.3.21) i (2.3.22) može se zaključiti da je

$$x_i \geq \omega \sum_{s<i, s\neq k} (b_{is} + b_{ik} b_{ks}) x_s + t_1 \omega \sum_{s \geq i, s \neq k} (b_{is} + b_{ik} b_{ks}) x_s + (1-\omega) x_i, \tag{2.3.23}$$

za sve $i \neq k, i = 1, \ldots, n$.

Po pretpostavkama teoreme matrica B je nerazloživa, pa postoje i, j tako da je $b_{ik} b_{kj} \neq 0$ i nejednakost (2.3.23) je striktna za neko i. Ako se sa x' označi vektor dobijen od vektora x izostavljanjem k-te komponente i sa L'_k, U'_k, E' glavne podmatrice matrica L', U', E respektivno, nastale izostavljenjem njihovih k-tih kolona i vrsta, pretpostavka implicira

$$(\omega L'_k + t_1((1-\omega)E' + \omega U'_k)) x' \leq x',$$

pri čemu je jednakost isključena. Matrica $\omega L'_k + t_1((1-\omega)E' + \omega U'_k)$ je nerazloživa, pa je po teoremi 2.2.6 $\rho(L'_k + t_1((1-\omega)E' + \omega U'_k)) < 1$. Neka je $t'_1 > 0$ broj za koji je $\rho(L'_k + t'_1((1-\omega)E' + \omega U'_k)) = 1$. Tada je $t_1 < t'_1$ i

$$\rho(\mathcal{L}'_\omega) = \rho((E' - \omega L'_k)^{-1}((1-\omega)E' + \omega U'_k)) = (t'_1)^{-1} < t_1^{-1} = \rho(\mathcal{L}_\omega). \square$$

AOR matrica za sistem (2.3.18) je

$$\mathcal{H}_{\omega\sigma} = (E - \omega L)^{-1}((1-\sigma)E + (\sigma - \omega)L + \sigma U).$$

Za sistem (2.3.19) modifikovana matrica AOR postupka je

$$\mathcal{H}'_{\omega\sigma} = (E - \omega L')^{-1}((1-\sigma)E + (\sigma - \omega)L' + \sigma U').$$

Teorema 2.3.5. *Ako je B nerazloživa matrica sa osobinom $\rho(B) < 1$, $0 < \omega, \sigma \leq 1$, onda je*

$$\rho(H'_{\omega\sigma}) < \rho(H_{\omega\sigma}) < 1.$$

Dokaz. Po teoremi 2.3.2 je

$$\rho(H_{\omega\sigma}) < 1.$$

Dokaz nejednakosti

$$\rho(H'_{\omega\sigma}) < \rho(H_{\omega\sigma})$$

se izvodi za dva slučaja.

(a) $0 < \omega \leq \sigma \leq 1$

Neka je $t_1 > 0$ takav broj da je za neko $x > 0$

$$(\omega L + t_1((1-\sigma)E + (\sigma - \omega)L + \sigma U))x = x.$$

Takav broj postoji kao u prethodnoj teoremi. Korišćenjem nejednakosti

$$\omega + t_1(\sigma - \omega) \geq \omega,$$

$$\frac{\sigma}{1 - t_1(1-\sigma)} \geq 1,$$

i iste tehnike kao u dokazu prethodne teoreme, može se zaključiti da je

$$\rho(\mathcal{H}'_{\omega\sigma}) < \rho(\mathcal{H}_{\omega\sigma}).$$

(b) $0 < \sigma \leq \omega \leq 1$

AOR postupak se može posmatrati kao ekstrapolirani SOR sa parametrom ekstrapolacije $\frac{\sigma}{\omega}$, tj.

$$\mathcal{H}_{\omega\sigma} = (1 - \frac{\sigma}{\omega})E + \frac{\sigma}{\omega}\mathcal{L}_{\omega},$$

i

$$\mathcal{H}'_{\omega\sigma} = (1 - \frac{\sigma}{\omega})E + \frac{\sigma}{\omega}\mathcal{L}'_{\omega}.$$

Svi karakteristični koreni matrica $\mathcal{H}_{\omega\sigma}$ i $\mathcal{H}'_{\omega\sigma}$ mogu se izraziti kao

$$\eta_i = 1 - \frac{\sigma}{\omega} + \frac{\sigma}{\omega}\lambda_i, \;\; i = 1, \ldots, n,$$

$$\eta'_i = 1 - \frac{\sigma}{\omega} + \frac{\sigma}{\omega}\lambda'_i, \;\; i = 1, \ldots, n,$$

gde su λ_i, λ'_i, $i = 1, \ldots, n$, karakteristični koreni matrica $\mathcal{L}_{\omega}$ i $\mathcal{L}'_{\omega}$, respektivno. Kako je $0 < \frac{\sigma}{\omega} \leq 1$, a $\rho(\mathcal{L}_{\omega})$ i $\rho(\mathcal{L}'_{\omega})$ su karakteristični koreni matrica $\mathcal{L}_{\omega}$ and $\mathcal{L}'_{\omega}$, lako se pokazuje da je

$$|\eta_i| = |1 - \frac{\sigma}{\omega} + \frac{\sigma}{\omega}\lambda_i| \leq 1 - \frac{\sigma}{\omega} + \frac{\sigma}{\omega}\rho(H_{\omega}), \;\; i = 1, \ldots, n$$

i

$$|\eta'_i| = |1 - \frac{\sigma}{\omega} + \frac{\sigma}{\omega}\lambda'_i| \leq 1 - \frac{\sigma}{\omega} + \frac{\sigma}{\omega}\rho(H'_{\omega}), \;\; i = 1, \ldots, n,$$

što implicira

$$\rho(H_{\omega\sigma}) = 1 - \frac{\sigma}{\omega} + \frac{\sigma}{\omega}\rho(\mathcal{L}_{\omega}),$$

i

$$\rho(H'_{\omega\sigma}) = 1 - \frac{\sigma}{\omega} + \frac{\sigma}{\omega}\rho(\mathcal{L}'_{\omega}).$$

Uslovi prethodne teoreme su zadovoljeni, pa se može zaključiti da je

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) < \rho(\mathcal{L}'_\omega),$$

čime je dokazana nejednakost

$$\rho(H'_{\omega\sigma}) < \rho(H_{\omega\sigma}).$$

□

Kako je AOR postupak generalizacija SOR postupka, ova teorema je uopštenje prethodne teoreme i teoreme 3.1 iz rada [76].

Sledeći jednostavan primer ilustruje efikasnost predložene modifikacije. Neka je data matrica A,

$$A = \begin{bmatrix} 20 & -4 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -4 & 20 \end{bmatrix}.$$

Odgovarajuća Jakobijeva matrica je

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 & 0.05 \\ 0.2 & 0 & 0.05 & 0.2 \\ 0.2 & 0.05 & 0 & 0.2 \\ 0.05 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Eliminisana je prva kolona, tj. $k = 1$. Za $\omega = 0.9$ i $\sigma = 1$ dobijeni su sledeći rezultati:

$$\rho(\mathcal{J}) = 0.4500000000000007, \quad \rho(\mathcal{J}') = 0.3700000000000004,$$

$$\rho(\mathcal{L}_\omega) = 0.3388656424722313, \quad \rho(\mathcal{L}'_\omega) = 0.2940528233467771,$$

$$\rho(\mathcal{H}_{\omega\sigma}) = 0.2654062694135904, \quad \rho(\mathcal{H}'_{\omega\sigma}) = 0.2156142481630851.$$

2.3.3. Hibridni postupci

Neka je dat sistem linearnih jednačina

$$Ax = b, \tag{2.3.24}$$

pri čemu je A simetrična pozitivno semidefinitna matrica čiji su dijagonalni elementi različiti od nule.

Ovakav sistem jednačina se može rešavati iterativnim postupkom oblika (2.1.2) sa iterativnom matricom H.

Neka je $x = A^{-1}b$ rešenje sistema (2.3.24). Vektori greške ε^k, $k = 0, 1, \ldots$, se definišu kao

$$\varepsilon^k = x^k - x. \tag{2.3.25}$$

Očigledno je

$$\varepsilon^{k+1} = He^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3.26}$$

i

$$\varepsilon^k = H^k \varepsilon^0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Neka je

$$F(x) = \frac{1}{2} x^T A x - x^T b.$$

Ova funkcija zadovoljava jednakost

$$F(x^{k+1}) = F(x^k) - \frac{1}{2}(x^{k+1} - x^k)^T P (x^{k+1} - x^k), \tag{2.3.27}$$

gde je matrica P definisana sa

$$P = M + M^T - A. \tag{2.3.28}$$

Koristeći jednakost (2.3.27) može se pokazati da iterativni niz $\{x^k\}$ konvergira ka rešenju sistema (2.3.24) kada je matrica P pozitivno definitna. Iterativno pravilo (2.3.26) definiše niz približnih rešenja sistema $Ae = 0$.

Odgovarajuća funkcija greške je definisana sa

$$E(\varepsilon) = \frac{1}{2}\varepsilon^T A\varepsilon,$$

i ta funkcija zadovoljava

$$E(\varepsilon^{k+1}) = E(\varepsilon^k) - \frac{1}{2}(\varepsilon^{k+1} - \varepsilon^k)^T P(\varepsilon^{k+1} - \varepsilon^k),$$

$$E(\varepsilon^{k+1}) = E(\varepsilon^k) - \frac{1}{2}(x^{k+1} - x^k)^T P(x^{k+1} - x^k). \tag{2.3.29}$$

Konvergencija nizova $\{x^k\}$ i $\{\varepsilon^k\}$ je odredjena spektralnim osobinama matrice H. Pretpostavljeno je radi jednostavnosti da H ima kompletan sistem karakterističnih vektora $v_1, v_2, ..., v_n$ koji odgovaraju karakterističnim korenima $\lambda_1, ..., \lambda_n$ i važi

$$1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| \geq ... \geq |\lambda_n|.$$

Tada su vektori $v_1, v_2, ..., v_n$ linearno nezavisni pa se ε^0 može predstaviti u obliku

$$\varepsilon^0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \quad \alpha_j \in C,$$

što daje

$$\varepsilon^k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k \alpha_j v_j.$$

Poslednja jednakost pokazuje da se ε^k približava pravcu v_1 dok $||\varepsilon^k||$ teži nuli brzinom koju odredjuje $|\lambda_1|$, tj. asimptotski red konvergencije odredjuje spektralni radijus matrice H, kao što je ranije konstatovano. Isti zaključak važi kada sistem karakterističnih vektora nije kompletan. No, komponente vektora ε^k koje odgovaraju po modulu manjim karakterističnim korenima se smanjuju znatno većom brzinom, pa ako postoji veći broj karakterističnih korena koji su osetno manji po modulu od $|\lambda_1|$, onda je konvergencija na početku znatno brža nego što pokazuje asimptotski red konvergencije. Ovakav slučaj je veoma čest u praksi, pa je to razlog za uvodjenje hibridnih postupaka.

Hibridni postupci, predloženi u radu [25], kombinuju dva različita postupka oblika (2.1.2): osnovni postupak sa matricom H_1 i sekundarni postupak sa matricom H_2. Osnovna iteracija hibridnog postupka se naziva ciklus i sastoji se iz dva dela: prvi deo se sastoji od p iteracija osnovnog postupka, a drugi deo se sastoji od q iteracija sekundarnog postupka, pa je tako formiran postupak zapravo stacionarni linearni iterativni postupak sa iterativnom matricom $H_2^q H_1^p$. Osnovna ideja je da se u prvom delu ciklusa iskoristi relativno veliki broj komponenti vektora greške koje odgovaraju po modulu manjim karakterističnim korenima, a da se u drugom delu broj "malih" komponenti vektora greške poveća dok se vrednost funkcije greške drži što je manje mogućom.

Teorema za hibridni Gaus – Zajdel – SOR postupak je data u radu [25].

Teorema 2.3.6. *[25] Neka je niz $\{x^k\}$ generisan hibridnim postupkom čiji se osnovni ciklus sastoji od p iteracija Gaus – Zajdelovog postupka i q iteracija SOR postupka sa $\omega = 2$. Tada taj niz konvergira za svaki izbor početnog vektora i njegova granica je rešenje sistema (2.3.24).*

Gaus – Zajdelov i SOR postupak su specijalni slučajevi AOR postupka, a postupak relaksacije po kolonama je AOR postupak za sistem jednačina sa matricom $A^T A$ koja je simetrična i pozitivno semidefinitna. Kako numerički primeri pokazuju efikasnost hibridnog postupka relaksacije po kolonama, u ovom delu je ispitana konvergencija takvog postupka.

Neka je dat problem najmanjih kvadrata

$$\min ||Ax - b||^2, \tag{2.3.30}$$

gde je A realna, retka matrica sa nenula dijagonalnim elementima formata $m \times n$ bez specijalne strukture.

