UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNOMATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Mr Stevan Pilipović

DOKTORSKA DISERTACIJA

O NEKIM PROSTORIMA UOPŠTENIH FUNKCIJA SA STANOVIŠTA SEKVENCIJALNE TEORIJE

Novi Sad, 1979.

S A D R Ž A J

UVOD 1

I GLAVA

PROSTOR UOPŠTENIH FUNKCIJA A'

1.1. Uvod 5
1.2. Prostor uopštenih funkcija A' 5

II GLAVA

SEKVENCIJALNA TEORIJA PROSTORA U'

2.1. Uvod 12
2.2. Oznake i osnovni pojmovi 14
2.3. Prostor uopštenih funkcija U' 18
2.4. Ekvivalencija slabe i jake konvergencije u U' 24
2.5. Drugi oblik reprezentacije elemenata iz U' 36
2.6. Neprekidne linearne funkcionele nad U 37
2.7. O konvergenciji u U' 41
2.8. Prostor matrica 47
2.9. Teorema o jezgru 52

III GLAVA

POLUGRUPA OPERATORA NA PROSTORU U'

3.1. Uvod 54
3.2. Linearni operatori tipa množitelja 55
3.3. Polugrupa operatora na U' 57

3.4. Integral polugrupe T_t 61
3.5. Rešavanje evolucionih jednačina oblika
$\partial^k u(t,x)/\partial t^k = B^k u(t,x)$ 63

IV GLAVA

O PROSTORU UOPŠTENIH FUNKCIJA ČIJI ELEMENTI IMAJU LAGUERRE-OVU EKSPANZIJU

4.1. Uvod 69
4.2. Protor uopštenih funkcija koje imaju Laguerre-ovu ekspanziju 70
4.3. Konvolucija i Laplace-ova transformacija u L' 79

LITERATURA 84

U V O D

Koncepcija funkcije i operacija sa njome u klasičnoj matematici bila je neadekvatna za konstruisanje i rešavanje matematičkih modela odredjenih fenomena fizike i tehnike. To je imalo za posledicu više pokušaja generalizacije.

U teoriji parcijalnih jednačina tražio se način da se proširi skup rešenja. Tako je naprimer J. Leray proširio pojam izvoda funkcije f definisane na R^3, na sledeći način: funkcija f_i je parcijalni izvod od f ako je

$$\int_{R^3} (f\frac{g}{x} - f_i g)\,dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

za svaku funkciju g koja ima navedeni izvod.

Slično tome S. Soboleff |40|, definiše parcijalni izvod. Neka je g proizvoljna funkcija koja ima parcijalni izvod po x_i i koja se anulira izvan ograničene oblasti $D \subset R^n$. Ako postoji lokalno sumabilna funkcija f_i takva da je

$$\int_D (g(x)f_i(x) - f(x)\frac{g}{x_i})\,dx = 0, \qquad x = (x_1,\ldots,x_n),$$

f_i je po definiciji izvod po x_i funkcije f. Postoje funkcije koje u običnom smislu nemaju izvod a u smislu Soboleff-a imaju. Još interesantniji je rad Soboleff-a |39|, iz 1936. godine u kojem proširuje skup rešenja linearnih hiperboličkih diferencijalnih jednačina uvodjenjem pojma uopštene funkcije zbog čega se smatra za osnivača teorije uopštenih funkcija.

Pored navedene, skoro u isto vreme, oko 1950. godine, pojavile su se teorija distribucija L. Schwartz-a |36|, i teorija operatora J. Mikusińskog |26|. Obe su bile zasnovane, svaka na svoj način, na uopštenju pojma funkcije i sadrže u sebi generalizacije primenjive na realne probleme.

Tvorac teorije distribucije L. Schwartz je svoje ideje izneo još 1944. godine. Osim radova Soboleff-a koji su najznačajniji, radovi Hadamard-a, Leray-a, Bochner-a, Riesz-a, Yong-a i drugih, su dali obilje materijala za Schwartz-ovu teoriju distribucija u kojoj je iznesen niz novih i vrlo značajnih rezultata.

Veliki broj matematičara kao što su J. M. Gelfand i G. E. Silov |11|, |12|, |13|, |14|, I. Halperin |17|, K. Yosida |46|, A. H. Zemanian |47|, |49|, J. Horvat |19|, H. Brenermann |7|, razvijali su teoriju uopštenih funkcija i distribucija preko pojma neprekidne linearne funkcionele koristeci u većoj ili manjoj meri teoriju vektorsko-topoloških prostora koja je baš radovima Schwartz-a doživela punu ekspanziju. Taj prilaz teoriji se često naziva funkcionalni prilaz.

Uporedo sa razvojem teorije sa navedenog stanovišta stvarale su se i razvijale ekvivalentne teorije distribucija u drugim pravcima. Spomenimo Sebastiao e Silvinu aksiomatski postavljenu teoriju distribucije |38|, zatim Temple-ov prilaz |42|, kao i pojmovno najelementarniji sekvencijalni prilaz koji su dali grupa poljskih matematičara na čelu sa J. Mikusińskim |1|, |25|, |27|, |21|.

Sekvencijalna teorija distribucija je zasnovana na skupu nizova funkcija i na taj način je u bližoj vezi sa realnim problemima koje rešava. Sam Dirac je za δ-distribuciju naveo da se može aproksimirati sa nizom neprekidnih funkcija.

Doktorska disertacija nosi naslov *"O nekim prostorima uopštenih funkcija sa stanovišta sekvencijalne teorije"*. Sam naslov može dovesti do konfuzije pa ćemo ga podrobnije objasniti. Postoji nedoslednost u korišćenju termina "distribucija" i "uopštena funkcija". Tvorci sekvencijalne teorije koriste i jedan i drugi termin da bi označili isti pojam u zavisnosti od toga da li teoriju izlažu na engleskom ili ruskom jeziku. Zemanijan je u svojim prvim radovima koristio termin "distribucija" da bi označio neprekidne linearne funkcionele nad prostorom test funkcija čiji je podskup skup $\mathcal{D}$. Kasnije on odstupa od te terminologije i termin "distribucija" koristi da označi Schwartz-ove distribucije $\mathcal{D}'$ (|49|) a termin "uopštena funkcija" koristi da označi neprekidne linearne funkcionele nad proizvoljnim prostorom osnovnoh funkcija. Mi ćemo koristiti termin "Schwartz-ova distribucija" i termin "distribucija" tj. "uopštena funkcija" tako da bismo usaglasili na izvestan način prvobitnu i kasniju Zemanian-ovu terminologiju.

Doktorska disertacija sadrži četiri glave. Prva nosi naslov: Prostor uopštenih funkcija A'. Ona je uvodna i u njoj su izneti rezultati Zemanijana |49|, koji se odnose na integralne transformacije vezane za ortogonalno razlaganje uopštenih funkcija. Ove rezultate izlažemo zato što ćemo ih u drugoj glavi uopštiti.

Druga glava nosi naslov: Sekvencijalna teorija prostora U'. U njoj sa stanovišta sekvencijalne teorije razvijamo teoriju prostora U' koji se u specijalnom slučaju poklapa sa prostorom A'.

Treća glava nosi naslov: Polugrupa operatora na prostoru U'. Koristeći rezultate dobijene u drugoj glavi konstruišemo polugrupu operatora na prostoru U' i na osnovu njih rešavamo odredjene evolucione jednačine.

Četvrta glava nosi naslov: O prostoru uopštenih funkcija čiji elementi imaju Laguerre-ovu ekspanziju. Navedeni prostor je prostor tipa U'. U ovoj glavi su date neke osobine tog prostora i posebno je ispitana Laplace-ova transformacija nad tim prostorom.

Druga i treća glava ove disertacije su delom zasnovene na radovima |32|, |33| koje sam radio zajedno sa dr Endre Papom. Prostori U' koje smo obradjivali u tim radovima zadovoljavaju jedan dodatni uslov ((2.5.)) više nego prostori U' koje proučavam u disertaciji, što je omogućavalo da za njihovo ispitivanje možemo koristiti sekvencijalnu teoriju Köthe-ovih prostora iz |1|. Bez tog dodatnog uslova sekvencijalna teorija Köthe-ovih prostora se ne može koristiti tako da sam iz radova |32|, |33|, koristio osnovne pojmove i definicije vezane za prostore U', a osobine tih prostora su ispitivane na sasvim drugi način.

Ova doktorska disertacija, sem prve glave, predstavlja originalan doprinos sekvencijalnoj teoriji uopštenih funkcija. Osnovni pojmovi su uvedeni na elementaran način kako su data i tvrdjenja i dokazi. To ni po čemu ne umanjuje složenost problematike; naprotiv, vrlo komplikovane pojmove za čije razumevanje je inače u funkcionalnom prilazu potrebno poznavanje duboko razradjene teorije lokalno konveksnih prostora, ovde razmatramo direktno i što elementarnije. To je bitno obeležje sekvencijalne teorije.

Primena izložene teorije nije samo u rešavanju evolucionih jednačina (III glava, 4. poglavlje) koje su u specijalnom slučaju parcijalne diferencijalne jednačine sa ne konstantnim koeficijentima, što je inače jedan od osnovnih motiva za proučavanje integralnih transformacija uopšte. Teorija prostora U' omogućava da se proučavaju konkretni primeri prostora U' koji pored opštih svojstava imaju i neka svoja specifična. Četvrta glava je posvećena takvom primeru prostora U' čijim proučavanjem smo došli do novih mogućnosti u primeni na rešavanje diferencijalnih jednačina.

I GLAVA

PROSTOR UOPŠTENIH FUNKCIJA A'

1.1. UVOD

Integralne transformacije uopštenih funkcija nisu interesantne samo sa stanovišta teorije. Njihova primena u rešavanju diferencijalnih, integralnih, integrodiferencijalnih i diferencnih jednačina čini ih moćnim oružjem u mnogim naučnim oblastima.

Najviše proučavane su Fourier-ova, Laplace-ova, Hilbert-ova, Melin-ova, Hankel-ova, Weierstrass-ova, kao i transformacija vezana za ortonormalno razlaganje uopštenih funkcija.

Zemanian je medju prvima obradjivao integralne transformacije vezane za ortonormalno razlaganje |48|. Ovu vrstu transformacija nalazimo u radovima Bouix-a |5|, Brag-a i Schönberg-a |6|, Gelfand-a i Vilenkin-a |10|, Giertz-a |15|, Walter-a |50| i drugih.

U ovoj glavi ćemo ukratko izložiti Zemanianove rezultate koji se odnose na integralne transformacije vezane za ortonormalno razlaganje i koji su izloženi u |49|, glava 9. Oni su dati za jednodimenzioni slučaj za razliku od višedimenzionog slučaja koji ćemo posmatrati u drugoj i trećoj glavi.

1.2. PROSTOR UOPŠTENIH FUNKCIJA A'

Zemanijan je napisao monografiju |49| isključivo vezanu za integralne transformacije uopštenih funkcija i njihovu primenu u rešavanju konkretnih problema. Iz te monografije ćemo preneti njegovu koncepciju integralnih transformacija vezanih za ortonormirano razlaganje uopštenih funkcija.

Neka je $I = (a,b)$ otvoren interval u R. Funkcija $f(x)$ koja je lokalno integrabilna na I i za koju je

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

naziva se kvadrat integrabilna funkcija na I. Skup kvadrat integrabilnih funkcija se može razložiti na disjunktne klase ekvivalencije ako predpostavimo da su dve funkcije iz iste klase ako je $f = g$ skoro svuda na I. Dobijeni skup klasa ekvivalencije označava se sa $L_2(I)$.

$L_2(I)$ je vektorski prostor gde je 0-elemenat klasa funkcija koje su jednake nuli skoro svuda na I. Sa

$$\|f\| \triangleq \left| \int_a^b |f(x)|^2 dx \right|^{1/2}$$

definišemo normu na $L_2(I)$. (simbol $\triangleq$ znači "po definiciji").

Skalarni proizvod na $L_2(I)$ se definiše sa

$$(f,g) \triangleq \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

gde su f, g proizvoljni elementi iz $L_2(I)$ a $\overline{g(x)}$ označava konjugovano kompleksnu funkciju za $g(x)$.

Označimo sa R linearni diferencijalni operator oblika

(1.1.) $$R = \theta_0 \frac{\partial^{n_1}}{\partial x^{n_1}} \theta_1 \cdot \ . \ . \ \frac{\partial^{n_k}}{\partial x^{n_k}} \theta_k$$

koji je sam sebi dualan, odnosno za koji važi

$$R = \overline{\theta}_k \left(- \frac{\partial^{n_k}}{\partial x^{n_k}}\right) . \ . \ . \ \overline{\theta}_1 \left(- \frac{\partial^{n_1}}{\partial x^{n_1}}\right) \overline{\theta}_0$$

gde su Θ_n, $n=1,\ldots,k$, glatke (što znači beskonačno puta diferencijabilne) kompleksnoznačne funkcije koje su različite od nule za svako $x \in I$.

Neka je operator R takav da je niz glatkih funkcija ψ_n, $n=0,1,\ldots$, iz $L_2(I)$, niz sopstvenih funkcija operatora R koji čini kompletnu ortonormiranu bazu prostora $L_2(I)$ i neka je λ_n, $n \in N_o$ (N_o je skup koji sadrži prirodne brojeve i nulu), niz sopstvenih vrednosti operatora R ($R\psi_n = \lambda_n \psi_n$) tako da

$$|\lambda_n| \to \infty \quad \text{kad} \quad n \to \infty$$

Nizovi λ_n i ψ_n se mogu prenumerisati tako da je niz $|\lambda_n|$ monotono rastući.

Skup test funkcija A' definiše se na sledeći način:

Funkcija $\phi(x)$ je u A ako je $\phi(x)$ glatka kompleksnoznačna funkcija definisana na I takva da za svako $k \in N_o$ važi

$$\text{(i)} \quad \alpha_k(\phi) \triangleq \alpha_o(R^k\phi) \triangleq \Big| \int_a^b |R^k\phi(x)|^2 dx \Big|^{1/2} < \infty \quad \text{i}$$

(1.2.)

$$\text{(ii)} \quad (R^k\phi, \psi_n) = (\phi, R^k\psi_n) \text{ za proizvoljno } n \text{ i } k \text{ iz } N_o.$$

R^o = I-identički operator i $R^{k+1} = R^k R$.

Skup A ima strukturu vektorskog prostora a familija polunormi α_k, $k \in N_o$, definiše prebrojivu multinormu na A, što znači da je A prebrojivo multinormni prostor. (Prebrojivo multinormni prostor V se naziva vektorski prostor koji ima topologiju indukovanu sa nizom polunormi α_k tako da za svako $\phi \neq 0$ iz V postoji k_o tako da je $\alpha_{k_o}(\phi) \neq 0$.)

Pošto je za elemente ϕ iz A

$$\alpha_o(\phi) = \Big(\int_a^b |\phi(x)|^2 dx\Big)^{1/2} < \infty$$

ako svakoj funkciji iz A opredelimo klasu ekvivalencije iz $L_2(I)$ jasno je da je A podprostor od $L_2(I)$ i da konvergencija u A povlači konvergenciju u $L_2(I)$. Konvergencija u A je definisana preko prebrojive multinorme α_k, $k\in N_0$, a konvergencija u $L_2(I)$ je definisana preko norme α_0.

Lema 1.1. |49| Prostor A je metizabilan i kompleta

Lema 1.2. |49| Ako $\phi\in A$ onda je

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} (\phi,\psi_n)\psi_n$$

gde red konvergira u A.

Lema 1.3. |49| Neka su a_n, $n\in N_0$, kompleksni brojevi. Red

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n$$

konvergira u A ako i samo ako za svako $k\in N_0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^{2k}|a_n|^2 < \infty .$$

Prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad A je prostor uopštenih funkcija A'.

Pošto je A kompletan onda je to i A' u odnosu na slabu konvergenciju.

Definišimo operator R na prostoru A' na sledeći način:

$$(Rf,\phi) \triangleq (f,R\phi)$$

za svako ϕ iz A $(f\in A')$.

Iz te definicije sledi da R neprekidno preslikava A' u A'.

Neka je K kompaktan skup u I. Sa $\mathcal{D}_K$ se označava vektorski prostor glatkih kompleksnoznačnih funkcija na intervalu I koje se anuliraju van K. Na $\mathcal{D}_K$ se definiše prebrojiva multinorma γ_k, $k \in N_o$,

$$\gamma_k(\phi) \triangleq \sup_{t \in I} \left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\phi(t)\right| \qquad (\gamma_o \text{ - je norma}).$$

u odnosu na koju je $\mathcal{D}_K$ prebrojivo multinormni prostor.

Neka je K_n, $n \in N$, niz kompaktnih podskupova od I tako da je $K_n \subset K_{n+1}$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = I$. Topologija u $\mathcal{D}_{K_n}$ se poklapa sa topologijom koju $\mathcal{D}_{K_{n+1}}$ inducira na $\mathcal{D}_{K_n}$. Sa $\mathcal{D}(I)$ označava se unija prostora $\mathcal{D}_{K_n}$.

$$\mathcal{D}(I) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{K_n}$$

Niz ϕ_n iz $\mathcal{D}(I)$ konvergira ka $\phi \in \mathcal{D}(I)$ ako postoji n_o tako da $\phi_n \subset \mathcal{D}_{K_{n_o}}$, $\phi \in \mathcal{D}_{K_{n_o}}$ i $\phi_n \to \phi$ u smislu konvergencije u $\mathcal{D}_{K_{n_o}}$.

Sa $\mathcal{D}'(I)$ se označava prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad $\mathcal{D}(I)$. To je prostor Schwartz-ovih distribucija.

Sa $\mathcal{E}(I)$ se označava prebrojivo multinormni prostor svih glatkih kompleksnoznačnih funkcija u kojem se prebrojiva multinorma $\gamma_{K_n,k}$ definiše na sledeći način

$$\gamma_{K_n,k}(\phi) \triangleq \sup_{t \in K_n} \left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}\phi(t)\right| \qquad k \in N_o, \quad n \in N,$$

gde su K_n kompaktni podskupovi od I tako da je $K_n \subset K_{n+1}$ i $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = I$.

Sa $\mathcal{E}'(I)$ označava se prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad $\mathcal{E}(I)$.

Pošto je $\mathcal{D}(I)$ gust podskup od $\mathcal{E}(I)$, $\mathcal{E}'(I)$ je podprostor od $\mathcal{D}'(I)$ i to onih Schwartz-ovih distribucija koje imaju kompaktan nosač (|49|).

Prostor $\mathcal{D}(I)$ je podprostor od A i konvergencija u $\mathcal{D}(I)$ povlači konvergenciju u A. Odatle sledi da restrikcija bilo koje uopštene funkcije $f \in A'$ na $\mathcal{D}(I)$ je iz $\mathcal{D}'(I)$. Osim toga konvergencija u A' povlači konvergenciju restrikcije u $\mathcal{D}'(I)$.

Pošto je $\mathcal{D}(I) \subset A \subset \mathcal{E}(I)$ i $\mathcal{D}(I)$ gust u $\mathcal{E}(I)$, A je takodje gust u $\mathcal{E}(I)$ a odatle sledi da je $\mathcal{E}'(I)$ podprostor od A'.

$L_2(I)$ je podskup od A' i to takav da različite funkcije iz $L_2(I)$ odredjuju različite uopštene funkcije iz A'.

Teorema 1.4. |49| Ako $f \in A'$ onda je

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f,\psi_n)\psi_n \tag{1.3.}$$

gde red konvergira u A' (u odnosu na slabu konvergenciju).

Ortonormirano razlaganje oblika (1.3.) se može posmatrati kao inverzna transformacija za transfotmacuju zadanu izrazom

$$Uf \triangleq F(n) \triangleq (f,\psi_n), \quad f \in A', \quad n = 0,1,\ldots$$

Dakle U preslikava A' u prostor kompleksnoznačnih funkcija definisanih na skupu N_0. Inverzna transformacija U^{-1} je data sa izrazom

$$U^{-1}F(n) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} F(n)\psi_n = f \in A'.$$

Ovo preslikavanje je linearno i neprekidno u tom smislu da ako f_ν konvergira slabo ka f u A' onda za svako $n \in N_0$

$$F_\nu(n) \to F(n) \quad \text{kad } \nu \to \infty.$$

Teorema 1.5. |49| Ako $f,g \in A'$ i njihove transformacije zadovoljavaju uslov $F(n) = G(n)$, $n \in N_0$, onda je $f = g$ u A

Teorema 1.6. |49| Neka su b_n, $n \in N_0$, kompleksni brojevi. Red

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n\psi_n$$

konvergira slabo u A' ako i samo ako postoji $q \in N_0$ tako da je

$$\sum_{\lambda_n \neq 0} |\lambda_n|^{-2q} |b_n|^2 < \infty .$$

Ako sa f označimo sumu reda $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\psi_n$ u A' onda je $b_n = (f,\psi_n)$, $n\in N_o$.

(Simbol $\sum_{\lambda_n\neq 0}$ označava sumiranje po onim indeksima n za koje je $\lambda_n \neq 0$).

Teorema 1.7. |49| Potreban i dovoljan uslov da $f\in A'$ je da postoji $q\in N_o$ i $g\in L_2(I)$ tako da je

(1.4.) $$f = R^q g + \sum_{\lambda_n=0} c_n\psi_n$$

gde su c_n kompleksni brojevi.

(Simbol $\sum_{\lambda_n=0}$ označava sumiranje po onim indeksima n za koje je $\lambda_n=0$).

