УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милан М. Лазаревић

# НЕЈЕДНАКОСТИ КОШИ-ШВАРЦА И ГРИС-ЛАНДАУА ЗА ЕЛЕМЕНТАРНЕ ОПЕРАТОРЕ И ТРАНСФОРМЕРЕ ТИПА УНУТРАШЊЕГ ПРОИЗВОДА НА Q И Q$^*$ ИДЕАЛИМА КОМПАКТНИХ ОПЕРАТОРА

докторска дисертација

Београд, 2020.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MATHEMATICS

Milan M. Lazarević

# CAUCHY-SCHWARZ AND GRÜSS-LANDAU INEQUALITIES FOR ELEMENTARY OPERATORS AND INNER PRODUCT TYPE TRANSFORMERS ON Q AND Q$^*$ IDEALS OF COMPACT OPERATORS

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2020.

**Ментор**:

др Данко Р. Јоцић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Чланови комисије**:

др Петер Шемрл, редовни професор
Универзитет у Љубљани, Факултет за математику и физику

др Драган С. Ђорђевић, редовни професор
Универзитет у Нишу, Природно-математички факултет

др Данко Р. Јоцић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Ђорђе Кртинић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Стефан Милошевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

**Датум одбране**: ____________________

*Родитељима*

**Наслов дисертације**: Неједнакости Коши-Шварца и Грис-Ландауа за елементарне операторе и трансформере типа унутрашњег производа на Q и Q* идеалима компактних оператора


**Резиме**: Листа од раније познатих и недавно установљених Cauchy-Schwarz-ових неједнакости за елементарне операторе, $\sigma-$елементарне трансформере и трансформере типа унутрашњег производа допуњена је следећом варијантом Cauchy-Schwarz-ове неједнакости у Schatten-von Neumann-овим идеалима:

$$\left\|\left(\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}}\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\left(\int_\Omega B_t^*B_t\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2r}-\frac{1}{2}}\right\|_p \leqslant \left\|\left(\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2q}}X\left(\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2r}}\right\|_p$$

за све $X \in \mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ и све $p, q, r \geqslant 1$ такве да је $\frac{2}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, уколико су фамилије оператора $\{A_t\}_{t\in\Omega}$, $\{A_t^*\}_{t\in\Omega}$, $\{B_t\}_{t\in\Omega}$, $\{B_t^*\}_{t\in\Omega}$ јако квадратно интеграбилне, такве да су $\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)$ и $\int_\Omega B_t^*B_t\,d\mu(t)$ (ограничено) инвертибилни оператори.

Разматраће се такође и друге варијанте оваквих неједнакости, омогућене додатним условима комутативности и нормалности операторних фамилија $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, $\{B_n\}_{n=1}^\infty$, $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ и $\{B_t\}_{t\in\Omega}$, односно степеном $p$-модификације унитарно инваријантних норми, као и примене ових неједнакости на одређене проблеме у теорији оператора, укључујући норма неједнакости за генерализоване функцијске деривације Pick-ових оператор вредносних функција и оператор вредносних Fourier-ових трансформација комплексних мера, као и неједнакости Grüss-Landau-овог типа.



**Кључне речи**: елементарни оператори, трансформери типа унутрашњег производа, Q и Q* норме, оператор монотоне функције


**Научна област**: математика

**Ужа научна област**: анализа

**AMS класификација**: 47Б47, 47Б49, 47А30, 47А60

**Dissertation title**: Cauchy-Schwarz and Grüss-Landau inequalities for elementary operators and inner product type transformers on Q and Q* ideals of compact operators

**Abstract**: List of already known and recently established Cauchy-Schwarz inequalities for elementary operators, $\sigma-$elementary transformers and inner product type transformers is complemented by the next variant of Cauchy-Schwarz inequality in Schatten-von Neumann ideals:

$$\left\| \left( \int_\Omega A_t A_t^* \, d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2q}-\frac{1}{2}} \int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) \left( \int_\Omega B_t^* B_t \, d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2r}-\frac{1}{2}} \right\|_p \leqslant \left\| \left( \int_\Omega A_t^* A_t \, d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2q}} X \left( \int_\Omega B_t B_t^* \, d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2r}} \right\|_p$$

for all $X \in \mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$ and for all $p, q, r \geqslant 1$ which satisfies $\frac{2}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, if families of operators $\{A_t\}_{t\in\Omega}$, $\{A_t^*\}_{t\in\Omega}$, $\{B_t\}_{t\in\Omega}$, $\{B_t^*\}_{t\in\Omega}$ are strongly square integrabile, such that $\int_\Omega A_t A_t^* \, d\mu(t)$ and $\int_\Omega B_t^* B_t \, d\mu(t)$ are (boundedly) invertible operators.

Enabled by some additional conditions of commutativity and normality for operator families $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, $\{B_n\}_{n=1}^\infty$, $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ and $\{B_t\}_{t\in\Omega}$, as well as by the degree of $p$-modifications of unitary invariant norms, some others variants of those inequalities will also be considered, including their applications to the certain problems in operator theory, norm inequalities for generalized function derivations of Pick operator values functions and operator values Fourier transformations of complex measures, as well as some Grüss-Landau type inequalities.

**Keywords**: elementary operators, inner product type transformers, Q and Q* norms, operator monotone functions

**Research area**: mathematics

**Research sub-area**: analysis

**AMS classifications**: 47B47, 47B49, 47A30, 47A60

# Садржај

# Предговор

У овом раду означаваћемо са $\mathcal{H}$ комплексан сепарабилан Hilbert[1]-ов простор, са $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ означаваћемо алгебру ограничених линеарних оператора на $\mathcal{H}$, док ћемо са $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{H})$ означавати идеал компактних оператора на $\mathcal{H}$.

Трансформер $\mathcal{E}_{A,B}\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ називамо **елементарним оператором** ако је облика

$$\mathcal{E}_{A,B}X = \sum_{n=1}^{N} A_n X B_n \tag{1}$$

за неке низове $A \stackrel{\text{def}}{=} \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $B \stackrel{\text{def}}{=} \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ и неко $N \in \mathbb{N}$, односно **$\sigma$-елементарним трансформером** уколико је облика

$$\mathcal{E}_{A,B}X = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n. \tag{2}$$

У наставку излагања елементарне операторе и $\sigma$-елементарне трансформере ћемо такође поједностављено називати елементарним трансформерима, јер ће по правилу из контекста бити јасно да ли се ради о коначним или пребројивим сумама наведеним у (1) и (2).

Општије, за трансформер $\mathcal{I}_{A,B}\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (односно $\mathcal{I}_{A^*,B}$) кажемо да је **трансформер типа унутрашњег производа (т.у.п. трансформер)** уколико је облика

$$\mathcal{I}_{A,B}X = \int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) \quad (\text{односно } \mathcal{I}_{A^*,B} = \int_\Omega A_t^* X B_t \, d\mu(t)), \tag{3}$$

где се под последњим интегралом подразумева слаби$^*$ (познат и као Гељфандов[2]) интеграл слабо$^*$ мерљиве оператор вредносне (**о.в.**) функције $t \mapsto A_t X B_t$ (односно $t \mapsto A_t^* X B_t$) по мери $\mu$ на мерљивом простору $\Omega$. Трансформере дате формулом (2) (односно (3)) такође ћемо називати $\sigma$-елементарним трансформерима (односно т.у.п. трансформерима) и онда када они нису дефинисани на целом $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, већ само на неким од идеала компактних оператора у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Главни примери елементарних оператора, за $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, су **оператор множења слева** $L_A\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon X \mapsto AX$, **оператор множења здесна** $R_B\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon X \mapsto XB$, **оператор двостраног** (обостраног) **множења** $A \otimes B \stackrel{\text{def}}{=} M_{A,B}\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon X \mapsto AXB$, **деривација** (комутатор) $A \otimes I - I \otimes A\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon X \mapsto AX - XA$, **уопштена деривација** $A \otimes I - I \otimes B\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon X \mapsto AX - XB$, **функцијска деривација** (комутатор) $f(A) \otimes I - I \otimes f(A)\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mapsto X \mapsto f(A)X - Xf(A)$,

[1] Хилберт–David Hilbert (1862–1943)

[2] Гељфанд–Изра́иль Моисе́евич Гельфа́нд (1913–2009)

као и **уопштена функцијска деривација** $f(A)\otimes I - I\otimes f(B)\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon X \mapsto f(A)X - Xf(B)$.

У класи самоадјунгованих оператора $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ стандардно се уводи (делимично) уређење $\leqslant$ са: $A \leqslant B$ ако и само ако је $\langle Af, f\rangle \leqslant \langle Bf, f\rangle$ за све $f \in \mathcal{H}$, тј. ако је $B - A$ позитивно (семи)дефинитан оператор. За функцију $f\colon J \to \mathbb{R}$, где је $J \subset \mathbb{R}$ интервал, кажемо да је **оператор монотона (о.м.)** на $J$ ако и само ако (у смислу функционалног рачуна) важи $f(A) \leqslant f(B)$ кад год је $A \leqslant B$ и $\sigma(A) \cup \sigma(B) \subset J$. За одређене класе функција $\varphi$ дефинисаних у области која садржи спектре $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ биће посматран проблем поређења њихових уопштених функцијских деривација $\varphi(A)X - X\varphi(B)$ са уопштеном деривацијом $AX - XB$ у различитим унитарно инваријантним (**у.и.**) нормама. Примарни метод рада са таквим неједнакостима за различите класе компактних оператора биће примена одговарајућих варијанти Cauchy[3]-Schwarz[4]-ових неједнакости, при чему ће класе оператора које се ту буду посматрале укључивати хипонормалне, кохипонормалне, акретивне операторе, контракције и операторе које имају строго контрактиван реалан део (видети [JLM20] и [JLM20a]).

Из тих разлога, овде ће бити представљене различите до сада познате као и нове Cauchy-Schwarz-ове операторне и норма неједнакости, како за елементарне трансформере, тако и за т.у.п. трансформере, када они делују на различитим идеалима компактних оператора. Биће приказан и ефикасан начин дискретизације за уопштавање већ познатих Cauchy-Schwarz-ових норма неједнакости за елементарне трансформере на т.у.п. трансформере, у случају када је $L^2(\Omega, \mu)$ сепарабилан Hilbert-ово простор, ослањајући се притом и на особине о.в. Fourier[5]-ових коефицијената (видети [JKL]).

Заједно са Cauchy-Schwarz-овим неједнакостима, разматраће се и њихова примена на операторне и норма неједнакости Grüss[6]-Landau[7]-овог типа у различитим идеалима компактних оператора. У случају елементарних оператора биће приказана и профињена верзија операторне Grüss-Landau-ове неједнакости са нађеним тачним допуњујућим сабираком са којим то постаје једнакост (видети [JKLMM] и [Laz19]).

[3]Коши–Augustin-Louis Cauchy (1789–1857)
[4]Шварц–Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921)
[5]Фурије–Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830)
[6]Грис–Gerhard Christian Grüß (1902–1950)
[7]Ландау–Edmund Georg Hermann Landau (1877–1938)

# Глава 1

# Увод

У овој глави даје се кратак преглед основних појмова из теорије компактних оператора, њихових сингуларних вредности, симетрично нормирајућих функција и унитарно инваријантних норми, које ћемо користити у наставку. Такође, биће дат приказ до сада познатих Cauchy-Schwarz-ових операторних и норма неједнакости за различите поткласе унитарно инваријатних норми.

## 1 Компактни оператори и њихове сингуларне вредности

За сваки компактан оператор $A$ и оператор $A^*A$ је такође компактан и при томе позитиван. Уколико све сопствене вредности оператора $A^*A$ поновимо онолико пута колика им је вишеструкост и поређамо их у опадајући низ $\lambda_1(A^*A) \geqslant \lambda_2(A^*A) \geqslant \cdots$, добијамо један нули конвергентан низ. Бројеви $s_n(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\lambda_n(A^*A)}$ називају се **сингуларним вредностима** (или $s$-бројевима) оператора $A$. Такође, сваки компактан оператор $A$ има и свој сингуларни (Schmidt[1]-ов) развој $A = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) e_n \otimes f_n^\star$, где су $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ редом ортонормиране базе простора $\overline{\mathcal{R}(A)}$ и $\overline{\mathcal{R}(A^*)}$ сачињене од сопствених вектора оператора $|A| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{A^*A}$ и $|A^*| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{AA^*}$ редом (где $\mathcal{R}(A)$ означава слику оператора $A$). При томе је са $e_n \otimes f_n^\star$ означен оператор ранга један на $\mathcal{H}$ дат са $(e_n \otimes f_n^\star)x = \langle x, f_n \rangle e_n$ за све $x \in \mathcal{H}$.

Неке од основних особина сингуларних вредности (чији се докази могу наћи у [GK]) јесу и $s_n(cA) = |c| s_n(A)$, $s_n(A) = s_n(A^*)$, $s_n(BAC) \leqslant \|B\| \|C\| s_n(A)$, где је $c \in \mathbb{C}$, $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ и $B, C \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, што за последицу има да је $s_n(UAV) = s_n(A)$ уколико су $U$ и $V$ унитарни оператори. Такође, важи и Horn[2]-ова неједнакост $\prod_{k=1}^n s_k(AB) \leqslant \prod_{k=1}^n s_k(A) \prod_{k=1}^n s_k(B)$ за $A, B \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$, која директно следи из Weyl[3]-Horn-ове неједнакости $\det[\langle Af_i, Af_j \rangle]_{i,j=1}^n \leqslant \prod_{k=1}^n s_k^2(A) \det[\langle f_i, f_j \rangle]_{i,j=1}^n$ за сваки систем вектора $f_1, \ldots, f_n$ из $\mathcal{H}$, где су $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ и $n \in \mathbb{N}$.

[1]Шмит–Erhard Schmidt (1876–1959)
[2]Хорн–Alfred Horn (1918–2001)
[3]Вејл–Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955)

# 2 Симетрично нормирајуће функције и њима придружени идеали компактних оператора

Обележимо са $\mathfrak{c}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\{a_n\}_{n=1}^\infty \mid a_n \in \mathbb{R}, \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$ и $\mathfrak{c}_{\text{fin}}$ његов потпростор који се састоји од реалних низова који имају коначно много ненула чланова. Функција $\Phi\colon \mathfrak{c}_{\text{fin}} \to \mathbb{R}$, $\Phi(a) = \Phi(a_1, a_2, \ldots)$ се назива **нормирајућом функцијом** ако за $a, b \in \mathfrak{c}_{\text{fin}}$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ важи $\Phi(a) > 0$ (за $a \neq 0$), $\Phi(\alpha a) = |\alpha|\Phi(a)$, $\Phi(a+b) \leqslant \Phi(a) + \Phi(b)$ и $\Phi(1,0,0,\ldots) = 1$. Додатно, ако је нормирајућа функција $\Phi$ и симетрична, односно важи $\Phi(a_1, a_2, \ldots) = \Phi(\varepsilon_1 a_{\pi(1)}, \varepsilon_2 a_{\pi(2)}, \ldots)$ за сваку пермутацију $\pi$ на $\mathbb{N}$ и $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, онда кажемо да је $\Phi$ **симетрично нормирајућа (с.н.) функција**. При томе, домен с.н. функције $\Phi$ се може проширити са $\mathfrak{c}_{\text{fin}} \subset \mathfrak{c}_0$ на $\mathfrak{c}_\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in \mathfrak{c}_0 \mid \sup_{n\geqslant 1} \Phi(a_1, \ldots, a_n, 0, 0 \ldots) < +\infty\}$ формулом $\Phi(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \Phi(a_1, \ldots, a_n, 0, 0 \ldots)$ за $a \in \mathfrak{c}_\Phi$. Претходни лимес постоји будући да је низ $\big\{\Phi(a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)\big\}_{n=1}^\infty$ растући, а показује се и да на проширеном домену $\mathfrak{c}_\Phi$ функција $\Phi$ такође задовољава све особине с.н. функције.

Основни примери с.н. функција су нуклеарна с.н. функција $\ell$ (коју ћемо означавати и са $\ell^1$ или $\ell_1$), дефинисана са $\ell(\{t_n\}_{n=1}^\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^\infty |t_n|$ и с.н. функција $\ell^\infty$ дефинисана са $\ell^\infty(\{t_n\}_{n=1}^\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_n|$. Претходне с.н. функције се могу видети као део шире класе Schatten[4]-von Neumann[5]-ових с.н. функција $\ell^p$, $1 \leqslant p < +\infty$, дефинисаних са $\ell^p(\{t_n\}_{n=1}^\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[p]{\sum_{n=1}^\infty |t_n|^p}$.

Свакој с.н. функцији $\Phi$ може се увек придружити идеал компактних оператора $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$, дат формулом $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}) \mid \{s_n(A)\}_{n=1}^\infty \in \mathfrak{c}_\Phi\}$, при чему за сваки $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ уводимо $\|A\|_\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \Phi\big(\{s_n(A)\}_{n=1}^\infty\big)$. Како важи $s_n(AXB) \leqslant \|A\|\|B\|s_n(X)$ за $A, B \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $X \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$, видимо да $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ заиста јесте један двострани идеал у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, као и да је $\|AXB\|_\Phi \leqslant \|A\|\|B\|\|X\|_\Phi$. За норму $|||\cdot|||\colon \mathcal{I} \to \mathbb{C}$ на двостраном идеалу $\mathcal{I}$ у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ кажемо да је **унитарно инваријантна (у.и.) норма** ако важи $|||UXV||| = |||X|||$ за све унитарне операторе $U, V \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $X \in \mathcal{I}$. Како је $s_n(UXV) = s_n(X)$ за све унитарне операторе $U, V \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $X \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$, видимо да су све норме $\|\cdot\|_\Phi$ увек у.и. норме. Ако са $A_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n s_n(A) e_n \otimes f_n^\star$ означимо $n$-ту парцијалну суму у сингуларном развоју за $A$ и искористимо коресподенцију између с.н. функција на $\mathfrak{c}_{\text{fin}}$ и у.и. норми на простору оператора коначног ранга $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$, приметићемо да дефиниција норме $\|\cdot\|_\Phi$ на $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ у суштини представља њено природно проширење са $\mathfrak{K}(\mathcal{H})$ на $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$. Наиме, важи

$$\|A\|_\Phi = \Phi\big(\{s_n(A)\}_{n=1}^\infty\big) = \lim_{n\to\infty} \Phi(s_1(A), \ldots, s_n(A), 0, 0, \ldots) = \lim_{n\to\infty} \|A_n\|_\Phi,$$

док за $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ важи $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}) \iff \sup_{n\geqslant 1} \|A_n\|_\Phi < +\infty$.

Ако је $\Phi := \ell^p$, за $1 \leqslant p < +\infty$, тада ћемо придружене идеале компактних оператора $\mathfrak{C}_p(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}) \mid \sum_{n=1}^\infty s_n^p(A) < +\infty\}$ звати **Schatten-ови (Schatten-von Neumman-ови)** $p$ идеали, где је у.и. норма дата са $\|A\|_p \stackrel{\text{def}}{=} \ell^p(\{s_n(A)\}_{n=1}^\infty) = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^\infty s_n^p(A)}$. За $p := 1$ то су нуклеарни оператори (оператори са трагом) идеала $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, док при $p := 2$ имамо Hilbert-Schmidt-ове операторе идеала $\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$. За $p := +\infty$ имамо простор $\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ компактних оператора са нормом $\|A\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} s_1(A) = \|A\|$.

Са $\mathfrak{C}_\Phi^{(\circ)}(\mathcal{H})$ означаваћемо затворење оператора коначног ранга у норми $\|\cdot\|_\Phi$ простора $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$. Важи $\mathfrak{C}_\Phi^{(\circ)}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}) \mid \lim_{n\to\infty} \Phi(s_{n+1}(A), s_{n+2}(A), \ldots) = 0\}$, као и да је

[4]Шатен–Robert Schatten (1911–1977)

[5]фон Нојман–Johann (John) von Neumann (1903–1957)

$\mathfrak{C}_\Phi^{(\circ)}(\mathcal{H})$ један сепарабилан идеал у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ у $\|\cdot\|_\Phi$ норми (видети [GK, III§6]). Такође, сваки сепарабилан идеал у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ једнак је $\mathfrak{C}_\Phi^{(\circ)}(\mathcal{H})$ за неку с.н. функцију $\Phi$. И обрнуто, сваки идеал $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ је несепарабилан ако и само ако је $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}) \neq \mathfrak{C}_\Phi^{(\circ)}(\mathcal{H})$.

Да бисмо описали дуални простор за $\mathfrak{C}_\Phi^{(\circ)}(\mathcal{H})$ (а тиме и дуалан простор за $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$, уколико је $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ сепарабилан идеал), потребан нам је и појам адјунговане с.н. функције. Наиме, ако је $\Phi\colon \mathfrak{c}_{\text{fin}} \to \mathbb{R}$ с.н. функција, тада се дефинише њој **адјунгована функција** $\Phi^*\colon \mathfrak{c}_{\text{fin}} \to \mathbb{R}$ формулом $\Phi^*(b_1, b_2, \ldots) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\bigl\{\sum_{n=1}^\infty a_n b_n,\ a \in \mathfrak{c}_{\text{fin}}, \Phi(a) \leqslant 1\bigr\}$. Показује се да је $\Phi^*$ такође једна с.н. функција на $\mathfrak{c}_{\text{fin}}$, која се стандардним поступком проширује на $\mathfrak{c}_{\Phi^*}$, као и да је $(\Phi^*)^* = \Phi$. При томе важи

**Теорема 1.1.** [GK] ***Нека је $\Phi$ с.н. функција која није еквивалетна са максималном (тј. са $\ell^1$). Тада је општи облик непрекидног линеарног функционала $F(X)$ на сепарабилном простору $\mathfrak{C}_\Phi^{(\circ)}(\mathcal{H})$ дат формулом $F(X) = \operatorname{tr}(AX)$, где је $A$ произвољан оператор из $\mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$, и важи $\|F\| = \|A\|_{\Phi^*}$. Другим речима, простор $\mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$ је изометрички изоморфан са простором $(\mathfrak{C}_\Phi^{(\circ)}(\mathcal{H}))^\star$.***

$\triangle$ Доказ видети у [GK, Chap.III Th. 12.2] и [Hi97, Th. 2.9]. $\square$

Такође, важи и одговарајућа Hölder[6]-ова неједнакост за $\|\cdot\|_\Phi$ норме, тј. ако је $\Phi$ с.н. функција, $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и $B \in \mathfrak{C}_{\Phi^*}(\mathcal{H})$, тада $AB \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ и $\|AB\|_1 \leqslant \|A\|_\Phi \|B\|_{\Phi^*}$.

# 3 Ky Fan-ове и $p$-модификоване унитарно инваријантне норме

За $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ и $k \in \mathbb{N}$ важи формула

$$\sum_{i=1}^k s_i(A) = \max_{\{g_i\}_{i=1}^k, \{h_i\}_{i=1}^k} \sum_{i=1}^k |\langle A g_i, h_i\rangle| = \max_{\{g_i\}_{i=1}^k, \{h_i\}_{i=1}^k} \Bigl|\sum_{i=1}^k \langle A g_i, h_i\rangle\Bigr|, \tag{1.1}$$

где се максимум узима по свим ортонормираним системима вектора $\{g_i\}_{i=1}^k$ и $\{h_i\}_{i=1}^k$ из $\mathcal{H}$. Саму претходну формулу (1.1) називамо **Ky Fan[7]-овим принципом**, из ког се непосредно изводи да је $\sum_{i=1}^k s_i(A+B) \leqslant \sum_{i=1}^k s_i(A) + \sum_{i=1}^k s_i(B)$ за $A, B \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ и $k \in \mathbb{N}$. Према претходном, за $A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ и $k \in \mathbb{N}$ формулом $\|A\|_{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^k s_i(A)$ дефинисана је важна класа у.и. норми познатих као **Ky Fan-ове $k$ норме**. Полазећи од Ky Fan-овог принципа може се извести и да важи формула $\|A\|_{(k)} = \min\bigl\{\|B\|_1 + k\|C\|_\infty\bigr\}$, при чему се разматрани минимум узима по свим разлагањима облика $A = B + C$, где $B \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ и $C \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ (за детаље видети [B, Prop. IV.2.3]).

Важност Ky Fan-ових норми огледа се у следећој теореми која показује да се доказивање неједнакости које важе за све у.и. норме може свести на њихово доказивање за Ky Fan-ове $k$ норме $\|\cdot\|_{(k)}$.

**Теорема 1.2** (**Ky Fan-ово доминационо својство**). ***Ако је $\Phi$ с.н. функција и ако за $A \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и $B \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ важи $\|B\|_{(k)} \leqslant \|A\|_{(k)}$ за све $k \in \mathbb{N}$, тада $B \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и $\|B\|_\Phi \leqslant \|A\|_\Phi$.***

За позитивне нерастуће низове $\{s_n\}_{n=1}^\infty, \{t_n\}_{n=1}^\infty$ кажемо да су **слабо потчињени**, у ознаци $\{s_n\} \prec_w \{t_n\}$, ако важи $\sum_{n=1}^k s_n \leqslant \sum_{n=1}^k t_n$ за све $k \in \mathbb{N}$. За такве низове нам Ky

[6]Хелдер–Otto Ludwig Hölder (1859–1937)

[7]Ки Фан–Ky Fan (1914–2010)

Fan-ово доминационо својство обезбеђује да је свака с.н. функција $\Phi$ изотона, односно да важи $\Phi\big(\{s_n\}_{n=1}^\infty\big) \leqslant \Phi\big(\{t_n\}_{n=1}^\infty\big)$ ако је $\{s_n\} \prec_w \{t_n\}$.
За сваку с.н. функцију $\Phi$ и свако $p \geqslant 1$ могуће је увести њену $p$-модификацију са $\Phi^{(p)}\big(\{z_n\}_{n=1}^\infty\big) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[p]{\Phi\big(\{|z_n|^p\}_{n=1}^\infty\big)}$, која је дефинисана на њеном природном придруженом домену који се састоји од свих комплексних низова $z = \{z_n\}_{n=1}^\infty$ таквих да $\{|z_n|^p\}_{n=1}^\infty \in \mathfrak{c}_\Phi$. Типичан пример $p$ модификоване с.н. функције је $\ell^{(p)}$, што је заправо с.н. функција за стандардне просторе $\ell^p$ и $\mathfrak{C}_p(\mathcal{H})$. Тиме посредно модификујемо норму $\|\cdot\|_\Phi$ формулом $\|A\|_{\Phi^{(p)}} \stackrel{\text{def}}{=} \||A|^p\|_\Phi^{1/p}$ за све оне операторе $A \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}) \mid |A|^p \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})\}$. Да су $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ заиста у.и. норме показује

**Лема 1.3.** ***Ако је*** $\Phi$ ***с.н. функција и*** $p \geqslant 1$, ***тада је*** $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ ***у.и. норма на*** $\mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$.

$\triangle$ Показаћемо само неједнакост троугла, с обзиром да су остале особине у.и. норме углавном очигледне. Како је функција $t \mapsto t^p$ конвевексна на $[0, +\infty)$ за свако $p \geqslant 1$, то за свако $\alpha \in (0, 1)$ имамо

$$\begin{aligned}\{s_n^p(A+B)\} \prec_w \{(s_n(A)+s_n(B))^p\} &= \Big\{\Big((1-\alpha)s_n\Big(\frac{A}{1-\alpha}\Big) + \alpha s_n\Big(\frac{B}{\alpha}\Big)\Big)^p\Big\} \\ &\prec_w \Big\{(1-\alpha)s_n^p\Big(\frac{A}{1-\alpha}\Big) + \alpha s_n^p\Big(\frac{B}{\alpha}\Big)\Big\} = \{(1-\alpha)^{1-p}s_n^p(A) + \alpha^{1-p}s_n^p(B)\},\end{aligned}$$

где су $A, B \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$. Користећи сада изотоност с.н. функције $\Phi$ и претходно добијену слабу потчињеност низова, као и саму дефиницију од $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$, добијамо

$$\begin{aligned}\|A+B\|_{\Phi^{(p)}}^p &= \||A+B|^p\|_\Phi = \Phi\big(\{s_n^p(A+B)\}_{n=1}^\infty\big) \\ &\leqslant (1-\alpha)^{1-p}\Phi\big(\{s_n^p(A)\}_{n=1}^\infty\big) + \alpha^{1-p}\Phi\big(\{s_n^p(B)\}_{n=1}^\infty\big) = \big(\|A\|_{\Phi^{(p)}} + \|B\|_{\Phi^{(p)}}\big)^p,\end{aligned}$$

при чему се последња неједнакост добија избором $\alpha := \frac{\|B\|_{\Phi^{(p)}}}{\|A\|_{\Phi^{(p)}} + \|B\|_{\Phi^{(p)}}}$. $\square$

Специјално, за $p := 2$ норме $\|\cdot\|_{\Phi^{(2)}}$ су познате и као Q норме, док су норме $\|\cdot\|_{\Phi^{(2)*}}$ познате као Q* норме. За $p$-модификоване норме $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ важи следећа

**Лема 1.4.** ***Ако је*** $\Phi$ ***с.н. функција и*** $1 \leqslant p \leqslant q < +\infty$, ***тада је за*** $p^\star \stackrel{\text{def}}{=} \frac{p}{p-1}$ ***(где је*** $p^\star \stackrel{\text{def}}{=} +\infty$ ***за*** $p := 1$***)***

$$\mathfrak{C}_p(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}_{\Phi^{(q)}}(\mathcal{H}) \ \textbf{\textit{и}}\ \mathfrak{C}_{\Phi^{(q)*}}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}_{p^\star}(\mathcal{H}), \tag{1.2}$$

$$\|A\| \leqslant \|A\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \|A\|_p \qquad \textbf{\textit{за све}}\ A \in \mathfrak{C}_p(\mathcal{H}), \tag{1.3}$$

$$\|A\|_{\Phi^{(q)}} \leqslant \|A\|_{\Phi^{(p)}} \qquad \textbf{\textit{за све}}\ A \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}), \tag{1.4}$$

$$\|A\|_{p^\star} \leqslant \|A\|_{\Phi^{(p)*}} \qquad \textbf{\textit{за све}}\ A \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H}), \tag{1.5}$$

$$\|A\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \|A\|_{\Phi^{(q)*}} \qquad \textbf{\textit{за све}}\ A \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(q)*}}(\mathcal{H}). \tag{1.6}$$

$\triangle$ Из неједнакости [GK, (3.12)] за свако $B \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ је $\ell^\infty\big(\{s_n(B)\}_{n=1}^\infty\big) \leqslant \Phi\big(\{s_n(B)\}_{n=1}^\infty\big) \leqslant \ell^1\big(\{s_n(B)\}_{n=1}^\infty\big) < +\infty$, па $B \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и важи $\|B\|_\infty \leqslant \|B\|_\Phi \leqslant \|B\|_1$. Одатле за $B := |A|^p$ произилази $A \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ и $\|A\|^p \leqslant \|A\|_{\Phi^{(p)}}^p = \||A|^p\|_\Phi \leqslant \||A|^p\|_1 = \|A\|_p^p$, што доказује (1.3). Ако је $A = \sum_{n=1}^\infty s_n(A) e_n \otimes f_n^\star$ сингуларни развој за $A$, на основу неједнакости (1.3) је

$$\big\|A - \textstyle\sum_{n=1}^N s_n(A) e_n \otimes f_n^\star\big\|_{\Phi^{(p)}}^p \leqslant \big\|A - \sum_{n=1}^N s_n(A) e_n \otimes f_n^\star\big\|_p^p = \sum_{n=N+1} s_n^p(A) \to 0$$

кад $N \to +\infty$, па $A \in \mathfrak{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ и важи прва инклузија у (1.2). Како је

$$\Phi\big(\{s_n^q(A)\}_{n=1}^\infty\big) \leqslant \Phi\big(\{s_1^{q-p}(A)s_n^p(A)\}_{n=1}^\infty\big) \leqslant \|A\|^{q-p}\Phi\big(\{s_n^p(A)\}_{n=1}^\infty\big) < +\infty,$$

закључујемо да је $|A|^q \in \mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$ за свако $A \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$, што доказује трећу инклузију у (1.2), као и $\|A\|^q_{\Phi^{(q)}} \leqslant \|A\|^{q-p}\|A\|^p_{\Phi^{(p)}} \leqslant \|A\|^{q-p}_{\Phi^{(p)}}\|A\|^p_{\Phi^{(p)}} = \|A\|^q_{\Phi^{(p)}}$, одакле следи неједнакост (1.4).

Сагласно дефиницији адјунговане с.н. функције, за свако $A \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(q)*}}(\mathcal{H})$ је

$$\begin{aligned}\Phi^{(p)*}\big(\{s_n(A)\}_{n=1}^\infty\big) &= \sup_{\{t_n\}_{n=1}^\infty \in \mathfrak{c}_{\text{fin}}} \frac{\sum_{n=1}^\infty s_n(A)t_n}{\Phi^{(p)}\big(\{s_n(A)\}_{n=1}^\infty\big)} \\ &\leqslant \sup_{\{t_n\}_{n=1}^\infty \in \mathfrak{c}_{\text{fin}}} \frac{\sum_{n=1}^\infty s_n(A)t_n}{\Phi^{(q)}\big(\{s_n(A)\}_{n=1}^\infty\big)} = \Phi^{(q)*}\big(\{s_n(A)\}_{n=1}^\infty\big) = \|A\|_{\Phi^{(q)*}} < +\infty, \quad (1.7)\end{aligned}$$

што показује да $A \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$, а самим тим и четврту инклузију у (1.2), као и неједнакост (1.6). У аналогији са (1.7), за свако $A \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned}\ell^{p\star}\big(\{s_n(A)\}_{n=1}^\infty\big) &= \sup_{\{t_n\}_{n=1}^\infty \in \mathfrak{c}_{\text{fin}}} \frac{\sum_{n=1}^\infty s_n(A)t_n}{\ell^p\big(\{s_n(A)\}_{n=1}^\infty\big)} \\ &\leqslant \sup_{\{t_n\}_{n=1}^\infty \in \mathfrak{c}_{\text{fin}}} \frac{\sum_{n=1}^\infty s_n(A)t_n}{\Phi^{(p)}\big(\{s_n(A)\}_{n=1}^\infty\big)} = \Phi^{(p)*}\big(\{s_n(A)\}_{n=1}^\infty\big) = \|A\|_{\Phi^{(p)*}} < +\infty,\end{aligned}$$

што показује да $A \in \mathfrak{C}_{p^\star}(\mathcal{H})$, што значи и пету инклузију у (1.2), а такође и неједнакост (1.5). □

У наредним разматрањима користићемо и следеће својство (двоструке) монотоности које имају све у.и. норме

$$\|AXB\|_\Phi \leqslant \|CXD\|_\Phi, \tag{1.8}$$

кад год $A^*A \leqslant C^*C$ и $BB^* \leqslant DD^*$. За доказ погледати [JLM18, p. 62].
Свака у.и. норма $\|\cdot\|_\Phi$ је полунепрекидна одоздо, тј. важи

$$\|\mathrm{w}-\lim_{n\to\infty} X_n\|_\Phi \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|X_n\|_\Phi, \tag{1.9}$$

што директно добијамо из формуле

$$\|X\|_\Phi = \sup\big\{|\operatorname{tr}(XY)|/\|Y\|_{\Phi^*} \colon Y \text{ је коначно димензионалан}\big\}.$$

За детаљнији приказ особина сингуларних вредности оператора, с.н. функција и идеала компактних оператора, као и у.и. норми упућујемо на стандардну литературу [B, GK, Si, Scha, Zh].

# 4 Слаби* интеграли, трансформери типа унутрашњег производа и преглед познатих Cauchy-Schwarz-ових норма неједнакости за ову класу трансформера

## Интеграција слабо* мерљивих оператор вредносних функција

Сваком Banach[8]-овом простору $X$ и његовом елементу $x$ канонски се придружује функционал евалуације $x^{\star\star} \in X^{\star\star}(\overset{\text{def}}{=} (X^\star)^\star)$ који сваком $f^\star \in X^\star$ додељује скалар $f^\star(x)$,

[8]Банах–Stefan Banach (1892–1945)

тј.

$$x^{\star\star}f^{\star} \stackrel{\text{def}}{=} f^{\star}x \quad \text{за свако } f^{\star} \in X^{\star}, \tag{1.10}$$

где су $x^{\star\star}f^{\star} \stackrel{\text{def}}{=} x^{\star\star}(f^{\star})$ и $f^{\star}x \stackrel{\text{def}}{=} f^{\star}(x)$ уобичајено поједностављене нотације.

Претходна формула (1.10) дефинише пресликавање $J\colon X \to X^{\star\star}\colon x \mapsto x^{\star\star}$ које зовемо канонско утапање простора $X$ у његов други дуал, које представља изометрички изоморфизам простора $X$ са потпростором $J(X)$ простора $X^{\star\star}$. У наставку нам је потребна и следећа

**Дефиниција 1.5.** *Функција $f\colon \Omega \to X^{\star}$ је $(X^{\star})$ слабо$^*$ мерљива ако је за свако $x \in X$ функција $x^{\star\star}f\colon \Omega \to \mathbb{C}\colon t \mapsto f(t)x$ мерљива.*

У наставку биће нам потребан и

**Став 1.6.** ***Ако низ $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира ка $g$ у простору $L^p(\Omega,\mu)$ за неко $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, онда постоји подниз $\{g_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ низа $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ који конвергира ка $g$ скоро свуда у односу на меру $\mu$.***

$\triangle$ За доказ погледати [АДЈ, Став 5.11]. $\square$

**Теорема 1.7.** [DU] ***Нека је $f\colon \Omega \to X^{\star}$ слабо$^*$ мерљива функција и $x^{\star\star}f \in L^1(\Omega,\mu)$ за свако $x \in X$, где је $(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером $\mu$ на $\sigma$ алгебри $\mathfrak{M}$. Тада за свако $E \in \mathfrak{M}$ постоји $I_{E,f} \in X^{\star}$ за који је***

$$I_{E,f}(x) = \int_E x^{\star\star}f(t)\,d\mu(t) \qquad \textbf{\textit{за све }} x \in X. \tag{1.11}$$

$\triangle$ Нека је $E \in \mathfrak{M}$. Желимо да покажемо да је са (1.11) дефинисан ограничен линеаран функционал на $X$. Линеарност лако следи, док за доказивање ограничености дефинишимо $T\colon X \to L^1(\Omega,\mu)$ са $Tx = x^{\star\star}f$. Показаћемо да оператор $T$ има затворен график. Наиме, нека је $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ и $\lim_{n\to\infty} Tx_n = g$ за неко $g \in L^1(\Omega,\mu)$, односно $\|x_n - x\|_X \to 0$ и $\|Tx_n - g\|_{L^1(\Omega,\mu)} \to 0$ кад $n \to +\infty$. Тада према Ставу 1.6 постоји подниз $Tx_{n_k} = x_{n_k}^{\star\star}f$ који тежи ка $g$ скоро свуда кад $k \to +\infty$. Но, из $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ кад $n \to +\infty$ у простору $X$ следи и да $|x_n^{\star\star}f(t) - x^{\star\star}f(t)| \leqslant \|x_n^{\star\star} - x^{\star\star}\|_{X^{\star\star}}\|f(t)\|_X = \|f(t)\|_X\|x_n - x\|_X \to 0$, за скоро свако $t$. Одатле је $x^{\star\star}f(t) = g(t)$ скоро свуда, те је $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx \in L^1(\Omega,\mu)$, тј. $T$ је линеаран оператор који има затворен график. Тада нам Banach-ова теорема о затвореном графику даје да је $T$ ограничен оператор. Ако је $S_E\colon L^1(\Omega,\mu) \to \mathbb{C}\colon g \mapsto \int_E g\,d\mu(t)$, што представља ограничен линеаран функционал (директно се показује да је $\|S_E\| = 1$), то приметимо да онда важи $I_{E,f} = S_E T$, па је $\|I_{E,f}\| \leqslant \|S_E\|\|T\| = \|T\| < +\infty$, те $I_{E,f} \in X^{\star}$, што завршава доказ. $\square$

У специјалном случају $X := \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ имамо $X^{\star} = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, па је о.в. пресликавање $A\colon \Omega \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ слабо$^*$ мерљиво уколико су функције $t \mapsto \operatorname{tr}(A_tY)$, где је $A_t \stackrel{\text{def}}{=} A(t) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, мерљиве за свако $Y \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$. Притом, ако су функције $t \mapsto \operatorname{tr}(A_tY)$ на $\Omega$ још и интеграбилне на неком $E \in \mathfrak{M}$, тј. припадају простору $L^1(E,\mu)$, онда кажемо да је пресликавање $A\colon \Omega \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ **слабо$^*$ интеграбилно** на $E$. У овом случају нам Теорема 1.7 обезбеђује постојање јединственог оператора $\mathcal{I}_E \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) = (\mathfrak{C}_1(\mathcal{H}))^{\star}$ таквог да важи

$$\operatorname{tr}(\mathcal{I}_E Y) = \int_E \operatorname{tr}(A_tY)d\mu(t) \qquad \text{за све } Y \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H}).$$

У наставку ћемо уместо $\mathcal{I}_E$ користити ознаку $\oint_E A d\mu$ и зваћемо га слаби$^*$ (или Гељфандов) интеграл $A$ по $E$.

Следећа лема нам говори да је за проверу слабе* мерљивости (интеграбилности) о.в. функције $A$ довољно проверити њену мерљивост (интеграбилност) на операторима ранга један. Тачније

**Лема 1.8.** [JKM, Lemma 1.2] $A\colon \Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***је слабо* мерљива (слабо* интеграбилна) ако и само ако је скаларна функција*** $t \mapsto \langle A_t f, g\rangle$ ***мерљива (интеграбилна) за све*** $f, g \in \mathcal{H}$.

С обзиром на претходну лему, важи и следећа еквивалентна дефиниција слабог* (Гељфандовог) интеграла

**Лема 1.9.** ***Ако за неко*** $E \in \mathfrak{M}$ ***и неку слабо* мерљиву о.в. функцију*** $A\colon E \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***имамо да*** $\langle Af, f\rangle \in L^1(E,\mu)$ ***за све*** $f \in \mathcal{H}$, ***тада пресликавање*** $f \mapsto \int_E \langle A_t f, f\rangle \, d\mu(t)$ ***представља квадратну форму (јединственог) ограниченог оператора (означеног са)*** $\oint_E A d\mu$, ***који задовољава***

$$\operatorname{tr}\left(\oint_E A d\mu Y\right) = \operatorname{tr}\left(\oint_E A_t \, d\mu(t) Y\right) = \int_E \operatorname{tr}(A_t Y)\, d\mu(t) \qquad \textbf{\textit{за све}}\ Y \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H}),$$

***или еквивалентно***

$$\left\langle \left(\oint_E A d\mu\right) f, g\right\rangle = \left\langle \left(\oint_E A_t \, d\mu(t)\right) f, g\right\rangle = \int_E \langle A_t f, g\rangle \, d\mu(t) \qquad \textbf{\textit{за све}}\ f, g \in \mathcal{H}.$$

△ За доказ погледати [JKM, Lemma 1.2] □

У наставку ћемо користити поједностављену ознаку $\int_E A_t \, d\mu(t)$ за $\oint_E A_t \, d\mu(t)$.

Нека је $L^2(\Omega, \mu, \mathcal{H})$ простор свих (слабо) мерљивих функција $f\colon \Omega \to \mathcal{H}$ таквих да је $\int_\Omega \|f(t)\|^2 \, d\mu(t) < +\infty$, и слично, нека је $L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ простор слабо* мерљивих функција $A\colon \Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ таквих да је $\int_\Omega \|A_t f\|^2 \, d\mu(t) < +\infty$ за све $f \in \mathcal{H}$. Тада видимо да важи $A \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ ако и само ако $Af \in L^2(\Omega, \mu, \mathcal{H})$ за све $f \in \mathcal{H}$, и при томе ћемо за фамилију $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ рећи да је **јако квадратно интеграбилна (ј.к.и.) фамилија**. Штавише, важи и следећа карактеризација, наведена у [J05, Ex.2].

**Став 1.10.** ***Ако је*** $A\colon \Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***слабо* мерљива, тада је*** $A^*A$ ***слабо* интеграбилна ако и само ако је*** $A \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, ***при чему је***

$$\left\langle \int_\Omega A_t^* A_t \, d\mu(t) f, f\right\rangle = \int_\Omega \|A_t f\|^2 \, d\mu(t) (= \|Af\|^2_{L^2(\Omega,\mu,\mathcal{H})}) \quad \textbf{\textit{за све}}\ f \in \mathcal{H}.$$

Такође, на простору $L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ може се увести норма са $\|A\|_{\ell^\infty,2} \stackrel{\text{def}}{=} \left\|\int_\Omega A_t^* A_t \, d\mu(t)\right\|^{1/2}$ за све $A \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Штавише, $L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ представља Hilbert-ов модул над $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ када се у њега уведе оператор вредносни унутрашњи производ

$$\langle A, B\rangle_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega A_t^* B_t \, d\mu(t) \qquad \text{за све } A, B \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H})).$$

Специјално, у случају кад је $\Omega := \mathbb{N}$ и $\mu$ је бројачка мера card на $\mathbb{N}$, тада $\{A_n\}_{n=1}^\infty \in L^2(\mathbb{N}, \mathrm{card}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ ако и само ако је $\sup_{N\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{n=1}^N A_n^* A_n\right\| < +\infty$, када је овај супремум у ствари $\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^n A_k^* A_k\right\| = \left\|\sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n\right\|$, како ће то бити показано у Леми 2.5 и пратећој дефиницији јако квадратне сумабилности низова у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. У Hilbert-ов модулу $L^2(\mathbb{N}, \mathrm{card}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ над $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ о.в. унутрашњи производ је дат са $\langle\langle \{A_n\}_{n=1}^\infty, \{B_n\}_{n=1}^\infty\rangle\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^\infty A_n^* B_n$ за све $\{A_n\}_{n=1}^\infty, \{B_n\}_{n=1}^\infty \in L^2(\mathbb{N}, \mathrm{card}, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ (видети [MT, Ex. 2.5.6]).

Ако је при томе, додатно, $\int_\Omega A_t^* A_t \, d\mu(t) \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, за неку с.н. функцију $\Phi$, онда дефинишемо $\|A\|_{\Phi,2} \stackrel{\text{def}}{=} \left\|\int_\Omega A_t^* A_t \, d\mu(t)\right\|_\Phi^{1/2}$ и са $L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}))$ ћемо означавати простор свих мерљивих $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ вредносних функција које имају коначну $\|\cdot\|_{\Phi,2}$ норму. Важи и

**Теорема 1.11.** ***Простор $L^2_G(\Omega,\mu,\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H}))$ је Banach-ов простор у норми $\|\cdot\|_{\Phi,2}$.***

$\triangle$ За доказ погледати [J05, Th. 2.1.1] $\square$

## Трансформери типа унутрашњег производа и са њима повезане Cauchy-Schwarz-ове неједнакости

Следећи важан пример слабо* интеграбилних о.в. функција даје следећи став који представља само реформулацију [J05, Lemma 3.1(a1)] и тамошње неједнакости (12).

**Став 1.12.** ***Уколико су $A,B\in L^2_G(\Omega,\mu,\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, тада је за свако $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ о.в. функција $\Omega\to\mathcal{B}(\mathcal{H})\colon t\mapsto A_t^*XB_t$ слабо* интеграбилна и важи***

$$\left\|\int_\Omega A_t^*XB_t\,d\mu(t)\right\|\leqslant\left\|\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\right\|^{1/2}\left\|\int_\Omega B_t^*B_t\,d\mu(t)\right\|^{1/2}\|X\|.$$

То значи да под условима Става 1.12 трансформер $\int_\Omega A^*\otimes B d\mu\colon\mathcal{B}(\mathcal{H})\to\mathcal{B}(\mathcal{H})\colon X\mapsto\int_\Omega A_t^*XB_t\,d\mu(t)$ представља ограничен трансформер на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, за чију норму важи процена $\left\|\int_\Omega A^*\otimes B d\mu\right\|\leqslant\left\|\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\right\|^{1/2}\left\|\int_\Omega B_t^*B_t\,d\mu(t)\right\|^{1/2}$.

