УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ **ОБРАЗАЦ 6**
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ИЗВЕШТАЈ О ОЦЕНИ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ

„Парцијална уређења изоморфних подструктура релацијских структура“

Борише Кузељевића

I ПОДАЦИ О КОМИСИЈИ

1. Датум и орган који је именовао комисију:

   30. јануар 2014. године, Наставно-научно веће Природно-математичког факултета у Новом Саду, на 17. седници.

2. Састав комисије са назнаком имена и презимена сваког члана, звања, назива уже научне области за коју је изабран у звање, датума избора у звање и назив факултета, установе у којој је члан комисије запослен:

   1. Академик др Стеван Пилиповић, редовни професор, ужа научна област Анализа и вероватноћа, изабран 25.02.1988., ПМФ у Новом Саду – председник
   2. Др Милош Курилић, редовни професор, ужа научна област Анализа и вероватноћа, изабран 15.06.2004., ПМФ у Новом Саду – ментор
   3. Др Милан Груловић, редовни професор, ужа научна област Алгебра и математичка логика, изабран 05.12.2000., ПМФ у Новом Саду – члан
   4. Др Борис Шобот, доцент, ужа научна област Алгебра и математичка логика, изабран 20.01.2010., ПМФ у Новом Саду – члан
   5. Др Жарко Мијајловић, редовни професор, ужа научна област Алгебра и математичка логика изабран 1993. године, Математички факултет у Београду -члан

II ПОДАЦИ О КАНДИДАТУ

1. Име, име једног родитеља, презиме:

   Бориша, Зоран, Кузељевић

2. Датум рођења, општина, држава:

   13.6.1985., Прибој, Република Србија

3. Назив факултета, назив студијског програма дипломских академских студија – мастер и стечени стручни назив:

   Математички факултет у Београду, теоријска математика и примене, дипломирани математичар - мастер

4. Година уписа на докторске студије и назив студијског програма докторских студија:

2010., математика

5. Назив факултета, назив магистарске тезе, научна област и датум одбране: ------------

6. Научна област из које је стечено академско звање магистра наука: -----------

III НАСЛОВ ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Парцијална уређења изоморфних подструктура релацијских структура

IV ПРЕГЛЕД ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Навести кратак садржај са назнаком броја страна, поглавља, слика, шема, графикона и сл.

Докторска дисертација има 71 страну и садржи 27 референци и индекс. Садржај дисертације је распоређен у 5 поглавља, од којих су прва два уводна, а остала садрже оригиналне резултате.

Прво поглавље је уводно и посвећено је линеарним уређењима. Овде су дате дефиниције основних појмова, као и позната тврђења о линеарним уређењима која ће бити коришћена у даљем тексту. Дата је Канторова карактеризација рационалне линије (као јединственог пребројивог густог линеарног уређења без крајњих тачака), а ту су и тврђења о универзалности и ултрахомогености ове структуре. Наведена је карактеризација реалне линије (као јединственог сепарабилног густог Дедекинд-комплетног линеарног уређења без крајњих тачака) те теорема Шенфлиса и Хаусдорфа о репрезентацији произвољног линеарног уређења у виду суме расејаних линеарних уређења. Такође је дата репрезентација непребројивих комплетних линеарних подуређења реалне праве са неизолованим минимумом, која ће бити коришћена у доказу главних тврђења датих у дисертацији. На крају је наведена карактеризација уређајних типова максималних ланаца у парцијалном уређењу копија рационалне линије – тврђење које се у дисертацији уопштава на важне класе пребројивих ултрахомогених структура, парцијална уређења и графове.

Друго поглавље садржи преглед дефиниција и теорема из теорије модела коришћених у дисертацији. Уводе се ултрахомогене структуре и наводе главна тврђења Фраисеове теорије. Даје се карактеризација пребројивог ултрахомогеног универзалног парцијалног уређења (случајног посета) и показује се да су орбите ове структуре њене изоморфне копије, те да је ова структура недељива. Уводе се Радо граф (пребројиви случајан граф, пребројиви ултрахомогени универзални граф) и Хенсонови графови и наводе се главне особине ових структура. Као пример конструкције која ће у тези више пута бити коришћена приказана је генеричка конструкција Радо графа.

Треће поглавље садржи општа тврђења о типу максималних ланаца у посету копија пребројиве ултрахомогене релацијске структуре. Прецизније, ако је

- X пребројива ултрахомогена релацијска структура пребројивог језика,
- $\Pi(X)$ колекција њених изоморфних подструктура,
- $M(X)$ класа уређајних типова максималних ланаца у парцијалном уређењу $(\Pi(X)\cup\{\phi\},\subset)$
- C_R класа уређајних типова компактних подскупова реалне праве са неизолованим минимумом,
- B_R поткласа класе C_R коју чине типови нигде густих (у тополошком смислу) подскупова R, или, што је еквивалентно, типови буловских уређења (тј. оних која имају густе скокове),

прво се даје потребан услов да неко линеарно уређење буде изоморфно максималном ланцу копија неке пребројиве ултрахомогене релацијске структуре; наиме доказује се

Теорема 3.4 $M(X) \subset C_R$.

