UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

# DOKTORSKA TEZA

Mr JOVANKA NIKIĆ

NOVI SAD, 1984.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

# DOKTORSKA TEZA

Mr JOVANKA NIKIĆ

NOVI SAD, 1984.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

# DIFERENCIJABILNE MNOGOSTRUKOSTI TIPA SKORO PRODUKT STRUKTURE I STRUKTURE INDUKOVANE NA POTPROSTORIMA TAKVIH MNOGOSTRUKOSTI

- **DOKTORSKA TEZA** -

**Mr Jovanka Nikić**

NOVI SAD, 1984.

S A D R Ž A J

# P R E D G O V O R

Strukture na diferencijabilnim mnogostrukostima danas se izučavaju ne samo u diferencijalnoj geometriji, već i u diferencijalnoj topologiji i algebri, a za neke strukture postoji mogućnost primene u mehanici. Neke strukture se mogu definisati preko tenzora i neke od takvih struktura će biti izučavane u ovom radu. Posebno će biti ispitano kakvu strukturu indukuje skoro produkt struktura okolnog prostora na nekim podmnogostrukostima i obrnuto, u kakav se prostor može potopiti potprostor sa skoro produkt strukturom.

Rad se sastoji iz tri glave:

1. Osnovne definicije i teoreme
2. Uopštenje struktura $f^3-f=0$ i $f^5-f=0$ i potprostori u prostorima sa takvom strukturom
3. Uopštenje struktura $\varphi^4 \pm \varphi^2 = 0$ i potprostori u prostorima sa takvom strukturom

Prva glava ima četiri odeljka i sadrži poznate rezultate koji se koriste u ovom radu. Tu se definiše glavni snop i pridruženi snop glavnom snopu, a u radu se koristi primer pridruženog snopa - tangentni snop i redukcija njegove strukturne grupe.

U glavi 1. definisane su neke poznate strukture i date njihove osobine, a navedena je i literatura koja se odnosi na ovu problematiku i koja je korišćena u radu.

Najdetaljnije je obradjena skoro produkt struktura. Izveden je potreban i dovoljan uslov da skoro produkt struktura bude integrabilna. Taj uslov je da je Nijenhuisov tenzor skoro produkt strukture jednak nuli. Ovakav pristup se može sprovesti analogno i za druga tenzorska polja tipa (1,1), ali postoje i drugi ekvivalentni uslovi integrabilnosti, koji ilustrativnije prikazuju odnos izmedju distribucija, lokalnih koordinata i koordinata strukturnog tenzora u adaptiranom sistemu, kada je struktura integrabilna. Takvi uslovi dati su pri ispitivanju integrabilnosti strukture $f(2k+1,-1)$ u glavi 2.

Ostale glave sadrže originalne rezultate.

U odeljku 2.1. poznati rezultati za strukturu $f^3-f=0$, dopunjeni su rezultatima koji važe za strukturu $f^3+f=0$. Potprostori u mnogostrukostima sa ovakvom strukturom ispitani su u odeljku 2.2. U ovom odeljku je dokazano da skoro produkt struktura indukuje strukturu Sato na hiperpovrši. Razmatran je i obrnuti slučaj- kada je mnogostrukost snabdevena $f(3,-1)$-strukturom, ispitano je kakva je struktura na hiperpovrši. Ta struktura je nekad skoro produkt struktura, a nekad prirodna $F(3,-1)$-struktura. ( $F= B^{-1}\cdot fB$, B je diferencijal potapanja.)To zavisi od ranga strukture f i izbora hiperpovrši.

U ovom odeljku je ispitana i integrabilnost prirodne strukture na hiperpovrši, ako je $f(3,-1)$-struktura okolnog prostora integrabilna.

U odeljku 2.3. ispitana je struktura f koja ispunjava uslov $f^5-f=0$. Kada je rang f jednak n-2, pokazano je da je restrikcija strukture $-f^2$ na specijalnoj hiperpovrši struktura Sato. Skoro produkt struktura $\phi=-(m+f^2)$ indukuje na toj hiperpovrši baš strukturu Sato $-f^2$.

U odeljku 2.4. uveden je adaptirani koordinatni sistem za strukturu koja ispunjava uslov $f^{2\cdot 2^a}-f=0$, dat je potreban i dovoljan uslov kada se mnogostrukost može snabdeti takvom strukturom i date su matrice metričkog tenzora i tenzora strukture u odnosu na taj adaptiran sistem.

Ovaj problem je rešen generalizacijom postupka za uvodjenje struktura $f(3,-1)$ i $f(5,-1)$. U takvim prostorima ispitani su neki potprostori i strukture indukovane na njima. Ispituje se pod kojim uslovima potprostor nasledjuje strukturu okolnog prostora, odnosno, kojom se strukturom može snabdeti potprostor ukoliko ne nasledjuje strukturu okolnog prostora. Odnos tih struktura zavisi od izbora potprostora, njegove dimenzije, ranga strukture i redukcije strukturne grupe tangentnog snopa mnogostrukosti.

U odeljku 2.5. formulisani su uslovi integrabilnosti za strukturu $f(2k+1,-1)$.

U glavi 3. uvedene su strukture $(\varphi^2\pm1)(\varphi^2-a)=0$ i dati potrebni i dovoljni uslovi kada se mnogostrukost može snabdeti ovakvim strukturama. Ispitano je kakvom se strukturom može dopuniti struktura prostora L do skoro produkt strukture okolnog prostora.

Literatura koja je navedena na kraju rada, sadrži knjige koje mogu dati potpuniji pregled literature koja se odnosi na strukture na mnogostrukostima i podmnogostrukostima. Ja sam navela samo onu literaturu koju sam koristila u radu i koju sam mogla da nabavim. Pri pozivanju na literaturu odgovarajući broj se stavlja u uglaste zagrade.

Pozivanje na formule, teoreme i definicije je uobičajeno: (3.4.) označava formulu 4 odeljka 3 iste glave, (3.4.) glave 1. označava formulu 4 odeljka 3 glave 1.

je da je restrikcija strukture $-f^2$ na specijalnoj hiperpovrši struktura Sato. Skoro produkt struktura $\phi=-(m+f^2)$ indukuje na toj hiperpovrši baš strukturu Sato $-f^2$.

U odeljku 2.4. uveden je adaptirani koordinatni sistem za strukturu koja ispunjava uslov $f^{2\cdot 2^a}-f=0$, dat je potreban i dovoljan uslov kada se mnogostrukost može snabdeti takvom strukturom i date su matrice metričkog tenzora i tenzora strukture u odnosu na taj adaptiran sistem.

Ovaj problem je rešen generalizacijom postupka za uvodjenje struktura $f(3,-1)$ i $f(5,-1)$. U takvim prostorima ispitani su neki potprostori i strukture indukovane na njima. Ispituje se pod kojim uslovima potprostor nasledjuje strukturu okolnog prostora, odnosno, kojom se strukturom može snabdeti potprostor ukoliko ne nasledjuje strukturu okolnog prostora. Odnos tih struktura zavisi od izbora potprostora, njegove dimenzije, ranga strukture i redukcije strukturne grupe tangentnog snopa mnogostrukosti.

U odeljku 2.5. formulisani su uslovi integrabilnosti za strukturu $f(2k+1,-1)$.

U glavi 3. uvedene su strukture $(\varphi^2\pm 1)(\varphi^2-a)=0$ i dati potrebni i dovoljni uslovi kada se mnogostrukost može snabdeti ovakvim strukturama. Ispitano je kakvom se strukturom može dopuniti struktura prostora L do skoro produkt strukture okolnog prostora.

Literatura koja je navedena na kraju rada, sadrži knjige koje mogu dati potpuniji pregled literature koja se odnosi na strukture na mnogostrukostima i podmnogostrukostima. Ja sam navela samo onu literaturu koju sam koristila u radu i koju sam mogla da nabavim. Pri pozivanju na literaturu odgovarajući broj se stavlja u uglaste zagrade.

Pozivanje na formule, teoreme i definicije je uobičajeno: (3.4.) označava formulu 4 odeljka 3 iste glave, (3.4.) glave 1. označava formulu 4 odeljka 3 glave 1.

Zahvaljujem se prof. dr. Milevi Prvanović od koje sam stekla prva sistematizovana znanja iz geometrije, koja je od početka pratila moj rad, uputila me da izučavam ovu problematiku i uvek mi davala korisne sugestije.

Posebno se zahvaljujem prof. dr Ireni Čomić uz čiju sam pomoć savladala mnoge teškoće u radu.

Jovanka Nikić
Jovanka Nikić

# GLAVA I.

## OSNOVNE DEFINICIJE I TEOREME

## 1.1. DIFERENCIJABILNE MNOGOSTRUKOSTI I PODMNOGOSTRUKOSTI

Osnovni pojmovi iz diferencijalne geometrije kao što su mnogostrukost, tangentni prostor, tenzorski prostor i dr. mogu na razne načine da se definišu [4], [5], [8], [9], [11], [27], [40], [58], [62]. U ovom odeljku daćemo definicije pojmova u onom obliku u kom se koriste u radu.

Definicija 1.1. Neka je U otvoren skup u $R^n$. Preslikavanje f: $U \to R$ je klase $C^r$ ako su svi i-ti parcijalni izvodi za $i \leq r$ neprekidni. Funkcija f pripada klasi $C^0$ ako je neprekidna, a f je klase $C^\infty$ ako je f klase $C^r$ za svako $r \geq 0$.

Definicija 1.2. Neka je U otvoren skup u $R^n$, a f: $U \to R^k$, $k \geq 1$. f je klase $C^r$ ako je svaka funkcija $f_i = u_i \circ f$ klase $C^r$ na U, gde je $u_i: R^k \to R$ funkcija, koja svakoj tački dodeljuje i-tu koordinatu za $i=1,2,\ldots,k$.

Definicija 1.3. Neka je $\mathcal{M}$ Hausdorfov prostor, a U otvoren skup u $\mathcal{M}$. Ako je $\varphi$: $U \to R^n$ homeomorfizam ( uzajamno jednoznačna, obostrano neprekidna funkcija) skupa U u otvoren skup u $R^n$, $\varphi$ se zove lokalni n-dimenzionalni koordinatni sistem, U je koordinatna okolina, a $(U, \varphi)$ je koordinatni par.

Definicija 1.4. Diferancijabilna struktura F klase $C^k$ $(1 \leq k \leq \infty)$ na Hausdorfovom prostoru je kolekcija koordinatnih parova ( $U_\alpha$, $\varphi_\alpha$ ), $\alpha \in A$ ( A je skup indeksa) koji zadovoljavaju sledeće uslove:

$M_1$) $\mathcal{M} = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

$M_2$) za svako $\alpha$, $\beta \in A$, preslikavanje

$$\varphi_\beta \cdot \varphi_\alpha^{-1} \text{ je iz } C^k \text{ na } U_\alpha \cap U_\beta .$$

$M_3$) Kolekcija F je maksimalna u odnosu na osobine $M_1$ i $M_2$.

Definicija 1.5. n-dimenzionalna diferencijabilna mnogostrukost klase $C^k$ je n-dimenzionalni Hausdorfov prostor snabdeven diferencijabilnom strukturom klase $C^k$. n-dimenzionalnu mnogostrukost klase $C^\infty$ zvaćemo kratko mnogostrukost i obeležavaćemo je sa $\mathcal{M}^n$.

Definicija 1.6. Neka je f realna funkcija na $\mathcal{M}^n$. Funkcija f je klase $C^r$ na skupu $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}^n$, ako postoji koordinatni par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, takav da je funkcija $f\cdot\varphi_\alpha^{-1}$ klase $C^r$ na $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap \mathcal{N})$. Funkcija je diferencijabilna ako je diferencijabilna u svakoj tački $p \in \mathcal{M}$.(tj. kada je klase $C^\infty$.)

Označimo sa $C^\infty(\mathcal{M}^n)$ skup svih diferencijabilnih funkcija na $\mathcal{M}^n$. Skup $C^\infty(\mathcal{M}^n)$ je algebra nad R, pri čemu se operacije definišu formulama

$$(1.1.)\qquad \begin{aligned} (\lambda f)(p) &= \lambda f(p) \\ (f+g)(p) &= f(p) + g(p) \\ (f\cdot g)(p) &= f(p)\cdot g(p) \end{aligned}$$

$\lambda \in R$, $p \in \mathcal{M}^n$, $f,g \in C^\infty(\mathcal{M}^n)$.

Definicija 1.7. Neka je $\mathcal{M}^n$ n-dimenzionalna mnogostrukost, a $C^\infty(\mathcal{M}^n_m)$ skup diferencijabilnih funkcija koje su definisane u nekoj okolini tačke m. Tangentni vektor mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ je preslikavanje $X$: $C^\infty(\mathcal{M}^n_m) \to R$ koje zadovoljava uslove

$$(1.2.)\qquad \begin{aligned} X(ag + bf) &= a\cdot Xg + b\cdot Xf \\ X(gh) &= g(Xh) + h(Xg) \end{aligned}$$

gde $a,b \in R$, $f,g,h \in C^\infty(\mathcal{M}^n_m)$, a ag i bf su odredjene na presecima domena funkcija f,g,h.

Definicija 1.8. Skup svih tangentnih vektora u tački m je tangentni prostor te mnogostrukosti u uočenoj tački i obeležava se sa $M_m$.

$M_m$ se može snabdeti strukturom vektorskog prostora ako definišemo operacije

$$(1.3.)\quad \begin{aligned} &( X + Y ) f = Xf + Yf \\ &( bX )f = b(Xf), \qquad b \in R,\ f \in C^{\infty}(\mathcal{M}^n_m). \end{aligned}$$

Baza tog vektorskog prostora je $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$, a $X \cdot x_i = x^i$ su koordinate vektora X u toj bazi.

Definicija 1.9. Polje vektora X na skupu $U \subset \mathcal{M}^n$ je preslikavanje koje svakoj tački $p \in U$ pridružuje vektor $X_p \in M_p$. Za polje vektora X na $\mathcal{M}^n$ kažemo da je klase $C^{\infty}$, ako je Xf klase $C^{\infty}$, $f \in C^{\infty}(\mathcal{M}^n)$. Skup vektora klase $C^{\infty}$ označavamo sa $\mathfrak{X}(\mathcal{M}^n)$.

Vektorska polja nad diferencijabilnom mnogostrukosti imaju koordinate koje važe u okolini jedne tačke, a van te okoline moramo menjati koordinatni sistem. Ako su koordinate vektora u jednom koordinatnom sistemu $c^i$, a u drugom $c^{i'}$, veza medju njima je

$$c^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} c^i, \text{ gde su } x^i \text{ i } x^{i'} \text{ stare i nove}$$

koordinate tačke.

Definicija 1.1o. Ako su X,Y vektorska polja klase $C^{\infty}$ na $\mathcal{M}^n$, definišimo vektorsko polje $[X,Y] = XY - YX$ koje zovemo komutator polja X i Y. Komutator je takodje vektorsko polje klase $C^{\infty}$. Komutator je bilinearno preslikavanje koje ima osobine

i) $[X,Y] = -[Y,X]$
ii) $[X,X] = 0$
iii) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

Dualan prostor $M_m^*$ tangentnom prostoru $M_m$ zovemo kotangentni prostor , a njegove elemente zovemo diferencijalnim formama prvog reda. Bazu prostora $M_m^*$ čine forme $\omega^i$ koje zadovoljevaju relaciju

$$\omega^i \frac{\partial}{\partial x^j} = \delta^i_j, \text{ a to su } dx^1,\ldots,dx^n.$$

Dakle, svaka forma prvog reda može se napisati u obliku

$$\omega = f_i dx^i, \text{ gde } f_i \in C^\infty(\mathcal{M}^n).$$

Ako su $f_{i'}$ koordinate iste forme u tački sa drugim koordinatama $x^{i'}$, veza izmedju starih i novih koordinata forme biće

$$f_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} f_i.$$

Ovo se može uopštiti i dobijamo pojam tenzora proizvoljnog reda. Ako je u svakoj tački $p \in \mathcal{M}^n$ dat tenzor $t(r,s)$, tada kažemo da je nad $\mathcal{M}^n$ definisano tenzorsko polje. Skup svih tenzora tipa$(r,s)$ obeležimo sa $D^r_s(\mathcal{M}^n)$. $t(r,s)$ se može pisati u okolini tačke $p$ u obliku

$$t_p = t^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_2}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes dx^{j_2} \ldots \otimes dx^{j_s}$$

gde su $t^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ skalari, a $\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_s}$

su elementi baze od $D^r_s(\mathcal{M}^n_p)$.

Ako su $x^{i'}$ nove koordinate tačke $p$ tada je veza izmedju starih i novih koordinata tenzora data relacijom

$$t^{i'_1 i'_2 \dots i'_r}_{j'_1 j'_2 \dots j'_s} = t^{k_1 k_2 \dots k_r}_{m_1 m_2 \dots m_s} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial x^{i'_2}}{\partial x^{k_2}} \dots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{k_r}} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x^{j'_1}} \frac{\partial x^{m_2}}{\partial x^{j'_2}} \dots \frac{\partial x^{m_s}}{\partial x^{j'_s}}$$

Teorema 1.1. Postoji izomorfizam izmedju tenzora iz $D^r_s\ (\mathcal{M}^n_m)$ i polilinearnih preslikavanja prostora

$$\underbrace{M^*_m \times M^*_m \times \dots \times M^*_m}_{r \text{ puta}} \times \underbrace{M_m \times M_m \times \dots \times M_m}_{s \text{ puta}}$$

u R.

Definicija 1.11. Neka je $\mathcal{M}^n$ mnogostrukost klase $C^\infty$. Mnogostrukost $\mathcal{N}^m$ je potprostor u $\mathcal{M}^n$ ako postoji preslikavanje i: $\mathcal{N}^m \to \mathcal{M}^n$ koje je 1-1 i klase $C^\infty$, takvo da je di=B takodje 1-1 u svakoj tački. To se preslikavanje zove potapanje.

Podmnogostrukost $\mathcal{N}^k$ mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ može se zadati sistemom jednačina

(1.4.) $f_1(x^1,\dots,x^n)=0,\dots,\ f_{n-k}(x^1,\dots,x^n)=0.$

Tačka $(x^1_o,\dots,x^1_o)$ mnogostrukosti (1.4.) je nesingularna ako je rang matrice

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{x^i=x^i_o},\quad i=1,\dots,n-k,\quad j=1,\dots,n$$

jednak baš n-k.

Teorema1.2. U okolini nesingularne tačke $x^1_o,\dots,x^n_o$ podmnogostrukosti (1.4.) mogu se uvesti lokalne koordinate.

Dokaz: Neka je $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}\right)_{x^q=x^q_o}$, $j= k+1,\dots,n$

minor reda n-k koji nije jednak nuli. Tada u okolini tačke

$(x_o^1,\ldots,x_o^n)$ na podmnogostrukosti rešimo sistem (1.4.)

$$x^{k+1} = x^{k+1}(z^1,\ldots,z^k)$$
$$\vdots$$
$$x^n = x^n(z^1,\ldots,z^k)$$
$$z^1=x^1,\ldots,\ z^k=x^k.$$

U promenljivim $(z^1,\ldots,z^k)$ dobili smo parametarski predstavljenu podmnogostrukost u okolini izučavane tačke.

Definicija 1.12. Ako je $i: \mathcal{N}^m \to \mathcal{M}^n$, $\mathcal{N}^m$ podmnogostrukost od $\mathcal{M}^n$ i neka je $f$ funkcija klase $C^\infty$čije su vrednosti u $R$, tj. $f \in C^\infty(\mathcal{M}^n)$ u okolini tačke $p \in i(\mathcal{N}^m)$, tada je $f \cdot i \in C^\infty(\mathcal{N}^m)$ u tački $i^{-1}(p)$ restrikcija od $f$ na $\mathcal{N}^m$. Obrnuto, ako $g \in C^\infty(\mathcal{N}^m)$ u tački $q$, tada postoji okolina $U$ od $q$ u $\mathcal{N}^m$ i postoji $f \in C^\infty(\mathcal{M}^n)$ u tački $i(q)$ takvi da je $f \circ i/_U = g/_U$.

Definicija 1.13. Ako je $i: \mathcal{N}^m \to \mathcal{M}^n$, $\mathcal{N}^n$ podmnogostrukost od $\mathcal{M}^n$, $X$ je $C^\infty$vektorsko polje na $\mathcal{M}^n$ takvo da je za svaku tačku $q \in \mathcal{N}^m$, $X(i(q)) \in di(N_q)$, tada postoji vektorsko polje $Y$ na $\mathcal{N}^m$ takvo da je $di(Y(q)) = X(i(q))$. $Y$ je restrikcija od $X$ na $\mathcal{N}^m$.

Teorema 1.3. $B[X,Y] = [BX,BY]$, $B=di$.

Definicija 1.14. p-dimenzionalna distribucija na mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ $(p \leq n)$ je funkcija $\theta$ definisana na $\mathcal{M}^n$ koja svakoj tački $m \in \mathcal{M}^n$ dodeljuje p-dimenzionalni linearni potprostor $\theta(m)$ od $M_m$. p-dimenzionalna distribucija $\theta$ na $\mathcal{M}^n$ je klase $C^\infty$u $m \in \mathcal{M}^n$, ako postoje $C^\infty$ vektorska polja $X_1,\ldots,X_p$ definisana u okolini $U$ tačke $m$ i takva da za svaku tačku $q \in U$, vektorska polja $X_1(q),\ldots,X_p(q)$ razapinju $\theta(q)$.

Integralna mnogostrukost $\mathcal{N}^p$ distribucije je potprostor od $\mathcal{M}^n$ takav da je $di(N_q) = \theta(i(q))$ za svako $q \in \mathcal{N}^p$.

Kažemo da vektorsko polje X pripada distribuciji $\theta$ i pišemo $X \in \theta$, ako za svako m u domenu polja X važi: $X(m) \in \theta(m)$.

Definicija 1.15. Distribucija je involutivna ako za svako $C^\infty$ vektorsko polje koje pripada distribuciji $\theta$ važi $[X,Y] \in \theta$.

Definicija 1.16. Distribucija $\theta$ je integrabilna ako za svako $m \in \mathcal{M}^n$ postoji integralna mnogostukost od $\theta$ koja sadrži m.(Čiji je tangentni prostor, potprostor od $M_m$).

U [4], [58] su dokazane teoreme 1.4, 1.5, 1.6.

Teorema 1.4. $C^\infty$ involutivna distribucija $\theta$ na $\mathcal{M}^n$ je integrabilna. Kroz svaku tačku $m \in \mathcal{M}^n$ može se postaviti jednoznačno odredjena povezana integralna mnogostrukost distribucije $\theta$ i svaka druga povezana integralna mnogostrukost koja sadrži m je otvorena podmnogostrukost ove maksimalne.

To je, ustvari, preformulisana teorema Frobenijusa.

Teorema 1.5. Distribucija $\theta$ je integrabilna ako i samo ako je involutivna.

Teorema 1.6. Neka su $\theta_1, \ldots, \theta_h$ komplementarne $C^\infty$ distribucije od $\mathcal{M}^n$, tada je $M_m$ direktna suma od $\theta_i(m)$ za svako $m \in \mathcal{M}^n$, $i=1,\ldots,h$.

## 1.2. GRUPE LI I ALGEBRE LI

Definicija 2.1. Liova grupa $G$ je mnogostrukost koja je snabdevena strukturom grupe i grupovne operacije:

$$G \times G \to G, \text{ data sa } (g,h) = g\cdot h$$
$$\text{i} \quad G \to G, \text{ data sa } g \to g^{-1}$$

su klase $C^{\infty}$.

Primer 2.1. $Gl(n,R)$ je grupa Li sa standardnom operacijom množenja matrica i nalaženja inverzne matrice. Pošto se $Gl(n,R)$ može posmatrati kao grupa nesingularnih transformacija prostora $R^n$ i pošto je svaki n-dimenzionalan vektorski prostor $V$ nad $R$ izomorfan sa $R^n$, grupa nesingularnih transformacija prostora $V$, $Gl(V)$, može se posmatrati kao grupa Li izomorfna sa $Gl(n,R)$.

Definicija 2.2. Li algebra je vektorski prostor $L$ za koga je definisana bilinearna funkcija $[\,,]$ : $L \times L \to L$ i za koju važi

i) $[X,Y] = -[Y,X]$ za $\forall\, X,Y \in L$,

ii) Jakobijev identitet

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] = 0$$

za svako $X,Y,Z \in L$.

Neka je $G$ grupa Li. Levo invarijantno vektorsko polje na $G$ je vektorsko polje koje je fiksno u odnosu na diferencijal leve translacije. Tj. ako je $\mathcal{L}_g : G \to G$ definisano sa $\mathcal{L}_g(h) = g\cdot h$, tada je $X$ levo invarijantno vektorsko polje ako je $d\mathcal{L}_g X(h) = X(gh)$ za svako $g,h \in G$.

Skup levo invarijantnih vektorskih polja čini Liovu algebru u odnosu na uobičajene operacije sabiranja, množenja skalarom i operacijom [,] .

Definicija 2.3. Liova algebra $\mathfrak{g}$ grupe G je skup levo invarijantnih vektorskih polja.
Kao vektorski prostor, $\mathfrak{g}$ je izomorfan sa tangentnim prostorom grupe G u e ( jedinični elemenat grupe), što obeležavamo sa $G_e$.

Teorema 2.1. Neka je G grupa Li. Postoji 1-1 korespodencija izmedju povezanih Li podgrupa grupe G i subalgebri od Liove algebre grupe G. Ovi odnosi grupa i podgrupa ispitani su u [26], [58].

Neka je $\mathfrak{g}$ algebra Li nad poljem R. Označimo sa $Gl(\mathfrak{g})$ grupu svih endomorfizama, čija je determinanta različita od nule, prostora $\mathfrak{g}$ . Endomorfizam je linearno preslikavanje prostora $\mathfrak{g}$ na sebe. Algebra Li $gl(\mathfrak{g})$ grupe $Gl(\mathfrak{g})$ je vektorski prostor svih endomorfizama prostora $\mathfrak{g}$ sa operacijom komutiranja $[A,B] = AB - BA$. Linearno preslikavanje $Y \to [X,Y]$ algebre označava se sa adX.
$( \operatorname{ad}[X,Y] = \operatorname{ad}X \cdot \operatorname{ad}Y - \operatorname{ad}Y \cdot \operatorname{ad}X )$
Preslikavanje $X \to \operatorname{ad}X$ za $X \in \mathfrak{g}$ je homomorfizam algebre na neku podalgebru $\operatorname{ad}(\mathfrak{g})$ u $gl(\mathfrak{g})$ i zove se reprezentacija algebre $\mathfrak{g}$ .

Neka je G grupa Li, $k \in G$. Preslikavanje $\tau_k : \mathfrak{g} \to k \cdot g \cdot k^{-1}$ je analitički automorfizam grupe G na sebe. Stavimo da je $\operatorname{Ad}(k) = d\,\tau_k$. Preslikavanje $\operatorname{Ad}: G \to Gl(\mathfrak{g})$ je reprezentacija grupe G.

Liova algebra grupe $Gl(n,C)$ je $gl(n,C)$.

Posmatrajmo neke podgrupe grupe $Gl(n,C)$.

