UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

INSTITUT ZA MATEMATIKU

Zoran Mitrović

Najbolje aproksimacije u nekim klasama topoloških prostora

-DOKTORSKA DISERTACIJA-

Novi Sad, 2002.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO–MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Zoran Mitrović

Najbolje aproksimacije u nekim klasama topoloških prostora

– DOKTORSKA DISERTACIJA –

Novi Sad, 2002.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Zoran Mitrović

NAJBOLJE APROKSIMACIJE U NEKIM KLASAMA TOPOLOŠKIH PROSTORA

Doktorska teza

Novi Sad, 2002

Sadržaj

Predgovor

Knaster, Kuratowski i Mazurkiewicz 1929 su dokazali tvrdjenje kasnije poznato kao KKM lema. Iz KKM leme Ky Fan je 1961, [23], napravio koncept KKM preslikavanja. Granas 1981 daje neke primjere KKM preslikavanja koji se mogu koristiti za rješavanje zadataka iz:

1. Varijacionih problema,
2. Najboljih aproksimacija,
3. Varijacionih nejednakosti.

Izučavanje osobina KKM preslikavanja i njihovih primjena na rješavanje odredjenih problema, danas je poznato kao KKM teorija. U okviru ove teorije dobijeni su mnogobrojni rezultati o fiksnim tačkama. Razvojem KKM teorije pojavilo se mnogo rezultata koji su ekvivalentni sa Brouwerovom teoremom o fiksnoj tački i nekim tvrdjenjima nelinearne funkcionalne analize . Klasični rezultati se mogu vidjeti na primjer u [22] i [82]. Jedan od najvažnijih dogadjaja u istoriji ove teorije je povezan sa Ky Fanom. On je proširio KKM lemu na beskonačno dimenzionalne prostore i dobijeni rezultat iskoristio za dokazivanje teorema o fiksnoj tački, generalizirajući teoremu Tihonova o fiksnoj tački [23]. Zaključujući predavanja u Montrealu 1983, Ky Fan je naveo listu različitih oblasti u matematici gdje se mogu koristiti KKM preslikavanja:

1. Teorija potencijala,
2. Prostori Pontrjagina (prostori Bochnera),

3. Ideali prostora,

4. Slabo kompaktni podskupovi u lokalno konveksnim vektorskim topološkim prostorima,

5. Algebra funkcija,

6. Harmonijska analiza,

7. Varijacione nejednakosti,

8. Granični problemi,

9. Konveksna analiza,

10. Matematička ekonomija,

11. Teorija igara,

12. Matematička statistika.

U tu listu S. Park je priključio sljedeće oblasti: nelinearna funkcionalna analiza, teorija aproksimacija, teorija optimizacije, teorija fiksne tačke.
Ovaj rad se bavi izučavanjem najboljih aproksimacija za višeznačna preslikavanja i njihovim primjenama u kojima se odredjuju dovoljni uslovi za egzistenciju nula višeznačnih preslikavanja, tačaka koincidencije i fiksnih tačaka.
Rad je sastavljen od pet glava.
U uvodu su dati osnovni pojmovi o neprekidnosti višeznačnih preslikavanja. Date su definicije različitih vrsta neprekidnosti višeznačnih preslikavanja i odnosi izmedju njih. Dokazan je jedan rezultat o neprekidnosti optimalnog rješenja koji se koristi u daljem radu.
U drugoj glavi date su definicije višeznačnih K-konveksnih i K-kvazikonveksnih preslikavanja i osnovne osobine [55]. Uveden je pojam μ-konveksnih preslikavanja i dat odnos izmedju K-konveksnih, μ-konveksnih i K-kvazikonveksnih preslikavanja. Data je jedna karakterizacija K-kvazikonveksnih preslikavanja. Uvedena je norma skupa

i date neke osobine. Koristeći metodu L. V. Hota [37] dokazana je jedna osobina tako definisane norme u vezi sa višeznačnim preslikavanjima. Uvedena je mjera nekvazikonveksnosti višeznačnih preslikavanja i date njene osnovne osobine.

U trećoj glavi prvo je dat pojam KKM preslikavanja i dati primjeri A. Granasa [22]. Zatim se daju rezultati Ky Fana i W. K. Kima [41]. Dokazana je teorema o najboljim aproksimacijama za dva višeznačna preslikavanja koja uopštava rezultate D. Delbosca [20]. Data je teorema o koincidenciji čije posljedice su poznati rezultati Ky Fana i L. J. Lina [82]. Dokazana je teorema o simultanim aproksimacijama koja je varijanta rezultata D. Delbosca [19] za proizvoljan normiran prostor. Osim toga, data je generalizacija za višeznačna preslikavanja koristeći pojam kvazikonveksnih preslikavanja. Kao posljedica dobijen je rezultat o koincidenciji. Na kraju je razmatran opšti slučaj najboljih aproksimacija i dat rezultat u kome se koristi pojam mjere Kuratowskog i mjere nekvazikonveksnosti uveden u prvoj glavi.

U četvrtoj glavi koristeći najbolje aproksimacije dati su neki rezultati o egzistenciji nula višeznačnih preslikavanja kod kojih se koristi tangentni uslov, a koji mogu da se primjene na rješavanje nekih nelinearnih zadataka. Dat je primjer u kome se utvrdjuje egzistencija rješenja diferencijalnih inkluzija [1]. Koristeći tehniku najboljih aproksimacija i metod neprekidnog produženja Poencarea dati su rezultati o nulama višeznačnih preslikavanja tipa Leray-Schaudera i dokazana jedna teorema o nelinearnoj alternativi. Dalje, date su teoreme o egzistenciji V-tačaka koincidencije dva preslikavanja. To je verzija rezultata iz [32] za dva višeznačna preslikavanja.

U petoj glavi su date teoreme o aproksimacijama u paranormiranim prostorima koji su višeznačna verzija rezultata iz [31]. Data je definicija G-konveksnih prostora S. Parka [71] i osnovni koncept KKM teorije u G-konveksnim prostorima. Dati su odnosi izmedju različitih tipova prostora i uveden je pojam G-KKM preslikavanja [70]. Dokazana je teorema koja predstavlja uopštenje teoreme o najboljim aproksimacijama za G-konveksne prostore. Uvedeni su pojmovi G-kvazikonveksnog preslikavanja i G-konveksnog zatvorenja skupa.

Glava 1

Uvod

U ovom dijelu dajemo definicije nekih različitih tipova neprekidnosti višeznačnih preslikavanja kao i njihove osobine [2].

Smatraćemo da su X i Y topološki prostori. Sa $\mathcal{P}(X), \mathcal{P}_{co}(X), \mathcal{BC}(X), \mathcal{K}(X), \mathcal{K}_{co}(X)$ označavaćemo familije svih nepraznih, nepraznih konveksnih, nepraznih zatvorenih ograničenih, nepraznih kompaktnih, nepraznih kompaktnih konveksnih podskupova od X respektivno.

Za višeznačno preslikavanje $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ i $U \subset X$ koristimo oznaku

$$F(U) = \bigcup_{u \in U} F(u).$$

Pod okolinom skupa U podrazumijevamo skup koji sadrži skup U u svojoj unutrašnjosti.

Definicija 1.1. Višeznačno preslikavanje $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ naziva se poluneprekidno odozgo u tački $x \in X$ ako za svaku otvorenu okolinu V skupa $F(x)$ postoji otvorena okolina U tačke x takva da $F(U) \subset V$. Preslikavanje $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ je poluneprekidno odozgo ako je poluneprekidno odozgo u svakoj tački $x \in X$.

Uvodimo sljedeće oznake:

$$F^+(D) = \{x \in X : F(x) \subset D\},$$

$$F^-(D) = \{x \in X : F(x) \cap \ D \neq \emptyset\}.$$

Teorema 1.2. *Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
(i) preslikavanje F je poluneprekidno odozgo,
(ii) za svaki otvoreni skup $V \subset Y$ skup $F^+(V)$ je otvoren skup u X,
(iii) za svaki zatvoreni skup $V \subset Y$ skup $F^-(V)$ je zatvoren skup u X.

Definicija 1.3. Višeznačno preslikavanje $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ naziva se poluneprekidno odozdo u tački $x \in X$ ako za svaku otvorenu okolinu $V \subset Y$, takvu da je $F(x) \cap V \neq \emptyset$ postoji otvorena okolina U tačke x takva da $F(y) \cap V \neq \emptyset$ za sve $y \in U$. Preslikavanje $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ je poluneprekidno odozdo, ako je poluneprekidno odozdo u svakoj tački $x \in X$.

Teorema 1.4. *Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
(i) preslikavanje F je poluneprekidno odozdo,
(ii) za svaki otvoreni skup $V \subset Y$ skup $F^-(V)$ je otvoren skup u X,
(iii) za svaki zatvoreni skup $V \subset Y$ skup $F^+(V)$ je zatvoren skup u X.

Definicija 1.5. Ako je preslikavanje $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ poluneprekidno odozgo i poluneprekidno odozdo naziva se neprekidno.

Definicija 1.6. Preslikavanje $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ naziva se zatvorenim ako je njegov grafik

$$G_F = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}$$

zatvoren u $X \times Y$ i $F(x)$ je zatvoren u Y za svaki $x \in X$.

Definicija 1.7. Neka je (X, d) metrički prostor. Za $A, B \in \mathcal{BC}(X)$ definišemo

$$H(A, B) = \max\{D(A, B), D(B, A)\},$$

gdje je

$$D(A, B) = \sup_{y \in A} \inf_{x \in B} d(x, y).$$

Preslikavanje H je metrika na skupu $\mathcal{BC}(X)$ i naziva se Hausdorffovom metrikom.

Teorema 1.8. *Preslikavanje $F : X \to \mathcal{K}(Y)$ je neprekidno u metrici Hausdorffa ako i samo ako je neprekidno.*

Dajemo primjer preslikavanja koje je poluneprekidno odozgo (odozdo) ali nije poluneprekidno odozdo (odozgo).

Primjer 1.9. Preslikavanje $F : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$,

$$F(x) = \begin{cases} \{0\}, & x \neq 0 \\ [-1,1], & x = 0 \end{cases}$$

je poluneprekidno odozgo ali nije poluneprekidno odozdo,
preslikavanje $G : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$,

$$G(x) = \begin{cases} \{0\}, & x = 0 \\ [-1,1], & x \neq 0 \end{cases}$$

je poluneprekidno odozdo ali nije poluneprekidno odozgo.

Lema 1.10. *[4] Neka je X normiran prostor i A, B elementi iz $\mathcal{BC}(X)$. Tada je*

$$|\inf_{a\in A} ||a|| - \inf_{b\in B} ||b||\,| \leq H(A,B).$$

Dokaz. Dovoljno je pokazati

$$\inf_{a\in A} ||a|| \leq \inf_{b\in B} ||b|| + D(B,A).$$

Neka je $\epsilon > 0$. Postoje $a_\epsilon \in A$ i $b_\epsilon \in B$ takvi da je

$$\inf_{b\in B} ||b|| \geq ||b_\epsilon|| - \epsilon,$$

$$\inf_{a\in A} ||b_\epsilon - a|| \geq ||b_\epsilon - a_\epsilon|| - \epsilon.$$

Sada imamo

$$\inf_{b\in B} ||b|| + \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} ||a-b|| \geq ||b_\epsilon|| - \epsilon + \inf_{a\in A} ||b_\epsilon - a|| \geq ||b_\epsilon|| + ||b_\epsilon - a_\epsilon|| - 2\epsilon \geq \inf_{a\in A} ||a|| - 2\epsilon.$$

□

Sljedeće tvrdjenje je jedna varijanta rezultata o neprekidnosti optimalnog rješenja.

Lema 1.11. *Neka je X normiran prostor i preslikavanje $F : X \to \mathcal{BC}(Y)$ neprekidno u metrici Hausdorffa. Tada je preslikavanje $f : X \to \mathbb{R}$ definisano sa*

$$f(x) = \inf_{y\in F(x)} ||y||$$

neprekidno.

Dokaz. Na osnovu Leme 1.10 vrijedi

$$|f(x) - f(y)| \leq H(F(x), F(y)),$$

pa zbog neprekidnosti preslikavanja F u metrici Hausdorffa slijedi neprekidnost preslikavanja f.

$\square$

Primjetimo da slično tvrdjenje kao u Lemi 1.10. vrijedi i u metričkom prostoru.

U metričkom prostoru (X, d), koristićemo oznaku $d(A, B)$, A, $B \in \mathcal{P}(X)$ definisanu na sljedeći način

$$d(A, B) = \inf_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Lema 1.12. *Neka je (X, d) metrički prostor, tada vrijedi:*

$$|d(A, C) - d(C, B)| \leq D(A, B), \quad \textit{za sve } A, B, C \in \mathcal{BC}(X).$$

Dokaz. Vrijedi sljedeće

$$d(A, C) \leq d(a, c), \quad \text{za sve } a \in A, \ c \in C,$$

kako je

$$d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c), \quad \text{za sve } b \in B,$$

imamo

$$d(A, C) \leq d(a, b) + d(b, c).$$

Sada je

$$d(A, C) \leq \inf_{b \in B} d(a, b) + \inf_{b \in B} d(b, c),$$

pa je

$$d(A, C) \leq \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) + \inf_{b \in B} d(b, c).$$

Odavde je

$$d(A, C) \leq \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) + \inf_{c \in C} \inf_{b \in B} d(b, c),$$

to jest

$$d(A, C) \leq D(A, B) + d(C, B).$$

$\square$

Teorema 1.13. *Neka je X topološki prostor, a Y vektorski topološki prostor.*
(i) Ako su preslikavanja $F_1, F_2 : X \to \mathcal{P}(Y)$ odozdo poluneprekidna onda je i suma $F_1 + F_2 : X \to \mathcal{P}(Y)$,

$$(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x),$$

odozdo poluneprekidno preslikavanje.
(ii) Ako su preslikavanja $F_1, F_2 : X \to \mathcal{K}(Y)$ odozgo poluneprekidna onda je i suma $F_1 + F_2 : X \to \mathcal{K}(Y)$, odozgo poluneprekidno preslikavanje.

Teorema 1.14. *Neka je X topološki prostor, a Y vektorski topološki prostor.*
(i) Ako je preslikavanje $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ poluneprekidno odozdo, a funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna onda je i proizvod $f \cdot F : X \to \mathcal{P}(Y)$,

$$(f \cdot F)(x) = f(x)F(x),$$

odozdo poluneprekidno preslikavanje.
(ii) Ako je preslikavanje $F : X \to \mathcal{K}(Y)$ poluneprekidno odozgo, a funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna onda je i proizvod $f \cdot F : X \to \mathcal{K}(Y)$ poluneprekidno odozgo preslikavanje.

Teorema 1.15. *Neka je X topološki prostor, a Y lokalno konveksan vektorski topološki prostor. Ako je preslikavanje $F : X \to \mathcal{K}(Y)$ poluneprekidno odozgo (odozdo) onda je i konveksno zatvorenje $\overline{co}F : X \to \mathcal{K}_{co}(Y)$,*

$$(\overline{co}F)(x) = cl(co(F(x))),$$

poluneprekidno odozgo (odozdo).

Glava 2

K-kvazikonveksna i neka njima srodna višeznačna preslikavanja

2.1 Odnos K-konveksnih, μ -konveksnih i K-kvazikonveksnih preslikavanja

U ovom dijelu dajemo definicije K-konveksnih i K-kvazikonveksnih višeznačnih preslikavanja [55]. Dalje, uvodi se pojam μ-konveksnih preslikavanja i daju neke karakterizacije kvazikonveksnih preslikavanja.

Definicija 2.1. Podskup K u vektorskom prostoru X nazivamo konusom s vrhom u nuli, ako je $\lambda K \subset K$ za sve $\lambda > 0$. Konus je oštri ako $0 \in K$ i tupi ako $0 \notin K$.

U daljem radu pod konusom podrazumijevaćemo konus s vrhom u nuli.

Definicija 2.2. Neka su X i Y proizvoljni vektorski prostori, C neprazan konveksan podskup od X i K konus u Y. Višeznačno preslikavanje $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ je K-konveksno ako i samo ako je

$$\lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + K, \tag{2.1.1}$$

za sve $\lambda \in [0,1]$ i sve $x_1,\ x_2 \in C$.
Preslikavanje $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ je K-konkavno ako i samo ako je

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \subset \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) + K, \tag{2.1.2}$$

za sve $\lambda \in [0,1]$ i sve $x_1,\ x_2 \in C$.

Za preslikavanje $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ kažemo da je konveksno (konkavno) ako i samo ako je zadovoljen uslov (2.1.1) (uslov (2.1.2)) za $K = \{0\}$.

Primjer 2.3. Neka je $f : C \to \mathbb{R}$ konveksna i $g : C \to \mathbb{R}$ konkavna funkcija, gdje je $C \subset \mathbb{R}$. Ako je $f(x) \le g(x)$ za sve $x \in C$ tada je višeznačno preslikavanje $F : C \to P(\mathbb{R})$ definisano sa

$$F(x) = [f(x), g(x)]$$

konveksno.
Ako je $g(x) \le f(x)$ za sve $x \in C$ tada je preslikavanje $F : C \to P(\mathbb{R})$ definisano sa

$$F(x) = [g(x), f(x)]$$

konkavno.

Teorema 2.4. *Ako je preslikavanje $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ K-konveksno (K-konkavno) tada je*

$$\begin{aligned} \lambda_1 F(x_1) + \cdots + \lambda_n F(x_n) \subset F(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) + K, \\ (F(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \subset \lambda_1 F(x_1) + \cdots + \lambda_n F(x_n) + K) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

za sve $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in C$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ takve da je $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

Definicija 2.5. Za preslikavanje $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ kažemo da je K-kvazikonveksno ako i samo ako vrijedi

$$F(x_1) \cap (S - K) \neq \emptyset, F(x_2) \cap (S - K) \neq \emptyset \Rightarrow F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \cap (S - K) \neq \emptyset \tag{2.1.4}$$

za sve koveksne skupove $S \subset Y$, x_1, $x_2 \in C$ i $\lambda \in [0, 1]$.

Definicija 2.6. Za preslikavanje $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ kažemo da je K-kvazikonkavno ako i samo ako vrijedi

$$F(x_1) \subset S + K, F(x_2) \subset S + K \Rightarrow F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \subset S + K \tag{2.1.5}$$

za sve konveksne skupove $S \subset Y$, x_1, $x_2 \in C$ i $\lambda \in [0, 1]$.
Ako je $K = \{0\}$ onda je F kvazikonveksno (kvazikonkavno) ako i samo ako vrijedi (2.1.4) (uslov (2.1.5)).

Primjer 2.7. Neka je $F : C \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ funkcija i $K = [0, \infty)$. Uslov (2.1.4) se svodi na

$$F(x_1) \le a, F(x_2) \le a \Rightarrow F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \le a,$$

za sve $a \in \mathbb{R}$, x_1, $x_2 \in C$ i $\lambda \in [0, 1]$, to jest na

$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \le \max\{F(x_1), F(x_2)\},$$

za sve x_1, $x_2 \in C$, $\lambda \in [0, 1]$.
U ovom slučaju uslov (2.1.4) je ekvivalentan klasičnoj definiciji kvazikonveksnih funkcija.

