UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA
MATEMATIKU I INFORMATIKU

Dušan Rakić

Malotalasna transformacija u prostorima distribucija i ultradistribucija i teoreme Abelovog i Tauberovog tipa

- doktorska disertacija -

Novi Sad, *2010*.

Sadržaj

Glava 0

Predgovor

Abelova i Tauberova teorema, odnosno Tauberovi uslovi formulisani su u drugoj polovini XIX i početkom XX veka u cilju proučavanja konvergencije redova. Abel je konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ispitivao preko uslova Abel sumabilnosti datog reda, dok je Koši doveo u vezu običnu konvergenciju reda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ sa uslovom Ćezaro sumabilnosti. Pokazano je da iz obične konvergencije sledi Abelova i Ćezarova sumabilnost. Ovakav tip teorema nazvan je Abelove teoreme. U opštem slučaju, obrnuta tvrđenja ne važe, odnosno obična konvergencija nije ekvivalentna konvergenciji u Abelovom, odnosno u Ćezarovom smislu. Tauber je pokazao da iz Abel sumabilnosti, uz dodatni uslov $na_n \to 0$, $n \to \infty$, sledi obična konvergencija, dok je Landau pokazao da iz Ćezaro sumabilnosti, uz uslov $|na_n| \leq C$, $n \to \infty$, sledi obična konvergencija. Ove teoreme su nazvane Tauberove teoreme, a dodatni uslovi Tauberovi uslovi. Istorijski detalji u vezi sa Abelovim i Tauberovim teoremama mogu se pronaći u [30]. U disertaciji smo koristili teoreme Abelovog i Tauberovog tipa za asimptotsku analizu temperiranih distribucija, u odnosu na njihovu malotalasnu transformaciju.

Radovi u matematici i fizici u XIX veku su doveli do zaključka da pojam funkcije u klasičnom smislu nije dovoljan da se postave i rešavaju matematički modeli koji opisuju fenomene iz prirode. Intuitivno je bilo jasno da postoje zavisnosti među veličinama koje nisu funkcije, a koje prirodno odgovaraju postavljenim problemima. Sa druge strane, veliki značaj Laplasove i Furijeove transformacije u inženjerstvu je doveo do potrebe da se definišu najšire klase prostora u kojima su navedene transformacije dobro definisane. Konačno, primećeno je i da se pojam Rimanovog integrala ne slaže najbolje sa nekim razvijenim matematičkim izučavanjima, što je dovelo do uvođenja i razvoja Lebegovog integrala početkom XX veka. Lebegovim integralom je moguće vršiti integraciju nad širom klasom funkcija, čime je učinjen još jedan korak ka uopštenju pojma funkcije.

Rad fizičara je bio veoma inspirativan za matematičare, pa je tako, tridesetih godina XX veka, čuveni fizičar Dirak definisao Dirakovu delta funkciju. Delta funkcija nije bila matematički korektno definisana. Sa stanovišta matematike Soboljev se smatra za osnivača teorije uopštenih funkcija. On je u radu na teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačina, izvršio generalizaciju pojma funkcije uvodeći pojam slabog izvoda i uopštene funkcije preko dualnosti. Konačno, kompletan teorijski prikaz teorije distribucija, u okviru teorije lokalno konveksnih vektorsko topoloških prostora, načinio je Švarc ([57]) sredinom prethodnog veka. Posebno je značajan prostor temperiranih distribucija koji je invarijantan u odnosu na Furijeovu transformaciju. Međutim, činjenica da je rast temperiranih distribucija polinomno ograničen čini temperirane distribucije neodgovarajućim za primenu u problemima u kojima se posmatraju funkcije (skoro) eksponencijalnog rasta.

Teorija ultradistribucija čini sastavni deo teorije distribucija ([26, 27, 28, 29]) i proširuje rezultate o Švarcovim distribucijama na širu klasu objekata. Posebno su istraživane temperirane ultradistribucije kao uopštenje temperiranih distribucija ([16, 25, 31, 40]). U [61] je prikazana prirodna veza između vremensko-frekvencijske analize i teorije temperiranih ultradistribucija.

Poznato je da, u opštem slučaju, nije moguće odrediti vrednost distribucije u tački. Jedan od načina da se ona definiše (ako je to moguće) je vrednost distribucije u tački u smislu Lojaševiča ([33], videti i primer 3.2.1). Lojaševičeva vrednost distribucije u tački je korišćena, na primer u rešavanju nekih problema Furijeove analize ([12, 64, 65, 66]). Prirodno uopštenje ovog pojma je kvaziasimptotsko ponašanje distribucije. Kvaziasimptotsko ponašanje je definisao Zavijalov ([78]), pri radu na kvantnoj teoriji polja. Dalja istraživanja u ovoj oblasti prikazana su u monografiji [70], autora Vladimirova, Drožinova i Zavijalova. Takođe, značajni rezultati iz ove oblasti su dati i u monografiji [47], autora Pilipovića, Stankovića i Takačija. Kvaziasimptotika je primenjivana u teorijskim problemima matematičke fizike ([70, 72, 73]), kao i u ispitivanju integralnih transformacija u prostorima distribucija, uglavnom iskazanog preko Abelovih i Tauberovih teorema ([7, 8, 47, 70, 71]). U [8, 13, 70, 74] kvaziasimptotika je korišćena u kvalitativnoj analizi rešenja konvolucionih, integralnih i parcijalnih diferencijalnih jednačina. Posebno je zanimljiva veza sa teorijom malih talasa ([49, 52, 54, 59, 75, 76]), gde su malotalasne metode primenjivane pri ispitivanju asimptotskih osobina distribucija.

Teorija malih talasa je moderna matematička teorija, koja je od pionirskog rada fizičara Grosmana i inženjera Morlea ([18]) do danas dobila potpunu teorijsku osnovu ([5, 36]) i primenjivana je u raznim teorijskim problemima ([5, 20, 24, 36, 37]), signalnoj analizi ([34]) i mnogim drugim "praktičnijim" problemima (ispitivanje karakteristika nivoa zemljišta, optimizacija FBI kartoteke, otklanjanje šuma u audio i video signalu, JPEG kompresija slika itd.). U disertaciji će se malotalasna transformacija koristiti pri ispitivanju kvaziasimptotskog ponašanja distribucija. Posebno, definisaćemo malotalasnu transformaciju na odgovarajućem prostoru ultradistribucija i ispitati njene osobine.

Disertacija se sastoji od šest glava. U prvoj glavi su navedeni osnovni pojmovi teorije vektorsko topoloških prostora, teorije distribucija i Furijeove analize. U drugoj glavi su date definicije i svojstva malotalasne i inverzne malotalasne transformacije u Lebegovom prostoru $L^2(\mathbb{R})$, a zatim i u odgovarajućim prostorima brzo opadajućih funkcija. U poglavlju 2.3 je dat nov dokaz za neprekidnost malotalasne i inverzne malotalasne transformacije u prostorima brzo opadajućih funkcija, a u poglavlju 2.4 je definisana malotalasna transformacija temperiranih distribucija. Treća glava počinje pregledom regularno i sporo promenljivih funkcija, a zatim su navedene definicije i strukturne teoreme za kvaziasimptotsko ponašanje distribucija u konačnoj tački i u beskonačnosti. Abelove i Tauberove teoreme za kvaziasimptotsko ponašanje temperiranih distribucija u odnosu na njihovu malotalasnu transformaciju su date u četvrtoj, odnosno u petoj glavi disertacije. U šestoj glavi je definisana malotalasna transformacija u prostorima progresivnih ultradiferencijabilnih funkcija i ispitana neprekidnost date transformacije. Dobijeni rezultati su iskorišćeni u poglavlju 6.5 pri proučavanju malotalasne transformacije temperiranih ultradistribucija.

Na kraju, zahvalio bih se mentorima dr Nenadu Teofanovu i akademiku Stevanu Pilipoviću na stručnoj pomoći i podršci koje su mi svakodnevno pružali tokom izrade doktorske disertacije. Zahvaljujem se i dr Arpadu Takačiju i dr Jassonu Vindasu na detaljno pročitanom radu i korisnim sugestijama. Veliku zahvalnost dugujem i profesorki srpske književnosti i jezika Aleksandri Kostić za profesionalno obavljen lektorski deo posla.

Novi Sad, 27. avgust 2010. Dušan Rakić

Glava 1

Uvod

Da bi se lakše pratilo izlaganje osnovnih rezultata u disertaciji u ovoj glavi se navode osnovne oznake, definicije i alatke koje će se koristiti u nastavku. Tako, u poglavlju 2.1, između ostalog, navodimo osnovne pojmove lokalno konveksnih vektorsko topoloških prostora. U drugom poglavlju ove glave uvode se prostori distribucija, a u poglavlju 2.3 se navode osnovna svojstva Furijeove transformacije.

1.1 Osnovne oznake i pojmovi

Sa $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ su označeni skupovi prirodnih, celih, realnih i kompleksnih brojeva, respektivno. Takođe, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{Z}_- = -\mathbb{N}, \mathbb{R}_+ = (0, +\infty), \mathbb{R}_- = (-\infty, 0), \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty), \overline{\mathbb{R}}_- = (-\infty, 0]$. Za $k \leq x < k + 1$, $x \in \mathbb{R}_+, k \in \mathbb{N}_0$, koristimo sledeću oznaku $\lfloor x \rfloor = k$. Sa $\mathbb{N}^n, \mathbb{N}_0^n$ i $\mathbb{R}^n$ su označeni skupovi uređenih $n-$torki $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, gde su $x_i, 1 \leq i \leq n$, elementi od $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0$ i $\mathbb{R}$, respektivno. Sa $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ se označava gornja poluravan u $\mathbb{R}^2$. Za $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ je $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n, |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2, f^{(\alpha)}(x) = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x)$.

Dalje, navodimo neke od osnovnih pojmova i teorema teorije vektorsko topoloških prostora ([6, 22, 35, 62]).

Kolekcija $\mathcal{O}$ podskupova nepraznog skupa X je topologija na X ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$(O1)$ Prazan skup i skup X su u kolekciji $\mathcal{O}$;

$(O2)$ Presek dva skupa iz $\mathcal{O}$ je takođe u $\mathcal{O}$;

$(O3)$ Unija proizvoljno mnogo skupova iz $\mathcal{O}$ je u $\mathcal{O}$.
Skupove iz kolekcije $\mathcal{O}$ nazivamo otvoreni skupovi, a uređenu dvojku $(X, \mathcal{O})$ topološki prostor. Skup je zatvoren ako je njegov komplement zatvoren skup. Ako su $\mathcal{O}_1$ i $\mathcal{O}_2$ topologije na skupu X i ako je $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, onda je topologija $\mathcal{O}_2$ finija od topologije $\mathcal{O}_1$, odnosno topologija $\mathcal{O}_1$ je grublja od topologije $\mathcal{O}_2$. Topološki prostor $(X, \mathcal{O})$ je Hauzdorfov ako za svake dve različite tačke $a, b \in X$ postoje disjunktni otvoreni skupovi O_1 i O_2, takvi da je $a \in O_1$ i $b \in O_2$. Skup $A \subset X$ je okolina tačke $x \in X$ ako i samo ako postoji otvoren skup $O \in \mathcal{O}$ takav da je $x \in O \subset A$. Familija skupova $\mathcal{B}(x)$ je baza okolina tačke $x \in X$ ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$(BO1)$ Elementi kolekcije $\mathcal{B}(x)$ su okoline tačke x;

$(BO2)$ Za svaku okolinu U tačke x postoji $B \subset \mathcal{B}(x)$ takav da je $B \subset U$.
Vektorski prostor L nad poljem $\mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$) snabdeven topologijom τ je vektorsko topološki prostor ako su sledeća preslikavanja neprekidna:

$(x, y) \to x + y \quad (L \times L \to L)$ i

$(\alpha, x) \to \alpha\, x \quad (\mathbb{R}(\mathbb{C}) \times L \to L)$.

Neka je X vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ (ili $\mathbb{C}$). Skup $A \subset X$ je konveksan ako za svako $x, y \in A$ važi

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in A, \;\; 0 \le \lambda \le 1.$$

Neka je X vektorsko topološki prostor. Skup $B \subset X$ je ograničen ako za svaku okolinu nule U postoji $\lambda > 0$, tako da je $B \subset \lambda U$. Skup $A \subset X$ je zaokružen ako je

$$\lambda\, A \subset A, \;\; \text{za svako } \; |\lambda| \le 1, \; \lambda \in K.$$

Skup $A \subset X$ je apsorbujući ako

$$\text{za svako } x \in X \text{ postoji skalar } \lambda > 0 \text{ tako da } x \in \lambda A.$$

Vektorsko topološki prostor je lokalno konveksan prostor ako ima bazu okolina nule koju čine konveksni skupovi. Realno vrednosna funkcija p na vektorskom prostoru X je seminorma na X ako je:

$(i) \;\; p\,(x + y) \;\le\; p\,(x) + p\,(y), \quad$ za svako $\; x, y \in X$;

$(ii) \;\; p\,(\alpha x) = |\,\alpha\,|\, p\,(x), \quad$ za svako $\; x \in X$ i za sve skalare α.

Neka je $\{p_j\}_{j \in \mathbf{N}}$ familija seminormi na vektorskom prostoru X. Topologiju τ definišemo preko familije seminormi tako što $\mathcal{B}(0)$ čine podskupovi od X definisani sa

$$V = V(p_1, p_2, \ldots, p_n; \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) = \{x \in X : p_k(x) < \varepsilon_k, \; 1 \le k \le n\},$$

gde su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ proizvoljni elementi familije $\{p_j\}_{j\in\mathbf{N}}$ i $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ proizvoljni pozitivni realni brojevi.
Vektorsko topološki prostor je lokalno konveksan prostor ako i samo ako je topologija vektorsko topološkog prostora zadata familijom seminormi. Bačva je konveksan, zaokružen, apsorbujući, zatvoren skup. Lokalno konveksan prostor (L, τ) je bačvast ako je skup svih bačvi u L baza okoline nule u τ. Lokalno konveksan prostor (L, τ) je bornološki ako je svaki zaokružen konveksan podskup $A \subset L$, koji apsorbuje sve ograničene skupove u L, okolina nule u τ. Montelov prostor je lokalno konveksan prostor koji je Hauzdorfov i bačvast, i u kojem je svaki zatvoren i ograničen skup kompaktan. Frešeov prostor je kompletan i metrizabilan lokalno konveksan prostor.

Ako je X Frešeov prostor indukovan familijom seminormi $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tada je $B \subset X$ ograničen ako je svaka seminorma $p_n, n \in \mathbb{N}$ ograničena na X, tj. ako postoji $M > 0$ tako da je

$$p_n(x) \leq M, \quad \text{za svako } x \in X.$$

Teorema 1.1.1 *(Han-Banah) Neka je V potprostor lokalno konveksnog prostora X i neka je η linearan funkcional koji za neku seminormu p zadovoljava*

$$|\langle f, \phi\rangle| \leq p(\phi), \quad \forall\phi \in V.$$

Tada postoji funkcional $f_1 \in X'$ koji je jednak sa f na V i za koji je

$$|\langle f_1, \psi\rangle| \leq p(\psi), \quad \forall\psi \in X.$$

Definicija 1.1.1 *Neka su V i X vektorsko topološki prostori takvi da je $V \subset X$. Klasama ekvivalencije moduo V elemenata $x \in X$ nazivamo skupove oblika $x + V = \{y : y = x + v, v \in V\}$. Skup klasa ekvivalencije je količnički prostor i označavamo ga sa X/V. On je takođe vektorski prostor sa najfinijom topologijom za koju su preslikavanja*

$$\sigma : X \to X/V,\ x \to x + V,$$

neprekidna, tj. otvoreni skupovi su oblika $U + V$, gde je U otvoren skup u topologiji prostora X.

Definicija 1.1.2 *Neka je $V \subset X$. Polar skupa V, u oznaci V^0, je skup svih elemenata $f \in X'$ za koje je*

$$|\langle f, \phi\rangle| \leq 1,\ \ \forall\phi \in V.$$

Ako je V potprostor od X, tada je V^0 zatvoren potprostor od X' koji sadrži sve elemente $f \in X'$ za koje je

$$|\langle f, \phi \rangle| = 0, \quad \forall \phi \in V.$$

Ako je V potprostor lokalno konveksnog prostora X, koristeći Han-Banahovu teoremu možemo svaki neprekidan funkcional $f : V \to \mathbb{C}$ proširiti na X, do na elemente od V^0. Dakle, u algebarskom smislu, možemo identifikovati V' sa X'/V^0. Isto možemo učiniti i u topološkom smislu, koristeći narednu teoremu [62].

Teorema 1.1.2 *Neka je V potprostor lokalno konveksnog prostora X sa indukovanom topologijom i neka je V^0 polar od V. Tada je*

$$V' \simeq X'/V^0$$

ako je V zatvoren u X (na X' posmatramo slabu topologiju).

Teorema 1.1.3 *(Banah-Štajnhaus) Neka je E bačvast vektorsko topološki prostor, F lokalno konveksan prostor i H podskup prostora $L(E, F)$, prostora neprekidnih linearnih preslikavanja prostora E u F. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(i) H je ograničen u odnosu na topologiju tačkaste konvergencije;
(ii) H je ograničen u odnosu na topologiju ograničene konvergencije;
(iii) H je ravnomerno neprekidan skup.

Navedimo i osnovne pojmove iz teorije mere. Familija $\mathcal{A}$ koju čine podskupovi skupa X je $\sigma-$ algebra ako:

(i) $X \in \mathcal{A}$;
(ii) ako $A \in \mathcal{A}$ tada je i $A^C \in \mathcal{A}$;
(iii) ako $A, B \in \mathcal{A}$ tada je i $A \cap B \in \mathcal{A}$;
(iv) ako $\{A_n\}_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{A}$ tada je i $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Mera na $\sigma-$ algebri $\mathcal{A}$ je preslikavanje $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ takvo da, ako je E disjunktna unija skupova $E_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbf{N}$, tada je

$$\mu(E) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \mu(E_n).$$

Neka $\sigma-$algebre $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ sadrže podskupove skupa X i Y, respektivno. Tada je preslikavanje $f : X \to Y$ merljiva funkcija ako

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \;\; \text{za svako} \;\; B \in \mathcal{B}.$$

Ako je $Y = \mathbb{R}$, odnosno $f : X \to \mathbb{R}$ i važi

$$\{x : f(x) \, < \, a\} \in \mathcal{A}, \;\; \text{za svako} \;\; a \in \mathbb{R},$$

tada je f aritmetička merljiva funkcija. Ako neko svojstvo važi na celom skupu A, osim na podskupu od A koji je mere nula, tada za to svojstvo kažemo da važi skoro svuda na skupu A. Za funkcije f i g kažemo da su jednake skoro svuda ako se razlikuju najviše na skupu mere 0.

Neka je X vektorski prostor. Preslikavanje $\| \; \| : X \to \mathbb{R}$ za koje važi $(x, y \in X, \alpha \in \mathbb{R})$:

$(N1)$ $\| x \| \geq 0$;

$(N2)$ $\| x \| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$;

$(N3)$ $\| \alpha x \| = |\alpha| \, \| x \|$;

$(N4)$ $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$,

naziva se norma na X, a dvojka $(X, \| \cdot \|)$ normiran vektorski prostor. Svaki normiran prostor je lokalno konveksan prostor. Ako je normiran prostor $(X, \| \cdot \|)$ kompletan metrički prostor nazivamo ga Banahov prostor.

Neka su $(X, \| \cdot \|_X)$ i $(Y, \| \cdot \|_Y)$ normirani prostori. Linearno preslikavanje $f : X \to Y$ je neprekidno ako i samo ako postoji $M > 0$, tako da je

$$\| f(x) \|_Y \leq \; M \; \| x \|_X, \quad \text{za sve } x \in X.$$

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup i neka $p \in [1, \infty)$. Vektorski prostor $L^p(\Omega)$ čine klase ekvivalencije u kojima se nalaze funkcije koje su jednake za skoro svako $x \in \Omega$, a za koje važi $\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \, < \, \infty$. U odnosu na normu

$$\| \, f \, \|_{L^p(\Omega)} = \Big(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \Big)^{\frac{1}{p}},$$

prostor $L^p(\Omega)$ je Banahov prostor. Posebno, $L^2(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa skalarnim proizvodom $\langle f, \, g \rangle = \displaystyle\int_\Omega f(x) \, \overline{g(x)} \, dx$. Sa $L^p_{loc}(\Omega)$ označavamo prostor koji čine klase ekvivalencije u kojima se nalaze funkcije jednake skoro svuda na Ω takve da $f \in L^p(I)$, za svaki ograničen i otvoren interval $I \subset \Omega$.

Prostor $L^1_{loc}(\Omega)$ se naziva prostor lokalno integrabilnih funkcija. Vektorski prostor $L^\infty(\Omega)$ čine klase ekvivalencije skoro svuda jednakih funkcija za koje postoji $C > 0$ tako da je $|f(x)| < C$, za skoro svako $x \in \Omega$. U odnosu na normu

$$\| f \|_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_{x\in\Omega} |f(x)| := \inf_{C\in\mathbf{R}^+} \{|f(x)| \leq C, \text{ skoro svuda na } \Omega\},$$

prostor $L^\infty(\Omega)$ je Banahov prostor.

Nosač funkcije $f : \Omega \to \mathbb{C}$, u oznaci supp f, je komplement unije svih otvorenih podskupova od Ω na kojim je funkcija jednaka nuli. Sa $\mathcal{C}^k(\Omega), k \in \mathbb{N}_0$, se označavaju prostori funkcija definisanih nad Ω, a čiji su svi izvodi do reda k neprekidni. Prostoru $\mathcal{C}^k_0(\Omega)$ pripadaju funkcije $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ čiji nosači su kompaktni u Ω. Posebno, elemente prostora $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ nazivamo glatkim funkcijama.

U nastavku navodimo nekoliko elementarnih rezultata iz analize 1.

Teorema 1.1.4 *(Lebegova teorema o dominantnoj konvergenciji) Neka je $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ niz integrabilnih funkcija koji konvergira ka funkciji f skoro svuda na $\mathbb{R}$. Ako postoji pozitivna merljiva aritmetička funkcija g takva da je $|f_n(x)| \leq g(x)$, za svako $n \in \mathbb{N}$ i skoro svako $x \in \mathbb{R}$ i ako je $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx < \infty$, tada je f integrabilna funkcija i važi*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx.$$

Teorema 1.1.5 *(Fubinijeva teorema) Formula*

$$\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^m} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\,dx$$

važi ako je ispunjen jedan od sledećih uslova:

(i) f je pozitivna merljiva aritmetička funkcija na $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$;

(ii) f je integrabilna funkcija na $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.1.3 *Neka su funkcije f i g definisane u okolini tačke x_0. Kažemo da je f "veliko O"od g, kada $x \to x_0$, u oznaci*

$$f(x) = O(g(x)), \quad kada\ x \to x_0$$

ako postoji V_{x_0} okolina tačke x_0 i konstanta M takve da je

$$|f(x)| \leq M|g(x)|,\ x \in V_{x_0},$$

odnosno da važi

$$\limsup_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty.$$

Definicija 1.1.4 *Neka su funkcije f i g definisane u okolini tačke x_0. Kažemo da je f "malo o"od g, kada $x \to x_0$, u oznaci*

$$f(x) = o(g(x)), \quad \textit{kada } x \to x_0$$

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji V_{x_0} okolina tačke x_0 tako da je

$$|f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|,\ x \in V_{x_0},$$

odnosno da važi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Analogno, definišemo "veliko O"i "malo o"kada $x \to \infty$, s tim da je u slučaju konačnog x_0 ovim opisano lokalno, dok je za $x \to \infty$ opisano globalno ponašanje funkcije f u odnosu na funkciju g.

Osobine "malog o":

1. Ako za funkciju f važi da je $f(x) = o(1)$, kada $x \to x_0\,(x \to \infty)$, tada je i $f(x) = o(C)$ za proizvoljnu konstantu $C \neq 0$, kada $x \to x_0\,(x \to \infty)$.
2. Ako za funkcije f, g i h važi da je $f(x) = o(g(x))$ i $g(x) = o(h(x))$, kada $x \to x_0\,(x \to \infty)$, tada je i $f(x) = o(h(x))$, kada $x \to x_0\,(x \to \infty)$.

1.2 Prostori distribucija

Prikažimo ukratko topološku strukturu test prostora za prostor distribucija, definiciju prostora distribucija, kao i osnovne operacije sa distribucijama koje ćemo kasnije koristiti.

Neka je K kompaktan podskup od Ω. Lokalno konveksan prostor definisan familijom normi $\{p_{K,k}\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, gde je

$$p_{K,k}(\varphi) = \sum_{|j| \leq k} \sup_{x \in K} |\varphi^{(j)}(x)|,\ j \in \mathbb{N}_0^n,\ \varphi \in \mathcal{C}_0^k(\Omega),$$

označava se sa $\mathcal{D}(K)$. Neka je $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ niz kompaktnih podskupova od Ω takvih da je $K_j \subset K_{j+1}$ i $\cup_{j\in\mathbb{N}} K_j = \Omega$. Prostor $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ sa topologijom indukovanom nizom lokalno konveksnih prostora $\{\mathcal{D}(K_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ čini test prostor $\mathcal{D}(\Omega)$. Prostor $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ sa topologijom koju indukuje niz seminormi

$$p_{K_j}(\varphi) = \sum_{|i|<j} \sup_{x\in K_j} |\varphi^{(i)}(x)|, \; j \in \mathbb{N}, \, \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$$

čini test prostor $\mathcal{E}(\Omega)$. Sa $\mathcal{D}'(\Omega)$ označava se dual (prostor neprekidnih linearnih funkcionela) od $\mathcal{D}(\Omega)$ njegovi elementi nazivaju se distribucije. Sa $\langle f, \varphi\rangle$ se označava delovanje distribucije $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ na test funkciju $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Delta distribucija definisana je na sledeći način:

$$\langle \delta, \varphi\rangle = \varphi(0), \; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nosač distribucije $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, u oznaci supp f, je komplement unije svih otvorenih skupova u Ω nad kojim je $f = 0$.
Za $f \in \mathcal{D}'(\Omega), \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ važi

$$\langle f(ax), \varphi(x)\rangle := \langle f(x), \frac{1}{|a|^n}\varphi(\frac{x}{a})\rangle, \; a \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

$$\langle g(x)f(x), \varphi(x)\rangle := \langle f(x), g(x)\varphi(x)\rangle, \; g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),$$
$$\langle f^{(\alpha)}(x), \varphi(x)\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle f(x), \varphi^{(\alpha)}(x)\rangle, \; \alpha \in \mathbb{N}_0^n.$$

Za Hevisajdovu funkciju $H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ je

$$\langle H'(x), \varphi(x)\rangle = \langle \delta(x), \varphi(x)\rangle, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

dok su izvodi delta distribucije dati sa

$$\langle \delta^{(\alpha)}(x), \varphi(x)\rangle = (-1)^{|\alpha|}\varphi^{(\alpha)}(0), \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pseudofunkcija $Pf(\frac{H(x)}{x^k}), k \in \mathbb{N}$ data je na sledeći način:

$$\langle Pf\big(\frac{H(x)}{x^k}\big), \varphi(x)\rangle = \int_1^\infty \frac{\varphi(x)}{x^k}\,dx$$

$$+ \int_0^1 \frac{1}{x^k}\big(\varphi(x) - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!}x^j\big)\,dx - \sum_{j=0}^{k-2} \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!(k-j-1)!}.$$

Dual test prostora $\mathcal{E}(\Omega)$ označava se sa $\mathcal{E}'(\Omega)$ i njegovi elementi su distribucije sa kompaktnim nosačem. Test prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ čine brzo opadajuće funkcije $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ takve da za svako $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ važi

$$p_{\alpha,\beta}(\varphi) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha\, \partial^\beta \varphi(x)| < \infty.$$

Topologija u $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ je data preko familije seminormi $\{p_{\alpha,\beta}\}_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^n}$. Važi $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dok, na primer, funkcija $e^{-|x|^2}$ pripada prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ali nije u $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Takođe, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$.

Sa $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ označavamo dual od $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ i nazivamo ga još i prostor temperiranih distribucija. Sam naziv je posledica strukturne teoreme, po kojoj distribucija pripada prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ako i samo ako je konačna suma izvoda neprekidnih funkcija koje u beskonačnosti rastu sporije od nekog polinoma. Primeri temperiranih distribucija su: distribucije sa kompaktnim nosačem, neprekidne funkcije koje u beskonačnosti rastu sporije od nekog polinoma (samim tim i svi polinomi), elementi prostora L^p, $1 \leq p \leq \infty$. Jasno, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Distribucija $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ je homogena reda α ako za svako $a > 0$ važi $f(ax) = a^\alpha f(x), x \in \mathbb{R}$. Ako je $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ homogena distribucija onda $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Na primer, delta distribucija je homogena reda -1, dok su njeni izvodi $\delta^{(j)}$ homogene distribucije reda $-j-1$. Primeri homogenih distribucija su i $x_+^\alpha, x_-^\alpha, |x|^\alpha, x^{-k}$, gde je

$$x_+^\alpha = H(x)x^\alpha,\ x_-^\alpha = (-x)_+^\alpha, |x|^\alpha = x_+^\alpha + x_-^\alpha,$$

$$\langle x^{-1}, \varphi(x)\rangle = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\, dx,\ \frac{d}{dx}x^{-k} = -kx^{-k-1}, k \in \mathbb{N},$$

a H je Hevisajdova funkcija. Poznato je ([15]) da je svaka homogena distribucija oblika $C_1 x_+^\alpha + C_2 x_-^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$, odnosno $C_1 x^{-k} + C_2\delta^{(k-1)}(x), k \in \mathbb{N}$, za neke konstante C_1, C_2.

1.3 Furijeova transformacija

U ovom poglavlju se navode osnovna svojstva Furijeove transformacije.

Furijeova transformacija funkcije $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se definiše kao skalarni proizvod date funkcije sa oscilacijama $e_\xi(x) = e^{i\xi x}$, $x, \xi \in \mathbb{R}^n$, tj.

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = (f(x), e_\xi(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i\xi x}\, dx,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

gde je skalarni proizvod definisan sa

$$(f(x), g(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\bar{g}(x)\,dx,$$

a sa $\bar{g}$ označena konjugovana funkcija za funkciju g. Za $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ je $\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

Lema 1.3.1 *(Riman-Lebeg) Ako $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tada je $\hat{f}$ uniformno neprekidna funkcija koja teži nuli u beskonačnosti:*

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Furijeova transformacija je linearno preslikavanje prostora $L^1(\mathbb{R}^n)$ u prostor neprekidnih funkcija koje teže nuli u beskonačnosti.

Teorema 1.3.1 *(Planšerel) Ako $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tada je*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Furijeova transfomacija se može produžiti na $L^2(\mathbb{R}^n)$ i zadovoljava Parsevalovu formulu:

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Planšerelova teorema daje produženje Furijeove transformacije na $L^2(\mathbb{R}^n)$, dok se koristeći Ris-Torinovu teoremu o interpolaciji ([60]) Furijeova transformacija može produžiti na ostale $L^p(\mathbb{R}^n)$ prostore.

Teorema 1.3.2 *(Hausdorf-Jang) Neka je $1 \leq p \leq 2$ i neka je q takvo da je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada $\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ i*

$$\|\hat{f}\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Sa T_b, M_b i D_a označavamo operatore translacije, modulacije i dilatacije, respektivno, definisane na sledeći način $(x, b \in \mathbb{R}^n, a > 0)$:

$$T_b : f(x) \mapsto f(x - b), \quad M_b : f(x) \mapsto e^{ibx} f(x) \;\text{ i }\; D_a : f(x) \mapsto \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right).$$

Navodimo i Furijeove transformacije datih operatora:

$$\mathcal{F}(T_b f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i(x+b)\xi}\, dx = e^{-ib\xi}\, \hat{f}(\xi) = M_{-b}\hat{f}(\xi), \;\; \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathcal{F}(M_b f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-i(\xi-b)x}\, dx = \hat{f}(\xi - b) = T_b\hat{f}(\xi), \;\; \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathcal{F}(D_a f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-iax\xi}\, dx = \hat{f}(a\xi) = \frac{1}{a} D_{\frac{1}{a}}\hat{f}(\xi), \;\; \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Konvolucija funkcija $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ je funkcija $f * g$ definisana sa

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, g(y)\, dy = (g * f)(x), \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Važi

$$\mathcal{F}(f * g)(\xi) = \hat{f}(\xi)\, \hat{g}(\xi), \; \xi \in \mathbb{R}.$$

Veza između Furijeove transformacije i izvoda je data u sledećim formulama $(x, \xi \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n)$:

$$\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (i\xi)^\alpha \hat{f}(\xi) \;\text{ i }\; \mathcal{F}((-ix)^\alpha f(x))(\xi) = D^\alpha \hat{f}(\xi).$$

Lema 1.3.2 *Ako $\hat{f}$, $\xi^n \hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$ onda je f n puta neprekidno diferencijabilna funkcija i izvodi su dati sa:*

$$f^{(m)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\xi)^m \hat{f}(\xi) e^{i\xi x}\, d\xi, \;\; m = 0, 1, \ldots, n.$$

Svi izvodi su ograničeni i opadaju u beskonačnosti:

$$\lim_{|x|\to\infty} f^{(m)}(x) = 0, \;\; m = 0, 1, \ldots, n.$$

S druge strane, neka je $f \in L^1(\mathbb{R})$ n puta diferencijabilna funkcija sa svim izvodima u $L^1(\mathbb{R})$ i neka je

$$\lim_{|x|\to\infty} f^{(m)}(x) = 0, \;\; m = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Tada je

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \xi^n \hat{f}(\xi) = 0.$$

Lema 1.3.3 *Ako f, $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ tada su sledeći uslovi ekvivalentni*

$$(i) \quad \int_{\mathbb{R}} x^m f(x)\,dx = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, n;$$

$$(ii) \quad \hat{f}(\xi) = o(\xi^n), \quad \xi \to 0.$$

Dokaz. Zamenimo li u prethodnoj lemi uloge $\hat{f}$ i f imamo da je $\hat{f}$ n puta neprekidno diferencijabilna funkcija čiji su izvodi $\hat{f}^{(m)}, m = 1, 2, \ldots, n$ Furijeove transformacije od $(ix)^m f(x)$. Dakle,

$$i^m \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x)\,dx = \hat{f}^{(m)}(0),$$

što nas uz Tejlorovu formulu

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{m=0}^{n} \hat{f}^{(m)}(0)\frac{\xi^m}{m!} + o(\xi^n),\ \xi \to 0$$

dovodi do dokaza.

Furijeova transformacija je neprekidna bijekcija $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Furijeova transformacija distribucije $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ definisana je sa

$$\langle \hat{f}(\xi), \phi(\xi) \rangle := \langle f(x), \hat{\phi}(x) \rangle,\ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

i ona je izomorfizam prostora $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ na $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Inverzna Furijeova transformacija je data sa

$$(\mathcal{F}^{-1} f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, e^{i\xi x}\, d\xi,\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Glava 2

Malotalasna transformacija temperiranih distribucija

U ovoj glavi se navode osnovna svojstva malotalasne transformacije. Cilj nam je bio da postavimo osnovu za proučavanje svojstava malotalasne transformacije na test prostorima brzo opadajućih funkcija i da zatim pokažemo kako se definiše malotalasna transformacija na prostoru temperiranih distribucija. Ova glava sadrži pet poglavlja. U poglavlju 2.1 su navedeni definicija i svojstva malotalasne transformacije na prostoru $L^2(\mathbb{R})$. Zatim su, u poglavlju 2.2, definisani osnovni prostori test funkcija sa kojima ćemo raditi u nastavku i daju se procene rasta malotalasne i inverzne malotalasne transformacije. U poglavlju 2.3 dokazuje se da su malotalasna i inverzna malotalasna transformacija neprekidna preslikavanja u odgovarajućim prostorima brzo opadajućih funkcija. Dokazi ovih činjenica su dati u [19]. U ovoj disertaciji dajemo nov dokaz izvodeći direktno procene za odgovarajuće seminorme.

2.1 Malotalasna transformacija

Izlaganje počinjemo definicijom malotalasne transformacije funkcija iz $L^2(\mathbb{R})$.

Definicija 2.1.1 *Neka je dat mali talas $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ takav da je $\int_{\mathbb{R}} g(x)\, dx = 0$. Neprekidnu malotalasnu transformaciju funkcije $f \in L^2(\mathbb{R})$*

u odnosu na mali talas g definišemo na sledeći način:

$$\mathcal{W}_g f(b,a) = \langle f, g_{b,a}\rangle = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\bar{g}(\frac{x-b}{a})\,dx,\ b\in\mathbb{R},\ a>0, \tag{2.1}$$

gde je

$$g_{b,a}(x) = T_b D_a g(x) = \frac{1}{a} g(\frac{x-b}{a}),\ x\in\mathbb{R}.$$

Diskretnu malotalasnu transformaciju dobijamo ako u formuli (2.1) za a i b biramo diskretne vrednosti $a = a_0^m$ *i* $b = nb_0a_0^m$*, gde je* $m,n\in\mathbb{Z}$ *i* $a_0 > 1, b_0 > 0$ *su fiksirane vrednosti.*

Za $(b,a)\in\mathbb{H}, \alpha\in\mathbb{C}$ imamo sledeće osobine malotalasne transformacije:

1. $\mathcal{W}_g(f_1+f_2)(b,a) = \mathcal{W}_g f_1(b,a) + \mathcal{W}_g f_2(b,a)$;
2. $\mathcal{W}_{g_1+g_2} f(b,a) = \mathcal{W}_{g_1} f(b,a) + \mathcal{W}_{g_2} f(b,a)$;
3. $\mathcal{W}_g(\alpha f)(b,a) = \alpha\,\mathcal{W}_g f(b,a)$;
4. $\mathcal{W}_{\alpha g} f(b,a) = \bar{\alpha}\,\mathcal{W}_g f(b,a)$;
5. $\mathcal{W}_g f(b,a) = \dfrac{1}{a}\,\mathcal{W}_{\bar{f}}\,\bar{g}(-\dfrac{b}{a},\dfrac{1}{a})$.