Pošto je

$$R^k f = \sum_{n=0}^{\infty}(f,\psi_n)R^k\psi_n = \sum_{n=0}^{\infty}(f,\psi_n)\lambda_n^k\psi_n$$

jednostavno možemo da rešavamo diferencijalne jednačine oblika

(1.5.) $$P(R)h = g$$

gde je P-polinom i $g\in A'$. Naime primenom transformacije U dobijamo

$$P(\lambda_n)H(n) = G(n).$$

Pošto je razvijanje u red elemenata iz A' jedinstveno, ova jednačina je ekvivalentna sa jednačinom (1.5.).

Ako je $P(\lambda_n) \neq 0$ za svako $n\in N_o$ onda je rešenje jednačine (1.5.)

$$h = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{G(n)}{P(\lambda_n)}\psi_n .$$

Ako je $P(\lambda_n) = 0$ za neke λ_n, onda rešenje jednačine (1.5.) nije jedinstveno i konstruiše se slično kao u predhodnom slučaju.

II GLAVA

SEKVENCIJALNA TEORIJA PROSTORA $\mathcal{U}'$

2.1. UVOD

Sekvencijalna teorija Schwartz-ovih distribucija koja je sa monografijom od P. Antosika, J. Mikusińskog i R. Sikorskog |1| postala celovito razradjena teorija, pojam distribucije vezuje za klase ekvivalencije fundamentalnih nizova glatkih funkcija. U skup fundamentalnih nizova se uvodi relacija ekvivalencije koja deli taj skup na disjunktne klase. U ovaj skup klasa se na odgovarajući način definiše sabiranje i množenje sa kompleksnim brojem kao i konvergencija. U |1| je pokazano da tako dobijeni vektorski prostor je ekvivalentan sa prostorom Schwartz-ovih distribucija.

Ovaj prilaz teoriji je pojmovno mnogo jednostavniji jer ne zahteva korišćenje dubokih teorema funkcionalne analize. Uopšte, sekvencijalna teorija distribucija je samo deo sekvencijalnog prilaza, sekvencijalne metode u funkcionalnoj analizi koju zadnjih godina razvijaju grupa poljskih matematičara na čelu sa J. Mikusińskim.

Slično tome ovde polazimo od skupa $\mathcal{R}$-fundamentalnih nizova koji preko odredjene relacije ekvivalencije se deli na disjunktne klase ekvivalencije koje nazivamo uopštene funkcije i koje su elementi prostora $\mathcal{U}'$. U specijalnom slučaju kada je operator $\mathcal{R}$ koji generiše prostor $\mathcal{U}'$, linearni diferencijalni operator koji je sam sebi dualan i kada je ψ_n, $n\in N_0$, kompletna ortonormirana baza prostora $L_2(I)$ sastavljena od glatkih funkcija, I je otvoren interval u R, dobijamo da se prostor $\mathcal{U}'$ poklapa sa prostorom A' iz |49|.

U ovoj glavi ćemo posmatrati q-dimenzioni slučaj za razliku od jednodimenzionog slučaja što nije samo uobičajeno uopštenje već donosi i specifične probleme.

Drugo i treće poglavlje ove glave je posvećeno osnovnim pojmovima i definicijama vezanim za prostor $\mathcal{U}'$.

U četvrtom poglavlju se razmatra pitanje konvergencije u prostoru $\mathcal{U}'$. Pokazali smo da su slaba i jaka konvergencija u tom prostoru ekvivalentne. Za razliku od |34| gde smo posmatrali jednodimenzioni slučaj ovde smo to pokazali da važi u q-dimenzionom slučaju. Jaku konvergenciju u $\mathcal{U}'$ definišemo po uzoru na jaku konvergenciju temperiranih distribucija iz |1|.

U petom poglavlju je data nova reprezentacija elemenata iz $\mathcal{U}'$ koja jasnije pokazuje uopštenje jednodimenzionog slučaja na višedimenzioni slučaj u razvoju teorije prostora $\mathcal{U}'$.

U šestom poglavlju je pokazano da su elementi iz $\mathcal{U}'$ neprekidne linearne funkcionele nad odgovarajućim prostorom osnovnih funkcija koji je definisan u drugom poglavlju (u |34| to je pokazano za jednodimenzioni slučaj).

U sedmom poglavlju su ispitane još neke osobine konvergentnih nizova, a u osmom poglavlju smo po uzoru na |1| izložili teoriju prostora matrica U i U' čiji elementi su koeficijenti iz razvoja uopštenih funkcija iz $\mathcal{U}'$ u red. Takodje smo ispitali odnos izmedju prostora temperiranih matrica iz |1| i prostora matrica U'.

U zadnjem, devetom poglavlju smo razmatrali teoremu o jezgru koja je za temperirane distribucije sa stanovišta funkcionalnog prilaza razmatrana u |14| a sa stanovišta sekvencijalnog prilaza u |1|. Ovde to radimo za prostore tipa $\mathcal{U}'$.

2.2. OZNAKE I OSNOVNI POJMOVI

Koristićemo oznake i pojmove iz |1| i |49|. Ovde ćemo navesti samo neke da bismo izbegli moguće nejasnoće.

Elemente Euclid-ovog prostora R^q označavamo sa slovima latinice $x,y,z,\ldots$ a njihove koordinate označavamo sa odgovarajućim grčkim slovima $\xi_i,\eta_i,\zeta_i,\ldots$ $(i=1,\ldots,q)$. To znači da elemente iz R označavamo sa grčkim slovima.

Sa B^q označavamo podskup od R^q sastavljen od onih elemenata iz R^q čije su sve koordinate celi brojevi a sa P^q označavamo poskup od B^q čiji elementi imaju sve koordinate nenegativne brojeve. Elemente od B^q ćemo takodje označavati sa slovima latinice $m,n,k,\ldots$ a njihove koordinate sa odgovarajućim grčkim slovima. Uobičajeno je da se sa $m,n,k,$ ... označavaju i celi brojevi. Nadamo se da to neće dovesti do konfuzije.

Ako su $x=(\xi_1,\ldots,\xi_q)$ i $y=(\eta_1,\ldots,\eta_q)$ iz R^q onda je

$$(x,y) = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_q\eta_q .$$

Ako je $k=(\kappa_1,\ldots,\kappa_q)\in B^q$, $x\in R^q$ i r ceo broj onda je

$$x^k = \xi_1^{k_1}\cdots\xi_q^{k_q} \quad \text{i} \quad x^r = \xi_1^r\cdots\xi_q^r .$$

Ako $k\in B^q$ i $\alpha\in R$ onda je

$$\alpha^k = \alpha^{k_1+\ldots+k_q} .$$

Kažemo da je $x\leqslant y$ odnosno $x<y$ ako za svako $i=1,\ldots,q$ je $\xi_i\leqslant\eta_i$ odnosno $\xi_i<\eta_i$.

Ako $k,\ m\in P^q$ i $k\geqslant m=(\mu_1,\ldots,\mu_q)$ onda je

$$\binom{k}{m} = \frac{k!}{m!\,(k-m)!} \quad \text{gde je} \quad m! = \mu_1!\cdots\mu_q!$$

Neka je $I = I_1 \times \ldots \times I_q$ otvoren interval u R^q. Funkcija $f(x)$ koja je lokalno integrabilna na I i za koju je

$$\int_I |f(x)|^2 dx < \infty$$

naziva se kvadrat integrabilna funkcija na I. Skup kvadrat integrabilnih funkcija se razlaže na disjunktne klase ekvivalencije ako predpostavimo da su dve funkcije iz iste klase ekvivalencije ako je $f = g$ **skoro** svuda na I. Dobijeni skup klasa ekvivalencije označava se sa $L_2(I)$. Norma u $L_2(I)$ je data sa

$$\|f\| \triangleq \left| \int_I |f(x)|^2 dx \right|^{1/2}$$

a skalarni proizvod elemenata $f, g \in L_2(I)$ se definiše sa

$$(f,g) \triangleq \int_I f(x)\overline{g(x)}\,dx \;.$$

Vidimo da se prostor $L_2(I)$ definiše na isti način kao i u jednodimenzionom slučaju.

Neka je ψ_s^i, $s \in N_0$, kompletna ortonormirana baza prostora $L_2(I_i)$ za utvrdjeno i (I_i je otvoren interval u R).

Predpostavimo da postoji linearni operator

$$R_i : A_i \to A_i \qquad (i = 1,\ldots,q)$$

gde je A_i algebarski lineal nad skupom $\psi_0^i, \psi_1^i, \ldots,$ tako da su ψ_s^i, $s \in N_0$, sopstvene funkcije operatora R_i što znači da je

$$R_i \psi_s^i = \lambda_{s,i} \psi_s^i \;, \qquad s \in N_0 \;, \quad \text{(i je utvdjen broj)}$$

gde je $\lambda_{s,i}$ niz sopstvenih vrednosti operatora R_i za koji predpostavljamo da su mu članovi realni brojevi i da

$$|\lambda_{s,i}| \to \infty$$

Nizove ψ_s^i i $\lambda_{s,i}$ prenumerišimo tako da je niz $|\lambda_{s,i}|$ monotono rastući (po s).

U specijalnom slučaju operator R_i se može uzeti

$$R_i = \Theta_{o,i} D_i^{\nu_i^1} \Theta_{1,i} \dots D_i^{\nu_i^m} \Theta_{m,i} \ , \quad i = 1,\dots,q$$

gde je $D_i = \partial/\partial\xi_i$, ν_i^k su pozitivni celi brojevi a $\Theta_{k,i}$ su glatke kompleksnoznačne funkcije na intervalu I_i različite od nule u tom intervalu. Za operator R_i se još predpostavlja da je sam sebi dualan odnosno da je

$$R_i = \Theta_{m,i}(-D_i)^{\nu_i^m} \dots \Theta_{1,i}(-D_i)^{\nu_i^1} \Theta_{o,i}$$

Za sopstvene funkcije ψ_s^i predpostavimo da čine kompletnu ortonormiranu bazu prostora $L_2(I_i)$ koja je sastavljena od glatkih funkcija.

Vidimo da je u ovom specijalnom slučaju za utvrdjeno i, operator R_i onaj koji je posmatrao Zemanijan u |49|.

Stavimo da je

$$\psi_n(x) = \psi_{\nu_1}^1(\xi_1) \dots \psi_{\nu_q}^q(\xi_q)$$

gde je $x = (\xi_1,\dots,\xi_q) \in I$ i $n = (\nu_1,\dots,\nu_q) \in P^q$.

E. Pap je u |29| pokazao da je ψ_n, $n \in P^q$, kompletan ortonormiran skup u prostoru $L_2(I)$.

Definišimo operator R_i na algebarskom linealu nad skupom ψ_n, $n \in P^q$,

$$R_i(\psi_n) \triangleq \psi_{\nu_1}^1 \dots \psi_{\nu_{i-1}}^{i-1} R_i(\psi_{\nu_i}^i) \psi_{\nu_{i+1}}^{i+1} \dots \psi_{\nu_q}^q \qquad \text{i}$$

$$R_i(\psi_n + \psi_m) \triangleq R_i(\psi_n) + R_i(\psi_m) \ .$$

Sada možemo **definisati** za q-dimenzionalni slučaj operator

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cdots \mathcal{R}_q$$

na algebarskom linealu koji generiše skup ψ_n, $n \in P^q$, tako da je

$$\mathcal{R}\psi_n = \lambda_n^1 \psi_n \qquad (\lambda_n = (\lambda_{\nu_1,1}, \ldots, \lambda_{\nu_q,q})).$$

Lako je videti da u specijalnom slučaju kada su operatori $\mathcal{R}_i$, $i = 1, \ldots, q$, oblika navedenog na predhodnoj strani kao primer specijalnog slučaja za operator $\mathcal{R}_i$, onda je

$$\mathcal{R} = \Theta_0 D^{n_1} \Theta_1 D^{n_2} \cdots D^{n_m} \Theta_m \qquad \text{gde je}$$

$\Theta_k(x) = \Theta_{k,1}(\xi_1) \cdots \Theta_{k,q}(\xi_q)$, $n_k = (\nu_1^k, \ldots, \nu_q^k)$ P^q za $k = 1, \ldots, m$

i $\qquad D^{n_k} = D_1^{\nu_1^k} \cdots D_q^{\nu_q^k}$

U daljem tekstu A_ν označava proizvoljan niz konačnih podskupova od P^q tako da je

$$A_\nu \subset A_{\nu+1} \qquad \text{i} \quad \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = P^q .$$

Takodje ćemo u daljem tekstu koristiti sledeću oznaku

$$\tilde{\lambda}_{\nu_i,i} = \begin{cases} 1 & \text{ako je } \lambda_{\nu_i,i} = 0 \\ |\lambda_{\nu_i,i}| & \text{ako je } \lambda_{\nu_i,i} \neq 0 \end{cases} \qquad \text{i}$$

$$\tilde{\lambda}_n = (\tilde{\lambda}_{\nu_1,1}, \ldots, \tilde{\lambda}_{\nu_q,q})$$

Primedba: **Slučaj kada postoje $\lambda_{\nu_i,i}$ koji su jednaki nuli je opštiji i komplikovaniji od suprotnog. Zbog toga ćemo ga u izlaganju opšte teorije uvek imati u vidu.**

2.3. PROSTOR UOPŠTENIH FUNKCIJA U'

Ovo poglavlje je zasnovano na radu |32| .

Definisaćemo prostor uopštenih funkcija koji zavisi od skupa $I = I_1 \times \ldots \times I_q$, ortonormirane baze ψ_n, $n \in P^q$, i od operatora R.

Definicija 2.1. Niz

$$\{\sum_{n\in A_\nu} a_n\psi_n\}, \qquad \nu \in N ,$$

je R-fundamentalan ako postoji konvergentan niz $\sum_{n\in A_\nu} c_n\psi_n$ u kvadratnom smislu, što znači u smislu norme u $L_2(I)$, i ako postoji $k \in P^q$ tako da je

$$R^k \sum_{n\in A_\nu} c_n\psi_n = \sum_{\substack{n\in A_\nu \\ \lambda_n\neq 0}} a_n\psi_n \qquad \text{za svako } \nu \in N \text{ i}$$

(2.1.)

$$\sum_{\lambda_n=0} |a_n|^2 \tilde{\lambda}_n^{-2k} < \infty \quad .$$

(Ozanaka $\sum_{\lambda_n=0}$ odnosno $\sum_{\lambda_n\neq 0}$ znači sumiranje po onim indeksima $n \in P^q$ za koje je $\lambda_n^1 = 0$ odnosno $\lambda_n^1 \neq 0$.)

Pošto niz $\sum_{n\in A_\nu} c_n\psi_n$ iz definicije 2.1. konvergira bezuslovno to znači da R-fundamentalan niz ne zavisi od izbora niza A_ν.

Definicija 2.2. Kažemo da su dva R-fundamentalna niza u relaciji $\sim$

$$\{\sum_{n\in A_\nu} a_n\psi_n\} \sim \{\sum_{n\in A_\nu} b_n\psi_n\}$$

ako je $a_n = b_n$ za svako $n \in P^q$.

Lako se proverava da je ova relacija relacija ekvivalencije. Dobijene klase ekvivalencije se nazivaju *UOPŠTENE FUNKCIJE*.

Sabiranje R-fundamentalnih nizova definišemo na sledeći način: ako su $\{\sum_{n\in\Lambda_\nu} a_n\psi_n\}$ i $\{\sum_{n\in\Lambda_\nu} b_n\psi_n\}$ R-fundamentalni nizovi onda je njihov zbir R-fundamentalan niz

$$\{\sum_{n\in\Lambda_\nu} (a_n + b_n)\psi_n\} .$$

Množenje sa skalarom iz skupa kompleksnih brojeva se definiše sa

$$\lambda\{\sum_{n\in\Lambda_\nu} a_n\psi_n\} \triangleq \{\sum_{n\in\Lambda_\nu} \lambda a_n\psi_n\} .$$

Ako u skupu uopštenih funkcija definišemo sabiranje i množenje sa skalarom u skladu sa predhodnim, dobijamo da je skup uopštenih funkcija vektorski prostor koji označavamo sa $\mathcal{U}'$.

Elemanat f iz $\mathcal{U}'$ reprezentovan sa R-fundamentalnim nizom iz definicije 2.1. će takodje biti označavan sa

$$R^k F + \sum_{\lambda_n=0} a_n\psi_n \qquad \text{gde je} \qquad F \overset{2}{=} \sum_{n\in P^q} c_n\psi_n . \tag{2.2.}$$

($\overset{2}{=}$ označava konvergenciju u kvadratnom smislu).

Vidimo da proizvoljnu funkciju F iz $L_2(I)$ možemo da identifikujemo sa nekom uopštenom funkcijom iz $\mathcal{U}'$ reprezentovanom sa R-fundamentalnim nizom

$$\{\sum_{n\in\Lambda_\nu} c_n\psi_n\} \qquad \text{gde je} \qquad F \overset{2}{=} \sum_{n\in P^q} c_n\psi_n .$$

Da je ovaj niz R-fundamentalan sledi iz definicije 2.1. za $k = (0,\dots,0)$ i $a_n = 0$.

Primetimo da u reprezentaciji (2.2.) suma $\sum_{\lambda_n=0}$ je beskonačna za razliku od jednodimenzionog slučaja kada je konačna.

Ako je $f \in \mathcal{U}'$ reprezentovan sa R-fundamentalnim nizom $\{\sum_{n\in\Lambda_\nu} a_n\psi_n\}$ onda definišemo da je $R^k f$, $k \in P^q$, elemenat iz $\mathcal{U}'$ reprezentovan sa R-fundamentalnim nizom $\{R^k \sum_{n\in\Lambda_\nu} a_n\psi_n\}$.

Definicija 2.3. Kažemo da niz uopštenih funkcija f_n, $n \in N$, iz $\mathcal{U}'$ jako konvergira ka $f \in \mathcal{U}'$ i pišemo $f_n \overset{\mathcal{U}'}{\to} f$, ako postoje kvadrat integrabilne funkcije F_n, $n \in N$, i F i ako postoje kompleksni brojevi $c_{n,p}$, c_p, $n \in N$, $p \in P^q$, tako da važi

$$R^k F_n + \sum_{\lambda_p=0} c_{n,p}\psi_p = f_n, \quad R^k F + \sum_{\lambda_p=0} c_p\psi_p = f$$

(2.3.) za neko $k \in P^q$ i

$$F_n \overset{2}{\to} F \ , \quad \sum_{\lambda_p=0} |c_{n,p} - c_p|^2 \tilde{\lambda}_p^{-2k} \to 0 \ \text{ kad } \ n \to \infty \, .$$

Iz navedene definicije direktno sledi za svako $p \in P^q$

$$f_n \overset{\mathcal{U}'}{\to} f \Rightarrow R^p f_n \overset{\mathcal{U}'}{\to} R^p f \, .$$

R-fundamentalan niz $\{\sum_{n\in A_\nu} a_n\psi_n\}$ koji reprezentuje uopštenu funkciju $f \in \mathcal{U}'$ konvergira jako ka f, i pišemo

$$f \overset{\mathcal{U}'}{=} \sum_{n\in P^q} a_n\psi_n \, .$$

Umesto $\overset{\mathcal{U}'}{=}$ ćemo stavljati samo $=$ ako to ne dovodi do pogrešne interpretacije.

Teorema 2.1. Ako za neko $k \in P^q$ važi

(1) $$\sum_{n \in P^q} \tilde{\lambda}_n^{-2k} |a_n|^2 < \infty$$

onda postoji uopštena funkcija f iz $\mathcal{U}'$ tako da je

(2) $$f = \sum_{n \in P^q} a_n \psi_n \quad .$$

Obrnuto, ako je f iz $\mathcal{U}'$ onda postoje kompleksni brojevi a_n, $n \in P^q$, koji zadovoljavaju (1) tako da važi (2).

Dokaz: Ako je uslov (1) zadovoljen onda je

$$F \stackrel{2}{=} \sum_{\lambda_n \neq 0} \lambda_n^{-k} a_n \psi_n \quad .$$

Odatle sledi

(3) $$R^k F + \sum_{\lambda_p = 0} a_p \psi_p = \sum_{n \in P^q} a_n \psi_n$$

što znači na osnovu definicije 2.1. da $f \in \mathcal{U}'$.

Obrnuto, ako je $f \in \mathcal{U}'$ onda važi (3). Odatle sledi $\lambda_n^k c_n = a_n$, za one $n \in P^q$ za koje je $\lambda_n \neq 0$ što zajedno sa činjenicom da je $\sum_{\lambda_n \neq 0} |c_n|^2 < \infty$, daje (1).

Teorema 2.2. Niz uopštenih funkcija $f_n = \sum_{p \in P^q} a_{n,p} \psi_p$ iz $\mathcal{U}'$ konvergira jako ka $f = \sum_{p \in P^q} a_p \psi_p \in \mathcal{U}'$ ako i samo ako za neko $k \in P^q$ važi

(1) $$\sum_{p \in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-2k} |a_{n,p} - a_p|^2 \to 0 \qquad \text{kad} \quad n \to \infty \; .$$

Dokaz: Neka je

$$f_n = R^k F_n + \sum_{\lambda_p=0} a_{n,p}\psi_p, \quad F_n \stackrel{2}{=} \sum_{\lambda_p\neq 0} c_{n,p}\psi_p, \quad f = R^k F + \sum_{\lambda_p=0} a_p\psi_p$$

i $F \stackrel{2}{=} \sum_{\lambda_p\neq 0} c_p\psi_p$. Koristeći Parseval-ovu formulu dobijamo

$$\int |F_n - F|^2 = \sum_{\lambda_p\neq 0} |c_{n,p} - c_p|^2 \to 0$$

i iz jednakosti

$$|a_{n,p} - a_p| = |\lambda_p^k (c_{n,p} - c_p)|$$

za one $p \in P^q$ za koje je $\lambda_p \neq 0$, sledi da je uslov (1) potreban i dovoljan.