За рестрикције т.у.п. трансформера на Schatten-овим идеалима важи

**Теорема 1.13.** [J05] ***Ако је $\mu$ $\sigma$-коначна мера на $\Omega$, $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ и $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ слабо* мерљиве фамилије ограничених оператора такве да важи $\int_\Omega\|A_tf\|^2+\|A_t^*f\|^2+\|B_tf\|^2+\|B_t^*f\|^2\,d\mu(t)<+\infty$ за свако $f\in\mathcal{H}$, тада***

$$\left\|\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\right\|_p\leqslant$$
$$\left\|\sqrt[2q]{\int_\Omega A_t^*\left(\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\right)^{q-1}A_t\,d\mu(t)}\,X\,\sqrt[2r]{\int_\Omega B_t\left(\int_\Omega B_t^*B_t\,d\mu(t)\right)^{r-1}B_t^*\,d\mu(t)}\right\|_p \tag{1.12}$$

***за све $X\in\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ и све $p,q,r\geqslant1$ такве да је $\frac{2}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$.***

$\triangle$ Доказ видети у [J05, Th. 3.3]. $\square$

Ако имамо и додатну инвертибилност одређених израза који се јављају у (1.12), онда се може добити једноставнији алгебарски облик саме неједнакости (1.12) како даје

**Теорема 1.14.** ***За $A,A^*,B,B^*\in L^2_G(\Omega,\mu,\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ код којих су $\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)$ и $\int_\Omega B_t^*B_t\,d\mu(t)$ (ограничено) инвертибилни, важи***

$$\left\|\left(\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2q}-\frac12}\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\left(\int_\Omega B_t^*B_t\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2r}-\frac12}\right\|_p$$
$$\leqslant\left\|\left(\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2q}}X\left(\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2r}}\right\|_p \tag{1.13}$$

***за све $X\in\mathcal{C}_p(\mathcal{H})$ и све $p,q,r\geqslant1$ такве да је $\frac{2}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$.***

$\triangle$ Да бисмо показали (1.13), применимо неједнакост (1.12) у Теореми 1.13 на фамилије оператора датих са $\mathcal{A}_t\overset{\text{def}}{=}\left(\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2q}-\frac12}A_t$ и $\mathcal{B}_t\overset{\text{def}}{=}B_t\left(\int_\Omega B_t^*B_t\,d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2r}-\frac12}$ уместо на $A_t$ и $B_t$ редом. При томе, за такве фамилије важи

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathcal{A}_t\mathcal{A}_t^*\,d\mu(t) &= \Big(\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{2q}-\frac12}\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\Big(\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{2q}-\frac12}\\ &= \Big(\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\Big)^{\frac1q},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \mathcal{A}_t^*\Big(\int_\Omega \mathcal{A}_t\mathcal{A}_t^*\,d\mu(t)\Big)^{q-1}\mathcal{A}_t\,d\mu(t) = \int_\Omega A_t^*\Big(\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{2q}-\frac12}\Big(\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\Big)^{1-\frac1q}\\ &\times\Big(\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{2q}-\frac12}A_t\,d\mu(t) = \int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t).\end{aligned}$$

На сличан начин добијамо да важи $\int_\Omega \mathcal{B}_t\big(\int_\Omega \mathcal{B}_t^*\mathcal{B}_t\,d\mu(t)\big)^{r-1}\mathcal{B}_t^*\,d\mu(t) = \int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)$, одакле добијамо жељену неједнакост (1.13) јер је

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{2q}-\frac12}\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\Big(\int_\Omega B_t^*B_t\,d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{2r}-\frac12}\Big\|_p = \Big\|\int_\Omega \mathcal{A}_tX\mathcal{B}_t\,d\mu(t)\Big\|_p\\ &\leqslant \Big\|\Big(\int_\Omega \mathcal{A}_t^*\Big(\int_\Omega \mathcal{A}_t\mathcal{A}_t^*\,d\mu(t)\Big)^{q-1}\mathcal{A}_t\,d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{2q}}X\Big(\int_\Omega \mathcal{B}_t\Big(\int_\Omega \mathcal{B}_t^*\mathcal{B}_t\,d\mu(t)\Big)^{r-1}\mathcal{B}_t^*\,d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{2r}}\Big\|_p\\ &= \Big\|\Big(\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{2q}}X\Big(\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)\Big)^{\frac{1}{2r}}\Big\|_p,\end{aligned}$$

што је и требало показати. □

За фамилију $\{C_t\}_{t\in\Omega}$ у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ кажемо да се састоји од међусобно комутирајућих нормалних оператора (**м.к.н.о. фамилија**) уколико важи $C_s^*C_t = C_tC_s^*$ за све $t,s\in\Omega$. Ако су $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ и $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ такве фамилије, онда важи следећа

**Теорема 1.15.** [J05] ***Нека је $\Phi$ с.н. функција, $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ и $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ слабо$^*$ мерљиве м.к.н.о. фамилије такве да је $\int_\Omega \|A_tf\|^2+\|B_tf\|^2\,d\mu(t)<+\infty$ за све $f\in\mathcal{H}$. Тада за $X\in\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ важи***

$$\Big\|\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\Big\|_\Phi \leqslant \Big\|\sqrt{\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)}\,X\sqrt{\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)}\Big\|_\Phi.$$

△ За доказ погледати [J05, Th. 3.2]. □

Уколико је (бар) једна од фамилија $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ и $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ м.к.н.о. фамилија, тада такође имамо одговарајуће Cauchy-Schwarz-ове неједнакости за $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ идеале компактних оператора, увек када је $p\geqslant 2$.

**Теорема 1.16.** [JMÐ] ***Нека су $\mathcal{C},\mathcal{D}\colon\Omega\to\mathcal{B}(\mathcal{H})$ слабо* мерљиве фамилије такве да је $\{\mathcal{C}_t\}_{t\in\Omega}$ м.к.н.о. фамилија и нека је $\int_\Omega \|\mathcal{C}_tf\|^2+\|\mathcal{D}_tf\|^2\,d\mu(t)<+\infty$ за све $f\in\mathcal{H}$. Тада је за сваку с.н. функцију $\Phi$, $p\geqslant 2$ и $X\in\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$***

$$\Big\|\int_\Omega \mathcal{C}^*X\mathcal{D}\,d\mu\Big\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \Big\|\sqrt{\int_\Omega \mathcal{C}^*\mathcal{C}\,d\mu}\,X\Big\|_{\Phi^{(p)}}\Big\|\int_\Omega \mathcal{D}^*\mathcal{D}\,d\mu\Big\|^{1/2}. \tag{1.14}$$

***Алтернативно, уколико је*** $\{\mathcal{D}_t\}_{t\in\Omega}$ ***(уместо*** $\{\mathcal{C}_t\}_{t\in\Omega}$***) м.к.н.о. фамилија, тада***

$$\left\|\int_\Omega \mathcal{C}^* X \mathcal{D}\,d\mu\right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \left\|\int_\Omega \mathcal{C}^*\mathcal{C}\,d\mu\right\|^{1/2} \left\|X\sqrt{\int_\Omega \mathcal{D}^*\mathcal{D}\,d\mu}\right\|_{\Phi^{(p)}}. \tag{1.15}$$

△ За доказ погледати [JMĐ, Lemma 3.4]. □

**Теорема 1.17.** [JKL] ***Нека је*** $\Phi$ ***с.н. функција,*** $p \geqslant 2$***,*** $A, B^* \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ ***и нека је (бар) једна од фамилија*** $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ ***и*** $\{B_t^*\}_{t\in\Omega}$ ***м.к.н.о. фамилија. Тада за све*** $X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ ***важи***

$$\left\|\int_\Omega A_t X B_t\,d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \left\|\sqrt{\int_\Omega A_t^* A_t\,d\mu(t)}\,X\sqrt{\int_\Omega B_t B_t^*\,d\mu(t)}\right\|_{\Phi^{(p)*}}.$$

△ Доказ ће бити представљен у склопу доказа Теореме 3.6(г). □

Напомена 1.18. Релаксирањем услова нормалности и комутативности за обе јако квадратно интеграбилне фамилије $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ и $\{B_t^*\}_{t\in\Omega}$ Теорема 1.17 представља очигледно уопштење Теореме 1.15, под ограничењем да су тада у.и. норме управо Q$^*$ норме.

Напомена 1.19. Све претходно наведене неједнакости имају своја директна уопштења у контексту Hilbert-ових $W^*$-модула, над полуконачним von-Neumann-овим алгебрама, као што је то на пример урађено за Теорему 1.13 и Теорему 1.15 у раду [Ke20].

## Функционални рачун за есенцијално ограничене функције две променљиве

У овој подсекцији разматрају се основни елементи функционалног рачуна за есенцијално ограничене Borel[9]-ове функције, дефинисаног на Hilbert-Schmidt-овим операторима.

**Лема 1.20 (Ограниченост варијације трага).** ***За произвољне*** $X, Y \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ ***и произвољне спектралне (Borel-ове) мере*** $E$ ***и*** $F$ ***на*** $\mathbb{C}$ ***важи***

$$\sum_{m,n} |\mathrm{tr}(E(\gamma_m) X F(\delta_n) Y^*)| \leqslant \|X\|_2 \|Y\|_2,$$

***за сва коначна Borel-ова разбијања*** $\{\gamma_m\}$ ***и*** $\{\delta_n\}$ ***комплексне равни.***

△ За доказ погледати [J91, Lema 2.1] или [J93, Th. 2.1]. □

Како се тиме показује ограниченост варијације функције трага на елементарним скуповима у $\mathbb{C}^2$, то се према теореми екстензије датој у [Scho] непосредно добија следећа

**Последица 1.21.** [J91, Посл. 2.1] ***Пресликавање*** $\gamma \times \delta \mapsto \mathrm{tr}(E(\gamma) X F(\delta)\ Y^*)$ ***фамилије директних производа Borel-ових скупова у*** $\mathbb{C}$ ***за сваки дат пар*** $\{X, Y\}$ ***Hilbert-Schmidt-ових оператора може се на јединствен начин проширити до комплексне Borel-ове мере*** $\mu_{X,Y}$ ***на*** $\mathbb{C}^2$***, такве да је*** $|\mu_{X,Y}|(\mathbb{C}^2) \leqslant \|X\|_2 \|Y\|_2$.

При томе, пресликавање $f \mapsto \int_{\mathrm{supp}\, E \times \mathrm{supp}\, F} f d\mu_{X,Y}$, где $\mathrm{supp}\, E$ (тј. $\mathrm{supp}\, F$) означава носач спектралне мере $E$ (тј. $F$), представља ограничен линеаран функционал на $L^\infty(\mathrm{supp}\, E \times \mathrm{supp}\, F, |\mu_{X,Y}|)$, јер је

$$\left|\int_{\mathrm{supp}\, E \times \mathrm{supp}\, F} f d\mu_{X,Y}\right| \leqslant \|f\|_{L^\infty(|\mu_{X,Y}|)} |\mu_{X,Y}|(\mathbb{C}^2) \leqslant \|f\|_{L^\infty(|\mu_{X,Y}|)} \|X\|_2 \|Y\|_2. \tag{1.16}$$

[9]Борел–Émile Borel (1871–1956)

Из неједнакости (1.16) закључује се и да је за свако $Y \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ и сваку функцију $f$, која је Borel мерљива и $E \otimes F$ есенцијално ограничена на скупу $\operatorname{supp} E \times \operatorname{supp} F$, пресликавање $X \mapsto \int_{\operatorname{supp} E \times \operatorname{supp} F} f d\mu_{X,Y}$ је један ограничен линеаран функционал на $\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$. Њиме је посредно одређен и ограничен линеарни оператор на $\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$, кога можемо препознати као $f(L_A, R_B)X$, где је $A = \int_{\sigma(A)} z dE(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\sigma(A)} zE(dz)$ и $B = \int_{\sigma(B)} w dF(w) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\sigma(B)} wF(dw)$, а $L_A, R_B \colon \mathfrak{C}_2(\mathcal{H}) \to \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ су дати са $L_A X \stackrel{\text{def}}{=} AX$ и $R_B X \stackrel{\text{def}}{=} XB$. Наиме, како су $L_A, R_B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{C}_2(\mathcal{H}))$ међусобно комутирајући нормални оператори, то спектрална теорема гарантује постојање Borel-ових спектралних мера $\tilde{E}$ и $\tilde{F}$, чије су вредности ортопројектори у $\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$, таквих да је $L_A = \int_{\sigma(L_A)} z\tilde{E}(dz)$ и $R_B = \int_{\sigma(R_B)} w\tilde{F}(dw)$. Прецизније, за свака два Borel-ова скупа $\gamma, \delta \subseteq \mathbb{C}$ је $\tilde{E}(\gamma) = L_{E(\gamma)}$ и $\tilde{F}(\delta) = R_{F(\delta)}$, тј. $\tilde{E}_{L_A}(\delta)X = L_{E(\gamma)}X = E(\delta)X$ и $\tilde{F}_{R_B}(\delta)X = R_{F(\delta)}X = XF(\delta)$ за свако $X \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$, одакле произилази да је $\sigma(L_A) = \sigma(A) = \operatorname{supp} E$, као и да је $\sigma(R_B) = \sigma(B) = \operatorname{supp} F$. Како спектралне мере $\tilde{E}$ и $\tilde{F}$ комутирају, то је њихов производ $\tilde{E} \otimes \tilde{F}$, задат са $\tilde{E} \otimes \tilde{F}(\gamma \times \delta)X \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{E}(\gamma)\tilde{F}(\delta)X = E(\gamma)XF(\delta)$ за свако $X \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$, такође Borel-ова спектрална мера са носачем $\operatorname{supp}(\tilde{E} \otimes \tilde{F}) \subseteq \sigma(A) \times \sigma(B)$. Користећи нотацију $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle$ за скаларни производ у $\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$, дат са $\langle\!\langle X, Y \rangle\!\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{tr}(XY^*)$ за $X, Y \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$, имамо

$$\operatorname{tr}((f(L_A,R_B)X)Y^*) = \langle\!\langle f(L_A,R_B)X, Y \rangle\!\rangle = \int_{\operatorname{supp}(\tilde{E} \otimes \tilde{F})} f(z,w) \langle\!\langle \tilde{E} \otimes \tilde{F}(dz \times dw)X, Y \rangle\!\rangle$$
$$= \int_{\sigma(L_A) \times \sigma(R_B)} f(z,w) \langle\!\langle \tilde{E} \otimes \tilde{F}(dz \times dw)X, Y \rangle\!\rangle = \int_{\sigma(A) \times \sigma(B)} f(z,w) \operatorname{tr}(E(dz)XF(dw)Y^*),$$

чиме се оправдава коришћење нотација $f(L_A, R_B)X = \int_{\sigma(A) \times \sigma(B)} f(z,w)E(dz)XF(dw) = \int_{\sigma(A) \times \sigma(B)} f(z,w) d(\tilde{E} \otimes \tilde{F})(z,w)X$. За сам трансформер $f(L_A, R_B)$ се најчешће користи поједностављена нотација $f(A, B)$, коју ћемо надаље и ми користисти, као и ознаку $E \otimes F$ уместо $\tilde{E} \otimes \tilde{F}$. За норму овог трансформера на Hilbert-овом простору $\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ показује се да важи $\|f(A, B)\| = \|f\|_{L^\infty(E \otimes F)}$, где је са $\|f\|_{L^\infty(E \otimes F)}$ означена $E \otimes F$ есенцијални супремум функције $|f|$, сагласно дефиницији простора $L^\infty(E \otimes F)$ и норме $\|\cdot\|_{L^\infty(E \otimes F)}$ на њему, дате формулом (1) у [BS87, p. 130]. Уколико је функција $f$ холоморфна (по свакој промењљивој) у некој околини скупа $\sigma(A) \times \sigma(B)$, тада се директно проверава да је

$$f(A, B)X = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_A} \oint_{\Gamma_B} f(z,w)(A - z)^{-1} X (B - w)^{-1} dz dw$$

за свако $X \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$, где $\Gamma_A$ (односно $\Gamma_B$) у горњем контурном интегралу представља просту ректифицибилну криву која окружује $\sigma(A)$ (односно $\sigma(B)$).

Овакав функционални рачун две нормалне операторне промењљиве $A$ и $B$ поседује за $f, g \in L^\infty(\operatorname{supp}(E \otimes F), E \otimes F)$ и $X, Y \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ следећа својства:

(1) $(\alpha f + \beta g)(A, B)X = \alpha f(A, B)X + \beta g(A, B)X$ за свако $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$;

(2) $(fg)(A, B)X = f(A, B)(g(A, B)X)$;

(3) $\sigma(f(A, B))$ је есенцијални ранг функције $f$ на скупу $\operatorname{supp}(E \otimes F)$ у односу на меру $E \otimes F$, што се поклапа са њеним есенцијалним рангом у односу на меру $\mu \times \nu$, где су позитивне мере $\mu$ и $\nu$ еквивалентне (у смислу апсолутне непрекидности) са $E$ и $F$ редом;

(4) $f(A,B)^* = \tilde{f}(A^*,B^*)$, где је $\tilde{f}$ конјугована функција $\tilde{f}\colon (z,w)\mapsto \overline{f(\bar{z},\bar{w})}$ дефинисана за све $(\bar{z},\bar{w})\in \operatorname{supp}(E\otimes F)$;

(5) $f(A,B)(X) = AX$ за $f(z,w)=z$ и $f(A,B)(X)=XB$ за $f(z,w)=w$;

(6) $\langle\!\langle f(A,B)X, g(A,B)Y\rangle\!\rangle = \langle\!\langle (f\bar{g})(A,B)X, Y\rangle\!\rangle$;

(7) трансформер $f(A,B)$ представља нормалан оператор на $\mathcal{C}_2(\mathcal{H})$, јер важи

$$\|f(A,B)X\|_2 = \|f(A,B)^*X\|_2 \qquad \text{за све } X\in\mathcal{C}_2(\mathcal{H}).$$

Најбоље истражену класу т.у.п. трансформера чине трансформери дефинисани преко (Stileltjes-ових) д.о.и. који су уведени и развијени од стране Бирмана[10] и Соломјака[11] у [BS66, BS67, BS73, BS93] и њихових бројних следбеника у [BKS, F74, KS96, KS04, KS05, KS05a, dPWS, PS08, PS11]. Корисну адаптацију д.о.и. ради њихове успешне примене на операторне средине и различите у.и. норма неједнакости дали су Hiai[12] и Kosaki[13] у [Kosa98, HK99, Hi10, HK03, Kosa11]. Значајан допринос у примени и развијању теорије д.о.и. дали су Пелер[14] [Pel85, Pel90] и Ротфељд[15] [Rot69, Rot78], углавном мотивисани и под утицајем рада Далецког[16] и Крејна[17] на формули за диференцирање о.в. функција. Наиме, фундаментални резултат Пелера препознаје потребне и довољне услове за двојни операторни интеграл да би он представљао ограничен трансформер на сваком $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, који се своде на репрезентацију д.о.и. трансформера као (тзв. нормалних) трансформера типа унутрашњег производа $\int_\Omega A_t\otimes B_t\,d\mu(t)$, где су обе фамилије $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ и $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ јако квадратно интеграбилне и састоје се од међусобно комутирајућих нормалних оператора. Прецизније, важи следећа последица теореме Пелера:

**Теорема 1.22.** [Pel84, Pel85] ***Ако су*** $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***нормални оператори,*** $E,F$ ***њима придружене спектралне мере и*** $\varphi\in L^\infty(\operatorname{supp}(E\otimes F), E\otimes F)$, ***тада је***

$$\varphi(A,B)\colon \mathcal{C}_1(\mathcal{H})\to\mathcal{C}_1(\mathcal{H})\colon X\mapsto \int_{\sigma(A)\times\sigma(B)} \varphi(z,w)E(dz)XF(dw)$$

***ограничен трансформер на*** $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ ***(тиме и на свим осталим идеалима компактних оператора) ако и само ако постоји простор са мером*** $(\Omega,\mu)$ ***и ограничене мерљиве функције*** $\alpha$ ***на*** $\sigma(A)\times\Omega$ ***и*** $\beta$ ***на*** $\sigma(B)\times\Omega$, ***такве да је за све*** $(z,w)\in\sigma(A)\times\sigma(B)$

$$\varphi(z,w) = \int_\Omega \alpha(z,t)\beta(w,t)\,d\mu(t) \qquad \textit{\textbf{и}}$$
$$\left\|\int_\Omega |\alpha(\cdot,t)|^2\,d\mu(t)\right\|_{L^\infty(\sigma(A),\nu)} \left\|\int_\Omega |\alpha(\cdot,t)|^2\,d\mu(t)\right\|_{L^\infty(\sigma(B),\xi)} < +\infty$$

***за мере*** $\nu$ ***и*** $\xi$ ***еквивалентне (у смислу апсолутне непрекидности) са*** $E$ ***и*** $F$ ***редом.***

[10] Бирман–Михаил Шлёмович Бирман (1928–2009)
[11] Соломјак–Михаил Захарович Соломяк (1931–2016)
[12] Хиаи–Fumio Hiai
[13] Косаки–Hideki Kosaki
[14] Пелер–Vladimir Vsevolodovich Peller
[15] Ротфељд–С. Ю. Ротфельд
[16] Далецки–Юрий Львович Далецкий (1926–1997)
[17] Крејн–Марк Григо́рьевич Крейн (1907–1989)

Другим речима, под условима претходне теореме важи

$$\varphi(A,B)X = \int_\Omega \alpha(A,t)X\beta(B,t)\,d\mu(t) = \int_\Omega A_t X B_t\,d\mu(t),$$

за $A_t := \alpha(A,t)$ и $B_t := \beta(B,t)$, што показује да т.у.п. трансформери представљају природно проширење класе трансформера дефинисаних помоћу д.о.и. и на случај када оператори у фамилијама $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ и $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ не морају нужно да буду ни нормални, ни да међусобно комутирају. За детаљан доказ претходне теореме у случају кад су $A$ и $B$ позитивни оператори погледати [HK03, Th. 2.2].

Теорија д.о.и. и њима одговарајућих трансформера има бројне примене у теорији пертубације и деривација за самоадјунговане и унитарне операторе, операторне средине, операторне норма неједнакости и функцију спектралног помака. Ван оквира теорије д.о.и. различите варијанте Cauchy-Schwarz-ових норма неједнакости представљаће за сада основно средство за одређивање ограничености т.у.п. трансформера на различитим класама операторних идеала, које неретко омогућавају и проширења резултата постигнутих помоћу д.о.и. и ван контекста д.о.и.

# 5 Оператор монотоне функције као потклаcа Pick-ових функција

У овом одељку разматраћемо појам оператор монотоних, оператор конквексних и оператор конкавних функција, као и такозване Pick[18]-ове функције које су у тесној вези са оператор монотоним функцијама. Такође, биће представљене и интегралне репрезентације ових функција, које су нам неопходне у наставку. За више детаља погледати [B, Do, Hi10].

**Дефиниција 1.23.** *Ако је $J \subseteq \mathbb{R}$ интервал и $f\colon J \to \mathbb{R}$ мерљива функција, тада кажемо да је $f$*

- *оператор монотона (растућа) функција на $J$ ако за самоадјунговане $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ за које је $\sigma(A)\cup\sigma(B) \subseteq J$ из $A \leqslant B$ следи $f(A) \leqslant f(B)$;*
- *оператор конвексна функција на $J$ ако за самоадјунговане $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ за које је $\sigma(A)\cup\sigma(B) \subseteq J$ важи $f((1-\lambda)A+\lambda B) \leqslant (1-\lambda)f(A)+\lambda f(B)$ за све $\lambda \in [0,1]$;*
- *оператор конкавна на $J$ ако је $-f$ оператор конвексна на $J$.*

Примери оператор монотоних функција:

- за $a \geqslant 0$ и $b \in \mathbb{R}$ функција $t \mapsto at+b$ је о.м. на $\mathbb{R}$;
- за $c \notin (a,b)$, функција $t \mapsto (c-t)^{-1}$ је о.м. на $(a,b)$;
- за $\lambda > 0$ функција $t \mapsto \frac{t}{t+\lambda}$ је о.м. на $[0,+\infty)$;
- за $\lambda > 0$ функција $t \mapsto -\frac{1}{t+\lambda}$ је о.м. на $[0,+\infty)$;
- за $0 \leqslant p \leqslant 1$, функција $t \mapsto t^p$ је о.м. на $[0,+\infty)$;
- функција $t \mapsto \log t$ је о.м. на $(0,+\infty)$;
- функција $t \mapsto \tan t$ је о.м. на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

[18] Пик–Georg Alexander Pick (1859–1942)

- функција $f\colon t \mapsto \frac{t-1}{\log t}$ је о.м. на $[0, +\infty)$, где се по принципу продужења функције по непрекидности узима да је $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$.

Следећа теорема [HP, Th. 4.4] даје нам интегралну репрезентацију оператор монотоних функција на $(-1, 1)$.

**Теорема 1.24.** [HP] ***За сваку неконстантну о.м. функцију*** $f$ ***на*** $(-1, 1)$ ***постоји јединствена вероватносна Borel-ова мера*** $\mu$ ***на*** $[-1, 1]$ ***таква да је***

$$f(x) = f(0) + f'(0) \int_{[-1,1]} \frac{x}{1 - \lambda x} d\mu(\lambda) \qquad \text{\textbf{\textit{за све}}}\ x \in (-1, 1). \tag{1.17}$$

△ За доказ погледати [Hi10, Th. 2.7.5]. □

Оператор монотоне функције у тесној су вези са следећом важном класом функција дефинисаних на отвореној горњој полуравни $\mathbb{H}^+ \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ у $\mathbb{C}$.

**Дефиниција 1.25.** *Аналитичка функција* $f\colon \mathbb{H}^+ \to \mathbb{C}$ *је* ***Pick-ова*** *ако је њена слика садржана у затвореној горњој полуравни* $\overline{\mathbb{H}^+}$, *што јест ако је* $f(\mathbb{H}^+) \subseteq \overline{\mathbb{H}^+} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.

Класу свих Pick-ових функција означаваћемо са $\mathcal{P}$. Такође, како је свако неконстантно аналитичко пресликавање и отворено пресликавање, то за неконстатне Pick-ове функције важи да им је слика садржана у $\mathbb{H}^+$. Важи да је класа $\mathcal{P}$ затворена за множење ненегативним скаларом и сабирање, као и да је композиција две неконстатне функције из $\mathcal{P}$ поново припада $\mathcal{P}$. Типични примери Pick-ових функција су $z \mapsto \tan z$, $z \mapsto -\frac{1}{z}$, $z \mapsto z^r$ за $0 \leqslant r \leqslant 1$ и $z \mapsto \log z$, где полазећи од једнозначне репрезентације $z = |z|e^{i\theta}$ за $\theta \in (0, \pi)$ је $z^r := |z|^r e^{ir\theta}$ и $\log z := \log|z| + i\theta$. С обзиром да је класа $\mathcal{P}$ затворена за композицију, то из $f \in \mathcal{P}$ следи и да $-1/f \in \mathcal{P}$.

За сваки отворени интервал $(a, b)$ са $\mathcal{P}(a, b)$ обележићемо класу Pick-ових функција које принципом рефлексије дозвољавају аналитичко продужење кроз $(a, b)$ на доњу полураван $\mathbb{H}^- \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$. Такође, приметимо да ако неконстантна $f \in \mathcal{P}(a, b)$ тада $f$ на интервалу $(a, b)$ узима искључиво реалне вредности. Из интегралне репрезентације (1.17) директно следи да је свака о.м. функција на $(-1, 1)$ уједно и бесконачно диференцијабилна на $(-1, 1)$. Више од тога, интегрална репрезентација (1.17) нам даје да функција $f$ има аналитичко продужење

$$f(z) = f(0) + f'(0) \int_{[-1,1]} \frac{z}{1 - \lambda z} d\mu(\lambda), \tag{1.18}$$

дефинисано на целој комплексној равни изузев на $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, тј. на $\mathbb{H}^+ \cup (-1, 1) \cup \mathbb{H}^-$. Како је $\operatorname{Im} \frac{z}{1-\lambda z} = \frac{\operatorname{Im} z}{|1-\lambda z|^2}$, то видимо да за $f$ дато са (1.18) важи да слика отворену горњу полураван $\mathbb{H}^+$ у саму себе. Такође, важи да је $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Другим речима, функција $f$ на $\mathbb{H}^-$ представља аналитичко продужење функције $f$ са $\mathbb{H}^+$ кроз интервал $(-1, 1)$, остварено применом принципа рефлексије. Приметимо да се претходни резултати могу лако пренети и на произвољаван коначан интервал $(a, b)$, с обзиром да се директно показати да је произвољна функција $f$ о.м. на $(a, b)$ ако и само ако је функција $f\big(\frac{(b-a)t}{2} + \frac{b+a}{2}\big)$, о.м. на $(-1, 1)$. Штавише, важи следећа

**Теорема 1.26.** ***Ако је*** $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ ***и*** $f$ ***реално вредносна функција на*** $(a, b)$. ***Тада је*** $f$ ***о.м. на*** $(a, b)$ ***ако и само ако постоји*** $\tilde{f} \in \mathcal{P}(a, b)$ ***тако да је*** $f = \tilde{f} \restriction_{(a,b)}$.

$\triangle$ За доказ погледати [Hi10, Th. 2.7.7]. $\square$

Непрекидне позитивне функције дефинисане на $[0, +\infty)$ имају интегралну репрезентацију коју описује следећа

**Теорема 1.27.** ***Нека је*** $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ ***непрекидна функција. Тада је*** $f$ ***о.м. ако и само ако постоји позитивна коначна Borel-ова мера*** $m$ ***на*** $[0, +\infty]$ ***таква да је***

$$f(t) = \int_{[0,+\infty]} \frac{t(1+\lambda)}{t+\lambda} dm(\lambda) \qquad \textbf{\textit{за све}}\ t \in [0, +\infty),$$

***где подразумевамо да је*** $t(1+\lambda)/(t+\lambda)$ ***једнако*** $1$ ***ако је*** $\lambda = 0$, ***односно*** $t$ ***ако је*** $\lambda = +\infty$. ***У том случају, мера*** $m$ ***је јединствена, а за*** $a := m(\{0\})$ ***и*** $b := m(\{+\infty\})$ ***важи***

$$f(t) = a + bt + \int_{(0,+\infty)} \frac{t(1+\lambda)}{t+\lambda} dm(\lambda) \qquad \textbf{\textit{за све}}\ t \in [0, +\infty). \tag{1.19}$$

***При томе је*** $a = f(0)$ ***и*** $b = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t}$.

$\triangle$ Из идентитета $\frac{t(1+\lambda)}{t+\lambda} = 1 + \lambda - \frac{\lambda(1+\lambda)}{t+\lambda}$, за свако $\lambda \in [0, +\infty)$, видимо да је функција $\frac{t(1+\lambda)}{t+\lambda}$ о.м. на $[0, +\infty)$, па је тиме и $f$ о.м. ако важи дата интегрална репрезентација. Обратно, ако је $f \geqslant 0$ непрекидна и о.м. на $[0, +\infty)$ и ако је $\varphi$ бијекција интервала $(0, +\infty)$ на $(-1, 1)$, дата са $\varphi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1+x}{1-x} = -1 + \frac{2}{1-x}$ (која је такође једна о.м. функција), тада је и функција $g\colon (-1, 1) \to [0, +\infty]$ дата са $g(x) = f(\varphi(x))$ такође о.м. на $(-1, 1)$. Према Теореми 1.24 постоји јединствена вероватносна Borel-ова мера $\mu$ на $[-1, 1]$ таква да је

$$g(x) = g(0) + g'(0) \int_{[-1,1]} \frac{x}{1-\lambda x} d\mu(\lambda) \qquad \text{за све } x \in (-1, 1),$$

па како је $g(-1) = \lim_{x\to-1^+} g(x) = f(0) \geqslant 0$, то је $\int_{[-1,1]} \frac{1}{1+\lambda} d\mu(\lambda) < +\infty$, те је $\mu(\{-1\}) = 0$, одакле следи да је

$$g(x) - g(-1) = g'(0) \int_{(-1,1]} \frac{1+x}{(1-\lambda x)(1+\lambda)} d\mu(\lambda) \quad \text{за све } x \in (-1, 1).$$

Користећи смене $x = \varphi^{-1}(t)$ и $\lambda = \varphi^{-1}(\zeta)$ и дефинишући меру $m$ на $(0, +\infty]$ са $m \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mu} \circ \varphi^{-1}$, где је $d\tilde{\mu}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g'(0)}{1+\lambda} d\mu(\lambda)$, добијамо

$$f(t) - f(0) = \int_{(0,+\infty]} \frac{t(1+\zeta)}{t+\zeta} dm(\zeta), \qquad \text{за све } t \in [0, +\infty).$$

Додавајући тежину $f(0)\delta(\{0\})$, где $\delta$ представља Dirac[19]-ову меру концентрисану у тачки 0, добијамо

$$f(t) = \int_{[0,+\infty]} \frac{t(1+\zeta)}{t+\zeta} dm(\zeta), \qquad \text{за све } t \in [0, +\infty).$$

Јединственост мере $m$ следи из јединствености мере $\mu$. За добијање последњег тврђења у теореми, довољно је применити претходна разматрања на функцију $f - f(0)$. $\square$

[19]Дирак–Paul Adrien Maurice Dirac (1902–1984)

# Глава 2

# Cauchy-Schwarz-ове неједнакости за $\sigma$-елементарне трансформере

## 1 Неки аспекти различитих конвергенција операторних низова

**Лема 2.1.** ***Ако је*** $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***низ у*** $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***такав да за свако*** $f,g\in\mathcal{H}$ ***постоји*** $\lim_{n\to\infty}\langle A_n f,g\rangle(\in\mathbb{C})$, ***тада постоји слаби лимес*** $\mathrm{w}-\lim_{n\to\infty}A_n$ ***којим је одређен јединствен ограничен оператор на*** $\mathcal{H}$.

△ За произвољан вектор $g\in\mathcal{H}$ посматрајмо функционал дефинисан са $\varphi_g^\star\colon\mathcal{H}\to\mathbb{C}\colon f\mapsto\lim_{n\to\infty}\langle A_n f,g\rangle=\lim_{n\to\infty}\langle f,A_n^* g\rangle$, који је сагласно принципу униформне ограничености ограничен и за који је $\|\varphi_g^\star\|\leqslant\sup_{n\geqslant1}\|A_n^* g\|<+\infty$. Поновна примена истог принципа обезбеђује да је $M:=\sup_{n\geqslant1}\|A_n\|<+\infty$, па је $\|\varphi_g^\star\|\leqslant\sup_{n\geqslant1}\|A_n^* g\|\leqslant M\|g\|$. Према Fréchet[1]–Riesz[2]-овој теореми постоји јединствено $h_g\in\mathcal{H}$ такво да је $\varphi_g^\star(f)=\langle f,h_g\rangle$ за све $f\in\mathcal{H}$, па је са $B\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}\colon g\mapsto h_g$ дат оператор који је и линеаран и ограничен за који је $\|B\|\leqslant M$. Тиме за све $f,g\in\mathcal{H}$ важи $\lim_{n\to\infty}\langle A_n f,g\rangle=\langle f,h_g\rangle=\langle f,Bg\rangle=\langle B^* f,g\rangle$, па је $B^*$ тражени $\mathrm{w}-\lim_{n\to\infty}A_n$, за кога је $\|\mathrm{w}-\lim_{n\to\infty}A_n\|=\|B^*\|=\|B\|\leqslant\sup_{n\geqslant1}\|A_n\|$. □

Напомена 2.2. Под условима претходне Леме важи прецизнија процена $\|\mathrm{w}-\lim_{n\to\infty}A_n\|\leqslant\liminf_{n\to\infty}\|A_n\|$, при чему се сагласно поларизационом идентитету постојање лимеса $\lim_{n\to\infty}\langle A_n f,g\rangle$ за све $f,g\in\mathcal{H}$ може редуковати на захтев постојања $\lim_{n\to\infty}\langle A_n f,f\rangle$ за све $f\in\mathcal{H}$.

У наставку биће нам потребна и следећа

**Лема 2.3.** ***Сваки монотоно опадајући низ позитивних ограничених оператора јако конвергира ка ограниченом оператору.***

△ За доказ видети [АДЈ, Теорема 12.7]. □

Директном применом Леме 2.3 на опадајући низ $\{(\sup_{n\geqslant1}\|A_n\|)I-A_n\}_{n=1}^{\infty}$ произилази

**Лема 2.4.** ***Нека је*** $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***монотоно растући низ позитивних оператора у*** $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***такав да је*** $\sup_{n\geqslant1}\|A_n\|$ ***коначан. Тада низ*** $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***јако конвергира ка ограниченом оператору.***

Комбинујући претходне три леме добијамо

[1]Фреше–Maurice René Fréchet (1878–1973)
[2]Рис–Frigyes Riesz (1880–1956)

**Лема 2.5.** ***Нека је $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ такав да је $\sum_{n=1}^{\infty}\|A_n f\|^2 < +\infty$ за све $f \in \mathcal{H}$. Тада низ $\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k^* A_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ јако конвергира ка ограниченом оператору.***

△ Како је $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\|A_n f\|^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle A_k^* A_k f, f\rangle = \lim_{n\to\infty}\Big\langle\Big(\sum_{k=1}^{n} A_k^* A_k\Big)f, f\Big\rangle < +\infty$, то према Леми 2.1 и Напомени 2.2 растући низ $\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k^* A_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ слабо конвергира, при чему из доказа Леме 2.1 видимо и да је $\sup_{n\geqslant 1}\left\|\sum_{k=1}^{n} A_k^* A_k\right\| < +\infty$. Тада Лема 2.4 потврђује јаку конвергенцију низа $\left\{\sum_{k=1}^{n} A_k^* A_k\right\}_{n=1}^{\infty}$, како и тврди ова лема. □

Под условима Леме 2.5 постојећи јаки $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} A_k^* A_k$ означаваћемо са $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n$ (као елемент $\mathcal{B}(\mathcal{H})$), за кога се непосредно проверава да важи следећи низ једнакости $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right\| = \sup_{n\geqslant 1}\left\|\sum_{k=1}^{n} A_k^* A_k\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} A_k^* A_k\right\|$, при чему сам низ $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ називамо **јако квадратно сумабилним (ј.к.с.)**.

# 2 Cauchy-Schwarz-ове неједнакости за $\sigma$-елементарне трансформере на Q и Q* идеалима

Овај одељак почињемо листом Cauchy-Schwarz-овиx норма неједнакости за $\sigma$-елементарне трансформере делујуће на идеалима компактних оператора, који су придружени $p$-модификованим с.н. функцијама и њиховим адјунгованим (дуалним) с.н. функцијама.

**Лема 2.6.** ***Нека је $\Phi$ с.н. функција и $p \geqslant 2$. Ако су $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}, \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с. фамилије у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, тада је за све $X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$***

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\Big\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\Big\|^{1/2} \max\Big\{\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\Big\|^{1/2}, \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\Big\|^{1/2}\Big\}\|X\|_{\Phi^{(p)}}. \tag{2.1}$$

***Ако су $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с. фамилије у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, такве да је $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ додатно и м.к.н.о. фамилија, тада је за све $X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$***

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\Big\|_{\Phi^{(p)}} &\leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\Big\|^{1/2}\Big\|X\Big(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi^{(p)}}\\ &\leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\Big\|^{1/2}\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\Big\|^{1/2}\|X\|_{\Phi^{(p)}}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

***Аналогно, ако је ј.к.с. фамилија $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ м.к.н.о. фамилија и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ је произвољна ј.к.с. фамилија у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, тада је за $X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$***

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\Big\|_{\Phi^{(p)}} &\leqslant \Big\|\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\Big)^{1/2} X\Big\|_{\Phi^{(p)}}\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\Big\|^{1/2}\\ &\leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\Big\|^{1/2}\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\Big\|^{1/2}\|X\|_{\Phi^{(p)}}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

***Ако су $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с. фамилије у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, такве да је (бар) једна од***

***њих м.к.н.о. фамилија, тада је за све*** $Y \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$

$$\boxed{\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n Y B_n\Big\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \Big\|\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\Big)^{1/2} Y \Big(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi^{(p)*}}} \\ \leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\Big\|^{1/2} \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\Big\|^{1/2} \|Y\|_{\Phi^{(p)*}}. \tag{2.4}$$

△ Према [JM, Th. 2.3], за свако $N \in \mathbb{N}$ је

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n X B_n\Big\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n A_n^*\Big\|^{1/2} \Big\|\sum_{n=1}^{N} B_n^* X^* X B_n\Big\|^{1/2}_{\Phi^{(\frac{p}{2})}},$$

(последњи степен 1/2 је тачно наведен у [JM, Th. 2.3], али је испуштен у апстракту од рада [JM]!), док нам примена [J05, Lemma 3.1(c)] на $\sum_{n=1}^{N} B_n^* X^* X B_n$ даје даље процене

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n X B_n\Big\|_{\Phi^{(p)}} &\leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n A_n^*\Big\|^{1/2} \max\Big\{\Big\|\sum_{n=1}^{N} B_n^* B_n\Big\|^{1/2}, \Big\|\sum_{n=1}^{N} B_n B_n^*\Big\|^{1/2}\Big\} \|X^* X\|^{1/2}_{\Phi^{(\frac{p}{2})}} \\ &= \Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n A_n^*\Big\|^{1/2} \max\Big\{\Big\|\sum_{n=1}^{N} B_n^* B_n\Big\|^{1/2}, \Big\|\sum_{n=1}^{N} B_n B_n^*\Big\|^{1/2}\Big\} \|X\|_{\Phi^{(p)}} \\ &\leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\Big\|^{1/2} \max\Big\{\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\Big\|^{1/2}, \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\Big\|^{1/2}\Big\} \|X\|_{\Phi^{(p)}}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Сада, завршни аргумент у доказ неједнакости (2.1) произилази из полунепрекидности одоздо за у.и. норму $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ на (2.5), што даје

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\Big\|_{\Phi^{(p)}} &= \Big\|\mathrm{w-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} A_n X B_n\Big\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \liminf_{N\to\infty} \Big\|\sum_{n=1}^{N} A_n X B_n\Big\|_{\Phi^{(p)}} \\ &\leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\Big\|^{1/2} \max\Big\{\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\Big\|^{1/2}, \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\Big\|^{1/2}\Big\} \|X\|_{\Phi^{(p)}}. \end{aligned}$$

Доказ неједнакости (2.2) се добија на сличан начин, с тим да се сада полунепрекидност одоздо примењује на последњи израз у [JM, Th. 2.3].

Да бисмо показали (2.3), довољно је приметити да важи

$$\begin{aligned} \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\Big\|_{\Phi^{(p)}} &= \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* X^* A_n^*\Big\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\Big\|^{1/2} \Big\|X^* \Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi^{(p)}} \\ &= \Big\|\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\Big)^{1/2} X\Big\|_{\Phi^{(p)}} \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\Big\|^{1/2}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где неједнакост у (2.6) следи из неједнакости (2.2) примењене на $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* X^* A_n^*$ уместо на $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n$, док се једнакост у (2.6) добија из једнакости у.и. норми за операторе и њима адјунговане операторе.

Докажимо сада и (2.4). У ту сврху, уведимо фамилију оператора $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ дефинисаних са $V_n \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n} f \stackrel{\text{def}}{=} A_n f$ за све $f \in \mathcal{H}$ и $V_n g \stackrel{\text{def}}{=} 0$ за $g \in \mathcal{N}\big(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n}\big)$, где је $\mathcal{N}$ ознака за језгро ограниченог оператора. Како је сваки $V_n$ коректно дефинисан на $\mathcal{R}\big(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n}\big) \oplus \mathcal{N}\big(\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n}\big)$ (који је густ у $\mathcal{H}$), где је контрактиван оператор, то онда постоји јединствено контрактивно проширење (такође означено са $V_n$) дефинисано на целом $\mathcal{H}$ (погледати и [J99, Lemma 2.1] за више детаља). Штавише, $\sum_{n=1}^{\infty} V_n^* V_n = P_{\overline{\mathcal{R}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)}}$. Слично, за м.к.н.о. фамилију $\{B_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ постоји фамилија контракција $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$ (која је сада и м.к.н.о. фамилија), за коју важи факторизација $B_n^* = W_n \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*}$ и $B_n = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*}\, W_n^*$ за све $n \in \mathbb{N}$, као и $\sum_{n=1}^{\infty} W_n^* W_n = \sum_{n=1}^{\infty} W_n W_n^* = P_{\overline{\mathcal{R}\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\right)}}$ (погледати [J98, Th. 2.2]). Одатле, за свако $X \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ такво да је $\|X\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant 1$

$$\begin{aligned}
\left|\operatorname{tr}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n Y B_n X\right)\right| &= \left|\operatorname{tr}\left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)^{1/2} Y \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\right)^{1/2} W_n^* X\right)\right| \\
&= \left|\operatorname{tr}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)^{1/2} Y \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n^* X^* W_n\right)^*\right)\right| \\
&\leqslant \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)^{1/2} Y \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\right)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} V_n^* X^* W_n\right\|_{\Phi^{(p)}} \\
&\leqslant \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)^{1/2} Y \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\right)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} V_n^* V_n\right\|^{1/2} \left\|\sum_{n=1}^{\infty} W_n^* W_n\right\|^{1/2} \|X^*\|_{\Phi^{(p)}} \\
&\leqslant \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)^{1/2} Y \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\right)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}}, \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

где је друга неједнакост у (2.7) базирана на другој неједнакости у (2.2). Коначно, претходно даје

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n Y B_n\right\|_{\Phi^{(p)*}} = \sup_{\|X\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant 1} \left|\operatorname{tr}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n Y B_n X\right)\right| \leqslant \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)^{\frac12} Y \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\right)^{\frac12}\right\|_{\Phi^{(p)*}}.$$

Уколико је $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ (уместо $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$) м.к.н.о. фамилија, доказ је аналоган већ датом. $\square$

Напомена 2.7. Алтернативно, формула (2.5) може се извести и употребом [Ke98, Th. 2.5] уместо [J05, Lemma 3.1(c)].

Напомена 2.8. Лема 2.6 представља проширење (дискретне) верзије Теореме 1.15 за $Q^*$ норме, будући да се тада само захтева да бар једна од ј.к.с. фамилија $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ буде м.к.н.о. фамилија.

# 3 Примене на $\sigma$-елементарне трансформере генерисаних аналитичким функцијама са ненегативним Taylor-овим коефицијентима

За функцију $f$ аналитичку у некој околини тачке $\{0\}$, са $R_f \in (0, +\infty]$ означаваћемо полупречник конвергенције његовог Taylor[3]-овог (степеног) реда.

Један пример примене Cauchy-Schwarz-ових норма неједнакости на класу тзв. нормалних елементарних трансформера даје следећа

[3]Тејлор–Brook Taylor (1685–1731)

**Теорема 2.9.** ***Нека су*** $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***и*** $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***и ј.к.с. и м.к.н.о. фамилије у*** $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ***и нека је*** $f$ ***аналитичка функција са ненегативним Taylor-овим коефицијентима, таква да је*** $f\big(\big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^*A_n\big\|\big) < +\infty$ ***и*** $f\big(\big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^*B_n\big\|\big) < +\infty$ ***(што је увек испуњено ако је*** $\max\big\{\big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^*A_n\big\|,\ \big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^*B_n\big\|\big\} < R_f$***). Тада је за сваку с.н. функцију*** $\Phi$ ***и све*** $X \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$

$$\Big\|f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n\Big)X\Big\|_\Phi \leqslant \Big\|\sqrt{f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^*A_n\Big)}\,X\sqrt{f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} B_n^*B_n\Big)}\Big\|_\Phi. \tag{2.8}$$

$\triangle$ Како је $f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$, при чему је $c_m = \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \geqslant 0$, то је

$$\begin{aligned} f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n\Big)X &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n\Big)^m X \\ &= c_0X + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty} A_{n_m^{(m)}}\cdots A_{n_1^{(m)}}XB_{n_1^{(m)}}\cdots B_{n_m^{(m)}} \qquad (2.9) \\ &= c_0X + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}} c_mA_{n_m^{(m)}}\cdots A_{n_1^{(m)}}XB_{n_1^{(m)}}\cdots B_{n_m^{(m)}} \\ &\Big(= c_0X + \sum_{n_1'=1}^{\infty} c_1A_{n_1'}XB_{n_1'} + \sum_{n_1'',n_2''=1}^{\infty} A_{n_2''}A_{n_1''}XB_{n_1''}B_{n_2''} + \cdots\Big), \qquad (2.10) \end{aligned}$$

тј.
$$f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n\Big) = c_0I\otimes I + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}} c_mA_{n_m^{(m)}}\cdots A_{n_1^{(m)}}\otimes B_{n_1^{(m)}}\cdots B_{n_m^{(m)}}.$$

Примењујући Теорему 1.15 на ј.к.с. фамилије $\big\{\sqrt{c_0}I\big\}\cup\big\{\sqrt{c_m}A_{n_m^{(m)}}\cdots A_{n_1^{(m)}}\big\}_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}$ и $\big\{\sqrt{c_0}I\big\}\cup \big\{\sqrt{c_m}B_{n_1^{(m)}}\cdots B_{n_m^{(m)}}\big\}_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}$ уместо на $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ редом, што је омогућено јер је важи$\big\|\sqrt{c_0}h\big\|^2 + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}\big\|\sqrt{c_m}A_{n_1^{(m)}}\cdots A_{n_m^{(m)}}h\big\|^2 \leqslant f\big(\big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^*A_n\big\|\big)\|h\|^2 < +\infty$ и $\big\|\sqrt{c_0}h\big\|^2 + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}\big\|\sqrt{c_m}B_{n_1^{(m)}}\cdots B_{n_m^{(m)}}h\big\|^2 \leqslant f\big(\big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^*B_n\big\|\big)\|h\|^2 < +\infty$ за све $h \in \mathcal{H}$, добијамо

$$\begin{aligned} \Big\|f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n\Big)X\Big\|_\Phi &= \Big\|c_0X + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}} c_mA_{n_m^{(m)}}\cdots A_{n_1^{(m)}}XB_{n_1^{(m)}}\cdots B_{n_m^{(m)}}\Big\|_\Phi \\ &\leqslant \Big\|\Big(c_0I + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}} c_mA^*_{n_1^{(m)}}\cdots A^*_{n_m^{(m)}}A_{n_m^{(m)}}\cdots A_{n_1^{(m)}}\Big)^{1/2} \\ &\qquad \times X\Big(c_0I + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}} c_mB^*_{n_1^{(m)}}\cdots B^*_{n_m^{(m)}}B_{n_m^{(m)}}\cdots B_{n_1^{(m)}}\Big)^{1/2}\Big\|_\Phi \end{aligned}$$

$$=\left\|\left(c_0I+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*A_n\Big)^m\right)^{1/2}X\left(c_0I+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*B_n\Big)^m\right)^{1/2}\right\|_\Phi \tag{2.11}$$
$$=\left\|\sqrt{f\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*A_n\Big)}\,X\sqrt{f\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*B_n\Big)}\right\|_\Phi.$$

Наиме, једнакост у (2.11) се добија узимањем $A_n$ уместо $B_n^*$ и $X := I$ у једнакостима (2.9) и (2.10), да бисмо добили

$$c_0I+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}c_mB^*_{n_1^{(m)}}\cdots B^*_{n_m^{(m)}}B_{n_m^{(m)}}\cdots B_{n_1^{(m)}}=$$
$$c_0I+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\otimes B_n\Big)^m(I)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*B_n\Big)^m, \tag{2.12}$$

с обзиром да је $\big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\otimes B_n\big)^m(I)=\big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*B_n\big)^m$, што се доказује математичком индукцијом, уз коришћење чињенице да оператори $B_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*B_n$ комутирају за све $n\in\mathbb{N}$. Слично, $c_0I+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}c_mA^*_{n_1^{(m)}}\cdots A^*_{n_m^{(m)}}A_{n_m^{(m)}}\cdots A_{n_1^{(m)}}=\sum_{m=0}^{\infty}c_m\big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*A_n\big)^m$, што комплетира доказ неједнакости (2.8). $\square$

Напомена 2.10. Приметимо да смо у (2.12) показали да је за м.к.н.о. фамилију $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператор $f\big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\otimes B_n\big)(I)$ заправо $f\big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*B_n\big)$.

**Последица 2.11.** ***Ако је*** $\alpha\in[0,1]$ ***и*** $\Phi$ ***с.н. функција, тада је за нормалне контракције*** $A$ ***и*** $B$ ***и свако*** $X\in\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$

$$\left\|\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\tbinom{\alpha}{m}A^mXB^m\right\|_\Phi\leqslant\left\|\sqrt{I-(I-A^*A)^\alpha}\,X\sqrt{I-(I-B^*B)^\alpha}\right\|_\Phi. \tag{2.13}$$

***Ако је додатно*** $\max\{\|A\|,\|B\|\}<1$, ***тада је за свако*** $Y\in\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ***и*** $n\in\mathbb{N}$

$$\left\|\sqrt{\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(I-A^*A)^{k/n}}Y\sqrt{\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(I-B^*B)^{k/n}}\right\|_\Phi$$
$$\leqslant\left\|nY-\tfrac{n-1}{2}AYB-\textstyle\sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{nm!}\prod_{l=1}^{m-1}(l-\frac{k}{n})A^mYB^m\right\|_\Phi. \tag{2.14}$$

$\triangle$ Нека је $f_\alpha(z):=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\binom{\alpha}{m}z^{m-1}=\alpha+\alpha\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{m}(k-\alpha)}{(m+1)!}z^m$ за све $z\in\overline{\mathbb{D}}$, то јест, $f_\alpha(z):=\dfrac{1-(1-z)^\alpha}{z}$ за $z\in\overline{\mathbb{D}}\backslash\{0\}$ и $f_\alpha(0):=\alpha$. Тада су сви Taylor-ови коефицијенти функције $f_\alpha$ ненегативни, па применом Теореме 2.9 на $AXB$ уместо на $X$ и $f:=f_\alpha$ добијамо неједнакост (2.13). Овде је узето у обзир и да је $\sqrt{f_\alpha(A^*A)}\,AXB\sqrt{f_\alpha(B^*B)}=\sqrt{I-(I-A^*A)^\alpha}\,X\sqrt{I-(I-B^*B)^\alpha}$.