Lema 2.8. *Ako je preslikavanje $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ K-kvazikonveksno (K-kvazikonkavno), tada je*

$$\begin{aligned} F(x_i) \cap (S - K) \neq \emptyset,\ i = 1, \dots, n \Rightarrow F(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \cap (S - K) \neq \emptyset, \\ (F(x_i) \subset S + K,\ i = 1, \dots, n \Rightarrow F(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \subset S + K), \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

za sve $n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in C$ i $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ takve da je $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

Dokaz. Pretpostavimo da je preslikavanje $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ K-kvazikonveksno. Tada implikacija (2.1.6) vrijedi za $n = 1$ i $n = 2$. Pretpostavimo da vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i neka su tačke $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in C$ takve da je

$$F(x_i) \cap (S - K) \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, n, n + 1$$

i brojevi $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$ takvi da je $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$. Vrijedi

$$F(x_i) \cap (S - K) \neq \emptyset, i = 1, \dots, n \Rightarrow F\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n\right) \cap (S - K) \neq \emptyset$$

pa je

$$F(x_i) \cap (S - K) \neq \emptyset,\ i = 1, \dots, n, n + 1 \Rightarrow$$
$$F\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n\right) \cap (S - K) \neq \emptyset, F(x_{n+1}) \cap (S - K) \neq \emptyset.$$

Sada imamo

$$F\left((1 - \lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \cap (S - K) \neq \emptyset,$$

to jest $F(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \cap (S - K) \neq \emptyset$.
Ako je $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ K-kvazikonkavno tvrdnja se dokazuje analogno. □

Primjer 2.9. Neka je $K = [0, +\infty)$ i $f, g : C \to \mathbb{R}$ funkcije takve da je $f(x) \leq g(x)$ za $x \in C$. Ako je f kvazikonveksna funkcija tada je preslikavanje $F : C \to P(\mathbb{R})$ definisano sa $F(x) = [f(x), g(x)]$ K-kvazikonveksno.

Teorema 2.10. *Ako je preslikavanje $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ K-kvazikonveksno, tada je*

$$(F(x_1) + K) \cap (F(x_2) + K) \subset F(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) + K, \tag{2.1.7}$$
$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \cap [co(F(x_1) \cup F(x_2)) - K] \neq \emptyset, \tag{2.1.8}$$

za sve $x_1, x_2 \in C$ i $\lambda \in [0, 1]$.
F K-kvazikonveksno ako i samo ako vrijedi

$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \subset co(F(x_1) \cup F(x_2)) + K, \tag{2.1.9}$$

za sve $x_1, x_2 \in C$ i $\lambda \in [0, 1]$.

Primjer 2.11. Neka je preslikavanje $F : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ definisano sa

$$F(x) = \begin{cases} \{-2, 2\}, & x \leq 0 \\ \{0\}, & x \in (0,1) \\ \{-1, 1\}, & x \geq 1. \end{cases}$$

F zadovoljava uslove (2.1.7) i (2.1.8) za $K = \{0\}$ ali nije kvazikonveksno. Naime, za $A = [1, 2]$ imamo $F(0) \cap A \neq \emptyset$, $F(1) \cap A \neq \emptyset$ ali $F(\frac{1}{2}) \cap A = \emptyset$.

Primjer 2.12. Za preslikavanje $F : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ definisano sa

$$F(x) = \begin{cases} \{0, x\}, & x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{1}{2}\} \\ \{0\}, & x = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

vrijedi $F(x_1) \cap F(x_2) = \{0\} \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$, pa vrijedi uslov (2.1.7) za $K = \{0\}$ ali F nije konveksno,

$$\frac{1}{2}F(0) + \frac{1}{2}F(1) \not\subseteq F(\frac{1}{2}).$$

Primjer 2.13. Neka je S neprazan otvoren podskup od $\mathbb{R}^n$ i $f : S \to \mathbb{R}$. Subdiferencijal preslikavanja f u tački x definiše se sa

$$\partial f(x) = \{x^* : f(y) - f(x) \geq \langle x^*, y - x \rangle, \text{ za svaki } \quad y \in S\}$$

Za preslikavanje $\partial f : S \to P(\mathbb{R})$ vrijedi uslov (2.1.7) ali u opštem slučaju ∂f nije kvazikonveksno.

Definicija 2.14. Za višeznačno preslikavanje $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ kažemo da je μ K-konveksno (μ K-konkavno) ako vrijedi uslov:
za sve $x_1, x_2 \in C$ i $\lambda \in [0, 1]$ postoji $\mu = \mu(x_1, x_2; \lambda) \in [0, 1]$ takvo da je

$$\begin{gathered} \mu F(x_1) + (1-\mu)F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + K, \\ (F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \subset \mu F(x_1) + (1-\mu)F(x_2) + K). \end{gathered} \tag{2.1.10}$$

Primjer 2.15. Neka je preslikavanje $F : [0, +\infty) \to P(\mathbb{R})$ definisano sa

$$F(x) = [-x^2, +\infty).$$

Za $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, $x_1 \neq x_2$ je

$$\frac{1}{2}F(x_1) + \frac{1}{2}F(x_2) \not\subseteq F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

pa F nije konveksno, ali za $0 < x_1 < x_2$, $\lambda \in [0,1]$ i za

$$\mu = \frac{1 - [1 + \lambda(\frac{x_1}{x_2} - 1)]^2}{1 - (\frac{x_1}{x_2})^2} \in [0,1],$$

vrijedi (2.1.10), pa je F μ-konveksno.

Prethodni primjer pokazuje da su μ-konveksna preslikavanja šira klasa od konveksnih preslikavanja. Svako μ-konveksno preslikavanje je i K-kvazikonveksno što je pokazano u sljedećoj lemi.

Lema 2.16. *Ako je preslikavanje $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ μ-konveksno ono je i K-kvazikonveksno.*

Dokaz. Neka je

$$F(x_i) \cap (S - K) \neq \emptyset,\ i = 1, 2.$$

Tada postoje

$$y_i \in F(x_i) \cap (S - K),\ i = 1, 2.$$

Za $x_1, x_2 \in C$ i $\lambda \in [0,1]$ postoji $\mu \in [0,1]$ takvo da je

$$\mu F(x_1) + (1 - \mu)F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + K,$$

$$\mu y_1 + (1 - \mu)y_2 \in F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + K.$$

Kako je S konveksan imamo da $\mu y_1 + (1 - \mu)y_2 \in S$, pa je

$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \cap (S - K) \neq \emptyset.$$

□

Nužni uslovi za K-kvazikonveksna preslikavanja se u slučaju kvazikonveksnih svode na

$$F(x_1) \cap F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2), \quad (2.1.7)$$

$$F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \cap [co(F(x_1) \cup F(x_2))] \neq \emptyset \quad (2.1.8).$$

Medjutim, iz definicije kvazikonveksnih preslikavanja slijedi i više od (2.1.7) i (2.1.8). Naime, $F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$ siječe svaku duž sa krajevima u $F(x_1)$, odnosno $F(x_2)$. Pokazaćemo da je ovim data karakterizacija tih preslikavanja.

Teorema 2.17. *Preslikavanje $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ je kvazikonveksno ako i samo ako je*

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \cap [y_1, y_2] \neq \emptyset \tag{2.1.11}$$

za sve $x_1, x_2 \in C, y_1 \in F(x_1), y_2 \in F(x_2)$ i $\lambda \in [0,1]$, gdje je

$$[y_1, y_2] = \{x \in Y : x = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2, \quad \alpha \in [0,1]\}.$$

Dokaz. Neka je $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ kvazikonveksno preslikavanje i

$$y_i \in F(x_i),\ i = 1, 2.$$

Tada za $S = [y_1, y_2]$ vrijedi

$$S \cap F(x_i) \neq \emptyset,\ i = 1, 2$$

te je

$$S \cap F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \neq \emptyset.$$

Obrnuto, neka vrijedi (2.1.11) i

$$F(x_i) \cap S \neq \emptyset,\ i = 1, 2.$$

Tada postoje

$$y_i \in F(x_i) \cap S,\ i = 1, 2,$$

pa je $[y_1, y_2] \subset S$ i

$$[y_1, y_2] \cap F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \neq \emptyset.$$

Značі,

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \cap S \neq \emptyset.$$

□

Iz Teoreme 2.17. zaključujemo da je $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ kvazikonveksno ako i samo ako vrijedi:

Ako $y_i \in F(x_i),\ i = 1, 2$ tada za $\lambda \in [0,1]$ postoji $\mu \in [0,1]$ takvo da

$$\mu y_1 + (1-\mu)y_2 \in F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2).$$

Tu činjenicu koristimo u dokazu sljedeće leme.

Lema 2.18. *Ako je $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ kvazikonveksno preslikavanje i $D \subset Y$ konveksan skup tada je preslikavanje $G : C \to \mathcal{P}(Y)$ definisano sa*

$$G(x) = F(x) - D$$

kvazikonveksno.

Dokaz. Neka $y_i \in G(x_i)$, $i = 1, 2$. Postoje $d_i \in D$, $i = 1, 2$ takvi da

$$y_i \in F(x_i) - d_i, \; i = 1, 2.$$

Znači,

$$y_i + d_i \in F(x_i), \; i = 1, 2,$$

pa zbog Teoreme 2.17. je

$$[y_1 + d_1, y_2 + d_2] \cap F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \neq \emptyset$$

za sve $\lambda \in [0.1]$. Dakle, za $\lambda \in [0, 1]$ postoji $\mu \in [0, 1]$ takvo da

$$\mu(y_1 + d_1) + (1 - \mu)(y_2 + d_2) \in F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2),$$

pa

$$\mu y_1 + (1 - \mu)y_2 \in F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - [\mu d_1 + (1 - \mu)d_2].$$

Odavde slijedi da je

$$\mu y_1 + (1 - \mu)y_2 \in F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - D,$$

to jest

$$[y_1, y_2] \cap G(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \neq \emptyset.$$

Sada na osnovu Teoreme 2.17. zaključujemo da je G kvazikonveksno preslikavanje. □

Definicija 2.19. Neka je X normiran vektorski prostor, preslikavanje

$$|| \cdot || : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty)$$

definišemo na sljedeći način

$$||A|| = \inf\{||a|| : a \in A\}. \tag{2.1.12}$$

U vezi sa ovim dajemo sljedeće poznate činjenice [82].

Neka je K kompaktan podskup metričkog prostora X. Za svaki elemenat $x \in X$ postoji $y \in K$ takvo da je $d(x,y) = \inf_{z \in K} d(x,z) = d(x,K)$, jer je

$$d(x,\cdot) : K \to [0,+\infty)$$

neprekidno preslikavanje.

Neka je K neprazan zatvoren konveksan podskup refleksivnog Banachovog prostora X. Tada za svako $x \in X$, jednačina

$$||x-y|| = d(x,K)$$

ima rješenje u K.

Definicija 2.20. [82] Za Banachov prostor X kažemo da je striktno (strogo) konveksan ako i samo ako za sve $x, y \in X$,

$$x \neq 0,\ y \neq 0,\ ||x+y|| = ||x|| + ||y|| \Rightarrow x = \lambda y$$

za neko $\lambda > 0$. Ekvivalentno, X je strogo konveksan Banachov prostor ako je za sve $x, y \in X$,

$$||x|| = ||y|| = 1,\ x \neq y \Rightarrow \left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right| < 1.$$

Primjeri prostora koji nisu strogo konveksni su l_1 i L_1 dok su $l^p, 1 < p < +\infty$ strogo konveksni prostori.

Teorema 2.21. *[82] Neka je X strogo konveksan normiran prostor, C slabo kompaktan konveksan podskup od X. Tada za svaki $x \in X$ problem*

$$||x-y|| = d(x,C), \qquad \text{za } y \in C$$

ima jedinstveno rješenje.

Lema 2.22. *Za funkciju $||\cdot|| : \mathcal{K}(X) \to [0,+\infty)$ definisanu sa (2.1.12) vrijedi:*

(i) $||A|| = 0 \Leftrightarrow 0 \in A$,

(ii) $||A+B|| \leq ||A|| + ||B||$,

(iii) $||\alpha A|| = |\alpha|||A||$,

za sve $A, B \in \mathcal{K}(X)$ *i* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Primjetimo da $||A - B|| \leq ||A - C|| + ||C - B||$ u opštem slučaju ne vrijedi, kao što pokazuje sledeći primjer.

Primjer 2.23. Neka je $A = [0, 1], B = [2, 3], C = [1, 2]$.
Tada je

$$||A - C|| = ||C - B|| = 0 \text{ i } ||A - B|| = 1,$$

pa ne vrijedi

$$||A - B|| \leq ||A - C|| + ||C - B||.$$

Za preslikavanje $F : C \to \mathcal{K}(X)$ definišemo

$$||F(x)|| = \inf\{||y|| : y \in F(x)\}. \tag{2.1.13}$$

L. Van Hot je koristeći aparat konveksne analize dao neke osobine višeznačnih konveksnih preslikavanja.

Teorema 2.24. *[37] Neka su* X, Y *Banachovi prostori,* $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ *konveksno zatvoreno preslikavanje takvo da je* $domF = X$ *i* $F(x_0)$ *je ograničen za neki* $x_0 \in X$. *Tada postoji jedinstveno jednoznačno linearno preslikavanje* $T : X \to Y$ *takvo da je*

$$F(x) = F(0) + T(x).$$

Koristeći sličan postupak kao u dokazu prethodne teoreme dobijeno je sljedeće tvrdjenje o normi višeznačnog preslikavanja.

Teorema 2.25. *Neka je* X *refleksivan prostor i* $F : X \to \mathcal{K}(X)$ *konveksno preslikavanje. Ako je*

$$\sup_{x \in X} ||F(x)|| \leq M < +\infty$$

tada je $||F(x)|| = const$ *za sve* $x \in X$.

Dokaz. Definišimo funkciju $f : X \to [0, +\infty)$ na sljedeći način

$$f(x) = ||F(x)|| - M.$$

Preslikavanje f je konveksno. Naime,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = ||F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)|| - M,$$

pošto je F konveksno preslikavanje to je

$$\lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2),$$

pa je

$$||F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)|| \leq ||\lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2)||.$$

Sada zbog Leme 2.22. imamo da je

$$||F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)|| \leq \lambda ||F(x_1)|| + (1-\lambda)||F(x_2)||.$$

Dakle,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda ||F(x_1)|| + (1-\lambda)||F(x_2)|| - M = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2),$$

za sve $x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0,1]$.
Znači, f je konveksna i ograničena odozgo pa je konstanta.
Primjetimo, ako je f neprekidna, tada $\partial f(x) \neq \emptyset$ za svaki $x \in X$, pa za $y \in \partial f(x_0)$, vrijedi

$$\langle y, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0) \text{ za svaki } x \in X.$$

Sada uzimajući $x = z + x_0$ imamo

$$\langle y, z \rangle \leq f(z + x_0) - f(x_0) \leq -f(x_0),$$

jer je $f(x) = ||F(x)|| - M \leq 0$ za svaki $x \in X$.
Dakle, $\langle y, z \rangle \leq -f(x_0)$ za svaki $z \in X$. Znači, mora biti $y = 0$, pa je $\partial f(x_0) = \{0\}$ za svaki $x_0 \in X$. Sada vidimo da je $f(x) = const$ za sve $x \in X$. □

2.2 Mjera nekvazikonveksnosti preslikavanja

U ovoj sekciji dajemo jednu karakterizaciju kvazikonveksnih i kvazikonkavnih višeznačnih preslikavanja koristeći oznake F^- i F^+. Ta karakterizacija je motiv za uvodjenje pojma mjere nekvazikonveksnosti preslikavanja.

Lema 2.26. *Preslikavanje $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ je kvazikonveksno ako i samo ako je $F^-(S)$ konveksan skup za svaki konveksan podskup S od Y.*

Dokaz. Preslikavanje F je kvazikonveksno ako i samo ako vrijedi

$$F(x_i) \cap S \neq \emptyset,\ i = 1, 2 \Rightarrow F(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \cap S \neq \emptyset$$

za svaki konveksan podskup S od Y i sve $\lambda \in [0, 1], x_1, x_2 \in C$.
Medjutim, to je ekvivalentno sa

$$x_i \in F^-(S),\ i = 1, 2 \Rightarrow \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in F^-(S)$$

za svaki konveksan podskup S od Y i sve $\lambda \in [0, 1],\ x_1, x_2 \in C$.
Dakle, F je kvazikonveksno ako i samo ako je $F^-(S)$ konveksan za svaki konveksan $S \subset Y$.

□

Na sličan se dokazuje i sljedeća lema.

Lema 2.27. *Preslikavanje $F : C \to \mathcal{P}(Y)$ je kvazikonkavno ako i samo ako je $F^+(S)$ konveksan skup za svaki konveksan podskup S od Y.*

Ako je X normiran prostor sa B označavamo jediničnu kuglu sa centrom u 0.

Definicija 2.28. Neka su X i Y normirani prostori i preslikavanje $F : X \to \mathcal{P}(Y)$. Broj $mq(F)$ definisan sa
$$mq(F) = \inf\{\epsilon > 0 : co(F^-(S)) \subset F^-(S + \epsilon B) \text{ za svaki } S \in \mathcal{P}_{co}(Y)\}$$
zovemo mjerom nekvazikonveksnosti preslikavanja F.

Teorema 2.29. *Neka je X normiran prostor i preslikavanja $F, G : X \to \mathcal{P}(X)$. Tada je :*

(i) $mq(\alpha F) = |\alpha| mq(F)$ *za svaki* $\alpha \in \mathbb{R}$,

(ii) ako je F je kvazikonveksno i

$$(G \circ F)(x) = \bigcup_{u \in F(x)} G(u),$$

tada je $mq(F) = 0$ i $mq(G \circ F) \leq mq(G)$.

Dokaz. (i) Neka je

$$F(x_i) \cap S \neq \emptyset,\ i = 1,\ 2 \Rightarrow F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \cap (S + (mq(F) + \epsilon)B) \neq \emptyset,$$

tada je

$$\alpha F(x_i) \cap \alpha S \neq \emptyset,\ i = 1,\ 2 \Rightarrow \alpha F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \cap (\alpha S + \alpha(mq(F) + \epsilon)B) \neq \emptyset,$$

to jest

$$\alpha F(x_i) \cap S \neq \emptyset,\ i = 1,\ 2 \Rightarrow \alpha F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \cap (S + \alpha(mq(F) + \epsilon)B) \neq \emptyset,$$

gdje je S proizvoljan konveksan skup, jer je

$$\mathcal{P}_{co}(X) = \{\alpha S : S \in \mathcal{P}_{co}(X)\} \text{ za } \alpha \neq 0,$$

pa slijedi da je

$$mq(\alpha F) = |\alpha| mq(F) \text{za svaki } \alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Za $\alpha = 0$ tvrdjenje je očigledno. (ii) Ako je F kvazikonveksno, tada je $mq(F) = 0$ zbog Leme 2.26.
Dalje, neka je $(G \circ F)(x_i) \cap S \neq \emptyset,\ i = 1,\ 2$, to jest

$$(\bigcup_{u \in F(x_i)} G(u)) \cap S \neq \emptyset,\ i = 1,\ 2,$$

tada je

$$G(u_i) \cap S \neq \emptyset, \text{ gdje je } u_i \in F(x_i),\ i = 1,\ 2.$$

Dakle,

$$G^-(S) \cap F(x_i) \neq \emptyset$$

i imamo

$$x_i \in F^-(G^-(S)),\ i = 1,\ 2.$$

Pošto je preslikavanje F kvazikonveksno zaključujemo da je $F^-(co(G^-(S)))$ konveksan skup. Kako je

$$co(G^-(S)) \subset G^-(S + (mq(G) + \epsilon)B)$$

imamo da

$$F^-(G^-(S)) \subset F^-(G^-(S + (mq(G) + \epsilon)B)).$$

Dakle, $mq(G \circ F) \leq mq(G)$. □

Primjer 2.30. Neka je preslikavanje $F : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ definisano sa

$$F(x) = \begin{cases} [0, +\infty), & |x| \leq 1 \\ [x^2 - 1, +\infty), & |x| > 1. \end{cases}$$

Očigledno je F kvazikonveksno preslikavanje i $mq(F) = 0$.

Primjer 2.31. Neka je preslikavanje $F : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ definisano sa

$$F(x) = \begin{cases} [1, +\infty), & |x| \leq \frac{1}{2} \\ [0, +\infty), & \frac{1}{2} < |x| \leq 1 \\ [x^2 - 1, +\infty), & |x| > 1. \end{cases}$$

F nije kvazikonveksno preslikavanje, jer na primjer za konveksan skup $S = [0, \frac{1}{2}]$ vrijedi

$$F(1) \cap S \neq \emptyset, \; F(-1) \cap S \neq \emptyset$$

ali

$$\frac{1}{2} = \lambda \cdot 1 + (1 - \lambda)(-1) \text{ za } \lambda = \frac{3}{4}$$

i

$$F\left(\frac{1}{2}\right) \cap S = [1, \; +\infty) \cap \left[0, \; \frac{1}{2}\right] = \emptyset.$$

U ovom slučaju je $mq(F) = 1$.