Ako je x^k aproksimacija na kraju k-te iteracije, primenom postupka relaksacije po kolonama naredna iteracija se dobija po pravilu

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \frac{a_i^T}{a_i^T a_i}\left(\omega r^k + \sigma \sum_{j=1}^{i-1} a_j (x_j^k - x_j^{k+1})\right), \ i = 1, \ldots, n,$$

gde je

$$r^k = b - Ax^k$$

a $\omega, \sigma \neq 0$ su realni parametri.

Ovaj problem je ekvivalentan sa sistemom linearnih jednačina

$$A^T Ax = A^T b,$$

a postupak za njegovo rešavanje sa AOR postupkom za sistem sa matricom

$$B = A^T A = D(E - L - U). \qquad (2.3.31)$$

Osnovni ciklus hibridnog postupka se sastoji od p iteracija dvoparametarskog postupka relaksacije po kolonama sa parametrima $0 < \sigma < 2$, $\sigma \geq \omega > 0$, i q iteracija sa parametrima $\sigma = 2$, $0 < \omega \leq 2$. Iterativna matrica takvog postupka se može zapisati u obliku

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{2\omega}^p \mathcal{H}_{\sigma\omega}^q.$$

Teorema 2.3.7. *Neka se hibridni postupak sastoji od p iteracija postupka relaksacije po kolonama sa parametrima $\sigma < 2$, $\sigma \geq \omega > 0$ i q iteracija istog postupka sa parametrima $\sigma = 2$ i $\sigma \geq \omega > 0$. Tada niz $\{x^k\}$ generisan ovim postupkom konvergira ka rešenju problema (2.3.30).*

Dokaz. Matrica P za AOR postupak sa matricom B je $P = (2-\sigma)\, D + (\sigma-\omega)\, B$. Kako je ta matrica pozitivno definitna za $\sigma < 2$, $\sigma \geq \omega > 0$, na osnovu (2.3.29) je $E(\varepsilon^{k+1}) < E(\varepsilon^k)$, što znači da je niz $\{E(\varepsilon^k)\}$ opadajući i ograničen sa donje strane sa nulom, pa je

$$\lim_{k\to\infty} (E(\varepsilon^{k+1}) - E(\varepsilon^k)) = 0.$$

Kako je $2(E(\varepsilon^k) - E(\varepsilon^{k+1})) = (x^{k+1} - x^k)^T\, P\, (x^{k+1} - x^k)$, koristeći jednakost (2.3.29) dobija se

$$\lim_{k\to\infty} (x^{k+1} - x^k)^T\, P\, (x^{k+1} - x^k) = \lim_{k\to\infty} (r^k)^T (M^{-1})^T P M^{-1}\, r^k = 0,$$

gde je $r^k = Ax^k - b$ rezidualni vektor. To znači da AOR iteracije zadovoljavaju

$$\lim_{k\to\infty} ||x^{k+1} - x^k|| = 0 \text{ i } \lim_{k\to\infty} A\, x^k = b.$$

Za drugi deo hibridnog postupka matrica P je $P = (\sigma - \omega)\ B$, što daje $E(\varepsilon^{k+1}) \leq E(\varepsilon^k)$, tj. niz $E(\varepsilon^k)$ je nerastući i svi zaključci za prvi deo hibridnog postupka ostaju tačni. Ako se sa y^l označi tekuća iteracija na kraju l-tog ciklusa onda je $\lim_{l\to\infty} ||y^{l+1} - y^l|| = 0$, što po teoremi 1.2.10 znači da je niz y^l konvergentan za svako x^0 i njegova granica rešava sistem (2.3.24), čime je dokaz završen. □

Numerički rezultati dati u tabeli 2 pokazuju efikasnost hibridnog postupka. Matrica A je 100×100 matrica slučajnih brojeva sa četiri nenula elementa u svakoj koloni, pri čemu je mesto nenula elemanata (sem dijagonalnog) takodje slučajno. Vektor b je izabran tako da je tačno rešenje $x = [1, \ldots, 1]^T$, a izlazni kriterijum je bio

$$||x^k - x|| < 10^{-4}.$$

Prvi deo ciklusa je bio sa parametrima (σ, ω) a drugi deo ciklusa sa parametrima $(2, \omega)$. Postupak je testiran za različite vrednosti p i q. Broj iteracija hibridnog postupka relaksacije po kolonama je označen sa k, a k_1 je broj iteracija potrebnih za ispunjenje izlaznog kriterijuma dvoparametarskim postupkom relaksacije po kolonama sa parametrima (σ, ω).

(p,q)	(ω, σ)	k	k_1
(10,2)	(1,1)	91	143
(20,10)	(1,1)	120	143
(10,10)	(0.5,1.3)	147	207
(10,4)	(0.7,1.3)	88	142
(10,5)	(0.9,1.4)	67	111
(10,3)	(0.7,1.3)	104	144
(8,3)	(0.3,0.9)	149	271

Tabela 2.

3.

Rešavanje sistema nelinearnih jednačina

3.1 . Njutnov metod i njegove modifikacije

3.1.1. Definicije postupaka

Neka je dat sistem nelinearnih jednačina

$$F(x) = 0, \tag{3.1.1}$$

gde je $F = [f_1, \ldots, f_n]^T$, $F : D \subset \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$, $f_i : D \subset \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$, $x \in \mathcal{R}^n$. Pretpostavlja se da je F Freše diferencijabilno na D. Najpoznatiji postupak za rešavanje sistema (3.1.1) je Njutnov iterativni postupak. Ako je $F'(x) = [f'_{ij}(x)]$, $f'_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, jakobijan preslikavanja F u tački x, Njutnov iterativni niz se definiše sa

$$x^0 \in D, \; x^{k+1} = x^k - [F'(x^k)]^{-1} F(x^k), \; k = 0, 1, \ldots \tag{3.1.2}$$

Kao i kod sistema linearnih jednačina, postavlja se pitanje kada je niz (3.1.2) dobro definisan, konvergentan i kada je njegova granica rešenje sistema (3.1.1). Dovoljne uslove za konvergenciju daje poznata Njutn - Kantorovičeva teorema.

Teorema 3.1.1. *[29] Neka je $r > 0, x^0 \in \mathcal{R}^n, F : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$ i neka je F neprekidno diferencijabilno preslikavanje na lopti $B(x_0, r)$. Pret-*

postavlja se da F' zadovoljava Lipšicov uslov nad $B(x^0, r)$ sa konstantom γ i da je $F'(x^0)$ nesingularna matrica. Neka postoje konstante $\beta, \eta \geq 0$ tako da je

$$||F'(x^0)|| \leq \beta, \quad ||F'(x^0)^{-1} F(x^0)|| \leq \eta.$$

Definiše se $\gamma_R = \gamma\eta, \alpha = \gamma_R \eta$. Ako je $\alpha \leq \frac{1}{2}$ i $r \geq r_0$, $r_0 = (1 - \sqrt{1-2\alpha})/(\beta\gamma)$ onda je niz $\{x^k\}$ generisan Njutnovim iterativnim pravilom

$$x^{k+1} = x^k - [F'(x^k)]^{-1} F(x^k), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

dobro definisan i konvergira ka x^*, jedinstvenom rešenju jednačine $Fx = 0$ na $\overline{B(x^0, r)}$. Ako je $\alpha < \frac{1}{2}$ onda je x^* jedinstvena nula funkcije F na $\overline{B(x^0, r_1)}$, gde je $r_1 = \min\{r, (1 + \sqrt{1-2\alpha})/(\beta\gamma)\}$ i važi ocena

$$||x^k - x^*|| \leq (2\alpha)^{2^k} \frac{\eta}{\alpha}.$$

Pretpostavke ove teoreme ne zahtevaju egzistenciju x^* niti nesingularnost $F'(x^*)$, ali nisu pogodne za proveru, pa je njen značaj uglavnom teorijski.

Obično je lakše odrediti uslove za lokalnu konvergenciju iterativnog postupka. Pod lokalnom konvergencijom se podrazumeva da niz $\{x^k\}$ konvergira ka x^* ako je početna aproksimacija x^0 dovoljno blizu tačnog rešenja. Dovoljne uslove daje sledeća teorema.

Teorema 3.1.2. *[29] Neka je $F : \mathcal{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^n$ neprekidno diferencijabilno preslikavanje na otvorenom konveksnom skupu $D \subset \mathcal{R}^n$. Pretpostavlja se da postoji $x^* \in \mathcal{R}^n$ i $r, \beta > 0$ tako da je $B(x^*, r) \subset D, F(x^*) = 0, F'(x^*)^{-1}$ postoji i $||F'(x^*)^{-1}|| \leq \beta$, a F' zadovoljava Lipšicov uslov na $B(x^*, r)$ sa konstantom γ. Tada postoji $\varepsilon > 0$ tako da je za sve $x^0 \in B(x^*, \varepsilon)$ niz $\{x^k\}$ generisan Njutnovim iterativnim pravilom (3.1.2) dobro definisan, konvergira ka x^* i važi*

$$||x^{k+1} - x^*|| \leq \beta\gamma ||x^k - x^*||^2, \quad k = 0, 1, \ldots.$$

Osnovni problem kod primene Njutnovog postupka jeste izračunavanje jakobijana i njegove inverzne matrice $F'(x^k)^{-1}$ u svakoj iteraciji. To je bio motiv za razne modifikacije Njutnovog postupka u kojima se koristi neka aproksimacija za $F'(x^k)^{-1}$.

Drugi pravac u modifikacijama Njutnovog postupka predstavlja generalizacija iterativnih postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina. Postoje dva načina za kombinovanje postupka za rešavanje sistema linearnih jednačina sa Njutnovim postupkom. Prvi od njih se sastoji u sledećem. Iterativno pravilo (3.1.2) se može zapisati u ekvivalentnom obliku

$$F'(x^k)x^{k+1} = F'(x^k)x^k - F(x^k), \tag{3.1.3}$$

odakle se vidi da je izračunavanje $(k+1)$ - ve iteracije zapravo rešavanje sistema linearnih jednačina sa matricom $F'(x^k)$. Na taj sistem se može primeniti ma koji od postupaka definisanih u delu 2.1 i tako se dobijaju odgovarajući nelinearno – linearni postupci.

Druga generalizacija postupaka za sisteme linearnih jednačina su linearno – nelinearni postupci. Na primer, nelinearnim Gaus – Zajdelovim postupkom bi se i–ta komponenta $(k+1)$–ve iteracije dobijala kao rešenje jednačine

$$f_i(x_1^{k+1}, \ldots, x_{i-1}^{k+1}, x_i, x_{i+1}^k, \ldots, x_k^k) = 0, \tag{3.1.4}$$

po x_i za $i = 1, \ldots, n$, $\quad k = 0, 1, \ldots$. Analogno se definišu i ostale nelinearne generalizacije postupaka iz dela 2.1.

Ovde se posmatra nesimetrični SOR - Njutnov postupak, u daljem tekstu nesimetrični SORN postupak, koji nastaje kao kombinacija nelinearnog USSOR postupka i jednog koraka Njutnovog postupka u svakoj poluiteraciji. Za tako definisan postupak odredjeni su uslovi za lokalnu i globalnu konvergenciju sistema jednačina sa specijalnim osobinama.

3.1.2. Lokalna konvergencija nesimetričnog SORN postupka

U ovom delu je ispitivana lokalna konvergencija nesimetričnog SORN postupka za rešavanje sistema nelinearnih jednačina

$$F(x) = 0,$$

gde je $F : D \subset \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$, ili ekvivalentno

$$f_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, n,$$

pri čemu $f_i : D \subset \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}, \; i = 1, \ldots, n.$

Primenom teoreme Ostrovskog i rezultata o USSOR postupku za sisteme linearnih jednačina, dobijeni su rezultati za lokalnu konvergenciju nesimetričnog SORN postupka.

