UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNOMATEMATIČKI
FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU
DOKTORSKA DISERTACIJA

Primena Kolomboovih uopštenih funkcija u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina

Kandidat:
Mr Marko Nedeljkov
Mentor:
Prof. Dr Stevan Pilipović

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

DOKTORSKA DISERTACIJA

Primena Kolomboovih uopštenih funkcija u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina

Kandidat:
Mr Marko Nedeljkov
Mentor:
Prof. Dr Stevan Pilipović

0.1. Uvod

U doktorskoj disertaciji će biti proučavani problemi u okviru teorije Kolomboovih "novih" uopštenih funkcija. Kolombo je formulisao svoja proučavanja početkom osamdesetih u monografiji [15] i to je danas široko prihvaćena teorija sa primenama u linearnoj i posebno u nelinearnoj analizi. Izložićemo ukratko istorijski razvoj Kolomboovih ideja.

Švarcov rezultat o nemogućnosti proširenja operacije množenja za klasične funkcije na prostor distribucija je naveo mnoge autore da se bave tim problemom. Izložićemo hronološkim redom Kolomboove ideje u konstruisanju uopštenih funkcija za koje je definisana operacija množenja koja proširuje definiciju te operacije za neprekidne funkcije i za distribucije.

Prvobitna ideja mu je bila da se posmatra $C^\infty(\mathcal{D}(\Omega))$, prostor glatkih funkcija iz $\mathcal{D}(\Omega)$ u skup kompleksnih brojeva, i neki njegov količnički prostor, jer je uočio da "prirodno" definisanje proizvoda distribucija g_1 i g_2 sa

$$< g_1 \cdot g_2, \psi >=< g_1, \psi > \cdot < g_2, \psi >,\ \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ne proširuje čak ni obično množenje glatkih funkcija uzetih kao distribucije.

Zatim je ovu ideju modifikovao i potražio neki količnički prostor prostora $C^\infty(\mathcal{E}'(\Omega))$ glatkih funkcija nad prostorom distribucija sa kompaktnim nosačem. Ovde se pojavila važna stvar: Klasični proizvod $f_1 \cdot f_2$ za glatke funkcije f_1, f_2 se podudara sa preslikavanjem

$$< T, f_1 \cdot f_2 >=< T, f_1 > \cdot < T, f_2 >, T \in \mathcal{E}',$$

na skupu $\{\delta_x\}$ (skup Dirakovih mera). Zbog toga je uveo sledeću relaciju u $C^\infty(\mathcal{E}'(\Omega))$: $R\rho S$ ako i samo ako je $R(\delta_x) = S(\delta_x)$ za svako $x \in \Omega$.

Ako A označava preslikavanje iz $C^\infty(\mathcal{E}'(\Omega))$ u $C^\infty(\Omega)$,

$$f \to (x \to < f, \delta_x >),$$

sledi da je $R \in \mathrm{Ker}A$ ako i samo ako je $R\rho 0$.

Dalje je tražio ideal za $C^\infty(\mathcal{D}(\Omega))$ koji će u preseku sa $C^\infty(\mathcal{E}'(\Omega))$ dati baš $\mathrm{Ker}A$. Prvobitno nađen takav ideal za podskup od $C^\infty(\mathcal{D}(\Omega))$

takozvanih umerenih funkcija ("moderate") se malo razlikuje od ideala $\mathcal{N}[\Omega]$ iz prvog poglavlja ovog rada. Baš ovu definiciju je dobio pošto je uočio da je za primenu dovoljno da posmatra funkcije nad nekim podskupom od $\mathcal{D}(\Omega)$, odnosno baš na skupu $\mathcal{A}_1$ koji je takođe definisan u prvom poglavlju.

Primetimo na kraju ovog istorijskog dela, da definicija izvoda uopštene funkcije nije nastala jednostavnim postupkom diferenciranja reprezenta uopštene funkcije, već je to specijalan slučaj izvoda u bornološkim prostorima, koje je ranije Kolombo istraživao, pre konstruisanja vrlo opšte teorije uopštenih funkcija.

Kako je množenje pridodato operacijama koje su već postojale u prostorima distribucija, nametala se primena Kolomboovih uopštenih funkcija u nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednačinama, koje su ostale praktično netaknute razvojem distribucione teorije i njenom primenom na parcijalne diferencijalne jednačine, baš zbog nepostojanja operacije množenja distribucija. Kolombo je to istakao već u prvim radovima o novim uopštenim funkcijama. Veliki broj konkretnih primera nelinearnih jednačina je dat u u monografijama [15] i [16], koje su inače prve monografije iz ove oblasti. Posle toga je više autora proučavalo slične probleme. Spomenimo samo poznatije: Obergugenberger, Biađoni i Aragona. Posebno ističemo monografiju Obergugenbergera ([55]) kao primer precizno zasnovane teorije i sveobuhvatnosti sadržaja, čiji su rezultati i metodi istraživanja obilno korišćeni u ovom radu.

Teorija Kolomboovih funkcija je pogodna i za takozvanu linearnu analizu. Operacije kao što su konvolucija i Furijeova transformacija su definisane u Prostorima Kolomboovih uopštenih funkcija tako da se proširuju klasične definicije na način koji omogućava operacionalizovan prilaz rešavanju raznih tipova jednačina. Pogodnosti Kolomboove teorije u linearnim problemima, je to što uopštene funkcije dozvoljavaju rad metodom nestandardne analize, gde postoje veće mogućnosti za konstrukciju uopštenih funkcija sa odgovarajućim osobinama, nego što je to slučaj sa klasičnim distribucijama. Grubo govoreći, jednoj distribuciji odgovara više uopštenih funkcija, tako da izborom odgovarajućeg pretstavnika prevazilazimo neke od problema. Na primer, Hevisajdovoj funkciji, koja je jedinstvena u prostoru distribucija, odgovaraju različite uopštene funkcije: jedna jednaka 1/2 u nuli, druga jednaka 0 u nuli i treća jednaka 1 u nuli. Klice mikro teorije se pojavljuju već u prvim monografijama Kolomboa, a u novijim radovima se mikroanaliza često koristi, što znači da je to jedan od bitnih pravaca ove teorije. To je inače linija koja vezuje nestandardnu analizu i Kolomboovu teoriju. U magistarskom radu Nedeljkova ([51]), je proučavana Kolomboova teorija kao jedan model nestandardne analize.

Prva polovina teze je posvećena problemima linearne analize dok je druga polovina posvećena nelinearnim jednačinama. Pored originalnih rezultata Nedeljkova, rezultati su delom nastali zajedničkim radom Pilipovića i Nedeljkova (hipoeliptičnost, Furijeova transformacija, konvolucija i teoreme tipa Pali-Vinera) i Pilipovića, Skarpalezosa i Nedeljkova (deo o deljenju i fundamentalnom rešenju linearne parcijalne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima).

U delu o nelinearnim jednačinama, u sklopu opšte teorije, su izloženi rezultati Nedeljkova i zajednički rezultati Nedeljkova i Pilipovića.

0.2. Raspored izlaganja

U prvoj glavi je dat pregled osnovnih definicija Kolomboovih prostora uopštenih funkcija ([15], [55]) i prostora težinskih, specijalno temperiranih uopštenih funkcija, konvolucije i Furijeove transformacije u njima. To je deo koji je od značaja za dalja izlaganja u ovom radu, pogotovo za petu glavu. Dobrim delom magistarski rad autora je posvećen navedenim pojmovima ([43], [44], citemn3).

U drugoj glavi su date tri vrste topologije: klasična ([5]), oštra ([70]) i nestandardna ([52]). Prva opisana topologija je najmanje korišćena, jer nije ni Hauzdorfova, a kako je definisana na prstenu uopštenih brojeva, nepraktična je. Treća topologija ima najbolje osobine, najprirodnije za uopštene brojeve i funkcije, zbog toga što je napravljena na isti način kao i nestandardna varijanta Kolomboovih prostora - na način nestandardne analize. Međutim, to joj je i zamerka, teoretski je dobra, ali praktično ne možemo jednostavno raditi sa takvom topologijom zbog same konstrukcije: Kao i u svakom modelu nestandardne analize se koristi aksiom izbora tako da se dobijju egzistencijalna tvrđenja a ne konstruktivna. Taj problem između loših osobina i praktičnog rada s jedne strane i dobrih osobina i nepraktičnosti je rešio na zadovoljavajući način Skarpalezos uvodeći oštru topologiju. Prostor uopštenih brojeva i dalje nije polje, ali topologija ima skoro sve dobre osobine kao i ona opisana u nestandardnoj verziji, a praktično se radi isto tako dobro kao i sa klasičnom topologijom.

U trećoj glavi je dato rešenje problema deljenja i konstruisano je fundamentalno rešenje linearne parcijalne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima ([48]).

U četvrtoj glavi je proučavana Laplasova transformacija u težinskim prostorima uopštenih funkcija u smislu da li ostaju očuvane klasične osobine za ovu transformaciju definisanu na širem skupu, i kakva je veza između klasične i uopštene Laplasove transforcije ([50]). Zatim su date konkretne teoreme tipa Pali-Vinera za Kolomboove uopštene funkcije sa kompaktnim nosačem i nosačem u konusu ([46]).

U petoj glavi je izložena teorija pseudo-diferencijalnih operatora u Kolomboovim prostorima prema [64], i proučena je klasa hipoeliptičnih operatora ([47]).

Šesta glava je posvećena nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednačinama i to sa semilinearnim sistemima i jednačinama i kvazilinearnim sistemima i jednačinama. Ovo je najobimnija glava. Mogućnosti koje daje dobra definisanost množenja uopštenih funkcija su iskorišćene za konstrukciju rešenja. Izdvojena su dva specijalna tipa rešenja - rešenja tipa udarnih talasa i rešenja solitonskog tipa koja su opisana odvojeno u sedmoj glavi.

Glava 1.

Definicije Kolomboovih prostora i osnovnih operacija

1.1. Osnovne definicije

U ovom delu će biti date originalne Kolomboove definicije iz [15] uz modifikacije iz [5] i [55], gde su inače data vrlo korisna uputstva za praktični rad sa Kolomboovom teorijom.

$\mathbf{R}^n$ je Euklidski n-dimenzionalni prostor, $\mathbf{C}$ je skup kompleksnih brojeva, $\mathbf{N}$ je skup prirodnih brojeva i $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$. Izvod reda β je $\partial^\beta = \partial^{|\beta|}/\partial x_1^{\beta_1}, ..., \partial x_n^{\beta_n}$, gde je $|\beta| = \beta_1 + ... + \beta_n$ a $i \leq \beta$ znači da je za svako $k \in \{1, ..., n\}$, $i_k \leq \beta_k$. $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ i $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ su standardni Švarcovi prostori test funkcija i prostora brzoopadajuih funkcija. Njihove osobine i osobine njihovih duala se mogu naći u [72] na primer. Evo sada definicija iz [15], [5] i [55].

$\mathcal{A}_q$ je skup svih funkcija $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \phi(t)dt = 1, \int_{\mathbf{R}^n} \phi(t)t^i dt = 0, \text{diam}(\text{supp}\phi) = 1, \tag{1.1}$$

gde je $1 \leq |i| \leq q$ i $q \in \mathbf{N}$. $\mathcal{A}_0$ je skup svih $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ takvih da je

$$\int_{\mathbf{R}^n} \phi(t)dt = 1, \text{diam}(\text{supp}\phi) = 1.$$

Pretpostavljamo da je diam(suppϕ) = 1 da bi pojednostavili rad.

Naime, onda možemo koristiti činjenicu da je $\varepsilon = \ell(\phi_\varepsilon)$, gde je $\phi_\varepsilon = 1/\varepsilon\phi(\cdot/\varepsilon)$ i $\ell(\phi) = \mathrm{diam}(\mathrm{supp}\phi)$, što je Obergugenberger koristio u [55].

Očigledno važi

$$\mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset .....$$

Kolombo je u [16] pokazao da je $\mathcal{A}_q$ neprazan skup za svaki prirodan broj q, ali i da je presek svih takvih skupova prazan skup. Ako bi umesto test funkcija ϕ u definiciji skupova $\mathcal{A}_q$ koristili brzoopadajuće funkcije ϕ, uz zadržavanje svih ostalih osobina, presek svih skupova $\mathcal{A}_q$, $q \in \mathbf{N}$, bi bio neprazan. Međutim, tada ne bi bilo moguće preslikati prostor distribucija u prostor uopštenih funkcija na prirodan način na koji će to biti kasnije urađeno, već samo prostor temperiranih distribucija, što bi znatno otežalo rad.

Biađoni je u svojoj monografiji [5] definisala skup $\overline{\mathcal{A}}_q(\mathbf{R}^n)$ na sledeći način:

$$\overline{\mathcal{A}}_q(\mathbf{R}^n) = \{\phi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} |\ \phi(x) = \phi_1(x_1)\cdots\phi_1(x_n), \phi_1 \in \overline{\mathcal{A}}_q(\mathbf{R})\},$$

gde je skup $\overline{\mathcal{A}}_q(\mathbf{R})$ jednak sa Kolomboovim skupom $\mathcal{A}_q$ za dimenziju $n = 1$.

Ona je u istom radu dokazala na elementaran način da nijedan od ovih skupova $\overline{\mathcal{A}}_q(\mathbf{R}^n)$ nije prazan za bilo koji prirodan broj q.

Prednost korišćenja ovih skupova umesto originalnih Kolomboovih je da se može korektno definisati restrikcija uopštenih funkcija na manjedimenzionalne prostore uopštenih funkcija, kako će se to videti u daljem tekstu.

$\mathcal{E}[\mathbf{R}^n]$ je skup svih funkcija $G : \mathcal{A}_0 \times (0,1) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ za koje važi:

$$\text{(1.2)} \qquad \text{za svako } \phi \in \mathcal{A}_0,\ G_{\phi,\varepsilon}(\cdot) \in C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Ovaj skup ima osobinu da je u njemu jednakost "previše" jaka za distribucije i da ne postoji pogodan ideal takav da bi razlika dve iste preslikane distribucije bila u tom idealu. Zbog toga je Kolombo definisao prostor takozvanih umerenih (moderate) funkcija:

$\mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]$ je skup svih funkcija $G \in \mathcal{E}[\mathbf{R}^n]$ koje zadovoljavaju sledeći uslov:

$$\text{(1.3)} \qquad \begin{cases} \text{za svaki kompaktni skup } K \text{ i za svako } \beta \in \mathbf{N}_0^n \\ \text{postoji } N \in \mathbf{N} \text{ takvo da za svako } \phi \in \mathcal{A}_N \\ \text{postoje } \eta > 0,\ c > 0 \text{ takvi da je} \\ |\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(x)| \le c\varepsilon^{-N},\ x \in K,\ \varepsilon < \eta. \end{cases}$$

Za umerene funkcije se ne može korektno definisati eksponent uopštene funkcije. U nekim radovima je to pokušano da se otkloni, ali se pri tome gubi veliki broj uopštenih funkcija koje pri ovoj definiciji postoje.

Sa Γ ćemo označiti skup svih rastućih nizova koji teže beskonačnosti.

$\mathcal{N}[\mathbf{R}^n]$ je skup svih funkcija $G \in \mathcal{E}[\mathbf{R}^n]$ koje zadovoljavaju sledeći uslov:

$$(1.4)\quad \begin{cases} \text{za svaki kompaktni skup } K \text{ i za svako } \beta \in \mathbf{N}_0^n \\ \text{postoje } N \in \mathbf{N} \text{ i } \alpha \in \Gamma \text{ takvi da za svako } \phi \in \mathcal{A}_q, \\ q \geq N, \text{ postoje } \eta > 0,\ c > 0 \text{ takvi da je} \\ |\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N},\ x \in K,\ \varepsilon < \eta. \end{cases}$$

Ovaj skup je ideal skupa umerenih funkcija (pogledati [15], na primer), pa sa

$$\mathcal{G}(\mathbf{R}^n) = \mathcal{E}_M[\mathbf{R}^n]/\mathcal{N}[\mathbf{R}^n]$$

definišemo skup uopštenih funkcija.

Ako u definiciji uopštenih funkcija koristimo otvoren potskup Ω od $\mathbf{R}^n$, tada dobijamo uopštene funkcije nad Ω, $\mathcal{G}(\Omega)$. Ako nema zabune, izostavljaćemo oznaku $[\mathbf{R}^n]$. $G \in \mathcal{G}$ je definisan pretstavnikom $G_{\phi,\varepsilon}(\cdot) \in \mathcal{E}_M$.

Za rad sa početnim i rubnim problemima će biti potrebna sledeća definicija uopštenih funkcija nad zatvorenjem otvorenog skupa.

$\mathcal{E}[\overline{\Omega}]$ je skup svih $G : \mathcal{A}_0 \times (0,1) \times \overline{\Omega} \to \mathbf{C}$ takvih da je njihova restrikcija na Ω iz $\mathcal{E}(\Omega)$ i da se njeni izvodi mogu neprekidno produžiti na $\overline{\Omega}$.

$\mathcal{E}_M[\overline{\Omega}]$ je skup svih funkcija $G \in \mathcal{E}[\overline{\Omega}]$ koje zadovoljavaju sledeći uslov:

$$\begin{cases} \text{za svaki kompaktni skup } K \subset \overline{\Omega} \text{ i za svako } \beta \in \mathbf{N}_0^n \\ \text{postoji } N \in \mathbf{N} \text{ takvo da za svako } \phi \in \mathcal{A}_N \\ \text{postoje } \eta > 0,\ c > 0 \text{ takvi da je} \\ |\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq c\varepsilon^{-N},\ x \in K,\ \varepsilon < \eta. \end{cases}$$

$\mathcal{N}[\overline{\Omega}]$ je skup svih funkcija $G \in \mathcal{E}[\overline{\Omega}]$ koje zadovoljavaju sledeći uslov:

$$\begin{cases} \text{za svaki kompaktni skup } K \subset \overline{\Omega} \text{ i za svako } \beta \in \mathbf{N}_0^n \\ \text{postoje } N \in \mathbf{N} \text{ i } \alpha \in \Gamma \text{ takvi da za svako } \phi \in \mathcal{A}_q, \\ q \geq N, \text{ postoje } \eta > 0,\ c > 0 \text{ takvi da je} \\ |\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N},\ x \in K,\ \varepsilon < \eta. \end{cases}$$

$\mathcal{G}(\overline{\Omega}) = \mathcal{E}_M[\overline{\Omega}]/\mathcal{N}[\overline{\Omega}]$.

Za ovako definisane uopštene funkcije skup kompleksnih brojeva nije adekvatan, pa ćemo sada uvesti pojam uopštenih kompleksnih brojeva na analogan način kako smo to uradili sa uopštenim funkcijama.

$\mathbf{C}_M$ je skup svih funkcija $A : \mathcal{A}_0 \times (0,1) \to \mathbf{C}$ koje zadovoljavaju sledeći uslov:

$$(1.5) \quad \begin{cases} \text{postoji } N \in \mathbf{N} \text{ takvo da za svako } \phi \in \mathcal{A}_N \\ \text{postoje } \eta > 0,\ c > 0 \text{ takvi da je} \\ |A_{\phi,\varepsilon}| \leq c\varepsilon^{-N},\ \varepsilon < \eta. \end{cases}$$

$\mathbf{C}_0$ je skup svih funkcija $A \in \mathbf{C}_M$ koje zadovoljavaju sledeći uslov:

$$(1.6) \quad \begin{cases} \text{postoje } N \in \mathbf{N} \text{ i } \alpha \in \Gamma \text{ takvi da za svako } \phi \in \mathcal{A}_q, \\ q \geq N, \text{ postoje } \eta > 0,\ c > 0 \text{ takvi da je} \\ |A_{\phi,\varepsilon}| \leq c\varepsilon^{\alpha(q)-N},\ \varepsilon < \eta. \end{cases}$$

$\overline{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_M/\mathbf{C}_0$ je skup uopštenih kompleksnih brojeva.

Primetimo da je za svako $x \in \mathbf{R}^n$ i za svako $G \in \mathcal{G}$ sa $G(x)$ definisan uopšten kompleksan broj preko pretstavnika $G_{\phi,\varepsilon}(x)$, koji će u stvari biti vrednost uopštene funkcije u tački x.

Preslikavanje $\mathrm{Cd} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{G}(\Omega)$ je definisno sa $\mathrm{Cd}(g) = G$, gde je

$$\begin{aligned} G_{\phi,\varepsilon}(x) &= \,< g(y), \phi_\varepsilon(y-x) > = g \star \check{\phi}_\varepsilon(x), \\ &\quad \mathrm{supp}(\tau_x\phi_\varepsilon) \subset \Omega, x \in \mathbf{R}^n, \phi \in \mathcal{A}_1 \\ &\quad (\check{\phi}(x) = \phi(-x)), \end{aligned}$$

gde je $\tau_x\phi(y) = \phi(y-x)$. Primetimo da ako dovoljno smanjimo $\varepsilon > 0$, uslov $\mathrm{supp}(\tau_x\phi_\varepsilon) \subset \Omega$ će biti zadovoljen za svako $x \in \Omega$. To je injektivno preslikavanje prostora distribucija u prostor uopštenih funkcija, kako je to pokazano u [15]. Injektivnost ovog preslikavanja je praktično argument za prihvatanje uopštenih funkcija kao aparature za rad u klasičnim oblastima, mada će kasnije, pre svega radi jednostavnijeg rada, biti uvedene razne oslabljene verzije (simplifikovane algebre) ovih uopštenih funkcija koje nemaju ovu osobinu.

Tačkasti proizvod, kao i izvodi uopštenih funkcija su definisani prirodno na odgovarajućim pretstavnicima. Ove definicije su korektne u smislu da ne zavise od različitih pretstavnika uopštenih funkcija koji se mogu uzeti iz $\mathcal{E}_M$. Operacije koje ne zavise od pretstavnika ćemo zvati dobro definisane operacije (ili operacije koje imaju smisla).

Jednakost uopštenih funkcija je previše restriktivna za mnoge primene pa se uvode neke slabije verzije jednakosti: asociranost ($\approx$) i jednakost u distributivnom smislu ((g.d.) jednakost).

$Z \in \overline{\mathbf{C}}$ je asociran sa $z \in \mathbf{C}$, što pišemo $Z \approx z$, ako za neki njegov pretstavnik $Z_{\phi,\varepsilon}$ postoji $N \in \mathbf{N}$ takvo da je $\lim_{\varepsilon\to 0} Z_{\phi,\varepsilon} = z$, $\phi \in \mathcal{A}_N$. Lako se vidi da ova definicija ne zavisi od izabranog predstavnika.

Za asociranost i jednakost u distributivnom smislu uopštenih funkcija je potreban pojam integrala koji će sada biti naveden.

Neka je K kompaktan skup. Integral $\int_K G(x)dx \in \mathcal{E}_M$ je definisan svojim pretstavnikom $\int_K G_{\phi,\varepsilon}(x)dx \in \mathbf{C}_M$, $\phi \in \mathcal{A}_0$, $\varepsilon < \eta$.

Nosač uopštene funkcije G je komplement najvećeg otvorenog skupa O takvog da je $G|_O = 0$ u $\mathcal{G}(O)$. Neka je G uopštena funkcija sa kompaktnim nosačem i neka je K kompaktan skup koji sadrži u svojoj unutrašnjosti nosač od G. Tada definišemo

$$\int G(x)dx = \int_K G(x)dx.$$

Može se pokazati jedna korisna osobina ovog integrala:
Neka je $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ i neka je $g \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Tada je

$$\int \mathrm{Cd}(g)\psi =< g, \psi >.$$

Kažemo da je $G \in \mathcal{G}$ jednako u smislu uopštenih distribucija distribuciji g ($G = g(g.d.)$) ako za svako $\psi \in \mathcal{D}$

$$\int G(x)\psi(x)dx =< g(x), \psi(x) > .$$

Dve uopštne funkcije F i G su jednake u smislu uopštenih distribucija ($F = G(g.d.)$) ako je $F - G = 0(g.d.)$ (0 je nula distribucija).

Kažemo da je $G \in \mathcal{G}$ asocirano sa distribucijom g ($G \approx g$) ako za svako $\psi \in \mathcal{D}$

$$\int G(x)\psi(x)dx \approx < g(x), \psi(x) > .$$

Dve uopštne funkcije F i G su asocirane ($F \approx G$) ako je $F - G \approx 0$ (0 je nula distribucija).

Nadalje ćemo umesto skupova $\mathcal{A}_q$ koristiti skupove $\overline{\mathcal{A}}_q$ koje je napravila Biađoni baš zbog ovakvih primena, i označavaćemo ih sa $\mathcal{A}_q$. U [5] je pokazno da postoji bijekcija

$$I_n^m : \mathcal{A}_0(\mathbf{R}^m) \to \mathcal{A}_0(\mathbf{R}^n)$$

sa sledećim osobinama

- $I_n^m(\mathcal{A}_q(\mathbf{R}^m)) = \mathcal{A}_q(\mathbf{R}^n)$, $q = 1, 2, \ldots\ldots$
- I_m^m je identičko preslikavanje.
- $I_n^m(\phi_\varepsilon) = I_n^m(\phi_{\varepsilon^{m/n}})$, za sve $\phi \in \mathcal{A}_0(\mathbf{R}^m)$ i sve $\varepsilon > 0$.
- $I_n^p \circ I_p^m = I_n^m$ za sve $p = 1, 2, \ldots\ldots$

Nadalje ćemo koristiti malo izmenjenu definiciju ove bijekcije datu na sledeći način. Kako je diam(supp ϕ) = 1, za $\phi \in \mathcal{A}_0$ definišemo

$$I_m^n(\underbrace{\phi_\varepsilon \times \ldots \times \phi_\varepsilon}_{n}) = (\underbrace{\phi_\varepsilon \times \ldots \times \phi_\varepsilon}_{m}).$$

Posle ove modifikacije u trećoj osobini nemamo eksponent m/n kod ε.

Sada ćemo dati definiciju kompozicije uopštenih funkcija. Neka su Ω i Ω' otvoreni skupovi u $\mathbf{R}^n$ i $\mathbf{R}^m$ respektivno.

$\mathcal{E}[\Omega, \mathbf{R}^m]$ je skup svih funkcija

$$G : \mathcal{A}_0 \times \Omega \times (0, 1) \to \mathbf{R}^m$$

koje su C^∞ po promenljivoj $x \in \Omega$ za fiksirano $\phi \in \mathcal{A}_0$.

$\mathcal{E}_M[\Omega, \mathbf{R}^m]$ je skup svih funkcija iz $\mathcal{E}[\Omega, \mathbf{R}^m]$ takvih da za bilo koji kompaktan skup $K \subset \Omega$ i bilo koji multiindeks $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ postoji $N \in \mathbf{N}$ takvo da za svako $\mathcal{A}_N(\mathbf{R}^m)$ postoje $c > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je

$$\|\partial^\alpha G_{\phi,\varepsilon}(x)\| \leq c\varepsilon^{-N}$$

za svako $x \in K$ i $0 < \varepsilon < \eta$, gde je $\|\cdot\|$ uobičajena norma u $\mathbf{R}^n$.

$\mathcal{N}[\Omega, \mathbf{R}^m]$ je skup svih funkcija iz $\mathcal{E}[\Omega, \mathbf{R}^m]$ takvih da za bilo koji kompaktan skup K i bilo koji multiindeks $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ postoje $N \in \mathbf{N}$ i $\beta \in \Gamma$ takvi da za svako $\mathcal{A}_q[\mathbf{R}^m]$, $q > N$ postoje $c > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je

$$\|\partial^\alpha G_{\phi,\varepsilon}(x)\| \leq c\varepsilon^{\beta(q)-N}$$

za svako $x \in K$ i $0 < \varepsilon < \eta$.

Kao što je $\mathcal{N}$ ideal od $\mathcal{E}_M$, može se pokazati da je $\mathcal{N}[\Omega, \mathbf{R}^m]$ ideal od $\mathcal{E}_M[\Omega, \mathbf{R}^m]$ pa ima smisla da definišemo

$$\mathcal{G}(\Omega, \mathbf{R}^m) = \mathcal{E}_M[\Omega, \mathbf{R}^m]/\mathcal{N}[\Omega, \mathbf{R}^m].$$

Očigledno je da elemente ovog skupa možemo posmatrati kao familiju (od m) uopštenih funkcija.

$\mathcal{G}_*(\Omega, \Omega')$ je skup svih $G \in \mathcal{G}(\Omega, \mathbf{R}^m)$ za koje postoji reprezent $G_{\phi,\varepsilon}(\cdot) \in \mathcal{E}_M[\Omega, \mathbf{R}^m]$ za koji važi sledeće:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{za svaki kompaktan skup } K \subset \Omega \text{ postoji } N \in \mathbf{N} \text{ takvo da} \\ \text{za svako } \phi \in \mathcal{A}_N(\mathbf{R}^n) \text{ postoji } \eta > 0 \text{ takvo da je skup} \\ \{G_{\phi,\varepsilon}(x) |\ x \in K, 0 < \varepsilon < \eta\} \text{ sadržan} \\ \text{u kompaktnom potskupu od } \Omega' \text{ koji je nezavistan od } \phi\end{array}\right.$$

Primetimo, da ako postoji jedan takav reprezent od G, svi njegovi reprezenti zadovoljavaju isti uslov.

U opštem slučaju ne važi

$$\mathcal{G}_*(\Omega, \mathbf{R}^n) = \mathcal{G}(\Omega, \mathbf{R}^n).$$

Kao primer za to možemo uzeti da

$$\delta = \phi_\varepsilon(-x) + \mathcal{N}[\Omega, \mathbf{R}^m] \notin \mathcal{G}_*(\Omega, \mathbf{R}^n).$$

Sada možemo definisati kompoziciju uopštenih funkcija na sledeći način:

Ako je $G_1 \in \mathcal{G}(\Omega')$ i $G_2 \in \mathcal{G}_*(\Omega, \Omega')$ tada, respektivno, postoje njihovi reprezenti iz $\mathcal{E}_M[\Omega']$ i iz $\mathcal{E}_M[\Omega, \mathbf{R}^m]$. Neka je i $G \in \mathcal{E}[\Omega]$ sa sledećom osobinom:

Za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ postoji $N \in \mathbf{N}$ tako da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N(\mathbf{R}^n)$ postoji $\eta > 0$ takvo da je

$$G_{\phi,\varepsilon}(x) = G_{1,I_m^n(\phi_\varepsilon)}(G_{2,\phi,\varepsilon}(x)),$$

za sve $x \in K$ i $0 < \varepsilon < \eta$. Tada je G element iz $\mathcal{E}_M[\Omega]$ i možemo definisati kompoziciju dve uopštene funkcije,

$$G_1 \circ G_2 \in \mathcal{G}(\Omega)$$

kao klasu ekvivalencije tog elementa. Jasno je da ova definicija ne zavisi od izabranih reprezenata.

1.2. Težinski prostori, konvolucija i Furijeova transformacija

1.2.1. Težinski prostori

Temperirane uopštene funkcije je uveo Kolombo u [15], ako i temperirani integral, konvoluciju i Furijeovu transformaciju. Te definicije nisu imale zadovoljavajuća svojstva, ne važi "exchange" formula, konvolucija nije asocijativna i komutativna.

Radi prevazilaženja navedenih nedostataka, Nedeljkov i Pilipović su u [43] uveli težinske prostore, čiji je specijalan slučaj prostor uopštenih temperiranih funkcija. Mada je prostor $\mathcal{G}_{\mathbf{t}}$ identičan sa Kolomboovim $\mathcal{G}_\tau$, temperirane operacije uvedene na ovaj način u [44] imaju prethodno nabrojane osobine.

Ponovićemo pojmove i notaciju iz [43].

$\mathbf{A}$ je skup svih neprekidnih, rastućih funkcija $\mathbf{a}$ definisanih na intervalu $[1, \infty)$ za koje je

$$\lim_{x\to\infty} \mathbf{a}(x) = \infty \text{ i } \mathbf{a}(x) = \mathcal{O}(x), x \to \infty.$$

Neka je $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ fiksirano. Označimo sa $\Theta_{\mathbf{a}}$ skup svih neprekidnih funkcija θ definisanih na $[0, \infty)$ takvih da je $\theta(0) = 1$, i za svako $p \geq 0$ postoji $\gamma > 0$ takvo da je

$$\theta(p + \mathbf{a}(x)) = \mathcal{O}(x^\gamma), x \to \infty.$$

Najinteresantniji slučaj funkcije iz $\mathbf{A}$ je $\mathbf{t}(x) = x$, $x \in \mathbf{R}$.

Definišimo $\mathcal{E}_{\mathbf{a}}$ kao skup svih elemenata $G \in \mathcal{E}$ takvih da za svako $\beta \in \mathbf{N}_0^n$ postoje $N \in \mathbf{N}$ i $\theta \in \Theta_{\mathbf{a}}$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoje

$C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je

$$|\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(x)| < \theta(|x|)\varepsilon^{-N},\ \varepsilon < \eta,\ x \in \mathbf{R}^n. \tag{1.7}$$

Skup $\mathcal{N}_{\mathbf{a}}$ je skup onih elemenata $G \in \mathcal{E}_{\mathbf{a}}$ takvih da za svako $\beta \in \mathbf{N}_0^n$ postoje $g \in \Gamma$, $N \in \mathbf{N}$ i $\theta \in \Theta_{\mathbf{a}}$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \geq N$, postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da

$$|\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(x)| < \theta(|x|)\varepsilon^{g(q)-N},\ \varepsilon < \eta,\ x \in \mathbf{R}^n. \tag{1.8}$$

Očigledno je $\mathcal{N}_{\mathbf{a}} \subset \mathcal{N}$.

Propozicija 1.1. *$\mathcal{N}_{\mathbf{a}}$ je ideal od $\mathcal{E}_{\mathbf{a}}$.*

Dokaz ove propozicije je sličan dokazu da je $\mathcal{N}$ ideal od $\mathcal{E}_M$, samo se još koriste osobine funkcija iz $\Theta_{\mathbf{a}}$.

Ova propozicija nam omogućava da definišemo

$$\mathcal{G}_{\mathbf{a}} = \mathcal{E}_{\mathbf{a}}/\mathcal{N}_{\mathbf{a}}.$$

Zbog konvolucije će nam trebati sledeća definicija: $\overline{\Theta}_{\mathbf{a}}$ je skup svih funkcija $\theta \in \Theta_{\mathbf{a}}$ koje zadovoljavaju sledeći uslov:

Postoje konstante $c > 1$ i x_0 i funkcije θ_1 i θ_2 iz $\Theta_{\mathbf{a}}$ takve da za svako $x, y > x_0$ važi

$$\theta(x+y) \leq c\theta_1(x)\theta_2(y).$$

Propozicija 1.2. *1. Ako su θ_1 i θ_2 u $\Theta_{\mathbf{a}}$ tada su $\theta_1 + \theta_2$ i θ_1 i θ_2 u $\Theta_{\mathbf{a}}$.*

2. Ako su θ_1, θ_2 u $\overline{\Theta}_{\mathbf{a}}$ tada su $\theta_1 + \theta_2$ i $\theta_1\theta_2$ u $\overline{\Theta}_{\mathbf{a}}$.

3. Ako za $\mathbf{a}_1$ i $\mathbf{a}_2$ iz $\mathbf{A}$ postoji konstanta $c > 1$ takva da je $\mathbf{a}_1(x) \geq c\mathbf{a}_2(x)$, tada je $\Theta_{\mathbf{a}_1} \subset \Theta_{\mathbf{a}_2}$ i $\overline{\Theta}_{\mathbf{a}_1} \subset \overline{\Theta}_{\mathbf{a}_2}$.

4. Ako je $\theta \in \Theta_{\mathbf{a}}$ onda je $\theta \in \overline{\Theta}_{\ln(\mathbf{a})}$.

5. Ako je za neko $c > 1$ i $m \in \mathbf{N}$ $c\mathbf{a}(x) \leq \mathbf{a}(x^m)$, tada je $\Theta_{\mathbf{a}} = \overline{\Theta}_{\mathbf{a}}$.

Dokaz: Dokaz prva tri stava je jednostavan, pa ćemo dati dokaz samo poslednja dva trvđenja.

4. Kako važi

$$\theta(2\ln(\mathbf{a}(x))) = \theta(\ln(\mathbf{a}(x))^2) \leq \theta(\mathbf{a}(x)) = \mathcal{O}(x),\ x \to \infty,$$

imamo da je $\theta(2\ \cdot) \in \Theta_{\ln(\mathbf{a})}$.

Ako je $\lim_{x\to\infty} \theta(x) \leq 1$ tada postoji $c > 0$ takvo da je

$$\theta(x+y) \leq c\theta(2x)\theta(2y),$$

za dovoljno velike x i y.

Ako je $\lim_{x\to\infty} \theta(x) \geq 1$, tada za dovoljno velike x i y imamo

$$\theta(2x) > 1, \theta(2y) > 1,$$

pa je i

$$\theta(x+y) \leq \theta(2x)\theta(2y).$$

U oba slučaja tvrđenje propozicije važi, jer je $\theta(2\ \cdot) \in \Theta_{\mathbf{ln(a)}}$.

5. Dati uslov implicira da je za svako $\theta \in \Theta_{\mathbf{a}}$, $\theta(2\ \cdot) \in \Theta_{\mathbf{a}}$. Dokaz se dalje izvodi kao u prethodnom slučaju.□

Primedba. Ako je $\mathbf{t}(x) = x$ tada je $\overline{\Theta}_{\mathbf{t}} = \Theta_{\mathbf{t}}$. Isti slučaj je i za $\mathbf{a}(x) = \ln(x)$, dok ova dva skupa nisu ista za $\mathbf{a}(x) = \ln(\ln(x))$.

Kao što smo definisali $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ koristeći skpove $\Theta_{\mathbf{a}}$ možemo definisati i novi prostor $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{a}}$ koristeći skupove $\overline{\Theta}_{\mathbf{a}}$.

Ako je $\mathbf{a}_1(x) \geq c\mathbf{a}_2(x)$, $x \in \mathbf{R}$, za $c > 1$, tada je $\mathcal{E}_{\mathbf{a}_1} \subset \mathcal{E}_{\mathbf{a}_2}$ i $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_1} \subset \mathcal{N}_{\mathbf{a}_2}$, odnosno, možemo smatrati da je $\mathcal{G}_{\mathbf{a}_1} \subset \mathcal{G}_{\mathbf{a}_2}$ Isto tako vidimo da je i $\mathcal{G}_{\mathbf{a}} \subset \overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{a}}$. Ove dve inkluzije, kao i inkluzija $\mathcal{G}_{\mathbf{a}} \to \mathcal{G}$ nisu injektivne u Kolomboovim prostorima uopštenih funkcija. Primer za to je dat u [43].

Propozicija 1.3. *Neka je $g \in \mathcal{D}'$ distribucija konačnog reda. Postoji $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ takvo da je $\mathrm{Cd}(g) \in \mathcal{G}_{\mathbf{a}}$. Specijalno, prostor distribucija konačnog reda se može utopiti u $\bigcup_{\mathbf{a}\in\mathbf{A}} \mathcal{G}_{\mathbf{a}}$.*

Dokaz: Prema teoremi o reprezentaciji distribucija, postoje neprekidna funkcija f i multiindeks α takvi da je $\partial^\alpha f = g$. Za $\beta \in \mathbf{N}_0^n$ imamo da je $\partial^\beta G = \mathrm{Cd}(\partial^\beta g) = \mathrm{Cd}(\partial^{\alpha+\beta} f)$ i da je

$$\begin{aligned}\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon} &= \partial^{\alpha+\beta} f \star \phi_\varepsilon(x)\\ &= \int f(x+t)\partial^{\alpha+\beta}\phi_\varepsilon(t)dt\\ &= \varepsilon^{-(|\alpha|+|\beta|)}\int f(x+t)\partial^{\alpha+\beta}\phi(t)dt,\\ & \quad x \in \mathbf{R}^n,\ \phi \in \mathcal{A}_0,\ \varepsilon > 0.\end{aligned}$$

Dalje imamo da je

$$|\int f(x+\varepsilon t)\partial^{\alpha+\beta}\phi(t)dt| \le \int |f(x+\varepsilon t)||\partial^{\alpha+\beta}\phi(t)|dt.$$

Neka je f_1 parna, pozitivna i neprekidna funkcija na $\mathbf{R}$ koja je rastuća na $[0,\infty)$ takva da je $f_1(|x|) \ge |f(t)|$ i $f_1(|t|) \ge c|t|$ za $t \in \mathbf{R}^n$. Tada je

$$\begin{aligned}\int |f(x+\varepsilon t)| \quad & |\partial^{\alpha+\beta}\phi(t)|dt\\ \le \quad & f_1(|x| + \varepsilon a_{\alpha,\beta})\int |\partial^{\alpha+\beta}\phi(t)|dt,\\ & x \in \mathbf{R}^n, \varepsilon > 0,\end{aligned}$$

gde je $a_{\alpha,\beta} = \sup\{|t|,\ t \in \mathrm{supp}(\partial^{\alpha+\beta}\phi)\}$.

Neka je $\theta(x) = f_1(x+1), x \in [0,\infty)$ i neka je $\mathbf{a} = \ln(\theta^{-1})$, gde je θ^{-1} inverzna funkcija za θ definisana na odgovarajućem intervalu $[\theta(0),\infty)$. Jasno je da je $\theta \in \Theta_{\mathbf{a}}$. Neka je $N = |\alpha| + |\beta|$, $\phi \in \mathcal{A}_N$, $c = \int |\partial^{\alpha+\beta}\phi(t)dt|$ i neka je $\eta = 1/a_{\alpha,\beta}$. Tada je

$$|\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(x)| \le c\theta(|x|)\varepsilon^{-N},\ x \in \mathbf{R}^n,\ \varepsilon \in (0,\eta).$$

To je bio dokaz da je $\mathrm{Cd}(g)$ u $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$. $\Box$

Neka je μ_ε jedinična mreža za $\mathbf{a}$, B neka je merljivi podskup od $\mathbf{R}^n$ i neka je $G \in \mathcal{G}_{\mathbf{a}}$. Tada definišemo

$$\int_B^{\mathbf{a},\mu} \mathbf{G}(x)dx \in \overline{\mathbf{C}} \text{ pretstavnikom } \int_B G_{\phi,\varepsilon}(x)\mu_\varepsilon(x)dx.$$

Ako je $B = \mathbf{R}^n$ tada koristimo simbol $\int^{\mathbf{a},\mu}$.

Kao što smo pokazali da definicija temperiranog integrala ima smisla, možemo to i uraditi za ovaj integral.