Primjer 2.32. Neka je f kvazikonveksna funkcija na skupu $\mathbb{R}$, za preslikavanje

$$epi(f) : \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

$$epi(f)(x) = [f(x), +\infty)$$

vrijedi $mq(epi(f)) = 0$.
Naime,

$$epi(f)^-((a, b)) = \{x : [f(x), +\infty) \cap (a, b) \neq \emptyset\},$$

pa je

$$epi(f)^-((a, b)) = \{x : f(x) \leq b\},$$

pa pošto je f kvazikonveksna funkcija zaključujemo da je $epi(f)^-((a, b))$ konveksan skup.

Glava 3

Najbolje aproksimacije u normiranim prostorima

3.1 KKM-preslikavanja

U ovom dijelu navodimo neke primjere KKM-preslikavanja kao i neka tvrdjenja KKM teorije [60], [71] koja koristimo u daljem radu.

Definicija 3.1. [22] Neka je X neprazan podskup vektorskog topološkog prostora (LTP) E. Za višeznačno preslikavanje $F : X \to \mathcal{P}(E)$ kažemo da je KKM-preslikavanje ako vrijedi

$$co\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} F(x_i) \tag{3.1.1}$$

za svaki podskup $\{x_1, \ldots, x_n\}$ od X, $n \in \mathbb{N}$.

Sljedeći primjeri KKM-preslikavanja su dati u [22].

1.Varijacioni problemi: Neka je C konveksan skup od i $\phi : C \to \mathbb{R}$ konveksno preslikavanje. Za svaki $x \in C$ neka je

$$G(x) = \{y \in C : \phi(y) \leq \phi(x)\}.$$

Tada je $G : C \to \mathcal{P}(C)$ KKM-preslikavanje.

Primjetimo da je G KKM preslikavanje ako i samo ako je ϕ kvazikonveksno preslikavanje.

2. Najbolje aproksimacije: Neka je X normiran vektorski prostor C konveksan podskup od X i preslikavanje $f : C \to X$. Za svaki $x \in C$ definišimo

$$G(x) = \{y \in C : ||y - f(y)|| \leq ||x - f(y)||\}.$$

Tada je G KKM-preslikavanje.

3. Varijacione nejednakosti: Neka je H Hilbertov prostor, C konveksan podskup od H i preslikavanje $f : C \to X$. Za svaki $x \in C$ neka je

$$G(x) = \{y \in C : \langle f(y), y - x \rangle \leq 0\}.$$

Tada je G KKM-preslikavanje.

Sljedeći rezultat je poznat kao KKM (Knaster, Kuratowski, Mazurkiewicz) lema.

Ovde, e^i je oznaka za i–ti jedinični vektor u prostoru $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.2. *Neka je $\Delta = co\{e^1, \ldots, e^m\} \subset \mathbb{R}^m$ i F_i, $i = 1, \ldots, m$ zatvoreni podskupovi od Δ tako da za svaki $I \subset \{1, \ldots, m\}$ važi inkluzija*

$$co\{e^i : i \in I\} \subset \bigcup_{i \in I} F_i.$$

Tada je $\bigcap_{i=1}^{m} F_i$ neprazan i kompaktan skup.

Ky Fan je 1961 uopštio KKM lemu za proizvoljan LTP koristeći pojam KKM preslikavanja.

Teorema 3.3. *(Ky Fan, [23]) Neka je X neprazan podskup LTP E i $T : X \to \mathcal{P}(E)$ KKM preslikavanje takvo da je*

(i) $T(x)$ zatvoren za svaki $x \in X$,

(ii) $T(x_0)$ kompaktan za bar jedan $x_0 \in X$.

Tada je

$$\bigcap_{x \in X} T(x) \neq \emptyset.$$

Prije nego što ćemo navesti dva uopštenja Ky Fanove Teoreme definišimo konačnu (kompaktnu) relativnu zatvorenost, [41].

Sa E označimo proizvoljan LTP.

Definicija 3.4. Neka je Y neprazan podskup od E. Skup $X \subset Y$ je konačno relativno zatvoren podskup od Y ako je $X \cap F$ relativno zatvoren podskup od $Y \cap F$, za svaki podprostor F od E, takav da je $dimF < +\infty$.

Definicija 3.5. Neka je Y neprazan podskup od E. Skup $X \subset Y$ je kompaktno relativno zatvoren podskup od Y ako je $X \cap K$ relativno zatvoren podskup od $Y \cap K$, za svaki kompaktan podskup K od E.

Teorema 3.6. *Neka je $Y \subset E$ konveksan, $X \subset Y$ neprazan i $T : X \to \mathcal{P}(E)$ KKM preslikavanje takvo da je svaki $T(x)$ konačno relativno zatvoren podskup od Y. Tada je za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $x_1, \ldots, x_n \in X$*

$$\bigcap_{i=1}^{n} T(x_i) \neq \emptyset.$$

Teorema 3.7. *Neka je $Y \subset E$ konveksan, $X \subset Y$ neprazan i $T : X \to \mathcal{P}(E)$ KKM preslikavanje takvo da je svaki $T(x)$ kompaktno relativno zatvoren podskup od Y. Ako postoji neprazan podskup $X_0 \subset X$ sadržan u nekom predkompaktnom konveksnom podskupu Y_0 od Y tako da je $cl(\bigcap_{x \in X_0} T(x))$ kompaktan podskup od Y, tada je*

$$\bigcap_{x \in X} T(x) \neq \emptyset.$$

3.2 Najbolje aproksimacije u normiranim prostorima

Sljedeću teoremu o najboljim aproksimacijama je dao Ky Fan 1961, [23]. Dokaz tog tvrdjenja se zasniva na Teoremi 3.3.

Teorema 3.8. *Neka je C kompaktan konveksan podskup normiranog vektorskog prostora X i $f : C \to X$ neprekidno preslikavanje. Tada postoji $y_0 \in C$ takvo da je*

$$||y_0 - f(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||x - f(y_0)||.$$

Teorema 3.8. ima primjene u raznim oblastima matematike. Kao primjer navodimo sljedeću teoremu o fiksnoj tački [82].

Teorema 3.9. *Neka je C kompaktan konveksan podskup normiranog vektorskog prostora X i $f : C \to X$ neprekidno preslikavanje. Ako za svaki $x \in C$ takav da je $x \neq f(x)$ skup $[x, f(x)]$ sadrži bar dvije tačke iz C onda f ima fiksnu tačku.*

Teorema 3.8. je proširivana na više načina, kao na primjer u: [19], [29], [31], [30], [28], [27], [33], [39], [63], [61], [73]. Jedno proširenje je dao D. Delbosco [20].

Definicija 3.10. [20] Za preslikavanje $f : C \to X$ kažemo da je skoro kvazikonveksno ako je

$$||f(x_\lambda) - z|| \leq \max\{||f(x_1) - z||, ||f(x_2) - z||\}, \tag{3.2.1}$$

gdje je $x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, za sve x_1, $x_2 \in C$, $\lambda \in [0, 1]$, $z \in X$.

Teorema 3.11. *[20] Neka je C neprazan konveksan podskup normiranog vektorskog prostora X i $f : C \to X$ neprekidno preslikavanje. Neka je $g : C \to C$ neprekidno, skoro kvazikonveksno "na" preslikavanje i postoji neprazan kompaktan konveksan podskup C_0 od C takav da je skup*

$$B = \{y \in C : ||g(x) - f(y)|| \geq ||g(y) - f(y)|| \text{ za sve } x \in C_0\}$$

kompaktan. Tada postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$||g(y_0) - f(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||x - f(y_0)||.$$

Koristeći Teoremu 3.11. dobijena je sljedeća teorema, koja je uopštenje rezultata navedenog u [82].

Teorema 3.12. *Neka je C neprazan konveksan podskup normiranog vektorskog prostora X i $f : C \to X$ neprekidno preslikavanje. Neka je $g : C \to C$ neprekidno skoro kvazikonveksno i "na" preslikavanje i C_0 neprazan kompaktan konveksan podskup od C tako da je skup*

$$B = \{y \in C : ||g(x) - f(y)|| \geq ||g(y) - f(y)|| \text{ za sve } x \in C_0\}$$

kompaktan. Tada, ako za svaki $x \in C$ takav da je $f(x) \neq g(x)$ skup $[f(x), g(x)]$ ima bar dvije tačke u C onda postoji $x_0 \in C$ takvo da je $g(x_0) = f(x_0)$.

Dokaz. Zbog Teoreme 3.11. postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$||g(y_0) - f(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||x - f(y_0)||.$$

Neka je $g(y_0) \neq f(y_0)$. Tada je $z = \lambda g(y_0) + (1 - \lambda) f(y_0) \in C$ za neki $\lambda \in (0, 1)$, pa je

$$||z - f(y_0)|| = \lambda ||g(y_0) - f(y_0)|| < ||g(y_0) - f(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||x - f(y_0)||,$$

što je kontradikcija. Znači, $g(y_0) = f(y_0)$.

□

Prirodno pitanje je da li se Teorema 3.8. odnosno Teorema 3.11. može proširiti na višeznačna preslikavanja.

U [27] je dokazano jedno tvrdjenje o najboljim aproksimacijama za višeznačna preslikavanja, pri čemu je korištena mjera nekompaktnosti Kuratowskog.

Definicija 3.13. Neka je (X, d) metrički prostor i Q ograničen podskup u X. Mjera nekompaktnosti Kuratowskog $\alpha(Q)$, skupa Q je

$$\alpha(Q) = \inf\{\epsilon > 0 : Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i,\ S_i \subset X,\ diam S_i < \epsilon,\ i = 1, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Teorema 3.14. *(Ch. Horvath) Neka je (X, d) kompletan metrički prostor i $\{F_i\}_{i \in I}$ familija zatvorenih podskupova od X koji imaju osobinu konačnog presjeka. Ako je*

$$\inf_{i \in I} \alpha(F_i) = 0$$

tada je $\bigcap_{i \in I} F_i$ neprazan i kompaktan skup.

Teorema 3.15. *[27] Neka je X normiran prostor, M neprazan konveksan i kompaktan podskup od X, $g : M \to M$ neprekidno "na" preslikavanje za koje vrijedi*

$$||g(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_2|| \leq \max\{||g(x_1) - z_1||, ||g(x_2) - z_2||\}, \quad (3.2.2)$$

za sve $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1, x_1, x_2 \in M, z_1, z_2 \in X$ i $F : M \to \mathcal{P}(X)$ neprekidno preslikavanje, takvo da je $F(x)$ neprazan kompaktan i konveksan skup za svaki $x \in M$ i

$$\inf_{x \in M} \alpha\{y \in M : d(g(y), F(y)) \leq d(g(x), F(y)\} = 0. \quad (3.2.3)$$

Tada postoji $y_0 \in M$ takvo da je

$$d(g(y_0), F(y_0)) = \inf_{x \in M} d(x, F(y_0)).$$

Primjetimo da uslov (3.2.2) povlači uslov (3.2.1) u teoremi D. Delbosca. Jedna primjena prethodne teoreme je sljedeći rezultat o egzistenciji rješenja problema $g(x) \in F(x)$.

Teorema 3.16. *Neka je X normiran prostor, M neprazan konveksan i kompaktan podskup od X, $g : M \to M$ neprekidno "na" preslikavanje za koje vrijedi (3.2.2) i $F : M \to \mathcal{K}_{co}(X)$ neprekidno preslikavanje za koje vrijedi (3.2.3). Ako za svaki $x \in M$ takav da $g(x) \notin F(x)$ svaki od skupova $[g(x), u], u \in F(x)$ ima bar dvije tačke u M tada postoji $y_0 \in M$ takvo da*

$$g(y_0) \in F(y_0).$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 3.15. postoji $y_0 \in M$ takvo da je

$$||g(y_0) - F(y_0)|| = \inf_{x \in M} d(x, F(y_0)).$$

Neka je $g(y_0) \notin F(y_0)$, $F(y_0)$ je kompaktan skup pa, zbog neprekidnosti preslikavanja g, postoji $u_0 \in F(y_0)$ takvo da je $d(g(y_0), F(y_0)) = d(g(y_0), u_0)$. Sada zbog uslova da svaki od skupova $[g(x), u]$, $u \in F(x)$ ima bar dvije tačke u M, za svaki $u \in F(y_0)$ postoji $\lambda \in (0, 1)$ tako da

$$\lambda g(y_0) + (1 - \lambda)u \in M.$$

Zaključujemo da vrijedi

$$||\lambda g(y_0) + (1 - \lambda)u - u|| = ||\lambda g(y_0) - \lambda u|| = \lambda||g(y_0) - u|| < ||g(y_0) - u||.$$

Dakle, za u_0 i neko $\lambda \in (0, 1)$ vrijedi

$$||\lambda g(y_0) + (1 - \lambda)u_0 - u_0|| < ||g(y_0) - u_0|| = d(g(y_0), F(y_0)) = \inf_{x \in M} d(x, F(y_0)),$$

što je kontradikcija, jer
$\lambda g(y_0) + (1 - \lambda)u_0 \in M$ i $u_0 \in F(y_0)$. □

Dokazaćemo teoremu analognu Teoremi 3.15. pri čemu se umjesto funkcije $g : M \to M$ za koju vrijedi uslov (3.2.1) posmatra višeznačno kvazikonveksno preslikavanje $G : C \to \mathcal{P}(C)$.

Teorema 3.17. *Neka je C neprazan zatvoren konveksan podskup normiranog vektorskog prostora X i višeznačna preslikavanja $F, G : C \to \mathcal{K}_{co}(X)$ takva da važe sljedeći uslovi:*

(i) F i G su neprekidna preslikavanja,

(ii) G je kvazikonveksno preslikavanje,

(iii) postoji $C_0 \in \mathcal{K}_{co}(C)$ takav da je skup

$$\bigcap_{x \in C_0} \{y \in C : ||G(y) - F(y)|| \leq ||G(x) - F(y)||\}$$

kompaktan.

Tada postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$||G(y_0) - F(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||G(x) - F(y_0)||.$$

Dokaz. Koristimo Teoremu 3.7. U tom cilju definišimo preslikavanje $T : C \to \mathcal{P}(C)$ na sljedeći način

$$T(x) = \{y \in C : ||G(y) - F(y)|| \leq ||G(x) - F(y)||\}.$$

Dokažimo prvo da je $T(x)$ zatvoren skup za svaki $x \in C$. Preslikavanja F i G su neprekidna te su poluneprekidna odozgo i poluneprekidna odozdo. Zbog Teoreme 1.13. i Teoreme 1.14. preslikavanja

$$x \mapsto G(x) - F(x), \quad x \in C$$

$$x \mapsto G(y) - F(x), \quad x \in C \text{ i } y \in C \text{ fiksiran}$$

su poluneprekidna odozdo i poluneprekidna odozgo. Znači, ta preslikavanja su neprekidna. Prema Lemi 1.11. zaključujemo da su preslikavanja

$$x \mapsto ||G(x) - F(x)||, \quad x \in C$$

$$x \mapsto ||G(y) - F(x)||, \quad x \in C \text{ i } y \in C \text{ fiksiran}$$

neprekidna. Dakle, $T(x)$ je zatvoren skup za svaki $x \in C$. Zbog uslova (iii) skup

$$\bigcap_{x \in C_o} T(x)$$

je kompaktan.
Pokažimo da je T KKM preslikavanje.
U suprotnom bi postojali $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in C$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ i $y \in co\{x_1, \ldots, x_n\}$ takvi da

$$y \notin \bigcup_{i=1}^{n} T(x_i).$$

Tada je $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ za neke $\lambda_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ i $y \notin T(x_i)$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Znači vrijedi

$$||G(y) - F(y)|| > ||G(x_i) - F(y)|| \tag{3.2.4}$$

za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Kako je $G(x), F(x) \in \mathcal{K}_{co}(X)$ za svaki $x \in C$ postoje

$$u^0 \in G(y) - F(y),\ v_i^0 \in G(x_i) - F(y),\ i \in \{1, \ldots, n\},$$

takvi da

$$||u^0|| = \inf_{u \in G(y) - F(y)} ||u|| > \inf_{v_i \in G(x_i) - F(y)} ||v_i|| = ||v_i^0||$$

za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Neka je $S = co\{v_1^0, \ldots, v_n^0\}$. Zbog konveksnosti skupova $F(x)$, $x \in C$, uslova (ii) i Leme 2.18. preslikavanje

$$x \mapsto G(x) - F(y), \quad x \in C$$

je kvazikonveksno za svaki $y \in C$. Dakle,

$$(G(y) - F(y)) \cap S \neq \emptyset,$$

jer je

$$(G(x_i) - F(y)) \cap S \neq \emptyset \text{ za sve } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Znači, postoji $\overline{v} \in S$ takav da $\overline{v} \in G(y) - F(y)$ i $\overline{v} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i v_i^0$, za neke $\mu_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i = 1$. Sada imamo

$$||G(y) - F(y)|| = \inf_{u \in G(y) - F(y)} ||u|| \leq ||\overline{v}|| =$$

$$= ||\sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i^0|| \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i ||v_i^0|| \leq \max_{1 \leq i \leq n} ||v_i^0|| = \max_{1 \leq i \leq n} ||G(x_i) - F(x_i)||.$$

Ovo je zbog (3.2.4) nemoguće. Koristeći Teoremu 3.7. zaključujemo da je

$$\bigcap_{x \in C} T(x) \neq \emptyset.$$

Znači, postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$||G(y_0) - F(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||G(x) - F(y_0)||.$$

□

Sljedeći primjer pokazuje da ako se uslov o kompaktnosti skupova

$$G(x), \;\; F(x), \;\; x \in C$$

izostavi u prethodnoj teoremi, ona ne mora da važi.

Primjer 3.18. Neka su preslikavanja $F, G : \mathbb{R} \to P(\mathbb{R})$ definisana na sljedeći način

$$F(x) = [x, +\infty),$$

$$G(x) = (-\infty, x - 1].$$

Preslikavanja F i G su kvazikonveksna i neprekidna, ali skupovi $F(x), G(x), \; x \in \mathbb{R}$ nisu kompaktni. Ako bi postojao $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi

$$||G(y_0) - F(y_0)|| = \inf_{x \in \mathbb{R}} ||G(x) - F(y_0)||,$$

onda vrijedi

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} ||G(x) - F(y_0)|| = 0 \text{ i } G(y_0) \cap F(y_0) = \emptyset$$

što je nemoguće.

Primjenom Teoreme 3.17. dobija se sljedeće tvrdjenje.

Teorema 3.19. *Neka je C neprazan zatvoren konveksan podskup normiranog prostora X i preslikavanja $F, G : C \to \mathcal{K}_{co}(X)$ zadovoljavaju uslove $(i), (ii), (iii)$ Teoreme 3.17. Ako za svaki $x \in C$ vrijedi*

$$G(C) \cap F(x) \neq \emptyset,$$

onda postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$G(y_0) \cap F(y_0) \neq \emptyset.$$

Dokaz. Zbog Teoreme 3.17. postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$||G(y_0) - F(y_0|| = \inf_{x \in C} ||G(x) - F(y_0)||.$$

Kako je $G(C) \cap F(x) \neq \emptyset$ za svaki $x \in C$ to je i

$$G(C) \cap F(y_0) \neq \emptyset,$$

pa

$$0 \in G(C) - F(y_0).$$

Znači,

$$\inf_{x \in C} ||G(x) - F(y_0)|| = 0,$$

pa je

$$||G(y_0) - F(y_0)|| = 0.$$

Kako je $G(y_0),\ F(y_0) \in \mathcal{K}_{co}(X)$ zaključujemo da

$$0 \in G(y_0) - F(y_0).$$

Dakle, $G(y_0) \cap F(y_0) \neq \emptyset$. □

Posljedica 3.20. *Neka je C neprazan zatvoren konveksan podskup normiranog prostora X i $f : C \to X$ neprekidno preslikavanje takvo da postoji kompaktan konveksan podskup C_0 od X takav da je skup*

$$B = \{y \in C : ||y - f(y)|| \leq ||x - f(y)|| \text{ za svaki } x \in C_0\}$$

kompaktan. Tada postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$||y_0 - f(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||x - f(y_0)||.$$

Dokaz. Definišimo prelikavanja $F,\ G : C \to \mathcal{K}_{co}(X)$ na sljedeći način

$$F(x) = \{f(x)\},$$

$$G(x) = \{x\}.$$

Primjenom Teoreme 3.17. dobijamo da postoji $y_0 \in C$ takvo da vrijedi

$$||y_0 - f(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||x - f(y_0)||.$$

□

Sljedeće tvrdjenje je dokazao L. J. Lin [22].