За доказ неједнакости (2.14) дефинишимо $f:=f_{1/n}$ и $g\colon\mathbb{D}\to\mathbb{D}\colon z\mapsto\sum_{k=0}^{n-1}(1-z)^{\frac{k}{n}}$. Тада је $g$ аналитичка функција на $\mathbb{D}$ таква да је $f(z)g(z)=1$ за све $z\in\mathbb{D}$, па спектрални рачун за нормалне операторе даје $f(A^*A)g(A^*A)=f(B^*B)g(B^*B)=I$. Према функционалном рачуну за свако $Z\in\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ је $f(A\otimes B)g(A\otimes B)Z=g(A\otimes B)f(A\otimes B)Z=Z$, с обзиром да су обе функције $f$ и $g$ аналитичке у $\mathbb{D}$ и $A\otimes B$ је строга контракција на $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ јер је $\|A\|\,\|B\|<1$. Ако је $X:=g(A\otimes B)\big(\sqrt{g(A^*A)}\,Y\sqrt{g(B^*B)}\big)=\sqrt{g(A^*A)}\,g(A\otimes B)Y\sqrt{g(B^*B)}$, то је онда $X \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и важи репрезентација $Y = f(A\otimes B)\big(\sqrt{f(A^*A)}\ X\sqrt{f(B^*B)}\big) = \sqrt{f(A^*A)}\, f(A\otimes B) X\sqrt{f(B^*B)}$, па је

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\sqrt{\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(I-A^*A)^{k/n}}\,Y\sqrt{\textstyle\sum_{k=0}^{n-1}(I-B^*B)^{k/n}}\Big\|_\Phi \\
&= \big\|\sqrt{g(A^*A)}\sqrt{f(A^*A)}\, f(A\otimes B)\, X\sqrt{f(B^*B)}\sqrt{g(B^*B)}\big\|_\Phi \\
&= \big\|f(A\otimes B)X\big\|_\Phi \leqslant \big\|\sqrt{f(A^*A)}\, X\sqrt{f(B^*B)}\big\|_\Phi \qquad (2.15)\\
&= \big\|\sqrt{f(A^*A)}\sqrt{g(A^*A)}\, g(A\otimes B)Y\sqrt{f(B^*B)}\sqrt{g(B^*B)}\big\|_\Phi \\
&= \big\|g(A\otimes B)Y\big\|_\Phi = \Big\|nY - \tfrac{n-1}{2}AYB - \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\tfrac{k}{nm!}\prod_{l=1}^{m-1}(l-\tfrac{k}{n})A^mYB^m\Big\|_\Phi, \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

где је неједнакост у (2.15) заснована на примени Теореме 2.9, док је последња једнакост у (2.16) последица друге репрезентације за функцију $g$: $g(z) = n + \sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^m\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{k/n}{m}z^m$ $= n - \frac{n-1}{2}z - \sum\limits_{m=2}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{k}{nm!}\prod\limits_{l=1}^{m-1}(l-\frac{k}{n})\,z^m$ за све $z\in\mathbb{D}$. □

Услови комутативности и нормалности у Теореми 2.9 могу се делимично релаксирати за $p$-модификоване норме и њихове дуалне норме при $p \geqslant 2$, како то показује следећа

**Теорема 2.12.** ***Нека су*** $\{A_n\}_{n=1}^\infty, \{A_n^*\}_{n=1}^\infty, \{B_n\}_{n=1}^\infty$ ***и*** $\{B_n^*\}_{n=1}^\infty$ ***ј.к.с. фамилије у*** $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, ***нека је*** $\Phi$ ***с.н. функција,*** $p\geqslant 2$ ***и нека је*** $f$ ***аналитичка функција са ненегативним Taylor-овим коефицијентима таква да су*** $\big\|\sum_{n=1}^\infty A_n^*A_n\big\|, \big\|\sum_{n=1}^\infty A_nA_n^*\big\|, \big\|\sum_{n=1}^\infty B_n^*B_n\big\|$ ***и*** $\big\|\sum_{n=1}^\infty B_nB_n^*\big\|$ ***мањи од*** $R_f$.
(а) ***Ако је (бар) једна од фамилија*** $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ ***или*** $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ ***м.к.н.о. фамилија, тада је за све*** $Y\in\mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$

$$
\Big\|f\Big(\sum_{n=1}^\infty A_n\otimes B_n\Big)Y\Big\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \Bigg\|\sqrt{f\Big(\sum_{n=1}^\infty A_n^*\otimes A_n\Big)(I)}\,Y\sqrt{f\Big(\sum_{n=1}^\infty B_n\otimes B_n^*\Big)(I)}\Bigg\|_{\Phi^{(p)*}}. \qquad (2.17)
$$

(б) ***Ако је*** $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ ***м.к.н.о. фамилија, тада је за све*** $X\in\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$

$$
\begin{aligned}
\Big\|f\Big(\sum_{n=1}^\infty A_n\otimes B_n\Big)X\Big\|_{\Phi^{(p)}} &\leqslant \Bigg\|\sqrt{f\Big(\sum_{n=1}^\infty A_nA_n^*\Big)}X\Bigg\|_{\Phi^{(p)}}\Bigg\|\sqrt{f\Big(\sum_{n=1}^\infty B_n^*\otimes B_n\Big)(I)}\Bigg\| \\
&\leqslant \Bigg\|\sqrt{f\Big(\sum_{n=1}^\infty A_nA_n^*\Big)}X\Bigg\|_{\Phi^{(p)}}\sqrt{f\Big(\Big\|\sum_{n=1}^\infty B_n^*B_n\Big\|\Big)}. \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

***Слично, ако је*** $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ ***м.к.н.о. фамилија, тада је за све*** $X\in\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$

$$
\begin{aligned}
\Big\|f\Big(\sum_{n=1}^\infty A_n\otimes B_n\Big)X\Big\|_{\Phi^{(p)}} &\leqslant \Bigg\|\sqrt{f\Big(\sum_{n=1}^\infty A_n\otimes A_n^*\Big)(I)}\Bigg\|\Bigg\|X\sqrt{f\Big(\sum_{n=1}^\infty B_n^*B_n\Big)}\Bigg\|_{\Phi^{(p)}} \\
&\leqslant \sqrt{f\Big(\Big\|\sum_{n=1}^\infty A_nA_n^*\Big\|\Big)}\Bigg\|X\sqrt{f\Big(\sum_{n=1}^\infty B_n^*B_n\Big)}\Bigg\|_{\Phi^{(p)}}. \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

$\triangle$ (а) Ако је $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty}c_m z^m$, тада је

$$\begin{aligned}
&\Big\|f\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\otimes B_n\Big)X\Big\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&=\Big\|c_0X+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}A_{n_m^{(m)}}\cdots A_{n_1^{(m)}}XB_{n_1^{(m)}}\cdots B_{n_m^{(m)}}\Big\|_{\Phi^{(p)*}} \qquad (2.20)\\
&\leqslant\Big\|\Big(c_0I+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}\big|A_{n_m^{(m)}}\cdots A_{n_1^{(m)}}\big|^2\Big)^{1/2}X\\
&\qquad\times\Big(c_0I+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}\big|B^*_{n_m^{(m)}}\cdots B^*_{n_1^{(m)}}\big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi^{(p)*}}. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Једнакост у (2.20) се заснива на другој једнакости у (2.9), док је неједнакост у (2.21) последица примене прве неједнакости у (2.4). Како је израз у (2.21) само други облик за десну страну од (2.17), што се добија узастопном применом једнакости (2.9), прво на (пар) фамилију $\{A_n^*,A_n\}_{n=1}^{\infty}$ уместо на $\{A_n,B_n\}_{n=1}^{\infty}$, а затим на $\{B_n,B_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ уместо на $\{A_n,B_n\}_{n=1}^{\infty}$, што доказује део (а) теореме.

(б) Ако је $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ м.к.н.о фамилија, тада слично доказу дела (а), комбинујући другу једнакост у (2.9) са применом прве неједнакости у (2.3) добијамо

$$\begin{aligned}
&\Big\|f\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\otimes B_n\Big)X\Big\|_{\Phi^{(p)}}=\Big\|c_0X+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}A_{n_m^{(m)}}\cdots A_{n_1^{(m)}}XB_{n_1^{(m)}}\cdots B_{n_m^{(m)}}\Big\|_{\Phi^{(p)}}\\
&\leqslant\Big\|\Big(c_0I+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}\big|A^*_{n_1^{(m)}}\cdots A^*_{n_m^{(m)}}\big|^2\Big)^{1/2}X\Big\|_{\Phi^{(p)}}\\
&\times\Big\|c_0I+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}\big|B_{n_1^{(m)}}\cdots B_{n_m^{(m)}}\big|^2\Big\|^{1/2}. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Поново, израз у (2.22) је алтернативни запис за десну страну у (2.18), што следи из узастопне примене развоја (2.9) на фамилије $\{A_n,A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n^*,B_n\}_{n=1}^{\infty}$ уместо на фамилију $\{A_n,B_n\}_{n=1}^{\infty}$, имајући у виду и Напомену 2 примењену на фамилију $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ уместо на $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$. Да бисмо добили другу неједнакост у (2.18), довољно је приметити да према [J99, Th. 2.1 (1)], примењену на случај $A_n:=B_n^*$ за све $n\in\mathbb{N}$, следи

$$\begin{aligned}
&f\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\otimes B_n\Big)(I)=c_0I+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\otimes B_n\Big)^m(I)\leqslant\\
&c_0I+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\otimes B_n\Big\|^m_{\mathcal{B}(\mathcal{H})\to\mathcal{B}(\mathcal{H})}I\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}c_m\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*B_n\Big\|^mI=f\Big(\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*B_n\Big\|\Big)I,
\end{aligned}$$

где је коришћена нотација $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})\to\mathcal{B}(\mathcal{H})}\stackrel{\text{def}}{=}\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))}$ за норму ограничених линеарних трансформера на $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Аналогно се показује и (2.19). $\square$

**Последица 2.13.** ***Нека је*** $\Phi$ ***с.н. функција,*** $p\geqslant 2$, $a,b,c,d,a',b',c',d'\in\mathbb{R}$ ***такви да је*** $|b|\leqslant|a|,|d|\leqslant c,|b'|\leqslant a',\ |dd'|\leqslant cc',\ \alpha,\beta\in[-1,1],\ \gamma\leqslant 0$ ***и нека су*** $A$ ***и*** $B$ ***строге***

***контракције, при чему је** $B$ **додатно нормалан оператор. Тада је за све** $X \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ **и** $Y \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$*

$$\begin{aligned}
&\Big\|\alpha \log\big(I+\beta A\otimes B\big)X - \log\big(I-A\otimes B\big)X\Big\|_{\Phi^{(p)}} \\
\leqslant &\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1-\alpha(-\beta)^n}{n} A^n A^{*n}\Big\|^{1/2} \Big\|X\sqrt{\alpha\log(I+\beta B^*B)-\log\big(I-B^*B\big)}\Big\|_{\Phi^{(p)}}, \qquad (2.23)\\
&\Big\|\arcsin(A\otimes B)X + \alpha\log\big(\beta A\otimes B + \sqrt{I+\beta^2A^2\otimes B^2}\big)X\Big\|_{\Phi^{(p)}} \\
\leqslant &\Big\|\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(1+(-1)^n\alpha\beta^{2n+1})(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} A^{2n+1}(A^*)^{2n+1}\Big\|^{1/2} \\
\times &\Big\|X\sqrt{\arcsin(B^*B)+\alpha\log\big(\beta B^*B+\sqrt{I+\beta^2(B^*B)^2}\big)}\Big\|_{\Phi^{(p)}}, \qquad (2.24)\\
&\Big\|\tan\Big(\frac{\pi}{2}A\otimes B\Big)X + \alpha\tanh\Big(\frac{\beta\pi}{2}A\otimes B\Big)X\Big\|_{\Phi^{(p)}} \\
\leqslant &\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(2^{2n}-1)\pi^{2n-1}(|B_{2n}|+\alpha\beta^{2n-1}B_{2n})}{2(2n)!} A^{2n-1}(A^*)^{2n-1}\Big\|^{1/2} \\
\times &\Big\|X\sqrt{\tan\Big(\frac{\pi}{2}B^*B\Big)+\alpha\tanh\Big(\frac{\beta\pi}{2}B^*B\Big)}\Big\|_{\Phi^{(p)}}, \qquad (2.25)\\
&\Big\|-\frac{a'}{2}\log(I-a^2A^2\otimes B^2)X - \frac{b'}{2}\log(I+b^2A^2\otimes B^2)X \\
&\quad + c'\tanh^{-1}(cA\otimes B)X + d'\arctan(dA\otimes B)X\Big\|_{\Phi^{(p)}} \\
\leqslant &\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\tfrac{a'a^{2n}+b'(-b^2)^n}{2n}A^{2n}A^{*2n} + \tfrac{c'c^{2n-1}+d'(-1)^{n-1}d^{2n-1}}{2n-1}A^{2n-1}(A^*)^{2n-1}\Big)\Big\|^{1/2} \\
\times &\Big\|X\Big(-\frac{a'}{2}\log(I-a^2B^{*2}B^2) - \frac{b'}{2}\log(I+b^2B^{*2}B^2) \\
&\quad + c'\tanh^{-1}(cB^*B) + d'\arctan(dB^*B)\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi^{(p)}}, \qquad (2.26)\\
&\Big\|(A\otimes B)X + (I-A\otimes B)\log\big(I-A\otimes B\big)X\Big\|_{\Phi^{(p)}} \\
\leqslant &\Big\|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{A^nA^{*n}}{n(n-1)}\Big\|^{1/2}\Big\|X\sqrt{B^*B+(I-B^*B)\log\big(I-B^*B\big)}\Big\|_{\Phi^{(p)}}, \qquad (2.27)\\
&\Big\|-\log\big(I+A\otimes B\big)\log\big(I-A\otimes B\big)X\Big\|_{\Phi^{(p)}} \\
\leqslant &\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n-1}\tfrac{(-1)^{k-1}}{kn}A^{2n}A^{*2n}\Big\|^{1/2}\Big\|X\sqrt{-\log\big(I+B^*B\big)\log\big(I-B^*B\big)}\Big\|_{\Phi^{(p)}}, \qquad (2.28)\\
&\Big\|\big(I-A\otimes B\big)^{\gamma}X + \alpha\big(I+\beta A\otimes B\big)^{\gamma}X\Big\|_{\Phi^{(p)}} \\
\leqslant &\Big\|\sum_{n=0}^{\infty}\big((-1)^n+\alpha\beta^n\big)\tbinom{\gamma}{n}A^nA^{*n}\Big\|^{1/2}\Big\|X\sqrt{\big(I-B^*B\big)^{\gamma}+\alpha\big(I+\beta B^*B\big)^{\gamma}}\Big\|_{\Phi^{(p)}}, \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big\|\alpha\log\big(I+\beta A\otimes B\big)Y-\log\big(I-A\otimes B\big)Y\Big\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&\leqslant\Bigg\|\bigg(\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{1-\alpha(-\beta)^n}{n}A^{*n}A^n\bigg)^{1/2}Y\sqrt{\alpha\log\big(I+\beta B^*B\big)-\log\big(I-B^*B\big)}\Bigg\|_{\Phi^{(p)*}}, \qquad (2.30)\\
&\Big\|\arcsin(A\otimes B)Y+\alpha\log\big(\beta A\otimes B+\sqrt{I+\beta^2A^2\otimes B^2}\big)Y\Big\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&\leqslant\Bigg\|\bigg(\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{(1+(-1)^n\alpha\beta^{2n+1})(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}(A^*)^{2n+1}A^{2n+1}\bigg)^{1/2}Y\\
&\qquad\times\sqrt{\arcsin(B^*B)+\alpha\log\big(\beta B^*B+\sqrt{I+\beta^2(B^*B)^2}\big)}\Bigg\|_{\Phi^{(p)*}}, \qquad (2.31)\\
&\Big\|\tan\Big(\frac{\pi}{2}A\otimes B\Big)Y+\alpha\tanh\Big(\frac{\beta\pi}{2}A\otimes B\Big)Y\Big\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&\leqslant\Bigg\|\bigg(\sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{(2^{2n}-1)\pi^{2n-1}(|B_{2n}|+\alpha\beta^{2n-1}B_{2n})}{2(2n)!}(A^*)^{2n-1}A^{2n-1}\bigg)^{1/2}Y\\
&\qquad\times\sqrt{\tan\Big(\frac{\pi}{2}B^*B\Big)+\alpha\tanh\Big(\frac{\beta\pi}{2}B^*B\Big)}\Bigg\|_{\Phi^{(p)*}}, \qquad (2.32)\\
&\Big\|-\frac{a'}{2}\log\big(I-a^2A^2\otimes B^2\big)Y-\frac{b'}{2}\log\big(I+b^2A^2\otimes B^2\big)Y\\
&\qquad+c'\tanh^{-1}(cA\otimes B)Y+d'\arctan(dA\otimes B)Y\Big\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&\leqslant\Bigg\|\bigg(\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\tfrac{a'a^{2n}+b'(-b^2)^n}{2n}A^{*2n}A^{2n}+\tfrac{c'c^{2n-1}+d'(-1)^{n-1}d^{2n-1}}{2n-1}(A^*)^{2n-1}A^{2n-1}\Big)\bigg)^{1/2}\\
&\qquad\times Y\Big(-\frac{a'}{2}\log\big(I-a^2B^{*2}B^2\big)-\frac{b'}{2}\log\big(I+b^2B^{*2}B^2\big)\\
&\qquad+c'\tanh^{-1}(cB^*B)+d'\arctan(dB^*B)\Big)^{1/2}\Bigg\|_{\Phi^{(p)*}}, \qquad (2.33)\\
&\Big\|(A\otimes B)Y+(I-A\otimes B)\log\big(I-A\otimes B\big)Y\Big\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&\leqslant\Bigg\|\bigg(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{A^{*n}A^n}{n(n-1)}\bigg)^{1/2}Y\sqrt{B^*B+(I-B^*B)\log\big(I-B^*B\big)}\Bigg\|_{\Phi^{(p)*}}, \qquad (2.34)\\
&\Big\|-\log\big(I+A\otimes B\big)\log\big(I-A\otimes B\big)Y\Big\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&\leqslant\Bigg\|\bigg(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2n-1}\tfrac{(-1)^{k-1}}{kn}A^{*2n}A^{2n}\bigg)^{1/2}Y\sqrt{-\log\big(I+B^*B\big)\log\big(I-B^*B\big)}\Bigg\|_{\Phi^{(p)*}}, \qquad (2.35)\\
&\Big\|\big(I-A\otimes B\big)^{\gamma}Y+\alpha\big(I+\beta A\otimes B\big)^{\gamma}Y\Big\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&\leqslant\Bigg\|\bigg(\sum_{n=0}^{\infty}\big((-1)^n+\alpha\beta^n\big)\tbinom{\gamma}{n}A^{*n}A^n\bigg)^{1/2}Y\sqrt{\big(I-B^*B\big)^{\gamma}+\alpha\big(I+\beta B^*B\big)^{\gamma}}\Bigg\|_{\Phi^{(p)*}}. \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

$\triangle$ Како је $B\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ нормалан оператор, током овог доказа по правилу ћемо уместо $f(B^*\otimes B)(I)$ писати $f(B^*B)$, будући да је једнакост ова два израза константована у Напомени 2.10.

Прва неједнакост у (2.19) (односно неједнакост (2.17)) је примењена на следећу функцију са ненегативним коефицијентима:

(а) $f(z) := \alpha\log(1+\beta z)-\log(1-z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1-\alpha(-\beta)^n}{n} z^n$, према дефиницији $-\log(1-z) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n}$ датој у формули [GR, **1.513.**4], одакле добијамо (2.23) (односно (2.30));

(б) $f(z) := \arcsin z + \alpha\log(\beta z + \sqrt{1+\beta^2 z^2}) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(1+(-1)^n\alpha\beta^{2n+1})(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} z^{2n+1}$, с обзиром на Taylor-ов развој $\arcsin z \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^\infty \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} z^{2n+1}$, који је дат у формули [GR, **1.641.**1] и Taylor-овом развоју $\log(z+\sqrt{1+z^2}) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} z^{2n+1}$, датом у формули [GR, **1.641.**2], одакле следи (2.24) (односно (2.31));

(в) $f(z) := \tan(\frac{\pi}{2}z) + \alpha\tanh(\frac{\beta\pi}{2}z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(2^{2n}-1)\pi^{2n-1}(|B_{2n}|+\alpha\beta^{2n-1}B_{2n})}{2(2n)!} z^{2n-1}$, где су сагласно формулама [GR, **1.411.**5] и [GR, **1.411.**6] функције tan и tanh дате са $\tan z \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^\infty \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!}|B_{2n}| z^{2n-1}$ и $\tanh z \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^\infty \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n} z^{2n-1}$, а $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ је низ Bernoulli[4]-јевих бројева, одакле следи (2.25) (односно (2.32));

(г) $f(z) := -\frac{a'}{2}\log(1-a^2z^2) - \frac{b'}{2}\log(1+b^2z^2) + c'\tanh^{-1}(cz) + d'\arctan(dz) = \sum_{n=1}^\infty \Big(\frac{a'a^{2n}+b'(-b^2)^n}{2n} z^{2n} + \frac{c'c^{2n-1}+d'd(-d^2)^{n-1}}{2n-1} z^{2n-1}\Big)$, где је комплексна функција $\arctan z \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1}$, базирано на формули [GR, **1.643.**1], одакле произилази (2.26) (односно (2.33));

(д) $f(z) := z + (1-z)\log(1-z) = \sum_{n=2}^\infty \frac{z^n}{n(n-1)}$, што следи из формуле $\frac{1-x}{x}\log\frac{1}{1-x} = 1 - \sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n(n+1)}$ у [GR, **1.513.**5], што даје (2.27) (односно (2.34));

(ђ) $f(z) := -\log(1+z)\log(1-z) = \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{kn} z^{2n}$, како то следи из формуле [GR, **1.516.**3] у складу са јединственошћу аналитичког продужења са $(-1,1)$ на $\mathbb{D}$, што даје (2.28) (односно (2.35));

(е) $f(z) := (1-z)^\gamma + \alpha(1+\beta z)^\gamma = \sum\limits_{n=0}^\infty \big((-1)^n + \alpha\beta^n\big)\binom{\gamma}{n} z^n = 1+\alpha+\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1+\alpha(-\beta)^n}{n!}\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k-\gamma)$,

што се добија двоструком применом формуле $(1-z)^\gamma \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^\infty \binom{\gamma}{n} z^n$ дате у [GR, **1.110**], одакле следи (2.29) (односно (2.36)). □

Напомена 2.14. Домен конвергенције за сваки степени ред који смо користили у доказу Последице 2.13 такође представља домен уведене комплексне функције. Свака таква комплексна функција представља јединствено аналитичко продужење одговарајуће реалне функције, које се појављује у формули степеног развоја из [GR]. Зато, осим коефицијената степеног развоја, уведена комплексна функција такође наслађује име од њеног реалног претходника. На пример, $\arcsin, \arctan$ и $\tanh^{-1}$ су **дефинисане** својим развојем у степени ред, који је сагласан чињеници да оне заправо представљају инверзне функције одговарајуће изабраних унивалетних рестрикција $\sin, \tan$ и $\tanh$, редом.

**Последица 2.15.** ***Нека је*** $\Phi$ ***с.н. функција,*** $p \geqslant 2$, $a,b,c,d,a',b',c',d' \in \mathbb{R}$ ***задовољавају*** $|b| \leqslant |a|, |d| \leqslant c, |b'| \leqslant a'$, $|dd'| \leqslant cc'$, $\alpha,\beta \in [-1,1]$ ***и нека су*** $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***при чему је*** $A$ ***нормалан. Тада је за све*** $X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ ***и*** $Y \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$

[4]Бернули–Jacob Bernoulli (1655–1705)

$$\begin{aligned}
&\left\|\exp(A\otimes B)X+\alpha\exp(\beta A\otimes B)X\right\|_{\Phi^{(p)}}\\
&\leqslant\left\|\sqrt{\exp(AA^*)+\alpha\exp(\beta AA^*)}\,X\right\|_{\Phi^{(p)}}\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1+\alpha\beta^n}{n!}B^{*n}B^n\right\|^{1/2}, &(2.37)\\
&\left\|\exp(A\otimes B)Y+\alpha\exp(\beta A\otimes B)Y\right\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&\leqslant\left\|\sqrt{\exp(AA^*)+\alpha\exp(\beta AA^*)}\,Y\left(\sum_{n=0}^{\infty}\tfrac{1+\alpha\beta^n}{n!}B^nB^{*n}\right)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}}, &(2.38)\\
&\left\|a'\cosh(aA\otimes B)X+b'\cos(bA\otimes B)X+c'\sinh(cA\otimes B)X+d'\sin(dA\otimes B)X\right\|_{\Phi^{(p)}}\\
&\leqslant\left\|(a'\cosh(aAA^*)+b'\cos(bAA^*)\ +c'\sinh(cAA^*)+d'\sin(dAA^*))^{1/2}X\right\|_{\Phi^{(p)}}\\
&\times\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\tfrac{a'a^{2n}+b'(-b^2)^n}{(2n)!}B^{*2n}B^{2n}+\tfrac{c'c^{2n+1}+d'(-1)^nd^{2n+1}}{(2n+1)!}(B^*)^{2n+1}B^{2n+1}\Big)\right\|^{1/2}, &(2.39)\\
&\left\|a'\cosh(aA\otimes B)Y+b'\cos(bA\otimes B)Y+c'\sinh(cA\otimes B)Y+d'\sin(dA\otimes B)Y\right\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&\leqslant\Bigg\|\sqrt{a'\cosh(aAA^*)+b'\cos(bAA^*)+c'\sinh(cAA^*)+d'\sin(dAA^*)}\,Y\\
&\times\left(\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\tfrac{a'a^{2n}+b'(-b^2)^n}{(2n)!}B^{2n}B^{*2n}+\tfrac{c'c^{2n+1}+d'(-1)^nd^{2n+1}}{(2n+1)!}B^{2n+1}(B^*)^{2n+1}\Big)\right)^{1/2}\Bigg\|_{\Phi^{(p)*}}, &(2.40)\\
&\left\|X-(I-A\otimes B)\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{A^k\otimes B^k}{k}\right)X\right\|_{\Phi^{(p)}}\\
&\leqslant\left\|\sqrt{I-(I-AA^*)\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(AA^*)^k}{k}\right)}\,X\right\|_{\Phi^{(p)}}\\
&\times\left\|I-(I-B^*\otimes B)\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{B^{*k}\otimes B^k}{k}\right)(I)\right\|^{1/2}, &(2.41)\\
&\left\|Y-(I-A\otimes B)\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{A^k\otimes B^k}{k}\right)Y\right\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&\leqslant\Bigg\|\sqrt{I-(I-AA^*)\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{(AA^*)^k}{k}\right)}\,Y\\
&\quad\times\sqrt{I-(I-B\otimes B^*)\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{B^k\otimes B^{*k}}{k}\right)(I)}\Bigg\|_{\Phi^{(p)*}}. &(2.42)
\end{aligned}$$

$\triangle$ Како $f(z):=\exp z+\alpha\exp(\beta z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\alpha\beta^n}{n!}z^n$ представља аналитичку функцију у чијем су степеном развоју сви коефицијенти ненегативни, то примена прве неједнакости у (2.18) даје (2.37), док примена неједнакости (2.17) даје (2.38).

Слично, у случају $f(z):=a'\cosh(az)+b'\cos(bz)+c'\sinh(cz)+d'\sin(dz)=\sum_{n=0}^{\infty}\big(\frac{a'a^{2n}+b'(-b^2)^n}{(2n)!}z^{2n}+\frac{c'c^{2n+1}+d'(-1)^nd^{2n+1}}{(2n+1)!}z^{2n+1}\big)$ директна примена прве неједнакости у (2.18) и неједнакости (2.17) даје (2.39) и (2.40), редом.

Коначно, за такозване **елементарне факторе** $E_n\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ дате формулом $E_n(z)\stackrel{\text{def}}{=}$

$(1-z)\exp\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k}\right)$, који су уведени од стране Weierstrass[5]-а, функција $1-E_n$ има степени развој са ненегативним реалним коефицијентима, као и нулу реда $n+1$ у тачки $z=0$ и важи процена $|1-E_n(z)| \leqslant |z|^{n+1}$ за $z \in \overline{\mathbb{D}}$, како је то показано у [Rud, Lemma 15.8]. Овим је омогућена примена прве неједнакости у (2.18) и неједнакости (2.17) што даје (2.41) и (2.42) редом. □

**Дефиниција 2.16.** *За аналитичку функцију $f$ придружене функције $f_{ch}, f_{sh}, f_c$ и $f_s$ дефинишу се са $f_{ch}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(z)+f(-z)}{2}$, $f_{sh}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(z)-f(-z)}{2}$, $f_c(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(iz)+f(-iz)}{2}$ и $f_s(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(iz)-f(-iz)}{2i}$.*

Другим речима, ако је $f(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, тада је $f_{ch}(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n}$, $f_{sh}(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} z^{2n+1}$, $f_c(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n} z^{2n}$ и $f_s(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n+1} z^{2n+1}$, са основним примером $\exp_{ch} = \cosh, \exp_{sh} = \sinh, \exp_c = \cos$ и $\exp_s = \sin$. Други значајан пример је функција $f(z) := -\log(1-z)$, када је $f_{ch}(z) := -\frac{1}{2}\log(1-z^2), f_{sh}(z) := \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} = \tanh^{-1}(z), f_c(z) := -\frac{1}{2}\log(1+z^2)$ и $f_s(z) := \arctan(z) \stackrel{\text{def}}{=} \tan^{-1}(z)$. Ако је пак $g(z) := \frac{1}{1-z}$, тада директан рачун показује $\left(\frac{1}{1-z}\right)_{ch} \stackrel{\text{def}}{=} g_{ch}(z) = \frac{1}{1-z^2}, \left(\frac{1}{1-z}\right)_{sh} \stackrel{\text{def}}{=} g_{sh}(z) = \frac{z}{1-z^2}, \left(\frac{1}{1-z}\right)_{c} \stackrel{\text{def}}{=} g_c(z) = \frac{1}{1+z^2}$ и $\left(\frac{1}{1-z}\right)_{s} \stackrel{\text{def}}{=} g_s(z) = \frac{z}{1+z^2}$. Како се $f_{ch}$ и $f_{sh}$ такође могу разумети као паран и непаран део од $f$, редом, то се онда директно проверава да је $\tan_{ch} = 0, \tan_{sh} = \tan, \tan_c = 0$ и $\tan_s = \tanh$, с обзиром да важи $\tanh z = \frac{1}{i}\tan(iz)$ сагласно формули [GR, **1.311.**1]. Слично, $\operatorname{arcsin}_{ch} = 0, \operatorname{arcsin}_{sh} = \arcsin, \operatorname{arcsin}_c = 0$ и $\operatorname{arcsin}_s(z) = \frac{1}{i}\arcsin(iz) = \log(z+\sqrt{1+z^2})$, сагласно формули [GR, **1.622.**5].

Користећи стандардну дефиницију $a^{\pm} \stackrel{\text{def}}{=} (|a| \pm a)/2$ за све $a \in \mathbb{R}$ и претходно уведену терминологију, наредном теоремом систематизујемо већи део неједнакости приказаних у Последици 2.13 и Последици 2.15.

**Теорема 2.17.** ***Нека је** $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{c}_n z^n$ **аналитичка функција са ненегативним коефицијентима** $\hat{c}_n \geqslant 0$, $\kappa \in \mathbb{N}$, $\{a_k\}_{k=1}^{\kappa}, \{b_k\}_{k=1}^{\kappa}, \{c_k\}_{k=1}^{\kappa}$, $\{d_k\}_{k=1}^{\kappa}$ **фамилије реалних бројева уређене по опадању њихових апсолутних вредности и за које је** $|a_1| = \cdots = |a_{k_1}| > |a_{k_1+1}| \geqslant \cdots \geqslant |a_\kappa|, |a_1| \geqslant |b_1| \geqslant \cdots \geqslant |b_\kappa|, |c_1| = \cdots = |c_{k_2}| > |c_{k_2+1}| \geqslant \cdots \geqslant |c_\kappa|, |c_1| \geqslant |d_1| \geqslant \cdots \geqslant |d_\kappa|$ **за неке** $0 \leqslant k_1, k_2 \leqslant \kappa$. **Нека је** $\{a'_k, b'_k, c'_k, d'_k\}_{k=1}^{\kappa}$ **још једна фамилија реалних бројева која задовољава** $\sum_{k=k_1+1}^{\kappa} (a'_k)^- + \sum_{k=1}^{\kappa} |b'_k| \leqslant \sum_{k=1}^{k_1} a'_k$ **и** $\sum_{k=k_2+1}^{\kappa} (c'_k c_k)^- + \sum_{k=1}^{\kappa} |d'_k d_k| \leqslant \sum_{k=1}^{k_1} c'_k c_k$. **Ако је** $\Phi$ **с.н. функција,** $p \geqslant 2$ **и ако за** $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ **важи** $\max\{\|A\|, \|B\|\} < R_f$, **при чему је** $A$ **додатно нормалан, тада је за све** $X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ **и** $Y \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$*

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=0}^{\kappa} \big( a'_k f_{ch}(a_k A \otimes B) + b'_k f_c(b_k A \otimes B) + c'_k f_{sh}(c_k A \otimes B) + d'_k f_s(d_k A \otimes B) \big) X \right\|_{\Phi^{(p)}} \\
&\leqslant \left\| \Big( \sum_{k=0}^{\kappa} \big( a'_k f_{ch}(a_k A^* A) + b'_k f_c(b_k A^* A) + c'_k f_{sh}(c_k A^* A) + d'_k f_s(d_k A^* A) \big) \Big)^{1/2} X \right\|_{\Phi^{(p)}} \\
&\times \Bigg\| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\kappa} \big( (a'_k a_k^{2n} + (-1)^n b'_k b_k^{2n}) \hat{c}_{2n} B^{*2n} B^{2n} \\
&\qquad + (c'_k c_k^{2n+1} + (-1)^n d'_k d_k^{2n+1}) \hat{c}_{2n+1} (B^*)^{2n+1} B^{2n+1} \big) \Bigg\|^{1/2}, \qquad (2.43)
\end{aligned}
$$

[5] Вајерштрас–Karl Weierstrass (1815–1897)

$$\Big\|\sum_{k=0}^{K}\big(a'_k f_{ch}(a_k A\otimes B)+b'_k f_c(b_k A\otimes B)+c'_k f_{sh}(c_k A\otimes B)+d'_k f_s(d_k A\otimes B)\big)Y\Big\|_{\Phi^{(p)*}}$$
$$\leqslant\Big\|\Big(\sum_{k=0}^{K}\big(a'_k f_{ch}(a_k A^*A)+b'_k f_c(b_k A^*A)+c'_k f_{sh}(c_k A^*A)+d'_k f_s(d_k A^*A)\big)\Big)^{1/2}Y$$
$$\times\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{K}\big((a'_k a_k^{2n}+(-1)^n b'_k b_k^{2n})\hat{c}_{2n}B^{2n}B^{*2n}$$
$$+(c'_k c_k^{2n+1}+(-1)^n d'_k d_k^{2n+1})\hat{c}_{2n+1}B^{2n+1}(B^*)^{2n+1}\big)\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi^{(p)*}}. \tag{2.44}$$

***Алтернативно, ако је*** $B$ ***нормалан оператор, тада је***

$$\Big\|\sum_{k=0}^{K}\big(a'_k f_{ch}(a_k A\otimes B)+b'_k f_c(b_k A\otimes B)+c'_k f_{sh}(c_k A\otimes B)+d'_k f_s(d_k A\otimes B)\big)X\Big\|_{\Phi^{(p)}}\leqslant$$
$$\Big\|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{K}\Big(\big(a'_k a_k^{2n}+(-1)^n b'_k b_k^{2n}\big)\hat{c}_{2n}A^{2n}A^{*2n}+\big(c'_k c_k^{2n+1}+(-1)^n d'_k d_k^{2n+1}\big)\hat{c}_{2n+1}A^{2n+1}(A^*)^{2n+1}\Big)\Big\|^{1/2}$$
$$\times\Big\|X\Big(\sum_{k=0}^{K}\big(a'_k f_{ch}(a_k B^*B)+b'_k f_c(b_k B^*B)+c'_k f_{sh}(c_k B^*B)+d'_k f_s(d_k B^*B)\big)\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi^{(p)}}, \tag{2.45}$$

$$\Big\|\sum_{k=0}^{K}\big(a'_k f_{ch}(a_k A\otimes B)+b'_k f_c(b_k A\otimes B)+c'_k f_{sh}(c_k A\otimes B)+d'_k f_s(d_k A\otimes B)\big)Y\Big\|_{\Phi^{(p)*}}\leqslant$$
$$\Big\|\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{K}\big((a'_k a_k^{2n}+(-1)^n b'_k b_k^{2n})\hat{c}_{2n}A^{*2n}A^{2n}+(c'_k c_k^{2n+1}+(-1)^n d'_k d_k^{2n+1})\hat{c}_{2n+1}(A^*)^{2n+1}A^{2n+1}\big)\Big)^{1/2}$$
$$\times Y\Big(\sum_{k=0}^{K}\big(a'_k f_{ch}(a_k B^*B)+b'_k f_c(b_k B^*B)+c'_k f_{sh}(c_k B^*B)+d'_k f_s(d_k B^*B)\big)\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi^{(p)*}}. \tag{2.46}$$

***Ако су оба оператора*** $A$ ***и*** $B$ ***нормална, тада је за све*** $X\in\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H})$

$$\Big\|\sum_{k=0}^{K}\big(a'_k f_{ch}(a_k A\otimes B)+b'_k f_c(b_k A\otimes B)+c'_k f_{sh}(c_k A\otimes B)+d'_k f_s(d_k A\otimes B)\big)X\Big\|_{\Phi}$$
$$\leqslant\Big\|\Big(\sum_{k=0}^{K}\big(a'_k f_{ch}(a_k A^*A)+b'_k f_c(b_k A^*A)+c'_k f_{sh}(c_k A^*A)+d'_k f_s(d_k A^*A)\big)\Big)^{1/2}X$$
$$\times\Big(\sum_{k=0}^{K}\big(a'_k f_{ch}(a_k B^*B)+b'_k f_c(b_k B^*B)+c'_k f_{sh}(c_k B^*B)+d'_k f_s(d_k B^*B)\big)\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi}. \tag{2.47}$$

△ Доказ следи из ненегативности коефицијената функције

$$f(z):=\sum_{k=0}^{K}\big(a'_k f_{ch}(a_k z)+b'_k f_c(b_k z)+c'_k f_{sh}(c_k z)+d'_k f_s(d_k z)\big)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{K}\Big(\big(a'_k a_k^{2n}+b'_k(-b_k^2)^n\big)\hat{c}_{2n}z^{2n}+\big(c'_k c_k^{2n+1}+d'_k d_k(-d_k^2)^n\big)\hat{c}_{2n+1}z^{2n+1}\Big),$$

с обзиром на то да је

$$\sum_{k=1}^{k_1} a'_k a_1^{2n} + \sum_{k=k_1+1}^{K} a'_k a_k^{2n} + \sum_{k=1}^{K} b'_k(-b_k^2)^n \geqslant \sum_{k=k_1+1}^{K}\big((a'_k)^- + a'_k\big)a_k^{2n} + \sum_{k=1}^{K}\big(|b'_k|a_1^{2n} + b'_k(-b_k^2)^n\big) \geqslant 0 \quad \text{и}$$

$$\sum_{k=1}^{K}\big(c'_k c_k^{2n+1} + d'_k d_k(-d_k^2)^n\big) \geqslant \sum_{k=k_2+1}^{K}\big((c'_k c_k)^- + c'_k c_k\big)c_k^{2n} + \sum_{k=1}^{K}\big(|d'_k d_k|c_1^{2n} + d'_k d_k(-d_k^2)^n\big) \geqslant 0.$$

Према томе, примена (2.18), (2.19) и (2.8) на $f$ даје (2.43), (2.45) и (2.47) редом, док примена (2.17) на $f$ даје (2.44) и (2.46). □

Напомена 2.18. У најједноставнијем случају $K := 1, a'_1 := a', a_1 := a, b'_1 := b', b_1 := b, c'_1 := c', c_1 := c, d'_1 := d'$ и $d_1 := d$ Теорема 2.17 даје: (2.39) кад се (2.43) примени на $f := \exp$, (2.40) кад се (2.44) примени на $f := \exp$, (2.26) кад се (2.45) примени на $f(z) := -\log(1-z)$ и (2.33) кад се (2.46) примени на $f(z) := -\log(1-z)$. У случају $K := 1, c'_1 := c_1 := 1, d'_1 := \alpha$ и $d_1 := \beta$ ($a'_1, a_1, b'_1$ и $b_1$ су произвољни) је Теорема 2.17 примењива на функцију $f$ дату са:

- $f := \arcsin$, да бисмо добили (2.24) као специјалан случај (2.45) и (2.31) као специјалан случај од (2.46),
- $f(z) := \tan\big(\frac{\pi}{2}z\big)$, да бисмо добили (2.25) као специјалан случај (2.45) и (2.32) као специјалан случај (2.46).

Случај $K := 2, a'_1 := a_1 := c'_1 := c_1 := 1, a'_2 := c'_2 := -\alpha, a_2 := c_2 := -\beta, b'_1 := d'_1 := b'_2 := d'_2 := 0$ ($b_1, d_1, b_2$ и $d_2$ су произвољни) Теореме 2.17 примењен на функцију $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto -\log(1-z)$ даје (2.23) сагласно (2.45), као и (2.30) сагласно (2.46).

Напомена 2.19. Генерално, адитивна структура фамилије функција са ненегативним коефицијентима омогућава једноставан начин за формулисање овде посматраних неједнакости и за функције облика $f+g$, уколико их већ имамо за $f$ и $g$. Овај принцип је јасно употребљен у претходној Теореми 2.17.

У случају Schatten-ових $p$-норми, можемо се ослободити услова да су фамилије м.к.н.о. како то показује следећа теорема.

**Теорема 2.20.** ***Нека су*** $\{A_n\}_{n=1}^\infty, \{A_n^*\}_{n=1}^\infty, \{B_n\}_{n=1}^\infty$ ***и*** $\{B_n^*\}_{n=1}^\infty$ ***ј.к.с. фамилије из*** $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и нека је*** $f$ ***аналитичка функција са ненегативним Taylor-овим коефицијентима таква да важи*** $\max\big\{\big\|\sum_{n=1}^\infty A_n^*A_n\big\|, \big\|\sum_{n=1}^\infty A_nA_n^*\big\|, \big\|\sum_{n=1}^\infty B_n^*B_n\big\|, \big\|\sum_{n=1}^\infty B_nB_n^*\big\|\big\} < R_f$. ***Тада је за све*** $X \in \mathcal{C}_p(\mathcal{H})$

$$\left\|f\Big(\sum_{n=1}^\infty A_n^*\otimes B_n\Big)X\right\|_p \leqslant \left\|\left(f\Big(\sum_{n=1}^\infty A_n\otimes A_n^*\Big)\left(\left(f\Big(\sum_{n=1}^\infty A_n^*\otimes A_n\Big)(I)\right)^{q-1}\right)\right)^{1/2q} \times X\left(f\Big(\sum_{n=1}^\infty B_n\otimes B_n^*\Big)\left(\left(f\Big(\sum_{n=1}^\infty B_n^*\otimes B_n\Big)(I)\right)^{r-1}\right)\right)^{1/2r}\right\|_p, \quad (2.48)$$

***где*** $p, q, r \geqslant 1$ ***задовољавају услов*** $\frac{2}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

△ Полазећи од развоја

$$f\Big(\sum_{n=1}^\infty A_n^*\otimes B_n\Big)X = c_0X + \sum_{m=1}^\infty c_m \sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^\infty A^*_{n_m^{(m)}}\cdots A^*_{n_1^{(m)}}XB_{n_1^{(m)}}\cdots B_{n_m^{(m)}}$$

базираног на формули (2.9), примена Теореме 1.13 даје

$$\begin{aligned}
&\Big\|f\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*\otimes B_n\Big)X\Big\|_p \leqslant \Bigg\|\Bigg(c_0I\Bigg(c_0I+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}\big|A^*_{n_m^{(m)}}\cdots A^*_{n_1^{(m)}}\big|^2\Bigg)^{q-1}\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}A_{n_m^{(m)}}\cdots A_{n_1^{(m)}}\Bigg(c_0I+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}\big|A^*_{n_m^{(m)}}\cdots A^*_{n_1^{(m)}}\big|^2\Bigg)^{q-1}A^*_{n_1^{(m)}}\cdots A^*_{n_m^{(m)}}\Bigg)^{\frac{1}{2q}}\\
&\times X\Bigg(c_0I\Bigg(c_0I+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}\big|B_{n_1^{(m)}}\cdots B_{n_m^{(m)}}\big|^2\Bigg)^{r-1}\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}B_{n_m^{(m)}}\cdots B_{n_1^{(m)}}\Bigg(c_0I+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}\big|B_{n_1^{(m)}}\cdots B_{n_m^{(m)}}\big|^2\Bigg)^{r-1}B^*_{n_1^{(m)}}\cdots B^*_{n_m^{(m)}}\Bigg)^{\frac{1}{2r}}\Bigg\|_p\\
&=\Bigg\|\Bigg(c_0\Bigg(f\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*\otimes A_n\Big)(I)\Bigg)^{q-1}\\
&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}A_{n_m^{(m)}}\cdots A_{n_1^{(m)}}\Bigg(f\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*\otimes A_n\Big)(I)\Bigg)^{q-1}A^*_{n_1^{(m)}}\cdots A^*_{n_m^{(m)}}\Bigg)^{1/2q}\\
&\quad\times X\Bigg(c_0\Bigg(f\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\otimes B_n\Big)(I)\Bigg)^{r-1}\\
&\quad+\sum_{m=1}^{\infty}c_m\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}B_{n_m^{(m)}}\cdots B_{n_1^{(m)}}\Bigg(f\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n^*\otimes B_n\Big)(I)\Bigg)^{r-1}B^*_{n_1^{(m)}}\cdots B^*_{n_m^{(m)}}\Bigg)^{1/2r}\Bigg\|_p. \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

Препознавањем да је израз у (2.49) једнак изразу на десној страни неједнакости (2.48), доказ се завршава. □

Напомена 2.21. Ако је $p \geqslant 2$, узмимо $p^\star \stackrel{\text{def}}{=} p/(p-1)$, $q := p^\star/(2-p^\star)$ и $r := 1$, када важи $2/p^\star = 1/q + 1/r$. Додатним избором $\mathfrak{C}_\Phi(\mathcal{H}) := \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, када је $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)*}} = \|\cdot\|_{p^\star}$, видимо да у овом случају Теорема 2.20 даје

$$\begin{aligned}
&\Big\|f\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*\otimes B_n\Big)X\Big\|_{p^\star} \leqslant\\
&\Bigg\|\Bigg(f\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n\otimes A_n^*\Big)\Bigg(f\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*\otimes A_n\Big)(I)\Bigg)^{\frac{2p^\star-2}{2-p^\star}}\Bigg)^{\frac{2-p^\star}{2p^\star}}X\Bigg(f\Big(\sum_{n=1}^{\infty}B_n\otimes B_n^*\Big)(I)\Bigg)^{1/2}\Bigg\|_{p^\star}. \qquad (2.50)
\end{aligned}$$

Ако је додатно $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и м.к.н.о. фамилија, тада сагласно Напомени 2.10 важи једнакост $f\big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*\otimes A_n\big)(I) = f\big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*A_n\big)$, при чему $f\big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*A_n\big)$ комутира са сваким $A_n$, то израз на десној страни неједнакости (2.50) постаје $\Big\|\Big(f\big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n^*A_n\big)\Big)^{\frac12}X\Big(f\big(\sum\limits_{n=1}^{\infty}B_n\otimes B_n^*\big)(I)\Big)^{\frac12}\Big\|_{p^\star}$. То показује да у случају Schatten-ових норми неједнакост (2.48) у Теореми 2.20 и њен специјалан случај (2.50) проширују Теорему 2.12(а) и на фамилије које нису м.к.н.о.

**Дефиниција 2.22.** *За ј.к.с. фамилију* $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ограничених оператора и аналитичку функцију* $f$ *са ненегативним Taylor-овим коефицијентима, такве да је* $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right\| \leqslant R_f$ *и* $f(0) > 0$, *дефинишемо* ***дефект оператор*** $\Delta_{f,\mathcal{A}}$ ***придружен фамилији*** $\mathcal{A}$ ***и функцији*** $f$ *са*

$$\begin{aligned}\Delta_{f,\mathcal{A}} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{s}-\lim_{\rho\nearrow 1}\Bigg(c_0 I + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \rho^{2m} \sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty} \left|A_{n_1^{(m)}} \cdots A_{n_m^{(m)}}\right|^2\Bigg)^{-1/2} \\ &= \mathrm{s}-\lim_{\rho\nearrow 1}\Bigg(f\Big(\rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes A_n\Big)(I)\Bigg)^{-1/2}. \qquad (2.51)\end{aligned}$$

Напомена 2.23. Ако $c_0 I + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty} \left|A_{n_1^{(m)}} \cdots A_{n_m^{(m)}}\right|^2$ представља ограничен оператор, што је према Banach-Steinhaus[6]-овој теореми еквивалентно томе да важи $\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty} \left\|A_{n_1^{(m)}} \cdots A_{n_m^{(m)}} h\right\|^2 < +\infty$ за свако $h \in \mathcal{H}$, тада је то инвертибилан оператор и његов инверз је управо $\Delta_{f,\mathcal{A}}^2$. Када се овај аргумент примени на фамилију $\rho\mathcal{A}$ уместо фамилије $\mathcal{A}$, тада добијамо $\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{-2} = c_0 I + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \rho^{2m} \sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty} \left|A_{n_1^{(m)}} \cdots A_{n_m^{(m)}}\right|^2$, те (2.51) заправо говори да важи $\Delta_{f,\mathcal{A}} = \mathrm{s}-\lim_{\rho\nearrow 1} \Delta_{f,\rho\mathcal{A}}$. Претходна дефиниција је коректна с обзиром да оператори $\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}$ представљају фамилију опадајућих (у односу на $\rho$) позитивних ограничених оператора (ограничених са $\|\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}\| \leqslant c_0^{-1/2}$), те они конвергирају јако (ка $\Delta_{f,\mathcal{A}}$) према Леми 2.3.