Sada ćemo definisati konvoluciju u $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$. Neka je $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_{\mathbf{a}}$, i neka je μ_ε jedinična mreža za $\mathbf{a}$. Tada definišemo $G_1 \overset{\mathbf{a},\mu}{\star} G_2$ sa

$$G_1 \overset{\mathbf{a},\mu}{\star} G_2(x) = \int^{\mathbf{a},\mu} G_1(x-y)G_2(y)dy, x \in \mathbf{R}^n. \tag{1.9}$$

Propozicija 1.4. *Neka su G_1 i G_2 u $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$. Tada je*

1. $G_1 \overset{\mathbf{a},\mu}{\star} G_2 \in \mathcal{G}$.
2. $\partial^\alpha(G_1 \overset{\mathbf{a},\mu}{\star} G_2) = \partial^\alpha G_1 \overset{\mathbf{a},\mu}{\star} G_2$, *za* $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$.
3. *Neka su G_1 i G_2 u $\overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{a}}$. Tada je*
$$G_1 \overset{\mathbf{a},\mu}{\star} G_2 \in \mathcal{G}_{\mathbf{a}}.$$

Prvo tvrđenje znači sledeće: Treba da pokažemo da za $G_{1,\phi,\varepsilon}, G_{2,\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_{\mathbf{a}}$ i $N_{1,\phi,\varepsilon}, N_{2,\phi,\varepsilon} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}}$ važi da je

$$G_{1,\phi,\varepsilon} \overset{\mathbf{a},\mu}{\star} G_{2,\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_M$$

i da je

$$G_{1,\phi,\varepsilon} \overset{\mathbf{a},\mu}{\star} N_{2,\phi,\varepsilon},\ N_{1,\phi,\varepsilon} \overset{\mathbf{a},\mu}{\star} G_{2,\phi,\varepsilon},\ N_{1,\phi,\varepsilon} \overset{\mathbf{a},\mu}{\star} N_{2,\phi,\varepsilon} \in \mathcal{N}.$$

Treće tvrđenje ima sličnu interpretaciju.

Dokaz: Dokazaćemo samo prvi deo propozicije. Drugi deo je očigledan, a treći se dokazuje kao i prvi deo.

Neka su $G_{1,\phi,\varepsilon}, G_{2,\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_{\mathbf{a}}$. Tada za svako $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ postoje $N_1 \in \mathbf{N}$ i $\theta_1 \in \Theta_{\mathbf{a}}$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_{N_1}$ postoje $C_1 > 0$ i $\eta_1 > 0$ takvi da

$$|\partial^\alpha G_{1,\phi,\varepsilon}(x)| < C_1\theta_1(|x|)\varepsilon^{-N_1},\ \varepsilon < \eta_1,\ x \in \mathbf{R}^n$$

i postoje $N_2 \in \mathbf{N}$ i $\theta_2 \in \Theta_{\mathbf{a}}$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_{N_2}$ postoje $C_2 > 0$ i $\eta_2 > 0$ takvi da

$$|G_{2,\phi,\varepsilon}(x)| < C_2\theta_2(|x|)\varepsilon^{-N_2},\ \varepsilon < \eta_2,\ x \in \mathbf{R}^n.$$

Dalje imamo za svaki kompaktni skup K

$$
\begin{aligned}
& |\partial^\alpha \int G_{1,\phi,\varepsilon}(x-y)G_{2,\phi,\varepsilon}(y)\mu_\varepsilon(y)dy| \\
= \; & |\int \partial^\alpha G_{1,\phi,\varepsilon}(x-y)G_{2,\phi,\varepsilon}(y)\mu_\varepsilon(y)dy| \\
\leq \; & C_1C_2\mathrm{sup}_{|y|\leq \mathbf{a}(b/\varepsilon)+r, x\in K}\{\theta_1(|x-y|)\}\varepsilon^{-N_1} \\
& \cdot \mathrm{sup}_{|y|\leq \mathbf{a}(b/\varepsilon)+r}\{\theta_2(|y|)\}\varepsilon^{-N_2}\cdot C_5\varepsilon^{-n}b^n \\
\leq \; & C\varepsilon^{-N}, \; \phi\in\mathcal{A}_N, \; \varepsilon<\min\{\eta_1,\eta_2\}, \; x\in K,
\end{aligned}
$$

gde je $C = C_3C_4C_5b^{n+\gamma_1+\gamma_2}$, a $C_3, C_4, C_5, \gamma_1, \gamma_2$ su dati sa

$$
\begin{aligned}
\theta_1(\overline{C}+\mathbf{a}(x)) & \leq C_3x^{\gamma_1}, \\
\theta_2(\mathbf{a}(x)) & \leq C_4x^{\gamma_2}, \\
\overline{C} & = \sup_{x\in K}\{|x|\}+r, \\
C_5 & = \pi^{n/2}\Gamma((n+2)/2), \\
N & > N_1+N_2+n+\gamma_1+\gamma_2.
\end{aligned}
$$

Analogno se dokazuje da je konvolucija reprezenata u $\mathcal{N}$ ako je jedan od reprezenata u $\mathcal{N}_{\mathbf{a}}$.□

Posledica 1.1. *Ako je $\mathcal{G}_{\mathbf{a}} = \overline{\mathcal{G}}_{\mathbf{a}}$ i $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_{\mathbf{a}}$, tada je*

$$G_1 \overset{\mathbf{a},\mu}{\star} G_2 \in \mathcal{G}_{\mathbf{a}}.$$

Primedba. Ova posledica važi u slučaju $\mathbf{a} = \mathbf{t}$ (u slučaju temperiranih uopštenih funkcija).

U [44] je dokazana sledeća propozicija koja povezuje konvoluciju u teoriji distribucija i ovde definisanu konvoluciju.

Propozicija 1.5. *Neka su $f, g \in \mathcal{D}'$, $G_1 = \mathrm{Cd}(f)$, $G_2 = \mathrm{Cd}(g)$. Ako postoji $f \star g$ u distributivnom smislu i ako postoji $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ takvo da su G_1 i G_2 u $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$, tada je $G_1 \overset{\mathbf{a},\mu}{\star} G_2 \approx f \star g$ za sve jedinične mreže μ za $\mathbf{a}$.*

Sada ćemo dati definiciju prostora temperiranih uopštenih funkcija i temperiranih operacija. Oni su izdvojeni zbog svoje važnosti, mada ih formalno dobijamo specifikacijom težinskih prostora i operacija.

Definišimo $\mathcal{S}_G$ kao skup svih Ψ iz $\mathcal{G}_{\mathbf{t}}$ za koje postoji reprezent $\Psi_{\phi,\varepsilon}$ takav da za svako $\beta \in \mathbf{N}_0^n$ postoji $N \in \mathbf{N}_0$ takvo da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ i $p \in \mathbf{N}$ postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je

$$|\partial^\beta \Psi_{\phi,\varepsilon}(x)| < (1+|x|)^{-p}\varepsilon^{-N},\ \varepsilon < \eta,\ x \in \mathbf{R}^n. \tag{1.10}$$

$\mathcal{S}_G$ zovemo prostor uopštenih brzoopadajućih funkcija. Jasno je da je $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_G$ i da oni nisu isti. Neka je $\Psi \in \mathcal{S}_G$ i $G \in \mathcal{G}_{\mathbf{t}}$. Tada definišemo

$$< G, \Psi >= \int^{\mathbf{t}} G(x)\Psi(x)dx$$

pretstavnikom

$$\int G_{\phi,\varepsilon}(x)\Psi_{\phi,\varepsilon}(x)\mu_\varepsilon(x)dx.$$

Svakog pretstavnika od $\Psi \in \mathcal{S}_G$, $\Psi_{\phi,\varepsilon}$ možemo napisati u obliku $\Psi_{\phi,\varepsilon} = \Psi^s_{\phi,\varepsilon} + \Psi^0_{\phi,\varepsilon}$, gde je $\Psi^0_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{N}_{\mathbf{t}}$ a $\Psi^s_{\phi,\varepsilon}$ je onaj pretstavnik koji zadovoljava relaciju (1.10). Tada je

$$\begin{aligned}\int G_{\phi,\varepsilon}(x)\Psi_{\phi,\varepsilon}(x)\mu_\varepsilon(x)dx &= \int G_{\phi,\varepsilon}(x)\Psi^s_{\phi,\varepsilon}(x)\mu_\varepsilon(x)dx \\ &\quad + \int G_{\phi,\varepsilon}(x)\Psi^0_{\phi,\varepsilon}(x)\mu_\varepsilon(x)dx.\end{aligned}$$

Drugi sabirak sa desne strane jednakosti je u $\mathbf{C}_0$, a kako je $G_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_{\mathbf{t}}$, postoje $N_1 \in \mathbf{N}_0$ i $\gamma_1 > 0$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoje $C_1 > 0$ i $\eta_1 > 0$ takvi da je

$$|G_{\phi,\varepsilon}(x)| \le C_1(1+|x|)^{\gamma_1}\varepsilon^{-N_1},\ \varepsilon < \eta.$$

Kombinujući ovo sa (1.10), dobijamo za svako $\psi \in \mathcal{A}_{N_1+N}$

$$\begin{aligned}\left|\int G_{\phi,\varepsilon}(x)\Psi^s_{\phi,\varepsilon}(x)\mu_\varepsilon(x)dx\right| &\le C_1C\varepsilon^{-N_1-N}\int(1+|x|)^{\gamma_1-p}dx, \\ &\quad \varepsilon < \min\{\eta_1,\eta\},\end{aligned}$$

što znači da za dovoljno veliko p dobijamo $\int G_{\phi,\varepsilon}(x)\Psi^s_{\phi,\varepsilon}(x)\mu_\varepsilon(x)dx \in \mathbf{C}_0$. Ovo znači da je definicija ovog skalarnog proizvoda korektna.

Osim ovoga,

$$
\begin{aligned}
|\int G_{\phi,\varepsilon}(x)\Psi^s_{\phi,\varepsilon}(x)\mu_\varepsilon(x)dx &- \int G_{\phi,\varepsilon}(x)\Psi^s_{\phi,\varepsilon}(x)dx| \\
&\leq \int_{|x|>b/\varepsilon} |G_{\phi,\varepsilon}(x)|\,|\Psi^s_{\phi,\varepsilon}(x)|dx \\
&\leq C_1 C \int_{|x|>b/\varepsilon} (1+|x|)^{\gamma_1 - p} dx \varepsilon^{-N_1 - N} \\
&\leq C_1 C_2 \varepsilon^{-N_1 - N - \gamma_1 - 1 + p},\ \varepsilon < \min\{\eta_1, \eta\},
\end{aligned}
$$

za dovoljno veliko p. Ovo znači da možemo uzeti da je $\int G_{\phi,\varepsilon}(x)\Psi^s_{\phi,\varepsilon}(x)dx$ reprezent od $< G, \Psi >$, gde je $\Psi^s_{\phi,\varepsilon}$ reprezent od Ψ koji zadovoljava (1.10).

Kažemo da je $G \in \mathcal{G}_{\mathrm{t}}$ jednako sa $H \in \mathcal{G}_{\mathrm{t}}$ u smislu uopštenih temperiranih distribucija, $G = H(g.t.d.)$, ako za svako $\psi \in \mathcal{S}$

$$< G - H, \psi >= 0.$$

Ako koristimo $\Psi \in \mathcal{S}_G$ umesto $\psi \in \mathcal{S}$ dobijamo $(G.t.d.)$-jednakost umesto $(g.t.d.)$-jednakosti.

$G \in \mathcal{G}$ je **t**-asocirano sa $H \in \mathcal{G}_{\mathrm{t}}$ $(G \approx^t H)$ ako postoji $N \in \mathbf{N_t}$ tako da za svako $\psi \in \mathcal{S}$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < G_{\phi,\varepsilon} - H_{\phi,\varepsilon}, \psi >= 0$$

za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$.

Ako koristimo $\Psi \in \mathcal{S}_G$ umesto $\psi \in \mathcal{S}$ tada dobijamo definiciju **T**-asociranosti umesto obične **t**-asociranosti.

Sve ovako definisane jednakosti i asociranosti su relacije ekvivalencije.

Ovako definisane relacije su pogodnije za primenu, ali se tu javlja takozvani paradoks stabilnosti koji je opisan u [68]: Postoje $A, B \in \overline{\mathbf{C}}$ kakvi da je $A \approx 0$ i $B \approx 0$, ali nije $AB \approx 0$. Ovo znatno otežava primenu ovih relacija u nelinearnim problemima (dok se linearni problemi uglavnom dobro ponašaju pri radu sa ovim relacijama), zbog kojih je praktično i uvedena cela ova terorija. Zbog svega ovog je vrlo bitna opreznost u radu sa ovim relacijama - obično se traži da sve jednakosti između uopštenih funkcija ili uopštenih brojeva budu što je moguće više u strogom obliku, pa onda u (g.d.) obliku, a tek ako to nije moguće koristi se asocijativnost.

Evo sada propozicije gde se vidi prednost ovako definisanih temperiranih operacija.

Propozicija 1.6. *([44]) Neka su G, G_1, G_2 iz $\mathcal{G}_{\mathbf{t}}$ i neka je μ_ε jedinična mreža za* $\mathbf{t}$. *Tada za svako $\psi \in \mathcal{S}$ važi*

1. $< \mathcal{F}_{\mathbf{t},\mu}(G), \psi > = < G, \mathcal{F}(\psi) >.$

1. implicira da Furijeova transformacija u $\mathcal{G}_t$ ne zavisi od koriščenog jediničnog niza u smislu *(g.t.d.)* jednakosti, pa ćemo nadalje izostavljati simbol μ u oznaci Furijeove transformacije.

2. $\mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_1 \overset{\mathbf{t},\mu}{\star} G_2) = \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_1)\mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_2)(g.t.d.).$

3. $\mathcal{F}_{\mathbf{t}}(\partial^\alpha G) = (i\cdot)^\alpha \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G)(g.t.d.).$

4. If $\mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_1) = \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_2)(g.t.d.)$ *then* $G_1 = G_2(g.t.d.).$

5. Navedena tvrđenja važe i za inverznu Furijeovu transformaciju.

6. $\mathcal{F}_{\mathbf{t}}(\mathcal{F}_{\mathbf{t}}^{-1}(G)) = G(g.t.d.).$

7. $G_1 \overset{\mathbf{t},\mu}{\star} G_2 = G_2 \overset{\mathbf{t},\mu}{\star} G_1(g.t.d.).$

8. $(G_1 \overset{\mathbf{t},\mu}{\star} G_2) \overset{\mathbf{t},\mu}{\star} G_3 = G_1 \overset{\mathbf{t},\mu}{\star} (G_2 \overset{\mathbf{t},\mu}{\star} G_3)(g.t.d.).$

9. $\partial^\alpha(G_1 \overset{\mathbf{t},\mu}{\star} G_2) = \partial^\alpha G_1 \overset{\mathbf{t},\mu}{\star} G_2(g.t.d.).$

Dokaz:
1. Sa ranije uvedenom notacijom imamo da je

$$
\begin{aligned}
< \mathcal{F}_{\mathbf{t},\mu}(G), \psi > &= \int \Big(\int^{\mathbf{t},\mu} G(y) e^{-ixy} dy) \Big) \psi(x) dx \\
&= \int^{\mathbf{t},\mu} G(y)\mathcal{F}(\psi)(y) dy = \int G(y)\mathcal{F}(\psi)(y) dy \\
&= < G, \mathcal{F}(\psi) > .
\end{aligned}
$$

2. Kako je $G_1 \overset{\mathbf{t},\mu}{\star} G_2 \in \mathcal{G}_{\mathbf{t}}$, sledi da je

$$
\begin{aligned}
&< \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_1\ {}^{\mathbf{t}}\star^{\mu}\ G_2), \psi > = < G_1 \overset{\mathbf{t},\mu}{\star} G_2, \mathcal{F}(\psi) > \\
&= \int\int(\int^{\mathbf{t},\mu} G_1(x_1-y)G_2(y)dy)\psi(z)e^{-ix_1 z}dzdx_1 \\
&= \int\int(\int^{\mathbf{t},\mu} G_1(x_1-y)G_2(y)\psi(z)e^{-i(x_1-y)}e^{-iyz}dy)dzdx_1.
\end{aligned}
$$

Stavljajući $x = x_1 - y$ dobijamo

$$
\begin{aligned}
&< \mathcal{F}_{\mathbf{t},\mu}(G_1 \overset{\mathbf{t},\mu}{\star} G_2), \psi > \\
&= \int\int(\int^{\mathbf{t},\mu} G_1(x)G_2(y)\psi(z)e^{-ixz}e^{-iyz}dy)dzdx \\
&= \int\int \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_2)(z)G_1(x)\psi(z)e^{-ixz}dzdx \\
&= \int \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(\mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_2\psi))(x)G_1(x)dx \\
&= \int^{\mathbf{t}} \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(\mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_2\psi))(x)G_1(x)dx \\
&= \int^{\mathbf{t}}\int^{\mathbf{t}} \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_2)(z)G_1(x)\psi(z)e^{-ixz}dzdx \\
&= \int^{\mathbf{t}} \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_2)(z)\mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_1)(z)\psi(z)dz \\
&= \int \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_2)(z)\mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_1)(z)\psi(z)dz,
\end{aligned}
$$

gde smo koristili prvi deo propozicije, činjenicu da je $\mathcal{F}_{\mathbf{t}}(G_2)\psi$ uopštena brzoopadajuća funkcija i to da je $\mathcal{F}$ je bijekcija iz $\mathcal{S}_G$ na njega samog.

3. Tvrđenje sledi iz činjenice da je

$$
\begin{aligned}
< \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(\partial^\alpha G), \psi > &= < \partial^\alpha G, \mathcal{F}(\psi) > \\
&= (-1)^{|\alpha|} < G, \partial^\alpha \mathcal{F}(\psi) > \\
&= (-1)^{|\alpha|} < G, \mathcal{F}((i\cdot)^\alpha \psi > \\
&= (-1)^{|\alpha|} < \mathcal{F}((i\cdot)^\alpha G), \psi > .
\end{aligned}
$$

4. Tvrđenje sledi iz prvog dela propozicije i činjenice da je Furijeova transformacija bijekcija iz $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$.

5. Dokaz je isti kao i kod obične Furijeove transformacije.

6. Za $G \in \mathcal{G}_{\mathbf{t}}$ i $\psi \in \mathcal{S}$ je

$$< \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(\mathcal{F}_{\mathbf{t}}^{-1}(G)), \psi > = < G, \mathcal{F}_{\mathbf{t}}^{-1}(\mathcal{F}_{\mathbf{t}}(\psi)) > = < G, \psi > .$$

Dokazi za ostala tvrđenja direktno slede iz dokazanih tvrđenja. □

Za jedinične mreže $\mu_{1,\varepsilon}, \mu_{2,\varepsilon}$ za $\mathbf{t}$ i za $\psi \in \mathcal{S}$ važi

$$\begin{aligned} < G_1 \overset{\mathbf{t},\mu_1}{\star} G_2, \psi > &= < \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(\mathcal{F}_{\mathbf{t}}^{-1}(G_1 \overset{\mathbf{t},\mu_1}{\star} G_2)), \psi > \\ &= < \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(\mathcal{F}_{\mathbf{t}}^{-1}(G_1)\mathcal{F}_{\mathbf{t}}^{-1}(G_2)), \psi > \\ &= < \mathcal{F}_{\mathbf{t}}(\mathcal{F}_{\mathbf{t}}^{-1}(G_1 \overset{\mathbf{t},\mu_2}{\star} G_2)), \psi > \\ &= < G_1 \overset{\mathbf{t},\mu_2}{\star} G_2, \psi >, \end{aligned}$$

što znači da $\mathbf{t}$-konvolucija ne zavisi u $(g.t.d.)$ smislu od jediničnih mreža. Zbog toga ćemo nadalje za $\mathbf{t}$-konvoluciju koristiti simbol $\star$ i za $\mathbf{t}$-Furijeovu transformaciju simbol $\mathcal{F}$.

Primedba. Ako koristimo $\Psi \in \mathcal{S}_G$ umesto $\psi \in \mathcal{S}$, sva tvrđenja će važiti za $(G.t.d)$-jednakost, jer je $\mathbf{t}$-Furijeova transformacije is bijekcija iz $\mathcal{S}_G$ na $\mathcal{S}_G$, kao što se može dokazati standardnom tehnikom koja se koristi u dokazivanju da je Furijeova transformacija bijekcija iz $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$ u klasičnom smislu.

1.2.2. Nestandardna verzija Kolomboovih prostora

Nestandardnu verziju Kolomboovih prostora je uveo Todorov ([76] i [77]) a kasnije su takvi prostori proučavani u radovima Nedeljkova [49] i [51] uz odgovarajuće korekcije nepreciznih definicija Todorova.

Skup $\mathcal{D}_+ = \mathcal{D} \times \mathbf{R}_+$ ćemo zvati indeksni skup. Neka je $\mathcal{U}$ ultrafilter u $\mathcal{D}_+$ sa sledećim osobinama.

Postoji niz $\{\mathcal{A}_q\}_{q \in \mathbf{N}}$ podskupova od $\mathcal{D}$ koji zadovoljavaju sledeće uslove

1. $\{(\phi, \varepsilon) |\ \phi \in \mathcal{A}_q, \varepsilon \in (0, \eta_\phi)$ za neko $\eta_\phi > 0\} \in \mathcal{U}$ za sve $q \in \mathbf{N}$;

2. $\mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \ldots$;

3. $\mathrm{diam}(\mathrm{supp}(\phi)) = 1$, $\phi \in \mathcal{A}_0$.

4. $\int |\phi(x)|dx \leq M$, $\phi \in \mathcal{A}_0$, za neko $M > 1$;

5. $\int \phi(x)dx = 1$, $\phi \in \mathcal{A}_0$;

6. Za svako $q \in \mathbf{N}$ i svako $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$, $1 \leq |\alpha| \leq q$,
$$\int x^\alpha \phi(x)dx = 0,\ \phi \in \mathcal{A}_q.$$

Skupovi funkcija definisanih na $\mathcal{D}_+$ sa vrednostima u $\mathbf{C}$, resp. $\mathcal{E}$, su označeni sa $\mathbf{C}^{\mathcal{D}_+}$, resp. $\mathcal{E}^{\mathcal{D}_+}$. Neka su $a, b \in \mathbf{C}^{\mathcal{D}_+}$. Tada je $a \sim b$ ako je
$$\{(\phi,\varepsilon)|a_{\phi,\varepsilon} = b_{\phi,\varepsilon}\} \in \mathcal{U},\ \text{gde je}\ \ a_{\phi,\varepsilon} = a(\phi,\varepsilon), (\phi,\varepsilon) \in \mathcal{D}_+.$$

Neka je $f, g \in \mathcal{E}^{\mathcal{D}_+}$. Tada je $f \sim g$ ako je
$$\bigcap_{x\in\mathbf{R}^n} \{(\phi,\varepsilon)|f_{\phi,\varepsilon}(x) = g_{\phi,\varepsilon}(x)\} \in \mathcal{U},\ \ \text{gde je}\ f_{\phi,\varepsilon} = f(\phi,\varepsilon) \in \mathcal{E},$$

$(\phi,\varepsilon) \in \mathcal{D}_+$. U oba slučaja je $\sim$ relacija ekvivalencije i $^*\mathbf{C}$ i $^*\mathcal{E}$ su definisani sa
$$^*\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\mathcal{D}_+}/\sim\ \ \text{i}\ \ ^*\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\mathcal{D}_+}/\sim.$$

$^*\mathbf{R}$ je skup svih $[a] \in {^*\mathbf{C}}$ takvih da postoji $a' \in [a]$ za koje je
$$\{(\phi,\varepsilon)|a'_{\phi,\varepsilon} \in \mathbf{R}\} \in \mathcal{U},$$

gde $[\cdot]$ označava klasu ekvivalencije. Neka su $[a], [b] \in {^*\mathbf{R}}$. Tada je $[a] < [b]$ ako je za neke pretstavnike $a'_{\phi,\varepsilon} \in [a]$, $b'_{\phi,\varepsilon} \in [b]$
$$\{(\phi,\varepsilon)|a'_{\phi,\varepsilon} < b'_{\phi,\varepsilon}\} \in \mathcal{U}.$$

Sve elementarne operacije u $^*\mathbf{C}$ i $^*\mathcal{E}$ su prirodno definisane na pretstavnicima.

Ako je $g \in \mathcal{D}'$, tada je sa
$$G_{\phi,\varepsilon}(x) = < g(\xi), \varepsilon^{-n}\phi((\xi - x)/\varepsilon) >, x \in \mathbf{R}^n$$

označen pretstavnik odgovarajućeg elementa iz $^*\mathcal{E}$. Ovo zovemo Kolomboovom regularizacijom distribucije g i označavamo je sa $\mathrm{Cd}(g)$.

Nadalje ćemo označavati elemente iz ${}^*\mathbf{C}$ i ${}^*\mathcal{E}$ kao i njihove pretstavnike velikim slovima sa indeksima ${}_{\phi,\varepsilon}$.

${}^*\mathbf{C}_M$ je skup svih $A_{\phi,\varepsilon} \in {}^*\mathbf{C}$ takvih da postoji $p \in \mathbf{N}$ takvo da je

$$\{(\phi,\varepsilon)|\, |A_{\phi,\varepsilon}| < \varepsilon^{-p}\} \in \mathcal{U}. \tag{1.11}$$

${}^*\mathcal{E}_M$ je skup svih $G_{\phi,\varepsilon} \in {}^*\mathcal{E}$ takvih da za svaki kompaktan skup K i svako $\beta \in \mathbf{N}_0^n$ postoji $p \in \mathbf{N}$ takvo da je

$$\bigcap_{x\in K} \{(\phi,\varepsilon)|\, |\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(x)| < \varepsilon^{-p}\} \in \mathcal{U}. \tag{1.12}$$

${}^*\mathbf{C}_0$ je skup svih $A \in {}^*\mathbf{C}$ takvih da za svako $\beta \in \mathbf{N}_0^n$ i svako $p \in \mathbf{N}$

$$\{(\phi,\varepsilon)|\, |A_{\phi,\varepsilon}| < \varepsilon^{p}\} \in \mathcal{U}. \tag{1.13}$$

${}^*\mathcal{E}_0$ je skup svih $G \in {}^*\mathcal{E}$ takvih da za svako $\beta \in \mathbf{N}_0^n$, svako $p \in \mathbf{N}$ i svaki kompaktan skup K

$$\bigcap_{x\in K} \{(\phi,\varepsilon)|\, |\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(x)| < \varepsilon^{p}\} \in \mathcal{U}. \tag{1.14}$$

Todorov ([76]) je dokazao da je ${}^*\mathbf{C}_0$ maksimalni ideal od ${}^*\mathbf{C}_M$ i definisao je skup uopštenih kompleksnih brojeva

$$\tilde{\mathbf{C}} = {}^*\mathbf{C}_M / {}^*\mathbf{C}_0.$$

$\overline{\mathbf{R}}$ je definisan kao skup svih $A \in \tilde{\mathbf{C}}$ takvih da je $A_{\phi,\varepsilon} \in {}^*\mathbf{R}$.

Propozicija 1.7. *1. ${}^*\mathcal{E}_0$ je ideal od ${}^*\mathcal{E}_M$.*

2. $\overline{\mathbf{R}}$ i $\tilde{\mathbf{C}}$ su ne-Arhimedovska polja. $\overline{\mathbf{R}}$ je totalno uređeno polje.

3. $\overline{\mathcal{D}} = {}^*\mathcal{E}_M / {}^*\mathcal{E}_0$ je asocijativna i komutativna algebra nad $\tilde{\mathbf{C}}$ sa parcijalnim diferenciranjem.

4. Inkluzije $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}' \subset \overline{\mathcal{D}}$ su zadovoljene.

Dokaz: ${}^*\mathcal{E}_0$ je prsten, tako da treba da pokažemo da ako $G_{1,\phi,\varepsilon} \in {}^*\mathcal{E}_M$ i ako $G_{2,\phi,\varepsilon} \in {}^*\mathcal{E}_0$, tada $\partial^i G_{1,\phi,\varepsilon} \partial^j G_{2,\phi,\varepsilon} \in {}^*\mathcal{E}_0$.

Važi sledeće: Za svaki kompaktni skup K postoji $p_1 \in \mathbf{N}$ takvo da je

$$\bigcap_{x\in K} \{(\phi,\varepsilon)||\partial^i G_{1,\phi,\varepsilon}(x)| < \varepsilon^{-p_1}\} \in \mathcal{U},$$

za svako $p_2 \in \mathbf{N}$ i za svaki kompaktni skup K

$$= \bigcap_{x\in K} \{(\phi,\varepsilon)||\partial^j G_{2,\phi,\varepsilon}(x)| < \varepsilon^{p_2}\} \in \mathcal{U}.$$

To znači

$$\begin{array}{cl} & \{(\phi,\varepsilon)|\ |\partial^i G_{1,\phi,\varepsilon}(x)| < \varepsilon^{-p_1} \text{ za svako } x \in K\} \\ \cap & \{(\phi,\varepsilon)|\ |\partial^j G_{2,\phi,\varepsilon}(x)| < \varepsilon^{p_2} \text{ za svako } x \in K\} \\ \subset & \{(\phi,\varepsilon)|\ |(\partial^i G_1 \partial^j G_2)_{\phi,\varepsilon}(x)| < \varepsilon^{p} \text{ za svako } x \in K\}, \end{array}$$

gde je $p = p_2 - p_1$, tako da je zadnji skup u $\mathcal{U}$. Ovo je dokaz prvog dela propozicije. Drugi, treći i četvrti deo propozicije se mogu naći u [76].

Kao u verziji Kolomboovih težinskih prostora bez korišćenja ultrafiltera definišimo sledeće prostore.

Definišimo ${}^*\mathcal{E}_{\mathbf{a}}$ kao skup svih elemenata $G \in {}^*\mathcal{E}$ takvih da za svako $\beta \in \mathbf{N}_0^n$ postoje $p \in \mathbf{N}$ i $\theta \in \Theta_{\mathbf{a}}$ takvi da je

$$\bigcap_{x\in\mathbf{R}^n} \{(\phi,\varepsilon)|\ |\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(x)| < \theta(|x|)\varepsilon^{-p}\} \in \mathcal{U}.$$

Skup ${}^*\mathcal{E}_{0,\mathbf{a}}$ je skup onih elemenata $G \in {}^*\mathcal{E}_{\mathbf{a}}$ takvih da za svako $\beta \in \mathbf{N}_0^n$ i svako $p \in \mathbf{N}$ postoji $\theta \in \Theta_{\mathbf{a}}$ takvo da je

$$\bigcap_{x\in\mathbf{R}^n} \{(\phi,\varepsilon)|\ |\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(x)| < \theta(|x|)\varepsilon^{p}\} \in \mathcal{U}.$$

Očigledno je ${}^*\mathcal{E}_{0,\mathbf{a}} \subset {}^*\mathcal{E}_0$.

Propozicija 1.8. *${}^*\mathcal{E}_{0,\mathbf{a}}$ je ideal od ${}^*\mathcal{E}_{\mathbf{a}}$.*

$A \in \tilde{\mathbf{C}}$ je asociran sa $c \in \mathbf{C}$ ako je $\lim_{\mathcal{U}} A_{\phi,\varepsilon} = c$.

Neka je $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ i neka je μ jedinični niz za $\mathbf{a}$. Tada definišemo $\mathbf{a},\mu$-Furijeovu transformaciju $\mathcal{F}_{\mathbf{a},\mu}$ na $\overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{a}}$, kao i u $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$, sa

$$\mathcal{F}_{\mathbf{a},\mu}(G)(x) = \int^{\mathbf{a},\mu} G(y)e^{-ixy}dy, x \in \mathbf{R}^n.$$

Propozicija 1.9. *Za svako* $\mathbf{a}_1 \in \mathbf{A}$, $\mathcal{F}_{\mathbf{a},\mu} : \overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{a}} \to \overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{a}_1}$ *je dobro definisano.*

Inverzna $\mathbf{a},\mu$-Furijeova transformacija je definisana sa

$$\mathcal{F}_{\mathbf{a},\mu}^{-1}(G) = (2\pi)^{-n/2} \int^{\mathbf{a},\mu} G(y) e^{ixy} dy, x \in \mathbf{R}^n.$$

Na isti način kao i za $\mathcal{F}_{\mathbf{a},\mu}$, može se pokazati da je i definicija inverzne transformacije korektna.

Glava 2.

Topologije u $\overline{\mathbf{C}}$ i $\mathcal{G}$

Razvoj Kolombooove teorije je dugo tekao bez uvođenja topološke strukture na prostor uopštenih funkcija, kao što je to slučaj i sa hiperfunkcijama.

U prvom poglavlju je data topologija u $\mathcal{G}$ koju je uvela Biađoni u [5] koja je imala malo primena.

U drugom delu je data oštra topologija koju je uveo i detaljno analizirao Skarpalezos u [70], mada je data i ranije ([5], [55]).

U trećem, originalnom delu, je data topologija sa pogodnijim osobinama, ali na nestandardnoj verziji Kolomboovih prostora, što joj samo po sebi ograničava primenu. Primena joj je data u radu Nedeljkova i Pilipovića [45].

Napomenimo da se rezultati Skatpalezosa ([70]) i Nedeljkova i Pilipovića ([45]) pojavili u isto vreme.

2.1. Obična topologija

Ovde će biti navedene definicije topologija za $\overline{\mathbf{C}}$ i $\mathcal{G}$ iz [5].

Za $\mu > 0$ definišimo skup Q_μ na sledeći način:

Q_μ je skup svih $X \in \overline{\mathbf{C}}$ takvih da postoje njihov reprezent $X_{\phi,\varepsilon}$ za koji postoji $N \in \mathbf{N}$ takvo da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoji $\eta > 0$ takvo da

$$|X_{\phi,\varepsilon}| < \mu,\ 0 < \varepsilon < \eta.$$

Kažemo da je $\Omega \subset \overline{\mathbf{C}}$ otvoren ako za sve $X \in \Omega$ postoji $\mu > 0$ takvo

da je
$$X + Q_\mu \subset \Omega.$$
Topologija na $\overline{\mathbf{C}}$ je definisana ovim otvorenim skupovima.

Može se pokazati da za gore definisanu topologiju, familija
$$\{X + Q_\mu |\ \mu > 0\}$$
čini bazu okolina tačke X.

Za $X \in \overline{\mathbf{C}}$ definišemo normu na sledeći način:
$$\|X\| = \begin{cases} \inf\{\mu > 0 |\ X \in Q_\mu\}, & X \in Q_\mu \text{ za neko } \mu > 0 \\ +\infty, & X \notin Q_\mu \text{ za sve } \mu > 0 \end{cases}$$

Primeri.

1. Ako je $Z \in \mathbf{C}$, tada je $\|Z\| = |Z|$. To znači da topologija na $\overline{\mathbf{C}}$ indukuje običnu topologiju na $\mathbf{C}$.

2. $\|\delta(0)\| = +\infty$. To znači da skup kompleksnih brojeva nije gust u skupu uopštenih kompleksnih brojeva.

3. Ako u $\mathcal{A}_0(\mathbf{R})$ imamo samo realne funkcije, tada je $\|e^{i\delta(0)}\| = 1$.

Primedba. Sa ovom topologijom, $\overline{\mathbf{C}}$ nije vektorsko topološki prostor. Dovoljno je da primetimo da familija skupova $\{Q_\mu |\ \mu > 0\}$ čini bazu okolina nule sa skupovima koji nisu apsorbujući.

Sada ćemo definisati topologiju na $\mathcal{G}$.

Za kompaktan podskup K od Ω, prirodan broj k i $\mu > 0$ definišemo skup $Q_{K,k,\mu}$ na sledeći način:

To je skup svih $Q \in \mathcal{G}(\Omega)$ koji imaju pretstavnika $G_{\phi,\varepsilon}(x)$ takavog da postoji $N \in \mathbf{N}_0$ takvo da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoji $\eta > 0$ takvo da je
$$\sup\{|\partial^\alpha G_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq \mu \quad | \quad \alpha \in \mathbf{N}_0^n \\ |\alpha| \leq k,\ \phi \in \mathcal{A}_0(\mathbf{R}^n),\ x \in K,\ \varepsilon < \eta\}.$$
Kažemo da je podskup Y od $\mathcal{G}(\Omega)$ otvoren ako za svako $G \in Y$ postoji kompaktan podskup K od Ω, prirodan broj k i $\mu > 0$ tako da je
$$G + Q_{K,k,\mu} \subset Y.$$

Topologiju na $\mathcal{G}(\Omega)$ je definisana ovim otvorenim skupovima.

Može se pokazati da je familija skupova

$$\{G + Q_{K,k,\mu} | \ K \text{ je kompaktan podskup od } \Omega, \ k \in \mathbf{N}, \ \mu > 0\}$$

baza okolina of G.

Normu uopštenih funkcija definišemo na sledeći način.

Neka je K kompaktan podskup od Ω, k prirodan broj i neka je $G \in \mathcal{G}(\Omega)$. Stavimo

$$\|G\| = \begin{cases} \inf\{\mu > 0 | \ G \in Q_{K,k,\mu}\}, & G \in Q_{K,k,\mu} \text{ za neko } \mu > 0 \\ +\infty, & G \notin Q_{K,k,\mu} \text{ za sve } \mu > 0 \end{cases}$$

Primedbe.

1. Ako posmatramo uopštene kompleksne brojeve kao konstantne funkcije, to jest ako za neki $A \in \overline{\mathbf{C}}$ definišemo $G \in \mathcal{G}$ sa pretstavnikom
$$G_{\phi,\varepsilon}(x) = A_{\phi,\varepsilon}$$
za svako $x \in \Omega$ i $\phi \in \mathcal{A}_0$, tada možemo reći da je $\overline{\mathbf{C}}$ sadržano u $\mathcal{G}$. Očigledno topologija sa $\mathcal{G}$ indukuje na $\overline{\mathbf{C}}$ njegovu sopstvenu topologiju.

2. Topologija od $\mathcal{G}$ indukuje na C^∞ njegovu sopstvenu Frešeovu topologiju.

3. Očigledno je za svako x
$$\mathcal{G} \mapsto \overline{\mathbf{C}} \text{ dato sa } G \mapsto G(x)$$
linearno i neprekidno preslikavanje. Kako skup kompleksnih brojeva nije gust u skupu uopštenih kompleksnih brojeva, koristeći gornju činjenicu dobijamo da C^∞ nije gust u $\mathcal{G}$.

4. Sa ovom topologijom, $\mathcal{G}$ vektorsko topološki prostor, jer postoje neapsorbujuće okoline nule.

5. Mada je ova topologija prirodna u smislu da na C^∞ indukuje originalnu topologiju ovog prostora, ona je sa mnogo više nepogodnih svojstava nego, recimo, slaba konvergencija u $\mathcal{D}'$.

Ova topologija je korišćena u dokazu da je Košijev problem

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} - \lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial x} = f_i(t, x, U_1, \cdots, U_N),\ i = 1, \cdots, N$$

dobro postavljen (u [5]).

2.2. Oštra topologija

Mada se ideje za ovu topologiju mogu naći i ranije u radovima Obergugenbergera ([55]) i Biađoni ([5]), kompletnu definiciju i analizu takozvane oštre topologije je dao Skarpalezos u [70]. U ovom poglavlju će biti dati rezultati iz [70].

Definicija 2.1. *V_p, $p \in \mathbf{Z}$, je skup uopštenih kompleksnih brojeva G za koje postoji reprezent $G_{\phi,\varepsilon} \in \mathbf{C}_M$ tako da postoji $N \in \mathbf{N}_0$ tako da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je*

$$|G_{\phi,\varepsilon}| \le C\varepsilon^p,\ \varepsilon < \eta.$$

Skupovi V_p, $p \in \mathbf{Z}$, čine bazu okolina nule u $\overline{\mathbf{C}}$ koja definiše oštru topologiju τ_C na skupu uopštenih kompleksnih brojeva.

Ovde je data malo modifikovana definicija Skarpalezosa, jer je izučavao simplifikovane Kolomboove algebre, ali to nema uticaja na njegova tvrđenja koja će biti adekvatno modifikovana. Evo sada tih tvrđenja.

1. Oštra topologija je Hauzdorfova.
2. Topološki prostor uopštenih kompleksnih brojeva sa oštrom topologijom nije separabilan.
3. Topološki prostor nije "Arhimedovski".
4. Okoline nule u ovoj topologiji su $\overline{\mathbf{R}}$-apsorbujuće, to jest, za svaku okolinu nule U, i svaki uopšteni kompleksan broj Z, postoji $\lambda \in \overline{\mathbf{R}}$ takvo da je $Z \in \lambda U$.

Sledeću osobinu ćemo zbog značajnosti izdvojiti.

Propozicija 2.1. *Prsten uopštenih kompleksnih (realnih) brojeva je kompletan u odnosu na oštru topologiju τ_C.*

Definišimo sada oštru topologiju na $\mathcal{G}(\Omega)$, sa oznakom τ_G. Neka je U_n, $n \in \mathbf{N}$ niz potskupova od Ω tako da važi

$$U_n \subset\subset U_{n+1}, \ \bigcup_{n \in \mathbf{N}} U_n = \Omega.$$

Definicija 2.2. *$V_{q,r,s}$, $q,r,s \in \mathbf{Z}$, je skup svih uopštenih funkcija G takvih da postoji njen reprezent $G_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_M(\Omega)$ tako da postoji $N \in \mathbf{N}_0$ takvo da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je*

$$\sup_{x \in U_q} |\partial^\alpha G_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq C\varepsilon^r, \ \varepsilon < \eta, \ |\alpha| \leq s.$$

Skupovi $V_{q,r,s}$, $q,r,s \in \mathbf{Z}$, čine bazu okolina nule u $\overline{\mathbf{C}}$ koja definiše oštru topologiju τ_G na skup uopštenih funkcija nad Ω.

Lako se može pokazati da definicija ne zavisi od izbora pretstavnika. Evo nekoliko osobina ove topologije:

1. Oštra topologija je Hauzdorfova.

2. Kao i za uopštene kompleksne (realne) brojeve, za uopštene funkcije se može pokazati da su okoline nule apsorbujuće u ovako definisanoj oštroj topologiji.

3. Na sličan način kao i za klasične glatke funkcije može se pokazati da je prostor uopštenih funkcija definisan sa oštrom topologijom kompletan.

Može se pokazati da važi sledeća propozicija.

Propozicija 2.2. *a) Ako je $x_0 \in \Omega$ i $G \in \mathcal{G}(\Omega)$, tada je funkcija $G \mapsto G(x_0)$ neprekidna u odnosu na oštre topologije u $\mathcal{G}(\Omega)$ i $\overline{\mathbf{C}}$.*

b) Ako je K kompaktan skup u Ω, $G \in \mathcal{G}$, preslikavanja

$$G \mapsto \sup_{x \in K} |G(x)| \ i \ G \mapsto \int_K G(x)dx$$

su neprekidna u odnosu na oštre topologije u $\mathcal{G}(\Omega)$ i $\overline{\mathbf{C}}$.

c) Za svako $G \in \mathcal{G}$ i $\psi \in \mathcal{D}$ su preslikavanja

$$\psi \mapsto \int G(x)\psi(x)dx \text{ i } G \mapsto \int G(x)\psi(x)dx$$

neprekidna u odnosu na oštre topologije u $\mathcal{G}(\Omega)$ i $\overline{\mathbf{C}}$.

2.3. Topologija u nestandardnoj verziji

Ova topologija, data u [52], se u slučaju da koristimo originalne Kolomboove prostore umesto nestandardnih, svodi na oštru topologiju kaja je data u pretodnom poglavlju.

Izložićemo apstraktnu teoriju nearhimedovskih vektorsko-topoloških prostora.

P je totalno uređeno polje ako

1. Za svako $a \in P$ važi samo jedno od tvrđenja:

$$a = 0,\ a > 0,\ a < 0.$$

2. Ako je $a > 0$ i $b > 0$ tada je $a + b > 0$ i $ab > 0$.

Kažemo da je $a > b$ (ili $b < a$) ako i samo ako je $a - b > 0$. Slično definišemo i $a \geq b$. Vidimo da $a > b$ povlači $a + c > b + c$ i $a^{-1} < b^{-1}$, a $a > 0$ implicira $a^{-1} > 0$.

