UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO – MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA MATEMATIKU

Slobodan B. Tričković

ITERATIVNI METODI ZA NALAŽENJE NULA POLINOMA

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

Novi Sad 1997

Ivani

S A D R Ž A J

S A D R Ž A J

0. UVOD

Jedan od prvih nelinearnih problema sa kojim se matematičari sreću u praksi i u svojim istraživanjima odnosi se na algebarske polinome. Ovaj problem je veoma značajan, kako sa teorijskog, tako i sa praktičnog stanovišta i zbog toga mu je oduvek pridavana velika pažnja, o čemu svedoči ogroman broj radova tokom više vekova, kao i brojne monografije. Zaista, *Mathematische Enzyklopädie* pokazuje da je teško izdvojiti bilo koji interval od 10 godina u toku poslednjih 200 godina koji nije produkovao značajan doprinos ovoj oblasti. Lista istraživača sadrži imena mnogih čuvenih matematičara kao što su Fourier, Descartes, Newton, Euler, Čebišev, Laguerre, Gauss i drugi. Jedan deo njihovih teorijskih rezultata leži u osnovi mnogih modernih numeričkih metoda primenjenih na moćnim računarima.

Algebarski polinomi se javljaju pri rešavanju velikog broja matematičkih problema, bilo da se radi o problemima numeričke matematike (npr. kao karakteristični polinom regularne matrice), ili pri rešavanju diferencijalnih i diferencnih jednačina (kao karakteristični polinom date linearne diferencijalne ili diferencne jednačine sa konstantnim koeficijentima). Osim toga, matematički modeli velikog broja problema tehnike i fizike često se svode na algebarski polinom čije nule treba odrediti.

Jedno od fundamentalnih istraživanja na polju rešavanja polinomijalnih jednačina vezano je za čisto algebarski pristup mogućnosti rešavanja algebarskih jednačina proizvoljnog stepena. Francuski matematičar Evariste Galois (1811 – 1832) dokazao je (oko 1830. god.) nemogućnost rešavanja putem radikala opšte algebarske jednačine stepena većeg od četiri. Navedeni Galoisov rezultat da se nule algebarskog polinoma stepena većeg od četiri u opštem slučaju ne mogu izraziti eksplicitnom formulom pomoću koeficijenata polinoma, kao i činjenica da su formule već u slučaju polinoma trećeg i četvrtog stepena veoma komplikovane i praktično neprimenljive, dali su pun zamah numeričkom pristupu pri rešavanju algebarskih jednačina, korišćenjem nekog pogodnog algoritma, najčešće iterativne prirode. Sa razvojem elektronskih računara posle II svetskog rata pojavio se veliki broj novih, praktično ostvarljivih, numeričkih algoritama visoke efikasnosti.

U vezi nalaženja nula polinoma čuveni švajcarski matematičar Piter Henrici je na SIAM konferenciji posvećenoj numeričkom rešavanju nelinearnih problema (održanoj 1968. godine u Filadelfiji, SAD) istakao da je "... problem određivanja nula datog polinoma sa kompleksnim koeficijentima *pravi* nelinearan problem. U isto vreme problem je jednostavan. On je toliko jednostavan da, u stvari, postoji nada da ćemo jednog dana biti u stanju da ga u potpunosti rešimo." Ni trideset godina posle citirane Henricijeve ingeniozne primedbe, uprkos velikom broju razvijenih algoritama za nalaženje nula polinoma, savršen algoritam još uvek nije razvijen. Svaki od algoritama ima svoje prednosti i mane te je zbog toga opisani problem još uvek aktuelan i u današnje vreme. Upravo to je i razlog za dalja istraživanja na ovoj temi i glavni motiv pri izradi ove disertacije.

Osnovni cilj disertacije usmeren je na konstrukciju novih iterativnih metoda za numeričko rešavanje algebarskih jednačina. Glavna pažnja posvećena je simultanim metodima visokog reda konvergencije za nalaženje svih (prostih ili višestrukih) nula polinoma. Osim detaljne analize konvergencije i numeričke stabilnosti, ispitivanje računarske efikasnosti i eksperimentalne verifikacije novih algoritama na numeričkim primerima, razmotrena je i mogućnost implementacije na paralelnim računarima.

Ovaj rad se sastoji od sledećih poglavlja:

0. Uvod;

1. Simultani metodi za nalaženje nula polinoma;

2. Intervalni metodi nagiba za inkluziju nula polinoma;

3. Familija iterativnih metoda za simultano nalaženje nula polinoma;

4. Simultano nalaženje nula analitičkih funkcija;

5. Simultani metodi za višestruke nule;

Literatura.

Prvo poglavlje je preglednog karaktera i ne sadrži nove rezultate. Kratka istorija razvoja iterativnih metoda za rešavanje nelinearnih jednačina data je u odeljku 1.1. Većina problema koja se javlja pri nalaženju nula polinoma metodom deflacije uspešno se može prevazići određivanjem svih nula istovremeno. Postoji više različitih pristupa pri simultanom određivanju nula polinoma, kao što su Henricijev *qd* algoritam, globalno konvergentni algoritmi koji se primenjuju interaktivno (Farmer i Loizou), metodi zasnovani na relaciji fiksne tačke i drugi, predloženi u radovima Wilfa, Pasquinija i Trigiantea, Jankinsa i Trauba, itd. U ovoj disertaciji razmatrani su isključivo algoritmi zasnovani na relacijama fiksne tačke. Ovakav pristup omogućuje konstrukciju algoritama koji se odlikuju 1) veoma brzom konvergencijom i 2) mogućnošću kontrole gornje granice greške pronađenih aproksimacija korišćenjem tzv. *kompleksne intervalne aritmetike.* Navedene konstrukcije opisane su u odeljku 1.2, dok su osnovne operacije i neophodne osobine kompleksne intervalne aritmetike ukratko izložene u odeljku 1.3. Na osnovu ovih osobina u odeljku 1.4 je na nekoliko primera demonstrirana konstrukcija simultanih inkluzivnih metoda. Ovi metodi koriste pogodne relacije fiksne tačke i osobinu inkluzivne izotonosti. S obzirom da su za implementaciju inkluzivnih metoda potrebni početni intervali koji sadrže tražene nule, u odeljku 1.5 je dat kratak pregled rezultata koji se odnose na lokalizaciju nula polinoma i izbora početnih intervala. Zbog analize konvergencije razmatranih iterativnih intervalnih metoda, u odeljku 1.6 data je definicija R-reda konvergencije uvedena od Ortege i Rheinbolta [**70**], kao i neke osnovne osobine $R-$reda konvergencije.

Drugo poglavlje se sastoji od tri odeljka. U odeljku 2.1 je na osnovu relacije fiksne tačke

$$\zeta = z - \frac{p(z)}{g(z,\zeta)},$$

gde funkcija $g(z,\zeta)$ definiše tzv. *nagib* (slope), konstruisan intervalni metod nagiba za inkluziju proste kompleksne nule ζ polinoma p, pri čemu je z neka aproksimacija nule ζ. Pod pretpostavkom da početni interval Z_0 sadrži prostu nulu ζ polinoma p, iterativna formula

$$Z_{\nu+1} = z_\nu - \frac{p(z_\nu)}{g(z_\nu, Z_\nu)} \quad (z_\nu = \operatorname{mid} Z_\nu,\ \nu = 0,1,\dots) \tag{1}$$

definiše intervalni metod nagiba. Dokazana je teorema koja tvrdi da niz poluprečnika $\{r_\nu\}$ diskova Z_ν konvergira kvadratno ka 0 i $\zeta \in Z_\nu$ u svakom iterativnom koraku [78]. Modifikacija metoda (1) koja kombinuje metod sečice sa intervalnim metodom nagiba (1) i ima red $1+\sqrt{2}\approx 2.414$, opisana je i analizirana u odeljku 2.2. Oba metoda imaju prednost nad Mooreovim intervalnim metodom [64] drugog reda jer se mogu primeniti i u slučaju kompleksne nule, dok se kombinovani metod odlikuje i bržom konvergencijom ([78]).

Intervalni metodi nagiba sa vrlo brzom konvergencijom predloženi su u odeljku 2.3. Polazeći od pogodne relacije fiksne tačke zasnovane na nagibu i koristeći centriranu inverziju diska $\{c;r\}^I=\{\frac{1}{c};\frac{r}{|c|(|c|-r)}\}$, konstruisana su dva nova metoda trećeg i četvrtog reda [77]

$$Z_{\nu+1}=z_\nu-\left(\frac{p'(z_\nu)}{p(z_\nu)}-\frac{g'(z_\nu,Z_\nu)}{g(z_\nu,Z_\nu)}\right)^I \quad (z_\nu=\operatorname{mid}Z_\nu,\ \nu=0,1,\dots),$$

i

$$Z_{\nu+1}=z_\nu-\left(\frac{1}{h_\nu}-\frac{g'(z_\nu,Z_\nu-h(z_\nu))}{g(z_\nu,Z_\nu-h(z_\nu))}\right)^I \quad (z_\nu=\operatorname{mid}Z_\nu,\ \nu=0,1,\dots).$$

U **trećem** poglavlju razmatrane su dve nove familije iterativnih metoda za simultano nalaženje nula polinoma zasnovane na Hansen-Patrickovoj jednoparametarskoj familiji iterativnih metoda

$$\hat{z}=z-\frac{(\alpha+1)f(z)}{\alpha f'(z)\pm\sqrt{f'(z)^2-(\alpha+1)f(z)f''(z)}} \tag{2}$$

za nalaženje proste nule funkcije f, kao i na modifikovanoj formuli za višestruke nule [42]

$$\hat{z}=z-\frac{m(m\alpha+1)f(z)}{m\alpha f'(z)\pm\sqrt{m(m\alpha-\alpha+1)f'(z)^2-m(m\alpha+1)f(z)f''(z)}}. \tag{3}$$

Pri konstrukciji novih iterativnih formula korišćena je Weierstrassova popravka

$$W_i(z)=\frac{P(z)}{\prod\limits_{j\neq i}(z-z_j)^{m_j}}, \tag{4}$$

gde su $m_1,\dots,m_\nu$ višestrukosti nula $\zeta_1,\dots,\zeta_\nu$ polinoma P stepena n.

U odeljku 3.2 formula (2) je primenjena na funkciju

$$h_i(z) = W_i + (z - z_i)\Big(1 + \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{z - z_j}\Big), \quad W_i = W_i(z_i). \tag{5}$$

Na ovaj način izvedena je nova jednoparametarska familija za simultanu aproksimaciju svih prostih nula polinoma P:

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha+1)W_i}{\alpha(1+G_{1,i}) \pm \sqrt{(1+G_{1,i})^2 + 2(\alpha+1)W_i G_{2,i}}} \quad (i \in I_n), \tag{6}$$

gde je $G_{k,i} = \sum_{j\neq i} W_j(z_i - z_j)^{-k}$ $(k = 1, 2)$. Za različite vrednosti parametra α dobijaju se specijalni slučajevi koji definišu nove iterativne formule.

U odeljku 3.3 Hansen-Patrickova formula (3) za višestruke nule primenjena je na Weierstrassovu popravku $W_i(z)$. Zamenjujući f'/f i f''/f' sa W_i'/W_i i W_i''/W_i' u (3), dobijena je familija iterativnih metoda za simultano određivanje svih prostih ili višestrukih nula polinoma P

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{m_i(m_i\alpha + 1)}{m_i\alpha\dfrac{W_i'}{W_i} \pm \sqrt{m_i(m_i\alpha - \alpha + 1)\Big(\dfrac{W_i'}{W_i}\Big)^2 - m_i(m_i\alpha + 1)\dfrac{W_i'}{W_i}\dfrac{W_i''}{W_i'}}}. \tag{7}$$

U odeljku 3.4 dokazano je da je red konvergencije familija (6) i (7) jednak četiri za proizvoljan konačan parametar α. Numerički rezultati dobijeni pomoću simultanih metoda koji pripadaju familijama (6) i (7) prikazani su u odeljku 3.5

U odeljku 3.6 razmatran je Euler-Čebiševljev metod

$$\hat{z} = z - \frac{f(z)}{f'(z)}\Big(1 + \frac{f(z)}{f'(z)} \cdot \frac{f''(z)}{2f'(z)}\Big). \tag{8}$$

Ovaj metod se na posredan način može dobiti iz familije (2) stavljajući $\alpha = 1$ i koristeći razvoj u geometrijski red. Primenjujući metod (9) na funkciju $h_i(z_i)$ datu sa (5), dobija se simultani metod Euler-Čebiševljevog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{h_i(z_i)}{h_i'(z_i)}\left(1 + \frac{h_i(z_i)}{h_i'(z_i)} \cdot \frac{h_i''(z_i)}{2h_i'(z_i)}\right),$$

gde je $h_i(z_i) = W_i$, $h_i'(z_i) = 1 + G_{1,i}$, $h_i''(z_i) = -2G_{2,i}$. Dokazano je da ovaj metod ima red konvergencije četiri. U ovom odeljku razmatrana je i varijanta Euler-Čebiševljevog metoda za nalaženje višetrukih nula polinoma P.

Posebna pažnja je posvećena simultanom metodu Eulerovog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i}) \pm \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 4W_i \sum_{j \neq i} \dfrac{W_j}{(z_i - z_j)(c_i - z_j)}}}.$$

Ovaj metod je od specijalnog interesa jer se, koristeći pogodne aproksimacije c_i koje zahtevaju zanemarljiv broj dodatnih operacija, mogu generisati metodi petog i šestog reda. Očigledno, ovi metodi poseduju veoma visoku računarsku efikasnost. Specijalno, za $c_i = z_i$, dobija se metod četvrtog reda koji proizilazi iz familije (6) za $\alpha = 1$.

U **četvrtom** poglavlju izučavani su metodi za nalaženje nula jedne klase analitičkih funkcija koje u prostoj zatvorenoj konturi imaju konačan broj nula. Ova klasa, koja kao jezgro ima algebarski polinom i može se predstaviti u obliku

$$\Phi(z) = \exp(Y(z)) \prod_{j=1}^{n} (z - \zeta_j) \qquad (Y(z) \text{ - analitička funkcija}),$$

razmatrana je u radovima Iokidimisa i Anastasseloua [**51**], Petkovića i Hercega [**90**], Petkovića i Marjanovića [**94**], itd. Najpre je u odeljku 4.1 prikazan simultani metod Čebiševljevog tipa [**99**]. Aproksimirajući izraz $\Phi''(z)/2\Phi'(z)$ sa $Y'(z_i) + \sum_{j \neq i}(z_i - z_j)^{-1}$, iz formule (8) dobija se iterativna formula

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{\Phi(z_i)}{\Phi'(z_i)} \left(1 + \frac{\Phi(z_i)}{\Phi'(z_i)} \Big(Y'(z_i) + \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j} \Big) \right) \qquad (i \in I_n) \quad (9)$$

Čebiševljevog tipa za simultanu aproksimaciju svih nula analitičke funkcije Φ. Dokazano je da je red konvergencije ovog metoda jednak tri. Detaljnom analizom numeričke stabilnosti metoda (9) pokazano je da se on ponaša dosta stabilno u prisustvu greške numeričke integracije.

Poslednjih godina velika pažnja je posvećena razradi algoritama efikasnih za primenu na paralelnim računarima. Takav je slučaj sa algoritmima za simultano nalaženje nula polinoma gde se vrši istovremena realizacija više verzija istog algoritma (npr. n verzija, gde je n broj različitih nula polinoma). Na ovaj način se smanjuje vreme izračunavanja jer se delovi algoritma izvršavaju na više procesora u isto vreme, što je i glavna prednost paralelne implementacije. U nastavku odeljka 4.1 razmatrana je paralelna implementacija metoda (9) sa posebnim osvrtom na asinhronu verziju.

U odeljku 4.2 bavimo se familijom iterativnih metoda za analitičke funkcije primenjući opet Hansen-Patrickovu formulu (2). Izvedena je jednoparametarska familija za simultanu aproksimaciju svih prostih nula analitičke funkcije Φ u posmatranoj oblasti G.

Peto poglavlje sastavljeno je od četiri odeljka i u njima se posmatraju višestruke nule polinoma i simultani metodi za njihovo određivanje. Smenjujući aproksimativni izraz za količnik P''/P' u Osadinom u Laguereovom metodu trećeg reda, u odeljku 5.2 dobijeni su simultani metodi koji su takođe trećeg reda [**75**]. U odeljku 5.3 pokazujemo da ako se u Osadinoj formuli uzme W_i'/W_i i W_i''/W_i' umesto $P'(z_i)/P(z_i)$ i $P''(z_i)/P'(z_i)$ (respektivno), gde je $W_i(z)$ Weierstrassova popravka za višestruke nule data sa (4), dobijaju se simultani metodi za nalaženje višestrukih nula sa redom konvergencije četiri [**46**].

U odeljku 5.4 razmatrani su metodi asinhronog tipa za simultano nalaženje višestrukih nula bez poznavanja reda višestrukosti. U nedavnom radu [**53**] pokazano je kako se Weierstrassov metod može iskoristiti za simultano nalaženje višestrukih nula kada višestrukosti nisu poznate. Autori su predložili varijantu ovog metoda koja ima višetačkasti karakter. Da bi se izbeglo deljenje nulom u slučaju istih aproksimacija, u iterativnim formulama razlike $z_i - z_j$ koriste aproksimaciju z_i iz m-te iteracije i aproksimacije z_j $(j \neq i)$ iz $(m-1)$-ve iteracije. Za najčešće korišćene simultane metode, sa popravkama i bez popravki, data je analiza konvergencije za asinhroni mod. Pokazano je da iterativni metodi sa popravkama nisu efikasni jer se njihov red konvergencije značajno smanjuje.

Skoro svi iterativni metodi predloženi u ovom radu testirani su na velikom broju numeričkih primera, od kojih je jedan deo prikazan u radu. Pri njihovoj realizaciji korišćen je programski jezik FORTRAN

77 na PC Pentiumu u dvostrukoj tačnosti (oko 16 značajnih decimalnih cifara) ili na računaru Micro VAX II sa aritmetikom četvorostruke preciznosti (oko 33 značajne cifre).

Na kraju rada data je lista od 122 reference koje su direktno korišćene ili citirane u radu.

*

* *

Koristim priliku da izrazim veliku zahvalnost mentoru, profesoru dr Miodragu S. Petkoviću, koji je rukovodio izradom ovog rada i pružio mi dragocenu pomoć, kako pri formiranju konačne verzije rada tako i diskusijama o pojedinim problemima i u nalaženju potrebne literature.

Takođe se zahvaljujem i dr Dragoslavu Hercegu, redovnom profesoru PMF-a u Novom Sadu, na korisnim sugestijima i podršci pri izradi ovog rada. Posebnu zahvalnost dugujem dr Ljiljani Petković, redovnom profesoru Mašinskog fakultetu u Nišu, koja je pročitala ceo rad i direktno rukovodila delom istraživanja prikazanih u 2. i 5. poglavlju. Zahvalnost dugujem i dr Snežani Ilić, docentu Filozofskog fakulteta u Nišu, i Đorđu Hercegu, asistentu PMF-a u Novom Sadu, koji su bili koautori u zajedničkim radovima čiji su rezultati prikazani u ovoj disertaciji.

Želim da izrazim najiskreniju zahvalnost svojoj supruzi Ivani koja je svojom neprestanom podrškom i velikim odricanjem doprinela da ovaj rad bude završen u planiranom roku.

Poglavlje 1

SIMULTANI METODI ZA NALAŽENJE NULA POLINOMA

1.1 Kratka istorija iterativnih metoda

Problem nalaženja nula polinoma jeste jedan od najstarih ali i najvažnijih matematičkih problema. Jedno od fundamentalnih istraživanja na polju rešavanja polinomijalnih jednačina vezano je za čisto algebarski pristup mogućnosti rešavanja algebarskih jednačina proizvoljnog stepena. Norveški matematičar Niels Henric Abel (1802 – 1829) u svom radu objavljenom 1828. godine dokazao je da se opšta jednačina petog stepena ne može rešiti pomoću radikala.

Uopštenje Abelovog stava je dao francuski matematičar Evariste Galois (1811 – 1832). Naime, on je dokazao (oko 1830. god.) nemogućnost rešavanja putem radikala opšte algebarske jednačine stepena većeg od četiri. Ovi rezultati objavljeni su tek 1846. god. u časopisu *Journal de mathématiques pures et appliquées,* čiji je izdavač bio poznati matematičar Joseph Liouville (1809 – 1882).

Navedeni Galoisov rezultat da se nule algebarskog polinoma stepena većeg od četiri u opštem slučaju ne mogu izraziti eksplicitnom formulom pomoću koeficijenata polinoma, kao i činjenica da su formule već u slučaju polinoma trećeg i četvrtog stepena veoma komplikovane i praktično neprimenljive, dali su pun zamah numeričkom pristupu rešavanja algebarskih jednačina, korišćenjem nekog pogodnog algoritma, najčešće iterativne prirode.

Ipak, i pre epohalnog Galoisovog rezultata bilo je pokušaja sukcesivnog izračunavanja približnih vrednosti korena jednačina. Isacu Newtonu (1643 – 1727) pripada zasluga za iterativni metod nalaženja korena jednačina. Ovaj metod je izložen u radu *De Analysi Per Æquationes Infinitas* (O analizi jednačina sa neograničenim brojem članova) javno saopštenom po prvi put 1669. godine i kasnije publikovanom u delu *Analysis Per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias: cum Enumeratione Linearum Tertii Ordinis* koje predstavlja kolekciju odabranih Newtonovih radova iz matematike (London 1711., izdavač William Jones). Prvu sistematsku diskusiju o Newtonovom metodu

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)} \quad (k = 0, 1, \dots) \tag{1.1}$$

dao je Joseph Raphson u svom delu *Analysis Æquationum Universalis, seu ad Æquationes Algebraicas resolvendas Methodus Generalis et Expedita, ex Nova Infinitarum Serierum Methodo Deducta et Demonstrata* (London 1690.). Zbog toga se iterativni metod (1.1) često u literaturi naziva Newton-Raphsonovim metodom. Inače, Newtonov metod je aktuelan i u današnje vreme i predstavlja osnovu mnogih metoda. Štaviše, on se pojavljuje kao glavna tema u nedavnim radovima (npr. [**30**], [**61**], [**66**], [**110**]) koji predstavljaju fundament novih matematičkih disciplina.

Ubrzo posle Newtona, 1694. godine, njegov sunarodnik i savremenik astronom Edmund Halley (1656 – 1742) predložio je u radu *Methodus Neva Accurata & facilis inveniendi Radices Æquationum quarumcumque generalier, fine praevia Reducone** (Phil. Trans. Roy. Soc. London 18 (1694), 136-145) iterativni metod oblika

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k) - \dfrac{f''(z_k)f(z_k)}{2f'(z_k)}} \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{1.2}$$

Halleyev iterativni metod (1.2) ima kubnu konvergenciju. Uslovi za globalnu konvergenciju Halleyevog metoda detaljno su proučeni mnogo kasnije u radu Daviesa i Dawsona [**22**]. Pomenimo da se u ruskoj literaturi ovaj metod naziva još i Salehovljevim metodom [**106**] ili metodom tangentnih hiperbola, zbog odgovarajuće geometrijske interpretacije, mada se ponekad citira i rad H.S. Walla [**117**].

Sto godina posle Newtona, veliki švajcarski matematičar L. Euler konstruisao je sledeći iterativni metod:

$$z_{k+1} = z_k - \frac{2f(z_k)}{f'(z_k) \pm \sqrt{f'(z_k)^2 - 2f(z_k)f''(z_k)}} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

*Prevod ovog rada, na engleskom jeziku, može se naći u [**36**]

Eulerov metod ima kubnu konvergenciju (videti [**113**]). Lako je primetiti da ako je $|f(z_k)|$ dovoljno malo, tada aproksimacijom kvadratnog korena (i uzimajući znak + ispred korena) dolazimo do Halleyeve formule (1.2).

Eulerov metod je korenskog tipa. Još dva metoda koji takođe koriste kvadratni koren i imaju kubnu konvergenciju, dobro su poznata u literaturi i često korišćena u praksi. Prvi od njih je izveo Laguerre [**60**] 1898. godine i ima oblik

$$z_{k+1} = z_k - \frac{\nu f(z_k)}{f'(z_k) \pm \sqrt{[(\nu-1)f'(z_k)]^2 - \nu(\nu-1)f(z_k)f''(z_k)}},$$

gde je $\nu \neq 0, 1$ realan broj. Ispred korena treba izabrati onaj znak koji se razlikuje za manje od $\pi/2$ od argumenta (realnog ili kompleksnog) broja $(\nu-1)f'(z_k)$. Laguerreov metod se često koristi za nalaženje nula funkcija zbog svojih dobrih konvergentnih osobina, specijalno zbog male osetljivosti na izbor početne aproksimacije. Ovaj metod se izuzetno dobro ponaša kada je $|z_k|$ veliko (videti [**42**]). Napomenimo da se u slučaju primene na polinom stepena n parametar ν bira tako da bude jednak stepenu polinoma, tj. $\nu = n$.

Drugi metod korenskog tipa je metod Ostrowskog [**72**]. Po strukturi je sličan sa dva prethodna i ima oblik

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{\pm\sqrt{f'(z_k)^2 - f(z_k)f''(z_k)}} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Izbor znaka vrši se na isti način kao kod Laguerreovog metoda.

Jedan od značajnijih rezultata na polju iterativnih metoda publikovan je u drugoj polovini XIX veka. To je tzv. Schröderov razvoj [**108**], koji za nulu ζ funkcije f i njenu aproksimaciju a ima oblik:

$$\zeta = a + u - \frac{1}{2!}\delta_2 u^2 + \frac{1}{3!}(3\delta_2^2 - \delta_3)u^3 + \cdots, \tag{1.3}$$

gde je $u = f(a)/f'(a)$ Newtonova popravka i $\delta_k = f^{(k)}(a)/f'(a)$ $(k = 2, 3, \dots)$. Uzimajući m članova na desnoj strani formule (1.3) (računajući i prvi član – aproksimaciju a) i zamenjujući nulu ζ novom aproksimacijom $\hat{z}$, dobija se iterativni metod reda m. Razvoj (1.3) često se naziva **osnovnim** ili **bazičnim razvojem** i koristi se ne samo za konstrukciju iterativnih metoda visokog reda, već i u postupku dokazivanja reda konvergencije iterativnih metoda. Na primer, za $m = 2$ imamo Newtonov metod (1.1), a za $m = 3$ dobija se metod trećeg reda

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}\Big(1 + \frac{f(z_k)f''(z_k)}{2f'(z_k)^2}\Big) \quad (k = 0, 1, \dots). \tag{1.4}$$

Algoritam (1.4) se najčešće naziva Euler-Čebiševljevim metodom.

Jedna klasa iterativnih metoda proizvoljnog reda konvergencije, koja se može shvatiti kao generalizacija Newtonovog metoda i uključuje kao specijalne slučajeve ne samo Newtonov već i Čebiševljev metod, razmatrana je u radu [**116**]. Napomenimo da se skoro svi gore pomenuti algoritmi mogu dobiti iz familije metoda prikazane u radu Hansena i Patricka [**42**]. Klase iterativnih metoda za rešavanje jednačine $f(z) = 0$ takođe su razmatrane u radovima Wanga (rad na kineskom iz 1961.) i Pomentalea [**101**].

Sa razvojem elektronskih računara posle II svetskog rata pojavio se veliki broj novih algoritama za rešavanje jednačina, kao i modifikacije već postojećih metoda. U tom periodu vredno je pomenuti Mullerov metod [**65**] iz 1956. godine (videti, takođe, [**44**, pog. 10]). Ovaj metod je zasnovan na interpolaciji funkcije f u tri tačke pomoću parabole. Iako nema teorijskih dokaza, Mullerov metod konvergira u skoro svim „nepatološkim" slučajevima te se zbog toga često primenjuje za nalaženje korena nelinearnih jednačina pomoću računara. Zanimljiva je činjenica da je baš ovaj metod upotrebljen pri proračunima tokom svemirskih letova američkih raketa šezdesetih godina koji su uključivali izračunavanje nula polinoma do 32. stepena. Poboljšanja Mullerovog metoda data su u radovima [**52**] i [**73**].

Detaljan pregled i analiza velikog broja iterativnih metoda za rešavanje nelinearnih jednačina i sistema jednačina dat je u monografijama Trauba [**113**], Ostrowskog [**72**], Ortege i Rheinboldta [**70**] i Sendova, Andrejeva i Kjurkčijeva [**109**].

Do pre dve decenije isključivo su bili korišćeni numerički metodi pomoću kojih su nule polinoma određivane sukcesivno, primenom postupka deflacije (deljenje linearnim faktorom – korenim činiocem). S obzirom da se ovi metodi u praksi realizuju na računarima sa aritmetikom konačne preciznosti (ograničen broj važećih cifara), javlja se problem numeričke nestabilnosti. Naime, greška zaokruživanja, a takođe i greške nastale prilikom deljenja korenim činiocem koji umesto tačne nule ima samo njenu aproksimaciju, dovode često do velikih grešaka pri određivanju narednih aproksimacija. Dalje, pri rešavanju praktičnih problema, često nije neophodno odrediti nule polinoma sa velikom tačnošću. Međutim, kod primene metoda sukcesivne deflacije evidentno je da nije moguće iskoristiti ovu prednost jer nedovoljno tačni linerni faktori dovode posle deflacije do „falsifikovanog" polinoma, a time i do devijantnih aproksimacija preostalih nula.

1.2 Simultani metodi

Zbog navedenih nedostataka numeričkih metoda koji koriste sukcesivno određivanje nula polinoma deflacionim postupkom, danas su sve više u upotrebi iterativni metodi koji omogućuju istovremeno nalaženje svih nula polinoma polazeći od izvesnih početnih aproksimacija. Ovi metodi se generalno mogu predstaviti u obliku

$$z_i^{(k+1)} = H_i\big(z_1^{(k)}, \dots, z_n^{(k)}\big) \quad (i \in I_n), \tag{1.5}$$

gde $I_n := \{1, \dots, n\}$ označava indeksni skup. Metodi ovakvog tipa zovu se **simultani metodi** u paralelnoj ili Jacobievoj verziji (*total-step metodi*).

Razmotrimo monični polinom stepena $n \geq 3$

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \prod_{j=1}^{n}(z - \zeta_j) \quad (a_j \in \mathbb{C})$$

sa prostim kompleksnim nulama $\zeta_1, ..., \zeta_n$ i neka su $z_1, \dots, z_n$ njihove aproksimacije. Formule oblika

$$\zeta_k = F_k(z_1, \dots, z_n; \zeta_1, \dots, \zeta_n),$$

koje zovemo **relacijama fiksne tačke** (skraćeno RFT) u odnosu na nule polinoma, su osnova za konstrukciju simultanih metoda za nalaženje nula polinoma. Dajemo nekoliko primera relacija fiksne tačke:

Primer 1. *RFT Weierstrassovog tipa,* [**84**], [**119**]:

$$\zeta_i = z - \frac{P(z)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (z-\zeta_j)} \quad (i \in I_n).$$

Primer 2. *RFT Newtonovog tipa,* [**34**], [**81**]:

$$\zeta_i = z - \frac{1}{\dfrac{P'(z)}{P(z)} - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{1}{z-\zeta_j}} \quad (i \in I_n).$$

Primer 3. *RFT Börsch-Supanovog tipa,* [**13**], [**82**]:

$$\zeta_i = z - \frac{W(z)}{1 - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{W(z)}{z-\zeta_j}} \quad (i \in I_n).$$

Primer 4. *RFT kvadratnog korena,* [**32**], [**81**]:

$$\zeta_i = z - \frac{1}{\left[\dfrac{P'(z)^2 - P(z)P''(z)}{P(z)^2} - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{1}{(z-\zeta_j)^2}\right]_*^{1/2}} \quad (i \in I_n).$$

Primer 5. *RFT Halleyevog tipa,* [**83**], [**118**]:

$$\zeta_i = z - \frac{1}{f(z) - \dfrac{P(z)}{2P'(z)}\left[\left(\sum\limits_{j\neq i} \dfrac{1}{z-\zeta_j}\right)^2 + \sum\limits_{j\neq i} \dfrac{1}{(z-\zeta_j)^2}\right]} \quad (i \in I_n),$$

gde je $f(z) = \dfrac{P'(z)}{P(z)} - \dfrac{P''(z)}{2P'(z)}$.

Zamenjujući nule ζ_j na desnoj strani u primerima 1 do 5 njihovim aproksimacijama z_j, dobijamo odgovarajuće iterativne metode u običnoj kompleksnoj aritmetici za simultano nalaženje svih nula polinoma:

(M1): *Weierstrassov metod* [**23**], [**24**], [**54**], [**120**], red 2:

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{P(z_i)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (z_i - z_j)} \quad (i \in I_n).$$

(M2): *Börsch-Supanov metod* [**12**], [**68**], red 3:

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W(z_i)}{1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{W(z_j)}{z_i - z_j}} \quad (i \in I_n).$$

(M3): *Maehly-Ehrlichov metod* [**25**], [**62**], red 3:

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\frac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z_i - z_j}} \quad (i \in I_n).$$

(M4): *Metod kvadratnog korena* [**32**], [**96**], red 4:

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\left[\frac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i - z_j)^2}\right]_*^{1/2}} \quad (i \in I_n).$$

Simbol $*$ označava da se bira jedna od vrednosti kvadratnog korena prema pogodnom kriterijumu, o čemu će biti reči kasnije.

(M5): *Halleyev metod* [**118**], red 4:

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{f(z_i) - \frac{P(z_i)}{2P'(z_i)}\left[\left(\sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - z_j}\right)^2 + \sum_{j\neq i} \frac{1}{(z_i - z_j)^2}\right]} \quad (i \in I_n).$$

U vezi konvergencije navedenih simultanih metoda (M1) – (M5), nedavno je dokazan sledeći važan rezultat [**86**] koji daje uslove za konvergenciju koji zavise samo od početnih aproksimacija.

Neka su $\{z_1^{(m)}\}, \ldots, \{z_n^{(m)}\}$ nizovi generisani iterativnim metodom. Za $m = 0, 1, \ldots$ uvedimo skraćenice

$$d^{(m)} := \min_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \{|z_i^{(m)} - z_j^{(m)}|\}, \quad W^{(m)} := \max_{1 \leq i \leq n} |W(z_i^{(m)})|.$$

Teorema 1.1. *Pod uslovom*

$$W^{(0)} = \max_{1 \leq i \leq n} |W(z_i^{(0)})| < \frac{\min_{j \neq i} |z_i^{(0)} - z_j^{(0)}|}{3n} = \frac{d^{(0)}}{3n}, \tag{1.6}$$

iterativni metodi (M1) – (M5) su konvergentni.

Korišćenjem već izračunatih aproksimacija u istoj iteraciji dobija se Gauss-Seidelova ili serijska (*single-step*) verzija simultanog metoda

$$z_i^{(k+1)} = H_i\big(z_1^{(k+1)}, \ldots, z_{i-1}^{(k+1)}, z_i^{(k)}, \ldots, z_n^{(k)}\big) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Red konvergencije ovih metoda je veći u odnosu na Jacobijevu varijantu (1.5).

1.3 Realna i kompleksna intervalna aritmetika

U poslednjih dvadesetak godina glavni pravci razvoja u oblasti iterativnih procesa za rešavanje jednačina bili su usmereni na

1) konstrukciju i primenu jedne nove vrste iterativnih metoda realizovanih u tzv. **intervalnoj aritmetici**, čija je glavna prednost kontrola greške pri svim izračunavanjima i inkluzija traženih nula, i

2) na implementaciju iterativnih metoda na paralelnim računarima, što je dovelo do smanjenja ukupnog vremena izvršavanja algoritma.

Osnova intervalnih metoda za nalaženje realnih nula je proširenje pojma realnog broja i realne aritmetike. Realan interval se predstavlja pomoću para realnih brojeva i za takve brojeve se uvodi tzv. *realna* *intervalna aritmetika.* U slučaju kada su krajnje tačke intervala jednake, imamo degenerisani ili tačkasti interval koji se može identifikovati sa realnim brojem jednakim granicama intervala. Dakle, intervalna aritmetika uključuje realnu aritmetiku kao specijalan slučaj. Isti slučaj je i kod intervalnih metoda za određivanje kompleksnih nula, gde se umesto uobičajene kompleksne aritmetike koristi kompleksna intervalna aritmetika koja operiše sa diskovima ili pravougaonicima umesto sa kompleksnim brojevima.

Pre nego što opišemo intervalne metode za nalaženje nula funkcija, navešćemo najosnovnije operacije realne i kompleksne intervalne aritmetike. Podskup od $\mathbb{R}$ u obliku

$$A = [a_1, a_2] = \{x :\ a_1 \leq x \leq a_2,\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$$

zove se *realan interval.* Skup svih zatvorenih realnih intervala označava se sa $I(\mathbb{R})$. Ako $*$ označava jednu od osnovnih operacija $+, -, \cdot, :$, tada se osnovne operacije u realnoj intervalnoj aritmetici definišu sa

$$A * B = \{x = a * b :\ a \in A, b \in B\}, \quad A, B \in I(\mathbb{R}),$$

pretpostavljajući da $0 \notin B$ ako je $*$ deljenje.

