Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Samir Zahirović

Algebarska i kombinatorna svojstva grafova pridruženih stepeno-asocijativnim grupoidima

(Algebraic and Combinatorial Properties of Graphs Associated to Power-Associative Grupoids)

-doktorska disertacija-

Novi Sad, 2020.

Predgovor

Grafovi pridruženi algebarskim strukturama privlače sve više pažnje, kako algebrista, tako i graf-teoretičara, već duži niz godina. Među te grafove spadaju i grafovi pridruženi stepeno-asocijativnim grupoidima kao što su stepeni graf, usmereni stepeni graf i obogaćeni stepeni graf, kojima je posvećena ova disertacija. Usmereni stepeni graf stepeno-asocijativnog grupoida $\mathbf{G}$ je graf čiji je skup čvorova G, a u kome je $x \to y$ ako je y stepen elementa x. Stepeni graf i obogaćeni stepeni graf su grafovi sa istim skupom čvorova, pri čemu su dva čvora susedna u stepenom grafu ako je jedan od njih stepen drugog, dok su dva čvora u obogaćenom stepenom grafu susedna ako su oba stepeni istog elementa posmatrane algebarske strukture.

Najpoznatiji graf pridružen grupi je Cayleyjev graf, kojeg je uveo Arthur Cayley 1878. godine, i njemu je posvećena sekcija 2.1 ove disertacije. Za $X \subseteq G$ koji ne sadrži jedinični element grupe $\mathbf{G}$, Cayleyjev graf te grupe je usmereni graf $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G}, X)$ sa označenim (obojenim) granama definisan tako da je $g \to h$ ako je $gx = h$ za neko $x \in X$, pri čemu je usmerena grana (g, h) označena sa x. Obično je skup X generatorni skup grupe $\mathbf{G}$, kao što ćemo i mi podrazumevati u nastavku teksta, a lako se pokazuje da je Cayleyjev graf povezan ako i samo ako je X generatorni skup od $\mathbf{G}$. Ova struktura ima značajnu ulogu u grafičkom prezentovanju grupa, i značajno je uticala na razvoj geometrijske teorije grupa. Poznato je da je grupa automorfizama Cayleyjevog grafa konačne grupe izomorfna polaznoj grupi. Cayleyjevi grafovi bili su predmet istraživanja velikog broja naučnih radova još od 19. veka, u okviru kojih su ispitivane i razne njegove kombinatorne osobine.

Komutirajući graf grupe $\mathbf{G}$, kome je posvećena sekcija 2.2, je prost graf sa skupom čvorova $X \subseteq G$ čija su dva čvora susedna ako oni, kao elementi grupe $\mathbf{G}$, komutiraju, pri čemu se za njegov skup čvorova bira nosač grupe, skup svih nejediničnih elemenata grupe ili skup svih necentralnih elemenata grupe. Među prve autore koji su izučavali komutirajući graf spadaju Richard Brauer i njegov student Kenneth Fowler.

Oni su u radu objavljenom 1955. godine [10] razmatrali rastojanje između involutivnih elemenata grupe u komutirajućem grafu čiji je skup čvorova skup svih nejediničnih elemenata, mada u svom radu nisu koristili termin „komutirajući graf". Ovaj rad izdvaja se kao jedan od značajnijih za dokaz klasifikacije konačnih prostih grupa. Kao jedan od prvih radova koji su se bavili istraživanjem kombinatornih svojstava komutirajućeg grafa često se navodi [54] objavljen 1976. godine. U ovom radu Bernhard Neumann je odgovorio na pitanje Paula Erdősa postavljeno prethodne godine u vezi sa nezavisnim skupovima komutirajućeg grafa. Kombinatorna svojstva komutirajućeg grafa, poput dijametra, povezanosti, maksimalne kadinalnosti nezavisnog skupa, perfeknosti i sl., istraživana su i od strane brojnih drugih autora.

Usmereni stepeni graf grupe su uveli Andrei Kelarev i Stephen Quinn [37] u radu objavljenom 2000. godine, nakon čega su istraživali ovaj pojam i u slučaju polugrupa. Shamik Ghosh, Ivy Chakrabarty i M. K. Sen [17] su, motivisani ovim, u radu koji je objavljen 2009. godine definisali stepeni graf kao odgovarajući prost graf usmerenog stepenog grafa. Obogaćeni stepeni graf grupe uveli su Ghodratollah Aalipour, Saieed Akbari, Peter Cameron, Reza Nikandish i Farzad Shaveisik [1] 2016. godine. Ova teza bavi se algebarskim i kombinatornim svojstva ova tri grafa, koja su istraživana u velikom broju radova, i to ne samo u slučaju grupa, već i u slučaju stepeno-asocijativnih lupa u kojima svaki element ima inverz, kao i u slučaju stepeno-asocijativnih grupoida. Posebna pažnja biće posvećena obogaćenom stepenom grafu grupe, kao i njegovoj vezi sa stepenim grafom i usmerenim stepenim grafom.

Ova disertacija obuhvata četiri celine. Prva celina je uvodnog tipa, i u njoj se prezentuju osnovni pojmovi i najvažnija tvrđenja iz teorije grupa i teorije grafova. Druga celina posvećena je osnovnim osobinama stepenog grafa, usmerenog stepenog grafa i obogaćenog stepenog grafa, njihovim međusobnim odnosima, kao i problemu da li, i u kojoj meru, ovi grafovi određuju polaznu strukturu. Svi dokazi izlagani su za što šire klase stepeno-asocijativnih grupoida. Biće izloženo u slučaju kojih konačnih grupa je stepeni graf jednak obogaćenom stepenom grafu, i u slučaju kojih konačnih grupa je obogaćeni stepeni graf jednak komutirajućem grafu, što su rezultati rada [1]. Izloženi su i dokazi da stepeni graf konačne grupe određuje usmereni stepeni graf, što je rezultat iz [12], i da i obogaćeni stepeni graf određuje usmereni stepeni graf, što je dokazano u [73]. Prezentovaćemo i rezultate koji se tiču veze stepenog grafa i obogaćenog stepenog grafa sa polaznom strukturom, ali i u vezi sa osnovnim osobinama obogaćenog stepenog grafa. Posebna pažnja posvećena je i stepenom grafu torzione grupe. U slučaju nekih klasa torziono slobodnih grupa dokazano je da stepeni graf do na izomorfizam određuje usmereni stepeni graf. Dodatno, u literaturi se koriste dve različite verzije definicije stepenog grafa; prema jednoj verziji, sa kojom je saglasna i definicija u ovoj disertaciji, je

$$x \sim y \text{ akko } (\exists n \in \mathbb{Z})(y = x^n \vee x = y^n).$$

dok je prema drugoj verziji

$$x \sim y \text{ akko } (\exists n \in \mathbb{N})(y = x^n \vee x = y^n).$$

U sekciji 2.4 prezentovan je dokaz da se grafovi definisani na ova dva načina međusobno određuju do na izomorfizam.

Treća celina bavi se algebarskim osobinama obogaćenog stepenog grafa. Dokazano je da je svaki automorfizam stepenog grafa konačne grupe izomorfizam obogaćenog stepenog grafa. Za razne osobine grupa, daje se karakterizacija svih konačnih grupa ili stepeno-asocijativnih lupa sa inverzima takvih da grupe automorfizama njihovih obogaćenih stepenih grafova imaju te osobine. Takođe se pruža opis obogaćenih stepenih grafova konačnih Abelovih grupa, a prezentira se i metod za konstrukciju obogaćenog stepenog grafa podgrupe Sylowa iz obogaćenog stepenog grafa konačne nilpotentne grupe.

Četvrti deo bavi se kombinatornim svojstvima obogaćenog stepenog grafa, i rezultatima o kombinatornim osobinama komutirajućeg grafa i stepenog grafa. Prezentiran je dokaz da, ako komutirajući graf grupe nema beskonačni nezavisan skup, tada komutirajući graf nema ni proizvoljno velike konačne nezavisne skupove čvorova, što je rezultat Bernharda Neumanna [54]. Izloženi su rezultati rada [1] na temu nezavisnih skupova stepenog grafa grupe. Pored toga, izložen je i dokaz da je hromatski broj stepenog grafa stepeno-asocijativnog grupoida najviše prebrojiv, što je rezultat Yaroslava Shitova [69], kao i da je hromatski broj obogaćenog stepenog grafa stepeno-asocijativne lupe najviše prebrojiv, što je rezultat rada [72]. Konačno, izloženi su i dokazi da je stepeni graf svake konačne grupe perfektan, što je rezultat rada [1], i da konačna nilpotentna grupa ima perfektan obogaćeni stepeni graf ako i samo ako ona ima najviše dve neciklične podgrupe Sylowa.

Želeo bih da izrazim zahvalnost svim članovima komisije na detaljnom čitanju rukopisa disertacije i na korisnim komentarima i sugestijama.

Posebno sam zahvalan svom mentoru, profesoru Ivici Bošnjaku, kao i profesorici Rozáliji Madarász, koji su u velikoj meri uticali na moj stručni razvoj. Ova disertacija rezultat je našeg zajedničkog rada. To mi čini posebnu čast. Profesor Ivica Bošnjak za mene je svetao primer izuzetno pravične osobe. Profesorica Rozália Madarász mi je bila velika podrška, ne samo tokom rada na disertaciji, već i tokom celokupnih doktorskih studija, kroz koje me je vodila i pomagala mi savetima. Zahvalan sam im i zato što su mi tokom zajedničkog rada prepuštali potpunu slobodu, a takođe su me i usmeravali svaki put kad je za tim bilo potrebe. Time su me podsticali da sa entuzijazmom nastavim rad na disertaciji. Saradnja sa njima mi je bila zadovoljstvo i mnogo sam od njih naučio.

Takođe sam zahvalan i profesoru Petru Markoviću. Profesor veliku pažnju posvećuje ne samo meni, već i svim ostalim doktorandima „sa algebre". Sve nas uči i podstiče preko svojih predavanja iz različitih oblasti univerzalne algebre. Svojim detaljnim savetima mnogo je pomogao da disertacija dobije sadašnji oblik. Zahvaljujući njegovim sugestijama mnogi dokazi i delovi teksta su znatno bolje prezentovani. Veoma sam mu zahvalan i za moje uključenje u istraživački rad sa još dvojicom kolega, a iz kojeg je proistekla moja prva naučna publikacija. Ti rezultati nisu uključeni u disertaciju, ali mi je iskustvo stečeno tom prilikom bilo od velike koristi, ne samo za dalje istraživačke radove, već i zbog dodatne motivacije koju sam tada stekao.

Želim da se zahvalim i svom učitelju Bogoljubu Zecu, koji me je u četvrtom razredu osnovne škole prijavio za školsko takmičenje iz matematike. Da nije bilo tako nisam siguran da li bih se danas bavio matematikom. Zahvalan sam i svojoj nastavnici matematike iz osnovne škole, Danici Milivojević, a i svom profesoru matematike iz gimnazije, Radivoju Stojkoviću.

Veoma sam zahvalan Ivani Vojnović za pažnju i bodrenje, kao i strpljenje tokom pisanja disertacije. Zahvalan sam svojim roditeljima, Katici i Dževadu, a takođe i svom bratu Senadu za podršku pružanu tokom svih ovih godina. Najveće hvala dugujem roditeljima za potporu koju su mi pružali tokom studija, pa i mog celokupnog obrazovanja. Bez njihove brige i pomoći ova disertacija sigurno ne bi bila napisana.

Novi Sad, januar 2020. Samir Zahirović

Sadržaj

Glava 1

Uvod

1.1 Grupoidi i grupe

Binarna operacija na nepraznom skupu A je funkcija $f : A^2 \to A$. Za binarne operacije često koristimo infiksnu notaciju gde, ako binarnu operaciju f označavamo sa $*$, umesto $f(a, b)$ pišemo $a * b$, ili kraće ab. Uređen par $\mathbf{G} = (G, *)$ zovemo **grupoid**, gde je G neprazan skup, a $*$ binarna operacija na G. U tom slučaju kažemo da je skup G nosač grupoida $\mathbf{G}$. **Red** grupoida $\mathbf{G}$ je kardinalnost $|G|$. U ovoj disertaciji ćemo algebarske strukture, kao što su na primer grupoidi, označavati velikim masnim slovima, dok ćemo njihove nosače označavati odgovarajućim velikim slovima.

Ako je $\mathbf{G} = (G, *)$ grupoid i $H \subseteq G$, onda kažemo da je $\mathbf{H} = (H, *)$ **podgrupoid** od $\mathbf{G}$ ako je H zatvoren u odnosu na operaciju $*$. U ovom slučaju, formalno, binarne operacije grupoida $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ su različite jer su definisane na različitim skupovima, ali koristimo za njih istu oznaku jer se poklapaju na skupu H. **Podgrupoid generisan** nepraznim skupom $X \subseteq G$, u oznaci $\langle X \rangle$, je najmanji podgrupoid od $\mathbf{G}$ koji sadrži sve elemente od X. Ako je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, onda kažemo da je $\langle X \rangle$ generisan elementima $x_1, x_2, \ldots, x_n$, i označavamo ga sa $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$.

Za element e grupoida $\mathbf{G}$ kažemo da je **neutralni** element grupoida $\mathbf{G}$ ako važi $ae = ea = a$ za sve $a \in G$. Ukoliko se za grupoid $\mathbf{G}$ koristi multiplikativna notacija, tj. ako binarnu operaciju označavamo sa $\cdot$, onda neutralni element zovemo još i **jedinični** element. U takvom slučaju neutralni element često označavamo sa 1. Sa druge strane, u slučaju kada se koristi aditivna notacija, tj. kad se binarna operacija označava sa $+$, često se neutralni element označava sa 0. Element e grupoida $\mathbf{G}$ takav da je $ea = a$ za sve $a \in G$ zovemo **levi neutralni** element. Analogno se definiše i **desni neutralni** element. Lako se vidi da, ako grupoid $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ ima levi neutralni element i desni neutralni element, onda $\mathbf{G}$ ima neutralni element. Takođe, ako $\mathbf{G}$ ima neutralni element, onda je on jedinstven.

Za binarnu operaciju $\cdot$ na G kažemo da je **asocijativna** ako važi $a(bc) = (ab)c$ za sve $a, b, c \in G$. Tada kažemo i da je grupoid $(G, \cdot)$ **polugrupa**. **Monoid** je polugrupa sa neutralnim elementom. Za binarnu operaciju $\cdot$ na G kažemo da je **komutativna** ako važi $ab = ba$ za sve $a, b \in G$. Onda kažemo i da je grupoid $(G, \cdot)$ komutativan.

Neka grupoid $(G, \cdot)$ ima neutralni element e, i neka $a \in G$. Kažemo da je $b \in G$ **inverzni** element (**inverz**) od a ako važi $ab = ba = e$. Slično kao kod neutralnog elementa, ako je $ba = e$, onda je b **levi inverz** od a, a analogno se definiše i **desni inverz**. U slučaju kada element a grupoida ima jedinstveni inverzni element, obično taj inverzni element označavamo sa a^{-1}. Ukoliko se za posmatrani grupoid koristi aditivna notacija, onda se inverzni element od a označava sa $-a$. Lako se dokazuje da, ako element monoida ima i levi i desni inverz, onda su oni jednaki. U slučaju kad je $\mathbf{G}$ monoid, ako a ima inverzni element, onda je on jedinstven.

Neka je $\mathbf{S} = (S, \cdot)$ polugrupa. Onda su, za sve $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$, svi proizvodi elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (uz dati redosled) jednaki, nezavisno od rasporeda zagrada. Zahvaljući ovoj činjenici je u polugrupi moguće zapisivati proizvod ma kog broja elemenata bez upotrebe zagrada, ali i definisati stepen elementa. Neka je $(S, \cdot)$ polugrupa, i neka $a \in S$ i $n \in \mathbb{N}$. Onda n-ti **stepen** elementa a definišemo na sledeći način: $a^1 = a$, i $a^{n+1} = a \cdot a^n$. Ako je $\mathbf{S}$ monoid, onda kažemo da je a^0 element e. Ukoliko element monoida a ima inverzni element, onda a^{-n} označava element $(a^{-1})^n$. Očigledno, za sve $n, m \in \mathbb{Z}$ važi $a^{n+m} = a^n a^m$.

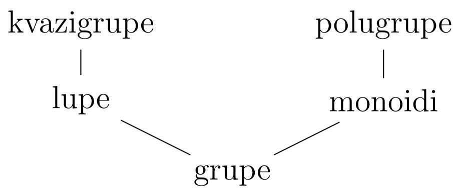
Podgrupoid od $\mathbf{G}$ generisan elementom x je najmanji podgrupoid od $\mathbf{G}$ koji sadrži x. Za grupoid kažemo da je **stepeno-asocijativan** ako je svaki njegov podgrupoid generisan jednim elementom asocijativan. Drugim rečima, grupoid je stepeno-asocijativan ako, za svako $a \in G$ i svako $n \in \mathbb{N}$, proizvod n elemenata a ne zavisi od rasporeda zagrada. Primetimo da je, da bi se definisao stepen elementa u grupoidu $\mathbf{G}$, dovoljno da taj grupoid bude stepeno-asocijativan.

Kvazigrupa je grupoid u kome svaka od jednačina $ax = b$ i $xa = b$ po x ima jedinstveno rešenje, za sve $a, b \in G$. Kvazigrupu sa jediničnim elementom nazivamo **lupa**. Očigledno, u svakoj kvazigrupi važi zakon **kancelativnosti**, tj. $ac = bc$ implicira $a = b$, i $ca = cb$ implicira $a = b$. Poznato je da je grupoid $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ kvazigrupa ako i samo ako postoje binarne operacije / i \ na G takve da je ispunjeno:

$$a \cdot (a \backslash b) = b, \qquad (b/a) \cdot a = b \text{ i}$$
$$a \backslash (a \cdot b) = b, \qquad (b \cdot a)/a = b$$

za sve $a, b \in G$. Prethodna činjenica pruža nam ekvivalentan način za definisanje kvazigrupe, po kojoj je kvazigrupa algebra $(G, \cdot, /, \backslash)$ koja ispunjava gornje uslove.

Grupa je monoid u kome svaki element ima svog inverza, a komutativne grupe zovemo **Abelove grupe**. Poznato je da je svaka asocijativna kvazigrupa grupa, tj. da presek klase kvazigrupa i klase polugrupa čini klasu svih grupa. Ovo je preglednije predstavljeno dijagramom na slici 1.1.



Slika 1.1

Još jedna klasa grupoida značajna za ovu disertaciju su **stepeno-asocijativne lupe**. Lupa $(G, \cdot)$ je stepeno-asocijativna lupa ako je ona kao grupoid stepeno-asocijativna. Takođe će nam biti interesantne i **stepeno-asocijativne lupe sa inverzima**, koje su definisane kao stepeno-asocijativne lupe u kojoj svaki element ima inverz. Primetimo da, na osnovu definicije lupe, svaki element lupe ima levi inverz i desni inverz, ali u slučaju stepeno-asocijativne lupe levi inverz i desni inverz elementa beskonačnog reda ne moraju biti jednaki. **Podlupa** lupe **G** je podgrupoid **H** od **G** koji je takođe lupa. Napomenimo da mnogi autori pod stepeno-asocijativnim lupama misle na strukture koje u ovoj disertaciji zovemo stepeno-asocijativne lupe sa inverzima. Za skup $X \subseteq G$, **podlupa generisana** sa X, koju označavamo sa $\langle X \rangle$, je najmanja podlupa od **G** koja sadrži sve elemente skupa X. Ako je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, onda ćemo $\langle X \rangle$ označavati i sa $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Za svaku stepeno-asocijativnu lupu sa inverzima **G** lako se vidi da je podlupa $\langle x \rangle$ od **G** grupa. Za podlupu **H** lupe **G** koja je grupa govorićemo da je podgrupa od **G**.

Jednu klasu stepeno-asocijativnih lupa sa inverzima, a koja je šira od klase svih grupa, čine **Moufangine lupe**. Moufangina lupa je lupa $\mathbf{G}$ takva da za sve $x, y, z \in G$ važi bar jedan od naredna četiri ekvivalentna uslova:

$$z(x(zy)) = ((zx)z)y; \qquad (zx)(yz) = (z(xy))z;$$
$$x(z(yz)) = ((xz)y)z; \qquad (zx)(yz) = z((xy)z).$$

Za dokaz ekvivalencije navedenih indentiteta može se pogledati Lema 3.1 u [6, sekcija VII.3]. Prema Moufanginoj teoremi, za čiji dokaz se može pogledati [6, sekcija VII.4], Moufangine lupe su stepeno-asocijativne lupe sa inverzima.

Neka su $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ i $\mathbf{H} = (H, \circ)$ grupoidi. **Homomorfizam** grupoida $\mathbf{G}$ u grupoid $\mathbf{H}$ je preslikavanje $\varphi : G \to H$ takvo da je $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \circ \varphi(b)$. **Izomorfizam** grupoida $\mathbf{G}$ u grupoid $\mathbf{H}$ je homomorfizam koji je bijekcija. Ako postoji izomorfizam iz $\mathbf{G}$ u $\mathbf{H}$, onda kažemo da su $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ izomorfni, što zapisujemo sa $\mathbf{G} \cong \mathbf{H}$. **Automorfizam** grupoida $\mathbf{G}$ je izomorfizam iz $\mathbf{G}$ u njega samog. Injektivan homomorfizam iz $\mathbf{G}$ u $\mathbf{H}$ zovemo **utapanje**.

Ako je $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ grupa i $H \subseteq G$, onda kažemo da je $\mathbf{H} = (H, \cdot)$ **podgrupa** od $\mathbf{G}$, što zapisujemo sa $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$, ako je $\mathbf{H}$ podgrupoid od $\mathbf{G}$ koji je grupa. Na osnovu Lagrangeove teoreme, ako je $\mathbf{G}$ konačna grupa, onda je $|G|$ deljivo sa $|H|$. Za skup $X \subseteq G$, **podgrupa generisana** sa X je najmanja podgrupa od $\mathbf{G}$ koja sadrži sve elemente skupa X. Ovu grupu označavamo sa $\langle X \rangle$, a u slučaju da je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, onda je označavamo i sa $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$. Ako je $\mathbf{G} = \langle X \rangle$, tada kažemo da je X **generatorni skup** grupe $\mathbf{G}$, a za elemente skupa X kažemo da su **generatorni elementi**. Posebno, kada je $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, govorićemo i da je $\mathbf{G}$ generisana elementima $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ako grupa ima konačni generatorni skup, onda kažemo da je ona **konačno generisana**. Dodatno, ako je grupa $\mathbf{G}$ generisana jednoelementnim skupom $\{x\}$, tada ćemo govoriti za x da je **generator** grupe $\mathbf{G}$. Za homomorfizam φ iz $\mathbf{G}$ u grupu $\mathbf{K}$, **jezgro** homomorfizma φ je podgrupa $\ker(\varphi)$ grupe $\mathbf{G}$ čiji je nosač $\{x \in G \mid \varphi(x) = e_{\mathbf{K}}\}$, gde je $e_{\mathbf{K}}$ jedinični element grupe $\mathbf{K}$.

Skup svih permutacija nad skupom X označa se sa S_X, a grupu $\mathbf{S}_X = (S_X, \circ)$ zovemo **simetrična grupa**. Ako je $|X|= n$, onda $\mathbf{S}_X$ označavamo i sa $\mathbf{S}_n$. Za permutaciju π na X kažemo da je **ciklus** ako postoje elementi $x_1, x_2, \ldots, x_r \in X$, za neko $r \in \mathbb{N}$, tako da π fiksira sve ostale elemente od X i važi $\pi(x_1) = x_2$, ..., $\pi(x_{r-1}) = x_r$ i $\pi(x_r) = x_1$. Takav ciklus označavamo sa $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$. Poznato je da je svaka permutacija nad konačnim skupom ciklus ili proizvod disjuntnih ciklusa, kao i da je simetrična grupa generisana skupom transpozicija. Za permutaciju nad konačnim skupom kažemo da je **parna** ako je ona proizvod parno mnogo transpozicija. Sve parne permutacije nad X čine **alternativnu grupu** $\mathbf{A}_X$, koju, kada je $|X| = n$, označavamo sa $\mathbf{A}_n$.

Za grupu $\mathbf{G}$ kažemo da je **ciklična generisana sa** x ako je $\mathbf{G} = \langle x \rangle$. Poznato je da ciklična grupa reda n, za svako $m \mid n$, ima tačno jednu podgrupu reda m. Ako elementi x i y grupe $\mathbf{G}$ generišu istu cikličnu grupu, onda ćemo to označavati sa $x \approx_{\mathbf{G}} y$, ili kraće sa $x \approx y$. **Red** elementa x neke grupe je $|\langle x \rangle|$, i označavamo ga sa $o(x)$. Analogno definišemo i red elementa stepeno-asocijativne lupe, kao red podgrupe koju taj element generiše. Ako je $o(x) = 2$, tada kažemo da je element x **involutivan**. Za grupu kažemo da je **torziona** ako su svi njeni elementi konačnog reda. Ako su svi njeni nejedinični elementi beskonačnog reda, tada kažemo da je ta grupa **torziono slobodna**. Za grupu kažemo da je **lokalno ciklična** ako je svaka njena konačno generisana podgrupa ciklična. **Eksponent** grupe $\mathbf{G}$ je najmanji broj n takav da je $x^n = e$ za svako $x \in G$, a ukoliko takav prirodan broj postoji, tada kažemo da je $\mathbf{G}$ **konačnog eksponenta**.

Za podskupove $S, T \subseteq G$ i $s, t \in G$, gde je $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ grupa, uvodimo oznake:

$$St = \{xt \mid x \in S\}, \quad sT = \{sy \mid y \in T\} \text{ i } \quad ST = \{xy \mid x \in S \wedge y \in T\}.$$

Neka je $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$. Tada, za Hx kažemo da je **desni koset** od $\mathbf{H}$ u $\mathbf{G}$, gde $x \in G$. Analogno se definiše i **levi koset**. Broj levih i desnih koseta podgrupe $\mathbf{H}$ u $\mathbf{G}$ je jednak, i on predstavlja **indeks** od $\mathbf{H}$ u $\mathbf{G}$, što označavamo sa $[\mathbf{G} : \mathbf{H}]$. Ako za podgrupu $\mathbf{N}$ od $\mathbf{G}$ važi $g^{-1}Ng = N$ za svako $g \in G$, onda kažemo da je $\mathbf{N}$ **normalna** podgrupa $\mathbf{G}$, a to zapisujemo sa $\mathbf{N} \trianglelefteq \mathbf{G}$. Kada je $\mathbf{N} \trianglelefteq \mathbf{G}$, onda koseti od $\mathbf{N}$ u $\mathbf{G}$ čine nosač **faktor grupe** $\mathbf{G}/\mathbf{N}$. Za $x \in G$, element y je **konjugat** od x ako postoji $g \in G$ takvo da je $y = g^{-1}xg$. Tada kažemo i da su x i y **uzajamno konjugovani**. Analogno, za podgrupe $\mathbf{H}, \mathbf{K} \leq \mathbf{G}$ kažemo da su **konjugati** ako postoji $g \in G$ takvo da je $K = g^{-1}Hg$. Lako se vidi da je relacija konjugovanosti relacija ekvivalencije.

Centar grupe $\mathbf{G}$, koji označavamo sa $\mathrm{Z}(\mathbf{G})$, je njena podgrupa koja sadrži sve elemente x koji komutiraju sa svim elementima y grupe $\mathbf{G}$, tj. za koje važi $xy = yx$ za sve $y \in G$. Za podskup $S \subseteq G$, **centralizator** skupa S u grupi $\mathbf{G}$ je grupa $\mathrm{C}(S)$ sa nosačem $\{x \in G \mid xs = sx \text{ za svako } s \in S\}$. Centralizator podgrupe $\mathbf{H}$ u grupi $\mathbf{G}$, u oznaci $\mathrm{C}(\mathbf{H})$, definišemo kao $\mathrm{C}(H)$, i, za element $g \in G$, centralizator $\mathrm{C}(g)$ je podgrupa $\mathrm{C}(\{g\})$ od $\mathbf{G}$. Poznato je da je indeks centralizatora elementa g u grupi $\mathbf{G}$ jednak kardinalnosti skupa svih konjugata od g.

Za dokaz ovog tvrđenja čitalac može pogledati [30, lema 4.11] ili [64, teorema 3.2].

Teorema 1.1 *Kardinalnost skupa svih konjugata elementa x grupe* $\mathbf{G}$ *jednak je indeksu centralizatora* $\mathrm{C}(x)$ *u grupi* $\mathbf{G}$.

Za automorfizam φ grupe $\mathbf{G}$ kažemo da je **unutrašnji** ako je konjugacija nekim elementom grupe $\mathbf{G}$, tj. postoji $g \in G$ takav da za svako $x \in G$ važi $\varphi(x) = g^{-1}xg$. Skup svih unutrašnjih automorfizama od $\mathbf{G}$ čini grupu $\mathrm{Inn}(\mathbf{G})$. Za grupu unutrašnjih automorfizama grupe važi sledeća teorema. Za dokaz čitalac može pogledati [30, lema 8.21] ili [64, teorema 7.1].

Teorema 1.2 *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupa. Tada je* $\mathrm{Inn}(\mathbf{G}) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(\mathbf{G})$ *i važi* $\mathbf{G}/\mathrm{Z}(\mathbf{G}) \cong \mathrm{Inn}(\mathbf{G})$.

Direktan proizvod grupa $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$, koji označavamo sa $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ je grupa čiji je nosač $G \times H$, a čija je binarna operacija definisana po koordinatama, tj. $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2y_2)$. Neka je $\{\mathbf{G}_i \mid i \in I\}$ familija grupa. Sa $(x_i \mid x_i \in G_i, i \in I)$ označićemo elemente skupa $\prod_{i\in I} G_i$. Onda je **direktan proizvod** grupa $\mathbf{G}_i$ grupa $\prod_{i\in I} \mathbf{G}_i$ čiji je nosač $\prod_{i\in I} G_i$, i čija je binarna operacija definisana po koordinatama. Tada je $\mathbf{G}_i$ **direktni činilac**, ili **faktor**, grupe $\prod_{i\in I} \mathbf{G}_i$. **Direktna suma** grupa $\mathbf{G}_i$, koju označavamo sa $\sum_{i\in I} \mathbf{G}_i$ je podgrupa od $\prod_{i\in I} \mathbf{G}_i$ koja sadrži sve elemente $(x_i \mid x_i \in G_i, i \in I)$ koji su nejedinični na konačno mnogo koordinata. Tada kažemo i da je $\mathbf{G}_i$ **direktan sabirak** grupe $\sum_{i\in I} \mathbf{G}_i$. Napomenimo da postoji i **unutrašnji direktni proizvod**. Naime, za grupu $\mathbf{G}$ i normalne podgrupe $\mathbf{H}, \mathbf{K} \trianglelefteq \mathbf{G}$, ako je $\mathbf{G} = \mathbf{HK}$ i $\mathbf{H} \cap \mathbf{K} = 1$, onda je $\mathbf{G} \cong \mathbf{H} \times \mathbf{K}$. Tada kažemo da je $\mathbf{G}$ unutrašnji direktni proizvod, ili kraće direktni proizvod, svojih podgrupa $\mathbf{H}$ i $\mathbf{K}$. Ovde smo sa 1 označili trivijalnu grupu.

Za grupu kažemo da je ***p*-grupa** ako je red svakog njenog elementa stepen prostog broja p. Poznato je da svaka konačna grupa čiji je red deljiv sa p sadrži element reda p. To tvrđenje poznato je kao Cauchyjeva teorema. Dakle, konačna grupa je p-grupa ako i samo ako je njen red stepen broja p. Naredna teorema je poznato tvrđenje o centru konačnih p-grupa.

Teorema 1.3 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna* p*-grupa. Onda je* $|\mathrm{Z}(\mathbf{G})| > 1$.

Za prost broj p, ***p*-podgrupa Sylowa** grupe $\mathbf{G}$ je maksimalna p-podgrupa od $\mathbf{G}$. Naredne tri teoreme poznate su kao teoreme Sylowa. Za dokaze se mogu pogledati [30] ili [64].

Teorema 1.4 (Prva teorema Sylowa) *Neka je p prost broj. Neka je $\mathbf{G}$ grupa reda $p^k m$, gde je $k \in \mathbb{N}$ i $(p, m) = 1$. Onda je red svake p-podgrupe Sylowa p^k.*

Teorema 1.5 (Druga teorema Sylowa) *Neka je p prost broj i $\mathbf{G}$ konačna grupa. Sve p-podgrupe Sylowa grupe $\mathbf{G}$ su uzajamno konjugovane.*

Teorema 1.6 (Treća teorema Sylowa) *Neka je p-prost broj, i neka konačna grupa $\mathbf{G}$ ima r p-podgrupa Sylowa. Onda $r \mid |G|$ i $r \equiv 1 \bmod p$.*

Za grupu $\mathbf{G}$, u disertaciji ćemo sa G_p označavati skup svih elemenata čiji su redovi stepeni prostog broja p. Ako je G_p nosač podgrupe, onda tu grupu označavamo sa $\mathbf{G}_p$.

Za bilo koje $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, **generalisana grupa kvaterniona $\mathbf{Q}_n$**, takođe poznata i kao **diciklična grupa**, je grupa reda 2^n generisana elementima a i b tako da je $a^{2^{n-1}} = 1$, $bab^{-1} = a^{-1}$ i $b^2 = a^{2^{n-2}}$. Generalisana grupa kvaterniona ima jedinstveni involutivni element. Štaviše, na osnovu sledeće teoreme koju navodimo bez dokaza, ona je jedina konačna neabelova p-grupa koja sadrži jedinstvenu podgrupu reda p.

Teorema 1.7 *Neka je $\mathbf{G}$ konačna p-grupa koja ima jedinstvenu podgrupu reda p. Onda je $\mathbf{G}$ ciklična grupa ili generalisana grupa kvaterniona.*

Za dokaz prethodne teoreme može se pogledati [64, teorema 5.46]. U ovoj disertaciji prethodno tvrđenje biće korisno i u narednom obliku.

Posledica 1.8 *Neka je $\mathbf{G}$ konačna netrivijalna p-grupa koja ne sadrži podgrupu izomorfnu sa $\mathbf{C}_p \times \mathbf{C}_p$. Onda je $\mathbf{G}$ ciklična grupa ili generalisana grupa kvaterniona.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\mathbf{G}$ sadrži više od jedne podgrupe reda p. Na osnovu teoreme 1.3, postoji $x \in \mathrm{Z}(\mathbf{G})$ reda p. Neka je $\langle y \rangle$ podgrupa reda p grupe $\mathbf{G}$ različita od $\langle x \rangle$. Pošto je x u centru, onda x i y komutiraju, pa je $\langle x, y \rangle$ grupa reda p^2, i direktan je proizvod svojih podgrupa $\langle x \rangle$ i $\langle y \rangle$. Dakle, $\langle x, y \rangle \cong \mathbf{C}_p \times \mathbf{C}_p$.

Sledi da konačna netrivijalna p-grupa koja ne sadrži podgrupu izomorfnu sa $\mathbf{C}_p \times \mathbf{C}_p$ ima jedinstvenu podgrupu reda p, pa je, na osnovu teoreme 1.7, grupa $\mathbf{G}$ ciklična ili generalisana grupa kvaterniona. $\square$

Još jedna značajna p-grupa je **Prüferova grupa**, koju zovu još i **kvaziciklična grupa**. To je podgrupa multiplikativne grupe nenula kompleksnih brojeva $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, sa domenom $\{z \in \mathbb{C} \mid z^{p^n} = 1 \text{ za neko } n \in \mathbb{N}_0\}$, gde je p prost broj. Ekvivalentno, Prüferova grupa može se definisati kao p-podgrupa Sylowa grupe $(\mathbb{Q}, +)/(\mathbb{Z}, +)$, kada su njeni elementi oblika $\frac{m}{p^n} + \mathbb{Z}$ za $n \in \mathbb{N}_0$ i $m < p^n$.

Normalan niz grupe $\mathbf{G}$ je niz podgrupa $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 \geq \mathbf{G}_1 \geq \cdots \geq \mathbf{G}_n = 1$ u kome je $\mathbf{G}_{i+1} \trianglelefteq \mathbf{G}_i$. **Faktor grupe** ovog niza su grupe $\mathbf{G}_i/\mathbf{G}_{i+1}$ za sve $i < n$. Za grupu kažemo da je **rešiva** ako ima normalan niz kome su sve faktor grupe Abelove.

Za grupu $\mathbf{G}$ kažemo da je **nilpotentna** ako postoji normalan niz podgrupa $\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 \geq \mathbf{G}_1 \geq \cdots \geq \mathbf{G}_n = 1$ takav da je $\mathbf{G}_i/\mathbf{G}_{i+1} = \mathrm{Z}(\mathbf{G}/\mathbf{G}_{i+1})$ za sve $i < n$. Očigledno, svaka nilpotentna grupa je rešiva. Takođe, pošto konačna p-grupa, na osnovu teoreme 1.3, ima netrivijalan centar, može se pokazati da je svaka konačna p-grupa nilpotentna, a za dokaz tog tvrđenja čitalac može pogledati [30, primer 48.9 (a)] ili [64, teorema 5.33].

Teorema 1.9 *Svaka konačna p-grupa je nilpotentna.*

Komutator elemenata x i y predstavlja proizvod $x^{-1}y^{-1}xy$, a njega označavamo sa $[x, y]$. Trivijalno, elementi x i y komutiraju ako i samo ako je $[x, y] = 1$. Za $\mathbf{H}, \mathbf{K} \leq \mathbf{G}$, sa $[\mathbf{H}, \mathbf{K}]$ označavamo podgrupu $\langle [h, k] \mid h \in H \text{ i } k \in K \rangle$. Za prirodan broj k, grupa $\mathbf{G}$ je **klase nilpotentnosti** k ako je $[\ldots[[\mathbf{G}, \mathbf{G}], \mathbf{G}], \ldots, \mathbf{G}] = 1$, pri čemu se $\mathbf{G}$ u izrazu $[\ldots[[\mathbf{G}, \mathbf{G}], \mathbf{G}], \ldots, \mathbf{G}]$ pojavljuje $k + 1$ puta. Poznato je da je grupa nilpotentna ako i samo ako je klase nilpotentnosti k za neko $k \in \mathbb{N}$. Više o ovome može da se pročita u [64]. Za dokaz sledeće teoreme može se pogledati [30, leme 48.5 i 48.6] ili [64, teoreme 5.35, 5.36 i 5.37].

Teorema 1.10 *Podgrupa i homomorfna slika nilpotentne grupe je nilpotentna. Takođe, direktan proizvod konačno mnogo nilpotentnih grupa je nilpotentna grupa.*

Narednu teoremu o konačnim nilpotentnim grupama navodimo bez dokaza. Za dokaz se može pogledati [64, teorema 5.39].

Teorema 1.11 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna grupa. Onda su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $\mathbf{G}$ *je nilpotentna;*

(b) $\mathbf{G}$ *je direktan proizvod svojih podgrupa Sylowa;*

(c) $\mathbf{G}$ *ima jedinstvenu p-podgrupu Sylowa za svaki prost delilac p od $|G|$.*

Gornja teorema uopštena je i za beskonačne nilpotentne grupe. Dokaz naredne teoreme čitalac može pogledati u [63, 5.2.7] ili [30, lema 48.25 i korolar 48.35].

Teorema 1.12 *Neka je $\mathbf{G}$ nilpotentna grupa. Onda elementi konačnog reda grupe $\mathbf{G}$ čine podgrupu $\mathbf{T} \leq \mathbf{G}$ koja je direktna suma svojih podgrupa Sylowa, i takva da je $\mathbf{G}/\mathbf{T}$ torziono slobodna.*

Za konačne Abelove grupe važi i više. Pomenimo da, ako postoji prost broj p tako da $\mathbf{G}$ je Abelova p-grupa, onda kažemo da je ona **primarna** grupa. Naredna teorema poznata je kao fundamentalna teorema za konačne Abelove grupe, a njen dokaz čitalac može pogledati [64, teorema 6.5].

Teorema 1.13 *Svaka konačna Abelova grupa je direktni proizvod primarnih cikličnih grupa.*

Važi i jače tvrđenje, koje je poznato kao fundamentalna teorema o konačno generisanim Abelovim grupama. Za dokaz se može pogledati [30, korolar 32.2] ili [64, teorema 10.20].

Teorema 1.14 *Svaka konačno generisana Abelova grupa je direktna suma primarnih cikličnih i beskonačnih cikličnih grupa. Štaviše, za svako $n \in \mathbb{N}$ i za svaki prost broj p, broj sabiraka reda p^n je jednoznačno određen, kao i broj beskonačnih sabiraka.*

Naredna teorema poznata je kao Prüfer-Baerova teorema, a dokaz se može pogledati u [64, teorema 10.37] ili [30, teorema 35.2].

Teorema 1.15 *Abelova grupa konačnog eksponenta je direktna suma cikličnih grupa.*

Ako je X skup, a $\mathbf{G}$ grupa, onda za X kažemo da je **G-skup** ako postoji funkcija $\alpha : G \times X \to X$, gde $\alpha(g, x)$ označavamo sa $g * x$, takva da važi:

(a) $1 * x = x$ za sve $x \in X$ i

(b) $g * (h * x) = (g \cdot h) * x$ za sve $g, h \in G$ i $x \in X$.

Takvu funkciju α zovemo **dejstvo** grupe $\mathbf{G}$ na X. U ovom slučaju kažemo da $\mathbf{G}$ **deluje** na X. Na primer, svaka grupa deluje na samu sebe konjugacijom, tj. dejstvom $\alpha(x) = g^{-1}xg$. Slično, za $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$ i $\mathbf{N} \trianglelefteq \mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ deluje na $\mathbf{N}$. Za dejstvo grupe $\mathbf{G}$ na X kažemo da je **tranzitivno** ako za sve $x, y \in X$ postoji $g \in G$ takvo da je $g * x = y$. Ako ne postoje različiti $g, h \in G$ takvi da je $g * x = h * x$ za svako $x \in X$, onda je dejstvo **verno**.

Neka su $\mathbf{K}$ i $\mathbf{Q}$ grupe. Onda je grupa $\mathbf{G}$ **ekstenzija** od $\mathbf{K}$ grupom $\mathbf{Q}$ ako $\mathbf{G}$ ima normalnu podgrupu $\mathbf{K}_1 \cong \mathbf{K}$ takvu da je $\mathbf{G}/\mathbf{K}_1 \cong \mathbf{Q}$. Dodatno, ako postoji $\mathbf{Q}_1 \leq \mathbf{G}$ izomorfna sa $\mathbf{Q}$ takva da je $\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{Q}_1 = 1$ i $\mathbf{K}_1\mathbf{Q}_1 = \mathbf{G}$, onda kažemo da je $\mathbf{G}$ **poludirektni proizvod** grupe $\mathbf{K}$ grupom $\mathbf{Q}$.

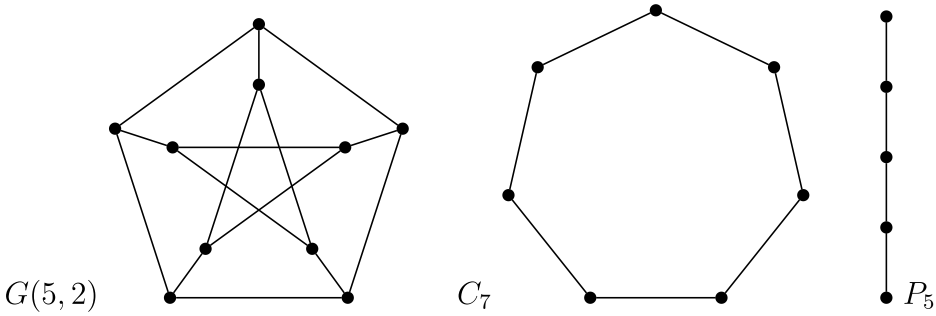
1.2 Grafovi

Graf Γ je struktura $(V(\Gamma), E(\Gamma))$, ili kraće (V, E), gde je V skup, a $E \subseteq V^{[2]}$ skup dvoelementnih podskupova od V. Skup V predstavlja skup **čvorova**, a E skup **grana** grafa Γ. **Red** grafa Γ je kardinalnost skupa čvorova V. Za $x, y \in V$ kažemo da su x i y **susedni** u Γ ako $\{x, y\} \in E$, što zapisujemo sa $x \sim_\Gamma y$, ili kraće sa $x \sim y$, a kažemo i da su čvorovi x i y **incidentni** sa granom $\{x, y\}$. **Stepen** čvora x grafa Γ je broj čvorova tog grafa sa kojima je on susedan. Za graf kažemo da je **regularan** ako su svi njegovi čvorovi istog stepena. **Zatvoreno susedstvo** čvora x u grafu Γ je skup $\overline{N}_\Gamma(x)$, ili kraće $\overline{N}(x)$, definisan sa $\overline{N}_\Gamma(x) = \{y \mid y \sim_\Gamma x \text{ ili } y = x\}$. Za skup X čvorova grafa Γ sa $\overline{N}_\Gamma(X)$, ili kraće sa $\overline{N}(X)$, označavaćemo skup $\bigcap_{x \in X} \overline{N}(x)$.

Usmereni graf (ili **digraf**) $\vec{\Gamma}$ je struktura $(V(\vec{\Gamma}), E(\vec{\Gamma}))$, ili kraće (V, E), gde je V skup, a E irefleksivna binarna relacija na V. V i E predstavljaju skup čvorova i skup grana, redom. Ako $(x, y) \in E$, onda kažemo da je y **direktni sledbenik** od x, ili da je x **direktni prethodnik** od y, i ovo označavamo sa $x \to_{\vec{\Gamma}} y$, ili kraće sa $x \to y$. **Ulazni stepen** čvora x digrafa $\vec{\Gamma}$ je broj njegovih direktnih prethodnika, a **izlazni stepen** čvora x je broj njegovih direktnih sledbenika.

Homomorfizam iz grafa Γ u Δ je preslikavanje $\varphi : V(\Gamma) \to V(\Delta)$ takvo da $x \sim_\Gamma y$ implicira $\varphi(x) \sim_\Delta \varphi(y)$, za sve $x, y \in V(\Gamma)$. Preslikavanje φ je **izomorfizam** ako je bijekcija iz $V(\Gamma)$ u $V(\Delta)$ takva da je $x \sim_\Gamma y$ ako i samo ako je $\varphi(x) \sim_\Delta \varphi(y)$. Ako postoji izomorfizam iz grafa $\mathbf{G}$ u graf $\mathbf{H}$, onda kažemo da su grafovi $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ **izomorfni**. Izomorfizam grafa u samog sebe zovemo **automorfizam**.

Kažemo da je graf $\Delta = (V_1, E_1)$ **podgraf** grafa $\Gamma = (V_2, E_2)$, što



Slika 1.2: Petersenov graf $G(5,2)$, kontura C_7 i put P_5

zapisujemo sa $\Delta \subseteq \Gamma$, ako je $V_1 \subseteq V_2$ i $E_1 \subseteq E_2$. Δ je **indukovan podgraf** grafa Γ ako je $V_1 \subseteq V_2$ i $E_1 = E_2 \cap V_1^{[2]}$. U tom slučaju kažemo da je Δ podgraf grafa Γ indukovan skupom čvorova V_1, i to označavamo sa $\Delta = \Gamma[V_1]$.

Descartesov proizvod grafova $\Gamma = (V_1, E_1)$ i $\Delta = (V_2, E_2)$ je graf $\Gamma \times \Delta$ sa skupom čvorova $V_1 \times V_2$ takav da je

$$(x_1, y_1) \sim_{\Gamma\times\Delta} (x_2, y_2) \text{ ako } (x_1 \sim_\Gamma x_2 \wedge y_1 = y_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \sim_\Delta y_2).$$

Jak proizvod grafova $\Gamma = (V_1, E_1)$ i $\Delta = (V_2, E_2)$ je graf $\Gamma \boxtimes \Delta$ sa skupom čvorova $V_1 \times V_2$ takav da je

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \sim_{\Gamma\boxtimes\Delta} (x_2, y_2) \text{ ako } &(x_1 \sim_\Gamma x_2 \wedge y_1 = y_2) \vee (x_1 = x_2 \wedge y_1 \sim_\Delta y_2)\\ &\vee (x_1 \sim_\Gamma x_2 \wedge y_1 \sim_\Delta y_2).\end{aligned}$$

Komplement grafa Γ je graf $\overline{\Gamma}$ sa skupom čvorova $V(\Gamma)$, takav da je $x \sim_{\overline{\Gamma}} y$ ako i samo ako nije $x \sim_\Gamma y$, za svaki par različitih čvorova x i y od Γ.

Za čvorove x i y grafa Γ, **šetnja** od x do y je niz grana i čvorova $x = u_0, \{u_0, u_1\}, u_1, \ldots, u_{n-1}, \{u_{n-1}, u_n\}, u_n = y$ tog grafa. Šetnja je **zatvorena** ako je $x = y$, a u suprotnom kažemo da je **otvorena**. Za šetnju kažemo da je **put** ako su svi čvorovi te šetnje različiti. **Dužina puta** je broj njegovih grana. **Kontura** u grafu Γ je zatvorena šetnja grafa Γ kojoj su svi čvorovi različiti. **Dužina konture** jednaka je broju grana koje ona sadrži. Za graf **G** kažemo da je put ako postoji put **G** koji sadrži sve njegove grane i čvorove, a kažemo da je **G** kontura ako postoji kontura koja sadrži sve njegove grane i čvorove. **Kompletan graf** je graf u kome su svaka dva različita čvora susedna. Put, konturu i kompletan graf reda n označavamo sa P_n, C_n i K_n, redom, za svako $n \in \mathbb{N}$. Primeri nekih od ovih grafova mogu se videti na slici 1.2.

Za graf kažemo da je **povezan** ako postoji put između svaka dva njegova čvora. Maksimalni povezani indukovani podgraf grafa Γ zovemo **komponenta povezanosti**. **Rastojanje** između čvorova x i y, što označavamo sa $d(x, y)$, je minimalna dužina puta od x do y. **Dijametar** grafa je maksimalno rastojanje neka njegova dva čvora. **Ekscentricitet** čvora x u grafu Γ je maksimalno rastojanje čvora x od bilo kog drugog čvora y grafa $\mathbf{G}$. **Radijus** grafa Γ je minimalni ekscentricitet njegovih čvorova. Kažemo da je čvor grafa Γ **centralni** ako je njegov ekscentricitet jednak radijusu od Γ, a **centar** od Γ je podgraf indukovan svim njegovim centralnim elementima, i označavamo ga sa $\mathrm{Cen}(\Gamma)$.