Apsolutna vrednost od a, $|a|$, je jednaka a ako je a nenegativno (veće ili jednako sa 0), a jednako $-a$ u drugom slučaju. Imamo

$$|ab| = |a||b|,\ |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$a^2 = (-a)^2 = |a|^2 \geq 0,$$

gde je $a^2 = 0$ ako i samo ako je $a = 0$. Vidimo da je $1 = 1^2 > 0$ i $n1 > 0$ za svako $n \in \mathbf{N}$ što povlači da je karakteristika ovog polja beskonačno.

Neka je P totalno uređeno polje i neka je N normirano polje sa normom

$$\gamma : N \to P.$$

Da bi γ bila norma, treba da zadovoljava sledeće uslove:

1. $\gamma(a) > 0$ for $a \neq 0$, $\gamma(0) = 0$, $a \in \mathbf{N}$
2. $\gamma(ab) = \gamma(a)\gamma(b)$, $a, b \in \mathbf{N}$
3. $\gamma(a + b) \leq \gamma(a) + \gamma(b)$, $a, b \in \mathbf{N}$

Očigledno, za $a \in N$ imamo:

$$\gamma(1) = \gamma(-1) = 1,\ \gamma(a) = \gamma(-a),\ \gamma(a^{-1}) = \gamma(a)^{-1},$$

Ako je P Arhimedovsko (za svako $a \in P$ postoj n takvo da je $n1 > a$), tada ono može biti utopljeno u $\mathbf{R}$ (videti [79]).

Sada ćemo definisati topologiju u N na sledeći način:
Familija skupova

$$\{U_r |\ r \in P,\ r > 0\}$$

je baza zatvorenih okolina nule, gde je

$$U_r = \{x \in N |\ \gamma(x) \leq r\}.$$

Propozicija 2.3. *N je topološko polje.*

Dokaz:

1. Za svaku okolinu V od $a + b$ postoji r takvo da je $a + b + U_r$ podskup od V. Tada je $(a + U_{r/2}) + (b + U_{r/2})$ podskup od $a + b + U_r$.

2. Za svaku okolinu V od $-a$ postoji r takvo da je $-a + U_r$ podskup od V. Tada je $-(a + U_r)$ podskup od $-a + U_r$.

3. Za svaku okolinu V od ab postoji $r < 1$ takvo da je $ab + U_r$ podskup od V. Ako je $\gamma(b) > 1$, stavimo $r_1 = r/3\gamma(b)$ i ako je $\gamma(b) \leq 1$ stavimo $r_1 = r/3$. Ako je $\gamma(a) > 1$ stavimo $r_2 = r/3\gamma(a)$ i ako je $\gamma(a) \leq 1$ stavimo $r_2 = r/3$.

Neka je $x \in U_{r_1}$ i $y \in U_{r_2}$. Tada je

$$\begin{aligned}\gamma(bx + ay + xy) &\leq \gamma(b)\gamma(x) + \gamma(a)\gamma(y) + \gamma(x)\gamma(y)\\ &\leq r/3 + r/3 + r^2/9 \leq r,\end{aligned}$$

tako da je

$$(a + x)(b + y) \in ab + U_r$$

4. Imamo da je, za $a \neq 0$,

$$a + U = a(1 + (1/a)U) = a(1 + U_1)$$

gde su U, U_1 okoline nule. Tako dobijamo, koristeći činjenicu de je množenje neprekidna operacija, da je operacija $a \mapsto a^{-1}$ neprekidna, korišćenjem okoline jedinice.

Za svaku okolinu jedinice V, postoji $r < 1/2$ takvo da je $1 + U_r$ podskup od $1 + V$. Neka je $r_1 = r/(1+r)$ t.j. $r = r_1/(1-r_1)$. Neka je $x \in U_{r_1}$. Tada je

$$\begin{aligned}\gamma((1+x)^{-1}-1) &= \gamma(-x/(1+x)) = \gamma(x)\cdot\gamma((1+x)^{-1}) \\ &\leq \gamma(x)\cdot(1/(1-\gamma(x)) \leq r_1/(1-r_1) = r.\end{aligned}$$

To znači da je $1 + U_{r_1}$ podskup od $1 + U_r$. □

Naka su P i N polja iz prethodnog dela, i neka je E vektorski prostor nad N. E je vektorsko-topološki prostor nad N ako su sabiranje i množenje skalarom neprekidne operacije za datu topologiju T nad E.

Teorema 2.1. *U vektorsko-topološkom prostoru E nad N postoji fundamentalni sistem $\mathcal{N}$ okolina nule takav da važi*

(NS 1) Svako $V \in \mathcal{N}$ je absorbujuće.

(NS 2) Svako $V \in \mathcal{N}$ je balansirano.

(NS 3) Za svako $V \in \mathcal{N}$ i svako $\lambda \in N$ postoji $U \in \mathcal{N}$ takvo da je $\lambda U \subset V$.

Obratno, neka je E vektorski prostor nad N i neka je $\mathcal{N}$ baza filtera na E koja zadovoljava (NS 1-3). Tada postoji jedinstvena topologija na E za koju je E vektorsko-topološki prostor za koji je $\mathcal{N}$ fundamentalni sistem okolina nule.

Dokaz ove teoreme je isti kao u [34], osim što moramo da koristimo jači uslov (NS 3) nego što je tamo korišćeno, jer P ne mora biti arhimedovsko polje.

2.3.1. Topologije u prostorima uopštenih funkcija

Neka je $A \in \overline{\mathbf{C}}$. Definišemo apsolutnu vrednost od A, $|A|$ sa

$$|A| = |A_{\phi,\varepsilon}| + {}^*\mathbf{C}_0.$$

Očigledno je $|A| \in \overline{\mathbf{R}}$, jer ako je $A_{\phi,\varepsilon} \in {}^*\mathbf{C}_M$ tada je $|A_{\phi,\varepsilon}| \in {}^*\mathbf{C}_M$, i ako je $A_{\phi,\varepsilon} \in {}^*\mathbf{C}_0$ tada je $|A_{\phi,\varepsilon}| \in {}^*\mathbf{C}_0$, a $|A_{\phi,\varepsilon}| \in {}^*\mathbf{R}$.

Nadalje, imamo da za $A, B \in \overline{\mathbf{C}}$ važi

$$|AB| = |A||B|, \; |A + B| \leq |A| + |B|. \tag{2.1}$$

Za $G \in {}^*\mathcal{E}_M$, važi

$$\{(\phi, \varepsilon) || G_{\phi,\varepsilon}(x)| < \varepsilon^{-p}\} \in \mathcal{U} \text{ za neko } p \in \mathbf{N},$$

tako da je $|G_{\phi,\varepsilon}(x)| \in {}^*\mathbf{C}_M$. $|G(x)| = |G_{\phi,\varepsilon}(x)| + {}^*\mathbf{C}_0$ je doro definisano, jer ako je $G_{\phi,\varepsilon} \in {}^*\mathcal{E}_0$ tada je $|G_{\phi,\varepsilon}(x)| \in {}^*\mathbf{C}_0$.

Neka je K kompaktan skup i $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$. Tada za $G \in \overline{\mathcal{D}}$ važi da je

$$q_{K,\alpha}(G) = \sup_{x \in K} |D^\alpha G(x)|$$

dobro definisano.

Neka $G, H \in \overline{\mathcal{D}}$ i $A \in \overline{\mathbf{C}}$. (3.5) implicira

$$q_{K,\alpha}(AG) = \sup_{x \in K} |D^\alpha (AG)(x)| = |A| \sup_{x \in K} |D^\alpha G(x)| = |A| q_{K,\alpha}(G)$$

i

$$\begin{aligned} q_{K,\alpha}(G + H) &= \sup_{x \in K} |D^\alpha (G + H)(x)| \\ &\leq \sup_{x \in K} |D^\alpha G(x)| + \sup_{x \in K} |D^\alpha H(x)| \\ &= q_{K,\alpha}(G) + q_{K,\alpha}(H) \end{aligned}$$

Ovo znači da je $q_{K,\alpha}$ seminorma za svaki kompaktan skup K i $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$.

Neka je K kompaktan skup, $m \in \mathbf{N}$ i $R \in \overline{\mathbf{R}}_+$. Definišimo sledeće skupove:

$$V_{K,m,R} = \{G \in \overline{\mathcal{D}} | q_{K,\alpha}(G) \leq R, |\alpha| \leq m, \alpha \in \mathbf{N}_0^n\}.$$

Familija $\mathcal{N} = \{V_{K,m,R} |\ K$ je kompaktan skup, $m \in \mathbf{N},\ R \in \overline{\mathbf{R}}_+\}$ je baza zatvorenih i konveksnih okolina nule. Sa takvom topologijom, $\overline{\mathcal{D}}$ je Hauzdorfov lokalno konveksan vektorsko-topološki prostor.

Ako definšemo bazu zatvorenih i konveksnih okolina nule za $r \in \mathbf{R}_+$ umesto $R \in \overline{\mathbf{R}}_+$,

$$\mathcal{N}_c = \{V_{K,m,R}|\ K \text{ je kompaktan skup}, m \in \mathbf{N},\ r \in \mathbf{R}_+\},$$

tada dobijamo ne-Hauzdorfove topološke prostore $\overline{\mathcal{D}^*}$. Razlog za uvođenje topologije date sa $\{\mathcal{N}_c\}$ je to da je injekcija iz $\mathcal{D}'$ u $\overline{\mathcal{D}^*}$, koja je bila posmatrana u [76], neprekidna.

Propozicija 2.4. *Sabiranje, parcijalni izvod i množenje su neprekidne operacije u* $\overline{\mathcal{D}}$.

Dokaz: a) Okolina od $F + G$ sadrži skup $F + G + V_{K,m,R}$ za neki kompaktni skup K, $m \in \mathbf{N}_0^n, R \in \overline{\mathbf{R}}$. Tada je

$$F + V_{K,m,R/2} + G + V_{K,m,R/2} \subset F + G + V_{K,m,R}.$$

b) Okolina od $\partial^\alpha G$ sadrži skup $\partial^\alpha G + V_{K,m,R}$ za neki kompaktni skup K, $m \in \mathbf{N}_0^n$, $R \in \overline{\mathbf{R}}$. Tada je

$$\partial^\alpha(G + V_{K,m+|\alpha|,R}) \subset \partial^\alpha G + V_{K,m,R}.$$

c) Okolina od FG sadrži skup $FG + V_{K,m,R}$ za neki kompaktni skup K, $m \in \mathbf{N}_0^n, R \in \overline{\mathbf{R}}$. Neka je s broj članva u izrazu:

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \partial^\beta F \partial^\gamma G.$$

Neka je $R_1 = \min\{1/3s, \sqrt{R}/3s\}$. Tada je

$$(F + V_{K,m,R_1})(G + V_{K,m,R_1}) \subset FG + V_{K,m,R}.\square$$

Topologija u $\overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{a}}$

Za svako $\theta \in \Theta_{\mathbf{a}}$, $m \in \mathbf{N}_0^n$ i $R \in \overline{\mathbf{R}}$ definišemo

$$V_{\theta,m,R} = \{G \in \overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{a}}|\ |\partial^\alpha G(x)| \le \theta(x)R,\ |\alpha| \le m\}.$$

$\mathcal{N}_{\mathbf{a}} = \{V_{\theta,m,R}\}$ je baza fundamentalnog sistema zatvorenih i konveksnih okolina nule. Sa tako definisanom topologijom, $\overline{\mathcal{D}}_{\mathbf{a}}$ je Hausdorfov lokalno konveksni topološki vectorski prostor nad $\overline{\mathbf{C}}$.

Propozicija 2.5. *Sabiranje, partcijalni izvod, množenje i Furijeova transformacija su neprekidne operacije u* $\overline{\mathcal{D}}_{\mathrm{t}}$.

Dokaz: Dokazaćemo samo neprekidnost množenja i Furijeove transformacije. Dokaz ostalih tvrđenja je skoro isti kao u prethodnoj propoziciji.

Okolina od FG sadrži skup $FG + V_{\theta,m,R}$ za neko $\theta \in \Theta_{\mathrm{t}}$, $m \in \mathbf{N}_0^n$ i $R \in \overline{\mathbf{R}}$. Neka je a broj izraza u sumi

$$\sum_{\beta+\gamma=\alpha} \partial^\beta F \partial^\gamma G.$$

Neka je $R_1 = \min\{1/3s, \sqrt{R}/3s\}$ and $\theta_1(x) = \min\{1, \sqrt{\theta(x)}\}$. Tada je

$$(F + V_{\theta_1,m,R_1})(G + V_{\theta_1,m,R_1}) \subset FG + V_{\theta,m,R}.$$

Okolina od G sadrži skup $G + V_{\theta,m,R}$ za neko $\theta \in \Theta_{\mathrm{t}}$, $m \in \mathbf{N}_0^n, R \in \overline{\mathbf{R}}$. Neka je $\theta_1 = |x|^{-m}$, $R_{1,\phi,\varepsilon} = \varepsilon^{mn+1} R_{\phi,\varepsilon}$. Tada je

$$\mathcal{F}_{\mathrm{t}}(G + V_{\theta_1,m,R_1}) \subset \mathcal{F}_{\mathrm{t}}(G) + V_{\theta,m,R}.\square$$

[illegible]

Dokaz. [illegible]

[illegible]

Okolina od G sadrži skup [illegible]

[illegible]

Glava 3.

Deljenje i fundamentalno rešenje linearne parcijalne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima

Problem deljenja u Švarcovoj teoriji distribucija je u razvoju teorije vrlo značajno mesto.

Rešio ga je Hermander za polinome, a kasnije Lojaševič za analitičke funkcije komplikovnima metodama što je bilo od vrlo velikog značaja za dalji razvoj teorije distribucija u pravcu rešavanja diferencijalnih jednačina. Rezultati iz ove glave su iz [48].

Naš cilj je da pronađemo rešenje za

$$F \cdot G \approx H,$$

gde $F, H \in \mathcal{G}$ zadovoljavaju određene uslove.

Teorema 3.1. *a) Neka za $F, H \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ važi:*

(I) H je lokalno ograničeno, to jest, za svaki kompaktni skup K postoji $N_H \in \mathbf{N}_0$ takvo da za svako $\phi \in \mathcal{A}_{N_H}$ postoje $\eta_H > 0$ i $C_H > 0$ takvi da je

$$\sup_{x \in K} |H_{\phi,\varepsilon}| \leq C_H, \quad za\ \varepsilon < \eta_H.$$

(II) Postoji zatvoren skup V_F mere nula koji sadrži sve tačke gde je F nula i takav da za svaki kompaktan skup K postoje $a_F > 0$, $N_F \in \mathbf{N}$ i $m > 0$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_{N_F}$ postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je

$$|F_{\phi,\varepsilon}(x)| \geq C \cdot d(x,V)^m \varepsilon^{N_F}, \text{ za } \varepsilon < \eta,\ x \in K.$$

Tada postoji $G \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ takvo da je

$$F \cdot G \approx H.$$

b) Neka su $H, F \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ takvi da V_F zadovoljava uslov (II) u delu a) i sledeći

(III) Za svaki kompaktan skup K postoji $l > 0$ takvo da je

$$\mu(V_{\varepsilon^l} \cap K) = o(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0,$$

gde je $V_\delta = V_F + B(0,\delta)$ i μ je Lebegova mera.

Tada za svako $p > 0$ postoji $G_p \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ takvo da je

$$F \cdot G_p \approx_p H. \tag{3.1}$$

Dokaz: Primetimo da pretpostavka diam(suppϕ) = 1 povlači

$$\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\phi_\varepsilon) = \varepsilon.$$

Naš cilj je da definišemo element iz $\mathcal{E}_M$ koji aproksimira $H_{\phi,\varepsilon}/F_{\phi,\varepsilon}$ jer ovaj količnik nema smisla u opštem slučaju. U cilju ovoga ćemo prvo dokazati sledeću lemu.

Lema 3.1. *Ako je V zatvoren skup mere nula, tada postoji $k_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_M(\mathbf{R}^n)$ takvo da $0 \leq k_{\phi,\varepsilon} \leq 1$ i*

$$\begin{aligned} d(x,V) \leq \varepsilon/4 &\ \Rightarrow\ k_{\phi,\varepsilon}(x) = 0,\\ d(x,V) \geq \varepsilon &\ \Rightarrow\ k_{\phi,\varepsilon}(x) = 1. \end{aligned}$$

Dokaz: Neka je $J_{\phi,\varepsilon}$ definisano sa

$$J_{\phi,\varepsilon} = \begin{cases} 1, & d(x,V) \leq \varepsilon \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

i neka je $\theta \in \mathcal{D}$ pozitivna, simetrična funkcija sa nosačem u $B(0,1/4)$ i takva da je $\int \theta dx = 1$. Stavimo

$$\kappa_{\phi,\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n} \int \theta(y/\varepsilon) J_{\phi,\varepsilon}(x-y)dy, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Jasno je da je

$$\operatorname{supp}\kappa \subset \overline{\operatorname{supp}\theta_\varepsilon + \operatorname{supp}J} \subset \{x \mid d(x,V) \leq \varepsilon\}.$$

S druge strane, ako je $d(x,V) \leq \varepsilon/4$ i $y \in \operatorname{supp}\theta_\varepsilon$, tada je

$$d(x-y,V) \leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$$

pa imamo $J_{\phi,\varepsilon}(x-y) = 1$ i $\kappa_{\phi,\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-n} \int \theta(y/\varepsilon)dy = 1$. Stavimo $k_{\phi,\varepsilon} = 1 - \kappa_{\phi,\varepsilon}$. Lako se može pokazati da je $k_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_M$. □

Dokaz dela a). Stavimo

$$G_{\phi,\varepsilon}(x) := H_{\phi,\varepsilon}(x) k_{\phi,\varepsilon}(x) / F_{\phi,\varepsilon}(x), \; x \in \mathbf{R}^n.$$

Ovaj izraz ima smisla, jer je $G_{\phi,\varepsilon}(x)$ nula kada je $d(x,V_F) \leq \varepsilon/4$.

Dokažimo da je $G_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_M$.

Primetimo da za svako $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$, $\partial^\alpha G_{\phi,\varepsilon}$ je linearna kombinacija izraza oblika

$$G^{\beta,\gamma}_{\phi,\varepsilon} \partial^\beta H_{\phi,\varepsilon} \partial^\gamma k_{\phi,\varepsilon} / F^{|\alpha|+1}, \text{ gde je } \beta + \gamma = \alpha.$$

KAda $\kappa_{\phi,\varepsilon}$ i $H_{\phi,\varepsilon}$ pripadaju $\mathcal{E}_M$, za svaki kompaktan skup K postoji prirodan broj N i realne konstante $a_{H,\beta}$ i $a_{\kappa,\gamma}$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoje $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je

$$\sup_{x \in K} |G^{\beta,\gamma}_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq C_1 C_2 \varepsilon^{a_{H,\beta}} \varepsilon^{a_{\kappa,\gamma}} / (C_F (\varepsilon/4)^m \varepsilon^{a_F}, \text{ for } \varepsilon < \eta.$$

Dakle, $G_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_M$.

Neka je $\psi \in \mathcal{D}$ i

$$\begin{aligned} I_{\phi,\varepsilon} &:= \int (F_{\phi,\varepsilon}(x) G_{\phi,\varepsilon}(x) - H_{\phi,\varepsilon}(x)) \psi(x) dx \\ &= \int H_{\phi,\varepsilon}(x)(1 - k_{\phi,\varepsilon}(x)) \psi(x) dx. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_{\phi,\varepsilon} &\leq \int_{V_\varepsilon \cap\, supp\psi} C_{H,supp\psi} \sup|\psi| dx \\
&\leq C_{H,supp\psi} \sup|\psi| \mu(V_{\varepsilon} \cap_{\, supp\psi})
\end{aligned}
$$

Kako je $V_\varepsilon \cap \mathrm{supp}\psi \subset \mathrm{supp}\psi$, $\bigcap_{\varepsilon\to 0} V_\psi(\varepsilon) = V \cap \mathrm{supp}\psi$, sledi $\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\phi,\varepsilon} = 0$.

Dokaz dela b). Stavimo

$$G_{p,\phi,\varepsilon}(x) := H_{\phi,\varepsilon}(x) k_{\phi,\varepsilon^r}(x) / F_{\phi,\varepsilon}(x),\ x \in \mathbf{R}^n,$$

gde će r biti kasnije izabrano.

Lako se može proveriti, kao malo pre, da je $G_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_M$.

Neka je $\psi \in \mathcal{D}$. Tada je

$$
\begin{aligned}
I_{\phi,\varepsilon} &:= \int (F_{\phi,\varepsilon}(x) G_{p,\phi,\varepsilon}(x) - H_{\phi,\varepsilon}(x)) \psi(x) dx \\
&= \int H_{\phi,\varepsilon}(x)(1 - k_{\phi,\varepsilon^r}(x)) \psi(x) dx.
\end{aligned}
$$

Kako je integrand nula kada je $d(x, V_\varepsilon) > \varepsilon^r$, sledi da za dovoljno malo ε

$$
\begin{aligned}
I_{\phi,\varepsilon} &\leq \int_{V_\varepsilon \cap \mathrm{supp}\psi} C_H \varepsilon^{a_H} \sup|\psi| dx \\
&\leq C_H \varepsilon^{a_H} \sup|\psi| \mu(V_\varepsilon \cap \mathrm{supp}\psi)
\end{aligned}
$$

Prema pretpostavci (II), kako je $\mathrm{supp}\psi$ kompaktan, sledi da je $\mu(V_\varepsilon \cap \mathrm{supp}\psi) = o(\varepsilon^{r/l})$, $\varepsilon \to 0$. Tada je $I_{\phi,\varepsilon} = o(\varepsilon^{a_H + r/l})$, $\varepsilon \to 0$.

Ako odaberemo r takvo da je $a_H + r/l = p$, dobijamo $I_{\phi,\varepsilon} = o(\varepsilon^p)$, $\varepsilon \to 0$, i to povlači (3.1). □

Sličnim idejama možemo sada dokazati sledeću teoremu.

Teorema 3.2. *Diferencijalna jednačina*

$$P(D)G \approx_p^t H, \tag{3.2}$$

gde je $H \in \mathcal{G}_{\mathrm{t}}$ ima rešenje u $\mathcal{G}_{\mathrm{t}}$.

Pre davanja detalja dokaza, moramo se potsetiti nekih činjenica o polinomima i dati uvodnu lemu.

Prema [36], Lemma 4.1.1, p.99, ako je P dat polinom tada postoje pozitivne konstante m, d i C_P takve da je

$$|P(x)| \geq \frac{d(x,V)^m}{C_P(1+|x|^2)^d},\ x \in \mathbf{R}^n,$$

gde je $V = \{x \in \mathbf{R}^n |\ P(x) = 0\}$. Stavimo $V_q(\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}^n |\ |x| \leq 1/\varepsilon,\ d(x,V) \leq \varepsilon^{q/m}\}$. Tada imamo:

Lema 3.2. $\operatorname{mes}(V_q(\varepsilon)) = O(\varepsilon^{q/m})$.

Dokaz: U [41] je dokazano da se V može dekomponovati u konačnu uniju podvarijetea dimenzije manje ili jednake sa $n-1$,

$$V = V_1 \cup ... \cup V_{r_V},\ \dim V_i = n_i \leq n-1,$$

tako da je $x \in V_i$ dato sa

$$\begin{aligned} x = (&\kappa_1(x_1,...,x_{n_i}),...,\kappa_{n_i}(x_1,...,x_{n_i}),\\ &\kappa_{n_i+1}(x_1,...,x_{n_i}),...,\kappa_n(x_1,...,x_{n_i})),\end{aligned}$$

gde je $\kappa_l(x_1,...,x_{n_i}) = x_l$, za $l \leq n_i$, i $x_l = \kappa_l(x_1,...,x_{n_i})$, $l > n_i$, $(x_1,...,x_{n_i}) \in \mathbf{R}^{n_i}$, su polinomijalnog rasta u beskonačnosti u odnosu na promenljive $x_1,...,x_{n_i}$. Ovo sledi iz algebarske zavisnosti među koordinatama od $x \in V_i$ ([79]).

Ovo znači da je mera od V_i u $\mathbf{R}^{n_i}$ ograničena sa $C_{V_i}\varepsilon^{-N_i}$ za neke $C_{V_i} > 0$ i $N_i > 0$ ako je $|x_l| \leq \varepsilon^{-1}$, $1 \leq l \leq n_i$ jer je

$$\begin{aligned} \operatorname{mes}(V_i) &= \int_{|x_l|\leq 1/\varepsilon, 1\leq l\leq n_i} (\det(a_{ij}))^{1/2} dx_1...dx_{n_i},\\ a_{ij} &= (\frac{\partial\kappa_1}{\partial x_i},...,\frac{\partial\kappa_n}{\partial x_i}) \cdot (\frac{\partial\kappa_1}{\partial x_j},...,\frac{\partial\kappa_n}{\partial x_j}).\end{aligned}$$

Neka je $\tilde{N} = \max_{1\leq i\leq r_V} N_i$. Možemo pretpostaviti da je $q > \tilde{N}/m$. Neka je $\phi \in \mathcal{A}_q$. Tada je

$$\begin{aligned} M_i &= \operatorname{mes}\{x \in \mathbf{R}^n |\ |x_l| \leq 1/\varepsilon,\ 1 \leq l \leq n_i,\ d(x,V_i) \leq 2\varepsilon^{q/m}\}\\ &\leq (C_{V_i}\varepsilon^{-N_i} + 2\varepsilon^{q/m}) \cdot \operatorname{mes}\{x \in \mathbf{R}^n |\ |x| \leq 2\varepsilon^{q/m}\}\end{aligned}$$

što povlači

$$\begin{aligned} & \operatorname{mes}\{x \in \mathbf{R}^n \mid |x_l| \leq 1/\varepsilon,\ 1 \leq l \leq n,\ d(x,V) \leq 2\varepsilon^{q/m}\} \\ \leq & \sum_{i=1}^{r_V} M_i \leq (2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2))(\max_{1\leq i\leq r_V} C_{V_i}\varepsilon^{\tilde{N}} + 1)\cdot 2\varepsilon^{q/m}. \square \end{aligned}$$

Dokaz teoreme: Primetimo da sa Furijeovom transformacijom i (3.2), problem postaje ekvivalentan traženju $\tilde{G}_{\phi,\varepsilon}$ takvog da postoji N takvo da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoji $\eta > 0$ takvo da

$$I_{\phi,\varepsilon} = \int_{B(0,1/\varepsilon)} (P(i\xi)\tilde{G}_{\phi,\varepsilon}(\xi) - \hat{H}_{\phi,\varepsilon}(\xi))\hat{\psi}(\xi)d\xi \leq \varepsilon^p,\ \varepsilon < \eta.$$

Tada je $\mathcal{F}_{\mathbf{t}}^{-1}(\tilde{G})$ rešenje od (3.2). Stavimo

$$\tilde{G}_{\phi,\varepsilon}(\xi) := \hat{H}_{\phi,\varepsilon}(\xi)k_{\phi,\varepsilon^{q/m}}(\xi)/P(i\xi),\ \xi \in \mathbf{R}^n,\ (\phi,\varepsilon) \in \mathcal{A}_0 \times (0,1).$$

Jasno je da je

$$\begin{aligned} |I_{\phi,\varepsilon}| &= \int_{B(0,1/\varepsilon)} (\hat{H}_{\phi,\varepsilon}(\xi)(1 - k_{\phi,\varepsilon^{q/m}}(\xi))\hat{\psi}(\xi)d\xi \\ &= \int_{V_q(\varepsilon)} (\hat{H}_{\phi,\varepsilon}(\xi)(1 - k_{\phi,\varepsilon^{q/m}}(\xi))\hat{\psi}(\xi)d\xi \\ &\leq \operatorname{mes}(V_q(\varepsilon))C_{\hat{H}}\varepsilon^{-N_{\hat{H}}} \int (1+|\xi|)^{N_{\hat{H}}}\hat{\psi}(\xi)d\xi,\ 0 < \varepsilon < \eta_{\hat{H}}, \end{aligned}$$

gde su $\phi \in \mathcal{A}_{N_{\hat{H}}}$, $C_{\hat{H}} > 0$ i $\eta_{\hat{H}} > 0$ odgovarajuće konstante. Ali, kako je $\operatorname{mes}(V_q(\varepsilon)) \leq C\varepsilon^{q/m}$, vidimo da za svako $\phi \in \mathcal{A}_{N_{\hat{H}}}$ postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je

$$|I_{\phi,\varepsilon}| \leq C\varepsilon^{q/m - N_{\hat{H}}},\ 0 < \varepsilon < \eta.$$

Za završetak dokaza je dovoljno da izaberemo q tako da je $q/m - N_{\hat{H}} \geq p$. $\square$

Primedba 1. Propozicija 4.1 je dokazana u [15] i [70] za τ-konvoluciju Kolomboa ([15]). Kako za svako $G \in \mathcal{G}_{\mathbf{t}}$ i $\psi \in \mathcal{S}$,

$$\int^{\tau} G_{\phi,\varepsilon}(x)\psi(x)dx - \int G_{\phi,\varepsilon}(x)\psi(x)dx \in \mathbf{C}_0,$$

Teorema 4.2 važi takođe i za τ-konvoluciju.

Primedba 2. Pretpostavimo da za $F \in \mathcal{G}$ važe uslovi Teoreme 4.1 i da je H proizvoljna uopštena funkcija. Ako je V konačna unija varijetea, možemo dokazati rezultat iz Leme 4.2, pa na slični način možemo dokazati postojanje rešenja od $F \cdot G \approx_p H$, to jest, možemo konstruisati niz aproksimativnih rešenja. Na primer, ovo važi ako je $F = \mathrm{Cd}(f)$, gde je f realna analitička funkcija, jer u tom slučaju možemo koristiti Lojašievičevu teoriju ([41]).

Primedba 3. Neka je E rešenje od $P(D)E = \delta$ iz $\mathcal{S}'$. Poznato je ([36]) da takvo E postoji. Za jednačinu

$$P(D)G = H, \ H \in \mathcal{G}_{\mathrm{t}} \tag{3.3}$$

stavimo

$$G = [E] \overset{\mathrm{t},\mu}{\star} H. \tag{3.4}$$

gde je μ jedinična mreža i $\overset{\mathrm{t},\mu}{\star}$ je t,μ-konvolucija definisana u [44]. Ovo ima smisla jer su obe uopštene funkcije temperirana. Za osobine od t,μ-konvoluciju videti [44]. kako u (g.t.d.) smislu

$$\begin{aligned} P(D)[E] \overset{\mathrm{t},\mu}{\star} H &= [(P(D)E)] \overset{\mathrm{t},\mu}{\star} H, \\ \mathrm{Cd}(\delta) \overset{\mathrm{t},\mu}{\star} H &= H, \end{aligned}$$

vidimo da je (3.4) rešenje od (3.3) u (g.t.d.) smislu. Ali, u opštem slučaju je prilično teško naći eksplicitno rešenje E. Dakle, često je korisno dobiti jasno i lako izračunljivo rešenje u asociranom ili p-asociranom smislu.

Teorema 3.1.2 važi takođe i u [illegible].

Primedba 2. Ako pretpostavimo [illegible] Teoreme 3.1.1, da je H proizvoljan nepotpuno [illegible] jeste, možemo dokazati [illegible] dokazati postojanje rešenja [illegible] aproksimativnih rešenja. Na primer, [illegible] je $P = Q$, gde je Q realan analitički funkcija [illegible] Lojasiewicz teorija ([illegible]).

Primedba 3. Nekog [illegible] rešenje od $P(D)E = \delta$ [illegible] ih takvo [illegible] postoji. Na primer, [illegible]

$$(3.3) \qquad [illegible] = M, \; H \; [illegible]$$

stavimo

$$(3.4) \qquad [illegible]$$

gde je μ jedinična mreža [illegible] konvolucija [illegible] ([illegible]). Ovo ima smisla jer su obe [illegible] funkcije temperirane [illegible] t, μ-konvoluciju videti [illegible] smisao [illegible]

$$P(D)[E] [illegible] = [illegible]$$

$$[illegible]$$

vidimo da je (3.4) rešenje od (3.3) [illegible]. Ali, u opštem slučaju je prilično teško naći [illegible] rešenje [illegible] korisno dobiti jasno i lako izraz [illegible] rešenje u [illegible] ranom smislu.

Glava 4.

Laplasova transformacija u težinskim prostorima

Furijeova transformacija se može iskoristiti za definisanje Laplasove transformacije u $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$, $\mathrm{a}(x) \leq \ln|x|$. u ovom delu je data definicija i pokazano je da ta definicija na prirodan način proširuje distribucionu definiciju iz [80]. Osim ovoga su analizirane osobine ove transformacije.

Rezultati u ovoj glavi su originalni rezultati Nedeljkova (poglavlje 4.1) iz [50] kao i oni dobijeni u saradnji sa Pilipovićem [46].

4.1. Težinska Laplasova transformacija

Proučavaćemo Laplasovu transformaciju u prostorima $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ ([45]), pomoću Furijeove transformacije.

Definicija Laplasove transformacije je analogna definiciji Vladimirova u prostoru temperiranih distribucija ([80]). Sve osobine Laplasove transformacije distribucija sa odgovarajućim izmenama važe za Laplasovu transformaciju definisanu u $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$, gde $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ zadovoljava odgovarajuće uslove.

Napomenimo Nedeljkov je dao u [50] definiciju Laplasove transformacije u nestandardnoj Kolomboovoj teoriji. Ponivićemo ovu definiciju, ali sada u originalnim Kolomboovim prostorima.

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbf{C}^n$. U [16], Kolombo je definisao $\mathcal{G}(\Omega)$ na standardni način, posmatrajući Ω kao otvoren skup u $\mathbf{R}^{2n}$.

$G \in \mathcal{G}(\Omega)$ zovemo holomornom uopštenom funkcijom važi

$$(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j})G(z) = 0,\ j = 1, \ldots, n,\ z = x + iy \in \Omega$$

Kažemo da je $G \in \mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ pseudo $\mathbf{a}_1$-ograničena u beskonačnosti, $\mathbf{a}_1(x) \geq \mathbf{a}(x)$, sa oznakom $G \in \mathcal{G}^{\psi}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}}$, ako ima reprezenta $G^s_{\phi,\varepsilon}$ za koji postoji $\theta_1 \in \Theta_{\mathbf{a}_1}$ i $N \in \mathbf{N}$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da

$$|G^s_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq C\theta_1(|x|)\varepsilon^{-N},\ x \in \mathbf{R}^n,\ \varepsilon < \eta.$$

Ako je neka operacija na $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ dobro definisana (to jest, ne zavisi od reprezenata), tada svi reprezenti od G imaju one osobine pri takvoj operaciji koju ima i neki specijalan reprezent od $G \in \mathcal{G}^{\psi}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}}$, $G^s_{\phi,\varepsilon}$. Ovo opravdava uvođenje $\mathbf{a}_1$-ograničenih funkcija u $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$.

Neka je Γ zatvoren konveksan oštar konus u $\mathbf{R}^n$ za vrhom u nuli. Označimo sa $\Gamma^* = \{\xi |\ \xi x \geq 0,\ x \in \Gamma\}$ njegov konjugovani konus. Stavimo $C = \mathrm{int}\Gamma^*$ (C je otvoren i konveksan konus) i $T^C = \mathbf{R}^n + iC$.

Kažemo da je $G \in \mathcal{G}_{\mathbf{a}}$ ograničeno sa strane konusa Γ ako je $\mathrm{supp}G \subset \Gamma + K$, gde je K kompaktni podskup od $\mathbf{R}^n$. Prostor svih takvih uopštenih funkcija se označava sa $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}(\Gamma+)$.

Neka je $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$, $\mathbf{a}(x) \leq \ln|x|$. To znači da ako $\theta \in \Theta_{\mathbf{a}}$, tada postoji $a > 0$ takvo da $\theta(x) \leq e^{a|x|}$ u beskonačnosti. Neka je μ jedinična mreža za $\mathbf{a}$. Tada je $L_{\mathbf{a},\mu}$ definisano za $G \in \mathcal{G}_{\mathbf{a}}(\Gamma+)$ sa

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{a},\mu}(G)(z) &= F_{\mathbf{a},\mu}(G(\xi)e^{-y\xi})(x) \\ &= \int^{\mathbf{a},\mu} G(\xi)e^{-y\xi}e^{ix\xi}d\xi,\ x + iy \in T^C. \end{aligned}$$

Za svako $\mathbf{a}_1 \in \mathbf{A}$ i svako $y \in C$, može se pokazati da je $L_{\mathbf{a},\mu}(G)(\cdot + iy) \in \mathcal{G}_{\mathbf{a}_1}$ dobro definisano. U daljim razmatranjima ćemo posmatrati slučaj $\mathbf{a}_1 = \mathbf{t}$. Kako je $e^{-y\xi} \in \Theta_{\mathbf{a}}$, $\xi \in K + \gamma$, za $\mathbf{a}(x) \leq \ln|x|$, definicija ima smisla. U stvari, može se pokazati da definicija ima smisla za svako $y \in \mathbf{R}^n$ kada $G \in \mathcal{G}_{\mathbf{a}}(\mathbf{R}^n)$: Neka je $G_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{N}_{\mathbf{a}}$. Tada je (jer je $\mathbf{a}(x) \leq \ln x$),

$$\begin{aligned} & |\partial^{\alpha}_z \int G_{\phi,\varepsilon}(\xi)e^{iz\xi}\mu^{\mathbf{a}}_{\varepsilon}(\xi)d\xi| \\ \leq & \int_{|\xi| \leq \mathbf{a}(1/\varepsilon)+r} |G_{\phi,\varepsilon}(\xi)||\xi|^{|\alpha|}e^{-y\xi}d\xi \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq C_1(\mathbf{a}(1/\varepsilon)+r)^n \sup_{|\xi|\leq \mathbf{a}(1/\varepsilon)+r} \theta_G(|\xi|)e^{|y|\xi}\varepsilon^{q-N_G}\\
&\leq C_1(y)\theta_1(\mathbf{a}(1/\varepsilon)+r)\varepsilon^{q-N_G}\\
&\leq C(y)\varepsilon^{q-N_G-N_1},
\end{aligned}
$$

za ε dovoljno malo, gde je $\theta_1 \in \Theta_{\mathbf{a}}$. Na sličan način vidimo da je $L_{\mathbf{a},\mu}(G_{\phi,\varepsilon}) \in \mathcal{E}_{\mathbf{t}}$ za fiksirano y.

Ako je G ograničeno sa strane konusa Γ i $y \in C$, tada je konstanta $C(y)$ jednaka $e^{|y|C_G}$. Zbog svojih osobina, koje su slične klasičnim, koristićemo definiciju sa samo takvim uopštenim funkcijama G.

$L_{\mathbf{a},\mu}(G)(z)$ je holomorfna uopštena funkcija u $\mathbf{C}^n$, jer važi

$$
\left(\frac{\partial}{\partial x_j}+i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)L_{\mathbf{a},\mu}(G)(z) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}+i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)\int^{\mathbf{a},\mu} G(\xi)e^{-y\xi}e^{ix\xi}d\xi
$$

$$
= \int^{\mathbf{a},\mu} G(\xi)e^{-y\xi}i\xi_j e^{ix\xi}d\xi + i\int^{\mathbf{a},\mu} G(\xi)e^{-y\xi}(-\xi_j)e^{ix\xi}d\xi = 0.
$$

Definicija uopštene Laplasove transformacije se poklapa sa klasičnom ([80]) u asociranom smislu kada je G ograničena sa strane konusa Γ

Propozicija 4.1. *Neka je $g \in \mathcal{S}'$ ograničeno sa strane konusa Γ. Neka je $\mathrm{Cd} : \mathcal{S}' \to \mathcal{G}_{\mathbf{a}}$, za neko $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$. Tada za svako $y \in C = \mathrm{int}\Gamma^*$ i svaku jediničnu mrežu μ za* $\mathbf{a}$

$$
L_{\mathbf{a},\mu}(\mathrm{Cd}(g)) \approx L(g)(\cdot + iy).
$$

d**Dokaz:** Neka je $\psi \in \mathcal{S}$ i neka je $\gamma \in C^\infty$ jednaka jedinici na nosaču od g i ograničena sa strane konusa Γ. Tada, kako je $\mathcal{F}(\psi)(\xi)e^{-y\xi}\gamma(\xi) \in \mathcal{S}$, imamo

$$
\begin{aligned}
< L(g)(x+iy), \psi(x) > &= < \mathcal{F}(g(\xi)e^{-y\xi})(x), \psi(x) >\\
&= < g(\xi), \gamma(\xi)e^{-y\xi}\mathcal{F}(\psi)(\xi) >
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
& < L_{\mathbf{a},\mu}(\mathrm{Cd}(g))_{\phi,\varepsilon}(x+iy), \psi(x) >\\
= \ & < \mathcal{F}(g * \phi_\varepsilon(\xi)e^{-y\xi}\mu_\varepsilon(\xi))(x), \psi(x) >\\
= \ & < g * \phi_\varepsilon(\xi)\mu_\varepsilon(\xi), e^{-y\xi}\mathcal{F}(\psi)(\xi) >,
\end{aligned}
$$

gde su L i $\mathcal{F}$ klasična Laplasova i Furijeova transformacija, respektivno. Kako je

$$\begin{aligned} & < g * \phi_\varepsilon(\xi)\mu_\varepsilon^{\mathbf{a}}(\xi), \gamma(\xi)e^{-y\xi}\mathcal{F}(\psi)(\xi) > \\ & - < g * \phi_\varepsilon(\xi), \gamma(\xi)e^{-y\xi}\mathcal{F}(\psi)(\xi) > \\ = & \ (\mu_\varepsilon(\xi) - 1) < g * \phi_\varepsilon(\xi), \gamma(\xi)e^{-y\xi}\mathcal{F}(\psi)(\xi) >, \end{aligned}$$

i $\mu_\varepsilon(\xi) - 1 \to 0$, kada $\varepsilon \to 0$,

$$< g * \phi_\varepsilon(\xi), \gamma(\xi)e^{-y\xi}\mathcal{F}(\psi)(\xi) > \to < g(\xi), \gamma(\xi)e^{-y\xi}\mathcal{F}(\psi)(\xi) > \in \mathbf{C},$$

i

$$< g * \phi_\varepsilon(\xi), \gamma(\xi)e^{-y\xi}\mathcal{F}(\psi)(\xi) > - < g(\xi), \gamma(\xi)e^{-y\xi}\mathcal{F}(\psi)(\xi) > \to 0,$$

jer je $g \to g * \phi_\varepsilon$ in $\mathcal{S}'$, kada je $\phi \in \mathcal{A}_N$, N dovoljno veliko, i to dokazuje tvrđenje. □

Osobine Laplasove transformacije, koje su date u sledećoj propoziciji, su anlogne klasičnim ([80]).