Neka je $S = \{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2\}$. Osnovne operacije sa realnim intervalima $A = [a_1, a_2]$ i $B = [b_1, b_2]$ mogu se eksplicitno izraziti na sledeći način:

$$\begin{aligned}
&[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2], \\
&[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1], \\
&[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = [\min S,\ \max S], \\
&[a_1, a_2] : [b_1, b_2] = [a_1, a_2] \cdot \left[\frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1}\right], \quad 0 \notin B.
\end{aligned}$$

Neka su A_1 i A_2 realni intervali. Tada skup

$$A = \{a = a_1 + ia_2 :\ a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$$

kompleksnih brojeva predstavlja *pravougaonik* u kompleksnoj ravni sa stranama paralelnim koordinatnim osama. Skup ovih pravougaonika se označava sa $R(\mathbb{C})$, gde je $\mathbb{C}$ skup kompleksnih brojeva.

Neka je $* \in \{+, -, \cdot, :\}$ binarna operacija nad elementima iz $I(\mathbb{R})$, i neka je

$$A = A_1 + iA_2, \quad B = B_1 + iB_2, \quad A, B \in R(\mathbb{C}).$$

Osnovne operacije *aritmetike pravougaonika* definišu se pomoću

$$A \pm B = A_1 \pm B_1 + i(A_2 \pm B_2),$$
$$A \cdot B = A_1 B_1 - A_2 B_2 + i(A_1 B_2 + A_2 B_1),$$
$$A : B = \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2}{B_1^2 + B_2^2} + i\,\frac{A_2 B_1 - A_1 B_2}{B_1^2 + B_2^2}, \quad 0 \notin B_1^2 + B_2^2.$$

Slučaj $A : B$ zahteva posebno razmatranje jer deljenje definisano poslednjom formulom daje kompleksan interval (pravougaonik) koji je u opštem slučaju suviše veliki u odnosu na tačan skup $\{z_1/z_2 : z_1 \in A, z_2 \in B\}$. Zbog toga se u praksi koristi definicija deljenja koju su uveli Rokne i Lancaster [**103**] na sledeći način:

$$A : B = A \cdot \frac{1}{B},$$

gde je

$$\frac{1}{B} = \inf\Big\{Z \in R(\mathbb{C}) : \ \Big\{\frac{1}{b} : \ b \in B\Big\} \subseteq X\Big\}.$$

Na ovaj način se dobija znatno manji pravougaonik mada gornji skup formula zahteva više računskih operacija.

Druga vrsta kompleksne intervalne aritmetike koristi zatvorene kružne oblasti – diskove. Disk $Z = \{z : |z - c| \le r\}$ sa centrom $c = \operatorname{mid} Z$ i poluprečnikom $r = \operatorname{rad} Z$ označićemo simbolički kao $Z = \{c; r\}$. Skup svih zatvorenih diskova u kompleksnoj ravni označava se sa $K(\mathbb{C})$. Osnovne opracije u *kompleksnoj kružnoj aritmetici* definišu se sa

$$\{c_1; r_1\} \pm \{c_2; r_2\} = \{c_1 \pm c_2; r_1 + r_2\},$$
$$w \pm \{c; r\} = \{w \pm c; r\},$$
$$w \cdot \{c; r\} = \{w \cdot c; |w| r\},$$
$$\{c_1; r_1\} \cdot \{c_2; r_2\} = \{c_1 c_2; |c_1| r_2 + |c_2| r_1 + r_1 r_2\},$$
$$Z^{-1} = \{c; r\}^{-1} = \frac{\{\bar{c}; r\}}{|c|^2 - r^2} \quad (|c| > r, \text{ tj. } 0 \notin Z),$$
$$Z_1 : Z_2 = Z_1 \cdot Z_2^{-1} \quad (0 \notin Z_2),$$
$$z \in Z \Rightarrow |z| \le |\operatorname{mid} Z| + \operatorname{rad} Z.$$

Za navedene osnovne operacije $+, -, \cdot, :$ u skupovima $I(\mathbb{R})$, $R(\mathbb{C})$ i $K(\mathbb{C})$ važi osobina *inkluzivne izotonosti*, tj.

$$Z_k \subseteq W_k \Rightarrow Z_1 * Z_2 \subseteq W_1 * W_2 \quad (k = 1, 2;\ * \in \{+, -, \cdot, :\}).$$

Štaviše, ako je f racionalna funkcija i F njeno *realno ili kompleksno proširenje*, tada važi implikacija

$$Z_k \subseteq W_k \ (k = 1, \ldots, q) \Rightarrow F(Z_1, \ldots, Z_q) \subseteq F(W_1, \ldots, W_q).$$

U specijalnom slučaju imamo

$$w_k \in W_k \ (k = 1, \ldots, q;\ w_k \in \mathbb{C}) \Rightarrow f(w_1, \ldots, w_q) \in F(W_1, \ldots, W_q).$$

Osobina inkluzivne izotonosti predstavlja osnovu za konstrukciju iterativnih metoda.

U ovom radu koristićemo sledeće očigledne ekvivalencije:

$$z \in \{c; r\} \Leftrightarrow |z - c| \leq r,$$
$$z \notin \{c; r\} \Leftrightarrow |z - c| > r.$$

Više detalja o operacijama realne i kompleksne intervalne aritmetike i njihovim osobinama može se naći u monografiji [5] i radovima koji su citirani u ovoj knjizi.

Prvi i istovremeno fundamentalan rezultat u oblasti intervalnih metoda dao je 1966. godine R. E. Moore u svojoj knjizi *Interval analysis* [64]. Ako je $F'(X)$ realno intervalno proširenje funkcije f' nad intervalom X koji sadrži realnu prostu nulu ξ funkcije f, tada se pomoću

$$N(X) = m(X) - \frac{f(m(X))}{F'(X)}, \quad m(X) = \operatorname{mid} X \tag{1.7}$$

definiše Newtonov operator sa osobinom da ako $\xi \in X$ tada $\xi \in N(X)$. Na osnovu ovog Moore je konstruisao intervalni metod Newtonovog tipa

$$X_{k+1} = N(X_k) \cap X_k \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{1.8}$$

koji startuje od početnog intervala X_0 koji sadrži nulu ξ. Pod određenim uslovima Newtonov intervalni metod (1.7) – (1.8) konvergira kvadratno.

Modifikacije i poboljšanja ovog metoda kasnije su data u radovima [**2**], [**38**], [**39**], [**43**], [**47**], [**80**]. U knjizi [**5**, pog. 7] predloženi su intervalni metodi višeg reda za inkluziju realne proste nule.

Newtonov intervalni metod (1.7) – (1.8) može se upotrebiti samo u slučaju realne proste nule, što je njegov osnovni nedostatak. Problem inkluzije kompleksnih nula rešen je primenom intervalnih metoda za rešavanje sistema nelinearnih jednačina ([**7**], [**35**], [**37**], [**57**]). Kod ovih metoda postupak nalaženja nule kompleksne funkcije $f(z) = f(x+iy) = u(x, y) + i(v(x, y) = 0$ svodi se na rešavanje sistema od dve jednačine $u(x, y) = 0$, $v(x, y) = 0$. Konvergencija je nadlinearna ili, u najboljem slučaju, kvadratna. Jedan efikasan algoritam sa kvadratnom konvergencijom za inkluziju kompleksne nule polinoma poznate višestrukosti dat je u radu [**89**] (videti, takođe, [**92**]). U 2. poglavlju ovog rada predloženo je nekoliko metoda zasnovanih na intervalnom nagibu sa redom konvergencije većim od 2.

1.4 Simultani intervalni metodi

Konstrukcija intervalnih metoda za simultano određivanje nula polinoma zasnovana je na osobini inkluzivne izotonosti. U specijalnom slučaju, kada su dužine realnih intervala ili poluprečnici diskova jednaki nuli, ovi intervalni metodi se svode na simultane metode za nalaženje „tačkastih" aproksimacija nula polinoma.

Konstrukcija ovih metoda zasnovana je na relacijama fiksne tačke i izvodi se na sledeći način:

Neka su $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ nule datog polinoma i neka su $z_1, \ldots, z_n$ njihove aproksimacije. Posmatramo dva tipa relacija fiksne tačke:

$$\zeta_i = F_1(z_1, \ldots, z_{i-1}, \zeta_i, z_{i+1}, \ldots, z_n) \quad (i \in I_n), \tag{1.9}$$

$$\zeta_i = F_2(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, z, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_n) \quad (i \in I_n). \tag{1.10}$$

U primerima 1 do 5 dato je nekoliko relacija fiksne tačke koje su bile osnova za konstrukciju najčešće korišćenih iterativnih metoda za simultanu inkluziju nula polinoma.

Zamenjujući tačne nule njihovim aproksimacijama i stavljajući $z = z_i$ u (1.10), iz (1.9) i (1.10) dobijamo iterativne šeme

$$\hat{z}_i = F_1(z_1, \ldots, z_n) \quad (i \in I_n), \tag{1.11}$$

$$\hat{z}_i = F_2(z_1, \ldots, z_n) \quad (i \in I_n), \tag{1.12}$$

u (običnoj) kompleksnoj aritmetici, gde je $\hat{z}_i$ nova aproksimacija nule ζ_i.

Pretpostavimo sada da smo našli n kompleksnih intervala $Z_1, \ldots,$ Z_n takvih da je $\zeta_i \in Z_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Zamenjujući nule na desnoj strani relacija (1.9) i (1.10) njihovim inkluzivnim intervalima i koristeći *svojstvo podskupa*, dobijamo

$$\zeta_i \in F_1(z_1, \ldots, z_{i-1}, Z_i, z_{i+1}, \ldots, z_n) \quad (i \in I_n), \tag{1.13}$$

$$\zeta_i \in F_2(Z_1, \ldots, Z_{i-1}, z, Z_{i+1}, \ldots, Z_n) \quad (i \in I_n). \tag{1.14}$$

Uzimajući skupove na desnoj strani relacija (1.13) i (1.14) kao nove (kružne ili pravougaone) aproksimacije $\hat{Z}_i$ za ζ_i, možemo konstruisati iterativne metode

$$\hat{Z}_i = F_1(z_1, \ldots, z_{i-1}, Z_i, z_{i+1}, \ldots, z_n) \quad (i \in I_n), \tag{1.15}$$

$$\hat{Z}_i = F_2(Z_1, \ldots, Z_{i-1}, z, Z_{i+1}, \ldots, Z_n) \quad (i \in I_n), \tag{1.16}$$

u kompleksnoj intervalnoj aritmetici, pretpostavljajući da su $\hat{Z}_1, \ldots, \hat{Z}_n$ takođe kompleksni intervali i uzimajući da je z_i centar od Z_i.

Iterativni metodi (1.11), (1.12), (1.15) i (1.16) su lokalno konvergentni i moraju da se kombinuju sa nekim sporo konvergentnim procesima da bi se obezbedile (dovoljno dobre) početne aproksimacije nula. Takođe, iterativni metodi (1.11) i (1.12) mogu da se kombinuju sa intervalnim metodima (1.15) i (1.16). Na ovaj način efikasnost novih *kombinovanih* metoda se uvećava jer računanje u običnoj aritmetici sa pokretnom tačkom zahteva manje numeričkih operacija u poređenju sa intervalnom aritmetikom. Sledeći postupak se koristi za konstrukciju kombinovanih iterativnih metoda:

1° Naći početne diskove ili pravougaovnike $Z_1^{(0)}, \ldots, Z_n^{(0)}$ koji sadrže nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ datog polinoma;

2° Koristeći iterativni metod (1.11) ili (1.12) (u aritmetici sa pokretnom tačkom), izračunati aproksimacije $z_i^{(m)}$ koje se javljaju u (1.15) i (1.16) do željene tačnosti (posle m iterativnih koraka), startujući sa centrima $z_i^{(0)}$ početnih oblasti $Z_i^{(0)}$ $(i = 1, \ldots, n)$;

3° Primeniti neki od intervalnih metoda oblika (1.15) ili (1.16) samo jednom, u poslednjem itertivnom koraku, radeći sa početnim kompleksnim intervalima $Z_1^{(0)}, \dots, Z_n^{(0)}$ i poboljšanim aproksimacijama $z_i^{(m)}$.

Napomena 1. U koraku 3° mogu se primeniti neki pogodni inkluzivni diskovi, od kojih svaki sadrži jednu i samo jednu nulu, umesto intervalnih metoda (1.15) i (1.16). ◊

Navodimo neke primere simultanih intervalnih metoda zasnovanih na RFT datih u primerima 1 do 5.

(I1): *Weierstrassov intervalni metod* [**84**], [**119**], red 2:

$$\hat{Z}_i = z_i - \frac{P(z_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (z_i - Z_j)} \qquad (i \in I_n).$$

(I2): *Gargantini-Henricijev metod* [**34**], [**81**], red 3:

$$\hat{Z}_i = z_i - \frac{1}{\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{1}{z_i - Z_j}} \qquad (i \in I_n).$$

(I3): *Intervalni metod Börsch-Supanovog tipa* [**82**], red 3:

$$\hat{Z}_i = z_i - \frac{W(z_i)}{1 - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{W(z_j)}{z_j - Z_i}} \qquad (i \in I_n).$$

(I4): *Intervalni metod kvadratnog korena* [**32**], [**81**], red 4:

$$\hat{Z}_i = z_i - \frac{1}{\left[\dfrac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2} - \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{1}{(z_i - Z_j)^2}\right]_*^{1/2}} \qquad (i \in I_n).$$

(I5): *Intervalni metod Halleyevog tipa* [**83**], [**118**], red 4:

$$\hat{Z}_i = z_i - \frac{1}{f(z_i) - \dfrac{P(z_i)}{2P'(z_i)}\Big[\Big(\sum_{j\neq i} \dfrac{1}{z_i - Z_j}\Big)^2 + \sum_{j\neq i} \dfrac{1}{(z_i - Z_j)^2}\Big]},$$

gde je funkcija f definisana kao u primeru 5.

U radu [**86**] dokazana je sledeća teorema:

Teorema 1.2. *Ako su ispunjeni uslovi (1.6) Teoreme 1.1 i ako su početni diskovi izabrani tako da je*

$$Z_i^{(0)} := \{z_i^{(0)} - W(z_i^{(0)}); |W(z_i^{(0)})|\} \quad (i \in I_n),$$

intervalni metodi $(I_1) - (I_5)$ *su konvergentni.*

1.5 Lokalizacija nula polinoma

Primenjujući iterativni metod za inkluziju nula polinoma neophodno je prvo naći početne oblasti (diskove ili pravougaonike) koje sadrže ove nule. U literaturi postoji puno rezultata vezanih za ovo pitanje, od klasičnih izloženih u knjigama [**45**] i [**63**], do doprinosa objavljenih u nedavnim radovima.

Izbor početnih ikluzivnih oblasti koje sadrže nule polinoma je tesno povezan sa početnim uslovima za konvergenciju iterativnih metoda. Najveći broj ovih uslova razmatranih u literaturi zavisi od nepoznatih podataka, na primer, od funkcija traženih nula, što nije od praktične važnosti. U ovom odeljku konstruisaćemo početne oblasti koje zavise od početnih kompleksnih aproksimacija $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ prostih kompleksnih nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. U isto vreme, takav izbor obezbeđuje sigurnu konvergenciju najčešće korišćenih inkluzivnih metoda, kao što je pokazano u [**86**].

Najpre dajemo rezultat koji ima globalni karakter. Razmotrimo polinom P stepena n,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - \zeta_j), \quad (a_i \in \mathbb{C}),$$

sa nulama $\zeta_1, \dots, \zeta_n$. Rešavajući polinomijalne jednačine često je od interesa naći *inkluzivni poluprečnik* R za dati polinom P takav da sve nule polinoma P zadovoljavaju uslov

$$|\zeta_i| \leq R \quad (i = 1, \dots, n).$$

Sledeće tvrđenje, koje ima veliki praktični značaj, dato je u knjizi [**45**, str. 457]:

Teorema 1.3. *Neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ pozitivni brojevi takvi da je $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \leq 1$ i neka je*

$$R := \max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k^{-1/k} |a_{n-k}/a_n|^{1/k}.$$

Tada je R inkluzivni poluprečnik za polinom P.

Specijalno, uzimajući $\lambda_k = 1/2^k$, iz Teoreme 1.3 sledi da disk sa centrom u koordinatnom početku i poluprečnikom

$$R = 2 \max_{1 \leq k \leq n} |a_{n-k}/a_n|^{1/k} \tag{1.17}$$

sadrži sve nule polinoma P. Poslednji rezultat može se takođe naći u Knuthovoj knjizi [**55**]. Primetimo da je često zgodno uzeti za početnu oblast najmanji mogući *kvadrat* koji sadrži krug $\{z : |z| \leq R\}$, gde je R dat sa (1.17).

Neka je P moničan polinom stepena $n \geq 3$, to jest, $a_n = 1$. Pretpostavimo da su međusobno različiti kompleksni brojevi $z_1, ..., z_n$ dovoljno dobre aproksimacije nula $\zeta_1, ..., \zeta_n$ polinoma P. Weierstrassova popravka $W(z_i) = W_i$, koja se javlja u Weierstrassovom metodu (odeljak 1.2), se često koristi za *a posteriorne* procene greške za dati skup aproksimacija nula.

Teorema 1.4 (Smith [**112**]). *Neka je $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ pozitivan vektor i neka su*

$$D_j(\alpha) := \Big\{ z : |z - z_j + W_j| \leq \frac{1}{\alpha_j} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i |W_i| \Big\} \quad (j = 1, \dots, n)$$

diskovi u kompleksnoj ravni. Tada unija diskova $D(\alpha) = \bigcup_{j=1}^{n} D_j(\alpha)$ *sadrži sve nule polinoma* P. *Pored toga svaki povezani podskup od* $D(\alpha)$ *koji se sastoji od* m $(1 \le m \le n)$ *diskova, izolovanih od preostalih* $n - m$ *diskova, sadrži tačno* m *nula polinoma* P.

Braess i Hadeler [**13**] su došli do sličnog rezultata, ali za diskove

$$G_j(\alpha) := \Big\{ z : |z - z_j| \le \frac{1}{\alpha_j} \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} \alpha_i |W_i| \Big\} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Lako je pokazati da se ovi diskovi mogu dobiti kao posledica opštijeg Smithovog rezultata iz Teoreme 1.4.

U konkretnom slučaju, ako stavimo $\alpha_i = 1/|W_i|$, diskovi $G_j(\alpha)$ postaju

$$G_j = \Big\{ z : \ |z - z_j| \le n|W_j| = n|P(z_j)/Q'(z_j)| \Big\} \quad (j = 1, \dots, n).$$

Ovaj jednostavan rezultat je od praktičnog značaja i često se primenjuje u teoriji i praksi. Koristeći princip kontinuiteta lako se pokazuje da ako su diskovi $\{z_1; n|W_1|\}, \dots, \{z_n; |W_n|\}$ disjunktni, tada svaki od njih sadrži jednu i samo jednu nulu polinoma P. U nastavku navodimo jedan zanimljiv i koristan rezultat zasnovan na Carstensenovoj Teoremi 3 iz [**16**]:

Teorema 1.5. *Neka je* $\eta_i := z_i - W_i \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ *i*

$$a_i := |W_i| \cdot \max_{j \ne i} |z_j - \eta_i|^{-1}, \quad b_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} \frac{|W_j|}{|z_j - \eta_i|} \quad (i \in I_n).$$

Ako važe nejednakosti

$$\sqrt{1 + a_i} > \sqrt{a_i} + \sqrt{b_i} \quad i \quad a_i + 2b_i < 1,$$

tada postoji tačno jedna nula polinoma P *u disku sa centrom* η_i *i poluprečnikom*

$$\frac{a_i + b_i}{1 - b_i} |W_i|.$$

Napomena 2. Kako je $\phi(a_i, b_i) = (a_i + b_i)/(1 - b_i)$ monotono rastuća funkcija po svakoj od promenljivih $a_i, b_i \in (0,1)$, sledi da je disk $\dfrac{a_i + b_i}{1 - b_i}|W_i|$ utoliko manji ukoliko su a_i i b_i manji. $\Diamond$

1.6 Konvergencija i R-red konvergencije

Kao što je pokazano u knjizi [70] klasična definicija reda konvergencije ima nedostataka, a u nekim slučajevima se ne može ni upotrebiti (npr. kod simultanih metoda sa Gauss-Seidelovim pristupom, videti [4]). Zbog toga posmatramo jedan drugačiji pristup pojmu reda konvergencije iterativnih procesa, koji su uveli Ortega i Rheinbolt [70].

Definicija 1. Neka je $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ proizvoljan niz u R^n koji konvergira ka $\boldsymbol{a}$. Tada se brojevi

$$R_p(\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}) = \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \sup \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{a}\|^{1/k}, & \text{ako je } p = 1, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \sup \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{a}\|^{1/p^k}, & \text{ako je } p > 1, \end{cases}$$

nazivaju korenskim faktorima konvergencije, ili kraće R-faktori niza $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$. Ako je IP iterativni proces sa graničnom tačkom $\boldsymbol{a}$ i $C(IP, \boldsymbol{a})$ skup svih nizova generisanih pomoću IP, koji konvergiraju ka $\boldsymbol{a}$, tada se veličina

$$R_p(IP, \boldsymbol{a}) = \sup\{R_p(\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}) : \{\boldsymbol{x}^{(k)}\} \in C(IP, \boldsymbol{a})\} \ (1 \le p < +\infty)$$

naziva R-faktorom iterativnog procesa u tački $\boldsymbol{a}$.

Napomena 3. Ako niz $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ konvergira ka $\boldsymbol{a}$, tada postoji k_0 takvo da je

$$0 \le \|\boldsymbol{x}^{(k)} - \boldsymbol{a}\| \le 1 \quad \text{za svako } k \ge k_0,$$

odakle zaključujemo da je $0 \le R_p(\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}) \le 1$ za svako $p \ge 1$. $\Diamond$

Navodimo bez dokaza sledeće dve teoreme ([70]):

Teorema 1.6. *Neka je $\{\boldsymbol{x}^{(k)}\}$ proizvoljan niz u R^n koji konvergira ka $\boldsymbol{a}$. Faktor $R_p(\boldsymbol{x}^{(k)}\})$ ne zavisi od izbora norme u R^n ni za jedno $p \in$*

$[1, +\infty)$. *Takođe, R-faktor $R(IP, \boldsymbol{a})$ iterativnog procesa je nezavisan od izbora norme.*

Teorema 1.7. *Neka je IP iterativni proces sa graničnom tačkom $\boldsymbol{a}$. Tada važi jedno od sledećih tvrđenja:*

a) $R_p(IP, \boldsymbol{a}) = 0$ *za svako* $p \in [1, +\infty)$;

b) $R_p(IP, \boldsymbol{a}) = 1$ *za svako* $p \in [1, +\infty)$;

c) Postoji $p_0 \in [1, +\infty)$ *takvo da je* $R_p(IP, \boldsymbol{a}) = 0$ *za svako* $p \in [1, p_0)$ *i* $R_p(IP, \boldsymbol{a}) = 1$ *za svako* $p \in [p_0, +\infty)$.

Na osnovu prethodnog može se uvesti tzv. R-red konvergencije iterativnog procesa:

Definicija 2. R-red konvergencije iterativnog procesa u tački $\boldsymbol{a}$ je veličina

$$O_R(IP, \boldsymbol{a}) = \begin{cases} +\infty, \text{ ako je} R_p(IP, \boldsymbol{a}) = 0 \text{ za svako } p \in [1, +\infty), \\ \inf\{p \in [1, +\infty) : R_p(IP, \boldsymbol{a}) = 1\}, \text{ ostali slučajevi.} \end{cases}$$

Primetimo da ovako definisani R-red konvergencije iterativnog procesa ne zavisi od izbora norme u R^n. Takođe, uočimo sledeće činjenice:

1) Ako je $R_p(IP, \boldsymbol{a}) < 1$ za neko $p \in [1, +\infty)$, tada R-red nije manji od p, tj. važi $O_R(IP, \boldsymbol{a}) \geq p$;

2) Ako je $R_q(IP, \boldsymbol{a}) > 0$ za neko $q \in [1, +\infty)$, tada za R-red važi $O_R(IP, \boldsymbol{a}) \leq q$;

3) Ako je $0 < R_p(IP, \boldsymbol{a}) < 1$ za neko $p \in [1, +\infty)$, tada je $O_R(IP, \boldsymbol{a}) = p$.

U slučaju kada je $0 < R_1(IP, \boldsymbol{a}) < 1$ kažemo da je konvergencija procesa ka tački $\boldsymbol{a}$ R-linearna. Ako je, međutim, $R_1(IP, \boldsymbol{a}) = 0$ ili $R_1(IP, \boldsymbol{a}) = 1$, za konvergenciju kažemo da je R-podlinearna, odnosno R-nadlinearna.

Kada upoređujemo konvergenciju dva iterativna procesa IP_1 i IP_2 postupamo na sledeći način: Najpre, poredimo R-redove, tj. veličine $O_R(IP_1, \boldsymbol{a})$ i $O_R(IP_2, \boldsymbol{a})$, pri čemu je brži onaj proces koji ima veći R-red. Međutim, ako je $O_R(IP_1, \boldsymbol{a}) = O_R(IP_2, \boldsymbol{a}) = p$, tada upoređujemo R-faktore. Ako je, na primer, $R_{\bar{p}}(IP_1, \boldsymbol{a}) < R_{\bar{p}}(IP_2, \boldsymbol{a})$, tada je IP_1 brži od IP_2.

Poglavlje 2

INTERVALNI METODI NAGIBA ZA INKLUZIJU NULA POLINOMA

Intervalni metod nagiba za rešavanje jednačina je algoritam koji koristi intervalnu aritmetiku za inkluziju nule nelinearne funkcije ili sistema funkcija. Prvi put je uveden od strane Alefelda [**3**], a kasnije je razmatran u [**40**], [**41**], [**58**], [**59**], [**67**], [**78**]. Osnovni metod poseduje kvadratnu konvergenciju kao i Newtonov intervalni metod (videti Moore [**64**, Pog. 7]), ali ne koristi izvode. U ovom poglavlju dajemo nekoliko algoritama zasnovanih na nagibu u kompleksnoj aritmetici i kompleksnoj intervalnoj aritmetici. U odeljku 2.1 posmatramo intervalni metod nagiba za inkluziju prostog kompleksnog korena polinoma. Dokazana je kvadratna konvergencija ovog metoda. Intervalni metod sa redom konvergencije $1 + \sqrt{2}$, koji kombinuje metod sečice i intervalni nagib, opisan je u odeljku 2.2. Dalje ubrzanje konvergencije se postiže konstrukcijom nove relacije fiksne tačke i pogodnom primenom kompleksne intervalne aritmetike (odeljak 2.3). Na ovaj način izvodimo dva nova intervalna metoda nagiba sa redom konvergencije tri i četiri.

2.1 Metod nagiba drugog reda

Za stepenu funkciju $w(z) = z^m$, gde je m ceo broj, imamo

$$w(\zeta) - w(z) = \zeta^m - z^m = (\zeta - z) \sum_{k=0}^{m-1} z^k \zeta^{m-1-k}. \tag{2.1}$$

Razmotrimo polinom $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$. Korišćenjem (2.1) dobijamo identitet

$$p(\zeta) - p(z) = (\zeta - z) g(z, \zeta), \tag{2.2}$$

gde je funkcija dve promenljive $g(z,\zeta)$, koju zovemo **nagib**, data sa

$$g(z,\zeta)=\sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=0}^{m-1} z^k \zeta^{m-1-k}. \tag{2.3}$$

Neka je ζ nula polinoma p. Tada je $p(\zeta)=0$ pa iz (2.2) dobijamo

$$\zeta = z - \frac{p(z)}{g(z,\zeta)}.$$

Pretpostavimo da je Z realan ili kompleksan interval koji sadrži ζ. Tada, na osnovu osobine inkluzivne izotonosti, iz prethodne relacije fiksne tačke sledi

$$\zeta \in z - \frac{p(z)}{g(z,Z)}.$$

Ova relacija sugeriše algoritam za inkluziju nule ζ. Ako $0 \notin g(z,Z)$, tada je oblast $\hat{Z}$ zadata pomoću

$$\hat{Z} = z - \frac{p(z)}{g(z,Z)}$$

zatvoreni realan ili kompleksan interval takav da $\zeta \in \hat{Z}$ ako $\zeta \in Z$. Za tačku z se obično uzima centar intervala Z.

Algoritam 2.1. *Neka je Z_0 početni interval koji sadrži prostu nulu polinoma p. Tada iterativna formula*

$$Z_{\nu+1} = z_\nu - \frac{p(z_\nu)}{g(z_\nu, Z_\nu)} \quad (z_\nu = \operatorname{mid} Z_\nu,\ \nu = 0,1,\dots) \tag{2.4}$$

definiše iterativni intervalni metod nagiba.

Napomena 1. Ako se Algoritam 2.1 realizuje u kompleksnoj aritmetici pravougaonika, tada je preporučljivo da se koristi presek,

$$Z_{\nu+1} = \Big(z_\nu - \frac{p(z_\nu)}{g(z_\nu, Z_\nu)}\Big) \bigcap Z_\nu \quad (z_\nu = \operatorname{mid} Z_\nu,\ \nu = 0,1,\dots).$$

Isto važi za druge algoritme u ovom radu kada se koristi aritmetika pravougaonika. $\Diamond$

Metod nagiba (2.4) je dat za slučaj algebarskih polinoma ali se ovaj metod takođe može primeniti za inkluziju nule proizvoljne racionalne funkcije. Štaviše, koristeći nedavni rezultat dobijen u [**56**], on se može proširiti na klasu iracionalnih funkcija.

Može se uočiti sličnost između opisanog postupka i Newtonovog intervalnog metoda. Neka je f realna, diferencijabilna funkcija i neka $f'(Z)$ označava interval gde je realan interval Z uzet kao argument funkcije f'. Ako zamenimo $g(z,Z)$ sa $f'(X)$ i $p(z)$ sa $f(z)$ u formuli koja definiše metod nagiba, dobijamo Newtonov intervalni metod

$$\hat{Z} = N(z,Z) := z - \frac{f(z)}{f'(Z)}, \tag{2.5}$$

koji je po prvi put razmatran u Mooreovoj monografiji [**64**, §7.2]. Gornja zamena je opravdana jer u slučaju polinoma, za z koje je dovoljno blizu, ζ imamo

$$g(z,\zeta) \approx \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=0}^{m-1} \zeta^{m-1} = \sum_{m=1}^{n} m a_m \zeta^{m-1} = f'(\zeta).$$

Pomenimo da Newtonov intervalni metod (2.5) važi samo za realne intervale i realne nule, što je nedostatak u poređenju sa metodom nagiba (2.4). Dalje, kako je $z^k Z^\lambda \subseteq Z^{k+\lambda}$ $(k,\lambda = 0,1,\dots,n-1,\ z = \operatorname{mid} Z)$, dobija se

$$a_m \sum_{k=0}^{m-1} z^k Z^{m-1-k} \subseteq m a_m Z^{m-1}.$$

Iz ove inkluzije i (2.3) sledi

$$g(z,Z) = \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=0}^{m-1} z^k Z^{m-1-k} \subseteq \sum_{m=1}^{n} m a_m Z^{m-1} = f'(Z).$$

Dakle, interval $g(z,Z)$ je manji ili jednak $f'(Z)$ tako da, u opštem slučaju, metod nagiba (2.4) konvergira u manje koraka nego standardni Newtonov intervalni metod (2.5).

Red konvergencije metoda nagiba (2.4) je **dva** (videti [3], [41] za realan slučaj). U ovom odeljku dokazujemo kvadratnu konvergenciju intervalnog metoda (2.5) za slučaj polinoma sa kompleksnim nulama koristeći kompleksnu kružnu aritmetiku. Isto tvrđenje važi i u realnoj intervalnoj aritmetici kao i u kompleksnoj aritmetici pravougaonika. Pretpostavimo da se tražena nula ne nalazi u koordinatnom početku ($\zeta \neq 0$) tako da diskovi dobijeni pomoću iterativne formule (2.4) ne sadrže 0. Otuda sledi da je $\operatorname{mid} Z_k \neq 0$ u svakom iterativnom koraku. Opštost neće biti umanjena izostavljanjem ovog slučaja jer nalaženje korena $\zeta = 0$ je sasvim jednostavno ne samo u slučaju polinoma već i kod komplikovanijih funkcija. S druge strane, gornja restrikcija dozvoljava nam da operišemo sa količnikom $t_k = \operatorname{rad} Z_k / |\operatorname{mid} Z_k| > 0$.

Neka je p polinom stepena n i neka z_ν i r_ν označavaju centar i poluprečnik diska Z_ν, tj. $Z_\nu := \{z_\nu; r_\nu\}$.

Teorema 2.1. *Neka je Z_0 dovoljno mali početni disk koji sadrži prostu nulu ζ polinoma p tako da niz poluprečnika $\{r_\nu\}$ diskova Z_ν, definisan iterativnom formulom (2.4), konvergira ka 0. Tada je konvergencija niza $\{r_\nu\}$ kvadratna, tj. važi $r_{\nu+1} = O(r_\nu^2)$ počev od nekog indeksa $\nu \geq \nu_0$.*

Dokaz. Radi jednostavnosti izostavićemo iterativni indeks ν i pisaćemo Z, $\hat{Z}$, $\{z; r\}$ umesto Z_ν, $Z_{\nu+1}$, $\{z_\nu; r_\nu\}$, respektivno. Uvodeći skraćenicu $t = r/|z|$ imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1} z^{m-1-k} Z^k &= \sum_{k=0}^{m-1} z^{m-1-k} \{z^k; (|z| + r)^k - |z|^k\} \\ &= z^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} \{1; (1+t)^k - 1\}.\end{aligned}$$

Na osnovu ovog i (2.3) nalazimo

$$\begin{aligned}g(z, Z) &= \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=0}^{m-1} z^k Z^{m-1-k} = \sum_{m=1}^{n} a_m \sum_{k=0}^{m-1} z^{m-1-k} Z^k \\ &= \sum_{m=1}^{n} a_m z^{m-1} \left\{ m; \sum_{k=0}^{m-1} \left((1+t)^k - 1\right) \right\} = \{p'(z); R_g\},\end{aligned}$$

gde je

$$R_g = \sum_{m=1}^{n} |a_m||z|^{m-1} \left[\frac{(1+t)^m - 1}{t} - m \right] \tag{2.6}$$

poluprečnik diska $g(z, Z)$.

Koristeći osobine kružne aritmetike, iz (2.4) dobijamo (zamenjujući $Z_{\nu+1}$ sa $\hat{Z}$)

$$\hat{Z} = z - \frac{p(z)}{g(z,Z)} = z - \frac{p(z)}{\{p'(z); R_g\}} = z - \frac{p(z)\{\overline{p'(z)}; R_g\}}{|p'(z)|^2 - R_g^2},$$

odakle nalazimo poluprečnik $\hat{r}$ diska $\hat{Z}$,

$$\hat{r} = \operatorname{rad} \hat{Z} = \frac{|p(z)|R_g}{|p'(z)|^2 - R_g^2}. \tag{2.7}$$

Razmotrimo izraz u zagradi formule (2.6). Ako pretpostavimo da niz diskova $\{Z_\nu\}$ konvergira, možemo smatrati da je poluprečnik $r = \operatorname{rad} Z$ dovoljno mali tako da je $t = r/|z|$ takođe dovoljno malo. Koristeći Taylorov red za izraz u zagradi formule (2.6), nalazimo

$$\frac{(1+t)^m - 1}{t} - m = m + \frac{m(m-1)t}{2} + O(t^2) - m = \frac{m(m-1)t}{2} + O(t^2).$$

Sada iz (2.6) sledi

$$R_g = \sum_{m=2}^{n} |a_m||z|^{m-1} \Big[\frac{m(m-1)t}{2} + O(t^2) \Big] = \frac{r}{2}|p''(z)| + O(r^2),$$

što znači da je $R_g = K_1 r$, gde je $K_1 = |p''(z)|/2 > 0$. Dalje, s obzirom da se posmatra prosta nula polinoma p, apsolutna vrednost prvog izvoda $|p'(z)|$ teži konstanti $|p'(\zeta)| \neq 0$ kada niz diskova $\{Z_\nu\}$ konvergira ka nula-disku $\{\zeta; 0\}$. Otuda je imenilac u formuli (2.7) ograničen i teži $|p'(\zeta)|$ kada $r \to 0$. Kako je $p(\zeta) = 0$, vrednost polinoma u tački z može se izraziti kao $p(z) = (z - \zeta)g(z, \zeta)$, tako da je $|p(z)| = |z - \zeta| \cdot |g(z, \zeta)|$. S obzirom da $\zeta \in Z$, sledi da je $|p(z)| < r \cdot |g(z, \zeta)| = rK_2$, gde je K_2

ograničeno i teži konstanti $|g(\zeta,\zeta)|$. Na osnovu ovih činjenica iz (2.7) dobijamo

$$\hat{r} = \frac{K_2 r \cdot K_1 r}{|p'(z)|^2 - (K_1 r)^2} = O(r^2),$$

što dokazuje kvadratnu konvergenciju iterativnog metoda (2.4). □

Primer 1. Za inkluziju nule $\zeta = -1$ polinoma

$$p(z) = z^5 + (-4+i)z^4 + (6-4i)z^3 + (-4+6i)z^2 - (15+4i)z - 15i$$

primenili smo intervalni metod (2.4) u aritmetici pravougaonika. Za početnu oblast koja sadrži prost koren $\zeta = -1$ izabrali smo pravougaonik $R_0 = [-1.2, -0.9] + i\,[-0.2, 0.3]$. U prve četiri iteracije dobijeni su sledeći rezultati:

$$\begin{aligned}
R_1 &= [-1.03159, -0.94726] + i\,[-0.03476, 0.03569], \quad |\varepsilon_1| = 8.43 \times 10^{-2},\\
R_2 &= [-1.00129, -0.99896] + i\,[-0.00127, 0.00107], \quad |\varepsilon_2| = 2.34 \times 10^{-3},\\
R_3 &= [-1.0000003577, -0.9999996283] + i\,[-0.0000003994, 0.0000003294],\\
&\quad |\varepsilon_3| = 7.29 \times 10^{-7},\\
R_4 &= [-1.000000000000031, -0.999999999999967]\\
&\quad + i\,[-0.000000000000031, 0.000000000000033], \quad |\varepsilon_4| = 6.38 \times 10^{-14}.
\end{aligned}$$

Greške ε_ν su date pomoću poludijagonala inkluzivnih pravougaonika R_ν. Svaki pravougaonik sadrži koren $\zeta = -1$ polinoma p.