Povezan graf koji ne sadrži nijednu konturu zovemo **stablo**. Lako se vidi da je graf stablo ako i samo ako za svaka dva njegova čvora x i y postoji tačno jedan put od x do y.

Za čvorove x i y digrafa $\vec{\Gamma}$, **polušetnja** od x do y je niz $x = u_0, e_1, u_1, e_2, \ldots, u_{n-1}, e_n, u_n = y$, gde su u_i čvorovi od $\vec{\Gamma}$, i gde $e_i \in \{(u_{i-1}, u_i), (u_i, u_{i-1})\}$ za svako $i \leq n$. Za polušetnju u $\vec{\Gamma}$ kažemo da je **šetnja** ako je $e_i = (u_{i-1}, u_i)$ za svako $i \leq n$. Digraf je **slabo povezan** ako između svaka dva njegova čvora postoji polušetnja, a kažemo da je **jako povezan** ako za sve $x, y \in V(\vec{\Gamma})$ postoji šetnja x do y.

Neophodno je skrenuti pažnju na sledeće: u grafovima brojne pojmove definišemo kao maksimalan broj za koji nešto važi, međutim, pod time se misli na supremum određenog skupa kardinala. Naime, moguće je da maksimum nekog skupa prirodnih brojeva ne postoji, a moguće je i da se traži supremum nekog skupa koji sadrži i beskonačne kardinale, sa čime ćemo se susresti kasnije. I u ovoj disertaciji nekad ćemo, radi jednostavnosti, u takvim situacijama pisati „maksimalan broj” ili „minimalan broj”.

Hromatski broj grafa Γ, što označavamo sa $\chi(\Gamma)$, je minimalan broj boja kojima se mogu obojiti čvorovi tog grafa tako da nikoja dva susedna čvora ne budu obojena istom bojom. **Klika** grafa Γ je skup čvorova tog grafa koji indukuje kompletan podgraf. ω-**broj** grafa Γ je maksimalna kardinalnost njene klike, i označavamo ga sa $\omega(\Gamma)$. Očigledno, za svaki graf Γ važi $\omega(\Gamma) \leq \chi(\Gamma)$. Za skup čvorova grafa kažemo da je **nezavisan** ako nikoja dva njegova čvora nisu susedna. α-**broj** grafa Γ, što označavamo sa $\alpha(\Gamma)$, je maksimalna kardinalnost njegovog nezavisnog skupa.

Za graf Γ kažemo da je **perfektan** ako važi $\omega(\Delta) = \chi(\Delta)$ za svaki indukovan podgraf Δ od Γ. Ako graf ima ω-broj jednak hromatskom broju, onda kažemo da je taj graf **slabo perfektan**. **Bergeov graf** je graf takav da ni on, ni njegov komplement, ne sadrže neparnu konturu dužine bar 5. Na osnovu teoreme o perfektnim grafovima, klase konačnih perfektnih grafova i konačnih Bergeovih grafova se poklapaju.

Teorema 1.16 (Jaka teorema o perfektnim grafovima) *Neka je* Γ *konačan graf. Tada je* Γ *perfektan ako i samo ako je Bergeov graf.*

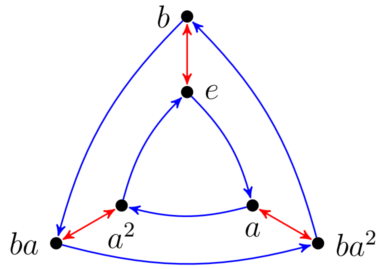
Glava 2

Grafovi pridruženi grupama i stepeno-asocijativnim grupoidima

Grafovi pridruženi algebarskim strukturama već duži niz godina privlače sve više pažnje, kako algebrista, tako i graf-teoretičara. Najpoznatiji graf pridružen grupi je Cayleyjev graf. Njega je uveo Arthur Cayley 1878. godine [16], i njemu je posvećena sekcija 2.1 ove disertacije. Među grafove pridružene algebarskim strukturama spadaju i komutirajući graf, stepeni graf, usmereni stepeni graf i obogaćeni stepeni graf, čije definicije uvodimo u ovoj glavi.

2.1 Cayleyjev graf

Grupa automorfizama grafa jedan je primer pridruživanja grupe grafu. Sa druge strane, Cayleyjev graf predstavlja najstariji primer grafa pridruženog grupi. Za generatorni skup X grupe $\mathbf{G} = (G, \cdot)$ koji ne sadrži neutralni element, **Cayleyjev obojeni graf** grupe $\mathbf{G}$ u odnosu na X je digraf $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G}, X)$ sa skupom čvorova G i sa obojenim (označenim) granama uvedenim na sledeći način: Ako je $gx = h$ za neko $x \in X$, onda je (g, h) usmerena grana od $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G}, X)$ označena sa x. Ako su dve orijentisane grane označene istim elementom grupe, kažemo i da su iste boje. Napomenimo da neki autori dozvoljavaju da skup X ne bude generatorni skup grupe $\mathbf{G}$, a lako se vidi da je X generatorni skup grupe $\mathbf{G}$ ako i samo ako je Cayleyjev obojeni graf povezan. Lako se primećuje i da je Cayleyjev obojeni graf kao digraf slabo povezan ako i samo ako je jako povezan. Cayleyjev obojeni graf ima značajnu ulogu u grafičkom prezentovanju grupa, i uticao je na razvoj geometrijske teorije grupa. Na slici 2.1 prikazan je Cayleyjev obojeni graf simetrične grupe $\mathbf{S}_3$, a na slici 2.2 je Cayleyjev graf alternativne grupe $\mathbf{A}_4$.



Slika 2.1: Cayleyjev obojeni graf simetrične grupe $\mathbf{S}_3$ u odnosu na generatorni skup $\{a,b\}$, $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbf{S}_3,\{a,b\})$, gde je a ciklus dužine 3, a b transpozicija. Grane označene sa a su plave, a one označene sa b su crvene boje.

Ako generatorni skup X sadrži sve nejedinične elemente grupe $\mathbf{G}$, onda između svaka dva elementa g,h postoje grane (g,h) i (h,g) označene sa $g^{-1}h$ i $h^{-1}g$, redom. Tada je $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G},X)$ kompletan digraf.

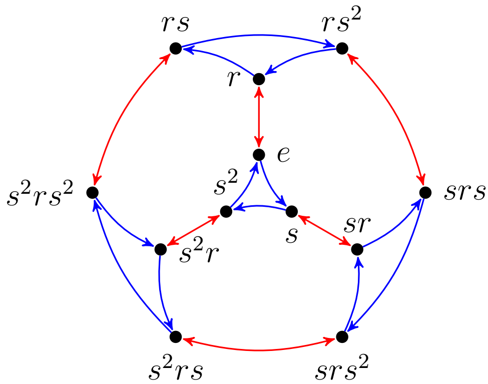
Za automorfizam φ Cayleyjevog grafa kažemo da **čuva boje** ako su grane (g,h) i $(\varphi(g),\varphi(h))$ iste boje, za svaku orijentisanu granu (g,h). Označimo grupu svih automorfizama Cayleyjevog grafa $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G},X)$ koji čuvaju boje sa $\mathrm{Aut}_C\left(\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G},X)\right)$. Poznato je da, za svaku konačnu grupu $\mathbf{G}$, važi

$$\mathrm{Aut}_C\left(\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G},X)\right)\cong\mathbf{G}.$$

Otuda, za svaki Cayleyjev graf postoji tačno jedna njemu odgovarajuća grupa. Ipak, ako skup X ne bi bio generatorni, ili ako bi se umesto obojenog Cayleyjevog grafa posmatrao odgovarajući obojeni graf ili odgovarajući neobojen digraf, onda ta implikacija ne bi važila.

U knjizi objavljenoj 1936. godine Dénes Kőnig [41] predložio je da se istraži za koje sve konačne grupe $\mathbf{G}$ postoji graf Γ takav da je $\mathbf{G}\cong\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Ovaj problem je rešio Robert Frucht [27] dokazavši 1938. godine da svaka konačna grupa ima ovo svojstvo. Upravo činjenica da je $\mathrm{Aut}_C(\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G},X))\cong\mathbf{G}$, za svaku konačnu grupu $\mathbf{G}$, leži u ideji Fruchtovog dokaza.

Videli smo do sada da je moguće svakoj grupi pridružiti obojeni digraf. Za grupu $\mathbf{G}$ i generatorni skup $X\subseteq G$, graf koji odgovara Cayleyjevom obojenom grafu zovemo **Cayleyjev graf**, i označavamo ga sa $\mathrm{Cay}(\mathbf{G}, X)$. Lako se primećuje da je Cayleyjev graf regularan. Štaviše, on je i čvorno tranzitivan, tj. za bilo koja dva njegova čvora x i y postoji automorfizam od $\mathrm{Cay}(\mathbf{G}, X)$ koji slika x u y. Obrnuto ne važi. Petersenov graf, koji je prikazan na slici 1.2, je čvorno tranzitivan, a on nije Cayleyjev graf nijedne grupe, o čemu više može da se pročita u [48].



Slika 2.2: $\vec{\mathrm{Cay}}(\mathbf{A}_4, \{r, s\})$ gde je $r = (1, 2)(3, 4)$ i $s = (1, 2, 3)$. Grane označene sa r su crvene, a one označene sa s su plave boje.

Cayleyjev obojeni graf mnogo govori i o samoj grupi, i ovde ćemo navesti nekoliko takvih osobina. Na primer, grupa $\mathbf{G}$ je Abelova ako i samo ako je polušetnja (uz dopuštanje „kretanja” preko orijentisanih grana i u suprotnom smeru) određena sa $xyx^{-1}y^{-1}$ zatvorena u $\vec{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G}, X)$ za sve $x, y \in X$. Već smo rekli na početku ove sekcije da je $\vec{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G}, X)$ povezan ako i samo ako je X generatorni skup grupe $\mathbf{G}$. Za element x generatornog skupa X grupe $\mathbf{G}$ reći ćemo da je **suvišan** ako je $\mathbf{G} = \langle X \setminus \{x\} \rangle$. Nije teško videti da je generatorni element $x \in X$ suvišan ako i samo ako, nakon brisanja grana označenih sa x, graf $\vec{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G}, X)$ ostaje povezan. Može se dokazati da je, ako x nije suvišan, graf $\vec{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G}, X \setminus \{x\})$ disjunktna unija digrafova sa obojenim granama koji su izomorfni (u odnosu i na boje grana) sa $\vec{\mathrm{Cay}}(\mathbf{H}, X \setminus \{x\})$, gde je $\mathbf{H} = \langle X \setminus \{x\} \rangle$. Dodatno, može se pokazati da je $\mathbf{H} = \langle X \setminus \{x\} \rangle$ normalna podgrupa od $\mathbf{G}$ ako i samo ako za svaku komponentu povezanosti Δ_1 od $\vec{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G}, X \setminus \{x\})$ postoji komponenta povezanosti Δ_2 od $\vec{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G}, X \setminus \{x\})$ takva da, za svaki čvor g iz Δ_1, grana (g, h) označena sa x spaja g sa čvorom iz Δ_2.

Konstrukcija Cayleyjevog grafa slaže se i sa direktnim proizvodom grupa. Naime, ako je $\mathbf{G}$ unutrašnji direktan proizvod svojih podgrupa $\mathbf{H} = \langle X \rangle$ i $\mathbf{K} = \langle Y \rangle$, onda je $\vec{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G}, X \cup Y) = \vec{\mathrm{Cay}}(\mathbf{H}, X) \times \vec{\mathrm{Cay}}(\mathbf{K}, Y)$.

Kao što smo videli, iz Cayleyjevog obojenog grafa mogu da se vide razne osobine grupe, ali je on tesno povezan i sa prezentacijom grupe. Poznato je da, ako je grupa $\mathbf{G}$ generisana skupom $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, onda svako $g \in G$ može da se predstavi nekom rečju nad azbukom $\overline{X}$, gde je $\overline{X} = \{x \mid x \in X \vee x^{-1} \in X\}$. Da bi se opisala grupa $\mathbf{G}$ putem reči nad $\overline{X}$, neophodno je odrediti klase reči koje predstavljaju iste elemente grupe $\mathbf{G}$, tj. odgovarajuću relaciju ekvivalencije $\rho_{\mathbf{G}}$ na $\overline{X}^*$, gde smo sa $\overline{X}^*$ označili skup svih reči nad $\overline{X}$. Ukoliko je relacija $\rho_{\mathbf{G}}$ izvediva iz skupa relacija $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $u_3 = v_3 \dots$ (i aksioma koje povlače da je $\mathbf{G}$ grupa), onda pišemo:

$$\mathbf{G} = \langle x_1, x_2, x_3 \dots \mid u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3 \dots \rangle,$$

i to zovemo prezentacija grupe $\mathbf{G}$. Ako za grupu $\mathbf{G}$ postoji prezentacija sa konačnim generatornim skupom i konačnim skupom relacija, onda se kaže da je grupa konačno prezentovana. Lako se vidi da su na primer sve konačne grupe konačno prezentovane, kao i konačno generisane slobodne grupe.

Svakoj reči nad $\overline{X}$ odgovara polušetnja u Cayleyjevom obojenom grafu $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G}, X)$, a svaka zatvorena polušetnja u $\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G}, X)$ odgovara reči koja predstavlja jedinični element od $\mathbf{G}$. Upravo ova veza između Cayleyjevog obojenog grafa i prezentacije grupa se pokazala kao moćan alat u kombinatornoj teoriji grupa. Godine 1911. Max Dehn [23] formulisao je tri čuvena problema odlučivosti u vezi sa prezentacijom grupe, od kojih se jedan tiče konstrukcije algoritma koji za dve reči nad $\overline{X}$ određuje da li one predstavljaju isti element grupe $\mathbf{G}$. Ovaj problem ekvivalentan je sa problemom konstrukcije algoritma koji generiše Cayleyjev obojeni graf koji odgovara datoj prezentaciji grupe. Petr Novikov (Петр Сергеевич Новиков) [55] i William Boone [9] su pedesetih godina dvadesetog veka nezavisno jedan od drugog dokazali da postoji konačno prezentovana grupa $\mathbf{G}$ takva da je problem reči za $\mathbf{G}$ neodlučiv.

2.2 Komutirajući graf

Najvažniji grafovi pridruženi grupama za naš rad su stepeni graf, obogaćeni stepeni graf i komutirajući graf. Komutirajući graf grupe je najstariji među njima, i u ova sekcija je posvećena njemu.

Definicija 2.1 **Komutirajući graf** *grupe* $\mathbf{G}$ *sa skupom čvorova* $X \subseteq G$ *je graf* $\mathcal{C}(\mathbf{G}, X)$ *čiji je skup čvorova* X*, i u kome su dva čvora susedna* *ako komutiraju u* $\mathbf{G}$. *Ako su* x *i* y *susedni u komutirajućem grafu, onda to zapisujemo sa* $x \overset{c}{\sim}_{\mathbf{G}} y$, *ili kraće* $x \overset{c}{\sim} y$.

$\mathcal{C}(\mathbf{G}, G \setminus \mathrm{Z}(\mathbf{G}))$ *označavaćemo sa* $\mathcal{C}_Z(\mathbf{G})$, $\mathcal{C}(\mathbf{G}, G \setminus \{e\})$ *sa* $\mathcal{C}_e(\mathbf{G})$, *i* $\mathcal{C}(\mathbf{G}, G)$ *sa* $\mathcal{C}(\mathbf{G})$, *i nazivaćemo ih komutirajući graf bez centra, komutirajući graf bez jediničnog elementa i pun komutirajući graf, redom.*

Kao najstariji rad u kome se izučavao komutirajući graf često se navodi rad [10] Richarda Brauera i Kennetha Fowlera iz 1955. godine. Oni su u ovom radu za određenu klasu grupa razmatrali rastojanje između involutivnih elemenata te grupe u komutirajućem grafu bez jediničnog elementa, mada oni u ovom radu nisu eksplicitno koristili pojam komutirajućeg grafa. Naime, za grupu parnog reda većeg od 2 koja ima bar dve konjugacijske klase involutivnih elemenata, dokazali su da je rastojanje bilo koja dva involutivna elementa u komutirajućem grafu najviše 3, što povlači da je takvo ograničenje za elemente parnog reda 5. (Primetimo da u opštem slučaju to ne važi, na primer u slučaju simetrične grupe $\mathbf{S}_3$, koja ima samo jednu konjugacijsku klasu involutivnih elemenata, gde u komutirajućem grafu bez centra ne postoji put između različitih involutivnih elemenata.) Ovo su činili u cilju da dokažu da grupa parnog reda n, $n > 2$, ima podgrupu reda većeg od $\sqrt[3]{n}$. Oni u radu zaključuju i da, ukoliko je $\mathbf{G}$ konačna grupa koja sadrži involutivni element g, onda je $|G| \leq (n^2)!$, gde je n red centralizatora od g. Ovo je veoma značajan rad za klasifikaciju konačnih prostih grupa.

Rad Berharda Neumanna iz 1976. godine [54] je jedan od najstarijih radova koji se bavi komutirajućim grafom radi izučavanja kombinatornih svojstava grupe. U njemu Neumann pruža odgovor na pitanje koje je Paul Erdős postavio prethodne godine na letnjoj radionici Australijskog matematičkog društva. Naime, dokazao je da, ako komutirajući graf posmatrane grupe nema beskonačan nezavisan skup čvorova, onda za tu grupu postoji prirodan broj n takav da je veličina svakog nezavisnog skupa manja od n. Prema Neumannu, na ovo pitanje pružio je odgovor i Ralph McKenzie dve ili tri meseca pre njega.

Iako su se matematičari i u narednom periodu bavili kombinatornim svojstvima grupa, termin „komutirajući graf" uveo je Yoav Segev [65] 1999. godine. Jedno od glavnih pitanja kojima su se matematičari bavili u vezi sa komutirajućim grafom (bez centra) odnosi se na dijametar komutirajućeg grafa. Pošto je za razne klase grupa pronađeno gornje ograničenje za dijametar njihovog komutirajućeg grafa bez centra, verovalo se da će ovi rezultati moći da se uopšte za sve grupe. Na primer, Luke Morgan i Chris Parker [53] dokazali su da je dijametar komutirajućeg grafa bez centra grupe sa trivijalnim centrom najviše 10. Michael Giudici i Aedan Pope [29] dokazali su analogno tvrđenje za proste konačne grupe, mada je ostalo nepoznato da li to ograničenje neka grupa i dostiže. Ipak, Peter Hegarty i Dmitrii Zhelezov [35] daju primer grupe čiji je dijametar komutirajućeg grafa bez centra jednak 10. Nakon ovoga, koristeći neke ideje iz [35], Michael Giudici i Crhis Parker [28] za svaki prirodan broj n pružaju konstrukciju 2-grupe čiji komutirajući graf ima dijametar veći od n. Komutirajući grafovi bili su predmet istraživanja brojnih radova, uključujući [4, 5, 26, 36, 51, 66, 71, 11].

2.3 Stepeni graf i obogaćeni stepeni graf

U ovoj sekciji uvodimo pojmove usmerenog stepenog grafa, stepenog grafa i obogaćenog grafa.

Definicija 2.2 **Usmereni stepeni graf** *grupe* $\mathbf{G}$ *je digraf* $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})$ *čiji je skup čvorova* G*, i u kome postoji usmerena grana iz* x *u* y*,* $x \neq y$*, ako* $y \in \langle x \rangle$*. Ako postoji usmerena grana iz* x *u* y *u* $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})$*, to ćemo označavati sa* $x \rightarrow_{\mathbf{G}} y$*, ili kraće sa* $x \rightarrow y$*.*

Stepeni graf *grupe* $\mathbf{G}$ *je graf* $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ *čiji je skup čvorova* G*, i u kome su* x *i* y*,* $x \neq y$*, susedni ako je* $y \in \langle x \rangle$ *ili* $x \in \langle y \rangle$*. Ako su* x *i* y *susedni u* $\mathcal{G}(\mathbf{G})$*, to ćemo označavati sa* $x \overset{p}{\sim}_{\mathbf{G}} y$*, ili kraće sa* $x \overset{p}{\sim} y$*.*

Pisaćemo $x \equiv_{\mathbf{G}} y$*, ili kraće* $x \equiv y$*, ako je* $\overline{N}_{\mathcal{G}(\mathbf{G})}(x) = \overline{N}_{\mathcal{G}(\mathbf{G})}(y)$*.*

Napomenimo da se, osim za grupe, usmereni stepeni graf i stepeni graf definišu na analogan način i u slučaju stepeno-asocijativnih lupa sa inverzima. Usmereni stepeni graf, kome će posebna pažnja biti posvećena u ovoj disertaciji, najpre su uveli za grupe Andrei Kelarev i Stephen Quinn [37] 2000. godine. Nakon toga predmet njihovog istraživanja bio je usmereni stepeni graf polugrupe. Usledio je niz radova [39, 40, 38] u kojima je uopšten rezultat iz [37]. Motivisani ovim, Shamik Ghosh, Ivy Chakrabarty i M. K. Sen [17] izučavali su stepeni graf polugrupe.

Peter Cameron i Shamik Ghosh [13] dokazuju da stepeni graf konačne Abelove grupe određuje tu grupu, da konačne grupe sa izomorfnim stepenim grafovima imaju isti broj elemenata bilo kog reda, i da je Kleinova grupa jedina konačna grupa čija je grupa automorfizama jednaka grupi automorfizama njenog stepenog grafa. U sledećem radu [12], Peter Cameron je pokazao da konačne grupe imaju izomorfne stepene grafove ako i samo ako su im usmereni stepeni grafovi izomorfni.

Stepeni i usmereni stepeni graf bili su tema mnogih kasnijih naučnih radova. Ghodratollah Aalipour, Saieed Akbari, Peter Cameron, Reza Nikandish i Farzad Shaveisik [1] su dokazali da je stepeni graf grupe konačnog eksponenta perfektan, i još nekoliko kombinatornih osobina stepenog grafa grupe. U radu objavljenom iste godine, Yaroslav Shitov [69] dokazao je da je hromatski broj stepenog grafa svakog stepeno-asocijativnog grupoida najviše prebrojiv.

Poslednjih godina stepeni grafovi privlače sve više pažnje, što je urodilo velikim brojem radova poput [2, 3, 8, 14, 19, 22, 25, 31, 32, 33, 34, 42, 43, 44, 45, 49, 50, 52, 57, 59, 60, 61, 62, 70]. Neka od pitanja kojima su se ovi radovi bavili su: kada je stepeni graf Eulerov, kada je Hamiltonov, kada je kompletan, šta su njegove maksimalne klike, i kada izomorfizam stepenih grafova dve grupe implicira izomorfizam tih grupa, ali i pitanja u vezi sa brojem grana, hromatskim brojem, maksimalnom veličinom klike, povezanošću, dijametrom i grupom automorfizama stepenog grafa. U ovoj disertaciji biće predstavljeni neki od navedenih rezultata.

U nastavku ove sekcije uvodimo definiciju obogaćenog stepenog grafa.

Definicija 2.3 **Obogaćeni stepeni graf** *grupe* $\mathbf{G}$ *je graf* $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ *čiji je skup čvorova* G*, i u kome su* x *i* y*,* $x \neq y$*, susedni ako postoji* $z \in G$ *takav da* $x, y \in \langle z \rangle$*. Ako su* x *i* y *susedni u* $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$*, to ćemo označavati sa* $x \overset{e}{\sim}_{\mathbf{G}} y$*, ili kraće sa* $x \overset{e}{\sim} y$*.*

Pisaćemo $x \overset{e}{\equiv}_{\mathbf{G}} y$*, ili kraće* $x \overset{e}{\equiv} y$*, ako je* $\overline{N}_{\mathcal{G}_e(\mathbf{G})}(x) = \overline{N}_{\mathcal{G}_e(\mathbf{G})}(y)$*.*

Na analogan način obogaćeni stepeni graf se definiše i u slučaju stepeno-asocijativnih lupa sa inverzima. Obogaćeni stepeni graf uveli su Aalipour, Akbari, Cameron, Nikandish i Shaveisik u [1]. Oni se u ovom radu bave vezom između komutirajućeg grafa, stepenog grafa i obogaćenog stepenog grafa, i dokazuju da je maksimalna klika obogaćenog stepenog grafa nosač ciklične ili lokalno ciklične podgrupe. Lako se vidi da za svaku grupu $\mathbf{G}$ važi $\mathcal{G}(\mathbf{G}) \subseteq \mathcal{G}_e(\mathbf{G}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{G})$. Upravo ova činjenica bila je motivacija za uvođenje obogaćenog stepenog grafa. Xuanlong Ma and Yanhong She [46] odredili su metričku dimenziju obogaćenog stepenog grafa konačne grupe. Ramesh Prasad Panda, Sandeep Dalal i Jitender Kumar [56] takođe su se bavili kombinatornim osobinama obogaćenog stepenog grafa konačne grupe. Asma Hamzeh i Ali Reza Ashrafi [32] izučavali su grupu automorfizama obogaćenog stepenog grafa konačne grupe. Obogaćeni stepeni graf bio je predmet istraživanja i radova [7, 24].

Narednim primerom ilustrujemo da postoje grupe čiji su komutirajući graf, stepeni graf i obogaćeni stepeni graf međusobno različiti.

Primer 2.4 *Neka su* p *i* q *različiti prosti brojevi, i neka je* $\mathbf{G} = \mathbf{C}_{pq} \times \mathbf{C}_p$*. Neka je* $\mathbf{C}$ *bilo koja podgrupa reda* pq *od* $\mathbf{G}$*. Tada je* $\mathbf{C}$ *ciklična grupa, pa je podgraf od* $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ *indukovan skupom* C *kompletan. Sa druge strane, postoje elementi* x *i* y *podgrupe* $\mathbf{C}$ *čiji su redovi* p *i* q*, respektivno. Ako bi, bez umanjenja opštosti,* y *bio stepen elementa* x*, onda bi bilo* $q = o(y) \mid o(x) = p$*, što je nemoguće jer su* p *i* q *uzajamno prosti. Dakle,* $x \overset{p}{\nsim} y$*, pa sledi da je* $\mathcal{G}(\mathbf{C}_{pq}) \neq \mathcal{G}_e(\mathbf{C}_{pq})$*.*

Pošto je $\mathbf{G}$ *Abelova grupa,* $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ *je kompletan. Neka su* $\overline{x} = (x, e)$ *i* $\overline{y} = (e, y)$ *elementi reda* p *grupe* $\mathbf{G}$*. Pošto ciklična grupa, čiji je red deljiv sa* p*, ima jedinstvenu podgrupu reda* p*, onda* $\overline{x}$ *i* $\overline{y}$ *nisu sadržani u istoj cikličnoj grupi, pa* $\overline{x} \overset{e}{\nsim} \overline{y}$*. Sledi da su grafovi* $\mathcal{G}(\mathbf{G})$*,* $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ *i* $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ *međusobno različiti.*

Primer 2.5 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna grupa. Onda važi:*

(a) $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ *je kompletan ako i samo ako je* $\mathbf{G}$ *ciklična* p*-grupa.*

(b) $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ *je kompletan ako i samo ako je* $\mathbf{G}$ *ciklična grupa.*

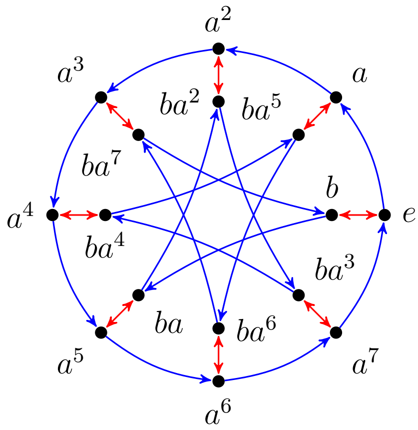
(c) $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ *je kompletan ako i samo ako je* $\mathbf{G}$ *Abelova grupa.*

Napomenimo da ni komutirajući, ni stepeni, ni usmereni stepeni graf ne određuje grupu. Postoje neizomorfne grupe koje imaju izomorfne stepene grafove. Na primer, bilo koje dve neizomorfne Abelove grupe istog reda imaju izomorfne komutirajuće grafove. Takođe, za različite proste brojeve p i q, Prüferova p-grupa i Prüferova q-grupa imaju izomorfne stepene grafove. U nastavku navodimo jedan par neizomorfnih konačnih grupa sa izomorfnim stepenim grafovima.

Primer 2.6 *Unitriangularna grupa* $\mathbf{UT}(3, p)$ *je multiplikativna grupa matrica nad poljem* $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ *oblika*

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gde $x, y, z \in \mathbb{Z}_p$*, i gde je* p *prost broj. Za svaki prost broj* p*,* $\mathbf{UT}(3, p)$ *je neabelova, a za* $p > 2$ *eksponent grupe* $\mathbf{UT}(3, p)$ *jednak je* p*. Odatle se vidi da, za svaki neparan prost broj* p*,* $\mathbf{UT}(3, p)$ *i Abelova grupa* $\mathbf{C}_p \times \mathbf{C}_p \times \mathbf{C}_p$ *imaju izomorfne stepene grafove.*



Slika 2.3

Konačne grupe iz primera 2.6, osim što imaju izomorfne stepene grafove, imaju izomorfne obogaćene stepene grafove, ali i usmerene stepene grafove. Koristeći GAP [68] i paket GRAPE [67] moguće je pronaći još ovakvih primera. Grupa sa prezentacijom $\mathbf{G} = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = 1, yxy = x^5 \rangle$, čiji je Cayleyjev graf prikazan na slici 2.3, i $\mathbf{C}_8 \times \mathbf{C}_2$ su neizomorfne grupe najmanjeg reda čiji su stepeni grafovi izomorfni. Cameron i Ghosh [13] primetili su da postoje ukupno dva para grupa reda 27 sa izomorfnim stepenim grafovima, a za red 32 su primetili da postoji jedna četvorka takvih grupa, dve trojke i 8 parova.

2.4 O raznim definicijama stepenog grafa

Ova sekcija bavi se raznim verzijama definicije stepenog grafa, i zasnovana je na [72]. Naime, prema definiciji 2.1, koja je saglasna sa definicijama iz [1] i [14], za elemente x i y grupe $\mathbf{G}$ važi $x \to y$ u $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})$ ako postoji $n \in \mathbb{Z}$ takvo da je $y = x^n$, a x i y su susedni u $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ ako postoji $n \in \mathbb{Z}$ takvo da je $y = x^n$ ili $x = y^n$. Navedimo sada definiciju stepenog grafa koja je uvedena u [37]. Da bismo izbegli zabune kod čitalaca, uvodimo termine pozitivno-stepeni graf i usmereni pozitivno-stepeni graf.

Definicija 2.7 **Usmereni pozitivno-stepeni graf** *grupe* $\mathbf{G}$ *je digraf* $\vec{\mathcal{G}}^+(\mathbf{G})$ *čiji je skup čvorova* G*, i u kome postoji usmerena grana iz* x *u* y*,* $x \neq y$*, ako postoji* $n \in \mathbb{N}$ *takvo da je* $y = x^n$*. Ako postoji usmerena grana iz* x *u* y *u* $\vec{\mathcal{G}}^+(\mathbf{G})$*, to ćemo označavati sa* $x \xrightarrow{+} y$*.*

Pozitivno-stepeni graf *grupe* $\mathbf{G}$ *je graf* $\mathcal{G}^{+}(\mathbf{G})$ *čiji je skup čvorova* G*, i u kome su* x *i* y*,* $x \neq y$*, susedni ako postoji* $n \in \mathbb{N}$ *takvo da je* $y = x^n$ *ili* $x = y^n$*. Ako su* x *i* y *susedni* $\mathcal{G}^{+}(\mathbf{G})$*, to ćemo označavati sa* $x \overset{p+}{\sim} y$*.*

Prednost prethodne definicije je ta što se se usmereni pozitivno-stepeni graf i pozitivno stepeni graf na analogan način mogu definisati i u slučaju stepeno-asocijativnih grupoida gde jedinstveni inverzni element ne mora da postoji. Sa druge strane, za sve torzione grupe, stepeni graf i pozitivno-stepeni graf se poklapaju, kao i usmereni stepeni graf i usmereni pozitivno-stepeni graf.

Pored ovoga, u [14] autori su koristili definiciju u kojoj su insistirali da eksponent u izrazu $y = x^n$ bude nenula ceo broj. Ovako definisani pridruženi graf nazivaćemo nenula-stepeni graf.

Definicija 2.8 **Usmereni nenula-stepeni graf** *grupe* $\mathbf{G}$ *je digraf* $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$ *čiji je skup čvorova* G*, i u kome postoji usmerena grana iz* x *u* y*,* $x \neq y$*, ako postoji* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *takvo da je* $y = x^n$*. Ako postoji usmerena grana iz* x *u* y *u* $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$*, to ćemo označavati sa* $x \overset{\pm}{\to} y$*.*

Nenula-stepeni graf *grupe* $\mathbf{G}$ *je graf* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ *čiji je skup čvorova* G*, i u kome su* x *i* y*,* $x \neq y$*, susedni ako postoji* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *takvo da je* $y = x^n$ *ili* $x = y^n$*. Ako su* x *i* y *susedni* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$*, to ćemo označavati sa* $x \overset{p\pm}{\sim} y$*.*

Napomenimo da se usmereni nenula-stepeni graf i nenula stepeni graf na analogan način definišu i u slučaju stepeno-asocijativnih lupa sa inverzima. Ovakva definicija omogućila je autorima rada [14] da lakše iskažu svoje argumente radeći sa stepenim grafovima torziono slobodnih grupa, pri čemu je u slučaju torziono slobodnih grupa očigledno da se stepeni graf i nenula-stepeni graf međusobno određuju. Takođe se lako primećuje i da se usmereni nenula-stepeni graf i usmereni stepeni graf bilo koje grupe međusobno određuju. U ovoj sekciji dokazujemo da se stepeni graf, pozitivno-stepeni graf i nenula-stepeni graf stepeno-asocijativne lupe sa inverzima međusobno određuju, što je rezultat iz [72].

Ako je $\mathbf{G}$ stepeno-asocijativna lupa sa inverzima, centar stepenog grafa $\mathcal{G}(\mathbf{G})$, u oznaci $\mathrm{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))$, je skup svih njegovih čvorova koji su susedni sa svim čvorovima od $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ sem sa samim sobom. Takođe, za elemente $x, y \in G$ pišemo $x \equiv_{\mathbf{G}} y$ ako x i y imaju ista zatvorena susedstva u $\mathcal{G}(\mathbf{G})$.

Lema 2.9 *Neka je* $\mathbf{G}$ *stepeno-asocijativna lupa sa inverzima takva da je* $|\mathrm{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))| > 1$*. Tada važi sledeće:*

(a) $\mathbf{G}$ *je beskonačna ciklična grupa, ili su svi elementi od* $\mathbf{G}$ *konačnog reda.*

(b) $\mathbf{G} \cong (\mathbb{Z}, +)$ *ako i samo ako je* G *unija prebrojivo mnogo* $\equiv_{\mathbf{G}}$*-klasa kardinalnosti* 2 *i jedne* $\equiv_{\mathbf{G}}$*-klase kardinalnosti* 3*.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G}$ stepeno-asocijativna lupa sa inverzima takva da je $|\mathrm{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))| > 1$. Pošto u stepenom grafu nikoji nejedinični element konačnog reda nije susedan sa elementom beskonačnog reda, onda je, ako $\mathbf{G}$ sadrži i element beskonačnog reda i nejedinični element konačnog reda, $\mathrm{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G})) = \{e_{\mathbf{G}}\}$. Dakle, $\mathbf{G}$ ima elemente samo konačnog reda, ili su svi nejedinični elementi od $\mathbf{G}$ beskonačnog reda. Neka su svi nejedinični elementi lupe $\mathbf{G}$ beskonačnog reda. Pošto je $|\mathrm{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))| > 1$, postoji $x \in G \setminus \{e_{\mathbf{G}}\}$ koji je susedan u $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ sa svim elementima iz $G \setminus \{x\}$. Pokažimo da je onda $\mathbf{G} = \langle x \rangle$. Ako $\mathbf{G}$ nije generisana sa x, onda postoji $y \in G \setminus \langle x \rangle$, za koje postoji $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ takvo da je $x = y^n$. Onda za $m \in \mathbb{N}$ uzajamno prosto sa n važi $x \overset{p}{\nsim} y^m$, čime je dobijena kontradikcija. Dakle, $\mathbf{G}$ sadrži samo elemente konačnog reda ili je $\mathbf{G} \cong (\mathbb{Z}, +)$, čime je dokazano (a).

Ako je $\mathbf{G} \cong (\mathbb{Z}, +)$ generisana elementom x, onda x, x^{-1} i $e_{\mathbf{G}}$ čine jednu $\equiv_{\mathbf{G}}$-klasu kardinalnosti 3. Neka $y \in G \setminus \{x, x^{-1}, e_{\mathbf{G}}\}$. Očigledno, $y \equiv_{\mathbf{G}} y^{-1}$. Pretpostavimo da postoji $z \notin \{y, y^{-1}\}$ takvo da je $z \equiv_{\mathbf{G}} y$. Onda postoji $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ takvo da je $z = y^n$ ili $y = z^n$. Tada, za m uzajamno prosto sa n, važi $z \overset{p}{\nsim} y^m \overset{p}{\sim} y$ ili $y \overset{p}{\nsim} z^m \overset{p}{\sim} z$, čime je dobijena kontradikcija. Ovim smo pokazali da je svaki element od $\mathbf{G}$, koji nije ni generator ni neutralni element, sadržan u $\equiv_{\mathbf{G}}$-klasu kardinalnosti 2. Ovim je dokazana jedna implikacija od (b).

Da bismo dokazali i drugu implikaciju od (b), pretpostavimo sada da $\mathbf{G}$ sadrži samo elemente konačnog reda i da je G unija prebrojivo mnogo $\equiv_{\mathbf{G}}$-klasa kardinalnosti 2 i jedne $\equiv_{\mathbf{G}}$-klase kardinalnosti 3. Ako bi postojao element x od $\mathbf{G}$ čiji je red $n > 6$, onda ciklična grupa $\langle x \rangle$ ima više od 2 elementa koji su njeni generatori, a ovi elementi bi imali ista zatvorena susedstva u $\mathcal{G}(\mathbf{G})$. Dakle, $\mathbf{G}$ ne sadrži nijedan element reda većeg od 6, kao ni element reda 5. Takođe, pošto $\{e_{\mathbf{G}}\}$ nije $\equiv_{\mathbf{G}}$-klasa, onda su ili redovi svih elemenata lupe $\mathbf{G}$ stepeni broja 2, ili su redovi svih elemenata lupe $\mathbf{G}$ stepeni broja 3. Međutim, pošto $\mathbf{G}$ ne sadrži nijedan element reda 9, onda su redovi svih elemenata stepeni od 2. Dalje, ako bi $\mathbf{G}$ imala jedinstveni involutivni element, onda ne bi postojala nijedna $\equiv_{\mathbf{G}}$-klasa kardinalnosti 3, a ako bi $\mathbf{G}$ imala bar dva involutivna elementa, onda bi $\{e_{\mathbf{G}}\}$ bila $\equiv_{\mathbf{G}}$-klasa kardinalnosti 1.

Ovim smo dobili kontradikciju sa polaznom pretpostavkom, pa je (b) dokazano. $\square$

Teorema 2.10 *Neka su* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *stepeno-asocijativne lupe sa inverzima. Onda je* $\mathcal{G}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}(\mathbf{H})$ *ako i samo ako* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$.

Dokaz. Neka je $\mathbf{G}$ stepeno asocijativna lupa sa inverzima, i neka je $\Gamma = \mathcal{G}(\mathbf{G})$, $\Gamma^{\pm} = \mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$, $\Delta = \mathcal{G}(\mathbf{H})$ i $\Delta^{\pm} = \mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$. Trivijalno, $\Gamma^{\pm} \subseteq \Gamma$ i $E(\Gamma) \setminus E(\Gamma^{\pm}) = \big\{\{e, x\} \mid x \in G \text{ i } o(x) = \infty\big\}$, i analogno važi i za Δ i $\Delta^{\pm}$. U ovom dokazu, za graf Ω, pisaćemo $x \equiv_{\Omega} y$ ako čvorovi x i y od Ω imaju ista zatvorena susedstva.

Ako je $|\mathrm{Cen}(\Gamma)| > 1$, na osnovu leme 2.9, ako je $\mathbf{G} \cong (\mathbb{Z}, +)$, onda je i $\mathbf{H} \cong (\mathbb{Z}, +)$, što trivijalno povlači traženu ekvivalenciju. Slično, ako $\mathbf{G} \ncong (\mathbf{Z}, +)$, onda i $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ nemaju elemenata beskonačnog reda. Tada je $\Gamma = \Gamma^{\pm}$ i $\Delta = \Delta^{\pm}$, pa i tad ekvivalencija važi.

Pretpostavimo dalje da je $|\mathrm{Cen}(\Gamma)| = 1$. Neka je $\Gamma \cong \Delta$, i neka je $\varphi : G \to H$ izomorfizam iz Γ u Δ. Pokažimo da je tada φ izomorfizam i iz $\Gamma^{\pm}$ u $\Delta^{\pm}$. Neka $x, y \in G$, i neka je $x \overset{p\pm}{\sim} y$. Očigledno, onda je $\varphi(x) \overset{p}{\sim} \varphi(y)$. Pretpostavimo da je $\varphi(x) \overset{p\pm}{\not\sim} \varphi(y)$. Onda je, bez umanjenja opštosti, $\varphi(x)$ beskonačnog reda i $\varphi(y) = e_{\mathbf{H}}$. Tada je $\varphi(x)$ sadržano u komponenti povezanosti od $\Delta \setminus \{e_{\mathbf{H}}\}$ čiji je skup čvorova unija prebrojivo mnogo $\equiv_{\Delta}$-klasa kardinalnosti dva i koja sadrži beskonačnu kliku. Očigledno, onda analogno važi i za x. Ako bi x bio konačnog reda, onda komponenta povezanosti od $\Gamma \setminus \{e_{\mathbf{G}}\}$ koja sadrži x ne bi sadržala nijedan element reda većeg 6, pa ne bi sadržala ni beskonačnu kliku. Dakle, x je beskonačnog reda. Pošto je $|\mathrm{Cen}(\Gamma)| = 1$, postoji samo jedan čvor u $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ koji je susedan sa svim ostalim čvorovima tog grafa, pa sledi $y = e_{\mathbf{G}}$ jer je $\varphi(y) = e_{\mathbf{H}}$. Odatle sledi $x \overset{p\pm}{\not\sim} y$, čime je dobijena kontradikcija. Ovim smo pokazali da je $\varphi(x) \overset{p\pm}{\sim} \varphi(y)$. Analogno, i $\varphi(x) \overset{p\pm}{\sim} \varphi(y)$ povlači $x \overset{p\pm}{\sim} y$.

Preostaje da se pokaže da, u slučaju kada je $|\mathrm{Cen}(\Gamma)| = 1$, važi i obrnuta implikacija. Neka je $\Gamma^{\pm} \cong \Delta^{\pm}$, i neka je $\varphi : G \to H$ izomorfizam iz $\Gamma^{\pm}$ u $\Delta^{\pm}$. Moguće je da je $\varphi(e_{\mathbf{G}}) \neq e_{\mathbf{H}}$, pa neka je $\hat{\varphi}(x) = \tau(\varphi(x))$, gde je τ transpozicija $e_{\mathbf{H}}$ i $\varphi(e_{\mathbf{G}})$. Pošto komponenta povezanosti Φ od $\Delta^{\pm}$ sadrži elemente beskonačnog reda ako i samo ako je $V(\Phi)$ unija prebrojivo mnogo $\equiv_{\Delta^{\pm}}$-klasa kardinalnosti 2 i Φ sadrži beskonačnu kliku, onda se $\varphi(e_{\mathbf{G}})$ nalazi u istoj komponenti povezanosti kao i $e_{\mathbf{H}}$. Iz prethodnog je jasno da $e_{\mathbf{G}}$, $e_{\mathbf{H}}$, kao ni $\varphi(e_{\mathbf{G}})$, nisu u komponentama povezanosti od $\Gamma^{\pm}$ i $\Delta^{\pm}$ koje sadrže elemente beskonačnog reda. Dakle, $\varphi(e_{\mathbf{G}})$ je konačnog reda, i stoga je u istoj komponenti kao i $e_{\mathbf{H}}$. Čvor $e_{\mathbf{G}}$ je susedan sa svim elementima konačnog reda i ni sa jednim beskonačnog reda, pa isto mora važiti i za $e_{\mathbf{H}}$ i za $\varphi(e_{\mathbf{G}})$, pa $e_{\mathbf{H}}$ i $\varphi(e_{\mathbf{G}})$ imaju ista zatvorena susedstva u $\Delta^{\pm}$. Dakle, transpozicija τ je automorfizam grafa $\Delta^{\pm}$. Odatle, $\hat{\varphi}$ je izomorfizam iz $\Gamma^{\pm}$ u $\Delta^{\pm}$. Dokažimo da je $\hat{\varphi}$ izomorfizam iz Γ u Δ. Neka je $x, y \in G$, i neka je $x \overset{p}{\sim} y$. Ako je $x \overset{p\pm}{\sim} y$, onda očigledno važi $\hat{\varphi}(x) \overset{p}{\sim} \hat{\varphi}(y)$. Pretpostavimo da nije $x \overset{p\pm}{\sim} y$. Tada je, bez umanjenja opštosti, $x = e_{\mathbf{G}}$, pa pošto je $\hat{\varphi}(x) = e_{\mathbf{H}}$, sledi $\hat{\varphi}(x) \overset{p}{\sim} \hat{\varphi}(y)$. Analogno se pokazuje i da $\hat{\varphi}(x) \overset{p}{\sim} \hat{\varphi}(y)$ povlači $x \overset{p}{\sim} y$. Dakle, $\hat{\varphi}$ je izomorfizam iz Γ u Δ. Ovim je teorema dokazana. $\square$

Ovim smo dokazali da, za svaku stepeno-asocijativnu lupu sa inverzima $\mathbf{G}$, grafovi $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ i $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ nose istu količinu informacija o polaznoj strukturi. Pokažimo da isto važi i za nenula-stepeni i pozitivno-stepeni graf.

Lema 2.11 *Neka je* $\mathbf{G}$ *stepeno-asocijativna lupa sa inverzima. Za svaki element* $x \in G$ *beskonačnog reda,* x *i* x^{-1} *nalaze se u različitim komponentama povezanosti grafa* $\mathcal{G}^{+}(\mathbf{G})$.

Dokaz. Neka je $x \in G$ beskonačnog reda. Za prirodne brojeve n i m, neka je $S(x, n, m) = \{y \mid x^n = y^m\}$, i neka je $\overline{S}(x) = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} S(x, n, m)$. Pokažimo da skup $\overline{S}(x)$ indukuje komponentu povezanosti grafa $\mathcal{G}^{+}(\mathbf{G})$. Neka $y \in \overline{S}(x)$. Tada $y \in S(x, n, m)$, za neke $n, m \in \mathbb{N}$, i pretpostavimo da je $z \overset{p+}{\sim} y$, za neko $z \in G$. Ako je $z \overset{+}{\to} y$, onda očigledno $z \in \overline{S}(x)$, pa pretpostavimo da je $y \overset{+}{\to} z$. Onda je $z = y^k$ za neko $k \in \mathbb{N}$. U tom slučaju $z \in S(x, nk, m) \subseteq \overline{S}(x)$. Pošto se lako vidi da je $\overline{S}(x)$ povezan skup čvorova, sledi da $\overline{S}(x)$ indukuje komponentu povezanosti grafa $\mathcal{G}^{+}(\mathbf{G})$, a jasno je da $x^{-1} \notin \overline{S}(x)$. Ovim je lema dokazana. $\square$

Pre nego što nastavimo, podsetimo čitaoca da sa P_2 označavamo graf koji je put sa dva čvora. Za grafove Γ i Δ, $\Gamma \boxtimes \Delta$ je jak proizvod grafova Γ i Δ, a, za $X \subseteq V(\Gamma)$, sa $\Gamma[X]$ označavamo podgraf od Γ indukovan sa X.

Lema 2.12 *Neka je* $\mathbf{G}$ *stepeno-asocijativna lupa sa inverzima. Za svaku komponentu povezanosti* Φ *grafa* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ *koja sadrži elemente beskonačnog reda postoje komponente povezanosti* Ψ_1 *i* Ψ_2 *grafa* $\mathcal{G}^{+}(\mathbf{G})$ *takve da je:*

(a) $V(\Phi) = V(\Psi_1) \cup V(\Psi_2)$;

(b) $\Psi_1 \cong \Psi_2$;

(c) $\Phi \cong \Psi_1 \boxtimes P_2$;

(d) $\Psi_1 \cong \Phi/{\equiv_{\Gamma^\pm}}$.

Dokaz. Označimo sa Γ^+ i $\Gamma^\pm$ grafove $\mathcal{G}^+(\mathbf{G})$ i $\mathcal{G}^\pm(\mathbf{G})$. Neka je $x \in G$ beskonačnog reda, i neka je $T(x, n, m) = \{y \mid y^m = x^n\}$, za bilo koje $x \in G$, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, i $m \in \mathbb{N}$. Neka je $\overline{T}(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, m\in\mathbb{N}} T(x, n, m)$. Lako se vidi da $\overline{T}(x)$ čini povezan skup čvorova grafa $\mathcal{G}^\pm(\mathbf{G})$. Takođe, slično kao u dokazu leme 2.11, ako je $z \overset{p\pm}{\sim} y$ za neko $y \in \overline{T}(x)$, onda $z \in \overline{T}(x)$. Odatle, $\overline{T}(x)$ indukuje komponentu povezanosti od $\Gamma^\pm$. Dalje, lako se vidi da je $\overline{T}(x) = \overline{S}(x) \cup \overline{S}(x^{-1})$, gde je $\overline{S}(x)$ uveden u dokazu leme 2.11. Kao što je pokazano u dokazu leme 2.11, $\overline{S}(x)$ i $\overline{S}(x^{-1})$ indukuju različite komponente povezanosti grafa Γ^+. Dakle, svaka komponenta povezanosti od $\Gamma^\pm$ koja sadrži elemente beskonačnog reda je unija dve komponente povezanosti Ψ_1 i Ψ_2 grafa Γ^+, gde Ψ_2 sadrži inverze elemenata iz Ψ_1. Ovim je dokazano (a).