Nelinearni nesimetrični SOR postupak se, po analogiji sa linearnim slučajem, definiše kao postupak od dve poluiteracije na sledeći način:

1. korak: Rešiti po $\tilde{x}_i$ jednačinu

$$f_i(x_1^{k+\frac{1}{2}}, \ldots, x_{i-1}^{k+\frac{1}{2}}, \tilde{x}_i, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k) = 0,$$

2. korak: Odrediti novu poluiteraciju $x_i^{k+\frac{1}{2}}$

$$x_i^{k+\frac{1}{2}} = \sigma \tilde{x}_i + (1 - \sigma) x_i^k$$

1. i 2. korak se primenjuju redom za $i = 1, \ldots, n$

3. korak: Rešiti po $\bar{x}_i$ jednačinu

$$f_i(x_1^{k+\frac{1}{2}}, \ldots, x_{i-1}^{k+\frac{1}{2}}, \bar{x}_i, x_{i+1}^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}) = 0,$$

4. korak: Odrediti novu iteraciju x_i^{k+1}

$$x_i^{k+1} = \omega \bar{x}_i + (1 - \omega) x_i^{k+\frac{1}{2}}$$

3. i 4. korak se primenjuju redom za $i = n, \ldots, 1$

Pri tome su ω, σ realni nenula parametri. Ako se nelinearne jednačine

$$f_i(x_1^{k+\frac{1}{2}}, \ldots, x_{i-1}^{k+\frac{1}{2}}, \tilde{x}_i, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k) = 0,$$

$$f_i(x_1^{k+\frac{1}{2}}, \ldots, x_{i-1}^{k+\frac{1}{2}}, \bar{x}_i, x_{i+1}^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}) = 0,$$

rešavaju jednim korakom Njutnovog postupka, dobija se nesimetrični SORN (USSORN) postupak, koji se može zapisati na sledeći način:

$$x_i^{k+\frac{1}{2}} = x_i^k - \sigma \frac{f_i(x^{k,i})}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x^{k,i})}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{3.1.5}$$

$$x^{k,i} = [x_1^{k+\frac{1}{2}}, \ldots, x_{i-1}^{k+\frac{1}{2}}, x_i^k, x_{i+1}^k, \ldots, x_n^k]^T$$

$$x_i^{k+1} = x_i^{k+\frac{1}{2}} - \omega \frac{f_i(\bar{x}^{k,i})}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\bar{x}^{k,i})}, \quad i = n, \ldots, 1 \tag{3.1.6}$$

$$\bar{x}^{k,i} = [x_1^{k+\frac{1}{2}}, \ldots, x_i^{k+\frac{1}{2}}, x_{i+1}^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1}]^T.$$

Ovakva kombinacija poznatih iterativnih postupaka za sisteme linearnih jednačina i Njutnovog postupka je posmatrana u mnogim radovima, na primer SORN postupak - [31], MSORN - [37], AORN i MAORN postupak - [50], [9], [15], [47], [45].

Iterativna pravila (3.1.5) i (3.1.6) se mogu kraće zapisati kao

$$x^{k+\frac{1}{2}} = \hat{\mathcal{L}}_\sigma(x^k),$$

$$x^{k+1} = \hat{\mathcal{U}}_\omega(x^{k+\frac{1}{2}}).$$

Tada je operator nesimetričnog SORN postupka dat pomoću

$$\hat{\mathcal{S}}_{\sigma\omega} = \hat{\mathcal{U}}_\omega \hat{\mathcal{L}}_\sigma,$$

pa se iteracije (3.1.5) - (3.1.6) mogu zapisati u obliku

$$x^{k+1} = \hat{\mathcal{S}}_{\sigma\omega}(x^k), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{3.1.7}$$

Sistem $F(x) = 0$ ima rešenje x^* ako i samo ako je x^* nepokretna tačka za preslikavanje $\hat{\mathcal{S}}_{\sigma\omega}$.

$\hat{\mathcal{L}}_\sigma$ je operator SORN postupka i u radu [31] je pokazano da F - izvod operatora $\hat{\mathcal{L}}_\sigma$ u x^* ima oblik

$$\hat{\mathcal{L}}'_\sigma(x^*) = (E - \sigma L(x^*))^{-1}((1-\sigma)E + \sigma U(x^*)).$$

E označava jediničnu matricu, a

$$F'(x^*) = D(x^*)(E - L(x^*) - U(x^*))$$

je standardno razlaganje matrice $F'(x^*)$.

Koristeći činjenicu da je $\hat{\mathcal{U}}_\omega$ operator obrnutog SORN postupka, može se pokazati da je

$$\hat{\mathcal{U}}'_\omega(x^*) = (E - \omega U(x^*))^{-1}((1-\omega)E + \omega L(x^*)).$$

Operator $\hat{\mathcal{S}}_{\sigma\omega}$ je diferencijabilan u x^* i važi

$$\hat{\mathcal{S}}'_{\sigma\omega}(x^*) = \hat{\mathcal{U}}'_\omega(\mathcal{L}_\sigma(x^*))\hat{\mathcal{L}}'_\sigma(x^*) = \hat{\mathcal{U}}'_\omega(x^*)\hat{\mathcal{L}}'_\sigma(x^*),$$

odnosno

$$\hat{\mathcal{S}}'_{\sigma\omega}(x^*) = (E - \omega U(x^*))^{-1}((1-\omega)E + \omega L(x^*)\cdot$$
$$\cdot(E - \sigma L(x^*))^{-1}((1-\sigma)E - \sigma U(x^*)).$$

Očigledno je da $\hat{\mathcal{S}}'_{\sigma\omega}(x^*)$ ima oblik iterativne matrice USSOR postupka za sistem linearnih jednačina sa matricom $F'(x^*)$.

Po teoremi Ostrovskog (teorema 1.2.11) dovoljan uslov za lokalnu konvergenciju USSORN postupka je

$$\rho(\hat{\mathcal{S}}'_{\sigma\omega}(x^*)) < 1,$$

pa se svi dovoljni uslovi za konvergenciju USSOR postupka u linearnom slučaju mogu smatrati dovoljnim uslovima za lokalnu konvergenciju nesimetričnog SORN postupka. Jedno takvo tvrdjenje se može dobiti na osnovu teoreme 2.2.7.

Teorema 3.1.3. *Neka je F preslikavanje koje je F - diferencijabilno u x^*, pri čemu je $F(x^*) = 0$, $F'(x^*)$ je H - matrica i parametri (σ, ω) pripadaju oblasti $\mathcal{O}(\rho)$, $\rho = \rho(|L(x^*)| + |U(x^*)|)$, definisanoj sa*

$$\sigma \in (-\frac{1-\rho}{2\rho}, \frac{\rho+1}{2\rho}),$$

$$\omega \in (max\{\tfrac{|1-\sigma|+|\sigma|\rho-1}{|1-\sigma|+\rho(|\sigma|+1)}, \tfrac{|1-\sigma|+|\sigma|\rho-1}{|1-\sigma|(1-\rho)}\}, min\{\tfrac{1+|1-\sigma|+\rho|\sigma|}{\rho(1+|\sigma|)+|1-\sigma|}, \tfrac{1+|1-\sigma|-\rho|\sigma|}{|1-\sigma|(1+\rho)}\}) .$$

Tada je x^* tačka atrakcije za iteracije generisane iterativnim pravilom (3.1.7).

3.1.3. Globalna konvergencija nesimetričnog SORN postupka

Neka je dat sistem nelinearnih jednačina

$$f_i(x) = 0, \;\; i = 1, \ldots, n, \tag{3.1.8}$$

specijalnog oblika

$$f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j + s_i(x_i) \;\; i = 1, \ldots, n, \tag{3.1.9}$$

gde $a_{ij} \in \mathcal{R}, \;\; i,j = 1, \ldots, n, \;\; a_{ii} \neq 0, \;\; i = 1, \ldots, n$ a za svako $i = 1, \ldots, n, \;\; t \in \mathcal{R}, \;\; s_i(t)$ su realne nelinearne diferencijabilne funkcije.

Za ovakav sistem nelinearnih jednačina u ovom delu su odredjeni uslovi za globalnu konvergenciju modifikovanog nesimetričnog SORN postupka. Modifikacija postupka se pravi da bi se izbeglo izračunavanje izvoda preslikavanja $s_i, \;\; i = 1, \ldots, n$.

Modifikovani postupak se može zapisati preko sledećeg iterativnog pravila

$$x_i^{k+\frac{1}{2}} = x_i^k - \sigma \frac{f_i(x^{k,i})}{a_{ii}}, \;\; i = 1, \ldots, n \tag{3.1.10}$$

$$x_i^{k+1} = x_i^{k+\frac{1}{2}} - \omega \frac{f_i(\bar{x}^{k,i})}{a_{ii}}, \;\; i = n, \ldots, 1, \tag{3.1.11}$$

gde su $x^{k,i}, \;\; \bar{x}^{k,i}$ kao ranije. Ako se sa $\tilde{\mathcal{L}}_\sigma$ označi operator koji generiše iteracije date sa (3.1.10), a sa $\tilde{\mathcal{U}}_\omega$ operator za (3.1.11), onda se iterativno pravilo modifikovanog nesimetričnog SORN postupka može zapisati u obliku

$$x^{k+1} = \tilde{\mathcal{S}}_{\sigma\omega}(x^k) = \tilde{\mathcal{U}}_\omega(\tilde{\mathcal{L}}_\sigma(x^k)), \;\; k = 0, 1, \ldots. \tag{3.1.12}$$

Dovoljni uslovi za globalnu konvergenciju postupka (3.1.12) se odredjuju primenom Banahovog principa kontrakcije.

Neka je

$$p_{1i}(\alpha) = \sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| (|1-\alpha| + |\alpha| p_{1j}(\alpha)) + \sum_{j=i+1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|, \;\; i = 1, \ldots, n$$

$$p_{2i}(\alpha) = |\alpha| \sum_{j=1}^{i-1} |\frac{a_{ij}}{a_{ii}}| p_{2j}(\alpha) + 1, \quad i = 1, \ldots, n$$

$$q_{1i}(\alpha) = \sum_{j=1}^{i-1} |\frac{a_{ij}}{a_{ii}}| + \sum_{j=i+1}^{n} |\frac{a_{ij}}{a_{ii}}| (|1-\alpha| + |\alpha| q_{1j}(\alpha)), \quad i = n, \ldots, 1$$

$$q_{2i}(\alpha) = |\alpha| \sum_{j=i+1}^{n} |\frac{a_{ij}}{a_{ii}}| q_{2j}(\alpha) + 1, \quad i = n, \ldots, 1.$$

Teorema 3.1.4. *Neka su zadovoljeni sledeći uslovi:*

(a) $|s_i'(t)| \leq \gamma, \ t \in \mathcal{R}, \ i = 1, \ldots, n,$

(b) $|a_{ii}| \geq a > 0, \ i = 1, \ldots, n,$

(c) $\delta = \delta_1 \delta_2 < 1$, *gde je*

$$\delta_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \{|1-\sigma| + |\sigma| p_{1i}(\sigma) + \frac{|\sigma|}{a} \gamma p_{2i}(\sigma)\},$$

$$\delta_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \{|1-\omega| + |\omega| q_{1i}(\omega) + \frac{|\omega|}{a} \gamma q_{2i}(\omega)\}.$$

Tada, za svako $x^0 \in \mathcal{R}^n$ *niz* $\{x^k\}$ *definisan iterativnim pravilom (3.1.12) konvergira ka rešenju* x^* *sistema (3.1.8) - (3.1.9).*

Dokaz. Koristeći matematičku indukciju može se dokazati da za sve $x, y \in \mathcal{R}^n$ važe nejednakosti

$$|(\tilde{\mathcal{U}}_\omega(x))_i - (\tilde{\mathcal{U}}_\omega(y))_i| \leq \delta_2 ||x-y||_\infty, \ i = 1, \ldots, n,$$

$$|(\tilde{\mathcal{L}}_\sigma(x))_i - (\tilde{\mathcal{L}}_\sigma(y))_i| \leq \delta_1 ||x-y||_\infty, \ i = 1, \ldots, n,$$

što znači da je

$$||\tilde{\mathcal{U}}_\omega(x) - \tilde{\mathcal{U}}_\omega(y)||_\infty \leq \delta_2 ||x-y||_\infty,$$

$$||\tilde{\mathcal{L}}_\sigma(x) - \tilde{\mathcal{L}}_\sigma(y)||_\infty \leq \delta_1 ||x-y||_\infty.$$

Na osnovu toga je

$$||\tilde{\mathcal{S}_{\sigma\omega}}(x)-\tilde{\mathcal{S}_{\sigma\omega}}(y)||_\infty \le \delta_2||\tilde{\mathcal{L}}_\sigma(x)-\tilde{\mathcal{L}}_\sigma(y)||_\infty \le \delta_2\delta_1||x-y||_\infty.$$

Kako je $\delta_1\delta_2 < 1$, (uslov c) preslikavanje $\tilde{\mathcal{S}_{\sigma\omega}}$ je kontrakcija, čime je teorema dokazana.

□

Da bi se eksplicitno odredili uslovi za parametre (σ,ω) tako da je $\delta < 1$, uvode se oznake

$$p(\sigma) = \max_{1\le i\le n}\{p_{1i}(\sigma) + (\gamma/a)p_{2i}(\sigma)\},$$

$$q(\omega) = \max_{1\le i\le n}\{q_{1i}(\omega) + (\gamma/a)q_{2i}(\omega)\}.$$

Kako je

$$p(\sigma) = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}|(|1-\sigma| + |\sigma|p_{1j}(\sigma))+\right.$$

$$\left. + \sum_{j=i+1}^{n}|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}| + (\gamma/a)|\sigma|\sum_{j=1}^{i-1}|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}|p_{2j}(\sigma)+1\right),$$

sledi da je

$$p(\sigma) \le |1-\sigma|l_i + u_i + (\gamma/a) + |\sigma|l_i p(\sigma),$$

odnosno

$$p(\sigma) \le \max_{1\le i\le n}\frac{|1-\sigma|l_i + u_i + \gamma/a}{1-|\sigma|l_i}.$$

Analogno je

$$q(\omega) \le \max_{1\le i\le n}\frac{|1-\omega|u_i + l_i + \gamma/a}{1-|\omega|u_i},$$

pa se dobija sledeći rezultat o globalnoj konvergenciji.