2.2 Kombinovani metod nagiba

U ovom odeljku dajemo modifikaciju intervalnog metoda nagiba (2.4) sa bržom konvergencijom. Predloženi metod kombinuje metod sečice i intervalni metod nagiba i ima red konvergencije $1+\sqrt{2}$ [78].

Neka su $x_{\nu-1}, x_\nu, x_{\nu+1}$ tri uzastopne aproksimacije nule funkcije f. Metod sečice za nalaženje nule funkcije f definiše se pomoću

$$x_{\nu+1} = x_\nu - \frac{x_\nu - x_{\nu-1}}{f(x_\nu) - f(x_{\nu-1})} \cdot f(x_\nu). \tag{2.8}$$

Kao što je poznato, red konvergencije metoda sečice jednak je $(1+\sqrt{5})/2 \approx 1.618$. Radi jednostavnosti, u nastavku ćemo koristiti oznake u, v, w umesto $x_{\nu-1}, x_\nu, x_{\nu+1}$, respektivno.

Neka je funkcija f iz (2.8) polinom označen sa p i neka je ζ njegova prosta nula. Tada je ζ takođe nula racionalne funkcije $p(z)/g(z,\zeta)$, gde je $g(z,\zeta)$ nagib koji se javlja u (2.2) - (2.4). Ako u (2.8) zamenimo f racionalnom funkcijom $p(z)/g(z,\zeta)$ i iskoristimo uvedene oznake, dobijamo

$$v - \frac{(v-u)\dfrac{p(v)}{g(v,\zeta)}}{\dfrac{p(v)}{g(v,\zeta)} - \dfrac{p(u)}{g(u,\zeta)}} = v - \frac{(v-u)(v-\zeta)}{(v-\zeta)-(u-\zeta)} = \zeta. \tag{2.9}$$

Stoga, (2.9) definiše relaciju fiksne tačke koja će biti osnova za konstrukciju intervalnog kombinovanog metoda sečice i nagiba.

Definišući disk $Z = \{v; r_v\}$ i koristeći svojstvo inkluzivne izotonosti, iz (2.9) dobijamo implikaciju

$$\zeta \in Z \Rightarrow \zeta \in \hat{Z} := v - \frac{v-u}{1 - \dfrac{p(u)}{p(v)} \cdot \dfrac{g(v,Z)}{g(u,Z)}}.$$

Na osnovu poslednje relacije možemo konstruisati sledeći **kombinovani metod nagiba**:

Algoritam 2.2. *Neka je Z_1 disk koji sadrži nulu ζ polinoma p i neka su z_0 i $z_1 = \operatorname{mid} Z_1$ aproksimacije ove nule. Tada iterativna formula*

$$Z_{\nu+1} = z_\nu - \frac{z_\nu - z_{\nu-1}}{1 - \dfrac{p(z_{\nu-1})}{p(z_\nu)} \cdot \dfrac{g(z_\nu, Z_\nu)}{g(z_{\nu-1}, Z_\nu)}} \quad (\nu = 1, 2, \dots) \tag{2.10}$$

generiše niz $\{Z_\nu\}$ diskova takvih da $\zeta \in Z_\nu$ u svakom iterativnom koraku.

Radi kraćeg označavanja u nastavku ćemo raditi sa uvedenim skraćenicama i pisati $\hat{Z} = \{w; \hat{r}\}$ umesto $Z_{\nu+1}$.

Najpre navodimo Schmidtov rezultat [**107**] koji se odnosi na konvergenciju višetačkastih iterativnih metoda (za detalje videti [**14**], [**48**], [**49**]). Pri analizi konvergencije niza $\{x^{(\nu)}\}$ koji konvergira ka tački x^* najčešće razmatramo grešku

$$e^{(\nu)} = \|x^{(\nu)} - x^*\| \geq 0.$$

Greške kod višetačkastih iterativnih procesa često se izražavaju relacijom

$$e^{(\nu+1)} = O\Big(\prod_{i=0}^{n-1} \big(e^{(\nu-i)}\big)^{m_i}\Big), \quad m_i \geq 0, \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad \sum_{i=0}^{n-1} m_i > 1. \tag{2.11}$$

Schmidt [**107**] je dokazao sledeći rezultat:

Teorema 2.2. *Ako za konvergentni iterativni niz* $\{x^{(\nu)}\}$ *važi relacija (2.11), tada je red konvergencije ovog niza bar* $\tau > 1$, *gde je* τ *jedinstveno pozitivno rešenje algebarske jednačine*

$$t^n - m_0 t^{n-1} - m_1 t^{n-2} - \cdots - m_{n-2} t - m_{n-1} = 0.$$

Sada možemo naći red konvergencije kombinovanog intervalnog metoda (2.10).

Teorema 2.3. *Ako su početne aproksimacije izabrane dovoljno blizu nule* ζ *polinoma* p, *tada je donja granica reda konvergencije kombinovanog intervalnog metoda nagiba (2.10) data pozitivnim rešenjem* $\tau = 1 + \sqrt{2} \approx 2.414...$ *kvadratne jednačine* $t^2 - 2t - 1 = 0$.

Dokaz. Razmotrimo polinom $g(z, y)$ po y za fiksirano $z \in \mathbb{C}$. Startujući od (2.3) za $\zeta = y$, dobijamo

$$g(z, y) = b_{n-1} y^{n-1} + b_{n-2} y^{n-2} + \cdots + b_1 y + b_0,$$

gde su koeficijenti b_k polinoma $g(z, y)$ dati rekurzivno pomoću

$$b_{n-1} = a_n, \qquad b_{n-i} = b_{n-i+1} z + a_{n-i+1} \quad (i = 2, \ldots, n).$$

Neka je

$$\begin{aligned} g(v, \zeta) &= a_n \zeta^{n-1} + c_{n-2} \zeta^{n-2} + \cdots + c_1 \zeta + c_0, \\ g(u, \zeta) &= a_n \zeta^{n-1} + d_{n-2} \zeta^{n-2} + \cdots + d_1 \zeta + d_0. \end{aligned}$$

Uočavamo da su vodeći koeficijnti uz ζ^{n-1} jednaki a_n, tj. vodećem koeficijentu polinoma p. Prema ovome imamo

$$\frac{g(v, \zeta)}{g(u, \zeta)} = 1 + \frac{(c_{n-2} - d_{n-2}) y^{n-2} + (c_{n-3} - d_{n-3}) y^{n-3} + \cdots + c_0 - d_0}{g(u, \zeta)}.$$

Lako je pokazati da sve razlike $c_{n-i} - d_{n-i}$ $(i = 2, \ldots, n)$ uz stepene y u brojiocu sadrže faktor $v - u$. Izdvajajući $v - u$, dobijamo

$$\frac{g(v,\zeta)}{g(u,\zeta)} = 1 + \frac{(v-u)(\alpha_{n-2}\zeta^{n-2} + \cdots + \alpha_1\zeta + \alpha_0)}{a_n\zeta^{n-1} + d_{n-2}\zeta^{n-2} + \cdots + d_1\zeta + d_0} = 1 + (v-u)q(\zeta), \tag{2.12}$$

gde je

$$q(\zeta) = \frac{\alpha_{n-2}\zeta^{n-2} + \cdots + \alpha_1\zeta + \alpha_0}{a_n\zeta^{n-1} + d_{n-2}\zeta^{n-2} + \cdots + d_1\zeta + d_0} \tag{2.13}$$

racionalna funkcija.

Zamenimo nulu ζ diskom $Z = \{v, r_v\}$ koji sadrži ovu nulu. Tada (2.13) postaje

$$q(Z) = \frac{\alpha_{n-2}Z^{n-2} + \cdots + \alpha_1 Z + \alpha_0}{a_n Z^{n-1} + d_{n-2}Z^{n-2} + \cdots + d_1 Z + d_0}.$$

Ako je disk Z dovoljno mali, tada za kružnu kompleksnu racionalnu funkciju važi procena $\operatorname{rad} q(Z) = O(\operatorname{rad} Z) \sim \gamma \operatorname{rad} Z$ (videti [**59**, **102**]). Koristeći ovu ocenu, količnik (2.12), posle zamene ζ sa Z, može se napisati kao

$$\frac{g(v,Z)}{g(u,Z)} = 1 + (v-u)\{\eta_v; \gamma_v r_v\}, \qquad \eta_v = \operatorname{mid} q(Z),$$

gde je $\gamma_v > 0$ realna konstanta. Iterativna formula (2.10) sada postaje

$$\begin{aligned} \hat{Z} &= v + \frac{\dfrac{p(v)}{p(u)}(v-u)}{\left\{1 + (v-u)\eta_v - \dfrac{p(v)}{p(u)}; \gamma_v|v-u|r_v\right\}} \\ &= v + \frac{\dfrac{p(v)}{p(u)}(v-u)}{\left\{\beta; \gamma_v|v-u|r_v\right\}}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

gde je $\beta = 1 + (v-u)\eta_v - p(v)/p(u)$. Iz (2.14) dobijamo

$$\hat{r} = \operatorname{rad} \hat{Z} = \operatorname{rad} \frac{\left|\dfrac{p(v)}{p(u)}\right| |v-u| \{\bar{\beta}; \gamma_v |v-u| r_v\}}{|\beta|^2 - \gamma_v^2 |v-u|^2 r_v^2}$$

$$= \frac{\gamma_v \left|\dfrac{p(v)}{p(u)}\right| |v-u|^2 r_v}{|\beta|^2 - \gamma_v^2 |v-u|^2 r_v^2}. \tag{2.15}$$

Uvedimo greške $\varepsilon_v = v - \zeta$ i $\varepsilon_u = u - \zeta$. Pretpostavljajući da ε_u i ε_v imaju dovoljno male apsolutne vrednosti, imamo ocenu $|p(v)/p(u)| \sim |\varepsilon_v/\varepsilon_u| = o(1)$. Pored toga je $|v-u| = |\varepsilon_v - \varepsilon_u|$ tako da je veličina β ograničena i teži 1 kada $\varepsilon_u, \varepsilon_v \to 0$. Zato iz (2.15) procenjujemo

$$\hat{r} = O\Big(\left|\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_u}\right| |\varepsilon_v - \varepsilon_u|^2 r_v\Big) = O\Big(|\varepsilon_v||\varepsilon_v - \varepsilon_u|\left|\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_u} - 1\right| r_v\Big) = O\big(|\varepsilon_v||\varepsilon_u| r_v\big).$$

Uzimajući u obzir da je $|\varepsilon_v| = O(r_v)$ i $|\varepsilon_u| = O(r_u)$, konačno nalazimo

$$\hat{r} = O\big(r_v^2 r_u\big).$$

Iz poslednje relacije i Teoreme 2.2 sledi da je donja granica reda konvergencije kombinovanog metoda nagiba jednaka pozitivnom korenu $1+\sqrt{2}$ kvadratne jednačine $t^2 - 2t - 1 = 0$. □

Primer 2. Kombinovani metod nagiba (2.10) demonstriran je na primeru polinoma

$$p(z) = z^7 + z^5 - 10z^4 - z^3 - z + 10.$$

Nule ovog polinoma su $\zeta_1 = 2$, $\zeta_{2,3} = \pm 1$, $\zeta_{4,5} = \pm i$, $\zeta_{6,7} = -1 \pm 2i$.

Uočimo da se prvi korak pri nalaženju nula polinoma sastoji najčešće u nalaženju diskova ili pravougaonika u kompleksnoj ravni koji sadrže sve korene polinoma

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0.$$

Disk sa takvom osobinom, koji se često koristi u praksi, ima centar u koordinantnom početku i poluprečnik

$$R = 2 \max_{1 \le k \le n} \left|\frac{a_k}{a_n}\right|^{1/(n-k)}$$

(videti Teoremu 1.3 i njenu posledicu). Za dati polinom nalazimo $R = 4.31$; dakle, disk $\{0; 4.31\}$ sadrži sve nule polinoma p.

Program je startovao sa početnom vrednošću $z_0 = -1.4 + 2.4\,i \in \{0; 4.31\}$. Prvo je primenjen klasični Newtonov metod

$$z_{\nu+1} = z_\nu - \frac{p(z_\nu)}{p'(z_\nu)} \quad (\nu = 0, 1, \dots)$$

radi poboljšanja početne aproksimacije. U isto vreme za slučaj datog polinoma i $n = 7$ izračunat je *Laguerreov disk* $\{z_\nu; n|p(z_\nu)/p'(z_\nu)|\}$, koji sadrži bar jednu nulu polinoma p. Aproksimacije dobijene u prve tri iteracije u kompleksnoj aritmetici pomoću Newtonovog metoda bile su

$$z_1 = -1.22919+2.18012\,i, \quad z_2 = -1.09973+2.04612\,i, \quad z_3 = -1.02162+1.99858\,i.$$

Za aproksimaciju z_3 je nađen Laguerreov disk

$$Z_3 = \{z_3; 0.14842\} = \{-1.02162 + 1.99858\,i; 0.14842\}.$$

Startujući sa vrednostima z_2, z_3, $p(z_2)$, $p(z_3)$ i diskom Z_3, dobili smo sledeće diskove primenom iterativne formule (2.10):

$$\begin{aligned} Z_4 &= \{-0.9988557 + 2.0004006\,i; 3.61 \times 10^{-3}\}, \\ Z_5 &= \{-0.99999973 + 1.99999966\,i; 3.39 \times 10^{-6}\}, \\ Z_6 &= \{-1.000000000000054 + 2.000000000000009\,i; 1.13 \times 10^{-12}\}. \end{aligned}$$

Svi navedni diskovi sadrže tačnu nulu $\zeta = -1 + 2\,i$ polinoma p.

2.3 Metodi nagiba višeg reda

Koristeći logaritamski izvod iz (2.2) nalazimo

$$\frac{p'(z)}{p(z)} - \frac{g'(z,\zeta)}{g(z,\zeta)} = \frac{1}{z-\zeta},$$

odakle dobijamo relaciju fiksne tačke

$$\zeta = \phi(z,\zeta) = z - \frac{1}{\dfrac{p'(z)}{p(z)} - \dfrac{g'(z,\zeta)}{g(z,\zeta)}}. \tag{2.16}$$

Posmatrajući z u (2.16) kao aproksimaciju nule ζ i zamenjujući ζ na desnoj strani pogodnom aproksimacijom y, izvodimo sledeću formulu za izračunavanje poboljšane aproksimacije $\hat{z}$ nule ζ

$$\hat{z} = z - \frac{1}{\dfrac{p'(z)}{p(z)} - \dfrac{g'(z,y)}{g(z,y)}}. \tag{2.17}$$

Napomena 2. Iterativna formula (2.17) može se izvesti primenjući Newtonov metod

$$\hat{z} = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

na funkciju $f(z) \equiv p(z)/g(z,y)$ koja ima iste nule kao polinom p.◊

Uzimajući različite vrednosti za y u (2.17) dobijamo razne algoritme, od kojih će dva ovde biti izložena. Najpre zamenjujemo y sa z i dobijamo

$$\hat{z} = z - \frac{1}{\dfrac{p'(z)}{p(z)} - \dfrac{g'(z,z)}{g(z,z)}}. \tag{2.18}$$

Stavljajući $y = z - h(z)$, gde je $h(z)$ Newtonova popravka $h(z) = p(z)/p'(z)$, izvodimo formulu

$$\hat{z} = z - \frac{1}{\dfrac{1}{h(z)} - \dfrac{g'(z, z-h(z))}{g(z, z-h(z))}}. \tag{2.19}$$

Prema (2.18) i (2.19) možemo konstruisati sledeća dva algoritma u kompleksnoj aritmetici.

Algoritam 2.3. *Neka je z_0 aproksimacija proste nule polinoma p. Tada iterativna formula*

$$z_{\nu+1} = z_\nu - \frac{1}{\dfrac{p'(z_\nu)}{p(z_\nu)} - \dfrac{g'(z_\nu, z_\nu)}{g(z_\nu, z_\nu)}} \quad (\nu = 0, 1, \dots) \tag{2.20}$$

definiše metod nagiba za nalaženje prostog korena p u kompleksnoj aritmetici.

Algoritam 2.4. *Neka je z_0 aproksimacija proste nule polinoma p i neka je $h_\nu = p(z_\nu)/p'(z_\nu)$ Newtonova popravka. Tada*

$$z_{\nu+1} = z_\nu - \frac{1}{\dfrac{1}{h_\nu} - \dfrac{g'(z_\nu, z_\nu - h_\nu)}{g(z_\nu, z_\nu - h_\nu)}} \quad (\nu = 0, 1, \dots) \tag{2.21}$$

definiše iterativni metod nagiba sa Newtonovom popravkom za nalaženje proste nule polinoma p u kompleksnoj aritmetici.

Neka je z dovoljno dobra aproksimacija nule ζ i neka je $\delta = z - \zeta$. Tada važi sledeća lema.

Lema 2.1. *Ako je $\phi(z,\zeta)$ definisano pomoću (2.16), tada je*

$$\phi(z,\zeta) = z - \frac{\dfrac{p(z)}{p'(z)}}{1 - \dfrac{p(z)}{p'(z)}\left[\dfrac{p''(z)}{2p'(z)} + \left(\dfrac{p''(z)^2}{4p'(z)^2} - \dfrac{p'''(z)}{6p'(z)}\right)\delta + O(\delta^2)\right]}, \tag{2.22}$$

gde O označava Landauov simbol.

Dokaz. Pretpostavljamo da je z dovoljno blizu nuli ζ tako da je razlika $\delta = z - \zeta$ dovoljno mala. Razvijajući p u Taylorov red u okolini ζ, dobijamo

$$p(z) - p(\zeta) = p'(\zeta)\delta + \frac{p''(\zeta)}{2}\delta^2 + \frac{p'''(\zeta)}{6}\delta^3 + O(\delta^4).$$

Na osnovu poslednje relacije nalazimo

$$g(z,\zeta) = \frac{p(z) - p(\zeta)}{z - \zeta} = p'(\zeta) + \frac{p''(\zeta)}{2}(z-\zeta) + \frac{p'''(\zeta)}{6}(z-\zeta)^2 + O((z-\zeta)^3),$$

odakle, diferencirajući po z, dobijamo

$$g'(z,\zeta) = \frac{p''(\zeta)}{2} + \frac{p'''(\zeta)}{3}(z-\zeta) + O((z-\zeta)^2).$$

Zato je

$$\frac{g'(z,\zeta)}{g(z,\zeta)} = \frac{\dfrac{p''(\zeta)}{2} + \dfrac{p'''(\zeta)}{3}(z-\zeta) + O((z-\zeta)^2)}{p'(\zeta) + \dfrac{p''(\zeta)}{2}(z-\zeta) + \dfrac{p'''(\zeta)}{6}(z-\zeta)^2 + O((z-\zeta)^3)}.$$

Razvijajući $p'(\zeta)$, $p''(\zeta)$ i $p'''(\zeta)$ u Taylorov red u okolini z, posle sređivanja i razvoja u geometrijski red dobijamo

$$\frac{g'(z,\zeta)}{g(z,\zeta)} = \frac{p''(z)}{2p'(z)} + \left(\frac{p''(z)^2}{4p'(z)^2} - \frac{p'''(z)}{6p'(z)}\right)\delta + O(\delta^2). \tag{2.23}$$

Zamenjujući (2.23) u (2.16) dobijamo (2.22). □

Sada možemo dati teoremu koja razmatra konvergenciju iterativnih metoda (2.20) i (2.21).

Teorema 2.4. *Iterativni metodi (2.20) i (2.21) su lokalno konvergentni i poseduju red konvergencije tri i četiri, respektivno.*

Dokaz. Za metod (2.20) uzeli smo $\zeta := z$, odakle sledi $\delta = 0$. Na osnovu ovog i Leme 2.1 zaključujemo da se (2.20) svodi na Halleyevu formulu

$$\begin{aligned}\hat{z} &= z - \frac{p(z)}{p'(z)} \frac{1}{1 - \dfrac{p(z)p''(z)}{2p(z)'^2}} \\ &= z - \frac{p(z)}{p'(z)}\left(1 + \frac{p(z)p''(z)}{2p(z)'^2} + O\Big(\Big(\frac{p(z)}{p'(z)}\Big)^2\Big)\right)\end{aligned}$$

koja, prema Schröderovom optimalnom osnovnom nizu (1.3), ima kubnu konvergenciju.

Za metod (2.21) uzeli smo $\zeta := z - h(z) = z - p(z)/p'(z)$, pri čemu je $\delta = h(z) = p(z)/p'(z)$ Newtonova popravka. Tada formula (2.22) postaje

$$\begin{aligned}\hat{z} &= z - \frac{h(z)}{1 - h(z)\left[\dfrac{p''(z)}{2p'(z)} + \left(\dfrac{p''(z)^2}{4p'(z)^2} - \dfrac{p'''(z)}{6p'(z)}\right)h(z) + O(h(z)^2)\right]} \\ &= z - h(z) - \frac{p''(z)}{2p'(z)}h(z)^2 - \left(\frac{p''(z)^2}{2p'(z)^2} - \frac{p'''(z)}{6p'(z)}\right)h(z)^3 + O(h(z)^4)\Big).\end{aligned}$$

Upoređujući poslednji izraz sa Schröderovim osnovnim nizom (1.3) zaključujemo da je red konvergencije metoda (2.21) jednak četiri. Ovim je završen dokaz teoreme. □

Napomena 3. Lako je pokazati da je $g'(z,z)/g(z,z) = p''(z)/2p'(z)$ tako da je Algoritam 2.3 u stvari dobro poznati Halleyev metod trećeg reda. Prema dokazu Teoreme 2.4 vidimo da se za dovoljno malo $|h_\nu|$ iterativna formula (2.21) ponaša asimptotski kao metod četvrtog reda

$$\hat{z} = z - \frac{p(z)}{p'(z)} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{p(z)}{p'(z)}\left[\dfrac{p''(z)}{2p'(z)} + \left(\dfrac{p''(z)^2}{4p'(z)^2} - \dfrac{p'''(z)}{6p'(z)}\right)\dfrac{p(z)}{p'(z)}\right]}$$

dat u [**113**, str. 89 i str. 97]. $\Diamond$

U nastavku koristimo prethodne rezultate izvedene u kompleksnoj aritmetici i, polazeći od (2.16), konstruišemo dva nova intervalna metoda nagiba. Pretpostavimo da smo našli disk $Z = \{z; r\}$ koji sadrži nulu ζ polinoma p. Tada, na osnovu osobine inkluzivne izotonosti, iz (2.16) dobijamo sledeću inkluziju

$$\zeta \in \hat{Z} = z - \frac{1}{\dfrac{p'(z)}{p(z)} - \dfrac{g'(z,Z)}{g(z,Z)}}. \tag{2.24}$$

Prema tome, ako disk Z sadrži nulu ζ tada nova inkluzivna aproksimacija $\hat{Z}$ data sa (2.24) takođe uključuje ζ. Ovo sugeriše intervalni metod nagiba koji može da se realizuje na dva načina, u zavisnosti od toga koji se tip inverzije diska koristi.

Pod pretpostavkom $0 \notin Z$, možemo primeniti dva tipa inverzije (videti Poglavlje 1):

$$Z^I := \left\{\frac{1}{z}; \frac{r}{|z|(|z|-r)}\right\} \quad \text{(centrirana inverzija)}, \tag{2.25}$$

$$Z^{-1} := \left\{\frac{|z|^2}{|z|^2 - r^2}; \frac{r}{|z|^2 - r^2}\right\} \quad \text{(tačna inverzija)}. \tag{2.26}$$

Na osnovu (2.24) konstruišemo

Algoritam 2.5. *Neka je Z_0 početni disk koji sadrži nulu ζ polinoma p. Tada iterativna formula*

$$Z_{\nu+1} = z_\nu - \left(\frac{p'(z_\nu)}{p(z_\nu)} - \frac{g'(z_\nu, Z_\nu)}{g(z_\nu, Z_\nu)}\right)^I \quad (z_\nu = \operatorname{mid} Z_\nu,\ \nu = 0, 1, \dots), \tag{2.27}$$

gde I označava korišćenje centrirane inverzije (2.25), definiše intervalni metod nagiba za nalaženje proste nule polinoma p.

Sada razmatramo sledeće pitanje, koje je važno za konstrukciju novog inkluzivnog algoritma nagiba veoma brze konvergencije i visoke računske efikasnosti: Ako disk $Z = \{z; r\}$ sadrži nulu ζ polinoma p, pod kojim uslovima će disk $Z_h := \{z - h; r\}$, $h = h(z)$, takođe sadržati ovu nulu? Da bi se dao odgovor na ovo pitanje, neophodna je sledeća teorema, dokazana u [**95**]:

Teorema 2.5. *Neka je $Z = \{z; r\}$ disk koji sadrži nulu ζ polinoma p, i definišimo disk $N(Z) := \{z - h; R|h|/(1-R)\}$, gde je $R = (n-1)|h|/r$. Ako važi nejednakost*

$$|h| = \left|\frac{p(z)}{p'(z)}\right| < \frac{n-1}{r}, \tag{2.28}$$

tada važi implikacija $\zeta \in Z \Rightarrow \zeta \in N(Z)$.

Uvedimo oznaku

$$\beta_n = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 4/(n-1)} - 1\right).$$

Koristeći Teoremu 2.5 možemo da izvedemo sledeće tvrđenje:

Teorema 2.6. *Neka je $Z = \{z; r\}$ disk koji sadrži nulu ζ polinoma p. Ako važi nejednakost*

$$|h| < \beta_n r, \tag{2.29}$$

tada imamo implikaciju $\zeta \in Z \Rightarrow \zeta \in Z_h = \{z - h; r\}$.

Dokaz. Najpre, lako je proveriti da nejednakost (2.29) povlači (2.28) tako da, prema Teoremi 2.5, imamo implikaciju $\zeta \in Z \Rightarrow \zeta \in N(Z)$. Da bi bila dokazana teorema dovoljno je pokazati implikaciju $\zeta \in N(Z) \Rightarrow \zeta \in Z_h$, koja dovodi do nejednakosti

$$\operatorname{rad} N(Z) = \frac{R|h|}{1-R} = \frac{(n-1)|h|^2}{r-(n-1)|h|} := \varphi(|h|) \leq r = \operatorname{rad} Z_h, \tag{2.30}$$

jer je $\operatorname{mid} N(Z) = \operatorname{mid} Z_h$.

Kako je

$$\frac{(n-1)\beta_n^2}{1-(n-1)\beta_n} = 1,$$

i uzimajući u obzir da je funkcija $|h| \mapsto \varphi(|h|)$ monotono rastuća na intervalu $\big(0, r/(n-1)\big)$, imamo prema (2.29)

$$\varphi(|h|) < \varphi(\beta_n r) = \frac{(n-1)\beta_n^2 r^2}{r-(n-1)\beta_n r} = r.$$

Na taj način je nejednakost (2.30) dokazana, čime je završen dokaz Teoreme 2.6. □

Imajući na umu uslov (2.29) koji obezbeđuje implikaciju $\zeta \in Z = \{z; r\} \Rightarrow \zeta \in Z - p(z)/p'(z)$, i koristeći svojstvo inkluzivne izotonosti, iz relacije fiksne tačke (2.16) možemo konstruisati intervalni metod nagiba sa Newtonovom popravkom $h(z) = p(z)/p'(z)$ za inkluziju nule ζ.

Algoritam 2.6. *Neka je Z_0 početni disk koji sadrži nulu ζ polinoma p i neka je $z_0 = \operatorname{mid} Z_0$. Ako važi nejednakost*

$$|h(z_\nu)| < \beta_n r_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \tag{2.31}$$

u svakom iterativnom koraku, tada iterativna formula

$$Z_{\nu+1} = z_\nu - \left(\frac{1}{h_\nu} - \frac{g'(z_\nu, Z_\nu - h(z_\nu))}{g(z_\nu, Z_\nu - h(z_\nu))}\right)^I \quad (z_\nu = \operatorname{mid} Z_\nu,\ \nu = 0, 1, \dots) \tag{2.32}$$

definiše intervalni metod nagiba sa Newtonovom popravkom za nalaženje proste kompleksne nule polinoma p.

Napomena 4. Zbog prilično komplikovane strukture funkcije nagiba veoma je teško ispitati da li početni uslov $|h(z_0)| < \beta_n r_0$ povlači $|h(z_\nu)| < \beta_n r_\nu$ za svako $\nu = 1, 2, \dots$. Analiza konvergencije intervalnog metoda (2.32), slična onoj iz Teoreme 2.8 za metod (2.27), pokazuje da se niz centara i poluprečnika inkluzivnih diskova ponaša kao

$$|z_{\nu+1} - \zeta| = O\big(|z_\nu - \zeta|^4\big), \ \operatorname{rad} Z_{\nu+1} = O\big(|z_\nu - \zeta|^2 \operatorname{rad} Z_\nu\big), \tag{2.33}$$

što znači da centri diskova konvergiraju znatno brže od poluprečnika. Iz tog razloga početni uslov $|h(z_0)| < \beta_n r_0$ povlači skoro sigurno $|h(z_\nu)| < \beta_n r_\nu$ u daljim iteracijama. Ovo je bilo potvrđeno velikim brojem numeričkih primera. U suprotnom, uzimamo disk Z_ν umesto $Z_\nu - h(z_\nu)$ i nastavljamo iterativni proces. Jedan drugi pristup, koji koristi tvrđenje Teoreme 2.6, je kombinovani metod predstavljen Algoritmom 2.7. $\Diamond$

Da bismo smanjili obim izračunavanja pri realizaciji Algoritama 2.5 i 2.6, možemo primeniti kombinovani postupak koji prvo izračunava dobru kompleksnu aproksimaciju nule ζ, a onda koristi Algoritam 2.5 ili Algoritam 2.6 za određivanje granice greške poboljšane kompleksne aproksimacije:

Algoritam 2.7 (Kombinovani metod).

Korak 1° *Koristeći neki iterativni metod (na primer, Newtonov metod, metode nagiba (2.20) ili (2.21)) u običnoj (kompleksnoj) aritmetici, izračunavamo kompleksnu aproksimaciju* z_M *do željene tačnosti (posle* M *iterativnih koraka);*

Korak 2° *Nalazimo neki inkluzivni disk* $Z_{0,M} := \{c(z_M); r(z_M)\}$ *koji sadrži nulu polinoma* p*, sa centrom i poluprečnikom koji zavise od* z_M;

Korak 3° *Proveravamo nejednakost*

$$|h(z_M)| < \beta_n \operatorname{rad} Z_{0,M} = \beta_n r_M \tag{2.34}$$

oblika (2.31). Ako ona važi, tada primenjujemo Algoritam 2.6 sa diskom $Z_{0,M} - h(z_M)$; *ako ne, tada primenjujemo Algoritam 2.5 sa diskom* $Z_{0,M}$.

Poželjno je koristiti u Koraku 2° Laguerreov disk $\{z_M; n|h(z_M)|\}$ za koji se zna da sadrži bar jednu nulu polinoma p (videti npr. [**45**, Pog. 6]). Kako je $n\beta_n > 1$ za svako $n \geq 1$, nejednakost (2.34) uvek važi u slučaju Laguerreovog diska tako da možemo primeniti brži Algoritam 2.6.

Algoritam 2.7 kombinuje efikasnost običnih iteracija u aritmetici sa pokretnom tačkom sa kontrolom tačnosti koja se dobija pomoću iteracija u intervalnoj aritmetici. Veliki broj numeričkih eksperimenata pokazao je da je ovaj kombinovani metod veoma efikasan: on produkuje rezultujuće inkluzivne intervale koji se mogu uporediti sa onim generisanim pomoću Algoritama 2.5 i 2.6, dok je njegova računska cena manja jer se delimično koristi aritmetika pokretne tačke.

Primetimo da je jednostavan i računski proverljiv test egzistencije i jedinstvenosti nule polinoma u datom disku opširno razmatran u **[89]** i **[95]**. Iz tog razloga, ovde izostavljamo diskusiju o ovom pitanju.

U nastavku ćemo razmatrati red konvergencije iterativnih metoda (2.27) i (2.32). Neka je IM iterativni numerički metod koji generiše k nizova $\{z_1^{(m)}\},\dots,\{z_k^{(m)}\}$ $(m=0,1,\dots)$ za aproksimaciju rešenja $z_1^*,\dots,z_k^*$. Da bismo procenili red konvergencije iterativnog metoda IM obično se uvode nizovi grešaka definisani sa

$$\varepsilon_i^{(m)} = ||z_i^{(m)} - z_i^*|| \quad (i=1,\dots,k).$$

Za analizu konvergencije inkluzivnih metoda (2.27) i (2.32) potrebno je sledeće tvrđenje koje je dao J.W. Schmidt u **[107]** (videti takođe Teoremu 3 u **[50]**):

Teorema 2.7. *Neka su rekurzivne relacije grešaka date sa*

$$\varepsilon_i^{(m+1)} \le \alpha_i \prod_{j=1}^{k} \left(\varepsilon_j^{(m)}\right)^{t_{ij}}, \quad (i=1,\dots,k;\ m\ge 0), \tag{2.35}$$

gde je $t_{ij}\ge 0$, $\alpha_i>0$, $1\le i,j\le k$. Označimo matricu eksponenata koji se pojavljuju u (2.35) sa T_k, to jest $T_k=[t_{ij}]_{k\times k}$. Pretpostavimo da matrica T_k ima spektralni radijus $\rho(T_k)>1$ i odgovarajući sopstveni vektor $x_\rho=(x_1,\dots,x_k)$ je pozitivan, tj. $x_1>0,\dots,x_k>0$. Tada svi nizovi $\{\varepsilon_i^{(m)}\}$ $(i=1,\dots,k)$ imaju R-red bar $\rho(T_k)$.

Matricu $T_k=[t_{ij}]$ zvaćemo *R-matrica.* Ako je sopstveni vektor x_ρ koji odgovara spektralnom radijusu $\rho(T_k)$ pozitivan, tada pišemo $x_\rho>0$. R-red konvergencije iterativnog metoda IM će biti označen sa $O_R(IM)$.

Sada ćemo dokazati da intervalni metod (2.27) ima kubnu konvergenciju.

Teorema 2.8. *Neka je Z_0 dovoljno mali disk koji sadrži prostu nulu ζ polinoma p takav da niz poluprečnika $\{r_\nu\}$ diskova Z_ν, definisan intervalnim metodom nagiba (2.27), konvergira ka 0. Tada je R-red konvergencije niza $\{r_\nu\}$ tri.*

Dokaz. Daćemo samo skicu dokaza Teoreme 2.8 pretpostavljajući da se primenjuje centrirana inverzija (2.25). Radi kratkoće, izostavljaćemo indeks iteracije i pisati $z, r, Z, \hat{r}, \hat{z}, \hat{Z}$ umesto $z_\nu, r_\nu, Z_\nu, r_{\nu+1}, z_{\nu+1}, Z_{\nu+1}$. Prvo razmatramo poluprečnik racionalne intervalne funkcije $g'(z,Z)/g(z,Z)$. Kao što je poznato (videti Ratschek i Rokne [**102**]), ako je disk Z dovoljno mali, tada je

$$\operatorname{rad}\frac{g'(z,Z)}{g(z,Z)} = O(\operatorname{rad} Z) = \alpha r, \quad (\alpha > 0). \tag{2.36}$$

Dalje, pretpostavljajući da su vrednosti polinoma $g'(z,Z)$ i $g(z,Z)$ u Z izračunate po Hornerovoj šemi u kružnoj aritmetici, prema (2.25) i rezultatima iz [**102**] koji se odnose na kružne kompleksne funkcije, nalazimo

$$\operatorname{mid}\frac{g'(z,Z)}{g(z,Z)} = \frac{g'(z,z)}{g(z,z)}.$$

Prema tome,

$$\frac{g'(z,Z)}{g(z,Z)} = \left\{\frac{g'(z,z)}{g(z,z)}; \alpha r\right\}.$$

Algoritmi 2.5 i 2.6 zasnovani su na relaciji fiksne tačke (2.16). Stoga, zamenom nule ζ na desnoj strani (2.16) dovoljno malim intervalom Z koji sadrži ζ, dobijamo dovoljno mali interval $\hat{Z}$ takav da $\zeta \in \hat{Z}$. Takav izbor početnog intervala obezbediće lokalnu konvergenciju Algoritama 2.5 i 2.6.

Kasnije ćemo videti da je konvergencija Algoritama 2.5 i 2.6 uzrokovana konvergencijom centara diskova $\operatorname{mid} Z_\nu$ koji se ponašaju kao niz aproksimacija generisan iterativnim metodima u običnoj kompleksnoj aritmetici (videti Napomenu 2). Kako su ovi iterativni metodi lokalno konvergentni, sledi da su intervalni metodi nagiba (2.27) i (2.32) takođe lokalno konvergentni. Zbog toga, možemo očekivati konvergenciju intervalnih metoda (2.27) i (2.32) ako je centar $z_0 = \operatorname{mid} Z_0$ dovoljno dobra aproksimacija tražene nule. Osim toga, poluprečnik $r_0 = \operatorname{rad} Z_0$

početnog inkluzivnog diska Z_0 mora da bude dovoljno mali da bi obezbedio ne-nula disk u imeniocu formula (2.27) i (2.32).