Propozicija 4.2. *Neka su G, G_1, G_2 su u $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$. Tada je:*

1.

$$\partial_{z_j}^\alpha L_{\mathbf{a},\mu}(G)(z) = L_{\mathbf{a},\mu}((i\xi_j)^\alpha G(\xi))(z), \ z \in \mathbf{C}^n.$$

2.

$$L_{\mathbf{a},\mu}(\partial_j G(\xi))(z) = z_j L_{\mathbf{a},\mu}(G(\xi))(z) + M_{G,j,\mu}(z), \ z \in \mathbf{C}^n,$$

gde je

$$M_{G,j,\mu} = [\int G_{\phi,\varepsilon}(\xi)e^{iz\xi}\partial_j\mu_\varepsilon(\xi)d\xi].$$

3.

$$L_{\mathbf{a},\mu}(G(\xi)e^{ia\xi})(z) = L_{\mathbf{a},\mu^{\mathbf{a}}}(G(\xi))(z + a), \ z \in \mathbf{C}^n,$$

za svako $a \in \mathbf{C}^n$.

4.

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{a},\mu}(G(\xi - \xi_0))(z) &= e^{iz\xi_0}(L_{\mathbf{a},\mu}(G(\xi))(z) \\ &\quad + M_{G,\xi_0,\mu}(z)), \ z \in \mathbf{C}^n, \end{aligned}$$

gde je

$$M_{G,\xi_0,\mu}(z)) = [e^{iz\xi_0} \int G_{\phi,\varepsilon}(\xi) e^{iz\xi}(\mu_\varepsilon(\xi + \xi_0) - \mu_\varepsilon(\xi))d\xi],$$

za svako $\xi_0 \in \mathbf{R}^n$.

5.

$$L_{\mathbf{a},\mu}(G_1 \times G_2)(z_1, z_2) = L_{\mathbf{a},\mu}(G_1)(z_1) L_{\mathbf{a},\mu}(G_2)(z_2), \ z \in \mathbf{C}^n.$$

6.

$$\begin{aligned} & L_{\mathbf{a},\mu}(G_1 \overset{\mathbf{a},\mu}{\star} G_2)(z) \\ & = L_{\mathbf{a},\mu}(G_1)(z) L_{\mathbf{a},\mu}(G_2)(z) \\ & + M_{G_1,G_2,\mu}(z), \ z \in \mathbf{C}^n, \end{aligned}$$

gde je

$$\begin{aligned} & M_{G_1,G_2,\mu}(z) \\ = \ & [\int\int G_{1,\phi,\varepsilon}(\zeta) G_{2,\phi,\varepsilon}(\xi)(\mu_\varepsilon(\zeta + \xi) - \mu_\varepsilon(\zeta))\mu_\varepsilon(\xi) e^{iz(\zeta+\xi)} d\xi d\zeta] \end{aligned}$$

Dokaz:

1.

$$\begin{aligned} \partial_{z_j}^\alpha L_{\mathbf{a},\mu}(G)(z) &= \partial_{z_j}^\alpha \int^{\mathbf{a},\mu} G(\xi) e^{-y\xi} e^{ix\xi} d\xi \\ &= \partial_{z_j}^\alpha \int^{\mathbf{a},\mu} G(\xi) e^{iz\xi} d\xi = \int^{\mathbf{a},\mu} (i\xi_j)^\alpha G(\xi) e^{ix\xi} d\xi \\ &= L_{\mathbf{a},\mu}((i\xi_j)^\alpha G(\xi))(z). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{a},\mu}(\partial_j G(\xi))(z) &= \int^{\mathbf{a},\mu} \partial_j G(\xi) e^{iz\xi} d\xi \\
&= [\int \partial_j G_{\phi,\varepsilon}(\xi) e^{iz\xi} \mu_\varepsilon(\xi) d\xi] \\
&= [\int G_{\phi,\varepsilon}(\xi)(iz_j) e^{iz\xi} \mu_\varepsilon(\xi) d\xi] \\
&\quad +[\int G_{\phi,\varepsilon}(\xi) e^{ix\xi} \partial_j \mu_\varepsilon(\xi) d\xi] \\
&= z_j L_{\mathbf{a},\mu}(G(\xi))(z) \\
&\quad +[\int_{\mathbf{a}(b/\varepsilon)\leq|\xi|\leq\mathbf{a}(b/\varepsilon)+r} G_{\phi,\varepsilon}(\xi) E^{ix\xi} \partial \mu_\varepsilon(\xi) d\xi] \\
&= z_j L_{\mathbf{a},\mu}(G(\xi))(z) + M_{G,j,\mu}(z).
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{a},\mu}(G(\xi)e^{ia\xi})(z) &= \int^{\mathbf{a},\mu} G(\xi) e^{i(z+a)\xi} d\xi \\
&= L_{\mathbf{a},\mu}(G(\xi))(z+a).
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
L_{\mathbf{a},\mu}(G(\xi-\xi_0))(z) &= \int^{\mathbf{a},\mu} G(\xi-\xi_0) e^{iz\xi} d\xi \\
&= [\int G_{\phi,\varepsilon}(\xi) e^{iz(\xi+\xi_0)} \mu_\varepsilon(\xi+\xi_0) d\xi] \\
&= [e^{iz\xi_0} \int G_{\phi,\varepsilon}(\xi) e^{iz\xi} \mu_\varepsilon(\xi) d\xi] \\
&\quad +[e^{iz\xi_0} \int_{\substack{\mathbf{a}(b/\varepsilon)\leq|\xi|\leq\mathbf{a}(b/\varepsilon)+r \\ \mathbf{a}(b/\varepsilon)\leq|\xi+\xi_0|\leq\mathbf{a}(b/\varepsilon)+r}} G_{\phi,\varepsilon}(\xi) e^{iz\xi} \\
&\quad \cdot(\mu_\varepsilon(\xi+\xi_0) - \mu_\varepsilon(\xi)) d\xi] \\
&= e^{iz\xi_0}(L_{\mathbf{a},\mu}(G(\xi))(z) + M_{G,\xi_0,\mu}(z)).
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
&L_{\mathbf{a},\mu}(G_1 \times G_2)(z_1, z_2) \\
&= \int^{\mathbf{a},\mu} \int^{\mathbf{a},\mu} G_1(\xi_1) G_2(\xi_2) e^{i(z_1\xi_1 + z_2\xi_2)} d\xi_1 d\xi_2 \\
&= L_{\mathbf{a},\mu}(G_1)(z_1) L_{\mathbf{a},\mu}(G_2)(z_2).
\end{aligned}$$

6.

$$
\begin{aligned}
&L_{\mathbf{a},\mu}(G_1 \,{}^{\mathbf{a}}\!\star^{\mu}\, G_2)(z) \\
&= \int^{\mathbf{a},\mu}\int^{\mathbf{a},\mu} G_1(\zeta-\xi)G_2(\xi)e^{iz\zeta}d\xi d\zeta \\
&= [\int\int G_{1,\phi,\varepsilon}(\zeta-\xi)G_{2,\phi,\varepsilon}(\xi) \\
&\mu_\varepsilon(\zeta)\mu_\varepsilon(\xi)e^{iz\zeta}d\xi d\zeta] \\
&= [\int\int G_{1,\phi,\varepsilon}(\zeta)G_{2,\phi,\varepsilon}(\xi)\mu_\varepsilon(\zeta+\xi)\mu_\varepsilon(\xi)e^{iz(\zeta+\xi)}d\xi d\zeta] \\
&= [\int\int G_{1,\phi,\varepsilon}(\zeta)G_{2,\phi,\varepsilon}(\xi) \\
&\mu_\varepsilon(\zeta)\mu_\varepsilon(\xi)e^{iz(\zeta+\xi)}d\xi d\zeta] \\
&+[\int\int G_{1,\phi,\varepsilon}(\zeta)G_{2,\phi,\varepsilon}(\xi)(\mu_\varepsilon(\zeta+\xi)-\mu_\varepsilon(\zeta)) \\
&\mu_\varepsilon(\xi)e^{iz(\zeta+\xi)}d\xi d\zeta] \\
&= L_{\mathbf{a},\mu}(G_1)(z)L_{\mathbf{a},\mu}(G_2)(z)+M_{G_1,G_2,\mu}(z).
\end{aligned}
$$

Posledica 4.1. *1. Ako G, G_1, G_2 imaju kompaktne nosače, tada je $M_{G,j,\mu} = M_{G,\xi_0,\mu} = M_{G_1,G_2,\mu} = 0$. To znači da su svih šest osobina iste kao u klasičnom slučaju.*

2. Ako je $\mathbf{a}(x) = \ln(x)$, i ako su G, G_1 i G_2 u $\mathcal{G}_{\mathbf{t}}^{\psi}$, tada $M_{G,j\mu} \approx M_{G,\xi_0,\mu} \approx M_{G_1,G_2,\mu} \approx 0$ za $|y|$ dovoljno veliko.

Dokaz: Dokaz prvog tvrđenja je očigledan a dokaz drugog sledi iz činjenice da za svako y i svako $G_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_{\mathbf{t}}^{\psi}$,

$$
\begin{aligned}
& \int G_{\phi,\varepsilon}(\xi)e^{iz\xi}\mu_\varepsilon(\xi)d\xi - \int G_{\phi,\varepsilon}(\xi)e^{iz\xi}d\xi| \\
\leq\ & \int_{|\xi|>\mathbf{a}(1/\varepsilon)} |G_{\phi,\varepsilon}(\xi)|e^{-y\xi}d\xi \\
\leq\ & C_1(\mathbf{a}(1/\varepsilon))^n \sup_{|\xi|>\mathbf{a}(1/\varepsilon),\xi=\xi_K+\xi_\Gamma,\xi_K\in K,\xi_\Gamma\in\Gamma} |G_{\phi,\varepsilon}(\xi)|e^{-y\xi} \\
\leq\ & C_2(\mathbf{a}(1/\varepsilon))^n e^{|y|C_K}(1+\mathbf{a}(1/\varepsilon))^\gamma \varepsilon^{-N} e^{-|y|\mathbf{a}(1/\varepsilon)} \\
\leq\ & C(\mathbf{a}(1/\varepsilon))^{\gamma+n} e^{|y|C_K}\varepsilon^{|y|-N}
\end{aligned}
$$

a poslednji izraz konvergira nuli kada $\varepsilon \to 0$, gde je $|y| > N$ (N zavisi samo od uopštene funkcije G.) □

[illegible]

$$= A_{\alpha}(M \ldots$$ [illegible]

Posledica 4.1. [illegible] $M_{\alpha,\beta} = M_{\alpha,\alpha,\beta} =$ [illegible]

[illegible]

Dokaz: [illegible]

činjenice da za svako y i svako [illegible]

[illegible]

a poslednji izraz konverg[illegible]

samo od neopsten[illegible]

Glava 5.

Teoreme tipa Pali-Vinera za Kolomboove uopštene funkcije

Definicija Laplasove transformacije data u prethodnom delu je definisana na $\mathcal{G}_{\mathbf{a}}$, $\mathbf{a}(x) \leq |x|$, što isključuje prirodno proširenje Laplasove transformacije temperiranih distribucija na Kolomboove uopštene funkcije pa zbog toga nije pogodna za dobijanje teoreme tipa Pali-Vinera. Glavni problem je u osobinama funkcije sečenja μ_ε. Zbog toga ćemo dati ovde prirodnije (sličnije klasičnim) definicije Laplasove transformacije za uopštene funkcije sa kompaktnim nosačem i temperirane uopštene funkcije.

Označimo sa $B(0,a)$, $a > 0$ zatvorenu loptu sa centrom u 0 i poluprečnikom a. Koristićemo sledeće nejednakosti (videti u [80], Sec. 4.4 i strana 171):

$$y\xi \geq |\xi| d(y, \partial\Gamma^*),\ y \in C,\ \xi \in \Gamma, \tag{5.1}$$

gde je $d(y,\partial\Gamma^*)$ rastojanje od y do granice Γ^* i

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ako je } a > 0 \text{ i } \xi_0 \notin \Gamma + B(0,a) \text{ tada} \\ \text{postoje } r > 0,\ h > 0 \text{ i } y_0 \in C \cap S^{n-1} \\ \text{takvi da je } \xi y_0 < -(a+r),\ |\xi - \xi_0| < h. \end{array}\right. \tag{5.2}$$

Koristićemo i sledeću verziju od (5.2):

Neka je $\xi_0 \neq 0$, $|\xi_0| = a_0$. Označimo sa $\Gamma_{a_0,\xi_0,h} = \Gamma_{\xi_0,h} \cap \{\xi \mid |\xi| \geq a_0\}$, gde je

$$\Gamma_{\xi_0,h} = \{\xi \mid |a_0 \frac{\xi}{|\xi|} - \xi_0| \leq h\}.$$

Tada je

$$(5.3) \qquad \begin{cases} \text{Ako je } a > 0 \text{ i } \xi_0 \notin \Gamma + B(0,a), \text{ tada} \\ \text{postoje } r > 0,\ h > 0 \text{ i } y_0 \in C \cap S^{n-1} \\ \text{takvi da } \xi y_0 < -(a+r),\ \xi \in \Gamma_{a_0,\xi_0,h}. \end{cases}$$

Ovo sledi iz

$$-\xi y_0 = -\frac{|\xi|}{a_0} a_0 \frac{\xi}{|\xi|} y_0 \geq \frac{|\xi|}{a_0}(a+r) \geq a + r,\ \xi \in \Gamma_{a_0,\xi_0,h}.$$

Označimo sa $\mathcal{G}_{\mathbf{t}}(\Gamma)$ skup svih $G \in \mathcal{G}_{\mathbf{t}}$ takvih da postoji njihov pretstavnik $G_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_{\mathbf{t}}$ takav da

$$(5.4) \begin{cases} \text{za svako } \delta > 0 \text{ i } \beta \in \mathbf{N}_0^n \text{ postoji } p \in \mathbf{R},\ N \in \mathbf{N}_0 \\ \text{i } g \in I \text{ takvi da za svako } \phi \in \mathcal{A}_q,\ q \geq N, \\ \text{postoje } C > 0 \text{ i } \eta > 0 \text{ takvi da} \\ |\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(\xi)| \leq C(1+|\xi|^2)^{p/2} \varepsilon^{g(q)-N},\ \xi \notin \Gamma + B(0,\delta),\ \varepsilon < \eta. \end{cases}$$

Primetimo da ako je Γ_1 zatvoren konveksan oštar konus takav da $\Gamma \cap S^{n-1} \subset\subset \text{int}\,(\Gamma_1 \cap S^{n-1})$, tada je $\mathcal{G}_{\mathbf{t}}(\Gamma_1) \subset \mathcal{G}_{\mathbf{t}}(\Gamma)$. (int znači unutrašnjost i $A \subset\subset B$ znači da je $\bar{A}$ kompaktan u B.)

Nosač temperirane uopštene funkcije $G \in \mathcal{G}_{\mathbf{t}}$, definisanu pretstavnikom $G_{\phi,\varepsilon}$, je definisan kao nosač uopštene funkcije u $\mathcal{G}$ koji je određen sa $G_{\phi,\varepsilon}$ i koje ćem opet označiti sa G. Kako je $\mathcal{N}_{\mathbf{t}} \subset \mathcal{N}$, ako je $G \in \mathcal{G}_{\mathbf{t}}(\Gamma)$, tada je supp $G \subset \Gamma$, ali obrnuto nije tačno u opštem slučaju.

Sledeći prostor, uveden od strane Obergugenbergera u [55], je od ogromne važnosti za lokalnu i mikrolokalnu analizu Kolomboovih uopštenih funkcija:

$\mathcal{G}^\infty(\Omega)$ je prostor svih $G \in \mathcal{G}(\Omega)$ koji imaju pretstavnika $G_{\phi,\varepsilon}$ takvog da za svako $K \subset\subset \Omega$ postoji $N \in \mathbf{N}_0$ takvo da za svako $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ postoji $M \in \mathbf{N}_0$ takvo da za svako $\phi \in \mathcal{A}_M$ postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je $|\partial^\alpha G_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq C\varepsilon^{-N}$, $x \in K$, $\varepsilon < \eta$. Primetimo da je $\mathcal{G}^\infty \cap \mathcal{D}' = \mathcal{E}$.

Stavimo $\mathcal{G}_c^\infty = \mathcal{G}_c \cap \mathcal{G}^\infty$.

5.1. Laplasova transformacija u $\mathcal{G}_c$

Definicija 5.1. *Neka je $G \in \mathcal{G}_c(\mathbf{R}^n)$. Laplasova transformacija od G, $\mathcal{L}(G)(z) \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^{2n})$, $z = x + iy$, je definisana pretstavnikom*

$$\mathcal{L}(G)_{\phi,\varepsilon}(z) = \int_{\mathbf{R}^n} \kappa(\xi) G_{\phi,\varepsilon}(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \ z \in \mathbf{C}^n, \tag{5.5}$$

gde je $\kappa \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\kappa = 1$ na supp G *i ϕ na levoj strani je posmatrano kao $\phi \otimes \phi \in \mathcal{A}_q(\mathbf{R}^{2n})$.*

U stvari, lako se može pokazati da za različite pretstavnike $G_{1,\phi,\varepsilon}$ i $G_{2,\phi,\varepsilon}$ od G i za različite $\kappa_1, \kappa_2 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ takve da $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$ na supp G, imamo da

$$z \mapsto \int_{\mathbf{R}^n} (\kappa_1(\xi) G_{1,\phi,\varepsilon}(\xi) - \kappa_2(\xi) G_{2,\phi,\varepsilon}(\xi)) e^{iz\xi} d\xi \text{ pripada } \mathcal{N}(\mathbf{R}^{2n}).$$

Jasno je da je $\mathcal{L}(G)$ holomorfna uopštena funkcija.

Teorema 5.1. *(i) Neka je $G \in \mathcal{G}_c(\mathbf{R}^n)$ i* supp $G \subset B(0, A)$. *Neka je κ funkcija otsecanja korišćena u (5.5) sa nosačem u $B(0, A+1)$. Za svako $\delta > 0$ i $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ postoje $N \in \mathbf{N}$ i $g \in I$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \geq N$, postoje $\eta > 0$ i $C > 0$ takvi da je $\mathcal{L}(G_{\phi,\varepsilon})(z)$ cela funkcija za fiksirano $\varepsilon < \eta$ i*

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(G_{\phi,\varepsilon})(z)| \ &\leq \ C(1 + |x|^2)^{-\alpha}(e^{|y|(A+\delta)}\varepsilon^{-N} \\ &\quad + e^{(A+1)|y|}\varepsilon^{g(q)-N}), \ z \in \mathbf{C}^n, \ \varepsilon < \eta. \end{aligned} \tag{5.6}$$

(ii) Obrnuto, nek a je H uopštena funkcija na $\mathbf{R}^{2n}$ definisana pretstavnikom $H_{\phi,\varepsilon}$ takvim da za svako $\delta > 0$ i $\alpha \in \mathbf{N}$ postoje $N \in \mathbf{N}$ i $g \in I$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \geq N$, postoje $\eta > 0$ i $C > 0$ takvi da je $H_{\phi,\varepsilon}$ cela funkcija i

$$\begin{aligned} |H_{\phi,\varepsilon}(z)| \ &\leq \ C(1 + |x|^2)^{-\alpha}(e^{|y|(A+\delta)}\varepsilon^{-N} \\ &\quad + e^{(A+1)|y|}\varepsilon^{g(q)-N}), \ z \in \mathbf{C}^n, \ \varepsilon < \eta. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Tada, postoji $G \in \mathcal{G}_c(\mathbf{R}^n)$, supp $G \subset B(0, A)$ *takvo da je $\mathcal{L}G = H$.*

Primedba: Ako je supp $\kappa \subset B(0, A+r)$ za neko $r > 0$, tada možemo staviti $A + r$ umesto $A + 1$ u (5.6) i (5.7).

Dokaz: (i) Parcijalnom integracijom imamo

$$|\mathcal{L}(G_{\phi,\varepsilon})(z)| = (1+|x|^2)^{-\alpha}|\int_{\mathbf{R}^n}(1-\triangle_\xi)^\alpha(G_{\phi,\varepsilon}(\xi)\kappa(\xi)e^{-y\xi})e^{ix\xi}d\xi|$$

$$= (1+|x|^2)^{-\alpha}|\int_{\mathbf{R}^n}\sum_{\beta,\gamma\leq 2\alpha}(a_{\alpha,\beta,\gamma}\partial^\gamma(G_{\phi,\varepsilon}(\xi)\kappa(\xi))y^\beta e^{-y\xi}e^{ix\xi}d\xi|$$

$$\leq (1+|x|^2)^{-\alpha}(\int_{|\xi|\leq A+\delta'}e^{|y|\xi}|y|^{2\alpha}\sum_{\beta,\gamma\leq 2\alpha}(a_{\alpha,\beta,\gamma}|\partial^\gamma(G_{\phi,\varepsilon}(\xi)\kappa(\xi))|d\xi$$

$$+\int_{A+\delta'\leq|\xi|\leq A+1}e^{|y|\xi}|y|^{2\alpha}\sum_{\beta,\gamma\leq 2\alpha})a_{\alpha,\beta,\gamma}|\partial^\gamma(G_{\phi,\varepsilon}(\xi)\kappa(\xi))|d\xi)$$

$$\leq C(1+|x|^2)^{-\alpha}(e^{|y|(A+\delta'+\delta_0)}\varepsilon^{-N}+e^{(A+1+\delta_0)|y|}\varepsilon^{g(q)-N}),$$

$z \in \mathbf{C}^n$, $\varepsilon < \eta$ $\quad$ ($\triangle_\xi$ je Laplasijan),

(ii) Neka je

$$G_{\phi,\varepsilon}(\xi) = (2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n}H_{\phi,\varepsilon}(x)e^{-ix\xi}dx,\ \xi \in \mathbf{R}^n,\ \phi \in \mathcal{A}_q\ \varepsilon < \eta.$$

Neka je $\beta \in \mathbf{N}_0^n$ i $|\alpha| > (|\beta| + n + 1)/2$. Tada za svako $\xi \in \mathbf{R}^n$:

$$(5.8)|\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(\xi)| = (2\pi)^{-n}|\partial^\beta\int_{\mathbf{R}^n}H_{\phi,\varepsilon}(x)e^{-ix\xi}dx|$$

$$= (2\pi)^{-n}|\int_{\mathbf{R}^n}(-ix)^\beta H_{\phi,\varepsilon}(x)e^{-ix\xi}dx|$$

$$= (2\pi)^{-n}(1+|x|^2)^{-\alpha}|\int_{\mathbf{R}^n}(1-\triangle_x)^\alpha((-ix)^\beta H_{\phi,\varepsilon}(x))e^{-ix\xi}dx|$$

$$= (2\pi)^{-n}(1+|x|^2)^{-\alpha}|\int_{\mathbf{R}^n}e^{-ix\xi}\sum_{\gamma_1\leq 2\alpha,\gamma_1\leq 2\alpha}b_{\beta,\gamma_1,\gamma_2}\partial^{\gamma_1}(x)^\beta\partial^{\gamma_2}H_{\phi,\varepsilon}(x)dx|$$

$$= (2\pi)^{-n}(1+|x|^2)^{-\alpha}|\sum_{\gamma_1\leq 2\alpha,\gamma_1\leq 2\alpha}b_{\beta,\gamma_1,\gamma_2}$$

$$\int_{\mathbf{R}^n}e^{-i(x+iy)\xi}\partial^{\gamma_1}(x+iy)^\beta\partial^{\gamma_2}H_{\phi,\varepsilon}(x+iy)dx|$$

$$\leq Ce^{y\xi}(e^{|y|(A+\delta)}\varepsilon^{-N}+e^{(A+1+\delta)|y|}\varepsilon^{g(q)-N})$$

$z = x + iy \in \mathbf{C}^n$, $\varepsilon < \eta$,

gde je $C > 0$ odgovarajuća konstanta i $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \geq N$.

Kao u klasičnom slučaju (videti [36] strana 181), ova nejednakost implicira $G_{\phi,\varepsilon}(\xi) = 0$ za $|\xi| > A+1$. Zbog ovoga, možemo zaključiti da $G_{\phi,\varepsilon}(\xi)$ pretstavlja element iz $\mathcal{G}_c(\mathbf{R}^n)$. Dokazaćemo da je $G \in \mathcal{N}(O)$, gde je

$$O = \operatorname{int}(B(0, A+2) \setminus B(0, A+\delta)).$$

Kako je $\delta > 0$ proizvoljno izabrano, ovo implcira da je $\operatorname{supp} G \subset B(0, A)$.

Neka je K kompaktan podskup od O. Tada, postoji y_0 takvo da je

$$M = (A+\delta)|y_0| + \sup_{\xi \in K} \xi y_0 < 0.$$

Neka je $b(q)$ striktno rastući niz pozitivnih brojeva takvih da je

$$c(q) = g(q) + b(q)(1 + \frac{(1-\delta)|y_0|}{M}) \in I.$$

Stavimo $y = \dfrac{-b(q) y_0 \ln(\varepsilon)}{M}$. Tada postoji $C_1 > 0$ takvo da je

$$\sup_{\xi \in K} |\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(\xi)| \le C_1 \varepsilon^{b(q)-N} + \varepsilon^{b(q)} \varepsilon^{g(q)-N} \varepsilon^{(1-\delta)|y_0| b(q)/M}.$$

Znajući osobine od $\mathcal{L}(G_{\phi,\varepsilon})(z)$, $z \in \mathbf{C}^n$, može se lako pokazati da je

$$[\mathcal{L}(G_{\phi,\varepsilon})] = [H_{\phi,\varepsilon}],$$

i to kompletira dokaz za (ii).□

Na sličan način može se dokazati sledeća teorema za glatke uopštene funkcije.

Teorema 5.2. *(i) Neka je* $G \in \mathcal{G}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ *i* $\operatorname{supp} G \subset B(0, A)$. *Tada za svako* $\delta > 0$ *postoje* $N \in \mathbf{N}$ *i* $g \in I$ *takvo da za svako* $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ *i* $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \ge N$, *postoje* $\eta > 0$ *i* $C > 0$ *takvi da je* $\mathcal{L}(G_{\phi,\varepsilon})(z)$ *holomorfna funkcija i*

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}(G_{\phi,\varepsilon})(z)| \;\le\; & C(1+|x|^2)^{-\alpha}(e^{|y|(A+\delta)}\varepsilon^{-N} \\ & + e^{(A+1)|y|}\varepsilon^{g(q)-N}), \; z \in \mathbf{C}^n, \; \varepsilon < \eta. \end{aligned}$$

(ii) Obrnuto, neka je H uopštena funkcija na $\mathbf{R}^{2n}$ data pretstavnikom $H_{\phi,\varepsilon}$ takvim da za svako $\delta > 0$ postoje $N \in \mathbf{N}$ i $g \in I$ takvi da za svako $\alpha \in \mathbf{N}$ i $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \geq N$, postoje $\eta > 0$ i $C > 0$ takvi da je $H_{\phi,\varepsilon}$ holomorfna funkcija i

$$\begin{aligned} |H_{\phi,\varepsilon}(z)| \ &\leq \ C(1+|x|^2)^{-\alpha}(e^{|y|(A+\delta)}\varepsilon^{-N} \\ &+e^{(A+1)|y|}\varepsilon^{g(q)-N}), \ z \in \mathbf{C}^n, \ \varepsilon < \eta. \end{aligned}$$

Tada postoji $G \in \mathcal{G}_c^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\operatorname{supp} G \subset B(0, A)$ takvo da je $\mathcal{L}G = H$.

5.2. Laplasova transformacija u $\mathcal{G}_{\mathbf{t}}(\Gamma)$

Nadalje ćemo koristiti sledeću notaciju.

Neka je $l \in C^\infty$, $\operatorname{supp} l \subset B(0,s) + \Gamma$ za neko $s > 0$, tako da je $0 \leq l \leq 1$, $l(x) = 1$, $x \in \Gamma$. Za $s_1 > 0$ i $s_2 > 0$ će odgovarajuće funkcije biti označavane sa l_1 i l_2, respektivno. Uvek ćemo podrazumevati da je $s, s_1, s_2 \leq 1$.

Neka je $G_{\phi,\varepsilon}$ pretstavnik od $G \in \mathcal{G}_{\mathbf{t}}(\Gamma)$. Stavimo

$$\mathcal{L}_l(G_{\phi,\varepsilon})(z) = \int_{\mathbf{R}^n} G_{\phi,\varepsilon}(\xi) l(\xi) e^{-y\xi} e^{ix\xi} d\xi, \ z \in T^C. \tag{5.9}$$

Lema 5.1. *(i) Ako je $G_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{N}_{\mathbf{t}}(\mathbf{R}^n)$, tada za svako $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^n$ postoje $p > 0$, $N \in \mathbf{N}_0$ i $g \in I$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \geq N$, postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je*

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \mathcal{L}(G_{\phi,\varepsilon})(x+iy)| \leq C \frac{e^{s|y|}|y|^\beta \varepsilon^{g(q)-N}}{d(y, \partial\Gamma^*)^{p+|\alpha|}}, \ y \in C, \ \varepsilon < \eta.$$

Specijalno je $\mathcal{L}_l(G_{\phi,\varepsilon}) \in \mathcal{N}(T^C)$. Šta više, $\mathcal{L}_l(G_{\phi,\varepsilon})(\cdot + iy) \in \mathcal{N}(\mathbf{R}^n)$ za svako fiksirano $y \in C$.

(ii) Neka su l_1 i l_2 funkcije malo pre opisane. Tada za svako $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^n$ postoje $p > 0$, $N \in \mathbf{N}_0$ i $g \in I$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \geq N$, postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je

$$\begin{aligned} &|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \int_{\mathbf{R}^n} (l_1(\xi) - l_2(\xi)) G_{\phi,\varepsilon}(\xi) e^{iz\xi} d\xi| \\ &\leq C \frac{e^{\max\{s_1,s_2\}|y|}|y|^\beta \varepsilon^{g(q)-N}}{d(y, \partial\Gamma^*)^{p+|\alpha|}}, \ y \in C, \ \varepsilon < \eta. \end{aligned}$$

Dokaz: (i) Neka je $G_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{N}_t$. Tada za svako $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ postoje $p > 0$, $g \in I$ i $N_1 \in \mathbf{N}$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \geq N_1$, postoje $C_1 > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je

$$|\partial^\alpha G_{\phi,\varepsilon}(\xi)| \leq C_1(1+|\xi|)^p \varepsilon^{g(q)-N_1},\ \xi \in \mathbf{R}^n,\ \phi \in \mathcal{A}_q,\ \varepsilon < \eta.$$

Neka su $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^n$, $y \in C$. Tada je

$$\begin{aligned}
&|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \int_{B(0,s)+\Gamma} G_{\phi,\varepsilon}(\xi) l(\xi) e^{(ix-y)\xi} d\xi| \\
&\leq C_1 \int_{B(0,s)+\Gamma} (1+|\xi|)^p \varepsilon^{g(q)-N_1} l(\xi)(i\xi)^\alpha(-y)^\beta e^{-y\xi} d\xi \\
&\leq C_2 \varepsilon^{g(q)-N_1} |y|^\beta \int_{B(0,s)+\Gamma} (1+|\xi|)^{p+|\alpha|} e^{-y\xi} d\xi,\ x \in \mathbf{R}^n,
\end{aligned}$$

gde su $C_1 > 0$ i $C_2 > 0$ odgovarajuće konstante.

Koristimo dekompoziciju $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 \in \Gamma$, $\xi_2 \in B(0,s)$ i nejednakosti (videti (5.1))

$$(1+|\xi|) \leq C_3(1+|\xi_1|),\ e^{-y\xi_1} \leq e^{-d(y,\partial\Gamma^*)|\xi_1|},$$

sa odgovarajućom konstantom $C_3 > 0$. Ove nejednakosti impliciraju da za neko $C > 0$ važi:

$$\int_{\Gamma+K} (1+|\xi|)^{p+|\alpha|} e^{-y\xi} d\xi < C \frac{e^{s|y|}}{d(y,\Gamma^*)^{p+|\alpha|}}$$

i dokaz za (i) je kompletiran.

Dokaz za (ii) sledi iz (i), jer integrant pripada $\mathcal{N}_t(\mathbf{R}^n)$. □

Lema 1 (ii) implicira da za razne l_1 i l_2 i za $y \in K$, gde je K kompaktan skup u C,

$$\mathcal{L}_{l_1}(G_{\phi,\varepsilon})(\cdot + iy) - \mathcal{L}_{l_2}(G_{\phi,\varepsilon})(\cdot + iy) \in \mathcal{N}_t(\mathbf{R}^n)$$

i

$$(x+iy) \mapsto \mathcal{L}_{l_1}(G_{\phi,\varepsilon})(x+iy) - \mathcal{L}_{l_2}(G_{\phi,\varepsilon})(x+iy) \text{ pripada } \mathcal{N}(T^C).$$

U tom smislu, definišimo $\mathcal{L}(G)(\cdot + iy) \in \mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n)$ kao klasu određenu sa $\mathcal{L}_l(G_{\phi,\varepsilon})(\cdot + iy) \in \mathcal{E}_t(\mathbf{R}^n)$. Takođe, možemo definisati $\mathcal{L}(G)$ kao element od $\mathcal{G}(T^C)$ koji je određen sa $\mathcal{L}_l(G_{\phi,\varepsilon}) \in \mathcal{E}_M(T^C)$. To je holomorfna uopštena funkcija iz $\mathcal{G}(T^C)$.

Za drugi deo sledeće teoreme ćemo koristiti sledeću notaciju.

$$(\Gamma \cap S^{n-1})_\delta = \{\xi \in S^{n-1} \mid |\xi - \xi_0| \leq \delta \text{ za neko } \xi_0 \in \Gamma \cap S^{n-1}\}.$$

Odgovarajući konus ćemo obeležavati sa $\tilde{\gamma}_\delta$:

$$\xi \in \tilde{\gamma}_\delta \text{ ako je } \xi/|\xi| \in (\Gamma \cap S^{n-1})_\delta,\ \xi \neq 0.$$

Sa γ_δ ćemo označiti skup $\{\xi \in \tilde{\gamma}_\delta \mid |\xi| \geq \delta\}$.

Teorema 5.3. *(i) Neka je $G \in \mathcal{G}_t(\Gamma)$ i* supp $l \subset B(0,s)$. *Tada za svako $\delta > 0$ i $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ postoje $N, m \in \mathbf{N}$ i $g \in I$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \geq N$, postoje $\eta > 0$ i $C > 0$ takvi da je*

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_l(G)_{\phi,\varepsilon}(z)| \ &\leq \ C(1+|z|^2)^{-\alpha} \\ &\cdot \frac{(e^{\delta|y|}\varepsilon^{-N} + e^{s|y|}\varepsilon^{g(q)-N})}{|d(y,\partial\Gamma^*)|^m},\ z \in T^C,\ \varepsilon < \eta. \end{aligned}$$

(ii) Neka je H uopštena funkcija na T^C takva da postoji njen pretstavnik $H_{\phi,\varepsilon}$ takav da za svako $\delta > 0$ i $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ postoje $N, m \in \mathbf{N}$ i $g \in I$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \geq N$ postoje $\eta > 0$ i $C > 0$ takvi da je $H_{\phi,\varepsilon}$ holomorfna funkcija i

$$\begin{aligned} (5.10) \quad |H_{\phi,\varepsilon}(z)| \ &\leq \ C(1+|z|^2)^{-\alpha} \\ &\cdot \frac{(e^{\delta|y|}\varepsilon^{-N} + e^{s|y|}\varepsilon^{g(q)-N})}{d(y,\partial\Gamma^*)^m},\ z \in T^C,\ \varepsilon < \eta. \end{aligned}$$

Tada postoji $G \in \mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n)$, takvo da je:

a) Za svako $\delta > 0$ je supp $G \subset (\Gamma + B(0,s)) \cap \gamma_\delta$.

b) Za svaki konus Γ_1 sa osobinom: $\mathrm{int}(\Gamma_1 \cap S^{n-1}) \supset\supset \Gamma \cap S^{n-1}$, *imamo da je $G \in \mathcal{G}_t(\Gamma_1)$.*

c) Neka l_1 odgovara konusu Γ_1 iz b). Pretpostavimo da je Γ_1 zatvoren, konveksan i suštinski. Tada je $[\mathcal{L}_{l_1}(G_{\phi,\varepsilon})] = [H_{\phi,\varepsilon}]$ u $\mathcal{G}(T^{C_1})$, gde je $C_1 = \mathrm{int}\ \Gamma_1^*$, i za svako $y \in C_1$, $[\mathcal{L}_{l_1}(G_{\phi,\varepsilon})(\cdot + iy)] = [H_{\phi,\varepsilon}(\cdot + iy)]$ u $\mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n)$.

Dokaz: (i) Korišćenjem ocena za $\Delta^\beta G_{\phi,\varepsilon}$, $|\beta| \le |\alpha|$, za svako $z \in T^C$, imamo za pogodno izabrane konstante,

$$
\begin{aligned}
&|\int_{\mathbf{R}^n} G_{\phi,\varepsilon}(\xi) l(\xi) e^{iz\xi} d\xi| \le (1+|x|^2)^{-\alpha}\Big(\int_{B(0,\delta)+\Gamma} \frac{e^{-y\xi}(1+|\xi|)^{n+1}}{(1+|\xi|)^{n+1}} \\
&\cdot \sum_{\beta\le 2\alpha,\gamma\le 2\alpha} a_{\alpha,\beta,\gamma}\partial^\beta (G_{\phi,\varepsilon}(\xi)l(\xi)) y^\gamma |d\xi \\
&+ \int_{(B(0,s)+\Gamma)\setminus(B(0,\delta)+\Gamma)} \frac{e^{-y\xi}(1+|\xi|)^{n+1}}{(1+|\xi|)^{n+1}} \\
&\cdot |(1-\Delta_\xi)^\alpha (G_{\phi,\varepsilon}(\xi)l(\xi))|d\xi\Big) \\
\le\ & C(1+|x|^2)^{-\alpha}\Big(\sup_{\xi\in\Gamma+B(0,\delta)} e^{-y\xi}(1+|\xi|)^{r+n+1}|y|^\alpha \varepsilon^{-N} \\
&+ \sup_{\xi\in(\Gamma+B(0,s))\setminus(\Gamma+B(0,\delta))} e^{-y\xi}(1+|\xi|)^{r+n+1}|y|^\alpha \varepsilon^{g(q)-N}\Big).
\end{aligned}
$$

U prvom supremumu koristimo dekompoziciju $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 \in \Gamma$, $\xi_2 \in B(0,\delta)$ i sa (5.1) dobijamo

$$
\begin{aligned}
&|\sup_{\xi\in\Gamma+B(0,\delta)} e^{-y\xi}(1+|\xi|)^{r+n+1}|y|^\alpha| \\
\le\ & C_1 2^{r+n+1} \sup_{\xi_1\in\Gamma}(1+|\xi_1|)^{r+n+1} e^{(\delta+\delta_0)|y|} e^{-y\xi_1} \\
\le\ & C_2\Big(\frac{r+n+1}{d(y,\partial\Gamma^*)}\Big)^{r+n+1} e^{-(r+n+1)} e^{(\delta+\delta_0)|y|} e^{-d(y,\partial\Gamma^*)},
\end{aligned}
$$

gde su $C_1, C_2 > 0$ odgovarajuće konstante. Kako su δ i δ_0 proizvoljne, možemo staviti δ umesto $\delta+\delta_0$. Za drugi supremum koristimo dekompoziciju $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 \in \Gamma$, $\xi_2 \in B(0,s) \setminus B(0,\delta)$ i sa sličnim argumentima dokazujemo ovaj deo.

(ii) Neka $H_{\phi,\varepsilon}$ zadovoljava (5.10). Za $y \in C$ stavimo

$$
(5.11)\quad G_{\phi,\varepsilon,y}(\xi) = e^{y\xi}(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\xi} H_{\phi,\varepsilon}(x+iy)dx,\ \xi \in \mathbf{R}^n.
$$

Diferenciranjem po y dobijamo da $G_{\phi,\varepsilon,y}$ ne zavisi od $y \in C$, to jest $G_{\phi,\varepsilon,y}(\xi) = G_{\phi,\varepsilon}(\xi)$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, $y \in C$, gde je $G_{\phi,\varepsilon}(\xi) \in \mathcal{E}_{\mathbf{t}}(\mathbf{R}^n)$. Ocena za $H_{\phi,\varepsilon}$ implicira da za svako $\delta > 0$ postoje $N, m \in \mathbf{N}$ i $g \in I$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \ge N$, postoje $\eta > 0$ i $C > 0$ takvi da je

$$
(5.12)\quad |G_{\phi,\varepsilon}(\xi)| \le Ce^{y\xi}\frac{e^{\delta|y|}\varepsilon^{-N} + e^{s|y|}\varepsilon^{g(q)-N}}{|d(y,\partial\Gamma^*)|^m},\ \varepsilon < \eta,\ \xi \in \mathbf{R}^n.
$$

Koristeći (5.2), dokazaćemo da je $G_{\phi,\varepsilon}(\xi) = 0$ za $|\xi - \xi_0| < h$, $\xi_0 \notin \Gamma + B(0,s)$. Uzmimo $a = s$, $y = ty_0$, $t > 0$. Imamo

$$\begin{aligned} e^{t(s+r)|y_0|}|G_{\phi,\varepsilon}(\xi)| &\leq e^{t(s+r)|\xi|}|G_{\phi,\varepsilon}(\xi)| \\ &\leq e^{-y\xi}|G_{\phi,\varepsilon}(\xi)| \leq C(y_0,\varepsilon)e^{ts|y_0|}, \ \xi \in \mathbf{R}^n, \end{aligned}$$

gde su $C(y_0,\varepsilon) > 0$ i $r > 0$ odgovarajuće konstante. Puštajući da $t \to \infty$, dobijamo $G_{\phi,\varepsilon} = 0$ u okolini od ξ_0. To implicira $G_{\phi,\varepsilon} = 0$, $\xi \notin \Gamma + B(0,s)$.