Iz Furijeove transformacije translacije i dilatacije

$$\widehat{g_{b,a}}(\xi) = \widehat{T_b D_a g}(\xi) = e^{-ib\xi}\widehat{D_a g}(\xi) = e^{-ib\xi}\hat{g}(a\xi),\quad b,\xi\in\mathbb{R},\ a>0,$$

primenom Parsevalove formule, dobija se reprezentacija malotalasne transformacije preko Furijeovih transformacija malog talasa g i funkcije f koja se analizira:

$$\mathcal{W}_g f(b,a) = \langle f(x), g_{b,a}(x)\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \hat{f}(\xi), \widehat{g_{b,a}}(\xi)\rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\,e^{ib\xi}\,\bar{\hat{g}}(a\xi)\,d\xi = \langle \hat{f}, \frac{1}{a} M_b D_{\frac{1}{a}}\hat{g}\rangle,\ (b,a)\in\mathbb{H}.$$

Malotalasna transformacija se može prikazati i preko konvolucije:

$$\mathcal{W}_g f(b,a) = (g_a * f)(b),\quad b\in\mathbb{R},\ a>0,$$

gde je $g_a(x) = \frac{1}{a}\bar{g}(\frac{x}{a})$, $x \in \mathbb{R}$. Iz Furijeove transformacije konvolucije i dilatacije sledi Furijeova transformacija malotalasne transformacije:

$$\widehat{\mathcal{W}_g f(b,a)}(\xi) = (\widehat{g_a * f})(b)(\xi) = \widehat{g_a}(\xi)\,\hat{f}(\xi) = \hat{\bar{g}}(a\xi)\,\hat{f}(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}.$$

Ako je $\operatorname{supp} g \subset [-n, n]$, tada je $\operatorname{supp} g_{b,a} \subset [-an + b, an + b]$, odakle zaključujemo da malotalasna transformacija $\mathcal{W}_g f(b, a)$ daje lokalne informacije o funkciji f u okolini tačke $x = b$, dok širina posmatrane okoline zavisi od parametra a. Takođe, ako je $\operatorname{supp} \hat{g} \subset [-m, m]$, tada je $\operatorname{supp} D_{\frac{1}{a}} \hat{g} \subset [-\frac{m}{a}, \frac{m}{a}]$, odakle sledi da malotalasna transformacija $\mathcal{W}_g f(b, a)$ daje informacije o funkciji f u frekvencijskom opsegu $[-\frac{m}{a}, \frac{m}{a}]$.

Dakle, menjanjem parametra b pomeramo centar vremenske lokalizacije, dok menjanjem parametra a pokrivamo razne frekvencijske opsege, pa tako velike vrednosti od a odgovaraju niskim frekvencijama posmatranim u dugotrajnom vremenskom intervalu, dok za male vrednosti a posmatramo visoke frekvencije u kratkotrajnom vremenskom intervalu. Posebno je malotalasna transformacija pogodna za analizu kratkotrajnih signala visoke frekvencije. Zbog ovih osobina malotalasna transformacija se naziva i "matematički mikroskop", odnosno kaže se da ima mogućnost žumiranja". Napomenimo još i to da ako za vrednosti parametra a biramo diskretne vrednosti $2^j, j \in \mathbb{Z}$ dobijamo dekompoziciju od f u diadičkim frekventnim opsezima, što odgovara oktavama u muzičkom zapisu.

Neka mali talas $g \in L^2(\mathbb{R})$ zadovoljava sledeći uslov:

$$C_g = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(\xi)|^2 |\xi|^{-1}\, d\xi < \infty. \tag{2.2}$$

Tada se funkcija $f \in L^2(\mathbb{R})$ može predstaviti preko svoje malotalasne transformacije na sledeći način ([5]):

$$f = C_g^{-1} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_g f(b, a)\, g_{b,a}\, \frac{da}{a^2}\, db, \tag{2.3}$$

gde formula (2.3) važi u slabom smislu, tj. u odnosu na skalarni proizvod u $L^2(\mathbb{R})$ sa proizvoljnom funkcijom iz $L^2(\mathbb{R})$, kao i u normi prostora $L^2(\mathbb{R})$.

Ako pretpostavimo da g pripada i prostoru $L^1(\mathbb{R})$ tada iz Riman-Lebegove leme imamo da je $\hat{g}$ neprekidna funkcija, pa uslov (2.2) može biti ispunjen samo ako je $\hat{g}(0) = 0$, odnosno $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 0$. Do istog uslova za mali talas g dolazimo i ako posmatramo njegove dilatacije $g_a = D_a g, a > 0$. Iz Furijeove transformacije dilatacija $\widehat{g_a}(\xi) = \hat{g}(a\xi), \xi \in \mathbb{R}, a > 0$, sledi da se promenom parametra a menja i centar lokalizacije i širina frekvencije u frekvencijskom domenu. Izuzetak je lokalizacija u okolini tačke $\xi_0 = 0$, gde operator dilatacije ne utiče na centar lokalizacije (on je isti za svako $a > 0$), odakle sledi pretpostavka da funkcija g ne sadrži frekvenciju 0, tj. da je $\hat{g}(0) = 0$.

2.2 Malotalasna transformacija u $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$

Da bismo definisali prostor $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ potrebno je izvršiti izvesne pripreme.

Definicija 2.2.1 *Funkcija $f \in L^2(\mathbb{R})$ je progresivna (regresivna) ako i samo ako je $supp \hat{f} \subseteq [0, \infty)$($supp \hat{f} \subseteq (-\infty, 0]$). Prostor progresivnih (regresivnih) funkcija iz $L^2(\mathbb{R})$ je zatvoren potprostor od $L^2(\mathbb{R})$ i označava se sa $H^2_+(\mathbb{R})(H^2_-(\mathbb{R}))$. Važi da je*

$$L^2(\mathbb{R}) = H^2_+(\mathbb{R}) \oplus H^2_-(\mathbb{R}).$$

Funkcija f je polinomno lokalizovana ako postoji $\alpha > 0$ tako da je

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + |x|^2)^{\frac{\alpha}{2}} |f(x)| \leq C,$$

za neko $C > 0$. Progresivna funkcija f je polinomno trakasto ograničena ako postoje $\alpha, \beta > 0$ tako da je

$$\sup_{\xi \geq 0} \frac{(1 + \xi)^{\alpha + \beta}}{\xi^\alpha} |\hat{f}(\xi)| \leq C,$$

za neko $C > 0$.

Polinomna lokalizacija malotalasne transformacije, kao posledica polinomne lokalizacije i polinomne trakaste ograničenosti analizirajućeg malog talasa i funkcije koju analiziramo, je data u naredne dve teoreme, koje se sa dokazima mogu naći u [19].

Teorema 2.2.1 *Neka za mali talas g i funkciju f postoje $\alpha > 0$ i $C > 0$ za koje je*

$$|f(x)| \le \frac{C}{(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \ \ i \ \ |g(x)| \le \frac{C}{(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}, \ \ \text{za skoro svako } x \in \mathbb{R}.$$

Tada važi

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \le \frac{1}{1+a} \frac{C_\alpha}{(1+|\frac{b}{1+a}|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}, \ (b,a) \in \mathbb{H}.$$

Teorema 2.2.2 *Neka su mali talas g i funkcija f progresivne funkcije takve da postoji $\alpha > 0$ i $C > 0$ za koje je*

$$|\hat{g}(\xi)| \le C \frac{\xi^\alpha}{(1+\xi)^{2\alpha+1}} \ \ i \ \ |\hat{f}(\xi)| \le C \frac{\xi^\alpha}{(1+\xi)^{2\alpha+1}}, \ \xi > 0.$$

Tada je

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \le C \frac{a^{\alpha'}}{(1+a)^{2\alpha'+1}}, \ (b,a) \in \mathbb{H},$$

za svako $\alpha' < \alpha$.

U nastavku će se koristiti sledeći rezultat.

Lema 2.2.1 *Neka je $f \in L^2(\mathbb{R})$ progresivna funkcija. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

$$(i) \ \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}} |f(x)| + \sup_{\xi \ge 0} \frac{(1+\xi)^{2\alpha+1}}{\xi^\alpha} |\hat{f}(\xi)| < \infty, \ \ \forall \alpha > 0;$$

$$(ii) \ \sup_{x \in \mathbb{R}} (1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}} |f(x)| + \sup_{\xi \ge 0} (1+\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}} |\hat{f}(\xi)| < \infty, \ \ \forall \alpha > 0.$$

Dokaz. Neka za progresivnu funkciju $f \in L^2(\mathbb{R})$ važi (ii), tj. za svako $\alpha > 0$ postoji $c < \infty$, tako da je

$$|f(x)| \le \frac{c}{(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}, \ x \in \mathbb{R} \ \text{ i } \ |\hat{f}(\xi)| \le \frac{c}{(1+\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}}}, \ \xi > 0,$$

odakle sledi da $f(x), x^n f(x), \hat{f}(\xi), \xi^n \hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$, za svako $n \in \mathbb{N}$. Dakle, f i $\hat{f}$ zadovoljavaju uslove lema 1.3.1, 1.3.2 i 1.3.3. Dokažimo da za f važi uslov (i). Iz (ii) sledi:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|f(x)|<\infty,\ \forall\alpha>0, \tag{2.4}$$

pa preostaje da se dokaže da je

$$\sup_{\xi\geq 0}\frac{(1+\xi)^{2\alpha+1}}{\xi^\alpha}|\hat{f}(\xi)|<\infty,\ \forall\alpha>0.$$

Važi

$$(1+\xi^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}\sim\frac{(1+\xi)^{2\alpha+1}}{\xi^\alpha},\ \ \xi\to\infty,\ \alpha>0,$$

pa nam preostaje da ispitamo slučaj $\xi\to 0$. Iz Tejlorove formule sledi:

$$|\hat{f}(\xi)|\leq c_\alpha\xi^\alpha,\ \text{kada}\ \xi\to 0,\ \forall\alpha>0,$$

odakle je

$$\sup_{0\leq\xi\leq 1}\frac{1}{\xi^\alpha}|\hat{f}(\xi)|<\infty,\ \forall\alpha>0,$$

pa važi (i).

Neka za progresivnu funkciju f važi uslov (i). Tada važi (2.4), pa preostaje da pokažemo da je

$$\sup_{\xi\geq 0}(1+\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\hat{f}(\xi)|<\infty,\ \forall\alpha>0.$$

Zamenom uloga f i $\hat{f}$ u lemi 1.3.2 dobija se da je $\hat{f}$ beskonačno puta neprekidno diferencijabilna funkcija. Kao i u prethodnom smeru, dovoljno je dokazati slučaj $\xi\to\infty$, ali to sledi iz procene

$$(1+\xi^2)^{\frac{\alpha+1}{2}}\leq\frac{(1+\xi)^{2\alpha+1}}{\xi^\alpha},\ \ \xi\to 0,\ \alpha>0.$$

Dalje, koristeći prethodnu lemu definišemo prostor čiji su elementi polinomno lokalizovane i polinomno trakasto ograničene progresivne funkcije.

Definicija 2.2.2 *Neka je $f\in L^2(\mathbb{R})$ progresivna funkcija. Tada $f\in\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ ako i samo ako važi uslov (i) ili (ii) iz lemme 2.2.1.*

Prikažimo i topološku strukturu prostora $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$. Za $\alpha > 0$ definišemo seminorme

$$\|f\|_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\alpha} = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|f(x)| + \sup_{\xi\geq 0}\frac{(1+\xi)^{2\alpha+1}}{\xi^\alpha}|\hat{f}(\xi)|.$$

Kako je za svako $\alpha > 0$

$$\|\lambda f\|_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\alpha} = \lambda\|f\|_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\alpha} \;\text{ i }\; \|f+g\|_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\alpha} \leq \|f\|_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\alpha} + \|g\|_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\alpha},$$

imamo da su seminorme $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\alpha}, \alpha > 0$, dobro definisane. Takođe, važi

$$\|f\|_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\alpha} \leq \|f\|_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\beta}, \;\text{ za } \alpha < \beta.$$

Date seminorme su norme, jer iz $\|f\|_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\alpha} = 0$ sledi da je $f \equiv 0$, za svako $\alpha > 0$. Preko datih neprekidnih normi definišemo topologiju (najgrublju) na $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$. Baze okolina nule

$$U_{\varepsilon,\alpha} = \{f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}) : \|f\|_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\alpha} < \varepsilon\},\; \varepsilon, \alpha > 0$$

su konveksni skupovi, pa je $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ lokalno konveksan prostor. Niz funkcija $f_n \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}) \to 0$ u topologiji od $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ ako i samo ako $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\alpha} \to 0$, za svako $\alpha > 0$. S obzirom na lemu 2.2.1, ekvivalentnu topologiju dobijamo u odnosu na familiju normi

$$\|f\|_{\mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\beta} = \sup_{x\in\mathbb{R}}(1+|x|^2)^{\frac{\beta}{2}}|f(x)| + \sup_{\xi\geq 0}(1+\xi^2)^{\frac{\beta}{2}}|\hat{f}(\xi)|,\; \beta > 0.$$

Iz definicije prostora $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ sledi da za $f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ važi da je $f, x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, pa iz leme 1.3.2, sa izmenjenim ulogama f i $\hat{f}$, dobijamo da su izvodi $\hat{f}^{(n)}, n \in \mathbb{N}_0$ neprekidni. Takođe, iz $\operatorname{supp}\hat{f} \subseteq [0,\infty)$ sledi da je $\lim\limits_{\xi\to 0^-}\hat{f}^{(n)}(\xi) = 0, n \in \mathbb{N}_0$, što uz neprekidnost od $\hat{f}^{(n)}, n \in \mathbb{N}_0$, implicira da je $\hat{f}^{(n)}(0) = 0, n \in \mathbb{N}_0$. Sada, iz leme 1.3.3 sledi da je

$$\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\,dx = 0, \;\; f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\; n \in \mathbb{N}_0.$$

Primer 2.2.1 *Beselov mali talas definisan preko svoje Furijeove transformacije na sledeći način:*

$$\hat{g}(\xi) = \begin{cases} e^{-(\xi+\frac{1}{\xi})}, & \xi > 0 \\ 0, & \xi \leq 0 \end{cases}$$

i sve njegove dilatacije i translacije su primeri elemenata iz $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$.

Prostore $\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ definišemo na sledeći način:

$$f \in \mathcal{S}_-(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f(-x) \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}) \ \text{ i } \ \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_+(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_-(\mathbb{R}).$$

Teorema 2.2.3 *Prostor $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})(\mathcal{S}_-(\mathbb{R}))$ je zatvoren potprostor prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ koji sadrži funkcije iz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ čije Furijeove transformacije imaju nosače na pozitivnom (negativnom) delu realne ose.*
Prostor $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ je zatvoren potprostor prostora $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ koji sadrži funkcije iz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ čiji su svi momenti jednaki nuli, tj.

$$\mathcal{S}_0(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\, dx = 0,\, n \in \mathbb{N}_0\}. \tag{2.5}$$

Dokaz. Neka $f \in \Sigma$, gde smo sa Σ označili prostor funkcija iz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ čije Furijeove transformacije imaju nosač na pozitivnom delu realne prave. Kako $f, \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ imamo da za svako $\alpha > 0$ važi

$$|f(x)| \le \frac{c_\alpha}{(1+x^2)^{\frac{\alpha}{2}}},\ x \in \mathbb{R} \ \text{ i } \ |\hat{f}(\xi)| \le O(1)\frac{1}{(1+\xi^2)^{\frac{\alpha}{2}}},\ \xi > 0.$$

Iz leme 2.2.1 direktno sledi da $f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$.

S druge strane, s obzirom da su $f \mapsto \partial^n f$, $n \in \mathbb{Z}$ i $f \mapsto x^m f$, $m \in \mathbb{N}$ neprekidna preslikavanja iz $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ u $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ imamo lokalizaciju izvoda od $f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$, pa sledi da $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Dakle, prostor $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ možemo definisati kao prostor funkcija iz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ čiji su svi momenti jednaki nuli, tj. $f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ ako i samo ako

$$\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\, dx = 0, \tag{2.6}$$

za svako $n \in \mathbb{N}$, odnosno ako je $\hat{f}^{(n)}(0) = 0$, za svako $n \in \mathbb{N}$.

Definicija 2.2.3 *Funkcija h je rekonstrukcioni mali talas za mali talas g ako su konstante*

$$c^+_{g,h} = \int_0^\infty \bar{\hat{g}}(\xi)\, \hat{h}(\xi)\, \frac{d\xi}{\xi} \quad i \quad c^-_{g,h} = \int_0^\infty \bar{\hat{g}}(-\xi)\, \hat{h}(-\xi)\, \frac{d\xi}{\xi}$$

jednake i konačne.

Ako je mali talas sam sebi rekonstrukcioni mali talas kažemo da je dopustiv.

Teorema 2.2.4 *([19]) Neka je $h \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ rekonstrukcioni mali talas za mali talas $g \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$. Tada za $f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ važi sledeća formula rekonstrukcije*

$$f(x) = \frac{1}{c_{g,h}} \int_0^\infty \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_g f(b,a)\, h_{b,a}(x)\, db,\ x \in \mathbb{R},$$

gde je $h_{b,a}(x) = \dfrac{1}{a} h(\dfrac{x-b}{a})$.

Dokaz. Neka je

$$\tilde{f}(x) = \int_0^\infty \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_g f(b,a)\, \frac{1}{a} h(\frac{x-b}{a})\, db,\ x \in \mathbb{R}.$$

Koristeći Furijeovu reprezentaciju malotalasne transformacije imamo da je

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} db \int_0^\infty \bar{\hat{g}}(a\xi)\, e^{ib\xi}\, \hat{f}(\xi) \frac{1}{a} h(\frac{x-b}{a})\, d\xi,\ x \in \mathbb{R}.$$

Nakon promene redosleda integracije (iz polinomne ograničenosti funkcija h, g i f sledi da integrali nad b i ξ apsolutno konvergiraju) dobijamo Furijeovu transformaciju funkcije $\dfrac{1}{a} h(\dfrac{x-b}{a})$ i imamo da je

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{da}{a} \int_0^\infty \bar{\hat{g}}(a\xi)\, \hat{f}(\xi)\, \hat{h}(a\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{ix\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi \int_0^\infty \bar{\hat{g}}(a\xi)\, \hat{h}(a\xi)\, \frac{da}{a},\ x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

gde smo još jednom primenili Fubinijevu teoremu. Iskoristimo li činjenicu da je h rekonstrukcioni mali talas za mali talas g dobijamo da je

$$\tilde{f}(x) = c_{g,h} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{ix\xi}\, \hat{f}(\xi)\, d\xi = c_{g,h} f(x),\ x \in \mathbb{R}.$$

Lako se pokazuje da važe analogna tvrđenje ako umesto prostora $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ u teoremi 2.2.4 posmatramo prostore $\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$.

Slično možemo preko malotalasnih koeficijenata izraziti i Furijeovu transformaciju funkcije $f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ (odnosno iz $\mathcal{S}_-(\mathbb{R}), \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$) :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{c_{g,h}} \int_0^\infty \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_g f(b,a)\, \hat{h}(a\xi)\, e^{-ib\xi}\, db,\ \xi > 0.$$

Definicija 2.2.4 *Prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ pripadaju funkcije $\Phi \in C^\infty(\mathbb{H})$ takve da je*

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{H}} \left(y + \frac{1}{y}\right)^{k_1} (1+|x|)^{k_2} \left|\frac{\partial^l}{\partial y^l}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\Phi(x,y)\right| < \infty,$$

za svako $k_1, k_2, l, m \in \mathbb{N}$.

Napomena. Koristeći sledeće osobine malotalasne transformacije

$$\partial_b \mathcal{W}_g f(b,a) = \mathcal{W}_g(\partial_x f)(b,a) = -\frac{1}{a}\mathcal{W}_{\partial_x g} f(b,a) \text{ i}$$

$$-a\partial_a \mathcal{W}_g f(b,a) = \mathcal{W}_{(x\partial_x+1)g} f(b,a) = -\mathcal{W}_g(x\partial_x f)(b,a),$$

može se pokazati da je lokalno konveksan prostor $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ definisan u [19] na sledeći način: $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ sadrži funkcije $\tau \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{H})$, takve da za svako $\alpha \geq 0$ važi

$$\sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} \frac{(1+a)^{2(\alpha+1)}}{a^\alpha} (1+|\frac{b}{1+a}|^2)^{\frac{\alpha}{2}} |\tau(b,a)| < \infty$$

ekvivalentan prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ datom u definiciji 2.2.4.

Definicija 2.2.5 *Malotalasni operator sinteze $\mathcal{M}_g$ preslikava funkcije definisane na poluprostoru $\mathbb{H}$ na funkcije definisane na realnoj pravi ($\tau \mapsto \mathcal{M}_g\tau$) na sledeći način:*

$$(\mathcal{M}_g\tau)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(b,a)\, g_{b,a}(x)\, db,\ x \in \mathbb{R}, \tag{2.7}$$

ako dati dvostruki integral apsolutno konvergira.

Ako je $g \in L^1(\mathbb{R})$ tada je operator $\mathcal{M}_g$ dobro definisan za svako $\tau \in \mathcal{S}(\mathbb{H})$. Furijeova transformacija operatora sinteze data je sa

$$\widehat{\mathcal{M}_g\tau}(\xi) = \int_0^{+\infty} \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(b,a)\, \hat{g}(a\xi)\, e^{-ib\xi}\, db,\ \xi \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

Za operator $\mathcal{M}_h$ važi ($\alpha, x \in \mathbb{R}$):

1. $\mathcal{M}_h(\tau_1+\tau_2)(x) = \mathcal{M}_h\tau_1(x) + \mathcal{M}_h\tau_2(x)$;
2. $\mathcal{M}_h(\alpha\tau)(x) = \alpha\mathcal{M}_h\tau(x)$;

3. $\mathcal{M}_{h_1+h_2}\tau(x) = \mathcal{M}_{h_1}\tau(x) + \mathcal{M}_{h_2}\tau(x)$;

4. $\mathcal{M}_{\alpha h}\tau(x) = \alpha\mathcal{M}_h\tau(x)$;

5. $\mathcal{M}_h\tau(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{a}\,(\tau(\cdot,a) * h_a)(x)\,da.$

Iz teoreme 2.2.4 sledi da je

$$\mathcal{M}_h\mathcal{W}_g f = c^+_{g,h} f, \quad f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}),$$

gde je $h \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ rekonstrukcioni mali talas za mali talas $g \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$.

U naredne dve teoreme date su polinomne procene malotalasnog operatora sinteze i njegove Furijeove transformacije. Dokazi teorema mogu se naći u ([19]).

Teorema 2.2.5 *Neka je $\alpha > 1$, $\beta > 0$ i neka za funkciju τ i mali talas h važi da je*

$$|\tau(b,a)| \leq \frac{1}{(1+|\frac{b}{1+a}|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\,\frac{a^\beta}{(1+a)^{2\beta+1}} \quad i \quad |h(x)| \leq \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}},\ a>0,\ b,x \in \mathbb{R}.$$

Tada postoji $C > 0$ tako da je

$$|\mathcal{M}_h\tau(x)| \leq C\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{\alpha'}{2}}},\ x \in \mathbb{R},$$

gde je $\alpha' = \min\{\alpha, \beta+1\}$.

Teorema 2.2.6 *Neka je $\alpha > 0$ i neka za funkciju τ i mali talas h važi da je*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau(b,a)|\,db \leq \frac{a^\alpha}{(1+a)^{2\alpha+1}} \quad i \quad |\hat{h}(\xi)| \leq \frac{\xi^\alpha}{(1+\xi)^{2\alpha+1}},\quad a,\xi > 0,\ b \in \mathbb{R}.$$

Tada postoji $C > 0$ tako da je

$$|\widehat{\mathcal{M}_h}\tau(\xi)| \leq C\frac{\xi^\alpha}{(1+\xi)^{2\alpha}},\ \xi > 0.$$

2.3 Neprekidnost malotalasne transformacije

U ovom poglavlju ćemo pokazati neprekidnost malotalasne transformacije i inverzne malotalasne transformacije u prostorima $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}(\mathbb{H})$. Napomenimo da su date neprekidnosti ispitivane u [19, teorema 19.0.1, str. 74], ali u definicijama prostora $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}(\mathbb{H})$ nisu dati uslovi na rast izvoda elemenata datih prostora, za razliku od dokaza narednih teorema gde se koriste klasične tehnike rada sa brzo opadajućim funkcijama. Takođe, u [39] je proučavana neprekidnost malotalasne transformacije u prostorima brzo opadajućih funkcija, sa nešto drugačijim petpostavkama za mali talas u odnosu na koji se posmatra malotalasna transformacija. Tvrđenja će biti data u višedimenzionalnom slučaju, pa ćemo prvo uopštiti ranije date definicije.

Elementi prostora $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ su funkcije iz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ čiji su svi momenti jednaki nuli, tj. $f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ ako i samo ako

$$\int_{\mathbb{R}^n} x^m f(x)\,dx = 0, \quad \text{za svako } m \in \mathbb{N}^n.$$

Neka je $\mathbb{H}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$. Malotalasna transformacija $\mathcal{W}_g f$ funkcije $f \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$, u odnosu na mali talas $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$, data je sa:

$$\mathcal{W}_g f(b,a) = \langle f(x), \frac{1}{a^n}\bar{g}(\frac{x-b}{a})\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\frac{1}{a^n}\bar{g}(\frac{x-b}{a})\,dx,\ (b,a) \in \mathbb{H}^{n+1}.$$

Prostoru $\mathcal{S}(\mathbb{H}^{n+1})$ pripadaju funkcije $\Phi \in C^\infty(\mathbb{H}^{n+1})$ takve da je

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{H}^{n+1}} \left(y + \frac{1}{y}\right)^{k_1} (1+|x|)^{k_2} \left|\frac{\partial^l}{\partial y^l}\frac{\partial^m}{\partial x^m}\Phi(x,y)\right| < \infty,$$

za svako $k_1, k_2, l \in \mathbb{N}$ i $m \in \mathbb{N}^n$.

Inverzna malotalasna transformacija $\mathcal{M}_g$ data je sa:

$$(\mathcal{M}_g \tau)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{da}{a} \int_{\mathbb{R}^n} \tau(b,a)\,g_{b,a}(x)\,db,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

ako dati dvostruki integral apsolutno konvergira.

Teorema 2.3.1 *Neka $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$. Tada je*

$$\mathcal{W}_g : \mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{H}^{n+1})$$

neprekidno preslikavanje.

Dokaz. Pokažimo da je za proizvoljno $k, l, \alpha \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^n$

$$(1 + |b|^2)^{k/2}(a^l + \frac{1}{a^l})|F_{\alpha,\beta}(b, a)| < \infty,\ x \in \mathbb{R}^n,\ (b, a) \in \mathbb{H}^{n+1}, \tag{2.9}$$

gde je

$$F_{\alpha,\beta}(b, a) = \partial_a^\alpha \partial_b^\beta \langle f(x), \frac{1}{a^n}\bar{g}(\frac{x-b}{a})\rangle.$$

Za $u, \xi \in \mathbb{R}^n$, $(b, a) \in \mathbb{H}^{n+1}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{N}^n$, važi

$$\partial_\xi^\gamma \hat{\bar{g}}(a\xi) = a^{|\gamma|}\hat{\bar{g}}^{(\alpha)}(a\xi),$$

$$\partial_b^\gamma f(au + b) = \frac{1}{a^{|\gamma|}}\partial_u^\gamma f(au + b) = f^{(\gamma)}(au + b),$$

$$\partial_a^\alpha f(au + b) = \frac{1}{a^\alpha}\sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma u^\gamma \partial_u^\gamma f(au + b),$$

gde je $c_\gamma = \binom{\alpha}{\gamma_1}\binom{\alpha-\gamma_1}{\gamma_2}\dots\binom{\alpha-\gamma_1-\dots-\gamma_{n-1}}{\gamma_n}$, $|\gamma| = \alpha$.

Posmatrajmo prvo član $a^l|F_{\alpha,\beta}(b, a)|$, za $a > 1$. Nakon smene promenljivih $u = \frac{x-b}{a}$ imamo da je

$$\begin{aligned}
a^l|F_{\alpha,\beta}(b, a)| &= a^l|\partial_a^\alpha \partial_b^\beta \langle f(au + b), \bar{g}(u)\rangle| \\
&= a^l|\partial_a^\alpha \langle f^{(\beta)}(au + b), \bar{g}(u)\rangle| \\
&\leq a^l \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma |\langle \frac{1}{a^{|\gamma|}} u^\gamma \partial_u^\gamma \big(f^{(\beta)}(au + b)\big), \bar{g}(u)\rangle| \\
&= a^l \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma |\langle u^\gamma f^{(\beta+\gamma)}(au + b), \bar{g}(u)\rangle| \\
&= a^l \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma |\langle (\frac{u}{a})^\gamma f^{(\beta+\gamma)}(u + b), \frac{1}{a^n}\bar{g}(\frac{u}{a})\rangle| \\
&= a^l \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma |\langle \frac{1}{a^\alpha}\partial_u^{\beta+\gamma} f(u + b), u^\gamma \frac{1}{a^n}\bar{g}(\frac{u}{a})\rangle| \\
&= a^l \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma |\langle \frac{1}{a^\alpha}\xi^{\beta+\gamma}\hat{f}(\xi)e^{ib\xi}, \partial_\xi^\gamma \hat{\bar{g}}(a\xi)\rangle|
\end{aligned}$$

$$= a^l \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma |\langle \frac{1}{a^\alpha}\xi^{\beta+\gamma}\hat{f}(\xi)e^{ib\xi}, a^\alpha \hat{\bar{g}}^{(\gamma)}(a\xi)\rangle|$$

$$\leq a^l \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^{\beta+\gamma}\frac{(1+|\xi|^2)^n}{(1+|\xi|^2)^n}\hat{f}(\xi)\hat{\bar{g}}^{(\gamma)}(a\xi)|\,d\xi$$

$$= \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma (\int_{|\xi|\leq 1} + \int_{|\xi|\geq 1})|\xi^{\beta+\gamma}\frac{(1+|\xi|^2)^n}{(1+|\xi|^2)^n}\hat{f}(\xi)a^l\hat{\bar{g}}^{(\gamma)}(a\xi)|\,d\xi = \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma(I_1+I_2).$$

Za procenu integrala I_2 koristimo da je

$$|\xi^{\beta+\gamma}(1+|\xi|^2)^n\hat{f}(\xi)| \leq C_1 \text{ i } a^l|\xi|^l|\hat{\bar{g}}^{(\gamma)}(a\xi)|)| \leq C_2$$

i dobijamo da je

$$I_2 \leq C_1C_2\int_{|\xi|\geq 1}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^n}\,d\xi \leq C.$$

Kako je $\hat{f}^{(j)}(0)=0$, za svako $j\in\mathbb{N}$, iz Tejlorove formule (biramo N tako da je $N \geq l$) dobijamo

$$I_1 \leq \int_{|\xi|\leq 1}|\xi^{\beta+\gamma}\frac{\hat{f}^{(N+1)}(\theta)}{(N+1)!}||\xi^{N+1}a^l\hat{\bar{g}}^{(\gamma)}(a\xi)|\,d\xi$$

$$\leq C\int_{|\xi|\leq 1}|\xi^{\beta+\gamma}\frac{\hat{f}^{(N+1)}(\theta)}{(N+1)!}||\xi^{N+1}a^l\hat{\bar{g}}^{(\gamma)}(a\xi)|\,d\xi,$$

gde $\theta\in(0,1)$. Iz $(a|\xi|)^l|\hat{\bar{g}}(a\xi)| \leq C, a>0, \xi\in\mathbb{R}^n$, sledi da je $I_1 \leq C$, a time je i

$$a^l|F_{\alpha,\beta}(b,a)| \leq C,\ (b,a)\in\mathbb{H}^{n+1}. \tag{2.10}$$

Posmatrajmo dalje član $\frac{1}{a^l}|F_{\alpha,\beta}(b,a)|$, za $|a|<1$. Kao i u prethodnom slučaju

$$\frac{1}{a^l}|F_{\alpha,\beta}(b,a)| = \frac{1}{a^l}\sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma|\langle f^{(\beta+\gamma)}(au+b), u^\gamma\bar{g}(u)\rangle|$$

$$= \frac{1}{a^l}\sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma(|\langle\sum_{|j|=0}^{m}\frac{f^{(\beta+\gamma+j)}(b)}{j!}(au)^j, u^\gamma\bar{g}(u)\rangle|$$

$$+|\langle \sum_{|j|=m+1} \frac{f^{(\beta+\gamma+j)}(\theta)}{j!}(au)^j, u^\gamma \bar{g}(u)\rangle|)$$

$$\leq \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma \sum_{|j|=m+1} \int_{\mathbb{R}^n} |\frac{f^{(\beta+\gamma+j)}(\theta)}{j!} u^{\gamma+j} \bar{g}(u)|\, du,$$

gde smo koristili činjenicu da su svi momenti funkcije g jednaki nuli i birali da je $m=[l]$. Dakle,

$$\frac{1}{a^l}|F_{\alpha,\beta}(b,a)| \leq C,\ (b,a) \in \mathbb{H}^{n+1}. \tag{2.11}$$

Za preostali član $(1+|b|^2)^{k/2}|F_{\alpha,\beta}(b,a)|$ imamo da je

$$(1+|b|^2)^{k/2}|F_{\alpha,\beta}(b,a)| \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma |\langle \xi^{\beta+\gamma} \hat{f}(\xi) e^{ib\xi}, \hat{\bar{g}}^{(\gamma)}(a\xi)\rangle|$$

$$= (1+|b|^2)^{k/2} \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma |\langle \frac{\partial_\xi^m e^{ib\xi}}{(ib)^m} \xi^{\beta+\gamma} \frac{(1+|\xi|^2)^n}{(1+|\xi|^2)^n} \hat{f}(\xi), \hat{\bar{g}}^{(\gamma)}(a\xi)\rangle|$$

biramo da je $m=[k+1]$ i nastavljamo

$$\leq \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_\xi^{m-s}\Big(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^n}\Big) \partial_\xi^s \Big(\xi^{\beta+\gamma}(1+|\xi|^2)^n \hat{f}(\xi) \hat{\bar{g}}^{(\gamma)}(a\xi)\Big)|\, d\xi$$

$$\leq \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_\xi^{m-s}\Big(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^n}\Big)$$

$$\sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} \partial_\xi^{s-j}\Big(\xi^{\beta+\gamma}(1+|\xi|^2)^n \hat{f}(\xi)\Big) \partial_\xi^s \Big(\hat{\bar{g}}^{(\gamma)}(a\xi)\Big)|\, d\xi$$

$$\leq \sum_{|\gamma|=\alpha} c_\gamma \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} \Big(\int_{|\xi|\leq 1} |\partial_\xi^{m-s}\Big(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^n}\Big)$$

$$\sum_{p}^{s-j} \binom{s-j}{p} \partial_\xi^{s-j-p}\Big(\xi^{\beta+\gamma}(1+|\xi|^2)^n\Big) \hat{f}^{(p)}(\xi) a^{|j|} |\hat{\bar{g}}^{(\gamma+j)}(a\xi)|\, d\xi$$

$$+ \int_{|\xi|>1} |\partial_\xi^{m-s}\Big(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^n}\Big) \partial_\xi^{s-j}\Big(\xi^{\beta+\gamma}(1+|\xi|^2)^n \hat{f}(\xi)\Big) a^{|j|} |\hat{\bar{g}}^{(\gamma+j)}(a\xi)|\, d\xi\Big).$$

Upotrebimo li argumente kao u slučaju $a^l|F_{\alpha,\beta}(b,a)|$ za integrale I_1 i I_2, dobijamo da je

$$(1+|b|^2)^{k/2}|F_{\alpha,\beta}(b,a)| \le C,\ (b,a)\in\mathbb{H}^{n+1}. \tag{2.12}$$

Iz (2.10) i (2.11) sledi

$$(a^l+\frac{1}{a^l})|F_{\alpha,\beta}(b,a)| \le C,\ (b,a)\in\mathbb{H}^{n+1}. \tag{2.13}$$

Konačno (2.9) sledi iz (2.12) i (2.13).

Teorema 2.3.2 *Neka je $g\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ prihvatljiv mali talas. Tada je $\mathcal{M}_g:\mathcal{S}(\mathbb{H}^{n+1})\to\mathcal{S}_0(\mathbb{R}^n)$ neprekidno preslikavanje.*

Dokaz. Iskoristimo li formulu

$$(1-\Delta_\xi)^j\hat{\bar{g}}(a\xi)=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}(-1)^i a^{2i}\sum_{|s|=2i}\hat{\bar{g}}^{(2s)}(a\xi),\ k\in\mathbb{N},\ s\in\mathbb{N}^n$$

dobijamo da je

$$\begin{aligned}
&(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\partial_x^k\mathcal{M}_g\Phi(x)|\\
&=(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\partial_x^k\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(b,a)\,\frac{1}{a^n}\bar{g}(\frac{x-b}{a})\,db\,\frac{da}{a}|\\
&=(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n}\partial_x^k\Phi(x-b,a)\,\frac{1}{a^n}\bar{g}(\frac{b}{a})\,db\,\frac{da}{a}|\\
&=(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n}(-1)^k\partial_b^k\Phi(x-b,a)\,\frac{1}{a^n}\bar{g}(\frac{b}{a})\,db\,\frac{da}{a}|\\
&=(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n}\xi^k\hat{\Phi}(-\xi,a)e^{-ix\xi}\,\hat{\bar{g}}(a\xi)\,d\xi\,\frac{da}{a}|\\
&=(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1-\Delta_\xi)^r e^{-ix\xi}}{(1+|x|^2)^r}\xi^k\hat{\Phi}(-\xi,a)\,\hat{\bar{g}}(a\xi)\,d\xi\,\frac{da}{a}|\\
&\le\frac{(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}{(1+|x|^2)^r}|\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-ix\xi}(1-\Delta_\xi)^r\Big(\xi^k\hat{\Phi}(-\xi,a)\,\hat{\bar{g}}(a\xi)\Big)\,d\xi\,\frac{da}{a}|,
\end{aligned}$$

biramo da je $r > [\alpha/2]$ i nastavljamo

$$\leq \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n} |\sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}(1-\Delta_\xi)^{r-k}\Big(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^n}\Big)$$

$$(1-\Delta_\xi)^k\Big(\xi^k(1+|\xi|^2)^n\hat{\Phi}(-\xi,a)\,\hat{\bar{g}}(a\xi)\Big)|\,d\xi\,\frac{da}{a}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}|(1-\Delta_\xi)^{r-k}\Big(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^n}\Big)|$$

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|(1-\Delta_\xi)^{k-j}\Big(\xi^k(1+|\xi|^2)^n\hat{\Phi}(-\xi,a)\Big)||(1-\Delta_\xi)^j\Big(\hat{\bar{g}}(a\xi)\Big)|\,d\xi\,\frac{da}{a}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}|(1-\Delta_\xi)^{r-k}\Big(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^n}\Big)|$$

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}|(1-\Delta_\xi)^{k-j}\Big(\xi^k(1+|\xi|^2)^n(a+1/a)\hat{\Phi}(-\xi,a)\Big)|$$

$$|\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}a^{2i}\sum_{|s|=2i}\hat{\bar{g}}^{(2s)}(a\xi)|\,d\xi\,\frac{da}{1+a^2}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{r}\binom{r}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\sum_{|s|=2i}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^n}|(1-\Delta_\xi)^{r-k}\Big(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^n}\Big)|$$

$$|(1-\Delta_\xi)^{k-j}\Big(\xi^k(1+|\xi|^2)^n a^{2i}(a+1/a)\hat{\Phi}(-\xi,a)\Big)||\hat{\bar{g}}^{(2s)}(a\xi)|\,d\xi\,\frac{da}{1+a^2}.$$

Za brzo opadajuće funkcije Φ i g važi

$$|(1-\Delta_\xi)^{k-j}\Big(\xi^k(1+|\xi|^2)^n a^{2i}(a+1/a)\hat{\Phi}(-\xi,a)\Big)| \leq C_1, \quad |\hat{\bar{g}}^{(2s)}(a\xi)| \leq C_2,$$

odakle dobijamo da je

$$(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\partial_x^k \mathcal{M}_g\Phi(x)| \leq C_1C_2\int_{\mathbb{R}_+}\frac{da}{1+a^2}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(1+|\xi|^2)^n}\,d\xi \leq C.$$

2.4 Malotalasna transformacija temperiranih distribucija

U odnosu na neprekidna potapanja

$$i : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \mapsto \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \;\; f \mapsto \left(\phi \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi(x)\,dx\right) \;\; \text{i}$$

$$i : \hat{f} \mapsto \left(\hat{\phi} \mapsto \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(-\xi)\hat{\phi}(\xi)\,d\xi\right)$$

imamo da $f \in \mathcal{S}_-(\mathbb{R})$ određuje linearan funkcional na $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$. Analogno, $f \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ određuje linearan funkcional na $\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$.