Definicija 2.4. Kažemo da je kompleksnoznačna funkcija

$$\phi = \sum_{n\in P^q} a_n\psi_n$$

iz $L_2(I)$ elemenat skupa $\mathcal{U}$ ako za svako $k \in P^q$ važi

$$\sum_{n\in P^q} \tilde{\lambda}_n^{2k} |a_n|^2 < \infty \quad . \tag{2.4.}$$

U odnosu na uobičajene operacije sabiranja redova i množenja reda sa skalarom iz skupa kompleksnih brojeva, $\mathcal{U}$ je vektorski prostor.

Definicija 2.5. Unutrašnji proizvod uopštene funkcije $f = \sum_{n\in P^q} a_n\psi_n$ iz $\mathcal{U}'$ i funkcije $\phi = \sum_{n\in P^q} b_n\psi_n$ iz $\mathcal{U}$ je

$$(f,\phi) \triangleq \sum_{n\in P^q} a_n\bar{b}_n \ .$$

Unutrašnji proizvod je dobro definisan jer suma na desnoj strani postoji što sledi iz Cauchy-eve nejednakosti.

$$\sum_{n\in P^q} |a_n\bar{b}_n| \leqslant \Big(\sum_{n\in P^q} |\tilde{\lambda}_n^{-k} a_n|^2 \sum_{n\in P^q} |\tilde{\lambda}_n^{k} b_n|^2 \Big)^{1/2} .$$

Pošto $\psi_n \in \mathcal{U}$ za svako $n \in P^q$, dobijamo sledeće teoreme:

Teorema 2.3. Uopštene funkcije $f,g \in \mathcal{U}'$ su jednake ako i samo ako je za svako $\phi \in \mathcal{U}$

$$(f,\phi) = (g,\phi) .$$

Teorema 2.4. Ako je $f = \sum_{n\in P^q} a_n\psi_n \in \mathcal{U}'$ onda je

$$a_n = (f,\psi_n), \; n \in P^q .$$

Iz teoreme (2.4.) sledi da je razvoj u red elemenata iz $\mathcal{U}'$ jedinstven.

Ako za operator R uzmemo onaj koji je koristio Zemanijan u |49| u jednodimenzionalnom slučaju, dobićemo prostor uopštenih funkcija koji je Zemanijan dobio koristeći funkcionalan prilaz, no ta teorija se ne može adekvatno preneti na q-dimenzionalni slučaj jer je u (2.2.) suma $\sum_{\lambda_n=0}$ beskonačna, za razliku od jednodimenzionalnog slučaja gde je konačna.

Primedba: U izloženoj teoriji umesto $L_2(I)$ možemo posmatrati proizvoljan separabilan Hilbert-ov prostor $\mathcal{H}$ u kojem je ψ_n prebrojiva kompletna ortonormirana baza a operator R ima navedene osobine, pa da dobijamo nove prostore tipa $\mathcal{U}'$.

U radu |32| smo predpostavili da skup λ_n, $n \in P^q$, zadovoljava uslov

$$\sum_{\nu_i=0}^{\infty} \frac{1}{\tilde{\lambda}_{\nu_i,i}^{\rho_i}} < \infty , \qquad i = 1,\dots,q, \tag{2.5.}$$

za neko $r = (\rho_1,\ldots,\rho_q) \in P^q$.

Na taj način smo posmatrali jednu klasu prostora tipa U' ali zato smo mogli da koristimo sekvencijalnu tepriju Köthe-ovih prostora iz |1|. Na osnovu te teorije smo u |32| pokazali da su slaba i jaka konvergencija za tu klasu prostora ekvivalentne.

Slaba konvergencija u prostoru U' se definiše na uobičajen način:

Definicija 2.6. Niz f_n iz U' konvergira slabo ka $f \in U'$ ako za svako $\phi \in U$ važi

$$(f_n,\phi) \to (f,\phi) \quad \text{kad} \quad n \to \infty \quad .$$

Pokazaćemo da su slaba i jaka konvergencija ekvivalentne u U' i ako uslov (2.5.) nije zadovoljen.

2.4. EKVIVALENCIJA SLABE I JAKE KONVERGENCIJE U U'

U |34| je pokazano da su slaba i jaka konvergencija ekvivalentne u jednodimenzionalnom slučaju. Pokazaćemo da isto važi u q-dimenzionalnom slučaju zbog čega će se pojaviti niz novih poteškoća.

Teorema 2.5. Ako niz f_n iz U' konvergira jako ka $f \in U'$ onda f_n konvergira slabo ka f.

Dokaz: Predpostavimo da je $f_n = \sum\limits_{p\in P^q} a_{n,p}\psi_p$ i da je $f = \sum\limits_{p\in P^q} a_p\psi_p$. Za svako $\phi = \sum\limits_{p\in P^q} b_p\psi_p \in U$ na osnovu Cauchy-eve nejednakosti, teoreme 2.2. i uslova (2.4.) dobijamo da je

$$|(f_n,\phi)-(f,\phi)| \leqslant \sum_{p\in P^q} |(a_{n,p}-a_p)\bar{b}_p| \leqslant \Big(\sum_{p\in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-2k}|a_{n,p}-a_p|^2 \cdot \sum_{p\in P^q} \tilde{\lambda}_p^{2k} \cdot |b_p|^2 \Big)^{1/2}$$

gde zadnji izraz konvergira ka nuli kad $n \to \infty$.

Obrnuto tvrdjenje nije tako jednostavno pokaazti. Da bi pojednostavili, prvo ćemo navesti nekoliko činjenica.

Lema 2.6. Ako f_n konvergira slabo ka $0 \in \mathcal{U}'$ onda za svako $p \in P^q$ važi

$$a_{n,p} \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty \ .$$

Dokaz: Za **svako** ψ_p, $p \in P^q$, važi

$$(f_n, \psi_p) = a_{n,p} \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty \ .$$

U daljem tekstu će važnu ulogu imati sledeća konačna i disjunktna dekompozicija skupa P^q u odnosu na $s \in P^q$.

(2.6.) Izvršimo konačnu i disjunktnu dekompoziciju skupa P^q na sledeći način: jedan član dekompozicije neka sadrži one indekse p iz P^q kod kojih su sve koordinate veće ili jednake od odgovarajućih koordinata od $s = (\sigma_1, \dots, \sigma_q)$. Drugi član dekompozicije neka sadrži one p iz P^q čije su sve koordinate manje od odgovarajućih koordinata od s (ako takvih nema ne vršimo dekompoziciju).

Ostali članovi dekompozicije se dobijaju na sledeći način: neka je $1 < r < q$. Fiksirajmo r koordinata od p i to onih koje su manje od odgovarajućih koordinata od s, a ostale koordinate neka su veće ili jednake od odgovarajućih koordinata od s. Tako dobijamo, menjajući r i fiksirajući različite grupe koordinata, sve ostale članove dekompozicije od P^q.

Neka skup k_p, $p \in P^q$, ima sledeću osobinu: ako su sve koordinate od $p = (\pi_1, \dots, \pi_q)$ i $\bar{p} = (\bar{\pi}_1, \dots, \bar{\pi}_q)$ iz P^q iste, sem i-te za koje važi $\pi_i > \bar{\pi}_i$ onda je $\kappa_{p,i} > \kappa_{\bar{p},i}$ i $\kappa_{p,j} = \kappa_{\bar{p},j}$, $j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, q$. ($\kappa_{p,i}$ je i-ta koordinata od k_p).

Lema 2.7. **Ako skup k_p, $p \in P^q$, ima predhodno navedenu osobinu onda**

(1) $$\sum_{p\in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-k_p} < \infty$$

Dokaz: Iz $|\lambda_{\pi_i,i}| \to \infty$ kad $\pi_i \to \infty$, za utvrdjeno i, $1 \leqslant i \leqslant q$, sledi da postoji $s \in P^q$ tako da kad je $p > s$

(2) $$\tilde{\lambda}_p^{k_p} > (2,\ldots,2)^{k_p} .$$

Dekompozicija (2.6.) od P^q indukuje dekompoziciju reda (1) na konačan broj sabiraka (koji su opet redovi). Pošto su svi članovi reda (1) pozitivni, red konvergira ako svaki sabirak iz dekompozicije reda konvergira.

Pokažimo da sabirak $\sum_{p>s} \tilde{\lambda}_p^{-k_p}$ konvergira. Na osnovu (2) dovoljno je da pokažemo da red

(3) $$\sum_{p\in P^q} (2,\ldots,2)^{-k_p}$$

konvergira.

Označimo sa N_ν podskup od P^q takav da $p\in N_\nu$ ako za svako $i = 1,\ldots,q$ je $\pi_i \leqslant \nu$. Neka je $N_{\nu,\mu} = N_\mu - N_\nu$, $\mu \geqslant \nu$. Da red (3) konvergira sledi iz nejednakosti

$$\sum_{p\in N_{\nu,\mu}} (2,\ldots,2)^{-k_p} \leqslant \Big(\sum_{n=\nu+1}^{\mu} 2^{-n}\Big)^q$$

Slično pokazujemo, posmatrajući q-r-dimenzionalni slučaj, da i ostali sabirci konvergiraju.

Lema 2.8. Neka je

$$\tilde{\lambda}_{\nu_i,i} \geqslant 1 \quad \text{za svako} \quad n = (\nu_1,\ldots,\nu_q) \in P^q .$$

Ako niz f_n iz $\mathcal{U}'$ konvergira slabo ka $0 \in \mathcal{U}'$ onda za proizvoljne strogo rastoće nizove prirodnih brojeva k_m i n_m, $m \in N$, postoji m_o tako da kad je $m > m_o$ važi

(1) $$\tilde{\lambda}_p^{-k_m} |a_{n_m,p}| < 1 \quad \text{za svako} \quad p \in P^q \ .$$

Dokaz: Za svako fiksirano $p \in P^q$ očigledno postoji odgovarajuće $m_o(p)$ tako da kad je $m > m_o(p)$ važi (1). Ovde treba da pokažemo da postoji $m_o \in N$ koje ne zavisi od p tako da važi (1).

Pokažimo da (1) važi dok $p \in P^q \setminus N_{\nu_o}$ gde je ν_o neki utvrdjen nenegativan ceo broj. (N_ν smo definisali u dokazu predhodne leme).

Ako to nije tačno postoje striktno monotono rastući nizovi m_i i ν_i tako da važi

(2) $$\tilde{\lambda}_p^{-k_{m_i}} |a_{n_{m_i},p_i}| \geq 1 \quad \text{dok} \quad p_i \in P^q \setminus N_{\nu_i} \ .$$

Ako bi postojao neki skup $N_{\nu_{i_o}}$ tako da važi (2) dok $p_i \in N_{\nu_{i_o}}$ zbog leme 2.6. bismo došli u kontradikciju jer je skup $N_{\nu_{i_o}}$ konačan a $\tilde{\lambda}_p \geq 1$ kako smo predpostavili u tvrdjenju.

Indekse p_i možemo izabrati tako da po svakoj koordinati čine monotono rastući niz a bar po jednoj striktno monotono rastući niz. Stavimo da je

$$b_p = \tilde{\lambda}_p^{-k_{m_i}} \exp i\cdot(\arg a_{n_{m_i},p_i}) \quad \text{za} \quad p = p_i \qquad \text{i}$$

$$b_p = 0 \qquad \text{za} \quad p \neq p_i \ .$$

Na osnovu leme 2.7. svedene na jednodimenzionalni slučaj imamo da

$$\phi = \sum_{p \in P^q} b_p \psi_p \in \mathcal{U} \ .$$

Niz (f_n, ϕ) ne konvergira ka 0 jer za $n = n_{m_i}$ na osnovu (2) je

$$(f_{n_{m_i}}, \phi) \geq |a_{n_{m_i}, p_i}| \tilde{\lambda}_{p_i}^{-k_{m_i}} \geq 1 \quad .$$

Dakle postoji skup N_{ν_o} tako da kad $p \in P^q \setminus N_{\nu_o}$ važi (1) za $m > \bar{m}_o$

Pošto je skup N_{ν_o} konačan, zbog leme 2.6. sledi da za svako $p \in N_{\nu_o}$ postoji $m_{p,o}$ tako da kad je $m > m_{p,o}$ važi (1).

Stavimo da je $m_o = \max\{m_{p,o},\ p \in N_{\nu_o},\ \bar{m}_o\}$. Dakle postoji m_o tako da kad je $m > m_o$ važi nejednakost (1).

Ako u lemi 2.8. ne predpostavimo da je $\tilde{\lambda}_{\nu_i, i} \geq 1$ za svako $n \in P^q$, nejednakost (1) važi za $m > m_o$ i p koje pripada skupu $\{p | \pi_i \geq \sigma_i\}$ gde je σ_i takav da je $\tilde{\lambda}_{\nu_i, i} \geq 1$ za $\nu_i \geq \sigma_i$.

Dokaz navedene činjenice se izvodi na istovetan način.

Definicija 2.7. T^k, za fiksno $k \in P^q$, je skup elemenata iz U' takvih da $f \in T^k$ ako f ima reprezentaciju (2.2.).

Teorema 2.9. Ako su $\bar{k} = (\bar{\kappa}_1, \ldots, \bar{\kappa}_q)$ i $k = (\kappa_1, \ldots, \kappa_q)$ iz P^q takvi da je $\bar{\kappa}_i \geq \kappa_i$, $i = 1, \ldots, q$, onda je

$$T^k \subset T^{\bar{k}} \quad .$$

Dokaz: Neka je $f = R^k F + \sum_{\lambda_n = 0} a_n \psi_n$ gde je $F \overset{2}{=} \sum_{n \in P^q} c_n \psi_n$ proizvoljan elemenat iz T^k. Stavimo da je $F_1 \overset{2}{=} \sum_{\lambda_n \neq 0} (c_n / \lambda_n^{\bar{k}-k}) \psi_n$. Iz

$$f = R^{\bar{k}} F_1 + \sum_{\lambda_n = 0} a_n \psi_n$$

sledi da $f \in T^{\bar{k}}$.

Teorema 2.10. Neka je $\tilde{\lambda}_{\nu_i,i} \geq 1$, za svako $n \in P^q$. Ako niz f_n iz U' konvergira slabo ka $0 \in U'$, onda za neko $k \in P^q$ važi

$$f_n \in T^k \ , \quad n \in N \ .$$

Dokaz: Ako tvrdjenje nije tačno postoji niz $k_m = (\kappa_{m,1},\ldots,\kappa_{m,q})$ u P^q sa osobinom da je $k_{m+1} > k_m$, $m \in N$, kao i niz n_m tako da važi

(1) $$\sum_{p \in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-2k_m} |a_{n_m,p}|^2 < \infty \qquad \text{i}$$

(2) $$\sum_{p \in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-2k_m} |a_{n_{m+1},p}|^2 = \infty \ .$$

Iz leme 2.8. sledi da postoji m_o tako da kad je $m > m_o$ i $p \in P^q$ važi

$$\tilde{\lambda}_p^{-2k_m} |a_{n_{m+1},p}|^2 < 1 \ .$$

Odatle i iz (2) sledi da postoji konačan skup $B \in P^q$ tako da

$$1 \leq \sum_{p \in B_1} \tilde{\lambda}_p^{-2k_{m_o+1}} |a_{n_{m_o+2},p}|^2 < 2 \ .$$

Slično, za $m=m_o+s$, $s \in N$, postoje konačni skupovi B_s tako da $B_s \cap B_{s-1} = \emptyset$ i

$$1 \leq \sum_{p \in B_s} \tilde{\lambda}^{-2k_{m_o+s}} |a_{n_{m_o+s+1},p}|^2 < 2 \ .$$

Pošto niz B_s konstruišemo, možemo ga izabrati tako da je

$$A_\nu \triangleq \bigcup_{s=1}^{\nu} B_s \quad \text{i} \quad \bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = P^q$$

Stavimo da je

$$b_p = \tilde{\lambda}_p^{-2k_{m_o}+s} a_{n_{m_o}+s+1},p \quad \text{za} \quad p \in B_s, \quad s \in N.$$

Za svako $q \in P^q$ imamo

$$\sum_{p\in P^q \setminus A_{\nu-1}} \tilde{\lambda}_p^{2q}|b_p|^2 = \sum_{s=\nu}^{\infty} \sum_{p\in B_\nu} \tilde{\lambda}_p^{2q-2k_{m_o}+s} \cdot \tilde{\lambda}_p^{-2k_{m_o}+s} |a_{n_{m_o}+s+1},p|^2 \leqslant$$

$\leqslant 2 \sum_{p\in P^q \setminus A_{\nu-1}} \tilde{\lambda}_p^{2q-2k_{m_o}+s}$. Iz leme 2.7. sledi da zadnja suma konvergira ka 0 kad $\nu \to \infty$.

Iz navedenog sledi da $\phi = \sum_{p\in P^q} b_p\psi_p \in \mathcal{U}$. Niz (f_n,ϕ) ne konvergira ka nuli jer za $n = n_{m_o+s+1}$, $s \in N$,

$$(f_{n_{m_o}+s+1},\phi) \geqslant \sum_{p\in B_s} \tilde{\lambda}_p^{-2k_{m_o}+s} |a_{n_{m_o}+s+1},p|^2 \geqslant 1$$

a to je u suprotnosti sa predpostavkom teoreme.

U teoremi 2.10. smo predpostavili da je $\tilde{\lambda}_{\nu_i,i} \geqslant 1$ za svako $n \in P^q$. U opštem slučaju to važi ako je $\nu_i \geqslant \sigma_i$, $i = 1,\dots,q$. I u tom slučaju važi tvrdjenje teoreme 2.10. Naime važi

Teorema 2.11. Tvrdjenje teoreme 2.10. važi u opštem slučaju.

Dokaz: Ako tvrdjenje ne važi onda postoje nizovi k_m i n_m tako da važi (1) i (2) iz dokaza teoreme 2.10. (k_m ima navedenu osobinu).

Izvršimo konačnu i disjunktnu dekompoziciju skupa P^q u odnosu na $s = (\sigma_1,\ldots,\sigma_q)$ na isti način kako je to uradjeno u (2.6.).

Navedena dekompozicija omogućava dekompoziciju redova (1) i (2) na konačan broj sabiraka. Red (2) će biti beskonačan samo ako je bar jedan sabirak iz dekompozicije te sume beskonačan. Pošto tih sabiraka ima konačno, u nizu n_{m+1}, $m\in N$, divergentnih suma (2), jedan od sabiraka dekompozicije beskonačno puta mora da se pojavi kao divergentan. To očigledno ne može biti drugi član dekompozicije (pošto je to konačan zbir). Ako je to prvi član dekompozicije, dokaz se izvodi kao u slučaju teoreme 2.10. s tim što se B_s bira tako da je podskup od prvog člana dekompozicije od P^q. U slučaju da se neka od drugih navedenih suma pojavljuje beskonačno puta kao divergentna, dokaz se izvodi na sličan način.

Pokažimo to na primeru. Uzmimo na primer da se suma koja ide po indeksima oblika

$$p = (0,\pi_2,\ldots,\pi_q)\ ,\ \pi_j \geq \sigma_j,\ j = 2,\ldots,q \quad (\lambda_{o,1} < 1)$$

pojavljuje kao divergentna u podnizu niza n_{m+1} suma oblika (2). Zbog jednostavnije notacije neka je taj podniz opet n_{m+1}. Dakle važi

$$(1)\quad \tilde{\lambda}_{o,1}^{-\kappa_{m,1}} \sum_{p\in\Lambda} \dot{\tilde{\lambda}}_p^{-2\dot{k}_m} |a_{n_m,p}|^2 < \infty \quad \text{tj.} \quad \sum_{p\in\Lambda} \dot{\tilde{\lambda}}_p^{-2\dot{k}_m} |a_{n_m,p}|^2 < \infty$$

$$(2)\quad \tilde{\lambda}_{o,1}^{-\kappa_{m,1}} \sum_{p\in\Lambda} \dot{\tilde{\lambda}}_p^{-2\dot{k}_m} |a_{n_{m+1},p}|^2 = \infty \quad \text{tj.} \quad \sum_{p\in\Lambda} \dot{\tilde{\lambda}}_p^{-2\dot{k}_m} |a_{n_{m+1},p}|^2 = \infty$$

gde Λ označava skup indeksa navedenog oblika, $\dot{k}_m = (\kappa_{m,2},\ldots,\kappa_{m,q}) \in P^{q-1}$ i $\dot{\tilde{\lambda}}_p = (\tilde{\lambda}_{\pi_2,2},\ldots,\tilde{\lambda}_{\pi_q,q}) \in R^{q-1}$.

Sada smo tvrdjenje sveli na $q-1$-dimenzionalni slučaj, pa opet možemo postupiti kao u dokazu teoreme 2.10.

U svim ostalim slučajevima bi smo postupili na isti način.

Teorema 2.12. Niz f_n iz $\mathcal{U}'$ konvergira slabo ka $0 \in \mathcal{U}'$ ako i samo ako za neko $k \in P^q$ i $M > 0$ važi

$$\sum_{p \in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-2k} |a_{n,p}|^2 < M \qquad \text{i}$$

(1)

$$a_{n,p} \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty \qquad \text{za svako } p \in P^q .$$

Dokaz: Ako je uslov (1) zadovoljen, onda za svako $\phi = \sum_{p \in P^q} b_p \psi_p$ $\mathcal{U}$ važi $\left| \sum_{p \in P^q} a_{n,p} \bar{b}_p \right| = \left| \sum_{p \in \Lambda_\nu} a_{n,p} \bar{b}_p + \sum_{p \in P^q \setminus \Lambda_\nu} a_{n,p} \bar{b}_p \right|$

$$< \sum_{p \in \Lambda_\nu} |a_{n,p} \bar{b}_p| + \Big(\sum_{p \in P^q \setminus \Lambda_\nu} \tilde{\lambda}_p^{-2k} |a_{n,p}|^2 \cdot \sum_{p \in P^q \setminus \Lambda_\nu} \tilde{\lambda}_p^{2k} |b_p|^2 \Big)^{1/2} .$$

Izaberimo ν tako da je $\sum_{p \in P^q \setminus \Lambda_\nu} \tilde{\lambda}_p^{2k} |b_p|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4M}$. Iz leme 2.6. sledi da postoji $n_o \in N$ tako da kada je $n > n_o$, $\sum_{p \in \Lambda_\nu} |a_{n,p}| |b_p| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Iz navedenog sledi da je uslov (1) dovoljan.