У претходној Теореми 2.20 могу се делимично ослабити услови конвергенције за посматране фамилије оператора, како то тврди следећа

**Теорема 2.24.** ***Нека је*** $f$ ***аналитичка функција са ненегативним Taylor-овим коефицијентима таква да је*** $f(0) > 0$, ***нека су*** $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{A}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***и*** $\mathcal{B}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{B_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ***дате фамилије ј.к.с. ограничених оператора такве да важи*** $\max\{\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\|, \|\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\|\} \leqslant R_f$, ***нека је*** $\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\| \|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\| < R_f^2$ ***и***

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty} \left(\left\|A_{n_1^{(m)}}^* \cdots A_{n_m^{(m)}}^* h\right\|^2 + \left\|B_{n_1^{(m)}}^* \cdots B_{n_m^{(m)}}^* h\right\|^2\right) < +\infty \qquad (2.52)$$

***за свако*** $h \in \mathcal{H}$. ***Тада је***

$$\left\|\Delta_{f,\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}} f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\Big)(X) \Delta_{f,\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p \leqslant \left\|\Delta_{f,\mathcal{A}^*}^{-\frac{1}{q}} X \Delta_{f,\mathcal{B}^*}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p, \qquad (2.53)$$

***увек кад*** $p, q, r \geqslant 1$ ***задовољавају услов*** $\frac{2}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

△ С обзиром на услов (2.52) и Напомену 2.23 видимо да је оператор $\Delta_{f,\mathcal{A}^*}$ заправо $\left(f\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes A_n^*\right)(I)\right)^{-1/2}$, а иста врста закључивања се може применити на оператор $\Delta_{f,\mathcal{B}^*}$. Према Теореми 1.13, за све $\rho \in (0,1)$ је

[6] Штајнхаус–Hugo Dyonizy Steinhaus (1887–1972)

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}} f\Big(\rho^2\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*\otimes B_n\Big)(X)\Delta_{f,\rho\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}\Big\|_p = \\
&\Big\|\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}\Big(c_0X+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}\rho^{2m}c_mA^*_{n_m^{(m)}}\cdots A^*_{n_1^{(m)}}XB_{n_1^{(m)}}\cdots B_{n_m^{(m)}}\Big)\Delta_{f,\rho\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}\Big\|_p = \\
&\Big\|c_0\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}X\Delta_{f,\rho\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}c_m\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}\mathcal{A}^{|m\rangle *}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}X\mathcal{B}^{|m\rangle}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\Delta_{f,\rho\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}\Big\|_p \leqslant \\
&\Big\|\Big(c_0\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}C_\rho^{q-1}\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}c_m\mathcal{A}^{|m\rangle}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}C_\rho^{q-1}\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}\mathcal{A}^{|m\rangle *}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\Big)^{\frac{1}{2q}}X \\
&\Big(c_0\Delta_{f,\rho\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}D_\rho^{r-1}\Delta_{f,\rho\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}c_m\mathcal{B}^{|m\rangle}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\Delta_{f,\rho\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}D_\rho^{r-1}\Delta_{f,\rho\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}\mathcal{B}^{|m\rangle *}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\Big)^{\frac{1}{2r}}\Big\|_p, \qquad (2.54)
\end{aligned}
$$

где је $\mathcal{A}^{|m\rangle}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\overset{\text{def}}{=}\rho^mA_{n_1^{(m)}}\cdots A_{n_m^{(m)}}$, $\mathcal{B}^{|m\rangle}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\overset{\text{def}}{=}\rho^mB_{n_1^{(m)}}\cdots B_{n_m^{(m)}}$, $C_\rho\overset{\text{def}}{=}c_0\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{2-\frac{2}{q}}+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}c_m\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}\mathcal{A}^{|m\rangle *}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\mathcal{A}^{|m\rangle}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}$, као и $D_\rho\overset{\text{def}}{=}c_0\Delta_{f,\rho\mathcal{B}}^{2-\frac{2}{r}}+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}c_m\Delta_{f,\rho\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}\mathcal{B}^{|m\rangle *}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\mathcal{B}^{|m\rangle}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\Delta_{f,\rho\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}$. Како је $\left\|\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*A_n\right\|\leqslant R_f$, то је према [J99, Th. 2.1 (1)] за свако $\rho<1$

$$
\begin{aligned}
\rho^{2m}\sum_{n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)}=1}^{\infty}\left|A_{n_1^{(m)}}\cdots A_{n_m^{(m)}}\right|^2 &= \rho^{2m}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*\otimes A_n\Big)^m(I) \\
&\leqslant \rho^{2m}\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*\otimes A_n\Big\|^m_{\mathcal{B}(\mathcal{H})\to\mathcal{B}(\mathcal{H})}\leqslant\rho^{2m}\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}A_n^*A_n\Big\|^mI\leqslant\rho^{2m}R_f^mI
\end{aligned}
$$

и слично за преостале суме, чиме су испуњени сви услови за примену Теореме 1.13. Према томе,

$$
\begin{aligned}
&c_0\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{2-\frac{2}{q}}+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}c_m\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}\mathcal{A}^{|m\rangle *}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\mathcal{A}^{|m\rangle}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}} \\
&\qquad=\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}\Big(c_0I+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}c_m\rho^{2m}\left|A_{n_1^{(m)}}\cdots A_{n_m^{(m)}}\right|^2\Big)\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}=\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{-\frac{2}{q}},
\end{aligned}
$$

а онда и

$$
\begin{aligned}
&\Big(c_0\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}C_\rho^{q-1}\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}c_m\mathcal{A}^{|m\rangle}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}C_\rho^{q-1}\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}\mathcal{A}^{|m\rangle *}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\Big)^{\frac{1}{2q}} \\
&=\Big(c_0\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{\frac{2-2q}{q}}\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}}c_m\mathcal{A}^{|m\rangle}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{\frac{2-2q}{q}}\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}}\mathcal{A}^{|m\rangle *}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\Big)^{\frac{1}{2q}}
\end{aligned}
$$

$$= \Big(c_0 I + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}} c_m \rho^{2m} \big|A^*_{n_m^{(m)}}\cdots A^*_{n_1^{(m)}}\big|^2\Big)^{\frac{1}{2q}} = \Delta^{-\frac{1}{q}}_{f,\rho\mathcal{A}^*} \qquad .$$

Слично добијамо

$$\Big(c_0 \Delta^{1-\frac{1}{r}}_{f,\rho\mathcal{B}} D_\rho^{r-1} \Delta^{1-\frac{1}{r}}_{f,\rho\mathcal{B}} + \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant m\\ 1\leqslant n_k^{(m)}}} c_m \mathcal{B}^{|m\rangle}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})} \Delta^{1-\frac{1}{r}}_{f,\rho\mathcal{B}} D_\rho^{r-1} \Delta^{1-\frac{1}{r}}_{f,\rho\mathcal{B}} \mathcal{B}^{|m\rangle *}_{\rho,(n_1^{(m)},\cdots,n_m^{(m)})}\Big)^{\frac{1}{2r}} = \Delta^{-\frac{1}{r}}_{f,\rho\mathcal{B}^*},$$

па се неједнакост (2.54) може друкчије записати као

$$\Big\|\Delta^{1-\frac{1}{q}}_{f,\rho\mathcal{A}} f\Big(\rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\Big)(X) \Delta^{1-\frac{1}{r}}_{f,\rho\mathcal{B}}\Big\|_p \leqslant \Big\|\Delta^{-\frac{1}{q}}_{f,\rho\mathcal{A}^*} X \Delta^{-\frac{1}{r}}_{f,\rho\mathcal{B}^*}\Big\|_p. \tag{2.55}$$

Како је већ примећено, оператори $f\big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes A_n^*\big)(I)$ и $f\big(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \otimes B_n^*\big)(I)$ су ограничени и једнаки са $\Delta^{-2}_{f,\mathcal{A}^*}$ и $\Delta^{-2}_{f,\mathcal{B}^*}$ редом. С обзиром да су сви коефицијенти који се појављују у дефиницији (2.51) ненегативни, то имамо $\Delta^{-2}_{f,\rho\mathcal{A}^*} \leqslant \Delta^{-2}_{f,\mathcal{A}^*}$ и $\Delta^{-2}_{f,\rho\mathcal{B}^*} \leqslant \Delta^{-2}_{f,\mathcal{B}^*}$. Како су обе функције $t \mapsto t^{\frac{1}{q}}$ и $t \mapsto t^{\frac{1}{r}}$ оператор монотоне (јер су $q, r \geqslant 1$), то је $\Delta^{-\frac{2}{q}}_{f,\rho\mathcal{A}^*} \leqslant \Delta^{-\frac{2}{q}}_{f,\mathcal{A}^*}$ и $\Delta^{-\frac{2}{r}}_{f,\rho\mathcal{B}^*} \leqslant \Delta^{-\frac{2}{r}}_{f,\mathcal{B}^*}$, па из својства двоструке монотоности (1.8) произилази

$$\Big\|\Delta^{-\frac{1}{q}}_{f,\rho\mathcal{A}^*} X \Delta^{-\frac{1}{r}}_{f,\rho\mathcal{B}^*}\Big\|_p \leqslant \Big\|\Delta^{-\frac{1}{q}}_{f,\mathcal{A}^*} X \Delta^{-\frac{1}{r}}_{f,\mathcal{B}^*}\Big\|_p. \tag{2.56}$$

Поново, због монотоности $\Delta^{-2}_{f,\rho\mathcal{A}}$ за $\rho \in (0,1)$, као и оператор монотоности функције $t \mapsto t^{-1}$, то је $\Delta^{2}_{f,\mathcal{A}} \leqslant \Delta^{2}_{f,\rho\mathcal{A}}$, а како је $0 \leqslant 1 - \frac{1}{q} \leqslant 1$, тиме је функција $t \mapsto t^{1-\frac{1}{q}}$ такође оператор монотона, па је $\Delta^{2-\frac{2}{q}}_{f,\mathcal{A}} \leqslant \Delta^{2-\frac{2}{q}}_{f,\rho\mathcal{A}}$ и $\Delta^{2-\frac{2}{r}}_{f,\mathcal{B}} \leqslant \Delta^{2-\frac{2}{r}}_{f,\rho\mathcal{B}}$. Аргументацијом сличној оној употребљеној за доказ (2.56) добијамо

$$\Big\|\Delta^{1-\frac{1}{q}}_{f,\mathcal{A}} f\Big(\rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\Big)(X) \Delta^{1-\frac{1}{r}}_{f,\mathcal{B}}\Big\|_p \leqslant \Big\|\Delta^{1-\frac{1}{q}}_{f,\rho\mathcal{A}} f\Big(\rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\Big)(X) \Delta^{1-\frac{1}{r}}_{f,\rho\mathcal{B}}\Big\|_p, \tag{2.57}$$

за свако $\rho \in (0,1)$. За завршетак доказа неједнакости (2.53) приметимо да је

$$\begin{aligned}
&\Big\|f\Big(\rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\Big)(X) - f\Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\Big)(X)\Big\|_p = \\
&\Big\|\sum_{m=0}^{\infty} c_m (1-\rho^{2m}) \Big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\Big)^m (X)\Big\|_p \leqslant \|X\|_p \sum_{m=0}^{\infty} c_m (1-\rho^{2m}) \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\Big\|^m \\
&\leqslant \|X\|_p \Big(\sum_{m=0}^{N} c_m (1-\rho^{2m}) \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\Big\|^m + \sum_{m=N+1}^{\infty} c_m \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\Big\|^m\Big).
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Како је

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\Big\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})} \leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\Big\| \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\Big\| < R_f^2,$$

где прва неједнакост следи на основу [J99, Th. 2.1 (1)], то добијамо да је испуњено $\sum_{m=0}^{\infty} c_m \big\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\big\|^m < +\infty$, па можемо узети довољно велико $N$ како би друга сума у десној страни од (2.58) била произвољно мала. За такво $N \in \mathbb{N}$, прва сума у десној страни од (2.58) тежи нули, кад $\rho \nearrow 1$, што показује да оператори $f\big(\rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\big)(X)$ слабо конвергирају ка оператору $f\big(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\big)(X)$ кад $\rho \nearrow 1$. Коначно, доказ неједнакости (2.53) произилази из следећих процена

$$\begin{aligned}
&\left\|\Delta_{f,\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}} f\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\right)(X)\Delta_{f,\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p = \left\|\mathrm{w}-\lim_{\rho\nearrow 1} \Delta_{f,\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}} f\left(\rho^2\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\right)(X)\Delta_{f,\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p \\
&\leqslant \liminf_{\rho\nearrow 1}\left\|\Delta_{f,\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}} f\left(\rho^2\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\right)(X)\Delta_{f,\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p \qquad (2.59)\\
&\leqslant \liminf_{\rho\nearrow 1}\left\|\Delta_{f,\rho\mathcal{A}}^{1-\frac{1}{q}} f\left(\rho^2\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \otimes B_n\right)(X)\Delta_{f,\rho\mathcal{B}}^{1-\frac{1}{r}}\right\|_p \qquad (2.60)\\
&\leqslant \liminf_{\rho\nearrow 1}\left\|\Delta_{f,\rho\mathcal{A}^*}^{-\frac{1}{q}} X \Delta_{f,\rho\mathcal{B}^*}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p \leqslant \liminf_{\rho\nearrow 1}\left\|\Delta_{f,\mathcal{A}^*}^{-\frac{1}{q}} X \Delta_{f,\mathcal{B}^*}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p = \left\|\Delta_{f,\mathcal{A}^*}^{-\frac{1}{q}} X \Delta_{f,\mathcal{B}^*}^{-\frac{1}{r}}\right\|_p, \qquad (2.61)
\end{aligned}$$

где је неједнакост у (2.59) последица полунепрекидности одоздо Schatten-ових $p$-норми, док неједнакост у (2.60) следи из (2.57). Прва и друга неједнакост у (2.61) су засноване на (2.55) и (2.56). □

Напомена 2.25. Претходна теорема у случају $f(z) := \frac{1}{1-z}$ проширује [JMĐ, Th. 3.1] у специјалном случају када је $\mu$ бројачка мера на $\mathbb{N}$, односно $\mu(\{n\}) = 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Напомена 2.26. У приватној комуникацији Д. Кечкић ме је упознао са његовом скицом доказа којом је проверио тачност неједнакости (2.53), користећи притом адаптирану верзију нотације из [Ke20, Th. 7], пре свега уводећи нову варијанту Фокових[7] модула којом се доприноси компактнијем записивању формула и спроведеног рачуна.

[7]Фок–Влади́мир Алекса́ндрович Фок (1898–1974)

# Глава 3

# Cauchy-Schwarz-ове неједнакости и конвергенције $\sigma$-елементарних и т.у.п. трансформера у $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}^*$ идеалима компактних оператора

## 1 Операторна Cauchy-Schwarz-ова неједнакост и конвергенција код $\sigma$-елементарних трансформера

У овој глави даће се преглед операторне Cauchy-Schwarz-ове неједнакости за т.у.п. и $\sigma$-елементарне трансформере и прецизираће се неки аспекти везани за конвергенцију $\sigma$-елементарних трансформера $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n$, као и нека својства конвергенције о.в. пресликавања $\delta \mapsto \int_\delta A_t X B_t \, d\mu(t)$.

Лема 3.1. (а) ***Нека су*** $A^*, B \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$, $f, g \in \mathcal{H}$ ***и*** $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.
(а1) ***Пресликавање*** $\Omega \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})\colon t \mapsto A_t X B_t$ ***је слабо***$^*$***-интеграбилно и важи***

$$\left( \int_\Omega \left| \langle A_t X B_t f, g \rangle \right| d\mu(t) \right)^2 \leqslant \int_\Omega \langle A_t A_t^* g, g \rangle \, d\mu(t) \int_\Omega \langle B_t^* X^* X B_t f, f \rangle \, d\mu(t), \tag{3.1}$$

$$\left| \int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) \right|^2 \leqslant \left\| \int_\Omega A_t A_t^* \, d\mu(t) \right\| \int_\Omega B_t^* X^* X B_t \, d\mu(t). \tag{3.2}$$

(а2) ***За свако*** $\varepsilon > 0$

$$\left| \left( \varepsilon I + \int_\Omega A_t A_t^* \, d\mu(t) \right)^{-1/2} \int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) \right|^2 \leqslant \int_\Omega B_t^* X^* X B_t \, d\mu(t). \tag{3.3}$$

(а3) ***Ако је*** $\int_\Omega A_t A_t^* \, d\mu(t)$ ***додатно (ограничено) инвертибилан оператор, тада се*** $\varepsilon I$ ***може изоставити у неједнакости*** (3.3).
(б) ***Ако*** $\delta_n \uparrow \delta$ $(= \cup_{n=1}^\infty \delta_n)$ ***кад*** $n \to +\infty$ ***за неке*** $\delta_n \in \mathfrak{M}$, $A^*, B \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ ***и*** $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, ***тада*** $\int_{\delta_n} A_t A_t^* \, d\mu(t) \to \int_\delta A_t A_t^* \, d\mu(t)$, $\int_{\delta_n} B_t^* B_t \, d\mu(t) \to \int_\delta B_t^* B_t \, d\mu(t)$ ***и*** $\int_{\delta_n} A_t X B_t \, d\mu(t) \to \int_\delta A_t X B_t \, d\mu(t)$ ***јако кад*** $n \to +\infty$.
(в) ***Нека су*** $\{A_n^*\}_{n=1}^\infty$ ***и*** $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ ***ј.к.с. фамилије и*** $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.
(в1) ***Тада ред*** $\sum_{n=1}^\infty A_n X B_n$ ***јако конвергира и***

$$\left| \sum_{n=1}^\infty A_n X B_n \right|^2 \leqslant \left\| \sum_{n=1}^\infty A_n A_n^* \right\| \sum_{n=1}^\infty B_n^* X^* X B_n. \tag{3.4}$$

(в2) ***Ако је*** $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***додатно и м.к.н.о. фамилија, тада је***

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* X^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right) X B_n. \tag{3.5}$$

(г1) ***Ако су*** $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ***и*** $\{B_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ***ј.к.с. фамилије и*** $X \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$, ***тада*** $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n$ ***конвергира у Hilbert-Schmidt-овој норми*** $\|\cdot\|_2$ ***и***

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right\|_2 \leqslant \left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\right\|^{1/2} \left\|X\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\right)^{1/2}\right\|_2. \tag{3.6}$$

(г2) ***Слично, ако су*** $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***и*** $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***ј.к.с. фамилије и*** $X \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$, ***тада*** $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n$ ***конвергира у Hilbert-Schmidt-овој норми*** $\|\cdot\|_2$ ***и***

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right\|_2 \leqslant \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)^{1/2} X\right\|_2 \left\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\right\|^{1/2}. \tag{3.7}$$

(д) ***Ако су*** $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***и*** $\{B_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ***ј.к.с. фамилије и*** $X \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, ***тада*** $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n$ ***апсолутно конвергира у*** $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ ***и***

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right\|_1 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n X B_n\|_1 \leqslant \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)^{1/2} X \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\right)^{1/2}\right\|_1. \tag{3.8}$$

(е) ***Ако је*** $\{A_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ***ј.к.с. фамилија,*** $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***и ј.к.с. и м.к.н.о. фамилија и*** $X \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}^{(\circ)}(\mathcal{H})$, ***тада*** $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n$ ***конвергира у норми*** $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$. ***Исти закључак важи и ако је*** $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***и ј.к.с. и м.к.н.о. фамилија, а*** $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***ј.к.с. фамилија и*** $X \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}^{(\circ)}(\mathcal{H})$.

△ Како бисмо показали (а1), приметимо да је

$$\begin{vmatrix} \langle \int_\Omega A_t A_t^*\, d\mu(t) g, g\rangle & \langle \int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t)\, f, g\rangle \\ \langle (\int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t))^* g, f\rangle & \langle \int_\Omega B_t^* X^* X B_t\, d\mu(t)\, f, f\rangle \end{vmatrix} \geqslant 0$$

за све $f, g \in \mathcal{H}$. Заиста, довољно је да у [J05, Th. 3.1(a)] узмемо $\mathcal{C}_t := A_t$, $\mathcal{D}_t := B_t$ за све $t \in \Omega$ и $\theta := 1$, при чему је ту такође доказана и слаба*-интеграбилност пресликавања $t \mapsto A_t X B_t$. Неопходна слаба*-мерљивост пресликавања $t \mapsto A_t X B_t$ је обезбеђена јер важи $\langle A_t X B_t f, g\rangle = \langle X B_t f, A_t^* g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle X B_t f, e_n\rangle \langle A_t e_n, g\rangle = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \langle B_t f, X^* e_k\rangle \langle A_t e_k, g\rangle$, чиме је пресликавање $t \mapsto \langle A_t X B_t f, g\rangle$ представљено као $[\mu]$ скоро свуда лимес мерљивих функција $t \mapsto \sum_{k=1}^{n} \langle B_t f, X^* e_k\rangle \langle A_t e_k, g\rangle$, за свако $f, g \in \mathcal{H}$ и сваку ортонормирану базу (**о.н.б.**) $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ простора $\mathcal{H}$. То показује да важи

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t)\, f, g\right\rangle\right|^2 &\leqslant \left\langle \int_\Omega A_t A_t^*\, d\mu(t) g, g\right\rangle \left\langle \int_\Omega B_t^* X^* X B_t\, d\mu(t)\, f, f\right\rangle \\ &\leqslant \left\|\int_\Omega A_t A_t^*\, d\mu(t)\right\| \left\langle \int_\Omega B_t^* X^* X B_t\, d\mu(t)\, f, f\right\rangle \|g\|^2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Да бисмо доказали (3.1), нека је $\alpha\colon \Omega \to \mathbb{C}$ мерљива функција таква да је $\langle A_t X B_t f, g\rangle = \alpha(t) |\langle A_t X B_t f, g\rangle|$ за $[\mu]$ с.с. $t \in \Omega$. Тада примена (3.9) на $\overline{\alpha(t)} A_t$ уместо на $A_t$ даје

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega \big|\langle A_t X B_t f, g\rangle\big|\, d\mu(t)\right)^2 &= \left|\left\langle \int_\Omega \overline{\alpha(t)} A_t X B_t\, d\mu(t)\, f, g\right\rangle\right|^2 \\ &\leqslant \left\langle \int_\Omega A_t A_t^*\, d\mu(t) g, g\right\rangle \left\langle \int_\Omega B_t^* X^* X B_t\, d\mu(t)\, f, f\right\rangle,\end{aligned}$$

што према (1.9) доказује (3.1). Специјалан избор $g := \int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t) f$ у неједнакости (3.9) непосредно имплицира неједнакост (3.2), скраћивањем неких од израза који се ту појављују. Сада, за доказ (а2) (односно (а3)), примена неједнакости (3.2) на фамилију $A_t' := \big(\varepsilon I + \int_\Omega A_t A_t^*\, d\mu(t)\big)^{-1/2} A_t$ (односно $A_t'' := \big(\int_\Omega A_t A_t^*\, d\mu(t)\big)^{-1/2} A_t$) уместо на $A_t$, што је омогућено чињеницом да је $\int_\Omega A_t' A_t'^*\, d\mu(t) \leqslant I$ (односно $\int_\Omega A_t'' A_t''^*\, d\mu(t) = I$), одакле следи тражени закључак.

За доказ дела (б), посматрајмо произвољно $h \in \mathcal{H}$ и приметимо да је

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left\langle \int_{\delta_n} A_t A_t^*\, d\mu(t) h, h\right\rangle &= \lim_{n\to+\infty} \int_{\delta_n} \langle A_t A_t^* h, h\rangle\, d\mu(t) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\delta_n} \|A_t^* h\|^2\, d\mu(t) \\ &= \int_\delta \|A_t^* h\|^2\, d\mu(t) = \left\langle \int_\delta A_t A_t^*\, d\mu(t) h, h\right\rangle,\end{aligned}$$

где прва и последња једнакост следе према еквивалетној дефиницији слабог* (тј. Гељфандовог) интеграла (видети Лему 1.9), док трећа једнакост следи из теореме о монотоној конвергенцији за позитивне Lebesgue[1]-ове интеграбилне функције $t \mapsto \|A_t^* h\|^2$ на $\Omega$. Према теореми о монотоној конвергенцији за операторе, то показује да $\int_{\delta_n} A_t A_t^*\, d\mu(t) \to \int_\delta A_t A_t^*\, d\mu(t)$ јако кад $n \to +\infty$. Конвергенција $\int_{\delta_n} B_t^* B_t\, d\mu(t)$ ка $\int_\delta B_t^* B_t\, d\mu(t)$ у јакој операторној топологији се доказује на сличан начин. Како је

$$\left\| \int_\delta A_t X B_t\, d\mu(t)\, h - \int_{\delta_n} A_t X B_t\, d\mu(t)\, h\right\|^2 = \left\| \int_{\delta\setminus\delta_n} A_t X B_t\, d\mu(t)\, h\right\|^2$$

$$\leqslant \left\| \int_{\delta\setminus\delta_n} A_t A_t^*\, d\mu(t)\right\| \int_{\delta\setminus\delta_n} \langle B_t^* X^* X B_t h, h\rangle\, d\mu(t) \tag{3.10}$$

$$\leqslant \left\| \int_\delta A_t A_t^*\, d\mu(t)\right\| \|X\|^2 \left( \int_\delta \langle B_t^* B_t h, h\rangle\, d\mu(t) - \int_{\delta_n} \langle B_t^* B_t h, h\rangle\, d\mu(t)\right) \to 0, \tag{3.11}$$

кад $n \to +\infty$, при чему неједнакост у (3.10) следи из операторне Cauchy-Schwarz-ове неједнакости (3.2), док конвергенција у (3.11) следи из већ доказаног дела (б) ове леме, што доказује и последњи део тврђења у делу (б).

Сада видимо и да је (в1) само специјалан случај када је $\Omega := \mathbb{N}$ и $\mu :=$ card бројачка мера на $\mathbb{N}$ (у) неједнакости (3.2). Јака конвергенција $\sum_{n=1}^\infty A_n X B_n$ следи према већ доказаном делу (б) ове леме, ако узмемо $\delta := \mathbb{N}$ и $\delta_n := \mathbb{N} \cap [1, n]$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Доказ дела (в2) заснива се на доказу [J98, Th. 2.2], који даље омогућава факторизацију $A_n = C_n \big(\sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n\big)^{1/2} = \big(\sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n\big)^{1/2} C_n$, где је $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ м.к.н.о. фамилија за коју је $\sum_{n=1}^\infty C_n C_n^* = P_{\overline{\mathcal{R}(\sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n)}}$. То даље даје

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^\infty A_n X B_n\right|^2 &= \left|\sum_{n=1}^\infty C_n \left(\sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n\right)^{1/2} X B_n\right|^2 \\ &\leqslant \left\|\sum_{n=1}^\infty C_n C_n^*\right\| \sum_{n=1}^\infty B_n^* X^* \left(\sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n\right) X B_n \leqslant \sum_{n=1}^\infty B_n^* X^* \left(\sum_{n=1}^\infty A_n^* A_n\right) X B_n,\end{aligned} \tag{3.12}$$

[1]Лебег–Henri Leon Lebesgue (1875–1941)

где се прва неједнакост у (3.12) заснива на неједнакости (3.4), примењеној на операторе $C_n$ уместо на $A_n$, као и на $\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)^{1/2} X$ уместо на $X$.

Приметимо да под условима у (г1) имамо и да су $\{A_n^* \otimes I\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{I \otimes B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с. фамилије ограничених оператора на $\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$, те (3.4) примењена на фамилије $\{A_n \otimes I\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{I \otimes B_n\}_{n=1}^{\infty}$ уместо на фамилије $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, на $\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ уместо на $\mathcal{H}$, на $X \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ уместо на $h \in \mathcal{H}$ и на идентички оператор $I \otimes I$ на $\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ уместо на $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ даје

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right\|_2^2 &\leqslant \left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes I \cdot A_n^* \otimes I\right\| \operatorname{tr}\left(\sum_{n=1}^{\infty} I \otimes B_n^* \Big(I \otimes B_n(X)\Big) X^*\right) \\ &= \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\right) \otimes I\right\| \operatorname{tr}\left(X\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\right) X^*\right) = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n A_n^*\right\| \left\|X\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\right)^{1/2}\right\|_2^2.\end{aligned}$$

Овде смо користили чињеницу да је $\|C \otimes I\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{B}(\mathcal{H})} = \|C\|$ за све $C \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Конвергенција $\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n$ у Hilbert-Schmidt-овој норми $\|\cdot\|_2$ је управо јака конвергенција $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \otimes B_n$ у Hilbert-овом простору $\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$, која је установљена у претходном делу ове леме.

Под условима у делу (г2) видимо да (3.7) следи директно из (3.6), јер

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} A_n X B_n\right\|_2 = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* X^* A_n^*\right\|_2 &\leqslant \left\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\right\|^{1/2} \left\|X^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)^{1/2}\right\|_2 \\ &= \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)^{1/2} X\right\|_2 \left\|\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* B_n\right\|^{1/2}.\end{aligned}$$

Доказ неједнакости (3.8) у (д) се заснива на следећем низу једнакости и неједнакости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n X B_n\|_1 = \left\|\begin{bmatrix} A_1 X B_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & A_n X B_n & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots \end{bmatrix}\right\|_1 \leqslant \left\|\begin{bmatrix} A_1 X B_1 & \cdots & A_1 X B_n & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots \\ A_n X B_1 & \cdots & A_n X B_n & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}\right\|_1 \tag{3.13}$$

$$= \left\|\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \cdots \\ A_n & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & X & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & \cdots & B_n & \cdots \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots \end{bmatrix}\right\|_1 \tag{3.14}$$

$$= \left\|\begin{bmatrix} \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n} & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & X & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*} & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots \end{bmatrix}\right\|_1 \tag{3.15}$$

$$= \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* A_n\right)^{1/2} X \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n B_n^*\right)^{1/2}\right\|_1.$$

Неједнакост у (3.13) је последица (тзв. "pinching") неједнакости $\left\|\sum_{n=1}^{\infty} P_n X P_n\right\|_\Phi \leqslant \|X\|_\Phi$, за фамилију $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ међусобно ортогоналних ортопројектора на Hilbert-овом простору, што је специјалан случај [J98, Th. 2.1]. Доказ једнакости (3.15) се заснива на својству $\|AXB\|_\Phi = \||A|X|B^*|\|_\Phi$ за све с.н. функције $\Phi$ (с обзиром да неједнакост (1.8) постаје једнакост ако је $A^*A = C^*C$ и $BB^* = DD^*$, што је увек испуњено за $C := |A|$ и $D := |B^*|$), примењеној на крајње леву и крајње десну блок матрицу у (3.14).

Део (е) ове леме представљаће специјалан случај Теореме 3.6(a) за $\Omega := \mathbb{N}$ и $\mu :=$ card. $\square$

Неједнакост (3.1) директно се добија и узастопном применом Cauchy-Schwarz-ових неједнакости за Хилбертове просторе $\mathcal{H}$ и $L^2(\Omega,\mu)$, што показује

$$\Big(\int_\Omega \big|\langle A_tXB_tf,g\rangle\big|\,d\mu(t)\Big)^2 \leqslant \Big(\int_\Omega \|A_t^*g\|\|XB_tf\|\,d\mu(t)\Big)^2$$
$$\leqslant \int_\Omega \|A_t^*g\|^2\,d\mu(t)\int_\Omega \|XB_tf\|^2\,d\mu(t) = \int_\Omega \langle A_tA_t^*g,g\rangle\,d\mu(t)\int_\Omega \langle B_t^*X^*XB_tf,f\rangle\,d\mu(t).$$

Позитивност $2\times 2$ операторне матрице $\mathcal{M}_{A,B} = \begin{bmatrix} \int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t) & \int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t) \\ \big(\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\big)^* & \int_\Omega B_t^*X^*XB_t\,d\mu(t)\end{bmatrix}$ омогућава и суптилније закључке, попут ових који нам даје следећи

**Став 3.2.** ***Нека су*** $A^*, B \in L^2_G(\Omega,\mu,\mathcal{B}(\mathcal{H}))$, $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, ***нека је*** $U\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***парцијална изометрија за коју важи канонско поларно разлагања*** $\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t) = U\big|\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\big|$, ***тада је***

$$\Big|\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\Big| \leqslant \Big(U^*\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)U\Big)\#\Big(\int_\Omega B_t^*X^*XB_t\,d\mu(t)\Big) \tag{3.16}$$
$$\leqslant\Big(\Big\|\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\Big\|I\Big)\#\Big(\int_\Omega B_t^*X^*XB_t\,d\mu(t)\Big) = \Big\|\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\Big\|^{1/2}\Big(\int_\Omega B_t^*X^*XB_t\,d\mu(t)\Big)^{1/2}. \tag{3.17}$$

За позитивне операторе $C,D\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ за дефиницију њихове геометријске средине $C\#D$ погледати [Hi10, Ex. 3.3.1(3)].

$\triangle$ Како је $\begin{bmatrix} U^*\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)U & \big|\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\big| \\ \big|\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\big| & \int_\Omega B_t^*X^*XB_t\,d\mu(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U^* & 0 \\ 0 & I\end{bmatrix}\mathcal{M}_{A,B}\begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & I\end{bmatrix} \geqslant 0$, то према [Hi10, Prop. 3.3.4(1)] директно добијамо неједнакост (3.16). Будући да је геометријска средина $\#$ за операторе типичан пример операторне средине сагласно [Hi10, Ex. 3.3.1(3)], па је према [Hi10, Def. 3.1.2] оператор монотона по свакој од две променљиве. Како је $U^*\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)U \leqslant \big\|\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\big\|U^*U \leqslant \big\|\int_\Omega A_tA_t^*\,d\mu(t)\big\|I$, одакле следе и преостала тврђења у (3.17). $\square$

Следећа лема обезбеђује ефикасан метод дискретизације за уопштавање постојећих Cauchy-Schwarz-ових норма неједнакости за елементарне трансформере на т.у.п. трансформере. Услов да је $L^2(\Omega,\mu)$ сепарабилан Hilbert-ово простор увек ћемо подразумевати у наставку ове главе.

**Лема 3.3.** ***Нека је*** $L^2(\Omega,\mu)$ ***сепарабилан Hilbert-ов простор и нека је*** $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ ***нека његова о.н.б. Тада за свако*** $B\in L^2_G(\Omega,\mu,\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ ***сви Fourier-ови коефицијенти*** $\widehat{B}_n \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega B_t\overline{u_n(t)}d\mu(t)\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и***

$$\boxed{\sum_{n=1}^\infty |\widehat{B}_n|^2 = \int_\Omega |B_t|^2\,d\mu(t).} \tag{3.18}$$

***Ако је при томе и*** $A \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, ***тада је за свако*** $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\boxed{\int_\Omega A_t^* X B_t \, d\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\widehat{A}_n\big)^* X \widehat{B}_n.} \tag{3.19}$$

△ Ако је $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ о.н.б. простора $\mathcal{H}$, тада је за свако $h \in \mathcal{H}$

$$\Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{B}_n|^2 h, h \Big\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \|\widehat{B}_n h\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \big|\langle \widehat{B}_n h, e_m\rangle\big|^2 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Big|\Big\langle \int_\Omega B_t \overline{u_n(t)} \, d\mu(t) h, e_m \Big\rangle\Big|^2$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \Big| \int_\Omega \langle B_t h, e_m\rangle \overline{u_n(t)} \, d\mu(t)\Big|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \int_\Omega |\langle B_t h, e_m\rangle|^2 \, d\mu(t) \tag{3.20}$$

$$= \int_\Omega \sum_{m=1}^{\infty} |\langle B_t h, e_m\rangle|^2 \, d\mu(t) = \int_\Omega \|B_t h\|^2 \, d\mu(t) = \Big\langle \int_\Omega |B_t|^2 \, d\mu(t) h, h \Big\rangle. \tag{3.21}$$

Прва једнакост у (3.20) (односно последња једнакост у (3.21)) је у суштини сама (еквивалентна) дефиниција слабог*-интеграла (видети Лему 1.9) фамилије $\big\{B_t \overline{u_n(t)}\big\}_{t\in\Omega}$ (односно $\{|B_t|^2\}_{t\in\Omega}$), чије постојање је обезбеђено Ставом 1.12 и чињеницом да (као и $\{B_t\}_{t\in\Omega}$) и $\big\{(\overline{u_n(t)} I)^*\big\}_{t\in\Omega} \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. Друга једнакост у (3.20) следи из Parseval[2]-ових једнакости за $L^2(\Omega, \mu)$ функције $t \mapsto \langle B_t h, e_m\rangle$, док друга једнакост у (3.21) следи из Parseval-ове једнакости за $B_t h \in \mathcal{H}$, примењене за $[\mu]$ с.с. $t \in \Omega$. С обзиром да $B \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, из линија (3.20)–(3.21) следи да је $\{\widehat{B}_n\}_{n=1}^\infty$ ј.к.с. фамилија, те стога ред $\sum_{n=1}^\infty |\widehat{B}_n|^2$ јако конвергира. Слично, $\{\widehat{A}_n\}_{n=1}^\infty = \{\big(\big(\widehat{A}_n\big)^*\big)^*\}_{n=1}^\infty$ представља ј.к.с. фамилију, па према Леми 3.1(в1) ред $\sum_{n=1}^\infty \big(\widehat{A}_n\big)^* X \widehat{B}_n$ јако конвегира.

Да бисмо показали формулу (3.19), посматрајмо прво специјалан случај $X \geqslant 0$ и $A_t := B_t^*$, када примена већ доказане Parseval-ове једнакости (3.18) на $\big\{\sqrt{X} B_t\big\}_{t\in\Omega}$ уместо на $\big\{B_t\big\}_{t\in\Omega}$ даје

$$\int_\Omega B_t^* X B_t \, d\mu(t) = \int_\Omega \big|\sqrt{X} B_t\big|^2 \, d\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \big|\widehat{\sqrt{X} B}_n\big|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \big|\sqrt{X}\, \widehat{B}_n\big|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\widehat{B}_n\big)^* X \widehat{B}_n, \tag{3.22}$$

што доказује овај специјалан случај.

Како је $|i^k A_t - B_t|^2 \geqslant 0$, то је онда $|i^k A_t + B_t|^2 \leqslant 2|A_t|^2 + 2|B_t|^2$ за свако $t \in \Omega$ (што је специјални случај профињења операторне Bohr[3]-ове неједнакости $N := 2$, $\alpha_1 := \alpha_2 := 1/2$ датог идентитетом (28) у [JM]), примена идентитета (3.22) на ј.к.и. фамилије $\{i^k A_t + B_t\}_{t\in\Omega}$ за $k := 0, 1, 2, 3$, у комбинацији са поларизационим идентитетом, даје

$$\begin{aligned}\int_\Omega A_t^* X B_t \, d\mu(t) &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \int_\Omega i^k (i^k A_t + B_t)^* X (i^k A_t + B_t) \, d\mu(t) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{3} i^k \big(i^{-k} \big(\widehat{A}_n\big)^* + \big(\widehat{B}_n\big)^*\big) X \big(i^k \widehat{A}_n + \widehat{B}_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(\widehat{A}_n\big)^* X \widehat{B}_n,\end{aligned} \tag{3.23}$$

што завршава доказ формуле (3.19) у случају $X \geqslant 0$. Општи случај ове леме показује се растављањем оператора $X$ на његове позитивно дефинитне компоненте $X =$

[2]Парсевал–Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755–1836)

[3]Бор–Harald August Bohr (1887-1951)

$\frac{1}{4}(|X+X^*|+X+X^*)-\frac{1}{4}(|X+X^*|-X-X^*)+\frac{i}{4}(|X-X^*|-iX+iX^*)-\frac{i}{4}(|X-X^*|+iX-iX^*)$, ослањајући при томе на линеарност трансформера $\int_\Omega A_t^*\otimes B_t\,d\mu(t)$ и $\sum_{n=1}^\infty \big(\widehat{A}_n\big)^*\otimes\widehat{B}_n$ у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, који се јављају на супротним странама формуле (3.23). □

Напомена 3.4. Алтернативно, формула (3.19) може се извести и из идентитета

$$\int_\Omega A_t^* X B_t\,d\mu(t) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}\int_\Omega i^k|i^k A_t + XB_t|^2\,d\mu(t) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{3} i^k|i^k\widehat{A}_n + X\widehat{B}_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\big(\widehat{A}_n\big)^* X\widehat{B}_n,$$

базираног на аргументима употребљеним у претходно приказаном доказу.

Претходна Лема 3.3 омогућава продужење неједнакости (3.5) на следећу класу т.у.п. трансформера.

**Последица 3.5.** ***Ако су*** $A,B\in L^2_G(\Omega,\mu,\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ ***и*** $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ ***м.к.н.о. фамилија, тада је за све*** $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\left|\int_\Omega A_t X B_t\,d\mu(t)\right|^2 \leqslant \int_\Omega B_t^* X^*\left(\int_\Omega A_t^* A_t\,d\mu(t)\right) X B_t\,d\mu(t).$$

△ Доказ се заснива на следећем низу једнакости и једне неједнакости

$$\left|\int_\Omega A_t X B_t\,d\mu(t)\right|^2 = \left|\int_\Omega \big(A_t^*\big)^* X B_t\,d\mu(t)\right|^2 = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\big(\widehat{A_n^*}\big)^* X\widehat{B}_n\right|^2 \tag{3.24}$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\big(\widehat{B}_n\big)^* X^*\left(\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{A_n^*}\big(\widehat{A_n^*}\big)^*\right) X\widehat{B}_n = \int_\Omega B_t^* X^*\left(\int_\Omega A_t^* A_t\,d\mu(t)\right) X B_t\,d\mu(t), \tag{3.25}$$

где је $\widehat{A_n^*}\stackrel{\text{def}}{=}\int_\Omega A_t^*\overline{u_n(t)}\,d\mu(t)$ $n$-ти о.в. Fourier-ов коефицијенат за ј.к.и. фамилију $\{A_t^*\}_{t\in\Omega}$. Друга једнакост у (3.24) следи из (3.19), а неједнакост у (3.25) је последица примене (3.5) на фамилије Fourier-ових коефицијената $\{\widehat{A_n^*}\}_{n=1}^\infty$ и $\{\widehat{B}_n\}_{n=1}^\infty$ уместо на $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ редом. Овде је коришћена и чињеница да је $\{\widehat{A_n^*}\}_{n=1}^\infty$ м.к.н.о. фамилија кад год је то и $\{A_t\}_{t\in\Omega}$. Заиста, у овом специјалном случају који посматрамо сви $\widehat{A_n^*}\stackrel{\text{def}}{=}\int_\Omega A_t^*\overline{u_n(t)}\,d\mu(t)$ комутирају са сваким оператором из фамилија $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ и $\{A_t^*\}_{t\in\Omega}$, па су због тога сви они нормални и међусобно комутирајући оператори. Да бисмо оправдали последњу једнакост, приметимо да је и $\{\overline{u_n}\}_{n=1}^\infty$ о.н.б. у $L^2(\Omega,\mu)$, па за о.в. Fourier-ове коефицијенте $\widetilde{A_n}\stackrel{\text{def}}{=}\int_\Omega A_t u_n(t)\,d\mu(t) = \big(\int_\Omega A_t^*\overline{u_n(t)}\,d\mu(t)\big)^* = \big(\widehat{A_n^*}\big)^*$ према Parseval-овој формули (3.18) примењеној за о.н.б. $\{\overline{u_n}\}_{n=1}^\infty$ важи

$$\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{A_n^*}\big(\widehat{A_n^*}\big)^* = \sum_{n=1}^{\infty}\big(\widetilde{A_n}\big)^*\widetilde{A_n} = \int_\Omega A_t^* A_t\,d\mu(t). \tag{3.26}$$

Још једна примена Parseval-ове једнакости (3.18) на $\Big\{\big(\int_\Omega A_t^* A_t\,d\mu(t)\big)^{1/2} X B_t\Big\}_{t\in\Omega}$ уместо на $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ комплетира доказ. □

# 2 Cauchy-Schwarz-ове неједнакости за т.у.п. трансформере на Q и Q* идеалима

У овој секцији допунићемо листу Cauchy-Schwarz-ових неједнакости за т.у.п. трансформере $\int_\Omega A_t\otimes B_t\,d\mu(t)$ на идеалима компактних оператора придружених $p$-модификованим и њима адјунгованим с.н. функцијама, и разматраћемо нека својства конвергенције т.у.п. трансформера.

**Теорема 3.6.** ***Нека је*** $p \geqslant 2, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\Phi$ ***с.н. функција и*** $\delta_n \uparrow \delta$ ***кад*** $n \to +\infty$ ***за неке*** $\delta_n \in \mathfrak{M}$.
(а) ***Ако су*** $A^*, B \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, ***при чему је*** $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ ***м.к.н.о. фамилија и*** $\left(\int_\Omega A_t^* A_t \, d\mu(t)\right)^{1/2} X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$, ***тада је***

$$\left\| \int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) \right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \left\| \left( \int_\Omega A_t^* A_t \, d\mu(t) \right)^{1/2} X \right\|_{\Phi^{(p)}} \left\| \int_\Omega B_t^* B_t \, d\mu(t) \right\|^{1/2}, \tag{3.27}$$

***док је***

$$\left\| \int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) \right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \left\| \int_\Omega A_t A_t^* \, d\mu(t) \right\|^{1/2} \left\| X \left( \int_\Omega B_t B_t^* \, d\mu(t) \right)^{1/2} \right\|_{\Phi^{(p)}}, \tag{3.28}$$

***ако је*** $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ ***м.к.н.о. фамилија и*** $X\left(\int_\Omega B_t B_t^* \, d\mu(t)\right)^{1/2} \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$.
***Такође, у оба случаја*** $\left\| \int_{\delta_n} A_t X B_t \, d\mu(t) - \int_\delta A_t X B_t \, d\mu(t) \right\|_{\Phi^{(p)}} \to 0$ ***кад*** $n \to +\infty$, ***за све*** $X \in \mathcal{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$.
(б) ***Ако је*** $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ ***Hilbert-Schmidt-ова норма*** $\|\cdot\|_2$, ***тада ни комутативност ни нормалност фамилије*** $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ ***или*** $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ ***нису неопходан услов да важи*** (3.27) ***за*** $A, B \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, ***док*** (3.28) ***важи за*** $A^*, B^* \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$. ***У оба случаја*** $\left\| \int_{\delta_n} A_t X B_t \, d\mu(t) - \int_\delta A_t X B_t \, d\mu(t) \right\|_2 \to 0$ ***кад*** $n \to +\infty$ ***за све*** $X \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$.
(в) ***Ако*** $A, B^* \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ ***и*** $X \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, ***тада је***

$$\left\| \int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) \right\|_1 \leqslant \left\| \left( \int_\Omega A_t^* A_t \, d\mu(t) \right)^{1/2} X \left( \int_\Omega B_t B_t^* \, d\mu(t) \right)^{1/2} \right\|_1 \tag{3.29}$$

$$\text{и} \quad \left\| \int_{\delta_n} A_t X B_t \, d\mu(t) - \int_\delta A_t X B_t \, d\mu(t) \right\|_1 \to 0 \qquad \text{кад } n \to +\infty. \tag{3.30}$$

(г) ***Ако*** $A, B^* \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ ***и бар једна од фамилија*** $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ ***или*** $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ ***је м.к.н.о. фамилија, тада је за све*** $Y \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ ***и*** $Z \in \mathcal{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned} \boxed{\left\| \int_\Omega A_t Y B_t \, d\mu(t) \right\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \left\| \left( \int_\Omega A_t^* A_t \, d\mu(t) \right)^{1/2} Y \left( \int_\Omega B_t B_t^* \, d\mu(t) \right)^{1/2} \right\|_{\Phi^{(p)*}}} \\ \leqslant \left\| \int_\Omega A_t^* A_t \, d\mu(t) \right\|^{1/2} \left\| \int_\Omega B_t B_t^* \, d\mu(t) \right\|^{1/2} \|Y\|_{\Phi^{(p)*}} \end{aligned} \tag{3.31}$$

***и важи*** $\left\| \int_{\delta_n} A_t Y B_t \, d\mu(t) - \int_\delta A_t Y B_t \, d\mu(t) \right\|_2 + \left\| \int_{\delta_n} A_t Z B_t \, d\mu(t) - \int_\delta A_t Z B_t \, d\mu(t) \right\|_{\Phi^{(p)*}} \to 0$ ***кад*** $n \to +\infty$.
(д) ***Ако*** $A, B \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ ***и ако су обе фамилије*** $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ ***и*** $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ ***м.к.н.о. тада*** (3.31) ***важи за све с.н. функције*** $\Phi$ ***(уместо за*** $\Phi^{(p)^*}$***) и све*** $Y \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$.