Neka je Φ komponenta povezanosti grafa $\Gamma^\pm$ indukovana skupom $V(\Psi_1) \cup V(\Psi_2)$. Pošto je preslikavanje $x \mapsto x^{-1}$ automorfizam od Γ^+ koji slika $V(\Psi_1)$ na $V(\Psi_2)$, onda je $\Psi_1 \cong \Psi_2$, čime je dokazano (b). Dalje, pošto x i x^{-1} imaju ista zatvorena susedstva u $\Gamma^\pm$, i pošto su Ψ_1 i Ψ_2 indukovani podgrafovi od Φ, onda je $\Phi \cong \Psi_1 \boxtimes P_2$. Pored toga, $V(\Phi)$ je unija $\equiv_{\Gamma^\pm}$-klasa kardinalnosti 2, od kojih svaka sadrži element beskonačnog reda i njegov inverz. Odatle, Ψ_1 sadrži iz svake $\equiv_{\Gamma^\pm}$-klase sadržane u $V(\Phi)$ tačno po jedan element, pa sledi da je Ψ_1 izomorfan sa grafom koji se dobija zamenom svake $\equiv_{\Gamma^\pm}$-klase sadržane u Φ jednim čvorom. Ovim smo dokazali i (c) i (d), čime je lema dokazana. □

Teorema 2.13 *Neka su* **G** *i* **H** *stepeno-asocijativne lupe sa inverzima. Onda je* $\mathcal{G}^+(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^+(\mathbf{H})$ *ako i samo ako je* $\mathcal{G}^\pm(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^\pm(\mathbf{H})$.

Dokaz. Označimo sa Γ^+, $\Gamma^\pm$, Δ^+ i $\Delta^\pm$ grafove $\mathcal{G}^+(\mathbf{G})$, $\mathcal{G}^\pm(\mathbf{G})$, $\mathcal{G}^+(\mathbf{H})$ i $\mathcal{G}^\pm(\mathbf{H})$, redom. Neka su $G^{<\infty}$ i $H^{<\infty}$ skupovi svih elememata konačnog reda lupa **G** i **H**.

Pretpostavimo da je $\mathcal{G}^+(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^+(\mathbf{H})$. Skup $G^{<\infty}$ indukuje komponentu povezanosti grafova Γ^+ i $\Gamma^\pm$. Dodatno, $G^{<\infty}$ indukuje jedinu komponentu povezanosti od Γ^+ koja nije unija $\equiv_{\Gamma^+}$-klasa kardinalnosti 1 ili koja ne sadrži beskonačnu kliku. Pošto analogno važi i za komponentu povezanosti od Δ^+ indukovanu sa $H^{<\infty}$, onda je $\Gamma^\pm[G^{<\infty}] = \Gamma^+[G^{<\infty}] \cong \Delta^+[H^{<\infty}] = \Delta^\pm[H^{<\infty}]$. Dalje, neka je Φ komponenta povezanosti od $\Gamma^\pm$ koja sadrži elemente beskonačnog reda, i neka je κ kardinalnost skupa svih komponenti povezanosti od $\Gamma^\pm$ izomorfnih sa Φ. Na osnovu leme 2.12, Φ je indukovana čvorovima dve međusobno izomorfne komponente povezanosti Ψ_1 i Ψ_2 od Γ^+, pa je 2κ kardinalnost svih komponenti povezanosti grafa Γ^+ izomorfnih sa Ψ_1. Pošto je $\Gamma^+ \cong \Delta^+$, onda i Δ^+ sadrži tačno 2κ komponenti povezanosti izomorfnih sa Ψ_1, pa na osnovu leme 2.12 graf $\Delta^\pm$ sadrži κ komponenti povezanosti izomorfnih sa Φ. Analogno važi i za svaku komponentu povezanosti od $\Delta^\pm$, pa pošto $\Gamma^\pm$ i $\Delta^\pm$ imaju do na izomorfizam iste komponente povezanosti, i, za svaku komponentu povezanosti Φ od $\Gamma^\pm$, kardinalnost skupa komponenti povezanosti od $\Gamma^\pm$ izomorfnih sa Φ jednaka je kardinalnosti skupa komponenti povezanosti od $\Delta^\pm$ izomorfnih sa Φ. Odatle sledi da su grafovi $\Gamma^\pm$ i $\Delta^\pm$ izomorfni.

Slično se dokazuje i suprotna implikacija. Neka je $\mathcal{G}^\pm(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^\pm(\mathbf{H})$. Sada je $G^{<\infty}$ jedina komponenta povezanosti od $\Gamma^\pm$ koja nije unija $\equiv_{\Gamma^\pm}$-klasa kardinalnosti 2 ili koja ne sadrži beskonačnu kliku, a analogno važi i za komponentu povezanosti od $\Delta^\pm$ indukovanu sa $H^{<\infty}$. Dakle, slično kao ranije, sledi da $G^{<\infty}$ i $H^{<\infty}$ indukuju međusobno izomorfne komponente povezanosti od Γ^+ i Δ^+, redom. Dalje, neka je Ψ komponenta povezanosti od Γ^+ koja sadrži elemente beskonačnog reda. Na osnovu leme 2.11, postoji kardinal κ takav da je kardinalnost skupa svih komponenti povezanosti od Γ^+ izomorfnih sa Ψ jednaka 2κ. Na osnovu leme 2.12, $\Gamma^\pm$ sadrži κ komponenti povezanosti izomorfnih sa $\Psi \boxtimes P_2$, gde je P_2 put reda 2, pa i $\Delta^\pm$ sadrži tačno κ komponenti povezanosti izomorfnih sa $\Psi \boxtimes P_2$. Odatle, opet na osnovu leme 2.12, graf Δ^+ sadrži 2κ komponenti povezanosti izomorfnih sa Ψ. Dakle, Δ^+ i Γ^+ sadrže do na izomorfizam iste komponente povezanosti, i za svaku kompomentu povezanosti Ψ od Γ^+, kardinalnost skupa komponenti povezanosti od Γ^+ izomorfnih sa Ψ jednaka je kardinalnosti skupa komponenti povezanosti od Δ^+ izomorfnih sa Ψ. Odatle sledi da je $\Gamma^+ \cong \Delta^+$, čime smo dokaz ove teoreme priveli kraju. $\square$

Naredna posledica, koja je glavno tvrđenje ove sekcije, je direktna posledica teoreme 2.10 i teoreme 2.13.

Posledica 2.14 *Neka su* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *stepeno-asocijativne lupe sa inverzima. Onda su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *imaju izomorfne stepene grafove;*

(b) $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *imaju izomorfne nenula-stepene grafove;*

(c) $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *imaju izomorfne pozitivno-stepene grafove.*

2.5 Jednakost grafova pridruženih grupama

Kao što smo pomenuli u prethodnoj sekciji, lako se vidi da važe inkluzije $\mathcal{G}(\mathbf{G}) \subseteq \mathcal{G}_e(\mathbf{G}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{G})$. Ova sekcija, koja je zasnovana na rezultatima iz [1], bavi se pitanjem za koje konačne grupe važe jednakosti. Dokazi koje prilažemo detaljniji su nego u originalnom radu. Najpre odgovaramo na pitanje koje konačne grupe imaju obogaćeni stepeni graf jednak stepenom grafu, a potom dajemo odgovor na analogno pitanje za obogaćeni stepeni graf i komutirajući graf. Sledeća teorema je u originalnom radu dokazana za konačne grupe, ali se ona analogno dokazuje i u slučaju konačnih stepeno-asocijativnih lupa.

Tvrđenje 2.15 ([1, teorema 28]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna stepeno-asocijativna lupa. Onda su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $\mathcal{G}_e(\mathbf{G}) = \mathcal{G}(\mathbf{G})$;

(b) *Svaka ciklična podgrupa lupe* $\mathbf{G}$ *je* p*-grupa.*

Dokaz. Dokažimo najpre implikaciju (a) $\Rightarrow$ (b). Pretpostavimo da postoji $x \in G$ čiji red ima bar dva različita prosta delioca. Onda postoje različiti prosti brojevi p i q takvi da $p, q \mid o(x)$. Tada u $\langle x \rangle$ postoje g i h kojima su redovi p i q, redom. Elementi g i h nisu susedni u stepenom grafu grupe $\mathbf{G}$, iako su susedni u obogaćenom stepenom grafu. Dakle, sledi $\mathcal{G}(\langle x \rangle) \subsetneq \mathcal{G}_e(\langle x \rangle)$, što povlači $\mathcal{G}(\mathbf{G}) \subsetneq \mathcal{G}_e(\mathbf{G})$, čime smo dokazali implikaciju.

Pretpostavimo sada da (b) važi, i neka je $x \overset{e}{\sim} y$ za neke $x, y \in G$. Onda je $\langle x, y \rangle$ ciklična p-grupa, pa $x \to y$ ili $y \to x$, što povlači $x \overset{p}{\sim} y$. Ovim je tvrđenje dokazano. $\square$

Radi motivacije i lakšeg razumevanja narednog tvrđenja, koje je rezultat rada [1] i koje navodimo bez dokaza, uvodimo pojmove Frobeniusove i 2-Frobeniusove grupe. **Frobeniusova grupa** je grupa $\mathbf{G}$ koja verno i tranzitivno deluje na konačnom skupu X tako da svaki nejedinični element od $\mathbf{G}$ fiksira najviše jedan element od X i tako da bar jedan nejedinični element od $\mathbf{G}$ fiksira bar jedan element od X. Važno je napomenuti da se Frobeniusova grupa na ekvivalentan način može definisati kao grupa koja sadrži pravu podgrupu $\mathbf{H} \neq 1$, koja se zove **Frobeniusov komplement**, takva da je $H \cap g^{-1}Hg = \{1\}$ za sve $g \in G \setminus H$. Ferdinand Georg Frobenius dokazao je 1901. godine da svi elementi Frobeniusove grupe koji nemaju fiksnih tačaka u X, zajedno sa neutralnim elementom, čine normalnu podgrupu Frobeniusove grupe; ta normalna podgrupa zove se **Frobeniusovo jezgro**. Frobenius je tada dokazao i da je Frobeniusova grupa poludirektni proizvod Frobeniusovog jezgra sa Frobeniusovim komplementom. Nešto više o ovome može se pročitati u [64, glava 9].

Grupa $\mathbf{G}$ je 2-**Frobeniusova** ako ima normalne podgrupe $\mathbf{F}_1$ i $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_1 < \mathbf{F}_2$, takve da je $\mathbf{F}_2$ Frobeniusova grupa sa Frobeniusovim jezgrom $\mathbf{F}_1$ i da je $\mathbf{G}/\mathbf{F}_1$ Frobeniusova grupa sa Frobeniusovim jezgrom $\mathbf{F}_2/\mathbf{F}_1$.

Tvrđenje 2.16 ([1, teorema 28]) *Neka je $\mathbf{G}$ konačna grupa takva da je $\mathcal{G}(\mathbf{G}) = \mathcal{G}_e(\mathbf{G})$. Onda je $\mathbf{G}$ nešto od sledećeg:*

(a) *p-grupa;*

(b) *Frobeniusova grupa čije je Frobeniusovo jezgro p-grupa i Frobeniusov komplement q-grupa;*

(c) *2-Frobeniusova grupa takva da je $\mathbf{G}/\mathbf{F}_2$ p-grupa i $\mathbf{F}_2/\mathbf{F}_1$ q-grupa;*

(d) *$\mathbf{G}$ ima normalnu 2-podgrupu sa faktor grupom $\mathbf{H}$, gde je $\mathbf{S} \leq \mathbf{H} \leq \mathrm{Aut}(\mathbf{S})$ i $\mathbf{S} \cong \mathbf{A}_5$ ili $\mathbf{A}_6$.*

Tvrđenje 2.17 ([1, teorema 28]) *Neka je $\mathbf{G}$ konačna grupa. Onda su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) *$\mathcal{G}_e(\mathbf{G}) = \mathcal{C}(\mathbf{G})$;*

(b) *$\mathbf{G}$ nema podgrupu izomorfnu sa $\mathbf{C}_p \times \mathbf{C}_p$ ni za jedan prost broj p;*

(c) *Sve podgrupe Sylowa grupe $\mathbf{G}$ su ciklične ili generalisana grupa kvaterniona.*

Dokaz. Pošto je $\mathcal{G}_e(\mathbf{C}_p \times \mathbf{C}_p) \subsetneq \mathcal{C}(\mathbf{C}_p \times \mathbf{C}_p)$, implikacija (a) $\Rightarrow$ (b) važi. Dokažimo da važi obrnuta implikacija. Pretpostavimo da važi (b), i neka je $x \overset{c}{\sim} y$ za neke $x, y \in G$. Onda je $\langle x, y \rangle$ konačna Abelova grupa generisana sa 2 elementa. Odatle, $\langle x, y \rangle \cong \mathbf{C}_r \times \mathbf{C}_s$ za neke $r, s \in \mathbb{N}$, pri čemu je moguće da jedna od grupa $\mathbf{C}_r$ i $\mathbf{C}_s$ trivijalna. (Naime, na osnovu teoreme 1.13, svaka konačna Abelova grupa izomorfna je direktnom proizvodu $\mathbf{C}_{n_1} \times \mathbf{C}_{n_2} \times \cdots \times \mathbf{C}_{n_k}$ cikličnih grupa $\mathbf{C}_{n_1}, \mathbf{C}_{n_2}, \ldots, \mathbf{C}_{n_k}$ za neke prirodne brojeve $n_1, n_2, \ldots, n_k$ takve da je $n_1 \mid n_2 \mid \cdots \mid n_k$, i može se dokazati da je svaki minimalni generatorni skup te grupe kardinalnosti k. Stoga, $\langle x, y \rangle$ nije proizvod više od dve ciklične grupe.)

Zbog uslova (b) sledi da je NZD$(r, s) = 1$, pa je $\langle x, y\rangle$ ciklična grupa. Dakle, $x \overset{e}{\sim} y$, čime je dokazana jednakost $\mathcal{G}_e(\mathbf{G}) = \mathcal{C}(\mathbf{G})$.

Dokažimo još da su i uslovi (b) i (c) ekvivalentni. Pretpostavimo da je svaka podgrupa Sylowa grupe $\mathbf{G}$ ciklična ili generalisana grupa kvaterniona, i pretpostavimo da je $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$, gde je $\mathbf{H} \cong \mathbf{C}_p \times \mathbf{C}_p$ za neki prost broj p. $\mathbf{H}$ je p-grupa, i ona je sadržana u nekoj p-podgrupi Sylowa $\mathbf{P}$ grupe $\mathbf{G}$. Ali ciklična p-grupa ima jedinstvenu podgrupu reda p, a generalisana grupa kvaterniona je 2-grupa koja ima jedinstvenu podgrupu reda 2. Prema tome $\mathbf{P}$ nije ni ciklična, ni generalisana grupa kvaterniona, čime je dobijena kontradikcija.

Dokažimo još i suprotnu implikaciju. Na osnovu posledice 1.8, za bilo koji prost broj p, ako konačna p-grupa nema podgrupu izomorfnu sa $\mathbf{C}_p \times \mathbf{C}_p$, onda je ta grupa ciklična ili generalisana grupa kvaterniona. Pošto $\mathbf{G}$ nema podgrupu izomorfnu sa $\mathbf{C}_p \times \mathbf{C}_p$ ni za jedan prost broj p, onda nijedna podgrupa Sylowa grupe $\mathbf{G}$ nema podgrupu izomorfnu sa $\mathbf{C}_p \times \mathbf{C}_p$. Sledi da je svaka podgrupa Sylowa grupe $\mathbf{G}$ ili ciklična, ili generalisana grupa kvaterniona. □

Za dokaz narednog tvrđenja može se pogledati [1].

Tvrđenje 2.18 ([1, teorema 28]) *Neka je $\mathbf{G}$ konačna grupa takva da je $\mathcal{G}_e(\mathbf{G}) = \mathcal{C}(\mathbf{G})$. Onda je $\mathbf{G}$ ciklična p-grupa ili ispunjava sledeće: Ako je $O(\mathbf{G})$ najveća normalna podgrupa od $\mathbf{G}$ neparnog reda, onda je $O(\mathbf{G})$ metaciklična, $\mathbf{H} = \mathbf{G}/O(\mathbf{G})$ je grupa sa jedinstvenim involutivnim elementom z, i $\mathbf{H}/\langle z\rangle$ je ciklična 2-grupa, dijedarska 2-grupa, podgrupa od $\mathbf{P\Gamma L}(2, q)$ koja sadrži $\mathbf{PSL}(2, q)$ za neki neparno q koje je stepen prostog broja, ili $\mathbf{A}_7$.*

Sledeće tvrđenje direktna je posledica tvrđenja 2.15 i tvrđenja 2.17.

Posledica 2.19 *Neka je $\mathbf{G}$ konačna grupa. Onda su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $\mathcal{G}(\mathbf{G}) = \mathcal{C}(\mathbf{G})$;

(b) *$\mathbf{G}$ nema podgrupu izomorfnu sa $\mathbf{C}_p \times \mathbf{C}_q$ ni za koja dva prosta broja p i q.*

Naredno tvrđenje, za čiji dokaz se može pogledati u [1], određuje klasu konačnih grupa koje imaju stepeni graf jednak komutirajućem grafu.

Tvrđenje 2.20 ([1, teorema 22]) *Neka je $\mathbf{G}$ konačna grupa takva da je $\mathcal{G}(\mathbf{G}) = \mathcal{C}(\mathbf{G})$. Onda važi jedan od sledeća tri uslova:*

(a) **G** *je ciklična p-grupa;*

(b) **G** *je poludirektni proizvod grupe* $\mathbf{C}_{p^a}$ *sa* $\mathbf{C}_{q^b}$*, gde su* p *i* q *prosti brojevi i* $a, b \in \mathbb{N}$*,* $q^b \mid p-1$*, i* $\mathbf{C}_{q^b}$ *deluje verno na* $\mathbf{C}_{p^a}$*.*

(c) **G** *je generalisana grupa kvaterniona.*

Predstavljamo sada i i analogan rezultat za nilpotentne grupe. Za dokaz se može pogledati u [1]

Tvrđenje 2.21 ([1, teorema 24]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *rešiva grupa takva da je* $\mathcal{G}(\mathbf{G}) = \mathcal{C}(\mathbf{G})$*. Onda važi jedan od sledećih uslova:*

(a) **G** *je ciklična p-grupa;*

(b) **G** *je poludirektni proizvod grupe* $\mathbf{C}_{p^a}$ *sa* $\mathbf{C}_{q^b}$*, gde su* p *i* q *prosti brojevi i* $a, b \in \mathbb{N}$*,* $q^b \mid p_1$*, i* $\mathbf{C}_{q^b}$ *deluje verno na* $\mathbf{C}_{p^a}$*;*

(c) **G** *je generalisana grupa kvaterniona;*

(d) **G** *je Prüferova grupa* $\mathbf{C}_{p^\infty}$*;*

(e) **G** *je poludirektni proizvod Prüferove p-grupe* $\mathbf{C}_{p^\infty}$ *sa konačnom cikličnom grupom.*

2.6 Osobine stepenog grafa i usmerenog stepenog grafa

Očigledno je da, ako dve grupe imaju izomorfne usmerene stepene grafove, onda one imaju izomorfne i stepene grafove. Peter Cameron [12] je dokazao da za konačne grupe važi obrnuta implikacija, i cela ova sekcija je posvećena tom rezultatu. Cameron je u ovom radu veoma dobro opisao i strukturu stepenog grafa konačnih grupa, posebno klase elemenata grupe koji imaju ista zatvorena susedstva u stepenom grafu. Ovi rezultati igraju značajnu ulogu u ovoj disertaciji, pa su izloženi dokazi detaljniji nego u originalnom radu, i nešto drugačije struktuirani kako bi se lakše mogli primeniti u nastavku disertacije. Dodatno, Cameronovi dokazi su u ovoj disertaciji uopšteni za stepeno-asocijativne lupe.

Podsetimo se, ekscentricitet čvora x grafa Γ je maksimalno rastojanje tog čvora od bilo kog drugog čvora tog grafa. Centar grafa Γ je skup svih njegovih čvorova koji imaju minimalni ekscentricitet. Jasno, neutralni element stepeno-asocijativne lupe sa inverzima je uvek susedan sa svim čvorovima stepenog grafa. Stoga, pod **centrom stepenog grafa** grupe $\mathbf{G}$, pod oznakom $\mathrm{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))$, mislićemo na skup svih elemenata $x \in G$ takvih da je $x \stackrel{p}{\sim} y$ za svako $y \in G \setminus \{x\}$. Izloženi dokazi su detaljniji u odnosu na Cameronove, i za neke tvrdnje su pruženi i elementarniji dokazi.

Tvrđenje 2.22 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna stepeno-asocijativna lupa takva da je* $|\mathrm{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))| > 1$*, i neka je* $S = \mathrm{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))$*. Onda važi jedan od sledećih uslova:*

(a) $\mathbf{G}$ *je ciklična grupa kojoj je red stepen prostog broja. U tom slučaju je* $S = G$*.*

(b) $\mathbf{G}$ *je ciklična grupa čiji je red proizvod dva različita prosta broja. U tom slučaju je* $|S| \geq \frac{1}{2}|G|$ *i skup* $G \setminus S$ *indukuje nepovezan podgraf od* $\mathcal{G}(\mathbf{G})$*.*

(c) $\mathbf{G}$ *je ciklična grupa čiji red nije stepen prostog broja niti proizvod dva različita prosta broja. U tom slučaju* $G \setminus S$ *indukuje povezan podgraf od* $\mathcal{G}(\mathbf{G})$*.*

(d) $\mathbf{G}$ *je neciklična stepeno-asocijativna lupa u kojoj su redovi svih elemenata stepeni broja* p *i koja ima jedinstvenu podgrupu reda* p*, za neki prost broj* p*. U tom slučaju je* $|S| < \frac{1}{2}|G|$ *i skup* $G \setminus S$ *indukuje nepovezan graf od* $\mathcal{G}(\mathbf{G})$*.*

Dodatno, ako je $\mathcal{G}$ *ciklična grupa reda* n*, onda* S *sadrži samo neutralni element i sve generatorne elemente, pa je* $|S| = 1 + \varphi(n)$*.*[1] *Ako je* $\mathbf{G}$ *neciklična grupa, onda je* $\mathbf{G}$ *generalisana grupa kvaterniona, pa* S *sadrži samo neutralni element i jedinstveni involutivni element.*

Dokaz. Neka $x \in S$ za neko $x \neq 1$. Neka je q proizvoljan prost delitelj od $\mathrm{NZS}(o(g) \mid g \in G)$. Onda postoji $y \in G$ reda q. Pošto je $x \stackrel{p}{\sim} y$ i $x \neq 1$, onda je $o(x)$ deljiv sa q. Dakle, $o(x)$ je deljiv svakim prostim deliteljem od $\mathrm{NZS}(o(g) \mid g \in G)$.

Pretpostavimo najpre da su redovi svih elemenata lupe $\mathbf{G}$ stepeni prostog broja p. Tada, ako je $\mathbf{G}$ ciklična grupa, graf $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ je kompletan, pa je $S = G$. Pretpostavimo dalje da lupa $\mathbf{G}$ nije ciklična grupa. Tada je S nosač ciklične podgrupe od $\mathbf{G}$, koja je generisana elementom skupa S maksimalnog reda. Naime, ako je x element maksimalnog reda skupa S, onda je $x \stackrel{p}{\sim} y$ za svako y skupa $S \setminus \{x\}$, što

[1] Ovde sa φ označavamo Eulerovu funkciju.

povlači $x \to y$ za svako $y \in S \setminus \{x\}$. Odatle sledi da je $S \subseteq \langle x \rangle$. Takođe, ako $x \to y$, onda je $G = \overline{N}_{\mathcal{G}(\mathbf{G})}(x) \subseteq \overline{N}_{\mathcal{G}(\mathbf{G})}(y)$, što povlači da je $S = \langle x \rangle$, i nije teško uočiti da je $\mathbf{S}$ jedinstvena ciklična podgrupa reda $|S|$ od $\mathbf{G}$. Dokažimo dalje da podgraf od $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ indukovan skupom $G \setminus S$ nije povezan. Označimo $\big(\mathcal{G}(\mathbf{G})\big)[G \setminus S]$ sa Γ_S. Neka z generiše cikličnu podgrupu reda $p \cdot |S|$. Onda je $\overline{N}_{\Gamma_S}(z) = \{t \mid z \in \langle t \rangle\}$. Pošto je $o(t)$ stepen prostog broja p, onda $t \to z$ povlači $\overline{N}_{\Gamma_S}(t) \subseteq \overline{N}_{\Gamma_S}(z)$, pa je $\overline{N}_{\Gamma_S}(z)$ komponenta povezanosti grafa Γ_S. Pored toga, ukoliko bi $\langle z \rangle$ bila jedina ciklična podgrupa od $\mathbf{G}$ reda $p \cdot |S|$, onda bi bilo $\overline{N}_{\mathcal{G}(\mathbf{G})}(z) = \overline{N}_{\mathcal{G}(\mathbf{G})}(x) = G$, tj. da $z \in S$, što je kontradikcija. Dakle, postoji i element $z_1 \in G \setminus \langle z \rangle$ reda $p \cdot |S|$, i $\overline{N}_{\Gamma_S}(z)$ i $\overline{N}_{\Gamma_S}(z_1)$ čine dve različite komponente povezanosti grafa Γ_S, pa Γ_S nije povezan. Takođe, nijedna komponenta povezanosti od $\big(\mathcal{G}(\mathbf{G})\big)[G \setminus S]$ nije reda manjeg od $|S|$. Odatle sledi da je $|S| < \frac{1}{2}|G|$. Dodatno, pošto je $\mathbf{S}$ je jedinstvena ciklična podgrupa reda $|S|$, lupa $\mathbf{G}$ ima jedinstvenu cikličnu podgrupu reda p. Prema tome, ako je $\mathbf{G}$ grupa, na osnovu teoreme 1.7 sledi da je $\mathbf{G}$ generalisana grupa kvaterniona.

Pretpostavimo dalje da je $\mathrm{NZS}(o(g) \mid g \in G) = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ za m, $m > 1$, različitih prostih brojeva $p_1, p_2, \ldots, p_m$. Onda $p_1 p_2 \cdots p_n \mid o(x)$ jer je $o(x)$ deljiv svaki prostim deliteljem od $\mathrm{NZS}(o(g) \mid g \in G)$. Dokažimo da je $o(x) = \mathrm{NZS}(o(g) \mid g \in G)$. Primetimo da je

$$\begin{aligned} &\mathrm{NZS}(o(g) \mid g \in G) \\ &= \mathrm{NZS}(o(g) \mid g \in G \text{ i } o(g) \text{ je stepen prostog broja}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

jer za svaki element reda $p_1^{l_1} p_2^{l_2} \cdots p_n^{l_m}$ postoje elementi redova $p_1^{l_1}, p_2^{l_2}, \ldots, p_m^{l_m}$. Neka je $y \in G$ element čiji je red stepen prostog broja. Očigledno $o(x) \nmid o(y)$ jer $o(x)$ ima bar dva prosta delitelja, pa je $o(x)$ deljiv sa $o(y)$. Odatle, na osnovu jednakosti (2.1), sledi $o(x) = \mathrm{NZS}(o(g) \mid g \in G)$, pa pošto $x \in S$, sledi da je $\mathbf{G} = \langle x \rangle$. Lako se primećuje da u ovom slučaju S sadrži samo jedinični element i generatore od $\mathbf{G}$, pa je $|S| = 1 + \varphi(n)$, gde je n red grupe $\mathbf{G}$. Ako red ciklične grupe $\mathbf{G}$ nije proizvod dva različita prosta broja, tada se lako uočava da je podgraf od $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ indukovan skupom $G \setminus S$ povezan. Sa druge strane, ukoliko je red ciklične grupe $\mathbf{G}$ proizvod dva različita prosta broja p i q, onda podgraf od $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ indukovan skupom $G \setminus S$ nije povezan. Dodatno, u tom slučaju važi

$$\begin{aligned} |S| = (p-1)(q-1) + 1 &= \frac{pq + pq - 2p - 2q + 4}{2} \\ &= \frac{pq}{2} + \frac{(p-2)(q-2)}{2} \geq \frac{pq}{2} = |G|. \end{aligned}$$

Ovim je tvrđenje dokazano. $\square$

Prethodno tvrđenje pomoći će nam u dokazu da stepeni graf konačne stepeno-asocijativne lupe određuje usmereni stepeni graf tako što ono izdvaja klasu konačnih stepeno-asocijativnih lupa čiji stepeni graf ima centar kardinalnosti veće od 1.

Podsetimo se, za elemente grupe x i y pišemo $x \approx y$ ako oni generišu istu cikličnu podgrupu, a za dve $\approx$-klase ćemo reći da su susedne ako je svaki element $\approx$-klase $[x]_\approx$ susedan u stepenom grafu sa svakim elementom $\approx$-klase $[y]_\approx$. Jasno, dve susedne $\approx$-klase ne sadrže elemente istog reda. Pokažimo da za dve susedne $\approx$-klase možemo da odredimo iz stepenog grafa koja $\approx$-klasa sadrži elemente većeg reda.

Lema 2.23 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna stepeno-asocijativna lupa. Onda za elemente* $x, y \in G$, $x \neq y$, *važi* $x \to y$ *ako i samo ako je jedan od sledeća tri uslova ispunjen:*

(a) $x \overset{p}{\sim} y$ *i* $\big|[y]_\approx\big| < \big|[x]_\approx\big|$;

(b) $x \overset{p}{\sim} y$, $\big|[y]_\approx\big| = \big|[x]_\approx\big|$, *i* $x \overset{p}{\sim} z$ *za neko* z *takvo da je* $[z]_\approx = \{z\}$, *i* $\overline{N}(z) \neq G$;

(c) $x \approx y$.

Dokaz. Za svako $x \in G$ kardinalnost klase $[x]_\approx$ je $\varphi(o(x))$, gde je φ Eulerova funkcija. Poznato je da je $\varphi(\prod_{j=1}^{l} p_j^{i_j}) = \prod_{j=1}^{l} \big(p_j^{i_j-1}(p_j - 1)\big)$ za bilo koje po parovima različite proste brojeve $p_1, p_2, \ldots, p_l$ i bilo koje $i_1, i_2, \ldots, i_l > 0$. Prema tome, $n \mid m$ implicira $\varphi(n) \mid \varphi(m)$, pri čemu jednakost važi kada je $n = m$, ili kad je n neparan broj a $m = 2n$. Sledi da, za svako x i y, $x \to y$ ako i samo ako je jedan od tri uslova iz formulacije leme ispunjen. Primetimo da je z u drugom uslovu involutivni element, tako da taj uslov pokriva slučaj kada je $o(x) = 2o(y)$, a kada je $o(y)$ neparan broj. U tom slučaju je $[z]_\approx = \{z\}$. $\square$

Prethodna lema pokazaće se korisnom, međutim, $\approx$-klase ne mogu da se prepoznaju iz stepenog grafa stepeno-asocijativne lupe. Sa druge strane, $\equiv$-klase, gde za $x, y \in G$ pišemo $x \equiv y$ ako x i y imaju isto zatvoreno susedstvo u stepenom grafu grupe $\mathbf{G}$, moguće je prepoznati iz stepenog grafa, i $\approx$-klase su sadržane u $\equiv$-klasama. Naredne tri leme bave se sledećim problemom: Da li svi elementi jedne od dve susedne $\equiv$-klase imaju redove veće od svih redova elemenata druge klase, i ako je odgovor da, kako odrediti koja klasa sadrži elemente većih redova. Najpre predstavljamo opis svih $\equiv$-klasa, a zatim ćemo se baviti i njihovim međusobnim odnosom u usmerenom stepenom grafu.

Lema 2.24 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna stepeno-asocijativna lupa takva da je* $|\operatorname{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))| = 1$. *Onda je svaka* $\equiv$*-klasa* C *jednog od sledećih oblika:*

(a) *C je $\approx$-klasa. Za ovakvu $\equiv$-klasu kazaćemo da je* **prostog tipa**.

(b) *$C = \{x \in \langle y \rangle \mid o(x) \geq p^s\}$, gde je p prost broj, y element reda p^r za neko $r \in \mathbb{N}$, i gde je $s \in \mathbb{N}$ takav da je $r > s > 0$. U tom slučaju je C unija $r - s + 1$ $\approx$-klasa, pa ćemo za ovakvu $\equiv$-klasu govoriti da je* **složenog tipa**.

Dokaz. Pretpostavimo da su svi elementi $\equiv$-klase C istog reda, i neka je $x \in C$ nejedinični element od $\mathbf{G}$. Lako se vidi da je $[x]_\approx \subseteq C$, i da je relacija $\approx$ profinjenje relacije $\equiv$. Sa druge strane, ako $y \in G$ ima isti red kao x, a $x \not\approx y$, onda je jasno da je $x \overset{p}{\not\sim} y$, pa $y \not\equiv x$. Dakle, u ovom slučaju je $C = [x]_\approx$.

Pretpostavimo dalje da $x, y \in C$, ali da je $o(x) < o(y)$. Onda je $x \overset{p}{\sim} y$, pa je x stepen elementa y, i jasno, $o(x) \mid o(y)$. Pokažimo da je $o(y)$ stepen prostog broja. Neka je $o(y) = l \cdot o(x)$ složen broj. Onda postoje različiti prosti brojevi q_1 i q_2 takvi da je $q_1 \mid l$ i $q_2 \mid o(x)$, i za njih važi:

$$q_1 \cdot \frac{o(x)}{q_2} \;\Bigg|\; l \cdot o(x) = o(y).$$

Sledi da postoji $z \in \langle y \rangle$ reda $q_1 \cdot \dfrac{o(x)}{q_2}$. Pošto $o(z) \nmid o(x)$ i $o(x) \nmid o(z)$, onda je $x \overset{p}{\not\sim} z$, pa $x \not\equiv y$ jer je $y \overset{p}{\sim} z$. Ovim je dobijena kontradikcija, pa sledi da je red od y stepen prostog broja.

Pošto je $|\operatorname{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))| = 1$, onda je $[e]_\equiv = \{e\}$ jer je jedinični element od $\mathbf{G}$ jedini element čije je zatvoreno susedstvo G, pa klasa $[x]_\equiv$ ne sadrži jedinični element, što implicira da je s iz formulacije leme pozitivan broj. Preostaje da se pokaže da $x \equiv y$ i $\langle x \rangle \leq \langle z \rangle \leq \langle y \rangle$ implicira $z \equiv y$. Neka je $t \overset{p}{\sim} z$. Onda je $t \to z$ ili $z \to t$, a ovo implicira $t \to x$ ili $y \to t$, što povlači $t \overset{p}{\sim} x, y$. Ovim je dokazano da je $\overline{N}(z) \subseteq \overline{N}(x)$. Pretpostavimo sada da je $t \overset{p}{\sim} x$ i $t \overset{p}{\sim} y$. U tom slučaju, ako $t \to y$, jasno je da $t \to z$, pa i $t \overset{p}{\sim} z$. Takođe, pošto je $\langle y \rangle$ p-grupa, i pošto je svaka podgrupa ciklične grupe ciklična, onda je $\mathcal{G}(\langle y \rangle)$ kompletan graf, pa je i tada $t \overset{p}{\sim} z$, čime je dokazana i druga inkluzija. Dakle, $\overline{N}(z) = \overline{N}(x)$, pa je C $\equiv$-klasa složenog tipa. $\square$

Lema 2.25 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna stepeno-asocijativna lupa takva da je* $|\operatorname{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))| = 1$*, i neka su* $x_0, y_0 \in G$*. Ako je* $x_0 \not\equiv y_0$ *i* $x_0 \to y_0$*, onda je* $x \to y$ *za sve* x *i* y *takve da je* $x \equiv x_0$ *i* $y \equiv y_0$*.*

Dokaz. Lako se vidi da, ako je $x_0 \to y_0$ i $x_0 \not\approx y_0$, onda je $x \to y$ za bilo koje $x \approx x_0$ i $y \approx y_0$. Pokažimo da je ovo tačno i za $\equiv$-klase. Pretpostavimo da je $[y_0]_\equiv$ složenog tipa, i da je $x_0 \to y_0$ i $x_0 \not\equiv y_0 \equiv y$. Onda je $x_0 \overset{p}{\sim} y$, tj. $x_0 \to y$ ili $y \to x_0$. Ali, $y \to x_0$ i $x_0 \to y_0$ bi povlačilo da $x_0 \in [y_0]_\equiv$, jer su u ovom slučaju $o(y)$, $o(x_0)$ i $o(y_0)$ stepeni istog prostog broja i $o(y_0) \leq o(x_0) \leq o(y)$, što povlači $\overline{N}(y_0) = \overline{N}(y) \subseteq \overline{N}(x_0) \subseteq \overline{N}(y_0)$. Ovim smo dokazali da $x_0 \to y_0$ i $x_0 \not\equiv y_0 \equiv y$ implicira $x_0 \to y$. Na sličan način se može dokazati da $x_0 \to y_0$ i $x \equiv x_0 \not\equiv y_0$ implicira $x \to y_0$. Odavde lako zaključujemo da $x_0 \to y_0$ i $x_0 \not\equiv y_0$ povlači $x \to y$ za sve $x \equiv x_0$ i $y \equiv y_0$, čime je lema dokazana. □

Lema 2.26 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna stepeno-asocijativna lupa takva da je* $|\operatorname{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))| = 1$*. Za svaki skup* S*, neka je* $\hat{S} = \overline{N}(\overline{N}(S))$*, gde je* $\overline{N}(S) = \bigcap_{x \in S} \overline{N}(x)$*, i neka je* C *jedna* $\equiv$*-klasa složenog tipa. Onda važi sledeće:*

(a) $|\hat{C}| = p^r$ *i* $|\hat{C}| - |C| = p^{s-1}$ *za neke* $r, s \in \mathbb{N}$ *takve da je* $r > s > 0$*;*

(b) C *nije susedna ni sa jednim parom međusobno nesusednih* $\equiv$*-klasa* D *i* E *takvih da je* $|D|, |E| \leq |C|$*.*

Ako je C *klasa prostog tipa, onda bar jedno od gornjih tvrđenja ne važi.*

Dokaz. Neka je $C = \{x \in \langle y \rangle \mid o(x) \geq p^s\}$ gde je p prost broj, $r, s \in \mathbb{N}$ takvi da je $r > s > 0$, i y element reda p^r. Jasno je da je onda $\langle C \rangle$ ciklična p-grupa, i lako se uočava da je $\hat{C} \subseteq \overline{N}(C)$ i $\langle C \rangle \subseteq \hat{C}$. Primetimo da je $\langle C \rangle = \langle y \rangle$. Dokažimo da ne postoji $z \in \hat{C}$ takvo da je $o(z) > o(y)$. Ako $q \mid o(z)$ za neki prost broj $q \neq p$, pošto tada $z \to y$, onda postoji z_0 čiji je red $p^{r-1}q$. Tada je $y^p \overset{p}{\sim} z_0 \overset{p}{\not\sim} y$, čime se dobija kontradikcija jer je $y \equiv y^p$. Primetimo da smo ovim pokazali i da su svi susedi elemenata $\equiv$-klase C elementi grupe čiji su redovi stepeni prostog broja p. Pretpostavimo sada da je $o(z) = p^t$ za neko $t > r$. Pošto su redovi elemenata y i z stepeni prostog broja p, $o(y) < o(z)$, i jer $y \in \langle z \rangle$, onda je $\overline{N}(z) \subseteq \overline{N}(y)$. Sa druge strane, pošto $z \in \hat{C}$, onda je i $\overline{N}(y) \subseteq \overline{N}(z)$, što implicira $y \equiv z$. Ovim je opet dobijena kontradikcija, pa sledi da je $\hat{C} = \langle C \rangle$, što povlači $|\hat{C}| = p^r$ i $|\hat{C}| - |C| = p^{s-1}$. Ovim je dokazano da važi (a).

Da bismo dokazali da važi i (b), pretpostavimo da je C susedna sa nekom drugom $\equiv$-klasom D. Na osnovu leme 2.25, ili je $o(c) < o(d)$ za svako $c \in C$ i svako $d \in D$, ili je $o(c) > o(d)$ za svako $c \in C$ i svako $d \in D$. Dodatno, kao što smo videli u prethodnom pasusu, D sadrži samo elemente čiji su redovi stepeni prostog broja p jer u suprotnom C ne bi bila klasa složenog tipa. Sledi da je $|D| \leq |C|$ samo ako D ne sadrži elemente manjeg reda nego klasa C, a sve $\equiv$-klase koje sadrže takve elemente su međusobno susedne. Ovim je dokazano i (b).

Pretpostavimo sada da je C klasa prostog tipa. Onda, ukoliko je red elemenata klase C broj kome su p i q dva prosta delitelja, postoje $\approx$-klase D i E koje sadrže elemente redova p i q, redom. Neka $x \in D$ i $y \in E$. Pošto postoji element složenog reda z takav da je $z \to x$ i $z \to y$, onda ni x ni y nisu sadržani u $\equiv$-klasama složenog tipa. Dakle, D i E su i $\equiv$-klase, a koje nisu susedne u $\mathcal{G}(\mathbf{G})$. Ovim smo dokazali da, za klasu prostog tipa sačinjenu od elemenata čiji redovi nisu stepen prostog broja, (b) ne važi.

Neka je sada C $\equiv$-klasa prostog tipa čiji su elementi reda p^r, gde je p prost broj, a $r \in \mathbb{N}$. Neka je $r > 1$, jer $r = 1$ direktno implicira da (a) ne važi. Pretpostavimo da za C važe jednakosti iz (a) za neko $s \in \mathbb{N}$, $r > s > 0$. Ove dve jednakosti impliciraju da je $|\hat{C}| \leq 2|C|$. To povlači da $\hat{C}$ ne sadrži nijednu $\approx$-klasu čiji su elementi većeg reda nego elementi iz C, jer bi u suprotnom klasa $\hat{C}$ bila prevelika. Dalje, slično kao u prvom pasusu ovog dokaza, pokazuje se da je $\hat{C} = \langle C \rangle$. Sledi da je $|\hat{C}| = p^r$ i $|\hat{C}| - |C| = p^{r-1}$, što je u kontradikciji da važi (a). Ovim je lema dokazana. □

Naredno tvrđenje ovde navodimo bez dokaza, a ono je direktna posledica tvrđenja 2.15 i teoreme 2.58, koja će biti dokazana u sekciji 2.8.

Tvrđenje 2.27 *Neka je p prost broj, i neka su $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ konačne stepeno-asocijativne lupe u kojima su redovi svih elemenata stepeni broja p. Ako je $\mathcal{G}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}(\mathbf{H})$, onda je $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G}) \cong \vec{\mathcal{G}}(\mathbf{H})$.*

Sada, kad znamo više o $\equiv$-klasama i njihovim međusobnim odnosima, moguće je dokazati glavnu teoremu ove sekcije.

Teorema 2.28 *Ako konačne stepeno-asocijativne lupe $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ imaju izomorfne stepene grafove, onda su i njihovi usmereni stepeni grafovi izomorfni.*

Dokaz. Neka su $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ stepeno-asocijativne lupe takve da je $\mathcal{G}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}(\mathbf{H})$, i neka je $|\mathrm{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))| > 1$. Tada analogno važi i za $\mathbf{H}$. Na osnovu tvrđenja 2.22, onda je $\mathbf{G}$ ciklična grupa ili postoji prost broj p takav da je $\mathbf{G}$ stepeno-asocijativna lupa u kojoj su redovi svih elemenata stepeni broja p i koja ima jedinstvenu cikličnu podgrupu reda p. Takođe, na osnovu tvrđenja 2.22, ako je $\mathbf{G}$ ciklična grupa, onda je i $\mathbf{H}$ ciklična grupa istog reda kao $\mathbf{G}$, što povlači $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G}) \cong \vec{\mathcal{G}}(\mathbf{H})$. Sa druge strane, ako je, za neki prost broj p, $\mathbf{G}$ stepeno-asocijativna lupa u kojoj su redovi svih elemenata stepeni broja p, onda, na osnovu tvrđenja 2.22, isto važi i za $\mathbf{H}$, pa na osnovu tvrđenja 2.27 lupe $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ imaju izomorfne usmerene stepene grafove.

Pretpostavimo u nastavku da su $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ konačne stepeno-asocijativne lupe takve da je $\mathcal{G}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}(\mathbf{H})$ i $|\mathrm{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))| = 1$. Neka je $\psi : G \to H$ grafovski izomorfizam iz $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ u $\mathcal{G}(\mathbf{H})$. Uočimo da, ako je C $\equiv_{\mathbf{G}}$-klasa, onda je $\psi(C)$ $\equiv_{\mathbf{H}}$-klasa. Takođe, na osnovu leme 2.26, C i $\psi(C)$ su klase istih tipova. Za skupove $X \subseteq G$ i $Y \subseteq H$ govorićemo da su odgovarajući ako postoji $\equiv_{\mathbf{G}}$-klasa C takva da je $X \subseteq C$ i $Y \subseteq \psi(C)$.

Na osnovu leme 2.26, za svaku od $\equiv$-klasa složenog tipa možemo odrediti redove elemenata koje ta klasa sadrži, i svaka $\equiv_{\mathbf{G}}$-klasa složenog tipa sadrži elemente istog reda kao i njoj odgovarajuća $\equiv_{\mathbf{H}}$-klasa. Sledi da postoji bijekcija $\vartheta : G \to H$ koja slika svaku $\approx_{\mathbf{G}}$-klasu na odgovarajuću $\approx_{\mathbf{H}}$-klasu. Primetimo da se, na osnovu leme 2.25, sve $\approx$-klase sadržane u istoj $\equiv$-klasi C složenog tipa odnose na isti način u usmerenom stepenom grafu sa bilo kojom $\approx$-klasom van $\equiv$-klase C. Konačno, ϑ je izomorfizam iz $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})$ u $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{H})$, jer na osnovu leme 2.23 za dve posmatrane susedne $\approx$-klase možemo iz stepenog grafa videti čiji su elementi većeg reda. Ovim je teorema dokazana. □

Naredno tvrđenje je glavna teorema rada [12], a direktna je posledica teoreme 2.28.

Posledica 2.29 ([12, teorema 2]) *Ako konačne grupe* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *imaju izomorfne stepene grafove, onda su i njihovi usmereni stepeni grafovi izomorfni.*

2.7 Osobine stepenog grafa torziono slobodne grupe

U sekciji 2.6 pokazali smo da stepeni graf konačne grupe određuje usmereni stepeni graf te grupe. Ova sekcija zasnovana je na [14] i na [72], pri čemu su priloženi dokazi nešto drugačije struktuirani nego u originalnom radu. Radi lakšeg iskazivanja argumenata, bavimo se pojmovima usmerenog nenula-stepenog grafa i nenula-stepenog grafa, ali se, zahvaljujući rezultatima sekcije 2.4, ovi rezultati odnose i na usmereni stepeni graf i stepeni graf grupe. U ovoj sekciji se bavimo pitanjem određenosti usmerenog nenula-stepenog grafa torziono slobodne grupe njenim nenula-stepenim grafom. Peter Cameron, Horacio Guerra i Šimon Jurina [14] dokazali su da dve torziono slobodne grupe klase nilpotentnosti 2 koje imaju izomorfne stepene grafove imaju izomorfne i usmerene stepene grafove, a postavili su i pitanje da li ta implikacija važi i u slučaju kada je bar jedna od dve grupe torziono slobodna i klase nilpotentnosti 2. U [72] dat je potvrdan odgovor na to pitanje, i taj rezultat je glavno tvrđenje ove sekcije.

U prvom delu ove sekcije pokazujemo da svake dve neciklične torziono slobodne grupe istog reda u kojima je svaki nejedinični element sadržan u jedinstvenoj maksimalnoj cikičnoj podgrupi imaju izomorfne nenula-stepene grafove. Takođe pokazujemo da je, u slučaju ovakvih grupa, iz nenula-stepenog grafa za svaki par elemenata $x, y \in G$ susednih u nenula-stepenom grafu moguće utvrditi smer odgovarajuće usmerene grane u usmerenom nenula-stepenom grafu. Dokažimo najpre da iz nenula-stepenog grafa grupe možemo prepoznati da li je ta grupa torziono slobodna.

Lema 2.30 ([14, lema 3.1]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupa. Onda je* $\mathbf{G}$ *torziono slobodna ako i samo ako* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ *ima izolovani čvor. Dodatno,* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ *ima najviše jedan izolovani čvor.*

Dokaz. Lako se vidi da je u torziono slobodnoj grupi jedinični element grupe $\mathbf{G}$ izolovani čvor grafa $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$. Pretpostavimo sada da $\mathbf{G}$ nije torziono slobodna, i neka je $x \in G$. Ako je x beskonačnog reda, onda je $x \overset{p\pm}{\sim} x^{-1}$. Takođe, ako je x element konačnog reda, ni tada x nije izolovani čvor jer su svi elementi konačnog reda susedni sa jediničnim elementom od $\mathbf{G}$. Ovim je ekvivalencija dokazana. Dodatno, ako $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ ima izolovani čvor, onda je $\mathbf{G}$ torziono slobodna i taj izolovani čvor je jedinični element od $\mathbf{G}$, jer je svaki nejedinični element $x \in G$ susedan sa $x^{-1} \neq x$ u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$. $\square$

U ovoj sekciji, za graf Γ, sa $S_\Gamma(x, y)$ označavaćemo skup:

$$S_\Gamma(x, y) = \overline{N}_\Gamma(y) \setminus \overline{N}_\Gamma(x),$$

gde sa $\overline{N}_\Gamma(x)$ označavamo zatvoreno susedstvo čvora x u grafu Γ. Specijalno, za grupu $\mathbf{G}$, sa $S_{\mathbf{G}}(x, y)$ označavaćemo $S_{\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})}(x, y)$. Podsetimo se, za čvorove x i y grafa Γ pišemo $x \equiv_\Gamma y$ ako je $\overline{N}_\Gamma(x) = \overline{N}_\Gamma(y)$.

Lema 2.31 ([14, lema 3.2]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *torziono slobodna grupa, i neka su* $x, y \in G$ *susedni u* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$*. Tada su sledeći uslovi ekvivalentni:*

(a) $x \equiv_{\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})} y$;

(b) $S_{\mathbf{G}}(x, y) = S_{\mathbf{G}}(y, x) = \emptyset$;

(c) $x \in \{y, y^{-1}\}$.