1. Unitarna grupa
   $U(n) = \{ A \in Gl(n,C) \ / \ A^{-1} = \bar{A}^{t} \}$
2. Specijalna linearna grupa
   $Sl(n,C) = \{ A \in Gl(n,C) \ / \ \det A = 1 \}$
3. Kompleksna ortogonalna grupa
   $O(n,C) = \{ A \in Gl(n,C) \ / \ A^{-1} = A^{t} \}$

Može se pokazati [8] pomoću eksponencijalnog preslikavanja da su Liove algebre ovih grupa sledeće podalgebre od $gl(n,C)$:

1. Kosohermitske matrice
   $u(n) = \{a \in gl(n,C) \;/\; \overline{a} = a^t = 0\}$
2. Matrice sa tragom nula
   $sl(n,C) = \{a \in gl(n,C) \;/\; tr\ a = 0\}$
3. Kososimetrične matrice
   $o(n,C) = \{a \in gl(n,C) \;/\; a + a^t = 0\}$.

## 1.3. REDUKCIJA STRUKTURNE GRUPE TANGENTNOG SNOPA

Definicija 3.1. Neka je G Liova grupa i $\mathcal{M}$ diferencijabilna mnogostrukost. G deluje ( diferencijabilno) na $\mathcal{M}$ s leva ako postoji $C^\infty$ preslikavanje $\phi : G\times\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, tj. $\phi(g,m) = g\cdot m$, koje ispunjava sledeće uslove

i) za svako $g \in G$ preslikavanje $g : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ dato sa $g(m) = g\cdot m$ je difeomorfizam

ii) za svako $g,h \in G$, $m \in \mathcal{M}$, $(gh)m = g(hm)$.

G deluje na $\mathcal{M}$ s desna ako u uslovu ii) stoji

ii') za svako $g,h \in G$, $m \in \mathcal{M}$, $(gh)m = h(gm)$.

Takodje pišemo $\phi : \mathcal{M} \times G \to \mathcal{M}$ u tom slučaju.

G deluje slobodno ako za neko $g \in G$ postoji $m \in \mathcal{M}$ takvo da ako je $gm = m$ sledi da je $g = e$ = jedinica u G.

Definicija 3.2. Glavni snop klase $C^\infty$ je skup $(\mathcal{P}, G, \mathcal{M})$, gde su $\mathcal{P}$ i $\mathcal{M}$ $C^\infty$ mnogostrukosti, G je Li-ova grupa i važi:

i) G deluje slobodno ( i diferencijabilno) s desna na $\mathcal{P}$ , $\mathcal{P} \times G \to \mathcal{P}$ . Za $g \in G$ pisaćemo $R_g$ za preslikavanje $g: \mathcal{P} \to \mathcal{P}$

ii) $\mathcal{M} = \mathcal{P}/_G$ i projekcija $\pi: \mathcal{P} \to \mathcal{M}$ je $C^\infty$, tako da je za $m \in \mathcal{M}$, G tranzitivno na $\pi^{-1}(m)$.

iii) $\mathcal{P}$ je lokalno trivijalno, što znači da za svako $m \in \mathcal{M}$ , postoji okolina U od m i $C^\infty$ preslikavanje $F_U$: $\pi^{-1}(U) \to G$ takvo da je $F_U$ komutativno sa $R_g$ za svako $g \in G$ i preslikavanje od $\pi^{-1}(U) \to U \times G$ dato sa $p \to (\pi(p), F_U(p))$ je difeomorfizam.

$\mathcal{P}$ se zove snop prostor, $\mathcal{M}$ je bazični prostor, G je strukturna grupa. Za $m \in \mathcal{M}$, $\pi^{-1}(m)$ se zove nit nad m.

Navešćemo tri primera glavnog snopa. Prvi je snop baza.

Primer 3.1. Neka je $\mathcal{M}$ $C^\infty$ mnogostrukost i $B(\mathcal{M})$ je skup karata $(m, e_1, \dots, e_d)$, gde je $m \in \mathcal{M}$ , a $e_1, \dots, e_d$ su baza u $M_m$.. Neka je $\pi$ : $B(\mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ dato sa $\pi(m, e_1, \dots, e_d) = m$. Tada $Gl(d,R)$ deluje s desna na $B(\mathcal{M})$ na sledeći način: neka je $g \in Gl(d,R)$, tj. g je matrica $(g_{ij})$, neka $(m, e_1, \dots, e_d) \in B(\mathcal{M})$ i definišimo $R_g(m, e_1, \dots, e_d) = (m, \Sigma g_{i1} e_i, \dots, \Sigma g_{id} e_i)$.

Ako $m \in \mathcal{M}$, $(x_1, \dots, x_d)$ je koordinatni sistem definisan u okolini U od m, tada definišemo $F_U$ sa: ako $m' \in U$, $F_U(m', f_1, \dots, f_d) = (dx_j(f_i)) = (g_{ij}) \in Gl(d,R)$. Sada funkcije $y_i = x_i \circ \pi$ i $y_{ij} = x_{ij} \circ F_U$ daju koordinatni sistem na $\pi^{-1}(U)$, gde su $x_{ij}$ standardne koordinate na $GL(d,R)$.

Korišćenjem $C^\infty$ strukture date na $B(\mathcal{M})$ sa lokalnom produkt reprezentacijom $(\pi, F_U)$, vidimo da je $B(\mathcal{M})$ glavni snop koji zovemo snop baza od $\mathcal{M}$ .

Nekad je pogodnije $B(\mathcal{M})$ posmatrati kao skup nesingularnih transformacija od $R^d$ u tangentni prostor od $\mathcal{M}$ . To znači da $p = (m, e_1, \dots, e_d)$ identifikujemo sa preslikavanjem $p: (r_1,\dots,r_d) \to \sum r_i e_i$. Sada je prirodno da $Gl(d,R)$ posmatramo kao nesingularne transformacije od $R^d$ za koje je $pg(r_1,\dots,r_d) = \sum_{i,j} r_i g_{ji} e_j = \sum_j (\sum_i r_i g_{ji}) e_j = p(g(r_1,\dots,r_d))$, što znači da je pg(kao preslikavanje)= =p(kao preslikavanje)$\cdot g$.

Primer 3.2. Glavni koordinatni snop. Neka je $(\mathcal{P},G,\mathcal{M})$ glavni snop i neka je $\{U_i\}$ otvoreni pokrivač od $\mathcal{M}$ takav da se $\pi^{-1}(U_i)$ može prikazati kao produkt prostor preko funkcija $F_i: \pi^{-1}(U_i) \to G$. Za svako i,j za koje je $U_i \cap U_j \neq 0$ definišimo preslikavanje $G_{ij}: U_i \cap U_j \to G$ na sledeći način: ako $m \in U_i \cap U_j$, neka je $p \in \pi^{-1}(m)$, i stavimo $G_{ji}(m) = F_j(p)\cdot(F_i(p))^{-1}$.

Definicija 3.3. Funkcije $G_{ji}(m)$ su nezavisne od izbora p. Ove funkcije zadovoljavaju relaciju

(3.1.) $$G_{ki}(m) = G_{kj}(m)\cdot G_{ji}(m) \quad \text{za } m \in U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Funkcije $G_{ji}$ se zovu funkcije prelaza koje odgovaraju pokrivaču $\{U_i\}$ i praktično sa tim pokrivačem definišu glavni koordinatni snop.

Može se pokazati (Steenrod)[45] da svaki skup funkcija koji je definisan na $\{U_i\}$ i koji zadovoljava uslov (3.1.), jednoznačno odredjuje glavni snop čije su funkcije prelaza na pokrivaču $\{U_i\}$ baš $G_{ji}$.

Definicija 3.4. Neka je $(\mathcal{P},G,\mathcal{M})$ glavni snop i neka je $\mathcal{F}$ mnogostrukost na kojoj G deluje s leva. Definisaćemo pridruženi snop glavnom snopu $(\mathcal{P},G,\mathcal{M})$ sa niti $\mathcal{F}$ na sledeći način. Neka je $\mathcal{B}' = \mathcal{P} \times \mathcal{F}$ i definišimo desno dejstvo G na $\mathcal{B}'$ relacijom

$(p,f)\,g = (pg, g^{-1}f)$, gde je $p \in \mathcal{P}$, $f \in \mathcal{F}$, $g \in G$.
Neka je $\mathcal{B} = \mathcal{B}/_G$. Tada je $\mathcal{B}$ pridruženi glavni snop. Imamo sledeću strukturu. Projekcija $\pi' : \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ je definisana sa $\pi'^{-1}((p,f)G) = \pi(p)$. Ako $m \in \mathcal{M}$, izaberimo okolinu $U$ od $m$ sa $F_U : \pi^{-1}(U) \to G$. Tada imamo $F'_U : \pi'^{-1}(U) \to \mathcal{F}$ dato sa

$$F'_U((p,f)G) = F_U(p)f,$$

tako da je $\pi'^{-1}(U)$ homeomorfno sa produkt prostorom $U \times \mathcal{F}$, a pošto je $\mathcal{B}$ definisano kao mnogostrukost, zahtevamo da taj homeomorfizam bude difeomorfizam. Sada je $\pi'$ klase $C^\infty$.

Primer 3.3. Tangentni snop. Posmatrajmo snop baza $B(\mathcal{M})$. $Gl(d,R)$ je grupa nesingularnih linearnih transformacija od $R^d$ i deluje na $R^d$ s leva. Pridruženi snop sa niti $R^d$ označavamo sa $T(\mathcal{M})$ i taj snop nazivamo tangentni snop. $T(\mathcal{M})$ se može identifikovati sa prostorom svih parova $(m,t)$, gde $m \in \mathcal{M}$, $t \in M_m$ na sledeći način:

$$((m, e_1,\dots,e_d),(r_1,\dots,r_d))\ Gl(d,R) \to (m, \Sigma\, r_i e_i)$$

ili, možemo $B(\mathcal{M})$ posmatrati kao skup preslikavanja $p : R^d \to M_m$ i tada za $x \in R^d$ ta identifikacija je

$$(p,x)\ Gl(d,R) \to (m, px), \text{ gde je } m = \pi(p).$$

Možemo za niti od $T(\mathcal{M})$ nad $m \in \mathcal{M}$ smatrati linearni tangentni prostor u $m$, tj. $M_m$.

$T(\mathcal{M})$ je isto što i unija svih tangentnih prostora koji zajedno imaju strukturu mnogostrukosti. Ovom identifikacijom se vidi da se koordinate na $T(\mathcal{M})$ mogu uvesti na sledeći način: Neka je $U$ koordinatna okolina u $\mathcal{M}$ sa koordinatama $x_1,\dots,x_d$. Definišimo koordinate $y_1,\dots,y_{2d}$ na $\pi'^{-1}(U)$ na sledeći način: ako $(m,t) \in \pi'^{-1}(U)$,

$$\left.\begin{array}{l} y_i(m,t) = x_i(m) \\ y_{d+i}(m,t) = dx_i(t) \end{array}\right\} \quad i = 1,\dots,d.$$

Definicija 3.5. Redukcija strukturne grupe. Neka je $(\mathcal{P}, G, \mathcal{M})$ glavni snop. Pretpostavimo da je G separabilno. Neka je H podgrupa od G, tada se strukturna grupa G može redukovati do podgrupe H ako i samo ako postoji koordinatni snop u klasi ekvivalencije odredjene sa $(\mathcal{P}, G, \mathcal{M})$ čije prenosne funkcije imaju vrednosti u H. To znači ako i samo ako postoji pokrivač $\{U_i\}$ čije prenosne funkcije $G_{ji}$ ispunjavaju $G_{ji}(U_i \cap U_j) \subset H$.

Koristeći desno dejstvo $\mathcal{P} \times G \to \mathcal{P}$, ova definicija se može formulisati i ovako.

Neka su $(\mathcal{P}, G, \mathcal{M})$ i $(\mathcal{P}', G', \mathcal{M}')$ glavni snopovi. Preslikavanje snopova $f\colon (\mathcal{P}, G, \mathcal{M}) \to (\mathcal{P}', G', \mathcal{M}')$ je skup $C^\infty$ preslikavanja $(f_{\mathcal{P}}, f_G, f_{\mathcal{M}})$ izmedju odgovarajućih parova, takav da je $f_G$ homomorfizam i da su ispunjene sledeće relacije

$$f_{\mathcal{M}} \circ \pi = \pi' \circ f_{\mathcal{P}}$$

$$f_{\mathcal{P}} \circ R_g = R_{f_G(g)} \circ f_{\mathcal{P}} \qquad \text{za svako } g \in G.$$

Sada definicija 3.5. glasi:

Teorema 3.1. Ako je $(\mathcal{P}, G, \mathcal{M})$ glavni snop i H podgrupa od G, tada se G može redukovati do H ako i samo ako postoji glavni snop $(\mathcal{P}', H, \mathcal{M})$ i ako postoji preslikavanje snopova $f\colon (\mathcal{P}', H, \mathcal{M}) \to (\mathcal{P}, G, \mathcal{M})$ takvo da je $f_{\mathcal{M}}$ identitet na $\mathcal{M}$, $f_{\mathcal{P}}$ je 1-1 i na, $f_G$ je inkluzija $(H \subset G)$.

Steenrod je pokazao da ako je $(\mathcal{P}, G, \mathcal{M})$ glavni snop i H maksimalna kompaktna podgrupa od G, tada se G može redukovati do snopa sa strukturnim grupom H.

Teorema 3.2. Svaki glavni snop sa strukturnom grupom $Gl(d,R)$ može se redukovati do snopa sa strukturnom grupom $O(d)$.(Ortogonalna grupa).

## 1.4. G - STRUKTURE NA MNOGOSTRUKOSTIMA

Strukture na diferencijabilnim mnogostrukostima se u poslednje vreme mnogo izučavaju, kako u diferencijalnoj topologiji tako i u algebri [7], [54], [12] i u diferencijalnoj geometriji. Za neke strukture postoji mogućnost primene u razmatranjima iz mehanike.

Neka je $\mathcal{M}^n$ diferencijabilna mnogostrukost za koju je $B(\mathcal{M}^n)$ glavni raslojeni prostor svih njegovih linearnih repera, ili glavni snop baza. Strukturna grupa prostora $B(\mathcal{M}^n)$ je opšta linearna grupa $Gl(n,R)$.

Uzmimo sada n-dimenzionalni vektorski prostor $W^n$ na kome deluje grupa $Gl(n,R)$ i izaberimo zatvorenu podgrupu $G \subset Gl(n,R)$. Označimo sa $T_x$ tangentni prostor mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ u tački x. G-struktura na $\mathcal{M}^n$ zadaje se u svakoj tački $x \in \mathcal{M}^n$ podskupom $S_x \subset \mathrm{Hom}(W^n, T_x)$, pri čemu su ispunjeni sledeći uslovi:

i) linearna preslikavanja iz $S_x$ imaju inverzno preslikavanje,

ii) ako $g \in G$ i $\alpha \in S_x$ sledi $\alpha \circ g \in S_x$,

iii) ako $\alpha \in S_x$ i $\beta \in S_x$, tada postoji preslikavanje $g \in G$, da je $\alpha \circ g = \beta$,

iiii) skup $B(\mathcal{M}^n, G) = \bigcup_{x \in \mathcal{M}^n} S_x$ obrazuje glavni raslojeni prostor sa bazom $\mathcal{M}^n$ i strukturnom grupom G.

Ako u $W^n$ izaberemo reper e, možemo predstaviti svaki elemenat $\alpha \in S_x$ reperom z iz $T_x$, koji je slika repera e pri linearnom preslikavanju $\alpha : W^n \to T_x$. Znači, $B(\mathcal{M}^n, G)$ se može posmatrati kao glavni raslojeni prostor u $B(\mathcal{M}^n)$. Reperi z koji obrazuju taj prostor, zovu se adaptirani za datu G-strukturu.

Egzistenciju mnogostrukosti sa G-strukturom ispitivali su Goldberg [17], [18] i Yano [18]. Pregled do sada dobijenih rezultata iz te oblasti dao je Širokov [46].

Mnoge G-strukture mogu se definisati pomoću tenzora. Medju takvim G-strukturama su Rimanova struktura, skoro kompleksna, skoro produkt struktura, skoro kontaktna, skoro parakontaktna struktura i niz drugih od kojih će neke biti izučavane u ovoj i narednim glavama.

Ovim strukturama kao G-strukturama datim na n-dimenzionalnoj mnogostrukosti odgovaraju redukcije strukturne grupe $Gl(n,R)$ glavnog snopa baza do grupa $O(n)$ za Rimanovu strukturu; $Gl(m,C)$, $2m=n$ za skoro kompleksnu strukturu; $Gl(h,R) \times Gl(n-h,R)$, $h < n$ za skoro produkt strukturu; $Gl(m,C) \times 1$, $2m=n-1$ za skoro kontaktnu strukturu; $Gl(h,R) \times Gl(r-h,R) \times 1$, $h \leq r = n-1$ za skoro parakontaktnu strukturu.

Za ostale strukture koje su ispitivane u ovom radu takodje je nadjena redukcija strukturne grupe tangentnog snopa i ispitivane su strukture na potprostorima takvih prostora.

Iz ove oblasti rezultate su dobili mnogi autori, a navodim samo neke koji su ispitivali strukturu na potprostoru prostora sa nekom od ovih struktura: [1], [2], [3], [7], [12], [24], [26], [28], [29], [33], [37], [44], [47], [53], [62].

Sada ćemo definisati gore navedene strukture i dati neke njihove osobine, a biće navedena i literatura u kojoj se mogu naći potpuniji podaci o tim strukturama.

Mnogostrukost $\mathcal{M}^n$ na kojoj je dato polje simetričnih pozitivno definitnih 2-formi g je Rimanova mnogostrukost, a g je Rimanova metrika. Ako je X vektorsko polje klase $C^\infty$, tj. $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^n)$, tada 1-formu g(X) definišemo relacijom

$$[g(X)](Y) = g(X,Y) \tag{4.1}$$

za svako vektorsko polje $Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^n)$. Tenzor g je nedegenerativan ako je preslikavanje

$$g : \mathfrak{X}(\mathcal{M}^n) \to \mathfrak{X}^*(\mathcal{M}^n)$$

bijektivno. Inverzno preslikavanje za nedegenerativan tenzor g označimo sa $g^{-1}$. Njime je definisan kontravarijantni tenzor reda 2

$$g^{-1}(\omega, \mu) = \mu[g^{-1}(\omega)] \tag{4.2.}$$

za $\omega, \mu \in \mathfrak{X}^*(\mathcal{M}^n)$.
$g^{-1}$ zovemo kontravarijantni metrički tenzor.

Skoro kompleksna struktura na glatkoj mnogostrukosti $\mathcal{M}^{2n}$ je polje F enfomorfizama tangentnog prostora takvo da je

$$F^2 = -I, \tag{4.3.}$$

gde je I identički endomorfizam. Mnogostrukost sa skoro kompleksnom strukturom zove se **skoro kompleksna mnogostrukost**. Skoro kompleksna mnogostrukost mora biti parne dimenzije.

Ako je na skoro kompleksnoj mnogostrukosti zadata Rimanova metrika g takva da je

$$g(FX,FY) = g(X,Y), \qquad X,Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^n)$$

kažemo da je mnogostrukost skoro Hermitova.

Mnogostrukost $\mathcal{M}^n$ ima skoro Hermitovu strukturu ako i samo ako je parne dimenzije 2n i strukturna grupa tangentnog snopa može da se redukuje do unitarne grupe U(n). Ovakve prostore izučavali su [2],[11],[12],[22],[42],[46],[48],[51],[52],[63],[64].

Nijenhuisova torzija [K,K] tenzorskog polja tipa (1,1) je tenzorsko polje tipa (1,2) dato relacijom

$$[K,K](X,Y) = K^2[X,Y] + [KX,KY] - K[KX,Y] - K[X,KY] .$$

Skoro kompleksna struktura na mnogostrukosti je integrabilna ako i samo ako je njena Nijenhuisova torzija jednaka nuli [63]. Integrabilna skoro kompleksna struktura je pridružena skoro kompleksna struktura kompleksne strukture.

Uslove integrabilnosti G-struktura koje su date tenzorskim poljem tipa (1,1) ispitivali su mnogi autori: [13],[14],[21],[23],[32],[35],[61],[63]. Pre svega, Kobayashi [27] je ustanovio da je [F,F] = 0 naophodan uslov za integrabilnost, tj.za svaku integrabilnu strukturu Nijenhuisov tenzor je 0.

Sada ćemo opisati kako se mnogostrukost može snabdeti skoro produkt strukturom.

Ako je na mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ data distribucija M, uvek možemo konstruisati globalno komplementarnu distribuciju L na sledeći način. Kako je mnogostrukost klase $C^\infty$, možemo uvesti globalnu Rimanovu metriku klase $C^\infty$ u $\mathcal{M}^n$. Sada možemo definisati L kao distribuciju ortogonalnu na M u odnosu na uvedenu metriku. Distribucija L je takodje globalno definisana. Neka je dim M = p, tada je dim L = n-p.

Izaberimo p ortonormiranih kontravarijantnih vektora $u_b^h$ $(a,b,c,\ldots=1,2,\ldots,p,\ x,y,z,\ldots=p+1,p+2,\ldots,p+q=n)$ u M i q ortonormiranih kontravarijantnih vektora $v_y^h$ u L. Tih n vektora $u_b^h$ i $v_y^h$ su linearno nezavisni. Posmatrajmo matricu $(u_b^h, v_y^h)$ i njenu inverznu $(u_i^a, v_i^x)$. Važe identiteti:

$$u_b^h\, u_h^a = \delta_b^a, \quad u_b^h\, v_h^x = 0, \quad v_y^h\, u_h^a = 0,$$

$$(4.4.)\qquad v_y^h\, v_h^x = \delta_y^x \quad \text{i} \quad u_a^h\, u_i^a + v_x^h\, v_i^x = I_i^h,$$

gde je $I_i^h$ jedinična matrica.

Uvedimo oznaku:

$$I_\beta^h = (u_b^h, v_y^h), \qquad I_h^\alpha = (u_h^a, v_h^x)$$

$(\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1,2,\ldots,p,p+1,\ldots,p+q=n)$ i relacije (4.4.) možemo pisati u sledećem obliku

$$I_\beta^h\, I_h^\alpha = \delta_\beta^\alpha \qquad I_\alpha^h\, I_i^\alpha = I_i^h.$$

Skup $I_\beta^h = (u_b^h, v_y^h)$ je adaptiran sistem.

Ako stavimo:

$$u_a^h\, u_i^a = m_i^h, \qquad v_x^h\, v_i^x = \ell_i^h,$$

tada iz (4.4.) imamo:

$$(4.5.)\qquad m_j^i\, m_i^h = m_j^h, \quad m_j^i\, \ell_i^h = 0, \quad \ell_j^i\, m_i^h = 0, \quad \ell_j^i\, \ell_i^h = \ell_j^h$$

$$(4.6.)\qquad I_i^h = m_i^h + \ell_j^h.$$

Tenzori $m_i^h$ i $\ell_i^h$ ne zavise od izbora vektora $u_b^h$ u M i $v_y^h$ u L. To su operatori projekcije na M i L respektivno. Svaki vektor $t^h$ iz tangentnog prostora se dekomponuje u obliku

$$t^h = m_i^h t^i + \ell_i^h t^i ,$$

gde su $m_i^h t^i$ i $\ell_i^h t^i$ u distribucijama M i L respektivno.

Vektori iz M zadovoljavaju relacije

$$t^h = m_i^h t^i \quad \text{ili} \quad \ell_i^h t^i = 0,$$

a vektori iz L:

$$t^h = \ell_i^h t^i \quad \text{ili} \quad m_i^h t^i = 0.$$

Definišimo sada tenzor $F_i^h$ sa

$$F_i^h = m_i^h - \ell_i^h. \tag{4.7.}$$

Tada iz (4.6.) i (4.7,) imamo:

$$m_i^h = \tfrac{1}{2}(I_i^h + F_i^h) \qquad \ell_i^h = \tfrac{1}{2}(I_i^h - F_i^h). \tag{4.8.}$$

Koristeći (4.5.) vidimo da je:

$$F_j^i F_i^h = I_j^h. \tag{4.9.}$$

Ako je na n-dimenzionalnoj mnogostrukosti dato tenzorsko polje $F_i^h \neq I_i^h$, koje ispunjava uslov (4.9.), kažemo da je data skoro produkt struktura na mnogostrukosti.

Kako su M i L date globalno, tenzor $F_i^h$ ranga n, definisan je takodje globalno.

Obrnuto, ako je na mnogostrukosti dato tenzorsko polje $F_i^h$ koje ispunjava uslov (4.9.), tada možemo definisati $m_i^h$ i $\ell_i^h$ sa (4.8.) i može se proveriti da takvi $m_i^h$ i $\ell_i^h$ ispunjavaju uslove (4.5.) i (4.6.).

Tada $m_i^h$ i $\ell_i^h$ definišu komplementarne ditribucije M i L globalno.

Neka je a karakteristični koren za matricu $F_i^h$, a $t^h$ odgovarajući karakteristični vektor. Imamo:

$$F^i_j\, t^j = a\cdot t^i ,$$

odatle množenjem sa $F^h_i$ dobijamo:

$$F^h_i\, F^i_j\, t^j = aF^h_i\, t^i \quad \text{ili} \quad t^h = a^2\cdot t^h .$$

Sada imamo $a^2=1$, što znači da su karakteristični koreni od $F^h_i$ +1 i -1. Za karakteristični vektor $t^h$ koji odgovara karakterističnoj vrednosti +1 imamo

$$F^h_i\, t^i = t^h \quad \text{ili} \quad \ell^h_i\, t^i = \frac{1}{2}(I^h_i - F^h_i)t^i = 0,$$

što znači da je $t^h$ u M. Karakteristični vektor koji odgovara karakterističnoj vrednosti -1 je u L.

Ako $F^h_i$ ima karakterističnu vrednost +1 reda p i karakterističnu vrednost -1 reda q, tada je dim M = p, dim L = q.

Ispitaćemo i uslove integrabilnosti skoro produkt strukture. Dobićemo sledeći rezultat: Potreban i dovoljan uslov da skoro produkt struktura bude integrabilna jeste da je njen Nijenhuisov tenzor jednak nuli. To je potreban i dovoljan uslov za integrabilnost bilo kojeg tenzorskog polja tipa (1,1) koje ima proste korene minimalnog polinoma, pa se ovakav prilaz može sprovesti i za ostale strukture. Postoje i drugi ekvivalentni uslovi integrabilnosti koji ilustrativnije izražavaju veze izmedju distribucija, lokalnih koordinata i koordinata strukturnog tenzora u adaptiranom sistemu. Takav pristup ispitivanju integrabilnosti dat je u odeljku 2.5.