Neka je $\xi_0 \notin \gamma_\delta$, $|\xi_0| = a_0 > 0$. Pokazaćemo da postoji konus $\Gamma_{a_0,\xi_0,h} \subset \mathbf{R}^n \setminus (\gamma_\delta)$ takav da

$$(5.13) \begin{cases} \text{za svako } \beta \in \mathbf{N}_0^n \text{ postoje } p \in \mathbf{R},\ N \in \mathbf{N}_0 \text{ i } g \in I \\ \text{takvi da za svako } \phi \in \mathcal{A}_q,\ q \geq N, \\ \text{postoje } C > 0 \text{ i } \eta > 0 \text{ takvi da je} \\ |\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(\xi)| \leq C(1+|\xi|^2)^{p/2}\varepsilon^{g(q)-N},\ \xi \in \Gamma_{a_0,\xi_0,h},\ \varepsilon < \eta. \end{cases}$$

Kako je

$$\partial^\beta G_{\phi,\varepsilon}(\xi) = \sum_{|j|\leq\beta} a_{\beta j} y^j \xi^{\beta-j} e^{y\xi} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-ix\xi} H_{\phi,\varepsilon}(x+iy)dx,\ \xi \in \Gamma_{a_0,\xi_0,h},\ \varepsilon < \eta,$$

pokazaćemo ocenu oblika (5.4) za

$$G_{\phi,\varepsilon,j}(\xi) = y^j \xi^{\beta-j} e^{y\xi} \int e^{-ix\xi} H_{\phi,\varepsilon}(x+iy)dx,\ \xi \in \Gamma_{a_0,\xi_0,h},\ \varepsilon < \eta.$$

Iz (5.3), za neko $y = |y|y_0$, gde je $y_0 \in S^{n-1}$, i neko $C > 0$ imamo

$$\begin{aligned} e^{(\delta+r)|y|}|G_{\phi,\varepsilon,j}(\xi)| \ &\leq \ C|y|^j(1+|\xi|)^{\beta-j}d(y,\partial\Gamma^*)^{-m} \\ &\quad \cdot(e^{\delta|y|}\varepsilon^{-N} + e^{|y|}\varepsilon^{g(q)-N}),\ \xi \in \Gamma_{a_0,\xi_0,h},\ \varepsilon < \eta. \end{aligned}$$

Birajući $|y| = \dfrac{-b(q)\ln(\varepsilon)}{r}$, gde je $b(q) \in I$ i konstantu r tako da

$$g(q) + \frac{b(q)(1-\delta)|y_0|}{r} \in I,$$

dobijamo a).

b) Neka Γ_1 zadovoljava osobine u tvrđenju b) i neka je Γ_2 između Γ_1 i Γ:

$$S^{n-1}\cap(\mathbf{R}^n\setminus\Gamma) \supset\supset S^{n-1}\cap(\mathbf{R}^n\setminus\Gamma_2),\ S^{n-1}\cap(\mathbf{R}^n\setminus\Gamma_2) \supset\supset S^{n-1}\cap(\mathbf{R}^n\setminus\Gamma_1).$$

Za svako $\xi_0 \in S^{n-1} \cap \mathbf{R}^n \setminus \Gamma_2$ odredimo $h = h(\xi_0)$ tako da (5.13) važi u $\Gamma_{1,\xi_0,h} \subset \mathbf{R}^n \setminus \gamma_\delta$. Koisteći kompaktnost skupa $S^{n-1} \cap (\mathbf{R}^n \setminus \Gamma_2)$ vidimo da važi tvrđenje b).

c) Neka l_1 odgovara Γ_1. Stavimo

$$\tilde{H}_{\phi,\varepsilon}(x+iy) = \int_{B(0,s_1)+\Gamma_1} e^{-ix\xi+y\xi} G_{\phi,\varepsilon}(\xi) l_1(\xi) d\xi,\ z \in T^C,\ \varepsilon < \eta.$$

Za dato $R > 0$ postoji $\delta_0 > 0$ takvo da je $l_1 = 1$ na $(B(0,\delta_0) + \Gamma) \cap B(0,R)$.

Primetimo da (5.12) implicira

$$H_{\phi,\varepsilon}(x+iy) = \int_{B(0,s)+\Gamma} e^{-ix\xi+y\xi} G_{\phi,\varepsilon}(\xi) d\xi,\ z \in T^C,\ \varepsilon < \eta.$$

Za $\varepsilon < \eta$ i $z \in T^{C_1}$, važi

$$\begin{aligned}&\tilde{H}_{\phi,\varepsilon}(x+iy) - H_{\phi,\varepsilon}(x+iy)\\ &\quad = \int_{S_1} e^{-ix\xi+y\xi} G_{\phi,\varepsilon}(\xi) l_1(\xi) d\xi - \int_{S_2} e^{-ix\xi+y\xi} G_{\phi,\varepsilon}(\xi) d\xi,\end{aligned}$$

gde su S_1 i S_2 podskupovi od

$$(B(0, \max\{s_1, s_2\}) + \Gamma) \cap (\mathbf{R}^n \setminus \Gamma_{1,\delta_0}) \cap B(0,R),$$

$R > 0$ je odgovarajući realni broj i δ_0 zavisi od R. Koristći ocene za $G_{\phi,\varepsilon}$ van γ_δ dobijamo tvrđenje c). $\square$

Primetimo da u (ii) nemamo to da $G \in \mathcal{G}_{\mathrm{t}}(\Gamma)$, ali u jedno-dimenzionalnom slučaju je to dokazano u sledećoj teoremi.

Teorema 5.4. *Neka je H uopštena funkcija na $\mathbf{R} + i(0,\infty)$ takva da postoji njen pretstavnik $H_{\phi,\varepsilon}$ takav da za svako $\delta > 0$ i $\alpha \in \mathbf{N}_0$ postoje $N, m \in \mathbf{N}$ i $g \in I$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \geq N$, postoje $\eta > 0$ i $C > 0$ takvi da je $H_{\phi,\varepsilon}$ holomorfna funkcija i*

$$\begin{aligned}|H_{\phi,\varepsilon}(z)| &\leq C\frac{(1+|x|^2)^{-\alpha}}{|y|^m}\\ &\quad\cdot(e^{\delta|y|}\varepsilon^{-N} + e^{s|y|}\varepsilon^{g(q)-N}),\ z \in \mathbf{R}+i(0,\infty),\ \varepsilon < \eta.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Tada postoji $G \in \mathcal{G}_t$, $G \in \mathcal{G}_t([0,\infty))$, takvo da za svako l, $\tilde{H} := \mathcal{L}_l(G)$ je jednako sa H u $\mathcal{G}(\mathbf{R}+i(0,\infty))$ i za svako $y \in (0,\infty)$ je jednako sa $H(\cdot+iy)$ u $\mathcal{G}_t(\mathbf{R})$.

Dokaz: Stavimo

$$G_{\phi,\varepsilon,y}(\xi) = e^{y\xi}(2\pi)^{-n}\int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}H_{\phi,\varepsilon}(x+iy)dx,\ \xi \in \mathbf{R}.$$

Koristimo istu notaciju kao u prethodnom dokazu, ali sad u jednodimenzionalnom slučaju. Kao u n-dimenzionalnom slučaju, može se pokazati da $G_{\phi,\varepsilon,y}$ ne zavisi od y, $G_{\phi,\varepsilon} = 0$ van $[-s,\infty)$ i za svako $\alpha \in \mathbf{N}_0$ i $\delta > 0$ postoje $N, m \in \mathbf{N}$ i $g \in I$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \geq N$, postoje $\eta > 0$ i $C > 0$ takvi da je

$$G_{\phi,\varepsilon,j}(\xi)| \le Ce^{y\xi}|y|^j(1+|\xi|)^{\beta-j} \cdot \frac{(e^{\delta|y|}\varepsilon^{-N}+e^{|y|}\varepsilon^{g(q)-N})}{|y|^m}.$$

Neka je $K \subset\subset [-s-1,\delta)$. Tada postoji y_0 takvo da je

$$M = (A+\delta)|y_0| + \sup_{\xi\in K}\xi y_0 < 0.$$

Birajući $y = \dfrac{-b(q)y_0\ln(\varepsilon)}{M}$, gde je $b(q) \in I$ izabrano tak da je

$$g(q) + \frac{b(q)(1-\delta)|y_0|}{M} \in I,$$

dobijamo da (5.4) važi za $G_{\phi,\varepsilon}$, gde je $\Gamma = [0,\infty)$. Kako je

$$H_{\phi,\varepsilon}(x+iy) = \int_s^\infty e^{-ix\xi+y\xi}G_{\phi,\varepsilon}(\xi)d\xi,$$

imamo

$$\begin{aligned}\tilde{H}_{\phi,\varepsilon}(x+iy) &- H_{\phi,\varepsilon}(x+iy)\\ &= \int_a^b e^{-ix\xi+y\xi}G_{\phi,\varepsilon}(\xi)l_1(\xi)d\xi - \int_s^\infty e^{-ix\xi+y\xi}G_{\phi,\varepsilon}(\xi)d\xi = 0,\end{aligned}$$

gde je $0 < a < b < s+s_1$. Uzmimo $\delta < a$. Ocene za $G_{\phi,\varepsilon}$ na $[a,b]$ impliciraju poslednji deo tvrđenja. □

Glava 6.

Hipoeliptični pseudo-diferencijalni operatori

U prethodnom delu su razmatrana rešenja diferencijalnih operatora sa konstantnim koeficijentima. Za neke klase diferencijalnih operatora sa promenljivim koeficijentima u prostorima Švarcovih distribucija se uvodi pojam parametriksa: to je fundamentalno rešenje diferencijalnog operatora do na skup glatkih funkcija. Ostatak rešenja dobijamo kao rešenje za glatke funkcije. Ovo je takođe slučaj za pseudodiferencijalne operatore uopštenja diferencijalnih operatora. Klasa hipoeliptičnih (pseudo-)diferencijalnih operatora ima baš tu osobinu postojanja parametriksa.

Klasa diferencijalnih operatora sa koeficijentima u algebri $\overline{\mathbf{C}}$, sa stanovišta hipoeliptičnosti rešenja u $\mathcal{G}$, ima čitav niz specifičnih svojstava koje je izdvajaju u odnosu na široku klasu pseudo-diferencijalnih operatora. Ova glava je posvećena rešavanju hipoeliptičnosti u $\mathcal{G}$.

U prvom delu ćemo izložiti definicije pseudo-diferencijalnih operatora u Kolomboovim prostorima prema [64] sa neznatnim izmenama. Napomenimo da je slična teorija data u [70].

U drugom delu će biti izloženi rezultati dobijeni u saradnji sa S. Pilipovićem ([47]) koji se odnose na hipoeliptične diferencijalne operatore u $\mathcal{G}$ i hipoeliptične pseudo-diferencijalne operatore.

Kažemo da je uopšteni polinom od n promenljivih $\mathcal{R}^n$ element od

$\overline{\mathbf{C}}[x_1, \dots, x_n]$. Uopštena polinomijalna funkcija je temperirana funkcija oblika

$$\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in \overline{\mathbf{C}}.$$

Kažemo da je takva uopštena funkcija reda m ako je $a_\alpha = 0$ za $|\alpha| > m$ i postoji β, $|\beta| = m$ takvo da je $a_\beta \neq 0$.

Ako je $[h_{\phi,\varepsilon}(x)] = \sum_{|\alpha|\leq m}[a_{\alpha,\varepsilon}]x^\alpha$, onda je h kao uopštena funkcija uopšteni polinom.

Naime, ako je $\sum_{|\beta|\leq m}[\beta_{\alpha,\varepsilon}]x^\beta = n(\varepsilon, x) \in \mathbf{N}_t(\mathbf{R}^n)$ tada sukcesivnim diferenciranjem i stavljajući $x = 0$ vidimo da su sve $\beta_{\alpha,\varepsilon}$ u $\mathbf{N}^0$.

6.1. Diferencijalni operatori

6.1.1. Fundamentalno rešenje

Podsetimo da je u klasičnoj distributivnoj teoriji E fundamentalno rešenje ako je rešenje jednačine $P(D)E = \delta$.

Neka je

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha \tag{6.1}$$

polinom u $\mathcal{G}$. U Kolob,moovoj teoriji uopštenih funkcija, $E \in \mathcal{G}$ je fundamentalno rešenje ako je rešenje jednačine $P(D)E = [\phi_\varepsilon]$, što sa stanovišta reprezenata znači da tražimo $E_{\phi,\varepsilon}(x)$ iz $\mathcal{E}_M$ takvo da važi

$$\sum a_{\alpha,\phi,\varepsilon} D^\alpha(E_{\phi,\varepsilon}(x)) = \phi_\varepsilon(x)$$

(ovde je $D^\alpha = i^{|\alpha|}\partial^\alpha$).

Takvo fundamentalno rešenje nam omogućava da rešimo jednačinu $P(D)U \overset{\mathcal{S}'}{=} G$ kada je G uopštena funkcija sa kompaktnim nosačem, jer $G * [\delta] \overset{\mathcal{S}'}{=} G$ u Kolomboovoj teoriji.

Propozicija 6.1. *Neka je $P(D)$ uopšteni diferencijalni operator oblika (6.1) sa koeficijentima u $\overline{\mathbf{C}}$ reda m takav da za neko $(c_1, c_2, \dots c_n) \in \mathbf{R}^n$ postoji $C > 0$ i $r > 0$ takvi da postoji njihov pretstavnik $\sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha,\phi,\varepsilon}c^\alpha$, takav da je*

$$|\sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha,\phi,\varepsilon}c^\alpha| > C\varepsilon^r, \quad \varepsilon \in [0,1]. \tag{6.2}$$

Tada $P(D)$ ima uopšteno fundamentalno rešenje.

Dokaz: *I slučaj.* Neka je

$$P_{\phi,\varepsilon}(i\frac{\partial}{\partial x}) = P_{\phi,\varepsilon}(D) = a_{m,\phi,\varepsilon}D_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} P_{k,\phi,\varepsilon}(D')D_1^k,$$

odnosno

$$P_{\phi,\varepsilon}(s) = a_{m,\phi,\varepsilon}s_1^m + \sum_{k=0}^{m-1} P_{k,\phi,\varepsilon}(s')s_1^k = a_{m,\phi,\varepsilon}\prod_{j=1}^{m}(s_1 - s_{1,\phi,\varepsilon}^j(\sigma')),$$

gde je $s' = \sigma' \in \mathbf{R}^{n-1}$ ($\sigma' = (\sigma_2, \dots, \sigma_n)$) is fixed, $s_1 = \sigma_1 + i\tau_1$ i $s_{1,\phi,\varepsilon}^j$ je j-ti koren jednačine $P_{\phi,\varepsilon}(S_1, \sigma') = 0$.

Pretpostavimo da je

(6.3) $$|a_{m,\phi,\varepsilon}| \geq C_1\varepsilon^r), \text{ za neke } C_1 \text{ i } r \in \mathbf{R}.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ fiksirano kao i $\sigma' \in \mathbf{R}^{n-1}$. Označimo $s_{1,\phi,\varepsilon}^j(\sigma') = \sigma_{1,\phi,\varepsilon}^j + i\tau_{1,\phi,\varepsilon}^j$, $j = 1, \dots, m$. Postoji $k \in \{0, 1, \dots, m+1\}$ takvo da je za $\tau_1 = k_{\sigma^1} \in \{0, 1, \dots, m+1\}$, $|\tau_1 - \tau_{\phi,\varepsilon}^j| \geq \frac{1}{2}$. Ovo povlači da je

$$|P_\varepsilon(\sigma_1 + ik_{\sigma'}, \sigma')| \geq \frac{C_1\varepsilon^r}{2^m}, \ \ \sigma_1 \in \mathbf{R}.$$

Ako je $\tilde{\sigma}' \in \mathbf{R}^{n-1}$, tada je $P_\varepsilon(\sigma_1 + ik_{\tilde{\sigma}'}, \tilde{\sigma}') = a_{m,\phi,\varepsilon}\prod_{j=1}^m(\sigma_1 + ik_{\tilde{\sigma}'} - s_1^j(\tilde{\sigma}'))$.

Dakle, za $|\tilde{\sigma}' - \sigma'| < \delta(m, \varepsilon)$ je

$$|s_1^j(\sigma') - s_1^j(\tilde{\sigma}')| \leq \frac{1}{2^{m+1}}$$

i uzimajući da je $k_{\tilde{\sigma}'} = k_{\sigma'}$ imamo $|\tau_1 - \tau_1^j| > \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{m+1}}$ i

$$|P_\varepsilon(\sigma_1 + ik_{\sigma'}, \tilde{\sigma}')| \geq \frac{C_1\varepsilon^r}{4^m}.$$

Prema Hajne-Borelovoj teoremi, možemo prekriti $\mathbf{R}^{n-1}$ sa $L_{\sigma',\varepsilon}$ i možemo izabrati niz kocki $\Delta_{j,\phi,\varepsilon}$, $j \in \mathbf{N}$, tako da je

$$|P_\varepsilon(\sigma_1 + ik_j, \sigma')| \geq \frac{C_1\varepsilon^r}{4^m}, \ \ \sigma_1 \in \mathbf{R}, \ \ k_j \in \{0, 1, \dots, m+1\}, \ \ \sigma' \in \Delta_{j,\varepsilon}.$$

Definišimo $\Gamma_{1,\phi,\varepsilon} = \Delta_{1,\phi,\varepsilon}$,

$$\Gamma_{2,\phi,\varepsilon} = \Delta_{2,\phi,\varepsilon} \backslash \Delta_{1,\phi,\varepsilon}, \ldots, \Gamma_{n,\phi,\varepsilon} = \Delta_{n,\phi,\varepsilon} \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} \Delta_{i,\phi,\varepsilon},$$

$n \in \mathbf{N}$, i $T_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma'); \, \sigma_1 \in \mathbf{R}, \, \tau_1 = k_j \in \{0, \ldots, m+1\}, \, \sigma' \in \Gamma_{j,\phi,\varepsilon}\}$.

Stavimo

$$E_q(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{T_\varepsilon} \frac{e^{i<x,(\sigma_1+i\tau_1,\sigma')>} \hat{\phi}(\varepsilon(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma'))}{P_\varepsilon((\sigma_1 + i\tau_1, \sigma'))} d\sigma, \; x \in \mathbf{R}^n.$$

Tada, prema Pali-Vinerovoj teoremi imamo $E_\varepsilon \in \mathcal{E}_M$ i $P_{\phi,\varepsilon}(D)E_\varepsilon = \phi_\varepsilon$.

II slučaj. Neka je $P_{\phi,\varepsilon}(D)$ pretstavnik od $P(x)$ takav da njegov glavni simbol $P_{i\varepsilon} = \sum_{|\alpha|} a_{\alpha,\phi,\varepsilon} x^\alpha$ zadovaljava (6.2) za neko $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}$, kako je to pretpostavljeno u teoremi.

Stavimo $s_j = \sum c_{jk} t_k$, $s = Ct$ tako da je $c_1 = c_{11}, \ldots, c_n = c_{1n}$ i ostali članovi su izabrani tako da je $detC \neq 0$. Tada je

$$P_{\phi,\varepsilon}(s) = \tilde{P}_{\phi,\varepsilon}(t) = a_{m,\phi,\varepsilon} t_1^m + \text{članovi manjeg reda},$$

gde je $|a_{m,\phi,\varepsilon}| = |P_{0\varepsilon}(c)| \geq C\varepsilon^r$, $\varepsilon \in (0,1)$ (iz (6.3)).

Neka je $\tilde{E}_\varepsilon$ rešenje od

$$\tilde{P}_{\phi,\varepsilon}(D) \tilde{E}_{\phi,\varepsilon}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \psi(\frac{x}{\varepsilon}),$$

gde je $\psi(x) = \phi({}^tCx)$ konstruisano na isti način kao u slučaju I. Tada korišćenjem

$$\mathcal{F}(R(Ax))(s) \stackrel{\varphi'}{=} \frac{1}{det\ A} \mathcal{F}(R(x))\ ({}^tA^{-1}s),$$

gde je A regularna linearna transformacija i $\tilde{P}_{\phi,\varepsilon}(t) = P_\varepsilon(s)$ dobijamo da je rešenje od $P_{\phi,\varepsilon}(D)E_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\phi_\varepsilon$ dato sa $E_{\phi,\varepsilon}(x) = \tilde{E}_\varepsilon({}^tCx)$, $x \in \mathbf{R}^n$.

6.1.2. Hipoeliptični diferencijalni operatori

Neka je $P_{\phi,\varepsilon}(D)$ oblika (6.1) i neka za neke $c = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbf{R}^n$, $C_1 > 0$ i $r > 0$ (6.2) važi.

Zovemo ga hipoeliptični ako za svako $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ rešenja u $\mathcal{G}(\Omega)$ od

$$P_{\phi,\varepsilon}(D)R_{\phi,\varepsilon} = 0 \tag{6.4}$$

u $\mathcal{G}^\infty(\Omega)$.

Sledeća propozicija je direktno proširenje klasičnih rezultata.

Propozicija 6.2. *a) Neka je $E_{\phi,\varepsilon}$ fundamentalno rešenje za $P_{\phi,\varepsilon}(D)$. Tada je $P_{\phi,\varepsilon}(D)$ hipoeliptičan ako i samo ako je*

$$sing\ supp_g E = \{0\}.$$

b) Neka je $P_{\phi,\varepsilon}(D)$ hipoeliptičan. Tada za svaki otvoren skup Ω i $G \in \mathcal{G}(\Omega)$, $P_{\phi,\varepsilon}(D)G \in \mathcal{G}^\infty(\Omega)$ povlači $G \in \mathcal{G}^\infty(\Omega)$.

Dokaz: a) Neka je $U_{\phi,\varepsilon}$ rešenje od (6.4) u $\mathcal{G}(\Omega)$. Neka je $\alpha \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\alpha = 1$ u okolini nule, $\alpha \in C_0^\infty(O)$, gde je O okolina nule. Neka su $\Omega_0 \subset\subset \Omega$, $\beta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\beta = 1$ na Ω_0, i neka je W otvoren skup takav da je $W \setminus O \subset \Omega_0$. Tada važi

$$\begin{aligned} U_{\phi,\varepsilon}(x) &= P_{\phi,\varepsilon}(D)((1-\alpha)E_{\phi,\varepsilon}) * (\beta U_{\phi,\varepsilon}) \\ &+ (\alpha E_{\phi,\varepsilon}) * (P_{\phi,\varepsilon}(D)(\beta U_{\phi,\varepsilon})) \\ &= P_{\phi,\varepsilon}(D)((1-\alpha)E_{\phi,\varepsilon}) * (\beta U_{\phi,\varepsilon}),\ x \in W \end{aligned} \tag{6.5}$$

i to povlači da je $U \in \mathcal{G}^\infty(\Omega)$.

U drugom pravcu, za $E_{\phi,\varepsilon}$ imamo $P_{\phi,\varepsilon}(D)E_{\phi,\varepsilon} = 0$ na $\Omega \subset \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, i prema definiciji, to povlači da je $E \in \mathcal{G}^\infty(\Omega)$. Dokaz za b) direktno sledi iz reprezentacije (6.5) sa $G_{\phi,\varepsilon}$ umesto $U_{\phi,\varepsilon}$. □

Remark. Ovaj deo propozicije se obično uzima za definiciju hipoeliptičnosti.

Neka je $P_{\phi,\varepsilon}$ hipoeliptičan, Ω, Ω_0, W, i O su isti kao u dokazu za b) u prethodnoj propoziciji, $U_{\phi,\varepsilon}$ je rešenje od (6.4) i $W \pm O \subset \Omega_0$. Tada važi sledeća propozicija.

Propozicija 6.3. *Za svako $q \in \mathbf{N}_0$ postoje $C > 0$ i $N \in \mathbf{N}$, nezavisni od $U_{\phi,\varepsilon}$ takvi da*

$$\max_{x \in W} |D^q U_{\phi,\varepsilon}(x)| \le C \max_{x \in \Omega_0} |U_{\phi,\varepsilon}(x)| \varepsilon^{-N} \tag{6.6}$$

Dokaz: Kako ovo važi za $|q| = 0$, pretpostavimo da je $|q| > 0$. Tada, zbog $\partial^q(P_{\phi,\varepsilon}(D)(1-\alpha(t))E_{\phi,\varepsilon}(t)) \in C_0^\infty(O)$ imamo

$$\partial^q U_{\phi,\varepsilon}(x) = \int_0 \partial^q(P_{\phi,\varepsilon}(D)(1-\alpha(t))E_{\phi,\varepsilon}(t))U_{\phi,\varepsilon}(x-t)dt,$$

što povlači

$$\max_{x\in W}|\partial^q U_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq C\max_{x\in\Omega_0}|U_{\phi,\varepsilon}(x)|\max_{x\in O}|\partial^q(P_{\phi,\varepsilon}(D)(1-\alpha(t))E_{\phi,\varepsilon}(t))|$$

i sledi tvrđenje.

Najvažnije tvrđenje ovog dela je sledeća teorema koja je proširenje odgovarajuće u teoriji distribucija.

Ideja ovog dokaza je slična odgovarajućem iz teorije distribucija koji je dat u [32] koji sam po sebi nije lagan. Glavni problem dolazi iz činjenice da nam trebaju ograničenja stepena od ε za fundamentalno rešenje E pri razmatranju $V_{\phi,\varepsilon}(P_{\phi,\varepsilon})$, gde je $V_{\phi,\varepsilon}(P_{\phi,\varepsilon})$ skup nula od $P_{\phi,\varepsilon})$, pa korišćenje Leme 3 iz [32], ključne za distributivni dokaz ovde nije moguće. Zbog ovoga ćemo prvo dati precizne ocene pri razmatranju varietea $V_{\phi,\varepsilon}(P_{\phi,\varepsilon})$. Tada ćemo dati dokaz sličan citiranom dokazu u [32].

Teorema 6.1. *$P_{\phi,\varepsilon}$ je hipoeliptičan ako i samo ako postoji $N > 0$ takvo da za svako $A > 0$ postoji $B > 0$ takvo da za svako $\varepsilon < \delta$*

$$|\tau| \geq A(\log|\sigma| + N\log\varepsilon) - B \tag{6.7}$$

$\sigma + i\tau \in V_{\phi,\varepsilon}(P_{\phi,\varepsilon})$, $V_{\phi,\varepsilon}(P_{\phi,\varepsilon}) = \{\sigma + i\tau | \ P_{\phi,\varepsilon}(\sigma + i\tau) = 0\}$.

Dokaz: Neka je $s = \sigma + i\tau \in V_{\phi,\varepsilon}(P_{\phi,\varepsilon})$. Tada je

$$P_{\phi,\varepsilon}(D)e^{-i<s,x>} = P_{\phi,\varepsilon}(s)e^{-i<s,x>} = 0.$$

Prema prethodnoj propoziciji, sa $U_{\phi,\varepsilon} = e^{-i<s,x>}$, $|q| = 1$, $W = B(0,r)$, $\Omega_0 = B(0,R)$, sledi $|s| \leq C_1 e^{(R-r)|\tau|}\varepsilon^{-N}$ i to povlači

$$\log|\sigma| \leq \log C_1 - N\log\varepsilon + (R-r)|\tau|$$

to jest

$$|\tau| \geq (\log|\sigma| + N\log\varepsilon - \log C_1)/(R-r).$$

Kako su R i r proizvoljni, tvrđenje sledi. Za dokaz drugog dela teoreme, treba da dokažemo da (6.7) povlači sing $\operatorname{supp}_q E = \{0\}$.

Neka je $\varepsilon > 0$ fiksirano i A, B, i N neka su kao u (6.5). Pretpostavimo da važi:

a) $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbf{R}^2$ tako da je

$$A(\log|(\sigma_1,\sigma_2)| + N\log\varepsilon) > B + 1.$$

b) $\tau_1 \in \mathbf{R}$, $|\tau_1| < (A(\log|(\sigma_1,\sigma_2)| + N\log\varepsilon) - B)/2$.

c) $(\bar\sigma_1 + i\bar\tau_1) \in V_{\phi,\varepsilon}(P_{\phi,\varepsilon})$ i $|\bar\tau_1| \geq (A(\log|(\bar\sigma_1,\sigma_2)| + N\log\varepsilon) - B)$.

Tada je

$$(6.8) \qquad |\bar\sigma_1 - \sigma_1| \geq \varepsilon^{|N|+1} \text{ ili } \bar\tau_1 - \tau_1| \geq \varepsilon^{|N|+1},\ \varepsilon \in (0,1).$$

Pretpostavimo da je $|\bar\sigma_1 - \sigma_1| < \varepsilon^{|N|+1}$, $\varepsilon \in (0,1)$. Imamo

$$\begin{aligned} |\bar\tau_1 - \tau_1| &\geq |\bar\tau_1| - |\tau_1| \\ &\geq (A(\log|(\sigma_1,\sigma_2)| + N\log\varepsilon) - B)/2 \\ &\quad -A(\log\frac{(|\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2)^{1/2}}{(|\bar\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2)^{1/2}}). \end{aligned}$$

Kako a) implicira $|(\sigma_1,\sigma_2)| > e^{(B+1)/A}\varepsilon^{-N}$ sledi

$$|(\bar\sigma_1,\sigma_2)| \geq e^{(B+1)/A}\varepsilon^{-N} - \varepsilon^{|N|+1} \geq e^{(B+1)/A}\varepsilon^{-N}/2.$$

Stavimo $r = A(\log\frac{|\sigma_1|^2+|\sigma_2|^2}{|\bar\sigma_1|^2+|\sigma_2|^2})/4$. To povlači

$$\begin{aligned} r &= A{\cdot}\log(1 + \frac{(|\sigma_1|^2 - |\bar\sigma_2|^2)}{(|\bar\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2)})/4 \\ &= A\log(1 + (|\sigma_1| - |\bar\sigma_2|)\frac{(|\sigma_1| + |\bar\sigma_2|)}{(|\bar\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2)})/4 \\ &\leq M_1|\frac{(|\sigma_1| - |\bar\sigma_2|)}{|(\bar\sigma_1,\sigma_2)|} \\ &\leq M_2(|\sigma_1| - |\bar\sigma_2|)\varepsilon^N \leq M_2\varepsilon^{|N|+N+1},\ \varepsilon \in (0,1). \end{aligned}$$

Dakle, imamo $|\bar{\tau}_1 - \tau_2| \geq 1/2 + O(\varepsilon^{|N|+N+1})$, jer M_1 i M_2 ne zavise od ε.

Sada ćemo pokazati da je $\operatorname{singsupp}_g F = \{0\}$.

Neka je $P_{\phi,\varepsilon}$ oblika $P_{\phi,\varepsilon}(s) = a_{m,\phi,\varepsilon}s_1^m +$ članovi nižeg reda. Prema drugom slučaju dokaza Propozicije 6.1, to možemo pretpostaviti, bez smanjenja opštosti. Tada je fundamentalno reenje za taj operator dato sa

$$\begin{aligned} E_{\phi,\varepsilon}(x) &= (2\pi)^{-n}\int_{T_\varepsilon}\frac{e^{-i<x,s>}\hat{\phi}(\varepsilon s)}{P_{\phi,\varepsilon}(s)}ds \\ &= (2\pi)^{-n}\sum_{k=1}^{\infty}\int_{\mathbf{R}}d\sigma_1\int_{\Delta_k}\frac{e^{-i<x,(\sigma_1+i\tau_1,\sigma')>}\hat{\phi}(\varepsilon(\sigma_1+i\tau_1,\sigma'))}{P(\sigma_1+i\tau_1,\sigma')}d\sigma', \end{aligned}$$

gde je $T_\varepsilon = \{(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma')|\ \sigma' \in \Delta_k, \tau_1 \in \{0, \ldots, m+1\}, k \in \mathbf{N}\}$.

Neka je ε fiksirano. Sledeći ideju dokaza Teoreme 4 u [32], podelimo (σ_1, σ_2) na devet oblasti Ω_j, $j = 1, \ldots, 9$ linijama $\sigma_1 = \pm\mu$, $\sigma_2 = \pm\mu$ i označimo ih sa $\Omega_1 = \{|\sigma_1| \leq \mu, |\sigma_2| \leq \mu\}$, $\Omega_2 = \{\sigma_1 > \mu, |\sigma_2| \leq \mu\}$, $\Omega_3 = \{\sigma_1 > \mu, \sigma_2 > \mu\}$, $\Omega_4 = \{|\sigma_1| \leq \mu, \sigma_2 > \mu\}$, ... Izaberimo μ takvo da je za $(\sigma_1, \sigma_2) \notin \Omega_1$

$$A(\log\mu + N\log\varepsilon) - B > 1$$

i

$$A(\log\mu + N\log\varepsilon) - B > \max_{s\in T_\varepsilon}|\tau|.$$

Neka je $B_r = B((x_1, x_2), r) \subset \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, gde je $r > 0$. Dokazaćemo da je $E_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{G}^\infty(B_r)$ u slučaju $n = 2$. Dokaz za proizvoljno n je isti ali tehnički mnogo komplikovaniji

Označimo sa $T_{j\varepsilon}$ projekciju od Ω_j na T_ε. To znači da je

$$T_{j\varepsilon} = \{(\sigma_1 + i\tau_1, \sigma')|\ \sigma_1 \in \mathbf{R}, \tau_1 \in \{0, \ldots, m+1\}, \sigma' \in \Delta \cap \Omega_j, k \in \mathbf{N}\}.$$

Stavimo

$$E_{j\varepsilon}(x) = (2\pi)^{-n}\int_{T_{j\varepsilon}}\frac{e^{-i<(x_1,x_2),(s_1,s_2)>}\hat{\phi}(\varepsilon s)}{P_{\phi,\varepsilon}(s)}ds,\ j = 1, \ldots, 9.$$

Dokazaćemo da su sve gornje uopšene funkcije u $\mathcal{G}^\infty(B_r)$.

Jasno je da $[E_{1\varepsilon}] \in \mathcal{G}^\infty(B_r)$. Razmotrimo $[E_{2\varepsilon}]$. Integracija po konturi $\sigma_1 + i\tau_1$, $\sigma_1 > \mu$, $\tau_1 \in \{0, \ldots, m+1\}$ će biti zamenjena integracijom po konturi

$$-\overline{Q(\nu)Q_1(\nu)} \cup \overline{Q_1(\mu)Q_1(\nu)} \cup \overline{Q(\mu)Q_1(\mu)},$$

gde je

$$\begin{aligned}
&\overline{Q_1(\mu)Q_1(\nu)} \text{ je dato sa } \tau_1 = \frac{1}{2}(A(\log|\sigma_1| + N\log\varepsilon) - B),\\
&\sigma_1 \in [\mu, \nu],\\
&\overline{Q(\mu)Q_1(\mu)} = \{\mu + it \mid 0 \le t \le \frac{1}{2}(A(\log\mu + N\log\varepsilon) - B)\}\\
&\overline{Q(\nu)Q_1(\nu)} = \{\nu + it \mid 0 \le t \le \frac{1}{2}(A(\log\nu + N\log\varepsilon) - B).
\end{aligned}$$

Imamo

$$\begin{aligned}
E_{2\varepsilon}(x) &= (2\pi)^{-n}\int_{-\mu}^{\mu}\Big(\int_{\overline{Q(\mu)Q_1(\mu)}} + \int_{\overline{Q(\nu)Q_1(\nu)}}\int_{\overline{Q_1(\mu)Q_1(\nu)}}\Big)\\
&\quad \Big(\frac{e^{-i<(x_1,x_2),(s_1,s_2)>}\hat{\phi}(\varepsilon s)}{P_{\phi,\varepsilon}(s)}ds\Big) = I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Primetimo da je na tim konturama $P_{\phi,\varepsilon}(s) \ge C\varepsilon^r$, za pogodno izabrano $C > 0$ i $r > 0$.

Može se lako pokazati da je $[I_1] \in \mathcal{G}^\infty(B_r)$. Kako za svako $k > 0$ postoje $C_k > 0$ i $C > 0$ takvi da

$$\begin{aligned}
|\hat{\phi}(\varepsilon(\nu + i\tau, \sigma_2))| &\le \frac{C_k e^{\varepsilon|t|}}{(1 + \varepsilon(\nu + |\sigma_2|^2)^{1/2})^k}\\
e^{\varepsilon|t|} &\le C\varepsilon^{AN}\nu^{A/2},
\end{aligned}$$

sledi da $I_3 \to 0$ kada $\nu \to 0$.

Tako smo pokazali da j e

$$(6.9) \qquad [(2\pi)^{-n}\int_{-\mu}^{\mu}\int_{s_1 \in I}\frac{e^{-i<x_1,s_1>}\hat{\phi}(\varepsilon(s_1,\sigma_2)}{P_{\phi,\varepsilon}(s_1,\sigma_2)}ds_1] \in \mathcal{G}^\infty(B_r),$$

gde je

$$I = \{s_1 = \sigma_1 + i\frac{1}{2}(A(\log|\sigma_1| + N\log\varepsilon) - B) \mid \sigma_1 \in (\mu, \infty)\}.$$

Primetimo da, kako je $x_1 > a$, postoji $C > 0$ takvo da je

$$|e^{i<x_1,s_1>}| \leq Ce^{-Ax_1/2(\log|\sigma_1|+N\log\varepsilon)} \leq e^{-AaN/2}|\sigma_1|^{-Aa/2}.$$

Takođe imamo

$$|ds_1| \leq (1 + A/(a\sigma_1))d\sigma_1$$

i

$$|\hat{\phi}(\varepsilon(s,\sigma_2))| \leq C_k \frac{e^{\varepsilon}(A(\log|\sigma_1| + N\log\varepsilon) - B)/2}{(1+\varepsilon(|\sigma_1|^2 + |\sigma_2|^2)^{1/2})^k}.$$

Ove nejednakosti jednostavno povlače (6.9).

Posmatrajmo sada $E_{3\varepsilon}$ koje je određeno sa $\mu < \sigma_1 < \infty$ i $\mu < \sigma_2 < \infty$. Pomoću Košijeve formule menjamo integraciju po $T_{3\varepsilon}$ sa integracijom po

$$(\sigma_1 + i(A(\log|\sigma_1| + N\log\varepsilon) - B)/2) \times \sigma_2,\ \sigma_1 \in (\mu,\infty),\ \sigma_2 \in (\mu,\infty)$$

i tada sa integracijom po

$$(\sigma_1+i(A(\log|\sigma_1|+N\log\varepsilon)-B)/2)\times(\sigma_2+i(A(\log|\sigma_2|+N\log\varepsilon)-B)/2),$$

$$\sigma_1 \in (\mu,\infty),\ \sigma_2 \in (\mu,\infty).$$

Uz (6.8) i sa pogodnim ocenama za $\hat{\phi}$ i $i < x, s >$, možemo pokazati da je $[E_{3\varepsilon}] \in \mathcal{G}^\infty(B_r)$. Dokaz da su $[E_{k\varepsilon}] \in \mathcal{G}^\infty(B_r)$, $k = 4,\ldots,9$ je ponavljanje slučajeva $k = 2$ i $k = 3$. □

Teorema 6.2. *Operator $P_{\phi,\varepsilon}(D)$ je hipoeliptičan ako i samo ako postoji $h > 0$ takvo da za svako $A > 0$ postoje $B > 0$ i $M > 0$ takvi da važi sledeće:*

(6.10) $$\sigma + i\tau \in V_{\phi,\varepsilon} \Rightarrow |\tau| \geq A\varepsilon^M|\sigma|^M - B.$$

Dokaz: Jasno je da (6.10) povlači (6.7). pretpostavimo da (6.7) važi. Koristićemo Teoremu 4 iz [33].

Neka je $P(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ realni polinom od $n = n_1+n_2+n_3$ promenljivih $\sigma_i \in \mathbf{R}^{n_i}$, $n_i \in \mathbf{N}_0$, $i = 1,2,3$. Ako površ M data sa $P(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = 0$ nije prazna i leži u domenu $|\sigma_2| \geq \varphi(\sigma_1)$, gde $\varphi(t) \to \infty$ kada $t \to \infty$, tada postoje $h > 0$ i $B > 0$ takvi da M leži u domenu definisanom sa

$$|\sigma_2| \geq |\sigma_1|^h - B.$$

Prvo, primetimo da $\sigma + i\tau \in V_{\phi,\varepsilon} \Leftrightarrow (\sigma,\tau) \in \tilde{V}_{\phi,\varepsilon}$, gde je $\tilde{V}_{\phi,\varepsilon}$ skup realnih nula od $\tilde{P}_{\phi,\varepsilon} = P_1^2(\sigma,\tau,\varepsilon) + P_2^2(\sigma,\tau,\varepsilon)$, gde je $P_{\phi,\varepsilon}(\sigma + i\tau) = P_1(\sigma,\tau,\varepsilon) + iP_2(\sigma,\tau,\varepsilon)$. Koeficijentu od $\tilde{P}_{\phi,\varepsilon}$ su racionalne funkcije od ε. Možemo pretpostaviti da su polinomi po ε, jer $\varepsilon^M P_{\phi,\varepsilon}(\sigma + i\tau) = (\varepsilon^M P_1(\sigma,\tau,\varepsilon) + \varepsilon^M iP_2(\sigma,\tau,\varepsilon)$, ima isti skup nula za svako $\varepsilon \in (0,1)$.

Stavimo $\tilde{\tilde{P}}_{\phi,\varepsilon}(\sigma,\tau) = \tilde{P}_{\phi,\varepsilon}(\varepsilon^N\sigma,\tau)$. Prema citiranoj teoremi dobijamo

$$(\sigma,\tau) \in \tilde{\tilde{V}}_{\phi,\varepsilon} \Rightarrow (\varepsilon^{-N}\sigma,\tau) \in \tilde{V}_{\phi,\varepsilon} \Rightarrow |\tau| > A\log|\sigma| - B.$$

Dakle, za $(\sigma,\tau) \in \tilde{\tilde{V}}_{\phi,\varepsilon}$ immo $|\tau| \geq |\sigma|^h - B$ za odgovarajuće h i B. To povlači da je $|\tau| \geq \varepsilon^{Nh}|\sigma|^h - B$ if $(\sigma,\tau) \in \tilde{V}_{\phi,\varepsilon}$, što je traženo tvrđenje. $\square$

6.2. Pseudo-diferencijalni operatori

Definicija 6.1. *Skup amplituda $S_g^m = S_g^m(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times (0,1])$, $m \in \mathbf{R}$, je definisan kao skup funkcija $a(x,y,\xi,\varepsilon)$, glatkih po $(x,y,\xi) \in (\mathbf{R}^n)^3$ za svako $\varepsilon \in (0,1]$, neprekidnih po $\varepsilon \in (0,1]$ za svako $(x,y,\xi) \in (\mathbf{R}^n)^3$, takvih da postoji $N \in \mathbf{N}_0$ takvo da za svake $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{N}_0$ postoji $C = C(\alpha,\beta,\gamma) > 0$ takvo da je*

$$(6.11)\quad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \partial_y^\gamma a(x,y,\xi,\varepsilon)| \leq \frac{C}{\varepsilon^N}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|},\ (x,y,\xi) \in (\mathbf{R}^n)^3, \varepsilon \in (0,1].$$

Ako postoji $N \in \mathbf{N}_0$ takvo da za svako $m \in \mathbf{R}$ i svako $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{N}_0$ postoji $C = C(\alpha,\beta,\gamma,m) > 0$ takvo da (6.11) važi, tada $a(x,y,\xi,\varepsilon) \in S_g^{-\infty}$.

Definicija 6.2. *Neka je $a \in S_g^m$, $r \in \mathbf{N}_0$, a $\mu_{1\varepsilon}(\xi)$, $\mu_{2\varepsilon}(y)$ jedinčine mreže iz $C_0^\infty(\mathbf{R}_\xi^n)$ i $C_0^\infty(\mathbf{R}_y^n)$ respektivno. Neka je $G \in \mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n)$.*

Definišimo $A_{\mu_2 r}$ i $A_{\mu_1\mu_2}$ na $\mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n)$ sa

$$(6.12)\quad A_{\mu_2 r}G(\phi_\varepsilon,x) = (2\pi)^{-n}\iint_{\mathbf{R}^{2n}} \frac{e^{i<x-y,\xi>}}{(1+|\xi|^2)^{[\frac{|m|+n}{2}]+r}}(1-\Delta_y)^{[\frac{|m|+n}{2}]+r} \cdot (a(x,y,\xi,\varepsilon)\mu_{2\varepsilon}(y)G(\phi_\varepsilon,y))dyd\xi,\ (\phi,x) \in \mathcal{A}_0 \times \mathbf{R},$$

gde je $[\frac{|m|+n}{2}]$ *ceo deo od* $\frac{|m|+n}{2}$ *i* $r+[\frac{|m|+n}{2}]>n/2$, *i*

$$(6.13)\quad A_{\mu_1\mu_2}G(\phi_\varepsilon,x) = (2\pi)^{-n}\iint_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i<x-y,\xi>}a(x,y,\xi,\varepsilon) \cdot\mu_{1\varepsilon}(\xi)\mu_{2\varepsilon}(y)G(\phi_\varepsilon,y)dyd\xi.$$

Primetimo, da ako je $m<-n$, tada u (6.13) uzimamo $r=0$ i

$$\begin{aligned} A_{\mu_2 r}G(\phi_\varepsilon,x) &= A_{\mu_2}G(\phi_\varepsilon,x) \\ &= (2\pi)^{-n}\iint_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i<x-y,\xi>}a(x,y,\xi,\varepsilon)\mu_{2\varepsilon}(y)G(\phi_\varepsilon,y)dyd\xi. \end{aligned}$$

Propozicija 6.4. *1.* $A_{\mu_2 r}$ *i* $A_{\mu_1\mu_2}$ *su linearna preslikavanja iz* $\mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n)$ *u* $\mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n)$.