Definicija 2.4.1 *Prostor linearnih funkcionela na $\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$ označavamo sa $\mathcal{S}_+^{'}(\mathbb{R})$, dok prostor linearnih funkcionela na $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ označavamo sa $\mathcal{S}_-^{'}(\mathbb{R})$.*

Imamo linearna potapanja $i : \mathcal{S}_+(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_+^{'}(\mathbb{R})$, $i : \mathcal{S}_-(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_-^{'}(\mathbb{R})$. I više, $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ je gust u $\mathcal{S}_+^{'}(\mathbb{R})$.

Razmotrimo odnos prostora $\mathcal{S}_+^{'}(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$. Jasno, proizvoljno $f \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$ restrikcijom na zatvoren potprostor $\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$ definiše distribuciju u $\mathcal{S}_+^{'}(\mathbb{R})$. Ovakvo preslikavanje je sirjektivno. S druge strane, koristeći Han-Banahovu teoremu, svaka distribucija iz $\mathcal{S}_+^{'}(\mathbb{R})$ može biti proširena do distribucije iz $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$, s tim da dato proširenje elementa $f \in \mathcal{S}_+^{'}(\mathbb{R})$ do $f_1 \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$ nije jedinstveno.

Teorema 2.4.1 *U odnosu na projekcije*

$$\sigma_+ : \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_+^{'}(\mathbb{R}), \; \langle \sigma_+ f, \phi\rangle = \langle f, \phi\rangle, \, \forall \phi \in \mathcal{S}_-(\mathbb{R}),$$

$$\sigma_- : \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_-^{'}(\mathbb{R}), \; \langle \sigma_- f, \phi\rangle = \langle f, \phi\rangle, \, \forall \phi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}),$$

važi da je

$$\mathcal{S}_+^{'}(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})/\{f \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}) : supp\ \hat{f} \subset \mathbb{R}_-\},$$
$$\mathcal{S}_-^{'}(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})/\{f \in \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R}) : supp\ \hat{f} \subset \mathbb{R}_+\}.$$

Iz $\mathcal{S}_0(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_+(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_-(\mathbb{R})$ sledi da za dualan prostor važi

$$\mathcal{S}_0^{'}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_+^{'}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_-^{'}(\mathbb{R}).$$

Kako je $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ zatvoren potprostor od $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ i svi momenti elemenata prostora $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ su jednaki nuli, iz relacije

$$\int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\, dx = \hat{f}^{(n)}(0)$$

dobijamo da polar prostora $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ čine distribucije iz $\mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})$ čije Furijeove transformacije imaju za nosač tačku $\xi = 0$. Poznato je da je svaka temperirana distribucija f, čiji nosač čini samo jedna tačka x_0, oblika

$$f(x) = \sum_{k\leq m} a_k \delta^{(k)}(x - x_0),\ x \in \mathbb{R},$$

za neko $m \in \mathbb{N}$ i neke konstante $a_k, k \leq m$ ([14, 62]). Pri Furijeovoj transformaciji linearne kombinacije izvoda δ distribucije su slike polinoma nad $\mathbb{R}$. Zaključujemo da je polar prostora $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$, u odnosu na $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, prostor polinoma $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, odnosno da važi

$$\mathcal{S}_0^{'}(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{S}^{'}(\mathbb{R})/\mathcal{P}(\mathbb{R}).$$

Definicija 2.4.2 *Malotalasna transformacija distribucije $f \in \mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$, u odnosu na analizirajući mali talas $g \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ definiše se na sledeći način:*

$$\langle \mathcal{W}_g f(b,a), \tau(b,a)\rangle = \langle f(x), \mathcal{M}_{\bar{g}}\tau(x)\rangle\,,\ \tau \in \mathcal{S}(\mathbb{H}). \tag{2.14}$$

Malotalasna transformacija data u (2.14) je dobro definisana, jer je $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R}) = (\mathcal{S}_-(\mathbb{R}))'$, dok za $g \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ imamo da $\bar{g} \in \mathcal{S}_-(\mathbb{R})$, a $\mathcal{M} : \mathcal{S}_-(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}(\mathbb{H}) \to \mathcal{S}_-(\mathbb{R})$. Koristeći iste argumente dobijamo da je malotalasna transformacija dobro definisana i na sledeći način:

$$\mathcal{W}_g f(b,a) = \langle f(b+ax), \bar{g}(x)\rangle \ = \left\langle f(t), \frac{1}{a}\bar{g}\left(\frac{t-b}{a}\right)\right\rangle = f * \check{\bar{g}}_a(b), \tag{2.15}$$

gde je $g_a(\cdot) = \frac{1}{a}g(\frac{\cdot}{a})$. Štaviše, date definicije malotalasne transformacije su ekvivalentne.

Malotalasni operator sinteze, u odnosu na mali talas $h \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R})$, definiše se na sledeći način:

$$\langle \mathcal{M}_h F(x), \phi(x)\rangle = \langle F(b,a), \mathcal{W}_{\bar{h}}\phi(b,a)\rangle\,,\ \phi \in \mathcal{S}_+(\mathbb{R}),\ F \in \mathcal{S}'(\mathbb{H}).$$

Teorema 2.4.2 *Neka su g i h fiksirani mali talasi iz $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$. Tada su malotalasna transformacija i malotalasni operator sinteze*

$$\mathcal{W}_g : \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{H}), \quad f \mapsto \mathcal{W}_g f \quad i$$

$$\mathcal{M}_h : \mathcal{S}'(\mathbb{H}) \to \mathcal{S}'_+(\mathbb{R}), \quad F \mapsto \mathcal{M}_h F$$

neprekidna preslikavanja u odgovarajućim slabim topologijama.

Kao i u slučaju test prostora imamo da je

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{S}'_+(\mathbb{R})} = \frac{1}{c_{g,h}} \mathcal{M}_h \mathcal{W}_g,$$

gde je h rekonstrukcioni mali talas za mali talas g. Takođe, važi

$$\langle \mathcal{W}_g f(b,a), \tau(b,a) \rangle = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(b,a)\, \tau(b,a)\, db \, \frac{da}{a}, \ \tau \in \mathcal{S}(\mathbb{H}),$$

gde je $F(b,a) = \langle f(x), \bar{g}_{b,a}(x) \rangle$ lokalno integrabilna funkcija iz $\mathcal{S}'(\mathbb{H})$, takva da postoje $\alpha, \beta > 0$ za koje je

$$|F(b,a)| \leq C(1+|b|^2)^{\frac{\alpha}{2}}(a + \frac{1}{a})^{\beta}, \ (b,a) \in \mathbb{H}. \tag{2.16}$$

U narednoj teoremi je preko reprodukcionog jezgra

$$P_{g,h}(b,a) = \frac{1}{c_{g,h}} \mathcal{W}_g h(b,a), \ (b,a) \in \mathbb{H}$$

data karakterizacija slika elemenata prostora $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ u odnosu na malotalasnu transformaciju.

Teorema 2.4.3 *Malotalasna transformacija preslikava prostor $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ u zatvoren potprostor prostora $\mathcal{S}(\mathbb{H})$, za čije elemente važi*

$$\tau(b,a) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a'} P_{g,h}\left(\frac{b-b'}{a'}, \frac{a}{a'} \right) \tau(b',a')\, db' \, \frac{da'}{a'}, \ (b,a) \in \mathbb{H},$$

gde je h reprodukcioni mali talas za mali talas g.

Karakterizacija prostora slika malotalasne transformacije distribucija je data sa

$$F(b,a)=\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a'}P_{g,h}\left(\frac{b-b'}{a'},\frac{a}{a'}\right)F(b',a')\,db'\,\frac{da'}{a'},\ (b,a)\in\mathbb{H}. \tag{2.17}$$

Delovanje distribucije $f\in\mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$ na test funkciju $\phi\in\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$ može biti zapisano i kao skalarni proizvod:

$$\langle f(x),\phi(x)\rangle=\frac{1}{c_{g,h}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{W}_g f(b,a)\,\mathcal{W}_{\bar{h}}\phi(b,a)\,db\,\frac{da}{a}. \tag{2.18}$$

Analogno, izrazom (2.14) je definisana malotalasna transformacija distribucije $f\in\mathcal{S}'_-(\mathbb{R})$, u odnosu na analizirajući mali talas $g\in\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$, i sve iskazano za distribucije iz $\mathcal{S}'_+(\mathbb{R})$ važi i za distribucije iz $\mathcal{S}'_-(\mathbb{R})$. Do malotalsne transformacije distribucije $f\in\mathcal{S}'_0(\mathbb{R})$, u odnosu na analizirajući mali talas $g\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$, možemo doći koristeći projekcije σ_+ i σ_- definisane u teoremi 2.4.1. Tada je $g=g_++g_-$, za odgovarajuće $g_+\in\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ i $g_-\in\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$, i tražena transformacija je data sa

$$\mathcal{W}_g f=\mathcal{W}_{g_+}(\sigma_+f)+\mathcal{W}_{g_-}(\sigma_-f).$$

Takođe, izrazom (2.14) možemo definisati malotalasnu transformaciju proizvoljne temperirane distribucije $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, u odnosu na analizirajući mali talas $g\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$, čime dobijamo (Han-Banahova teorema) proširenje malotalasne transformacije u $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R})$. Međutim, tada inverzna transformacija nije dobro definisana. Naime, za momente funkcije $g\in\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ važi (2.5), odakle je

$$\mathcal{W}_g p\,(b,a)=\langle p(b+ax),\bar{g}(x)\rangle\ =0,\ \ \forall p\in\mathcal{P}(\mathbb{R}),$$

pa koristeći linearnost malotalasne transformacije dobijamo da temperirane distribucije koje se razlikuju za polinom imaju iste malotalasne transformacije.

Primer 2.4.1 *Malotalasna transformacija δ distribucije i njenih izvoda*

$$\mathcal{W}_g\delta^{(n)}(b,a)=(-\frac{1}{a})^n\bar{g}^{(n)}(-\frac{b}{a}),\ (b,a)\in\mathbb{H}.$$

Primer 2.4.2 *Za $\alpha\in\mathbb{R}$ definišemo funkcije*

$$x_+^\alpha=\begin{cases}x^\alpha, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}\quad i\ \ x_-^\alpha=\begin{cases}0, & x\ge 0\\ (-x)^\alpha, & x<0\end{cases}.$$

Ako α nije negativan ceo broj tada x_+^α i x_-^α pripadaju prostoru distribucija $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ i definisane su na sledeći način:

$$x_+^\alpha : \phi \mapsto \int_0^\infty x^\alpha \, \phi(x)\, dx \ \ i \ \ x_-^\alpha : \phi \mapsto \int_{-\infty}^0 (-x)^\alpha \, \phi(x)\, dx, \ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Melinova transformacija funkcije f je data na sledeći način:

$$(Mf)(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} \, f(x)\, dx, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Sada je

$$\mathcal{W}_g x_+^\alpha(b,a) = a^\alpha (M\bar{g}(\cdot - \frac{b}{a}))(\alpha+1), \ (b,a) \in \mathbb{H} \ \ i$$

$$\mathcal{W}_g x_-^\alpha(b,a) = a^\alpha (M\bar{g}(-\frac{b}{a} - \cdot))(\alpha+1), \ (b,a) \in \mathbb{H}.$$

2.5 Primena malotalasne transformacije

Malotalasna transformacija ima primenu u teoriji aproksimacija. Naime, koristeći poznatu lemu o aproksimaciji može se pokazati da za $f \in L^2(\mathbb{R})$ važi

$$\int_\varepsilon^\rho \frac{1}{a} \mathcal{W}_{\bar{g}} f(b,a)\, da = \int_\varepsilon^\rho \frac{1}{a} (g_a * f)(b)\, da \to f(b), \quad \text{kada } \varepsilon \to 0, \ \rho \to \infty,$$

čime je učinjena aproksimacija funkcije f pomoću malotalasne transformacije.

Malotalasnu transformaciju $\mathcal{W}_\psi f(b,a)$ možemo posmatrati kao meru promene funkcije f u okolini tačke b, gde je veličina okoline određena parametrom a. Na primer, za funkciju koja je glatka u okolini tačke b i time ima male promene u okolini od b, malotalasna transformacija bi trebala da ima malu vrednost, dok za funkciju f koja ima singularitet u b očekivano je da $\mathcal{W}_\psi f(b,a)$ bude velika vrednost. Ovo svojstvo je korišćeno za ispitivanje lokalnih svojstava funkcija i karakterizaciju mikrolokalnih (funkcionalnih) prostora ([20, 24, 37]). Na primer, u narednim teoremama ([5, 17, 20]) je Helder neprekidnost funkcije okarakterisana pomoću malotalasne transformacije.

Teorema 2.5.1 *Neka je* $\int (1+|x|)|g(x)|\,dx < \infty$ *i* $\hat{g}(0) = 0$. *Ako je ograničena funkcija* f *Helder neprekidna reda* $\alpha, \alpha \in (0,1]$, *tj. ako za neku konstantu* C *važi*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha},$$

tada za njenu malotalasnu transformaciju važi

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| = C'|a|^{\alpha+\frac{1}{2}}.$$

Teorema 2.5.2 *Neka* g *ima kompaktan nosač. Neka je* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *ograničena i neprekidna funkcija. Ako za neko* $\alpha \in (0,1)$ *važi*

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \leq C|a|^{\alpha+\frac{1}{2}},$$

tada je f *Helder neprekidna funkcija reda* α.

Definicija 2.5.1 *Distribucija* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *je regularnosti* C^{∞} *u otvorenom intervalu* I *ako* $f\phi \in C^{\infty}(I)$, *za svako* $\phi \in C_0^{\infty}(I)$. *Komplement skupa čije sve tačke imaju okoline u kojima je* f *regularnosti* C^{∞} *naziva se singularni nosač distribucije* f.

U narednim teoremama ([19]) su date karakterizacije singularnog nosača temperiranih distribucija i ograničenih skupova u $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ preko malotalasne transformacije.

Teorema 2.5.3 *Distribucija* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *je regularnosti* C^{∞} *u otvorenom intervalu* I *ako i samo ako za neki dopustiv mali talas* $g \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ *važi*

$$\mathcal{W}_g f(b,a) = O(a^m), \quad a \to 0,$$

za svako $m > 0$, *uniformno po* b *na svakom kompaktnom podskupu od* I.

Teorema 2.5.4 *Skup* $X \subset \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ *je ograničen ako i samo ako postoji funkcija* τ *definisana na poluravni* $\mathbb{H}$ *koja opada brže od proizvoljnog polinoma po* b *i* $a + \frac{1}{a}$ *za koju je*

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \leq \tau(b,a), \quad (b,a) \in \mathbb{H},$$

za svako $f \in X$.

Skup $X \subset \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ *je ograničen ako i samo ako postoji funkcija* τ *definisana na poluravni* $\mathbb{H}$ *koja opada brže od proizvoljnog polinoma po* b *i* $a + \frac{1}{a}$ *za koju je*

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \leq \tau(b,a), \quad (b,a) \in \mathbb{H},$$

za svako $f \in X$.

Glava 3

Kvaziasimptotsko ponašanje

U ovoj glavi je predstavljen pojam kvaziasimptotskog ponašanja distribucija. U poglavlju 3.1 su navedene definicije i osobine sporo i regularno promenljivih funkcija. Kvaziasimptotsko ponašanje i kvaziasimptotska ograničenost distribucija u konačnoj tački i u beskonačnosti su definisani u poglavlju 3.2. Strukturne teoreme za kvaziasimptotsko ponašanje distribucija, koje će biti od velikog značaja u daljem radu, su date u poglavlju 3.3.

3.1 Sporo i regularno promenljive funkcije

Kvaziasimptotsko ponašanje podrazumeva ispitivanje ponašanja distribucija u beskonačnosti ili u konačnoj tački u odnosu na sporo promenljive i regularno promenljive funkcije. Ove funkcije je definisao Karamata 1930. godine, s tim da je umesto merljivih posmatrao neprekidne funkcije.

Definicija 3.1.1 *Merljiva funkcija* $L : (0, A] \mapsto \mathbb{R}_+$, $A > 0$, *je sporo promenljiva u nuli ako je*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{L(\varepsilon a)}{L(\varepsilon)} = 1, \tag{3.1}$$

za svako $a > 0$. *Merljiva funkcija* $L : [A, +\infty) \mapsto \mathbb{R}_+$, $A > 0$, *je sporo promenljiva u beskonačnosti ako je*

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{L(\lambda a)}{L(\lambda)} = 1, \tag{3.2}$$

za svako $a > 0$.

Definicija 3.1.2 *Merljiva funkcija $\rho : (0, A] \mapsto \mathbb{R}_+$ je regularno promenljiva, stepena α, u nuli ako je*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\rho(\varepsilon a)}{\rho(\varepsilon)} = a^\alpha,$$

za svako $a > 0$. Merljiva funkcija $\rho : [A, +\infty) \mapsto \mathbb{R}_+$, $A > 0$, je regularno promenljiva, stepena α u beskonačnosti ako je

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\rho(\lambda a)}{\rho(\lambda)} = a^\alpha,$$

za svako $a > 0$.

Iz prethodnih definicija sledi da svaku regularno promenljivu funkciju ρ, stepena α, u nuli možemo prikazati na sledeći način:

$$\rho(x) = x^\alpha L(x), \ x \in (0, A],$$

gde je L neka sporo promenljiva funkcija. Isto važi i za regularno promenljivu funkciju u beskonačnosti.

Primeri sporo i regularno promenljivih funkcija, kao i dokazi fundamentalnih teorema o uniformnoj konvergenciji i reprezentaciji sporo promenljivih funkcija, mogu se naći u [1, 58].

Može se pokazati ([1, 58]) da relacija (3.1) za sporo promenljive funkcije u nuli važi uniformno, kao i da relacija (3.2) za sporo promenljive funkcije u beskonačnosti važi uniformno.

Važe sledeće teoreme o reprezentaciji: L je sporo promenljiva funkcija u nuli definisana na intervalu $(0, A], A > 0$ ako i samo ako postoje merljive funkcije u i w definisane na intervalu $(0, B], B \leq A$, takve da je u ograničena funkcija i $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = M < \infty$, dok je w neprekidna na $[0, B]$ i $\lim\limits_{x \to 0} w(x) = 0$, za koje je

$$L(x) = \exp\Big(u(x) + \int_x^B \frac{w(t)}{t}\, dt\Big), \ x \in (0, B].$$

L je sporo promenljiva funkcija u beskonačnosti definisana na intervalu $[A, \infty)$, $A > 0$ ako i samo ako postoje merljive funkcije u i w definisane na intervalu $[B, \infty), B \geq A$, takve da je u ograničena funkcija i $\lim\limits_{x \to \infty} u(x) = M < \infty$, dok je w neprekidna na $[B, \infty)$ i $\lim\limits_{x \to \infty} w(x) = 0$, za koje je

$$L(x) = \exp\Big(u(x) + \int_B^x \frac{w(t)}{t}\, dt\Big), \ x \in [B, \infty).$$

Navedimo još neke osobine sporo promenljive funkcije L :

Za svako $\sigma > 0$ je

$$L(\varepsilon) = o\left(\frac{1}{\varepsilon^\sigma}\right), \ \text{ kada } \varepsilon \to 0^+, \tag{3.3}$$

$$L(\lambda) = O(\lambda^\sigma), \ \text{ kada } \lambda \to \infty. \tag{3.4}$$

Za svako $\sigma > 0$ je

$$\frac{1}{C}\min\{x^{-\sigma}, x^\sigma\} < \frac{L(\varepsilon x)}{L(\varepsilon)} < C\max\{x^{-\sigma}, x^\sigma\}, \ x, \varepsilon \in (0, \infty),$$

za neko $C > 0$.

(4) Ako pretpostavimo da je $t^{-1}w(t) \in L^1([1, \infty)$ (koristimo oznake date u teoremi o reprezentaciji, uz pretpostavku da je $B = 1$) tada je

$$\tilde{M} < L(x) < M, \ x > 1,$$

za neke pozitivne konstante $\tilde{M}$ i M.

3.2 Kvaziasimptotsko ponašanje distribucija

Može se pokazati ([47, 70]) da ako distribucija $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ima sledeće asimptotsko ponašanje

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle f(\varepsilon x), \varphi(x)\rangle = \rho(\varepsilon)\langle g(x), \varphi(x)\rangle, \ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

za neku pozitivnu funkciju ρ i nenula distribuciju $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, tada je ρ regularno promenljiva funkcija, a g homogena distribucija.

Definicija 3.2.1 *Neka $x_0 \in \mathbb{R}$. Za distribuciju $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ kažemo da ima kvaziasimptotsko ponašanje stepena $\alpha \in \mathbb{R}$, u tački x_0, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ako granična vrednost*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle \frac{f(x_0 + \varepsilon x)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)}, \varphi(x)\rangle \tag{3.5}$$

postoji i konačna je za svako $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Iz Banah-Štajnhausove teoreme sledi da ako distribucija $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ima kvaziasimptotsko ponašanje, u smislu definicije 3.2.1, tada postoji distribucija $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ takva da važi

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \langle \frac{f(x_0 + \varepsilon x)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)}, \varphi(x) \rangle = \langle g(x), \varphi(x) \rangle, \tag{3.6}$$

za svako $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Distribuciju g nazivamo kvaziasimptotska granica distribucije f u tački x_0 i ona je homogena distribucija. Izraz (3.6) pišemo i na sledeći način:

$$f(x_0 + \varepsilon x) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) g(x), \text{ kada } \varepsilon \to 0, \text{ u } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

odnosno

$$f(x_0 + \varepsilon x) = \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) g(x) + o(\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)), \text{ kada } \varepsilon \to 0, \text{ u } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Primer 3.2.1 *Distribucija $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ima vrednost u tački $x_0 \in \mathbb{R}$ u smislu Lojaševiča ako postoji $\gamma \in \mathbb{R}$ tako da je*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \langle f(x_0 + \varepsilon x), \varphi(x) \rangle = \langle \gamma, \varphi(x) \rangle, \quad \textit{za svako } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Tada kažemo da je γ vrednost distribucije f u tački x_0 i to označavamo sa $f(x)|_{x=x_0} = \gamma$. Takođe ([33, 65]), $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ ima vrednosti u tački $f(x)|_{x=x_0} = \gamma$ ako i samo ako postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\lim_{x \to 0} \frac{m}{x} \int_0^x f(x_0 + t) \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{m-1} dt = \gamma.$$

Ako u definiciji 3.2.1 odaberemo da je $\alpha = 0$ i $L = 1$ (svaka konstantna funkcija je sporo promenljiva), dobijamo vrednost distribucije f u tački x_0 u smislu Lojaševiča kao specijalan slučaj kvaziasimptotskog ponašanja.

Definicija 3.2.2 *Za distribuciju $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ kažemo da ima kvaziasimptotsko ponašanje stepena $\alpha \in \mathbb{R}$, u beskonačnosti, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ako postoji homogena distribucija $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tako da važi*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \langle \frac{f(\lambda x)}{\lambda^\alpha L(\lambda)}, \varphi(x) \rangle = \langle g(x), \varphi(x) \rangle, \tag{3.7}$$

za svako $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Koristimo i notaciju

$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha L(\lambda) g(x), \text{ kada } \lambda \to \infty, \text{ u } \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

odnosno

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha L(\lambda) g(x) + o(\lambda^\alpha L(\lambda)), \text{ kada } \lambda \to \infty, \text{ u } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Primetimo da je kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti svojstvo globalnog karaktera, za razliku od kvaziasimptotskog ponašanja u konačnoj tački koje je lokalno svojstvo. Analogno definicijama 3.2.1 i 3.2.2 može se definisati i kvaziasimptotsko ponašanje temperiranih distribucija u konačnoj tački i beskonačnosti, respektivno, gde (3.5) i (3.7) važe za svako $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

U cilju ispitivanja osobina malotalasne transformacije distribucija, od interesa će biti pojam kvaziasimptotske ograničenosti.

Definicija 3.2.3 *Za distribuciju f kažemo da je kvaziasimptotski ograničena, reda $\alpha \in \mathbb{R}$, u $x = x_0$, u odnosu na sporo promenljivu funkciju u nuli L, ako je*

$$\langle f(x_0 + \varepsilon x), \varphi(x) \rangle = O(\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)), \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0^+,$$

za svako $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pišemo

$$f(x_0 + \varepsilon x) = O(\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)), \textit{ kada } \varepsilon \to 0^+, \textit{ u } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Definicija 3.2.4 *Za distribuciju f kažemo da je kvaziasimptotski ograničena, reda $\alpha \in \mathbb{R}$, u beskonačnosti, u odnosu na L, sporo promenljivu funkciju u beskonačnosti, ako je*

$$\langle f(\lambda x), \varphi(x) \rangle = O(\lambda^\alpha L(\lambda)), \quad \textit{kada } \lambda \to \infty,$$

za svako $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pišemo

$$f(\lambda x) = O(\lambda^\alpha L(\lambda)), \textit{ kada } \lambda \to \infty, \textit{ u } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

U slučaju kvaziasimptotske ograničenosti u beskonačnosti iz osobine sporo promenljive funkcije date u (3.4) sledi da f mora biti temperirana distribucija ([14] teorema 6.6.1). Za više detalja o kvaziasimptotskoj ograničenosti, uključujući i strukturne teoreme, pogledati [64].

3.3 Strukturne teoreme za kvaziasimptotsko ponašanje distribucija

U [41, 42, 43, 45, 47, 70] su date strukturne teoreme za kvaziasimptotsko ponašanje distribucija, kao i odnos kvaziasimptotskog ponašanja u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}'(R)$, a u [63] i [67] je data karakterizacija kvaziasimptotskog ponašanja preko asimptotsko homogenih i asocirano asimptotsko homogenih funkcija.

Definicija 3.3.1 *Za funkciju b kažemo da je asimptotski homogena stepena α u nuli u odnosu na sporo promenljivu funkciju L ako je neprekidna, definisana u intervalu oblika $(0, A), A > 0$ i za svako $a > 0$ važi*

$$b(ax) = a^{\alpha} b(x) + o(L(x)), \quad \textit{kada } x \to 0^{+}.$$

Definicija 3.3.2 *Za funkciju b kažemo da je asimptotski homogena stepena α u beskonačnosti u odnosu na sporo promenljivu funkciju L ako je merljiva, definisana u intervalu oblika $[A, \infty), A > 0$ i za svako $a > 0$ važi*

$$b(ax) = a^{\alpha} b(x) + o(L(x)), \quad \textit{kada } x \to \infty.$$

Definicija 3.3.3 *Za funkciju c kažemo da je asocirano asimptotski homogena stepena nula u nuli u odnosu na sporo promenljivu funkciju L ako je neprekidna, definisana u intervalu oblika $(0, A), A > 0$ i za svako $a > 0$ važi*

$$c(ax) = c(x) + \beta L(x) \log a + o(L(x)), \quad \textit{kada } x \to 0^{+},$$

za neku konstantu β.

Definicija 3.3.4 *Za funkciju c kažemo da je asocirano asimptotski homogena stepena nula u beskonačnosti u odnosu na sporo promenljivu funkciju L ako je merljiva, definisana u intervalu oblika $[A, \infty), A > 0$ i za svako $a > 0$ važi*

$$c(ax) = c(x) + \beta L(x) \log a + o(L(x)), \quad \textit{kada } x \to \infty,$$

za neku konstantu β.

Za asimptotski homogenu funkciju b, stepena α, u nuli, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L, važi ([63, 67]):

1. ako je $\alpha > 0$, tada je

$$b(x) = o(L(x)), \quad \text{kada } x \to 0^+; \tag{3.8}$$

2. ako je $\alpha < 0$, tada postoji $\gamma \in \mathbb{R}$ tako da je

$$b(x) = \gamma\, x^\alpha + o(L(x)), \quad \text{kada } x \to 0^+;$$

3. ako je $\alpha = 0$, tada je, za svako $\sigma > 0$,

$$b(x) = o(\frac{1}{x^\sigma}), \quad \text{kada } x \to 0^+;$$

4. za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$b(ax) = a^\alpha b(x) + o(L(x)), \quad \text{kada } x \to 0^+,$$

uniformno po a u kompaktnom podskupu od $(0, A)$.

Ako je b asimptotski homogena funkcija stepena α u beskonačnosti, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L, važi:

1. ako je $\alpha > 0$, tada postoji $\gamma \in \mathbb{R}$ tako da je

$$b(x) = \gamma x^\alpha + o(L(x)), \quad \text{kada } x \to \infty;$$

2. ako je $\alpha < 0$, tada je

$$b(x) = o(L(x)), \quad \text{kada } x \to \infty;$$

3. za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ je

$$b(ax) = a^\alpha b(x) + o(L(x)), \quad \text{kada } x \to \infty,$$

uniformno po a u kompaktnom podskupu od $(0, \infty)$.

Takođe, za asociranu asimptotski homogenu funkciju c, stepena nula u beskonačnosti, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L, važi da je za svako $\sigma > 0$

$$c(x) = o(x^\sigma), \quad \text{kada } x \to \infty.$$

Slična procena važi i za asociranu asimptotski homogenu funkciju stepena nula u nuli.

Propozicija 3.3.1 *Neka je c asocirano asimptotski homogena funkcija stepena nula u nuli, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L. Tada za svako $\sigma > 0$ važi*

$$c(x) = o\left(\frac{1}{x^\sigma}\right), \quad \textit{kada } x \to 0^+.$$

Dokaz. Neka je c asocirano asimptotski homogena funkcija stepena nula u nuli, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L. Iskoristimo osobinu sporo promenljivih funkcija datu u (3.3). Tada iz definicije asocirano asimptotske funkcije imamo da za svako $a > 0$ i svako $\sigma > 0$ važi

$$c(ax) = c(x) + \beta L(x)\log a + o(\frac{1}{x^\sigma}), \quad \text{kada } x \to 0^+.$$

Primenimo li opet (3.3) i osobine "malog ođobijamo da je

$$c(ax) = c(x) + o(\frac{1}{x^\sigma}), \quad \text{kada } x \to 0^+,$$

odnosno da je

$$x^\sigma a^\sigma c(ax) = a^\sigma x^\sigma c(x) + o(1), \quad \text{kada } x \to 0^+.$$

Dakle, $x^\sigma c(x)$ je asimptotski homogena funkcija, stepena $\sigma > 0$, u odnosu na sporo promenljivu funkciju $L \equiv 1$, pa iz (3.8) imamo da je za svako $\sigma > 0$

$$x^\sigma c(x) = L(1), \quad \text{kada } x \to 0^+,$$

što je i trebalo pokazati.

Detaljan prikaz asimptotsko homogenih i asocirano asimptotsko homogenih funkcija će nam biti od koristi u daljem radu, zbog njihovog značaja u strukturnim teoremama za kvaziasimptotsko ponašanje, kao i u teoremama koje se bave produženjem kvaziasimptotskog ponašanja sa $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ na $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Navedimo sada potpunu karakterizaciju kvaziasimptotskog ponašanja distribucija u nuli ([67]) i u beskonačnosti ([63]).

Teorema 3.3.1 *Neka $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ima kvaziasimptotsko ponašanje u nuli, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L,*

(3.9)
$$f(\varepsilon x) = C_- L(\varepsilon)\frac{(\varepsilon x)_-^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + C_+ L(\varepsilon)\frac{(\varepsilon x)_+^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + o(\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)), \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0^+,$$

za neke konstante C_- i C_+, gde $\alpha \notin \{-1,-2,\dots\}$. Tada za dato $k \in \mathbb{N}$ i F_k, primitivnu funkciju reda k od f, postoje konstante $C_-, C_+, \gamma_0, \dots, \gamma_{k-1}$ takve da važi

$$F_k(\varepsilon x) = C_- L(\varepsilon)\frac{(\varepsilon x)_-^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} + C_+ L(\varepsilon)\frac{(\varepsilon x)_+^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k+1)} \tag{3.10}$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\gamma_j\frac{(\varepsilon x)^j}{j!} + o(\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)), \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0^+, \ \textit{u } \mathcal{D}'(\mathbb{R}). \tag{3.11}$$

Takođe, ako važi (3.9), onda postoji $m \in \mathbb{N}$ i distribucija F, neprekidna u $[-1,1]$, takva da je $F^{(m)} = f$, za koju važi

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{\Gamma(\alpha+m+1)F(x)}{|x|^{\alpha+m}L(|x|)} = C_\pm, \tag{3.12}$$

za neke konstante C_- i C_+. Obrnuto, ako je ispunjen uslov (3.12), tada diferenciranjem dobijamo da važi (3.9).

Teorema 3.3.2 *Neka $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ i neka $k \in \mathbb{N}$. Tada f ima kvaziasimptotsko ponašanje u nuli, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L dato sa*

$$f(\varepsilon x) = \gamma\varepsilon^{-k}L(\varepsilon)\delta^{(k-1)}(x) + (-1)^{k-1}(k-1)!\beta\varepsilon^{-k}L(\varepsilon)x^{-k} + o(\varepsilon^{-k}L(\varepsilon)),$$

za neke konstante β i γ, kada $\varepsilon \to 0^+$, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ako i samo ako postoje $m \in \mathbb{N}, m \geq k$, funkcija c, definisana na $(0,\infty)$, koja je asocirano asimptotski homogena stepena nula u nuli, u odnosu na L i distribucija F, neprekidna u $[-1,1]$, takva da je $F^{(m)} = f$, za koju važi

$$F(x) = c(|x|)\frac{x^{m-k}}{(m-k)!} + \gamma L(|x|)\frac{x^{m-k}}{2(m-k)!}\ \textit{sgn}x$$

$$-\beta L(|x|)\frac{x^{m-k}}{(m-k)!}\sum_{j=1}^{m-k}\frac{1}{j} + o(|x|^{m-k}L(|x|)),$$

kada $x \to 0^+$ u klasičnom smislu. Poslednja osobina je ekvivalentna sa

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(m-k)!(a^{k-m}F(ax) - (-1)^{m-k}F(-x))}{x^{m-k}L(x)} = \gamma + \beta\log a,$$

za svako $a > 0$.

U teoremama 3.3.1 i 3.3.2 su posmatrane distibucije iz $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ i njihovo kvaziasimptotsko ponašanje u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ukoliko $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ima kvaziasimptotsko ponašanje u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, jasno je da tada f ima i kvaziasimptotsko ponašanje u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Međutim, važi i obrnuto, tj. ako $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ima kvaziasimptotsko ponašanje u nuli u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, tada f ima kvaziasimptotsko ponašanje u nuli u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Teorema 3.3.3 *Neka $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ima kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L*

$$f(\lambda x) = C_- L(\lambda)\frac{(\lambda x)_-^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + C_+ L(\lambda)\frac{(\lambda x)_+^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + o(\lambda^\alpha L(\lambda)), \tag{3.13}$$

za neke konstante C_- i C_+, kada $\lambda \to \infty$, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Ako $\alpha \notin \{-1, -2, \dots\}$, tada postoje $m \in \mathbb{N}, m > -\alpha - 1$, distribucija F, neprekidna, takva da je $F^{(m)} = f$, za koju važi

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(\alpha+m+1)F(x)}{x^m|x|^\alpha L(|x|)} = C_\pm. \tag{3.14}$$

Obrnuto, ako je ispunjen uslov (3.14), tada diferenciranjem dobijamo da važi (3.13).

Teorema 3.3.4 *Neka $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ i neka $k \in \mathbb{N}$. Tada f ima kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L dato sa*

$$f(\lambda x) = \gamma\lambda^{-k}L(\lambda)\delta^{(k-1)}(x) + (-1)^{k-1}(k-1)!\beta L(\lambda)(\lambda x)^{-k} + o(\lambda^{-k}L(\lambda)),$$

za neke konstante β i γ, kada $\lambda \to \infty$, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, ako i samo ako postoje $m \in \mathbb{N}, m \geq k$, funkcija c, koja je asocirano asimptotski homogena stepena 0, u ∞, u odnosu na L i distribucija F, neprekidna, takva da je $F^{(m)} = f$, za koju važi

$$F(x) = c(|x|)\frac{x^{m-k}}{(m-k)!} + \gamma L(|x|)\frac{x^{m-k}}{2(m-k)!}\ sgn x$$

$$-\beta L(|x|)\frac{x^{m-k}}{(m-k)!}\sum_{j=1}^{m-k}\frac{1}{j} + o(|x|^{m-k}L(|x|)),$$

kada $x \to \pm\infty$ *u klasičnom smislu. Poslednja osobina je ekvivalentna sa*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(m-k)!(a^{k-m}F(ax) - (-1)^{m-k}F(-x))}{x^{m-k}L(x)} = \gamma + \beta \log a,$$

za svako $a > 0$.

Teorema 3.3.5 *[41, 63] Neka* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *ima kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti, u* $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, *reda* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Tada* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *i* f *ima kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti u* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

U [63] su proučavane mogućnosti produženja kvaziasimptotskog ponašanja u beskonačnosti sa $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ na $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, koje navodimo u nastavku.