$\triangle$ (3.27) и (3.28) у (а) су само реформулације норма неједнакости (1.14) и (1.15) редом из Теореме 1.16. Заиста, да бисмо добили (3.27) из (1.14) потребно је узети $\mathcal{C}_t := A_t^*, \mathcal{D}_t := B_t$ за све $t \in \Omega$. Неједнакост (3.28) произилази из (1.15) на сличан начин. За доказ тврђења у (а), без суштинског смањења општости ограничићемо се на разматрање случаја када је $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ м.к.н.о. фамилија. Тада из неједнакости (3.27) следи

$$\Big\|\int_{\delta_n} A_t X B_t\,d\mu(t) - \int_{\delta} A_t X B_t\,d\mu(t)\Big\|_{\Phi^{(p)}} = \Big\|\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t X B_t\,d\mu(t)\Big\|_{\Phi^{(p)}}$$
$$\leqslant \Big\|\Big(\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t^* A_t\,d\mu(t)\Big)^{1/2} X\Big\|_{\Phi^{(p)}} \Big\|\int_{\delta\setminus\delta_n} B_t^* B_t\,d\mu(t)\Big\|^{1/2}. \quad (3.32)$$

Фамилија трансформера (оператора множења слева) $\{\mathcal{S}_n\}_{n=1}^{\infty}$ дефинисаних са $\mathcal{S}_n \overset{\text{def}}{=} \big(\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t^* A_t\,d\mu(t)\big)^{1/2}\otimes I\colon \mathfrak{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})\colon X \mapsto \big(\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t^* A_t\,d\mu(t)\big)^{1/2} X$, је униформно ограничена јер је $\|\mathcal{S}_n\|_{\mathfrak{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})\to\mathfrak{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})} = \big\|\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t^* A_t\,d\mu(t)\big\|^{1/2} \leqslant \big\|\int_{\delta} A_t^* A_t\,d\mu(t)\big\|^{1/2}$ за свако $n\in\mathbb{N}$. Уколико је $X$ оператор коначног ранга, тада постоје $h_1, k_1, \cdots, h_M, k_M \in \mathcal{H}$ такви да је $X = \sum_{m=1}^{M} k_m \otimes h_m^\star \colon \mathcal{H}\to\mathcal{H}\colon h \mapsto \sum_{m=1}^{M}\langle h, h_m\rangle k_m$, па је

$$\Big\|\mathcal{S}_n\Big(\sum_{m=1}^{M} k_m\otimes h_m^\star\Big)\Big\|_{\Phi^{(p)}} = \Big\|\sum_{m=1}^{M}\Big(\Big(\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t^* A_t\,d\mu(t)\Big)^{1/2} k_m\Big)\otimes h_m^\star\Big\|_{\Phi^{(p)}}$$
$$\leqslant \sum_{m=1}^{M}\Big\|\Big(\Big(\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t^* A_t\,d\mu(t)\Big)^{1/2} k_m\Big)\otimes h_m^\star\Big\|_{\Phi^{(p)}} = \sum_{m=1}^{M}\|h_m\|\Big\|\Big(\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t^* A_t\,d\mu(t)\Big)^{1/2} k_m\Big\|$$
$$= \sum_{m=1}^{M}\|h_m\|\Big\langle\Big(\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t^* A_t\,d\mu(t)\Big) k_m, k_m\Big\rangle^{1/2} \to 0$$

кад $n\to+\infty$, сагласно Леми 3.1(б). Оператори коначног ранга су густи у $\mathfrak{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$, па према Banach-Steinhaus-овом принципу конвергенције $\|\mathcal{S}_n X\|_{\Phi^{(p)}} \to 0$ кад $n\to+\infty$ за све операторе $X\in\mathfrak{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$, што на основу (3.32) потврђује тражену конвергенцију $\big\|\int_{\delta_n} A_t X B_t\,d\mu(t) - \int_{\delta} A_t X B_t d\mu(t)\big\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \big\|\int_{\delta\setminus\delta_n} B_t^* B_t\,d\mu(t)\big\|^{1/2}\ \|\mathcal{S}_n X\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \big\|\int_{\Omega} B_t^* B_t\,d\mu(t)\big\|^{1/2}$ $\|\mathcal{S}_n X\|_{\Phi^{(p)}} \to 0$ кад $n\to+\infty$.

У случају (3.27) за Hilbert-Schmidt-ову норму имамо

$$\Big\|\int_{\Omega} A_t X B_t\,d\mu(t)\Big\|_2 = \Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\big(\widehat{A_n^*}\big)^* X\widehat{B}_n\Big\|_2 \leqslant \Big\|\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{A_n^*}\big(\widehat{A_n^*}\big)^*\Big)^{1/2} X\Big\|_2 \Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{B}_n^*\widehat{B}_n\Big\|^{1/2} \quad (3.33)$$
$$= \Big\|\Big(\int_{\Omega} A_t^* A_t\,d\mu(t)\Big)^{1/2} X\Big\|_2 \Big\|\int_{\Omega} B_t^* B_t\,d\mu(t)\Big\|^{1/2}, \quad (3.34)$$

где једнакост (3.33) следи из формуле (3.19), (3.7) даје неједнакост у (3.33), док се једнакост у (3.34) заснива на формулама (3.26) и (3.18).

Случај (3.28) за Hilbert-Schmidt-ове норме се показује слично, користећи сада неједнакост (3.6) уместо (3.7). За доказ да $\big\|\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t X B_t\,d\mu(t)\big\|_2 \to 0$ кад $n\to+\infty$ може се у целости употребити доказано $\big\|\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t X B_t\,d\mu(t)\big\|_{\Phi^{(p)}} \to 0$ кад $n\to+\infty$ ($\Phi^{(p)} = \ell^{(2)}$ за $\Phi := \ell$ и $p := 2$), са једином разликом што се сада користи (3.27), а не захтева се да је $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ м.к.н.о. фамилија.

Ради доказивања (3.29) у (в) користимо Parseval-ове једнакости (3.18), (3.19) и дискретну Cauchy-Schwarz-ову неједнакост (3.8) за нуклеарну норму, на основу чега следи

$$\Big\|\int_{\Omega} A_t X B_t\,d\mu(t)\Big\|_1 = \Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\big(\widehat{A_n^*}\big)^* X\widehat{B}_n\Big\|_1 \leqslant \Big\|\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{A_n^*}\big(\widehat{A_n^*}\big)^*\Big)^{1/2} X\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{B}_n\big(\widehat{B}_n\big)^*\Big)^{1/2}\Big\|_1$$
$$= \Big\|\Big(\int_{\Omega} A_t^* A_t\,d\mu(t)\Big)^{1/2} X\Big(\int_{\Omega} B_t B_t^*\,d\mu(t)\Big)^{1/2}\Big\|_1. \quad (3.35)$$

Последња једнакост у (3.35) следи из (3.26), као и још једне њене примене на $\{B_t^*\}_{t\in\Omega}$ уместо на $\{A_t\}_{t\in\Omega}$, на основу које је

$$\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{B}_n\big(\widehat{B}_n\big)^* = \sum_{n=1}^{\infty}\big(\widetilde{B_n^*}\big)^*\widetilde{B_n^*} = \int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t), \tag{3.36}$$

где последња неједнакост у (3.36) следи из (3.18), примењене на ј.к.и. фамилију $\{B_t^*\}_{t\in\Omega}$ и њене оператор вредносне Fourier-ове коефицијенте $\{\widetilde{B_n^*}\}_{n=1}^{\infty}$, за о.н.б. $\{\overline{u_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

За доказ (3.30) приметимо прво да је

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\delta_n}A_tXB_t\,d\mu(t)-\int_{\delta}A_tXB_t\,d\mu(t)\right\|_1 &= \left\|\int_{\delta\setminus\delta_n}A_tXB_t\,d\mu(t)\right\|_1\\ &\leqslant \left\|\left(\int_{\delta\setminus\delta_n}A_t^*A_t\,d\mu(t)\right)^{1/2}X\left(\int_{\delta\setminus\delta_n}B_tB_t^*\,d\mu(t)\right)^{1/2}\right\|_1. \end{aligned}\tag{3.37}$$

Посматрајмо затим фамилију трансформера $\{\mathcal{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ датих са $\mathcal{T}_n \stackrel{\text{def}}{=} \big(\int_{\delta\setminus\delta_n}A_t^*A_t\,d\mu(t)\big)^{1/2} \otimes \big(\int_{\delta\setminus\delta_n}B_tB_t^*\,d\mu(t)\big)^{1/2}$ за $n\in\mathbb{N}$, која је униформно ограничена када они делују на $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, са нормом $\|\mathcal{T}_n\|_{\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})\to\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})}$ која не превазилази $\big\|\int_{\delta\setminus\delta_n}A_t^*A_t\,d\mu(t)\big\|^{1/2}\big\|\int_{\delta\setminus\delta_n}B_tB_t^*\,d\mu(t)\big\|^{1/2}$. Прво ћемо разматрати случај када је $X$ оператор са коначним рангом, то јест када је он облика $\sum_{m=1}^{M}h_m{}^{\star}\otimes k_m$, где су $h_1,k_1,\cdots,h_{M},k_{M}\in\mathcal{H}$. У овом случају је

$$\left\|\mathcal{T}_n\left(\sum_{m=1}^{M}h_m{}^{\star}\otimes k_m\right)\right\|_1 = \left\|\sum_{m=1}^{M}\left(\left(\int_{\delta\setminus\delta_n}B_tB_t^*\,d\mu(t)\right)^{1/2}h_m\right)^{\star}\otimes\left(\left(\int_{\delta\setminus\delta_n}A_t^*A_t\,d\mu(t)\right)^{1/2}k_m\right)\right\|_1$$

$$\begin{aligned}&\leqslant\sum_{m=1}^{M}\left\|\left(\int_{\delta\setminus\delta_n}B_tB_t^*\,d\mu(t)\right)^{1/2}h_m\right\|\left\|\left(\int_{\delta\setminus\delta_n}A_t^*A_t\,d\mu(t)\right)^{1/2}k_m\right\|\\ &=\sum_{m=1}^{M}\left\langle\left(\int_{\delta\setminus\delta_n}B_tB_t^*\,d\mu(t)\right)h_m,h_m\right\rangle^{1/2}\left\langle\left(\int_{\delta\setminus\delta_n}A_t^*A_t\,d\mu(t)\right)k_m,k_m\right\rangle^{1/2}\to 0\end{aligned}$$

кад $n\to+\infty$, сагласно Леми 3.1(б). Како су оператори коначног ранга густи у $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, то поновна употреба принципа конвергенције из Banach-Steinhaus-ове теореме обезбеђује да $\|\mathcal{T}_nX\|_1\to 0$ кад $n\to+\infty$ за све $X\in\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$, што даје $\big\|\int_{\delta_n}A_tXB_t\,d\mu(t)-\int_{\delta}A_tXB_t\,d\mu(t)\big\|_1 \leqslant \|\mathcal{T}_nX\|_1\to 0$ кад $n\to+\infty$, према (3.37).

Доказ неједнакости (3.31) се заснива на

$$\left\|\int_\Omega A_tYB_t\,d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)*}} = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}\big(\widehat{A_n^*}\big)^*Y\widehat{B}_n\right\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{A_n^*}\big(\widehat{A_n^*}\big)^*\right)^{\frac12}Y\left(\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{B}_n\big(\widehat{B}_n\big)^*\right)^{\frac12}\right\|_{\Phi^{(p)*}} \tag{3.38}$$

$$= \left\|\left(\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\right)^{\frac12}Y\left(\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)\right)^{\frac12}\right\|_{\Phi^{(p)*}}. \tag{3.39}$$

Једнакост у (3.38) следи применом Parseval-ове једнакости (3.19), док је једнакост у (3.39) базирана на већ виђеној примени пара једнакости (3.26) и (3.36). Овде је поново искоришћено да је $\big\{\big(\widehat{A_n^*}\big)^*\big\}_{n=1}^{\infty}$ м.к.н.о. фамилија кад год је то и $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ (што је случај на који се ограничавамо без суштинског смањења општости), ради примене неједнакости

(2.4) из Леме 2.6 за оправдање неједнакости у (3.38). За доказ последњег својства везаног за норма конвергенцију у (г), искористимо исте фамилије трансформера $\{\mathcal{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ коришћене у доказу за (в), па доказ за (в) постаје и део доказа за (г) ако $\|\cdot\|_1$ заменимо са $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)*}}$ и $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ са $\mathfrak{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$, тако да за $Z \in \mathfrak{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ важи $\left\|\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t Z B_t \, d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)*}} \to 0$ кад $n \to +\infty$. Како $\mathfrak{C}_2(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}_p(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{C}_1(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}_{p^\star}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ сагласно инклузијама у (1.2) и чињеници да је $p^\star = p/(p-1) \leqslant 2$ за $p \geqslant 2$, одакле следи да $Y \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ и $\left\|\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t Y B_t \, d\mu(t)\right\|_2 \to 0$ кад $n \to +\infty$ према претходном делу (б) ове теореме.

Последњи део (д) у Теореми 3.6 говори заправо исто што и Теорема 1.15. У овом случају су и $\{\widehat{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\widehat{B}_n\}_{n=1}^{\infty}$ такође м.к.н.о. фамилије. □

Напомена 3.7. Алтернативно, преостали део доказа Теореме 3.6(а) након неједнакости (3.32) може се извести доказивањем да $\left\|\left(\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t^* A_t \, d\mu(t)\right)^{1/2} X\right\|_{\Phi^{(p)}} \to 0$ кад $n \to +\infty$ на основу [GK, Th. III.6.3], ако узмемо $A := X \in \mathfrak{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ и приметимо да $X_n := \left(\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t A_t^* \, d\mu(t)\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$ јако кад $n \to +\infty$, будући да је према Леми 3.1(б) за свако $h \in \mathcal{H}$

$$\|X_n h\|^2 = \langle X_n^2 h, h\rangle \leqslant \|X_n^2 h\|\|h\| = \left\|\int_{\delta\setminus\delta_n} A_t A_t^* \, d\mu(t) h\right\|\|h\| \to 0 \qquad \text{кад } n \to +\infty.$$

Коначан закључак да $\left\|\int_{\delta_n} A_t X B_t \, d\mu(t) - \int_{\delta} A_t X B_t \, d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)}} \to 0$ кад $n \to +\infty$ следи на основу процене (3.32).

Следећа теорема допуњује Теорему 3.6(г) у случају т.у.п. трансформера на $\mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$, код којих је спектар садржан у затвореном јединичном диску $\overline{\mathbb{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leqslant 1\}$. За такве операторе имамо следећу дефиницију, где је за Banach-ов простор $\mathcal{X}$ и $A \in \mathfrak{B}(\mathcal{X})$ са $r(A)$ означен спектрални радијус оператора $A$ дат са $r(A) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|A^n\|} (= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|})$.

**Дефиниција 3.8.** *Нека је $A \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ таква да $r\left(\int_\Omega A_t^* \otimes A_t \, d\mu(t)\right) \leqslant 1$. За фамилију $\mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{A_t\}_{t\in\Omega}$ и њој придружени трансформер $\int_\Omega A_t^* \otimes A_t \, d\mu(t)$ (који делује на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$), дефинишемо њима придружени* ***спектрални оператор дефекта****:*

$$\Delta_{\mathcal{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{s-}\lim_{\rho\nearrow 1}\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} \int_{\Omega^n} |A_{t_1} \cdots A_{t_n}|^2 \, d\mu^n(t_1, \cdots, t_n)\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{\text{s-}\lim_{\rho\nearrow 1}\left(I + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} \int_{\Omega^n} |A_{t_1} \cdots A_{t_n}|^2 \, d\mu^n(t_1, \cdots, t_n)\right)^{-1}}. \tag{3.40}$$

Добра дефинисаност $\Delta_{\mathcal{A}}$ ослања се на чињеницу да је за свако $\rho \in (0,1)$ ред $I + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{2n} \int_{\Omega^n} |A_{t_1} \cdots A_{t_n}|^2 \, d\mu^n(t_1, \cdots, t_n)$ апсолутно конвергентан у $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, с озбиром на то да је

$$\limsup_{n\to+\infty} \left\|\rho^{2n} \int_{\Omega^n} |A_{t_1} \cdots A_{t_n}|^2 \, d\mu^n(t_1, \cdots, t_n)\right\|^{\frac{1}{n}} = \rho^2 \limsup_{n\to+\infty} \left\|\left(\int_\Omega A_t^* \otimes A_t \, d\mu(t)\right)^n (I)\right\|^{\frac{1}{n}}$$
$$= \rho^2 \limsup_{n\to+\infty} \left\|\left(\int_\Omega A_t^* \otimes A_t \, d\mu(t)\right)^n\right\|^{\frac{1}{n}}_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})\to\mathfrak{B}(\mathcal{H})} \leqslant \rho^2 < 1,$$

што следи из формуле [JMĐ, (6)], која је специјалан случај формуле (13) у [J09, Th. 2.1], примењене на $\left(\int_\Omega A_t^*\otimes A_t\,d\mu(t)\right)^n = \int_{\Omega^n}(A_{t_1}\cdots A_{t_n})^*\otimes A_{t_1}\cdots A_{t_n}d\mu^n\ (t_1,\cdots,t_n)$ уместо на $\int_\Omega A_t^*\otimes A_t\,d\mu(t)$. Комбинујући претходно са тим да фамилија $\left\{\left(I+\sum_{n=1}^\infty \rho^{2n}\int_{\Omega^n}|A_{t_1}\cdots A_{t_n}|^2 d\mu^n(t_1,\cdots,t_n)\right)^{-1/2}\right\}_{0<\rho<1}$ представља фамилију јако опадајућих (по $\rho$) позитивних контракција, јер је $t\mapsto t^{-1/2}$ оператор опадајућа функција на $[0,+\infty)$, то последично ова фамилија јако конвегира кад $\rho\nearrow 1$, па је $\Delta_{\mathcal{A}}$ такође једна позитивна контракција.

Последња једнакост у (3.40) заснована је на чињенице да важи једнакост $\Delta_{\mathcal{A}}^2 = \mathrm{s}-\lim_{\rho\nearrow 1}\left(I+\sum_{n=1}^\infty\rho^{2n}\int_{\Omega^n}|A_{t_1}\cdots A_{t_n}|^2\,d\mu^n(t_1,\cdots,t_n)\right)^{-1}$, што је последица непрекидности множења оператора у односу на јаку конвергенцију оператора, тј. уколико је $\{C,D\}\cup\{C_\rho,D_\rho\}_{\rho\in(0,1)}$ фамилија оператора у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\lim_{\rho\nearrow 1}\left(\|C_\rho h-Ch\|+\|D_\rho h-Dh\|\right)=0$ за свако $h\in\mathcal{H}$, тада је и $\lim_{\rho\nearrow 1}C_\rho D_\rho h = CDh$ за свако $h\in\mathcal{H}$.

Напомена 3.9. Специјални случај Дефиниције 3.8 за $\Omega:=\mathbb{N}\cup\{0\}$ и бројачку меру $\mu$ на $\mathbb{N}\cup\{0\}$ и специјални случај Дефиниције 2.51 за $f\colon\mathbb{D}\to\mathbb{C}\colon z\mapsto\frac{1}{1-z}$ се поклапају, тј. важи $\Delta_{\mathcal{A}}=\Delta_{f,\mathcal{A}}$.

**Теорема 3.10.** ***Нека је*** $\Phi$ ***с.н. функција,*** $p\geqslant 2$, $X\in\mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ ***и*** $A,B^*\in L^2_G(\Omega,\mu,\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ ***такве да је бар једна од фамилија*** $\mathcal{A}\overset{\text{def}}{=}\{A_t\}_{t\in\Omega}$ ***и*** $\mathcal{B}^*\overset{\text{def}}{=}\{B_t^*\}_{t\in\Omega}$ ***м.к.н.о. фамилија.***
(а) ***Ако је, додатно,***

$$\begin{aligned}\inf_{n\in\mathbb{N}}\left\|\int_{\Omega^n}|A_{t_1}\cdots A_{t_n}|^2\,d\mu^n(t_1,\cdots,t_n)\right\|^{\frac1n}&\leqslant 1,\\ \inf_{n\in\mathbb{N}}\left\|\int_{\Omega^n}\left|B_{t_1}^*\cdots B_{t_n}^*\right|^2\,d\mu^n(t_1,\cdots,t_n)\right\|^{\frac1n}&\leqslant 1\end{aligned}\tag{3.41}$$

$$\textbf{\textit{и}}\quad \sum_{n=1}^\infty\int_{\Omega^n}\|A_{t_1}\cdots A_{t_n}h\|^2+\|B_{t_1}^*\cdots B_{t_n}^*h\|^2\,d\mu^n(t_1,\cdots,t_n)<+\infty\tag{3.42}$$

***за све*** $h\in\mathcal{H}$, ***тада***

$$\|X\|_{\Phi^{(p)*}}\leqslant\left\|\Delta_{\mathcal{A}}^{-1}\Big(X-\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\Big)\Delta_{\mathcal{B}^*}^{-1}\right\|_{\Phi^{(p)*}}.\tag{3.43}$$

(б) ***Специјално за све*** $\omega\in\mathbb{D}$ ***је под условима у*** (3.41)

$$\begin{aligned}\|X\|_{\Phi^{(p)*}}\leqslant&\left\|\left(I+\sum_{n=1}^\infty|\omega|^n\int_{\Omega^n}\left|A_{t_1}\cdots A_{t_n}\right|^2d\mu^n(t_1,\cdots,t_n)\right)^{1/2}\Big(X-\omega\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\Big)\right.\\ &\times\left.\left(I+\sum_{n=1}^\infty|\omega|^n\int_{\Omega^n}\left|B_{t_1}^*\cdots B_{t_n}^*\right|^2d\mu^n(t_1,\cdots,t_n)\right)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}}.\end{aligned}\tag{3.44}$$

(в) ***Додатно, ако је*** $\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\leqslant I$ ***и*** $\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)\leqslant I$, ***тада***

$$\left\|\Big(I-\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\Big)^{1/2}X\Big(I-\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)\Big)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}}\leqslant\left\|X-\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)*}}.\tag{3.45}$$

$\triangle$ За свако $n\in\mathbb{N}$ и све $t_1,\cdots,t_n\in\Omega$ уведимо о.в. функције $A^{|n\rangle}(t_1,\cdots,t_n)\overset{\text{def}}{=}A_{t_1}\cdots A_{t_n}$, $A^{|n\rangle *}(t_1,\cdots,t_n)\overset{\text{def}}{=}A_{t_n}^*\cdots A_{t_1}^*$, и слично, уведимо $B^{|n\rangle}(t_1,\cdots,t_n)\overset{\text{def}}{=}B_{t_1}\cdots B_{t_n}$

и $B^{|n\rangle *}(t_1,\cdots,t_n) \stackrel{\text{def}}{=} B^*_{t_n}\cdots B^*_{t_1}$. Према [JMĐ, Lemma 2.1], услови (3.41) обезбеђују да $\int_\Omega A^*\otimes A\,d\mu$ и $\int_\Omega B\otimes B^*\,d\mu$, када делују на $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, имају спектар садржан у $\overline{\mathbb{D}}$. Ако дефинишемо $\mathcal{I}_{A,B} \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega A_t\otimes B_t\,d\mu(t)$, и сагласно томе нека је $\mathcal{I}_{A^*,A} \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega A_t^*\otimes A_t\,d\mu(t)$ и $\mathcal{I}_{B,B^*} \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega B_t\otimes B_t^*\,d\mu(t)$, тада важи $\mathcal{I}^n_{A,B}X=\int_{\Omega^n}A^{|n\rangle}XB^{|n\rangle}\,d\mu^n$, $\mathcal{I}^n_{A^*,A}(I)=\int_{\Omega^n}A^{|n\rangle *}A^{|n\rangle}\,d\mu^n$ и $\mathcal{I}^n_{B,B^*}(I)=\int_{\Omega^n}B^{|n\rangle}B^{|n\rangle *}d\mu^n$. За све $X\in\mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ је

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{I}^n_{A,B}X\right\|_{\Phi^{(p)*}} &\leqslant \left\|\left(\mathcal{I}^n_{A^*,A}(I)\right)^{\frac12}X\left(\mathcal{I}^n_{B,B^*}(I)\right)^{\frac12}\right\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \left\|\mathcal{I}^n_{A^*,A}(I)\right\|^{\frac12}\left\|\mathcal{I}^n_{B,B^*}(I)\right\|^{\frac12}\|X\|_{\Phi^{(p)*}}\\ &= \left\|\int_{\Omega^n}A^{|n\rangle *}A^{|n\rangle}\,d\mu^n\right\|^{\frac12}\left\|\int_{\Omega^n}B^{|n\rangle}B^{|n\rangle *}\,d\mu^n\right\|^{\frac12}\|X\|_{\Phi^{(p)*}},\end{aligned}$$

па је према (3.41)

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\mathcal{I}^n_{A,B}\right\|^{1/n}_{\mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})\to\mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})} \leqslant \lim_{n\to+\infty}\left(\left\|\int_{\Omega^n}|A^{|n\rangle}|^2\,d\mu^n\right\|^{1/n}\left\|\int_{\Omega^n}|B^{|n\rangle *}|^2\,d\mu^n\right\|^{1/n}\right)^{1/2}\leqslant 1,$$

што показује да је спектар рестрикције $\mathcal{I}_{A,B}$ на $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ садржан у $\overline{\mathbb{D}}$. Даље

$$\begin{aligned}\Delta_{\mathcal{A}}^{-2} = \mathrm{s}-\lim_{\rho\nearrow 1}\Delta^{-2}_{\rho\mathcal{A}} &= I+\mathrm{s}-\lim_{\rho\nearrow 1}\sum_{n=1}^\infty \rho^{2n}\int_{\Omega^n}|A_{t_1}\cdots A_{t_n}|^2 d\mu^n(t_1,\cdots,t_n)\\ &= I+\sum_{n=1}^\infty\int_{\Omega^n}|A_{t_1}\cdots A_{t_n}|^2d\mu^n(t_1,\cdots,t_n)\end{aligned}$$

представља ограничен, позитиван и инвертибилан оператор, чији је инверз такође ограничен, као и да $\Delta^{-2}_{\mathcal{B}^*}=I+\sum_{n=1}^\infty\int_{\Omega^n}|B^*_{t_1}\cdots B^*_{t_n}|^2\ d\mu^n(t_1,\cdots,t_n)\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, што је омогућено условом (3.42). За свако $0\leqslant\rho<1$ важи и формула

$$\left(I-\rho^2\int_\Omega A_t\otimes B_t\,d\mu(t)\right)^{-1}=\sum_{n=0}^\infty\rho^{2n}\left(\int_\Omega A_t\otimes B_t\,d\mu(t)\right)^n=\sum_{n=0}^\infty\rho^{2n}\int_{\Omega^n}A^{|n\rangle}\otimes B^{|n\rangle}d\mu^n. \quad (3.46)$$

На основу развоја (3.46) и претходне Теореме 3.6(г) даље следи

$$\begin{aligned}\|X\|_{\Phi^{(p)*}} &= \left\|\left(\sum_{n=0}^\infty\rho^{2n}\left(\int_\Omega A_t\otimes B_t\,d\mu(t)\right)^n\left(X-\rho^2\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\right)\right)\right\|_{\Phi^{(p)*}}\\ &= \left\|\sum_{n=0}^\infty\rho^{2n}\int_{\Omega^n}A^{|n\rangle}\Delta_{\rho\mathcal{A}}\Delta^{-1}_{\rho\mathcal{A}}\left(X-\rho^2\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\right)\Delta^{-1}_{\rho\mathcal{B}^*}\Delta_{\rho\mathcal{B}^*}B^{|n\rangle}\,d\mu^n\right\|_{\Phi^{(p)*}}\\ &\leqslant \left\|\left(\Delta_{\rho\mathcal{A}}\sum_{n=0}^\infty\rho^{2n}\int_{\Omega^n}A^{|n\rangle *}A^{|n\rangle}\,d\mu^n\Delta_{\rho\mathcal{A}}\right)^{1/2}\Delta^{-1}_{\rho\mathcal{A}}\left(X-\rho^2\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\right)\Delta^{-1}_{\rho\mathcal{B}^*}\right.\\ &\quad\times\left.\left(\Delta_{\rho\mathcal{B}^*}\sum_{n=0}^\infty\rho^{2n}\int_{\Omega^n}B^{|n\rangle}B^{|n\rangle *}\,d\mu^n\Delta_{\rho\mathcal{B}^*}\right)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}}\\ &= \left\|\Delta^{-1}_{\rho\mathcal{A}}\left(X-\rho^2\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\right)\Delta^{-1}_{\rho\mathcal{B}^*}\right\|_{\Phi^{(p)*}}\leqslant\left\|\Delta^{-1}_{\mathcal{A}}\left(X-\rho^2\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\right)\Delta^{-1}_{\mathcal{B}^*}\right\|_{\Phi^{(p)*}}.\end{aligned}$$

Како су све $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)*}}$ норме такође и у.и. норме, то су према формули (1.9) полунепрекидне одоздо, што омогућава завршетак доказа (3.43) користећи

$$\left|\left\|X-\rho^2\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)*}}-\left\|X-\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)*}}\right| \leqslant (1-\rho^2)\left\|\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)*}}\to 0 \qquad \text{кад } \rho\nearrow 1.$$

За доказ неједнакости (3.44), полазимо од поларне декомпозиције $\omega=e^{i\theta}|\omega|$ за неко $\theta\in[0,2\pi)$ и онда применимо (3.43) на фамилију $|\omega|^{1/2}\mathcal{A}:=\{|\omega|^{1/2}A_t\}_{t\in\Omega}$ (односно $e^{i\theta}|\omega|^{1/2}\mathcal{B}^*:=\{e^{i\theta}|\omega|^{1/2}B_t^*\}_{t\in\Omega}$) уместо на $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ (односно $\{B_t^*\}_{t\in\Omega}$), за које је $\Delta^{-1}_{|\omega|^{1/2}\mathcal{A}}=\big(I+\sum_{n=1}^\infty|\omega|^n\int_{\Omega^n}|A^{|n\rangle}|^2d\mu^n\big)^{1/2}$ (односно $\Delta^{-1}_{e^{i\theta}|\omega|^{1/2}\mathcal{B}^*}=\big(I+\sum_{n=1}^\infty|\omega|^n\int_{\Omega^n}|B^{|n\rangle*}|^2d\mu^n\big)^{1/2}$).

За доказ (3.45), приметимо прво да једнакост (3.46) даље даје

$$X=\sum_{n=0}^\infty\rho^n\int_{\Omega^n}A^{|n\rangle}\Big(X-\rho\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\Big)B^{|n\rangle}d\mu^n, \tag{3.47}$$

па још само остаје да се докаже следећи низ неједнакости и једнакости:

$$\begin{aligned}
&\left\|\Big(I-\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\Big)^{1/2}X\Big(I-\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)\Big)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&\leqslant\liminf_{\rho\nearrow1}\left\|\Big(I-\rho\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\Big)^{1/2}X\Big(I-\rho\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)\Big)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}} &(3.48)\\
&=\liminf_{\rho\nearrow1}\left\|\Big(I-\rho\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\Big)^{1/2}\sum_{n=0}^\infty\rho^n\int_{\Omega^n}A^{|n\rangle}\Big(X-\rho\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\Big)B^{|n\rangle}d\mu^n\right.\\
&\qquad\left.\times\Big(I-\rho\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)\Big)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}} &(3.49)\\
&\leqslant\liminf_{\rho\nearrow1}\left\|\Big(\sum_{n=0}^\infty\rho^n\int_{\Omega^n}A^{|n\rangle*}\Big(I-\rho\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\Big)A^{|n\rangle}d\mu^n\Big)^{1/2}\Big(X-\rho\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\Big)\right.\\
&\qquad\left.\times\Big(\sum_{n=0}^\infty\rho^n\int_{\Omega^n}B^{|n\rangle}\Big(I-\rho\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)\Big)B^{|n\rangle*}d\mu^n\Big)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}} &(3.50)\\
&=\liminf_{\rho\nearrow1}\left\|X-\rho\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)*}}=\left\|X-\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)*}}. &(3.51)
\end{aligned}$$

Неједнакост у (3.48) се заснива на неједнакости (3.46), у комбинацији са неједнакостима $I-\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\leqslant I-\rho\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)$ и $I-\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)\leqslant I-\rho\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)$ за све $\rho\in(0,1)$. Једнакост у (3.49) се добија применом формуле (3.47), док се неједнакост (3.50) добија применом Теореме 3.6(г) на $\bigoplus_{n=0}^\infty\rho^{n/2}A^{|n\rangle},\bigoplus_{n=0}^\infty\rho^{n/2}B^{|n\rangle*}\in\bigoplus_{n=0}^\infty L^2_G(\Omega^n,\mu^n)$ уместо на $A,B^*\in L^2_G(\Omega,\mu,\mathfrak{B}(\mathcal{H}))$, као и на $Y:=X-\rho\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)$. Прва једнакост у (3.51) се добија из формуле $Z=\sum_{n=0}^\infty\rho^n\int_{\Omega^n}A^{|n\rangle*}\big(Z-\rho\int_\Omega A_t^*ZA_t\,d\mu(t)\big)A^{|n\rangle}d\mu^n=\sum_{n=0}^\infty\rho^n\int_{\Omega^n}B^{|n\rangle}\big(Z-\rho\int_\Omega B_tZB_t^*\,d\mu(t)\big)B^{|n\rangle*}d\mu^n$ за све $Z\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, што је омогућено тиме јер важе процене $\big\|\int_\Omega\rho A_t^*\otimes A_t\,d\mu(t)\big\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})\to\mathfrak{B}(\mathcal{H})}=\rho\,\big\|\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\big\|\leqslant\rho<1$ и $\big\|\int_\Omega\rho B_t\otimes B_t^*\,d\mu(t)\big\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})\to\mathfrak{B}(\mathcal{H})}=\rho\big\|\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)\big\|\leqslant\rho<1$, сагласно (13) из [J09, Th. 2.1]. Последња једнакост у (3.51) следи из $(1-\rho)\big\|\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t)\big\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant (1-\rho)\big\|\big(\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\big)^{1/2}X\left(\int_\Omega B_tB_t^*\,d\mu(t)\right)^{1/2}\big\|_{\Phi^{(p)*}}$ $\leqslant (1-\rho)\|X\|_{\Phi^{(p)*}}$. □

Напомена 3.11. Приметимо да у случају $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)*}}$ норме неједнакост (3.45) проширује [J05, Th. 4.1] на ситуацију када фамилије $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ и $\{B_t^*\}_{t\in\Omega}$ нису обе нужно нормалне. Специјално, у случају када је скуп $\Omega$ једночлан и оператори $A, B$ су контракције, такви да је бар један од њих нормалан, тада неједнакост (3.45) говори да је $\big\|\sqrt{I-A^*A}\,X\sqrt{I-BB^*}\big\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \|X-AXB\|_{\Phi^{(p)*}}$, што проширује [J98, Th. 2.3] на сличан начин.
Приметимо и то да према [JMĐ, Lemma 2.2] $\Delta_{\mathcal{A}}$ (односно $\Delta_{\mathcal{B}^*}$) у неједнакости (3.43) постаје $\big(I-\int_\Omega A_t^*A_t\,d\mu(t)\big)^{1/2}$ (односно $\big(I-\int_\Omega B_t^*B_t\,d\mu(t)\big)^{1/2}$) уколико је $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ (односно $\{B_t^*\}_{t\in\Omega}$) м.к.н.о. фамилија, јер су тада $\Delta_{\mathcal{A}}$ и $\Delta_{\mathcal{B}^*}$ инвертибилни сагласно услову (3.42).

# 3 Оператор вредносна Fourier-ова трансформација и Fourier-ови трансформери

У овој одељку навешћемо примене Теореме 3.6 на Fourier-ове трансформере, који представљају поткласу т.у.п. трансформера индукованих Fourier-овом трансформацијом комплексне Lebesgue мерљиве функције на $\mathbb{R}$ и уопштене деривације $A\otimes I + I\otimes B\colon \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})\colon X\mapsto AX+XB$.

**Дефиниција 3.12.** *Нека је $\mu$ (односно $f$) комплексна Borel-ова мера (односно Lebesgue мерљива функција) на $\mathbb{R}$ и $A, B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ако је функција $t\mapsto e^{itA}$ (односно $t\mapsto f(t)e^{itA}$) Гељфанд интеграбилна по мери $|\mu|$ (односно по Lebesque-овој мери) на $\mathbb{R}$, тада са*

$$\hat{\mu}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}\mu(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{itA}\,d\mu(t), \quad \textit{односно} \qquad \hat{f}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{itA}f(t)\,dt,$$

*означавамо **оператор вредносну Fourier-ову трансформацију** мере $\mu$ (односно функције $f$) срачунате у $A$. Слично, уколико је за свако $X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ функција $t\mapsto e^{itA}Xe^{itB}$ (односно $t\mapsto f(t)\,e^{itA}Xe^{itB}$) Гељфанд интеграбилна по мери $|\mu|$ (односно по Lebesque-овој мери) на $\mathbb{R}$, тада са*

$$\hat{\mu}(A\otimes I+I\otimes B) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}\mu(A\otimes I+I\otimes B) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{it(A\otimes I+I\otimes B)}\,d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itA}\otimes e^{itB}\,d\mu(t)$$
$$\hat{f}(A\otimes I+I\otimes B) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}f(A\otimes I+I\otimes B) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} e^{it(A\otimes I+I\otimes B)}f(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} e^{itA}\otimes e^{itB}f(t)\,dt$$

*означавамо **Fourier-ов трансформер** мере $\mu$ (односно функције $f$) за уопштену деривацију $A\otimes I+I\otimes B$.*

Последње једнакости у претходне две дефиниције последице су идентитета
$$e^{it(A\otimes I+I\otimes B)} = e^{itA\otimes I+I\otimes itB} = e^{itA\otimes I}e^{I\otimes itB} = (e^{itA}\otimes I)(I\otimes e^{itB}) = e^{itA}\otimes e^{itB},$$
заснованих на формули $e^{C+D}=e^Ce^D$ за међусобно комутирајуће операторе $C, D\in\mathcal{B}(\mathcal{X})$ на Banach-овом простору $\mathcal{X}$, примењеној на $\mathcal{X}:=\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $C:=itA\otimes I$ и $D:=I\otimes itB$.

**Теорема 3.13.** ***Нека је $\Phi$ с.н. функција,** $p\geqslant 2$, $A, B$ **из** $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ **и** $f, g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ **Lebesgue мерљиве функције.***

(а) ***Ако је*** $\int_{\mathbb{R}}\|e^{itA}h\|^2|f(t)|^2+\|e^{-itB^*}h\|^2|g(t)|^2\,dt<+\infty$ ***за све*** $h\in\mathcal{H}$ ***и*** $A$ ***или*** $B$ ***је нормалан оператор, тада је за све*** $Y\in\mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned}&\Big\|\int_{\mathbb{R}}e^{itA}Ye^{itB}f(t)g(t)\,dt\Big\|_{\Phi^{(p)*}}\\&\quad\leqslant\Big\|\Big(\int_{\mathbb{R}}e^{-itA^*}e^{itA}|f(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}Y\Big(\int_{\mathbb{R}}e^{itB}e^{-itB^*}|g(t)|^2\,dt\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi^{(p)*}},\quad \textbf{\textit{тј.}}\qquad(3.52)\\&\big\|\mathcal{F}(fg)(A\otimes I+I\otimes B)Y\big\|_{\Phi^{(p)*}}\\&\quad\leqslant\big\|\sqrt{\mathcal{F}(|f|^2)(-A^*\otimes I+I\otimes A)(I)}Y\sqrt{\mathcal{F}(|g|^2)(B\otimes I-I\otimes B^*)(I)}\big\|_{\Phi^{(p)*}}.\end{aligned}$$

(б) ***Ако*** $X\in\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ ***и*** $\int_{\mathbb{R}}\|e^{itA}h\|^2|f(t)|^2+\|e^{itB}h\|^2|g(t)|^2\,dt<+\infty$ ***за свако*** $h\in\mathcal{H}$, ***тада***

$$\begin{aligned}&\big\|\mathcal{F}(fg)(A\otimes I+I\otimes B)X\big\|_2\\&\quad\leqslant\big\|\sqrt{\mathcal{F}(|f|^2)(-A^*\otimes I+I\otimes A)(I)}\,X\big\|_2\big\|\mathcal{F}(|g|^2)(-B^*\otimes I+I\otimes B)(I)\big\|^{1/2},\qquad(3.53)\end{aligned}$$

***док ако је*** $X\in\mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ ***и*** $\int_{\mathbb{R}}\|e^{-itA^*}h\|^2|f(t)|^2+\|e^{-itB^*}h\|^2|g(t)|^2\,dt<+\infty$ ***за све*** $h\in\mathcal{H}$, ***тада је***

$$\begin{aligned}&\big\|\mathcal{F}(fg)(A\otimes I+I\otimes B)X\big\|_2\\&\quad\leqslant\big\|\mathcal{F}(|f|^2)(A\otimes I-I\otimes A^*)(I)\big\|^{1/2}\big\|X\sqrt{\mathcal{F}(|g|^2)(B\otimes I-I\otimes B^*)(I)}\big\|_2.\qquad(3.54)\end{aligned}$$

$\triangle$ Ако је $\mu$ Lebesgue-ова мера на $\Omega:=\mathbb{R}$, $A_t:=f(t)e^{itA}$ и $B_t:=g(t)e^{itB}$ за све $t\in\mathbb{R}$, тада примена неједнакости (3.31) из Теореме 3.6(г) доказује неједнакост (3.52) у делу (а) Теореме 3.13.
У специјалном случају $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}:=\|\cdot\|_2$, ако је $\int_{\mathbb{R}}\|e^{itA}h\|^2|f(t)|^2+\|e^{itB}h\|^2|g(t)|^2\,dt<+\infty$ за све $h\in\mathcal{H}$, тада део (б) Теореме 3.6 обезбеђује испуњеност услова за важење неједнакости (3.27), која даље доказује (3.53). Слично, део (б) Теореме 3.6 обезбеђује важење неједнакости (3.28) због испуњења услова $\int_{\mathbb{R}}\|e^{-itA^*}h\|^2|f(t)|^2+\|e^{-itB^*}h\|^2|g(t)|^2\,dt<+\infty$ за све $h\in\mathcal{H}$, па важи и (3.54). $\square$

**Дефиниција 3.14.** *Оператор $A\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ћемо звати* ***дисипативним*** *ако је* $\operatorname{Im}A\overset{\text{def}}{=}A_{\Im}\overset{\text{def}}{=}\frac{A-A^*}{2i}\geqslant 0$.

Уз коришћење ознаке $\mathbb{R}_+:=[0,+\infty)$, за дисипативне операторе важи следећа неједнакост за уопштене деривације у Q* идеалима.

**Теорема 3.15.** ***Нека је*** $p\geqslant 2$, $\Phi$ ***с.н. функција,*** $\mu$ ***комплексна Borel-ова мера на*** $\mathbb{R}_+$ ***са тоталном варијацијом*** $|\mu|(\mathbb{R}_+)\leqslant 1$ ***и нека су*** $A,B,X\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ***такви да су*** $A,B$ ***дисипативни и бар један од њих је нормалан. Ако*** $AX-XB\in\mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$, ***тада***

$$\begin{aligned}&\big\|\sqrt{iA^*-iA}\,\big(\hat{\mu}(A)X-X\hat{\mu}(B)\big)\sqrt{iB^*-iB}\big\|_{\Phi^{(p)*}}\\&\quad\leqslant\Big\|\sqrt{I-\big|\hat{\mu}(A)\big|^2}(AX-XB)\sqrt{I-\big|\hat{\mu}(B)^*\big|^2}\Big\|_{\Phi^{(p)*}}.\qquad(3.55)\end{aligned}$$

$\triangle$ Доказ за (3.55) се заснива на следећем низу једнакости и неједнакости:

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sqrt{iA^*-iA}\,\big(\hat\mu(A)X-X\hat\mu(B)\big)\sqrt{iB^*-iB}\right\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&=2\left\|\sqrt{A_\Im}\,\big(\hat\mu(A)X-X\hat\mu(B)\big)\sqrt{B_\Im}\right\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&=2\left\|\sqrt{A_\Im}\bigg(\int_{\mathbb{R}_+}\big(e^{itA}X-Xe^{itB}\big)\,d\mu(t)\bigg)\sqrt{B_\Im}\right\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&=2\left\|i\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t\sqrt{A_\Im}e^{isA}(AX-XB)e^{i(t-s)B}\sqrt{B_\Im}\,h(t)\,ds\,d|\mu|(t)\right\|_{\Phi^{(p)*}} \qquad (3.56)\\
&\leqslant 2\left\|\bigg(\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t e^{-isA^*}A_\Im e^{isA}\,ds\,d|\mu|(t)\bigg)^{1/2}(AX-XB)\right.\\
&\qquad\left.\times\bigg(\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t e^{i(t-s)B}B_\Im e^{i(s-t)B^*}\,ds\,d|\mu|(t)\bigg)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}} \qquad (3.57)\\
&=\left\|\bigg(\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t e^{-isA^*}(iA^*-iA)e^{isA}\,ds\,d|\mu|(t)\bigg)^{1/2}(AX-XB)\right.\\
&\qquad\left.\times\bigg(\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t e^{isB}(-iB+iB^*)e^{-isB^*}\,ds\,d|\mu|(t)\bigg)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&=\left\|\bigg(-\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t \tfrac{d}{ds}\big(e^{-isA^*}e^{isA}\big)\,ds\,d|\mu|(t)\bigg)^{1/2}(AX-XB)\bigg(-\int_{\mathbb{R}_+}\int_0^t \tfrac{d}{ds}\big(e^{isB}e^{-isB^*}\big)\,ds\,d|\mu|(t)\bigg)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&=\left\|\bigg(\int_{\mathbb{R}_+}\big(I-e^{-itA^*}e^{itA}\big)\,d|\mu|(t)\bigg)^{1/2}(AX-XB)\bigg(\int_{\mathbb{R}_+}\big(I-e^{itB}e^{-itB^*}\big)\,d|\mu|(t)\bigg)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}} \qquad (3.58)\\
&\leqslant\left\|\bigg(I-\bigg|\int_{\mathbb{R}_+}e^{itA}\,d\mu(t)\bigg|^2\bigg)^{1/2}(AX-XB)\bigg(I-\bigg|\int_{\mathbb{R}_+}e^{-itB^*}\,d\mu(t)\bigg|^2\bigg)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}} \qquad (3.59)\\
&=\left\|\sqrt{I-|\hat\mu(A)|^2}(AX-XB)\sqrt{I-|\hat\mu(B)^*|^2}\right\|_{\Phi^{(p)*}}.
\end{aligned}
$$

Једнакост у (3.56) се добија сагласно Newton[4]-Leibniz[5]-овој формули, с обзиром да је $\frac{d}{ds}\big(e^{isA}Xe^{i(t-s)B}\big)=ie^{isA}(AX-XB)e^{i(t-s)B}$, где је са $h:=\frac{d\mu}{d|\mu|}$ означен Radon[6]–Nikodym[7]-ов извод комплексне мере $\mu$ по мери $|\mu|$, који задовољава $|h(t)|=1$ за $[|\mu|]$ с.с. $t\in\mathbb{R}_+$. Неједнакост (3.57) је последица примене Cauchy-Schwarz-ове неједнакости (3.31) на $AX-XB$ уместо на $X,\Omega:=\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, као и на производ меру $|\mu|\times m$ уместо на $\mu$, где $m$ означава Lebesgue-ову меру на $\mathbb{R}_+$, $A_{t,s}:=\sqrt{A_\Im}\,e^{isA}\chi_{[0,t]}(s)$ и $B_{t,s}:=e^{i(t-s)B}\sqrt{B_\Im}\,h(t)\,\chi_{[0,t]}(s)$ за све $s,t\in\mathbb{R}_+$, а $\chi_{[0,t]}$ је карактеристична функција одсечка $[0,t]$. Једнакост у (3.58) је поново заснована на двострукој примени Newton-Leibniz-ове формуле, док је неједнакост у (3.59) последица својства двоструке монотоности (1.8) и неједнакости $\big|\int_{\mathbb{R}_+}e^{itA}\,d\mu(t)\big|^2=\big|\int_{\mathbb{R}_+}e^{itA}\,h(t)\,d|\mu|(t)\big|^2\leqslant\big\|\int_{\mathbb{R}_+}|h(t)|^2I\,d|\mu|(t)\big\|\int_{\mathbb{R}_+}e^{-itA^*}e^{itA}\,d|\mu|(t)\leqslant\int_{\mathbb{R}_+}e^{-itA^*}e^{itA}\,d|\mu|(t)$ и $\big|\int_{\mathbb{R}_+}e^{-itB^*}\,d\mu(t)\big|^2\leqslant\int_{\mathbb{R}_+}e^{itB}e^{-itB^*}d|\mu|(t)$, добијених помоћу операторне Cauchy-Schwarz-ове неједнакости (3.2). □

[4]Њутн–Isaac Newton (1642–1727)
[5]Лајбниц–Gottfred Willhelm Leibniz (1646–1716)
[6]Радон–Johann Karl August Radon (1887–1956)
[7]Никодим–Otton Martin Nikodym (1887–1974)

# Глава 4

# Операторне и норма неједнакости Grüss-Landau-овог типа у идеалима компактних оператора

Полазећи од постојећих Cauchy-Schwarz-ових неједнакости за елементарне трансформере и т.у.п. трансформере, у овој глави разматраће се примене различитих типова Cauchy-Schwarz-ових неједнакости на операторне и норма неједнакости Grüss-Landau-овог типа.

Позната Grüss-Landau-ова неједнакост каже да је за вероватносну меру $\mu$ на простору $\Omega$ и мерљиве комплексне функције $f$ и $g$ на $\Omega$

$$\left|\int_\Omega fg\,d\mu-\int_\Omega f\,d\mu\int_\Omega g\,d\mu\right|\leqslant\sqrt{\int_\Omega |f|^2\,d\mu-\left|\int_\Omega f\,d\mu\right|^2}\sqrt{\int_\Omega |g|^2\,d\mu-\left|\int_\Omega g\,d\mu\right|^2}=:R. \tag{4.1}$$

Специјално, ако су $f$ и $g$ ограничене реалне функције на $\Omega$, онда се израз на десној страни од (4.1) може даље проценити са

$$R\leqslant\left(\left(\Phi-\int_\Omega f\,d\mu\right)\left(\int_\Omega f\,d\mu-\varphi\right)\left(\Gamma-\int_\Omega g\,d\mu\right)\left(\int_\Omega g\,d\mu-\gamma\right)\right)^{1/2}\leqslant\frac{1}{4}(\Phi-\varphi)(\Gamma-\gamma), \tag{4.2}$$

где је $\varphi:=\operatorname{inf\,ess}_\Omega f(\stackrel{\text{def}}{=}-\operatorname{sup\,ess}_\Omega(-f))$, $\Phi:=\operatorname{sup\,ess}_\Omega f$, $\gamma:=\operatorname{inf\,ess}_\Omega g$ и $\Gamma:=\operatorname{sup\,ess}_\Omega g$.

Специјални случај неједнакости (4.1) и (4.2) за нормализовану Lebesgue-ову меру на $\Omega:=[a,b]$ (за коју је $d\mu(t)=\frac{dt}{b-a}$), је суштински доказан од стране G. Grüss-а у раду [G35]. E. Landau је у [Lan35] реформулисао претходно представљене резултате, примењујући Cauchy-Schwarz-ове неједнакости у доказу (4.1). Алтернативна примена Cauchy-Schwarz-ове неједнакости, овог пута базирана на идентитету Коркиновог[1] типа из [MPF, (7.1) p. 243], употребљена је у [MPF, (7.1) p. 243] ради доказивања неједнакости (4.1), из које директно следи и неједнакост (4.2). Такође, профињење неједнакости (4.1) дато је у Леми 4.1 у случају када је $\Omega$ коначан скуп, а $f$ и $g$ су оператор вредносне функције, док се друге генерализације Grüss-Landau-ове неједнакости (4.1) и (4.2) могу наћи у радовима [JKM, J19, MM], као и тамошњим референцама.

[1]Коркин–Александр Николаевич Коркин (1837–1908)

# 1 Профињене Grüss-Landau-ове неједнакости за елементарне операторе

Овај одељак почињемо идентитетом са експлицитно израженим сабирком којим се изједначава лева и десна страна у операторној Grüss-Landau-овој неједнакости за елементарне операторе.