Posljedica 3.21. *Neka je C neprazan zatvoren konveksan podskup normiranog prostora X i važe sljedeći uslovi:*

(i) $f : C \to X$ *neprekidno preslikavanje,*

(ii) $g : C \to X$ *neprekidno preslikavanje takvo da je* $g^{-1}([y_1, y_2])$ *konveksan skup za sve* $y_1, y_2 \in g(C)$,

(iii) postoji kompaktan konveksan podskup C_0 *od* C *takav da je skup* $B = \{y \in C : ||g(y) - f(y)|| \leq ||g(x) - f(y)||$ *za sve* $x \in C_0\}$ *kompaktan.*

Tada postoji $y_0 \in C$ *takvo da je*

$$||g(y_0) - f(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||g(x) - f(y_0)||.$$

Dokaz. Preslikavanja $F, G : C \to \mathcal{K}_{co}(X)$ definisana sa

$$F(x) = \{f(x)\},$$

$$G(x) = \{g(x)\},$$

zadovoljavaju uslove (i) i (iii) iz Teoreme 3.17. Pokazaćemo da vrijedi i uslov (ii), to jest da je preslikavanje G kvazikonveksno.
Neka je skup S konveksan skup takav da je $G(x_i) \cap S \neq \emptyset$ za $i = 1, 2$.
Tada postoje y_1, y_2 takvi da $y_i \in G(x_i) \cap S$ za $i = 1, 2$. Zbog konveksnosti skupa S je $[y_1, y_2] \subset S$. Očigledno je $x_i \in G^{-1}([y_1, y_2])$ za $i = 1, 2$, pa zbog uslova (ii) je

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in G^{-1}([y_1, y_2]) \text{ za sve } \lambda \in [0, 1].$$

Znači,

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in G^{-1}(\mu y_1 + (1 - \mu)y_2) \text{ za neko } \mu \in [0, 1],$$

to jest

$$\mu y_1 + (1 - \mu)y_2 \in G(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2).$$

Dakle,

$$G(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \cap S \neq \emptyset.$$

Sada zbog Teoreme 3.17. zaključujemo da postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$||g(y_0) - f(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||g(x) - f(y_0)||.$$

□

Sljedeća teorema o koincidenciji je dobijena primjenom Teoreme 3.17. Kao posljedica te teoreme dobijen je rezultat o fiksnoj tački koji je dokazao Ky Fan .

Teorema 3.22. *Neka je C neprazan zatvoren konveksan podskup normiranog prostora X i $F, G : C \to \mathcal{K}_{co}(X)$ preslikavanja za koje vrijede uslovi $(i)-(iii)$ iz Teoreme 3.17. Ako za svaki $y \in C$ vrijedi uslov*
(iv) $G(y) \cap F(y) = \emptyset \Rightarrow card([u, v] \cap G(C)) \geq 2$ za sve $u \in bd(G(y)), v \in bd(F(y))$, onda postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$G(y_0) \cap F(y_0) \neq \emptyset.$$

Dokaz. Zbog Teoreme 3.17. postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$||G(y_0) - F(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||G(x) - F(y_0)||.$$

Neka je

$$G(y_0) \cap F(y_0) = \emptyset.$$

Kako je $G(y_0), F(y_0) \in \mathcal{K}_{co}(X)$ postoje $u_0 \in G(y_0), v_0 \in F(y_0)$ takvi da je

$$||u_0 - v_0|| = ||G(y_0) - F(y_0)||.$$

Zbog konveksnosti skupova $G(y_0)$ i $F(y_0)$, $u_0 \in bd(G(y_0))$, $v_0 \in bd(F(y_0))$.
U protivnom bi postojao $\lambda \in (0, 1)$ takav da $\lambda u_0 + (1 - \lambda)v_0 \in F(y_0) \cup G(y_0)$. Ako na primjer $\lambda u_0 + (1 - \lambda)v_0 \in F(y_0)$, imali bi da je

$$||\lambda u_0 + (1 - \lambda)v_0 - v_0|| = ||\lambda(u_0 - v_0)|| < ||u_0 - v_0||,$$

što je nemoguće.
Sada, zbog uslova (iv) postoji $\lambda \in (0, 1)$ tako da

$$\lambda u_0 + (1 - \lambda)v_0 \in G(C),$$

pa je

$$||\lambda u_0 + (1 - \lambda)v_0 - v_0|| < ||u_0 - v_0|| = ||G(y_0) - F(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||G(x) - F(y_0)||$$

što je kontradikcija. Znači, $G(y_0) \cap F(y_0) \neq \emptyset$. □

Posljedica 3.23. *[82] Neka C neprazan konveksan kompaktan podskup normiranog prostora X i $f : C \to X$ neprekidno preslikavanje. Ako svaki nedegenerisani interval $[x, f(x)]$, $x \in C$, sadrži bar dvije tačke iz C onda f ima fiksnu tačku.*

3.3 Simultane aproksimacije u normiranim prostorima

U ovom dijelu polazimo od rezultata D. Delbosca [19]. U tom radu je uveden pojam simultanih aproksimacija i data verzija Ky Fanovog Teoreme 3.8. o najboljim aproksimacijama za dvije funkcije u Hilbertovim prostorima. Mi dajemo varijantu tog tvrdjenja za konačan broj višeznačnih preslikavanja u normiranim prostorima.

Neka je C podskup Banachovog prostora X. Funkcija δ je definisana u [19] na sljedeći način

$$\delta(C,(x_1,x_2)) = \inf_{y\in C}\{||y-x_1||^2 + ||y-x_2||^2\}^{\frac{1}{2}},\ x_1,x_2 \in X.$$

U slučaju da je $x_1 = x_2$ imamo

$$\delta(C,(x_1,x_1)) = \sqrt{2}\inf_{y\in C}||y-x_1||.$$

Definicija 3.24. [19] Za tačku $z \in C$ kažemo da je tačka δ-simultanih aproksimacija za par (x_1,x_2) ako je

$$(||z-x_1||^2 + ||z-x_2||^2)^{\frac{1}{2}} = \delta(C,(x_1,x_2)).$$

Ako je $x_1 = x_2$, z je tačka najbolje aproksimacije za x_1.

Sljedeća teorema je dokazana u [19] pomoću Schauderove teoreme o fiksnoj tački.

Teorema 3.25. *Neka je H Hilbertov prostor, $C \in \mathcal{K}_{co}(H)$, $f_i : C \to H$, $i = 1,2$ funkcije. Tada postoji bar jedna tačka $y \in C$ takva da je*

$$||y-f_1(y)||^2 + ||y-f_2(y)||^2 = \delta^2(C,(f_1(y),f_2(y))).$$

Sada dajemo teoremu o simultanim aproksimacijama u normiranom prostoru za višeznačna preslikavanja.

Teorema 3.26. *Neka je X normiran prostor, $C \in \mathcal{K}_{co}(X)$, preslikavanja $F_i, G_i : C \to \mathcal{K}_{co}(X)$, $i = 1,\ldots,n$ su takva da je* *(i) F_i i G_i su neprekidna preslikavanja,*

(ii) G_i je kvazikonveksno preslikavanje,

Tada postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$\sum_{i=1}^{n} ||G_i(y_0) - F_i(y_0)|| = \inf_{x \in C} \sum_{i=1}^{n} ||G_i(x) - F_i(y_0)||.$$

Dokaz. Definišimo preslikavanje $T : C \to \mathcal{P}(C)$ na sljedeći način

$$T(x) = \{y \in C : \sum_{i=1}^{n} ||G_i(y) - F_i(y)|| \leq \sum_{i=1}^{n} ||G_i(x) - F_i(y)||\}.$$

Pokažimo da je $T(x)$ zatvoren skup za svaki $x \in C$.
Preslikavanja F_i, G_i, $i = 1, \ldots, n$, su neprekidna , pa su poluneprekidna odozdo i poluneprekidna odozgo. Pošto $F_i(x), G_i(x) \in \mathcal{K}_{co}(X)$ koristeći Teoremu 1.13. i Teoremu 1.14. zaključujemo da su preslikavanja

$$x \mapsto G_i(x) - F_i(x), \quad x \in C$$

$$x \mapsto G_i(y) - F_i(x), \quad x \in C, \quad y \in C \text{ fiksan },$$

poluneprekidna odozdo i poluneprekidna odozgo, pa su i neprekidna. Sada, zbog Teoreme 1.8. zaključujemo da su ta preslikavanja neprekidna u metrici Hausdorffa. Koristeći Lemu 1.11. dobijamo da je preslikavanje

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} ||G_i(x) - F_i(x)||, \quad x \in C$$

neprekidno kao suma neprekidnih preslikavanja. Na sličan način zaključujemo i da je preslikavanje

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{n} ||G_i(y) - F_i(x)||, \quad x \in C$$

neprekidno za svaki $y \in C$.
Dakle, skup $T(x)$ je zatvoren za svaki $x \in C$. Dalje kako je $T(x) \subset C$, to je i kompaktan za svaki $x \in C$. Dokažimo da je T KKM preslikavanje. Ako to ne bi bilo postojali bi $x_1, \ldots, x_m \in C$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in [0, 1]$, takvi da je $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$ i

$$y = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \notin \bigcup_{j=1}^{m} T(x_j).$$

To znači,

$$\sum_{i=1}^{n} ||G_i(y) - F_i(y)|| > \sum_{i=1}^{n} ||G_i(x_j) - F_i(y)|| \text{ za sve } j = 1, \ldots, m.$$

Kako su $G_i(x), F_i(x) \in \mathcal{K}_{co}(X)$, postoje $u_i^0 \in G_i(y) - F_i(y), v_{ij}^0 \in G_i(x_j) - F_i(y)$ za sve $i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m$, takvi da je

$$\sum_{i=1}^{n} ||u_i^0|| = \sum_{i=1}^{n} ||G_i(y) - F_i(y)|| > \sum_{i=1}^{n} ||G_i(x_j) - F_i(y)|| = \sum_{i=1}^{n} ||v_{ij}^0||, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Kako je $F_i(y) \in \mathcal{K}_{co}(X)$ i G_i kvazikonveksno preslikavanje prema Lemi 2.18. imamo da je preslikavanje

$$x \mapsto G_i(x) - F_i(y), \quad x \in C$$

kvazikonveksno za sve $y \in C,\ i = 1, \ldots, n$.
Neka su skupovi $S_i,\ i = 1, \ldots, n$ definisani na sljedeći način

$$S_i = co\{v_{i1}^0, \ldots, v_{im}^0\}.$$

Kako je $(G_i(x_j) - F_i(y)) \cap S_i \neq \emptyset$ za sve $j = 1, \ldots, m$, to je $(G_i(y) - F_i(y)) \cap S_i \neq \emptyset$.
Dakle, postoje $v_i \in (G_i(y) - F_i(y)) \cap S_i$, to jest $v_i \in (G_i(y) - F_i(y))$ i $v_i = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j v_{ij}^0$, gdje je $\mu_j \geq 0,\ \sum\limits_{j=1}^{m} \mu_j = 1$, za sve $i = 1, \ldots, n$.
Sada je

$$\sum_{i=1}^{n} ||G_i(y) - F_i(y)|| = \sum_{i=1}^{n} \inf\{||u|| : u \in G_i(y) - F_i(y)\} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} ||v_i|| = \sum_{i=1}^{n} ||\sum_{j=1}^{m} \mu_j v_{ij}^0|| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mu_j ||v_{ij}^0|| = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \sum_{i=1}^{n} ||G_i(x_j) - F_i(y)||,$$

pa je

$$\sum_{i=1}^{n} ||G_i(y) - F_i(y)|| \leq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^{n} ||G_i(x_j) - F_i(y)||$$

što je nemoguće.
Konačno primjenjujući Teoremu 3.3. zaključujemo da postoji

$$y_0 \in \bigcap_{x \in C} T(x),$$

odnosno da je

$$\sum_{i=1}^{n} ||G_i(y_0) - F_i(y_0)|| = \inf_{x\in C} \sum_{i=1}^{n} ||G_i(x) - F_i(y_0)||.$$

□

Kao jednu primjenu prethodne teoreme dajemo sljedeći rezultat o egzistenciji tačke koincidencije, koji je uopštenje Teoreme 3.19.

Posljedica 3.27. *Neka je X normiran prostor, $C \in \mathcal{K}_{co}(X)$ i za preslikavanja*

$$F_i, G_i : C \to \mathcal{K}_{co}(X),\ i = 1, \ldots, n$$

vrijede uslovi (i) i (ii) iz Teoreme 3.26. Ako je

$$\bigcap_{i=1}^{n} (G_i(C) \cap F_i(y)) \neq \emptyset \ \text{ za sve } \ y \in C$$

onda postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$G_i(y_0) \cap F_i(y_0) \neq \emptyset \quad \text{za sve } \ i = 1, \ldots, n.$$

3.4 Primjena mjere nekvazikonveksnosti

Neka je $K \subset X$ i $\epsilon > 0$, sa $N_\epsilon(K)$ označavamo otvorenu ϵ-okolinu skupa K, to jest $N_\epsilon(K) = K + \epsilon B$.

Teorema 3.28. *Neka je X normiran prostor, $C \in \mathcal{K}_{co}(X)$ i*

$$F : C \to \mathcal{K}_{co}(X), \quad G : C \to \mathcal{K}_{co}(C) \text{ neprekidna preslikavanja.}$$

Tada je

$$\inf_{x\in C} ||G(x) - F(x)|| \leq D(G(C), F(C)) + \alpha[F(C)] + mq(G).$$

Dokaz. Pokažimo prvo da postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$||G(y_0) - F(y_0)|| \leq \inf_{x\in C} ||G(x) - F(y_0)|| + mq(G).$$

U tom cilju definišimo preslikavanje $T : C \to \mathcal{P}(C)$ na sljedeći način

$$T(x) = \{y \in C : ||G(y) - F(y)|| \leq ||G(x) - F(y)|| + mq(G)\}.$$

Na sličan način kao u dokazu Teoreme 3.26. zaključujemo da je $T(x)$ zatvoren odnosno kompaktan skup za svaki $x \in C$. Pokažimo da je T KKM preslikavanje. Ako to ne bi bilo postojao bi $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, gdje je $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ i takav da $y \notin \bigcup_{i=1}^{n} T(x_i)$. Tada je

$$||G(y) - F(y)|| > ||G(x_i) - F(y)|| + mq(G) \text{ za sve } i = 1, \ldots, n.$$

Kako je $G(x), F(x) \in \mathcal{K}_{co}(X)$, $x \in C$ to postoje

$$u_i^0 \in G(x_i) - F(y), \quad i = 1, \ldots, n,$$

takvi da je

$$||u_i^0|| = ||G(x_i) - F(y)||.$$

Neka je $S = co\{u_i^0, \ldots, u_n^0\}$. Tada je

$$(G(x_i) - F(y)) \cap S \neq \emptyset, \text{ pa je } G(x_i) \cap (F(y) + S) \neq \emptyset.$$

Dakle, $x_i \in G^-(F(y) + S)$, za sve $i = 1, \ldots, n$. Kako je $F(y) + S$ konveksan skup i $mq(G)$ mjera nekvazikonveksnosti preslikavanja G slijedi

$$y \in G^-(F(y) + S + (mq(G) + \epsilon)B)$$

to jest

$$G(y) \cap (F(y) + S + (mq(G) + \epsilon)B) \neq \emptyset.$$

Znači, postoji $v \in (G(y) - F(y)) \cap (S + (mq(G) + \epsilon)B)$, pa postoje $s \in S$ i $b \in (mq(G) + \epsilon)B$ tako da je $v = s + b$. Kako je $s \in S$ postoje $\mu_i \geq 0$ i $\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i = 1$ takvi da je $s = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i u_i^0$.

Sada je

$$||G(y) - F(y)|| \leq ||v|| \leq ||s|| + ||b|| = ||\sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i^0|| + ||b|| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i ||u_i^0|| + mq(G) + \epsilon \leq \max_{1 \leq i \leq n} ||G(x_i) - F(y)|| + mq(G) + \epsilon,$$

što je kontradikcija. Dakle, T je KKM preslikavanje. Zbog Teoreme 3.3. postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$||G(y_0) - F(y_0)|| \leq \inf_{x \in C} ||G(x) - F(y_0)|| + mq(G). \tag{3.4.1}$$

Sada je dovoljno dokazati da je

$$\inf_{x \in C} ||G(x) - F(y_0)|| \leq D(G(C), F(C)) + \alpha[F(C)].$$

Neka je $\delta > 0$ i $\{z_1, \ldots, z_n\} \subset F(C)$ tako da je

$$F(C) \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(z_i; r), \text{ gdje je } r = \alpha[F(C)] + \frac{\delta}{2}.$$

$F(z_i) \subset C$, pa postoje $t_i \in C$, $i = 1, \ldots, n$, takvi da $z_i \in F(t_i)$. Kako je

$$F(t_i) \subset N_{D(G(C),F(C))}(G(C)) \text{ postoje i } v_i \in G(C), i = 1, \ldots, n$$

tako da je

$$||z_i - v_i|| \leq D(G(C), F(C)) + \frac{\delta}{2}.$$

Neka je $M = co\{t_1, \ldots, t_n, v_1, \ldots, v_n\}$. Zbog (3.4.1) postoji $y_0 \in M$ takvo da je

$$||G(y_0) - F(y_0)|| \leq \inf_{x \in M} ||G(x) - F(y_0)|| + mq(G).$$

Dalje, za svaki $u \in F(y_0)$ postoje $u_i \in F(t_i)$ i $s_i \in G(C)$, $i = 1, \ldots, n$ takvi da je

$$||u - u_i|| < \alpha[F(C)] + \frac{\delta}{2} \text{ i } ||u_i - s_i|| < D(G(C), F(C)) + \frac{\delta}{2}.$$

Sada je $||u - s_i|| \leq ||u - u_i|| + ||u_i - s_i|| < \alpha[F(C)] + D(G(C), F(C)) + \delta$, pa je

$$\inf_{x \in C} ||G(x) - F(y_0)|| \leq \alpha[F(C)] + D(G(C), F(C)).$$

□

Posljedica 3.29. *[27] Neka je X normiran prostor, $C \in \mathcal{K}_{co}(X)$ i $F : C \to P(N_\epsilon(C))$ neprekidno preslikavanje. Tada je*

$$\inf_{x \in C} ||x - F(x)|| \leq \epsilon + \alpha[F(C)].$$

Glava 4

Neke primjene najboljih aproksimacija

4.1 Nule višeznačnih preslikavanja

U raznim oblastima matematike (na primjer, Matematička ekonomija, Jednačine matematičke fizike, Varijacioni problemi, Optimizacija) koriste se metodi za rješavanje nelinearnih problema koji se svode na rješavanje jednačine $f(x) = 0$, (gdje je x elemenat beskonačnog dimenzionalnog prostora) ili na rješavanje inkluzije
$0 \in F(x)$, gdje je F višeznačno preslikavanje. U specijalnom slučaju kada jednačina ima oblik $f'(x) = 0$ ili $0 \in \partial f(x)$, gdje je ∂ oznaka za subdiferencijal, radi se o varijacionim zadacima. Ako je f konveksna funkcija tada svako rješenje inkluzije $0 \in \partial f(x)$ predstavlja minimum funkcije f. Zadaci tog tipa izučavaju se u konveksnoj optimizaciji.

