UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA MATEMATIKU I
INFORMATIKU

Petar Đapić

VARIJETETI GRUPOIDA

-doktorska disertacija-

Novi Sad, 2008.

Sadržaj

Predgovor

Univerzalna algebra je zasnovana na povezivanju semantičkog pojma varijeteta i sintaktičkog pojma jednakosne teorije koje se ostvaruje putem Birkhoffove teoreme. Ova veza semantike i sintakse će predstavljati osnovnu metodu istraživanja u ovoj doktorskoj disertaciji. Krenućemo od sintaksnog uslova *kvazilinearnosti* i težićemo predstavljanju svih idempotentnih varijeteta grupoida, koja ispunjavaju taj sintaksni uslov, pomoću konačnih grupoida koji ih generišu.

Motivacija za ovaj rad dolazi iz nekolicine radova u kojima su istraživani varijeteti generisani konzervativnim grupoidima (operacija je konzervativna ako je rezultat operacije uvek jednak nekoj od vrednosti na koje je operacija primenjena). Mada ovo svojstvo nije invarijantno u odnosu na jednakosne klase (nije očuvano proizvodom), ipak se o varijetetima generisanim algebrama sa konzervativnim operacijama može dosta toga reći. Samo kao jedan primer navodimo rezultat A.Bulatova [3] koji rešava poznato pitanje o računskoj složenosti 'constraint satisfaction' problema u slučaju varijeteta generisanih konačnim konzervativnim algebrama.

Svaka refleksivna binarna relacija ρ se predstavlja pomoću konzervativne binarne operacije $\cdot_\rho$ na sledeći način: $x \cdot_\rho y = \begin{cases} x, & \langle x, y\rangle \in \rho; \\ y, & \text{inače} \end{cases}$. Za jednakosnu teoriju algebri parcijalnih uređenja, definisanu i istraženu u [16] i [11], ispostavilo se da važi sledeće interesantno svojstvo: svaki term sa najviše tri promenljive jednak je jedinstvenom linearnom termu. Postavilo se prirodno pitanje da li postoje varijeteti grupoida koji imaju istu tu osobinu i za terme sa proizvoljnim brojem promenljivih. U magistarskom radu [8] je dat potpun odgovor na ovo pitanje. Međutim, da li se mogu opisati varijeteti grupoida sa slabijom osobinom od gore date osobine linearnosti kao što je osobina da je svaki term jednak (ne nužno jedinstvenom) linearnom termu? U ovoj disertaciji smo se bavili ovim pitanjem i dali potpun odgovor u slučaju idempotentnih varijeteta grupoida dok u slučaju neidempotentnih varijeteta grupoida navodimo kontinuum mnogo primera.

Prva glava *Elementi univerzalne algebre* sastoji se od šest odeljaka. U prva četiri odeljka uvedeni su neki osnovni pojmovi i predstavljeni neki klasični rezultati univerzalne algebre sa izvorima gde se mogu naći njihovi dokazi. U *prvom odeljku* ove glave definišemo term algebru, svojstvo univerzalnog preslikavanja, slobodnu algebru i navodimo njihova osnovna svojstva koja će se koristiti kroz ceo rad. U *drugom odeljku* data je definicija jednakosne klase i Birkhoffova teorema koja povezuje jednakosne klase i varijetete. U *trećem odeljku* su definisani pojmovi: konačna baza, beskonačna baza i inherentno beskonačna baza. U ovom odeljku je dat kratak istorijat problema koji su povezani sa ova tri pojma. Navedena je Parkova hipoteza koja je i danas otvoren problem. Pored toga su navedeni potrebni i dovoljni uslovi za lokalno konačne varijetete koji imaju konačnu bazu ili inherentno beskonačnu bazu. U *četvrtom odeljku* je uveden niz pojmova i teorema potrebnih za Birkhoffovu teoremu kompletnosti jednakosnih teorija koja je navedena kao poslednje tvrđenje ovog odeljka. U *petom odeljku* uvodimo pojam rezidualne granice, navodimo neke primere i Quackenbushovu lemu. U *šestom odeljku* uvodimo pojmove vezane za linearnost i kvazilinernost, zatim razmatramo njihova osnovna svojstva koja ćemo kasnije koristiti bez napomene i usklađujemo notaciju.

Druga glava *Linearnost* ima šest odeljaka. Najveći deo odeljaka ove glave rezultat je rada P.Đapića, J.Ježeka, P.Markovića, R.McKenzieja i D.Stanovskog, *Star-Linear Equational Theories of Grupoids*, [10]. Takođe su ovi rezultati sem drugog i trećeg odeljka ove glave prezentovani i u magistarskom radu [8] tako da dokaze tvrđenja koji se mogu pronaći u [10, 8] nismo navodili. U *prvom odeljku* pokazujemo koje uslove treba da ispunjava grupoid sa n-generatora da bi bio slobodan grupoid n-linearnog varijeteta. U *drugom odeljku* navodimo da postoji tačno dvanaest egzaktno 2-linearnih jednakosnih teorija i navodimo sedam grupoida reda četiri $\mathbf{G}_0, \ldots, \mathbf{G}_6$ koji su slobodni grupoidi nad skupom od dva generatora nekih varijeteta koji odgovaraju egzaktno 2-linearnim jednakosnim teorijama dok preostali slobodni grupoidi nad skupom od dva generatora koji nisu navedeni su duali grupoida $\mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_6$. Zatim se pokazuje da su 3-linearne jednakosne teorije proširenja grupoida $\mathbf{G}_5, \mathbf{G}_6, \mathbf{G}_5^\partial, \mathbf{G}_6^\partial$. *Treći odeljak* se sastoji od pet pododeljaka u kojima dokazujemo osobije jednakosnih teorija koje su proširenja grupoida $\mathbf{G}_5$, pokazujemo da postoji tačno devet egzaktno 3-linearnih jednakosnih teorija koje su proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$, i navodimo tvrđenje da ne postoji 4-linearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$, i da su sve $*$- linearne jednakosne teorije regularne (Teorema 2.3.25). *Četvrti odeljak* se sastoji od dva pododeljka. U njima opisujemo sve egzaktno 3-

-linearne jednakosne teorije koje su proširenje grupoida $\mathbf{G}_6$, zatim opisujemo tri $*$-linearne jednakosne teorije od ukupno šest jer su preostale tri duali navedenih, i navodimo njihove osobine. U *petom odeljku* navodimo baze u slučaju dva $*$-linearna varijeteta, dok za jedan varijetet pokazujemo da je inherentno beskonačno baziran. U *šestom odeljku* navodimo dijagram $*$-linearnih varijeteta i njihovih podvarieteta i navodimo generatorne poddirektno nesvodljive grupoide $*$-linearnih varijeteta.

Treća glava *Kvazilinearnost* ima dvanaest odeljaka. Ova glava rezultat je rada P.Đapića, J.Ježeka, P.Markovića, *Star-quasilinear equational theories of groupoids*, [9]. U prvih jedanaest odeljaka proučavamo idempotentne jednakosne teorije dok se u poslednjem odeljku bavimo neidempotentnim $*$-kvazilinearnim jednakosnim teorijama. U *prvom odeljku* pokazujemo osnovne osobine n-kvazilinearnih jednakosnih teorija i njihovih slobodnih grupoida, zatim pokazujemo koje uslove treba da ispunjava grupoid sa n generatora da bi bio slobodan grupoid n-kvazilinearnog varijeteta. U *drugom odeljku* pokazujemo da postoji sedamnaest egzaktno 2-kvazilinearnih jednakosnih teorija i navodimo četiri grupoida reda četiri $\mathbf{G}_7, \ldots, \mathbf{G}_{10}$ koji su slobodni grupoidi sa dva generatora nekih varijeteta koji odgovaraju pravim 2-kvazilinearnim jednakosnim teorijama. Preostali slobodni grupoid sa dva generatora koji nije naveden je dual grupoida $\mathbf{G}_9$. U *trećem odeljku* za grupode $\mathbf{G}_0$, $\mathbf{G}_2$ i $\mathbf{G}_3$ pokazujemo da ne postoje 3-kvazilinearna proširenja. U *četvrtom odeljku* pronalazimo $*$-kvazilinearna proširenja grupoida $\mathbf{G}_8$, $\mathbf{G}_9$ i $\mathbf{G}_{10}$ i podvarijetete njima odgovarajućih varijetet. U *petom odeljku* pokazujemo da je $*$-kvazilinearno proširenje grupoida $\mathbf{G}_1$ jednakosna teorija koja odgovara varijetetu pravougaonih traka. U *šestom odeljku* opisujemo jedino $*$-kvazilinearno proširenje grupoida $\mathbf{G}_4$ i podvarijetete njoj odgovarajućeg varijeteta. *Sedmi odeljak* se sastoji od četiri pododeljka. U ovom odeljku opisujemo svih četrnaest egzaktno 3-kvazilinearnih jednakosnih teorija i pokazujemo da se njih jedanaest ne može proširiti do 4-kvazilinearne jednakosne teorije dok za preostale tri pokazujemo da njima odgovarajući varijeteti $\mathcal{V}_A$, $\mathcal{V}_B$ i $\mathcal{V}_C$ su $*$-kvazilinearni varijeteti i pronalazimo njihove podvarijetete. *Osmi odeljak* se sastoji od tri pododeljka. U njima pokazujemo da postoji osam egzaktno 3-kvazilinearnih jednakosnih teorija i da u slučaju pet ne postoje proširenja do 4-kvazilinearnih jednakosnih teorija a preostala tri se mogu proširiti do sedam $*$-kvazilinearnih jednakosnih teorija koje su podvarijeteti $*$-linearnih varijeteta. U ovom odeljku pokazujemo i da postoji beskonačno mnogo 3-kvazilinearnih jednakosnih teorija koje su proširenje grupoida $\mathbf{Q}_4$ i da se egzaktno 3-kvazilinearno i egzaktno 4-kvazilinearno proširenje grupoida $\mathbf{Q}_2$ razlikuju. U *devetom* *odeljku* opisujemo jedino $*$-kvazilinearno proširenje grupoida $\mathbf{G}_7$ i podvarijetete njoj odgovarajućeg varijeteta. U *desetom odeljku* navodimo dijagram $*$-kvazilinearnih varijeteta i njihovih podvarieteta i navodimo generatorne poddirektno nesvodljive grupoide $*$-kvazilinearnih varijeteta koji nisu navedene u prethodnim odeljcima. U *jedanaestom odeljku* pokazujemo da 12 idempotentnih $*$-kvazilinearnih varijeteta ima rezidualnu granicu κ gde je $\kappa \leq 5$ dok preostalih 16 idempotentnih $*$-kvazilinearnih varijeteta su rezidualno veliki. U *dvanaestom odeljku* za razliku od prethodnih odeljaka analiziramo neidempotentne $*$-kvazilinearne jednakosne teorije i pokazujemo da ih ima kontinum mnogo.

Prilikom našeg istraživanja koristili smo računarski program [14]. On ima sledeće mogućnosti: prilikom popunjavanja Kejlijeve tablice grupoida, on automatski popunjava polja u tablici čije su vrednosti jednoznačno određene do tog trenutka definisanim rezultatima operacije i identitetima koji su prethodno uneti kao zakoni tog grupoida. Ako je neki unos u tablicu u suprotnosti sa nekim identitetom (prvi identitet na koji naiđe u algoritmu programa), program obaveštava korisnika o tome, kao i o identitetu sa kojim je unos u kontradikciji. Takođe, kada se multiplikativna tabela popuni do kraja, program proverava da li su i neki novi identiteti zadovoljeni, i nalazi valuaciju promenljivih za koje identitet nije zadovoljen.

Ovaj program smo koristili veoma često, ali nezavisno od toga će mnogi rezultati biti dokazani i 'peške'. Mesta gde bi čitalac mogao da ima problema sa verifikacijom naših rezultata bez korišćenja računarskog programa su ona gde se tvrdi da neki identiteti važe na grupoidima sa većim brojem elemenata (između 9 i 21 elemenata).

Napomenimo za kraj da u dokazima tvrđenja identiteti koji nisu detaljno objašnjenji su direktna posledica identiteta iz uslova tvrđenja ili pretpostavki koje su uvođene u toku dokaza.

Spisak literature je dat na kraju teze.

Notacija je u celom tekstu standardna, dok se novouvedene oznake detaljno objašnjavaju. Za notaciju i terminologiju koja nije definisana u ovom uvodu, poziva se čitalac da konsultuje knjigu [24].

• • •

Dr Petru Markoviću, docentu Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, svom mentoru, dugujem zahvalnost na uloženom ogromnom vremenu, strpljenju i trudu u toku višegodišnje nesebične saradnje čiji je jedan od rezultata i razvoj teme kojom se bavi ova doktorska disertacija.

Ovom prilikom se zahvaljujem dr Siniši Crvenkoviću, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, koji je pratio moj rad u toku čitavog mog školovanja i koji je značajno učestvovao u formiranju mene kao matematičara. Zahvaljujem mu se takođe na svim savetima i podršci koje sam od njega dobio.

Veliku zahvalnost želim da izrazim dr Rozáliji Sz. Madarász, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, koja je uložila napor ravan mentorskom kako bi se pokrenula i motivisala ideja oko ove doktorske disertacije i koja je svojim savetima doprinela stručnijoj i efikasnijoj izradi ove teze.

Takođe se zahvaljujem članovima komisije dr Igoru Dolinki, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, i dr Miroslavu Ćiriću, redovnom profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Nišu, na korisnim sugestijama koje su značajno podigle kvalitet ovog rada.

Želim da se zahvalim mojim koautorima R.McKenzieju, J.Ježeku i D.Stanovskom od kojih sam mnogo naučio prilikom istraživanja oblasti kojom se bavi ova doktorska disertacija.

Na kraju želim da izrazim veliku zahvalnost mojoj porodici koja me je maksimalno podržavala i preuzela veliki teret na sebe u toku izrade ove doktorske disertacije.

Novi Sad, 12.08.2008. Petar Đapić

Glava 1

Uvod - Elementi univerzalne algebre

U ovoj glavi navodimo one definicije i rezultate iz standardnog osnovnog kursa Univerzalne algebre koje ćemo koristiti u glavama 2 i 3. Svi dokazi se mogu naći u udžbeniku S.Burris, H.P.Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra*, [4]. U poslednjem odeljku ove glave uvešćemo definicije, osnovne pojmove i osobine linearnosti i kvazilinearnosti.

1.1 Slobodne algebre

Definicija 1.1.1. Za dato $\mathcal{F}$ i X, ako $T(X) \neq \emptyset$ tada *termovska algebra* (ili algebra terma, term algebra) tipa $\mathcal{F}$ nad X, pišemo $\mathcal{T}(X)$, ima za nosač skup terma $T(X)$, dok za fundamentalne operacije važi da je

$$f^{T(X)} : \langle p_1, \dots, p_n \rangle \mapsto f(p_1, \dots, p_n)$$

za sve $f \in \mathcal{F}_n$ i $p_i \in T(X),\ 1 \leq i \leq n$. ($T(\emptyset)$ postoji ako i samo ako $\mathcal{F}_0 \neq \emptyset$.)

Definicija 1.1.2. Neka je K klasa algebri tipa $\mathcal{F}$ i neka je $\mathcal{U}(X)$ algebra tipa $\mathcal{F}$ generisana sa skupom X. Ako za svako $\mathcal{A} \in K$ i svako preslikavanje $\alpha : X \mapsto A$ postoji homomorfizam $\beta : \mathcal{U}(X) \mapsto \mathcal{A}$ koji proširuje α, tada kažemo da $\mathcal{U}(X)$ ima *svojstvo univerzalnog preslikavanja za K nad X*, i za $\mathcal{U}(X)$ kažemo da je *slobodno generisan sa X* (vidi sliku).

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & A \\ \mathcal{U}(X) \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 1.1.1 ([4], II.10.8)**.** *Neka je $\mathcal{F}$ proizvoljan tip i neka je X skup promenljivih, gde je $X \neq \emptyset$ ako je $\mathcal{F}_0 = \emptyset$. Termovska algebra $\mathcal{T}(X)$ ima svojstvo univerzalnog preslikavanja za klasu svih algebri tipa $\mathcal{F}$ nad X.* □

Definicija 1.1.3. Neka je K familija algebri tipa $\mathcal{F}$. Za dati skup promenljivih X definišimo kongruenciju $\theta_K(X)$ na $\mathcal{T}(X)$ kao $\theta_K(X) = \bigcap \Phi_K(X)$, gde je

$$\Phi_K(X) = \{\phi \in Con\mathbf{T}(X) : \mathbf{T}(X)/\phi \in IS(K)\};$$

tada definišemo $\mathcal{F}_K(\overline{X})$, *$K$-slobodnu algebru nad $\overline{X}$*, kao

$$\mathcal{F}_K(\overline{X}) = \mathcal{T}(X)/\theta_K(X),$$

gde je $\overline{X} = X/\theta_K(X)$.

Atomarne formule na nekom jeziku jednakosne logike (logike u kojoj je jedini relacijski simbol '$\approx$' koji se uvek interpretira kao jednakost) mogu se poistovetiti sa uređenim parovima terma. Ovakve atomarne formule zovemo *identitetima*. Ako govorimo o atomarnim formulama nad skupom promenljivih X, možemo izjednačiti skup atomarnih formula sa odgovarajućom binarnom relacijom na $T(X)$.

Teorema 1.1.2. (Birkhoff) ([4], II.10.10) *Pretpostavimo da $\mathcal{T}(X)$ postoji. Tada $\mathcal{F}_K(\overline{X})$ ima svojstvo univerzalnog preslikavanja za K nad $\overline{X}$.* □

Definicija 1.1.4. Algebra $\mathcal{A}$ je *lokalno konačna* ako je svaka konačno generisana podalgebra konačna. Klasa algebri je *lokalno konačna* ako je svaki član K lokalno konačan.

Teorema 1.1.3 ([4], II.10.15)**.** *Varijetet V je lokalno konačan ako i samo ako je $|X| < \omega \Rightarrow |\mathcal{F}_K(\overline{X})| < \omega$.* □

1.2 Birkhoffova teorema

Lema 1.2.1 ([4], II.11.2)**.** *Ako je K klasa algebri tipa $\mathcal{F}$ i $p \approx q$ identitet tipa $\mathcal{F}$ nad X, tada je $K \models p \approx q$ ako i samo ako za sve $\mathcal{A} \in K$ i sve homomorfizme $\alpha : \mathcal{T}(X) \to \mathcal{A}$ imamo da je $\alpha(p) = \alpha(q)$.* □

Teorema 1.2.2 ([4], II.11.4)**.** *Neka je K klasa algebri tipa $\mathcal{F}$ i termi $p, q \in T(X)$ tipa $\mathcal{F}$. Tada je*

$$\begin{aligned} & K \models p \approx q \\ \Leftrightarrow \quad & \mathcal{F}_K(\overline{X}) \models p \approx q \\ \Leftrightarrow \quad & \overline{p} = \overline{q} \text{ u } \mathcal{F}_K(\overline{X}) \\ \Leftrightarrow \quad & \langle p, q \rangle \in \theta_K(X). \end{aligned}$$

□

Jedan način da se interpretira prethodna teorema je i da $\theta_K(X)$ predstavlja skup svih identiteta koji važe na K nad skupom promenljivih X (obeležen sa $Id_K(X)$).

Definicija 1.2.1. Neka je Σ skup identiteta tipa $\mathcal{F}$, i obeležimo sa $Mod(\Sigma)$ klasu svih algebri $\mathcal{A}$ za koje važi da je $\mathcal{A} \models \Sigma$. Klasa K algebri je *jednakosna klasa* ako postoje identiteti Σ takvi da je $K = Mod(\Sigma)$.

Teorema 1.2.3. (Birkhoff) ([4], II.11.9) *K je jednakosna klasa ako i samo ako je K varijetet.* □

1.3 FB, NFB i INFB

Definicija 1.3.1. Neka je X skup promenljivih i Σ skup identiteta tipa $\mathcal{F}$ sa promenljivama iz X. Za $p, q \in T(X)$ pišemo da je

$$\Sigma \models p \approx q$$

ako za proizvoljnu algebru $\mathcal{A}$

$$\text{iz } \mathcal{A} \models \Sigma \text{ sledi da je } \mathcal{A} \models p \approx q.$$

Definicija 1.3.2. Neka je X skup promenljivih i K klasa algebri. Kažemo da je $Id_K(X)$ *konačno bazirana* (ili ima konačnu bazu, skraćeno FB) ako postoji konačan podskup Σ od $Id_K(X)$ takav da je

$$\Sigma \models Id_K(X),$$

inače kažemo da je *beskonačno bazirana* (ili nema konačnu bazu, skraćeno NFB). Kažemo da su *identiteti od K konačno bazirani* ako postoji konačan skup identiteta Σ takav da je za proizvoljno X,

$$\Sigma \models Id_K(X).$$

U slučaju da je $K = \{\mathbf{A}\}$ tada za algebru $\mathbf{A}$ kažemo da je *konačno bazirana* (odnosno, *beskonačno bazirana*) ako K zadovoljava to svojstvo.

Postavljalo se pitanje da li svaka konačna algebra konačnog tipa ima konačnu bazu. Konačne algebre mogu imati konačne baze, ali postoje i konačne algebre koje nemaju konačne baze. Tako, R.Lyndonov primer [22] beskonačno bazirane konačne algebre ima sedam elemenata sa jednom binarnom i jednom nularnom operacijom, V.L.Murskij [31] konstruiše troelementni grupoid, P.Perkins [35] šestoelementnu polugrupu, a I.Dolinka [6] sedmoelementni poluprsten sa beskonačnom bazom. R.Lyndon [21] je pokazao da dvoelementne algebre imaju konačnu bazu, S.Oates i M.B.Powell [33] su pokazali da konačne grupe imaju konačnu bazu, zatim R.L.Kruse [19] i I.V.Ljvov [20] su pokazali da svaki konačan prsten ima konačnu bazu, svaka konačna mreža ili mrežno uređena algebra ima konačnu bazu (R.McKenzie [25]). Poslednji rezultat je bio inspiracija za poznatu teoremu K.Bakera ([1]) koja tvrdi da svaka konačna algebra koja generiše kongruencijski distributivan varijetet ima konačnu bazu. Bakerova teorema je kasnije uopštavana (R.McKenzie [29], R.Willard [42] i M.Maróti, R.McKenzie [23]). Međutim, ne postoji algoritam koji prepoznaje konačne algebre sa konačnom bazom (R.McKenzie [26], [27] i [28])

Sedamdesetih godina prošloga veka svi do tada poznati primeri konačnih algebri $\mathbf{A}$ konačnog tipa koje nisu imale konačnu bazu, imale su osobinu da $HSP(\mathbf{A})$ sadrži poddirektno nesvodljive algebre proizvoljno velike konačne kardinalnosti i svih beskonačnih kardinalnosti. Zbog toga je R.Park 1976. godine u svom doktorskom radu [34] postavio hipotezu:

Hipoteza 1.3.1 (Parkova hipoteza)**.** *Neka je $\mathbf{A}$ konačna algebra konačnog tipa. Ako postoji konačno ograničenje za kardinalnosti svih poddirektno nesvodljivih algebri iz $HSP(\mathbf{A})$ (ili se još kaže, ako $HSP(\mathbf{A})$ "ima konačno rezidualno ograničenje"), tada $\mathbf{A}$ ima konačnu bazu.*

Hipoteza je još otvorena. Proverena je u mnogim specijalnim slučajevima dok gore pomenute Bakerova teorema i njena uopštenja (McKenziejeva, Willardova, i Maróti-McKenziejeva) potvrđuju hipotezu u slučaju varijeteta koji su kongruencijski distributivni, kongruencijski modularni i kongruencijski $\wedge$-semidistributivni. U odeljku 2.6 dat je grupoid $\mathbf{A}_3$ za koji je pokazano da ide u prilog Parkovoj hipotezi.

Teorema 1.3.2 (Birkhoff [5])**.** *Neka je $\mathcal{A}$ konačna algebra konačnog tipa $\mathcal{F}$ i neka je X konačan skup promenljivih. Tada $Id_{\mathcal{A}}(X)$ je konačno baziran.*

Definicija 1.3.3. Za lokalno konačan varijetet $\mathcal{V}$ kažemo da *ima inherentno beskonačnu bazu* ($INFB$) ako za svaki lokalno konačan varijetet $\mathcal{W}$ takav da je $\mathcal{W} \supseteq \mathcal{V}$, važi da $\mathcal{W}$ nema konačnu bazu. Za konačnu algebru $\mathbf{A}$ kažemo da ima inherentno beskonačnu bazu kada isto važi za varijetet $HSP(\mathbf{A})$.

Krajem sedamdesetih godina dvadesetog veka V.L.Murskij prvi definiše pojam inherentno beskonačne baze i uočava značaj njegovog istraživanja. Ispostavilo se da primeri V.L.Murskog [32] i P.Perkinsa [35] imaju inherentno beskonačnu bazu. G.McNulty i C.Shallon [30] pokazuju da nekoliko od konačnih graf algebri, za koje je C.Shallon [40] pokazala da imaju beskonačne baze, imaju inherentno beskonačne baze. J.Ježek [15] daje tri grupoida sa tri elementa koji imaju inherentno beskonačnu bazu, a M.V.Sapir [38, 39] karakteriše inherentno beskonačno bazirane konačne polugrupe. I.Dolinka [7] daje dovoljan uslov kojim se obezbeđuje da poluprsten ima inherentno beskonačnu bazu, a posledica toga je da su poluprsteni binarnih relacija na konačnom skupu INFB.

Definicija 1.3.4. Neka je $\mathcal{V}$ varijetet. Označimo varijetet $M(Id_{\mathcal{V}}(X_i))$ sa $\mathcal{V}^i$, gde je $X_i = \{x_1, \ldots, x_i\}$.

Očigledno je $\mathcal{V} = \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{V}^i$, kao i $HSP(\mathcal{F}_{\mathcal{V}}(X_i)) \subseteq \mathcal{V}^i$.

Lema 1.3.3. *Ako je $\mathcal{V}$ lokalno konačan varijetet tada $\mathcal{V}^i$ ima konačnu bazu.*

Dokaz. Na osnovu Definicije 1.3.4 imamo da je $Id_{\mathcal{V}}(X_i)$ baza varijeteta $\mathcal{V}^i$. Kako je na osnovu Teoreme 1.2.2

$$Id_{\mathcal{V}}(X_i) = Id_{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X_i)}(X_i),$$

$\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X_i)$ je konačna jer je $\mathcal{V}$ lokalno konačan, pa iz Teoreme 1.3.2 sledi da $Id_{\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(X_i)}(X_i)$ ima konačnu bazu. Dakle, i $\mathcal{V}^i$ ima konačnu bazu. $\square$

Teorema 1.3.4. *Neka je varijetet $\mathcal{V}$ lokalno konačan. Sledeća tvrđenja su ekvivalentna:*

(1) $\mathcal{V}$ nema konačnu bazu (NFB)

(2) za svako $i \in \mathbb{N}$ je $\mathcal{V}^i \supsetneq \mathcal{V}$,

(3) za svako $i \in \mathbb{N}$ postoji $j \in \mathbb{N}$ takvo da je $\mathcal{V}^i \supsetneq \mathcal{V}^{i+j}$.

Dokaz. Lako se pokazuje na osnovu Definicije 1.3.4 da su (2) i (3) ekvivalentni. Pokažimo samo ekvivalenciju (1) i (2).

Pretpostavimo da $\mathcal{V}$ ima NFB. Tada je $\mathcal{V}^i \supsetneq \mathcal{V}$ za svako $i \in N$, jer na osnovu Leme 1.3.3 $\mathcal{V}^i$ ima konačnu bazu za svako $i \in N$.

Ako $\mathcal{V}$ ima FB tada postoji i (broj promenljivih koje se pojavljuju u konačnoj bazi) takav da je $\mathcal{V}^i = \mathcal{V}$. $\square$

Teorema 1.3.5. *Neka je varijetet $\mathcal{V}$ lokalno konačan. Tada $\mathcal{V}$ ima $INFB$ ako i samo ako za svako $i \in N$, $\mathcal{V}^i$ nije lokalno konačan.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\mathcal{V}$ ima $INFB$. Kako $\mathcal{V}^i$ ima konačnu bazu (Lema 1.3.3) na osnovu Definicije 1.3.3 za svako $i \in N$ varijetet $\mathcal{V}^i$ nije lokalno konačan.

Pretpostavimo da $\mathcal{V}$ nema $INFB$.Neka je $\mathcal{W}$ varijetet takav da je $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$, $\mathcal{W}$ lokalno konačan i $\mathcal{W}$ ima FB. Tada postoji i (broj promenljivih koje se pojavljuju u konačnoj bazi) takav da je $\mathcal{W} = \mathcal{W}^i$, pa je $\mathcal{W}^i$ lokalno konačan varijetet. Kako je $\mathcal{W}^i \supseteq \mathcal{V}^i$, sledi da je $\mathcal{V}^i$ lokalno konačan varijetet. □

1.4 Jednakosna logika i potpuno invarijantne kongruencije

Definicija 1.4.1. Kongruencija θ na algebri $\mathcal{A}$ je *potpuno invarijantna* ako za svaki endomorfizam α na $\mathcal{A}$ važi:

$$\langle a, b\rangle \in \theta \Rightarrow \langle \alpha(a), \alpha(b)\rangle \in \theta.$$

Neka je $S \subseteq A \times A$. Tada sa $\Theta_{FI}(S)$ obeležavamo najmanju potpuno invarijantnu kongruenciju na $\mathcal{A}$ koja sadrži S. Kongruencija $\Theta_{FI}(S)$ se zove *potpuno invarijantna kongruencija generisana sa S.* Ovaj pojam je dobro definisan jer je presek proizvoljne familije potpuno invarijantnih kongruencija potpuno invarijantna kongruencija.

Neka su dati skup promenljivih X i tip $\mathcal{F}$, i neka je

$$\tau : Id(X) \mapsto T(X) \times T(X)$$

bijekcija definisana sa

$$\tau(p \approx q) = \langle p, q\rangle.$$

Teorema 1.4.1 ([4], II.14.8)**.** *Neka je Σ podskup skupa identiteta $Id(X)$. Postoji klasa algebri K takva da je*

$$\Sigma = Id_K(X)$$

ako i samo ako $\tau(\Sigma)$ je potpuno invarijantna kongruencija na $\mathcal{T}(X)$. □

Definicija 1.4.2. Podskup Σ od $Id(X)$ se zove *jednakosna teorija nad X* ako postoji klasa algebri K takva da je

$$\Sigma = Id_K(X).$$

Teorema 1.4.2 ([4], II.14.12)**.** *Ako je* Σ *skup identiteta nad* X *i* $p \approx q$ *je identitet nad* X*, tada je*

$$\Sigma \models p \approx q \Leftrightarrow \langle p, q \rangle \in \Theta_{FI}(\tau(\Sigma)).$$

□

Definicija 1.4.3. Skup identiteta Σ nad X je zatvoren u odnosu na *zamenu* ako za proizvoljan identitet $p \approx q \in \Sigma$ i term $r \in T(X)$ važi: ako se p pojavljuje kao podterm u termu r tada za term s koji se dobija od r zamenom podterma p sa termom q imamo da je $r \approx s \in \Sigma$.

Definicija 1.4.4. Skup identiteta Σ nad X je zatvoren u odnosu na *supstituciju* ako za sve identitete $p \approx q \in \Sigma$ i svaki term $r \in T(X)$ važi: ako se zameni svako pojavljivanje date promenljive x u $p \approx q$ sa r, tada je dobijeni identitet u Σ.

Definicija 1.4.5. Ako je Σ skup identiteta nad X, tada *deduktivno zatvorenje* $D(\Sigma)$ od Σ je najmanji podskup od $Id(X)$ koji sadrži Σ takav da je

(1) $p \approx p \in D(\Sigma)$ za $p \in T(X)$

(2) $p \approx q \in D(\Sigma) \Rightarrow q \approx p \in D(\Sigma)$

(3) $p \approx q \in D(\Sigma),\ q \approx r \in D(\Sigma) \Rightarrow p \approx r \in D(\Sigma)$

(4) $D(\Sigma)$ je zatvoreno u odnosu na zamenu

(5) $D(\Sigma)$ je zatvoreno u odnosu na supstituciju.

Teorema 1.4.3 ([4], II.14.17)**.** *Neka je* $\Sigma \subseteq Id(X)$*,* $p \approx q \in Id(X)$*, tada je*

$$\Sigma \models p \approx q \Leftrightarrow p \approx q \in D(\Sigma).$$

□

Definicija 1.4.6. Neka je Σ skup identiteta nad X. Za $p \approx q \in Id(X)$ kažemo da je

$$\Sigma \vdash p \approx q$$

ako postoji niz identiteta

$$p_1 \approx q_1, \ldots, p_n \approx q_n$$

iz $Id(X)$ tako da svaki $p_i \approx q_i$ pripada Σ, ili je oblika $p \approx p$, ili je rezultat primene nekog od pravila zatvorenja (2)–(5) u Definiciji 1.4.5 na prethodne identitete u nizu, i poslednji identitet $p_n \approx q_n$ je $p \approx q$. Niz $p_1 \approx q_1, \ldots, p_n \approx q_n$ se zove *formalno izvođenje od* $p \approx q$, i n je *dužina* izvođenja.

Teorema 1.4.4. (Birkhoff: Teorema kompletnosti za jednakosnu logiku) ([4], II.14.19) *Neka je* $\Sigma \subseteq Id(X)$ *i* $p \approx q \in Id(X)$, *tada je*

$$\Sigma \models p \approx q \Leftrightarrow \Sigma \vdash p \approx q.$$

□

1.5 Rezidualna granica

Definicija 1.5.1. Neka je $\mathbf{A}$ algebra i κ kardinalni broj. Kažemo da $\mathbf{A}$ ima *rezidualnu granicu* κ ako za svaki par različitih elemenata a i b iz skupa A postoji algebra $\mathbf{B}$ i homomorfizam $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ takvi da je $|B| < \kappa$ i $f(a) \neq f(b)$. Kažemo da je $\mathbf{A}$ *rezidualno konačna* ako za svaki par različitih elemenata a i b iz skupa A postoji homomorfizam f iz algebre $\mathbf{A}$ u konačnu algebru takav da je $f(a) \neq f(b)$. Za klasu algebri $\mathcal{K}$ kažemo da ima *rezidualnu granicu* κ (je *rezidualno konačna*) ako svaka algebra iz $\mathcal{K}$ ima isto svojstvo.

Propozicija 1.5.1 ([24], Odeljak 4.5, Posledica 5)**.** *Neka je* $\mathcal{K}$ *klasa algebri zatvorena u odnosu na homomorfizam. Tada* $\mathcal{K}$ *ima rezidualnu granicu* κ *ako i samo ako svaka poddirektno nesvodljiva algebra iz* $\mathcal{K}$ *ima kardinalnost manju od* κ. *Klasa* $\mathcal{K}$ *je rezidualno konačna ako i samo ako su sve poddirektno nesvodljive algebre iz* $\mathcal{K}$ *rezidualno konačne, odnosno imaju rezidualnu granicu* $\aleph_0$.

Napomenimo da ćemo u ovom radu smatrati da je trivijalan grupoid poddirektno nesvodljiv prema definiciji datoj u [4] dok u mnogim drugim radovima to nije slučaj.

Definicija 1.5.2. Klasa algebri je *rezidualno mala* ako ima rezidualnu granicu κ za neki kardinal κ. Klasa algebri je *rezidualno velika* ako nije rezidualno mala. Klasa algebri je *strogo rezidualno konačna* ako ima rezidualnu granicu κ gde je κ konačan kardinal.

Primer 1.5.1. Klase Bulovih algebri, polumreža, distributivnih mreža imaju rezidualnu granicu 3. Klasa monadičkih algebri je rezidualno velika. Klasa konačnih mreža za proizvoljan konačan kardinal κ nema rezidualnu granicu κ. Klasa svih mreža je rezidualno velika.

Teorema 1.5.2 (Quackenbush, [4], V.3.8)**.** *Ako je varijetet* $\mathcal{V}$ *lokalno konačan sa do na izomorfizam konačno mnogo konačnih poddirektno nesvodljivih algebri, tada* $\mathcal{V}$ *nema beskonačnu poddirektno nesvodljivu algebru.*

1.6 Uvod u linearnost i kvazilinearnost

U ovom odeljku kao i u naredne dve glave pod termom ćemo uvek podrazumevati term na jeziku grupoida (algebri sa jednom binarnom operacijom koju ćemo obeležavati u multiplikativnoj notaciji). Za term kažemo da je *linearan* ako se svaka promenljiva pojavljuje najviše jedanput u tom termu.

Definicija 1.6.1. $*$-*linearna jednakosna teorija* je jednakosna teorija E za koju važi da za svaki term t postoji jedinstven linearan term t^* takav da $\langle t, t^* \rangle \in E$.

Označimo sa $S(t)$ skup svih promenljivih koje se pojavljuju u termu t, a neka $|t|$ označava *složenost* od t, tj. ukupan broj pojavljivanja promenljivih u t. Jasno, $|S(t)| \leq |t|$ a jednakost važi ako je t linearan.

Propozicija 1.6.1. *([8], Propozicija 2.1.3) U svakoj $*$-linearnoj jednakosnoj teoriji $S(t^*) \subseteq S(t)$.*

Definicija 1.6.2. $*$-*kvazilinearna jednakosna teorija* je jednakosna teorija E za koju važi da za svaki term t postoji (ne nužno jedinstven) linearan term t^* takav da je $\langle t, t^* \rangle \in E$. *Prava $*$-kvazilinearna jednakosna teorija* je $*$-kvazilinearna jednakosna teorija koja nije $*$-linearna. Odgovarajući varijetet za $*$-kvazilinearu (pravu $*$-kvazilinearu, $*$-linearna) jednakosnu teoriju zvaćemo *$*$-kvazilinearan (pravi $*$-kvazilinearan, $*$-linearan) varijetet*

Lema 1.6.2. *Neka je E $*$-kvazilinearna jednakosna teorija, tada za svaki term t postoji linearan term t^* takav da je $S(t^*) \subseteq S(t)$ ako i samo ako je E idempotentna jednakosna teorija.*

Dokaz. Neka je E idempotentna jednakosna teorija. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji term t takav da nije ekvivalentan ni sa jednim linearnim termom l sa osobinom da je $S(l) \subseteq S(t)$. Neka je term l linearan term minimalne složenosti koji je ekvivalentan sa termom t. Tada postoji promenljiva $z \in S(l) \setminus S(t)$. Primenom supstitucije $z \mapsto l_1$ i idempotentnosti na identitet $l \approx t$, gde je l_1 podterm terma l takav da je zl_1 ili $l_1 z$ podterm terma l, dobijamo identitet $l' \approx t$ kod koga je linearan term l' manje složenosti od l, kontradikcija.

Neka za svaki term t postoji linearan term t^* takav da je $S(t^*) \subseteq S(t)$. Ako za term t uzmemo da je jednak sa x^2 dobijamo da za term t^* možemo uzeti samo term x, prema tome, dobijamo zakon idempotentnosti. □

U ovoj glavi jednakosne teorije koje ćemo proučavati su idempotentne sem jednakosnih teorija u odeljku 3.12 gde navodimo primere neidempotentnih $*$-kvazilinearnih jednakosnih teorija. Primetimo da su sve $*$-linearne jednakosne teorije idempotentne.

Propozicija 1.6.3. *Svaka $*$-kvazilinearna jednakosna teorija definiše lokalno konačan varijetet.*

Dokaz. Univerzum slobodne algebre sa n generatora u tom varijetetu se moze predstaviti kao podskup skupa svih linearnih terma nad promenljivima $x_1, \ldots, x_n$, a njih ima konačno mnogo. Kod $*$-linearne jednakosne teorije uslov da je svaki term ekvivalentan jedinstvenom linearnom termu znači i da su svaka dva različita linearna terma neekvivalentna u $*$-linearnoj jednakosnoj teoriji pa se univerzum slobodne algebre sa n generatora može predstaviti kao skup svih linearnih terma nad promenljivima $x_1, \ldots, x_n$. □

Na primer, u $*$-kvazilinearnom varijetetu slobodan grupoid sa dva slobodna generatora ima najviše četiri elementa, sa tri slobodna generatora ima manje ili jednako od 21, a sa četiri slobodna generatora ima manje ili jednako od 184 dok jednakost važi u $*$-linearnim varijetetima. Broj različitih rasporeda zagrada u linearnom termu na nekom skupu od n promenljivih ([41], odeljak 8.4), odnosno broj različitih *simple, ordered, rooted trees* (SOR drveta) sa n listova ([37], odeljak 6.4.1) je C_{n-1} , gde je $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, n-ti Katalanov broj, te je konačan broj linearnih terma sa n promenljivih (i p_n niz svakog $*$-linearnog varijeteta) jednak sa

$$p_n = n!C_{n-1} = \frac{n!}{n}\binom{2n-2}{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}.$$

Slobodni spektar se onda izračunava po poznatoj formuli $f_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$.

Ako je E $*$-kvazilinearna jednakosna teorija i n-elementni grupoid $\mathbf{G}$ sa k generatora pripada odgovarajućem varijetetu $\mathrm{Mod}(E)$ u kome je slobodan grupoid sa k generatora reda n, onda $\mathbf{G}$ mora biti izomorfan slobodnom grupoidu sa k generatora u ovom varijetetu. Naravno, to je tačno jer je svaki grupoid generisan sa k elemenata homomorfna slika slobodnog grupoida sa k generatora, pa je jezgro tog homomorfizma identička relacija, tj. u pitanju je izomorfizam.

Propozicija 1.6.4. *([8], Propozicija 2.1.2) Svake dve uporedive $*$-linearne jednakosne teorije (posmatrane kao binarne relacije na skupu svih terma grupoida) su identične.*

Definicija 1.6.3. Neka je n prirodan broj. Pod *n-linearnom jednakosnom teorijom* podrazumevamo jednakosnu teoriju E tako da je svaki term sa najviše n promenljivih E-ekvivalentan jedinstvenom linearnom termu (koji takođe mora imati najviše n promenljivih). Pod *n-kvazilinearnom jednakosnom teorijom* podrazumevamo jednakosnu teoriju E takvu da je svaki term sa najviše n promenljivih E-ekvivalentan linearnom termu nad istim skupom promenljivih. Pod *pravom n-kvazilinearnom jednakosnom teorijom (pravom $*$-kvazilinearnom jednakosnom teorijom)* podrazumevamo jednakosnu teoriju koja je n-kvazilinearna jednakosna teorija ($*$-kvazilinearna jednakosna teorija) ali nije n-linearna jednakosna teorija ($*$-linearna jednakosna teorija). Ako je n-linearna (n-kvazilinearna) jednakosna teorija E generisana (kao potpuno invarijantna kongruencija na algebri terma) identitetima iz E u kojima figuriše najviše n promenljivih, onda kažemo da je jednakosna teorija E *egzaktno n-linearna (n-kvazilinearna).* Naravno, takva jednakosna teorija je jednoznačno određena svojim slobodnim grupoidom sa n slobodnih generatora.

Definicija 1.6.4. Reći ćemo da jednakosna teorija E *proširuje* grupoid $\mathbf{G}$, ako je $\mathbf{G}$ slobodan grupoid za odgovarajući varijetet nad nekim skupom generatora. Za jednakosnu teoriju E ćemo reći da *n-linearno ($*$-linearno, n-kvazilinearno, $*$-kvazilinearno) proširenje* grupoida $\mathbf{G}$ ako je E proširenje grupoida $\mathbf{G}$ i E je n-linearna ($*$-linearna, n-kvazilinearna, $*$-kvazilinearna) jednakosna teorija. Za grupoid $\mathbf{G}$ reći ćemo da je *$*$-linearno (n-linearno, $*$-kvazilinearno, n-kvazilinearno) neproširiv* ako ne postoji odgovarajući $*$-linearan (n-linearan, $*$-kvazilinearn, n-kvazilinearn) varijetet sa slobodnim grupoidom $\mathbf{G}$.

Takođe će nam biti potrebni sledeći termini. *Dual* od terma t (pišemo t^∂) definišemo kao term t ako je t promenljiva, a ako je $t = t_1t_2$, onda je $t^\partial = t_2^\partial t_1^\partial$. Dual jednakosne teorije E biće klasa svih identiteta $t_1^\partial \approx t_2^\partial$, gde identitet $t_1 \approx t_2$ pripada E. Za identitet $s \approx t$ kažemo da je *regularan*, ako važi $S(s) = S(t)$. Za identitet $s \approx t$ kažemo da je *levo nepermutacioni*, ako je redosled prvih pojavljivanja promenljivih u s, posmatrano s leva na desno, isti kao i redosled prvih pojavljivanja promenljivih u termu t. Za neki identitet kažemo da je *desno nepermutacioni*, ako je dual tog identiteta levo nepermutacioni. Za jednakosnu teoriju E kažemo da je *regularna* (odnosno *levo, desno nepermutaciona*), ako su svi identiteti u E regularni (levo, desno nepermutacioni, redom).

Radi izbegavanja pisanja prevelikog broja zagrada u termima, koristićemo zapise $x_1x_2x_3\ldots x_n$ umesto terma $((\ldots((x_1x_2)x_3)\ldots)x_{n-1})x_n$ (otvorene zagrade su grupisane sa leve strane terma), $x \cdot yz$ umesto terma $x(yz)$, itd.

Na termovskoj algebri $\mathbf{T}(X)$ obeležićemo sa $\sigma_{\mathbf{y}\mapsto\mathbf{t}}$ endomorfizam koji se dobija proširenjem preslikavanja $\sigma(x) = \begin{cases} t, & x = y; \\ x, & x \in X \setminus \{y\}, \end{cases}$ za promenljivu y i term t.

Za notaciju i terminologiju koju nismo definisali u ovom uvodu, upućujemo čitaoca na knjigu [24].

Glava 2

Linearnost

Ova glava predstavlja pregled rezultata magistarskog rada [8], sem odeljka 2.1, kao i odeljka 2.3 u kome je data detaljna konstrukcija svih devet slobodnih grupoida sa tri generatora egzaktno 3-linearnih jednakosnih teorija koje su proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ (najavljene u magistarskom radu [8]), kao i niz osobina proširenja grupoida $\mathbf{G}_5$ predstavljene u pododeljku 2.3.1, a koje ćemo koristiti u odeljku 3.7 u narednoj glavi pa čitaocu preporučujemo da odeljak 3.7 pročita neposredno posle čitanja odeljka 2.3. U ovoj glavi opisujemo tri $*$-linearna varijeteta i njihove podvarijetete kao i generatorne grupoide dok su preostala tri $*$-linearna varijeteta duali ovde opisanih $*$--linearnih varijeteta. Pored toga navešćemo konačne baze u slučaju dva $*$--linearna varijeteta (a samim tim su nam poznate baze njihovih duala) dok dva varijeteta imaju INFB.

2.1 Slobodni grupoidi linearnih varijeteta

Teorema 2.1.1. *Neka je $\mathbf{F}_n = (F_n, \cdot_{\mathbf{F}_n})$ grupoid čiji nosač je skup svih linearnih terma nad skupom $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, i neka na tom grupoidu važe svi identiteti oblika $t_1 \cdot t_2 \approx t_1 \cdot_{\mathbf{F}_n} t_2$ za sve $t_1, t_2 \in F_n$. Tada postoji tačno jedna egzaktno n-linearna jednakosna teorija čiji je slobodan grupoid sa n generatora grupoid $\mathbf{F}_n$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ varijetet generisan grupoidom $\mathbf{F}_n$, i neka je $\sim_{\mathbf{F}_n}$ jednakosna teorija koja odgovara datom varijetetu.

Linearni termi nad promenljivama $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ su različiti u varijetetu $\mathcal{V}$ jer bi u suprotnom za valuaciju $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$ dobili da su dva različita elementa iz grupoida $\mathbf{F}_n$ jednaka. Prema tome, ako je neki term sa n promenljivih ekvivalentan linearnom termu po modulu $\sim_{\mathbf{F}_n}$, onda ne postoji drugi linearan term sa kojim je ekvivalentan. Pokažimo sada da je $\sim_{\mathbf{F}_n}$ n-linearna jednakosna teorija.

Neka je t term na jeziku grupoida sa najviše n promenljivih. Indukcijom po složenosti terma t pokazaćemo da je term t jednak nekom linearnom termu. Ako je term t i sam linearan, tvrđenje je tačno. Ako nije, tada je $t = t_1 \cdot t_2$, i po induktivnoj hipotezi važi da $t_j \sim_{\mathbf{F}_n} t'_j$, gde je t'_j linearan term za $j = 1, 2$. Dakle, dovoljno je pokazati da za svaki proizvod dva linearna terma $t'_1 t'_2$ važi da je $t'_1 t'_2 \sim_{\mathbf{F}_n} t_l$, gde je t_l neki linearan term nad istih n promenljivih. Ali, iz uslova teoreme imamo da je $t'_1 \cdot t'_2 \approx t'_1 \cdot_{\mathbf{F}_n} t'_2$, pri čemu je term $t'_1 \cdot_{\mathbf{F}_n} t'_2$ linearan. $\square$

Posledica 2.1.2. *Neka je $\mathbf{F}_3 = (F_3, \cdot_{\mathbf{F}_3})$ grupoid čiji nosač je skup svih linearnih terma nad skupom $\{x, y, z\}$, i neka na tom grupoidu važe svi identiteti iz Tabele 2.1. Tada postoji tačno jedna egzaktno 3-linearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{F}_3$ sa tri generatora.*

(1)	xx	$\approx x,$
(2)	$x \cdot xy$	$\approx x \cdot_{\mathbf{F}_3} xy,$
(3)	$x \cdot yx$	$\approx x \cdot_{\mathbf{F}_3} yx,$
(4)	$xy \cdot x$	$\approx xy \cdot_{\mathbf{F}_3} x,$
(5)	$xy \cdot y$	$\approx xy \cdot_{\mathbf{F}_3} y,$
(6)	$xy \cdot yx$	$\approx xy \cdot_{\mathbf{F}_3} yx,$
(7)	$x \cdot xyz$	$\approx x \cdot_{\mathbf{F}_3} xyz,$
(8)	$x \cdot yxz$	$\approx x \cdot_{\mathbf{F}_3} yxz,$
(9)	$x \cdot (y \cdot xz)$	$\approx x \cdot_{\mathbf{F}_3} y \cdot xz,$
(10)	$x \cdot (y \cdot zx)$	$\approx x \cdot_{\mathbf{F}_3} y \cdot zx,$
(11)	$xy \cdot xz$	$\approx xy \cdot_{\mathbf{F}_3} xz,$
(12)	$xy \cdot yz$	$\approx xy \cdot_{\mathbf{F}_3} yz,$
(13)	$xy \cdot zx$	$\approx xy \cdot_{\mathbf{F}_3} zx,$
(14)	$xy \cdot zy$	$\approx xy \cdot_{\mathbf{F}_3} zy,$
(15)	$xy \cdot yxz$	$\approx xy \cdot_{\mathbf{F}_3} yxz,$
(16)	$xy \cdot (z \cdot yx)$	$\approx xy \cdot_{\mathbf{F}_3} z \cdot yx,$
(17)	$xyz \cdot x$	$\approx xyz \cdot_{\mathbf{F}_3} x,$
(18)	$xyz \cdot y$	$\approx xyz \cdot_{\mathbf{F}_3} y,$
(19)	$xyz \cdot yx$	$\approx xyz \cdot_{\mathbf{F}_3} yx,$
(20)	$xyz \cdot xzy$	$\approx xyz \cdot_{\mathbf{F}_3} xzy,$
(21)	$xyz \cdot zxy$	$\approx xyz \cdot_{\mathbf{F}_3} zxy,$
(22)	$xyz \cdot yzx$	$\approx xyz \cdot_{\mathbf{F}_3} yzx,$
(23)	$xyz \cdot zyx$	$\approx xyz \cdot_{\mathbf{F}_3} zyx,$
(24)	$xyz \cdot (x \cdot yz)$	$\approx xyz \cdot_{\mathbf{F}_3} x \cdot yz,$
(25)	$xyz \cdot (x \cdot zy)$	$\approx xyz \cdot_{\mathbf{F}_3} x \cdot zy,$
(26)	$xyz \cdot (y \cdot xz)$	$\approx xyz \cdot_{\mathbf{F}_3} y \cdot xz,$
(27)	$xyz \cdot (y \cdot zx)$	$\approx xyz \cdot_{\mathbf{F}_3} y \cdot zx,$
(28)	$(x \cdot yz) \cdot y$	$\approx x \cdot yz \cdot_{\mathbf{F}_3} y,$
(29)	$(x \cdot yz) \cdot z$	$\approx x \cdot yz \cdot_{\mathbf{F}_3} z,$
(30)	$(x \cdot yz) \cdot zy$	$\approx x \cdot yz \cdot_{\mathbf{F}_3} zy,$
(31)	$(x \cdot yz) \cdot xyz$	$\approx x \cdot yz \cdot_{\mathbf{F}_3} xyz,$
(32)	$(x \cdot yz) \cdot yxz$	$\approx x \cdot yz \cdot_{\mathbf{F}_3} yxz,$
(33)	$(x \cdot yz) \cdot xzy$	$\approx x \cdot yz \cdot_{\mathbf{F}_3} xzy,$
(34)	$(x \cdot yz) \cdot zxy$	$\approx x \cdot yz \cdot_{\mathbf{F}_3} zxy,$
(35)	$(x \cdot yz) \cdot (y \cdot xz)$	$\approx x \cdot yz \cdot_{\mathbf{F}_3} y \cdot xz,$
(36)	$(x \cdot yz) \cdot (y \cdot zx)$	$\approx x \cdot yz \cdot_{\mathbf{F}_3} y \cdot zx,$
(37)	$(x \cdot yz) \cdot (z \cdot xy)$	$\approx x \cdot yz \cdot_{\mathbf{F}_3} z \cdot xy,$
(38)	$(x \cdot yz) \cdot (z \cdot yx)$	$\approx x \cdot yz \cdot_{\mathbf{F}_3} z \cdot yx.$

Tabela 2.1: *Identiteti koji definišu slobodan grupoid nad tri generatora u 3-kvazilinearnom varijetetu.*

Dokaz. Na osnovu Teoreme 2.1.1 dovoljno je pokazati da će svi identiteti oblika $t_1 \cdot t_2 \approx t_1 \cdot_{\mathbf{F}_3} t_2$ za sve $t_1, t_2 \in F_3$, biti tačni na $\mathbf{F}_3$. Kako se term $t_1 \cdot t_2$ može dobiti supstitucijom nekog terma koji se nalazi sa leve strane $\approx$ u gore navedenim identitetima dobijamo da će term $t_1 \cdot t_2$ biti ekvivalentan linearnom termu t_l (ili termu koji se lako svodi na linearan primenom gore navedenih identiteta) koji mora biti jednak termu $t_1 \cdot_{\mathbf{F}_3} t_2$ jer bi u suprotnom dva različita elementa iz F_3 bila jednaka. $\square$

Prilikom dokazivanja postojanja egzaktno 3-linearnih jednakosnih teorija, tj. dokazivanja da je neki grupoid sa tri generatora slobodan grupoid u nekoj 3-linearnoj jednakosnoj teoriji, koristićemo se prethodnom posledicom tako što ćemo korišćenjem računarskog programa proveravati tačnost identiteta iz Tabele 2.1 na slobodnom grupoidu sa tri generatora.