Teorema 3.3.6 *Neka* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *ima nosač u* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Pretpostavimo da* f *ima kvaziasimptotsko ponašanje*

$$f(\lambda x) = CL(\lambda)\frac{(\lambda x)_+^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + o(\lambda^\alpha L(\lambda)), \quad \textit{kada } \lambda \to \infty, \ \textit{u } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+),$$

za neku konstantu C. *Ako je* $\alpha > -1$, *tada* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *i ima isto kvaziasimptotsko ponašanje u* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Teorema 3.3.7 *Neka* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *ima nosač u* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Pretpostavimo da* f *ima kvaziasimptotsko ponašanje*

$$f(\lambda x) = CL(\lambda)\frac{(\lambda x)_+^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + o(\lambda^\alpha L(\lambda)), \quad \textit{kada } \lambda \to \infty, \ \textit{u } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+),$$

za neku konstantu C. *Ako je* $\alpha < -1, \alpha \neq -2, -3, \ldots,$ *tada* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. *Štaviše, postoje konstante* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ $(n < -\alpha - 1)$, *takve da je*

$$f(\lambda x) = CL(\lambda)\frac{(\lambda x)_+^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{\delta^{(j)}(x)}{\lambda^{j+1}} + o(\lambda^\alpha L(\lambda)), \quad \textit{kada } \lambda \to \infty, \ \textit{u } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Teorema 3.3.8 *Neka* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *ima nosač u* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Pretpostavimo da* f *ima kvaziasimptotsko ponašanje*

$$f(\lambda x) = CL(\lambda)\frac{H(x)}{(\lambda x)^k} + o(\frac{L(\lambda)}{\lambda^k}), \quad \textit{kada } \lambda \to \infty, \ \textit{u } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+),$$

za neku konstantu C, gde $k \in \mathbb{N}$. Tada $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ i postoji asocirano asimptotska homogena funkcija c i konstante $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ tako da je

$$f(\lambda x) = C\frac{L(\lambda)}{\lambda^k}\mathrm{Pf}(\frac{H(x)}{x^k}) + \frac{c(\lambda)}{\lambda^k}\delta^{(k-1)}(x) + \sum_{j=0}^{k-1} a_j \frac{\delta^{(j)}(x)}{\lambda^{j+1}} + o(\frac{L(\lambda)}{\lambda^k}),$$

kada $\lambda \to \infty$, u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Glava 4

Teoreme Abelovog i Tauberovog tipa u $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R})$

Kao što je rečeno u predgovoru, termini Abelova i Tauberova teorema su nastali prilikom ispitivanja konvergencije i sumabilnosti redova. Primena ovih tipova teorema se može proširiti i na druge probleme, pa se tako Abelovim i Tauberovim teoremama mogu ispitivati asimptotska svojstva funkcija u odnosu na njihove integralne transformacije ([38, 47, 49, 48, 51, 55, 70]). U ovoj glavi se teoremama Abelovog i Tauberovog tipa ispituje kvaziasimptotsko ponašanje u konačnoj tački i u beskonačnosti distribucija iz prostora $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R})$ u odnosu na njihovu malotalasnu transformaciju. U poglavlju 4.1 su date Abelove teoreme, dok su u poglavlju 4.2 prikazane Tauberove teoreme. U poglavlju 4.3 su, u slučaju kvaziasimptotskog ponašanja u konačnoj tački, Tauberovi uslovi dati lokalno, čime su poboljšani rezultati dobijeni u poglavlju 4.2.

4.1 Teoreme Abelovog tipa

Ponovimo, sa $\mathcal{W}_\psi$ označavamo malotalasnu transformaciju u odnosu na mali talas $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$. Posmatrajmo prvo kvaziasimptotsko ponašanje u konačnoj tački temperiranih distribucija.

Teorema 4.1.1 *Neka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ima kvaziasimptotsko ponašanje u konačnoj tački x_0, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L, u $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R})$, tj. neka važi*

$$f(x_0 + \varepsilon x) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) g(x), \quad \text{kada } \varepsilon \to 0^+, \text{ u } \mathcal{S}'_0(\mathbb{R}). \tag{4.1}$$

Tada, za svako $0 < \sigma \leq \dfrac{\pi}{2}$ *i* $r > 0$ *imamo*

$$\mathcal{W}_\psi f(x_0 + \varepsilon r\cos\theta, \varepsilon r\sin\theta) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon)\mathcal{W}_\psi g(r\cos\theta, r\sin\theta),\ \varepsilon \to 0^+, \tag{4.2}$$

uniformno za $\sigma \leq \theta \leq \pi - \sigma$.

Dokaz. Neka $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka $\sigma \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Kako je skup

$$\mathcal{C}_\sigma = \{\frac{1}{\sin\theta}\bar{\psi}(\frac{\cdot\ - \cos\theta}{\sin\theta}) \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}) : \sigma \leq \theta \leq \pi - \sigma\} \tag{4.3}$$

kompaktan, koristeći kvaziasimptotsko ponašanje (4.1) i Banah-Štajnhausovu teoremu dobijamo da za svako $r > 0$ i $\sigma \leq \theta \leq \pi - \sigma$ važi

$$\begin{aligned}
&\mathcal{W}_\psi f(x_0 + \varepsilon r\cos\theta, \varepsilon r\sin\theta)\\
&= \langle f(x_0 + \varepsilon r\cos\theta + \varepsilon r\sin\theta x), \bar{\psi}(x)\rangle\\
&= \left\langle f(x_0 + \varepsilon r x), \frac{1}{\sin\theta}\bar{\psi}\left(\frac{x - \cos\theta}{\sin\theta}\right)\right\rangle\\
&\sim (r\varepsilon)^\alpha L(r\varepsilon)\left\langle g(x), \frac{1}{\sin\theta}\bar{\psi}\left(\frac{x - \cos\theta}{\sin\theta}\right)\right\rangle\\
&= \varepsilon^\alpha L(r\varepsilon)\left\langle g(rx), \frac{1}{\sin\theta}\bar{\psi}\left(\frac{x - \cos\theta}{\sin\theta}\right)\right\rangle\\
&= \varepsilon^\alpha L\left(r\varepsilon\right)\mathcal{W}_\psi g(r\cos\theta, r\sin\theta)\\
&\sim \varepsilon^\alpha L\left(\varepsilon\right)\mathcal{W}_\psi g(r\cos\theta, r\sin\theta),
\end{aligned}$$

kada $\varepsilon \to 0^+$.

Slično tvrđenje imamo i u slučaju kvaziasimptotskog ponašanja u beskonačnosti.

Teorema 4.1.2 *Neka* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *ima kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti, u odnosu na sporo promenljivu funkciju* L, *u* $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$

$$f\left(\lambda x\right) \sim \lambda^\alpha L(\lambda) g(x), \quad \text{kada } \lambda \to \infty,\ \text{u } \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}). \tag{4.4}$$

Tada, za svako $0 < \sigma \leq \frac{\pi}{2}$ *i* $r > 0$ *važi*

$$\mathcal{W}_\psi f(\lambda r\cos\theta, \lambda r\sin\theta) \sim \lambda^\alpha L\left(\lambda\right)\mathcal{W}_\psi g(r\cos\theta, r\sin\theta),\ \lambda \to \infty, \tag{4.5}$$

uniformno za $\sigma \leq \theta \leq \pi - \sigma$.

Dokaz. S obzirom na kvaziasimptotsko ponašanje (4.4), Banah-Štajnhausovu teoremu i kompaktnost skupa $\mathcal{C}_\sigma$ datog u (4.3), imamo da za svako $r>0$ i $\sigma \leq \theta \leq \pi-\sigma$ važi

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}_\psi f(\lambda r\cos\theta, \lambda r\sin\theta) \\ &= \left\langle f(\lambda r\cos\theta + \lambda r\sin\theta x), \bar{\psi}(x)\right\rangle \\ &= \left\langle f(\lambda r x), \frac{1}{\sin\theta}\bar{\psi}\left(\frac{x-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right\rangle \\ &\sim (r\lambda)^\alpha L(r\lambda)\left\langle g(x), \frac{1}{\sin\theta}\bar{\psi}\left(\frac{x-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right\rangle \\ &\sim \lambda^\alpha L\left(\lambda\right)\mathcal{W}_\psi g(r\cos\theta, r\sin\theta), \end{aligned}$$

kada $\lambda \to \infty$.

Primer 4.1.1 *Pokazaćemo kako mogu da se konstruišu distribucije koje ni u jednoj tački nemaju vrednost u smislu Lojaševiča (primer 3.2.1).*

Neka za niz pozitivnih brojeva $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *postoje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *i* $\sigma > 1$ *tako da je* $\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > \sigma > 1$, $n > n_0$. *Ovakvi nizovi se nazivaju nizovi sa šupljinama u smislu Adamara (Hadamard). Neka je* $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ *oblika*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x},$$

gde dati red konvergira u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. *Pretpostavimo da* f *ima vrednost u nekoj tački* x_0 *u smislu Lojaševiča. Odaberimo* $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ *tako da je* supp $\overline{\hat{\psi}} \subset [\sigma^{-\frac{1}{2}}, \sigma^{\frac{1}{2}}]$ *i* $\overline{\hat{\psi}}(1) = 1$. *Kako je* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *niz sa šupljinama sledi da je* $\overline{\hat{\psi}}(\dfrac{\lambda_n}{\lambda_m}) = 0$, $m \neq n$, *za dovoljno veliko* m. *Sada je*

$$\mathcal{W}_\psi f(x_0, \lambda_m^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\lambda_n x_0}\overline{\hat{\psi}}\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_m}\right) = c_m e^{i\lambda_m x_0}.$$

Dalje, ako $f(x_0)$ *ima vrednost u tački u smislu Lojaševiča iz teoreme 4.1.1 (za* $\alpha = 0$ *i* $L = 1$ *je* $\mathcal{W}_\psi 1(0,1) = 0$*), sledi da je* $c_m e^{i\lambda_m x_0} = o(1)$, *odnosno,*

$$\lim_{m\to\infty} c_m = 0. \tag{4.6}$$

Dakle, (4.6) je potreban uslov da bi f imala vrednost u x_0 u smislu Lojaševiča. Obrnuto, ako uslov (4.6) ne važi, tada f nema vrednost ni u jednoj tački u smislu Lojaševiča.
Isti postupak možemo primeniti i na distribucije oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(\lambda_n x) \quad i \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(\lambda_n x).$$

Recimo još da se slični primeri mogu naći u [65].

Primer 4.1.2 *Poznato je da Vajerštrasova funkcija*

$$w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^{-n} \cos(\beta^n x),\ \beta \geq \gamma > 1$$

nije nigde diferencijabilna. Pokažimo kako koristeći prethodne rezultate lako možemo dobiti i jači uslov od ovog.

Funkcija w je neprekidna i ograničena, i njen prvi izvod je

$$w'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^n \sin(\beta^n x).$$

Kako $(\frac{\beta}{\gamma})^n \neq o(1)$, iz primera 4.1.1 sledi da w' nema vrednost u smislu Lojaševiča ni za jedno $x_0 \in \mathbb{R}$. Recimo i to da je nepostojanje vrednosti od w' u svakoj tački u smislu Lojaševiča jači uslov od toga da w nema izvod ni u jednoj tački ([68]).

4.2 Teoreme Tauberovog tipa

Nasuprot problemima Abelovog tipa, tvrđenja Tauberovog tipa sadrže dodatne uslove na integralnu transformaciju koju posmatramo. Za takve uslove kažemo da su Tauberovog tipa. U narednim teoremama posmatramo kvaziasimptotsko ponašanje distribucija iz $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R})$ kao posledicu kvaziasimptotskog ponašanja njihovih malotalasnih transformacija.

Teorema 4.2.1 *Neka $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ i neka je $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ mali talas koji ima rekonstrukcioni mali talas. Tada postoji homogena distribucija g reda α takva da je*

$$f\left(x_0 + \varepsilon x\right) \sim \varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon) g(x), \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0^{+}, \ \textit{u } \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}) \tag{4.7}$$

ako i samo ako za $\mathcal{W}_{\psi} f$ važe sledeći uslovi:

1. *za svako $(b,a) \in \mathbb{H}$ postoji $M_{b,a}$ tako da je*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^{+}} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} \mathcal{W}_{\psi} f\left(x_0 + \varepsilon b, \varepsilon a\right) = M_{b,a} < \infty; \tag{4.8}$$

2. *postoje konstante $\gamma, \beta, M > 0$ takve da za svako $(b,a) \in \mathbb{H}$ i $\varepsilon < 1$ važi*

$$\frac{\left|\mathcal{W}_{\psi} f\left(x_0 + \varepsilon b, \varepsilon a\right)\right|}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} < M \left(a + \frac{1}{a}\right)^{\gamma} (1 + |b|)^{\beta}. \tag{4.9}$$

Štaviše, $M_{b,a} = \mathcal{W}_{\psi} g(b,a)$, $(b,a) \in \mathbb{H}$.

Dokaz. Bez gubitka na opštosti možemo pretpostaviti da je $x_0 = 0$.

Neka za $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ važi kvaziasimptotsko ponašanje (4.7). Iz teoreme 4.1.1 Abelovog tipa sledi kvaziasimptotsko ponašanje malotalasne transformacije date distribucije, odnosno važi (4.8). Takođe, iz (4.7) sledi da je skup $\left\{ \frac{f(\varepsilon\, \cdot)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} \right\}_{\varepsilon < 1}$ ograničen u $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$. Iz karakterizacije ograničenih skupova u $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$, date u teoremi 2.5.4, imamo da, za svako $\varepsilon < 1$, važi

$$\frac{\left|\left(\mathcal{W}_{\psi} f(\varepsilon x)\right)(b,a)\right|}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} < C \left(a + \frac{1}{a}\right)^{\gamma} (1 + |b|)^{\beta}, \ (b,a) \in \mathbb{H},$$

što nas uz poznatu vezu $(\mathcal{W}_{\psi} f(\varepsilon x))(b,a) = (\mathcal{W}_{\psi} f(x))(\varepsilon b, \varepsilon a)$, $\varepsilon > 0$, $(b,a) \in \mathbb{H}$, dovodi do nejednakosti (4.9).

Dokažimo da su dati uslovi i dovoljni. Iz (4.8) i (4.9) sledi da je funkcija $J(b,a) = M_{b,a}$, $(b,a) \in \mathbb{H}$, merljiva i važi

$$|J(b,a)| = |M_{b,a}| < M \left(a + \frac{1}{a}\right)^{\gamma} (1 + |b|)^{\beta}, \ (b,a) \in \mathbb{H}.$$

Dakle, $J(b,a) \in \mathcal{S}'(\mathbb{H})$.

Po definiciji malotalasne transformacije, uz smenu promenljivih $\varepsilon x = t$, imamo da je

$$(\mathcal{W}_\psi f(\varepsilon x))(b,a) = \int_{\mathbb{R}} f(\varepsilon x)\frac{1}{a}\bar{\psi}\left(\frac{x-b}{a}\right)dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{1}{\varepsilon a}\bar{\psi}\left(\frac{t-\varepsilon b}{\varepsilon a}\right)dt = \mathcal{W}_\psi f(\varepsilon b, \varepsilon a).$$

Data veza i formula (2.18) dovode nas do

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\langle \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)}, \phi(x)\right\rangle = \frac{1}{c_{\psi,\eta}}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathcal{W}_\psi f\,(\varepsilon b,\varepsilon a)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)}\mathcal{W}_{\bar{\eta}}\phi(b,a)\,\frac{db\,da}{a},$$

gde je η rekonstrukcioni mali talas za ψ. Kako $\mathcal{W}_{\bar{\eta}}\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{H})$ imamo da za svako $\alpha \in \mathbb{N}$ postoji konstanta $C > 0$, takva da je

$$|\mathcal{W}_{\bar{\eta}}(b,a)| \leq \frac{C}{(a+\frac{1}{a})^\alpha\,(1+b)^\alpha},\ (b,a)\in\mathbb{H}.$$

Ova činjenica, uz uslove (4.8) i (4.9), nam omogućava da primenimo Lebegovu teoremu o dominantnoj konvergenciji, nakon čega dobijamo

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left\langle \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)}, \phi(x)\right\rangle = \frac{1}{c_{\psi,\eta}}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty M_{b,a}\mathcal{W}_{\bar{\eta}}\phi(b,a)\,\frac{db\,da}{a}$$

$$= \frac{1}{c_{\psi,\eta}}\langle \mathcal{M}_\eta M_{b,a}, \phi(x)\rangle.$$

Kako poslednja granična vrednost postoji za svako $\phi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ sledi da f ima kvaziasimptotsko ponašanje u prostoru $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ i da g, dato sa $M_{b,a} = \mathcal{W}_\psi g(b,a)$, $(b,a)\in\mathbb{H}$, zadovoljava (4.7).

Primetimo još da su uslovi (4.8) i (4.9) globalna svojstva malotalasne transformacije, dok je kvaziasimptotsko ponašanje u konačnoj tački, dato u (4.7), lokalno svojstvo. Kasnije ćemo uslove (4.8) i (4.9) lokalizovati, za šta će se koristiti tvrđenje teoreme 4.2.1.

Uz izvesne izmene argumenti dati u teoremi 4.2.1 su dovoljni da bi se dokazala i Tauberova teorema za kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti. Međutim, dokaz se može izvesti i na potpuno drugačiji način, koristeći neke od fundamentalnih teorema funkcionalne analize. Navedimo sada rezultat Tauberovog tipa za ponašanje distribucije u beskonačnosti.

Teorema 4.2.2 *Neka $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ i neka je $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ mali talas za koji postoji rekonstrukcioni mali talas. Tada postoji homogena distribucija g reda α takva da je*

$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha L(\lambda) g(x), \quad \textit{kada } \lambda \to \infty, \ \textit{u } \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}) \tag{4.10}$$

ako i samo ako za $\mathcal{W}_\psi$ važe sledeći uslovi:

1. *za svako $(b, a) \in \mathbb{H}$ postoji $M_{b,a}$ tako da je*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda^\alpha L(\lambda)} \mathcal{W}_\psi f(\lambda b, \lambda a) = M_{b,a} < \infty; \tag{4.11}$$

2. *postoje konstante $\gamma, \beta, M > 0$ takve da za svako $(b, a) \in \mathbb{H}$ i $\lambda > 1$ važi*

$$\frac{|\mathcal{W}_\psi f(\lambda b, \lambda a)|}{\lambda^\alpha L(\lambda)} < M \left(a + \frac{1}{a}\right)^\gamma (1 + |b|)^\beta. \tag{4.12}$$

Štaviše, $M_{b,a} = \mathcal{W}_\psi g(b, a), (b, a) \in \mathbb{H}$.

Dokaz. Kao i u dokazu teoreme 4.2.1, iz Abelove teoreme 4.1.2 i karakterizacije ograničenih skupova u $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$, date u teoremi 2.5.4, sledi da su uslovi (4.11) i (4.12) potrebni.

U drugom smeru, pokažimo prvo da je *span* $\mathcal{B}$ gust u $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$, gde je

$$\mathcal{B} = \left\{ \psi_{b,a} := \frac{1}{a} \bar{\psi} \left(\frac{\cdot - b}{a} \right), \ (b, a) \in \mathbb{H} \right\},$$

a *span* $\mathcal{B}$ je skup linearnih kombinacija elemenata skupa $\mathcal{B}$. Neka $h \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$. Ako je

$$\left\langle h(x), \frac{1}{a} \bar{\psi} \left(\frac{x - b}{a} \right) \right\rangle = \mathcal{W}_\psi h(b, a) = 0, \quad \text{za svako } (b, a) \in \mathbb{H},$$

na osnovu formule (2.18) sledi da je

$$\langle h(x), \phi(x) \rangle = \frac{1}{c_{\psi,\eta}} \langle \mathcal{W}_\psi h(b, a), \mathcal{W}_{\bar{\eta}} \phi(b, a) \rangle = 0, \ \forall \phi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R}),$$

odakle sledi da je $h = 0$. Iz Han-Banahove teoreme sledi da je $span\mathcal{B}$ gust u $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$. Dalje, neka je dat skup

$$\mathcal{F} = \left\{ f_\lambda = \frac{f(\lambda\, \cdot)}{\lambda^\alpha L(\lambda)}; \lambda \geq 1 \right\}.$$

Iz (4.12) i teoreme 2.5.4 sledi da je $\mathcal{F}$ ograničen skup u $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$, što, uz pomoć Banah-Štajnhausove teoreme, implicira da je $\mathcal{F}$ ravnomerno neprekidan skup. Poznato je da se za ravnomerno neprekidne skupove tačkasta konvergencija nad gustim podskupom može proširiti do konvergencije nad čitavim skupom. S druge strane, u uslovu (4.11) je data tačkasta konvergencija elemenata skupa $\mathcal{F}$ nad $span\,\mathcal{B}$, pa je možemo proširiti na $\mathcal{S}_0(\mathbb{R})$. Dakle, za neko $g \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ imamo da $f_\lambda \to g$, kada $\lambda \to \infty$ u slabom smislu, čime je dobijeno kvaziasimptotsko ponašanje (4.10).

4.3 Teoreme Tauberovog tipa sa lokalnim uslovima

U narednoj teoremi ćemo globalne uslove (4.8) i (4.9) zameniti lokalnim uslovima (4.14) i (4.15). Slični uslovi korišćeni su u [7, 8, 70, 71], gde su kroz teoreme Tauberovog tipa proučavana lokalna svojstva uopštenih funkcija u odnosu na razne integralne transformacije (Melinova, Laplasova, itd.).

Teorema 4.3.1 *Neka $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ i neka je $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ mali talas koji ima rekonstrukcioni mali talas. Tada postoji homogena distribucija g reda α takva da je*

$$f(x_0 + \varepsilon x) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) g(x), \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0^+, \ \textit{u } \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}) \tag{4.13}$$

ako i samo ako važe sledeći uslovi:

1. *za svake $(b, a) \in \mathbb{H}$, takve da je $a^2 + b^2 = 1$, postoji $M_{b,a}$ za koje je*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} \mathcal{W}_\psi f(x_0 + \varepsilon b, \varepsilon a) = M_{b,a} < \infty; \tag{4.14}$$

2. *postoji $m \in \mathbb{N}$ takvo da je*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{a^2+b^2=1,\, a>0} \frac{a^m}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} \left| \mathcal{W}_\psi f(x_0 + \varepsilon b, \varepsilon a) \right| < \infty. \tag{4.15}$$

Štaviše, $M_{b,a} = \mathcal{W}_\psi g(b,a)$, $(b,a) \in \mathbb{H}$.

Dokaz. Neka je ispunjen uslov (4.13). Kako su u (4.7) i (4.13) data identična kvaziasimptotska ponašanja, a iz globalnih uslova (4.8) i (4.9) slede lokalni uslovi (4.14) i (4.15), dobijamo da važe uslovi (4.14) i (4.15).

Pokažimo da su dati uslovi i dovoljni. Radi lakšeg rada, bez gubitka na opštosti, možemo pretpostaviti da je $x_0 = 0$. Posmatrajmo skup $I = \{(b,a) \in \mathbb{H} : |b| \le 1,\ a \le 1\}$. Označimo sa F i G malotalasne transformacije distribucije $f \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$, u odnosu na mali talas $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$, na skupu I i njegovom komplementu I^C, respektivno, odnosno neka je

$$F = \chi_I \mathcal{W}_\psi f \ \text{ i } \ G = \mathcal{W}_\psi f - F,$$

gde je χ_I karakteristična funkcija za skup I. Dalje, sa f_0 i h_0 označimo dejstvo malotalasnog operatora sinteze na F i G :

$$f_0 = c_{\psi,\eta}^{-1} \mathcal{M}_\eta F \ \text{ i } \ h_0 = c_{\psi,\eta}^{-1} \mathcal{M}_\eta G,$$

gde je η rekonstrukcioni mali talas za ψ. Jasno, F i G pripadaju prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{H})$, dok su f_0 i g_0 elementi prostora $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$. Kako je

$$\mathcal{W}_\psi h_0 + \mathcal{W}_\psi f_0 = G + F = \mathcal{W}_\psi f,$$

koristeći osobine malotalasne transformacije, dobijamo da je

$$f = h_0 + f_0.$$

Pokažimo da je $h \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, produženje od $h_0 \in \mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ na $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, glatko u okolini nule, odnosno da je

$$\mathcal{W}_\psi h(b,a) = o\left(a^\sigma\right), \ \text{ kada } \ a \to 0^+,$$

za svako $\sigma > 0$, uniformno po b, u okolini nule. Neka je $\sigma > 0$. Kako $G \in \mathcal{S}'(\mathbb{H})$ i $\mathcal{W}_\psi \eta(b,a) \in \mathcal{S}(\mathbb{H})$, iz (2.16) i definicije prostora $\mathcal{S}(\mathbb{H})$, sledi da postoje $n \in \mathbb{N}$ i $B > 0$ takvi da je

$$|G(b,a)| \le B \left(a + \frac{1}{a}\right)^n (1+|b|)^n, \ (b,a) \in \mathbb{H}, \tag{4.16}$$

odnosno,

$$|\mathcal{W}_\psi \eta(b,a)| \le B \left(a + \frac{1}{a}\right)^{-1-2n-\sigma} (1+|b|)^{-2-n}, \ (b,a) \in \mathbb{H}. \tag{4.17}$$

Neka je $|b| \leq \dfrac{1}{2}$ i $a < 1$. Iz (4.16) i (4.17), koristeći formulu (2.17) sledi

$$\begin{aligned}
|c_{\psi,\eta}\mathcal{W}_\psi h(b,a)| &= \left| \int_1^\infty \int_{|b'|\geq 1} \mathcal{W}_\psi \eta \left(\frac{b-b'}{a'}, \frac{a}{a'}\right) G(b',a') \frac{db'\, da'}{(a')^2} \right| \\
&\leq 4^n B^2 \int_1^\infty \int_{|b'|\geq 1} |b'|^n (a')^n \left(\frac{a'}{|b-b'|}\right)^{2+n} \left(\frac{a}{a'}\right)^{1+2n+\sigma} \frac{db'\, da'}{(a')^2} \\
&\leq a^{1+2n+\sigma} 4^n B^2 \left(\int_{|b'|\geq 1} \frac{|b'|^n \; db'}{\left(|b'| - \frac{1}{2}\right)^{n+2}}\right) \left(\int_1^\infty \frac{da'}{(a')^{\sigma+1}}\right) = o\left(a^\sigma\right),
\end{aligned}$$

za svako $\sigma > 0$. Koristeći karakterizaciju singularnog nosača distribucije (teorema 2.5.3) zaključujemo da je h glatko u intervalu $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Iz mogućnosti produženja h_0 sledi da, za svako $\sigma > 0$, važi

$$h_0(\varepsilon x) = o\left(\varepsilon^\sigma\right), \text{ kada } \varepsilon \to 0, \text{ u } \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}),$$

odnosno da je, za svako $\sigma > 0$,

$$f\left(\varepsilon x\right) - f_0\left(\varepsilon x\right) = o\left(\varepsilon^\sigma\right), \text{ kada } \varepsilon \to 0, \text{ u } \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}).$$

Iz poslednje relacije zaključujemo da f ima kvaziasimptotsko ponašanje u nuli u $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$, dato u (4.13), ako i samo ako f_0 ima kvaziasimptotsko ponašanje u nuli u $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$, u odnosu na istu sporo promenljivu funkciju.

Dalje, pokažimo da f_0 ima kvaziasimptotsko ponašanje u nuli, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L, u $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$. Za to nam je, po teoremi 4.2.1, dovoljno da pokažemo da f_0 zadovoljava uslove (4.8) i (4.9).

Pokažimo prvo da za $\mathcal{W}_\psi f_0$ važi

$$\frac{1}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} |\mathcal{W}_\psi f_0(\varepsilon b, \varepsilon a)| \leq M \left(a + \frac{1}{a}\right)^\gamma (1+|b|)^\beta, \tag{4.18}$$

za neke konstante $\gamma, \beta, M > 0$ i za sve $(b,a) \in \mathbb{H}$, $0 < \varepsilon \leq 1$. Iz (4.15) imamo da postoje konstanta $M_1 > 0$ i vrednosti $m \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon_0 > 0$ takve da je

$$\frac{a^m}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} |\mathcal{W}_\psi f\left(\varepsilon b, \varepsilon a\right)| < M_1, \tag{4.19}$$

za svako $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 = \sqrt{2}$ i za sve $(b,a) \in \mathbb{H}$, za koje je $a^2 + b^2 = 1$. Neka $a' \in (0, \dfrac{1}{\varepsilon})$ i $b' \in (-\dfrac{1}{\varepsilon}, \dfrac{1}{\varepsilon})$. Zamenimo li u (4.19) vrednosti a, b i ε

sa $\dfrac{a'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}}, \dfrac{b'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}}$ i $\varepsilon\sqrt{(a')^2+(b')^2}$, respektivno, dobijamo da važi

$$\frac{(a')^m\left|\mathcal{W}_\psi f\left(\varepsilon b',\varepsilon a'\right)\right|}{\varepsilon^\alpha\left(\sqrt{(a')^2+(b')^2}\right)^{m+\alpha}L\left(\varepsilon\sqrt{(a')^2+(b')^2}\right)}<M_1,\ 0<\varepsilon\leq 1. \tag{4.20}$$

Datu zamenu smo mogli učiniti, jer je

$$\Big(\frac{a'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}}\Big)^2+\Big(\frac{b'}{\sqrt{(a')^2+(b')^2}}\Big)^2=1\ \text{ i }\ \varepsilon\sqrt{(a')^2+(b')^2}\leq\sqrt{2}.$$

Takođe, možemo pretpostaviti da je $\alpha+m\geq 1$.

Dalje, posmatrajmo sporo promenljivu funkciju L. Kako su za ispitivanje kvaziasimptotskog ponašanja u nuli bitne samo vrednosti funkcije L u okolini nule, možemo pretpostaviti ([67, odeljak 3],[1, str. 25]) da postoji konstanta $M_2>0$ takva da je

$$\frac{L(\varepsilon x)}{L(\varepsilon)}\leq M_2\max\left\{x,\frac{1}{x}\right\}\leq M_2\,\frac{1+x^2}{x},\ \text{ za svako } \varepsilon,x>0. \tag{4.21}$$

Iz $\mathcal{W}_\psi\eta\in\mathcal{S}(\mathbb{H})$ sledi da za svako $\beta,\gamma>0$, postoji konstanta $M_3>0$ takva da je

$$|\mathcal{W}_\psi\eta(b,a)|\leq M_3\left(a+\frac{1}{a}\right)^{-\gamma}(1+|b|)^{-\beta}. \tag{4.22}$$

Dalje, procenu (4.22) posmatramo sa sledećim vrednostima β i γ :

$$\beta=\alpha+m+3,\ \gamma=\max\left\{m+2,\alpha+\beta+1\right\}. \tag{4.23}$$

U daljem radu koristićemo i elementarnu nejednakost

$$1+|x+y|\leq(1+|x|)\,(1+|y|)\,. \tag{4.24}$$

Tada za $0<\varepsilon\leq 1$, iz (4.20), (4.21) i (4.24), imamo da je

$$|c_{\psi,\eta}\mathcal{W}_\psi f_0(\varepsilon b,\varepsilon a)|=\left|\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\mathcal{W}_\psi\eta\left(\frac{\varepsilon b-b'}{a'},\frac{\varepsilon a}{a'}\right)F(b',a')\frac{db'\,da'}{(a')^2}\right|$$

$$\leq \left| \int_0^{\varepsilon^{-1}} \int_{-\varepsilon^{-1}}^{\varepsilon^{-1}} \mathcal{W}_\psi \eta \left(\frac{b-b'}{a'}, \frac{a}{a'} \right) \mathcal{W}_\psi f(\varepsilon b', \varepsilon a') \frac{db'\, da'}{(a')^2} \right|$$

$$\leq M_1 \varepsilon^\alpha \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\sqrt{(a')^2 + (b')^2} \right)^{\alpha+m}$$

$$L\left(\varepsilon \sqrt{(a')^2 + (b')^2} \right) \left| \mathcal{W}_\psi \eta \left(\frac{b-b'}{a'}, \frac{a}{a'} \right) \right| \frac{db'\, da'}{(a')^{m+2}}$$

$$\leq M_1 M_2 \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left(\sqrt{(a')^2 + (b')^2} \right)^{\alpha+m-1}$$

$$\left(1 + (a')^2 + (b')^2 \right) \left| \mathcal{W}_\psi \eta \left(\frac{b-b'}{a'}, \frac{a}{a'} \right) \right| \frac{db'\, da'}{(a')^{m+2}}$$

$$\leq M_1 M_2 \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} (a' + |b'|)^{\alpha+m-1} (1+a')^2 (1+|b'|)^2$$

$$\left| \mathcal{W}_\psi \eta \left(\frac{b-b'}{a'}, \frac{a}{a'} \right) \right| \frac{db'\, da'}{(a')^{m+2}}$$

$$\leq M_1 M_2 \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) \left(4I_1 + 4I_2 + 2^{\alpha+m+1} I_3 \right),$$

gde je

$$I_1 = \int_0^1 \int_{|b-b'|\leq 1} (1+|b'|)^{\alpha+m+1} \left| \mathcal{W}_\psi \eta \left(\frac{b-b'}{a'}, \frac{a}{a'} \right) \right| \frac{db'\, da'}{(a')^{m+2}},$$

$$I_2 = \int_0^1 \int_{1<|b-b'|} (1+|b'|)^{\alpha+m+1} \left| \mathcal{W}_\psi \eta \left(\frac{b-b'}{a'}, \frac{a}{a'} \right) \right| \frac{db'\, da'}{(a')^{m+2}},$$

$$I_3 = \int_1^\infty \int_{-\infty}^\infty (a')^{\alpha-1} (1+|b'|)^{\alpha+m+1} \left| \mathcal{W}_\psi \eta \left(\frac{b-b'}{a'}, \frac{a}{a'} \right) \right| db'\, da'.$$

Pri proceni poslednja tri integrala koristimo (4.22), (4.23) i (4.24). Za integral I_1 imamo

$$I_1 \leq M_3 \int_0^1 \int_{|b'|\leq 1+|b|} (1+|b'|)^{\alpha+m+1} \left(\frac{a'}{a} \right)^\gamma \frac{db'\, da'}{(a')^{m+2}}$$

$$\leq 2M_3 \left(\frac{1}{a} \right)^\gamma (1+|b|)(2+|b|)^{\alpha+m+1} \int_0^1 (a')^{\gamma-m-2}\, da'$$

$$< 2^{\alpha+m+2} M_3 \left(a + \frac{1}{a}\right)^{\gamma} (1+|b|)^{\beta},$$

za I_2 je

$$I_2 \leq M_3 \int_0^1 \int_{1<|b-b'|} (1+|b'|)^{\alpha+m+1} \left(\frac{a'}{a}\right)^{\gamma} \left(\frac{a'}{a'+|b-b'|}\right)^{\beta} \frac{db'\,da'}{(a')^{m+2}}$$

$$\leq M_3 \left(a+\frac{1}{a}\right)^{\gamma} \left(\int_0^1 (a')^{\gamma+\beta-m-2}\,da'\right) \left(\int_{1<|b-b'|} \frac{(1+|b'|)^{\alpha+m+1}}{|b-b'|^{\beta}}\,db'\right)$$

$$\leq M_3 \left(a+\frac{1}{a}\right)^{\gamma} \int_{1<|b'|} \frac{(1+|b'|+|b|)^{\alpha+m+1}}{|b'|^{\beta}}\,db'$$

$$\leq 2M_3 \left(a+\frac{1}{a}\right)^{\gamma} (1+|b|)^{\alpha+m+1} \int_1^{\infty} \frac{(1+b')^{\alpha+m+1}}{|b'|^{\beta}}\,db'$$

$$\leq 2^{\alpha+m+2} M_3 \left(a+\frac{1}{a}\right)^{\gamma} (1+|b|)^{\beta}$$

i za integral I_3

$$I_3 \leq M_3 a^{\gamma} \int_1^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(a')^{\alpha+\beta-\gamma-1}(1+|b'|)^{\alpha+m+1}}{(a'+|b-b'|)^{\beta}}\,db'\,da'$$

$$\leq M_3 \left(a+\frac{1}{a}\right)^{\gamma} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+|b'|)^{\alpha+m+1}}{(1+|b-b'|)^{\beta}}\,db'\right) \left(\int_1^{\infty} \frac{da'}{(a')^{\gamma+1-\beta-\alpha}}\right)$$

$$\leq M_3 \left(a+\frac{1}{a}\right)^{\gamma} (1+|b|)^{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{db'}{(1+|b'|)^2}$$

$$\leq 2M_3 \left(a+\frac{1}{a}\right)^{\gamma} (1+|b|)^{\beta}.$$

Dakle, nejednakost (4.18) je zadovoljena za $M = 2^{\alpha+m+6} M_1 M_2 M_3$.

Da bi primenili teoremu 4.2.1 na f_0 preostaje nam da pokažemo da f_0 zadovoljava (4.8), odnosno da (4.14) važi za svako $(b,a) \in \mathbb{H}$. Za proizvoljno $(b,a) \in \mathbb{H}$ stavimo da je $b = r\cos\theta$ i $a = r\sin\theta$, za $r > 0$ i $0 < \theta < \pi$. Tada je

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\mathcal{W}_{\psi} f\,(\varepsilon b, \varepsilon a)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\mathcal{W}_{\psi} f\,(\varepsilon r\cos\theta, \varepsilon r\sin\theta)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)}$$

$$= r^{\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{L(\varepsilon)}{L(\frac{\varepsilon}{r})} \frac{\mathcal{W}_{\psi} f\,(\varepsilon \cos\theta, \varepsilon \sin\theta)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} = r^{\alpha} M_{\cos\theta,\,\sin\theta} := M_{b,a}.$$

Definišimo funkciju $J(b,a) = M_{b,a}$, za $(b,a) \in \mathbb{H}$. Iz poslednje relacije i (4.20) zaključujemo da je $J \in \mathcal{S}'(\mathbb{H})$ funkcija sporog rasta. Preciznije, kako je $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ i $\sin\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, imamo da za svako $(b,a) \in \mathbb{H}$ važi

$$|J(b,a)| = r^{\alpha}\,|M_{\cos\theta,\,\sin\theta}| \leq M_1 \frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{\alpha}}{(\sin\theta)^m} \leq M_1 \frac{(a+|b|)^{\alpha+m}}{a^m}.$$

Takođe, iz relacija (4.20) i (4.21) sledi da je

$$\left| \frac{\mathcal{W}_{\psi} f\,(\varepsilon b, \varepsilon a)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} \right| \leq M_1 M_2 \frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^{\alpha+m}}{a^m} \max\left\{ \sqrt{a^2+b^2}, \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\},$$

za $0 < \varepsilon\sqrt{a^2+b^2} \leq \sqrt{2}$.

Konačno, ako primenimo poslednje dve činjenice, procenu (4.22) i Lebegovu teoremu o dominantnoj konvergenciji imamo da je

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\mathcal{W}_{\psi} f_0\,(\varepsilon b, \varepsilon a)}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{c_{\psi,\eta}} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \mathcal{W}_{\psi}\eta \left(\frac{b-b'}{a'}, \frac{a}{a'} \right) \frac{\mathcal{W}_{\psi} f(\varepsilon b', \varepsilon a')}{\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)} \frac{db'\,da'}{(a')^2}$$
$$= \frac{1}{c_{\psi,\eta}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}_{\psi}\eta \left(\frac{b-b'}{a'}, \frac{a}{a'} \right) J(b',a') \frac{db'\,da'}{(a')^2},$$

čime je dokazano tvrđenje teoreme.