Uslovi integrabilnosti skoro produkt strukture:

Stavimo:

$$\Omega^{\alpha}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\,(\,\partial_\gamma I^h_\beta - \partial_\beta\, I^h_\gamma\,)\, I^{\alpha}_h , \tag{4.1o.}$$

gde $\partial_\gamma$ označava Pfafov izvod u odnosu na $I^h_\gamma$ , tj.

$$\partial_\gamma = I_\gamma^h \partial_h = I_\gamma^h \frac{\partial}{\partial \xi^h} ,$$

gde su $\xi^h$ lokalne koordinate. Sada je

$$\partial_b = u_b^h \partial_h \text{ i } \quad \partial_y = v_y^h \partial_h .$$

Relacija (4.1o.) može se pisati u obliku :

$$\Omega_{\gamma\beta}^{\alpha} = -\frac{1}{2} I_\gamma^j I_\beta^i (\partial_j I_i^\alpha - \partial_i I_j^\alpha ).$$

Ako transformišemo adaptirani sistem

(4.11.) $$I_{\beta'}^h = I_{\beta'}^\beta I_\beta^h \qquad ( I_{\beta'}^\beta \neq 0),$$

tada se $\Omega_{\gamma\beta}^\alpha$ transformiše na sledeći način:

(4.12.) $$\Omega_{\gamma'\beta'}^{\alpha'} = I_{\gamma'}^\gamma I_{\beta'}^\beta I_\alpha^{\alpha'} \Omega_{\gamma\beta}^\alpha + \frac{1}{2}( \partial_{\gamma'} I_{\beta'}^\alpha - \partial_{\beta'} I_{\gamma'}^\alpha ) I_\alpha^{\alpha'}$$

gde je $I_\alpha^{\alpha'}$ inverzna matrica od $I_{\alpha'}^\alpha$.

Poslednja relacija pokazuje da objekt $\Omega_{\gamma\beta}^\alpha$ nije tenzor u odnosu na transformaciju adaptiranog sistema. Kako smo uveli adaptirani sistem čiji su p vektora u distribuciji M i q vektora u distribuciji L, transformacija (4.11.) se može prikazati na sledeći način:

$$u_{b'}^h = I_{b'}^b u_b^h \ , \quad v_{y'}^h = I_{y'}^y v_y^h \ ,$$

što daje

$$I_{\alpha'}^\alpha = \begin{bmatrix} I_{b'}^b & 0 \\ 0 & I_{y'}^y \end{bmatrix} .$$

Relacija (4.12.) daje:

$$\Omega_{\grave{c}\grave{b}}{}^{x`} = I^{c}_{c`} I^{b}_{b`} I^{x'}_{x}\, \Omega_{cb}{}^{x}, \quad \Omega_{\grave{z}\grave{y}}{}^{\grave{a}} = I^{z}_{\grave{z}}\, I^{y}_{\grave{y}}\, I^{\grave{a}}_{a}\, \Omega_{zy}{}^{a},$$

što znači da su $\Omega_{cb}{}^{x}$ i $\Omega_{zy}{}^{a}$ tenzori u odnosu na promenu adaptiranog sistema.

Sada ćemo formulisati uslove integrabilnosti distribucije M.

Proizvoljan kontravarijantni vektor $d\xi^{h}$ u tangentnom prostoru mnogostrukosti, može se pisati u obliku:

$$d\xi^{h} = u^{h}_{a}\,(d\xi)^{a} + v^{h}_{y}\,(d\xi)^{y}$$

zbog (4.6.), gde je:

$$(d\xi)^{a} = u^{a}_{i}\, d\xi^{i} \quad , \quad (d\xi)^{x} = v^{x}_{i}\, d\xi^{i}.$$

Distribucija M je definisana sa

(4.13.) $$(d\xi)^{x} = v^{x}_{i}\, d\xi^{i} = 0 .$$

Uslov da distribucija M bude integrabilna jeste da je ispunjeno

$$(\partial_{j} v^{x}_{i} - \partial_{i} v^{x}_{j})\, d\xi^{j} \wedge d\xi^{i} = 0,$$

za svako $d\xi^{h}$ koje ispunjava (4.13.). Znači:

(4.14.) $$\Omega_{cb}{}^{x} = -\frac{1}{2}\, u^{j}_{c}\, u^{i}_{b}\,(\partial_{j} v^{x}_{i} - \partial_{i} v^{x}_{j}) = 0.$$

To je uslov da distribucija M bude integrabilna.

Isti rezultat se može dobiti na sledeći način. Proizvoljan kontravarijantni vektor iz tangentnog prostora u tački mnogostrukosti može se napisati u obliku:

$$d\xi^{h} = m^{h}_{i}\, d\xi^{i} + \ell^{h}_{i}\, d\xi^{i}$$

zbog (4.6.).

Distribucija M je definisana sa

(4.15.) $\quad \ell^h_i \, d\xi^i = 0.$

Da bi M bila integrabilna distribucija, znači treba da je ispunjeno:

$$(\partial_j \ell^h_i - \partial_i \ell^h_j)\, d\xi^j \wedge d\xi^i = 0,$$

za svako $d\xi^h$ koje ispunjava uslov (4.15.), što znači za svaki vektor koji ispunjava $m^h_i \, d\xi^i = d\xi^h$. Odatle imamo da je:

(4.16.) $$-\frac{1}{2} m^k_j \, m^\ell_i \, (\partial_k \ell^h_\ell - \partial_\ell \ell^h_k) = 0 ,$$

uslov da distribucija M bude integrabilna.

Dužim računanjem može se proveriti da je

$$u^c_j \, u^b_i \, v^h_x \, \Omega_{cb}{}^x = -\frac{1}{2} m^k_j \, m^k_i \, (\partial_k \ell^h_\ell - \partial_\ell \ell^h_k).$$

Odavde se vidi da su uslovi (4.14.) i (4.16.) ekvivalentni. Ako u levu stranu jednačine (4.16.) zamenimo uslov (4.8.), dobijamo:

(4.17.) $$-\frac{1}{2} m^k_j \, m^\ell_i \, (\partial_k \ell^h_\ell - \partial_\ell \ell^h_k) = \frac{1}{16} (N_{ji}{}^h - N_{ji}{}^\ell \, F^h_\ell),$$

gde je $N_{ji}{}^h$ Nijenhuisov tenzor strukture $F^h_i$ dat sa

$$N_{ji}{}^h = F^\ell_j (\partial_\ell F^h_i - \partial_i F^h_\ell) - F^\ell_i (\partial_\ell F^h_j - \partial_j F^h_\ell).$$

Iz uslova (4.17.) sledi da je uslov integrabilnosti distribucije M: $N_{ji}{}^h - N_{ji}{}^\ell F^h_\ell = 0.$

Slično za distribuciju L nalazimo da je uslov integrabilnosti $\Omega_{zy}{}^a = 0$ ili

$$-\frac{1}{2} \ell^k_j \, \ell^\ell_i \, (\partial_k m^h_\ell - \partial_\ell m^h_k) = 0 \quad \text{ili} \quad N_{ji}{}^h + N_{ji}{}^\ell \, F^h_\ell = 0.$$

Na osnovu prethodnog imamo:

Teorema 4.1. Potreban i dovoljan uslov da distribucije M i L budu integrabilne jeste da je:

$$\Omega_{cb}{}^{x} = 0 \quad \text{i} \quad \Omega_{zy}{}^{a} = 0,$$

ili ekvivalentno:

$$N_{ji}{}^{h} - N_{ji}{}^{\ell} F_{\ell}^{h} = 0 \quad \text{i} \quad N_{ji}{}^{h} + N_{ji}{}^{\ell} F_{\ell}^{h} = 0,$$

ili ekvivalentno $N_{ji}{}^{h} = 0$.

Prostori sa skoro produkt strukturom izučavani su u radovima [16], [31], [39], [46], [56], [57], [63]. Kakvu strukturu skoro produkt struktura indukuje na hiperpovrši i u kakav se prostor može potopiti mnogostrukost sa takvom strukturom, biće tema narednih odeljaka.

Razmotrimo sada mnogostrukost $\mathcal{M}^{2n+1}$ neparne dimenzije 2n+1. Diferencijabilna mnogostrukost $\mathcal{M}^{2n+1}$ ima skoro kontaktnu strukturu (metričku) ako se grupa njenog tangentnog snopa redukuje na grupu U(n) x 1 .

Kaže se da diferencijabilna mnogostrukost ima $(\varphi, \xi, \eta)$-strukturu ako postoji polje endomorfizama $\varphi$ tangentnog prostora, vektorsko polje $\xi$ i polje 1-formi $\eta$ takvih da je:

$$(4.18.) \qquad \varphi^2 = -I \oplus \eta \otimes \xi, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \varphi(\xi) = 0, \quad \eta\varphi = 0,$$

gde je I identički endomorfizam. Ovu strukturu uveo je i ispitao prvi Sasaki [42] i pokazao da je skoro kontaktna struktura ekvivalentana sa $(\varphi, \xi, \eta)$-strukturom.

Ako mnogostrukost $\mathcal{M}^{2n+1}$ sa $(\varphi, \xi, \eta)$-strukturom ima i Rimanovu strukturu g za koju je

$$(4.19.) \qquad g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\cdot\eta(Y), \quad X,Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^{2n+1})$$

tada kažemo da mnogostrukost ima $(\varphi, \xi, \eta, g)$-strukturu, ili skoro kontaktnu metričku strukturu.

Ako u relaciju (4.19.) stavimo $Y = \xi$ , tada koristeći (4.18.) dobijamo

$$\eta(X) = g(\xi, X),$$

tj. $\eta$ je kovarijantna forma vektora $\xi$ .

Može se pokazati da na mnogostrukosti sa $(\varphi, \xi, \eta)$-strukturom uvek postoji metrika koja ispunjava uslov (4.19.).

Pregled rezultata za mnogostrukosti sa ovakvom strukturom nalazi se u [7] , [10] , [24] , [28] , [37] , [38] , [41] , [42] , [43] , [44] , [48] , [49] , [50] , [51] , [52] , [59] , [60] , [61] .

K. Yano i S. Ishihara [42] su dokazali da ako je $[\varphi, \varphi] = 0$, postoje lokalne koordinate takve da se skoro kontaktna struktura može predstaviti u odnosu na tu kordinatnu bazu matricama:

$$\varphi = \begin{bmatrix} 0 & -I & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \eta = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

gde je I jedinična matrica formata (n,n) a $\xi$ i $\eta$ matrice formata redom (1,2n+1) i (2n+1,1).

Tashiro [89] je dokazao da na glatkoj orijentisanoj hiperpovrši skoro kompleksnog prostora postoji skoro kontaktna struktura.

Neka je $\mathcal{N}^{2n-1}$ hiperpovrš u skoro kompleksnoj mnogostrukosti $\mathcal{M}^{2n}$. Neka je i

$$i : \mathcal{N}^{2n-1} \to \tilde{\mathcal{M}}^{2n}$$

smeštanje hiperpovrši $\mathcal{N}^{2n-1}$ u $\tilde{\mathcal{M}}^{2n}$.( $\tilde{\mathcal{M}}^{2n}$ možemo identifikovati sa $\mathcal{M}^{2n}$.)

Koristeći lokalne koordinate na $\mathcal{M}^{2n}$, $\mathcal{N}^{2n-1}$ se može predstaviti na sledeći način:

$$y^{\alpha} = y^{\alpha}(x^{i}), \quad \alpha=1,\dots,2n; \quad i=1,\dots,2n-1.$$

Neka je $B = di$. Označimo sa $T_y(\tilde{\mathcal{M}}^{2n})$ tangentni prostor mnogostrukosti $\tilde{\mathcal{M}}^{2n}$ u tački y sa koordinatama $(y^1,\dots,y^{2n})$ a sa $T_x(\mathcal{N}^{2n-1})$ tangentni prostor hiperpovrši $\mathcal{N}^{2n-1}$ u tački x sa koordinatama $(x^1,\dots,x^{2n-1})$. U tom slučaju važi:

$$T_y(\tilde{\mathcal{M}}^{2n}) = B(T_x\mathcal{N}^{2n-1}) \oplus \lambda\tilde{N},$$

gde $\tilde{N}$ pripada prostoru $T_y(\tilde{\mathcal{M}}^{2n})$, a ne pripada prostoru $B(T_x\mathcal{N}^{2n-1})$, $\lambda \in R$. $\tilde{N}$ je pseudonormala.
Vektorska polja iz $\mathfrak{X}(\tilde{\mathcal{M}}^{2n})$ označavamo sa $\tilde{X},\tilde{Y},\dots$, a vektorska polja iz $\mathfrak{X}(\mathcal{N}^{2n-1})$ sa $X,Y,\dots$

Na hiperpovrši $\mathcal{N}^{2n-1}$ mnogostrukosti $\mathcal{M}^{2n}$ skoro kontaktna struktura $(\varphi, \xi, \eta)$ je indukovana skoro kompleksnom strukturom F okolnog prostora na sledeći način:

$$(4.20.)\quad \tilde{F}B = B\varphi \oplus (\eta \otimes \tilde{N}), \qquad \tilde{F}\tilde{N} = -B\xi.$$

Tashiro je razmatrao i obrnuti problem-smeštanje skoro kontaktne mnogostrukosti $\mathcal{N}^{2n-1}$ u mnogostrukost $\tilde{\mathcal{M}}^{2n}$, tako da skoro kontaktna struktura $(\varphi, \xi, \eta)$ prostora $\mathcal{N}^{2n-1}$ indukuje skoro kompleksnu strukturu $\tilde{F}$ na prostoru $\mathcal{M}^{2n}$.

Neka je $\mathcal{M}^{2n} = \mathcal{N}^{2n-1} \times P$, direktan proizvod skoro kontaktne mnogostrukosti $\mathcal{N}^{2n-1}$ i prave linije P parametrizovane sa $t \in (-\infty,\infty)$. $\tilde{\mathcal{M}}^{2n}$ je mnogostrukost sa lokalnim sistemom $(x^i,t)$ ako je $(x^i)$ lokalni koordinatni sistem na $\mathcal{N}^{2n-1}$. Označimo $\frac{\partial}{\partial t}$ sa $\tilde{N}$. Tada na $T(\mathcal{M}^{2n})$

definišimo polje endomorfizama $\tilde{F}$ na sledeći način:

$$\tilde{F}B = B\varphi \oplus (\eta \otimes \tilde{N}), \quad \tilde{F}\tilde{N} = -B\xi .$$

Pošto je $(\varphi, \xi, \eta)$ skoro kontaktna struktura, lako se dokazuje da je $\tilde{F}$ skoro kompleksna struktura na $B(T_x(\mathcal{N}^{2n-1}))$ i na $T(P)$, dakle i na $T(\tilde{\mathcal{M}}^{2n})$.

Slična razmatranja će biti izvedena i dopunjena u narednoj glavi za skoro parakontaktnu strukturu.

# GLAVA 2.

## UOPŠTENJE STRUKTURE $f^3 - f = 0$ I $f^5 - f = 0$ I O POTPROSTORIMA SA TAKVOM STRUKTUROM

## 2.1. STRUKTURA f KOJA ISPUNJAVA USLOV $f^3 - f = 0$

Ovu strukturu ćemo detaljno opisati, a u narednim poglavljima biće dato i uopštenje ove strukture. Poznati rezultati za ovu strukturu dopunjeni su rezultatima koji važe za strukturu f, $f^3+f=0$.

Literatura koja se odnosi na ovu problematiku je [6], [7], [10], [17], [18], [21], [30], [41], [53].

Neka je na mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ klase $C^\infty$ dato tenzorsko polje f tipa (1,1) klase $C^\infty$, koje ispunjava uslov

$$f^3 - f = 0, \quad f \neq 0. \tag{1.1.}$$

Neka je rang $f = r = \text{const}$. Takvu strukturu zovemo f(3,-1)-struktura.

Teorema 1.1. Za polje tenzora koje ispunjava uslov (1.1.) operatori

$$\ell = f^2 \quad \text{i} \quad m = I - f^2, \tag{1.2.}$$

primenjeni na tangentni prostor čine komplementarne operatore projekcije od f.

Dokaz: $\ell + m = I, \quad \ell^2 = f^4 = f^2 = \ell$ ,

$$m^2 = f^4 - f^2 - f^2 + I = -f^2 + I = m ,$$

$$m\ell = \ell m = -f^4 + f^2 = 0.$$

Neka su L i M distribucije koje odgovaraju operatorima $\ell$ i m respektivno, dim L = r, dim M = n-r.

Ako je mnogostrukost povezana rang f je konstantan. Ovo sledi iz sledeće teoreme:

Teorema 1.2. Neka je f tenzorsko polje tipa (1,1) na mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ koje zadovoljava uslov (1.1.). Tada je funkcija koja preslikava $\mathcal{M}^n$ u skup celih brojeva pridružujući tački $x \in \mathcal{M}^n$ broj jednak rangu f u toj tački, neprekidna.

To znači da je rang f konstantan na komponentama mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$.

Dokaz: Označimo sa Hom $(T(\mathcal{M}^n), T(\mathcal{M}^n))$ snop tenzora tipa (1,1) na $\mathcal{M}^n$.( $T(\mathcal{M}^n)$ je tangentni snop na $\mathcal{M}^n$.) Skup koji se sastoji od $f \in \mathrm{Hom}(T(\mathcal{M}^n), T(\mathcal{M}^n))$ ranga većeg ili jednakog k je otvoren jer je lokalno Hom $(T(\mathcal{M}^n), T(\mathcal{M}^n))$ jednako U x Hom $(R^n, R^n)$, gde je U koordinatna okolina na $\mathcal{M}^n$, a to je otvoren skup.

Označimo sa $S \subset$ Hom $(T(\mathcal{M}^n, T(\mathcal{M}^n))$ prostor svih projekcija, tj. prostor svih f koji zadovoljavaju uslov $f^2 = f$ . Ako je f projekcija, tada je i I-f projekcija i rang(I-f) je jednak dimenziji jezgra od f. Ovo znači da je skup elemenata iz S čiji je rang k-otvoren, jer je to presek otvorenih skupova za koje je rang $f \geqslant k$, rang$(I-f) \geqslant n-k$. Znači funkcija rang: $S \to Z$ je neprekidna, Z je skup celih brojeva.

Neka je $F \subset \mathrm{Hom}(T(\mathcal{M}^n, T(\mathcal{M}^n))$ skup tenzorskih polja f tipa (1,1) koji ispunjavaju uslov $f^3 - f = 0$. Tada je $f^2 = I$ na slici od f i $f^2$ ima jezgro jednako jezgru od f. $f^2$ je znači projekcija na sliku od f ( Teorema (1.1.)) i važi rang f = rang $f^2$.

Obeležimo sa $\phi$ preslikavanje dato sa $\phi(f) = f^2$. $\phi$ preslikava F u S i funkcija rang: $F \to Z$ je kompozicija neprekidnih funkcija $\phi/_F$: $F \to S$ i rang: $P \to Z$.

Za neko polje tenzora f na $\mathcal{M}^n$ tipa (1,1) za koje je $f^3-f=0$, kompozicija rang∘f je neprekidna, čime je teorema dokazana.

Teorema 1.3. Za f koje ispunjava uslov (1.1.) i $\ell$ i m definisane sa (1.2.) važi

$$f\ell = \ell f = f \qquad fm = mf = 0$$
$$f^2\ell = \ell \qquad f^2m = 0,$$

tj. f deluje na L kao skoro produkt struktura, a na M kao nula operator.

Dokaz:
$$f\ell = \ell f = f^3 = f$$
$$f^2\ell = f^4 = f^2 = \ell$$
$$fm = mf = -f^3 + f = 0.$$

Posledica 1.1. f(3,-1)-struktura maksimalnog ranga je skoro produkt struktura.

Teorema 1.4. Neka je na mnogostrukosti data skoro produkt struktura P i operator projekcije m koji zadovoljava uslov

$$mP = Pm = m,$$

tada $\mathcal{M}^n$ možemo snabdeti f(3,-1)-strukturom.

Dokaz: neka je $f = P-m$. $f \neq 0$, jer $P \neq m$. Ako bi bilo $P=m$, tada bi bilo $I = P^2=P$, što je suprotno pretpostavci da je P skoro produkt struktura.

Teorema 1.5. Pretpostavimo da je na mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ dat operator projekcije m i da postoji polje tenzora f, tako da je

$$(m + f)(m + f) = I, \qquad fm = mf = 0, \tag{1.3.}$$

tada f zadovoljava uslov (1.1.).

Dokaz: Koristeći $m^2=m$ i drugu jednačinu iz (1.3.), iz prve jednačine dobijamo $m + f^2= I$, odakle množenjem sa f dobijamo $f^3-f=0$.

Uvedimo na $\mathcal{M}^n$ lokalne koordinate i Rimanovu metriku u odnosu na koju možemo u svakoj koordinatnoj okolini izabrati r ortogonalnih jediničnih vektora $u_a$ u L $(a,b,\ldots= 1,\ldots,r)$ sa koordinatama $u_a^h$ i možemo izabrati (n-r) ortogonalnih jediničnih vektora $u_A$ u M $(A,B,\ldots=r+1,\ldots,n)$. Distribucije L i M u odnosu na ovu metriku ne moraju biti ortogonalne.

Neka je $(v^a,v^A)$ baza dualna bazi $(u_b,u_B)$, a $v_i^a$ i $v_i^A$ su koordinate vektora $v^a$ i $v^A$ respektivno. Sada je

$$v^a(u_b) = \delta_b^a \qquad v^a(u_B) = 0$$

$$v^A(u_b) = 0 \qquad v^A(u_B) = \delta_B^A .$$

Sada ćemo konstruisati metriku a u odnosu na koju će L i M biti ortogonalne distribucije u odnosu na bazu $(u_b,u_B)$.

Primenom ortogonalnih transformacija

$$\bar{u}_b = \sum_a c_b^a u_a , \qquad \sum_a c_c^a c_b^a = \delta_{cb}$$

$$\bar{u}_B = \sum_A c_B^A u_A, \qquad \sum_A c_C^A c_B^A = \delta_{CB}$$

dobijamo

$$\bar{v}^a = \sum_b c_b^a v^b , \qquad \bar{v}^A = \sum_B c_B^A v^B$$

$$\sum_a \bar{v}^a\bar{v}^a = \sum_a v^a v^a .$$

$$\sum_A \bar{v}^A \bar{v}^A = \sum_A v^A v^A,$$

gde je ( $\bar{v}^a$ , $\bar{v}^A$) baza dualna bazi ($\bar{u}_b$, $\bar{u}_B$).

Ovo znači da je sa

(1.3.) $$a_{ji} = \sum_a v^a_j v^a_i + \sum_A v^A_j v^A_i$$

definisana globalna Rimanova metrika u odnosu na koju je baza ($u_b$, $u_B$) ortogonalna, pa prema tome i L i M.

Za ovakvu Rimanovu metriku važi:

(1.4.) $a(mX,mY) = a(mX,Y) = a(X,mY)$ za svako $X,Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M}^n)$,

jer je

$$a(mX,Y) = a(mX, \ell Y+mY) = a(mX,mY)$$
$$a(X,mY) = a(\ell X + mX,mY) = a(mX,mY),$$

što sledi iz ortogonalnosti distribucija L i M.

Na mnogostrukosti sa f(3,-1)-strukturom može se definisati Rimanova metrika g u odnosu na koju su distribucije L i M ortogonalne i za koju važi:

(1.5.) $$g(X,Y) = g(fX,fY) + g(X,mY) \qquad g(X,fY) = g(Y,fX)$$ za svako $X,Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M}^n)$.

f(3,-1)-strukturu zajedno sa metrikom g zovemo metrička f(3,-1)-struktura.

Definišimo g na sledeći način;

(1.6.) $g(X,Y) = \frac{1}{2}\,(a(X,Y)+a(fX,fY)+a(X,mY))$,

za svako $X,Y \in \mathcal{X}(\mathcal{M}^n)$. Tenzor g je pozitivno definitan, jer je a Rimanova metrika, a zbog (1.4.) to je simetričan tenzor, dakle g je Rimanova metrika na mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$.

Iz (1.6.) se vidi da su L i M ortogonalne u odnosu na metriku g, jer su ortogonalne u odnosu na a.

Vektori $u_a$ ne moraju biti ortogonalni u odnosu na g.

Metrika definisana relacijom (1.6.) zadovoljava relaciju (1.5.).

Prvo ćemo pokazati da je

(1.7.) $g(X,mY) = a(X,mY)$, jer je

$$g(X,mY) = \frac{1}{2}\,(a(X,mY)+a(fX,fmY)+a(X,m^2Y))=$$

$$\frac{1}{2}(a(X,mY)+a(X,mY))= a(X,mY).$$

Zbog(1.7.) imamo:

$$g(fX,fY) = \frac{1}{2}(a(fX,fY)+a(f^2X,f^2Y)+a(fX,m(fY))=$$

$$= \frac{1}{2}(a(fX,fY)+a((-m+I)X,(-m+I)Y))=$$

$$= \frac{1}{2}(a(fX,fY)+a(X,Y)+a(X,mY))-a(X,mY)=$$

$$= g\,(X,Y)-\,g(X,mY).$$

Takodje je:

$$g(X,fY) = g(fX,f^2X) + g(X,m(fY))=$$

$$= g(fX,(-m+I)Y)=$$

$$= g(Y,fX)-g(fX,mY)=$$

$$= g(Y,fX),$$

što znači da g zadovoljava relaciju (1.5.).

Kako je $f^2/_L= I$, $f\,/_L \neq I$, znači da je $f\,/_L$ linearna transformacija na L sa minimalnim polinomom $x^2-1$, koji ima korene $\pm 1$. L se može dekomponovati na direktnu sumu $L = L_1 \oplus L_2$, gde je $L_1$ invarijantni potprostor linearne transformacije $f\,/_L$ koji odgovara karakterističnom korenu 1, a $L_2$ je invarijantni potprostor koji odgovara karakterističnom korenu -1. Neka je dim $L_1$=h, h < r.

Izaberimo u nekoj tački p mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$, na kojoj je data $f(3,-1)$-struktura, bazu $u_a$ u $L_1$ $(a=1,\dots,h)$ i bazu $u_x$ za $L_2$ $(x=h+1,\dots,r)$. Tada je $(u_a,u_x)$ baza za $L_p$ i važi

$$f(u_a) = u_a \quad , \quad f(u_x) = -u_x .$$

Ako je $u_A(A=r+1,\dots,n)$ baza u $M_p$, za bazu $(u_a,u_x,u_A)$ tangentnog prostora $T_p$ kažemo da je adaptiran sistem za $f(3,-1)$-strukturu. U odnosu na taj adaptiran sistem tenzor $f$ ima komponente

$$(1.8.) \qquad f = \begin{pmatrix} E_h & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r-h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Ako je $(\bar{u}_a,\bar{u}_x,\bar{u}_A)$ drugi adaptirani sistem i $\bar{u}_i = \gamma_i^j u_j$, tada $\gamma$ ima oblik

$$\gamma = \begin{pmatrix} A_h & 0 & 0 \\ 0 & B_{r-h} & 0 \\ 0 & 0 & C_{n-r} \end{pmatrix} .$$

Ovo znači da se strukturna grupa tangentnog snopa može redukovati do $Gl(h,R) \times Gl(r-h,R) \times Gl(n-r,R)$.

Važi i obrnuto, tj. ako se strukturna grupa tangentnog snopa može redukovati do $Gl(h,R) \times Gl(r-h,R) \times Gl(n-r,R)$, $h < r \leq n$, može se definisati tenzor $f$ tipa $(1,1)$, klase $C^\infty$ čije su komponente u odnosu na adaptirani sistem oblika (1.8.). Za takav tenzor važi (1.1.).