Kao ilustraciju dajemo primjer gdje se teorema o egzistenciji nula višeznačne funkcije primjenjuje na rješavanje jedne klase zadataka iz diferencijalnih inkluzija [1].

Definicija 4.1. [2] Neka je K neprazan konveksan podskup LTP X i $x \in K$. Skup $T_K(x)$,

$$T_K(x) = cl(\bigcup_{h>0} \frac{1}{h}(K - x)),$$

se naziva tangentni (Bouligandov) konus skupa K u tački x.

Za višeznačno preslikavanje $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ skup

$$Dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$$

zove se domen preslikavanja F.

Preslikavanje $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ je strogo ako je $Dom(F) = X$, to jest $F(x) \neq \emptyset$ za svaki $x \in X$.

Preslikavanje $\sigma : X \times Y^* \to \mathbb{R}$,

$$\sigma(F(x), p) = \sup_{y \in F(x)} \langle p, y \rangle$$

se naziva potporna funkcija preslikavanja F .

Definicija 4.2. [2] Kažemo da je višeznačno preslikavanje F hemineprekidno odozgo u tački $x_0 \in Dom(F)$ ako je za svaki $p \in Y^*$ funkcija

$$x \mapsto \sigma(F(x), p)$$

poluneprekidna odozgo u x_0. F je hemineprekidno odozgo ako je hemineprekidno odozgo u svakoj tački svog domena.

Sljedeća teorema je o egzistenciji nula preslikavanja F, u slučaju kada vrijedi tangentni uslov (4.1.1) . Osnovni fakt koji se koristi u dokazu je nejednakost Ky Fana [22].

Teorema 4.3. *[2] Neka je X Hausdorffov lokalno konveksan vektorski prostor, $K \subset X$ kompaktan konveksan skup, F strogo hemineprekidno odozgo preslikavanje iz K u X sa zatvorenim slikama tako da je*

$$F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset \tag{4.1.1}$$

za sve $x \in X$. Tada vrijedi

(i) postoji $\overline{x} \in K$ takav da $0 \in F(\overline{x})$,

(ii) za svaki $y \in K$ postoji $\widehat{x} \in K$ takav da $y \in \widehat{x} - F(\widehat{x})$.

G. Haddad [2], je dokazao da pri uslovima navedene teoreme za svako $x_0 \in K$ diferencijalna inkluzija

$$x'(t) \in F(x(t)),\ x(0) = x_0 \tag{4.1.2}$$

ima rješenje za koje vrijedi

$$x(t) \in K,\ t \geq 0. \tag{4.1.3}$$

Pokazuje se [2], da je uslov (4.1.1) u ovom slučaju potreban.

U ovom dijelu koristeći najbolje aproksimacije dajemo neke rezultate o egzistenciji nula višeznačih preslikavanja koji mogu da se primjene na rješavanje nekih nelinearnih zadataka navedenog tipa.

U tom cilju odredjujemo neke dovoljne uslove za postojanje tačke $y_0 \in C$ u normiranom prostoru X takve da vrijedi

$$||F(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||\frac{1}{h}(G(x) - G(y_0)) - F(y_0)||, \tag{4.1.4}$$

gdje je $C \in \mathcal{K}_{co}(X)$, $F,\ G : C \to \mathcal{P}(X)$ i $h > 0$. Pokazuje se da je uslov

$$\frac{1}{h}(G(C) - G(x)) \cap F(x) \neq \emptyset, \tag{4.1.5}$$

uz još neke uslove za preslikavanja F, G dovoljan za egzistenciju $y_0 \in C$ takvog da

$$0 \in F(y_0).$$

Lema 4.4. *[75] Neka su A, B, C neprazni podskupovi LTP X. Ako je skup B zatvoren i konveksan, C ograničen i*

$$A + C \subset B + C$$

onda je $A \subset B$.

Lema 4.5. *Neka je $C \in \mathcal{K}_{co}(X)$ i preslikavanja $F, G : C \to \mathcal{K}_{co}(X)$. Tada vrijedi*

$$G(x) - G(x) - F(x) \subset -F(x) \Rightarrow card(G(x)) = 1 \text{ za sve } x \in C.$$

Dokaz. Kako je $G(x)$ kompaktan i konveksan onda je takav i $G(x) - G(x)$. Osim toga, $-F(x)$ je ograničen skup, pa koristeći Lemu 4.4. slijedi

$$G(x) - G(x) \subset \{0\} \text{ za sve } x \in C.$$

Dakle, $card(G(x)) = 1$ za sve $x \in C$. □

Teorema 4.6. *Neka je $C \in \mathcal{K}_{co}(X)$, preslikavanja $F, G : C \to \mathcal{K}_{co}(X)$ takva da vrijedi*

(i) F i G su neprekidna preslikavanja,

(ii) G je kvazikonveksno preslikavanje,

(iii) postoji $h > 0$ takvo da je

$$\frac{1}{h}\left(G(x) - G(x)\right) - F(x) \subset -F(x) \text{ za sve } x \in C.$$

Tada je preslikavanje G oblika $G(x) = \{g(x)\}$, pri tome je preslikavanje $g : C \to X$ neprekidno, $g^{-1}([y_1, y_2])$ konveksan skup za sve $y_1, y_2 \in g(C)$ i postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$||F(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||\frac{1}{h}(g(x) - g(y_0)) - F(y_0)||.$$

Dokaz. Iz Leme 4.5. slijedi da je $G(x) = \{g(x)\}$. Kako je G neprekidno to je i g neprekidno. G je kvazikonveksno preslikavanje, pa (koristeći Lemu 2.17.) dobijamo da je skup $g^{-1}([y_1, y_2])$ konveksan za sve $y_1, y_2 \in g(C)$.
Definišimo preslikavanje $T : C \to \mathcal{P}(C)$ na sljedeći način

$$T(x) = \{y \in C : ||F(y)|| \leq ||\tfrac{1}{h}(g(x) - g(y)) - F(y)||\} \text{ za sve } x \in C.$$

Pokažimo da je skup $T(x)$ zatvoren za svaki $x \in C$. Zbog uslova (i) zaključujemo da je preslikavanje F neprekidno. Pošto $F(x) \in \mathcal{K}_{co}(X)$ za sve $x \in C$ koristeći Teoremu 1.13. i Teoremu 1.14. zaključujemo da je preslikavanje

$$x \mapsto \frac{1}{h}(g(y) - g(x)) - F(x), \quad x \in C$$

neprekidno za svaki $y \in C$. Zbog Teoreme 1.8. ono je i neprekidno u metrici Hausdorffa. Sada iz Leme 1.11. zaključujemo da su preslikavanja

$$x \mapsto ||F(x)||, \quad x \in C$$

$$x \mapsto ||\frac{1}{h}(g(y) - g(x)) - F(x)||, \quad x \in C,\ y \in C \text{ fiksan}$$

neprekidna.
Dakle, $T(x)$ je zatvoren za svaki $x \in C$, pa pošto je C kompaktan skup on je kompaktan za svaki $x \in C$.

Pokažimo da je T KKM preslikavanje. Ako to ne bi vrijedilo postojao bi $y \in C$ takav da je $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ i $y \notin \bigcup_{i=1}^{n} T(x_i)$. Tada imamo

$$||F(y)|| > ||\frac{1}{h}(g(x_i) - g(y)) - F(y)|| \text{ za sve } i = 1, \ldots, n.$$

Kako je $F(x) \in \mathcal{K}_{co}(X)$ za sve $x \in C$ postoje

$$u^0 \in F(y) \text{ i } u_i^0 \in \frac{1}{h}(g(x_i) - g(y)) - F(y),$$

takvi da je (zbog uslova (iii))

$$||u^0|| = ||F(y)|| = \inf_{u \in F(y)} ||u|| > \inf\{||u_i|| : u_i \in \frac{1}{h}(g(x_i) - g(y)) - F(y)\} = ||u_i^0||$$

Zbog Leme 2.18. i uslova (ii) kao i činjenice da $F(y) \in \mathcal{K}_{co}(X)$ za sve $y \in C$ preslikavanje

$$x \mapsto \frac{1}{h}g(x) - \frac{1}{h}g(y) - F(y), \quad x \in C$$

je kvazikonveksno za svaki $y \in C$. Neka je $S = co\{u_1^0, \ldots, u_n^0\}$. Tada je

$$S \cap (\frac{1}{h}(g(x_i) - g(y)) - F(y)) \neq \emptyset \text{ za sve } i = 1, \ldots, n,$$

pa je

$$S \cap (\frac{1}{h}(g(y) - g(y)) - F(y)) \neq \emptyset.$$

Odnosno, $S \cap (-F(y)) \neq \emptyset$, pa postoji $v \in S \cap (-F(y))$, to jest, za neke $u_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$ je $v = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i^0 \in -F(y)$. Sada je

$$||F(y)|| = ||-F(y)|| \leq ||v|| = ||\sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i^0|| \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i ||u_i^0|| \leq$$

$$\leq \max_{1 \leq i \leq n} ||u_i^0|| = \max_{1 \leq i \leq n} ||\frac{1}{h}(g(x_i) - g(y)) - F(y)||,$$

što je nemoguće. Dakle, T je KKM preslikavanje.
Na osnovu Teoreme 3.3. zaključujemo da postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$||F(y_0)|| = \inf_{x \in C} ||\frac{1}{h}(g(x) - g(y_0)) - F(y_0)||.$$

□

Posljedica 4.7. *Neka je $C \in \mathcal{K}_{co}(X)$, f, $g : C \to \mathcal{K}_{co}(X)$ neprekidne funkcije i $g^{-1}([y_1, y_2])$ konveksan skup za sve $y_1, y_2 \in g(C)$. Tada za svaki $h > 0$ postoji $y_h \in C$ takvo da je*

$$||f(y_h)|| = \inf_{x \in C} ||\frac{1}{h}(g(x) - g(y_h)) - f(y_h)||.$$

Posljedica 4.8. *Neka je $C \in \mathcal{K}_{co}(X)$, $f, g : C \to X$ neprekidne funkcije i $g^{-1}([y_1, y_2])$ konveksan skup za sve $y_1, y_2 \in g(C)$. Ako postoji $h > 0$ takvo da*

$$f(x) \in \frac{1}{h}(g(C) - g(x)) \text{ za sve } x \in C$$

onda postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$f(y_0) = 0.$$

Posljedica 4.9. *Neka je X normiran prostor i $C \in \mathcal{K}_{co}(X)$, $f : C \to X$ neprekidna funkcija. Ako postoji $h > 0$ takvo da je*

$$f(x) \in \frac{1}{h}C \text{ za sve } x \in C,$$

onda postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$f(y_0) = \frac{y_0}{h}.$$

Dokaz. Preslikavanje

$$x \mapsto f(x) - \frac{x}{h}, \quad x \in C$$

zadovoljava uslove Posljedice 4.8. pri $g(x) = x$, $x \in C$. Zato, postoji $y_0 \in C$ takvo da je

$$f(y_0) - \frac{y_0}{h} = 0.$$

□

Primjetimo da za $h = 1$ Posljedica 4.9. je Schauderova teorema o fiksnoj tački. Koristeći Teoremu 4.6. i metod neprekidnog produženja Poencarea mogu se dobiti neke teoreme tipa Leray-Schaudera.

Teorema 4.10. *Neka je X normiran prostor i $F : [0, 1] \times C \to \mathcal{K}_{co}(X)$ neprekidno preslikavanje, gdje je $C \in \mathcal{K}_{co}(X)$ takav da je int$C \neq \emptyset$, . Ako postoji $h > 0$ takvo da je*

(i) $F(0, x) \bigcap \left(\frac{1}{h}(C - x)\right) \neq \emptyset$ *za sve* $x \in C$,

(ii) $0 \notin F(\lambda, x)$ *za sve* $x \in bd(C)$, $\lambda \in [0,1]$,

tada postoji $y_0 \in C$ *takvo da*

$$0 \in F(1, y_0).$$

Dokaz. Definišimo skupove A i B na sljedeći način:

$$A = bd(C),\ B = \{x \in C : \text{ postoji } \lambda \in [0,1] \text{ takav da } 0 \in F(\lambda, x)\}.$$

Zbog Posljedice 4.7. postoji $x_0 \in C$ takvo da $0 \in F(0, x_0)$, pa je $B \neq \emptyset$. Osim toga, B je zatvoren skup jer je F neprekidno preslikavanje. Skup $A \cap B$ je prazan, jer ako $x \in A$ i $\lambda \in [0,1]$ tada zbog uslova (ii) imamo $x \notin B$. Definišimo neprekidnu funkciju $\phi : C \to [0,1]$ i preslikavanje $G : C \to \mathcal{K}_{co}(X)$ na sljedeći način

$$\phi(x) = \frac{||x - A||}{||x - A|| + ||x - B||},\quad G(x) = F(\phi(x), x).$$

Preslikavanje G je neprekidno i na skupu A je $G(x) = F(0, x)$, pa $0 \in G(x_0)$, to jest $0 \in F(\phi(x_0), x_0)$. Sada zaključujemo da $x_0 \in B$, pa je $\phi(x_0) = 1$. Znači,

$$0 \in F(1, x_0).$$

□

Posljedica 4.11. *Neka je* X *normiran prostor,* $C \in \mathcal{K}_{co}(X)$ *,* $f : C \to X$ *neprekidna funkcija i* $G : C \to \mathcal{K}_{co}(X)$ *neprekidno preslikavanje. Ako postoji* $h > 0$ *takvo da vrijedi*

$$f(x) \in \frac{1}{h}(C - x) \text{ za sve } x \in C \text{ i}$$

$$f(x) \notin -\mu G(x) \text{ za sve } x \in bd(C),\ \mu \geq 0,$$

onda postoji $y_0 \in C$ *takvo da*

$$0 \in G(y_0).$$

Dokaz. Koristimo Teoremu 4.10. Stavimo

$$F(\lambda, x) = (1 - \lambda) f(x) + \lambda G(x).$$

Uslov

$$F(0, x) \cap \left(\frac{1}{h}(C - x)\right) \neq \emptyset$$

za sve $x \in bd(C)$, znači

$$f(x) \in \frac{1}{h}(C - x).$$

Sada dobijamo da postoji $y_0 \in C$ takvo da $0 \in F(1, y_0)$, to jest, $0 \in G(y_0)$. □

Kao posljedica Teoreme 4.10. dobijena je sljedeća teorema alternative.

Teorema 4.12. *Neka je X normiran prostor, $C \in \mathcal{K}_{co}(X)$ takav da $x_0 \in intC$ i $F : C \to \mathcal{K}_{co}(X)$ je neprekidno preslikavanje. Tada vrijedi*
postoji $y_0 \in C$ takvo da $0 \in F(y_0)$ ili
postoje $y_0 \in bd(C)$ i $\mu > 0$ takvi da $x_0 \in y_0 + \mu F(y_0)$.

Dokaz. Pretpostavimo da $0 \notin F(x)$ za sve $x \in C$ i $x_0 \notin x + \mu F(x)$ za sve $x \in bd(C)$ i $\mu > 0$. Definišimo preslikavanje $f : C \to X$ sa

$$f(x) = x - x_0, \quad x \in C.$$

Očigledno je $f(x) \notin -\mu F(x)$ za sve $x \in bd(C)$ i $\mu > 0$. Pošto je $x_0 \in intC$ postoji $h > 0$ takvo da

$$f(x) \in \frac{1}{h}(C - x) \text{ za sve } x \in C.$$

Sada zaključak slijedi iz Posljedice 4.11. □

4.2 Tačke V-koincidencije

Definicija 4.13. Neka je X LTP sa fundamentalnim sistemom okolina nule $\mathcal{V}$, $\emptyset \neq D \subset X$ i $F, G : D \to \mathcal{P}(X)$. Kažemo da je $y \in D$, V-tačka koincidencije ($V \in \mathcal{V}$) preslikavanja F i G ako i samo ako je $F(y) \cap (G(y) + V) \neq \emptyset$.

Teorema 4.14. *Neka je X kompletan metrizabilan vektorski topološki prostor i zatvoren skup $K \in \mathcal{P}_{co}(X)$, $F : K \to \mathcal{P}_{co}(X)$ odozdo poluneprekidno preslikavanje i $G : K \to \mathcal{P}(X)$ kvazikonveksno preslikavanje takvo da vrijedi $F(x) \cap G(K) \neq \emptyset$, za svaki $x \in K$. Ako za svaki $V \in \mathcal{V}$ postoji $U \in \mathcal{V}$ takav da vrijedi*

$$co(U \cap (G(K) - F(K))) \subset V,$$

i za svaki $V \in \mathcal{V}$ je

$$\inf_{x \in K} \alpha[F^+((G(x) + V)^c)] = 0,$$

onda postoji V-tačka koincidencije preslikavanja F i G za svaki $V \in \mathcal{V}$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji otvorena i simetrična okolina nule $V \in \mathcal{V}$ takva da je

$$F(x) \cap (G(x) + V) = \emptyset \text{ za svaki } x \in K.$$

Neka je U otvorena i simetrična okolina nule, takva da je

$$co(U \cap (G(K) - F(K))) \subset V.$$

Stavimo $W = co(U \cap (G(K) - F(K)))$ i definišimo preslikavanje $T : K \to \mathcal{P}_{co}(K)$ na sljedeći način

$$T(x) = \{y \in K : F(y) \cap (G(x) + U) = \emptyset\}.$$

Vrijedi

$$K \backslash T(x) = \{y \in K : F(y) \cap (G(x) + U) \neq \emptyset\} = F^-(G(x) + U),$$

pa pošto je F odozdo poluneprekidno, $T(x)$ je zatvoren skup za svaki $x \in K$.
Pokažimo da je T KKM preslikavanje.
Ako to ne bi vrijedilo postojao bi $\{x_1, \dots, x_n\} \subset K$ tako da je

$$co\{x_1, \dots, x_n\} \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{n} T(x_i).$$

Znači, postoje $\lambda_i \in [0, 1]$, $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, takvi da je $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \notin \bigcup_{i=1}^{n} T(x_i)$.
Tada bi vrijedilo

$$F(y) \cap (G(x_i) + U) \neq \emptyset \text{ za } i = 1, \dots, n,$$

pa je
$$F(y) \cap (G(x_i) + W) \neq \emptyset, \quad i = 1, \dots, n.$$
Dalje, $F(y) - W$ je konveksan skup, a preslikavanje G kvazikonveksno, pa vrijedi
$$F(y) \cap (G(y) + W) \neq \emptyset.$$
Znači,
$$F(y) \cap (G(y) + V) \neq \emptyset$$
što je nemoguće. Kako je
$$T(x) = \{y \in K : F(y) \subset (G(x) + V)^c\} = F^+((G(x) + V)^c)$$
to je $\inf_{x \in K} \alpha(T(x)) = 0$. Sada koristeći Teoremu 3.14. i Teoremu 3.3. imamo
$$\bigcap_{x \in K} T(x) \neq \emptyset.$$
Neka je $y_0 \in \bigcap_{x \in K} T(x)$. Tada je
$$F(y_0) \cap (G(x) + V) = \emptyset \quad x \in K \tag{4.2.1}$$
Kako je $F(x) \cap G(K) \neq \emptyset$ za sve $x \in K$, postoji $x_0 \in K$ takvo da je $F(y_0) \cap G(x_0) \neq \emptyset$, što je u suprotnosti sa (4.2.1). □

Definicija 4.15. [31] $(E, ||\cdot||)$ je paranormiran prostor ako je E vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ i $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}^+$ takvo da je

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2. za svaki $x \in E$, $||-x|| = ||x||$,
3. za sve $x, y \in E$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$,
4. ako su λ_n, $\lambda \in \mathbb{R}$ i x_n, $x \in E$ takvi da
$$|\lambda_n - \lambda| \to 0, \ \ ||x_n - x|| \to 0,$$
tada
$$||\lambda_n x_n - \lambda x|| \to 0.$$

Definicija 4.16. [26] Neka je E LTP, $K \subset E$ i $\mathcal{U}$ fundamentalan sistem okolina nule u E. Za skup K kažemo da je Zima tipa ako za svaki $V \in \mathcal{U}$ postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da je
$$co(U \cap (K - K)) \subset V.$$

Primjetimo da je svaki konveksan podskup lokalno konveksnog vektorskog topološkog prostora Zima tipa [26].