2. Za svako $\mu_{1\varepsilon}(\xi)$, $\mu_{2\varepsilon}(y)$, r *i* $G\in\mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n)$, $A_{\mu_2 r}G$ *i* $A_{\mu_1\mu_2}G$ *su asocirani.*

3. Za svako $\mu_{1\varepsilon}(\xi)$, $\tilde\mu_{1\varepsilon}(\xi)$, $\mu_{2\varepsilon}(y)$, $\tilde\mu_{2\varepsilon}(y)$ *i* $G\in\mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n)$, $A_{\mu_1\mu_2}G$ *i* $A_{\tilde\mu_1\tilde\mu_2}G$ *su asocirani.*

Propozicija 6.5. *Ako je* $a\in S_g^{-\infty}$, *tada za svako* $\mu_{1\varepsilon}(\xi)$, $\mu_{2\varepsilon}(y)$ *i* $r\in\mathbf{N}_0$, $A_{\mu_2 r}G_{\phi,\varepsilon}(x)$ *i* $A_{\mu_1\mu_2}G_{\phi,\varepsilon}(x)$ *su u* $\mathcal{G}_{\mathrm{t}}^\infty(\mathbf{R}^n)$ *i asocirani su.*

Operatore oblika $A_{\mu_1\mu_2}$ ili $A_{\mu_1 r}$ ćemo zvati pseudo-diferencijalni operatorima.

Neka su $a\in S_g^m$ i $h\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ takvi da $h(t)=1$, $|t|\le t_0$, $h(t)=0$, $|t|>t_1>t_0$. Za $A_{\mu_1\mu_2}$ stavimo

$$A_{\mu_1\mu_2}G(\phi_\varepsilon,x)=\dot A_{\mu_1\mu_2}G(\phi_\varepsilon,x)+\tilde A_{\mu_1\mu_2}G(\phi_\varepsilon,x),\ G\in\mathcal{G}_{\mathrm{t}}(\mathbf{R}^n),$$

gde je

$$\dot A_{\mu_1\mu_2}G(\phi_\varepsilon,x) = (2\pi)^{-n}\iint_{\mathbf{R}^{2n}} e^{i<x-y,\xi>}h(|x-y|)a(x,y,\xi,\varepsilon) \cdot\mu_{1\varepsilon}(\xi)\mu_{2\varepsilon}(y)G(\phi_\varepsilon,y)dyd\xi$$

i $\tilde A_{\mu_1\mu_2}$ ima $(1-h(|x-y|))$ umesto $h(|x-y|)$ u dvostrukom integralu. Procedura je ista sa pseudo-diferencijalnim operatorima oblika $A_{\mu_1 r}$.

Za svako (ξ,ε), preslikavanje $(x,y)\mapsto h(|x-y|)a(x,y,\xi,\varepsilon)$ je suštinsko, što znači da su inverzne slike prve i druge projekcije kompaktnog skupa u $\mathbf{R}^n$ u preseku sa nosačem ove funkcije kompaktni skupovi. Takođe je $h(|x-y|)a(x,y,\xi,\varepsilon)\in S_g^m$.

Definicija 6.3. *Pseudo-diferencijalni operator koji odgovara amplitudi $a \in S_g^m$ sa osobinom da je za svako $(\xi, \varepsilon) \in \mathbf{R}^n \times (0, 1]$,*

$$(\mathbf{R}^n)^2 \ni (x, y) \mapsto a(x, y, \xi, \varepsilon)$$

suštinsko preslikavanje, zavemo suštinski pseudo-diferencijalni operator.

Pseudo-diferencijalni operator koji preslikava $\mathcal{G}_c(\mathbf{R}^n)$ u $\mathcal{G}_t^\infty(\mathbf{R}^n)$ zovemo uglačavajući pseudo-diferencijalni operator.

Može se pokazati da $\tilde{A}_{\mu_1\mu_2} : \mathcal{G}_c(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{G}_t^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Prema tome, za svaki pseudo-diferencijalni operator $A_{\mu_1\mu_2} : \mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n)$, postoji suštinski pseudo-diferencijalni operator $\dot{A}_{\mu_1\mu_2} : \mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n)$ takav da je $A_{\mu_1\mu_2} - \dot{A}_{\mu_1\mu_2}$ uglačavajući pseudo-diferencijalni operator. Ista procedura se moža uraditi za pseudo-diferencijalne operatore tipa $A_{\mu_1 r}$.

Nadalje ćemo izostavljati oznake $\mu_1\mu_2$ i $\mu_1 r$, ali treba stalno imati u vidu da operatori uvek zavise od indeksa. Amplitude suštinskih operatora ćemo ozmačavati sa $\dot{a}$, a odgovarajuće suštinske pseudo-diferencijalne operatore sa $\dot{A}$.

Definicija 6.4. *Sa $S_{sg}^m = S^m(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times [0, 1))$ ćemo označiti podprostor od $S_g^m(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times [0, 1))$ koji sadrži amplitude $a(x, \xi, \varepsilon)$, koje ne zavise od y za koje važi (6.11). $S_{sg}^{-\infty}$ je definisan kao skup elemenata iz $S_g^{-\infty}$ koji ne zavise od y. Elemente od S_{sg}^m zovemo simbolima reda m.*

Svako $a \in S_{sg}^m$ i svako μ_1, μ_2 ili μ_1 i r definiše pseudo-diferencijalni operator

$$A : \mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n) \mapsto \mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n).$$

Definicija 6.5.. *Formalni simbol je niz simbola $a_j \in S_{sg}^{m_j}$, $j \in \mathbf{N}_0$, takvih da $m_j \to -\infty$ striktno i $N_j \leq N < \infty$ (N_j su eksponenti od ε za a_j u (6.11)). On se označava sa*

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x, \xi, \varepsilon).$$

Na uobičajeni način možemo konstruisati pravi simbol: Postoji $a \in S_{sg}^{m_0}$ takvo da za svako $j_0 \in \mathbf{N}_0$,

$$a - \sum_{j<j_0} a_j \in S_{sg}^{m_{j_0}}.$$

On je određen jedinstveno do na klasu $S_{sg}^{-\infty}$. Za svaku amplitudu $\tilde{a}(x,y,\xi,\varepsilon) \in S_g^m$ postoji simbol $a(x,\xi,\varepsilon) \in S_{sg}^m$ koji definiše isti pseudo-diferencijalni operator $A : \mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n)$ do na uglačavajući pseudo-diferencijalni operator $\tilde{A} : \mathcal{G}_c(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{G}^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Ako su A i B pseudo-diferencijalni operatori, njihova kompozicija $A \circ B$ je definisana kompozicijom $\dot{A}$ i $\dot{B}$, $\dot{A} \circ \dot{B}$. Ova definicija je određena sledećom propozicijom.

Propozicija 6.6. *Neka su A i B pseudo-diferencijalni operatori sa simbolima $a \in S_{sg}^m$ i $b \in S_{sg}^{m'}$ i neka su $\dot{A}$ i $\dot{B}$ odgovarajući suštinski operatori. Simbol suštinskog operatora $\dot{A} \circ \dot{B}$ je dat sa*

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{N}_0^n} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a(x,\xi,\varepsilon) \partial_x^\alpha b(x,\xi,\varepsilon).$$

Mikrolokalna analiza u $\mathcal{G}_t$ je bazirana na sledećoj definiciji (videti u [70]).

Definicija 6.6. *Temperirana uopštena funkcija G je "Švarcova", ako ima pretstavnika $G_{\phi,\varepsilon}(x)$ sa sledećom osobinom: Postoji $N \in \mathbf{N}$ takvo da za svako $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ i $p \in \mathbf{N}$ postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ takvo da za svako $\phi \in \mathcal{A}_{n_0}$ postoje $C > 0$ i $\delta > 0$ takvi da*

$$|D^\alpha G_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq C\varepsilon^{-N}(1+|x|^2)^{-p/2}, \ x \in \mathbf{R}^n.$$

Neka su $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ i $G_{\phi,\varepsilon}$ pretstavnici od G. Definišimo $\mathcal{F}(\varphi G) \in \mathcal{G}_t(\mathbf{R}^n)$ pretstavnikom $\mathcal{F}(\varphi G)_{\phi,\varepsilon}(\xi)$:

$$\mathcal{F}(\varphi G)_{\phi,\varepsilon}(\xi) = \mathcal{F}(\varphi(x) G_{\phi,\varepsilon}(x))(\xi), \ \xi \in \mathbf{R}^n,$$

gde $\mathcal{F}$ označava Furijeovu transformaciju u $L^1(\mathbf{R}^n)$. Može se lako pokazati da je ovaj element dobro definisan.

Označimo sa Γ konveksan otvoren konus u $\mathbf{R}^n$ koji ne sadrži pravu. Sa Γ_R, $R > 0$, je označen skup $\Gamma_R = \Gamma \cap \{\xi;\ |\xi| > R\}$.

Neka je $(x_0, \xi) \in \Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$. Koristićemo sledeću funkciju.

(a) $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi = 1$ u okolini od x_0;

(b) $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, supp $\psi \subset \Gamma$, ψ je pozitivno homogena reda nula u Γ_R za neko $R \in (0, |\xi_0|)$ i $\psi = 1$ u okolini od ξ_0.

Sledeće dve definicije Skarpalezosa, [70], su prirodno prenešene iz teorije distribucija.

Definicija 6.7. *Kažemo da je $G \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^n)$ "Švarcova" u konusu Γ ako za svako $\xi_0 \in \Gamma$ postoji ψ sa osobinama iz (b) tako da je ψG "Švarcova".*

Konus $\Sigma_g(G)$ je skup svih $\eta \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ za koje ne postoji ψ sa osobinama iz (b) tako da je ψG je "Švarcova".

Definicija 6.8. *Kažemo da je $G \in \mathcal{G}(\Omega)$ mikrolokalno regularna u otvorenom konusnom skupu $\gamma \subset \Omega \times \mathbf{R}^n$ (konusnom po drugoj promenljivoj) ako za svako $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ postoji otvorena okolina Ω_0 od x_0, konusna okolina Γ_0 od ξ_0, i funkcije φ i ψ sa osobinama iz (a) i (b) (sa Ω_0 i Γ_0 umesto Ω i Γ) tako da je $\psi(\xi)\mathcal{F}_t(\varphi G)(\xi)$ "Švarcova".*

Talasni front od $G \in \mathcal{G}$, označen sa $WF_g G$, je komplement unije svih konusnih skupova γ gde je G mikrolokalno regularna.

Definicija 6.9. *([65]) Pseudo-diferencijalni operator A u Ω je regularizirajući u $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ ako postoje $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\varphi = 1$ u okolini od x_0, i konveksan otvoren konus Γ takvi da simbol $a(x, \xi, \varepsilon)$ od A ima sledeću osobinu: Postoji $N > 0$ takvo da za svake $\alpha, \beta, M \in \mathbf{N}_0$ postoji $C_{\alpha,\beta,M} \geq 0$ takvo da*

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \varphi(x) a(x, \xi, \varepsilon)| \leq C_{\alpha,\beta,M} \varepsilon^{-N} (1 + |\xi|)^{-M}, \; x \in \Omega, \, \xi \in \Gamma_R, \, |\xi| > R.$$

Pseudo-diferencijalni operator A u Ω je regularizirajući u otvorenom konusnom skupu γ of $\Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ ako je regularizirajući u svakoj tački od γ.

Komplement u $\Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ od unije svih konusnih otvorenih skupova u kojima je A regularizirajući zovemo mikronosač od A i označavamo ga sa $\mu supp_g A$.

Propozicija 6.7. *([65]) Neka je A suštinski pseudo-diferencijalni operator u Ω i $G \in \mathcal{G}(\Omega)$. Tada je*

$$WF_g(AG) \subset (WF_g G) \cap \mu supp_g A.$$

Dokaz propozicije sledi iz sledeće dve leme.

Lema 6.1. *Neka je* $G \in \mathcal{G}_c(\Omega)$ *i* $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$. *Tada* $(x_0, \xi_0) \notin WF_g G$ *ako i samo ako postoji otvorena konusna okolina* Γ *od* (x_0, ξ_0) *u* $\Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ *takva da* $BG \in \mathcal{G}_{\mathrm{t}}^\infty(\Omega)$ *za svaki pseudo-diferencijalni operator* B *u* Ω *čiji mikronosač je sadržan u* Γ.

Dokaz: Pretpostavimo da $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ pripada $\mu\mathrm{supp}_g A$. Neka su φ i ψ iz Definicije 6.17. Tada, računajući simbol od $B \circ (\psi(D)_\mu \varphi) - B$, može se pokazati da je on uglačavaju ći, što povlači $\psi(D)_\mu \varphi G \in \mathcal{G}_{\mathrm{t}}^\infty$ ako i samo ako $BG \in \mathcal{G}_{\mathrm{t}}^\infty$. Sada vidimo da tvrđenje lako sledi (videti Proposiciju 38 u [65]). □

Lema 6.2. *Neka je* A *pseudo-diferencijalni operator koji je uglačavajući u otvorenom konusnom skupu* Γ *od* $\Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$. *Ako je talasni front od* $G \in \mathcal{G}_c(\Omega)$ *sadržan u* Γ, *tada je* $\mathit{singsupp}_g A(G)$ *prazan.*

Dokaz: Može se pokazati da je operator $\psi(D)\varphi \circ A$ uglačavajući. Ovo implicira tvđenje, jer je

$$\mathrm{singsupp}_g(\psi(D)\varphi \circ A - A)(G) \text{ prazan.}\square$$

Neka je $G \in \mathcal{G}_c(\Omega)$ i $(x_0, \xi_0) \in \Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$. Tada $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}_g G$ ako i samo ako postoji otvorena konusna okolina Γ of (x_0, ξ_0) u $\Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ takva da je $BG \in \mathcal{G}_{\mathrm{t}}^\infty(\Omega)$ za svaki pseudo-diferencijalni operator B in Ω čiji je mikronosač sadržan u Γ. □

6.3. Hipoeliptični operatori

Definisaćemo hipoeliptični pseudo-diferencijalni operator u Kolombo-ovom prostoru analogno klasičnoj definiciji u prostorima distribucija (videti u [35] ili u [74]).

Definicija 6.10. *Suštinski pseudo-diferencijalni operator* P *sa simbolom* $p(x, \xi, \varepsilon)$ *zovemo hipoeliptičnim ako važi:*

1. *Postoje* $N \in \mathbf{N}$, $\xi_0 > 0$, $M > 0$, $C > 0$ *i* $\eta > 0$ *takvi da*

$$C^{-1}(1+|\xi|)^{-M}\varepsilon^N \le |p(x,\xi,\varepsilon)| \le C(1+|\xi|)^M \varepsilon^{-N}, \ |\xi| \ge \xi_0, \ \varepsilon < \eta. \tag{6.14}$$

2. Za svake $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^n$ postoje $\xi_0 > 0$, $C_{\alpha,\beta} > 0$ i $\eta > 0$ takvi da

$$(6.15)\quad \left|\frac{D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi,\varepsilon)}{p(x,\xi,\varepsilon)}\right| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|},\ |\xi| \ge \xi_0,\ \varepsilon < \eta.$$

Kažemo da je pseudo-diferencijalni operator A hipoeliptičan ako postoji suštinski hipoeliptični operator B jednak sa A do na uglačavajući operator.

Propozicija 6.8. *Za svaki suštinski hipoeliptični pseudo-diferencijalni operator P postoji suštinski pseudo-diferencijalni operatori Q i Q' takvi da su*

$$PQ' - I \text{ i } QP - I \text{ operatori uglačavanja,}$$

a Q i Q' su jednaki do na operator uglačavanja.

Dokaz: Neka je P suštinski pseudo-diferencijalni operator sa simbolom $p(x,\xi,\varepsilon)$ koji zadovoljava Definiciju 6.3. Tada važi sledeće: Za svake $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^n$ postoje $\xi_0 > 0$, $C'_{\alpha,\beta} > 0$ i $\eta > 0$ takvi da

$$(6.16)\quad \begin{aligned} &\left|\frac{D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi,\varepsilon)^{-1}}{p(x,\xi,\varepsilon)^{-1}}\right| \\ \le\ & C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-|\alpha|},\ |\xi| \ge \xi_0, \\ & \cdot\varepsilon < \eta. \end{aligned}$$

Dokaz tvrđenja će biti dat indukcijom po dužini multiindeksa. Očigedno, ako je $\alpha = \beta = 0$, tada važi (6.16). Diferenciranjem jednakosti $p(x,\xi,\varepsilon)$ $p(x,\xi,\varepsilon)^{-1} = 1$, za dovoljno veliko ξ, dobijamo

$$\begin{aligned} & p(x,\xi,\varepsilon) D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi,\varepsilon)^{-1} \\ =\ & -\sum C_{\alpha',\beta'} D_\xi^{\alpha'} D_x^{\beta'} p(x,\xi,\varepsilon) D_\xi^{\alpha''} D_x^{\beta''} p(x,\xi,\varepsilon)^{-1}, \end{aligned}$$

gde je $\alpha' + \alpha'' = \alpha$, $\beta' + \beta'' = \beta$ i $|\alpha'' + \beta''| < |\alpha + \beta|$, $\alpha, \beta \in \mathbf{N}_0^n$. Tada je

$$\begin{aligned} & \frac{D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi,\varepsilon)^{-1}}{p_\varepsilon(x,\xi)^{-1}} \\ =\ & -\sum C_{\alpha',\beta'} \frac{D_\xi^{\alpha'} D_x^{\beta'} p(x,\xi,\varepsilon)}{p_\varepsilon(x,\xi)} \frac{D_\xi^{\alpha''} D_x^{\beta''} p(x,\xi,\varepsilon)^{-1}}{p_\varepsilon(x,\xi)^{-1}}, \end{aligned}$$

i zbog (6.16) i indukcijske hipoteze, tvrđenje važi.

Neka je Q_0 suštinski pseudo-diferencijalni operator definisan sa simbolom $q_0(x,\xi,\varepsilon)$ koji je jednak $p^{-1}(x,\xi,\varepsilon)$ za veliko ξ. Stavimo $R_0 = Q_0P - I$. Prema Propoziciji 6.13, simbol od R_0 ima sledeće asimptotsko razlaganje:

$$\begin{aligned} r_0(x,\xi,\varepsilon) &= \sum_{\alpha\neq 0}(iD_\xi)^\alpha p(x,\xi,\varepsilon)D_x^\beta p(x,\xi,\varepsilon)^{-1}/\alpha! \\ &= \sum_{\alpha\neq 0}\frac{1}{\alpha!}\frac{(iD_\xi)^\alpha p(x,\xi,\varepsilon)}{p(x,\xi,\varepsilon)}\frac{D_x^\beta p(x,\xi,\varepsilon)^{-1}}{p(x,\xi,\varepsilon)^{-1}}. \end{aligned}$$

Pretpostavke (6.14), (6.15) i (6.16), impliciraju da postoje $\xi_0 > 0$ i $C''_{\alpha,\beta} > 0$ takvi da

$$\begin{aligned} |r_0(x,\xi,\varepsilon)| &\leq C(1+|\xi|)^{-1}, \\ |D_\xi^\alpha D_x^\beta r_0(x,\xi,\varepsilon)| &\leq C''_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{-1-|\alpha|}, \varepsilon < \eta. \end{aligned}$$

Druga nejednakost važi zbog toga što je

$$D_\xi^{\gamma'}D_x^{\gamma''}\left(\frac{D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x,\xi,\varepsilon)}{p(x,\xi,\varepsilon)}\right)$$

konačna suma proizvoda oblika

$$\frac{D_\xi^{\alpha'}D_x^{\beta'}p(x,\xi,\varepsilon)}{p(x,\xi,\varepsilon)},$$

koji su nezavisni od ε zbog (6.15), a isto važi za $p(x,\xi,\varepsilon)^{-1}$ zbog (6.16).

Neka je $q_{1\varepsilon} \sim \sum_{j=0}^{\infty}(-r_{0\varepsilon})^j$ simbol suštinskog pseudo-diferencijalnog operatora Q_1. Tada će $Q = Q_0Q_1$ biti desni parametriks od P. Postojanje desnog parametriksa se može pokazati na isti način. Ovi parametriksi su jednaki do na operator uglačavanja, jer ako su $QA - I$ i $AQ' - I$ operatori uglačavanja, tada je $Q - Q' = Q(I - AQ') + (QA - I)Q'$ operator uglačavanja (kao kompozicija običnog i operatora uglačavanja). $\square$

Posledica 6.1. *Neka je P hipoeliptični pseudo-diferencijalni operator. Tada je*

$$WF_g(PG) = WF_gG$$

za svako $G \in \mathcal{G}$.

Dokaz: Primetimo da je $\mathrm{WF}_g(PG) \subset \mathrm{WF}_g G$ ([65]) za svaki pseudo-diferencijalni operator P. Za hipoeliptični pseudo-diferencijalni operator P i njegov parametriks Q imamo

$$\mathrm{WF}_g(G) = \mathrm{WF}_g(QPG) \subset \mathrm{WF}_g(PG)$$

i to dokazuje tvrđenje. □

Elliptični pseudo-diferencijalni operator P je definisan u [65] na uobičajeni način: Simbol $p(x, \xi, \varepsilon)$ treba da zadovoljava sledeće uslove:

$$C^{-1}(1 + |\xi|)^{-M} \leq |p(x, \xi, \varepsilon)| \leq C(1 + |\xi|)^{M} \tag{6.17}$$

umesto (6.14). Kao i u klasičnom slučaju, može se pokazati da (6.17) implicira (6.15) a to znači da postoji parametriks za takve pseudo-diferencijalne operatore. Zvaćemo ih eliptični pseudo-diferencijalni operatori sa klasičnom amplitudom.

Ako postavimo sledeći uslov za simbol suštinskog pseudo-diferencijalnog operatora P:

$$C^{-1}(1 + |\xi|)^{-M}\varepsilon^{-N} \leq |p(x, \xi, \varepsilon)| \leq C(1 + |\xi|)^{M}\varepsilon^{-N} \tag{6.18}$$

umesto (6.17), kao u prethodnom slučaju, možemo pokazati da tada (6.18) implicira postojanje parametriksa za A.

Tako smo uopštili definiciju eliptičnosti iz [65] korišćenjem (6.18) umesto (6.17) u definiciji.

Dokaz. Pretpostavimo da je M [illegible] diferencijalni operator P, za [illegible] operator P i njegov parametriks [illegible]

$$[illegible]$$

a to dokazuje tvrđenje. □

Eliptični pseudodiferencijalni operatori [illegible] uobičajeni način: Simbol [illegible]

(6.17) [illegible] $(1 + |\xi|)^{m}$ [illegible]

uniformno [illegible]. Kao i u [illegible] implicira (6.16), a to znači da [illegible] diferencijalne operatore [illegible] eliptični pseudodiferencijalni operatori sa klasičnom amplitudom.

Ako postavimo slabiji uslov na simbol [illegible] jalnog operatora P:

(6.18) [illegible]

[illegible] u prethodnom slučaju [illegible] (6 [illegible]), [illegible] pseudodiferencijalni operatori [illegible] (6.17) [illegible]

Glava 7.

Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine

Ova glava se sastoji iz tri celine. To su:

1. Sistemi semilinearnih hiperboličnih jednačina, sa jednom i više prostornih promenljivih.

2. Sistemi kvazilinearnih hiperboličnih jednačina sa jednom prostornom promenljivom, svrstanih u sisteme održanja (konzervativne) i nekonzervativne sisteme. Posebno će biti analiziran slučaj kada se sistem jednačina svodi na jednu jednačinu. Napomenimo da se jedna kvazilinearna evoluciona hiperbolična jednačina prvog reda sa jednom prostornom promenljivom uvek može napisati u obliku zakona odražanja. Rešenja su uglavnom tražena u obliku udarnih talasa i retkolomljivih talasa ("rarefraction waves" na engleskom). Takođe su analizirana klasična rešenja kvazilinearnih hiperboličnih jednačina sa više prostornih promenljivih.

3. Solitonska rešenja hiperboličnih jednačina održanja opisanih u prvoj polovini prethodnog dela.

7.1. Sistemi semilinearnih hiperboličnih jednačina

Originalni rezultati autora u saradnji sa Pilipovićem su dati u drugom delu.

7.1.1. Primeri i klasična teorija

Rezultati koje ovde navodimo su klasični i mogu se naći u [55], gde je dato njihovo proširenje u okviru prostora Kolomboovih uopšteni funkcija.

Semilinearni hiperbolični sistemi mogu modelovati procese kao što su prenošenje i širenje, i procese nelinearnih interakcija. Difuzija, disperzija i udarni talasi se ne mogu modelovati sistemima ovog oblika, već kvazilinearnim sistemima, koji će biti obrađeni kasnije.

Hiperboličnost sistema znači da je vremenska promenljiva izdvojena i da je Košijev problem dobro postavljen u napred i u nazad u vremenu (globalno u linearnim sistemima sa konstantnim koeficijentima, a bar lokalno u semilinearnom sistemu) za proizvoljne početne uslove.

Prototip semilinearne hiperbolične jednačine je

$$\partial_t u + \lambda \partial_x u = F,$$

gde pretpostavljamo da F zavisi od t, x, u a $\lambda = \lambda(x,t)$.

Pre nego što se budemo bavili opštim slučajem, evo nekih karakterističnih primera.

1. Model kretanja lovca i žrtve:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \lambda_1 \partial_x u &= uv \\ \partial_t v + \lambda_2 \partial_x v &= -uv. \end{aligned}$$

2. Bolcmanov model kinetičke teorije gasova sa diskretnom brzinom:

$$\partial_t u + \Lambda \partial_x u = Q(u),$$

gde je $u = (u_1, ..., u_n)$, Λ konstantna dijagonalna matrica, a Q je kvadratna forma. Specijalni slučaj je Karlemanov sistem:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= v^2 - u^2 \\ \partial_t v - \partial_x v &= u^2 - v^2 \end{aligned}$$

i Brodvelov model

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= w^2 - uv \\ \partial_t v - \partial_x v &= w^2 - uv \\ \partial_t w &= -2(w^2 - uv). \end{aligned}$$

3. Model dinamike stanovništva u zavisnosti od godišta:

$$(\partial_t + \partial_x) u_i = G_i(x, u) u_i, \; i = 1, ..., n,$$

gde x označava godište a $u_i(x,t)$ je količina ljudi godišta x u vremenu t.

4. Klasična teorija polja, gde je tipičan primer Klajn-Gordonova jednačina:

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = -V'(u),$$

za promenljivu u polja i potencijalom V. Posle aproksimacije funkcije V u stepeni red, dobijamo jednačine oblika

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u + m^2 u + c u^3 = 0.$$

Drugi primer je sinus-Gordonova jednačina

$$\partial_t^2 u - \partial_x^2 u \pm \sin u = 0$$

koja modelira fenomen magnetskog fluksa u kristalima u mehaničkim sistemima.

Najistraživanija jednačina ovog tipa je Klajn-Gordonova-Dirakova jednačina:

$$\begin{aligned} \partial_t \psi - \alpha \partial_x \psi &= (M - g\varphi)\beta\psi \\ \partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + m^2 \varphi &= g\bar{\psi}\psi, \end{aligned}$$

gde je $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in C^2$ Dirakovo spinorsko polje, φ je mezonsko polje, $M, g, m > 0$,

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \beta = -i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Opšti semilinearni hiperbolični $(n \times n)$ sistem za dve nezavisne promenljive $(x, t) \in \mathbf{R}^2$ je oblika

$$(\partial_t + M(x,t)\partial_x)v(x,t) = G(x, t, v(x,t)),$$

gde je $v = (v_1, ..., v_n)$, M je $n \times n$ matrica sa glatkim koeficijentima i $G = (G_1, ..., G_n)$ je glatki vektor. Hiperboličnost u ovom slučaju znači da se matica $M(x,t)$ može dijagonalizovati nad $\mathbf{R}$, odnosno, postoji regularna glatka matrica $Q(x,t)$ takva da je $\Lambda = Q^{-1}MQ$ realna dijagonalna matrica. Ovo je sigurno tačno u slučaju striktne hiperboličnosti, odnosno onda kada $M(x,t)$ ima n realnih i različitih karakterističnih korena

$$\lambda_1(x,t) > ... > \lambda_n(x,t).$$

Smena zavisne promenljive $u = Q^{-1}v$ daje semilinerni hiperbolični sistem istog oblika, gde je M realna dijagonalna matrica.

U ovom delu ćemo posmatrati Košijev problem

$$(\partial_t + \Lambda(x,t)\partial_x)u = F(x, t, u), \ u(x, 0) = a(x), \tag{7.1}$$

gde je $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ je glatka, realna, dijagonalna matrica, F je glatka vektorska funkcija od x, t, u. Po komponentama, ovaj sistem je dat sa

$$(\partial_t + \lambda_j(x,t)\partial_x)u_j = F_j(x, t, u) \tag{7.2}$$

$$u_j(x, 0) = a_j(x). \tag{7.3}$$

Diferencijalni operatori na levoj strani su glatka vektorska polja $\partial_t + \lambda_j(x,t)\partial_x$. Označimo sa $x = \gamma_j(x_0, t_0, t)$ odgovarajuću integralnu krivu tog vektorskog polja koja prolazi kroz (x_0, t_0) u vremenu $t = t_0$, to jest

$$\partial\gamma_j(x_0, t_0, t)/\partial t = \lambda_j(\gamma_j(x_0, t_0, t), t) \tag{7.4}$$

$$\gamma_j(x_0, t_0, t_0) = x_0.$$

Ove krive zovemo karakterističnim krivama (ili karakteristikama) sistema.

Neka je $K_0 \subset \mathbf{R}$ kompaktan interval. K je domen definisanosti za K_0 ako je $K \cap (\mathbf{R} \times \{0\}) = K_0$ i ako za svako $(x,t) \in K$ sve karakteristike koje spajaju (x,t) sa x-osom ostaju svom svojom dužinom u K. Tipičan primer je skup K_T koji je ograničen karakterističnim krivama iz krajnjih tačaka skupa K_0 i pravama $t = \pm T$.

Sada ćemo transformisati problem (7.2), (7.3) u sistem integralnih jednačina. To ćemo postići posmatranjem sistema (7.2) kao sistem običnih diferencijalnih jednačina duž karakterističnih krivih. To znači da integraleći

$$\frac{\partial}{\partial \tau} u_j(\gamma_j(x,t,\tau),\tau) = F_j(\gamma_j(x,t,\tau),\tau,u(\gamma_j(x,t,\tau),\tau))$$

od 0 do t, dobijamo

$$(7.5)\quad u_j(x,t) = a_j(\gamma_j(x,t,0)) + \int_0^t F_j(\gamma_j(x,t,\tau),\tau,u(\gamma_j(x,t,\tau),\tau))d\tau$$

Ekvivalencija ovog sistema sa polaznim važi za sva distributivna rešenja koja pripadaju $L^1_{loc}(\mathbf{R}^2)$.

Propozicija 7.1. *a) Neka je $a \in C(K_0)$. Tada postoji $T > 0$ takvo da problem (7.4) ima rešenje $u \in C(K_T)$.*
b) Za svako $T_0 > 0$ postoji najviše jedno rešenje $u \in C(K_T)$.

Dokaz ove teoreme se izvodi pomoću primene teoreme o nepokretnoj tački.

Primedba. Može se pokazati da rešenje ovog problema neprekidno zavisi od početne vrednosti u supremum normi.

Sada ćemo navesti dve teoreme koje se odnose na postojanje i jedinstvenost klasičnog rešenja problema (7.2), (7.3) uz odgovarajuču glatkost početnog uslova.

Propozicija 7.2. *Pretpostavimo da je gradijent od $F(x,t,u)$ po u uniformno ograničen kada (x,t) pripada nekom kompaktnom skupu. Tada problem (7.2), (7.3) ima jedinstveno rešenje $u \in C(\mathbf{R}^2)$ za početni uslov $a \in C(\mathbf{R})$.*

Propozicija 7.3. *Neka je* $a \in C^k(\mathbf{R})$, $1 \le k \le \infty$ *i pretpostavimo da postoji rešenje* $u \in C(K_T)$ *od (7.2), (7.3) za neko* $T_0 > 0$. *Tada je i* $u \in C^k(\mathbf{R} \times (0,T))$.

Pređimo sada na rešavanje početnog problema (7.2), (7.3) u Kolomboovoj interpretaciji. Ovaj sistem pišemo u obliku

$$(7.6) \qquad \begin{aligned} (\partial_t + \Lambda(x,t)\partial_x)U &= F(x,t,U) \ (\text{ u } \mathcal{G}(\mathbf{R}^2)) \\ U_{|t=0} &= A \ (\text{ u } \mathcal{G}(\mathbf{R})), \end{aligned}$$

gde je $A = (A_1, ..., A_n) \in \mathcal{G}(\mathbf{R})^n$, a Λ je kao i u klasičnom slučaju realna dijagonalna glatka matrica za koju globalno postoje karakteristične krive. Tražimo rešenje $U = (U_1, ..., U_n) \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^2)^n$. Da bi kompozicija U i F bila dobro definisana, neophodno je da F bude glatka funkcija, polinomijalno ograničena zajedno sa svim svojim izvodima po U kada (x,t) pripada nekom kompaktnom skupu. Generalna pretpostavka u ovom delu je da je

$$U \mapsto \nabla_U F(x,t,U)$$

funkcija uniformno ograničena u odnosu na (x,t) koje pripada nekom kompaktnom podskupu od $\mathbf{R}^2$.

Teorema 7.1. *Pod gornjim pretpostavkama, za dato* $A \in \mathcal{G}(\mathbf{R})$, *problem (7.6) ima jedinstveno rešenje* $U \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^2)$.

Dokaz:([55]) Navešćemo dokaz ove teoreme, jer je tipičan za čitavu teoriju nelinearnih jednačina u Kolomboovim prostorima Nadalje ćemo identifikovati $\phi \in \mathcal{A}_0(\mathbf{R})$ i $\phi \times \phi \in \mathcal{A}_0(\mathbf{R}^2)$. Za dato $\phi \in \mathcal{A}_0$ konstruišimo klasično glatko rešenje $U_{\phi,\varepsilon}$ sistema

$$\begin{aligned} (\partial_t + \Lambda(x,t)\partial_x)U_{\phi,\varepsilon} &= F(x,t,U_{\phi,\varepsilon}) \\ U_{\phi,\varepsilon}(x,0) &= A_{\phi,\varepsilon}(x) \end{aligned}$$

koje postoji na osnovu Propozicija 7.2 i 7.3, gde je $A_{\phi,\varepsilon}$ pretstavnik od A. Jasno je da $U_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^2)$. Egzistencija će biti dokazana kada pokažemo da je $U_{\phi,\varepsilon}$ u $\mathcal{E}_M$. Napišimo sistem u ovom obliku

$$\begin{aligned} (\partial_t + \Lambda\partial_x)U_{\phi,\varepsilon}(x,t) &= \left(\int_0^1 \nabla F(x,t,\sigma U_{\phi,\varepsilon}(x,t))d\sigma\right)U_{\phi,\varepsilon}(x,t) + F(x,t,0) \\ U_{\phi,\varepsilon}(x,0) &= A_{\phi,\varepsilon}(x). \end{aligned}$$

Ovo je oblik pogodan za korišćenje linearnih procena. Koristićemo domen K_T, koji je prethodno definisan, jer je svaki kompktan skup u $\mathbf{R}^2$ sadržan u nekom skupu tog oblika. Kako je $A_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_M$ postoji $N \in \mathbf{N}$ takvo da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je

$$\sup_{x \in K_0} |A_{\phi,\varepsilon}(x)| \leq C\varepsilon^{-N}, \ \varepsilon < \eta,$$

gde je $K_0 = K \cap \{t = 0\}$. Na osnovu Leme 7.1 koja će kasnije biti formulisana, a čiji je dokaz dat u [55], imamo ocenu

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K_T} |U_{\phi,\varepsilon}(x,t)| &\leq (C\varepsilon^{-N} + T \sup_{(x,t)\in K_T} |F(x,t,0)|) \\ &\quad \cdot \exp(nT \sup_{x \in K_T, y \in \mathbf{C}^n} |\nabla_y F(x,t,y)|). \end{aligned}$$

Kako je gradijent po y od F ograničen na K_T dobijamo

$$\sup_{(x,t)\in K_T} |U_{\phi,\varepsilon}(x,t)| \leq C_1 \varepsilon^{-N_1},$$

za malo ε. To je ocena za nulti izvod. Procenimo sada $\partial_x U_{\phi,\varepsilon}$. Primetivši da je komutator za $\partial_t + \Lambda\partial_x$ i ∂_x,

$$[\partial_t + \Lambda\partial_x, \partial_x] = -(\partial_x \Lambda)\partial_x$$

dobijamo

$$\begin{aligned} (\partial_t + \Lambda\partial_x)(\partial_x U_{\phi,\varepsilon}) &= \partial_x F(x,t,U_{\phi,\varepsilon}) \\ &\quad + [\partial_t + \Lambda\partial_x, \partial_x] U_{\phi,\varepsilon} \\ &= (\nabla_U F(x,t,U_{\phi,\varepsilon}) - (\partial_x\Lambda)(x,t)) \\ &\quad \cdot \partial_x U_{\phi,\varepsilon} + (\partial_x F)(x,t,U_{\phi,\varepsilon}), \\ \partial_x U_{\phi,\varepsilon}(x,0) &= \partial_x A_{\phi,\varepsilon}(x). \end{aligned}$$

Ovo znači da $\partial_x U_{\phi,\varepsilon}$ zadovoljava jednačinu na koju se može primeniti ista lema. Na ovaj način se dobijaju ocene za sve izvode po x. Ocene za mešovite izvode i izvode po t dobijamo iz sistema jednačina pomoću sukcesivnog diferenciranja. Ovo znači da $U_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_M$.

Dokažimo sada jedinstvenost. Neka su U i V dva rešenja sistema. Tada je

$$\begin{aligned}
(\partial_t + \Lambda\partial_x)(U_{\phi,\varepsilon} - V_{\phi,\varepsilon})(x,t) &= \Big(\int_0^1 \nabla F(x,t,\sigma U_{\phi,\varepsilon}(x,t) \\
&\quad +(1-\sigma)V_{\phi,\varepsilon}(x,t))d\sigma\Big) \\
&\quad \cdot(U_{\phi,\varepsilon}(x,t) - V_{\phi,\varepsilon}(x,t)) + D_{2,\phi,\varepsilon} \\
(U_{\phi,\varepsilon} - V_{\phi,\varepsilon})(x,0) &= D_{1,\phi,\varepsilon},
\end{aligned}$$

gde su $D_{1,\phi,\varepsilon} \in \mathcal{N}(\mathbf{R})$ i $D_{2,\phi,\varepsilon} \in \mathcal{N}(\mathbf{R}^2)$. Treba da pokažemo da je $U_{\phi,\varepsilon} - V_{\phi,\varepsilon}$ u $\mathcal{N}(\mathbf{R}^2)$. To se može uraditi na isti način kao što je urađen prvi deo dokaza. □

U dokazu ove teoreme se koristi sledeća lema:

Lema 7.1. *Neka je $v = (v_1, ..., v_n) \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$ rešenje od*

$$\begin{aligned}
(\partial_t + \Lambda(x,t)\partial_x)v(x,t) &= f(x,t)v(x,t) + g(x,t) \\
v(x,0) &= b(x),
\end{aligned}$$

gde je f glatka $n \times n$ matrica, a g i b su glatki vektori. Tada je

$$\begin{aligned}
\sup_{(x,t)\in K_T} |v(x,t)| &\leq \Big(\sup_{x\in K_0} |b(x)| \\
&\quad + T \sup_{(x,t)\in K_T} |g(x,t)|\Big) e^{nT \sup_{(x,t)\in K_T} |f(x,t)|}.
\end{aligned}$$

Primedba. Preslikavanje iz $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ u $\mathcal{G}(\mathbf{R}^2)$ definisano sa $A \to U$ je neprekidno u odnosu na oštru topologiju što se može pokazati na način kako je dokazana Teorema 7.1.

U sledećoj propoziciji je data veza rešenja u vidu uopštenih funkcija i klasičnih rešenja.

Propozicija 7.4. *Neka je $U \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^2)$ rešenje od (7.6) pod uslovima Teoreme 7.1 sa početnim uslovom $A = \mathrm{Cd}(a) \in \mathcal{G}(\mathbf{R})$.*

1. *Ako je $a \in C^\infty(\mathbf{R})$ tada je $U = \mathrm{Cd}(u)$, gde je u klasično rešenje ovog sistema.*

2. *Ako je $a \in C(\mathbf{R})$ tada je U asocirano sa klasičnim rešenjem $u \in C(\mathbf{R}^2)$. Isto ovo važi i ako je a lokalno integrabilna funkcija.*

3. *Ako je a distribucija sa diskretnim nosačem, a F je ograničena funkcija, tada je U asocirano sa distributivnim rešenjem.*

Rezultati u drugoj i trećoj tački se ne mogu poboljšati jer u Kolomboovim uopštenim funkcijama $x\delta \neq 0$ i sistem

$$\begin{aligned} \partial_t u_1(x,t) &= 0 \\ \partial_t u_2(x,t) &= x u_1(x,t) \\ u_1(x,0) = \delta(x),\ u_2(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

ima distributivno rešenje $u_1(x,t) = \delta(x)$,$u_2(x,t) = 0$, dok je rešenje u $\mathcal{G}$ dato sa $U_1(x,t) = \delta(x)$, $U_2(x,t) = tx\delta(x)$, a U_2 nije jednako sa u_2 već samo asocirano.

7.1.2. Regularizovani sistemi

U ovom delu ćemo dati originalne rezultete koji proširuju Teoremu 7.1.

U [55] je sistem (7.6) rešen u $\mathcal{G}$, gde je Λ realna dijagonalna matrica, svaka komponenta od F je $\mathcal{O}_M$ i F ima globalo ograničen gradijent u odnosu na U kada (x,t) pripada kompaktnom skupu i $A \in \mathcal{G}$.

Potražićemo rešenja sistema koji će odgovarati sistemu (7.6). To ćemo uraditi izmanama u nelinearnom delu jednačine $(F(x,t,u))$ koristeći iste klasične teoreme o postojanju klasičnog glatkog rešenja iz Propozicija 7.1 i 7.2.

Koristimo pretpostavku da je $\mathrm{diam}(\mathrm{supp}\phi) = 1$, $\phi \in \mathcal{A}_0$, tako da možemo koristiti ε umesto $l(\phi_\varepsilon)$ što uprošćava notaciju.

Cilj nam je da se sistem jednačina (7.6) pogodnim izmenama na F, u slučaju da $\nabla_U F$ nije ograničen po U kada (x,t) pripada nekom kompaktnom skupu iz $\mathbf{R}^2$ ima jednistveno rešenje. Metod koji izlažemo daje isto jedinstveno rešenje sistema (7.2) iz Teoreme 7.1

Označimo sa B_r ($\tilde{B}_r$) loptu sa centrom u nuli poluprečnika r u $\mathbf{R}^2$ ($\mathbf{C}^n$).