Ako uslov (1) nije zadovoljen, postoje nizovi k_m i n_m, $m \in N$, kao u teoremi 2.10. tako da je

$$\sum_{p \in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-2k_m} |a_{n_m,p}|^2 \geq M . \tag{2}$$

Predpostavimo da za svako $n \in P^q$ je $\tilde{\lambda}_{\nu_i, i} \geq 1$, $i = 1,\dots,q$.

Iz leme 2.8. sledi da postoji m_o tako da kada je $m > m_o$ važi

$$\tilde{\lambda}_p^{-2k_m} |a_{n_m,p}|^2 < 1 .$$

Iz činjenice da za svako $p\in P^q$, $a_{n_{m_0+s},p} \to 0$ kad $s\to\infty$, sledi da postoji niz B_s, $s\in N$, konačnih podskupova od P^q tako da je $B_s \cap B_{s-1} = \emptyset$ i $\bigcup_{s=1}^{\infty} B_s = P^q$, i tako da važi

$$\frac{M}{2} \leqslant \sum_{p\in B_s} \tilde{\lambda}_p^{-2k_{m_0+s}} |a_{n_{m_0+s},p}|^2 < M \quad .$$

Ako stavimo da $p\in B_s$ je $b_p = \tilde{\lambda}_p^{-2k_{m_0+s}} a_{n_{m_0+s},p}$, kao u teoremi 2.10. se može pokazati da $\phi = \sum_{p\in P^q} b_p\psi_p \in U$ i da niz (f_n,ϕ) ne konvergira ka 0 jer za $n = n_{m_0+s}$ je $(f_n,\phi) \geqslant M/2$.

U slučaju da je $\tilde{\lambda}_{\nu_i,i} \geqslant 1$ za $\nu_i \geqslant \sigma_i$ dokaz se izvodi na sledeći način:

Izvršimo dekompoziciju od P^q oblika (2.6.). Ona indukuje odgovarajuću dekompoziciju reda (2). Uslov (2) ćemo zamenitu jačim uslovom. Neka članova dekompozicije ima r. Stavimo da je

$$M_m = r \prod_{1\leqslant i\leqslant q} \prod_{\nu_i<\sigma_i} \tilde{\lambda}_{\nu_i,i}^{-2k_{m,i}} \quad .$$

To je očigledno striktno monotono rastući niz koji divergira.

Ako (1) nije zadovoljeno onda postoji za niz k_m, koji je striktno rastući po svim koordinatama, niz n_m tako da je

$$\sum_{p\in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-2k_m} |a_{n_m,p}|^2 \geqslant M_m \quad . \tag{3}$$

Niz n_m možemo izabrati tako da je striktno rastući, jer ako predpostavimo da je $n_m < n_0$ za svako $m\in N$ dolazimo u kontradikciju. Naime neka (3) važi za $n_m = \bar{n}_1 < n_0$, $m \in N$. Pošto $f_{\bar{n}} \in U'$, za neko $k \in P^q$ je

$$\sum_{p \in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-2k_{\bar{n}_1}} |a_{\bar{n}_1, p}|^2 = L = \sum_{j=1}^{r} L_j < \infty ,$$

gde sabirci L_j odgovaraju dekompoziciji od P^q. Množeći svaki sabirak L_j sa onim $\tilde{\lambda}_{\nu_i, i}^{-\kappa_{m,i}}$ koji nose fiksiran indeks u tom članu dekompozicije od P^q, i sabirajući ih dobijamo niz koji je sporiji od niza M_m, što daje kontradikciju (M_m smo birali tako da imamo tu kontradikciju).

Ako važi (3) bar jedan član dekompozicije od (3) mora biti beskonačno puta veći od M_m/r. To nije onaj član dekompozicije koji ima konačno mnogo sabiraka. U slučaju da neki drugi član dekompozicije ima navedenu osobinu, problem se svodi na onaj koji smo imali u teoremi 2.11. Dokaz se izvodi kao kad važi (2) ili se svodi na $q-r$ -dimenzionalni slučaj sa osbinom (2)

Uzmimo na primer, kao u dokazu teoreme 2.11. da suma $\sum_{p \in \Lambda}$ u nizu suma oblika (3), je veća ili jednaka od M_m/r za svaki član niza. Iz nejednakosti

$$\sum_{p \in \Lambda} \dot{\tilde{\lambda}}_p^{-2k_m} |a_{n_m, p}|^2 > M_m / r \tilde{\lambda}_{o,1}^{-\kappa_{m,1}} > M$$

vidimo da smo problem sveli na $q-1$ -dimenzionalni slučaj koji se rešava na isti način kao kad važi (2).

Posledica teoreme 2.12. je

Posledica 2.13. Potreban uslov da niz f_n iz U' konvergira ka $0 \in U'$ slabo, je da

$$a_{n,p} \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty \quad \text{za svako } p \in P^q \quad \text{i}$$

$$|a_{n,p}| < M \tilde{\lambda}_p^k \quad \text{za neko } k \in P^q \quad \text{i} \quad M > 0 \ .$$

Ako za prostor U' važi uslov (2.5.) onda je uslov posledice 2.13. potreban i dovoljan uslov za ekvivalenviju slabe i jake konvergencije što smo pokazali u |32|.

Teorema 2.14. Uslov (1) teoreme 2.12. je potreban i dovoljan da niz f_n iz U' jako konvergira ka $0 \in U'$.

Dokaz: Pošto iz jake sledi slaba konvergencije a iz nje uslov (1), dobija se da je taj uslov potreban.

Neka je uslov (1) zadovoljen i neka $k' \in P^q$ ima sve koordinate veće od odgovarajućih u k. Iz

$$\sum_{p\in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-2k'} |a_{n,p}|^2 < \sum_{p\in A_\nu} \tilde{\lambda}_p^{-2k'} |a_{n,p}|^2 + (1/\tilde{\lambda}_{p_0}^{2k'-2k}) \sum_{p\in P^q\setminus A_\nu} \tilde{\lambda}_p^{-2k} |a_{n,p}|^2$$

gde je ν izabrano tako da je $(1/\tilde{\lambda}_{p_0}^{2k'-2k}) < \varepsilon/2M$ a p_0 je takav de je $\tilde{\lambda}_{p_0} \leq \tilde{\lambda}_p$, $p_0, p \in P^q \setminus A_\nu$.

Pošto je prva suma konačna, postoji n_0 tako da kada je $n > n_0$ je ta suma manja od $\varepsilon/2$, što daje tvrdjenje teoreme.

Iz teoreme 2.12. i teoreme 2.14. se izvodi zaključak da potreban i dovoljan uslov da niz f_n iz U' konvergira jako ka $0 \in U'$, je da taj niz konvergira slabo ka nuli.

U predhodnom tekstu smo posmatrali samo konvergenciju ka 0-uopštenoj funkciji iz U'. Ako niz f_n konvergira ka f u U' slabo ili jako, onda možemo posmatrati niz $f_n - f$ i njegovu konvergenciju ka $0 \in U'$. To znači da sva predhodna tvrdjenja koja se odnose na konvergenciju ka 0-uopštenoj funkciji se mogu adekvatno interpretirati kad $f_n \to f \neq 0$. To znači da važi

Teorema 2.15. Niz uopštenih funkcija iz U' konvergira jako ka nekoj uopštenoj funkciji iz U' ako i samo ako konvergira slabo ka toj uopštenoj funkciji.

2.5. DRUGI OBLIK REPREZENTACIJE ELEMENATA IZ $\mathcal{U}'$

Elemente iz $\mathcal{U}'$ reprezentujemo na način (2.2.) naveden u trećem odeljku ove glave. Loša strana te reprezentacije je u tome što suma $\sum\limits_{\lambda_p=0}$ ima beskonačno elemenata ako je $\lambda_{\nu_i,i} = 0$ za bar jedno ν_i, pa se za tu sumu moraju davati vrlo jaki uslovi čija suština nije odmah uočljiva.

Pokazaćemo na dvodimenzionalnom primeru kako se može drugačije izvršiti reprezentacija.

Neka je $\lambda_{0,1} = 0$, $\lambda_{1,1} = 0$, $\lambda_{\nu_1,1} \neq 0$ za $\nu_1 \geqslant 2$, i $\lambda_{0,2} = 0$, $\lambda_{\nu_2,2} \neq 0$ za $\nu_2 \geqslant 1$. Ako $f \in \mathcal{U}'$ onda je

$$f = R^k F + \sum_{\lambda_p=0} a_p \psi_p \qquad \text{gde je}$$

$F \in L_2(I_1 \times I_2)$, $k = (\kappa_1, \kappa_2) \in P^2$ i $\sum\limits_{\lambda_p=0} \tilde{\lambda}_p^{-2k} |a_p|^2 < \infty$.

Označimo sa V skup indeksa p za koje je $\lambda_p = 0$ i izvršimo dekompoziciju tog skupa na sledeći način:
$V = \bigcup\limits_{j=1}^{4} V_j$ gde je $V_1 = \{(0,0);(1,0)\}$, $V_2 = \{(0,1);(0,2);\ldots\}$, $V_3 = \{(1,1);(1,2);\ldots\}$ i $V_4 = \{(2,0);(3,0);\ldots\}$.

Uopštenu funkciju f predstavljamo sa

$$f = R^k F + \sum_{p\in V_1} a_p \psi_p + \psi_0^1 \sum_{\substack{\nu_2=1 \\ p\in V_2}}^{\infty} a_p \psi_{\nu_2}^2 + \psi_1^1 \sum_{\substack{\nu_2=1 \\ p\in V_3}}^{\infty} a_p \psi_{\nu_2}^2 + \psi_0^2 \sum_{\substack{\nu_1=2 \\ p\in V_4}}^{\infty} a_p \psi_{\nu_1}^1$$

odnosno

$$f = R^k F + \psi_0^1 R^{(0,\kappa_2)} F_2 + \psi_1^1 R^{(0,\kappa_2)} F_3 + \psi_0^2 R^{(\kappa_1,0)} F_4 + \sum_{p\in V_1} a_p \psi_p$$

gde su F_2 i F_3 iz $L_2(I_2)$ kojima konvergiraju sume koje idu po indeksima iz V_2 odnosno iz V_3, a $F_4 \in L_2(I_1)$ kojoj konvergira suma koja ide po indeksima iz V_4.

Ovakva reprezentacija je tehnički komplikovanija ali je prirodnija jer prelazak sa q-dimenzionalnog slučaja na q-1-dimenzioni slučaj je ovde očigledniji.

U ovoj interpretaciji kažemo da niz f_n iz U' konvergira jako ka f ako svi nizovi kvadrat integrabilnih funkcija koje učestvuju u reprezentaciji od f_n konvergiraju u kvadratnom smislu ka odgovarajućim kvadrat integrabilnim funkcijama koje učestvuju u reprezentacji od f, a koeficijenti koji se nalaze u konačnim sumama reprezentacija od f_n konvergiraju ka odgovarajućim koeficijentima konačne sume iz reprezentacije od f.

2.6. *NEPREKIDNE LINEARNE FUNKCIONELE NAD U*

U ovom poglavlju ćemo pokazati da je prostor U' prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad U. To smo pokazali u |34| ali u jednodimenzionalnom slučaju. Predhodno navedimo nekoliko potrebnih definicija.

U prostoru U datom sa definicijom 2.4. se uvodi konvergencija na sledeći način:

Definicija 2.8. Niz $\phi_n = \sum_{p\in P^q} a_{n,p}\psi_p$ iz U konvergira ka $\phi = \sum_{p\in P^q} a_p\psi_p \in U$, ako za svako $k \in P^q$, važi

$$\sum_{p\in P^q} \tilde{\lambda}_p^{2k} |a_{n,p} - a_p|^2 \to 0 \quad \text{kad } n \to \infty .$$

Imajući u vidu reprezentaciju navedenu u petom poglavlju slično možemo da interpretiramo elemente prostora U i da na adekvatan način izložimo osobine tog prostora, što bi bilo prirodnije, no to je tehnički komplikovanije.

Definicija 2.9. Linearna funkcionela u definisana na U je neprekidna ako za svaki niz ϕ_n iz U koji konvergira ka $\phi \in U$ sledi

$$u(\phi_n) \to u(\phi) \quad \text{kad} \quad n \to \infty \quad .$$

Teorema 2.16. Za svaku neprekidnu linearnu funkcionelu u na U postoji uopštena funkcija f iz U' tako da je

$$(1) \qquad u(\phi) = (f,\phi) \quad \text{za svako} \quad \phi \in U \quad .$$

Obrnuto, za svaku uopštenu funkciju f iz U' (1) predstavlja neprekidnu linearnu funkcionelu na U.

Dokaz: Očigledno da kad $f \in U'$ onda sa (1) je definisana linearna funkcionela na U. Iz

$$(f,\phi_n-\phi) = \sum_{p\in P^q} b_p(\bar{a}_{n,p}-\bar{a}_p) \leq \Big(\sum_{p\in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-2k}|b_p|^2 \cdot \sum_{p\in P^q} \tilde{\lambda}_p^{2k}|a_{n,p}-a_p|^2\Big)^{1/2}$$

gde je $f = \sum\limits_{p\in P^q} b_p\psi_p$ a ϕ_n i ϕ imaju reprezentaciju kao u definiciji 2.8., sledi da je ta linearna funkcionela neprekidna.

Dokažimo obrnuto tvrdjenje.

Stavimo da je $u(\psi_p) = b_p$, $p \in P^q$. Pokazaćemo da $\sum\limits_{p\in P^q} b_p\psi_p \in U'$.

Ako to nije tačno onda za svako $k \in P^q$ je

$$(2) \qquad \sum_{p\in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-2k}|b_p|^2 = \infty \quad .$$

Neka je k_m niz iz P^q, strogo rastući po svim koordinatama. Predpostavimo da je $\tilde{\lambda}_{\nu_i,i} \geq 1$, $n \in P^q$. Pokazaćemo da postoji konačan podskup od P^q, označimo ga sa B, tako da kad $p \in B$ je

$$(3) \qquad \tilde{\lambda}_p^{-k_m} |b_p| < 1 \quad .$$

Ako to nije tačno postoji niz indeksa p_m iz P^q, $m \in N$, tako da nije sadržan u nekom konačnom podskupu od P^q i tako da važi $\tilde{\lambda}_{p_m}^{-k_m} |b_{p_m}| \geq 1$.

Iz niza prirodnih brojeva možemo izdvojiti podniz m_r, $r \in N$, tako da je p_{m_r} monotono rastući niz u P^q takav da je bar po jednoj koordinati striktno monotono rastući.

Stavimo da je $a_p = \tilde{\lambda}_p^{-k_m}$ za $p = p_{m_r}$ i $a_p = 0$ za $p \neq p_{m_r}$. Iz leme 2.7. sledi da je $\phi = \sum_{p \in P^q} a_p \psi_p$ iz $\mathcal{U}$, a odatle dobijamo kontradikciju jer je

$$u\Big(\sum_{p \in A_\nu} a_p \psi_p\Big) = \sum_{p_m \in A_\nu} a_{p_m} b_{p_m} \to \infty \qquad \text{kad} \quad \nu \to \infty.$$

Naime pošto $\sum_{p \in A_\nu} a_p \psi_p \to \sum_{p \in P^q} a_p \psi_p$, sledi da je

$$u\Big(\sum_{p \in A_\nu} a_p \psi_p\Big) \to u(\phi) < \infty \qquad \text{kad} \quad \nu \to \infty \quad .$$

Dakle važi (3).

Iz (2) i (3) sledi da postoji niz konačnih podskupova P^q, označimo ga sa B_m, tako da je $B_m \cap B_{m+1} = \emptyset$ i $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{m=1}^{\nu} B_m \Big) = P^q \setminus B$ i da je

$$1 < \sum_{p \in B_m} \tilde{\lambda}_p^{-2k_m} |b_p|^2 < 2 \; .$$

Stavimo da je $a_p = \tilde{\lambda}_p^{-2k_m} b_p exp(-i\cdot(\arg b_p))$ za $p \in B_m$ i $a_p = 0$ za $p \in B$. Kao u teoremi 2.10. može se pokazati da $\phi = \sum\limits_{p\in P^q} a_p \psi_p \in U$. Iz

$$u(\sum_{p\in\Lambda_\nu} a_p\psi_p) = \sum_{p\in\Lambda_\nu} a_p b_p \to \infty \quad \text{kad } \nu \to \infty$$

sledi da u nije neprekidna funkcionela, što je kontradikcija.

U slučaju da je $\tilde{\lambda}_{\nu_i,i} \geq 1$ za $\nu_i \geq \sigma_i$, $i = 1,\ldots,q$, kao u teoremi 2.11., vršimo dekompoziciju sume (2) i dokaz svodimo na navedeni samo u q-r-dimenzionalnom slučaju.

U navedenoj teoremi smo pokazali da je prostor neprekidnih linearnih funkcionela nad U, prostor U', što opravdava navedenu oznaku.

Na kraju ovog poglavlja navedimo još neke osobine prostora osnovnih funkcija U pod predpostavkom da je R linearan diferencijalni operator koji je sam sebi dualan i oblika navedenog na strani 17 kao primer, u kojem se pojavljuju diferenciranje i množenje sa glatkim funkcijama (različitim od nule na I), i pod predpostavkom da su funkcije ψ_n, $n \in P^q$, glatke funkcije na I. (Ovo je proučavao Zemanijan u jednodimenzionalnom slučaju |49|).

Pod navedenom predpostavkom važe sledeće dve teoreme:

Teorema 2.17. Kvadrat integrabilna funkcija $\phi = \sum\limits_{n\in P^q} a_n\psi_n \in L_2(I)$, je iz U ako i samo ako za svako $k \in P^q$ važi

$$R^k\phi \in L_2(I), \qquad (R^k\phi,\psi_n) = (\phi,R^k\psi_n) \quad .$$

Dokaz: Iz definicije 2.4. sledi da treba da pokažemo da za svako $k \in P^q$ je

(1) $$\sum_{n\in P^q} \tilde{\lambda}_n^{2k} |a_n|^2 < \infty$$

Dovoljno je pokazati da je

$$\mathcal{R}^k\phi = \sum_{\lambda_n\neq 0} \lambda_n^k a_n \psi_n \quad .$$

To sledi iz drugog uslova teoreme na osnovu kojeg se može "ući" sa operatorom $\mathcal{R}$ u red. Iz prvog uslova sledi da važi (1).

Teorema 2.18. Niz ϕ_n iz $\mathcal{U}$ konvergira ka $\phi\in\mathcal{U}$ ako i samo ako za svako $k\in P^q$

$$\mathcal{R}^k\phi_n \xrightarrow{2} \mathcal{R}^k\phi \qquad \text{kad} \quad n\to\infty.$$

2.7. O KONVERGENCIJI U $\mathcal{U}'$

U definiciji 2.3. data je konvergencija niza f_n iz $\mathcal{U}'$ ka $f\in\mathcal{U}'$. Sada ćemo definisati konvergenciju niza f_n iz $\mathcal{U}'$ ništa ne govoreći o graničnoj funkciji (da li postoji ili ne).

Definicija 2.10. Niz f_n iz $\mathcal{U}'$ konvergira ako postoje kvadrat integrabilne funkcije F_n, $n\in N$, iz $L_2(I)$, ako postoji $k\in P^q$ i ako postoje kompleksni brojevi $a_{n,p}$, a_p, $n\in N$, $p\in P^q$, tako da važi

$$f_n = \mathcal{R}^k F_n + \sum_{\lambda_p=0} a_{n,p}\psi_p, \qquad \sum_{\lambda_p=0} \tilde{\lambda}_p^{-2k} |a_{n,p}|^2 < \infty \text{ i}$$

$$F_n \xrightarrow{2}, \qquad \sum_{\lambda_p=0} \tilde{\lambda}_p^{-2k} |a_{n,p}-a_p|^2 \to 0 \quad \text{kad} \quad n\to\infty .$$

Sada možemo da pokažemo da ako niz f_n iz $\mathcal{U}'$

konvergira, onda mu je granica uopštena funkcija f iz $\mathcal{U}'$ što znači da egzistenciju od f u definiciji 2.4. ne moramo da predpostavljamo jer ona sledi.

Teorema 2.19. Ako niz f_n iz $\mathcal{U}'$ konvergira, onda konvergira ka odredjenoj uopštenoj funkciji iz $\mathcal{U}'$.

Dokaz sledi iz kompletnosti prostora $L_2(I)$. Ova teorema bi imala jasniju interpretaciju kada bi smo definiciju 2.10. izrazili preko reprezentacije navedene u petom poglavlju.

U daljem tekstu ovog poglavlja ćemo predpostaviti da je $\mathcal{R}$ linearni diferencijalni operator u kojem se pojavljuju diferenciranje i množenje sa glatkim funkcijama različitim od nule na I i koji je sam sebi dualan. Takodje predpostavimo da je ψ_n, $n \in P^q$, kompletna ortonormirana baza prostora $L_2(I)$ sastavljena od glatkih funkcija.