Pretpostavimo da je centrirana inverzija (2.25) primenjena u Algoritmu 2.5. Tada se iz (2.25), (2.27) i (2.36) dobija

$$\hat{Z} = \{\hat{z}; \hat{r}\} = z - \frac{1}{\left\{\dfrac{p'(z)}{p(z)} - \dfrac{g'(z,z)}{g(z,z)}; \alpha r\right\}}$$

$$= \left\{ z - \frac{1}{\dfrac{p'(z)}{p(z)} - \dfrac{g'(z)}{g(z)}}; \frac{\alpha r}{\left|\dfrac{p'(z)}{p(z)} - \dfrac{g'(z)}{g(z)}\right| \left(\left|\dfrac{p'(z)}{p(z)} - \dfrac{g'(z)}{g(z)}\right| - \alpha r\right)} \right\},$$

odakle je

$$\begin{aligned} \hat{z} &= z - \frac{1}{\dfrac{p'(z)}{p(z)} - \dfrac{g'(z)}{g(z)}}, \\ \hat{r} &= \frac{\alpha r}{\left|\dfrac{p'(z)}{p(z)} - \dfrac{g'(z)}{g(z)}\right| \left(\left|\dfrac{p'(z)}{p(z)} - \dfrac{g'(z)}{g(z)}\right| - \alpha r\right)}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

U ovom tipu analize uobičajeno je da se usvoji $1 > |\varepsilon^{(0)}| = r^{(0)} > 0$ (model „najgoreg slučaja”, videti [**17**], [**87**]). Ova pretpostavka ne utiče na donju granicu R-reda konvergencije koja se dobija kao rezultat graničnog procesa. Iz (2.37) uočavamo da se niz centara diskova ponaša kao metod (2.20) sa kubnom konvergencijom. Definišući greške $\varepsilon = z - \zeta$ i $\hat{\varepsilon} = \hat{z} - \zeta$, ova činjenica može da se izrazi kao $|\hat{\varepsilon}| = O(|\varepsilon|^3)$. Dalje, kako je $p(z) = (z - \zeta)g(z, \zeta) = O(\varepsilon)$, iz izraza za poluprečnik $\hat{r}$ nalazimo da je $\hat{r} = O(|\varepsilon|^2 r)$.

Vratimo se na pitanje konvergencije intervalnog metoda (2.27). Kontrakcija diskova će nastupiti ako je $\hat{r} = \operatorname{rad} \hat{Z} < r = \operatorname{rad} Z$. Stavljajući $c = |p'(z)/p(z) - g'(z)/g(z)|$ i uzimajući u obzir (2.36) i (2.37), iz nejednakosti $\hat{r} < r$ dobijamo

$$\hat{r} < \frac{\alpha r}{c(c - \alpha r)} < r,$$

što se svodi na

$$\alpha < \min\left\{\frac{c^2}{1+cr}, \frac{c}{r}\right\}. \tag{2.38}$$

Kako je $c \sim 1/|p(z)|$ i imajući na umu bržu konvergenciju centara u odnosu na konvergenciju poluprečnika diskova, što je ostvareno pomoću (2.27) (videti gornje ocene za $\hat{\varepsilon}$ i $\hat{r}$), vidimo da će nejednakost (2.38) biti zadovoljena ako se aproksimacija z ($=\operatorname{mid} Z$) nalazi u okolini nule ζ.

Na osnovu ocena $|\hat{\varepsilon}| = O(|\varepsilon|^3)$, $\hat{r} = O(|\varepsilon|^2 r)$ formiramo R-matricu $T_2^{(2.27)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ za intervalni metod (2.27). Kako je $\rho(T_2^{(2.27)}) = 3$ i odgovarajući sopstveni vektor $x_\rho = (1,1)$ pozitivan, prema Teoremi 2.5 dobijamo

$$O_R\big((2.27)\big) \geq \rho\left(T_2^{(2.27)}\right) = 3. \ \square$$

Brzina konvergencije intervalnog metoda (2.32) se razmatra u sledećoj teoremi:

Teorema 2.9. *Ako je početni inkluzivni disk Z_0 dovoljno mali, tada je R-red konvergencije intervalnog metoda nagiba (2.32) sa Newtonovom popravkom jednak četiri.*

Dokaz ove teoreme je sličan dokazu Teoreme 2.8 uključujući diskusiju o lokalnoj konvergenciji, pa će iz tog razloga biti izostavljen. Uočićemo jedino da se niz centara i poluprečnika u slučaju metoda (2.32) ponaša kao

$$|\hat{\varepsilon}| = O(|\varepsilon|^4), \quad \hat{r} = O(|\varepsilon|^2 r)$$

za obe inverzije (2.25) i (2.26) (videti (2.33)). Iz ovih relacija formiramo R-matricu $T_2^{(2.28)} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ sa $\rho(T_2^{(2.28)}) = 4$ i odgovarajući vektor $x_\rho = (\frac{3}{2}, 1) > 0$. Tada, prema Teoremi 2.5, nalazimo

$$O_R\big((2.28)\big) \geq \rho\left(T_2^{(2.28)}\right) = 4.$$

Upoređujući iterativne formule (2.27) i (2.32) vidimo da Algoritam 2.6 zahteva zanemarljiv broj dodatnih numeričkih operacija. U isto vreme, red konvergencije se povećava sa tri na četiri što znači da ovaj algoritam poseduje veliku računsku efikasnost. Ovaj teorijski rezultat je potvrđen u praksi na velikom broju računskih eksperimenata tako da se može reći da je Algoritam 2.6 moćan metod za inkluziju kompleksnih nula polinoma. Njegova efikasnost je posebno izražena u kasnijim iteracijama. Kao ilustraciju, dajemo jedan numerički primer.

Primer 3. Testirali smo intervalne metode nagiba (2.3), (2.27) i (2.32) koristeći centriranu inverziju (2.25). Korišćen je FORTRAN 77 na računaru Micro Vax II u aritmetici četvorostruke preciznosti (oko 33 značajne cifre). Kao ilustracija, među testiranim polinomima izabran je polinom razmatran u Primeru 2. Kružni diskovi sa fiksiranim centrom $z_0 = -1.1 + 2.1i$ i poluprečnicima 0.15, 0.18, 0.25 izabrani su kao početni inkluzivni diskovi koji sadrže nulu $\zeta = -1+2i$. U trećem slučaju ($r_0 = 0.25$) Algoritam 2.1 nije konvergirao zbog deljenja nula-intervalom. Vrednosti poluprečnika diskova dobijene pomoću Algoritama 2.1, 2.5 i 2.6 prikazane su u Tabeli 1. Svi izračunati diskovi sadrže tačnu nulu $\zeta = -1 + 2i$. Uočavamo veoma brzu konvergenciju intervalnih metoda (2.27) i (2.32).

$Z_0 = \{-1.1 + 2.1i; 0.15\}$			
	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
Algoritam 2.1	8.14(-2)	6.87(-3)	9.27(-5)
Algoritam 2.5	2.68(-2)	6.27(-6)	1.07(-17)
Algoritam 2.6	3.36(-2)	5.38(-7)	2.74(-27)
$Z_0 = \{-1.1 + 2.1i; 0.18\}$			
	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
Algoritam 2.1	1.24(-1)	6.86(-2)	1.40(-2)
Algoritam 2.5	3.97(-2)	9.69(-6)	1.65(-17)
Algoritam 2.6	5.09(-2)	8.66(-7)	4.42(-27)
$Z_0 = \{-1.1 + 2.1i; 0.25\}$			
	$r^{(1)}$	$r^{(2)}$	$r^{(3)}$
Algoritam 2.1	divergira	——	——
Algoritam 2.5	1.21(-1)	4.11(-5)	6.99(-17)
Algoritam 2.6	1.83(-1)	5.98(-6)	3.05(-26)

TABELA 1. Poluprečnici inkluzivnih diskova; $A(-q)$ znači $A \times 10^{-q}$.

Primer 4. Na polinom stepena $n = 9$

$$p(z) = z^9 + 3z^8 - 3z^7 - 9z^6 + 3z^5 + 9z^4 + 99z^3 + 297z^2 - 100z - 300$$

primenjen je Algoritam 2.7. U koraku 1° primenili smo iterativni metod (2.21) sa Newtonovom popravkom u običnoj kompleksnoj aritmetici uzimajući kompleksni broj $z_0 = 2.3 + 1.5i$ kao početnu aproksimaciju. Prve dve iteracije su

$$z_1 = 1.98757 + 1.11115i, \quad z_2 = 1.99988 + 0.99913i.$$

Koristeći aproksimaciju z_2 izračunali smo u koraku 2° Laguerreov disk (sa $n = 9$)

$$Z_{0,2} = \{z_2; 9|p(z_2)/p'(z_2)|\} = \{1.99988 + 0.99913i; 7.94 \times 10^{-3}\}.$$

Ovaj disk je korišćen u koraku 3° za implementaciju Algoritama 2.5 i 2.6. Dva iterativna koraka intervalnog metoda (2.27) dala su rezultujući disk sa poluprečnikom 1.8×10^{-24}, dok je metod (2.32) produkovao inkluzivni disk sa poluprečnikom 7.78×10^{-30}. Oba diska sadrže nulu $\zeta = 2+i$ polinoma p i obezbeđuju veoma oštre granice greške date gore pomenutim poluprečnicima.

Poglavlje 3

FAMILIJA ITERATIVNIH METODA ZA SIMULTANO NALAŽENJE NULA POLINOMA

3.1 Uvod

Hansen i Patrick su pre dvadesetak godina predložili u radu [**42**] familiju iterativnih metoda sa kubnom konvergencijom za nalaženje jedne (proste ili višestruke) nule date funkcije f. Polazeći od ove familije u ovom poglavlju konstruišemo dve jednoparametarske klase iterativnih funkcija za simultanu aproksimaciju svih nula polinoma. Prvo primenjujemo Hansen-Patrickovu formulu na Weierstrassovu popravku da bismo izveli familiju iterativnih funkcija za nalaženje svih prostih nula polinoma. Potom koristimo sličan pristup za konstrukciju jednoparametarske familije iterativnih funkcija za simultano određivanje višestrukih nula polinoma. U drugom slučaju dobijeni metodi uključuju izvode i imaju drugačiju strukturu u odnosu na metode za proste nule. Obe klase metoda obezbeđuju

1) simultano određivanje svih nula datog polinoma i

2) ubrzanje reda konvergencije od *tri* na *četiri*.

Neka je f funkcija kompleksnog argumenta z i neka je α fiksirani parametar. Hansen i Patrick su izveli u [**42**] jednoparametarsku familiju iterativnih funkcija za nalaženje prostih nula funkcije f u obliku

$$\hat{z} = z - \frac{(\alpha+1)f(z)}{\alpha f'(z) \pm \sqrt{f'(z)^2 - (\alpha+1)f(z)f''(z)}}. \tag{3.1}$$

Ovde je z prethodna aproksimacija a $\hat{z}$ nova aproksimacija tražene nule. Ova familija uključuje metode Ostrowskog ($\alpha = 0$), Eulera ($\alpha = 1$), Laguerrea ($\alpha = 1/(\nu - 1)$, $\nu \neq 1$) i Halleya ($\alpha = -1$) i, kao granični slučaj ($\alpha \to \infty$), Newtonov metod. Svi metodi familije (3.1) imaju kubnu konvergenciju u slučaju proste nule, osim Newtonovog metoda koji konvergira kvadratno.

Metodi familije (3.1) konvergiraju samo linearno ka nuli višestrukosti $m > 1$ osim u slučaju $\alpha = 1/(m-1)$ kada je red konvergencije 1.5 (videti [**42**]). Kada se zna višestrukost m, Hansen i Patrick [**42**] su izveli sledeću modifikaciju iterativne formule (3.1):

$$\hat{z} = z - \frac{m(m\alpha+1)f(z)}{m\alpha f'(z) \pm \sqrt{m(m\alpha - \alpha + 1)f'(z)^2 - m(m\alpha+1)f(z)f''(z)}}. \tag{3.2}$$

Iterativni metod (3.2) konvergira kubno ka nuli višestrukosti m za konačnu konstantu α. Familija (3.2) uključuje analogon Laguerreovom metodu za višestruku nulu (stavljajući $\alpha = 1/(n-m)$ u (3.2)). Slučaj $\alpha = -1/m$ (koji zahteva primenu operacije graničnog procesa u (3.2)) daje metod Halleyevog tipa u obliku

$$\hat{z} = z - \frac{f(z)}{\dfrac{m+1}{2m}f'(z) - \dfrac{f(z)f''(z)}{2f'(z)}} \tag{3.3}$$

(videti [**42**]). U graničnom slučaju kada $\alpha \to \infty$ iterativna formula (3.2) daje dobro poznatu Schröderovu generalizaciju [**108**]

$$\hat{z} = z - m\frac{f(z)}{f'(z)} \tag{3.4}$$

Newtonovog metoda sa kvadratnom konvergencijom.

Radi kratkoće, u nastavku ćemo delimično izostavljati indekse u proizvodima $\prod$ i sumama $\sum$ pretpostavljajući da se oni menjaju od 1 do n u slučaju prostih nula i od 1 do ν ($\nu \leq n$) za višestruke nule.

3.2 Klasa metoda za proste nule

Razmotrimo specijalan slučaj kada je funkcija f algebarski polinom. Neka je P moničan polinom stepena n sa prostim nulama $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, i neka su $z_1, \ldots, z_n$ međusobno različite aproksimacije ovih nula. Jedan od najefikasnijih iterativnih metoda za simultano određivanje svih prostih nula polinoma je Weierstrassov metod drugog reda $\hat{z}_i = z_i - W_i$ $(i \in I_n := \{1, \dots, n\})$ (videti, na primer, **[23]**, **[54]**, **[120]**, **[122]**), gde je

$$W_i = P(z_i) / \prod_{j \neq i} (z_i - z_j) \tag{3.5}$$

takozavana *Weierstrassova popravka.* Radi jednostavnosti u nastavku ćemo koristiti sledeće skraćenice:

$$G_{1,i} = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}, \quad G_{2,i} = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^2}.$$

Koristeći Weierstrassove popravke $W_1, \dots, W_n$ za aproksimacije $z_1, \dots, z_n$, pomoću Lagrangeove interpolacije možemo predstaviti polinom P za svako $z \in \mathbb{C}$ kao

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - z_j) + \sum_{k=1}^{n} W_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (z - z_j). \tag{3.6}$$

Uvedimo funkciju $z \mapsto h_i(z)$ pomoću $h_i(z) := P(z) / \prod_{j \neq i} (z - z_j)$. Koristeći (3.6) dobijamo

$$h_i(z) = W_i + (z - z_i)\Big(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z - z_j}\Big). \tag{3.7}$$

Uočimo da bilo koja nula ζ_i polinoma P je takođe nula funkcije $h_i(z)$. Polazeći od (3.7) nalazimo

$$\begin{aligned} h_i(z_i) &= W_i, \quad h_i'(z_i) = 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{W_j}{z_i - z_j} = 1 + G_{1,i}, \\ h_i''(z_i) &= -2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^2} = -2G_{2,i}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Primenjujući Hansen-Patrickovu formulu (3.1) na funkciju $h_i(z)$ datu sa (3.7), izvodimo sledeću jednoparametarsku familiju za simultanu aproksimaciju svih prostih nula polinoma P :

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha+1)W_i}{\alpha(1+G_{1,i}) \pm \sqrt{(1+G_{1,i})^2 + 2(\alpha+1)W_iG_{2,i}}} \quad (i \in I_n). \quad (3.9)$$

Sada predstavljamo neke specijalne slučajeve iterativne formule (3.9).

Za $\alpha = 0$ familija (3.9) daje *metod tipa Ostrowskog*

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{\sqrt{(1+G_{1,i})^2 + 2W_iG_{2,i}}} \quad (i \in I_n). \quad (3.10)$$

Kao i u slučaju drugih razmatranih metoda, ime potiče od činjenice da se metod (3.10) može dobiti primenom metoda Ostrowskog [**72**] (Primer (M4) u odeljku 1.2) na funkciju $h_i(z)$.

Stavljajući $\alpha = 1$ u (3.9) dobijamo *metod Eulerovog tipa*

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{2W_i}{1+G_{1,i} \pm \sqrt{(1+G_{1,i})^2 + 4W_iG_{2,i}}} \quad (i \in I_n). \quad (3.11)$$

Ovaj metod i njegove modifikacije biće posebno razmatrane u odeljku 3.6.

Ako stavimo $\alpha = 1/(n-1)$, gde je n stepen polinoma, (3.9) postaje *metod Laguerreovog tipa*

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{nW_i}{1+G_{1,i} \pm \sqrt{((n-1)(1+G_{1,i}))^2 + 2n(n-1)W_iG_{2,i}}} (i \in I_n). \quad (3.12)$$

Slučaj $\alpha = -1$ dovodi do neodređenog izraza $0/0$ tako da treba primeniti granični proces u (3.9). Posle kraćeg izračunavanja nalazimo da $\alpha = -1$ daje

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i(1+G_{1,i})}{(1+G_{1,i})^2 + W_iG_{2,i}} \quad (i \in I_n). \quad (3.13)$$

Ova formula se može izvesti direktno, primenom klasične Halleyeve formule

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{f(z_i)}{f'(z_i) - \dfrac{f(z_i)f''(z_i)}{2f'(z_i)}}$$

na funkciju $h_i(z)$ tako da ćemo (3.13) zvati *metod Halleyevog tipa.* Primetimo da su Ellis i Watson [**26**] izveli iterativnu formulu (3.13) koristeći drugačiji pristup.

U graničnom slučaju kada $\alpha \to \infty$, iz (3.9) dobijamo

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{1 + G_{1,i}} = z_i - \frac{W_i}{1 + \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{W_j}{z_i - z_j}} \quad (i \in I_n). \tag{3.14}$$

Ovo je iterativni metod trećeg reda koji je prvi put predložio Börsch-Supan [**12**]. Primetimo da se ovaj metod može direktno dobiti primenom Newtonovog metoda na funkciju $h_i(z)$.

3.3 Klasa metoda za višestruke nule

Pretpostavimo da polinom P ima nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ $(\nu \leq n)$ sa poznatim višestrukostima $m_1, \ldots, m_\nu$ $(m_1 + \cdots + m_\nu = n)$, respektivno. Iterativna formula (3.1) ne može da se primeni za konstrukciju brzih algoritama u slučaju višestrukih nula. Iz tog razloga koristimo modifikovanu Hansen-Patrickovu formulu (3.2) za višestruke nule i primenjujemo je na Weierstrassovu popravku

$$W_i(z) = \frac{P(z)}{\prod\limits_{j \neq i} (z - z_j)^{m_j}}. \tag{3.15}$$

Napominjemo da su Sakurai i Petković [**104**] primenili ovu ideju za proste nule.

Sa skraćenicama

$$W_i = \frac{P(z_i)}{\prod\limits_{j \neq i} (z_i - z_j)^{m_j}},$$

$$\delta_{\lambda,i} = \frac{f^{(\lambda)}(z_i)}{f(z_i)}, \quad S_{\lambda,i} = \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{(z_i - z_j)^\lambda} \quad (\lambda = 1, 2), \quad I_\nu = \{1, \ldots, \nu\},$$

iz (3.15) nalazimo

$$\left.\frac{(W_i(z))'}{W_i(z)}\right|_{z=z_i} = \delta_{1,i} - S_{1,i}, \tag{3.16}$$

$$\left.\frac{(W_i(z))''}{(W_i(z))'}\right|_{z=z_i} = \delta_{1,i} - S_{1,i} + \frac{\delta_{2,i} - \delta_{1,i}^2 + S_{2,i}}{\delta_{1,i} - S_{1,i}}. \tag{3.17}$$

Zamenjujući f'/f i f''/f' sa W_i'/W_i i W_i''/W_i' u (3.2), dobijamo

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{m_i(m_i\alpha + 1)}{m_i\alpha\dfrac{W_i'}{W_i} \pm \sqrt{m_i(m_i\alpha - \alpha + 1)\Big(\dfrac{W_i'}{W_i}\Big)^2 - m_i(m_i\alpha + 1)\dfrac{W_i'}{W_i}\dfrac{W_i''}{W_i'}}},$$

to jest,

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{m_i(m_i\alpha + 1)}{m_i\alpha(\delta_{1,i} - S_{1,i}) \pm \sqrt{K_i}} \quad (i \in I_\nu), \tag{3.18}$$

gde je $K_i = m_i(m_i\alpha + 1)(\delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i} - S_{2,i}) - m_i\alpha(\delta_{1,i} - S_{1,i})^2$. Formula (3.18) definiše familiju iterativnih metoda za simultano određivanje svih prostih ili višestrukih nula polinoma P.

Razmotrimo sada neke specijalne slučajeve koji se dobijaju iz (3.18).

Za $\alpha = 0$ dobijamo

$$\begin{aligned}\hat{z}_i &= z_i - \frac{\sqrt{m_i}}{\sqrt{\delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i} - S_{2,i}}}\\ &= z_i - \frac{\sqrt{m_i}}{\sqrt{\dfrac{P'(z_i)^2 - P(z_i)P''(z_i)}{P(z_i)^2} - \displaystyle\sum_{j\neq i}\frac{m_j}{(z_i - z_j)^2}}}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

Ovaj metod je specijalan slučaj Gargantinijevog metoda kvadratnog korena koji je realizovan u kompleksnoj kružnoj aritmetici [**32**]. Iterativni metod (3.19) i njegove modifikacije detaljno su razmatrali Petković i Stefanović [**96**].

Stavljajući $\alpha = -1/m_i$ za svako $i \in I_\nu$, posle primene graničnog procesa u (3.18) nalazimo

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{2m_i(\delta_{1,i} - S_{1,i})}{(\delta_{1,i} - S_{1,i})^2 - m_i(\delta_{2,i} - \delta_{1,i}^2 + S_{2,i})} \quad (i \in I_\nu), \tag{3.20}$$

što predstavlja simultani metod Halleyevog tipa. Zaista, zamenjujući (3.16) i (3.17) umesto f'/f i f''/f' u Halleyevom metodu za višestruke nule (3.3), dobijamo (3.20). U specijalnom slučaju, kada su sve nule proste ($m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 1$), iterativna formula (3.20) svodi se na metod koji je predložen u radu [**105**].

Uzimajući $\alpha = 1/(n - m_i)$ u (3.18) za svako $i \in I_\nu$, dobijamo analogon Laguerreovog metoda za simultano određivanje višestrukih nula

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{n}{(\delta_{1,i} - S_{1,i})\left(1 \pm \sqrt{\dfrac{n - m_i}{m_i} - n\left(1 + \dfrac{S_{2,i} - \delta_{1,i}^2 + S_{2,i}}{(\delta_{1,i} - S_{1,i})^2}\right)}\right)}. \tag{3.21}$$

U odeljku 3.4 dokazaćemo da svi iterativni metodi predstavljeni u ovom odeljku imaju red konvergencije *četiri* za konačan parametar α. U graničnom slučaju kada $\alpha \to \infty$, iz (3.18) nalazimo

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{m_i}{\delta_{1,i} - S_{1,i}} = z_i - \frac{m_i}{\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{z_i - z_j}} \quad (i \in I_\nu). \tag{3.22}$$

Ova formula ima istu strukturu kao intervalni metod Gargantinijeve za simultanu inkluziju višestrukih nula [**33**]. Iterativni metod (3.22) može se takođe posmatrati kao modifikacija poznatog Maehly-Ehrlich-Aberthovog metoda za višestruke nule koji poseduje kubnu konvergenciju (videti Aberth [**1**], Ehrlich [**25**], Maehly [**62**], Petković [**84**]). Očigledno, ovaj metod može se izvesti stavljajući W_i'/W_i umesto f'/f u Schröderovoj formuli (3.4).

Napomena 1. Uočimo da obe formule (3.9) i (3.18) sadrže znak $\pm$ ispred kvadratnog korena. Kao što je pomenuto u [**42**], znak treba da bude izabran tako da su imenioci popravki $\hat{z}_i - z_i$ različiti od nule. U slučaju familije (3.9) ovaj prekid se javlja za

$$\alpha = 1 + 2W_iG_{2,i}/(1 + G_{1,i})^2.$$

Međutim, takav slučaj je skoro nemoguć u praksi. Ukoliko je ovo slučaj tada biramo drugi znak. Pored toga, razmatrajući izraze (3.25) i (3.30) možemo uočiti da izbor znaka „+" obezbeđuje da su glavni delovi iterativne formule (3.9) i (3.18) kubno konvergentni metodi; za familiju (3.9) imamo Börsch-Supanov metod (3.14), dok se za (3.18) javlja iterativni metod (3.22). Ovaj zaključak važi u slučaju kada su aproksimacije nula dovoljno dobre. $\Diamond$

3.4 Red konvergencije

Sada ćemo dokazati da iterativni metodi koji pripadaju familijama (3.9) i (3.18) imaju red konvergencije četiri za proizvoljan fiksiran konačan parametar α. U našoj analizi konvergencije koristićemo gore uvedene oznake. Pored toga, neka su $\hat{\varepsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i$ i $\varepsilon_i = z_i - \zeta_i$ greške u trenutnoj i prethodnoj iteraciji, respektivno. Za bilo koja dva kompleksna broja α i β čiji su moduli istog reda veličine pisaćemo $\alpha = O_M(\beta)$. U analizi ćemo pretpostaviti da su greške $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ istog reda veličine, tj. $\varepsilon_i = O_M(\varepsilon_j)$ za bilo koji par $i, j \in I_\nu$ $(\nu \leq n)$. Neka je $\varepsilon \in \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\nu\}$ greška maksimalnog modula (to jest, $|\varepsilon| \geq |\varepsilon_i|$ $i = 1, \ldots, \nu$), ali još uvek $\varepsilon = O_M(\varepsilon_i)$ za svako $i \in I_\nu$.

Najpre razmatramo brzinu konvergencije familije metoda (3.9) za proste nule.

Teorema 3.1. *Ako su aproksimacije $z_1, \ldots, z_n$ dovoljno blizu tačnim nulama polinoma P, tada familija (3.9) ima red konvergencije četiri.*

Dokaz. Uvedimo skraćenice

$$\Sigma_i = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\zeta_i - z_j}, \quad t_i = \frac{W_i G_{2,i}}{(1 + G_{1,i})^2}.$$

Kako je

$$W_j = (z_j - \zeta_j) \prod_{k \neq j} \frac{z_j - \zeta_k}{z_j - z_k},$$

imamo ocene

$$\begin{aligned} W_i &= O_M(\varepsilon_i) = O_M(\varepsilon), \quad G_{1,i} = O_M(\varepsilon), \\ G_{2,i} &= O_M(\varepsilon), \quad \Sigma_i = O_M(\varepsilon), \quad t_i = O_M(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Neka je z kompleksan broj takav da je $|z| < 1$. Tada imamo razvoje

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + \cdots, \quad (1+z)^{-1} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots. \tag{3.24}$$

Polazeći od (3.9) i koristeći razvoje (3.24), nalazimo

$$\begin{aligned}\hat{z}_i &= z_i - \frac{(\alpha+1)W_i}{\alpha(1+G_{1,i}) + (1+G_{1,i})\sqrt{1+2(\alpha+1)t_i}}\\ &= z_i - \frac{(\alpha+1)W_i}{(1+G_{1,i})(\alpha+1+(\alpha+1)t_i + O_M(t_i^2))},\end{aligned}$$

odakle je

$$\begin{aligned}\hat{z}_i &= z_i - \frac{W_i}{(1+G_{1,i})(1+t_i+O_M(t_i^2))}\\ &= z_i - \frac{W_i}{1+G_{1,i}}\Big(1 - \frac{W_iG_{2,i}}{(1+G_{1,i})^2} + O_M(t_i^2)\Big).\end{aligned} \tag{3.25}$$

Stavljajući $z := \zeta_i$ u (3.7) (sa $h_i(\zeta_i) = 0$), dobijamo $W_i = \varepsilon_i(1+\Sigma_i)$. Na osnovu ovog relacija (3.25) postaje

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{\varepsilon_i(1+\Sigma_i)}{1+G_{1,i}}\left(1 - \frac{\varepsilon_i(1+\Sigma_i)G_{2,i}}{\left(1+G_{1,i}\right)^2} + O_M(t_i^2)\right),$$

odakle je, uzimajući u obzir ocene (3.23),

$$\hat{\varepsilon}_i := \hat{z}_i - \zeta_i = \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i(1+\Sigma_i)\Big[(1+G_{1,i})^2 - \varepsilon_i(1+\Sigma_i)G_{2,i}\Big]}{(1+G_{1,i})^3} + O_M(\varepsilon^5).$$

Posle kratkog sređivanja nalazimo

$$\hat{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i(X_i+Y_i+Z_i)}{(1+G_{1,i})^3} + O_M(\varepsilon^5), \tag{3.26}$$

gde je

$$\begin{aligned}X_i &= G_{1,i} - \Sigma_i + \varepsilon_i G_{2,i},\\ Y_i &= G_{1,i}\big[2(G_{1,i} - \Sigma_i) + G_{1,i}^2 - G_{1,i}\Sigma_i\big],\\ Z_i &= \varepsilon_i G_{2,i}\Sigma_i(2+\Sigma_i).\end{aligned}$$

Kako je

$$G_{1,i}-\Sigma_i=\sum_{j\neq i}\frac{W_j}{z_i-z_j}-\sum_{j\neq i}\frac{W_j}{\zeta_i-z_j}=-\varepsilon_i\sum_{j\neq i}\frac{W_j}{(\zeta_i-z_j)(z_i-z_j)}, \tag{3.27}$$

imamo

$$G_{1,i}-\Sigma_i+\varepsilon_i G_{2,i}=\varepsilon_i^2\sum_{j\neq i}\frac{W_j}{(z_i-z_j)^2(\zeta_i-z_j)}. \tag{3.28}$$

Prema (3.23), (3.27) i (3.28) procenjujemo

$$X_i=\varepsilon_i^2 O_M(\varepsilon),\quad Y_i=O_M(\varepsilon^3),\quad Z_i=\varepsilon_i O_M(\varepsilon^2). \tag{3.29}$$

Imenilac $(1+G_{1,i})^3$ u formuli (3.26) teži ka 1 kada greške $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ teže ka 0. Imajući na umu ovu činjenicu i ocene (3.29), iz (3.26) nalazimo $\hat{\varepsilon}_i=\varepsilon_i O_M(\varepsilon^3)=O(\varepsilon_i^4)$, čime je završen dokaz teoreme. □

U sledećoj teoremi razmatramo brzinu konvergencije familije iterativnih funkcija (3.18) za višestruke nule.

Teorema 3.2. *Ako su aproksimacije $z_1,\ldots,z_\nu$ dovoljno bliske nulama P, tada familija iterativnih metoda (3.18) ima red konvergencije četiri.*

Dokaz. Uvodeći skraćenicu

$$V_i=\frac{\delta_{1,i}^2-\delta_{2,i}-S_{2,i}}{(\delta_{1,i}-S_{1,i})^2},$$

familija (3.18) može se napisati u obliku

$$\hat{z}_i=z_i-\frac{m_i(m_i\alpha+1)}{(\delta_{1,i}-S_{1,i})\Big(m_i\alpha+\sqrt{1+(m_i\alpha+1)(m_iV_i-1)}\Big)}\quad (i\in I_\nu). \tag{3.30}$$

U našem dokazu koristićemo i skraćenice

$$A_i=\sum_{j\neq i}\frac{m_j\varepsilon_j}{(z_i-\zeta_j)(z_i-z_j)},\quad B_i=\sum_{j\neq i}\frac{m_j(2z_i-z_j-\zeta_j)\varepsilon_j}{(z_i-\zeta_j)^2(z_i-z_j)^2},$$

kao i identitete

$$\delta_{1,i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{z_i - \zeta_j}, \quad \delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{m_j}{(z_i - \zeta_j)^2}.$$

Na osnovu ovog je

$$\delta_{1,i} - S_{1,i} = \frac{1}{\varepsilon_i}(m_i - A_i\varepsilon_i), \quad \delta_{1,i}^2 - \delta_{2,i} - S_{2,i} = \frac{1}{\varepsilon_i^2}(m_i - B_i\varepsilon_i^2),$$

tako da je

$$m_iV_i - 1 = m_i \frac{\frac{1}{\varepsilon_i^2}(m_i - B_i\varepsilon_i^2)}{\frac{1}{\varepsilon_i^2}(m_i - A_i\varepsilon_i)^2} - 1 = \frac{\varepsilon_i(2m_iA_i - A_i^2\varepsilon_i - m_iB_i)}{(m_i - A_i\varepsilon_i)^2} = G_i\varepsilon_i$$

gde je

$$G_i = \frac{2m_iA_i - A_i^2\varepsilon_i - m_iB_i\varepsilon_i}{(m_i - A_i\varepsilon_i)^2}.$$

Iz gornjih izraza lako nalazimo sledeće ocene

$$A_i = O_M(\varepsilon), \quad B_i = O_M(\varepsilon), \quad G_i\varepsilon_i = O_M(\varepsilon\varepsilon_i) = O_M(\varepsilon^2). \tag{3.31}$$

Koristeći (3.31) i razvoj (3.24), dobijamo

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + (m_i\alpha + 1)(m_iV_i - 1)} &= \sqrt{1 + (m_i\alpha + 1)G_i\varepsilon_i} \\ &= 1 + \frac{(m_i\alpha + 1)G_i\varepsilon_i}{2} + O_M(\varepsilon^4). \end{aligned}$$

Na osnovu ovog iz (3.30) nalazimo

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i := \hat{z}_i - \zeta_i &= \varepsilon_i - \frac{m_i(m_i\alpha + 1)}{(\delta_{1,i} - S_{1,i})\Big[m_i\alpha + 1 + \frac{(m_i\alpha + 1)G_i\varepsilon_i}{2} + O_M(\varepsilon^4)\Big]} \\ &= \varepsilon_i - \frac{m_i\varepsilon_i}{(m_i - A_i\varepsilon_i)\Big[1 + \frac{G_i\varepsilon_i}{2} + O_M(\varepsilon^4)\Big]} \\ &= \frac{\varepsilon_i^2\Big(\frac{m_iG_i}{2} - A_i\Big)}{(m_i - A_i\varepsilon_i)\Big[1 + \frac{G_i\varepsilon_i}{2} + O_M(\varepsilon^4)\Big]} + O_M(\varepsilon^5). \end{aligned}$$

Kako je imenilac $(m_i - A_i\varepsilon_i)\Big[1 + \dfrac{G_i\varepsilon_i}{2} + O_M(\varepsilon^4)\Big]$ ograničen i teži m_i kada $\varepsilon \to 0$, da bismo dokazali teoremu dovoljno je pokazati da je $m_iG_i/2 - A_i = O_M(\varepsilon^2)$. Koristeći ocene (3.31) dobijamo

$$\frac{m_iG_i}{2} - A_i = \frac{3m_iA_i^2\varepsilon_i - m_i^2B_i\varepsilon_i - 2A_i^3\varepsilon_i^2}{2(m - A_i\varepsilon_i)^2} = O_M(\varepsilon^2).$$

Dakle, dokazali smo da je

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^2 O_M(\varepsilon^2) = O_M(\varepsilon_i^4),$$

što znači da je red konvergencije familije iterativnih metoda (3.18) četiri. □

3.5 Numerički rezultati

Da bismo demonstrirali brzinu konvergencije i ponašanje nekih metoda koji pripadaju predloženim familijama (3.9) i (3.18), testirali smo ove metode na primerima algebarskih polinoma. U ovim numeričkim eksperimentima korišćen je FORTRAN 77 u aritmetici četvorostruke preciznosti. Koristili smo nekoliko vrednosti za parametar α i iste početne aproksimacije $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ za svaki metod. Tačnost aproksimacija je procenjena maksimalnom greškom

$$\varepsilon^{(m)} = \max_i |z_i^{(m)} - \zeta_i|,$$

gde je $m = 0, 1, \ldots$ indeks iteracije. Kao kriterijum zaustavljanja korišćena je nejednakost

$$E^{(m)} = \max_{1\le i\le n} |P(z_i^{(m)})| < \tau,$$

gde je τ data tolerancija.

Primer 1. Posmatran je polinom devetog stepena

$$P(z) = z^9 + 3z^8 - 3z^7 - 9z^6 + 3z^5 + 9z^4 + 99z^3 + 297z^2 - 100z - 300$$

sa nulama $-3,\ \pm 1,\ \pm 2i,\ \pm 2 \pm i$. Iterativni proces je prekinut kada je zadovoljen kriterijum zaustavljanja $E^{(m)} = \max_{1\le i\le 9} |P(z_i^{(m)})| < \tau = 10^{-12}$.