Teorema 3.1.5. *Neka su zadovoljeni uslovi*

(a) $|s_i'(t)| \leq \gamma,\ t \in \mathcal{R},\ i = 1, \ldots, n,$

(b) $|a_{ii}| \geq a > 0,\ i = 1, \ldots, n.$

Ako su parametri σ i ω izabrani tako da važi

(c) $1 - |\sigma| l_i > 0,\ 1 - |\omega| u_i > 0,\ i = 1, \ldots, n$ *i*

$$\delta^* = \max_{1 \leq i,j \leq n} \frac{|1-\sigma| + |\sigma|(u_i + \gamma/a)}{1 - |\sigma| l_i} \cdot \frac{|1-\omega| + |\omega|(l_j + \gamma/a)|}{1 - |\omega| u_j} < 1,$$

onda, za svako $x^0 \in \mathcal{R}^n$, niz $\{x^k\}$ definisan iterativnim pravilom (3.1.12) konvergira ka rešenju x^* sistema(3.1.8) - (3.1.9).

U slučaju kada je $\gamma = 0$, preslikavanje (3.1.9) postaje linearno, pa se tvrdjenje teoreme 3.1.5 svodi na tvrdjenje leme 2.2.1, a oblast za parametre je data teoremom 2.2.8.

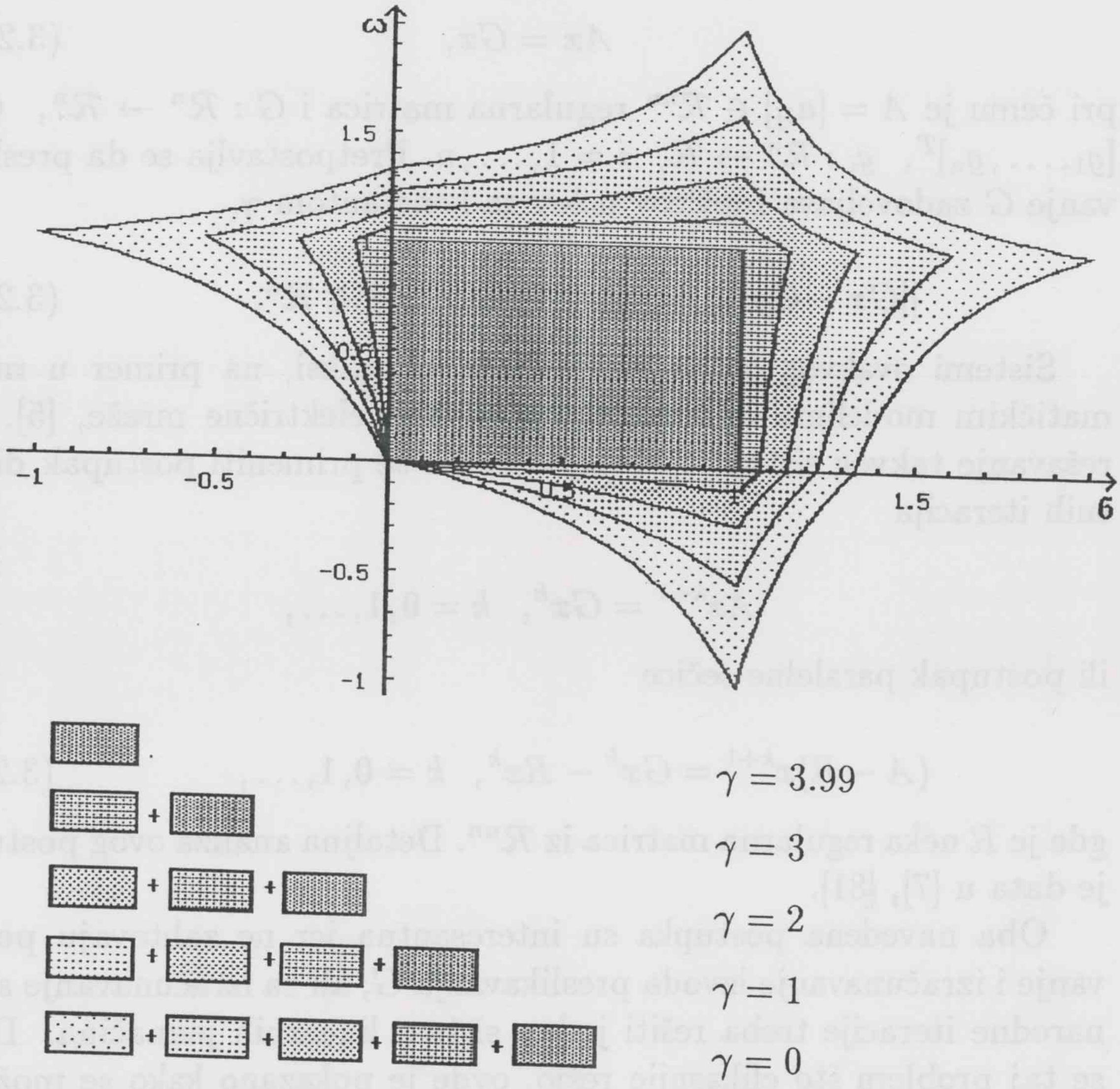
Oblast globalne konvergencije modifikovanog nesimetričnog SORN postupka iz teoreme 3.1.5 je ilustrovana na slici 3. Posmatran je sistem jednačina $Ax + S(x) = 0$, gde je $S(x) = [s_1(x), \ldots, s_n(x)]^T$ dijagonalno preslikavanje, tj. $s_i(x) = s_i(x_i)$, i $|s_i'(t)| \leq \gamma,\ t \in \mathcal{R}, i = 1, \ldots, n.$ Matrica A je blok tridijagonalna kvadratna matrica:

$$A = \begin{bmatrix} R & -E & 0 & \ldots & 0 \\ -E & R & -E & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & R & -E \\ 0 & 0 & \ldots & -E & R \end{bmatrix},$$

gde je R matrica

$$R = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 8 & -1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 8 & -1 \\ 0 & 0 & \ldots & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Na slici 3 je prikazana oblast konvergencije nesimetričnog SORN postupka za sistem jednačina ovakvog oblika i različite vrednosti parametra γ.



Slika 3.

3.2. Parcijalno relaksirani postupci

3.2.1. Konstrukcija postupaka

Neka je dat sistem jednačina

$$Ax = Gx, \tag{3.2.13}$$

pri čemu je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{R}^{nn}$ regularna matrica i $G : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$, $G = [g_1, \ldots, g_n]^T$, $g_i : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Pretpostavlja se da preslikavanje G zadovoljava Lipšicov uslov sa konstantom γ,

$$||Gx - Gy||_\infty \leq \gamma ||x - y||_\infty, \quad x, y \in \mathcal{R}^n. \tag{3.2.14}$$

Sistemi ovakvog oblika se javljaju u praksi, na primer u matematičkim modelima optimalnog napajanja električne mreže, [5]. Za rešavanje takvog sistema jednačina može se primeniti postupak direktnih iteracija

$$Ax^{k+1} = Gx^k, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

ili postupak paralelne sečice

$$(A - R)x^{k+1} = Gx^k - Rx^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{3.2.15}$$

gde je R neka regularna matrica iz $\mathcal{R}^{nn}$. Detaljna analiza ovog postupka je data u [7], [81].

Oba navedena postupka su interesantna jer ne zahtevaju poznavanje i izračunavanje izvoda preslikavanja G, ali za izračunavanje svake naredne iteracije treba rešiti jedan sistem linearnih jednačina. Da bi se taj problem što efikasnije rešio, ovde je pokazano kako se može izabrati matrica R tako da se sistem (3.2.15) lako rešava. Za tako konstruisane postupke dokazana je globalna konvergencija primenom Banahovog principa kontrakcije i rezultata o konvergenciji postupaka za rešavanje sistema linearnih jednačina.

Neka je

$$A = M - N$$

opšte razlaganje matrice A, pri čemu je matrica M regularna. Ako se izabere $R = -N$, iteracije (3.2.15) postaju

$$Mx^{k+1} = Nx^k + Gx^k, \ k = 0, 1, \ldots \tag{3.2.16}$$

Preslikavanje F se definiše na sledeći način

$$Fx = M^{-1}Nx + M^{-1}Gx. \tag{3.2.17}$$

Sistemi jednačina $Ax = Gx$ i $x = Fx$ su ekvivalentni, što sugeriše iterativno pravilo

$$x^{k+1} = Fx^k, \ k = 0, 1, \ldots, \tag{3.2.18}$$

pri čemu se matrica N bira tako da je $M^{-1}N$ neki od poznatih relaksacionih postupaka opisanih u delu 2.1. Ako je

$$A = D - T - S$$

standardno razlaganje matrice A, definiše se postupak SOR - paralelna sečica (SOR-PC)

$$x^{k+1} = \mathcal{L}_\omega x^k + \omega(D - \omega T)^{-1}Gx^k; \tag{3.2.19}$$

AOR - paralelna sečica (AOR - PC)

$$x^{k+1} = \mathcal{H}_{\sigma\omega} x^k + \omega(D - \sigma T)^{-1}Gx^k; \tag{3.2.20}$$

SSOR - paralelna sečica (SSOR - PC)

$$x^{k+1} = \mathcal{S}_{\omega\omega} x^k + \omega(2 - \omega)(D - \omega S)^{-1}(D - \omega T)^{-1}Gx^k; \tag{3.2.21}$$

i USSOR - paralelna sečica (USSOR - PC)

$$x^{k+1} = \mathcal{S}_{\sigma\omega} x^k + (\omega + \sigma + \omega\sigma)(D - \omega S)^{-1}(D - \sigma T)^{-1}Gx^k. \tag{3.2.22}$$

3.2.2. Konvergencija postupaka

Teorema 3.2.1. *Neka je $\{x^k\}$ niz generisan iterativnim pravilom (3.2.20), pri čemu je $x^0 \in \mathcal{R}^n$ proizvoljno. Ako su zadovoljeni uslovi:*

(a) $|a_{ii}| \geq a > 0$,

(b) $1 - |\sigma| l_i > 0, \;\; i = 2, \ldots, n$ *i*

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{|1-\omega| + (|\omega||1-\sigma| - |\sigma||1-\omega|) l_i + |\omega| u_i}{1 - |\sigma| l_i} + \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|\omega|\gamma/a}{1 - |\sigma| l_i} < 1,$$

onda niz $\{x^k\}$ konvergira ka jedinstvenom rešenju sistema jednačina $Ax = Gx$.

Dokaz. Sistemi jednačina $Ax = Gx$ i $x = Fx$, gde je

$$Fx = \mathcal{H}_{\sigma\omega} x + \omega (D - \sigma T)^{-1} G x,$$

su ekvivalentni.

Preslikavanje F zadovoljava

$$||Fx - Fy||_\infty = ||\mathcal{H}_{\sigma\omega}(x-y) + \omega (D - \sigma T)^{-1} (Gx - Gy)||_\infty,$$

Za procenu $||\mathcal{H}_{\sigma\omega}||_\infty$ definišu se veličine

$$p_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{i-1} |\frac{a_{ij}}{a_{ii}}| (|1-\alpha| + |\alpha| p_j(\alpha)) + \sum_{j=i+1}^{n} |\frac{a_{ij}}{a_{ii}}|, \;\; i = 1, \ldots, n, \;\; \alpha \in \mathcal{R}.$$

Korišćenjem matematičke indukcije, može se pokazati da za vektor $z = \mathcal{H}_{\sigma\omega} u$, pri čemu je $||u||_\infty = 1$, važi

$$|z_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|1-\omega| + |\omega| p_i(\sigma)\}.$$

Tada, po definiciji matrične norme, važi

$$||\mathcal{H}_{\sigma\omega}||_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|1-\omega| + |\omega| p_i(\sigma)\}.$$

Ako je

$$p(\sigma) = \max_{1\leq i\leq n} p_i(\sigma),$$

dobija se

$$p_i(\sigma) \leq \sum_{j=1}^{i-1} |\frac{a_{ij}}{a_{ii}}|(|1-\sigma| + |\sigma|p(\sigma)) + \sum_{j=i+1}^{n} |\frac{a_{ij}}{a_{ii}}|,$$

odnosno,

$$p(\sigma) \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{|1-\sigma|l_i + u_i}{1-|\sigma|l_i},$$

pa je

$$||\mathcal{H}_{\sigma\omega}||_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{|1-\omega| + (|\omega||1-\sigma| - |\sigma||1-\omega|)l_i + |\omega|u_i}{1-|\sigma|l_i}.$$

Kako je

$$||Fx - Fy||_\infty \leq (||\mathcal{H}_{\sigma\omega}||_\infty + |\omega|||(D-\sigma T)^{-1}||_\infty \gamma)||x-y||_\infty,$$

i

$$||(D-\sigma T)^{-1}||_\infty \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{a(1-|\sigma|l_i)},$$

onda je

$$||Fx - Fy||_\infty \leq q||x-y||_\infty,$$

gde je

$$q = \max_{1\leq i\leq n} \frac{|1-\omega| + (|\omega||1-\sigma| - |\sigma||1-\omega|)l_i + |\omega|u_i}{1-|\sigma|l_i}$$

$$+ \max_{1\leq i\leq n} \frac{|\omega|\gamma/a}{1-|\sigma|l_i} < 1.$$

Prema tome, zadovoljeni su uslovi Banahovog principa kontrakcije, čime je teorema dokazana. □

Kada je $\omega = \sigma$ postupak (3.2.20) se svodi na (3.2.19), i neposredna posledica prethodne teoreme je sledeće tvrdjenje.