Kao geometrijsku ilustraciju položaja identiteta navedenih u Posledici 2.1.2 prilažemo Kejlijevu tablicu (Tabela 2.2) za linearne terme nad skupom od tri promenljive ($a = x$, $b = y$, $c = z$, $d = xy$, $e = xz$, $f = yz$, $g = yx$, $h = zx$, $i = zy$, $j = xyz$, $k = yxz$, $l = xzy$, $m = zxy$, $n = yzx$, $o = zyx$, $p = x \cdot yz$, $q = x \cdot zy$, $r = y \cdot xz$, $s = y \cdot zx$, $t = z \cdot xy$, $u = z \cdot yx$) u kojoj su dati identiteti obeleženi simbolom $\boxtimes$, dok su preostali proizvodi, obeleženi sa $\boxdot$, ili već linearni sami po sebi, ili dobijeni supstitucijom od nekog od proizvoda sa leve strane nekog identiteta iz Tabele 2.1.

$\cdot$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	$\boxtimes$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxtimes$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxtimes$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxdot$	$\boxdot$
b	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
c	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
d	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxdot$	$\boxtimes$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxtimes$
e	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
f	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
g	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
h	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
i	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
j	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxtimes$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxdot$	$\boxdot$
k	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
l	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
m	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
n	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
p	$\boxdot$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxdot$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$	$\boxtimes$
q	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
r	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
s	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
t	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
u	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Tabela 2.2:K*ejlijeva tablica položaja identiteta* $\boxtimes$ *navedenih u Tabeli 2.1.*

2.2 Egzaktno 2-linearne jednakosne teorije i potreban uslov njihove proširivosti

Jasno je da postoji tačno jedna egzaktno 1-linearna jednakosna teorija: teorija idempotentnih grupoida. Sledeća lema nam daje sve potencijalne slobodne grupoide nad dva generatora u $*$-linearnim varijetetima.

Lema 2.2.1 ([8], Lema 2.2.1.)**.** *Postoji tačno dvanaest egzaktno 2-linearnih jednakosnih teorija. Njihovi slobodni grupoidi sa dva generatora su sledećih sedam grupoida predstavljeni u Tabeli 2.3 i njihovi duali.* (*Prva dva od sedam grupoida su identični svojim dualima.*)

$\mathbf{G}_0$	x	y	xy	yx
x	x	xy	yx	y
y	yx	y	x	xy
xy	y	yx	xy	x
yx	xy	x	y	yx

$\mathbf{G}_1$	x	y	xy	yx
x	x	xy	xy	x
y	yx	y	y	yx
xy	x	xy	xy	x
yx	yx	y	y	yx

$\mathbf{G}_2$	x	y	xy	yx
x	x	xy	xy	yx
y	yx	y	xy	yx
xy	x	y	xy	x
yx	x	y	y	yx

$\mathbf{G}_3$	x	y	xy	yx
x	x	xy	xy	yx
y	yx	y	xy	yx
xy	x	y	xy	yx
yx	x	y	xy	yx

$\mathbf{G}_4$	x	y	xy	yx
x	x	xy	x	xy
y	yx	y	yx	y
xy	xy	x	xy	x
yx	y	yx	y	yx

$\mathbf{G}_5$	x	y	xy	yx
x	x	xy	x	xy
y	yx	y	yx	y
xy	xy	xy	xy	xy
yx	yx	yx	yx	yx

$\mathbf{G}_6$	x	y	xy	yx
x	x	xy	xy	xy
y	yx	y	yx	yx
xy	xy	xy	xy	xy
yx	yx	yx	yx	yx

Tabela 2.3: *Kejlijeve tablice slobodnih grupoida* $\mathbf{G}_0, \ldots, \mathbf{G}_6$ *nad dva generatora egzaktno* 2*-linearnih jednakosnih teorija.*

Međutim, za većinu grupoida iz Tabele 2.3 ne postoje proširenja do 3--linearnih jednakosnih teorija, odnosno važi sledeća lema.

Lema 2.2.2 ([8], Lema 2.3.1.–2.3.4.)**.** *Ne postoji* 3*-linearan varijetet takav da je njegov slobodan grupoid generisan sa dva generatora jedan od grupoida* $\mathbf{G}_0$, $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_3$ *ili* $\mathbf{G}_4$.

Primetimo sledeće posledice Leme 2.2.2.

Lema 2.2.3. *Da bi jednakosna teorija bila* 3*-linearna potreban uslov je da slobodan grupoid sa dva generatora odgovarajućeg varijeteta bude izomorfan sa nekim od grupoida* $\mathbf{G}_5$, $\mathbf{G}_6$, $\mathbf{G}_5^\partial$ *ili* $\mathbf{G}_6^\partial$.

Lema 2.2.4. *Neka je* E 2*-linearna jednakosna teorija koja je proširenje jednod od grupoida* $\mathbf{G}_5$ *ili* $\mathbf{G}_6$. *Tada za terme* u, v *važi ako je identitet* $u \approx v$ *u teoriji* E *onda termi* u *i* v *imaju iste prve promenljive sa leve strane.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je prva promenljiva sa leve strane u termu u promenljiva x, a u termu v promenljiva y. Tada supstitucijom svih promenljivih sem y u promenljivu x i na osnovu osobina slobodnog grupoida nad dva generatora dobijamo da identitet $x \approx yx$ ili $x \approx y$ pripada E ako je $y \notin S(u)$, a ako je $y \in S(u)$ tada identitet $xy \approx y$ ili $xy \approx yx$ pripada teoriji E, kontradikcija. □

2.3 Proširenje $\mathbf{G}_5$

U ovom odeljku pretpostavićemo da je $\mathbf{G}_5$ slobodan grupoid sa dva generatora za jednakosnu teoriju E. Tada će se u E nalaziti sledeći identiteti

$$
\begin{aligned}
x &\approx xx,\\
x &\approx x \cdot xy,\\
xy &\approx xy \cdot x \approx xy \cdot y \approx x \cdot yx \approx xy \cdot yx,
\end{aligned}
$$

Korišćenje Leme 2.2.4 u ovom odeljku nećemo posebno naglašavati.

Pokazaćemo da za egzaktno 3-linearnu jednakosnu teoriju, kod koje je slobodan grupoid sa dva generatora izomorfan grupoidu $\mathbf{G}_5$, postoji devet mogućnosti (do na izomorfizam) za slobodan grupoid generisan sa tri generatora. Tih devet slobodnih 21-elementnih groupoida $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_9$ su predstavljeni Kejlijevim tablicama (Tabele 2.4 i 2.5 na stranama 18 i 19) sa istim nosačem $\{a, b, c, \ldots, u\}$, pri čemu je svaki od njih generisan sa tri elementa ($a = x$, $b = y$, $c = z$, $d = xy$, $e = xz$, $f = yz$, $g = yx$, $h = zx$, $i = zy$, $j = xyz$, $k = yxz$, $l = xzy$, $m = zxy$, $n = yzx$, $o = zyx$, $p = x \cdot yz$, $q = x \cdot zy$, $r = y \cdot xz$, $s = y \cdot zx$, $t = z \cdot xy$, $u = z \cdot yx$).

Primetimo da u Kejlijevoj tablici slobodnog grupoida sa tri generatora za egzaktno 3-linearnu jednakosnu teoriju, kod koje je $\mathbf{G}_5$ slobodni grupoid sa dva generatora, neki proizvodi su već definisani pomoću osobina grupoida

$\mathbf{P}_1$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	a	a	p	d	e	q	a	d	a	e	p	q	a	a	d	p	e	q
b	g	b	f	g	r	b	b	s	f	g	b	r	s	b	f	g	r	b	b	s	f
c	h	i	c	t	h	i	u	c	c	t	u	h	c	i	c	t	h	u	i	c	c
d	d	d	j	d	d	d	d	j	j	d	d	d	j	d	j	d	d	d	d	j	j
e	e	l	e	e	e	l	l	e	e	e	l	e	e	l	e	e	e	l	l	e	e
f	n	f	f	n	n	f	f	f	f	n	f	n	f	f	f	n	n	f	f	f	f
g	g	g	k	g	g	g	g	k	k	g	g	g	k	g	k	g	g	g	g	k	k
h	h	m	h	h	h	m	m	h	h	h	m	h	h	m	h	h	h	m	m	h	h
i	o	i	i	o	o	i	i	i	i	o	i	o	i	i	i	o	o	i	i	i	i
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	p	d	j	p	p	p	d	j	j	p	d	p	j	p	j	p	p	d	p	j	j
q	q	l	e	q	q	l	l	e	q	q	l	q	e	l	q	q	q	l	l	e	q
r	g	r	k	g	r	r	r	k	k	g	r	r	k	r	k	g	r	r	r	k	k
s	n	s	f	n	n	s	s	s	f	n	s	n	s	s	f	n	n	s	s	s	f
t	h	m	t	t	h	m	m	t	t	t	m	h	t	m	t	t	h	m	m	t	t
u	o	i	u	o	o	i	u	u	u	o	u	o	u	i	u	o	o	u	i	u	u

$\mathbf{P}_2$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	a	a	p	d	e	q	a	d	a	e	p	q	a	a	d	p	e	q
b	g	b	f	g	r	b	b	s	f	g	b	r	s	b	f	g	r	b	b	s	f
c	h	i	c	t	h	i	u	c	c	t	u	h	c	i	c	t	h	u	i	c	c
d	d	d	j	d	d	d	d	j	j	d	d	d	j	d	j	d	d	d	d	j	j
e	e	l	e	e	e	l	l	e	e	e	l	e	e	l	e	e	e	l	l	e	e
f	n	f	f	n	n	f	f	f	f	n	f	n	f	f	f	n	n	f	f	f	f
g	g	g	k	g	g	g	g	k	k	g	g	g	k	g	k	g	g	g	g	k	k
h	h	m	h	h	h	m	m	h	h	h	m	h	h	m	h	h	h	m	m	h	h
i	o	i	i	o	o	i	i	i	i	o	i	o	i	i	i	o	o	i	i	i	i
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	p	p	j	p	p	p	p	j	j	p	p	p	j	p	j	p	p	p	p	j	j
q	q	l	q	q	q	l	l	q	q	q	l	q	q	l	q	q	q	l	l	q	q
r	r	r	k	r	r	r	r	k	k	r	r	r	k	r	k	r	r	r	r	k	k
s	n	s	s	n	n	s	s	s	s	n	s	n	s	s	s	n	n	s	s	s	s
t	t	m	t	t	t	m	m	t	t	t	m	t	t	m	t	t	t	m	m	t	t
u	o	u	u	o	o	u	u	u	u	o	u	o	u	u	u	o	o	u	u	u	u

$\mathbf{P}_3$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	a	a	p	d	e	q	a	p	a	q	p	q	a	a	d	p	e	q
b	g	b	f	g	r	b	b	s	f	r	b	r	s	b	s	g	r	b	b	s	f
c	h	i	c	t	h	i	u	c	c	t	u	t	c	u	c	t	h	u	i	c	c
d	d	d	j	d	d	d	d	j	j	d	d	d	j	d	j	d	d	d	d	j	j
e	e	l	e	e	e	l	l	e	e	e	l	e	e	l	e	e	e	l	l	e	e
f	n	f	f	n	n	f	f	f	f	n	f	n	f	f	f	n	n	f	f	f	f
g	g	g	k	g	g	g	g	k	k	g	g	g	k	g	k	g	g	g	g	k	k
h	h	m	h	h	h	m	m	h	h	h	m	h	h	m	h	h	h	m	m	h	h
i	o	i	i	o	o	i	i	i	i	o	i	o	i	i	i	o	o	i	i	i	i
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	p	d	j	p	p	p	d	j	j	p	p	p	j	p	j	p	p	d	p	j	j
q	q	l	e	q	q	l	l	e	q	q	l	q	q	l	q	q	q	l	l	e	q
r	g	r	k	g	r	r	r	k	k	r	r	r	k	r	k	g	r	r	r	k	k
s	n	s	f	n	n	s	s	s	f	n	s	n	s	s	s	n	n	s	s	s	f
t	h	m	t	t	h	m	m	t	t	t	m	t	t	m	t	t	h	m	m	t	t
u	o	i	u	o	o	i	u	u	u	o	u	o	u	u	u	o	o	u	i	u	u

$\mathbf{P}_4$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	a	a	p	d	e	q	a	p	a	q	p	q	a	a	d	p	e	q
b	g	b	f	g	r	b	b	s	f	r	b	r	s	b	s	g	r	b	b	s	f
c	h	i	c	t	h	i	u	c	c	t	u	t	c	u	c	t	h	u	i	c	c
d	d	d	j	d	d	d	d	j	j	d	d	d	j	d	j	d	d	d	d	j	j
e	e	l	e	e	e	l	l	e	e	e	l	e	e	l	e	e	e	l	l	e	e
f	n	f	f	n	n	f	f	f	f	n	f	n	f	f	f	n	n	f	f	f	f
g	g	g	k	g	g	g	g	k	k	g	g	g	k	g	k	g	g	g	g	k	k
h	h	m	h	h	h	m	m	h	h	h	m	h	h	m	h	h	h	m	m	h	h
i	o	i	i	o	o	i	i	i	i	o	i	o	i	i	i	o	o	i	i	i	i
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	p	p	j	p	p	p	p	j	j	p	p	p	j	p	j	p	p	p	p	j	j
q	q	l	q	q	q	l	l	q	q	q	l	q	q	l	q	q	q	l	l	q	q
r	r	r	k	r	r	r	r	k	k	r	r	r	k	r	k	r	r	r	r	k	k
s	n	s	s	n	n	s	s	s	s	n	s	n	s	s	s	n	n	s	s	s	s
t	t	m	t	t	t	m	m	t	t	t	m	t	t	m	t	t	t	m	m	t	t
u	o	u	u	o	o	u	u	u	u	o	u	o	u	u	u	o	o	u	u	u	u

$\mathbf{P}_5$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	a	a	p	d	e	q	a	p	a	q	p	q	a	a	d	p	e	q
b	g	b	f	g	r	b	b	s	f	r	b	r	s	b	s	g	r	b	b	s	f
c	h	i	c	t	h	i	u	c	c	t	u	t	c	u	c	t	h	u	i	c	c
d	d	d	j	d	d	d	d	j	j	d	d	d	j	d	j	d	d	d	s	j	j
e	e	l	e	e	e	l	l	e	e	e	l	e	e	l	e	e	e	l	l	e	e
f	n	f	f	n	n	f	f	f	f	n	f	n	f	f	f	n	n	f	f	f	f
g	g	g	k	g	g	g	g	k	k	g	g	g	k	g	k	g	g	g	g	k	k
h	h	m	h	h	h	m	m	h	h	h	m	h	h	m	h	h	h	m	m	h	h
i	o	i	i	o	o	i	i	i	i	o	i	o	i	i	i	o	o	i	i	i	i
j	j	l	j	j	j	l	l	j	j	j	l	j	j	l	j	j	j	l	l	j	j
k	n	k	k	n	n	k	k	k	k	n	k	n	k	k	k	n	n	k	k	k	k
l	l	l	j	l	l	l	l	j	j	l	l	l	j	l	j	l	l	l	l	j	j
m	o	m	m	o	o	m	m	m	m	o	m	o	m	m	m	o	o	m	m	m	m
n	n	n	k	n	n	n	n	k	k	n	n	n	k	n	k	n	n	n	n	k	k
o	o	m	o	o	o	m	m	o	o	o	m	o	o	m	o	o	o	m	m	o	o
p	p	d	j	p	p	p	d	j	j	p	p	p	j	p	j	p	p	d	p	j	j
q	q	l	e	q	q	l	l	e	q	q	l	q	q	l	q	q	q	l	l	e	q
r	g	r	k	g	r	r	r	k	k	r	r	r	k	r	k	g	r	r	r	k	k
s	n	s	f	n	n	s	s	s	f	n	s	n	s	s	s	n	n	s	s	s	f
t	h	m	t	t	h	m	m	t	t	t	m	t	t	m	t	t	h	m	m	t	t
u	o	i	u	o	o	i	u	u	u	o	u	o	u	u	u	o	o	u	i	u	u

$\mathbf{P}_6$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	a	a	p	d	e	q	a	d	a	e	p	q	a	a	d	p	e	q
b	g	b	f	g	r	b	b	s	f	g	b	r	s	b	f	g	r	b	b	s	f
c	h	i	c	t	h	i	u	c	c	t	u	h	c	i	c	t	h	u	i	c	c
d	d	d	j	d	d	p	d	j	j	d	d	d	j	p	j	d	d	d	p	j	j
e	e	l	e	e	e	l	l	e	q	e	l	e	e	l	q	e	e	l	l	e	q
f	n	f	f	n	n	f	f	s	f	n	f	n	s	f	f	n	n	f	f	s	f
g	g	g	k	g	r	g	g	k	k	g	g	r	k	g	k	g	r	g	g	k	k
h	h	m	h	t	h	m	m	h	h	t	m	h	h	m	h	t	h	m	m	h	h
i	o	i	i	o	o	i	u	i	i	o	u	o	i	i	i	o	o	u	i	i	i
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	p	p	j	p	p	p	p	j	j	p	p	p	j	p	j	p	p	p	p	j	j
q	q	l	q	q	q	l	l	q	q	q	l	q	q	l	q	q	q	l	l	q	q
r	r	r	k	r	r	r	r	k	k	r	r	r	k	r	k	r	r	r	r	k	k
s	n	s	s	n	n	s	s	s	s	n	s	n	s	s	s	n	n	s	s	s	s
t	t	m	t	t	t	m	m	t	t	t	m	t	t	m	t	t	t	m	m	t	t
u	o	u	u	o	o	u	u	u	u	o	u	o	u	u	u	o	o	u	u	u	u

Tabela 2.4: *Kejlijeve tablice slobodnih grupoida* $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_6$ *nad tri generatora egzaktno* 3*-linearnih jednakosnih teorija koje su proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$*.*

$\mathbf{P}_7$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	a	a	p	d	e	q	a	p	a	q	p	q	a	a	d	p	e	q
b	g	b	f	g	r	b	b	s	f	r	b	r	s	b	s	g	r	b	b	s	f
c	h	i	c	t	h	i	u	c	c	t	u	t	c	u	c	t	h	u	i	c	c
d	d	d	j	d	d	p	d	j	j	d	p	d	j	p	j	d	d	d	p	j	j
e	e	l	e	e	e	l	l	e	q	e	l	e	q	l	q	e	e	l	l	e	q
f	n	f	f	n	n	f	f	s	f	n	f	n	s	f	s	n	n	f	f	s	f
g	g	g	k	g	r	g	g	k	k	r	g	r	k	g	k	g	r	g	g	k	k
h	h	m	h	t	h	m	m	h	h	t	m	t	h	m	h	t	h	m	m	h	h
i	o	i	i	o	o	i	u	i	i	o	u	o	i	u	i	o	o	u	i	i	i
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	p	p	j	p	p	p	p	j	j	p	p	p	j	p	j	p	p	p	p	j	j
q	q	l	q	q	q	l	l	q	q	q	l	q	q	l	q	q	q	l	l	q	q
r	r	r	k	r	r	r	r	k	k	r	r	r	k	r	k	r	r	r	r	k	k
s	n	s	s	n	n	s	s	s	s	n	s	n	s	s	s	n	n	s	s	s	s
t	t	m	t	t	t	m	m	t	t	t	m	t	t	m	t	t	t	m	m	t	t
u	o	u	u	o	o	u	u	u	u	o	u	o	u	u	u	o	o	u	u	u	u

$\mathbf{P}_8$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	a	a	p	d	e	q	a	p	a	q	p	q	a	a	d	p	e	q
b	g	b	f	g	r	b	b	s	f	r	b	r	s	b	s	g	r	b	b	s	f
c	h	i	c	t	h	i	u	c	c	t	u	t	c	u	c	t	h	u	i	c	c
d	d	d	j	d	d	p	d	j	j	d	p	d	j	p	j	d	d	d	p	j	j
e	e	l	e	e	e	l	l	e	q	e	l	e	q	l	q	e	e	l	l	e	q
f	n	f	f	n	n	f	f	s	f	n	f	n	s	f	s	n	n	f	f	s	f
g	g	g	k	g	r	g	g	k	k	r	g	r	k	g	k	g	r	g	g	k	k
h	h	m	h	t	h	m	m	h	h	t	m	t	h	m	h	t	h	m	m	h	h
i	o	i	i	o	o	i	u	i	i	o	u	o	i	u	i	o	o	u	i	i	i
j	j	l	j	j	j	l	l	j	j	j	l	j	j	l	j	j	j	l	l	j	j
k	n	k	k	n	n	k	k	k	k	n	k	n	k	k	k	n	n	k	k	k	k
l	l	l	j	l	l	l	l	j	j	l	l	l	j	l	j	l	l	l	l	j	j
m	o	m	m	o	o	m	m	m	m	o	m	o	m	m	m	o	o	m	m	m	m
n	n	n	k	n	n	n	n	k	k	n	n	n	k	n	k	n	n	n	n	k	k
o	o	m	o	o	o	m	m	o	o	o	m	o	o	m	o	o	o	m	m	o	o
p	p	d	j	p	p	p	d	j	j	p	p	p	j	p	j	p	p	d	p	j	j
q	q	l	e	q	q	l	l	e	q	q	l	q	q	l	q	q	q	l	l	e	q
r	g	r	k	g	r	r	r	k	k	r	r	r	k	r	k	g	r	r	r	k	k
s	n	s	f	n	n	s	s	s	f	n	s	n	s	s	s	n	n	s	s	s	f
t	h	m	t	t	h	m	m	t	t	t	m	t	t	m	t	t	h	m	m	t	t
u	o	i	u	o	o	i	u	u	u	o	u	o	u	u	u	o	o	u	i	u	u

$\mathbf{P}_9$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	a	a	p	d	e	q	a	p	a	q	p	q	a	a	d	p	e	q
b	g	b	f	g	r	b	b	s	f	r	b	r	s	b	s	g	r	b	b	s	f
c	h	i	c	t	h	i	u	c	c	t	u	t	c	u	c	t	h	u	i	c	c
d	d	d	j	d	d	p	d	j	j	d	p	d	j	p	j	d	d	d	p	j	j
e	e	l	e	e	e	l	l	e	q	e	l	e	q	l	q	e	e	l	l	e	q
f	n	f	f	n	n	f	f	s	f	n	f	n	s	f	s	n	n	f	f	s	f
g	g	g	k	g	r	g	g	k	k	r	g	r	k	g	k	g	r	g	g	k	k
h	h	m	h	t	h	m	m	h	h	t	m	t	h	m	h	t	h	m	m	h	h
i	o	i	i	o	o	i	u	i	i	o	u	o	i	u	i	o	o	u	i	i	i
j	j	l	j	j	j	l	l	j	j	j	l	j	j	l	j	j	j	l	l	j	j
k	n	k	k	n	n	k	k	k	k	n	k	n	k	k	k	n	n	k	k	k	k
l	l	l	j	l	l	l	l	j	j	l	l	l	j	l	j	l	l	l	l	j	j
m	o	m	m	o	o	m	m	m	m	o	m	o	m	m	m	o	o	m	m	m	m
n	n	n	k	n	n	n	n	k	k	n	n	n	k	n	k	n	n	n	n	k	k
o	o	m	o	o	o	m	m	o	o	o	m	o	o	m	o	o	o	m	m	o	o
p	p	p	j	p	p	p	p	j	j	p	p	p	j	p	j	p	p	p	p	j	j
q	q	l	q	q	q	l	l	q	q	q	l	q	q	l	q	q	q	l	l	q	q
r	r	r	k	r	r	r	r	k	k	r	r	r	k	r	k	r	r	r	r	k	k
s	n	s	s	n	n	s	s	s	s	n	s	n	s	s	s	n	n	s	s	s	s
t	t	m	t	t	t	m	m	t	t	t	m	t	t	m	t	t	t	m	m	t	t
u	o	u	u	o	o	u	u	u	u	o	u	o	u	u	u	o	o	u	u	u	u

Tabela 2.5: *Kejlijeve tablice slobodnih grupoida* $\mathbf{P}_7, \mathbf{P}_8, \mathbf{P}_9$ *nad tri generatora egzaktno* 3*-linearnih jednakosnih teorija koje su proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$.

$x \cdot xyz$,	$xy \cdot xz$,	$xyz \cdot x$,	$(x \cdot yz) \cdot y$,
$x \cdot yxz$,	$xy \cdot yz$,	$xyz \cdot y$,	$(x \cdot yz) \cdot z$,
$x \cdot (y \cdot xz)$,	$xy \cdot zx$,	$xyz \cdot xz$,	$(x \cdot yz) \cdot xy$,
$x \cdot (y \cdot zx)$,	$xy \cdot zy$,	$xyz \cdot yz$,	$(x \cdot yz) \cdot xz$,
	$xy \cdot yxz$,	$xyz \cdot yx$,	$(x \cdot yz) \cdot yx$,
	$xy \cdot xzy$,	$xyz \cdot zx$,	$(x \cdot yz) \cdot zx$,
	$xy \cdot zxy$,	$xyz \cdot zy$,	$(x \cdot yz) \cdot zy$,
	$xy \cdot yzx$,	$xyz \cdot yxz$,	$(x \cdot yz) \cdot xyz$,
	$xy \cdot zyx$,	$xyz \cdot xzy$,	$(x \cdot yz) \cdot yxz$,
	$xy \cdot (x \cdot yz)$,	$xyz \cdot zxy$,	$(x \cdot yz) \cdot xzy$,
	$xy \cdot (x \cdot zy)$,	$xyz \cdot yzx$,	$(x \cdot yz) \cdot zxy$,
	$xy \cdot (y \cdot xz)$,	$xyz \cdot zyx$,	$(x \cdot yz) \cdot zyx$,
	$xy \cdot (y \cdot zx)$,	$xyz \cdot (x \cdot yz)$,	$(x \cdot yz) \cdot (x \cdot zy)$,
	$xy \cdot (z \cdot yx)$,	$xyz \cdot (x \cdot zy)$,	$(x \cdot yz) \cdot (y \cdot xz)$,
		$xyz \cdot (y \cdot xz)$,	$(x \cdot yz) \cdot (y \cdot zx)$,
		$xyz \cdot (y \cdot zx)$,	$(x \cdot yz) \cdot (z \cdot xy)$,
		$xyz \cdot (z \cdot yx)$,	$(x \cdot yz) \cdot (z \cdot yx)$,

Tabela 2.6: *Skup terma (koji su u obliku proizvoda linearnih terma) koje treba "linearizovati" i iz kojih se dalje mogu izvesti sve ostale "linearizacije" terma koje su u obliku proizvoda linearnih terma nad tri promenljive preimenovanjem promenljivih x, y, z.*

$\mathbf{G}_5$ (Kejlijeva tablica $\mathbf{G}_5'$, Tabela 2.7 na strani 21), dok je za određivanje ostalih elemenata Kejlijeve tablice dovoljno definisati proizvode iz Tabele 2.1, ili Tabele 2.6 (obeleženi u Kejlijevoj tablici $\mathbf{P}'$ sa kvadratićima, Tabela 2.7 na strani 21) koji obuhvata širi skup proizvoda ali se svi ostali proizvodi u Kejlijevoj tablici dobijaju preimenovanjem promenljivih.

Primetimo još da za jednakosnu teoriju koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ važi da svaka dva terma t_1, t_2 takva da identitet $t_1 \approx t_2$ pripada toj jednakosnoj teoriji imaju iste prve promenljive sa leve strane. Prema tome, ako je x prva promenljiva sa leve strane u termu t nad promenljivama x, y, z, tada postoji sedam kandidata linearnih terma koji mogu biti ekvivalentni sa termom t u 3-linearnoj jednakosnoj teoriji, i to su termi x, xy, xz, xyz, xzy, $x \cdot yz$ i $x \cdot zy$.

U pododeljku 2.3.1 posmatraćemo jednakosnu teoriju E koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$, dok ćemo u pododeljcima 2.3.2, 2.3.3 i 2.3.4 posmatrati 3-linearnu jednakosnu teoriju E koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$.

U ovom odeljku koristićemo se parcijalnim grupoidima $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{H}_3$ (sa istim nosačem $\{a, b, c, \ldots, u\}$ kao i grupoidi $\mathbf{G}_5', \mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_9$) pomoću kojih ćemo uspostaviti vezu između grupoida $\mathbf{G}_5'$ i grupoida $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_9$ pred-

$\mathbf{G}'_5$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	a	a	p	d	e	q	.	.	.	.	p	q	a	a	.	.	.	.
b	g	b	f	g	r	b	b	s	f	.	.	r	s	.	.	.	.	b	b	.	.
c	h	i	c	t	h	i	u	c	c	t	u	.	.	.	.	.	.	.	.	c	c
d	d	d	j	d	.	.	d	.	.	d	.	.	.	.	.	.	.	.	.	j	.
e	e	l	e	.	e	.	.	e	.	.	.	e	.	.	.	.	.	l	.	.	.
f	n	f	f	.	.	f	.	.	f	.	.	.	.	f	.	n	.	.	.	.	.
g	g	g	k	g	.	.	g	.	.	.	g	.	.	.	.	.	.	.	.	.	k
h	h	m	h	.	h	.	.	h	.	.	.	.	h	.	.	.	.	.	m	.	.
i	o	i	i	.	.	i	.	.	i	.	.	.	.	.	i	.	o	.	.	.	.
j	.	.	j	j	.	.	.	.	.	j	.	.	.	.	.	.	.	.	.	j	.
k	.	.	k	.	.	.	k	.	.	.	k	.	.	.	.	.	.	.	.	.	k
l	.	l	.	.	l	.	.	.	.	.	.	l	.	.	.	.	.	l	.	.	.
m	.	m	.	.	.	.	.	m	.	.	.	.	m	.	.	.	.	.	m	.	.
n	n	.	.	.	.	n	.	.	.	.	.	.	.	n	.	n	.	.	.	.	.
o	o	.	.	.	.	.	.	.	o	.	.	.	.	.	o	.	o	.	.	.	.
p	p	.	.	.	.	p	.	.	.	.	.	.	.	p	.	p	.	.	.	.	.
q	q	.	.	.	.	.	.	.	q	.	.	.	.	.	q	.	q	.	.	.	.
r	.	r	.	.	r	.	.	.	.	.	.	r	.	.	.	.	.	r	.	.	.
s	.	s	.	.	.	.	.	s	.	.	.	.	s	.	.	.	.	.	s	.	.
t	.	.	t	t	.	.	.	.	.	t	.	.	.	.	.	.	.	.	.	t	.
u	.	.	u	.	.	.	u	.	.	.	u	.	.	.	.	.	.	.	.	.	u

$\mathbf{P}'$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	.	.	.	.	.	.	.	.	.	□	□	.	.	.	.	.	.	□	□	.	.
b	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
c	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
d	.	.	.	.	□	□	.	□	□	.	□	□	□	□	□	□	□	□	□	.	□
e	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
f	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
g	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
h	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
i	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
j	□	□	.	.	□	□	□	□	□	.	□	□	□	□	□	□	□	□	□	.	□
k	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
l	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
m	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
n	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
o	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
p	.	□	□	□	□	.	□	□	□	□	□	□	□	.	□	.	□	□	□	□	□
q	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
r	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
s	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
t	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
u	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Tabela 2.7: *Parcijalna Kejlijeva tablica* $\mathbf{G}'_5$ *proizvoda u slobodnom grupoidu nad tri gneratora koji su određeni osobinama grupoida* $\mathbf{G}_5$*, i parcijalna Kejlijeva tablica* $\mathbf{P}'$ *položaja proizvoda linearnih terma iz Tabele 2.6.*

stavljenu na Slici 2.1 (strana 22), pri čemu na Slici relacija $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ znači da su svi proizvodi koji su definisani u grupoidu $\mathbf{A}$ na isti način definisani i u grupoidu $\mathbf{B}$.

2.3.1 Osobine proširenja $\mathbf{G}_5$

Kao što smo i najavili dalje u ovom pododeljku bavićemo se (ne nužno egzaktno 3-linearnom) jednakosnom teorijom E koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$. Kroz Leme 2.3.1–2.3.7 ćemo za svaki term $t \in \{xy \cdot xz, xyzx, x(yz)z, xy \cdot zy, x \cdot xyz, x \cdot (y \cdot xz), xy \cdot zx\}$ ako postoji linearan term t' takav da je identitet $t \approx t'$ sadržan u E pronaći linearan term t', tj. važiće neki od identiteta (1)–(7) u zavisnosti od izbora terma t.

Lema 2.3.1. *([8], Lema 2.4.1–2.4.3) Neka je E jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$. Tada E sadrži identitet:*

(1) $xy \cdot xz \approx xy$ akko je term $xy \cdot xz$ ekvivalentan linearnom termu u E,

(2) $xyzx \approx xyz$ akko je term $xyzx$ ekvivalentan linearnom termu u E,

(3) $x(yz)z \approx xyz$ akko je term $x(yz)z$ ekvivalentan linearnom termu u E.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \mathbf{G}_5' \arrow[d] & & & & \\
 & & & & \mathbf{H}_0 \arrow[dlll] \arrow[dl] \arrow[ddr] \arrow[drrr] & & & & \\
 & \mathbf{H}_1 \arrow[dl] \arrow[d] & & \mathbf{H}_2 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & & & & \mathbf{H}_3 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 & \mathbf{P}_6 & \mathbf{P}_7 & \mathbf{P}_8 & \mathbf{P}_9,
\end{tikzcd}
$$

Slika 2.1: *Dijagram parcijalnih grupoida u odnosu na relaciju* $\to$.

Dokaz. Identiteti $(1), (2), (3)$ su redom pokazani u Lemama 2.4.1,2.4.2 i 2.4.3 u [8] za 3-linearne jednakosne teorije, ali argumenti korišćeni u dokazima ovih Lema se mogu na isti ili sličan način iskoristiti za dokazivanje ove Leme. Jedina razlika u dokazu je što u [8] se na primer linearnim identitetom nad skupom od tri promenljive dolazi u kontradikciju zbog uslova linearnosti a ovde se tim identitetom obezbeđuju tvrđenja ove Leme. $\square$

Lema 2.3.2. *Neka je E jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$. Tada E sadrži identitet*

(4) $xy \cdot zy \approx xyz$

akko je term $xy \cdot zy$ ekvivalentan linearnom termu u E.

Dokaz. Neka je u linearan term takav da je identitet $u \approx xy \cdot zy$ sadržan u E. Ako je u jednak sa x, xz ili $x \cdot zy$, dolazimo u kontradikciju primenom supstitucije $z \mapsto x$. Ako je u jednak xy ili $x \cdot yz$, dolazimo u kontradikciju primenom supstitucije $y \mapsto x$. Pretpostavimo da je $u = xzy$. Tada važi da je $xyz \approx xz \cdot yz \approx (x \cdot yz) \cdot (z \cdot yz) \approx_{\mathbf{G}_5} x \cdot yz \cdot zy \approx (x \cdot zy) \cdot (yz \cdot zy) \approx (x \cdot zy) \cdot (y \cdot zy) \approx xy \cdot zy \approx xzy$, čime je tvrđenje Leme dokazano. $\square$

Lema 2.3.3. *([8], Lema 2.5.1) Neka je t term, i neka se u jednakosnoj teoriji E nalaze sledeći identiteti:*

$$
\begin{aligned}
t \cdot x &\approx t, \\
t \cdot y &\approx t, \\
t \cdot z &\approx t, \\
xy \cdot zy &\approx xyz.
\end{aligned}
$$

Tada je $t \cdot s \approx t$ za sve linearne terme s takve da $S(s) \subseteq \{x, y, z\}$.

Posledica 2.3.4. *Neka je t term nad skupom od tri promenljive, i neka je E 3-linearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ i sadrži sledeće identitete:*

$$\begin{aligned} t \cdot x &\approx t, \\ t \cdot y &\approx t, \\ t \cdot z &\approx t, \end{aligned}$$

Tada je $t \cdot s \approx t$ za sve linearne terme s takve da $S(s) \subseteq \{x, y, z\}$.

Dokaz. Posledica Lema 2.3.2 i 2.3.3. □

Lema 2.3.5. *Neka je E jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$. Tada E sadrži identitet*

(5) $x \cdot xyz \approx x$

akko je term $x \cdot xyz$ ekvivalentan linearnom termu u E.

Dokaz. Neka je u linearan term takav da je identitet $u \approx x \cdot xyz$ sadržan u E. Ako je u jednak sa xy, xz, xyz, xzy, $x \cdot yz$ ili $x \cdot zy$, dolazimo u kontradikciju primenom supstitucije $z \mapsto y$. Jedina preostala mogućnost je $u = x$. □

Lema 2.3.6. *Neka je E jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$. Tada E sadrži identitet*

(6) $x \cdot (y \cdot xz) \approx xy$

akko je term $x \cdot (y \cdot xz)$ ekvivalentan linearnom termu u E.

Dokaz. Neka je u linearan term takav da je identitet $u \approx x \cdot (y \cdot xz)$ sadržan u E. Ako je u jednak sa x ili xz, dolazimo u kontradikciju primenom supstitucije $z \mapsto x$. Ako je u jednak sa xyz, xzy ili $x \cdot zy$, dolazimo u kontradikciju primenom supstitucije $y \mapsto x$. Pretpostavimo da je $u = x \cdot yz$. Tada važi $yx \approx y(x \cdot xz) \approx y(x(y \cdot xz)) \approx y(x \cdot yz) \approx y \cdot xz$, čime je tvrđenje Leme dokazano. □

Lema 2.3.7. *Neka je E jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$. Tada E sadrži identitet*

(7) $xy \cdot zx \approx xyz$

akko je term $xy \cdot zx$ *ekvivalentan linearnom termu u* E*.*

Dokaz. Neka je u linearan term takav da je identitet $u \approx xy \cdot zx$ sadržan u E. Ako je u jednak sa x, xz ili $x \cdot zy$, dolazimo u kontradikciju primenom supstitucije $z \mapsto x$. Ako je u jednak sa xy ili $x \cdot yz$, dolazimo u kontradikciju primenom supstitucije $y \mapsto x$. Pretpostavimo da je $u = xzy$. Tada važi $xzy \approx xy \cdot zx \approx (x \cdot zx) \cdot yx \approx xz \cdot yx \approx xyz$, čime je tvrđenje Leme dokazano. □

Lema 2.3.8. *Neka je* E *jednakosna teorija koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$ *i sarži identitete* (1)–(7)*. Tada sledeći identiteti pripadaju jednakosnoj teoriji* E*:*

(8) $x \cdot (y \cdot zx) \approx x \cdot yz$,

(9) $xy \cdot xzy \approx xy$, $xy \cdot zxy \approx xyz$, $xy \cdot zyx \approx xyz$, $xy \cdot (x \cdot yz) \approx xy$, $xy \cdot (x \cdot zy) \approx xy$,

(10) $xy \cdot (y \cdot xz) \approx xy$,

(11) $xy \cdot (z \cdot yx) \approx xyz$,

(12) $xyz \cdot xz \approx xyz$,

(13) $xyz \cdot zx \approx xyz$,

(14) $xyz \cdot zy \approx xyz$,

(15) $xyz \cdot zxy \approx xyz$,

(16) $xyz \cdot zyx \approx xyz$,

(17) $xyz \cdot (x \cdot yz) \approx xyz$,

(18) $xyz \cdot (x \cdot zy) \approx xyz$,

(19) $xyz \cdot (z \cdot yx) \approx xyz$,

(20) $(x \cdot yz) \cdot xy \approx x \cdot yz$, $(x \cdot yz) \cdot xz \approx x \cdot yz$, $(x \cdot yz) \cdot (x \cdot zy) \approx x \cdot yz$,

(21) $(x \cdot yz) \cdot zy \approx xyz$,

(22) $(x \cdot yz) \cdot zx \approx xyz$, $(x \cdot yz) \cdot zyx \approx xyz$,

(23) $(x \cdot yz) \cdot xyz \approx x \cdot yz$,

(24) $(x \cdot yz) \cdot xzy \approx x \cdot yz$,

(25) $(x \cdot yz) \cdot zxy \approx xyz,$

(26) $(x \cdot yz) \cdot (y \cdot zx) \approx x \cdot yz,$

(27) $(x \cdot yz) \cdot (z \cdot xy) \approx xyz,$

(28) $(x \cdot yz) \cdot (z \cdot yx) \approx xyz.$

Dokaz.

(8) $x \cdot (y \cdot zx) \approx x \cdot ((y \cdot zx) \cdot x) \approx_{(3)} x \cdot yzx \approx x \cdot yz,$

(9) primenom (1), (4) i (7)

(10) $xy \cdot (y \cdot xz) \approx_{(6)} (x \cdot (y \cdot xz)) \cdot (y \cdot xz) \approx (x \cdot (y \cdot xz)) \approx_{(6)} xy,$

(11) $xy \cdot (z \cdot yx) \approx (x \cdot yx) \cdot (z \cdot yx) \approx_{(4)} (x \cdot yx) \cdot z \approx xyz,$

(12) $xyz \cdot xz \approx_{(4)} xyz \cdot x \approx_{(2)} xyz,$

(13) $xyz \cdot zx \approx_{(7)} (xy \cdot zx) \cdot zx \approx xy \cdot zx \approx_{(7)} xyz,$

(14) $xyz \cdot zy \approx_{(4)} (xy \cdot zy) \cdot zy \approx xy \cdot zy \approx_{(4)} xyz,$

(15) $xyz \cdot zxy \approx_{(9)} (xy \cdot zxy) \cdot zxy \approx xy \cdot zxy \approx_{(9)} xyz,$

(16) $xyz \cdot zyx \approx_{(9)} (xy \cdot zyx) \cdot zyx \approx xy \cdot zyx \approx_{(9)} xyz,$

(17) $xyz \cdot (x \cdot yz) \approx_{(3)} (x \cdot yz \cdot y) \cdot (x \cdot yz)) \approx_{\mathbf{G}_5} x \cdot yz \cdot y \approx_{(3)} xyz,$

(18) $xyz \cdot (x \cdot zy) \approx_{(4)} (xy \cdot zy) \cdot (x \cdot zy) \approx_{(4)} (xy \cdot zy) \cdot x \approx_{(4)} xyz \cdot x \approx_{(2)} xyz,$

(19) $xyz \cdot (z \cdot yx) \approx (xy \cdot z) \cdot (z \cdot (y \cdot xy)) \approx_{(7)} (xy \cdot z) \cdot ((z \cdot (y \cdot xy)) \cdot xy) \approx_{(3)}$
$(xy \cdot z) \cdot (zy \cdot xy) \approx_{(7)} (xy \cdot z) \cdot zy \approx_{(14)} xyz,$

(20) primenom (1),

(21) $(x \cdot yz) \cdot zy \approx (x \cdot yz) \cdot (z \cdot yz) \approx_{(4)} (x \cdot yz) \cdot z \approx_{(3)} xyz,$

(22) primenom (7) i (3),odnosno (7) i (21),

(23) $(x \cdot yz) \cdot xyz \approx_{(3)} (x \cdot yz) \cdot (x \cdot yz \cdot z) \approx x \cdot yz,$

(24) $(x \cdot yz) \cdot xzy \approx_{(4)} (x \cdot yz) \cdot (xz \cdot yz) \approx_{(4)} (x \cdot yz) \cdot xz \approx_{(1)} x \cdot yz,$

(25) $(x \cdot yz) \cdot zxy \approx_{(7)} (x \cdot yz) \cdot (zx \cdot yz) \approx_{(4)} (x \cdot yz) \cdot zx \approx_{(22)} xyz,$

(26) $(x \cdot yz) \cdot (y \cdot zx) \approx_{(7)} (x \cdot yz) \cdot (y \cdot zx \cdot x) \approx_{(3)} (x \cdot yz) \cdot yzx \approx x \cdot yz,$

$\mathbf{H}_0$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	a	a	p	d	e	q	a	$\square$	a	.	p	q	a	a	d	p	e	q
b	g	b	f	g	r	b	b	s	f	.	b	r	s	b	.	g	r	b	b	s	f
c	h	i	c	t	h	i	u	c	c	t	u	.	c	.	c	t	h	u	i	c	c
d	d	d	j	d	d	$\square$	d	j	j	d	$\square$	d	j	$\square$	j	d	d	d	$\square$	j	j
e	e	l	e	e	e	l	l	e	.	e	l	e	.	l	.	e	e	l	l	e	.
f	n	f	f	n	n	f	f	.	f	n	f	n	.	f	.	n	n	f	f	.	f
g	g	g	k	g	.	g	g	k	k	.	g	.	k	g	k	g	.	g	g	k	k
h	h	m	h	.	h	m	m	h	h	.	m	.	h	m	h	.	h	m	m	h	h
i	o	i	i	o	o	i	.	i	i	o	.	o	i	.	i	o	o	.	i	i	i
j	j	$\square$	j	j	j	$\square$	$\square$	j	j	j	$\square$	$\square$	j	$\square$	j	j	j	$\square$	$\square$	j	j
k	.	k	k	.	.	k	k	k	k	.	k	.	k	.	k	.	.	k	k	k	k
l	l	l	.	l	l	l	l	.	.	.	l	l	.	l	.	l	l	l	l	.	.
m	.	m	m	.	.	m	m	m	m	.	m	.	m	m	.	.	.	m	m	m	m
n	n	n	.	n	n	n	n	.	.	n	.	n	.	n	.	n	n	n	n	.	.
o	o	.	o	o	o	.	.	o	o	o	.	o	.	.	o	o	o	.	.	o	o
p	p	$\square$	j	p	p	p	$\square$	j	j	p	$\square$	p	j	p	j	p	p	$\square$	p	j	j
q	q	l	.	q	q	l	l	.	q	q	l	q	.	l	q	q	q	l	l	.	q
r	.	r	k	.	r	r	r	k	k	.	r	r	k	r	k	.	r	r	r	k	k
s	n	s	.	n	n	s	s	s	.	n	s	n	s	s	.	n	n	s	s	s	.
t	.	m	t	t	.	m	m	t	t	t	m	.	t	m	t	t	.	m	m	t	t
u	o	.	u	o	o	.	u	u	u	o	u	o	u	.	u	o	o	u	.	u	u

Tabela 2.8: *Kejlijeva tablica parcijalnog grupoida* $\mathbf{H}_0$.

(27) $(x \cdot yz) \cdot (z \cdot xy) \approx_{(4)} (x \cdot yz) \cdot ((z \cdot xy) \cdot yz) \approx_{(21)} (x \cdot yz) \cdot zxy \approx_{(25)} xyz,$

(28) $(x \cdot yz) \cdot (z \cdot yx) \approx_{(7)} (x \cdot yz) \cdot (z \cdot yx \cdot x) \approx_{(3)} (x \cdot yz) \cdot zyx \approx_{(22)} xyz.$

$\square$

Na osnovu Lema 2.3.1, 2.3.2, 2.3.5, 2.3.6, 2.3.7 i 2.3.8 zaključujemo da je jedan deo proizvoda u Kejlijevoj tablici slobodnog grupoida sa tri generatora 3-linearnog varijeteta sa slobodnim grupoidom $\mathbf{G}_5$ nad dva generatora određen i predstavljen parcijalnim grupoidom $\mathbf{H}_0$, Tabela 2.8. Dakle, treba još odrediti proizvode iz Tabele 2.9.

Lema 2.3.9. *Neka je term t iz skupa $\{x \cdot yxz, xy \cdot yz, xy \cdot yxz, (x \cdot yz) \cdot y, (x \cdot yz) \cdot (y \cdot xz), (x \cdot yz) \cdot yxz\}$, tada jedan od identiteta $t \approx xy$ ili $t \approx x \cdot yz$ pripada jednakosnoj teoriji E koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ akko je term t ekvivalentan nekom linearnom termu u E.*

Dokaz. Neka je u linearan term takav da je identitet $u \approx t$ sadržan u E. Ako je u jednak sa x, xz ili $x \cdot zy$, dolazimo u kontradikciju primenom supstitucije

$x \cdot yxz,$	$xy \cdot yz,$	$xyz \cdot y,$	$(x \cdot yz) \cdot y,$
	$xy \cdot yxz,$	$xyz \cdot yz,$	$(x \cdot yz) \cdot yx,$
	$xy \cdot yzx,$	$xyz \cdot yx,$	$(x \cdot yz) \cdot yxz,$
	$xy \cdot (y \cdot zx),$	$xyz \cdot yxz,$	$(x \cdot yz) \cdot (y \cdot xz),$
		$xyz \cdot xzy,$	
		$xyz \cdot yzx,$	
		$xyz \cdot (y \cdot xz),$	
		$xyz \cdot (y \cdot zx),$	

Tabela 2.9: *Proizvodi koje nismo uspeli utvrditi na osnovu identiteta* (1)–(7) *u 3-linearnim jednakosnim teorijama koje su proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$.

$z \mapsto x$. Ako je u jednak sa xzy ili xyz, dolazimo u kontradikciju primenom supstitucije $y \mapsto x$. $\square$

Lema 2.3.10. *Neka je term t iz skupa $\{xyz \cdot y, xyz \cdot xzy\}$, tada jedan od identiteta $t \approx xyz$ ili $t \approx xzy$ pripada jednakosnoj teoriji E koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ akko je term t ekvivalentan nekom linearnom termu u E.*

Dokaz. Neka je u linearan term takav da je identitet $u \approx xyz \cdot y$ ili $u \approx xyz \cdot xzy$ sadržan u E. Ako je u jednak sa x, xz ili $x \cdot zy$, dolazimo u kontradikciju primenom supstitucije $z \mapsto x$. Ako je u jednak sa xy ili $x \cdot yz$, dolazimo u kontradikciju primenom supstitucije $y \mapsto x$. $\square$

Tvrđenja prethodne dve Leme nećemo naglašavati prilikom korišćenja u preostalom delu odeljka.