Na osnovu prethodnog razmatranja , možemo formulisati sledeću teoremu:

Teorema 1.6. Potreban i dovoljan uslov da se n-dimenzionalna mnogostrukost može snabdeti $f(3,-1)$-strukturom ranga $r$, je da se grupa tangentnog snopa može redukovati do grupe $Gl(h,R) \times Gl(r-h,R) \times Gl(n-r,R)$, $h < r \leq n$.

Ako posmatramo metričku $f(3,-1)$-strukturu ranga $r$, tada za $X \in L_1$, $Y \in L_2$ dobijamo:

$$g(X,Y) = g(fX,fY) + g(X,mY) =$$

$$= g(X,-Y) = -g(X,Y),$$

što znači da su distribucije $L_1$ i $L_2$ ortogonalne u odnosu na $g$. Adaptirani sistem za $f(3,-1)$-strukturu može biti izabran tako da bude ortonormiran. Takav sistem $(u_a, u_x, u_A)$ se zove adaptiran sistem za metričku $f(3,-1)$-strukturu i u odnosu na njega $f$ ima komponente kao u (1.8.), a $g$

$$g = \begin{pmatrix} E_h & 0 & 0 \\ 0 & E_{r-h} & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}$$

Matrica transformacije $\gamma$ jednog adaptiranog sistema u drugi ima oblik:

$$\gamma = \begin{pmatrix} A_h & 0 & 0 \\ 0 & B_{r-h} & 0 \\ 0 & 0 & C_{n-r} \end{pmatrix},$$

gde su $A_h$, $B_{r-h}$, $C_{n-r}$ ortogonalne matrice, što znači da se strukturna grupa tangentnog snopa može redukovati do grupe $O(h) \times O(r-h) \times O(n-r)$.

Važi i obrnuto, pa imamo:

Teorema 1.7. Potreban i dovoljan uslov da se n-dimenzionalna mnogostrukost može snabdeti metričkom

$f(3,-1)$-strukturom ranga r, je da se strukturna grupa tangentnog snopa može redukovati do grupe $O(h) \times O(r-h) \times O(n-r)$, $h < r \leq n$.

Neka je na n-dimenzionalnoj mnogostrukosti data $f(3,-1)$-struktura ranga r. Ako na $M^n$ postoje vektorska polja $\xi_\alpha$, $\alpha = 1,\dots,n-r$, takva da je:

(1.9.) $$f^2 = I - \sum_\alpha \eta_\alpha \otimes \xi_\alpha$$

gde su $\eta_\alpha$ jedan forme za koje je

(1.1o.) $$\eta_\alpha(\xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta},$$

kažemo da je $f(3,-1)$-struktura globalno generisana.

Lema 1.1. Struktura f, forme $\eta_\alpha$ i vektori $\xi_\alpha$ su povezani relacijama:

(1.11.) $$f(\xi_\alpha) = 0, \qquad \eta_\alpha f = 0. \qquad \alpha=1,\dots,n-r.$$

Dokaz: Iz (1.9.) i (1.1o.) sledi da je

$$f^2(X) = X - \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\xi_\alpha$$

$$\eta_\beta(f^2(X)) = \eta_\beta(X) - \eta_\beta(X) = 0,$$

za neko $X \in \mathfrak{X}(M^n)$. Ako umesto X stavimo fX i iskoristimo $f^3-f=0$, dobijamo $\eta_\beta f^3 X = \eta_\beta f X = 0$, odakle sledi $\eta_\beta f=0$. Dalje je:

$$X - f^2X = \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\xi_\alpha,$$

Stavimo fX umesto X, dobijamo:

$0 = (f-f^3)X = \sum_\alpha \eta_\alpha(X)\cdot f(\xi_\alpha)$, a ako u ovu relaciju stavimo $\xi_\beta$ umesto X i iskoristimo $\eta_\alpha \xi_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ dobijamo $f(\xi_\alpha) = 0$.

Lema 1.2. Na parakompaktnoj mnogostrukosti $M^n$ sa globalno definisanom $f(3,-1)$-strukturom, postoji Rimanova metrika g, takva da važi (1.5.). Tada se $\xi_\alpha$ i $\eta_\alpha$ mogu izabrati tako da važi:

(1.12.) $g(X,Y) = g(fX,fY) + \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(X)\, \eta_{\alpha}(Y).$

Dokaz: $g(X,mY) = g(X, \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(Y)\xi_{\alpha}) =$

$= \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(Y)\, g(\xi_{\alpha}, X) = \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}(Y)\eta_{\alpha}(X),$

jer je $g(\xi_{\alpha}, X) = \eta_{\alpha}(X)$.

Globalno generisana $f(3,-1)$-struktura, zajedno sa Rimanovom metrikom $g$ koja zadovoljava uslov (1.12.) je metrička globalno generisana struktura.

Teorema 1.8. Potreban i dovoljan uslov da se n-dimenzionalna mnogostrukost $\mathcal{M}^n$ može snabdeti metričkom globalno generisanom strukturom $f(3,-1)$ jeste da se strukturna grupa tangentnog snopa redukuje do grupe $O(h) \times O(r-h) \times E(n-r)$, $h < r \leq n$.

I. Sato [44] je uveo i ispitao skoro parakontaktnu Rimanovu mnogostrukost $\mathcal{M}^n$ sa strukturom $(\varphi, \xi, \eta, g)$. To je n-dimenzionalna mnogostrukost sa tenzorskim poljem $\varphi$ tipa (1,1), pozitivno definitnom Rimanovom metrikom $g$, vektorskim poljem $\xi$ i 1-formom $\eta$ koji ispunjavaju uslove:

(1.13.) $\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi, \quad \varphi\xi = 0 \quad \eta\varphi = 0, \quad \eta(\xi) = 1,$

(1.14.) $\eta(X) = g(\xi, X), \quad g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y),$

za $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathcal{M}^n)$.

Takva mnogostrukost se zove skoro parakontaktna Rimanova mnogostrukost, a njena struktura - skoro parakontaktna Rimanova struktura.

Sato je utvrdio da je skoro parakontaktna struktura istovetna sa $f(3,-1)$-strukturom ranga n-1. (Kad je rang f=n-1, $f(3,-1)$-struktura je globalno generisana.) Takvu strukturu ćemo kasnije zvati struktura Sato.

## 2.2. STRUKTURA NA POTPROSTORU PROSTORA SA f(3,-1)-STRUKTUROM

Slično razmatranjima u odeljku 1.4. koje je Tashiro [89] izveo za skoro kontaktnu strukturu, ovde možemo formulisati sledeću teoremu:

Teorema 2.1. Skoro produkt struktura $\phi$ indukuje na hiperpovrši $\mathcal{X}$ strukturu Sato $\Upsilon$ na sledeći način:

$$\phi B = B\Upsilon \oplus (\eta \otimes N), \qquad \phi N = B\xi,$$

gde je B diferencijal potapanja prostora $\mathcal{X}$ u $\mathcal{M}^n$, a N je pseudonormala.( $N \in T(\mathcal{M}^n)$, $N \notin T(\mathcal{X})$.)

Dokaz:

$$\phi B = B\Upsilon \oplus (\eta \otimes N)$$

$$\phi^2 BX = \phi\,(B\Upsilon \oplus (\eta \otimes N))X$$

$$\phi^2 BX = \phi\,(B\Upsilon(X) \oplus \eta\,(X)N)$$

$$BX = \phi B(\Upsilon(X)) + \eta\,(X)\,\phi(N)$$

$$BX = (B\Upsilon \oplus \eta \otimes N)(\Upsilon(X)) + \eta\,(X)\,\phi(N)$$

$$BX = (B\Upsilon^2(X) + \eta\,\Upsilon(X)N) + \eta\,(X)\,\phi(N)$$

$$BX = B(X) - \eta\,(X)\,B\xi + 0 + \eta\,(X)\,B\xi$$

$$BX = BX, \quad \text{i}$$

$$\phi N = B\xi$$

$$\phi^2 N = \phi B\xi$$

$$N = (B\Upsilon \oplus (\eta \otimes N))\xi$$

$$N = B\Upsilon\xi + \eta\,(\xi)N$$

$$N = N.$$

Razmotrimo sada obrnuti slučaj. Neka je $\mathcal{M}^n$ snabdevena $f(3,-1)$-strukturom, ispitaćemo kakva je struktura na hiperpovrši.

Teorema 2.2. Neka je na $\mathcal{M}^n$ data $f(3,-1)$-struktura ranga $r$ i neka je $\mathcal{N}^m$ podmnogostrukost od $\mathcal{M}^n$ dimenzije $m=n-1$. Ako je dimenzija prostora $T(\mathcal{N}^m)_p \cap f(T(\mathcal{N}^m))_p$ konstantna i jednaka $s$, tada na $\mathcal{N}^m$ postoji prirodna $F(3,-1)$-struktura ranga $s$. $(F= B^{-1}fB)$.

Dokaz: Neka je $C$ transferzala definisana sa $\mathcal{N}^m$. tj. $C\in T(\mathcal{M}^n)_p$ i $C\notin T(\mathcal{N}^m)_p$ za svako $p\in \mathcal{N}^m$.

Neka je $B$ diferencijal potapanja prostora $\mathcal{N}^m$ u $\mathcal{M}^n$. $B$ preslikava $T(\mathcal{N}^m)$ u $T_R(\mathcal{M}^n)$, gde je $T_R(\mathcal{M}^n)$ restrikcija tangentnog snopa mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ na $\mathcal{N}^m$. Može se lokalno izabrati 1-forma $C^*$definisana na $\mathcal{N}^m$, takva da je:

$$B^{-1}B = I \qquad B\,B^{-1} = I - C^*\otimes C$$
$$C^*B = B^{-1}C = 0 \qquad C^*(C) = 1 \,. \tag{2.1.}$$

Definišimo $F$ na $T(\mathcal{N}^{n-1})$ sa $F = B^{-1}f\cdot B$.

Vidimo da je

$$F^2X = B^{-1}fB\cdot B^{-1}fB\cdot X = B^{-1}f(\,I-C^*\otimes C)f(BX)=$$
$$=B^{-1}f^2(BX) - C^*f(BX)\;B^{-1}fC. \tag{2.2.}$$

Sada razmotrimo dva slučaja: kad $C$ pripada distribuciji $M$ i kad $C$ pripada distribuciji $L$.

Ako je $C$ u distribuciji $M$, tada je $fC=0$ i na osnovu (2.2.) vidimo da je

$$(F^3 - F)X = B^{-1}fB\cdot B^{-1}f^2BX - B^{-1}fBX =$$

$$= B^{-1}f(\ I - C^{*} \otimes C)\ f^{2}BX - B^{-1}fBX =$$

$$= B^{-1}((f^{3}-f)BX) = 0 \quad \text{za svako } X.$$

Ako pretpostavimo da $C$ leži u distribuciji $L$, tada je opet na osnovu (2.2.)

$$(F^{3} - F)X = (B^{-1}fB)B^{-1}f^{2}(BX) - (B^{-1}fB)\cdot$$

$$\cdot C^{*}(fBX)B^{-1}fC - B^{-1}fBX =$$

$$= B^{-1}(f^{3}-f)BX - C^{*}(f^{2}BX)B^{-1}fC - C^{*}(fBX)B^{-1}f^{2}C +$$

$$+ C^{*}(fBX)C^{*}(fC)\ B^{-1}fC = 0,$$

jer je $f^{2}C = C$ na $L$ i $C^{*}B = B^{-1}C = 0$ i jer $C^{*}$ možemo izabrati tako da je $C^{*}(fC)=0$. Sada je i član
$C^{*}(f^{2}BX) = C^{*}(+BX+(f^{2} - 1)BX) = 0$, čime je dokaz završen.

Struktura $f$ je integrabilna ako je njena Nijenhuisova torzija

$$[f,f](X,Y) = [fX,fY] - f[fX,Y] - f[X,fY] +$$

$$+ f^{2}[X,Y] = 0.$$

Ispitaćemo pod kojim uslovima je integrabilna struktura $F(3,-1)$ na hiperpovrši.

Teorema 2.3. Neka je $\mathcal{N}^{n-1}$ hiperpovrš u $\mathcal{M}^{n}$ i neka je $f$ integrabilna $f(3,-1)$-struktura na $\mathcal{M}^{n}$. Ako lokalno transferzala $C$ leži u distribuciji $M$, tada je indukovana struktura $F$ integrabilna.

Dokaz: Formirajmo Nijenhuisov tenzor strukture $F$

$$[F,F](X,Y) = [FX,FY] - F[FX,Y] - F[X,FY] + F^{2}[X,Y] =$$

$$= B^{-1}[BB^{-1}fBX, BB^{-1}fBY] - B^{-1}f[BB^{-1}fBX, BY] -$$

$$- B^{-1}f[BX, BB^{-1}fBY] + B^{-1}fBB^{-1}f[BX,BY] =$$

$$= B^{-1}\{[f,f](BX,BY) - [C^*(fBX)C, fBY] - [fBX, C^*(fBY)C] +$$

$$+ [C^* fBXC, C^*(fBY)C] + f[C^*(fBX)C, BY] + f[BX, C^*(fBY)C] -$$

$$- C^*(f[BX,BY])fC\}.$$

Koristili smo činjenicu da je $B[X,Y] = [BX,BY]$ za svako $X,Y \in \mathcal{X}(\mathcal{N}^{n-1})$ i uslov (2.1.). Ako $C$ pripada distribuciji $M$, forma $C^*$ može biti izabrana da bude $C^*f = 0$ i svi sabirci u gornjem zbiru sem prvog su iz tog razloga jednaki nuli. Prvi sabirak je jednak nuli samo kad je $f(3,-1)$-struktura integrabilna, što je u pretpostavci teoreme, pa je $[F,F](X,Y) = 0$, čime je dokaz završen.

Neka je sada rang $f = n-1$. Tada je $f$ skoro parakontaktna struktura $(f, \xi, \eta)$.(Struktura Sato).

Na osnovu posledice (1.1.) i na osnovu teoreme (2.2.) možemo formulisati sledeću teoremu:

Teorema 2.4. Ako je $(f, \xi, \eta)$ skoro parakontaktna struktura na $\mathcal{M}^n$ i $\mathcal{N}^{n-1}$ hiperpovrš u $\mathcal{M}^n$, tada $\mathcal{N}^{n-1}$ poseduje prirodnu $F(3,-1)$-strukturu ako je $\xi$ tangentno na $\mathcal{N}^{n-1}$, a poseduje prirodnu skoro produkt strukturu $F$ ako $\xi$ nije tangentno na $\mathcal{N}^{n-1}$.

Dokaz: Kada $\xi$ nije tangentno na $\mathcal{N}^{n-1}$, $\xi$ se može uzeti za psudonormalu i primeniti rasudjivanje kao u teoremi (2.2.), pa je $T(\mathcal{N}^{n-1}) \cap f(T(\mathcal{N}^{n-1})) = T(\mathcal{N}^{n-1})$, a $\dim \mathcal{N} = n-1$. Znači rang $F = n-1$. $T(\mathcal{N}^{n-1})$ se poklapa u tom slučaju sa distribucijom $L$. Pošto je rang $F = n-1$ maksimalan, sledi da je $F$ skoro produkt struktura.

Bai Jin Kim [25] je dao potreban i dovoljan uslov da se n-dimenzionalna mnogostrukost može snabdeti strukturom koja ispunjava uslov $f^{2q+1}+f = 0$, a neke osobine ove uopštene strukture ispitane su u [36]. U narednom odeljku rešava se isti problem za strukturu koja ispunjava uslov $f^{2k+1}-f = 0$, ali se ne može primeniti postupak Bai Jin Kim-a, već je struktura uvedena generalizacijom postupka za konstrukciju struktura $f^3-f = 0$, $f^5-f = 0$. Strukture $f^5 \pm f = 0$ ispitivane su u radovima [19], [2o], [21].

## 2.3. O POTPROSTORIMA NA DIFERENCIJABILNOJ MNOGOSTRUKOSTI KOJA JE SNABDEVENA f(5,-1)-STRUKTUROM

Neka je $\mathcal{M}^n$ diferencijabilna mnogostrukost klase $C^\infty$ i neka je na njoj dato tenzorsko polje $f \neq 0$, tipa (1,1), klase $C^\infty$, takvo da je $f^5-f= 0$. [19].

Teorema 3.1. Za tenzorsko polje $f \neq 0$, $f^5-f=0$ preslikavanja

$$\ell = f^4, \qquad m = -f^4+1 \tag{3.1.}$$

su komplementarni operatori projekcije.

Dokaz: Lako se proverava da je $m+\ell = 1$, $m\ell = \ell m = 0$, $m^2=m$, $\ell^2=\ell$, gde je 1 oznaka za identički operator, što dokazuje teoremu.

Neka su L i M komplementarne distribucije koje odgovaraju operatorima $\ell$ i m respektivno. Ako je rang od f konstantan i jednak r, tada L ima dimenziju r, a M dimenziju n-r. Takvu strukturu ćemo zvati f(5,-1)-stuktura ranga r.

Napomena 3.1. Za f(5,-1)-strukturu i $\ell$ i m koji ispunjavaju uslov (3.1.) važi:

$$\ell f = f\ell = f, \quad f\,m = m\,f = 0, \quad f^2 m = 0.$$
$$(m + f^2)^2 = 1,$$

Napomena 3.2 . Ako na $\mathcal{M}^n$ postoji operator m projekcije koji ispunjava uslove u napomeni 3.1., tada f ispunjava uslov $f^6 - f^2 = o$, tj. $f^2$ je $f^2(3,-1)$-struktura. Videti teoremu 1.5..

Uvedimo na mnogostrukost lokalne koordinate i označimo sa $f_i^h$, $\ell_i^h$, $m_i^h$ lokalne koordinate tenzora f, $\ell$, m respektivno. Uvodimo pozitivno definitnu Rimanovu metriku na mnogostrukost i biramo r uzajamno normalnih jediničnih vektora $u_a^h$ (a,b,c,...=1,2,...,r) u L i n-r uzajamno normalnih jediničnih vektora u M. Imamo:

$$\ell_i^h u_b^i = u_b^h, \quad \ell_i^h u_B^i = 0, \quad m_i^h u_b^i = 0, \quad m_i^h u_B^i = u_B^h.$$

Važi $f_i^h u_B^i = 0$. Ako označimo sa ( $v_i^a$ , $v_i^A$ ) matricu inverznu matrici ( $u_b^h$ , $u_B^h$ ), tada su $v_i^a$ i $v_i^A$ komponente linearno nezavisnih kovarijantnih vektora i ispunjeno je:

$$(3.2.) \qquad v_i^a u_b^i = \delta_b^a, \qquad v_i^a u_B^i = 0,$$
$$v_i^A u_b^i = 0, \qquad v_i^A u_B^i = \delta_B^A,$$
$$v_i^a u_a^h + v_i^A u_A^h = \delta_i^h.$$

Može se proveriti da važi:

$$(3.3.) \qquad \ell_i^h v_h^a = v_i^a, \qquad \ell_i^h v_h^A = 0,$$
$$m_i^h v_h^a = 0, \qquad m_i^h v_h^A = v_i^A.$$

Iz mf=o nalazimo da je $f_i^h v_h^A = 0$. Iz $\ell_j^h u_a^j = u_a^h$, nalazimo

$$\ell_i^h = v_i^a u_a^h.$$

Sada iz (3.2.) i (3.3.) vidimo da je $m_i^h = v_i^A u_A^h$ .

Ako stavimo $a_{ji} = v_j^a v_i^a + v_j^A v_i^A$, tada je $a_{ji}$ globalna pozitivno definitna Rimanova metrika u odnosu na koju $(u_b^h, u_B^h)$ čini ortogonalni sistem takav da je $v_j^a = a_{ji} u_a^i$ i $v_j^A = a_{ji} u_A^i$. Ako stavimo $\ell_{ji} = \ell_j^t a_{ti}$ i $m_{ji} = m_j^t a_{ti}$, dobijamo $\ell_{ji} = v_j^a v_i^a$, $m_{ji} = v_j^A v_i^A$.

Najzad, vidimo da je $\ell_{ji} + m_{ji} = a_{ji}$. Mogu se proveriti sledeće relacije:

$$\ell_j^t \ell_i^s a_{ts} = \ell_{ji}, \quad \ell_j^t m_i^s a_{ts} = 0, \quad m_j^t m_i^s a_{ts} = m_{ji} .$$

Za dva vektora X i Y sa komponentama $x^i$ i $y^i$ stavimo:

$$m^*(X,Y) = m_{st} x^s y^t, \qquad a(X,Y) = a_{st} x^s y^t,$$

$$g(X,Y) = \frac{1}{2} (a(X,Y) + a(fX,fY) + a(f^2X,f^2Y) + a(f^3X,f^3Y) + m^*(X,Y)).$$

Tada imamo:

$$m^*(u_A, u_a) = a(u_A, u_a) = a(fu_A, fu_a) = a(f^2u_A, f^2u_a) =$$

$$= a(f^3u_A, f^3u_a) = 0 \quad , \qquad g(u_A, u_a) = 0 \; ,$$

što znači da su prostori L i M uzajamno normalni u odnosu na metriku g. Imamo:

$$m^*(u_a, u_b) = 0, \quad a(f^4u_a, f^4u_b) = a(u_a, u_b).$$

Kako je:

$$g(u_a, u_b) = \frac{1}{2} (a(u_a, u_b) + a(fu_a, fu_b) + a(f^2u_a, f^2u_b) +$$

$$+ a(f^3u_a, f^3u_b)),$$

$$g(fu_a, fu_b) = \frac{1}{2}(a(fu_a, fu_b) + a(f^2u_a, f^2u_b) + a(f^3u_a, f^3u_b) +$$

$$+ a(f^4u_a, f^4u_b)) = \frac{1}{2}(a(fu_a, fu_b) + a(f^2u_a, f^2u_b) +$$

$$+ a(f^3u_a, f^3u_b) + a(u_a, u_b)), \text{ za svako } X, Y \text{ iz } L.$$

sledi da je $g(X,Y) = g(f(X), f(Y))$ za svako $X, Y$ iz $L$.

Pretpostavimo da $f^2/_L = f^2\ell/_L$ nije jedinični operator na $L$. Tada je $f^2/_L$ linearna transformacija prostora $L$ sa minimalnim polinomom $x^2-1$, sa korenima $\pm 1$. $L$ se razlaže na direktnu sumu $L = L_1 \oplus L_2$, gde je $L_1$ sopstveni potprostor od $f^2/_L$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti 1, a $L_2$ sopstveni potprostor od $f^2/_L$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti -1. Za $X \in L_1$ i $Y \in L_2$ imamo:

$$g(X,Y) = g(fX, fY) = g(f^2X, f^2Y) = g(X, -Y) = -g(X,Y),$$

što znači da su $L_1$ i $L_2$ ortogonalni u odnosu na metriku $g$.

Pretpostavimo da $f/_{L_1} = f\ell/_{L_1}$, $f/_{L_2} = f\ell/_{L_2}$ nisu jedinični operatori na $L_1$ i $L_2$ respektivno. Tada je $f/_{L_1}$ linearna transformacija od $L_1$ sa minimalnim polinomom $x^2-1$. Dakle, $L_1$ se razlaže u direktnu sumu $L_1 = L_1^1 \oplus L_1^2$ i prostori $L_1^1$ i $L_1^2$ su ortogonalni u odnosu na metriku $g$.

Neka je $X$ iz $L_2$. Tada je $f(X)$ iz $L_2$ i

$$g(X, f(X)) = g(f(X), f^2(X)) = g(f(X), -X) = -g(X, f(X)).$$

Dakle, $L_2 = L_2^1 \oplus f(L_2^1)$ i prostori $L_2^1$ i $f(L_2^1)$ su ortogonalni u odnosu na metriku $g$.

Pretpostavimo da je $\dim L_2^1 = h = \dim f(L_2^1)$. Tada je $\dim L_1 = r-2h$. Ako je $\dim L_1^1 = p$, tada je $\dim L_1^2 = r-2h-p$.

Neka je $e_1, e_2, \ldots, e_h, e_{h+1}, \ldots, e_{2h}$ ortogonalna baza u $L_2$ i

$e_{2h+1},\dots,e_{2h+p},e_{2h+p+1},\dots,e_{r-2h}$ je ortogonalna baza u $L_1$

U udnosu na g $e_1,\dots,e_{2h},e_{2h+1},\dots,e_{r-2h}$ je ortogonalna baza za koju je:

$$\left.\begin{array}{l} f(e_1)=e_{h+1}\ ,\ f(e_2)=e_{h+2}\ ,\dots,f(e_h)=e_{2h} \\ f(e_{h+1})=-e_1,\ f(e_{h+2})=-e_2,\dots,\ f(e_{2h})=-e_h \end{array}\right\} L_2$$

$$\left.\begin{array}{l} f(e_{2h+1})=e_{2h+1}\ ,\dots,\ f(e_{2h+p})=e_{2h+p} \\ f(e_{2h+p+1})=-e_{2h+p+1},\dots,\ f(e_{r-2h})=-e_{r-2h} \end{array}\right\} L_1$$

Na kraju, izaberimo u M ortogonalnu bazu $e_{r+1},\dots,e_{n-r}$ u odnosu na g. U odnosu na ortogonalni sistem $e_1,\dots,e_n$, tenzori $g_{ij}$ i $f_i^j$ imaju komponente

$$g=\begin{bmatrix} E_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{r-2h-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{n-r} \end{bmatrix}$$

(3.4.)

$$f=\begin{bmatrix} 0 & E_h & 0 & 0 & 0 \\ -E_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{r-2h-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{n-r} \end{bmatrix}$$

Takav koordinatni sistem zove se adaptiran za f(5,-1)-strukturu. Neka je $\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n$ drugi adaptirani sistem u odnosu na koji tenzori g i f imaju komponente kao u (3.4.). Stavimo $\bar{e}_i=\gamma_i^j\, e_j$. Tada $\gamma$ ima matricu oblika:

$$\gamma=\begin{bmatrix} A_h & B_h & 0 & 0 & 0 \\ -B_h & A_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{r-2h-p} & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{n-r} \end{bmatrix}$$

gde $A,B\in GL(h,R)$, C je iz grupe ortogonalnih matrica odgovarajućeg formata.

Teorema 3.2. Potreban i dovoljan uslov da se n-dimenzionalna mnogostrukost može snabdeti tenzorskim poljem $f\neq 0$ tipa (1,1) koje ispunjava uslov $f^5-f=0$ je da se grupa tangentnog snopa mnogostrukosti može redukovati do grupe $U_h\times O(p)\times O(r-2h-p)\times O(n-r)$.

Neka je rang f u daljem tekstu jednak n-2.

Tada je dim M = 2,

$$f^2=\begin{bmatrix} -E & & & & \\ & -E & & 0 & \\ & & E & & \\ & 0 & & E & \\ & & & & O_2 \end{bmatrix} \quad f^4=\begin{bmatrix} E & & & & \\ & E & & 0 & \\ & & E & & \\ & 0 & & E & \\ & & & & O_2 \end{bmatrix} \quad m=\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & 0 & & \\ & 0 & & 0 & \\ & & & & E_2 \end{bmatrix}$$

$$\phi=-(m+f^2)=\begin{bmatrix} E & & & & \\ & E & & 0 & \\ & & -E & & \\ & 0 & & -E & \\ & & & & -E_2 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.3. $\phi$ je skoro produkt struktura na $\mathcal{M}^n$. Ovo sledi iz napomene 3.1.