Na isti način kao u jednodimenzionalnom slučaju navedenom na strani 17, definišemo prostor $\mathcal{D}$ i konvergenciju u $\mathcal{D}$ samo što je sad $I = I_1 \times \ldots \times I_q$, q-dimenzionalni interval u R^q. Skup neprekidnih linearnih funkcionela nad $\mathcal{D}$ u odnosu na tu konvergenciju označava se sa $\mathcal{D}'$ - prostor Schwartz-ovih distribucija definisanih nad q-dimenzionalnim intervalom.

Iz teoreme 2.17. sledi da je

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{U}$$

Odatle dobijamo da je restrikcija svake uopštene funkcije iz $\mathcal{U}'$ na prostoru $\mathcal{D}$ linearna funkcionela, a iz teoreme 2.18 sledi da je ona i neprekidna nad $\mathcal{D}$ jer konvergencija u $\mathcal{D}$ povlači konvergenciju u $\mathcal{U}$. To znači da je restrikcija proizvoljne uopštene funkcije f iz $\mathcal{U}'$, nad $\mathcal{D}$, označimo je sa $\tilde{f}$, Schwartz-ova distribucija.

Predhodno objašnjenje možemo dati direktno sa stanovišta sekvencijalne teorije Schwartz-ovih distribucija. Pošto niz $F_n = \sum_{n \in A_\nu} c_n \psi_n$, konvergira u kvadratnom smislu (u $L_2(I)$) ako i samo ako je $\sum_{n\in P^q} |c_n|^2 < \infty$, znači da taj niz konvergira u temperiranom smislu na $R^q,(|1|)$, jer van intervala I se može definisati da je $F_n = 0$. Iz temperirane konvergencije sledi distribuciona, što znači da nad intervalom I, F_n konvergira distribuciono. Pošto operator R u sebi sadrži regularne operacije (množenje sa glatkim funkcijama i diferenciranje) sledi da je niz $(R^k \sum_{n\in A_\nu} c_n\psi_n)$ distribuciono konvergentan. To znači da je R-fundamentalan niz fundamentalan u smislu $|1|$, odnosno da odredjuje odredjenu Schwartz-ovu distribuciju.

Za dalje opisivanje konvergencije u U' biće nam potrebni neki pojmovi i rezultati iz |28| pa ćemo ih ovde navesti.

Neka je F konvergencija u datom skupu X tj. funkcija koja opredeljuje svakom nizu x sa članovima iz X, skup $F(x) \subset X$ granica tog niza. Posebno ako je $F(x)$ samo jedan elemenat, granica je jedinstvena a ako je $F(x) = \emptyset$ onda je x divergentan niz.

Ako je y podniz od x onda to pišemo $y \prec x$. Kažemo da je konvergencija naslednа ako iz $y \prec x$ sledi da je $F(x) \subset F(y)$.

Konvergencija F je Urysohn-ova ako zadovoljava Urysohn-ov uslov: Ako $\xi \notin F(x)$ onda postoji niz $y \prec x$ tako da $\xi \notin F(z)$ za svaki niz $z \prec y$.

Ako su date dve konvergencije F i G, kažemo da je G opštija od F ako je za svaki niz x iz X, $F(x) \subset G(x)$.

Teorema 2.20. (Opšta lema Mikusinskog, |28|). Neka je F, Urysohn-ova konvergencija i G nasledna konvergencija. Ako je G opštija od F i takva da za svaki niz y postoji niz $z \prec y$ tako da je $F(z) \supset G(z)$, onda su konvergencije F i G identične.

Iz |28| ćemo preneti i sledeće tvrdjenje koje je tamo pokazano za jednodimenzionalan slučaj.

Teorema 2.21. (Lema o konvergenciji u kvadratnom smislu |28|). Ako je $A_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots)$ i $\|A_n\|_2 < M < \infty$, gde je

$$\|A_n\|_2 = \sqrt{|a_{n1}|^2 + |a_{n2}|^2 + \ldots}$$

i $\varepsilon_p \to 0$ (ε_n su kompleksni brojevi), onda se iz niza $B_n = (\varepsilon_1 a_{n1}, \varepsilon_2 a_{n2}, \ldots)$ može izdvojiti podniz B_{r_n} koji u ℓ^2 konvergira.

(ℓ^2 je prostor nizova snabdeven sa normom $\| \ \|_2$ za koje važi $A \in \ell^2$ ako je $\|A\|_2 < \infty$, i u kojem je konvergencija definisana preko te norme).

Teorema 2.21. se može uopštiti na q-dimenzionalni slučaj, što je dato u |30| u nešto opštijem obliku.

Teorema 2.22. Ako je $A_n = (a_{n,p})$, $p \in P^q$, i $\|A_n\|_2 < M < \infty$, gde je

$$\|A_n\|_2 = \sqrt{\sum_{p \in P^q} |a_{n,p}|^2}$$

i $e_p = (\varepsilon_{\pi_1,1}, \ldots, \varepsilon_{\pi_q,q})$, $p \in P^q$, takav podskup od R^q da $\varepsilon_{\pi_i,i} \to 0$ kad $\pi_i \to \infty$, $i = 1, \ldots, q$, onda iz niza $B_n = (e_p a_{n,p})$, $p \in P^q$, se se može izdvojiti podniz B_{r_n} koji konvergira u ℓ^2.

(Sada ℓ^2 označava prostor matrica $A = (a_p)$, $p \in P^q$, za koje je $\|A\|_2 < \infty$ i u kojem se konvergencija definiše preko norme $\| \ \|_2$.

Dokaz: Pokazaćemo samo da za svaki niz konačnih podskupova od P^q, A_ν, tako da je $A_\nu \subset A_{\nu+1}$ i $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} A_\nu = P^q$, i za svako $\eta > 0$ postoji ν_0 tako da kada je $\nu > \nu_0$ i $p \in P^q \setminus A_{\nu_0}$ sledi da je $|e_p^1| < \eta$. Ako to nije tako postoji beskonačan niz indeksa p_n, $n \in N$, tako da $p_n \in P^q \setminus A_\nu$ i da važi

$$|e_{p_n}^1| > \eta \quad . \tag{1}$$

Iz svakog beskonačnog podskupa od P^q se može izdvojiti monotono rastući niz tako da je striktno monotono rastući bar po jednoj koordinati. Neka je p_{n_k}, $k \in N$, takav podniz niza p_n. Iz (1) sledi da je $|e_{p_{n_k}}| \geqslant 1$, što je u suprotnosti sa predpostavkom teoreme da $\varepsilon_{\pi_i, i} \to 0$ kad $\pi_i \to \infty$, $i = 1, \ldots, q$.

Dalje se dokaz teoreme izvodi kao i dokaz teoreme 2.21. u |28| uz neophodne adaptacije.

U |28| Mikusiński koristeći tvrdjenja 2.20. i 2.21. pokazuje da je T^k-konvergencija niza f_n temperirana distribucija ekvivalentna sa distribucionom konvergencijom ako je f_n niz koji je T^{k-1}-ograničen. Slično ćemo pokazati za $\mathcal{U}'$ pod odredjenim uslovima koje $\mathcal{U}'$ treba da zadovoljava.

Definicija 2.11. Ako su ispunjeni uslovi definicije 2.3. onda niz uopštenih funkcija T^k-konvergira ka uopštenoj funkciji f.

Definicija 2.12. Niz f_n iz $\mathcal{U}'$ je T^k-ograničen ako za svaki niz $\varepsilon_n \to 0$ niz $\varepsilon_n f_n$ T^k-konvergira ka nuli kad $n \to \infty$.

Teorema 2.23. Ako niz f_n je $T^{k-(1,\ldots,1)}$-ograničen onda postoji podniz f_{k_n} koji T^k-konvergira.

Vrlo jednostavan dokaz ove teoreme je dat u |30| pa ga ovde nećemo navoditi.

Definicija 2.13. Niz f_n iz $\mathcal{U}'$ distribuciono konvergira ka $f \in \mathcal{U}'$ ako $\tilde{f}_n$ distribuciono konvergira ka $\tilde{f}$ ($\tilde{f} \in \mathcal{D}'$).

Granica u distrubucionoj konvergenciji u opštem slučaju nije jedinstvena (u $\mathcal{U}'$). Ako je granica jedinstvena, što je naprimer slučaj sa prostorom temperiranih distribucija, važi sledeća teorema:

Teorema 2.24. Ako je u $\mathcal{U}'$ niz f_n takav da konvergira ka f u smislu definicije 2.13. i ako mu je granica jedinstvena, onda pod uslovom da je T^{k-1}-ograničen, je T^k-konvergentan.

Dokaz sledi iz teorema 2.23. i 2.20. jer je T^k-konvergencija Urysohn-ova, a distribuciona konvergencija je nasledna i opštija od T^k-konvergencije.

Napomenimo da su teoreme 2.22., 2.23. i 2.24. iz |30| s tim što su ovde nešto drugačije koncipirane i modifikovane.

Dovoljan uslov da je granica za distribucionu konvergenciju definisanu u prostoru $\mathcal{U}'$ jedinstvena, jeste da je 0-uopštena funkcija jedina uopštena funkcija iz $\mathcal{U}'$ čija je restrikcija nad $\mathcal{D}$, 0-distribucija.

Na kraju ovog poglavlja ćemo pokazati da prostor $\mathcal{U}'$ nije metrizabilan. Koristićemo ideju J. Mikusińskog koja se odnosi na ne metrizabilnost prostora temperiranih distribucija u jednodimenzionalnom slučaju. Ovaj rezultat je J. Mikusiński izložio na seminaru iz Uopštenih funkcija koji je održan u poljskom mestu Szyrk-u 1978. godine.

Ovde ne treba predpostavljati nikakve dodatne uslove za operator $\mathcal{R}$ niti da su funkcije ψ_p, $p \in P^q$, glatke, odnosno posmatraćemo prostor $\mathcal{U}'$ u najopštijem slučaju.

Teorema 2.25. Za svaku neprekidnu linearnu funkcionelu u na prostoru $\mathcal{U}'$ postoji niz f_n iz $\mathcal{U}'$ koji divergira a da važi

$$u(f_n) \to 0 \quad \text{kad} \quad n \to \infty.$$

Dokaz: Neka je p_n niz u P^q striktno monotono rastući. Niz $k\tilde{\lambda}^k_{p_n} \psi_{p_n}$, k je fiksiran prirodan broj, je iz $\mathcal{U}'$ i u smi $\mathcal{U}'$-konvergencije konvergira ka $0 \in \mathcal{U}'$ što sledi iz teoreme 2.12.

Pošto je u neprekidna linearna funkcionela nad $\mathcal{U}'$, postoji $i_k \in N$ tako da kada je $n > i_k$ je

$$u(k\tilde{\lambda}^k_{p_n} \psi_{p_n}) < \frac{1}{k}\,. \tag{1}$$

Stavimo da je

$$f_n = \begin{cases} 0, & n < i_1 \\ k\tilde{\lambda}^k_{p_n}\psi_{p_n}, & i_k \leq n < i_{k+1} \end{cases} \qquad k \in N.$$

Niz f_n je divergentan što sledi iz teoreme 2.12. jer ne postoji M tako da važi prvi uslov te teoreme.

Na osnovu (1) sledi da $u(f_n) \to 0$ kad $n \to \infty$.

Iz ove teoreme sledi da prostor U' nije metrizabilan što znači da ne postoji metrika koja bi na U' indukovala konvergenciju koju smo definisali u tom prostoru (definicija 2.3.).

2.8. PROSTOR MATRICA

Neka je χ skup matrica $A = (a_p)$, $p \in P^q$, takvih da su koordinate a_p iz normiranog prostora X sa normom $|x|$. Označimo sa

$$\|A\| \triangleq \sum_{p \in P^q} |a_p|$$

$$|A| \triangleq \sup_{p \in P^q} |a_p|$$

$$\|A\|_2 \triangleq \sqrt{\sum_{p \in P^q} |a_p|^2} \quad \text{(ovu normu smo naveli u teoremi 2.22.)}$$

.

U odnosu na uobičajenu operaciju sabiranja i množenja sa skalarom iz skupa kompleksnih brojeva, χ je vektorski prostor. Ako je bar jedna od matrica A ili B kompleksna, što znači da su joj sve koordinate kompleksni brojevi, a druga iz χ onda je

$AB = (a_p b_p)$, $p \in P^q$, i važi $\|AB\| < \|A\|\,\|B\|$, $\|AB\|_2 < \|A\|_2 \|B\|_2$;

$(A,B) = \sum_{p\in P^q} a_p b_p$, i važi $|(A,B)| < \|AB\|$ i $|(A,B)| < \|A\|_2 \|B\|_2$.

Neka je T_k, $k \in P^q$, skup matrica

$$T_k = (\tilde{\lambda}_p^k), \quad p \in P^q \quad .$$

Definicija 2.14. Matrica $A = (a_p)$, $p \in P^q$, iz χ pripada skupu U ako za svako $k \in P^q$ važi

$$\|T_k A\|_2 < \infty \; .$$

Definicija 2.15. Matrica A iz χ pripada skupu U' ako postoji $k \in P^q$ tako da važu

$$\|T_k^{-1} A\|_2 < \infty \; .$$

Jasno je da su U i U' podprostori od χ . Umesto skupa T_k, $k \in P^q$, za definiciju prostora U i U' se može uzeti niz $T_r = (\tilde{\lambda}_p^r)$, $r \in N_o$. Pokažimo to za komplikovaniji slučaj U.

Teorema 2.26. Ako je $\|T_r A\|_2 < \infty$ za $r = 0,1,\ldots$ onda je $\|T_k A\|_2 < \infty$ za svako $k \in P^q$ i obrnuto.

Dokaz: Obrnuto očigledno važi. Pokažimo da ako je $\|T_r A\|_2 < \infty$, $r \in N_o$, onda za $k = (\kappa_1,\ldots,\kappa_q)$ gde koordinate od k nisu sve medjusobno jednake, važi $\|T_k A\|_2 < \infty$. Neka je κ_j najveća koordinata od k. Za $r = \kappa_j$ je $\|T_r A\|_2 < \infty$.

Posmatrajmo opštiji slučaj odnosno kada je $\tilde{\lambda}_{\pi_i,i} \geq 1$ za $\pi_i \geq \sigma_i$, $p \in P^q$.

Izvršimo dekompoziciju od P^q oblika (2.6.). Ona indukuje odgovarajuću konačnu dekompoziciju sume pod korenom u izrazu $\|T_k A\|_2$. Svaki sabirak te dekompozicije je konačan. Pokažimo to na konkretnom primeru što ne umanjuje opštost.

Pokažimo da je suma koja ide po indeksima iz skupa

$\Lambda = \{p = (0,\pi_2,\ldots,\pi_q) \mid \pi_i \geq \sigma_i,\ i = 2,\ldots,q\}$ $(\tilde{\lambda}_{0,1} < 1)$ konačna.

Pošto je $\sum_{p\in\Lambda} \tilde{\lambda}_p^{2(\kappa_j,\ldots,\kappa_j)} |a_p|^2 < \infty$ sledi da je

$\tilde{\lambda}_{0,1}^{2(\kappa_j-\kappa_1)} \sum_{p\in\Lambda} \tilde{\lambda}_p^{2k} |a_p|^2 < \infty$ jer su sve ostale koordinate od $\tilde{\lambda}_p$ sem prve veće ili jednake od jedan.

Na isti način se pokazuje da je bilo koji drugi sabirak iz dekompozicije sume u izrazu $\|T_k A\|_2$ konačan.

Definicija 2.16. Niz A_n iz U konvergira ka A U ako za svako $k \in P^q$ (ili $r \in N_0$) važi

$$\|T_k(A_n - A)\|_2 \to 0 \qquad (\text{ili} \qquad \|T_r(A_n - A)\|_2 \to 0).$$

Definicija 2.17. Niz A_n iz U' je jako ograničen ako postoji $k \in P^q$ (ili postoji $r \in N_0$) tako da je

$$|T_k^{-1} A_n|_2 < M \qquad (\text{ili} \quad |T_r^{-1} A_n|_2 < M \quad \text{za neko} \quad r \in N_0).$$

Niz A_n je slabo ograničen ako je za svako B iz U, $(A_n, B) < \infty$.

Definicija 2.18. Niz A_n iz U' konvergira jako ka $A \in U'$ ako je jako ograničen i ako koordinate od A_n konvergiraju ka odgovarajućim koordinatama od A.

Niz A_n slabo konvergira ka A ako za svako $B \in U$, $(A_n, B) \to (A,B)$ kad $n \to \infty$.

Ako je X skup kompleksnih brojeva, iz teoreme 2.1. sledi da je prostor U' identičan sa prostorom koeficijentnih matrica uopštenih funkcija iz $\mathcal{U}'$. Takodje konvergencija (jaka, slaba) niza matrica iz U' je ekvivalentna sa konvergencijom (jakom, slabom) odgovarajućih elemenata iz $\mathcal{U}'$ što sledi na osnovu teoreme 2.2. Iz definicije prostora U i $\mathcal{U}$ sledi da je U identičan sa prostorom koeficijentnih matrica elemenata iz $\mathcal{U}$, a iz definicija konvergencija u tim prostorima sledi da su one ekvivalentne.

Iz teorema 2.10. i 2.11. sledi da su u U' slaba i jaka ograničenost ekvivalentne a iz teoreme 2.15. sledi da su u U' jaka i slaba konvergencija ekvivalentne (isto važi ako je X proizvoljan normiran prostor). Iz teoreme 2,16. sledi da za svaku neprekidnu linearnu funkcionelu u na U postoji matrica A iz U' tako da je $u(B) = (A,B)$. Obrnuto, sa tom jednakošću je za svako A iz U' definisana neprekidna linearna funkcionela na U. Ova korespodencija je uzajamno jednoznačna.

Dokazi teorema 2.1., 2.2.,2.10., 2.11., 2.15. i 2.16. su takvi da se izvode na koeficijentnim matricama uopštenih funkcija iz $\mathcal{U}'$ koje se u tim teoremama pojavljuju, što jednostavno omogućava da se dobiju odgovarajuće teoreme za prostor U'.

U |1| su definisani prostori temperiranih matrica $\mathcal{T}$ i brzo opadajućih matrica $\mathcal{R}$ na sledeći način:

Neka je $T_k = (t_{k,p})$, $k \in N_0$ i $p \in P^q$, niz matrica sa pozitivnim koordinatama tako da važi

$$(2.7.) \qquad |T_k T_{k+1}^{-1}| < \infty .$$

Matrica A iz χ pripada prostoru $\mathcal{T}$ ako za svako $k \in N_0$ je $|T_k A| < \infty$.

Matrica A iz χ pripada prostoru $\mathcal{R}$ ako postoji $k \in N_0$ tako da je $|T_k^{-1} A| < \infty$.

Konvergencija i ograničenost u $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$ se definišu kao u definicijama 2.16., 2.18. i 2.17. samo se umesto $\| \ \|_2$ stavlja $| \ |$.

Pomoću dijagonalne teoreme u |1| je pokazano da su u prostoru $\mathcal{T}$ slaba i jaka ograničenost kao i slaba i jaka konvergencija ekvivalentne.

Ako je $T_k = (\lambda_p^{-k})$, $k \in N_0$ i $p \in P^q$, uslov (2.7.) je zadovoljen. Za prostore $\mathcal{R}$ i $\mathcal{T}$ definisane pomoću navedenog niza T_k važi

$$\mathcal{R} \subset U \quad \text{i} \quad \mathcal{T} \supset U' .$$

i da konvergencija u $\mathcal{R}$ povlači konvergenciju u U a konvergencija u U' povlači konvergenciju u $\mathcal{T}$, što sledi iz

$$\sum_{p\in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-2k} |a_{n,p}|^2 < \infty \Rightarrow \tilde{\lambda}_p^{-k} |a_{n,p}| < M$$

$n \in N$, $p \in P^q$.

Teorema 2.27. Potreban i dovoljan uslov da je

$$\mathcal{R} \equiv U \qquad \text{odnosno} \qquad \mathcal{T} \equiv U'$$

jeste da skup $\tilde{\lambda}_p$, $p \in P^q$, za neko $r \in P^q$ zadovoljava uslov (2.5.).

Dokaz: Pokažimo da ako je $\mathcal{R} \equiv U$ onda postoji $r \in P^q$ tako da je uslov (2.5.) zadovoljen, pošto je jednostavno pokazati da obrnuto važi. Ako uslov (2.5.) nije zadovoljen onda je za svako $k \in P^q$

(1)
$$\sum_{p\in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-2k} = \infty .$$

Neka je k_i strogo rastući niz u P^q. Predpostavimo da je $\tilde{\lambda}_{\pi_i, i} \geq 1$ za $i = 1, \dots, q$ i $p \in P^q$.

Neka je B_s, $s \in N$, niz konačnih podskupova od P^q tako da je

$$1 \leq \sum_{p\in B_s} \tilde{\lambda}_p^{-2k_s} < 2$$

i da je $B_s \cap B_{s+1} = \emptyset$ i $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} (\bigcup_{s=1}^{\nu} B_s) = P^q$. Iz (1) sledi da postoji takav niz B_s.

Stavimo da je $b_p = \tilde{\lambda}_p^{-2k_s}$ kada $p \in B_s$. Jednostavno je pokazati da matrica $B = (b_p) \notin U$ i $B \in \mathcal{R}$.

To znači da ako je uslov (2.5.) ispunjen da je $\mathcal{R} \equiv U$.

U slučaju da nisu sve koordinate od $\tilde{\lambda}_p$ veće ili jednake od jedan, vršimo dekompoziciju skupa P^q oblika (2.6.)

i dokaz izvodimo na sličan način.