Lema 2.3.11. *Neka je E jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$, neka E sadrži identitete* (1)–(7) *i neka je term $xy \cdot yz$ ekvivalentan nekom linearnom termu u E. Tada su u jednakosnoj teoriji E termi $xy \cdot yz$, $xy \cdot yzx$ i $xy \cdot (y \cdot zx)$ ekvivalentni.*

Dokaz. Identitet $xy \cdot yz \approx xy \cdot yzx$ je tačan na osnovu identiteta (7). Pokažimo identitet $xy \cdot yz \approx xy \cdot (y \cdot zx)$. Razmotrimo dva slučaja (Lema 2.3.9). Prvi slučaj, ako je $xy \cdot yz \approx xy$ tada je i $xy \cdot (y \cdot zx) \approx xy$. Drugi slučaj, ako je $xy \cdot yz \approx x \cdot yz$, tada je $xy \cdot (y \cdot zx) \approx x \cdot (y \cdot zx) \approx_{(8)} x \cdot yz$. $\square$

Lema 2.3.12. *Neka je E jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ i neka E sadrži identitete* (1)–(7). *Tada su u jednakosnoj teoriji E termi $xyz \cdot y$, $xyz \cdot yx$, $xyz \cdot yz$, $xyz \cdot yxz$, $xyz \cdot yzx$, $xyz \cdot (y \cdot zx)$ i $xyz \cdot (y \cdot xz)$ ekvivalentni.*

$x \cdot yxz,$	$xy \cdot yz,$	$xyz \cdot y,$	$(x \cdot yz) \cdot y,$
	$xy \cdot yxz,$	$xyz \cdot xzy,$	$(x \cdot yz) \cdot yxz,$

Tabela 2.10: *Tabela predstavnika (jednakosnih klasa identiteta) proizvoda linearnih terma iz Tabele 2.1 ili 2.6 koji nisu linearizovani na osnovu osobina grupoida* $\mathbf{G}_5$*.*

Dokaz. Ekvivalentnost terma $xyz \cdot y$, $xyz \cdot yx$, $xyz \cdot yz$ i $xyz \cdot yxz$ sledi iz identiteta (4) i (7). Pokažimo da je svaki od poslednja tri terma ekvivalentan sa nekim od prva četiri terma. Tada važi $xyz \cdot yzx \approx_{(7)} xyz \cdot (yz \cdot xy) \approx_{(7)} xyz \cdot yz$, zatim, $xyz \cdot (y \cdot zx) \approx_{(8)} xyz \cdot (y \cdot (z \cdot xy)) \approx_{(11)} xyz \cdot y$, a zatim, $xyz \cdot (y \cdot xz) \approx_{(8)} xyz \cdot (y \cdot (x \cdot zy)) \approx_{(4)} (xy \cdot zy) \cdot (y \cdot (x \cdot zy)) \approx_{(4)} (xy \cdot zy) \cdot ((y \cdot (x \cdot zy)) \cdot zy) \approx_{(3)} (xy \cdot zy) \cdot (yx \cdot zy) \approx_{(4)} (xy \cdot zy) \cdot yx \approx_{(4)} xyz \cdot yx$. $\square$

Lema 2.3.13. *Neka je E jednakosna teorija koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$ *i neka E sadrži identitete* (1)–(7)*. Tada su u jednakosnoj teoriji E termi $(x \cdot yz) \cdot y$, $(x \cdot yz) \cdot yx$ i $(x \cdot yz) \cdot (y \cdot xz)$ ekvivalentni.*

Dokaz. Prva dva terma su ekvivalentna jer je $(x \cdot yz) \cdot y \approx_{(7)} (x \cdot yz) \cdot yx$. Pokažimo ekvivalentnost prvog i trećeg terma. Pretpostavimo suprotno, tada iz Leme 2.3.9 znamo da je jedan od ova dva terma jednak xy, a drugi $x \cdot yz$. Ako pomnozimo oba terma sa desne strane sa xz, dobijamo jednakost, jer je $((x \cdot yz) \cdot y) \cdot xz \approx_{(3)} ((x \cdot yz) \cdot (y \cdot xz)) \cdot xz$, sto implicira da je $xy \cdot xz \approx (x \cdot yz) \cdot xz$. Dakle, prema (1) dobijamo $xy \approx x \cdot yz$, kontradikcija. $\square$

Na osnovu Lema 2.3.11, 2.3.12 i 2.3.13 da bi proizvodi u Kejlijevoj tablici slobodnog grupoida sa tri generatora 3-linearnog varijeteta (čiji je slobodan grupoid nad dva generatora $\mathbf{G}_5$) bili definisani treba još odrediti proizvode navedene u Tabeli 2.10.

U narednim pododeljcima pretpostavićemo da je E 3-linearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$, odakle sledi da jednakosna teorija E sadrži identitete (1)–(7), prema tome, moći ćemo koristiti sve osobine Lema pokazane u ovom pododeljku, ali isto tako Leme iz ovog odeljka ćemo moći koristititi i u slučaju kvazilinearnih jednakosnih teorija koje su proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$.

2.3.2 3-linearna proširivost $\mathbf{G}_5$ sa $xy \cdot yz \approx xy$

Neka je u ovom pododeljku E 3-linearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ i neka sadrži identitet

$$xy \cdot yz \approx xy. \quad (a)$$

Lema 2.3.14. *Jednakosna teorija E sadrži identitet $xyz \cdot xzy \approx xyz$.*

Dokaz. $xyz{\cdot}xzy \approx_{(2)} (xyz{\cdot}x){\cdot}(xz{\cdot}y) \approx_{(4)} (xyz{\cdot}xz){\cdot}(xz{\cdot}y) \approx_{(a)} xyz{\cdot}xz \approx_{(4)} xyz \cdot x \approx_{(2)} xyz$. □

Lema 2.3.15. *Neka je t linearan term na promenljivama x, y, z i neka je prva promenljiva sa leve strane u tom termu promenljiva y. Tada jednakosna teorija E sadrži identitet $xy \cdot t \approx xy$.*

Dokaz. Ako je term t oblika $y{\cdot}t_1$ tvrđenje teoreme sledi direktno iz identiteta (a). U preostalim slučajevima važi da je

$$xy \cdot yxz \approx_{\mathbf{G}_5} (x \cdot yx) \cdot (yx \cdot z) \approx_{(a)} x \cdot yx \approx xy, \text{ i}$$
$$xy \cdot yzx \approx_{(7)} xy \cdot yz \approx_{(a)} xy.$$

□

Na osnovu pretpostavke (a) i 3-linearnosti jednakosne teorije E, a samim tim i identiteta $(1), (4), (7), (9), (11)$, kao i zbog Leme 2.3.15, za svaki linearan term t nad promenljivama x, y, z važi da je term oblika $xy \cdot t$ ekvivalentan linearnom termu xy ili xyz. (Napomena: Jedinstvenost linearnih terma nije dokazana).

Lema 2.3.16. *Neka je E 3-linearna jednakosna teorija (koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$) u kojoj se pored (a) nalazi identitet $x \cdot yxz \approx xy$. Tada se identitet $xyz \cdot y \approx xyz$ takođe nalaze u jednakosnoj teoriji E.*

Dokaz. Pretpostavimo da važi identitet $xyz \cdot y \approx xzy$ u jednakosnoj teoriji E. Tada je $yx \approx y \cdot xyz \approx y \cdot (xyz \cdot y) \approx y \cdot xzy \approx y \cdot xz$, kontradikcija. Dakle, na osnovu Leme 2.3.10 sledi da je $xyz \cdot y \approx xyz$. □

Na osnovu Lema 2.3.14 i 2.3.16 zaključujemo da je veći deo slobodnog grupoida sa tri generatora jednakosne teorije E u kojoj važe identiteti $xy \cdot yz \approx xy$, $x \cdot yxz \approx xy$ određen, tj. treba još odrediti $((x \cdot yz) \cdot y)^*$ i $((x \cdot yz) \cdot yxz)^*$, a u Kejlijevoj tablici parcijalnog grupoida $\mathbf{H}_1$ (Tabela 2.11) su predstavljeni poznati proizvodi.

Lema 2.3.17. *Ako su identiteti $xy \cdot yz \approx xy$ (a), i $x \cdot yxz \approx xy$ sadržani u 3-linearnoj jednakosnoj teoriji koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$, tada su jedini mogući slobodni grupoidi sa tri generatora $\mathbf{P}_1$ i $\mathbf{P}_2$.*

$\mathbf{H}_1$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	a	a	p	d	e	q	a	d	a	e	p	q	a	a	d	p	e	q
b	g	b	f	g	r	b	b	s	f	g	b	r	s	b	f	g	r	b	b	s	f
c	h	i	c	t	h	i	u	c	c	t	u	h	c	i	c	t	h	u	i	c	c
d	d	d	j	d	d	d	d	j	j	d	d	d	j	d	j	d	d	d	d	j	j
e	e	l	e	e	e	l	l	e	e	e	l	e	e	l	e	e	e	l	l	e	e
f	n	f	f	n	n	f	f	f	f	n	f	n	f	f	f	n	n	f	f	f	f
g	g	g	k	g	g	g	g	k	k	g	g	g	k	g	k	g	g	g	g	k	k
h	h	m	h	h	h	m	m	h	h	h	m	h	h	m	h	h	h	m	m	h	h
i	o	i	i	o	o	i	i	i	i	o	i	o	i	i	i	o	o	i	i	i	i
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	p	$\square$	j	p	p	p	.	j	j	p	$\square$	p	j	p	j	p	p	$\square$	p	j	j
q	q	l	.	q	q	l	l	.	q	q	l	q	.	l	q	q	q	l	l	.	q
r	.	r	k	.	r	r	r	k	k	.	r	r	k	r	k	.	r	r	r	k	k
s	n	s	.	n	n	s	s	s	.	n	s	n	s	s	.	n	n	s	s	s	.
t	.	m	t	t	.	m	m	t	t	t	m	.	t	m	t	t	.	m	m	t	t
u	o	.	u	o	o	.	u	u	u	o	u	o	u	.	u	o	o	u	.	u	u

Tabela 2.11: *Kejlijeva tablica parcijalnog grupoida* $\mathbf{H}_1$.

Dokaz. Razmotrimo dva slučaja.

Slučaj $x \cdot yz \cdot y \approx xy$: Tada je $(x \cdot yz) \cdot yxz \approx_{(6)} (x \cdot yz) \cdot ((y \cdot (x \cdot yz)) \cdot z) \approx (x \cdot yz) \cdot y \approx xy$. Dobijamo da je slobodan grupoid sa tri generatora $\mathbf{P}_1$.

Slučaj $x \cdot yz \cdot y \approx x \cdot yz$: Tada je $(x \cdot yz) \cdot yxz \approx_{(6)} (x \cdot yz) \cdot ((y \cdot (x \cdot yz)) \cdot z) \approx (x \cdot yz) \cdot y \approx x \cdot yz$. Dobijamo da je slobodan grupoid sa tri generatora $\mathbf{P}_2$. □

Lema 2.3.18. *Neka je E 3-linearna jednakosna teorija (koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$) u kojoj se pored (a) nalazi identitet $x \cdot yxz \approx x \cdot yz$. Tada se identitet $xy \cdot yxz \approx xy$ takođe nalazi u jednakosnoj teoriji E.*

Dokaz. $xy \cdot yxz \approx (x \cdot yx) \cdot (yx \cdot z) \approx x \cdot yx \approx xy$. □

Na osnovu Lema 2.3.14 i 2.3.18 zaključujemo da je veći deo slobodnog grupoida sa tri generatora 3-linearne jednakosne teorije E u kojoj važe identiteti $xy \cdot yz \approx xy$, $x \cdot yxz \approx x \cdot yz$ određen, tj. treba još odrediti $(xyz \cdot y)^*$ i $((x \cdot yz) \cdot y)^*$, a u Kejlijevoj tablici parcijalnog grupoida $\mathbf{H}_2$ (Tabela 2.12) su predstavljeni poznati proizvodi.

$\mathbf{H}_2$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	a	a	p	d	e	q	a	p	a	q	p	q	a	a	d	p	e	q
b	g	b	f	g	r	b	b	s	f	r	b	r	s	b	s	g	r	b	b	s	f
c	h	i	c	t	h	i	u	c	c	t	u	t	c	u	c	t	h	u	i	c	c
d	d	d	j	d	d	d	d	j	j	d	p	d	j	d	j	d	d	d	d	j	j
e	e	l	e	e	e	l	l	e	e	e	l	e	e	l	e	e	e	l	l	e	e
f	n	f	f	n	n	f	f	f	f	n	f	n	f	f	f	n	n	f	f	f	f
g	g	g	k	g	g	g	g	k	k	g	g	g	k	g	k	g	g	g	g	k	k
h	h	m	h	h	h	m	m	h	h	h	m	h	h	m	h	h	h	m	m	h	h
i	o	i	i	o	o	i	i	i	i	o	i	o	i	i	i	o	o	i	i	i	i
j	j	$\square$	j	j	j	.	.	j	j	j	.	j	j	.	j	j	j	.	.	j	j
k	.	k	k	.	.	k	k	k	k	.	k	.	k	k	k	.	.	k	k	k	k
l	l	l	.	l	l	l	l	.	.	l	l	l	.	l	.	l	l	l	l	.	.
m	.	m	m	.	.	m	m	m	m	.	m	.	m	m	m	.	.	m	m	m	m
n	n	n	.	n	n	n	n	.	.	n	n	n	.	n	.	n	n	n	n	.	.
o	o	.	o	o	o	.	.	o	o	o	.	o	o	.	o	o	o	.	.	o	o
p	p	$\square$	j	p	p	p	.	j	j	p	p	p	j	p	j	p	p	.	p	j	j
q	q	l	.	q	q	l	l	.	q	q	l	q	.	l	q	q	q	l	l	.	q
r	.	r	k	.	r	r	r	k	k	.	r	r	k	r	k	.	r	r	r	k	k
s	n	s	.	n	n	s	s	s	.	n	s	n	s	s	.	n	n	s	s	s	.
t	.	m	t	t	.	m	m	t	t	t	m	.	t	m	t	t	.	m	m	t	t
u	o	.	u	o	o	.	u	u	u	o	u	o	u	.	u	o	o	u	.	u	u

Tabela 2.12: *Kejlijeva tablica parcijalnog grupoida* $\mathbf{H}_2$.

Lema 2.3.19. *Ako su identiteti* $xy \cdot yz \approx xy$ (a), *i* $x \cdot yxz \approx x \cdot yz$ *sadržani u jednakosnoj teoriji* E *koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$*, tada su jedini mogući slobodni grupoidi sa tri generatora* $\mathbf{P}_3$*,* $\mathbf{P}_4$ *i* $\mathbf{P}_5$*.*

Dokaz. Razmotrimo dva slučaja.

Slučaj $xyz \cdot y \approx xyz$: Za $x \cdot yz \cdot y \approx xy$ dobijamo grupoid $\mathbf{P}_3$, a za $x \cdot yz \cdot y \approx x \cdot yz$ dobijamo grupoid $\mathbf{P}_4$

Slučaj $xyz \cdot y \approx xzy$: Tada na osnovu identieta $x \cdot yxz \approx x \cdot yz$ sledi da je $(x \cdot yz) \cdot y \approx ((x \cdot y) \cdot yz) \cdot y \approx_{(a)} xy \cdot y \approx xy$. Dobijamo da je slobodan grupoid sa tri generatora $\mathbf{P}_5$. $\square$

2.3.3 3-linearna proširivost $\mathbf{G}_5$ sa $xy \cdot yz \approx x \cdot yz$

Neka je u ovom pododeljku E 3-linearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ i neka sadrži identitet

$$xy \cdot yz \approx x \cdot yz. \quad (b)$$

Lema 2.3.20. *Ako su identiteti* $xy \cdot yz \approx x \cdot yz$ (b), *i* $x \cdot yxz \approx xy$ *sadržani u jednakosnoj teoriji* E *koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$*, tada je jedini moguć slobodni grupoidi sa tri generatora* $\mathbf{P}_6$.

Dokaz. Tada je:

- $xy \cdot yxz \approx_{\mathbf{G}_5} (x \cdot yx) \cdot (yx \cdot z) \approx_{(b)} x \cdot (yx \cdot z) \approx xy.$
- $xyz \cdot y \approx xyz$ jer ako bi bilo $xyz \cdot y \approx xzy$ tada bi na osnovu tog identiteta i identiteta $x \cdot yxz \approx xy$ važio sledeći niz identiteta $y \cdot xz \approx y \cdot (xz \cdot y \cdot z) \approx y \cdot xyz \approx yx$, kontradikcija.
- $xyz{\cdot}xzy \approx_{(1)} ((xy{\cdot}xz){\cdot}z){\cdot}xzy \approx_{(4)} ((xy{\cdot}xzy){\cdot}z){\cdot}xzy \approx (xy{\cdot}xzy){\cdot}z \approx_{(4)} (xy \cdot xz) \cdot z \approx_{(1)} xy \cdot z.$
- $(x \cdot yz) \cdot y \approx_{(b)} ((x \cdot y) \cdot yz) \cdot y \approx xy \cdot yz \approx_{(b)} x \cdot yz$, pri čemu smo u drugom koraku koristili identitet $xyz \cdot y \approx xyz$.
- $(x \cdot yz) \cdot yxz \approx_{(6)} (x \cdot yz) \cdot ((y \cdot (x \cdot yz)) \cdot z) \approx (x \cdot yz) \cdot y \approx x \cdot yz$, pri čemu smo u drugom koraku koristili identitet $x \cdot yxz \approx xy$.

Na osnovu gore dobijenih identiteta dobijamo grupoid $\mathbf{P}_6$. □

Lema 2.3.21. *Neka je* E *3-linearna jednakosna teorija (koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$*) u kojoj se pored* (b) *nalazi identitet* $x \cdot yxz \approx x \cdot yz$*. Tada se identiteti*

- $xy \cdot yxz \approx x \cdot yz,$
- $(x \cdot yz) \cdot yxz \approx x \cdot yz,$

takođe nalaze u jednakosnoj teoriji E.

Dokaz. $xy \cdot yxz \approx_{\mathbf{G}_5} (x \cdot yx) \cdot (yx \cdot z) \approx_{(b)} x \cdot (yx \cdot z) \approx x \cdot yz,$
$(x \cdot yz) \cdot yxz \approx (x \cdot yxz) \cdot yxz \approx_{\mathbf{G}_5} x \cdot yxz \approx x \cdot yz.$ □

Na osnovu Leme 2.3.21 zaključujemo da je veći deo slobodnog grupoida sa tri generatora 3-linearne jednakosne teorije E u kojoj važe identiteti $xy \cdot yz \approx x \cdot yz$, $x \cdot yxz \approx x \cdot yz$ određen, tj. treba još odrediti $(xyz \cdot y)^*$, $(xyz \cdot xzy)^*$ i $((x \cdot yz) \cdot y)^*$, a u Kejlijevoj tablici parcijalnog grupoida $\mathbf{H}_3$ (Tabela 2.13) su predstavljeni poznati proizvodi.

Lema 2.3.22. *Ako su identiteti* $xy \cdot yz \approx x \cdot yz$ (b), *i* $x \cdot yxz \approx x \cdot yz$ *sadržani u 3-linearnoj jednakosnoj teoriji* E *koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$*, tada su jedini mogući slobodni grupoidi sa tri generatora* $\mathbf{P}_7$, $\mathbf{P}_8$ *i* $\mathbf{P}_9$.

$\mathbf{H}_3$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	a	a	p	d	e	q	a	p	a	q	p	q	a	a	d	p	e	q
b	g	b	f	g	r	b	b	s	f	r	b	r	s	b	s	g	r	b	b	s	f
c	h	i	c	t	h	i	u	c	c	t	u	t	c	u	c	t	h	u	i	c	c
d	d	d	j	d	d	p	d	j	j	d	p	d	j	p	j	d	d	d	p	j	j
e	e	l	e	e	e	l	l	e	q	e	l	e	q	l	q	e	e	l	l	e	q
f	n	f	f	n	n	f	f	s	f	n	f	n	s	f	s	n	n	f	f	s	f
g	g	g	k	g	r	g	g	k	k	r	g	r	k	g	k	g	r	g	g	k	k
h	h	m	h	t	h	m	m	h	h	t	m	t	h	m	h	t	h	m	m	h	h
i	o	i	i	o	o	i	u	i	i	o	u	o	i	u	i	o	o	u	i	i	i
j	j	$\square$	j	j	j	$\square$	$\square$	j	j	j	$\square$	$\square$	j	$\square$	j	j	j	$\square$	$\square$	j	j
k	.	k	k	.	.	k	k	k	k	.	k	.	k	.	k	.	.	k	k	k	k
l	l	l	.	l	l	l	l	.	.	.	l	l	.	l	.	l	l	l	l	.	.
m	.	m	m	.	.	m	m	m	m	.	m	.	m	m	.	.	.	m	m	m	m
n	n	n	.	n	n	n	n	.	.	n	.	n	.	n	.	n	n	n	n	.	.
o	o	.	o	o	o	.	.	o	o	o	.	o	.	.	o	o	o	.	.	o	o
p	p	$\square$	j	p	p	p	$\square$	j	j	p	p	p	j	p	j	p	p	$\square$	p	j	j
q	q	l	.	q	q	l	l	.	q	q	l	q	q	l	q	q	q	l	l	.	q
r	.	r	k	.	r	r	r	k	k	r	r	r	k	r	k	.	r	r	r	k	k
s	n	s	.	n	n	s	s	s	.	n	s	n	s	s	s	n	n	s	s	s	.
t	.	m	t	t	.	m	m	t	t	t	m	t	t	m	t	t	.	m	m	t	t
u	o	.	u	o	o	.	u	u	u	o	u	o	u	u	u	o	o	u	.	u	u

Tabela 2.13: *Kejlijeva tablica parcijalnog grupoida* $\mathbf{H}_3$.

Dokaz. Razmotrimo dva slučaja.

Slučaj $\underline{xyz \cdot y \approx xyz}$: Tada dobijamo da je $xyz \cdot xzy \approx xyz$ na osnovu Leme 2.3.4, i $(x \cdot yz) \cdot y \approx ((x \cdot y) \cdot yz) \cdot y \approx (x \cdot y) \cdot yz \approx x \cdot yz$. Dobijamo slobodan grupoid $\mathbf{P}_7$.

Slučaj $\underline{xyz \cdot y \approx xzy}$: Tada je $xyz \cdot yxz \approx_{(3)} ((x \cdot yz) \cdot z) \cdot yxz \approx ((x \cdot yxz) \cdot z) \cdot yxz \approx (x \cdot z) \cdot yxz \approx_{(4)} xz \cdot yx \approx_{(7)} xzy$. Za identitet $x \cdot yz \cdot y \approx xy$ dobijamo slobodan grupoid sa tri generatora $\mathbf{P}_8$, a za identitet $x \cdot yz \cdot y \approx x \cdot yz$ dobijamo slobodan grupoid sa tri generatora $\mathbf{P}_9$. $\square$

2.3.4 Egzaktno 3-linearna proširenja $\mathbf{G}_5$

Kao posledicu prethodna dva pododeljka imamo sledeće tvrđenje.

Teorema 2.3.23. *Postoji tačno devet egzaktno 3-linearnih jednakosnih teorija čije su slobodne algebre sa dva generatora izomorfne sa* $\mathbf{G}_5$*; njima odgovarajući slobodni grupoidi sa tri generatora su grupoidi* $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_9$.

Dokaz. Na osnovu Lema 2.3.17, 2.3.19, 2.3.20 i 2.3.22 jedini potencijalni slobodni grupoidi sa tri generatora su $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_9$. Neka je $\mathbf{P}$ grupoid iz skupa grupoida $\{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_9\}$. Iz tačnosti identiteta

$$
\begin{aligned}
x \cdot x &\approx x, \\
x \cdot xy &\approx x \ \cdot_{\mathbf{P}} \ xy, \\
x \cdot yx &\approx x \ \cdot_{\mathbf{P}} \ yx, \\
xy \cdot x &\approx xy \ \cdot_{\mathbf{P}} \ x, \\
xy \cdot y &\approx xy \ \cdot_{\mathbf{P}} \ y, \\
xy \cdot yx &\approx xy \ \cdot_{\mathbf{P}} \ yx, \\
x \cdot xyz &\approx x \cdot_{\mathbf{P}} xyz \, , (5) \\
x \cdot yxz &\approx x \cdot_{\mathbf{P}} yxz \\
x \cdot (y \cdot xz) &\approx x \cdot_{\mathbf{P}} y \cdot xz \, , (6) \\
xy \cdot xz &\approx xy \cdot_{\mathbf{P}} xz \, , (1) \\
xy \cdot zy &\approx xy \cdot_{\mathbf{P}} zy \, , (4) \\
xy \cdot zx &\approx xy \cdot_{\mathbf{P}} zx \, , (7) \\
xy \cdot yz &\approx xy \cdot_{\mathbf{P}} yz \\
xyz \cdot x &\approx xyz \cdot_{\mathbf{P}} x \, , (2) \\
xyz \cdot y &\approx xyz \cdot_{\mathbf{P}} y \\
x \cdot yz \cdot y &\approx x \cdot yz \cdot_{\mathbf{P}} y \\
x \cdot yz \cdot z &\approx x \cdot yz \cdot_{\mathbf{P}} z \, , (3)
\end{aligned}
$$

na grupoidu $\mathbf{P}$ koje smo proverili računarskim programom, tj. tačnosti osobina grupoida $\mathbf{G}_5$, identiteta (1)–(7) i definisanih proizvoda iz Tabele 2.10, sledi da važe svi identiteti iz Posledice 2.1.2. Prema tome, postoji tačno jedna egzaktno 3-linearna jenakosna teorija čiji je slobodan grupoid sa tri generatora $\mathbf{P}$. □

2.3.5 4-linearna neproširivost $\mathbf{G}_5$

Lema 2.3.24 ([8], Lema 2.4.4.)**.** *Ne postoji* 4*-linearna jednakosna teorija takva da je njen slobodan grupoid generisan sa dva generatora* $\mathbf{G}_5$*.*

Kao posledica neproširivosti grupoida $\mathbf{G}_0, \ldots, \mathbf{G}_5$ i osobina grupoida $\mathbf{G}_6$ sledi da je sledeće tvrđenje tačno.

Teorema 2.3.25 ([8], Lema 2.4.5.)**.** *Svaka* $*$*-linearna jednakosna teorija je regularna.*

2.4 Proširenje $\mathbf{G}_6$

U ovom odeljku ćemo navesti egzaktno 3-linearne jednakosne teorije, kod koje su slobodni grupoidi sa dva generatora izomorfni grupoidu $\mathbf{G}_6$, odnosno, postoji sedam mogućnosti (do na izomorfizam) za slobodan grupoid generisan sa tri generatora. Tih sedam slobodnih 21-elementnih groupoida $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_7$ su predstavljeni Kejlijevim tablicama (Tabele 2.14 i 2.15 na stranama 36 i 37) sa istim nosačem $\{a, b, c, \ldots, u\}$, pri čemu je svaki od njih generisan sa tri elementa ($a = x$, $b = y$, $c = z$, $d = xy$, $e = xz$, $f = yz$, $g = yx$, $h = zx$, $i = zy$, $j = xyz$, $k = yxz$, $l = xzy$, $m = zxy$, $n = yzx$, $o = zyx$, $p = x \cdot yz$, $q = x \cdot zy$, $r = y \cdot xz$, $s = y \cdot zx$, $t = z \cdot xy$, $u = z \cdot yx$).

2.4.1 Egzaktno 3-linearna proširenja $\mathbf{G}_6$

Teorema 2.4.1 ([8], Posledica 2.5.21.)**.** *Postoji tačno sedam egzaktno 3-linearnih jednakosnih teorija čije su slobodne algebre sa dva generatora izomorfne sa* $\mathbf{G}_6$*; njima odgovarajući slobodni grupoidi sa tri generatora su grupoidi* $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_7$.

Na osnovu osobina slobodnih grupoida $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_7$ egzaktno 3-linearnih varijeteta koja su proširenja grupoida $\mathbf{G}_6$, identiteti sa najviše tri promenljive u posmatranim varijetetima su levo nepermutaciona ([8], Lema 2.5.22.). Navedena osobina čini bazu matematičke indukcije kojom se pokazuje da je svaka $*$-linearna jednakosna teorija levo ili desno nepermutaciona ([8], Teorema 2.5.23.).

2.4.2 $*$-linearna proširenja $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_4$, i 4-linearna neproširivost $\mathbf{Q}_3$, $\mathbf{Q}_5$, $\mathbf{Q}_6$, i $\mathbf{Q}_7$

Opišimo u ovom pododeljku sve $*$-linearne jednakosne teorije.

Proširenje $\mathbf{Q}_3$, $\mathbf{Q}_5$, $\mathbf{Q}_6$, i $\mathbf{Q}_7$

Lema 2.4.2 ([8], Lema 2.6.1.)**.** *Ne postoji* 4*-linearna jednakosna teorija takva da je njen slobodan grupoid generisan sa tri generatora izomorfan sa* $\mathbf{Q}_3$*,* $\mathbf{Q}_5$*,* $\mathbf{Q}_6$ *ili* $\mathbf{Q}_7$.

$*$-linearna proširenja $\mathbf{Q}_2$ i $\mathbf{Q}_4$ su jedinstvena

Za svaku $*$-linearnu jednakosnu teoriju se može pokazati da identiteti koji važe na slobodnom grupoidu sa četiri generatora odgovarajućeg $*$-linearnog

$\mathbf{Q}_1$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	d	e	p	d	e	q	p	p	q	q	p	q	p	q	p	p	q	q
b	g	b	f	g	r	f	g	s	f	r	r	r	s	s	s	r	r	r	s	s	s
c	h	i	c	t	h	i	u	h	i	t	u	t	t	u	u	t	t	u	u	t	u
d	d	d	j	d	j	j	d	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
e	e	l	e	l	e	l	l	e	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
f	n	f	f	n	n	f	n	n	f	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
g	g	g	k	g	k	k	g	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
h	h	m	h	m	h	m	m	h	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
i	o	i	i	o	o	i	o	o	i	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p
q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r
s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u

$\mathbf{Q}_2$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	d	e	p	d	e	q	j	p	l	q	p	q	p	q	p	p	q	q
b	g	b	f	g	r	f	g	s	f	r	k	r	s	n	s	r	r	r	s	s	s
c	h	i	c	t	h	i	u	h	i	t	u	t	m	u	o	t	t	u	u	t	u
d	d	d	j	d	j	j	d	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
e	e	l	e	l	e	l	l	e	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
f	n	f	f	n	n	f	n	n	f	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
g	g	g	k	g	k	k	g	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
h	h	m	h	m	h	m	m	h	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
i	o	i	i	o	o	i	o	o	i	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p
q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r
s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u

$\mathbf{Q}_3$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	d	e	p	d	e	q	j	j	l	l	p	q	p	q	p	p	q	q
b	g	b	f	g	r	f	g	s	f	k	k	r	s	n	n	r	r	r	s	s	s
c	h	i	c	t	h	i	u	h	i	t	u	m	m	o	o	t	t	u	u	t	u
d	d	d	j	d	j	j	d	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
e	e	l	e	l	e	l	l	e	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
f	n	f	f	n	n	f	n	n	f	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
g	g	g	k	g	k	k	g	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
h	h	m	h	m	h	m	m	h	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
i	o	i	i	o	o	i	o	o	i	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p
q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r
s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u

$\mathbf{Q}_4$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	d	e	p	d	e	q	j	j	l	l	p	q	p	q	j	p	l	q
b	g	b	f	g	r	f	g	s	f	k	k	r	s	n	n	k	r	r	s	s	n
c	h	i	c	t	h	i	u	h	i	t	u	m	m	o	o	t	m	u	o	t	u
d	d	d	j	d	j	j	d	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
e	e	l	e	l	e	l	l	e	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
f	n	f	f	n	n	f	n	n	f	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
g	g	g	k	g	k	k	g	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
h	h	m	h	m	h	m	m	h	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
i	o	i	i	o	o	i	o	o	i	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p
q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r
s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u

$\mathbf{Q}_5$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	d	e	p	d	e	q	j	p	l	q	p	q	p	q	j	p	l	q
b	g	b	f	g	r	f	g	s	f	r	k	r	s	n	s	k	r	r	s	s	n
c	h	i	c	t	h	i	u	h	i	t	u	t	m	u	o	t	m	u	o	t	u
d	d	d	j	d	j	p	d	j	j	j	p	j	j	p	j	p	j	j	p	j	j
e	e	l	e	l	e	l	l	e	q	l	l	l	q	l	q	l	q	l	l	l	q
f	n	f	f	n	n	f	n	s	f	n	n	n	s	n	s	n	n	n	s	s	n
g	g	g	k	g	r	k	g	k	k	r	k	r	k	k	k	k	r	r	k	k	k
h	h	m	h	t	h	m	m	h	m	t	m	t	m	m	m	t	m	m	m	t	m
i	o	i	i	o	o	i	u	o	i	o	u	o	o	u	o	o	o	u	o	o	u
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p
q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r
s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u

$\mathbf{Q}_6$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	d	e	p	d	e	q	j	p	l	q	p	q	p	q	p	p	q	q
b	g	b	f	g	r	f	g	s	f	r	k	r	s	n	s	r	r	r	s	s	s
c	h	i	c	t	h	i	u	h	i	t	u	t	m	u	o	t	t	u	u	t	u
d	d	d	j	d	j	p	d	j	j	j	p	j	j	p	j	p	j	p	p	j	j
e	e	l	e	l	e	l	l	e	q	l	l	l	q	l	q	l	q	l	l	q	q
f	n	f	f	n	n	f	n	s	f	n	n	n	s	n	s	n	n	n	s	s	s
g	g	g	k	g	r	k	g	k	k	r	k	r	k	k	k	r	r	r	k	k	k
h	h	m	h	t	h	m	m	h	m	t	m	t	m	m	m	t	t	m	m	t	m
i	o	i	i	o	o	i	u	o	i	o	u	o	o	u	o	o	o	u	u	o	u
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p	p
q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q	q
r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r	r
s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s	s
t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t	t
u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u	u

Tabela 2.14: *Kejlijeve tablice slobodnih grupoida* $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_6$ *nad tri generatora egzaktno* 3*-linearnih jednakosnih teorija koje su proširenje grupoida* $\mathbf{G}_6$.

$\mathbf{Q}_7$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u
a	a	d	e	d	e	p	d	e	q	j	p	l	q	p	q	p	q	p	p	q	q
b	g	b	f	g	r	f	g	s	f	r	k	r	s	n	s	r	r	r	s	s	s
c	h	i	c	t	h	i	u	h	i	t	u	t	m	u	o	t	t	u	u	t	u
d	d	d	j	d	j	p	d	j	j	j	p	j	j	p	j	p	j	p	p	j	j
e	e	l	e	l	e	l	l	e	q	l	l	l	q	l	q	l	q	l	l	q	q
f	n	f	f	n	n	f	n	s	f	n	n	n	s	n	s	n	n	n	s	s	s
g	g	g	k	g	r	k	g	k	k	r	k	r	k	k	k	r	r	r	k	k	k
h	h	m	h	t	h	m	m	h	m	t	m	t	m	m	m	t	t	m	m	t	m
i	o	i	i	o	o	i	u	o	i	o	u	o	o	u	o	o	o	u	u	o	u
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	p	p	j	p	j	p	p	j	j	j	p	j	j	p	j	p	j	p	p	j	j
q	q	l	q	l	q	l	l	q	q	l	l	l	q	l	q	l	q	l	l	q	q
r	r	r	k	r	r	k	r	k	k	r	k	r	k	k	k	r	r	r	k	k	k
s	n	s	s	n	n	s	n	s	s	n	n	n	s	n	s	n	n	n	s	s	s
t	t	m	t	t	t	m	m	t	m	t	m	t	m	m	m	t	t	m	m	t	m
u	o	u	u	o	o	u	u	o	u	o	u	o	o	u	o	o	o	u	u	o	u

Tabela 2.15: *Kejlijeva tablica slobodnog grupoida* $\mathbf{Q}_7$ *nad tri generatora egzaktno* 3*-linearne jednakosne teorije koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_6$.

varijeteta pripadaju posmatranoj jednakosnoj teoriji. Prema tome, važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.4.3 ([8], Teorema 2.7.1.)**.** *Svaka* $*$*-linearna jednakosna teorija je generisana sa njenim slobodnim grupoidom sa četiri generatora.*

Slobodan grupoid sa četiri generatora u svakom $*$-linearnom varijetetu ima 184 elementa, pa ga nije lako predstaviti, međutim, važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.4.4 ([8], Teorema 2.7.2.)**.** *Za svaki od grupoida* $\mathbf{Q}_2$, $\mathbf{Q}_4$, *postoji najviše jedno proširenje koje je* $*$*-linearna jednakosna teorija.*

Proširenje $\mathbf{Q}_1$

Pretpostavimo da je X prebrojivo beskonačan skup promenljivih. Obeležimo sa $\mathbf{T}$ slobodan grupoid nad skupom X, i sa $\mathbf{T}'$ njegovo proširenje sa neutralnim elementom, koji obeležavamo sa $\emptyset$. Neka je $S(\emptyset) = \emptyset$, tako da je $S(t)$ sada definisan za sve $t \in T'$. Definišimo $|\emptyset| = 0$. Naravno, $\mathbf{T}'$ je relativno slobodna algebra na jeziku $\{\cdot, \emptyset\}$ koja zadovoljava identitete $x \cdot \emptyset \approx x$ i $\emptyset \cdot x \approx x$.

Za svaki podskup Y od X obeležimo sa δ_Y endomorfizam od $\mathbf{T}'$ tako da $\delta_Y(x) = \emptyset$ za $x \in Y$ i $\delta_Y(x) = x$ za $x \in X - Y$. Tada za dva podskupa

Y_1, Y_2 od X važi da je $\delta_{Y_1}\delta_{Y_2} = \delta_{Y_2}\delta_{Y_1} = \delta_{Y_1\cup Y_2}$. Za podskup M od T' neka je $\delta_M = \delta_Y$, gde je $Y = \bigcup\{S(t) : t \in M\}$; za $t \in T'$ neka je $\delta_t = \delta_{\{t\}}$.

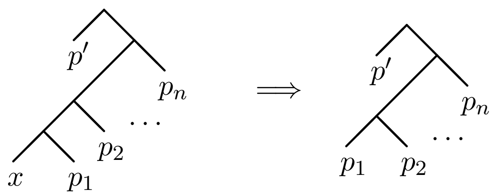
Obeležimo sa L skup linearnih terma nad X i neka je $L' = L \cup \{\emptyset\}$. Definišimo binarnu operaciju $\circ$ na L' sa $u \circ v = u \cdot \delta_u(v)$. Neka je $\mathbf{L} = (L, \circ)$ i $\mathbf{L}' = (L', \circ)$.

Obeležimo sa ℓ_1 jedinstveni homomorfizam iz $\mathbf{T}'$ na $\mathbf{L}'$ za koji važi da je $\ell_1(x) = x$ za sve $x \in X$.

Obeležimo sa $\mathcal{L}_1$ varijetet generisan sa $\mathbf{L}$ i sa $\sim_1$ odgovarajuću jednakosnu teoriju.

Teorema 2.4.5 ([8], Teorema 2.8.3.)**.** *$\sim_1$ je $*$-linearna jednakosna teorija koja je proširenje $\mathbf{Q}_1$. Preslikavanje terma t u odgovarajući linearan term t^* jednako je sa ℓ_1, tj. $u \sim_1 v$ ako i samo ako $\ell_1(u) = \ell_1(v)$. Grupoid $\mathbf{L}$ je slobodan $\mathcal{L}_1$-groupoid nad X i grupoid $\mathbf{L}'$ je takođe sadržan u $\mathcal{L}_1$.*

U jednakosnoj teoriji $\sim_1$ se nalazi identitet $t \approx t^{x,i}$, gde je t term, x je promenljiva koja se pojavljuje najmanje i-puta u t, $i \geq 2$, i $t^{x,i}$ je term dobijen od t tako što je podterm $p_{x,i} = p'(xp_1p_2\ldots p_n)$ zamenjen sa $p'(p_1p_2\ldots p_n)$ (Slika 2.2).



Slika 2.2: *Skraćivanje u jednakosnoj teoriji $\sim_1$ i-te promenljive x sa leve strane u drvetu terma.*

Proširenje $\mathbf{Q}_2$

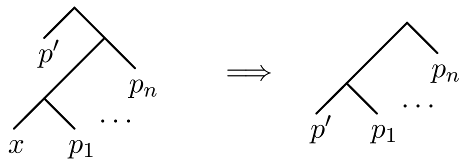
Neka je t nelinearan term i razmotrimo promenljivu x koja se pojavljuje više puta u termu t. Za $i \geq 2$, obeležimo sa $p_{x,i}$ jedinstveni podterm od t koji je oblika

$$p_{x,i} = p'(xp_1p_2\ldots p_n),$$

pri čemu je gore navedeno x i-to pojavljivanje preomenljive x sa leva u termu t, n je nenegativan broj (ako je $n = 0$, tada je $p = p'x$) i $p', p_1, \ldots, p_n$ su termi.

Neka je $\sim_2$ ekvivalencija na slobodnom grupoidu $\mathbf{T}$ generisana sa svim parovima $\langle t, t^{x,i}\rangle$, gde je t term, x je promenljiva koja se pojavljuje najmanje

i-puta u t, $i \geq 2$, i $t^{x,i}$ je term dobijen od t tako što je podterm $p_{x,i} = p'(xp_1p_2 \ldots p_n)$ zamenjen sa $p'p_1p_2 \ldots p_n$ (Slika 2.3).



Slika 2.3: *Skraćivanje u jednakosnoj teoriji $\sim_2$ i-te promenljive x sa leve strane u drvetu terma.*

Teorema 2.4.6 ([8], Teorema 2.10.1.). *$\sim_2$ je $*$-linearna jednakosna teorija koja je proširenje $\mathbf{Q}_2$.*

Odgovarajući varijetet označavamo sa $\mathcal{L}_2$.

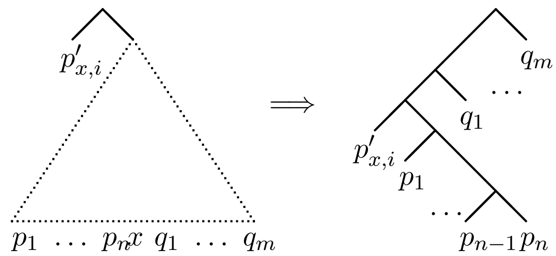
Proširenje $\mathbf{Q}_4$

Počećemo sa jednom tehničkom definicijom. Za term t definišemo induktivno *levi* i *desni niz* koji odgovara jednom pojavljivanju neke promenljive x u t. Ako je t promenljiva, oba niza su prazna. Neka je $t = t_1t_2$ i pretpostavimo da je pojavljivanje x (kojem odgovaraju nizovi koje definišemo) u t_1. Tada je levi niz za t isti kao i levi niz za t_1, dok je desni niz $q_1, \ldots, q_n, t_2$, gde je $q_1, \ldots q_n$ desni niz za t_1 koji odgovara dotičnom pojavljivanju promenljive x. Analogno, pretpostavimo da je pojavljivanje promenljive x kojem odgovaraju nizovi koje definišemo u t_2. Tada je levi niz za t jednak $t_1, p_1, \ldots, p_n$, gde je $p_1, \ldots p_n$ levi niz za t_2 koji odgovara dotičnom pojavljivanju, dok je desni niz za t jednak desnom nizu za t_2.

Analogno možemo da definišemo za term t i njegov podterm p levi i desni niz za term t koji odgovaraju nekom fiksiranom pojavljivanju podterma p u t.

Neka je p nelinearan term i razmotrimo promenljivu x koja se pojavljuje više od jedanput u termu p. Ako je $i \geq 2$, obeležimo sa $p_{x,i} = p'_{x,i}p''_{x,i}$ podterm od t takav da $p'_{x,i}$ sadrži $(i-1)$-vo pojavljivanje promenljive x u p i $p''_{x,i}$ sadrži i-to pojavljivanje promenljive x u p.

Neka je $\sim_3$ relacija ekvivalencije na slobodnom grupoidu $\mathbf{T}$ generisana sa svim parovima $\langle p, p^{x,i} \rangle$, gde je p term, takav da se promenljiva x pojavljuje najmanje i-puta u p, $i \geq 2$, i $p^{x,i}$ je term dobijen od terma p zamenom



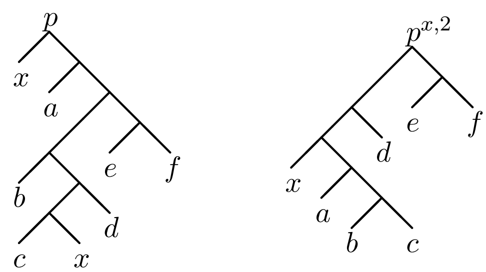
Slika 2.4: *Skraćivanje u jednakosnoj teoriji $\sim_3$ i-te promenljive x sa leve strane u drvetu terma.*

podterma $p_{x,i}$ sa $(p'_{x,i}(p_1(p_2(\dots(p_{n-1}p_n)))))q_1q_2\dots q_m$, gde je $p_1,\dots,p_n$ levi niz i $q_1,\dots,q_m$ desni niz prvog pojavljivanja x u $p''_{x,i}$ (Slika 2.4).

Ako prihvatimo manje formalnu notaciju, tj. koristimo notaciju $\{q_1q_2q_3 \dots q_\omega\}$ kao zamenu za term $(((q_1q_2)q_3)\dots)q_\omega$ kod koga su zagrade levo asocirane, dok notaciju $[q_1q_2\dots q_\omega]$ koristiti umesto terma $q_1(q_2(\dots(q_{\omega-1}q_\omega)))$ kod koga su zagrade desno asocirane, tada u ovoj notaciji term $p''_{x,i}$ možemo pisati kao

$$\{[p_1\dots\{[p_{\alpha+1}\dots p_\beta\{xp_{\beta+1}\dots p_\gamma\}]p_{\gamma+1}\dots p_\delta\}]\dots p_\omega\}.$$

(To znači da je $p_1,\dots,p_\beta$ levi niz za uočenu promenljivu x u $p''_{x,i}$ i $p_{\beta+1},\dots,p_\omega$ je desni niz.) Tako je $p^{x,i}$ dobijen iz p zamenom podterma $p_{x,i}$ sa $\{[p'_{x,i}p_1\dots p_\beta]p_{\beta+1}\dots p_\omega\}$. Na primer, ilustrujmo ovu definiciju na Slici 2.5.



Slika 2.5: *Primer skraćivanja u jednakosnoj teoriji $\sim_3$ druge promenljive x sa leve strane u drvetu terma $x\cdot(a\cdot((b\cdot cxd)\cdot ef))$ na term $\{[xabc]def\}$.*

Za ovako definisanu jednakosnu teoriju $\sim_3$ važi sledeće tvrđenje:

Teorema 2.4.7 ([8], Teorema 2.12.10.). *$\sim_3$ je $*$-linearna jednakosna teorija koja je proširenje $\mathbf{Q}_4$.*

2.5 Baze svih $*$-linearnih jednakosnih teorija

2.5.1 Baza identiteta varijeteta $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$

Baza identiteta varijeteta $\mathcal{L}_1$

Teorema 2.5.1 ([8], Teorema 2.9.1.). *Varijetet $\mathcal{L}_1$ ima bazu koja se sastoji od sledećih identiteta:*

(1) $xx \approx x$,

(2) $x \cdot yx \approx xy$,

(3) $x(xyz) \approx x \cdot yz$.

Kako je baza varijeteta $\mathcal{L}_1$ definisana na skupu od tri promenljive sledi da će $*$-linearni varijetet koji je proširenje grupoida $\mathbf{Q}_1$ biti podvarijetet od $\mathcal{L}_1$. Prema tome, postoji tačno jedna $*$-linearna jednakosna teorija koja je proširenje groupoida $\mathbf{Q}_1$.

Baza identiteta varijeteta $\mathcal{L}_2$

Teorema 2.5.2 ([8], Teorema 2.11.2.). *Varijetet $\mathcal{L}_2$ ima bazu koja se sastoji od sledećih identiteta:*

(1) $xx \approx x$,

(2) $x(yx) \approx xy$,

(3) $x(yxz) \approx x(yz)$,

(4) $xy(yzu) \approx xyzu$.

Sve $*$-linearne jednakosne teorije

Teorema 2.5.3 ([8], Teorema 2.13.1.). *Postoji tačno šest $*$-linearnih varijeteta grupoida: $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ i njihovi duali.*

2.5.2 $\mathcal{L}_3$ je inherentno beskonačno baziran

Za razliku od varijeteta $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{L}_2$ varijetet $\mathcal{L}_3$ nema konačnu bazu, šta više, važiće da je $\mathcal{L}_3$ inherentno beskonačno baziran.

Neka je t term u kojem se pojavljuju isključivo neke od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$. Uvedimo nekoliko tehničkih pojmova. Neka je $\varphi(t)$ semigrupna reč dobijena od terma t brisanjem svih zagrada i skraćivanjem svih stepena (dakle, najkraća semigrupna reč koja je jednaka termu t u semigrupi prezentiranoj sa $\langle x_1, ..., x_n | x_1^2 = x_1, ..., x_n^2 = x_n\rangle$). Na primer, $\varphi(x(y(y(z(xy)y)x)))$ $= xyzxyx$.

Reći ćemo da term t ima *svojstvo* B_k (kraće pišemo $B_k(t)$), ako

$$\varphi(t) = x_1 \ldots x_n x_1 \ldots x_n \ldots x_1 \ldots x_n x_1 \ldots x_l w,$$

gde je w proizvoljna reč, $1 \leq l \leq n$ i $k = |\varphi(t)| - |w|$. Prefiks dužine k nazivamo *k-glava od $\varphi(t)$*. Ako pretpostavimo da term t ima osobinu $B_k(t)$, tada je *k-separator* prvo pojavljivanje promenljive x_l u t za koje je odgovarajuće pojavljivanje x_l u $\varphi(t)$ poslednje slovo u glavi. Na primer, term $x(y(y(z(xy)y)x))$ ima osobinu B_5 i separator je treće pojavljivanje s leva promenljive y. Naravno, isti term ima i osobinu B_4, a odgovarajući separator je drugo pojavljivanje s leva promenljive x.

Reći ćemo da term t ima *svojstvo* A_k (ukratko $A_k(t)$) ako ima svojstvo B_k i svojstvo C_k koje tvrdi da levi niz koji odgovara separatoru sadrži samo terme od jedne promenljive. Primetimo da je C_k ekvivalentno sa tvrđenjem da svaki podterm od t koji sadrži pojavljivanje neke promenljive levo od separatora (odnosno, glavno pojavljivanje), ili sadrži samo pojavljivanja jedne iste promenljive, ili sadrži separator. Takođe, primetimo da $A_k(t)$ implicira $A_j(t)$ za sve $j \leq k$. Na primer, term $x(y(y(z(xy)y)z))$ ima svojstvo A_5, ali ne i svojstvo A_6.

Lema 2.5.4 ([8], Lema 2.14.7.). *Neka je Σ konačan skup identiteta $\mathcal{L}_3$ sa dužinom terma najviše n i neka je $\Sigma \vdash t \approx s$, gde su t i s termi sa promenljivama $x_1, \ldots, x_n$. Tada je za svako k, $A_k(t)$ ako i samo ako je $A_k(s)$.*

Teorema 2.5.5 ([8], Teorema 2.14.8.). *Varijetet $\mathcal{L}_3$ je inherentno beskonačno baziran.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{L}_3^n$ varijetet čija je baza skup svih identiteta varijeteta $\mathcal{L}_3$ sa najviše n promenljivih. Pokažimo da $\mathcal{L}_3^n$ nije lokalno konačan za proizvoljno n i tada je $\mathcal{L}_3$ inherentno beskonačno baziran.

Primetimo da $\mathcal{L}_3^n$ ima bazu Σ_n identiteta dužine najviše $2n$: to se može dobiti iz Kejlijeve tablice slobodnog grupoida sa n generatora koja je određena sa $r \cdot s \approx \ell_3(r \cdot s)$ gde r, s prolaze kroz sve linearne terme sa n istih promenljivih. Razmotrimo terme

$$t_i = [\underbrace{x_0 \ldots x_{2n} x_0 \ldots x_{2n} \ldots x_0 \ldots x_{2n} x_0 \ldots x_{i-1 \bmod 2n+1}}_{i \text{ slova}}],$$

za sve $i \geq 2n+1$. Osobina $A_k(t_i)$ je tačna ako i samo ako je $k \leq i$. Prema tome, po Lemi 2.5.4, svi t_i su po parovima različiti u Σ_n, odakle je slobodan grupoid sa $(2n+1)$ generatora varijeteta $\mathcal{L}_3^n$ beskonačan. $\square$

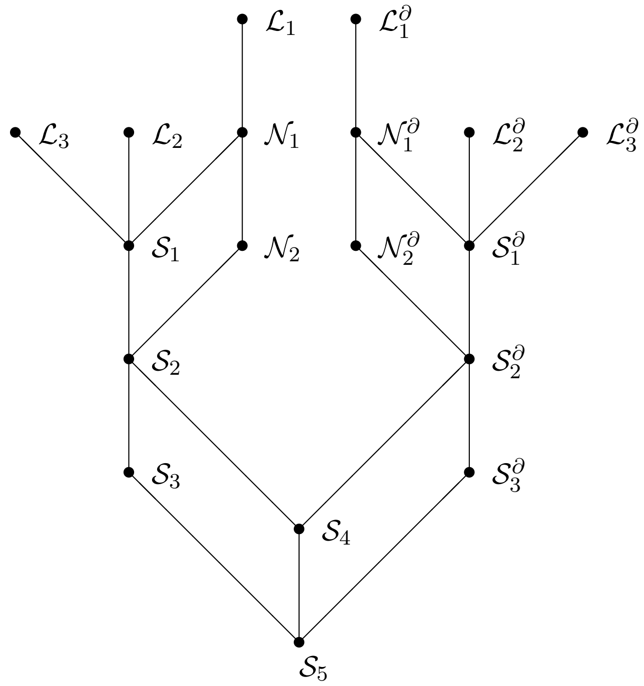
2.6 Mreže podvarijeteta od $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ i $\mathcal{L}_3$ i njihovi generatori

Mreže podvarijeteta od $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ i $\mathcal{L}_3$

Neka je

- $\mathcal{N}_1$ varijetet algebri iz $\mathcal{L}_1$ u kojima je tačan identitet $w(xy \cdot z) \approx w(x \cdot yz)$;
- $\mathcal{N}_2$ varijetet algebri iz $\mathcal{L}_1$ u kojima je tačan identitet $w \cdot xy \approx w \cdot yx$;
- $\mathcal{S}_1$ varijetet idempotentnih semigrupa u kojima važi identitet $xyx \approx xy$;
- $\mathcal{S}_2$ varijetet idempotentnih semigrupa u kojima važi identitet $wxy \approx wyx$;
- $\mathcal{S}_3$ varijetet semigrupa u kojima važi identitet $xy \approx x$;
- $\mathcal{S}_4$ varijetet polumreža;
- $\mathcal{S}_5$ trivijalan varijetet.