**Лема 4.1.** ***Ако*** $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in (0,1]$ ***задовољавају*** $\sum_{n=1}^N \alpha_n = 1$ ***за неко*** $N \in \mathbb{N}$, ***ако*** $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и*** $\{A_1, \ldots, A_N\}$ ***и*** $\{B_1, \ldots, B_N\}$ ***су фамилије у*** $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и ако за*** $c > 0$ ***важи*** $c \geqslant \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left| \sum_{n=1}^N A_n \right|^2 \right\|^{\frac{1}{2}}$, ***тада је***

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left( \sum_{n=1}^N A_n^* \right) X \left( \sum_{n=1}^N B_n \right) \right|^2 \\
&+ \sum_{1 \leqslant m < n \leqslant N} \alpha_m \alpha_n \Bigg| (\alpha_m^{-1} A_m - \alpha_n^{-1} A_n) \left( cI + \left( c^2 I - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* A_n + \left| \sum_{n=1}^N A_n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \\
&\times \left( \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left( \sum_{n=1}^N A_n^* \right) X \left( \sum_{n=1}^N B_n \right) \right) - cX(\alpha_m^{-1} B_m - \alpha_n^{-1} B_n) \Bigg|^2 \\
&= c^2 \left( \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} B_n^* X^* X B_n - \left| X \sum_{n=1}^N B_n \right|^2 \right),
\end{aligned} \tag{4.3}$$

***специјално, за свако*** $c \geqslant \left\| N \sum_{n=1}^N A_n^* A_n - \left| \sum_{n=1}^N A_n \right|^2 \right\|^{\frac{1}{2}}$ ***је***

$$\begin{aligned}
&\left| N \sum_{n=1}^N A_n^* X B_n - \left( \sum_{n=1}^N A_n^* \right) X \left( \sum_{n=1}^N B_n \right) \right|^2 \\
&+ \sum_{1 \leqslant m < n \leqslant N} \Bigg| (A_m - A_n) \left( cI + \left( c^2 I - N \sum_{n=1}^N A_n^* A_n + \left| \sum_{n=1}^N A_n \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \\
&\times \left( N \sum_{n=1}^N A_n^* X B_n - \left( \sum_{n=1}^N A_n^* \right) X \left( \sum_{n=1}^N B_n \right) \right) - cX(B_m - B_n) \Bigg|^2 \\
&= c^2 \left( N \sum_{n=1}^N B_n^* X^* X B_n - \left| X \sum_{n=1}^N B_n \right|^2 \right).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

△ За доказ користимо следећи специјалан случај идентита (2.3) Коркиновог типа из [JKM] за вероватносну меру $\mu$ дефинисану са $\mu(\{n\}) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_n$ за све $1 \leqslant n \leqslant N$, примењеног на операторе $\frac{A_n}{\alpha_n}$ и $\frac{B_n}{\alpha_n}$ уместо на $A_n$ и $B_n$ редом:

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \leqslant m < n \leqslant N} \alpha_m \alpha_n \big( \alpha_m^{-1} A_m^* - \alpha_n^{-1} A_n^* \big) X \big( \alpha_m^{-1} B_m - \alpha_n^{-1} B_n \big) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^N \alpha_m \alpha_n \big( \alpha_m^{-1} A_m^* - \alpha_n^{-1} A_n^* \big) X \big( \alpha_m^{-1} B_m - \alpha_n^{-1} B_n \big) \\
&= \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left( \sum_{n=1}^N A_n^* \right) X \left( \sum_{n=1}^N B_n \right).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Уводећи операторе $C \stackrel{\text{def}}{=} \Big(cI + \Big(c^2 I - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n + \Big|\sum_{n=1}^{N} A_n\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^{-1}$ и $D \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \Big(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\Big) X \Big(\sum_{n=1}^{N} B_n\Big)$, лева страна од (4.3) се може изразити као

$$
\begin{aligned}
& D^*D + \sum_{1\leqslant m<n\leqslant N} \alpha_m\alpha_n \big|\big(\alpha_m^{-1}A_m - \alpha_n^{-1}A_n\big)CD - cX\big(\alpha_m^{-1}B_m - \alpha_n^{-1}B_n\big)\big|^2 \\
&= D^*D + \frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{N} \alpha_m\alpha_n \big|(\alpha_m^{-1}A_m - \alpha_n^{-1}A_n)CD - cX(\alpha_m^{-1}B_m - \alpha_n^{-1}B_n)\big|^2 && (4.6) \\
&= D^*D + \frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{N} \alpha_m\alpha_n \big|\big(\alpha_m^{-1}A_m - \alpha_n^{-1}A_n\big)CD\big|^2 && (4.7) \\
&- c\,\mathrm{Re}\sum_{m,n=1}^{N} \alpha_m\alpha_n \big(\alpha_m^{-1}D^*CA_m^* - \alpha_n^{-1}D^*CA_n^*\big)X\big(\alpha_m^{-1}B_m - \alpha_n^{-1}B_n\big) && (4.8) \\
&+ \frac{c^2}{2}\sum_{m,n=1}^{N} \alpha_m\alpha_n \big|X\big(\alpha_m^{-1}B_m - \alpha_n^{-1}B_n\big)\big|^2 && (4.9) \\
&= D^*D + D^*C\bigg(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1}A_n^*A_n - \bigg|\sum_{n=1}^{N} A_n\bigg|^2\bigg)CD && (4.10) \\
&- 2c\,\mathrm{Re}\,D^*C\bigg(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1}A_n^*XB_n - \bigg(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\bigg)X\bigg(\sum_{n=1}^{N} B_n\bigg)\bigg) && (4.11) \\
&+ c^2\bigg(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1}B_n^*X^*XB_n - \bigg|X\sum_{n=1}^{N} B_n\bigg|^2\bigg) && (4.12) \\
&= D^*C\bigg(C^{-2} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1}A_n^*A_n - \bigg|\sum_{n=1}^{N} A_n\bigg|^2 - 2cC^{-1}\bigg)CD && (4.13) \\
&+ c^2\bigg(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1}B_n^*X^*XB_n - \bigg|X\sum_{n=1}^{N} B_n\bigg|^2\bigg) \\
&= D^*C\bigg(\big(C^{-1} - cI\big)^2 - c^2I + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1}A_n^*A_n - \bigg|\sum_{n=1}^{N} A_n\bigg|^2\bigg)CD && (4.14) \\
&+ c^2\bigg(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1}B_n^*X^*XB_n - \bigg|X\sum_{n=1}^{N} B_n\bigg|^2\bigg) \\
&= c^2\bigg(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1}B_n^*X^*XB_n - \bigg|X\sum_{n=1}^{N} B_n\bigg|^2\bigg),
\end{aligned}
$$

с обзиром да је израз у (4.14) једнак нула оператору сагласно самој дефиницији оператора $C$. При томе је употебљена и формула

$$|A+B|^2 = |A|^2 + A^*B + B^*A + |B|^2 = |A|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,A^*B + |B|^2$$

ради добијања (4.7), (4.8) и (4.9) из (4.6). Други сабирак у (4.10) се добија из другог сабирка у (4.7) применом формуле (4.5) на $X := I$ и на $A_nCD$ уместо на $A_n$ и $B_n$. Сабирак (4.11) се добија из (4.8) применом још једном формуле (4.5) на $A_nCD$ уместо на $A_n$, док је сабирак у (4.12) добијен из (4.9) применом (4.5) на $XB_n$ уместо на $A_n$. Дефиниција оператора $D$ је такође употребљена у (4.11) како бисмо добили (4.13).

Узимајући додатно $\alpha_1 := \cdots := \alpha_N := \frac{1}{N}$ добијамо (4.4), као један од широко коришћеног облика Grüss-Landau-ове неједнакости. $\square$

**Последица 4.2.** ***Под условима Леме* 4.1*, за све* $0 < p \leqslant 2$ *је***

$$\left|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right)\right|^p$$
$$\leqslant \left\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left|\sum_{n=1}^{N} A_n\right|^2\right\|^{\frac{p}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} B_n^* X^* X B_n - \left|X \sum_{n=1}^{N} B_n\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}. \tag{4.15}$$

$\triangle$ Ако узмемо $c := \left\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left|\sum_{n=1}^{N} A_n\right|^2\right\|^{\frac{1}{2}}$ у идентитету (4.3) онда добијамо неједнакост (4.15), уз узимања у обзир да је функција $t \mapsto t^{\frac{p}{2}}$ оператор монотона на $[0, +\infty)$ због $0 < p/2 \leqslant 1$. $\square$

У наставку биће нам потребна и следећа лема.

**Лема 4.3.** [Kose06] ***Нека су*** $A_0, \ldots, A_{n-1} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ***позитивни оператори и*** $\Phi$ ***с.н. функција. Тада за сваку ненегативну конвексну функцију*** $f$ ***на*** $[0, +\infty)$ ***за коју је*** $f(0) = 0$ ***важи***

$$\left\|\sum_{j=0}^{n-1} f(A_j)\right\|_\Phi \leqslant \left\|f\left(\sum_{j=0}^{n-1} A_j\right)\right\|_\Phi.$$

$\triangle$ За доказ погледати [Kose06, Cor. 3.6]. $\square$

**Теорема 4.4.** ***Нека је*** $f\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ ***таква да је*** $f(0) = 0$ ***и функција*** $t \mapsto f(\sqrt{t})$ ***је конвексна. Тада је под условима Леме*** 4.1

$$\Bigg\| f\left(\left|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right)\right|\right)$$
$$+ \sum_{1 \leqslant m < n \leqslant N} f\left(\alpha_m^{\frac{1}{2}} \alpha_n^{\frac{1}{2}} \left|(\alpha_m^{-1} A_m - \alpha_n^{-1} A_n)\left(cI + \left(c^2 I - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n + \left|\sum_{n=1}^{N} A_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right)\right) - cX(\alpha_m^{-1} B_m - \alpha_n^{-1} B_n)\right|\right) \Bigg\|_\Phi$$
$$\leqslant \left\| f\left(c^2 \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} B_n^* X^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} B_n^*\right) X^* X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right)\right)\right)\right\|_\Phi. \tag{4.16}$$

$\triangle$ Примена Леме 4.3 на функцију $g\colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)\colon t \mapsto f(\sqrt{t})$ уместо на $f$, као и на сабирке на левој страни (4.3), даје

$$\Bigg\| f\left(\left|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right)\right|\right)$$
$$+ \sum_{1 \leqslant m < n \leqslant N} f\left(\alpha_m^{\frac{1}{2}} \alpha_n^{\frac{1}{2}} \left|(\alpha_m^{-1} A_m - \alpha_n^{-1} A_n)\left(cI + \left(c^2 I - \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n + \left|\sum_{n=1}^{N} A_n\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times \left(\sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \left(\sum_{n=1}^{N} A_n^*\right) X \left(\sum_{n=1}^{N} B_n\right)\right) - cX(\alpha_m^{-1} B_m - \alpha_n^{-1} B_n)\right|\right) \Bigg\|_\Phi$$

$$\leqslant \Bigg\| f\Bigg(\Bigg(\Bigg|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \Big(\sum_{n=1}^N A_n^*\Big) X \Big(\sum_{n=1}^N B_n\Big)\Bigg|^2$$

$$+ \sum_{1\leqslant m<n\leqslant N} \alpha_m\alpha_n \Bigg| (\alpha_m^{-1}A_m - \alpha_n^{-1}A_n)\Bigg(cI + \Bigg(c^2 I - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* A_n + \Bigg|\sum_{n=1}^N A_n\Bigg|^2\Bigg)^{\frac12}\Bigg)^{-1}$$

$$\times \Bigg(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \Big(\sum_{n=1}^N A_n^*\Big) X \Big(\sum_{n=1}^N B_n\Big)\Bigg) - cX(\alpha_m^{-1}B_m - \alpha_n^{-1}B_n)\Bigg|^2\Bigg)^{\frac12}\Bigg)\Bigg)\Bigg\|_\Phi,$$

што је сагласно (4.3) истоветно са (4.16). □

С озбиром на Теорему 4.4 и идентитет (4.3) дат у Леми 4.1, сада можемо да представимо и Grüss-Landau-ову неједнакост за $p$-модификоване у.и. норме.

**Теорема 4.5.** ***Ако је*** $\Phi$ ***с.н. функција,*** $p > 0$, ***тада је под условима Леме*** 4.1

$$\Bigg\|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \Big(\sum_{n=1}^N A_n^*\Big) X \Big(\sum_{n=1}^N B_n\Big)\Bigg\|_{\Phi^{(p)}}^p$$

$$\leqslant \Bigg\|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \Bigg|\sum_{n=1}^N A_n\Bigg|^2\Bigg\|^{\frac p2} \Bigg\|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} B_n^* X^* X B_n - \Bigg|X\sum_{n=1}^N B_n\Bigg|^2\Bigg\|_{\Phi^{(\frac p2)}}^{\frac p2}. \tag{4.17}$$

***Ако је додатно*** $2 \leqslant p \leqslant q < +\infty$, ***тада је***

$$\Bigg\|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \Big(\sum_{n=1}^N A_n^*\Big) X \Big(\sum_{n=1}^N B_n\Big)\Bigg\|_{\Phi^{(q)}}^p \tag{4.18}$$

$$\leqslant \Bigg\|\Bigg|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \Big(\sum_{n=1}^N A_n^*\Big) X \Big(\sum_{n=1}^N B_n\Big)\Bigg|^p$$

$$+ \sum_{1\leqslant m<n\leqslant N} \alpha_m^{\frac p2}\alpha_n^{\frac p2} \Bigg| (\alpha_m^{-1}A_m - \alpha_n^{-1}A_n)\Bigg(cI + \Bigg(c^2 I - \sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* A_n + \Bigg|\sum_{n=1}^N A_n\Bigg|^2\Bigg)^{\frac12}\Bigg)^{-1}$$

$$\times \Bigg(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \Big(\sum_{n=1}^N A_n^*\Big) X \Big(\sum_{n=1}^N B_n\Big)\Bigg) - cX(\alpha_m^{-1}B_m - \alpha_n^{-1}B_n)\Bigg|^p\Bigg\|_{\Phi^{(\frac qp)}}$$

$$\leqslant c^p \Bigg\|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} B_n^* X^* X B_n - \Big(\sum_{n=1}^N B_n^*\Big) X^* X \Big(\sum_{n=1}^N B_n\Big)\Bigg\|_{\Phi^{(\frac q2)}}^{\frac p2}. \tag{4.19}$$

***Ако је још*** $\{B_n\}_{n=1}^N$ ***м.к.н.о. фамилија, тада се израз који се јавља у*** (4.19) ***може додатно проценити са***

$$c^p \Bigg\| X\Bigg(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} B_n^* B_n - \Bigg|\sum_{n=1}^N B_n\Bigg|^2\Bigg)^{\frac12}\Bigg\|_{\Phi^{(q)}}^p. \tag{4.20}$$

***Аналогно, ако је*** $\{A_n\}_{n=1}^N$ ***м.к.н.о. фамилија, тада је***

$$\Bigg\|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* X B_n - \Big(\sum_{n=1}^N A_n^*\Big) X \Big(\sum_{n=1}^N B_n\Big)\Bigg\|_{\Phi^{(q)}}^p$$

$$\leqslant \Bigg\|\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} B_n^* B_n - \Bigg|\sum_{n=1}^N B_n\Bigg|^2\Bigg\|^{\frac p2} \Bigg\|\Bigg(\sum_{n=1}^N \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \Bigg|\sum_{n=1}^N A_n\Bigg|^2\Bigg)^{\frac12} X\Bigg\|_{\Phi^{(q)}}^p. \tag{4.21}$$

***Специјално, за Schatten-ове $p$-норме при $p \geqslant 2$, је***

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*XB_n-\Big(\sum_{n=1}^{N}A_n^*\Big)X\Big(\sum_{n=1}^{N}B_n\Big)\Big\|_p^p \tag{4.22}$$

$$+\sum_{1\leqslant m<n\leqslant N}\alpha_m^{\frac{p}{2}}\alpha_n^{\frac{p}{2}}\Big\|(\alpha_m^{-1}A_m-\alpha_n^{-1}A_n)\Big(cI+\Big(c^2I-\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*A_n+\Big|\sum_{n=1}^{N}A_n\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^{-1}$$

$$\times\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*XB_n-\Big(\sum_{n=1}^{N}A_n^*\Big)X\Big(\sum_{n=1}^{N}B_n\Big)\Big)-cX(\alpha_m^{-1}B_m-\alpha_n^{-1}B_n)\Big\|_p^p$$

$$\leqslant c^p\Big\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*X^*XB_n-\Big(\sum_{n=1}^{N}B_n^*\Big)X^*X\Big(\sum_{n=1}^{N}B_n\Big)\Big\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \tag{4.23}$$

$$\leqslant c^p\Big\|X\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\Big|\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*B_n-\Big|\sum_{n=1}^{N}B_n\Big|^2\Big)^{\frac{p}{4}-1}\Big(\alpha_n^{-1}B_n-\sum_{n=1}^{N}B_n\Big)\Big|^2\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\|_p^p. \tag{4.24}$$

$\triangle$ Неједнакост (4.17) је последица неједнакости (4.15), у комбинацији са својством монотоности за сингуларне вредности и у.и. норме, као и чињенице да је функција $t \mapsto t^p$ монотоно растућа на $[0,+\infty)$ за све $p>0$.

Када је додатно $2 \leqslant p \leqslant q$, можемо применити Теорему 4.4 на функцију $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)\colon t \mapsto t^p$ и $\Phi^{(\frac{q}{p})}$ уместо $\Phi$, с обзир да је тада $\|\cdot\|_{\Phi^{(\frac{q}{p})}}$ такође једна у.и. норма (јер је $\frac{q}{p} \geqslant 1$).

Ако је $\{B_n\}_{n=1}^N$ м.к.н.о. фамилија, тада додатна процена (4.20) следи из [JKM, Th. 2.1], примењене на простор са вероватносном мером (већ коришћеног у доказу Леме 4.1) који се састоји од $N$ тачака, у свакој мере $\alpha_n$, као и на фамилију оператора $\{\alpha_n^{-1}B_n\}_{n=1}^N$, што даје

$$c^p\Big\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*X^*XB_n-\Big(\sum_{n=1}^{N}B_n^*\Big)X^*X\Big(\sum_{n=1}^{N}B_n\Big)\Big\|_{\Phi^{(\frac{q}{2})}}^{\frac{p}{2}}$$

$$\leqslant c^p\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*B_n-\Big|\sum_{n=1}^{N}B_n\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}X^*X\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*B_n-\Big|\sum_{n=1}^{N}B_n\Big|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{\Phi^{(\frac{q}{2})}}^{\frac{p}{2}}.$$

Како је последњи израз идентичан изразу у (4.20), тиме се комплетира и доказ овог дела Теореме 4.5.

У случају када је $\{A_n\}_{n=1}^N$ м.к.н.о. фамилија оператора, узимајући (овде најпожељније) $c := \big\|\sum_{n=1}^N\alpha_n^{-1}A_n^*A_n-\big|\sum_{n=1}^N A_n\big|^2\big\|^{\frac{1}{2}}$, као и додатном заменом $A_n$, $X$ и $B_n$ у (4.20) са $B_n$, $X^*$ и $A_n$ редом, добија се (4.21).

Сада неједнакости (4.22)–(4.23) следе из претходно добијених неједнакости (4.18)–(4.19) за случај $p := q \geqslant 2$ и нуклеарну норму $\|\cdot\|_\Phi := \|\cdot\|_1$, док финална неједнакост у (4.24) следи применом [JKM, Th. 2.4] на израз у (4.23), узимајући $X^*X$ уместо $X$, $\frac{p}{2}$ уместо $p$, $q := r := \frac{p}{2}$, као и $\alpha_n^{-1}B_n$ уместо и $A_n^*$ и $B_n$, и $\mu(\{n\}) := \alpha_n$ за $n=1,\ldots,N$. $\square$

Напомена 4.6. Ако узмемо $c := \big\|\sum_{n=1}^N\alpha_n^{-1}A_n^*A_n-\big|\sum_{n=1}^N A_n\big|^2\big\|^{\frac{1}{2}}$ у (4.22)–(4.24), видимо да је тиме додатно побољшана Grüss-Landau-овог типа неједнакост дата у [JKM, Th. 2.4] у случају дискретне вероватносне мере, јасно додајући неке позитивне сабирке на левој страни посматране неједнакости. Исто се може урадити и за било коју другу дискретну вероватносну меру, користећи општији резултат [J19, Th. 2.2].

Без обзира на то што идентитет (4.3) дат у Леми 4.1 омогућава да добијемо горње профињење операторне Grüss-Landau-ове неједнакости, константа $c$ која се ту јавља нас суштински ограничава искључиво на закључке везане за највећу сингуларну вредност оператора $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*A_n-\left|\sum_{n=1}^{N}A_n\right|^2$, тј. за његову норму, уколико је тај оператор компактан. То је у грубом контрасту с обзиром на улогу сингуларних вредности оператора $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*X^*XB_n-\left|X\sum_{n=1}^{N}B_n\right|^2$ у претходној неједнакости везаној за операторну Grüss-Landau-ову неједнакост, и како бисмо направили баланс у њиховој улози биће нам потребна и следећа фундаментална неједнакост везана за операторну Grüss-Landau-ову неједнакост за сингуларне вредности елементарних оператора.

**Лема 4.7.** ***Ако** $Y\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ **и ако је под условима Леме** 4.1 **додатно***

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*X^*XA_n-\left|X\sum_{n=1}^{N}A_n\right|^2\in\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}),\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*Y^*YB_n-\left|Y\sum_{n=1}^{N}B_n\right|^2\in\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H}),$$

***тада*** $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*X^*YB_n-\Big(\sum_{n=1}^{N}A_n^*\Big)X^*Y\Big(\sum_{n=1}^{N}B_n\Big)\in\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ ***и за све*** $k\in\mathbb{N}$ ***је***

$$\prod_{i=1}^{k}s_i^2\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*X^*YB_n-\Big(\sum_{n=1}^{N}A_n^*\Big)X^*Y\Big(\sum_{n=1}^{N}B_n\Big)\Big)\leqslant \tag{4.25}$$
$$\prod_{i=1}^{k}s_i\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*X^*XA_n-\Big|X\sum_{n=1}^{N}A_n\Big|^2\Big)s_i\Big(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*Y^*YB_n-\Big|Y\sum_{n=1}^{N}B_n\Big|^2\Big).$$

△ Узмимо $\mathcal{X}:=I$ (и $\theta\in[0,1]$ произвољно), $\Omega:=\{1,\ldots,N\}\times\{1,\ldots,N\}$ и за све $(m,n)\in\Omega$ нека је $\mu\big((m,n)\big):=\alpha_m\alpha_n$ и

$$\mathcal{C}_{(m,n)}:=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\alpha_m^{-1}A_m^*-\alpha_n^{-1}A_n^*\big)X^* \text{ и } \mathcal{D}_{(m,n)}:=\frac{1}{\sqrt{2}}Y\big(\alpha_m^{-1}B_m-\alpha_n^{-1}B_n\big),$$

па примењујући [J05, Th. 3.1 (b)(c)] следи $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*X^*YB_n-\Big(\sum_{n=1}^{N}A_n^*\Big)X^*Y\Big(\sum_{n=1}^{N}B_n\Big)\in\mathfrak{C}_\infty(\mathcal{H})$ и

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{k}s_i^2\Big(\frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{N}\alpha_m\alpha_n(\alpha_m^{-1}A_m^*-\alpha_n^{-1}A_n^*)X^*Y(\alpha_m^{-1}B_m-\alpha_n^{-1}B_n)\Big)\\ &\leqslant\prod_{i=1}^{k}s_i\Big(\frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{N}\alpha_m\alpha_n(\alpha_m^{-1}A_m^*-\alpha_n^{-1}A_n^*)X^*X(\alpha_m^{-1}A_m-\alpha_n^{-1}A_n)\Big)\\ &\times\prod_{i=1}^{k}s_i\Big(\frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{N}\alpha_m\alpha_n(\alpha_m^{-1}B_m^*-\alpha_n^{-1}B_n^*)Y^*Y(\alpha_m^{-1}B_m-\alpha_n^{-1}B_n)\Big).\end{aligned}$$

Трострука примена Коркиновог идентитета (4.5) коначно даје (4.25). □

**Теорема 4.8.** ***Под условима Леме*** 4.7 ***је***

$$\begin{aligned}&\Big\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*X^*YB_n-\Big(\sum_{n=1}^{N}A_n^*\Big)X^*Y\Big(\sum_{n=1}^{N}B_n\Big)\Big\|_{\Phi^{(p)}}^2\\ &\leqslant\Big\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*X^*XA_n-\Big|X\sum_{n=1}^{N}A_n\Big|^2\Big\|_{\Psi^{(\frac{p}{2})}}\Big\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*Y^*YB_n-\Big|Y\sum_{n=1}^{N}B_n\Big|^2\Big\|_{\Omega^{(\frac{p}{2})}},\end{aligned}\tag{4.26}$$

***за све*** $p>0$, ***кад год с.н. функције*** $\Phi,\Psi$ ***и*** $\Omega$ ***задовољавају***

$$\Phi\big(\{a_ib_i\}_{i=1}^{\infty}\big)\leqslant\Psi\big(\{a_i\}_{i=1}^{\infty}\big)\,\Omega\big(\{b_i\}_{i=1}^{\infty}\big)\qquad \textbf{\textit{за све }} a_i,b_i\geqslant 0. \tag{4.27}$$

***Специјално,***

$$\begin{aligned}&\left\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*X^*YB_n-\left(\sum_{n=1}^{N}A_n^*\right)X^*Y\left(\sum_{n=1}^{N}B_n\right)\right\|_{\Phi^{(p)}}^2\\ &\leqslant\left\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*X^*XA_n-\left|X\sum_{n=1}^{N}A_n\right|^2\right\|_{\Phi^{(\frac{q}{2})}}\left\|\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*Y^*YB_n-\left|Y\sum_{n=1}^{N}B_n\right|^2\right\|_{\Phi^{(\frac{r}{2})}},\end{aligned}\tag{4.28}$$

***уколико*** $\{p,q,r\}\subset(0,+\infty]$ ***задовољавају*** $\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$.

$\triangle$ Ако означимо

$$\begin{aligned}a_i&\stackrel{\text{def}}{=}s_i^{\frac{p}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*X^*XA_n-\left|X\sum_{n=1}^{N}A_n\right|^2\right),\\ b_i&\stackrel{\text{def}}{=}s_i^{\frac{p}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}B_n^*Y^*YB_n-\left|Y\sum_{n=1}^{N}B_n\right|^2\right)\qquad\text{и}\\ c_i&\stackrel{\text{def}}{=}s_i^{p}\left(\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{-1}A_n^*X^*YB_n-\left(\sum_{n=1}^{N}A_n^*\right)X^*Y\left(\sum_{n=1}^{N}B_n\right)\right),\end{aligned}$$

тада према Леми 4.7 имамо $\prod_{i=1}^{k}c_i\leqslant\prod_{i=1}^{k}a_ib_i$ за све $k\in\mathbb{N}$. Из [Si, Cor. 1.10] следи да је $\sum_{i=1}^{k}c_i\leqslant\sum_{i=1}^{k}a_ib_i$ за све $k\in\mathbb{N}$, што повлачи и $\Phi(\{c_i\}_{i=1}^{\infty})\leqslant\Phi(\{a_ib_i\}_{i=1}^{\infty})$ према [Si, Th. 1.9], тј. према својству изомонотоности сваке с.н. функције $\Phi$. Тада (4.27) имплицира $\Phi(\{a_ib_i\}_{i=1}^{\infty})\leqslant\Psi(\{a_i\}_{i=1}^{\infty})\,\Omega(\{b_i\}_{i=1}^{\infty})$, па је

$$\Phi^{\frac{2}{p}}(\{c_i\}_{i=1}^{\infty})\leqslant\Psi^{\frac{2}{p}}(\{a_i\}_{i=1}^{\infty})\,\Omega^{\frac{2}{p}}(\{b_i\}_{i=1}^{\infty}),$$

што је други облик за (4.26) према самој дефиницији $p$-модификованих норми.

За доказ (4.28) узмимо у (4.26) да је $\Psi\stackrel{\text{def}}{=}\Phi^{(\frac{q}{p})}$ и $\Omega\stackrel{\text{def}}{=}\Phi^{(\frac{r}{p})}$, с обзиром да оне задовољавају услов (4.27) за било коју дату с.н. функцију $\Phi$ при услову $\frac{1}{p}=\frac{1}{q}+\frac{1}{r}$. Кратак доказ ове чињенице може се погледати и на страни 4, линије 4–11. (бројане од горе) у [J09a] (са $\frac{q}{p}$ уместо $p$ и $\frac{r}{p}$ уместо $q$); видети исто и [Si, Th. 2.8 (2.5b)] за специјална случај Schatten-ових норми. Како је $\big(\Phi^{(\frac{q}{p})}\big)^{(\frac{p}{2})}=\Phi^{(\frac{q}{2})}$ и $\big(\Phi^{(\frac{r}{p})}\big)^{(\frac{p}{2})}=\Phi^{(\frac{r}{2})}$, према самој дефиницији $p$-модификованих норми, то сагласно претходном коначно следи (4.28). $\square$

Напомена 4.9. У специјалном случају $\Psi:=\Omega:=\Phi^{(2)}$ Теорема 4.8 даје специјалан случај [JKM, Th. 2.6] у коме су посматране суме коначне. Други специјалан случај $r:=p$ (и $q:=+\infty$), $X:=I$ и $X$ уместо $Y$ у неједнакости (4.28) даје алтернативни доказ за (4.17).

## 2 Grüss-Landau-ове операторне и норма неједнакости за т.у.п. трансформере у идеалима компактних оператора

Следећа теорема представља проширење операторне Grüss-Landau-ове неједнакости (4.15) дате у Последици 4.2 са елементарних оператора на т.у.п. трансформере, када се конкретно узме $\Omega:=\{1,\dots,N\}$ и $\mu(\{n\}):=\alpha_n$ за $n=1,\dots,N$, где је $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n=1$ за неке $N\in\mathbb{N}$ и $\alpha_1,\dots,\alpha_N\in(0,1]$.

**Теорема 4.10.** ***Нека је $\mu$ вероватносна мера на $\Omega$, нека су о.в. функције $A^*, B \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$, $f, g \in \mathcal{H}, X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ и $\eta \in [0,1]$. Тада је***

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega \langle A_t X B_t f, g\rangle \, d\mu(t) - \left\langle \int_\Omega A_t \, d\mu(t) X \int_\Omega B_t \, d\mu(t) f, g \right\rangle\right|^2 \\
&\qquad \leqslant \left(\int_\Omega \langle A_t A_t^* g, g\rangle \, d\mu(t) - \left\langle \left|\int_\Omega A_t^* \, d\mu(t)\right|^2 g, g\right\rangle\right) \\
&\qquad \times \left(\int_\Omega \langle B_t^* X^* X B_t f, f\rangle \, d\mu(t) - \left\langle \left|X \int_\Omega B_t \, d\mu(t)\right|^2 f, f\right\rangle\right), \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) - \int_\Omega A_t \, d\mu(t) X \int_\Omega B_t \, d\mu(t)\right|^{2\eta} \leqslant \\
&\left\|\int_\Omega A_t A_t^* \, d\mu(t) - \left|\int_\Omega A_t^* \, d\mu(t)\right|^2\right\|^\eta \left(\int_\Omega B_t^* X^* X B_t \, d\mu(t) - \left|X \int_\Omega B_t \, d\mu(t)\right|^2\right)^\eta, \qquad (4.30)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\left(\int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) - \int_\Omega A_t \, d\mu(t) X \int_\Omega B_t \, d\mu(t)\right)^*\right|^{2\eta} \leqslant \\
&\left\|\int_\Omega B_t^* B_t \, d\mu(t) - \left|\int_\Omega B_t \, d\mu(t)\right|^2\right\|^\eta \left(\int_\Omega A_t X X^* A_t^* \, d\mu(t) - \left|X^* \int_\Omega A_t^* \, d\mu(t)\right|^2\right)^\eta. \qquad (4.31)
\end{aligned}$$

$\triangle$ Ради доказивања (4.29), приметимо да за следећу детерминанту важи

$$\begin{vmatrix}
\int_\Omega \langle A_t A_t^* g, g\rangle \, d\mu(t) - \left\langle \left|\int_\Omega A_t^* \, d\mu(t)\right|^2 g, g\right\rangle & \int_\Omega \langle A_t X B_t f, g\rangle \, d\mu(t) - \left\langle \int_\Omega A_t \, d\mu(t) X \int_\Omega B_t \, d\mu(t) f, g\right\rangle \\
\int_\Omega \langle (A_t X B_t)^* g, f\rangle \, d\mu(t) - \left\langle \left(\int_\Omega A_t \, d\mu(t) X \int_\Omega B_t \, d\mu(t)\right)^* g, f\right\rangle & \int_\Omega \langle B_t^* X^* X B_t f, f\rangle \, d\mu(t) - \left\langle \left|X \int_\Omega B_t \, d\mu(t)\right|^2 f, f\right\rangle
\end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Наиме, то је директна последица чињенице да је

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}
\int_\Omega A_t A_t^* \, d\mu(t) - \left|\int_\Omega A_t^* \, d\mu(t)\right|^2 & \int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) - \int_\Omega A_t \, d\mu(t) X \int_\Omega B_t \, d\mu(t) \\
\int_\Omega (A_t X B_t)^* \, d\mu(t) - \left(\int_\Omega A_t \, d\mu(t) X \int_\Omega B_t \, d\mu(t)\right)^* & \int_\Omega B_t^* X^* X B_t \, d\mu(t) - \left|X \int_\Omega B_t \, d\mu(t)\right|^2
\end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} \begin{bmatrix} (A_s - A_t)(A_s - A_t)^* & (A_s - A_t) X (B_s - B_t) \\ (B_s - B_t)^* X^* (A_s - A_t)^* & (B_s - B_t)^* X^* X (B_s - B_t) \end{bmatrix} d(\mu \times \mu)(s,t) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} \begin{bmatrix} A_s - A_t & 0 \\ (X B_s - X B_t)^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_s - A_t)^* & X B_s - X B_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d(\mu \times \mu)(s,t) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} \left|\begin{bmatrix} (A_s - A_t)^* & X B_s - X B_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right|^2 d(\mu \times \mu)(s,t) \geqslant 0 \qquad (4.32)
\end{aligned}$$

на $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, што следи из [J05, Th. 3.1(a)] ако ту узмемо $\mathcal{C}_{s,t} := (A_s - A_t)/\sqrt{2}$, $\mathcal{D}_{s,t} := (B_s - B_t)/\sqrt{2}$, $\mathcal{X}_{s,t} := X$ за све $s, t \in \Omega$ и $\theta := 1$. За показивање прве једнакости у (4.32), искористимо следећи идентитет Коркиновог типа за т.у.п. трансформере:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) - \int_\Omega A_t \, d\mu(t) X \int_\Omega B_t \, d\mu(t) &= \int_\Omega d\mu(s) \int_\Omega A_t X B_t \, d\mu(t) - \int_\Omega \int_\Omega A_t X B_s \, d\mu(s) d\mu(t) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega^2} (A_s - A_t) X (B_s - B_t) d(\mu \times \mu)(s,t), \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

који је наведен и у [JKM, (2.2)]. Специјално, узимајући $X := I$ и $B_t := A_t^*$ (односно $X^*X$ уместо $X$ и $A_t := B_t^*$) за $t \in \Omega$ у (4.33), добијамо $\int_\Omega A_t A_t^* d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t) \int_\Omega A_t^*\, d\mu(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega^2}(A_s - A_t)(A_s - A_t)^* d(\mu\times\mu)(s,t)$ (односно да важи $\int_\Omega |XB_t|^2 d\mu(t) - \left|X\int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega^2}(B_s - B_t)^* X^* X (B_s - B_t) d(\mu\times\mu)(s,t)$), што имајући у виду (4.33) даје (4.32) и завршава доказ неједнакости (4.29).

За доказ случаја $\eta := 1$ у (4.30), на основу (4.29) добијамо

$$\begin{aligned}
&\left|\left\langle\left(\int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t) X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right) f, g\right\rangle\right|^2 \\
&\leqslant \left\langle\left(\int_\Omega A_t A_t^*\, d\mu(t) - \left|\int_\Omega A_t^*\, d\mu(t)\right|^2\right) g, g\right\rangle \left\langle\left(\int_\Omega B_t^* X^* X B_t\, d\mu(t) - \left|X\int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right|^2\right) f, f\right\rangle \\
&\leqslant \left\|\int_\Omega A_t A_t^*\, d\mu(t) - \left|\int_\Omega A_t^*\, d\mu(t)\right|^2\right\| \left\langle\left(\int_\Omega B_t^* X^* X B_t\, d\mu(t) - \left|X\int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right|^2\right) f, f\right\rangle \|g\|^2, \quad (4.34)
\end{aligned}$$

где смо користили једну од еквивалентних дефиниција слабог* (или Гељфандовог) интеграла дату у Леми 1.9, како бисмо проценили средњи израз у (4.29) и да би оправдали последњу неједнакост у (4.34). Сада, узимајући да је $g := \left(\int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t)\, X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right) f$ у (4.34) видимо да заправо добијамо (4.30) у случају $\eta := 1$. За преостале вредности параметра $\eta \in (0,1)$ неједнакост директно следи из оператор монотоности функције $t \mapsto t^\eta$ на $[0, +\infty)$, примењену на управо доказан случај $\eta := 1$.

Како важи $\left(\int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t) X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right)^* = \int_\Omega B_t^* X^* A_t^*\, d\mu(t) - \int_\Omega B_t^*\, d\mu(t)$ $X^* \int_\Omega A_t^*\, d\mu(t)$, то је довољно узети $A_t := B_t^*$, $B_t := A_t^*$ за $t \in \Omega$ и $X^*$ уместо $X$ у (4.30) да би се добила и неједнакост (4.31). □

Ако се фамилије $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ и $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ састоје од ограничених самоадјунгованих оператора, онда се из неједнакости (4.30) може извести следеће уопштење шире познатог облика Grüss-Landau-ове неједнакости.

**Теорема 4.11.** ***Нека су испуњени услови Теореме* 4.10*, нека су* $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ *и* $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ *фамилије самоадјунгованих оператора које задовољавају услов* $\varphi \leqslant A_t \leqslant \Phi$ *за неке самоадјунговане операторе* $\varphi, \Phi \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *који комутирају са* $A_t$ *за свако* $t \in \Omega$ *и за које важи* $\varphi\Phi = \Phi\varphi$*, као и* $\gamma \leqslant B_t \leqslant \Gamma$ *за неке самоадјунговане* $\gamma, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *који комутирају са* $B_t$ *за свако* $t \in \Omega$ *и за које је* $\gamma\Gamma = \Gamma\gamma$*. Тада важи***

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega A_t B_t\, d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t) \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right|^{2\eta} \\
&\leqslant \left\|\int_\Omega A_t^2\, d\mu(t) - \left|\int_\Omega A_t\, d\mu(t)\right|^2\right\|^\eta \left(\int_\Omega B_t^2\, d\mu(t) - \left|\int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right|^2\right)^\eta \quad (4.35) \\
&\leqslant \left\|\left(\Phi - \int_\Omega A_t\, d\mu(t)\right)\left(\int_\Omega A_t\, d\mu(t) - \varphi\right)\right\|^\eta \left(\Gamma - \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right)^\eta \left(\int_\Omega B_t\, d\mu(t) - \gamma\right)^\eta \\
&\leqslant \frac{1}{4^{2\eta}}\|\Phi - \varphi\|^{2\eta}(\Gamma - \gamma)^{2\eta}. \quad (4.36)
\end{aligned}$$

△ Важе следећи идентитети

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega A_t^2\, d\mu(t) - \left|\int_\Omega A_t\, d\mu(t)\right|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega^2}(A_s - A_t)^2 d(\mu\times\mu)(s,t) \quad (4.37) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega^2}\left(\left(A_s - \frac{\Phi+\varphi}{2}\right) - \left(A_t - \frac{\Phi+\varphi}{2}\right)\right)^2 d(\mu\times\mu)(s,t)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \Big(A_t - \frac{\Phi+\varphi}{2}\Big)^2 d\mu(t) - \Big(\int_\Omega \Big(A_t - \frac{\Phi+\varphi}{2}\Big)\, d\mu(t)\Big)^2 \qquad (4.38)\\
&= \int_\Omega (A_t-\Phi)(A_t-\varphi)\, d\mu(t) + \Big(\frac{\Phi-\varphi}{2}\Big)^2 - \int_\Omega (A_t-\Phi)\, d\mu(t) \int_\Omega (A_t-\varphi)\, d\mu(t) - \Big(\frac{\Phi-\varphi}{2}\Big)^2\\
&= \Big(\Phi - \int_\Omega A_t\, d\mu(t)\Big)\Big(\int_\Omega A_t\, d\mu(t) - \varphi\Big) - \int_\Omega (\Phi - A_t)(A_t-\varphi)\, d\mu(t),
\end{aligned}
$$

где су (4.37) и једнакост (4.38) базирани на Коркиновом идентитету (4.33), примењеног овог пута на фамилију $\big\{A_t - \frac{\Phi+\varphi}{2}\big\}_{t\in\Omega}$ уместо на $\{A_t\}_{t\in\Omega}$, док се остале једнакости проверавају директно. Како су $\Phi - A_t$ и $A_t - \varphi$ међусобно комутирајући позитивни оператори, то је $(\Phi - A_t)(A_t - \varphi) \geqslant 0$, а самим тим и $\int_\Omega (\Phi - A_t)(A_t-\varphi)\, d\mu(t) \geqslant 0$. Одатле директан рачун показује

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega A_t^2\, d\mu(t) - \Big|\int_\Omega A_t\, d\mu(t)\Big|^2 \leqslant \Big(\Phi - \int_\Omega A_t\, d\mu(t)\Big)\Big(\int_\Omega A_t\, d\mu(t) - \varphi\Big)\\
&= -\Big(\int_\Omega \Big(A_t - \frac{\Phi+\varphi}{2}\Big) d\mu(t)\Big)^2 + \Big(\frac{\Phi-\varphi}{2}\Big)^2 \leqslant \frac{(\Phi-\varphi)^2}{4} \leqslant \frac{\|\Phi-\varphi\|^2}{4} I,
\end{aligned}
$$

и слично,

$$
\int_\Omega B_t^2\, d\mu(t) - \Big|\int_\Omega B_t\, d\mu(t)\Big|^2 \leqslant \Big(\Gamma - \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\Big)\Big(\int_\Omega B_t\, d\mu(t) - \gamma\Big) \leqslant \frac{(\Gamma-\gamma)^2}{4}.
$$

Како је (4.35) специјалан случај $X := I$ неједнакости (4.30) Теореме 4.10, то завршне неједнакости у (4.36) следе из монотоности операторне норме на позитивним операторима и о.м. функције $t \mapsto t^\eta$ на $[0, +\infty)$. □

Напомена 4.12. Услови да оба оператора $\varphi$ и $\Phi$ (односно $\gamma$ и $\Gamma$) комутирају са операторима $A_t$ (односно $B_t$) за $t \in \Omega$ и да важи $\varphi\Phi = \Phi\varphi$ (односно $\gamma\Gamma = \Gamma\gamma$), у претходној Теореми 4.11 не морају се (експлицитно) ни наводити, уколико су оператори $\varphi, \Phi, \gamma, \Gamma \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ облика $\varphi := dI, \Phi := DI, \gamma := cI$ и $\Gamma := CI$ за неке $c, C, d, D \in \mathbb{R}$, када очигледно комутирају.

Сада смо у позицији да комплетирамо [JKM, Th. 2.6].

**Последица 4.13.** ***Ако је*** $\Phi$ ***с.н. функција и*** $\theta > 0$***, тада је под условима Теореме*** 4.10***, за све*** $X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(\theta)}}(\mathcal{H})$

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t) X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\Big\|^2_{\Phi^{(\theta)}} \leqslant\\
&\Big\|\int_\Omega A_t A_t^* d\mu(t) - \Big|\int_\Omega A_t^* d\mu(t)\Big|^2\Big\| \Big\|\int_\Omega B_t^* X^* X B_t\, d\mu(t) - \Big|X\int_\Omega B_t\, d\mu(t)\Big|^2\Big\|_{\Phi^{(\frac{\theta}{2})}}, \qquad (4.39)\\
&\Big\|\int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t) X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\Big\|^2_{\Phi^{(\theta)}} \leqslant\\
&\Big\|\int_\Omega B_t^* B_t\, d\mu(t) - \Big|\int_\Omega B_t\, d\mu(t)\Big|^2\Big\| \Big\|\int_\Omega A_t X X^* A_t^* d\mu(t) - \Big|X^*\int_\Omega A_t^* d\mu(t)\Big|^2\Big\|_{\Phi^{(\frac{\theta}{2})}}. \qquad (4.40)
\end{aligned}
$$

△ Комбинујући монотоност сингуларних вредности са монотоношћу свих $\theta$ модификација у.и. норми, добијамо да из $0 \leqslant A \leqslant B$ за $A, B \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ следи $s_n^\theta(A) \leqslant s_n^\theta(B)$

за све $n \in \mathbb{N}$, а одатле и $\|A\|_{\Phi^{(\theta)}} \leqslant \|B\|_{\Phi^{(\theta)}}$ за све $\theta > 0$. Сагласно самој дефиницији $\theta/2$-модификоване норме $\|\cdot\|_{\Phi^{(\theta/2)}}$ добијамо $\left\|\int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t) X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right\|^2_{\Phi^{(\theta)}} = \left\|\left|\int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t) X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right|^2\right\|_{\Phi^{(\theta/2)}}$, па применом претходно разматраног принципа изомонотоности на случај $\eta := 1$ у (4.30) и на $\theta/2$ уместо $\theta$ даје (4.39).

Доказ неједнакости (4.40) сада директно следи из неједнакости (4.39), јер је

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t) X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right\|^2_{\Phi^{(\theta)}} \\
&= \left\|\int_\Omega B_t^* X^* A_t^*\, d\mu(t) - \int_\Omega B_t^*\, d\mu(t) X^* \int_\Omega A_t^*\, d\mu(t)\right\|^2_{\Phi^{(\theta)}} \qquad (4.41)\\
&\leqslant \left\|\int_\Omega B_t^* B_t\, d\mu(t) - \left|\int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right|^2\right\| \left\|\int_\Omega A_t X X^* A_t^*\, d\mu(t) - \left|X^* \int_\Omega A_t^*\, d\mu(t)\right|^2\right\|_{\Phi^{(\theta/2)}}.
\end{aligned}$$

Једнакост (4.41) заснива се на B$^*$ својства у.и. норми, комбинованог са $\left(\int_\Omega C_t\, d\mu(t)\right)^* = \int_\Omega C_t^*\, d\mu(t)$ својством слабо$^*$ интеграбилних фамилија $\{C_t\}_{t\in\Omega}$. □

Напомена 4.14. Претходна Последица 4.13 представља проширење неједнакости (4.17) Теореме 4.5 са елементарних оператора на т.у.п. трансформере, када се узме $\theta := p$, $\Omega := \{1, \ldots, N\}$, $\mu(\{n\}) := \alpha_n$ за $n = 1, \ldots, N$, где $N \in \mathbb{N}$ и $\sum_{n=1}^N \alpha_n = 1$ за неке $\alpha_n \in (0, 1]$, да би се добила (4.17) из неједнакости (4.39).

У случају Hilbert-Schmidt-ове норме (то јест, ако је $\Phi := \ell^1$ и $\theta := 2$) десна страна у (4.39) и (4.40) може се записати у алгебарски једноставнијем облику.

**Теорема 4.15.** ***Нека је*** $X \in \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ ***и*** $\mu$ ***вероватносна мера на*** $\Omega$. ***Ако су оператор вредносне функције*** $A^*, B^* \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$, ***тада је***

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t) X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right\|_2 \\
&\leqslant \left\|\int_\Omega |A_t^*|^2 d\mu(t) - \left|\int_\Omega A_t^* d\mu(t)\right|^2\right\|^{1/2} \left\|X\sqrt{\int_\Omega |B_t^*|^2 d\mu(t) - \left|\int_\Omega B_t^* d\mu(t)\right|^2}\right\|_2, \qquad (4.42)
\end{aligned}$$

***док у случају да*** $A, B \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathcal{B}(\mathcal{H}))$ ***важи***

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t) X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right\|_2 \\
&\leqslant \left\|\sqrt{\int_\Omega |A_t|^2 d\mu(t) - \left|\int_\Omega A_t d\mu(t)\right|^2}\, X\right\|_2 \left\|\int_\Omega |B_t|^2 d\mu(t) - \left|\int_\Omega B_t d\mu(t)\right|^2\right\|^{1/2}. \qquad (4.43)
\end{aligned}$$

△ Како је $\|\cdot\|_{\Phi^{(\theta/2)}}$ нуклеарна норма $\|\cdot\|_1$ при избору $\Phi := \ell^1$ и $\theta := 2$, то је довољно препознати да је за десни део израза у (4.39)

$$\begin{aligned}
&\left\|\int_\Omega B_t^* X^* X B_t\, d\mu(t) - \left|X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right|^2\right\|_1 \\
&= \operatorname{tr}\left(\int_\Omega B_t^* X^* X B_t\, d\mu(t) - \left(\int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right)^* X^* X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\right) \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

$$= \int_\Omega \operatorname{tr}(B_t^* X^* X B_t)\, d\mu(t) - \operatorname{tr}\Big(X^* X \int_\Omega B_t\, d\mu(t) \int_\Omega B_t^*\, d\mu(t)\Big) \tag{4.45}$$

$$= \int_\Omega \operatorname{tr}(X^* X B_t B_t^*)\, d\mu(t) - \operatorname{tr}\Big(X^* X \Big|\int_\Omega B_t^*\, d\mu(t)\Big|^2\Big) \tag{4.46}$$

$$= \operatorname{tr}\Big(\int_\Omega X^* X B_t B_t^*\, d\mu(t)\Big) - \operatorname{tr}\Big(X^* X \Big|\int_\Omega B_t^*\, d\mu(t)\Big|^2\Big) \tag{4.47}$$

$$= \operatorname{tr}\Big(X^* X \Big(\int_\Omega B_t B_t^*\, d\mu(t) - \Big|\int_\Omega B_t^*\, d\mu(t)\Big|^2\Big)\Big)$$

$$= \operatorname{tr}\Big(\Big(\int_\Omega |B_t^*|^2 d\mu(t) - \Big|\int_\Omega B_t^* d\mu(t)\Big|^2\Big)^{1/2} X^* X \Big(\int_\Omega |B_t^*|^2 d\mu(t) - \Big|\int_\Omega B_t^* d\mu(t)\Big|^2\Big)^{1/2}\Big) \tag{4.48}$$

$$= \Big\| X \Big(\int_\Omega |B_t^*|^2\, d\mu(t) - \Big|\int_\Omega B_t^*\, d\mu(t)\Big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_2^2. \tag{4.49}$$

Једнакост (4.44) следи из позитивности оператора $\int_\Omega B_t^* X^* X B_t\, d\mu(t) - \big|X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\big|^2 = \frac{1}{2}\int_{\Omega^2} |X(B_s - B_t)|^2 d(\mu \times \mu)(s,t) \geqslant 0$, сагласно идентитету Коркиновог типа (4.33). Једнакости у (4.45) и (4.47) следе из алтернативне дефиниције слабог* (Гељфандовог) интеграла, датој у Леми 1.9, док једнакост у (4.46) последица комутативности оператора под операторним трагом, с обзиром да $X^* X B_t \in \mathfrak{C}_1(\mathcal{H})$ и $B_t^* \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ за свако $t \in \Omega$. Једнакост у (4.48) се поново ослања на својство комутирања оператора под трагом, док једнакост у (4.49) следи из својства Hilbert-Schmidt-ове норме $\|Y\|_2^2 = \operatorname{tr}(Y^* Y)$ за све $Y \in \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$.