U daljem $\{V_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ je oznaka za fundamentalni sistem okolina nule u paranormiranom prostoru X, gdje je $V_\epsilon = \{x \in X : ||x|| < \epsilon\}$.

Posljedica 4.17. *Neka je $(X, ||\cdot||)$ kompletan paranormiran prostor, K neprazan konveksan i zatvoren podskup od X i*

$$F : K \to \mathcal{P}_{co}(X) \text{ odozdo poluneprekidno preslikavanje,}$$

$$G : K \to \mathcal{P}(X) \text{ kvazikonveksno preslikavanje}$$

tako da postoji broj $C(\widetilde{K})$, gdje je $\widetilde{K} = G(K) \cup F(K)$ i vrijedi

$$||\lambda(u-v)|| \leq C(\widetilde{K})\lambda||u-v||, \quad \inf_{x\in K} \alpha[F^+((G(x)+V_\epsilon)^c)] = 0,$$

$$\text{za sve} \quad \lambda \in [0,1], \quad u, v \in \widetilde{K}, \quad \epsilon > 0.$$

Tada za svaki $\epsilon > 0$ postoji V_ϵ-tačka koincidencije preslikavanja F i G.

Posljedica 4.18. *[31] Neka je $(X, ||\cdot||)$ kompletan paranormiran prostor, K neprazan konveksan i zatvoren podskup od X, $F : X \to \mathcal{P}_{co}(X)$ odozdo poluneprekidno preslikavanje takvo da je $F(x) \cap K \neq \emptyset$ za sve $x \in K$. Ako postoji broj $C(\widetilde{K})$, gdje je $\widetilde{K} = K \cup F(K)$ takav da je*

$$||\lambda(u-v)|| \leq C(\widetilde{K})\lambda||u-v|| \text{ za sve } \lambda \in [0,1], u, v \in \widetilde{K}$$

i za sve $\epsilon > 0$ je

$$\inf_{x\in K} \alpha[F^+((x+V_\epsilon)^C)] = 0$$

tada F ima V_ϵ-skoro fiksnu tačku za svaki $\epsilon > 0$.

Teorema 4.19. *Neka je X LTP, $\mathcal{V}$ familija zatvorenih okolina nule u X, K neprazan konveksan podskup od X, preslikavanje $F : K \to \mathcal{P}_{co}(X)$ je odozdo poluneprekidno, a preslikavanje $G : K \to \mathcal{P}(X)$ kvazikonveksno takvo da vrijedi*

$$G(K) \cap F(x) \neq \emptyset \text{ za svaki } x \in K \text{ i za svaki } V \in \mathcal{V}$$

$$\text{postoji konačan } \{x_1, \ldots, x_n\} \subset K \text{ takav da je } G(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n}(G(x_i)+V).$$

Ako je $G(K) \cup F(K)$ Zima tipa onda postoji V-tačka koincidencije preslikavanja F i G za svaki $V \in \mathcal{V}$.

Dokaz. Neka je $V \in \mathcal{V}$. Treba dokazati da postoji $x \in K$ takvo da je

$$F(x) \cap (G(x) + V) \neq \emptyset.$$

Odaberimo $U \in \mathcal{V}$ takav da je $co(U \cap (G(K) - F(K))) \subset V$ i definišimo preslikavanje $T : K \to \mathcal{P}(K)$ sa $T(x) = \{y \in K : F(y) \cap (G(x) + U) = \emptyset\}$.
Preslikavanje F je odozdo poluneprekidno, pa je $T(x)$ zatvoren skup za svaki $x \in K$. Za odabrani U postoji konačan $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ takav da je

$$G(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} (G(x_i) + U).$$

Za svaki $y \in K$ vrijedi

$$F(y) \cap G(K) \subset F(y) \cap (\bigcup_{i=1}^{n} (G(x_i) + U)) = \bigcup_{i=1}^{n} (F(y) \cap (G(x_i) + U)),$$

pa je $\bigcap_{i=1}^{n} T(x_i) = \emptyset$ jer je $F(y) \cap G(K) \neq \emptyset$. Znači, postoji podskup $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset K$ takav da je

$$co\{z_1, \ldots, z_m\} \not\subset \bigcup_{i=1}^{m} T(z_i).$$

Zato postoje $\lambda_i \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ i $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i$, $y \notin T(z_i)$, za sve $i = 1, \ldots, m$, pa vrijedi $F(y) \cap (G(z_i) + U) \neq \emptyset$. Dalje, postoje w_i, $i = 1, \ldots, m$ takvi da je

$$w_i \in F(y) \text{ i } w_i \in G(z_i) + U, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Znači, $w_i \in F(y)$ i $w_i = v_i + u_i$ za neke $v_i \in G(z_i)$, $u_i \in U$, pa

$$u_i = w_i - v_i \in (G(K) - F(K)) \cap U, \; i = 1, \ldots, m.$$

Vidimo da

$$u_i \in co(U \cap (G(K) - F(K))) \text{ i } u_i \in F(y) - G(z_i),$$

pa je

$$(F(y) - G(z_i)) \cap co(U \cap (G(K) - F(K))) \neq \emptyset, \quad i = 1, \ldots, m,$$

to jest

$$(F(y) - co(U \cap (G(K) - F(K)))) \cap G(z_i) \neq \emptyset, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Preslikavanje G je kvazikonveksno, pa slijedi

$$(F(y) - co(U \cap (G(K) - F(K)))) \cap G(y) \neq \emptyset.$$

Znači, $F(y) \cap (G(y) + V) \neq \emptyset$. $\square$

Posljedica 4.20. *[32] Neka je X LTP, $\mathcal{V}$ familija otvorenih okolina nule u X, K neprazan konveksan prekompaktan podskup od X i $F : K \to \mathcal{P}_{co}(X)$ odozdo poluneprekidno preslikavanje takvo da je za svaki $x \in K$, $f(x) \cap K \neq \emptyset$. Ako je $K \cup f(K)$ Zima tipa tada f ima V-skoro fiksnu tačku za svaki $V \in \mathcal{V}$.*

4.3 Primjene u matematičkoj ekonomiji

Neka je K podskup vektorskog topološkog prostora i F višeznačno preslikavanje definisano na K. U matematičkoj ekonomiji relacija $y \in F(x)$ se može interpretirati tako da je y preferirano u odnosu na x, to jest izbor y je bolji od izbora x. Na primjer, ako je $F(x) = \{y : f(y) > f(x)\}$, gdje je f neka neprekidna funkcija na K, vrijedi $y \in F(x)$ ako i samo ako je $f(y) > f(x)$, pa ako je $F(x_0) = \emptyset$ za neki $x_0 \in K$ zaključujemo da je $f(x_0) \geq f(x)$ za sve $x \in K$. Zbog toga, od interesa je ispitati da li postoji $x_0 \in K$ takav da je $F(x_0) = \emptyset$, jer u tom slučaju imamo da ne postoji bolji izbor od x_0 i za x_0 se kaže da je maksimalni element.

U ovom dijelu koristeći najbolje aproksimacije za višeznačna preslikavanja (Teorema 3.17.) dajemo neke rezultate o egzistenciji maksimalnog elementa.

Definicija 4.21. [9] Neka je K podskup vektorskog topološkog prostora X i F višeznačno preslikavanje definisano na skupu K. Elemenat $x \in K$ je $F-$maksimalan ako je $F(x) = \emptyset$. $F-$maksimalan skup je $\{x \in K : F(x) = \emptyset\}$ i označavamo ga sa M_F.

Kao primjer tvrdjenja o egzistenciji maksimalnog elementa navodimo sledeću teoremu Ky Fana.

Teorema 4.22. *[9] Neka je $K \subset \mathbb{R}^m$ neprazan kompaktan skup i za višeznačno preslikavanje F definisano na skupu K vrijedi:*

(i) $x \in F(x)$ za sve $x \in K$,

(ii) $F(x)$ je konveksan za svaki $x \in K$,

(iii) $\{(x, y) : y \in F(x)\}$ je otvoren u $K \times K$.

Tada je M_F neprazan i kompaktan skup.

Koristeći najbolje aproksimacije dobijena je sljedeća teorema.

Teorema 4.23. *Neka je K neprazan kompaktan i konveksan podskup normiranog prostora X i F i G neprekidna višeznačna preslikavanja definisana na skupu K sa kompaktnim i konveksnim slikama takva da vrijedi:*

(i) G je kvazikonveksno preslikavanje,

(ii) $F(x) \cap G(x) = \emptyset$, za sve $x \in K$,

(iii) $F(x) \subset G(K)$.

Tada je $M_F \cup M_G \neq \emptyset$.

Dokaz. Ako bi bilo $M_F \cup M_G = \emptyset$, zbog Teoreme 3.17. postoji $x_0 \in K$ takav da je

$$||G(x_0) - F(x_0)|| = \inf_{x \in K} ||G(x) - F(x_0)||.$$

Zbog uslova (iii) zaključujemo da je $\inf\limits_{x \in K} ||G(x) - F(x_0)|| = 0$, pa je $F(x_0) \cap G(x_0) \neq \emptyset$, jer su skupovi $F(x)$ i $G(x)$, $x \in K$ kompaktni. Medjutim, ovo je nemoguće zbog uslova (ii). Dakle, zaključujemo da je $M_F \cup M_G \neq \emptyset$. □

Primjer 4.24. Neka je

$$F(x) = \{y : \frac{1}{x} + 1 \leq y \leq 2\},$$

$$G(x) = \{y : 3x \leq y \leq 3x + 2\},$$

za $x \in [\frac{1}{2}, 2]$. Ispunjeni su uslovi $(i) - (iii)$ iz Teoreme 4.23, pa zaključujemo da je

$$M_F \cup M_G \neq \emptyset.$$

Pošto je $M_G = \emptyset$ mora biti $M_F \neq \emptyset$. Naime, $M_F = [\frac{1}{2}, 1)$.

Prethodni primjer pokazuje da u Teoremi 4.23. ne možemo tvrditi da je skup M_F kompaktan kao u Teoremi 4.22.

Posljedica 4.25. *Neka je K neprazan kompaktan konveksan podskup normiranog prostora X i F višeznačno neprekidno preslikavanje sa kompaktnim i konveksnim slikama definisano na skupu K koje je irefleksivno, to jest $x \notin F(x)$ za sve $x \in K$, tada je $M_F \neq \emptyset$.*

Dokaz. Primjenimo Teoremu 4.23, stavljajući $G(x) = \{x\}$, $x \in K$. □

Posljedicu 4.25 možemo iskazati u obliku tvrdjenja o fiksnoj tački za višeznačna preslikavanja u normiranom prostoru, to jest kao varijantu Kakutanijeve teoreme o fiksnoj tački.

Posljedica 4.26. *Neka je K neprazan kompaktan konveksan podskup normiranog prostora X i $F : K \to \mathcal{K}_{co}(K)$ neprekidno preslikavanje. Tada postoji $x_0 \in F(x_0)$.*

Glava 5

Najbolje aproksimacije u paranormiranim i G-konveksnim prostorima

5.1 Paranormirani prostori

U ovom dijelu se daju rezultati o najboljim aproksimacijama u paranormiranim prostorima za višeznačna preslikavanja. Dokazaćemo višeznačnu verziju teoreme o najboljim aproksimacijama iz [31]. Prije toga dajemo definiciju skupa jakog Zima tipa i primjer paranormiranih prostora.

Definicija 5.1. [31] Neka je $(E, ||\cdot||)$ paranormiran prostor i $\{V_\epsilon\}_{\epsilon>0}$ fundamentalan sistem okolina nule u E. Ako postoji neprekidna slijeva, strogo monotono rastuća funkcija $\delta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $(\mathbb{R}^+ = [0, +\infty))$ takva da je

$$co(V_{\delta(\epsilon)} \cap (K - K)) \subset V_\epsilon \text{ za svaki } \epsilon > 0,$$

kažemo da je K jakog Zima tipa.

Primjer 5.2. [31] Neka je $S(0,1)$ prostor svih klasa ekvivalencije mjerljivih funkcija $\widehat{x} : [0,1] \to \mathbb{R}$ i

$$||\widehat{x}|| = \int_0^1 \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|} dt, \quad \widehat{x} \in S(0,1), \ \{x(t)\} \in \widehat{x}.$$

Tada je $(S(0,1), ||\cdot||)$ paranormiran prostor i konvergencija u $S(0,1)$ je ekvivalentna konvergenciji u mjeri. Ako je $\alpha > 0$ i

$$K_\alpha = \{\widehat{x} \in S(0,1) : |x(t)| \le \alpha, \ t \in [0,1]\}$$

tada za sve $\widehat{x}$, $\widehat{y} \in K_\alpha$ i $s \in [0,1]$ vrijedi

$$||s(\widehat{x} - \widehat{y})|| \leq (1 + 2\alpha)s||\widehat{x} - \widehat{y}||.$$

U tom slučaju dobija se

$$\delta(\epsilon) = \frac{\epsilon}{1 + 2\alpha}$$

i K_α je podskup jakog Zima tipa.

U paranormiranom prostoru uvodimo oznake kao i u normiranom prostoru:

$$||A|| = \inf_{a \in A} ||a||, \quad A \subset E,$$

$$D(A,B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} ||a - b||, \quad A, B \in \mathcal{BC}(E),$$

$$H(A,B) = \max\{D(A,B), D(B,A)\}, \quad A, B \in \mathcal{BC}(E).$$

Teorema 5.3. *Neka je $(E, || \cdot ||)$ paranormiran prostor, K neprazan kompletan i konveksan podskup od E, $F, G : K \to \mathcal{K}_{co}(E)$ preslikavanja za koja vrijedi:*

(1) $\lim_{y \to y_0} H(F(y), F(y_0)) = 0, \ \lim_{y \to y_0} D(G(y), G(y_0)) = 0,$

(2) G je kvazikonveksno,

(3) $G(K) \cup F(K)$ je jakog Zima tipa,

(4) $\inf_{x \in K} \alpha\{y \in K : (\forall\ \epsilon > 0)\ (G(x) - F(y)) \cap V_{\delta(\epsilon)} \neq \emptyset \Rightarrow (G(y) - F(y)) \cap V_\epsilon \neq \emptyset\} = 0.$

Tada postoji $y_0 \in K$ takvo da za svaki $x \in K$ vrijedi

$$(\forall\ \epsilon > 0)\ (G(x) - F(y_0)) \cap V_{\delta(\epsilon)} \neq \emptyset \Rightarrow (G(y_0) - F(y_0)) \cap V_\epsilon \neq \emptyset$$

i ako za svaki $x \in K$ vrijedi $G(K) \cap F(x) \neq \emptyset$ onda je $G(y_0) \cap F(y_0) \neq \emptyset$.

Dokaz. Definišimo preslikavanje $T : K \to \mathcal{P}(K)$ na sljedeći način

$$T(x) = \{y \in K : (\forall\ \epsilon > 0)\ (G(x) - F(y)) \cap V_{\delta(\epsilon)} \neq \emptyset \Rightarrow (G(y) - F(y)) \cap V_\epsilon \neq \emptyset\}.$$

Pokažimo da je ono KKM preslikavanje.
U suprotnom bi postojali $x_1, \ldots, x_n \in K$ i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ takvi da

$$y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \notin \bigcup_{i=1}^{n} T(x_i),$$

to jest

$$(G(x_i) - F(y)) \cap V_{\delta(\epsilon_i)} \neq \emptyset, \text{ za neke } \epsilon_i > 0, \ i = 1, \ldots, n$$

i

$$(G(y) - F(y)) \cap V_{\epsilon_i} = \emptyset, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Za $\delta(\epsilon_j) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{\delta(\epsilon_i\}$ i $S = co(V_{\delta(\epsilon_j)}) \cap (G(K) - F(K))$ imamo

$$S \cap (G(x_i) - F(y)) \neq \emptyset \text{ za } i = 1, \ldots, n,$$

pa zbog uslova (2) je

$$S \cap (G(y) - F(y)) \neq \emptyset.$$

Kako je $S \subset V_{\epsilon_j}$ to je

$$(G(y) - F(y)) \cap V_{\epsilon_j} \neq \emptyset,$$

što je kontradikcija.
Pokažimo da je $T(x)$ zatvoren skup za svaki $x \in K$.
Neka $||y_n - y|| \to 0,$ i $y_n \in T(x)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Treba pokazati da vrijedi

$$(\forall \epsilon > 0) \ (G(x) - F(y)) \cap V_{\delta(\epsilon)} \neq \emptyset \Rightarrow (G(y) - F(y)) \cap V_\epsilon \neq \emptyset.$$

Neka je $(G(x) - F(y)) \cap V_{\delta(\epsilon)} \neq \emptyset$. Tada je $||u_x - v_y|| < \delta(\epsilon)$ za neke

$$u_x \in G(x), \ v_y \in F(y).$$

Stavimo da je $\xi = \delta(\epsilon) - ||u_x - v_y||$. Kako $D(F(y), F(y_n)) \to 0,$ to je

$$\sup_{u \in F(y)} \inf_{v \in F(y_n)} ||u - v|| \to 0 \ .$$

Dalje je

$$\inf_{v \in F(y_n)} ||v_y - v|| \leq \sup_{u \in F(y)} \inf_{v \in F(y_n)} ||u - v||,$$

pa

$$\inf_{v \in F(y_n)} ||v_y - v|| \to 0 \ .$$

Dakle, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da je

$$||v_y - v_n|| < \frac{\xi}{2} \ \text{ za } \ n \geq n_0, \text{ gdje je } \ v_n \in F(y_n).$$

Sada imamo

$$||u_x - v_n|| \leq ||u_x - v_y|| + ||v_y - v_n|| \leq \delta(\epsilon) - \xi + \frac{\xi}{2} = \delta(\epsilon) - \frac{\xi}{2} \ , \ \text{ za } \ n \geq n_0.$$

Funkcija δ je neprekidna slijeva strane i strogo monotona, pa postoji $\eta < \epsilon$ takvo da je

$$\delta(\epsilon) - \frac{\xi}{2} < \delta(\eta) < \delta(\epsilon),$$

i za sve $n \geq n_0$ je

$$||u_x - v_n|| < \delta(\eta) < \delta(\epsilon).$$

Pošto $y_n \in T(x)$ to je

$$||u_y^n - v_y^n|| < \eta \text{ za neke } u_y^n \in G(y_n),\ v_y^n \in F(y_n).$$

Postoji podniz $\{z_n\}$ niza $\{u_y^n\}$ takav da je $\lim z_n = z$. Dakle, imamo

$$z_n \in G(t_n),\ n \in \mathbb{N}, \text{ gdje je } \{t_n\} \text{ podniz niza } \{y_n\} \text{ i vrijedi } \lim t_n = y.$$

Pokažimo da $z \in G(y)$. Kako je

$$\inf_{u \in G(y)} ||z - u|| \leq \inf_{u \in G(y)} (||z - z_n|| + ||z_n - u||) = ||z - z_n|| + \inf_{u \in G(y)} ||z_n - u||$$

$$\text{i } \inf_{u \in G(y)} ||z_n - u|| \leq \sup_{z_n \in G(t_n)} \inf_{u \in G(y)} ||z_n - u||$$

$$\text{to je } \inf_{u \in G(y)} ||z - u|| \leq ||z - z_n|| + D(G(y_n), G(y)).$$

Zbog uslova (1) zaključujemo da je $\inf_{u \in G(y)} ||z - u|| = 0$. Sada vidimo da je

$$||z - \overline{v}|| = \lim ||z_n - v_n^1|| \leq \eta < \epsilon,$$

gdje je $\{v_n^1\}$ podniz niza $\{v_y^n\}$ takav da $v_n^1 \in F(y_n^1)$ i $\{y_n^1\}$ podniz niza $\{y_n\}$. Na sličan način, pošto vrijedi $D(F(y_n^1), F(y))) \to 0$, se dokazuje da $\overline{v} \in F(y)$. Dakle, $z \in G(y)$ i $\overline{v} \in F(y)$, pa pošto $z - \overline{v} \in V_\epsilon$ to je $(G(y) - F(y)) \cap V_\epsilon \neq \emptyset$. Znači $T(x)$ je zatvoren skup za svaki $x \in K$. Sada zbog Teoreme 3.14. postoji $y_0 \in K$ takvo da

$$y_0 \in \bigcap_{x \in K} T(x),$$

to jest postoji $y_0 \in K$ takvo da za svaki $x \in K$ vrijedi

$$(\forall \epsilon > 0)\ (G(x) - F(y_0)) \cap V_{\delta(\epsilon)} \neq \emptyset \Rightarrow (G(y_0) - F(y_0)) \cap V_\epsilon \neq \emptyset.$$

Neka je za svaki $x \in K$, $G(K) \cap F(x) \neq \emptyset$. Tada postoji $x_0 \in K$ takvo da je

$$G(x_0) \cap F(y_0) \neq \emptyset,$$

odnosno
$$0 \in G(x_0) - F(y_0).$$
Znači vrijedi
$$(\forall\ \epsilon > 0)\ (G(x_0) - F(y_0)) \cap V_{\delta(\epsilon)} \neq \emptyset,$$
odakle je
$$(\forall\ \epsilon > 0)\ (G(y_0) - F(y_0)) \cap V_{\delta(\epsilon)} \neq \emptyset.$$
Na kraju zaključujemo da $0 \in G(y_0) - F(y_0)$, to jest $G(y_0) \cap F(y_0) \neq \emptyset$. □

Posljedica 5.4. *[31] Neka je $(E, ||\cdot||)$ paranormiran prostor, K neprazan kompletan i konveksan podskup od E i $f : K \to E$ neprekidno preslikavanje takvo da je $K \cup f(K)$ jakog Zima tipa. Ako je*
$$\inf_{x\in K} \alpha(\{y \in K : (\forall\epsilon > 0)\ x - f(y) \in V_{\delta(\epsilon)} \Rightarrow y - f(y) \in V_\epsilon\}) = 0$$
tada postoji $y_0 \in K$ takvo da za svaki $x \in K$ vrijedi
$$(\forall\epsilon > 0)\ x - f(y_0) \in V_{\delta(\epsilon)} \Rightarrow y_0 - f(y_0) \in V_\epsilon.$$
Ako je $f : K \to K$ onda f ima fiksnu tačku.