Komentar 4.3.1 *U uslovima (4.14) i (4.15) posmatrali smo jedinični polukrug $a^2+b^2=1$, $a>0$, ali iz dokaza je jasno da ako uzmemo proizvoljan polukrug $a^2+b^2=r^2$, $a>0$, $r>0$, teorema 4.3.1 i dalje važi.*

Glava 5

Teoreme Tauberovog tipa u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Ova glava se sastoji od tri poglavlja. U poglavlju 5.1 je pokazano na koji način se kvaziasimptotsko ponašanje u konačnoj tački i u beskonačnosti može produžiti sa $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ na $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Rezultati četvrte glave i poglavlja 5.1 su korišćeni u poglavlju 5.2, gde su date Tauberove teoreme za kvaziasimptotsko ponašanje temperiranih distribucija u odnosu na njihovu malotalasnu transformaciju. U poglavlju 5.3 je pokazano kako dodavanjem novih Tauberovih uslova, datih preko kvaziasimptotske ograničenosti posmatranih temperiranih distribucija, možemo dobiti preciznije rezultate u odnosu na one iz poglavlja 5.2.

5.1 Kvaziasimptotsko produženje sa $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ na $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Prostori $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$ i $\mathcal{D}(\mathbb{R}_-)$ sadrže elemente iz $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ čiji se nosači nalaze u $\mathbb{R}_+$ i $\mathbb{R}_-$, respektivno. Njihovi duali su $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+) = (\mathcal{D}(\mathbb{R}_+))'$ i $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-) = (\mathcal{D}(\mathbb{R}_-))'$. Takođe, posmatramo i prostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}_0) := \mathcal{D}(\mathbb{R}_+) \oplus \mathcal{D}(\mathbb{R}_-)$, sa dualom $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_0) = (\mathcal{D}(\mathbb{R}_0))'$. Sa $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ i $\mathcal{S}(\mathbb{R}_-)$ označavamo zatvorene potprostore od $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ čiji nosači se nalaze u $\overline{\mathbb{R}}_+$ i $\overline{\mathbb{R}}_-$, respektivno. Njihovi duali su $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+) = (\mathcal{S}(\mathbb{R}_+))'$ i $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_-) = (\mathcal{S}(\mathbb{R}_-))'$. Posmatramo i prostor $\mathcal{S}(\mathbb{R}_0) := \mathcal{S}(\mathbb{R}_+) \oplus \mathcal{S}(\mathbb{R}_-)$, sa dualom $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_0) = (\mathcal{S}(\mathbb{R}_0))'$. Za Furijeovu transformaciju važi

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}_+(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R}_+) \text{ i } \mathcal{F}(\mathcal{S}_-(\mathbb{R})) = \mathcal{S}(\mathbb{R}_-),$$

gde su $\mathcal{S}_+(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}_-(\mathbb{R})$ prostori koji sadrže progresivne, odnosno regresivne brzo opadajuće funkcije. Takođe, važi

$$\mathcal{F}(\mathcal{S}'_+(\mathbb{R})) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+) \text{ i } \mathcal{F}(\mathcal{S}'_-(\mathbb{R})) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}_-) \text{ i } \mathcal{F}(\mathcal{S}'_0(\mathbb{R})) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}_0). \tag{5.1}$$

Poslednja veza nam omogućava da probleme postavljene u prostoru $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R})$ (koji se od prostora $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ razlikuje za polinome), preko Furijeove transformacije, posmatramo u prostoru $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_0)$ (koji se od prostora $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ razlikuje za distribucije čiji nosači su nula, tj. za konačne sume Dirakove delta distribucije i njenih izvoda).

Neka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ i neka f ima kvaziasimptotsko ponašanje u $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R})$

$$f\,(x_0 + \varepsilon x) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) g(x), \text{ kada } \varepsilon \to 0^+, \text{ u } \mathcal{S}'_0(\mathbb{R}). \tag{5.2}$$

Nakon Furijeove transformacije i smene $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$, dobijamo ekvivalentan izraz

$$e^{i\lambda x_0 x} \hat{f}(\lambda x) \sim \lambda^{-1-\alpha} L(\lambda^{-1}) \hat{g}(x), \text{ kada } \lambda \to \infty, \text{ u } \mathcal{S}'(\mathbb{R}_0). \tag{5.3}$$

Dakle, umesto problema kvaziasimptotskog ponašanja u nuli u $\mathcal{S}'_0(\mathbb{R})$ možemo posmatrati kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti u $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_0)$. Štaviše, kako je $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_0) = \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+) \oplus \mathcal{S}'(\mathbb{R}_-)$ dovoljno je ispitivati kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti u $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$.

Poznato je ([14], teorema 6.9.2) da distribucija $f_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ ima produženje na $\mathcal{D}'(\overline{\mathbb{R}}_+)$ ako i samo ako postoji $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots\}$ tako da važi

$$f_0(\varepsilon x) = O(\varepsilon^\beta), \text{ kada } \varepsilon \to 0^+, \text{ u } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+). \tag{5.4}$$

Teorema 5.1.1 *Neka $f_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ ima produženje na $\overline{\mathbb{R}}_+$. Neka je L sporo promenljiva funkcija u beskonačnosti i neka $\alpha \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da f_0 ima kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti u $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ dato sa*

$$f_0(\lambda x) \sim \lambda^\alpha L(\lambda) g(x), \text{ kada } \lambda \to \infty, \text{ u } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+). \tag{5.5}$$

Tada $f_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$ i ima kvaziasimptotsko ponašanje (5.5) u $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$.

Štaviše, neka je $f \in \mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}}_+)$ proizvoljno produženje od f_0.

(i) Ako je $\alpha > -1$, tada f ima kvaziasimptotsko ponašanje (5.5) u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(ii) Ako je $\alpha < -1$ i $\alpha \notin \mathbb{Z}_-$, tada postoje konstante $a_0, \ldots, a_{n-1}$, $n < -\alpha$ takve da važi

$$f(\lambda x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{\delta^{(j)}(x)}{\lambda^{j+1}} + \lambda^\alpha L(\lambda) g(x) + o(\lambda^\alpha L(\lambda)), \tag{5.6}$$

kada $\lambda \to \infty$, u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Konstante zavise od izbora produženja f.

(iii) Ako je $\alpha = -k$, $k \in \mathbb{Z}_+$, tada je g oblika $g(x) = C \operatorname{Pf}\left(\frac{H(x)}{x^k}\right)$, za neku konstantu C, i postoje konstante $a_0, \ldots, a_{k-2}$ i asocirana asimptotsko homogena funkcija reda nula u odnosu na L za koju je

$$c(ax) = c(x) + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} C L(x) \log a + o(L(x)),\ x \to \infty, \tag{5.7}$$

tako da važi

$$f(\lambda x) = C \frac{L(\lambda)}{\lambda^k} \operatorname{Pf}\left(\frac{H(x)}{x^k}\right) + \frac{c(\lambda)}{\lambda^k} \delta^{(k-1)}(x) + \sum_{j=0}^{k-2} a_j \frac{\delta^{(j)}(x)}{\lambda^{j+1}} + o\left(\frac{L(\lambda)}{\lambda^k}\right), \tag{5.8}$$

kada $\lambda \to \infty$, u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Konstante i funkcija c zavise od izbora produženja f.

Dokaz. Tvrđenja (i), (ii) i (iii) direktno slede iz teorema 3.3.6, 3.3.7 i 3.3.8, dok iz teoreme 3.3.5 sledi i da je f temperirana distribucija. Kako je f_0 restrikcija od f na $\mathcal{D}(\mathbb{R}_+)$, zaključujemo da $f_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$ i više, kvaziasimptotsko ponašanje (5.5) važi u $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$.

Posledica 5.1.1 *Neka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Neka je L sporo promenljiva funkcija u nuli i neka $x_0, \alpha \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da f ima kvaziasimptotsko ponašanje*

$$f(x_0 + \varepsilon x) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) g(x), \quad \text{kada } \varepsilon \to 0^+,\ \text{u } \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}). \tag{5.9}$$

(i) Ako je $\alpha < 0$, tada f ima kvaziasimptotsko ponašanje (5.9) u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(ii) Ako je $\alpha > 0$ i $\alpha \notin \mathbb{Z}_+$, tada postoji polinom p, stepena manjeg od α, tako da je

$$f(x_0+\varepsilon x) = p(\varepsilon x) + \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) g(x) + o(\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)), \quad \text{kada } \varepsilon \to 0^+,\ \text{u } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \tag{5.10}$$

(iii) Ako je $\alpha = k$, $k \in \mathbb{N}$, tada je g oblika $g(x) = C_- x_-^k + C_+ x_+^k$, za neke konstante C_- i C_+, i postoje polinom p stepena najviše $(k-1)$ i asimptotski homogena funkcija b stepena nula u nuli, u odnosu na L, tako da je

$$f(x_0 + \varepsilon x) = p(\varepsilon x) + b(\varepsilon)\varepsilon^k x^k + \varepsilon^k L(\varepsilon) g(x) + o(\varepsilon^k L(\varepsilon)), \tag{5.11}$$

kada $\varepsilon \to 0^+$, u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Dokaz. Kao što je učinjeno u (5.3), primenimo Furijeovu transformaciju na $f(x_0 + \ \cdot\ )$. U $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ možemo na jedinstven način napraviti razlaganja $\hat{f} = \hat{f}_- + \hat{f}_+$ i $\hat{g} = \hat{g}_- + \hat{g}_+$, gde $\hat{f}_\pm, \hat{g}_\pm \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_\pm)$. Primenimo li teoremu 5.1.1 na $\hat{f}_\pm, \hat{g}_\pm$ i $L(\frac{1}{\lambda})$ dobijamo rezultate u Furijeovom domenu.

Pokažimo još da je funkcija b iz (5.11) asimptotski homogena, stepena 0, a ne asocirano asimptotski homogena, kao što je to slučaj u teoremi 5.1.1 pod (iii). Biramo $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ takvo da važi

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \phi(x)\, dx = 1 \ \text{ i } \int_{-\infty}^{\infty} x^j \phi(x)\, dx = 0, \ \text{za } j < k.$$

Primenimo li (5.11) na tako odabrano ϕ dobijamo

$$(a\varepsilon)^k b(a\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} x^k \phi(x)\, dx + L(a\varepsilon) \langle g(a\varepsilon x), \phi(x) \rangle + o(\varepsilon^k L(\varepsilon))$$

$$= \langle f(a\varepsilon x), \phi(x) \rangle = \frac{1}{a} \left\langle f(\varepsilon x), \phi\left(\frac{x}{a}\right) \right\rangle$$

$$= (a\varepsilon)^k b(\varepsilon) \int_{-\infty}^{\infty} x^k \phi(x)\, dx + L(\varepsilon) \langle g(a\varepsilon x), \phi(x) \rangle + o(\varepsilon^k L(\varepsilon)),$$

odnosno

$$c(a\varepsilon) = c(\varepsilon) + o(L(\varepsilon)), \quad \text{kada } \varepsilon \to 0^+.$$

Dakle, u posledici 5.1.1 smo dobili tražene rezultate za kvaziasimptotsko ponašanje u nuli, koristeći teoremu 5.1.1 i kvaziasimptosko ponašanje u beskonačnosti u Furijeovom domenu. Sličan postupak primenjujemo i u proučavanju kvaziasimptotskog ponašanja u beskonačnosti, zapravo ispitujući kvaziasimptosko ponašanje u nuli u Furijeovom domenu, s tim što sada treba da dokažemo tvrđenja za kvaziasimptosko ponašanje u nuli, koja odgovaraju tvrđenjima u teoremama 3.3.6, 3.3.7 i 3.3.8.

Teorema 5.1.2 *Neka $f_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$ ima kvaziasimptotsko ponašanje*

$$f_0(\varepsilon x) \sim \varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon) g(x), \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0^+, \ \textit{u } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+). \tag{5.12}$$

Tada se f_0 može produžiti na $\overline{\mathbb{R}}_+$. Štaviše, ako je $f \in \mathcal{D}'(\overline{\mathbb{R}}_+)$ produženje od f_0 na $\overline{\mathbb{R}}_+$, tada važi:
(i) Ako je $\alpha < -1$ i $\alpha \notin \mathbb{Z}_-$, onda (5.12) važi za f u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
(ii) Ako je $\alpha > -1$, onda postoje konstante $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ takve da je

$$f(\varepsilon x) = \varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon) g(x) + \sum_{j=0}^{m-1} a_j \frac{\delta^{(j)}(x)}{\varepsilon^{j+1}} + o(\varepsilon^{\alpha} L(\varepsilon)), \tag{5.13}$$

kada $\varepsilon \to 0^+$, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
(iii) Ako je $\alpha = -k, k \in \mathbb{Z}_+$, onda je g oblika $g(x) = C\,\mathrm{Pf}\left(\frac{H(x)}{x^k}\right)$, za neku konstantu C, i postoji asocirano asimptotski homogena funkcija c za koju je

$$c(ax) = c(x) + \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} C L(x) \log a + o(L(x)), \ x \to 0^+, \tag{5.14}$$

za svako $a > 0$ i konstante $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{m-1}$ tako da je

$$f(\varepsilon x) = C\frac{L(\varepsilon)}{\varepsilon^k} \mathrm{Pf}\left(\frac{H(x)}{x^k}\right) + \frac{c(\varepsilon)}{\varepsilon^k} \delta^{(k-1)}(x) + \sum_{j=k-1}^{m-1} a_j \frac{\delta^{(j)}(x)}{\varepsilon^{j+1}} + o\left(\frac{L(\varepsilon)}{\varepsilon^k}\right), \tag{5.15}$$

kada $\varepsilon \to 0^+$, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Štaviše, ako pretpostavimo da je $f_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+)$, onda $f \in \mathcal{S}'(\overline{\mathbb{R}}_+)$ i asimptotski razvoji (5.13) i (5.15) važe u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Dokaz. (i) Kako $\alpha \notin \mathbb{Z}_-$ i kvaziasimptotsko ponašanje (5.12) važi na pozitivnom delu realne prave, imamo da je g oblika

$$g(x) = C\frac{x_+^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \text{ za neku konstantu } C.$$

Posmatrajući dokaz teoreme 3.3.1 zaključujemo da prostor $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ možemo zameniti sa $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$. Tada, iz definicije konvergencije u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, za kompaktan skup $[\frac{1}{2}, 1]$, postoji $m \in \mathbb{N}, m > -\alpha$, takav da za svaku F_m, primitivnu distribuciju reda m, za f_0 u $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$, koja je neprekidna na intervalu $(0,1)$ važi (3.11). Odaberemo li jednu, od malopre opisanih distribucija F_m, imamo da postoji polinom p_{m-1}, stepena ne većeg od $m-1$ tako da važi

(5.16)
$$F_m(\varepsilon x) = p_{m-1}(\varepsilon x) + C_+ L(\varepsilon)\frac{(\varepsilon x)_+^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha+m+1)} + o(\varepsilon^{\alpha+m}L(\varepsilon)), \quad \text{kada } \varepsilon \to 0^+,$$

uniformno za $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Neka je $F = F_m - p_{m-1}$. Jasno, i F je primitivna distribucija reda m, za f_0. Ako u (5.16) stavimo da je $x = 1$ i zamenimo x sa ε, dobijamo da je

$$F(x) = C_+ L(x)\frac{x_+^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha+m+1)} + o(x^{\alpha+m}L(x)), \quad \text{kada } x \to 0^+,$$

u klasičnom smislu. Zaključujemo da je F neprekidna na intervalu $[0,1)$ i asimptotska formula (5.16) važi u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Neka je $f = F^{(m)}$. Diferenciramo li m puta formulu (5.16), dobijamo da f ima kvaziasimptotsko ponašanje (5.12) u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, odnosno da je f produženje od f_0.

Primetimo da je za $\alpha < -1, \alpha \notin \mathbb{Z}_-$,

$$p_{m-1}(x) = o(x^{\alpha+m}), \text{ kada } x \to 0^+,$$

pa, u tom slučaju, polinom p_{m-1} ne postoji u (5.16), odnosno (5.16) važi za svako F_m. Tada je

$$F(x) = F_m(x) \sim \frac{Cx^{\alpha+m}L(x)}{\Gamma(\alpha+m+1)}, \quad \text{kada } x \to \infty,$$

što nas, ako diferenciramo m puta, dovodi do kvaziasimptotskog ponašanja (5.12) za f u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
(*ii*) Razlika u odnosu na slučaj (*i*) je u tome što sada polinom p_{m-1} postoji u (5.16), pa imamo da je

$$F(x) = F_m(x) - p_{m-1}(x) \sim \frac{Cx^{\alpha+m}L(x)}{\Gamma(\alpha+m+1)}, \quad \text{kada } x \to \infty,$$

što nas ako primenimo m puta diferenciranje, dovodi do (5.13).
(*iii*) Primetimo da teorema 3.3.2 važi ako umesto $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ posmatramo prostor $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$. Dakle, postoje $m \in \mathbb{N}$, $m > k$, i F_m, primitivna distribucija reda m za f_0, koja je neprekidna na intervalu $(0,1)$, tako da je

$$F_m(x) = c_1(x)\frac{x^{m-k}}{(m-k)!} - CL(x)\frac{x^{m-k}}{(m-k)!}\sum_{j=1}^{m-k}\frac{1}{j} + o(x^{m-k}L(x)), \quad \text{kada } x \to 0^+,$$

u klasičnom smislu, gde za funkciju c_1 važi (5.14). Štaviše, F_m je neprekidna na intervalu $[0,1)$. Iz [67, lemma 5.1], imamo da je

$$F_m(\varepsilon x) = c_1(\varepsilon)\frac{(\varepsilon x)_+^{m-k}}{(m-k)!} + C\varepsilon^{m-k}L(\varepsilon)l_{m-k}(x)H(x) + o(\varepsilon^{m-k}L(\varepsilon)) \ ,$$

kada $\varepsilon \to 0^+$, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, gde je

$$l_{m-k}(x) = \frac{x^{m-k}}{(m-k)!}\log x - \frac{x^{m-k}}{(m-k)!}\sum_{j=1}^{m-k}\frac{1}{j}.$$

Ako poslednji izraz diferenciramo $m-k$ puta, dobijamo

$$F_m^{(m-k)}(\varepsilon x) = c_1(\varepsilon)H(x) + CL(\varepsilon)H(x)\log x + o(L(\varepsilon)), \tag{5.17}$$

kada $\varepsilon \to 0^+$, u $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Neka je $f_1 = F_m^{(m)}$. Ako izraz (5.17) diferenciramo k puta, koristeći formulu

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(\mathrm{Pf}\left(\frac{H(x)}{x}\right)\right) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,\mathrm{Pf}\left(\frac{H(x)}{x^k}\right) - \delta^{(k-1)}(x)\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} \ ,$$

dobijamo da je

$$f_1(\varepsilon x) = C\frac{L(\varepsilon)}{\varepsilon^k}\mathrm{Pf}\left(\frac{H(x)}{x^k}\right) + \frac{c(\varepsilon)}{\varepsilon^k}\delta^{(k-1)}(x) + o\left(\frac{L(\varepsilon)}{\varepsilon^k}\right)$$

gde je $c(x) = c_1(x) - CL(x)\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}$. Uz napomenu da je f_1 proširenje od f_0 takvo da se $f - f_1$ nalazi u nuli, dolazimo do (5.15).

Ako argumente iz dokaza posledice 5.1.1 primenimo na teoremu 5.1.2 dobijamo dokaz za sledeće tvrđenje.

Posledica 5.1.2 *Neka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Neka je L sporo promenljiva funkcija u beskonačnosti i neka $\alpha \in \mathbb{R}$. Pretpostavimo da f ima kvaziasimptotsko ponašanje*

$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha L(\lambda)g(x), \quad \text{kada } \lambda \to \infty, \ \text{u } \mathcal{S}_0'(\mathbb{R}). \tag{5.18}$$

(i) Ako $\alpha \notin \mathbb{N}$, tada postoji polinom p deljiv sa $x^{\max\{0,\lfloor\alpha\rfloor+1\}}$, tako da važi

$$f(\lambda x) = p(\lambda x) + \lambda^\alpha L(\lambda)g(x) + o(\lambda^\alpha L(\lambda)), \quad \text{kada } \lambda \to \infty, \ \text{u } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \tag{5.19}$$

(ii) Ako je $\alpha = k$, $k \in \mathbb{N}$, onda je g oblika $g(x) = C_- x_-^k + C_+ x_+^k$, za neke konstante C_- i C_+, i postoji polinom p, deljiv sa x^{k+1} i asimptotski homogena funkcija b stepena nula u beskonačnosti, u odnosu na L, tako da važi

$$f(x_0 + \lambda x) = p(\lambda x) + b(\lambda)\lambda^k x^k + \lambda^k L(\lambda) g(x) + o(\lambda^k L(\lambda)), \tag{5.20}$$

kada $\lambda \to \infty$, u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

5.2 Tauberove teoreme za kvaziasimptotsko ponašanje u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$

Konačno, možemo formulisati Tauberove teoreme za kvaziasimptotsko ponašanje u konačnoj tački distribucija iz $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. One direktno slede iz Tauberove teoreme 4.3.1 za kvaziasimptotsko ponašanje distribucija iz $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ i posledice 5.1.1 u kojoj je dato produženje kvaziasimptotskog ponašanja sa $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ na $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Teorema 5.2.1 *Neka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ i neka je $\alpha < 0$. Pretpostavimo da mali talas $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ ima rekonstrukcioni mali talas. Tada f ima kvaziasimptotsko ponašanje u x_0, reda α, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L, u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ako i samo ako postoji granična vrednost*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} \mathcal{W}_\psi f\,(x_0 + \varepsilon b, \varepsilon a) = M_{b,a} < \infty, \quad za\ a^2 + b^2 = 1,\ a > 0, \tag{5.21}$$

i postoji m tako da je

$$\limsup_{\varepsilon \to 0^+} \sup_{a^2+b^2=1, a>0} \frac{a^m}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} \left|\mathcal{W}_\psi f\,(x_0 + \varepsilon b, \varepsilon a)\right| < \infty. \tag{5.22}$$

Tada postoji homogena distribucija g stepena α takva da je $M_{b,a} = \mathcal{W}_\psi g(b, a)$.

Teorema 5.2.2 *Neka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ i neka je $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$. Pretpostavimo da mali talas $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ ima rekonstrukcioni mali talas. Uslovi (5.21) i (5.22) su potrebni i dovoljni da bi postojao polinom p stepena manjeg od α takav da $f - p$ ima kvaziasimptotsko ponašanje u x_0, reda α, u odnosu na sporo promenljivu funkciju L, u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Tada postoji homogena distribucija g stepena α takva da je $M_{b,a} = \mathcal{W}_\psi g(b, a)$.*

Teorema 5.2.3 *Neka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ i neka $k \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da mali talas $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ ima rekonstrukcioni mali talas. Uslovi (5.21) i (5.22), za $\alpha = k$, su potrebni i dovoljni da bi postojao polinom stepena najviše $k-1$, asimptotski homogena funkcija b stepena 0 u odnosu na sporo promenljivu funkciju L i konstante C_- i C_+ tako da je*

$$f(x_0+\varepsilon x) = p(\varepsilon x) + b(\varepsilon)\varepsilon^k x^k + \varepsilon^k L(\varepsilon)\left(C_- x_-^k + C_+ x_+^k\right) + o(\varepsilon^k L(\varepsilon)), \tag{5.23}$$

kada $\varepsilon \to 0^+$, u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Štaviše,

$$M_{b,a} = C_- \int_{\frac{b}{a}}^{\infty} (ax-b)^k \, \overline{\psi(-x)} \, dx + C_+ \int_{-\frac{b}{a}}^{\infty} (ax+b)^k \, \overline{\psi(x)} \, dx.$$

Takođe, možemo formulisati teoreme Tauberovog tipa za kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti. Dokazi teorema 5.2.4 i 5.2.5 direktno slede iz teoreme 4.2.2 i posledice 5.1.2.

Teorema 5.2.4 *Neka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ i $\alpha \notin \mathbb{N}$. Neka je L sporo promenljiva funkcija u beskonačnosti. Neka mali talas $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ ima rekonstrukcioni mali talas. Tada postoji polinom p takav da $f-p$ ima kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti reda α, u odnosu na L ako i samo ako važe sledeći uslovi:*

1) *postoje granične vrednosti*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda^\alpha L(\lambda)} \mathcal{W}_\psi f(\lambda b, \lambda a) = M_{b,a}, \quad \text{za svako } (b,a) \in \mathbb{H}; \tag{5.24}$$

2) postoje konstante $\gamma, \beta, M > 0$ takve da je

$$\frac{1}{\lambda^\alpha L(\lambda)} \left|\mathcal{W}_\psi f(\lambda b, \lambda a)\right| < M \left(a + \frac{1}{a}\right)^\gamma (1+|b|)^\beta, \tag{5.25}$$

za svako $(b,a) \in \mathbb{H}$ i $\lambda \geq 1$.

Štaviše, postoji homogena distribucija g stepena α za koju je $M_{b,a} = \mathcal{W}_\psi g(b,a), (b,a) \in \mathbb{H}$.

Teorema 5.2.5 *Neka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ i $k \in \mathbb{N}$. Neka je L sporo promenljiva funkcija u beskonačnosti. Neka mali talas $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ ima rekonstrukcioni mali talas. Uslovi (5.24) i (5.25), za $\alpha = k$, su potrebni i dovoljni da postoji* *polinom p, deljiv sa x^{k+1} i asimptotski homogena funkcija b, stepena 0, u odnosu na L i konstante C_- i C_+ tako da važi*

$$f(\lambda x) = p(\lambda x) + c(\lambda)x^k + \lambda^k L(\lambda)\left(C_- x_-^k + C_+ x_+^k\right) + o(\lambda^k L(\lambda)), \tag{5.26}$$

kada $\lambda \to \infty$, u $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Štaviše,

$$M_{b,a} = C_- \int_{\frac{b}{a}}^{\infty} (ax-b)^k \, \overline{\psi(-x)}\, dx + C_+ \int_{-\frac{b}{a}}^{\infty} (ax+b)^k \, \overline{\psi(x)}\, dx.$$

Slični rezultati mogu se pronaći u [56], gde je karakterizacija kvaziasimptotskog ponašanja distribucija data preko malotalasnog razvoja.

Primer 5.2.1 *Neka je $\{f_t\}_{t\in\Lambda}$ familija distribucija. Koristeći dokaz teoreme 5.2.2 može se pokazati ([50]) da su uslovi (5.21) i (5.22), dati za $f = f_t$ uniformno po $t \in \Lambda$, potrebni i dovoljni da bi postojao polinom $\{p_t\}_{t\in\Lambda}$ takav da $f_t - p_t$ ima kvaziasimptotsko ponašanje uniformno po t, odnosno da za svako $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ važi*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left\langle \frac{f_t(x_0+\varepsilon x) - p_t(\varepsilon x)}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)}, \varphi(x) \right\rangle = C_{t,\varphi}, \quad \textit{uniformno po } t \in \Lambda.$$

Slična uniformna kvaziasimptotska ponašanja možemo dobiti i iz teorema 5.2.1 i 5.2.3. Ovi rezultati nam omogućavaju ([46, 69]) da istovremeno posmatramo lokalna svojstva distribucija u različitim tačkama, što daje mogućnosti za novi pristup pri proučavanju lokalnih svojstava funkcija (npr. u prostorima Helderovog i Zigmundovog tipa) preko njihovih malotalasnih transformacija.

Primer 5.2.2 *U [68] je pokazano kako se pomoću Tauberove teoreme 5.2.3 može doći do novog dokaza za čuvenu Litlvudovu Tauberovu teoremu za stepene redove ([32]), koju sada navodimo:*

Ako je

$$\lim_{y\to 0^+} \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-yn} = \gamma$$

i ako važi dodatni uslov Tauberovog tipa $c_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$ tada je

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \gamma.$$

Primer 5.2.3 *Neka je f neopadajuća funkcija sa nosačem u $[0,\infty)$ koja u beskonačnosti raste sporije od nekog polinoma. Neka je $\alpha \geq 0$. Tada su uslovi (5.24) i (5.25) potrebni i dovoljni da f ima sledeće asimptotsko ponašanje:*

$$f(x) \sim Cx^{\alpha}L(x), \quad \text{za neko } C. \tag{5.27}$$

Jasno je da su dati uslovi potrebni, pokažimo da su dovoljni. S obzirom na nosač, f ima sledeće kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti:

$$f(\lambda x) \sim C\lambda^{\alpha}L(\lambda)x_{+}^{\alpha}, \quad \text{kada } \lambda \to \infty, \ \text{u } \mathcal{S}'(\mathbb{R}),$$

za neko C, odakle sledi asimptotsko ponašanje (5.27) (pogledati [70, str. 124]).

5.3 Kvaziasimptotska ograničenost kao dodatni uslov

U teoremi 5.2.2 su dati potrebni i dovoljni uslovi da $f-p$ ima kvaziasimptotsko ponašanje. Da bi dobili kvaziasimptotsko ponašanje od f dodajemo uslov Tauberovog tipa dat preko kvaziasimptotske ograničenosti.

Teorema 5.3.1 *Neka važe pretpostavke Teoreme 5.2.2. i neka je $n = \lfloor \alpha \rfloor$. Odaberimo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, test funkciju za čije momente važi*

$$\mu_j := \int_{-\infty}^{\infty} x^j \varphi(x)\, dx \neq 0, \ 0 \leq j \leq n.$$

Iz uslova

$$\mathcal{W}_{\varphi} f(x_0,\varepsilon) = \langle f(x_0+\varepsilon x), \varphi(x)\rangle = O\left(\varepsilon^{\alpha}L(\varepsilon)\right), \quad \text{kada } \varepsilon \to 0^+, \tag{5.28}$$

sledi da f ima kvaziasimptotsko ponašanje u x_0, reda α, u odnosu na L.

Dokaz. Iz teoreme 5.2.2 sledi da postoje konstante $c_0, c_1, \ldots, c_n$ i homogena distribucija g stepena α, tako da je

$$f(x_0+\varepsilon x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \varepsilon^j x^j + \varepsilon^{\alpha}L(\varepsilon)g(x) + o\left(\varepsilon^{\alpha}L(\varepsilon)\right), \ \text{ kada } \varepsilon \to 0^+, \ \text{u } \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Primenimo li obe strane poslednjeg asimptotskog razvoja na test funkciju φ, opisanu u formulaciji teoreme, s obzirom na (5.28) imamo da je

$$\sum_{j=0}^{n} \varepsilon^j c_j \mu_j = O\left(\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)\right),$$

odakle sledi da je $c_j = 0$, za svako $0 \leq j \leq n$, jer je $n < \alpha$.

Napomenimo i da test funkciju sa datim osobinama možemo uvek naći (pogledati [10]). Slične dodatne uslove Tauberovog tipa imamo i u narednim tvrđenjima.

Teorema 5.3.2 *Neka važe pretpostavke teoreme 5.2.3. Odaberimo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, test funkciju za čije momente važi*

$$\mu_j := \int_{-\infty}^{\infty} x^j \varphi(x)\, dx \neq 0,\ 0 \leq j \leq k.$$

Iz uslova

$$\mathcal{W}_\varphi f(x_0, \varepsilon) = \langle f(x_0 + \varepsilon x), \varphi(x) \rangle = O\left(\varepsilon^k L(\varepsilon)\right), \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0^+, \tag{5.29}$$

sledi da f ima kvaziasimptotsko ponašanje u x_0, reda α, u odnosu na L.

Dokaz. Primenimo obe strane formule (5.23) na test funkciju φ, datu u formulaciji teoreme. Iz uslova (5.29) i činjenice da je stepen polinoma p datog u (5.23) manji od k sledi da je p jednako nuli i da postoji konstanta C tako da važi asimptotska relacija

$$c(\varepsilon) \sim \frac{L(\varepsilon)}{\mu_k} \left(C - C_- \int_0^\infty x^k \varphi(-x)\, dx - C_+ \int_0^\infty x^k \varphi(x)\, dx \right),$$

kada $\varepsilon \to 0^+$, odakle dobijamo traženi rezultat.

Teorema 5.3.3 *Neka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ i neka je L sporo promenljiva funkcija u nuli. Neka je $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ mali talas koji ima rekonstrukcioni mali talas. Pretpostavimo da postoje sledeće granične vrednosti:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)} \mathcal{W}_\psi f\left(x_0 + \varepsilon b, \varepsilon a\right) = M_{b,a} < \infty,\ \textit{za } a^2 + b^2 = 1,\ a > 0. \tag{5.30}$$

Tada, ako važi uslov

$$f(x_0 + \varepsilon x) = O(\varepsilon^\alpha L(\varepsilon)), \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0^+, \ \textit{u } \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \tag{5.31}$$

onda postoji homogena distribucija g stepena α takva da je $M_{b,a} = \mathcal{W}_\psi g(b, a)$, $(b, a) \in \mathbb{H}$ i

$$f(x_0 + \varepsilon x) \sim \varepsilon^\alpha L(\varepsilon) g(x), \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0^+, \ \textit{u } \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \tag{5.32}$$

Obrnuto, iz kvaziasimptotskog ponašanja (5.32) slede (5.30) i (5.31).

Dokaz. Posmatrajmo prvo suprotan smer, tj. pretpostavimo da važi (5.32). Iz teoreme 4.1.1 Abelovog tipa sledi (5.30). Takođe, jasno je da iz kvaziasimptotskog ponašanja (5.32) sledi kvaziasimptotska ograničenost (5.31).

Dalje, pretpostavimo da su ispunjeni uslovi (5.30) i (5.31). Kako uslov (5.31) važi i u prostoru $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ iz karakterizacije ograničenih skupova u $\mathcal{S}_0'(\mathbb{R})$ (teorema 2.5.4), sledi da je uslov (5.22) iz teoreme 5.2.1 ispunjen. Dakle, uslovi teoreme 5.2.1 su ispunjeni, što nam daje kvaziasimptotsko ponašanje (5.32), za $\alpha < 0$. Ako je $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, odaberemo test funkciju $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, za čije momente važi da je

$$\mu_j := \int_{-\infty}^{\infty} x^j \varphi(x)\, dx \neq 0, \quad \text{za} \ \ 0 \leq j \leq n,$$

gde je $n = \lfloor \alpha \rfloor$. Primenimo li uslov (5.31) na tako odabrano φ dobijamo uslov (5.28), pa nam teorema 5.3.1 daje traženo kvaziasimptotsko ponašanje.

Teorema 5.3.4 *Neka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ i neka je L sporo promenljiva funkcija u nuli. Neka je $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ mali talas koji ima rekonstrukcioni mali talas. Pretpostavimo da postoje sledeće granične vrednosti:*

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{\varepsilon^k L(\varepsilon)} \mathcal{W}_\psi f\,(x_0 + \varepsilon b, \varepsilon a) = M_{b,a} < \infty, \ \textit{za } a^2 + b^2 = 1, \, a > 0. \tag{5.33}$$

Tada, ako važi uslov

$$f(x_0 + \varepsilon x) = O(\varepsilon^k L(\varepsilon)), \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0^+, \ \textit{u } \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \tag{5.34}$$

onda postoji homogena distribucija g, oblika $g(x) = C_- x_-^k + C_+ x_+^k$, za neke konstante C_- i C_+, i b, asimptotski homogena funkcija, stepena nula, u odnosu na L, tako da je

$$f(x_0 + \varepsilon x) = b(\varepsilon)\varepsilon^k x^k + \varepsilon^k L(\varepsilon) g(x) + o(\varepsilon^k L(\varepsilon)), \quad \textit{kada } \varepsilon \to 0^+, \ \textit{u } \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \tag{5.35}$$

i $M_{b,a} = \mathcal{W}_\psi g(b,a)$, $(b,a) \in \mathbb{H}$. *Štaviše,* $b(\varepsilon) = O(L(\varepsilon))$.

Pretpostavimo li i da za $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *takvu da* $\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi(x)\, dx \neq 0$, *važi uslov (5.3.2), tada* f *ima kvaziasimptotsko ponašanje u* x_0, *reda* k, *u odnosu na* L.

Dokaz. Kao i u dokazu prethodne teoreme, iz uslova (5.33) i (5.34), dobijamo da f ima asimptotski razvoj oblika (5.23) dat u teoremi 5.2.3. Neka je ϕ test funkcija iz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, $0 \leq j$ takva da je $\int_{-\infty}^{\infty} x^j \phi(x)\, dx$, $0 \leq j \leq k$. Primenimo li (5.23) na ϕ, koristeći (5.34), dobijamo (5.35) i $b(\varepsilon) = O(L(\varepsilon))$. Ako (5.35) primenimo na φ, test funkciju datu u formulaciji teoreme, dobijamo i da je $b(\varepsilon) \sim BL(\varepsilon)$, za neku konstantu B, čime je dokaz kompletiran.

Dokazi teorema 5.3.5 - 5.3.8 su analogni dokazima teorema 5.3.1 - 5.3.4.

Teorema 5.3.5 *Neka su zadovoljene pretpostavke teoreme 5.2.4. Neka je* $n = \lfloor \alpha \rfloor$. *Neka je* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *test funkcija takva da za njene momente važi*

$$\mu_j := \int_{-\infty}^{\infty} x^j \varphi(x)\, dx \neq 0, \quad \textit{za} \;\; n < j.$$

Tada, ako važi uslov

$$\langle f(\lambda x), \varphi(x) \rangle = O(\lambda^k L(\lambda)), \quad \textit{kada}\ \lambda \to \infty, \tag{5.36}$$

onda f *ima kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti reda* α, *u odnosu na* L.

Teorema 5.3.6 *Neka su ispunjene pretpostavke teoreme 5.2.5. Neka je* $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *test funkcija sa nenula momentima, tj.*

$$\mu_j := \int_{-\infty}^{\infty} x^j \varphi(x)\, dx \neq 0,$$

za $k \leq j$. *Ako za neku konstantu* C *važi*

$$\langle f(\lambda x), \varphi(x) \rangle \sim C\lambda^k L(\lambda), \quad \textit{kada}\ \lambda \to \infty, \tag{5.37}$$

tada f *ima kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti reda* k, *u odnosu na* L.

Teorema 5.3.7 *Neka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ i neka je L sporo promenljiva funkcija u beskonačnosti. Neka mali talas $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ ima rekonstrukcioni mali talas. Pretpostavimo da postoje sledeće granične vrednosti:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda^\alpha L(\lambda)} \mathcal{W}_\psi f\,(\lambda b, \lambda a) = M_{b,a}, \quad \textit{za svako } (b,a) \in \mathbb{H}. \tag{5.38}$$

Tada, ako važi uslov Tauberovog tipa

$$f(\lambda x) = O(\lambda^\alpha L(\lambda)), \quad \textit{kada } \lambda \to \infty, \ \textit{u } \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \tag{5.39}$$

onda postoji homogena distribucija g, stepena α, za koju je $M_{b,a} = \mathcal{W}_\psi g(b,a)$, $(b,a) \in \mathbb{H}$ i

$$f(\lambda x) \sim \lambda^\alpha L(\lambda) g(x), \quad \textit{kada } \lambda \to \infty, \ \textit{u } \mathcal{S}(\mathbb{R}). \tag{5.40}$$

Obrnuto, iz kvaziasimptotskog ponašanja (5.40) sledi (5.38) i (5.39).