Teorema 2.6.1 ([8], Teorema 2.15.5)**.** *Dijagram na Slici 2.6 predstavlja parcijalno uređenje podvarijeteta varijeteta $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ i njihovih duala $\mathcal{L}_1^\partial$, $\mathcal{L}_2^\partial$, $\mathcal{L}_3^\partial$.*



Slika 2.6: *Dijagram podvarijeteta varijeteta $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$ i njihovih duala $\mathcal{L}_1^\partial$, $\mathcal{L}_2^\partial$, $\mathcal{L}_3^\partial$.*

Generatori za varijetete $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ i $\mathcal{L}_3$

Obeležimo sa $\mathbf{F}_\mathcal{V}(n)$ slobodne grupoide sa n generatora u varijetetu $\mathcal{V}$.

Teorema 2.6.2 ([8], Teorema 2.16.1.). *Varijetet $\mathcal{L}_1$ je generisan sa $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_1}(4)$, ali nije sa $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_1}(3)$ ($\cong \mathbf{Q}_1$) (pripada varijetetu $\mathcal{N}_1$); generisan je sa grupoidom $\mathbf{Q}_1'$ koji se dobija od $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_1}(3)$ proširenjem sa neutralnim elementom. Takođe, $\mathcal{L}_1$ je generisan sa petoelementnim poddirektno nesvodljivim grupoidom $\mathbf{A}_1$ definisanim sledećom Kejlijevom tablicom:*

$\mathbf{A}_1$	a	b	c	d	e
a	a	b	c	c	a
b	b	b	d	d	b
c	c	c	c	c	c
d	d	d	d	d	d
e	a	b	c	d	e

Teorema 2.6.3 ([8], Teorema 2.16.2). *Varijetet $\mathcal{L}_i$ je generisan sa $\mathbf{F}_{\mathcal{L}_i}(3)$, $i \in \{2, 3\}$. Takođe, $\mathcal{L}_2$ je generisan sa petoelementnim poddirektno nesvod-*

ljivim grupoidom $\mathbf{A}_2$ *predstavljenim Kejlijevom tablicom:*

$\mathbf{A}_2$	a	b	c	d	e
a	a	d	c	d	e
b	b	b	e	b	e
c	c	c	c	c	c
d	d	d	c	d	c
e	e	e	e	e	e

i $\mathcal{L}_3$ *je generisan sa petoelementnim poddirektno nesvodljivim grupoidom* $\mathbf{A}_3$ *predstavljenim Kejlijevom tablicom:*

$\mathbf{A}_3$	a	b	c	d	e
a	a	d	e	d	e
b	d	b	c	d	d
c	c	c	c	c	c
d	d	d	d	d	d
e	e	e	e	e	e

Ako bismo uspeli da pokažemo da su u $HSP(\mathbf{A}_3)$ kardinalnosti poddirektno nesvodljivih grupoida ograničene nekim konačnim kardinalom tada bismo oborili Parkovu hipotezu. Međutim, primetimo da već podgrupoid

$\mathbf{G}$	a	d	e
a	a	d	e
d	d	d	d
e	e	e	e

grupoida $\mathbf{A}_3$ generiše beskonačnu poddirektno nesvodljivu polugrupu (J.A.Gerhard, [13]).

Teorema 2.6.4 ([8], Teorema 2.16.3.)**.** *Varijetet* $\mathcal{L}_3 = HSP(\mathbf{A}_3)$ *sadrži beskonačne poddirektno nesvodljive algebre čije kardinalnosti nisu ograničene.*

Glava 3

Kvazilinearnost

Ova glava jeste rezultat istrazivanja pojma kvazilinearnosti koji smo dobili od pojma linearnosti oslabljivanjem uslova. Kako su svi $*$-linearni varijeteti i njihovi podvarijeteti $*$-kvazilinearni varijeteti u ovoj glavi ćemo se obilato koristiti rezultatima prethodne glave. Opisaćemo svih 28 $*$-kvazilinearnih idempotentnih varijeteta od kojih dva nemaju konačnu bazu pokazano u prethodnoj glavi, i navesti njihove generatorne grupoide. Na kraju ćemo pokazati da postoji kontinum mnogo $*$-kvazilinearnih varijeteta.

Leme 3.3.1, 3.3.2, 3.7.11 i 3.8.2 su dokazane u [8] u slučaju linearnosti ali argumenti korišćeni u dokazima su dovoljni da se pokažu tvrđenja ovih Lema i u slučaju kvazilinearnosti što je ovde i urađeno.

3.1 Slobodni grupoidi kvazilinearnih varijeteta

Lema 3.1.1. *Neka je $\mathcal{V}$ odgovarajući varijetet egzaktno n-kvazilinearnoj jednakosnoj teoriji E sa slobodnim grupoidom $\mathbf{F}_n$ nad n generatora. Tada je varijetet $\mathcal{V}$ najveći varijetet sa slobodnim grupoidom $\mathbf{F}_n$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}'$ varijetet sa slobodnim grupoidom $\mathbf{F}_n$ takav da je $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}'$. Imamo da je $\mathcal{V} = Mod(Id_{\mathbf{F}_n}(x_1, \ldots, x_n)) = Mod(Id_{\mathcal{V}'}(x_1, \ldots, x_n)) \supseteq \mathcal{V}'$. Prema tome, $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$. $\square$

Lema 3.1.2. *Neka je E egzaktno n-kvazilinearna jednakosna teorija sa slobodnim grupoidom $\mathbf{F}_n$ nad n generatora, i neka je $\mathcal{V}$ odgovarajući varijetet jednakosnoj teoriji E. Tada svaki podvarijetet $\mathcal{V}'$ od $\mathcal{V}$ koji sadrzi grupoid $\mathbf{F}_n$ ima osobinu da je grupoid $\mathbf{F}_n$ slobodan nad skupom od n generatora.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{F}'_n$ slobodan grupoid nad n generatora u varijetetu $\mathcal{V}'$. Kako je $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}$ sledi da je $|\mathbf{F}'_n| \leq |\mathbf{F}_n|$ pa se identičko preslikavanje promenljivih može proširiti do endomorfizma grupoida $\mathbf{F}'_n$ na $\mathbf{F}_n$, a kako su u pitanju konačni grupoidi sledi da je posmatrano preslikavanje u stvari izomorfizam. $\square$

Lema 3.1.3. *Neka je E egzaktno n-kvazilinearna jednakosna teorija i k-kvazilinearna jednakosna teorija gde je $n \leq k$, tada je E egzaktno k-kvazilinearna jednakosna teorija.*

Dokaz. Kako je jednakosna teorija E generisana svojim identitetima na skupu od n promenljivih sledi da je generisana i svojim identitetima na skupu od k promenljivih, tj. E je egzaktno k-kvazilinearna jednakosna teorija. $\square$

Lema 3.1.4. *Postoji tačno jedna egzaktno n-kvazilinearna jednakosna teorija, koja je podteorija $*$-linearne jednakosne teorije E.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. postoje dve različite egzaktno n-kvazilinearne jednakosne teorije E_1 i E_2. Međutim, odgovarajući slobodni grupoidi nad n generatora su izomorfni sa slobonim grupoidom nad n generatora jednakosne teorije E odakle sledi da je $E_1 = E_2$. $\square$

Teorema 3.1.5. *Neka je $\mathbf{F}_n = (F_n, \cdot_{\mathbf{F}_n})$ idempotentan grupoid čiji nosač čine klase neke particije π skupa linearnih terma Lin_n nad skupom $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, i neka na tom grupoidu važe svi identiteti oblika $t_1 \cdot t_2 \approx t_3$ za sve $t_1, t_2, t_3 \in Lin_n$ takve da je $[t_1]_\pi \cdot_{\mathbf{F}_n} [t_2]_\pi = [t_3]_\pi$. Tada postoji tačno jedna egzaktno n-kvazilinearna jednakosna teorija čiji je slobodan grupoid sa n generatora grupoid $\mathbf{F}_n$.*

Napomena 3.1.1. Primetimo da na grupoidu $\mathbf{F}_n$ važi identitet $t_1 \approx t_2$ za terme $t_1, t_2 \in Lin_n$ takve da je $[t_1]_\pi = [t_2]_\pi$, jer zbog idempotentnosti imamo da je $[t_1]_\pi \cdot_{\mathbf{F}_n} [t_1]_\pi = [t_1]_\pi$, odakle sledi da važi $[t_1]_\pi \cdot_{\mathbf{F}_n} [t_1]_\pi = [t_2]_\pi$. Prema tome, iz prethodne dve jednakosti imamo da na grupoidu $\mathbf{F}_n$ važe identiteti $t_1 \cdot t_1 \approx t_1$ i $t_1 \cdot t_1 \approx t_2$, odkle sledi i identitet $t_1 \approx t_2$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ varijetet generisan grupoidom $\mathbf{F}_n$, i neka je $\sim_{\mathbf{F}_n}$ jednakosna teorija koja odgovara datom varijetetu.

Za linearne terme t_1, t_2 iz Lin_n koji pripadaju različitim klasama particije π ne važi da je $\mathcal{V} \models t_1 \approx t_2$ jer bi u suprotnom valuacijom

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ [x_1]_\pi & [x_2]_\pi & \ldots & [x_n]_\pi \end{pmatrix}$$

dobili da su dva različita elementa iz grupoida $\mathbf{F}_n$ jednaka. Prema tome, ako je neki term sa n promenljivih ekvivalentan linearnom termu po modulu $\sim_{\mathbf{F}_n}$, onda je taj term ekvivalentan samo linearnim termima koji se nalaze u istoj klasi particije π. Pokažimo sada da je $\sim_{\mathbf{F}_n}$ n-kvazilinearna jednakosna teorija.

Neka je t term na jeziku grupoida sa najviše n promenljivih. Indukcijom po složenosti terma t pokazaćemo da je term t jednak nekom linearnom termu. Ako je term t i sam linearan, tvrđenje je tačno. Ako nije, tada je $t = t_1 \cdot t_2$, i po induktivnoj hipotezi važi da $t_j \sim_{\mathbf{F}_n} t'_j$, gde je t'_j linearan term za $j = 1, 2$. Dakle, dovoljno je pokazati da za svaki proizvod dva linearna terma $t'_1 t'_2$ važi da je $t'_1 t'_2 \sim_{\mathbf{F}_n} t_l$, gde je t_l neki linearan term nad istih n promenljivih. Ali, iz uslova teoreme imamo da je $t'_1 \cdot t'_2 \approx t'_3$ gde je t'_3 proizvoljan term iz klase $[t'_1]_\pi \cdot_{\mathbf{F}_n} [t'_2]_\pi$. □

Napomena 3.1.2. Prilikom dokazivanja postojanja pravih 3-kvazilinearnih jednakosnih teorija koristićemo se prethodnom Teoremom 3.1.5 tako što ćemo korišćenjem računarskog programa proveravati tačnost:

- identiteta $t \approx s$ za predstavnike t klasa particije π koji počinju sa leva promenljivom x i terme $s \in [t]_\pi$,
- identiteta iz Tabele 2.1.

3.2 Egzaktno 2-kvazilinearne jednakosne teorije

U ovom odeljku opisaćemo sve egzaktno 2-kvazilinearne idempotentne jednakosne teorije koje su prave 2-kvazilinearne idempotentne jednakosne. U odeljku 2.2, Teorema 2.2.1 su opisani svi slobodni grupoidi sa dva generatora egzaktno 2-linearnih jednakosnih teorija i one ulaze u izbor slobodnih grupoida sa dva generatora za n-kvazilinearne jednakosne teorije za $n > 2$.

Sledeća Lema karakterizuje egzaktno 2-kvazilinearne idempotentne jednakosne teorije.

Lema 3.2.1. *Postoji tačno sedamnaest egzaktno 2-kvazilinearnih idempotentnih jednakosnih teorija od kojih su pet prave 2-kvazilinearne jednakosne teorije. Za prave 2-kvazilinearne jednakosne teorije slobodni grupoidi sa dva generatora su sledeća četiri grupoida predstavljena u Tabeli 3.1, kao i dual grupoida* $\mathbf{G}_9$. (*Prvi, drugi i četvrti grupoid su identični svojim dualima.*)

Dokaz. Na osnovu Leme 2.2.1 imamo da su opisani svih dvanaest egzaktno 2-linearnih jednakosnih teorija kojima važi zakon idempotentnosti zbog

$\mathbf{G}_7$	x	y	xy
x	x	xy	y
y	xy	y	x
xy	y	x	xy

$\mathbf{G}_8$	x	y	xy
x	x	xy	xy
y	xy	y	xy
xy	xy	xy	xy

$\mathbf{G}_9$	x	y
x	x	x
y	y	y

$\mathbf{G}_{10}$	x
x	x

Tabela 3.1: *Kejlijeve tablice slobodnih grupoida $\mathbf{G}_7, \ldots, \mathbf{G}_{10}$ nad dva generatora egzaktno 2-kvazilinearnih jednakosnih teorija koje nisu 2-linearne jednakosne teorije.*

uslova linearnosti. Ostaje nam da opišemo sve slobodne grupoide pravih 2-kvazilinearnih idempotentnih jednakosnih teorija.

Obeležimo sa $\mathbf{G}$ slobodan grupoid sa dva generatora varijeteta $\mathcal{V}$ koji odgovara pravoj 2-kvazilinearnoj idempotentnoj jednakosnoj teoriji.

Slučaj 1: $xy \approx yx$. Tada grupoid $\mathbf{G}$ ima najviše tri elementa. Razmotrimo sledeća tri podslučaja. Primetimo da će sa identitetom $x \cdot xy \approx u$, gde je u neki linearan term nad dve promenljive, slobodni grupoidi nad dva generatora biti određeni.

Podslučaj 1a: $x \cdot xy \approx y$. Tada je $\mathbf{G} = \mathbf{G}_7$.

Podslučaj 1b: $x \cdot xy \approx xy$. Tada je $\mathbf{G} = \mathbf{G}_8$.

Podslučaj 1c: $x \cdot xy \approx x$. Tada je $x \approx x \cdot xy \approx xy \cdot x \approx xy(x \cdot xy) \approx xy$, odnosno dobijamo da je $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{10}$.

Slučaj 2: $x \approx yx$. Tada je $\mathbf{G} = \mathbf{G}_9^{\partial}$.

Slučaj 3: $x \approx xy$. Tada je $\mathbf{G} = \mathbf{G}_9$.

Slučaj 4: $x \approx y$. Tada je $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{10}$.

Proverom utvrđujemo da su identiteti $xx \approx x$, $x \cdot xy \approx x \ \cdot_{\mathbf{G}} \ xy$, $x \cdot yx \approx x \ \cdot_{\mathbf{G}} \ yx$, $xy \cdot x \approx \ xy \ \cdot_{\mathbf{G}} \ x$, $xy \cdot y \approx \ xy \ \cdot_{\mathbf{G}} \ y$, $xy \cdot yx \approx \ xy \ \cdot_{\mathbf{G}} \ yx$ tačni na grupoidu $\mathbf{G}$ za $\mathbf{G} \in \{\mathbf{G}_7, \mathbf{G}_8, \mathbf{G}_9^{\partial}, \mathbf{G}_9, \mathbf{G}_{10}\}$. Prema tome, na osnovu Teoreme 3.1.5 sledi da postoji pet egzaktno 2-kvazilinearnih idempotentnih jednakosnih teorija koje su prave 2-kvazilinearne jednakosne teorije. $\square$

Grupoidi navedeni u Teoremi 2.2.1 i Teorema 3.2.1 predstavljaju sve potencijalne slobodne algebre sa dva generatora varijeteta koji odgovaraju pravim n-kvazilinearnim idempotentnim jednakosnim teorijama na kojima će se zasnivati sledeći odeljci.

3.3 3-kvazilinearna neproširivost $\mathbf{G}_0$, $\mathbf{G}_2$ i $\mathbf{G}_3$

U ovom odeljku su Leme sa dokazima proistekle iz [10], poglavlja 3, gde su tvrdjenja formulisana za 3-linearne jednakosne teorije.

Lema 3.3.1. *Ne postoji* 3*-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_0$*.*

Dokaz. Neka je E 3-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_0$ i neka je $\ell(x,y,z)$ linearan term takav da je identitet $\ell(x,y,z) \approx xy \cdot zx$ sadržan u E. Primenom supstitucije $z \mapsto y$ na identitet dobijamo identitet $\ell(x,y,y) \approx x$. Na osnovu osobina grupoida $\mathbf{G}_0$ poslednji identitet je moguć jedino u slučaju kada je term $\ell(x,y,z)$ jednak jednom od terma x, t_1xt_2, $t_2(xt_1)$ za $\{t_1,t_2\} = \{y,z\}$ jer se u preostalim slučajevima dobija jedan od identiteta $xy \approx x$, $yx \approx x$, $y \approx x$ koji su u kontaradikciji sa grupoidom $\mathbf{G}_0$. Ako je $\ell(x,y,z) = x$ tada supstitucijom $z \mapsto x$ na identitet $\ell(x,y,z) \approx xy \cdot zx$ dobijamo identitet $x \approx y$, kontradikcija. U preostala četiri slučaja za term $\ell(x,y,z)$ supstitucijom $t_1 \mapsto x$ na identitet $\ell(x,y,z) \approx xy \cdot zx$ dobija se jedan od identiteta $xy \approx y$ ili $yx \approx y$, kontradikcija. □

Lema 3.3.2. *Ne postoji* 3*-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_2$ *ili* $\mathbf{G}_3$*.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji egzaktno 3-kvazilinearna jednakosna teorija E koja je proširenje jednog od grupoida $\mathbf{G}_2$ ili $\mathbf{G}_3$. Pronađimo linearan term l takav da je $S(l) \subseteq S(x \cdot xyz)$ i $l \approx x \cdot xyz$. Poslednja promenljiva u termu l sa leve strane je promenljiva z i $|l| \geq 2$ jer u suprotnom supstitucijom $y \mapsto x$ dolazimo u kontradikciju tako što postoji term $t \in \{x, z, zx\}$ takav da je $t \approx \sigma_{y \mapsto x}(l) \approx \sigma_{y \mapsto x}(x \cdot xyz) \approx xz$. Prema tome, term l je jednak nekom od terma xz, yz, xyz, yxz. U drugom, trećem i četvrom slučaju dolazimo u kontradikciju supstitucijom $z \mapsto y$, tj. dobijamo identitet $xy \approx y$. Ako je $l = xz$ tada u slučaju grupoida $\mathbf{G}_2$ dolazimo u kontradikciju supstitucijom $z \mapsto yx$, tj. dobijamo identitet $x \approx yx$, a u slučaju grupoda $\mathbf{G}_3$ supstitucijom $x \mapsto yz$, tj. dobijamo identitet $yz \approx z$. □

3.4 $*$-kvazilinearno proširenje $\mathbf{G}_8$, $\mathbf{G}_9$ i $\mathbf{G}_{10}$

Lema 3.4.1. *Neka je E n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_8$ generisanog sa dva generatora, $n \geq 3$. Tada jednakosnoj teoriji E pripada identitet $xyz \approx x \cdot yz$.*

Dokaz. Posmatrajmo term $x(y \cdot xz)$. Lako se uočava da dati term nije E-ekvivalentan sa termima x, y, z, xy, xz i yz primenom jedne od supstitucija $y \mapsto x$, $z \mapsto x$ ili $z \mapsto y$, jer se dobija identitet $x \approx xy$. Ostalo je da razmotrimo još tri slučaja.

Slučaj $x(y \cdot xz) \approx x \cdot yz$: Tada na osnovu identiteta $x(y \cdot xz) \approx x \cdot yz$ i komutativnosti važi sledeći niz ekvivalencija $x \cdot yz \approx x \cdot yz \cdot yz \approx (x \cdot yz)(y((x \cdot yz)z)) \approx (x \cdot yz)(y(z(x \cdot zy))) \approx (x \cdot yz)(y(z \cdot xy)) \approx (x \cdot yz)(y(z \cdot yx)) \approx (x \cdot yz)(y \cdot zx) \approx (x \cdot yz)(y \cdot xz)$. Analogno se pokazuje da je $y \cdot xz \approx (y \cdot xz)(x \cdot yz)$, što nas vodi u asocijativnost zbog komutativnosti.

Slučaj $x(y \cdot xz) \approx z \cdot xy$: Tada je $y \cdot xz \approx x(z \cdot xy) \approx x(x(y \cdot xz)) \approx x(y \cdot xz) \approx z \cdot xy \approx yx \cdot z$.

Slučaj $x(y \cdot xz) \approx y \cdot xz$: Tada je term $xy \cdot xz$ nije ekvivalentan sa termima x, y, z, xy, xz i yz jer se primenom jedne od supstitucija $y \mapsto x$, $z \mapsto x$ ili $z \mapsto y$ dobija identitet $x \approx xy$. Ostalo je da razmotrimo još tri podslučaja.

Podslučaj $xy \cdot xz \approx x \cdot yz$: Tada je $x \cdot yz \approx xy \cdot xz \approx xy(x \cdot xz) \approx x(y \cdot xz) \approx y \cdot xz$.

Podslučaj $xy \cdot xz \approx y \cdot xz$: Tada je $y \cdot xz \approx xy \cdot xz \approx xz \cdot xy \approx z \cdot xy$.

Podslučaj $xy \cdot xz \approx z \cdot xy$: Analogno prethodnom slučaju.

Jednakosna teorija E je asocijativna. □

Teorema 3.4.2. *3-kvazilinearan varijetet kod koga je* $\mathbf{G}_8$ *slobodan grupoid sa dva generatora je* $*$*-kvazilinearan varijetet polumreža (varijetet* $\mathcal{S}_4$*, definisan na strani 43). Za svako* n *postoji tačno jedan* n*-kvazilinearan varijetet kod koga je* $\mathbf{G}_8$ *slobodan grupoid sa dva generatora. Postoji tačno jedna* $*$*-kvazilinearna jednakosna koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_8$*, a njoj odgovarajući varijetet* $\mathcal{S}_4$ *je generisan slobodnim grupoidom* $\mathbf{G}_8$.

Dokaz. Posledica Leme 3.4.1 i osobine da je varijetet $\mathcal{S}_4$ minimalan varijetet koji sadrži grupoid $\mathbf{G}_8$. □

Teorema 3.4.3. *Za svako* $n \geq 2$ *i za svako* $\mathbf{G} \in \{\mathbf{G}_9, \mathbf{G}_{10}\}$ *postoji tačno jedna* n*-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}$*. Postoji tačno jedan* $*$*-kvazilinearan varijetet sa slobodnim grupoidom* $\mathbf{G}_9$ *i to je varijetet levo nultih polugrupa generisan grupoidom* $\mathbf{G}_9$ *(varijetet* $\mathcal{S}_3$*, definisan na strani 43). Postoji tačno jedan* $*$*-kvazilinearan varijetet sa slobodnim grupoidom* $\mathbf{G}_{10}$ *i to je trivijalan varijetet (varijetet* $\mathcal{S}_5$*, definisan na strani 43).*

Dokaz. Varijetet $\mathcal{S}_3$ je minimalan varijetet koji sadrži grupoid $\mathbf{G}_9$. □

3.5 $*$-kvazilinearno proširenje G_1

Lema 3.5.1. *Neka je $\mathbf{G}_1$ slobodan grupoid sa dva generatora za n-kvazilinearnu jednakosnu teoriju, $n \geq 3$. Tada identiteti $x(yz) \approx (xy)z$ i $xyz \approx xz$ pripadaju datoj jednakosnoj teoriji.*

Dokaz. Neka je E n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_1$. Ako E sadrži identitet $p \approx q$ u kome je prva promenljiva u p sa leve strane različita od prve promenljive sa leve strane u q, tada supstitucijom svih preostalih promenljivih u jednu od dve gore pomenute dobijamo identitet sa istim svojstvom ali sa tačno dve promenljive, koji nas vodi u kontradikciju. Tada svaki identitet u E ima osobinu da je prva promenljiva sa leve strane identiteta jednaka prvoj promenljivoj sa desne strane identiteta. Pošto je $\mathbf{G}_1$ sam sebi dualan, analogno se pokazuje da u svakom identitetu iz E poslednja promenljiva sa leve strane identiteta je jednaka poslednjoj promenljivoj sa desne strane identiteta. Prema tome, term koji počinje i završava sa promenljivom x je ekvivalentan linearnom termu sa istom osobinom, a jedini takav linearan term je x. Tada važi $x \cdot yz \approx (xz \cdot x)(y(z \cdot xz)) \approx xz$ u E, odnosno važi $xyz \approx ((xz \cdot x)y)(z \cdot xz) \approx xz$ u E, odakle sledi tvrđenje leme. □

Obeležimo sa $\mathcal{R}$ varijetet pravougaonih bendova, koji je definisan identitetima:

- $xx \approx x$,
- $x(yz) \approx (xy)z$,
- $xyz \approx xz$,

a njemu odgovarajuću jednakosnu teoriju obeležimo sa E_R.

Napomena 3.5.1. Prilikom definisanja varijeteta $\mathcal{R}$ na osnovu identiteta iz poslednje rečenice dokaza Leme 3.5.1 umesto trećeg identiteta smo mogli staviti identitet $xyx \approx x$ ($xyz \approx xzx \cdot y \cdot zxz \approx xz \cdot xyz \cdot xz \approx xz$).

Teorema 3.5.2. *Varijetet $\mathcal{R}$ je $*$-kvazilinearan varijetet.*

Dokaz. U ovom varijetetu svaki term sa prvom promenljivom sa leve strane x i poslednjom promenljivom sa leve strane y je jednak linearnom termu x (ako je $x = y$), odnosno xy (ako je $x \neq y$). Dakle, $\mathcal{R}$ je *-kvazilinearan varijetet. □

Slobodna algebra sa n generatora varijeteta $\mathcal{R}$ je izomorfna direktnom proizvodu n-elementne levo nulte polugrupe i n-elementne desno nulte polugrupe, pa je slobodni spektar $f_n = n^2$.

Teorema 3.5.3. *Jednakosna teorija E_R je jedina $*$-kvazilinearna idempotentna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_1$. Varijetet $\mathcal{R}$ je generisan grupoidom $\mathbf{G}_1$ i jedini njegovi pravi podvarijeteti su varijetet levo nultih polugrupa, varijetet desno nultih polugrupa i trivijan varijetet (varijeteti generisani redom sa slobodnim grupoidima sa dva generatora G_9, dualom od G_9 i G_{10}).*

Dokaz. Dakle iz Leme 3.5.1 sledi da je svako n-kvazilinearno proširenje G_1 za $n \geq 3$ podvarijetet varijeteta $\mathcal{R}$ pravougaonih traka. Kako su jedini pravi podvarijeteti ovog varijeteta (videti na primer [2]) varijetet levo nultih polugrupa, varijetet desno nultih polugrupa i trivijalan varijetet čiji su slobodni grupoidi sa dva generatora redom G_9, dual od G_9 i G_{10}, sledi da je jedini varijetet koji je n-kvazilinearno proširenje grupoida G_1 za $n \geq 3$ baš varijetet $\mathcal{R}$. $\square$

Posledica 3.5.4. *Za svako $n \geq 3$, postoji tačno jedna n-kvazilinearna jednakosna teorija E koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_1$.*

Dokaz. Na osnovu dokaza Teoreme 3.5.3 svaka n-kvazilinearna jednakosna teorija E koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_1$ ima osobinu da je $E = E_R$. $\square$

3.6 $*$-kvazilinearno proširenje $\mathbf{G}_4$

Lema 3.6.1. *Neka je $n \geq 3$, tada svaka n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_4$ sadrži sledeće identitete:*

1. $xx \approx x$
2. $xyy \approx x$
3. $x(yz) \approx xy$
4. $xyzy \approx xz$.

Dokaz. Neka je E 3-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_4$. Identiteti 1. i 2. sigurno važe u E. Kao i u dokazu Leme 3.5.1 pokazuje se da ekvivalentni termi u jednakosnoj teoriji E imaju iste prve promenljive. U tom slučaju, ako je $t = xy \cdot yz$, tada linearan term t_1 ekvivalentan termu t može biti jednak jednom od 7 linearnih terma nad promenljivama x, y, z koji počinju promenljivom x. Supstitucija $y \mapsto z$ pokazuje da je $t_1 \neq xz$. Supstitucija $z \mapsto x$ eliminiše slučajeve da je term t_1 jednak nekom od terma xy, xyz, yxz i $x \cdot yz$, a supstitucija $z \mapsto y$ eliminiše slučajeve da je term t_1 jednak termu $x \cdot zy$. Konačno, ostaje još mogućnost $xy \cdot yz \approx x$. Tada bi identitet $(xy \cdot yz) \cdot yz \approx x \cdot yz$ pripadao jednakosnoj teoriji E. Međutim, kako identitet $x \approx xy \cdot y$ takođe pripada E (kao proširenje grupoida $\mathbf{G}_4$), sledi da i $xy \approx (xy \cdot yz) \cdot yz$ pripada E. Tada iz tranzitivnosti dobijamo da $xy \approx x \cdot yz$ pripada E.

Na osnovu prethodnog identiteta proizvoljan term t, koji možemo zapisati kao $xp_1p_2 \dots p_n$, je ekvivalentan termu $xy_1y_2 \dots y_n$ u grupoidu $\mathbf{G}_4$, gde je y_i prva promenljiva u p_i sa leve strane. Konačno, razmotrimo linearan term l nad promenljivama x, y i z koji je ekvivalntan termu $xyzy$ u grupoidu $\mathbf{G}_4$. Ovaj term l mora imati promenljivu x kao prvu promenljivu sa leve strane i možemo pretpostaviti da je levo asociran term. Supstitucijom $z \mapsto y$ utvrđujemo da je term l različit od terma x, xyz ili xzy, dok se supstitucijom $z \mapsto x$ pokazuje da je term l različit od terma xy. Preostala mogućnost, $xyzy \approx xz$, je tačna u grupoidu $\mathbf{G}_4$, i prema tome, term l mora biti jednak termu xz. □

Posledica 3.6.2. *Neka je $n \geq 3$, tada svaka n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_4$ sadrži identitet $xyz \approx xzy$.*

Dokaz. Na osnovu Leme 3.6.1 (3) važi sledeći niz identiteta $xyz \approx_{\mathbf{G}_4} xyzyy \approx xzy$. □

Napomena 3.6.1. Za definisanje slobodnog grupoida sa tri generatora 3--kvazilinearnog varijeteta koji je proširenje grupoida $\mathbf{G}_4$ dovoljno je definisati proizvode $(1), \dots, (8)$, $(11), \dots, (15)$, (17), (18), (19), (21), (22) iz Tabele 2.1 jer na osnovu njih, Leme 3.6.1 i Posledice 3.6.2 možemo odrediti i preostale proizvode iz tabele.

Neka je

$$\begin{aligned}\pi_{\mathbf{W}} = \{&\{x\}, \{y\}, \{z\},\\ &\{xy, x \cdot zy\}, \{xz, x \cdot yz\}, \{yx, y \cdot zx\},\\ &\{yz, y \cdot xz\}, \{zx, z \cdot yx\}, \{zy, z \cdot xy\},\\ &\{xyz, xzy\}, \{yxz, yzx\}, \{zxy, zyx\}\}\end{aligned}$$

particija skupa $Lin(\{x, y, z\})$;

Teorema 3.6.3. *Postoji tačno jedna egzaktno 3-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_4$; njoj odgovarajući slobodan grupoid sa tri generatora je grupoid $\mathbf{W}$ (Tabela 3.2).*

$\mathbf{W}$	x	y	z	xy	xz	yx	yz	zx	zy	xyz	yxz	zxy
x	x	xy	xz	x	x	xy	xy	xz	xz	x	xy	xz
y	yx	y	yz	yx	yx	y	y	yz	yz	yx	y	yz
z	zx	zy	z	zx	zx	zy	zy	z	z	zx	zy	z
xy	xy	x	xyz	xy	xy	x	x	xyz	xyz	xy	x	xyz
xz	xz	xyz	x	xz	xyz	xyz	xyz	x	x	xz	xyz	x
yx	y	yx	yxz	y	y	yx	yx	yxz	yxz	y	yx	yxz
yz	yxz	yz	y	yxz	yxz	yz	yz	y	y	yxz	yz	y
zx	z	zxy	zx	z	z	zxy	zxy	zx	zx	z	zxy	zx
zy	zxy	z	zy	zxy	zxy	z	z	zy	zy	zxy	z	zy
xyz	xyz	xz	xy	xyz	xyz	xz	xz	xy	xy	xyz	xz	xy
yxz	yz	yxz	yx	yz	yz	yxz	yxz	yx	yx	yz	yxz	yx
zxy	zy	zx	zxy	zy	zy	zx	zx	zxy	zxy	zy	zx	zxy

Tabela 3.2: *Slobodan grupoid* $\mathbf{W}$ *nad tri generatora egzaktno* 3-*-kvazilinearne jednakosne teorije koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_4$.

Dokaz. Na osnovu tvrđenja Leme 3.6.1 i Posledice 3.6.2 zaključujemo da prava 3-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_4$ ima sledeće osobine:

(1') x je ekvivalentan sa nelinearnim termima $x \cdot x$, $xy \cdot y$, $x \cdot xy$, $xy \cdot yx$, $x \cdot xyz$, $xy \cdot yz$, $xy \cdot yxz$

(2') xy je ekvivalentan sa nelinearnim termima $x \cdot yx$, $x \cdot yxz$, $xy \cdot x$, $xy \cdot xz$, $xyz \cdot zxy$ i linearnim termom $x \cdot yz$,

(3') xz je ekvivalentan sa nelinearnim termima $xyz \cdot y$, $xyz \cdot yx$, $xyz \cdot yzx$,

(4') xyz je ekvivalentan sa nelinearnim termima $xyzx$, $xy \cdot zx$, $xy \cdot zy$ i linearnim termom xzy,

čime su određeni proizvodi iz Napomene 3.6.1, tj. grupoid $\mathbf{W}$. Pokažimo da je grupoid $\mathbf{W}$ jedini potencijalni slobodni grupoid nad tri generatora u 3-kvazilinearnoj jednakosnoj teoriji koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_4$. Prava

3-kvazilinearna jednakosna teorija, čiji je slobodan grupoid sa dva generatora $\mathbf{G}_4$, ne sadrži identitet $x \approx xy$, kao ni identitete $t_1 \approx t_2$ gde termi t_1 i t_2 imaju različite prve promenljive sa leve strane, pa zaključujemo da su termi x, y, z, xy, xz, yx, yz, zx, zy, xyz, yxz, zxy medjusobno različiti u posmatranoj jednakosnoj teoriji jer bi u suprotnom iz jedino mogućih identiteta:

- $x \approx xyz$ primenom supstitucije $y \mapsto x$ dobili da važi identitet $x \approx xy$,
- $xy \approx xz$ primenom supstitucije $z \mapsto x$ dobili da važi identitet $xy \approx x$,
- $xy \approx xyz$ primenom supstitucije $z \mapsto y$ dobili da važi identitet $xy \approx x$.

Prema tome, jedini potencijalni slobodni grupoid sa tri generatora 3-kvazilinearne jednakosne teorije koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_4$ je grupoid $\mathbf{W}$. Proverom pomoću računara utvrđujemo da na grupoidu $\mathbf{W}$ važe identiteti iz Leme 3.6.1, odakle sledi da važe i identiteti navedeni u $(1')$, $(2')$, $(3')$ i $(4')$. Na osnovu Napomene 3.6.1, Teoreme 3.1.5 i particije $\pi_{\mathbf{W}}$ zaključujemo da postoji tačno jedna egzaktno 3-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_4$, a njoj odgovarajući varijetet sadrži grupoid $\mathbf{W}$ kao slobodni grupoid nad tri generatora. $\square$

Lema 3.6.4. *Varijetet $\mathcal{W}$ koji odgovara jednakosnoj teoriji E_W generisanoj identitetima:*

(W1) $xx \approx x$,

(W2) $xyy \approx x$,

(W3) $x \cdot yz \approx xy$,

(W4) $xyz \approx xzy$,

je $*$-kvazilinearan varijetet.

Dokaz. Neka je E jednakosna teorija generisana identitetima $(W1)$–$(W4)$. Naravno, korišćenjem identiteta $(W3)$, dobijamo da je proizvoljan term t ekvivalentan u jednakosnoj teoriji E levo asociranom termu t'. Tada, korišćenjem identiteta $(W4)$, term t' se redukuje na levo asocirani term t'' čija je semigrupna reč dobijena iz terma t'' brisanjem zagrada jednaka sa $x_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_k^{m_k}$, gde je $x_i \neq x_j$ za $i \neq j$. Konačno, korišćenjem idempotentnosti i identiteta $(W2)$, dobijamo da je term t ekvivalentan termu $l = y_1y_2\dots y_s$, gde je $y_1 = x_1$, $y_i \neq y_j$ za $i \neq j$, dok je skup $\{y_2, y_3, \dots, y_s\}$ jednak sa skupom $\{x_i | 2 \leq i \leq k \text{ i } m_i \text{ je neparan}\}$. $\square$

Primetimo da u gore navedenom varijetetu svaka dva linearna levo asocirana terma sa istim promenljivama koji imaju iste prve promenljive sa leve strane su ekvivalentna.

Teorema 3.6.5. *Varijetet $\mathcal{W}$ je jedini $*$-kvazilinearan varijetet kod koga je grupoid $\mathbf{G}_4$ slobodan grupoid nad dva generatora. Varijetet $\mathcal{W}$ je generisan grupoidom $\mathbf{G}_4$, a njegovi jedini pravi podvarijeteti su varijetet levo nultih polugrupa i trivijalan varijetet (varijeteti generisani sa $\mathbf{G}_9$ i $\mathbf{G}_{10}$).*

Dokaz. Pošto su na grupoidu $G4$ tačni identiteti $(W1)$–$(W4)$ iz Leme 3.6.1, na osnovu Leme 3.6.4, oni generišu $*$-kvazilinearan varijetet. Pretpostavimo da su dva levo asocirana linearna terma t_1 i t_2 ekvivalentna u ovom varijetetu.

Pokažimo da oni moraju imati isti skup promenljivih i iste prve promenljive sa leve strane. Pretpostavimo suprotno. Ako je skup promenljivih različit, tada se od identiteta $t_1 \approx t_2$ odgovarajućom supstitucijom dobija ili identitet $xy \approx x$, ili $x \approx y$ ili $xy \approx y$. Prvi je varijetet levo nultih polugrupa, drugi je trivijalan varijetet, dok iz trećeg identiteta sledi identitet $xyx \approx yx$, pa važi $y \approx xy \approx xyx \approx yx \approx x$, trivijalan varijetet.

Ako je prvo pojavljivanje promenljive sa leve strane u termima različito, recimo promenljiva x u termu t_1, i promenljiva y u termu t_2, tada supstitucijom svih ostalih promenljivih sa promenljivom x, term t_1 svodimo na term xy (korišćenjem $(W1)$ i $(W4)$), dok se term t_2 svodi na jedan od terma yx ili y, u zavisnosti od parnosti dužine terma t_2 (korišćenjem identiteta $(W2)$ i $(W4)$). Konačno, iz identiteta $xy \approx yx$ sledi $xy \approx xxy \approx xyx \approx yxx \approx y$, koji, kako smo već ranije pokazali, generiše trivijalan varijetet.

Kako grupoid $\mathbf{G}_4$ nije levo nulta polugrupa niti trivijalan grupoid, dobijamo da varijetet generisan identitetima $(W1)$–$(W4)$ je varijetet generisan grupoidom $\mathbf{G}_4$, i jedini njegovi podvarijeteti su trivijalan varijetet i varijetet levo nultih polugrupa (pošto je grupoid $\mathbf{G}_9$ homomorfna slika grupoida $\mathbf{G}_4$). □

Posledica 3.6.6. *Za svako $n \geq 3$, postoji tačno jedna n-kvazilinearna jednakosna teorija E koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_4$.*

Dokaz. Na osnovu Leme 3.6.4 imamo da je $E = E_W$. □

3.7 Kvazilinearno proširenje $\mathbf{G}_5$

Neka je E jednakosna teorija čija je slobodan grupoid sa dva generatora grupoid $\mathbf{G}_5$. Tada na osnovu Leme 2.3.24 ne postoji 4-linearna jednakosna teorija, dok na osnovu Leme 2.3.23 postoji devet egzaktno 3-linearnih jednakosnih teorija čiji odgovarajući varijeteti kao slobodne grupoide sa tri generatora imaju sledeće grupoide $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_9$.

U ovom odeljku pretpostavićemo da je E jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$. Tada će se u E nalaziti sledeći identiteti

$$\begin{aligned} x &\approx xx, \\ x &\approx x \cdot xy, \\ xy &\approx xy \cdot x \approx xy \cdot y \approx x \cdot yx \approx xy \cdot yx, \end{aligned}$$

a za terme u i v kako je naglašeno u Lemi 2.2.4 važiće: ako je identitet $u \approx v$ sadržan u E, tada termi u i v imaju iste prve promenljive. U ovom odeljku ćemo koristiti ovu činjenicu bez posebnog naglašavanja.

Pored toga, u odeljku 2.3 (Leme 2.3.1, 2.3.2, 2.3.5, 2.3.6, 2.3.7) je pokazano da u jednakosnoj teoriji kaja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ ako su termi $xy \cdot xz, xyz \cdot x, x \cdot (yz) \cdot z, xy \cdot zy, x \cdot xyz, x \cdot (y \cdot xz), xy \cdot zx$ ekvivalentni nekim linearnim termima onda važe sledeći identiteti:

(1) $xy \cdot xz \approx xy.$

(2) $xyz \cdot x \approx xyz,$

(3) $x \cdot (yz) \cdot z \approx xyz,$

(4) $xy \cdot zy \approx xyz,$

(5) $x \cdot xyz \approx x,$

(6) $x \cdot (y \cdot xz) \approx xy,$

(7) $xy \cdot zx \approx xzy,$

Lema 3.7.1. *3-kvazilinearna jednakosna teorija E koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ je određena identitetima (1)–(7) i proizvodima iz Tabele 2.10.*

Dokaz. Na osnovu identiteta (1)–(7) dobijamo da svi identiteti iz Leme 2.3.8 pripadaju jednakosnoj teoriji E, prema tome, na osnovu Lema 2.3.11, 2.3.12 i 2.3.13 dobijamo da još treba linearizovati terme iz Tabele 2.10 kako bismo dobili 3-kvazilinearnu jednakosnu teoriju. □

Lema 3.7.2. *U jednakosnoj teoriji E koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$, jedini linearni termi nad promenljivama x, y, z koji mogu biti ekvivalentni jesu xyz i xzy, odnosno $x \cdot yz$ i xy, tj. jedini identiteti na skupu od tri promenljive koji izjednačavaju dva linearna terma i koji mogu pripadati jednakosnoj teoriji E su identiteti $xyz \approx xzy$ i $x \cdot yz \approx xy$.*

Dokaz. Neka je identitet $t_1 \approx t_2$ sadržan u E, pri čemu su t_1 i t_2 različiti linearni ternarni termi na skupu $\{x, y, z\}$. Kako smo već ranije konstatovali, ne gubeći na opštosti neka dati termi počinju istom promenljivom x. Bar jedan od datih terma sadrži tri promenljive. Neka je to term t_1. Tada, ne gubeći na opštosti t_1 može biti oblika xyz ili $x \cdot yz$, koji međusobno nisu u relaciji $\approx_E$, kao ni sa termom x, što se lako uočava supstitucijama $y \mapsto x$ i $z \mapsto y$, respektivno. Term t_2 može biti $xy, xz, x \cdot yz, x \cdot zy, xyz, xzy$. Razmotrimo sada dva slučaja:

Slučaj 1: $t_1 = xyz$. U slučaju da je term t_2 jednak jednom od terma xy, xz, $x \cdot zy$ i $x \cdot yz$, u kontradikciju dolazimo u prvom i četvtom slučaju supstitucijom $y \mapsto x$, a u drugom i trećem supstitucijom $z \mapsto x$. Ostaje da je $t_2 = xzy$.

Slučaj 2: $t_1 = x \cdot yz$. U slučaju da je term t_2 jednak jednom od terma xz, xzy, $x \cdot zy$ i xyz, u kontradikciju dolazimo supstitucijom $y \mapsto x$. Ostaje da je $t_2 = xy$. $\square$

Lema 3.7.3. *Neka je E $*$-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ i koja sadrži identitet $x \cdot yz \approx xy$. Tada za različite promenljive $x, y_1, \ldots, y_n$, $n \geq 0$, jednakosna teorija E sadrži identitet*

$$xy_1 \ldots y_n x \approx xy_1 \ldots y_n.$$

Dokaz. Na osnovu identiteta $x \cdot yz \approx xy$ imamo da je svaki term ekvivalentan levo asociranom linearnom termu, prema tome, možemo pretpostaviti da E sadrži identitet

$$xy_1 \ldots y_n x \approx xz_1 \ldots z_k, \quad (\therefore),$$

gde su $x, z_1, \ldots, z_k$ različite promenljive.

Pretpostavimo da promenljiva u pripada skupu promenljivih $S(xy_1 \ldots y_n x) \triangle S(xz_1 \ldots z_k)$. Supstitucijom svih promenljivih u promenljivu x sem promenljive u dobijamo da E sadrži identitet $xu \approx x$, kontradikcija. Sledi da je $k = n$ i $\{y_1, \ldots, y_n\} = \{z_1, \ldots, z_k\}$.

Neka je funkcija $f : \{y_1, \ldots, y_n\} \to \{y_1, \ldots, y_n\}$ definisana sa $f(y_i) = z_i$ za $1 \leq i \leq n$. Već smo pokazali da je f permutacija na skupu $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Kako je f permutacija konačnog skupa sledi da je konačnog reda. Neka je permutacija f reda k. Tada je

$$\begin{aligned}
xy_1y_2\dots y_nx &\approx_{\mathbf{G}_5} xy_1y_2\dots y_nxx \\
&\vdots \\
&\approx_{\mathbf{G}_5} xy_1y_2\dots y_n\underbrace{xx\dots x}_{k} \\
&\approx_{(\cdot)} xf(y_1)f(y_2)\dots f(y_n)\underbrace{xx\dots x}_{k-1} \\
&\vdots \\
&\approx_{(\cdot)} xf^{(k)}(y_1)f^{(k)}(y_2)\dots f^{(k)}(y_n) \\
&= \quad xy_1y_2\dots y_n.
\end{aligned}$$

□

U pododeljku 3.7.4 dokazaćemo jače tvrđenje (Lema 3.7.13) od prethodne Leme koju smo ovde naveli zbog elegantosti dokaza.

U naredna tri pododeljka ćemo razmotriti sve slučajeve vezane za 3-kvazilinearnu jednakosnu teoriju E u zavisnosti od toga koje identitete sadrži od identiteta $xyz \approx xzy$ i $x \cdot yz \approx xy$.

3.7.1 $xyz \approx xzy$ i $x \cdot yz \not\approx xy$

Neka je E_a 3-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ i neka E_a sadrži identitet

$$xyz \approx xzy, \ (a),$$

dok na odgovarajućem varijetetu koji obeležavamo sa $\mathcal{V}_a$ imamo da je

$$\mathcal{V}_a \not\models x \cdot yz \approx xy.$$

U sledećoj Lemi ćemo pokazati većinu preostalih 3-kvazilinearnih osobina koje ima jednakosna teorija E_a.

Lema 3.7.4. *Jednakosna teorija E_a sadrži sledeće identitete:*

(8) $x \cdot yxz \approx x \cdot yz$,

(9) $xy \cdot yxz \approx xy \cdot yz$,

(10) $xyz \cdot y \approx xyz$,

(11) $xyz \cdot xzy \approx xyz$,

(12) $(x \cdot yz) \cdot y \approx xy \cdot yz$,

(13) $(x \cdot yz) \cdot yxz \approx x \cdot yz$,

Dokaz.
(8) $x \cdot yxz \approx_{(a)} x \cdot yzx \approx_{(a)} x \cdot yz$,
(9) $xy \cdot yz \approx_{(a)} (x \cdot yz) \cdot y \approx (x \cdot (yz \cdot x)) \cdot y \approx (x \cdot yxz) \cdot y \approx_{(a)} xy \cdot yxz$,
(10) $xyz \cdot y \approx_{(a)} xyy \cdot z \approx_{\mathbf{G}_5} xyz$,
(11) $xyz \cdot xzy \approx_{(a)} xyz \cdot xyz \approx xyz$,
(12) $(x \cdot yz) \cdot y \approx_{(a)} xy \cdot yz$,
(13) $(x \cdot yz) \cdot yxz \approx_{(a)} (x \cdot yxz) \cdot yz \approx_{(a)} x \cdot yz \cdot yz \approx_{\mathbf{G}_5} x \cdot yz$. □

Iz Tabele 2.10 ostao je još samo term $xy \cdot yz$ za koji treba pronaći odgovarajući ekvivalentan linearan term. Na osnovu Leme 2.3.9 sledi da jedan od identiteta:

$$xy \cdot yz \approx xy$$

ili

$$xy \cdot yz \approx xyz$$

pripada jednakosnoj teoriji E_a.

Neka je $a = x$, $b = y$, $c = z$, $d = xy$, $e = xz$, $f = yx$, $g = yz$, $h = zx$, $i = zy$, $j = xyz$, $k = yxz$, $l = zxy$, $m = x \cdot yz$, $n = x \cdot zy$, $o = y \cdot xz$, $p = y \cdot zx$, $q = z \cdot xy$, $r = z \cdot yx$, i neka je

$$\begin{aligned}\pi_{\mathbf{P}_{10,11}} = \{&\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{xy\}, \{xz\}, \{yx\}, \{yz\}, \{zx\}, \{zy\},\\ &\{xyz, xzy\}, \{yxz, yzx\}, \{zxy, zyx\},\\ &\{x \cdot yz\}, \{x \cdot zy\}, \{y \cdot xz\}, \{y \cdot zx\}, \{z \cdot xy\}, \{z \cdot yx\}\}\end{aligned}$$

particija skupa $Lin(\{x, y, z\})$.