Svi testirani metodi startovali su sa Aberthovim početnim aproksimacijama

$$z_k^{(0)} = -\frac{a_1}{n} + r_0 \exp(i\theta_k),\ i = \sqrt{-1},\ \theta_k = \frac{\pi}{n}\Big(2k - \frac{3}{2}\Big) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{3.32}$$

(videti [1]). Prvo su uzete veoma grube početne aproksimacije ekvidistantno raspoređene na krugu poluprečnika $r_0 = 100$. Dobijeni su sledeći rezultati:

Metod tipa Ostrowskog (3.10), $\alpha = 0$ $E^{(m)} < 10^{-12}$ posle 15 iteracija
Metod Eulerovog tipa (3.11), $\alpha = 1$ $E^{(m)} < 10^{-12}$ posle 18 iteracija
Metod Laguerreovog tipa (3.12), $\alpha = 1/(n-1) = 0.125$ $E^{(m)} < 10^{-12}$ posle 15 iteracija
Metod Halleyevog tipa (3.13), $\alpha = -1$ $E^{(m)} < 10^{-12}$ posle 17 iteracija
Metod velikog parametra, $\alpha = 1000$ $E^{(m)} < 10^{-12}$ posle 23 iteracije

U sledećem primeru izabrane su bolje aproksimacije (ali još uvek relativno grube) koje leže na krugu poluprečnika $r_0 = 4$. Rezultati su prikazani u donjoj tabeli.

Metod tipa Ostrowski (3.10), $\alpha = 0$ $E^{(m)} < 10^{-12}$ posle 8 iteracija
Metod Eulerovog tipa (3.11), $\alpha = 1$ $E^{(m)} < 10^{-12}$ posle 6 iteracija
Metod Laguerreovog tipa (3.12), $\alpha = 1/(n-1) = 0.125$ $E^{(m)} < 10^{-12}$ posle 6 iteracija
Metod Halleyeveg tipa (3.13), $\alpha = -1$ $E^{(m)} < 10^{-12}$ posle 7 iteracija
Metod velikog parametra, $\alpha = 1000$ $E^{(m)} < 10^{-12}$ posle 8 iteracija

Na kraju, izabrali smo dobre početne vrednosti ($\varepsilon^{(0)} = 0.36$)

$$z_1^{(0)} = -3.3 + 0.2i, \quad z_2^{(0)} = -1.2 - 0.3i, \quad z_3^{(0)} = 0.2 + 1.7i,$$
$$z_4^{(0)} = -1.8 + 1.3i, \quad z_5^{(0)} = -1.8 - 0.7i, \quad z_6^{(0)} = 2.3 + 1.2i,$$
$$z_7^{(0)} = 1.8 - 0.7i, \quad z_8^{(0)} = 1.2 + 0.3i, \quad z_9^{(0)} = 0.2 - 2.3i.$$

Svi testirani metodi su pokazali veoma brzu konvergenciju i dostigli tačnost $\varepsilon^{(m)} < 10^{-15}$ posle 3 iteracije. Rezultati dve iteracije, izraženi maksimalnim greškama $\varepsilon^{(m)}$ $(m = 1, 2)$, su sledeći:

Metod tipa Ostrowskog (3.10), $\alpha = 0$
$\varepsilon^{(1)} = 3.40 \times 10^{-2}$, $\varepsilon^{(2)} = 4.73 \times 10^{-7}$
Metod Eulerovog tipa (3.11), $\alpha = 1$
$\varepsilon^{(1)} = 4.16 \times 10^{-2}$, $\varepsilon^{(2)} = 9.74 \times 10^{-7}$
Metod Laguerreovog tipa (3.12), $\alpha = 1/(n-1) = 0.125$
$\varepsilon^{(1)} = 3.51 \times 10^{-2}$, $\varepsilon^{(2)} = 5.29 \times 10^{-7}$
Metod Halleyevog tipa (3.13), $\alpha = -1$
$\varepsilon^{(1)} = 2.86 \times 10^{-2}$, $\varepsilon^{(2)} = 1.86 \times 10^{-7}$
Metod velikog parametra, $\alpha = 1000$
$\varepsilon^{(1)} = 6.28 \times 10^{-2}$, $\varepsilon^{(2)} = 3.42 \times 10^{-6}$

Naglasimo da su u trećoj iteraciji ovi metodi dali aproksimacije sa bar 24 tačne decimalne cifre.

Primer 2. Metodi iz klase (3.9), dobijeni za iste parametre kao u Primeru 1 testirani su na primeru moničnog polinoma P stepena $n = 25$ datog sa

$$\begin{aligned}
P(z) = {} & z^{25} + (0.752 + 0.729i)z^{24} + (-0.879 - 0.331i)z^{23} + (0.381 - 0.918i)z^{22} \\
& + (0.781 - 0.845i)z^{21} + (-0.046 - 0.917i)z^{20} + (0.673 + 0.886i)z^{19} \\
& + (0.678 + 0.769i)z^{18} + (-0.529 - 0.874i)z^{17} + (0.288 + 0.095i)z^{16} \\
& + (-0.018 + 0.799i)z^{15} + (-0.957 + 0.386i)z^{14} + (0.675 - 0.872i)z^{13} \\
& + (0.433 - 0.562i)z^{12} + (-0.760 + 0.128i)z^{11} + (-0.693 - 0.882i)z^{10} \\
& + (0.770 - 0.467i)z^{9} + (-0.119 + 0.277i)z^{8} + (0.274 - 0.569i)z^{7} \\
& + (-0.028 - 0.238i)z^{6} + (0.387 + 0.457i)z^{5} + (-0.855 - 0.186i)z^{4} \\
& + (0.223 - 0.048i)z^{3} + (0.317 + 0.650i)z^{2} + (-0.573 + 0.801i)z \\
& + (0.129 - 0.237i).
\end{aligned}$$

Koeficijenti $a_k \in \mathbb{C}$ polinoma P (osim vodećeg koeficijenta) su pseudo-slučajni kompleksni brojevi izabrani pomoću random generatora kao $\mathcal{R}e\, a_k$ = `random(x)`, $\mathcal{I}m\, a_k$ = `random(x)`, gde je `random(x)` $\in (-1,1)$. Koristeći Posledicu 6.4k iz [**45**, str. 457] (videti odeljak 1.5) nalazimo da sve nule gornjeg polinoma leže u prstenu $\{z:\ r = 0.3054 < |z| < 2.0947 = R\}$.

Radi poređenja, testiran je dobro poznati Weierstrassov metod (često nazivan Durand-Kernerov metod ili metod Docheva)

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{P(z_i^{(m)})}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (z_i^{(m)} - z_j^{(m)})} \qquad (i \in I_n;\ m = 0,1,\ldots) \tag{3.33}$$

(videti [**23**], [**54**], [**120**], [**122**]). Ovaj metod je jedan od najefikasnijih metoda za simultanu aproksimaciju svih nula polinoma i poseduje verovatno globalnu konvergenciju (pretpostavka koja još nije dokazana). Svi testirani metodi startovali su sa Aberthovim početnim aproksimacijama datim sa (3.32). U ovom primeru korišćen je kriterijum zaustavljanja dat sa $E^{(m)} = \max_{1\leq i\leq 25} |P(z_i^{(m)})| < \tau = 10^{-7}$.

Izvršena su tri numerička eksperimenta uzimajući $r_0 = 1.2$, 10 i 100 u (3.32). Prva vrednost jednaka je aritmetičkoj sredini poluprečnikâ $r = 0.3054$ i $R = 2.0947$ inkluzivnog prstena navedenog gore. Vrednosti $r_0 = 10$ i $r_0 = 100$ su izabrane da bi se demonstrirao uticaj r_0 na brzinu konvergencije testiranih metoda, ali takođe da se pokaže veoma dobra konvergencija u situaciji kada su početne aproksimacije veoma grube. Tabela 1 daje broj iterativnih koraka za razmatrane iterativne procedure i Weierstrassov metod (3.33). Iz ove tabele vidimo da metodi četvrtog reda (3.9) zahtevaju manje od polovine iteracija koje zahteva metod drugog reda (3.33) ako parametar α u (3.9) nije previše velik. Ovo znači da je konvergentno ponašanje predloženih metoda iz familije (3.9) bar isto tako dobro kao ponašanje Weierstrassovog metoda (3.33).

	$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = -1$	$\alpha = 1/(n-1)$	$\alpha = 1000$	metod (3.33)
$r_0 = 1.2$	8	8	5	11	7	13
$r_0 = 10$	24	28	24	22	36	65
$r_0 = 100$	40	56	49	39	62	124

TABELA 1. Broj iteracija za razne početne aproksimacije i $\tau = 10^{-7}$.

Primer 3. Polinom

$$\begin{aligned} P(z) = z^{13} &+ (-11+4i)z^{12} + (46-44i)z^{11} + (-74+204i)z^{10} \\ &+ (-105-516i)z^9 + (787+616i)z^8 + (-1564+392i)z^7 \\ &+ (724-2344i)z^6 + (2351+2616i)z^5 + (-4389+980i)z^4 \\ &+ (430-5248i)z^3 + (4662+540i)z^2 + (-135+2700i)z - 675 \end{aligned}$$

je uzet da numerički ilustruje simultane metode iz familije (3.18) za nalaženje višetrukih nula. Faktorizacija polinoma P je

$$P(z) = (z+1)^2(z-3)^3(z^2-2z+5)^2(z+i)^4.$$

Dakle, polinom P ima pet nula $\zeta_1 = -1$, $\zeta_2 = 3$, $\zeta_3 = 1+2i$, $\zeta_4 = 1-2i$, $\zeta_5 = -i$ višestrukosti $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 2$, $m_4 = 2$, $m_5 = 4$, respektivno.

Izabrane su početne aproksimacije

$$-1.3+0.2i, 3.2+0.3i, 1.3+2.2i, 1.3-2.2i, 0.2-1.3i.$$

Rezultati dobijeni u prve dve iteracije prikazani su u sledećoj tabeli.

Metod tipa Ostrowskog (3.19), $\alpha = 0$
$\varepsilon^{(1)} = 9.31 \times 10^{-3}$, $\varepsilon^{(2)} = 9.53 \times 10^{-9}$
Metod Halleyog tipa (3.20), $\alpha = -1/m_i$
$\varepsilon^{(1)} = 8.89 \times 10^{-3}$, $\varepsilon^{(2)} = 5.89 \times 10^{-9}$
Metod Laguerreovog tipa (3.21), $\alpha = 1/(13-m_i)$
$\varepsilon^{(1)} = 9.40 \times 10^{-3}$, $\varepsilon^{(2)} = 4.43 \times 10^{-9}$
Metod velikog parametra, $\alpha = 1000$
$\varepsilon^{(1)} = 3.45 \times 10^{-2}$, $\varepsilon^{(2)} = 3.72 \times 10^{-6}$

Testirano je i nekoliko drugih polinoma sa stepenom u opsegu $[5, 25]$ koristeći početne aproksimacije tačnih nula različite preciznosti. Rezultati ovih testova bili su u skladu sa onim gore prezentiranim.

U eksperimentima su korišćene razne vrednosti parametra α. Nije nađena neka posebna vrednost α za koju se dobija metod iz predloženih familija koji je asimptotski najbolji za široku klasu polinoma. Svi testirani metodi pokazali su skoro isto ponašanje za širok opseg vrednosti parametra α i veoma brzu konvergenciju za dobre početne aproksimacije.

Dobijeni rezultati ukazuju na dobra konvergentna svojstva predstavljenih metoda u slučaju veoma grubih početnih aproksimacija. Takođe, može se zapaziti da izbor relativno velikih vrednosti parametra α može da proizvede inferiorno ponašanje odgovarajućih metoda iz familija (3.9) i (3.18). Ova činjenica je u skladu sa analizom konvergencije iz odeljka 3.4 gde se tvrdi da se za veoma veliko α konvergencija ovih metoda iz familija (3.9) i (3.18) približava kubnoj.

U svom radu [**42**] Hansen i Patrick su našli da je Laguerreov metod za nalaženje jedne nule superioran u odnosu na druge ako je $|z|$ veliko. Međutim, u slučaju simultanih metoda iz familija (3.9) i (3.18), takvo superiorno ponašanje metoda Laguerreovog tipa (3.12) i (3.21) dešava se samo u pojedinačnim primerima. Teorijsko razmatranje ponašanja simultanih metoda je veoma komplikovano tako da nismo u stanju da damo dublju analizu ponašanja metoda koji pripadaju familijama (3.9) i (3.18), kao i da rangiramo ove metode. Brojni numerički primeri jedino pokazuju da je jedan od razmatranih metoda najbolji za neke polinome, dok je drugi metod najbolji za neke druge polinome. U stvari, ponašanje konvergencije jako zavisi od strukture polinoma i početnih aproksimacija.

3.6 Metodi Euler-Čebiševljevog tipa

U ovom odeljku razmatramo konstrukciju iterativnih metoda za simultano određivanje nula polinoma na osnovu Eulerovog metoda (videti Traub [**113**]). Glavna odlika ovih metoda je veoma brza konvergencija; njihov red konvergencije je četiri ili više.

Neka je f funkcija takva da je f' različit od nule u okolini nule ζ od f i neka je f'' neprekidna u ovoj okolini. Klasičan Eulerov metod glasi

$$\hat{z} = z - \frac{2f(z)}{f'(z) \pm \sqrt{f'(z)^2 - 2f(z)f''(z)}}, \tag{3.34}$$

gde je $\hat{z}$ nova aproksimacija nule ζ funkcije f. Ovaj se metod može izvesti razvojem funkcije f u Taylorov red oko koordinatnog početka, izostavljajući članove reda tri i više i rešavanjem dobijene kvadratne jednačine. Eulerov metod (3.34) može se dobiti iz familije (3.1) za $\alpha = 1$. Na osnovu Teoreme 3.1 sledi da je red Eulerovog metoda jednak 4. Razlog da se ovaj metod posebno razmatra leži u činjenici da njegova forma dopušta pogodne modifikacije sa ubrzanom konvergencijom.

Pretpostavićemo da je $|f(z)|$ dovoljno malo. Koristeći razvoje (3.24) iz (3.34) možemo dobiti drugačiji oblik Eulerove formule

$$\hat{z} = z - \frac{f(z)}{f'(z)}\Big(1 + \frac{f(z)}{f'(z)} \cdot \frac{f''(z)}{2f'(z)}\Big). \tag{3.35}$$

Bodewig [10] pripisuje iterativnu formulu (3.35) Euleru [27]. Pomenimo da se u ruskoj literaturi iterativna formula (3.35) pripisuje Čebiševu, koji je napisao (1837. ili 1838. godine) studentski rad pod naslovom *Calcul des racines d'une équation.* Iz tog razloga, danas se metod (3.35) najčešće zove *Euler-Čebiševljev metod.* Podsećamo da oba metoda (3.34) i (3.35) imaju kubnu konvergenciju.

Primenjujući Euler-Čebiševljev metod (3.35) sa kubnom konvergencijom na pogodnu funkciju, u ovom odeljku izvešćemo novi metod četvrtog reda za simultano određivanje prostih nula polinoma. Primena na jednu drugu funkciju Weierstrassovog tipa omogućuje konstrukciju metoda za simultanu aproksimaciju višestrukih nula. Koristeći jedan drugi pristup u nastavku ćemo izvesti simultani metod kvadratnog korena koji je četvrtog reda. Pokazuje se da je ovaj metod takođe Eulerovog tipa i može se izvesti polazeći od (3.34). Korišćenjem pogodnih popravki red konvergencije ovog metoda može se ubrzati na pet i šest, sa zanemarljivim brojem dodatnih operacija.

SIMULTANI METOD EULER-ČEBIŠEVLJEVOG TIPA

U ovom odeljku konstruisaćemo novi metod Eulerovog tipa za simultanu aproksimaciju svih nula polinoma koristeći sledeći pristup koji je sličan onom u [104]: Primenom metoda Euler-Čebišvljevog tipa (3.35) na funkciju $h_i(z)$, definisanom pomoću (3.7) (koja ima iste nule kao polinom P), pomoću formula (3.8) dobijamo *metod Euler-Čebiševljevog tipa:*

$$\begin{aligned}\hat{z}_i &= z_i - \frac{h_i(z_i)}{h_i'(z_i)}\left(1 + \frac{h_i(z_i)}{h_i'(z_i)} \cdot \frac{h_i''(z_i)}{2h_i'(z_i)}\right) \\ &= z_i - \frac{W_i}{1+G_{1,i}}\left(1 - \frac{W_i G_{2,i}}{(1+G_{1,i})^2}\right) \quad (i \in I_n),\end{aligned} \tag{3.36}$$

to jest

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{1 + \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{W_j}{z_i - z_k}}\left(1 - \frac{W_i \sum\limits_{j\neq i} \dfrac{W_j}{(z_i - z_j)^2}}{\left(1 + \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{W_j}{z_i - z_j}\right)^2}\right) \quad (i \in I_n).$$

Brzina konvergencije metoda (3.36) Euler-Čebiševljevog tipa razmatra se u sledećoj teoremi.

Teorema 3.3. *Ako su aproksimacije $z_1, \ldots, z_n$ dovoljno blizu tačnih nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ polinoma P, tada iterativni metod (3.36) ima red konvergencije četiri.*

Dokaz. Pri dokazu ove teoreme koristićemo iste oznake iz prethodnih odeljaka, kao i skraćenicu

$$S_i = \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\zeta_i - z_j}.$$

Najpre, zbog

$$W_j = (z_j - \zeta_j) \prod_{k \neq j} \frac{z_j - \zeta_k}{z_j - z_k},$$

imamo ocene

$$W_i = O_M(\varepsilon),\ G_{k,i} = O_M(\varepsilon)\ (k = 1, 2, \ldots),\ S_i = O_M(\varepsilon). \tag{3.37}$$

Za dovoljno malo $|\varepsilon_i|$ nalazimo

$$\begin{aligned}
\sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(\zeta_i - z_j)(z_i - z_j)} &= \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^2 \left(1 - \dfrac{\varepsilon_i}{z_i - z_j}\right)} \\
&= \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^2} \left(1 + \frac{\varepsilon_i}{z_i - z_j} + \cdots\right) \\
&= G_{2,i} + \varepsilon_i G,
\end{aligned}$$

gde je $G = \sum_{k \geq 3} \varepsilon_i^{k-3} G_{k,i}$. Odatle sledi

$$\begin{aligned}
G_{1,i} - S_i &= \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j} - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\zeta_i - z_j} = -\varepsilon_i \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(\zeta_i - z_j)(z_i - z_j)} \\
&= -\varepsilon_i G_{2,i} - \varepsilon_i^2 G.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Iz (3.7) za $z := \zeta_i$ dobijamo relaciju fiksne tačke

$$\zeta_i = z_i - \frac{W_i}{1 + \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{W_j}{\zeta_i - z_j}} \quad (i \in I_n). \tag{3.39}$$

Zamenjujući $W_i = \varepsilon_i(1 + S_i)$, što sledi iz (3.39), u iterativnoj formuli (3.36) nalazimo

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{\varepsilon_i(1+S_i)}{1+G_{1,i}} - \frac{\varepsilon_i^2(1+S_i)^2 G_{2,i}}{(1+G_{1,i})^3}.$$

Oduzimajući (3.39) od poslednje relacije i koristeći (3.38), dobijamo

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_i := \hat{z}_i - \zeta_i &= \frac{\varepsilon_i(G_{1,i} - S_i)(1+G_{1,i})^2 + \varepsilon_i(1+S_i)^2 G_{2,i}}{(1+G_{1,i})^3} \\ &= \frac{\varepsilon_i^2 G_{2,i}\left[(1+S_i)^2 - (1+G_{1,i})^2\right] + \varepsilon_i^3 G}{(1+G_{1,i})^3} \\ &= \frac{\varepsilon_i^2 G_{2,i}(2+S_i+G_{1,i})(S_i - G_{1,i}) + \varepsilon_i^3 G}{(1+G_{1,i})^3}, \end{aligned}$$

odakle je, na osnovu (3.38),

$$\hat{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i^3 G_{2,i}(2+S_i+G_{1,i})(G_{2,i} + \varepsilon_i G) + \varepsilon_i^3 G}{(1+G_{1,i})^3}. \tag{3.40}$$

Koristeći ocene (3.37) procenjujemo izraze koji se javljaju u brojiocu formule (3.40):

$$\varepsilon_i^3 G_{2,i}(2+S_i+G_{1,i})(G_{2,i}+\varepsilon_i G) = \varepsilon_i^3 O_M(\varepsilon^2), \quad \varepsilon_i^3 G = \varepsilon_i^3 O_M(\varepsilon). \tag{3.41}$$

Imenilac $(1 + G_{1,i})^3$ u (3.40) teži ka 1 kada greške $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ teže ka 0. S obzirom na ovu činjenicu i ocene (3.41), iz (3.40) nalazimo $\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^3 O_M(\varepsilon) = O(\varepsilon_i^4)$, čime je završen dokaz teoreme. □

Višestruke nule:

Neka je m poznata višestrukost nule ζ funkcije f. Kao što je pokazano u [**113**, Pog. 7], primenom Euler-Čebiševljeve formule (3.35) na funkciju $f^{1/m}$ može se izvesti sledeći metod trećeg reda za nalaženje višestruke nule funkcije f:

$$\hat{z} = z - m\frac{f(z)}{f'(z)}\Big[\frac{1}{2}(3-m) + m\frac{f''(z)f(z)}{2f'(z)^2}\Big]. \tag{3.42}$$

Pretpostavimo sada da je f moničan polinom P koji ima višestruke nule $\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu$ sa poznatim višestrukostima $m_1, \ldots, m_\nu$, $m_1 + \cdots + m_\nu = n$, $\nu \leq n$. Koristeći skraćenice iz odeljka 3.2 i formule (3.40) i (3.41), zamenjujemo f'/f i f''/f' sa W_i'/W_i i W_i''/W_i' u (3.42) i dobijamo *simultani metod Euler-Čebiševljevog tipa* za nalaženje višestrukih nula polinoma P :

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{m_i}{2(\delta_{1,i} - S_{1,i})}\left[3 + m_i\frac{\delta_{2,i} - \delta_{1,i}^2 + S_{2,i}}{(\delta_{1,i} - S_{1,i})^2}\right] \quad (i \in I_n). \tag{3.43}$$

U specijalnom slučaju kada su sve nule proste ($m_1 = \cdots = m_n = 1$), formula (3.43) svodi se na iterativni metod za nalaženje prostih nula koji su Sakurai i Petković izveli u nedavnom radu [**104**].

Red konvergencije iterativnog metoda (3.43) je takođe četiri. Ovo se može dokazati korišćenjem slične tehnike predstavljene u dokazu Teoreme 3.2 tako da izostavljamo dokaz.

SIMULTANI METODI KVADRATNOG KORENA EULEROVOG TIPA

U odeljku 3.2 izveden je metod Eulerovog tipa (3.11). Iterativna formula (3.11) je veoma slična relaciji fiksne tačke

$$\zeta_i = z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i} \pm \sqrt{(1+G_{1,i})^2 + 4W_i \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(\zeta_i - z_j)}}}. \tag{3.44}$$

Formula (3.44) može se izvesti preuređujući relaciju fiksne tačke (3.39) na oblik

$$\frac{W_i}{(\zeta_i - z_i)^2} + \frac{1 + G_{1,i}}{\zeta_i - z_i} - \frac{1}{\zeta_i - z_i}\left(G_{1,i} - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{\zeta_i - z_j}\right) = 0,$$

odakle dobijamo kvadratnu jednačinu po $1/(\zeta_i - z_i)$:

$$\frac{W_i}{(\zeta_i - z_i)^2} + \frac{1 + G_{1,i}}{\zeta_i - z_i} - \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(\zeta_i - z_j)} = 0.$$

Rešavajući ovu jednačinu dobijamo (3.44).

Polazeći od relacije fiksne tačke (3.44) i uzimajući izvesnu aproksimaciju c_i nule ζ_i pod kvadratnim korenom, dobijamo iterativnu formulu

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{2W_i}{1 + G_{1,i} \pm \sqrt{(1 + G_{1,i})^2 + 4W_i \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(c_i - z_j)}}}, \quad (3.45)$$

za svako $i = 1, \ldots, n$. Na primer, za $c_i := z_i$ neposredno dobijamo formulu Eulerovog tipa (3.11).

Da bismo dobili algoritme sa velikom računskom efikasnošću, potrebno je izabrati takvu aproksimaciju c_i u (3.45) koja ne zahteva dodatna izračunavanja (na primer, treba koristiti već izračunate veličine). Ovde ćemo uzeti sledeće aproksimacije:

$$\begin{aligned}
&(i) \quad c_i^{(1)} := z_i \quad \text{(prosta aproksimacija);}\\
&(ii) \quad c_i^{(2)} := z_i - W_i \quad \text{(Weierstrassova aproksimacija)} \qquad (3.46)\\
&(iii) \quad c_i^{(3)} := z_i - W_i/(1 + G_{1,i}) \quad \text{(Börsch-Supanova aproksimacija).}
\end{aligned}$$

Izbor znaka u (3.45):

Pri praktičnoj primeni metoda kvadratnog korena (3.45) potrebno je izabrati pravi znak ispred kvadratnog korena. Uvedimo oznake

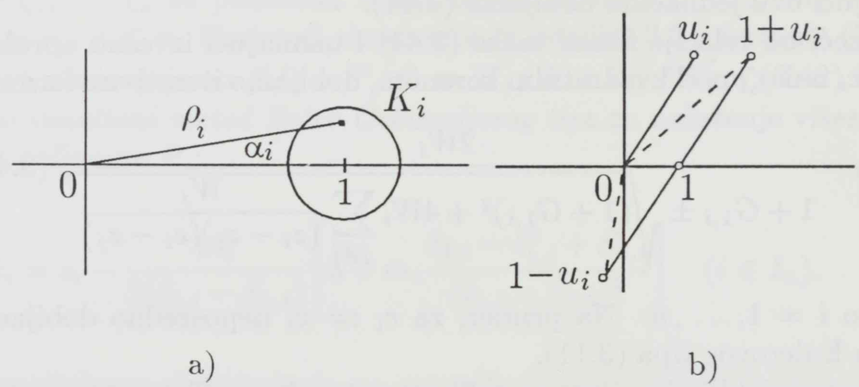
$$q_i = \frac{4W_i}{(1 + G_{1,i})^2} \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(c_i - z_j)}, \quad u_i = \sqrt{1 + q_i}, \quad 1 + q_i = \rho_i e^{i\alpha_i}.$$

Tada (3.45) može da se zapiše u obliku

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{2W_i}{(1+G_i)(1 \pm u_i)}. \tag{3.47}$$

Razmatrajući u_i pretpostavljamo samo glavnu granu kvadratnog korena jer „$\pm$" već stoji u (3.47).

Kriterijum za izbor znaka u (3.45) (to jest, (3.47)) je veoma jednostavan: kako popravka $\Delta_i = \hat{z}_i - z_i$ mora da bude što je moguće manja po modulu, *ispred* u_i *biramo znak tako da imenilac* $(1+G_{1,i})(1 \pm u_i)$ *bude veći po modulu.* Uočimo da ovaj kriterijum zahteva mali računski napor.



SLIKA 1. Izbor znaka

U nastavku ćemo posmatrati slučaj kada su aproksimacije z_i dovoljno blizu nula ζ_i polinoma P, što podrazumeva da su svi W_i takođe mali po modulu. Ovo razmatranje je neophodno radi analize konvergencije koja će biti data kasnije. Kako su veličine $|W_j|$ $(j = 1, \ldots, n)$ male, važi $1 + q_i \in K_i := \{w : |w-1| < 1\}$, odakle sledi $\alpha_i \in (-\pi/2, \pi/2)$ (videti sliku 1a)). Otuda je

$$\mathcal{R}e\, u_i = \rho_i^{1/2} \cos\frac{\alpha_i}{2} > 0.$$

Dalje,

$$\mathcal{R}e\, u_i > 0 \Leftrightarrow \frac{u_i + \overline{u_i}}{2} > 0,$$

što povlači

$$(1+u_i)(1+\overline{u_i}) > (1-u_i)(1-\overline{u_i}) \Leftrightarrow |1+u_i| > |1-u_i|.$$

Stoga, ako su z_i dovoljno dobre aproksimacije nula ζ_i polinoma P, tada je uvek $|1+u_i| > |1-u_i|$, što znači da uzimamo znak „+" u (3.47). Gornje razmatranje je ilustrovano slikom 1b) gde su kompleksni brojevi $1+u_i$ i $1-u_i$ označeni isprekidanim linijama. Pored toga, uočavamo da takav izbor obezbeđuje da je glavni deo formule (3.47) baš Börsch-Supanova iterativna funkcija (3.14) koja poseduje kubnu konvergenciju. S druge strane, izbor znaka „–" u (3.46) dovodi do singulariteta u (3.47) kada $q_i \to 0$.

Napomena 2. Kako je $\mathcal{R}e\, u_i > 0$ za q_i dovoljno malo, između dve vrednosti od $\sqrt{1+q_i}$ biramo onu na desnoj strani kompleksne ravni koja je bliža 1. Iz tog razloga, za $|u_i| < 1$ kvadratni koren $\sqrt{1+q_i}$ je definisan glavnom vrednošću i imamo $\sqrt{1+q_i} \approx 1 + \dfrac{q_i}{2}$ za dovoljno malo $|q_i|$. ◊

Red konvergencije:

Sada ćemo razmatrati brzinu konvergencije iterativnog metoda (3.45) sa aproksimacijama (3.46) (i) – (iii). Pritom uzimamo u obzir da Weierstrassov metod ima kvadratnu konvergenciju a Börsch-Supanov metod konvergira kubno, te je

$$c_i^{(r)} - \zeta_i = O_M\big((z_i - \zeta_i)^r\big) = O_M(\varepsilon_i^r) \quad (r = 1, 2, 3). \tag{3.48}$$

Teorema 3.4. *Neka su aproksimacije $z_1, \ldots, z_n$ dovoljno blizu tačnih nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ polinoma P i neka je $c_i^{(r)}$ jedna od aproksimacija data sa (3.46). Tada metod kvadratnog korena (3.45) ima red konvergencije $r+3$ $(r = 1, 2, 3)$.*

Dokaz. Radi jednostavnosti uvodimo skraćenice

$$y_i = 4W_i \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(\zeta_i - z_j)}, \quad Y_i = 4W_i \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)(c_i^{(r)} - z_j)},$$
$$X_i = 1 + G_{1,i}.$$

Iz (3.44) i (3.45) (uzimajući znak „+" shodno prethodnoj diskusiji) sledi

$$\hat{\varepsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i = \frac{2W_i}{X_i + \sqrt{X_i^2 + y_i}} - \frac{2W_i}{X_i + \sqrt{X_i^2 + Y_i}}.$$

Posle jednostavnih transformacija dobijamo

$$\hat{\varepsilon}_i = \frac{2W_i\left(\sqrt{X_i^2+Y_i}-\sqrt{X_i^2+y_i}\right)}{\left(X_i+\sqrt{X_i^2+Y_i}\right)\left(X_i+\sqrt{X_i+y_i}\right)} = \frac{2W_i(Y_i-y_i)}{A_i},$$

to jest

$$\hat{\varepsilon}_i = 8W_i^2 \cdot \frac{\displaystyle\sum_{j\neq i}\frac{W_j}{(z_i-z_j)(c_i^{(r)}-z_j)} - \sum_{j\neq i}\frac{W_j}{(z_i-z_j)(\zeta_i-z_j)}}{A_i}, \tag{3.49}$$

gde je imenilac A_i dat pomoću

$$A_i = \left(X_i+\sqrt{X_i^2+Y_i}\right)\left(X_i+\sqrt{X_i^2+y_i}\right)\left(\sqrt{X_i^2+Y_i}+\sqrt{X_i^2+y_i}\right).$$

Imenilac A_i u (3.49) je ograničen i teži 8 kada $\varepsilon \to 0$ te ćemo zato razmotriti jedino brojilac u (3.49). Koristeći (3.48) dobijamo

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\neq i}\frac{W_j}{(z_i-z_j)(c_i^{(r)}-z_j)} - \sum_{j\neq i}\frac{W_j}{(z_i-z_j)(\zeta_i-z_j)} \\
&\qquad = (\zeta_i - c_i^{(r)})\sum_{j\neq i}\frac{W_j}{(z_i-z_j)(c_i^{(r)}-z_j)(\zeta_i-z_j)} \\
&\qquad = O_M(\varepsilon_i^r)\sum_{j\neq i}\frac{W_j}{(z_i-z_j)(c_i^{(r)}-z_j)(\zeta_i-z_j)}.
\end{aligned}$$

Kako $(z_i-z_j)(c_i^{(r)}-z_j)(\zeta_i-z_j) \to (\zeta_i-\zeta_j)^3$ kada $\varepsilon \to 0$ i $W_i = O_M(\varepsilon_i)$, iz (3.49) sledi $\hat{\varepsilon}_i = O_M(\varepsilon_i^{r+2}\varepsilon) = O_M(\varepsilon_i^{r+3})$, što dokazuje teoremu. Prema tome, u zavisnosti od izbora aproksimacije c_i iterativni metod (3.45) ima red konvergencije četiri, pet ili šest. □

Primer 4. Da bismo demonstrirali brzinu konvergencije predstavljenih iterativnih metoda, razmatrali smo polinom

$$P(z) = z^9 + 3z^8 - 3z^7 - 9z^6 + 3z^5 + 9z^4 + 99z^3 + 297z^2 - 100z - 300$$

čije su nule -3, ± 1, $\pm 2i$, $\pm 2i \pm i$. Sledeći kompleksni brojevi su bili uzeti za aproksimacije ovih nula:

$$\begin{aligned} &z_1^{(0)} = -3.3 + 0.2i, \quad z_2^{(0)} = -1.2 - 0.3i, \quad z_3^{(0)} = 0.2 + 1.7i, \\ &z_4^{(0)} = -1.8 + 1.3i, \quad z_5^{(0)} = -1.8 - 0.7i, \quad z_6^{(0)} = 2.3 + 1.2i, \\ &z_7^{(0)} = 1.8 - 0.7i, \quad z_8^{(0)} = 1.2 + 0.3i, \quad z_9^{(0)} = 0.2 - 2.3i. \end{aligned}$$

Koristeći FORTRAN 77 i aritmetiku dvostruke preciznosti, testirali smo iterativne metode (3.36) i (3.45) za aproksimacije (3.46) ($r = 1, 2, 3$), izvršavajući dve iteracije. Maksimalne greške

$$\max_i |\varepsilon_i^{(m)}| = \max_i |z_i^{(m)} - \zeta_i| \quad (m = 1, 2)$$

su prikazane u Tabeli 2. Oznaka $h(-q)$ znači $h \times 10^{-q}$. U cilju poređenja testirali smo takođe i Noureinov metod četvrtog reda dat formulom

$$\hat{z}_i = z_i - W_i \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - W_i - z_j} \right)^{-1} \quad (i \in I_n) \tag{3.50}$$

(videti [69]).

Iz ove tabele vidimo da se svi metodi četvrtog reda na testiranom primeru skoro isto ponašaju i pokazuju brzu konvergenciju. Takođe, možemo primetiti veoma brzu konvergenciju ubrzanih metoda kvadratnog korena $(3.45)_{r=2}$ reda 5 i $(3.45)_{r=3}$ reda šest.

Metodi	(3.50)	(3.36)	$(3.45)_{r=1}$	$(3.45)_{r=2}$	$(3.45)_{r=3}$
$\max \lvert\varepsilon_i^{(1)}\rvert$	2.48(-2)	2.61(-2)	4.16(-2)	9.91(-3)	5.42(-3)
$\max \lvert\varepsilon_i^{(2)}\rvert$	2.24(-8)	1.44(-7)	9.72(-7)	2.28(-11)	4.44(-16)

TABELA 2. Maksimalne greške za dve iteracije. $h(-q)$ znači $h \times 10^{-q}$.

Poglavlje 4

SIMULTANO NALAŽENJE NULA ANALITIČKIH FUNKCIJA

4.1 Metod Čebiševljevog tipa

Neka je $z \mapsto \Phi(z)$ analitička funkcija unutar date, zatvorene oblasti G ograničene prostom glatkom konturom Γ, kao i na konturi Γ, bez nula na Γ i sa poznatim brojem n prostih nula unutar G. Tada je Φ oblika

$$\Phi(z) = X(z)\prod_{j=1}^{n}(z-\zeta_j) \tag{4.1}$$

unutar G, gde su $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ nule polinoma Φ (unutar G) i $X(z)$ je analitička funkcija bez nula unutar G (videti Smirnov [**111**]). Ova klasa analitičkih funkcija biće označena sa Ω. U praksi, broj nula n funkcije Φ unutar G može se odrediti pomoću numeričkog metoda zasnovanog na *principu argumenta*, kao što je predložila I. Gargantini [**31**]. Prema rezultatima Anastasseloua i Ioakimidisa [**6**] $X(z)$ može se predstaviti u obliku $X(z) = \exp(Y(z))$. Y je takođe analitička funkcija unutar G koja je, za proizvoljan kompleksni broj $t \in \operatorname{int}\Gamma$ takav da $\Phi(t) \neq 0$, data sa

$$Y(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\log[(w-t)^{-n}\Phi(w)]}{w-z}dw, \tag{4.2}$$

odakle je

$$Y'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\log[(w-t)^{-n}\Phi(w)]}{(w-z)^2}dw. \tag{4.3}$$

U nedavnim radovima [**51**], [**88**], [**90**] i [**94**] predloženi su neki iterativni metodi za simultano određivanje prostih nula analitičkih funkcija iz klase Ω. U ovom odeljku predstavićemo novi iterativni metod za simultanu aproksimaciju nula pomenute klase funkcija. Ovaj metod je konstruisan pogodnom aproksimacijom izraza $\Phi''(z)/\big(2\Phi'(z)\big)$ koji se javlja u klasičnom Čebiševljevom metodu trećeg reda (poznatom još kao Eulerov metod, Schröderov metod reda 3, itd.)

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \frac{\Phi(z^{(m)})}{\Phi'(z^{(m)})}\left(1 + \frac{\Phi(z^{(m)})}{\Phi'(z^{(m)})}\frac{\Phi''(z^{(m)})}{2\Phi'(z^{(m)})}\right) \quad (m = 0, 1, \dots). \tag{4.4}$$

Analiza konvergencije pokazuje da je red konvergencije predloženog metoda Čebiševljevog tipa takođe *tri*. Takođe je razmatraba numerička stabilnost ovog metoda u prisustvu greške nastale usled numeričke integracije, neophodne za izračunavanje $Y'(z)$. Pored toga, dati su i neki računski aspekti predloženog metoda, uključujući numerički primer. Najzad, data je i teorijska analiza asinhrone implementacije predloženog metoda na paralelnom računaru sa distribuiranom memorijom, sa posebnim osvrtom na red konvergencije u zavisnosti od maksimalnog kašnjenja. Deo ovih rezultata može se naći u radu Petkovića i Tričkovića [**99**].

SIMULTANI METOD ČEBIŠEVLJEVOG TIPA

Razmatramo Čebiševljev metod (4.4) primenjen na analitičku funkciju Φ koja pripada klasi Ω. Uvedimo greške

$$\varepsilon_i^{(m+1)} = z_i^{(m+1)} - \zeta_i, \quad \varepsilon_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i.$$

Radi jednostavnosti, pisaćemo u nastavku $\hat{z}_i, z_i, \hat{\varepsilon}_i, \varepsilon_i$ umesto $z_i^{(m+1)}$, $z_i^{(m)}, \varepsilon_i^{(m+1)}, \varepsilon_i^{(m)}$, respektivno. Pored toga, neka $\varepsilon \in \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$ označava grešku maksimalnog modula. Oznaka O_M ima isto značenje kao prethodnim poglavljima. Najpre navodimo sledeće neophodno tvrđenje:

Lema 4.1. *Neka su $z_1, \dots, z_n$ dovoljno bliske aproksimacije nula $\zeta_1, \dots, \zeta_n$. Tada je*

$$\frac{\Phi''(z_i)}{2\Phi'(z_i)} = Y'(z_i) + \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j} + O_M(\varepsilon). \tag{4.5}$$

Dokaz. Primenjujući logaritamski izvod na (4.1), dobijamo

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)} = Y'(z) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j}, \tag{4.6}$$

odakle je

$$\Phi'(z) = \Phi(z)\left[Y'(z) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j}\right].$$

Odavde nalazimo drugi izvod

$$\Phi''(z) = \Phi'(z)\Big(Y'(z) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j}\Big) + \Phi(z)\Big(Y''(z) - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z-\zeta_j)^2}\Big),$$

te je, koristeći (4.6),

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi''(z)}{\Phi'(z)} &= Y'(z) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j} + \frac{\Phi(z)}{\Phi'(z)}\Big(Y''(z) - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z-\zeta_j)^2}\Big) \\
&= Y'(z) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j} + \frac{1}{\dfrac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}}\Big(Y''(z) - \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z-\zeta_j)^2}\Big) \\
&= Y'(z) + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j} + \frac{Y''(z) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z-\zeta_j)^2}}{Y'(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j}} \\
&= \frac{\Big(Y'(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j}\Big)^2 + Y''(z) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z-\zeta_j)^2}}{Y'(z) + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j}} \\
&= \frac{Y'^2(z) + 2Y'(z)\Big(\dfrac{1}{z-\zeta_i} + \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{1}{z-\zeta_j}\Big) + Y''(z) + 2S(z)}{\dfrac{1}{z-\zeta_i}\Big(1 + (z-\zeta_i)\Big(Y'(z) + \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{1}{z-\zeta_j}\Big)\Big)},
\end{aligned}$$

gde smo stavili $S(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{z-\zeta_k} \frac{1}{z-\zeta_j}$. Ako dvostruku sumu $S(z)$ transformišemo, imaćemo

$$S(z) = \frac{1}{z-\zeta_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j} + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n-1} \sum_{\substack{j=k+1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z-\zeta_k} \frac{1}{z-\zeta_j}$$

$$= \frac{1}{z-\zeta_i} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j} + (z-\zeta_i) \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n-1} \sum_{\substack{j=k+1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z-\zeta_k} \frac{1}{z-\zeta_j} \right).$$

Uvodeći funkcije

$$\sigma_i(z) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z-\zeta_j}, \quad A(z) = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n-1} \sum_{\substack{j=k+1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{z-\zeta_k} \frac{1}{z-\zeta_j},$$

$$\beta_i(z) = \sigma_i(z) Y'(z) + \frac{1}{2} Y'^2(z) + \frac{1}{2} Y''(z) + A(z),$$

posle izvesnih transformacija poslednjeg izraza, za $\Phi''(z)/2\Phi'(z)$ nalazimo

$$\frac{\Phi''(z)}{2\Phi'(z)} = \frac{Y'(z) + \sum_{j\neq i} \frac{1}{z-\zeta_j} + (z-\zeta_i)\beta_i(z)}{1 + (z-\zeta_i)\big(Y'(z) + \sigma_i(z)\big)}.$$

Stavljajući $z = z_i$, $\varepsilon_i = z_i - \zeta_i$ i $\sigma_i(z_i) = \sigma_i$, $\beta_i(z_i) = \beta_i$, dobijamo

$$\frac{\Phi''(z_i)}{2\Phi'(z_i)} = \frac{Y'(z_i) + \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i-\zeta_j} + \varepsilon_i\beta_i}{1 + \varepsilon_i(Y'(z_i) + \sigma_i)}.$$

Označimo izraz u imeniocu sa α_i. Tada imamo

$$\frac{\Phi''(z_i)}{2\Phi'(z_i)} = \frac{1}{\alpha_i}\Big(Y'(z_i) + \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i-\zeta_j} \Big) + \frac{\varepsilon_i\beta_i}{\alpha_i}$$

$$= \frac{1}{\alpha_i} \left(Y'(z_i) + \sum_{j\neq i} \frac{1}{(z_i-z_j)\left(1 + \dfrac{\varepsilon_j}{z_i-z_j}\right)} \right) + O_M(\varepsilon_i).$$

Razvijajući izraze $\left(1+\dfrac{\varepsilon_j}{z_i-z_j}\right)^{-1}$ i $\alpha_i^{-1}=\Big(1+\varepsilon_i(Y'(z_i)+\sigma_i)\Big)^{-1}$ u geometrijski red (pretpostavljajući da su $|\varepsilon_j|$ i $|\varepsilon_i|$ dovoljno male veličine) i sređujući izraz, dobijamo (4.5). □

Prema Lemi 4.1, $\Phi''(z_i)/2\Phi'(z_i)$ može se aproksimirati pomoću $Y'(z_i)+\sum_{j\neq i}(z_i-z_j)^{-1}$. Vraćajući se na Čebiševljevu formulu (4.4), dobijamo iterativni metod Čebiševljevog tipa za simultanu aproksimaciju svih nula analitičke funkcije $\Phi\in\Omega$,

$$\hat{z}_i=z_i-\frac{\Phi(z_i)}{\Phi'(z_i)}\left(1+\frac{\Phi(z_i)}{\Phi'(z_i)}\Big(Y'(z_i)+\sum_{j\neq i}\frac{1}{z_i-z_j}\Big)\right)\quad(i\in I_n).\quad(4.7)$$

Brzina konvergencije simultanog metoda Čebiševljevog tipa (4.7) razmatra se u sledećoj teoremi:

Teorema 4.1. *Neka su $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ nule analitičke funkcije iz klase Ω i neka su $z_1^{(0)},\dots,z_n^{(0)}$ njihove dovoljno bliske aproksimacije. Tada je red konvergencije iterativnog metoda (4.7) jednak tri.*

Dokaz. Kao i u dokazu Leme 4.1 izostavićemo indeks iteracije radi jednostavnosti. Iz (4.7) dobijamo

$$\hat{\varepsilon}_i=\varepsilon_i-\frac{1}{\dfrac{\Phi'(z_i)}{\Phi(z_i)}}\left(1+\frac{1}{\dfrac{\Phi'(z_i)}{\Phi(z_i)}}\Big(Y'(z_i)+\sum_{j\neq i}\frac{1}{z_i-z_j}\Big)\right),$$

odakle je, koristeći (4.6),

$$\hat{\varepsilon}_i=\varepsilon_i-\frac{1}{B_i}\left(1+\frac{1}{B_i}\Big(Y'(z_i)+\sum_{j\neq i}\frac{1}{z_i-z_j}\Big)\right),$$

gde smo stavili

$$B_i=Y'(z_i)+\frac{1}{\varepsilon_i}+\sum_{j\neq i}\frac{1}{z_i-\zeta_j}.$$

Sređujući poslednji izraz i stavljajući $\alpha_i = 1 + Y'(z_i)\varepsilon_i + \varepsilon_i\sigma_i$, nalazimo

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i}{\alpha_i} \cdot \frac{Y'(z_i)\varepsilon_i + \varepsilon_i\sigma_i + 1 + \varepsilon_i\Big(Y'(z_i) + \sum_{j\neq i}\dfrac{1}{z_i - z_j}\Big)}{\alpha_i}$$

$$= \frac{\varepsilon_i^2(\sigma_i + Y'(z_i)) + \varepsilon_i^3(\sigma_i + Y'(z_i))^2 - \varepsilon_i^2 Y'(z_i) - \varepsilon_i^2 \sum_{j\neq i}\dfrac{1}{z_i - z_j}}{\alpha_i^2}$$

$$= \frac{\varepsilon_i^2\sigma_i + \varepsilon_i^3(\sigma_i + Y'(z_i))^2 - \varepsilon_i^2 \sum_{j\neq i}\dfrac{1}{z_i - z_j}}{\alpha_i^2}$$

$$= \frac{\varepsilon_i^2\sigma_i + \varepsilon_i^3(\sigma_i + Y'(z_i))^2 - \varepsilon_i^2 \sum_{j\neq i}\dfrac{1}{z_i - \zeta_j}\,\dfrac{1}{1 - \dfrac{\varepsilon_j}{z_i - \zeta_j}}}{\alpha_i^2}.$$

Razvijajući izraz $\Big(1 - \dfrac{\varepsilon_j}{z_i - \zeta_j}\Big)^{-1}$ u geometrijski red, dobijamo

$$\hat{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i^3\big(\sigma_i + Y'(z_i)\big)^2 - \varepsilon_i^2 \sum_{j\neq i}\Big(\dfrac{\varepsilon_j}{(z_i - \zeta_j)^2} + \cdots\Big)}{[1 + \varepsilon_i(Y'(z_i) + \sigma_i)]^2}. \tag{4.8}$$

Odatle, uzimajući $|\hat{\varepsilon}| = \max_{1\leq i\leq n} |\hat{\varepsilon}_i|$ i $|\varepsilon| = \max_{1\leq i\leq n} |\varepsilon_i|$, nalazimo $|\hat{\varepsilon}| = O(|\hat{\varepsilon}|^3)$, odakle zaključujemo da metod Čebiševljevog tipa (4.7) za nalaženje nula analitičkih funkcija iz klase Ω ima red tri. □

Napomena 1. Specijalno, ako je $\Phi(z)$ moničan polinom sa prostim nulama $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, to jest

$$X(z) = 1, \quad Y(z) = 0, \quad \Phi(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - \zeta_j),$$

tada se (4.7) svodi na simultani metod za nule polinoma. ◊

Algoritam (4.7) zahteva izračunavanje izvoda $Y'(z)$ u tačkama $z_1, \ldots, z_n$. Kao što su Ioakimidis i Anastasselou predložili u [**51**], vrednosti $Y'(z_i)$ date sa (4.3) u praksi se izračunaju primenom dovoljno tačnog kvadraturnog pravila za konturne integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(w)dw \cong \sum_{k=1}^{\lambda} a_{k\lambda} g(w_{k\lambda}),$$

gde su $a_{k\lambda}$ *težine*, a $w_{k\lambda}$ odgovarajući *čvorovi* kvadraturnog pravila. Numerički rezultati iz rada [**51**], pokazali su da je podesno primeniti trapezno kvadraturno pravilo duž kružnice $\Gamma = \{w : |w| = R\}$ sa čvorovima

$$a_{k\lambda} = R\exp(i\theta_{k\lambda}), \quad \theta_{k\lambda} = (2k-1)\pi/\lambda \quad (k = 1, \ldots, \lambda).$$

S obzirom da je opsežna diskusija računskih aspekata numeričke integracije u primeni iterativnih formula za analitičke funkcije data u radovima [**51**], [**88**], [**90**] i [**94**], ovde izostavljamo detalje.

Numerička stabilnost

U prethodnom odeljku smo konstatovali da se izračunavanje vrednosti $Y'(z_i)$, koja se javlja u iterativnoj formuli (4.7), izvodi pomoću numeričke integracije u kompleksnoj ravni. Ovo približno izračunavanje dovodi do greške u procesu određivanja nula metodom (4.7). U nastavku ćemo ispitati uticaj greške numeričke integracije na brzinu konvergencije iterativnog metoda (4.7) i ukazati na neke računske aspekte.

Pretpostavimo da je δ_i apsolutna vrednost gornje granice greške koja se javlja u približnoj integraciji primenjenoj pri izračunavanju vrednosti $Y'(z_i)$. Analiza numeričke stabilnosti metoda (4.7) je slična onoj iz rada [**74**]. Ona je zasnovana na zameni kompleksnog broja $Y'(z_i)$ diskom $\{Y'(z_i); \delta_i\}$ i koristi kružnu kompleksnu aritmetiku. Pregled osnovnih operacija kružne kompleksne aritmetike i njihovih osobina dat je u odeljku 1.3.

Radi jednostavnosti, uvodimo oznake

$$c_i = Y'(z_i) + \sum_{j\neq i}\frac{1}{z_i - \zeta_j}, \quad d_i = Y'(z_i) + \sum_{j\neq i}\frac{1}{z_i - z_j}, \quad \gamma_i = \frac{|\varepsilon_i|\delta_i}{|1+\varepsilon_i c_i|}.$$

Za grešku $\hat{\varepsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i$ iz (4.6) i (4.7) dobijamo

$$\hat{\varepsilon}_i \in \hat{Z}_i := z_i - \zeta_i - \frac{\Phi(z_i)}{\Phi'(z_i)}\left(1 + \frac{\Phi(z_i)}{\Phi'(z_i)}\Big(\{Y'(z_i); \delta_i\} + \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - z_j}\Big)\right)$$

$$= \varepsilon_i - \frac{1}{\left\{c_i + \dfrac{1}{\varepsilon_i}; \delta_i\right\}}\left(1 + \frac{\{d_i; \delta_i\}}{\left\{c_i + \dfrac{1}{\varepsilon_i}; \delta_i\right\}}\right)$$

$$= \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i}{\{1 + \varepsilon_i c_i; |\varepsilon_i|\delta_i\}}\left(1 + \frac{\{\varepsilon_i d_i; |\varepsilon_i|\delta_i\}}{\{1 + \varepsilon_i c_i; |\varepsilon_i|\delta_i\}}\right).$$

Odavde, primenom operacija kružne kompleksne aritmetike, posle opsežne ali elementarne računice nalazimo sledeće izraze za poluprečnik i centar diska $\hat{Z}_i$:

$$\operatorname{mid} \hat{Z}_i = \frac{\varepsilon_i\left[\varepsilon_i(c_i - d_i) + \varepsilon_i^3 c_i^2 - L_i\gamma_i^2 + K_i\gamma_i^4\right]}{M_i^2}, \tag{4.9}$$

$$\operatorname{rad} \hat{Z}_i = \frac{|\varepsilon_i|^2\left[\delta_i(2 - \gamma_i^2) + \gamma_i(2\delta_i + 2|d_i| + |d_i|\gamma_i)\right]}{|M_i|^2}, \tag{4.10}$$

gde su

$$M_i = (1 + \varepsilon_i c_i)(1 - \gamma_i^2),$$
$$L_i = 1 + 2c_i\varepsilon_i + c_i\varepsilon_i^2 + 2c_i^2\varepsilon_i^3,$$
$$K_i = 1 + c_i\varepsilon_i + c_i\varepsilon_i^2 + c_i^2\varepsilon_i^3$$

kompleksni brojevi koji su za dovoljno malo $|\varepsilon_i|$ ograničeni i teže ka 1 kada $\varepsilon_i \to 0$.

Posmatrajmo razliku $c_i - d_i$:

$$
\begin{aligned}
c_i - d_i &= Y'(z_i) + \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - \zeta_j} - Y'(z_i) - \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - z_j} \\
&= \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - \zeta_j} - \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - z_j} \\
&= \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - \zeta_j} - \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - \zeta_j - \varepsilon_j} \\
&= \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - \zeta_j} - \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - \zeta_j} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\varepsilon_j}{z_i - \zeta_j}}.
\end{aligned}
$$

Posle razvoja izraza $\dfrac{1}{1 - \dfrac{\varepsilon_j}{z_i - \zeta_j}}$ u geometrijski red, nalazimo

$$
c_i - d_i = -\sum_{j\neq i} \left(\frac{\varepsilon_j}{(z_i - \zeta_j)^2} + \cdots \right) + O_M(\varepsilon^2).
$$

Zamenjujući ovu ocenu u (4.9), i uzimajući u obzir da je $\gamma_i = O(|\varepsilon_i|\delta_i)$, iz (4.9) i (4.10) procenjujemo

$$
\operatorname{rad} \hat{Z}_i = O\big(|\varepsilon_i|^2\delta_i\big) \sim a_i|\varepsilon_i|^2\delta_i, \qquad \operatorname{mid} \hat{Z}_i = O_M(\varepsilon^3) \sim b_i\varepsilon^3, \tag{4.11}
$$

gde su $a_i > 0$ i $b_i \in \mathbb{C}$ ograničeni brojevi. Prema ovome i očiglednoj implikaciji

$$
\hat{\varepsilon}_i \in \hat{Z}_i \Rightarrow |\hat{\varepsilon}_i| \leq |\operatorname{mid} \hat{Z}_i| + \operatorname{rad} \hat{Z}_i,
$$

imamo ocenu

$$
|\hat{\varepsilon}_i| = O\big(|\varepsilon|^2(|b_i||\varepsilon| + a_i\delta_i)\big), \tag{4.12}
$$

gde je $|\varepsilon| = \max_{1\leq i\leq n} |\varepsilon_i|$.

Iz nejednakosti (4.12) zaključujemo da metod Čebiševljevog tipa *čuva kubnu konvergenciju* ako je $\delta_i = O(|\varepsilon|)$. Kako je $|\Phi(z_i)| = O(|\varepsilon_i|)$, možemo reći da je red konvergencije metoda (4.7) isti kao i u odsustvu greške numeričke integracije (prilikom izračunavanja $Y'(z_i)$) ako je ova greška istog reda kao i apsolutna vrednost funkcije Φ u tački $z = z_i$. Ako je $Y'(z_i)$ izračunato sa relativno malom tačnošću tako da uslov $\delta_i = O(|\Phi(z_i)|)$ nije zadovoljen, tada brzina konvergencije metoda (4.7) opada, ali ne previše. Na primer, ako je čak $\delta_i = O(1)$ (što često pretpostavlja grubo izračunavanje $Y'(z_i)$), tada će red konvergencije iterativnog metoda (4.7) biti *bar dva*. Na osnovu ovog zaključujemo da je metod Čebiševljevog tipa (4.7) prilično stabilan u prisustvu greške numeričke integracije, što je potvrđeno numeričkim eksperimentima.

Napomena 2. Ako $\Delta_i = \Phi(z_i)/\Phi'(z_i)$ označava Newtonovu popravku, tada iz (4.7) imamo

$$\hat{z}_i = z_i - \Delta_i - (\Delta_i)^2 \Big[Y'(z_i) + \sum_{j \neq i} (z_i - z_j)^{-1} \Big].$$

Otuda je, uprkos prisustvu grešaka numeričke integracije (ako su one dovoljno male), konvergencija metoda (4.7) praktično obezbeđena glavnim korekcionim izrazom – Newtonovom popravkom Δ_i. U isto vreme, $Y'(z_i)$ se množi veličinom $(\Delta_i)^2$, koja je veoma mala ako je z_i dovoljno blizu nule ζ_i, tako da je uticaj kvadraturne greške neutralizovan. Ova analiza je slična sa onom datom u [51]. $\Diamond$

Napomena 3. U slučaju kada je neka od traženih nula veoma blizu konture Γ, predloženi algoritam (4.7) (i, takođe, svi drugi algoritmi zasnovani na istom principu) može da produkuje slabe rezultate ako kvadraturna formula nije primenjena sa visokom tačnošću. Uopšteno govoreći, cena koja se plaća da bi se postigla visoka konvergencija i aproksimacije sa velikim brojem tačnih cifara sastoji se u zahtevu za aritmetikom velike preciznosti. Srećom, u sadašnjem trenutku, ovo nije problem jer se aritmetika višestruke preciznosti (oko 33 značajne cifre ili više) sve češće ugrađuje u moderne računare. $\Diamond$

Primer 1. Da bismo demonstrirali brzinu konvergencije metoda Čebiševljevog tipa (4.7), razmatrali smo analitičku funkciju

$$\Phi(z) = e^z - 2\cos 3z - 2$$

unutar diska $D = \{z : |z| \leq 1.5\}$. Koristeći princip argumenta [31] nađeno je da ova analitička funkcija ima $n = 3$ nule unutar D. Realni brojevi $z_1^{(0)} = -1.4$, $z_2^{(0)} =$

-0.5, $z_3^{(0)} = 0.9$ (nađeni pomoću algoritma za pretraživanje koji uključuje test za detekciju prisustva nule) su uzeti kao početne aproksimacije. Algoritam (4.7) je realizovan u FORTRANU 77 korišćenjem aritmetike dvostruke preciznosti. Rezultati prva tri iterativna koraka prikazani su u Tabeli 1.

i	$z_i^{(1)}$	$z_i^{(2)}$	$z_i^{(3)}$
1	$-1.2\underline{4}85$	$-1.22974\underline{4}921$	$-1.2297087181\underline{1}50930$
2	$-0.8\underline{1}50$	$-0.82192\underline{2}655$	$-0.821932206573\underline{8}026$
3	$0.5\underline{8}36$	$0.56406\underline{5}22$	0.5640643677390563

TABELA 1. Aproksimacije dobijene metodom Čebiševljevog tipa (4.7). Podvučena cifra ukazuje na prvu netačnu cifru. Sve cifre aproksimacije $z_3^{(3)}$ su tačne.

ASINHRONA IMPLEMENTACIJA METODA ČEBIŠEVLJEVOG TIPA

Paralelizacija simultanih iterativnih metoda za nalaženje nula na multikompjuterima sa distribuiranom memorijom razmatrana je detaljno u radovima [**19**], [**20**], [**21**], [**28**], [**29**]. Naglašeno je da su ukupni troškovi paralelizacije po iteraciji suma vremena potrebnog za izračunavanje i vremena za komunikaciju pri razmeni podataka u svakom iterativnom koraku.

Sinhrona verzija simultanih metoda opširno je razmatrana u brojnim radovima. Prema izloženoj teorijskoj analizi kao i praktičnim eksperimentima ispostavlja se da je Weierstrass-Durand-Kernerov metod najefikasniji u pogledu CPU vremena. Iz tog razloga se u ovom delu rada bavimo jednom drugom vrstom implementacije simultanih metoda na multikompjuterima koja može konkurisati sinhronoj implementaciji pod pogodnim uslovima. Naime, da bismo smanjili komunikacijsko vreme može se primeniti strategija da u svakoj iteraciji bilo koji procesor ne mora da čeka kraj ukupne razmene podataka, već operiše sa trenutno raspoloživim podacima (videti [**9**], [**21**], [**29**]). Ovaj tip algoritama se naziva *asinhronim* po Baudetu [**8**], ukazujući da se lokalno izračunavanje izvršava korišćenjem samo dela globalne informacije. Implementacija asinhronog metoda se izvodi na takav način da, u svakom iterativnom koraku, procesor šalje najnovije podatke samo susednim procesorima, smanjujući na taj način komunikacijsko vreme. Smanjenje ovog vremena postiže se na račun brzine konvergencije asinhrone verzije, što će biti pokazano u nastavku.

Kako je asinhroni model opisan opširno u gore citiranim radovima, mi ćemo izostaviti detalje i koncentrisati se na analizu konvergencije asinhrone verzije metoda Čebiševljevog tipa (4.7). Pretpostavljamo da je broj procesora k ($\leq n$) dat unapred. Početni vektor $\boldsymbol{z}^{(0)} = (z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)})$ izračunavaju svi procesori $P_1, \ldots, P_k$. Dalje, svaki korak algoritma sastoji se u raspodeli izračunavanja n poboljšanih aproksimacija $z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}$ između procesora i ažuriranju njihovih podataka $\boldsymbol{z}^{(m)}$ postupkom prenosa. Ako su $I(1,m), \ldots, I(k,m)$ disjunktne particije skupa $\{1, \ldots, n\}$, pri čemu je $\cup I(j,m) = \{1, \ldots, n\}$, u m-tom iterativnom koraku procesor P_j ($j = 1, ..., k$) izračunava $z_i^{(m)}$ za sve $i \in I(j,m)$ pomoću iterativne formule (4.7) i zatim prenosi ove vrednosti svojim susednim procesorima (za detalje videti [**21**]). Distribucija indeksa je neophodna u svakoj iteraciji da bi se obezbedila sigurna konvergencija primenjenog metoda. Program se prekida kada je ispunjen neki kriterijum zaustavljanja ($STOP(\boldsymbol{z}^{(m)})$), na primer, ako je

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left|\Phi\big(z_i^{(m)}\big)\right| < \delta$$

za dovoljno malo δ.

Neka je $m = 0, 1, 2, ...$ iterativni indeks i pretpostavimo da se nova aproksimacija $z_i^{(m+1)}$ izračunava pomoću procesora P_h, $h \in \{1, ..., k\}$. Očigledno, da bi bila obezbeđena konvergencija, ovaj procesor *mora da „zna”* vrednost aproksimacije $z_i^{(m)}$. Poboljšana aproksimacija $z_i^{(m+1)}$ se izračunava pomoću asinhrone formule Čebiševljevog tipa

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{\Phi(z_i^{(m)})}{\Phi'(z_i^{(m)})}\left(1 + \frac{\Phi(z_i^{(m)})}{\Phi'(z_i^{(m)})}\Big(Y'(z_i^{(m)}) + S_i\Big)\right), \tag{4.13}$$

gde je $S_i = \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i^{(m)} - z_j^{(m-r(j,m,h))}}$.

Veličina $z_j^{(m-r(j,m,h))}$ je poslednja aproksimacija nule ζ_j koja je dostupna procesoru P_h u koraku m. Ovde je $r(j,m,h)$ **kašnjenje** koje zavisi od j, m i h, i ukazuje da procesor P_h zna samo vrednost z_j izračunatu u koraku $m - r(j,m,h)$. Maksimalno kašnjenje će biti označeno sa r, to jest, $r = \max_{j,m,h} r(j,m,h)$.

Prema prethodnom dajemo program u pseudokodu za paralelnu asinhronu implementacju simultanog metoda (4.13):

Program ASINHRONI SIMULTANI METOD (4.13)
begin
  for sve $j = 1, \dots, k$ **do** odrediti početne aproksimacije $\mathbf{z}^{(0)}$;
  $m := 0$
  do
    for sve $j = 1, \dots, k$ **do paralelno**
    begin
      Distribuirati $I(j,m)$;
      Izračunati $z_i^{(m+1)}$ prema (4.13), $i \in I(j,m)$
      Poslati $z_i^{(m+1)}$, $i \in I(j,m)$, susednim procesorima;
    end
    $m := m + 1$
  until $STOP(\mathbf{z}^{(m)})$ važi;
  OUTPUT $\mathbf{z}^{(m)}$
end

Kao što je pomenuto gore, asinhrona implementacija smanjuje brzinu konveregencije primenjenog metoda. U sledećoj teoremi dajemo donju granicu reda konvergencije asinhronog metoda Čebiševljevog tipa.

Teorema 4.2. *Pretpostavimo da su početne vrednosti aproksimacija* $z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}$ *dovoljno blizu nula* $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ *analitičke funkcije* $\Phi \in \Omega$. *Pretpostavimo dalje da je* $r(j,m,h)$ *ograničeno za sve* $j = 1, \dots, n$ *i sve* $h = 1, ..., k$. *Tada je asinhroni algoritam Čebiševljevog tipa (4.13) lokalno konvergentan sa redom konvergencije bar* $\eta > 2$, *gde je* η *jedinstveni pozitivan koren jednačine*

$$x^{r+1} - 2x^r - 1 = 0, \quad r = \max_{j,m,h} r(j,m,h). \tag{4.14}$$

Dokaz. Radi jednostavnosti, aproksimacije $z_j^{(m-r)}$ nula ζ_j, $(j = 1, \dots, n)$ u iterativnom koraku m biće kratko označene sa z_j ako je $r = 0$ i z_j^* ako je $r > 0$. Prema ovoj notaciji uvodimo greške $\varepsilon_i =$

$z_i - \zeta_i$ i $\varepsilon_j^* = z_j^* - \zeta_j$. Nova aproksimacija $z_i^{(m+1)}$ biće označena sa $\hat{z}_i$ a odgovarajuća greška sa $\hat{\varepsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i$.

Dokaz Teoreme 4.2 se izvodi na sličan način kao dokaz Teoreme 4.1 pretpostavljajući samo da su z_j i ε_j zamenjeni sa z_j^* i ε_j^*. Prema tome, polazeći od (4.13) dobijamo relaciju

$$\hat{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i^3\big(\sigma_i + Y'(z_i)\big)^2 - \varepsilon_i^2 \sum_{j\neq i}\left(\dfrac{\varepsilon_j^*}{(z_i-\zeta_j)^2} + \cdots\right)}{[1+\varepsilon_i(Y'(z_i)+\sigma_i)]^2} \tag{4.15}$$

koja odgovara relaciji (4.8). Neka su $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ i $\boldsymbol{z}^{(m)} = (z_1^{(m)}, \dots, z_n^{(m)})$ vektori nula i njihovih aproksimacija. Ako u m-tom iterativnom koraku definišemo apsolutnu grešku e_m sa $e_m := \|\boldsymbol{z}^{(m)} - \boldsymbol{\zeta}\|_\infty$, tada iz (4.15) dobijamo

$$e_{m+1} = O(\varepsilon_m^2 \varepsilon_{m-r}).$$

Za dovoljno veliko $m \geq m_0$ stavimo $e_m = O(E)$, gde je $0 < E < 1$ prema već usvojenoj pretpostavci o bliskosti početih aproksimacija odgovarajućim nulama. Zbog toga, niz $\{e_m\}$ teži ka 0. Neka je red konvergencije niza $\{e_m\}$ jednak η, to jest, $e_{m+1} = O\big(e_m^\eta\big)$. Tada je

$$e_{m-r} = O\big(E^{1/\eta^r}\big) \quad (r = 0, 1, \dots, m),$$

tako da imamo

$$e_{m+1} = O\Big(e_m^2 \cdot e_{m-r}\Big) = O\Big(E^{2+1/\eta^r}\Big) \quad \text{i} \quad e_{m+1} = O(E^\eta).$$

Upoređujući eksponente dobijamo $\eta = 2 + 1/\eta^r$, što se svodi na jednačinu (4.14). Neka je $f(\eta) = \eta^{r+1} - 2\eta^r - 1$. Funkcija f je konveksna i $f(0) = f(2) = -1$, $f(3) = 3^r - 1 \geq 0$ važi. Odatle, f ima jedinstvenu pozitivnu nulu η koja pripada intervalu $(2, 3]$. □

4.2 Familija iterativnih metoda za analitičke funkcije

Neka je P moničan polinom stepena n čije se nule poklapaju sa nulama $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ analitičke funkcije $\Phi \in \Omega$, to jest

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - \zeta_j), \quad \Phi(z) = \exp\big(Y(z)\big)P(z),$$

gde je Y analitička funkcija opisana u odeljku 4.1. Neka su $z_1, \ldots, z_n$ međusobno različite aproksimacije ovih nula. Uvedimo

$$W_i = \frac{P(z_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(z_i - z_j)} = \frac{\exp\big(-Y(z_i)\big)\Phi(z_i)}{\prod\limits_{j\neq i}(z_i - z_j)} \tag{4.16}$$

i

$$G_{1,i} = \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}, \quad G_{2,i} = \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^2}.$$

Koristeći aproksimacije $z_1, \ldots, z_n$, pomoću Lagrangeove interpolacije polinom P možemo predstaviti za svako $z \in \mathbb{C}$ kao

$$P(z) = \prod_{j=1}^{n}(z - z_j) + \sum_{k=1}^{n} W_k \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n}(z - z_j). \tag{4.17}$$

Definišimo funkciju $z \mapsto h_i(z)$ pomoću

$$h_i(z) := \frac{P(z)}{\prod\limits_{j\neq i}(z - z_j)}.$$

Tada, koristeći (4.17), dobijamo

$$h_i(z) = W_i + (z - z_i)\Big(1 + \sum_{j\neq i} \frac{W_j}{z - z_j}\Big). \tag{4.18}$$

Bilo koja nula ζ_i polinoma P (dakle i funkcije Φ), je takođe nula funkcije $h_i(z)$. Polazeći od $h_i(z)$, nalazimo

$$h_i(z_i) = W_i, \quad h_i'(z_i) = 1 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{W_j}{z_i - z_j} = 1 + G_{1,i},$$

$$h_i''(z_i) = -2\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{W_j}{(z_i - z_j)^2} = -2G_{2,i} \quad (i \in I_n). \tag{4.19}$$

Da bismo konstruisali novu familiju iterativnih metoda za nalaženje svih nula funkcije $\Phi \in \Omega$ unutar oblasti G, koristimo ideju koju su Sakurai i Petković izložili u [**104**]. Primenjujemo Hansen-Patrickovu formulu (3.1) na funkciju $h_i(z)$ (koja ima iste nule kao Φ unutar G). Zamenjujući f, f', f'' koji se javljaju u (3.1) sa $h(z_i), h'(z_i), h''(z_i)$ (datih sa (4.19)), posle kratkog sređivanja dobijamo novu jednoparametarsku familiju za simultanu aproksimaciju svih prostih nula analitičke funkcije Φ unutar G [**114**]:

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{(\alpha+1)W_i}{\alpha(1+G_{1,i}) \pm \sqrt{(1+G_{1,i})^2 + 2(\alpha+1)W_iG_{2,i}}} \quad (i \in I_n). \tag{4.20}$$

Napomena 4. Formula (4.20) sadrži $\pm$ ispred kvadratnog korena. Kako popravka $\Delta_i = \hat{z}_i - z_i$ mora da bude što je moguće manja po modulu, biramo znak tako da imenilac od Δ_i bude *veći po modulu*. Može se pokazati da za dovoljno malo $|W_i|$ (što pretpostavlja veoma bliske aproksimacije nula) treba izabrati znak „+”. Tada je glavni deo iterativne formule (4.20) dat sa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j}{z_i - z_j}} \quad (i \in I_n). \tag{4.21}$$

Iterativni metod (4.21) ima kubnu konvergenciju. U stvari, iterativni metod (4.21) je generalizacija Börsch-Supanovog metoda trećeg reda [**12**] za simultano određivanje nula polinoma. $\diamond$

Napomena 5. Slučaj $\alpha = -1$ zahteva operaciju graničnog procesa u (4.20). Posle sređivanja dobijamo

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i(1+G_{1,i})}{(1+G_{1,i})^2 + W_iG_{2,i}} \quad (i \in I_n). \tag{4.22}$$

Ova formula može se izvesti direktno primenjujući klasičnu Halleyevu formulu na funkciju $h_i(z)$. Napomenimo da su Ellis i Watson [**26**] izveli iterativnu formulu (4.22) za polinome koristeći sasvim drugačiji prilaz. $\diamond$

U sledećoj teoremi se razmatra brzina konvergencije familije iterativnih metoda (4.20).

Teorema 4.3. *Neka su* $z_1, \ldots, z_n$ *dovoljno dobre aproksimacije nula* $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ *analitičke funkcije* $\Phi \in \Omega$ *u datoj oblasti* G. *Tada familija iterativnih metoda (4.20) ima red konvergencije četiri za proizvoljan fiksiran i konačan parametar* α.

Dokaz ove teoreme je isti kao dokaz Teoreme 4.1, tako da ga izostavljamo.

Poglavlje 5

SIMULTANI METODI ZA VIŠESTRUKE NULE

5.1 Uvod

U trećem poglavlju razmatrana je familija simultanih metoda Hansen -Patrickovog tipa za nalaženje višestrukih nula polinoma. U ovom poglavlju razmatramo konstrukciju nekih novih simultanih metoda za nalaženje višestrukih nula. Ovi metodi predstavljaju modifikacije poznatih metoda zanalaženje jednenule polinoma P poznate višestrukosti.

Prikazaćemo dva prilaza u izvođenju ovih metoda. Prvo, u odeljku 5.2 razmatramo model za konstrukciju simultanih metoda zasnovan na aproksimaciji količnika P''/P'. Dobijeni metodi imaju isti red konvergencije kao i osnovni metodi. U odeljku 5.3 koristimo Weierstrassovu popravku i njene izvode da bismo dobili simultane metode višeg reda u odnosu na osnovne metode. U odeljku 5.4 razmatrani su metodi asinhronog tipa za simultano nalaženje višestrukih nula bez poznavanja reda višestrukosti (videti [**53**]).