Teorema 5.3.8 *Neka $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$ i neka je L sporo promenljiva funkcija u beskonačnosti. Neka mali talas $\psi \in \mathcal{S}_0(\mathbb{R})$ ima rekonstrukcioni mali talas. Pretpostavimo da sledeće granične vrednosti postoje:*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\lambda^k L(\lambda)} \mathcal{W}_\psi f\,(\lambda b, \lambda a) = M_{b,a}, \quad \textit{za svako } (b,a) \in \mathbb{H}. \tag{5.41}$$

Tada, ako važi uslov Tauberovog tipa

$$f(\lambda x) = O(\lambda^\alpha L(\lambda)), \quad \textit{kada } \lambda \to \infty, \ \textit{u } \mathcal{S}'(\mathbb{R}), \tag{5.42}$$

onda postoji homogena distribucija g oblika $g(x) = C_- x_-^k + C_+ x_+^k$, za neke konstante C_- i C_+, i asimptotski homogena funkcija b, stepena nula, u odnosu na L tako da važi

$$f(\lambda x) = b(\lambda)\lambda^k x^k + \lambda^k L(\lambda) g(x) + o(\lambda^k L(\lambda)), \quad \textit{kada } \lambda \to \infty, \ \textit{u } \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \tag{5.43}$$

i $M_{b,a} = \mathcal{W}_\psi g(b,a)$, $(b,a) \in \mathbb{H}$. Štaviše, $b(\lambda) = O(L(\lambda))$, kada $\lambda \to \infty$.

Ako pretpostavimo i da je za test funkciju $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, sa nenula $k-$ tim momentom, tj.

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi(x)\, dx \neq 0,$$

zadovoljen uslov (5.3.7) onda f ima kvaziasimptotsko ponašanje u beskonačnosti reda k, u odnosu na L.

Glava 6

Malotalasna transformacija temperiranih ultradistribucija

U ovoj glavi se posmatra malotalasna transformacija u test prostorima ultradiferencijabilnih funkcija i njihovog dualnog prostora ultradistribucija. Po saznanju autora, malotalasna transformacija ultradistribucija nije sistematski rađena do sada. Naš cilj je bio da se rezultati druge glave prošire na prostore funkcija koje umesto polinomnog imaju skoro eksponencijalno opadanje u vremensko-frekvencijskoj ravni. Prirodan izbor za takve prostore je modifikacija prostora Geljfand-Šilovog tipa. U prvom poglavlju ove glave se definišu test prostori koji sadrže ultradiferencijabilne funkcije. U poglavlju 6.2 je definisan prostor progresivnih ultradiferencijabilnih funkcija $\mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ i data je karakterizacija ovog prostora ([53]). Dalje su, u poglavlju 6.3, proučavane skoro eksponencijalne procene rasta malotalasne transformacije funkcija iz $\mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$. Takođe, date su i skoro eksponencijalne procene za rast inverzne malotalasne transformacije definisane na prostoru $S^s(\mathbb{H})$. U poglavlju 6.4 je ispitivana neprekidnost malotalasne i inverzne malotalasne transformacije u prostorima $\mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}^s(\mathbb{H})$. Konačno, rezultati poglavlja 6.4 su iskorišćeni u poglavlju 6.5, gde je definisana i ispitivana malotalasna transformacija temperiranih ultradistribucija.

6.1 Test prostori za prostore ultradistribucija

Neka je Ω otvoren skup u $\mathbb{R}$ i neka je $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ niz pozitivnih brojeva. Funkcija $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ je ultradiferencijabilna funkcija klase (M_p) ($\{M_p\}$) ako za svaki kompaktan skup $K \subset \Omega$ i svako $h > 0$ (postoji $h > 0$), postoji $C > 0$ tako da je

$$\sup_{x \in K} |f^{(p)}(x)| \leq C h^p M_p, \quad \text{za svako } p \in \mathbb{N}_0. \tag{6.1}$$

Sa $\mathcal{E}^{(M_p)}(\Omega)$ ($\mathcal{E}^{\{M_p\}}(\Omega)$) označava se prostor ultradiferencijabilnih funkcija klase (M_p) ($\{M_p\}$). Potprostori navedenih prostora kojima pripadaju funkcije sa kompaktnim nosačem označavaju se sa $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ ($\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$).

Za niz $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ se pretpostavlja da zadovoljava neke od sledećih uslova:

$(M.1)$ (logaritamska konveksnost) $M_p^2 \leq M_{p-1}M_{p+1},\ p \in \mathbb{N}$;

$(M.2)'$ (stabilnost u odnosu na operator diferenciranja) Postoje pozitivne konstante A, H takve da je

$$M_{p+1} \leq AH^p M_p,\ p \in \mathbb{N}_0;$$

$(M.2)$ (stabilnost u odnosu na operator ultradiferenciranja) Postoje pozitivne konstante A, H takve da je

$$M_p \leq AH^p \min_{0\leq q\leq p} M_{p-q}M_q,\ p, q \in \mathbb{N}_0;$$

$(M.3)'$ (ne kvazi-analitičnost) $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} \frac{M_{p-1}}{M_p} \leq \infty$;

$(M.3)$ (jaka kvazi-analitičnost) Postoji $A > 0$ tako da je

$$\sum_{p=q+1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} < Aq\frac{M_{q+1}}{M_q},\ q \in \mathbb{N}.$$

Važi $(M.2) \Rightarrow (M.2)'$ i $(M.3) \Rightarrow (M.3)'$. Obično se pretpostavlja da je $M_0 = 1$. Uslovi $(M.1)$ i $(M.3)'$ su dovoljni da prostori $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ i $\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$ budu netrivijalni. Duali prostora $\mathcal{D}^{(M_p)}(\Omega)$ ($\mathcal{D}^{\{M_p\}}(\Omega)$) se označavaju sa $\mathcal{D}^{(M_p)'}(\Omega)$ ($\mathcal{D}^{\{M_p\}'}(\Omega)$) i nazivaju ultradistribucije klase M_p Bjorlingovog (Rumijeovog) tipa ili ultradistribucije klase (M_p) ($\{M_p\}$).

Navedene uslove zadovoljavaju nizovi Ževrea $\{p!^s\}_{p\in\mathbb{N}_0}$, $\{p^{sp}\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ i $\{\Gamma(1+ps)\}_{p\in\mathbb{N}_0}$, gde je sa Γ označena Gama funkcija i $s > 1$ za sva tri niza. Uslovi $(M.1) - (M.3)'$ za niz $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ mogu biti dati i preko asocirane funkcije definisane na sledeći način:

$$M(\rho) = \sup_{p\in\mathbb{N}_0} \ln \frac{\rho^p M_0}{M_p},\ 0 < \rho < \infty.$$

Neka su $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ i $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ nizovi pozitivnih brojeva koji ispunjavaju neke od uslova $(M.1)-(M.3)'$. U [16] su uvedeni značajni prostori ultradiferencijabilnih funkcija, $\mathcal{S}_{M_p}(\mathbb{R}), \mathcal{S}^{N_q}(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}_{M_p}^{N_q}(\mathbb{R})$, koji sadrže funkcije $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ za koje postoje konstante $A, B > 0$ (koje zavise od funkcije φ), tako da važi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p\varphi^{(q)}(x)| \leq C_q A^p M_p, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p\varphi^{(q)}(x)| \leq C_p B^q N_q \text{ i}$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^p\varphi^{(q)}(x)| \leq CA^pB^qM_pN_q,$$

za svako $p, q \in \mathbb{N}_0$, respektivno. Navedeni prostori se nazivaju prostori Geljfand-Šilovog tipa.

Neka je $\alpha, \beta \geq 0$. Za $M_p = p^{\alpha p}, p \in \mathbb{N}_0$ i $N_q = q^{\beta q}, q \in \mathbb{N}_0$ prostori $\mathcal{S}_{M_p}(\mathbb{R}), \mathcal{S}^{N_q}(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}_{M_p}^{N_q}(\mathbb{R})$ se označavaju sa $\mathcal{S}_\alpha(\mathbb{R}), \mathcal{S}^\beta(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R})$, respektivno. Prostor $\mathcal{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R})$ je netrivijalan ako i samo ako je $\alpha+\beta \geq 1, \alpha, \beta > 0$ ili $\alpha = 0, \beta > 1$ ili $\alpha > 1, \beta = 0$. Furijeova transformacija $\mathcal{F} : \mathcal{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}_\beta^\alpha(\mathbb{R})$ definiše homeomorfizam između navedenih prostora. Važi

$$\mathcal{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}_\alpha(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ i } \mathcal{S}_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}^\beta(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Definicija 6.1.1 *Neka je $h \geq 0$ i neka niz $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ zadovoljava uslove $(M.1)-(M.3)'$. Prostoru $\mathcal{S}^{M_p,h}(\mathbb{R})$ pripadaju funkcije $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ takve da je*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0} \frac{h^{\alpha+\beta}}{M_\alpha M_\beta} |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)| < \infty.$$

Prostor $\mathcal{S}^{M_p,h}(\mathbb{R})$ je Banahov prostor sa normom

$$\| \varphi \|_{\mathcal{S}^{M_p,h}(\mathbb{R})} = \sup_{x\in\mathbb{R}} \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0} \frac{h^{\alpha+\beta}}{M_\alpha M_\beta} |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)|, \ \varphi \in \mathcal{S}^{M_p,h}(\mathbb{R}).$$

Za $h_1 < h_2$ je $\mathcal{S}^{M_p,h_1}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^{M_p,h_2}(\mathbb{R})$. Prostori $\mathcal{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})(\mathcal{S}^{\{M_p\}}(\mathbb{R}))$ su projektivna $(h \to 0)$ (induktivna $(h \to \infty)$) granica prostora $\mathcal{S}^{M_p,h}(\mathbb{R})$.

Za $M_p = p^{\alpha p}, p \in \mathbb{N}_0$, prostor $\mathcal{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$ je prostor $\Sigma_\alpha, \alpha > \frac{1}{2}$ (pogledati [40]), dok je $\mathcal{S}^{\{M_p\}}(\mathbb{R})$ prostor Geljfand-Šilova $\mathcal{S}_\alpha^\alpha$ (pogledati [16]).

Sa $\mathcal{S}^{(M_p)'}(\mathbb{R})$ $(\mathcal{S}^{\{M_p\}'}(\mathbb{R}))$ se označavaju duali prostora $\mathcal{S}^{(M_p)}(\mathbb{R})$ $(\mathcal{S}^{\{M_p\}}(\mathbb{R}))$ i nazivaju se prostori temperiranih ultradistribucija Bjorlingovog (Rumijeovog) tipa. Važe sledeće inkluzije:

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}^*(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}^{*'}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}),$$

gde umesto $*$ može da stoji (M_p) ili $\{M_p\}$. Topološka struktura ovih prostora, njihova svojstva i primena mogu se naći u [16, 26, 40, 44].

U radovima [2, 3, 4] data je sledeća karakterizacija prostora brzo opadajućih funkcija $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, Satovog prostora $\mathcal{F}$ test funkcija za Furijeove hiperfunkcije i prostora Geljfand-Šilovog tipa. Neka $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$;

(ii) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha \varphi(x)| < \infty$ i $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(\beta)}(x)| < \infty,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$;

(iii) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha \varphi(x)| < \infty$ i $\sup\limits_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi^\beta \hat{\varphi}(\xi)| < \infty,\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$.

Takođe, $\varphi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ ako i samo ako postoje $h, k > 0$ tako da važi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| e^{k|x|} < \infty \quad \text{i} \quad \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)| e^{h|\xi|} < \infty.$$

Neka nizovi $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ i $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ zadovoljavaju $(M.1)$ i $(M.2)$ i neka postoje konstante $L, T > 0$ takve da je $p! \le T L^p M_p N_p, p \in \mathbb{N}_0$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $\varphi \in \mathcal{S}^{N_p}_{M_p}(\mathbb{R})$;

(ii) Postoje pozitivne konstante A, B i C takve da je

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha \varphi(x)| \le C A^{|\alpha|} M_{|\alpha|},\ \ \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(\beta)}(x)| \le C B^{|\beta|} N_{|\beta|},\ \forall \alpha, \beta;$$

(iii) Postoje pozitivne konstante A, B i C takve da je

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha \varphi(x)| \le C A^{|\alpha|} M_{|\alpha|},\ \ \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi^\beta \hat{\varphi}(\xi)| \le C B^{|\beta|} N_{|\beta|},\ \forall \alpha, \beta.$$

(iv) Postoje pozitivne konstante a i b takve da je

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| e^{M(ax)} < \infty,\ \ \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)| e^{N(b\xi)} < \infty,$$

gde su M i N asocirane funkcije za nizove $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ i $\{N_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$, respektivno.

Prema tome, ako je $r + s \ge 1$, onda su sledeći uslovi ekvivalentni:

(i) $\varphi \in \mathcal{S}^s_r(\mathbb{R})$;

(ii) Postoje pozitivne konstante h i k takve da je

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)| e^{k|x|^{\frac{1}{r}}} < \infty \quad \text{i} \quad \sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)| e^{h|\xi|^{\frac{1}{s}}} < \infty.$$

6.2 Progresivne ultradiferencijabilne funkcije

Izlaganje u ovom poglavlju počinjemo definicijom progresivnog prostora Geljfand-Šilovog tipa.

Definicija 6.2.1 *Neka je $s \geq 0, h > 0$ i neka je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ progresivna funkcija. Kažemo da $\varphi \in \mathcal{S}_+^{s,h}(\mathbb{R})$ ako postoji pozitivna konstanta C (koja zavisi samo od φ) za koju je*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)| \leq C h^{\alpha+\beta} \alpha!^s \beta!^s, \quad \textit{za svako } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0.$$

Progresivan prostor Geljfand-Šilovog tipa je dat sa

$$\mathcal{S}_+^s(\mathbb{R}) = ind \lim_{h>0} \mathcal{S}_+^{s,h}(\mathbb{R}).$$

Po analogiji sa [16] topologija na $\mathcal{S}_+^s(\mathbb{R})$ se može uvesti na sledeći način. Prostor $\mathcal{S}_+^{s,h}(\mathbb{R})$ je kompletan sa topologijom definisanom preko familije normi

$$\|\varphi\|_n = \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0} \frac{\|x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{(h+\frac{1}{n})^{\alpha+\beta}\alpha!^s\beta!^s}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

U datoj topologiji prostora $\mathcal{S}_+^{s,h}(\mathbb{R})$ svaki ograničen skup je kompaktan.

Prostor $\mathcal{S}_+^s(\mathbb{R})$ je bornološki. Za $0 < s \leq 1$ je $\mathcal{S}_+^s(\mathbb{R}) = \{0\}$. Ako je $s_1 < s_2$ tada je $\mathcal{S}_+^{s_1}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}_+^{s_2}(\mathbb{R})$. Operatori množenja (u odnosu na x) i diferenciranja, kao i operatori translacije i dilatacije (za pozitivan parametar) su neprekidni u $\mathcal{S}_+^s(\mathbb{R})$, čime ovaj prostor postaje pogodan za rad sa malotalasnom transformacijom. Sa druge strane, on očigledno nije zatvoren u odnosu na operator modulacije. Takođe, $\mathcal{S}_+^s(\mathbb{R})$ je zatvoren potprostor prostora Geljfand-Šilova $\mathcal{S}_s^s(\mathbb{R})$. Recimo i da su prostori slični prostoru $\mathcal{S}_+^s(\mathbb{R})$, čiji elementi imaju nosač na pozitivnom delu realne prave, proučavani u [9].

Pokažimo da je prostor $\mathcal{S}_+^s(\mathbb{R})$ netrivijalan. Znamo da je prostor Geljfand-Šilova $\mathcal{S}_s^s(\mathbb{R})$ je netrivijalan ([16]). Neka $\varphi \in \mathcal{S}_s^s(\mathbb{R})$ (tada i $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}_s^s(\mathbb{R})$). Neka je ψ funkcija zadata preko svoje Furijeove transformacije za koju važi $\hat{\psi} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\hat{\psi}(\xi) = \begin{cases} 1, & \xi \in [\frac{1}{2}, 1] \\ 0, & \xi \leq 0, \xi \geq 2 \end{cases}$, supp $\hat{\psi} \subset [0,2]$. Kako je množenje sa glatkom funkcijom zatvorena operacija u $\mathcal{S}_s^s(\mathbb{R})$ ([16]) sledi da $\hat{\varphi} \cdot \hat{\psi} \in \mathcal{S}_s^s(\mathbb{R})$. Definišimo funkciju $g = \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi} \cdot \hat{\psi})$. Za funkciju g važi da je $g \in \mathcal{S}_s^s(\mathbb{R})$ i supp $\hat{g} \subset [0, \infty)$, pa $g \in \mathcal{S}_+^s(\mathbb{R})$.

Da bi se pokazala karakterizacija prostora $\mathcal{S}_+^s(\mathbb{R})$ u duhu [4], koristiće se sledeći rezultat.

Lema 6.2.1 *[23] Neka je dato $t > 0$ i neka je*

$$m_t(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j}{(j!)^t},\ \eta \geq 0.$$

Tada, za svako $\varepsilon > 0$ postoji $C = C(t, \varepsilon) > 0$ tako da važi

$$\frac{1}{C}\, e^{(t-\varepsilon)\eta^{\frac{1}{t}}} \leq m_t(\eta) \leq C\, e^{(t+\varepsilon)\eta^{\frac{1}{t}}},\ \forall \eta \geq 0.$$

Propozicija 6.2.1 *Neka je $s > 1$ i $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

a) Postoji $h > 0$ tako da važi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha \varphi(x)| \leq C h^\alpha \alpha!^s,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0,$$

za neku konstantu $C > 0$;

b) Postoji $k > 0$ tako da važi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{k|x|^{1/s}} |\varphi(x)| < \infty.$$

Dokaz. Neka važi a). Kako je $\dfrac{|x|^\alpha |\varphi(x)|}{h^\alpha \alpha!^s}$ uniformno ograničeno konstantom C imamo da je

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(\frac{|x|}{h})^\alpha |\varphi(x)|}{2^\alpha \alpha!^s} \leq C \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{1}{2^\alpha} < \infty. \tag{6.2}$$

Neka je

$$m_s(\eta) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\eta^j}{j!^s},\ \eta = \frac{|x|}{2h} \geq 0.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj takav da je $\varepsilon < s$. Iz leme 6.2.1 sledi da je

$$\frac{1}{C}\, e^{(s-\varepsilon)\,(\frac{|x|}{(2h)})^{\frac{1}{s}}} \leq m_s(\eta),$$

za neko $C > 0$. Sada, iz (6.2) sledi da je

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{k|x|^{\frac{1}{s}}}|\varphi(x)| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}} m_s(\frac{|x|}{2h})|\varphi(x)| = C \sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(\frac{|x|}{h})^{\alpha}|\varphi(x)|}{2^{\alpha}\alpha!^{s}} < \infty,$$

gde je

$$k = (s-\varepsilon)\frac{1}{(2h)^{\frac{1}{s}}}.$$

Pretpostavimo da važi *b*). Tada je za proizvoljno $\varepsilon > 0$

$$e^{k|x|^{\frac{1}{s}}} = e^{(s+\varepsilon)((\frac{k}{s+\varepsilon})^{s}|x|)^{\frac{1}{s}}} = e^{(s+\varepsilon)(\frac{|x|}{h})^{\frac{1}{s}}},$$

gde je $h = (\frac{s+\varepsilon}{k})^{s}$. Iskoristimo li lemu 6.2.1 dobijamo da je

$$\infty > \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{k|x|^{\frac{1}{s}}}|\varphi(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{(s+\varepsilon)(\frac{|x|}{h})^{\frac{1}{s}}}|\varphi(x)|$$

$$\geq \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{1}{C} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{|x|^{\alpha}}{h^{\alpha}\alpha!^{s}}|\varphi(x)|,$$

odakle sledi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^{\alpha}|\varphi(x)| \leq \tilde{C}\, h^{\alpha}\alpha!^{s},$$

za neko $\tilde{C} > 0$.

Teorema 6.2.1 *Neka je $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ progresivna funkcija. Sledeći uslovi su ekvivalentni:*

a) $\varphi \in \mathcal{S}^{s}_{+}(\mathbb{R})$;

b) Postoje pozitivne konstante C (koja zavisi samo od φ) i h tako da je

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^{\alpha}\varphi(x)| \leq Ch^{\alpha}\alpha!^{s},\ \forall\alpha \in \mathbb{N}_0 \quad i \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(\beta)}(x)| \leq Ch^{\beta}\beta!^{s},\ \forall\beta \in \mathbb{N}_0;$$

c) Postoje pozitivne konstante C (koja zavisi samo od φ) i h tako da je

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^{\alpha}\varphi(x)| \leq Ch^{\alpha}\alpha!^{s},\ \forall\alpha \in \mathbb{N}_0 \quad i \quad \sup_{\xi>0} |\xi^{\beta}\hat{\varphi}(\xi)| \leq Ch^{\beta}\beta!^{s},\ \forall\beta \in \mathbb{N}_0;$$

d) Postoje pozitivne konstante C (koja zavisi samo od φ) i h tako da je

$$\sup_{\xi>0}|\xi^\alpha\hat{\varphi}^{(\beta)}(\xi)|\leq Ch^{\alpha+\beta}\alpha!^s\beta!^s,\ \forall\beta\in\mathbb{N}_0;$$

e) Postoje pozitivne konstante C (koja zavisi samo od φ) i h tako da je

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}|\varphi(x)|\leq C\quad i\quad \sup_{\xi>0}e^{h|\xi|^{\frac{1}{s}}}|\hat{\varphi}(\xi)|\leq C.$$

Dokaz. $a)\Leftrightarrow b)$. Iz definicije prostora $\mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ direktno sledi $b)$. U suprotnom smeru koristimo činjenicu (za dokaz pogledati [44]) da je $\|\varphi\|_{S^{s,h}_+(\mathbb{R})}<\infty$ ako i samo ako postoji $B>0$ tako da je

$$\sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0}\frac{\|(1+|x|^\alpha)\varphi^{(\beta)}(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}}{B^{\alpha+\beta}\alpha!^s\beta!^s}<\infty.$$

Dalje, iz [4] i [40] dobijamo da tvrđenje pod $b)$ implicira da je

$$\|x^\alpha\varphi^{(\beta)}(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}\leq Ch^{\alpha+\beta}\alpha!^s\beta!^s,$$

za neko $C>0$ i $h>0$. Kako su norme $\|(1+|x|^\alpha)\varphi^{(\beta)}(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ i $\|x^\alpha\varphi^{(\beta)}(x)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ ekvivalentne zaključujemo da važi tvrđenje pod $a)$.

$b)\Rightarrow c)$. Primetimo da ako $\varphi\in\mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ tada je $\hat{\varphi}$ dobro definisano, kao i da važe formule za zamenu diferenciranja i množenja na Furijeovoj strani. Koristeći [21, lemma 7.1.3] iz

$$\hat{\varphi}^{(\beta)}(\xi)=(2\pi)^\beta\int e^{-2\pi ix\xi}(-x)^\beta\varphi(x)\,dx \tag{6.3}$$

uz parcijalnu integraciju dobijamo da je

$$(-\xi)^\alpha\hat{\varphi}^{(\beta)}(\xi)=(2\pi)^{\beta-\alpha}\int_{\mathbb{R}}e^{-2\pi ix\xi}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left((-x)^\beta\varphi(x)\right)\,dx. \tag{6.4}$$

Sada, za $\beta=0$, koristeći tvrđenje pod $a)$, dobijamo

$$\sup_{\xi>0}|\xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi)|\leq C\int_{\mathbb{R}}(1+|x|^2)|\varphi^{(\alpha)}(x)|\frac{1}{1+|x|^2}\,dx\leq Ch^\alpha\alpha!^s,$$

za neko $C>0$ i $h>0$.

$c) \Rightarrow b)$. Primetimo da iz drugog uslova pod $c)$ sledi da je φ glatka funkcija i da su izvodi dati sa

$$\varphi^{(\beta)}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (i\xi)^\beta \hat{\varphi}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi, \quad \forall \beta \in \mathbb{N}_0, \tag{6.5}$$

(videti lemu 1.3.2). Sada je

$$\left|\varphi^{(\beta)}(x)\right| \leq C \sup_{\xi>0} |\xi^{\beta+2} \hat{\varphi}(\xi)| \int_0^\infty \frac{1}{1+\xi^2}\, d\xi \leq C h^\beta \beta!^s,$$

za neko $C > 0$ i $h > 0$.

$c) \Rightarrow d)$. Iz prvog uslova pod $c)$ sledi da je $\hat{\varphi}$ glatka funkcija, što uz formulu (6.3) implicira da postoje $C > 0$ i $h > 0$ tako da je

$$\sup_{\xi>0} |\hat{\varphi}^{(\beta)}(\xi)| \leq C h^\beta \beta!^s, \quad \forall \beta \in \mathbb{N}_0.$$

Sada, (kao u slučaju $b) \Rightarrow a)$) iz drugog uslova pod $c)$ sledi $d)$.

Takođe, iz formule (6.4), Lajbnicove formule i poznate procene $(k+j)! \leq 2^{k+j} k! j!$ dobijamo da je

$$\sup_{\xi>0} |\xi^\alpha \hat{\varphi}^{(\beta)}(\xi)| \leq C h^{\alpha+\beta} \alpha!^s \beta!^s, \quad \forall \beta \in \mathbb{N}_0$$

za neko $C > 0$ i $h > 0$.

$d) \Rightarrow c)$. Ako na desnu stranu jednakosti (6.5) primenimo parcijalnu integraciju, postupkom viđenim u slučaju $b) \Rightarrow c)$, dobijamo da važi prvi uslov pod c).

Ekvivalencija $c) \Leftrightarrow e)$ sledi iz propozicije 6.2.1.

U [11] je pokazano kako može da se konstruiše skoro eksponencijalno ograničen mali talas za koji je nosač Furijeove transformacije kompaktan skup.

Pokažimo još da rezultati teoreme 6.2.1 važe i za skoro eksponencijalno trakasto ograničene progresivne funkcije (pojam analogan polinomnoj trakastoj ograničenosti definisanoj u poglavlju 2.1).

Ako $\varphi \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ onda je $\hat{\varphi}^{(n)}(0) = 0, n \in \mathbb{N}_0$, pa za sve momente od φ važi

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \varphi(x)\, dx = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Sledi da je $\hat{\varphi}(\xi) = o(\xi^n)$ kada $\xi \to 0$, za svako $n \in \mathbb{N}_0$. Dalje, iz Tejlorove formule imamo da je

$$\begin{aligned} |\hat{\varphi}(\xi)| &= \Big|\sum_{m=0}^{n} \frac{\hat{\varphi}^{(m)}(0)}{\xi^n} + \frac{\xi^{n+1}}{(m+1)!} m \int_0^1 (1-\theta)^{n-1} \hat{\varphi}^{(n)}(\theta\xi)\, d\theta\Big| \\ &\leq \frac{\xi^{n+1}}{(m+1)!} \sup_{\xi>0} |\hat{\varphi}^{(n)}(\xi)| m \int_0^1 (1-\theta)^{n-1}\, d\theta \\ &\leq C\xi^{n+1} h^n n!^s, \end{aligned}$$

gde smo koristili teoremu 6.2.1 i činjenicu da je $m\int_0^1 (1-\theta)^{n-1}\, d\theta = 1$ ([77, str. 59]). Dakle, za $0 < \xi < 1$ je

$$\Big|\frac{1}{\xi^n}\hat{\varphi}(\xi)\Big| \leq Ch^n n!^s, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

odakle, uz tvrđenje teoreme 6.2.1 pod c), sledi da postoje $C > 0$ i $h > 0$ tako da je

$$\sup_{\xi>0} \left|(\xi + \frac{1}{\xi})^\alpha \hat{\varphi}(\xi)\right| \leq Ch^\alpha \alpha!^s, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}_0.$$

Konačno, iz propozicije 6.2.1 sledi da postoje $C > 0$ i $h > 0$ tako da je

$$\sup_{\xi>0} e^{h|\xi + \frac{1}{\xi}|^{1/s}} |\hat{\varphi}(\xi)| \leq C,$$

tj. φ je skoro eksponencijalno trakasto ograničena progresivna funkcija.

6.3 Procene za malotalasnu transformaciju progresivnih ultradiferencijabilnih funkcija

Neka je $s > 1$ i neka $f, g \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$. Iz teoreme 6.2.1 sledi da postoje $h_1, h_2 > 0$ i $C_1, C_2 > 0$ takve da je

$$|f(x)| \leq \frac{C_1}{e^{h_1|x|^{\frac{1}{s}}}},\ x \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad |g(x)| \leq \frac{C_2}{e^{h_2|x|^{\frac{1}{s}}}},\ x \in \mathbb{R}.$$

Jasno je da za $h = \min\{h_1, h_2\}$ i $C = \max\{C_1, C_2\}$ važi

$$|f(x)| \leq \frac{C}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}},\ x \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad |g(x)| \leq \frac{C}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}},\ x \in \mathbb{R}, \tag{6.6}$$

pa ćemo nadalje za $f, g \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ pretpostavljati da važi (6.6). Malotalasnu transformaciju funkcije $f \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ u odnosu na $g \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ definišemo na uobičajen način

$$\mathcal{W}_g f(b,a) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{a} \bar{g}\big(\frac{x-b}{a}\big)\, dx,\ (b,a) \in \mathbb{H}.$$

Za $f, g \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ je

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \leq \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} |f(x)||\bar{g}(\frac{x-b}{a})|\, dx$$

$$\leq \frac{C}{a} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{h|x|^{\gamma}}} \frac{1}{e^{h|\frac{x-b}{a}|^{\gamma}}}\, dx = C\mathcal{W}_{\frac{1}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}}} \frac{1}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}}(b,a),$$

za svako $(b,a) \in \mathbb{H}$ i za neko $C > 0$.

Lema 6.3.1 *Neka je*

$$\mathcal{K} = \{f : f(x) \leq \frac{C}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}},\ \textit{za neke } h, C > 0 \textit{ i svako } x \in \mathbb{R}\}.$$

Tada važi

$$f, g \in \mathcal{K} \Rightarrow f * g \in \mathcal{K}.$$

Dokaz. Na osnovu nejednakosti koja važi za svako $m > 1$ i svako $x, y \in \mathbb{R}$:

$$|y|^{\frac{1}{s}} \leq |x-y|^{\frac{1}{s}} + |x|^{\frac{1}{s}} \leq m|x-y|^{\frac{1}{s}} + |x|^{\frac{1}{s}},$$

sledi da za svako $h > 0$ važi

$$h|x-y|^{\frac{1}{s}} \geq \frac{h}{m}(|y|^{\frac{1}{s}} - |x|^{\frac{1}{s}}).$$

Sada, iz $f, g \in \mathcal{K}$, za svako $m > 1$, važi

$$(f*g)(y) \leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h|x-y|^{\frac{1}{s}}}}\, dx$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{\frac{h}{m}(|y|^{\frac{1}{s}}-|x|^{\frac{1}{s}})}}\, dx$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{h(1-\frac{1}{m})|x|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{\frac{h}{m}|y|^{\frac{1}{s}}}}\, dx \leq \frac{C}{e^{\frac{h}{m}|y|^{\frac{1}{s}}}},$$

pa je lema dokazana.

Neka $f, g \in \mathcal{K}$. Za "voice transform"$(a = 1)$, koristeći lemu 6.3.1 dobijamo procenu

$$|\mathcal{W}_g f(b,1)| \leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h|x-b|^{\frac{1}{s}}}}\, dx$$

$$= C\Big(\frac{1}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}} * \frac{1}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}}\Big)(b) \leq C\frac{1}{e^{\tilde{h}|b|^{\frac{1}{s}}}}, \quad \text{za svako } \tilde{h} < h.$$

Slično, za $m > 1$ važi

$$|\mathcal{W}_g f(b,1)| \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h|x-b|^{\frac{1}{s}}}}\, dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{\frac{h}{m^{\frac{1}{s}}}(|b|^{\frac{1}{s}}-|x|^{\frac{1}{s}})}}\, dx$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{h(1-\frac{1}{m^{\frac{1}{s}}})|x|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h|\frac{b}{m}|^{\frac{1}{s}}}}\, dx \leq C\frac{1}{e^{h|\tilde{b}|^{\frac{1}{s}}}}, \quad \text{za svako } \tilde{b} < b.$$

Teorema 6.3.1 *Ako $f, g \in \mathcal{K}$, onda za svako $\tilde{h} < h$ postoji $C > 0$ tako da važi*

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \leq \frac{C}{e^{\tilde{h}|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}}}, \quad (b,a) \in \mathbb{H}.$$

Dokaz. Za $b \in \mathbb{R}, a > 1$ i proizvoljno $m > 1$ važi

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \leq \frac{C}{a} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h|\frac{x}{a}-\frac{b}{a}|^{\frac{1}{s}}}}\, dx$$

$$\leq \frac{C}{a} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{\frac{h}{m}|\frac{x}{a}-\frac{b}{a}|^{\frac{1}{s}}}}\, dx$$

$$\leq \frac{C}{a} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{\frac{h}{m}(|\frac{b}{a}|^{\frac{1}{s}}-|\frac{x}{a}|^{\frac{1}{s}})}}\, dx$$

$$= \frac{C}{a}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}(1-\frac{1}{ma^{\frac{1}{s}}})}}\frac{1}{e^{\frac{h}{m}|\frac{b}{a}|^{\frac{1}{s}}}}\,dx$$

$$\leq \frac{C}{a}\frac{1}{e^{\tilde{h}|\frac{b}{a}|^{\frac{1}{s}}}}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}(1-\frac{1}{ma^{\frac{1}{s}}})}}\,dx$$

$$\leq \frac{C}{a}\frac{1}{e^{\tilde{h}|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}}} \leq \frac{C}{e^{\tilde{h}|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}}},\ \forall\tilde{h}<h.$$

Uzmimo sada da je $b\in\mathbb{R}, 0<a<1$. Koristeći osobine malotalasne transformacije dobijamo da je

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \leq C\frac{1}{a}\frac{1}{\frac{1}{a}}\frac{1}{e^{\tilde{h}|\frac{-\frac{b}{a}}{1+\frac{1}{a}}|^{\frac{1}{s}}}} = \frac{C}{e^{\tilde{h}|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}}},\ \forall\tilde{h}<h.$$

Teorema 6.3.2 *Pretpostavimo da za funkcije f i g postoje $h, C>0$ tako da je*

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{e^{h|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}},\ \xi>0\ \ i\ \ |\hat{g}(\xi)| \leq \frac{C}{e^{h|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}},\ \xi>0.$$

Tada postoje $\tilde{h}<h$ i $C>0$ tako da važi

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \leq \frac{C}{e^{\tilde{h}|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}},\ \ a>0.$$

Dokaz. Neka je $a\geq 1$. Smenom $a\xi=\xi'$ se dobija

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |\bar{\hat{g}}(a\xi)|\,|\hat{f}(\xi)|\,d\xi$$

$$\leq C\int_0^\infty \frac{1}{e^{h(a\xi+\frac{1}{a\xi})^{\frac{1}{s}}}}\frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}}\,d\xi$$

$$= \frac{C}{a}\int_0^\infty \frac{1}{e^{h(\xi'+\frac{1}{\xi'})^{\frac{1}{s}}}}\frac{1}{e^{h(\frac{\xi'}{a}+\frac{a}{\xi'})^{\frac{1}{s}}}}\,d\xi'$$

$$\leq C\int_0^\infty \frac{1}{e^{h(\xi'+\frac{1}{\xi'})^{\frac{1}{s}}}}\frac{1}{e^{h(a'\xi'+\frac{1}{a'\xi'})^{\frac{1}{s}}}}\,d\xi',$$

gde je $\frac{1}{a}=a'$, odnosno $0<a'\leq 1$. Dakle, dovoljno je dokazati tvrđenje za $0<a\leq 1$.

Iz elementarne nejednakosti $(\xi + \frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}} \leq \xi^{\frac{1}{s}} + \frac{1}{\xi^{\frac{1}{s}}}$ sledi

$$\frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}} \geq \frac{1}{e^{h(\xi^{\frac{1}{s}}+\frac{1}{\xi^{\frac{1}{s}}})}} = \frac{1}{e^{h\xi^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h\frac{1}{\xi^{\frac{1}{s}}}}}.$$

Takođe, za $0 < \xi < 1$ važi $\frac{1}{e^{h\frac{1}{\xi^{\frac{1}{s}}}}} \leq \frac{1}{e^{h\xi^{\frac{1}{s}}}}$, pa dobijamo da je

$$\left(\frac{1}{e^{h\frac{1}{\xi^{\frac{1}{s}}}}}\right)^2 \leq \frac{1}{e^{h|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}}, \quad 0 < \xi < 1,$$

odnosno

$$\frac{1}{e^{h\frac{1}{\xi^{\frac{1}{s}}}}} \leq \frac{1}{e^{\frac{h}{2}|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}}, \quad 0 < \xi < 1. \tag{6.7}$$

Dakle,

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty |\bar{\hat{g}}(a\xi)|\,|\hat{f}(\xi)|\,d\xi$$
$$\leq C \int_0^1 \frac{1}{e^{h(a\xi+\frac{1}{a\xi})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}}\,d\xi$$
$$+C \int_1^\infty \frac{1}{e^{h(a\xi+\frac{1}{a\xi})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}}\,d\xi = I_1 + I_2.$$

Neka je $0 < a < 1$. Iz konvergencije integrala $\int_0^1 \frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}}\,d\xi$ i (6.7) dobijamo

$$I_1 \leq \frac{C}{e^{h\frac{1}{a^{\frac{1}{s}}}}} \int_0^1 \frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}}\,d\xi \leq \frac{C}{e^{h\frac{1}{a^{\frac{1}{s}}}}} \leq \frac{C}{e^{\frac{h}{2}|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}}.$$

Posmatrajmo integral I_2, za $0 < a < 1$:

$$I_2 = C \int_1^{\frac{1}{a^2}} \frac{1}{e^{h(a\xi+\frac{1}{a\xi})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}}\,d\xi$$
$$+C \int_{\frac{1}{a^2}}^\infty \frac{1}{e^{h(a\xi+\frac{1}{a\xi})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}}\,d\xi = I_3 + I_4.$$

Nakon smene $\dfrac{1}{\xi} = \xi'$ i preimenovanja promenljive $\xi' = \xi$ dobijamo

$$I_4 = C \int_0^{a^2} \frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(\frac{a}{\xi}+\frac{\xi}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{d\xi}{\xi^2}$$

$$\leq C \int_0^{a^2} \frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(\frac{a}{a^2})^{\frac{1}{s}}}} \frac{d\xi}{\xi^2} \leq \frac{C}{e^{h(\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \int_0^1 \frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}} \frac{d\xi}{\xi^2}.$$

Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}} \frac{d\xi}{\xi^2}$ konvergira, pa iz (6.7) sledi

$$I_4 \leq \frac{C}{e^{h\frac{1}{a^{\frac{1}{s}}}}} \leq \frac{C}{e^{\frac{h}{2}|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}}.$$

Posmatrajmo integral I_3. Iz teoreme o srednjoj vrednosti sledi da postoji $\theta \in (a^2, 1) \subseteq (0, 1)$, tako da je

$$I_3 = C \int_{a^2}^1 \frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(\frac{a}{\xi}+\frac{\xi}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{d\xi}{\xi^2}$$

$$= \frac{C}{e^{h(\frac{a}{\theta}+\frac{\theta}{a})^{\frac{1}{s}}}} \int_{a^2}^1 \frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}} \frac{d\xi}{\xi^2} \leq \frac{C}{e^{\theta^{\frac{1}{s}} h(\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \int_0^1 \frac{1}{e^{h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}} \frac{d\xi}{\xi^2}$$

$$\leq \frac{C}{e^{\theta^{\frac{1}{s}} h \frac{1}{a^{\frac{1}{s}}}}} \leq \frac{C}{e^{\frac{\theta^{\frac{1}{s}} h}{2}|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}} = \frac{C}{e^{\tilde{h}|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}}.$$

Na osnovu teorema 6.2.1, 6.3.1 i 6.3.2, sada smo u prilici da proučimo svojstva preslikavanja $\mathcal{W}$ definisanog sa $\mathcal{W}(f,g) := \mathcal{W}_g f,\ f, g \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$. Najpre ćemo uvesti jedan prostor kojem pripada $\mathcal{W}_g f$, definisan skoro eksponencijalnim opadanjem nad $\mathbb{H}$.