Teorema 3.7.5. *Postoje tačno dve egzaktno 3-kvazilinearne jednakosne teorije koje su proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$ *i kojima pripada identitet* $xyz \approx xzy$, *dok im identitet* $x \cdot yz \approx xy$ *ne pripada. Njima odgovarajući slobodni grupoidi sa tri generatora su grupoidi* $\mathbf{P}_{10}$ *i* $\mathbf{P}_{11}$, *Tabela 3.3 (*$\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_9$, *kao što smo rekli, odgovaraju egzaktno* 3*-linearnim jednakosnim teorijama).*

$\mathbf{P}_{10}$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r
a	a	d	e	a	a	d	m	e	n	a	m	n	a	a	d	m	e	n
b	f	b	g	f	o	b	b	p	g	o	b	p	f	o	b	b	p	g
c	h	i	c	q	h	r	i	c	c	q	r	c	q	h	r	i	c	c
d	d	d	j	d	d	d	d	j	j	d	d	j	d	d	d	d	j	j
e	e	j	e	e	e	j	j	e	e	e	j	e	e	e	j	j	e	e
f	f	f	k	f	f	f	f	k	k	f	f	k	f	f	f	f	k	k
g	k	g	g	k	k	g	g	g	g	k	g	g	k	k	g	g	g	g
h	h	l	h	h	h	l	l	h	h	h	l	h	h	h	l	l	h	h
i	l	i	i	l	l	i	i	i	i	l	i	i	l	l	i	i	i	i
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	d	j	m	m	d	m	j	j	m	m	j	m	m	d	m	j	j
n	n	j	e	n	n	j	j	e	n	n	j	n	n	n	j	j	e	n
o	f	o	k	f	o	o	o	k	k	o	o	k	f	o	o	o	k	k
p	k	p	g	k	k	p	p	p	g	k	p	p	k	k	p	p	p	g
q	h	l	q	q	h	l	l	q	q	q	l	q	q	h	l	l	q	q
r	l	i	r	l	l	r	i	r	r	l	r	r	l	l	r	i	r	r

$\mathbf{P}_{11}$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r
a	a	d	e	a	a	d	m	e	n	a	m	n	a	a	d	m	e	n
b	f	b	g	f	o	b	b	p	g	o	b	p	f	o	b	b	p	g
c	h	i	c	q	h	r	i	c	c	q	r	c	q	h	r	i	c	c
d	d	d	j	d	d	d	m	j	j	d	m	j	d	d	d	m	j	j
e	e	j	e	e	e	j	j	e	n	e	j	n	e	e	j	j	e	n
f	f	f	k	f	o	f	f	k	k	o	f	k	f	o	f	f	k	k
g	k	g	g	k	k	g	g	p	g	k	g	p	k	k	g	g	p	g
h	h	l	h	q	h	l	l	h	h	q	l	h	q	h	l	l	h	h
i	l	i	i	l	l	r	i	i	i	l	r	i	l	l	r	i	i	i
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	j	m	m	m	m	j	j	m	m	j	m	m	m	m	j	j
n	n	j	n	n	n	j	j	n	n	n	j	n	n	n	j	j	n	n
o	o	o	k	o	o	o	o	k	k	o	o	k	o	o	o	o	k	k
p	k	p	p	k	k	p	p	p	p	k	p	p	k	k	p	p	p	p
q	q	l	q	q	q	l	l	q	q	q	l	q	q	q	l	l	q	q
r	l	r	r	l	l	r	r	r	r	l	r	r	l	l	r	r	r	r

Tabela 3.3:*Kejlijeve tablice slobodnih grupoida* $\mathbf{P}_{10}$ *i* $\mathbf{P}_{11}$ *nad tri generatora egzaktno* 3*-kvazilinearnih jednakosnih teorija koje su proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$ *i kojima pripada identitet* $xyz \approx xzy$*, dok im identitet* $x \cdot yz \approx xy$ *ne pripada.*

Dokaz. Na osnovu Leme 3.7.2 u 3-kvazilinearnoj jednakosnoj teoriji E_a (čiji je slobodan grupoid sa dva generatora $\mathbf{G}_5$) nikoja dva terma od terma x, y, z, xy, xz, yx, yz, zx, zy, xyz, yxz, zxy, $x \cdot yz$, $x \cdot zy$, $y \cdot xz$, $y \cdot zx$, $z \cdot xy$, $z \cdot yx$ nisu ekvivalentna u posmatranoj jednakosnoj teoriji. Prema tome, jedini potencijalni slobodni grupoidi sa tri generatora prave 3-kvazilinearne jednakosne teorije koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ na osnovu Lema 3.7.1 i 3.7.4 jesu grupoid $\mathbf{P}_{10}$ u slučaju kada je $xy \cdot yz \approx xy$ i grupoid $\mathbf{P}_{11}$ u slučaju kada je $xy \cdot yz \approx xyz$. Proverom pomoću računara utvrđujemo da na grupoidima $\mathbf{P}_{10}$ i $\mathbf{P}_{11}$ važe identiteti $(1), \ldots, (7)$, i $xyz \approx xzy$, dok identitet $x \cdot yz \approx xy$ ne važi. Prema tome, odatle sledi da važe i identiteti navedeni u Tabeli 2.1 bez $xy \cdot yz \approx xy \cdot_{\mathbf{F}_3} yz$, dok proverom pomoću računara utvrđujemo da identiteti $xy \cdot yz \approx xy$ i $xy \cdot yz \approx xyz$ redom važe u grupoidima $\mathbf{P}_{10}$ i $\mathbf{P}_{11}$. Na osnovu Teoreme 3.1.5 i particije $\pi_{\mathbf{P}_{10,11}}$ zaključujemo da postoje tačno dve egzaktno 3-kvazilinearne jednakosne teorije E_a koje su proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$, a njima odgovarajući slobodni grupoidi sa tri generatora su grupoidi $\mathbf{P}_{10}$ i $\mathbf{P}_{11}$. □

3.7.2 $xyz \not\approx xzy$ i $x \cdot yz \approx xy$

Neka je E_b 3-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ i neka E_b sadrži identitet

$$x \cdot yz \approx xy, \ (b)$$

dok na odgovarajućem varijetetu koji obeležavamo sa $\mathcal{V}_a$ imamo da je

$$\mathcal{V}_b \not\models xyz \approx xzy.$$

U sledećoj lemi ćemo pokazati većinu preostalih 3-kvazilinearnih osobina osobina koje ima E_b.

Primetimo da je svaki term na osnovu identiteta (b) ekvivalentan sa levo asociranim termom.

Lema 3.7.6. *Jednakosna teorija E_b sadrži sledeće identitete.*

(8) $x \cdot yxz \approx xy$,

(9) $xy \cdot yz \approx xy$

(10) $xy \cdot yxz \approx xy$,

(11) $xyz \cdot xzy \approx xyz$,

(12) $(x \cdot yz) \cdot y \approx xy$,

(13) $(x \cdot yz) \cdot yxz \approx xy.$

Dokaz.
(8) $x \cdot yxz \approx_{(b)} x \cdot yx \approx_{(b)} xy,$
(9) $xy \cdot yz \approx_{(b)} xy \cdot y \approx_{\mathbf{G}_5} xy,$
(10) $xy \cdot yxz \approx_{(b)} xy \cdot yx \approx_{\mathbf{G}_5} xy,$
(11) $xyz \cdot xzy \approx_{(b)} xyz \cdot xz \approx_{(b)} xyz \cdot x \approx_{Lema\, 2.3.8} xyz,$
(12) $(x \cdot yz) \cdot y \approx_{(b)} xy \cdot y \approx_{\mathbf{G}_5} xy,$
(13) $(x \cdot yz) \cdot yxz \approx_{(b)} xy \cdot yxz \approx_{(b)} xy \cdot yx \approx_{\mathbf{G}_5} xy.$ □

Iz Tabele 2.10 ostao je još samo term $xyz \cdot y$ za koji treba pronaći odgovarajući ekvivalentan linearan term. Na osnovu Leme 2.3.10 sledi da jedan od identiteta:

$$xyzy \approx xyz$$

ili

$$xyzy \approx xzy$$

pripada jednakosnoj teoriji E_b.

Neka je $a = x$, $b = y$, $c = z$, $d = xy$, $e = xz$, $f = yx$, $g = yz$, $h = zx$, $i = zy$, $j = xyz$, $k = xzy$, $l = yxz$, $m = yzx$, $n = zxy$, $o = zyx$ i neka je

$$\begin{aligned}\pi_{\mathbf{P}_{12,13}} = \{&\{x\}, \{y\}, \{z\},\\ &\{xy, x \cdot yz\}, \{xz, x \cdot zy\}, \{yx, y \cdot xz\},\\ &\{yz, y \cdot zx\}, \{zx, z \cdot xy\}, \{zy, z \cdot yx\},\\ &\{xyz\}, \{xzy\}, \{yxz\}, \{yzx\}, \{zxy\}, \{zyx\}\}\end{aligned}$$

particija skupa $Lin(\{x, y, z\})$.

Teorema 3.7.7. *Postoje tačno dve egzaktno 3-kvazilinearne jednakosne teorije koje su proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$ *i kojima pripada identitet* $x \cdot yz \approx xy$*, dok im identitet* $xyz \approx xzy$ *ne pripada. Njima odgovarajući slobodni grupoidi sa tri generatora su grupoidi* $\mathbf{P}_{12}$ *i* $\mathbf{P}_{13}$*, Tabela 3.4.*

Dokaz. Na osnovu Leme 3.7.2 u 3-kvazilinearnoj jednakosnoj teoriji E_b (čiji je slobodan grupoid sa dva generatora $\mathbf{G}_5$) nikoja dva terma od terma x, y, z, xy, xz, yx, yz, zx, zy, xyz, xzy, yxz, yzx, zxy, zyx nisu ekvivalentna u posmatranoj jednakosnoj teoriji. Prema tome, jedini potencijalni slobodni grupoidi sa tri generatora prave 3-kvazilinearne jednakosne teorije sa slobodnim grupoidom $\mathbf{G}_5$ (nad skupom od dva generatora) na osnovu Lema

$\mathbf{P}_{12}$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
a	a	d	e	a	a	d	d	e	e	a	a	d	d	e	e
b	f	b	g	f	f	b	b	g	g	f	f	b	b	g	g
c	h	i	c	h	h	i	i	c	c	h	h	i	i	c	c
d	d	d	j	d	d	d	d	j	j	d	d	d	d	j	j
e	e	k	e	e	e	k	k	e	e	e	e	k	k	e	e
f	f	f	l	f	f	f	f	l	l	f	f	f	f	l	l
g	m	g	g	m	m	g	g	g	g	m	m	g	g	g	g
h	h	n	h	h	h	n	n	h	h	h	h	n	n	h	h
i	o	i	i	o	o	i	i	i	i	o	o	i	i	i	i
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n	n
o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o	o

$\mathbf{P}_{13}$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o
a	a	d	e	a	a	d	d	e	e	a	a	d	d	e	e
b	f	b	g	f	f	b	b	g	g	f	f	b	b	g	g
c	h	i	c	h	h	i	i	c	c	h	h	i	i	c	c
d	d	d	j	d	d	d	d	j	j	d	d	d	d	j	j
e	e	k	e	e	e	k	k	e	e	e	e	k	k	e	e
f	f	f	l	f	f	f	f	l	l	f	f	f	f	l	l
g	m	g	g	m	m	g	g	g	g	m	m	g	g	g	g
h	h	n	h	h	h	n	n	h	h	h	h	n	n	h	h
i	o	i	i	o	o	i	i	i	i	o	o	i	i	i	i
j	j	k	j	j	j	k	k	j	j	j	j	k	k	j	j
k	k	k	j	k	k	k	k	j	j	k	k	k	k	j	j
l	m	l	l	m	m	l	l	l	l	m	m	l	l	l	l
m	m	m	l	m	m	m	m	l	l	m	m	m	m	l	l
n	o	n	n	o	o	n	n	n	n	o	o	n	n	n	n
o	o	n	o	o	o	n	n	o	o	o	o	n	n	o	o

Tabela 3.4: *Kejlijeve tablice slobodnih grupoida* $\mathbf{P}_{12}$ *i* $\mathbf{P}_{13}$ *nad tri generatora egzaktno* 3*-kvazilinearnih jednakosnih teorija koje su proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$ *i kojima pripada identitet* $x \cdot yz \approx xy$, *dok im identitet* $xyz \approx xzy$ *ne pripada.*

3.7.1 i 3.7.6 jesu grupoid $\mathbf{P}_{12}$ u slučaju kada je $xyzy \approx xyz$ i grupoid $\mathbf{P}_{13}$ u slučaju kada je $xyzy \approx xzy$. Proverom pomoću računara utvrđujemo da na grupoidima $\mathbf{P}_{12}$ i $\mathbf{P}_{13}$ važe identiteti $(1), \ldots, (7)$, i $x \cdot yz \approx xy$, dok identitet $xyz \approx xzy$ ne važi. Prema tome, odatle sledi da važe i identiteti navedeni u Tabeli 2.1 bez $xyz{\cdot}y \approx xyz{\cdot_{\mathbf{F}_3}}y$, dok proverom pomoću računara utvrđujemo da identiteti $xyzy \approx xyz$ i $xyzy \approx xzy$ redom važe u grupoidima $\mathbf{P}_{12}$ i $\mathbf{P}_{13}$. Na osnovu Teoreme 3.1.5 i $\pi_{\mathbf{P}_{12,13}}$ zaključujemo da postoje tačno dve egzaktno 3-kvazilinearne jednakosne teorije E_b koje su proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ a njoj odgovarajući slobodni grupoidi sa tri generatora su grupoidi $\mathbf{P}_{12}$ i $\mathbf{P}_{13}$. □

U pododeljku 3.7.4 ćemo pokazati da su sve 3-kvazilinearne jednakosne teorije koje su proširenje slobodnog grupoida $\mathbf{G}_5$ i kojima pripada identitet $x \cdot yz \approx xy$ dok identitet $xyz \approx xzy$ ne pripada, ustvari, $*$-kvazilinearne idempotentne jednakosne teorije.

3.7.3 $xyz \approx xzy$ i $x \cdot yz \approx xy$

Pretpostavimo u ovom pododeljku da je $\mathbf{G}_5$ slobodan grupoid sa dva generatora za 3-kvazilinearnu jednakosnu teoriju E_c (odgovarajući varijetet $\mathcal{V}_c$) koji sadrži identitete

$$xyz \approx xzy, \ (a),$$
$$x \cdot yz \approx xy, \ (b),$$

Lema 3.7.8. *Jednakosna teorija E_c sadrži sledeće identitete.*

(8) $x \cdot yxz \approx xy,$

(9) $xy \cdot yz \approx xy$

(10) $xy \cdot yxz \approx xy,$

(11) $xyz \cdot y \approx xyz,$

(12) $xyz \cdot xzy \approx xyz,$

(13) $(x \cdot yz) \cdot y \approx xy,$

(14) $(x \cdot yz) \cdot yxz \approx xy.$

Dokaz. Dokaz sledi na osnovu Lema 3.7.4 i 3.7.6 (iz prethodna dva potpoglavlja). □

Neka je $a = x$, $b = y$, $c = z$, $d = xy$, $e = xz$, $f = yx$, $g = yz$, $h = zx$, $i = zy$, $j = xyz$, $k = yxz$, $l = zxy$ i neka je

$$\begin{aligned}\pi_{\mathbf{P}_{14}} = \{&\{x\}, \{y\}, \{z\},\\ &\{xy, x \cdot yz\}, \{xz, x \cdot zy\}, \{yx, y \cdot xz\},\\ &\{yz, y \cdot zx\}, \{zx, z \cdot xy\}, \{zy, z \cdot yx\},\\ &\{xyz, xzy\}, \{yxz, yzx\}, \{zxy, zyx\}\}\end{aligned}$$

particija skupa $Lin(\{x, y, z\})$.

Teorema 3.7.9. *Postoje tačno jedna egzaktno 3-kvazilinearne jednakosne teorije koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$ *i kojoj pripadaju identiteti* $xyz \approx xzy$ *i* $x \cdot yz \approx xy$. *Njoj odgovarajući slobodni grupoid sa tri generatora je grupoid* $\mathbf{P}_{14}$, *Tabela 3.5.*

$\mathbf{P}_{14}$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
a	a	d	e	a	a	d	d	e	e	a	d	e
b	f	b	g	f	f	b	b	g	g	f	b	g
c	h	i	c	h	h	i	i	c	c	h	i	c
d	d	d	j	d	d	d	d	j	j	d	d	j
e	e	j	e	e	e	j	j	e	e	e	j	e
f	f	f	k	f	f	f	f	k	k	f	f	k
g	k	g	g	k	k	g	g	g	g	k	g	g
h	h	l	h	h	h	l	l	h	h	h	l	h
i	l	i	i	l	l	i	i	i	i	l	i	i
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l

Tabela 3.5: *Kejlijeva tablica slobodnog grupoida* $\mathbf{P}_{14}$ *nad tri generatora egzaktno* 3*-kvazilinearne jednakosne teorije koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$ *i kojoj pripadju identiteti* $xyz \approx xzy$ *i* $x \cdot yz \approx xy$.

Dokaz. Na osnovu Leme 3.7.2 u 3-kvazilinearnoj jednakosnoj teoriji E_c (čiji je slobodan grupoid sa dva generatora $\mathbf{G}_5$) nikoja dva terma od terma x, y, z, xy, xz, yx, yz, zx, zy, xyz, yxz, zxy nisu ekvivalentna u posmatranoj jednakosnoj teoriji. Prema tome, jedini potencijalni slobodni grupoid sa tri generatora prave 3-kvazilinearne jednakosne teorije sa slobodnim grupoidom $\mathbf{G}_5$ (nad skupom od dva generatora) na osnovu Lema 3.7.1 i 3.7.8 jeste grupoid $\mathbf{P}_{14}$. Proverom pomoću računara utvrđujemo da na grupoidu $\mathbf{P}_{14}$ važe identiteti $(1), \ldots, (7)$, $x \cdot yz \approx xy$ i $xyz \approx xzy$, odakle sledi da važe i identiteti navedeni u Tabeli 2.1. Na osnovu Teoreme 3.1.5 i $\pi_{\mathbf{P}_{14}}$ zaključujemo da postoji tačno jedna egzaktno 3-kvazilinearna jednakosna teorija E_c koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$, a njoj odgovarajući slobodni grupoidi sa tri generatora je grupoid $\mathbf{P}_{14}$. □

U pododeljku 3.7.4 ćemo pokazati da su sve 3-kvazilinearne jednakosne teorije koje su proširenje slobodnog grupoida $\mathbf{G}_5$ i kojima pripadaju identiteti $x \cdot yz \approx xy$ i $xyz \approx xzy$, ustvari, $*$-kvazilinearne idempotentne jednakosne teorije.

Teorema 3.7.10. *Postoji tačno četrnaest (pet pravih) egzaktno 3-kvazilinearnih jednakosnih teorija koje su proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$; njima odgovarajući slobodni grupoidi sa tri generatora su grupoidi $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_{14}$ ($\mathbf{P}_{10}, \ldots, \mathbf{P}_{14}$).*

Dokaz. Tvrđenje ove Teoreme sledi na osnovu Teoreme 2.3.23, Leme 3.7.2, i Teorema 3.7.5, 3.7.7, 3.7.9. □

3.7.4 $*$-kvazilinearna proširenja G_5 i njihovi podvarijeteti

U odeljku 2.3 i prethodnom delu odeljka 3.7 je pokazano da za grupoid $\mathbf{G}_5$ postoji tačno 14 proširenja koja su egzaktno 3-kvazilinearne jednakosne teorije, a njihove odgovarajuće slobodne grupoide na skupu od tri promenljive smo obeležili sa $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_{14}$. Pokazali smo da ne postoje 4--linearna proširenja grupoida $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_9$ (Lema 2.3.24), a u Lemi 3.7.11 ćemo pokazati na sličan način da ne postoje ni 4-kvazilinearna proširenja grupoida $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_9$. U Teoremi 3.7.12 pokazaćemo da za grupoide $\mathbf{P}_{10}$ i $\mathbf{P}_{11}$ ne postoji 4-kvazilinearno proširenje tako da nam ostaju samo tri mogućnosti potencijlnih slobodnih grupoida sa tri promenljive $\mathbf{P}_{12}$, $\mathbf{P}_{13}$ i $\mathbf{P}_{14}$ za $*$-kvazilinearan varijetet.

Lema 3.7.11. *Ne postoji 4-kvazilinearna jednakosna teorija takva da je proširenje nekog od grupoida $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_9$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji 4-kvazilinearna jednakosna teorija E takva da je proširenje nekog grupoida $\mathbf{P}$ iz skupa $\{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_9\}$. Svaki od grupoida $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_9$ ima osobinu da su mu linearne term funkcije nad skupom od tri promenljive različite. Neka je ℓ linearan term ekvivalentan u E sa $x(yz)(wz)$. Dokaz koji sledi pokazuje da za proizvoljan izbor terma ℓ dobijamo da identitet $x(yz)(wz) \approx \ell$ ne važi na $\mathbf{P}$. Naša strategija će biti da pokažemo prvo da je $S(\ell) = \{x, y, z, w\}$.

Očigledno je da $x \in S(\ell)$, pošto je prva promenljiva u zadanom termu.

Takođe važi da $y \in S(\ell)$, jer inače supstitucijama $y \mapsto z$ i $y \mapsto x$ na $\ell \approx x(yz)(wz)$ i primenom tranzitivnosti dobijamo identitet $xz \cdot wz \approx x \cdot wz$, na koga kada se primeni supstitucija $w \mapsto x$ dobijamo $xz \approx x$, kontradikcija.

Važi i da $z \in S(\ell)$, jer inače supstitucijom $z \mapsto yz$ na $\ell \approx x(yz)(wz)$ dobijamo identitet $\ell \approx xy(w \cdot yz)$, odakle sledi identitet $x(yz)(wz) \approx xy(w \cdot yz)$. Tada primenom supstitucije $w \mapsto y$ na poslednji identitet dobijamo da važi identitet $x \cdot yz \approx xy$, kontradikcija.

Što se tiče $w \in S(\ell)$, primetimo da bi u suprotnom supstitucijama $w \mapsto z$ i $w \mapsto x(yz)$ na $\ell \approx x(yz)(wz)$ i primenom tranzitivnosti dobili identitet $(x \cdot yz)z \approx x \cdot yz$, na koga kada se primeni supstitucija $y \mapsto x$ dobijamo identitet $xz \approx x$, kontradikcija.

Prema tome, dobijamo da je $S(\ell) = \{x, y, z, w\}$. Tada postoje termi a i b takvi da je $\ell = ab$. Razmotrimo sledeće slučajeve.

Slučaj $a = x$: U ovom slučaju prvo dokažimo da b ne može biti jedan od terma $y \cdot zw, \dots, w \cdot zy$, tj. ne može biti desno asociran. Ako pretpostavimo da je b jednak nekome od desno asociranih navedenih terma, tada poistovećivanjem neke dve promenljive od y, z, w dobijamo jedan od identiteta $xy \cdot wy \approx xy$, $x \cdot yz \approx xy$, $(x \cdot yz)z \approx xz$. U prvom identitetu supstitucijom $y \mapsto x$ dobijamo da je $xw \approx x$; u trećem identitetu supstitucijom $z \mapsto x$ dobijamo identitet $xy \approx x$. Prema tome, b je jedan od levo asociranih terma $yzw, \dots, wzy$. Ako b počinje sa y tada supstitucijom $w \mapsto z, y \mapsto x$ dobijamo $xz \approx x$. Ako b počinje sa z, tada $w \mapsto y$ daje $x \cdot yz \approx x \cdot zy$, koji je linearan identitet nad skupom od tri promenljive. Ako b počinje sa w, tada supstitucijom $z \mapsto y$ dobijamo $xy \cdot wy \approx x \cdot wy$, što nas dovodi do identiteta $xy \approx x$ kada se primeni supstitucija $w \mapsto x$.

Slučaj $b = y$: Supstitucijom $y \mapsto x$ dobijamo $ax \approx x \cdot wz$. Pošto a mora biti jedan od terma $xwz, xzw, x \cdot zw, x \cdot wz$, tada važi identitet $ax \approx a$. (Videti Lemu 2.3.1 (2) i identitet $xyx \approx xy$ gore.) Tada sledi da je $a \approx x \cdot wz$, tako da je a jednako sa termom $x \cdot wz$ i identitet $x(yz)(wz) \approx ab$ postaje $x(yz)(wz) \approx x(wz)y$. Supstitucijom $w \mapsto z$ dobijamo $x(yz)z \approx xzy$. Međutim, to je u kontradikciji sa Lemom 2.3.1 (3).

Slučaj $b = z$: Postoje četiri podslučaja. $a = x \cdot yw$ se eliminiše supstitucijom $w \mapsto y$, jer tada dobijamo identitet $x \cdot yz \approx xyz$. $a = x \cdot wy$ se eliminiše supstitucijom $w \mapsto x$ i $z \mapsto x$, jer tada dobijamo $xy \approx x$. $a = xyw$ i $a = xwy$ se eleminišu supstitucijom $y \mapsto x$, jer tada dobijamo $x \cdot wz \approx xwz$.

Slučaj $b = w$: Postoje četiri podslučaja. U svakom od tih podslučaja supstitucija $y \mapsto x$ nas vodi do identiteta $xw \approx x \cdot wz$ ili $xzw \approx x \cdot wz$.

Jedino su još preostali slučajevi kod kojih termi a i b sadrže po tačno dve promenljive. Tada za neko $e \in \{y, z, w\}$, a je xe i b je proizvod dva elementa skupa $S(\ell) \setminus \{x, e\}$. Ako je $a = xz$, tada supstitucija $w \mapsto y$ daje identitet $x \cdot yz \approx xzy$. Ako je $a = xw, b = yz$ tada supstitucija $y \mapsto x$ daje $x \cdot wz \approx xw$ (korišćenjem Leme 2.3.1 (1)). Ako je $a = xw, b = zy$, tada iz supstitucije $z \mapsto wz, x \mapsto wz$ proizilazi $wzyw \approx wzw \cdot wzy$, odakle dobijamo $wzy \approx wz$ (korišćenjem Leme 2.3.1 (1), (2)). Ako je $a = xy$, $b = zw$ tada iz $y \mapsto x$ dobijamo $x \cdot zw \approx x \cdot wz$.

Samo je još jedna mogućnost preostala za term ℓ. To je $xy \cdot wz$. Prema tome, imamo $x(yz)(wz) \approx xy \cdot wz$ u E. Ali tada supstitucijom $w \mapsto x$ dobijamo $x \cdot yz \approx xy$ prema Lemi 2.3.1 (1). □

Teorema 3.7.12. *Ne postoji* 4*-kvazilinearna jednakosna teorija* E_a *u kojoj važi* $xyz \approx_{(a)} xzy$ *i* $x \cdot yz \not\approx_{(a)} xy$*, gde je* $\mathbf{G}_5$ *slobodan grupoid sa dva generatora, tj. ne postoji* 4*-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida* $\mathbf{P}_{10}$ *ili* $\mathbf{P}_{11}$.

Dokaz. Dokažimo da za term $x(yz)(vz)$ ne postoji $\approx_a$-ekvivalentan linearan term. Pretpostavimo suprotno. Neka je u linearan term takav da važi identitet $u \approx x(yz)(vz)$. Primetimo da primenom identiteta (1)–(7) iz ovog odeljka (navedenih pre Leme 3.7.1), zatim Leme 3.7.4 i identiteta na skupu od dve promenljive dobijamo da važi:

$$\begin{aligned}
\sigma_{y \mapsto x}(x \cdot yz \cdot vz) &= \quad x \cdot vz \\
\sigma_{z \mapsto x}(x \cdot yz \cdot vz) &= \quad xvy \\
\sigma_{v \mapsto x}(x \cdot yz \cdot vz) &= \quad x \cdot yz \\
\sigma_{z \mapsto y}(x \cdot yz \cdot vz) &= \quad xyv \\
\sigma_{v \mapsto y}(x \cdot yz \cdot vz) &= \quad x \cdot yz \\
\sigma_{v \mapsto z}(x \cdot yz \cdot vz) &= \quad xzy
\end{aligned}$$

Tada $x \in S(u)$ jer u suprotnom imamo da važi $xy \approx_a \sigma_{z \mapsto y}(\sigma_{v \mapsto y}(x \cdot yz \cdot vz)) \approx_a \sigma_{z \mapsto y}(\sigma_{v \mapsto y}(u)) \approx_a y$.

Tada $y \in S(u)$ jer u suprotnom imamo da važi $xy \approx_a \sigma_{z \mapsto x}(\sigma_{v \mapsto x}(x \cdot yz \cdot vz)) \approx_a \sigma_{z \mapsto x}(\sigma_{v \mapsto x}(u)) \approx_a x$.

Tada $z \in S(u)$ jer u suprotnom imamo da važi $x \cdot yz \approx_a \sigma_{v \mapsto y}(x \cdot yz \cdot vz) \approx_a \sigma_{v \mapsto y}(u) \approx_a xy$.

Tada $v \in S(u)$ jer u suprotnom imamo da važi $xv \approx_a \sigma_{z \mapsto x}(\sigma_{y \mapsto x}(x \cdot yz \cdot vz)) \approx_a \sigma_{z \mapsto x}(\sigma_{y \mapsto x}(u)) \approx_a x$.

Dokažali smo da je $S(u) = \{x, y, z, v\}$.

Neka je $u = u_1 u_2$. Neka termovi v_1, v_2 i v_3 predstavljaju jednu permutaciju promenljivih y, z, v. Razmotrimo sledeće slučajeve:

Slučaj $u_1 = x$: Tada u_2 sadrži preostale promenljive.

Podslučaj $u_2 = v_1 \cdot v_2 v_3$: Supstitucijom $v_1 \mapsto x$ i $v_2 \mapsto v_3$ dolazimo u kontradikciju.

Podslučaj $u_2 = v_1v_2v_3$: Supstitucijom $v_1 \mapsto x$ i $v_2 \mapsto v_3$ dolazimo u kontradikciju.

Slučaj $u_1 = xv_1$: Tada je $u \approx x \cdot v_2v_3 \cdot v_1$. Supstitucijom $v_2 \mapsto x$ dobijamo da je xv_1 ekvivalentan sa nekim linearnim termom sa tri promenljive od, xv_1v_3, $x \cdot v_1v_3$, $x \cdot v_3v_1$, sa kojima dolazimo u kontradikciju redom sa supstitucijom $v_1 \mapsto x$, uslovom teoreme $x \cdot yz \not\approx xy$, supstitucijom $v_3 \mapsto x$.

Slučaj $u_2 = v_3$: Tada term u_1 moze imati dva oblika.

Podslučaj $u_1 = x \cdot v_1v_2$: Tada je $u = x(v_1v_2)v_3 \approx_a xv_3(v_1v_2)$, tj. prethodni slučaj.

Podslučaj $u_1 = xv_1v_2$: Tada je $xyzv \approx_a u \approx x \cdot yz \cdot vz$, pa supstitucijom $y \mapsto x$ dobijamo da je $x \cdot vz$ ekvivalentan sa termom xvz, kontradikcija. □

Lema 3.7.13. *Neka je E idempotentna jednakosna teorija koja sadrži identitet $x \cdot yz \approx xy$. Tada za različite promenljive $x, y_1, \ldots, y_n$, $n \geq 0$, jednakosna teorija E sadrži identitet*

$$xy_1 \ldots y_n x \approx xy_1 \ldots y_n.$$

Dokaz. Ako je $n = 0$ onda identitet predstavlja zakon idempotentnosti. Za $n > 0$ na osnovu identiteta $x \cdot yz \approx xy$ i na kraju idempotentnosti važi sledeći niz identiteta:

$$\begin{aligned} xy_1 \ldots y_n x &\approx xy_1 \ldots y_n \cdot xy_1 \\ &\approx xy_1 \ldots y_n \cdot xy_1y_2 \\ &\vdots \\ &\approx xy_1 \ldots y_n \cdot xy_1 \ldots y_n \\ &\approx xy_1 \ldots y_n. \end{aligned}$$

□

Lema 3.7.14. *Varijetet $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$ koji odgovara jednakosnoj teoriji E_A generisanoj identitetima:*

(A1) $xx \approx x$

(A2) $xyy \approx xy$

(A3) $x(yz) \approx xy$

(A4) $xyzy \approx xyz$

je $*$*-kvazilinearan i proširenje grupoida* $\mathbf{G}_5$*. Grupoid* $\mathbf{P}_{12}$ *je slobodan grupoid sa tri generatora u varijetetu* $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$*.*

Dokaz. Korišćenjem identiteta $(A3)$ dobijamo da je proizvoljan term t ekvivalentan u jednakosnoj teoriji E_A levo asociranom termu t'. Jednakosnoj teoriji E_A pripada identitet $xy_1 \dots y_n x \approx xy_1 \dots y_n$ za svaki nenegativan ceo broj n (Lema 3.7.13). Prema tome, zaključujemo da je identitet $t' \approx t''$ sadržan u E_A, pri čemu se levo asocirani term t'' dobija od terma t' brisanjem svih pojavljivanja prve promenljive terma t' sa leve strane sem sa prvog mesta. Jednakosnoj teoriji E_A pripada identitet $xyz_1 \dots z_n y \approx xyz_1 z_2 \dots z_n$ za svaki nenegativan ceo broj n jer za $n = 0$ identitet sledi iz $(A2)$ dok za $n > 0$ važi sledeći niz identiteta:

$$\begin{aligned} xyz_1 z_2 \dots z_n y &\approx_{(A4)} xyz_1 y z_2 \dots z_n y \\ &\approx_{(A4)} xyz_1 y z_2 y \dots z_n y \\ &\vdots \\ &\approx_{(A4)} xyz_1 y z_2 y \dots y z_n y \\ &\approx_{(A4)} xyz_1 y z_2 y \dots y z_n \\ &\vdots \\ &\approx_{(A4)} xyz_1 z_2 \dots z_n. \end{aligned}$$

Tada identitet $t'' \approx t'''$ pripada jednakosnoj teoriji E_A pri čemu je term t''' levo asociran i dobija se od terma t'' brisanjem svih neprvih pojavljivanja promenljivih sa leve strane koje se razlikuju od prve promenljive terma t'' sa leve strane. Kako je term t''' linearan zaključujemo da je jednakosna teorija E_A $*$-kvazilinearna.

Slobodan grupoid nad dva generatora u $*$-kvazilinearnom varijetetu ima najvise četiri elementa a grupoid $\mathbf{G}_5$ je generisan sa dva elementa i identiteti $(A1)$–$(A4)$ su tačni na grupoidu $\mathbf{G}_5$, prema tome dobijamo da je slobodan grupoid sa dva generatora u varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$ upravo grupoid $\mathbf{G}_5$.

U grupoidu $\mathbf{P}_{13}$ ne važi identitet $(A4)$ pa ne može biti slobodan grupoid varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$. Grupoidi $\mathbf{P}_{12}$ i $\mathbf{P}_{14}$ pripadaju varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$ jer su identiteti $(A1)$–$(A4)$ tačni na njima. Kako je na grupoidu $\mathbf{P}_{14}$ tačan identitet $xyz \approx xzy$ dok na grupoidu $\mathbf{P}_{12}$ nije tačan, tada sledi da ni na varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$ ne važi posmatrani identitet na skupu od tri promenljive pa grupoid $\mathbf{P}_{14}$ ne može biti slobodan grupoid nad skupom od tri generatora u varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$. Prema tome E_A je proširenje grupoida $\mathbf{P}_{12}$. $\square$

Lema 3.7.15. *Vrijetet $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$ koji odgovara jednakosnoj teoriji E_B generisanoj identitetima:*

(B1) $xx \approx x$

(B2) $xyy \approx xy$

(B3) $x(yz) \approx xy$

(B4) $xyzy \approx xzy$

je $*$-kvazilinearan i proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$. Grupoid $\mathbf{P}_{13}$ je slobodan grupoid sa tri generatora u varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$.

Dokaz. Korišćenjem identiteta $(B3)$ dobijamo da je proizvoljan term t ekvivalentan u jednakosnoj teoriji E_B levo asociranom termu t'. Jednakosnoj teoriji E_B pripada identitet $xy_1 \ldots y_n x \approx xy_1 \ldots y_n$ za svaki nenegativan ceo broj n (Lema 3.7.13). Prema tome, zaključujemo da je identitet $t' \approx t''$ sadržan u E_B, pri čemu se levo asocirani term t'' dobija od terma t' brisanjem svih pojavljivanja prve promenljive terma t' sa leve strane sem sa prvog mesta. Jednakosnoj teoriji E_B pripada identitet $xyz_1 \ldots z_n y \approx xz_1 z_2 \ldots z_n y$ za svaki nenegativan ceo broj n jer za $n = 0$ identitet sledi iz $(B2)$ dok za $n > 0$ važi sledeći niz identiteta:

$$\begin{aligned}
xyz_1 \ldots z_n y &\approx_{(B4)} xyz_1 \ldots z_{n-1} y z_n y \\
&\approx_{(B4)} xyz_1 \ldots z_{n-2} y z_{n-1} y z_n y \\
&\vdots \\
&\approx_{(B4)} xyz_1 y z_2 y \ldots z_n y \\
&\approx_{(B4)} xz_1 y z_2 y \ldots z_n y \\
&\vdots \\
&\approx_{(B4)} xz_1 z_2 \ldots z_n y.
\end{aligned}$$

Tada identitet $t'' \approx t'''$ pripada jednakosnoj teoriji E_B pri čemu je term t''' levo asociran i dobija se od terma t'' brisanjem svih neprvih pojavljivanja promenljivih sa desne strane koje se razlikuju od prve promenljive terma t'' sa leve strane. Kako je term t''' linearan zaključujemo da je jednakosna teorija E_B $*$-kvazilinearna.

Slobodan grupoid nad dva generatora u $*$-kvazilinearnom varijetetu ima najvise četiri elementa a grupoid $\mathbf{G}_5$ je generisan sa dva elementa i identiteti

$(B1)$–$(B4)$ su tačni na grupoidu $\mathbf{G}_5$, prema tome, dobijamo da je slobodan grupoid sa dva generatora u varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$ upravo grupoid $\mathbf{G}_5$.

U grupoidu $\mathbf{P}_{12}$ ne važi identitet $(B4)$ pa ne može biti slobodan grupoid varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$. Grupoidi $\mathbf{P}_{13}$ i $\mathbf{P}_{14}$ pripadaju varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$ jer su identiteti $(B1)$–$(B4)$ tačni na njima. Kako je na grupoidu $\mathbf{P}_{14}$ tačan identitet $xyz \approx xzy$ dok na grupoidu $\mathbf{P}_{13}$ nije tačan, tada sledi da ni na varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$ ne važi posmatrani identitet na skupu od tri promenljive pa grupoid $\mathbf{P}_{14}$ ne može biti slobodan grupoid nad skupom od tri generatora u varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$. Prema tome E_B je proširenje grupoida $\mathbf{P}_{13}$. □

Lema 3.7.16. *Varijetet $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ koji odgovara jednakosnoj teoriji E_C generisanoj identitetima:*

(C1) $xx \approx x$

(C2) $xyy \approx xy$

(C3) $x(yz) \approx xy$

(C4) $xyz \approx xzy$.

je podvarijetet varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$ i $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$ i proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$. Grupoid $\mathbf{P}_{14}$ je slobodan grupoid sa tri generatora u varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$.

Dokaz. Identiteti $(A4)$ i $(B4)$ se lako dokazuju iz identiteta $(C2)$ i $C4)$.

Slobodan grupoid nad dva generatora u $*$-kvazilinearnom varijetetu ima najviše četiri elementa a grupoid $\mathbf{G}_5$ je generisan sa dva elementa i identiteti $(C1)$–$(C4)$ su tačni na grupoidu $\mathbf{G}_5$, prema tome, dobijamo da je slobodan grupoid sa dva generatora u varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ upravo grupoid $\mathbf{G}_5$.

Kako na grupoidima $\mathbf{P}_{12}$ i $\mathbf{P}_{13}$ ne važi identitet $(C4)$ dobijamo da je $\mathbf{P}_{14}$ slobodan grupoid nad tri generatora u varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$. □

Primetimo da u varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ proizvoljna dva levo asocirana linearna terma sa istim promenljivama i istom prvom promenljivom sa leve strane su ekvivalentna.

Lema 3.7.17. *Varijetet $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ je $*$-kvazilinearan varijetet generisan sa slobodnim grupoidom $\mathbf{G}_5$. Njegovi jedini pravi podvarijeteti su varijetet levo nultih polugrupa i trivijalan varijetet (varijeteti generisani sa grupoidima $\mathbf{G}_9$ i $\mathbf{G}_{10}$).*

Dokaz. Varijetet $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ je $*$-kvazilinearan varijetet jer je podvarijetet $*$-kvazilinearnog varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$ (Lema 3.7.16). Neka je $\mathcal{V}$ pravi podvarijetet varijeteta

$\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$. Neka su t_1 i t_2 dva levo asocirana linearna terma i neka su oni ekvivalentni u posmatranom varijetetu. Ako je skup promenljivih u ovim termima različit, tada se identitet $t_1 \approx t_2$ odgovarajućom supstitucijom može svesti na identitet $xy \approx x$, $xy \approx y$ ili $x \approx y$. U prvom slučaju $\mathcal{V}$ je sadržan u varijetetu levo nultih polugrupa, a iz drugog slučaja sledi identitet $x \cdot yx \approx yx$, prema tome, sledi da važi $y \approx xy \approx x \cdot yx \approx yx \approx x$ i $\mathcal{V}$ je trivijalan varijetet kao i u trećem slučaju. Ako je $S(t_1) = S(t_2)$ i termi t_1, t_2 imaju različite prve promenljive sa leve strane, recimo x u termu t_1, a y u termu t_2, tada supstitucijom svih ostalih promenljivih promenljivom x možemo svesti term t_1 na term xy (korišćenjem identiteta $(C1), (C2)$ i $(C4)$), dok term t_2 svodimo na term yx (korišćenjem identiteta $(C1)$ i $(C2)$). Konačno, iz identiteta $xy \approx yx$ sledi $xy \approx xy \cdot x \approx x \cdot xy \approx x$, pa sledi da važi identitet $xy \approx y$, iz kojeg sledi da je $\mathcal{V}$ trivijalan varijetet. Ako je $S(t_1) = S(t_2)$ i termi t_1 i t_2 imaju iste prve promenljive sa leve strane onda na osnovu identiteta $(C4)$ imamo da je $\mathcal{V}_{\mathbf{C}} \models t_1 \approx t_2$. Jedini pravi podvarijeteti varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ su trivijalan varijetet i varijetet levo nultih polugrupa (pošto je grupoid $\mathbf{G}_9$ homomorfna slika grupoida $\mathbf{G}_5$).

Pošto grupoid $\mathbf{G}_5$ nije ni levo nulta polugrupa ni trivijalan grupoid, tada sledi da je varijetet $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ generisan grupoidom $\mathbf{G}_5$. □

Posledica 3.7.18. *Za svako $n \geq 3$, postoji tačno jedna n-kvazilinearna jednakosna teorija E koja je proširenje grupoida $\mathbf{P}_{14}$.*

Dokaz. Na osnovu Lema 3.7.16 i 3.7.17 Imamo da je $E = E_C$. □

Lema 3.7.19. *Svi pravi podvarijeteti varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$ su podvarijeteti varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$. Varijetet $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$ je generisan slobodnim grupoidom $\mathbf{P}_{12}$.*

Dokaz. Primetimo da u varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$ važi $xyx \approx xxyx \approx xxy \approx xy$. Neka je $\mathcal{V}$ pravi podvarijetet varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$. Neka su t_1 i t_2 dva levo asocirana linearna terma i neka su oni ekvivalentni u posmatranom varijetetu. Ako je skup promenljivih u ovim termima različit, tada se identitet $t_1 \approx t_2$ odgovarajućom supstitucijom može svesti na identitet $(xyx \approx)xy \approx x$ ili $xy \approx y$. U prvom slučaju $\mathcal{V}$ je podvarijetet varijeteta levo nultih polugrupa, a drugom slučaju $\mathcal{V}$ je trivijalan varijetet. Ako je $S(t_1) = S(t_2)$ i termi t_1 i t_2 imaju različite prve promenljive sa leve strane, recimo x u termu t_1, a y u termu t_2, tada supstitucijom svih ostalih promenljivih u promenljivu x možemo svesti term t_1 na term xy, dok term t_2 svodimo na term yx. Konačno, identitet $xy \approx yx$ daje trivijalan identitet, odnosno $\mathcal{V}$ je trivijalan varijetet. Pretpostavimo da termi t_1 i t_2 počinju istom promenljivom i da sadrže iste promenljive. Tada, neka se termi t_1 i t_2 sa leve strane prvo razlikuju na i-tom mestu i neka se na i-tom mestu u termima t_1 i t_2 nalaze redom promenljive y i z. Tada se supstitucijom svih promenljivih do i-tog mesta u promenljivu x i supstitucijom svih preostalih promenljivih različitih od y i z u y, dobija da se termi t_1 i t_2 korišćenjem identiteta baze $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$ svode na terme xyz i xzy, tj. dobijamo da je $\mathcal{V}$ podvarijetet varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$.

Kao što smo videli u dokazu Leme 3.7.14 grupoid $\mathbf{P}_{12}$ ne pripada varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$, prema tome grupoid $\mathbf{P}_{12}$ ne generiše prave podvarijetete varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$ već sam varijetet $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$. □

Posledica 3.7.20. *Za svako $n \geq 3$, postoji tačno jedna n-kvazilinearna jednakosna teorija E koja je proširenje grupoida $\mathbf{P}_{12}$.*

Dokaz. Na osnovu Lema 3.7.14 i 3.7.19 Imamo da je $E = E_A$. □

Lema 3.7.21. *Svi pravi podvarijeteti varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$ su podvarijeteti varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$. Varijetet $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$ je generisan slobodnim grupoidom $\mathbf{P}_{13}$.*

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu Leme 3.7.19. □

Posledica 3.7.22. *Za svako $n \geq 3$, postoji tačno jedna n-kvazilinearna jednakosna teorija E koja je proširenje grupoida $\mathbf{P}_{13}$.*

Dokaz. Na osnovu Lema 3.7.15 i 3.7.21 Imamo da je $E = E_B$. □

Teorema 3.7.23. *Postoje tačno tri $*$-kvazilinearna varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$, $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$ i $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ koja su proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$ sa dva generatora. Varijeteti $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$ i $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$ pokrivaju varijetet $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$, a njegovi jedini podvarijeteti su varijetet levo nultih polugrupa i trivijalan varijetet (varijeteti generisani sa grupoidom $\mathbf{G}_9$ i $\mathbf{G}_{10}$, redom). Varijeteti $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$ i $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$ su generisani, redom, petoelementnim poddirektno nesvodljivim grupoidom $\mathbf{A}$ i četvoroelementnim poddirektno nesvodljivim grupoidom $\mathbf{B}$.*

$\mathbf{A}$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	b	b	b	b	b
c	d	e	c	c	c
d	d	d	d	d	d
e	e	e	e	e	e

$\mathbf{B}$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	d	c	c	c
d	d	c	d	d

Dokaz. Grupoid $\mathbf{A}$ je izomorfan sa količničkim grupoidom $\mathbf{P}_{12}/\alpha$ gde je $\alpha = (adejk)(bfglm)(c)(hn)(io)$ kongruencija na grupoidu $\mathbf{P}_{12}$. Tada grupoid $\mathbf{A}$ pripada varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$, dok varijetetima $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$ i $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ ne pripada jer ne zadovoljava identitete $(B4)$ i $(C4)$, tj. $((c \cdot_{\mathbf{A}} a) \cdot_{\mathbf{A}} b) \cdot_{\mathbf{A}} a \neq (c \cdot_{\mathbf{A}} b) \cdot_{\mathbf{A}} a$ i

$(c \cdot_{\mathbf{A}} a) \cdot_{\mathbf{A}} b \neq (c \cdot_{\mathbf{A}} b) \cdot_{\mathbf{A}} a$. Na osnovu Leme 3.7.19 imamo da grupoid $\mathbf{A}$ generiše varijetet $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$. Grupoid $\mathbf{A}$ je poddirektno nesvodljiv grupoid kod koga je monolit generisan uređenim parom $\langle d, e\rangle$.

Grupoid $\mathbf{B}$ je izomorfan sa količničkim grupoidom $\mathbf{P}_{13}/\beta$ gde je $\beta = (adejk)(bfglm)(cin)(ho)$ kongruencija na grupoidu $\mathbf{P}_{13}$. Tada grupoid $\mathbf{B}$ pripada varijetetu $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$, dok varijetetima $\mathcal{V}_{\mathbf{A}}$ i $\mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ ne pripada jer ne zadovoljava identitete $(A4)$ i $(C4)$, tj. $((c \cdot_{\mathbf{B}} a) \cdot_{\mathbf{B}} b) \cdot_{\mathbf{B}} a \neq (c \cdot_{\mathbf{B}} a) \cdot_{\mathbf{B}} b$ i $(c \cdot_{\mathbf{B}} a) \cdot_{\mathbf{B}} b \neq (c \cdot_{\mathbf{B}} b) \cdot_{\mathbf{B}} a$. Na osnovu Leme 3.7.21 imamo da grupoid $\mathbf{B}$ generiše varijetet $\mathcal{V}_{\mathbf{B}}$. Grupoid $\mathbf{B}$ je poddirektno nesvodljiv grupoid kod koga je monolit generisan uređenim parom (c, d). □

Posledica 3.7.24. *Za svako $n \geq 4$, postoje tačno tri n-kvazilinearne jednakosne teorije E_A, E_B, E_C koje su proširenje grupoida $\mathbf{G}_5$.*

3.8 Kvazilinearno proširenje $\mathbf{G}_6$

Neka je u ovom odeljku E jednakosna teorija takva da njoj odgovarajući varijetet $\mathcal{V}$ je varijetet sa slobodnim grupoidom $\mathbf{G}_6$ nad skupom od dva generatora. Tada su u varijetetu $\mathcal{V}$ na osnovu Kejlijeve tablice grupoida $\mathbf{G}_6$ tačni sledeći identiteti:

$$x \approx xx,$$
$$xy \approx x(xy) \approx x(yx) \approx xyx \approx xyy \approx xy(yx).$$

U [10] (Lema 5.1) je pokazano da postoji sedam egzaktno 3-linearnih jednakosnih teorija sa slobodnim grupoidom $G6$ nad dva generatora, i njima odgovarajući slobodni grupoidi nad tri generatora su grupoidi $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_7$ navedeni u odeljku 2.4.

Lema 3.8.1. *Ako je $t \approx s$ identitet sadržan u jednakosnoj teoriji E koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_6$ tada je $S(t) = S(s)$ i termi t, s imaju istu prvu promenljivu sa leve strane.*

Dokaz. Pokažimo da je $S(t) = S(s)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji promenljiva $x \in S(t) \triangle S(s)$. Supstitucijom svih promenljivih u promenljivu y sem promenljive x i primenom gore navedenih identiteta nad dve promenljive dobijamo da jednakosnoj teoriji E pripada jedan od identiteta $xy \approx y$, $yx \approx y$, $x \approx y$, kontradikcija.

Pokažimo da termi t, s imaju istu prvu promenljivu sa leve strane. Pretpostavimo suprotno, tj. da term t počinje promenljivom x a term s počinje promenljivom y. Tada supstitucijom svih promenljivih u promenljivu y sem promenljive x i primenom gore navedenih identiteta dobijamo da jednakosnoj teoriji E pripada identitet $xy \approx yx$, kontradikcija. □

Lema 3.8.2. *Ne postoji* 4*-kvazilinearna jednakosna teorija takva da je njen slobodan grupoid generisan sa tri generatora izomorfan sa* $\mathbf{Q}_3$*,* $\mathbf{Q}_5$*,* $\mathbf{Q}_6$ *ili* $\mathbf{Q}_7$*.*

Dokaz. Na osnovu [10] (Leme 5.2) imamo da svi identiteti sa najviše tri promenljive u egzaktno 3-linearnoj jednakosnoj teoriji koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_6$ su levo nepermutacioni. Međutim, svi identiteti sa najviše tri promenljive u 4-kvazilinearnoj jednakosnoj teoriji koja je proširenje grupoida $\mathbf{Q}_3$, $\mathbf{Q}_5$, $\mathbf{Q}_6$ ili $\mathbf{Q}_7$ su levo nepermutacioni. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji identitet $t \approx s$ nad tri promenljive koji nije levo nepermutacioni. Na osnovu [10] (Leme 5.2) imamo da postoje linearni termi t^*, s^* takvi da su identiteti $t \approx t^*$ i $s \approx s^*$ levo nepermutacioni, odakle sledi da identitet $t^* \approx s^*$ nije levo nepermutacioni, ali kako posmatrane 4-kvazilinearne jednakosne teorije imaju osobinu da su 3-linearne jednakosne teorije dobijamo da je $t^* = s^*$, kontradikcija.

U 4-kvazilinearnoj jednakosnoj teoriji koja je proširenje grupoida $\mathbf{Q}_3$, $\mathbf{Q}_5$, $\mathbf{Q}_6$ ili $\mathbf{Q}_7$ identiteti nad četiri promenljive su levo nepermutacioni. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji identitet $t \approx s$ nad skupom od četiri promenljive koji nije levo nepermutacioni. Neka su promenljive x, y prve sa leva koje narusavaju levu nepermutabilnost u identitetu $t \approx s$. Supstitucijom promenljivih koje nisu x, y u promenljivu z dobijamo identitet nad tri promenljive koji nije levo nepermutacioni, kontradikcija sa prethodnim pasusom.

Pokažimo da ne postoji 4-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{Q}_3$, $\mathbf{Q}_5$, $\mathbf{Q}_6$ ili $\mathbf{Q}_7$. Ako bi postojala takva jednakosna teorija, tada bi kao sto smo pokazali svaki term sa četiri promenljive morao biti ekvivalentan linearnom termu sa četiri promenljive, i taj identitet bi morao biti levo nepermutacioni i tačan u slobodnom grupoidu sa tri generatora.