Neka je n stepen polinoma i neka je $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ indeks iteracije. Da bismo demonstrirali postupke iz odeljaka 5.2 i 5.3 izabrali smo sledeće metode trećeg reda za nalaženje višestruke nule polinoma P:

Osadin metod [**71**]:

$$z_{\nu+1} = z_\nu - \frac{1}{2}m(m+1)\frac{P(z_\nu)}{P'(z_\nu)} + \frac{1}{2}(m-1)^2\frac{P'(z_\nu)}{P''(z_\nu)}. \qquad (5.1)$$

Laguerreov metod za višestruke nule [**42**]:

$$z_{\nu+1} = z_\nu - \frac{nP(z_\nu)}{P'(z_\nu) \pm \sqrt{\dfrac{n-m}{m}\left[(n-1)P'(z_\nu)^2 - nP(z_\nu)P''(z_\nu)\right]}} \tag{5.2}$$

Halleyev metod za višestruke nule [**42**]:

$$z_{\nu+1} = z_\nu - \frac{1}{\dfrac{m+1}{2m}\cdot\dfrac{P'(z_\nu)}{P(z_\nu)} - \dfrac{P''(z_\nu)}{2P'(z_\nu)}}. \tag{5.3}$$

Primetimo da se Osadin metod svodi na Newtonov metod ako je $m = 1$ (slučaj proste nule).

5.2 Metodi zasnovani na proceni P''/P'

Neka je dat moničan polinom P stepena n koji ima k $(\le n)$ nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ sa redom višestrukosti $m_1, \ldots, m_k$, respektivno, i $m_1 + \cdots + m_k = n$. Tada imamo faktorizaciju

$$P(z) = \prod_{j=1}^{k} (z - \zeta_j)^{m_j}. \tag{5.4}$$

Primenom logaritmskog izvoda na (5.4) dobijamo

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{m_j}{z - \zeta_j}. \tag{5.5}$$

Diferenciranjem nalazimo

$$\frac{P''(z)P(z) - P'(z)^2}{P(z)^2} = -\sum_{j=1}^{k} \frac{m_j}{(z-\zeta_j)^2}.$$

Odavde, posle izvesnih transformacija, nalazimo

$$\frac{P''(z)}{P'(z)} - \frac{m_i - 1}{m_i}\cdot\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{m_i}\cdot\frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\frac{m_j}{(z-\zeta_j)^2}}{\dfrac{P'(z)}{P(z)}}.$$

Uzimajući $z = z_i$ i zamenjujući $P'(z_i)/P(z_i)$ iz (5.5) na desnoj strani poslednje relacije, dobijamo

$$\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} - \frac{m_i - 1}{m_i} \cdot \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} = \frac{\dfrac{1}{m_i}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{m_j}{z_i - \zeta_j}\right)^2 - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{m_j}{(z - \zeta_j)^2}}{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{m_j}{z_i - \zeta_j}}.$$

Uvodeći grešku $\varepsilon_i := z_i - \zeta_i$ i skraćenice

$$\sigma_i = \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - \zeta_j}, \quad \beta_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j^2 - m_j}{(z_i - \zeta_j)^2} + \frac{2}{m_i} \sum_{\substack{\nu=1 \\ \nu \neq i}}^{k-1} \sum_{\substack{j=\nu+1 \\ j \neq i}}^{k} \frac{m_\nu}{z_i - \zeta_\nu} \frac{m_j}{z_i - \zeta_j},$$

prethodna relacija postaje

$$\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} = \frac{m_i - 1}{m_i} \cdot \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} + \frac{2}{m_i + \varepsilon_i \sigma_i} \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \frac{m_j}{z_i - \zeta_j} + \frac{\varepsilon_i \beta_i}{m_i + \varepsilon_i \sigma_i}$$

$$= \frac{m_i - 1}{m_i} \cdot \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} + \frac{2}{m_i} \frac{1}{1 + \dfrac{\varepsilon_i \sigma_i}{m_i}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \frac{m_j}{z_i - z_j + \varepsilon_j} + \frac{\varepsilon_i \beta_i}{m_i + \varepsilon_i \sigma_i}.$$

Pretpostavimo da sve greške ε_j imaju apsolutne vrednosti istog reda i označimo $|\varepsilon| = \max\limits_{1 \leq j \leq k} |\varepsilon_j|$. Dalje, razvijajući izraz $(1 + \dfrac{\varepsilon_j}{z_i - z_j})^{-1}$ u red, dobijamo ocenu

$$\frac{P''(z_i)}{P'(z_i)} = \frac{m_i - 1}{m_i} \cdot \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} + \frac{2}{m_i} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \frac{m_j}{z_i - z_j} + O_M(\varepsilon). \tag{5.6}$$

Sada primenjujemo ocenu (5.6) u formulama (5.1), (5.2) i (5.3) da bismo dobili simultane metode za nalaženja višestrukih nula polinoma. Radi jednostavnosti izostavljamo indekse iteracije.

SIMULTANI METOD OSADINOG TIPA (I)

Zamenjujući ocenu (5.6) za $P''(z_i)/P'(z_i)$ u osnovnom Osadinom metodu trećeg reda datog formulom (5.1), dobijamo simultani metod Osadinog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{P(z_i)}{2P'(z_i)} m_i(m_i+1) + \frac{m_i(m_i-1)^2}{(m_i-1)\dfrac{2P'(z_i)}{P(z_i)} + 4\sum_{j\neq i}\dfrac{m_j}{z_i - z_j}} \quad (i \in I_k), \tag{5.7}$$

gde je $I_k := \{1,\ldots,k\}$, z_i aproksimacija nule ζ_i, a $\hat{z}_i$ poboljšana aproksimacija. Dobijeni metod zadržava red konvergencije osnovnog Osadinog metoda, što je predmet sledeće teoreme.

Teorema 5.1. *Ako su početne vrednosti $z_1,\ldots,z_k$ dovoljno blizu nula $\zeta_1,\ldots,\zeta_k$ višestrukosti $m_1,\ldots,m_k$, tada simultani metod Osadinog tipa (5.7) ima red konvergencije tri za višestruke nule i dva za jednostruke nule.*

Dokaz. Prvo, ako je $m_i = 1$ dobijamo Newtonovu formulu $\hat{z}_i = z_i - P(z_i)/P'(z_i)$ i red konvergencije je dva. Pretpostavimo da je $m_i > 1$. Uvodeći grešku $\hat{\varepsilon}_i := \hat{z}_i - \zeta_i$, možemo da dovedemo (5.7) na oblik

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_i &= \varepsilon_i - \frac{m_i(m_i+1)\varepsilon_i}{2(m_i+\varepsilon_i\sigma_i)} + \frac{m_i\varepsilon_i(m_i-1)^2}{2(m_i-1)(m_i+\varepsilon_i\sigma_i) + 4\varepsilon_i\sigma_i + 2\varepsilon_i O_M(\varepsilon_j)} \\ &= \frac{\varepsilon_i^2 O_M(\varepsilon_j)m_i - \varepsilon_i^2 O_M(\varepsilon_j)m_i^2 + 2\varepsilon_i^3 O_M(\varepsilon_j)\sigma_i + 2\varepsilon_i^3\sigma_i^2 + 2\varepsilon_i^3 m_i\sigma_i^2}{2(m_i+\varepsilon_i\sigma_i)(\varepsilon_i O_M(\varepsilon_j) - m_i + m_i^2 + \varepsilon_i\sigma_i + \varepsilon_i\sigma_i m_i)}.\end{aligned}$$

Kako je $\sigma_i = O_M(1)$ i imenilac teži konstanti $2m_i^2(m_i-1) \neq 0$ kada $\varepsilon_i \to 0$, iz poslednjeg izraza za $\hat{\varepsilon}_i$ zaključujemo da je

$$|\hat{\varepsilon}_i| = |\varepsilon_i|^2|O(|\varepsilon|) = O(|\varepsilon_i|^3),$$

što znači da je red konvergencije iterativne formule (5.7) jednak tri. □

Simultani metod Laguerreovog tipa

Najpre dovodimo metod Laguerreovog tipa za višestruke nule (5.2) na oblik

$$z_{\nu+1} = z_\nu - \frac{nP(z_\nu)}{P'(z_\nu)\left(1 \pm \sqrt{\dfrac{n-m}{m}\left[(n-1) - n\dfrac{P(z_\nu)}{P'(z_\nu)} \cdot \dfrac{P''(z_\nu)}{P'(z_\nu)}\right]}\right)}. \tag{5.8}$$

Izostavljajući indeks iteracije u (5.8) i uzimajući $z = z_i$, $m = m_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, zamenjujemo količnik $P''(z_i)/P'(z_i)$ dat sa (5.6) u (5.8) i dobijamo

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{nP(z_i)}{P'(z_i)\left(1 \pm \sqrt{\dfrac{n-m_i}{m_i}\left[(n-1) - n\dfrac{P(z_i)}{P'(z_i)}M_i\right]}\right)} \quad (i \in I_k),$$

gde smo označili

$$M_i = \frac{m_i - 1}{m_i}\frac{P'(z_i)}{P(z_i)} + \frac{2}{m_i}\sum_{j \neq i}\frac{m_j}{z_i - z_j}.$$

Sređivanjem dobijamo krajnji oblik simultanog metoda Laguerreovog tipa za višestruke nule

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{nP(z_i)}{P'(z_i)\left(1 \pm \dfrac{n-m_i}{m_i}\sqrt{1 - \dfrac{2n}{n-m_i}\dfrac{P(z_i)}{P'(z_i)}\displaystyle\sum_{j \neq i}\frac{m_j}{z_i - z_j}}\right)}. \tag{5.9}$$

Iterativni metod (5.9) ima isti red konvergencije kao i osnovni metod (5.2), što je pokazano u sledećoj teroremi.

Teorema 5.2. *Ako su početne vrednosti $z_1, \ldots, z_k$ dovoljno blizu nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ višestrukosti $m_1, \ldots, m_k$, tada simultani metod Laguerreovog tipa (5.9) ima red konvergencije jednak tri.*

Dokaz. Iz (5.9) dobijamo

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \frac{nP(z_i)}{P'(z_i)\left(1 \pm \dfrac{n-m_i}{m_i}\sqrt{1 - \dfrac{2n}{n-m_i}\dfrac{P(z_i)}{P'(z_i)}\sum_{j\neq i}\dfrac{m_j}{z_i - z_j}}\right)}.$$

Koristeći ocenu $\sqrt{1-w} \approx 1 - w/2$ za dovoljno malo $|w|$ i uzimajući znak „+" za male vrednosti modula $|P|$ u imeniocu gornjeg izraza (detaljna diskusija o izboru znaka data je u [**79**]), dobijamo

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_i &= \varepsilon_i - \frac{nP(z_i)}{P'(z_i)\left[1 + \dfrac{n-m_i}{m_i}\left(1 - \dfrac{n}{n-m_i}\dfrac{P(z_i)}{P'(z_i)}\sum_{j\neq i}\dfrac{m_j}{z_i - z_j}\right)\right]} \\
&= \varepsilon_i - \frac{m_i}{\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \sum_{j\neq i}\dfrac{m_j}{z_i - z_j}}.
\end{aligned}$$

Zamenjujući količnik $P'(z_i)/P(z_i)$ sa (5.5), dobijamo

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_i &= \varepsilon_i - \frac{m_i}{\sum_{j=1}^{k}\dfrac{m_j}{z_i - \zeta_j} - \sum_{j\neq i}\dfrac{m_j}{z_i - z_j}} \\
&= \varepsilon_i - \frac{m_i}{\dfrac{m_i}{\varepsilon_i} + \sum_{j\neq i} m_j\left(\dfrac{1}{z_i - \zeta_j} - \dfrac{1}{z_i - z_j}\right)} \\
&= \frac{-\varepsilon_i^2\sum_{j\neq i}\dfrac{m_j\varepsilon_j}{(z_i - \zeta_j)(z_i - z_j)}}{m_i - \varepsilon_i\sum_{j\neq i}\dfrac{m_j\varepsilon_j}{(z_i - \zeta_j)(z_i - z_j)}} = \varepsilon_i^2 O_M(\varepsilon) = O_M(\varepsilon_i^3).
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Ovim je teorema dokazana budući da imenilac u (5.10) teži konstanti m_i kada $\varepsilon \to 0$. $\square$

SIMULTANI METOD HALLEYEVOG TIPA

Zamenjujući aproksimaciju (5.6) u formuli Halleyevog tipa (5.3), dobijamo simultani metod Halleyevog tipa za višestruke nule

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{m_i}{\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{m_j}{z_i - z_j}} \quad (i \in I_k). \tag{5.11}$$

Formula (5.11) je, u stvari, Maehlyev metod [**62**] za višestruke nule (videti prvi deo dokaza Teoreme 5.3).

5.3 Metodi zasnovani na Weierstrassovoj popravci

Neka je dat moničan polinom $P(z) = \displaystyle\prod_{j=1}^{k} (z - \zeta_j)^{m_j}$ i neka je $W_i(z)$ Weierstrassova popravka

$$W_i(z) = \frac{P(z)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} (z - z_j)^{m_j}} \quad (i \in I_k). \tag{5.12}$$

Uočimo da funkcija $W_i(z)$ ima iste nule kao polinom P.

Za vrednosti u tački $z = z_i$ pisaćemo kraće $W_i = W_i(z_i), W_i' = W_i'(z_i), W_i'' = W_i''(z_i)$. Takođe, uvodimo oznake

$$\delta_{1,i} = \frac{P'(z_i)}{P(z_i)}, \ \delta_{2,i} = \frac{P''(z_i)}{P(z_i)}, \ S_{1,i} = \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{z_i - z_j}, \ S_{2,i} = \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{(z_i - z_j)^2}. \tag{5.13}$$

Zamenjujući $P'(z_i)/P(z_i)$ i $P''(z_i)/P'(z_i)$ sa W_i'/W_i i W_i''/W_i' (respektivno) u nekim iterativnim formulama za nalaženje višestrukih nula, dobijamo odgovarajuće simultane metode za nalaženje višestrukih nula polinoma P.

Diferenciranjem, iz (5.12) dobijamo

$$\frac{W_i'}{W_i} = \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \frac{m_j}{z_i - z_j} = \delta_{1,i} - S_{1,i}. \tag{5.14}$$

Zatim nalazimo W_i''/W_i'

$$\frac{W_i''}{W_i'} = \frac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \frac{m_j}{z_i - z_j} + \frac{\dfrac{P''(z_i)}{P(z_i)} - \left(\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)}\right)^2 + \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \frac{m_j}{(z_i - z_j)^2}}{\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \frac{m_j}{z_i - z_j}}$$

$$= \delta_{1,i} - S_{1,i} - \frac{\delta_{2,i} - \delta_{1,i}^2 + S_{2,i}}{\delta_{1,i} - S_{1,i}}. \tag{5.15}$$

Korišćenje izraza (5.14) i (5.15) umesto $P'(z_i)/P(z_i)$ i $P''(z_i)/P'(z_i)$ u nekim iterativnim metodima, u cilju konstruisanja simultanih metoda za višestruke nule, biće demonstrirano na sledećem primeru.

SIMULTANI METOD OSADINOG TIPA (II)

Vršeći pomenute zamene u Osadinoj formuli (5.1) dobijamo simultani metod Osadinog tipa za određivanje višestrukih nula

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{2} m_i(m_i + 1)\frac{W_i}{W_i'} + \frac{1}{2}(m_i - 1)^2 \frac{W_i'}{W_i''} \quad (i \in I_k), \tag{5.16}$$

gde je z_i aproksimacija nule ζ_i polinoma P i $\hat{z}_i$ označava novu aproksimaciju. Zamenjujući izraze (5.14) i (5.15) u (5.16), dobijamo

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{m_i(m_i+1)}{2(\delta_{1,i} - S_{1,i})} + \frac{(m_i - 1)^2}{2\left(\delta_{1,i} - S_{1,i} + \dfrac{\delta_{2,i} - \delta_{1,i}^2 + S_{2,i}}{\delta_{1,i} - S_{2,i}}\right)} \quad (i \in I_k). \tag{5.17}$$

Brzina konvergencije iterativnog metoda (5.17) razmatra se u sledećoj teoremi.

Teorema 5.3. *Ako izaberemo početne aproksimacije dovoljno blizu nula $\zeta_1, \ldots \zeta_k$ polinoma P, čije višestrukosti $m_1, \ldots, m_k$ su poznate, simultani metod Osadinog tipa (5.17) za nalaženje višestrukih nula ima red konvergencije jednak četiri.*

Dokaz. Primetimo prvo da za $m_i = 1$ dobijamo

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\delta_{1,i} - S_{1,i}},$$

što predstavlja Maehlyev metod trećeg reda ([**62**]). Pretpostavimo sada da je $m_i > 1$. S obzirom na (5.17), i uzimajući u obzir (5.2), nalazimo

$$\delta_{1,i} - S_{1,i} = \frac{m_i}{\varepsilon_i} - A_i = \frac{1}{\varepsilon_i}(m_i - \varepsilon_i A_i), \tag{5.18}$$

gde je $A_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j \varepsilon_j}{(z_i - \zeta_j)(z_i - z_j)}$. Osim toga, kako je

$$\frac{P''(z_i)P(z_i) - P'(z_i)^2}{P(z_i)^2} = -\sum_{j=1}^{k} \frac{m_j}{(z_i - \zeta_j)^2},$$

nalazimo

$$\delta_{2,i} - \delta_{1,i}^2 + S_{2,i} = \sum_{j \neq i} m_j \cdot \frac{\varepsilon_j(2z_i - z_j - \zeta_j)}{(z_i - z_j)^2 (z_i - \zeta_j)^2} - \frac{m_i}{\varepsilon_i^2} = \frac{1}{\varepsilon_i^2}(\varepsilon_i^2 B_i - m_i), \tag{5.19}$$

gde je $B_i = \sum_{j \neq i} \frac{m_j \varepsilon_j (2z_i - z_j - \zeta_j)}{(z_i - \zeta_j)^2 (z_i - z_j)^2}$. Zamenjujući (5.18) i (5.19) u (5.16), dobijamo

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_i &= \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i m_i (m_i + 1)}{2(m_i - \varepsilon_i A_i)} + \frac{(m_i - 1)^2 \varepsilon_i (m_i - \varepsilon_i A_i)}{2((m_i - \varepsilon_i A)^2 + \varepsilon_i^2 B_i - m_i)} \\
&= \frac{2A_i \varepsilon_i^4 + 2A_i B_i \varepsilon_i^4 - A_i^2 \varepsilon_i^3 - 3m_i A_i^2 \varepsilon_i^3 - m_i B_i \varepsilon_i^3 + m_i^2 B_i \varepsilon_i^3}{2(\varepsilon_i A_i - m_i)(\varepsilon_i^2 A_i^2 + \varepsilon_i^2 B_i - 2m_i \varepsilon_i A_i + m_i^2 - m_i)} \\
&= \frac{(2A_i^3 + 2A_i B_i)\varepsilon_i^4 + (m_i^2 B_i - m_i B_i - 3m_i A_i^2 - A_i^2)\varepsilon_i^3}{2(\varepsilon_i A_i - m_i)(\varepsilon_i^2 A_i^2 + \varepsilon_i^2 B_i - 2m_i \varepsilon_i A_i + m_i^2 - m_i)},
\end{aligned}$$

to jest

$$\hat{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i^3 (m_i^2 B_i - m_i B_i - 3m_i A_i^2 - A_i^2 + (2A_i^3 + 2A_i B_i)\varepsilon_i)}{2(\varepsilon_i A_i - m_i)(\varepsilon_i^2 A_i^2 + \varepsilon_i^2 B_i - 2m_i \varepsilon_i A_i + m_i^2 - m_i)}. \tag{5.20}$$

Iz (5.20) vidimo da je imenilac ograničen i teži $2m_i^2(1-m_i)$ kada $\varepsilon \to 0$. Dalje, kako je $A_i = O_M(\varepsilon)$ i $B_i = O_M(\varepsilon)$, iz (5.20) sledi

$$|\hat{\varepsilon}_i| = |\varepsilon_i|^3 O(|\varepsilon|) = O(|\varepsilon_i|^4),$$

što dokazuje Teoremu 5.3. □

Na sličan način možemo konstruisati druge simultane metode za nalaženje nula polinoma. Naglašavamo da pristup dat u ovom odeljku generiše simultane metode koji poseduju viši red konvergencije u poređenju sa osnovnim metodima.

Primer 1. Predloženi iterativni metodi su testirani na brojnim algebarskim polinomima sa višestrukim nulama. Numerički rezultati pokazuju da je osnovni metod (5.7) trećeg reda donekle nestabilan, posebno u prvim iteracijama. Metodi Laguerreovog i Halleyevog tipa (5.9) i (5.11) ispoljavaju bolje ponašanje. Numerička stabilnost metoda Osadinog tipa četvrtog reda (5.17) je zadovoljavajuća.

Ponašanje pomenutih metoda je ilustrovano na primeru polinoma

$$P(z) = z^9 - 7z^8 + 20z^7 - 28z^6 - 18z^5 + 110z^4 - 92z^3 - 44z^2 + 345z + 225$$

sa nulama $\zeta_1 = 1 + 2i$, $\zeta_2 = 1 - 2i$, $\zeta_3 = -1$ i $\zeta_4 = 3$, čije su višestrukosti $m_1 = 2$, $m_2 = 2$, $m_3 = 3$ i $m_4 = 2$. Za početne vrednosti uzeli smo $z_1^{(0)} = 0.8 + 1.8i$, $z_2^{(0)} = 0.8 - 1.8i$, $z_3^{(0)} = -0.8 - 0.2i$, $z_4^{(0)} = 3.2 - 0.2i$. Mada su ove aproksimacije relativno blizu nula, apsolutne vrednosti polinoma P u ovim početnim tačkama su u opsegu $[10^2, 10^3]$, što ne obezbeđuje brzu konvergenciju u prvim iteracijama. Da bismo kontrolisali tačnost dobijenih aproksimacija uvodimo maksimalnu grešku $\varepsilon_m = \max_i \; |z_i^{(m)} - \zeta_i|$.

Rezultati dobijeni primenom iterativnih metoda (5.7), (5.9), (5.11) i (5.17), dati su u sledećoj listi:

Metod Osadinog tipa (5.7), red **3**, $\varepsilon_1 = 1.27 \times 10^{-1}$, $\varepsilon_2 = 3.32 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_3 = 8.63 \times 10^{-8}$,

$$z_1^{(3)} = 0.999999960684 + 2.000000055328\, i,$$
$$z_2^{(3)} = 0.99999991414 - 2.00000000893\, i,$$
$$z_3^{(3)} = -0.99999997408 + 2.13 \times 10^{-8}, i,$$
$$z_4^{(3)} = 2.999999999998 + 2.99 \times 10^{-12}\, i.$$

Metod Laguerreovog tipa (5.9), red **3**, $\varepsilon_1 = 1.64 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 2.61 \times 10^{-6}$

$$z_1^{(2)} = 1.0000000477 + 1.9999994394\, i,$$
$$z_2^{(2)} = 0.9999994093 - 1.9999994160\, i,$$
$$z_3^{(2)} = -0.9999999935 - 1.06 \times 10^{-8}\, i,$$
$$z_4^{(2)} = 3.0000017804 - 1.91 \times 10^{-6}\, i.$$

Metod Halleyevog tipa (5.11), red **3**, $\varepsilon_1 = 4.87 \times 10^{-3}$, $\varepsilon_2 = 2.76 \times 10^{-8}$,

$$\begin{aligned} z_1^{(2)} &= 1.00000000827 + 1.99999999872\, i, \\ z_2^{(2)} &= 1.00000000747 - 1.99999997348\, i, \\ z_3^{(2)} &= -1.00000000176 - 2.18 \times 10^{-11} i, \\ z_4^{(2)} &= 3.00000000677 - 7.23 \times 10^{-9}\, i. \end{aligned}$$

Metod Osadinog tipa (5.17), red **4**, $\varepsilon_1 = 1.09 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2 = 5.4 \times 10^{-7}$,

$$\begin{aligned} z_1^{(2)} &= 0.999999965874 + 1.999999460663\, i, \\ z_2^{(2)} &= 0.999999944433 - 1.999999876606\, i, \\ z_3^{(2)} &= -1.000000000007 - 1.88 \times 10^{-11}\, i, \\ z_4^{(2)} &= 3.00000026060886 - 8.53 \times 10^{-8}\, i. \end{aligned}$$

Iz gornje liste vidimo da metodi trećeg reda (5.9) i (5.11) pokazuju znatno bolju konvergenciju u poređenju sa metodom (5.7) istog reda. Ovi metodi su dali veoma dobre aproksimacije već u drugoj iteraciji.

5.4 Asinhroni metodi za nalaženje nula polinoma

Iterativne formule koje će biti diskutovane u ovom odeljklu po svojoj strukturi imaju asinhron karakter sa kašnjenjem $r = 1$, o čemu je bilo reči u odeljku 4.1. Zbog toga ćemo metode ovakvog tipa zvati *asinhronim metodima.*

Neka je

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

polinom sa prostim nulama $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ i odgovarajućim aproksimacijama $z_1^{(m)}, \ldots, z_n^{(m)}$ ovih nula u m-toj iteraciji, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

Tipičan metod za iterativno poboljšanje ovih aproksimacija definisan je sa

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{P(z_i^{(m)})}{\prod\limits_{j \neq i} (z_i^{(m)} - z_j^{(m)})} \qquad (i \in I_n;\ m = 0, 1, \ldots) \tag{5.21}$$

i poznat je kao Weierstrassov metod. Dobro je poznato da se u praksi ovaj metod dobro ponaša čak i u slučaju da ζ_i nisu nužno različite nule, mada je u tom slučaju konvergencija linearna.

U nedavnom radu [**53**] Kanno, Kjurkchiev i Yamamoto su pokazali kako se Weierstrassov metod može iskoristiti za simultano nalaženje višestrukih nula kada višestrukosti nisu poznate. Autori su predložili varijantu ovog metoda koja ima višetačkasti karakter. Da bi se izbeglo deljenje nulom u slučaju istih aproksimacija, u imeniocu formule (5.21) koristi se aproksimacija z_i iz m-te iteracije i aproksimacija z_j iz $(m-1)$-ve iteracije, to jest, imamo formulu

$$z_i^{(m+1)} = z_i^{(m)} - \frac{P(z_i^{(m)})}{\prod\limits_{j\neq i}(z_i^{(m)} - z_j^{(m-1)})} \quad (i \in I_n;\ m = 1, 2, \ldots). \tag{5.22}$$

U nastavku razmatramo mogućnost primene višetačkaste modifikacije nekih dobro poznatih metoda za simultano određivanje prostih ili višestrukih nula polinoma. Osnovna pažnja biće posvećena teorijskoj analizi R-reda konvergencije modifikovanih metoda.

Neka $\varepsilon_i^{(m)} = z_i^{(m)} - \zeta_i$ $(i \in I_n)$ označava grešku aproksimacije u m-toj iteraciji pri realizaciji asinhronog metoda koji generiše niz $\{z_i^{(m)}\}$ aproksimacija nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Za široku klasu iterativnih metoda za simultano nalaženje nula polinoma može se izvesti sledeća relacija:

$$\varepsilon_i^{(m+1)} = \alpha_i \left(\varepsilon_i^{(m)}\right)^p \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \beta_{ij} \left(\varepsilon_j^{(m-1)}\right)^q \quad (i \in I_n), \tag{5.23}$$

gde su α_i i β_{ij} kompleksne konstante, a $p, q \geq 1$ celi brojevi.

RED KONVERGENCIJE ASINHRONIH METODA

Dokazaćemo sledeće tvrđenje:

Teorema 5.4. *Neka su $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ nule polinoma P, a početne aproksimacije $z_1^{(0)}, \ldots, z_n^{(0)}$ su određene tako da su dovoljno blizu ovim nulama. Tada je asinhroni algoritam za koji važe relacije (5.23) lokalno konvergentan sa R-redom konvergencije bar η_A, gde je η_A jedinstven pozitivan koren jednačine*

$$\eta^2 - p\eta - q = 0. \tag{5.24}$$

Dokaz. Pod uslovima teoreme možemo naći konstante A i B tako da je $|\alpha_i| \leq A$ i $|\beta_{ij}| \leq B$. Ako u svakom iterativnom koraku m definišemo apsolutnu grešku $e_m = \|\boldsymbol{z}^{(m)} - \boldsymbol{\zeta}\|_\infty$, tada iz (5.23) dobijamo

$$e_{m+1} \leq C e_m^p e_{m-1}^q, \quad C = (n-1)AB. \tag{5.25}$$

S obzirom na izbor početnih vrednosti možemo da usvojimo $e_0 < 1$. Tada iz (5.25) sledi da niz $\{e_m\}$ teži nuli.

Neka je $e_0 = O(E)$, gde je $0 < E < 1$, i neka je η_A red konvergencije niza $\{e_m\}$, tj. $e_{m+1} = O\left(e_m^{\eta_A}\right)$. Tada je

$$e_m = O\left(E^{\eta_A^m}\right), \quad e_{m-1} = O\left(E^{\eta_A^{m-1}}\right).$$

Iz (5.25) dobijamo

$$e_{m+1} = O\left(e_m^p \cdot e_{m-1}^q\right) = O\left(E^{p\eta_A^m + q\eta_A^{m-1}}\right).$$

Na osnovu poslednje relacije i činjenice da je $e_{m+1} = O\left(E^{\eta_A^{m+1}}\right)$, poređenjem eksponenata nalazimo

$$\eta_A^2 = p\eta_A + q.$$

Odavde sledi da $\eta_A > 0$ zadovoljava jednačinu (5.23). □

U ovom odeljku razmatramo brzine konvergencije najčešće korišćenih iterativnih metoda bez popravki i sa popravkama. Utvrdićemo da kod asinhronih metoda bez popravki dolazi do neznatnog gubitka u brzini konvergencije, dok asinhroni metodi sa popravkom nisu od praktičnog značaja jer se njihov red konvergencije drastično smanjuje. Na primer, red konvergencije Maehlyevog metoda sa Newtonovom popravkom je 4, dok je kod asinhrone verzije samo 2.732. Isto važi i za asinhroni Börsch-Supanov metod sa Weierstrassovom popravkom. Red konvergencije Halleyevog metoda sa Newtonovom popravkom je 5, a ovaj red pada približno na 3.562 u slučaju asinhrone verzije.

Radi jednostavnosti, aproksimacije $z_j^{(m-1)}$ nula $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ iz iterativnog koraka $m-1$ biće kratko označene sa z_j^*, a aproksimacije $z_i^{(m)}$ sa z_i. U skladu sa ovim označavanjem uvodimo greške $\varepsilon_i = z_i - \zeta_i$ i

$\varepsilon_j^* = z_j^* - \zeta_j$. Nova aproksimacija $z_i^{(m+1)}$ biće označena sa $\hat{z}_i$, a odgovarajuća greška sa $\hat{\varepsilon}_i = \hat{z}_i - \zeta_i$.

ASINHRONI METOD WEIERSTRASSOVOG TIPA

Najpre razmatramo već pomenuti modifikovani Weierstrassov metod (5.22) koji, sa uvedenim skraćenicama, ima oblik

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{P(z_i)}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j^*)} \quad (i \in I_n),$$

odakle je

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \frac{P(z_i)}{\prod_{j\neq i}(z_i - z_j^*)}.$$

Ispitaćemo red konvergencije ovog asinhronog metoda. Kako je $P(z_i) = \prod_{j=1}^{n}(z_i - \zeta_j)$, imamo

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i \prod_{j\neq i}(z_i - \zeta_j)}{\prod_{j\neq i}(z_i - \zeta_j)\prod_{j\neq i}\left(1 - \dfrac{\varepsilon_j^*}{z_i - \zeta_j}\right)} = \varepsilon_i - \varepsilon_i \prod_{j\neq i}\frac{1}{1 - \dfrac{\varepsilon_j^*}{z_i - \zeta_j}}.$$

Posle razvoja u red izraza pod znakom proizvoda, dobijamo

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \varepsilon_i \prod_{j\neq i}\left(1 + \frac{\varepsilon_j^*}{z_i - \zeta_j} + \cdots\right),$$

odnosno

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i\left[1 - \left(1 + \sum_{j\neq i}\frac{\varepsilon_j^*}{z_i - \zeta_j} + \cdots\right)\right].$$

Odavde dolazimo do asimptotske relacije

$$\hat{\varepsilon}_i \sim \varepsilon_i \sum_{j\neq i} O_M(\varepsilon_j^*),$$

i, prema Teoremi 5.4, iz jednačine $\eta^2 - \eta - 1 = 0$ nalazimo da je R-red konvergencije metoda (5.22) Weierstrassovog tipa jednak bar $\eta_A = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.618$.

ASINHRONI METOD MAEHLYEVOG TIPA

Ako u Maehlyevom metodu ([**1**],[**12**],[**25**],[**62**])

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - z_j}} \quad (i \in I_n)$$

umesto aproksimacije z_j uzmemo aproksimaciju z_j^* iz prethodnog koraka, dobijamo asinhroni metod Maehlyevog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - z_j^*}} \quad (i \in I_n). \tag{5.26}$$

Primenjujući logaritamski izvod nalazimo da je $\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_i - \zeta_i}$, tako da se iz (5.26) dobija

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \frac{1}{\dfrac{1}{\varepsilon_i} + \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - \zeta_j} - \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - z_j^*}}$$

$$= \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i}{1 + \varepsilon_i \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{\zeta_j - z_j^*}{(z_i - \zeta_j)(z_i - z_j^*)}} = -\frac{\varepsilon_i^2 \displaystyle\sum_{j\neq i} A_{ij}\varepsilon_j^*}{1 - \varepsilon_i \displaystyle\sum_{j\neq i} A_{ij}\varepsilon_j^*},$$

gde smo označili $A_{ij} = \dfrac{1}{(z_i - \zeta_j)(z_i - z_j^*)}$. Na kraju dobijamo

$$\hat{\varepsilon}_i = O_M(\varepsilon_i^2) \sum_{j\neq i} O_M(\varepsilon_j^*),$$

a odavde, rešavajući jednačinu $\eta^2 - 2\eta - 1 = 0$, nalazimo da je R-red konvergencije asinhronog metoda (5.26) bar $\eta_A = 1 + \sqrt{2} \approx 2.414$.

ASINHRONI METOD BÖRSCH-SUPANOVOG TIPA

Stavljajući z_j^* umesto z_j u Börsch-Supanovoj iterativnoj formuli [**12**]

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i}{1 + \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{W_j}{z_i - z_j}} \quad (i \in I_n),$$

dolazimo do asinhronog metoda Börsch-Supanovog tipa

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i^*}{1 + \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{W_j^*}{z_i - z_j^*}} \quad (i \in I_n) \tag{5.27}$$

pri čemu je $W_i^* = \dfrac{P(z_i)}{\prod\limits_{j \neq i} (z_i - z_j^*)}$ popravka Weierstrassovog tipa.

Da bismo odredili red konvergencije, koristimo relaciju fiksne tačke

$$\zeta_i = z_i - \frac{W_i^*}{1 + \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{W_j^*}{\zeta_i - z_j^*}} \quad (i \in I_n). \tag{5.28}$$

Oduzimajući (5.28) od (5.27), dobijamo

$$\hat{\varepsilon}_i = \frac{W_i^*}{1 + \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{W_j^*}{\zeta_i - z_j^*}} - \frac{W_i^*}{1 + \sum\limits_{j \neq i} \dfrac{W_j^*}{z_i - z_j^*}} = -\varepsilon_i \frac{W_i^*}{c_i} \sum_{j \neq i} d_{ij} W_j^*,$$

gde je

$$c_i = \Big(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j^*}{\zeta_i - z_j^*}\Big)\Big(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j^*}{z_i - z_j^*}\Big), \quad d_{ij} = \frac{1}{(\zeta_i - z_j^*)(z_i - z_j^*)}.$$

S obzirom da je $W_i^* = O_M(\varepsilon_i)$ i $W_j^* = O_M(\varepsilon_j^*)$, $(j \neq i)$, dolazimo do relacije

$$\hat{\varepsilon}_i = -\frac{\varepsilon_i W_i^*}{c_i} \sum_{j \neq i} O_M(\varepsilon_j^*) = O_M(\varepsilon_i^2) \sum_{j \neq i} O_M(\varepsilon_j^*).$$

Rešavajući jednačinu $\eta^2 - 2\eta - 1 = 0$ dobijamo da je R-red konvergencije asinhronog metoda (5.27) Börsch-Supanovog tipa jednak bar $1 + \sqrt{2} \approx 2.414$.

ASINHRONI METOD HALLEYEVOG TIPA

Definišimo sume

$$S_{\lambda,i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i - z_j^*)^\lambda} \quad (i \in I_n;\ \lambda = 1, 2),$$

$$\Sigma_{1,i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{z_i - \zeta_j} \quad (i \in I_n),$$

skraćenice

$$a_{ij} = (z_i - \zeta_j)(z_i - z_j^*), \qquad b_{ij} = 2z_i - z_j^* - \zeta_j,$$

i funkciju

$$f(z) = \frac{P'(z)}{P(z)} - \frac{P''(z)}{2P'(z)}.$$

Tada simultani metod Halleyevog tipa ima oblik ([**83**], [**118**])

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{f(z_i) - \dfrac{P(z_i)}{2P'(z_i)}\left[S_{1,i}^2 + S_{2,i}\right]} \quad (i \in I_n), \tag{5.29}$$

ili

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{\dfrac{2P'(z_i)}{P(z_i)}}{\left[\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)}\right]^2 + \dfrac{P'(z_i)^2 - P''(z_i)P(z_i)}{P(z_i)^2} - S_{1,i}^2 - S_{2,i}} \quad (i \in I_n). \tag{5.30}$$

Naziv dolazi zbog toga što se funkcija f iz imenioca formule (5.29) pojavljuje u dobro poznatoj Halleyevoj iterativnoj formuli trećeg reda

$$\hat{z} = z - \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{\dfrac{P'(z)}{P(z)} - \dfrac{P''(z)}{2P'(z)}}$$

za određivanje proste nule polinoma P.