Definicija 6.3.1 *Sa $S^s(\mathbb{H}), s > 1$, označavamo skup funkcija τ za koje postoje $h_1, h_2 > 0$ i konstanta $C > 0$ tako da važi*

$$\sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} e^{h_1|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}} e^{h_2|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}} |\tau(b,a)| < C. \tag{6.8}$$

Neka za funkciju τ postoje h_1 i h_2 tako da je ispunjen uslov (6.8). Tada za $h = \min\{h_1, h_2\}$ važi

$$\sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} e^{h|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}} e^{h|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}} |\tau(b,a)| < C.$$

Teorema 6.3.3 *Neka $f, g \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$. Tada je preslikavanje*

$$\mathcal{W} : \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R}) \mapsto S^s(\mathbb{H})$$

dato sa

$$\mathcal{W} : (f, g) \mapsto \mathcal{W}_g f$$

neprekidno.

Dokaz. Neka $f, g \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$. Iz definicije prostora $\mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ sledi da postoje $h > 0$ i $C > 0$ tako da važi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{h|x|^{\frac{1}{s}}} |f(x)| < C, \ \sup_{\xi>0} e^{h|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}} |\hat{f}(\xi)| < C,$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{h|x|^{\frac{1}{s}}} |g(x)| < C \quad \text{i} \quad \sup_{\xi>0} e^{h|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}} |\hat{g}(\xi)| < C.$$

Dakle, funkcije f i g zadovoljavaju uslove teorema 6.3.1 i 6.3.2, odakle sledi da postoji $\tilde{h} < h$ i $C > 0$ tako da važi

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \le \frac{C}{e^{\tilde{h}|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}}}, \quad (b,a) \in \mathbb{H}, \tag{6.9}$$

i

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \le \frac{C}{e^{\tilde{h}|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}}, \quad a > 0. \tag{6.10}$$

Pokažimo prvo da je preslikavanje $\mathcal{W}$ dobro definisano, tj. da postoji $h^* > 0$ i $C > 0$ za koje je

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \le C \frac{1}{e^{h^*|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h^*|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}}, \ (b,a) \in \mathbb{H}.$$

Iz (6.9) i (6.10) imamo da je

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)|^2 \le C \frac{1}{e^{\tilde{h}|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{\tilde{h}|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}},$$

odnosno

$$|\mathcal{W}_g f(b,a)| \leq C \frac{1}{e^{h^*|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h^*|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}},$$

gde je $h^* = \frac{\tilde{h}}{2}$.

Pokažimo neprekidnost preslikavanja $\mathcal{W}$, tj. da postoji $C > 0$ tako da važi

$$\| \mathcal{W}_g f \|_{S^s(\mathbb{H})} \leq C \| f \|_{\mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})} \| g \|_{\mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})} . \tag{6.11}$$

Koristeći činjenicu da $f, g \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ i procene (6.9), (6.10), dobijamo

$$\sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} e^{\tilde{h}|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}} |\mathcal{W}_g f(b,a)| \leq C(\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{h|x|^{\frac{1}{s}}} |f(x)|)(\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{h|x|^{\frac{1}{s}}} |g(x)|);$$

$$\sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} e^{\tilde{h}|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}} |\mathcal{W}_g f(b,a)| \leq C(\sup_{\xi>0} e^{h|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}} |\hat{f}(\xi)|)(\sup_{\xi>0} e^{h|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}} |\hat{g}(\xi)|).$$

Dalje je

$$\begin{aligned}
&(\sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} e^{\frac{\tilde{h}}{2}|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}} e^{\frac{\tilde{h}}{2}|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}} |\mathcal{W}_g f(b,a)|)^2 \\
&\leq (\sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} e^{\tilde{h}|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}} |\mathcal{W}_g f(b,a)|)(\sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} e^{\tilde{h}|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}} |\mathcal{W}_g f(b,a)|) \\
&\leq C(\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{h|x|^{\frac{1}{s}}} |f(x)|)(\sup_{\xi>0} e^{h|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}} |\hat{f}(\xi)|) \\
&\quad (\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{h|x|^{\frac{1}{s}}} |g(x)|)(\sup_{\xi>0} e^{h|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}} |\hat{g}(\xi)|) \\
&\leq C(\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{h|x|^{\frac{1}{s}}} |f(x)| + \sup_{\xi>0} e^{h|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}} |\hat{f}(\xi)|)^2 \\
&\quad (\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{h|x|^{\frac{1}{s}}} |g(x)| + \sup_{\xi>0} e^{h|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}} |\hat{g}(\xi)|)^2,
\end{aligned}$$

odakle sledi (6.11).

U nastavku ćemo posmatrati odgovarajući operator sinteze. Neka $f, g \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ i neka je $h \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ rekonstrukcioni mali talas za g. Može se dokazati da za f, g i h važi teorema 2.2.4, s tim da umesto polinomne lokalizovanosti sada imamo skoro eksponencijalnu lokalizovanost datih funkcija. Dakle, $f \in$

$\mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ možemo prikazati preko njene malotalasne transformacije na sledeći način:

$$f(x) = \frac{1}{c_{g,h}} \int_0^\infty \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_g f(b,a)\, \frac{1}{a} h(\frac{x-b}{a})\, db.$$

Malotalasni operator sinteze $\mathcal{M}_g$ funkcije τ definisane na $\mathbb{H}$ dat je sa

$$(\mathcal{M}_g \tau)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(b,a)\, \frac{1}{a} g(\frac{x-b}{a})\, db,\ x \in \mathbb{R},$$

ako je dvostruki integral apsolutno konvergentan. Za $g \in L^1(\mathbb{R})$ operator $\mathcal{M}_g$ je dobro definisan za svako $\tau \in S^s(\mathbb{H})$. Furijeova transformacija operatora sinteze data je sa

$$\widehat{\mathcal{M}_g \tau}(\xi) = \int_0^{+\infty} \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(b,a)\, \hat{g}(a\xi)\, e^{-ib\xi}\, db,\ \xi > 0,$$

pogledati (2.8).

Teorema 6.3.4 *Pretpostavimo da* $\tau \in S^s(\mathbb{H}), g \in \mathcal{K}$. *Tada postoje* $\tilde{h} < h$ *i* $C > 0$ *tako da važi*

$$|\mathcal{M}_g \tau(x)| \le \frac{C}{e^{\tilde{h}|x|^{\frac{1}{s}}}},\ x \in \mathbb{R}, \tag{6.12}$$

odnosno $\mathcal{M}_g \tau \in \mathcal{K}$.

Dokaz. Za $m > 2^{\frac{1}{s}}$ važi

$$|(\mathcal{M}_g \tau)(x)| \le \int_0^{+\infty} \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau(b,a)|\, \frac{1}{a} |g(\frac{x-b}{a})|\, db$$

$$\le C \int_0^{+\infty} \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{h|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h_\tau (a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{a} \frac{1}{e^{h|\frac{x-b}{a}|^{\frac{1}{s}}}}\, db$$

$$\le C \int_0^{1} \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{h|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h (a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{a} \frac{1}{e^{\frac{h}{m}|\frac{x-b}{a}|^{\frac{1}{s}}}}\, db$$

$$+C \int_1^{+\infty} \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{h|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h (a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{a} \frac{1}{e^{\frac{h}{m}|\frac{x-b}{a}|^{\frac{1}{s}}}}\, db = I_1 + I_2.$$

Iz $|y| \leq |y-x| + |x|$ u integralu I_1 imamo

$$I_1 \leq C \int_0^1 \frac{1}{e^{h(a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{h|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{\frac{h}{m}(|x|^{\frac{1}{s}} - |b|^{\frac{1}{s}})}} db$$

$$\leq C \frac{1}{e^{\frac{h}{m}|x|^{\frac{1}{s}}}} \int_0^1 \frac{1}{e^{h(a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{h|b|^{\frac{1}{s}}(\frac{1}{2^{\frac{1}{s}}} - \frac{1}{m})}} db.$$

Iz $m > 2^{\frac{1}{s}}$ sledi da je $\dfrac{1}{2^{\frac{1}{s}}} - \dfrac{1}{m} > 0$, pa integral po b konvergira. Takođe, integral po a konvergira, pa dobijamo da je

$$I_1 \leq \frac{C}{e^{\frac{h}{m}|x|^{\frac{1}{s}}}} \leq \frac{C}{e^{h_1|x|^{\frac{1}{s}}}},$$

za svako $h_1 = \dfrac{h}{m} < \dfrac{h}{2^{\frac{1}{s}}}$.

Posmatrajmo integral I_2, za $|x| \leq 1$. Uvedimo smenu $a' = \frac{1}{a}$ i preimenujmo promenljivu a' u a. Sada $a \in (0,1)$ i važi $a^{\frac{1}{s}} \geq a$. Dalje je

$$I_2 \leq C \int_0^1 \frac{1}{e^{h(a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{\frac{h}{m}|xa|^{\frac{1}{s}}}} da \leq C \int_0^1 \frac{1}{e^{\frac{h}{m}a^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{\frac{h}{m}a^{\frac{1}{s}}|x|^{\frac{1}{s}}}} da$$

$$= C \int_0^1 \frac{1}{e^{\frac{h}{m}a^{\frac{1}{s}}(1+|x|^{\frac{1}{s}})}} da \leq C \int_0^1 \frac{1}{e^{\frac{h}{m}a(1+|x|^{\frac{1}{s}})}} da.$$

Nakon smene promenljivih $\dfrac{h}{m}(1+|x|^{\frac{1}{s}})a = a'$ dobijamo

$$I_2 \leq C \frac{m}{h(1+|x|^{\frac{1}{s}})} \int_0^{\frac{h}{m}(1+|x|^{\frac{1}{s}})} \frac{da'}{e^{a'}} = C \frac{m}{h(1+|x|^{\frac{1}{s}})} \Big(1 - \frac{1}{e^{\frac{h}{m}(1+|x|^{\frac{1}{s}})}}\Big)$$

$$= C \frac{m}{h(1+|x|^{\frac{1}{s}})} \frac{1}{e^{\frac{h}{m}}} \Big(e^{\frac{h}{m}} - \frac{1}{e^{\frac{h}{m}|x|^{\frac{1}{s}}}}\Big) = C \frac{m}{h(1+|x|^{\frac{1}{s}})} \frac{1}{e^{\frac{h}{m}}} \frac{e^{\frac{h}{m}} e^{\frac{h}{m}|x|^{\frac{1}{s}}} - 1}{e^{\frac{h}{m}|x|^{\frac{1}{s}}}}$$

$$\leq C \frac{m}{h} \frac{1}{e^{\frac{h}{m}}} ((e^{\frac{h}{m}})^2 - 1) \frac{1}{e^{\frac{h}{m}|x|^{\frac{1}{s}}}} \leq \frac{C}{e^{h_2|x|^{\frac{1}{s}}}},$$

za svako $h_2 = \frac{h}{m} < \frac{h}{2^{\frac{1}{s}}}$.

Posmatrajmo integral I_2, za $|x| > 1$. Važi

$$\begin{aligned}
I_2 &\le C\int_1^{+\infty}\frac{da}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}|\frac{1}{e^{h|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}}}||\frac{1}{e^{h|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}}|\frac{1}{a}|\frac{1}{e^{h|\frac{x-b}{a}|^{\frac{1}{s}}}}|\,db\\
&\le C\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{h|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}}\,da\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a}|\frac{1}{e^{\frac{h}{2}|\frac{b}{a}|^{\frac{1}{s}}}}|\frac{1}{a}|\frac{1}{e^{\frac{h}{2}|\frac{x-b}{a}|^{\frac{1}{s}}}}|\,db\\
&= C\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{h|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}}\,da\int_{-\infty}^{+\infty}D_a\big(\frac{1}{e^{\frac{h}{2}|b|^{\frac{1}{s}}}}\big)D_a\big(\frac{1}{e^{\frac{h}{2}|x-b|^{\frac{1}{s}}}}\big)\,db\\
&= C\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{h|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}}(D_a\big(\frac{1}{e^{\frac{h}{2}|b|^{\frac{1}{s}}}}\big)*D_a\big(\frac{1}{e^{\frac{h}{2}|b|^{\frac{1}{s}}}}\big))(x)\,da\\
&= C\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{h|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}}D_a(\frac{1}{e^{\frac{h}{2}|b|^{\frac{1}{s}}}}*\frac{1}{e^{\frac{h}{2}|b|^{\frac{1}{s}}}})(x)\,da.
\end{aligned}$$

Iz leme 6.3.1 sledi da za svako $h_3 < h$ važi

$$I_2 \le C\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^{h|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}}D_a\big(\frac{1}{e^{h_3|x|^{\frac{1}{s}}}}\big)\,da.$$

Smenom promenljive $a' = \dfrac{1}{a}$ i preimenovanjem promenljive a' u a, koristeći teoremu o srednjoj vrednosti, dobijamo da postoji $\theta \in (0,1)$ za koje je

$$I_2 \le C\int_0^1\frac{1}{e^{h|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}}\frac{1}{e^{h_3|ax|^{\frac{1}{s}}}}\frac{da}{a} = C\frac{1}{e^{h_3|\theta x|^{\frac{1}{s}}}}\int_0^1\frac{1}{e^{h|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}}\frac{da}{a} = \frac{C}{e^{h_3\theta^{\frac{1}{s}}|x|^{\frac{1}{s}}}}.$$

Dakle, $I_2 \le \dfrac{C}{e^{h_4|x|^{\frac{1}{s}}}}$, za svako $h_4 < h\theta^{\frac{1}{s}}$.

Konačno, (6.12) važi za svako $\tilde{h} < l\,h$, gde je $l = \min\{\theta^{\frac{1}{s}}, \dfrac{1}{2^{\frac{1}{s}}}\}$.

Teorema 6.3.5 *Pretpostavimo da $\tau \in S^s(\mathbb{H})$ i da postoje $h, C > 0$ tako da važi*

$$|\hat{g}(\xi)| \le \frac{C}{e^{h|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}},\ \xi > 0.$$

Tada postoje $\tilde{h} < h$ i $C > 0$ za koje je

$$|\widehat{\mathcal{M}_g\tau}(\xi)| \le \frac{C}{e^{\tilde{h}|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}},\ \xi > 0. \tag{6.13}$$

Dokaz. Iz (2.8), uz smenu $\dfrac{b}{1+a} = b'$, imamo da je

$$|\widehat{\mathcal{M}_g\tau}(\xi)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} |\tau(b,a)|\,|\hat{g}(a\xi)|\,db$$

$$\leq C \int_0^{+\infty} \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{h(\frac{|b|}{1+a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(a\xi+\frac{1}{a\xi})^{\frac{1}{s}}}}\,db$$

$$\leq C \int_0^{+\infty} \frac{a+1}{a} \frac{1}{e^{h(a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(a\xi+\frac{1}{a\xi})^{\frac{1}{s}}}}\,da \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{h|b|^{\frac{1}{s}}}}.db$$

Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^{h|b|^{\frac{1}{s}}}}\,db$ konvergira, pa dalje imamo da je

$$|\widehat{\mathcal{M}_h\tau}(\xi)| \leq C \int_0^{1} \frac{a+1}{a} \frac{1}{e^{h(a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(a\xi+\frac{1}{a\xi})^{\frac{1}{s}}}}\,da$$

$$+C \int_1^{+\infty} \frac{a+1}{a} \frac{1}{e^{h(a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(a\xi+\frac{1}{a\xi})^{\frac{1}{s}}}}\,da = I_1 + I_2.$$

Posmatrajmo prvo integral I_1, za $0 < \xi \leq 1$. Postupkom viđenim u teoremi 6.3.2 dobijamo da je

$$I_1 \leq 2C \int_0^1 \frac{1}{a} \frac{1}{e^{h(a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(a\xi+\frac{1}{a\xi})^{\frac{1}{s}}}}\,da \leq \frac{C}{e^{h\frac{1}{\xi^{\frac{1}{s}}}}} \int_0^1 \frac{1}{a} \frac{1}{e^{h(a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}}\,da$$

$$\leq \frac{C}{e^{h\frac{1}{\xi^{\frac{1}{s}}}}} \int_0^1 \frac{1}{a^2} \frac{1}{e^{h(a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}}\,da \leq \frac{C}{e^{h|\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}} \leq \frac{C}{e^{\frac{h}{2}|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}}.$$

U slučaju kada je $\xi > 1$ u integralu I_1 koristimo teoremu o srednjoj vrednosti. Dakle, postoji $\theta_1 \in (0,1)$ tako da je

$$I_1 \leq 2C \int_0^1 \frac{1}{a} \frac{1}{e^{h(a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(a\xi+\frac{1}{a\xi})^{\frac{1}{s}}}}\,da$$

$$= 2C \frac{1}{e^{h(\theta_1\xi+\frac{1}{\theta_1\xi})^{\frac{1}{s}}}} \int_0^1 \frac{1}{a} \frac{1}{e^{h(a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}}\,da \leq \frac{C}{e^{\theta_1^{\frac{1}{s}} h\xi^{\frac{1}{s}}}} = \frac{C}{e^{h_1|\xi|^{\frac{1}{s}}}} \leq \frac{C}{e^{\frac{h_1}{2}|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}},$$

za $h_1 = \theta_1^{\frac{1}{s}} h < h$.

Posmatrajmo sada integral I_2. Pretpostavimo li da je $\xi > 1$ imamo da je

$$I_2 \leq 2C \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{h(a+\frac{1}{a})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(a\xi+\frac{1}{a\xi})^{\frac{1}{s}}}}\, da.$$

Kao u teoremi 6.3.2, dobijamo da je $I_2 \leq \dfrac{C}{e^{\frac{h}{2}|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}}$.

U slučaju kada je $\xi < 1$ iz teoreme o srednjoj vrednosti sledi da postoji $\theta_2 \in (0,1)$ za koje je

$$I_2 = C \int_0^1 \frac{1+a'}{(a')^2} \frac{1}{e^{h(a'+\frac{1}{a'})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(\frac{\xi}{a'}+\frac{a'}{\xi})^{\frac{1}{s}}}}\, da'$$

$$\leq C \int_0^1 \frac{1+a'}{(a')^2} \frac{1}{e^{h(a'+\frac{1}{a'})^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h(a')^{\frac{1}{s}}(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}}\, da'$$

$$= C \frac{1}{e^{\theta_2^{\frac{1}{s}} h(\xi+\frac{1}{\xi})^{\frac{1}{s}}}} \int_0^1 \frac{1+a'}{(a')^2} \frac{1}{e^{h(a'+\frac{1}{a'})^{\frac{1}{s}}}}\, da' \leq \frac{C}{e^{h_2|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}},$$

gde je $h_2 = \theta_2^{\frac{1}{s}} h < h$.

Konačno, procenu (6.13) dobijamo za $\tilde{h} = l\, h$, gde je $l = \min\{\frac{1}{2}, \frac{\theta_1^{\frac{1}{s}}}{2}, \theta_2^{\frac{1}{s}}\}$.

Na osnovu teorema 6.3.4 i 6.3.5 dokazuje se sledeći rezultat.

Teorema 6.3.6 *Neka $g \in \mathcal{S}_+^s(\mathbb{R}), \tau \in S^s(\mathbb{H})$. Tada je preslikavanje*

$$\mathcal{M} : \mathcal{S}_+^s(\mathbb{R}) \times S^s(\mathbb{H}) \mapsto \mathcal{S}_+^s(\mathbb{R})$$

dato sa

$$\mathcal{M} : (g, \tau) \mapsto \mathcal{M}_g \tau$$

neprekidno.

Dokaz. Za $g \in \mathcal{S}_+^s(\mathbb{R})$ i $\tau \in S^s(\mathbb{H})$ postoje $h, C > 0$ tako da važi

$$|g(x)| \leq \frac{C}{e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}},\ x \in \mathbb{R}, \quad |\hat{g}(\xi)| \leq \frac{C}{e^{h|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}},\ \xi > 0,$$

$$|\tau(b,a)| \leq C \frac{1}{e^{h|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}}} \frac{1}{e^{h|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}},\ (b,a) \in \mathbb{H},$$

tj. ispunjeni su uslovi teorema 6.3.4 i 6.3.5, pa postoje $\tilde{h} < h$ i $C > 0$ takvi da je

$$|\mathcal{M}_g\tau(x)| \leq \frac{C}{e^{\tilde{h}|x|^{\frac{1}{s}}}},\ x \in \mathbb{R} \ \text{ i } \ |\widehat{\mathcal{M}_g\tau}(\xi)| \leq \frac{C}{e^{\tilde{h}|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}},\ \xi > 0,$$

čime je pokazano da je preslikavanje $\mathcal{M}$ dobro definisano. Štaviše, iz

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} e^{\tilde{h}|x|^{\frac{1}{s}}}|\mathcal{M}_g\tau(x)| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}} e^{h|x|^{\frac{1}{s}}}|g(x)| \sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} e^{h|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}} e^{h|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}|\tau(b,a)|$$

$$\sup_{\xi>0} e^{\tilde{h}|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}|\widehat{\mathcal{M}_g\tau}(\xi)| \leq C \sup_{\xi>0} e^{h|\xi+\frac{1}{\xi}|^{\frac{1}{s}}}|\hat{g}(\xi)| \sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} e^{h|\frac{b}{1+a}|^{\frac{1}{s}}} e^{h|a+\frac{1}{a}|^{\frac{1}{s}}}|\tau(b,a)|,$$

sledi da je

$$\|\mathcal{M}_g\tau\|_{\mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})} \leq C\|g\|_{\mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})}\|\tau\|_{S^s(\mathbb{H})},$$

odnosno da je $\mathcal{M}$ neprekidno preslikavanje.

6.4 Neprekidnost malotalasne transformacije

U ovom poglavlju se navodi preciznija procena malotalasne transformacije koja obuhvata i procene izvoda u kodomenu.

Neka je $s > 1$. Podsetimo se, prostoru $\mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ pripadaju progresivne funkcije $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ takve da postoje $C, h > 0$ za koje važi

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^\alpha |f^{(\beta)}(x)| \leq C h^{\alpha+\beta}\alpha!^s\beta!^s,\ \text{za svako } \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0.$$

Prostor $\mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ je induktivna granica lokalno konveksnih prostora $\mathcal{S}^{s,h}_+(\mathbb{R})$ definisanih preko familije seminormi

$$\| \varphi \|_n = \sup_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}} \frac{\| x^\alpha \varphi^{(\beta)}(x) \|_\infty}{(h+\frac{1}{n})^{\alpha+\beta}\alpha!^s\beta!^s}.$$

Niz $\{\phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ teži nuli u $\mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ ako postoji $h > 0$ tako da

$$\| \phi_\nu \|_{\mathcal{S}^{\tilde{h},s}_+(\mathbb{R})} \to 0,\ \text{kada } \nu \to \infty,\ \text{za svako } \tilde{h} > h.$$

Definicija 6.4.1 *Funkcija $\tau \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{H})$ pripada prostoru $\mathcal{S}^{s,h}(\mathbb{H})$ ako je*

$$\| \tau \|_{\mathcal{S}^{s,h}(\mathbb{H})} = \sup_{l,k,\alpha,\beta \in \mathbb{N}} \frac{\| (a+\frac{1}{a})^l \, (1+|b|^2)^{\frac{k}{2}} \, \partial_a^\alpha \partial_b^\beta \tau(b,a) \|_\infty}{h^{l+k+\alpha+\beta} l!^s k!^s \alpha!^s \beta!^s} < \infty.$$

Prostoru $\mathcal{S}^s(\mathbb{H})$ pripadaju funkcije $\tau \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{H})$ takve da postoje $C, h > 0$ za koje važi

$$\sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} (a+\frac{1}{a})^l \, (1+|b|^2)^{\frac{k}{2}} \, |\partial_a^\alpha \partial_b^\beta \tau(b,a)| \leq C h^{l+k+\alpha+\beta} l!^s k!^s \alpha!^s \beta!^s,$$

za svako $l, k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$.

Ako je $h_1 < h_2$ tada je $\mathcal{S}^{s,h_1}(\mathbb{H}) \subset \mathcal{S}^{s,h_2}(\mathbb{H})$. Prostor $\mathcal{S}^s(\mathbb{H})$ je induktivna granica ($h \to \infty$) prostora $\mathcal{S}^{s,h}(\mathbb{H})$. Niz $\{\phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}^s(\mathbb{H})$ teži nuli u $\mathcal{S}^s(\mathbb{H})$ ako postoji $h > 0$ tako da

$$\| \phi_\nu \|_{\mathcal{S}^{s,\tilde{h}}(\mathbb{H})} \to 0, \text{ kada } \nu \to \infty, \text{ za svako } \tilde{h} > h.$$

Malotalasnu transformaciju funkcije $f \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$, u odnosu na mali talas $g \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$ definišemo na uobičajen način:

$$\mathcal{W}_g f(b,a) = \langle f(x), \frac{1}{a}\bar{g}(\frac{x-b}{a}) \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \, \frac{1}{a}\bar{g}(\frac{x-b}{a}) \, dx. \tag{6.14}$$

Neka $g \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$. Inverzna malotalasna transformacija $\mathcal{M}_g$ funkcije $\tau \in \mathcal{S}^s(\mathbb{H})$ u odnosu na g data je sa

$$(\mathcal{M}_g \tau)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(b,a) \, \frac{1}{a} g(\frac{x-b}{a}) \, db, \ x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 6.4.1 *Neka je fiksiran analizirajući mali talas $g \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$. Preslikavanje $\mathcal{W}_g : \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}^{\frac{5}{2}s}(\mathbb{H})$ $(f \mapsto \mathcal{W}_g f)$ je neprekidno.*

Dokaz. Neka $f \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$. Pokažimo da postoje $C, \tilde{h} > 0, \tilde{s} > 1$ tako da važi

$$\sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} (a+\frac{1}{a})^l \, (1+|b|^2)^{\frac{k}{2}} \, |\partial_a^\alpha \partial_b^\beta \mathcal{W}_g f(b,a)| \leq C \, \tilde{h}^{l+k+\alpha+\beta} \, l!^{\tilde{s}} \, k!^{\tilde{s}} \, \alpha!^{\tilde{s}} \, \beta!^{\tilde{s}}, \tag{6.15}$$

za svako $l, k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$. Za $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0, (b,a) \in \mathbb{H}$ posmatramo operator

$$F_{\alpha,\beta}(b,a) = \partial_a^\alpha \partial_b^\beta \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x)\, \frac{1}{a} \bar{g}(\frac{x-b}{a})\, dx \Big)$$

$$= \partial_a^\alpha \partial_b^\beta \Big(\int_{\mathbb{R}} f(ta+b)\, \bar{g}(t)\, dt \Big) = \int_{\mathbb{R}} \partial_a^\alpha \Big(f^{(\beta)}(ta+b) \Big)\, \bar{g}(t)\, dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f^{(\alpha+\beta)}(ta+b)\, t^\alpha \bar{g}(t)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f^{(\alpha+\beta)}(u+b)\, \left(\frac{u}{a}\right)^\alpha \frac{1}{a} \bar{g}\left(\frac{u}{a}\right)\, dt.$$

Dokaz ćemo izvesti u tri koraka u kojima pokazujemo da za svako $l, k, \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$ važe sledeće nejednakosti:

$$\sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} a^l\, F_{\alpha,\beta}(b,a) \le C\, \tilde{h}^{l+k+\alpha+\beta}\, l!^{\tilde{s}}\, k!^{\tilde{s}}\, \alpha!^{\tilde{s}}\, \beta!^{\tilde{s}}, \tag{6.16}$$

$$\sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} \frac{1}{a^l}\, F_{\alpha,\beta}(b,a) \le C\, \tilde{h}^{l+k+\alpha+\beta}\, l!^{\tilde{s}}\, k!^{\tilde{s}}\, \alpha!^{\tilde{s}}\, \beta!^{\tilde{s}}, \tag{6.17}$$

$$\sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} (1+|b|^2)^{\frac{k}{2}}\, F_{\alpha,\beta}(b,a) \le C\, \tilde{h}^{l+k+\alpha+\beta}\, l!^{\tilde{s}}\, k!^{\tilde{s}}\, \alpha!^{\tilde{s}}\, \beta!^{\tilde{s}}. \tag{6.18}$$

Primetimo da je u procenama (6.16), (6.17) i (6.18) dovoljno posmatrati ponašanja parametra a u beskonačnosti, a u nuli i b u beskonačnosti, respektivno, pa možemo pretpostaviti da je $a > 1$, $a < 1$ i $b > 1$, respektivno.

Pokažimo nejednakost (6.18). Nakon kratkog računa (videti dokaz teoreme 2.3.1), za velike vrednosti parametra b, dobijamo da je

$$(1+|b|^2)^{\frac{k}{2}}\, F_{\alpha,\beta}(b,a) \le (1+|b|^2)^{\frac{k}{2}}\, |\int_0^\infty \omega^{\alpha+\beta}\, e^{ib\omega} \hat{f}(\omega)\, \bar{\hat{g}}^{(\alpha)}(a\omega)\, d\omega|$$

$$\le (1+|b|^2)^{\frac{k}{2}}\, |\int_0^\infty \frac{\partial_\omega^k\,(e^{ib\omega})}{(ib)^k}\, \omega^{\alpha+\beta}\, \hat{f}(\omega)\, \bar{\hat{g}}^{(\alpha)}(a\omega)\, d\omega|$$

$$\le C \int_0^\infty |e^{ib\omega}||\partial_\omega^k \Big(\omega^{\alpha+\beta}\, \hat{f}(\omega)\, \bar{\hat{g}}^{(\alpha)}(a\omega) \Big)|\, d\omega$$

$$\le C \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \int_0^\infty |\partial_\omega^{k-j} \Big(\omega^{\alpha+\beta}\, \hat{f}(\omega) \Big)|\, |\partial_\omega^j \Big(\bar{\hat{g}}^{(\alpha)}(a\omega) \Big)|\, d\omega$$

$$\leq C\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sum_{r=0}^{k-j}\binom{k-j}{r}\int_0^\infty |\partial_\omega^{k-j-r}\Big(\omega^{\alpha+\beta}\Big)\,\partial_\omega^r\Big(\hat{f}(\omega)\Big)|$$

$$a^j|\Big(\bar{\hat{g}}^{(\alpha+j)}(a\omega)\Big)|\,d\omega$$

$$\leq C\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sum_{r=0}^{k-j}\binom{k-j}{r}\Big(\int_0^1+\int_1^\infty\Big)\frac{(\alpha+\beta)!}{(\alpha+\beta-k+j+r)!}\omega^{\alpha+\beta-k+j+r}$$

$$|\hat{f}^{(r)}(\omega)|\,a^j|\Big(\bar{\hat{g}}^{(\alpha+j)}(a\omega)\Big)|\,d\omega=C\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sum_{r=0}^{k-j}\binom{k-j}{r}(I_1+I_2).$$

Dajemo prvo procenu za integral I_2, pri čemu koristimo poznatu nejednakost $(\alpha+\beta)!\leq 2^{\alpha+\beta}\alpha!\,\beta!$. Važi

$$I_2\leq\int_1^\infty(\alpha+\beta)!\,\frac{2}{1+\omega^2}\,\omega^{\alpha+\beta+2}\,|\hat{f}^{(r)}(\omega)|\,a^j\omega^j|\Big(\bar{\hat{g}}^{(\alpha+j)}(a\omega)\Big)|\,d\omega$$

$$\leq C\,(\alpha+\beta)!\,h^{\alpha+\beta+2}\,(\alpha+\beta+2)!^s\,h^r\,r!^s\,h^j\,j!^s\,h^{\alpha+j}\,(\alpha+j)!^s\int_1^\infty\frac{d\omega}{1+\omega^2}$$

$$\leq C(s,h)h^{2\alpha+\beta+2j+r}2^{s(2\alpha+\beta+j)+\alpha+\beta}\alpha!^{2s+1}\beta!^{s+1}r!^s j!^{2s}.$$

Pri proceni integrala I_1 koristimo Tejlorovu formulu i činjenicu da je $\hat{f}^{(n)}(0)=0$, $n\in\mathbb{N}$. Važi

$$I_1\leq\int_0^1(\alpha+\beta)!\omega^{\alpha+\beta-k+j+r}\Big[\sum_{m=0}^{j-1}|\frac{\hat{f}^{(r+m)}(0)}{m!}\omega^m|$$

$$+|\frac{\hat{f}^{(r+j)}(\theta)}{j!}\omega^j|\Big]a^j\bar{\hat{g}}^{(\alpha+j)}(a\omega)|\,d\omega$$

$$\leq(\alpha+\beta)!h^{r+j}(r+j)!^s h^j j!^s h^{\alpha+j}(\alpha+j)!^s\int_0^1\omega^{\alpha+\beta-k+j+r}\,d\omega$$

$$\leq C2^{\alpha+\beta}\alpha!\beta!h^{r+j}2^{s(r+j)}r!^s j!^s h^j j!^s h^{\alpha+j}2^{s(\alpha+j)}\alpha!^s j!^s$$

$$\leq C2^{s(\alpha+r+2j)+\alpha+\beta}h^{\alpha+r+3j}\alpha!^{s+1}\beta!r!^s j!^{3s}.$$

Sada je

$$I_1+I_2\leq C(s,h)h^{2\alpha+\beta+r+3j}2^{s(2\alpha+\beta+r+2j)+\alpha+\beta}\alpha!^{2s+1}\beta!^{s+1}r!^s j!^{3s},$$

odnosno

$$(1+|b|^2)^{\frac{k}{2}}\,F_{\alpha,\beta}(b,a) \leq C(s,h)\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\sum_{r=0}^{k-j}\binom{k-j}{r}h^{2\alpha+\beta+r+3j}$$

$$2^{s(2\alpha+\beta+r+2j)+\alpha+\beta}\alpha!^{2s+1}\beta!^{s+1}r!^{s}j!^{3s}$$

$$\leq C(s,h)h^{2\alpha+\beta+3k}2^{s(2\alpha+\beta+2k)+\alpha+\beta+2k}\alpha!^{2s+1}\beta!^{s+1}k!^{4s}. \tag{6.19}$$

Koristeći slične argumente, pokažimo nejednakost (6.16) za $a > 1$. Polazimo od nejednakosti

$$a^l F_{\alpha,\beta}(b,a) \leq \Big(\int_0^1 + \int_1^\infty\Big)\omega^{\alpha+\beta}|\hat{f}(\omega)|a^l|\bar{\hat{g}}^{(\alpha)}(a\omega)|\,d\omega = I_1 + I_2.$$

Procenimo prvo integral I_2 :

$$I_2 \leq \int_1^\infty \frac{2}{1+\omega^2}\omega^{\alpha+\beta+2}|\hat{f}(\omega)|a^l\omega^l|\bar{\hat{g}}^{(\alpha)}(a\omega)|\,d\omega$$

$$\leq Ch^{2\alpha+\beta+l+2}(\alpha+\beta+2)!^{s}l!^{s}\alpha!^{s}\int_1^\infty \frac{d\omega}{1+\omega^2}$$

$$\leq C(h,s)h^{2\alpha+\beta+l}2^{s(\alpha+\beta)}\alpha!^{2s}\beta!^{s}l!^{s}.$$

Pri proceni integrala I_1 koristimo Tejlorovu formulu ($\theta \in (0,1)$), odakle sledi

$$I_1 \leq \int_0^1 \omega^{\alpha+\beta}\,\frac{|\hat{f}^{(l)}(\theta)|}{l!}\,\omega^l a^l|\bar{\hat{g}}^{(\alpha)}(a\omega)|\,d\omega \leq Ch^{\alpha+2l}l!^{2s-1}\alpha!^{s}.$$

Dakle,

$$a^l F_{\alpha,\beta}(b,a) \leq C(h,s)h^{2\alpha+\beta+2l}2^{s(\alpha+\beta)}\alpha!^{2s}\beta!^{s}l!^{2s-1}. \tag{6.20}$$

Pokažimo nejednakost (6.17) za $0 < a < 1$. Važi

$$\frac{1}{a^l}F_{\alpha,\beta}(b,a) = \frac{1}{a^l}\Big|\int_{\mathbb{R}} f^{(\alpha+\beta)}(ax+b)x^\alpha\bar{g}(x)\,dx\Big|$$

$$= \frac{1}{a^l}\Big|\int_{\mathbb{R}}\Big[\sum_{m=0}^{l-1}\frac{f^{(\alpha+\beta+m)}(b)}{m!}(ax)^m + \frac{f^{(\alpha+\beta+l)}(\theta)}{l!}(ax)^l\Big]x^\alpha\bar{g}(x)\,dx\Big|$$

$$\leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^2} \frac{|f^{(\alpha+\beta+l)}(\theta)|}{l!} |x|^{\alpha+l+2} |\bar{g}(x)|\, dx$$

$$\leq Ch^{2\alpha+\beta+2l+2} (\alpha+\beta+l)!^s \frac{1}{l!} (\alpha+l+2)!^s \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+|x|^2}\, dx$$

$$\leq C(h,s) h^{2\alpha+\beta+2l} 2^{s(2\alpha+\beta+2l)} \alpha!^{2s} \beta!^s l!^{2s-1}. \tag{6.21}$$

Kako je $(a+\frac{1}{a})^l \leq C(a^l + \frac{1}{a^l})$ iz (6.19), (6.20) i (6.21) sledi

$$(a+\frac{1}{a})^l (1+|b|^2)^{\frac{k}{2}} F^2_{\alpha,\beta}(b,a) \leq C(h,s) h^{4\alpha+2\beta+2l+3k}$$

$$2^{s(4\alpha+2\beta+2l+2k)+\alpha+\beta+2k} \alpha!^{4s+1} \beta!^{2s+1} l!^{2s-1} k!^{4s},$$

odnosno za $\tilde{h} = \max\{h^4, 2^{4s}\}$ i za $\tilde{s} = 4s+1$, važi

$$(a+\frac{1}{a})^l (1+|b|^2)^{\frac{k}{2}} F^2_{\alpha,\beta}(b,a) \leq C(h,s) \tilde{h}^{\alpha+\beta+l+k} \alpha!^{\tilde{s}} \beta!^{\tilde{s}} l!^{\tilde{s}} k!^{\tilde{s}},\ (b,a) \in \mathbb{H}, \tag{6.22}$$

za svako $\alpha, \beta, l, k \in \mathbb{N}_0$.