Dokaz. Uslovi (a) i (b) su očigledno ekvivalentni, pa pokažimo još da je (b) ekvivalentno sa (c).

Pošto za svako $x \in G$ elementi x i x^{-1} imaju isto zatvoreno susedstvo, trivijalno sledi $S_{\mathbf{G}}(x, x^{-1}) = S_{\mathbf{G}}(x^{-1}, x) = \emptyset$, pa preostaje da se dokaže da (b) implicira (c).

Neka su $x, y \in G$ takvi da je $S_{\mathbf{G}}(x, y) = S_{\mathbf{G}}(y, x) = \emptyset$, i pretpostavimo da $x \notin \{y, y^{-1}\}$. Očigledno je $x \overset{p\pm}{\sim} y$, pa pretpostavimo, bez umanjenja opštosti, da je $x = y^m$ za neko $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Neka je $p \in \mathbb{N}$ uzajamno prost sa $|m|$. Pokažimo da x i y^p nisu susedni u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$. Ako bi bilo $x \overset{\pm}{\to} y^p$, tada je $y^p = x^k = y^{km}$ za neko $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, čime je dobijena kontradikcija pošto je y beskonačnog reda i $p \neq km$. Ako bi, sa druge strane, bilo $y^p \overset{\pm}{\to} x$, onda je $y^{pk} = x = y^m$ za neko $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, što je opet kontradikcija. Dakle, $y^p \in S_{\mathbf{G}}(x, y)$, čime smo dobili kontradikciju sa polaznom pretpostavkom. Stoga, $S_{\mathbf{G}}(x, y) = S_{\mathbf{G}}(y, x) = \emptyset$ povlači da je $x = y$ ili $x = y^{-1}$. Ovim je lema dokazana. $\square$

Za torziono slobodnu grupu $\mathbf{G}$ u kojoj je svaki element sadržan u jedinstvenoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi, i za bilo koje $x, y \in G$ takve da je $x \overset{p\pm}{\sim} y$ i $x \not\leftrightarrow y$, naredna lema pružaće nam kriterijum za određivanje smera usmerene grane između x i y u $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$.

Lema 2.32 ([14, lema 4.1]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *torziono slobodna grupa, i neka su* $x, y \in G$ *takvi da* $x \notin \{y, y^{-1}\}$*. Onda važi sledeće:*

(a) *Ako je* $x \overset{\pm}{\to} y$*, onda je* $S_{\mathbf{G}}(y, x)$ *beskonačan;*

(b) *Ako je* $\mathbf{G}$ *grupa čiji je svaki nejedinični element sadržan u jedinstvenoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi, i ako je* $x \overset{p\pm}{\sim} y$*, onda je*

$$x \overset{\pm}{\to} y \text{ ako i samo ako je skup } S_{\mathbf{G}}(x, y) \text{ konačan.}$$

Dokaz. Neka je $x \stackrel{\pm}{\to} y$. Pošto $x \notin \{y, y^{-1}\}$, onda je $y = x^m$ za neko $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Neka su $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ svi prosti brojevi od kojih nikoji nije delitelj od m. Onda, slično kao u dokazu leme 2.31, y nije susedan sa x^{p_i} ni za koje $i \in \mathbb{N}$. Ovim je pokazano da je skup $S_{\mathbf{G}}(y, x)$ beskonačan, čime je dokazano (a).

Dokažimo sada (b). Pretpostavimo da je $\mathbf{G}$ grupa u kojoj je svaki element sadržan u jedinstvenoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi, i neka je $y = x^m$ za neko $m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Označimo sa $\mathbf{H} \cong (\mathbb{Z}, +)$ maksimalnu cikličnu podgrupu u kojoj su sadržani x i y. Neka $z \in S_{\mathbf{G}}(x, y)$. Očigledno $z \in H$, i lako se vidi da onda $z \stackrel{\pm}{\to} y$. Dalje, pošto svaki ceo broj ima konačno mnogo delilaca, onda je $S_{\mathbf{G}}(x, y)$ konačan skup. Da bismo dokazali i suprotnu implikaciju, pretpostavimo da nije $x \stackrel{\pm}{\to} y$. Pošto je $x \stackrel{p\pm}{\sim} y$, onda je $y \stackrel{\pm}{\to} x$, ali, na osnovu (a), ovo implicira da je $S_{\mathbf{G}}(x, y)$ beskonačan. Ovim je lema dokazana. $\square$

Primetimo da se tvrdnja (b) iz prethodne leme ne može uopštiti za slučaj torziono slobodnih grupa. Posmatrajmo aditivnu grupu $\mathbb{Q}$, i neka je $x \stackrel{\pm}{\to} y$ za $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ takve da je $x \neq y^{-1}$. Onda $\frac{y}{x} \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$, pa je $\frac{y}{p} \stackrel{\pm}{\to} y$ i $\frac{y}{p} \stackrel{p\pm}{\not\sim} x$ za svaki broj $p \in \mathbb{N}$ uzajamno prost sa $\frac{y}{x}$, pa su u ovom slučaju i $S_{\mathbf{G}}(x, y)$ i $S_{\mathbf{G}}(y, x)$ beskonačni.

Naredno tvrđenje je dokazano u [14], ali u ovoj disertaciji pružamo malo drugačiji dokaz.

Tvrđenje 2.33 ([14, teorema 1.2]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupa takva da važi* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Z})$. *Onda je* $\mathbf{G} \cong (\mathbb{Z}, +)$ *i svaki izomorfizam iz* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ *u* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Z})$ *je istovremeno izomorfizam iz* $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$ *u* $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbb{Z})$.

Dokaz. Pošto je $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Z})$, onda je, na osnovu teoreme 2.10, $\mathcal{G}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}(\mathbb{Z})$. Onda je $|\mathrm{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))| = 3$. Tada na osnovu leme 2.9 (b) sledi da je $\mathbf{G} \cong (\mathbb{Z}, +)$.

Preostaje još da dokažemo da je izomorfizam iz $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Z})$ istovremeno izomorfizam iz $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbb{Z})$. Neka je $\varphi : G \to \mathbb{Z}$ izomorfizam iz $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Z})$, neka $x, y \in G$, i neka $x \stackrel{\pm}{\to} y$. Tada je $x \stackrel{p\pm}{\sim} y$, pa je $\varphi(x) \stackrel{p\pm}{\sim} \varphi(y)$. Na osnovu leme 2.31 i leme 2.32 (b), skup $S_{\mathbf{G}}(x, y)$ je konačan, pa je i $S_{\mathbf{G}}\big(\varphi(x), \varphi(y)\big)$ konačan, što, na osnovu istih lema, povlači da $\varphi(x) \stackrel{\pm}{\to} \varphi(y)$. Ovim je tvrđenje dokazano. $\square$

Primetimo da, iako na osnovu tvrđenja 2.33 i posledice 2.14, za grupe $\mathbf{G}$ i $(\mathbb{Z}, +)$, izomorfizam grafova $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ i $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$ implicira $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G}) \cong \vec{\mathcal{G}}(\mathbb{Z})$, izomorfizam iz $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ u $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$ ne mora da bude izomorfizam iz

$\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})$ u $\vec{\mathcal{G}}(\mathbb{Z})$. Konkretno, transpozicija $(0,1)$ je automorfizam grafa $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$, a nije automorfizam grafa $\vec{\mathcal{G}}(\mathbb{Z})$.

Kao što smo videli, ako grupa ima stepeni graf izomorfan sa $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$, onda je ta grupa izomorfna sa $(\mathbb{Z},+)$. U slučaju grupe $\mathbb{Z}^2$ ovo ne važi. U nastavku, između ostalog, pokazujemo da, za svako $n>1$, grupe $\mathbb{Z}^n$ i $\mathbb{Z}^2$ imaju izomorfne nenula-stepene grafove.

Disjunktna unija grafova Γ i Δ je graf $\Gamma\cup\Delta$ koji ima indukovane podgrafove Γ_1 i Δ_1 takve da je:

$$V(\Gamma\cup\Delta)=V(\Gamma_1)\cup V(\Delta_1),\qquad V(\Gamma_1)\cap V(\Delta_1)=\emptyset \text{ i}$$
$$\Gamma_1\cong\Gamma \text{ i } \Delta_1\cong\Delta,\qquad E(\Gamma\cup\Delta)=E(\Gamma_1)\cup E(\Delta_1).$$

Za kardinal κ, sa $\kappa\Gamma$ označavamo graf takav da postoji familija $\mathcal{F}$ κ mnogo indukovanih podgrafova od $\kappa\Gamma$ izomorfnih sa Γ takvih da je:

$$V(\kappa\Gamma)=\bigcup_{\Gamma_i\in\mathcal{F}}V(\Gamma_i),$$
$$E(\kappa\Gamma)=\bigcup_{\Gamma_i\in\mathcal{F}}E(\Gamma_i) \text{ i}$$
$$V(\Gamma_1)\cap V(\Gamma_2)=\emptyset \text{ za svaka dva različita } \Gamma_1,\Gamma_2\in\mathcal{F}.$$

Podsetimo se, sa K_n označavamo kompletan graf reda n, a, za graf Γ i skup $X\subseteq V(\Gamma)$, sa $\Gamma[X]$ označavamo podgraf od Γ indukovan skupom X.

Naredno tvrđenje dokazali su Peter Cameron, Horacio Guerra i Šimon Jurina kao tvrđenje 5.1 i tvrđenje 5.2 rada [14].

Tvrđenje 2.34 ([14, tvrđenje 5.1]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *torziono slobodna grupa u kojoj je svaki nejedinični element sadržan u jedinstvenoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi. Onda je*

$$\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})=K_1\cup\kappa Z,$$

gde je Z *netrivijalna komponenta povezanosti od* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Z})$*, i gde je* κ *kardinal jednak redu od* $\mathbf{G}$ *ako grupa* $\mathbf{G}$ *nije ciklična, a* $\kappa=1$ *ako je* $\mathbf{G}\cong(\mathbb{Z},+)$.

Dokaz. Lako se vidi da je $\mathbf{G}$ unija maksimalnih cikličnih podgrupa koje po parovima imaju trivijalne preseke, i, očigledno, ne postoje grane u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ između nejediničnih elemenata različitih maksimalnih cikličnih podgrupa od $\mathbf{G}$. Neka je $\mathbf{H}$ maksimalna ciklična podgrupa od $\mathbf{G}$. Pošto je podgraf od $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ indukovan skupom H jednak grafu $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})\cong$

$\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Z})$, onda se lako uočava da je $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ disjunktna unija izolovanog čvora, koji je neutralni element grupe $\mathbf{G}$, i grafova izomorfnih sa Z, gde je $Z = \big(\mathcal{G}(\mathbb{Z})\big)[\mathbb{Z} \setminus \{0\}]$.

Da bismo dovršili dokaz tvrđenja, dovoljno je dokazati da grupa $\mathbf{G}$ ima jednu ili beskonačno mnogo maksimalnih cikličnih podgrupa. Pretpostavimo suprotno, tj. da $\mathbf{G}$ ima k, $k > 1$, maksimalnih cikličnih podgrupa. U tom slučaju postoji $2k$ generatora tih cikličnih grupa, koje ćemo označiti sa $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$, tako da je $a_{2i-1} = a_{2i}^{-1}$ za svako $i \leq k$. Očigledno je $\mathbf{G} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_{2k} \rangle$.

Grupa $\mathbf{G}$ konjugovanjem deluje na skup $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{2k}\}$. Ovo dejstvo određuje podgrupu $\mathbf{H}$ od $\mathbf{S}_A$. Grupa $\mathbf{H}$ je homomorfna slika od $\mathbf{G}$, i neka je $\varphi : G \to H$ homomorfizam iz $\mathbf{G}$ u $\mathbf{H}$. Neka je $\mathbf{G}_\varphi$ jezgro homomorfizma φ. Pošto elementi od $\mathbf{G}_\varphi$ konjugovanjem fiksiraju elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}$, onda je $\mathbf{G}_\varphi$ centar od $\mathbf{G}$. Pored toga, $\mathbf{H}$ je podgrupa konačnog indeksa od $\mathbf{S}_A$, pa je i $\mathbf{G}_\varphi$ podgrupa konačnog indeksa od $\mathbf{G}$.

Pošto je $\mathbf{G}_\varphi$ podgrupa od $\mathbf{G}$ konačnog indeksa, onda $\mathbf{G}_\varphi$ ima nejedinični element h. Neka je $g \in G$ nejedinični element koji nije u istoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi od $\mathbf{G}$ kao element h. Pošto g i h komutiraju, i pošto je presek grupa $\langle g \rangle$ i $\langle h \rangle$ trivijalan, onda je grupa $\mathbf{K} = \langle g, h \rangle$ izomorfna grupi $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Primetimo da su podgrupe $\langle (1,1) \rangle, \langle (1,2) \rangle, \langle (1,3) \rangle \ldots$ maksimalne ciklične podgrupe grupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, na osnovu čega zaključujemo da $\mathbf{K}$ ima beskonačno mnogo maksimalnih cikličnih podgrupa. Pokažimo i da nikoje dve maksimalne ciklične podgrupe od $\mathbf{K}$ nisu sadržane u istoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi od $\mathbf{G}$. Neka su $\langle x \rangle$ i $\langle y \rangle$ maksimalne ciklične podgrupe od $\mathbf{K}$ sadržane istoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi $\langle z \rangle$ grupe $\mathbf{G}$. Onda je $x = z^n$ i $y = z^m$ za neke $n, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Tada je $\langle x \rangle, \langle y \rangle \leq \langle z^{\mathrm{NZD}(n,m)} \rangle = \langle x, y \rangle \leq \mathbf{K}$, što implicira da $\langle x \rangle$ i $\langle y \rangle$ nisu maksimalne ciklične podgrupe grupe $\mathbf{K}$, čime je dobijena kontradikcija. Ovim smo dokazali da svaka maksimalna ciklična podgrupa grupe $\mathbf{G}$ sadrži najviše jednu maksimalnu cikličnu podgrupu grupe $\mathbf{K}$. Sledi da, pošto $\mathbf{K}$ ima beskonačno mnogo maksimalnih cikličnih podgrupa, isto važi i za $\mathbf{G}$. Ovim je tvrđenje dokazano. $\square$

Naredna teorema dokazana je u [14] za prebrojive grupe, ali se na sličan način analogno tvrđenje dokazuje i u slučaju grupa proizvoljnog reda.

Teorema 2.35 ([14, teorema 5.4]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *neciklična torziono slobodna grupa u kojoj je svaki nejedinični element sadržan u jedins-*

tvenoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi. Neka je $\mathbf{H}$ *grupa takva da je* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$*. Tada važi:*

(a) *Svaki nejedinični element od* $\mathbf{H}$ *je sadržan u jedinstvenoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi;*

(b) $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{H}) \cong \vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})$*;*

(c) *Svaki izomorfizam iz* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ *u* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$ *je istovremeno izomorfizam iz* $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})$ *u* $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{H})$*.*

Štaviše, ako su $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *neciklične torziono slobodne grupe istog reda u kojima je svaki nejedinični element sadržan u jedinstvenoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi, onda je* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$*.*

Dokaz. Neka je $\kappa = |G|$. Na osnovu tvrđenja 2.34, $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ je disjunktna unija jednog izolovanog čvora i κ mnogo grafova izomorfnih sa $\big(\mathcal{G}(\mathbb{Z})\big)[\mathbb{Z} \setminus \{0\}]$. Pošto je $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$, ovo važi i za $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$, i, na osnovu leme 2.30, $\mathbf{H}$ je torziono slobodna. Neka je $\varphi : G \to H$ izomorfizam iz $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$, i dokažimo da je φ izomorfizam i iz $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{H})$. Neka $x, y \in G$, i neka $x \overset{\pm}{\to} y$. Tada je, na osnovu leme 2.32 (b), $S_{\mathbf{G}}(x, y)$ konačan. Pošto je φ izomorfizam iz $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$, onda je $\varphi(x) \overset{p\pm}{\sim} \varphi(y)$ i $S_{\mathbf{H}}\big(\varphi(x), \varphi(y)\big)$ je konačan, pa je, na osnovu leme 2.32 (a), $\varphi(x) \to \varphi(y)$. Ovim su dokazani (b) i (c).

Pošto izomorfizam iz $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{H})$ slika maksimalne ciklične podgrupe od $\mathbf{G}$ na maksimalne ciklične podgrupe grupe $\mathbf{H}$, onda (b) trivijalno povlači (a).

Konačno, neciklične torziono slobodne grupe $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ istog reda u kojima je svaki nejedinični element sadržan u jedinstvenoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi, na osnovu tvrđenja 2.34, imaju izomorfne nenula-stepene grafove, čime je ova teorema dokazana. □

Naredno tvrđenje je direktna posledica teoreme 2.34 pošto je u direktnoj sumi prebrojivo mnogo beskonačnih cikličnih grupa svaki element sadržan u jedinstvenoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi.

Posledica 2.36 *Neka je* $\mathbf{G} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}$*. Onda je*

$$\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Z}^2) \cong K_1 \cup \aleph_0 Z,$$

gde je Z *netrivijalna komponenta povezanosti od* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Z}, +)$*.*

U opštem slučaju, ako je svaki nejedinični element torziono slobodne grupe sadržan u bar jednoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi, ta ciklična podgrupa ne mora da bude jedinstvena. Prema tome, teoremu 2.35 ne možemo primeniti u slučaju te šire klase torziono slobodnih grupa. Naredna lema pomoći će nam da rezultat teoreme 2.35 primenimo na torziono slobodne grupe klase nilpotentnosti 2.

Lema 2.37 ([14, tvrđenje 5.3]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *torziono slobodna grupa klase nilpotentnosti* 2*. Tada je presek svake dve maksimalne ciklične podgrupe od* $\mathbf{G}$ *trivijalan.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoje dve maksimalne ciklične podgrupe od $\mathbf{G}$ čiji presek nije trivijalan. Tada postoje $x, y \in G$ takvi da su $\langle x \rangle$ i $\langle y \rangle$ maksimalne ciklične podgrupe od $\mathbf{G}$, i takvi da je $x^m = z = y^n$ za neke $m, n \in \mathbb{N}$. Pošto je x^m stepen od y, onda je $[x^m, y] = 1$. Pošto je $\mathbf{G}$ klase nilpotentnosti 2, onda je $\big[[g,h],k\big] = 1$ za sve $g, h, k \in G$. Pored toga, lako se pokazuje da u svakoj grupi važi identitet $[gh, k] = [g,k]\big[[g,k],h\big][h,k]$. Odatle, za sve $g, h, k \in G$, sledi

$$[gk, h] = [g,h]\big[[g,k],h\big][k,h] = [g,h][k,h],$$

čime dobijamo $\big([x,y]\big)^m = [x^m, y] = 1$. Pošto je $\mathbf{G}$ torziono slobodna, onda je $[x,y] = 1$, pa je grupa $\langle x, y \rangle$ Abelova. Pošto je $\langle x, y \rangle$ neciklična torziono slobodna, onda je $\langle x, y \rangle \cong \mathbb{Z}^2$. Međutim, $\langle x \rangle$ je podgrupa od $\langle x, y \rangle$ konačnog indeksa, a sve ciklične podgrupe od $\mathbb{Z}^2$ su beskonačnog indeksa. Naime, ako je podgrupa od $\mathbb{Z}^2$ generisana sa (m, n) i ako je, bez umanjenja opštosti, $n \neq 0$, onda svi elementi oblika $(k, 0)$ gde $k \in \mathbb{Z}$ pripadaju različitim kosetima od $\langle (m,n) \rangle$. Ovim je naša tvrdnja dokazana. $\square$

Posledica 2.38 *Neka je* $\mathbf{G}$ *torziono slobodna grupa klase nilpotentnosti* 2 *u kojoj je svaki element sadržan u bar jednoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi. Onda je*

$$\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Z}^n) \cong K_1 \cup \kappa Z,$$

gde je Z *netrivijalna komponenta povezanosti od* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Z})$*, i gde je* $\kappa = 1$ *ako je* $\mathbf{G}$ *ciklična, i* $\kappa = |G|$ *inače.*

U nastavku ove sekcije bavićemo se nenula-stepenim grafom aditivne grupe racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$, grupe $\mathbb{Q}^n$ i podgrupa od $\mathbb{Q}$. Najpre ćemo pokazati nekoliko lema koje će nam pomoći da, u slučaju torziono slobodne grupe, bolje razumemo odnos posmatranog elementa i njegovih suseda iz nenula-stepenog grafa. Pre toga uvešćemo nekoliko novih oznaka.

Podsetimo se, komplement grafa $\Gamma = (V, E)$ je graf $\overline{\Gamma} = (V, V^{[2]} \setminus E)$. U ovoj sekciji, za element x grupe $\mathbf{G}$, sa $I_{\mathbf{G}}(x)$, $O_{\mathbf{G}}(x)$ i $M_{\mathbf{G}}(x)$ označavamo skup njegovih direktnih prethodnika bez x^{-1}, skup njegovih direktnih sledbenika bez x^{-1} i skup svih njegovih suseda bez x^{-1} u $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$, redom, tj.

$$\begin{aligned}
&I_{\mathbf{G}}(x) = \{y \in V \setminus \{x^{-1}\} \mid y \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{G}} x\},\\
&O_{\mathbf{G}}(x) = \{y \in V \setminus \{x^{-1}\} \mid x \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{G}} y\} \text{ i}\\
&M_{\mathbf{G}}(x) = I_{\mathbf{G}}(x) \cup O_{\mathbf{G}}(x).
\end{aligned}$$

Često $I_{\mathbf{G}}(x)$, $O_{\mathbf{G}}(x)$ i $M_{\mathbf{G}}(x)$ kraće označavamo sa $I(x)$, $O(x)$ i $M(x)$, respektivno. Dodatno, za grupu $\mathbf{G}$ i njen nenula-stepeni graf $\Gamma^{\pm} = \mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$, uvodimo sledeće oznake:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_{\mathbf{G}}(x) = \Gamma^{\pm}[I(x)], &&\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(x) = \Gamma^{\pm}[O(x)], &&\mathcal{M}_{\mathbf{G}}(x) = \Gamma^{\pm}[M(x)],\\
&\overline{\mathcal{I}}_{\mathbf{G}}(x) = \overline{\Gamma^{\pm}}[I(x)], &&\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}}(x) = \overline{\Gamma^{\pm}}[O(x)] \text{ i} &&\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}}(x) = \overline{\Gamma^{\pm}}[M(x)]
\end{aligned}$$

za odgovarajuće indukovane podgrafove od $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ i njegovog komplementa. Kada je jasno o kojoj je grupi reč, onda ćemo ih kraće označavati sa $\mathcal{I}(x)$, $\mathcal{O}(x)$, $\mathcal{M}(x)$, $\overline{\mathcal{I}}(x)$, $\overline{\mathcal{O}}(x)$ i $\overline{\mathcal{M}}(x)$. Važno je napomenuti da je, za nejedinični element x torziono slobodne grupe $\mathbf{G}$, element x^{-1} prepoznatljiv po tome što je to jedini čvor koji ima isto zatvoreno susedstvo u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ kao x.

Lema 2.39 ([14, lema 3.3]) *Neka je $\mathbf{G}$ torziono slobodna grupa i neka je x nejedinični element grupe $\mathbf{G}$. Tada $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}}(x)$ čini komponentu povezanosti grafa $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}}(x)$.*

Dokaz. Neka $y, z \in O(x)$. Onda je $y = x^m$ i $z = x^n$ za neke $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Tada, za $k \in \mathbb{N}$ uzajamno prost sa m i n, važi $y = x^m \sim_{\overline{\mathcal{M}}(x)} x^k \sim_{\overline{\mathcal{M}}(x)} x^n = z$, čime je pokazano da $O(x)$ indukuje povezan podgraf od $\overline{\mathcal{M}}(x)$. Dodatno, lako se vidi da je u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ svaki čvor iz $I(x)$ povezan sa svakim čvorom iz $O(x)$, što povlači da je $\overline{\mathcal{O}}(x)$ komponenta povezanosti od $\overline{\mathcal{M}}(x)$. $\square$

Lema 2.40 ([14, lema 3.4]) *Neka je $\mathbf{G}$ torziono slobodna grupa, i neka je $\mathbf{H}$ grupa takva da je $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$. Neka je z nejedinični element grupe $\mathbf{G}$ i neka je $\varphi : G \to H$ izomorfizam iz $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$. Onda je $\hat{\varphi} = \varphi|_{M(z)}$ izomorfizam iz $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}}(z)$ u $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{H}}(\hat{\varphi}(z))$. Dodatno, $\overline{\mathcal{I}}_{\mathbf{G}}(z) \cong \overline{\mathcal{I}}_{\mathbf{H}}(\hat{\varphi}(z))$ i $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}}(z) \cong \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{H}}(\hat{\varphi}(z))$.*

Dokaz. Na osnovu leme 2.30, grupe $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ su torziono slobodne. Lako se uočava da je $\varphi|_{M_{\mathbf{G}}(z)}$ izomorfizam iz $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}}(z)$ u $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$, i, očigledno, za svaki skup C koji indukuje komponentu povezanosti od $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}}(z)$, njegova slika $\varphi(C)$ takođe indukuje komponentu povezanosti od $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$.

Dalje, na osnovu leme 2.39, $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}}(z)$ i $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$ su komponente povezanosti od $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}}(z)$ i $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$. Štaviše, pošto su $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ torziono slobodne, sledi $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(z) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big) \cong \big(\mathcal{G}(\mathbb{Z})\big)\big[\mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\}\big]$. Odatle sledi $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}}(z) \cong \overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$ i $\overline{\mathcal{I}}_{\mathbf{G}}(z) \cong \overline{\mathcal{I}}_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$. Ovim je lema dokazana. $\square$

U prethodnoj lemi smo pokazali da, za element z torziono slobodne grupe $\mathbf{G}$ i $\varphi \in \mathrm{Is}\big(\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}), \mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})\big)$, gde je $\mathbf{H}$ grupa, važi $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(z) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$ i $\mathcal{I}_{\mathbf{G}}(z) \cong \mathcal{I}_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$. Međutim, izomorfizam iz $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ ne mora da slika $O_{\mathbf{G}}(z)$ na $O_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$, što ćemo potvrditi lemom 2.41.

Transponovani digraf usmerenog grafa $\vec{\Gamma}$ je digraf $\vec{\Gamma}^T$ takav da $x \to_{\vec{\Gamma}^T} y$ ako $y \to_{\vec{\Gamma}} x$. Za digrafe $\vec{\Gamma} = (V_1, E_1)$ i $\vec{\Delta} = (V_2, E_2)$, bijekcija $\varphi : V_1 \to V_2$ je **antiizomorfizam** iz $\vec{\Gamma}$ u $\vec{\Delta}$ ako je φ izomorfizam iz $\vec{\Gamma}$ u $\vec{\Delta}^T$. Ako takva bijekcija postoji, onda kažemo da su $\vec{\Gamma}$ i $\vec{\Delta}$ antiizomorfni.

Lema 2.41 ([14, lema 6.1]) *Neka je $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, i neka je preslikavanje $\varphi_a : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definisano sa*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \dfrac{a^2}{x}, & x \neq 0. \end{cases}$$

Onda je φ_a automorfizam od $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Q})$ i izomorfizam između $\vec{\mathcal{G}}(\mathbb{Q})$ i $\big(\vec{\mathcal{G}}(\mathbb{Q})\big)^T$. Dodatno, preslikavanje φ_a je izomorfizam iz $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}(a)$ u $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}}(a)$.

Pre nego što nastavimo sa dokazom naredne leme, koja je dokazana u [72], predstavimo sledeću poznatu teoremu za čiji dokaz čitalac može pogledati [30, teorema 34.10].

Teorema 2.42 *Torziono slobodna grupa je lokalno ciklična ako i samo ako je izomorfna podgrupi grupe racionalnih brojeva.*

Lema 2.43 *Neka je $\mathbf{G}$ torziono slobodna lokalno ciklična grupa takva da je $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(x) \cong \mathcal{I}_{\mathbf{G}}(x)$ za svako $x \in G$. Onda je $\mathbf{G} \cong (\mathbb{Q}, +)$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da $\mathbf{G} \ncong (\mathbb{Q}, +)$ i da je $\mathcal{I}_{\mathbf{G}}(x) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{G}}(x)$ za svako $x \in G$. Na osnovu teoreme 2.42, svaka torziono slobodna lokalno ciklična grupa može se utopiti u grupu racionalnih brojeva. Primetimo i da $\mathbb{Q}$ nije izomorfna ni sa jednom svojom pravom podgrupom, jer, za svaki prost broj p, jednačina $px = a$ po x ima rešenje u $\mathbb{Q}$, što ni za koju pravu podgrupu od $\mathbb{Q}$ nije slučaj. Pored toga, svaka podgrupa grupe racionalnih brojeva je izomorfna sa podgrupom od $\mathbb{Q}$ koja sadrži 1. Dakle, bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da je $\mathbf{G} < (\mathbb{Q}, +)$, i da $1 \in G$. Dalje, postoji prost broj p takav da $\frac{1}{p^k} \notin G$ za neko $k \in \mathbb{N}$, a, bez umanjenja opštosti, možemo pretpostaviti da $\frac{1}{p} \in G$.

Neka je m maksimalan prirodan broj takav da $\frac{1}{p^m} \in G$. Uvedimo predurеđenje $\preceq$ na $O_{\mathbf{G}}(1)$ takvo da je $x \preceq y$ ako $x \overset{\pm}{\rightarrow}_{\mathbf{G}} y$ ili $x = y$. Uvedimo i na $I_{\mathbf{G}}(1)$ preduređenje $\preceq$ takvo da je $x \preceq y$ ako $y \overset{\pm}{\rightarrow}_{\mathbf{G}} x$ ili $x = y$. Lako se primećuje da su klase preduređenja $(O_{\mathbf{G}}(1), \preceq)$ dvoelementni skupovi oblika $\{n, -n\}$, gde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, i da su klase preduređenja $(I_{\mathbf{G}}(1), \preceq)$ dvoelementni skupovi oblika $\{\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\}$ za $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Nije teško primetiti da su minimalne klase skupa $O_{\mathbf{G}}(1)$ u odnosu na preduređenje $\preceq$ one koje sadrže proste brojeve, i da su minimalne klase od $I_{\mathbf{G}}(1)$ one koje sadrže recipročne vrednosti prostih brojeva.

Neka je $\varphi : O_{\mathbf{G}}(1) \rightarrow I_{\mathbf{G}}(1)$ izomorfizam iz $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(1)$ u $\mathcal{I}_{\mathbf{G}}(1)$. Primetimo da, za sve $x, y \in O_{\mathbf{G}}(1)$ susedne u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$, važi $x \overset{\pm}{\rightarrow}_{\mathbf{G}} y$ ako i samo ako je $S_{\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(1)}(x, y)$ konačan skup. Takođe, za $x, y \in I_{\mathbf{G}}(1)$ susedne u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ važi $y \overset{\pm}{\rightarrow}_{\mathbf{G}} x$ ako i samo ako je skup $S_{\mathcal{I}_{\mathbf{G}}(1)}(x, y)$ konačan. Odatle, φ je izomorfizam iz $(O_{\mathbf{G}}(1), \preceq)$ u $(I_{\mathbf{G}}(1), \preceq)$. Primetimo da je u $(O_{\mathbf{G}}(1), \preceq)$ svaki element bilo koje minimalne klase sadržan u nekom strogo rastućem beskonačnom lancu L takvom da su svaka dva elementa od $L^{\downarrow} = \{z \in O_{\mathbf{G}}(1) \mid z \preceq x \text{ za neko } x \in L\}$ uporediva. Naime, ako je x element minimalne klase, onda je x ili x^{-1} prost broj. Tada niz $x, x^2, x^3, \ldots$ čini rastući lanac L, i za svako $y \in L^{\downarrow}$ je y ili $-y$ stepen prostog broja $|x|$. Pošto je $(O_{\mathbf{G}}(1), \preceq) \cong (I_{\mathbf{G}}(1), \preceq)$, onda sledi da isto važi i za $(I_{\mathbf{G}}(1), \preceq)$. Međutim, $\frac{1}{p}$ nije sadržan u takvom beskonačnom lancu od $(I_{\mathbf{G}}(1), \preceq)$, pa dobijamo kontradikciju sa pretpostavkom da je $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(x) \cong \mathcal{I}_{\mathbf{G}}(x)$ za svako $x \in G$. Ovim je lema dokazana. $\square$

Pre nego što pokažemo tvrđenje 2.45, pokažimo još i sledeću pomoćnu lemu, koja je dokazana u [72].

Lema 2.44 *Neka je* $\mathbf{G}$ *torziono slobodna grupa, i neka su* $x, y, z \in G$

takvi da $x, y \in O_{\mathbf{G}}(z)$, $x \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{G}} y$ *i* $y \notin \{x, x^{-1}\}$. *Neka je* $\mathbf{H}$ *grupa, i neka je* $\varphi : G \to H$ *izomorfizam iz* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ *u* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$. *Onda je*

$$\varphi(x) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(y) \text{ ako i samo ako } \varphi\big(O_{\mathbf{G}}(z)\big) = O_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big).$$

Dokaz. Pošto, na osnovu leme 2.39, $O_{\mathbf{G}}(z)$ i $O_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$ indukuju komponente povezanosti od $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}}(z)$ i $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$, redom, onda, na osnovu leme 2.40, $\varphi\big(O_{\mathbf{G}}(z)\big) = O_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$ ako i samo ako $\varphi(x), \varphi(y) \in O_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$. Dakle, dovoljno je dokazati da je $\varphi(x) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(y)$ ako i samo ako $\varphi(x) \in O_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$.

Na osnovu leme 2.30, i grupa $\mathbf{H}$ je torziono slobodna. Pošto su $\{x, x^{-1}\}$, $\{y, y^{-1}\}$ i $\{z, z^{-1}\}$ po parovima disjunktni skupovi, elementi x, y i z imaju po parovima različita zatvorena susedstva u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$. Odatle sledi da i $\varphi(x)$, $\varphi(y)$ i $\varphi(z)$ imaju po parovima različita zatvorena susedstva u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$, što povlači da su $\{\varphi(x), \varphi(x^{-1})\}$, $\{\varphi(y), \varphi(y^{-1})\}$ i $\{\varphi(z), \varphi(z^{-1})\}$ po parovima disjunktni.

Pretpostavimo najpre da je $\varphi(x) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(y)$, i pretpostavimo da $\varphi(x) \in I_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$. Onda sledi $\varphi(x) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(z)$. Na osnovu leme 2.39, $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}}(z)$ je komponenta povezanosti od $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}}(z)$, pa $\varphi(O_{\mathbf{G}}(z))$ indukuje komponentu povezanosti od $\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$ izomorfnu sa $\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}}(z)$. Na osnovu leme 2.32, skup $S_{\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(z)}(y, x)$ je beskonačan, što povlači da je i $S_{\varphi(\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(z))}\big(\varphi(y), \varphi(x)\big)$ beskonačan. Međutim, nije teško pokazati da iz $\varphi(x) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(y)$ i $\varphi(y) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(z)$ sledi da je $S_{\varphi(\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(z))}\big(\varphi(y), \varphi(x)\big)$ konačan, čime je dobijena kontradikcija. Dakle, $\varphi(x) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(y)$ povlači $\varphi(x) \in O_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$, pa preostaje da se dokaže i druga implikacija.

Pretpostavimo da $\varphi(x) \in O_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$, odakle sledi $\varphi\big(O_{\mathbf{G}}(z)\big) = O_{\mathbf{H}}\big(\varphi(z)\big)$. Pretpostavimo da $\varphi(x) \not\xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(y)$. Odatle sledi $\varphi(y) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(x)$, tj. $\varphi(z) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(y)$ i $\varphi(y) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(x)$. Na osnovu leme 2.32, odatle sledi da je $S_{\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\varphi(z))}\big(\varphi(y), \varphi(x)\big)$ konačan. Sa druge strane, pošto je $S_{\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(z)}(y, x)$ beskonačan, onda je i $S_{\varphi(\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(z))}\big(\varphi(y), \varphi(x)\big) = S_{\mathcal{O}_{\mathbf{H}}(\varphi(z))}\big(\varphi(y), \varphi(x)\big)$ beskonačan, čime smo opet dobili kontradikciju. Ovim je lema dokazana. □

Naredno tvrđenje dokazano je u [72].

Tvrđenje 2.45 *Neka je* $\mathbf{G}$ *torziono slobodna lokalno ciklična grupa, i neka je* $\mathbf{H}$ *grupa takva da je* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$. *Onda je* $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{H})$. *Dodatno, svaki izomorfizam iz* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ *u* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$ *je izomorfizam ili antiizomorfizam iz* $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$ *u* $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{H})$.

Dokaz. Označimo sa φ izomorfizam iz $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$, i pretpostavimo dalje da je $x \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{G}} y$ za $x, y \in G \setminus \{e_{\mathbf{G}}\}$ takve da je $x \neq y^{-1}$. Neka su $u, v \in G$ takvi da je $u \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{G}} v$. Primetimo da je dovoljno razmatrati samo slučaj kada je $u \neq v^{-1}$, jer, očigledno, $u = v^{-1}$ ako i samo ako $\overline{N}_{\mathbf{G}}(u) = \overline{N}_{\mathbf{G}}(v)$ ako i samo ako $\overline{N}_{\mathbf{H}}\big(\varphi(u)\big) = \overline{N}_{\mathbf{H}}\big(\varphi(v)\big)$ ako i samo ako $\varphi(u) = (\varphi(v))^{-1}$. Takođe, za $u \neq v^{-1}$, pošto je φ izomorfizam iz $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$, $u \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{G}} v$ povlači $\varphi(u) \overset{p\pm}{\sim}_{\mathbf{H}} \varphi(v)$, pa je $\varphi(u) \not\xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(v)$ ako i samo ako $\varphi(v) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(u)$.

Pošto je $\mathbf{G}$ lokalno ciklična, postoji $w \in \mathbf{G}$ takvo da je $x, u \in \langle w \rangle$. Pretpostavićemo u nastavku da je $x, u \in O_{\mathbf{G}}(w)$, tj. da $w \notin \{x, x^{-1}, u, u^{-1}\}$. Tada je, na osnovu leme 2.44, $\varphi(x) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{G}} \varphi(y)$ ako i samo ako $\varphi\big(O_{\mathbf{G}}(w)\big) = O_{\mathbf{H}}\big(\varphi(w)\big)$, što je, na osnovu iste leme, ekvivalentno $\varphi(u) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{G}} \varphi(v)$. Slično se pokazuje da ova ekvivalencija važi i u slučaju kad $w \in \{x, x^{-1}, u, u^{-1}\}$. Odatle sledi da je φ izomorfizam iz $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{H})$ ako i samo ako $\varphi(x) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{G}} \varphi(y)$, a da je φ antiizomorfizam iz $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{H})$ u suprotnom. U prvom slučaju, dokaz je završen, pa pretpostavimo da je φ antiizomorfizam iz $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{H})$. U tom slučaju je, za svako $x \in G$, $\varphi\big(I_{\mathbf{G}}(x)\big) = O_{\mathbf{H}}\big(\varphi(x)\big)$, pa odatle sledi da je $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(x) \cong \mathcal{I}_{\mathbf{G}}(x) \cong \big(\mathcal{G}(\mathbb{Z})\big)[\mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}]$. Na osnovu leme 2.43, $\mathbf{G} \cong (\mathbb{Q}, +)$, a odatle, na osnovu leme 2.41, postoji antiizomorfizam iz $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$ u samog sebe. Ovim smo pokazali da je $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{H})$, čime je tvrđenje dokazano. □

Sada lako možemo dokazati da ne postoji nijedna grupa neizomorfna sa grupom racionalnih brojeva čiji je nenula-stepeni graf izomorfan sa $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Q})$, što je rezultat iz [72].

Posledica 2.46 *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupa takva da je* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Q})$. *Onda je* $\mathbf{G} \cong (\mathbb{Q}, +)$.

Dokaz. Pošto je $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Q})$, onda je, na osnovu tvrđenja 2.45, $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbb{Q})$. Tada je $\mathbf{G}$ lokalno ciklična grupa takva da za svako $x \in G$ važi $\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(x) \cong \mathcal{I}_{\mathbf{G}}(x)$. Odatle, na osnovu leme 2.43, sledi da je $\mathbf{G}$ izomorfna sa grupom racionalnih brojeva. □

Naredno tvrđenje nam je potrebno kako bismo dokazali teoremu 2.48, koja je jedna od glavnih teorema ove sekcije.

Tvrđenje 2.47 ([14, teorema 6.3]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupa takva da je* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)$, *za* $n > 1$. *Onda je* $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)$.

Dokaz. Neka je $n > 1$. Kao što je poznato, $\mathbb{Q}^n$ je vektorski prostor nad poljem racionalnih brojeva. Pošto, za nenula elemente $x, y \in \mathbb{Q}^n$, $x \overset{\pm}{\to}_{\mathbb{Q}} y$ ako i samo ako je $y = xk$ za neko $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, lako se uočava da x i y leže u istoj komponenti povezanosti od $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)$ ako i samo ako x i y leže u istom jednodimenzionalnom potprostoru. Time dobijamo da je

$$\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Q}^n) = K_1 \cup \aleph_0 \Phi,$$

gde je Φ netrivijalna komponenta povezanosti od $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Q})$. Takođe, ako $C \subseteq \mathbb{Q}^n$ indukuje komponentu povezanosti od $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)$, onda je $C \cup \{0\}$ nosač podgrupe od $\mathbb{Q}^n$ izomorfne sa aditivnom grupom $\mathbb{Q}$.

Neka je $\varphi : \mathbb{Q}^n \to G$ izomorfizam iz $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)$ u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$. Neka je C netrivijalna komponenta povezanosti od $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)$, i neka je $x \overset{\pm}{\to}_{\mathbb{Q}^n} y$ za neke $x, y \in C$, $x \neq -y$. Dalje, analogno kao u dokazu tvrđenja 2.45, može se koristeći lemu 2.44 dokazati da je $\varphi|_C$ izomorfizam ili antiizomorfizam iz $\big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)\big)[C]$ u $\big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})\big)[\varphi(C)]$. Pošto je, na osnovu leme 2.41, $\big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)\big)[C] \cong \Big(\big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)\big)[C]\Big)^T$, onda je $\big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)\big)[C] \cong \big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})\big)[\varphi(C)]$. Dakle, graf $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$, kao i $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)$, ima jedan izolovani čvor i prebrojivo mnogo komponenti povezanosti izomorfnih sa Φ, pa odatle sledi $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)$, čime je tvrđenje dokazano. $\square$

Naredna teorema je direktna posledica tvrđenja 2.45 i tvrđenja 2.47.

Teorema 2.48 ([14, teorema 1.5]) *Neka je $n \in \mathbb{N}$, i neka je $\mathbf{G}$ grupa takva da je $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)$. Onda je $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)$. Dodatno, svaki izomorfizam iz $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)$ je izomorfizam ili antiizomorfizam iz $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbb{Q}^n)$.*

Kao što smo videli ranije, ne postoji neciklična grupa čiji je stepeni graf izomorfan $\mathcal{G}(\mathbb{Z})$. Takođe smo videli da ne postoji grupa neizomorfna sa $(\mathbb{Q}, +)$ čiji je stepeni graf izomorfan $\mathcal{G}(\mathbb{Q})$. Sa druge strane, naredni primer pokazuje da postoje neizomorfne podgrupe grupe racionalnih brojeva koje imaju izomorfne stepene grafove.

Primer 2.49 **Dijadična grupa** *je podgrupa* $\mathbf{B}$ *od* $(\mathbb{Q}, +)$ *čiji je nosač*

$$B = \{\frac{n}{2^k} \mid n \in \mathbb{Z} \ i \ k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Trijadična grupa *je podgrupa* $\mathbf{C}$ *od* $(\mathbb{Q}, +)$ *čiji je nosač*

$$C = \{\frac{n}{3^k} \mid n \in \mathbb{Z} \ i \ k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Dijadična i trijadična grupa su neizomofne grupe koje imaju izomorfne nenula-stepene grafove.

Dokaz. Lako se uočava da grupe **B** i **C** nisu izomorfne. Naime, u **B** svaka jednačina po x oblika $2x = a$ ima rešenje, što nije slučaj u **C**. Svaki nenula racionalan broj n može da se zapiše u obliku $n = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_k^{i_k}$ za neke različite proste brojeve $p_1, p_2, \ldots, p_k$ i neke cele brojeve $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Neka je φ bijekcija na skupu prostih brojeva koja je transpozicija brojeva 2 i 3. Primetimo da je $n \overset{\pm}{\to} m$, za različite $n = p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_k^{i_k}$ i $m = p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_k^{j_k}$, ako i samo ako je $i_l \leq j_l$ za svako $l \leq n$. Odatle, preslikavanje $\hat{\varphi} : B \to C$ takvo da je $\hat{\varphi}(0) = 0$ i $\hat{\varphi}(p_1^{i_1} p_2^{i_2} \cdots p_k^{i_k}) = (\varphi(p_1))^{i_1} (\varphi(p_2))^{i_2} \cdots (\varphi(p_k))^{i_k}$, za različite proste brojeve $p_1, p_2, \ldots, p_k$, je izomorfizam iz $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{B})$ u graf $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{C})$. $\square$

Do kraja ove sekcije dokazujemo da, ako grupa **H** ima stepeni graf izomorfan sa stepenim grafom torziono slobodne grupe **G** klase nilpotentnosti 2, onda **G** i **H** imaju izomorfne usmerene stepene grafove. U tom cilju, pokazujemo najpre da komponente povezanosti torziono slobodne grupe klase nilpotentnosti 2 zajedno sa jediničnim elementom čine nosač lokalno ciklične podgrupe. Naredna lema je dokazana u [14], dok teorema 2.51, koja je dokazana u [72], pruža pozitivan odgovor na pitanje postavljeno u [14].

Lema 2.50 ([14, lema 7.1]) *Neka je* **G** *torziono slobodna grupa klase nilpotentnosti* 2*, i neka skup* $C \subseteq G$ *indukuje komponentu povezanosti od* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$*. Onda je* $C \cup \{e\}$ *nosač lokalno ciklične podgrupe od* **G***.*

Dokaz. Dokažimo najpre da je $\langle x, y\rangle$ ciklična podgrupa za sve $x, y \in C$ čije je rastojanje u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ jednako 2. Neka je $d(x, y) = 2$ za $x, y \in C$. Tada postoji $z \in C$ takvo da je $x \overset{p\pm}{\sim} z \overset{p\pm}{\sim} y$. Onda je ispunjen bar jedan od sledećih uslova:

(a) $z \overset{\pm}{\to} x$ i $z \overset{\pm}{\to} y$;

(b) $y \overset{\pm}{\to} z$ i $z \overset{\pm}{\to} x$;

(c) $x \overset{\pm}{\to} z$ i $z \overset{\pm}{\to} y$;

(d) $x \overset{\pm}{\to} z$ i $y \overset{\pm}{\to} z$.

Lako se uočava da je u slučajevima (a) - (c) podgrupa $\langle x, y\rangle$ ciklična. Pretpostavimo da je $x \overset{\pm}{\to} z$ i $y \overset{\pm}{\to} z$, i da $\langle x, y\rangle$ nije ciklična podgrupa. Bez umanjenja opštosti, postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $x^m = z = y^n$, a u tom slučaju x^m i y komutiraju. Slično kao u dokazu leme 2.37, koristeći to da je **G** klase nilpotentnosti 2, dobijamo $\big([x, y]\big)^m = [x^m, y] = e$, što povlači da je $[x, y] = e$ jer je **G** torziono slobodna. Opet, kao u dokazu leme 2.37, odavde sledi da je $\langle x, y\rangle \cong \mathbb{Z}^2$, što je u kontradikciji sa činjenicom da je $\langle x\rangle$ podgrupa od $\langle x, y\rangle$ konačnog indeksa. Ovim je tvrdnja dokazana.

Dokažimo u nastavku, za sve $x, y \in C$, indukcijom po rastojanju čvorova x i y u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$, da je podgrupa $\langle x, y\rangle$ ciklična. Kao što smo videli, ukoliko je $d(x, y) \leq 2$, onda ova tvrdnja važi. Pretpostavimo dalje, za $n \geq 2$, da je $\langle g, h\rangle$ ciklična za sve $g, h \in C$ takve da je $d(g, h) \leq n$. Neka su $x, y \in C$ takvi da je $d(x, y) = n + 1$, i neka je $x = u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n, u_{n+1} = y$ put od x do y. Na osnovu ranije dokazanog, postoji $z \in G$ takvo da je $\langle u_{n-1}, y\rangle = \langle z\rangle$. Pošto je $d(x, z) \leq n$, onda je, na osnovu indukcijske hipoteze, $\langle x, z\rangle$ ciklična podgrupa, koja sadrži i element y. Ovim je dokazano da svaka dva elementa iz C generišu cikličnu podgrupu od $\mathbf{G}$.

Konačno, za sve $x, y \in C$, pošto je $\langle x, y\rangle$ ciklična podgrupa, skup $\langle x, y\rangle \setminus \{e\}$ indukuje povezan podgraf od $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$, što povlači da je $\langle x, y\rangle \subseteq C$. Dakle, $C \cup \{e\}$ je nosač lokalno ciklične podgrupe od $\mathbf{G}$. Ovim je lema dokazana. $\square$

Teorema 2.51 *Neka je* $\mathbf{G}$ *torziono slobodna grupa klase nilpotentnosti* 2*, i neka je* $\mathbf{H}$ *grupa takva da je* $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$*. Onda je* $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G}) \cong \vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{H})$*.*

Dokaz. Neka je $\varphi : G \to H$ izomorfizam iz $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$. Tada φ slika svaku komponentu povezanosti od $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$ na neku komponentu povezanosti od $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})$. Neka je C netrivijalna komponenta povezanosti od $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$, i označimo $\varphi(C)$ sa D. Na osnovu leme 2.50, $C \cup \{e_{\mathbf{G}}\}$ je nosač lokalno ciklične podgrupe od $\mathbf{G}$, koju ćemo označavati sa $\hat{\mathbf{C}}$. Neka su $x, y \in C$ takvi da je $x \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{G}} y$ i $y \notin \{x, x^{-1}\}$.