Pokazaćemo najpre da asinhroni metod Halleyevog tipa (5.29) pripada klasi metoda za koju važi relacija (5.23), što znači da se Teorema 5.4 može primeniti i na ovaj metod. U tu svrhu koristimo identitete

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z - \zeta_j} \tag{5.31}$$

i

$$\frac{P'(z)^2 - P''(z)P(z)}{P(z)^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z - \zeta_j)^2}, \tag{5.32}$$

koji se lako izvode logaritamskim diferenciranjem.

Najpre, iz (5.31) imamo

$$\frac{2P'(z_i)}{P(z_i)} = 2\Big(\frac{1}{z_i - \zeta_i} + \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - \zeta_j}\Big) = 2\Big(\frac{1}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}\Big)$$

i

$$\Big(\frac{P'(z_i)}{P(z_i)}\Big)^2 - S_{1,i}^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_i - \zeta_j}\right)^2 - \left(\sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j^*}\right)^2$$
$$= \Big(\frac{1}{\varepsilon_i} - \sum_{j \neq i} \frac{\varepsilon_j^*}{a_{ij}}\Big)\Big(\frac{1}{\varepsilon_i} + S_{1,i} + \Sigma_{1,i}\Big).$$

Pomoću identiteta (5.32) nalazimo

$$\frac{P'(z_i)^2 - P''(z_i)P(z_i)}{P(z_i)^2} - S_{2,i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z_i - \zeta_j)^2} - \sum_{j \neq i} \frac{1}{(z_i - z_j^*)^2}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon_i^2} - \sum_{j \neq i} \frac{b_{ij}\varepsilon_j^*}{a_{ij}^2}.$$

Koristeći poslednje dve relacije, iz (5.30) dobijamo

$$\hat{z}_i - \zeta_i = z_i - \zeta_i - \frac{2\Big(\dfrac{1}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}\Big)}{\Big(\dfrac{1}{\varepsilon_i} - \sum\limits_{j\neq i}\dfrac{\varepsilon_j^*}{a_{ij}}\Big)\Big(\dfrac{1}{\varepsilon_i} + S_{1,i} + \Sigma_{1,i}\Big) + \dfrac{1}{\varepsilon_i^2} - \sum\limits_{j\neq i}\dfrac{b_{ij}\varepsilon_j^*}{a_{ij}^2}},$$

to jest,

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \frac{2\varepsilon_i(1+\varepsilon_i\Sigma_{1,i})}{\Big(1-\varepsilon_i\sum\limits_{j\neq i}\dfrac{\varepsilon_j^*}{a_{ij}}\Big)(1+\varepsilon_i S_{1,i} + \varepsilon_i\Sigma_{1,i}\Big) + 1 - \varepsilon_i^2\sum\limits_{j\neq i}\dfrac{b_{ij}\varepsilon_j^*}{a_{ij}^2}}.$$

Posle dovođenja na isti imenilac, dobijamo

$$\hat{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i^2}{G_{ij}}\Big\{S_{1,i} - \Sigma_{1,i} - \sum_{j\neq i}\frac{\varepsilon_j^*}{a_{ij}} - \varepsilon_i\Big[(S_{1,i}+\Sigma_{1,i})\sum_{j\neq i}\frac{\varepsilon_j^*}{a_{ij}} + \sum_{j\neq i}\frac{b_{ij}\varepsilon_j^*}{a_{ij}^2}\Big]\Big\}, \tag{5.33}$$

gde je

$$G_{ij} = 2+\varepsilon_i\Big(S_{1,i}+\Sigma_{1,i}-\sum_{j\neq i}\frac{\varepsilon_j^*}{a_{ij}}\Big) - \varepsilon_i^2\Big[(S_{1,i}+\Sigma_{1,i})\sum_{j\neq i}\frac{\varepsilon_j^*}{a_{ij}} + \sum_{j\neq i}\frac{b_{ij}\varepsilon_j^*}{a_{ij}^2}\Big].$$

Kako je

$$S_{1,i} - \Sigma_{1,i} - \sum_{j\neq i}\frac{\varepsilon_j^*}{a_{ij}} = \sum_{j\neq i}\Big(\frac{1}{z_i - z_j^*} - \frac{1}{z_i-\zeta_j} - \frac{z_j^* - \zeta_j}{(z_i - z_j^*)(z_i-\zeta_j)}\Big) = 0,$$

iz (5.33) sledi

$$\hat{\varepsilon}_i = -\frac{\varepsilon_i^3}{G_{ij}}\Big[(S_{1,i}+\Sigma_{1,i})\sum_{j\neq i}\frac{\varepsilon_j^*}{a_{ij}} + \sum_{j\neq i}\frac{b_{ij}\varepsilon_j^*}{a_{ij}^2}\Big],$$

ili u obliku

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^3\sum_{j\neq i} c_{ij}\varepsilon_j^*, \quad \text{gde je} \quad c_{ij} = -\frac{a_{ij}(S_{1,i}+\Sigma_{1,i})) + b_{ij}}{a_{ij}^2 G_{ij}}. \tag{5.34}$$

Primetimo da $G_{ij} \to 2$ kada $\varepsilon \to 0$, tako da relacija (5.34) ima oblik (5.23) sa $p = 3$ i $q = 1$. Prema tome, možemo direktno da primenimo tvrđenje Teoreme 5.4. Donja granica R-reda konvergencije asinhronog metoda Halleyevog tipa (5.29) je jedinstven pozitivan koren jednačine $\eta^2 - 3\eta - 1 = 0$, to jest, $\eta_A = (3 + \sqrt{13})/2 \approx 3.303$.

ASINHRONI METOD MAEHLYEVOG TIPA SA NEWTONOVOM POPRAVKOM

Ukoliko u asinhroni metod Maehlyevog tipa (5.26) unesemo Newtonovu popravku, dobijamo metod

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)} - \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i + N_j^* - z_j^*}} \quad (i \in I_n).$$

Odavde je

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_i &= \varepsilon_i - \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_i} + \displaystyle\sum_{j \neq i} \left(\frac{1}{z_i - \zeta_i} - \frac{1}{z_i + N_j^* - z_j^*} \right)} \\
&= \varepsilon_i - \frac{\varepsilon_i}{1 + \varepsilon_i \displaystyle\sum_{j \neq i} \frac{N_j^* - z_j^* + \zeta_j}{(z_i - \zeta_j)(z_i + N_j^* - z_j^*)}} \\
&= \frac{\varepsilon_i^2}{1 + \tau_i} \sum_{j \neq i} \frac{N_j^* - \varepsilon_j^*}{l_{ij}},
\end{aligned}$$

gde smo označili

$$l_{ij} = (z_i - \zeta_j)(z_i + N_j^* - z_j^*) \quad \text{i} \quad \tau_i = \sum_{j \neq i} \frac{N_j^* - \varepsilon_j^*}{a_{ij}}.$$

S obzirom da je $N_j^* - \varepsilon_j^* = O_M({\varepsilon_j^*}^2)$, nalazimo

$$\hat{\varepsilon}_i = O_M(\varepsilon_i^2) \sum_{j \neq i} O_M({\varepsilon_j^*}^2).$$

S obzirom na (5.23), iz poslednje relacije je $p = 2$ i $q = 2$ pa se donja granica R-reda konvergencije dobija kao rešenje jednačine $\eta^2 - 2\eta - 2 = 0$, to jest $\eta_A = 1 + \sqrt{3} \approx 2.732$.

ASINHRONI METOD BÖRSCH-SUPANOVOG TIPA SA WEIERSTRASSOVOM POPRAVKOM

Asinhroni metod Börsch-Supanovog tipa sa Weierstrassovom popravkom glasi

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{W_i^*}{1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j^*}{z_i - W_i^* - z_j^*}} \quad (i \in I_n).$$

Korišćenjem relacije fiksne tačke (5.28) imamo

$$\begin{aligned}
\hat{\varepsilon}_i &= \frac{W_i^*}{1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j^*}{\zeta_i - z_j^*}} - \frac{W_i^*}{1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j^*}{z_i - W_i - z_j^*}} \\
&= \frac{W_i^*}{s_i} \sum_{j \neq i} b_{ij} W_j^* (\zeta_i - z_j^* - z_i + W_i^* + z_j^*) \\
&= \frac{W_i^*}{s_i} \sum_{j \neq i} t_{ij} W_j^* (W_i^* - \varepsilon_i),
\end{aligned}$$

gde je

$$s_i = \Big(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j^*}{\zeta_i - z_j^*}\Big)\Big(1 + \sum_{j \neq i} \frac{W_j^*}{z_i - W_i^* - z_j^*}\Big),$$

$$t_{ij} = \frac{1}{(\zeta_i - z_j^*)(z_i - W_i - z_j^*)}.$$

Popravka Weierstrassovog tipa je $W_i^* = \dfrac{P(z_i)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j^*)}$ pa se posle razvoja u red može dovesti na oblik

$$W_i^* = \varepsilon_i \Big(1 + \sum_{j \neq i} \frac{\varepsilon_j^*}{z_i - \zeta_i} + \cdots\Big).$$

Prema tome, $W_i^* - \varepsilon_i = \varepsilon_i \sum_{j\neq i} O_M(\varepsilon_j^*)$, te dolazimo do relacije

$$\hat{\varepsilon}_i = O_M(\varepsilon_i^2) \sum_{j\neq i} O_M(\varepsilon_j^{*^2}).$$

Odavde, poređenjem sa relacijom (5.23), vidimo da je $p = 2$ i $q = 2$. Prema tome, donja granica R-reda konvergencije je rešenje jednačine $\eta^2 - 2\eta - 2 = 0$, to jest $\eta_A = 1 + \sqrt{3} \approx 2.732$.

ASINHRONI METOD HALLEYEVOG TIPA SA NEWTONOVOM POPRAVKOM

Neka su suma $\Sigma_{1,i}$ i funkcija f definisani kao kod asinhronog metoda Halleyevog tipa. Uvedimo sumu

$$S_{\lambda,i} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{(z_i + N_j^* - z_j^*)^\lambda} \quad (i \in I_n;\ \lambda = 1, 2),$$

i skraćenice

$$r_{ij} = (z_i - \zeta_j)(z_i + N_j^* - z_j^*), \qquad q_{ij} = 2z_i + N_j^* - z_j^* - \zeta_j.$$

Tada asinhroni simultani metod Halleyevog tipa sa Newtonovom popravkom ima oblik

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{1}{f(z_i) - \dfrac{P(z_i)}{2P'(z_i)}\Big[S_{1,i}^2 + S_{2,i}\Big]} \quad (i \in I_n), \tag{5.35}$$

ili

$$\hat{z}_i = z_i - \frac{\dfrac{2P'(z_i)}{P(z_i)}}{\left[\dfrac{P'(z_i)}{P(z_i)}\right]^2 + \dfrac{P'(z_i)^2 - P''(z_i)P(z_i)}{P(z_i)^2} - S_{1,i}^2 - S_{2,i}}. \tag{5.36}$$

Iz identiteta (5.31) imamo

$$\frac{2P'(z_i)}{P(z_i)} = 2\Big(\frac{1}{z_i - \zeta_i} + \sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i - \zeta_j}\Big) = 2\Big(\frac{1}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}\Big).$$

Zatim je

$$\Big(\frac{P'(z_i)}{P(z_i)}\Big)^2 - S_{1,i}^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{z_i - \zeta_j}\right)^2 - \left(\sum_{j\neq i} \frac{1}{z_i + N_j^* - z_j^*}\right)^2$$
$$= \Big(\frac{1}{\varepsilon_i} - \sum_{j\neq i} \frac{\varepsilon_j^* - N_j^*}{a_{ij}}\Big)\Big(\frac{1}{\varepsilon_i} + S_{1,i} + \Sigma_{1,i}\Big).$$

Pomoću identiteta (5.32) nalazimo

$$\frac{P'(z_i)^2 - P''(z_i)P(z_i)}{P(z_i)^2} - S_{2,i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(z_i - \zeta_j)^2} - \sum_{j\neq i} \frac{1}{(z_i + N_j^* - z_j^*)^2}$$
$$= \frac{1}{\varepsilon_i^2} - \sum_{j\neq i} \frac{q_{ij}(\varepsilon_j^* - N_j^*)}{r_{ij}^2}.$$

Koristeći poslednje dve relacije i stavljajući $e_j^* = \varepsilon_j^* - N_j^*$, iz (5.36) dobijamo

$$\hat{z}_i - \zeta_i = z_i - \zeta_i - \frac{2\Big(\dfrac{1}{\varepsilon_i} + \Sigma_{1,i}\Big)}{\Big(\dfrac{1}{\varepsilon_i} - \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{e_j^*}{r_{ij}}\Big)\Big(\dfrac{1}{\varepsilon_i} + S_{1,i} + \Sigma_{1,i}\Big) + \dfrac{1}{\varepsilon_i^2} - \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{q_{ij} e_j^*}{r_{ij}^2}},$$

to jest,

$$\hat{\varepsilon}_i = \varepsilon_i - \frac{2\varepsilon_i(1 + \varepsilon_i \Sigma_{1,i})}{\Big(1 - \varepsilon_i \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{e_j^*}{r_{ij}}\Big)(1 + \varepsilon_i S_{1,i} + \varepsilon_i \Sigma_{1,i}\Big) + 1 - \varepsilon_i^2 \displaystyle\sum_{j\neq i} \frac{q_{ij} e_j^*}{r_{ij}^2}}.$$

Posle dovođenja na isti imenilac, dobijamo

$$\hat{\varepsilon}_i = \frac{\varepsilon_i^2}{G_{ij}} \Big\{ S_{1,i} - \Sigma_{1,i} - \sum_{j\neq i} \frac{e_j^*}{r_{ij}} - \varepsilon_i \Big[(S_{1,i} + \Sigma_{1,i}) \sum_{j\neq i} \frac{e_j^*}{r_{ij}} + \sum_{j\neq i} \frac{q_{ij} e_j^*}{r_{ij}^2} \Big] \Big\}, \tag{5.37}$$

gde je

$$G_{ij} = 2+\varepsilon_i\Big(S_{1,i}+\Sigma_{1,i}-\sum_{j\neq i}\frac{e_j^*}{a_{ij}}\Big)-\varepsilon_i^2\Big[(S_{1,i}+\Sigma_{1,i})\sum_{j\neq i}\frac{e_j^*}{a_{ij}}+\sum_{j\neq i}\frac{b_{ij}e_j^*}{a_{ij}^2}\Big].$$

Kako je

$$S_{1,i}-\Sigma_{1,i}-\sum_{j\neq i}\frac{e_j^*}{r_{ij}}$$

$$=\sum_{j\neq i}\Big(\frac{1}{z_i+N_j^*-z_j^*}-\frac{1}{z_i-\zeta_j}-\frac{e_j^*}{(z_i+N_j^*-z_j^*)(z_i-\zeta_j)}\Big)=0,$$

iz (5.37) sledi

$$\hat{\varepsilon}_i=-\frac{\varepsilon_i^3}{G_{ij}}\Big[(S_{1,i}+\Sigma_{1,i})\sum_{j\neq i}\frac{e_j^*}{r_{ij}}+\sum_{j\neq i}\frac{q_{ij}e_j^*}{r_{ij}^2}\Big],$$

ili, s obzirom da je $e_j^*=\varepsilon_j^*-N_j^*=O_M(\varepsilon_j^{*^2})$,

$$\hat{\varepsilon}_i=\varepsilon_i^3\sum_{j\neq i}O_M(\varepsilon_j^{*^2}).$$

S obzirom da $G_{ij}\to 2$ kada $\varepsilon\to 0$, poređenjem poslednje relacije i (5.23) nalazimo da je $p=3$ i $q=2$. Prema tome, R-red konvergencije asinhronog metoda Halleyevog tipa sa Newtonovom popravkom je jedinstven pozitivan koren jednačine $\eta^2-3\eta-2=0$, to jest $\eta_A=(3+\sqrt{17})/2\approx 3.562$.

Na kraju dajemo tabelarni pregled donjih granica R-reda konvergencije svih pomenutih asinhronih metoda, sa parametrima p i q, kao i redove konvergencije sinhronih varijanti (u zagradi).

Asinhroni metod	p	q	Red konv.
Weierstrassov metod	1	1	1.618 (2)
Maehlyev metod	2	1	2.414 (3)
Börsch-Supanov metod	2	1	2.414 (3)
Halleyev metod	3	1	3.303 (4)
Maehlyev metod sa Newtonovom popravkom	2	2	2.732 (4)
Börsch-Supanov metod sa Weiestrassovom popravkom	2	2	2.732 (4)
Halleyev metod sa Newtonovom popravkom	3	2	3.562 (5)

LITERATURA

[1] O. Aberth, *Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously*, Math. Comp. **27** (1973), 339–344.

[2] G. Alefeld, *Eine Modifikation des Newtonverfahres zur Bestimmung der reellen Nulstellen einer reellen Funktion*, Z. Angew. Math. Mech. **50** (1970), 32–33.

[3] G. Alefeld, *Bounding the slope of polynomial operators and some applications*, Computing **26** (1981), 227–237.

[4] G. Alefeld, J. Herzberger, *On the convergence speed of some algorithms for the simultaneous approximation of polynomial zeros*, SIAM J. Numer. Anal. **11** (1974), 237–243.

[5] G. Alefeld, J. Herzberger, Introduction to Interval Computation, Academic Press, New York, 1983.

[6] E.G. Anastasselou, N.I. Ioakimidis, *A generalization of the Siewert-Burniston method for the determination of zeros of analytic functions*, J. Math. Phys. **25** (1984), 2422–2425.

[7] D. Arthur, *The use of interval arithmetic to bound the zeros of real polynomials*, J. Inst. Math. Appl. **10** (1972), 231–237.

[8] G. M. Baudet, *Asynchronous iterative methods for multiprocessors*, J. of ACM **2** (1978), 226–244.

[9] D. P. Bertsekas, J. N. Tsitsiklis, Parallel and Distributed Computation–Numerical Methods, Prentice-Hall Inc., 1989.

[10] E. Bodewig, *On types of convergence and the behavior of approximations in the neighborhood of a multiple root of an equation*, Quart. Appl. Math. **7** (1949), 325–333.

[11] L. Bomans, D. Roose, *Communication benchmarks for the iPSC/2*, In: Hypercube and Distributed Computers. (Proc. I European Workshop on Hypercube and Distributed Computers, eds. F. Andre and J. P. Verjus) North Holland, Amsterdam, 1989, pp. 93–104.

[12] W. Börsch-Supan, *Residuenabschätzung für Polynom-Nullstellen mittels Lagrange-Interpolation*, Numer. Math. **14** (1970), 287–296.

[13] D. Braess, K.P. Hadeler, *Simultaneous inclusion of the zeros of a polynomial*, Numer. Math. **21** (1973), 161–165.

[14] W. Burmeister, J.W. Schmidt, *Determination of cone radius for positive concave operators*, Computing **33** (1984), 37–49.

[15] O. Caprani, K. Madsen, *Iterative methods for interval inclusion of fixed points*, BIT **18** (1978), 42–51.

[16] C. Carstensen, *Anwendungen von Begleitmatrizen*, Z. Angew. Math. Mech. **71** (1991), 809–812.

[17] C. Carstensen, M.S. Petković, *On some modifications of Gargantini's simultaneous inclusion method for polynomial roots by Schroeder's correction*, Appl. Numer. Math. **25** (1993), 59–67.

[18] C. Carstensen, M.S. Petković, *On iteration methods without derivatives for the simultaneous determination of polynomial zeros*, J. Comput. Appl. Math. **45** (1993), 251–266.

[19] M. Cosnard, P. Fraigniaud, *Asynchronous Durand-Kerner and Aberth polynomial root finding methods on a distributed memory multicomputer*, Parallel Computing **9** (1989), 79–84.

[20] M. Cosnard, P. Fraigniaud, *Finding the roots of a polynomial on an MIMD multicomputer*, Parallel Computing **15** (1990), 75–85.

[21] M. Cosnard, P. Fraigniaud, *Analysis of asynchronous polynomial root finding methods on a distributed memory multicomputer*, IEEE Transaction on Parallel and Distributed Systems **5** (1994), 639–648.

[22] M. Davies, B. Dawson, *On the global convergence of Halley's iteration formula*, Numer. Math. **24** (1975), 133–135.

[23] K. Dochev, *Modified Newton method for the simultaneous approximate calculation of all roots of a given algebraic equation (*na bugarskom*)*, Mat. Spis. B"lgar. Akad. Nauk **5** (1962), 136–139.

[24] E. Durand, Solution numériques des équations algébraiques, Tom. I: Équations du Type F(x)=0; Racines d'un Polynôme, Masson, Paris, 1960.

[25] L.W. Ehrlich, *A modified Newton method for polynomials*, Comm. ACM **10** (1967), 107–108.

[26] G. H. Ellis, L. T. Watson, *A parallel algorithm for simple roots of polynomials*, Comput. Math. Appls **2** (1984), 107–121.

[27] L. Euler, *Opera Omnia, Ser. I, Vol. X*, pp. 422–455.

[28] T.L. Freeman, *Calculating polynomial zeros on a local memory parallel computer*, Parallel Computing **12** (1989), 351–358.

[29] T.L. Freeman, M.K. Bane, *Asynchronous polynomial zero-finding algorithms*, Parallel Computing **17** (1991), 673–681.

[30] J. Friedman, *Random polynomials and approximate zeros of Newton's method*, SIAM J. Comput. **19** (1990), 1068–1099.

[31] I. Gargantini, *Parallel algorithms for the determination of polynomial zeros*, Proc. III Manitoba Conf. on Numer. Math., Winnipeg 1973 (eds. R. Thomas and H.C. Williams), Utilitas Mathematica Publ. Inc., Winnipeg 1974, pp. 195–211.

[32] I. Gargantini, *Parallel Laguerre iterations: The complex case*, Numer. Math. **26** (1976), 317–323.

[33] I. Gargantini, *Further applications of circular arithmetic: Schröder-like algorithms with error bounds for finding zeros of polynomials*, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978), 497–510.

[34] I. Gargantini, P. Henrici, *Circular arithmetic and the determination of polynomial zeros*, Numer. Math. **18** (1972), 305–320.

[35] J.A. Grant, G.D. Hitchins, *The solution of polynomial equations in interval arithmetic*, Comput. J. **16** (1973), 69–72.

[36] E. Halley, *A new, exact, and easy method of finding the roots of any equations generally, and that without any previous reduction*, (*ABRIDGED*, by C. Hutton, G. Shaw, R. Pearson, prevod sa latinskog), Phil. Trans. Roy. Soc. London III, 1809.

[37] E. Hansen, *On solving systems of equations using interval arithmetic*, Math. Comp. **22** (1968), 374–384.

[38] E. Hansen, *A globally convergent interval method for computing and bounding real roots*, BIT **18** (1978), 415–424.

[39] E. Hansen, *Interval forms of Newtons method*, Computing **20** (1978), 153–163.

[40] E. Hansen, Global Optimization using Interval Analysis, Marsel Dekker, New York, 1992.

[41] E. Hansen, *Computing zeros of functions using generalized interval arithmetic*, Interval Comput. **3** (1993), 1–28.

[42] E. Hansen, M. Patrick, *A family of root finding methods*, Numer. Math. **27** (1977), 257–269.

[43] R. Hanson, *Automatic error bounds for real roots of polynomials having interval coefficients*, Computer J. **13** (1970), 284–288.

[44] P. Henrici, Elements of Numerical Analysis, John Wiley & Sons, New York, 1964.

[45] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis, Vol. I, John Wiley and Sons Inc., New York, 1974.

[46] Dj. Herceg, S. Tričković, M.S. Petković, *On the fourth order methods of Weierstrass' type*, II World Congress on Nonlinear Analysts (ed. V. Lakshmikantham), (Atina 1996) (pojaviće se).

[47] J. Herzberger, *Über ein Verfahren zur Bestimmung reeller Nullstellen mit Anwendung auf Parallelrechnung*, Elektron. Rechenanl. **14** (1972), 250–254.

[48] J. Herzberger, *On the R-order of some recurrences with applications to inclusion methods II*, Computing **37** (1986), 255–259.

[49] J. Herzberger, *Bounds for the R-order of certain iterative numerical processes*, BIT **26** (1986), 259–262.

[50] J. Herzberger, L. Metzner, *On the Q-order and R-order of convergence for coupled sequences arising in iterative numerical processes*, In: Numerical Methods and Error Bounds (eds. G. Alefeld and J. Herzberger), Mathematical Research Vol. 89, Akademie Verlag, Berlin, 1996, pp. 120–131.

[51] N.I Ioakimidis, E.G. Anastasselou, *On the simultaneous determination of zeros of analytic or sectionally analytic functions*, Computing **36** (1986), 239–247.

[52] P. Jarratt, D. Nudds, *The use of rational functions in the iterative solution of equations on a digital computer*, Computer J. **8** (1965), 62–65.

[53] S. Kanno, N. Kjurkchiev, T. Yamamoto, *On some methods for the simultaneous determination of polynomial zeros*, Japan J. Indust. Appl. Math. **13** (1996), 267–288.

[54] I.O. Kerner, *Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen*, Numer. Math. **8** (1966), 290–294.

[55] D. Knuth, The Art of Programing, Vol. 2, Addison-Wesley, New York, 1969.

[56] L.V. Kolev, *Use of interval slopes for the irrational part of factorable functions*, Reliable Computing **1** 1997 (u štampi).

[57] R. Krawczyk, *Iterationsverfahren zur Bestimmung komplexer Nullstellenn*, Z. Angew. Math. Mech. **50** (1970), 58–61.

[58] R. Krawczyk, *Intervallsteigungen für rationale Fnktionen und zugeordnete zentrische Formen*, Freiburger Intervall-Berichte **2** (1983), 1–30.

[59] R. Krawczyk, A. Neumaier, *Interval slopes for rational functions and associated centered forms*, SIAM J. Numer. Anal. **22** (1985), 604–616.

[60] E. Laguerre, *Sur la résolution des équations numériques*, Nouvelles Annales de Mathématiques, sér.2. 17 1878 Vol. 1, Paris 1898, 46–48.

[61] K. Madsen, *A root-finding algorithm based on Newton's method*, BIT **13** (1973), 71–75.

[62] V.H. Maehly, *Zur iterativen Auflösung algebraischer Gleichungen*, Z. Angew. Math. Phys. **5** (1954), 260–263.

[63] M. Marden, Geometry of Polynomials, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1966.

[64] R.E. Moore, Interval Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.

[65] D.E. Muller, *Solving algebraic equations using an automatic computer*, Math. Tables Aids Comput. Vol. **10** (1956), 208–215.

[66] K. Murota, *Global convergence of a modified Newton iteration for algebraic equations*, SIAM J. Numer. Anal. **19** (1982), 793–799.

[67] A. Neumaier, Interval Methods for Systems of Equations, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[68] A.W.M. Nourein, *An iteration formula for the simultaneous determination of the zeros of a polynomial*, J. Comput. Appl. Math. **4** (1975), 251–254.

[69] A.W.M. Nourein, *An improvement on Nourein's method for the simultaneous determination of the zeroes of a polynomial (an algorithm)*, J. Comput. Appl. Math. **3** (1977), 109–110.

[70] J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, Iterative Solution of Nonlinear Equations in several Variables, Academic Press, New York, 1970.

[71] N. Osada, *An optimal multiple root-finding method of order three*, J. Appl. Comput. Math. **51** (1994), 131–133.

[72] A.M. Ostrowski, Solution of Equations and Systems of Equations, Academic Press, New York, 1966.

[73] B. Park, S. Hitotumatu, *A study on Muller's method*, Publ. RIMS Kyoto Univ. Vol **23** (1987), 667–672.

[74] Lj. Petković, *The analysis of the numerical stability of iterative methods using interval arithmetic*, In: Computer Arithmetic and Enclosure Methods (eds. L. Atanassova and J. Herzberger), North Holand, Amsterdam 1992, pp. 309–318.

[75] Lj. Petković, S. Tričković, *On the construction of simultaneous methods for multiple zeros*, II World Congress on Nonlinear Analysts, Atina, 1996 (ed. V. Lakshmikantham) (pojaviće se).

[76] Lj. Petković, S.B. Tričković, *Slope methods of higher order for solving polynomial equations*, Zbornik radova XI seminara primenjene matematike (ed. D. Herceg), Budva 1996, Institut za matematiku, Novi Sad (pojaviće se).

[77] Lj. Petković, S.B. Tričković, M.S. Petković, *Slope methods for the inclusion of complex zeros of polynomials*, Reliable Computing (pojaviće se).

[78] Lj. Petković, S. Tričković, D. Živković, *Secant slope method for inclusion of complex zeros of polynomials*, In: Numerical Methods and Error Bounds (eds. G. Alefeld and J. Herzberger), Mathematical Research 89, Akademie Verlag, Berlin 1996, 172–177.

[79] Lj. Petković, D. Živković, *On an accelerated Laguerre's method for finding zeros of a polynomial*, Proc. of X Conf. on Applied Mathematics (eds. D. Herceg and Lj. Cvetković), Institute of Mathematics, Novi Sad, 1996, pp. 55–63.

[80] M.S. Petković, *On an interval Newton's method derived from exponential curve fitting*, Z. Angew. Math. Mech. **61** (1981), 117–119.

[81] M.S. Petković, *On a generalization of the root iterations for polynomial complex zeros in circular interval arithmetic*, Computing **27** (1981), 37–55.

[82] M.S. Petković, *On an iterative method for simultaneous inclusion of polynomial complex zeros*, J. Comput. Appl. Math. **8** (1982), 51–56.

[83] M. S. Petković, *On Halley-like algorithms for the simultaneous approximation of polynomial complex zeros*, SIAM J. Numer. Anal. **26** (1989), 740–763.

[84] M.S. Petković, Iterative Methods for Simultaneous Inclusion of Polynomial Zeros, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[85] M.S. Petković, *Inclusion methods for the zeros of analytic functions*, In: Computer Arithmetic and Enclosure Methods (eds. L. Atanassova and J. Herzberger), North Holand 1992, pp. 319–328.

[86] M. S. Petković, *On initial conditions for the convergence of simultaneous root finding methods*, Computing **57** (1996), 163–178.

[87] M.S. Petković, C. Carstensen, *On some improved inclusion methods for polynomial roots with Weierstrass' corrections*, Comput. Math. Appls. **25** (1993), 59–67.

[88] M.S. Petković, C. Carstensen, M. Trajković, *Weierstrass' formula and zero-finding methods*, Numer. Math. **69** (1995), 353–372.

[89] M.S. Petković, Lj. Cvetković, *On a hybrid method for a polynomial complex zero*, Comput. Math. Appls. **21** (1991), 181–186.

[90] M.S. Petković, D. Herceg, *Higher-order iterative methods for approximating zeros of analytic functions*, J. Comput. Appl. Math. **39** (1992), 243–258.

[91] M.S. Petković, Dj. Herceg, *Börsch-Supan-like methods: point estimation and parallel implementation*, Intern. J. Computer Math. (u štampi).

[92] M.S. Petković, J. Herzberger, *Hybrid inclusion algorithms for polynomial complex zeros in rectangular arithmetic*, Appl. Numer. Math. **7** (1991), 241–262.

[93] M.S. Petković, S. Ilić, S. Tričković, *A family of simultaneous zero finding methods*, (u procesu recenzije).

[94] M.S. Petković, Z.M. Marjanović, *A class of simultaneous methods for the zeros of analytic functions*, Comput. Math. Appls. **10** (1991), 79–87.

[95] M.S. Petković, Lj.D. Petković, *A computational test for the existence of polynomial zero*, Comput. Math. Appls. **17** (1989), 1109–1114.

[96] M.S. Petković, L.V. Stefanović, *On some improvements of square root iteration for polynomial zeros*, J. Comput. Appl. Math. **15** (1986), 13–25.

[97] M.S. Petković, M. Trajković, *On the R-order of convergence of dependent sequences involved in iterative processes*, Proc. of VIII Conf. Applied Mathematics (ed. J. Jaćimović), Podgorica 1994, 197–206.

[98] M.S. Petković, S.B. Tričković, *On zero-finding methods of fourth order*, J. Comput. Appl. Math. **64** (1995), 291–294.

[99] M.S. Petković, S.B. Tričković, *Tchebychev-like method for simultaneous finding zeros of analytic functions*, Comput. Math. Appls. **31** (1996), 85–93.

[100] M.S. Petković, S. Tričković, Dj. Herceg, *On Euler-like methods for the simultaneous approximation of polynomial zeros*, (u procesu recenzije).

[101] T. Pomentale, *A class of iterative methods for holomorphic functions*, Numer. Math. **18** (1971), 193–203.

[102] H. Ratschek , J. Rokne, Computer Methods for the Range of Functions, Ellis Horwood, Chichester, 1984.

[103] J. Rokne, P. Lancester, *Complex interval arithmetics*, Comm. ACM **14** (1971), 111-112.

[104] T. Sakurai, M.S. Petković, *On some simultaneous methods based on Weierstrass' correction*, J. Comput. Appl. Math. **72** (1996), 275–291.

[105] T. Sakurai, T. Torii, H. Sugiura, *A high-order iterative formula for simultaneous determination of zeros of a polynomial*, J. Comput. Appl. Math. **38** (1991), 387–397.

[106] G.S. Salehov, *O shodimosti metoda kasatel'nyh giperbol*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **82** (1952), 525-528.

[107] J.W. Schmidt, *On the R-order of coupled sequences*, Computing **26** (1981), 333–342.

[108] E. Schröder, *Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen*, Math. Ann. **2** (1870), 317–365.

[109] Bl. Sendov, A. Andreev, N. Kjurkchiev, Numerical Solution of Polynomial Equations (Handbook of Numerical Analysis, Vol. III), Elsevier Science, New York, 1994.

[110] S. Smale, *The fundamental theorem of algebra and complexity theory*, Bull. Am. Math. Soc. **4** (1981), 1–36.

[111] V.I. Smirnov, Course of Higher Mathematics, Vol. III, Part 2: Complex variables, Special functions, Pergamon/Addison-Wesley, Oxford, 1964.

[112] B.T. Smith, *Error bounds for the zeros of a polynomial based upon Gerschgorin's theorems*, JACM **17** (1970), 661 – 674.

[113] J.F. Traub, Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.

[114] S. Tričković, S. Ilić, *A family of simultaneous methods for finding zeros of analytic functions*, Filomat (pojaviće se).

[115] S. Tričković, M. Trajković, M. Petković, *Asynchronous methods for simultaneous determination of polynomial roots*, Filomat **2** (1995), 273–284.

[116] V.A. Varjuhin, S.A. Kasjanjuk, *Ob iteracionnyh metodah utočnenija kornej uravnenij*, Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. **9** (1969), 684–687.

[117] H.S. Wall, *A modification of Newton's method*, Amer. Math. Montly **2** (1948), 90–94.

[118] X. Wang, S. Zheng, *A family of parallel and interval iterations for finding all roots of a polynomial simultaneously with rapid convergence (I)*, J. Comput. Math. **1** (1984), 70–76.

[119] X. Wang, S. Zheng, *The quasi-Newton method in parallel circular iteration*, J. Comput. Math. **4** (1984), 305—309.

[120] Weierstrass K., *Neuer Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale Funktion einer Veränderlichen dargestellt werden kann als ein Produkt aus linearen Funktionen derselben Veränderlichen*, Ges. Werke **3** (1903), 251–269 (Johnson Reprint Corp., New York, 1967).

[121] W. Werner, *On the simultaneous determination of polynomial roots*, In: Lecture Notes in Mathematics 953, Springer-Verlag, Berlin (1982), 188–202.

[122] T. Yamamoto, S. Kanno, L. Atanassova, *Validated computation of polynomial zeros by the Durand-Kerner method*, In: Topics in Validated Computations (ed. J. Herzberger), Elsevier Science B.V 1994, pp. 27–53.

KRATKA BIOGRAFIJA

Rođen sam 6. avgusta, 1957. godine u Nišu. Osnovnu školu i gimnaziju „Bora Stanković" završio sam u Nišu sa odličnim uspehom. Godine 1976. upisao sam se na Prirodno-matematički fakultet u Beogradu, grupa za matematiku, i diplomirao 1982. godine.

U periodu od 1983. do 1986. radio sam kao profesor matematike u gimnaziji „Drakče Milovanović" u Aleksincu. Sledeće dve godine radio sam kao vodeći programer u Beogradskom izdavačko-grafičkom zavodu. Period od 1988. do 1990. proveo sam u Australiji, gde sam radio na različitim poslovima razvoja i održavanja softvera. Po povratku, jednu godinu sam radio kao profesor informatike i računarstva u gimnaziji „Svetozar Marković" u Nišu, a sledeću godinu (1991.-1992.) kao projektant-analitičar u uvozno-izvoznom preduzeću „Jugodrvo" u Beogradu.

Poslediplomske studije na Elektronskom fakultetu u Nišu završio sam sa prosečnom ocenom 9.83 odbranivši magistarski rad pod naslovom "Iterativni metodi za rešavanje nelinearnih jednačina" juna 1995. godine. Od marta 1996. godine radim kao asistent na Građevinskom fakultetu u Nišu.

Autor sam ili koautor 13 naučnih radova. Učestvovao sam sa naučnim saopštenjima na četiri internacionalne i dve domaće konferencije.

Niš, 14. aprila 1997. Mr Slobodan Tričković