Imajući u vidu definiciju skoro parakontaktne strukture i teoremu 2.1. možemo izvršiti sledeća razmatranja.

Neka je $\mathcal{K}$ potprostor u $\mathcal{M}^n$ ortogonalan na vektor:

$$(3.5.)\qquad N=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Teorema 3.4. Struktura $-f^2/\mathcal{K} = \bar{\varphi}$ je struktura Sato.

Teorema 3.5. $\bar{\varphi}$ je skoro parakontaktna Rimanova struktura.

Dokaz: Neka su $\bar{m}$ i $\bar{g}$ restrikcije tenzora m i g na $\mathcal{K}$ i neka je

$$\xi = \begin{bmatrix} o \\ \vdots \\ o \\ 1 \end{bmatrix} \Big\} n-1, \qquad \eta = \underbrace{(o,\ldots,o1)}_{n-1}$$

$\bar{\varphi}$, $\bar{m}$ i g imaju matrice oblika

$$\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} E_h & & & & \\ & E_h & & 0 & \\ & & -E_p & & \\ & 0 & & -E_{n-2h-p-2} & \\ & & & & 0_1 \end{bmatrix} \quad \bar{m} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0\ 0 & & \\ & & 0 & \\ 0 & & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{g} = \begin{bmatrix} E & & & \\ & E & 0 & \\ & & E & \\ 0 & & E & \\ & & & E_1 \end{bmatrix}$$

Množenjem odgovarajućih matrica se vidi da je:

$\bar{m} = \xi \otimes \eta$, $\bar{\varphi}^2 = f^4/\mathcal{K} = 1 - \bar{m} = 1 - \xi \otimes \eta$, $\eta\bar{\varphi} = 0$, $\bar{\varphi}\xi = 0$, $\xi(\eta) = 1$,

$\eta(X) = \bar{g}(\xi, X)$, $\bar{g}(\bar{\varphi}X, \bar{\varphi}Y) = \bar{g}(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$,

što dokazuje teoreme (3.4.) i (3.5.).

U teoremi (2.1.) glave 2. je dokazano da skoro produkt struktura inducira na hiperpovrši strukturu Sato.

Teorema 3.6. Skoro produkt struktura $\phi = -(m+f^2)$ indukuje na $\mathcal{J}^{n-1}$ strukturu Sato $\Psi$.

Mi ćemo ispitati pod kojim uslovima će struktura $\Psi$ iducirana sa $\phi$ biti baš jednaka strukturi $\bar{\varphi}$.

Neka je $\mathcal{K}$ hiperpovrš normalna na N iz (3.5.)

Teorema 3.7. Skoro produkt struktura $\phi = -(m+f^2)$ indukuje na $\mathcal{K}$ baš Strukturu Sato $\bar{\varphi}$ i više od toga, skoro parakontaktnu Rimanovu strukturu $(\bar{\varphi}, \xi, \eta, \bar{g})$.

Dokaz: Dokazaćemo relaciju

$$\phi B = B\bar{\varphi} \oplus (\eta \otimes N) \text{ i } \qquad \phi N = B\xi \text{ na } \mathcal{K}.$$

$\phi N = B\xi$ jer je:

$$\phi = \begin{bmatrix} E_h & & & & & \\ & E_h & & & 0 & \\ & & -E_p & & & \\ & & & -E_{n-2h-p-2} & & \\ & 0 & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

Za dokaz relacije $\phi B = B\bar{\varphi} \oplus (\eta \otimes N)$ na $\mathcal{K}$ dokazaćemo $BX = \phi B(\bar{\varphi}X) + \eta(X) \cdot \phi N$ za proizvoljan vektor $X$ iz $T(\mathcal{K})$.

$$BX = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2h} \\ y_{2h+1} \\ \vdots \\ y_{n-2h-2} \\ z_1 \\ o \end{bmatrix}, \quad \phi B(\bar{\varphi}X) + \eta(X)\phi N = \phi \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2h} \\ -y_{2h+1} \\ \vdots \\ -y_{n-2h-2} \\ o \\ o \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} o \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ o \\ 1 \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2h} \\ y_{2h+1} \\ \vdots \\ y_{n-2h-2} \\ z_1 \\ o \end{bmatrix}$$

sto dokazuje teoremu.

Neka druga skoro produkt struktura npr. $\phi' = 2f^4 - 1$, indukuje na $\mathcal{K}$ strukturu Sato $\Psi$: $\Psi'$će biti jednaka $\bar{\varphi}$ na nekom drugom prostoru $\mathcal{K}^*$. Može se pokazati da $T(\mathcal{K}^*)$ ima vektore oblika

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2h} \\ o_{2h+1} \\ \vdots \\ o_{n-2h-2} \\ z_1 \end{bmatrix}$$

Teorema 3.8. Skoro produkt struktura $\phi' = 2f^4 - 1$ indukuje na $\mathcal{K}^*$ strukturu Sato $\bar{\varphi}$.

Dokaz: Dokazaćemo relaciju:

$$\phi' B = B\bar{\varphi} \oplus (\eta \otimes N) \quad \text{i} \quad \phi' N = B\xi \text{ na } \mathcal{K}^*.$$

Jasno da je $\phi' N = B\xi$ jer je

$$\phi' = \begin{bmatrix} E_h & & & & & \\ & E_h & & & 0 & \\ & & E_p & & & \\ & & & E_{n-2h-p-2} & & \\ & 0 & & & -1 & \\ & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

Za dokaz relacije $\phi' B = B\bar{\varphi} \oplus (\eta \otimes N)$ na $\mathcal{K}^*$ dokazaćemo $BX = \phi' B(\bar{\varphi} X) + \eta(X)\,\phi'(N)$ za vektore $X \in T(\mathcal{K}^*)$.

Za vektore $X \in T(\mathcal{K})$ važi:

$$BX = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2h} \\ y_{2h+1} \\ \vdots \\ y_{n-2h-2} \\ z_1 \\ o \end{bmatrix}, \quad \phi' B(\bar{\varphi} X) + \eta(X)\,\phi' N = \phi' \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2h} \\ -y_{2h+1} \\ \vdots \\ -y_{n-2h-2} \\ o \\ o \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ o \\ 1 \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2h} \\ -y_{2h+1} \\ \vdots \\ -y_{n-2h-2} \\ z_1 \\ o \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2h} \\ y_{2h+1} \\ \vdots \\ y_{n-2h-2} \\ z_1 \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2h} \\ -y_{2h+1} \\ \vdots \\ -y_{n-2h-2} \\ z_1 \\ o \end{bmatrix}$$

samo kad je $y_{2h+1} = \ldots = y_{n-2h-2} = 0$, tj. samo kad je $X$ iz $T(\mathcal{K}^*)$.

## 2.4. O STRUKTURI f KOJA ISPUNJAVA USLOV $f^{2\cdot 2^q+1} - f = 0$

Rezultati iz ovog odeljka su objavljeni u [69]. Posmatrajmo prvo strukturu $f^{2k+1}-f=0$.

Definicija 4.1. Neka je f tenzorsko polje tipa (1,1), klase $C^\infty$ na $\mathcal{M}^n$ takvo da je

(4.1.) $$f^{2k+1}-f=0, \quad f^{2i+1}-f\neq 0 \;, \text{ za } \; 1< i< k \;,$$

k je pozitivan ceo broj veći od 1.
Neka je rang f = r, konstantan. Strukturu f ćemo zvati f(2k+1,-1)-struktura, ili f struktura reda k ranga r.

Teorema 4.1. Neka je

(4.2.) $$m= 1-f^{2k}, \qquad \ell= f^{2k}.$$

Tada je $m+\ell = 1$, $m\ell = \ell m = 0$, $m^2= m$, $\ell^2=\ell$, tj. m i $\ell$ su disjunktni operatori projekcije.

Neka su M i L distribucije koje odgovaraju operatorima m i $\ell$ respektivno. Ako je rang f = r, tada je dim L = r, a dim M = n-r.

Teorema 4.2. Za f koje ispunjava uslov (4.1.) i m i $\ell$ koji ispunjavaju uslov (4.2.) važi

(4.3.) $$\ell f = f\ell = f, \quad mf = fm = 0, \quad f^k m = 0,$$
$$(m+f^k)^2 = 1 \;.$$

Teorema 4.3. Ako u $\mathcal{M}^n$ postoji projekcija operatora m koja ispunjava uslove (4.3.), tada f ispunjava uslov (4.1.).( na osnovu teoreme 1.5. važi i $f^{3k}-f^k = 0$.)

Napomena 4.1. Neka je mnogostrukost $\mathcal{M}^n$ snabdevena strukturom f reda k ranga r. Tada je $f^{2k}\ell = \ell$ i $f^k m=0$, tj. $f^k$ deluje na L kao skoro produkt struktura, a na M kao nula operator.

Uvedimo na $\mathcal{M}^n$ lokalni koordinatni sistem i označimo sa $f_i^p$ , $\ell_i^p, m_i^p$ lokalne koordinate tenzora f, $\ell$ i m respektivno. Uvodimo pozitivno definitnu metriku u mnogostrukost i biramo r uzajamno normalnih jediničnih vektora $u_a^p$ ( a,b,c,...= 1,2,...,r) u L i n-r uzajamno normalnih jediničnih vektora $u_A^p$ (A,B,C,...= r+1,r+2,...,n) u M. Imamo:

$$\ell_i^p u_b^i = u_b^p, \quad \ell_i^p u_B^i = 0, \quad m_i^p u_b^i = 0, \quad m_i^p u_B^i = u_B^p .$$

Važi relacija $f_i^p u_B^i = 0$ . Ako sa $(v_i^a , v_i^A )$označimo matricu inverznu matrici ( $u_b^p , u_B^p$ ), tada su $v_i^a$ i $v_i^A$ komponente linearno nezavisnih kovarijavtnih vektora i ispunjavaju uslov:

$$\begin{aligned} &v_i^a u_b^i = \delta_b^a, \quad v_i^a u_B^i = 0, \quad v_i^A u_b^i = 0 \\ (4.4.) \qquad & \\ &v_i^A u_B^i = \delta_B^A, \quad v_u^a u_a^p + v_i^A u_A^p = \delta_i^p . \end{aligned}$$

Lako se dokazuje da je:

$$\begin{aligned} &\ell_i^p v_p^a = v_i^a, \quad \ell_i^p v_p^A = 0, \quad m_i^p v_p^\ell = 0 \\ (4.5.) \qquad & \\ &m_i^p v_p^A = v_i^A . \end{aligned}$$

Iz mf = 0 nalazimo da je $f_i^p v_p^A = 0$. Iz $\ell_j^p u_a^j = u_a^p$ nalazimo

$$\ell_i^p = v_i^a u_a^p.$$

Iz (4.4.) i(4.5.) sledi da je

$$m_i^p = v_i^A u_A^p.$$

Ako stavimo da je $a_{ji} = v_j^a v_i^a + v_j^A v_i^A$, tada je a globalna pozitivno definitna Rimanova metrika u odnosu na koju je

$(u_b^p, u_B^p)$ ortogonalni sistem takav da je:

$$v_j^a = a_{ji}\, u_a^i \,, \quad v_j^A = a_{ji} u_A^i \,.$$

Ako stavimo $\ell_{ji} = \ell_j^t\, a_{ti}$, $m_{ji} = m_j^t\, a_{ti}$,

dobijamo $\ell_{ji} = v_j^a\, v_i^a$, $m_{ji} = v_j^A\, v_i^A$.

Najzad je $\ell_{ji} + m_{ji} = a_{ji}$. Mogu se proveriti sledeće relacije:

$$\ell_j^t \ell_i^s a_{ts} = \ell_{ji}, \quad \ell_j^t m_i^s a_{ts} = 0, \quad m_j^t m_i^s a_{tj} = m_{ji} \,.$$

Za dva vektora $x$ i $y$ sa komponentama $x^i$ i $y^i$ stavimo:

$$m^*(x,y) = m_{st} x^s y^t, \quad a(x,y) = a_{st} x^s y^t \,,$$

$$g(x,y) = \frac{1}{k}\,(a(x,y) + (\sum_{z=1}^{2k-1} a(f^z x, f^z y)) + m^*(x,y)) \,.$$

Tada imamo:

$$m^*(u_A, u_a) = a(u_A, u_a) = a(fu_A, fu_a) = a(f^2 u_A, f^2 u_a) =$$

$$= \ldots = a(f^{2k-1} u_A, f^{2k-1} u_a) = 0, \quad g(u_A, u_a) = 0,$$

što znači da su L i M ortogonalni u odnosu na metriku g.

Imamo takodje:

$$m^*(u_a, u_b) = 0, \quad a(f^{2k} u_a, f^{2k} u_b) = a(u_a, u_b) \,,$$

Pošto je:

$$g(u_a, u_b) = \frac{1}{k}\,(a(u_a, u_b) + (\sum_{z=1}^{2k-1} (f^z u_a, f^z u_b))a) \,,$$

imamo:

$$g(fu_a, fu_b) = \frac{1}{k}\,(a(\sum_{z=1}^{2k} (f^z u_a, f^z u_b))) =$$

$$= \frac{1}{k}\,(a(\sum_{z=1}^{2k-1} (f^z u_a, f^z u_b)) + a(u_a, u_b)).$$

To znači da je $g(x,y) = g(fx,fy)$ za sve vektore $x,y$ iz L.

Pretpostavimo da $f^i/_L = f^i \ell /_L$ $(i < 2k)$ nije jedinični operator na L. Tada je $f/_L$ linearna transformacija na L sa minimalnim polinomom $x^{2k}-1= 0$.(Znamo da je $f^{2k}=1$ na L).

Polinom $(x^k-1)(x^k+1) = 0$ ima korene:

$$e^{\frac{\pi i}{k}}, e^{3\frac{\pi i}{k}}, \ldots, e^{(2k-1)\frac{\pi i}{k}}, e^{2\frac{\pi i}{k}}, e^{4\frac{\pi i}{k}}, \ldots, e^{2k\frac{\pi i}{k}}$$

Karakteristični vektori koji njima odgovaraju neka su $e_1, e_3, \ldots, e_{2k-1}, e_2, e_4, \ldots, e_{2k}$ respektivno. Označimo sa $L_2$ prostor koji je generisan vektorima $e_1, e_3, \ldots, e_{2k-1}$, a sa $L_1$ prostor generisan vektorima $e_2, e_4, \ldots, e_{2k}$.

$f^k=-1$ na $L_2$, $f^k= 1$ na $L_1$.

Za vektore $x \in L_1$ i $y \in L_2$ imamo:

$g(x,y) = g(fx,fy)= g(f^k x, f^k y) = g(x,-y) = -g(x,y)$,

što znači da su $L_1$ i $L_2$ ortogonalni u odnosu na metriku g.

Pretpostavimo da $f^j \neq 1$ na $L_1$, $j < k$ i $f^j \neq -1$ na $L_2$, $j < k$.

Tada je f linearna transformacija na $L_2$ sa minimalnim polinomom $x^k+1=0$, sa sopstvenim vrednostima $\sqrt[k]{-1}$, kojima odgovaraju karakteristični vektori $e_1', e_2', \ldots, e_k'$ i $L_2 = L_2^1 \oplus L_2^2 \oplus \oplus \ldots L_2^k$, gde je $L_2^j$ potprostor generisan vektorom $e_j'$, $j=1,2,\ldots,k$.

Takodje je f linearna transformacija na $L_1$ sa minimalnim polinomom $x^k-1 = 0$, sa sopstvenim vrednostima $\sqrt[k]{1}$, kojima odgovaraju karakteristični vektori $e_{k+1}'$, $e_{k+2}', \ldots, e_{2k}'$. Sada je $L_1 = L_1^{k+1} \oplus L_1^{k+2} \oplus \ldots \oplus L_1^{2k}$, gde je $L_1^{k+m}$ prostor generisan vektorom $e_{k+m}'$, $m= 1,\ldots,k$.

$L_1^{k+p}$ i $L_1^{k+r}$ su ortogonalni u odnosu na metriku g samo ako je $k=2^q$, $q \in N$, što se za takvo q može pokazati indukcijom.

U daljem tekstu je $k=2^q$, $q\in N$.

Pretpostavimo da je dimenzija prostora koji odgovara karakterističnoj vrednosti $e^{\pi i/k}$ jednaka s. Tada je $\dim L_2 = s+d=2p$, $\dim L_1 = r-d-s= r-2p$. Neka je $r=(q+1)2p$.

U radu [25] dokazana je ova teorema

Teorema 4.4. Ako je:

$$f^k=\begin{bmatrix} 0 & E_p \\ -E_p & 0 \end{bmatrix},$$

tada je $k\leq p$ i p je deljivo sa k, tj $p= sk$.

Takva je situacija u našem slučaju na prostoru $L_2$ ($d+s=2p$, $p= s\cdot 2^{q-1}$).

Neka je $u_1,\dots,u_{2p}$ ortogonalna baza u $L_2$, a $u_{2p+1},u_{2p+2},\dots,u_{r-2p}$ ortogonalna baza u $L_1$ u odnosu na metriku g, tada je $u_1,\dots,u_{2p},u_{2p+1},\dots,u_{r-2p}$ ortogonalna baza za L za koju je

$$\text{za } L_2:\ f(u_i)=u_{i+\frac{2p}{2^q}},\ f(u_{j+2p-\frac{2p}{2^q}}) = -u_j, \quad \begin{matrix} i=1,2,\dots,2p-2p/2^q \\ j=1,2,\dots,2p/2^q \end{matrix}$$

$$\text{za } L_1:\ \begin{cases} f(u_{2p+i})=u_{2p+i+\frac{2p}{2^{q-1}}},\ f(u_{4p+j-\frac{2p}{2^{q-1}}})=-u_{2p+j} & \begin{matrix} i=1,2,\dots,2p-2p/2^{q-1} \\ j=1,2,\dots,2p/2^{q-1} \end{matrix} \\ f(u_{4p+i})=u_{4p+i+\frac{2p}{2^{q-2}}},\ f(u_{6p+j-\frac{2p}{2^{q-2}}})=-u_{4p+j} & \begin{matrix} i=1,2,\dots,2p-2p/2^{q-2} \\ j=1,2,\dots,2p/2^{q-2} \end{matrix} \\ \vdots & \\ f(u_{2(p-1)q+i})=u_{2(p-1)q+i+p},\ f(u_{2pq-j})=-u_{2(p-1)q+j} & \begin{matrix} i=1,2,\dots,p \\ j=1,2,\dots,p \end{matrix} \\ f(u_{2qp+i})=u_{2pq+i},\ f(u_{2(q+1)p-i})=-u_{2p(q+1)-i} & i=1,2,\dots,p\ . \end{cases}$$

Neka je najzad $u_{r+1},\ldots,u_n$ ortogonalna baza u M u odnosu na g. Tada u odnosu na ortogonalni sistem $u_1,\ldots,u_n$ matrice tenzora $f_i^j$ i $g_{ji}$ imaju oblik

$$
(4.6.)\qquad f=\left.\begin{bmatrix}
0 & E_{2p-\frac{2p}{2^q}} & & & & & & & & \\
-E_{\frac{2p}{2^q}} & 0 & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & 0 & E_{2p-\frac{p}{2}} & & & & & \\
 & & & -E_{\frac{p}{2}} & 0 & & & & & \\
 & & & & & 0 & E_p & & & \\
 & & & & & -E_p & 0 & & & \\
 & & & & & & & E_p & 0 & \\
 & & & & & & & 0 & -E_p & \\
 & & & & & & & & & 0_{n-r}
\end{bmatrix}\right\} q+1
\qquad
g=\left.\begin{bmatrix}
E_{2p} & & & \\
 & \ddots & & \\
 & & E_{2p} & \\
 & & & E_{n-r}
\end{bmatrix}\right\} q+1
$$

Za takav koordinatni sistem kažemo da je adaptiran za f(2k+1,-1)-strukturu. Neka je $\bar{u}_1,\bar{u}_2,\ldots,\bar{u}_n$ drugi adaptirani sistem u odnosu na koji tenzori g i f imaju matrice oblika (4.6.). Ako stavimo $\bar{u}_i = \gamma_i^j u_j$, tada se može proveriti da $\gamma$ ima oblik:

$$
\gamma=\begin{bmatrix}
S_{(\frac{2p}{2^q})} & & & & & & & \\
 & S_{(\frac{2p}{2^{q-1}})} & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & S_{(\frac{p}{2})} & & & & \\
 & & & & A_p & B_p & & \\
 & & & & -B_p & A_p & & \\
 & & & & & & 0_{2p} & \\
 & & & & & & & 0_{n-r}
\end{bmatrix}
$$

gde je $S_{(\frac{2p}{i})}$, $i = 2,4,8,\ldots,2^q$, matrica oblika

$$S_{(\frac{2p}{i})} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & \ldots & A_i \\ -A_i & A_1 & A_2 & A_3 & \ldots & A_{i-1} \\ -A_{i-1} & -A_i & A_1 & A_2 & \ldots & A_{i-2} \\ \vdots & & & & & \\ -A_3 & -A_4 & -A_5 & & & A_2 \\ -A_2 & -A_3 & -A_4 & & \ldots & A_1 \end{bmatrix}$$

gde svaka matrica $A_t$, $t=1,\ldots,i$ ima format $s \times s$.

Neka je $\bar{S}_{(\frac{2p}{i})}$ grupa tangentnog snopa definisana matricama $S_{(\frac{2p}{i})}$.

Sad vidimo da se grupa tangentnog snopa mnogostrukosti može redukovati do grupe

$$\bar{S}_{(\frac{2p}{2^q})} \times \bar{S}_{(\frac{2p}{2^{q-1}})} \times \ldots \times \bar{S}_{(\frac{2p}{4})} \times U_{(p)} \times O_{(2p)} \times O_{(n-r)}$$

gde je U unitarna grupa, a O ortogonalna.

Teorema 4.5. Potreban i dovoljan uslov da se n-dimenzionalna mnogostrukost može snabdeti tenzorskim poljem $f \neq 0$, tipa $(1,1)$, klase $C^\infty$ i ranga r takvim da je $f^{2\cdot 2^q+1} - f = 0$, jeste da se grupa tangentnog snopa mnogostrukosti može redukovati do grupe

$$\bar{S}_{(\frac{2p}{2^q})} \times \bar{S}_{\frac{2p}{2^{q-1}}} \times \ldots \times \bar{S}_{(\frac{2p}{4})} \times U_p \times O_{2p} \times O_{n-r}\ .$$

i da je $r = (q+1)2p$ i da je $p = s\cdot 2^{q-1}$.

## 2.5. USLOVI INTEGRABILNOSTI STRUKTURE $f(2K+1,-1)$

Na osnovu teoreme 4.2. i 4.3. $f^k$ zadovoljava relaciju $f^{3k}-f^k=0$. Operatori projekcije od $f^k$ su $\ell = f^{2k}$ i $m = 1-f^{2k}$. Oni su isti kao i operatori projekcije za f.

Ako obrazujemo Nijenhuisov tenzor za strukturu f

$$N(X,Y) = [f,f](X,Y) = [fX,fY] - f[fX,Y] - f[X,fY] + f^2[X,Y]. \tag{5.1.}$$

Vidimo da je:

$$[f^k,f^k](X,Y) = [f,f](X,Y)$$

samo za X,Y iz distribucije M i sopstvenog potprostora $L_1^{2k}$ iz prethodnog odeljka.

Koristeći (5.1.) i teoreme 4.1. i 4.2. može se N(X,Y) napisati u obliku

$$N(X,Y) = \ell N(\ell X, \ell Y) + mN(\ell X, \ell Y) + N(\ell X,mY) + N(mX, \ell Y) + N(mX,mY). \tag{5.2.}$$

Može se pokazati da za f(2k+1,-1)-strukturu važi:

a) $N(mX,mY) = \ell N(mX,mY) = \ell [mX,mY]$
jer je $[f^k,f^k](X,Y) = [f,f](X,Y)$ na M,

b) $mN(X,Y) = m[fX,fY]$,

c) $mN(\ell X, \ell Y) = m[fX,fY]$,

d) $mN(f^{2k-1}X,f^{2k-1}Y) = m[\ell X, \ell Y]$.

Korišćenjem teorema 4.1. i 4.2. može se takodje pokazati da je:

$$N(\ell X,\ell Y)=0 \Leftrightarrow N(f^{2k-1}X,f^{2k-1}Y)=0 .$$

Teorema 5.1. Sledeći uslovi su ekvivalentni:

$C_1$: $mN(X,Y) = 0$,
$C_2$: $mN(\ell X, \ell Y) = 0$,
$C_3$: $mN(f^{2k-1}X, f^{2k-1}Y) = 0$.

Liov izvod $\mathcal{L}_Y f$ tenzorskog polja f u pravcu vektora Y je, po definiciji polje istog tipa kao f dato sa

$$(\mathcal{L}_Y f)X = f[X,Y] - [fX,Y].$$

Može se proveriti da je:

$$N(\ell X, mY) = f(\mathcal{L}_{mY} f)\ell X = f\{\ell(\mathcal{L}_{mY} f)\ell X\},$$

$$f^{2k-1}N(\ell X, mY) = \ell(\mathcal{L}_{mY} f)\ell X \quad \text{ili}$$

$$\ell N(\ell X, mY) = f(\mathcal{L}_{mY} f)\ell X.$$

USLOVI INTEGRABILNOSTI. Poznato je da je distribucija M integrabilna ako i samo ako je involutivna, tj. ako i samo ako je $\ell[mX,mY] = 0$ za svako X,Y. Koristeći a) imamo:

Teorema 5.2. Potreban i dovoljan uslov da distribucija M bude integrabilna jeste da je $N(mX,mY) = 0$, ili ekvivalentno $\ell N(mX,mY) = 0$ za svako X,Y.

Distribucija L je integrabilna ako i samo ako je $m[\ell X, \ell Y] = 0$. Koristeći uslov d) imamo:

Teorema 5.3. Potreban i dovoljan uslov da distribucija L bude integrabilna jeste da je ispunjen jedan od uslova $C_1, C_2, C_3$.

Kako je $\ell + m = 1$, Nijenhuisov tenzor $N(X,Y)$ se može napisati u obliku (5.2.).

Teorema 5.4. Potreban i dovoljan uslov da distribucije L i M budu integrabilne jeste da je:

$$N(X,Y) = \ell N(\ell X, \ell Y) + N(\ell X, mY) + N(mX, \ell Y)$$

za svako X,Y.

Pretpostavimo da je distribucija L integrabilna, tada f indukuje na svakoj integrabilnoj mnogostrukosti strukturu f\`koja ispunjava uslov $(f`)^{2k} = I$. Nijenhuisov tenzor te strukture je $N(\ell X, \ell Y)$.

Definicija 5.1. Ako je distribucija L integrabilna i ako je struktura $f` = f/_{L}$ na svakoj integrabilnoj podmnogostrukosti od L integrabilna, kažemo da je f(2k+1,-1)-struktura parcijalno integrabilna.