Međutim, term $wxy(x \cdot zw)$ nije ekvivalentan nijednom linearnom termu za grupoide $\mathbf{Q}_5$, $\mathbf{Q}_6$, $\mathbf{Q}_7$. Naime, takav linearan term bi morao da bude jedan od $wxyz$, $w(xy)z$, $wx \cdot yz$, $w \cdot xyz$ ili $w(x \cdot yz)$, ali nijedan od ovih pet identiteta ne važi u $\mathbf{Q}_5$, $\mathbf{Q}_6$, $\mathbf{Q}_7$. Za sva tri grupoida, u svih pet pretpostavki, identično se dolazi u kontradikciju.

<u>Slučaj $wxy(x \cdot zw) \approx wxyz$</u>: Tada je $yxz \approx yxyz \approx yxy(x \cdot zy) \approx yx(x \cdot zy) \approx y(x \cdot zy) \approx y \cdot xz$, kontradikcija.

<u>Slučaj $wxy(x \cdot zw) \approx w(xy)z$</u>: Tada je $yxz \approx y(xy)z \approx yxy(x \cdot zy) \approx yx(x \cdot zy) \approx y(x \cdot zy) \approx y \cdot xz$, kontradikcija.

Slučaj $wxy(x \cdot zw) \approx wx \cdot yz$: Tada je $x \cdot yz \approx xx(yz) \approx xxy(x \cdot zx) \approx xy \cdot xz \approx xyz$, kontradikcija.

Slučaj $wxy(x \cdot zw) \approx w \cdot xyz$: Tada je $z \cdot xy \approx z(xyz) \approx zxy(x \cdot zz) \approx zxy \cdot xz \approx zxy$, kontradikcija.

Slučaj $wxy(x \cdot zw) \approx w(x \cdot yz)$: Tada je $x \cdot yz \approx x(x \cdot yz) \approx xxy(x \cdot zx) \approx xy \cdot xz \approx xyz$, kontradikcija.

Takođe, term $w(x(ywz))$ nije ekvivalentan nijednom od terma $wxyz$, $w(xy)z$, $wx \cdot yz$, $w \cdot xyz$ ili $w(x \cdot yz)$ u slučaju $\mathbf{Q}_3$. Razmotrimo svih pet slučajeva.

Slučaj $w(x(ywz)) \approx wxyz$: Tada je $yxz \approx yxyz \approx y(x(yyz)) \approx y(x \cdot yz) \approx y \cdot xz$, kontradikcija.

Slučaj $w(x(ywz)) \approx w(xy)z$: Tada je $yxz \approx y(xy)z \approx y(x(yyz)) \approx y(x \cdot yz) \approx y \cdot xz$, kontradikcija.

Slučaj $w(x(ywz)) \approx wx \cdot yz$: Tada je $x \cdot yz \approx xx \cdot yz \approx x(x(yxz)) \approx x(yxz) \approx xyz$, kontradikcija.

Slučaj $w(x(ywz)) \approx w \cdot xyz$: Tada je $w \cdot xz \approx w(xxz) \approx w(x(xwz)) \approx w(xwz) \approx wxz$, kontradikcija.

Slučaj $w(x(ywz)) \approx w(x \cdot yz)$: Tada je $x \cdot yz \approx x(x \cdot yz) \approx x(x(yxz)) \approx x(yxz) \approx xyz$, kontradikcija. □

Na osnovu Teoreme 2.5.3 imamo da postoje tačno tri $*$- linearna varijeteta $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ i $\mathcal{L}_3$, sa slobodnim grupoidima nad tri generatora izomorfnim sa $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ i $\mathbf{Q}_4$, respektivno. U Teoremi 2.6.1 su predstavljeni svi njihovi podvarijeteti koji su ujedno svi $*$-kvazilinearni.

Dalje u ovom odeljku ćemo pokazati da su sve $*$-kvazilinerne jednakosne teorije sa slobodnim grupoidom $\mathbf{G}_6$ nad dva generatora podvarijeteti varijeteta $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ i $\mathcal{L}_3$.

Lema 3.8.3. *Jednakosna teorija L_1 je egzaktno 3-kvazilinearna jednakosna teorija. Jednakosna teorija L_2 je egzaktno 4-kvazilinearna jednakosna teorija. Za svako $n \geq 3$ jednakosna teorija L_3 nije egzaktno n-kvazilinearna jednakosna teorija.*

Dokaz. Baza $*$-linearnog varijeteta $\mathcal{L}_1$ se sastoji od identiteta sa tri promenljive (Teorema 2.5.1) odakle sledi da je L_1 egzaktno 3-kvazilinearna jednakosna teorija.

Baza $*$-linearnog varijeteta $\mathcal{L}_2$ se sastoji od identiteta sa četiri promenljive (Teorema 2.5.2) odakle sledi da je L_2 egzaktno 4-kvazilinearna jednakosna teorija.

Pretpostavimo da je L_3 egzaktno n-kvazilinearna jednakosna teorija za neki prirodan broj n. Tada varijetet $\mathcal{L}_3$ ima konačnu bazu na skupu od

n promenljivih $x_1, \ldots, x_n$, određenu skupom svih tačnih identiteta na $\mathcal{L}_3$ koji svaku promenljivu sadrže najviše tri puta. Kontradikcija sa Teoremom 2.5.5.

□

Lema 3.8.4. *Neka je $n \geq 3$ i neka je $\mathcal{V}$ n-kvazilinearan varijetet čiji je slobodan grupoid nad tri generatora grupoid $\mathbf{Q}_1$. Tada je varijetet $\mathcal{V}$ podvarijetet $*$- linearnog varijeteta $\mathcal{L}_1$.*

Dokaz. Na osnovu Leme 3.8.3 imamo da je $\mathcal{V}$ podvarijetet od $\mathcal{L}_1$ jer je L_1 egzaktno 3-kvazilinearna jednakosna teorija, a na osnovu Leme 3.1.1 varijetet $\mathcal{L}_1$ je najveći varijetet koji sadrži grupoid $\mathbf{Q}_1$ kao slobodan grupoid nad tri generatora. □

Teorema 3.8.5. *$\mathcal{N}_1$ nije egzaktno 3-kvazilinearan varijetet. Za $n \geq 4$ postoje tačno dve egzaktno n-kvazilinearne jednakosne teorije koje su proširenje grupoida $\mathbf{Q}_1$, a njima odgovarajući varijeteti su $\mathcal{L}_1$ i $\mathcal{N}_1$.*

Dokaz. Na grupoidu $\mathbf{Q}_1$ važi identitet $w(xy \cdot z) \approx w(x \cdot yz)$ odakle sledi da je $\mathbf{Q}_1 \in \mathcal{N}_1$ i na osnovu Leme 3.1.2 sledi da je $\mathbf{Q}_1$ slobodan grupoid u $\mathcal{N}_1$. Na osnovu Leme 3.1.1 dobijamo da $\mathcal{N}_1$ nije egzaktno 3-kvazilinearan varijetet. Varijetet $\mathcal{N}_1$ ima bazu definisanu nad skupom od četiri promenljive odakle sledi na osnovu Leme 3.1.3 da je odgovarajuća jednakosna teorija varijeteta $\mathcal{N}_1$ egzaktno n-kvazilinearna za sve $n \geq 4$. □

Lema 3.8.6. *Za $n \geq 3$ postoji tačno jedna egzaktno n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{Q}$ gde je $\mathbf{Q} \in \{\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_4\}$.*

Dokaz. Neka je E egzaktno n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{Q} \in \{\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_4\}$. Tada, kako grupoid $\mathbf{Q}$ generiše jedan od $*$-linearnih varijeteta $\mathcal{L}_2$ ili $\mathcal{L}_3$ (Theorem 2.6.3) sledi da je jednakosna teorija E podteorija $*$-linearne jednakosne teorije pa na osnovu Leme 3.1.4 imamo da je E jedinstvena egzaktno n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{Q}$. □

Teorema 3.8.7. *$*$-linearne jednakosne teorije L_2 i L_3 su jedine $*$-kvazilinearne jednakosne teorije koje su redom proširenja grupoida $\mathbf{Q}_2$ i $\mathbf{Q}_4$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. recimo da jednakosna teorija L_2 nije jedinstveno $*$-kvazilinearno proširenje grupoida $\mathbf{Q}_2$. Tada za neko $n \geq 3$ postoje dve različite egzaktno n-kvazilinearne jednakosne teorije koje su proširenje grupoida $\mathbf{Q}_2$, kontradikcija sa Lemom 3.8.6. Slično se pokazuje za jednakosnu teoriju L_3. □

Lema 3.8.8. *Poddirektno nesvodljiv grupoid* $\mathbf{G}_{\mathcal{L}_2}$ *generiše 3-kvazilinearan varijetet sa slobodnim grupoidom nad tri generatora* $\mathbf{Q}_2$ *koji nije* 4*-kvazilinearan varijetet.*

$\mathbf{G}_{\mathcal{L}_2}$	a	b	c	d	e	f
a	a	a	f	d	e	f
b	a	b	c	d	e	f
c	c	c	c	e	e	c
d	d	d	d	d	d	d
e	e	e	e	e	e	e
f	f	f	f	d	d	f

Dokaz. Grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{L}_2}$ je poddirektno nesvodljiv grupoid kod koga je monolit generisan uređenim parom $\langle d, e\rangle$.

Pomoću programa [14] utvrđujemo da na grupoidu $\mathbf{G}_{\mathcal{L}_2}$ važe svi identiteti iz Tabele 2.1 za $\mathbf{F}_3 = \mathbf{Q}_2$, odakle sledi da je varijetet generisan sa grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{L}_2}$ 3-linearan varijetet. Varijetet $\mathcal{L}_2$ ne sadrži grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{L}_2}$ jer na njemu ne važi četvri identitet baze $xy \cdot yzu \approx xyzu$ ($ab \cdot bcd \neq abcd$) za varijetet $\mathcal{L}_2$. Prema tome, kako je $\mathcal{L}_2$ pravi podvarijetet varijeteta $\mathcal{V}(\mathbf{G}_{\mathcal{L}_2})$ generisanog grupoidom $\mathbf{G}_{\mathcal{L}_2}$, sledi da varijetet $\mathcal{V}(\mathbf{G}_{\mathcal{L}_2})$ nije 4-kvazilinearan na osnovu Lema 3.8.3 i 3.1.1. □

Posledica 3.8.9. *Egzaktno* 3*-kvazilinearna jednakosna teorija i egzaktno* 4*--kvazilinearna jednakosna teorija koje su proširenja grupoida* $\mathbf{Q}_2$ *su različite.*

Dokaz. Sledi na osnovu Lema 3.1.1 i 3.8.8. □

Lema 3.8.10. *Skup* $E_{egz} = \{E \mid E$ *je egzaktno* n*-kvazilinearna jednakosna podteorija od* L_3 *za neko* $n \geq 3\}$ *je prebrojivo beskonačan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je skup E_{egz} konačan. Tada važi da je $L_3 = \bigcup E_{egz} \in E_{egz}$, kontradikcija sa Lemom 3.8.3. □

Ostaju otvorena sledeća dva pitanja:

- Kako izgleda mreža jednakosnih teorija između egzaktno 3-kvazilinearne jednakosne teorije koja je proširenje grupoida $\mathbf{Q}_2$ i jednakosne teorije L_2?
- Kako izgleda mreža jednakosnih teorija između egzaktno 3-kvazilinearne jednakosne teorije koja je proširenje grupoida $\mathbf{Q}_4$ i jednakosne teorije L_3?

U narednim teoremama pokušaćemo da opišemo sve egzaktno 3-kvazilinearne jednakosne teorije E koje su prave 3-kvazilinearne jednakosne teorije sa slobodnim grupoidom $\mathbf{G}_6$ nad dva generatora.

Na osnovu Leme 3.8.1 znamo da ekvivalentni termi u jednakosnoj teoriji E imaju jednaka prva pojavljivanja promenljivih sa leve strane, i da su svi identiteti regularni, tj. ako je $u \approx v$ onda je $S(u) = S(v)$. Prema tome,

Lema 3.8.11. *Neka je E jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_6$. Jedini linearni termi nad promenljivama x, y, z koji mogu biti ekvivalentni jesu termi xyz, xzy, $x \cdot yz$ i $x \cdot zy$, tj. jedini identiteti na skupu od tri promenljive koji izjednačavaju dva linearna terma i koji mogu pripadati jednakosnoj teoriji E su identiteti:*

(a) $xyz \approx x \cdot yz$.

(b) $x \cdot yz \approx xzy$,

(c) $xyz \approx xzy$,

(d) $x \cdot yz \approx x \cdot zy$.

Lako se proverava da su identiteti iz prethodne Leme tačni na grupoidu $\mathbf{G}_6$. Do kraja ovog odeljka baziraćemo se na n-kvazilineranim jednakosnim teorijama koje su proširenje grupoida $\mathbf{G}_6$ i u kojima važi jedan od identiteta (a), (b), (c) i (d).

3.8.1 $*$-kvazilinearna proširenja $\mathbf{G}_6$ sa $xyz \approx x \cdot yz$, $x \cdot yz \approx xzy$ i $x \cdot yz \approx x \cdot zy$

Lema 3.8.12. *Neka je $\mathbf{G}_{(a)}$ grupoid (J.A.Gerhardova polugrupa $\mathbf{B}_2$ u [12]) definisan Kejlijevom tablicom:*

$\mathbf{G}_{(a)}$	a	b	c
a	a	b	c
b	b	b	b
c	c	c	c

Tada je grupoid $\mathbf{G}_{(a)}$ poddirektno nesvodljiv i na njemu važi identitet (a), dok identiteti $(b), (c), (d)$ ne važe. Varijetet $\mathcal{S}_1$ je generisan grupoidom $\mathbf{G}_{(a)}$, kao i slobodnim grupoidom $\mathbf{F}_{\mathcal{S}_1}(3)$ nad tri generatora. Identiteti (a), (b), (c), (d) važe u varijetetu $\mathcal{S}_2$ koji je generisan grupoidom $\mathbf{G}_6$.

Dokaz. Grupoid $\mathbf{G}_{(a)}$ je poddirektno nesvodljiv grupoid kod koga je monolit generisan uređenim parom $\langle b, c\rangle$. Varijetet $\mathcal{S}_1$ je generisan grupoidom $\mathbf{G}_{(a)}$ na osnovu Teoreme 2.6.1.

□

Teorema 3.8.13. *Neka je $n \geq 3$ i neka je E n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_6$ i kojoj pripada identitet*

$$xyz \approx x \cdot yz, \ (a).$$

Tada je odgovarajući varijetet za E jedan od varijeteta $\mathcal{S}_1$ ili $\mathcal{S}_2$.

Dokaz. Svi elementi baze za $\mathcal{L}_1$ pripadaju jednakosnoj teoriji E, odakle sledi da je odgovarajući varijetet $\mathcal{V}$ jednakosne teorije E podvarijetet od $\mathcal{L}_1$. Kako jednakosna teorija E sadrži identitet (a) dobijamo da je $\mathcal{V} \in \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4, \mathcal{S}_5\}$ ali varijeteti $\mathcal{S}_3, \mathcal{S}_4, \mathcal{S}_5$ kao što smo već pokazali ne sadrže slobodan grupoid $\mathbf{G}_6$ za razliku od varijeteta $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$. □

Teorema 3.8.14. *Neka je $n \geq 3$ i neka je E n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_6$ i kojoj pripada identitet*

$$x \cdot yz \approx xzy, \ (b).$$

Tada identitet $xyz \approx x \cdot yz$, (a), pripada jednakosnoj teoriji E i odgovarajući varijetet za E je $\mathcal{S}_2$.

Dokaz. Jednakosnoj teoriji E pripada identitet $xyz \approx x \cdot yz$ jer je: $xyz \approx x \cdot zy \approx x \cdot zy \cdot x \approx xy \cdot z \cdot x \approx xy \cdot xz \approx x \cdot xzy \approx x(x \cdot yz) \approx x \cdot yz$. Na osnovu Leme 3.8.12 i Teoreme 3.8.13 zaključujemo da je $\mathcal{S}_2$ odgovarajući varijetet za jednakosnu teoriju E. □

Lema 3.8.15. *Neka je $n \geq 3$ i neka je E n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_6$ i kojoj pripadaju identiteti*

$$xyz \approx xzy, \ (c)$$

i

$$x \cdot yz \approx x \cdot zy, \ (d).$$

Tada identitet $xyz \approx x \cdot yz$, (a), pripada jednakosnoj teoriji E i odgovarajući varijetet za E je $\mathcal{S}_2$.

Dokaz. Važi $xy \cdot z \approx xy(xy \cdot z) \approx (x \cdot xy)(xy \cdot z) \approx_{(c)} x \cdot (xy \cdot z) \cdot xy \approx_{(d)}$ $x \cdot (z \cdot xy) \cdot xy \approx_{(d)} x \cdot (z \cdot yx) \cdot xy \approx_{(d)} x \cdot yxz \cdot xy \approx_{(c)} x \cdot yzx \cdot xy \approx x \cdot yz \cdot xy \approx_{(c)}$ $x \cdot xy \cdot yz \approx xy \cdot yz \approx_{(c)} x \cdot yz \cdot y \approx (x \cdot yz)(y \cdot (x \cdot yz)) \approx_{(d)} (x \cdot yz)(y \cdot (yz \cdot x)) \approx_{(d)}$ $(x \cdot yz)(yz \cdot x \cdot y) \approx_{(c)} (x \cdot yz)(yz \cdot y \cdot x) \approx (x \cdot yz)(yz \cdot x) \approx_{(d)} (x \cdot yz)(x \cdot yz) \approx x \cdot yz$. Tvrđenje sledi na osnovu Leme 3.8.12 i Teoreme 3.8.13. □

Teorema 3.8.16. *Neka je $n \geq 3$ i neka je E n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_6$ i koja sadrži identitet*

$$x \cdot yz \approx x \cdot zy, \ (d).$$

Tada je odgovarajući varijetet za E jedan od varijeteta $\mathcal{S}_2$ ili $\mathcal{N}_2$.

Dokaz. Ako je term $xy \cdot xz$ ekvivalentan po modulu E sa $x \cdot yz$ ili xzy, tada se supstitucijama $x \mapsto yx$ i $y \mapsto xy$, redom, dobijaju identiteti (a) i (c), pa tvrđenje sledi iz Teoreme 3.8.14 (iz identiteta (a) i (d) sledi (b)) ili Leme 3.8.15. Ostaje da se razmotri slučaj kada važi identitet $xy \cdot xz \approx xyz$. Tada je term $x \cdot xyz$ ekvivalentan sa jednim od tri linearna terma $x \cdot yz$, xyz i xzy.

Slučaj $x \cdot xyz \approx x \cdot yz$: Tada važe svi identiteti baze za $\mathcal{L}_1$, ali zbog identiteta (d), osobine da je varijetet $\mathcal{N}_1$ 3-linearan varijetet i Leme 3.8.12 sledi da je odgovarajući varijetet za E jedan od varijeteta $\mathcal{S}_2$ ili $\mathcal{N}_2$.

Slučaj $x \cdot xyz \approx xyz$: Tada je $xzy \approx x(xzy) \approx x(xz \cdot xy) \approx_{(d)} x(xy \cdot xz) \approx x(xyz) \approx xyz$, odnosno važi identitet (c). Tvrđenje sledi na osnovu Leme 3.8.15.

Slučaj $x \cdot xyz \approx xzy$: Tada je $xzy \approx x \cdot xyz \approx x(xy \cdot xz) \approx_{(d)} x(xz \cdot xy) \approx x \cdot xzy \approx xyz$, odnosno važi identitet (c). Tvrđenje sledi na osnovu Leme 3.8.15. □

3.8.2 3-kvazilinearna proširenja $\mathbf{G}_6$ sa $xyz \approx xzy$

Neka u ovom pododeljku E predstavlja 3-kvazilinearnu jednakosnu teoriju sa slobodnim grupoidom nad dva generatora izomorfnim sa grupoidom $\mathbf{G}_6$, koja od identiteta (a), (b), (c) i (d), sadrži samo identitet

$$xyz \approx xzy, \ (c),$$

jer smo u prethodnom pododeljku razmotrili ostale slučajeve.

Lema 3.8.17. *Jednakosna teorija E sadrži identitet*

$$x \cdot xyz \approx xyz, \ (1).$$

Dokaz. U jednakosnoj teoriji E važi $x \cdot xyz \approx xyz$ jer u svim drugim situacijama (bilo da je $x \cdot xyz \approx x \cdot yz$ ili $x \cdot xyz \approx x \cdot zy$) se lako pokazuje da bi važilo $x \cdot yz \approx x \cdot zy$ jer je $x \cdot xyz \approx x \cdot xzy$. □

Lema 3.8.18. *Jednakosna teorija E sadrži identitete*

$$x(y \cdot xz) \approx x \cdot yz, \ (2)$$

i

$$x(y \cdot zx) \approx x \cdot yz, \ (3).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $x(y \cdot xz) \approx x \cdot zy$. Tada iz pretpostavke sledi $x \cdot zy \approx x(y \cdot xz) \approx_{\mathbf{G_6}} x(y(x \cdot xz)) \approx x \cdot xzy \approx_{(1)} xzy$, kontradikcija jer identitet $x \cdot zy \approx xzy$ ne pripada jednakosnoj teoriji E.

Pretpostavimo da je $x(y \cdot zx) \approx x \cdot zy$. Tada iz pretpostavke sledi $x \cdot zy \approx x(y \cdot zx) \approx_{\mathbf{G_6}} x((y \cdot zx) \cdot x) \approx_{(c)} x(yx \cdot zx) \approx x(z \cdot yx) \approx x \cdot yz$, kontradikcija jer $x \cdot zy \approx x \cdot yz$ ne pripada jednakosnoj teoriji E.

Termi $x(y \cdot xz)$ i $x(y \cdot zx)$ mogu biti ekvivalentni sa termom $x \cdot yz$ ili termom xyz. Razmotrimo sve slučajeve:

Slučaj 1: $x(y \cdot xz) \approx xyz$, (α), i $x(y \cdot zx) \approx xyz$, (β). Tada je $xy \cdot yz \approx_{(\alpha)} x(y(x \cdot yz)) \approx_{(\alpha)} x \cdot yxz \approx_{(c)} x \cdot yzx \approx_{\mathbf{G_6}} x \cdot yz$, (γ). Iz niza ekvivalencija $x \cdot yz \approx_{(\gamma)} xy \cdot yz \approx_{(c)} x \cdot yz \cdot y \approx_{\mathbf{G_6}} x \cdot yzx \cdot y \approx_{(c)} x \cdot yxz \cdot y \approx_{(c)} xy \cdot yxz \approx_{(c)} xy \cdot yzx \approx_{(\beta)} (xy)(y(z \cdot xy)) \approx_{(\beta)} xyyz \approx xyz$ sledi da identitet $x \cdot yz \approx xyz \in E$, kontradikcija.

Slučaj 2: $x(y \cdot xz) \approx xyz$, (α), i $x(y \cdot zx) \approx x \cdot yz$, (β). Dokažimo da je $xy \cdot yz \approx x \cdot yz$, (γ), i $xy \cdot zy \approx xyz$, (δ).

Podslučaj $xy \cdot yz \approx x \cdot zy$: Tada je $yxz \approx_{(\alpha)} y(x \cdot yz) \approx_{\mathbf{G_6}} y(x \cdot yz \cdot y) \approx_{(c)} y(xy \cdot yz) \approx y(x \cdot zy) \approx_{(\beta)} y \cdot xz$, kontradikcija.

Podslučaj $xy \cdot yz \approx xyz$: Tada je $yxz \approx_{(\alpha)} y(x \cdot yz) \approx_{\mathbf{G_6}} y(x \cdot yz \cdot y) \approx_{(c)} y(xy \cdot yz) \approx y \cdot xyz \approx_{(c)} y \cdot xzy \approx y \cdot xz$, kontradikcija.

Podslučaj $xy \cdot zy \approx x \cdot yz$: Tada je $y \cdot xz \approx_{(\beta)} y(x \cdot zy) \approx_{\mathbf{G_6}} y(x \cdot zy \cdot y) \approx_{(c)} y(xy \cdot zy) \approx y(x \cdot yz) \approx_{(\alpha)} yx \cdot z$, kontradikcija.

Podslučaj $xy \cdot zy \approx x \cdot zy$: Tada je $xzy \approx xyz \approx_{(\alpha)} x(y \cdot xz) \approx_{(\beta)} x(y(x \cdot zy)) \approx_{(\alpha)} xy \cdot zy \approx x \cdot zy$, kontradikcija.

Tada je $x \cdot yz \approx_{\mathbf{G_6}} x \cdot yz \cdot yzx \approx_{(\delta)} (x \cdot yz)(yz \cdot xz) \approx_{(\gamma)} x \cdot (yz \cdot xz) \approx_{(\alpha)} x \cdot yz \cdot z \approx_{(c)} xz \cdot yz \approx_{(\delta)} xzy \approx_{(c)} xyz$, kontradikcija.

Slučaj 3: $x(y \cdot xz) \approx x \cdot yz$, (α), i $x(y \cdot zx) \approx xyz$, (β). Tada je $x \cdot yz \approx_{(\alpha)} x(y \cdot xz) \approx_{\mathbf{G_6}} x(y(x \cdot zx)) \approx_{(\alpha)} x(y \cdot zx) \approx_{(\beta)} xyz$, kontradikcija. □

Lema 3.8.19. *Jednakosna teorija E sadrži identitet*

$$x \cdot yz \cdot zy \approx xyz, \ (4).$$

Dokaz. Važi da je $x \cdot yz \cdot zy \approx_{(c)} x \cdot zy \cdot yz$. Ako bi $x \cdot yz \cdot zy$ bio ekvivalentan sa $x \cdot yz$ ili $x \cdot zy$ tada bi na osnovu prethodnog identiteta važilo da je $x \cdot yz \approx x \cdot zy$, (d), što je u kontradikciji sa uslovima jednakosne teorije E. □

Lema 3.8.20. *Jednakosna teorija E sadrži identitet*

$$xy \cdot zy \approx xyz, \ (5).$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada je term $xy \cdot zy$ ekvivalentan sa jednim od terma $x \cdot yz$ ili $x \cdot zy$.

Slučaj $xy \cdot zy \approx x \cdot yz$: Tada važi sledeći niz ekvivalencija $xyz \approx_{\mathbf{G}_6} xy \cdot xyz \approx_{(c)} xy \cdot xzy \approx x(y \cdot xz) \approx_{(2)} x \cdot yz$, kontradikcija.

Slučaj $xy \cdot zy \approx x \cdot zy$: Tada važi $x \cdot zy \approx_{\mathbf{G}_6} x(z \cdot yz) \approx (x \cdot yz)(z \cdot yz) \approx_{\mathbf{G}_6} x \cdot yz \cdot zy \approx_{(4)} xyz$, kontradikcija. □

Za definisanje 3-kvazilinearne idempotentne jednakosne teorije neophodno je linearizovati u toj jednakosnoj teoriji terme iz Tabele 2.1, a to je rezultat Leme 3.8.21.

Napomena 3.8.1. Za definisanje slobodnog grupoida sa tri generatora 3--kvazilinearnog varijeteta koji je proširenje grupoida $\mathbf{G}_6$ dovoljno je definisati proizvode iz Tabele 2.1 pri čemu su proizvodi (1)–(6), (7), (9), (10), (14) i (30) iz Tabele 2.1 određeni na osnovu Lema 3.8.17–3.8.20 i osobina grupoida $\mathbf{G}_6$, a veliki deo proizvoda ćemo odrediti pomoću Leme 3.8.21, a preostali proizvodi se mogu lako dobiti primenom identiteta (c) i (1)–(5).

Lema 3.8.21. *Neka jednakosna teorija E sadrži identitete* (1)–(5), *tada u jednakosnoj teoriji E za linearan term t i $S(t) \subseteq \{x, y, z\}$ važe sledeća tvrđenja:*

(a') identitet $x \cdot t \approx t$ pripada jednakosnoj teoriji E pri čemu je u termu t promenljiva x prva sa leve strane;

(b') identitet $x \cdot t \approx x \cdot yz$ pripada jednakosnoj teoriji E pri čemu je u termu t promenljiva y prva sa leve strane i $z \in S(t)$;

(c') identitet $xyz \cdot t \approx xyz$ pripada jednakosnoj teoriji E;

(d') identitet $xy \cdot t \approx x \cdot yz$ pripada jednakosnoj teoriji E pri čemu je u termu t promenljiva y prva sa leve strane i $z \in S(t)$;

(e') identitet $(x \cdot yz) \cdot t \approx x \cdot yz$ pripada jednakosnoj teoriji E pri čemu je u termu t promenljiva y prva sa leve strane i $z \in S(t)$;

Dokaz.

(a') Term t može biti oblika xuv i $x \cdot uv$, gde su $u, v \in S(t)$, pa je tvrđenje u prvom slučaju tačno na osnovu identiteta (1), a u drugom slučaju na osnovu osobina grupoida $\mathbf{G}_6$.

(b') Ako je $t \in \{yxz, yzx\}$ tada je $x \cdot t \approx x \cdot (yz \cdot x) \approx_{\mathbf{G}_6} x \cdot yz$, a u preostalim slučajevima tvrđenje sledi na osnovu identiteta (2) i (3).

(c') Primetimo da je
$xyz \cdot x \approx_{(c)} xyx \cdot z \approx_{\mathbf{G}_6} xyz,$
$xyz \cdot y \approx_{(c)} xyy \cdot z \approx_{\mathbf{G}_6} xyz,$
$xyz \cdot z \approx_{(c)} xzy \cdot z \approx_{(c)} xzz \cdot y \approx_{\mathbf{G}_6} xzy \approx_{(c)} xyz,$
prema tome, na osnovu identiteta (5) i Leme 2.3.3 sledi tvrđenje.

(d') $xy \cdot t \approx_{(4)} x \cdot (y \cdot t) \cdot (t \cdot y) \approx_{(a'),(b'),\mathbf{G}_6} x \cdot t \cdot t \approx_{\mathbf{G}_6} x \cdot t \approx_{(b')} x \cdot yz.$

(e') $(x \cdot yz) \cdot t \approx_{(c)} (x \cdot t) \cdot yz \approx_{(b')} (x \cdot yz) \cdot yz \approx_{\mathbf{G}_6} x \cdot yz.$

□

Neka je $a = x$, $b = y$, $c = z$, $d = xy$, $e = xz$, $f = yx$, $g = yz$, $h = zx$, $i = zy$, $j = xyz$, $k = yxz$, $l = zxy$, $m = x \cdot yz$, $n = x \cdot zy$, $o = y \cdot xz$, $p = y \cdot zx$, $q = z \cdot xy$, $r = z \cdot yx$, i neka je

$$\begin{aligned}\pi_{\mathbf{Q}_8} = \{&\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{xy\}, \{xz\}, \{yx\}, \{yz\}, \{zx\}, \{zy\},\\ &\{xyz, xzy\}, \{yxz, yzx\}, \{zxy, zyx\},\\ &\{x \cdot yz\}, \{x \cdot zy\}, \{y \cdot xz\}, \{y \cdot zx\}, \{z \cdot xy\}, \{z \cdot yx\}\}\end{aligned}$$

particija skupa $Lin(\{x, y, z\})$.

Teorema 3.8.22. *Postoji tačno jedna egzaktno 3-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_6$ i kojoj pripada identitet $xyz \approx xzy$, dok joj identiteti $x \cdot yz \approx xzy$, $x \cdot yz \approx x \cdot zy$ i $xyz \approx x \cdot yz$ ne pripadaju. Slobodan grupoid sa tri generatora koji odgovara toj jednakosnoj teoriji je $\mathbf{Q}_8$, Tabela 3.6 (proširenja grupoida $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_7$, kao što smo rekli, odgovaraju egzaktno 3-linearnim jednakosnim teorijama).*

Dokaz. Na osnovu identiteta (c), $(1), \ldots, (5)$ (navedenih u ovom odeljku) i njihovih posledica (Lema 3.8.21) zaključujemo da prava 3-kvazilinearna jednakosna teorija kod koje je slobodan grupoid sa dva generatora $\mathbf{G}_5$ ima sledeće osobine:

$\mathbf{Q}_8$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r
a	a	d	e	d	e	d	m	e	n	j	m	n	m	n	m	m	n	n
b	f	b	g	f	o	f	g	p	g	o	k	p	o	o	o	p	p	p
c	h	i	c	q	h	r	i	h	i	q	r	l	q	q	r	r	q	r
d	d	d	j	d	j	d	m	j	j	j	m	j	m	j	m	m	j	j
e	e	j	e	j	e	j	j	e	n	j	j	n	j	n	j	j	n	n
f	f	f	k	f	o	f	k	k	k	o	k	k	o	o	o	k	k	k
g	k	g	g	k	k	k	g	p	g	k	k	p	k	k	k	p	p	p
h	h	l	h	q	h	l	l	h	l	q	l	l	q	q	l	l	q	l
i	l	i	i	l	l	r	i	l	i	l	r	l	l	l	r	r	l	r
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k
l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l	l
m	m	m	j	m	j	m	m	j	j	j	m	j	m	j	m	m	j	j
n	n	j	n	j	n	j	j	n	n	j	j	n	j	n	j	j	n	n
o	o	o	k	o	o	o	k	k	k	o	k	k	o	o	o	k	k	k
p	k	p	p	k	k	k	p	p	p	k	k	p	k	k	k	p	p	p
q	q	l	q	q	q	l	l	q	l	q	l	l	q	q	l	l	q	l
r	l	r	r	l	l	r	r	l	r	l	r	l	l	l	r	r	l	r

Tabela 3.6: *Kejlijeva tablica grupoida* $\mathbf{Q}_8$ *nad tri generatora egzaktno* 3*-kvazilinearne jednakosne teorije koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_6$ *i kojoj pripada identitet* $xyz \approx xzy$.

(1') x je ekvivalentan sa nelinearnim termom xx,

(2') xy je ekvivalentan sa nelinearnim termima $x \cdot xy$, $x \cdot yx$, $xy \cdot x$, $xy \cdot y$, $xy \cdot yx$,

(3') xyz je ekvivalentan sa nelinearnim termima i $x \cdot xyz$, $xy \cdot xz$, $xy \cdot zx$, $xy \cdot zy$, $xy \cdot (z \cdot yx)$, $xyz \cdot t$, $(x \cdot yz) \cdot z$, $(x \cdot yz) \cdot xyz$, $(x \cdot yz) \cdot xzy$, $(x \cdot yz) \cdot zxy$, $(x \cdot yz) \cdot (z \cdot xy)$, $(x \cdot yz) \cdot (z \cdot yx)$, i sa linearnim termom xzy,

(4') $x \cdot yz$ je ekvivalentan sa nelinearnim termima $x \cdot yxz$, $x \cdot (y \cdot xz)$, $x \cdot (y \cdot zx)$, $xy \cdot yz$, $xy \cdot yxz$, $(x \cdot yz) \cdot y$, $(x \cdot yz) \cdot yxz$, $(x \cdot yz) \cdot (y \cdot xz)$, $(x \cdot yz) \cdot (y \cdot zx)$,

tj. određeni su svi proizvodi iz Tabele 2.1. Na osnovu Leme 3.8.11 u 3--kvazilinearnoj jednakosnoj teoriji E (čiji je slobodan grupoid sa dva generatora $\mathbf{G}_6$) termi x, y, z, xy, xz, yx, yz, zx, zy, xyz, yxz, zxy, $x \cdot yz$, $x \cdot zy$, $y \cdot xz$, $y \cdot zx$, $z \cdot xy$, $z \cdot yx$ su medjusobno različiti u posmatranoj jednakosnoj teoriji. Prema tome, jedini potencijalni slobodni grupoidi sa tri generatora prave 3-kvazilinearne jednakosne teorije sa slobodnim grupoidom $\mathbf{G}_6$ (nad skupom od dva generatora) jeste grupoid $\mathbf{Q}_8$. Proverom pomoću računara utvrđujemo da na grupoidu $\mathbf{Q}_8$ važe identiteti $(1), \dots, (5)$, $xyz \approx xzy$, kao i identiteti nad dve promenljive iz $\mathbf{G}_6$, odakle sledi da važe i identiteti navedeni u $(1')$, $(2')$, $(3')$ i $(4')$, dok identiteti $x \cdot yz \approx xzy$, $x \cdot yz \approx x \cdot zy$ i $xyz \approx x \cdot yz$ ne važe. Na osnovu Teoreme 3.1.5 i particije $\pi_{\mathbf{Q}_8}$ zaključujemo da postoji tačno jedna egzaktno 3-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_6$ i kojoj pripada identitet $xyz \approx xzy$, dok joj identiteti $x \cdot yz \approx xzy$, $x \cdot yz \approx x \cdot zy$ i $xyz \approx x \cdot yz$ ne pripadaju, a njoj odgovarajući slobodni grupoid sa tri generatora je grupoid $\mathbf{Q}_8$. □

Lema 3.8.23. *Jednakosne teorije L_1, L_2, L_3 nisu podteorije egazktno 3-kvazilinearne jednakosne teorije koja je proširenje grupoida $\mathbf{Q}_8$.*

Dokaz. Grupoid $\mathbf{Q}_8$ ne pripada varijetetu $\mathcal{L}_1$ jer nije tačan njen treći identitet baze $x{\cdot}xyz \approx x{\cdot}yz$ na grupodu $\mathbf{Q}_8$. Grupoid $\mathbf{Q}_8$ ne pripada varijetetima $\mathcal{L}_2$ i $\mathcal{L}_3$ jer četvrti identitet baze $xy \cdot yzx \approx xyzu$ za varijetet $\mathcal{L}_2$ pripada jednakosnoj teoriji L_3 ali nije tačan na grupoidu $\mathbf{Q}_8$ jer u suprotnom supstitucijom $u \mapsto x$ dobijamo da na grupoidu $\mathbf{Q}_8$ važi identitet $x \cdot yz \approx xyz$, kontradikcija. □

3.8.3 $*$-kvazilinearno proširenje $\mathbf{G}_6$ sa $xyz \approx xzy$

Teorema 3.8.24. *Neka je $n \geq 4$ i neka je E n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_6$ i kojoj pripada identitet*

$$xyz \approx xzy, \ (c).$$

Tada je varijetet koji odgovara jednakosnoj teoriji E jednak varijetetu $\mathcal{S}_2$. Ne postoji 4-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{Q}_8$.

Dokaz. Neka je u linearan term takav da je $u \approx x(yz)(vz)$. Znamo da je $S(u) = \{x, y, z, v\}$ na osnovu Lema 3.8.1. Na osnovu Lema 3.8.20, identiteta $xyz \approx xzy$ i identiteta na skupu od dve promenljive lako uočavamo da važi:

$$\begin{aligned}
\sigma_{y\mapsto x}(x \cdot yz \cdot vz) &= \quad xzv \\
\sigma_{z\mapsto x}(x \cdot yz \cdot vz) &= \quad xvy \\
\sigma_{v\mapsto x}(x \cdot yz \cdot vz) &= \quad xzy \\
\sigma_{z\mapsto y}(x \cdot yz \cdot vz) &= \quad xyv \\
\sigma_{v\mapsto y}(x \cdot yz \cdot vz) &= \quad x \cdot yz \\
\sigma_{v\mapsto z}(x \cdot yz \cdot vz) &= \quad xzy
\end{aligned}$$

Neka je $u = u_1 u_2$. Neka promenljive v_1, v_2 i v_3 predstavljaju jednu permutaciju promenljivih y, z, v. Razmotrimo sledeće slučajeve:

Slučaj $u_1 = x$: Tada u_2 sadrži preostale promenljive.

Podslučaj $u_2 = v_1 \cdot v_2 v_3$: Supstitucijom $v_1 \mapsto x$ na $u \approx x(yz)(vz)$ i primenom identiteta (c) dobijamo da je tačan identitet (a).

Podslučaj $u_2 = v_1 v_2 v_3$: Supstitucijom $v_3 \mapsto x$ na identitet $u \approx x(yz)(vz)$ dobijamo da je tačan identitet (a).

Slučaj $u_1 = xv_1$: Supstitucijom $v_1 \mapsto x$ na identitet $u \approx x(yz)(vz)$ dobijamo da je tačan identitet (a).

Slučaj $u_2 = v_3$: Tada term u_1 može imati dva oblika.

Podslučaj $u_1 = x \cdot v_1 v_2$: Tada je $u = x(v_1 v_2)v_3 \approx_{(c)} xv_3(v_1 v_2)$, tj. dobijamo prethodni slučaj.

Podslučaj $u_1 = xv_1 v_2$: Tada supstitucijom $v \mapsto y$ na $u \approx x(yz)(vz)$ i primenom identiteta (c) dobijamo da je tačan identitet (a).

Prema tome, jednakosna teorija E sadrži identitet (a). Tada važi da je $x \cdot yz \approx_{(a)} xyz \approx_{(c)} xzy \approx_{(a)} x \cdot zy$ odakle sledi da identitet (d) pripada jednakosnoj teoriji E pa na osnovu Teoreme 3.8.15 sledi da je $\mathcal{S}_2$ varijetet koji odgovara jednakosnoj teoriji E. Ne postoji 4-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{Q}_8$ jer ona ne sadrži identitet (a) i sa druge strane ta jednakosna teorija je proširenje grupoida $\mathbf{G}_6$, pa sadrži identitet (a). □

Teorema 3.8.25. *Postoji tačno jedanaest egzaktno 3-kvazilinearnih jednakosnih teorija koje su proširenja grupoida $\mathbf{G}_6$, od kojih su četiri prave 3-kvazilinearne jednakosne teorije.*

Dokaz. Posledica Teoreme 2.4.1, Leme 3.8.11 i Teorema 3.8.13, 3.8.14, 3.8.16 i 3.8.22. □

Teorema 3.8.26. *Postoji tačno sedam egzaktno n-kvazilinearnih jednakosnih teorija, za $n \geq 4$, odnosno $*$-kvazilinearnih jednakosnih teorija $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, koje su proširenja grupoida $\mathbf{G}_6$, od kojih su četiri prave n-kvazilinearne jednakosne teorije.*

Dokaz. Ova Teorema je posledica sledećeg niza tvrđenja Teoreme 2.4.1, Leme 3.8.2, 3.1.4, Teoreme 3.8.5, Leme 3.8.6, Leme 3.8.11 i Teorema 3.8.13, 3.8.14, 3.8.16 i 3.8.24. □

3.9 $*$-kvazilinearno proširenje $\mathbf{G}_7$

Neka je u ovom odeljku E jednakosna teorija i neka je njoj odgovarajući varijetet $\mathcal{V}$ varijetet sa slobodnim grupoidom $\mathbf{G}_7$ nad skupom od dva generatora. Tada su u varijetetu $\mathcal{V}$ na osnovu Kejlijeve tablice grupoida $\mathbf{G}_7$

tačni sledeći identiteti:

$$x \approx xx \approx y \cdot xy,$$
$$xy \approx yx.$$

Lema 3.9.1. *Neka je $n \geq 3$ i neka je E n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_7$. Tada važi da je $x(y \cdot xz) \approx z \cdot xy \in E$.*

Dokaz. Neka je u linearan term takav da je $u \approx x(y \cdot xz)$.
Dokažimo prvo da je $S(u) = \{x, y, z\}$.

Ako $x \notin S(u)$ tada je $\sigma_{y \mapsto z}(u) \approx z$ i $\sigma_{y \mapsto z}(x(y \cdot xz)) \approx x$, kontradikcija.

Ako $y \notin S(u)$ tada je $\sigma_{z \mapsto x}(u) \approx x$ i $\sigma_{z \mapsto x}(x(y \cdot xz)) \approx y$, kontradikcija.

Ako $z \notin S(u)$ tada je $\sigma_{y \mapsto x}(u) \approx x$ i $\sigma_{y \mapsto x}(x(y \cdot xz)) \approx xz$, kontradikcija.

Term u je različit od terma $x \cdot zy$ i $y \cdot xz$ jer bi u suprotnom imali da je $\sigma_{y \mapsto x}(u) \approx z$ i $\sigma_{y \mapsto x}(x(y \cdot xz)) \approx xz$, kontradikcija.

Zaključujemo da je $u = z \cdot xy$. □

Lema 3.9.2. *Neka je $n \geq 3$ i neka je E n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_7$. Tada važi da je $xy \cdot xz \approx x \cdot yz \in E$.*

Dokaz. Neka je u linearan term takav da je $u \approx xy \cdot xz$.
Dokažimo prvo da je $S(u) = \{x, y, z\}$.

Ako $x \notin S(u)$ tada je $\sigma_{y \mapsto z}(u) \approx z$ i $\sigma_{y \mapsto z}(xy \cdot xz) \approx xz$, kontradikcija.

Ako $y \notin S(u)$ tada je $\sigma_{z \mapsto x}(u) \approx x$ i $\sigma_{z \mapsto x}(xy \cdot xz) \approx y$, kontradikcija.

Ako $z \notin S(u)$ tada je $\sigma_{y \mapsto x}(u) \approx x$ i $\sigma_{y \mapsto x}(xy \cdot xz) \approx z$, kontradikcija.

Term u je različit od terma $y \cdot xz$ i $z \cdot xy$ jer bi u suprotnom imali da je $\sigma_{z \mapsto y}(u) \approx x$ i $\sigma_{z \mapsto y}(xy \cdot xz) \approx xy$, kontradikcija. □

Lema 3.9.3. *Neka je $n \geq 3$ i neka je E n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_7$. Tada važi da je $xyzux \approx yuz \in E$.*

Dokaz. Neka je t linearni term ekvivalentan sa $xyzux$ i $S(t) \subseteq \{x, y, z, u\}$. Dokažimo da je $S(t) = \{y, z, u\}$.

Neka $y \notin S(t)$. Tada je $\sigma_{z \mapsto x}(\sigma_{u \mapsto x}(t)) \approx \sigma_{z \mapsto x}(\sigma_{u \mapsto x}(xyzux))$, odakle sledi da je $x \approx y$, kontradikcija.

Neka $z \notin S(t)$. Tada je $\sigma_{y \mapsto x}(\sigma_{u \mapsto x}(t)) \approx \sigma_{y \mapsto x}(\sigma_{u \mapsto x}(xyzux))$, odakle sledi da je $x \approx xz$, kontradikcija.

Neka $u \notin S(t)$. Tada je $\sigma_{y \mapsto x}(\sigma_{z \mapsto x}(t)) \approx \sigma_{y \mapsto x}(\sigma_{z \mapsto x}(xyzux))$, odakle sledi da je $x \approx u$, kontradikcija.

Pretpostavimo da $x \in S(t)$. Tada je term t zbog komutativnosti ekvivalentan sa jednim od terma $x(v_1 \cdot v_2 v_3)$, $xv_1 \cdot v_2 v_3$, $x \cdot v_1 v_2 \cdot v_3$, $xv_1 v_2 v_3$ gde je $S(t) = \{x, v_1, v_2, v_3\}$.

Slučaj $t = x(v_1 \cdot v_2v_3)$: Korišćenjem Leme 3.9.1 dobijamo kontradikciju jer je $\sigma_{v_1\mapsto x}(\sigma_{v_2\mapsto v_3}(t)) \approx v_3$ i $\sigma_{v_1\mapsto x}(\sigma_{v_2\mapsto v_3}(xyzux)) \approx t' \in \{x, xv_3\}$.

Slučaj $t = xv_1 \cdot v_2v_3$: Koristićemo Lemu 3.9.1 i Lemu 3.9.2. Ako je $v_1 = y$, tada je $\sigma_{y\mapsto z}(\sigma_{u\mapsto z}(t)) \approx x$ i $\sigma_{y\mapsto z}(\sigma_{u\mapsto z}(xyzux)) \approx z$, kontradikcija. Ako je $v_1 \neq y$, tada je $\sigma_{y\mapsto x}(\sigma_{u\mapsto z}(t)) \approx xz$ i $\sigma_{y\mapsto x}(\sigma_{u\mapsto z}(xyzux)) \approx x$, kontradikcija.

Slučaj $t = x \cdot v_1v_2 \cdot v_3$: Korišćenjem Leme 3.9.1 dobijamo kontradikciju jer je $\sigma_{v_1\mapsto x}(\sigma_{v_2\mapsto v_3}(t)) \approx v_3$ i $\sigma_{v_1\mapsto x}(\sigma_{v_2\mapsto v_3}(xyzux)) \approx t' \in \{x, xv_3\}$.

Slučaj $t = xv_1v_2v_3$: Tada dobijamo da je $\sigma_{v_2\mapsto x}(\sigma_{v_1\mapsto v_3}(t)) \approx v_3$ i da je $\sigma_{v_2\mapsto x}(\sigma_{v_1\mapsto v_3}(xyzux)) \approx t' \in \{x, xv_3\}$, kontradikcija.

Prema tome, $S(t) = \{y, z, u\}$. Ako je $t \approx yzu$ ili $t \approx uzy$, tada na osnovu Leme 3.9.1 dobijamo da je $\sigma_{u\mapsto y}(t) \approx z$ i $\sigma_{u\mapsto y}(xyzux) \approx yz$, kontradikcija. Jedini mogući slučaj je $t \approx yuz$. □

Lema 3.9.4. *Neka je $n \geq 3$ i neka je E n-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_7$. Tada važi da je $xzyt \approx xtyz \in E$.*

Dokaz. $xzyt \approx zxyt \approx zxytzz \approx xtyz$. □

Posledica 3.9.5. *Jednakosna teorija generisana identitetima $Id_{\mathbf{G}_7}(x, y)$ i $xzyt \approx xtyz$ je podteorija svake n-kvazilinearne jednakosne teorije koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_7$.*

Napomena 3.9.1. Kako u jednakosnoj teoriji E važi zakon komutativnosti tada se svi proizvodi iz Tabele 2.1 mogu odrediti ("linearizovati") na osnovu definisanosti proizvoda:

$$x \cdot x \approx x,$$

$$xy \cdot x \approx xy \cdot_{\mathrm{E}} x,$$

$$x \cdot xyz \approx x \cdot_{\mathrm{E}} xyz,$$

$$xy \cdot xz \approx xy \cdot_{\mathrm{E}} xz,$$

$$xyz \cdot xzy \approx xyz \cdot_{\mathrm{E}} xzy,$$

koji su u Tabeli 2.1 navedeni redom pod brojevima (1), (4), (7), (11) i (20).

Neka je $a = x$, $b = y$, $c = z$, $d = xy$, $e = xz$, $f = yz$, $g = xyz$, $h = xzy$, $i = yzx$, i neka je

$$\begin{aligned}\pi_{\mathbf{D}} = \{&\{x\}, \{y\}, \{z\}, \{xy, yx\}, \{xz, zx\}, \{yz, zy\},\\ &\{xyz, yxz, z \cdot xy, z \cdot yx\},\\ &\{xzy, zxy, y \cdot xz, y \cdot zx\},\\ &\{yzx, zyx, x \cdot yz, x \cdot zy\}\}\end{aligned}$$

$\mathbf{D}$	a	b	c	d	e	f	g	h	i
a	a	d	e	b	c	i	h	g	f
b	d	b	f	a	h	c	i	e	g
c	e	f	c	q	a	b	d	i	h
d	b	a	g	d	i	h	c	f	e
e	c	h	a	i	e	g	f	b	d
f	i	c	b	h	g	f	e	d	a
g	h	i	d	c	f	e	g	a	b
h	g	e	i	f	b	d	a	h	c
i	f	g	h	e	d	a	b	c	i

Tabela 3.7: *Kejlijeva tablica slobodnog grupoida* $\mathbf{D}$ *nad tri generatora egzaktno* 3*-kvazilinearne jednakosne teorije koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_7$.

particija skupa $Lin(\{x, y, z\})$.

Teorema 3.9.6. *Postoji tačno jedna egzaktno 3-kvazilinearna jednakosna teorija čija je slobodan grupoid sa dva generatora izomorfna sa* $\mathbf{G}_7$*; njoj odgovarajući slobodan grupoid sa tri generatora je grupoid* $\mathbf{D}$ *(Tabela 3.7).*

Dokaz. Na osnovu tvrđenja Leme 3.9.4 zaključujemo da 3-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_7$ ima sledeće osobine:

(1') x je ekvivalentan sa nelinearnim termima $x \cdot x$, $xy \cdot x$, $xyz \cdot xzy$,

(2') xy je ekvivalentan sa linearnim termom yx,

(3') xyz je ekvivalentan sa linearnim termima yxz, $z \cdot xy$, $z \cdot yx$.

(4') xzy je ekvivalentan sa nelinearnim termima $x \cdot xyz$,

(5') yzx je ekvivalentan sa nelinearnim termima $xy \cdot xz$.