U daljem dajemo neke rezultate o najboljim aproksimacijama u paranormiranim prostorima kod kojih je na odredjenom skupu K
$$||\lambda u|| \leq g(\lambda)||u|| \text{ za } u \in K,\ \lambda \in [0,1],$$
gdje je $g : [0,1] \to [0,+\infty)$ funkcija za koju vrijedi
$$\sup\{\sum_{i=1}^{n} g(\lambda_i) : n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\} < +\infty.$$
Jedna funkcija tog tipa i paranormiran prostor dat je u Primjeru 5.2, [31]. Tu je
$$g(\lambda) = \lambda(1 + 2\alpha) \text{ na skupu } K_\alpha \text{ i}$$
$$\sup\{\sum_{i=1}^{n} g(\lambda_i) : n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\} = 1 + 2\alpha.$$
Dajemo primjer funkcije g za koju vrijedi dati uslov, a koja nije linearna.

Primjer 5.5. Neka je $S(0,1)$ prostor svih klasa ekvivalencije mjerljivih funkcija

$$\widehat{x} : [0,1] \to \mathbb{R}$$

i

$$||\widehat{x}|| = \int_0^1 \ln(1 + |x(t)|)dt, \quad \widehat{x} \in S(0,1), \quad \{x(t)\} \in \widehat{x}.$$

Ako je $\alpha > 0$ i

$$K_\alpha = \{\widehat{x} \in S(0,1) : |x(t)| \leq \alpha, \ t \in [0,1]\},$$

tada za sve $\widehat{x} \in K_\alpha$, $\alpha \in [0,1]$ vrijedi

$$||\alpha\widehat{x}|| \leq \frac{\lambda(1+\alpha)}{1+\lambda\alpha}||\widehat{x}||.$$

U tom slučaju je $g(\lambda) = \frac{\lambda(1+\alpha)}{1+\lambda\alpha}$ i u vezi sa tim imamo

$$\sup\{\sum_{i=1}^n g(\lambda_i) : n \in \mathbb{N}, \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\} \leq 1 + \alpha.$$

Uvedimo sljedeće oznake

$$S(g) = \{\sum_{i=1}^n g(\lambda_i) : n \in \mathbb{N}, \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\},$$

$$G(x) = \{y \in K : \frac{1}{M}||y - F(y)|| \leq ||x - F(y)||\}, \ x \in K.$$

Teorema 5.6. *Neka je $(E, ||\cdot||)$ paranormiran prostor, K neprazan kompletan, konveksan podskup od E i $F : K \to \mathcal{K}_{co}(X)$, $g : [0,1] \to [0,+\infty)$, preslikavanja za koja vrijedi:*

(1) $\lim\limits_{x_0 \to x} H(F(x_0), F(x)) = 0$,

(2) $\sup S(g) \leq M < +\infty$,

(3) $||\lambda u|| \leq g(\lambda)||u||$ *za sve* $u \in K - F(K)$, $\lambda \in [0,1]$.

Ako je $\inf\limits_{x \in K} \alpha(G(x)) = 0$, *tada postoji* $y_0 \in K$ *takvo da je*

$$\frac{1}{M}||y_0 - F(y_0)|| \leq \inf_{x \in K}||x - F(y_0)||.$$

Dokaz. Pokažimo da je preslikavanje $G : K \to \mathcal{P}(K)$,

$$G(x) = \{y \in K : \frac{1}{M}||y - F(y)|| \leq ||x - F(y)||\},$$

KKM preslikavanje. U suprotnom bi postojali $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in K$ i $\lambda_i \in [0,1]$, $i = 1, \ldots, n$ takvi da je $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ i $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} G(x_i)$. To znači

$$\frac{1}{M}||y - F(y)|| > ||x_i - F(y)||, \text{ za } i = 1, \ldots, n.$$

Sada imamo

$$||y - F(y)|| \geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} g(\lambda_i)}{M}||y - F(y)|| > \sum_{i=1}^{n} g(\lambda_i)||x_i - F(y)|| \geq \sum_{i=1}^{n} ||\lambda_i(x_i - u_i)||,$$

gdje je $u_i \in F(y)$, takav da je $||x_i - F(y)|| = ||x_i - u_i||$, $i = 1, \ldots, n$. Sada je $||y - F(y)|| > ||\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i(x_i - u_i)|| = ||y - \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i u_i|| \geq ||y - F(y)||$, što je nemoguće. Dokažimo da je $G(x)$ zatvoren za svaki $x \in K$. Vrijedi sljedeće

$$|\, ||F(x)|| - ||F(y)||\, | \leq H(F(x), F(y)).$$

(Dokazuje se analogno kao i Lema 1.10). Zbog toga i uslova (1) zaključujemo da je $G(x)$ zatvoren za svaki $x \in K$. Sada zbog Teoreme 3.3. zaključujemo da postoji $y_0 \in K$ takvo da je

$$\frac{1}{M}||y_0 - F(y_0|| \leq \inf_{x \in K} ||x - F(y_0||.$$

□

Posljedica 5.7. *[31] Neka je $(E, ||\cdot||)$ paranormiran prostor, K neprazan kompletan i konveksan podskup od E i $f : K \to E$ neprekidno preslikavanje takvo da je za neko $C(K) \geq 1$,*

$$||\lambda(u - v)|| \leq C(K)\lambda||u - v||, \quad u, v \in f(K) \cup K, \ \lambda \in [0,1].$$

Ako je $\inf\limits_{x \in K} \alpha(G(x)) = 0$, tada postoji $y_0 \in K$ takvo da je

$$\frac{1}{C(K)}||y_0 - f(y_0)|| \leq \inf_{x \in K} ||x - f(y_0)||.$$

Dokaz. Za funkciju $g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$, $g(\lambda) = C(K)\lambda$, je $\sup S(g) = C(K) < +\infty$ i ispunjen je uslov (2). Osim toga vrijede uslovi (1) i (3) prethodne teoreme, pa na osnovu toga slijedi zaključak. □

Teorema 5.8. *Neka je $(E, ||\cdot||)$ neprazan paranormiran prostor, K kompletan konveksan skup i $F : K \to \mathcal{K}_{co}(E)$ neprekidno preslikavanje,*

$$||\lambda u|| \leq g(\lambda)||u||, \quad za\ sve\ u \in K - F(K),\ \lambda \in [0,1],$$

gdje za funkciju g vrijedi

$$\sup S(g) \leq M < +\infty.$$

Neka je $\inf\limits_{x\in K} \alpha(G(x)) = 0$, i za sve $y \in K$, $u \in F(y)$ postoji $\lambda \in [0,1]$ takav da $g(\lambda)M < 1$ i $\lambda y + (1-\lambda)u \in K$, tada postoji $y_0 \in K$ takvo da $y_0 \in F(y_0)$.

Dokaz. Zbog Teoreme 5.6. postoji $y_0 \in K$ takav da je

$$\frac{1}{M}||y_0 - F(y_0)|| \leq \inf_{x\in M} ||x - F(y_0)||.$$

Neka je $u_0 \in F(y_0)$ takav da je $||y_0 - F(y_0)|| = ||y_0 - u_0||$. Postoji $\lambda \in [0,1]$ za koji je $g(\lambda)M < 1$ i $\lambda y_0 + (1-\lambda)u_0 \in K$. Imamo

$$\frac{1}{M}||y_0 - u_0|| = \frac{1}{M}||y_0 - F(y_0)|| \leq \inf_{x\in K} ||x - F(y_0)|| \leq$$

$$\inf_{u\in F(y_0)} ||\lambda y_0 + (1-\lambda)u_0 - u|| \leq ||\lambda y_0 + (1-\lambda)u_0 - u_0|| =$$

$$||\lambda(y_0 - u_0)|| \leq g(\lambda)||y_0 - u_0||,$$

što znači da za $||y_0 - u_0|| > 0$ je $g(\lambda)M \geq 1$. Medjutim to je nemoguće. Dakle, $y_0 = u_0 \in F(y_0)$. □

Posljedica 5.9. *[31] Neka je $(E, ||\cdot||)$ paranormiran prostor, K kompletan konveksan podskup od E i $f : K \to E$ neprekidno preslikavanje takvo da za neko $C(K) \geq 1$ vrijedi*

$$||\lambda(u-v)|| \leq C(K)\lambda||u-v||, \quad u, v \in K \cup F(K),\ \lambda \in [0,1].$$

Ako je $\inf\limits_{x\in K} \alpha(G(x)) = 0$ i za sve $y \in K$ postoji $\lambda \in (0, \frac{1}{(C(K))^2})$ takav da $\lambda y + (1-\lambda)f(y) \in K$ onda postoji $y_0 \in K$ takav da je $f(y_0) = y_0$.

Dokaz. Neka je $g : [0,1] \to [0, +\infty)$, $g(\lambda) = C(K)\lambda$, $\lambda \in [0,1]$, a za $F : K \to \mathcal{K}_{co}(E)$ uzmimo $F(x) = \{f(x)\}$, $x \in K$ i primjenimo Teoremu 5.8. □

5.2 G-konveksni prostori

Klasa dopustivih preslikavanja $\mathcal{U}_c^k(X,Y)$, [60], se sastoji od preslikavanja $T : X \to \mathcal{P}(Y)$, takvih da za svaki T i svaki kompaktan podskup K od X postoji preslikavanje $\Gamma \in \mathcal{U}_c(X,Y)$ takvo da je $\Gamma x \subset Tx$ za sve $x \in K$, gdje je $\mathcal{U}_c$ klasa svih konačnih kompozicija preslikavanja iz $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}$ je klasa preslikavanja za koja vrijedi:

(i) $\mathcal{U}$ sadrži klasu $\mathbb{C}$ neprekidnih funkcija,

(ii) svako preslikavanje $F \in \mathcal{U}_c$ je odozgo poluneprekidno i kompaktno preslikavanje,

(iii) za svaki politop P, svako preslikavanje $F \in \mathcal{U}_c(P,P)$ ima fiksnu tačku.

Primjeri klase $\mathcal{U}$ su neprekidna preslikavanja $\mathbb{C}$, Kakutanijeva preslikavanja $\mathbb{K}$ (preslikavanja kod kojih je kodomen konveksan prostor, a slike konveksni skupovi), Aronszajnova preslikavanja $\mathbb{M}$, aciklična preslikavanja $\mathbb{V}$, Powerova preslikavanja $\mathbb{V}_c$, O'Neillova preslikavanja $\mathbb{N}$, aproksimativna preslikavanja $\mathbb{A}$ u LTP, dopustiva preslikavanja Gorniewicza [60], [70], [71].

Za neprazan skup D, $\langle D\rangle$ je oznaka za familiju svih konačnih podskupova od D i Δ_n oznaka za standardni n-simpleks. Neka je X skup u vektorskom prostoru i D neprazan podskup od X. Za (X,D) kažemo da je konveksan prostor ako su konveksni omotači nad konačnim podskupovima od D sadržani u X i X ima topologiju indukovanu Euklidskom topologijom nad njima. Ako je $X = D$, tada se radi o konveksnom prostoru u smislu Lassondea . Topološki prostor X je kontraktibilan ako je identično preslikavanje na X homotopno sa konstantnim preslikavanjem.

Neka je X topološki prostor, c-struktura na X je preslikavanje $F : \langle X\rangle \to \mathcal{P}(X)$ takvo da je

(1) za sve $A \in \langle X \rangle$, $F(A)$ je kontraktibilan,

(2) za sve A, $B \in \langle X \rangle$, $A \subset B \Rightarrow F(A) \subset F(B)$.

Par (X, F) se naziva c-prostor, (Ch. Horvath [36]) odnosno H-prostor, (C. Bardaro i R. Ceppiteli [60]).

Generalizovani konveksni prostor ili kraće G-konveksan prostor $(X, D; \Gamma)$ (S. Park [60]) čine topološki prostor X, neprazan podskup D od X i preslikavanje $\Gamma : \langle D \rangle \to \mathcal{P}(X)$ takvo da je

(1) za sve $A, B \in \langle D \rangle$ $A \subset B \Rightarrow \Gamma(A) \subset \Gamma(B)$,

(2) za svaki $A \in \langle D \rangle$ sa $|A| = n + 1$ postoji neprekidna funkcija $\phi_A : \Delta_n \to \Gamma(A)$ takva da $J \in \langle A \rangle \Rightarrow \phi_A(\Delta_J) \subset \Gamma(J)$.

Ovdje Δ_J označava standardni simpleks pridružen skupu $J \in \langle A \rangle$. U daljem koristimo oznaku $\Gamma(A) = \Gamma_A$ za svaki $A \in \langle D \rangle$. Neka je $(X, D; \Gamma)$ G-konveksan prostor, njegov podskup C je G-konveksan ako za svaki $A \in \langle D \rangle$, vrijedi $A \subset C \Rightarrow \Gamma_A \subset C$. Ako je $D = X$ tada $(X, D; \Gamma)$ označavamo sa $(X; \Gamma)$. Ako stavimo $\Gamma_A = coA$ onda vidimo da je svaki konveksan prostor (X, D) i G-konveksan prostor $(X, D; \Gamma)$. Slično H-prostor (X, F) je G-konveksan prostor $(X; \Gamma)$, ako se stavi $\Gamma_A = F(A)$, jer za svaki $A \in \langle A \rangle$ postoji neprekidno preslikavanje $\phi_A : \Delta_A \to X$ tako da za sve $J \subset A$ vrijedi $\phi_A(\Delta_J) \subset F(J)$, (Horvath [36]).

Drugi primjeri G-konveksnih prostora su konveksni podskupovi LTP, metrički prostori sa Michaelovom konveksnom strukturom , S-kontraktibilni prostori, Horvathovi pseudokonveksni prostori, Komiyini konveksni prostori, simpleksna konveksnost Bielawskog i Joo-vi pseudokonveksni prostori [60].

U konveksnom prostoru (X, D) preslikavanje $G : D \to \mathcal{P}(X)$ je KKM preslikavanje ako je $co(N) \subset G(N)$ za svaki $N \in \langle D \rangle$. Za G-konveksan prostor $(X, D; \Gamma)$ preslikavanje $G : D \to \mathcal{P}(X)$ je G-KKM preslikavanje ako $\Gamma_N \subset G(N)$, za svaki $N \in \langle D \rangle$.

Sljedeću KKM teoremu za G-konveksne prostore je dokazao S. Park [71].

Teorema 5.10. *[71] Neka je $(X, D; \Gamma)$ G-konveksan prostor, Y Hausdorffov prostor i $F \in \mathcal{U}_c^k(X, Y)$. Neka je $G : D \to \mathcal{P}(Y)$ preslikavanje takvo da vrijedi:*

(1) $G(x)$ je kompaktno zatvoren u Y, za svaki $x \in D$,

(2) $F(\Gamma_N) \subset G(N)$, za svaki $N \in \langle D \rangle$,

(3) postoji neprazan kompaktan podskup K od Y takav da je

(i) $\bigcap_{x \in M} Gx \subset K$ za neki $M \in \langle D \rangle$ ili

(ii) za svaki $N \in \langle D \rangle$ postoji kompaktan G-konveksan podskup L_N od X koji sadrži N takav da je

$$F(L_N) \bigcap \left(\bigcap_{x \in L_N \cap D} Gx \right) \subset K.$$

Tada je

$$cl(F(X)) \bigcap K \bigcap \left(\bigcap_{x \in D} Gx \right) \neq \emptyset.$$

Definicija 5.11. Neka su $(X; \Gamma)$ i $(Y; \Gamma)$ dva G-konveksna prostora. Za preslikavanje $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ kažemo da je G–kvazikonveksno ako je $F^{-}(S)$ G–konveksan skup za svaki G-konveksan skup $S \subset Y$.

Definicija 5.12. Neka je $(X; \Gamma)$ $G-$konveksan prostor i $A \subset X$, $G-$konveksno zatvorenje skupa A je skup

$$\bigcap_{Z \text{ je } G-\text{konveksan i } A \subset Z} Z,$$

$G-$konveksno zatvorenje skupa A označavaćemo sa $co\ (A)$.

Definicija 5.13. [33] Neka je $(X; \Gamma)$ metrizabilan $G-$konveksan prostor sa metrikom d, $\emptyset \neq K \subset X$ i $F : K \to \mathcal{P}(X)$. F zadovoljava $Z_\delta-$uslov na K, gdje je $\delta : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, za svaki $\epsilon > 0$ ako je

$$co\ (L(F(y), \delta(\epsilon)) \cap K) \subset L(F(y), \epsilon),$$

gdje je $L(M, r) = \{x \in X : d(x, M) < r\}$, $M \subset X$, $r > 0$.