Kako su uslovi $N(\ell X, \ell Y) = 0$ i $N(f^{2k-1}X, f^{2k-1}Y) = 0$ ekvivalentni, korišćenjem teoreme 5.3. imamo

Teorema 5.5. Potreban i dovoljan uslov da f(2k+1,-1)-struktura bude parcijalno integrabilna jeste da je ispunjen jedan od ekvivalentnih uslova:

$$N(\ell X, \ell Y) = 0 \quad \text{ili} \quad N(f^{2k-1}X, f^{2k-1}Y) = 0$$

za svako X,Y.

Teorema 5.6. Potreban i dovoljan uslov da M bude integrabilna mnogostrukost, a f(2k+1,-1)-struktura parcijalno integrabilna jeste da je:

$$N(X,Y) = N(\ell X, mY) + N(mX, \ell Y) \quad \text{za svako } X,Y.$$

Teorema 5.7. Tenzor $\ell(\mathcal{L}_{mY}f)\ell$ identički je jednak nuli za svako vektorsko polje Y, ako i samo ako je

$$N(\ell X, mY) = 0 \quad \text{za svako } X,Y.$$

Pretpostavimo da su distribucije L i M integrabilne. Tada se može izabrati koordinatni sistem takav da se integralne mnogostrukosti za L dobijaju stavljanjem n-r koordinata za konstante, a integralne mnogostrukosti za M stavljanjem ostalih r koordinata za konstante. Takav koordinatni sistem je adaptiran koordinatni sistem. U odnosu na njega $\ell$ i m imaju oblik:

$$\ell = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$$

gde je I jedinična matrica.

Kako f ispunjava uslove (4.1.) i (4.2.), f ima komponente

(5.3.) $$f = \begin{bmatrix} f_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

u adaptiranom koordinatnom sistemu, tj. kao u (4.6.)

Za svaki vektor mY iz M Li-ov izvod $\mathcal{L}_{mY}f$ ima komponente

$$\mathcal{L}_{mY}f = \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ako pretpostavimo da je tenzor $\ell(\mathcal{L}_{mY}f)\ell$ identički jednak nuli za svako Y, tada je $\mathcal{L}_{mY}f = 0$, što znači da su komponente od f u adaptiranom koordinatnom sistemu nezavisne od koordinata koje su konstantne duž integrabilnih podmnogostrukosti distribucije L.

Obrnuto, ako su komponente od f nezavisne od tih koordinata, tada je $\ell(\mathcal{L}_{mY}f)\ell = 0$ za svako X,Y i imamo:

Teorema 5.8. Pretpostavimo da su L i M integrabilne distribucije i da je izabran adaptiran koordinatni sistem . Potreban i dovoljan uslov da komponente od f ne zavise od koordinata koje su konstantne duž integralnih mnogostrukosti od L jeste da je

$$N(\ell X, mY) = 0 \quad \text{za svako } X, Y.$$

Teorema 5.9. Pretpostavimo da su L i M integrabilne distribucije i da je izabran adaptiran koordinatni sistem. Komponente od f ne zavise od koordinata koje su konstantne duž integralnih mnogostrukosti od L ako i samo ako je:

$$N(X,Y) = \ell N(\ell X, \ell Y) \quad \text{za svako } X, Y.$$

Definicija 5.2. Pretpostavimao da je $f(2k+1,-1)$-struktura

a) parcijalno integrabilna,
   $(N(X,Y)=N(\ell X, mY) + N(mX, \ell Y) + N(mX,mY))$

b) distribucija M je integrabilna
   $(N(mX,mY) = 0)$

c) komponente strukture f u adaptiranom sistemu ne zavise od koordinata koje su konstantne duž integralnih mnogostrukosti od L.

Tada kažemo da je $f(2k+1,-1)$-struktura integrabilna.

Teorema 5.10. Potreban i dovoljan uslov da $f(2k+1,-1)$-struktura bude integrabilna jeste da je $N(X,Y)= 0$, za svako $X, Y$.

Kada je $f(2k+1,-1)$-struktura integrabilna, kompnente od f imaju oblik (5.3.) u adaptiranom koordinatnom sistemu i $f_r$ je matrica čiji elementi su funkcije nezavisne od koordinata koje su konstantne duž integralnih mnogostrukosti od L. $f_r$ definiše na integralnoj mnogostrukosti od L strukturu koja ispunjava uslov $f_r^{2k}=1$.

U prethodnom odeljku je pokazano da adaptirani koordinatni sistem možemo izabrati tako da $f_r$ ima oblik kao u (2.6.)

Teorema 5.11. Potreban i dovoljan uslov da

$f(2k+1,-1)$-struktura bude integrabilna jeste da postoji koordinatni sistem u odnosu na koji su komponente od $f$ iz (4.6.) konstantne.

## 2.6. STRUKTURA SATO INDUKOVANA NA HIPERPOVRŠI PROSTORA KOJI JE SNABDEVEN $f(2k+1,-1)$-STRUKTUROM

Neka je u daljem tekstu za strukturu $f(2k+1,-1)$ $k = 2,4,8,\dots,2^q$, $q \in N$. Neka je rang $f = n-2$. Tada je dimenzija prostora $M$ jednaka 2. Koristeći rezultate odeljka 4. vidimo da je:

$$f^k = \left[\begin{array}{ccccccc} -E_p & & & & & & \\ & -E_p & & & & 0 & \\ & & E_{2p} & & & & \\ & & & E_{2p} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & E_{2p} & \\ & & & & & & 0_1 \\ & & & & & & & 0_1 \end{array}\right] \Bigg\}\, q+1 \qquad f^{2k} = \left[\begin{array}{cccccc} E_p & & & & & \\ & E_p & & 0 & & \\ & & E_{2p} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & E_{2p} & \\ & & & & & 0_1 \\ & & & & & & 0_1 \end{array}\right]$$

$$m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \qquad \phi = -(m+f^k) = \begin{bmatrix} E_{2p} & & & 0 \\ & -E_{2pq} & & \\ 0 & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

Teorema 6.1. $\phi$ je skoro produkt struktura na $\mathcal{M}^n$. (Videti teoreme 4.2. i 4.3.)

Teorema 6.2. Skoro produkt struktura $\phi$ indukuje na hiperpovrši $\mathcal{D}$ strukturu Sato $\Psi$ na sledeći način:

$$\phi B = B\Psi \oplus (\eta \otimes N)\ , \qquad \phi N = B\xi ,$$

gde je $B$ diferencijal potapanja $\mathcal{D}$ u $\mathcal{M}^n$, $N$ je pseudonormala hiperpovrši $\mathcal{P}$ .

Teorema 6.3. Struktura $-f^{k}/_{\mathcal{P}} = \bar{\varphi}$ je struktura Sato.

Teorema 6.4. $\bar{\varphi}$ je skoro parakontaktna Rimanova struktura.

Dokaz obe teoreme: Neka su $\bar{m}$ i $\bar{g}$ restrikcije tenzora m i g na $\mathcal{P}$ i neka je

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}\right\} n-1, \qquad \eta = \underbrace{(0,0,\dots,0,1)}_{n-1}.$$

$\bar{\varphi}$ , $\bar{m}$ i $\bar{g}$ imaju matrice oblika:

$$\bar{\varphi} = \begin{bmatrix} E_p & & & & & \\ & E_p & & & & \\ & & -E_{2p} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -E_{2p} & \\ & & & & & 0_1 \end{bmatrix} \quad \bar{m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{g} = \left.\begin{bmatrix} E_{2p} & & & \\ & \ddots & & \\ & & E_{2p} & \\ & & & 1 \end{bmatrix}\right\} q+1$$

Množenjem odgovarajućih matrica dobijamo

$$\bar{m} = \xi \otimes \eta \;, \quad \bar{\varphi}^2 = f^{2k}/_{\mathcal{P}} = 1-\bar{m} = 1-\xi \otimes \eta \;, \quad \bar{\varphi}\xi = 0,$$

$$\eta\bar{\varphi} = 0, \quad \xi(\eta) = 1, \quad \eta(X) = \bar{g}(\xi, X),$$

$$\bar{g}(\bar{\varphi}X, \bar{\varphi}Y) = \bar{g}(X,Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

što dokazuje teoreme 6.3. i 6.4.

Teorema 6.5. Skoro produkt struktura $\phi = -(m+f^{k})$ indukuje na $\mathcal{P}$ strukturu Sato $\psi$ i više od toga skoro parakontaktnu Rimanovu strukturu $(\psi, \xi, \eta, g)$.

Mi ćemo ispitati pod kojim uslovima će struktura $\psi$ indukovana sa $\phi$ biti baš jednaka strukturi $\bar{\varphi}$ . To zavisi od izbora hiprepovrši.

Neka je $\mathcal{P}$ hiperpovrš sa pseudonormalom

$$N = \begin{bmatrix} o \\ o \\ \vdots \\ o \\ -1 \\ o \end{bmatrix} .$$

Teorema 6.6. Skoro produkt struktura $\phi = -(m+f^k)$ indukuje na $\mathcal{D}$ baš strukturu Sato $\bar{\varphi}$.

Dokaz: Dokazaćemo relaciju

$\phi B = B\bar{\varphi} \oplus (\eta \otimes N)$ i $\phi N = B\xi$ na $\mathcal{D}$.

$\phi N = B\xi$ jer je:

$$\phi = \begin{bmatrix} E_p & & & & & & \\ & E_p & & & 0 & & \\ & & -E_{2p} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & -E_{2p} & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

Za dokaz relacije $\phi B = B\bar{\varphi} \oplus (\eta \otimes N)$ na $\mathcal{D}$ dokazaćemo $BX = \phi B(\bar{\varphi} X) + \eta(X) + \phi N$ za proizvoljan vektor $X$ iz $T(\mathcal{D})$.

$$BX = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2p} \\ y_{2p+1} \\ \vdots \\ y_{(q+1)2p} \\ z_1 \\ o \end{bmatrix}, \quad \phi B(\bar{\varphi} X) + \eta(X)\,\phi N = \phi \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2p} \\ -y_{2p+1} \\ \vdots \\ -y_{(q+1)2p} \\ o \\ o \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} o \\ o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ o \\ 1 \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2p} \\ y_{2p+1} \\ \vdots \\ y_{(q+1)2p} \\ z_1 \\ o \end{bmatrix}$$

što dokazuje teoremu.

Neka druga skoro produkt struktura npr. $\phi' = 2f^{2k}-1$ indukuje na $\mathcal{D}$ strukturu Sato $\psi$: $\psi$ će biti jednaka sa $\bar{\varphi}$ na nekom drugom prostoru $\mathcal{D}^*$. Može se pokazati da vektori iz $T(\mathcal{D}^*)$ imaju oblik

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{2p} \\ o_{2p+1} \\ \vdots \\ o_{(q+1)2p} \\ z_1 \end{bmatrix}$$

Teorema 6.7. Skoro produkt struktura $\phi' = 2f^{2k} - 1$ indukuje na $\mathcal{P}^*$ strukturu Sato $\bar{\varphi}$.

Dokaz je potpuno analogan dokazu teoreme 3.8..

# GLAVA 3.

## UOPŠTENJE STRUKTURE $\varphi^4 \pm \varphi^2 = 0$ I POTPROSTORI U PROSTORIMA SA TAKVOM STRUKTUROM

## 3.1. O STRUKTURI KOJA JE DEFINISANA TENZORSKIM POLJEM TIPA (1,1) KOJE ISPUNJAVA USLOV $\varphi^4 \pm \varphi^2 = 0$

Ovu strukturu uveli su Yano, Houh i Chen u radu [65], a uslove integrabilnosti i neke osobine ove strukture ispitivali su Cadea i Cordero [14],[15], [34].

Neka je na n-dimenzionalnoj mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ klase $C^\infty$ dato tenzorsko polje $\varphi \neq 0$ tipa (1,1), klase $C^\infty$ takvo da je n=2m i

$$(1.1.) \qquad \varphi^4 + \varphi^2 = 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{rang} \varphi = \tfrac{1}{2}(\operatorname{rang} \varphi^2 + \dim \mathcal{M}^n).$$

Teorema 1.1. Za tenzorsko polje $\varphi \neq 0$, koje ispunjava uslov (1,1), operatori

$$(1.2.) \qquad \ell = -\varphi^2 , \qquad m = \varphi^2 + 1$$

čine, primenjeni na tangentni prostor u nekoj tački mnogostrukosti, komplementarne operatore projekcije.

Dokaz: Korišćenjem (1.1) i (1.2.) lako se proveri da je $\ell^2 = \ell$, $m^2 = m$, $\ell + m = 1$, $m\ell = \ell m = 0$.

Neka su L i M komplementarne distribucije koje odgovaraju operatorima $\ell$ i m respektivno. Ako $\varphi$ ima konstantan rang r, tada je dim L = 2r-n, dim M = 2n-2r. Takva struktura zove se $\varphi$(4,2)-struktura ranga r. Uvek je $n \leq 2r \leq 2n$.

Teorema 1.2. Za strukturu $\varphi$ koja ispunjava uslov (1.1) i za $\ell$ i m definisane sa (1.2.) imamo:

$$\varphi\ell = \ell\varphi = -\varphi^3 \qquad \varphi m = m\varphi = \varphi^3 + \varphi$$

$$\varphi^2\ell = -\ell^2 = -\ell \qquad \varphi^2 m = m\varphi^2 = 0$$

tj. $\varphi$ deluje na L kao skoro kompleksna struktura, a na M kao skoro tangentna struktura [55].

U radu [65] je uveden adaptirani koordinatni sistem za ovu strukturu i dokazane su teoreme (1.3) i (1.4.).

Teorema 1.3. Ako je na n-dimenzionalnoj mnogostrukosti data $\varphi(4,2)$-struktura ranga r, tada postoje komplementarne distribucije L dimenzije 2r-n i $M_1$ i $M_2$ obe dimenzije n-r i pozitivno definitna Rimanova metrika g u odnosu na koju su L, $M_1$ i $M_2$ uzajamno ortogonalne i važi:

i) $g(X,Y) = g(\varphi X, \varphi Y)$ za $X,Y \in L$, što znači da je restrikcija g na L skoro Hermitska metrika u odnosu na $\varphi$ i

ii) $\varphi$ preslikava ortonormiranu bazu iz $M_2$ u ortonormiranu bazu u $M_1$.

U odnosu na adaptirani koordinatni sistem matrice tenzora $g_{ji}$ i $\varphi_j^i$ imaju, redom, oblik:

$$g = \begin{bmatrix} E_{r-m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{r-m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-r} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & E_{r-m} & 0 & 0 \\ -E_{r-m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-r} & 0 \end{bmatrix} = \varphi$$

a matrica prelaza $\gamma$ iz jednog adaptiranog sistema u drugi ima oblik:

$$\gamma = \begin{bmatrix} A_{r-m} & B_{r-m} & 0 & 0 \\ -B_{r-m} & A_{r-m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{n-r} \end{bmatrix}$$

gde $A,B \in Gl(r-m,R)$, a matrica $C \in O(n-r)$.

Teorema 1.4. Potreban i dovoljan uslov da se n-dimenzionalna mnogostrukost može snabdeti tenzorskim poljem $\varphi \neq 0$ tipa (1,1) koje ispunjava uslov (1.1), je da se grupa tangentnog snopa može redukovati do

$$U(r-m) \times O(n-r) \times O(n-r),$$

gde su $U(r-m)$ i $O(n-r)$ unitarna i ortogonalna grupa odgovarajućih dimenzija.

Analogan postupak se sprovede u slučaju tenzorskog polja $\varphi \neq 0$ klase $C^{\infty}$, tipa (1,1) koje ispunjava uslov

$$\varphi^4 - \varphi^2 = 0.$$

Ako je rang $\varphi = r$ konstantan, ova struktura se zove $\varphi(4,-2)$-struktura ranga r. Disjunktni operatori projekcije su sada

$$\ell = \varphi^2 \quad \text{i} \quad m = 1 - \varphi^2 .$$

Teorema 1.5. Ako je na $\mathcal{M}^n$ data $\varphi(4,-2)$-struktura, tada $\mathcal{M}^n$ dopušta skoro produkt strukturu $\phi = 2\varphi^2 - 1$.

Ako su L i M kompementarne distribucije koje odgovaraju operatorima $\ell$ i m respektivno, tada $\varphi$ deluje na L kao skoro produkt struktura, a na M kao skoro tangentna struktura. Dim M = 2(n-r) je parna, dimL= 2r-n i ne mora biti parna.

U odnosu na adaptirani koordinatni sistem za strukturu $\varphi(4,-2)$ matrice tenzora $g_{ij}$ i $\varphi_i^j$ imaju oblik:

$$(1.3.)\quad g=\begin{bmatrix} E_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{2r-n-h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-r} \end{bmatrix} \quad \varphi=\begin{bmatrix} E_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_{2r-n-h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-r} & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica prelaza $\gamma$ iz jednog adaptiranog repera u drugi ima oblik:

$$\gamma=\begin{bmatrix} A_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{2r-n-h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{n-r} \end{bmatrix},$$

pa možemo formulisati sledeću teoremu:

Teorema 1.6. Potreban i dovoljan uslov da se n-dimenzionalna mnogostrukost može snabdeti tenzorskim poljem $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq 1$ tipa (1,1) koje definiše $\varphi(4,-2)$-strukturu, jeste da se grupa tangentnog snopa mnogostrukosti može redukovati do grupe

$$O(h) \times O(2r-n-h) \times O(n-r) \times O(n-r).$$

## 3.2. O STRUKTURI $\varphi$ KOJA ISPUNJAVA USLOV $(\varphi^2+1)\cdot(\varphi^2-a)=0$ I STRUKTURA NA POTPROSTORIMA L I M

Rezultati iz ovog poglavlja objavljeni su u [67].

Definicija 2.1. Neka je na n-dimenzionalnoj mnogostrukosti klase $C^\infty$ dato tenzorsko polje $\varphi$, $\varphi^2 \neq 0$,

$\varphi^2 \neq -1$, tipa ( 1,1), klase $C^\infty$ takvo da je $n = 2m$ i važi:

(2.1.) $$(\varphi^2 + 1)(\varphi^2 - a) = 0\,, \qquad a \in R^+,\ a \neq 1$$

Za diferencijabilnu mnogostrukost koja ispunjava uslov (2.1), kažemo da je snabdevena $\varphi(1,a)$-strukturom.

Neka je

(2.2.) $$\ell = \frac{\varphi^2 - a}{-1-a}\,, \qquad m = \frac{\varphi^2 + 1}{a + 1}\,,$$

tada su $\ell$ i m komplementarni operatori projekcije od $\varphi$, jer je $m^2 = m$, $\ell^2 = \ell$ , $\ell m = m\ell = 0$, $\ell + m = 1$, što se lako proverava.

Teorema 2.1. Neka $\varphi$ ispunjava uslov (2.1.) i neka su $\ell$ i m definisani uslovom (2.2.), tada imamo:

$$\varphi\ell = \frac{\varphi^3 - \varphi a}{-1-a} \qquad \varphi m = \frac{\varphi^3 + \varphi}{a+1}$$

$$\varphi^2\ell = \frac{-\varphi^2 + a\varphi^2 + a - a\varphi^2}{-1-a} = -\ell,$$

$$\varphi^2 m = \frac{\varphi^4 + \varphi^2}{1+a} = \frac{\varphi^2 + a\varphi^2 + a - \varphi^2}{a+1} = am.$$

Neka su L i M distribucije koje odgovaraju operatorima $\ell$ i m respektivno. Tada zbog (2.2.), $\varphi$ deluje na L kao skoro kompleksna struktura, a na M kao struktura čiji je kvadrat homotetija sa koeficijentom homotetije a. Ako $\ell$ ima konstantan rang r, tada je dim L = r ,dim M = = n-r. Uvek je $0 \leq r \leq n$ .

Napomena 2.1. Ako je rang preslikavanja $\varphi^2 - a$ maksimalan r=n, tada je $\varphi^2 + 1 = 0$, što znači da je $\varphi(1,a)$-struktura maksimalnog ranga skoro kompleksna struktura.

Napomena 2.2. Ako je rang preslikavanja $\varphi^2$-a minimalan, $r = 0$, tada je $\varphi^2 - a = 0$. $\varphi(1,a)$-struktura minimalnog ranga je struktura čiji je kvadrat homotetija sa koeficijentom homotetije a.

Sada ćemo ispitati pod kojim se uslovima diferencijabilna mnogostrukost može snabdeti $\varphi(1,a)$-strukturom.

Prvo na mnogostrukost uvedemo koordinatni sistem i označimo sa $\varphi_i^j$, $\ell_i^j$, $m_i^j$, lokalne koordinate tenzora $\varphi$, $\ell$ i m respektivno. Zatim uvedimo pozitivno definitnu Rimanovu metriku i izaberimo r uzajamno normalnih jediničnih vektora $v_a^i$ $(a,b,c,\ldots = 1,2,\ldots, r)$ u L i n-r uzajamno normalnih jediničnih vektora $v_A^j$ $(A,B,C,\ldots = r+1,\ldots,n)$ u M.

Tada imamo:

$$\ell_i^j v_b^i = v_b^j \qquad \ell_i^j v_B^i = 0$$
$$m_i^j v_b^i = 0 \qquad m_i^j v_B^i = v_B^j . \tag{2.3.}$$

Ako označimo sa $(s_i^a, s_i^A)$ matricu inverznu matrici $(v_b^j, v_B^j)$, tada su $s_i^a$ i $s_i^A$ komponente linearno nezavisnih kovarijantnih vektora i ispunjavaju relacije:

$$s_i^a v_b^i = \delta_b^a \qquad s_i^a v_B^i = 0$$
$$s_i^A v_b^i = 0 \qquad s_i^A v_B^i = \delta_B^A \tag{2.4.}$$

$$s_i^a v_a^j + s_i^A v_A^j = \delta_i^j . \tag{2.5.}$$

Ako stavimo:

$$p_{ki} = \sum_a s_k^a s_i^a + \sum_A s_k^A s_i^A , \tag{2,6.}$$

$p_{ki}$ je globalna pozitivno definitna Rimanova metrika u odnosu na koju ( $v_b^j$ , $v_B^j$ ) čini ortogonalni reper takav da je:

$$s_k^a = p_{ki}\, v_a^i \qquad s_k^A = p_{ki}\, v_A^i \,.$$

Iz (2.3.) i (2.4.) nalazimo da je

$$( \ell_i^j s_j^a )\, v_b^i = \delta_b^a \,, \quad ( \ell_i^j\, s_j^a )\, v_B^i = 0$$

$$( m_i^j\, s_j^A )\, v_b^i = 0 \,, \quad ( m_i^j\, s_j^A )\, v_B^i = \delta_B^A$$

što daje

$$\ell_i^j\, s_j^a = s_i^a \,, \qquad m_i^j\, s_j^A = s_i^A$$

(2.7.)

$$m_i^j\, s_j^a = 0 \,, \qquad \ell_i^j\, s_j^A = 0 \,.$$

S druge strane iz $\ell_i^j\, v_a^i = v_a^j$, nalazimo da je

$$\ell_k^j\, s_i^a\, v_a^k = s_i^a\, v_a^j \,, \qquad \ell_k^j (\delta_i^k - s_i^A\, v_A^k ) = s_i^a\, v_a^j$$

što znači da je

$$\ell_i^j = s_i^a\, v_a^j. \tag{2.8.}$$

Na kraju imamo:

$$m_i^j = s_i^B\, v_B^j \,. \tag{2.9.}$$

Ako stavimo

$$\ell_{ki} = \ell_k^r p_{ri} \,, \qquad m_{ki} = m_k^r\, p_{ri} \,,$$

nalazimo korišćenjem (2.8.), (2.9.) i (2.6.) da je

$$\ell_{ki} = \sum_a s_k^a\, s_i^a \,, \qquad m_{ki} = \sum_A s_k^A\, s_i^A, \tag{2.1o.}$$

$$\ell_{ki} = \ell_{ik} \,, \; m_{ki} = m_{ik} \,, \; \ell_{ik} + m_{ik} = p_{ik}. \tag{2.11.}$$

Takodje lako možemo proveriti da je

$$\ell^r_k \ell^q_i p_{rq} = \ell_{ki}, \qquad \ell^r_k m^q_i p_{rq} = 0,$$

(2.12.)

$$m^r_k m^q_i p_{rq} = m_{ki}.$$

Za proizvoljna dva vektora X,Y sa komponentama $x^i, y^i$, stavimo

(2.13.) $$m^*(X,Y) = m_{rq}\, x^r y^q, \qquad p(X,Y) = p_{rq}\, x^r y^q,$$

(2.14.) $$\bar{g}(X,Y) = \frac{1}{2}(p(X,Y) + p(\varphi X, \varphi Y) + m^*(X,Y)).$$

tada imamo:

$$m^*(v_A, v_a) = p(v_A, v_a) = 0$$

$$\bar{g}(v_A, v_a) = \frac{1}{2}(p(v_A, v_a) + p(\varphi v_A, \varphi v_a) +$$

$$+ m^*(v_A, v_a)) = 0 .$$

Znači, L i M su ortogonalni u odnosu na metriku $\bar{g}$. Korišćenjem (2.lo.) i (2.12.) nalazimo:

$$p(\varphi v_a, \varphi v_b) = \ell_{rq} \varphi^r_h \varphi^q_j v^h_a v^j_b$$

$$p(\varphi v_a, \varphi v_b) + m^*(\varphi v_a, \varphi v_b) = p_{rq} \varphi^r_h \varphi^q_j v^h_a v^j_b,$$

$$p(\varphi^2 v_a, \varphi^2 v_b) = p_{rq} v^r_a v^q_b.$$

Ove tri relacije nam daju sledeći rezultat:

(2.15.) $$\bar{g}(\varphi X, \varphi Y) = \bar{g}(X,Y) \quad \text{za sve } X,Y \text{ iz } L.$$

Neka je $M_1$ potprostor za koji je za $X \in M_1$, $\varphi(X) = \sqrt{a}\, X$ i neka je dim $M_1 = h$. Neka je $M_2$ potprostor za koji je $\varphi(X) = -\sqrt{a}\, X$. Tada je dim $M_2 = n-r-h$. Izaberimo ortonormiranu bazu $u_{r+1},\dots,u_{r+h}$ u $M_1$ i ortonormiranu bazu $u_{r+h+1},\dots,u_n$ u odnosu na $\bar{g}$ u $M_2$. Osim toga, neka je $e_1,\dots$ $\dots,e_r$ ortonormirana baza u L u odnosu na $\bar{g}$. Korišćenjem metrike $\bar{g}$, možemo definisati Rimanovu metriku g u $\mathcal{M}^n$ na sledeći način:

$$g(e_i\,,\, e_k) = \bar{g}(e_i\,,\, e_k), \quad g(e_i\,,u_\alpha)=\bar{g}(e_i\,,u_\alpha)$$

$$g(u_\alpha,\, u_\beta) = \bar{g}(u_\alpha,\, u_\beta) \quad ,\ g(e_i,\, \varphi(u_\alpha))=\bar{g}(e_i,\varphi(u_\alpha))$$

ako su $u_\alpha$ i $u_\beta$ ili u $M_1$ ili u $M_2$. Ako $u_\alpha \in M_1$, $u_\beta \in M_2$, tada je $g(u_\alpha\,,u_\beta) = 0$ . $g(\varphi(u_\alpha),\, \varphi(u_\beta)) = a\delta_{\alpha\beta}$ za $u_\alpha$ i $u_\beta$ koji su ili u $M_1$ ili u $M_2$.