Na isti način se pokazuje da su prostori U' i $\mathcal{T}$ identični ako važi uslov (2.5.).

Iz ove teoreme sledi da kada je ispunjen uslov (2.5.) na prostore U, U' odnosno $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}'$ se može primeniti sekvencijalna teorija Köthe-ovih prostora što smo koristili u |32|.

2.9. TEOREMA O JEZGRU

Neka su U_1 i U_2 prostori koji odgovaraju skupovima matrica $T_{k,1} = ({}_1\tilde{\lambda}_p^k)$, $k \in P^j$ i $p \in P^j$, odnosno $T_{k,2} = ({}_2\tilde{\lambda}_p^k)$, $k \in P^q$ i $p \in P^q$, (definicija 2.16.) i neka za $T_{k,1}$ i $T_{k,2}$ važi uslov (2.5.) za neko $r_1 \in P^j$ odnosno $r_2 \in P^q$.

Sa W označimo prostor matrica $A = (a_r)$, $r \in P^{j+q}$, tako da je

$$\| A_r T_k \|_2 < \infty \quad \text{za svako} \quad k \in P^{j+q}$$

gde je $T_k = T_{k,1} \otimes T_{k,2}$. $(T_{k,1} \otimes T_{k,2} = ({}_1\tilde{\lambda}_p^k \cdot {}_2\tilde{\lambda}_q^k)$, $p \in P^j$, $q \in P^q)$.

Kažemo da je bilinearni operator T koji preslikava $U_1 \times U_2$ u Banach-ov prostor X separirano neprekidan ako važi implikacije:

$$A_n \overset{U_1}{\to} A \Rightarrow T(A_n,B) \to T(A,B) \quad \text{i} \quad B_n \overset{U_2}{\to} B \Rightarrow T(A,B_n) \to T(A,B) \; .$$

Isto kao za prostore temperiranih matrica (|1| teorema 10.10.1.), na osnovu teorema 2.26. i 2.27. sledi:

Teorema 2.28. Za svaki separirano neprekidni bilinearni operator T koji preslikava $U_1 \times U_2$ u X (Banach-ov prostor), postoji jedinstveni neprekidni linearni operator u koji preslikava W u X, tako da je

$$(1) \qquad T(A,B) = u(A \otimes B) \quad .$$

Obrnuto, za svaki neprekidan linearni operator koji preslikava W u X, (1) definiše separirano neprekidan bilinearan operator na $U_1 \times U_2$. Ova korespodencija je uzajamno jednoznačna.

Dokaz ove teoreme je istovetan sa dokazom teoreme 10.10.1. iz |1| pa ga ovde ne navodimo.

Na osnovu teoreme 2.28. se pokazuje da važi teorema o jezgru:

Teorema 2.29. Neka su $\mathcal{U}_1(I_1\times,\dots,\times I_j)$ i $\mathcal{U}_2(I_{j+1}\times,\dots,\times I_{j+q})$ prostori osnovnih funkcija koji odgovaraju prostorima matrica U_1 i U_2 respektivno, i $\mathcal{W}'(I_1\times,\dots,\times I_j\times \times I_{j+1}\times,\dots,\times I_{j+q})$ prostor uopštenih funkcija koji odgovara prostoru matrica W. Za svaku separirano neprekidnu bilinearnu funkcionelu T na $\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$ postoji jedinstvena uopštena funkcija f iz $\mathcal{W}'$ tako da je

$$T(\phi,\psi) = (f,\phi\otimes\psi) \tag{1}$$

za svako $\phi\in\mathcal{U}_1$ i $\psi\in\mathcal{U}_2$.

Obrnuto, za svaku uopštenu funkciju f iz $\mathcal{W}'$ (1) definiše separirano neprekidnu bilinearnu funkcionelu na $\mathcal{U}_1\times\mathcal{U}_2$. Ova korespodencija je uzajamno jednoznačna.

Ova teorema se dokazuje na isti način kao teorema 11.6.1. iz |1| pa ovde taj dokaz nećemo navoditi.

Napomenimo još jednom da obe navedene teoreme važe ako je ispunjen uslov (2.5.). Ako taj uslov nije ispunjen problem nije rešen. Lako je pokazati da važi obrnuti deo tih teorema, no u celini problem je vrlo složen.

U |1| i |2| su teoreme o jezgru za temperirane distribucije i za Schwartz-ove distribucije dokazane vrlo efektno korišćenjem dijagonalne teoreme. Ta tvrdjenja su dokazana i u funkcionalnom prilazu |14|. Ovde smo naveli da isto važi i za jednu klasu prostora tipa $\mathcal{U}'$, što u literaturi nije navedeno.

III GLAVA

POLUGRUPA OPERATORA NA PROSTORU U'

3.1. UVOD

Koristeći razvoj uopštenih funkcija iz U' u redove, pronašli smo vezu izmedju nekih linearnih operatora na prostoru U' i teoreje o množiteljima |20|. Na taj način smo pronašli odredjene osobine nekih polugrupa operatora na prostoru U' analogne onim u klasičnoj teoriji operatora |18|. U |46| je izložena teorija polugrupa neprekidnih linearnih operatora na Banach-ovim i još opštije, na vektorsko-topološkim prostorima. Ovde će ta teorija biti izložena sa stanovišta sekvencijalne teorije koja čini izlaganje vrlo jednostavnim. Za razliku od |33| ovde posmatramo opštiji slučaj, kada ne mora da važi uslov (2.5.)

U drugom i trećem poglavlju smo razvili teoriju linearnih operatora tipa množitelja na U', odnosno konstruisali smo polugrupu operatora na tom prostoru. U četvrtom poglavlju smo izložili Riemann-ov integral te polugrupe. U petom poglavlju izlažemo kako se dobijeni rezultati koriste za rešavanje odredjenih evolucionih jednačina što daje poseban značaj navedenoj teoriji. Najinteresantnije medju tim evolucionim jednačinama su svakako parcijalne diferencijalne jednačine sa koeficijentima koji nisu samo konstante, koje se dobijaju za pogodno izabran operator R. U ovom poglavlju ćemo na jednom primeru pokazati još neke mogućnosti u razvoju teorije prestora U' i sa tim u vezi primenu na rešavanje odredjenih evolucionih jednačina.

3.2. LINEARNI OPERATORI TIPA MNOŽITELJA

U prostor U' uvodimo konvergenciju uopštene funkcije $f_\alpha(x)$ koja zavisi od neprekidnog realnog parametra α (što znači da α pripada nekom intervalu u R).

Definicija 3.1. Familija uopštenih funkcija f_α konvergira u U' ka $f \in U'$, što označavamo sa $f_\alpha \to f$, kad $\alpha \to \alpha_0$ ako postoji $k \in P^q$ i funkcije F_α, $F \in L_2(I)$, kompleksni brojevi $a_{\alpha,p}$, a_p, tako da u nekoj okolini od α_0 važi

$$f_\alpha = R^k F + \sum_{\lambda_p=0} a_{\alpha,p}\psi_p \ , \qquad f = R^k F + \sum_{\lambda_p=0} a_p \psi_p$$

$$F_\alpha \xrightarrow{2} F \ , \qquad \sum_{\lambda_p=0} \tilde{\lambda}_p^{-2k} |a_{\alpha,p} - a_p|^2 \to 0 \quad \text{kad} \quad \alpha \to \alpha_0 \ .$$

Pošto $F_\alpha \xrightarrow{2} F$ ako i samo ako za proizvoljan niz $\alpha_n \to \alpha_0$ važi da $F_{\alpha_n} \xrightarrow{2} F$, dobija se:

Teorema 3.1. $f_\alpha \to f$ kad $\alpha \to \alpha_0$ ako i samo ako za proizvoljan niz $\alpha_n \to \alpha_0$, $f_{\alpha_n} \to f$.

Iz ekvivalencije slabe i jake konvergencije u prostoru U' i predhodne teoreme sledi:

Teorema 3.2. $f_\alpha \to f$ kad $\alpha \to \alpha_0$ ako i samo ako za svako ϕ U važi $(f_\alpha,\phi) \to (f,\phi)$.

Definicija 3.2. Linearni operator

$$T : U' \to U'$$

je neprekidan ako važi sledeća implikacija

$$f_\alpha \to f \Longrightarrow Tf_\alpha \to Tf \ , \qquad \text{kad} \quad \alpha \to \alpha_0 \ .$$

Sa $L(U',U')$ ćemo označavati prostor neprekidnih linearnih operatora iz U' u U'.

Teorema 3.3. Neka je $f = \sum_{p \in P^q} a_p \psi_p \in \mathcal{U}'$. Ako skup kompleksnih brojeva η_p, $p \in P^q$, za neko $\ell \in P^q$ zadovoljava uslov

$$|\eta_p| \leq S\tilde{\lambda}_p^{\ell} \quad \text{za svako } p \in P^q \ (S > 0) \tag{3.1.}$$

onda je

$$\sum_{p \in P^q} \eta_p a_p \psi_p = g$$

uopštena funkcija iz $\mathcal{U}'$. Operator T definisan sa $Tf = g$ je iz $L(\mathcal{U}',\mathcal{U}')$. (On je operator tipa množitelja sa množiteljima η_p).

Dokaz: Pošto $f \in \mathcal{U}'$, na osnovu teoreme 2.1. sledi da je g elemenat od $\mathcal{U}'$. Linearnost operatora T je očigledna. Na osnovu teoreme 2.2. sledi neprekidnost navedenog operatora. Operator je jednoznačan jer je razvijanje u red elemenata iz $\mathcal{U}'$ jedinstveno.

Uslov (3.1.) je i potreban uslov da operator tipa množitelja preslikava ceo prostor $\mathcal{U}'$ u $\mathcal{U}'$ jer se u suprotnom može konstruisati uopštena funkcija iz $\mathcal{U}'$ tako da je operator tipa množitelja ne pœslikava u $\mathcal{U}'$.

Ako su υ_p i ν_p, $p \in P^q$, množitelji za operatore U i V respektivno, onda je $UV = W$ gde je W operator tipa množitelja sa množiteljima $\omega_p = \upsilon_p \nu_p$.

Jednostavno je proveriti da je ovako definisano množenje operatora tipa množitelja komutativno i asocijativno.

Navedimo nekoliko primera operatora iz $L(\mathcal{S}',\mathcal{S}')$.

Primer 1. Fourier-ova transformacija $\mathcal{F}$.

$$\eta_n = i^n, \quad n \in P^q \ .$$

Primer 2. Inverzna Fourier-ova transformacija $\mathcal{G}$.

$$\eta_n = (-i)^n, \quad n \in P^q \ .$$

Pošto je uslov

$$\sup_{n\in P^q} |\eta_n| < \infty$$

potreban i dovoljan da operator tipa množitelja pripada $L(L_2(R^q), L_2(R^q))$, znači da su $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ iz tog skupa.

Primer 3. Transformacija $G: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ takva da je za utvrdjeno $k \in N$, $G^k = I$, gde je I-identična transformacija za koju je $\eta_n = (1,\ldots,1)$, $n \in P^q$. Za G su množitelji

$$\eta_n = (e^{2\pi i/k})^n, \quad n \in P^q \quad .$$

Primer 4. Operator $S' = Dd$ gde su D i d temperirani i njemu komplementarni izvod respektivno (|1|).

$$\eta_n = -\frac{(n+1)!}{n!}, \quad n \in P^q$$

Primer 5. Operator $S = dD$.

$$\eta_n = -\frac{n!}{(n-1)!}, \quad n \in P^q \quad .$$

Primetimo da je operator S iz primera 5. pomnožen sa odredjenom konstantom onaj koji u Zemanijanovom pristupu |49|, generiše prostor temperiranih distribucija u jednodimenzionalnom slučaju.

U daljem tekstu ćemo sa B označavati proizvoljan operator tipa množitelja iz $L(U', U')$ ako njegovi množitelji η_n zadovoljavaju uslov (3.1.).

3.3. POLUGRUPA OPERATORA NA U'

Neka je $f = \sum_{p\in P^q} a_p \psi_p$. Polugrupa operatora T_t, $t \geq 0$, je definisana sa

$$T_t f = \sum_{p\in P^q} e^{t\eta_n} a_n \psi_n$$

gde kompleksni brojevi η_n, $n \in P^q$, zadovoljavaju uslov (3.1.) kao i uslov

$$e^{t\mathrm{Re}\,\eta_n} \leqslant U(t)\lambda_n^{-r(t)} \tag{3.2.}$$

gde je $U(t)$ neprekidna funkcija za $t > 0$ i $r(t)$ je funkcija definisana za $t > 0$ sa vrednostima u P^q i osobinom da je za svaki konvergentan niz t_n niz $r(t_n)$ ograničen.

Iz teoreme 3.3. sledi da je za svako utvrdjeno $t \geqslant 0$, operator T_t tipa množitelj iz $L(\mathcal{U}',\mathcal{U}')$. Ako je $\eta_n = 0$, $n \in P^q$, onda je $T_t = I$. (Identički operator).

Jednostavno se proverava da familija T_t ima strukturu komutativne polugrupe, odnosno da važi

$$T_{t+s} = T_{s+t} = T_s T_t, \quad T_{(s+t)+r} = T_{s+(t+r)}, \quad T_o = I.$$

Ako su η_n množitelji koje smo naveli u primerima 1., 2., 3., 4. i 5. iz predhodnog poglavlja, dobijamo primere polugrupa na $\mathcal{S}'$.

Teorema 3.4. Za polugrupu T_t, $t > 0$, i za svako $f \in \mathcal{U}'$ važi

(i) $\quad T_t f \to T_{t_o} f \quad$ kad $\quad t \to t_o$; $\quad$ (za $t_o = 0$, $t \to 0^+$)

(ii) $\quad \frac{1}{t}(T_t - T_o)f \to Bf \quad$ kad $\quad t \to 0^+$;

(iii) $\quad \frac{1}{t}(T_{a+t} - T_a)f \to BT_a f \quad$ kad $\quad t \to 0 \quad$ i $\quad a > 0$.

Dokaz: (i) Na osnovu teoreme 3.1. dovoljno je pokazati da za svaki niz $t_n \to t_o$ sledi

$$T_{t_n} f \to T_{t_o} f \quad \text{kad} \quad n \to \infty .$$

Neka $f \in \mathcal{U}'$ ima uobičajenu reprezentaciju. Pošto je

$$e^{t_n\eta_p}a_p \to e^{t_o\eta_p}a_p \quad \text{kad} \quad n \to \infty \qquad \text{i}$$

$$\sum_{p\in P^q} \tilde{\lambda}_p^{-2(k+r)} |a_p|^2 < M \quad ,$$

koristeći teoremu 2.12. dobijamo tvrdjenje (i). Broj $r \in P^q$ i $\varepsilon > 0$ smo izabrali tako da za one $p \in P^q$ za koje je $\mathrm{Re}\eta_p > 0$ važi

$$|e^{t_n\eta_p}| \leqslant |e^{(t_o+\varepsilon)\eta_p}| < S\tilde{\lambda}_p^r$$

jer ako je $\mathrm{Re}\eta_p \leqslant 0$, onda je

$$|e^{t_n\eta_p}| \leqslant 1 \quad .$$

(ii) Neka $t_n \to 0^+$. $\frac{1}{t_n}(T_{t_n} - T_o)f = \sum_{p\in P^q} \frac{e^{t_n\eta_p} - 1}{t_n} a_p\psi_p$.

Lako je pokazati da je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{t_n\eta_p} - 1}{t_n} = \eta_p .$$

Osnovni problem je pokazati da je

$$(1) \qquad |\frac{e^{t\eta_p} - 1}{t}| \leqslant M_o\tilde{\lambda}_p^r$$

na intervalu $[0,a]$ za neko $M_o > 0$ i neko $r \in P^q$.

Ako stavimo da je $\eta_p = u_p + iv_p$ imamo

$$|\frac{e^{t\eta_p} - 1}{t}| \leqslant \frac{|e^{tu_p}\cos tv_p - 1|}{t} + |iv_p\frac{\sin tv_p}{tv_p}| \leqslant \phi(t,u_p,v_p) + |v_p|$$

gde je

$$\phi(t,u_p,v_p) = \frac{|e^{tu_p}\cos tv_p - 1|}{t} .$$

Za $t = 0$, $\phi(t,u_p,v_p)$ ima otklonjiv prekid.

Ako je $e^{tu_p}\cos tv_p - 1 \geqslant 0$, onda je

$$\phi(t,u_p,v_p) \leqslant \frac{e^{tu_p} - 1}{t} \leqslant |u_p e^{tu_p}| .$$

Ako je $e^{tu_p}\cos tv_p - 1 < 0$, onda je

$$\phi(t,u_p,v_p) \leqslant \frac{1 - e^{tu_p}(1 \mp tv_p)}{t} = \pm v_p e^{tu_p} + \frac{1 - e^{tu_p}}{t} \leqslant$$

$$\leqslant |v_p|e^{tu_p} + \max\{|u_p|,|u_p e^{tu_p}|\}$$

jer je za $v_p \geqslant 0$, $\cos tv_p \geqslant 1 - tv_p$, a za $v_p < 0$, je $\cos tv_p > 1 + tv_p$. Koristeći predhodne nejednakosti dobijamo

$$\left|\frac{e^{t\eta_p} - 1}{t}\right| \leqslant 2\max\{|\eta_p|,|\eta_p e^{t\eta_p}|\}$$

odakle sledi da postoji $M_0 > 0$ i postoji $r \in P^q$ tako da važi (1).

Kao i u predhodnom slučaju, na osnovu teoreme 2.12. sledi tvrdjenje (ii).

(iii) Dokaz je isti kao i za (ii).

Operator B se naziva infinitezimalni generator polugrupe T_t.

Drugi deo teoreme 3.4. nam pokazuje da postoji izvod polugrupe T_t po parametru t, odnosno da važi posledica 3.5.

Posledica 3.5. Izvod polugrupe T_t, $t > 0$, je

$$\frac{\partial}{\partial t}T_t = T_t B .$$

Za operator T_tB (ili BT_t) važi

Teorema 3.6. Ako $f \in U'$ onda je

$$\frac{1}{t}(T_{a+t}B - T_aB)f \to T_aB^2f \quad \text{kad} \quad t \to 0 \quad (\text{za } a = 0, \quad t \to 0^+).$$

Navedena teorema se dokazuje isto kao i drugi deo teoreme 3.4. Na osnovu nje sledi da postoji k-ti izvod polugrupe T_t.

Posledica 3.7. Izvod k-tog reda polugrupe T_t je

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} T_t = T_tB^k .$$

3.4. INTEGRAL POLUGRUPE T_t

Za svako $\phi \in U$ funkcija (T_tf,ϕ) je neprekidna i beskonačno puta diferencijabilna u odnosu na t. To znači da integral

$$\int_0^t (T_uf,\phi)du, \quad t > 0 ,$$

u Riemann-ovom smislu postoji |12|. Iz

$$\int_0^t (T_uf,\phi)du = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n (T_{u_j}f,\phi)\Delta u_j = \lim_{n\to\infty} (\sum_{j=1}^n T_{u_j}f\Delta u_j,\phi)$$

dobijamo da

$$\sum_{j=1}^n T_{u_j}f\Delta u_j$$

konvergira u U' kad $n \to \infty$, i tu granicu označavamo sa $\int_0^t T_ufdu$.

Teorema 3.8. Za svako $f = \sum_{p\in P^q} a_p\psi_p \in U'$ i $t > 0$, važi

$$\int_0^t T_u f du = \sum_{p\in W} \frac{e^{t\eta_p}-1}{\eta_p} a_p\psi_p + \sum_{p\in P^q\setminus W} t a_p\psi_p$$

gde W označava podskup od P^q tako da $p\in W$ ako $\eta_p \neq 0$.

Dokaz: Prvo ćemo pokazati da za svako $\phi \in U$ niz $(\sum_{p\in A_\nu} e^{u\eta_p} a_p\psi_p, \phi)$ konvergira uniformno ka $(\sum_{p\in P^q} e^{u\eta_p} a_p\psi_p, \phi)$ kad $\nu \to \infty$ i $u\in[0,t]$.

Stavimo da je $\phi = \sum_{p\in P^q} b_p\psi_p \in U$. Očigledno i $\phi_1 = \sum_{p\in P^q} |b_p|\psi_p \in U$. Za utvrdjeno t, $f_1 = \sum_{p\in P^q} e^{t\mathrm{Re}\eta_p}|a_p|\psi_p \in U'$. Takodje za $w_p(t) = \max\{1, e^{t\mathrm{Re}\eta_p}\}$ važi

$$|(\sum_{p\in A_\nu} e^{u\eta_p} a_p\psi_p, \phi) - (\sum_{p\in P^q} e^{u\eta_p} a_p\psi_p, \phi)| \leq \sum_{p\in P^q\setminus A_\nu} w_p(t)|a_p||b_p|.$$

Zadnja suma je ostatak konvergentnog reda a odatle sledi uniformna konvergencija. Na osnovu toga važi

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_0^t (\sum_{p\in A_\nu} e^{u\eta_p} a_p\psi_p) du = \int_0^t (\sum_{p\in P^q} e^{u\eta_p} a_p\psi_p) du$$

odakle sledi tvrdjenje teoreme jer na levoj strani možemo integraliti član po član.