Pokažimo da je $\varphi|_C$ izomorfizam ili antiizomorfizam iz $\big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})\big)[C]$ u $\big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{H})\big)[D]$. Neka $u, v \in C$ takvi da je $u \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{G}} v$. Pošto je φ izomorfizam iz Γ u Δ, onda je $\varphi(u) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(v)$ ili $\varphi(v) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(u)$. Očigledno, ako $v \in \{u, u^{-1}\}$, onda i $\varphi(v) \in \{\varphi(u), \varphi(u^{-1})\}$ jer je u tom slučaju $u \equiv_{\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})} v$ i $\varphi(u) \equiv_{\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{H})} \varphi(v)$, pa pretpostavimo da $v \notin \{u, u^{-1}\}$. Pošto je $\hat{\mathbf{C}}$ lokalno ciklična podgrupa od $\mathbf{G}$, onda postoji $w \in C$ takvo da $x, u \in \langle w\rangle$. Pretpostavimo dalje da $w \notin \{x, x^{-1}, u, u^{-1}\}$. U tom slučaju je, na osnovu leme 2.44, $\varphi(x) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(y)$ ako i samo ako je $\varphi\big(O_{\mathbf{G}}(w)\big) = O_{\mathbf{H}}\big(\varphi(w)\big)$, što je, na osnovu iste leme, ekvivalentno sa $\varphi(u) \xrightarrow{\pm}_{\mathbf{H}} \varphi(v)$. Slično se pokazuje da ista ekvivalencija važi i kada $w \notin \{x, x^{-1}, u, u^{-1}\}$, pa je $\varphi|_C$ izomorfizam ili antiizomorfizam iz $\big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})\big)[C]$ u $\big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{H})\big)[D]$.

U nastavku pokazujemo da je $\big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})\big)[C] \cong \big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{H})\big)[D]$, što očigledno važi ako je $\varphi|_C$ izomorfizam. Ukoliko je $\varphi|_C$ antiizomorfizam, onda se, za svako $x \in C$, $I_{\mathbf{G}}(x)$ se slika na $O_{\mathbf{H}}\big(\varphi(x)\big)$. Odatle je $\mathcal{I}_{\mathbf{G}}(x) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{H}}\big(\varphi(x)\big) \cong \mathcal{O}_{\mathbf{G}}(x)$, što, na osnovu leme 2.43, povlači da je $\hat{\mathbf{C}} \cong (\mathbb{Q}, +)$. Tada, na osnovu leme 2.41, sledi da je $\big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})\big)[C] \cong \big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{H})\big)[D]$.

Ovim smo dokazali da je, za svaku komponentu povezanosti C od $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$, $\big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})\big)[C] \cong \big(\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{H})\big)\big[\varphi(C)\big]$. Time smo dokazali da $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ imaju izomorfne usmerene nenula-stepene grafove, čime je teorema dokazana. □

2.8 Osobine obogaćenog stepenog grafa

U ovoj sekciji dokazaćemo da, ako dve konačne stepeno-asocijativne lupe imaju izomorfne obogaćene stepene grafove, onda one imaju izomorfne i usmerene stepene grafove. Takođe ćemo predstaviti i osnovne osobine obogaćenog stepenog grafa. Sekcija je zasnovana na rezultatima objavljenim u [73].

Počećemo sekciju sa izlaganjem dokaza dve važne osobine obogaćenih stepenih grafova. U [1] dokazano je da su maksimalne klike obogaćenog stepenog grafa grupe nosači cikličnih ili lokalno cikličnih podgrupa. Najpre ćemo predstaviti dokaz tog tvrđenja, ali i analognog tvrđenja za stepeno-asocijativne lupe bez elemenata beskonačnog reda. Ova tvrđenja pružaju značajan uvid u strukturu obogaćenog stepenog grafa. Zatim ćemo dokazati da je, pod određenim uslovima, obogaćeni stepeni graf direktnog proizvoda dve stepeno-asocijativne lupe izomorfan jakom proizvodu obogaćenih stepenih grafova tih grupa.

Lema 2.52 *Neka je* $\mathbf{G}$ *stepeno-asocijativna lupa, i neka su elementi* $x, y, z \in G$ *konačnog reda. Ako su podlupe* $\langle x, y\rangle$, $\langle x, z\rangle$ *i* $\langle y, z\rangle$ *ciklične grupe, onda je i* $\langle x, y, z\rangle$ *ciklična grupa.*

Dokaz. Lako se uočava da, za sve $x_0 \in \langle x\rangle$, $y_0 \in \langle y\rangle$ i $z_0 \in \langle z\rangle$, elementi x_0, y_0 i z_0 po parovima komutiraju. Odatle sledi da je $\langle x, y, z\rangle$ komutativna stepeno-asocijativna lupa. Neka su $p_1, p_2, \ldots, p_n$ svi prosti delitelji od NZS$(o(x), o(y), o(z))$. Dalje, za sve $i \leq n$ postoje elementi $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_n} \in \langle x\rangle$ čiji su redovi stepeni od $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respektivno, i koji su takvi da je $x = x_{p_1}x_{p_2}\cdots x_{p_n}$. Analogno uvodimo i elemente $y_{p_1}, y_{p_2}, \ldots, y_{p_n} \in \langle y\rangle$ i $z_{p_1}, z_{p_2}, \ldots, z_{p_n} \in \langle z\rangle$, i za svako $i \leq n$ sa c_{p_i} označimo jedan od elemenata x_{p_i}, y_{p_i} i z_{p_i} takav da je $o(c_{p_i}) \geq o(x_{p_i}), o(y_{p_i}), o(z_{p_i})$. Pošto je $x \overset{e}{\sim} y$, $x \to x_{p_1}$ i $y \to y_{p_1}$, onda je i $x_{p_1} \overset{e}{\sim} y_{p_1}$. Slično, važi i $x_{p_1} \overset{e}{\sim} z_{p_1}$ i $y_{p_1} \overset{e}{\sim} z_{p_1}$. Dakle, pošto $o(x_{p_1}), o(y_{p_1}), o(z_{p_1}) \leq o(c_{p_1})$, sledi da $x_{p_1}, y_{p_1}, z_{p_1} \in \langle c_{p_1}\rangle$. Analogno,

$x_{p_i}, y_{p_i}, z_{p_i} \in \langle c_{p_i} \rangle$ za svako $i \leq n$. Pokažimo da $x, y, z \in \langle c \rangle$, gde je $c = c_{p_1} c_{p_2} \cdots c_{p_n}$. Pošto su $o(c_{p_1}), o(c_{p_2}), \ldots, o(c_{p_n})$ po parovima uzajamno prosti, i pošto $c_{p_1}, c_{p_2}, \ldots, c_{p_n}$ svi međusobno komutiraju, onda je $\langle c \rangle = \langle c_{p_1} \rangle \times \langle c_{p_2} \rangle \times \cdots \times \langle c_{p_n} \rangle$. Odatle, pošto $x_{p_i} \in \langle c_{p_i} \rangle$ za svako $i \leq n$, sledi da $x \in \langle c \rangle$. Analogno, $y, z \in \langle c \rangle$, pa sledi da je $\langle x, y, z \rangle$ ciklična grupa, što je trebalo dokazati. $\square$

Lema 2.53 *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupa, i neka su* x, y, z *elementi grupe* $\mathbf{G}$ *beskonačnog reda. Ako su podgrupe* $\langle x, y \rangle$, $\langle x, z \rangle$ *i* $\langle y, z \rangle$ *ciklične, onda je i* $\langle x, y, z \rangle$ *ciklična.*

Dokaz. Pretpostavimo sada da su x, y i z beskonačnog reda. Pošto je $\langle x, y \rangle$ ciklična, onda je $\mathbf{A} = \langle x, y, z \rangle$ generisana sa 2 elementa, generatorom ciklične podgrupe $\langle x, y \rangle$ i elementom z, pa je $\mathbf{A} = \mathbf{C}_1 \times \mathbf{C}_2 = \langle c_1 \rangle \times \langle c_2 \rangle$, pri čemu jedna od grupa $\mathbf{C}_1$ i $\mathbf{C}_2$ može biti i trivijalna. Neka je $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ i $z = (z_1, z_2)$. Neka je $\langle x, y \rangle = \langle a \rangle$ i $\langle x, z \rangle = \langle b \rangle$, za $a = (a_1, a_2)$ i $b = (b_1, b_2)$, i neka je, bez umanjenja opštosti, $x = a^n$ i $x = b^m$ za $n, m \in \mathbb{N}$. Tada, element x_1 u grupi $\mathbf{C}_1$ ima n-ti koren i m-ti koren, pri čemu kažemo da je g k-ti koren od h ako je $g^k = h$. Lako se vidi da postoji $d_1 \in C_1$ takav da je $x_1 = d_1^{\mathrm{NZS}(n,m)}$. Pored toga, važi i $a_1 = d_1^{\frac{\mathrm{NZS}(n,m)}{n}}$ i $b_1 = d_1^{\frac{\mathrm{NZS}(n,m)}{m}}$. Analogno zaključujemo da postoji i $d_2 \in C_2$ takvo da je $a_2 = d_2^{\frac{\mathrm{NZS}(n,m)}{n}}$ i $b_2 = d_2^{\frac{\mathrm{NZS}(n,m)}{m}}$. Ovim dobijamo da za $d = (d_1, d_2)$ važi $a, b \in \langle d \rangle$, pa da $x, y, z \in \langle d \rangle$, čime smo dokazali da je $\mathbf{A}$ ciklična grupa. $\square$

Tvrđenje 2.54 ([1, lema 36]) *Maksimalna klika obogaćenog stepenog grafa grupe je nosač ciklične podgrupe ili lokalno ciklične podgrupe.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G}$ grupa. Jasno je da su nosači cikličnih i lokalno cikličnih podgrupa klike grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$. Pretpostavimo da je C maksimalna klika u $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$, i neka $x, y \in C$. Neka $z \in \langle x, y \rangle$, i neka je $t \in C$ proizvoljno. Pošto $x, y, z \in C$, onda je, na osnovu leme 2.52 i leme 2.53, podgrupa $\langle x, y, t \rangle$ ciklična, pa $z \in \langle x, y \rangle \leq \langle x, y, t \rangle$ povlači da je $z \overset{e}{\sim} t$. Sledi da $z \in C$, jer je $t \in C$ proizvoljno, pa dobijamo da je $\langle x, y \rangle \subseteq C$. Dakle, C je nosač podgrupe od $\mathbf{G}$.

Matematičkom indukcijom lako se pokazuje da je $\mathbf{C}$ lokalno ciklična, tj. da je, za svako $n \in \mathbb{N}$ i za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ koji čine kliku od $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$, grupa $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ ciklična. Naime, za $n \leq 2$ ova tvrdnja trivijalno važi, pa pretpostavimo da ta tvrdnja važi za proizvoljno $n = k$, $k \geq 2$. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1} \in C$. Pošto je $x_k \overset{e}{\sim} x_{k+1}$, onda je na osnovu rečenog u prethodnom pasusu $\langle x_k, x_{k+1} \rangle = \langle y_k \rangle$ za neko

$y_k \in C$. Na osnovu indukcijske hipoteze, podgrupa $\langle x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}\rangle = \langle x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, y_k\rangle$ je ciklična. Ovim je tvrđenje dokazano. $\square$

Tvrđenje 2.55 *Maksimalna klika obogaćenog stepenog grafa stepeno-asocijativne lupe koja ne sadrži elemente beskonačnog reda je nosač ciklične podgrupe ili lokalno ciklične podgrupe.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G}$ stepeno-asocijativna lupa čiji su svi elementi konačnog reda, i neka je C maksimalna klika od $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$. Slično kao u dokazu tvrđenja 2.54, na osnovu leme 2.52 zaključujemo da je C nosač podlupe od $\mathbf{G}$. Takođe, na osnovu leme 2.52, za svaka tri elementa $x, y, z \in C$, $\langle x, y, z\rangle$ je ciklična grupa, što povlači da je $\mathbf{C}$ asocijativna lupa, tj. $\mathbf{C}$ je grupa. Dodatno, kao u dokazu tvrđenja 2.54, svaka konačno generisana podgrupa od $\mathbf{C}$ je ciklična, što povlači da je $\mathbf{C}$ ciklična ili lokalno ciklična grupa. $\square$

Sledeća lema je originalan rezultat objavljen u [73], u kome se pokazala kao veoma koristan alat. U originalnom radu ta lema je dokazana za grupe, a u ovoj disetaciji na analogan način dokazujemo isto tvrđenje u slučaju stepeno-asocijativnih lupa sa inverzima.

Lema 2.56 *Neka su* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *stepeno-asocijativne lupe. Onda važi sledeće:*

(a) $\mathcal{G}_e(\mathbf{G} \times \mathbf{H}) \subseteq \mathcal{G}_e(\mathbf{G}) \boxtimes \mathcal{G}_e(\mathbf{H})$;

(b) *Neka* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *ne sadrže elemente beskonačnog reda. Onda je* $\mathcal{G}_e(\mathbf{G}\times\mathbf{H}) = \mathcal{G}_e(\mathbf{G})\boxtimes\mathcal{G}_e(\mathbf{H})$ *ako i samo ako je* $\mathrm{NZD}(o(g), o(h)) = 1$ *za svako* $g \in G$ *i za svako* $h \in H$.

Dokaz. (a) Ako je $(x_1, y_1) \overset{e}{\sim}_{\mathbf{G}\times\mathbf{H}} (x_2, y_2)$, onda $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \langle (x_3, y_3)\rangle$, što implicira $x_1, x_2 \in \langle x_3\rangle$ i $y_1, y_2 \in \langle y_3\rangle$. Odatle trivijalno sledi $(x_1, y_1) \sim_{\mathcal{G}_e(\mathbf{G})\boxtimes\mathcal{G}_e(\mathbf{H})} (x_2, y_2)$ pošto važi $x_1 \neq x_2$ ili $y_1 \neq y_2$. Ovim je inkluzija dokazana.

(b) Pretpostavimo da je $\mathrm{NZD}(o(g), o(h)) = 1$ za sve $g \in G$ i sve $h \in H$. Jedna inkluzija je već dokazana, pa ostaje samo da se dokaže i druga. Pretpostavimo da je $(x_1, y_1) \sim_{\mathcal{G}_e(\mathbf{G})\boxtimes\mathcal{G}_e(\mathbf{H})} (x_2, y_2)$. To implicira da $x_1, x_2 \in \langle x_3\rangle$ i $y_1, y_2 \in \langle y_3\rangle$ za neke $x_3 \in G$ i $y_3 \in H$. Pošto x_3 i y_3 imaju uzajamno proste redove, sledi da je $\langle (x_3, 1), (1, y_3)\rangle = \langle (x_3, y_3)\rangle$, što povlači $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \langle (x_3, y_3)\rangle$. Pošto je $x_1 \neq x_2$ ili $y_1 \neq y_2$, onda je $(x_1, y_1) \overset{e}{\sim}_{\mathbf{G}\times\mathbf{H}} (x_2, y_2)$, čime je pokazana i druga inkluzija. Ovim smo dokazali jednu implikaciju. Dokažimo i drugu.

Pretpostavimo da postoje elementi $g_0 \in G$ i $h_0 \in H$ takvi da $o(g_0)$ i $o(h_0)$ nisu uzajamno prosti. Kako je $\big(\mathcal{G}_e(\mathbf{K})\big)[L] = \mathcal{G}_e(\mathbf{L})$ za sve stepeno-asocijativne lupe sa inverzima $\mathbf{K}$ i $\mathbf{L}$ takve da je $\mathbf{L} \leq \mathbf{K}$, onda važi sledeće:

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{G}_e(\mathbf{G} \times \mathbf{H})\big)[\langle g_0\rangle \times \langle h_0\rangle] &= \mathcal{G}_e(\langle g_0\rangle \times \langle h_0\rangle) \subsetneq K_{o(g_0)\cdot o(h_0)} \\ &= K_{o(g_0)} \boxtimes K_{o(h_0)} = \mathcal{G}_e(\langle g_0\rangle) \boxtimes \mathcal{G}_e(\langle h_0\rangle) \\ &= \big(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}) \boxtimes \mathcal{G}_e(\mathbf{H})\big)[\langle g_0\rangle \times \langle h_0\rangle].\end{aligned}$$

Sledi da je $\mathcal{G}_e(\mathbf{G} \times \mathbf{H}) \neq \mathcal{G}_e(\mathbf{G}) \boxtimes \mathcal{G}_e(\mathbf{H})$, čime je dokazana i druga implikacija. $\square$

U nastavku ovog sekcije bavićemo se vezom obogaćenog stepenog grafa konačne stepeno-asocijativne lupe sa stepenim grafom te lupe, kao i pitanjem koliko se može zaključiti o konačnoj lupi iz njenog obogaćenog stepenog grafa. Naredna lema je originalni doprinos, i zajedno sa teoremom 2.58, koja je glavna teorema ove sekcije, je objavljena u [73]. U originalnom radu pružen je dokaz za obogaćeni stepeni graf i usmereni stepeni graf konačne grupe, a u ovoj disertaciji na sličan način pokazujemo analogno tvrđenje za konačne stepeno-asocijativne lupe.

Lema 2.57 *Neka je $\mathbf{G}$ konačna stepeno-asocijativna lupa, i neka je $\mathcal{C}l$ skup svih maksimalnih klika grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$. Onda za sve $x, y \in G$ važi:*

(a) *$\overline{N}(x) \subseteq \overline{N}(y)$ u $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ ako i samo ako $x \in C \Rightarrow y \in C$ za sve $C \in \mathcal{C}l$;*

(b) *$x \overset{e}{\equiv} y$ ako i samo ako za svako $C \in \mathcal{C}l$ važi ekvivavelencija $x \in C \Leftrightarrow y \in C$;*

(c) *Ako je $\langle x\rangle = \langle y\rangle$, onda je $x \overset{e}{\equiv} y$;*

(d) *Relacija $\leq$ definisana sa: $[x]_{\overset{e}{\equiv}} \leq [y]_{\overset{e}{\equiv}}$ ako $y \in C \Rightarrow x \in C$ za sve $C \in \mathcal{C}l$, je uređenje na $G/\overset{e}{\equiv}$;*

(e) *$\langle [x]_{\overset{e}{\equiv}}\rangle = \bigcap\{C \in \mathcal{C}l \mid [x]_{\overset{e}{\equiv}} \subseteq C\}$;*

(f) *Svaka $\overset{e}{\equiv}$-klasa sadrži ili $\varphi(m)$ elemenata reda m, ili ne sadrži nijedan element reda m.*[2]

[2] Ovde φ predstavlja Eulerovu funkciju.

$[x]_{\overset{e}{\equiv}}$ sadrži $\varphi(m)$ elemenata reda m ako i samo ako je minimalna $\overset{e}{\equiv}$-klasa (s obzirom na uređenje $\leq$ uvedeno u (d)) sa osobinom da $m \mid |\langle [x]_{\overset{e}{\equiv}} \rangle|$;

(g) *$[x]_{\overset{e}{\equiv}} \leq [y]_{\overset{e}{\equiv}}$ ako i samo ako $\langle [x]_{\overset{e}{\equiv}} \rangle \leq \langle [y]_{\overset{e}{\equiv}} \rangle$.*

Dokaz. (a) ($\Rightarrow$) Neka $x, y \in G$. Pretpostavimo da je $\overline{N}(x) \subseteq \overline{N}(y)$, i da $x \in C$ neko $C \in \mathcal{C}l$. Na osnovu tvrđenja 2.55, $\mathbf{C}$ je ciklična podgrupa lupe $\mathbf{G}$, tj. $\mathbf{C} = \langle z \rangle$ za neko $z \in G$. Onda je $y \overset{e}{\sim} z$ ili $y = z$ jer je $x \overset{e}{\sim} z$ ili $x = z$. Ali, pošto je $\langle z \rangle$ maksimalna ciklična podgrupa, onda je $z \to y$ ili $z = y$, što povlači $y \in C$.

($\Leftarrow$) Neka $x, y \in G$, i pretpostavimo da $x \in C \Rightarrow y \in C$ za sve $C \in \mathcal{C}l$. Ako je $z \overset{e}{\sim} x$ ili $z = x$, onda $z, x \in C$ za neko $C \in \mathcal{C}l$. Tada $z, y \in C$, što implicira $z \overset{e}{\sim} y$ ili $z = y$.

(b) i (d) slede iz (a), dok (c) očigledno važi.

(e) Neka $x \in G$, i označimo $\bigcap\{C \in \mathcal{C}l \mid [x]_{\overset{e}{\equiv}} \subseteq C\}$ sa D_x. $\mathbf{D}_x$ je ciklična podgrupa, pa je $\mathbf{D}_x = \langle z \rangle$ za neko $z \in G$. Dovoljno je dokazati da je $x \overset{e}{\equiv} z$. $z \in D_x$ implicira $x \in C \Rightarrow z \in C$ za sve $C \in \mathcal{C}l$. Sa druge strane, $z \in C \Rightarrow x \in C$ za sve $C \in \mathcal{C}l$ jer $x \in \langle z \rangle$. Prema tome, $x \overset{e}{\equiv} z$.

(f) Ako neka $\overset{e}{\equiv}$-klasa sadrži element z_0 reda m, onda ona sadrži sve elemente z za koje je $\langle z \rangle = \langle z_0 \rangle$. Takođe, na osnovu (e) $[z_0]_{\overset{e}{\equiv}}$ ne sadrži nijedan element t reda m takav da je $\langle z_0 \rangle \neq \langle z \rangle$. Iz tog razloga $[z_0]_{\overset{e}{\equiv}}$ sadrži bar jedan element reda m samo ako sadrži tačno $\varphi(m)$ elemenata reda m.

Neka je $\mathcal{D}$ skup svih $\overset{e}{\equiv}$-klasa $[y]_{\overset{e}{\equiv}}$ sa osobinom da $m \mid |\langle [y]_{\overset{e}{\equiv}} \rangle|$. Pretpostavimo da je $[x]_{\overset{e}{\equiv}}$ minimalan u $\mathcal{D}$. Na osnovu (e), postoji element $z \in \langle [x]_{\overset{e}{\equiv}} \rangle$ reda m, a na osnovu (d) i (e) sledi $[z]_{\overset{e}{\equiv}} \leq [x]_{\overset{e}{\equiv}}$. Ako bi bilo $[z]_{\overset{e}{\equiv}} < [x]_{\overset{e}{\equiv}}$, onda $[x]_{\overset{e}{\equiv}}$ ne bi bio minimalan u $\mathcal{D}$. Prema tome, $z \in [x]_{\overset{e}{\equiv}}$.

Dokažimo sada i drugu implikaciju. Neka $[x]_{\overset{e}{\equiv}}$ sadrži element y reda m. Onda je $\langle y \rangle \leq \langle [x]_{\overset{e}{\equiv}} \rangle$, i $[x]_{\overset{e}{\equiv}} \in \mathcal{D}$. Pretpostavimo dalje da $[x]_{\overset{e}{\equiv}}$ nije minimalan u $\mathcal{D}$. Onda postoji $x_0 \in G$ takav da je $[x_0]_{\overset{e}{\equiv}} < [x]_{\overset{e}{\equiv}}$ i da je $[x_0]_{\overset{e}{\equiv}}$ minimalna $\overset{e}{\equiv}$-klasa u $\mathcal{D}$. Dakle, postoji $y_0 \in [x_0]_{\overset{e}{\equiv}}$ reda m, i važi $\langle y_0 \rangle \leq \langle [x_0]_{\overset{e}{\equiv}} \rangle < \langle [x]_{\overset{e}{\equiv}} \rangle$. Takođe, pošto $y_0 \overset{e}{\not\equiv} y$, na osnovu (c) dobijamo da je $\langle y_0 \rangle \neq \langle y \rangle$, i da su $\langle y \rangle$ i $\langle y_0 \rangle$ dve različite ciklične podgrupe reda m ciklične grupe $\langle [x_0]_{\overset{e}{\equiv}} \rangle$. Ovim smo dobili kontradikciju, pa je $[x]_{\overset{e}{\equiv}}$ minimalna u $\mathcal{D}$, čime je ekvivalencija dokazana.

(g) Neka $x, y \in G$. Tada, na osnovu (e), $\langle [x]_{\overset{e}{\equiv}} \rangle \leq \langle [y]_{\overset{e}{\equiv}} \rangle$ važi ako i samo ako za svako $C \in \mathcal{C}l$ važi implikacija $[y]_{\overset{e}{\equiv}} \subseteq C \Rightarrow [x]_{\overset{e}{\equiv}} \subseteq C$. Na osnovu (b), ovo važi ako i samo ako $y \in C$ implicira $x \in C$ za svako $C \in \mathcal{C}l$, što je ekvivalentno sa $[x]_{\overset{e}{\equiv}} \leq [y]_{\overset{e}{\equiv}}$. $\square$

Teorema 2.58 *Neka su* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *konačne stepeno-asocijativne lupe. Ako je* $\mathcal{G}_e(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}_e(\mathbf{H})$, *onda je* $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G}) \cong \vec{\mathcal{G}}(\mathbf{H})$.

Dokaz. Neka su $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ konačne stepeno-asocijativne lupe takve da je $\mathcal{G}_e(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}_e(\mathbf{H})$, i neka je $\psi : G \to H$ izomorfizam između obogaćenih stepenih grafova lupa $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$. Neka su $C_1^G, C_2^G, \ldots, C_n^G$ sve maksimalne klike grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$, i neka su $C_1^H, C_2^H, \ldots, C_n^H$ sve maksimalne klike grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{H})$ takve da je $\psi(C_i^G) = C_i^H$ za sve $i \leq n$. Za $X \subseteq G$ i $Y \subseteq H$ istih kardinalnosti kažemo da su odgovarajući ako važi $X \subseteq C_i^G \Leftrightarrow Y \subseteq C_i^H$ za svako $i \leq n$.

Neka je $[x]_{\overset{e}{\equiv}_{\mathbf{G}}}$ jedna $\overset{e}{\equiv}_{\mathbf{G}}$-klasa, neka je $y = \psi(x)$, i neka $m \in \mathbb{N}$. Onda su $[y]_{\overset{e}{\equiv}_{\mathbf{H}}}$ odgovarajuća $\overset{e}{\equiv}_{\mathbf{H}}$-klasa klasi $[x]_{\overset{e}{\equiv}_{\mathbf{G}}}$. Na osnovu leme 2.57, $[x]_{\overset{e}{\equiv}_{\mathbf{G}}}$ sadrži element reda m ako i samo ako $[y]_{\overset{e}{\equiv}_{\mathbf{H}}}$ sadrži takav element, pri čemu $[x]_{\overset{e}{\equiv}_{\mathbf{G}}}$ i $[y]_{\overset{e}{\equiv}_{\mathbf{G}}}$ sadrže najviše po jednu $\approx$-klasu sačinjenu od elemenata reda m. Prema tome, za svaku $\approx_{\mathbf{G}}$-klasu $[x_0]_{\approx_{\mathbf{G}}} \subseteq [x]_{\overset{e}{\equiv}_{\mathbf{G}}}$ postoji odgovarajuća $\approx_{\mathbf{H}}$-klasa $[y_0]_{\approx_{\mathbf{H}}} \subseteq [y]_{\overset{e}{\equiv}_{\mathbf{H}}}$ takva da je $o(x_0) = o(y_0)$. Neka je $\vartheta : G \to H$ bijekcija koja slika svaku $\approx_{\mathbf{G}}$-klasu $[x]_{\approx_{\mathbf{G}}}$ na svoju odgovarajuću $\approx_{\mathbf{H}}$-klasu $[y]_{\approx_{\mathbf{H}}}$ takvu da je $o(x) = o(y)$. Pokažimo da je ϑ izomorfizam digrafova $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})$ i $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{H})$. Pretpostavimo da $x_0 \to_{\mathbf{G}} x_1$, i da je $\vartheta(x_0) = y_0$ i $\vartheta(x_1) = y_1$. Onda $o(x_1) \mid o(x_0)$, i $x_0, x_1 \in C_i^G$ za neko $i \leq n$. Pošto su y_0 i y_1 u $\approx_{\mathbf{H}}$-klasama odgovarajućim sa $\approx_{\mathbf{G}}$-klasama od x_0 i x_1, redom, sledi da $y_0, y_1 \in C_i^H$. Pošto su y_0 i y_1 elementi iste ciklične grupe, i $o(y_1) \mid o(y_0)$, sledi da $y_0 \to_{\mathbf{H}} y_1$. Ovim je teorema dokazana. $\square$

Posledica 2.59 *Za sve konačne stepeno-asocijativne lupe* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) *Stepeni grafovi od* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *su izomorfni;*

(b) *Usmereni stepeni grafovi od* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *su izomorfni;*

(c) *Obogaćeni stepeni grafovi od* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *su izomorfni.*

Dokaz posledice 2.59 sledi iz teoreme 2.28 i teoreme 2.58. Primetimo da u slučaju beskonačnih grupa nijedna od tri gore navedene ekvivalencije ne važi.

Primer 2.60 *Grupe* $\mathbf{G}_{p^\infty}$ *i* $\mathbf{G}_{q^\infty}$, *gde su* p *i* q *različiti prosti brojevi, imaju izomorfne stepene grafove, ali nemaju izomorfne usmerene stepene grafove.* $\mathbf{G}_{p^\infty}$ *i* $\mathbf{G}_{q^\infty}$ *takođe imaju izomorfne i obogaćene stepene grafove, iako su im usmereni stepeni grafovi neizomorfni.*

Pored toga, $\mathbf{G}_{p^\infty}$*, za bilo koji prost broj* p*, i aditivna grupa* $\mathbb{Z}$ *imaju izomorfne obogaćene stepene grafove, ali nemaju izomorfne stepene grafove.*

Dokaz. Stepeni graf i obogaćeni stepeni graf bilo koje Prüferove grupe je kompletan. Pretpostavimo, bez umanjenja opštosti, da je $p < q$. Tada usmereni graf $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G}_{p^\infty})$ sadrži $p-1$ čvorova čiji je izlazni stepen jednak $p-1$, pri čemu $\mathcal{G}(\mathbf{G}_{q^\infty})$ ne sadrži nijedan takav čvor. Dakle, $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G}_{p^\infty}) \ncong \vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G}_{q^\infty})$.

Obogaćeni stepeni graf aditivne grupe $\mathbb{Z}$ takođe je kompletan. Međutim, $\vec{\mathcal{G}}(\mathbb{Z})$ ne sadrži nijedan element sa konačnim izlaznim stepenom. Ovim je dokaz završen. □

Nakon što smo dokazali da se stepeni graf, usmereni stepeni graf i obogaćeni stepeni graf međusobno određuju u slučaju konačnih grupa, postavlja se pitanje u kakvoj su vezi ova tri grafa sa komutirajućim grafom. Grupe $\mathbf{C}_3 \times \mathbf{C}_3 \times \mathbf{C}_3$ i unitriangularna grupa $\mathbf{UT}(3,3)$ iz primera 2.6 imaju izomorfne stepene, ali nemaju izomorfne komutirajuće grafove. Sa druge strane, Kleinova grupa i ciklična grupa $\mathbf{C}_4$ nemaju izomorfne stepene grafove, iako su im komutirajući grafovi izomorfni.

U nastavku ove sekcije za proizvoljne konačne stepeno-asocijativne lupe $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ dokazujemo sledeću implikaciju: Ako važi bar jedan od tri uslova $\mathcal{G}_e(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}_e(\mathbf{H})$, $\mathcal{G}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}(\mathbf{H})$ i $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}(\vec{\mathbf{H}})$, onda, za svako $m \in \mathbb{N}$, grupe $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ imaju isti broj elemenata reda m. Cameron i Ghosh [13] su dokazali da za konačne grupe sa izomorfnim usmerenim stepenim grafova važi ovaj uslov, pa to, na osnovu posledice 2.59, povlači malopre pomenutu implikaciju u slučaju konačnih grupa.

U ovoj disertaciji se ta implikacija dokazuje koristeći izomorfizam obogaćenih stepenih grafova. Dokazi prezentovani u nastavku ove sekcije su originalni doprinos ovoj disertaciji, i objavljeni su u [73], ali u slučaju konačnih grupa. U ovoj disertaciji na sličan način dokazujemo analognu tvrdnju u slučaju konačnih stepeno-asocijativnih lupa.

Neka je X konačan skup. Za svako $m \in \mathbb{N}$ uvodimo relaciju $\approx_m$ na $\mathcal{P}^+(X)$ tako da: $A \approx_m B$ ako $m \mid |A \cap B|$. Uvodimo i funkciju $\Phi_m : \mathcal{P}^+(X) \to \mathbb{N}$ na sledeći način:

$$\Phi_m(A) = \begin{cases} \varphi(m) & \text{za } m \mid |A| \\ 0 & \text{za } m \nmid |A|, \end{cases}$$

gde je φ Eulerova funkcija.

Lema 2.61 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna stepeno-asocijativna lupa, i neka je* $\mathcal{C}l$ *skup svih maksimalnih klika grafa* $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ *čije su kardinalnosti deljive sa* m*. Onda je* $\approx_m$ *relacija ekvivalencije na* $\mathcal{C}l$*.*

Dokaz. Očigledno, $\approx_m$ je refleksivna i simetrična relacija. Preostaje da se dokaže tranzitivnost. Pretpostavimo da je $C_1 \approx_m C_2$ i $C_2 \approx_m C_3$. Na osnovu tvrđenja 2.55 sledi da su $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ i $\mathbf{C}_3$ ciklične podgrupe od $\mathbf{G}$. Pošto je $C_1 \approx_m C_2$, postoji ciklična podgrupa $\mathbf{D}_1 \leq \mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_2$ reda m. Analogno, postoji ciklična podgrupa $\mathbf{D}_2 \leq \mathbf{C}_2 \cap \mathbf{C}_3$ reda m. Pošto $\mathbf{C}_2$ ima jedinstvenu podgrupu reda m, sledi $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 \leq \mathbf{C}_1 \cap \mathbf{C}_3$. Dakle, $C_1 \approx_m C_3$. □

Za svaku stepeno-asocijativnu lupu $\mathbf{G}$ i za svako $X \subseteq G$, označimo sa $X^{(m)}$ skup elemenata reda m sadržanih u X, i označimo sa $X^{(|m)}$ skup elemenata iz X čiji su redovi delitelji broja m. Takođe, u ovom radu $\mathbb{N}_n$ označavaće skup $\{1, 2, \ldots, n\}$. U narednom tvrđenju dokazujemo da, za svako $m \in \mathbb{N}$, konačne stepeno-asocijativne lupe sa izomorfnim obogaćenim stepenim grafovima imaju isti broj elemenata reda m, i to činimo na dva načina. Prvi način je elementarniji, dok drugi način predočava efikasniji metod za određivanje broja elemenata bilo kog reda neke konačne stepeno-asocijativne lupe iz njenog obogaćenog stepenog grafa.

Tvrđenje 2.62 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna stepeno-asocijativna lupa i neka je* $m \in \mathbb{N}$*. Neka je* $\mathcal{C}l = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ *skup svih maksimalnih klika grafa* $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$*, i neka je* $\mathcal{D} = \{C \in \mathcal{C}l \mid m \mid |C|\}$*. Onda važi:*

(a) $$|G^{(m)}| = \sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k+1} \sum_{I \subseteq \mathbb{N}_n, |I|=k} \Phi_m\Big(\bigcap_{i \in I} C_i\Big)\Big);$$

(b) $$|G^{(m)}| = \varphi(m) \cdot |\mathcal{D}/{\approx_m}|.$$

Dakle, za svako $m \in \mathbb{N}$*, stepeno-asocijativne lupe koje imaju izomorfne obogaćene stepene grafove imaju isti broj elemenata reda* m*.*

Dokaz. (a) Na osnovu tvrđenja 2.55, maksimalna klika grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ je nosač ciklične podgrupe lupe $\mathbf{G}$. Prema tome, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_n$ su maksimalne ciklične podgrupe lupe $\mathbf{G}$. Pošto je $G^{(m)} = \bigcup_{i=1}^{n} C_i^{(m)}$, onda sledi:

$$|G^{(m)}| = \Big|\bigcup_{i=1}^{n} C_i^{(m)}\Big| = \sum_{k=1}^{n}\Big((-1)^{k+1}\sum_{I\subseteq\mathbb{N}_n,|I|=k}\Big|\bigcap_{i\in I} C_i^{(m)}\Big|\Big)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\Big((-1)^{k+1}\sum_{I\subseteq\mathbb{N}_n,|I|=k}\Big|\Big(\bigcap_{i\in I} C_i\Big)^{(m)}\Big|\Big).$$

Sada, za svako $k \in \mathbb{N}$, svaka ciklična grupa reda k ima $\Phi(k)$ elemenata reda m, pa dobijamo:

$$|G^{(m)}| = \sum_{k=1}^{n}\Big((-1)^{k+1}\sum_{I\subseteq\mathbb{N}_n,|I|=k}\Phi_m\Big(\bigcap_{i\in I} C_i\Big)\Big),$$

čime je dokazano (a).

(b) Na osnovu leme 2.61 relacija $\approx_m$ je relacija ekvivalencije na $\mathcal{D}$. Neka je $\mathcal{D}_0$ neka $\approx_m$-klasa, i neka $D_0 \in \mathcal{D}_0$. Onda je $\mathbf{D}_0$ maksimalna ciklična podgrupa grupe $\mathbf{G}$ takva da $m \,\big|\, |D_0|$, pa $\mathbf{D}_0$ ima jedinstvenu cikličnu podgrupu $\mathbf{M}$ reda m. Štaviše, $\mathbf{M}$ je jedinstvena ciklična podgrupa svake ciklične podgrupe $\mathbf{D}$ za koju je $D \approx_m D_0$. Ovo povlači da sve maksimalne klike iz $\mathcal{D}_0$ sadrže istih $\varphi(m)$ elemenata reda m, generatore podgrupe $\mathbf{M}$. Pored toga, svaki element reda m je sadržan u bar jednoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi čiji je red deljiv sa m, te je, prema tome, sadržan u bar jednoj maksimalnoj kliki iz $\mathcal{D}$. Takođe, za bilo koje $E, F \in \mathcal{D}$, ako postoji x reda m takav da je $x \in E, F$, onda $\langle x\rangle \leq \mathbf{E}, \mathbf{F}$, što implicira $E \approx_m F$. Ovim je jednakost pokazana, čime smo dokazali (b).

Dodatno, za konačnu stepeno-asocijativnu lupu $\mathbf{H}$ takvu da je $\mathcal{G}_e(\mathbf{H}) \cong \mathcal{G}_e(\mathbf{G})$, lako se vidi da bilo koji od uslova (a) i (b) povlači da za svako $m \in \mathbb{N}$ lupe $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ imaju isti broj elemenata reda m. $\square$

Na osnovu posledice 2.59, analogno važi i za konačne stepeno-asocijativne lupe sa izomorfnim stepenim grafovima, i za konačne grupe sa usmerenim stepenim grafovima.

Posledica 2.63 *Neka su* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *konačne stepeno-asocijativne lupe za koje je ispunjen bar jedan od sledećih uslova:*

(a) $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G}) \cong \vec{\mathcal{G}}(\mathbf{H})$;

(b) $\mathcal{G}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}(\mathbf{H})$;

(c) $\mathcal{G}_e(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}_e(\mathbf{H})$.

Tada, za svako $m \in \mathbb{N}$, lupe $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *imaju isti broj elemenata reda m.*

Posledica 2.64 ([13, tvrđenje 4]) *Neka su* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *konačne grupe takve da je $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G}) \cong \vec{\mathcal{G}}(\mathbf{H})$. Onda za svako $m \in \mathbb{N}$ grupe* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *imaju iste brojeve elemenata reda m.*

Posledica 2.65 ([12, posledica 3]) *Neka su* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *konačne grupe takve da je $\mathcal{G}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}(\mathbf{H})$. Onda za svako $m \in \mathbb{N}$ grupe* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *imaju iste brojeve elemenata reda m.*

Videli smo ranije da postoje primeri parova neizomorfnih beskonačnih i konačnih grupa sa izomorfnim stepenim grafovima. Međutim, ako dve Abelove grupe za svako $m \in \mathbb{N}$ imaju isti broj elemenata reda m, onda su one izomorfne. Koristeći to, u narednom tvrđenju iz obogaćenog stepenog grafa konačne Abelove grupe pružamo opis te Abelove grupe. Kao posledicu, zahvaljujući posledici 2.59, dobićemo da su konačne Abelove grupe sa izomorfnim stepenim grafovima izomorfne, što je dokazano ranije u [13].

Tvrđenje 2.66 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna Abelova grupa takva da je $|G| = \prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i}$, gde su p_i međusobno različiti prosti brojevi. Za svaki delitelj m od $|G|$ sa $\mathcal{C}l_m$ označimo skup svih maksimalnih klika grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ čije su kardinalnosti deljive sa m. Onda je:*

$$\mathbf{G} \cong \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{k_i} (\mathbf{C}_{p_i^j})^{2L(p_i,j)-L(p_i,j-1)-L(p_i,j+1)}$$

gde je $L(p,j) = \log_p \left(\sum_{k=0}^{j} \varphi(p^k) \cdot |\mathcal{C}l_{p^k}/{\approx_{p^k}}| \right)$.

Dokaz. Pošto je $\mathbf{G}$ Abelova grupa, onda je $\mathbf{G} \cong \prod_{i=1}^{n} \mathbf{G}_{p_i}$, gde je, za svako $i \leq n$, $\mathbf{G}_{p_i}$ jedinstvena p_i-podgrupa Sylowa grupe $\mathbf{G}$. Prema tome, dovoljno je dokazati tvrđenje za konačne Abelove p-grupe.

Neka je $\mathbf{G}$ konačna Abelova p-grupa. Onda je $\mathbf{G} \cong \prod_{i=1}^{m} \mathbf{C}_{p^{l_i}}$, gde je $l_i > 0$ za sve $i \leq m$. Ciklične grupe $\mathbf{C}_{p^{l_i}}$ nazivaćemo faktorima grupe $\mathbf{G}$. Lako se vidi da je:

$$\left|G^{(|p^j)}\right| = \prod_{i \in m} p^{\min\{j,l_i\}} = p^{\sum_{i=1}^{m} \min\{j,l_i\}},$$

za svako $j \geq 0$. Prema tome, za svako $j \geq 1$, postoji

$$\sum_{i=1}^{m} \min\{j, l_i\} - \sum_{i=1}^{m} \min\{j-1, l_i\} = \log_p(|G^{(|p^j)}|) - \log_p(|G^{(|p^{j-1})}|)$$

faktora grupe $\mathbf{G}$ čiji su redovi bar p^j, što je prema tvrđenju 2.62 jednako $L(p, j) - L(p, j - 1)$. Sada, broj faktora grupe $\mathbf{G}$ čiji su redovi jednaki p^j je

$$\begin{aligned} &L(p, j) - L(p, j - 1) - (L(p, j + 1) - L(p, j)) \\ &= 2L(p_i, j) - L(p_i, j - 1) - L(p_i, j + 1). \end{aligned}$$

Ovim je tvrđenje dokazano. □

Posledica 2.67 ([13, teorema 1]) *Neka su* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *konačne Abelove grupe takve da je* $\mathcal{G}(\mathbf{G}) \cong \mathcal{G}(\mathbf{H})$. *Onda je* $\mathbf{G} \cong \mathbf{H}$.

Glava 3

Algebarske osobine grafova pridruženih grupama

3.1 Grupe automorfizama grafova pridruženih grupama

Kao što smo videli ranije, stepeni graf konačne grupe određuje usmereni stepeni graf grupe. Međutim, nije teško videti da izomorfizam stepenih grafova dve grupe ne mora biti i izomorfizam usmerenih stepenih grafova tih grupa. Na primer, $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{C}_p)) \cong \mathbf{S}_p$, a $\mathrm{Aut}(\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{C}_p)) \cong \mathbf{S}_{p-1}$, za bilo koji prost broj p. Međutim, kao što ćemo dokazati, automorfizam stepenog grafa konačne grupe je ujedno automorfizam i obogaćenog stepenog grafa te grupe. Naredna teorema je originalni rezultat objavljen u [73].

Teorema 3.1 *Neka su* $\mathbf{G}$ *i* $\mathbf{H}$ *konačne stepeno-asocijativne lupe. Onda je svaki izomorfizam iz grafa* $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ *u graf* $\mathcal{G}(\mathbf{H})$ *istovremeno i izomorfizam iz grafa* $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ *u graf* $\mathcal{G}_e(\mathbf{H})$.

Dokaz. Neka su $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ konačne stepeno-asocijativne lupe sa izomorfnim stepenim grafovima. Ako su, za neki prost broj p, redovi svih elemenata lupe $\mathbf{G}$ stepeni broja p i ako $\mathbf{G}$ ima jedinstvenu cikličnu podgrupu reda p, onda na osnovu tvrđenja 2.22 lupa $\mathbf{H}$ ima isto svojstvo. Prema tome, $\mathcal{G}(\mathbf{G}) = \mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ i $\mathcal{G}(\mathbf{H}) = \mathcal{G}_e(\mathbf{H})$ jer $\mathbf{G}$ i $\mathbf{H}$ ne sadrže nijedan element složenog reda. Sledi da je $\mathrm{Is}(\mathcal{G}(\mathbf{G}), \mathcal{G}(\mathbf{H})) = \mathrm{Is}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}), \mathcal{G}_e(\mathbf{H}))$. Ako je $\mathbf{G}$ ciklična grupa, onda je na osnovu tvrđenja 2.22 i grupa $\mathbf{H}$ ciklična grupa. Dakle, $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ i $\mathcal{G}_e(\mathbf{H})$ su kompletni grafovi, pa očigledno važi $\mathrm{Is}(\mathcal{G}(\mathbf{G}), \mathcal{G}(\mathbf{H})) \subseteq \mathrm{Is}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}), \mathcal{G}_e(\mathbf{H}))$.

Pretpostavimo dalje da $\mathbf{G}$ nije ciklična grupa, niti da važi za neki prost broj p da su redovi svih elemenata od $\mathbf{G}$ stepeni od p i da $\mathbf{G}$ ima jedinstvenu cikličnu podgrupu reda p. Na osnovu tvrđenja 2.22, isto važi i za $\mathbf{H}$, i centar grafa $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ je kardinalnosti jednake 1.

Neka je $\mathbf{F}$ proizvoljna konačna stepeno-asocijativna lupa takva da je $|\mathrm{Cen}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))| = 1$. Označimo relacije $\equiv_{\mathbf{F}}$, $\approx_{\mathbf{F}}$, $\to_{\mathbf{F}}$, $\overset{p}{\sim}_{\mathbf{F}}$ i $\overset{e}{\sim}_{\mathbf{F}}$ sa $\equiv$, $\approx$, $\to$, $\overset{p}{\sim}$ i $\overset{e}{\sim}$, redom. Relacije $\equiv$ i $\approx$ su relacije ekvivalencije, pri čemu su $\equiv$-klase vidljive iz stepenog grafa. Štaviše, relacija $\approx$ je profinjenje relacije $\equiv$, i, na osnovu leme 2.24, svaka $\equiv$-klasa C ima jedan od sledećih oblika:

(a) C je $\approx$-klasa;

(b) $C = \{x \in \langle y \rangle \mid o(x) \geq p^s\}$, gde je p prost broj, y element reda p^r za neke $r, s \in \mathbb{N}$, $r > s > 0$.

Pored toga, na osnovu leme 2.26, iz stepenog grafa lupe $\mathbf{F}$ mogu se prepoznati $\equiv$-klase složenog tipa, kao i prost broj koji odgovara toj $\equiv$-klasi.

Na osnovu leme 2.23 i leme 2.25, za sve $x, y \in F$ za koje je $x \not\equiv y$, možemo prepoznati iz $\mathcal{G}(\mathbf{F})$ da li $x \to y$. Prema tome, za svaki grafovski izomorfizam $\psi : G \to H$ iz $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ u $\mathcal{G}(\mathbf{H})$, i za sve $x, y \in G$, $x \not\equiv y$, važi $x \to_{\mathbf{G}} y$ ako i samo ako $\psi(x) \to_{\mathbf{H}} \psi(y)$. Primetimo i da za sve $x, y \in F$ važi $x \overset{e}{\sim} y$ ako i samo ako $x \overset{p}{\sim} y$ ili postoji $z \in F$ takav da je $x \not\equiv y \not\equiv z \not\equiv x$, $z \to x$ i $z \to y$.

Neka je $\psi : G \to H$ grafovski izomorfizam iz $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ u $\mathcal{G}(\mathbf{H})$, i neka $x, y \in G$. Pretpostavimo da je $x \overset{e}{\sim}_{\mathbf{G}} y$. Onda je $x \overset{p}{\sim}_{\mathbf{G}} y$ ili postoji $z \in G$ tako da je $x \not\equiv y \not\equiv z \not\equiv x$, $z \to_{\mathbf{G}} x$ i $z \to_{\mathbf{G}} y$. Prema tome, važi $\psi(x) \overset{p}{\sim}_{\mathbf{H}} \psi(y)$, ili je $\psi(x) \not\equiv \psi(y) \not\equiv \psi(z) \not\equiv \psi(x)$, $\psi(z) \to_{\mathbf{H}} \psi(x)$ i $\psi(z) \to_{\mathbf{H}} \psi(y)$. U oba od ta dva slučaja važi $\psi(x) \overset{e}{\sim}_{\mathbf{H}} \psi(y)$. Na sličan način $\psi(x) \overset{e}{\sim}_{\mathbf{H}} \psi(y)$ povlači $x \overset{e}{\sim}_{\mathbf{G}} y$. Ovim je dokazano da je ψ grafovski izomorfizam iz $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ u $\mathcal{G}_e(\mathbf{H})$, čime je dokaz teoreme završen. $\square$

Posledica 3.2 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna stepeno-asocijativna lupa. Onda važi:*

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{G}) \subseteq \mathrm{Aut}(\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{G})) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G})).$$

Dokaz. Lako se vidi da je $\mathrm{Aut}(\mathbf{G}) \subseteq \mathrm{Aut}(\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))$, a inkluzija $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{G})) \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$ je direktna posledica teoreme 3.1, čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Primetimo da u prethodnoj posledici za svaku od inkluzija postoji grupa za koju ne važi jednakost. Na primer, $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}_5) \subsetneq \mathrm{Aut}(\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{C}_5)) \subsetneq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{C}_5))$ i $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{C}_6)) \subsetneq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{C}_6))$, tako da u opštem slučaju ne važi nijedna od jednakosti.