Metrika g je dobro definisana, jer ako je $\bar{u}_{r+1},\dots,\bar{u}_n$ druga ortonormirana baza u M tada za $\bar{u}_\alpha = z_\alpha^\beta u_\beta$, imamo:

$$\delta_{\alpha\gamma} = \bar{g}(\bar{u}_\alpha,\bar{u}_\gamma) = \bar{g}(z_\alpha^\beta u_\beta,\, z_\gamma^\varepsilon u_\varepsilon) =$$

$$= z_\alpha^\beta z_\gamma^\varepsilon \delta_{\beta\varepsilon} = z_\alpha^\beta z_\gamma^\beta$$

i

$$g(\varphi(\bar{u}_\alpha),\, \varphi(\bar{u}_\gamma)) = g(z_\alpha^\beta \varphi(u_\beta), z_\gamma^\varepsilon \varphi(u_\varepsilon)) =$$

$$= z_\alpha^\beta z_\gamma^\varepsilon g(\varphi(u_\beta),\, \varphi(u_\varepsilon)) = a z_\alpha^\beta z_\gamma^\beta = a\,\delta_{\alpha\beta}$$

ako $\bar{u}_\alpha$ i $\bar{u}_\beta$ pripadaju ili prostoru $M_1$ ili $M_2$.
To znači da je g metrika u odnodu na koju su L, $M_1$ i $M_2$ uzajamno normalni i

$$g(\varphi X,\, \varphi Y) = g(X,Y) \qquad \text{za } X,Y \in L,$$

$$g(\varphi X,\, \varphi Y) = a\, g(X,Y) \qquad \text{za } X,Y \in M.$$

Teorema 2.1. Ako je na n-dimenzionalnoj mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ data $\varphi(1,a)$-struktura i ako je rang $\varphi^2 - a = r$, (r=2m) tada postoje komplementarne distribucije L dimenzije r i M dimenzije n-r i postoji pozitivno definitna Rimanova metrika g u odnosu na koju su L i M ortogonalne i važi

$$g(X,Y) = g(\varphi X, \varphi Y) \qquad \text{za } X,Y \in L,$$
$$a \cdot g(X,Y) = g(\varphi X, \varphi Y) \qquad \text{za } X,Y \in M.$$

Neka je vektor e u distribuciji L. Tada je vektor $\varphi(e)$ takodje u L i ortogonalan je na e i šta više, ima istu dužinu u odnosu na metriku g. Neka je $L_1$ potpros - tor u L koji odgovara karakterističnoj vrednosti i, a $L_2$ potprostor koji odgovara karakterističnoj vrednosti -i. Sada je:

$$\varphi(e_1)= e_{\frac{r}{2}+1},\quad \varphi(e_2)= e_{\frac{r}{2}+2},\dots,\quad \varphi(e_{\frac{r}{2}})= e_r$$
$$\varphi(e_{\frac{r}{2}+1})= -e_1,\quad \varphi(e_{\frac{r}{2}+2})= -e_2,\dots,\quad \varphi(e_r)= -e_{\frac{r}{2}}.$$

Izaberimo u M ortonormiranu bazu $e_{r+1},\dots,e_n$, takvu da su $e_{r+1},\dots,e_{r+h}$ u $M_1$ i da su $e_{r+h+1},\dots,e_n$ u $M_2$. Sada je

$$\varphi(e_{r+1})= \sqrt{a}e_{r+1},\quad \dots\quad ,\quad \varphi(e_{r+h})= \sqrt{a}e_{r+h},$$
$$\varphi(e_{r+h+1})=-\sqrt{a}e_{r+h+1},\dots,\quad \varphi(e_n)= -\sqrt{a}e_n.$$

Reper $\{e_1,\dots,e_n\}$ je adaptirani koordinatni sistem za $\varphi(1,a)$-strukturu i u odnosu na ovaj adaptirani reper matrice tenzora $g_{ij}$ i $\varphi^i_j$ imaju oblik:

$$(2.16.)\qquad g=\begin{bmatrix} E_{\frac{r}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{\frac{r}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n-r-h} \end{bmatrix} \qquad \varphi=\begin{bmatrix} 0 & E_{\frac{r}{2}} & 0 & 0 \\ -E_{\frac{r}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{a}\,E_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{a}E_{n-r-h} \end{bmatrix}$$

Neka je $\{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n\}$ drugi adaptirani reper u odnosu na koji g i $\varphi$ imaju iste komponente kao u (2.16.). Stavimo $\bar{e}_i = \gamma^j_i e_j$. Tada $\gamma$ ima oblik:

$$\gamma = \begin{bmatrix} A_{r/2} & B_{r/2} & 0 & 0 \\ -B_{r/2} & A_{r/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{n-r-h} \end{bmatrix}$$

gde $A, B \in Gl(r-\frac{n}{2}, R)$, $C \in O(h)$, $D \in O(n-r-h)$.

To znači da se grupa tangentnog snopa mnogostrukosti može redukovati do grupe $U(r/2) \times O(h) \times O(n-r-h)$

Obrnuto, ako se grupa tangentnog snopa može redukovati do grupe $U(r/2) \times O(h) \times O(n-r-h)$, tada možemo definisati pozitivno definitnu Rimanovu metriku $g$ i $\varphi(1,a)$-strukturu čije matrice imaju oblik kao u(2.16.) u odnosu na adaptirani reper. Tada je

$$\varphi^2 = \begin{bmatrix} -E_{r/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a\,E_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a\,E_{n-r-h} \end{bmatrix}$$

$$\varphi^4 = \begin{bmatrix} E_{r/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{r/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2E_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2E_{n-r-h} \end{bmatrix}$$

Vidi se da je $(\varphi^2+1)(\varphi^2-a) = 0$. Odatle sledi:

Teorema 2.2. Potreban i dovoljan uslov da se n-dimenzionalna mnogostrukost može snabdeti $\varphi(1,a)$-strukturom jeste da se grupa tangentnog snopa mnogostrukosti može redukovati do grupe $U(r/2) \times O(h) \times O(n-r-h)$. Ako se strukturna grupa tangentnog snopa redukuje do grupe

$U(r'-\frac{n}{2}) \times O(n-r') \times O(n-r')$, iz teoreme (1.4.) sledi da se mnogostrukost može snabdeti i $f(4,2)$-strukturom ranga $r'$. $L$ je potprostor na kome je $f^2 = -1$, a komplement tog prostora u $\mathcal{M}^n$ je $M$ i snabdeven je skoro tangentnom strukturom.

U teoremi (2.2.), $r$ i $h$ se mogu izabrati da bude $r/2 = r'-n/2$, $h=\frac{n-r}{2}$. Za takvo $r$ i $h$ sledi da kada se strukturna grupa tangentnog snopa redukuje do $U(r'-\frac{n}{2}) \times O(n-r') \times O(n-r')$, mnogostrukost se može snabdeti $\varphi(1,a)$-strukturom. $L$ je potprostor od $\mathcal{M}^n$ na kome je $\varphi^2 = -1$, a komplement $M$ prostora $L$ u $\mathcal{M}^n$, može se snabdeti strukturom čiji je kvadrat homoteija sa koeficijentom homotetije $a$.

Teorema 2.3. Ako se strukturna grupa tangentnog snopa mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ redukuje do $U(r'-\frac{n}{2}) \times O(n-r') \times O(n-r')$, gde je veza izmedju $r, r', n$ i $h$ data sa: $r/2 = r'-n/2$, $h=(n-r)/2$, tada $\mathcal{M}^n$ dopušta i $f(4,2)$-strukturu i $\varphi(1,a)$-strukturu. $L$ je prostor na kome je $\varphi^2 = f^2 = -1$. Komplement $M$ prostora $L$ u $\mathcal{M}^n$ može se snabdeti ili skoro tangentnom strukturom ($f^2/_M = 0$), ili strukturom čiji je kvadrat homotetija sa koeficijentom homotetije $a$ ( $\varphi^2/_M = aI$ ).

## 3.3. O STRUKTURI KOJA ISPUNJAVA USLOV $(\varphi^2 - 1)(\varphi^2 - a) = 0$ I STRUKTURA NA POTPROSTORIMA M I L

Rezultati iz ovog odeljka su objavljeni u [66].

Definicija 3.1. Neka je na n-dimenzionalnoj diferencijabilnoj mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ klase $C^\infty$ dato tenzorsko polje $\varphi$, $\varphi^2 \neq a$, $\varphi^2 \neq 1$, tipa (1,1) i klase $C^\infty$ koje ispunjava uslov

$$(\varphi^2 - 1)(\varphi^2 - a) = 0, \qquad a \in R^+,\ a \neq 1 \tag{3.1.}$$

Za diferencijabilnu mnogostrukost koja ispunjava takav uslov, kažemo da je snabdevena $\varphi(-1,a)$-strukturom.

Neka je

$$(3.2.)\qquad \ell = \frac{\varphi^2-a}{1-a} \qquad m = \frac{\varphi^2-1}{a-1},$$

tada $\ell$ i m predstavljaju komplementarne operatore projekcije, jer je $m^2 = m$, $\ell^2 = \ell$, $\ell m = m\ell = 0$, $\ell + m = 1$, ako važi (3.1.), što se lako proverava.

Teorema 3.1. Neka $\varphi$ ispunjava uslov (3.1.) i neka su $\ell$ i m definisani uslovom (3.2.). Tada imamo:

$$\varphi\ell = \frac{(\varphi^3 - \varphi a)}{1-a} \qquad \varphi m = \frac{\varphi^3 - \varphi}{a-1}$$

$$(3.3.)\qquad \varphi^2\ell = \frac{(\varphi^2 + a\varphi^2 - a - a\varphi^2)}{1-a} = \ell$$

$$\varphi^2 m = \frac{(\varphi^4 - \varphi^2)}{a-1} = \frac{(\varphi^2 + a\varphi^2 - a - \varphi^2)}{a-1} = am$$

Neka je $\phi = m - \ell = \frac{(2\varphi^2 - a - 1)}{a-1}$. Jasno je da $\phi \neq 1$, $\phi^2 = 1$.

Odatle imamo

Teorema 3.2. Ako je $M^n$ snabdevena sa $\varphi(-1,a)$-strukturom, tada je ona snabdevena i skoro produkt strukturom $\phi = (2\varphi^2 - a - 1)/(a-1)$

Neka su L i M komplementarne distribucije koje odgovaraju $\ell$ i m respektivno. Pretpostavimo da $\varphi/_L$ nije jedinični operator. Tada zbog (3.3.) $\varphi$ deluje na L kao skoro produkt struktura, a na M kao struktura za koju je $\varphi^2$ homotetija sa koeficijentom homotetije a. Neka je rang $\varphi^2 - a = r = const$. Tada je dim L=r, dim M= n-r.

Sada ćemo ispitati pod kojim se uslovima diferencijabilna mnogostrukost može snabdeti $\varphi(-1,a)$-strukturom. Označimo sa $\varphi_i^j$, $\ell_i^j$, $m_i^j$ lokalne koordinate tenzora $\varphi$, $\ell$, i $m$ respektivno u odnosu na lokalni koordinatni sistem mnogostrukosti. Uvedimo pozitivno definitnu Rimanovu metriku i izaberimo $r$ uzajamno normalnih jediničnih vektora $v_a^j$ $(a,b,c,\ldots = 1,2,\ldots, r)$ u $L$ i $n-r$ uzajamno normalnih jediničnih vektora $v_A^j$ $(A,B,C,\ldots = r+1,\ldots,\ldots, n)$ u $M$. Tada imamo:

$$(3.4.)\qquad \ell_i^j v_b^i = v_b^j, \qquad \ell_i^j v_B^i = 0,$$
$$m_i^j v_b^i = 0, \qquad m_i^j v_B^i = v_B^j.$$

Obeležimo sa $( s_i^a , s_i^A )$ matricu inverznu matrici $( v_b^j , v_B^j )$. $s_i^a$ i $s_i^A$ su komponente linearno nezavisnih kovarijantnih vektora i za njih važe sledeće relacije:

$$(3.5.)\qquad s_i^a v_b^i = \delta_b^a, \qquad s_i^a v_B^i = 0,$$
$$s_i^A v_b^i = 0, \qquad s_i^A v_B^i = \delta_B^A,$$

$$(3.6.)\qquad s_i^a v_a^j + s_i^A v_A^j = \delta_i^j.$$

Ako stavimo

$$(3.7.)\qquad p_{ki} = \sum_a s_k^a s_i^a + \sum_A s_k^A s_i^A ,$$

tada je $p_{ki}$ globalna pozitivno definitna Rimanova metrika u odnosu na koju $( v_b^j , v_B^j )$ čini ortogonalni sistem, takav da je

$$s_k^a = p_{ki} v_a^i , \qquad s_k^A = p_{ki} v_A^i .$$

Iz (3.4.) i (3.5.) vidimo da važe relacije:

$$(\ell_i^j\, s_j^a)\, v_b^i = \delta_b^a, \qquad (\ell_i^j\, s_j^a)\, v_B^i = 0$$

$$(m_i^j\, s_j^A)\, v_b^i = 0, \qquad (m_i^j\, s_j^A)\, v_B^i = \delta_B^A,$$

što daje dalje:

$$\ell_i^j\, s_j^a = s_i^a, \qquad m_i^j\, s_j^A = s_i^A,$$

(3.8.)

$$m_i^j\, s_j^a = 0, \qquad \ell_i^j\, s_j^A = 0.$$

Pošto je $\ell_i^j\, v_a^i = v_a^j$, nalazimo da je :

$$\ell_k^j\, s_i^a\, v_a^k = s_i^a\, v_a^j, \quad \ell_k^j(\delta_i^k - s_i^A\, v_A^k) = s_i^a\, v_a^j,$$

odakle sledi da je

(3.9.) $$\ell_i^j = s_i^a\, v_a^j.$$

Takodje je

(3.1o.) $$m_i^j = s_i^B\, v_B^j.$$

Ako označimo sa :

(3.11.) $$\ell_{ki} = \ell_k^r\, p_{ri}, \qquad m_{ki} = m_k^r\, p_{ri}$$

Pomoću (3.9.) , (3.1o.) i (3.7.) nalazimo da je

(3,12.) $$\ell_{ki} = s_k^a\, s_i^a, \qquad m_{ki} = s_k^A\, s_i^A,$$

(3.13.) $$\ell_{ki} = \ell_{ik}, \quad m_{ki} = m_{ik}; \quad \ell_{ik} + m_{ik} = p_{ik}.$$

Iz gornjeg se može zaključiti da važi:

(3.14.) $$\ell_k^r\, \ell_i^q\, p_{rq} = \ell_{ki}, \qquad \ell_k^r\, m_i^q\, p_{rq} = 0,$$

$$m_k^r\, m_i^q\, p_{rq} = m_{ki}.$$

Za proizvoljna dva vektora X i Y sa komponentama $x^i$, $y^i$ stavimo da je:

$$m^*(X,Y) = m_{rq}\, x^r y^q \quad , \quad p(X,Y) = p_{rq}\, x^r y^q, \tag{3.15.}$$

$$\bar{g}(X,Y) = \frac{1}{2}\left(p(X,Y) + p(\varphi X, \varphi Y) + m^*(X,Y)\right). \tag{3.16.}$$

Tada imamo:

$$m^*(v_A, v_a) = p(v_A, v_a) = 0,$$

$$\bar{g}(v_A, v_a) = \frac{1}{2}\left(p(v_A, v_a) + p(\varphi v_A, \varphi v_a) + \right.$$

$$\left. + m^*(v_A, v_a)\right) = 0.$$

To znači da su L i M uzajamno normalni u odnosu na metriku $\bar{g}$. Pored toga, korišćenjem (3.13.) i (3.15.) možemo proveriti da je:

$$p(\varphi v_a, \varphi v_b) = \ell_{rq}\, \varphi^r_h\, \varphi^q_j\, v^h_a\, v^j_b,$$

$$p(\varphi v_a, \varphi v_b) + m^*(\varphi v_a, \varphi v_b) = p_{rq}\, \varphi^r_h\, \varphi^q_j\, v^h_a\, v^j_b,$$

$$p(\varphi^2 v_a, \varphi^2 v_b) = p_{rq}\, v^r_a\, v^q_b.$$

Odatle dobijamo sledeći rezultat:

$$\bar{g}(\varphi X, \varphi Y) = \bar{g}(X,Y) \quad \text{za svako } X, Y \text{ iz } L. \tag{3.17.}$$

Neka je $M_1$ prostor takav da za $X \in M_1$ sledi $\varphi(X) = \sqrt{a}\, X$ i neka je dim $M_1 = h$. Neka je $M_2$ potprostor za koji je $\varphi(X) = -\sqrt{a}X$. Tada je dim $M_2 = n-r-h$. Izaberimo ortonormiranu bazu $u_{r+1}, \ldots, u_{r+h}$ u $M_1$ i ortonormiranu bazu $u_{r+h+1}, \ldots, u_n$ u prostoru $M_2$ u odnosu na metriku $\bar{g}$. Osim toga, neka je $e_1, \ldots, e_{2r-n}$ ortonormirana baza u L u odnosu na metriku $\bar{g}$. Korišćenjem $\bar{g}$, definisaćemo novu metriku g na sledeći način:

$$g(e_i, e_k) = \bar{g}(e_i, e_k), \qquad g(e_i, u_\lambda) = \bar{g}(e_i, u_\lambda),$$

$$g(u_\alpha,u_\beta) = \bar{g}(u_\alpha,u_\beta)\ , \qquad g(e_i,\varphi(u_\alpha))=\bar{g}(e_i,\varphi(u_\alpha)),$$

ako su i $u_\alpha$ i $u_\beta$ ili u $M_1$ ili u $M_2$. Ako je $u_\alpha$ u $M_1$ a $u_\beta$ u $M_2$, tada je $g(u_\alpha,u_\beta)=0$. Ako su $u_\alpha$ i $u_\beta$ ili u $M_1$ ili u $M_2$, stavimo da je $g(\varphi(u_\alpha),\varphi(u_\beta)) = a\,\delta_{\alpha\beta}$.

g je dobro definisana metrika, jer ako je $\bar{u}_{r+1},\dots,\bar{u}_n$ druga ortonormirana baza u M , tada za $\bar{u}_\alpha = z_\alpha^\beta u_\beta$ imamo:

$$\delta_{\alpha\gamma}= \bar{g}(\bar{u}_\alpha,\bar{u}_\gamma) = \bar{g}(z_\alpha^\beta u_\beta, z_\gamma^\varepsilon u_\varepsilon)=z_\alpha^\beta z_\gamma^\varepsilon \delta_{\beta\varepsilon}=z_\alpha^\beta z_\gamma^\beta\ ,$$

$$g(\varphi(\bar{u}_\alpha),\varphi(\bar{u}_\gamma)) = g(z_\alpha^\beta\varphi(u_\beta), z_\gamma^\varepsilon\varphi(u_\varepsilon)) =$$

$$= z_\alpha^\beta z_\gamma^\varepsilon\, g(\varphi(u_\beta),\varphi(u_\varepsilon)) = a z_\alpha^\beta z_\gamma^\beta = a\delta_{\alpha\beta}\ .$$

ako i $\bar{u}_\alpha$ i $\bar{u}_\beta$ pripadaju ili $M_1$ ili $M_2$.
To pokazuje da je g Rimanova metrika u odnosu na koju su prostori $L, M_1$ i $M_2$ uzajamno normalni i važi:

$$g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y) \qquad \text{za svako } X,Y \text{ iz } L,$$
$$g(\varphi X,\varphi Y) = a\, g(X,Y) \qquad \text{za svako } X,Y \text{ iz } M.$$

Teorema 3.3. Ako je na n-dimenzionalnoj mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ data $\varphi(-1,a)$-struktura i ako je rang$(\varphi^2-a)=r$, tada postoje komplementarne distribucije L dimenzije r i M dimenzije n-r i pozitivno definitna metrika g u odnosu na koju su L i M ortogonalni i pored toga za g važi:

$$g(X,Y) = g(\varphi X,\varphi Y), \qquad \text{za svako } X,Y \text{ iz } L,$$
$$a\, g(X,Y) = g(\varphi X,\varphi Y), \qquad \text{za svako } X,Y \text{ iz } M.$$

Pošto je $\varphi^2/_L$ identičko preslikavanje, a $\varphi/_L$ nije identičko preslikavanje, $\varphi/_L$ je linearna transformacija prostora L sa minimalnim polinomom $x^2-1$, sa sopstvenim vrednostima $\pm1$. To znači da se L može dekomponovati u direktnu sumu $L = L_1 \oplus L_2$, gde je $L_1$ sopstveni potprostor od $\varphi/_L$ koji odgovara sopstvenoj vrednosti 1, a $L_2$ je sopstveni potprostor koji odgovara sopstvenoj vrednosti -1.

Pretpostavimo da je dim $L_1=s$, tada je dim $L_2=r-s$. Uzmimo ortonormiranu bazu $\{e_1,\ldots,e_s\}$ u $L_1$ i ortonormiranu bazu $\{e_{s+1},\ldots,e_r\}$ u $L_2$, obe u odnosu na g. Sada je $\{e_1,\ldots,e_s, e_{s+1},\ldots,e_r\}$ ortonormirana baza u L, takva da je:

$$\varphi(e_1)=e_1,\ldots,\quad \varphi(e_s)=e_s,\quad \varphi(e_{s+1})=-e_{s+1},\ldots,\quad \varphi(e_r)=-e_r.$$

Najzad, izaberimo u M ortonormiranu bazu $\{e_{r+1},\ldots,e_n\}$, takvu da su $e_{r+1},\ldots,e_{r+h}$ iz $M_1$, $e_{r+h+1}, \ldots,e_n$ iz $M_2$. Tada važi:

$$\varphi(e_{r+1})=\sqrt{a}e_{r+1},\ldots,\quad \varphi(e_{r+h})=\sqrt{a}e_{r+h},\quad \varphi(e_{r+h+1})=-\sqrt{a}e_{r+h+1},\ldots$$

$$\varphi(e_n)=-\sqrt{a}e_n.$$

Tada u odnosu na ortonormirani sistem $\{e_1,\ldots,e_n\}$ tenzori $g_{ji}$ i $\varphi_j^i$ imaju komponente:

$$(3.18.)\qquad g=\begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 & 0\\ 0 & E_{r-s} & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_h & 0\\ 0 & 0 & 0 & E_{n-r-h}\end{bmatrix}\qquad \varphi=\begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 & 0\\ 0 & E_{r-s} & 0 & 0\\ 0 & 0 & E_h & 0\\ 0 & 0 & 0 & E_{n-r-h}\end{bmatrix}$$

gde je h dimenzija od $L_1$, $L_1$ je potprostor od L koji odgovara sopstvenoj vrednosti +1 minimalnog polinoma od $\varphi/_L$. Takav ortogonalni sistem se zove adaptirani sistem za $\varphi(-1,a)$-strukturu. Neka je $\{\bar{e}_i\}$ drugi adaptirani sistem u odnosu na koji g i $\varphi$ imaju komponente kao u (3.18.). Ako stavimo $\bar{e}_i=\gamma_i^j e_j$, tada je $\gamma$ matrica oblika:

$$\gamma=\begin{bmatrix} A_s & 0 & 0 & 0\\ 0 & B_{r-s} & 0 & 0\\ 0 & 0 & C_h & 0\\ 0 & 0 & 0 & D_{n-r-h}\end{bmatrix}$$

gde su $A_s, B_{r-s}, C_h, D_{n-r-h}$ ortogonalne matrice odgovarajućeg formata.

To znači da se grupa tangentnog snopa mnogostrukosti može redukovati do grupe $O(s) \times O(r-s) \times O(h) \times O(n-r-h)$. Obrnuto, ako se grupa tangentnog snopa mnogostrukosti može redukovati do grupe $O(s) \times O(r-s) \times O(h) \times O(n-r-h)$, tada možemo definisati pozitivno definitnu Rimanovu metriku g i $\varphi(-1,a)$-strukturu, čije su matrice kao u (3.18.) u odnosu na adaptirani sistem. Tada imamo:

$$\varphi^2 = \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{r-s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a E_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & aE_{n-r-h} \end{bmatrix} \quad \varphi^4 = \begin{bmatrix} E_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{r-s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 E_h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 E_{n-r-h} \end{bmatrix}$$

i jasno je da je $( \varphi^2 - 1 )( \varphi^2 - a ) = 0$. Sada imamo:

Teorema 3.4. Potreban i dovoljan uslov da se n-dimenzionalna mnogostrukost može snabdeti $\varphi(-1,a)$-strukturom je da se grupa tangentnog snopa mnogostrukosti može redukovati do grupe $O(s) \times O(r-s) \times O(h) \times O(n-r-h)$.

Iz teoreme 1.6. sledi da ako se grupa tangentnog snopa redukuje do grupe $O(h') \times O(2r'-n-h') \times O(n-r') \times O(n-r')$, tada se $\mathcal{M}^n$ može snabdeti $\varphi(4,-2)$-strukturom ranga $r'$ i skoro produkt strukturom $\phi' = 2\varphi^2 - 1$, $\phi' = 1$ na L. L je potprostor od $\mathcal{M}^n$ na kome je $\varphi^2 = 1$, a komplementarni prostor M za prostor L u $\mathcal{M}^n$ se može snabdeti skoro tangent strukturom.

Iz razmatranja u ovom odeljku zaključujemo da se r,s i h mogu izabrati tako da bude: $r = 2r' - n$, $s = h'$, $h = (n-r)/2$ i pri takvoj redukciji strukturne grupe tangentnog snopa, mnogostrukost $\mathcal{M}^n$ se može snabdeti i $\varphi(-1,a)$-strukturom i skoro produkt strukturom $\phi$,

$$\phi = \frac{(2\varphi^2 - a - 1)}{a-1}, \quad \phi = -1 \text{ na } L,$$ L je potprostor od $\mathcal{M}^n$ na kome je $\varphi^2 = 1$, a komplementarni prostor M se može snabdeti strukturom $\varphi_M$ čiji je kvadrat homotetija sa koeficijentom

homotetije a.

Teorema 3.5. Ako se strukturna grupa tangentnog snopa mnogostrukosti može redukovati do grupe $O(h') \times O(2r'-n-h') \times O(n-r') \times O(n-r')$ i ako je veza izmedju $r'$, $h', n, r, s$ i $h$ ovakva: $r=2r'-n$, $s=h'$, $h=(n-r)/2$, tada se $\mathcal{M}^n$ može snabdeti i $\varphi(4,-2)$-strukturom i $\varphi(-1,a)$-strukturom. L je pot prostor od $\mathcal{M}^n$ na kome je $\varphi^2=1$ za obe strukture. Komplement M prostora L u $\mathcal{M}^n$ može se snabdeti ili strukturom za koju je $\varphi^2/_M = 0$ ili strukturom za koju je $\varphi^2/_M = aI$.

Teorema 3.6. Skoro produkt struktura $\phi$ koja je na L jedinično preslikavanje, može se dopuniti skoro tangentnom strukturom na M.

Skoro produkt struktura $\phi$ ($\phi/_L=-1$) može se dopuniti na M strukturom čiji je kvadrat homotetija sa koeficijentom homotetije a.