Iz gore navedenih osobina i Napomene 3.9.1 sledi da su svi proizvodi $t_1 \cdot t_2$ za linearne terme t_1 i t_2 na skupu od tri promenljive određeni ("linearizovani") za potencijalnu 3-kvazilinearnu jednakosnu teoriju koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_7$ sa dva generatora. Pokažimo da postoji tačno jedno egzaktno 3-kvazilinearno proširenje. Prava 3-kvazilinearna jednakosna teorija (kod koje je slobodan grupoid sa dva generatora $\mathbf{G}_7$) ne sadrži identitete $x \approx xy$, $x \approx yx$, pa zaključujemo da su termi x, y, z, xy, xz, yz, xyz, xzy, zyx medjusobno različiti u posmatranoj jednakosnoj teoriji jer bi u suprotnom iz identiteta:

- $x \approx yz$ primenom supstitucije $z \mapsto y$ dobili da važi identitet $x \approx y$,
- $x \approx xyz$ primenom supstitucije $y \mapsto x$ dobili da važi identitet $x \approx xy$,
- $x \approx xzy$, primenom supstitucije $z \mapsto x$ dobili da važi identitet $x \approx xy$,
- $x \approx yzx$, primenom supstitucije $z \mapsto y$ dobili da važi identitet $x \approx yx$,
- $xy \approx xz$, primenom supstitucije $z \mapsto x$ dobili da važi identitet $xy \approx x$,
- $xy \approx xyz$ primenom supstitucije $z \mapsto y$ dobili da važi identitet $xy \approx x$,
- $xy \approx yzx$ primenom supstitucije $z \mapsto x$ dobili da važi identitet $xy \approx y$,
- $xyz \approx xzy$ primenom supstitucije $z \mapsto x$ dobili da važi identitet $y \approx xy$,
- $xyz \approx zyx$ primenom supstitucije $y \mapsto x$ dobili da važi identitet $xz \approx z$.

Prema tome, jedini potencijalni slobodni grupoid sa tri generatora 3-kvazilinearne jednakosne teorije koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_7$ (nad skupom od dva generatora) je grupoid $\mathbf{D}$. Proverom pomoću računara utvrđujemo da na grupoidu $\mathbf{D}$ važe identiteti $xx \approx x$, $xy \approx yx$, $xy \cdot x \approx y$ i iz Leme 3.9.4 identitet $xzyt \approx xtyz$, odakle sledi da važe i identiteti navedeni u $(1')$, $(2')$, $(3')$, $(4')$ i $(5')$. Na osnovu Teoreme 3.1.5 i particije $\pi_{\mathbf{D}}$ zaključujemo da postoji tačno jedna egzaktno 3-kvazilinearna jednakosna teorija koja je proširenje grupoida $\mathbf{G}_7$, a njoj odgovarajući slobodni grupoid sa tri generatora je grupoid $\mathbf{D}$. □

Neka je $\mathcal{D}$ varijetet čija je odgovarajuća jednakosna teorija E_D generisana identitetima:

(D1) $xx \approx x$

(D2) $xy \approx yx$

(D3) $x \cdot xy \approx y$

(D4) $xzyt \approx xtyz$

Lema 3.9.7. *Jednakosna teorija E_D sadrži sledeće identitete:*

(5) $xzyx \approx xyz$

(6) $xy \cdot zt \approx xz \cdot yt$

Dokaz. (5) $xzyx \approx_{(D4)} xxyz \approx_{(D2)} xyz$,

(6) $xy \cdot zt \approx_{(5)} (x \cdot zt \cdot y)x \approx ztxyx \approx tzxyx \approx_{(D4)} tyxzx \approx_{(D2),(5)} xz \cdot yt$, □

Lema 3.9.8. *Neka je x promenljiva koja se u termu t pojavljuje bar dva puta i neka je t_1 podterm terma t takav da sadrži dve promenljive x i $|t_1|$ ima minimalnu vrednost. Tada postoji term t' takav da su ispunjeni sledeći uslovi:*

- *identitet $t' \approx t$ pripada jednakosnoj teoriji E_D,*
- *sve promenljive različite od x se pojavljuju jednak broj puta u termima t' i t,*
- *broj pojavljivanja promeljive x u termu t' je manji nego u termu t ili je broj pojavljivanja promenljive x u termima t' i t isti ali postoji podterm t'_1 terma t' koji sadrži dve promenljive x i $|t'_1| < |t_1|$.*

Dokaz. Neka je $t_1 = (u_1u_2)(u_3u_4)$ gde se promenljiva x nalazi u podtermima u_1 i u_3, tada je $t_1 \approx_{(6)} (u_1u_3)(u_2u_4) = t'_1$. Prema tome, term t' koji se dobija od terma t zamenom podterma t_1 sa termom t'_1 ispunjava uslove tvrđenja.

Neka je $t_1 = u_1u_2u_3x$ gde se promenljiva x nalazi u podtermu u_1, tada je $t_1 \approx_{(D4)} u_1xu_3u_2 = t'_1$. Prema tome, term t' koji se dobija od terma t zamenom podterma t_1 sa termom t'_1 ispunjava uslove tvrđenja.

Neka je $t_1 = xu_1x$, tada je $t_1 \approx_{(D2)} x \cdot xu_1 \approx_{(D3)} u_1 = t'_1$. Prema tome, term t' koji se dobija od terma t zamenom podterma t_1 sa termom t'_1 ispunjava uslove tvrđenja.

Neka je $t_1 = xx$, tada je $t_1 \approx_{(D1)} x = t'_1$. Prema tome, term t' koji se dobija od terma t zamenom podterma t_1 sa termom t'_1 ispunjava uslove tvrđenja.

Sve preostale mogućnosti za term t_1 se pomoću identiteta $(D2)$ mogu svesti na neki od prethodnih slučajeva. □

Lema 3.9.9. *Jednakosna teorija E_D je $*$-kvazilinearna.*

Dokaz. Neka term t sadrži više puta promenljivu x. Tada konačnom primenom Leme 3.9.8 dobijamo term t' koji je ekvivalentan sa termom t u jednakosnoj teoriji E_D i važi da je $|t| - 1 \geq |t'|$. Ako term t' nije linearan ponavljanjem ovog postupka doći ćemo do linearnog terma jer se dužina ekvivalentnih terma koje dobijamo na ovaj način stalno smanjuje. □

Teorema 3.9.10. *Postoji tačno jedan* $*$*-kvazilinearan varijetet* $\mathcal{D}$ *sa slobodnim grupoidom* $\mathbf{G}_7$ *nad dva generatora. Njegov jedini pravi podvarijetet je trivijalni varijetet. Varijetet* $\mathcal{D}$ *je generisan slobodnim grupoidom* $\mathbf{G}_7$ *koji je ujedno prost grupoid. Jednakosna teorija* E_D *je takođe generisana identitetima:*

$$xx \approx x,$$

$$xy \approx yx,$$

$$x \cdot xy \approx y,$$

$$xy \cdot zu \approx xz \cdot yu.$$

Dokaz. Obeležimo sa $\mathcal{V}$ varijetet čija odgovarajuća jednakosna teorija je generisana gore navedenim identitetima. Na osnovu Leme 3.9.7 imamo da je $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{V}$. Pokazano je u [17] i takođe u [18] da je varijetet $\mathcal{V}$ minimalan varijetet. Kako varijetet $\mathcal{D}$ sadrži grupoid $\mathbf{G}_7$ sledi da varijetet $\mathcal{D}$ nije trivijalan i važi $\mathcal{D} = \mathcal{V}$. Prema tome varijetet $\mathcal{D}$ je generisan poddirekto nesvodljivim grupoidom $\mathbf{G}_7$. Na osnovu Leme 3.9.9 varijetet $\mathcal{D}$ je $*$-kvazilinearan. Na osnovu Leme 3.9.4 varijetet $\mathcal{D}$ je jedini $*$-kvazilinearni varijetet sa slobodnim grupoidom $\mathbf{G}_7$ nad dva generatora. □

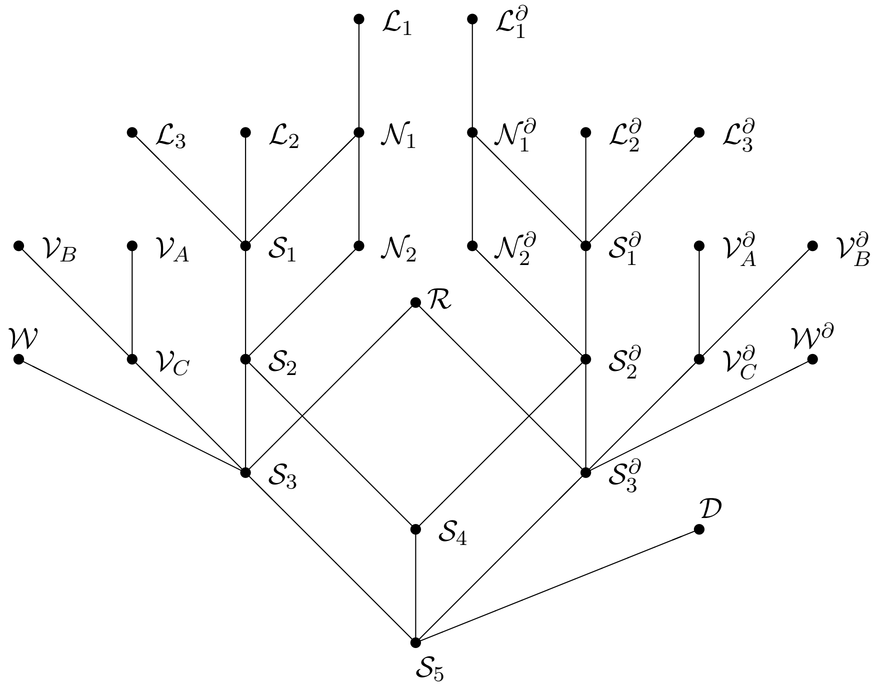
Posledica 3.9.11. *Za svako* $n \geq 3$*, postoji tačno jedna* n*-kvazilinearna jednakosna teorija* E *koja je proširenje grupoida* $\mathbf{G}_7$*.*

Dokaz. Na osnovu Posledice 3.9.5 i Teoreme 3.9.10 imamo da je $E = E_D$. □

3.10 Uređenje i generišući grupoidi idempotentnih $*$-kvazilinearnih varijeteta

Neka su $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$ i $\mathcal{S}_5$ varijeteti definisani na stranici 43. Kao rezultat prethodnih odeljaka imamo sledeće tvrđenje.

Teorema 3.10.1. *Postoji tačno* 28 *idempotentnih* $*$*-kvazilinearnih varijeteta, a to su:* $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$, $\mathcal{S}_4$, $\mathcal{S}_5$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{V}_A$, $\mathcal{V}_B$, $\mathcal{V}_C$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}_1^\partial$, $\mathcal{L}_2^\partial$, $\mathcal{L}_3^\partial$, $\mathcal{N}_1^\partial$, $\mathcal{N}_2^\partial$, $\mathcal{S}_1^\partial$, $\mathcal{S}_2^\partial$, $\mathcal{S}_3^\partial$, $\mathcal{W}^\partial$, $\mathcal{V}_A^\partial$, $\mathcal{V}_B^\partial$, $\mathcal{V}_C^\partial$*. Varijeteti* $\mathcal{L}_3$ *i* $\mathcal{L}_3^\partial$ *su inherntno beskonačno bazirani, a svih preostalih* 26 *varijeteta imaju konačnu bazu. Slika 3.1 predstavlja inkluzivno uređenje svih* 28 $*-$*kvazilinearnih varijeteta.*



Slika 3.1: *Uređenje idempotentnih $*$-kvazilinearnih varijeteta.*

Dokaz. Dokaz sledi na osnovu sledećeg niza tvrđenja: Teoreme 3.2.1, Teoreme 2.6.1, Teoreme 3.4.2, Teoreme 3.4.3, Teoreme 3.5.3, Teoreme 3.6.5, Teoreme 3.7.23, Teoreme 3.8.26, Teoreme 3.9.10. □

Teorema 3.10.2. *Za svako $n \geq 4$ postoji 28 idempotentnih n-kvazilinearnih varijeteta. Postoji tačno 60 idempotentnih egzaktnih 3-kvazilinearnih varijeteta. Postoji beskonačno mnogo idempotentnih 3-kvazilinearnih varijeteta.*

Dokaz. Dokaz broja idempotentnih n-kvazilinearnih varijeteta sledi na osnovu sledećeg niza tvrđenja: Teoreme 3.2.1, Teoreme 3.4.2, Teoreme 3.4.3, Posledica 3.5.4, Posledica 3.6.6, Posledica 3.7.24, Teoreme 3.8.26, Posledica 3.9.11. Na osnovu Teoreme 3.7.10 i Teoreme 3.8.25 i gore navedenih tvrđenja dobijamo da ima 60 idempotentnih egzaktnih 3-kvazilinearnih varijeteta. Beskonačnost broja idempotentnih 3-kvazilinearnih varijeteta sledi iz Leme 3.8.10. □

Primetimo da idempotentne 3-kvazilinearne jednakosne teorije nisu opisane u slučaju proširenja grupoida $\mathbf{G}_5$ i $\mathbf{G}_6$.

Teorema 3.10.3. *$*$-kvazilinearan varijetet $\mathcal{W}$ je generisan poddirektno nesvodljivim grupoidom $\mathbf{G}_{\mathcal{W}}$.*

$\mathbf{G}_{\mathcal{W}}$	a	b	c
a	a	a	a
b	c	b	b
c	b	c	c

Dokaz. Grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{W}}$ dobijamo od grupoida $\mathbf{W}$ tako što je $\mathbf{G}_{\mathcal{W}} \cong \mathbf{W}/\rho$, gde je $\rho = (x\ y\ xy\ xz\ yx\ yz\ xyz\ yxz)(z\ zxy)(zx\ zy)$ kongruencija na $\mathbf{W}$. Grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{W}}$ je poddirektno nesvodljiv grupoid kod koga je monolit generisan uređenim parom $\langle b, c\rangle$. Kako grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{W}}$ nije levo nulta polugrupa, jer je $ba \neq b$, sledi da grupoid ne pripada varijetetu $\mathcal{S}_3$, ali on pripada varijetetu $\mathcal{W}$. Prema tome, na osnovu Teoreme 3.10.1 grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{W}}$ generiše varijetet $\mathcal{W}$. □

Teorema 3.10.4. *$*$-kvazilinearan varijetet $\mathcal{V}_C$ je generisan poddirektno nesvodljivim grupoidom $\mathbf{G}_{\mathcal{V}_C}$.*

$\mathbf{G}_{\mathcal{V}_C}$	a	b	c
a	a	a	a
b	c	b	b
c	c	c	c

Dokaz. Grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{V}_C}$ dobijamo od grupoida $\mathbf{P}_{14}$ tako što je $\mathbf{G}_{\mathcal{V}_C} \cong \mathbf{P}_{14}/\rho$, gde je $\rho = (abdefgjk)(c)(hil)$ kongruencija na $\mathbf{P}_{14}$. Grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{V}_C}$ je poddirektno nesvodljiv grupoid kod koga je monolit generisan uređenim parom $\langle b, c\rangle$. Kako grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{V}_C}$ nije levo nulta polugrupa, jer je $ba \neq b$, sledi da grupoid ne pripada varijetetu $\mathcal{S}_3$, ali on pripada varijetetu $\mathcal{V}_C$. Prema tome, na osnovu Teoreme 3.10.1 grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{V}_C}$ generiše varijetet $\mathcal{V}_C$. □

U radu [13] su opisani svi poddirektno nesvodljivi grupoidi za varijetete $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ i $\mathcal{R}$. Pokazano je da varijetet $\mathcal{S}_3$ ima dva poddirektno nesvodljiva grupoida (trivijalan grupoid i dvoelementnu levo nultu polugrupu), $\mathcal{S}_2$ ima četiri poddirektno nesvodljiva grupoida (trivijalan grupoid, trivijalan grupoid proširen sa nulom, dvoelementnu levo nultu polugrupu i dvoelementnu levo nultu polugrupu proširenu sa nulom) i $\mathcal{R}$ ima tri poddirektno nesvodljiva grupoida (trivijalan grupoid, dvoelementnu levo nultu polugrupu i dvoelementnu deso nultu polugrupu).

Teorema 3.10.5. *$*$-kvazilinearan varijeteti $\mathcal{S}_5$, $\mathcal{S}_4$, $\mathcal{S}_3$ i $\mathcal{S}_2$ su generisani redom poddirektno nesvodljivim trivijalnim grupoidom, poddirektno nesvodljivim trivijalnim grupoidom proširenim sa nulom, poddirektno nesvodljivom* *dvoelementnom levo nultom polugrupom i poddirektno nesvodljivom dvoelementnom levo nultom polugrupom proširenom sa nulom.* $*$*-kvazilinearan varijeteti pravougaonih traka* $\mathcal{R}$ *nema poddirektno nesvodljiv generišući grupoid već je generisan poddirektno nesvodljivim generišućim grupoidima varijeteta* $\mathcal{S}_3$ *i* $\mathcal{S}_2$*.*

Lema 3.10.6. $*$*-kvazilinearan varijetet* $\mathcal{N}_1$ *je generisan grupoidom* $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_1}$*.*

$\mathbf{G}_{\mathcal{N}_1}$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	d	b	b	d	d
c	a	b	c	e	e
d	d	d	d	d	d
e	e	e	e	e	e

Dokaz. Kako na varijetetima $\mathcal{N}_2$ i $\mathcal{S}_1$ (na Slici 3.1 predstavljeni kao jedini varijeteti koje pokriva varijetet $\mathcal{N}_1$) važe linearni identiteti, redom, $w \cdot xy \approx w \cdot yx$ i $xyz \approx x \cdot yz$, dobijamo da $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_1} \notin \mathcal{N}_2 \cup \mathcal{S}_1$ jer je $c \cdot ab \neq c \cdot ba$ i $cba \neq c \cdot ba$, ali $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_1} \cong \mathbf{Q}_1/\rho$ gde je $\rho = (adehjlmpqt)(bfi)(c)(gknors)(u)$ kongruencija na grupoidu $\mathbf{Q}_1$. Prema tome, kako imamo da grupoid $\mathbf{Q}_1 \in \mathcal{N}_1$, na osnovu Teoreme 3.10.1 sledi da je varijetet $\mathcal{N}_1$ generisan grupoidom $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_1}$. $\square$

Primetimo da grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_1}$ nije poddirektno nesvodljiv a sve njegove netrivijalne homomorfne slike su sadržane u $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{N}_2$. Pokažimo u narednim tvrđenjima da ne postoji poddirektno nesvodljiv grupoid koji je homomorfna slika slobodnog grupoida $\mathbf{Q}_1$ i koji je generatorni grupoid varijeteta $\mathcal{N}_1$.

Lema 3.10.7. *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupoid iz varijeteta* $\mathcal{N}_1$ *sa tri generatora* a, b, c*. Tada ako na grupoidu* $\mathbf{G}$ *ne važi identitet* $z \cdot xy \approx z \cdot yx$ *ili identitet* $xyz \approx x \cdot yz$*, tada za svaki identitet od ova dva koji ne važi postoji valuacija* $\binom{x\ y\ z}{d\ e\ f}$ *takva da je* $\{d, e, f\} = \{a, b, c\}$ *i za koju neće važiti posmatrani identitet.*

Dokaz. Neka identitet $z \cdot xy \approx z \cdot yx$ nije tačan za valuaciju $z = d$, $x = e$, $y = f$. Tada se d, e, f mogu pretstaviti kao linearni proizvodi generatora. Varijetet $\mathcal{N}_1$ je podvarijetet od varijeteta $\mathcal{L}_1$ za koji su opisana sva skraćivanja promenljivih u podpododeljku 2.4.2. Svaki od generatora je zastupljen u bar jednom od linearnih proizvoda koji predstavljaju elemente d, e, f jer bi u suprotnom važila jednakost $d \cdot ef = d \cdot fe$. Element d mora biti neki od generatora jer bi u suprotnom opet bilo $d \cdot ef = d \cdot fe$. Dalje, kako se $d \cdot ef$ i $d \cdot fe$ mogu pretstaviti kao različiti linearni proizvodi generatora ostaje nam da za e i f možemo na jedinstven način izabrati preostale generatore (bez d). Na sličan način se analizira i identitet $xyz \approx x \cdot yz$. $\square$

Lema 3.10.8. *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupoid iz varijeteta* $\mathcal{N}_1$ *sa tri generatora* a, b, c. *Ako na grupoidu* $\mathbf{G}$ *važi da je* $a \cdot bc \neq a \cdot cb$ *tada za kongruenciju* ρ_1 *generisanu uređenim parom* $\langle a \cdot bc, a \cdot cb \rangle$ *važi da je* $\rho_1 = \triangle_G \cup \{\langle a \cdot bc, a \cdot cb \rangle, \langle a \cdot cb, a \cdot bc \rangle\}$. *Ako na grupoidu* $\mathbf{G}$ *važi da je* $ab \cdot c \neq a \cdot bc$ *tada za kongruenciju* ρ_2 *generisanu uređenim parom* $\langle ab \cdot c, a \cdot bc \rangle$ *važi da je* $\rho_2 = \triangle_G \cup \{\langle ab \cdot c, a \cdot bc \rangle, \langle a \cdot bc, ab \cdot c \rangle\}$.

Dokaz. Neka je d proizvoljan element iz skupa G koji je jednak nekom linearnom proizvodu generatora iz $\mathbf{G}$.

Pretpostavimo da je $a \cdot bc \neq a \cdot cb$. Tada na osnovu osobina slobodnog grupoida $\mathbf{Q}_1$ imamo da je $(a \cdot bc) \cdot d = a \cdot bc$ i $(a \cdot cb) \cdot d = a \cdot cb$, prema tome, važi da je $\langle (a \cdot bc) \cdot d, (a \cdot cb) \cdot d \rangle \in \rho_1$. Takođe na osnovu osobina slobodnog grupoida $\mathbf{Q}_1$ imamo da je $d \cdot (a \cdot bc) = d \cdot (a \cdot cb)$ akko $d \neq a$. Ako je $d = a$ tada važi da je $\langle d \cdot (a \cdot bc), d \cdot (a \cdot cb) \rangle = \langle a \cdot bc, a \cdot cb \rangle \in \rho_1$. Prema tome ρ_1 je kongruencija na grupoidu $\mathbf{G}$.

Pretpostavimo da je $ab \cdot c \neq a \cdot bc$. Tada na osnovu osobina slobodnog grupoida $\mathbf{Q}_1$ imamo da je $(ab \cdot c) \cdot d = ab \cdot c$ i $(a \cdot bc) \cdot d = a \cdot bc$, a na osnovu identiteta $w(xy \cdot z) \approx w(x \cdot yz)$ imamo da je $d \cdot (ab \cdot c) = d \cdot (a \cdot bc)$ odakle sledi da je $\langle (ab \cdot c) \cdot d, (a \cdot bc) \cdot d \rangle, \langle d \cdot (ab \cdot c), d \cdot (a \cdot bc) \rangle \in \rho_2$, tj. ρ_2 je kongruencija na grupoidu $\mathbf{G}$. □

Teorema 3.10.9. *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupoid iz varijeteta* $\mathcal{N}_1$ *sa tri generatora* a, b, c. *Ako na grupoidu* $\mathbf{G}$ *ne važe identiteti* $w \cdot xy \approx w \cdot yx$ *i* $xyz \approx x \cdot yz$, *tada grupoid* $\mathbf{G}$ *nije poddirektno nesvodljiv grupoid.*

Dokaz. Na osnovu Leme 3.10.7 imamo da postoje $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ takvi da je $\{a_1, b_1, c_1\} = \{a_2, b_2, c_2\} = \{a, b, c\}$, $a_1 \cdot b_1 c_1 \neq a_1 \cdot c_1 b_1$ i $a_2 b_2 \cdot c_2 \neq a_2 \cdot b_2 c_2$.

Ako je $\{a_1 \cdot b_1 c_1, a_1 \cdot c_1 b_1\} \neq \{a_2 b_2 \cdot c_2, a_2 \cdot b_2 c_2\}$ tada tvrđenje sledi na osnovu Leme 3.10.8 jer postoje kongruencije različite od dijagonale a njihov presek je dijagonala.

Pretpostavimo sada da je $\{a_1 \cdot b_1 c_1, a_1 \cdot c_1 b_1\} = \{a_2 b_2 \cdot c_2, a_2 \cdot b_2 c_2\}$ i neka je $a_1 \cdot b_1 c_1 = t_1$, $a_1 \cdot c_1 b_1 = t_2$ i $\{t_1, t_2\} = \{a_2 b_2 \cdot c_2, a_2 \cdot b_2 c_2\}$. Tada na osnovu identiteta $w(xy \cdot z) \approx w(x \cdot yz)$ iz varijeteta $\mathcal{N}_1$ imamo da je $a_1 \cdot b_1 c_1 = a_1 \cdot (a_1 \cdot b_1 c_1) = a_1 \cdot t_1 = a_1 \cdot t_2 = a_1 \cdot (a_1 \cdot c_1 b_1) = a_1 \cdot c_1 b_1$, kontradikcija. □

Pronađimo poddirektno nesvodljiv grupoid sa četiri generatora koji će biti generišući grupoid za varijetet $\mathcal{N}_1$.

Teorema 3.10.10. $*$*-kvazilinearan varijetet* $\mathcal{N}_1$ *je generisan poddirektno* *nesvodljivim grupoidom* $\mathbf{G}'_{\mathcal{N}_1}$.

$\mathbf{G}'_{\mathcal{N}_1}$	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	d	b	b	d	d	b
c	a	b	c	e	e	c
d	d	d	d	d	d	d
e	e	e	e	e	e	e
f	a	b	f	d	d	f

Dokaz. Pokažimo da grupoid $\mathbf{G}'_{\mathcal{N}_1}$ pripada $HSP(\mathbf{G}_{\mathcal{N}_1}) = \mathcal{N}_1$ (Lema 3.10.6). Neka je grupoid $\mathbf{G}$ jedanaestoelementni podgrupoid grupoida $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_1} \times \mathbf{G}_{\mathcal{N}_1}$ generisan uređenim parovima $\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle b,c\rangle$ ali zbog jednostavnosti zapisa grupoida $\mathbf{G}$ elemente ćemo obeležiti na sledeći način: $\langle a,a\rangle \mapsto a$; $\langle a,b\rangle \mapsto b$; $\langle a,c\rangle \mapsto c$; $\langle a,d\rangle \mapsto d$; $\langle a,e\rangle \mapsto e$; $\langle b,c\rangle \mapsto f$; $\langle d,a\rangle \mapsto g$; $\langle d,b\rangle \mapsto h$; $\langle d,c\rangle \mapsto i$; $\langle d,d\rangle \mapsto j$; $\langle d,e\rangle \mapsto k$.

$\mathbf{G}$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a	a
b	d	b	b	d	d	b	d	b	b	d	d
c	a	b	c	e	e	c	a	b	c	e	e
d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d	d
e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e	e
f	g	h	i	k	k	f	g	h	i	k	k
g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g	g
h	j	h	h	j	j	h	j	h	h	j	j
i	g	h	i	k	k	i	g	h	i	k	k
j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j	j
k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k	k

Grupoid $\mathbf{G}'_{\mathcal{N}_1}$ dobijamo od grupoida $\mathbf{G}$ tako što je $\mathbf{G}'_{\mathcal{N}_1} \cong \mathbf{G}/\rho$, gde je $\rho = (ag)(bh)(c)(djk)(e)(fi)$ kongruencija na $\mathbf{G}$. Grupoid $\mathbf{G}'_{\mathcal{N}_1}$ je poddirektno nesvodljiv grupoid kod koga je monolit generisan uređenim parom $\langle d,e\rangle$. Grupoid $\mathbf{G}'_{\mathcal{N}_1}$ nije polugrupa jer je $cba \neq c \cdot ba$, i na njemu ne važi identitet $w \cdot xy \approx w \cdot yx$ jer je $c \cdot ab \neq c \cdot ba$, sledi da grupoid ne pripada varijetetima $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{N}_2$, ali pripada varijetetu $\mathcal{N}_1$. Prema tome, na osnovu Teoreme 3.10.1 grupoid $\mathbf{G}'_{\mathcal{N}_1}$ generiše varijetet $\mathcal{N}_1$.

$\square$

Teorema 3.10.11. *Varijetet* $\mathcal{N}_2$ *je generisan poddirektno nesvodljivim gru-*

poidom $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_2}$.

$\mathbf{G}_{\mathcal{N}_2}$	a	b	c	d
a	a	d	c	d
b	b	b	b	b
c	c	b	c	b
d	d	d	d	d

Dokaz. Grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_2}$ dobijamo od grupoida $\mathbf{Q}_1$ tako što je $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_2} \cong \mathbf{Q}_1/\rho$, gde je $\rho = (a)(bfgiklmnorstu)(ceh)(djpq)$ kongruencija na $\mathbf{Q}_1$. Grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_2}$ je poddirektno nesvodljiv grupoid kod koga je monolit generisan uređenim parom $\langle b, d\rangle$. Kako grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_2}$ nije polugrupa, jer je $acb \neq a \cdot cb$, sledi da grupoid ne pripada varijetetu $\mathcal{S}_2$, ali se lako proverava da važi identitet $w \cdot xy \approx w \cdot yx$. Prema tome, na osnovu Teoreme 2.6.1 grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_2}$ generiše varijetet $\mathcal{N}_2$. $\square$

Poddirektno nesvodljive generatorne grupoide za varijetete:

- L_1, L_2, L_3 smo predstavili u Teoremi 2.6.2 i Teoremi 2.6.3,
- V_A, V_B smo predstavili u Teoremi 3.7.23,
- D smo predstavili u Teoremi 3.9.10,
- S_1 smo predstavili u Lemi 3.8.12.

3.11 Rezidualne granice idempotentnih $*$-kvazilinearnih varijeteta

U ovom odeljku ćemo predstaviti rezidualne granice svih idempotentnih $*$-kvazilinearnih varijeteta (Tabela 3.8)

Varijetet $\mathcal{V}$ i $\mathcal{V}^{\partial}$ imaju iste rezidualne granice. U prethodnom odeljku smo rekli da su u radu [13] za varijetete $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ i $\mathcal{R}$ opisani svi poddirektno nesvodljivi grupoidi pa su samim tim i određene njihove rezidualne granice. U Primeru 1.5.1 smo rekli da varijetet $\mathcal{S}_4$ (varijetet polumreža) ima rezidualnu granicu 3. Kako varijetet $\mathcal{S}_1$ sadrži J.A.Gerhardov grupoid $\mathbf{G}_{(a)}$ (Lema 3.8.12) koji za svaki kardinal κ generiše poddirektno nesvodljiv grupoid reda većeg od κ sledi da svi varijeteti koji imaju kao podvarijetet $\mathcal{S}_1$ su rezidualno veliki, tj. varijeteti $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{N}_1$ su rezidualno veliki.

Varijetet $\mathcal{D}$ je generisan svojim prostim slobodnim grupoidom $\mathbf{G}_7$ (Teorema 3.9.10). Kako baza varijeteta $\mathcal{D}$, navedena u odeljku 3.9, sadrži identitete $(D1)$ $xx \approx x$, $(D2)$ $xy \approx yx$, $(D3)$ $x \cdot xy \approx y$, sledi da je grupoid $\mathbf{G}_7$ Štajnerova kvazigrupa. Quackenbush je pokazao sledeće tvrđenje.

Varijetet	Rezidualna granica
$\mathcal{S}_5$	2
$\mathcal{S}_3,\ \mathcal{S}_3^\partial,\ \mathcal{S}_4,\ \mathcal{R},$	3
$\mathcal{S}_2,\ \mathcal{S}_2^\partial,\ \mathcal{V}_C,\ \mathcal{V}_C^\partial,\ \mathcal{D},$	4
$\mathcal{W},\ \mathcal{W}^\partial$	5
$\mathcal{L}_1,\ \mathcal{L}_2,\ \mathcal{L}_3,\ \mathcal{N}_1,\ \mathcal{N}_2,\ \mathcal{S}_1,\ \mathcal{V}_A,\ \mathcal{V}_B,$ $\mathcal{L}_1^\partial,\ \mathcal{L}_2^\partial,\ \mathcal{L}_3^\partial,\ \mathcal{N}_1^\partial, \mathcal{N}_2^\partial, \mathcal{S}_1^\partial,\ \mathcal{V}_A^\partial,\ \mathcal{V}_B^\partial$	rezidualno velik

Tabela 3.8: *Rezidualna granica idempotentnih $*$-kvazilinearnih varijeteta.*

Teorema 3.11.1 ([36], Teorema 5.9)**.** *Neka su $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$ po parovima neizomorfne konačne proste planarne Štajnerove kvazigrupe ili Štajnerove lupe. Tada je $\mathcal{V}(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n) = P_S(\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n)$.*

Na osnovu Teoreme 3.11.1 imamo da je $\mathcal{D} = \mathcal{V}(\mathbf{G}_7) = P_S(G_7)$ pa su u varijetetu $\mathcal{D}$ jedini poddirektno nesvodljivi grupoidi $\mathbf{G}_7$ i trivijalan grupoid.

U narednim pododeljcima ćemo pronaći rezidualne granice za preostale idempotentne $*$-kvazilinearne varijetete $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{W}$, $\mathcal{V}_A$, $\mathcal{V}_B$, $\mathcal{V}_C$.

Uvedimo još neke oznake koje ćemo koristiti dalje u radu.

Neka $a, b \in G$ i $j \in \kappa$, tada element $a^\kappa_{j\mapsto b}$ iz G^κ definišemo na sledeći način

$$a^\kappa_{j\mapsto b}(i) = \begin{cases} a, & \text{za sve } i \in \kappa \setminus \{j\}; \\ b, & \text{za } i = j. \end{cases}$$

Neka $\alpha \in G^\kappa$ i $e, f \in G$, tada element $\alpha_{e\mapsto f}$ iz G^κ definišemo na sledeći način

$$\alpha_{e\mapsto f}(i) = \begin{cases} \alpha(i), & \text{ako je } \alpha(i) \neq e; \\ f, & \text{ako je } \alpha(i) = e. \end{cases}$$

3.11.1 Rezidualne granice varijeteta $\mathcal{N}_2$, $\mathcal{V}_A$, $\mathcal{V}_B$

Teorema 3.11.2. *Varijetet $\mathcal{N}_2 = HSP(\mathbf{G}_{\mathcal{N}_2})$ sadrži beskonačne poddirektno nesvodljive algebre čije kardinalnosti nisu ograničene. Drugim rečima,* *varijetet $\mathcal{N}_2$ je rezidualno velik.*

$\mathbf{G}_{\mathcal{N}_2}$	a	b	c	d
a	a	d	c	d
b	b	b	b	b
c	c	b	c	b
d	d	d	d	d

Dokaz. Grupoid $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_2}$ je generatorni grupoid za varijetet $\mathcal{N}_2$ na osnovu Teoreme 3.10.11. Neka je κ proizvoljan kardinal. Posmatrajmo grupoid $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{\mathcal{N}_2}^{\kappa}$ i obeležimo sa b^κ i d^κ elemente grupoida $\mathbf{G}$ takve da je $b^\kappa(i) = b$ i $d^\kappa(i) = d$ za sve $i \in \kappa$. Definišimo relaciju ρ na grupoidu $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_2}^{\kappa}$ na sledeći način: $x\rho y$ ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova

1. $x = y$,
2. $\{x, y\} = \{b^\kappa, d^\kappa\}$,
3. $\{x, y\} \cap \{b^\kappa, d^\kappa\} = \emptyset$,
   $d \in x(\kappa)$, $d \in y(\kappa)$,
   $x(\kappa) \nsubseteq \{a, d\}$, $y(\kappa) \nsubseteq \{a, d\}$,
   $\{x(i), y(i)\} \in \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, d\}\}$, za sve $i \in \kappa$.

Ovako definisana relacija ρ je relacija ekvivalencije i ima bar 2^κ klasa ekvivalencije. Pokažimo da je ρ kongruencija na grupoidu $\mathbf{G}$. Dovoljno je pokazati za sve $x, y, z \in G$ da važi: ako je $x\rho y$ onda je $xz\rho yz$ i $zx\rho zy$.

Neka je $x\rho y$ tada je zbog definicije relacije ρ i osobine da su u grupoidu $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_2}$ kolone elemenata b i d jednake sledi da je $zx = zy$.

Ako je $x = b^\kappa$ i $y = d^\kappa$, tada je $xz = x$ i $yz = y$ jer su b i d leve nule u grupoidu $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_2}$. Neka su x i y različiti elementi iz G i $\{x, y\} \cap \{b^\kappa, d^\kappa\} = \emptyset$. Tada $d \in x(\kappa) \cap y(\kappa)$ i kako je element d leva nula u grupoidu $\mathbf{G}_{\mathcal{N}_2}$ tada $d \in xz(\kappa) \cap yz(\kappa)$. Kako je $x\rho y$ sledi da je $\{b, c\} \cap x(\kappa) \neq \emptyset$, ali kako je $\{b, c\} \cdot G = \{b, c\}$ sledi da je $\{b, c\} \cap xz(\kappa) \neq \emptyset$, tj. $xz(\kappa) \nsubseteq \{a, d\}$. Analogno se pokazuje da $yz(\kappa) \nsubseteq \{a, d\}$. Ako je $x(i) \neq y(i)$ tada je $\{x(i), y(i)\} = \{b, d\}$ odakle sledi da je $\{xz(i), yz(i)\} = \{b, d\}$. Prema tome, $\{xz(i), yz(i)\} \in \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b, d\}\}$, za sve $i \in \kappa$. Ovim smo pokazali da je ρ kongruencija na $\mathbf{G}$.

Primetimo da za $x, y \in G$ ako je $x(\kappa) = y(\kappa) = \{b, d\}$ onda je $x\rho y$.

Pokažimo sada da je $\mathbf{G}/\rho$ poddirektno nesvodljiv grupoid. Neka je kongruencija $\theta \in Con(\mathbf{G})$ takva da je $\rho \subsetneq \theta$. Pokažimo da je $\langle b^\kappa, p\rangle \in \theta$ gde za $p \in G$ važi da je $p(\kappa) = \{b, d\}$. Neka su $x, y \in G$ takvi da je $\langle x, y\rangle \in \theta \setminus \rho$. Razmotrimo sada sve slučajeve:

Prvi slučaj: Neka postoji $j \in \kappa$ takav da je $\{x(j), y(j)\} \in P_2(\{a,b,c,d\}) \setminus \{b,d\}$ gde $P_2(X)$ predstavlja skup svih dvočlanih podskupova skupa X. Tada je $b^\kappa_{j\mapsto a}x(i) = b^\kappa_{j\mapsto a}y(i) = b$ za sve $i \in \kappa \setminus \{j\}$ i $\{b^\kappa_{j\mapsto a}x(j), b^\kappa_{j\mapsto a}y(j)\} \in P_2(\{a,c,d\})$. Ako $c \in \{b^\kappa_{j\mapsto a}x(j), b^\kappa_{j\mapsto a}y(j)\}$ tada je

$$\{b^\kappa_{j\mapsto a}xd^\kappa, b^\kappa_{j\mapsto a}yd^\kappa\} = \{b^\kappa, b^\kappa_{j\mapsto d}\},$$

prema tome, $\langle b^\kappa, b^\kappa_{j\mapsto d}\rangle \in \theta$. Ako je $\{b^\kappa_{j\mapsto a}x(j), b^\kappa_{j\mapsto a}y(j)\} = \{a,d\}$ tada je

$$\{b^\kappa_{j\mapsto a}xc^\kappa d^\kappa, b^\kappa_{j\mapsto a}yc^\kappa d^\kappa\} = \{b^\kappa, b^\kappa_{j\mapsto d}\},$$

prema tome, $\langle b^\kappa, b^\kappa_{j\mapsto d}\rangle \in \theta$.

Drugi slučaj: Neka za svako $i \in \kappa$ važi

$$\{x(i), y(i)\} \in \{\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{b,d\}\}.$$

Na osnovu pretpostavke za x i y imamo da je $x \neq y$, $\{x,y\} \neq \{b^\kappa, d^\kappa\}$.

Ako je $x = b^\kappa$ sledi da je $y(\kappa) = \{b,d\}$, pa je $b^\kappa = x\ \theta\ y\ \rho\ b^\kappa_{j\mapsto d}$ za proizvoljno $j \in \kappa$, prema tome, $\langle b^\kappa, b^\kappa_{j\mapsto d}\rangle \in \theta$. Analogno se dokazuje za $x = d^\kappa$.

Neka je $\{x,y\} \cap \{b^\kappa, d^\kappa\} = \emptyset$. Pretpostavimo da $d \notin x(\kappa)$ i $d \notin y(\kappa)$, ali to znači na osnovu pretpostavke drugog slučaja da je $x = y$, kontradikcija. Neka je $d \in x(\kappa)$ i $d \notin y(\kappa)$, tada postoji $j \in \kappa$ tako da je $x(j) = d$ i $y(j) = b$. Tada važi da je $b^\kappa = yy_{a\mapsto c}b^\kappa\ \theta\ xy_{a\mapsto c}b^\kappa$ i kako je $xy_{a\mapsto c}b^\kappa(\kappa) = \{b,d\}$ sledi da je $\langle b^\kappa, b^\kappa_{j\mapsto d}\rangle \in \theta$. Analogno se pokazuje slučaj kada je $d \notin x(\kappa)$ i $d \in y(\kappa)$.

Neka je sada $\{x,y\} \cap \{b^\kappa, d^\kappa\} = \emptyset$ i $d \in x(\kappa)$, $d \in y(\kappa)$. Pretpostavimo da je $x(\kappa) \subseteq \{a,d\}$. Tada je $b^\kappa\ \rho\ d^\kappa = xb^\kappa\ \theta\ yb^\kappa$, a kako je $yb^\kappa(\kappa) = \{b,d\}$ sledi da je $\langle b^\kappa, b^\kappa_{j\mapsto d}\rangle \in \theta$. Analogno se pokazuje slučaj kada je $y(\kappa) \subseteq \{a,d\}$.

Grupoid $\mathbf{G}/\rho$ je poddirektno nesvodljiv, a uređen par $\langle b^\kappa/\rho, b^\kappa_{j\mapsto d}/\rho\rangle$ je njegov monolit. $\square$

Teorema 3.11.3. *Varijetet $\mathcal{V}_A = HSP(\mathbf{A})$ sadrži beskonačne poddirektno nesvodljive algebre čije kardinalnosti nisu ograničene. Drugim rečima, varijetet $\mathcal{V}_A$ je rezidualno velik.*

$\mathbf{A}$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	b	b	b	b	b
c	d	e	c	c	c
d	d	d	d	d	d
e	e	e	e	e	e

Dokaz. Grupoid $\mathbf{A}$ je generatorni grupoid za varijetet $\mathcal{V}_A$ na osnovu Teoreme 3.7.23. Neka je κ proizvoljan kardinal. Posmatrajmo grupoid $\mathbf{A}^\kappa$ i skup $G = \{d^\kappa_{i\mapsto j} \mid j \in \{a,b,c\},\ i \in \kappa\} \cup \{d,e\}^\kappa$. Tada je $\mathbf{G}$ podgrupoid grupoida $\mathbf{A}^\kappa$. Definišimo relaciju ρ na grupoidu $\mathbf{G}$ na sledeći način:$x\rho y$ ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova

1. $x = y$,

2. $\{x,y\} \in \{d,e\}^\kappa \setminus \{d^\kappa\}$.

Ovako definisana relacija ima κ mnogo klasa ekvivalencije. Pokažimo da je ρ kongruencija na grupoidu $\mathbf{G}$. Dovoljno je pokazati da za sve $x,y,z \in G$ ako je $x\rho y$ onda je $xz\rho yz$ i $zx\rho zy$, a kako su d i e leve nule i desni neutralni elementi u grupoidu $\mathbf{A}$ sledi da je ρ kongruencija na $\mathbf{G}$.

Pokažimo sada da je $\mathbf{G}/\rho$ poddirektno nesvodljiv grupoid. Neka je kongruencija $\theta \in Con(\mathbf{G})$ takva da je $\rho \subsetneq \theta$. Pokažimo da za $\langle x,y\rangle \in \theta \setminus \rho$ postoji $i \in \kappa$ takvo da važi $\langle d^\kappa, d^\kappa_{i\mapsto e}\rangle \in \theta$.

Razmotrimo sada sve slučajeve:

Prvi slučaj: Neka postoji $j \in \kappa$ takav da je $\langle x(j), y(j)\rangle \in \{a\}\times\{b,c,d,e\}$ $\cup\{b,c,d,e\}\times\{a\}$. Tada je

$$\langle (d^\kappa_{j\mapsto c}x)d^\kappa_{j\mapsto b}, (d^\kappa_{j\mapsto c}y)d^\kappa_{j\mapsto b}\rangle \in \{\langle d^\kappa, d^\kappa_{j\mapsto e}\rangle, \langle d^\kappa_{j\mapsto e}, d^\kappa\rangle\},$$

prema tome, $\langle d^\kappa, d^\kappa_{j\mapsto e}\rangle \in \Theta(x,y) \subseteq \theta$.

Drugi slučaj: Neka postoji $j \in \kappa$ takav da je $\langle x(j), y(j)\rangle \in \{b\}\times\{c,d,e\}$ $\cup\{c,d,e\}\times\{b\}$. Tada je

$$\langle (d^\kappa_{j\mapsto c}x)d^\kappa_{j\mapsto a}, (d^\kappa_{j\mapsto c}y)d^\kappa_{j\mapsto a}\rangle \in \{\langle d^\kappa, d^\kappa_{j\mapsto e}\rangle, \langle d^\kappa_{j\mapsto e}, d^\kappa\rangle\},$$

prema tome, $\langle d^\kappa, d^\kappa_{j\mapsto e}\rangle \in \Theta(x,y) \subseteq \theta$.

Treći slučaj: Neka postoji $j \in \kappa$ takav da je $x = d^\kappa_{j\mapsto c}$ i $y \in \{d,e\}^\kappa \setminus \{d^\kappa\}$. Tada je $\langle d^\kappa, y\rangle = \langle xd^\kappa_{j\mapsto a}, yd^\kappa_{j\mapsto a}\rangle \in \Theta(x,y)$ i $\langle y, d^\kappa_{j\mapsto e}\rangle \in \rho$, prema tome $\langle d^\kappa, d^\kappa_{i\mapsto e}\rangle \in \theta$. Analogno se pokazuje simetričan slučaj trećem slučaju.

Četvrti slučaj: Neka postoji $j \in \kappa$ takav da je $x = d^\kappa_{j\mapsto c}$ i $y = d^\kappa$. Tada je $\langle d^\kappa_{j\mapsto e}, d^\kappa\rangle = \langle xd^\kappa_{j\mapsto b}, yd^\kappa_{j\mapsto b}\rangle \in \Theta(x,y) \subseteq \theta$. Analogno se pokazuje simetričan slučaj četvrtom slučaju. □

Na osnovu Leme 3.7.15 imamo da je baza varijeteta $\mathcal{V}_B$:

(B1) $xx \approx x$,

(B2) $xyy \approx xy$,

	0	1	2	3	4	...	4′	3′	2′	1′	0′
0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	...	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	...	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	...	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	...	4	4	4	4	4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
4′	4′	4′	4′	4′	0′	...	4′	4′	4′	4′	4′
3′	3′	3′	3′	0′	0′	...	3′	3′	3′	3′	3′
2′	2′	2′	0′	0′	0′	...	2′	2′	2′	2′	2′
1′	1′	0′	0′	0′	0′	...	1′	1′	1′	1′	1′
0′	1′	0′	0′	0′	0′	...	0′	0′	0′	0′	0′

Tabela 3.9: *Kejlijeva tablica poddirektno nesvodljivog grupoida reda 2κ iz varijeteta $\mathcal{V}_B$.*

(B3) $x \cdot yz \approx xy$,

(B4) $xyzy \approx xzy$,

Teorema 3.11.4. *Varijetet $\mathcal{V}_B = HSP(\mathbf{B})$ sadrži beskonačne poddirektno nesvodljive algebre čije kardinalnosti nisu ograničene. Drugim rečima, varijetet $\mathcal{V}_B$ je rezidualno velik.*

Dokaz. Neka je κ proizvoljan kardinal. Posmatrajmo grupoid $\mathbf{G} = (\{0,1\} \times \kappa, \cdot)$ (Tabela 3.9, $\alpha \mapsto \langle 0, \alpha\rangle$, $\alpha' \mapsto \langle 1, \alpha\rangle$) kod koga je operacija $\cdot$ definisana na sledeći način, pri čemu ćemo za $x \in G$ sa x_0 i x_1 obeležiti prvu i drugu koordinatu elementa x:

$$x \cdot y = \begin{cases} \langle 1,1\rangle, & \text{ako je } x = \langle 1,0\rangle,\ y = \langle 0,0\rangle; \\ \langle 1,0\rangle, & \text{ako je } x_0 = 1,\ y_0 = 0,\ y_1 \neq 0 \text{ i } x_1 \leq y_1; \\ x, & \text{inače.} \end{cases}$$

Primetimo da su elementi iz skupa $\{0\} \times \kappa$ leve nule dok su elementi iz skupa $\{1\} \times \kappa$ desni neutralni. Pored toga, možemo primetitit da je $\langle 1,1\rangle y = \langle 1,0\rangle y$ za sve $y \in \{0\} \times \kappa$.

Pokažimo da grupoid $\mathbf{G}$ pripada varijetetu $\mathcal{V}_B$, odnosno, pokazaćemo da na grupoidu $\mathbf{G}$ važe identiteti $(B1)$–$(B4)$.

Identitet $(B1)$: Kako je svaki element iz grupoida $\mathbf{G}$ leva nula ili desni neutralni element dobijamo da na tom grupoidu važi zakon idempotentnosti.

Identitet $(B2)$: Ako je x leva nula ili y desni neutralni element jednakost važi trivijalno. Pretpostavimo da je $x_0 = 1$ i $y_0 = 0$. U slučaju $x = \langle 1,0\rangle$,

$y = \langle 0,0\rangle$ direktnom proverom utvrđujemo da $(B2)$ važi. Ako je $y_1 \neq 0$ i $x_1 \leq y_1$ tada je $xyy = \langle 1,0\rangle \cdot y = \langle 1,0\rangle = xy$. Ako je $xy = x$ tada je $xyy = xy$.

Identitet $(B3)$: Ako je x leva nula, y leva nula ili z desni neutralni element jednakost važi trivijalno. Pretpostavimo da je $x_0 = 1$, $y_0 = 1$ i $z_0 = 0$. Tada je $yz \in \{1\} \times \kappa$ odakle sledi da je $x \cdot yz = x = xy$.

Identitet $(B4)$: Ako je x leva nula, y desni neutralni ili z desni neutralni element jednakost važi trivijalno. Pretpostavimo da je $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ i $z_0 = 0$.

Slučaj $x = \langle 1,0\rangle$: Ako je $y = \langle 0,0\rangle$ tada je $xyzy = \langle 1,1\rangle zy = \langle 1,0\rangle zy = xzy$, a ako je $y \neq \langle 0,0\rangle$ tada je $xy = x$ pa je $xyzy = xzy$.

Slučaj $x_1 > 0$: Tada je $xy, xz \in \{x, \langle 1,0\rangle\}$. Ako je $xy = x$ sledi $xyzy = xzy$. Ako je $xy = \langle 1,0\rangle$ i $xz = x$ tada je $xyzy = \langle 1,0\rangle zy = (\langle 1,1\rangle y =)\ \langle 1,0\rangle y = xyy = xzyy =_{(B2)} xzy$. Ako je $xy = \langle 1,0\rangle$ i $xz = \langle 1,0\rangle$ tada je $xyzy = \langle 1,0\rangle zy = xzzy =_{(B2)} xzy$.

Pokažimo da je grupoid $\mathbf{G}$ poddirektno nesvodljiv i da je njegov monolit generisan uređenim parom $\langle\langle 1,1\rangle, \langle 1,0\rangle\rangle$. Neka su x, y različiti elementi iz G.

Slučaj $x_0 = y_0 = 1$: Neka je $x_1 < y_1$. Tada je

$$\langle\langle 1,0\rangle, y\rangle = \langle x\langle 0,x_1\rangle, y\langle 0,x_1\rangle\rangle \in \Theta(x,y),$$

zatim

$$\langle\langle 1,1\rangle, y\rangle = \langle\langle 1,0\rangle\langle 0,0\rangle, y\langle 0,0\rangle\rangle \in \Theta(x,y),$$

prema tome, iz tranzitivnosti sledi $\langle\langle 1,1\rangle, \langle 1,0\rangle\rangle \in \Theta(x,y)$.

Slučaj $x_0 = y_0 = 0$: Neka je $x_1 < y_1$. Tada je

$$\langle\langle 1,y_1\rangle, \langle 1,0\rangle\rangle = \langle\langle 1,y_1\rangle x, \langle 1,y_1\rangle y\rangle \in \Theta(x,y).$$

Prema tome, na osnovu slučaja $x_0 = y_0 = 1$ sledi da je $\langle\langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\rangle \in \Theta(x,y)$.