Prirodno je postaviti pitanje kakav je odnos grupa automorfizama komutirajućeg grafa konačne grupe i grupa automorfizama stepenog, usmerenog stepenog i obogaćenog stepenog grafa. U opštem slučaju, ove dve grupe automorfizama nisu uporedive, i to ilustruje naredni primer.

Primer 3.3 *Za unitriangularnu grupu* $\mathbf{UT}(3,3)$ *iz primera 2.6, koja je grupa sačinjena od svih gornje trougaonih matrica reda* 3 *nad poljem reda* 3 *koje na glavnoj dijagonali imaju sve jedinice, važi:*

$$\mathrm{Aut}(\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{UT}(3,3))) \not\leq \mathrm{Aut}(\mathcal{C}(\mathbf{UT}(3,3))).$$

Takođe, lako se vidi da za Abelovu grupu $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$ *važi* $\mathrm{Aut}(\mathcal{C}(\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2)) \not\leq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2))$.

Dokaz. Pošto je eksponent grupe $\mathbf{UT}(3,3)$ jednak 3, graf $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ je sačinjen od 13 trouglova kojima je neutralni element zajednički čvor. Dakle, za svaka dva nejedinična elementa $x, y \in UT(3,3)$ postoji automorfizam od $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{UT}(3,3))$ koji slika x u y. Sa druge strane, pošto je $\mathbf{UT}(3,3)$ 3-grupa, ona ima netrivijalan centar. Konkretno, njen centar je sačinjen od matrica oblika:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

za $x \in \mathbb{Z}_3$. Tada za $z \in \mathrm{Z}(\mathbf{UT}(3,3))$ i necentralni element x od $\mathbf{UT}(3,3)$ ne postoji automorfizam od $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ koji slika z u x. Odatle sledi $\mathrm{Aut}(\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{UT}(3,3))) \not\leq \mathrm{Aut}(\mathcal{C}(\mathbf{UT}(3,3)))$.

Sa druge strane, lako se vidi da je $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2)) < \mathrm{Aut}(\mathcal{C}(\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2))$. $\square$

Na osnovu posledice 3.2 i primera 3.3, odnos proučavanih grupa automorfizama možemo predstaviti dijagramom sa slike 3.1.

Cameron i Ghosh [13] dokazali su da je Kleinova grupa jedina konačna netrivijalna grupa čija je grupa automorfizama izomorfna sa grupom automorfizama njenog stepenog grafa. Naredna teorema je uopštenje tog tvrđenja.

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & \mathrm{Aut}\big(\mathcal{G}_e(\mathbf{G})\big) \arrow[d] \\
 & & \mathrm{Aut}\big(\mathcal{G}(\mathbf{G})\big) \arrow[d] \\
\mathrm{Aut}\big(\mathcal{C}(\mathbf{G})\big) \arrow[dr] & & \mathrm{Aut}\big(\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})\big) \arrow[dl] \\
 & \mathrm{Aut}\big(\mathcal{C}(\mathbf{G})\big) \cap \mathrm{Aut}\big(\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})\big) \arrow[d] & \\
 & \mathrm{Aut}(\mathbf{G}) &
\end{tikzcd}$$

Slika 3.1

Teorema 3.4 *Kleinova grupa je jedina netrivijalna konačna stepeno-asocijativna lupa* $\mathbf{G}$ *za koju važi* $\mathrm{Aut}(\mathbf{G}) = \mathrm{Aut}\big(\mathcal{G}(\mathbf{G})\big)$.

Dokaz. Neka je $\mathbf{G}$ netrivijalna konačna stepeno-asocijativna lupa takva da je $\mathrm{Aut}(\mathbf{G}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))$. Da bismo pokazali da je $\mathbf{G} \cong \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$, pretpostavimo najpre da je red lupe $\mathbf{G}$ veći od 4. Neka postoji element x lupe $\mathbf{G}$ reda različitog od 2. Onda je $x \neq x^{-1}$, i transpozicija $\tau = (x, x^{-1})$ je automorfizam od $\mathcal{G}(\mathbf{G})$. Pošto je $|G| > 4$ i na $\mathbf{G}$ važi zakon kancelativnosti, onda postoji $z \in G \setminus \{e, x, x^{-1}\}$ takvo da je $zx \neq x^{-1}$. Očigledno, onda $zx \notin \{x, x^{-1}\}$, pa je $\tau(z)\tau(x) = zx^{-1} \neq zx = \tau(zx)$, čime je dobijena kontradikcija.

Pretpostavimo dalje da je $|G| > 4$ i da je eksponent od $\mathbf{G}$ jednak 2. Onda je za dva nejedinična elementa x i y transpozicija $\tau(x, y)$ automorfizam grafa $\mathcal{G}(\mathbf{G})$. Slično kao i malopre, i u ovom slučaju postoji element $z \in G \setminus \{e, x, y\}$ takav da je $zx \notin \{x, y\}$, što povlači $\tau(z)\tau(x) = zy \neq zx = \tau(zx)$, čime je opet dobijena kontradikcija.

Dakle, red stepeno-asocijativne lupe $\mathbf{G}$ je najviše 4. Lako se pokazuje da $\mathbf{G}$ jedino može biti ciklična grupa reda 2, 3 ili 4, ili Kleinova grupa. Odatle se lako zaključuje da je $\mathbf{G} \cong \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$, čime je ova teorema dokazana. □

Koristeći teoremu 3.4 možemo pokazati da je Kleinova grupa i jedina konačna netrivijalna stepeno-asocijativna lupa koja je izomorfna sa grupom automorfizama svog obogaćenog stepenog grafa.

Posledica 3.5 *Kleinova grupa je jedina netrivijalna konačna stepeno-asocijativna lupa* $\mathbf{G}$ *za koju važi* $\mathrm{Aut}(\mathbf{G}) = \mathrm{Aut}\big(\mathcal{G}_e(\mathbf{G})\big)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathbf{G}$ konačna netrivijalna stepeno-asocijativna lupa za koju važi $\mathrm{Aut}(\mathbf{G}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$. Na osnovu posledice 3.2 sledi $\mathrm{Aut}(\mathbf{G}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))$, što na osnovu teoreme 3.4 povlači $\mathbf{G} \cong \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$. Sa druge strane, lako se proverava da je $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2) = \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2))$. □

U nastavku ove sekcije bavimo se određivanjem klasa konačnih grupa kojima grupa automorfizama njihovog obogaćenog stepenog grafa ima određene osobine. Naredna tvrđenja su originalni rezultati objavljeni u [73]. Pokažimo najpre sledeću lemu koja će biti korisna u dokazu teoreme 3.7.

Lema 3.6 *Ako su* Γ *i* Δ *dva grafa, onda* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *može da se utopi u* $\mathrm{Aut}(\Gamma \boxtimes \Delta)$.

Dokaz. Definišimo preslikavanje $\Phi : \varphi \mapsto \hat{\varphi}$ takvo da je $\hat{\varphi}\big((x,y)\big) = (\varphi(x), y)$ za sve $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$, $x \in V(\Gamma)$ i $y \in V(\Delta)$. Neka $\varphi_0 \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ i $\hat{\varphi}_0 = \Phi(\varphi_0)$. Očigledno, $\hat{\varphi}_0$ je bijekcija. Takođe, za sve $x_1, x_2 \in V(\Gamma)$ i $y_1, y_2 \in V(\Delta)$ važi $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$ ako i samo ako $(\varphi_0(x_1), y_1) \sim (\varphi_0(x_2), y_2)$ ako i samo ako $\hat{\varphi}_0((x_1, y_1)) \sim \hat{\varphi}_0((x_2, y_2))$, pa $\hat{\varphi}_0 \in \mathrm{Aut}(\Gamma \boxtimes \Delta)$. Pored toga, implikacija $\varphi \neq \psi \Rightarrow \Phi(\varphi) \neq \Phi(\psi)$ očigledno važi, i lako se vidi da je $\Phi : \mathrm{Aut}(\Gamma) \to \mathrm{Aut}(\Gamma \boxtimes \Delta)$ homomorfizam. Prema tome, Φ je injektivni homomorfizam, čime je ova lema dokazana. □

Teorema 3.7 $\mathbf{C}_2$ *je jedina netrivijalna konačna grupa čiji obogaćeni stepeni graf ima Abelovu grupu automorfizama.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G}$ netrivijalna konačna grupa takva da je $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$ Abelova. Ako $\mathbf{G}$ nije nilpotentna, onda $\mathbf{G}/\,\mathrm{Z}(\mathbf{G})$ nije Abelova, pa nije ni $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$ Abelova pošto je $\mathbf{G}/\,\mathrm{Z}(\mathbf{G}) \cong \mathrm{Inn}(\mathbf{G}) \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$.

Pošto je $\mathbf{G}$ nilpotentna, na osnovu teoreme 1.11, njene podgrupe Sylowa su jedinstvene za sve proste delitelje od $|G|$, i $\mathbf{G}$ je njihov direktni proizvod. Na osnovu leme 2.56 i leme 3.6, dovoljno je dokazati da je jedina p-grupa $\mathbf{G}$ sa Abelovom $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$ grupa $\mathbf{C}_2$.

Ako p-grupa $\mathbf{G}$ ima element reda bar 5, onda postoje po parovima različiti $x, y, z \in G$ takvi da je $\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle z \rangle$. Tada su permutacije (x, y) i (y, z) na G automorfizmi grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ koji ne komutiraju. Pretpostavimo da je $\mathbf{G}$ 3-grupa. Ako je $\mathbf{G} \cong \mathbf{C}_3$, onda $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G})) \cong \mathbf{S}_3$. Ako je $\mathbf{G}$ neciklična, onda je $|G| \geq 9$ i $\mathbf{G}$ ima eksponent 3, pa postoje elementi x, y i z koji generišu tri različite ciklične podgrupe. Onda $(x, y)(x^2, y^2), (y, z)(y^2, z^2) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$ ne komutiraju. Pretpostavimo sada da je $\mathbf{G}$ 2-grupa čiji je eksponent 4. Ako u $\mathbf{G}$ postoji element reda 2 koji pripada tačno jednoj cikličnoj grupi $\langle x \rangle$ reda 4, onda $(x, x^2), (x^2, x^3) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$, a (x, x^2) i (x^2, x^3) ne komutiraju. Ako ne postoji takav element reda 2, onda postoje $x, y \in G$ reda 4 takvi da je $|\langle x\rangle \cap \langle y\rangle| = 2$. Tada su (x, x^3) i $(x, y)(x^3, y^3)$ automorfizmi grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ koji ne komutiraju. Konačno, lako je primetiti da je $\mathbf{C}_2$ jedina grupa eksponenta 2 koja ima Abelovu grupu automorfizama obogaćenog stepenog grafa. Ovim je teorema dokazana. $\square$

Sledeća teorema dokazana je u [73] u slučaju konačnih grupa i obogaćenog stepenog grafa, ali se na analogan način dokazuje isto tvrđenje i u slučaju konačnih stepeno-asocijativnih lupa i stepenog grafa.

Teorema 3.8 *$\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ i Kleinova grupa su jedine netrivijalne konačne stepeno-asocijativne lupe čiji stepeni graf ima grupu automorfizama kvadratno slobodnog reda.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G}$ stepeno-asocijativna lupa takva da je $|\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))|$ kvadratno slobodan. Ako je $\mathbf{G}$ ciklična grupa, onda je $\mathbf{G} \cong \mathbf{C}_2$ ili $\mathbf{G} \cong \mathbf{C}_3$, pa pretpostavimo u nastavku ovog dokaza da $\mathbf{G}$ nije ciklična grupa.

Neka je eksponent lupe $\mathbf{G}$ veći od 2. Za svaki element $x \in G$ stepeno-asocijativne lupe $\mathbf{G}$, koja nije ciklična grupa, važi $o(x) < 5$, pošto nejednakost $o(x) \geq 5$ povlači $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2 \cong \langle (x, x^{-1}), (x^2, x^{-2})\rangle \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))$, pri čemu (x, x^{-1}) i (x^2, x^{-2}) predstavljaju transpozicije na G. Takođe, $\mathbf{G}$ ima najviše dva elementa reda većeg od 2. U suprotnom bi postojali x i y takvi da je $o(x), o(y) > 2$ i $\langle x\rangle \neq \langle y\rangle$, pa bi bilo $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2 \cong \langle (x, x^{-1}), (y, y^{-1})\rangle \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))$. Dakle, $\mathbf{G}$ ima bar jednu maksimalnu cikličnu podgrupu reda 2, a u nastavku pokazujemo da $\mathbf{G}$ ima bar tri takve podgrupe. Neka je $\mathbf{C}$ jedinstvena ciklična podgrupa od $\mathbf{G}$ reda većeg od 2, i neka je y generator maksimalne ciklične podgrupe reda 2. Pošto na $\mathbf{G}$ važi zakon kancelativnosti, onda su skupovi $D = \{xy \mid x \in C\}$ i C disjunktni. Takođe, na osnovu zakona kancelativnosti, $|D| > 2$, što implicira da $\mathbf{G}$ ima bar 3 maksimalne ciklične podgrupe reda 2. U tom slučaju, za element x čiji je red veći od 2 i elemente y i z koji generišu maksimalne ciklične podgrupe reda 2, važi $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2 \cong \langle (x, x^{-1}), (y, z)\rangle \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$, gde su (x, x^{-1}) i (y, z) transpozicije na $\mathbf{G}$.

Dakle, eksponent lupe $\mathbf{G}$ je 2. Pošto $\mathbf{G}$ nema više od 3 involutivna elementa, jer bi u suprotnom $|\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{G}))|$ bio deljiv sa $4!$, koji nije kvadratno slobodan broj, onda sledi da je $\mathbf{G} \cong \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$. Ovim je teorema dokazana. $\square$

Posledica 3.9 $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ *i Kleinova grupa su jedine netrivijalne konačne stepeno-asocijativne lupe čiji obogaćeni stepeni graf ima grupu automorfizama kvadratno slobodnog reda.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G}$ netrivijalna konačna stepeno-asocijativna lupa takva da je $|\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))|$ kvadratno slobodan. Na osnovu posledice 3.2 i teoreme 3.8, onda je $\mathbf{G}$ izomorfna sa $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_3$ ili $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$. Sa druge strane, $|\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{C}_2))| = 2$, $|\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{C}_3))| = 6$ i $|\mathrm{Aut}(\mathcal{G}(\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2))| = 6$, čime je tvrdnja dokazana. □

Teorema 3.10 $\mathbf{C}_2$ *i* $\mathbf{C}_4 \times \mathbf{C}_2$ *su jedine netrivijalne konačne grupe kojima je grupa automorfizama obogaćenog stepenog grafa p-grupa za neki prost broj p.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G}$ netrivijalna konačna grupa za koju je $|\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))|$ stepen prostog broja. Pošto $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$ sadrži bar jednu transpoziciju na G, $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$ je 2-grupa.

Ako $\mathbf{G}$ nije nilpotentna, onda, po definiciji nilpotentnosti grupe na strani 8, grupa $\mathbf{G}/\mathrm{Z}(\mathbf{G})$ nije nilpotentna, pa $\mathbf{G}/\mathrm{Z}(\mathbf{G})$ nije p-grupa na osnovu teoreme 1.9. Odatle, pošto važi $\mathbf{G}/\mathrm{Z}(\mathbf{G}) \cong \mathrm{Inn}(\mathbf{G}) \leq \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$, ni $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$ nije p-grupa. Sledi da je $\mathbf{G}$ nilpotentna grupa. Nijedna podgrupa Sylowa grupe $\mathbf{G}$ ne sadrži element reda većeg od 4. U suprotnom bi postojali $x, y, z \in G$ takvi da $\langle x \rangle = \langle y \rangle = \langle z \rangle$ i $x \neq y \neq z \neq x$, a onda bi permutacija (x, y, z) bila automorfizam grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$. Sledi na osnovu teoreme 1.11 da je $\mathbf{G} = \mathbf{P}_2 \times \mathbf{P}_3$, gde su $\mathbf{P}_2$ i $\mathbf{P}_3$ 2-podgrupa Sylowa grupe $\mathbf{G}$ čiji je eksponent najviše 4, i 3-podgrupa Sylowa grupe $\mathbf{G}$ čiji je eksponent najviše 3, redom. Dalje, na osnovu leme 2.56 dobijamo da je $\mathcal{G}_e(\mathbf{G}) = \mathcal{G}_e(\mathbf{P}_2) \boxtimes \mathcal{G}_e(\mathbf{P}_3)$.

Da bismo dokazali da je $\mathbf{P}_3$ trivijalna, dovoljno je pokazati da bi u suprotnom $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_3(\mathbf{P}_3))$ sadržao element reda 3, jer bi na osnovu leme 3.6 to povlačilo da i $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$ sadrži element reda 3. Ako je $\mathbf{P}_3 \cong \mathbf{C}_3$, onda $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{P}_3)) \cong \mathbf{S}_3$. Ako je $\mathbf{P}_3$ neciklična grupa eksponenta 3, onda ona sadrži tri elementa x, y i z koji generišu tri različite ciklične grupe, a tada $(x, y, z)(x^2, y^2, z^2) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$. Prema tome, $\mathbf{G}$ je 2-grupa.

Primetimo da $\mathbf{G}$ ima najviše dve maksimalne ciklične podgrupe reda 2, jer bi u suprotnom simetrična grupa $\mathbf{S}_3$ mogla da se utopi u $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$. Pokažimo i da je svaka nemaksimalna ciklična podgrupa $\langle x \rangle$ reda 2 sadržana u tačno dve ciklične podgrupe reda 4. Ako bi $\langle y \rangle$ bila jedina ciklična podgrupa reda 4 takva da je $\langle x \rangle \leq \langle y \rangle$, onda bi permutacija (y, x, y^{-1}) bila automorfizam od $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$. Takođe, ako bi $\langle y \rangle$, $\langle z \rangle$ i $\langle t \rangle$ bile različite ciklične podgrupe reda 4 koje sadrže

x, onda bi permutacija $(y, z, t), (y^{-1}, z^{-1}, t^{-1})$ bila automorfizam grafa $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$. Pored toga, grupa $\mathbf{G}$ sadrži najviše dve nemaksimalne ciklične podgrupe reda 2, jer bi, u suprotnom, i tada $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ imao automorfizam reda 3. Sledi da je $|G| \leq 8$. Grupa $\mathbf{G}$ nije izomorfna ni sa grupom kvaterniona $\mathbf{Q}_8$, ni sa dieadarskom grupom $\mathbf{D}_8$, jer $\mathbf{Q}_8$ ima involutivni element koji je sadržan u tri ciklične podgrupe reda 4, a $\mathbf{D}_8$ ima četiri maksimalne ciklične podgrupe reda 2. Dakle, $\mathbf{G}$ je Abelova grupa čiji je red najvše 8, pa je lako videti da je $\mathbf{G}$ izomorfna sa $\mathbf{C}_2$ ili $\mathbf{C}_4 \times \mathbf{C}_2$, a važi da je $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{C}_2)) \cong \mathbf{C}_2$ i $\mathrm{Aut}(\mathcal{G}_e(\mathbf{C}_4 \times \mathbf{C}_2)) \cong \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$. Ovim je teorema dokazana. $\square$

3.2 Struktura obogaćenih stepenih grafova konačnih Abelovih grupa

U ovoj sekciji, koja je u potpunosti zasnovana na rezultatima objavljenim u [73], opisujemo obogaćene stepene grafove konačnih Abelovih grupa. Najpre ćemo opisati obogaćene stepene grafove konačnih Abelovih p-grupa. S tim ciljem uvodimo notaciju korenskih p-stabala i p-semistabala. Dokazaćemo da p-semistabla čine familiju svih obogaćenih stepenih grafova konačnih Abelovih p-grupa.

Podsetimo se, **stablo** je prost graf koji ne sadrži nijednu konturu kao podgraf. Poznato je, a i lako se vidi, da je graf stablo ako i samo ako za svaka dva čvora x i y postoji tačno jedan put od x do y. **Korensko stablo** je stablo čiji je jedan čvor označen kao koren. Za dva čvora x i y korenskog stabla pisaćemo $x < y$ ako jedinstveni put od y do korena sadrži čvor x. Ako su x i y susedni i $x < y$, onda je y dete od x, i x je roditelj od y. Visina čvora x je rastojanje čvora x od korena.

Za tuplove $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nenegativnih celih brojeva pišemo $\overline{x} \leq \overline{y}$ ako je $\overline{x}(i) \leq \overline{y}(i)$ za sve $i \leq n$. Neka je $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tupl prirodnih brojeva. Neka su $\overline{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ i $\overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ tuplovih celih brojeva takvih da je $\overline{b}, \overline{c} \in \overline{a}^{\downarrow} = \{\overline{x} \mid \overline{0} \leq \overline{x} \leq \overline{a}\}$. Onda je **$\overline{a}$-širina** tupla $\overline{b}$, ili kraće **širina** tupla $\overline{b}$, broj $|\{i \in \mathbb{N}_n \mid b_i \neq a_i\}|$. Označavaćemo je sa $w_{\overline{a}}(\overline{b})$, ili kraće sa $w(\overline{b})$. **$\overline{a}$-visina** tupla $\overline{b}$, ili kraće **visina** tupla $\overline{b}$, je broj $\max\{a_i - b_i \mid i \in \mathbb{N}_n\}$. Označavaćemo je sa $h_{\overline{a}}(\overline{b})$, ili kraće sa $h(\overline{b})$. Kažemo da je $\overline{c}$ $\overline{a}$-sledbenik od $\overline{b}$, ili kraće sledbenik od $\overline{b}$, ako je $\overline{c} \neq \overline{a}$ i:

- $c_i = b_i - 1$ ako je $b_i \neq a_i$ i
- $c_i \in \{a_i, a_i - 1\}$ ako je $b_i = a_i$.

Ako je $\overline{c}$ sledbenik od $\overline{b}$, onda kažemo da je $\overline{b}$ prethodnik od $\overline{c}$.

Korensko p-stablo pridruženo tuplu $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ prirodnih brojeva, koje označavamo sa $T_p(\overline{a})$, je korensko stablo T čiji čvorovi mogu biti biti označeni tuplovima iz $\overline{a}^{\downarrow}$ na sledeći način (dozvoljavajući da različiti čvorovi budu označeni istim tuplovima):

- Koren od T je označen sa $\overline{a}$;
- Koren ima tačno $\frac{p^n-1}{p-1}$ dece, koja su označena sledbenicima od $\overline{a}$ na sledeći način: Za svakog sledbenika $\overline{b}$ od $\overline{a}$ postoji tačno $(p-1)^{w(\overline{b})-1}$ dece korena označenih sa $\overline{b}$;
- Ako je čvor x od T označen tuplom $\overline{c} \neq \overline{a}$, gde je $c_i \neq 0$ za sve $i \leq n$, onda x ima tačno p^{n-1} dece, koja su označena sledbenicima od $\overline{c}$ na sledeći način: Za svakog sledbenika $\overline{d}$ od $\overline{c}$ postoji tačno $p^{w(\overline{c})-1}(p-1)^{w(\overline{d})-w(\overline{c})}$ dece od x označenih sa $\overline{d}$;
- Ako je čvor x od T označen tuplom $\overline{c} \neq \overline{a}$, gde je $c_i = 0$ za neko $i \leq n$, onda x nema dece.

Lako se vidi da su bilo koja dva korenska stabla koja zadovoljavaju gornje uslove izomorfna, pa je $T_p(\overline{a})$ dobro definisano. Napomenimo, pod izomorfizmom korenskih stabala mislimo na grafovski izomorfizam posmatranih stabala koji slika koren prvog korenskog stabla u koren drugog korenskog stabla.

p-semistablo pridruženo tuplu $\overline{a}$, koje označavamo sa $S_p(\overline{a})$, je graf konstruisan iz $T_p(\overline{a})$ dodavanjem grana između svaka dva čvora x i y za koje je $x < y$, i zamenom svakog čvora čija je visina $k > 0$ klikom $K_{p^{k-1}(p-1)} = K_{\varphi(p^k)}$.

Tvrđenje 3.11 *Graf je obogaćeni stepeni graf neke konačne Abelove p-grupe ako i samo ako je p-semistablo.*

Dokaz. Tvrđenje očigledno važi ako je dimenzija tupla $\overline{a}$ 1, jer za svako $m \in \mathbb{N}$ važi $\overline{a} = (m)$ ako i samo ako $\mathcal{G}_e(\mathbf{G}) \cong K_{p^m} \cong S_p(\overline{a})$, što je ispunjeno jer je korensko p-stablo $T_p(m)$ put dužine m, pa je p-semistablo $S_p(m)$ čiji je red jednak

$$1 + \sum_{i=0}^{m-1} (p-1)p^i = 1 + (p-1)\frac{p^m - 1}{p-1} = p^m.$$

Pretpostavimo dakle da je dimenzija tupla $\overline{a}$ bar 2.

Neka je $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ tupl prirodnih brojeva, i neka je $\mathbf{G} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{C}_{p^{a_i}}$. Pošto je svaka konačna Abelova grupa izomorfna direktnom proizvodu cikličnih grupa, dovoljno je dokazati da je $S_p(\overline{a}) \cong \mathcal{G}_e(\mathbf{G})$. Lako se vidi da je $S_p(\overline{a}) \cong \mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ ako i samo ako je $T_p(\overline{a})$, kao poset, izomorfan posetu P cikličnih podgrupa grupe $\mathbf{G}$. Podsetimo se, sa $\mathbb{N}_n$ označavamo skup prvih n prirodnih brojeva. Da bi se dokazalo da postoji izomorfizam $\psi : T_p(\overline{a}) \to P$ koji slika svaki čvor, označen sa $\overline{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, na cikličnu podgrupu čija je i-ta projekcija reda $p^{a_i - c_i}$ za svako $i \leq n$, dovoljno je dokazati sledeće:

(1) $\mathbf{G}$ ima tačno $\frac{p^n-1}{p-1}$ cikličnih podgrupa reda p;

(2) Za svako $M \subseteq \mathbb{N}_n$ postoji tačno $(p-1)^{|M|-1}$ cikličnih podgrupa grupe $\mathbf{G}$ reda p čije su i-te projekcije netrivijalne ako i samo ako $i \in M$;

(3) Ako je $\mathbf{H}$ ciklična podgrupa grupe $\mathbf{G}$ čije su i-te projekcije označene sa $\mathbf{H}_i$ za sve $i \leq n$, onda je $\mathbf{H}$ maksimalna ciklična podgrupa grupe $\mathbf{G}$ ako i samo ako je $|H_i| = p^{a_i}$ za neko $i \leq n$.

(4) Ako je $\mathbf{H}$ nemaksimalna ciklična podgrupe grupe $\mathbf{G}$ reda $p^h > 1$ čije su i-te projekcije označene sa $\mathbf{H}_i$ i $|H_i| = p^{h_i}$ za sve $i \leq n$, onda je $\mathbf{H}$ podgrupa od tačno p^{n-1} cikličnih podgrupa grupe $\mathbf{G}$ reda p^{h+1}. Štaviše, ako je $L = \{i \in \mathbb{N}_n \mid h_i \neq 0\}$ i $L \subseteq M \subseteq \mathbb{N}_n$, onda je $\mathbf{H}$ podgrupa od tačno $p^{|L|-1}(p-1)^{|M|-|L|}$ cikličnih podgrupa reda p^{h+1} čije su i-te projekcije netrivijalne ako i samo ako $i \in M$.

$\mathbf{G} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{C}_{p^{a_i}}$ sadrži $p^n - 1$ elemenata reda p, pa $\mathbf{G}$ ima $\frac{p^n-1}{p-1}$ cikličnih podgrupa reda p. Ovim je dokazano (1). Da bismo dokazali (2), primetimo da za $M \subseteq \mathbb{N}_n$ postoji $(p-1)^{|M|}$ elemenata reda p čije su i-te projekcije netrivijalne ako i samo ako $i \in M$. Ovo povlači da postoji $(p-1)^{|M|-1}$ cikličnih podgrupa grupe $\mathbf{G}$ reda p čije su i-te projekcije netrivijalne ako i samo ako $i \in M$.

Pod korenom stepena p elementa x mislimo na bilo koji element y za koji je $y^p = x$; takođe kažemo da je y p-ti koren od x. Primetimo da u cikličnoj p-grupi svaki element ima p korena stepena p ako on nije generator te ciklične grupe, a da u suprotnom nema p-tih korena. Neka je $\mathbf{H} = \langle \overline{x} \rangle = \langle (x_1, x_2, \ldots, x_n) \rangle$, i neka je $\mathbf{H}_i$ i-ta projekcija grupe $\mathbf{H}$. Onda je $\mathbf{H}_i = \langle x_i \rangle$ za sve $i \leq n$, i važi: $\mathbf{H}$ je nemaksimalna ciklična podgrupa grupe $\mathbf{G}$ ako i samo ako $\overline{x}$ ima p-ti koren u $\mathbf{G}$ ako i samo ako x_i ima p-ti koren u $\mathbf{C}_{p^{a_i}}$ za sve $i \leq n$ ako i samo ako $|H_i| < p^{a_i}$ za sve $i \leq n$. Ovim je dokazano (3).

Neka je $\mathbf{H} = \langle \overline{x} \rangle = \langle (x_1, x_2, \dots, x_n) \rangle$ nemaksimalna ciklična podgrupa grupe $\mathbf{G}$ reda $p^h > 1$, i neka je $\mathbf{H}_i$ i-ta projekcija od $\mathbf{H}$ i $|H_i| = p^{h_i}$ za sve $i \leq n$. Onda je $\mathbf{H}_i = \langle x_i \rangle$ za sve $i \leq n$, i za sve $i \leq n$ je $\langle x_i \rangle$ nemaksimalna ciklična podgrupa grupe $\mathbf{C}_{p^{a_i}}$, i x_i ima p korena stepena p, pa $\overline{x}$ ima p^n korena stepena p. Pošto u svakoj cikličnoj podgrupi grupe $\mathbf{G}$ reda p^{h+1}, koja sadrži $\langle \overline{x} \rangle$ kao podgrupu, postoji p p-tih korena od x, sledi da je $\langle \overline{x} \rangle$ podgrupa od tačno p^{n-1} cikličnih podgrupa reda p^{h+1}. Ovim je dokazan prvi deo od (4). Dokažimo i drugi deo.

Neka je $L = \{i \in \mathbb{N}_n \mid h_i > 0\}$, i neka je $L \subseteq M \subseteq \mathbb{N}_n$. Onda je broj p-tih korena od $\overline{x}$, čije su i-te projekcije netrivijalne ako i samo ako $i \in M$, jednak $p^{|L|}(p-1)^{|M|-|L|}$. Opet, pošto svaka ciklična podgrupa reda p^{h+1}, koja sadrži $\mathbf{H}$ kao podgrupu, sadrži p korena stepena p od $\overline{x}$, $\mathbf{H}$ je podgrupa od $p^{|L|-1}(p-1)^{|M|-|L|}$ cikličnih podgrupa reda p^{h+1} čije su i-te projekcije netrivijalne ako i samo ako $i \in M$. Ovim je dokazan i drugi deo od (4), čime je dokazano tvrđenje. □

Napomenimo da postoje neabelove konačne grupe čiji su obogaćeni stepeni grafovi izomorfni p-semistablima. Unitriangularna grupa $\mathbf{UT}(3,3)$ iz primera 2.6 reda 27 i eksponenta 3 ima obogaćeni stepeni graf izomorfan 3-semistablu $S_3(1,1,1)$. Grupa sa prezentacijom $\mathbf{G} = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = 1, yxy = x^5 \rangle$, čiji je obogaćeni stepeni graf izomorfan sa $S_2(3,1)$, je još jedan primer.

Teorema 3.12 *Graf* Γ *je obogaćeni stepeni graf konačne Abelove grupe ako i samo ako je* $\Gamma \cong \boxtimes_{i=1}^{n} S_{p_i}(\overline{a}_i)$ *za neki tupl* $\overline{a}_i$ *prirodnih brojeva i za neke po parovima različite brojeve* $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Dokaz. Teorema sledi iz tvrđenja 3.11 i leme 2.56. □

3.3 Obogaćeni stepeni graf podgrupe Sylowa

U ovoj sekciji dajemo osobinu koju obogaćeni stepeni graf konačne grupe ima ako i samo ako je ta grupa nilpotentna. Sekcija je u potpunosti zasnovana na rezultatima iz [72]. Narednim tvrđenjem dokazaćemo da iz obogaćenog stepenog grafa konačne grupe možemo da zaključimo da li je ta grupa nilpotentna.

Za $m \in \mathbb{N}$ i skupove A i B pisaćemo $A \approx_m B$ ako $m \bigm| |A \cap B|$. Na osnovu leme 2.61, za bilo koju grupu $\mathbf{G}$, $\approx_m$ predstavlja relaciju ekvivalencije na skupu svih maksimalnih klika grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$. Sada dajemo potreban i dovoljan uslov za nilpotentnost konačne grupe.

Tvrđenje 3.13 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna grupa reda* $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}$*, gde su* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *međusobno različiti prosti brojevi. Za svako* $i \leq n$ *i* $j \in \{0, 1, \ldots, k_i\}$*, neka je* $\mathcal{D}_i^j$ *skup svih maksimalnih klika grafa* $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ *čije su kardinalnosti deljive sa* p_i^j*. Onda važi:*

(a) $\mathbf{G}$ *ima jedinstvenu* p_i*-podgrupu Sylowa ako i samo ako je*

$$\sum_{j=0}^{k_i} \left(\varphi(p_i^j) \cdot |\mathcal{D}_i^j/\approx_{p_i^j}|\right) = p_i^{k_i}; \tag{3.1}$$

(b) $\mathbf{G}$ *je nilpotentna ako i samo ako važi (3.1) za sve* $i \leq n$*.*

Dokaz. Neka je $i \leq n$, i pretpostavimo da je $\sum_{j=0}^{k_i}\left(\varphi(p_i^j) \cdot |\mathcal{D}_i^j/\approx_{p_i^j}|\right) = p_i^{k_i}$. Na osnovu tvrđenja 2.62, za bilo koje j, $\varphi(p_i^j) \cdot |\mathcal{D}_i^j/\approx_{p_i^j}|$ je broj elemenata reda p_i^j grupe $\mathbf{G}$. Prema tome, $\sum_{j=0}^{k_i}\left(\varphi(p_i^j) \cdot |\mathcal{D}_i^j/\approx_{p_i^j}|\right)$ je broj elemenata grupe $\mathbf{G}$ čiji su redovi stepeni prostog broja p_i. Pošto je broj takvih elemenata jednak $p_i^{k_i}$ ako i samo ako $\mathbf{G}$ ima jedinstvenu p_i-podgrupu Sylowa, prva tvrdnja je dokazana.

Dalje, očigledno jednakost važi za sve $i \leq n$ ako i samo ako $\mathbf{G}$ ima jedinstvenu p_i-podgrupu Sylowa za svako $i \leq n$, što je, na osnovu teoreme 1.11, tačno ako i samo ako je $\mathbf{G}$ nilpotentna. □

Sledeća lema pruža nam neke potrebne uslove za konačan graf da bi on bio obogaćeni stepeni graf neke grupe.

Lema 3.14 *Neka je* Γ *konačan graf reda* $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}$*. Neka je* $\mathcal{C}l = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ *skup svih maksimalnih klika grafa* Γ*, i neka je* $\mathcal{B} = \{\bigcap_{i\in M} C_i \mid M \in \mathcal{P}^+(\mathbb{N}_n)\}$ *skup svih preseka maksimalnih klika. Ako je* Γ *obogaćeni stepeni graf konačne grupe, onda važi:*

(*E*1) $\bigcap\{C \mid C \in \mathcal{C}l\} \neq \emptyset$*;*

(*E*2) $|C| \mid p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}$ *za svako* $C \in \mathcal{C}l$*;*

(*E*3) *Za sve* $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$*: Ako je* $B_1, B_2 \subseteq C$ *za neko* $C \in \mathcal{C}l$*, onda je* $|B_1 \cap B_2| = \mathrm{NZD}(|B_1|, |B_2|)$*.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\Gamma = \mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ za neku konačnu grupu $\mathbf{G}$. Na osnovu tvrđenja 2.54, svi elementi skupova $\mathcal{B}$ i $\mathcal{C}l$ su nosači cikličnih podgrupa od $\mathbf{G}$. ($E1$) sledi iz činjenice da sve podgrupe od $\mathbf{G}$ sadrže jedinični element od $\mathbf{G}$. $|G|$ je deljiv redom bilo koje podgrupe od $\mathbf{G}$, što implicira ($E2$).

Pretpostavimo da je $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i $B_1, B_2 \subseteq C$ za neko $C \in \mathcal{C}l$. Onda su $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ i $\mathbf{C}$ ciklične grupe takve da je $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \leq \mathbf{C}$, i red grupe $\mathbf{B}_1 \cap \mathbf{B}_2$ je $\mathrm{NZD}(|B_1|, |B_2|)$. Ovim je dokazano ($E3$). $\square$

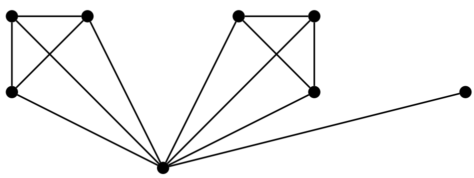
Primetimo da za svaki konačan graf, sa skupom maksimalnih klika $\mathcal{C}l$, i skupom svih preseka maksimalnih klika $\mathcal{B}$, ($E3$) povlači sledeća dva uslova:

($E4$) Za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$: $B_1 \subseteq B_2$ implicira $|B_1| \,\big|\, |B_2|$;

($E5$) Za sve $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$: Ako je $|B_1| \,\big|\, |B_2|$ i $B_1, B_2 \subseteq C$ za neko $C \in \mathcal{C}l$, onda je $B_1 \subseteq B_2$.

Prema tome, ($E4$) i ($E5$) su takođe potrebni uslovi za konačni graf da bude obogaćeni stepeni graf grupe.

Međutim, uslovi ($E1$)-($E3$) nisu dovoljni da bi konačan graf bio obogaćeni stepeni graf. Na primer, graf sa slike 3.2 ispunjava ($E1$)-($E3$), iako on nije obogaćeni stepeni graf nijedne grupe. Naime, $\mathbf{C}_8$, $\mathbf{C}_4 \times \mathbf{C}_2$, $\mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_2$, $\mathbf{D}_8$ i $\mathbf{Q}_8$ su jedine grupe reda 8, a graf sa slike 3.2 nije izomorfan sa obogaćenim stepenim grafom nijednog od njih.



Slika 3.2

Za grupu $\mathbf{G}$ i prost broj p označavaćemo sa G_p skup $\{x \in G \mid (\exists i \in \mathbb{N}_0)(o(x) = p^i)\}$. Primetimo da G_p ne mora da bude podgrupa od $\mathbf{G}$. Ipak, ako $\mathbf{G}$ ima jedinstvenu p-podgrupu Sylowa $\mathbf{P}$, onda je $\mathbf{P} = \mathbf{G}_p$.

Dokazaćemo da, za prost broj p, obogaćeni stepeni graf konačne grupe sa jedinstvenom p-podgrupom Sylowa određuje obogaćeni stepeni graf p-podgrupe Sylowa. S tim ciljem uvodimo pojam p-komponente konačnog grafa.

Definicija 3.15 *Neka je Γ konačan graf, i neka je p prost broj. Neka je $\mathcal{C}l = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ skup svih maksimalnih klika grafa Γ, i neka* *je* $\mathcal{B} = \{\bigcap_{i \in M} C_i \mid M \in \mathcal{P}^+(\mathbb{N}_n)\}$ *skup svih preseka maksimalnih klika od* Γ*.* p**-komponenta** *grafa* Γ*, koju označavamo sa* Γ_p*, je indukovan podgraf od* Γ *sa sledećim svojstvom:*

$$\begin{aligned} &\textit{Za svako } B \in \mathcal{B}, \textit{ kardinalnosti } p^k l \textit{ gde } p \nmid l,\\ &B \textit{ sadrži tačno } p^k \textit{ čvorova od } \Gamma_p. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sada dajemo algoritam koji za prost broj p i za obogaćeni stepeni graf konačne grupe sa jedinstvenom p-podgrupom Sylowa vraća obogaćeni stepeni graf p-podgrupe Sylowa.

Tvrđenje 3.16 *Neka je* Γ *konačan graf koji ispunjava uslove* ($E1$) *i* ($E3$)*, i neka je* p *prost broj. Onda postoji algoritam koji konstruiše jednu* p*-komponentu grafa* Γ*.*

Dokaz. Neka su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sve maksimalne klike grafa Γ, i označimo $\bigcap_{i \in M} C_i$ sa B_M za svaki $M \in \mathcal{P}^+(\mathbb{N}_n)$. Neka je $n_{[p]} = \max\{p^k \mid k \in \mathbb{N}_0 \text{ i } p^k | n\}$ za bilo koje $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da sledeći algoritam konstruiše jednu p-komponentu grafa Γ.

(a) Označi $|B_{\mathbb{N}_n}|_{[p]}$ čvorova iz $B_{\mathbb{N}_n}$, i preškrabaj $\mathbb{N}_n$ iz $\mathcal{P}^+(\mathbb{N}_n)$.

(b) Odaberi skup $M_1 \in \mathcal{P}^+(\mathbb{N}_n)$ čiji su svi nadskupovi osim njega samog već preškrabani. Onda označi još čvorova iz skupa $B_{M_1} \setminus \bigcup_{M \supsetneq M_1} B_M$, ako je potrebno, tako da B_{M_1} sadrži tačno $|B_{M_1}|_{[p]}$ označenih čvorova, i preškrabaj M_1.

(c) Ponavljaj korak (b) sve dok svi neprazni podskupovi od $\mathbb{N}_n$ ne budu preškrabani.

(d) Konstruiši Γ' kao podgraf od Γ indukovan skupom svih označenih čvorova.

Dovoljno je dokazati da je, za svako $M_1 \in \mathcal{P}^+$ čiji su svi nadskupovi osim njega samog preškrabani, $|B_{M_1}|_{[p]}$ veće ili jednako od zbira $|B_{M_1} \setminus \bigcup_{M \supsetneq M_1} B_M|$ broja čvorova iz $\bigcup_{M \supsetneq M_1} B_M$ koji su već označeni. Naime, ako bi to važilo, onda će se algoritam završiti, i dati graf Γ' koji ispunjava (3.2).

Neka je $M_1 \in \mathcal{P}^+(\mathbb{N}_n)$, i označimo sve skupove B_M takve da je $M_1 \subsetneq M \subseteq \mathbb{N}_n$ sa $B_1, B_2, \ldots, B_m$. Pretpostavimo da su svi strogi nadskupovi od M_1 preškrabani, ali da M_1 nije preškraban. Onda svako B_i sadrži tačno $|B_i|_{[p]}$ označenih čvorova. Neka je $p^{k_1} = |B_{M_1}|_{[p]}$, i neka je $p^{k_2} = \max\{|B_i|_{[p]} \bigm| i \le m\}$. Primetimo da je $p^{k_2} \le p^{k_1}$ zbog

($E4$). Bez gubljenja opštosti, neka je $|B_1|_{[p]} = p^{k_2}$. Tvrdimo da svi označeni čvorovi iz svakog B_i pripadaju B_1. Naime, za sve $i \leq m$ važi $B_1, B_i \subseteq B_{M_1} \subseteq C_j$ za neko $j \leq n$, pa na osnovu ($E3$) sledi da je $|B_1 \cap B_i|_{[p]} = |B_i|_{[p]}$. Prema tome, svi označeni čvorovi iz B_i pripadaju skupu $B_i \cap B_1 \subseteq B_1$, čime je dokazana tvrdnja. Iz ovog razloga, $\bigcup_{i=1}^m B_i$ sadrži tačno p^{k_2} označenih čvorova, i ostaje da pokažemo da je $p^{k_1} \leq |B_{M_1} \setminus \bigcup_{i=1}^m B_i| + p^{k_2}$. To ćemo dokazati tako što ćemo, na osnovu ($E3$), uspostaviti korespodenciju između svih preseka maksimalnih klika sadržanih u B_{M_1} i odgovarajućih podgrupa ciklične podgrupe reda $|B_{M_1}|$.

Neka je $\mathbf{G}$ ciklična grupa reda $|B_{M_1}|$, i neka je $\mathbf{G}_i$ podgrupa od $\mathbf{G}$ reda $|B_i|$, za sve $i \leq m$. Primetimo da je $|G_i \cap G_j| = \mathrm{NZD}(|G_i|, |G_j|)$. Onda, na osnovu principa uključenja-isključenja dobijamo da je

$$\Big|\bigcup_{i=1}^{m} B_i\Big| = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \sum_{J \in \mathbb{N}_n^{[i]}} \Big|\bigcap_{j \in J} B_j\Big|,$$

što je, na osnovu ($E3$), jednako sa

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \sum_{J \in \mathbb{N}_n^{[i]}} \Big|\bigcap_{j \in J} G_j\Big| = \Big|\bigcup_{i=1}^{m} G_i\Big| &\leq |G| - (p^{k_1} - p^{k_2}) \\ &= |B_{M_1}| - (p^{k_1} - p^{k_2}),\end{aligned}$$

jer $\bigcup_{i=1}^m G_i$ ne sadrži element $\mathbf{G}$ reda p^i ni za jedno $i > k_2$. Prema tome, $p^{k_1} \leq |B_{M_1} \setminus \bigcup_{i=1}^m B_i| + p^{k_2}$, pa sledi da je moguće označiti $p^{k_1} - p^{k_2}$ čvorova iz $B_{M_1} \setminus \bigcup_{M \supsetneq M_1} B_M$, i onda bi za svako $M \supseteq M_1$ bilo tačno $|B_M|_{[p]}$ označenih čvorova u B_M.

Zaključujemo da će algoritam na kraju preškrabati sve neprazne podskupove od $\mathbb{N}_n$, i da će označiti čvorove grafa Γ tako da svaki presek maksimalnih klika B sadrži tačno $|B|_{|p]}$ označenih čvorova. Onda je podgraf Γ' grafa Γ indukovan skupom označenih čvorova jedna p-komponenta grafa Γ. $\square$

Lema 3.17 *Neka je $\mathbf{G}$ konačna grupa, i neka je p prost delitelj od $|G|$. Onda je podgraf od $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ indukovan skupom čvorova G_p jedna p-komponenta grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{C}l$ skup svih maksimalnih klika grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$, i neka je $\mathcal{B}$ skup svih preseka maksimalnih klika grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$. Na osnovu tvrđenja 2.54, $\mathbf{B}$ je ciklična podgrupa od $\mathbf{G}$ za svako $B \in \mathcal{B}$. Prema tome, ako je $|B| = p^k l$ za neke k i l, $p \not| \, l$, onda $\mathbf{B}$ ima jedinstvenu podgrupu reda p^k, i B sadrži tačno p^k elemenata čiji su redovi stepeni prostog broja p. $\square$

Lema 3.18 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna grupa, neka je* p *prost delitelj od* $|G|$*, i neka je* $\Gamma = \mathcal{G}_e(\mathbf{G})$*. Onda su sve* p*-komponente od* Γ *izomorfne sa* $\Gamma[G_p]$*.*

Dokaz. Neka su Δ_1 i Δ_2 dve p-komponente grafa Γ. Za bilo koje $x, y \in G$ pišemo $x \overset{e}{\equiv} y$ ako i samo ako $\overline{N}_\Gamma(x) = \overline{N}_\Gamma(y)$. Na osnovu leme 2.57 (b), važi $x \overset{e}{\equiv} y$ ako i samo ako $x \in C \Leftrightarrow y \in C$ za sve $C \in \mathcal{C}l$. Po lemi 2.57 (d), $G/\overset{e}{\equiv}$ može da se uredi na sledeći način: $[x]_{\overset{e}{\equiv}} \leq [y]_{\overset{e}{\equiv}}$ ako je $y \in C \Rightarrow x \in C$ za sve $C \in \mathcal{C}l$. Na osnovu leme 2.57 (a) i (b), važi $[x]_{\overset{e}{\equiv}} \leq [y]_{\overset{e}{\equiv}}$ ako i samo ako $\overline{N}_\Gamma(y) \subseteq \overline{N}_\Gamma(x)$ ako i samo ako važi $\langle [y]_{\overset{e}{\equiv}} \rangle \leq \langle [x]_{\overset{e}{\equiv}} \rangle$.

Visina elementa x u posetu je maksimalna dužina lanca čiji je najveći element x. Indukcijom po visini $\overset{e}{\equiv}$-klase u posetu $(G/\overset{e}{\equiv}, \leq)$, dokazujemo da svaka $\overset{e}{\equiv}$-klasa sadrži iste brojeve čvorova iz Δ_1 i iz Δ_2. Najmanji element poseta $G/\overset{e}{\equiv}$ je $\bigcap_{i=1}^{n} C_i$, i na osnovu (3.2) ima iste brojeve čvorova iz Δ_1 i iz Δ_2. Dalje, neka je $D \in G/\overset{e}{\equiv}$. Onda, na osnovu (3.2), $\langle D \rangle = \bigcap \{C \in \mathcal{C}l \mid D \subseteq C\}$ sadrži iste brojeve čvorova iz Δ_1 i iz Δ_2. Po indukcijskoj hipotezi sve $\overset{e}{\equiv}$-klase $E < D$ imaju iste brojeve čvorova iz Δ_1 i iz Δ_2. Primetimo da za sve takve E važi $E \subseteq \langle D \rangle$. Ovo povlači da D sadrži iste brojeve čvorova iz Δ_1 i iz Δ_2. Ovim je dokazana tvrdnja da svaka $\overset{e}{\equiv}$-klasa sadrži iste brojeve čvorova iz Δ_1 i iz Δ_2.

Sada, pošto je transpozicija elemenata x i y automorfizam grafa Γ kad god je $x \overset{e}{\equiv} y$, sledi da su Δ_1 i Δ_2 izomorfni, pri čemu taj izomorfizam predstavlja kompozicija transpozicija čvorova koji pripadaju istim $\overset{e}{\equiv}$-klasama. Dalje, zato što je, na osnovu leme 3.17, $\Gamma(G_p)$ jedna p-komponenta od Γ, lema je dokazana. □

Teorema 3.19 *Neka je* $\mathbf{G}$ *konačna grupa koja ima jedinstvenu* p*-podgrupu Sylowa* $\mathbf{G}_p$ *za neki prost broj* p*. Onda je* $\mathcal{G}_e(\mathbf{G}_p)$ *izomorfno sa* p*-komponentom grafa* $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$*.*

Dokaz. Teorema je direktna posledica leme 3.18. □

Ako konačan graf Γ reda $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$ ispunjava ($E1$)-($E3$), onda p_i-komponenta od Γ_i može da se konstruiše kao što je opisano u tvrđenju 3.16, za bilo koje $i \leq k$. U tom slučaju je Γ obogaćeni stepeni graf konačne Abelove grupe ako i samo ako je $\Gamma \cong \boxtimes_{i=1}^{k} \Gamma_{p_i}$, gde je Γ_{p_i} p_i-semistablo, za svako i. Ako neki od grafova Γ_{p_i} nisu p-semistabla, onda ne možemo reći da li je Γ obogaćeni stepeni graf konačne grupe.

Da bismo proverili da li je Γ_p p-semistablo, tj. obogaćeni stepeni graf konačne Abelove p-grupe, možemo, kao u lemi 2.62, da odredimo koliko elemenata svakog reda ta grupa sadrži. Koristeći ovu informaciju možemo, kao u tvrđenju 2.66, zaključiti kom tuplu $\overline{a}$ bi Γ_p bilo pridruženo kao p-semistablo. Onda preostaje da se proveri da li je $\Gamma_p \cong S_p(\overline{a})$.

Ako Γ ne ispunjava bilo koji od uslova ($E1$)-($E3$), onda Γ nije obogaćeni stepeni graf nijedne grupe.

Glava 4

Kombinatorne osobine grafova pridruženih grupama i stepeno-asocijativnim grupoidima

4.1 Nezavisni skupovi komutirajućeg grafa

Podsetimo se, za skup čvorova grafa Γ kažemo da je nezavisan ako nikoja dva čvora tog skupa nisu susedna u Γ, a α-broj je supremum kardinalnosti nezavisnih skupova grafa Γ. Godine 1975. Paul Erdős postavio je sledeći problem: Ako komutirajući graf grupe ne sadrži beskonačan nezavisan skup, da li je onda njegov α-broj konačan? Naredne godine Bernhard Neumann [54] objavio je rad u kome je potvrdno odgovorio na Erdősevo pitanje. On je to postigao pokazavši da $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ nema beskonačan nezavisan skup ako i samo ako $\mathbf{G}$ ima centar konačnog indeksa. Ova sekcija posvećena je tom rezultatu.

Pre nego što nastavimo, navešćemo ideju dokaza: Cilj nam je najpre da pokažemo da, ako $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ ne sadrži beskonačan nezavisan skup, onda su sve konjugacijske klase grupe $\mathbf{G}$ konačne. Zatim pokazujemo da grupa kojoj su sve konjugancijske klase konačne, a čiji je centar beskonačnog indeksa, ima beskonačan nezavisan skup. Ove dve činjenice povlačiće težu implikaciju glavne teoreme ove sekcije: da, ako $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ ne sadrži beskonačan nezavisan skup, onda je indeks centra grupe $\mathbf{G}$ konačan. Odatle, pošto dva elementa koja pripadaju istom kosetu od $\mathrm{Z}(\mathbf{G})$ u $\mathbf{G}$ komutiraju, onda nijedan nezavisan skup od $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ nema više od $[\mathbf{G} : \mathrm{Z}(\mathbf{G})]$ elemenata.

Napomenimo još da se grupe čije su sve konjugacijske klase konačne često označavaju kao FC-grupe (na primer u [30] i [63]), mada u ovoj disertaciji radi lakčeg čitanja nećemo koristiti taj termin. Može se dokazati da je klasa svih grupa sa centrom konačnog indeksa sadržana u klasi svih grupa čije su sve konjugacijske klase konačne. Naime, za svaki element x grupe $\mathbf{G}$ važi $[\mathbf{G} : \mathrm{C}(x)] \leq [\mathbf{G} : \mathrm{Z}(\mathbf{G})]$, a, na osnovu teoreme 1.1, broj konjugata od x jednak je $[\mathbf{G} : \mathrm{C}(x)]$. Stoga, ako je indeks centra grupe $\mathbf{G}$ konačan, element x ima konačno mnogo konjugata.

Lema 4.1 **([54, lema 1])** *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupa takva da* $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ *nema beskonačan nezavisan skup čvorova. Onda su sve konjugacijske klase grupe* $\mathbf{G}$ *konačne.*

Dokaz. Pretpostavimo da $\mathbf{G}$ ima beskonačnu konjugacijsku klasu. Neka je $g \in G$ element koji ima beskonačno mnogo konjugata, i neka je $T \subseteq G$ beskonačan skup takav da je $s^{-1}gs \neq t^{-1}gt$ za sve $s, t \in T$. Prema beskonačnoj Ramseyjevoj teoremi, beskonačan kompletan graf kome su obojene grane u dve boje sadrži beskonačan kompletan podgraf kome su sve grane obojene jednom bojom. Ovo implicira da T ima podskup U koji je ili nezavisan skup grafa $\mathcal{C}(\mathbf{G})$, ili indukuje kompletan podgraf od $\mathcal{C}(\mathbf{G})$. Ukoliko je U nezavisan, onda je lema dokazana, pa pretpostavimo dalje da su svi čvorovi iz U susedni u $\mathcal{C}(\mathbf{G})$.

Znajući da elementi skupa U međusobno komutiraju, pokazujemo da je skup $gU = \{gu \mid u \in U\}$ nezavisan u $\mathcal{C}(\mathbf{G})$. Neka su $u, v \in U$ proizvoljni. Tada važi:

$$\begin{aligned}[gu, gv] &= (gu)^{-1}(gv)^{-1}gugv = u^{-1}g^{-1}v^{-1}ugv \\ &= u^{-1}g^{-1}uv^{-1}gv = (u^{-1}gu)^{-1}v^{-1}gv \neq 1,\end{aligned}$$

gde krajnja nejednakost važi zbog izbora skupa T. Dakle, nikoja dva elementa skupa gU ne komutiraju, pa $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ ima beskonačan nezavisan skup. Ovim je lema dokazana. $\square$

Ovim je dokazana prva pomenuta implikacija potrebna za dokaz glavne teoreme ove sekcije. U nastavku pokazujemo da važi i druga.

Lema 4.2 **([54, posledica 3])** *Neka su sve konjugacijske klase grupe* $\mathbf{G}$ *konačne, i neka* $\mathbf{G}$ *ima centar beskonačnog indeksa. Neka je* $\mathbf{A} \leq \mathbf{G}$ *konačnog indeksa. Tada* $\mathbf{A}$ *nije Abelova.*

Dokaz. Pretpostavimo da grupa $\mathbf{G}$ sa svim konačnim konjugacijskim klasama ima Abelovu podgrupu $\mathbf{A}$ konačnog indeksa. Pokažimo da je indeks centra od $\mathbf{G}$ konačan. Neka je Q generatorni skup od $\mathbf{A}$, i neka je R konačan skup takav da je $\mathbf{G} = \langle Q \cup R \rangle$. Jasno je da takav skup postoji, za elemente skupa R dovoljno je odabrati iz svakog levog koseta grupe $\mathbf{A}$ po jedan element. Neka je $S = Q \cup R$. Dalje, centralizator generatornog skupa od $\mathbf{G}$ je centar od $\mathbf{G}$, pa važi

$$\mathrm{Z}(\mathbf{G}) = \mathrm{C}(S) = \mathrm{C}(Q) \cap \mathrm{C}(R). \tag{4.1}$$

Pošto je $\mathbf{A}$ Abelova grupa, onda je $\mathbf{A} \leq \mathrm{C}(Q)$, pa $\mathrm{C}(Q)$ ima konačan indeks.

Pokažimo još da i $\mathrm{C}(R)$ ima konačan indeks. Za svako $r \in R$, konjugacijska klasa od r je konačna. Prisetimo se, u sekciji 1.1 rekli smo da je kardinalnost konjugacijske klase elementa jednaka indeksu centralizatora tog elementa. Stoga, za svako $r \in R$ je $\mathrm{C}(r)$ konačnog indeksa. Pošto indeks preseka dve podgrupe nije veći od proizvoda indeksa te dve podgrupe, očigledno je da presek konačno mnogo grupa konačnog indeksa ima konačan indeks. Dakle, indeks od $\mathrm{C}(R)$ je konačan, i, slično, na osnovu jednakosti (4.1) sledi da je $\mathrm{Z}(\mathbf{G})$ konačnog indeksa, što je i trebalo dokazati. □

U nastavku koristimo prethodnu lemu da bismo pokazali da grupa kojoj su sve konjugacijske klase konačne, a koja ima centar beskonačnog indeksa, ima beskonačan nezavisan skup. Podsetimo se, sa $x \stackrel{c}{\sim} y$ označavamo da su $x, y \in G$ susedni u $\mathcal{C}(\mathbf{G})$.

Lema 4.3 ([54, lema 4]) *Neka je $\mathbf{G}$ grupa sa svim konačnim konjugacijskim klasama takva da je $[\mathbf{G} : \mathrm{Z}(\mathbf{G})] \geq \aleph_0$. Neka postoje nizovi elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_n \in G$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n \in G$ koji ispunjavaju sledeće uslove:*

(a) $a_i \stackrel{c}{\not\sim} a_j$ *za sve* $i \neq j$;

(b) $a_i \stackrel{c}{\sim} b_j$ *za sve* $i \neq j$;

(c) $a_i \stackrel{c}{\not\sim} b_i$ *za svako* i;

(d) $b_i \stackrel{c}{\sim} b_j$ *za sve* $i \neq j$.

Onda postoje $a_{n+1}, b_{n+1} \in G$ takvi da nizovi $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ i $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ ispunjavaju uslove (a)-(d).

Dokaz. Neka je $\mathbf{A} = \mathrm{C}(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Onda, pošto $\mathbf{G}$ ima sve konačne konjugacijske klase, indeks podgrupe $\mathbf{A}$ je konačan. Na osnovu leme 4.2, $\mathbf{A}$ nije Abelova. Prema tome, postoje $a, b \in A$ takvi da je $a \overset{c}{\not\sim} b$. Neka je:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= ab_1b_2\cdots b_n \text{ i} \\ b_{n+1} &= b. \end{aligned}$$

Element b_{n+1} očigledno komutira sa a_i i b_i za svako $i \leq n$, i lako se vidi da za svako $i \leq n$ i a_{n+1} komutira sa b_i. Dalje:

$$\begin{aligned} [a_{n+1}, b_{n+1}] &= (b_1b_2\cdots b_n)^{-1}a^{-1}b^{-1}ab_1b_2\cdots b_nb \\ &= a^{-1}b^{-1}a(b_1b_2\cdots b_n)^{-1}b_1b_2\cdots b_nb \\ &= [a, b] \neq 1, \end{aligned}$$

čime smo pokazali da je $a_{n+1} \overset{c}{\not\sim} b_{n+1}$. Preostaje da se pokaže da je i $a_{n+1} \overset{c}{\not\sim} a_i$ za svako $i \leq n$. Bez umanjenja opštosti, neka je $i = 1$. Tada sledi:

$$\begin{aligned} [a_{n+1}, a_1] &= (b_1b_2\cdots b_n)^{-1}a^{-1}a_1^{-1}a(b_1b_2\cdots b_n)a_1 \\ &= b_1^{-1}a_1^{-1}(b_2b_3\cdots b_n)^{-1}(b_2b_2, \cdots b_n)b_1a_1 \\ &= [b_1, a_1] \neq 1, \end{aligned}$$

čime je pokazano da je i $a_{n+1} \overset{c}{\not\sim} a_1$. Dakle, sledi $a_{n+1} \overset{c}{\not\sim} a_i$ za svako $i \leq n$. Ovim je dokazano da nizovi $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ i $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ ispunjavaju uslove (a)-(d). $\square$

Posledica 4.4 ([54, posledica 5]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupa čije su sve konjugacijske klase konačne i koja ima centar beskonačnog indeksa. Onda* $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ *ima beskonačan nezavisan skup.*

Dokaz. Očigledno, $\mathbf{G}$ nije Abelova. Dakle, postoje elementi a_1 i b_1 koji ne komutiraju. Na osnovu leme 4.3, postoji rastuća familija nezavisnih skupova A_i. Tada je $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ beskonačan nezavisan skup grafa $\mathcal{C}(\mathbf{G})$. $\square$

Sada možemo dokazati glavnu teoremu ove sekcije. Lako se vidi da naredna teorema povlači da, ako komutirajući graf grupe nema beskonačan nezavisni skup, onda komutirajući graf te grupe nema ni proizvoljno velike nezavisne skupove.

Teorema 4.5 ([54, teorema 6]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupa. Tada* $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ *nema beskonačan nezavisan skup ako i samo ako* $\mathbf{G}$ *ima centar konačnog indeksa.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G}$ grupa čiji komutirajući graf nema beskonačan nezavisan skup. Na osnovu leme 4.1, $\mathbf{G}$ ima sve konačne konjugacijske klase. Pretpostavimo sada suprotno, tj. da je $\mathrm{Z}(\mathbf{G})$ beskonačnog indeksa. Onda, na osnovu posledice 4.4, sledi da $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ ima beskonačan nezavisan skup. Ovim je dobijena kontradikcija, što povlači da je $[G : \mathrm{Z}(\mathbf{G})]$ konačan.

Sa druge strane, ako je indeks centra od $\mathbf{G}$ konačan, onda ni $\mathcal{C}(\mathbf{G})$ nema beskonačan nezavisan skup, jer svaka dva elementa sadržana u istom kosetu od $\mathrm{Z}(\mathbf{G})$ komutiraju. Ovim je teorema dokazana. □

4.2 Nezavisni skupovi stepenog grafa

Ova sekcija je zasnovana na rezultatima rada [1], i bavi se α-brojem stepenog grafa grupe. Priloženi dokazi detaljniji su nego u originalnom radu. Podsetimo se, nezavisni skup grafa $\Gamma = (V, E)$ je skup čvorova $X \subseteq V$ takvih da nikoja dva čvora iz X nisu susedna. α-broj grafa Γ je supremum kardinalnosti nezavisnih skupova grafa Γ, i označavamo ga sa $\alpha(\Gamma)$. Klika grafa Γ je skup čvorova tog grafa od kojih su svaka dva susedna, a ω-broj grafa Γ, što označavamo sa $\omega(\Gamma)$, je supremum kardinalnosti svih klika grafa Γ. Sa $\overline{\mathcal{C}}(\mathbf{G})$ označavaćemo komplement komutirajućeg grafa grupe $\mathbf{G}$. Sledeća teorema dokazana je u [1].

Teorema 4.6 ([1, teorema 1]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupa sa osobinom da je* $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$. *Onda je:*

(a) $[G : \mathrm{Z}(\mathbf{G})] < \aleph_0$*;*

(b) $\mathbf{G}$ *je lokalno konačna, tj. svaka njena konačno generisana podgrupa je konačna.*

Dokaz. (a) Primetimo najpre da čvorovi susedni u $\overline{\mathcal{C}}(\mathbf{G})$ nisu susedni u $\mathcal{G}(\mathbf{G})$. Pošto je $\mathcal{G}(\mathbf{G}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{G})$, onda je $\omega(\overline{\mathcal{C}}(\mathbf{G})) = \alpha(\mathcal{C}(\mathbf{G})) \leq \alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$. Onda, na osnovu teoreme 4.5, sledi da $\mathbf{G}$ ima centar konačnog indeksa, što je trebalo dokazati.

(b) Neka je $\mathbf{H}$ konačno generisana podgrupa grupe $\mathbf{G}$. Pošto je $\mathcal{G}(\mathbf{H})$ indukovan podgraf od $\mathcal{G}(\mathbf{G})$, onda je $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{H})) < \aleph_0$, pa na osnovu (a) sledi da je $\mathrm{Z}(\mathbf{H})$ konačnog indeksa u $\mathbf{H}$. Dalje, podgrupa konačnog indeksa konačno generisane grupe je konačno generisana, za dokaz čega se može pogledati [64, lema 7.56]. Na osnovu toga sledi da je $\mathrm{Z}(\mathbf{H})$ takođe konačno generisan. Na osnovu fundamentalne teoreme za konačno generisane Abelove grupe, tj. teoreme 1.14 u ovoj disertaciji, dobijamo da je $\mathrm{Z}(\mathbf{H}) \cong \mathbb{Z}^n \times \mathbf{C}_{q_1} \times \cdots \times \mathbf{C}_{q_k}$, gde su $n, k \in \mathbb{N}_0$, a

$q_1, \ldots, q_k$ su stepeni prostih brojeva. Pošto je $\alpha(\mathcal{G}(\mathbb{Z})) = \aleph_0$, sledi da je $n = 0$ i da je $\mathrm{Z}(\mathbf{H})$ konačna grupa. Ovo povlači da je $\mathbf{H}$ konačna grupa. $\square$

Navedimo sada sledeće poznato tvrđenje iz teorije grupa, nakon čega bismo nastavili sa izlaganjem rezultata na temu nezavisnog skupa stepenog grafa grupe.

Teorema 4.7 ([63, 4.3.11]) *Ako Abelova grupa* $\mathbf{G}$ *nije torziono slobodna, onda postoji ciklična ili Prüferova podgrupa* $\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$ *takva da je* $\mathbf{G} = \mathbf{H} \times \mathbf{Q}$ *za neku podgrupu* $\mathbf{Q} \leq \mathbf{G}$.

Sledeća teorema, dokazana u [1], pruža potreban uslov za grupu da njen stepeni graf ima konačni α-broj.

Teorema 4.8 ([1, teorema 3]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *Abelova grupa takva da je* $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$. *Onda je* $\mathbf{G}$ *konačna, ili postoji prost broj* p *takav da je* $\mathbf{G} \cong \mathbf{C}_{p^\infty} \times \mathbf{H}$, *gde je* $\mathbf{H}$ *konačna grupa takva da je* $p \nmid |H|$.

Dokaz. Ako bi grupa $\mathbf{G}$ bila torziono slobodna, onda bi ona imala podgrupu izomorfnu sa aditivnom grupom $\mathbb{Z}$, pa bi bilo $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) \geq \alpha(\mathcal{G}(\mathbb{Z})) = \aleph_0$. Prema tome, $\mathbf{G}$ nije torziono slobodna grupa, pa je na osnovu teoreme 4.7 $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{H}_1$, gde je $\mathbf{G}_1$ ciklična ili Prüferova grupa. Štaviše, pošto je $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$, ako je $\mathbf{G}_1$ ciklična grupa, onda je ona konačna. Ako je $\mathbf{H}_1$ trivijalna grupa, onda bi tvrdnja teoreme važila, pa pretpostavimo da to nije slučaj. Dalje, ni $\mathbf{H}_1$ nije torziono slobodna, pa je $\mathbf{H}_1 = \mathbf{G}_2 \times \mathbf{H}_2$, gde je $\mathbf{G}_2$ konačna ciklična grupa ili Prüferova grupa, čime dobijamo $\mathbf{G} = \mathbf{G}_1 \times \mathbf{G}_2 \times \mathbf{H}_2$. Pošto je $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$, onda postoji $n \in \mathbb{N}$ za koje je $\mathbf{H}_{n+1}$ trivijalna grupa, pa je $\mathbf{G} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{G}_i$, gde je $\mathbf{G}_i$ konačna ciklična grupa ili Prüferova grupa za svako $i \leq n$.

Pokažimo da je najviše jedna od podgrupa $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_n$ Prüferova. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\mathbf{C}_{p^\infty} \times \mathbf{C}_{q^\infty} \leq \mathbf{G}$. Neka je za $k \in \mathbb{N}$ skup I_k definisan sa:

$$I_k = \left\{ \left(\frac{1}{p^i} + \mathbb{Z}, \frac{1}{q^{k-i+1}} + \mathbb{Z} \right) \,\middle|\, 1 \leq i \leq k \right\}.$$

Pošto je za $i_1 < i_2$ element $\frac{1}{p^{i_1}} + \mathbb{Z}$ grupe $\mathbf{C}_{p^\infty}$ manjeg reda nego $\frac{1}{p^{i_2}} + \mathbb{Z}$, a element $\frac{1}{q^{k-i_1+1}} + \mathbb{Z}$ grupe $\mathbf{C}_{q^\infty}$ većeg reda nego $\frac{1}{q^{k-i_2+1}} + \mathbb{Z}$, onda I_k čini nezavisan skup čvorova grafa $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ kardinalnosti k. Ovim je dobijena kontradikcija jer je $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$, pa je najviše jedna od grupa $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_n$ Prüferova.

Ako su sve grupe $\mathbf{G}_i$, $i \leq n$, konačne ciklične, onda je $\mathbf{G}$ konačna, pa pretpostavimo da je $\mathbf{G} \cong \mathbf{C}_{p^\infty} \times \prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{C}_{p_i^{k_i}}$, gde $k_i \in \mathbb{N}$ za sve $i \leq n-1$. Dovoljno je da se pokaže da je p različito od svih p_i, $i \leq n-1$. Pretpostavimo da je $p_1 = p$. Onda $\mathbf{G}$ ima podgrupu izomorfnu sa $\mathcal{G}(\mathbf{C}_{p^\infty} \times \mathbf{C}_p)$. Neka je x generator grupe $\mathbf{C}_p$, i neka je $D \subseteq C_{p^\infty}$ skup koji sadrži tačno po jedan element reda p^l za svako $l \in \mathbb{N}$. Onda je $D \times \{x\}$ beskonačan nezavisan skup grafa $\mathcal{G}(\mathbf{C}_{p^\infty} \times \mathbf{C}_p)$. Ovim smo dobili da $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ ima beskonačan nezavisan skup, što je kontradikcija. Ovim je dokaz teoreme završen. □

U naredne dve teoreme, objavljene u [1], dajemo potreban i dovoljan uslov za nilpotentne grupe da im stepeni graf ima konačan α-broj.

Teorema 4.9 ([1, teorema 4]) *Neka je $\mathbf{G}$ p-grupa, za neki prost broj p, takva da je $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$. Onda je $\mathbf{G}$ konačna ili Prüferova grupa.*

Dokaz. Pošto je $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$, onda je i $\alpha(\mathcal{G}(\mathrm{Z}(\mathbf{G}))) < \aleph_0$. Na osnovu teoreme 4.8, onda je $\mathrm{Z}(\mathbf{G})$ konačan, ili je $\mathrm{Z}(\mathbf{G}) \cong \mathbf{C}_{p^\infty}$ za neki prost broj p. Ako je $\mathrm{Z}(\mathbf{G})$ konačan, onda je na osnovu teoreme 4.6 i $\mathbf{G}$ konačna grupa, pa pretpostavimo da je $\mathrm{Z}(\mathbf{G}) \cong \mathbf{C}_{p^\infty}$. Pokažimo da je u tom slučaju $\mathrm{Z}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$. Neka je $x \in G$. Onda, kao i malopre, zaključujemo da je grupa $\langle \mathrm{Z}(\mathbf{G}), x\rangle$ izomorfna sa $\mathbf{C}_{p^\infty}$. Međutim, pošto su sve netrivijalne podgrupe Prüferove grupe konačne, onda je $\langle \mathrm{Z}(\mathbf{G}), x\rangle = \mathrm{Z}(\mathbf{G})$. Dakle, $\mathrm{Z}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}$, čime je dokazano da je u ovom slučaju $\mathbf{G}$ Prüferova grupa. Ovim je teorema dokazana. □

Teorema 4.10 ([1, teorema 6]) *Neka je $\mathbf{G}$ beskonačna nilpotentna grupa. Onda je $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$ ako i samo ako je $\mathbf{G} \cong \mathbf{C}_{p^\infty} \times \mathbf{H}$ za neki prost broj p, gde je $\mathbf{H}$ konačna grupa i $p \nmid |H|$.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G} \cong \mathbf{C}_{p^\infty} \times \mathbf{H}$, gde je p neki prost broj, a $\mathbf{H}$ konačna grupa čiji je red uzajamno prost sa p. Pretpostavimo da je $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) \geq \aleph_0$. Pošto je $\mathbf{H}$ konačna i $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) \geq \aleph_0$, postoji nezavisan skup čvorova N grafa $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ takav da je $|N| > |H|$. Sledi da postoje $g_1, g_2 \in C_{p^\infty}$ i $h \in H$ takvi da $(g_1, h), (g_2, h) \in N$. Bez umanjenja opštosti, neka je $o(g_1) \geq o(g_2)$. Pošto su $o(g_1)$ i $o(h)$ uzajamno prosti, i pošto (g_1, e) i (e, h) komutiraju, onda je $\langle (g_1, h)\rangle = \langle (g_1, e), (e, h)\rangle = \langle g_1\rangle \times \langle h\rangle$. Dalje, jer $g_2 \in \langle g_1\rangle$ i $h \in \langle h\rangle$, sledi da je $(g_2, h) \in \langle (g_1, h)\rangle$, tj. da je (g_2, h) stepen elementa (g_1, h), čime je dobijena kontradikcija. Ovim je dokazana prva implikacija.

Neka je $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$. Onda je, na osnovu teoreme 4.6 (a), $[G : \mathrm{Z}(\mathbf{G})] < \aleph_0$ i $G = \mathrm{Z}(\mathbf{G})\mathbf{H}$, gde je $\mathbf{H} = \langle z_1, z_2, \ldots, z_n\rangle$, pri čemu su elementi $z_1, z_2, \ldots, z_n$ predstavnici svih koseta od $\mathrm{Z}(\mathbf{G})$ u $\mathbf{G}$. Dalje, na osnovu teoreme 4.6 (b), pošto je $\mathbf{H}$ konačno generisana, ona je konačna. Takođe, na osnovu teoreme 4.8, $\mathrm{Z}(\mathbf{G}) = \mathbf{AB}$, gde je $\mathbf{A} \cong \mathbf{C}_{p^\infty}$ za neki prost broj p i $\mathbf{B}$ konačna grupa takva da $p \nmid |B|$, jer je $\mathrm{Z}(\mathbf{G})$ beskonačan. Pošto je, na osnovu teoreme 1.9, $\mathbf{H}$ konačna nilpotentna grupa, onda je, na osnovu teoreme 1.11, $\mathbf{H} \cong \mathbf{H}_p \times \prod_{i=1}^{t} \mathbf{H}_{p_i}$, gde su $\mathbf{H}_p$ i sve grupe $\mathbf{H}_{p_i}$ sve podgrupe Sylowa grupe $\mathbf{H}$. Pokažimo da je $\mathbf{H}_p \leq \mathbf{A}$. Neka $x \in H_p$. Element x komutira sa svim elementima podgrupe $\mathbf{A}$ jer je $\mathbf{A} \leq \mathrm{Z}(\mathbf{G})$, pa je $\langle A, x\rangle$ p-grupa, što, na osnovu teoreme 4.9, povlači $\langle A, x\rangle \cong \mathbf{C}_{p^\infty} \cong \mathbf{A}$. Dalje, pošto Prüferova grupa nema netrivijalnu beskonačnu podgrupu, sledi da je $\langle A, x\rangle = \mathbf{A}$, što povlači $x \in A$ i $\mathbf{H}_p \leq \mathbf{A}$. Dakle, $\mathbf{H}_p \leq \mathrm{Z}(\mathbf{G})$, pa je $\mathbf{G} = \mathbf{ABH}_{p_1} \cdots \mathbf{H}_{p_t}$. Na osnovu teoreme 1.11, za svaka dva elementa g i h konačne nilpotentne grupe važi $o(gh) \mid \mathrm{NZS}(o(g), o(h))$. Odatle, pošto je $\mathbf{G}$ nilpotentna, $p \nmid |B|, |H_{p_1}|, \ldots, |H_{p_t}|$ implicira da p ne deli red grupe $\mathbf{BH}_{p_1} \cdots \mathbf{H}_{p_t}$. Dobili smo da je $\mathbf{A} \cap \mathbf{BH}_{p_1} \cdots \mathbf{H}_{p_t}$ trivijalna grupa, da je $\mathbf{ABH}_{p_1} \cdots \mathbf{H}_{p_t} = \mathbf{G}$, i da za svaki element a grupe $\mathbf{A}$ i element b grupe $\mathbf{BH}_{p_1} \cdots \mathbf{H}_{p_t}$ važi $ab = ba$. Odavde sledi da je $\mathbf{G} = \mathbf{A} \times \mathbf{BH}_{p_1} \cdots \mathbf{H}_{p_t}$, čime je teorema dokazana. □

Napomenimo da smo u prethodnom dokazu drugu implikaciju mogli dokazati i koristeći činjenicu da je, na osnovu teoreme 1.12, torziona nilpotentna grupa izomorfna direktnoj sumi svojih podgrupa Sylowa. Uočimo najpre da postoji samo konačno mnogo prostih brojeva p takvih da $\mathbf{G}$ sadrži element reda p. Dakle, postoji konačno mnogo podgrupa Sylowa. Štaviše, svaka podgrupa Sylowa je konačna ili Prüferova grupa, pri čemu je najviše jedna od njih Prüferova grupa. Dokaz dalje sledi iz teoreme 4.9.

Takođe, u dokazu teoreme 4.10 iz $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) \geq \aleph_0$ nismo mogli zaključuti da graf $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ sadrži beskonačan nezavisan skup. Na osnovu teoreme 4.5, svaka grupa, čiji komutirajući graf ima beskonačan α-broj, ima beskonačan nezavisan skup. Međutim, naredni primer potvrđuje da za stepeni graf grupe analogno tvrđenje ne važi.

Primer 4.11 *Postoji grupa* $\mathbf{G}$ *takva da je* $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) \geq \aleph_0$ *čiji stepeni graf nema beskonačan nezavisan skup.*

Dokaz. U dokazu teoreme 4.8 već smo videli da je $\alpha\big(\mathcal{G}(\mathbf{C}_{p^\infty} \times \mathbf{C}_{p^\infty})\big) = \aleph_0$, pa preostaje samo da se dokaže da stepeni graf grupe $\mathbf{C}_{p^\infty} \times \mathbf{C}_{p^\infty}$ nema nijedan beskonačni nezavisni skup čvorova.

Neka je $\mathbf{G} = \mathbf{C}_{p^\infty} \times \mathbf{C}_{q^\infty}$, gde su p i q različiti prosti brojevi. Primetimo da u grupi $\mathbf{G}$ važi $y \in \langle x\rangle$ ako i samo ako $o(y) \mid o(x)$, jer za sve $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_0$ grupa $\mathbf{G}$ ima jedinstvenu podgrupu reda $p^{\alpha_1}q^{\alpha_2}$, koja je ciklična. Neka je N nezavisan skup čvorova grafa $\mathcal{G}(\mathbf{G})$, i neka $\big(\frac{s_1}{p^{\beta_1}} + \mathbb{Z}, \frac{s_2}{q^{\beta_2}} + \mathbb{Z}\big) \in N$, gde su s_1 i s_2 uzajamno prosti sa p i q, redom. Pretpostavimo dalje i da $\big(\frac{t_1}{p^{\gamma_1}} + \mathbb{Z}, \frac{t_2}{q^{\gamma_2}} + \mathbb{Z}\big) \in N$, gde su i t_1 i t_2 uzajamno prosti sa p i q, redom. Onda važi $\gamma_1 < \beta_1$ ili $\gamma_2 < \beta_2$, jer bi u suprotnom $\big(\frac{s_1}{p^{\beta_1}} + \mathbb{Z}, \frac{s_2}{q^{\beta_2}} + \mathbb{Z}\big)$ bio element ciklične grupe $\big\langle\big(\frac{t_1}{p^{\gamma_1}} + \mathbb{Z}, \frac{t_2}{q^{\gamma_2}} + \mathbb{Z}\big)\big\rangle$. Odavde sledi da nezavisan skup N sadrži najviše $\beta_1 + \beta_2 + 1$ elemenata, čime je tvrdnja dokazana. $\square$

4.3 Bojenje obogaćenih stepenih grafova i stepenih grafova stepeno-asocijativnih lupa sa inverzima

Ova sekcija zasnovana je na rezultatima iz [1] i na originalnim rezultatima iz [72], i bavi se hromatskim brojem stepenog grafa i obogaćenog stepenog grafa. Podsetimo se, hromatski broj grafa Γ je minimalna kardinalnost skupa boja kojim se mogu obojiti čvorovi grafa Γ tako da nikoja dva susedna čvora grafa Γ ne budu obojena istom bojom. Hromatski broj grafa Γ označavamo sa $\chi(\Gamma)$. ω-broj grafa Γ označavamo sa $\omega(\Gamma)$.

U [1] autori su dokazali da grupa $\mathbf{G}$ takva da je $\omega(\mathcal{G}_e(\mathbf{G})) < \aleph_0$ ima konačan eksponent. Na sličan način moguće je dokazati analogno tvrđenje za stepeno-asocijativne lupe sa inverzima, i taj dokaz predstavljamo u nastavku.

Lema 4.12 ([1, lema 7]) *Neka je* $\mathbf{G}$ *stepeno-asocijativna lupa sa inverzima. Ako je* $\omega(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$, *onda je eksponent od* $\mathbf{G}$ *ograničen.*

Dokaz. Pretpostavimo da eksponent od $\mathbf{G}$ nije konačan. Onda za svako $k \in \mathbb{N}$ postoji element $g_k \in G$ takav da je $o(g_k) > 2^k$. Neka je $C_k = \{g_k^{2^i} \mid 1 \le i \le k\}$. Pošto $g_k^{2^j} \to g_k^{2^i}$ ako i samo ako je $j < i$, onda je C_k klika grafa $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ veličine k. Ovim je lema dokazana. $\square$

Naredno tvrđenje direktna je posledica leme 4.12.

Posledica 4.13 *Neka je* $\mathbf{G}$ *Abelova grupa takva da je* $\omega(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$. *Onda je* $\mathbf{G}$ *direktna suma konačnih cikličnih grupa.*

Dokaz. Na osnovu leme 4.12, grupa $\mathbf{G}$ je Abelova grupa konačnog eksponenta, pa je ona, na osnovu Prüfer-Baerove teoreme (teorema 1.15), direktna suma konačnih cikličnih grupa. $\square$

Jasno, hromatski broj stepenog grafa mnogih grupa je beskonačan. Takva je na primer Prüferova grupa, aditivna grupa $\mathbb{Z}$, pa i bilo koja grupa koja nije torziona. Postavlja se pitanje da li stepeni graf svake grupe može biti obojen sa prebrojivo mnogo boja. Odgovor na ovo pitanje je pozitivan: Yaroslav Shitov [69] je dokazao da je moguće obojiti stepeni graf bilo kojeg stepeno-asocijativnog grupoida sa prebrojivo mnogo boja.

Teorema 4.14 *Hromatski broj obogaćenog stepenog grafa bilo koje stepeno-asocijativne lupe sa inverzima je najviše prebrojiv.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G}$ stepeno-asocijativna lupa. U stepeno-asocijativnoj lupi sa inverzima svaki element generiše cikličnu podgrupu, i red elementa x definisan je kao red grupe $\langle x\rangle$. Za svako $m \in \mathbb{N}$, moguće je obojiti sve $\approx$-klase elemenata reda m sa $\varphi(m)$ boja. Pošto elementi istog konačnog reda koji generišu različite ciklične podgrupe ne mogu biti susedni u $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$, na ovaj način mogu se obojiti svi elementi konačnog reda lupe $\mathbf{G}$ sa prebrojivo mnogo boja, tako da nikoja dva elementa obojena istom bojom ne budu susedna. Preostaje da se pokaže da je isto moguće učiniti i za sve elemente beskonačnog reda.

Označimo sa Φ podgraf od $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ indukovan skupom svih elemenata od $\mathbf{G}$ koji su beskonačnog reda. Neka je $S(x,n,m) = \{y \mid y^m = x^n\}$, za bilo koje $x \in G$, $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, i $m \in \mathbb{N}$, i neka je $\overline{S}(x) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\},m\in\mathbb{N}} S(x,n,m)$. Jasno je da je $\overline{S}(x)$ povezan jer je $\langle x\rangle\setminus\{e\}$ klika, i svi elementi iz $\overline{S}(x)$ su povezani sa bar jednim elementom iz $\langle x\rangle\setminus\{e\}$. Pokažimo da $\overline{S}(x)$ indukuje komponentu povezanosti grafa Φ. Neka je $y \overset{e}{\sim} z$ za neko $y \in \overline{S}(x)$. Onda je $y^{m_1} = x^{n_1}$ za neko $n_1 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ i neko $m_1 \in \mathbb{N}$, i postoji $t \in G$ takvo da je $z = t^{n_2}$ i $y = t^{m_2}$ za neko $n_2 \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ i neko $m_2 \in \mathbb{N}$. Tada je $z^{m_1 m_2} = t^{n_2 m_1 m_2} = x^{n_1 n_2}$, pa prema tome $z \in \overline{S}(x)$. Dakle, $\overline{S}(x)$ indukuje komponentu povezanosti.

Dokažimo još da je $S(x,n,m)$ nezavisan skup za svako $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ i $m \in \mathbb{N}$. Neka su $y, z \in S(x,n,m)$ različiti elementi. Tada je $y^m = z^m = x^n$. Ako bi važilo $y \overset{e}{\sim} z$, onda bi y i z bili različiti elementi neke beskonačne ciklične grupe, pa bi $y^m = z^m$ povlačilo $x = y$. Ovim je dobijena kontradikcija, pa sledi da nikoja dva različita elementa skupa $S(x,n,m)$ nisu susedna u $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$.

Sledi da je moguće sve čvorove skupa $\overline{S}(x)$ obojiti sa prebrojivo mnogo boja na sledeći način: za svaki od skupova $S(x, n, m)$ odabrati po jednu boju tako da se boje ne ponavljaju, a potom svaki element skupa $\overline{S}(x)$ obojiti bojom jednog od skupova $S(x, n, m)$ u kojima je taj element sadržan. Dakle, moguće je odabrati prebrojivu paletu boja, i bojama te palete obojiti sve elemente beskonačnog reda tako da nikoja dva susedna ne budu obojena istom bojom. Ovim je teorema dokazana. □

Naredno tvrđenje je direktna posledica teoreme 4.14, pošto je stepeni graf grupe podgraf obogaćenog stepenog grafa.

Posledica 4.15 *Hromatski broj stepenog grafa bilo koje grupe je najviše prebrojiv.*

Naredna dva tvrđenja takođe su posledice teoreme 4.14, jer hromatski broj grafa nije manji od ω-broja tog grafa. Međutim, ona su takođe i posledice tvrđenja 2.54, jer je svaka lokalno ciklična grupa prebrojiva.

Posledica 4.16 ([1, posledica 37]) *Kardinalnost maksimalne klike obogaćenog stepenog grafa bilo koje grupe je najviše prebrojiva.*

Posledica 4.17 ([1, teorema 10]) *Kardinalnost maksimalne klike stepenog grafa bilo koje grupe je najviše prebrojiva.*

4.4 Bojenje stepenog grafa stepeno-asocijativnog grupoida

Ova sekcija zasnovana je na radu Yaroslava Shitova [69] u kome je on istraživao gornju granicu za hromatski broj stepenog grafa polugrupe. Međutim, pošto u polugrupi ne moraju da postoje inverzni elementi, niti neutralni element, onda je u ovom slučaju jedino moguće izučavati pozitivno-stepeni graf u kome su dva elementa x i y susedna ako postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $y = x^n$ ili $x = y^n$. U nastavku ove sekcije pokazujemo da je hromatski broj pozitivno-stepenog grafa stepeno-asocijativnog grupoida najviše prebrojiv, ali je neophodno najpre da uvedemo određene pojmove i oznake. Priloženi dokazi detaljniji su nego u originalnom radu.

Podsetimo se, podgrupoid od $\mathbf{G}$ generisan sa x, tj. podgrupoid od $\mathbf{G}$ čiji je nosač $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, označavaćemo sa $\langle x \rangle$. **Red elementa**

x, što označavamo sa $o(x)$, je red grupoida $\langle x \rangle$. **Pretperiod** elementa x je maksimalni broj n takav da je, za svako $m \in \mathbb{N}$, $x^m = x^n$ ako i samo ako je $m = n$. **Period** elementa x je $o(x) - p_p(x)$, gde je $p_p(x)$ pretperiod od x. Za element x konačnog reda stepeno-asocijativnog grupoida kažemo da je **cikličan** ako su mu red i period jednaki.

Naredna lema omogućiće nam da podelimo skup svih cikličnih elemenata u uniju prebrojivo mnogo nezavisnih skupova, pri čemu ti nezavisni skupovi ne moraju biti i sami prebrojivi.

Lema 4.18 *Neka je* $\mathbf{G}$ *stepeno-asocijativan grupoid, i neka je* $n \in \mathbb{N}$. *Podgraf od* $\mathcal{G}^+(\mathbf{G})$ *indukovan skupom svih cikličnih elemenata reda* n *je disjunktna unija klika veličine* $\varphi(n)$.

Dokaz. Označimo podgraf od $\mathcal{G}^+(\mathbf{G})$ indukovan skupom svih cikličnih elemenata reda n sa Γ. Za ciklične elemente reda n pisaćemo $x \simeq y$ ako postoji $i \in \mathbb{N}$ takvo da je $x^i = y$. Lako se uočava da je relacija $\simeq$ refleksivna i tranzitivna, i da je $x \simeq y$ ako i samo ako $y \in \langle x \rangle$. Dalje, podgrupoid $\langle x \rangle$ je monoid čiji je neutralni element x^n, i u kojoj element x^i ima inverzni element x^{n-i} za svako $i < n$. Dakle, $\langle x \rangle$ je grupa. Stoga, ako je $x \simeq y$ za elemente x i y reda n, tada je y reda n element grupe $\langle x \rangle$ čiji je red n, pa je $\langle y \rangle = \langle x \rangle$ i $x \in \langle y \rangle$, tj. $y \simeq x$. Ovim je dokazano da je relacija $\simeq$ i simetrična, pa je ona relacija ekvivalencije na skupu svih cikličnih elemenata reda n grupoida $\mathbf{G}$, i sledi da je Γ disjunktna unija klika reda $\varphi(n)$. $\square$

U nastavku pokazujemo da je moguće i skup svih necikličnih elemenata konačnog reda podeliti u uniju prebrojivo mnogo nezavisnih skupova, ali najpre pokažimo jednu pomoćnu lemu.

Lema 4.19 *Neka je* $\mathbf{G}$ *stepeno-asocijativan grupoid, i neka je* $x \in G$ *element čiji je pretperiod* p. *Tada je* x^q *cikličan za svako* $q > p$.

Dokaz. Neka je $y = x^q$ za $q > p$, i neka je n period od x. Potrebno je dokazati da postoji $k > 1$ takvo da je $y^k = y$, tj. $(x^q)^k = x^q$, a ovo je ekvivalentno sa

$$\begin{aligned} kq - p &\equiv q - p \pmod{n - p}, \text{ tj.} \\ q(k-1) &\equiv 0 \pmod{n - p}. \end{aligned}$$

Dakle, za $k = n - p + 1 > 1$ se dobija $y^k = y$. Sledi da je y cikličan, što je trebalo dokazati. $\square$

Lema 4.20 *Neka su x i y dva neciklična elementa konačnog reda stepeno asocijativnog grupoida $\mathbf{G}$ jednakih pretperioda. Onda x i y nisu susedni u $\mathcal{G}^+(\mathbf{G})$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da su x i y susedni u $\mathcal{G}^+(\mathbf{G})$, i neka je p pretperiod elemenata x i y. Onda, bez umanjenja opštosti, postoji $n \in \mathbb{N}$ takvo da je $x^n = y$. Na osnovu leme 4.19, x^{np} je cikličan, dok sa druge strane y^p očigledno nije. Ovim je dobijena kontradikcija, pa je lema dokazana. $\square$

Preostaje još samo da pokažemo da i svi elementi beskonačnog reda mogu podeliti u uniju prebrojivo mnogo nezavisnih skupova.

Lema 4.21 *Neka je $\mathbf{G}$ stepeno-asocijativni grupoid, i neka je Φ podgraf od $\mathcal{G}^+(\mathbf{G})$ indukovan skupom svih elemenata beskonačnog reda grupoida $\mathbf{G}$. Onda je graf Φ disjunktna unija grafova čiji su hromatski brojevi najviše prebrojivi.*

Dokaz. Neka je $x \in G$ beskonačnog reda. Za prirodne brojeve n i m, neka je $S(x,n,m) = \{y \mid x^n = y^m\}$. Pokažimo najpre da je $S(x,n,m)$ nezavisan skup čvorova grafa Φ. Pretpostavimo suprotno, tj. da je, bez umanjenja opštosti $y = z^k$ za neko $k > 1$. Neka $y, z \in S(x,n,m)$. Tada je $x^n = y^m = z^m$. Onda sledi $x^{nk} = z^{mk} = y^m = x^n$, čime je dobijena kontradikcija jer je x element beskonačnog reda. Dakle, $S(x,n,m)$ je nezavisan skup čvorova.

Neka je $\overline{S}(x) = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} S(x,n,m)$. Pokažimo da $\overline{S}(x)$ indukuje komponentu povezanosti grafa Φ. Pokažimo najpre da je $\overline{S}(x)$ povezan skup čvorova. Neka $g, h \in \overline{S}(x)$. Onda postoje $n_1, n_2, m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ takvi da je $x^{n_1} = g^{m_1}$ i $x^{n_2} = g^{m_2}$, a onda su g i h susedni sa $x^{n_1 n_2}$. Da bismo dokazali da $\overline{S}(x)$ indukuje komponentu povezanosti, dovoljno je dokazati da svaki element z susedan sa nekim $y \in \overline{S}(x)$ takođe pripada $\overline{S}(x)$. Neka je $x^n = y^m$ za neke prirodne brojeve n i m. Ako je y stepen elementa z, očigledno je da $z \in \overline{S}$, a ako je je $z = y^k$ za neko $k \in \mathbb{N}$, onda je $x^{nk} = y^{mk} = z^m$. Dakle, $\overline{S}(x)$ indukuje komponentu povezanosti od Φ.

Stoga, graf Φ je disjunktna unija grafova $\overline{S}(x) = \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} S(x,n,m)$ za po jedan predstavnik x iz svake komponente povezanosti od Φ, i svaki od skupova $S(x,n,m)$ je nezavisan. Prema tome, čvorovi od Φ mogu se obojiti sa prebrojivo mnogo boja na sledeći način: odaberemo po jedan element x iz svake komponente povezanosti od Φ, za svaki uređeni par prirodnih brojeva (n,m) dodelimo po jednu boju tako da se boje ne ponavljaju, i potom za svaki čvor y odaberemo po jedan uređeni par (n_0, m_0) prirodnih brojeva takav da $y \in S(x, n_0, m_0)$, i obojimo y bojom dodeljenom uređenom paru (n_0, m_0). Na ovaj način dobijamo bojenje takvo da nikoja dva susedna čvora grafa Φ nisu obojena istom bojom, pa je ovim lema dokazana. $\square$

Sada možemo da dokažemo narednu teoremu, koja je glavno tvrđenje rada [69].

Teorema 4.22 (Shitov) *Hromatski broj pozitivno-stepenog grafa stepeno-asocijativnog grupoida je najviše prebrojiv.*

Dokaz. Neka su Γ, Δ i Φ podgrafovi od $\mathcal{G}^+(\mathbf{G})$ indukovani skupom svih cikličnih elemenata, skupom svih neciklličnih elemenata konačnog reda, i skupom svih elemenata beskonačnog reda, respektivno. Da bismo dokazali teoremu, odaberimo dve disjunktne prebrojive palete boja.

Čvorove grafa Γ moguće je obojiti sa prebrojivo mnogo boja na sledeći način: za svaki prirodan broj p odabrati po jednu boju tako da se boje ne ponavljaju, i svaki neciklični element x čiji je pretperiod p obojiti bojom broja p iz prve palete. Na ovaj način, na osnovu leme 4.18, nikoja dva neciklična elementa obojena istom bojom neće biti susedna u $\mathcal{G}^+(\mathbf{G})$.

Čvorovi od Δ mogu se obojiti na sledeći način: odaberemo po $\varphi(n)$ boja iz druge palete za svako $n \in \mathbb{N}$ tako da se boje ne ponavljaju, i potom, za svako $n_0 \in \mathbb{N}$, $\varphi(n_0)$ cikličnih elemenata koji generišu istu cikličnu grupu obojimo sa po jednom od $\varphi(n_0)$ boja odabranih za n_0. Na osnovu leme 4.18, na ovaj način nikoja dva ciklična elementa susedna u $\mathcal{G}^+(\mathbf{G})$ neće biti obojena istom bojom.

Takođe, i hromatski broj grafa Φ je prebrojiv na osnovu leme 4.21, pa se čvorovi grafa Φ mogu obojiti bojama prve palete tako da nikoja dva susedna čvora ne budu obojena istom bojom. Dodatno, pošto su ciklični i neciklični elementi bojeni bojama iz disjunktnih paleta, i pošto u $\mathcal{G}^+(\mathbf{G})$ nijedan element beskonačnog reda nije susedan ni sa kojim elementom konačnog reda, ovim smo dokazali da graf $\mathcal{G}^+(\mathbf{G})$ ima najviše prebrojiv hromatski broj. $\square$

4.5 Perfektnost obogaćenog stepenog grafa i stepenog grafa

Za graf Γ kažemo da je perfektan ako je za svaki indukovan podgraf Δ od Γ hromatski broj od Δ jednak ω-broju grafa Δ. Claude Berge šezdesetih godina dvadesetog veka primetio je da je da perfektni grafovi ne sadrže ni neparnu konturu dužine bar 5 kao indukovan podgraf, a takođe je primetio da ne sadrže ni komplement neparne konture dužine bar 5 kao indukovani podgraf. Naime, hromatski broj neparne konture dužine bar 5 je 3, a njen ω-broj je 2. Takođe, ω-broj komplementa konture dužine $2k+1$, $k>1$, je k, a njegov hromatski broj je $k+1$. Graf Γ takav da ni Γ ni njegov komplement ne sadrže neparnu konturu dužine bar 5 zovemo Bergeov graf. Claude Berge postavio je 1961. godine hipotezu da je graf perfektan ako i samo ako je Bergeov graf. Godine 2002. [20] dokazano je da je ova hipoteza tačna, i to tvrđenje poznato je kao jaka teorema o perfektnim grafovima, a u ovoj disertaciji je navedena kao teorema 1.16.

Prvi deo ove sekcije bavi se perfektnošću stepenog grafa grupe, i zasnovan je na rezultacima iz [1]. Drugi deo ove sekcije, koji je zasnovan na originalnim rezultatima objavljenim u [73], bavi se perfektnošću obogaćenog stepenog grafa grupe.