Definišemo

$$\begin{aligned} A_{1\varepsilon} &= \{y \in \mathbf{C}^n |\ \sup_{(x,t)\in B_1} |\nabla_y F(x,t,y)| \\ &\qquad \leq \log \varepsilon^{-q}\} \cap \tilde{B}_{\log \varepsilon^{-q}}, \end{aligned}$$

Tada postoji ε_0 takvo da za $\varepsilon < \varepsilon_0$ $A_{1\varepsilon} \supset \tilde{B}_1$. Dalje, za svako $i \in \mathbf{N}$, $i \geq 2$, definišemo

$$\begin{aligned} A_{i\varepsilon} &= \{y \in \mathbf{C}^n | \sup_{(x,t)\in B_i} |\nabla_y F(x,t,y)| \\ &\leq \log \varepsilon^{-q}\} \cap \tilde{B}_{\log \varepsilon^{-q}}, \end{aligned}$$

Tada postoji ε_{i-1} takvo da za $\varepsilon < \varepsilon_{i-1}$ $A_{i\varepsilon} \supset \tilde{B}_i \cup A_{i-1\eta}$, $\eta \in [\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1})$.

Definišimo sada izmenjen nelinearni deo jednačine F na sledeći način:

$$F_\varepsilon(x,t,y) = \bar{F}_\varepsilon * \phi_{\log \varepsilon^q}(x,t,y),\ \varepsilon \in (\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}], \tag{7.7}$$

gde je $\bar{F}_\varepsilon(x,t,y) = F(x,t,y)$ ako je $(x,t) \in B_i$, $y \in A_{i\varepsilon}$, a inače nula.

Lako se može pokazati da je $F_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{E}_M$.

Dokaz da su F i $\nabla_y F$ ogracičeni sa $C \log \varepsilon^{-g}$ direktno sledi: Za $\varepsilon \in (\varepsilon_i, \varepsilon_{i-1}]$ imamo

$$\begin{aligned} \partial F_\varepsilon / \partial y_j &= \frac{\partial}{\partial y_j}(\int_{B_i \otimes A_{i\varepsilon}} \bar{F}(\xi,\tau,\mu)\phi_{\log \varepsilon^q}(x-\xi, t-\tau, y-\mu) d\xi d\tau d\mu \\ &\leq C_1 \log \varepsilon^{-q} \max_{(u,v,w)\in B_i \otimes A_{i\varepsilon}} |\bar{F}_\varepsilon(u,v,w)| \\ &\leq C_2 \log \varepsilon^{-q} \max_{(u,v,w)\in B_i \otimes A_{i\varepsilon}} (1+|u|)^p (1+|v|)^p (1+|w|)^p \\ &\leq C_3 \log \varepsilon^{-q} (1+|x|+\log \varepsilon^{-q})^p (1+|t|+\log \varepsilon^{-q})^p (1+|y|+\log \varepsilon^{-q})^p \\ &\leq C_4 \log \varepsilon^{-q} (1+i+\log \varepsilon^{-q})^p (1+i+\log \varepsilon^{-q})^p (1+2\log \varepsilon^{-q})^p \\ &\leq C_5 \log \varepsilon^{-q} \end{aligned}$$

i imamo traženu majoizaciju.

Definicija 7.1. *Kažemo da je* $U = (U_1, ..., U_n) \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^2)^n$ *rešenje q-regularizovanog sistem*

$$(\partial_t + \Lambda(x,t)\partial_x)U(x,t) = \tilde{F}_\varepsilon(x,t,U(x,t)),\ U(x,0) = A(x) \tag{7.8}$$

ako postoji reprezent $U_{\phi,\varepsilon}$ *od* U *takav da je*

$$\begin{aligned} (\partial_t + \Lambda(x,t)\partial_x)U_{\phi,\varepsilon}(x,t) &= F_{q,\phi,\varepsilon}(x,t,U_{\phi,\varepsilon}(x,t)) + D_{1,\phi,\varepsilon}(x,t), \\ U_{\phi,\varepsilon}(x,0) &= A_{\phi,\varepsilon}(x) + D_{2,\phi,\varepsilon}(x), \end{aligned} \tag{7.9}$$

gde su $D_{2,\phi,\varepsilon} \in \mathcal{N}(\mathbf{R}^2)$ *i* $D_{1,\phi,\varepsilon} \in \mathcal{N}(\mathbf{R})$, *i* $F_{q,\phi,\varepsilon} = (F^1_{q,\phi,\varepsilon}, ..., F^n_{q,\phi,\varepsilon})$ *je dato sa (7.7).*

Propozicija 7.5. *q-regularizovan problem (7.8) ima jedinstveno rešenje u prostoru uopštenih funkcija $\mathcal{G}(\mathbf{R}^2)$ kada je početni uslov iz $\mathcal{G}(\mathbf{R})$, Λ je realna dijagonalna matrica, i svaka koordinata od F je u $\mathcal{O}_M$.*

Dokaz: Za svako fiksirano (ϕ, ε) postoji C^∞ rešenje $U_{\phi,\varepsilon}$ problem

$$\begin{aligned}(\partial_t + \Lambda(x,t)\partial_x)U_{\phi,\varepsilon}(x,t) &= F_{q,\phi,\varepsilon}(x,t,U_{\phi,\varepsilon}(x,t)),\\ U_{\phi,\varepsilon}(x,0) &= A_{\phi,\varepsilon}(x),\end{aligned}$$

jer je $\nabla_y F_{q,\phi,\varepsilon}(x,t,y)$ globalno ograničen. Ostatak dokaza je isti kao i u Teoremi 7.1, osim što je

$$\begin{aligned}|U_{\phi,\varepsilon}(x,t)| &\leq (C\varepsilon^{-N} + \sup_{(x,t)\in K_T} |F_{q,\phi,\varepsilon}(x,t,0)|)\\ &\quad \cdot \exp(nT \cdot \sup_{(x,t)\in K_T, y\in \mathbf{C}^n} |\nabla_y F_{q,\phi,\varepsilon}(x,t,y)|)\\ &\leq (C\varepsilon^{-N} + C_2)\varepsilon^{-nT\bar{q}} \leq C_1\varepsilon^{-N_1},\ \phi \in \mathcal{A}_{\bar{q}},\end{aligned}$$

gde je $\bar{q} = q + n$, jer postoji $j \in \mathbf{N}$ takvo da je $K_T \subset B_j$. Ostale granice za izvode od $U_{\phi,\varepsilon}$ se dobijaju na isti način kao i u Teoremi 7.1, jer je izraz $\exp(\nabla_y F_{q,\phi,\varepsilon}(x,t,y))^N$ ograničen sa $\varepsilon^{-N\bar{q}}$, $\phi \in \mathcal{A}_{\bar{q}}$, kada je $(x,t) \in K_T$.

Dokaz jedinstvenosti ide na isti način. □

Propozicija 7.6. *Klasično C^1 rešenje od (7.6) sa neprekidnim početnim uslovom, ako postoji, asocirano je sa rešenjem od q-regularizovanog sistem (7.8) za svako $q \in \mathbf{N}$.*

Dokaz: Neka je g C^1 rešenje za

$$(\partial_t + \Lambda(x,t)\partial_x)u = F(x,t,g),\ g(x,0) = a(x)$$

a $G_{\phi,\varepsilon}$ C^∞ rešenje od

$$(\partial_t + \Lambda(x,t)\partial_x)u = F(x,t,G_{\phi,\varepsilon}),\ G_{\phi,\varepsilon}(x,0) = a * \phi_\varepsilon(x).$$

Kako je problem 7.1 dobro postavljen, imamo $\lim_{\varepsilon\to 0} G_{\phi,\varepsilon} = g$, to jest za svako $\delta > 0$ i svaki kompaktan skup $K \subset \mathbf{R}^2$ postoji $\eta_1 > 0$ takvo da je $|G_{\phi,\varepsilon}(x,t) - g(x,t)| < \delta$ za $\varepsilon < \eta_1$. Kako su F i g neprekidne funkcije, za svako δ_1 postoji $\eta_2 > 0$ takvo da je

$$\max\{|F(x,t,g(x,t))|, |\nabla_y F(x,t,g(x,t))|\} < \log \varepsilon^{-q} - \delta_1.$$

Uzimajući sada dovoljno malo $\delta(\delta_1)$, imamo

$$\max\{|F(x,t,G_{\phi,\varepsilon}(x,t))|, |\nabla_y F(x,t,G_{\phi,\varepsilon}(x,t))|\} < \log \varepsilon^{-q},$$

to jest $F(x,t,G_{\phi,\varepsilon}(x,t)) = F_\varepsilon(x,t,G_{\phi,\varepsilon}(x,t))$, za $\varepsilon < \min\{\eta_1,\eta_2\}$ i $(x,t) \in K$. Ovo znači da je $G_{\phi,\varepsilon}$ pretstavnik rešenja i regularizovanog sistema. □

Primedbe.

1. Primetimo da smo u prethodnoj propoziciji dokazali i to da je uopšteno rešenje neregularizovanog sistema 7.1 isto i uopšteno rešenje regularizovanog sistema i da je asocirano sa tim klasičnim rešenjem. To je poboljšanje Propozicije 16.5 u [55].

2. Ako je $\nabla_y F(x,t,y)$ globalno ograničen u odnosu na y, kada je (x,t) u kompaktnom skupu, tada za ovu proceduru nema potrebe, jer je taj slučaj obrađen u [55].

3. Ako postoji klasično glatko rešenje sistem (7.6) sa glatkim početnim uslovom, tada je ta funkcija rešenje od (7.8) za svako $q \in \mathbf{N}$, jer je $|F(x,t,y)| \leq C \leq \log \varepsilon^{-q}$, kada (x,t) pripada nekom kompaktnom skupu, a ε je dovoljno malo.

4. Ako je rešenje od (7.6) ograničena uopštena funkcija tada je to rešenje od (7.8) za svako $q \in \mathbf{N}$, jer je tada $F = \tilde{F}_\varepsilon$ (reprezenti su im jednaki za dovoljno malo ε).

5. Ako je rešenje od (7.6) uopštena funkcija lokalno logaritamskog tipa, to je rešenje od (7.8) za neko $q \in \mathbf{N}$, jer

$$\sup_{(x,t)\in K} |G_{\phi,\varepsilon}(x,t)| \leq C \ln \varepsilon^{-N},\ \phi \in \mathcal{A}_N$$

implicira

$$\sup_{(x,t)\in K} |G_{\phi,\varepsilon}(x,t)| \leq \ln \varepsilon^{-q},\ \phi \in \mathcal{A}_q,$$

za $q \geq \max\{NC, N\}$, jer je $\mathcal{A}_q \subset \mathcal{A}_N$.

To je razlog zašto su rešenja Karlemanovog sistema data u prvom delu od [62] (Theorem 3.1.) rešenja regularizovanog sistema (7.8) za takvo q.

7.2. Kvazilinearne hiperbolične jednačine

7.2.1. Konzervativni sistemi

Ovde ćemo izložiti teoriju konzervativnih sistema

$$\partial_t u + \partial_x(f(u)) = 0, \quad u(x,0) = a(x), \tag{7.10}$$

i opštije, nekonzervativnih sistema

$$\partial_t u + g(u)\partial_x u = 0, \quad u(x,0) = a(x), \tag{7.11}$$

gde je $u(x,t) = (u_1(x,t), ..., u_n(x,t))$, $(x,t) \in \mathbf{R}^2$, glatka vektorska funkcija, a g je glatka matrična funkcija, sledeći izlaganja Obergugenbergera u [55].

Hiperboličnost u ovom slučaju znači da matrice $f'(u)$, odnosno $g(u)$, mogu biti dijagonalizovane sa svim realnim karakterističnim vrednostima.

Dobro je poznato da (7.10) u opštem slučaju nema globalna rešenja, čak iako je početni uslov glatka funkcija. No, ako je početni uslov ograničen, često se može konstruisati slabo rešenje. Uopšteno govoreći, ova rešenja obuhvataju udarne talase, to jest skokove duž deo po deo glatke krive. Dok se u konzervativnom sistemu još može raditi sa distribucijama, u nekonzervativnom to skoro da nema smisla, zbog nepostojanja dobre definicije množenja distribucija.

Daćemo sada motivaciju za traženje rešenja sistema (7.10) u obliku udarnih talasa ([39]). Posmatrajmo početni problem (7.10) zapisan u sledećem obliku

$$u_t + f'(u)u_x = 0, \; u(x,0) = a(x).$$

Fiksirajmo vrednost u^* i posmatrajmo u ravni (x,t) pravu $x - f'(u^*)t =$ const. Napravimo izvod od $u(x,t)$ na toj pravoj,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}u(x(t),t) &= \frac{d}{dt}(u(f'(u^*)t + \text{const}, t)) \\ &= (\frac{\partial u}{\partial t} + f'(u^*)\frac{\partial u}{\partial x})_{x=f'(u^*)t+\text{const}}.\end{aligned}$$

Na osnovu ovoga vidimo da je rešenje od (7.10) $u(x,t) = u^*$ na toj pravoj, odnosno $u(x,t) = u(\xi, 0) = a(\xi)$, gde je ξ presek te prave i x-ose (da bi bio zadovoljen početni uslov). Ako se te prave, koje zovemo karakteristikama ili karakterističnim krivama, za razne ξ ne seku, dobićemo glatko rešenje, dok u drugom slučaju to neće biti moguće.

Jedan od načina da se to prevlada je pronađemo glatku krivu $x = S(t)$ tako da kroz svaku tačku te krive prolazi sa svake strane samo po jedna karakteristika koje se pre te tačke nigde ne seku. Tada ćemo tražiti rešenje od (7.10) koje ima prekid na toj krivoj, a levo i desno će to rešenje biti glatka funkcija. Napomenimo da ne mora postojati samo jedna takva kriva, već i više njih sa ovom osobinom, a to znači da se mogu posmatrati rešenja sa više od jedne krive prekida. Ovde ćemo zbog jednostavnosti uglavnom posmatrati slučaj kada imamo jednu takvu krivu.

Daćemo jedan primer, Burgersovu jednačinu, koja će biti ilustrativna za skoro sve efekte koji se javljaju u konzervativnim sistemima. Kriva na kojoj će rešenje imati prekid će u slučaju ove jednačine biti prava.

Bezviskozna Burgersova (Hofova) jednačina je oblika:

$$u_t + (u^2/2)_x = 0, \tag{7.12}$$

gde je Burgersova jednačina sledeća parabolična jednačina:

$$u_t + (u^2/2)_x = \mu u_{xx}, \tag{7.13}$$

gde je μ pozitivna konstanta koja u fizičkoj interpretaciji označava koeficijent viskoznosti, dok ceo član μu_{xx} označava viskoznost. Neka je uz ove jednačine dat C^1 početni uslov:

$$u(x,0) = a(x). \tag{7.14}$$

Jednačinu (7.12) možemo napisati u obliku $u_t + uu_x = 0$, pa vidimo da je $u(x,t) = \text{const}$ duž karakteristične krive γ koja spaja tačku (x,t) sa odgovarajućom tačkom $(\xi, 0)$, odnosno, imamo $u(x,t) = a(\xi)$. Kako je $\partial\gamma/\partial t = u$, vidimo da su karakteristične krive prave, pa dobijamo implicitno dato rešenje:

$$
\begin{aligned}
U(x,t) &= a(\xi), \\
x &= \xi + ta(\xi).
\end{aligned} \tag{7.15}
$$

Teorema o implicitnoj funckciji daje uslov $0 \neq 1 + ta'(\xi)$ za rešivost, tako da rešenje uvek postoji u okolini x-ose, a globalno postoji ako je $a' \geq 0$.

Dva osnovna rešenja su udarni i retkolomljivi talasi koji su usko vezani sa Rimanovim problemom koji je dat sa početnim uslovom oblika

$$a(x) = u_l + (u_r - u_l)H(x), \tag{7.16}$$

gde je H Hevisajdova funkcija, a u_l i u_r su konstante. Rešenje za (7.12) uz početni uslov (7.16) tražimo u obliku udarnog talasa sa skokom duž prave $x = ct$,

$$u(x,t) = u_l + (u_r - u_l)H(x - ct). \tag{7.17}$$

Koristeći da je $H^2 = H$ u klasičnom slučaju i računajući distribucione izvode, vidimo da ovakav udarni talas može biti rešenje ako i samo ako je ispunjen Rankih-Igonoov uslov

$$c(u_r - u_l) = (u_r - u_l)(u_r + u_l)/2. \tag{7.18}$$

U slučaju da je $u_r \neq u_l$,ovaj uslov određuje brzinu talasa c.

Rešenja sistema (7.10) su vrlo nejedinstvena. Na primer, za prethodnu jednačinu uz uslov $u_l < u_r$ imamo retkolomljivo rešenje dato na sledeći način:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & x \leq u_l t \\ x/t, & u_l t \leq x \leq u_r t \\ u_r, & u_r t \leq x. \end{cases}$$

Ova diskusija nam pokazuje da ako želimo da izdvojimo neko rešenje, tada moramo da dodamo neki uslov. U tu svrhu se obično koristi neka fizička činjenica, kao što su stabilnost udara, entropija, i slično.

Za rešavanje jednačine (7.12) koristićemo jednačinu (7.13) i metod isčezavajuće viskoznosti: Rešićemo jednačinu (7.13) i naći granicu njenog rešenja kada $\mu \to 0$.

Uradivši to, pri tačkastoj konvergenciji skoro svuda, dobijamo rešenje

$$u(x,t) = (x - y^*)/t,$$

gde je $y^* = y^*(x,t)$ jedinstvena tačka minimuma funkcije

$$F(x,y,t) = (x-y)^2/(2t) + \int_0^y a(z)dz.$$

Pristupimo sada rešavanju ovog problema u $\mathcal{G}(\mathbf{R}, [0.\infty))$:

$$\begin{aligned} U_t + UU_x &= 0, \\ U(x,0) &= A(x). \end{aligned} \tag{7.19}$$

Ako A ima pretstavnika $A_{\phi,\varepsilon}(x) \geq 0$, $\phi \in \mathcal{A}_N$, $\varepsilon < \eta$, za dovoljno veliko N i dovoljno malo η, tada saglasno klasičnom slučaju, možemo konstruisati rešenje u $\mathcal{G}$. Inače, (7.19) nema rešenje u obliku udarnog talasa u $\mathcal{G}$. Razlog za ovo je to što je (7.19) u $\mathcal{G}$ ekvivalentno sa

$$(U^2/2)_t + (U^3/3)_x = 0 \tag{7.20}$$

(posle množenja jednačine (7.19) sa U), za koju je neophodno da bude $c = 3/4$ (iz (7.16)) ako hoćemo da postoji njeno rešenje u obliku udarnog talasa, dok za (7.19) dobijamo da c mora biti $1/2$.

Ovo nas navodi da u (7.19) posmatramo asociranost umesto jednakosti, što će obezbediti nezavisnost jednačina (7.19) i (7.20).

Za rešavanje jednačine (7.19) ćemo koristiti jednačinu viskoznosti,

$$\begin{aligned} U_y + UU_x &= \mu U_{xx}, \\ U(x,0) &= A(x), \end{aligned} \tag{7.21}$$

gde je $\mu \approx 0$, $\mu \neq 0$.

Ako bi rešenje ove jednačine posmatrali u $\mathcal{G}$, pojavila bi se nejedinstvenost rešenja koja je povezana sa postojanjem beskonačno uskih i brzih solitona ([42]). Da bi izbegli ovakva rešenja zbog kojih se javlja nejedinstvenost, posmatraćemo modifikovanu Kolomboovu algebru, koju konstruišemo na sledeći način.

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbf{R}) &= \{\chi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}), \int \chi(x)dx = 1, \int x^k \chi(x)dx = 0, k \in \mathbf{N}\},\\ \mathcal{B}(\mathbf{R}^m) &= \{\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^m), \phi(x_1,...,x_m) = \chi(x_1)\cdot ... \cdot \chi(x_m), \chi \in \mathcal{B}(\mathbf{R})\}.\end{aligned}$$

$\mathcal{D}_{L^\infty}(\mathbf{R}^m)$ je algebra glatkih funkcija čiji su svi izvodi ograničeni. Za dat otvoren skup $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ definišemo $\mathcal{E}_g[\bar{\Omega}]$ kao algebru preslikavanja iz $\mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$ u $\mathcal{D}_{L^\infty}(\mathbf{R}^m)|_{\bar{\Omega}}$.

$\mathcal{E}_{M,g}[\bar{\Omega}]$ je skup svih $U \in \mathcal{E}_g[\bar{\Omega}]$ takvih da za svako $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$ i svako $\phi \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$ postoje $N \in \mathbf{N}_0$, $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je

$$\|\partial^\alpha U_{\phi,\varepsilon}\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq C\varepsilon^{-N},\ 0 < \varepsilon < \eta.$$

$\mathcal{N}_g[\bar{\Omega}]$ je skup svih $U \in \mathcal{E}_g[\bar{\Omega}]$ takvih da za svako $\alpha \in \mathbf{N}_0^m$, svako $\phi \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^m)$ i svako $q \in \mathbf{N}_0$ postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je

$$\|\partial^\alpha U_{\phi,\varepsilon}\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq C\varepsilon^{q},\ 0 < \varepsilon < \eta.$$

Definišemo $\mathcal{G}_g(\bar{\Omega}) = \mathcal{E}_{M,g}[\bar{\Omega}]/\mathcal{N}_g[\bar{\Omega}]$.

$\imath : \mathcal{D}'_{L^\infty}(\mathbf{R}^m) \to \mathcal{G}_g(\mathbf{R}^m)$ je smeštanje definisano reprezentom funkcije iz $\mathcal{G}_g$ $\phi \to \phi * f$, za $f \in \mathcal{D}_{L^\infty}(\mathbf{R}^m)$. Teorija za $\mathcal{G}_g$ je slična kao i za $\mathcal{G}$, samo $\mathcal{G}_g$ nije snop i izostavljanje ε iz ϕ_ε nije moguće.

$\lambda \in \overline{\mathbf{C}}$ je pozitivno ako postoje konstante $N \in \mathbf{N}_0$, $\eta > 0$ i $C > 0$ tako da je

$$|\lambda_{\phi,\varepsilon}| \geq C\varepsilon^N,\ 0 < \varepsilon < \eta,\ \phi \in \mathcal{B}.$$

Teorema 7.2. *Neka je μ pozitivan broj ili pozitivan uopšten broj. Tada za $A \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R})$ postoji rešenje $U \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R} \times [0,\infty))$ za (7.21).*

Dokaz je zasnovan na korišćenju glatkog klasičnog rešenja za fiksirano ϕ i ε za koje se pokazuje da je kao funkcija iz $\mathcal{E}_g(\mathbf{R} \times [0,\infty))$.

Za jedinstvenost rešenja u nekom smislu su nam potrebne neke nove podalgebre date u sledećoj definiciji.

Definicija 7.2. *$V \in \mathcal{G}_g(\bar{\Omega})$ je ograničenog tipa ako ima pretstavnika $V_{\phi,\varepsilon}(x)$ takvog da za svako $\phi \in \mathcal{B}$ postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da*

$$\|V_{\phi,\varepsilon}(\cdot)\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq C,\ 0 < \varepsilon < \eta.$$

$V \in \mathcal{G}_g(\bar{\Omega})$ je logaritamskog tipa ako ima pretstavnika $V_{\phi,\varepsilon}(x)$ takvog da za svako $\phi \in \mathcal{B}$ postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da

$$\|V_{\phi,\varepsilon}(\cdot)\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \leq C \log(1/\ell(\varepsilon)),\ 0 < \varepsilon < \eta.$$

Teorema 7.3. *Neka je μ pozitivan broj ili pozitivan uopšten broj. Tada za svako $T > 0$ problem (7.21) ima najviše jedno rešenje $U \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R} \times [0, \infty))$, takvo da je ili a) U_x logatitamskog tipa, ili b) $U_x \geq 0$. Ako je μ običan pozitivan broj, postoji najviše jedno rešenje ograničenog tipa.*

Propozicija 7.7. *Neka je $\mu \approx 0$, $a \in L^\infty(\mathbf{R})$, $A = \imath(a) \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R})$. Tada je uopšteno rešenje od (7.21) asocirano sa slabim rešenjem klasičnog problema (7.12), (7.14).*

7.2.2. Jednačine održanja za višedimenzionalne slučajeve

Rezultati izloženi u ovom odeljku su iz [35]. Do sada smo posmatrali sisteme jednačina za jednu (prostornu) promenljivu, a ovde ćemo posmatrati jedan zakon održanja za višedimenzionalnu prostornu promenljivu

$$\begin{aligned} \partial_t u + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(f_i(u)) &= 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{7.22}$$

gde je u funkcija $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_+$. Počećemo razmatranje jednačine difuzije.

$$\begin{aligned} \partial_t u + \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}(f_i(u)) &= \mu \nabla u, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{7.23}$$

gde je $\mu > 0$, što je analogno jednodimenzionalnom slučaju.

Pre rešavanja jednačine (7.22) daćemo neke ocene za rešenja Košijevog problema za parabolične jednačine

$$\begin{aligned} \partial_t u + \sum_{i=1}^n \psi_i(x,t,u)\partial_{x_i} u &= \mu \nabla u, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{7.24}$$

gde je $u_0 \in L^\infty$, ∇ je Laplasijan i $\mu > 0$.

Lema 7.2. *Neka u zadovoljava (7.24) i pretpostavimo da je* $|u_0| \leq e^{\Phi/\mu}$, *gde je* Φ *ograničena od gore i ima Lipšicovu konstantu 1. Pretpostavimo da je*

$$(\sum_{i=1}^{n} |\psi_i(x,t,u)|^2)^{1/2} \leq A.$$

Tada sledi da postoji konstanta C, *koja zavisi samo od dimenzije prostora* n, *tako da*

$$|u(x,t)| \leq e^{Ct} e^{((A+1)t+\Phi+2)/\mu}.$$

Ako je $|u_0| \leq M$, možemo uzeti da je $\Phi(x) = \log M - \mathrm{dist}(x, \mathrm{supp} u_0)$, a specijalno, ako u_0 iščezava van lopte poluprečnika R sa centrom u nuli, dobijamo

$$|u(x,t)| \leq \min(M, Me^{Ct} e^{((A+1)t+R-|x|)/\mu}),$$

što znači da u uniformno eksponencijalno opada ka nuli van domena uticaja početnog uslova, kada $\mu \to 0$.

Lema 7.3. *Ako je* w *rešenje Košijevog problema*

$$\begin{aligned} \partial_t w + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(a_i(x,t)w) &= \mu \nabla w, \\ w(x,0) &= w_0(x), \end{aligned}$$

gde je $w_0 \in C_0^\infty$, *tako da* w *brzo opada kada* x *teži beskonačnosti i ako je* $2 + |a| \leq K$, *tada za malo* μ *važi*

$$\int_{|x|<R} |w(x,T)| dx \leq \int |w_0(x)| e^{-(|x|-R-KT)_+/\mu} dx.$$

Vratimo se sada na problem (7.22), gde ćemo zbog jednostavnosti pretpostaviti da je $|u_0| \leq M$ i $u_0 \in C_0^3$. Nadalje ćemo pretpostaviti da je $f_i \in C^2$.

Neka je v rešenje sa ovim osobinama za

$$\begin{aligned} \partial_t v + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} f_i(v) &= \mu \nabla v, \\ v(x,0) &= v_0(x), \end{aligned} \tag{7.25}$$

sa istim pretpostavkama o v_0: $|v_0| \leq M$ i $v_0 \in C_0^3$. Tada $w = u - v$ zadovoljava jednačinu

$$
\begin{aligned}
(7.26) \qquad \partial_t w + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i}(a_i w) &= \mu \nabla w, \\
w(x,0) &= u_0(x) - v_0(x),
\end{aligned}
$$

gde je $a_i = (f_i(u) - f_i(v))/(u - v) \in C^1$ i $|a_i| \leq A$ ako je $|f_i'| \leq A$. Korišćenjem Leme 7.3 dobijamo

$$
(7.27) \qquad \int |u(x,t) - v(x,t)|dx \leq \int |u_0(x) - v_0(x)|dx.
$$

Sumirajući sve ovo, dobijamo

Teorema 7.4. *Za svako $\mu > 0$ Košijev problem (7.23) za $u_0 \in C_0^3$ ima klasična rešenja za $t \geq 0$ sa istim ograničenjima kao i u_0. Izvodi $\partial_x^\alpha u$ i $\partial_t u$ su ograničeni za dovoljno malo t ako je $|\alpha| \leq 2$. Rešenje je jedinstveno i važi L^1-kontraktibilna osobina (7.27).*

Teorema 7.5. *Ako $u_0 \in C_0^3$, tada Košijev problem (7.23) ima jedinstveno klasično rešenje u_μ, koje brzo opada, kada $x \to \infty$ i $\mu \to 0$, u_μ konvergira u L^1_{loc} za svako fiksirano $t \geq 0$, lokalno uniformno po t, slabom rešenju Košijevog problema (7.22), koje uzima granične vrednosti u smislu konvergencije u L^1_{loc}. Ovo rešenje zadovoljava uslove entropije*

$$
(7.28) \qquad \partial_t(\Phi(u)) + \sum_{i=1}^{n} \partial_{x_i} Y_i(u) \leq 0
$$

za svako konveksno Φ, gde je $Y_i'(s) = \Phi'(s) f_i'(s)$. Za svako $u_0 \in L^\infty$ postoji jedinstveno rešenje Košijevog problema koje je neprekidna funkcija po t sa vrednostima u L^1_{loc} i zadovoljava uslov entropije (7.28). Za takva rešenja je

$$
\int_{|x-x_0| \leq R - At} |u(x,t) - v(x,t)|dx
$$

opadajuća funkcija po t.

U sledećoj teoremi ćemo dati neke praktičnije uslove koji su ekvivalentni opisanom uslovu entropije.

Teorema 7.6. *Pretpostavimo da u zadovoljava uslov entropije (7.28) za svako konveksno Φ i da je u C^1 funkcija na svakoj strani površi S klase C^1 sa normalom $\nu = (\nu_0, \nu_1, ..., \nu_n)$, gde su granične vrednosti $u_\pm$ u pravcima $\nu_\pm$. Tada*

1. važi Rankin-Igonoov uslov

$$[u]\nu_0 + \sum_{i=1}^{n}[f_i(u)]\nu_i = 0 \tag{7.29}$$

je zadovoljen.

2. Funkcija

$$[u_-, u_+] \ni k \to \operatorname{sgn}(u_+ - u_-)\sum_{i=1}^{n} f_i(k)\nu_i$$

leži iznad linearne interpolacije između vrednosti $u_\pm$.

Sve je mnogo komplikovanije (ali izvodljivo) ako funkcija f nije konveksna, ali to ovde nećemo opisivati.

7.2.3. Nekonzervativni sistemi

Ovde ćemo razmotriti tri interpretacije nekonzervativnog sistema (7.11): rešenja u smislu stroge jednakosti u $\mathcal{G}_g(\mathbf{R} \times [0, \infty))$, u smislu asociranosti u $\mathcal{G}_g(\mathbf{R} \times [0, \infty])$ i u smislu Le Floka ([40]), koji je baziran na Volpertovom radu ([81]).

Ima samo nekoliko rezultata za proizvoljni početni uslov u bilo kojem od ova tri smisla. Kao i u slučaju za konzervativne sisteme, može se pokazati da ne možemo naći rešenja od (7.11) u obliku udarnih talasa u smislu stroge jednakosti uopštenih funkcija.

Bavićemo se samo Rimanovim problemom, koji je bitan jer se može proširiti na slučaj sa opštijim početnim uslovom (videti [35] za ovakvo proširenje na širu klasu početnih uslova).

Uvešćemo sada Le Flokov koncept rešenja ([40]). Pod funkcijom ograničene varijacije, $v \in BV_{loc}(\mathbf{R}^2)$, podrazumevamo lokalno integrabilnu funkciju čiji su prvi parcijalni izvodi mere. Neka je $v \in$

$L^\infty(\mathbf{R}^2) \cap BV_{loc}(\mathbf{R}^2)$. Prema Volpertu ([81]), definišimo prosečnu verziju $\hat{h}(v)$ superpozicije h i v na takav način da je $\hat{h}(v) = h(v)$ skoro svuda u odnosu na Lebegovu meru, ali je $\hat{h}(v)$ merljiva i lokalno integrabilna u odnosu na mere $\partial_x w$ i $\partial_t w$ za svako $w \in BV_{loc}(\mathbf{R}^2)$. Tako, možemo $h(v)\partial_x w$ interpretirati kao $\hat{h}(v)\partial_x w$, pa će vektorsko rešenje od (7.11) biti element od $L^\infty(\mathbf{R}^2) \cap BV_{loc}(\mathbf{R}^2) \cap C([0,\infty) : \mathcal{D}'(\mathbf{R}))$ koje zadovoljava jednačinu

$$\partial_t u + \hat{g}(u)\partial_x u = 0$$

u smislu mera.

$\hat{h}(v)$ ćemo ovako definisati za specijalne slučajeve:

- Ako je v neprekidna funkcija, tada je $\hat{h}(v) = h(v)$.

- Ako su v i w funkcije sa skokom, to jest

$$\begin{aligned} v(x,t) &= v_l + (v_r - v_l)H(x - ct), \\ w(x,t) &= w_l + (w_r - w_l)H(x - ct), \end{aligned}$$

  tada je

$$\begin{aligned} &\hat{h}(v)\partial_x w(x,t) \\ &\quad = (w_r - w_l)\delta(x - ct)\int_0^1 h(v_t + \alpha(v_r - v_l))d\alpha. \end{aligned}$$

Oba ova slučaja se svode na običnu superpoziciju u slučaju konzervativnog sistema, to jest, ako je $g = f'$, tada je $\hat{g}(u)\partial_x u = \partial_x(f(u))$.

Videćemo kako ova definicija deluje na sledećem jednostavnom primeru koji će imati skoro sve značajne osobine ovog metoda.

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= \sigma_x \\ \sigma_t + u\sigma_x &= u_x. \end{aligned} \tag{7.30}$$

Rešenja ovog problema ćemo tražiti u obliku udarnih talasa Rimanovog problema,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_l + (u_r - u_l)H(x - ct) \\ \sigma(x,t) &= \sigma_l + (\sigma_r - \sigma_l)H(x - ct), \end{aligned} \tag{7.31}$$

gde su $u_l, u_r, \sigma_l, \sigma_r$ konstante, a H Hevisajdova funkcija. Prema prethodnoj diskusiji, $u\sigma_x$ je interpretirano kao

$$\begin{aligned}
\hat{u}\sigma &= \int_0^1 (u_l + \alpha(u_r - u_l))d\alpha \\
&\quad (\sigma_r - \sigma_l)\delta(x - ct) \\
&= (u_r + u_l)(\sigma_r - \sigma_l)\delta(x - ct)/2.
\end{aligned}$$

Kako je $\partial_t \sigma(x,t) = -c(\sigma_r - \sigma_l)\delta(x-ct)$, a $\partial_x \sigma(x,t) = (u_r - u_l)\delta(x-ct)$,

$$\begin{aligned}
\sigma(x,t) &= -c(\sigma_r - \sigma_l + (u_r + u_l)(\sigma_r - \sigma_l) \\
&\quad -(u_r - u_l))\delta(x - ct)/2 = 0,
\end{aligned}$$

što znači da je koeficijent ispred $\delta(x - ct)$ jednak nuli, to jest dolazimo do Rankin-Igonoovih uslova

$$\begin{aligned}
c(u_r - u_l) &= (u_r + u_l)(u_r - u_l)/2 - (\sigma_r - \sigma_l), \\
c(\sigma_r - \sigma_l) &= (u_r + u_l)(\sigma_r - \sigma_l)/2 - (u_r - u_l).
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Kada eliminišemo c dobijamo

$$(\sigma_r - \sigma_l)^2 = (u_r - u_l)^2. \tag{7.33}$$

Za fiksirano (u_l, σ_l) ovo određuje par pravih u (u_r, σ_r) ravni, koje zovemo Igonoovim lokusom. Njegov značaj je u sledećem: Problem (7.30) ima rešenje oblika (7.31) ako i samo ako (u_r, σ_r) leže na jednoj od datih pravih. Iz (7.32) vidimo da je $c = (u_r + u_l)/2 \pm 1$ u zavisnosti koju smo pravu uzeli. Opšti Rimanov problem za date bilo koje (u_l, σ_l) i (u_r, σ_r) je rešiv pomoću superpozicije dva udarna talasa

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= u_l + (u_m - u_l)H(x - c_1 t) + (u_r - u_m)H(x - c_2 t) \\
\sigma(x,t) &= \sigma_l + (\sigma_m - \sigma_l)H(x - c_1 t) + (\sigma_r - \sigma_m)H(x - c_2 t).
\end{aligned}$$

Međustanje (u_m, σ_m) je izabrano tako da (u_m, σ_m) leži na Igonoovom lokusu za (u_l, σ_l) i (u_r, σ_r), i tako da je $c_1 < c_2$. (Ovaj slučaj je sličan onome opisanom na početku prvog poglavlja u ovoj glavi, kada je bilo reči o mogućnosti postojanja više od jedne krive prekida deo po deo glatkog rešenja neke jednačine.)

Sada ćemo rešavati sistem (7.30) u Kolomboovoj teoriji. Tražićemo rešenja u obliku udarnih talasa u $\mathcal{G}_g(\mathbf{R}\times[0,\infty))$ koje ćemo zvati uopštene Hevisajdove funkcije.

Definicija 7.3. $Y \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R})$ *je uopštena Hevisajdova funkcija ako je ograničenog tipa i ako svaki njen reprezent tačkasto teži ka klasičnoj Hevisajdovoj funkciji kada* ε *teži nuli.*

Tražimo rešenje od (7.30), $(U, \Sigma) \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R} \times [0, \infty))$ u obliku

$$
\begin{aligned}
U(x,t) &= u_l + (u_r - u_l)Y(x - ct) \\
\Sigma(x,t) &= \sigma_l + (\sigma_r - \sigma_l)Z(x - ct),
\end{aligned} \tag{7.34}
$$

gde su Y i Z uopštene Hevisajdove funkcije. U asociranom smislu, sistem (7.30) postaje

$$
\begin{aligned}
U_t + UU_x &\approx \Sigma_x \\
\Sigma_t + U\Sigma_x &\approx U_x.
\end{aligned} \tag{7.35}
$$

Ako uzmemo da je $Y = Z$ tada kao uslov za postojanje rešenja oblika (7.34) za sistem (7.35) dobijamo klasične uslove (7.32). U slučaju da su ove dve funkcije različite, ne postoji rešenje od (7.35) u traženom obliku.

Ako stavimo jednakost umesto asociranosti u prvoj jednačini u (7.35), dobijamo sledeći sistem

$$
\begin{aligned}
U_t + UU_x &= \Sigma_x \\
\Sigma_t + U\Sigma_x &\approx U_x.
\end{aligned} \tag{7.36}
$$

Postoji fizički razlog zašto to radimo: Prvi red sistema (7.35) označava fizički princip održanja momenta, a drugi red je nastao modeliranjem nekog fizičkog procesa.

Zamenjujući oblik rešenja (7.34) u novi sistem (7.36), dobijamo sledeći uslov za konstante, analogan Igonoovom uslovu:

$$
(\sigma_r - \sigma_l)^2 = (u_r - u_l)^2(1 - (u_r - u_l)^2/12). \tag{7.37}
$$

Parovi (u_r, σ_r) koji ga zadovoljavaju sačinjavaju manji skup od klasičnog Igonoovog lokusa. Ovaj primer pokazuje opštu sliku koja se javlja u interpretaciji sistema uopštenim funkcijama: Uslovi analogni Igonoovim, koje dobijamo, zavise od koncepta rešenja koji koristimo (stroga jednakost ili asociranost) i od upotrebe različitih uopštenih Hevisajdovih funkcija.

Povežimo sada Le Flokov koncept traženja rešenja u obliku udarnih talasa sa Kolomboovim. Neka su $u_r, u_l \in \mathbf{R}^2$ i c je realni broj. Definišimo

$$u_\varepsilon(x,t) = u_l + (u_r - u_l)H_\varepsilon(x - ct),$$

gde je H_ε reprezent jedne uopštene Hevisajdove funkcije. Tada važi sledeća propozicija za g iz (7.11).

Propozicija 7.8. *Sa prethodnim definicijama, imamo u distributivnom smislu*

$$\begin{aligned}(7.38)\quad \lim_{\varepsilon\to 0} g(u_\varepsilon)\partial_x u_\varepsilon &= \int_0^1 g(u_t + \alpha(u_r - u_l))d\alpha(u_r - u_l)\delta(x - ct)\\ &= \hat{g}(u)\partial_x u\end{aligned}$$

Ova propozicija kaže da su rešenja sistema

$$\partial_t U + g(U)\partial_x U \approx 0 \tag{7.39}$$

asocirana rešenjima sistema

$$\partial_t u + \hat{g}(u)\partial_x u = 0$$

u smislu Le Floka i zadovoljavaju isti Rankin-Igonoovv uslov

$$c(u_r - u_l) = \int_0^1 g(u_t + \alpha(u_r - u_l))d\alpha(u_r - u_l).$$

Posmatrajmo sada jedan jednostavan nekonzervativni sistem, koji ćemo rešiti i uporediti rešenje sa klasičnim.

$$\begin{aligned}u_t + uu_x &= 0\\ \sigma_t + u\sigma_x &= 0\\ u_{|t=0} = a, &\qquad \partial_x u_{|t=0} = b.\end{aligned} \tag{7.40}$$

Ovaj sistem ćemo rešavati metodom nestajuće viskoznosti, kao i uprošćenu Burgerovu (Hofovu) jednačinu, to jest, rešavaćemo sistem

$$\begin{aligned}u_t + uu_x &= \mu u_{xx}\\ \sigma_t + u\sigma_x &= 0\\ u_{|t=0} = a, &\qquad \partial_x u_{|t=0} = b.\end{aligned} \tag{7.41}$$

Propozicija 7.9. *Neka je μ uopšten pozitivan broj, $T > 0$ i $A, B \in \mathcal{G}_g(\mathbf{R})$.*
a) Ako je $A' \geq 0$ (resp. A' i A^2/μ su logaritamskog tipa), tada problem

$$\begin{aligned} U_t + UU_x &= \mu U_{xx} \\ \Sigma_t + U\Sigma_x &= 0 \\ U_{|t=0} = A, &\quad \Sigma_{|t=0} = B \end{aligned} \tag{7.42}$$

ima rešenje $(U, \Sigma) \in (\mathcal{G}_g(\mathbf{R} \times [0,T]))^2$ i $\partial_x U \geq 0$ (resp. $\partial_x U$ je logaritamskog tipa).
b) Postoji najviše jedno rešenje $(U, \Sigma) \in (\mathcal{G}_g(\mathbf{R} \times [0,T]))^2$ za koje je $\partial_x U \geq 0$ ili je $\partial_x U$ logaritamskog tipa.