## 3.4. STRUKTURA SATO INDUKOVANA NA HIPERPOVRSI PROSTORA KOJI JE SNABDEVEN $\varphi(4,-2)$-STRUKTUROM

Rezultati iz ovog odeljka su objavljeni u [68].

Neka je na mnogostrukosti $\mathcal{M}^n$ data $\varphi(4,-2)$-struktura ranga n-1.tada je dim M = 2. Neka je $\mathcal{K}$ hiperpovrš u $\mathcal{M}^n$ ortogonalna na vektor

$$N=\begin{pmatrix} o \\ \vdots \\ o \\ -1 \\ o \end{pmatrix} \quad u\ \mathcal{M}^n.$$

Neka su $\bar{\varphi}, \bar{m}$, i $\bar{g}$ restrikcije tenzora $\varphi$, m i g definisanih kao u(1.3.) na $\mathcal{K}$ i neka je:

$$\xi=\left.\begin{pmatrix} o \\ \vdots \\ o \\ 1 \end{pmatrix}\right\}n-1 \qquad \eta = \underbrace{(o,\dots,o,1)}_{n-1}.$$

$\bar{\varphi}$, $\bar{m}$ i $\bar{g}$ imaju matrice oblika:

$$\bar{\varphi}=\begin{bmatrix} E_h & 0 & 0 \\ 0 & -E_{2r-n-h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{m}=\begin{bmatrix} 0_h & 0 & 0 \\ 0 & 0_{2r-n-h} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \bar{g}=\begin{bmatrix} E_h & 0 & 0 \\ 0 & E_{2r-n-h} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema 4.1. $\bar{\varphi}$ je struktura Sato.

Dokaz : Pošto je $\bar{\varphi}^2 = 1 - \bar{m}$, množeći odgovarajuće matrice, jasno je da je:

$$m = \xi\eta \;, \quad \bar{\varphi}^2 = 1 - \eta\otimes\xi \;, \quad \bar{\varphi}\xi = 0, \quad \xi(\eta) = 1, \quad \eta\bar{\varphi} = 0,$$

i više od toga:

Teorema 4.2. $(\bar{\varphi}, \xi, \eta, \bar{g})$ je skoro parakontaktna Rimanova struktura na $\mathcal{K}$.

Dokaz: Pored gore navedenih relacija lako se proverava da važi još:

$$\eta(X) = \bar{g}(\xi, X), \quad \bar{g}(\bar{\varphi}X, \bar{\varphi}Y) = \bar{g}(X,Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

što dokazuje teoremu.

U teoremi 3.1. glave 2. je dokazano da svaka skoro produkt struktura indukuje strukturu Sato na hiperpovrši.

Posledica 4.1. Skoro produkt struktura $\phi = 2\varphi^2 - 1$ indukuje na $\mathcal{K}$ strukturu Sato $\Psi$.

Sada ćemo dati vezu izmedju $\Psi$ i $(\bar{\varphi}, \xi, \eta, \bar{g})$ strukture. Naći ćemo uslove koji moraju biti zadovoljeni da bi struktura $\Psi$ indukovana sa $\phi = 2\varphi^2 - 1$ na $\mathcal{K}^*$ bila istovetna sa strukturom $\bar{\varphi}$ . Neka je $\mathcal{K}^*$ potprostor od $\mathcal{K}$ čiji tangentni vektori imaju oblik:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ o_1 \\ \vdots \\ o_{2r-n-h} \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Teorema 4.3. Skoro produkt struktura $\phi$ inducira na $\mathcal{K}^*$ strukturu Sato $\bar{\varphi}$ .

Dokaz: Pokazaćemo (na osnovu teoreme 2.1. glave 2.) da važe relacije:

$$\phi B = B\bar{\varphi} \oplus (\eta \otimes N) \quad i \quad \phi N = B\xi \quad \text{na } \mathcal{K}^* .$$

Koristeći matricu za $\phi$:

$$\phi = \begin{bmatrix} E_h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{2r-n-h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

jasno da je $\phi N = B\xi$ .

Za dokaz relacije $\phi B = B\bar{\varphi} \oplus (\eta \otimes N)$ na $\mathcal{K}^*$, dokazaćemo je u razvijenom obliku tj. pokazaćemo da je $BX = \phi B(\bar{\varphi} X) + \eta(X)\,\phi(N)$, za vektore iz $T(\mathcal{K}^*)$. Za vektore $X \in T(\mathcal{K})$ dobijamo:

$$BX = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{2r-n-h} \\ z_1 \\ o \end{bmatrix}, \quad \phi B(\bar{\varphi}(X)) + \eta(X)\,\phi(N) = \phi \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ -y_1 \\ \vdots \\ -y_{2r-n-h} \\ o \\ o \end{bmatrix} + z_1 \begin{bmatrix} o \\ o \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ o \\ 1 \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ -y_1 \\ \vdots \\ -y_{2r-n-h} \\ z_1 \\ o \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{2r-n-h} \\ z_1 \\ o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ -y_1 \\ \vdots \\ -y_{2r-n-h} \\ z_1 \\ o \end{bmatrix}$$

samo kad je $y_1 = o, \ldots, y_{2r-n-h} = o$. Odatle je jasno da je $\phi B = B\bar{\varphi} \oplus (\eta \otimes N)$ samo na prostoru $\mathcal{K}^*$, što dokazuje teoremu.

Pošto $\bar{\varphi}$ i $\bar{g}$ zadovoljavaju na $\mathcal{K}^*$ sledeće relacije:

$$\eta(X) = \bar{g}(\xi, X), \quad g(\bar{\varphi}X, \bar{\varphi}Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y),$$

sledi:

Teorema 4.4. Skoro produkt struktura $\phi$ indukuje na potprostoru $\mathcal{K}^*$ skoro parakontaktnu Rimanovu strukturu $(\bar{\varphi}, \xi, \eta, \bar{g})$.

# L I T E R A T U R A


|1| БАШКЕНЕ А. Л.: КТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ, Литовский математический сборник, 1981, 25 - 28.

|2| БАШКЕНЕ А. Л.: О СТРУКТУРАХ, ИНДИЦИРУЕМЫХ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯХ ПОЧТИ КОМПЛЕКСНОГО МНОГООБРАЗИЯ, Литовский математический сборник, 1967, 23 - 34.

|3| БАШКЕНЕ А. Л.: ВОПРОСИ ТЕОРИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ ДВУМЕРНОГО РИМАНОВА МНОГООБРАЗИЯ, Литовскй математический сборник, 1982, 25 - 39.

|4| BISHOP R., CRITTENDEN R.: GEOMETRY OF MANIFOLDS, Akademic Press, New York and London, 1964.

|5| BLAIR D.E.: CONTACT MANIFOLDS IN RIEMANNIAN GEOMETRY, Springer Verlag.

|6| BOKAN N.: GRUPE TRANSFORMACIJA NA NORMALNIM SKORO KONTAKTNIM MNOGOSTRUKOSTIMA, Doktorska teza, Beograd, 1979.

|7| CHERN S. S.: THE GEOMETRY OF G-STRUCTURES, Bull. Amer. Math. Soc., 72 (1966), 167 - 219.

|8| ČOMIĆ I.: DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 1978.

|9| ДУБРОВИН Б. А., НОВИКОВ С. П., ФОМЕНКО А. Т.: СОВРЕМЕНАЯ ГЕОМЕТРИЯ, Москва, наука (1979).

|10| DJURAS J.: MNOGOSTRUKOSTI SNABDEVANE F ODNOSNO $\phi$ - STRUKTUROM, Magistarski rad, Novi Sad, 1981.

|11| EISENHART: RIEMANNIAN GEOMETRY, Princeton university press (1949).

|12| ELIOPOULOS H. A.: HERMITION STRUCTURES SUBORDINATED TO R - TANGENT STRUCTURES, Tensor, N.S. Vol. 25 (1972), 313 - 319.

|13| FROLICHER A., NIJENHUIS A.: THEORY OF VECTOR - VALUED DIFFERENTIAL FORMS, Part I. K. Ned. Acad. Wet. Proc. Math. Sc. V59 (1956), 338 - 359.

|14| GADEA P.M., CORDERO L.A.: ON INTEGRABILITY CONDITIONS OF A STRUCTURE $\phi$ SATISFUING $\phi^4 \pm \phi^2 = 0$, Tensor, N.S. Vol 28 (1974), 78 - 82.

|15| GAOEA P.M., CORDERO L.A.: ON THE AUTOMORPISM GROUP OF $\phi(4,-2)$-MANIFOLDS, Tensor, N.S. Vol 29 (1975), 161 - 164.

|16| GAUHMAN H.: ON MAXIMALLY MOBILE RIEMANNIAN ALMOST - PRODUCT STRUCTURES, Tensor, N.S. Vol 31, No. 1 (1977), 13 - 26.

|17| GOLDBERG S. I.: OF THE EXISTENCE OF MANIFOLDS WITH AN F - STRUCTURE, Tensor N. S. 26, (1972), 323 - 329.

|18| GOLDBERG S. I., YANO K.: ON NORMAL GLOBALY FRAMED f - MANIFOLDS, Tohoku Math. Journ. 22 (1970), 362-370.

|19| GOULI F. ANDREOU: ON A STRUCTURE f OF TYPE (1,1) SATISFYING $f^5-f=0$, Tensoŕ, N.S. Vol 36, No. 2 (1982), 180 - 184.

|20| COULI F. ANDREOU: ON A STRUCTURE DEFINED BU A TENSOR FIELD f OF TYPE (1,1) SATISFUING $f^5+f = 0$, Tensor, N.S. 36 (1982) 79 - 84.

|21| GOULI F. ANDREOU: ON INTEGRABILITY CONDITIONS OF A STRUCTURE f SATISFYING $f^5+f=0$, Tensor, N.S. Vol 40 (1983) 27 - 31.

|22| ISHIHARA S., HANG K. U.: COMPLETE RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH (f, g, u, v, λ) - STRUCTURE, J. Differential geometru 8 (1973), 541 - 554.

|23| ISHIHARA S., YANO K.: ON INTEGRABILITY CONDITIONS OF A STRUCTURE SATISFYING $f^3+f=0$. Guart. J. Math, Oxford, 15 (1964), 217 - - 222.

|24| KAHEMAKI S.: ON SUBMANIFOLDS OF CODIMENSION 2 OF ALMOST CONTACT METRIC MANIFOLDS I, Teusor N.S. Vol. 27 (1973), 281 - 286.

|25| KIM J. B.: NOTES ON f-MANIFOLDS, Tensor, N.S. Vol. 29, (1975), 299 - 302.

|26| KOBAYASHI S.: TRANSFORMATION GROUPS IN DIFFERENTIAL GEOMETRY, Springer - Verloq, Berlin, Heidelberg, New York (1972).

|27| КОБАЯСИ Ш., НОМИДЗУ К.: ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ I, II, Москва, Наука (1981).

|28| KON M.: INVARIANT SUBMANIFOLDS OF NORMEL CONTACT MATRIC MANIFOLDS, Kodai Math. Sem. Rep. 25 (1973), 330 - 336.

|29| LUDEN G.: SUBMANIFOLDS OF MANIFOLDS WITH AN f - STRUCTURE, Kodai Math. Sem. Rep. 21 (1969) p.p. 160 - 166.

|30| MISHRA R.S.: A DIFFERENTIABLE MANIFOLD WITH f - STRUCTURE OF RANK R. Tensor, N.S. Vol. 27 (1973) 369 - 378.

|31| MIYAZAWAT.: HIPERSURFACES IMMERSED IN AN ALMOST PRODUCT RIEMANNIAN MANIFOLD, Tensor, N. S. Vol. 33, (1979), 114 - 116.

|32| NIJENHUIS A.: JAKOBI - TYPE FOR BILINEAR DIFFERENTIAL CONCOMITENTS OF CERTAIN, Tensor Fields I, Matematics (1955), 390 - 403.

|33| ОТСИАНУ Н.М.: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО - ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗЯХ, Проблем с геометрии, том 8 (1977), 89 - 111.

|34| ONBINA J. A., GADEA P. M.: ON THE CHOMOLOGY OF SOME RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH PARALLEL $\phi(4,2)$ - STRUCTURE, Tensor, N.S. Vol. 34, No 3, (1980), 286 - 294.

|35| PETRAKIS A.: RAPORT ENTRE LE TENSEUR N DE NIJENHUIS ET LE TENEUR T DE LA TORSION D´UN f - STRUCTURE qui SATSFAIT LA RELATION $f^3+f=0$, Tensor, N.S. Vol. 36 (1982), 312 - 314.

|36| PETRAKIS A.: STRUCTURES HERMITIENNE SUBORDONNEES A UNE STRUCTURE f qui STISFAIT $f^{2\nu+3} + f = 0$, Balkanski kongres matematičara, Atina 1983.

|37| ПОЛЯКОВ Н. Д.: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО - ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ПОЧТИ КОНТАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ, Проблемы геометрии Том 8, (1977), 114 - 137.

|38| ПОЛЯКОВ Н. Д.: ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО - ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ НА ПОЧТИ КОНТАКТНОМ МНОГООБРАЗИИ, Проблемы геометрии, том 8, 1977, Винити ан СССР, 113 - 137.

|37| PRVANOVIĆ M.: HOLOMORPHICALY PROJEKTIVE TRANSFORMATIONS IN A LOCALY PRODUCT SPACE, Matematica Balkanika, Beograd, (1971), 195 - - 214.

|40| РАШЕВСКИЙ П. К.: РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ ИТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ Тостехиздат, Москва, 1953.

|41| SASAKI S.: ON DIFFERENTIABLE MANIFOLDS WITH CERTEIN STRUCTURES WICH ARE CLOSELY RELATED TO ALMOST CONTACT STRUCTURE I, Mathematical Institute, Tohoku university,(1960), 459 - 476.

|42| SASAKI S.: ON DIFFERENTIABLE MANIFOLDS WITH CERTAIN STRUCTURES WICH ARE CLOSELY RELATED TO ALMOST CONTRACT STRUCTURE II, Tohoku Math. J., 13 (1961), 281 - 293.

|43| SASAKI S.: ON ALMOST CONTACT MANIFOLDS, PROCEEDINGS OF THE UNITED STATES - JAPAN, Seminar in Differential Geometry, Kyoto, Japan, 1965, 128 - 136.

|44| SATO S.: ON A STRUCTURE SIMILAR TO THE ALMOST CONTACT STRUCTURE I, Tensor, N.S. 30, (1976), 219 - 224.

|45| STEENROD N.: THE TOPOLOGU OF FILARE BUNDLES, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1951.

|46| ШИРОКОВ А. П.: СТРУКТУРИ НА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОИ ГЕОМЕТРИИ, АЛГЕБРА, ТОПОЛОГИЯ, ГЕОМЕТРИ ИТОГИ НАУКИ, Москва (1967) Итоги науки, Винити ан СССР, М (1969) 127 - 188.

|47| TAHEMUSA Y.: ON THE INVARIANT SUBMANIFOLD OF A CR- MANIFOLD, Kodai Math. J. 5 (1982), 416 - 425.

|48| TASHIRO Y.: ON CONTACT STRUCTURE OF HYPERSURFACES IN COMPLEX MANIFOLD I, Tohoka Math. J. (2) 15 (1963), 62 - 78.

|49| TASHIRO Y.: ON CONTACT STRUCTURE OF HYPERSURFACES IN COMPLEX MANIFOLDS II, Tohoku. Math. J. (1963) No 1., 167 - 175.

|50| TASHIRO Y., KIM B.: ON ALMOST CONTACT METRIC COPOUND STRUCTURE, Kodai J. 4 (1980), 12 - 29.

|51| TASHIRO Y.: ON CONTACT STRUCTURES OF HYPERSURFACES IN ALMOST COMPLEX MANIFOLDS I, Tohoku Math. J. 15, 1863, 62 - 78.

|52| TASHIRO Y.: ON CONTACT STRUCTURE OF HYPERSURFACES IN COMPLEX MANIFOLDS II, Tohoku Math. J. 15 (1963), 167 - 175.

|53| TSAGAS G.: ON THE FOLATION OF A RIEMANNIAN REGULAR s - MANIFOLD, Tensor N.S. Vol. 36, (1982), 150 - 154.

|54| ВИШНЕВСКЙ В.В.: АФФИНОРНЫЕ СТРУКТУРЫ МНОГООБРАЗИЙ КАК СТРУКТУРЙ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ АЛГЕБРАМИ, Tensor, N.S. Vol 26, (1972), 363 - 372.

|55| WAKAKUWA H., HASHIMOTO S.: REMARK ON ALMOST TANGENT STRUCTURE, Tensor, N.S. Vol. 20 (1969), 270 - 272.

|56| WALKER A.G.: ALMOST PRODUCT STRUCTURES, Reprinted from Proceedings of Symposio in Pure Mathematics, volume 3, Differential Geometry, American Mathematical Society, 1961.

|57| WALKER A.G.: CONEXIONS FOR PARALLEL DISTRIBUTIONS IN LARGE, Quart. J. Math., Oxford (2) 6 (1955), 301 - 308.

|58| WARNER F. W.: FUNDATIONS OF DIFERENTIABLE MANIFOLDS AND LIE GROUPS, Scott, Foresman and Company, Olenview, Ilinois - London, 1971.

|59| YANO K.: ON A STRUCTURE DEFINED BY A TENSOR FIELD f OF TYPE (1, 1) SATISFYING $f^3+f = 0$, Tensor, N.S. 14 (1963), 99 - 109.

|60| YANO K.: ON A STRUCTURE f SATISFYING $f^3+f = 0$, University of Washington, Technical Report, No. 12, June 20, (1961).

|61| YANO K., ISHIHARA S.: ON INTEGRABILITY OF A STRUCTURE f SATISFYING $f^3+f = 0$, Quart. J. Math. Oxford (2), 15 (1964), 217 - 222.

|62| YANO K., OKUMURA M.: INVARIANT HYPERSURFACES OF A MANIFOLD WITH (f, g, u, v, $\lambda$) STRUCTURE, Kodai Math. Sem. Rep. 23 (1971), 290 - 304.

|63| YANO K.: DIFFERENTIAL GEOMETRY ON COMPLEX AND ALMOST COMPLEX SPACES, Pergamon Press, (1965).

|64| YANO K., IHIHARA S.: THE STRUCTURE INDUCED ON SUBMANIFOLDS OF COMPLEX AND ALMOST COMPLEX SPACES. Kodai Math. Sem. Rep. 18 (1966) 120 - 160.

|65| YANO K., HOUH C.S., CHEN B.Y.: STRUCTURES DEFINED BY ATENSOR FIELD $\phi$ OF TYPE (1,1) SATISFYING $\phi^4 \pm \phi^2 = 0$, Tensor, N.S. Vol. 23, No. 1, (1972), 81 - 87.

|66| NIKIĆ J.: ON A STRUCTURE $\phi$ SATISFYING $(\phi^2-1)(\phi^2-a)=0$, Teusor N.S. 39 (1982), 127 - 131.

|67| NIKIĆ J.: ON A STRUCTURE $\phi$ SATISFYING $(\phi^2+1)(\phi^2-a) = 0$, Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta Novi Sad, knjiga 11 (1981).

|68| NIKIĆ J.: THE $(\Psi,\xi,\eta,g)$ STRUCTURE ON SUBSPACES OF THE SPAC WITH THE $\phi(4,-2)$ STRUCTURE, Publikasion, Beograd, Primljen u štampu.

|69| NIKIĆ J.: ON A STRUCTURE DEFINED BY A TENSOR FIELD f OF THE TYPE (1, 1) SATISFYING $f^{2\cdot 2^q+1} - f = 0$, Zbornik radova Prirodno-matematičkog fakulteta, Novi Sad, knjiga 12 (1982).

Bai Jin Kim [25] je dao potreban i dovoljan uslov da se n-dimenzionalna mnogostrukost može snabdeti strukturom koja ispunjava uslov $f^{2q+1}+f = 0$, a neke osobine ove uopštene strukture ispitane su u [36]. U narednom odeljku rešava se isti problem za strukturu koja ispunjava uslov $f^{2k+1}-f = 0$, ali se ne može primeniti postupak Bai Jin Kim-a, već je struktura uvedena generalizacijom postupka za konstrukciju struktura $f^3-f = 0$, $f^5-f = 0$. Strukture $f^5 \pm f = 0$ ispitivane su u radovima [19], [20], [21].

## 2.3. O POTPROSTORIMA NA DIFERENCIJABILNOJ MNOGOSTRUKOSTI KOJA JE SNABDEVENA f(5,-1)-STRUKTUROM

Neka je $M^n$ diferencijabilna mnogostrukost klase $C^\infty$ i neka je na njoj dato tenzorsko polje $f \neq 0$, tipa (1,1), klase $C^\infty$, takvo da je $f^5-f= 0$. [19].

Teorema 3.1. Za tenzorsko polje $f \neq 0$, $f^5-f=0$ preslikavanja

(3.1.) $\qquad \ell = f^4, \qquad m = -f^4+1$

su komplementarni operatori projekcije.

Dokaz: Lako se proverava da je $m+\ell = 1$, $m\ell = \ell m = 0$, $m^2=m$, $\ell^2=\ell$, gde je 1 oznaka za identički operator, što dokazuje teoremu.

Neka su L i M komplementarne distribucije koje odgovaraju operatorima $\ell$ i m respektivno. Ako je rang od f konstantan i jednak r, tada L ima dimenziju r, a M dimenziju n-r. Takvu strukturu ćemo zvati f(5,-1)-stuktura ranga r.

Napomena 3.1. Za f(5,-1)-strukturu i $\ell$ i m koji ispunjavaju uslov (3.1.) važi:

Bai Jin Kim [25] je dao potreban i dovoljan uslov da se n-dimenzionalna mnogostrukost može snabdeti strukturom koja ispunjava uslov $f^{2q+1}+f=0$, a neke osobine ove uopštene strukture ispitane su u [36]. U narednom odeljku rešava se isti problem za strukturu koja ispunjava uslov $f^{2k+1}-f=0$, ali se ne može primeniti postupak Bai Jin Kim-a, već je struktura uvedena generalizacijom postupka za konstrukciju struktura $f^3-f=0$, $f^5-f=0$. Strukture $f^5 \pm f=0$ ispitivane su u radovima [19], [20], [21].

## 2.3. O POTPROSTORIMA NA DIFERENCIJABILNOJ MNOGOSTRUKOSTI KOJA JE SNABDEVENA f(5,-1)-STRUKTUROM

Neka je $M^n$ diferencijabilna mnogostrukost klase $C^\infty$ i neka je na njoj dato tenzorsko polje $f \neq 0$, tipa (1,1), klase $C^\infty$, takvo da je $f^5-f=0$. [19].

Teorema 3.1. Za tenzorsko polje $f \neq 0$, $f^5-f=0$ preslikavanja

$$\ell = f^4, \qquad m = -f^4+1 \tag{3.1.}$$

su komplementarni operatori projekcije.

Dokaz: Lako se proverava da je $m+\ell=1$, $m\ell=\ell m=0$, $m^2=m$, $\ell^2=\ell$, gde je 1 oznaka za identički operator, što dokazuje teoremu.

Neka su L i M komplementarne distribucije koje odgovaraju operatorima $\ell$ i m respektivno. Ako je rang od f konstantan i jednak r, tada L ima dimenziju r, a M dimenziju n-r. Takvu strukturu ćemo zvati f(5,-1)-stuktura ranga r.

Napomena 3.1. Za f(5,-1)-strukturu i $\ell$ i m koji ispunjavaju uslov (3.1.) važi:

Bai Jin Kim [25] je dao potreban i dovoljan uslov da se n-dimenzionalna mnogostrukost može snabdeti strukturom koja ispunjava uslov $f^{2q+1}+f = 0$, a neke osobine ove uopštene strukture ispitane su u [36]. U narednom odeljku rešava se isti problem za strukturu koja ispunjava uslov $f^{2k+1} - f = 0$, ali se ne može primeniti postupak Bai Jin Kim-a, već je struktura uvedena generalizacijom postupka za konstrukciju struktura $f^3-f = 0$, $f^5-f = 0$. Strukture $f^5 \pm f = 0$ ispitivane su u radovima [19], [20], [21].

## 2.3. O POTPROSTORIMA NA DIFERENCIJABILNOJ MNOGOSTRUKOSTI KOJA JE SNABDEVENA f(5,-1)-STRUKTUROM

Neka je $M^n$ diferencijabilna mnogostrukost klase $C^\infty$ i neka je na njoj dato tenzorsko polje $f \neq 0$, tipa (1,1), klase $C^\infty$, takvo da je $f^5-f= 0$. [19].

Teorema 3.1. Za tenzorsko polje $f \neq 0$ , $f^5-f=0$ preslikavanja

$$\ell = f^4, \qquad m = -f^4+1 \tag{3.1.}$$

su komplementarni operatori projekcije.

Dokaz: Lako se proverava da je $m+ \ell = 1$, $m\ell = \ell m = 0$, $m^2=m$, $\ell^2=\ell$, gde je 1 oznaka za identički operator, što dokazuje teoremu.

Neka su L i M komplementarne distribucije koje odgovaraju operatorima $\ell$ i m respektivno. Ako je rang od f konstantan i jednak r, tada L ima dimenziju r, a M dimenziju n-r. Takvu strukturu ćemo zvati f(5,-1)-stuktura ranga r.

Napomena 3.1. Za f(5,-1)-strukturu i $\ell$ i m koji ispunjavaju uslov (3.1.) važi:

Bai Jin Kim [25] je dao potreban i dovoljan uslov da se n-dimenzionalna mnogostrukost može snabdeti strukturom koja ispunjava uslov $f^{2q+1}+f=0$, a neke osobine ove uopštene strukture ispitane su u [36]. U narednom odeljku rešava se isti problem za strukturu koja ispunjava uslov $f^{2k+1}-f=0$, ali se ne može primeniti postupak Bai Jin Kim-a, već je struktura uvedena generalizacijom postupka za konstrukciju struktura $f^3-f=0$, $f^5-f=0$. Strukture $f^5 \pm f=0$ ispitivane su u radovima [19], [2o], [21].

## 2.3. O POTPROSTORIMA NA DIFERENCIJABILNOJ MNOGOSTRUKOSTI KOJA JE SNABDEVENA f(5,-1)-STRUKTUROM

Neka je $M^n$ diferencijabilna mnogostrukost klase $C^\infty$ i neka je na njoj dato tenzorsko polje $f \neq 0$, tipa (1,1), klase $C^\infty$, takvo da je $f^5-f=0$. [19].

Teorema 3.1. Za tenzorsko polje $f \neq 0$, $f^5-f=0$ preslikavanja

(3.1.) $\quad \ell = f^4, \qquad m = -f^4+1$

su komplementarni operatori projekcije.

Dokaz: Lako se proverava da je $m+\ell=1$, $m\ell=\ell m=0$, $m^2=m$, $\ell^2=\ell$, gde je 1 oznaka za identički operator, što dokazuje teoremu.

Neka su L i M komplementarne distribucije koje odgovaraju operatorima $\ell$ i m respektivno. Ako je rang od f konstantan i jednak r, tada L ima dimenziju r, a M dimenziju n-r. Takvu strukturu ćemo zvati f(5,-1)-stuktura ranga r.

Napomena 3.1. Za f(5,-1)-strukturu i $\ell$ i m koji ispunjavaju uslov (3.1.) važi: