UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

PRILOG TEORIJI REGULARNIH SEMIGRUPA

(Doktorska disertacija)

STOJAN BOGDANOVIĆ

NOVI SAD

1980.

SADRŽAJ

UVOD

Semigrupa je jedna od osnovnih matematičkih struktura. Medjutim, zbog "siromaštva" ove strukture pristupa se njenom "obogaćivanju", tj. dodavanju nekih posebnih uslova. Na taj način se dobijaju razne klase semigrupa koje su predmet izučavanja teorije semigrupa.

U ovom radu su ispitivane neke klase regularnih semigrupa, kao što su klase regularnih, levo regularnih, desno regularnih, intra-regularnih, itd. Pojam regularnosti koji predstavlja uopštenje pojma idempotent je prvi uveo J.von Neumann [38], za element prstena. U teoriji semigrupa ovaj pojam se prvi put javlja u radu G. Thierrina [56].

U bliskoj vezi sa pomenutim semigrupama su proste, levo proste i desno proste semigrupe i prirodne grupe. Jedno od ključnih mesta u teoriji semigrupa jesu svakako konstrukcije raznih semigrupa, sa tim u vezi vrlo je značajan pojam semilatise semigrupa i posebno semilatise grupa čijim se karakterizacijama bavimo u Glavi III. Posebno u ovom radu razmatramo jednu podklasu klase kompletno regularnih semigrupa (Glava IV), tzv. klasu (m,n)-anti-inverznih semigrupa. Ova klasa obuhvata klasu anti-inverznih semigrupa koje su izučavane u [2], [3], [4], a koje su detaljnije izložene u [5].

U Glavi I su navedeni elementarni pojmovi o semigrupama, grupama, idealima, kongruencijama, itd. Takodje, navedene su razne teorije o regularnim, levo, desno i intra-regularnim semigrupama. Ovim materijalom su, uglavnom, predstavljeni rezultati R. Croisota [11], i to oni rezultati koji se koriste u daljim ispitivanjima.

U Glavi II ispitiju se (m,n)-ideali i (m,n)-regularne semigrupe. Najpre, karakterišemo klasu semigrupa kod kojih je (m,n)-ideal proizvoljnog (m,n)-ideala semigrupe (m,n)-ideal semigrupe, (Teorema 1.1). Zatim, Teoremom 1.3. uspostavlja se prirodna veza izmedju pojmova (m,n)-ideal i (m,n)-regularna semigrupa. Ova teorema predstavlja uopštenje rezultata K. Isékija [21], L. Kovacsa [23] i S. Lajosa [29]. U tački 2. ove glave uvodi se pojam (m,n)*-ideala. Ovaj pojam se obradjuje u tačkama 3. i 4. ove glave. Tako, Teoremom 3.1. karakterišemo prostu semigrupu (a ova je intra-regularna, I 3.3). Zatim, u tački 4. se karakterišu π-semigrupe i homogrupe pomoću (m,n)*-ideala.

U Glavi III ispitiju se, uglavnom, slabo komutativne (Weakly commutative) semigrupe koje je uveo M. Petrich [40]. U tački 2. uvodimo pojam semiprimarne semigrupe i Teoremom 2.1. karakterišu se ove semigrupe. U tački 3. uvodimo pojam r-semigrupe. Klasa svih r-semigrupa obuhvata, na primer, klasu svih intra-regularnih semigrupa, pa samim tim i klasu svih prostih semigrupa. U ovoj tački se daje odnos izmedju klase svih semiprimarnih semigrupa, klase svih r-semigrupa i klase r-semiprimarnih semigrupa (Teorema 3.3.). Ustvari, Teorema 3.3. je uopštenje rezultata H. Lala [30], [31], [32]. Dalje dokazujemo da su slabo komutativne semigrupe r-semigrupe (Teorema 3.4.). U tački 4. razmatramo arhimedove slabo komutativne semigrupe. Dokazujemo da arhimedova slabo komutativna semigrupa sa idempotentom ima grupu-ideal (Teorema 4.1.).Zatim dajemo teoremu koja karakteriše arhimedove slabo komutativne semigrupe (Teorema 4.2.). Ova teorema je uopštenje rezultata G. Thierrina [58]. U tački 5. razmatramo regularne slabo komutativne semigrupe (Teorema 4.1). Teoremom 4.2. karakterišemo prostu slabo komutativnu semigrupu. U tački 6. dajemo teoremu koja raspravlja o maksimalnim kompletno izolovanim idealima. Dokazuje se, ustvari, da ako je S slabo komutativna semigrupa u kojoj su kompletno izolovani ideali maksimalni i idempotentni iz S obrazuju lanac, onda je S retrakt grupe pomoću arhimedove semigrupe ili je S arhimedova semigrupa. U tački 7. dokazujemo teoremu o ekstenziji grupe pomoću nil-semigrupe. Dalje, u tački 8. uvodimo pojam Q_R-semigrupe i opisujemo sve arhimedove slabo komutativne Q_R-semigrupe (Teorema 8.2.). Takodje, daje se više novih karakterizacija recionalnih (power joined - p.j.) semigrupa.

Teoremom 9.1. karakterišemo nilpotentne semigrupe. Ova teorema je uopštenje jedne teoreme M.S. Putcha [46]. U tački 10. karakterišemo semilatise grupa (Teorema 10.2.). Koristeći ovaj rezultat dobijene su razne karakterizacije za semilatise anti-inverznih semigrupa i za semigrupe (m,n)*-anti-inverznih semigrupa (Glava IV, tačka 9). Jasno, slične karakterizacije se mogu dati i za (m,n)-anti-inverzne semigrupe. Na kraju ove glave razmatramo jako reverzibilne (strongly reversible) semigrupe, i to regularne, primarne, semiprimarne i druge.

U Glavi IV razmatramo neka "uopštenja" anti-inverznih semigrupa. Ovaj materijal je uglavnom preuzet iz [35] i [6]. U tački 3. dajemo neke dekompozicije (m,n)-anti-inverznih semigrupa. U tački 4. razmatramo Greenove relacije i primenjujemo rezultate R. Croisota [11] na (m,n)-anti-inverzne semigrupe, pri čemu se dobija niz karakterizacija semigrupa iz klase $S_{m,n}$ (Teoreme 4.1., 4.3.). Glavni rezultat Glave IV jeste algoritam (tačka 5) kojim se za razne $m,n \in N$ odredjuje koje klase $S_{m,n}$ su podklase anti-invernih semigrupa. U tački 6. razmatramo (m,n)*-anti-inverzne semigrupe. Glavni rezultat ove tačke je Teorema 6.2. o dekompoziciji (m,n)*-anti-inverzne semigrupe. U tački 7. se navodi teorema o bazisnoj klasi u smislu Ljapina. Ova teorema je dokazana u [3]. Ovde se daju neke

Ovde se daju neke posledice ove teoreme. Na kraju rada su dati neki specijalni slučajevi (m,n)-anti-inverznih semigrupa.

Materijal koji sadrže Glave II i III je prvi put izložen u ovom radu, dok materijal iz Glave IV, uglavnom, je sadržan u radovima [35] i [6]. Glava I, sa manjim izuzecima, ne sadrži originalne priloge.

Literatura korišćena pri izradi ovog rada navedena je na kraju i čine je 63 bibliografske jedinice.

Profesor dr Svetozar Milić mi je, kao i u drugim prilikama, i ovaj put svojim savetima bio od izuzetne koristi za šta mu se posebno zahvaljujem.

GLAVA I

ELEMENTARNI POJMOVI I KARAKTERIZACIJE SEMIGRUPA IZ NEKIH KLASA REGULARNIH SEMIGRUPA

1.1. Binarnom operacijom na skupu S nazivamo preslikavanje $S\times S$ u S, gde je $S\times S$ skup svih uredjenih parova elemenata iz S. Ako je operacija multiplikativna, onda sliku u S elemenata (a,b) iz $S\times S$ označavamo sa $a\cdot b$. Najčešće je tačka izostavljena i piše se samo ab.

1.2. Grupoidom nazivamo uredjen par $(S,.)$ nepraznog skupa S i binarne operacije "$\cdot$" definisane na njemu. Često ćemo pisati samo S umesto $(S,.)$.

1.3. Binarna operacija "$\cdot$" na skupu S naziva se asocijativnom ako je ispunjeno

$$(\forall a,b,c\in S)(a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c).$$

Semigrupa je grupoid $(S,\cdot)$, pri čemu je operacija "$\cdot$" asocijativna. Dalje ćemo kraće pisati "S je semigrupa". Podgrupoid semigrupe S ćemo nazivati podsemigrupa.

1.4. Element $e\in S$ nazivamo desnom jedinicom grupoida S ako je $xe = x$, za svaki $x\in S$. Analogno se definiše leva jedinica. Element $e\in S$ je dvostrana jedinica grupoida S ili prosto jedinica ako je e istovremeno desna i leva jedinica grupoida S.

1.5. Semigrupa S je levo prosta ako

$$(\forall x\in S)(S = Sx).$$

Slično, semigrupa S je desno prosta ako

$$(\forall x \in S)(S = xS) \ .$$

Semigrupa S je prosta ako i samo ako

$$(\forall x \in S)(S = SxS) \ .$$

1.6. Grupa je semigrupa S pri čemu je

$$(\forall x \in S)(ex = x)$$

i

$$(\forall x \in S)(\exists x^{-1} \in S)(x^{-1}x = e)$$

gde je sa e označena jedinica u S.

Podgrupa od S je podsemigrupa od S koja je grupa.

1.7. Grupom nazivamo semigrupu S koja je istovremeno levo i desno prosta.

Jasno da je ova definicija ekvivalentna sa Definicijom 1.6.

1.8. Semigrupa S je komutativna ako je

$$(\forall x \in S)(\forall y \in S)(xy = yx) \ .$$

Komutativnu grupu nazivamo abelova.

1.9. Element $x \in S$ nazivamo idempotentnim ako je

$$x^2 = x \ .$$

Idempotentnu komutativnu semigrupu nazivamo semilatisa.

1.10. Red semigrupe S je broj elemenata u S, ako je S konačna, u suprotnom S je beskonačnog reda. Semigrupa čiji je red 1 je trivijalna semigrupa.

Red elemenata a semigrupe S je red ciklične podsemigrupe od S koja je generirana sa a. Semigrupa čiji su svi elementi konačnog reda je periodička.

1.11. Semigrupa je levo kancelativna ako

$$(\forall a,b,x\in S)(xa = xb \Rightarrow a = b) .$$

Analogno se definiše desno kancelativna semigrupa. Semigrupa S je kancelativna ako je istovremeno levo i desno kancelativna.

1.12. Preslikavanje f semigrupe S u semigrupu T je homomorfizam ako je

$$(af)(bf) = (ab)f$$

za svaki $a,b\in S$. Ako je f na, tada T nazivamo homomorfnom slikom od S. Ako je još i 1-1, tada f nazivamo izomorfizmom.

1.13. Relacija ekvivalencije ρ na S je leva kongruencija na S ako za proizvoljne $x,a,b\in S$ iz $a\,\rho\,b$ sledi $xa\,\rho\,xb$. Desna kongruencija se definiše dualno. Dvostrana kongruencija, ili prosto kongruencija, je konjunkcija prethodne dve. Skup klasa ekvivalencije u oznaci S/ρ nazivamo količnik skupom. Preslikavanje $a \to a\rho$, gde je $a\rho$ klasa ekvivalencije elemnta a je prirodni homomorfizam od S na S/ρ, pri čemu je u S/ρ operacija definisana na sledeći način

$$(a\rho)(b\rho) = (ab)\rho$$

za $a\rho,\ b\rho\in S/\rho$.

2.

2.1. Podsemigrupa $L(R)$ semigrupe S je njen levi (desni) ideal ako je $SL \subset L$ $(RS \subset R)$. Podsemigrupa I semigrupe S je njen dvostrani ideal ako je istovremeno levi i desni ideal.

Poznata je sledeća

Teorema. Semigrupa S je levo prosta (desno prosta) ako i samo ako S nema pravih levih (desnih, dvostranih) ideala.

2.2. Ako je A neprazan podskup semigrupe S, tada presek svih levih ideala koji sadrže A je levi ideal koji sadrži A. Za taj ideal kažemo da je levi ideal generiran skupom A. Slično imamo za desni, odnosno, dvostrani ideal. Levi (desni dvostrani) ideal semigrupe S generiran skupom A je

$$A \cup SA \ (A \cup AS \ , \ A \cup SA \cup AS \cup SAS) \ .$$

Ako je A jednočlan skup, tada levi glavni ideal, u oznaci $L(a)$, je

$$L(a) = a \cup Sa \ .$$

Analogno, desni glavni ideal je

$$R(a) = a \cup aS \ ,$$

i dvostrani glavni ideal je

$$J(a) = a \cup aS \cup Sa \cup SaS \ .$$

2.3. Good i Hughes su u [15] definisali bi-ideal semigrupe. Podsemigrupa B semigrupe S je bi-ideal od S ako je

$$BSB \subset B .$$

2.4. O. Steinfeld je u [51] definisao kvazi-ideal semigrupe. Podsemigrupa Q semigrupe S je kvazi-ideal od S ako je

$$QS \cap SQ \subset Q .$$

2.5. S. Lajos, [26] je definisao (m,n)-ideal semi grupe. Podsemigrupa A semigrupe S je (m,n)-ideal od S ako je

$$A^m S A^n \subset A$$

za $m,n \in N \cup \{0\}$. Jasno da (m,n)-ideal predstavlja uopštenje levog, desnog i bi-ideala. U istom radu je definisan i (m,n)-kvazi-ideal. Podsemigrupa A semigrupe S je (m,n)-kvazi-ideal od S ako je

$$A^m S \cap S A^n \subset A$$

$m,n \in N$. Na sličan način mi ćemo uopštiti pojam dvostranog ideala (Glava II).

2.6. Ideal I semigrupe S je izolovan ako je

$$(\forall x \in S)(x^2 \in I \Rightarrow x \in I).$$

2.7. Ideal I semigrupe S je kompletno izolovan ako je

$$(\forall x,y \in S)(xy \in I \Rightarrow x \in I \vee y \in I) .$$

Jasno, svaki kompletno izolovan ideal je izolovan. Obratno ne važi.

2.8. Jedno uopštenje kompletno izolovanog ideala je primaran ideal. Ideal I semigrupe S je primaran ako je

$$(\forall\, x,y \in S)(xy \in I \Rightarrow x \in I \vee (\exists n \in N)(y^n \in I)) .$$

Svaki kompletno izolovan ideal je primaran.

2.9. Neka je I ideal semigrupe S. Definišimo relaciju ρ_I na sledeći način

$$a\rho_I b \Leftrightarrow a = b \vee a,b \in I .$$

Relacija ρ_I je kongruencija i nazivamo je Reesova kongruencija, [47]. Količnik semigrupu S/ρ_I označavamo sa S/I. Klase ekvivalencije u ovom slučaju su I i jednočlani skupovi $\{a\}$, kada je $a \in S\backslash I$.

3.

3.1. Semigrupa S je regularna ako

$$(\forall\, x \in S)(\exists a \in S)(x = xax) .$$

Pojam regularnosti prvi je uveo J.von Neumann (On regular rings, Proc.Nat.Acad.Sci., USA, 22(1936),707-713) za elemente prstena. Element prstena, je ustvari, regularan ako je regularan kao element multiplikativne semigrupe prstena.

U opštoj teoriji semigrupa regularne semigrupe pod nazivom "demi-groupes inversifs" su prvi put razmatrane od strane G. Thierrina (Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un semigroupe soit un groupe, C.R.Aca.Sci., Paris, 232(1951),376-378).

G. Thierrin je u pomenutom radu, izmedju ostalog, dokazao sledeću teoremu koju ćemo kasnije često koristiti.

Teorema. Ako regularna semigrupa S ima samo jedan idempotent, onda S jeste grupa.

Regularne semigrupe ćemo mi karakterisati pomoću (m,n)-ideala u Glavi II.1. uopštavajući Teoremu K. Isékija [21].

3.2. Značajna podklasa klase regularnih semigrupa je klasa inverznih semigrupa, koje predstavljaju prirodno uopštenje grupa. Pojam inverzne semigrupe prvi put se javlja u radovima В.В. Вагнер (Обобщенные группы, ДАН СССР, 84(1952),1119-1122) i G. Thierrina (Sur les éléments unitaires d'un demi-groupe invesif, C.R.Acad.Sci., Paris, 234(1952),33-34. W.D. Munn i R. Penrose navode u [37] da je nezavisno od Vagnera i Thierrina inverzne semigrupe proučavao G.B. Preston, [45].

Semigrupa S je inverzna ako

$$(\forall a \in S)(\exists_1 b \in S)(aba = a \wedge bab = b) .$$

Pojedini delovi teoreme koju ćemo navesti nalaze se u radovima Vagnera [62], Prestona [45], Libera [33] i Munna i Penrosea [37].

Teorema. Neka je S semigrupa. Tada se sledeći uslovi medjusobno ekvivalentni:

(i) S je regularna i svaka dva idempotenta iz S komutiraju.

(ii) Svaki glavni desni i glavni levi ideal semigrupe S ima jedinstven generatorni idempotent.

(iii) S je inverzna semigrupa.

3.3. A.H. Clifford je u [7] razmatrajući dekompozicije semigrupa na proste podsemigrupe definisao pojam intra-regularne semigrupe. Semigrupa S je intra-regularna ako je

$$(\forall x \in S)(\exists a,b \in S)(x = ax^2b) .$$

Teoremu koju navodimo je dokazao R. Croisot [11]. Ovu teoremu je nezavisno od Croisota dokazao i Andersen [1].

Teorema 1. Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi medjusobno ekvivalentni:

(i) S je intra-regularna.

(ii) S je unija prostih semigrupa.

(iii) Svaki ideal semigrupe S je izolovan.

(iv) Glavni ideali semigrupe S obrazuju semilatisu u odnosu na presek.

Označimo sa K klasu svih intra-regularnih (regularnih) semigrupa. Neposredno se dokazuju sledeće dve leme:

Lema 1. Ideal I semigrupe $S \in K$ je semigrupa iz K.

Lema 2. Homomorfna slika semigrupe $S \in K$ je semigrupa iz K.

Dalje, dokazujemo da važi:

Teorema 2. Neka je S semigrupa i I ideal od S. Tada

$$S \in K \iff (\forall I)(I \in K \wedge S/I \in K) .$$

Dokaz. Neka je $S \in K$. Tada koristeći Leme 1. i 2. sledi tvrdnja.

Obratno, Neka je proizvoljan ideal I semigrupe S intra-regularan i $S/I \in K$. Tada razlikujemo dva slučaja.

1° Ako $a \in I$, onda postoje $x, y \in I$ da je $a = xa^2y$.

2° Ako $a \in S \setminus I$, onda za $af \in S/I$, gde je f prirodni homomorfizam, postoje $xf, yf \in S/I$ da je

$$af = (xf)(af)^2(yf) .$$

Odavde, $af = (xa^2y)f$. Kako je f izomorfizam na $S \setminus I$, to je $a = xa^2y$. Dakle, $S \in K$.

Slično se dokazuje i u slučaju da je K klasa svih regularnih semigrupa.

Primedba. Teorema 2. važi i ako je K presek klase svih regularnih i klase svih intra-regularnih semigrupa.

3.5. Semigrupa S je levo regularna ako

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S)(xa^2 = a) .$$

Analogno se definiše desno regularna semigrupa.

Ovaj pojam je uveo R. Croisot (Demi-groupes inversifs et demi-réunions de demi-groupes simples, Ann.Sci.Ecole Norm. Sup., (3),70(1953),361-379), a umesto termin "regularan" upotrebljavao je termin "inversif". On je za ovakve semi-grupe dao teoreme o dekompoziciji, pomoću unije, što ćemo mi učiniti za semigrupe iz klase $S_{m,n}$. (Glava IV).

3.6. J.A. Green je 1951. svojim radom "On the structure of semigroups", Ann. of Math., 54,163-172, dao jednu fundamentalnu studiju za razvoj teorije semigrupa. U tom radu Green je definisao izvesne relacije ekvivalencije na semigrupi, koristeći pojam glavnog ideala semigrupe.

3.7. Relacije L, R, H, J, D definisane na semigrupi na sledeći način

(i) $a \, L \, b \iff L(a) = L(b)$

(ii) $a \, R \, b \iff R(a) = R(b)$

(iii) $a \, J \, b \iff J(a) = J(b)$

(iv) $H = L \cap R$

(v) $D = L \circ R = R \circ L$

su relacije ekvivalencije i nazivaju se Greenovim ekvivalencijama.

3.8. Neposredno se dokazuje da je u regularnoj semigrupi S:

$$L(a) = Sa \, , \quad R(a) = aS \, , \quad J(a) = SaS \, .$$

Odavde imamo da u regularnoj semigrupi S je

(i) $a \mathcal{L} b \Longleftrightarrow Sa = Sb$

(ii) $a \mathcal{R} b \Longleftrightarrow aS = bS$

(iii) $a \mathcal{J} b \Longleftrightarrow SaS = SbS$.

3.9. Koristeći Greenove relacije iskazaćemo jednu teoremu R. Croisota [11].

Teorema. Semigrupa S je levo (desno, intra-) regularna ako i samo ako $a \mathcal{L} a^2 (a \mathcal{R} a^2, a \mathcal{J} a^2)$, za svako $a \in S$.

3.10. Navodimo jednu teoremu R. Croisota [11], kojom se karakterišu levo regularne semigrupe.

Teorema. Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi medjusobno ekvivalentni:

(i) S je levo regularna.

(ii) Svaki levi ideal semigrupe S je izolovan.

(iii) Svaka $\mathcal{L}$-klasa semigrupe S je levo prosta podsemigrupa od S.

(iv) Svaka $\mathcal{L}$-klasa semigrupe S je podsemigrupa od S.

(v) S je unija disjunktnih levo prostih podsemigrupa.

(vi) S je unijalevo prostih podsemigrupa.

Slična teorema važi za desno regularne semigrupe.

3.11. Semigrupa S je kompletno regularna ako

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S)(a = axa \wedge ax = xa) \text{ .}$$

Ovaj pojam je uveo A.H. Clifford [7]. Teoremu koju navodimo dao je R. Croisot [11].

Teorema 1. Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi medjusobno ekvivalentni:

(i) S je kompletno regularna semigrupa.

(ii) S je unija grupa.

(iii) Svaki levi i svaki desni ideal semigrupe S je izolovan.

(iv) S je levo i desno regularna.

(v) S je regularna i levo regularna.

(vi) S je regularna i desno regularna.

(vii) Svaka H-klasa semigrupe S je grupa.

(viii) S je unija disjunktnih grupa.

Slično Teoremi 2. iz tačke 3.3. imamo da važi

Teorema 2. Neka je S semigrupa i I njen ideal. Tada S je kompletno regularna ako i samo ako I je kompletno regularan i S/I je kompletno regularan.

Dokazaćemo ovde sledeću

Teorema 3. Neka je S semigrupa. Tada S je kompletno regularna ako i samo ako svaki bi-ideal od S je izolovan.

Dokaz. Neka je B bi-ideal kompletno regularne semigrupe S. Tada za $a^2 \in B$ je $a \in a^2Sa^2$. Odavde imamo da $a \in BSB \subset B$.

Dakle, bi-ideal B je izolovan.

Obratno, neka je svaki bi-ideal od S izolovan. Tada iz $a^2 \in B(a^2) = a^2 \cup a^4 \cup a^2Sa^2$ sledi $a \in a^2Sa^2$, tj. S je kompletno regularna semigrupa.

3.12. Semigrupa S je anti-inverzna ako

$$(\forall x \in S)(\exists y \in S)(x = yxy \wedge y = xyx) .$$

Ove semigrupe su izučavane u [2], [3], [4], [50]. Detaljnije su izložene u [5].

3.13. Neka je E skup idempotenata semigrupe S. Ako $e,f \in E$ uzimamo da je $e \leqslant f$ ako i samo ako $ef = fe = e$. Relacija $\leqslant$ je relacija parcijalnog poretka na E. Ako S sadrži nulu (0), tada $0 \leqslant e$, za svaki $e \in E$. Idempotent f semigrupe S nazivamo primitivnim ako $f \neq 0$ i ako $e \leqslant f$ povlači $e = 0$ ili $e = f$.

Prosta semigrupa koja sadrži primitivan idempotent naziva se kompletno prostom semigrupom.

Sledeća teorema data je od strane A.H. Clifforda [7].

Teorema. Prosta semigrupa je unija grupa ako i samo ako je ona kompletno prosta.

3.14. Semigrupa S sa nulom naziva se nil-semigrupom ako za svaki $x \in S$ postoji $n \in N$ da je $x^n = 0$.

3.15. Ako je $S = \bigcup_{\alpha \in Y} S_\alpha$, gde je Y semilatisa, $S_\alpha \cap S_\beta = \Phi$, $(\alpha \neq \beta)$ i za svaki $\alpha, \beta \in Y$ je $S_\alpha S_\beta \subset S_{\alpha\beta}$, onda S nazivamo *semilatisom semigrupa* S_α, $(\alpha \in Y)$.

GLAVA II

UOPŠTENI IDEALI

1. (m,n)-IDEALI I (m,n)-REGULARNE SEMIGRUPE

U ovoj tački karakteriše se klasa semigrupa kod kojih je (m,n)-ideal proizvoljnog (m,n)-ideala semigrupe (m,n)-ideal semigrupe (Teorema 1.1.) i slično u slučaju (m,n)-kvazi-ideala, (Teorema 1.2.). Teoremom 1.3. karakterišu se (m,n)-regularne semigrupe pomoću (m,n)-ideala. Ova teorema predstavlja uopštenje teoreme Isékija [21].

Lema 1.1. Neka je S semigrupa, A (m,n)-ideal od S i $B \subset A$. Tada

$$([B_A]_{(m,n)})^m S([B_A]_{(m,n)})^n = B^m S B^n$$

gde je

$$[B_A]_{(m,n)} = \bigcup_{i=1}^{m+n} B^i \cup B^m A B^n .$$

Dokaz. Neka su ispunjeni uslovi Leme. Tada

$$([B_A]_{(m,n)})^m S([B_A]_{(m,n)})^n = ([B_A]_{(m,n)})^m$$

$$S(B \cup B^2 \cup \ldots \cup B^{m+n} \cup B^m A B^n)^n$$

$$= ([B_A]_{(m,n)})^m S(B \cup B^2 \cup \ldots \cup B^{m+n} \cup B^m A B^n)$$

$$(B \cup B^2 \cup \ldots \cup B^{m+n} \cup B^m A B^n)^{n-1}$$

$$= ([B_A]_{(m,n)})^m (SB \cup SB^2 \cup \ldots \cup SB^{m+n} \cup SB^m AB^n)$$

$$(B \cup B^2 \cup \ldots \cup B^{m+n} \cup B^m AB^n)^{n-1}$$

$$= ([B_A]_{(m,n)})^m SB(B \cup B^2 \cup \ldots \cup B^{m+n} \cup B^m AB^n)^{n-1}$$

$$= ([B_A]_{(m,n)})^m SB(B \cup B^2 \cup \ldots \cup B^{m+n} \cup B^m AB^n)$$

$$(B \cup B^2 \cup \ldots \cup B^{m+n} \cup B^m AB^n)^{n-2}$$

$$= ([B_A]_{(m,n)})^m (SB^2 \cup SB^3 \cup \ldots \cup SB^{m+n+1} \cup SB^{m+1} AB^n)$$

$$(B \cup B^2 \cup \ldots \cup B^{m+n} \cup B^m AB^n)^{n-2}$$

$$= ([B_A]_{(m,n)})^m SB^2 (B \cup B^2 \cup \ldots \cup B^{m+n} \cup B^m AB^n)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$= ([B_A]_{(m,n)})^m SB^{n-1} ([B_A]_{(m,n)})$$

$$= ([B_A]_{(m,n)})^m (SB^n \cup SB^{n+1} \cup \ldots \cup SB^{m+2n-1} \cup SB^{m+n-1} AB^n)$$

$$= ([B_A]_{(m,n)})^m SB^n$$

$$= ([B_A]_{(m,n)})^{m-1} (B \cup B^2 \cup \ldots \cup B^{m+n} \cup B^m AB^n) SB^n$$

$$= ([B_A]_{(m,n)})^{m-1} (BS \cup B^2 S \cup \ldots \cup B^{m+n} S \cup B^m AB^n S) B^n$$

$$= ([B_A]_{(m,n)})^{m-1} (BS) B^n$$

$$\vdots$$

$$= (B \cup B^2 \cup \ldots \cup B^{m+n} \cup B^m AB^n)(B^{m-1} S) B^n$$

$$= (B^mS \cup B^{m+1}S \cup \ldots \cup B^{2m+n-1}S \cup B^mAB^{n+m-1}S)B^n$$

$$= (B^mS)B^n$$

$$= B^mSB^n \; .$$

Teorema 1.1. Neka je A (m,n)-ideal semigrupe S. Tada svaki (m,n)-ideal od A je (m,n)-ideal od S ako i samo ako za svaki podskup B (m,n)-ideala A je

(1.1) $$B^mSB^n \subset [B_A]_{(m,n)}$$

gde je

$$[B_A]_{(m,n)} = \bigcup_{i=1}^{m+n} B^i \cup B^mAB^n \; .$$

Dokaz. Neka je A (m,n)-ideal semigrupe S, B podskup od A i svaki (m,n)-ideal od A je (m,n)-ideal od S. Tada $[B_A]_{(m,n)}$ jeste (m,n)-ideal od A i

(1.2) $$([B_A]_{(m,n)})^m S ([B_A]_{(m,n)})^n \subset [B_A]_{(m,n)} \; .$$

Iz (1.2) na osnovu Leme 1.1. imamo da je ispunjeno (1.1).

Obratno, neka je za svaki podskup B (m,n)-ideala A semigrupe S ispunjeno (1.1) i neka je C (m,n)-ideal od A.

Tada je

$$C^mSC^n \subset [C_A]_{(m,n)} = C \cup C^2 \cup \ldots \cup C^{m+n} \cup C^mAC^n = C \; .$$

Dakle, C je (m,n)-ideal od S.

Posledica 1.1. Neka je A levi (desni) ideal semigrupe S. Tada svaki levi (desni) ideal od A je levi (desni) ideal od S ako i samo ako za svaki podskup B od levog (desnog) ideala A je

$$SB \subset B \cup AB \quad , \quad (BS \subset B \cup BA) \quad .$$

Posledica 1.2. Neka je A bi-ideal semigrupe S. Tada svaki bi-ideal od A je bi-ideal od S ako i samo ako za svaki podskup B bi-ideala A je

$$BSB \subset B \cup B^2 \cup BAB \quad .$$

Teorema 1.2. Neka je Q (m,n)-kvazi-ideal semigrupe S. Tada svaki (m,n)-kvazi-ideal od Q je (m,n)-kvazi-ideal od S ako i samo ako za svaki podskup D (m,n)-kvazi-ideala Q je

$$D^m S \subset [D_Q]_{(m,n)} \quad i \quad SD^n \subset [D_Q]_{(m,n)}$$

gde je

$$[D_Q]_{(m,n)} = \bigcup_{i=1}^{k} D^i \cup (D^m Q \cap QD^n) \quad , \quad k = \max(m,n) \quad .$$

Dokaz. Slično kao i za Teoremu 1.1.

Posledica 1.3. Neka je Q kvazi-ideal semigrupe S. Tada svaki kvazi-ideal od Q je kvazi-ideal od S ako i samo ako za svaki podskup D kvazi-ideala Q je

$$DS \subset D \cup (DQ \cap QD) \quad i \quad SD \subset D \cup (DQ \cap QD) \quad .$$

R. Croisot [11] razmatra (m,n)-regularne semigrupe. Semigrupa S je (m,n)-regularna ako

$$(\forall a \in S)(\exists x \in S)(a = a^m x a^n)$$

$m,n \in N \cup \{0\}$. Croisot je dokazao da se (m,n)-uslovi za $m+n > 1$ razbijaju na četiri skupa medjusobno ekvivalentnih uslova:

I Svi uslovi $(m,0)$, za $m \geqslant 2$.

II Svi uslovi $(0,n)$, za $n \geqslant 2$.

III Uslov $(1,1)$.

IV Svi uslovi (m,n), $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$, $m+n \geqslant 3$.

Neke karakterizacije (m,n)-regularnih semigrupa date su u [24]. K. Iséki [21] je dokazao sledeću teoremu kojom se karakterišu regularne [$(1,1)$-regularne] semigrupe pomoću levih i desnih ideala.

Teorema (K. Iséki). Neka je S semigrupa. Tada S je regularna ako i samo ako

$$R \cap L = RL$$

za svaki levi ideal L od S i za svaki desni ideal R od S.

Sličnu teoremu dokazao je L. Kovacs [23], za regularne prstene. Ovde mi uopštavamo Teoremu Isékija.

Teorema 1.3. Neka je S semigrupa. Tada S je (m,n)-regularna ako i samo ako

(1.3) $$(\forall R \in \mathbb{R}_{(m,0)})(\forall L \in \mathbb{L}_{(0,n)})(R \cap L = R^m L^n)$$

gde je $\mathbb{R}_{(m,0)}$ skup svih (m,0)-ideala semigrupe S i $\mathbb{L}_{(0,n)}$ skup svih (0,n)-ideala semigrupe S.

Dokaz. Ako je $m = n = 0$, tada je (1.3) ispunjeno, tj. svaka semigrupa je (0,0)-regularna. Ako je $m = 0$, $n \neq 0$, tada $R = S$, pa iz (1.3) imamo da je

$$L = S \cap L = S^m L^n \subset SL^n \subset L$$

tj.

S je (0,n)-regularna ako i samo ako $(\forall L \in \mathbb{L}_{(0,n)})$ $(L = SL^n)$ što je tačno (Teorema 1., [24]). Slično imamo da za $m \neq 0$, $n = 0$ važi

S je (m,0)-regularna ako i samo ako $(\forall R \in \mathbb{R}_{(m,0)})$ $(R = R^m S)$.

Za $m \neq 0$, $n \neq 0$ za proizvoljne $R \in \mathbb{R}_{(m,0)}$ i $L \in \mathbb{L}_{(0,n)}$ je

(1.4) $$R^m L^n \subset R \cap L .$$

Kako je S (m,n)-regularna, to za $a \in R \cap L$ je $a = a^m x a^n$, za neko $x \in S$. Odavde imamo

$$\begin{aligned} a &= a^m x a^n \\ &= a^{2m-1} x a^n x a^n \\ &= a^{3m-1} x a^n x a^n x a^n \\ &\vdots \\ &= a^{nm-(n-1)} (xa^n)^n \in R^{nm-(n-1)} L^n \subset R^m L^n \end{aligned}$$

Dakle,

$$\text{(1.5)} \qquad R \cap L \subset R^m L^n \ .$$

Iz (1.4) i (1.5) sledi (1.3).

Obratno, neka je ispunjeno (1.3). Tada je

$$\text{(1.6)} \qquad (\forall R \in \mathbb{R}_{(m,0)})(\forall L \in \mathbb{L}_{(0,n)})(R \cap L \subset RL) \ .$$

Za $R = [a]_{(m,0)}$, $L = S$ na osnovu (1.3) imamo

$$[a]_{(m,0)} \subset ([a]_{(m,0)})^m S$$

pa je

$$[a]_{(m,0)} \subset a^m S \qquad \text{(Lema 1.1)}$$

tj.

$$\text{(1.7)} \qquad [a]_{(m,0)} = a^m S \ .$$

Slično za $R = S$, $L = [a]_{(0,n)}$ je

$$\text{(1.8)} \qquad [a]_{(0,n)} = Sa^n \ .$$

Iz (1.6), (1.7) i (1.8) imamo

$$[a]_{(m,0)} \cap [a]_{(0,n)} = a^m S \cap Sa^n \subset a^m SSa^n \subset a^m Sa^n \ .$$

Dakle

$$a \in a^m Sa^n \ .$$

Time je teorema dokazana.

Za $m = n = 1$ u Teoremi 1.3. dobija se Teorema K. Isékija.

Uzimajući u obzir rezultate R. Croisota koji su navedeni u prvoj glavi zaključujemo da je Teorema 1.3. od interesa samo u slučajevima

a) $m = 0$, $n = 1$

b) $m = 1$, $n = 0$

c) $m = 2$, $n = 0$

d) $m = 1$, $n = 1$

e) $m = 2$, $n = 1$.

Posledica 1.4. Neka je S semigrupa. Tada S je (m,n)-regularna ako i samo ako

$$(\forall a \in S)([a]_{(m,0)} \cap [a]_{(0,n)} = ([a]_{(m,0)})^m([a]_{(0,n)})^n$$

gde je $[a]_{(m,0)}$ glavni $(m,0)$-ideal semigrupe S generiran elementom $a \in S$ i $[a]_{(0,n)}$ je glavni $(0,n)$-ideal od S.

Za $m = n = 1$ u Posledici 1.4 dobija se Teorema S. Lajosa [29].

Navodimo bez dokaza još jednu teoremu kojom se karakterišu (m,n)-regularne semigrupe.

Teorema 1.4. Neka je S semigrupa. Tada S je (m,n)-regularna ako i samo ako

$$(\forall a \in S)([a]_{(m,n)} = a^m S a^n) \quad .$$

Posledica 1.5. [29]. Neka je S semigrupa. Tada S je regularna ako i samo ako

$$(\forall a \in S)([a]_{(1,1)} = aSa) \quad .$$

Teoreme 1.3 i 1.4 pokazuju, dakle, da postoji prirodna veza izmedju (m,n)-ideala i (m,n) regualarnih semigrupa.

2. $(m,n)^*$-IDEALI

U ovoj tački uvodimo pojam $(m,n)^*$-ideala i navodimo neka njegova svojstva.

Definicija 2.1. Podsemigrupa A semigrupe S je $(m,n)^*$-ideal od S ako je

$$A^mS \subset A \qquad \text{i} \qquad SA^n \subset A$$

za $m,n \in N$.

Dvostrani ideal je $(1,1)^*$-ideal.

Primer 2.1. Semigrupa S je data tablicom

	0	e	f	a	b
0	0	0	0	0	0
e	0	e	0	0	0
f	0	0	f	0	b
a	0	a	0	0	e
b	0	0	b	f	0

.

(a)

Uzmimo skup $A = \{0,a\} \subset S$. Ovaj skup je podsemigrupa od S, jer je $A^2 = \{0\} \subset A$. Dalje, A nije ideal od S jer

$$AS = \{0,a\}\{0,a,f,a,b\} = \{0,e,a\} \not\subset A .$$

Kako je

$$A^2S = \{0\}S = \{0\} \subset \{0,a\}$$

$$SA^2 = S\{0\} = \{0\} \subset \{0,a\}$$

to je A $(2,2)^*$-ideal od S.

(b)

Uzmimo skup $B = \{0,e,a\}$. Kako je $B^2 = B$, to B jeste semigrupa.

B nije $(1,1)^*$-ideal jer $SB = \{0,a,f\} \not\subset \{0,e,a\}$. Medjutim

$$BSB = \{0,e,a\} = B$$

pa je B $(1,1)$-ideal.

Uzimajući u obzir definiciju (m,n)-ideala (I 2.5) imamo da važi: podsemigrupa A semigrupe S je $(m,n)^*$-ideal ako i samo ako A jeste istovremeno $(m,0)$-ideal i $(0,n)$-ideal, $m,n \in N$.

Navodimo bez dokaza neka tvrdjenja koja slede neposredno iz Definicije 2.1.

(1) Presek bilo kojeg skupa $(m,n)^*$-ideala je $(m,n)^*$-ideal ili prazan skup.

(2) Neka je $k \in N$ i A $(m,n)^*$-ideal semigrupe S. Tada A^k je $(m,n)^*$-ideal od S.

(3) Neka je A podskup semigrupe S. Za najmanji $(m,n)^*$-ideal od S koji sadrži A kažemo da je generiran sa A i označavamo ga sa $[A]_{(m,n)^*}$. Tada je

$$[A]_{(m,n)^*} = \bigcup_{i=1}^{m+n-1} A^i \cup A^m S \cup SA^n \cup SA^{m+n-1}S \quad .$$

(4) Svaki $(m,n)^*$-ideal semigrupe S generiran elementom $a \in S$ je

$$[a]_{(m,n)^*} = \bigcup_{i=1}^{m+n-1} \{a^i\} \cup a^m S \cup Sa^n \cup Sa^{m+n-1}S \quad .$$

(5) Svaki $(m,n)^*$-ideal je (m,n)-ideal, $((m,n)$-kvazi-ideal$)$.

3. NEKE OSOBINE $(m,n)^*$-IDEALA

U ovoj tački dokazujemo razna svojstva $(m,n)^*$-ideala.

Teorema 3.1. Neka je S semigrupa. Tada S je prosta semigrupa ako i samo ako S nema pravih $(m,n)^*$-ideala.

Dokaz. Neka je S prosta semigrupa. Tada

(3.1) $$(\forall x \in S)(S = SxS) \quad .$$

Neka je A pravi $(m,n)^*$-ideal od S. Za $c \in A$ na osnovu (3.1) imamo da je

$$S = Sc^{m+n-1}S$$

pa je

$$S = Sc^{m+n-1}S \subset SA^{m+n-1}S \subset A \subset A \quad .$$

Dakle, $A = S$.

Obratno, neka semigrupa S ne sadrži prave $(m,n)^*$-ideale. Tada S ne sadrži prave dvostrane ideale, pa je S prosta semigrupa (I 2.1).

Posledica 3.1. Grupa ne sadrži prave $(m,n)^*$-ideale.

Teorema 3.2. Neka je A podsemigrupa semigrupe S i M je $(m,n)^*$-ideal od S. Tada presek $A \cap M$ je $(m,n)^*$-ideal od A, gde je $A \cap M \neq \emptyset$.

Dokaz. Kako su A i M podsemigrupe od S i $A \cap M \neq \emptyset$, to je i $A \cap M$ podsemigrupa od S. Dalje,

$$(M \cap A)^m A \subset M^m S \subset M \quad .$$

$$(M \cap A)^m A \subset A^m A \subset A$$

pa je

$$(M \cap A)^m A \subset M \cap A \quad . \tag{3.2}$$

Slično se dokazuje da je

$$A(M \cap A)^n \subset M \cap A \quad . \tag{3.3}$$

Iz (3.2) i (3.3) sledi tvrdjenje.

Teorema 3.3. Neka je S semigrupa, A $(0,n)$-ideal od S, B $(m,0)$-ideal od S i $AB = BA$. Tada AB

jeste $(m,n)^*$-ideal od S.

Dokaz. Neka su ispunjeni uslovi teoreme. Neposredno imamo da je AB podsemigrupa od S. Zatim,

$$(AB)^m S = A^m B^m S \subset A^m B \subset AB$$

$$S(AB)^n = SA^n B^n \subset AB^n \subset AB \ .$$

Dakle, AB jeste $(m,n)^*$-ideal od S.

Posledica 3.2. Neka je S semigrupa. Ako su L levi i R desni ideal od S i $RL = LR$. Tada RL jeste dvosrtani ideal od S.

Posledica 3.3. (S. Lajos [27]). Neka $m,n \in N$ i neka je S semigrupa, A $(0,n)$-ideal od S, B $(m,0)$-ideal od S i $AB = BA$. Tada AB jeste (m,n)-ideal od S.

Dokaz. Sledi neposredno na osnovu Teoreme 3.3. i tvrdjenja (5) iz tačke 2.

Sledeća teorema daje dovoljan uslov da je $(m,n)^*$-ideal proizvoljnog $(m,n)^*$-ideala $(m,n)^*$-ideal semigrupe.

Teorema 3.4. Neka je S semigrupa, A $(m,n)^*$-ideal od S, B $(m,n)^*$-ideal od A i $B^2 = B$. Tada B jeste $(m,n)^*$-ideal od S.

Dokaz. Iz $B^2 = B$ imamo $B^m = B^m B^m$, pa

$$B^m S = B^m (B^m S) \subset B^m A^m S \subset B^m A \subset B \ .$$

Slično je $SB^n \subset B$. Dakle, B jeste $(m,n)^*$-ideal od S.

Posledica 3.4. [8]. Neka je S semigrupa, A dvostrani ideal od S, B dvostrani ideal od A i $B^2 = B$. Tada B jeste dvostrani ideal od S.

Dokaz. Iz Teoreme 3.4 za $m = n = 1$.

Specijalno za poluproste [1)] semigrupe važi

Posledica 3.5. [8]. Neka je S poluprosta semigrupa. Tada svaki dvostrani ideal proizvoljnog ideala je ideal semigrupe S.

Na osnovu posledice 3.5. neposredno sledi

Teorema 3.5. (Munn [36]). Članovi idealnog reda poluproste semigrupe S su ideali semigrupe S. Posebno, u poluprostoj semigrupi ne postoji razlika izmedju glavnih redova i kompozicionih redova.

$J(a)/I(a)$, $(a \in S,\ I(a) = J(a) - J_a)$, je faktorsemigrupa Reesa koju nazivamo glavnim faktorom.

[1)] Semigrupu S nazivamo poluprostom ako svaki njen glavni faktor jeste O-prost ili prost.

Glavnim redom semigrupe S naziva se niz

$$\text{(a)} \qquad S = S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_m \supset S_{m+1} = \emptyset$$

ideala S_i $(i = 1,2,\ldots,m)$, pri čemu ne postoji ideal semigrupe S koji je strogo izmedju S_i i S_{i+1}, $(i = 1,2,\ldots,m)$. Niz (a) naziva se idealnim redom semigrupe S ako je svaki S_{i+1} ideal od S_i, $(i = 1,2,\ldots,m-1)$. Kažemo da je jedan idealan red zamenljiv drugim ako svaki član drugog reda jeste i član prvog reda. Idealan red je kopozicioni ako nema sopstvenih zamena [8].

Kako je regularna (intra-regularna) semigrupa poluprosta, to neposredno imamo

Posledica 3.6. Neka je S regularna (intra-regularna) semigrupa. Tada svaki dvostrani ideal proizvoljnog ideala semigrupe S je ideal semigrupe S.

Sledeća teorema daje potrebne i dovoljne uslove da je $(m,n)^*$-ideal proizvoljnog $(m,n)^*$-ideala semigrupe $(m,n)^*$-ideal semigrupe.

Teorema 3.6. Neka je I $(m,n)^*$-ideal semigrupe S. Svaki $(m,n)^*$-ideal od I jeste $(m,n)^*$-ideal od S ako i samo ako za svaki podskup A od I je

$$(3.4) \qquad A^m S \subseteq [A_I]_{(m,n)^*} \quad \text{i} \quad SA^n \subset [A_I]_{(m,n)^*}$$

gde je

$$[A_I]_{(m,n)^*} = a \cup A^2 \cup \ldots \cup A^{m+n-1} \cup A^m I \cup IA^n \cup IA^{m+n-1} I \, .$$

Dokaz. Slično kao i za Teoremu 1.1.

Posledica 3.7. (D.N.Krgović [25]). Neka je I dvostrani ideal semigrupe S. Svaki dvostrani ideal od I je dvostrani ideal od S ako i samo ako za svaki podskup A od I je

$$AS \subset A \cup AI \cup IA \cup IAI \, , \qquad A \subset AI \cup IA \cup IAI \, .$$

4. LOKALNO I UNIVERZALNO MINIMALNI $(m,n)^*$-IDEALI

Ovde uvodimo pojam lokalno i univerzalno minimalnog $(m,n)^*$-ideala i karakterišemo π-semigrupe i homogrupe.

Definicija 4.1. $(m,n)^*$-ideal semigrupe S je lokalno minimalan ako ne sadrži svoje prave $(m,n)^*$-ideale.

Neposredno na osnovu Teoreme 3.1. imamo

(a) Lokalno minimalni $(m,n)^*$-ideali semigrupe S su proste podsemigrupe od S.

(b) Lokalno minimalan dvostrani ideal semigrupe S je prosta podsemigrupa od S.

Teorema 4.1. Neka je A $(m,n)^*$-ideal semigrupe S. Tada A je lokalno minimalan $(m,n)^*$-ideal od S ako i samo ako A jeste minimalan $(m,n)^*$-ideal od S.

Dokaz. Neka je S semigrupa i A lokalno minimalan $(m,n)^*$-ideal od S. Ako je B $(m,n)^*$-ideal od S i B je sadržan u A $(B \neq A)$, tada na osnovu Teoreme 3.2. B jeste $(m,n)^*$-ideal od A, jer $B = A \cap B$. Medjutim, A nema pravih $(m,n)^*$-ideala, pa je A minimalan $(m,n)^*$-ideal od S.

Obratno sledi neposredno na osnovu Teoreme 3.1.

Definicija 4.2. $(m,n)^*$-ideal semigrupe S je univerzalno minimalan u S ako je sadržan u svakom $(m,n)^*$-idealu od S.

Jasno da je univerzalno minimalan $(m,n)^*$-ideal od S minimalan.

Teorema 4.2. Neka je P podsemigrupa semigrupe S. Tada P jeste prosta semigrupa i P je dvostrani ideal od S ako i samo ako P jeste univerzalno minimalan $(m,n)^*$-ideal od S.

Dokaz. Neka su ispunjeni uslovi teoreme. Kako je P dvostrani ideal, to je P $(m,n)^*$-ideal od S. Neka je A proizvoljan $(m,n)^*$-ideal od S. Tada je

$$(4.1) \qquad \begin{aligned} A^m P \subset A^m S \subset A \\ PA^n \subset SA^n \subset A \quad . \end{aligned}$$

Dalje je

$$(A^m P)^m P \subset A^m P \qquad \text{i} \qquad P(A^m P)^n \subset PA^n$$

pa je $A^m P$ $(m,n)^*$-ideal od P. Slično je PA^n $(m,n)^*$-ideal od P. Odavde na osnovu Teoreme 3.1. je

$$A^m P = P = PA^n$$

pa uzimajući u obzir (4.1) i Definiciju 4.2. imamo da se P sadrži u svakom $(m,n)^*$-idealu od S.

Obratno, neka je P univerzalno minimalan $(m,n)^*$-ideal od S. Tada P jeste minimalan $(m,n)^*$-ideal od S.

Kako je P^2 $(m,n)^*$-ideal od S (tvrdjenje (2), tačka 2), to je

$$P = P^2 . \tag{4.2}$$

Za proizvoljan $a \in P$ je $[a]_{(m,n)^*}$ ideal od S koji je sadržan u P, pa je

$$P = [a]_{(m,n)^*} . \tag{4.3}$$

Uzimajući u obzir (4.2) i (4.3) imamo

$$PaP \subset [a]_{(m,n)^*} = P = P[a]_{(m,n)^*}P \subset PaP .$$

Dakle, P je prosta semigrupa. Da je P dvostrani ideal od S sledi neposredno.

Posledica 4.1. Neka je G podgrupa semigrupe S. Ako je G dvostrani ideal od S, tada G jeste univerzalno minimalan $(m,n)^*$-ideal od S, i obratno.

Posledica 4.2. (S.Lajos [28]). Neka je G podgrupa semigrupe S. Ako je G dvostrani ideal od S, tada G jeste univerzalno minimalan (m,n) -ideal od S.

Dokaz. Sledi neposredno na osnovu Posledice 4.1. i tvrdjenja (5) iz tačke 2.

Posledica 4.3. [34]. Neka je G podgrupa semigrupe S. Ako je G vdostrani ideal od S. Tada G jeste univerzalno minimalan dvostrani ideal od S.

Naravno da važi i obrat Posledice 4.3.

Definicija 4.3. Semigrupa S je π-semigrupa ako sadrži prostu podsemigrupu kao dvostrani ideal.

Posledica 4.4. π-semigrupa ima jedinstvenu prostu semigrupu kao dvostrani ideal.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka su P i Q dve različite proste podsemigrupe semigrupe S i neka su P i Q dvostrani ideali od S. Tada $(PQ)^2 \subset PQ$. Dakle, PQ je podsemigrupa od S. Dalje je

$$PQ \subset PS \subset P$$

$$PQ \subset SQ \subset Q$$

i

$$(PQ)P \subset (PQ)S = P(QS) \subset PQ$$

$$P(PQ) \subset S(PQ) = (SP)Q \subset PQ$$

pa je

(1) $$PQ = P \, .$$

Slično je

(2) $$PQ = Q \, .$$

Iz (1) i (2) imamo

$$P = Q$$

što je nemoguće.

Primer 4.1. Semigrupa S svih preslikavanja skupa X u X je π-semigrupa.

Lako se proverava da je

$$A = \{f \in S / (\exists a \in X)\ (f(x) = a)\}$$

dvostrani ideal od S i da je A prosta podsemigrupa od S.

Semigrupa S je *homogrupa* ako i samo ako S sadrži podgrupu koja je dvostrani ideal od S [9], [58], [59], [60].

Propozicija 4.1. Svaka homogrupa je π-semigrupa.

Obrat Propozicije 4.1 ne važi, jer nije svaka prosta semigrupa grupa.

U I 1.7 smo naveli da je grupa istovremeno levo i desno prosta semigrupa. Navešćemo sada primer proste semigrupe koja nije niti levo prosta niti desno prosta semigrupa.

Primer 4.2. Neka je R^+ skup pozitivnih realnih brojeva. Definišimo na $A = R^+ x R^+$ operaciju

$$(a,b)(c,d) = (ac, bc+d)\ .$$

Neposredno se verifikuje da je A semigrupa u odnosu na definisanu operaciju.

1° Semigrupa A je prosta semigrupa. Zaista, za proizvoljne $(a,b),(c,d) \in A$ dokažimo da postoje $(x,y),(u,v) \in A$ da je

$$(x,y)(a,b)(u,v) = (c,d)$$

tj.

$$(4.4) \qquad (xau, yau+bu+v) = (c,d) \ .$$

Jednakost (4.4) je ekvivalentna sa

$$xau = c$$

$$yau+bu+v = d \ .$$

Neka je y proizvoljan iz R^+. Tada

$$u = \frac{c}{ax} \quad , \qquad v = d - (ay+b)\,u$$

tj.

$$u = \frac{c}{ax} \quad , \qquad v = d - \frac{(ax+b)\,c}{ax}$$

Uzmemo li da je $x > \frac{(ay+b)\,c}{ad}$ imamo da je $v > 0$. Dakle,

$$A(a,b)A = A$$

tj. A jeste prosta semigrupa.

2° Semigrupa A nije levo prosta. Zaista, jednačina

$$(x,y)(a,b) = (c,d)$$

nema rešenje za svaki $(a,b),(c,d)$. Jer iz

$$ax = c$$

$$ay+b = d$$

imamo

$$x = \frac{c}{a}$$

$$y = \frac{d-b}{b}$$

Jasno da za $d > b$ ovaj sistem nema rešenje, pa A nije levo prosta semigrupa.

3° Takodje jednačina

$$(a,b)(x,y) = (c,d)$$

nema rešenje za svaki $(a,b),(c,d)$. Jer jednačine

$$ax = c$$

$$bx + y = d$$

tj.

$$x = \frac{c}{a}$$

$$y = d - \frac{bc}{a}$$

nemaju rešenja za $ad < bc$, pa A nije niti desno prosta semigrupa.

Teorema 4.3. Neka je S semigrupa. Tada S je π-semigrupa ako i samo ako svaki $(m,n)^*$-ideal od S jeste π-semigrupa.

Dokaz. Neka je S π-semigrupa, P prosta podsemigrupa od S i A proizvoljan $(m,n)^*$-ideal od S. Tada

$$A^m P \subset SP \subset P$$

$$A^m P \subset A^m S \subset A$$

pa je

$$A^m P \subset A \cap P .$$

Dakle, presek $A \cap P$ je neprazan skup. Dalje, na osnovu Teoreme 3.2. $A \cap P$ jeste $(m,n)^*$-ideal od P. Odavde na osnovu Teoreme 3.1. je

$$A \cap P = P .$$

Odavde imamo da semigrupa A sadrži prostu semigrupu P kao dvostrani ideal, pa je A π-semigrupa.

Obratno, neka je proizvoljan $(m,n)^*$-ideal A semigrupe S π-semigrupa. Tada postoji prosta semigrupa P koja je dvostrani ideal od A, pa je

$$PS \subset P \quad \text{i} \quad SP \subset P .$$

Dakle, S jeste π-semigrupa.

Posledica 4.5. π-semigrupa S je prosta semigrupa ako i samo ako S ne sadrži prave $(m,n)^*$-ideale.

Sledeća teorema čiji dokaz izostavljamo karakteriše homogrupe pomoću $(m,n)^*$-ideala.

Teorema 4.4. Neka je S semigrupa. Tada S je homogrupa ako i samo ako svaki $(m,n)^*$-ideal od S jeste homogrupa.

Posledica 4.6. Homogrupa S je grupa ako i samo ako S ne sadrži prave $(m,n)^*$-ideale.

GLAVA III

SLABO KOMUTATIVNE SEMIGRUPE

1. DEFINICIJA SLABO KOMUTATIVNE SEMIGRUPE

U ovoj glavi će biti reči, uglavnom, o slabo komutativnim semigrupama, pomoću kojih ćemo, izmedju ostalog, dati neke nove karakterizacije za semilatise grupa. Dalje, ispitivaćemo semiprimarne slabo komutativne semigrupe, arhimedove semigrupe i ekstenziju slabo komutativne arhimedove semigrupe sa idempotentom.

Ė.C. Ljapin [34] razmatra razna svojstva semigrupa sa komutatornim uslovima. Semigrupa S zadovoljava komutatorne uslove ako za svaki $a,b \in S$ postoje L_{ab}, $R_{a,b}$ da je

$$ab = L_{a,b}a \ , \qquad ab = bR_{a,b} \ .$$

Jasno da svaka komutativna semigrupa zadovoljava komutatorne uslove. Ove uslove zadovoljavaju i semigrupe koje su potopljive u grupu, tj. svaka semigrupa S za koju postoji nadgrupa G da je

$$(\forall\ g \in G)(g^{-1}Sg \in S) \ .$$

Zaista, u tom slučaju je

$$L_{a,b} = aba^{-1} \quad , \quad R_{a,b} = b^{-1}ab \ .$$

Bitno širu klasu, od klase semigrupa sa komutatornim uslovima, koja ovu obuhvata, čini klasa tzv. slabo komutativnih semigrupa, koje je definisao M. Petrich [40]. Klasa slabo komutativnih semigrupa obuhvata i klasu jako reverzibilnih semigrupa, (G. Thierrin [58]) o kojima će biti reči u tački 11. ove glave. Slabo komutativne semigrupe su kasnije tretirane u radovima J. Sedlocka [49], B. Pondelička [44] i M. Gowda Seetharama [16].

Definicija 1.1. (M. Petrich [40]). Semigrupa S je slabo komutativna (weakly commutative) ako za svaki $a,b \in S$ postoje $x,y \in S$ i $n \in N$ da je

$$(ab)^n = xa = by \tag{1.1}$$

2. SEMIPRIMARNE SEMIGRUPE

Ovde uvodimo sledeću

Definicija 2.1. Ideal I semigrupe S je semiprimaran ako

$$(\forall a,b \in S)(ab \in I \Rightarrow (\exists m \in N)(a^m \in I) \vee (\exists n \in N)(b^m \in I)).$$

Semigrupa S je semiprimarma ako je svaki njen ideal semiprimaran.

Jasno, svaka primarna semigrupa je semiprimarna.

Sledeća teorema karakteriše semiprimarne semigrupe.

Teorema 2.1. Neka je S semigrupa. Tada sledeći uslovi su medjusobno ekvivalentni:

(i) S je semiprimarna.

(ii) $(\forall a,b \in S)((\exists m \in N)(a^m \in SabS) \vee (\exists n \in N)(b^n \in SabS))$.

(iii) Svaki glavni ideal od S je semiprimaran.

Dokaz. *(i)* $\Rightarrow$ *(iii)*. Neka je S semiprimarna semigrupa. Tada za $a,b \in S$ ideal $SabS$ je semiprimaran i kako je

$$a^2b^2 = a(ab)b \in SabS$$

to imamo

$$(\exists m \in N)((a^2)^m \in SabS) \vee (\exists n \in N)((b^2)^n \in SabS) \ .$$

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*. Neka je ispunjeno *(ii)* i neka je $J(x)$ glavni ideal semigrupe S generiran elementom $x \in S$. Tada imamo

$$\begin{aligned} ab \in J(x) &\Rightarrow SabS \subset J(x) \\ &\Rightarrow (\exists m \in N)(a^m \in J(x)) \vee \\ &\quad\ \vee (\exists n \in N)(b^n \in J(x)) \ . \end{aligned}$$

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*. Sledi neposredno .

3. r - SEMIGRUPE

Najpre ćemo definisati radikal podskupa semigrupe.

<u>*Definicija 3.1.*</u> Radikal podskupa A semigrupe S, u oznaci $\mathrm{rad}(A)$ je skup svih $a \in S$ da je neki stepen od a u A, tj.

$$\mathrm{rad}(A) = \{a \in S \mid (\exists n \in N)(a^n \in A)\}$$

Jasno da je pojam radikala skupa uopštenje poznatog pojma radikala ideala.

<u>*Primedba 3.1.*</u> Radikal ideala nije uvek ideal. Na primer, uzmimo semigrupu S datu tablicom

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	a	a	a
c	a	a	c	a	e
d	a	d	a	a	b
e	a	a	e	c	a

Za ideal $I = \{a\}$ je $\mathrm{rad}(I) = \{a,d,e\}$. Medjutim, $\mathrm{rad}(I)$ nije ideal, jer $de = b \notin \mathrm{rad}(I)$.

Primedba 3.2. Postoji podskup A semigrupe S koji nije podsemigrupa od S, (dakle nije ideal od S), a da je rad(A) ideal od S. Na primer, uzmimo semigrupu S datu tablicom

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	e
b	a	a	a	a	e
c	a	a	b	a	e
d	a	a	b	b	e
e	e	e	e	e	a

Podskup $A = \{a,c,d\}$ od S nije podsemigrupa od S, pa samim tim nije ideal od S. Medjutim, $rad(A) = \{a,b,c,e\}$ jeste ideal od S.

Sada možemo uvesti sledeću

Definicija 3.2. Podskup A semigrupe S je r - skup u S ako je rad(A) ideal od S. Ako je A ideal od S, onda ga nazivamo r-idealom.

Teorema 3.1. Podskup A semigrupe S je r-skup u S ako i samo ako za proizvoljne $m \in N$, $s \in S$ iz $a^m \in A$ sledi $(as)^n \in A$ i $(sa)^k \in A$, za neke $n, k \in N$.

Dokaz. Neka je A r-skup u S. Tada rad(A) je ideal od S, pa za $a^m \in A$ i $s \in S$ je $as \in rad(A)$. Odavde je $(as)^n \in A$, za neki $n \in N$. Slično je $(sa)^k \in A$, za neki $k \in N$.

Obratno, za $a \in rad(A)$ postoji $m \in N$ da je $a^m \in A$, pa za proizvoljan $s \in S$ imamo da je $(as)^n \in A$, za neki $n \in N$. Dakle, $as \in rad(A)$. Slično je $sa \in rad(A)$.

Posledica 3.1. Ideal I semigrupe S je r-ideal ako i samo ako za proizvoljne $m \in N$, $s \in S$ iz $a^m \in I$ sledi $(as)^n \in I$, za neki $n \in N$.

Definicija 3.3. Semigrupa S je r-semigrupa ako je svaki njen ideal r-ideal.

Primedba 3.3. *(i)* Komutativna semigrupa je r-semigrupa.

(ii) Intra-regularna semigrupa je r-semigrupa.

Teorema 3.2. Neka je S r-semigrupa. Tada radikal primarnog ideala semigrupe S je kompletno izolovan ideal.

Dokaz. Neka je I primaran ideal r-semigrupe S. Tada rad(I) je ideal od S. Pretpostavimo suprotno, tj. da rad(I) nije kompletno izolovan ideal. Tada postoje

$a,b \in S$ da $ab \in rad(I)$, $a \notin rad(I)$, $b \notin rad(I)$.
Neka je n najmanji prirodan broj da je $(ab)^n \in I$. Jasno da je $n > 1$, jer $ab \notin I$. Kako je $(ab)^{n-1}(ab) \in I$ i $a^m \notin I$, $b^m \notin I$, za svaki $m \in N$ imamo da $(ab)^{n-1}a \in I$.

Medjutim, $(ab)^{n-1} \notin I$, (jer je n najmanji takav broj da je $(ab)^n \in I$). Dakle, $a^m \in I$, za neki $m \in N$, što je nemoguće.

Poznato je sledeće tvrdjenje:

Lema 3.1. Neka je I ideal semigrupe S. Tada I je izolovan ideal ako i samo ako I jeste presek kompletno izolovanih ideala [41].

Na osnovu Leme 3.1. i Posledice 3.1. imamo

Lema 3.2. Neka je I ideal r-semigrupe S. Tada $rad(I)$ je presek kompletno izolovanih ideala.

Lema 3.3. Neka je I ideal semigrupe S. Tada I jeste izolovan ako i samo ako $I = rad(I)$.

Dokaz. Neka je I izolovan ideal semigrupe S. Za $x \in rad(I)$ postoji $n \in N$ da je $x^n \in I$. Odavde imamo da $x \in I$. Dakle, $rad(I) \subset I$. Kako važi i suprotna inkluzija, to je $I = rad(I)$.

Obratno, neka je $I = rad(I)$. Za $x^2 \in I$ imamo da $x \in rad(I)$, pa je I izolovan ideal.

Primedba 3.4. Lema 3.3 je dokazana u [10] za radikal komutatitnog prstena, ali je u dokazu korišćena Zornova lema.

N. Lal [30], [31], [32], razmatra semiprimarne semigrupe. Da ne bi došlo do kolizije sa Definicijom 2.1. mi ćemo semiprimarne semigrupe u smislu definicije H. Lala nazivati radikalno semiprimarnim ili kraće r-semiprimarnim.

Definicija 3.4. Ideal I semigrupe S je r-semiprimaran ako njegov radikal je kompletno izolovan ideal. Semigrupa S je r-semiprimarna ako svaki njen ideal je r-semiprimaran [30].

Klasa svih r-semiprimarnih semigrupa je podklasa klase svih semiprimarnih semigrupa, ustvari važi:

Teorema 3.3. Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi medjusobno ekvivalentni:

(i) S je r-semiprimarna.

(ii) S je semiprimarna r-semigrupa.

(iii) S je r-semigrupa u kojoj su kompletno izolovani ideali totalno uredjeni u odnosu na inkluziju.

Dokaz. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii).* Neka je semigrupa S r-semiprimarna. Tada za $a,b \in S$ je $\mathrm{rad}(SabS)$ kompletno izolovan ideal i kako je

$$(ba)^2 = b(ab)a \in SabS$$

to je

$$ba \in rad(SabS)$$

pa je

$$a \in rad(SabS) \vee b \in rad(SabS)$$

tj.

$$(\exists m \in N)(a^m \in SabS) \vee (\exists n \in N)(b^n \in SabS)$$

pa na osnovu Teoreme 2.1. S jeste semiprimarna semigrupa.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)*. Neka je ispunjeno *(ii)* i neka su I_1, I_2 kompletno izolovani ideali semigrupe S. Pretpostavimo suprotno, tj. $I_1 \not\subset I_2$, $I_2 \not\subset I_1$. Tada postoje $a \in I_1 \setminus I_2$, i $b \in I_2 \setminus I_1$, pa $ab \in I_1 \cap I_2$, $a \notin I_1 \cap I_2$, $b \notin I_1 \cap I_2$. Kako je $I_1 \cap I_2$ izolovan ideal, (Lema 3.1), to na osnovu Leme 3.3, imamo da je

$$(3.1) \qquad I_1 \cap I_2 = rad(I_1 \cap I_2) \ .$$

Kako je $a^m \in SabS$, za neko $m \in N$, (Teorema 2.1); slučaj $b^n \in SabS$ se raspravlja na sličan način, to imamo

$$\begin{aligned} ab \in rad(I_1 \cap I_2) &\Rightarrow J(ab) \subseteq rad(I_1 \cap I_2) \\ &\Rightarrow SabS \subseteq rad(I_1 \cap I_2) \\ &\Rightarrow a^m \in rad(I_1 \cap I_2) \\ &\Rightarrow a \in rad(I_1 \cap I_2) \ . \end{aligned}$$

Odavde na osnovu (3.1) imamo da je $I_1 \cap I_2$ kompletno izolovan ideal, tj. iz $ab \in I_1 \cap I_2$ sledi $a \in I_1 \cap I_2$ ili $b \in I_1 \cap I_2$, što je nemoguće.

(iii) ⟹ *(i)*. Neka su kompletno izolovani ideali semigrupe S totalno uredjeni i I proizvoljan ideal od S. Kako je $rad(I)$ ideal, jasno izolovan, to na osnovu Leme 3.1. je $rad(I) = \bigcap I_i$, $(I \subset I_i$, I_i su kompletno izolovani ideali). Neka $a \notin \bigcap I_i$; $b \notin \bigcap I_i$. Tada postoje komoletno izolovani ideali I_j, I_k da $a \notin I_j$, $b \notin I_k$. Po pretpostavci je $I_j \subset I_k$ ili $I_k \subset I_j$. Uzmimo da je $I_j \subset I_k$. Tada $a \notin I_j$ i $b \notin I_j$, (jer $b \notin I_k$). Kako je I_j kompletno izolovan ideal, to $ab \notin I_j$. Odavde imamo da $ab \notin \bigcap I_i$. Kontrapozicijom dobijamo da je $\bigcap I_i = rad(I)$ kompletno izolovan ideal. Dakle, S je r-semiprimarna semigrupa.

<u>*Primedba 3.5.*</u> Teorema 3.3. je uopštenje rezultata H. Lala [30], [31], [32].

<u>*Posledica 3.2.*</u> Neka je S r-semigrupa. Tada su sledeći uslovi medjusobno ekvivalentni:

(i) S je r-semiprimarna.

(ii) S je semiprimarna.

(iii) Kompletno izolovani ideali iz S su totalno uredjeni.

Definicija 3.5. [49]. Semigrupa S je levo slabo komutativna ako za svaki $a,b \in S$ postoje $x \in S$ i $n \in N$ da je $(ab)^n = bx$.

Teorema 3.4. Levo slabo komutativna semigrupa je r-semigrupa.

Dokaz. Neka je I ideal levo slabo komutativne semigrupe S, $a^n \in I$, za neki $n \in N$ i b proizvoljan element iz S.

Tada postoje $m \in N$ i $x \in S$ da je

$$(ba)^m = ax \tag{3.2}$$

Za a i x postoje $x_1 \in S$ i $m_1 \in N$ da je

$$(xa)^{m_1} = ax_1 \tag{3.3}$$

Iz (3.2) i (3.3) imamo

$$\begin{aligned}(ba)^{m_1 m+m} &= [(ba)^m]^{m_1+1}\\ &= (ax)^{m_1+1}\\ &= a(xa)^{m_1}x\\ &= a(ax_1)x\\ &= a^2x_1x .\end{aligned}$$

Dakle,

$$(3.4) \qquad (ba)^{m_1 m+m} = a^2 x_1 x \ .$$

Za x_1x i a^2 postoje $x_2 \in S$ i $m_2 \in N$ da je

$$(3.5) \qquad (x_1 x a^2)^{m_2} = a^2 x_2 \ .$$

Iz (3.4) i (3.5) imamo

$$\begin{aligned}(ba)^{m_2(m_1 m+m)+m_1 m+m} &= \left[(ba)^{m_1 m+m}\right]^{m_2+1} \\ &= (a^2 x_1 x)^{m_2+1} \\ &= a^2 (x_1 x a^2)^{m_2} x_1 x \\ &= a^2 (a^2 x_2) x_1 x \\ &= a^4 x_2 x_1 x \ .\end{aligned}$$

Nastavljajući imamo da je

$$(3.6) \qquad (ba)^s = a^{2^n} x_n x_{n-1} \ldots x_1 x$$

za neke $x_1, x_2, \ldots, x_n \in S$ i

$$s = m(1 + \sum_{i=1}^{m} m_i + \sum_{1 \leq i<j<n} m_i m_j + \ldots + \sum_{1 \leq i<j<\ldots<r<n} m_i m_j \ldots m_r + \prod_{i=1}^{n} m_i)$$

gde su m i m_i, $(i = 1,2,\ldots,n)$ postojeći brojevi kao u relacijama (3.2), (3.3), (3.5) i (3.6). Iz (3.6) sledi da $(ba)^s \in I$, pa na osnovu Posledice 3.1. sledi da je I r-ideal od S

4. ARHIMEDOVE SLABO KOMUTATIVNE SEMIGRUPE

Označimo sa π klasu svih slabo komutativnih semigrupa.

Lema 4.1. Neka je $S \in \pi$. Tada svaki izolovan ideal semigrupe S je dvostrani.

Dokaz. Neka je $S \in \pi$ i R njen desni izolovan ideal. Za proizvoljne $a \in R$, $b \in S$ postoje $x,y \in S$ i $n \in N$ da je

$$(ba)^n = ax \in R$$

pa je $ba \in R$. Slično važi i za levi ideal od S.

Posledica 4.1. Svaki kompletno izolovan ideal semigrupe $S \in \pi$ je dvostrani.

Definicija 4.1. Semigrupa S je levo (desno) Arhimedova ako za svaki $a,b \in S$ postoje $x,y \in S$ i $n \in N$ da je $a^n = xb$, $b^n = ya$, $(a^n = bx$, $b^n = ay)$. S je Arhimedova semigrupa ako za svaki $a,b \in S$ postoje $x,y,u,v \in S$ i $n \in N$ da je $a^n = xby$, $b^n = uav$ [8].

Lema 4.2. Neka je $S \in \pi$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je levo Arhimedova semigrupa.

(ii) S je desno Arhimedova semigrupa.

(iii) S je Arhimedova semigrupa.

Dokaz. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Neka za svaki $a,b \in S$ postoje $x,y \in S$ i $n \in N$ da je

$$a^n = xb , \quad b^n = ya . \tag{4.1}$$

Kako je $S \in \pi$, to za x i b postoji $m \in N$ i $z,u \in S$ da je

$$(xb)^m = bz = ux . \tag{4.2}$$

Slično je

$$(ya)^k = av = wy \tag{4.3}$$

za neko $k \in N$ i neke $v,w \in S$. Iz (4.1) i (4.2) imamo da je

$$a^{nm} = (xb)^m = bz . \tag{4.4}$$

Iz (4.1) i (4.3) imamo

$$b^{nk} = (ya)^k = av . \tag{4.5}$$

Iz (4.4) i (4.5) je

$$a^{nmk} = (bz)^k , \quad b^{nmk} = (av)^m .$$

Dakle, S jeste desno Arhimedova semigrupa. Slično prethodnom dokazuje se da *(iii)* $\Rightarrow$ *(i)*. Da *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)* sledi neposredno.

Teorema 4.1. Neka je $S \in \pi$ Arhimedova semigrupa. Ako S sadrži jedan idempotent e, tada eS je grupa i važi

$$eS = Se = SeS \ .$$

Dokaz. Neka je $a \in eS$. Tada je $a = ex$, (za neko $x \in S$).

Odavde je

$$ea = e^2x = ex = a$$

pa je e leva jedinica za eS. Kako je S Arhimedova semigrupa, to postoji $y \in S$ da je $e = ya$, (Lema 4.2), tj. $e = (ey)a$. Dakle, a ima u eS levi inverzan element u odnosu na e. Dakle, eS je grupa sa jedinicom e. Kako za proizvoljan $a \in eS$ je $a = ex$, $(x \in S)$, to je $a = eex \in SeS$. Slično, za proizvoljan $b \in SeS$ je $b = uev$, $(u,v \in S)$, tj.

$$b = u(ev)e = (uev)e \in Se$$

(jer je e jedinica u eS). Dakle,

$$eS \subset SeS \subset Se \ . \tag{4.6}$$

Analogno se dokazuje da je

$$Se \subset SeS \subset eS \ . \tag{4.7}$$

Iz (4.6) i (4.7) imamo da je

$$eS = Se = SeS \ .$$

Teorema 4.2. Neka je $S \in \pi$. Tada S je Arhimedova semigrupa ako i samo ako S ne sadrži prave kompletno izolovane ideale.

Dokaz. Neka je $S \in \pi$ Arhimedova semigrupa. Pretpostavimo suprotno, tj. neka S ima pravi kompletno izolovan ideal I i neka je $a \in I$, $b \in S \setminus I$. Tada postoji $x \in S$ i $n \in N$ da je $b^n = ax \in I$, (Lema 4.2.), pa $b \in I$, što je nemoguće.

Obratno, neka $S \in \pi$ i $\langle a \rangle$ je ciklična semigrupa generirana sa $a \in S$. Označimo sa S_a skup svih $x \in S$ koji sa leve strane dele neki element iz $\langle a \rangle$. Skup S_a je neprazan jer $\langle a \rangle \subset S_a$. Skup S_a je podsemigrupa od S. Zaista, za x,y iz S_a postoje $u,w \in S^1$ i $h \in N$ da je $ux = a^h$, $wy = a$ i postoje $v \in S^1$ i $k \in N$ da je $yv = a^k$, (Lema 4.2.), pa je $u(xy)v = a^{h+k}$, (Lema 4.2.). Dakle, $xy \in S_a$. Uzmimo da je $S \setminus S_a \neq \emptyset$ i $z \in S \setminus S_a$, $(a \in S)$. Element az nije u S_a, (ako $az \in S_a$, tada postoji $u \in S$ da je $uaz \in \langle a \rangle$, pa $z \in S_a$, što je nemoguće). Dakle, $az \in S \setminus S_a$, pa je $S \setminus S_a$ levi ideal od S. Kako je S_a podsemigrupa od S, to je $S \setminus S_a$ kompletno izolovan ideal od S. Neka $a,b \in S$. Kako S nema pravih kompletno izolovanih ideala, to je $S \setminus S_a = \emptyset$, tj. $S_a = S$ i postoje $u \in S^1$ i $h \in N$ da je $a^h = ub$. Analogno je $b^k = va$, $(k \in N,\ v \in S^1)$. Dakle, S je levo Arhimedova semigrupa, pa je Arhimedova, (Lema 4.2.).

Primedba 4.1. U komutativnom slučaju dobija se Teorema G. Thierrina [58].

Ako je $S \in \pi$, tada potpuno istom konstrukcijom koja je data u dokazu Teoreme 4.2. dokazuje se da je semigrupa $S \in \pi$ Arhimedova ako i samo ako S ne sadrži prave izolovane ideale. Obzirom na ovu činjenicu i na osnovu Teoreme 4.2. imamo

Teorema 4.3. Neka je $S \in \pi$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je Arhimedova semigrupa.

(ii) S ne sadrži prave kompletno izolovane ideale.

(iii) S ne sadrži prave izolovane ideale.

Lema 4.3. Arhimedova semigrupa $S \in \pi$ sadrži najviše jedan idempotent.

Dokaz. Neka su e i f dva različita idempotenta Arhimedove semigrupe $S \in \pi$. Tada na osnovu Leme 4.2. je

$$e = xf \quad \text{i} \quad f = ey \,, \qquad \text{za neke} \quad x,y \in S$$

pa je

$$e = xf = (xf)f = ef = e(ey) = ey = f \,.$$

Lema 4.4. Svaka semigrupa $S \in \pi$ je semilatisa Arhimedovih semigrupa [41].

5. REGULARNE SLABO KOMUTATIVNE SEMIGRUPE

Navodimo jednu poznatu

Lema 5.1. Neka je S semilatisa semigrupa S_α, $(\alpha \in Y)$. Tada S je regularna ako i samo ako S_α je regularna za svaki $\alpha \in Y$ [41].

Teorema 5.1. Neka je $S \in \pi$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je intra-regularna semigrupa.

(ii) S je levo regularna semigrupa.

(iii) S je desno regularna semigrupa.

(iv) S je kompletno regularna (S je unija grupa).

(v) S je regularna semigrupa.

(vi) Svaka Arhimedova komponenta od S je grupa.

(vii) S je semilatisa grupa.

Dokaz. *(i) => (ii).* Neka je S intra-regularna semigrupa. Tada za svaki $a \in S$ je $J(a) = J(a^2)$, (Teorema I 3.9), pa je $J(a^2) = J(a^4)$. Odavde imamo da je $J(a) = J(a^4)$, tj.

$$a \in J(a^4) = a^4 \cup a^4S \cup Sa^4 \cup Sa^4S \subset Sa^4S$$

pa je

(5.1) $$a = xa^4y \ , \quad \text{za neke} \quad x,y \in S.$$

Iz (5.1) imamo

(5.2) $$a=xa^4y=xaa^3y=x(xa^4y)a^3y=x^2a(a^3y)^2=\ldots=x^na(a^3y)^n \ .$$

Kako je $S \in \pi$, to postoje $m \in N$ i $z,u \in S$ da je

(5.3) $$(a^3y)^m = za^3 = ya \ .$$

Na osnovu (5.2) i (5.3) imamo da je

$$a = x^maza^3 \in Sa^2 \ .$$

Dakle, S je levo regularna semigrupa.

(i) => (iii). Slično kao *(i) => (ii)*.

(i) => (iv). Na osnovu *(i) => (ii)* i *(i) => (iii)* sledi tvrdjenje.

(iv) => (v). Sledi neposredno.

(v) => (ii). Neka je S regularna semigrupa. Tada za svaki $a \in S$ postoji $x \in S$ da je

(5.4) $$a = axa \ .$$

Iz (5.4) imamo da je

$$(5.5) \qquad a = (ax)^n a\,, \quad \text{za svaki} \quad n \in N\,.$$

Kako je $S \in \pi$, to iz (5.5) imamo da za a i x postoje $m \in N$ i $z \in S$ da je

$$(5.6) \qquad (ax)^m = za\,.$$

Iz (5.5) i (5.6) sledi

$$a = (ax)^m a = zaa = za^2 \in Sa^2\,.$$

Dakle, S je levo regularna semigrupa.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*. Neka je S levo regularna semigrupa. Tada za svaki $a \in S$ postoji $x \in S$ da je $a = xa^2$. Odavde imamo da je $a = x^n a^{n+1}$, za svaki $n \in N$. Dakle, S je intra-regularna semigrupa.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*. Slično kao *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)* .

(v) $\Rightarrow$ *(vi)*. Na osnovu Leme 5.4. semigrupa $S \in \pi$ je semilatisa Arhimedovih semigrupa. Neka je S_α Arhimedova komponenta od S. Tada na osnovu Leme 5.1. S_α je regularna semigrupa i na osnovu Leme 4.3. S_α sadrži jedan idempotent, pa je S_α grupa, (Teorema I 3.4).

(vi) $\Rightarrow$ *(vii)* $\Rightarrow$ *(i)*. Sledi neposredno.

Posledica 5.1. Neka je $S \in \pi$ regularna semigrupa. Tada svaki ideal od S je dvostrani.

Dokaz. Neka je $S \in \pi$ regularna semigrupa i R njen desni ideal. Za $a \in R$, $x \in S$ postoje $n \in N$ i $z, u \in S$ da je

$$(xa)^n = za = au \in R \ . \tag{5.7}$$

Kako je S desno regularna (Teorema 5.1), to je svaki desni ideal od S izolovan (Teorema I 3.3), pa iz (5.7) imamo da $xa \in R$. Dakle, R je levi ideal od S. Slično se dokazuje da je svaki levi ideal i desni.

Poznato je da je svaka levo (desno) prosta semigrupa prosta semigrupa. Da obratno ne važi imali smo Primer II 4.1. Ako je S slabo komutativna semigrupa, onda imamo:

Teorema.5.2. Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je levo prosta i $S \in \pi$.

(ii) S je desno prosta i $S \in \pi$.

(iii) S je prosta i $S \in \pi$.

(iv) S je grupa.

Dokaz. Da je *(i)* => *(iii)* i *(ii)* => *(iii)* sledi neposredno. Da *(iv)* => *(i)*, *(iv)* => *(ii)* i *(iv)* => *(iii)* imamo na osnovu činjenice da je svaka grupa prosta semigrupa (levo, desno prosta) i da je svaka grupa slabo komutativna, tj. za proizvoljne $a, b \in S$ jednačine

$$xa = (ab)^n \ , \quad by = (ab)^n \quad , \text{ za svaki } n \in N$$

imaju rešenje u grupi S po x, odnosno po y.

Dokažimo da *(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)*. Neka je S prosta semigrupa i $S \in \pi$. Odavde na osnovu Lema 4.2. i 4.3. S ima najviše jedan idempotent. Kako je S prosta, to za svaki $x \in S$ je $S = SxS$, pa je $S = Sx^2S$. Dakle, S je intra-regularna semigrupa. Odavde na osnovu Teoreme 5.1. imamo da je S regularna i ima jedan idempotent, pa je S grupa (I 3.1).

6. MAKSIMALNI IDEALI

Teorema 6.1. Neka je $S \in \pi$. Tada kompletno izolovani ideali iz S su maksimalni i idempotentni iz S obrazuju lanac ako i samo ako S jeste Arhimedova semigrupa ili u S postoji samo jedan kompletno izolovan ideal P koji je Arhimedova semigrupa i $S \setminus P$ je grupa.

Dokaz. Kako su kompletno izolovani ideali semigrupe S maksimalni, to razlikujemo dva slučaja:

1^o S nema pravih kompletno izolovanih ideala. Tada na osnovu Teoreme 4.2. semigrupa S je Arhimedova.

2^o S sadrži prave kompletno izolovane ideale. Neka je P jedan od njih. Za $x \in S \setminus P$ je $x^2 \in S \setminus P$ i kako je P maksimala ideal od S, to je

$$P \cup [x] = P \cup [x^2] = S$$

pa je $x = x^2$ ili $x = x^2t$, $(t \in S)$ ili $x = t_1x^2$, $(t_1 \in S)$ ili $x = t_2x^2t_3$, $(t_2, t_3 \in S)$. Na osnovu Teoreme 5.1. imamo da u svakom od ovih slučajeva x jeste regularan element, tj. $S \setminus P$ je regularna semigrupa i sadrži idempotente. Neka su e i f dva idempotenta iz $S \setminus P$. Tada je

$$P \cup [e] = P \cup [f]$$

pa imamo

$$e \in [f] \wedge f \in [e] \ . \tag{6.1}$$

Za $e \in [f]$ razlikujemo slučajeve

(A)
$e = f$

$e = fx$, za neko $x \in S$.

$e = yf$, za neko $y \in S$.

$e = zfu$, za neke $z, u \in S$.

Slično, za $f \in [e]$ imamo:

(B)
$f = e$

$f = ex_1$, za neko $x_1 \in S$.

$f = y_1e$, za neko $y_1 \in S$.

$f = z_1eu_1$, za neke $z_1, u_1 \in S$.

Uzimajući u obzir (A) i (B) imamo da se (5.1) svodi na

(6.2)

$$(e=f \wedge f=e) \vee (e=f \wedge f=ex_1) \vee (e=f \wedge f=y_1e) \vee (e=f \wedge f=z_1eu_1) \vee$$

$$(e=fx \wedge f=e) \vee (e=fx \wedge f=ex_1) \vee (e=fx \wedge f=y_1e) \vee (e=fx \wedge f=z_1eu_1) \vee$$

$$(e=yf \wedge f=e) \vee (e=yf \wedge f=ex_1) \vee (e=yf \wedge f=y_1e) \vee (e=yf \wedge f=z_1eu_1) \vee$$

$$(e=zfu \wedge f=e) \vee (e=zfu \wedge f=ex_1) \vee (e=zfu \wedge f=y_1e) \vee (e=zfu \wedge f=z_1eu_1).$$

Razmotrimo sada posebno neke od 16 alternativa iz (6.2).

<u>Slučaj:</u> $e=fx \wedge f=ex_1$. Tada $fe=f^2x=fx=e \wedge ef=e^2x_1=ex_1=f$, pa je $fe=e \wedge ef=f$. Odavde imamo da je $e=efx \wedge ef=f$, pa se dobija da je $e=ewf$, za neki $w \in S$, (jer $S \in \pi$) i $ef=f$, odakle je $ef=(ewf)f=ewf=e \wedge ef=f$. Dakle, $ef=e \wedge ef=f$, pa je $e=f$.

<u>Slučaj:</u> $e=fx \wedge f=z_1eu_1$. Tada $fe=e \wedge f=z_1eu_1$, pa je

$$\begin{aligned} fe=e \wedge f&=fz_1eu_1f \\ &=f(z_1eu_1f)^k, \text{ za svaki } k \in N \\ &=fsz_1e, \text{ za neko } s \in S, \text{ jer } S \in \pi, \end{aligned}$$

pa imamo

$$fe=e \wedge f=fsz_1e \Rightarrow fe=e \wedge fe=fsz_1ee=fsz_1e=f \Rightarrow e=f .$$

<u>Slučaj:</u> $e=zfu \wedge f=z_1eu_1$. Odavde imamo da je

$$e=ezfue \wedge f=fz_1eu_1f$$

pa je

$$e=e(zfue)^k, \text{ za svaki } k \in N \text{ i } f=(fz_1eu_1)^nf, \text{ za svaki}$$

$n \in N$.

Odavde je $e=eszf$, za neko $s \in S$ i $f=eu_1tf$, za neko $t \in S$, pa je $ef=e \wedge ef=f$, tj. $e=f$.

Ostali slučajevi su trivijalni ili se tretiraju slično kao ispitivani slučajevi, dakle u svakom slučaju iz (6.2) odnosno iz (6.1) sledi $e=f$, pa kako je $S \setminus P$ regularna semigrupa i ima samo jedan idempotent, to je ona grupa (Teorema I 3.1). Slično za proizvoljan kompletno izolovan ideal Q je $S \setminus Q$ grupa. Neka su e_1 i e_2 jedinice za $S \setminus P$ i $S \setminus Q$, respektivno. Uzmimo da je $e_1=e_1e_2=e_2e_1$, (jer idempotenti po pretpostavci obrazuju lanac). Jasno je da je $e_2 \notin P$ ~~grupa~~ (jer bi u suprotnom e_1 bilo iz P). Kako je $S \setminus P$ grupa i ima samo jedan idempotent, to je $e_1=e_2$. Za proizvoljan $x \in S \setminus P$ postoji $y \in S \setminus P$ da je $xy=e_1$. Odavde imamo da $x \in S \setminus Q$, pa je $S \setminus P \subset S \setminus Q$ i uzimajući u obzir simetričnu relaciju imamo da je $P = Q$. Dakle, S ima jedinstven kompletno izolovan ideal P i $S \setminus P$ je grupa. Ostaje da dokažemo da je P Arhimedova semigrupa. Kako je radikal ideala semigrupe $S \in \pi$ ideal (Teorema 3.4), to za $a,b \in P$ je

$$\mathrm{rad}([a]) = \mathrm{rad}([b]) = P$$

na osnovu Leme 4.2. imamo da je P Arhimedova semigrupa.

Obratno, slučaj 1°. Ako je S Arhimedova semigrupa, tada na osnovu Teoreme 4.2. svaki kompletno izolovan ideal iz S je maksimalan i na osnovu Leme 4.3. S ima najviše jedan idempotent. Slučaj 2^{o}. Neka u S postoji samo jedan kompletno izolovan ideal P koji je Arhimedova semigrupa i $S\setminus P$ je grupa. Uzmimo da postoji pravi ideal A koji sadrži P, tada za $x\in A\setminus P$ postoji $y\in S\setminus P$ da je $xy = e$, (gde je e jedinica grupa $S\setminus P$). Odavde imamo da $e\in A$. Za proizvoljan $b\in S\setminus A$ imamo da $b\in S\setminus P$, pa je $b = be\in A$, što je nemoguće. Dakle, P je maksimalan ideal, pa su kompletno izolovani ideali iz S maksimalni. Kako je P Arhimedova semigrupa, to na osnovu Leme 4.3, P ima najviše jedan idempotent. Sada razlikujemo podslučajeve (a). P nema idempotenata, tada S ima samo jedan idempotent (jedinica iz $S\setminus P$), pa idempotenti iz obrazuju lanac. (b). P ima idempotent f. Tada $fe\in P$ (e je jedinica iz $S\setminus P$), pa za fe i f postoji $n\in N$ i $x\in S$ da je $f^n = xfe$, (jer je P Arhimedova semigrupa), tj.,

(6.3) $$f = xfe \quad .$$

Iz (6.3) imamo da je

$$fe = (xfe)e = xfe^2 = xfe = f$$

tj.

(6.4) $$fe = f \; .$$

Slično je $ef\in P$, pa za ef i f postoji $y\in S$ i $k\in N$ da je $f = efy$. Odavde imamo da je

(6.5) $$ef = f .$$

Iz (6.4) i (6.5) sledi

$$ef = fe = f .$$

Dakle, idempotenti iz S obrazuju lanac i u ovom slučaju.

7. EKSTENZIJA SEMIGRUPE

Ovde ćemo razmatrati ekstenziju slabo komutativne Arhimedove semigrupe sa jednim idempotentom. Navodimo sledeću teoremu A.H. Clifforda [8].

Teorema 7.1. Parcijalni homomorfizam $A \to A'$ parcijalnog grupoida $T^* = T\setminus\{0\}$ u S na sledeći način odredjuje ekstenziju $(\Sigma,*)$ semigrupe S pomoću T:

$$A * B = \begin{cases} AB, & AB \neq 0 \\ A'B', & AB = 0 \end{cases}$$

$A * s = A's$, $s * A = sA'$, $s * t = st$, dok su $A,B,C,\ldots$ iz T^* i $s,t,n,\ldots$ iz S.

Ako S ima jedinicu, onda svaka ekstenzija semigrupe S pomoću T dobija se na pomenuti način, [8].

Koristeći prethodnu teoremu za slabo komutativne semigrupe imamo

Lema 7.1. Neka je semigrupa S ekstenzija (idealna) slabo komutativne semigrupe I sa jedinicom pomoću nil-semigrupe N. Tada S jeste slabo komutativna semigrupa.

Dokaz. Operaciju u S označavamo sa $*$, sa $x^{(h)}$ je označena h-ta potencija elemnta iz S, sa $a,b,c,\dots$ su označeni elementi iz I, sa $\alpha,\beta,\gamma,\dots$ elementi iz $N\setminus\{0\}$. Semigrupa S (ekstenzija ideala I pomoću N) se sastoji od elemenata iz $I\cup(N\setminus\{0\})$, pri čemu I ima jedinicu i postoji parcijalni homomorfizam f od $N\setminus\{0\}$ u I,

$$(7.1) \qquad \alpha * \beta = \begin{cases} \alpha\beta, & \alpha\beta \neq 0 \\ \bar{\alpha}\bar{\beta}, & \alpha\beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha * a = \bar{\alpha}a, \qquad a * \alpha = a\bar{\alpha}, \qquad a * b = ab .$$

Iz (7.1) za svaki $i \geq 1$ neposredno imamo

$$(7.2) \qquad a^{(i)} = a^i, \quad (\alpha * a)^{(i)} = (\bar{\alpha}a)^i, \quad (a * \alpha)^{(i)} = (a\bar{\alpha})^i$$

i za

$$\alpha^h = 0, \qquad (\alpha\beta)^k = 0 \qquad \text{je}$$

$$(7.3) \qquad \alpha^{(ih)} = (\bar{\alpha})^{ih}, \quad (\alpha * \beta)^{(ik)} = (\bar{\alpha}\bar{\beta})^{ik}, \quad i > 1$$

Dokažimo da za svaki $x,y \in S$ postoji prirodan broj n i $u,v \in S$ da je

$$(7.4) \qquad (x * y)^{(n)} = u * x = y * v$$

Razlikujemo sledeće slučajeve:

I) $x, y \in N \setminus \{0\}$. Stavimo $x = \alpha$, $y = \beta$. Kako je N nil-semigrupa, to postoje h, k, ℓ da je

$$\alpha^{1} = 0\ , \quad \beta^{k} = 0\ , \quad (\alpha\beta)^{\ell} = 0\ . \tag{7.5}$$

Kako je I slabo komutativna semigrupa, to postoji prirodan broj m i postoje $c, d \in I$ da je

$$(\bar{\alpha}\bar{\beta})^{m} = c\bar{\alpha} = \bar{\beta}d \tag{7.6}$$

pa je

$$\begin{aligned} (\alpha * \beta)^{(\ell m)} &= (\bar{\alpha}\bar{\beta})^{\ell m} , && ((7.3), (7.5)) \\ &= (c\bar{\alpha})^{\ell} = (\bar{\beta}d)^{\ell} , && (7.6) \\ &= (c * \alpha)^{(\ell)} = (\beta * d)^{(\ell)} , && (7.2)\ . \end{aligned}$$

Odavde imamo da je u ovom slučaju ispunjeno (7.4).

II) $x \in N \setminus \{0\}$, $y \in I$. Stavimo $x = \alpha$, $y = a$. Kako je I slabo komutativna semigrupa, to za $\bar{\alpha}, a \in I$ postoji prirodan broj p i postoje $u, v \in I$ da je

$$(\bar{\alpha}a)^{p} = n\bar{\alpha} = av \tag{7.7}$$

pa je

$$\begin{aligned} (\alpha * a)^{(p)} &= (\bar{\alpha}a)^{p} , && (7.2) \\ &= n\bar{\alpha} = av , && (7.6) \\ &= n * \alpha = a * v , && (7.2) \end{aligned}$$

Odavde imamo da je u ovom slučaju ispunjeno (7.4).

III) $x \in I$, $y \in N \setminus \{0\}$. Slično kao pod II).

IV) $x, y \in I$. U ovom slučaju uslov (7.4) je ispunjen na osnovu pretpostavke teoreme.

Teorema 7.2. Neka je S semigrupa. Tada S je slabo komutativna Arhimedova semigrupa sa jednim idempotentom ako i samo ako S jeste ekstenzija (idealna) grupe I pomoću nil-semigrupe.

Dokaz. Neka je S slabo komutativna Arhimedova semigrupa sa jednim idempotentom e. Uzmimo ideal $I = SeS$ i faktor-semigrupu Reesa S/I. Na osnovu Teoreme 3.1. I jeste grupa. Ostaje da dokažemo da je S/I nil--semigrupa. Kako je S Arhimedova semigrupa, to za svaki $a \in S$, $b \in I$ postoji prirodan broj n i $x \in S$ da je $a^n = bx$ (Lema 4.2.). Odavde imamo da $a^n \in I$. Dakle, S/I je nil-semigrupa. Ako je e nula u S, tada $S/I \cong S$, pa je S sama nil-semigrupa, jer I sadrži samo e.

Obratno, neka je S ekstenzija (idealna) grupe I pomoću nil-semigrupe N. Na osnovu Leme 7.1. S je slabo komutativna semigrupa. Jasno je da S sadrži samo jedan idempotent (jedinicu iz I). Dokažimo da je S Arhimedova semigrupa. Semigrupa S/I je nil-semigrupa i kako je $S/I \cong N$, to za proizvoljne $a, b \in S$ postoje h, k (prirodni brojevi da $a^h, b^k \in I$. Medjutim, I je grupa, pa postoje $x,y \in I$ da je $a^h = b^k x$, $b^k = a^h y$. Dakle, S je desno Arhimedova semigrupa, pa na osnovu Leme 4.2. jeste Arhimedova.

8. Q - SEMIGRUPE

Ovde dajemo neka uopštenja p.j. semigrupa.

Lema 8.1. Neka je S slabo komutativna Arhimedova semigrupa bez idempotenata. Tada

$$(\forall a,b \in S)(a \neq ab) .$$

Dokaz. Neka je S Arhimedova slabo komutativna semigrupa bez idempotenata. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $a = ab$. Tada za a i b postoje $x \in S$ i $n \in N$ da je $b^n = ax$ (Lema 4.2), i kako je

$$a = ab = ab^2 = \ldots = ab^n$$

to je $a = a^2 x$. Dakle, element a je desno regularan, pa je regularan (Teorema 5.1). Prema tome, S ima idempotent, što je nemoguće.

Definicija 8.1 [41]. Semigrupa S je racionalna semigrupa (power joined) ako

$$(\forall a,b \in S)(\exists m,n \in N)\ (a^m = b^n) .$$

Jasno da je racionalna semigrupa slabo komutativna.

Neposredno se dokazuje sledeća

Propozicija 8.1. Semigrupa S je regularna racionalna semigrupa ako i samo ako S jeste periodička grupa.

Teorema 8.1. Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi medjusobno ekvivalentni:

(i) S je racionalna semigrupa.

(ii) Svaki ideal iz S je racionalan.

(iii) Svaki desni (levi) ideal iz S je racionalan.

T.E. Nordahl [39], je razmatrao Q-semigrupe, tj. semigrupe u kojima je svaki pravi ideal racionalan. Ovde mi uvodimo pojam Q_R-semigrupe, koji pretstavlja još jedno uopštenje pojma p.j. semigrupe.

Definicija 8.2. Semigrupa S je Q_R-semigrupa (Q_L-semigrupa) ako je svaki njen pravi desni (levi) ideal racionalna semigrupa.

Q_R-semigrupa je Q-semigrupa. Obratno ne važi. Na primer, semigrupa data tablicom

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	b
c	a	a	a	c
d	a	a	a	d

je Q-semigrupa. Medjutim, desni ideal $\{a,d\}$ nije racionalna semigrupa, pa S nije Q_R-semigrupa.

Teorema 8.2. Neka je S semigrupa. Tada S je slabo komutativna Arhimedova Q_R-semigrupa ako i samo ako S je racionalna semigrupa ili S jeste grupa.

Dokaz. Neka je S Arhimedova slabo komutativna Q_R-semigrupa. Tada S ima najviše jedan idempotent (Lema 4.3). Ako S nema idempotent, tada na osnovu Leme 8.1. za svaki $a \in S$ je $a \notin aS$. Odavde imamo da je aS pravi desni ideal od S. Dakle, aS je p.j. semigrupa. Za $b \in S$ postoji $n \in N$ da je $b^n \in aS$ (Lema 4.2.) i jasno postoji $m \in N$ da $a^m \in aS$. Kako je aS racionalna semigrupa, to postoje $r,s \in N$ da je $a^{mr} = b^n s$. Dakle, u ovom slučaju S je racionalna semigrupa. Ako S ima idempotent, tada na osnovu Teoreme 4.1. eS je grupa-ideal od S. Ako je $eS \neq S$, tada je eS pravi ideal od S i prema tome eS je racionalna semigrupa, pa je eS periodička grupa

(Propozicija 8.1). Dalje, S je ekstenzija periodičke grupe pomoću nil-semigrupe (Teorema 7.2). Odavde, S je racionalna semigrupa sa jednim idempotentom.
Ako je $eS = S$, tada S je grupa.

Obrat sledi neposredno.

Primetimo da Teorema 8.1. važi i ako termin ideal zamenimo terminom kvazi-ideal (bi-ideal). Dakle, pojam racionalne semigrupe se može uopštiti i na sledeći način:

Definicija 8.3. Semigrupa S je Q_Q-semigrupa (Q_B-semigrupa) ako je svaki njen pravi kvazi-ideal (bi-ideal) racionalna semigrupa.

Označimo sa P, Q_B, Q_R, Q_L, Q_Q, Q redom klase svih racionalnih Q_B-, Q_R-, Q_L-, Q_Q-, Q-semigrupa i sa $Q_{R\cap L}$ klasu svih semigrupa koje su istovremeno Q_R- i Q_L-semigrupe. Tada imamo

$$\begin{tikzcd}
 & & Q_R \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & & \\
P \arrow[r, phantom, "\subset"] & Q_B \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subset"] & Q_{R\cap L} \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, phantom, sloped, "\supset"] & Q_Q \arrow[r, phantom, "\subset"] & Q \\
 & & Q_L \arrow[ur, phantom, sloped, "\subset"] & &
\end{tikzcd}$$

9. PARTITIVNE SEMIGRUPE

Neka je S semigrupa i $P(S) = \{A \mid A \subset S,\ A \neq \emptyset\}$. Definišimo u $P(S)$ množenje na sledeći način

$$AB = \{ab \mid a \in A\ ,\quad b \in B\}.$$

Tada $P(S)$ jeste semigrupa i nazivamo je partitivna semigrupa za semigrupu S (T. Tamura i J. Shafer [55]).

Sledeća teorema je uopštenje jedne teoreme M.S. Putche [46].

Teorema 9.1. Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $P(S)$ je nil-semigrupa.

(ii) $P(S)$ je racionalna semigrupa.

(iii) $P(S)$ je Arhimedova slabo komutativna semigrupa.

(iv) S je nilpotentna semigrupa.

Dokaz. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*. Sledi neposredno *(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)*. Neka je $P(S)$ Arhimedova slabo komutativna semigrupa. Tada postoje $m \in N$ i $B \in P(S)$ da je

$$\{a,\ a^2\}\ B = \{a^m\}\ ,\qquad \text{(Lema 4.2.)}\ .$$

Odavde, za $b \in B$ imamo da je

$$(*) \qquad ab = a^2b = a^m$$

Kako je S Arhimedova slabo komutativna semigrupa, to postoje $n \in N$ i $x \in S$ da je $bx = a^n$, (Lema 4.2.). Odavde na osnovu (*) imamo

$$a^{n+1} = abx = a^2bx = a^2a^n = a^{n+2}$$

Dakle, S ima idempotent. Na osnovu Teoreme 4.1. S ima grupu-ideal G i kako je $P(S)$ Arhimedova slabo komutativna semigrupa, to na osnovu Leme 4.3. imamo da je $|G| = 1$. Dakle, S ima nulu 0. Kako je $P(S)$ Arhimedova, to je $S^k = \{0\}$, za neki $k \in N$. Dakle, S je nil-potentna semigrupa.

(iv) => (i). Neka je S nilpotentna semigrupa. Tada za svaki podskup $A \neq 0$ semigrupe S postoji $h \in N$ da je $A^h = \{0\}$. Dakle, $P(S)$ je nil-semigrupa.

Teorema 9.2. S je idempotentna semigrupa ako i samo ako

$$(**) \qquad (\forall A \in P(S))\ (A \subset A^2)\ .$$

Dokaz. Neka je S idempotentna semigrupa i $A \in P(S)$. Tada za $x \in A$ je $x^2 \in A^2$. Odavde imamo da je $x \in A^2$. Dakle, $A \subset A^2$.

Obratno. neka je ispunjeno (**). Tada za $a \in S$ je $\{a\} \subset \{a^2\}$, pa je $a = a^2$.

Posledica 9.1. S je semilatisa ako i samo ako

$$(\forall A,B \in P(S))\ (AB = BA\ ,\quad A \subset A^2)\ .$$

Teorema 9.3. G je grupa ako i samo ako G jeste nula u $P \subset G$.

Dokaz. Sledi neposredno.

10. SEMILATISE GRUPA

A.H. Clifford [27] je razmatrao dekompozicije semigrupa i u tom radu se sreće prvi put pojam semilatise grupa. U I 3. 11. su date neke karakterizacije kompletno regularnih semigrupa, tj. semigrupa koje su unije grupa. Ako se kompletno regularnim semigrupama doda uslov "idempotenti semigrupe komutiraju", onda je moguća konstrukcija takvih semigrupa do na semilatise.

Mi ćemo se u ovoj tački zadržati na nekim novim karakterizacijama semigrupa koje su semilatise grupa.

Poznata je sledeća

Teorema 10.1. Neka je S semigrupa. Tada S je semilatisa grupa ako i samo ako S jeste unija grupa i svaki jednostrani ideal iz S je dvostrani [20].

Sledećom teoremom se, takodje, karakterišu semilatise grupa.

Teorema 10.2. Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je semilatisa grupa.

(ii) S je regularna i $S \in \pi$.

(iii) S je levo regularna i $S \in \pi$.

(iv) S je desno regularna i $S \in \pi$.

(v) S je kompletno regularna (S je unija grupa) i $S \in \pi$.

(vi) S je intra-regularna i $S \in \pi$.

Dokaz. Da je *(ii)* <=> *(iii)* <=> *(iv)* <=> *(v)* <=> *(vi)* sledi na osnovu Teoreme 5.1. Da je *(ii)* <=> *(i)* sledi, takodje na osnovu Teoreme 5.1. Dokažimo da *(i)* <=> *(v)*. Neka je S semilatisa grupa. Tada S je unija grupa i na osnovu Teoreme 10.1 svaki ideal od S je dvostrani. Ostaje da dokažemo da je S slabo komutativna semigrupa. Za proizvoljne $a,b \in S$ je

$$ab \in L(b) = b \cup Sb \subset R(b) = b \cup bS$$

pa je

$$ab = b \quad \text{ili} \quad ab = bx \,, \quad (\text{za neko} \quad x \in S) \,.$$

Odavde imamo da je

$$(ab)^2 = b(ab) \quad \text{ili} \quad ab = bx \, .$$

Dakle, za proizvoljne $a,b \in S$ postoje $n \in N$ i $z \in S$ da je

$$(ab)^n = bz \tag{10.1}$$

Slično se dokazuje da za proizvoljne $a,b \in S$ postoji $m \in N$ i $u \in S$ da je

$$(ab)^m = ua \, . \tag{10.2}$$

Iz (10.1) i (10.2) imamo da je

$$(ab)^{mn} = (bz)^m = (ua)^n$$

pa je

$$(ab)^{mn} = ((ua)^{n-1}u)a = b(z(bz)^{m-1}) \, .$$

Dakle, S je slabo komutativna semigrupa.

Primedba 10.1. U [49] dokazano je sledeće tvrdjenje:

Neka je S periodička semigrupa. Tada S je semilatisa grupa ako i samo ako S jeste unija grupa (kompletno regularna) i $S \in \pi$. Na osnovu Teoreme 10.2. vidimo da pretpostavka o periodičnosti nije potrebna.

Primedba 10.2. Uslov $S \in \pi$ u Teoremi 10.2. se može zameniti uslovom:

(*) $\qquad (\forall a,b \in S)(\exists x,y \in S)((ab)^2 = xa = by)$.

Lako se verifikuje da klasa svih semigrupa koje zadovoljavaju uslov (*) obuhvata klasu svih semigrupa koje zadovoljavaju komutatorne uslove, da obrat ne važi imamo sledeći primer semigrupe date tablicom

	a	b	c	d
a	a	b	a	a
b	b	a	b	b
c	a	b	a	a
d	a	b	c	d

Klasa semigrupa koje ispunjavaju uslov (*), takodje obuhvata klasu svih grupa.

Posledica 10.1. Neka je S semigrupa. Tada S je semilatisa komutativnih anti-inverznih semigrupa ako i samo ako svaki element iz S je jedini sam sebi inverzan.

Na osnovu Teoreme 10.2. neposredno imamo

Teorema 10.3. Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je semilatisa anti-inverznih grupa.

(ii) S je inverzna i S je anti-inverzna semigrupa.

(iii) S je slabo komutativna anti-inverzna semigrupa.

(iv) S je anti-inverzna i svaki jednostrani ideal je dvostrani.

Navedimo jedan primer nekomutativne semigrupe koja je semilatisa anti-inverznih grupa

Primer 10.1. Semigrupa S data tablicom

	0	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b	c
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e	0	e	a	a^2	a^3	b	ab	a^2b	a^3b	0
a	0	a	a^2	a^3	e	ab	a^2b	a^3b	b	0
a^2	0	a^2	a^3	e	a	a^2b	a^3b	b	ab	0
a^3	0	a^3	e	a	a^2	a^3b	b	ab	a^2b	0
b	0	b	a^3b	a^2b	ab	a^2	a	e	a^3	0
ab	0	ab	b	a^3b	a^2b	a^3	a^2	a	e	0
a^2b	0	a^2b	ab	b	a^3b	e	a^3	a^2	a	0
a^3b	0	a^3b	a^2b	ab	b	a	e	a^3	a^2	0
c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

je nekomutativna semilatisa anti-inverznih grupa.

11. JAKO REVERZIBILNE SEMIGRUPE

Ovde će biti reči o jednoj podklasi klase slabo komutativnih semigrupa.

G. Thierrin je u [58] definisao tzv. jako reverzibilne semigrupe (fortement reversible), kojima se uopštava pojam komutativne semigrupe i koje su u slučaju da su periodičke semilatise jednoidempotentnih podsemigrupa. Ove semigrupe su razmatrane od strane K. Isékija [22], M. Yamade [63] i detaljnije u radovima A. Spolettini-Cherubini i A. Varisco [52, 53].

Satayanarajana je u [48] razmatrao komutativne primarne semigrupe. Ovde se na sličan način razmatraju jako reverzibilne semigrupe koje su semiprimarne. Teoremom 11.1 karakteriše se semiprimaran ideal u jako reverzibilnoj semigrupi, potom Teoremom 11.2 karakterišu se jako reverzibilne semiprimarne semigrupe. Na kraju ove tačke karakterišu se jako reverzibilne semigrupe u kojima su svi ideali kompletno izolovani (Teorema 11.3). Odavde se neposredno dobija da je regularna jako reverzibilna semigrupa primarna ako i samo ako jeste semiprimarna.

Definicija 11.1. (G. Thierrin |58|). Semigrupa S je jako reverzibilna ako za svaki $a,b \in S$ postoje $h,k,\ell \in N$ da je

$$(ab)^k = a^k b^\ell = b^\ell a^k \quad (11.1)$$

Jasno da je svaka komutativna semigrupa jako reverzibilna i da idempotenti u jako reverzibilnoj semigrupi komutiraju. Navešćemo jedan primer jako reverzibilne semigrupe koja nije komutativna.

Primer 11.1. Semigrupa $S = \langle x,y\rangle \cup \{0,e\}$ gde je $\langle x,y\rangle$ slobodna semigrupa generirana sa x,y i za svaki $s \in S\setminus\{e\}$ je $s^2 = 0$, $e^2 = e$, $es = se$, za svaki $s \in S$, $est = ets$, za svaki $t,s \in S$ je jako reverzibilna semigrupa. Zaista, razlikujemo dva slučaja:

1° $a,b \in S\setminus\{e\}$. Tada za elemente a,b i ab je $(ab)^2 = 0$, $a^2 = 0$, $b^2 = 0$, pa je S jako reverzibilna semigrupa.

2° $a \in S\setminus\{e\}$, $b = e$. Tada za elemente a,e i ae imamo da je $(ae)^2 = a^2e = ea^2$ pa je S jako reverzibilna u ovom slučaju.

Označimo sa T klasu svih jako reverzibilnih semigrupa.

Sledeća teorema daje jednu karakterizaciju semiprimarnog ideala u klasi semigrupa T.

Teorema 11.1. Neka je $S \in T$. Tada ideal I semigrupe S jeste semiprimaran ako i samo ako $rad(I)$ jeste kompletno izolovan.

Dokaz. Neka je I semiprimaran ideal semigrupe $S \in T$. Za $xy \in rad(I)$ postoji $t \in N$ da je $(xy)^t \in I$ i postoje $s,p,q \in N$ da je

$$(xy)^s = x^p y^q = y^q x^p \; . \tag{11.2}$$

Iz (11.2) imamo

$$x^{pt} y^{qt} = y^{qt} x^{pt} = (xy)^{st} \subset I \; . \tag{11.3}$$

Na osnovu pretpostavke o idealu I i (11.3) imamo

$$(\exists\, m \in N)((x^{pt})^m \in I) \vee (\exists\, n \in N)((y^{qt})^n \in I)$$

odakle,

$$x \in rad(I) \vee y \in rad(I) \; .$$

Dakle, $rad(I)$ je kompletno izolovan ideal.

Obratno, neka je $rad(I)$, (a to je ideal, Teorema 3.4) kompletno izolovan ideal. Tada imamo

$$\begin{aligned} xy \in I &\Rightarrow xy \in rad(I) \Rightarrow x \in rad(I) \vee y \in rad(I) \\ &\Rightarrow (\exists\, m \in N)(x^m \in I) \vee (\exists\, n \in N)(y^n \in I) \; . \end{aligned}$$

Posledica 11.1. Neka je $S \in T$. Tada radikal primarnog ideala je kompletno izolovan ideal.

Uzimajući u obzir Teoreme 3.3, 3.4, i 11.1 imamo

Teorema 11.2. Neka je $S \in T$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je semiprimarna semigrupa.

(ii) S je r-semiprimarna semigrupa.

(iii) S je semiprimarna.

(iv) Kompletno izolovani ideali iz S su totalno uredjeni.

Sledećom teoremom se karakterišu jako reverzibilne semigrupe u kojima su svi ideali kompletno izolovani.

Teorema 11.3. Neka je $S \in T$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) Svaki ideal od S je kompletno izolovan.

(ii) S je primarna i regularna semigrupa.

(iii) S je semiprimarna i regularna semigrupa.

Dokaz. *(i)* => *(ii)*. Neka je svaki ideal semigrupe S kompletno izolovan. Tada svaki ideal od S je izolovan, pa je S intra-regularna semigrupa (Teorema I 3.3). Odavde na osnovu Teoreme 5.1. imamo da je S regularna semigrupa. Da je S primarna sledi neposredno.

(ii) => *(iii)*. Sledi neposredno.

(iii) => *(i)*. Neka je S semiprimarna i

regularna semigrupa. Kako je $S \in \mathcal{T}$, to je S intra-regularna semigrupa (Teorema 5.1), pa je svaki ideal od S izolovan (Teorema I 3.3). Dakle svaki ideal semigrupe S je semiprimaran i izolovan, pa je svaki ideal od S kompletno izolovan.

Neposredno se dokazuju sledeće dve posledice.

Posledica 11.2. Neka je $S \in \mathcal{T}$ regularna semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) Svaki ideal od S je kompletno izolovan.

(ii) S je primarna semigrupa.

(iii) S je semiprimarna semigrupa.

(iv) Kompletno izolovani ideali semigrupe S su totalno uredjeni.

Posledica 11.3. Neka je $S \in \mathcal{T}$ semiprimarna semigrupa. Tada svaki ideal iz S je kompletno izolovan kao i samo ako S jeste regularna semigrupa.

Definicija 11.2. Semigrupa S je slabo reverzibilna ako za svaki $a,b \in S$ postoje $m,n,p,q,r \in N$ da je

$$(ab)^r = (a^m b^n)^p = (b^n a^m)^q.$$

Ako je $p = q = 1$, za svaki $a,b \in S$, onda dobijamo jako reverzibilnu semigrupu. U slabo reverzibilnoj semigrupi idempotenti ne moraju da komutiraju.

Označimo sa P klasu svih slabo reverzibilnih semigrupa.

Teorema 11.4. Neka je S periodička semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $S \in T$.

(ii) $S \in P$ i idempotenti iz S komutiraju.

(iii) $S \in \pi$ i idempotenti iz S komutiraju.

Dokaz. *(i)* => *(ii)* => *(iii)*. Sledi neposredno. Dokažimo da *(iii)* => *(i)*. Kako je S periodička semigrupa, to za svaki $a,b \in S$ postoje $r,m,n \in N$ da su elementi $(ab)^r$, a^m, b^n idempotentni. Kako idempotenti iz S komutiraju to je $a^m b^n = b^n a^m$ idempotent. Na osnovu Leme 4.4. imamo da za $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$, $(\alpha, \beta \in Y$ gde je Y semilatisa) elementi $(ab)^r$ i $a^m b^n$ pripadaju semigrupi $S_{\alpha\beta}$. Na osnovu Leme 4.3. $S_{\alpha\beta}$ sadrži jedan idempotent. Dakle, $(ab)^r = a^m b^n = b^n a^m$, tj. $S \in T$.

Teorema 11.5. Neka je S periodička semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je levo prosta i $S \in T$.

(ii) S je desno prosta i $S \in T$.

(iii) S je prosta i $S \in T$.

(iv) S je grupa.

Dokaz. *(i)* => *(ii)* => *(iii)* => *(iv)* sledi na osnovu Teoreme 5.2. Dokažimo da *(iv)* => *(iii)*. Neka je S periodička semigrupa. Tada S jeste prosta i za proizvoljne $a,b \in S$ postoje $h,k,\ell \in N$ da je $(ab)^h = a^k b^\ell = b^\ell a^k = e$, gde je sa e označena jedinica grupe. Dakle, $S \in T$.

Posledica 11.4. Neka je $S \in A$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) S je levo prosta i $S \in T$.

(ii) S je desno prosta i $S \in T$.

(iii) S je prosta i $S \in T$.

(iv) S je grupa.

Teorema 11.6. Neka je $S \in T$. Tada su sledeći uslovi medjusobno ekvivalentni:

(i) Kompletno izolovani ideali iz S su maksimalni i idempotentni iz S obrazuju lanac.

(ii) S je Arhimedova semigrupa ili u S postoji jedan kompletno izolovan ideal P koji je Arhimedova semigrupa i $S \setminus P$ je grupa.

(iii) Proizvoljan kompletno izolovan ideal iz S je maksimalan i S ima najviše dva idempotenta.

<u>*Dokaz.*</u> *(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*. Neka je S Arhimedova semigrupa. Tada na osnovu Teoreme 4.2. svaki ideal od S je maksimalan, a na osnovu Teoreme 4.3. S ima najviše jedan idempotent. Dakle, u ovom slučaju važi *(iii)*. Uzmimo sada da u S postoji samo jedan kompletno izolovan ideal P koji je Arhimedova semigrupa i $S\setminus P$ je grupa. Tada na osnovu Leme 4.3. S ima najviše jedan idempotent. Dokažimo da je P maksimalan ideal. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji pravi ideal A semigrupe S koji sadrži P. Tada za $x\in A\setminus P$ postoji $y\in S\setminus P$ da je $xy = e$, (gde je e jedinica grupe S P). Odavde imamo da $e\in A$. Za proizvoljan $b\in S\setminus A$ je $b\in S\setminus P$, pa je $b = be$ A, što je nemoguće. Dakle, P je maksimalan ideal od S.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)*. Neka su e i f jedina dva idempotenta u S. Kako je $S\in \mathcal{T}$, to je $ef = fe$ idempotent, pa je

$$ef = fe = e \quad \text{ili} \quad ef = fe = f \;.$$

(i) $\Rightarrow$ *(ii)*. Sledi na osnovu Teoreme 6.1.

<u>*Primedba 11.1.*</u> Teorema 11.6. je proširenje rezultata H. Lala, jer je on dokazao sličnu teoremu za slučaj da je semigrupa kvazi-komutativna [31], odnosno σ-refleksivna [32], a ove klase se ne poklapaju sa klasom $\mathcal{T}$.

GLAVA IV

(m,n) - ANTI-INVERZNE SEMIGRUPE

1. DEFINICIJA I NEKE OSOBINE ANTI-INVERZNE SEMIGRUPE

Anti-inverzne semigrupe su razmatrane u [2], [3], [4], [5]. Rezultati u vezi semigrupe iz ove klase su detaljno izloženi u [5]. U ovoj tački ćemo navesti definiciju anti-inverzne semigrupe i dve teoreme koje karakterišu anti-inverzne semigrupe.

Definicija 1.1. Elementi a i b semigrupe S su medjusobno anti-inverzni ako

(1.1) $$a = bab \quad \text{i} \quad b = aba .$$

Definicija 1.2. Semigrupa S je anti-inverzna ako za svaki $a \in S$ postoji $b \in S$ da je (1.1).

Označimo sa A klasu svih anti-inverznih semigrupa.

Teorema 1.1. Neka je S semigrupa. Tada

$$S \in A \iff (\forall x \in S)(\exists y \in S)(x^2 = y^2,\ xy = x^3y\ ,\ x^5 = x) .$$

Posledica 1.1.

(i) Svaka anti-inverzna semigrupa je kompletno regularna.

(ii) Anti-inverzni elementi iz S imaju istu jedinicu.

(iii) Svaka anti-inverzna semigrupa je periodička.

Teorema 1.2. Neka je S semigrupa. Tada

$$S \in A \iff (\forall x \in S)(\exists y \in S)(x^2 = y^2\ ,\ x^2 = (xy)^2,\ x^5 = x).$$

2. (m,n) - ANTI-INVERZNE SEMIGRUPE

Ovde ćemo proučavati klase semigrupa za koje su ispunjeni zakoni:

$$(2.1)\qquad (\forall x)(\exists y)(x^m = y^m,\ x^m = (xy)^m,\ x^n = x)$$

$$(2.2)\qquad (\forall x)(\exists y)(x^m = y^m,\ yx = x^{m+1}y,\ x^n = x)$$

gde je $m,n \in N$.

Zakoni (2.1) i (2.2) su "uopštenja" zakona iz Teorema 1.1. i 1.2. redom. Označimo sa $S_{m,n}$ klasu svih semigrupa za koje je ispunjen zakon (2.1), tj.

$$s \in \mathcal{S}_{m,n} \iff (\forall x \in S)(\exists y \in S)(x^m = y^m,\ x^m = (xy)^m,\ x^n = x)$$

i slično, označimo sa $\mathcal{S}^*_{m,n}$ klasu svih semigrupa za koje je ispunjen zakon (2.2), tj.

$$s \in \mathcal{S}^*_{m,n} \iff (\forall x \in S)(\exists y \in S)(x^m = y^m,\ xy = x^{m+1}y,\ x^n = x).$$

Neka $a \in S$ i $S \in \mathcal{S}_{m,n}$ tada element $b \in S$ čija egzistencija sledi iz (2.1) nazivamo (m,n)-anti-inverznim za a.

Slično koristeći (2.2), b je (m,n)*-anti-inverzan za a ako $a,b \in S$ i $S \in \mathcal{S}^*_{m,n}$.

Na osnovu Teorema 1.1. i 1.2. imamo da je

$$\mathcal{S}_{2,5} = \mathcal{S}^*_{2,5} = \mathcal{A}.$$

Klase $\mathcal{S}_{m,n}$ i $\mathcal{S}^*_{m,n}$ se ne poklapaju. Na primer, uzmimo grupu G reda 16 koja je generirana elementima a,b za koje važi

$$a^8 = e\ , \quad ab = ba^5, \quad b^2 = e\ .$$

Tada $G \in \mathcal{S}^*_{4,9}$ i $G \notin \mathcal{S}_{4,9}$.

3. NEKE DEKOMPOZICIJE (m,n)-ANTI-INVERZNIH SEMIGRUPA

U ovoj tački dajemo neke osobine semigrupa iz $\mathcal{S}_{m,n}$. Pretpostavljaćemo, dalje, da je $m \leqq n$.

Lema 3.1. Neka $x \in S$ i $S \in \mathcal{S}_{m,n}$, tada x^{n-1} je idempotent u S.

Dokaz. Neposredno imamo da je

$$(x^{n-1})^2 = x^{2n-2} = x^n x^{n-2} = x^{n-1}.$$

Lema 3.2. (m,n)-nati-inverzni elementi imaju istu jedinicu.

Dokaz. Neka je y (m,n)-anti-inverzan element za x. Označimo sa e_x sopstvenu jedinicu elementa x. Tada imamo

$$e_x = x^{n-1} = (x^{n-1})^m = (x^m)^{n-1} = (y^m)^{n-1} = (y^{n-1})^m = y^{n-1} = e_y.$$

Napomena. Slično Lemama 3.1. i 3.2. mogu se dati tvrdjenja i ako je $S \in \mathcal{S}^*_{m,n}$.

Lema 3.3. Neka $x,y \in S$ i neka je y (m,n)-anti-inverzan za x, tada x jeste (m,n)-anti-inverzan za y.

Dokaz. Neka je y (m,n)-anti-inverzan za x. Tada na osnovu (2.1) važi

$$x(yx)^{m-1}y = x^m . \tag{3.1}$$

Množeći (3.1) sa y^{n-2} sa desne strane i sa x^{n-2} sa leve i koristeći Lemu 3.2. imamo

$$(yx)^{m-1} = x^{n-2}x^m y^{n-2} . \tag{3.2}$$

Množeći (3.2) sa yx sa desna imamo

$$(yx)^{m-1}yx = x^{n-2}x^m y^{n-1}x$$

pa je

$$(yx)^m = x^{n-2}x^m x$$

tj.

$$(yx)^m = x^m .$$

Označimo sa M_a skup svih (m,n)-anti-inverznih elemenata iz semigrupe za lement $a \in S$.

Neka je P neprazan podskup semigrupe S. Sa $[P]$ označimo podsemigrupu od S generiranu skupom P.

Teorema 3.1. Neka $S \in \mathcal{S}_{m,n}$. Tada za svaki $a \in S$ i svaki $B_a \in M_a$

$$GB_a = [a \cup B_a]$$

je grupa.

Dokaz. Dovoljno je dokazati da jednačine $cx = b$ i $yc = b$ imaju rešenja po x i y u GB_a. Elementi c i b su oblika

$$c = c_1c_2\ldots c_k \quad , \quad b = b_1b_2\ldots b_s$$

$(c_i, b_j \in a \cup B_a)$. Na osnovu Leme 3.2. neposredno imamo da rešenje jednačine $cx = b$ je

$$x = c_k^{n-2}c_{k-1}^{n-2}\ldots c_1^{n-2}b_1b_2\ldots b_s \quad .$$

Slično za drugu jednačinu.

Posledica 3.1.

$$S \in \mathcal{S}_{m,n} \Rightarrow S = \bigcup_{a \in S} GB_a \quad .$$

Teorema 3.2.

$$S \in \mathcal{S}_{m,n} \Leftrightarrow (\exists I \subset N)(S = \bigcup_{i \in I} S_i \wedge S_i \in \mathcal{S}_{m,n}) \quad .$$

Dokaz. Neka je $S \in \mathcal{S}_{m,n}$. Tada $S = \bigcup_{i \in I} S$.

Obratno, neka je $S = \bigcup_{i \in I} S$ i $S_i \in \mathcal{S}_{m,n}$. Tada za proizvoljan $x \in S$ postoji $i \in I$, da je $x \in S_i$. Kako je $S_i \in \mathcal{S}_{m,n}$ sledi da postoji element y koji je (m,n)--anti-inverzan za x. Dakle, $S \in \mathcal{S}_{m,n}$.

4. GREENOVE RELACIJE NA SEMIGRUPI IZ $\mathcal{S}_{m,n}$

U ovoj tački dokazujemo razne teoreme kojima se kasnije karakterišu semigrupe iz klase $\mathcal{S}_{m,n}$, pri čemu se koristi pojam ideala semigrupe i u vezi sa njim Greenove relacije i Teorija Croisota.

Lema 4.1. Neka je S semigrupa i I njen ideal (levi, desni, dvostrani), tada

$$S \in \mathcal{S}_{m,n} \Rightarrow I \in \mathcal{S}_{m,n} .$$

Dokaz. Neka $S \in \mathcal{S}_{m,n}$ i I ideal od S. Tada za $x \in I$ je $x^m \in I$. Kako je $S \in \mathcal{S}_{m,n}$, to za x postoji (m,n)-anti-inverzan element $y \in S$, pa je $y^m \in I$. Pošto je $m \leq n$, to je $y^n \in I$, pa $y \in I$. Dakle, $I \in \mathcal{S}_{m,n}$.

Lema 4.2. Neka je y (m,n)-anti-inverzan element za $x \in S \in \mathcal{S}_{m,n}$. Tada

$$L(x) = L(y)$$

$$R(x) = R(y)$$

$$J(x) = J(y)$$

Dokaz. Kako $S \in \mathcal{S}_{m,n}$ jeste levo regularna (jer $x^n = x$, za svaki $x \in S$), to je

$$L(x) = L(x^2) , \qquad (I\ 3.8)$$

za svaki $x \in S$. Odavde imamo da je

$$L(x) = L(x^m)$$

pa jednakost $x^m = y^m$ povlači

$$L(x) = L(y) .$$

Ostale dve jednakosti se slično dokazuju.

Označimo sa L_a L-klasu semigrupe S, za $a \in S$.

Teorema 4.1. Neka je S semigrupa. Tada

$$S \in \mathcal{S}_{m,n} \iff (\forall a \in S)(L_a \in \mathcal{S}_{m,n}) .$$

Dokaz. Neka je $S \in \mathcal{S}_{m,n}$ i L_a proizvoljna L-klasa. Kako je S levo regularna (jer za svaki $x \in S$ je $x^n = x$), to na osnovu Teoreme I 3.10. L_a je podsemigrupa semigrupe S. Za $x \in L_a$ postoji (m,n)-anti-inverzan element $y \in S$, pa na osnovu Leme 4.2. je

$$(4.1) \qquad L(x) = L(y) .$$

Kako je

$$(4.2) \qquad L(x) = L(a)$$

to iz (4.1) i (4.2) sledi

$$L(y) = L(a)$$

tj.

$$y \in L_a .$$

Dakle,

$$L_a \in \mathcal{S}_{m,n} .$$

Obrat sledi neposredno.

Posledica 4.1. Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $S \in \mathcal{S}_{m,n}$.

(ii) Svaka $\mathcal{L}$-klasa semigrupe S je levo prosta podsemigrupa od S koja je iz klase $\mathcal{S}_{m,n}$.

(iii) S je unija disjunktnih levo prostih podsemigrupa koje su iz klase $\mathcal{S}_{m,n}$.

Dokaz. Sledi na osnovu Teoreme 4.1. i Teoreme I 3.10.

Teorema 4.2. Neka je S semigrupa. Tada $S \in \mathcal{S}_{m,n}$ ako i samo ako S jeste levo regularna i svaki njen levi ideal je iz $\mathcal{S}_{m,n}$.

Dokaz. Neka je $S \in \mathcal{S}_{m,n}$. Tada S je levo regularna i svaki njen levi ideal je iz $\mathcal{S}_{m,n}$ (Lema 4.1).

Obratno, neka je S levo regularna semigrupa. Tada Proizvoljna $\mathcal{L}$-klasa L_a semigrupe S je podsemigrupa od S (Teorema I 3.10). Kako je

$$L_a \subset L(a) \in \mathcal{S}_{m,n}$$

to za $x \in L_a$ postoji (m,n)-anti-inverzan element $y \in L(a)$. Za elemente x i y važi $x^m = y^m$, pa je $L(x) = L(y)$ (Lema 4.2.). Dakle, $y \in L_a$, tj. svaka L-klasa L_a semigrupe S je iz $\mathcal{S}_{m,n}$ pa na osnovu Teoreme 3.2. imamo da $S \in \mathcal{S}_{m,n}$.

<u>*Teorema 4.3.*</u> Neka je S semigrupa. Tada $S \in \mathcal{S}_{m,n}$ ako i samo ako S jeste unija disjunktnih podgrupa koje su iz $\mathcal{S}_{m,n}$.

<u>*Dokaz.*</u> Neka je $S \in \mathcal{S}_{m,n}$. Tada, S je levo i desno regularna, pa na osnovu Teoreme I 3.11. imamo da je svaka H-klasa semigrupe S grupa. Kako je na osnovu Teoreme 4.1. svaka H-klasa H_a iz $\mathcal{S}_{m,n}$, sledi da je S unija disjunktnih grupa koje su iz $\mathcal{S}_{m,n}$.

Obrat sledi neposredno.

<u>*Posledica 4.2.*</u> Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $S \in \mathcal{S}_{m,n}$.

(ii) S je regularna i levo regularna i svaki njen desni ideal je podsemigrupa koja pripada klasi $\mathcal{S}_{m,n}$.

(iii) S je regularna i desno regularna i svaki njen levi ideal je podsemigrupa koja pripada klasi $\mathcal{S}_{m,n}$.

Dokaz. Sledi neposredno na osnovu Teoreme 4.3. i Teoreme I 3.11.

Teorema 4.3. se može iskazati i ovako

Teorema 4.4. Neka je S semigrupa. Tada $S \in \mathcal{S}_{m,n}$ ako i samo ako svaka H-klasa semigrupe S je iz $\mathcal{S}_{m,n}$.

Posledica 4.3. Neka je S inverzna semigrupa. Tada $S \in \mathcal{S}_{m,n}$ ako i samo ako S je semilatisa grupa koje su iz klase $\mathcal{S}_{m,n}$.

Dokaz. Sledi neposredno na osnovu Teoreme 4.4. i Teoreme III 3.2.

Posledica 4.4. Neka je S slabo komutativna semigrupa. Tada

$$S \in \mathcal{S}_{m,n} \Rightarrow S \text{ je semilatisa grupa.}$$

Dokaz. Kako je $S \in \mathcal{S}_{m,n}$ regularna semigrupa, to na osnovu Teoreme III 3.2. sledi tvrdjenje.

Neka $S \in \mathcal{S}_{m,n}$. Tada relacija definisana na S na sledeći način

$$\text{(R)} \qquad x \sim y \iff J(x) = J(y)$$

je kongruencija na S i klase su proste podsemigrupe od S. Zaista, kako $S \in \mathcal{S}_{m,n}$ je intra-regularna semigrupa, to je svaki dvostrani ideal od S izolovan (I 3.3), pa je kongruencija na S i klase su proste semigrupe (I 3.3).

Teorema 4.5. Neka je S semigrupa. Tada $S \in \mathcal{S}_{m,n}$ ako i samo ako S je intra-regularna semigrupa i svaki dvostrani ideal od S je iz klase $\mathcal{S}_{m,n}$.

Dokaz. Neka $S \in \mathcal{S}_{m,n}$. Tada S je intra-regularna semigrupa i svaki dvostrani ideal od S je iz $\mathcal{S}_{m,n}$ (Lema 4.1).

Obratno, neka S je intra-regularna semigrupa. Tada svaki njen ideal je izolovan (Teorema I 3.3). Kako je relacija (R) kongruencija na S i klase $C_a (a \in S)$ su proste podsemigrupe od S i $C_a \subseteq J(a) \in \mathcal{S}_{m,n}$, to za $x \in C_a$ postoji (m,n)-anti-inverzan element $y \in J(a)$. Kako je $J(a) = J(y)$ (Lema 4.2), to $y \in C_a$. Dakle, $C_a \in \mathcal{S}_{m,n}$.

Posledica 4.5. Neka je S semigrupa. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $S \in \mathcal{S}_{m,n}$.

(ii) Svaka $\mathcal{J}$-klasa J_a semigrupe S je iz $\mathcal{S}_{m,n}$.

(iii) S je unija (disjunktnih) prostih podsemigrupa iz $\mathcal{S}_{m,n}$.

(iv) S je unija kompletno prostih podsemigrupa koje su iz klase $\mathcal{S}_{m,n}$.

Dokaz. Sledi neposredno na osnovu Teoreme 4.5. i Teoreme I 3.3.

Posledica 4.6. Neka je S semigrupa. Tada $S \in \mathcal{S}_{m,n}$ ako i samo ako S jeste semilatisa kompletno prostih podsemigrupa koje su iz klase $\mathcal{S}_{m,n}$.

Dokaz. Sledi na osnovu Teoreme 4.5. i Teoreme I 3.3.

5. ANTI-INVERZNE SEMIGRUPE IZ KLASE $\mathcal{S}_{m,n}$

U ovoj tački daje se algoritam pomoću kojeg se za proizvoljne $m,n \in N$ odredjuje koje od semigrupa iz klase $\mathcal{S}_{m,n}$ su anti-inverzne, tj. pripadaju klasi A.

Lema 5.1. Svaka semigrupa iz $\mathcal{S}_{1,n}$ je anti-inverzna semigrupa.

Dokaz. Zakon (2.1) za $m = 1$ glasi

$$(\forall x)(\exists y)(x = y,\ x = xy,\ x^n = x)$$

odakle imamo

$$(\forall x)(x = x^2) \ .$$

Dakle, svaka semigrupa iz $S_{1,n}$ je idempotentna, pa je anti--inverzna.

Lema 5.2. Svaka semigrupa iz $S_{2,n}$ $(n > 1)$ je anti-inverzna semigrupa.

Dokaz. Razlikujemo dva slučaja.

Slučaj 1. $n = 2k$. Tada zakon (2.1) glasi

$$(\forall x)(\exists y)(x^2 = y^2,\ x^2 = (xy)^2,\ x^{2k} = x)$$

Odavde imamo

$$(\forall x)(\exists y)(x^{2k} = y^{2k},\ x^2 = (xy)^2,\ x^{2k} = x)$$

tj.

$$(\forall x)(\exists y)(x = y,\ x^2 = (xy)^2,\ x^{2k} = x)$$

odnosno

$$(\forall x)(\exists y)(x = y,\ x^2 = x^4,\ x^{2k} = x) \ .$$

Odavde imamo

$$(\forall x)(x^2 = x^4,\ x^{2k} = x)$$

pa je

$$(\forall x)((x^{2k})^2 = x^{2k},\ x^{2k} = x)$$

tj.

$$(\forall x)(x = x^2) \; .$$

Dakle, svaka semigrupa iz $\mathcal{S}_{2,2k}$ je idempotentna, pa je anti-inverzna.

Slučaj 2. $n = 2k + 1$. Tada zakon (2.1) glasi

$$(\forall x)(\exists y)(x^2 = y^2,\; x^2 = (xy)^2,\; x^{2k+1} = x)$$

tj. za proizvoljan x neka je postojeći baš y, paimamo

(5.1) $$x^2 = y^2 \;, \quad x^2 = (xy)^2 \;, \quad x^{2k+1} = x \; .$$

Množeći drugu jednakost iz (5.1) sa leva sa x^{2k-1} imamo

$$x^{2k+1} = x^{2k}yxy$$

pa je

$$x = y^{2k+1}xy$$

(jer iz prve jednakosti je $x^{2k} = y^{2k}$), tj.

(5.2) $$x = yxy \; .$$

Slično, množeći jednakost $y^2 = (xy)^2$ sa y^{2k-1} sa desne strane imamo

$$y^{2k+1} = xyxy^{2k}$$

tj.

(5.3) $$y = xyx^{2k+1} = xyx \; .$$

Iz (5.2) i (5.3) imamo

$$(\forall x)(\exists y)(x = yxy,\ y = xyx)$$

pa je svaka semigrupa iz $S_{2,2k+1}$ anti-inverzna semigrupa. Time je lema dokazana.

Klasa $S_{m,1}$ $(m > 1)$ nije klasa anti-inverznih semigrupa.

Primer 5.1. Semigrupa data tablicom

	a	b
a	a	a
b	a	a

je iz $S_{m,1}$ $(m > 1)$ i nije anti-inverzna semigrupa.

Lema 5.3. Svaka semigrupa iz $S_{m,2}$ je anti-inverzna semigrupa.

Dokaz. Za $m = 2$ zakon (2.1) glasi

$$(\forall x)(\exists y)(x^m = y^m,\ x^m = (xy)^m,\ x^2 = x) .$$

Odavde imamo

$$(\forall x)(x = x^2) .$$

Dakle,

$$S_{m,2} \subset A .$$

Lema 5.4. Svaka semigrupa iz $\mathcal{S}_{m,m}$ $(m \in N)$ je anti-inverzna.

Dokaz. Za $m = n$ zakon (2.1) glasi

$$(\forall x)(\exists y)(x^m = y^m,\ x^m = (xy)^m,\ x^m = x)$$

Odavde imamo

$$(\forall x)(\exists y)(x = y,\ x = xy)$$

pa je

$$(\forall x)(x = x^2)\ .$$

Dakle,

$$\mathcal{S}_{m,m} \subset A\ .$$

Na osnovu dokazanih lema imamo

Teorema 5.1. Semigrupe iz klase

$$\mathcal{S}_{1,n}\ ,\quad \mathcal{S}_{2,n}\ (n > 1)\ ,\quad \mathcal{S}_{m,2}\ ,\quad \mathcal{S}_{m,m}$$

za prizvoljne $m,n \in N$ su anti-inverzne semigrupe.

Dalje, razmatramo klasu semigrupa $\mathcal{S}_{m,n}$ za $3 \leqslant m < n$.

Prvi korak. Neka je $3 \leqslant m < n$ i $S \in \mathcal{S}_{m,n}$. U tom slučaju imamo

$$n = mq_1 + r_1,\ \text{gde je}\ \ 0 \leqslant r_1 \leqslant m - 1\ .$$

(i) Za $r_1 = 0$ iz (2.1) imamo da za proiz-

voljno $x \in S$ postoji $y \in S$ da je

(5.4) $$x^m = y^m \ , \quad x^m = (xy)^m \ , \quad x^{mq_1} = x \ .$$

Iz prve i gruge jednakosti (5.4) imamo

$$x^{mq_1} = y^{mq_1} \ , \quad x^{mq_1} = (xy)^{mq_1}$$

Odavde primenom treće jednakosti iz (5.4) dobijamo

(5.5) $$x = y \ , \ x = xy \ .$$

Iz (5.5) imamo da za svaki $x \in S$ je

$$x = x^2$$

pa je S idempotentna semigrupa.

Dakle, klasa S_{m,mq_1} je klasa anti-inverznih semigrupa.

(ii) Za $r_1 = m - 1$ imamo

(5.6) $$x^m = y^m \ , \quad x^m = (xy)^m \ , \quad x^{mq_1+m-1} = x \ .$$

Iz prve i druge jednakosti (5.6) imamo

$$x^{m(q_1+1)} = y^{m(q_1+1)} \ , \quad x^{m(q_1+1)} = (xy)^{m(q_1+1)}$$

odavde koristeći treću jednakost iz (5.6) dobijamo

(5.7) $$x^2 = y^2 \ , \quad x^2 = (xy)^2 \ , \quad x^{m(q_1+n)-1} = x$$

pa je svaka semigrupa iz S_{m,mq_1+m-1} anti-inverzna semigrupa (Teorema 5.1). Dakle,

$$S_{m,mq_1+m-1} \subset A \ .$$

(iii) Za $r = 1$ imamo

(5.8) $$x^m = y^m\ ,\quad x^m = (xy)^m\ ,\quad x^{mq_1+1} = x\ .$$

Iz prve i druge jednakosti (5.8) imamo

$$x^{m(q_1+1)} = y^{m(q_1+1)}\ ,\quad y^{m(q_1+1)} = (xy)^{m(q_1+1)}$$

odakle koristeći treću jednakost iz (5.8) koja glasi

$$x^{m(q_1+1)-(m-1)} = x$$

dobijamo

$$x^m = y^m\ ,\quad x^m = (xy)^m\ ,\quad x^{mq_1+1} = x$$

što daje relacije (5.8), pa u ovom slučaju klasa $\mathcal{S}_{m,mq_1+1}$ nije klasa anti-inverznih semigrupa za proizvoljne $m, q_1 \in N$.

Primer 5.2. Neka je $m = 3$, $q_1 = 1$. U ovom slučaju u klasi $\mathcal{S}_{3,4}$ je ciklična grupa reda 3 koja nije anti-inverzna.

Za $2 \leqslant r_1 \leqslant m-2$ i $m \geqslant 4$ relacija (2.1) postaje

(5.9) $$x^m = y^m\ ,\quad x^m = (xy)^m\ ,\quad x^{mq_1+r_1} = x\ .$$

Iz (5.9) imamo

$$x^{m(q_1+1)} = y^{m(q_1+1)}\ ,\ x^{m(q_1+1)} = (xy)^{m(q_1+1)}\ ,\ x^{m(q_1+1)-(m-r_1)} = x$$

tj.

(5.10) $$x^{m-r_1+1} = y^{m-r_1+1}\ ,\ x^{m-r_1+1} = (xy)^{m-r_1+1}\ ,\ x^n = x\ .$$

Dakle,

$$S_{m,n} \subset S_{n-r_1+1,n}$$

Kako je $3 \leq m-r_1+1 < n$, to nastavljamo algoritam kao u prvom koraku.

Označimo sa $m_1 = m-r_1+1$, tada je $3 \leq m_1 < n$.

Drugi korak. Neka je $s \in S_{m_1,n}$ tada je $n = m_1q_2+r_2$, gde je $0 < r_2 < m_1-1$, tj. $0 < r_2 < m-r_1$.

Iz (5.10) imamo

$$(5.11) \qquad x^{m_1} = y^{m_1}, \quad x^{m_1} = (xy)^{m_1}, \quad x^{m_1q_2+r_2} = x .$$

Za $r_2 = 0$, $r_2 = 1$, $r_2 = m_1-1 = m-r_1$ iz (5.11) redom imamo kao u prvom koraku pod *(i)*, *(ii)* i *(iii)*. Za $2 \leq r_2 \leq m_1-2$, $m_1 \geq 4$ nastavljajući dalje slično u k-tom koraku će biti

$$m_{k-1} = m_{k-2}-r_{k-1}+1 \qquad (k > 2,\ m_o = m)$$

tj.

$$m_{k-1} = m - \sum_{i=1}^{k-1} r_i + k - 1 .$$

Tada je $3 \leq m_{k-1} < n$, gde je $m = m_o > m_1 > \ldots > m_{k-1}$.

k-ti korak. U ovom slučaju je

$$n = m_{k-1}q_k + r_k , \text{ gde je } \quad 0 \leq r_k \leq m_{k-1} - 1$$

tj.

$$0 \leqslant r_k \leqslant m - \sum_{i=1}^{k-1} r_i + k - 1 \ .$$

Tada iz prethodnog koraka dobijamo

$$(5.12) \qquad x^{m_{k-1}} = y^{m_{k-1}}, \ x^{m_{k-1}} = (xy)^{m_{k-1}}, \ x^{m_{k-1}q_k+r_k} = x \ .$$

Za $r_k = 0$, $r_k = 1$, $r_k = m_{k-1}-1$ iz (5.12) imamo, redom kao u prvom koraku pod *(i)*, *(ii)* i *(iii)*. Dalje, za $2 \leqslant r_k \leqslant m_{k-1}-2$, $m_{k-1} \geqslant 4$ nastavljamo postupak.

Za $r_i = 2$ $(i = 1,2,\dots,m-2)$ je $m_{m-3} = 3$. Dakle, posle $m-2$ koraka, tj. za $k = m-2$ imamo

$$n = m_{m-3}q_{m-2} + r_{m-2}$$

tj.

$$n = 3q_{m-2} + r_{m-2}, \text{ gde je } \ 0 \leqslant r_{m-2} \leqslant 2 \ .$$

Za $r_{m-2} = 0$, $r_{m-2} = 1$, $r_{m-2} = 2$ (i drugih mogućnosti ovde nema) imamo redom kao u prvom koraku pod *(i)*, *(ii)* i *(iii)*.

Time je posle najviše $(m-2)$ koraka postupak završen.

<u>*Primer 5.3.*</u> Neka $S \in \mathcal{S}_{16,67}$, tj. S je semigrupa u kojoj za svaki $x \in S$ postoji $y \in S$ da je

$$x^{16} = y^{16} \ , \quad x^{16} = (xy)^{16}, \quad x^{67} = x \ .$$

Ovde je $m = 16$, $n = 67$, pa je $67 = 16\cdot 4+3$. Dakle, $r_1 = 3$, pa je $m_1 = m-r_1+1 = 14$. Sada je $67 = 14\cdot 4+11$. Dakle, $r_2 = 11$, pa je $m_2 = m_1-r_2+1 = 4$. Odavde je $67 = 4\cdot 16+3$. Dakle, $r_3 = 3$, pa je $S\in A$, tj. $S_{16,67}\subset A$.

Neka je $m > n > 1$. Tada je

$$m = nq + r, \quad 0 \leqslant r \leqslant n-1$$

pa na osnovu (2.1) je

$$(5.13) \qquad x^{nq+r} = y^{nq+r}, \ x^{nq+r} = (xy)^{nq+r}, \ x^n = x$$

odakle na osnovu treće jednakosti iz (5.13) imamo $x^{nq} = x^q$, pa koristeći prve dve jednakosti iz (5.13) dobijamo

$$(5.14) \qquad x^{q+r} = y^{q+r}, \ x^{q+r} = (xy)^{q+r}, \ x^n = x\ .$$

Jasno je $m = nq+r > q+r$, pa ako je $q+r = n$ dobijamo iz (5.14) da je semigrupa iz klase $S_{q+r,q+r}$ anti-inverzna (Teorema 5.1).

Ako je $q+r = 2$, tada iz (5.14) dobijamo da je semigrupa iz klase $S_{2,n}$ anti-inverzna (Teorema 5.1).

Ako je $3 \leqslant q+r < n$, onda postupak ponavljamo kao u slučaju $m < n$.

Ako je $q+r > n$, postupak se nastavlja. Posle konačno koraka dobijamo slučaj sličan relaciji (5.14), gde je $q+r \leqslant n$, a to je već bilo raspravljano.

6. $(m,n)^*$-ANTI-INVERZNE SEMIGRUPE

U ovoj tački razmatraćemo neka svojstva semigrupe iz klase $S^*_{m,n}$. Mnoge teoreme se ovde dokazuju kao teoreme iz tačaka 3. i 4. ove glave, pa ih nećemo dokazivati.

Označimo sa M_a skup svih elemenata semigrupe S koji su $(m,n)^*$-anti-inverzni sa $a \in S$. Dalje, neka je P neprazan podskup semigrupe S. Označimo sa $[P]$ podsemigrupu S generiranu skupom P.

Sledeća teorema se slično dokazuje kao Teorema 3.1.

Teorema 6.1. Neka je $S \in S^*_{m,n}$. Tada za svaki a S i svaki $B^*_a \subset M^*_a$.

$$GB_a = [a \cup B^*_a]$$

je grupa.

Posledica 6.1. Neka je S semigrupa. Tada

$$S \in S^*_{m,n} \Rightarrow S = \bigcup_{a \in S} GB^*_a .$$

Lema 6.1. Neka je $S \in S^*_{m,n}$. Tada

$$(\forall x \in S)(x^{m^2} = e) .$$

Dokaz. Neka je $S \in S^{*}_{m,n}$ i $y \in S$ je $(m,n)*$-
-anti-inverzan za $x \in S$. Tada na osnovu Teoreme 6.1. iz (2.2) imamo

(6.1) $$yxy^{-1} = x^{m+1} .$$

Stepenovanjem sa m iz (6.1) dobijamo

$$yx^{m}y^{-1} = x^{(m+1)m}$$

tj.

$$x^{m} = x^{m^2+m}$$

odnosno

$$x^{m^2} = e_x .$$

Sledeća posledica omogućava da se algoritam iz prethodne tačke može primeniti na klasu $S^{*}_{m,n}$.

Posledica 6.2. (S. Crvenković [13]). Neka je S semigrupa.

$$S \in S^{*}_{m,n} \Rightarrow S \in S_{m^2,n}$$

Lema 6.2. Neka je $S \in S^{*}_{m,n}$. Tada

$$(\forall x \in S)(\exists k \in N)(\exists t \in N)(x^{k} = x^{t} \wedge n \geq t) .$$

Dokaz. Neka $S \in S_{m,n}$. Tada za svaki $x \in S$ je $x^{n} = x$.

Ako je $n \geq k$, onda je $t = k$.

Neka je $k > n$, tada $k = nq_1+r_1$, pa je

$$x^k = x^{nq_1+r_1} = (x^n)^{q_1} x^{r_1} = x^{q_1} x^{r_1} = x^{q_1+r_1} .$$

Kako je $n > 1$, to

$$nq_1+r_1 = k > q_1+r_1 .$$

Ako je $n > q_1+r_1$, onda uzimamo $t = q_1+r_1$.

Ako je $q_1+r_1 > n$, tada

$$q_1+r_1 = nq_2+r_2$$

pa je

$$x^k = x^{q_1+r_1} = x^{nq_2+r_2} = (x^n)^{q_2} x^{r_2} = x^{q_2+r_2} .$$

Jasno

$$k > q_1+r_1 > q_2+r_2$$

dok je

$$x^k = x^{q_1+r_1} = x^{q_2+r_2} .$$

Nastavljajući, posle konačno koraka dolazimo do nekog t, $n > t$ tako da važi

$$x^k = x^{q_1+r_1} = x^{q_2+r_2} = \ldots = x^t .$$

Lema 6.3. Neka je y (m,n)*-anti-inverzan elementu x u semigrupi $S \in S^*_{m,n}$. Tada je proizvoljan element grupe $[\{x,y\}]$ oblika

$$x^s y^t$$

gde $s,t \in N$, $n > s \geqslant 0$, $m > t \geqslant 0$, $x^0 \overset{def}{=} e_x$.

Dokaz. Na osnovu (2.2) sledi da je

(6.2) $$yx = xy^{m+1} \quad .$$

Iz (6.2) imamo

(6.3) $$y^{\ell}x = y^{\ell-1}xy^{m+1} = y^{\ell-2}xy^{2(m+1)} = \ldots = xy^{\ell(m+1)} \quad .$$

Iz (6.3) dobijamo

$$y^{\ell}x^{2} = y^{\ell}xx = xy^{\ell(m+1)}x = x^{2}y^{\ell(m-1)(m+1)} = x^{2}y^{\ell(m+1)^{2}} \quad .$$

Analogno dobijamo

$$y^{\ell}x^{k} = x^{k}y^{\ell(m+1)^{k}} \quad .$$

Na osnovu Leme 6.2 imamo da se k redukuje po n, a broj $\ell(m+1)^{k}$ po m i n.

Posledica 6.3. Grupa $[\{x,y\}]$ je konačna.

Dokaz. Sledi neposredno na osnovu Leme 6.3.

Sledećom teoremom se karakterišu semigrupe iz klase $S^{*}_{m,n}$.

Teorema 6.2. Neka je S semigrupa. Tada

$$S \in S^{*}_{m,n} \iff (\forall\, x \in S)(\exists\, y \in S)([\{x,y\}] \in S^{*}_{m,n}) \quad .$$

Dokaz. Na osnovu Teoreme 6.1 imamo da je $[\{x,y\}]$ grupa. Neka je $x^{s}y^{t}$ proizvoljan element ove grupe. Dokažimo da je tada

$$(x^{s}y^{t})^{m} = x^{m(\frac{m(m-1)}{2}st+s+t)} \quad .$$

Zaista,

$$(x^s y^t)^m = x^s y^t \ldots x^s y^t x^s y^t$$

pa je

$$(x^s y^t)^m = x^s y^t \ldots y^t x^{2s} y^{t(m+1)^s} y^t$$

tj.

$$(x^s y^t)^m = x^s y^t \ldots x^{3s} y^{t(m+1)^{2s}} y^{t(m+1)^s} y^t \ .$$

Nastavljajući dolazimo do

$$(x^s y^t)^m = x^{ms} y^{t(m+1)^{(m-1)s}} y^{t(m+1)^{(m-2)s}} \ldots y^{t(m+1)s} y^t \ .$$

Na osnovu Leme 6.1 imamo

$$(x^s y^t)^m = x^{ms} y^{mt(\frac{m(m-1)}{2}s+1)} \ .$$

Kako je

$$x^m = y^m$$

imamo

$$(x^s y^t)^m = x^{m(\frac{m(m-1)}{2}st+s+t)} \ .$$

Kako je $s \in S^*_{m,n}$, to grupa $[\{x,y\}] \in S^*_{m,n}$ ako i samo ako jednačine

$$(6.4) \qquad \begin{aligned} (x^s y^t)^m &= \alpha^m \\ \alpha x^s y^t &= (x^s y^t)^{m+1} \end{aligned}$$

($x^s y^t$ je proizvoljan element iz $[\{x,y\}]$, imaju rešenja po α u grupi $[\{x,y\}]$.

Ako postoji takvo α, onda je

$$\alpha = x^k y^\ell$$

za neke $k,l \in N \cup \{0\}$. Sistem jednačina (6.4) tada postaje

$$(6.5)\qquad \begin{aligned} (x^s y^t)^m &= (x^k y^\ell)^m \\ x^k y^\ell x^s y^t &= (x^s y^t)^{m+1} x^k y^\ell \end{aligned}$$

pa rešenje sistema (6.4) je rešenje sistema (6.5) i obratno. Sistem (6.5) je ekvivalentan sa sistemom

$$(6.6)\qquad \begin{aligned} x^{m(\frac{m(m-1)}{2}(st-k\ell)+s+t-k-\ell)} &= e \\ x^{m(\frac{m(m-1)}{2}st+s+t-\ell s+kt)} &= e \ . \end{aligned}$$

Rešenja po k i ℓ sistema (6.6) nalazimo koristeći Lemu 6.1, tj. da je

$$x^{m^2} = e\ , \qquad \text{za svako} \quad x \in S\ .$$

Ako je m neparan broj, za k i ℓ možemo uzeti $k = s-1$, odnosno $\ell = t+1$, pa je

$$\alpha = x^{s-1} y^{t+1}$$

rešenje sistema (6.4).

Neka je m paran broj. Razlikujemo tri slučaja:

1° a) $m = 4q$

s parno (uključujući i $s = 0$)

t parno (uključujući $t = 0$)

tada je

$$\alpha = x^{s-1+\frac{m}{2}}y^{t+1}$$

rešenje sistema (6.4), što se neposredno proverava.

b) $m = 4q + 2$

s parno (uključujući $s = 0$)

t parno (kuljučujući $t = 0$)

U ovom slučaju

$$\alpha = x^{s-1+\frac{m}{2}}y^{t+1+\frac{m}{2}}$$

je rešenje sistema (6.4)

2° s neparno

t parno

Za α možemo uzeti

$$\alpha = x^{s-1}y^{t+1-\frac{m}{2}} \quad .$$

3°

$\alpha = x^{s-1}y^{t+1}$ je rešenje sistema (6.4) u ostalim slučajevima.

Kako je $\alpha^{n} = \alpha$, sledi da su α i $x^{s}y^{t}$ (m,n)*-anti-inverzni.

Na osnovu dokazanog sledi da je

$$[\{x,y\}] \in S^{*}_{m,n} \quad .$$

Obrat teoreme sledi neposredno.

Posledica 6.4. Neka je S semigrupa. Tada $S \in S^*_{m,n}$ ako i samo ako S jeste unija podgrupa od S koje su iz klase $S^*_{m,n}$.

Posledica 6.5. Neka je S slabo komutativna semigrupa. Tada $S \in S^*_{m,n}$ ako i samo ako S jeste semilatisa grupa koje su iz klase $S^*_{m,n}$.

Dokaz. Sledi neposredno na osnovu Posledice 6.4. i Teoreme III 3.2.

Posledica 6.6. Neka je G grupa. Tada

$$G \in S^*_{m,n} \iff (\forall x \in G)(\exists y \in G)([\{x,y\}] \in S^*_{m,n}).$$

Posledica 6.7. Neka je G grupa. Tada $G \in S^*_{m,n}$ ako i samo ako G jeste unija svojih podgrupa koje su iz klase $S^*_{m,n}$.

7. TEOREMA O BAZISNOJ KLASI I NEKE NJENE POSLEDICE

Na osnovu Teoreme 6.2. imamo

Teorema 7.1. Neka je S semigrupa. Tada

$$S \in A \iff (\forall x \in S)(\exists y \in S)([\{x,y\}] \in A).$$

Dokaz. Za $m = 2$ i $n = 5$ iz Teoreme 6.2.

Posledica 7.1. Neka je G grupa. Tada

$$G \in A \iff (\forall x \in G)(\exists y \in G)([\{x,y\}] \in A) .$$

Nije teško videti da je grupa $[\{x,y\}]$ iz Posledice 6.6. iz klase B koja se sastoji iz trivijalne grupe, ciklične grupe rada 2 i kvaterionske grupe.

Definicija 7.1. (Е.С. Ляпин [34]). Neka su M, N, P tri klase semigrupa, pri čemu je $M \subset N \subset P$. Klasa M je bazisna za klasu N u odnosu na P ako je ispunjeno:

a) Svaka semigrupa iz N se može pretstaviti kao unija svojih podsemigrupa koje su iz klase M.

b) Svaka semigrupa iz P koja se može pretstaviti kao unija svojih podsemigrupa koje su iz klase M je iz klase N.

c) Nijedna podklasa M' klase M ne zadovoljava uslov (a).

Postoje klase semigrupa koje nemaju bazisnu klasu u smislu Ljapina (u smislu prethodne definicije). Na primer, klasa svih komutativnih semigrupa.

Ako je $M = B$, $N = A$ i P klasa svih semigrupa tada imamo

Teorema 7.2. Klasa $\mathcal{B}$ je bazisna klasa u smislu Ljapina za klasu $\mathcal{A}$ u odnosu na klasu $\mathcal{P}$.

Dokaz. Uslovi (a) i (b) iz definicije bazisne klase su ispunjeni na osnovu Posledice 6.7. i Teoreme 7.1. Neposredno se proverava da je ispunjen uslov (c).

Posledica 7.2. [2,21]. Neka je S semigrupa. Tada svaki element iz S ima jedinstven anti-inverzan element ako i samo ako S jeste idempotentna semigrupa.

Dokaz. Ako svaki element a iz S ima jedinstven anti-inverzan element, jasno da je tada $S \in \mathcal{A}$ i na osnovu Teoreme 7.2 S je unija trivijalnih grupa, pa je S idempotentna semigrupa.

Obratno, neka je S idempotentna semigrupa. Pretpostavimo da za $x \in S$ postoji još neki anti-inverzan element $y \in S$. Tada je $x = x^2 = y^2 = y$, što je nemoguće.

Teorema 7.3. Neka je S semigrupa. Tada svaka podsemigrupa od S je anti-inverzna ako i samo ako

$$(\forall x \in S)(x^3 = x) \; .$$

Dokaz. Neka je svaka podsemigrupa od S anti-inverzna. Tada S jeste anti-inverzna, pa je S unija svojih podsemigrupa koje su iz klase $\mathcal{B}$, (Teorema 7.2.), tj.

$$S = \bigcup S_i \ , \quad S_i \in \mathcal{B} \ .$$

Ako je S_i kvaternionska grupa, onda postoji podsemigrupa od S koja nije anti-inverzna (ciklična grupa reda 4). Dakle, S je unija podsemigrupa koje su iz klase $\mathcal{B}_1$ koja se sastoji od trivijalnih grupa i cikličnih grupa reda 2, pa je za svaki $x \in S$, $x = x^2$ ili $x^2 = e_x$, pa je

$$(\forall x \in S)(x = x^3) \ .$$

Obrat sledi neposredno.

Posledica 7.3. Neka je G grupa. Tada svaka podsemigrupa od G je anti-inverzna ako i samo ako za svaki $x \in G$ je $x^2 = e$, gde je sa e označena jedinica grupe G.

8. NEKI SPECIJALNI SLUČAJEVI

Lema 8.1. Neka je S semigrupa. Tada

$$(\forall x \in S)(\forall y \in S)(x^m = y^m) \iff (\exists c \in S)(\forall x \in S)(x^m = c) \ .$$

$(m \in N)$.

Dokaz. Jedinstvenost sledi neposredno.

Egzistencija:

$$(\forall x \in S)(\forall y \in S)(x^m = y^m) \Rightarrow (\exists y \in S)(\forall x \in S)(x^m = y^m)$$

$$\Rightarrow (\exists y^m \in S)(\forall x \in S)(x^m = y^m)$$

$$\Rightarrow (\exists c \in S)(\forall x \in S)(x^m = c) .$$

Obratno, neka postoji samo jedan $c \in S$ da je $x^m = c$, za svaki $x \in S$. Tada za proizvoljan $y \in S$ je $y^m = c$, pa je

$$(\forall x \in S)(\forall y \in S)(x^m = y^m) .$$

Teorema 8.1. Regularna semigrupa S u kojoj

$$(\forall x \in S)(\forall y \in S)(x^m = y^m)$$

$(m \in N)$ jeste periodička grupa, i obratno.

Dokaz. Sledi neposredno na osnovu Leme 8.1. i Teoreme I 3.1.

Teorema 8.2. Neka $S \in \mathcal{S}_{m,n}$. Tada

$$(\forall x \in S)(\forall y \in S)(x^m = y^m,\ x^m = (xy)^m,\ x^n = x) ,$$ za

neko $n \geqslant 2$ ako i samo ako S jeste grupa u kojoj je

$$(\forall x \in S)(x^m = e)$$

gde je sa e označena jedinica grupe.

Dokaz. Sledi neposredno.

Posledica 8.1. [2,50]. Neka je $S \in A$. Tada svaka dva elementa iz S su medjusobno anti-inverzni ako i samo ako S jeste Abelova grupa u kojoj je svaki element sam sebi inverzan u grupi.

Teorema 8.4. Neka je $S \in S^{*}_{m,n}$. Tada

(8.1) $(\forall x \in S)(\forall y \in S)(x^{m} = y^{m},\ yx = x^{m+1}y,\ x^{n} = x)$

za neko $n \geq 2$ ako i samo ako S jeste komutativna grupa u kojoj je

$$(\forall x \in S)(x^{m} = e)$$

gde je sa e označena jedinica grupe.

Dokaz. Neka je ispunjeno (8.1). Tada na osnovu Teoreme 8.1. i Leme 8.1. imamo da je S grupa i da je za svaki $x \in S$, $x^{m} = e$. Odavde uzimajući u obzir (8.1) imamo da je S komutativna grupa.

Obrat teoreme sledi neposredno.

Teorema 8.5. Neka je S konačna semigrupa. Tada S jeste p-grupa ako i samo ako postoje $m = p^{k}$ i $n \geq 2$ da je

(8.2) $(\forall x \in S)(\forall y \in S)(x^{m} = y^{m},\ x^{n} = x)$.

Dokaz. Neka je S p-grupa. Tada svaki element $x \in S$ je reda p^{k_x}, pa je

$$(\forall x \in S)(x^{p^{\max k_x}} = e)$$

gde je e jedinica u S. Odavde imamo da je

$$(\forall x \in S)(\forall y \in S)(x^{p^{\max k_x}} = y^{p^{\max k_x}},\ x^{p^{\max k_{x+1}}} = x).$$

Obratno, neka je u semigrupi S za $m = p^k$ (p je prost broj) ispunjen uslov (8.2). Tada na osnovu Teoreme 8.3. S jeste grupa u kojoj je

$$(\forall x \in S)(x^m = e) .$$

Dokažimo da je S p-grupa. Zaista, ako je q_x red elementa $x \in S$, tj. q_x je najmanji takav broj da je $x^{q_x} = e$. Tada je $q_x | m = p$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je q_x najmanji takav broj da je

$$x^{q_x} = e \quad \text{i} \quad x^m = e \quad \text{i} \quad q_x | m .$$

Jasno da je $q_x < m$ (jer ako je $q_x > m$, onda q_x nije red elementa x), tada imamo da je

$$m = nq_x + r , \qquad 0 < r < q_x .$$

Odavde imamo da je

$$e = x^m = x^{nq_x + r} = x^r$$

što je nemoguće. Dakle, $q_x | m = p$, tj. $q_x = p^s$, $1 \leqslant s \leqslant k$, što znači da je grupa S p-grupa [19].

9. SEMILATISE $(m,n)^*$-ANTI-INVERZNIH SEMIGRUPA

Lema 9.1. Neka je S semilatisa grupa S_α, $\alpha \in Y$. Tada $S \in \mathcal{S}^*_{m,n}$ ako i samo ako $S_\alpha \in \mathcal{S}^*_{m,n}$, za svaki $\alpha \in Y$.

Dokaz. Neka je $S \in \mathcal{S}^*_{m,n}$ semilatisa grupa S_α, $\alpha \in Y$. Tada za $x \in S_\alpha$ postoji $(m,n)^*$-anti-inverzan element $y \in S$. Kako je $x^m = y^m \in S_\alpha$, to $y \in S_\alpha$, (jer ako bi $y \in S_\beta$, $\beta \neq \alpha$ tada bi $y^m \in S_\beta$, što je nemoguće).

Obrat sledi neposredno na osnovu Posledice 6.4.

Teorema 9.2. Neka je S semigrupa. Tada S je slabo komutativna i $S \in \mathcal{S}^*_{m,n}$ ako i samo ako S jeste semilatisa grupa koje su iz klase $\mathcal{S}^*_{m,n}$.

Dokaz. Neka je $S \in \mathcal{S}^*_{m,n}$ slabo komutativna semigrupa. Tada na osnovu Teoreme III 10.1. i Leme 9.1. S jeste semilatisa grupa koje su iz klase $\mathcal{S}^*_{m,n}$.

Obratno, neka je S semilatisa grupa koje su iz klase $\mathcal{S}^*_{m,n}$. Tada na osnovu Teoreme III 10.1. S je slabo komutativna semigrupa, a na osnovu Posledice 6.4. imamo da $S \in \mathcal{S}^*_{m,n}$.

Primedba 9.1. Slična teorema važi i ako je $S \in \mathcal{S}_{m,n}$.

Teorema 9.2. Neka je S semigrupa. Tada S je istovremeno inverzna i $S \in \mathcal{S}_{m,n}$ ($S \in \mathcal{S}^*_{m,n}$) ako i samo ako S jeste semilatisa grupa iz $\mathcal{S}_{m,n}$ ($\mathcal{S}^*_{m,n}$).

LITERATURA

[1] O. Andersen, *Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgrupen*, Hamburg, 1952.

[2] S. Bogdanović, S. Milić, V. Pavlović, *Anti-inverse semigroups*, Pub.Inst.Math. Beograd, 24(38)1978, 19-28.

[3] S. Bogdanović, *On anti-inverse semigroups*, Publ.Inst. Math. Beograd, 25(39),1979, 25-31.

[4] S. Bogdanović, *Deux caracterisations des semigroupes anti-inverses*, Zbornik radova PMF Novi Sad, 8(1978), 79-81.

[5] S. Bogdanović, *O jednoj klasi semigrupa*, (magistarski rad), Novi Sad, 1978.

[6] S. Bogdanović, S. Crvenković, *On some classes of semigroups*, Zbornik radova PMF Novi Sad, 8(1978), 69-77.

[7] A.H. Clifford, *Semigroups admiting relative inverses*, Ann. of Math., 42(1941), 1037-1049.

[8] A.H. Clifford, G.B. Preston, *The algebraic theory of semigroups*, Vol. I, 1964, Vol. II (in Russian) Moscow.

[9] A.H. Clifford, D.D. Muller, *Semigroups having zeroid elements*, Amer.J.Math., 70(1948), 117-125.

[10] N.H. Mc Coy, *The Theory of Rings*, The Mac Milan Comp., 1964.

[11] R. Croisot, *Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples*, Ann.Sci. Ecole Norm. Sup (3), 70(1953), 361-379.

[12] I. Creangá, D. Simorici, *Teoria algebraicá a semi-grupurilor on aplicatii*, Editura tehnicá, Bucuresti, 1977.

[13] S. Crvenković, *O jednoj klasi regularnih semigrupa*, (magistarski rad), Beograd 1979.

[14] P. Dubreil, *Théorie des groupes*, Dunod, 1972, Paris.

[15] R.A. Good, D.R. Hughes, *Associated groups for a semigroup*, Bull.Amer.Math.Soc., 58(1952), 624-625.

[16] M. Gowda Seetharama, *Weakly Commutative semigroups*, Vignana Bharathi, 3(1977), N° 1., 55-57.

[17] M. Gray, *A radikal approach to algebra*, Addison--Wesely Pul. Company, 1970.

[18] J.A. Green, *On the structure of semigroups*, Ann. of Math., 54(1951), 163-172.

[19] M. Hall, *The theory of groups*, (на русном), Москва 1962.

[20] J.M. Howie, *An Introduction to semigroups Theory*, Acad.Press, 1976.

[21] K. Iséki, *A characterisation of regular semigroup*, Proc. Japon Acad., 32(1956), 676-677.

[22] K. Iséki, *Contribution to the Theory of semigroups I*, Proc. Japon Acad., 32(1956), 174-175.

[23] L. Kovacs, *A note on regular rings*, Publ.Math., Debrecen, 4(1956), 465-468.

[24] D.N. Krgović, *On (m,n)-regular semigroups*, Publ.Inst. Math., Beograd, 18(34), 1975, 107-110.

[25] D.N. Krgović, *On intra-regular semigroups*, Мат.Вес., 13(28), 1976, 405-406.

[26] S. Lajos, *Generalized ideals in semigroups*, Acta Sci. Math. Szeged, 22(1961), 217-222.

[27] ———, *Notes on (m,n)-Ideals II*, Proc. Japon Acad., 8(1964), 631-632.

[28] ———, *Notes on (m,n)-Ideals*, Proc. Japon Acad., 5(1965), 383-385.

[29] ———, *On characterisation of regular semigroups*, Proc. Japon Acad., 44(1968), 325-326.

[30] H. Lal, *Commutative semi-primary semigroups*, Czech. Math.J., 25(100), 1975, 1-3.

[31] ———, *Quasi-commutative primary semigroups*, Мат.Вес., 12(27), 1975, 271-278.

[32] ———, *σ-reflexive primary semigroups*, Indian J. Pure and Appl.Math., 1977, N° 8, 930-937.

[33] А.Е. Либер, Н теорий обобщенных групп, ДАН СССР, 97(1954), 25-28.

[34] Е.С. Ляпин, Полугруппы, ФМ Москва, 1960.

[35] S. Milić, S. Bogdanović, *On a class of anti-inverse semigroups*, Publ.Inst.Math., Beograd, 29(39), 1979, 95-100

[36] W.D. Munn, *On semigroup algebras*, Proc. Cambridge Phil.Soc., 51(1955), 1-15.

[37] W.D. Munn, R. Penrose, *A note on inverse semigroups*, Proc. Cambridge Phil.Soc., 51(1955), 396-399.

[38] J. von Neumann, *On regular rings*, Proc.Math.Acad.Sci. USA, 22(1963), 707-713.

[39] T.E. Nordahl, *Commutative semigroups whose proper subsemigroups are power joined*, Semigroup Forum, Vol. 6 (1973), 35-41.

[40] M. Petrich, *The maximal semilattice decomposition of a semigroup*, Math.Zeitsch., 85(1964), 68-82.

[41] M. Petrich, *Introduction to semigroups*, Merill Publ. Company, 1973.

[42] M. Petrich, *Lectures in semigroups*, Akad. Verlog, Berlin, 1977.

[43] M. Petrich, *Structure of regular semigroups*, Cahiers Math., Mountpellier, 1977.

[44] B. Pondělíček, *A certain equivalence on a semigroup*, Czech.Math.J., 21(96), 1971, 109-117.

[45] G.B. Preston, *Inverse Semigroups*, J.Lond.Math.Soc., 29(1954), 396-403.

[46] M.S. Putcha, *On the maximal semilattice decomposition of the power semigroup of a semigroup*, Semigroup Forum, 15(1978), 263-267.

[47] D. Rees, *On semigroups*, Cambridge Phil.Soc., 36(1940), 387-400.

[48] M. Satyanarayana, *Commutative primary semigroups*, Czech.Math.J., 22(97), 1972, 509-516.

[49] J. Sedlock, *Green's relations on a periodic semigroup*, Czech.Math.J., 19(94), 1969, 318-323.

[50] J.C. Sharp, Jr., *Anti-regular semigroups*, Publ.Inst. Math., Beograd, 24(38), 1978, 147-150.

[51] O. Steinfeld, *Über die Quasiideale von Halbgrupen*, Publ.Math, Debrecen, 4(1956), 262-275.

[52] A. Spoletin-Cherubini, A. Varisco, *Sui semigruppi fortamente reversibili arhimedici*, Instituto Lombardo, Rend.Sci., A 110 (1976), 313-321.

[53] ——————————, *Sui semigruppi fortamente reversibili separativi*, Instituto Lombardo, Rend.Sci., A 111 (1977), 31-43.

[54] T. Tamura, N. Kimura, *On decomposition of a commutative semigroup*, Kodai Math.Sem.Rep., 4(1954), 109-112.

[55] T. Tamura, J. Shafer, *Power semigroups*, Math. Japon, 12(1967), 25-32.

[56] G. Thierrin, *Sur une condition necessaire et suffisante pour qu'un semigroupe soit un groupe*, C.R.Acad. Sci. Paris, 232(1951), 376-378.

[57] G. Thierrin, *Sur les éléments unitaires d'un demi--groupe inversif*, C.R.Acad.Sci., Paris, 234(1952), 33-34.

[58] ———, *Sur quelques proprietes de certaines classes de demi-groupes*, C.R.Acad.Sci., Paris, 239(1954), 1335-1337.

[59] ———, *Sur les homogroupes*, C.R.Acad.Sci., Paris, 234(1952), 1519-1521.

[60] ———, *Contribution a la théorie des éqivalences dans les demi-groupes*, Bull.Soc.Math., France, 83(1955), 103-159.

[61] O. Zariski, P. Samuel, *Commutative algebra*, Vol. I,II, (на руском) Москва, 1963.

[62] В.В. Вагнер, Обобщенные группы, ДАН, СССР, 84(1952), 1119-1122.

[63] M. Yamada, *A remark on periodic semigroups*, Sci.Rep. Shimane Univ., 9(1959), 1-5.