Uzmimo sada da su početni uslovi Rimanovi:

$$\begin{aligned} a(x) &= u_l + (u_r - u_l)H(x) \\ b(x) &= \sigma_l + (\sigma_r - \sigma_l)H(x). \end{aligned} \tag{7.43}$$

Propozicija 7.10. *Neka je (u_μ, σ_μ) rešenje od (7.41) uz početni uslov (7.43) za pozitivno μ. Tada niz (u_μ, σ_μ) slabo konvergira ka rešenju (u, σ) od (7.40) uz isti početni uslov kada $\mu \to 0$, gde*
a) Za $u_l \geq u_r$ (u, σ) je udarni talas (7.31) sa $c = (u_r + u_l)/2$.
b) Za $u_l < u_r$, (u, σ) je mešovit slabofrikciono-udarni talas

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l, & x \leq u_l t \\ x/t, & u_l t < x \leq u_r t \\ u_r, & u_r t < x, \end{cases}$$

$$\sigma(x,t) = \sigma_l + (\sigma_r - \sigma_l)H(x - ct),$$

gde je $c = (u_r - u_l)/2$.

Glava 8.

Beskonačno uska solitonska rešenja u Kolomboovom smislu za neke zakone održanja

8.1. Uvod

Solitoni nisu samo matematički objekti, već pre svega fizičke činjenice čije je postojanje primećeno i numerički detektovano u nekim nelinearnim jednačinama, kao što su to jednačine Korteveg-de Friza, nelinearna Šredingerova (kubna) jednačina, jednačina Busineska, sinus-Gordonova jednačina, jednačina Kadomceva-Petašvilijeva, i druge. Zbog ovog praktičnog pojavljivanja solitona u prirodi, postoje problemi za preciznu matematičku definiciju. Ovde navedena definicija je u stvari samo jedna od mogućih, ali se nadamo da odgovara u priličnoj meri stvarnoj situaciji u prirodi. Za istoriju solitona i razne aspekte solitonske teorije se može pogledati u [12] i [54].

Cilj ove glave je povezivanje solitonskih rešenja nekih nelinearnih jednačina sa nelinearnom teorijom Kolomboovih uopštenih funkcija, koja je sama za sebe vrlo prirodan okvir za probleme nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina kako je to demonstrirao Obergugenberger u [55].

Rezultati iz ove glave su originalni rezultati Nedeljkova [53].

Definicije su bazirane na definicijama ujedinjenog talasa i solitona iz [12] i [82] i na definiciji Maslova i Olejnika iz [42] i [30]. Veza između nelinearnih jednačina i Kolomboovih prostora je urađena na način kako je to urađeno u [55]. Inače, neke primedbe o solitonskim rešenjima i uopštenim funkcijama su date i u [55] i[10].

Konstruisaćemo neka beskonačno uska solitonska rešenja i rešenja solitonskog tipa u skalarnim zakonima održanja, specijalno za Hopfovu jednačinu (Burgerovu jednačinu bez viskoznosti), u jednoj prostornoj promenljivoj. Dobijeni rezultati proširuju beskonačno uska 1-solitonska rešenja dobijena u radu [42] u smislu uopštenih funkcija.

Dobijeni originalni rezultati su prirodni nastavak radova o rešenjima u obliku udarnih talasa za Hopfovu jednačinu i jednačine održanja koja su data od strane Obergugenbergera u [55]. Kao i udarni talasi, beskonačno uski solitoni se sasvim prirodno mogu tretirati sa uopštenim funkcijama Kolomboa.

8.2. Definicije

U ovoj glavi ćemo koristiti regularizovane izvode umesto običnih. Razlog za ovo je to što izvod "tačkaste" funkcije (funkcije sa nosačem u jednoj tački sa konačnom vrednošću) ne daje uvek realnu sliku: nije nestandardan broj mada je to ono što očekujemo.

Neka je $h : (0,1) \to (0,1)$ opadajuća funkcija takva da je $\lim_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon) = 0$. Definišemo regularizovani izvod po x_j sa

$$(\tilde{\partial}_{x_j})_h G = [\partial_{x_1} G_{\phi,\varepsilon} \star \phi_{h(\varepsilon)}].$$

N-solitonsko rešenje neke nelinearne jednačine $u(x,t)$ je ono rešenje te jednačine koje se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{i=1}^{N} w_i(x - v_i t) + g_1(x,t), \quad t \leq -T, \\ u(x,t) &= \sum_{i=1}^{N} w_i(x - v_i t - x_i) + g_2(x,t), \quad t \geq T, \end{aligned}$$

za dovoljno veliko T, gde je svaki talas w_i jednak nuli u beskonačnosti. $g_1(x,t) \to 0$ kada $t \to -\infty$ i $g_2(x,t) \to 0$ kada $t \to \infty$. Vidimo da svaki talas w_i, kojeg zovemo soliton, ne menja oblik, amplitudu i brzinu posle sudara sa ostalim takvim talasima u konačnom vremenskom intervalu. Dopušta se da svaki pojedinačni talas w_i zavisi od dve promenljive $x - v_i t$ i t, ili da w_i konvergira nekoj konstanti koja je različita od nule kada $t \to -\infty$. U prvom slučaju, talas može menjati svoju amplitudu. Ovde nećemo uzimati u obzir ovakve modifikacije osnovne ideje.

Očigledno, 1-solitonsko rešenje neke jednačine je u stvari ujedinjeni talas $u(x,t) = \bar{u}(x - vt)$ koji zadovoljava uobičajen rubni uslov $\bar{u}(\pm\infty) = 0$.

U [42] je data definicija beskonačno uskog 1-solitonskog rešenja neke nelinearne jednačine koje zavisi od malog parametra $\varepsilon > 0$. Pretpostavićemo da je rešenje neke jednačine sa malim parametrom ε oblika

$$u(x,t,\varepsilon) = U(x,t,\varepsilon) + \varepsilon G_\varepsilon(S,x,t) + \varepsilon F_\varepsilon(S,x,t), \tag{8.1}$$

gde je $S = x - \varphi(t)$, φ, $U(\cdot,\cdot,\varepsilon)$, G_ε, i F_ε, $\varepsilon \in (0,1]$, su glatke funkcije takve da $\|\varepsilon G_\varepsilon(S,x,t)\|_C \leq c_1$, $\|F_\varepsilon(S,x,t)\|_C \leq c_2$, gde su c_1 i c_2 konstante nezavisne od ε, $\|\cdot\|_C$ označava normu u Banahovom prostoru ograničenih funkcija, a H označava Hevisajdovu stepenastu funkciju, i da važi:

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(S,x,t) &\to g(t)\delta(S), \\ \varepsilon G_\varepsilon(S,x,t) &\to 0,. \end{aligned} \tag{8.2}$$

$$F_\varepsilon(S,x,t) \to f(x,t)H(S) \text{ u } \mathcal{D}' \text{ kada } \varepsilon \to 0, \tag{8.3}$$

gde su g i f glatke funkcije.

Kažemo da je u 1-solitonsko rešenje ako je

$$u(x,t) = \varepsilon G_\varepsilon(S,x,t),$$

gde G ima osobinu (8.2) i važi $S = x - vt$.

Funkcija u je rešenje solitonskog tipa ako je oblika (8.1) i zadovoljava (8.2) i (8.3) (Jedna od funkcija U i F mora biti različita od nule i brzina talasa ne može biti konstantna).

Ove definicije se mogu lako prevesti u okvire Kolomboove teorije na način koji će sada biti opisan.

Definicija 8.1. *$G \in \mathcal{G}$ je beskonačno uska 1-solitonska uopštena funkcija ako je oblika $G(x,t) = \bar{G}(x - ct)$, $\bar{G} \approx 0$, $\bar{G}/E \approx g(t)\delta(x - ct)$, gde je $E = [\ell(\phi)]$, $\phi \in \mathcal{A}_0$.*

U ovom odeljku ćemo posmatrati samo slučaj $g(t) = \text{const}$.

Definicija 8.2. *$G \in \mathcal{G}$ uopštena funkcija 1-solitonskog tipa ako je oblika*

$$G(x,t) = U(x,t) + \bar{G}(S,x,t) + F(S,x,t),$$

gde je $S = x - \varphi(t)$, $\bar{G}/E \approx g(t)\delta(S)$, $\bar{G} \approx 0$, $F/E \approx f(x,t)H(S)$, a g i f su flatke funkcije.

Primedba 1. Maslov i Olejnik su koristili precizniju definiciju beskonačno uskih solitonskih rešenja od onih koji zadovoljavaju (8.1), (8.2) i (8.3), ali ova definicija je pogodna za rad sa Kolomboovim uopštenim funkcijama.

8.3. Definicija N-solitonskog rešenja u $\mathcal{G}$

U ovom delu ćemo dati beskonačno uska N-solitonska rešenja jednačina (8.4) i (8.11) koja su tačno jednaka sumi N talasa kada je vremenska promenljiva dovoljno mala ili dovoljno velika. U cilju da proširimo definiciju solitonskih rešenja na širu klasu funkcija kakve se inače pojavljuju u primenama u klasičnim slučajevima opisanim, na primer, u ([12], [82]), završićemo ovau glavu sa definicijom N-solitonskog rešenja u $\mathcal{G}$.

Definicija 8.3. *$G \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^{n+1})$ je jako nula u beskonačnosti u odnosu na vremensku promenljivu t ako postoji njen pretstavnik $G_{\phi,\varepsilon}$ takav da za svako $\alpha \in \mathbf{N}_0^n$ i svako $m \in \mathbf{N}$ postoji $T > 0$ takvo da za svaki kompaktni skup $K \subset \mathbf{R}^n$ i $|t| \geq T$ postoji $N \in \mathbf{N}_0$ takvo da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je*

$$|\partial^\alpha G_{\phi,\varepsilon}(x,t)| \leq C\varepsilon^m,\ \varepsilon < \eta,\ x \in K.$$

Definicija 8.4. *$G \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^{n+1})$ je nula u beskonačnosti u odnosu na vremensku promenljivu t ako postoji njen pretstavnik $G_{\phi,\varepsilon}$ takav da za svako $m > 0$ postoji $T > 0$ takvo da za svaki kompaktni skup $K \subset \mathbf{R}^n$ i $|t| \geq T$ postoji $N \in \mathbf{N}_0$ takvo da za svako $\phi \in \mathcal{A}_N$ postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je*

$$G_{\phi,\varepsilon}(x,t)| \leq m,\ \varepsilon < \eta,\ x \in K.$$

Može se lako pokazati da ako uopštena funkcija zadovoljava prvu definiciju, zadovoljava i drugu, i to da su definicije nezavisne od predstavnika (to jest $G_{\phi,\varepsilon} \in \mathcal{N}(\mathbf{R}^{\backslash+\infty})$ zadovoljava uslove tih definicija).

Za glatku funkciju g koja je nula u beskonačnosti u klasičnom smislu, $\mathrm{Cd}(g)$ ne zadovoljava uslove prve definicije, a zadovoljava uslove druge.

Definicija 8.5. *Za neku nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednqčinu, N-solitonsko rešenje, $U(x,t) \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^2)$, je ono rešenje date jednačine, takvo da za dovoljno veliko T, može biti napisano u obliku*

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \sum_{i=1}^{N} W_i(x - v_i t) + G_1(x,t),\ t \leq -T \\ U(x,t) &= \sum_{i=1}^{N} W_i(x - v_i t - x_i) + G_2(x,t),\ t \geq T \end{aligned}$$

gde je svaki talas $W_i \in \mathcal{G}(\mathbf{R})$ (jako) nula u beskonačnosti, dok je $G_i(x,t) \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^2)$, $i = 1, 2$ je nula u beskonačnosti u odnosu na promenljivu t.

8.4. Hopfova jednačina

Prvo ćemo naći beskonačno usko solitonsko rešenje Hopfove jednačine (Burgerove jednačine bez viskoznosti)

$$\partial U/\partial t + U \partial U/\partial x = 0 \tag{8.4}$$

u $\mathcal{G}(\mathbf{R}^2)$, u kojoj će se videti sve bazične probleme u traženju beskonačno uskih solitona za skalarne zakone održanja. U sledećem delu ćemo samo da neznatno izmenimo konstrukciju izvršenu u ovom delu.

Primetimo da je $\tilde{\partial}_t^h G(x - vt) = -vG'^h$, gde G'^h označava regularizovan izvod funkcije jedne promenljive.

Pretpostavimo da jednačina (8.4) ima rešenje U u obliku 1-ujedinjenog talasa, to jest $U(x,t) = \bar{U}(x - vt)$, za neku konstantu v (brzina talasa), gde je $\bar{U} \in \mathcal{G}(\mathbf{R})$. Zamenjujući ovu funkciju u (8.4), dobijamo

$$-v\bar{U}'^h + \bar{U}\bar{U}'^h = 0,$$

$$\bar{U}'(\bar{U} - v) = 0.$$

Intuitivno, $\bar{U}$ je konstanta osim u konačnom broju tačaka gde je njena vrednost jednaka $v > 0$. Uslov $U(\pm\infty) = 0$ implicira da je $\bar{U}$ skoro svuda nula. Ovaj intuitivni prilaz vodi do rešenja u $\mathcal{G}$, datog pretstvnikom

$$\bar{U}_{\phi,\varepsilon}(x - vt) = \psi((x - vt - x_0)/\varepsilon^p), \tag{8.5}$$

gde je $\psi \in \mathcal{S}$, $0 \in \operatorname{supp}\psi$, $v = \psi(0)$, i x_0 je proizvoljan realni broj. $\bar{U}'^h(x,t)(\bar{U}(x,t) - v) = 0$ za svako (x,t), jer postoje $N \in \mathbf{N}$ i $g \in \Gamma$ takvi da za svako $\phi \in \mathcal{A}_q$, $q \geq N$, postoje $C > 0$ i $\eta > 0$ takvi da je

$$|\bar{U}'^h_{\phi,\varepsilon}(x,t)(\bar{U}_{\phi,\varepsilon}(x,t) - v)|$$

$$= \psi' * \phi_{h(\varepsilon)}((x - vt)/\varepsilon^p)(\psi((x - vt)/\varepsilon^p) - \psi(0))/\varepsilon^p \leq C\varepsilon^{p(g(q)-N)},\ \varepsilon < \eta.$$

To je tačno, jer $x \neq vt$ implicira $\bar{U}'^h_{\phi,\varepsilon}(x,t) = 0$ i $x = vt$ implicira $\bar{U}_{\phi,\varepsilon} - v = 0$ za dovoljno malo ε.

Upravo smo pokazali da je U, sa pretstavnikom definisanim sa (8.5), tačkasto rešenje od (8.4). To je tačno i u p-asociranom smislu, ali sada nije potrebno da je $\psi(0) = v$: Za $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ imamo

$$\begin{aligned} & \varepsilon^p \iint \psi' * \phi_{h(\varepsilon)}((x - ct)/\varepsilon^p)(\psi((x - ct)/\varepsilon^p) - \psi(0))\varepsilon^{-2p}\theta(x,t)dxdt \\ = \ & \varepsilon^p \iint \psi' * \phi_{h(\varepsilon)}(\xi - c\tau)(\psi(\xi - c\tau) - \psi(0))\theta(\varepsilon^p\xi, \varepsilon^p\tau)d\xi d\tau. \end{aligned}$$

As $\varepsilon \to 0$,

$$\begin{aligned} I \ &= \ \iint \psi' * \phi_{h(\varepsilon)}(\xi - c\tau)(\psi(\xi - c\tau) - \psi(0))\theta(\varepsilon\xi, \varepsilon\tau)d\xi d\tau \\ &\to \ \iint \psi' * \phi_{h(\varepsilon)}(\xi - c\tau)(\psi(\xi - c\tau) - \psi(0))\theta(0,0)d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Ovo povlači da $\varepsilon I \to 0$ kada $\varepsilon \to 0$.

Ne postoje beskonačno uska solitonska rešenja Hopfove jednačine u smislu jednakosti u $\mathcal{G}$ ("jaka jednakost"), jer za $G(\xi) = G(x - vt)$, $(G^2/2 - vG)' = 0$ implicira da je $G^2/2 - vG$ konstanta (videti u [55]), što implicira da je G konstanta, čime smo dobili kontradikciju.

Primedba 2. Ako koristimo obične umesto regularizovanih izvoda i ako je $\bar{G} \in \mathcal{G}$ definisano sa ψ čiji je prvi izvod jednak nuli u tački nula i $\psi(0) \neq 0$, tada je amplituda solitona, $\psi(0)$ proizvoljna (ne zavisi od brzine solitona), jer $\bar{G}'(\xi) = 0$ za svako $\xi \in \mathbf{R}$. Takva rešenja su i rešenja u asociranom smislu.

U stvari, ovakva rešenja zadovoljavaju svaku jednačinu koju zadovoljavaju konstante funkcije. Zbog ovoga, ovakva rešenja zovemo degenerativnih rešenjima. Kao što će biti konstruisana N-solitonska rešenja za (8.4), tako će se moći napraviti i degenerativna N-solitonska rešenja za (8.4).

Rešenje (8.5) ima osobine date u Definiciji 1, tako da definiše rešenje od (8.4) koje je beskonačno uski soliton.

Početni uslov u tečki $t = 0$ je $A_{\phi,\varepsilon}(x) = \psi((x - x_0)/\varepsilon^p) \approx 0$ u $\mathcal{G}(\mathbf{R})$ koji tačkasto konvergira funkciji jednakoj nula u svim tačkama osim u x_0 gde uzima vrednost $\psi(0)$.

Maslov-Olejnikovo rešenje iste ove jednačine (u asociranom smislu) je dato u [30] sa

$$u(x,t,\varepsilon) = A\mathrm{ch}^{-1}(c(x - vt)/\varepsilon),$$

gde su c, A, i v konstante, mošemo smatrati specijalnim slučajem napred konstruisanog rešenja u $\mathcal{G}$, jer je $\mathrm{ch}^{-1} \in \mathcal{S}$.

Osim rešenja sa osačima u jednoj tački, postoje rešenja ovog istog oblika sa nosačem sadržanim u konačnom broju tačaka, koja su, na primer, data pretstavnicima

$$U_{\phi,\varepsilon}(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \psi((x - vt - x_i)/\varepsilon),$$

gde su x_i različite realne vrednosti. Tih N objekata imaju istu brzinu, tako da nema njihovog uzajamnog delovanja karakterističnog za N-solitone, tako da ih nećemo uzimati u obzir u daljem tekstu.

Bez obzira na Definiciju 8.5, kažemo da je $u(x,t)$ beskonačno usko N-solitonsko rešenje za (8.4) ako se sastoji od N beskonačno uskih talasa koji ne menjaju svoje brzine i amplitude posle susreta sa nekim brojem ovakvih istih talasa (beskonačno uski talasi znači da nosač pretstavnika takvog talasa teži jednoj tački).

Prvo ćemo dati beskonačno usko 2-solitosko tačkasto uopšteno rešenje Hopfove jednačine.

Uopštena funkcija U data pretstavnikom

$$U_{\phi,\varepsilon}(x,t) = \psi_1((x - v_1 t - x_1)/\varepsilon^p) + \psi_2((x - v_2 t - x_2)/\varepsilon^p),$$

de ψ_i, $i = 1,2$ imaju iste osobine kao prethodno ψ, je rešenje u p-asociranom smislu, ali nije tačkasto rešenje. Zbog toga definišimo uopštenu funkciju U sa

$$(8.6)\quad \begin{aligned} U_{\phi,\varepsilon}(x,t) &= \psi_1((x - v_1 t - x_1)/\varepsilon^p) + \psi_2((x - v_2 t - x_2)/\varepsilon^p) \\ &\quad -\alpha\psi_1((x - v_1 t - x_1)/\varepsilon^p)\psi_2((x - v_2 t - x_2)/\varepsilon^p) \end{aligned}$$

gde $v_i = \psi_i(0)$, $i = 1,2$, ψ_i, $i = 1,2$, imaju iste osobine kao prethodno ψ, a α je neki realni parameter. Očigledno je i to rešenje u p-asociranom smislu. Kada ovu funkciju zamenimo u (8.4), dobijamo

$$(8.7)\quad \begin{aligned} &\varepsilon^{-p}(\psi_1' * \phi_{h(\varepsilon)}((x - v_1 t - x_1)/\varepsilon^p) \\ &(\alpha^2\psi_1((x - v_1 t - x_1)/\varepsilon^p)\psi_2((x - v_2 t - x_2)/\varepsilon^p)^2 \\ +\ &\alpha\psi_2((x - v_2 t - x_2)/\varepsilon^p)(2\psi_1((x - v_1 t - x_1)/\varepsilon^p) \\ +\ &\psi_2((x - v_2 t - x_2)/\varepsilon^p) - v_1) \\ +\ &\psi_1((x - v_1 t - x_1)/\varepsilon^p) + \psi_2((x - v_2 t - x_2)/\varepsilon^p) - v_1) \\ +\ &\psi_2' * \phi_{h(\varepsilon)}((x - v_2 t - x_2)/\varepsilon^p) \\ &(\alpha^2\psi_2((x - v_2 t - x_2)/\varepsilon^p)\psi_1((x - v_1 t - x_1)/\varepsilon^p)^2 \\ +\ &\alpha\psi_1((x - v_1 t - x_1)/\varepsilon^p)(2\psi_2((x - v_2 t - x_2)/\varepsilon^p) \\ +\ &\psi_2((x - v_2 t - x_2)/\varepsilon^p) - v_2) \\ +\ &\psi_2((x - v_2 t - x_2)/\varepsilon^p) + \psi_1((x - v_1 t - x_1)/\varepsilon^p) - v_2). \end{aligned}$$

Za (x,t) takvo da je $x - v_1 t - x_1 \neq x - v_2 t - x_2$, (8.7) je nula, jer je $v_i = \psi_i(0)$, $i = 1,2$.

Ako je $x - v_1 t - x_1 = x - v_2 t - x_2 = 0$ tada je (8.7) jednako sa

$$\varepsilon^{-p}(v_2\psi_1' * \phi_{h(\varepsilon)}(0) + v_1\psi_2' * \phi_{h(\varepsilon)}(0))(\alpha^2 v_1 v_2 + \alpha(v_1 + v_2) + 1).$$

Kako su regularizovani izvodi $\psi_1' * \phi_{h(\varepsilon)}(0)$ i $\psi_2' * \phi_{h(\varepsilon)}(0)$ uopšteno govoreći nestandardni brojevi, beskonačno veliki, $\alpha^2 v_1 v_2 + \alpha(v_1 + v_2) + 1$ mora biti nula. To je tačno u slučaju $\alpha = -1/v_1$ or $\alpha = -1/v_2$.

U ovom slučaju će solitoni interagovati kada je $t = (x_1 - x_2)/(c_2 - c_1)$. U tom trenutku će vrednost od U biti v_1 ili v_2 u $x = c_1 t + x_1$ i nula drugde. Za ostale vrednosti Od t ćemo imati istu situaciju kao i pre interakcije. Ovaj proces izgleda kao da veći (brži) soliton samo prelazi preko manjeg bez ikakvih promena. Ovo je osobina solitonskih rešenja, pa je sa (8.6) zaista 2-solitonsko rešenje.

Ova rešenja imaju osobinu da dva solitona, za pozitivne brzine, ne menjaju oblik i poziciju čak i u toku susreta (ne samo pre i posle susreta ako šro je to uobičajeno za "obične" solitone).

Koristeći istu ovu ideju, možemo konstruisati beskonačno usko N-solitonsko rešenje za (8.4) na sledeći način. Pretpostavimo da

$$(v_i - v_j)/(x_i - x_j) \neq (v_i - v_k)/(x_i - x_k) \tag{8.8}$$

za različite $i, j, k = 1, \ldots, N$. Uopštena funkcija G data pretstavnikom

$$\begin{aligned} G_{\varphi,\varepsilon}(x,t) \quad = \quad & \sum_{i=1}^{N} \psi_i((x - v_i t - x_i)/\varepsilon^p) \\ & + \sum_{i,j=1, i\neq j}^{N} \alpha_{i,j} \psi_i((x - v_i t - x_i)/\varepsilon^p) \psi_j((x - v_j t - x_j)/\varepsilon^p) \end{aligned} \tag{8.9}$$

je rešenje u p-asociranom i tačkastom smislu za $\alpha_{i,j} = -1/v_i$ or $\alpha_{i,j} = -1/v_j$.

Dokaz je isti kao i u slučaju $N = 2$, jer pretpostavka (8.8) obezbeđuje da samo dva solitona mogu da interaguju u isto vreme. Ovo bi bio dokaz teoreme

Teorema 8.1. *Hopfova jednačina (8.4) ima beskonačno usko N-solitonsko rešenje u tačkastom i p-asociranom smislu u $\mathcal{G}$ koje je dato sa (8.9).*

Remark 5. Nađimo rešenje od (8.4) sa beskonačno uskim početnim uslovom, recimo u nuli. To znači da je početni uslov dat sa pretstavnikom $\psi(x/\varepsilon^p)$, $\psi \in \mathcal{S}$, $0 \in \text{supp}\psi$. Za takav početni problem takođe postoji N-solitonsko rešenje, uz dodatne uslove na ψ_i. Stavimo

$$\psi_1((x - v_i t)/\varepsilon^p) = v_i \psi((x - v_i t)/\varepsilon^p).$$

Ovo obezbeđuje da su regularizovani izvodi od ψ_i u nuli proporcionalni, iako nestandardni kompleksni brojevi. Naime, $\psi_i'(0)/\psi_j'(0) = v_i/v_j$.

Ovo obezbeđuje postojanje beskonačno uskog N-solitonskog rešenja G datog pretstavnikom

$$G_{\phi,\varepsilon}(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \psi_i((x - v_i t)/\varepsilon^p) + \alpha \prod_{i=1}^{N} \psi_i((x - v_i t)/\varepsilon^p),$$

gde je

$$\alpha(8{\pm}0) - (v_1 + \ldots + v_N)/(2v_1 \ldots v_N)$$
$$\pm \quad ((N^2 - 4N)(v_1 + \ldots + v_N)^2 + 4N(v_1^2 + \ldots v_N^2))^{1/2}/(2Nv_1 \ldots v_N).$$

Može se proveriti da (8.10) definiše tačkasto rešenje od (8.4).

8.5. Skalarni zakoni održanja

Sada ćemo uopštiti gornju proceduru na skalarni zakon održanja sa funkcijom f koja ima polinomijalno ograničene sve izvode,

$$\partial u/\partial t + \partial(f(u))/\partial x = 0. \tag{8.11}$$

Pronađimo sada beskonačno usko 1-solitonsko rešenje za (8.11). kada zamenimo $G = \bar{G}(x - vt)$ u (8.11), dobijamo

$$\bar{U}'^h \cdot (f'(\bar{U}) - v) = 0.$$

Kao u slučaju Hopfove jednačine, pretpostavimo da je rešenje funkcija jednaka nuli u svim sem konavno mnogo tačaka, gde uzima vrednost $A > 0$ tako da je $f'(A) = g(A) = v$.

Postoje neke restrikcije za brzinu solitona v i njegovu amplitudu A: $v \in g(\mathbf{R})$ i za svako fiksirano v, $A \in g^{-1}(v)$, to jest $g(A) = v$. Pretpostavimo da su sve amplitude pozitivne.

Sa takvim pretpostavkama, možemo konstruisati rešenje sa ovakvim osobinama, koje je dato pretstavnikom

$$G_{\phi,\varepsilon}(x,t) = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} \psi_j((x - vt - x_i)/\varepsilon), \tag{8.12}$$

gde su I i J konačni skupovi, $x_i \in \mathbf{R}$, $0 \in \operatorname{supp}\psi_j$ i $g(A_j) = v$ za amplitude $A_j = \psi_j(0)$. Kao u slučaju $f(u) = u$, može se pokazati da je (8.12) tačkasto i asocirano beskonačno usko 1-solitonsko rešenje od (8.11). Primetimo da ako je f konveksna (konkavna), gornji skup J ima samo jednu vrednost, kao u slučaju (8.4).

Kombinujući 1-solitonsko rešenje od (8.11) i ideje za konstruisanje N-solitonskog rešenja za (8.4), konstruisaćemo 2-solitonsko rešenje od (8.11) u tačkastom i asociranom smislu. Ono je dato pretstavnikom

$$\begin{aligned} G_{\phi,\varepsilon}(x,t) &= \psi_1(x - v_1t - x_1) + \psi_2(x - v_2t - x_2) \\ &+ \alpha\psi_1(x - v_1t - x_1)\psi_2(x - v_2t - x_2), \end{aligned}$$

gde ćemo parameter α odrediti kasnije.

Uvrštajući ovu funkciju u (8.11), dobijamo

$$\begin{aligned} &- v_1\psi_1' * \phi_{h(\varepsilon)}(x - v_1t - x_1) - v_2\psi_2' * \phi_{h(\varepsilon)}(x - v_2t - x_2) \\ &- v_1\alpha\psi_1' * \phi_{h(\varepsilon)}(x - v_1t - x_1)\psi_2(x - v_2t - x_2) \\ &- v_2\alpha\psi_1(x - v_1t - x_1)\psi_2' * \phi_{h(\varepsilon)}(x - v_2t - x_2) \\ &+ g(\psi_1(x - v_1t - x_1) + \psi_2(x - v_2t - x_2) \\ &\quad \alpha\psi_1(x - v_1t - x_1)\psi_2(x - v_2t - x_2))(\psi_1' * \phi_{h(\varepsilon)}(x - v_1t - x_1) \\ &+ \psi_2' * \phi_{h(\varepsilon)}(x - v_2t - x_2) \\ &+ \alpha\psi_1' * \phi_{h(\varepsilon)}(x - v_1t - x_1)\psi_2(x - v_2t - x_2) \\ &+ \alpha\psi_1(x - v_1t - x_1)\psi_2' * \phi_{h(\varepsilon)}(x - v_2t - x_2)) = 0. \end{aligned}$$

Za (x,t) takvo da je $x - v_1t - x_1 \neq x - v_2t - x_2$ ili $x - v_1t - x_1 = x - v_2t - x_2 \neq 0$, ovaj izraz je nula, jer $v_i = g(A_i)$, $i = 1,2$. Ako je $x - v_1t - x_1 = x - v_2t - x_2 = 0$ tada je

$$\begin{aligned} &\psi_1' * \phi_{h(\varepsilon)}(x - v_1t - x_1)(g(A_1 + A_2 + \alpha A_1A_2) \\ &+ \alpha g(A_1 + A_2 + \alpha A_1A_2)A_2 - v_1 - \alpha v_1A_2) \\ &+ \psi_2' * \phi_{h(\varepsilon)}(x - v_2t - x_2)(g(A_1 + A_2 + \alpha A_1A_2) \\ &+ \alpha g(A_1 + A_2 + \alpha A_1A_2)A_1 - v_2 - \alpha v_2A_1) = 0. \end{aligned}$$

Kako su regularizovani izvodi $\psi_1' * \phi_{h(\varepsilon)}(0)$ i $\psi_2' * \phi_{h(\varepsilon)}(0)$ nestandardni kompleksni bojevi, mara važiti

$$\begin{aligned} (g(A_1 + A_2 + \alpha A_1A_2) - v_1)(\alpha A_2 + 1) &= 0 \\ (g(A_1 + A_2 + \alpha A_1A_2) - v_2)(\alpha A_1 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Ovaj sistem ima rešenja $\alpha = -1/A_1$ i $\alpha = -1/A_1$, jer je $g(A_i) = v_i$, $i = 1, 2$.

Postojanje beskonačno uskog 2-solitonskog rešenja povlači postojanje i beskonačno uskog N-solitonskog rešenja za (8.11), kao u slučaju $g(u) = u$, pod uslovima (8.8).

Literatura

[1] M. Adamczewski, J. F. Colombeau, A. Y. Le Roux, Convergence of Numerical Schemes Involving powers of the Dirac Delta Function, J. Math. Anal. Appl. u štampi.

[2] P. Antosik, J. Mikusinski, R. Sikorski, Theory of Distributions - the Sequential Approach, Elsevier SPC-PWN Amsterdam-Warszava (1973).

[3] J. Aragona, J. F. Colombeau, On the $\overline{\partial}$ Neuman Problem for Generalized Functions, J. Math. Anal. Appl. 110,1 (1985).

[4] J. Aragona, J. F. Colombeau, The Intrerpolation Theorem for Holomorphic Generalized Functions, Anali Polonici Mathematici XLIX (1988) p. 151-156.

[5] H. A. Biagoni, A Nonlinear Theory of Generalized Functions, Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg-New York, 1990.

[6] H. A. Biagoni, H. L. Aragona, An Intristic Definition of the Colombeau Algebra of Generalized Functions, preprint.

[7] H. A. Biagioni, J. F. Colombeau, Borel's Theorem for Generalized Functions, Studia Math. 81 (1985) p. 179-183.

[8] H. A. Biagioni, J. F. Colombeau, Whitney's Extension Theorem for Generalized Functions, J. Math. Anal. Appl. 114,2 (1986) p. 574-583.

[9] H. A. Biagioni, J. F. Colombeau, New Generalized Functions and C^∞ Functions with Values in Generalized Complex Numbers, J. London Math. Soc. (2) 33 (1986) p. 169-179.

[10] H. A. Biagioni, M. Oberggugenberger, Generalized solutions to the Korteweg-de Vries and regularized long wave equations, SIAM J. Math. Anal. u štampi.

[11] L. Boute de Monvel, Pseudodifferential Operators and their Applications, Duke University Mathematic Series II, 1976.

[12] P. K. Bullough, P. J. Caudrey, eds. Solitons, Topics in Current Physics 17, Springer-Verlag, New York, 1980.

[13] Discontinuous Generalized Solutions of Nonlinear Nonconservative Hyperbolic Equations, J. Math. Anal. Appl. 139,2 (1989) p. 552-573.

[14] J. F. Colombeau, Differential Calculus and Holomorphy. Real and Complex Analysis in Locally Convex Spaces, Nort Holland Math. Studies 64, Amsterdam, 1982.

[15] J. F. Colombeau, Elementary Introduction in New Generalized Functions, North Holland, Amsterdam, 1985.

[16] J. F. Colombeau, New Generalized Functions and Multiplication of the Distributions, North Holland, Amsterdam, 1983.

[17] J. F. Colombeau, A Multiplications of Distributions, J. Math. Anal. Appl. 94,1 (1983) p. 57-69.

[18] J. F. Colombeau, Nouvelles solutions d'équations aux dérivées partielles, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, Math. 301 (1985) p. 281-283.

[19] J. F. Colombeau, Generalized Functions, Multiplication of Distributions, Applications to Elasticity, Electroplasticity, Fluid Dinamics and Acoustics, in: B. Stanković, E. Pap, S. Pilipović, V.§. Vladimirov (editors), Generalized Functions, Convergence Structures and their Applications, Plenum Press, New York (1988) p. 13-28.

[20] J. F. Colombeau, The Electroplastics Shock Problem as an Example of the Resolution of Ambiguites in the Multiplication of Distributions, J. Math. Phys. u štampi.

[21] J. F. Colombeau, A Method to Obtain Jump Conditions from Systems in Nonconservative Form: New Formulas and New Numerical Schemes, Appl. Num. Math. u štampi.

[22] J. F. Colombeau, M. Langlais, Generalized Solutions of Nonlinear Parabolic Equations with Distributions as Initial Values, J. Math. Anal. Appl. Vol 145, No. 1 (1990).

[23] J. F. Colombeau, M. Obergugenberger, On a Hyperbolic System with a Compatible Quadratic Term: generalized Solutions, Delta Waves, and Multiplication of Distributions, Commun. in Partial Differential Equations, 15(7) (1990).

[24] J. F. Colombeau, M. Oberguggenberger, Generalized Solutions and Measure Valued Solutions to Conservation Laws, preprint.

[25] J. F. Colombeau, A. Y. Le Roux, Numerical Techniques in Elastodynamics, Lecture Notes in Math. 1270, Springer (1987) p. 103-114.

[26] J. F. Colombeau, A. Y. Le Roux, Multiplication of Distributions in Elasticity and Hydrodinamics, J. Math. Phys. 29,2 (1988) p. 315-319.

[27] J. F. Colombeau, A. Y. Le Roux, A. Noussair, B. Perrot, Microscopic Profiles of Shock Waves and Ambiguities in Multiplications of Distributions, SIAM J. Num. Anal. 26,4 (1989) p. 871-883.

[28] Hurd, Loeb, An Introduction in Non-standart Analysis, Academic Press, London, 1985.0

[29] P. Dierolf, J. Voigt, Convolution and $\mathcal{S}'$-convolution of Distributions, Collectanea Math. 29(1978), 185-196.

[30] Yu. V. Egorov, A contibution to the theory of generalized functions, UMN 45(5) (1990), p. 1-40.

[31] Yu. V. Egorov, Partial Differential Operators of the Principal Type, Nauka, Moskva, 1984 (na Ruskom).

[32] A. Friedman, Generalized Functions and Partial Differential Equations, Prentice-Hall, INC, Englewood Cliffs, New York, 1963.

[33] E. A. Gorin, Asymptotic properties of polynomials and algebraic functions of several variables, Russian Math. Surveys, 16, p. 93-119 (1961).

[34] J. Horvath, Topological Vector Spaces, Addison Wesley Publising Company, 1966.

[35] L. Hörmander, Nonlinear Hyperbolic Partial Differential Equations, Lecture Notes, Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg-New York, 1986.

[36] L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators, Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg-New York, 1963.

[37] L. Hörmander, Analysis of Partial Differential Operators, Vol. 3, Pseudo-differential Operators, Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg-New York, 1985.

[38] L. Hörmander, Analysis of Partial Differential Operators, Vol. 4, Pseudo-differential Operators, Springer-Verlag, Berlin-Heildelberg-New York, 1985.

[39] A. M. Iljin, Asymptotic Expansion of Boundary Problems, Nauka, Moscow, 1981. (na Ruskom)

[40] P. Le Flok, Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems under conservative form, Comm. Part. Diff. Eq. 13 (1988), 669-727.

[41] S. Lojasiewicz, Sur le probleme de division, Stud. Math. 18, 87-136 (1959).

[42] V. P. Maslov, G. A. Omel'yanov, Asimptotic soliton-form solutions of equations with small dispersion, UMN 34(1), p. 73-149 (1981).

[43] M. Nedeljkov, S. Pilipović, Convolution in Colombeau's Spaces of Generalized Functions, Part I, Publ. Inst. de Math. Beograd, u štampi.

[44] M. Nedeljkov, S. Pilipović, Convolution in Colombeau's Spaces of Generalized Functions, Part II, Publ. Inst. de Math. Beograd, u štampi.

[45] M. Nedeljkov, S. Pilipović, Convergence in Colombeau's Generalized Function Spaces, preprint.

[46] M. Nedeljkov, S. Pilipović, Paley-Wiener type theorems in Colombeau's spaces of generalized functions, preprint.

[47] M. Nedeljkov, S. Pilipović, Hypoelliptic pseudo-differential operators in Colombeau's spaces, preprint.

[48] M. Nedeljkov, S. Pilipović, D. Skarpalezos, Division problem and partial differential equations with constant coefficients in Colombeau's space of new generalized functions, preprint.

[49] M. Nedeljkov, Fourier Transformation in New Generalized Function Spaces, u Complex Analysis and Generalized Functions, 1991, p. 219-229.

[50] M. Nedeljkov, Laplace Transformation in New Generalized Function Spaces, Zb. Rad. Prir. Mat. Fak. Ser. za Mat. u štampi.

[51] M. Nedeljkov, Konvolucija i integralne transformacije u prostorima Kolomboa, magistarski rad, Novi Sad 1993.

[52] M. Nedeljkov, Topology In Colombeau's New Generalized Function Spaces, ekspozitorni rad.

[53] M. Nedeljkov, Infinite narrow solitons in Colombeau's spaces, preprint.

[54] A. C. Newell, Solitons in Mathematics and Physics, SIAM, 1985.

[55] M. Oberguggenberger, Multiplications of Distributions and Applications to Partial Differential Equations, Longman, 1992.

[56] M. Oberguggenberger, Case Study of a Nonlinear, Nonconservative, Non-strictly Hyperbolic System, preprint .

[57] M. Oberguggenberger, Products of Distributions, J. Reine Angew. math. 365 (1986) p. 1-11.

[58] M. Oberguggenberger, Multiplication of Distributions in the Colombeau Algebra $\mathcal{G}(\Omega)$, Boll. Unione Mat. Ital. (6) 5-A (1986) p. 423-429.

[59] M. Oberguggenberger, Generalized Solutions to Semilinear Hyperbolic Systems, Monatsh. Math. 103 (1987) p. 133-144.

[60] M. Oberguggenberger, Produts of Distributions: Nonstandard Methods, Z. Anal. Anwendungen 7 (4) (1988) p. 347-365.

[61] M. Oberguggenberger, Hyperbolic Systems with Discontinuous Coefficients: Generalized Solutions and a Transmition Problem in Acoustics, J. Math. Anal. Appl. 142 (1989) p. 452-467.

[62] M. Oberguggenberger, Generalized stochastic processes, preprint.

[63] M. Oberguggenberger, The Carleman system with positive measures as initial data - generalized solutions, Transport Theory Statist. Physics, 20 (1991), p. 177-197.

[64] S. Pilipović, Colombeau's Generalized Functions and Pseudodifferential Operators, Lecture Notes in Mathematical Sciences, Vol. 4, University of Tokio, 1994.

[65] S. Pilipović, Pseudo-differential Operators in Colombeau's Spaces, preprint.

[66] S. Pilipović, B. Stanković, Teorija distribucija, Novi Sad (1983).

[67] M. Reed, B. Simon, Principles of Modern Mathematical Physics, Vol. 1, 2.

[68] E. E. Rosinger, Distributions and Nonlinear Partial Differential Equations, Lecture Notes in Math. 684, Springer (1978).

[69] E. E. Rosinger, Generalized Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations, North Holland Math. Studies 144 (1987).

[70] D. Scarpalezos, Colombeau's generalized functions: topological structures; microlocal properties. A simplified point of view, preprint.

[71] D. Scarpalézos, Topologies dans les espaces d nouvelles functions generalisees de Colombeau. $\overline{\mathbb{C}}$-modules topologiques, Preprint.

[72] L. Schwartz, Theorie des Distributions, Herman, Paris (1966).

[73] R. Shiraishi, On the Definitions of Convolution for Distributions, J. Sci. Hiroshima Univ. , Ser. A, 23 (1959), 19-32.

[74] M. A. Shubin, Pseudo-differential Operators, Moskow, 1978. (na Ruskom).

[75] A. Takači, Laplace Transformation on new Generalized Functions, Zb. Rad. Prir. Mat. Fak. Ser. za Mat. (u štampi).

[76] T. D. Todorov, Colombeau's New Generalized Functions and Nonstandard Analysis, In:"B. Stanković, E. Pap, S. Pilipović, V. S. Vladimirov (editors) Generalized Functions, Convergence Structures and their Applications, Plenum Press, New Yprk (1980) p. 23-27.

[77] T. D. Todorov, Sequential Approach to Colombeau's Theory of Generalized Functions, Publications IC/87/126, International Center for Theoretical Physics, Trieste.

[78] J. Tysk, Comparison of Two Methods of Multiplying Distributions, Proc. Amer. Math. Soc. 93, 1 (1985) p. 35-39.

[79] Van der Warden, Algebra I, II, Springer Verlag, 1971, 1967.

[80] V. S. Vladimirov, Generalized Functions in Mathematical Physics, Nauk, Moskow (1979).

[81] A. E. Vol'pert, The spaces BV and quasilinear equations, Math. USSR Sb. 2 (1967), 225-267.

[82] G. B. Whitham, Linear and Nonlinear Waves, John Wiley & Sons, New York, 1974.

[83] H. Whitney, Analytical Extensions of Differentiable Functions, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934) p. 63-89.