Доказ неједнакости (4.43) следи из већ доказане неједнакости (4.42), поново користећи B* својство у.и. норми и својство $\big(\int_\Omega C_t\, d\mu(t)\big)^* = \int_\Omega C_t^*\, d\mu(t)$ слабо* интеграбилних фамилија $\{C_t\}_{t\in\Omega}$, што даје

$$\Big\|\int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t) X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\Big\|_2 = \Big\|\int_\Omega B_t^* X^* A_t^* d\mu(t) - \int_\Omega B_t^* d\mu(t) X^* \int_\Omega A_t^*\, d\mu(t)\Big\|_2$$
$$\leqslant \Big\|\int_\Omega |B_t|^2\, d\mu(t) - \Big|\int_\Omega B_t\, d\mu(t)\Big|^2\Big\|^{1/2} \Big\| X^* \Big(\int_\Omega |A_t|^2\, d\mu(t) - \Big|\int_\Omega A_t\, d\mu(t)\Big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_2$$
$$= \Big\|\Big(\int_\Omega |A_t|^2\, d\mu(t) - \Big|\int_\Omega A_t\, d\mu(t)\Big|^2\Big)^{1/2} X\Big\|_2 \Big\|\int_\Omega |B_t|^2\, d\mu(t) - \Big|\int_\Omega B_t\, d\mu(t)\Big|^2\Big\|^{1/2},$$

чиме је доказана тражена неједнакост. □

Неједнакости (4.42) и (4.43) остају на снази и за све $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ норме (различите од Hilbert-Schmidt-ове норме $\|\cdot\|_2$), кад год је $p > 2$ и бар једна од фамилија $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ и $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ је м.к.н.о. фамилија. Управо то показује наредна теорема, која такође уопштава неједнакост Grüss-Landau-овог типа за Schatten-ове норме $\|\cdot\|_p$ у [JKM, Th. 2.4].

**Теорема 4.16.** ***Нека је*** $\mu$ ***вероватносна мера на*** $\Omega$, $\Phi$ ***с.н. функција,*** $p \geqslant 2$, $X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ ***и нека*** $A^*, B \in L^2_G(\Omega, \mu, \mathfrak{B}(\mathcal{H}))$. ***Ако је, додатно,*** $\{B_t\}_{t\in\Omega}$ ***м.к.н.о. фамилија таква да*** $X\sqrt{\int_\Omega |B_t|^2\, d\mu(t) - \big|\int_\Omega B_t\, d\mu(t)\big|^2} \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$, ***тада такође и*** $\int_\Omega A_t X B_t\, d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t) X \int_\Omega B_t\, d\mu(t) \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ ***и важи***

$$\Big\|\int_\Omega A_t X B_t d\mu(t) - \int_\Omega A_t\, d\mu(t) X \int_\Omega B_t\, d\mu(t)\Big\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant$$
$$\Big\|\int_\Omega |A_t^*|^2 d\mu(t) - \Big|\int_\Omega A_t^*\, d\mu(t)\Big|^2\Big\|^{1/2} \Big\| X \sqrt{\int_\Omega |B_t|^2 d\mu(t) - \Big|\int_\Omega B_t\, d\mu(t)\Big|^2}\Big\|_{\Phi^{(p)}}. \tag{4.50}$$

***Алтернативно, ако*** $\sqrt{\int_\Omega |A_t|^2\,d\mu(t) - \left|\int_\Omega A_t\,d\mu(t)\right|^2}\,X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ ***за неку*** $\{A_t\}_{t\in\Omega}$ ***м.к.н.о. фамилију, тада и*** $\int_\Omega A_tXB_t\,d\mu(t) - \int_\Omega A_t\,d\mu(t)\,X\int_\Omega B_t\,d\mu(t) \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ ***и важи***

$$\left\|\int_\Omega A_tXB_t d\mu(t) - \int_\Omega A_t\,d\mu(t)X\int_\Omega B_t\,d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant$$
$$\left\|\sqrt{\int_\Omega |A_t^*|^2 d\mu(t) - \left|\int_\Omega A_t^*\,d\mu(t)\right|^2}\,X\right\|_{\Phi^{(p)}} \left\|\int_\Omega |B_t|^2 d\mu(t) - \left|\int_\Omega B_t\,d\mu(t)\right|^2\right\|^{1/2}. \tag{4.51}$$

$\triangle$ Ради доказивања (4.50), применимо прво неједнакост (4.39) за случај $\theta := p$, а потом применимо специјалан случај $\mathcal{A}_t^* := \mathcal{B}_t := B_t$ за све $t \in \Omega$ у [JKM, Th. 2.1] на $X^*X$ уместо на $X$, на $\|\cdot\|_{\Phi^{(\frac{p}{2})}}$ уместо на $|||\cdot|||$, да бисмо добили

$$\left\|\int_\Omega B_t^*X^*XB_t\,d\mu(t) - \int_\Omega B_t^*\,d\mu(t)\,X^*X\int_\Omega B_t\,d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(\frac{p}{2})}}$$
$$\leqslant \left\|\left(\int_\Omega |B_t|^2\,d\mu(t) - \left|\int_\Omega B_t\,d\mu(t)\right|^2\right)^{1/2} X^*X\left(\int_\Omega |B_t|^2\,d\mu(t) - \left|\int_\Omega B_t\,d\mu(t)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(\frac{p}{2})}}$$
$$= \left\|\left|X\left(\int_\Omega |B_t|^2\,d\mu(t) - \left|\int_\Omega B_t\,d\mu(t)\right|^2\right)^{1/2}\right|^2\right\|_{\Phi^{(\frac{p}{2})}} = \left\|X\left(\int_\Omega |B_t|^2\,d\mu(t) - \left|\int_\Omega B_t\,d\mu(t)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)}}^2.$$

Неједнакост (4.51) се доказује слично као и (4.50), али коришћењем неједнакости (4.40) уместо неједнакости (4.39). $\square$

Специјалан случај претходне Теореме 4.16 за бројачку меру даје њену следећу (дискретизовану) верзију:

**Последица 4.17.** ***Нека су*** $\alpha_n \in (0,1]$ ***за*** $n \in \mathbb{N}$ ***такви да је*** $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n = 1$, $\Phi$ ***с.н. функција,*** $p \geqslant 2$, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***и нека су*** $\{\alpha_n^{-1/2}C_n^*\}_{n=1}^\infty$ ***и*** $\{\alpha_n^{-1/2}D_n\}_{n=1}^\infty$ ***ј.к.и. фамилије. Ако је додатно*** $\{D_n\}_{n=1}^\infty$ ***м.к.н.о. фамилија таква да*** $X\Big(\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{-1}|D_n|^2 - \big|\sum_{n=1}^\infty D_n\big|^2\Big)^{\frac12} \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$, ***тада*** $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{-1}C_nXD_n - \sum_{n=1}^\infty C_nX\sum_{n=1}^\infty D_n \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ ***и***

$$\left\|\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{-1}C_nXD_n - \sum_{n=1}^\infty C_nX\sum_{n=1}^\infty D_n\right\|_{\Phi^{(p)}}$$
$$\leqslant \left\|\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{-1}|C_n^*|^2 - \left|\sum_{n=1}^\infty C_n^*\right|^2\right\|^{1/2} \left\|X\sqrt{\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{-1}|D_n|^2 - \left|\sum_{n=1}^\infty D_n\right|^2}\right\|_{\Phi^{(p)}}. \tag{4.52}$$

***Алтернативно, уколико је*** $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ ***м.к.н.о. фамилија таква да оператор*** $\Big(\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{-1}|C_n^*|^2 - \big|\sum_{n=1}^\infty C_n^*\big|^2\Big)^{\frac12}X \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$, ***тада и*** $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{-1}C_nXD_n - \sum_{n=1}^\infty C_nX\sum_{n=1}^\infty D_n \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ ***и важи***

$$\left\|\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{-1}C_nXD_n - \sum_{n=1}^\infty C_nX\sum_{n=1}^\infty D_n\right\|_{\Phi^{(p)}}$$
$$\leqslant \left\|\sqrt{\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{-1}|C_n^*|^2 - \left|\sum_{n=1}^\infty C_n^*\right|^2}\,X\right\|_{\Phi^{(p)}} \left\|\sum_{n=1}^\infty \alpha_n^{-1}|D_n|^2 - \left|\sum_{n=1}^\infty D_n\right|^2\right\|^{1/2}. \tag{4.53}$$

$\triangle$ Довољно је применити Теорему 4.16 у специјалном случају $\Omega := \mathbb{N}$, $\mu(\{n\}) := \alpha_n$, $A_n := \alpha_n^{-1} C_n$ и $B_n := \alpha_n^{-1} D_n$ за све $n \in \mathbb{N}$, да би се добиле неједнакости (4.52) и (4.53). $\square$

Напомена 4.18. Слично као у ситуацији дискутованој у Напомени 4.14, и претходна Последица 4.17 проширује неједнакост (4.20) у случају када је вредност за $c := \left\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n^{-1} A_n^* A_n - \left| \sum_{n=1}^{N} A_n \right|^2 \right\|^{1/2}$, као и (4.21) при $q := p$, у Теореми 4.5.

Ради комплетирања (допуне) [JKM, Th. 2.4] у случају $1 \leqslant p \leqslant 2$, приметимо да је $\mathfrak{C}_2(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}_p(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}^{(\circ)}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ и $\mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}_{p/(p-1)}(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ за $2 \leqslant p < +\infty$, како је то показано у доказу дела (г) Теореме 3.6. Ово омогућава да следећом теоремом проширимо [JKM, Th. 2.4] на идеале $\mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$.

**Теорема 4.19.** ***Нека су*** $\alpha_n \in (0,1]$ ***за*** $n \in \mathbb{N}$ ***такви да је*** $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$, $\Phi$ ***с.н. функција,*** $p \geqslant 2$ ***и нека су*** $\{\alpha_n^{-1/2} A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***и*** $\{\alpha_n^{-1/2} B_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ ***ј.к.и. фамилије оператора такве да је једна од њих м.к.н.о. фамилија. Ако*** $X \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$, ***тада*** $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} A_n X B_n - \sum_{n=1}^{\infty} A_n X \sum_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ ***и***

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} A_n X B_n - \sum_{n=1}^{\infty} A_n X \sum_{n=1}^{\infty} B_n \right\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \left\| \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} |A_n|^2 - \left| \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right|^2} \, X \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} |B_n^*|^2 - \left| \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \right|^2} \right\|_{\Phi^{(p)*}}. \tag{4.54}$$

$\triangle$ Прво, приметимо да користећи идентитет (4.33) за $\Omega := \mathbb{N}, \mu(\{n\}) := \alpha_n$ за $n \in \mathbb{N}$, примењен на $\alpha_n^{-1} A_n$ и $\alpha_n^{-1} B_n$ уместо на $A_t$ и $B_t$, добијамо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} A_n X B_n - \sum_{n=1}^{\infty} A_n X \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_m \alpha_n (\alpha_m^{-1} A_m - \alpha_n^{-1} A_n) X (\alpha_m^{-1} B_m - \alpha_n^{-1} B_n).$$

Како горњи идентитет такође обезбеђује да важи формула $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n^{-1/2} A_n|^2 - \left| \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right|^2 = \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_m \alpha_n \, |\alpha_m^{-1} A_m - \alpha_n^{-1} A_n|^2$ и како је $\{\alpha_n^{-1/2} A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ј.к.с. фамилија, то је онда и $\{\sqrt{\alpha_m \alpha_n} (\alpha_m^{-1} A_m - \alpha_n^{-1} A_n)\}_{m,n=1}^{\infty}$ једна ј.к.с. фамилија, односно, за свако $f \in \mathcal{H}$ важи $\sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_m \alpha_n \left\| (\alpha_m^{-1} A_m - \alpha_n^{-1} A_n) f \right\|^2 < +\infty$. Слично је и $\{\sqrt{\alpha_m \alpha_n} (\alpha_m^{-1} B_m^* - \alpha_n^{-1} B_n^*)\}_{m,n=1}^{\infty}$ једна ј.к.с. фамилија.

Према томе, прва неједнакост у (2.4) из Леме 2.6 је примењива на ј.к.с. фамилије $\{\sqrt{\alpha_m \alpha_n} (\alpha_m^{-1} A_m - \alpha_n^{-1} A_n)\}_{m,n=1}^{\infty}$ и $\{\sqrt{\alpha_m \alpha_n} (\alpha_m^{-1} B_m^* - \alpha_n^{-1} B_n^*)\}_{m,n=1}^{\infty}$, чиме се добија неједнакост у

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} A_n X B_n - \sum_{n=1}^{\infty} A_n X \sum_{n=1}^{\infty} B_n \right\|_{\Phi^{(p)*}} &= \frac{1}{2} \left\| \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_m \alpha_n \Big( \frac{A_m}{\alpha_m} - \frac{A_n}{\alpha_n} \Big) X \Big( \frac{B_m}{\alpha_m} - \frac{B_n}{\alpha_n} \Big) \right\|_{\Phi^{(p)*}} \\ &\leqslant \frac{1}{2} \left\| \bigg( \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_m \alpha_n \left| \frac{A_m}{\alpha_m} - \frac{A_n}{\alpha_n} \right|^2 \bigg)^{1/2} X \bigg( \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_m \alpha_n \left| \frac{B_m^*}{\alpha_m} - \frac{B_n^*}{\alpha_n} \right|^2 \bigg)^{1/2} \right\|_{\Phi^{(p)*}} \\ &= \left\| \bigg( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|A_n|^2}{\alpha_n} - \left| \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right|^2 \bigg)^{1/2} X \bigg( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|B_n^*|^2}{\alpha_n} - \left| \sum_{n=1}^{\infty} B_n^* \right|^2 \bigg)^{1/2} \right\|_{\Phi^{(p)*}}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

што показује неједнакост (4.54). Како имамо да $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} A_n X B_n - \sum_{n=1}^{\infty} A_n X \sum_{n=1}^{\infty} B_n = \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_m \alpha_n (\alpha_m^{-1} A_m - \alpha_n^{-1} A_n) X (\alpha_m^{-1} B_m - \alpha_n^{-1} B_n) \in \mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$, што се може добити из дела доказа датог у (4.55), тиме се и сам доказ комплетира. $\square$

Напомена 4.20. Операторне и норма неједнакости Grüss-Landau-овог типа често имају и своје аналоге и уопштења у контексту Hilbert-ових модула, па ни неједнакости представљене у овој глави не би требало да у томе буду изузетак. Примера ради, дато је уопштење [JKM, Th. 2.1] у контексту полу-унутрашњих производа на конјугованим $W^*$-модулима над $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ у [Ke20, Th. 8], а такође, неки од резултата треће и четврте главе ове дисертације, и то неједнакости (3.8) из Леме 3.1 и (3.29) из Теореме 3.6(в), (3.6) и (3.7) из Леме 3.1 и Теорема 4.15, као и Теорема 3.6(д) су уопштени у конктексту Hilbert-ових модула редом формулама (9), (10) и (11) у [Ke20, Th. 3].

# Глава 5

# Примена на уопштене функцијске деривације

## 1 Норма неједнакости за уопштене деривације холоморфних функција са позитивним Taylor-овим коефицијентима

За $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и одређене класе функција $\varphi$ дефинисаних у области која садржи спектар $\sigma(A)$ и $\sigma(B)$ оператора $A$ и $B$, проблем поређења уопштених функцијских деривација (односно функцијских комутатора и пертубација) $\varphi(A)X - X\varphi(B)$ (односно $\varphi(A)X - X\varphi(A)$ и $\varphi(A) - \varphi(B)$) са деривацијама $AX - XB$ (односно комутаторима $AX - XA$ и пертубацијама $A - B$) у различитим у.и. нормама често представља једно од најважнијих питања у многим областима теорије оператора, укључујући пертубациону теорију, теорију расејања, матричну анализу, као и интегралне операторе. Ова проблематика привукла је пажњу многих математичара и значајни резултати су постигнути у том правцу. Неки од добро познатих резултата, који су од значаја за сагледавања резултата који ће бити дати у овој глави, укључују [A88, Th. 1], њену верзију за уопштене деривације у [BK, Th. 2, Th. 3] и [J97, Th. 3.1, Th. 3.4], теорему о средњој вредности [J05, Th. 4.4] за оператор монотоне функције на $[0, +\infty)$ и [J99a, Th. 3.4]. За друге, са њима повезане неједнакости, заинтересоване читаоце упућујемо на [Da, Ki85, Ped], као и на тамошње референце. Битну потпору при истраживању горњих питања у случају самоадјунгованих или унитарних оператора $A$ и $B$ пружа теорија д.о.и.

У превазилажењу природних ограничења при примени д.о.и. на парове нормалних оператора $A$ и $B$, користићемо различите варијанте Cauchy-Schwarz-ових норма неједнакости за т.у.п. трансформере, које омогућавају неопходне методе за успешно разматрање неких класа (не обавезно нормалних) оператора, укључујући хипонормалне, кохипонормалне, акретивне операторе и операторе које имају строго контрактиван реалан део. У овој глави биће представљене норма неједнакости за уопштене деривације индуковане оператор монотоним функцијама и претходно наведеним класама оператора.

У овом поглављу приказаћемо прво норма неједнакостима Schwarz-Pick-овог типа у идеалима компактних оператора за одређене класе функција, холоморфне на отвореном јединичном диску $\mathbb{D} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \subset \mathbb{C}$ (видети и [JLM20a]).

**Теорема 5.1.** ***Нека су*** $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***контракције,*** $p \geqslant 2, \Phi$ ***с.н. функција,*** $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ***апсолутно конвергентан ред комплексних бројева за који је*** $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \leqslant$

$1$ ***и нека је*** $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ***за*** $|z| \leqslant 1$. ***Ако за неко*** $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:
(a1) $AX - XB \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ***и*** $A, B$ ***су нормални оператори, тада и оператор*** $\sqrt{I - A^*A}\,\big(f(A)X - Xf(B)\big)\sqrt{I - BB^*} \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, ***при чему је***

$$\big\|\sqrt{I - A^*A}\big(f(A)X - Xf(B)\big)\sqrt{I - BB^*}\big\|_\Phi \\ \leqslant \big\|\sqrt{I - f(A)^*f(A)}\,(AX - XB)\sqrt{I - f(B)f(B)^*}\big\|_\Phi; \quad (5.1)$$

(a2) $AX - XB \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ ***и (бар) један од оператора*** $A$ ***или*** $B$ ***је нормалан, тада*** $\sqrt{I - A^*A}\,\big(f(A)X - Xf(B)\big)\sqrt{I - BB^*} \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ ***и*** (5.1) ***важи за*** ${\Phi^{(p)}}^*$ ***уместо*** $\Phi$;
(a3) $AX - XB \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, ***тада*** $\sqrt{I - A^*A}\big(f(A)X - Xf(B)\big)\sqrt{I - BB^*} \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ ***и*** (5.1) ***важи и када норму*** $\|\cdot\|_\Phi$ ***заменимо нуклеарном нормом*** $\|\cdot\|_1$;
(a4′) $AX - XB \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$, $\|A\| < 1$ ***и*** $B$ ***је нормалан, тада*** $\big(f(A)X - Xf(B)\big)\sqrt{I - BB^*} \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ ***и***

$$\big\|\big(f(A)X - Xf(B)\big)\sqrt{I - BB^*}\big\|_{\Phi^{(p)}} \\ \leqslant \big\|I - f(A)f(A)^*\big\|^{1/2}\big\|(I - AA^*)^{-1/2}(AX - XB)\sqrt{I - f(B)f(B)^*}\big\|_{\Phi^{(p)}}. \quad (5.2)$$

***Специјално, ако је*** $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) := \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ ***(то јест, ако је*** $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}} := \|\cdot\|_2$***), тада*** (5.2) ***и даље важи и ако*** $B$ ***није нормалан оператор;***
(a4″) $AX - XB \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$, $A$ ***је нормалан и*** $\|B\| < 1$, ***тада*** $\sqrt{I - A^*A}\big(f(A)X - Xf(B)\big) \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ ***и***

$$\big\|\sqrt{I - A^*A}\big(f(A)X - Xf(B)\big)\big\|_{\Phi^{(p)}} \\ \leqslant \big\|\sqrt{I - f(A)^*f(A)}\,(AX - XB)(I - B^*B)^{-1/2}\big\|_{\Phi^{(p)}}\big\|I - f(B)^*f(B)\big\|^{1/2}; \quad (5.3)$$

***Поново, ако је*** $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) := \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ ***(то јест, ако је*** $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}} := \|\cdot\|_2$***), тада*** (5.3) ***и даље важи и ако*** $A$ ***није нормалан оператор;***
(б1) $X - AXB \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ***и*** $A, B$ ***су нормални, тада и оператор*** $\sqrt{I - A^*A}\,\big(f(I)X - f(A \otimes B)(X)\big)\sqrt{I - BB^*} \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ ***и***

$$\big\|\sqrt{I - A^*A}\,\big(f(I)X - f(A \otimes B)(X)\big)\sqrt{I - BB^*}\big\|_\Phi \\ \leqslant \big\|\sqrt{I - f(A)^*f(A)}(X - AXB)\sqrt{I - f(B)f(B)^*}\big\|_\Phi; \quad (5.4)$$

(б2) $X - AXB \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ ***и (бар) један од оператора*** $A$ ***или*** $B$ ***је нормалан, тада*** $\sqrt{I - A^*A}\big(f(I)X - f(A \otimes B)(X)\big)\sqrt{I - BB^*} \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ ***и*** (5.4) ***важи за*** ${\Phi^{(p)}}^*$ ***уместо*** $\Phi$;
(б3) $X - AXB \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, ***тада*** $\sqrt{I - A^*A}\,\big(f(I)X - f(A \otimes B)(X)\big)\sqrt{I - BB^*} \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ ***и*** (5.4) ***важи и када*** $\|\cdot\|_\Phi$ ***заменимо нуклеарном нормом*** $\|\cdot\|_1$;
(б4′) $X - AXB \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$, $\|A\| < 1$ ***и*** $B$ ***је нормалан, тада важи*** $\big(f(I)X - f(A \otimes B)(X)\big)\sqrt{I - BB^*} \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ ***и***

$$\big\|\big(f(I)X - f(A \otimes B)(X)\big)\sqrt{I - BB^*}\big\|_{\Phi^{(p)}} \\ \leqslant \big\|I - f(A)f(A)^*\big\|^{1/2}\big\|(I - AA^*)^{-1/2}(X - AXB)\sqrt{I - f(B)f(B)^*}\big\|_{\Phi^{(p)}}. \quad (5.5)$$

***Специјално, уколико је*** $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) := \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ ***(то јест, ако је*** $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}} := \|\cdot\|_2$***), тада*** (5.5) ***важи и ако*** $B$ ***није нормалан оператор;***

(б4″) $X - AXB \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$, $A$ ***је нормалан и*** $\|B\| < 1$, ***шада важи да ойерашор*** $\sqrt{I - A^*A}\big(f(I)X - f(A \otimes B)(X)\big) \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ ***и***

$$\begin{aligned}&\big\|\sqrt{I - A^*A}\,\big(f(I)X - f(A \otimes B)(X)\big)\big\|_{\Phi^{(p)}}\\ &\qquad\leqslant \big\|\sqrt{I - f(A)^*f(A)}(X - AXB)(I - B^*B)^{-1/2}\big\|_{\Phi^{(p)}}\big\|I - f(B)^*f(B)\big\|^{1/2}.\end{aligned} \tag{5.6}$$

***Поново, уколико је*** $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) := \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$ ***(шо јесш, ако је*** $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}} := \|\cdot\|_2$***), шада*** (5.6) ***и даље важи и ако*** $A$ ***није нормалан ойерашор.***

$\triangle$ (а1) Приметимо да је $f$ холоморфна функција у $\mathbb{D}$ и непрекидна на затвореном јединичном диску $\overline{\mathbb{D}}$, па су и $f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nA^n$ и $f(B) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nB^n$ контракције сагласно von Neumann-овој неједнакости (видети [N, A63]), са горе наведеним развојима у апсолутно конвергентне редове у $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Зато је

$$\begin{aligned}&\big\|\sqrt{I - A^*A}\,\big(f(A)X - Xf(B)\big)\sqrt{I - BB^*}\big\|_{\Phi}\\
&= \Big\|\sqrt{I - A^*A}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(A^nX - XB^n)\sqrt{I - BB^*}\Big\|_{\Phi} &(5.7)\\
&= \Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} c_n\sqrt{I - A^*A}\,A^{n-k-1}(AX - XB)B^k\sqrt{I - BB^*}\Big\|_{\Phi} &(5.8)\\
&\leqslant \Big\|\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}|c_n|(A^*)^{n-k-1}(I - A^*A)A^{n-k-1}\Big)^{1/2}(AX - XB)\\
&\qquad\times\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}|c_n|B^k(I - BB^*)B^{*k}\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi} &(5.9)\\
&= \Big\|\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|(I - A^{*n}A^n)\Big)^{1/2}(AX - XB)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|(I - B^nB^{*n})\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi} &(5.10)\\
&\leqslant \Big\|\Big(I - \Big|\sum_{n=0}^{\infty}c_nA^n\Big|^2\Big)^{1/2}(AX - XB)\Big(I - \Big|\sum_{n=0}^{\infty}\overline{c_n}B^{*n}\Big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi} &(5.11)\\
&= \big\|\sqrt{I - f(A)^*f(A)}\,(AX - XB)\sqrt{I - f(B)f(B)^*}\big\|_{\Phi}.\end{aligned}$$

Неједнакост (5.9) се ослања на Cauchy–Schwarz-ову неједнакост [J98, Th. 2.2], примењену на фамилије $\Big\{\sqrt{|c_n|}\sqrt{I - A^*A}\,A^{n-k-1}\Big\}_{1\leqslant n, 0\leqslant k\leqslant n-1}$ и $\Big\{\sqrt{|c_n|}e^{i\arg c_n}B^k\sqrt{I - BB^*}\Big\}_{1\leqslant n, 0\leqslant k\leqslant n-1}$ уместо на $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ редом. Такође, формуле $A^nX - XB^n = \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k}(AX - XB)B^k$ и $X - A^nXB^n = \sum_{k=0}^{n-1} A^k(X - AXB)B^k$ су коришћене за развијање (5.7) у (5.8) и (5.9) у (5.10) редом. Последња неједнакост (5.11) заснива се на Cauchy–Schwarz-овој операторној неједнакости [JM, Lemma 2.2] којом добијамо другу неједнакост у

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|A^{*n}A^n \geqslant \Big(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\Big)\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|A^{*n}A^n \geqslant \Big|\sum_{n=0}^{\infty}c_nA^n\Big|^2, \tag{5.12}$$

као и $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|B^nB^{*n} \geqslant \big|\sum_{n=0}^{\infty}\overline{c_n}B^{*n}\big|^2$, што после примене принципа двоструке монотоности (1.8) коначно показује неједнакост (5.11).

Заменом с.н. функције $\Phi$ са $\Phi^{(p)^*}$ у линијама (5.7)–(5.11) добија се доказ дела (а2). Једина суштинска разлика јесте то што се у овом случају користи Cauchy-Schwarz-ова норма неједнакост (2.4) у Леми 2.6 уместо [J98, Th. 2.2].

Слично, замењујући $\|\cdot\|_\Phi$ нуклеарном нормом $\|\cdot\|_1$ у линијама (5.7)–(5.11) и примењујући [J99, Th. 2.1] за $p := 1$ се добија и доказ дела (а3).

Полазећи од развоја $f(A)X - Xf(B) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} c_n A^{n-k-1}(AX - XB)B^k$ већ коришћеног у линијама (5.7) и (5.8), доказ дела (а4′) следи из

$$\begin{aligned}
&\big\|\big(f(A)X - Xf(B)\big)\sqrt{I-BB^*}\big\|_{\Phi^{(p)}} = \Big\|\sum_{n=0}^{\infty} c_n(A^nX - XB^n)\sqrt{I-BB^*}\Big\|_{\Phi^{(p)}} \\
&= \Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1} c_nA^{n-k-1}\sqrt{I-AA^*}(I-AA^*)^{-1/2}(AX-XB)B^k\sqrt{I-BB^*}\Big\|_{\Phi^{(p)}} \\
&\leqslant \Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}|c_n|A^{n-k-1}(I-AA^*)(A^*)^{n-k-1}\Big\|^{1/2} \\
&\times \Big\|(I-AA^*)^{-1/2}(AX-XB)\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}|c_n|B^k(I-BB^*)B^{*k}\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi^{(p)}} \qquad (5.13)\\
&= \Big\|\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|(I-A^nA^{*n})\Big\|^{1/2}\Big\|(I-AA^*)^{-1/2}(AX-XB)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|(I-B^nB^{*n})\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi^{(p)}} \\
&\leqslant \Big\|I - \Big|\sum_{n=0}^{\infty}\overline{c_n}A^{*n}\Big|^2\Big\|^{1/2}\Big\|(I-AA^*)^{-1/2}(AX-XB)\Big(I-\Big|\sum_{n=0}^{\infty}\overline{c_n}B^{*n}\Big|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{\Phi^{(p)}} \qquad (5.14)\\
&= \|I - f(A)f(A)^*\|^{1/2}\big\|(I-AA^*)^{-1/2}(AX-XB)\sqrt{I-f(B)f(B)^*}\big\|_{\Phi^{(p)}}.
\end{aligned}$$

Овде је неједнакост (5.13) базирана на неједнакости (1.15) у Теореми 1.16, примењеној на $\Omega := \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, где је $\mu$ бројачка мера на $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, $\mathcal{C}_{n,k} := \sqrt{|c_n|}\sqrt{I-AA^*}\;A^{*(n-k-1)}$, $\mathcal{D}_{n,k} := \sqrt{|c_n|}e^{i\arg c_n}B^k\sqrt{I-BB^*}$ за $0 \leqslant k \leqslant n-1$ и $\mathcal{C}_{n,k} := \mathcal{D}_{n,k} := 0$ за $k \geqslant n$, као и на $(I-AA^*)^{-1/2}(AX-XB)$ уместо на $X$. Наиме, за $p \geqslant 2$ је $p/2 \geqslant 1$ и $\Phi^{(\frac{p}{2})}$ представља с.н. функцију, те је $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}} = \|\cdot\|_{\left(\Phi^{(\frac{p}{2})}\right)^{(2)}}$ једна Q норма. Неједнакост (5.14) се суштински заснива на претпоставци $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n| \leqslant 1$ и неједнакости (5.12), у комбинацији са својством двоструке монотоности (1.8).

У случају неједнакости (5.2) за Hilbert-Schmidt-ове $\|\cdot\|_2$ норме, доказ се заснива на Cauchy-Schwarz-овој норма неједнакости (3.6) у Леми 3.1(г1)

$$\Big\|\sum_{n=0}^{\infty}A_nXB_n\Big\|_2 \leqslant \Big\|\sum_{n=0}^{\infty}A_nA_n^*\Big\|^{1/2}\Big\|X\Big(\sum_{n=0}^{\infty}B_nB_n^*\Big)^{1/2}\Big\|_2,$$

за све $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и све ј.к.с. фамилије $\{A_n^*\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{B_n^*\}_{n=0}^{\infty}$.

Доказ дела (а4″) је аналоган претходно датом за (а4′), при чему се сада ослањамо на неједнакост (1.14) у Теореми 1.16 уместо на неједнакости (1.15) у тој истој теореми.

У случају неједнакости (5.3) за Hilbert-Schmidt-ове норме $\|\cdot\|_2$, доказ се заснива на Cauchy-Schwarz-овој норма неједнакости (3.7) из Леме 3.1(г2)

$$\Big\|\sum_{n=0}^{\infty}A_nXB_n\Big\|_2 \leqslant \Big\|\Big(\sum_{n=0}^{\infty}A_n^*A_n\Big)^{1/2}X\Big\|_2\Big\|\sum_{n=0}^{\infty}B_n^*B_n\Big\|^{1/2},$$

за све $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и све ј.к.с. фамилије $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$.

(б1) Доказ овог дела теореме је сличан оном датом за (а1), с обзиром да је

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sqrt{I-A^*A}\,\big(f(I)X-f(A\otimes B)(X)\big)\sqrt{I-BB^*}\right\|_{\Phi^{(p)}}\\
&=\left\|\sqrt{I-A^*A}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(X-A^nXB^n)\sqrt{I-BB^*}\right\|_{\Phi} && (5.15)\\
&=\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}c_n\sqrt{I-A^*A}\,A^k(X-AXB)B^k\sqrt{I-BB^*}\right\|_{\Phi} && (5.16)\\
&\leqslant\left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}|c_n|A^{*k}(I-A^*A)A^k\right)^{\frac12}(X-AXB)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}|c_n|B^k(I-BB^*)B^{*k}\right)^{\frac12}\right\|_{\Phi} && (5.17)\\
&=\left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|(I-A^{*n}A^n)\right)^{1/2}(X-AXB)\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|(I-B^nB^{*n})\right)^{1/2}\right\|_{\Phi} && (5.18)\\
&\leqslant\left\|\left(I-\left|\sum_{n=0}^{\infty}c_nA^n\right|^2\right)^{1/2}(X-AXB)\left(I-\left|\sum_{n=0}^{\infty}\overline{c_n}B^{*n}\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{\Phi}\\
&=\left\|\sqrt{I-f(A)^*f(A)}\,(X-AXB)\sqrt{I-f(B)f(B)^*}\right\|_{\Phi}.
\end{aligned}
$$

Једина суштинска разлика у односу на доказ за (а1) (односно (а2), (а3), (а4′) и (а4″)) и (б1) (односно (б2), (б3), (б4′) и (б4″)) јесте да се овај пут користи формула $X-A^nXB^n=\sum_{k=0}^{n-1}A^k(X-AXB)B^k$ за доказ дела (б1) како би се добила (5.16) из (5.15) и аналогно (5.18) из (5.17). □

Напомена 5.2. За холоморфну функцију $f$ која слика отворен јединични диск $\mathbb{D}$ у самог себе, први део Schwarz-Pick-ове теореме установљава следећи инваријантни облик Schwarz-ове леме

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{1-\overline{f(w)}f(z)}\right|\leqslant\left|\frac{z-w}{1-\overline{w}z}\right|$$

за све $z,w\in\mathbb{D}$, што се може записати и у еквивалетној форми

$$\big(1-|z|^2\big)\big|f(z)-f(w)\big|^2\big(1-|w|^2\big)\leqslant\big(1-|f(z)|^2\big)|z-w|^2\big(1-|f(w)|^2\big). \tag{5.19}$$

Еквиваленција претходних неједнакости лако се показује коришћењем идентитета $|1-\overline{w}z|^2=|z-w|^2+\big(1-|z|^2\big)\big(1-|w|^2\big)$, примењеном и на пар $\big\{f(z),f(w)\big\}$.

Функција $f$ која се појављује у Теореми 5.1 задовољава све услове Schwarz-Pick-ове теореме, те за такве функције неједнакост (5.1), у случају да је $\|\cdot\|_\Phi$ нуклеарна норма $\|\cdot\|_1$, заправо представља директно уопштење неједнакости (5.19) на нуклеарне уопштене функцијске деривације $f(A)X-Xf(B)\in\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$.

Додатно, ако су сви Taylor-ови коефицијенти $c_n$ ненегативни, онда се Теорема 5.1 може додатно профинити. Наиме, важи

**Последица 5.3.** ***Ако су*** $c_n\geqslant 0$ ***за све*** $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, ***тада је под условима Теореме*** 5.1

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sqrt{I-A^*A}\big(f(A)X-Xf(B)\big)\sqrt{I-BB^*}\right\|_1\\
&\leqslant\left\|\big(f(1)I-f(A^*\otimes A)(I)\big)^{1/2}(AX-XB)\,\big(f(1)I-f(B\otimes B^*)(I)\big)^{1/2}\right\|_1 && (5.20)\\
&\leqslant\left\|\sqrt{I-f(A)^*f(A)}\,(AX-XB)\sqrt{I-f(B)f(B)^*}\right\|_1,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\left\|\sqrt{I-A^*A}\,\big(X-f(A\otimes B)(X)\big)\sqrt{I-BB^*}\right\|_1\\
&\leqslant \left\|\big(f(1)I-f(A^*\otimes A)(I)\big)^{1/2}(X-AXB)\,\big(f(1)I-f(B\otimes B^*)(I)\big)^{1/2}\right\|_1 \\
&\leqslant \left\|\sqrt{I-f(A)^*f(A)}\,(X-AXB)\sqrt{I-f(B)f(B)^*}\right\|_1 .
\end{aligned} \tag{5.21}$$

***Ако су додатно*** $A$ ***и*** $B$ ***нормални оператори, тада се изрази*** $f(1)I-f(A^*\otimes A)(I)$ ***и*** $f(1)I-f(B\otimes B^*)(I)$ ***који се појављују на десној страни од*** (5.20) ***и*** (5.21) ***могу заменити са*** $I-f(A^*A)$ ***и*** $I-f(BB^*)$ ***редом.***

△ Све што је потребно да урадимо за доказивање Последице 5.3 је да приметимо да су десне стране у (5.20) и (5.21) само други начин да запишемо (5.10) и (5.18) редом. □

**Последица 5.4.** ***Ако су*** $A,B\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ***контракције и*** $n\in\mathbb{N}$, ***тада је***

$$\left\|\sqrt{I-A^*A}\big(e^AX-Xe^B\big)\sqrt{I-BB^*}\right\|_1\leqslant \tfrac{1}{e}\left\|\sqrt{e^2I-e^{A^*}e^A}\,(AX-XB)\sqrt{e^2I-e^Be^{B^*}}\right\|_1, \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
&\left\|\sqrt{I-A^*A}\Big(eX-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^nXB^n}{n!}\Big)\sqrt{I-BB^*}\right\|_1\\
&\qquad\leqslant \tfrac{1}{e}\left\|\sqrt{e^2I-e^{A^*}e^A}\,(X-AXB)\sqrt{e^2I-e^Be^{B^*}}\right\|_1,
\end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}
&\left\|\sqrt{I-A^*A}\big((\arcsin A)X-X\arcsin B\big)\sqrt{I-BB^*}\right\|_1\\
&\qquad\leqslant \tfrac{2}{\pi}\left\|\sqrt{\tfrac{\pi^2}{4}I-|\arcsin A|^2}(AX-XB)\sqrt{\tfrac{\pi^2}{4}I-|\arcsin B^*|^2}\right\|_1,
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
&\left\|\sqrt{I-A^*A}\Big(\tfrac{\pi}{2}X-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}A^{2n+1}XB^{2n+1}\Big)\sqrt{I-BB^*}\right\|_1\\
&\qquad\leqslant \tfrac{2}{\pi}\left\|\sqrt{\tfrac{\pi^2}{4}I-|\arcsin A|^2}\,(X-AXB)\sqrt{\tfrac{\pi^2}{4}I-|\arcsin B^*|^2}\right\|_1,
\end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
&\left\|\sqrt{I-A^*A}\Big((I-A)\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}\tfrac{A^k}{k}\Big)X-X(I-B)\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}\tfrac{B^k}{k}\Big)\Big)\sqrt{I-BB^*}\right\|_1\leqslant\\
&\left\|\sqrt{I-\Big|(I-A)\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}\tfrac{A^k}{k}\Big)\Big|^2}(AX-XB)\sqrt{I-\Big|(I-B^*)\exp\Big(\sum_{k=1}^{n}\tfrac{B^{*k}}{k}\Big)\Big|^2}\right\|_1,
\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
&\left\|\sqrt{I-A^*A}\big(AX+(I-A)\log(I-A)X-XB-X(I-B)\log(I-B)\big)\sqrt{I-BB^*}\right\|_1\\
&\leqslant\left\|\sqrt{I-\big|A+(I-A)\log(I-A)\big|^2}\,(AX-XB)\sqrt{I-\big|B^*+(I-B^*)\log(I-B^*)\big|^2}\right\|_1.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

***кад год*** $AX-XB\in\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ ***у*** (5.22), (5.24), (5.26) ***и*** (5.27), ***као и кад је*** $X-AXB\in\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ ***у*** (5.23) ***и*** (5.25).

△ (5.22) и (5.23) следе применом Последице 5.3 на целу функцију $e^{-1}\exp\colon\ z\mapsto\exp(z-1)$, док (5.24) и (5.25) следе применом исте последице на функцију $\frac{2}{\pi}\arcsin$, која је холоморфна у $\mathbb{D}$ и непрекидна на $\overline{\mathbb{D}}$, с обзиром да њен степени ред $\frac{2}{\pi}\arcsin z=\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!\,z^{2n+1}}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$ конвергира апсолутно и униформно у $\overline{\mathbb{D}}$.

За такозване елементарне факторе $E_n\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}\colon z\mapsto(1-z)\exp\big(\sum_{k=1}^{n}\frac{z^k}{k}\big)$ (видети доказ неједнакости (2.41) и (2.42) у Последици 2.15) важи да $1-E_n$ задовољава све услове Последице 5.3, чија примена даје (5.26).

Ради доказивања (5.27), приметимо да функција $\varphi_9\colon\mathbb{D}\to\mathbb{C}\colon z\mapsto z+(1-z)\log(1-z)$ има степени развој $\varphi_9(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n(n-1)}$ према [JLM18, Cor. 2.5e)]. Тако поновна употреба Последице 5.3 на $\varphi_9$ даје (5.27). □

## 2 Норма неједнакости за уопштене функцијске деривације оператор монотоних функција

Свака (растућа) о.м. функција $\varphi$ на $(-1,1)$ допушта јединствено холоморфно продужење $\tilde{\varphi}$ у $\mathbb{C}^+ \cup (-1,1) \cup \mathbb{C}^- = \mathbb{C} \setminus \big((-\infty,-1] \cup [1,+\infty)\big)$, која припада Pick-овој класи $\mathcal{P}(-1,1)$ и задовољава услов $\operatorname{Im} \tilde{\varphi}(z) > 0$ за све $\operatorname{Im} z > 0$, како је то показано у [Hi10, Th. 2.7.7] (погледати и секцију 5 у Глави 1). Стога ћемо у наставку и за $\tilde{\varphi}$ користити поједностављену нотацију $\varphi$.

**Дефиниција 5.5.** *Оператор $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ зовемо* ***хипонормалним*** *ако и само ако је $A^*A \geqslant AA^*$,* ***кохипонормалним*** *ако и само ако је $A^*$ хипонормалан, то јест ако је $AA^* \geqslant A^*A$. Такође, $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ зовемо* ***акретивним*** *оператором ако је $\operatorname{Re} A \stackrel{\text{def}}{=} A_{\Re} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A^*+A}{2} \geqslant 0$ и* ***строго акретивним*** *ако је $A_{\Re} \geqslant cI$ за неко $c > 0$.*

За класе таквих оператора, имамо следеће уопштење Heinz[1]-ове у.и. норма неједнакости [Kosa11, (4.1)] на све о.м. функције за које је $\varphi(0) = 0$.

**Теорема 5.6.** ***Нека је $\Phi$ с.н. функција, $p \geqslant 2$ и $A, B, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, такви да уколико је $\varphi \in \mathcal{P}(-1,1)$ тада $A$ и $B$ имају строго контрактивни реални део, а уколико је $\varphi \in \mathcal{P}[0,+\infty)$ неконстантна функција тада су $A$ и $B$ строго акретивни.***
(а) ***Ако је додатно $A$ хипонормалан и $B$ нормалан, такви да је $AX - XB \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$, тада***

$$\left\|\varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\big(\varphi(A)X - X\varphi(B)\big)\right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \left\|(AX-XB)\varphi'\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(p)}}. \tag{5.28}$$

***Специјално, ако је $p := 2$ и $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) := \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$, тада (5.28) важи за све хипонормалне операторе $A$ и $B$.***
(б) ***Алтернативно, ако је $A$ нормалан и $B$ кохипонормалан, такви да важи $AX - XB \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$, тада***

$$\left\|\big(\varphi(A)X - X\varphi(B)\big)\varphi'\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \left\|\varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(AX-XB)\right\|_{\Phi^{(p)}}. \tag{5.29}$$

***Специјално, ако је $p := 2$ и $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) := \mathcal{C}_2(\mathcal{H})$, тада (5.29) важи за све кохипонормалне операторе $A$ и $B$.***
(в) ***Ако је $A$ кохипонормалан, $B$ хипонормалан и, додатно је бар један од оператора $A$ или $B$ нормалан и $AX - XB \in \mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$, тада***

$$\|\varphi(A)X - X\varphi(B)\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \left\|\sqrt{\varphi'\left(\frac{A^*+A}{2}\right)}(AX-XB)\sqrt{\varphi'\left(\frac{B+B^*}{2}\right)}\right\|_{\Phi^{(p)*}}, \tag{5.30}$$

$$\left\|\varphi'\left(\frac{A^*+A}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\big(\varphi(A)X - X\varphi(B)\big)\varphi'\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(p)*}} \leqslant \|AX-XB\|_{\Phi^{(p)*}}. \tag{5.31}$$

***Израз на десној страни у (5.30) се може додатно проценити изразом*** $\left\|\left(\frac{A^*+A}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \varphi\left(\frac{A^*+A}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(AX-XB)\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\varphi\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\Phi^{(p)*}}$ ***ако је додатно $\varphi(0) = 0$. Услов $\varphi(0) = 0$***

[1]Хајнц–Erhard Heinz (1924–2017)

***обезбеђује и да се израз на левој страни у*** (5.31) ***може додатно проценити одоздо са*** $\left\|\left(\frac{A^*+A}{2}\right)^{1/2}\varphi\left(\frac{A^*+A}{2}\right)^{-1/2}(\varphi(A)X-X\varphi(B))\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{1/2}\varphi\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{-1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}}$.

***Такође, у специјалном случају*** $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H}) := \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, ***обе неједнакости*** (5.30) ***и*** (5.31) ***важе ако је*** $A$ ***кохипонормалан и*** $B$ ***хипонормалан оператор, без услова нормалности за било који од њих.***

(г) ***Ако су додатно и*** $A$ ***и*** $B$ ***нормални, такви да*** $AX-XB\in\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, ***тада је***

$$\|\varphi(A)X-X\varphi(B)\|_\Phi\leqslant\left\|\sqrt{\varphi'\left(\frac{A^*+A}{2}\right)}(AX-XB)\sqrt{\varphi'\left(\frac{B+B^*}{2}\right)}\right\|_\Phi, \tag{5.32}$$

$$\left\|\sqrt{\frac{A^*+A}{2}}\big(\varphi(A)X-X\varphi(B)\big)\sqrt{\frac{B+B^*}{2}}\right\|_\Phi\leqslant \tag{5.33}$$

$$\left\|\sqrt{\frac{A^*+A}{2}\varphi'\left(\frac{A^*+A}{2}\right)}(AX-XB)\sqrt{\frac{B+B^*}{2}\varphi'\left(\frac{B+B^*}{2}\right)}\right\|_\Phi\leqslant$$

$$\left\|\sqrt{\varphi\left(\frac{A^*+A}{2}\right)}(AX-XB)\sqrt{\varphi\left(\frac{B+B^*}{2}\right)}\right\|_\Phi\quad \textbf{\textit{ако је }}\varphi(0)=0, \tag{5.34}$$

$$\left\|\varphi'\left(\frac{A^*+A}{2}\right)^{-1/2}\big(\varphi(A)X-X\varphi(B)\big)\varphi'\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{-1/2}\right\|_\Phi\leqslant\|AX-XB\|_\Phi. \tag{5.35}$$

***Израз на десној страни у*** (5.32) ***се може додатно проценити*** $\left\|\left(\frac{A^*+A}{2}\right)^{-\frac12}\varphi\left(\frac{A^*+A}{2}\right)^{\frac12}(AX-XB)\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{-\frac12}\varphi\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{\frac12}\right\|_\Phi$ ***у случају када је додатно*** $\varphi(0)=0$, ***када се израз на крају леве стране у*** (5.35) ***може проценити одоздо са*** $\left\|\left(\frac{A^*+A}{2}\right)^{\frac12}\varphi\left(\frac{A^*+A}{2}\right)^{-\frac12}(\varphi(A)X-X\varphi(B))\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{\frac12}\varphi\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{-\frac12}\right\|_\Phi$.