Ako u (6.22) stavimo vrednosti $2l$ i $2k$ umesto l i k i korenujemo obe strane nejednakosti, dobijamo

$$(a+\frac{1}{a})^l (1+|b|^2)^{\frac{k}{2}} F_{\alpha,\beta}(b,a) \leq C(h,s) \tilde{h}^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+l+k} \alpha!^{\tilde{s}} \beta!^{\tilde{s}} (2l)!^{\frac{\tilde{s}}{2}} (2k)!^{\frac{\tilde{s}}{2}}$$

$$\leq C(h,s) \tilde{h}^{\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+2l+2k} \alpha!^{\tilde{s}} \beta!^{\tilde{s}} l!^{\tilde{s}} k!^{\tilde{s}},$$

za svako $(b,a) \in \mathbb{H}$, odnosno da važi (6.15).

Teorema 6.4.2 *Neka je fiksiran analizirajući mali talas $g \in \mathcal{S}^s_+(\mathbb{R})$. Preslikavanje $\mathcal{M}_g : \mathcal{S}^s(\mathbb{H}) \to \mathcal{S}^{5s}_+(\mathbb{R}) (\tau \mapsto \mathcal{M}_g\tau)$ je neprekidno.*

Dokaz. Neka $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$. Pokažimo da postoje $C, \tilde{h} > 0$ i $\tilde{s} > 1$ tako da je

$$(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}} |\partial^\beta_x \big(\mathcal{M}_g\tau(x)\big)| \leq C\tilde{h}^{\alpha+\beta} \alpha!^{\tilde{s}} \beta!^{\tilde{s}},\ x \in \mathbb{R}. \tag{6.23}$$

Neka $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$. Dovoljno je pokazati da (6.23) važi za velike vrednosti x :

$$(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}} |\partial^\beta_x \big(\mathcal{M}_g\tau(x)\big)|$$

$$= (1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}} |\partial^\beta_x \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \tau(b,a) \frac{1}{a} \bar{g}(\frac{x-b}{a})\, db\, \frac{da}{a}|$$

$$= (1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\partial_x^\beta \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \tau(x-b,a)\frac{1}{a}\bar{g}(\frac{b}{a})\,db\,\frac{da}{a}|$$

$$\leq (1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \partial_b^\beta \tau(x-b,a)\frac{1}{a}\bar{g}(\frac{b}{a})\,db\,\frac{da}{a}|$$

$$\leq (1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\int_0^\infty \int_0^\infty \xi^\beta \hat{\tau}(-\xi,a)e^{-ix\xi}\hat{\bar{g}}(a\xi)\,d\xi\,\frac{da}{a}|$$

$$\leq (1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\partial_\xi^\alpha e^{-ix\xi}}{(-ix)^\alpha}\xi^\beta \hat{\tau}(-\xi,a)\hat{\bar{g}}(a\xi)\,d\xi\,\frac{da}{a}|$$

$$\leq C\int_0^\infty \int_0^\infty |\partial_\xi^\alpha\Big(\xi^\beta \hat{\tau}(-\xi,a)\hat{\bar{g}}(a\xi)\Big)|\,d\xi\,\frac{da}{a}$$

$$\leq C\int_0^\infty \int_0^\infty |\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}\partial_\xi^{\alpha-k}\Big(\xi^\beta \hat{\tau}(-\xi,a)\Big)\partial_\xi^k\Big(\hat{\bar{g}}(a\xi)\Big)|\,d\xi\,\frac{da}{a}$$

$$\leq C\int_0^\infty \int_0^\infty |\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}\sum_{j=0}^{\alpha-k}\binom{\alpha-k}{j}\partial_\xi^{\alpha-k-j}\Big(\xi^\beta\Big)$$

$$\partial_\xi^j\Big(\hat{\tau}(-\xi,a)\Big)\partial_\xi^k\Big(\hat{\bar{g}}(a\xi)\Big)|\,d\xi\,\frac{da}{a}$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}\sum_{j=0}^{\alpha-k}\binom{\alpha-k}{j}\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\beta!}{(\beta-\alpha+k+j)!}\xi^{\beta-\alpha+k+j}$$

$$|\partial_\xi^j \hat{\tau}(-\xi,a)|a^k|\hat{\bar{g}}^{(k)}(a\xi)|\,d\xi\,\frac{da}{a}$$

$$\leq C\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}\sum_{j=0}^{\alpha-k}\binom{\alpha-k}{j}\Big(\int_0^\infty \int_0^1 + \int_0^\infty \int_1^\infty\Big)\beta!\xi^{\beta-\alpha+k+j}$$

$$|\partial_\xi^j \hat{\tau}(-\xi,a)|(a+\frac{1}{a})^{k+1}|\hat{\bar{g}}^{(k)}(a\xi)|\,d\xi\,\frac{da}{1+a^2}$$

$$= C\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}\sum_{j=0}^{\alpha-k}\binom{\alpha-k}{j}\big(I_1+I_2\big).$$

Procenimo prvo integral I_1 :

$$I_1 \leq h^{j+2k+1}2^{s(k+1)}\beta!j!^s k!^{2s}\int_0^\infty \int_0^1 \xi^{\beta-\alpha+k+j}\,d\xi\,\frac{da}{1+a^2}$$

$$\leq C(h,s)h^{j+2k}2^{sk}\beta!j!^s k!^{2s}.$$

Dalje je

$$I_2 \leq \int_0^\infty \int_1^\infty \beta!\xi^{\beta+k+j+2}|\partial_\xi^j \hat{\tau}(-\xi,a)|(a+\frac{1}{a})^{k+1}|\bar{\hat{g}}^{(k)}(a\xi)|\,\frac{d\xi}{1+\xi^2}\,\frac{da}{1+a^2}$$

$$\leq h^{\beta+3k+2j+3}2^{s(\beta+2k+j+3)}\beta!^{s+1}k!^{3s}j!^{2s}2!^s \int_0^\infty \int_1^\infty \frac{d\xi}{1+\xi^2}\,\frac{da}{1+a^2}$$

$$\leq C(h,s)h^{\beta+3k+2j}2^{s(\beta+2k+j)}\beta!^{s+1}k!^{3s}j!^{2s}.$$

Sada je

$$\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}\sum_{j=0}^{\alpha-k}\binom{\alpha-k}{j}\big(I_1+I_2\big)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}\sum_{j=0}^{\alpha-k}\binom{\alpha-k}{j}C(h,s)h^{\beta+3k+2j}2^{s(\beta+2k+j)}\beta!^{s+1}k!^{3s}j!^{2s}$$

$$\leq C(h,s)h^{\beta+5\alpha}2^{s(\beta+3\alpha)}\beta!^{s+1}\alpha!^{5s}\sum_{k=0}^{\alpha}\binom{\alpha}{k}\sum_{j=0}^{\alpha-k}\binom{\alpha-k}{j}$$

$$\leq C(h,s)h^{\beta+5\alpha}2^{s(\beta+3\alpha)+2\alpha}\beta!^{s+1}\alpha!^{5s}$$

$$\leq C(h,s)h^{\beta+5\alpha}2^{s(\beta+5\alpha)}\beta!^{s+1}\alpha!^{5s}.$$

Konačno, za $\tilde{h}=\max\{h^5,2^{5s}\}$, $\tilde{s}=5s$ dobijamo da je

$$(1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}}|\partial_x^\beta\big(\mathcal{M}_g\tau(x)\big)| \leq C(h,s)\tilde{h}^{\alpha+\beta}\alpha!^{\tilde{s}}\beta!^{\tilde{s}},\ x\in\mathbb{R}.$$

Definišimo prostore $\mathcal{S}_-^s(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}_0^s(\mathbb{R})$, $s>1$, na sledeći način:

$$f(x)\in\mathcal{S}_-^s(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f(-x)\in\mathcal{S}_+^s(\mathbb{R}),\ \mathcal{S}_0^s(\mathbb{R})=\mathcal{S}_+^s(\mathbb{R})\oplus\mathcal{S}_-^s(\mathbb{R}).$$

Sa (6.14) definišemo malotalasnu transformaciju u ovim prostorima, pri čemu f i g pripadaju prostoru $\mathcal{S}_-^s(\mathbb{R})$, odnosno $\mathcal{S}_0^s(\mathbb{R})$.

Lako se pokazuje da tvrđenja teorema 6.4.1 i 6.4.2 važe ako umesto prostora $\mathcal{S}_+^s(\mathbb{R})$ posmatramo $\mathcal{S}_-^s(\mathbb{R})$.

Neka $f,g\in\mathcal{S}_0^s(\mathbb{R})$. Tada postoje $f_+,g_+\in\mathcal{S}_+^s(\mathbb{R})$ i $f_-,g_-\in\mathcal{S}_-^s(\mathbb{R})$ tako da je $f=f_++f_-$ i $g=g_++g_-$. Dalje, za $(b,a)\in\mathbb{H}$ je

$$\mathcal{W}_g f(b,a)=\mathcal{W}_{g_++g_-}(f_++f_-)(b,a)$$

$$= \mathcal{W}_{g_+} f_+(b,a) + \mathcal{W}_{g_+} f_-(b,a) + \mathcal{W}_{g_-} f_+(b,a) + \mathcal{W}_{g_-} f_-(b,a).$$

S obzirom da su f_+ i g_+ progresivne, a f_- i g_- regresivne funkcije imamo da je $\mathcal{W}_{g_+} f_-(b,a) = \mathcal{W}_{g_-} f_+(b,a) = 0$. Dakle,

$$\mathcal{W}_g f(b,a) = \mathcal{W}_{g_+} f_+(b,a) + \mathcal{W}_{g_-} f_-(b,a),$$

pa zaključujemo da tvrđenje teoreme 6.4.1 važi i za elemente prostora $\mathcal{S}_0^s(\mathbb{R})$. Analogno, i tvrđenje teoreme 6.4.2 važi za $\mathcal{S}_0^s(\mathbb{R})$.

6.5 Malotalasna transformacija temperiranih ultradistribucija

Iz teorema 6.4.1 i 6.4.2 sledi da je za proučavanje malotalasne i inverzne malotalasne transformacije temperiranih ultradistribucija prirodno uvesti prostore $\mathcal{S}_+^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H})$ na sledeći način:

$$f \in \mathcal{S}_+^{(1,\infty)}(\mathbb{R}) \;\Leftrightarrow\; \text{ postoji } s > 1 \text{ tako da } f \in \mathcal{S}_+^s(\mathbb{R}) \; \text{ i}$$

$$f \in \mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H}) \;\Leftrightarrow\; \text{ postoji } s > 1 \text{ tako da } f \in \mathcal{S}^s(\mathbb{H}),$$

odnosno

$$\mathcal{S}_+^{(1,\infty)}(\mathbb{R}) = \bigcup_{s>1} \mathcal{S}_+^s(\mathbb{R}) \;\text{ i }\; \mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H}) = \bigcup_{s>1} \mathcal{S}^s(\mathbb{H}).$$

Prostori $\mathcal{S}_-^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ su dati sa:

$$f(x) \in \mathcal{S}_-^{(1,\infty)}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow f(-x) \in \mathcal{S}_+^{(1,\infty)}(\mathbb{R}) \quad \text{i}$$

$$\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_+^{(1,\infty)}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{S}_-^{(1,\infty)}(\mathbb{R}).$$

Teorema 6.5.1 *Za fiksirano $g \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ malotalasna transformacija:*

$$\mathcal{W}_g f(b,a) = \langle f(x), \frac{1}{a}\bar{g}(\frac{x-b}{a})\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\frac{1}{a}\bar{g}(\frac{x-b}{a})\,dx,\ (b,a) \in \mathbb{H}$$

je neprekidno preslikavanje iz $\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ u $\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H})$.

Dokaz. Pokažimo prvo da je na ovaj način malotalasna transformacija dobro definisana. Za $f,g \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ postoje s_1 i s_2 takvi da $f \in \mathcal{S}_0^{s_1}(\mathbb{R})$ i $g \in \mathcal{S}_0^{s_2}(\mathbb{R})$, odnosno $f,g \in \mathcal{S}_0^{s}(\mathbb{R})$, za $s = \max\{s_1,s_2\}$. Iz dokaza teoreme 6.4.1 sledi da postoje $\tilde{h}, C > 0$ i $\tilde{s} > 1$ tako da je

$$\sup_{(b,a)\in\mathbb{H}} (a+\frac{1}{a})^l\,(1+|b|^2)^{\frac{k}{2}}\,|\partial_a^\alpha \partial_b^\beta \mathcal{W}_g f(b,a)| \le C\,\tilde{h}^{l+k+\alpha+\beta}\,l!^{\tilde{s}}\,k!^{\tilde{s}}\,\alpha!^{\tilde{s}}\,\beta!^{\tilde{s}},$$

za svako $l,k,\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0$. Dakle, $\mathcal{W}_g f \in \mathcal{S}^{\tilde{s}}(\mathbb{H})$ odakle sledi da $\mathcal{W}_g f \in \mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H})$.

Preslikavanje $\mathcal{W}_g : \bigcup_{s>1} \mathcal{S}_0^s(\mathbb{R}) \to \bigcup_{s>1} \mathcal{S}^s(\mathbb{H})$ je neprekidno ako i samo ako je za svako $s > 1$ restrikcija $\mathcal{W}_g : \mathcal{S}_0^s(\mathbb{R}) \to \bigcup_{s>1} \mathcal{S}^s(\mathbb{H})$ neprekidno preslikavanje. Pokažimo da za svaku okolinu nule U u $\bigcup_{s>1} \mathcal{S}^s(\mathbb{H})$ postoji okolina nule V u $\mathcal{S}_0^s(\mathbb{R})$ tako da je $\mathcal{W}_g(V) \subset U$. Iz dokaza teoreme 6.4.1 sledi da za svako $s > 1$ postoji $\tilde{s} > 1$ tako da je preslikavanje $\mathcal{W}_g : \mathcal{S}_0^s(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}^{\tilde{s}}(\mathbb{H})$ neprekidno. Neka je U okolina nule u $\bigcup_{s>1} \mathcal{S}^s(\mathbb{H})$. Tada je $W = U \cap \mathcal{S}^{\tilde{s}}(\mathbb{H})$ okolina nule u $\mathcal{S}^{\tilde{s}}(\mathbb{H})$ i za nju znamo da postoji okolina nule V u $\mathcal{S}_0^s(\mathbb{R})$ tako da je $\mathcal{W}_g(V) \subset W \subset U$.

Teorema 6.5.2 *Za fiksirano $g \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ inverzna malotalasna transformacija:*

$$\mathcal{M}_g \tau(x) = \int_0^{+\infty} \frac{da}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(b,a)\,\frac{1}{a} g(\frac{x-b}{a})\,db,\ x \in \mathbb{R}$$

je neprekidno preslikavanje iz $\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H})$ u $\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$.

Dokaz. Za $g \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ i $\tau \in \mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H})$ postoje s_1 i s_2 tako da $g \in \mathcal{S}_0^{s_1}(\mathbb{R})$ i $\tau \in \mathcal{S}^{s_2}(\mathbb{H})$, tj. $g \in \mathcal{S}_0^s(\mathbb{R})$, $\tau \in \mathcal{S}^s(\mathbb{H})$, za $s = \max\{s_1,s_2\}$. Iz dokaza teoreme 6.4.2 sledi da postoje $\tilde{h}, C > 0$ i $\tilde{s} > 1$ tako da je

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|^2)^{\frac{\alpha}{2}} |\partial_x^\beta\big(\mathcal{M}_g\tau(x)\big)| \le C\tilde{h}^{\alpha+\beta}\alpha!^{\tilde{s}}\beta!^{\tilde{s}},$$

za svako $\alpha,\beta \in \mathbb{N}_0$, tj. da $\mathcal{M}_g\tau \in \mathcal{S}_0^{\tilde{s}}(\mathbb{R})$, a time i $\mathcal{M}_g\tau \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$.

Preslikavanje $\mathcal{M}_g : \bigcup_{s>1} \mathcal{S}^s(\mathbb{H}) \to \bigcup_{s>1} \mathcal{S}_0^s(\mathbb{R})$ je neprekidno ako i samo ako je za svako $s > 1$ restrikcija $\mathcal{M}_g : \mathcal{S}^s(\mathbb{H}) \to \bigcup_{s>1} \mathcal{S}_0^s(\mathbb{R})$ neprekidno preslikavanje. Pokažimo da za svaku okolinu nule U u $\bigcup_{s>1} \mathcal{S}_0^s(\mathbb{R})$ postoji okolina nule V u $\mathcal{S}^s(\mathbb{H})$ tako da je $\mathcal{M}_g(V) \subset U$. Iz dokaza teoreme 6.4.2 sledi da za svako $s > 1$ postoji $\tilde{s} > 1$ tako da je preslikavanje $\mathcal{M}_g : \mathcal{S}^s(\mathbb{H}) \to \mathcal{S}_0^{\tilde{s}}(\mathbb{R})$

neprekidno. Neka je U okolina nule u $\bigcup_{s>1} \mathcal{S}_0^s(\mathbb{R})$. Tada je $W = U \cap \mathcal{S}_0^{\tilde{s}}(\mathbb{R})$ okolina nule u $\mathcal{S}_0^{\tilde{s}}(\mathbb{R})$ i za nju znamo da postoji okolina nule V u $\mathcal{S}^s(\mathbb{H})$ tako da je $\mathcal{M}_g(V) \subset W \subset U$.

Ukoliko u dokazu teoreme 2.2.4 argument polinomne ograničenosti zamenimo sa skoro eksponencijalnom ograničenošću dobijamo da teorema 2.2.4 važi i za elemente prostora $\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$, odakle sledi naredna teorema.

Teorema 6.5.3 *Neka je $g \in \mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ prihvatljiv mali talas. Tada je $\dfrac{1}{c_g}\mathcal{M}_g\mathcal{W}_g$ identično preslikavanje na $\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$.*

Da bi se uvela definicija malotalasne transformacije ultradistribucija, primetimo da za $g, s \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$, $\tau \in \mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H})$ važi

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{W}_g s, \tau \rangle &= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathcal{W}_g s}(b,a)\, \tau(b,a)\, db\, \frac{da}{a} \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{s}(t)\, \frac{1}{a} g(\frac{t-b}{a})\, dt \Big)\, \tau(b,a)\, db\, \frac{da}{a} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{s}(t) \Big(\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau(b,a) \frac{1}{a} g\big(\frac{t-b}{a}\big)\, db\, \frac{da}{a} \Big)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{s}(t) \mathcal{M}_g \tau(t)\, dt = \langle s, \mathcal{M}_g \tau \rangle.
\end{aligned}$$

Sa $(\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))'$ i $(\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H}))'$ označavamo duale prostora $\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ i $\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H})$. Važi

$$(\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))' \cong \bigcap_{s>1} (\mathcal{S}_0^s(\mathbb{R}))'. \tag{6.24}$$

Imamo da $f \in (\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))'$ ako i samo ako važi sledeći uslov: ako niz $\{\phi_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ konvergira ka nuli u $\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ onda i $\langle f, \phi_\nu \rangle$ teži nuli u $\mathbb{C}$. Takođe, niz $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset (\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))'$ konvergira ka nuli u $(\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))'$ ako i samo ako $\langle f_\nu, \phi \rangle$ teži nuli u $\mathbb{C}$, za svako $\phi \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$.

Definicija 6.5.1 *Malotalasnu transformaciju $f \in (\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))'$ u odnosu na mali talas $g \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ definišemo na sledeći način:*

$$\langle \mathcal{W}_g f, \tau \rangle = \langle f, \mathcal{M}_{\bar{g}} \tau \rangle, \ \tau \in \mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H}). \tag{6.25}$$

Pokažimo da je na ovaj način malotalasna transformacija dobro definisana. Za $g \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ i $\tau \in \mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H})$ je $\bar{g} \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ i $\mathcal{M}_{\bar{g}}\tau \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$. Dakle, na desnoj strani jednakosti (6.25) imamo delovanje $f \in (\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))'$ na element test prostora.

Preciznije, postoji $s > 1$ tako da je $g \in \mathcal{S}_0^s(\mathbb{R})$ i $\tau \in \mathcal{S}^s(\mathbb{H})$. Tada postoji $\tilde{s}$ tako da $\mathcal{M}_{\bar{g}}\tau \in \mathcal{S}_0^{\tilde{s}}(\mathbb{R})$, a kako $f \in (\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))'$ iz (6.24) sledi da $f \in (\mathcal{S}_0^{\tilde{s}}(\mathbb{R}))'$, pa je (6.25) dobro definisano za svako $\tau \in \mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H})$.

Teorema 6.5.4 *Za fiksirano $g \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ preslikavanje $\mathcal{W}_g : (\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))' \to (\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H}))'$ je neprekidno.*

Dokaz. Neka je $\{\eta_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ niz iz $(\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))'$ koji konvergira ka nuli u $(\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))'$, odnosno $\langle \eta_\nu, \phi\rangle$ teži nuli, za svako $\phi \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$. Sada, za svako $\tau \in \mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H})$ i $\nu \in \mathbb{N}$ važi

$$\langle \mathcal{W}_g\eta_\nu, \tau\rangle = \langle \eta_\nu, \mathcal{M}_{\bar{g}}\tau\rangle.$$

Kako $\mathcal{M}_{\bar{g}}\tau \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ imamo da $\mathcal{W}_g\eta_\nu$ konvergira ka nuli u $(\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H}))'$, čime je pokazana tražena neprekidnost.

Definicija 6.5.2 *Neka $g \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$. Inverzna malotalasna transformacija od $\Omega \in (\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H}))'$ u odnosu na g definisana je na sledeći način:*

$$\langle \mathcal{M}_g\Omega,\, \phi\rangle = \langle \Omega,\, \mathcal{W}_{\bar{g}}\phi\rangle,\ \phi \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R}). \tag{6.26}$$

Teorema 6.5.5 *Za fiksirano $g \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ preslikavanje $\mathcal{M}_g : (\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H}))' \to (\mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))'$ je neprekidno.*

Dokaz. Neka je $\{\Omega_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ niz iz $(\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H}))'$ koji konvergira ka nuli u $(\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H}))'$, odnosno $\langle \Omega_\nu, \tau\rangle$ teži nuli, za svako $\tau \in \mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H})$. Sada, za svako $\phi \in \mathcal{S}_0^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ i $\nu \in \mathbb{N}$ važi

$$\langle \mathcal{M}_g\Omega_\nu,\, \phi\rangle = \langle \Omega_\nu,\, \mathcal{W}_{\bar{g}}\phi\rangle.$$

Kako $\mathcal{W}_{\bar{g}}\phi \in \mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{H})$ imamo da $\mathcal{M}_g\Omega_\nu$ konvergira ka nuli u $(\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))'$, čime je pokazana neprekidnost .

Teorema 6.5.6 *Neka je $g \in \mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ prihvatljiv mali talas. Tada je $\dfrac{1}{c_g}\mathcal{M}_g\mathcal{W}_g$ identično preslikavanje na $(\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))'$.*

Dokaz. Iskoristimo li definicije malotalasne i inverzne malotalasne transformacije u dualnim prostorima dobijamo da za svako $\eta \in (\mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{R}))'$ i svako $\phi \in \mathcal{S}^{(1,\infty)}(\mathbb{R})$ važi

$$(\mathcal{M}_g \mathcal{W}_g \eta)(\phi) = (\mathcal{W}_g \eta)(\mathcal{W}_{\bar{g}} \phi) = \eta(\mathcal{M}_{\bar{g}} \mathcal{W}_{\bar{g}} \phi).$$

Tvrđenje teoreme sledi iz teoreme 6.5.3.

Bibliografija

[1] N. H. Bingham, C. M. Goldie, J. L. Teugels, *Regular Variation*, Encyclopedia of Math. and its Appl. 27, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.

[2] J. Chung, S. Y. Chung, D. Kim, *Une caractérisation de l'espace de Scwartz*, C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 316 (1993), 23–25.

[3] J. Chung, S. Y. Chung, D. Kim, *A Characterization for Fourier Hyperfunctions*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 30 (1994), 203–208.

[4] J. Chung, S. Y. Chung, D. Kim, *Characterizations of the Gelfand-Shilov Spaces via Fourier Transforms*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 2101–2108.

[5] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Phyladelphia, 1992.

[6] C. L. DeVito, *Functional Analysis*, Acad. Press, New York, 1978.

[7] Y. N. Drozhzhinov, B. I. Zavialov, *Tauberian-type Theorems for a Generalized Multiplicative Convolution*, Izv. Math. 64 (2000), 35—92.

[8] Y. N. Drozhzhinov, B. I. Zavialov, *Tauberian Theorems for Generalized Functions with Values in Banach Spaces*, Izv. Math. 66 (2002), 701–769.

[9] A. J. Duran, *The Analytic Functionals in the Lower Half Plane as a Gel'fand-Shilov Space*, Math. Nachr. 153 (1991), 145–167.

[10] A. L. Durán, R. Estrada, *Strong Moment Problems for Rapidly Decreasing Smooth Functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), 529–534.

[11] J. Dziubański, E. Hernández *Band-limited Wavelets with Subexponential Decay*, Canad. Math. Bull. 41 (1998), 398–403.

[12] R. Estrada, *Characterization of the Fourier Series of Distributions Having a Value at a Point*, Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1996), 1205–1212.

[13] R. Estrada, R. P. Kanwal, *Singular Integral Equations*, Birkhäuser, Boston, 2000.

[14] R. Estrada, R. P. Kanwal, *A Distributional Approach to Asymptotics. Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston, 2002.

[15] I.M. Gel'fand, G.E. Shilov, *Generalized Functions, vol.1*, Acad. Press, New York, 1964.

[16] I.M. Gel'fand, G.E. Shilov, *Generalized Functions, vol.2*, Acad. Press, New York, 1967.

[17] K. Gröchenig, *Foundation of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2001.

[18] A. Grossmann, J. Morlet, *Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape*, SIAM, J. Math. Anal. 15 (1984), 723–736.

[19] M. Holschneider, *Wavelets. An Analysis Tool*, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1995.

[20] M. Holschneider, Ph. Tchamitchian, *Pointwise Analysis of Riemann's "nondifferentiable" Function*, Invent. Math. 105 (1991), 157–175.

[21] L. Hörmander *The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. 1*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.

[22] J. Horváth, *Topological Vector Spaces and Distributions, vol. 1*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[23] V. Y. Ivrii, *Conditions for Correctness in Gevrey Classes of the Cauchy Problem for Weakly Hyperbolic Equations*, Siberian Math. J. 17 (1976), 422-435.

[24] S. Jaffard, Y. Meyer, *Wavelet Methods for Pointwise Regularity and Local Oscillations of Functions*, Mem. Amer. Math. Soc. 123, No 587, 1996.

[25] A. Kamiński, D. Perišić, S. Pilipović, *On Various Integral Transformations of Tempered Distributions*, Demonstratio Math. 33 (2000), 641–655.

[26] H. Komatsu, *Ultradistributions, I, Structure Theorems and a Characterization*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 20 (1973), 25-105.

[27] H. Komatsu, *Ultradistributions, II, the Kernel Theorem and Ultradistributions with Support in a Submanifold*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 24 (1977), 607–628.

[28] H. Komatsu, *Ultradistributions, III, Vector Valued Ultradistributions and the Theory of Kernels*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 29, 653-718, 1982.

[29] H. Komatsu, *An Introduction to the Theory of Generalized Functions*, Department of Math., Sci. Univ. Tokyo, 1999.

[30] J. Korevaar, *Tauberian Theory - A Century of Developments*, Springer-Verlag, Berlin, 2004.

[31] D. Kovačević, S. Pilipović, *Structural Properties of the Spaces of Tempered Ultradistributions*, Complex Analysis and Generalized Functions, Varna, Publ. House of the Bulg. Acad. Sci. (Sofia) (1993), 169–184.

[32] J. E. Littlewood, *The Converse of Abel's Theorem on Power Series*, Proc. London Math. Soc. 9 (1911), 434–448.

[33] S. Łojasiewicz, *Sur la valeur et la limite d'une distribution en un point*, Studia Math. 16 (1957), 1–36.

[34] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Acad. Press, San Diego, CA, 1998.

[35] R. Meise, D. Vogt, *Inroduction to Functional Analysis*, Clarendon Press, Oxford, 1997.

[36] Y. Meyer, *Wavelets and Operators I*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[37] Y. Meyer, *Wavelets and Operators II*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[38] R. S. Pathak, *Abelian Theorems for the Wavelet Transform*, Wavelets and Allied Topics, Narosa, New Delhi (2001), 63–71.

[39] R. S. Pathak, *The Wavelet Transform of Distributions*, Tohoku Math. J. 56 (2004), 411–421.

[40] S. Pilipović, *Tempered Ultradistributions*, Boll. Un. Mat. Ital. 7 (1988), 235–251.

[41] S. Pilipović, *On the Quasiasymptotic of Schwartz Distributions*, Math. Nachr. 137 (1988), 19–25.

[42] S. Pilipović, *Some Properties of the Quasiasymptotic of Schwartz Distributions, Part I: Quasiasymptotic at* $\pm\infty$, Publ. Inst. Math. (Beograd) 43 (57) (1988), 125–130.

[43] S. Pilipović, *Some Properties of the Quasiasymptotic of Schwartz Distributions, Part II: Quasiasymptotic at* 0 , Publ. Inst. Math. (Beograd) 43 (57) (1988), 131–135.

[44] S. Pilipović, *Some Operations in* Σ'_α, Radovi Matematički 5 (1989), 53-62.

[45] S. Pilipović, *Quasiasymptotics and* S*-asymptotics in* $\mathcal{S}'$ *and* $\mathcal{D}'$, Publ. Inst. Math. (Beograd) 72 (1995), 13–20.

[46] S. Pilipović, D. Scarpalezos, J. Vindas, *Classes of Generalized Functions*, manuscript.

[47] S. Pilipović, B. Stanković, A. Takači, *Asymptotic Behaviour and Stieltjes Transformation of Distributions*, Teubner-Texte zuer Mathematik, Leipzig, 1990.

[48] S. Pilipović, A. Takači, N. Teofanov, *Wavelets and Quasiasymptotics at a Point*, J. Approx. Theory 97 (1999), 40–52.

[49] S. Pilipović, N. Teofanov, *Multiresolution Expansion, Approximation Order and Quasiasymptotic Behavior of Tempered Distributions*, J. Math. Anal. Appl. 331 (2007), 455–471.

[50] S. Pilipović, J. Vindas, *Multidimensional Tauberian Theorems for Wavelet and Non-wavelet Transforms*, manuscript.

[51] D. Rakić, *Quasiasymptotic in* $\mathcal{D}'_{L^q}(\mathbb{R}^n)$, Novi Sad J. Math. 37 (2007), 259–267.

[52] D. Rakić, *Multiresolution Expansion in* $\mathcal{D}'_{L^q}(\mathbb{R}^n)$, Integral Transforms Spec. Funct. 20 (2009), 231–238.

[53] D. Rakić, N. Teofanov, *Characterization of Progresive Gelfand-Shilov Spaces*, preprint.

[54] K. Saneva, A. Bučkovska, *Asymptotic Expansion of Distributional Wavelet Transform*, Integral Transforms Spec. Funct. 17 (2006), 85–91.

[55] K. Saneva, A. Bučkovska, *Tauberian Theorems for Distributional Wavelet Transform*, Integral Transforms Spec. Funct. 18 (2007), 359–368.

[56] K. Saneva, J. Vindas, *Wavelet Expansions and Asymptotic Behavior of Distributions*, J. Math. Anal. Appl. 370 (2010), 543–554.

[57] L. Schwartz, *Théorie des Distributions*, Hermann, Paris, 1966.

[58] E. Seneta, *Regularly Varying Functions,* Lecture Notes in Mathematics, 598, Springer Verlag, Berlin, 1976.

[59] B. K. Sohn, D. H. Pahk, *Pointwise Convergence of Wavelet Expansion of* $\mathcal{K}_r^{M'}(\mathbb{R})$, Bull. Korean Math. Soc. 38 (2001), 81–91.

[60] E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[61] N. Teofanov *Ultradistributions and Time-Frequency Analysis*, Operator Theory: Advances and Appl., Birkhauser, 164 (2006), 173–191.

[62] F. Treves, *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernel*, Acad. Press, New York, 1967.

[63] J. Vindas, *Structural Theorems for Quasiasymptotics of Distributions at Infinity*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 84 (98) (2008), 159–174.

[64] J. Vindas, *The Structure of Quasiasymptotics of Schwartz Distributions*, Linear and non-linear theory of generalized functions and its applications, Banach Center Publ., Polish Acad. Sci. Inst. Math. (Warsaw) 88 (2010), 297–314.

[65] J. Vindas, E. Estrada, *Distributional Point Values and Convergence of Fourier Series and Integrals,* J. Fourier Anal. Appl. 13 (2007), 551–576.

[66] J. Vindas, R. Estrada, *On the Jump Behavior of Distributions and Logarithmic Averages*, J. Math. Anal. Appl. 347 (2008), 597–606.

[67] J. Vindas, S. Pilipović, *Structural Theorems for Quasiasymptotics of Distributions at the Origin,* Math. Nachr. 282 (2009), 1584–1599

[68] J. Vindas, S. Pilipović, D. Rakić *Tauberian Theorems for the Wavelet Transform*, to appear in J. Fourier Anal. Appl.

[69] J. Vindas, S. Pilipović, D. Rakić *Wavelet Transform of Tempered Distributions*, manuscript.

[70] V. S. Vladimirov, Y. N. Drozhzhinov, B. I. Zavialov, *Tauberian Theorems for Generalized Functions*, Kluwer Acad. Publ. Group, Dordrecht, 1988.

[71] V. S. Vladimirov, Y. N. Drozhzhinov, B. I. Zavialov, *Tauberian Theorems for Generalized Functions in a Scale of Regularly Varying Functions and Functionals, dedicated to Jovan Karamata*, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.) 71 (2002), 123–132 (in Russian).

[72] V. S. Vladimirov, B. I. Zavialov, *On the Tauberian Theorems in Quantum Field Theory*, Theoret. Math. Fiz. 40 (1979), 155–178.

[73] V. S. Vladimirov, B. I. Zavialov, *Tauberian Theorems in Quantum Field Theory*, Current Problems in Mathematics, Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii (Moscow) 15 (228) (1980), 95–130 (in Russian).

[74] P. Wagner, *On the Quasi-asymptotic Expansion of the Casual Fundamental Solution of Hyperbolic Operators and Systems*, Z. Anal. Anwendungen 10 (1991), 159–167.

[75] G. Walter, *Pointwise Convergence of Wavelet Expansions*, J. Approx. Theory 80 (1995), 108–118.

[76] G. Walter, X. Shen, *Wavelets and Other Orthogonal Systems*, Studies in Advanced Math., Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.

[77] M. W. Wong, *An Introduction To Pseudodifferential Operators*, World Scientific, Singapore, 1999.

[78] B.I. Zavialov, *Automodel Asymptotic of Electromagnetic Form Factors and the Behavior of Their Fourier Transforms*, Teoret. Math. Fiz. 17 (1973), 178–188.

Biografija

Dušan Rakić je rođen 03. februara 1976. godine u Novom Sadu, gde je završio osnovnu i srednju školu. Diplomirao je na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Diplomirani matematičar, 1999. godine. Iste godine upisao je poslediplomske studije na Prirodno - matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Uopštene funkcije i mikrolokalna analiza. Magistarsku tezu pod nazivom "Multirezolucijska ekspanzija težinskih distribucija i asimptotika"odbranio je 2005. godine. Od 1999. godine zaposlen je na Tehnološkom fakultetu u Novom Sadu.

Novi Sad, 27. avgust 2010. Dušan Rakić

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR

Autor: mr Dušan Rakić
AU

Mentor: prof. dr Nenad Teofanov
MN

Naslov rada: Malotalasna transformacija u prostorima distribucija i ultradistribucija i teoreme Abelovog i Tauberovog tipa
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: Srpski/engleski
JI

Zemlja publikovanja: Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP

Godina: 2010.
GO

Izdavač : Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Novi Sad, Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 6/127/78/0/0/0/0
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Matematička analiza, Teorija distribucija
ND

Ključne reči: Prostori distribucija, malotalasna transformacija, kvaziasimptotika, prostori temperiranih ultradistribucija
PO
UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, PMF, Novi Sad
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ

U disertaciji se navode definicije i svojstva malotalasne transformacije i kvaziasimptotskog ponašanja distribucija. Teoreme Abelovog i Tauberovog tipa su korišćene za asimptotsku analizu temperiranih distribucija, u odnosu na njihovu malotalasnu transformaciju. Takođe, proučavana je i malotalasna transformacija ultradiferencijabilnih funkcija i temperiranih ultradistribucija.
Datum prihvatanja teme od strane NN Veća: 26. februar 2009.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik: akademik Stevan Pilipović, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

Član: dr Nenad Teofanov, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

Član: dr Arpad Takači, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad

Član: dr Jasson Vindas, docent, Departman za matematiku, Univerzitet u Gentu, Gent, Belgija

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monographic type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents code: Doctoral thesis
CC

Author: Dušan Rakić
AU

Mentor: Nenad Teofanov, PhD
MN

Title: Wavelet Transform of Distributions and Ultradistributions and Abelian and Tauberian Theorems

Language of text: Serbian (latin)
LT

Language of abstract: Serbian/English
LA

Country of publication: Serbia
CP

Locality of publication: Vojvodina
LP

Publication year: 2010
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ.place: Novi Sad, Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 6/127/78/0/0/0/0
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Mathematical analysis, Theory of Distributions
SD

Subject / Key words: spaces of distributions, wavelet transform, quasi-asymptotics, spaces of tempered ultradistributions
SKW
UC:

Holding data: Library, Department of Mathematics and Informatics, PMF, Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB

In thesis we give basic notions of wavelet transform and quasiasymptotic behavior of distributions. Via Abelian and Tauberian type of theorems we study quasiasymptotic behavior of tempered distributions, related to their wavelet transform. Further, we study wavelet transform of ultradifferential functions and tempered ultradistributions.

Accepted by Scientific Board on: February 26, 2009
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President: Stevan Pilipović, Academic, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, Novi Sad

Member: Nenad Teofanov, PhD, Associate Professor, Faculty of Science and Mathematics, Novi Sad

Member: Arpad Takači, PhD, Full Professor, Faculty of Science and Mathematics, Novi Sad

Member: Jasson Vindas, PhD, Assistant Professor, Department of Mathematics, Gent University , Gent, Belgium.