Posledica 3.2.1. *Neka je niz $\{x^k\}$ generisan iterativnim pravilom (3.2.20). Ako su zadovoljeni uslovi:*

(a) $|a_{ii}| \geq a > 0, \;\; i = 1, \ldots, n$

(b) $1 - |\omega| l_i > 0, \;\; i = 2, \ldots, n$ *i*

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{|1-\omega| + |\omega| u_i}{1 - |\omega| l_i} + \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|\omega|\gamma / a}{1 - |\omega| l_i} < 1,$$

onda niz $\{x^k\}$ konvergira ka jedinstvenom rešenju sistema jednačina $Ax = Gx$ za svaki početni vektor $x^0 \in \mathcal{R}^n$.

Ako je $\gamma = 0$, sistem (3.2.13) je linearan, a rezultat teoreme 3.2.1 se svodi na tvrdjenje dato u radu [41].

Teorema 3.2.2. *Neka je niz $\{x^k\}$ generisan iterativnim pravilom (3.2.22). Ako su zadovoljeni uslovi:*

(a) $|a_{ii}| \geq a > 0, \;\; i = 1, \ldots, n$

(b) $1 - |\sigma| l_i > 0, \;\; 1 - |\omega| u_i > 0, \;\; i = 1, \ldots, n$ *i*

$$\max_{1 \leq i,j \leq n} \frac{|1-\sigma| + |\sigma| u_j}{1 - |\sigma| l_j} \cdot \frac{|1-\omega| + |\omega| l_i}{1 - |\omega| u_i} + \max_{1 \leq i,j \leq n} \frac{|\omega + \sigma - \omega\sigma|\gamma / a^2}{(1 - |\sigma| l_i)(1 - |\omega| u_j)} < 1,$$

onda niz $\{x^k\}$ konvergira ka jedinstvenom rešenju sistema jednačina $Ax = Gx$ za svaki početni vektor $x^0 \in \mathcal{R}^n$.

Dokaz. Dokaz se izvodi istom tehnikom kao i za prethodnu teoremu. Kako je $\mathcal{S}_{\sigma\omega} = \mathcal{U}_\omega \mathcal{L}_\sigma$, a ocena za $||\mathcal{L}_\sigma||_\infty$ je data u dokazu teoreme 3.2.1., za procenu $||\mathcal{U}_\omega||_\infty$ definišu se veličine

$$q_i(\alpha) = \sum_{j=1}^{i-1} |\frac{a_{ij}}{a_{ii}}| + \sum_{j=i+1}^{n} |\frac{a_{ij}}{a_{ii}}|(|1-\alpha| + |\alpha| q_j(\alpha)), \ \ i = 1, \ldots, n, \ \ \alpha \in \mathcal{R}.$$

Za

$$q(\omega) = \max_{1 \leq i \leq n} q_i(\omega)$$

važi

$$q(\omega) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|1-\omega| + |\omega| l_i}{1 - |\omega| u_i},$$

što implicira

$$||\mathcal{U}_\omega||_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|1-\omega| + |\omega| l_i}{1 - |\omega| u_i}.$$

Dalje je

$$||\mathcal{S}_{\sigma\omega}||_\infty \leq \max_{1 \leq i,j \leq n} \frac{|1-\sigma| + |\sigma| u_i}{1 - |\sigma| l_i} \cdot \frac{|1-\omega| + |\omega| l_j}{1 - |\omega| u_j}.$$

Kako je

$$||Fx - Fy||_\infty \leq (||\mathcal{S}_{\sigma\omega}||_\infty + |\omega + \sigma - \omega\sigma| \cdot$$

$$\cdot ||(D - \sigma T)^{-1}||_\infty ||(D - \omega S)^{-1}||_\infty \gamma) ||x - y||_\infty$$

i

$$|\omega + \sigma - \omega\sigma| \; ||(D - \sigma T)^{-1}||_\infty ||(D - \omega S)^{-1}||_\infty \gamma$$

$$\leq \max_{1 \leq i,j \leq n} \frac{|\omega + \sigma - \omega\sigma| \gamma / a^2}{(1 - |\sigma| l_i)(1 - |\omega| u_j)},$$

važi

$$||Fx - Fy||_\infty \leq q ||x - y||_\infty,$$

gde je

$$q = \max_{1\le i,j\le n} \frac{|1-\sigma| + |\sigma| u_j}{1-|\sigma| l_j} \cdot \frac{|1-\omega| + |\omega| l_i}{1-|\omega| u_i} +$$

$$+ \max_{1\le i,j\le n} \frac{|\omega + \sigma - \omega\sigma|\gamma/a^2}{(1-|\sigma| l_j)(1-|\omega| u_i)} < 1,$$

pa su uslovi Banahovog principa kontrakcije zadovoljeni i tvrdjenje teoreme dokazano.

□

Kako se za $\sigma = \omega$ nesimetrični SOR postupak svodi na simetrični SOR, neposredna posledica ove teoreme je tvrdjenje o konvergenciji postupka (3.2.21).

Posledica 3.2.2 *Neka je niz $\{x^k\}$ generisan iterativnim pravilom (3.2.21). Ako su zadovoljeni uslovi:*

(a) $|a_{ii}| \ge a > 0,\ i = 1, \dots, n$

(b) $1 - |\omega| l_i > 0,\ 1 - |\omega| u_i > 0,\ i = 1, \dots, n$ *i*

$$\max_{1\le i,j\le n} \frac{|1-\omega| + |\omega| u_i}{1-|\omega| l_i} \cdot \frac{|1-\omega| + |\omega| l_j}{1-|\omega| u_j} + \max_{1\le i,j\le n} \frac{|\omega(2-\omega)|\gamma/a^2}{(1-|\omega| l_i)(1-|\omega| u_j)} < 1,$$

onda niz $\{x^k\}$ konvergira ka jedinstvenom rešenju sistema jednačina $Ax = Gx$ za svaki početni vektor $x^0 \in \mathcal{R}^n$.

Sistemi jednačina koji nastaju diskretizacijom konturnih problema su oblika (3.2.13). Oblast konvergencije AOR - PC postupka odredjena u teoremi 3.2.1 je ilustrovana na primeru eliptične jednačine:

$$\Delta u + \lambda u = s(u),\ \ u = u(x,y),\ \ (x,y) \in \Omega \tag{3.2.23}$$

uz konturni uslov

$$u(x,y) = 0,\ \ (x,y) \in \partial\Omega, \tag{3.2.24}$$

pri čemu je Ω kvadrat u $\mathcal{R}^2$ i $|s'(t)| \leq \gamma, \quad t \in \mathcal{R}$.

Diskretizacijom ovog problema na uniformnoj kvadratnoj mreži, sa prirodnim poretkom, [33], dobija se sistem jednačina oblika (3.1.8) - (3.1.9). Za dati prirodni broj n, nastaje $(n-1)^2$ jednačina oblika

$$(-4+\lambda h^2)t_{ij}+t_{i-1,j}+t_{i,j-1}+t_{i+1,j}+t_{i,j+1} = h^2 s(t_{ij}), \quad i,j = 1,\ldots,n-1$$

$h = 1/n$, uz konturni uslov

$$0 = t_{kn} = t_{nk} = t_{0k} = t_{k0}, \quad k = 1,\ldots,n.$$

Vrednosti parametara σ, ω za $\lambda = -4$, su odredjene uslovima (a) – (d) :

(a) $0 < \omega \leq 1$, $c_2 < \sigma < c_1$,

(b) $0 < \sigma \leq 1$, $1 \leq \omega < (8+8h^2-4\sigma)/(8+4h^2+\gamma h^2-4\sigma)$,

(c) $c_2 < \sigma \leq 0$, $1 \leq \omega < (8+8h^2+4\sigma)/(8+4h^2+\gamma h^2)$,

(d) $1 \leq \sigma < c_1$ $1 \leq \omega < (8+8h^2-4\sigma)/(4+4h^2+\gamma h^2)$,

gde je

$$c_1 = 1 + \frac{4-\gamma}{4}h^2, \; c_2 = -\frac{4-\gamma}{4}h^2.$$

Lako se vidi da $D = (0,1] \times (0,1]$ uvek pripada oblasti konvergencije za $\gamma < 4$.

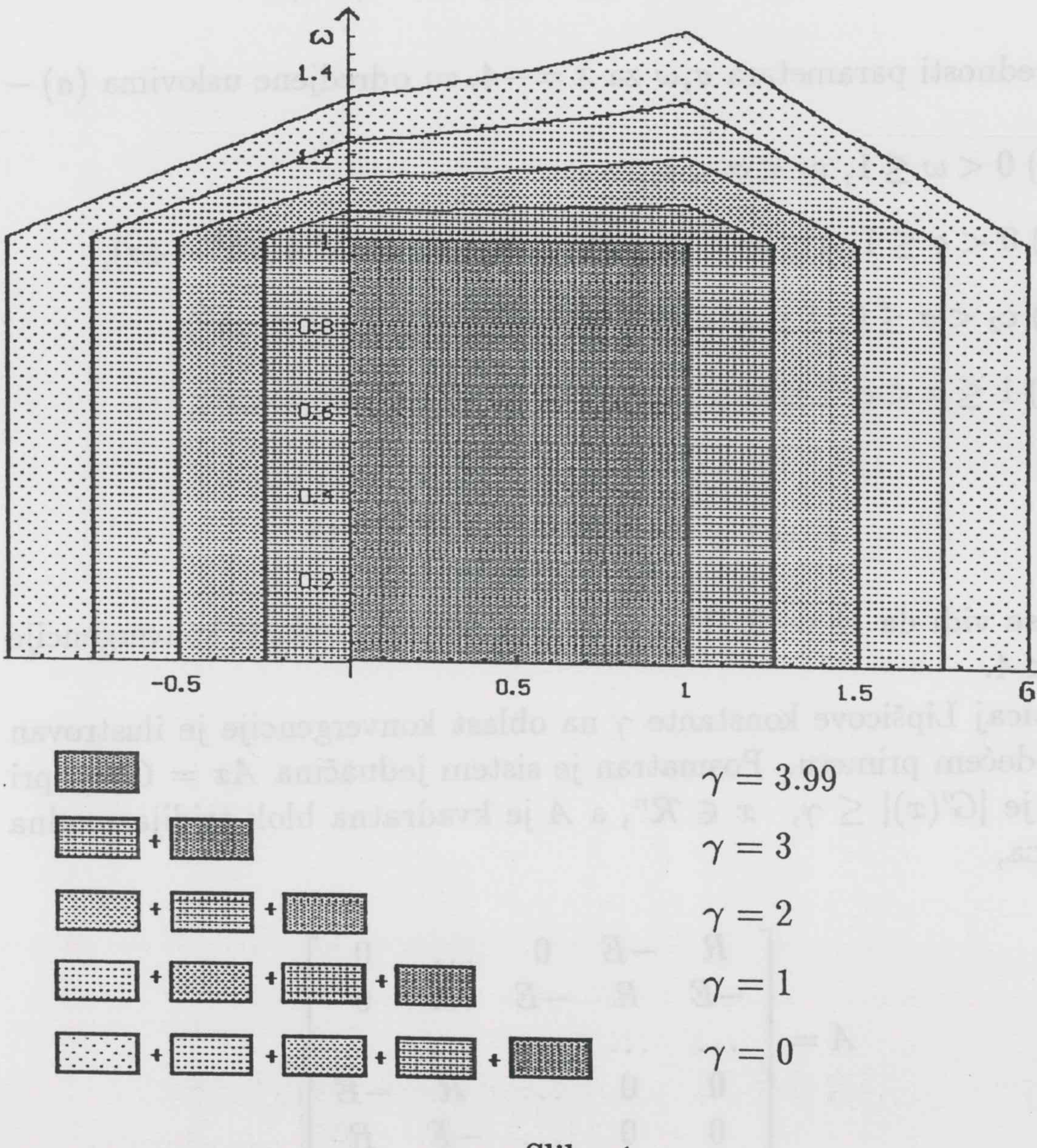
Uticaj Lipšicove konstante γ na oblast konvergencije je ilustrovan na sledećem primeru. Posmatran je sistem jednačina $Ax = G(x)$, pri čemu je $|G'(x)| \leq \gamma, \quad x \in \mathcal{R}^n$, a A je kvadratna blok tridijagonalna matrica,

$$A = \begin{bmatrix} R & -E & 0 & \ldots & 0 \\ -E & R & -E & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & R & -E \\ 0 & 0 & \ldots & -E & R \end{bmatrix},$$

gde je R matrica

$$R = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 8 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 8 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

Oblast konvergencije AOR - PC postupka je prikazana na slici 4 za različite vrednosti konstante γ.



Slika 4.

3.3. Nelinearni AOR postupak

3.3.1. Formulacija postupka

Neka je dat sistem nelinearnih jednačina

$$Fx = 0,$$

gde je

$$Fx = Ax + \Phi x, \tag{3.3.25}$$

$A = [a_{ij}] \in \mathcal{R}^{nn}$ i $\Phi : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ je dijagonalno preslikavanje, odnosno $\Phi x = [\phi_1(x_1), ..., \phi_n(x_n)]^T$, $\phi_i : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

Problem rešavanja jednačine $Fx = 0$, gde F ima oblik (3.3.25), a matrica A pripada nekoj klasi specijalnih matrica sreće se u čitavom nizu oblasti, kao što su: metod konačnih razlika u rešavanju diferencijalnih jednačina, problemi linearne komplementarnosti u operacionom istraživanju, Markovljevi procesi u verovatnoći i slično.

U knjizi [81] posmatran je nelinearni SOR postupak kada matrica A pripada klasi M-matrica. Ovde su ispitivanja proširena na AOR postupak i slučaj kada A pripada klasi H-matrica. Kako su M-matrice potklasa H-matrica, a SOR postupak specijalan slučaj AOR postupka, uslovi za konvergenciju koji su ovde odredjeni se odnose na opštiji postupak i važe za širu klasu matrica, pa kao specijalan slučaj sadrže rezultate iz [81]. Dokaz se zasniva na uopštenju Banahovog principa kontrakcije, preciznije na teoremi o P - kontrakciji.

Po analogiji sa postupcima za rešavanje sistema linearnih jednačina, definišu se i postupci za sisteme nelinearnih jednačina, kao što je već navedeno u delu 3.1.

Nelinearni JOR postupak za sistem $Fx = 0$, gde je F oblika (3.3.25) i $\omega \neq 0$ može se opisati na sledeći način:

1. korak: Rešiti po x_i jednačinu

$$a_{ii}x_i + \phi_i(x_i) + \sum_{j=1; j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^k = 0.$$

2. korak: Odrediti novu iteraciju x_i^{k+1}

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega(x_i - x_i^k)$$

za $i = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$

Nelinearni SOR postupak za isti problem dat je iterativnim pravilom:

1. korak: Rešiti po x_i jednačinu

$$a_{ii}x_i + \phi_i(x_i) + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k = 0.$$

2. korak: Odrediti novu iteraciju x_i^{k+1}

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \omega(x_i - x_i^k)$$

za $i = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$

Iterativno pravilo za nelinearni AOR postupak za posmatrani sistem glasi:

1. korak: Rešiti po x_i jednačinu

$$a_{ii}x_i + \phi_i(x_i) + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\bar{x}_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^k = 0. \qquad (3.3.26)$$

2. korak: Izračunati $\bar{x}_i^{k+1}$

$$\bar{x}_i^{k+1} = x_i^k + \sigma(x_i - x_i^k). \qquad (3.3.27)$$

3. korak: Odrediti novu aproksimaciju x_i^{k+1}

$$x_i^{k+1} = (1 - \frac{\omega}{\sigma})x_i^k + \frac{\omega}{\sigma}\bar{x}_i^{k+1} \qquad (3.3.28)$$

za $i = 1, \ldots, n, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

gde su $\omega \neq 0$ i σ realni parametri.

Za $\omega = \sigma$ jednačine (3.3.27) i (3.3.28) postaju $\bar{x}_i^{k+1} = x_i^k + \omega(x_i - x_i^k)$ i $x_i^{k+1} = \bar{x}_i^{k+1}$ pa se kao i u linearnom slučaju dobija SOR postupak, a za $\sigma = 0$ postupak se svodi na JOR.

3.3.2. Konvergencija nelinearnog AOR postupka

U [81] razmatrana je konvergencija JOR i SOR postupka i dokazano je tvrdjenje da oba postupka globalno konvergiraju kada je Ψ neprekidno, dijagonalno i izotono preslikavanje, a A iz klase M-matrica i $\omega \in (0,1]$.

U ovom delu se razmatra konvergencija nelinearnog AOR postupka. Za dokaz teoreme o konvergenciji koristi se sledeće tvrdjenje.

Teorema 3.3.1. *[81] Neka preslikavanja $G_k : D\times D \subset \mathcal{R}^n\times\mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ zadovoljavaju uslove za neko $D_0 \subset D$*

$$|G_k(x,z) - G_k(y,z)| \leq Q|x-y|, \tag{3.3.29}$$

$$|G_k(z,x) - G_k(z,y)| \leq R|x-y|, \tag{3.3.30}$$

za sve $x,y \in D_0$, pri čemu su $Q, R \in \mathcal{R}^{nn}$ nenegativne matrice, $\rho(Q) < 1$ i $P = (E-Q)^{-1}R$. Neka za $H_k : D \subset \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ dato sa

$$H_k x = |G_k(x,x) - Gx|, \quad k = 1,2,\ldots$$

važi

$$\lim_{k\to\infty} H_k x = 0, \quad x \in D_0,$$

i neka je $x^0 \in D_0$ takva tačka za koju $x = G_1(x,x^0)$ ima rešenje $x^1 \in D_0$ i

$$S = \{x \in \mathcal{R}^n | \; |x-x^1| \leq u = (E-P)^{-1}(P|x^1-x^0| + 2(E-Q)^{-1}v) \subset D_0,$$

gde je $v \geq H_k(x^1)$, $k = 1,2,\ldots$.

Tada jednačina

$$x = G_k(x, x^{k-1}), \quad k = 1,2,\ldots$$

ima jedinstveno rešenje $x^k \in S$, i $\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$, gde je $x^* \in S$ jedinstvena nepokretna tačka preslikavanja G u D_0.

Na osnovu ovog rezultata dokazuje se teorema o konvergenciji AOR postupka.

Teorema 3.3.2. *Neka je $A = [a_{ij}] \in \mathcal{R}^{nn}$ H - matrica sa osobinom $a_{ii} > 0$ $i = 1, \ldots, n$, $\Phi : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$ neprekidno, dijagonalno i izotono preslikavanje i neka je $Fx = Ax + \Phi x$. Tada je iterativni niz $\{x^k\}$ generisan nelinearnim AOR postupkom dobro definisan za svako $x^0 \in \mathcal{R}^n$, $\omega \in (0,1]$, $\sigma \in [0,1]$ i konvergira ka jedinstvenom rešenju x^* jednačine $Fx = 0$.*

Dokaz. Neka je $A = D - S - T = D(E - L - U)$ standardno razlaganje matrice A i $\Phi = [\phi_1, ..., \phi_n]^T$, $\phi_i : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Funkcije $r_i : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ se definišu kao

$$r_i(t) = a_{ii}t + \phi_i(t), \quad t \in R, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Kako je $a_{ii} > 0$ i ϕ_i izotono preslikavanje sledi da je preslikavanje r_i bijekcija, pa postoji inverzno preslikavanje za r_i, odnosno postoji inverzni operator za $D + \Phi$. Na osnovu izotonosti preslikavanja Φ, za $t_1, t_2 \in \mathcal{R}$ i svako $i = 1, \ldots, n$ važi

$$|t_1 - t_2| \leq |(t_1 - t_2 + \frac{1}{a_{ii}}(\phi_i(t_1) - \phi_i(t_2))| = \frac{1}{a_{ii}}|r_i(t_1) - r_i(t_2)|,$$

pa za proizvoljne $s_1, s_2 \in \mathcal{R}$ i $t_1 = r_i^{-1}(s_1)$, $t_2 = r_i^{-1}(s_2)$ sledi

$$|r_i^{-1}(s_1) - r_i^{-1}(s_2)| \leq \frac{1}{a_{ii}}|s_1 - s_2|. \tag{3.3.31}$$

Ako je sa $(D + \Phi)^{-1}$ označen inverzni operator za $D + \Phi$, tada je

$$(D + \Phi)^{-1}x = [r_1^{-1}(x_1), \ldots, r_n^{-1}(x_n)]^T$$

i relacija (3.3.31) se može pisati u matričnom zapisu

$$|(D + \Phi)^{-1}x - (D + \Phi)^{-1}y| \leq D^{-1}|x - y|, \quad x, y \in \mathcal{R}^n.$$

Neka je preslikavanje $\tilde{G} : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$, $\tilde{G} = [\tilde{g}_1, ..., \tilde{g}_n]^T$, $\tilde{g}_i : \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}$, $i = 1, \ldots, n$, definisano sa

$$\tilde{g}_i(x,y) = (1-\omega)y_i + \omega r_i^{-1}\left((1-\frac{\sigma}{\omega})(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}y_j)\right. \qquad (3.3.32)$$

$$\left. - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}y_j + \frac{\sigma}{\omega}(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j)\right)$$

i preslikavanje $G_\omega : \mathcal{R}^n \to \mathcal{R}^n$

$$G_\omega x = (1-\omega)x + \omega(D+\Phi)^{-1}(S+T)x.$$

Jednačine $Fx = 0$ i $G_\omega x = x$ su ekvivalentne za $\omega \neq 0$. Takodje je zadovoljeno

$$\tilde{G}(x,x) = G_\omega x. \qquad (3.3.33)$$

Niz $\{x^k\}$ definisan AOR postupkom zadovoljava

$$x^{k+1} = \tilde{G}(x^{k+1}, x^k), \;\; k = 0,1,\ldots \qquad (3.3.34)$$

Prema tome, problem se svodi na ispitivanje konvergencije niza datog implicitnim pravilom (3.3.34). U zavisnosti od parametara σ, ω, mogu nastupiti dva slučaja:

(i) slučaj: $0 \leq \sigma \leq \omega \leq 1, \;\; \omega \neq 0.$

Za $x, y, z \in \mathcal{R}^n$ na osnovu (3.3.31) važi

$$|\tilde{g}_i(x,z) - \tilde{g}_i(y,z)| \leq |(1-\omega)z_i + \omega r_i^{-1}\left((1-\frac{\sigma}{\omega})(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}z_j)\right.$$

$$\left. - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}z_j + \frac{\sigma}{\omega}(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j)\right) - (1-\omega)z_i$$

$$+\omega r_i^{-1}\left((1-\frac{\sigma}{\omega})(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}z_j) - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}z_j + \frac{\sigma}{\omega}(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}y_j)\right)|$$

$$\leq \sigma|\frac{1}{a_{ii}}(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}y_j)| \leq \frac{\sigma}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}||x_i - y_i|,$$

za $i = 1, \ldots, n$. Odnosno,

$$|\tilde{G}(x,z) - \tilde{G}(y,z)| \leq \sigma|L||x-y|.$$

Analogno je

$$|\tilde{g}_i(z,x) - \tilde{g}_i(z,y)| \leq \frac{1}{a_{ii}} \left((1-\omega) + (\omega - \sigma) \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}| + \omega \sum_{j=i+1}^{n} |a_{ij}| \right) |x_i - y_i|,$$

za $i = 1, \ldots, n$. U matričnom zapisu prethodne relacije glase

$$|\tilde{G}(z,x) - \tilde{G}(z,y)| \leq ((1-\omega)E + (\omega - \sigma)|L| + \omega|U|)\,|x-y|.$$

Neka je

$$Q = \sigma|L| \quad \text{i} \quad R = (1-\omega)E + (\omega-\sigma)|L| + \omega|U|.$$

Kako je $\rho(Q) = 0$ i $Q \geq 0$ to je $(E-Q)^{-1} \geq 0$, što zajedno sa $R \geq 0$ daje da je razlaganje matrice

$$\omega\mathcal{M}(D^{-1}|A|) = E - Q - R$$

regularno, a kako je $\omega > 0$, $D^{-1} \geq 0$ i A je H-matrica onda je $\omega\mathcal{M}(D^{-1}|A|)$ M-matrica pa je $\rho((E-Q)^{-1}R) < 1$ na osnovu teoreme o regularnom razlaganju, (teorema 1.2.5).

Tako su zadovoljeni svi uslovi teoreme 3.3.1 sa $G_k(x,y) = \tilde{G}(x,y)$ $k = 0, 1, \ldots$, pa niz $\{x^k\}$ konvergira ka rešenju jednačine $Fx = 0$.

(ii) slučaj: $0 < \omega < \sigma \leq 1$

Ako je $\omega = \sigma$ na osnovu (i) slučaja zna se da je postupak konvergentan. Tada se operator $\tilde{G}(x,y)$ svodi na operator nelinearnog SOR postupka $\tilde{H} = [\tilde{h}_1, \ldots \tilde{h}_n]^T$, odnosno

$$\tilde{h}_i(x,y) = (1-\sigma)y_i + \sigma r_i^{-1}(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}y_j), \; i = 1, \ldots, n$$

$$\bar{x}^k = \tilde{H}(\bar{x}^k, x^k).$$

Kako je $\sigma \in (0,1]$ zadovoljene su nejednakosti

$$|\tilde{H}(x,z) - \tilde{H}(y,z)| \leq \sigma|L||x-y|,$$

$$|\tilde{H}(z,x) - \tilde{H}(z,y)| \leq ((1-\sigma)E + \sigma|U|)|x-y|.$$

Za razliku dve uzastopne iteracije AOR postupka važi

$$|x^{k+1} - x^k| = |(1-\frac{\omega}{\sigma})x^k + \frac{\omega}{\sigma}\bar{x}^k - (1-\frac{\omega}{\sigma})x^{k-1} - \frac{\omega}{\sigma}\bar{x}^{k-1}| \leq$$

$$\leq (1-\frac{\omega}{\sigma})|x^k - x^{k-1}| + \frac{\omega}{\sigma}|\bar{x}^k - \bar{x}^{k-1}|.$$

Takodje je

$$|\bar{x}^k \bar{x}^{k-1}| = |\tilde{H}(\bar{x}^k, x^k) - \tilde{H}(\bar{x}^{k-1}, x^{k-1}|$$

$$\leq |\tilde{H}(\bar{x}^k, x^k) - \tilde{H}(\bar{x}^k, x^{k-1})| + |\tilde{H}(\bar{x}^k, x^{k-1}) - \tilde{H}(\bar{x}^{k-1}, x^{k-1})| \leq$$

$$\leq ((1-\sigma)E + \sigma|U|)|x^k - x^{k-1}| + \sigma|L||\bar{x}^k - \bar{x}^{k-1}|.$$

Neka je $B = (E - \sigma|L|)^{-1}((1-\sigma)E + \sigma|U|)$. Tada je

$$|x^{k+1} - x^k| \leq ((1-\frac{\omega}{\sigma})E + \frac{\omega}{\sigma}B)|x^k - x^{k-1}|,$$

odnosno

$$|x^{k+1} - x^k| \leq ((1-\frac{\omega}{\sigma})E + \frac{\omega}{\sigma}B)^k|x^1 - x^0|.$$

Dalje je

$$|x^{k+m} - x^k| \leq \sum_{i=k}^{k+m-1} ((1-\frac{\omega}{\sigma})E + \frac{\omega}{\sigma}B)^i|x^1 - x^0|. \qquad (3.3.35)$$

Neka je $C = (1-\frac{\omega}{\sigma})E + \frac{\omega}{\sigma}B$. Razlaganje matrice

$$\sigma\mathcal{M}(D^{-1}|A|) = E - \sigma|L| - ((1-\sigma)E + \sigma|U|)$$

je regularno, a kako je $\sigma > 0$, $D^{-1} > 0$ i A je H-matrica, onda je i $\sigma\mathcal{M}(D^{-1}|A|)$ M-matrica, pa je na osnovu teoreme 1.2.5 $\rho(B) < 1$.

Na osnovu teoreme o ekstrapolaciji za $0 < \frac{\omega}{\sigma} < 1$ važi

$$\rho\left((1-\frac{\omega}{\sigma})E + \frac{\omega}{\sigma}B\right) < 1,$$

odnosno $\rho(C) < 1$.

Iz relacije (3.3.35) dobija se

$$|x^{k+m} - x^k| \le C^k \sum_{i=0}^{m-1} C^i|x^1 - x^0| \le (E-C)^{-1}C^k|x^1 - x^0|$$

za $k, m \in N$. Prema tome niz $\{x^k\}$ je Košijev u prostoru $\mathcal{R}^n$, pa je konvergentan, $\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$. Na osnovu neprekidnosti preslikavanja $\tilde{G}$ i relacije (3.3.33) važi

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x^{k+1} = \lim_{k\to\infty} \tilde{G}(x^k, x^{k+1}) = \tilde{G}(x^*, x^*) = G_\omega x^*,$$

pa je x^* rešenje jednačine $Fx = 0$. □

Očigledno, kao posledica ove teoreme dobija se da JOR ($\sigma = 0$) i SOR ($\omega = \sigma \in (0,1]$) postupci konvergiraju ako matrica A pripada klasi H-matrica sa pozitivnom dijagonalom koja je šira od klase M-matrica. Prema tome, teoreme date u [81] specijalni slučajevi teoreme 3.3.2. Oblast konvergencije za parametre ω, σ može se proširiti za neke specijalne potklase H-matrica na osnovu teorije o linearnom AOR postupku. Pri primeni AOR postupka potrebno je rešiti nelinearne jednačine u 1. koraku algoritma. Ukoliko se ne mogu tačno rešiti, primenjuje se neki od iterativnih postupaka za nelinearne jednačine.

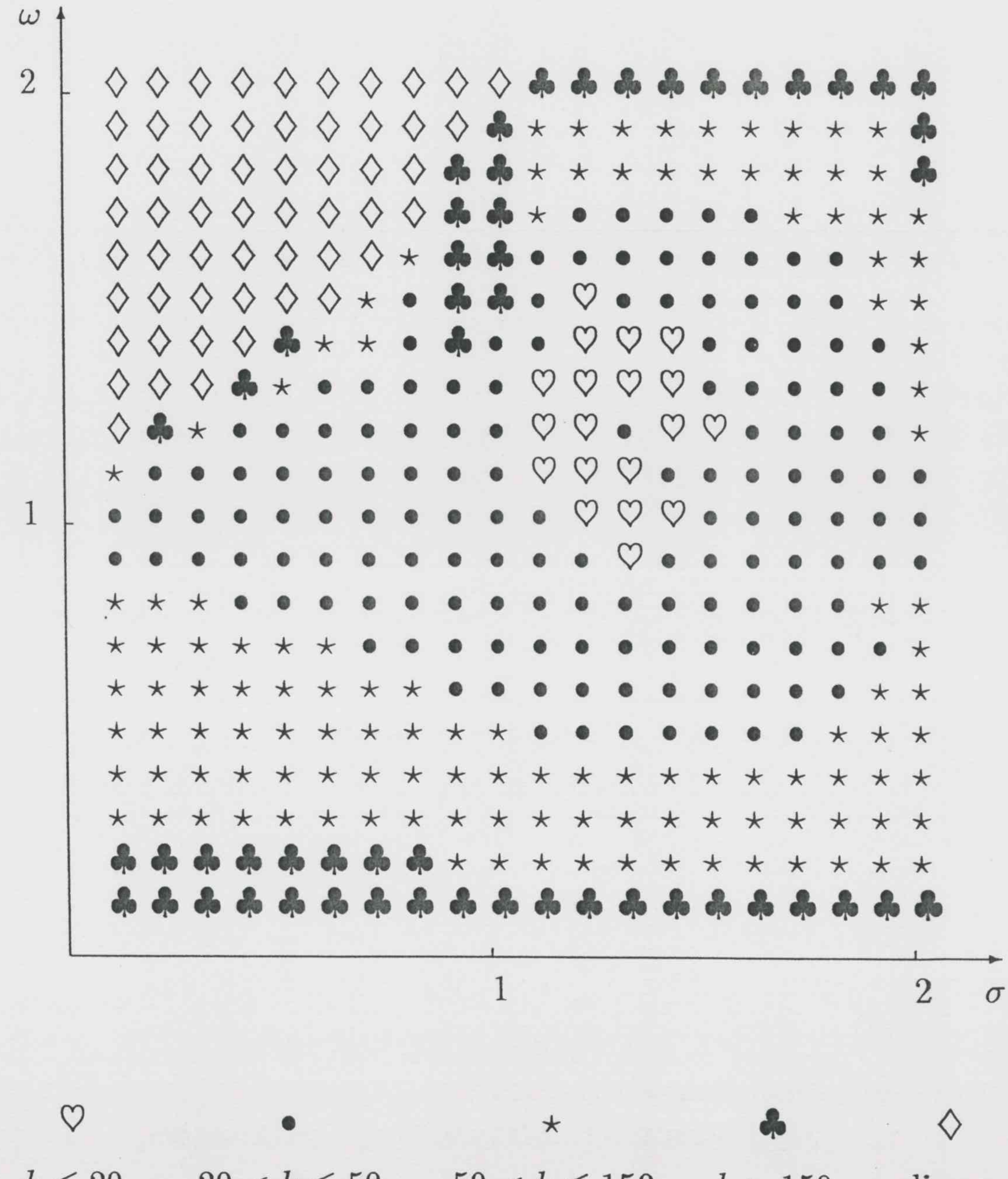
Posmatra se primer dat u [70].

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= 2x_1 - x_2 + 0.02(x_1 + 1.2)^3 \\
f_2(x) &= 2x_2 - x_3 - x_1 + 0.02(x_2 + 1.4)^3 \\
f_3(x) &= 2x_3 - x_4 - x_2 + 0.02(x_3 + 1.6)^3 \\
f_4(x) &= 2x_4 - x_3 + 0.02(x_4 + 1.8)^3
\end{aligned}$$

Neka je $x^0 = \{0.5, 0.5, 0.5, 0.5\}$. Kao izlazni kriterijum koristi se

$$\|x^{k+1} - x^k\|_\infty \le 10^{-6} \quad \text{i} \quad \|Fx^k\|_\infty \le 10^{-5},$$

odnosno, x^{k+1} je numeričko rešenje posmatranog problema ako su zadovoljene obe prethodne relacije.



Slika 5.

Testiran je AOR postupak za $(\sigma, \omega) = (0.1 \cdot i, 0.1 \cdot j)$, $i, j = 1, \ldots, 20$, a k je broj iteracija potreban za ispunjenje izlaznog kriterijuma.

Slika 5 pokazuje oblasti različite brzine konvergencije za posmatrani problem.

Oblast konvergencije, kako se to može videti sa slike, je šira nego što je to dokazano u teoremi 5.3. Najbolji rezultat, $k = 13$, dobijen je za $\omega = 1.3$ i $\sigma = 1.2$.

Literatura

[1] Alefeld, G., On the convergence of the symmetric SOR method for matrices with red - black ordering, Numer. Math 39(1982), 113-117.

[2] Alefeld,G.,Varga,R.S. Zur konvergenz des symmetrishen Relaxationsverfahrens, Numer. Math. 25(1976), 291-295

[3] Alefeld, G., Volkmann, P., Regular splittings and monotone iteration functions, Numer. Math. 46(1985), 213-228.

[4] Avdelas, G., De Pillis, J., Hadjidimos, A., Neumann, M., A guide to the acceleration of iterative methods whose iterative matrix is nonnegative and convergent, SIAM J. Matrix Annal. Appl. 9,3(1988), 329-342.

[5] Bhaya, A., Kaszkurewicz, E., Mota, F., Asynchronous block-iterative methods for almost linear equation, Linear Algebra Appl. 154-56(1991), 487-508.

[6] Berman, A., Plemons, R.J., Nonnegative Matrices in Mathematical Sciences, Academic Press, New York 1979.

[7] Beyn, W.J., Theorie und Anwendung eines iterativen Verfahrens zur Lösung von OperatorgleichungenHammersteinschen Typs, Ph.D. Thesis, University of Münster, Germany, 1975.

[8] Bohl.E., Finite Modelle gewohnlicher Randwertaufgaben, B.G. Teubner, Stuttgart 1981.

[9] Cvetković, Lj., Teorija konvergencije relaksacionih postupaka za rešavanje sistema jednačina, Doktorska disertacija, Univerzitet u Novom Sadu, 1987.

[10] Cvetković, Lj., Some inequalities for a spectral radius in connection with relaxation methods convergence theory, Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod. - Mat. Fak. Ser. Mat. 21,2 (1991), 111-118.

[11] Cvetković, Lj., Herceg, D., Some sufficient conditions for convergence of AOR method. Numerical Methods and Approximation Theory, (Milovanović, G.V., ed.), Faculty of Electronic Engineering, Niš, 1984, 13-18.

[12] Cvetković, Lj., Herceg, D., On a generalized vSOR Newton's method. IV Conference on Applied Mathematics, (Vrdoljak, B., ed.), Faculty of Civil Engineering, Split, 1985, 99-102.

[13] Cvetković, Lj., Herceg, D., Über die Konvergenz des VAOR Verfahrens. Z. angew. Math. Mech. 66(1986), 405-406.

[14] Cvetković, Lj., Herceg, D., Some results on M- and H-matrices, Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 17,1 (1987), 121-129.

[15] Cvetković,Lj., Herceg, D., Nonlinear AOR method, Z. angew. Math. Mech. 68(1988), 486-487.

[16] Cvetković,Lj., Herceg, D., On the method of averaging functional corrections applied to linear systems. Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 18,1(1988), 11-16.

[17] Cvetković,Lj., Herceg, D., A modification of the overrelaxation method. Z. angew. Math. Mech. 69(1989), 187-188.

[18] Cvetković,Lj., Herceg, D., Some sufficient conditions for the convergence of the method of averaging functional corrections. Appl. Numer. Math. 6(1989/1990), 187-194.

[19] Cvetković,Lj., Herceg, D., Convergence theory for AOR method. Journal of Computational Mathematics 8(1990), 128-134.

[20] Cvetković, Lj., Krejić, N., Convergence of the unsymmetric successive overrelaxation metod for SDD matrices, Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.- Mat. Fak. Ser. Mat. 22,2 (1992), 11 - 21.

[21] Cvetković, Lj., Krejić, N., USSOR method for the SDD matrices, Z. angew. Math. Mech. 74 (1994) 6, T 671 - T 673.

[22] Cvetković, Lj., Krejić, N., Local and global convergence of the nonlinear USSOR method, Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.- Mat. Fak. Ser. Mat. (in print)

[23] Dancis, J., The optimal ω is not best for the SOR iteration method, Linear Algebra Appl. 154-156(1991), 819-845.

[24] Dax, A., Berkowitz, B., Column relaxation methods for least norm problems, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 11,5(1990), 975-989.

[25] Dax, A., On hybrid acceleration of a linear stationary iterative process, Linear Algebra Appl. 130(1990), 99-110.

[26] Dax, A., A note on the convergence of linear stationary iterative processes, Linear Algebra Appl. 129(1990), 131-142.

[27] Dax, A., Line search acceleration of iterative methods, Linear Algebra Appl. 130(1990), 43-63.

[28] Dax, A., Succesive refinement of large multicell models, SIAM J. Numer. Anal. 22(1985), 444-466.

[29] Dennis, J.E.Jr., Schnabel, R.B., Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations, Prentice - Hall Inc., Engelwood Cliffs, N.J. 1983.

[30] Eiermann, M., Neithammer, W., Varga, R.S., Acceleration of relaxation methods for non - hermitian linear systems, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 13,3(1992), 979-991.

[31] Gipser, M., Untersuchungen an Relaxationsverfahren zur Lösung grösser nichtlinearer Gleichungssysteme mit schwach besetzten Funktionalmatrizen, Dissertation, Darmstadt, 1980.

[32] Hadjidimos, A., Yeyios, A.K., Some recent results on the modified SOR theory, Linear Algebra Appl. 154-156(1991), 5-21.

[33] Hageman, L.A., Young, D.,M., Applied Iterative Methods, Academic Press, New York 1981.

[34] Hanke, M., Neumann, M., Neithammer, W., On the spectrum of the SOR operator for symmetric positive definite matrices, Linear Algebra Appl. 154-156(1991), 457-472.

[35] Herceg, D., Some sufficient conditions for convergence of vSOR Newton method. IV Conference on Applied Mathematics, (Vrdoljak, B., ed.), Faculty of Civil Engineering, Split, 1985, 93-98.

[36] Herceg, D., Numeričke i statističke metode u obradi eksperimentalnih podataka, Institut za matematiku, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1992.

[37] Herceg, D., On a modification of nonlinear overrelaxation methods, Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod. - Mat. Fak. Ser. Mat. 21,1 (1991), 1 - 14.

[38] Herceg, D., On an iterative process for solving system of equations. Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 20,1(1990), 1-10.

[39] Herceg, D., Cvetković, Lj., AOR method for $Ax = \lambda Bx$. Numerical Methods and Approximation Theory, (Herceg, D., ed.), Institute of Mathematics, Novi Sad, 1985, 41-46.

[40] Herceg, D., Cvetković, Lj., Über die Bestimmung der Parameter für das VAOR Verfahren. Z. angew. Math. Mech. 66(1986), 411-413.

[41] Herceg, D., Cvetković, Lj., An improvement for the area of convergence of the AOR method. Anal. Numer. Theor. Approx. 16(1987), 109-115.

[42] Herceg, D., Cvetković, Lj., Petrović, N., On an iterative method for solving certain nonlinear systems. Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 18,1(1988), 1-9.

[43] Herceg, D., Cvetković, Lj., A combination of relaxation methods and method of averaging functional corrections. Numerical Methods and Approximation Theory III, (Milovanović, G.V., ed.), Faculty of Electronic Engineering, Niš, 1988, 241-249.

[44] Herceg, D., Cvetković, Lj., Convergence of the accelerated overrelaxation method. Apl. Mat. 34,6(1989), 475-479.

[45] Herceg, D., Cvetković, Lj., On the extrapolation method and USA algorithm, Journal of Economic Dynamics and Control, 13(1989), 301-311.

[46] Herceg, D., Cvetković, Lj., On an iterative method for a system of equations. Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 20,1(1990), 11-15.

[47] Herceg, D., Cvetković, Lj., On a method for solving almost linear system of equations. Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 21,1 (1991), 15-22.

[48] Herceg, D., Cvetković, Lj., On some subclasses of H - matrices, Z. angew. Mat. Mech. 71 (1991) 6, T815-T816.

[49] Herceg, D., Cvetković, Lj., Some results on H-matrices in conection with the AOR convergence theory, Bull. Appl. Math. 720(1991), (LVIII), 7-13.

[50] Herceg, D., Krejić, N., On two relaxation methods for solving systems of nonlinear equations, VII Conference on Applied Mathematics, (Scitovski, R., ed.), University of Osijek, Osijek, 1990, 79-89.

[51] Herceg, D., Krejić, N., On a hybrid methods for a system of linear equations, Bull. Appl. Math. 704(1991)(LVII), 29-37.

[52] Herceg, D., Krejić, N., On a nonstationary modification of an iterative method, Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. 22,2 (1992), 1-10

[53] Herceg, D., Krejić, N., A remark on iterative methods for systems of linear equations, Bull. Appl. Math. 779(1992)(LXI), 13-22.

[54] Herceg, D., Krejić, N., Column relaxation methods and hybrid acceleration, Z. angew. Math. Mech. 74(6)(1994), 673-675.

[55] Herceg, D., Krejić, N., Relaxation methods for finite difference equations arising from boundary value problems, Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat. (in print).

[56] Herceg, D., Krejić, N., Extension of the convergence area for the AOR metod with Gaussian Elimination, Proc. Lucrarile Sesuinii de Comunicari Stiintifice, (Halic, G., ed.), Arad, 1994, 1-7.

[57] Herceg, D., Krejić, N., On the convergence of the unsymmetric successive overrelaxation (USSOR) method, Linear Algebra Appl. 185 (1993), 49-60.

[58] Herceg, D., Martins, M.M., Trigo, M.E., On the convergence of the MSOR method for some classes of matrices, SIAM J. Matrix. Anal. Appl. 14(1993), 122-131.

[59] Herceg, D., Martins, M.M., Trigo, M.E., Extended convergence area for the (MSOR) method. J. Comput. Appl. Math. 33(1990), 123-132.

[60] Ikramov, H.D., Chislennye metody dlya simmetrichnyx lineinyh sistem, Nauka, Moskva, 1988.

[61] Li, X., Varga, R.S., A note on the SSOR and USSOR iterative methods applied to p - cyclic matrices, in Iterative methods for large linear systems, (Kincaid, D.R., Hayes, L.J., eds.), Academic Press 1990, 235-250.

[62] Krishna,L.B. Some new results on the unsymmetric successive overrelaxation, Numer. Math. 42(1983), 155-160

[63] Krejić, N., A remark on the radius of convergence of the USA algorithm, Univ. u Novom Sadu Zb. Rad. Prirod. - Mat. Fak. Ser. Mat. (in print).

[64] Krejić, N., Cvetković, Lj., Global convergence of partially relaxed iterative methods for systems of nonlinear equations, (submitted).

[65] Krejić, N., Herceg, D., Improving the convergence of iterative methods by perfoming Gaussian elimination, VIII Conference on Applied Mathematics, (Jaćimović, M., ed.), Tivat 1994, (in print).

[66] Krejić, N., Herceg, Dj., Matematika i *Mathematica*, Institut za matematiku, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1993.

[67] Krejić, N., Ogrizović, Z., Nonlinear AOR method, IX Conference on Applied Mathematics, (Herceg, D., Cvetković, Lj., eds.), Budva 1994, (in print).

[68] Martinez, J.M., A quasi - Newton method with modification of one column per iteration, Computing 33 (1984), 353-362.

[69] Martinez, J.M., Quasi-Newton methods with factorization scaling for sparce nonlinear systems of equations, Computing 38(1987), 133-141.

[70] Martinez, J.M., A family of quasi-Newton methods for nonlinear equations with direct secant updates of matrix factorization, SIAM J. Numer. Anal. 27(1990), 1034-1049.

[71] Martinez, J.M., Fixed - point quasi - Newton methods, SIAM J. Numer. Anal. 29(1992), 1413-1434.

[72] Martins,M.M., Krishna,L.B. Some new results on the convergence of the SSOR and USSOR methods, Linear Algebra Appl.106 (1988), 185-193.

[73] Martins. M.M., On an accelerated overrelaxation iterative method for linear systems with strictly diagonally dominant matrix, Math. Comp. 35,152(1980), 1269-1273.

[74] Martins. M.M., Note on irreducible diagonally dominant matrices and the convergence of the AOR iterative method, Math. Comp. 37,155(1981), 101-103.

[75] Milaszewich, J.P., A generalization of the Stein - Rosenberg theorem to Banach spaces, Numer. Math. 34, 403-409, 1980.

[76] Milaszewich, J.P., Improving Jacobi and Gauss-Seidel iterations, Linear Algebra Appl. 93, 161-170, 1987.

[77] Miller, V.A., Neumann, M., A note on comparison theorems for nonnegative matrices. Numer. Math. 47(1985), 427-434.

[78] Neumaier, A., Varga, R.S., Exact convergence and divergence domains for the symmetric successive overrelaxation iterative (SSOR) method applied to the H - matrices, Linear Algebra Appl. 58,(1984) 261-272.

[79] Neumann, M., On bounds for the convergence of the SSOR method for H - matrices, Linear Multilinear Algebra 15(1984), 13-21.

[80] Neumann, M., Varga, R.S., On the sharpness of some upper bounds for the spectral radii of S.O.R. iteration matrices, Numer. Math. 35(1980), 69-79.

[81] Ortega, J.M., Rheinboldt, W.C., Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, Academic Press, New York 1970.

[82] Saridakis, Y.G., Domains of divergence of the USSOR method applied on p - cyclic matrices, Numer. Math. 57(1990), 405-412.

[83] Song, Y., Comparisons of nonnegative splittings of matrices, Linear Algebra Appl. 154-156(1991), 433-455.

[84] Varah, J.M., A lower bound for the smallest singular value of a matrix, Linear Algebra Appl. 11(1975), 3-5.

[85] Varga,R.S. Matrix Iterative Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.

[86] Xinmin, W., Generalized extrapolation principle and convergence of some generalized iterative methods, Linear Algebra Appl. 185(1993), 235-272.

[87] Young,D. Iterative solution of large linear systems, Academic Press, New York 1971.

[88] Young, D., On the accelerated SSOR method for solving large linear systems, Adv. Math., 23(1977), 215-271.

[89] Young, D., A historical overview of iterative methods, Computer Physics Communications 53(1989), 1-17.

[90] Woznicki, Z.I., Estimation of the optimum relaxation factors in partial factorization iterative methods, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 14,1(1993), 59-73.

KRATKA BIOGRAFIJA

Rodjena sam 21. maja 1966. godine u Baču, AP Vojvodina. Osnovnu i srednju prirodno – matematičku školu "Jovan Jovanović - Zmaj" sam završila u Novom Sadu. Za uspehe u školovanju sam dobila diplome "Vuk Stefanović – Karadžić", "Mihajlo Petrović – Alas" i "Zmajevu povelju", kao najistaknutiji djak generacije.

Školske 1985/86. godine sam se upisala na Prirodno – matematički fakultet u Novom Sadu, odsek za matematiku, smer numerička matematika i kibernetika. Studije sam završila septembra 1989. godine sa prosečnom ocenom 9,00.

Na poslediplomske studije Prirodno – matematičkog fakulteta u Novom Sadu, odsek matematika, smer Numerička matematika sam se upisala školske 1989/90. godine. Sve ispite sam položila do septembra 1991. sa prosečnom ocenom 9,67. Magistarski rad "Neke tehnike ubrzanja konvergencije iterativnih postupaka" sam odbranila 6. jula 1992. godine.

Od aprila 1990. godine radim kao asistent iz oblasti numerička matematika na Institutu za matematiku PMF – a u Novom Sadu.

Autor sam ili koautor 16 naučnih radova, 10 naučnih saopštenja i 1 knjige. Učestvujem u radu na jednom naučnom projektu. Od 1993. godine sam sekretar redakcije časopisa Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta, Serija za matematiku. Član sam Gesellschaft für Angewandte Mathematik und Mechanik od 1991. godine i Society of Industrial and Applied Mathematics od 1992. godine.

Udata sam i živim u Novom Sadu.

Nataša Krejić

U Novom Sadu, 10. juna 1994. Nataša Krejić