Posledica ove teoreme je:

Posledica 3.9.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t T_u f du = T_t f .$$

Ako se u definiciji polugrupe T_t umesto uslova (3.2.) predpostavi da važi

(3.3.) $$e^{t|\eta_p|} < u(t)\tilde{\lambda}_p^{r(t)}$$

onda možemo da pokažemo da važi:

Teorema 3.10. Ako $f \in \mathcal{U}'$ i za polugrupu T_t važi uslov (3.3.) onda

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{r} \frac{t^k B^k}{k!} f \overset{\mathcal{U}'}{\to} T_t f \quad \text{kad} \quad r \to \infty .$$

Dokaz: B^k je operator tipa množitelja iz $L(\mathcal{U}', \mathcal{U}')$. To je onda i izraz na levoj strani od (1) za svako utvrdjeno $t > 0$. Iz uslova (3.3.) sledi da su za red

$$\sum_{p \in P^q} \sum_{k=0}^{r} \frac{t^k \eta_n^k}{k!} a_n \psi_n$$

ispunjeni uslovi teoreme 2.12., odakle sledi traženo tvrdjenje.

Iz uslova (3.3.) očigledno sledi uslov (3.2.).

Teorema 3.11. Ako za množitelje η_p, $p \in P^q$ važi uslov (3.2.) i uslov

$$|\arg \eta_p| < \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad (\alpha > 0)$$

onda važi tvrdjenje teoreme 3.10.

Dokaz sledi iz nejednakosti

$$|\eta_p| \leq \frac{\mathrm{Re}\,\eta_p}{\sin\alpha} .$$

Iz predhodnih teorema sledi da možemo uvesti oznaku e^{tB} za polugrupu T_t ako važi (3.3.) ili ako važe uslovi teoreme 3.11.

3.5. REŠAVANJE EVOLUCIONIH JEDNAČINA OBLIKA

$$\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k} = B^k u(t,x)$$

Koristeći teoriju koju smo razvili u predhodnom poglavlju možemo da rešavamo evolucione jednačine oblika navedenog u naslovu, gde je B infinitezimalni generator polugrupe, sa početnim uslovom u $\mathcal{U}'$.

Neka je data evoluciona jednačina (poznata i kao jednačina difuzije)

(3.4.) $$\frac{u(t,x)}{t} = \mathcal{B}u(t,x)$$

sa početnim uslovom $u(0,x) = f(x) \in \mathcal{U}'$.

Ako $f(x)$ nije 0-uopštena funkcija iz $\mathcal{U}'$ onda sem trivijalnog postoji i netrivijalno rešenje

$$u(t,x) = T_t f = \sum_{n \in P^q} e^{t\eta_n} a_n \psi_n$$

pod uslovom da skup η_n, $n \in P^q$, zadovoljava uslov (3.2.). Da je $T_t f$ rešenje jednačine (3.4.) sledi iz posledice 3.5.

Ukoliko u jednačini (3.4.) $t \in [a,\infty)$, i početni uslov glasi $u(a,x) = f(x) \in \mathcal{U}'$, njeno rešenje je

$$u(t,x) = \sum_{p \in P^q} e^{(t-a)\eta_p} a_p \psi_p \qquad (a > 0) .$$

Na osnovu posledice 3.7. sledi da je $T_t f$ rešenje i jednačine

(3.5.) $$\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k} = \mathcal{B}^k u(t,x)$$

gde je k proizvoljan prirodan broj, sa početnim uslovom $u(0,x) = f(x) \in \mathcal{U}'$.

Posebno je interesantan slučaj kada infinitezimalni generator $\mathcal{B}$ u sebi sadrži diferenciranje i množenje sa odredjenim funkcijama. U tom slučaju jednačine (3.4.) odnosno (3.5.) postaju parcijalne diferencijalne jednačine sa koeficijentima koji su odredjene funkcije.

Specijalno ako je $\mathcal{B} = \mathcal{R}$, gde je $\mathcal{R}$ sebi dualan operator oblika (1.1.) koji generiše prostore $\mathcal{A}$ i $\mathcal{A}'$ |49|, i ako je

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = g \in \mathcal{A}'$$

onda dobijamo diferencijalne jednačine koje rešava Zemanijan u |49| za jednodimenzionalan slučaj.

Teorija parcijalnih diferencijalnih jednačina sa stanovišta uopštenih funkcija je duboko razradjena na primer u |13|, |9|, ali sa konstantnim koeficijentima. Metode koje se koriste su operatorska i metoda zasnovana na Fourier-ovoj transformaciji. Kada su koeficijenti funkcije pa čak i u najjednostavnijem slučaju polinomi, te metode se ne mogu koristiti.

Koristeći razne integralne transformacije kao što su na primer Laplace-ova, Melin-ova, K-transformacija, transformacija vezana za ortpgonalno razlaganje i niz drugih, izmedju ostalog mogu se rešavati odredjene diferencijalne jednačine sa nekonstantnim koeficijentima |49|. Rezultati u ovom poglavlju predstavljaju izvestan doprinos toj problematici.

Infinitezimalni generator B polugrupe T_t na U' ne mora biti onaj operator R koji generiše taj prostor.

Ako je data odredjena evoluciona jednačina (specijalno, Cauchy-ev problem) može se proveriti da li postoji infinitezimalni generator koji generiše datu jednačinu. Ako postoji imamo rešenje te jednačine. Ilustrujmo to na primeru prostora temperiranih distribucija u jednodimenzionalnom slučaju.

Neka je dat početni problem

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = P(-\tfrac{1}{4}xf - \tfrac{1}{4}x\, f' - \tfrac{1}{2}xf'')u(t,x)$$

i $u(0,x) = f(x) \in \mathcal{S}'$ (f nije 0-distribucija), gde je $P(n)$ polinom koji je nenegativan za najviše konačno mnogo $n \in N_0$.

Ovo je ustvari diferencijalna jednačina oblika

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = P(-S)u(t,x)$$

gde je S operator iz primera 5. Njeno rešenje je

$\sum_{n\in N_0} e^{tP(n)} a_n h_n$ (h_n su Hermite-ove funkcije |1|).

Interesantna je činjenica da je ovo rešenje iz $L_2(-\infty,\infty)$ što sledi iz

$$\frac{|a_n|}{e^{-tP(n)}} \leq \frac{|a_n|}{n^{k+1}} \quad \text{za} \quad n > n_0 \,, \quad (t \neq 0)$$

gde smo k izabrali tako da je za $n > 0$

$$|a_n| \leq Mn^k \qquad \text{(pogledati |31|)} \,.$$

U drugom poglavlju druge glave smo definisali operatore R_i, $i = 1,\ldots,q$, i pomoću njih operator

$$R = R_1 \cdots R_q \,.$$

Za tako dobijeni operator smo konstruisali odgovarajući prostor U' čije smo osobine ispitivali u drugoj glavi. Kako smo već naveli, ako za infinitezimalni generator polugrupe definisane na tom prostoru U', uzmemo baš operator R koji generiše taj prostor, onda pod odredjenim uslovima rešavamo jednačine oblika (3.5.). Posebno ako su R_i, $i = 1,\ldots,q$, diferencijalni operatori oblika navedenog na strani 16, onda jednačina (3.5.) postaje odredjena parcijalna diferencijalna jednačina sa ne konstantnim koeficijentima (što smo takodje naveli).

Operator R za q-dimenzionalni slučaj ne moramo da definišemo kao proizvod od R_i, $i = 1,\ldots,q$. Možemo staviti da je R na primer oblika

$$R = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i R_i \quad (\alpha_i \text{ su konstante}) \,,$$

ili oblika

$$R = \alpha_1 R_1 \cdots R_{q-1} + \alpha_2 R_q \,,$$

ili bilo kojeg drugog sličnog navedenim.

Za tako formiran operator R možemo da konstruišemo odgovarajući prostor U', odnosno da rešavamo, ako stavimo da je $B = R$, odgovarajuće jednačine oblika (3.5.). Naravno tako formiran operator kao i njegove sopstvene funkcije i sopstvene vrednosti moraju da zadovoljavaju odredjene uslove, u šta ovde nećemo ulaziti, da bi se mogao konstruisati prostor U' sa osobinama datim u drugoj glavi.

Kao ilustraciju takvih mogućnosti u razvoju teorije prostora U' a sa tim u vezi i šire primene na rešavanje jednačina oblika (3.5.), navešćemo sledeći dvodimenzionalni primer:

Neka je $I_1 = I_2 = (0,\infty)$ i neka je

$$R_i = e^{\xi_i/2}\frac{\partial}{\partial\xi_i}\cdot\xi_i e^{-\xi_i}\frac{\partial}{\partial\xi_i}e^{\xi_i/2}, \quad i = 1,2.$$

Stavimo da je $\psi_n = \psi^1_{\nu_1}\cdot\psi^2_{\nu_2}$, $n = (\nu_1,\nu_2)\in P^2$; gde je

$$\psi^i_{\nu_i} = e^{-\xi_i/2}\sum_{\mu_i=0}^{\nu_i}\binom{\nu_i}{\nu_i-\mu_i}\frac{(-\xi_i)^{\mu_i}}{\mu_i!}, \quad i = 1,2 \quad ,$$

kompletna baza prostora $L_2(0,\infty)$ (za $i = 1$ ili $i = 2$), |49|. ψ_n, $n\in P^2$, je kompletna ortonormirana baza prostora $L_2((0,\infty)\times(0,\infty))$.

Pošto je $R_i\psi^i_{\nu_i} = -\nu_i\psi^i_{\nu_i}$, $i = 1,2$ (|49|), imamo da je za

$$R \triangleq R_1 + R_2, \qquad R\psi_n = -(\nu_1+\nu_2)\psi_n \quad , \quad n = (\nu_1,\nu_2)\in P^2 .$$

Za tako konstruisan operator R, sopstvene funkcije ψ_n i sopstvene vrednosti $\lambda_n = -(\nu_1+\nu_2)$, $n\in P^2$, bez većih teškoća možemo da konstruišemo odgovarajući prostor U' sa osobinama navedenim u drugoj glavi.

Diferencijalna jednačina oblika (3.4.), koja se dobija kada stavimo da je $\mathcal{B} = \mathcal{R}$, je oblika

$$1 + \sum_{i=1}^{2} \xi_i \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} u(t,\xi_1,\xi_2) + \frac{\partial}{\partial \xi_i} u(t,\xi_1,\xi_2) - \frac{\xi_i}{4} = \frac{\partial}{\partial t} u(t,\xi_1,\xi_2$$

i njeno rešenje je

$$\sum_{n \in P^2} e^{-t(\nu_1+\nu_2)} a_n \psi_n \quad .$$

IV GLAVA

O PROSTORU UOPŠTENIH FUNKCIJA ČIJI ELEMENTI IMAJU LAGUERRE-OVU EKSPANZIJU

4.1. UVOD

Sekvencijalna teorija prostora U' ne pruža samo mogućnosti primene u rešavanju evolucionih jednačina, što smo izložili u zadnjem poglavlju predhodne glave, već omogućava da se ispitaju konkretni primeri prostora U' i da se za njih dobiju novi rezultati specifični za te prostore. To ćemo u ovoj glavi pokazati za prostor uopštenih funkcija čiji elementi imali Laguerre-ovu ekspanziju.

Kada se za operator R uzme operator oblika

$$R = e^{x^2/2} D e^{-x^2} D e^{x^2/2}$$

i kada je ψ_n, $n \in P^q$, Hermite-ova baza prostora $L_2(R^q)$, prostor U' koji se dobija je prostor temperiranih distribucija |49|. Ovde se tim prostorom nećemo baviti jer je on detaljno ispitan u |1| sa stanovišta sekvencijalne teorije, mada bi u našem pristupu navedena teorija nešto drugačije izgledala.

U ovoj glavi ispitujemo jedan drugi prostor tipa U' - prostor uopštenih funkcija koje imaju Laguerre-ovu ekspanziju i koji zbog specifičnog oblika operatora R i sopstvenih funkcija za taj operator, ima vrlo interesantne osobine.

U drugom poglavlju ćemo se baviti odnosom ovog prostora i prostora Schwartz-ovih distribucija $\mathcal{D}'(0,\infty)$.

Treće poglavlje je posvećeno konvoluciji i Laplace-ovoj trnsformaciji koje za ovaj prostor uopštenih funkcija imaju jednostavnu reprezentaciju preko redova.

Izlaganje je dato za jednodimenzionalan slučaj što će olakšati razumevanje izloženog i pojednostaviti notaciju, i delom je bazirano na radu |35|.

4.2. PROSTOR UOPŠTENIH FUNKCIJA KOJE IMAJU LAGUERRE-OVU EKSPANZIJU

Linearni diferencijalni operator

$$R = e^{x/2} D x e^{-x} D e^{x/2}$$

na intervalu $(0,\infty)$ generiše prostor uopštenih funkcija tipa U', označimo ga sa L', čiji elementi mogu da se razviju u red po Laguerre-ovoj kompletnoj ortonormiranoj bazi prostora $L_2(0,\infty)$ oblika

$$\psi_n(x) = e^{-x/2} L_n(x), \quad n \in N_0, \qquad \text{gde su}$$

$$L_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{n-m} (-x)^m / m!$$

polinomi Laguerre-a.

Niz sopstvenih vrednosti operatora R je $\lambda_n = -n$, $n \in N_0$, (|49|). Ovaj niz očigledno zadovoljava uslov (2.5.).

Pošto teorija koju smo razvili u drugoj glavi važi za L', navešćemo neke rezultate iz druge glave primenjene na L'

Definicija 4.1. Uopštena funkcija f je iz L' ako za neko $k \in N_0$ i neko $F \in L_2(0,\infty)$ važi

$$R^k F + c_0 \psi_0 = f \qquad (c_0 \text{ je kompleksan broj}).$$

Definicija 4.2. Niz uopštenih funkcija f_n iz L' konvergira ka $f \in L'$ ako postoji niz F_n iz $L_2(0,\infty)$ i $F \in L_2(0,\infty)$ i ako postoje $c_{n,o}$, $n \in N$, i c_o tako da za neko $k \in N_o$ važi

$$R^k F_n + c_{n,o}\psi_o = f_n \,, \quad R^k F + c_o \psi_o = f \qquad \text{i}$$

$$F_n \overset{2}{\to} F \,, \quad c_{n,o} \to c_o \qquad \text{kad} \quad n \to \infty \,.$$

Teorema 4.1. Ako za neko $k \in N_o$ i niz kompleksnih brojeva a_n, $n \in N_o$, važi

(1) $\qquad |a_n| < M\tilde{n}^k \quad (M > 0), \quad \tilde{n} = n$ ako je $n \neq 0$ i $\tilde{0} = 1$,

onda postoji uopštena funkcija f iz L' tako da je

(2) $$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n$$

(= uzimamo u smislu konvergencije u L').

Obrnuto, ako $f \in L'$ onda postoji niz kompleksnih brojeva a_n, $n \in N_o$, koji za neko $k \in N_o$ zadovoljava (1) tako da važi (2).

Dokaz ove teoreme sledi iz teoreme 2.1. i uslova (2,5.)

Teorema 4.2. Potreban i dovoljan uslov da niz $f_n = \sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p}\psi_p$ iz L' konvergira ka $f = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \psi_p$, jeste da za neko $k \in N_o$ važi

$$|a_{n,p}| < M\tilde{n}^k \quad (M > 0) \quad \text{i} \quad a_{n,o} \to a_o \quad \text{kad} \quad n \to \infty \,.$$

Dokaz ove teoreme sledi iz teoreme 2.2. i uslova (2.5.).

Definicija 4.3. Kažemo da kompleksnoznačna funkcija $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n$ iz $L_2(0,\infty)$ je iz skupa osnovnih funkcija, označimo ga sa L, ako za svako $k \in N_o$ važi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{n}^{2k}|a_n|^2 < \infty.$$

Jasno je da su L′ i L vektorski prostori u odnosu na operacije sabiranja i množenja sa skalarom, kako smo to definisali uopšte za prostor U' odnosno U.

Definicija 4.4. Unutrašnji proizvod uopštene funkcije $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n$ iz L′ i test funkcije $\phi = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\psi_n \in L$ je

$$(f,\phi) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n\bar{b}_n \quad .$$

Označimo sa L linearni diferencijalni operator oblika

$$L = e^{-x/2}Dxe^{x/2} \qquad \text{i} \qquad L' = xe^{x/2}(-D)e^{-x/2} \ .$$

Definišimo na L′ operator L na sledeći način: Neka je $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n \in U'$ (ili $f = \{\sum_{n=0}^{N} a_n\psi_n\}$ - R-fundamentalan niz koji odredjuje f). Niz $L\sum_{n=0}^{N} a_n\psi_n$, $N\in N_o$, konvergira u smislu konvergencije u L′ ka nekom elementu. Taj elemenat označavamo sa Lf.

Stavimo da je $L^0 f = f$ i $L^{k+1}f = LL^k f$.

Pošto je $(n + 1)(a_n - a_{n+1}) = (Lf,\psi_n) = (f,L'\psi_n)$, sledi da je

$$Lf \stackrel{L'}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)(a_n - a_{n+1})\psi_n.$$

Takodje se na L′ može preko R-fundamentalnog niza definisati i množenje sa polinomom uopštene funkcije iz L′. Naime, niz $x\sum_{n=0}^{N} a_n\psi_n$, $N\in N_o$, konvergira u L′ i tu granicu označimo sa xf.

Pošto je

$$(xf,\psi_n) = (f,x\psi_n) = -(n+1)(f,\psi_{n+1}) + (2n+1)(f,\psi_n) - n(f,\psi_{n-1}),$$

gde je $(f,\psi_{-1}) \stackrel{\Delta}{=} 0$, dobijamo da je

$$xf \stackrel{L'}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-(n+1)a_{n+1} + (2n+1)a_n - na_{n-1})\psi_n \quad (a_{-1} \stackrel{\Delta}{=} 0).$$

Koristeći teoreme 4.1. i 4.2. na osnovu predhodnog sledi:

Teorema 4.3. Ako $f \in L'$ onda za svaki polinom P važi

$$P(x)f \in L' \quad \text{i} \quad P(L)f \in L'.$$

Ako niz f_n iz L' konvergira ka $f \in L'$ onda

$$P(x)f_n \stackrel{L'}{\to} P(x)f \quad \text{i} \quad P(L)f_n \stackrel{L'}{\to} P(L)f \quad \text{kad } n \to \infty.$$

Označimo sa $\mathcal{S}'(0,\infty)$ podprostor Schwartz-ovih distribucija $\mathcal{D}'(0,\infty)$ čiji elementi se dobijaju kada se temperirane distribucije posmatraju nad intervalom (o,∞). Na osnovu |1| (teorema 7.3.1. i teorema 7.5.1.) imamo sledeće dve definicije:

Definicija 4.5. Schwartz-ova distribucija f definisana nad $(0,\infty)$ je iz $\mathcal{S}'(0,\infty)$ ako postoje $m,r \in N_0$, $K > 0$ i ako postoji neprekidna funkcija G tako da je

$$f = G^{(m)} \quad \text{i} \quad G(1+x)^{-r} < K$$ (izvod je u distribucionom smislu |1|).

Definicija 4.6. Niz f_n iz $\mathcal{S}'(0,\infty)$ konvergira ka $f \in \mathcal{S}'(0,\infty)$ ako postoje brojevi $m,r \in N_0$ i postoje neprekidne funkcije G_n, $n \in N$, i G tako da je

$G_n^{(m)} = f_n$, $G^{(m)} = f$ i niz $(1+x)^{-r}G_n$ je ograničen i uniformno konvergira ka $(1+x)^{-r}G$ na $(0,\infty)$.

Napomenimo da prostor $\mathcal{S}'(0,\infty)$ nema u odnosu na $\mathcal{D}'(0,\infty)$ ona poznata svojstva koja ima prostor temperiranih distribucija $\mathcal{S}'(-\infty,\infty)$ u odnosu na $\mathcal{D}'(-\infty,\infty)$.

Pošto je R-fundamentalan niz fundamentalan u smislu |1|, što smo objasnilina strani 42 odnosno 43, označimo sa $\tilde{f}$ Schwartz-ovu distribuciju koja je odredjena sa tim fundamentalnim nizom.

Teorema 4.4. Ako $f \in L'$ onda $\tilde{f} \in \mathcal{S}'(0,\infty)$. Ako niz f_n iz L' konvergira ka $f \in L'$ onda $\tilde{f}_n$ konvergira ka $\tilde{f}$ u smislu definicije 4.6.

Dokaz: Kada operator R primenjujemo u distribucionom smislu (|1|), označićemo ga sa $\tilde{R}$. To znači da operator R primenjujemo na konačne sume

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \psi_n, \quad N \in N_o,$$

koje su članovi fundamentalnog niza u smislu |1|. U njemu se pojavljuje distribucioni izvod i množenje distribucije sa polinomom, što su regularne operacije (|1|), jer je $\tilde{R} = xD^2 + D - 1/4$.

Ako $f \in L'$ onda je $f = R^k F + c_o \psi_o$ za neko $k \in N_o$ i neko $F \in L_2(0,\infty)$.

Funkcija

$$F_1 = \begin{cases} F(x) & x \in (0,\infty) \\ F(-x) & x \in (-\infty,0) \end{cases}$$

je iz $L_2(-\infty,\infty)$ a odatle sledi da je $\tilde{R}^k F_1$ temperirana distribucija.

Na osnovu |1|, teorema 7.3.1., sledi da postoji neprekidna funkcija G nad intervalom $(-\infty,\infty)$ tako da je

$$\tilde{R}^k F_1 = G^{(m)}$$

za neko $m \in N_o$ i da je $(1 + x)^{-r} G$ ograničeno za neko $r \in N_o$.

Nad intervalom $(0,\infty)$ je

$$\tilde{R}^k F_1 = \tilde{R}^k F = \tilde{f} - c_o \psi_o \ .$$

Pošto je $\psi_o = e^{-x/2} = (-2)^m (e^{-x/2})^{(m)}$, znači da je ψ_o temperirana distribucija reda m (u intervalu $(-\infty,0)$ možemo definisati da je ta funkcija jednaka nuli), a odatle sledi da $f \in \mathcal{S}'(0,\infty)$. Time je prvi deo teoreme dokazam.

Ako $f_n \overset{L'}{\to} f$ onda je $f_n = R^k F_n + c_{n,o}\psi_o$, $f = R^k F + c_o \psi_o$ za neko $k \in N_o$, neke $F_n \in L_2(0,\infty)$, $n \in N$, i neko $F \in L_2(0,\infty)$ tako da $F_n \overset{2}{\to} F$, $c_{n,o} \to c_o$, kad $n \to \infty$.

Stavimo da je

$$F_{n,1} = \begin{cases} F_n(x) & x \in (0,\infty) \\ F_n(-x) & x \in (-\infty,0) \end{cases} \quad \text{i} \quad F_1 = \begin{cases} F(x) & x \in (0,\infty) \\ F(-x) & x \in (-\infty,0) \end{cases} .$$

Niz $F_{n,1} \overset{2}{\to} F_1$, što znači da je $\tilde{R}^k F_{n,1}$ niz temperiranih distribucija koji temperirano konvergira ka temperiranoj distribuciji $\tilde{R}^k F_1$ (|1|, odeljak 7.5.). Na osnovu |1| (teorema 7.5.1.) postoje neprekidne funkcije G_n, $n \in N$, i G tako da za neko $m, r \in N_o$ važi

$$G_n^{(m)} = \tilde{R}^k F_{n,1} \ , \qquad G^{(m)} = \tilde{R}^k F_1$$

i niz $(1 + x)^{-r} G_n$ je ograničen i uniformno konvergira nad intervalom $(-\infty,\infty)$ ka $(1 + x)^{-r} G$.

Nad intervalom $(0,\infty)$ važi

$$G_n^{(m)} = \tilde{f}_n - c_{n,o}\psi_o \quad \text{i} \quad G^{(m)} = \tilde{f} - c_o \psi_o \ ,$$

a odatle dobijamo drugi deo teoreme.

Ako je F neprekidna funkcija nad intervalom $(0,\infty)$ onda definišemo operator L^{-1} na sledeći način

$$L^{-1}F \triangleq \frac{e^{-x/2}}{x} \int_0^x e^{t/2} F(t)\,dt \qquad \text{i} \qquad L^{-k}F \triangleq L^{-1} L^{-k+1} F \ .$$

Jasno je da je $L^k L^{-k} F = F$.

Lema 4.5.

(i) $L^{-1} 1 \; L_2(0,\infty)$;

(ii) $L^{-1} x^n < K(1 + x)^{n-1}, \quad n \in N_0, \; K > 0$ (K zavisi od n)

(iii) Ako $F \in L_2(0,\infty)$ onda $L^{-1} F \in L_2(0,\infty)$.

Dokaz: (i) i (ii) se dokazuju direktno integracijom i pogodnim majoracijama.

(iii) Dokaz sledi iz nejednakosti

$$\frac{e^{-x/2}}{x} \int_0^x e^{t/2} F(t)\,dt \leqslant \frac{e^{-x/2}}{x} \int_0^x |e^{t/2}|^2 dt \int_0^x |F(t)|^2 dt \leqslant \frac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{x} M ,$$

gde je $M = \int_0^\infty |F(t)|^2 dt$, jer je izraz $\dfrac{e^{x/2} - e^{-x/2}}{x}$ ograničen.

Sada možemo da pokažemo da važi:

Teorema 4.6. Ako je neprekidna funkcija G definisana nad intervalom $(0,\infty)$ takva da je za neko $r \in N_0$ i $K > 0$

$$(1 + x)^{-r} G < K$$

onda $G \in L'$.

Ako niz neprekidnih funkcija G_n definisanih nad intervalom $(0,\infty)$ je takav da za neko $r \in N_0$ i $K > 0$ je

$$(1 + x)^{-r} G_n < K \quad \text{i} \quad (1 + x)^{-r} G_n \rightrightarrows (1 + x)^{-r} G \quad \text{nad } (0,\infty),$$

($\rightrightarrows$ označava uniformnu konvergenciju)

onda G_n konvergira ka G u smislu konvergencije u L'.

Dokaz: Primenjujući operator L^{-1} dovoljan broj puta, neka to bude s puta, na osnovu leme 4.5. dobijamo da

$$L^{-s} G \in L_2(0,\infty).$$

Primenjujući operator L, s puta na R-fundamentalan niz koji odgovara kvadrat integrabilnoj funkciji $L^{-s}G$, dobijamo da su koeficijenti od $L^{s}L^{-s}G$, označimo ih sa a_n, dati formulom

$$a_n = (L^{s}L^{-s}G,\psi_n) \overset{*}{=} (L^{-s}G,L^{-s}\psi_n) \overset{**}{=} (G,\psi_n), \quad n\in N_0 .$$

Jednakost (*) je na osnovu definicije operatora L, a jednakost (**) je na osnovu parcijalne integracije. Time je prvi deo teoreme dokazan.

Za drugi deo teoreme stavimo da je $H_n = G_n - G$. Iz uslova teoreme sledi da je

$$|H_n| < \varepsilon_n(1 + x)^r \quad \text{i} \quad |G| < K(1 + x)^r$$

Primenjujući operator L^{-1}, s puta, dobijamo da je

$$L^{-s}H_n \leqslant \varepsilon_n F_0 \quad (F_0\in L_2(0,\infty)) \quad \text{i} \quad L^{-s}G\in L_2(0,\infty).$$

Odatle sledi da $L^{-s}H_n \overset{2}{\to} 0$ što znači da

$$L^{-s}G_n \overset{L'}{\to} L^{-s}G \qquad \text{kad} \quad n \to \infty.$$

Primenjujući operator L, s puta dobijamo drugi deo teoreme.

Ova teorema se može dokazati i direktnim računanjem koeficijenata (G,ψ_n) korišćenjem pogodnih majoracija.

Pokažimo da je razlaganje funkcije G (koja se naziva sporo rastuća funkcija) iz predhodne teoreme jedinstveno. Za to ćemo koristiti teoremu o momentu čiji elementaran dokaz je dat u |44|. Navedimo je:

Teorema 4.7. (Teorema o momentu |44|). Ako za proizvoljnu funkciju $g(x)$ postoji $\alpha > 0$ tako da

$$g(x)\,e^{\alpha|x|}\in L_1(-\infty,\infty)$$

($L_1(-\infty,\infty)$ je prostor lokalno integrabilnih funkcija nad $(-\infty,\infty)$) i ako su svi momenti

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n g(x)\,dx, \qquad n \in N_0$$

jednaki nuli, onda je g jednako nula skoro svuda.

Teorema 4.8. Razvoj funkcije G iz teoreme 4.6. je jedinstven.

Dokaz: Predpostavimo da G nije jednako nula skoro svuda na $(0,\infty)$ a da je

$$(1) \qquad (G,\psi_n) = 0, \qquad n \in N_0.$$

Iz (1) sledi da su za funkciju $g(x) = G(x)e^{-x/2}$ svi momenti jednaki nula. Definišimo funkciju $g_1(x)$ na sledeći način:

$$g_1(x) = \begin{cases} g(x) & x \in [0,\infty) \\ g(-x) & x \in (-\infty,0) \end{cases}.$$

Funkcija g_1 je neprekidna funkcjija za koju su svi momenti jednaki nuli i za koju

$$e^{\alpha|x|}g_1(x) \in L_1(-\infty,\infty) \text{ za } 0 < \alpha < 1/2 .$$

Na osnovu teoreme 4.7. dobijamo da je $g_1 = 0$ skoro svuda, odnosno da je $G = 0$ skoro svuda, što je u kontradikciji sa predpostavkom.

Slično teoremi 4.8., može se pokazati da je razvoj po Laguerre-ovoj kompletnoj ortonormiranoj bazi jedinstven za širu klasu funkcija. Naime uslovi neprekidnosti i sporog rasta funkcije G iz teoreme 4.6. se mogu oslabiti. Tako dobijeni razvoji mogu biti iz L' ali ne moraju, što je interesantno pitanje u koje ovde nećemo ulaziti.

Na kraju ovog poglavlja navedimo jedan problem koji nismo rešili a koji bi bolje karakterisao odnos prostora L' sa prostorom $\mathcal{D}'(0,\infty)$:

Da li postoje dva različita elementa iz L' čije restrikcije nad $\mathcal{D}(0,\infty)$ su nula Schwartz-ova distribucija iz $\mathcal{D}'(0,\infty)$?

4.3. *KONVOLUCIJA I LAPLACE-OVA TRANSFORMACIJA U* L'

Na osnovu formula

$$\frac{d}{dx}\int_0^x L_n(x-t)L_m(t)\,dt = L_{n+m}(x) \quad \text{i} \quad \frac{d}{dx}(L_n - L_{n+1}) = L_n$$

koje važe za Lagurre-ove polinome ($|16|$), lako se pokazuje da je

$$\int_0^x \psi_n(x-t)\psi_m(t)\,dt = \psi_{n+m} - \psi_{n+m+1}\,. \tag{4.1.}$$

U prostoru L' ćemo operaciju konvolucije definisati na sledeći način:

Definicija 4.7. Ako je $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\psi_n$ i $g = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\psi_n$, onda je

$$f\circledast g \triangleq \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{p+q=n} a_p b_q - \sum_{p+q=n-1} a_p b_q\Big)\psi_n \qquad \Big(\sum_{p+q=-1} \triangleq 0\Big).$$

Pošto su f i g iz L', na osnovu teoreme 4.2. sledi da postoje $k_1,\ k_2 \in N_0$ i postoje $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ tako da važi

$$|a_n| < M_1\tilde{n}^{k_1} \quad \text{i} \quad |b_n| < M_2\tilde{n}^{k_2}, \quad n\in N_0.$$

Iz nejednakosti

$$\Big|\sum_{p+q=n} a_p b_q\Big| \leqslant \sum_{p=0}|a_p|\sum_{q=0}|b_q| < M_1M_2\tilde{n}^{k_1+k_2+2}\,,$$

na osnovu teoreme 4.2. sledi da je konvolucija $\circledast$ dobro definisana.

Jednostavnim proveravanjem se pokazuje da je konvolucija komutativna i asocijativna.

Teorema 4.9. Ako nizovi uopštenih funkcija f_n i g_n iz L' konvergiraju ka f odnosno g u smislu konvergencije u L' onda

$$f_n \circledast g_n \xrightarrow{L'} f \circledast g \qquad \text{kad} \quad n \to \infty.$$

Dokaz: Definicija konvolucije uopštenih funkcija iz L' je izvedena na osnovu konvolucije R-fundamenralnih nizova koji odredjuju te uopštene funkcije jer

$$\sum_{p=0}^{n} a_p \psi_p \circledast \sum_{p=0}^{n} b_p \psi_p \xrightarrow{L'} f \circledast g.$$

U slučaju proizvoljnih nizova f_n i g_n iz L', proveravanjem uslova iz teoreme 4.4. dobijamo tvrdjenje.

Na isti način kao u |1| (teorema 4.2.2.), za kvadratintegrabilne funkcije iz $L_2(0,\infty)$ se pokazuje da važi:

Lema 4.10. Ako su f_n i g_n nizovi iz $L_2(0,\infty)$ koji u kvadratnom smislu konvergiraju ka f odnosno g, onda

$$\int_0^x f_n(x-t) g_n(t)\,dt \rightrightarrows \int_0^x f(x-t) g(t)\,dt \quad \text{nad } (0,\infty) \quad \text{kad} \quad n \to \infty.$$

Iz leme 4.10. sledi:

Teoreme 4.11. Ako su f i g iz $L_2(0,\infty)$, onda je

$$\int_0^x f(x-t) g(t)\,dt \overset{L'}{=} f \circledast g.$$

Dokaz: Neka su f_n i g_n parcijalne sume od f i g koje u kvadratnom smislu konvergiraju ka tim funkcijama respektivno. Iz jednakosti

$$\int_0^x f_n(x - t)g_n(t)dt = f_n \circledast g_n$$

i činjenice da leva strana konvergira uniformno ka $\int_0^x f(x-t)g(t)dt$ a desna u smislu konvergencije u L' ka $f \circledast g$, dobijamo tvrdjenje.

Predjimo na izlaganje o Laplace-ovoj transformaciji u L'. Ona se može izraziti preko reda na sledeći način |49|:

Ako je $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n \in L'$ onda je

$$\mathcal{L}f \overset{\Delta}{=} F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - 1/2)^n/(s + 1/2)^{n+1} \;, \quad \operatorname{Re}s > 0.$$

Važi i obrnuto, red na desnoj strani odredjuje jedinstvenu uopštenu funkciju iz L'.

Pošto je $\dfrac{F(s(z))}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ gde je

$s = \dfrac{1 + z}{2(1 - z)}$, $\operatorname{Re}s > 0$, $|z| < 1$, na osnovu množenja stepenih redova dobija se

Teorema 4.12. Ako su uopštene funkcije f i g iz L' onda je

$$\mathcal{L}(f \circledast g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

Laplace-ova transformacija je neprekidna operacija u L' jer važi

Teorema 4.13. Ako $f_n \to f$ u L' onda $\mathcal{L}(f_n) \to \mathcal{L}(f)$ u običnom smislu.

Dokaz: Neka su $a_{n,p}$ koeficijenti od f_n a a_p, $p \in N_0$, koeficijenti od f. Iz $a_{n,p} \to a_p$ i $|a_{n,p}| < Mn^k$ za neko $k \in N_0$ i $M > 0$, sledi

$$\sum_{p=0}^{\infty} a_{n,p} z^p \to \sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p \quad \text{u običnom smislu } (|z| < 1)$$

odakle sledi tvrdjenje. (Vidimo da uniformnu konvergenciju imamo u krugu $|z| \leq r < 1$).

Pokažimo da za ovako definisanu Laplace-ovu transformaciju važe formule slične onim koje važe za Laplace-ovu transformaciju distribucija.

Teorema 4.14. Ako je f uopštena funkcija iz L' i $F(s)$ njena Laplace-ova transformacija, onda važi

(i) $\mathcal{L}(x^p f) = (-1)^p F^{(p)}(s)$;

(ii) $\mathcal{L}(Rf) = -(s\,F(s))' + sF(s) + \frac{1}{4}F'(s) + \frac{1}{2}F(s)$;

(iii) $\mathcal{L}(Lf) = (s - \frac{1}{2})F'(s)$.

Dokaz: Dokažimo formulu (i) za $p = 1$. Jasno je da

$$\mathcal{L}(xf) = \sum_{n=0}^{\infty} (-(n+1)a_{n+1} + (2n+1)a_n - na_{n-1}) \frac{(s - \frac{1}{2})^n}{(s + \frac{1}{2})^{n+1}}$$

Pokažimo da je izraz na desnoj strani jednak $-F'(s)$.

$$F'(s) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n \frac{(s - \frac{1}{2})^{n-1}}{(s + \frac{1}{2})^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_n \frac{(s - \frac{1}{2})^n}{(s + \frac{1}{2})^{n+1}}$$

odakle koristeći vezu $\frac{1}{s + \frac{1}{2}} = 1 - \frac{s - \frac{1}{2}}{s + \frac{1}{2}}$, dobijamo formulu (i).

Na sličan način, pomoću operacija na redovima dobijamo (ii) i (iii).

Pošto u L' nemamo definisan izvod, navedene formule i njihove kombinacije se mogu koristiti za rešavanje odredjenih tipova diferencijalnih jednačina sa nekonstantnim koeficijentima. Dakle vidimo da proučavajući prostor L' dolazimo do novih primena u rešavanju diferencijalnih jednačina.

Pomoću operatora $\mathcal{L}$ i množenja sa x elemenata iz L' može se definisati $x^k f^{(p)}$ za $k \geqslant p$ i $k,p \in N_0$ preko odgovarajućeg $\mathcal{R}$-fundamentalnog niza i pokazati da je

$$\mathcal{L}(x^k f^{(p)}) = (-1)^k (s^p F(s))^{(k)}$$

što opet može da se koristi u rešavanju diferencijalnih jednačina.

LITERATURA

|1| П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский, Теория обобщенных функций - секвенциальный подход, Москба, 1976.

|2| P. Antosik, Sur les suites d'applications, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 287 (1978), 75-77.

|3| Н.И. Ахиэиер, И.М. Глазман, Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве, том 1., Харков, 1977.

|4| E.J. Beltrami, M.R. Wohlers, Distributions and the Boundary Values of Analytic Functions, New York, 1966.

|5| M. Bouix, Les Fonctions Généralisees ou Distributions, Paris, 1964.

|6| C.L.R. Braga, M. Schönberg, Formal Series and Distributions, Anais da Acad. Brasileira de Ciências, Vol. 31 (1964), 333-360.

|7| Г. Бремерман, Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье, Москва, 1968.

|8| В.А. Диткин, А.П. Прудников, Интегральные преобразования и операционное исчисление, Москва, 1974.

|9| A. Friedman, Generalized Functions and Partial Differential Equations, New Yersey, 1963.

|10| И.М. Гелфанд, Н.Я. Виленкин, Некоторые применения гармонического анализа, Оснащенные Гилбертовы пространства, Москва, 1961.

|11| I.M. Gel'fand, G.E. Shilov, Generalized Functions, Vol.1., New York, 1964.

|12| I.M. Gel'fand, G.E. Shilov, Generalized Functions, Vol.2., New York, 1968.

|13| I.M. Gel'fand, G.E. Shilov, Generalized Functions, Vol.3., New York, 1967.

|14| I.M. Gel'fand, G.E. Shilov, Generalized Functions, Vol.4., New York, 1964.

|15| M. Giertz, On the Expansion of Certain Generalized Functions in Series of Orthonormal Functions, Proc. London Math. Soc. 3rd Ser., Vol.14 (1964), 45-52.

|16| Erdelyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi, Higer Transcedental Functions, Vol.2., New York, 1953.

|17| E. Halperin, Introduction to the Theory of Distributions, Toronto, 1952.

|18| Э. Хилл, Функционалный анализ и полугруппы, Москва, 1951.

|19| J. Horvat, Topological Vector Spaces and Distributions, Massachusetts, 1966.

|20| С. Начмаж, Г. Штейнгауз, Теория ортогональных рядов, Москва, 1958.

|21| A. Kaminski, Calkowanie i operacie nieregularne, Praca dok., 1975.

|22| G. Köthe, Topological Vector Spaces I, New York, 1969.

|23| B.S. Nagy, Introduction to Real Functions and Orthogonal Expansion, New York, 1965.

|24| J. Mikusiński, Irregular Operations on Distributions, Studia Math. 20(1961), 163-169.

|25| J. Mikusiński, Sequential Theory of the Convolutions, Studia Math. 29(1968), 151-160.

|26| J. Mikusiński, Operational Calculus, Pergamon, 1959.

|27| J. Mikusiński, Une introduction elementaire de la transformation de Fourier dans la theorie des distributions, Mathematica 8(31), 1(1968), 83-90.

|28| J. Mikusiński, A Lemma on Convergence, Bull.Acad.Pol.22, N.9(1974), 903-907.

|29| E. Pap, A Note on Orthogonal Expansions in Multidimensional Case, Publ.Inst.Math. Beograd, t.22(36)(1977), 211-214.

|30| E. Pap, An Application of J. Mikusiński Lemma on Convergence,(u štampi).

|31| E. Pap, S. Pilipović, Sequential Theory of Some Semigroups in Tempered Distributions, Rev. of Res. of Sc. Novi Sad, Vol.7 (1977), 9-16.

|32| E. Pap, S. Pilipović, A Sequential Theory of Some Spaces of Generalized Functions, (u štampi).

|33| E. Pap, S. Pilipović, Semigroups of Operators on Some Spaces of Generalized Functions, (u štampi).

|34| S. Pilipović, On Convergence in Some Spaces of Generalized Functions, (u štampi).

|35| S. Pilipović, Prostor uopštenih funkcija čiji elementi imaju Laguerre-ovu ekspanziju, (u štampi).

|36| L. Schwartz, Theorie des Distributions, vols.I,II, Paris, 1957.-1959.

|37| H.H. Schaefer, Topological Vector Spaces, New York, 1966.

|38| J. Sebastiao e Silva, Sur une construction axiomatique de la theorie des distributions, Revista Fac. Ciencias Lisboa, A4 (1955), 79-186.

|39| S. Soboleff, Metode nouvelle á résoudre le probléme de Cauchy pour les equations lineaires hyperboliques normales, Mat. Sb., (2)1 (1936), 39-72.

|40| S. Soboleff, Sur un théoreme dánalyse fonctionelle, Mat.Sb., (2)4 (1938), 471-497.

|41| B. Stanković, Uopštavanje funkcija i operacije sa njima, Distribucije, Mat.Ves., 1(16), sv.3(1964), 221-228.

|42| G. Temple, Theories and Applications of Generalized Functions, Journ. London Math. Soc., 28(1953), 134-148.

|43| Э.И. Титчмарш, Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, часть I, Москва, 1960.

|44| Z. Tyc, Z. Sadlok, On Exponential Distributions I, (u štampi).

|45| В.С. Владимиров, Обобщенные функции в математической физике, Москва, 1976.

|46| К. Иосида, Функциональный анализ, Москва, 1967.

|47| A.H. Zemanian, Distribution Theory and Transform Analysis, New York, 1965.

|48| A.H. Zemanian, Orthonormal Series Expansion of Certain Distributions and Distributional Transform Calculus, J.Mat.Anal. and Appl., Vol.14 (1966), 263-275.

|49| А.Г. Земаниан, Интегральные преобразования обобщенных функций, Москва, 1974.

|50| G. Walter, Expansions of Distributions, University of Wisconsin-Milwaukee, 1963.