Slučaj $x_0 = 0$, $y_0 = 1$: Ako je $x_1 = 0$ tada je

$$\langle\langle 1,1\rangle, \langle 1,0\rangle\rangle = \langle\langle 1,0\rangle x, \langle 1,0\rangle y\rangle \in \Theta(x,y).$$

Ako je $x_1 \neq 0$ tada je

$$\langle\langle 1,0\rangle, \langle 1,1\rangle\rangle = \langle\langle 1,1\rangle x, \langle 1,1\rangle y\rangle \in \Theta(x,y).$$

$\square$

3.11.2 Rezidualna granica varijeteta $\mathcal{V}_C$

Na osnovu Leme 3.7.16 imamo da je baza varijeteta $\mathcal{V}_C$:

(C1) $xx \approx x$,

(C2) $xyy \approx xy$,

(C3) $x \cdot yz \approx xy$,

(C4) $xyz \approx xzy$,

Lema 3.11.5. *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupoid iz varijeteta* $\mathcal{V}_C$*, i neka je* $ab = b$ *za neke* $a, b \in G$*. Tada je* $a = b$.

Dokaz. $a = aa =_{(C3)} a \cdot ab = ab = b$. □

Lema 3.11.6. *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupoid iz varijeteta* $\mathcal{V}_C$*, i neka je* $ab = c$ *za neke* $a, b, c \in G$*. Tada je* $cb = c$ *i za sve* $x \in G$ *važi* $xa = xc$.

Dokaz. $cb = ab \cdot b = ab = c$, $xa =_{(C3)} x \cdot ab = xc$. □

Lema 3.11.7. *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačan grupoid reda* n *iz varijeteta* $\mathcal{V}_C$*, i neka je za* $a \in G$ *skup* C_a *definisan kao*

$$C_a = a \cdot G \cup a \cdot G \cdot G \cup \cdots \cup a \cdot \underbrace{G \cdot \ldots \cdot G}_{n}.$$

Neka je relacija ρ_a *grupoida* $\mathbf{G}$ *definisana na sledeći način:*

$$b \ \rho_a \ c \ \text{akko} \ b = c \ \text{ili} \ b, c \in C_a.$$

Relacija ρ_a *je kongruencija grupoida* $\mathbf{G}$.

Dokaz. Neka je $b \ \rho_a \ c$ za različite elemente b, c i neka je $d \in G$. Tada postoje $i, j \leq n$ takvi da je $b \in a \cdot \underbrace{G \cdot \ldots \cdot G}_{i}$ i $c \in a \cdot \underbrace{G \cdot \ldots \cdot G}_{j}$. Na osnovu identiteta $(C3)$ i tranzitivnosti jednakosti sledi da je $da = db$ i $da = dc$, prema tome, $\langle db, dc \rangle \in \rho_a$. Sa druge strane, elementi bd, cd pripadaju skupu C_a, pa je $\langle bd, cd \rangle \in \rho_a$. □

Posledica 3.11.8. *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačan grupoid reda* n *iz varijeteta* $\mathcal{V}_C$*, i neka je za* $a \in G$*. Tada za sve* $b, c \in C_a$ *i sve* $x \in G$ *važi da je* $xb = xc$.

Dokaz. Na osnovu Leme 3.11.6 imamo da je $xa = xd$ za sve $d \in C_a$ i sve $x \in G$. □

Lema 3.11.9. *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačan grupoid reda* n *iz varijeteta* $\mathcal{V}_C$*,* $a \in G$*,* $b \in a \cdot G$*,* $b \neq a$*, tada za svako* $c \in G$ *važi*

$$(ac = a) \vee (ac = b) \Rightarrow bc = b.$$

Broj pojavljivanja b*-ova u* b*-toj vrsti Kejlijeve tablice grupoida* $\mathbf{G}$ *je veći od broja pojavljivanja* a*-ova u* a*-toj vrsti Kejlijeve tablice grupoida* $\mathbf{G}$*.*

Dokaz. Kako je $b \in a \cdot G$ sledi da postoji $d \in G$ takav da je $ad = b$. Dalje imamo da je $bc = adc =_{(C4)} acd = ad = b$ ili $bc = acc =_{(C2)} ac = b$. □

Lema 3.11.10. *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačan grupoid reda* n *iz varijeteta* $\mathcal{V}_C$*,* $ab = c$ *i* $c \cdot G = c$*. Tada za svako* $d \in C_a$ *važi* $d \cdot b = c$*.*

Dokaz. Kako $d \in C_a$ sledi da postoje $d_1, \ldots, d_i \in G$, $i \leq n$, takvi da je $ad_1 \ldots d_i = d$. Tada je $db = ad_1 \ldots d_i b =_{(C4)} abd_1 \ldots d_i = cd_1 \ldots d_i = c$. □

Lema 3.11.11. *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačan grupoid reda* n *iz varijeteta* $\mathcal{V}_C$*,* $a \in G$*, tada postoji tačno jedan* $c \in C_a$ *takav da je* $c \cdot G = c$*.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je $b \in C_a$ takav da je broj pojavljivanja b-ova u b-toj vrsti Kejlijeve tablice grupoida $\mathbf{G}$ nije manji od broj pojavljivanja x-eva u x-toj vrsti Kejlijeve tablice grupoida $\mathbf{G}$ za svako $x \in G \setminus \{b\}$. Pošto je $\{b\} \neq b \cdot G$ tada postoji $c \in b \cdot G$, $c \neq b$, pa na osnovu Leme 3.11.9 dobijamo kontradikciju sa izborom elementa b. Na osnovu Leme 3.11.10 element c sa osobinom $c \cdot G = c$ je jedinstven. □

Lema 3.11.12. *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačan grupoid reda* n *iz varijeteta* $\mathcal{V}_C$*,* $a \in G$*, i neka je* $|C_a| = 3$*. Tada grupoid* $\mathbf{G}$ *nije poddirektno nesvodljiv.*

Dokaz. Neka je $C_a = \{a, b, c\}$ i neka je na osnovu Leme 3.11.11 recimo $c \cdot G = c$. Pored toga, na osnovu Leme 3.11.10 imamo da je $c \in a \cdot G$. Prema tome, $a \cdot G = \{a, b, c\}$ jer bi iz pretpostavke $a \cdot G = \{a, c\}$ sledilo da je $C_a = \{a, c\}$, kontradikcija. Na osnovu Leme 3.11.10 imamo da je $\{a, b, c\} \cdot d = c$ gde je $d \in G$ takav da je $ad = c$. Na osnovu Leme 3.11.9 imamo da je $b \cdot G \subseteq \{b, c\}$, a na osnovu Leme 3.11.10 je $c \in b \cdot G$ pa je $b \cdot G = \{b, c\}$. Prema tome, na osnovu Posledice 3.11.8 imamo da je $\rho_b = \triangle_G \cup \{\langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$ atom u mreži kongruencija grupoida $\mathbf{G}$. Pokažimo da je $\Theta(a, b)$ atom u mreži kongruencija grupoida $\mathbf{G}$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $h \in G$ takav da je $\langle ah, bh\rangle \in \{\langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle\}$. U prva dva slučaja dolazimo u kontradikciju na osnovu Leme 3.11.9 jer iz $ah \in \{a, b\}$ sledi da je $bh = b$. Neka je $e \in G$ takav da je $ae = b$, tada dolazimo u kontradikciju i sa trećim slučajem jer za $ah = c$ imamo da je $bh = aeh = ahe = ce = c \neq b$. □

Lema 3.11.13. *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačan grupoid reda* n *iz varijeteta* $\mathcal{V}_C$*,* $a, b \in G$*, i neka je* $|C_a| = |C_b| = 2$*. Tada grupoid* $\mathbf{G}$ *nije poddirektno nesvodljiv.*

Dokaz. Na osnovu Leme 3.11.7 imamo da su ρ_a, ρ_b različiti atomi u mreži kongruencija grupoida $\mathbf{G}$. □

Teorema 3.11.14. *Ne postoji konačan poddirektno nesvodljiv grupoid iz varijeteta* $\mathcal{V}_C$ *koji ima više od tri elementa.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji $a \in G$ takav da je $|C_a| = 3$, tada tvrđenje sledi na osnovu Leme 3.11.12.

Pretpostavimo da postoji $a \in G$ takav da je $|C_a| > 3$. Tada na osnovu Leme 3.11.11 imamo da postoji $c \in C_a$ takav da je $c \cdot G = c$. Na osnovu Leme 3.11.10 imamo da za svako $d \in C_a$ važi da je $c \in d \cdot C_a$. Primenom Leme 3.11.9 konačan broj puta dobijamo da postoji $b \in C_a$, $b \neq a$, takav da je $b \cdot G = \{c, b\}$. Ponovo primenom Leme 3.11.9 konačan broj puta dobijamo da postoji $d \in C_a$, $b \neq d \neq a$, takav da je $d \cdot G = \{c, d\}$ ili $d \cdot G = \{c, b, d\}$. U prvom slučaju tvđenje sledi na osnovu Leme 3.11.13, dok iz drugog slučaja sledi da je $C_d = \{c, b, d\}$ pa tvrđenje sledi na osnovu Leme 3.11.12.

Pretpostavimo sada da za sve $a \in G$ važi da je $|C_a| \leq 2$. Ako postoje $a, b \in G$ takvi da je $|C_a| = |C_b| = 2$ tada tvrđenje sledi na osnovu Leme 3.11.13. Neka je sada $a \in G$ jedini element sa osobinom da je $|C_a| = 2$. Tada je recimo $C_a = \{a, b\}$ i svi elementi sem a su leve nule. Kako grupoid $\mathbf{G}$ ima bar četiri elementa tada postoji $\langle u, v\rangle \in G^2 \setminus \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$ takav da je $au = av$. Ali tada su $\Theta(a, b)$ i $\Theta(u, v)$ atomi u mreži kongruencija grupoida $\mathbf{G}$, kontradikcija. □

Teorema 3.11.15. *Varijetet* $\mathcal{V}_C$ *sadrži do na izomorfizam tri poddirektno nesvodljiva grupoida predstavljeni u Tabeli 3.10. Varijetet* $\mathcal{V}_C$ *ima rezidualnu granicu 4.*

	a	b	c
a	a	c	a
b	b	b	b
c	c	c	c

	a	b
a	a	a
b	b	b

	a
a	a

Tabela 3.10: *Kejlijeve tablice poddirektno nesvodljivih grupoida varijeteta* $\mathcal{V}_C$*.*

Dokaz. Neka je grupoid $\mathbf{G}$ poddirektno nesvodljiv grupoid iz varijeteta $\mathcal{V}_C$. Na osnovu Teoreme 1.5.2 i Teoreme 3.11.14 imamo da je $|G| < 4$.

Slučaj $|G| = 3$: Neka je $G = \{a, b, c\}$ i neka je $ab = c$ jer levo nulti grupoid sa tri elementa nije poddirektno nesvodljiv. Ranije smo pokazali da je tada $ac = a$ i $ab = ca = cb = c$. Pošto je $aa \neq ab \neq ac$ sledi na osnovu Leme 3.11.6 da $ba, bc \notin \{a, c\}$. Prema tome dobijamo prvi grupoid iz Tabele 3.10 koji je poddirektno nesvodljiv i kod koga je monolit generisan uređenim parom $\langle a, c\rangle$.

Slučaj $|G| = 2$: Neka je $G = \{a, b\}$. Na osnovu Leme 3.11.5 dobijamo treći grupoid od navedenih.

Slučaj $|G| = 1$: $\mathbf{G}$ je trivijalan grupoid. $\square$

3.11.3 Rezidualna granica varijeteta $\mathcal{W}$

Na osnovu Leme 3.6.4 imamo da je baza varijeteta $\mathcal{W}$:

(W1) $xx \approx x$,

(W2) $xyy \approx x$,

(W3) $x \cdot yz \approx xy$,

(W4) $xyz \approx xzy$,

Lema 3.11.16. *Neka je $\mathbf{G}$ grupoid iz varijeteta $\mathcal{W}$. U grupoidu $\mathbf{G}$ važi desni zakon kancelacije, tj. za sve $a, b, c \in G$ važi $ba = ca \Rightarrow b = c$. Ako su $a, b \in G$ različiti elementi onda je $ab \neq b$.*

Dokaz. Dokaz sledi na osnovu identiteta $(W2)$. $\square$

Lema 3.11.17. *Neka je $\mathbf{G}$ grupoid iz varijeteta $\mathcal{W}$ i neka za različite elemente $a, b, c \in G$ važi $ab = c$. Za svaki uređeni par $\langle d, e\rangle \in \Theta(a, c)$ (kongruencija generisana uređenim parom $\langle a, c\rangle$) važi da je $zd = ze$ za sve $z \in G$. Kongruencija $\Theta(a, c)$ je atom u mreži kongruencija grupoida $\mathbf{G}$ čije klase ekvivalencije sadrže najviše dva elementa.*

Dokaz. Na osnovu $(W1)$–$(W4)$ imamo da je $ac = a \cdot ab = aa = a$, $ca = aba = aab = ab = c$, $cb = abb = a$, tj. važe sledeći proizvodi

$\mathbf{G}$	a	b	c	$\dots$
a	a	c	a	$\dots$
b	.	b	.	$\dots$
c	c	a	c	$\dots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Kako je $a = cb$ sledi da za svako $z \in G$ važi $za = zc$ ($za = z(cb) =_{(W3)} zc$).

Neka su $d_1, \ldots, d_n \in G$. Tada za sve $z \in G$ važi

$$\begin{aligned} z \cdot ad_1 \ldots d_n &=_{(W3)} z \cdot ad_1 \ldots d_{n-1} \\ &\vdots \\ &=_{(W3)} za \\ &= \quad zc \\ &=_{(W3)} z \cdot cd_1 \\ &\vdots \\ &=_{(W3)} z \cdot cd_1 \ldots d_n, \end{aligned}$$

i važi da je

$$\begin{aligned} ad_1 \ldots d_n b &=_{(W4)} ad_1 \ldots bd_n \\ &\vdots \\ &=_{(W4)} abd_1 \ldots bd_n \\ &= \quad cd_1 \ldots d_n, \\ cd_1 \ldots d_n b &=_{(W4)} cd_1 \ldots bd_n \\ &\vdots \\ &=_{(W4)} cbd_1 \ldots bd_n \\ &= \quad ad_1 \ldots d_n. \end{aligned}$$

Neka su $d_1, \ldots, d_n, e_1, \ldots, e_m \in G$. Pokažimo da je

$$|\{ad_1 \ldots d_n, cd_1 \ldots d_n\} \cap \{ae_1 \ldots e_m, ce_1 \ldots e_m\}| \neq 1.$$

Pretpostavimo suprotno. Ako je $ad_1 \ldots d_n = ae_1 \ldots e_m$, $cd_1 \ldots d_n \neq ce_1 \ldots e_m$, tada je

$$\begin{aligned} cd_1 \ldots d_n &= ad_1 \ldots d_n b \\ &= ae_1 \ldots e_m b \\ &=_{(W4)} ae_1 \ldots be_m \\ &\vdots \\ &=_{(W4)} abe_1 \ldots e_m \\ &= ce_1 \ldots e_m \\ &\neq cd_1 \ldots d_n, \end{aligned}$$

kontradikcija. Ako je $ad_1 \ldots d_n \neq ae_1 \ldots e_m$, $cd_1 \ldots d_n = ce_1 \ldots e_m$, u kontradikciju dolazimo na sličan način kao u prethodnom slučaju. Ako je $ad_1 \ldots d_n = ce_1 \ldots e_m$, $cd_1 \ldots d_n \neq ae_1 \ldots e_m$, tada je

$$\begin{aligned} cd_1 \ldots d_n &= ad_1 \ldots d_n b \\ &= ce_1 \ldots e_m b \\ &=_{(W4)} ce_1 \ldots be_m \\ &\vdots \\ &=_{(W4)} cbe_1 \ldots e_m \\ &= ae_1 \ldots e_m \\ &\neq cd_1 \ldots d_n, \end{aligned}$$

kontradikcija. Ako je $ad_1 \ldots d_n \neq ce_1 \ldots e_m$, $cd_1 \ldots d_n = ae_1 \ldots e_m$, u kontradikciju dolazimo na sličan način kao u prethodnom slučaju.

Odavde zaključujemo da klase kongruencije $\Theta(a, c)$ sadrže najviše dva elementa. Kako na osnovu identiteta $(W2)$ važi da je

$$\Theta(a, c) = \Theta(ad_1 \ldots d_n, cd_1 \ldots d_n),$$

sledi da je $\Theta(a, c)$ atom u mreži kongruencija grupoida $\mathbf{G}$. □

Lema 3.11.18. *Neka je* $\mathbf{G}$ *poddirektno nesvodljiv grupoid iz varijeteta* $\mathcal{W}$ *i neka za različite elemente* $a, b, c \in G$ *važi* $ab = c$. *Tada je* $\{a, c\} \cdot G = \{a, c\}$ *i svi elementi iz* $G \setminus \{a, c\}$ *su leve nule.*

Dokaz. Na osnovu tabele iz dokaza Leme 3.11.17 imamo da je $\{a, c\} \cdot \{a, b, c\} = \{a, c\}$.

Ako postoji element $d \in G \setminus \{a, b, c\}$ takav da $ad \notin \{a, c\}$ tada je na osnovu Leme 3.11.17 kongruencija $\Theta(a, ad)$ atom u mreži kongruencija grupoida $\mathbf{G}$ i neuporediva sa kongruencijom $\Theta(a, c)$, kontradikcija.

Ako postoji element $d \in G \setminus \{a, b, c\}$ takav da $cd \notin \{a, c\}$ tada je na osnovu Leme 3.11.17 kongruencija $\Theta(c, cd)$ atom u mreži kongruencija grupoida $\mathbf{G}$ i neuporediva sa kongruencijom $\Theta(a, c)$, kontradikcija.

Prema tome, važi da je $\{a, c\} \cdot G = \{a, c\}$. Tada je $\Theta(a, c) = \triangle_G \cup \{\langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$.

Pretpostavimo da postoji $d \in G \setminus \{a, c\}$ i $e \in G \setminus \{d\}$ takvi da je $d \neq de$. Tada na osnovu Leme 3.11.17 imamo da je kongruencija $\Theta(d, de)$ atom u mreži kongruencija grupoida $\mathbf{G}$, kontradikcija. Prema tome, svi elementi iz $G \setminus \{a, c\}$ su leve nule. □

Teorema 3.11.19. *Ne postoji poddirektno nesvodljiv grupoid iz varijeteta $\mathcal{W}$ koji ima više od četiri elementa.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $\mathbf{G}$ poddirektno nesvodljiv grupoid varijeteta $\mathcal{W}$ koji ima bar pet elemenata. Grupoid $\mathbf{G}$ nije levo nulti jer poddirektno nesvodljiv levo nulti grupoid ima najviše dva elementa. Tada na osnovu Leme 3.11.16 i idempotentnosti sledi da postoje različiti elementi $a, b, c \in G$ takvi da je $ab = c$. Na osnovu Leme 3.11.17 imamo da je kongruencija $\Theta(a, c)$ atom u mreži kongruencija grupoida $\mathbf{G}$ i $\Theta(a, c) \neq \nabla_G$ jer grupoid sadrži bar pet elemenata a klase ekvivalencije najviše dva.

Na osnovu Leme 3.11.3 imamo da je $\{a, c\} \cdot G = \{a, c\}$ i da su svi elementi iz skupa $G \setminus \{a, c\}$ leve nule. Kako grupoid ima bar pet elemenata znači da postoje elementi $d, e \in G \setminus \{a, c\}$ takvi da je $ad = ae$. Tada za svako $z \in G$ važi da je $zd = ze$ jer je $z \in G \setminus \{a, c\}$ leva nula, a za $z = c$ imamo da je $cd = abd =_{(W4)} adb = aeb =_{(W4)} abe = ce$. Prema tome $\Theta(d, e) = \triangle_G \cup \{\langle d, e\rangle, \langle e, d\rangle\}$ je atom u mreži kongruencija grupoida $\mathbf{G}$ i važi da je $\Theta(a, c) \cap \Theta(d, e) = \triangle_G$, kontradikcija. $\square$

Teorema 3.11.20. *Varijetet $\mathcal{W}$ sadrži do na izomorfizam četiri poddirektno nesvodljiva grupoida predstavljeni u Tabeli 3.11. Varijetet $\mathcal{W}$ ima rezidualnu granicu 5.*

	a	b	c	d
a	a	c	a	a
b	b	b	b	b
c	c	a	c	c
d	d	d	d	d

	a	b	c
a	a	c	a
b	b	b	b
c	c	a	c

	a	b
a	a	a
b	b	b

	a
a	a

Tabela 3.11: *Kejlijeve tablice poddirektno nesvodljivih grupoida varijeteta $\mathcal{W}$.*

Dokaz. Neka je grupoid $\mathbf{G}$ poddirektno nesvodljiv grupoid iz varijeteta $\mathcal{W}$. Na osnovu Teoreme 3.11.19 imamo da je $|G| < 5$.

Slučaj $|G| = 4$: Neka je $G = \{a, b, c, d\}$ i neka je na primer $ab = c$ jer levo nulti grupoid sa četiri elementa nije poddirektno nesvodljiv. Ranije smo pokazali da je tada $ac = cb = a$ i $ab = ca = c$. Na osnovu Leme 3.11.3 imamo da su elementi b, d leve nule. U slučaju da je $ab = ad$ sledilo bi da je $cd = ab \cdot d = ad \cdot b = ab \cdot b = cb$, pa bi $\triangle_G \cup \{\langle b, d\rangle, \langle d, b\rangle\}$ bila kongruencija, kontradikcija. Na sličan način zaključujemo da je $cb \neq cd$ pa dobijamo prvi grupoid od navedenih u tvrđenju teoreme kao jedini poddirektno nesvodljiv grupoid sa četiri elementa kod koga je monolit generisan uređenim parom $\langle a, c \rangle$.

Slučaj $|G| = 3$: Neka je $G = \{a, b, c\}$ i neka je $ab = c$ jer levo nulti grupoid sa tri elementa nije poddirektno nesvodljiv. Tada je kao i u prethodnom slučaju $ac = cb = a$ i $ab = ca = c$, pa na osnovu Leme 3.11.16 dobijamo drugi grupoid od navedenih kod koga je monolit generisan uređenim parom $\langle a, c \rangle$.

Slučaj $|G| = 2$: Neka je $G = \{a, b\}$. Na osnovu Leme 3.11.16 dobijamo treći grupoid od navedenih.

Slučaj $|G| = 1$: **G** je trivijalan grupoid. □

3.12 Neidempotentne $*$-kvazilinearne jednakosne teorije

Kao što smo videli u predhodnim odeljcima postoji konačno mnogo idempotentnih $*$-kvazilinearnih varijeteta grupoida i svi ti varijeteti su konačno generisani pa samim tim i lokalno konačni. Proizvoljan $*$-kvazilinearan varijetet ne mora biti lokalno konačan, što ćemo videti na osnovu sledećeg primera.

Primer 3.12.1. Neka je **G** grupoid sa nosačem ω (skup nenegativnih celih brojeva) i multiplikativnom operacijom $\circ$ definisanom na sledeći način: $a \circ b = a + 1$. U jednakosnoj teoriji $E_{\mathbf{G}}$ generisanoj grupoidom **G** svaki term predstavljen u oliku $xt_1 \dots t_n$ (primetimo da se svaki term na jeziku grupoida moze na jedinstven nacin predstaviti sa $xt_1...t_n$, gde je x promenljiva, a t_i podtermi) je ekvivalentan linearnom termu $xy_1 \dots y_n$. Prema tome, posmatrana jednakosna teorija $E_{\mathbf{G}}$ je neidempotentna i $*$-kvazilinearna.

Odgovarajući varijetet $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}$ jednakosnoj teoriji $E_{\mathbf{G}}$ nije lokalno konačan jer termima $x, xx, xxx, \dots, x^i, \dots$ odgovaraju različite term funkcije na grupoidu **G** pa slobodni grupoidi nad konačnim skupom generatora imaju prebrojivo mnogo elemenata. Jasno je takođe da je svaki term $t = xt_1...t_n$ ekvivalentan u E_G sa x^{n+1}, pa zato se svaki element slobodne algebre nad prebrojivo mnogo generatora u $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}$ moze predstaviti na jedinstven način levo asociranim termom sa jednom promenljivom, tj. takvi termi čine normalnu formu elemenata te slobodne algebre.

Slično kao u slučaju monounarne algebre (ω, f) kod koje je f unarna operacija definisana sa: $f(a) = a + 1$, pokazaćemo da postoji prebrojivo mnogo podvarijeteta varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}$. Obeležimo sa $I_{i,j}$ za sve prirodne brojeve i, j, $i \le j$, skup identiteta nad skupom promenljivih X definisan na sledeći način:

$$I_{i,j} = \begin{cases} Id_{\mathbf{G}}(X) \cup \{x^i \approx y^i\}, & \text{ako je } i = j; \\ Id_{\mathbf{G}}(X) \cup \{x^i \approx x^j\}, & \text{ako je } i < j. \end{cases}$$

Pokazaćemo da identiteti $I_{i,j}$ generišu različite podvarijetete varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}$, a pred toga, sledećom Lemom ¸emo pokazati da su to i svi podvarijeteti varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}$.

Lema 3.12.1. *Proizvoljan pravi podvarijetet $\mathcal{V}$ varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}$ ima osobinu da je generisan skupom identiteta $I_{i,j}$ pri čemu je uredjen par (i,j) izabran kao najmanji (u leksikografskom poretku) prirodni brojevi takvi da važi $x^i \approx y^j \in Id_{\mathcal{V}}(x,y)$ (lako se pokazuje da je $i = j$), a ako takvi ne postoje onda kao najmanji različiti prirodni brojevi ($i < j$) takvi da važi $x^i \approx x^j \in Id_{\mathcal{V}}(x)$.*

Dokaz. Neka su prvo i, j takvi da je $x^i \approx y^i \in Id_{\mathcal{V}}(x,y)$, tada važi da je $I_{i,i} \vdash x_1 \dots x_k \approx y_1 \dots y_l$, za $i \leq k, l$, i različite promenljive $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l$. Pretpostavimo suprotno, tj. da nije $I_{i,i} \vdash Id_{\mathcal{V}}(X)$. Ne gubeći na opštosti možemo pretpostaviti da identitet $x^p \approx x^q$, za $p < q$, $p < i$, pripada skupu identiteta $Id_{\mathcal{V}}(x)$. Ali, tada i identitet $x^p \approx x^{p+t(q-p)}$ pripada skupu identiteta $Id_{\mathcal{V}}(x)$ za sve prirodne brojeve t pa ćemo za dovoljno veliko t imati da važi $x^p \approx x^{p+t(q-p)} \approx y^{p+t(q-p)} \approx y^p$ a to je u kontradikciji sa minimalnosti broja i.

Pretpostavimo sada da su i, j takvi da $x^i \approx x^j \in Id_{\mathcal{V}}(x)$ i $x^k \approx y^k \notin Id_{\mathcal{V}}(x,y)$ za proizvoljan prirodan broj k, tada važi da je $I_{i,j} \vdash x_1 \dots x_k \approx x_1 y_2 \dots y_l$, za $i \leq k < l$, $(j-i)\big|(l-k)$. Pretpostavimo suprotno, tj. da nije $I_{i,j} \vdash Id_{\mathcal{V}}(X)$. Tada postoji identitet $x^p \approx x^q \in Id_{\mathcal{V}}(x)$ $(p < q)$ takav da je $q - p < j - i$, odakle sledi da je $x^i \approx x^{i+q-p} \in Id_{\mathcal{V}}(x)$, prema tome, kontradikcija sa izborom prirodnih brojeva i, j. $\square$

Teorema 3.12.2. *$*$-kvazilinearnih varijeteta ima bar prebrojivo mnogo.*

Dokaz. Pokažimo da identiteti $I_{i,j}$ generišu različite varijetete za različit izbor brojeva $i \leq j$. Posmatrajmo grupoid $\mathbf{G}_{i,j} = (\{0, 1, \dots, j\}, \circ)$ gde je binarna operacija $\circ$ definisana na sledeći način:

$$a \circ b = \begin{cases} a + 1, & \text{ako je } a < j; \\ i, & \text{ako je } a = j. \end{cases}$$

Tada važi da je $\mathbf{G}_{i,j} \models I_{i,j}$, $\mathbf{G}_{i,j} \in \mathcal{V}_{\mathbf{G}}$, i $\mathbf{G}_{i,j} \not\models I_{k,l}$ za $\langle k, l \rangle < \langle i, j \rangle$. Prema tome, postoji prebrojivo mnogo podvarijeteta varijeteta $\mathcal{V}_{\mathbf{G}}$. $\square$

Sada ćemo pronaći $*$-kvazilinearnu jednakosnu teoriju takvu da odgovarajući varijetet ima $2^{\aleph_0}$ podvarijeteta.

Definicija 3.12.1. Skup *mršavih terma* je najmanji skup terma koji sadrži sve promenljive i ako term t pripada skupu mršavih terma i x je promenljiva tada termi tx i xt pripadaju skupu mršavih terma. Za term t ćemo reći da je *mršav term* ako pripada skupu mršavih terma.

Lema 3.12.3. *Neka je U skup terma koji nisu linearni ili nisu mršavi, i neka je E relacija ekvivalencije na skupu terma takva da je U jedina klasa relacija ekvivalencije E koja nije jednoelementna. Tada je E potpuno invarijantna kongruencija u kojoj svaka klasa relacije ekvivalencije sadrži linearan term, tj. odgovarajuća jednakosna teorija je $*$-kvazilinearna.*

Dokaz. Pokažimo da je E kongruencija. Neka su p, q, r, s termi takvi da $\langle p, q\rangle, \langle r, s\rangle \in E$. Ako term $p \in U$, tj. nije linearan ili nije mršav, tada term $pt \in U$ za proizvoljan term t. Prema tome, ako je $p \neq q$ ili $r \neq s$ tada termi $p, q \in U$ ili termi $r, s \in U$ odakle sledi da $pr, qs \in U$, tj. $\langle pr, qs\rangle \in E$. Ako je $p = q$ i $r = s$ tada je $\langle pr, qs\rangle \in E$ na osnovu refleksivnosti.

Pokažimo da je E potpuno invarijantna kongruencija. Neka je p term iz skupa U i $x \in S(p)$. Ako je term p nelinearan (nemršav) tada supstitucijom $x \mapsto r$ za proizvoljan term r od terma p dobijamo term koji je nelinearan (nemršav). Prema tome, proizvoljnom supstitucijom terma iz iste klase relacije ekvivalencije E dobijamo terme koji su takođe u istoj klasi, tj. E je potpuno invarijantna kongruencija.

Sve klase relacije ekvivalencije E sem U sadrže po jedan term koji je istovremeno linearan i mršav dok klasa U sadrži recimo linearan term $xy \cdot zt$ koji nije mršav. Prema tome, odgovarajuća jednakosna teorija potpuno invarijantne kongruencije E je $*$-kvazilinearna. □

Neka je A prebrojivo beskonačan skup takav da $0 \notin A$. Obeležimo sa B skup svih nepraznih reči $a_1 \dots a_n$ nad skupom A pri čemu su elementi $a_i \in A$ po parovima različiti. Za reč $u \in B$ sa $S(u)$ ćemo obeležiti skup elemenata iz skupa A koje se pojavljuju u reči u, a sa $|u|$ ćemo obeležiti dužinu reči u.

Lema 3.12.4. *Neka je $\mathbf{C}$ grupoid sa nosačem $C = B \cup \{0\}$ i multiplikativnom operacijom definisanom na sledeći način:*

$$u \circ v = \begin{cases} uv, & \textit{ako je } u, v \in A \textit{ i } u \neq v; \\ uv, & \textit{ako je } u \in A,\ |v| = 2 \textit{ i } u \notin S(v); \\ uv, & \textit{ako je } |u| \geq 3,\ v \in A \textit{ i } v \notin S(u); \\ 0, & \textit{inače,} \end{cases}$$

pri čemu smo sa uv označili reč koja se dobija konkatenacijom reči u i v. Tada je grupoid $\mathbf{C}$ *model* $*$*-kvazilinearne jednakosne teorije E definisane u Lemi 3.12.3.*

Dokaz. Na osnovu definicije multiplikativne operacije $\circ$ i osobine da $0 \notin A$ sledi da za sve $a, b, c, d \in C$ važi da je $a \circ 0 = 0 \circ a = a \circ a = (a \circ b) \circ (c \circ d) = 0$. Neka je t nemršav term, tada term t sadrži podterm oblika $(t_1 \circ t_2) \circ (t_3 \circ t_4)$ koji za svaku valuaciju promenljivih ima vrednost 0, prema tome, i term t ima vrednost 0 za svaku valuaciju. Neka je t nelinearan mršav term, tada term t sadrži podterm oblika xt_1 ili t_1x kod kojih važi da je $x \in S(t_1)$, a kako termi xt_1 i t_1x imaju vrednost 0 za svaku valuaciju sledi da i term t ima vrednost 0 za svaku valuaciju. Prema tome, važi da je $\langle u, v\rangle \in E$ ako i samo ako je $\mathbf{C} \models u \approx v$. □

Lema 3.12.5. *Neka je K podskup skupa nenegativnih celih brojeva i neka je* R_K *relacija na skupu C iz Leme 3.12.4 definisana za sve* $u, v \in C$ *na sledeći način:*

$$\langle u, v\rangle \in R_K$$

ako i samo ako je ispunjen jedan od sledeća dva uslova

1. $u = v$, *ili*
2. *postoji* $n \geq 0$ *i elementi* $a, b, c, d_i, e_i \in A$ *takvi da su ispunjeni sledeći uslovi:*
   (a) $u = abcd_0 \dots d_n \in B$, $v = abce_0 \dots e_n \in B$,
   (b) *ako* $2|n$ *onda je* $d_n = e_n$,
   (c) *za svako i sa osobinom* $0 \leq 2i < n$ *važi da je*
   $$\langle d_{2i}, d_{2i+1}\rangle = \langle e_{2i}, e_{2i+1}\rangle, \text{ ili je}$$
   $$\langle d_{2i}, d_{2i+1}\rangle = \langle e_{2i+1}, e_{2i}\rangle \ \&\ i \in K.$$

Relacija R_K *je kongruencija na grupoidu* $\mathbf{C}$.

Dokaz. Refleksivnost relacije R_K sledi iz uslova (1) dok simetričnost sledi direktno iz uslova (2). Primetimo da za reči u, v važi ako je $|u|, |v| \leq 4$ i $\langle u, v\rangle \in R_K$ tada je $u = v$.

Pokažimo tranzitivnost relacije R_K, tj. da za elemente $u, v, r \in C$ takve da je $\langle u, v\rangle, \langle v, r\rangle \in R_K$ sledi da je $\langle u, r\rangle \in R_K$. U slučaju da elementi u, v, r nisu različiti po parovima tačnost tvrđenje je direktna. Pretpostavimo sada da su elementi u, v, r različiti po parovima, tj. da su dužine $n + 4$, $n > 0$, i da postoje $a, b, c, d_i, e_i, f_i \in A$ takvi da važi:

(a) $u = abcd_0 \dots d_n \in B$, $v = abce_0 \dots e_n \in B$, $r = abcf_0 \dots f_n \in B$

(b) ako $2|n$ onda je $d_n = e_n = f_n$,

(c) za svako i sa osobinom $0 \leq 2i < n$ važi da je

$$\begin{aligned}&\langle d_{2i}, d_{2i+1}\rangle = \langle e_{2i}, e_{2i+1}\rangle, \text{ ili je}\\ &\langle d_{2i}, d_{2i+1}\rangle = \langle e_{2i+1}, e_{2i}\rangle \ \&\ i \in K.\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}&\langle e_{2i}, e_{2i+1}\rangle = \langle f_{2i}, f_{2i+1}\rangle, \text{ ili je}\\ &\langle e_{2i}, e_{2i+1}\rangle = \langle f_{2i+1}, f_{2i}\rangle \ \&\ i \in K.\end{aligned}$$

Treba pokazati da za svako i sa osobinom $0 \leq 2i < n$ važi da je

$$\begin{aligned}&\langle d_{2i}, d_{2i+1}\rangle = \langle f_{2i}, f_{2i+1}\rangle, \text{ ili je}\\ &\langle d_{2i}, d_{2i+1}\rangle = \langle f_{2i+1}, f_{2i}\rangle \ \&\ i \in K.\end{aligned}$$

Iz slučaja $\langle d_{2i}, d_{2i+1}\rangle = \langle e_{2i}, e_{2i+1}\rangle$, $\langle e_{2i}, e_{2i+1}\rangle = \langle f_{2i}, f_{2i+1}\rangle$ kao i iz slučaja $\langle d_{2i}, d_{2i+1}\rangle = \langle e_{2i+1}, e_{2i}\rangle$, $\langle e_{2i}, e_{2i+1}\rangle = \langle f_{2i+1}, f_{2i}\rangle$, $i \in K$ sledi da je $\langle d_{2i}, d_{2i+1}\rangle = \langle f_{2i}, f_{2i+1}\rangle$.
Iz slučaja $\langle d_{2i}, d_{2i+1}\rangle = \langle e_{2i}, e_{2i+1}\rangle$, $\langle e_{2i}, e_{2i+1}\rangle = \langle f_{2i+1}, f_{2i}\rangle$, $i \in K$ kao i iz slučaja $\langle d_{2i}, d_{2i+1}\rangle = \langle e_{2i+1}, e_{2i}\rangle$, $i \in K$, $\langle e_{2i}, e_{2i+1}\rangle = \langle f_{2i}, f_{2i+1}\rangle$ sledi da je $\langle d_{2i}, d_{2i+1}\rangle = \langle f_{2i+1}, f_{2i}\rangle$ & $i \in K$. Prema tome, relacija R_K je relacija ekvivalencije na C.

Ostaje još da se pokaže kompatibilnost relacije R_K sa $\circ$. Neka uređeni par $\langle u, v\rangle$ pripadaju relaciji R_K. Pokažimo da uređeni parovi $\langle u \circ r, v \circ r\rangle$ i $\langle r \circ u, r \circ v\rangle$ pripadaju relaciji R_K. Na osnovu definicije relacije R_K važe jednakosti $|u| = |v|$ i $S(u) = S(v)$. Ako je $|u| \neq 1$ i $|r| \neq 1$ tada je $u \circ r = v \circ r = r \circ u = r \circ v = 0$, odakle sledi da $\langle u \circ r, v \circ r\rangle, \langle r \circ u, r \circ v\rangle \in R_K$. Ako je $1 \leq |u| \leq 4$ tada je $u = v$. Ako je $|r| = 1$ i $r \in S(u)$ tada $r \in S(v)$ i važi da je $u \circ r = v \circ r = r \circ u = r \circ v = 0$. Ako je $|r| = 1$, $r \notin S(u)$ i $|u| \geq 5$ tada važi da $r \notin S(v)$ i $|v| \geq 5$. Na osnovu definicije $\circ$ sledi da je $r \circ u = r \circ v = 0$, $u \circ r = ur$ i $v \circ r = vr$. Ako je $|u|$ paran broj tada se reči u, v zavrsavaju istim simbolom zbog uslova (b) odakle sledi da će dvocifreni završetak reči ur, vr biti isti pa će pored uslova (a) i (b) za reči ur, vr važiti i uslov (c), prema tome, $\langle u \circ r, v \circ r\rangle \in R_K$. Ako je $|u|$ neparan broj tada će za reči ur, vr važiti uslov (b) dok uslov (a) važi zbog uslova $r \notin S(v)$ i $v \in B$, a uslov (c) važi jer je istovetan sa uslovom (c) za reči u i v, jer zbog parnosti broja n imamo da je $2i < n$ ako i samo ako je $2i < n + 1$. $\square$

Lema 3.12.6. *Neka su dati termi $t = (x \cdot yz)x_0 \dots x_{2i-1}$, $t_1 = tx_{2i}x_{2i+1}$ i $t_2 = tx_{2i+1}x_{2i}$. Dokazati da je*

$$\mathbf{C}/R_K \models t_1 \approx t_2 \qquad \textit{ako i samo ako} \qquad i \in K.$$

Dokaz. Ako $i \notin K$ tada termi t_1, t_2 imaju različite vrednosti iz C koji nisu u relaciji R_K za valuacije u kojima se promenljive interpretiraju različitim elementima iz skupa A. Neka je $i \in K$. Neka je h prizvoljno preslikavanje skupa $\{x, y, z, x_0, \dots x_{2i+1}\}$ u skup C i obeležimo sa H homomorfizam grupoida terma u grupoid $\mathbf{C}$ koji je proširenje preslikavanja h. Treba da pokažemo da je $\langle H(t_1), H(t_2)\rangle \in R_K$. Nije teško videti da ako slika preslikavanja h nije sadržana u skupu A tada je $H(t_1) = H(t_2) = 0$. Prema tome, možemo pretpostaviti da su $a = h(x)$, $b = h(y)$, $c = h(z)$, $a_i = h(x_i)$ elementi iz skupa A. Ako ovi elementi nisu različiti tada bi opet važilo da je $H(t_1) = H(t_2) = 0$. Pretpostavimo da su $a, b, c, a_0, \dots, a_{2i+1}$ različiti elementi. Tada je $H(t_1) = abca_0 \dots a_{2i+1} \in B$ i $H(t_2) = abca_0 \dots a_{2i-1}a_{2i+1}a_{2i} \in B$. Ali tada, prema definiciji relacije R_K sledi da je $\langle H(t_1), H(t_2)\rangle \in R_K$. $\square$

Na osnovu Leme 3.12.6 sledi da za različite podskupove K grupoidi $\mathbf{C}/R_K$ generišu različite varijetete koji su podvarijetet $*$-kvazilinearnog varijeteta generisanog grupoidom $\mathbf{C}$. Prema tome, dobijamo:

Teorema 3.12.7. *Postoji $2^{\aleph_0}$ različitih $*$-kvazilinearnih jednakosnih teorija grupoida.*

Literatura

[1] K.A.Baker, *Finite equational bases for finite algebras in a congruence-distributive equational class,* Advances in Math. **24** (1977), no. 3, 207–243.

[2] A.P.Birjukov, *Varieties of idempotent semigroups, (ruski),* Algebra i Logika **9** (1970), 255–273.

[3] A.Bulatov, *Complexity of the conservative generalized satisfiability problem (ruski),* Dokl. Akad. Nauk. **397** (2004), no. 5, 583–585.

[4] S.Burris and H.P.Sankappanavar, *A Course in Universal Algebra,* Springer-Verlag, New York, 1981.

[5] G.Birkhoff, *On the structure of abstract algebras,* Proc. Camb. Philos. Soc. **31** (1935), 433–454.

[6] I.Dolinka, *A nonfinitely based finite semiring,* International Journal of Algebra and Computation **17** (2007), 1537-1551.

[7] I.Dolinka, *A class of inherently nonfinitely based semirings,* Algebra Universalis (2008), (prihvaćen za štampu).

[8] P.Đapić, *Linearni varijeteti grupoida,* Magistarski rad (2006).

[9] P.Đapić, J.Ježek and P.Marković, *Star-quasilinear equational theories of groupoids,* Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica (2008), (prihvaćen za štampu).

[10] P.Đapić, J.Ježek, P.Marković, R.McKenzie and D.Stanovský, *Star-linear equational theories of groupoids,* Algebra Universalis **56** (2007), no. 3-4, 357–397.

[11] R.Freese, J.Ježek, P.Jipsen, P.Marković, M.Maróti and R.McKenzie, *The variety generated by order algebras,* Algebra Universalis **47/2** (2002), 103–138.

[12] J.A.Gerhard, *Some subdirectly irreducible idempotent semigrups,* Semigroup Forum **5** (1973), 362–369.

[13] J.A.Gerhard, *Subdirectly irreducible idempotent semigrups,* Pacific Journal of Mathematics **39/3** (1971), 669–676.

[14] J.Ježek, *Grupoid.exe* Dostupan na adresi `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~jezek/groupoid.htm`.

[15] J.Ježek, *Nonfinitely based three-element idempotent groupids,* Algebra Universalis **20** (1985), 292–301.

[16] J.Ježek, *Three-variable equations of posets,* Czechoslovak Math. J. **52/4** (2002), 811–816.

[17] J.Ježek, T.Kepka, *The lattice of varieties of commutative abelian distributive groupoids,* Algebra Universalis **5** (1975), 225–237.

[18] J.Ježek, T.Kepka, *Atoms on the lattice of varieties of distributive groupoids,* Colloquia Math. Soc. János Bolyai **14** (1974), 185–194.

[19] R.L.Kruse, *Identities satisfies by a finite ring,* J. Algebra **26** (1971), 298–318.

[20] I.V.Ljvov, *Varieties of associative rings I, II,* Algebra and Logic **12** (1971), 150–167, 381–383.

[21] R.Lyndon, *Identities in two-valued calculi,* Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 457–465.

[22] R.Lyndon, *Identities in finite algebras,* Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 8–9.

[23] M.Maróti, R.McKenzie, *Finite basis problems and results for quasivarieties,* Studia Logica **78** (2003), 1–28.

[24] R.McKenzie, G.McNulty and W.Taylor, *Algebras, Lattices, Varieties, Volume I,* Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, CA, 1987.

[25] R.McKenzie, *Finite equational bases for congruence modular algebras,* Algebra Universalis **24** (1987), no. 3, 224–250.

[26] R.McKenzie, *The residual bounds of finite algebras,* Internat. J. Algebra Comput. **6** (1996), no. 1, 1–28.

[27] R.McKenzie, *The residual bound of a finite algebra is not computable,* Internat. J. Algebra Comput. **6** (1996), no. 1, 29–48.

[28] R.McKenzie, *Tarski's finite basis problem is undecidable,* Internat. J. Algebra Comput. **6** (1996), no. 1, 49–104.

[29] R.McKenzie, *Finite equational bases for congruence modular varieties,* Algebra Universalis **24** (1987), no. 3, 224–250.

[30] G.McNulty and C.Shallon, *Inherently nonfinitely based finite algebras,* Universal Algebra and Lattice Thery, Lecture Notes in Mathematics Vol. **1004**, R.Freese and O.Garcia, eds., 206–231, Springer-Verlag, 1983.

[31] V.L.Murskij, *The existence in three-valued logic of a closed class with finite basis not having a finite complete set of indentities (ruski),* Dokl. Akad. Nauk. SSSR **163** (1965), 815–818.

[32] V.L.Murskij, *On the number of k-element algebras with one binary operation without a finite basis of indentitis (ruski),* Problemy Kibernet. **35** (1979), 5–27.

[33] S.Oates and M.B.Powell, *Indentical relations in finite groups,* J. Algebra **1** (1965), 11–39.

[34] R.Park, *Equational classes of non-associative orderd systems,* doktorska disertacija UCLA, 1976.

[35] P.Perkins, *Bases for equational theories of semigroups,* J. Algebra **11** (1969), 298–314.

[36] Robert W.Quackenbush, *Varieties of Steiner loops and Steiner quasigroups,* Can. J. Math. **28** (1976), no. 6, 1187–1198.

[37] Fred S.Roberts, Barry Tesman, *Applied Combinatorics (2nd Edition),* Pearson Prentice Hall, NJ, 2005.

[38] M.V.Sapir, *Problems of Burnside type and the finite basis property in varieties of semigroups (ruski),* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), no. 2, 319–340.

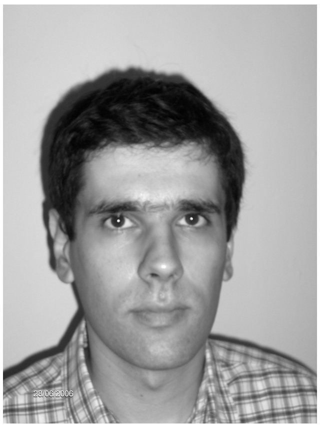
[39] M.V.Sapir, *Inherently non-finitely based finite semigroups* (ruski), Mat. Sb. (N.S.) **133(175)** (1987), no. 2, 154–166, 270.

[40] C.Shallon, *Nonfinitely Based Finite Algebras Derived from Lattices,* doktorska disertacija, UCLA, 1979.

[41] R.Tošić, *Kombinatorika,* Univerzitetski udžbenik, Novi Sad, 1999.

[42] R.Willard, *A finite basis theorem for residually finite, congruence meet-semidistributive varieties,* J. Symbolic Logic **65** (2000), no. 1, 187–200.

KRATKA BIOGRAFIJA



Rođen sam 25. maja 1976. godine u Somboru gde sam završio Osnovnu školu "Ivo Lola Ribar". Po završetku osnovne škole školovanje sam nastavio u Novom Sadu gde sam završio gimnaziju "Jovan Jovanović Zmaj".

U toku osnovne i srednje skole bio sam redovni učesnik saveznih takmičenja iz matematike na kojima sam osvajao više nagrada. Kao takmičar najveći uspeh sam ostvario na Balkanskoj matematičkoj olimpijadi na Kipru na kojoj sam osvojio srebrnu medalju.
Pored toga, iste godine sam ušao u državnu ekipu za Matematičku olimpijadu u Turskoj ali te godine nismo učestvovali.

Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, Institut za matematiku, smer Profesor matematike, upisao sam školske 1994/95. godine. Diplomirao sam septembra 1998. godine i sve predviđene ispite sam položio prosečnom ocenom 9,88.

1998.godine počeo sam da radim na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Na ovom fakultetu radim i danas kao asistent–pripravnik.

Na poslediplomske studije iz Matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu upisao sam se 1998/99. godine. Na tim studijama sam položio sve ispite i stekao uslov za izradu magistarske teze koju sam odbranio 11.11.2006. godine pod naslovom "Linearni varijeteti grupoida".

Novi Sad, 1.8.2008. Petar Đapić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR
Autor: Petar Đapić
AU
Mentor: dr Petar Marković
MN

Naslov rada: Varijeteti grupoida
NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2008.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Univerzitet u Novom Sadu, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA
Fizički opis rada: 3/7+122/41/26/7/0/0
(broj poglavlja/strana/lit citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO
Naučna disciplina: Algebra
ND
Predmetna odrednica/Ključne reči: baze, grupoid, $*$-linearne jednakosne teorije, n-linearne jednakosne teorije, $*$-kvazilinearne jednakosne teorije, n-kvazilinearne jednakosne teorije, linearni termi, regularni identiteti
PO
UDK:
Čuva se: u biblioteci Departmana za matematiku i informatiku, Novi Sad
ČU
Važna napomena:
VN
Izvod: Ova teza se bavi $*$-kvazilinearnim varijetetima grupoida. Pokazano je da postoji tačno dvadeset osam idempotentnih $*$-kvazilinearnih varijeteta grupoida, od kojih dvadeset šest varijeteta imaju konačnu bazu i te baze su i navedene, dok preostala dva varijeteta imaju inherentno beskonačnu bazu. U tezi je opisano uređenje svih idempotentnih $*$-kvazilinearnih varijeteta grupoida i nalazimo male grupoide koji generišu svaki od navedenih varijeteta. Na kraju je pokazano da postoji kontinum mnogo $*$-kvazilinearnih variejeteta grupoida.
IZ
Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 17.06.2008.
DP
Datum odbrane:
DO
Članovi komisije:
Predsednik: dr Siniša Crvenković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Mentor: dr Petar Marković, docent, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu.

Član: dr Rozália Sz. Madarász, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Igor Dolinka, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu

Član: dr Miroslav Ćirić, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu
KO

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF NATURAL SCIENCES AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monographic type
DT
Type of record: Text printed material
TR
Contents code: PhD thesis
CC
Author: Petar Đapić
AU
Mentor: Dr Petar Marković
MN

Title: Varijeteti grupoida
TI

Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian/English
LA
Country of publication: Republic of Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2008.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ.place: University of Novi Sad, Faculty of Science, Trg Dositeja Obradovića 4
PP
Physical description: 3/7+122/41/26/7/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphs/additional lists)
PD

Scientific field: Mathematics
SF
Scientific discipline: Algebra
SD
Subject / Key words: base, groupoid, $*$-linear equational theories, n-linear equational theories, $*$-quasilinear equational theories, n-quasilinear equational theories, linear terms, regular identity
SKW
UC:
Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Novi Sad
HD
Note:
N
Abstract: The topic of this thesis are $*$-quasilinear varieties of groupoids. We show that there exist exactly twenty-eight idempotent $*$-quasilinear varieties of groupoids, twenty-six of which are finitely based (and we explicitly give finite bases for each of them), while two are inherently nonfinitely based. We describe the ordering of these twenty-eight idempotent $*$-quasilinear varieties of groupoids and find small generating algebras for each of them. In the end we show that there exist continuum many $*$-quasilinear varieties of groupoids, not all of which are even locally finite.
AB **Accepted by Scientific Board on:** 17.06.2008.
ASB
Defended:
DE
Thesis defend board:

President: Dr Siniša Crvenković, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Mentor: Dr Petar Marković, Assistant Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Dr Rozálija Sz. Madarász, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Dr Igor Dolinka, Full Professor, Faculty of Science, University of Novi Sad

Member: Dr Miroslav Ćirić, Full professor, Faculty of Science, University of Niš
DB