Teorema 5.14. *Neka je (X,Γ) metrizabilan $G-$konveksan prostor sa metrikom d, $K \subset X$ $G-$ konveksan skup i F_1, $F_2 : X \to \mathcal{K}\ (X)$ neprekidna preslikavanja takva da je F_2 $G-$kvazikonveksno i F_1 zadovoljava Z_δ-uslov na K, gdje je $\delta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ neprekidno preslikavanje. Ako postoji neprazan kompaktan skup $M \subset K$ takav da je*

$$\bigcap_{x\in D}\{y \in K : \delta(d(F_2(y), F_1(y)) \leq d(F_2(y), F_1(x))\} \subset M, \text{ za neki } D \in \langle K\rangle$$

tada postoji $x_0 \in K$ takav da je

$$\delta(d(F_2(x_0), F_1(x_0)) \leq \inf_{x\in K} d(F_2(x), F_1(x_0))$$

Dokaz. Koristićemo Teoremu 5.10. Definišimo preslikavanje $T : K \to \mathcal{K}\ (K)$ na sljedeći način:

$$T(x) = \{y \in K : \delta(d(F_2(y), F_1(y)) \leq d(F_2(x), F_1(y))\}.$$

Pokazaćemo da je preslikavanje T $G-$KKM preslikavanje.
Treba pokazati da je za svaki $A \in \langle K\rangle$,

$$\Gamma_A \subset T(A).$$

Pretpostavimo da postoji $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset K$ takav da je

$$\Gamma_A \not\subset T(A).$$

Tada postoji $y \in \Gamma_A$ takav da $y \notin T(A)$ to jest

$$y \notin T(x_i) \text{ za sve } i = 1, \ldots, n.$$

Iz definicije preslikavanja T to znači da je

$$\delta(d(F_2(y), F_1(y)) > d(F_2(x_i), F_1(y)),\ i = 1, \ldots, n.$$

Sada zaključujemo da je

$$F_2(x_i) \cap (L(F_1(y), \delta(d(F_2(y), F_1(y)))) \cap K) \neq \emptyset, \quad \text{za sve } i = 1, \ldots, n.$$

Pošto je

$$L(F_1(y), \delta(d(F_2(y), F_1(y)))) \subset co\ L(F_1(y), \delta(d(F_2(y), F_1(y))))$$

i preslikavanje F_2 $G-$kvazikonveksno imamo da je

$$F_2(y) \cap co\ (L(F_1(y), \delta(d(F_2(y), F_1(y)))) \cap K) \neq \emptyset.$$

Preslikavanje F_1 zadovoljava Z_δ-uslov, pa vrijedi

$$co\ (L(F_1(y), \delta(d(F_2(y), F_1(y)))) \cap K) \subset L(F_1(y), d(F_2(y), F_1(y))).$$

Sada imamo da je

$$F_2(y) \cap L(F_1(y), d(F_2(y), F_1(y))) \neq \emptyset,$$

odavde je $d(F_2(y), F_1(y)) < d(F_2(y), F_1(y))$, što je nemoguće. Dakle T je $G-$ KKM preslikavanje.
Dokažimo da je $T(x)$ zatvoren skup za svaki $x \in K$.
Neka je $y_n \in T(x)$, $n \in \mathbb{N}$ i $\lim y_n = y$. Pokažimo da tada $y \in T(x)$. Neka vrijedi

$$\delta(d(F_2(y_n), F_1(y_n))) \leq d(F_2(x), F_1(y_n)),\ n \in \mathbb{N}.$$

Na osnovu Leme 1.12. imamo sljedeće:

$$|d(F_2(x), F_1(y_n)) - d(F_2(x), F_1(y))| \leq D(F_1(y_n), F_1(y)),$$

$$|d(F_2(y_n), F_1(y_n)) - d(F_2(y_n), F_1(y))| \leq D(F_1(y_n), F_1(y)),$$

pa zbog neprekidnosti funkcije δ i Teoreme 1.8. zaključujemo da $y \in T(x)$.
Prema tome, ispunjeni su svi uslovi za primjenu Teoreme 5.10. i time je tvrdjenje dokazano. $\square$

Literatura

[1] J. P. Aubin and A. Cellina. *Differential Inclusions.* Springer, Verlag, 1984.

[2] J. P. Aubin and I. Ekeland. *Applied Nonlinear Analysis.* John Wiley and Sons, a Whiley-Interscience Publication Edition, 1984.

[3] M. Avriel and I. Zang. Generalized arcwise-connected functions and characterization of local-global minimum properties. *J. Optimization Theory and Application*, 32(4), 1980.

[4] H. T. Banks and M. Q. Jacobs. A differential calculus for multifunctions. *J. Math. Anal. Application*, (29):246–272, 1970.

[5] L. J. Billera. Topologies for 2^X; set-valued functions and their graphs. *Transaction of the American Math. Soc.*, 155(1), 1971.

[6] F. S. D. Blasi. On the differentiability of multifunctions. *Pacific journal of Mathematics*, 66(1), 1976.

[7] F. S. D. Blasi and J. Myjak. On a generalized best approximation problem. *J. of Approximation Theory*, (94):54–72, 1998.

[8] F. S. D. Blasi and T. I. Zamfirescu. Cardinality of the metric projection on typical compact sets in Hilbert spaces. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, (37), 1999.

[9] K. Border. *Fixed Point theorems with applications to economics and game theory.* Cambridge University Press, 1985.

[10] J. Borwein. Multivalued convexity and optimization: a unified approach to inequality and equality constraints. *Mathematical Programming, North-Holland Publishing Company*, (13):183–199, 1977.

[11] J. Borwein. A Lagrange multiplies theorem and a sandwich theorem for convex relations. *Math. Scand.*, (48):189–204, 1981.

[12] A. Carbone. A note on a variational inequality. *Indian J. pure appl. Math.*, 27(12):1225–1228, 1996.

[13] A. Carbone. Some results on maximal elements. *Internat. J. Math. and Math. Sci.*, 23(6):404–413, 2000.

[14] S. S. Chang, Y. J. Cho, and J. K. Kim. Selection problem with applications. *Indian J. pure appl. Math.*, 32(6):631–646, 2000.

[15] S. S. Chang, Y. H. Mao, and F. B. Zhang. On a new theorems of generalized KKM mappings on H-spaces with applications. *Prog. of Math.*, 23-29, 1994-95.

[16] S. Y. Chang. A generalization of KKM principle and its applications. *Soochow J. of Mathematics*, 15(1):7–17, 1989.

[17] T. H. Chang. KKM property and fixed point theorems. *J. Math. Anal. Application*, (203):224–235, 1996.

[18] P. Cubioti and B. D. Bella. Some existence theorems for the inclusions $0 \in A(x)$. *J. Math. Anal. Application*, 213(1):148–155, 1997.

[19] D. Delbosco. Simultaneous approximation, Ky Fan theorems and approximatively compact sets. *Indian J. pure appl. Math.*, 37(1):69–77, 1995.

[20] D. Delbosco. Some remarks on best approximation and fixed points. *Indian J. pure appl. Math.*, 30(8):745–748, 1999.

[21] X. P. Ding. New H-KKM theorems and their applications to geometric property, coincidence theorems, minimax inequality and maximal elements. *Indian J. pure appl. Math.*, 26(1):1–19, 1995.

[22] J. Dugundji and A. Granas. *Fixed Point Theory*, Volume 1. Polish Academic Publishers, 1982.

[23] K. Fan. A generalization of Tychonoff's fixed point theorem. *Math. Annalen*, (142):305–310, 1961.

[24] A. Granas. Theoremes du minimax. *C. R. Acad. Sc. Paris, t298*, pages 329–332, 1984.

[25] S. Gudder and F. Schroeck. Generalized convexity. *SIAM J. Math. Anal.*, 11(6), 1980.

[26] O. Hadžić. *Fixed point theory in topological vector spaces.* University of Novi Sad, 1984.

[27] O. Hadžić. Some remarks on a theorem on best approximation. *L'analyse numerique et la theorie de l'approximation*, 15(1):27–35, 1986.

[28] O. Hadžić. A theorem on best approximation and applications. *Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod. Mat. Fak. Ser-Mat.*, 22(1):47–55, 1992.

[29] O. Hadžić. On best approximation for multivalued mappings in pseudoconvex spaces. *Univ. u Novom Sadu, Zb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat.*, 24(1):1–12, 1994.

[30] O. Hadžić. Almost fixed point and best approximation theorems in H-spaces. *Bull. Austral. Math. Soc.*, (53), 1996.

[31] O. Hadžić. A theorem on best approximation in paranormed spaces. *Acta Sci. Math.*, (62):271–278, 1996.

[32] O. Hadžić. Two almost fixed point theorems for multivalued mappings in topological vector spaces. *Indian J. pure Appl. Math.*, 27(4):387–392, 1996.

[33] O. Hadžić. Best approximation results in H-spaces. *Bull. T.CXVI de l'Academie Serbe der Sciences et des Arts*, (23), 1998.

[34] W. W. Hogan. Point-to set maps in mathematical programming. *SIAM Review*, 15(3), 1973.

[35] R. B. Holmes. *Geometric Functional Analysis and its Applications.* Springer-Verlag, 1975.

[36] C. D. Horvath. Contractibility and generalized convexity. *J. Math. Anal. Application*, (156):341–357, 1991.

[37] L. V. Hot. On the open mapping principle and convex multivalued mappings. *Acta Universitatis Carolinae-Mathematica et Physica*, 26(1), 1984.

[38] J. S. Jung, B. S. Lee, and Y. J. Cho. Some minimization theorems in generating spaces of quasi-metric family and applications. *Bull. Korean Math. Soc.*, 33(4):565–585, 1996.

[39] M. A. Khamsi. KKM and Ky Fan theorems in hyperconvex metric spaces. *J. Math. Anal. Appl.*, (204):298–306, 1996.

[40] A. R. Khan and N. Hussain. Best approximation and fixed point results. *Indian J. pure appl. Math.*, 31(8):983–987, 2000.

[41] W. K. Kim. Studies on the KKM-maps, The Mathematical Sciences Research Institute, Seoul, Korea, Report Series. (14):116, 1985.

[42] W. K. Kim. A non-compact generalizations of Horvath's intersection theorem. *Bull. Korean Math. Soc.*, 32(2):153–162, 1995.

[43] J. Kindler. Topological minimax theorems and approximation. *J. Math. Anal. Application*, (210):8–21, 1997.

[44] P. Q. Knanh. On general open mapping theorems. *J. Math. Anal. Application*, (144):305–312, 1989.

[45] E. Lapidot. Best local approximation and generalized convexity. *J. of Approximation Theory*, (45):61–68, 1985.

[46] S. C. Lee and B. S. Lee. Some generalization of minimax inequality. *Indian J. of Mathematics*, 37(2):129–135, 1995.

[47] B. Y. Li, S. Chang, and Y. J. Cho. Fixed points for set valued increasing operators and applications. *J. Korean Math. Soc.*, 31(2):325–331, 1996.

[48] B. Martos. *Nonlinear Programming, Theory and Methods.* Akademiai Kiado, Budapest, 1975.

[49] H. B. E. Mechaiekh, P. Deguire, and A. Granas. Un alternative non lineaire en analyse convexe et applications. *C. R. Acad. Sc. Paris,t.295*, pages 257–259, 1982.

[50] J. W. Milnor. Topology from the differential viewpoint. *Princeton University Press*, 1997.

[51] M. Montagnana and A. Vignoli. On quasiconvex mappings and fixed point theorems. *Bolletino U. M. I.*, 4(4):870–878, 1971.

[52] M. Z. Nashed. Supportably and weakly convex functionals with applications to approximations theory and nonlinear programming. *J. Math. Anal. Appl.*, (18):504–521, 1967.

[53] K. Nikodem. A characterization of midconvex set-valued functions. *Acta Universitatis Carolinae Mathematica et Physica*, 30(2).

[54] K. Nikodem. Continuity of K-convex set-valued functions. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics*, 34(7-8), 1986.

[55] K. Nikodem. K-convex and K-concave set-valued functions. *Politechnika, Lodzka*, 1989.

[56] W. Oettli. A remark on vector-valued equilibrium and generalized monotonicity. *Acta Mathematica Vietnamica*, 22(1):213–221, 1997.

[57] D. O'Regan. Fixed point theory for closed multifunctions. *Archivum Mathematicum*, (1):191–199, 1998.

[58] B. G. Pachpatte. Application of the Leray-Schauder alternative to some Volterra integral and integro-differential equation. *Indian J. pure appl. Math.*, 26(12):1161–1168, 1995.

[59] S. Park. Fixed points of condensing maps on spheres satisfying the Leray-Schauder condition. *Indian J. of Mathematics*, 36(3):229–234, 1994.

[60] S. Park. Foundations of the KKM theory via coincidences of composites of upper semicontinuous maps. *J. Korean Math. Soc.*, 31(3):493–519, 1994.

[61] S. Park. Remarks on generalization of best approximation theorems. *Honam Mathematical J.*, 16(1):27–39, 1994.

[62] S. Park. A unified approach to generalizations of the KKM-type theorems related to acyclic maps. *Numer. funct. anal. and optimiz.*, 15(1-2):105–119, 1994.

[63] S. Park. Best approximation theorem for composites of upper semicontinuous maps. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 51:263–272, 1995.

[64] S. Park. Generalized Leray-Schauder principles for compact admissible multifunctions. *Topological Methods in Nonlinear Analysis, Journal of the Julius Schauder Center*, 5:271–277, 1995.

[65] S. Park. Set-valued nonexpansive maps satisfying the Leray-Schauder condition. *Acta Math. Hungar.*, 70(3), 1996.

[66] S. Park. Fixed point theorems in hyperconvex metric spaces. *Nonlinear Analysis*, (37):467–472, 1999.

[67] S. Park. Generalized Birhoff-Kellogg type theorems and applications. *Indian J. of Mathematics*, 41(1):67–77, 1999.

[68] S. Park. An alternative principle for connected ordered spaces. *Annales Univ. Sci. Budapest*, (43):3–12, 2000.

[69] S. Park. Fixed points, intersection theorems, variational inequalities, and equilibrium theorems. *Internat. J. Math. and Math. Sci.*, 24(2):73–93, 2000.

[70] S. Park and H. Kim. Coincidences of composites of u.s.c. maps on H-spaces and application. *J. Korean Math. Soc.*, 32(2):251–264, 1995.

[71] S. Park and H. Kim. Foundations of the KKM theory on generalized convex spaces. *J.Math. Anal. Application*, 1995.

[72] S. Park and H. Kim. Coincidence theorems for admissible multifunctions on generalized convex spaces. *J. Math. Anal. Application*, (197):173–187, 1996.

[73] S. Park, S. P. Singh, and B. Watson. Remarks on best approximation and fixed points. *Indian J. pure appl. Math.*, 25(5):459–462, 1994.

[74] S. Park, S. P. Singh, and B. Watson. Some fixed point theorems for composites of acyclic maps. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 121(4), 1994.

[75] H. Radström. An embeding theorem for spaces of convex sets. *Proc. Amer. Math.*, 3:165–169, 1952.

[76] S. M. Robinson. Regularity and stability for convex multivalued functions. *Mathematics of Operation Research*, 1(2), 1976.

[77] R. T. Rockaffelar. Generalized directional derivaties and subgradients of nonconvex functions. *Can. J. Math.*, XXXII(2):257–280, 1980.

[78] S. Rolewicz. On intersection of multifunctions. *Math. Operations, Ser. Optimization*, 11(1):3–11, 1980.

[79] S. Rolewicz. On extremal points of the unit ball in the Banach space of Lipschitz continuous function. *J. Austral. Math. Soc*, (41):95–98, 1986.

[80] S. Rolewicz. On drop property. *Studia Mathematica*, LXXXV, 1987.

[81] V. M. Sehgal and S. P. Singh. A theorem on the minimization of a condensing multifunction and fixed points. *J. Math. Anal. Application*, (107):96–102, 1985.

[82] S. Singh, B. Watson, and P. Srivastava. *Fixed Point Theory and Best Approximation: The KKM-map Principle.* Kluwer Academic Press, 1997.

[83] D. R. Smart. *Fixed point theorems.* Cambridge University Press, 1974.

[84] V. M. Tikhomirov. Analysis II, Convex Analysis and Approxomation Theory. *Springer-Verlag*, 1990.

[85] J. P. Vial. Strong convexity of sets and functions. *J. Mathematical Economics*, (9):187–205, 1982.

[86] S. E. Weinstein and Y. Xu. Best quasi-convex uniform approximation. *J. Math. Anal. Application*, (152):240–251, 1990.

Lista simbola

$int(\cdot)$	unutrašnjost skupa
$co(\cdot)$	konveksni omotač skupa
$cl(\cdot)$	zatvorenje skupa
$bd(\cdot)$	granica skupa
$B(x,r)$	otvorena kugla u normiranom prostoru sa centrom u x poluprečnika r
$\alpha(\cdot)$	mjera nekompaktnosti Kuratowskog skupa
H	Hausdorffova metrika
∂	subdiferencijal preslikavanja
$mq(\cdot)$	mjera nekvazikonveksnosti preslikavanja
$N_\epsilon(\cdot)$	ϵ-okolina skupa
Δ_n	standardni n-simpleks u prostoru $\mathbb{R}^{n+1}$
$\mathcal{P}(\cdot)$	familija svih nepraznih podskupova
$\mathcal{P}_{co}(\cdot)$	familija svih nepraznih konveksnih podskupova
$\mathcal{K}(\cdot)$	familija svih nepraznih kompaktnih podskupova
$\mathcal{K}_{co}(\cdot)$	familija svih nepraznih kompaktnih konveksnih podskupova
$\mathcal{BC}(\cdot)$	familija svih nepraznih ograničenih zatvorenih podskupova od
$card(\cdot)$	broj elemenata skupa
LTP	vektorski topološki prostor
$epi(\cdot)$	epigraf preslikavanja
X^*	konjugovani prostor prostora X

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Doktorska disertacija

VR

Autor: mr Zoran Mitrović

AU

Mentor: Prof. dr Olga Hadžić

MN

Naslov rada: Najbolje aproksimacije u nekim klasama topoloških prostora

NR

Jezik populacije: srpski latinica

JP

Jezik izvoda: srpski

JI

Zemlja publikovanja: Savezna Republika Jugoslavija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2002.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet

MA

Fizički opis rada:

FO

Naučna oblast: Matematika

NO

Naučna disciplina: Analiza

ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: najbolje aproksimacije, fiksna tačka, višeznačno preslikavanje, tačka koincidencije, paranorma, G-konveksan prostor, kvazikonveksno preslikavanje, simultane aproksimacije

PO

UDK:

Čuva se: u biblioteci Instituta za matematiku

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod: U tezi, koristeći KKM teoriju, koja pripada nelinearnoj funkcionalnoj analizi

i ima primjene u mnogim matematičkim teorijama, npr. u teoriji fiksne tačke, varijacionim problemima, matematičkoj ekonomiji, su izučavane najbolje aproksimacije za višeznačna preslikavanja . Dokazana su tvrdjenja o najboljim aproksimacijama za višeznačna K-kvazikonveksna preslikavanja. Definisan je pojam mjere nekvazikonveksnosti višeznačnog preslikavanja. Date su neke primjene u teoriji fiksne tačke kao i neki rezultati o egzistenciji nula višeznačnih preslikavanja koji se mogu primjeniti na rješavanje nekih diferencijalnih inkluzija.

IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN Veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik: dr Stevan Pilipović, red. prof. PMF

Član: dr Olga Hadžić, red. prof. PMF, mentor

Član: dr Milan Jovanović, red. prof. PMF-a u Banjaluci

UNIVERSITY OF NOVI SAD

FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOKUMENTACION

Accesion number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monographic type

DT

Type of record: Text printed material

TR

Contens code: Phd Thesis

CC

Author: mr Zoran Mitrović

AU

Mentor: Prof. dr Olga Hadžić

MN

Title: Best approximation in some topological spaces

TI

Language of text: serbian

LT

Language of abstract: serbian

LA

Country of publication: Federal Republic of Yugoslavia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2002.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publ. place: University of Novi Sad, Faculty of Natural Sciences and Mathematics

PP

Physical description:

PD

Scientific field: Mathematics

SF

Scientifisc discipline: Analysis

SD

Subject/ Key words: best approximations, fixed point, multivalued map, coincidence point, paranorm, G-convex space, quasiconvex map, simultaneous approximation

SKW

UC:

Holding data: the library at Institute of Mathematics, Novi Sad

HD

Note:

N

Abstract: In this thesis we have dealt with best approximation for multivalued mappings by using the KKM theory, which is part of nonlinear functional analysis and which has its applications in many mathematical theories, e.g. in fixed point theory, in variational problems, and mathematical economics.

We have also given the results about best approximation for multivalued K-quasiconvex mappings. The measure of non-quasiconvex multivalued mappings has been

defined here.

Some applications in fixed point theory have been given as well as some results which can be applied in solving certain differential inclusions.

AB

Accepted by Scientific Board on:

ASB

Defended:

Thesis defend board:

DB

President: dr Stevan Pilipović, prof PMF

Member: dr Olga Hadžić, prof. PMF, mentor

Member: dr Milan Jovanović, prof. PMF, Banja Luka