Обратно питање, ако су дати пребројива ултрахомогена релацијска структура X и линеарно уређење $L \in C_R$, да ли је L изоморфно неком максималном ланцу копија X , је много теже и главни резултати ове дисертације су у вези са овим проблемом. Главно тврђење главе 3, теорема 3.11, даје (врло опште) довољне услове за једнакост $M(X) = C_R$.

Теорема 3.11 Нека је X пребројива релацијска структура.

(А) Ако постоји партиција $\{J_n : n \in \omega\}$ скупа рационалних бројева Q и структура са доменом Q у истом језику као X таква да је:

(i) Скуп J_0 густ у Q ,
(ii) J_n , $n \in N$, су коиницијални подскупови у Q ,
(iii) за свако $x \in R \cup \{\infty\}$ и свако A , из $J_0 \cap (-\infty, x) \subset A \subset Q \cap (-\infty, x)$ следи $A \cong X$
(iv) за свако $q \in J_0$ и свако C , из $J_0 \cap (-\infty, q] \subset C \subset Q \cap (-\infty, q]$ следи $\neg A \cong X$

тада за свако непребројиво комплетно линеарно уређење L које се утапа у R , у коме $\min L$ нема следбеника и такво да су сви почетни сегменти у $L \setminus \{\min L\}$ непребројиви, постоји максималан ланац у посету $(\Pi(X) \cup \{\phi\}, \subset)$ изоморфан линеарном уређењу L .

(Б) Ако важи и додатни услов да:

(v) за свако пребројиво комплетно линеарно уређење L у коме минимум нема следбеника постоји максималан ланац у парцијалном уређењу $(\Pi(X) \cup \{\phi\}, \subset)$ изоморфан линеарном уређењу L ,

тада за свако комплетно линеарно уређење L које се утапа у R , у коме $\min L$ нема следбеника постоји максималан ланац у посету $(\Pi(X) \cup \{\phi\}, \subset)$ изоморфан линеарном уређењу L .

У наставку главе 3 се затим наводе познати резултати о позитивним фамилијама, па се доказује и следећа теорема

Теорема 3.9 Ако скуп $\Pi(X)$ садржи неку позитивну фамилију, онда је $B_R \subset M(X)$.

Ови резултати су садржај рада

M. S. Kurilić, B. Kuzeljević, Maximal chains of isomorphic subgraphs of countable ultrahomogeneous graphs, који је послат у часопис и у фази је рецензије.

Четврто поглавље је посвећено ултрахомогеним графовима. Према познатој класификацији Лахлана и Вудроуа сваки пребројиви ултрахомогени граф X је изоморфан једном од следећих:

1. Радо графу,
2. Хенсоновом графу H_n, за неко $n \geq 3$,
3. Унији μ дисјунктних копија комплетног графа кардиналности ν, K_ν, где је $\mu\nu = \omega$,
4. Комплементу неког од графова наведених под 1, 2 и 3.

Како је скуп копија графа једнак скупу копија комплемента тог графа, за одређивање класе $M(X)$ довољно је посматрати случајеве 1, 2 и 3. Главни резултат главе 4 је одређивање класе $M(X)$ за све пребројиве ултрахомогене графове, формулисан у следећој теореми

Теорема 4.2 Нека је X пребројив ултрахомогени граф. Тада

- $M(X) = C_R$, ако је X изоморфан Радо графу или неком Хенсоновом графу;
- $M(X) = B_R$, ако је X изоморфан неком од графова наведених под 3.

Пето поглавље је посвећено ултрахомогеним посетима. Према познатој класификацији Шмерла сваки пребројиви ултрахомогени посет X је изоморфан једном од следећих:

1. Пребројивом антиланцу,
2. Дисјунктној унији највише пребројиво много копија рационалне линије,
3. Посету C_n, за неко $n \leq \omega$,
4. Случајном посету.

Главни резултат главе 5 је одређивање класе $M(X)$ за све пребројиве ултрахомогене посете, формулисан у следећој теореми

Теорема 4.2 Нека је X пребројив ултрахомогени посет. Тада

- $M(X) = C_R$, ако је X изоморфан неком од посета наведених под 2, 3 и 4;
- $M(X) = B_R$, ако је X изоморфан посету наведеном под 1.