△ Да докажемо део (а), разматрајмо прво случај када $A$ и $B$ имају строго контрактивне реалне делове и $\varphi\in\mathcal{P}(-1,1)$. Свака функција $\varphi\in\mathcal{P}(-1,1)$ има своју интегралну репрезентацију. Наиме, постоји јединствена вероватносна Borel-ова мера $\mu$ на $[-1,1]$ за коју је

$$\varphi(z)=\varphi(0)+\varphi'(0)\int_{-1}^1\frac{z}{1-tz}\,d\mu(t),\qquad \text{за све } -1<\frac{z+\bar z}{2}<1,$$

сагласно формули [Hi10, (2.7.4)] и [Hi10, Th. 2.7.7] (видети и секцију 5 у Глави 1). У том случају се доказ неједнакости (5.28) у делу (а) заснива на следећим једнакостима и проценама:

$$\begin{aligned}&\left\|\varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^{-1/2}\big(\varphi(A)X-X\varphi(B)\big)\right\|_{\Phi^{(p)}}\\
&=\varphi'(0)\left\|\int_{-1}^1\varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^{-1/2}(I-tA)^{-1}(AX-XB)(I-tB)^{-1}d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)}} &(5.36)\\
&\leqslant\varphi'(0)\left\|\varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^{-1/2}\int_{-1}^1(I-tA)^{-1}(I-tA^*)^{-1}d\mu(t)\varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^{-1/2}\right\|^{1/2}\\
&\quad\times\ \left\|(AX-XB)\left(\int_{-1}^1(I-tB)^{-1}(I-tB^*)^{-1}\,d\mu(t)\right)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)}} &(5.37)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \varphi'(0)\left\|\varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^{-1/2}\int_{-1}^{1}\left(I-t\frac{A+A^*}{2}\right)^{-2}d\mu(t)\varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^{-1/2}\right\|^{1/2}\\
&\quad\times\ \left\|(AX-XB)\left(\int_{-1}^{1}\left(I-t\frac{B+B^*}{2}\right)^{-2}d\mu(t)\right)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)}}\\
&= \left\|(AX-XB)\varphi'\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)}}. \qquad (5.38)
\end{aligned}$$

Једнакост (5.36) се проверава директно, неједнакост (5.37) је последица примене Cauchy-Schwarz-ове неједнакости (1.15) из Теореме 1.16 за $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)}}$ норме примењене на $\mathcal{C}_t := (I-tA^*)^{-1}$, $\mathcal{D}_t := (I-tB)^{-1}$ за $t\in\Omega := [-1,1]$, као и на $AX-XB$ уместо на $X$. Неједнакост у (5.38) се заснива на процени $I-tA-tA^*+t^2A^*A = I-t(A+A^*)+t^2A^*A \geqslant I-t(A+A^*)+t^2\frac{A^*A+AA^*}{2} = I-2t\frac{A+A^*}{2}+t^2\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^2+t^2\left(\frac{A-A^*}{2i}\right)^2 \geqslant \left(I-t\frac{A+A^*}{2}\right)^2$ за хипонормалан оператор $A$, што даје и $0\leqslant\varphi'(0)\int_{-1}^{1}(I-tA)^{-1}(I-tA^*)^{-1}d\mu(t)\leqslant\varphi'(0)\int_{-1}^{1}\left(I-t\frac{A+A^*}{2}\right)^{-2}d\mu(t)=\varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)$, с обзиром да је инвертовање позитивних оператора оператор монотона функција. Овде смо такође користили формулу (5) из [J19a, Lemma 2.1] да бисмо препознали да је $\varphi'(C)=\varphi'(0)\int_{-1}^{1}(1-tC)^{-2}\,d\mu(t)$, за свако $C\in\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ чији је спектар $\sigma(C)$ садржан у отвореној траци $\mathbb{S}_{-1}^{1}\stackrel{\text{def}}{=}\left\{z\in\mathbb{C}: -1<\operatorname{Re}z<1\right\}$. Слично, како је $B$ нормалан оператор, тада је $\varphi'(0)\int_{-1}^{1}(I-tB)^{-1}(I-tB^*)^{-1}d\mu(t)\leqslant\varphi'\left(\frac{B+B^*}{2}\right)$, па узастопна примена (1.8) омогућава да докажемо (5.38), чиме се суштински завршава доказ дела (а).

У случају $\mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) := \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$, доказ се ослања на линије (5.36)-(5.38), дајући

$$\begin{aligned}
&\left\|\varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^{-1/2}\big(\varphi(A)X-X\varphi(B)\big)\right\|_2\\
&\leqslant \varphi'(0)\left\|\varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^{-1/2}\int_{-1}^{1}(I-tA)^{-1}(I-tA^*)^{-1}d\mu(t)\varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^{-1/2}\right\|^{1/2}\\
&\quad\times\ \left\|(AX-XB)\left(\int_{-1}^{1}(I-tB)^{-1}(I-tB^*)^{-1}d\mu(t)\right)^{1/2}\right\|_2 \qquad (5.39)\\
&\leqslant \varphi'(0)\left\|\varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^{-1/2}\int_{-1}^{1}\left(I-t\frac{A+A^*}{2}\right)^{-2}d\mu(t)\varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^{-1/2}\right\|^{1/2}\\
&\quad\times\ \left\|(AX-XB)\left(\int_{-1}^{1}\left(I-t\frac{B+B^*}{2}\right)^{-2}d\mu(t)\right)^{1/2}\right\|_2 \qquad (5.40)\\
&= \left\|(AX-XB)\varphi'\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{1/2}\right\|_2.
\end{aligned}$$

Неједнакост (5.39) ослања се на Cauchy-Schwarz-овој неједнакости (3.27) из Теореме 3.6(б) за т.у.п. трансформере у Hilbert-Schmidt-овим иделима. Неједнакост (5.40) се поново ослања на процени $(I-tB^*)(I-tB)\geqslant\left(I-t\frac{B+B^*}{2}\right)^2$ за хипонормалан оператор $B$, као и својству двоструке монотоности (1.8).

Доказ неједнакости (5.29) у делу (б) изводи се аналогно доказу неједнакости (5.28) у делу (а), са јединим разликом да се овај пут користи Cauchy-Schwarz-ова неједнакост (1.14) за т.у.п. трансформере из Теореме 1.16, уместо неједнакости (1.15) из Теореме 1.16.

У специјалном случају $\mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H}) := \mathfrak{C}_2(\mathcal{H})$ неједнакости (5.29) у делу (б), доказ је аналоган оном датом у линијама (5.39)-(5.40), с тим да се сада користи Cauchy-Schwarz-ова норма неједнакост (3.28) за Hilbert-Schmidt-ове идела у Теореми 3.6(б) уместо (3.27) у истој Теореми 3.6(б) и неједнакости $(I-tA)(I-tA^*)\geqslant\big(I-t\frac{A+A^*}{2}\big)^2$ и $(I-tB)(I-tB^*)\geqslant\big(I-t\frac{B+B^*}{2}\big)^2$ за кохипонормалне операторе $A$ и $B$.

Ради доказивања неједнакости (5.30) у делу (в), приметимо да важи следећи низ једнакости и неједнакости:

$$\begin{aligned}
&\big\|\varphi(A)X-X\varphi(B)\big\|_{\Phi^{(p)*}}=\varphi'(0)\left\|\int_{-1}^{1}(I-tA)^{-1}(AX-XB)(I-tB)^{-1}d\mu(t)\right\|_{\Phi^{(p)*}}\\
&\leqslant\varphi'(0)\left\|\left(\int_{-1}^{1}(I-tA^*)^{-1}(I-tA)^{-1}d\mu(t)\right)^{1/2}(AX-XB)\right.\\
&\quad\times\left.\left(\int_{-1}^{1}(I-tB)^{-1}(I-tB^*)^{-1}d\mu(t)\right)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}} \qquad (5.41)\\
&\leqslant\varphi'(0)\left\|\left(\int_{-1}^{1}\left(I-t\frac{A^*+A}{2}\right)^{-2}d\mu(t)\right)^{1/2}(AX-XB)\right.\\
&\quad\times\left.\left(\int_{-1}^{1}\left(I-t\frac{B+B^*}{2}\right)^{-2}d\mu(t)\right)^{1/2}\right\|_{\Phi^{(p)*}} \qquad (5.42)\\
&=\left\|\sqrt{\varphi'\Big(\frac{A^*+A}{2}\Big)}(AX-XB)\sqrt{\varphi'\Big(\frac{B+B^*}{2}\Big)}\right\|_{\Phi^{(p)*}}.
\end{aligned}$$

Неједнакост у (5.41) добија се применом прве неједнакости у (3.31) из Теореме 3.6(г), док неједнакост (5.42) следи из неједнакости $(I-tA^*)^{-1}(I-tA)^{-1}=(I-tA^*-tA+t^2AA^*)^{-1}\leqslant\big(I-t\frac{A^*+A}{2}\big)^{-2}$ за кохипонормалан оператор $A$ и $(I-tB)^{-1}(I-tB^*)^{-1}\leqslant\big(I-t\frac{B+B^*}{2}\big)^{-2}$ за хипонормалан оператор $B$, у комбинацији са својством двоструке монотоности (1.8).

Слично, за доказ неједнакости (5.31) довољно је применити неједнакост (5.30) на $\varphi'\big(\frac{A^*+A}{2}\big)^{-1/2}X\varphi'\big(\frac{B+B^*}{2}\big)^{-1/2}$ уместо на $X$.

У специјалном случају када је $\varphi(0)=0$ важи својство конкавности $\varphi'(t)\leqslant t^{-1}\varphi(t)$ за оператор монотону функцију $\varphi$, што у комбинацији са спектралним рачуном даје $\varphi'\big(\frac{A^*+A}{2}\big)\leqslant\big(\frac{A^*+A}{2}\big)^{-1}\varphi\big(\frac{A^*+A}{2}\big)$, и слично $\varphi'\big(\frac{B+B^*}{2}\big)\leqslant\big(\frac{B+B^*}{2}\big)^{-1}\varphi\big(\frac{B+B^*}{2}\big)$. Сада је још само потребно да се искористи својство двоструке монотоности (1.8) да се добије додатна процена одозго, док се процена одоздо показује слично.

У специјалном случају $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H}):=\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ неједнакости (5.30) и (5.31) у (в), доказ је сличан оном датом у линијама (5.41)-(5.42), али користећи Cauchy-Schwarz-ову неједнакост (3.29) у Теореми 3.6(в) за т.у.п. трансформере у идеалу нуклеарних оператора, уместо неједнакости (3.31) у Теореми 3.6(г), као и неједнакости $(I-tA)(I-tA^*)\geqslant\big(I-t\frac{A+A^*}{2}\big)^2$ и $(I-tB^*)(I-tB)\geqslant\big(I-t\frac{B+B^*}{2}\big)^2$ за кохипонормалан $A$ и хипонормалан оператор $B$.

Доказ неједнакости (5.32) и (5.35) у делу (г) прати линије доказа неједнакости (5.30) и (5.31) у (в), при чему се норма $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)*}}$ замењује нормом $\|\cdot\|_{\Phi}$, овај пут ослањајући се на Cauchy-Schwarz-ову неједнакост за т.у.п. трансформере у $\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ идеалима из Теореме 1.15 уместо на прву неједнакост у (3.31) за т.у.п. трансформере у $\mathcal{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ идеалима у Теореми 3.6(г). Да бисмо показали (5.33), применимо (5.32) на $\big(\frac{A^*+A}{2}\big)^{1/2}X\big(\frac{B+B^*}{2}\big)^{1/2}$ уместо на $X$, док неједнакост (5.34) следи из неједнакости $\big(\frac{A^*+A}{2}\big)\varphi'\big(\frac{A^*+A}{2}\big)\leqslant\varphi\big(\frac{A^*+A}{2}\big)$ и $\big(\frac{B+B^*}{2}\big)\varphi'\big(\frac{B+B^*}{2}\big)\leqslant\varphi\big(\frac{B+B^*}{2}\big)$, као и примене својства двоструке монотоности (1.8). Процене одозго и одоздо користе исте аргументе као оне дате у доказу случаја $\varphi(0)=0$ у делу (в).

У разматрању случаја када $\varphi \in \mathcal{P}[0,+\infty)$, а $A$ и $B$ су строго акретивни, интегрална репрезентација (2.7.5) у [Hi10, Th. 2.7.11] обезбеђује да постоје $a \in \mathbb{R}, b \geqslant 0$ и позитивна коначна Borel-ова мера $\mu$ на $(0,+\infty)$ таква да је

$$\varphi(z) = a + bz + \int_{(0,+\infty)} \frac{z(1+t)}{z+t}\, d\mu(t), \qquad \text{за све } z \in [0,+\infty).$$

По аналогији са доказима у претходно разматраним случајевима ове теореме је $\varphi'(z) = b + \int_{(0,+\infty)} \frac{t(1+t)}{(z+t)^2}\, d\mu(t)$ за све $z \in [0,+\infty)$, као и $\varphi(A)X - X\varphi(B) = b(AX - XB) + \int_{(0,+\infty)} t(1+t)$ $(A+tI)^{-1}(AX-XB)(B+tI)^{-1} d\mu(t)$ и $\varphi'(C) = bI + \int_{(0,+\infty)} t(1+t)(C+tI)^{-2} d\mu(t)$ за све строго акретивне $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тако се и доказ неједнакости (5.28)-(5.35) у овом случају изводи слично већ доказаном, користећи пристом исте Cauchy-Schwarz-ове неједнакости за т.у.п. трансформере у сваком од разматраних случајева, узимајући у обзир да је $(tI + A^*)^{-1}(tI+A)^{-1} \leqslant \big(tI + \frac{A^*+A}{2}\big)^{-2}$ за кохипонормалне операторе $A$, док за хипонормалне операторе $B$ важи $(tI+B)^{-1}(tI+B^*)^{-1} \leqslant \big(tI + \frac{B+B^*}{2}\big)^{-2}$. □

Напомена 5.7. И више од претходно показаног, чак и ако се не захтева хипонормалност оператора $A$ у Теореми 5.6(а), тада линије (5.36)-(5.38) у доказу тог дела теореме заправо показују да је

$$\left\| \left( \varphi'(0) \int_{-1}^{1} |I - tA|^{-2}\, d\mu(t) \right)^{-1/2} \big(\varphi(A)X - X\varphi(B)\big) \right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \left\| (AX - XB)\varphi'\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{1/2} \right\|_{\Phi^{(p)}}.$$

Слично, чак и без услова кохипонормалности оператора $B$ у Теореми 5.6(б) и даље је

$$\left\| \big(\varphi(A)X - X\varphi(B)\big) \left( \varphi'(0) \int_{-1}^{1} |I - tB^*|^{-2}\, d\mu(t) \right)^{-1/2} \right\|_{\Phi^{(p)}} \leqslant \left\| \varphi'\left(\frac{A+A^*}{2}\right)^{1/2} (AX - XB) \right\|_{\Phi^{(p)}}.$$

Приметимо такође да неједнакост (5.32) (односно (5.35)) представља продужење неједнакости (69) (односно (68)) у [J05, Th. 4.4] о средњим вредностима за о.м. функције на $[0,+\infty)$ и позитивне операторе и на нормалне строго акретивне операторе, обезбеђујући притом и нове теореме о средњим вредностима за о.м. функције на $(-1,1)$ и нормалне операторе са строго контрактивним реалним деловима.

Претходна Теорема 5.6 омогућава и да се неке од добро познатих норма неједнакости за позитивне операторе прошире и на нормалне операторе који су или акретивни или имају строго контрактивне реалне делове.

**Последица 5.8.** ***Нека је $\Phi$ с.н. функција и нека су $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ нормални оператори такви да $AX - XB \in \mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ за неко $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.***
(а) ***Ако су $A$ и $B$ акретивни оператори, тада је за све $\theta \in [0,1]$***

$$\left\| \left(\frac{A^*+A}{2}\right)^{\frac{1-\theta}{2}} (A^\theta X - XB^\theta) \left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{\frac{1-\theta}{2}} \right\|_\Phi \leqslant \theta \|AX - XB\|_\Phi, \tag{5.43}$$

$$\big\| \sqrt{A^*+A}\big(\log(A)X - X\log(B)\big)\sqrt{B+B^*} \big\|_\Phi \leqslant 2\|AX - XB\|_\Phi. \tag{5.44}$$

***Додатно, ако су $A$ и $B$ строго акретивни оператори, тада је***

$$\begin{aligned}&\|A\big(\log(I+A)\big)^{-1}X-XB\big(\log(I+B)\big)^{-1}\|_\Phi\\&\leqslant\left\|\sqrt{\log\Big(I+\frac{A^*+A}{2}\Big)-\frac{A^*+A}{2}\Big(I+\frac{A^*+A}{2}\Big)^{-1}}\left(\log\Big(I+\frac{A^*+A}{2}\Big)\right)^{-1}(AX-XB)\right.\\&\times\left.\sqrt{\log\Big(I+\frac{B+B^*}{2}\Big)-\frac{B+B^*}{2}\Big(I+\frac{B+B^*}{2}\Big)^{-1}}\left(\log\Big(I+\frac{B+B^*}{2}\Big)\right)^{-1}\right\|_\Phi.\end{aligned}\tag{5.45}$$

(б) ***Ако** $A$ **и** $B$ **имају строго контрактивне реалне делове и** $0\leqslant\alpha,\beta\leqslant1$, **тада***

$$\frac12\left\|\sqrt{I-\left|\frac{A^*+A}{2}\right|^2}\left(\log\frac{I+A}{I-A}X-X\log\frac{I+B}{I-B}\right)\sqrt{I-\left|\frac{B+B^*}{2}\right|^2}\right\|_\Phi\leqslant\|AX-XB\|_\Phi,\tag{5.46}$$

$$\frac{\pi}{2}\left\|\cos\frac{A^*+A}{\pi}\left(\tan\frac{2A}{\pi}X-X\tan\frac{2B}{\pi}\right)\cos\frac{B+B^*}{\pi}\right\|_\Phi\leqslant\|AX-XB\|_\Phi,\tag{5.47}$$

$$\begin{aligned}&\big\|\big((I+A)^\alpha-(I-A)^\beta\big)X-X\big((I+B)^\alpha-(I-B)^\beta\big)\big\|_\Phi\leqslant\\&\left\|\left(\alpha\Big(I+\frac{A^*+A}{2}\Big)^{\alpha-1}+\beta\Big(I-\frac{A^*+A}{2}\Big)^{\beta-1}\right)^{1/2}(AX-XB)\right.\\&\times\left.\left(\alpha\Big(I+\frac{B+B^*}{2}\Big)^{\alpha-1}+\beta\Big(I-\frac{B+B^*}{2}\Big)^{\beta-1}\right)^{1/2}\right\|_\Phi.\end{aligned}\tag{5.48}$$

$\triangle$ Ако су $A$ и $B$ строго акретивни оператори, тада је неједнакост (5.43) само специјални случај неједнакости (5.35) за о.м. функцију $\varphi\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)\colon t\mapsto t^\theta$. Уколико су $A$ и $B$ произвољни акретивни оператори, тада за свако $\varepsilon>0$ примена (5.43) на строго акретивне операторе $A+\varepsilon I$ и $B+\varepsilon I$ даје

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\frac{A^*+A}{2}+\varepsilon I\right)^{\frac{1-\theta}{2}}\big((A+\varepsilon I)^\theta X-X(B+\varepsilon I)^\theta\big)\left(\frac{B+B^*}{2}+\varepsilon I\right)^{\frac{1-\theta}{2}}\right\|_\Phi\\&\qquad\leqslant\theta\|AX-XB\|_\Phi.\end{aligned}\tag{5.49}$$

Како је $A^*+A\geqslant0$ и $B+B^*\geqslant0$, то следи да је $\big\|\big(\frac{A^*+A}{2}+\varepsilon I\big)^{\frac{1-\theta}{2}}-\big(\frac{A^*+A}{2}\big)^{\frac{1-\theta}{2}}\big\|\leqslant\varepsilon^{\frac{1-\theta}{2}}$, као и $\big\|\big(\frac{B+B^*}{2}+\varepsilon I\big)^{\frac{1-\theta}{2}}-\big(\frac{B+B^*}{2}\big)^{\frac{1-\theta}{2}}\big\|\leqslant\varepsilon^{\frac{1-\theta}{2}}$, према [A88, Th. 1]. Спектрални рачун за нормалне операторе показује да $(A+\varepsilon I)^\theta\to A^\theta$ и $(B+\varepsilon I)^\theta\to B^\theta$ у јакој операторној топологији кад $\varepsilon\to0+$, одакле следи да кад $\varepsilon\to0+$ важи да $\big(\frac{A^*+A}{2}+\varepsilon I\big)^{\frac{1-\theta}{2}}\big((A+\varepsilon I)^\theta X-X(B+\varepsilon I)^\theta\big)$ $\big(\frac{B+B^*}{2}+\varepsilon I\big)^{\frac{1-\theta}{2}}$ конвергира строго ка $\big(\frac{A^*+A}{2}\big)^{\frac{1-\theta}{2}}(A^\theta X-XB^\theta)\big(\frac{B+B^*}{2}\big)^{\frac{1-\theta}{2}}$. Одатле, на основу полунепрекидности одоздо у.и. норми дате у (1.9) и неједнакости (5.49) коначно следи

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\frac{A^*+A}{2}\right)^{\frac{1-\theta}{2}}(A^\theta X-XB^\theta)\left(\frac{B+B^*}{2}\right)^{\frac{1-\theta}{2}}\right\|_\Phi\\&=\left\|\mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\to0+}\left(\frac{A^*+A}{2}+\varepsilon I\right)^{\frac{1-\theta}{2}}\big((A+\varepsilon I)^\theta X-X(B+\varepsilon I)^\theta\big)\left(\frac{B+B^*}{2}+\varepsilon I\right)^{\frac{1-\theta}{2}}\right\|_\Phi\\&\leqslant\theta\|AX-XB\|_\Phi.\end{aligned}$$

За доказ неједнакости (5.44) довољно је употребити исте аргументе као и у доказу (5.43). Наиме, за све $\varepsilon>0$ и строго акретивне операторе $A+\varepsilon I$ и $B+\varepsilon I$ доказ се своди на директну примену неједнакости (5.35) на Pick-ову функцију $\varphi := \log$. Остатак адаптације доказа за (5.43) се заснива на јакој конвергенцији $\sqrt{A^* + A + 2\varepsilon I}\log(A + \varepsilon I)$ ка $\sqrt{A^* + A}\log A$ и $\sqrt{B + B^* + 2\varepsilon I}\log(B + \varepsilon I)$ ка $\sqrt{B + B^*}\log B$ кад $\varepsilon \to 0+$, подржаном употребом спектралног рачуна у комбинацији са теоремом о доминантној конвергенцији, с обзиром на то да је фамилија функција $\lambda \mapsto \big(\overline{\lambda} + \lambda + 2\varepsilon\big)^{1/2}\log(\varepsilon + \lambda) - \big(\overline{\lambda} + \lambda\big)^{1/2}\log\lambda$ при $\varepsilon \in [0, 1]$ униформно ограничена на $\sigma(A)$.

Доказ неједнакости (5.45) добија се директном применом неједнакости (5.32) на Pick-ову функцију $\varphi_7 \colon \Pi^+ \to \Pi^+ \colon z \mapsto \frac{z}{\log(1+z)}$, користећи притом да је $\varphi_7'(z) = \frac{\log(1+z) - z/(1+z)}{\log^2(1+z)}$, како је то примењено у [U10a, Th. 2.1] и [J19a, Sect. 4(g)].

Да би се доказала неједнакост (5.46) довољно је применити неједнакост (5.35) на Pick-ову $\mathcal{P}(-1, 1)$ функцију $\varphi_2 \overset{\text{def}}{=} \tanh^{-1} \colon \mathbb{C} \setminus \big((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\big) \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$, за коју је $\varphi_2'(z) = \frac{1}{1-z^2}$, како је то примењено у [J19a, Sect.4(b)]. На основу интегралне репрезентације показане у [J19a, Sect. 4(b)] функција $\varphi_2$ се може експлицитно изразити са $\tanh^{-1}(A) = \frac{1}{2}\log\frac{I+A}{I-A} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} A(I - tA)^{-1}dt$.

Неједнакост (5.47) се показује слично, сада примењујући неједнакост (5.35) на Pick-ову $\mathcal{P}(-1, 1)$ функцију $\varphi_8 \colon \mathbb{C} \setminus \big((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\big) \to \mathbb{C} \colon z \mapsto \tan\frac{2z}{\pi}$, за коју важи да је $\varphi_8'(z) = \frac{2}{\pi\cos^2(2z/\pi)}$. То је последица репрезентације функције $\tan z$ у облику реда $\tan z = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\big(\frac{1}{(n-\frac{1}{2})\pi - z} - \frac{n\pi}{n^2\pi + 1}\big)$ за $-\frac{\pi}{2} < \frac{z+\bar{z}}{2} < \frac{\pi}{2}$, која следи из [U10, Ex. 2.2].

Неједнакост (5.48) се доказује применом неједнакости (5.35) на Pick-ову $\mathcal{P}(-1, 1)$ функцију $\varphi_9 \colon \mathbb{C} \setminus \big((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\big) \to \mathbb{C} \colon z \mapsto (1 + z)^\alpha - (1 - z)^\beta$, која је оператор монотона на $(-1, 1)$ и за коју је $\varphi_9'(z) = \alpha(1+z)^{\alpha-1} + \beta(1-z)^{\beta-1}$, с обзиром да су пресликавања $t \mapsto (1 + t)^\alpha$ и $t \mapsto -(1 - t)^\beta$ оператор монотона на $(-1, 1)$. $\square$

Напомена 5.9. Приметимо да према Теореми 5.6(в) све неједнакости (5.43)-(5.48) важе и за произвољну $\|\cdot\|_{\Phi^{(p)*}}$ норму, уколико је $A$ кохипонормалан и $B$ хипонормалан и бар један од оператора $A$ и $B$ је нормалан, при чему се тражи да они задовољавају и услов акретивности. Слично, делови (а) и (б) Теореме 5.6 могу се искористити како би се формулисале деривационе неједнакости у $\mathfrak{C}_{\Phi^{(p)}}(\mathcal{H})$ идеалима, аналогне оним у (5.43)-(5.48), које препуштамо заинтересованим читаоцима.

Неједнакости (5.32)-(5.35) проширују “difference” верзију прослављене Heinz неједнакости из Hilfssatz 3. из [He] и њене у.и. норма верзије (9) у [BD, Th. 2], [Hi10, (5.3.2)] и [Kosa11, (4.1)] на акретивне нормалне операторе и (друге) оператор монотоне функције, као што то на пример чини (5.43) за $\theta := |2\alpha - 1|$ при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Такође, (5.30)-(5.31) представљају проширење неједнакости (5.32) и (5.35) на $\mathfrak{C}_{\Phi^{(p)*}}(\mathcal{H})$ идеале, за кохипонормалан $A$ и хипонормалан $B$, ако је бар један од њих нормалан.

Специјалан случај неједнакости (5.44) за строго позитивне оператора $A$ и $B$ се може добити и из неједнакости за операторну геометријску и логаритамску средину из [Kosa11, (5.2)], избором $H := A$, $K := B$ и $X := (\log A)\tilde{X} - \tilde{X}\log B$:

$$\big\|\sqrt{A}\big((\log A)\tilde{X} - \tilde{X}\log B\big)\sqrt{B}\big\|_\Phi \leqslant \left\|\int_0^1 A^x\big((\log A)\tilde{X} - \tilde{X}\log B\big)B^{1-x}dx\right\|_\Phi$$
$$= \left\|\int_0^1 \tfrac{d}{dx}\big(e^{x\log A}\tilde{X}e^{(1-x)\log B}\big)\,dx\right\|_\Phi = \|A\tilde{X} - \tilde{X}B\|_\Phi.$$

Претходне неједнакости остају тачне и за све позитивне операторе $A$ и $B$, што се показује употребом граничних аргумената већ виђених у доказу (5.44).

Ако су $A$ и $B$ самоадјунговани и строге контракције, тада формула (5.47) поприма облик $\big\|\sin\frac{2A}{\pi}X\cos\frac{2B}{\pi} - \cos\frac{2A}{\pi}X\sin\frac{2B}{\pi}\big\|_\Phi \leqslant \frac{2}{\pi}\|AX - XB\|_\Phi$, што је специјалан случај добро познате неједнакости $\|(\sin H)X\cos K-(\cos H)X\sin K\|_\Phi \leqslant \|HX-XK\|_\Phi$ за самоадјунговане операторе $H$ и $K$, дате у [Kosa98, Th. 5] и [Lar08, Rem. 25] (бар у случају када су њихови спектри $\sigma(H)$ и $\sigma(K)$ садржани у $(-\pi/2,\pi/2)$).

У наставку наведимо још једну примену Теореме 5.6 на функције инверзне о.м. функцијама.

**Последица 5.10.** ***Нека је $p\geqslant 1, \Phi$ с.н. функција, нека је $g$ инверзна функција неке неконстантне о.м. функције на $[0,+\infty)$ и нека су $C,D,X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$, при чему су $C$ и $D$ нормални оператори. Ако су $g(C)$ и $g(D)$ строго акретивни оператори такви да $g(C)X-Xg(D)\in\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, тада је***

$$\left\|\sqrt{g'\Big(g^{-1}\Big(\frac{g(C)^*+g(C)}{2}\Big)\Big)}(CX-XD)\sqrt{g'\Big(g^{-1}\Big(\frac{g(D)+g(D)^*}{2}\Big)\Big)}\right\|_\Phi \leqslant \big\|g(C)X-Xg(D)\big\|_\Phi. \tag{5.50}$$

***Специјално, ако су $C^p$ и $D^p$ строго акретивни оператори за које је $C^pX-XD^p\in\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$, тада је***

$$p\left\|\Big(\frac{C^{*p}+C^p}{2}\Big)^{\frac12-\frac1{2p}}(CX-XD)\Big(\frac{D^p+D^{*p}}{2}\Big)^{\frac12-\frac1{2p}}\right\|_\Phi \leqslant \big\|C^pX-XD^p\big\|_\Phi. \tag{5.51}$$

***Специјално, ако су $C,D\geqslant 0$, тада је***

$$\big\|\sqrt{g'(C)}(CX-XD)\sqrt{g'(D)}\big\|_\Phi \leqslant \big\|g(C)X-Xg(D)\big\|_\Phi, \tag{5.52}$$

$$\Big\|\sqrt{C\big(I+C\big)^{-1}+\log\big(I+C\big)}\big(CX-XD\big)\sqrt{D\big(I+D\big)^{-1}+\log\big(I+D\big)}\Big\|_\Phi \leqslant \big\|C\log\big(I+C\big)X-XD\log\big(I+D\big)\big\|_\Phi. \tag{5.53}$$

△ За доказ неједнакости (5.50) довољно је да узмемо $A:=g(C)$, $B:=g(D)$ и $\varphi:=g^{-1}$ у неједнакости (5.35). Заиста, како је $g'(\varphi(t))\varphi'(t)\equiv 1$, закључак следи из чињенице да је $\varphi'\big(\frac{A^*+A}{2}\big)^{-1}=g'\Big(\varphi\big(\frac{A^*+A}{2}\big)\Big)=g'\Big(g^{-1}\big(\frac{g(C)^*+g(C)}{2}\big)\Big)$, као и $\varphi'\big(\frac{B+B^*}{2}\big)^{-1}=g'\Big(g^{-1}\big(\frac{g(D)+g(D)^*}{2}\big)\Big)$.

Неједнакост (5.51) је специјални случај неједнакости (5.50) за функцију $g\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)\colon t\mapsto t^p$, као што је то и неједнакост (5.52). Даље, неједнакост (5.53) је специјалан случај неједнакости (5.52) при конкретном избору функције $g\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)\colon t\mapsto t\log(1+t)$, чији инверз $g^{-1}$ је, према [U06, Lemma 2.4], о.м. функција јер је функција $t\mapsto\log(1+t)$ о.м. а $t\mapsto t$, будући инверзна сама себи, очито представља инверз о.м. функције. □

Напомена 5.11. Неједнакост (5.52) се може добити директно и из неједнакости (68) у [J05, Th. 4.4], употребом истог аргумента коришћеног за доказ неједнакости (5.50) у Последици 5.10.

Ову главу, а тиме и дисертацију, завршавамо следећим скромним побољшавањем константе 5/4 у неједнакости (3) у [BK, Th. 2] за степене функције.

**Теорема 5.12.** ***Нека је $\Phi$ с.н. функција, $\theta\in(0,1), A,B,X\in\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $A,B\geqslant 0$ такви да $AX-XB\in\mathcal{C}_{\Phi^{(\theta)}}(\mathcal{H})$. Тада је $A^\theta X-XB^\theta\in\mathcal{C}_\Phi(\mathcal{H})$ и***

$$\big\|A^\theta X-XB^\theta\big\|_\Phi\leqslant 2^\theta(1-\theta)^{\frac{\theta-1}{2}}(1+\theta)^{\frac{-1-\theta}{2}}\|X\|^{1-\theta}\big\||AX-XB|^\theta\big\|_\Phi. \tag{5.54}$$

$\triangle$ Директна последица неједнакости (17) из доказа [BK, Th. 2] за $f\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty)\colon x \mapsto x^\theta$ показује да је

$$\left\|A^\theta X - XB^\theta\right\|_\Phi \leqslant (1+t^2\|X\|^2)(2t)^{\theta-1}\left\||AX-XB|^\theta\right\|_\Phi \quad \text{за свако } t>0. \tag{5.55}$$

За функцију $g\colon (0,+\infty) \to (0,+\infty)\colon t \mapsto 2^{\theta-1}\big(t^{\theta-1} + \|X\|^2 t^{\theta+1}\big)$ директно следи да је $g'(t) = 2^{\theta-1}\big((\theta-1)t^{\theta-2} + \|X\|^2(\theta+1)t^\theta\big)$ за $t>0$, па за $t_\circ \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\|X\|}\sqrt{\frac{1-\theta}{1+\theta}}$ следи да функција $g$ расте на $(0,t_\circ]$ и опада на $[t_\circ,+\infty)$, због чега је $g(t) \leqslant g(t_\circ) = 2^\theta(1-\theta)^{\frac{\theta-1}{2}}(1+\theta)^{\frac{-1-\theta}{2}}$ за све $t>0$. Зато, конкретним избор $t := t_\circ$ у неједнакости (5.55) добијамо неједнакост (5.54). $\square$

Напомена 5.13. Нека је $h\colon (0,1) \to (0,+\infty)\colon \theta \mapsto 4^\theta(1-\theta)^{\theta-1}(1+\theta)^{-1-\theta}$ одакле је $h'(\theta) = h(\theta)(\log 4 + \log(1-\theta) - \log(1+\theta))$, те имамо $h'>0$ на $(0,\frac{3}{5}]$ и $h'<0$ на $[\frac{3}{5},1)$, као и $h\big(\frac{3}{5}\big) = \big(\frac{5}{4}\big)^2$. То показује да је $c_\theta \overset{\text{def}}{=} 2^\theta(1-\theta)^{\frac{\theta-1}{2}}(1+\theta)^{\frac{-1-\theta}{2}} < \frac{5}{4}$ за $\theta \neq \frac{3}{5}$, што оправдава најављено побољшање константе 5/4 у [BK, Th. 2(3)] за $f(t)=t^\theta$. Приметимо такође да је $h(0+) = h(1-) = 1$, што показује да $c_\theta$ тежи ка (очекивано најбољој) константи 1, у случајевима кад $\theta \to 0+$ и $\theta \to 1-$ .

# Литература


[A63] T. Ando, *On a pair of commutative contractions,* Acta Sci. Math. (Szeged) **24** (1963), 88-90.

[A88] T. Ando, *Comparison of norms* $|||f(A)-f(B)|||$ *and* $|||f(|A-B|)|||$*,* Math. Z. **197** (1988), 403-409.

[АДЈ] М. Арсеновић, М. Достанић, Д. Јоцић, Теорија мере, Функционална анализа и Теорија оператора, Завод за уџбенике, Београд, 2012.

[B] R. Bhatia, Matrix Analysis, Springer-Verlag, New York, 1997.

[BD] R. Bhatia, C. Davis, *A Cauchy-Schwarz inequality for operators with applications,* Linear Algebra Appl. **223/224** (1995), 119-129.

[BK] R. Bhatia, F. Kittaneh, *Some inequalities for norms of commutators,* SIAM J. Matrix Anal. Appl. **18** (1997), 258-263.

[BKS] M.Sh. Birman, L.S. Koplienko, M.Z. Solomyak, *Estimates of the spectra of the difference of fractional powers of selfadjoint operators,* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. **154** (1975), 3-10.

[BS66] M.Sh. Birman, M.Z. Solomyak, *Double Stieltjes operator integrals,* [Russian], in Spectral Theory and Wave Processes, Probl. Math. Fiz., vol. 1, Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad 1966, pp. 33-67.

[BS67] M.Sh. Birman, M.Z. Solomyak, *Double Stieltjes operator integrals II* [Russian], in Spectral Theory, Diffraction Problems, Probl. Math. Fiz., vol. 2, Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad 1967, pp. 26-60.

[BS73] M.Sh. Birman, M.Z. Solomyak, *Double Stieltjes operator integrals. III* [Russian], Prob. Mat. Fiz., vol. 6, Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad 1973, pp. 27-53.

[BS87] M.Sh. Birman, M. Z. Solomyak, Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.

[BS93] M.Sh. Birman, M.Z. Solomyak, *Operator integration, perturbations and commutators,* J. Soviet Math. **63** (1993), 129-148.

[Da] E.B. Davies, *Lipschitz continuity of functions of operators in the Schatten classes,* J. Lond. Math. Soc. **37** (1988), 148-157.

[Do] W. Donoghue, Monotone Matrix Functions and Analytic Continuation, Springer, New York, 1974.

[DU] J. Diestel, J.J. Uhl, Vector measures, Mathematical Surways, Vol. 15, American Mathematical Society, Providence, RI, 1977, MR56:12216.

[F74] Yu. B. Farforovskaya, *On the estimation of the difference $f(B)-f(A)$ in the classes $S_p$*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **39** (1974), 194-195 (Russian).

[GK] I.C. Gohberg, M.G. Krein, Introduction to the Theory of Linear Non-selfadjoint Operators, Transl. Math. Monographs, Vol. 18, Amer. Math. Soc. Providence, R.I. 1969.

[GR] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of integrals, series, and products, 6th Edition, Academic Press, San Diego, CA, 2000.

[G35] G. Grüss, *Über das Maximum des absoluten Betrages von $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)dx\int_a^b g(x)dx$*, Math. Z. **39** (1935), 215-226.

[He] E. Heinz, *Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung,* Math. Ann. **123** (1951), 415-438.

[Hi97] F. Hiai, *Log-majorizations and norm inequalities for exponential operators*, Banach Center Publ. **38** (1997), 119-181.

[Hi10] F. Hiai, *Matrix analysis: Matrix monotone functions, matrix means and majorization,* Interdisciplinary Information Sciences **16** (2010), 139-248.

[HK99] F. Hiai, H. Kosaki, *Comparison of various means for operators,* J. Funct. Anal. **163** (1999), 300-323.

[HK03] F. Hiai, H. Kosaki, Means of Hilbert Space Operators, Lecture Notes in Math. 1820, Springer-Verlag, 2003.

[HP] F. Hansen, G.K. Pedersen, *Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem*, Math. Ann. **258** (1982), 229-241.

[J91] D.R. Jocić, *Kvazifunkcionalni rachun i teoreme Fuglede-Putnam-Rosenblum-ovog tipa*, Doktorska disertcija, Matematički fakultet, Beograd, 1991.

[J93] D.R. Jocić, *A Hilbert-Schmidt norm equality associated with the Fuglede-Putnam-Rosenblum's type theorem for generalized multipliers*, J. Operator Theory **30** (1993), 31-40.

[J97] D.R. Jocić, *Norm inequalities for self-adjoint derivations,* J. Funct. Anal. **145** (1997), 24-34.

[J98] D.R. Jocić, *Cauchy-Schwarz and means inequalities for elementary operators in into norm ideals,* Proc. Amer. Math. Soc. **128** (1998), 2705-2713.

[J99] D.R. Jocić, *The Cauchy-Schwarz norm inequality for elementary operators in Schatten ideals,* J. London. Math. Soc. **60** (1999), 925-934.

[J99a] D.R. Jocić, *Integral representation formula for generalized normal derivations,* Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 2303-2314.

[J05] D.R. Jocić, *Cauchy-Schwarz norm inequalities for weak*-integrals of operator valued functions,* J. Funct. Anal. **218** (2005), 318-346.

[J09] D.R. Jocić, *Interpolation norms between row and column spaces and the norm problem for elementary operators,* Linear Algebra Appl. **430** (2009), 2961-2974.

[J09a] D.R. Jocić, *Multipliers of elementary operators and comparison of row and column space Schatten p norms,* Linear Algebra Appl. **431** (2009), 2062-2070.

[J19] D.R. Jocić, *Clarkson-McCarthy inequalities for several operators and other norm inequalities for operators and operator matrices related trough sums of its squares,* Complex Anal. Oper. Theory **13** (2019), 583–613

[J19a] D.R. Jocić, *Equality of norms for a class of Bloch and symmetrically weighted Lipschitz spaces of vector valued functions and derivation inequalities for Pick functions,* J. Funct. Anal. **277** (2019), 2558-2571.

[JKL] D.R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, *Cauchy-Schwarz inequalities for inner product type transformers in $Q^*$ norm ideals of compact operators,* Positivity **24** (2020), 933-956.

[JKLMM] D.R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, P. Melentijević, S. Milošević, *Refinements of inequalities related to Landau-Grüss inequalities for elementary operators acting on ideals associated to p-modified unitarily invariant norms,* Complex Anal. Oper. Theory **12** (2018), 195-205.

[JKM] D.R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Sal Moslehian, *Landau and Grüss type inequalities for inner product type integral transformers in norm ideals,* Math. Ineq. Appl. **16** (2013), 109-125.

[JLM18] D.R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Norm inequalities for a class of elementary operators generated by analytic functions with non-negative Taylor coefficients in ideals of compact operators related to p-modified unitarily invariant norms,* Linear Algebra Appl. **540** (2018), 60-83.

[JLM20] D.R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators*, Linear Algebra Appl. **586** (2020), 43-63.

[JLM20a] D.R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Corrigendum to "Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators" [Linear Algebra Appl. 586 (2020) 43–63]*, Linear Algebra Appl. **599** (2020), 201-204.

[JM] D.R. Jocić, S. Milošević, *Refinements of operator Cauchy-Schwarz and Minkowski inequalities for p-modified norms and related norm inequalities,* Linear Algebra Appl. **488** (2016), 284-301.

[JMĐ] D.R. Jocić, S. Milošević, V. Đurić, *Norm inequalities for elementary operators and other inner product type integral transformers with the spectra contained in the unit disc,* Filomat **31** (2017), 197-206.

[Ke98] Д.Ј. Кечкић, *Елеменшарна йресликавања на идеалима комйакшних ойерашора на Хилбершовом йросшору*, Магистарски рад, Математички факултет Универзитета у Београд, 1998.

[Ke20] D.J. Kečkić, *The applications of Cauchy-Schwartz inequality for Hilbert modules to elementary operators and i.p.t.i. transformers*, Appl. Anal. Discrete Math. **14** (2020), 169-182.

[KS96] E. Kissin, V.S. Shulman, *Operator-differentiable functions and derivations of operator algebras,* Funktsional. Anal. i Prilozhen. **30** (1996), 75-77.

[KS04] E. Kissin, V.S. Shulman, *Classes of operator-smooth functions. II. Operator differentiable functions,* Integr. Equ. Oper. Theory **49** (2004), 165-210.

[KS05] E. Kissin, V.S. Shulman, *Classes of operator-smooth functions. I. Operator Lipschitz functions,* Proc. Edinburgh Math. Soc. **48** (2005), 151-173.

[KS05a] E. Kissin, V.S. Shulman, *Classes of operator-smooth functions. III Stable functions and Fuglede ideals,* Proc. Edinburgh Math. Soc. **48** (2005), 175-197.

[Ki85] F. Kittaneh, *On Lipschitz functions of normal operators,* Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 416-418.

[Kosa98] H. Kosaki, *Arithmetic Geometric Mean and Related Inequalities for Operators,* J. Funct. Anal. **156** (1998), 429-451.

[Kosa11] H. Kosaki, Positive Definiteness of Functions with Applications to Operator Norm Inequalities, Memoirs Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 2011.

[Kose06] T. Kosem, *Inequalities between $f(A+B)$ and $f(A)+f(B)$*, Linear Algebra Appl. **4**18 (2006), 153–160.

[Lar08] G. Larotonda, *Norm inequalities in operator ideals,* J. Funct. Anal. **255** (2008), 3208-3228.

[Lan35] E. Landau, *Über einige Ungleichungen von Herrn G. Grüss,* Math. Z. **39** (1935), 742-744.

[Laz19] M. Lazarević, *Grüss-Landau inequalities for elementary operators and inner product type transformers in Q and $Q^*$ norm ideals of compact operators*, Filomat **33** (2019), 2447-2455.

[MT] V.M. Manuilov, E.V. Troitsky, Hilbert C*-modules, Translations of mathematical monographs, AMS, Providence, Rhode Island, 2005.

[MM] J.S. Matharu, M. Sal Moslehian, *Grüss inequality for some types of positive linear maps,* J. Oper. Theory **73** (2015), 265-278.

[MPF] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Finik, Classical and New Inequalities in Analysis, Kluwer Academic, Dordrecht, 1993.

[N] J. von Neumann, *Eine Spektraltheorie für allgemeine Operatoren eines unitären Raumes,* Math. Nachr. **4** (1951), 258-281.

[dPWS] B. de Pagter, H. Witvliet, H.F.A. Sukochev, *Double operator integrals,* J. Funct. Anal. **192** (2002), 52-111.

[Ped] G.K. Pedersen, *Operator differentiable functions,* Publ. Res. Inst. Math. Sci. **36** (2000), 139-157.

[Pel84] V.V. Peller, Hankel operators and differentiability properties of functions of selfadjoint (unitary) operators, LOMI Preprints E-1-84, USSR Academy of Sciences Steklov Mathematical Institute Leningrad Department, 1984.

[Pel85] V.V. Peller, *Hankel operators in the perturbation theory of unitary and selfadjoint operators*, Funct. Anal. Appl. **19** (1985), 111-123.

[Pel90] V.V. Peller, Hankel operators in perturbation theory of unbounded self-adjoint operators, Analysis and partial differential equations, 529-544, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **122**, Dekker, New York, 1990.

[PS08] D. Potapov, F. Sukochev, *Lipschitz and commutator estimates in symmetric operator spaces,* J. Operator Theory, **59** (2008), 211-234.

[PS11] D. Potapov, F. Sukochev, *Operator-Lipschitz functions in Schatten von Neumann classes,* Acta Math. **207** (2011), 375-389.

[Rot69] S.Yu. Rotfeld, The singular values of the sum of completely continuous operators, Topics in Mathematical Physics, Vol. 3, Consultants Bureau, New York, 1969.

[Rot78] S.Yu. Rotfeld, *Asymptotic behavior of the spectrum of abstract integral operators,* Transactions of Moscow Math. Soc. **34** (1978), 102-126.

[Rud] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGrow-Hill and Mladinska Knjiga, 1970.

[Scha] R. Schatten, Norm Ideals of completely continuous operators, Springer-Verlag, Berlin, 1960.

[Scho] T.P. Schonbek, *On a calculus for a generalized scalar operator,* J. Math. Anal. Appl. **58** (1977), 527-540.

[Si] B. Simon, Trace Ideals and Their Applications, Amer. Math. Soc., Mat. Surveys and Monographs, Vol.120, 2005.

[U06] M. Uchiyama, *A new majorization between functions, polynomials, and operator inequalities,* J. Funct. Anal. **231** (2006), 221-244.

[U10] M. Uchiyama, *Operator monotone functions, positive definite kernels and majorization,* Proc. Amer. Math. Soc. **138** (2010), 3985-3985.

[U10a] M. Uchiyama, *Majorization and some operator monotone functions,* Linear Algebra Appl. **432** (2010), 1867-1872.

[Zh] X. Zhan, Matrix Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

# Биографија аутора

Милан Лазаревић рођен је 6.9.1991. године у Чачку, где је завршио основну школу „Милица Павловић” и Гимназију као носилац Вукове дипломе. Математички факултет у Београду, смер Теоријска математика и примене, уписао је 2010. године и дипломирао 2014. године, са просечном оценом 9,50. Исте године уписао је Мастер студије на Математичком факултету у Београду, студијски програм Математика, модул Теоријска математика и примене и положио све испите са просечном оценом 10. Мастер рад под насловом „Сингуларне вредности оператора и теорија мажорације, са применом на операторне неједнакости” одбранио је 2015. године под менторством редовног професора др Данка Р. Јоцића. Докторске студије на Математичком факултету у Београду, студијског програма Математика, уписао је 2015. године и положио је све испите предвиђене планом и програмом студија са просечном оценом 10. Од 2015. до 2016. године радио је као сарадник у настави, а од 2016. године до данас ради као асистент за научну област Математичка анализа на Математичком факултету Универзитета у Београду. На Математичком факултету у Београду држао је вежбе на предметима Анализа 2, Анализа 3а, Анализа 3б, Анализа 1 (практикум) и Теорија мере и интеграције, као и вежбе из Математике 1, 2, 3, 3Ц и 4 на Физичком факултету у Београду.

Објавио је следеће научне радове:

1. D. R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, P. Melentijević, S. Milošević, *Refinements of operator Landau and Grüss inequalities for elementary operators on ideals associated to p-modified unitarily invariant norms*, Complex Anal. Oper. Theory **12** (2018), 195-205.

   доступно на: `https://doi.org/10.1007/s11785-016-0622-8`

2. D. R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Norm inequalities for a class of elementary operators generated by analytic functions with non-negative Taylor coefficients in ideals of compact operators related to p-modified unitarily invariant norms*, Linear Algebra Appl. **540** (2018), 60-83.

   доступно на: `https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.11.015`

3. D. R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, *A note on the paper “Norm inequalities in operator ideals” [J. Funct. Anal. 255 (11) (2008), 3208-3228] by G. Larotonda*, J. Funct. Anal. **277** (2019), 641-642.

   доступно на: `https://doi.org/10.1016/j.jfa.2018.08.013`

4. M. Lazarević, *Grüss-Landau inequalities for elementary operators and inner product type transformers in $Q$ and $Q^*$ norm ideals of compact operators*, Filomat **33** (2019), 2447–2455.

   доступно на: `https://doi.org/10.2298/FIL1908447L`

5. D. R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators*, Linear Algebra Appl. **586** (2020), 43-63.

доступно на: `https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.10.009`

6. D. R. Jocić, M. Lazarević, S. Milošević, *Corrigendum to "Inequalities for generalized derivations of operator monotone functions in norm ideals of compact operators" [Linear Algebra Appl. 586 (2020) 43–63]*, Linear Algebra Appl. **599** (2020), 201-204.

доступно на: `https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.04.012`

7. D. R. Jocić, Đ. Krtinić, M. Lazarević, *Cauchy–Schwarz inequalities for inner product type transformers in $Q^*$ norm ideals of compact operators,* Positivity **24** (2020), 933-956.

доступно на: `https://doi.org/10.1007/s11117-019-00710-3`

**Прилог 1.**

# Изјава о ауторству

Потписани Милан Лазаревић

број уписа 2012/2015

**Изјављујем**

да је докторска дисертација под насловом

Неједнакости Коши-Шварца и Грис-Ландауа за елементарне операторе и трансформере типа унутрашњег производа на Q и Q* идеалима компактних оператора

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

**Потпис докторанда**

У Београду, ________________

____________________________

**Прилог 2.**

# Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Милан Лазаревић

Број уписа 2012/2015

Студијски програм Математика

Наслов рада Неједнакости Коши-Шварца и Грис-Ландауа за елементарне оператори и трансформере типа унутрашњег производа на Q и Q* идеалима компактних оператора

Ментор проф. др Данко Р. Јоцић

Потписани Милан Лазаревић

изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

**Потпис докторанда**

У Београду, ________________

______________________________

**Прилог 3.**

# Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Неједнакости Коши-Шварца и Грис-Ландауа за елементарне операторе и трансформере типа унутрашњег производа на Q и Q* идеалима компактних оператора

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе свi који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

**Потпис докторанда**

У Београду, ___________________

_______________________

1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.