V ВРЕДНОВАЊЕ ПОЈЕДИНИХ ДЕЛОВА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:

Кандидат је у прве две главе докторске дисертације добро систематизовао познате резултате, што текст чини комплетим, док је у преостала три поглавља дошао до оригиналних и интересантних резултата и тако дао допринос овој области математике. Тиме је кандидат у потпуности реализовао постављене циљеве везане за анализу парцијалних уређења изоморфних подструктура релацијских структура.

VI СПИСАК НАУЧНИХ И СТРУЧНИХ РАДОВА КОЈИ СУ ОБЈАВЉЕНИ ИЛИ ПРИХВАЋЕНИ ЗА ОБЈАВЉИВАЊЕ НА ОСНОВУ РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА У ОКВИРУ РАДА НА ДОКТОРСКОЈ ДИСЕРТАЦИЈИ

Таксативно навести називе радова, где и када су објављени. Прво навести најмање један рад објављен или прихваћен за објављивање у часопису са ISI листе односно са листе министарства надлежног за науку када су у питању друштвено-хуманистичке науке или радове који могу заменити овај услов до 01.јануара 2012. године. У случају радова прихваћених за објављивање, таксативно навести називе радова, где и када ће бити објављени и приложити потврду о томе.

1. M. S. Kurilić, B. Kuzeljević, Maximal chains of isomorphic subgraphs of the Rado graph, *Acta Math. Hungar.*, 141,1 (2013) 1-10. M23
2. M. S. Kurilić, B. Kuzeljević, Maximal chains of isomorphic suborders of countable ultrahomogeneous partial orders, *Order*, (у штампи)
DOI: 10.1007/s11083-014-9317-9 M23

VII ЗАКЉУЧЦИ ОДНОСНО РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Главни закључци и резултати истраживања су следећа тврђења:

- Показано је да је $M(X) \subset C_R$, за сваку пребројиву ултрахомогену релацијску структуру X, те да је $B_R \subset M(X)$, ако скуп копија структуре X садржи неку позитивну фамилију;
- У теореми 3.11, дат је врло општи довољан услов за једнакост $M(X) = C_R$.
- Класа $M(X)$ је одређена за све пребројиве ултрахомогене графове и за сва пребројива ултрахомогена парцијална уређења. Показано је да је у ова два случаја $M(X) = C_R$ или $M(X) = B_R$, што је врло интересантно, јер се ради о суштински различитим математичким објектима. Стога су докази у два наведена случаја различити, па је питање да ли је $M(X) = C_R$ или $M(X) = B_R$, за сваку пребројиву ултрахомогену структуру која има нетривијалне копије, веома комплексно и биће предмет даљих истраживања.

VIII ОЦЕНА НАЧИНА ПРИКАЗА И ТУМАЧЕЊА РЕЗУЛТАТА ИСТРАЖИВАЊА

Експлицитно навести позитивну или негативну оцену начина приказа и тумачења резултата истраживања.

Резултати истраживања су приказани на прегледан и јасан начин, па начин приказа заслужује високу оцену.

IX	**КОНАЧНА ОЦЕНА ДОКТОРСКЕ ДИСЕРТАЦИЈЕ:**
1.	Да ли је дисертација написана у складу са образложењем наведеним у пријави теме Дисертација је написана у складу са образложењем прихваћене теме.
2.	Да ли дисертација садржи све битне елементе Дисертација садржи све битне елементе. Наиме, због кохерентности текста у првом делу су изложени сви битни познати резултати на које се дисертација ослања, што главне, оригиналне резултате чини лако приступачним. У другом делу су добијени релевантни и интересантни резултати. Списак референци садржи релевантне радове и сведочи о добром познавању области. У дисертацији су коришћене савремене методе и резултати.
3.	По чему је дисертација оригиналан допринос науци О оригиналном научном доприносу дисертације сведоче поменути резултати из глава 3, 4 и 5, наведени у тачки VII, од којих је већина објављена у међународним математичким часописима *Acta Matematica Hungarica* и *Order*, оба категорије М23.
4.	Недостаци дисертације и њихов утицај на резултат истраживања Дисертација нема недостатака.
X	**ПРЕДЛОГ:**
	На основу укупне оцене дисертације, комисија предлаже:
	да се докторска дисертација прихвати, а кандидату одобри одбрана

ПОТПИСИ ЧЛАНОВА КОМИСИЈЕ

1. Академик др Стеван Пилиповић, редовни професор ПМФ у Новом Саду – председник

2. Др Милош Курилић, редовни професор ПМФ у Новом Саду – ментор

3. Др Милан Груловић, редовни професор ПМФ у Новом Саду – члан

4. Др Борис Шобот, доцент ПМФ у Новом Саду – члан

5. Др Жарко Мијајловић, редовни професор Математичког факултета у Београду - члан