Na osnovu leme 4.12, samo grupe konačnog eksponenta mogu imati stepeni graf obojen sa konačno mnogo boja. U nastavku dokazujemo i da svaka grupa konačnog eksponenta ima perfektan stepeni graf, što je rezultat iz [1], pri čemu je priloženi dokaz nešto drugačiji i detaljniji nego u originalnom radu.

Lema 4.23 *Neka je* $\mathbf{G}$ *grupa konačnog eksponenta. Skup* $M \subseteq G$ *je maksimalna klika grafa* $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ *ako i samo ako:*

(a) *M generiše maksimalnu cikličnu podgrupu grupe* $\mathbf{G}$*,*

(b) *M je unija $\approx_{\mathbf{G}}$-klasa, i*

(c) *Redovi elemenata skupa M čine maksimalni lanac u odnosu na relaciju deljenja, kome je najmanji element 1, a najveći element* $|\langle M\rangle|$.

Dokaz. Pretpostavimo da M ispunjava uslove (a), (b) i (c). Lako se vidi da (a) i (c) povlače da je M klika. Neka je $\langle M\rangle = \mathbf{C} = \langle c\rangle$. Pretpostavimo da je $x \in G \setminus M$ susedan sa svim elementima skupa M u $\mathcal{G}(\mathbf{G})$. Ne može biti $x \to c$ zbog (b) i jer c generiše maksimalnu cikličnu podgrupu od $\mathbf{G}$. Pretpostavimo onda da $c \to x$. Zbog (b) i (c) sledi da postoji $y \in M$ takav da nije ni $o(y) \mid o(x)$, ni $o(x) \mid o(y)$, što povlači $x \overset{p}{\not\sim} y$. Dakle, ne postoji element $x \in G \setminus M$ susedan sa svim elementima iz M, pa je M maksimalna klika grafa $\mathcal{G}(\mathbf{G})$.

Pretpostavimo sada da je M maksimalna klika grafa $\mathcal{G}(\mathbf{G})$. Na osnovu tvrđenja 2.54, sve klike grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ su konačne, pa je i M

konačna. Neka je c element klike M maksimalnog reda. Pošto elementi $\approx_{\mathbf{G}}$-klase imaju isto zatvoreno susedstvo, (b) očigledno važi. Ako $\langle M\rangle$ ne bi bila maksimalna ciklična podgrupa grupe $\mathbf{G}$, onda bi postojao element d takav da je $\langle c\rangle = \langle M\rangle < \langle d\rangle$, i u tom slučaju, pošto bi tada $M \cup [d]_{\approx_{\mathbf{G}}}$ bila klika, klika M ne bi bila maksimalna. Ovim je pokazano (a). Zato što elementi $x, y \in G$ takvi da niti $o(x) \mid o(y)$, niti $o(y) \mid o(x)$, nisu susedni u $\mathcal{G}(\mathbf{G})$, redovi elemenata skupa M čine lanac. Ukoliko oni ne bi čini maksimalan lanac sa najmanjim elementom 1 i najvećim elementom $|\langle M\rangle|$, onda bi, slično kao malopre, postojao element e takav da je $M \cup [e]_{\approx_{\mathbf{G}}}$ klika koja sadrži M, čime bi se dobila kontradikcija. Dakle, važi i (c). Ovim je Lema dokazana. □

Teorema 4.24 ([1, teorema 12]) *Neka je $\mathbf{G}$ grupa konačnog eksponenta. Onda je $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ perfektan graf i važi:*

$$\chi(\mathcal{G}(\mathbf{G})) = \omega(\mathcal{G}(\mathbf{G}))$$
$$= \max\Big\{ \sum_{d\in D} \varphi(d) \;\Big|\; D \in \mathcal{D}(n) \text{ za neko } n \in \mathbb{N},\ \text{i } (\exists x \in G) o(x) = n \Big\},$$

gde je $\mathcal{D}(n)$ skup svih maksimalnih lanaca poseta $(\mathbb{N}_n, |)$.

Dokaz. Za prirodan broj n označimo sa $\mathcal{D}(n)$ skup svih maksimalnih lanaca poseta $(\mathbb{N}_n, |)$, i neka je

$$\mathrm{h}(\mathbf{G}) = \max\Big\{ \sum_{d\in D} \varphi(d) \;\Big|\; D \in \mathcal{D}(n) \text{ za neko } n \in \mathbb{N},\ \text{i } (\exists x \in G) o(x) = n \Big\}.$$

Onda, na osnovu leme 4.23, sledi jednakost $\omega(\mathcal{G}(\mathbf{G})) = \mathrm{h}(\mathbf{G})$.

Preostaje da se dokaže da je $\chi(\mathcal{G}(\mathbf{G})) \leq \omega(\mathcal{G}(\mathbf{G}))$. Primetimo da je relacija $\leq$ na G definisana sa:

$$x \leq y \text{ ako je } y \to x \text{ ili } x = y,$$

preduređenje, tj. refleksivna i tranzitivna relacija. Dalje, neka je $\leqq$ relacija poretka na G koja se dobija linearnim uređivanjem svake $\approx$-klase. Podsetimo se da je visina elementa x u parcijalno uređenom skupu, što označamo sa $h(x)$, maksimalna dužina lanca kome je x najveći element. Primetimo da je $\mathrm{h}(\mathbf{G}) = \max\{h(x) \mid x \in G\}$. Da bismo pokazali da postoji particija poseta $(G, \leqq)$ u $\mathrm{h}(\mathbf{G})$ antilanaca, dovoljno je primetiti da ne postoji nijedan par elemenata iz G koji su uporedivi u $(G, \leqq)$, a čije su visine u $(G, \leqq)$ jednake. Zaista, ako je $x \leqq$

y i $x \neq y$, onda je lanac maksimalne dužine kome je x najveći element sadržan u lancu kome je y najveći element, pa je $h(x) < h(y)$. Dakle, pošto postoji particija poseta $(G, \leqq)$ u h($\mathbf{G}$) antilanaca, i pošto su svaka dva susedna čvora u $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ uporediva u $(G, \leqq)$, onda ova particija u $\omega(\mathcal{G}(\mathbf{G}))$ antilanaca određuje jedno bojenje grafa $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ sa u $\omega(\mathcal{G}(\mathbf{G}))$ boja. Ovim smo pokazali da je $\chi(\mathcal{G}(\mathbf{G})) \leq \omega(\mathcal{G}(\mathbf{G}))$, čime je dokazana jednakost iz formulacije leme.

Označimo graf $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ sa Γ, i pokažimo još da je on perfektan. Neka je $H \subseteq G$, i neka je C maksimalna klika od $\Gamma[H]$. Onda je C lanac maksimalne dužine u potposetu $(H, \leqq)$ od $(G, \leqq)$, pa postoji particija poseta $(H, \leqq)$ u $|C|$ antilanaca. Na ovaj način, slično kao malopre, dobijamo bojenje indukovanog podgrafa $\Gamma[H]$ od $\mathcal{G}(\mathbf{G})$. Ovim je teorema dokazana. □

Pokažimo sada i niz posledica prethodne teoreme. Naredna tri trvđenja predstavljena su u [1], a u ovoj disertaciji ih navodimo i sa dokazima. Posledicu 4.26 navodimo za opštiju klasu grupa nego u originalnom radu.

Posledica 4.25 ([1, posledica 13]) *Za svaku grupu* $\mathbf{G}$ *sledeći uslovi su ekvivalentni:*

(a) $\chi(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$;

(b) $\omega(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$;

(c) $\mathbf{G}$ *je konačnog eksponenta.*

Dodatno, hromatski broj grafa $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ *nije veći od eksponenta grupe* $\mathbf{G}$.

Dokaz. Pošto je $\omega(\mathcal{G}(\mathbf{G})) \leq \chi(\mathcal{G}(\mathbf{G}))$, onda (a) implicira (b), a, na osnovu leme 4.12, (b) povlači (c). Konačno, na osnovu teoreme 4.24, (c) implicira (a) i (b). □

Posledica 4.26 *Neka je* $\mathbf{G}$ *nilpotentna grupa kojoj je eksponent* n. *Onda je:*

$$\chi(\mathcal{G}(\mathbf{G})) = \omega(\mathcal{G}(\mathbf{G})) = \max\Big\{ \sum_{d \in D} \varphi(d) \;\Big|\; D \in \mathcal{D}(n) \Big\},$$

gde je $\mathcal{D}(n)$ *skup svih maksimalnih lanaca poseta* $(\mathbb{N}_n, |)$.

Dokaz. Tvrdnja ove posledice sledi iz činjenice da nilpotentna grupa konačnog eksponenta sadrži element čiji je red eksponent te grupe, i teoreme 4.24. □

Posledica 4.27 ([1, posledica 15]) *Neka je* $\mathbf{H}$ *podgrupa konačnog indeksa grupe* $\mathbf{G}$*. Onda je* $\omega(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$ *ako i samo ako je* $\omega(\mathcal{G}(\mathbf{H})) < \aleph_0$*.*

Dokaz. Na osnovu posledice 4.25, $\omega(\mathcal{G}(\mathbf{H})) < \aleph_0$ povlači da je eksponent grupe $\mathbf{H}$ konačan. Pošto je indeks podgrupe $\mathbf{H}$ od $\mathbf{G}$ konačan, onda je i eksponent grupe $\mathbf{G}$ konačan, što implicira, na osnovu posledice 4.25, implicira da je $\omega(\mathcal{G}(\mathbf{G})) < \aleph_0$. Druga implikacija trivijalno važi. □

Primetimo da ovakvo tvrđenje ne važi za maksimalnu kardinalnost nezavisnog skupa čvorova stepenog grafa grupe.

Primer 4.28 *Neka je* $\mathbf{G} = \mathbf{C}_2 \times \mathbf{C}_{2^\infty}$ *i* $\mathbf{H} = \{0\} \times \mathbf{C}_{2^\infty}$*, gde je* 0 *jedinični element u* $\mathbf{C}_2$*. Pošto je* $\mathcal{G}(\mathbf{C}_{2^\infty})$ *kompletan graf, onda je* $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{H})) = 1$*. Sa druge strane, skup* $\{1\} \times C_{2^\infty}$ *je nezavisan u* $\mathcal{G}(\mathbf{G})$*, pa je* $\alpha(\mathcal{G}(\mathbf{G})) = \aleph_0$*.*

U nastavku ove sekcije bavimo se perfektnošću obogaćenog stepenog grafa. Dokazi koji slede originalni su rezultat objavljen u [73]. Kao što smo videli, sve grupe konačnog eksponenta imaju perfektne stepene grafove. Naredni primer ilustruje da analogno tvrđenje ne važi za obogaćene stepene grafove. Dalje, u nastavku ove sekcije, koristeći jaku teoremu o perfektnim grafovima, dokazaćemo za nilpotentne konačne grupe da imaju perfektan obogaćeni stepeni graf ako i samo ako imaju najviše dve neciklične podgrupe Sylowa.

Primer 4.29 *Postoji konačna Abelova grupa čiji obogaćeni stepeni graf nije perfektan.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G} = \langle a_1\rangle \times \langle a_2\rangle \times \langle b_1\rangle \times \langle b_2\rangle \times \langle c_1\rangle \times \langle c_2\rangle$, pri čemu su redovi a_1 i a_2, b_1 i b_2, i c_1 i c_2 2, 3 i 5, redom. Onda njeni elementi a_1b_1, b_1c_2, a_2, b_2 i a_1c_1 čine pentagon Π kao indukovan podgraf grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$. Zaista, važi $a_1b_1, b_1c_2 \in \langle a_1b_1c_2\rangle$, $b_1c_2, a_2 \in \langle a_2b_1c_2\rangle$, $a_2, b_2 \in \langle a_2b_2\rangle$, $b_2, a_1c_1 \in \langle a_1b_2c_1\rangle$ i $a_1c_1, a_1b_1 \in \langle a_1b_1c_1\rangle$, i nijedan drugi od parova a_1b_1 i a_2, a_2 i a_1c_1, a_1c_1 i b_1c_2, b_1c_2 i b_2, i b_2 i a_1b_1 ne generiše cikličnu grupu. Na primer, $\langle a_1c_1\rangle$ i $\langle b_1c_2\rangle$ sadrže dve različite ciklične podgrupe reda 3, $\langle c_1\rangle$ i $\langle c_2\rangle$, pa bi svaka ciklična podgrupa koja sadrži a_1c_1 i b_2c_2 sadržala i dve ciklične podgrupe istog reda, što je nemoguće. Maksimalna veličina klike pentagona Π je 2, dok je njegov hromatski broj jednak 3, pa je ovim dokazano da $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ nije perfektan. □

Napomenimo da će teorema 4.30 implicirati da je grupa iz gornjeg primera nilpotentna grupa minimalnog reda čiji obogaćeni stepeni graf nije perfektan. U nastavku ćemo dati karakterizaciju konačnih nilpotentnih grupa koje imaju perfektne obogaćene stepene grafove.

Podsetimo se, konačna grupa je nilpotentna ako i samo ako ima jedinstvene podgrupe Sylowa, što važi ako i samo ako je posmatrana grupa direktni proizvod svojih podgrupa Sylowa.

Za grupu $\mathbf{G}$, definišimo relaciju $\overset{e}{\simeq}_{\mathbf{G}}$ na G tako da je $x \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{G}} y$ ako je $x = y$ ili $x \overset{e}{\sim} y$.

Teorema 4.30 *Konačna nilpotentna grupa ima perfektan obogaćeni stepeni graf ako i samo ima najviše dve neciklične podgrupe Sylowa.*

Dokaz. Pretpostavimo da su $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ i $\mathbf{H}_3$ tri različite neciklične podgrupe Sylowa nilpotentne grupe $\mathbf{G}$. Dokazaćemo da $\mathcal{G}_e(\mathbf{H})$ sadrži pentagon kao indukovan podgraf, gde je $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \times \mathbf{H}_2 \times \mathbf{H}_3$. Na osnovu teoreme 1.11, redovi podgrupa $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ i $\mathbf{H}_3$ su uzajamno prosti. Na osnovu tvrđenja 2.54, u $\mathbf{H}_1$ postoje elementi a_1 i a_2 koji nisu susedni u $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$. Analogno, postoje i elementi $b_1, b_2 \in H_2$ i $c_1, c_2 \in H_3$ koji nisu susedni u $\mathcal{G}_e(\mathbf{H}_2)$ i $\mathcal{G}_e(\mathbf{H}_3)$, redom. Dalje, na osnovu leme 2.56, sledi da elementi a_1b_1, b_1c_2, a_2, b_2 i a_1c_1 grupe $\mathbf{H}$ čine pentagon kao indukovan podgraf grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{H})$. Ovo očigledno povlači da i $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ sadrži pentagon kao indukovan podgraf. Ovim je dokazana jedna implikacija.

Pretpostavimo sada da je $\mathbf{G} = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{K}_i$, gde $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ imaju uzajamno proste redove, pri čemu neke od njih mogu biti i trivijalne. Neka su $\mathbf{K}_3, \mathbf{K}_4, \ldots, \mathbf{K}_n$ ciklične podgrupe od $\mathbf{G}$, i označimo $\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2$ sa $\mathbf{K}$. Dokazaćemo da $\mathcal{G}_e(\mathbf{K})$ ne sadrži neparnu konturu dužine bar 5, niti komplement takve konture, kao indukovan podgraf. U dokazu ove teoreme ćemo ove grafove nazivati zabranjenim grafovima.

Primetimo najpre da $a \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{P}} b \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{P}} c \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{P}} d$, gde je $\mathbf{P}$ konačna p-grupa $\mathbf{P}$, povlači $a \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{P}} c$ ili $b \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{P}} d$. Zaista, pošto su b i c sadržani u nekoj cikličnoj p-grupi, jedan je stepen drugog. Ako je, bez umanjenja opštosti, c stepen elementa b, onda je $a \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{P}} c$.

Pretpostavimo sada da $\mathcal{G}_e(\mathbf{K})$ sadrži neparnu konturu dužine bar 5 kao indukovan podgraf. Neka elementi $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_{2k+1}b_{2k+1}$ čine tu konturu, gde $a_i \in H_1$ i $b_i \in H_2$ za sve i. Onda važi:

$$a_1b_1 \overset{e}{\sim}_{\mathbf{K}} a_2b_2 \overset{e}{\sim}_{\mathbf{K}} a_3b_3 \overset{e}{\sim}_{\mathbf{K}} \cdots \overset{e}{\sim}_{\mathbf{K}} a_{2k+1}b_{2k+1} \overset{e}{\sim}_{\mathbf{K}} a_1b_1,$$

što na osnovu leme 2.56 implicira

$$a_1 \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_2 \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_3 \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} \cdots \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_{2k+1} \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_1 \text{ i}$$
$$b_1 \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_2} b_2 \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_2} b_3 \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_2} \cdots \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_2} b_{2k+1} \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_2} b_1.$$

Pored toga, važi $a_1b_1 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}} a_3b_3$, što povlači $a_1 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_3$ ili $b_1 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_2} b_3$. Na ovaj način dobijamo:

$$
\begin{gathered}
a_1 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_3 \text{ ili } b_1 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_2} b_3,\\
a_2 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_4 \text{ ili } b_2 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_2} b_4,\\
\dots\\
a_{n-1} \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_1 \text{ ili } b_{n-1} \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_2} b_1 \text{ i}\\
a_{2k+1} \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_2 \text{ ili } b_{2k+1} \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_2} b_2,
\end{gathered}
$$

što može da se posmatra kao kontura neparne dužine obojena u dve boje: ta kontura je $(1,3),(2,4),(3,5),\dots,(2k+1,2)$, pri čemu je $(i,i+2)$ obojen sa a samo ako je $a_i \stackrel{e}{\not\simeq} a_{i+_{2k+1}2}$, a obojen je sa b samo ako $b_i \stackrel{e}{\not\simeq} b_{i+_{2k+1}2}$. Pošto u takvoj konturi postoje dva uzastopna elementa obojena istom bojom, bez gubljenja opštosti možemo pretpostaviti da je $a_1 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_3$ i $a_2 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_4$. Sa druge strane, kao što smo videli ranije, $a_1 \stackrel{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_2 \stackrel{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_3 \stackrel{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_4$ povlači $a_1 \stackrel{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_3$ ili $a_2 \stackrel{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_4$. Na ovaj način dobili smo kontradikciju, pa $\mathcal{G}_e(\mathbf{K})$ ne sadrži neparnu konturu dužine bar 5.

Dokažimo dalje da $\mathcal{G}_e(\mathbf{K})$ ne sadrži ni komplement neparne konture dužine bar 7. Primetimo da već imamo ovaj rezultat za dužinu 5, jer je komplement konture dužine 5 kontura. Pretpostavimo da $\mathcal{G}_e(\mathbf{K})$ sadrži komplement konture $a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_{2k+1}b_{2k+1}$, gde $a_i \in H_1$ i $b_i \in H_2$ za sve i. Onda važi:

$$
\begin{gathered}
a_1 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_2 \text{ ili } b_1 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_2} b_2,\\
a_2 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_3 \text{ ili } b_2 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_2} b_3,\\
\dots\\
a_{2k+1} \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_1 \text{ ili } b_{2k+1} \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_2} b_1,
\end{gathered}
$$

što može biti posmatrano kao kontura dužine bar 7 obojena u dve boje. Takva kontura ima tri po parovima nesusedna elementa, pa postoje dva nesusedna elementa konture koja su obojena istom bojom. Prema tome, bez umanjenja opštosti možemo pretpostaviti da je $a_1 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_2$ i $a_3 \stackrel{e}{\not\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_4$. Sa druge strane, važi $a_2 \stackrel{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_4 \stackrel{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_1 \stackrel{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_3$, što implicira $a_1 \stackrel{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_2$ ili $a_3 \stackrel{e}{\simeq}_{\mathbf{K}_1} a_4$. Ponovo kontradikcija. Dakle, $\mathcal{G}_e(\mathbf{K})$ ne sadrži nijedan od zabranjenih grafova kao indukovan podgraf.

Primetimo da je $\mathbf{C} = \prod_{i=3}^{n} \mathbf{K}_i$ ciklična grupa. Pretpostavimo da $\mathbf{G} = \mathbf{K} \times \mathbf{C}$ sadrži zabranjeni graf kao indukovani podgraf. Onda, na osnovu leme 2.56, jer je $x \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{C}} y$ za sve $x, y \in C$, sledi da $\mathbf{K}$ sadrži zabranjeni graf, što je kontradikcija. Prema tome, obogaćeni stepeni graf nijedne konačne nilpotentne grupe sa najviše dve neciklične podgrupe Sylowa ne sadrži zabranjeni graf kao indukovani podgraf. Na osnovu jake teoreme o perfektnim grafovima dobijamo da svaka konačna nilpotentna grupa sa najviše dve neciklične podgrupe Sylowa ima perfektan obogaćeni stepeni graf. Ovim je teorema dokazana. □

Sa druge strane, naredna teorema implicira da postoji mnogo grupa koje nemaju perfektan obogaćeni stepeni graf, ali čijem je obogaćenom stepenom grafu ω-broj jednak hromatskom broju. Podsetimo se, grafove s ovom osobinom nazivamo slabo perfektnim grafovima.

Teorema 4.31 *Ako konačna grupa* $\mathbf{G}$ *ima element čiji je red jednak eksponentu grupe* $\mathbf{G}$*, onda je* $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ *slabo perfektan.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G}$ konačna grupa koja ima element čiji je red jednak eksponentu grupe $\mathbf{G}$. Neka je x takav element, i neka je $o(x) = n$. Onda je $\omega(\mathcal{G}_e(\mathbf{G})) = n$. Možemo obojiti elemente grupe $\langle x \rangle$ sa n boja. Dalje, za svaku $\approx$-klasu D od G postoji $\approx$-klasa $C \subseteq \langle x \rangle$, takva da C i D sadrže elemente istog reda. Prema tome, možemo obojiti elemente od D istim bojama kojima su obojeni i elementi od C. Pretpostavimo sada da su svi čvorovi grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ obojeni na ovaj način, i pretpostavimo da su y i z obojeni istom bojom. Onda je $o(y) = o(z)$ i $y \not\approx z$, što povlači $y \overset{e}{\not\sim} z$. Iz tog razloga, u ovakvom bojenju grafa $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ ne postoji par susednih čvorova koji su obojeni istom bojom, i važi $\chi(\mathcal{G}_e(\mathbf{G})) = \omega(\mathcal{G}_e(\mathbf{G}))$. □

Posledica 4.32 *Ako je* $\mathbf{G}$ *konačna nilpotentna grupa, onda je* $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ *slabo perfektan.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{G}$ konačna nilpotentna grupa. Onda je ona, na osnovu teoreme 1.11, proizvod svojih podgrupa Sylowa, što implicira da $\mathbf{G}$ ima element čiji je red jednak eksponentu grupe $\mathbf{G}$. Prema tome, na osnovu teoreme 4.31 sledi da je $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ slabo perfektan. □

Zaključak

U drugoj glavi uvedeni su pojmovi usmerenog stepenog grafa, stepenog grafa i obogaćenog stepenog grafa grupe. Nakon toga, u sekciji 2.4 pokazujemo da stepeni graf, bilo da je definisan insistirajući da eksponent iz definicije bude prirodan broj, bilo da je dozvoljavajući da eksponent bude ceo broj, stepeni graf nosi istu količinu informacija o polaznoj strukturi. Ovo je rezultat iz [72]. U ovoj disertaciji kažemo da su dva elementa u stepenom grafu susedna ako

$$(\exists n \in \mathbb{Z})(y = x^n \vee x = y^n).$$

U nastavku glave prezentovan je Cameronov dokaz da stepeni graf konačne grupe određuje usmereni stepeni graf, ali uopšten za konačne stepeno-asocijativne lupe sa inverzima. U sekciji 2.7 izloženi su rezultati Camerona, Guerre i Jurine [14] da, u slučaju torziono slobodnih grupa u kojima je svaki element sadržan u jedinstvenoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi, stepeni graf određuje usmereni stepeni graf, a pružen je dokaz i za analognu tvrdnju za torziono slobodne grupe klase nilpotentnosti 2, što je rezultat rada [72]. U sekciji 2.8 pokazane su osnovne osobine obogaćenog stepenog grafa, i dokazano je da se usmereni stepeni graf i obogaćeni stepeni graf međusobno određuju u slučaju konačnih grupa, što je rezultat iz [73].

U trećoj glavi najpre se pokazuje da je grupa automorfizama stepenog grafa konačne stepeno-asocijativne lupe sa inverzima podgrupa grupe automorfizama obogaćenog stepenog grafa. Takođe su okarakterisane grupe u čijem slučaju grupa automorfizama obogaćenog stepenog grafa ima razne osobine. Dalje, pružen je opis obogaćenih stepenih grafova konačnih Abelovih grupa, i, konačno, predstavljen je algoritam koji za grupu $\mathbf{G}$ sa jedinstvenom p-podgrupom Sylowa $\mathbf{G}_p$ iz njenog obogaćenog stepenog grafa konstruiše obogaćeni stepeni graf od $\mathbf{G}_p$. Treća glava skoro u celosti je zasnovana na rezultatima [73] i [72].

Četvrta glava bavi se kombinatornim svojstvima obogaćenog stepenog grafa i stepenog grafa. U sekciji 4.1 prezentiran je rezultat Bernharda Neumanna [54] koji govori da komutirajući graf grupe, ako nema beskonačni nezavisni skup, nema ni proizvoljno velike konačne nezavisne skupove. U nastavku glave su karakterisane sve nilpotentne grupe čiji stepeni graf nema beskonačan nezavisan skup, što je rezultat rada [1]. Izložen je rezultat Yaroslava Shitova [69], koji je dokazao da je hromatski broj stepenog grafa stepeno-asocijativnog grupoida najviše prebrojiv. Analogno tvrđenje takođe je dokazano za obogaćeni stepeni graf stepeno-asocijativne lupe sa inverzima. Prezentiran je i dokaz iz [1] da je hromatski broj stepenog grafa grupe konačnog eksponenta perfektan, i pokazano je da konačna nilpotentna grupa ima perfektan obogaćeni stepeni graf ako i samo ako ima najviše dve neciklične podgrupe Sylowa što je rezultat rada [73].

Literatura

[1] G. Aalipour, S. Akbari, P. J. Cameron, R. Nikandish, F. Shaveisi, *On the structure of the power graph and the enhanced power graph of a group*, The Electronic Journal of Combinatorics 24 (2017), no. 3, 18 pp.

[2] J. Abawajy, A. V. Kelarev, M. Chowdhury, *Power graphs: a survey*, Electronic Journal of Graph Theory and Applications 1 (2013), no. 2, 125-147.

[3] N. Akbari, A. R. Ashrafi, *Note on the power graph of finite simple groups*, Quasigroups Related Systems 23 (2015), no. 2, 165-173.

[4] J. Arajo, M. Kinyon, J. Konieczny, *Minimal paths in the commuting graphs of semigroups*, European Journal of Combinatorics, 32 (2011), 178-197.

[5] J. Araujo, W. Bentz, J. Konieczny, *The commuting graph of the symmetric inverse semigroup*, Israel Journal of Mathematics 207 (2015), no. 1, 103-149.

[6] R. H. Bruck, *A Survey of Binary Systems*, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1958.

[7] S. Bera, A. K. Bhuniya, *On enhanced power graph*, Journal of Algebra and Its Applications 17 (2018), no. 8, 8 pp.

[8] A. K. Bhuniya, Sajal Kumar Mukherjee, *On the power graph of the direct product of two groups*, Electronic Notes in Discrete Mathematics 63 (2017), 197-202.

[9] W. W. Boone, *The word problem*, Proceedings of the National Academy of Sciences 44 (1958), no. 10, 1061-1065.

[10] R. Brauer, K. A. Fowler, *On groups of even order*, The Annals of Mathematics 62 (1955), no. 3, 567-583.

[11] J. R. Britnell, N. Gill, *Perfect commuting graphs*, Journal of Group Theory 20 (2017), no. 1, 71-102.

[12] P. J. Cameron, *The power graph of a finite group, II*, Journal of Group Theory 13 (2010), no. 6, 779-783.

[13] P. J. Cameron, S. Ghosh, *The power graph of a finite group*, Discrete Mathematics 311 (2011), no. 13, 1220-1222.

[14] P. J. Cameron, H. Guerra, Š. Jurina, *The power graph of a torsion-free group*, Journal of Algebraic Combinatorics 49 (2019), no. 1, 83-98.

[15] P. J. Cameron, S. H. Jafari, *On the connectivity and independence number of power graphs of groups*, https://arxiv.org/abs/1910.06721

[16] A. Cayley, *Desiderata and Suggestions: No. 2. The Theory of Groups: Graphical Representation*, American Journal of Mathematics 1 (1878), no. 2, 174-176.

[17] I. Chakrabarty, S. Ghosh, M. K. Sen, *Undirected power graphs of semigroups*, Semigroup Forum 78 (2009), no. 3, 410-426.

[18] G. Chartrand, L. Lesniak, *Graphs and Digraphs*, Third Edition, Chapman & Hall/CRC, 1996.

[19] S. Chattopadhyay, P. Panigrahi, F. Atik, *Spectral radius of power graphs on certain finite groups*, Indagationes Mathematicae 29 (2018), no. 2, 730-737.

[20] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas, *The strong perfect graph theorem*, Annals of Mathematics 164 (2006), no. 1, 51-229.

[21] S. Crvenković, I. Dolinka, R. Sz. Madarász, *Odabrane teme opšte algebre - grupe, prsteni*, Novi Sad, 1998.

[22] B. Curtin, G.R. Pourgholi, H. Yousefi-Azari, *On the punctured power graph of a finite group*, Australas. J. Combin. 62 (2015), 1-7.

[23] M. Dehn, *Über unendliche diskontinuierliche Gruppen*, Mathematische Annalen 71 (1911), no. 1, 116-144.

[24] L. A. Dupont, D. G. Mendoza, M. Rodrguez, *The rainbow connection number of enhanced power graph*, https://arxiv.org/abs/1708.07598

[25] M. Feng, X. Ma, K. Wang, *The structure and metric dimension of the power graph of a finite group*, European Journal of Combinatorics 43 (2015), 82-97.

[26] B. Fischer, *Finite Groups Generated by 3-Transpositions, I*, Inventiones mathematicae 13 (1971), no. 3, 232-246.

[27] R. Frucht, *Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakten Gruppe*, Compositio Math. 6 (1938), 239-250.

[28] M. Giudici, C. Parker, *There is no upper bound for the diameter of the commuting graph of a finite group*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 120 (2013), no. 7, 1600-1603.

[29] M. Giudici, A. Pope, *On bounding the diameter of the commuting graph of a group*, Journal of Group Theory 17 (2014), no. 1, 131-149.

[30] M. Grulović, *Osnovi teorije grupa*, Univerzitet u Novom Sadu, Institut za matematiku, 1997.

[31] A. Hamzeh, *Signless and normalized Laplacian spectrums of the power graph and its supergraphs of certain finite groups*, J. Indones. Math. Soc. 24 (2018), no. 1, 61-69.

[32] A. Hamzeh, A. R. Ashrafi, *Automorphism groups of supergraphs of the power graph of a finite group*. European J. Combin. 60 (2017), 82-88.

[33] A. Hamzeh, A. R. Ashrafi, *Spectrum and L-spectrum of the power graph and its main supergraph for certain finite groups*, Filomat 31 (2017), no. 16, 5323-5334.

[34] A. Hamzeh, A. R. Ashrafi, *The order supergraph of the power graph of a finite group*, Turkish J. Math. 42 (2018), no. 4, 1978-1989.

[35] P. Hegarty, D. Zhelezov, *On the diameters of commuting graphs arising from random skew-symmetric matrices*, Combinatorics, Probability and Computing 23 (2014), no. 3, 449-459.

[36] A. Iranmanesh, A. Jafarzadeh, *On the commuting graph associated with the symmetric and alternating groups*, Journal of Algebra and its Applications 7 (2008), no. 1, 129-146.

[37] A. V. Kelarev, S. J. Quinn, *A combinatorial property and power graphs of groups*, Contributions to general algebra 12 (2000), 229-235.

[38] A. V. Kelarev, S. J. Quinn, *A combinatorial property and power graphs of semigroups*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 45 (2004), no. 1, 1-7.

[39] A. V. Kelarev, S. J. Quinn, *Directed graph and combinatorial properties of semigroups*, Journal of Algebra 251 (2002), no. 1, 16-26.

[40] A. V. Kelarev, S. J. Quinn, R. Smolikova, *Power graphs and semigroups of matrices*, Bulletin of the Australian Mathematical Society 63 (2001), no. 2, 341-344.

[41] D. Kőnig, *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen; kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe*, Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft m. b. h., 1936.

[42] X. Ma, M. Feng, *On the chromatic number of the power graph of a finite group*, Indag. Math. (N.S.) 26 (2015), no. 4, 626-633.

[43] X. Ma, M. Feng, K. Wang, *The rainbow connection number of the power graph of a finite group*, Graphs Combin. 32 (2016), no. 4, 1495-1504.

[44] X. Ma, M. Feng, K. Wang, *The strong metric dimension of the power graph of a finite group*, Discrete Applied Mathematics Volume 239 (2018), 159-164.

[45] X. Ma, R. Fu, X. Lu, *On the independence number of the power graph of a finite group*, Indagationes Mathematicae 29 (2018), 794-806.

[46] X. Ma, Y. She, *The metric dimension of the enhanced power graph of a finite group*, Journal of Algebra and Its Applications (2019), https://doi.org/10.1142/S0219498820500206

[47] H. Maschke, *The Representation of Finite Groups, Especially of the Rotation Groups of the Regular Bodies of Three-and Four-Dimensional Space, by Cayley's Color Diagrams*, American Journal of Mathematics 18 (1896), no. 2, 156-194.

[48] B. D. McKay, G. Royle, *The Transitive Graphs with at Most 26 Vertices*, Ars Combin. 30 (1990), 161-176.

[49] Z. Mehranian, A. Gholami, A. R. Ashrafi, *A note on the power graph of a finite group*, Int. J. Group Theory 5 (2016), no. 1, 1-10.

[50] M. Mirzargar, A.R. Ashrafi, M.J. Nadjafi-Arani, *On the power graph of a finite group*, Filomat 26 (2012), no. 6, 1201-1208.

[51] M. Mirzargar, P. P. Pach, A. R. Ashrafi, *The automorphism group of commuting graph of a finite group*, Bulletin of the Korean Mathematical Society 51 (2014), no. 4, 1145-1153.

[52] A. R. Moghaddanfar, S. Rahbariyan, W. J. Shi, *Certain properties of the power graph associated with a finite group*, Journal of Algebra and Its Applications 13 (2014), no. 7, 18 pp.

[53] G. L. Morgan, C. W. Parker, *The diameter of the commuting graph of a finite group with trivial centre*, Journal of Algebra 393 (2013), 41-59.

[54] B. H. Neumann, *A problem of Paul Erdős on groups*, Journal of the Australian Mathematical Society 21 (1976), no. 4, 467-472.

[55] П. С. Новиков, *Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп*, Тр. МИАН СССР 44 (1955), 3-143.

[56] R. P. Panda, S. Dalal, J. Kumar, *On the Enhanced Power Graph of a Finite Group*, https://arxiv.org/abs/2001.08932

[57] R. P. Panda, K. V. Krishna, *On connectedness of power graphs of finite groups*, Journal of Algebra and Its Applications 17 (2018), no. 10, 20 pp.

[58] H. O. Pflugfelder, *Quasigroups and Loops: Introduction*, Sigma Series in Pure Math. 7, Heldermann Verlag, Berlin, 1990.

[59] K. Pourghobadi, S. H. Jafari, *The diameter of power graphs of symmetric groups*, Journal of Algebra and Its Applications 17 (2018), no. 12, 11 pp.

[60] G. R. Pourgholi, H. Yousefi-Azari, A. R. Ashrafi, *The undirected power graph of a finite group*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 38 (2015), no. 4, 1517-1525.

[61] R. Rajkumar, T. Anitha, *Reduced power graph of a group*, Electronic Notes in Discrete Mathematics 63 (2017), 69-76.

[62] S. M. Robati, *The power graph on the conjugacy classes of a finite group*, Acta Math. Hungar. 148 (2016), no. 1, 109-116.

[63] D. J. S. Robinson, *A course in the theory of groups*, Second edition, Springer-Verlag, New York, 1995.

[64] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, Fourth Edition, Springer-Verlag, 1994.

[65] Y. Segev, *On Finite Homomorphic Images of the Multiplicative Group of a Division Algebra*, Annals of Mathematics 149 (1999), no. 1, 219-251.

[66] Y. Segev and G. M. Seitz, *Anisotropic groups of type A_n and the commuting graph of finite simple groups*, Pacific Journal of Mathematics 202 (2002), no. 1, 125-225.

[67] L. H. Soicher, *The GRAPE package for GAP*, Version 4.8, 2018, http://www.maths.qmul.ac.uk/~lsoicher/grape/

[68] The GAP Group, *GAP - Groups, Algorithms, and Programming*, Version 4.8.10, 2018, https://www.gap-system.org/

[69] Y. Shitov, *Coloring the power graph of a semigroup*, Graphs and Combinatorics 33 (2017), no. 2, 485-487.

[70] T. Tamizh Chelvam, M. Sattanathan, *Power graph of finite abelian groups*, Algebra Discrete Math. 16 (2013), no. 1, 33-41.

[71] T. J. Woodcock, *Commuting Graphs of Finite Groups*, doktorska disertacija, University of Virginia, 2010.

[72] S. Zahirović, *The Power Graph of a Torsion-Free Group of Nilpotency Class* 2, https://arxiv.org/abs/1911.00555

[73] S. Zahirović, I. Bošnjak, R. Madarász, *A Study of Enhanced Power Graphs of Finite Groups*, Journal of Algebra and Its Applications (2019), https://doi.org/10.1142/S0219498820500620

Oznake

Skupovi i brojevi

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$	skupovi prirodnih, celih i racionalnih brojeva, redom
$\mathbb{N}_n$	skup prvih n prirodnih brojeva
$X^{[n]}$	skup svih podskupova kardinalnosti n skupa X
$f : X \to Y$	fukcija sa domenom X i kodomenom Y
$X \approx_m Y$	$m \mid \lvert X \cap Y \rvert$
$\overline{n}$	tupl $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ za neko $k \in \mathbb{N}$
$\overline{n} \leq \overline{m}$	$n_i \leq m_i$ za svako $i \leq k$
$w_{\overline{k}}(\overline{n})$	$\overline{k}$-širina tupla $\overline{n}$ (pogledati na strani 74)
$h_{\overline{k}}(\overline{n})$	$\overline{k}$-visina tupla $\overline{n}$ (pogledati na strani 74)

Grupe

$\mathbb{Z}$	aditivna grupa celih brojeva
$\mathbb{Q}$	aditivna grupa racionalnih brojeva
$\mathbf{S}_X$	simetrična grupa skupa X
$\mathbf{S}_n$	simetrična grupa skupa kardinalnosti n
$\mathbf{A}_X$	alternativna grupa skupa X
$\mathbf{A}_n$	alternativna grupa skupa kardinalnosti n
$\mathbf{D}_n$	diedarska grupa reda n
$\mathbf{Q}_n$	generalisana grupa kvaterniona reda n
$\mathbf{C}_n$	ciklična grupa reda n
$\mathbf{C}_{p^\infty}$	Prüferova grupa
$\mathbf{UT}(n, p)$	unitriangualrna grupa kvadratnih gornje trougaonih matrica reda n sa jedinicama na glavnoj dijagonali nad poljem $\mathbb{Z}_p$
$\langle x \rangle$	podgrupa generisana elementom x
$\langle X \rangle$	podgrupa generisana skupom X
$x \approx_{\mathbf{G}} y$ ili $x \approx y$	$\langle x \rangle = \langle y \rangle$
$o(x)$	red elementa grupe
$X^{(m)}$	skup elemenata reda m sadržanih u X

$X^{(\vert m)}$	skup elemenata iz X čiji su redovi delitelji broja m
$\mathbf{H} \leq \mathbf{G}$	podgrupa
$\mathbf{H} < \mathbf{G}$	prava podgrupa
$\mathbf{N} \trianglelefteq \mathbf{G}$	normalna podgrupa
$[\mathbf{G} : \mathbf{H}]$	indeks podgrupe $\mathbf{H}$ grupe $\mathbf{G}$
XY	$\{xy \mid x \in X \wedge y \in Y\}$
$\mathbf{G}/\mathbf{N}$	faktor grupa
$\mathbf{G} \times \mathbf{H}$	direktan proizvod dve grupe
$\prod\limits_{i \in I} \mathbf{G}_i$	direktan proizvod familije grupa
$\sum\limits_{i \in I} \mathbf{G}_i$	direktna suma familije grupa
$[x, y]$	komutator elemenata x i y, $x^{-1}y^{-1}xy$
$[\mathbf{G}, \mathbf{H}]$	podgrupa generisana skupom svih komutatora $[x, y]$ takvih da $x \in G$ i $y \in H$
$\mathrm{Z}(\mathbf{G})$	centar grupe
$\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(x)$ ili $\mathrm{C}(x)$	centralizator elementa
$\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(X)$ ili $\mathrm{C}(X)$	centralizator skupa
$\mathrm{C}_{\mathbf{G}}(\mathbf{H})$ ili $\mathrm{C}(\mathbf{H})$	centralizator podgrupe
$\mathrm{Aut}(\mathbf{G})$	grupa automorfizama grupe
$\mathrm{Inn}(\mathbf{G})$	grupa unutrašnjih automorfizama grupe
$\mathrm{Is}(\mathbf{G}, \mathbf{H})$	skup izomorfizama iz $\mathbf{G}$ u $\mathbf{H}$

Grafovi

P_n	put sa n čvorova
C_n	kontura reda n
K_n	kompletan graf reda n
$\Delta \subseteq \Gamma$	podgraf
$\Gamma[X]$	podgraf od Γ indukovan skupom X
$\vec{\Gamma}[X]$	usmereni podgraf od $\vec{\Gamma}$ indukovan skupom X
$\Gamma \cup \Delta$	disjunktna unija dva grafa
$\kappa\Gamma$	disjunktna unija κ mnogo grafova izomorfnih sa Γ
$\Gamma \times \Delta$	Descartesov proizvod dva grafa
$\Gamma \boxtimes \Delta$	jak proizvod dva grafa
$\boxtimes_{i \in I} \Gamma_i$	jak proizvod familije grafova
$\overline{\Gamma}$	komplement grafa
$\vec{\Gamma}^T$	transponovani digraf
$x \sim_\Gamma y$ ili $x \sim y$	x i y susedni
$x \to_{\vec{\Gamma}} y$ ili $x \to y$	postoji usmerena grana iz x u y
$x \leftrightarrow_{\vec{\Gamma}} y$ ili $x \leftrightarrow y$	$x \to_{\vec{\Gamma}} y \wedge y \to_{\vec{\Gamma}} x$

$d(x,y)$	rastojanje između dva čvora
$x \equiv_\Gamma y$ ili $x \equiv y$	čvorovi sa istim zatvorenim susedstvom
$\overline{N}_\Gamma(x)$ ili $\overline{N}(x)$	zatvoreno susedstvo čvora
$\overline{N}_\Gamma(X)$ ili $\overline{N}(X)$	$\bigcap\limits_{x \in X} \overline{N}(x)$
$S_\Gamma(x,y)$	$\overline{N}_\Gamma(y) \setminus \overline{N}_\Gamma(x)$
$\mathrm{Cen}(\Gamma)$	centar grafa
$\mathrm{Aut}(\Gamma)$	grupa automorfizama grafa
$\mathrm{Aut}(\vec{\Gamma})$	grupa automorfizama digrafa
$\mathrm{Aut}_C(\vec{\Gamma})$	grupa automorfizama digrafa koji čuva boje
$\mathrm{Is}(\Gamma,\Delta)$	skup izomorfizama iz Γ u Δ
$\mathrm{Is}(\vec{\Gamma},\vec{\Delta})$	skup izomorfizama iz $\vec{\Gamma}$ u $\vec{\Delta}$
$\chi(\Gamma)$	hromatski broj grafa
$\omega(\Gamma)$	ω-broj grafa, tj. maksimalna kardinalnost klike
$\alpha(\Gamma)$	α-broj grafa, tj. maksimalna kardinalnost nezavisnog skupa
$T_p(\overline{n})$	korensko p-stablo pridruženo tuplu $\overline{n}$
$S_p(\overline{n})$	p-semistablo pridruženo tuplu $\overline{n}$
Γ_p	p-komponenta grafa (pogledati definiciju 3.15)

Grafovi pridruženi grupama i stepeno-asocijativnim grupoidima

$\overrightarrow{\mathrm{Cay}}(\mathbf{G},X)$	Cayleyjev obojeni graf
$\mathrm{Cay}(\mathbf{G},X)$	Cayleyjev graf
$\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})$	usmereni stepeni graf
$\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$	usmereni nenula-stepeni graf
$\vec{\mathcal{G}}^{+}(\mathbf{G})$	usmereni pozitivno-stepeni graf
$\mathcal{G}(\mathbf{G})$	stepeni graf
$\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$	nenula-stepeni graf
$\mathcal{G}^{+}(\mathbf{G})$	pozitivno-stepeni graf
$\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$	obogaćeni stepeni graf
$\mathcal{C}(\mathbf{G})$	komutirajući graf
$x \to_{\mathbf{G}} y$ ili $x \to y$	postoji usmerena grana iz x u y u $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})$
$x \overset{\pm}{\to}_{\mathbf{G}} y$ ili $x \overset{\pm}{\to} y$	postoji usmerena grana iz x u y u $\vec{\mathcal{G}}^{\pm}(\mathbf{G})$
$x \overset{+}{\to}_{\mathbf{G}} y$ ili $x \overset{+}{\to} y$	postoji usmerena grana iz x u y u $\vec{\mathcal{G}}^{+}(\mathbf{G})$
$x \sim_{\mathbf{G}} y$ ili $x \overset{p}{\sim} y$	x i y susedni u $\mathcal{G}(\mathbf{G})$
$x \overset{p\pm}{\sim}_{\mathbf{G}} y$ ili $x \overset{p\pm}{\sim} y$	x i y susedni u $\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})$
$x \overset{p+}{\sim}_{\mathbf{G}} y$ ili $x \overset{p+}{\sim} y$	x i y susedni u $\mathcal{G}^{+}(\mathbf{G})$

$x \overset{e}{\sim}_{\mathbf{G}} y$ ili $x \overset{e}{\sim} y$	x i y susedni u $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$
$x \overset{e}{\simeq}_{\mathbf{G}} y$ ili $x \overset{e}{\simeq} y$	$x \overset{e}{\sim}_{\mathbf{G}}$ ili $x = y$
$x \overset{c}{\sim}_{\mathbf{G}} y$ ili $x \overset{c}{\sim} y$	x i y susedni u $\mathcal{C}(\mathbf{G})$
$x \equiv_{\mathbf{G}} y$ ili $x \equiv y$	$\overline{N}_{\mathcal{G}(\mathbf{G})}(x) = \overline{N}_{\mathcal{G}(\mathbf{G})}(y)$
$x \overset{e}{\equiv}_{\mathbf{G}} y$ ili $x \overset{e}{\equiv} y$	$\overline{N}_{\mathcal{G}_e(\mathbf{G})}(x) = \overline{N}_{\mathcal{G}_e(\mathbf{G})}(y)$
$[x]_{\overset{e}{\equiv}} \leq [y]_{\overset{e}{\equiv}}$	x je sadržan u svakoj maksimalnoj kliki od $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ u kojoj je sadržan y (pogledati lemu 2.57)
$S_{\mathbf{G}}(x, y)$	$\overline{N}_{\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})}(y) \setminus \overline{N}_{\mathcal{G}^{\pm}(\mathbf{G})}(x)$
$I_{\mathbf{G}}(x)$ ili $I(x)$	$\{y \in V \setminus \{x^{-1}\} \mid y \overset{\pm}{\rightarrow}_{\mathbf{G}} x\}$
$O_{\mathbf{G}}(x)$ i $O(x)$	$\{y \in V \setminus \{x^{-1}\} \mid x \overset{\pm}{\rightarrow}_{\mathbf{G}} y\}$
$M_{\mathbf{G}}(x)$ ili $M(x)$	$I_{\mathbf{G}}(x) \cup O_{\mathbf{G}}(x)$
$\mathcal{I}_{\mathbf{G}}(x)$ ili $\mathcal{I}(x)$	$\Gamma^{\pm}[I_{\mathbf{G}}(x)]$
$\mathcal{O}_{\mathbf{G}}(x)$ ili $\mathcal{O}(x)$	$\Gamma^{\pm}[O_{\mathbf{G}}(x)]$
$\mathcal{M}_{\mathbf{G}}(x)$ ili $\mathcal{M}(x)$	$\Gamma^{\pm}[M_{\mathbf{G}}(x)]$
$\overline{\mathcal{I}}_{\mathbf{G}}(x)$ ili $\overline{\mathcal{I}}(x)$	$\overline{\Gamma^{\pm}}[I_{\mathbf{G}}(x)]$
$\overline{\mathcal{O}}_{\mathbf{G}}(x)$ ili $\overline{\mathcal{O}}$	$\overline{\Gamma^{\pm}}[O_{\mathbf{G}}(x)]$
$\overline{\mathcal{M}}_{\mathbf{G}}(x)$ ili $\overline{\mathcal{M}}(x)$	$\overline{\Gamma^{\pm}}[M_{\mathbf{G}}(x)]$

Biografija

Samir Zahirović rođen je 18. januara 1989. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu „Jožef Atila" u Novom Sadu završio je 2004. godine, nakon čega upisuje Gimnaziju „Jovan Jovianć Zmaj" u istom gradu. Gimnaziju završava 2008. godine. Tada upisuje osnovne studije na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer Matematičar, i završava ih 2011. godine. Iste godine na ovom fakultetu upisuje master studije, smer Master matematičar, koje završava 2013. godine. Doktorske studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu upisao je 2013. godine, i zaključno sa oktobrom 2017. godine položio je sve ispite predviđene planom i programom.

Od školske 2013/2014. godine drži vežbe na Prirodno-matematičkom fakultetu, gde je od 2014. do 2018. imao zvanje istraživač sadaradnik, a gde od 2019. godine radi kao asistent. Tokom školske 2013/2014. predavao je matematiku u Gimnaziji „Jan Kolar" u Bačkom Petrovcu, a naredne školske godine predavao je u Gimnaziji „Svetozar Marković" i u Osnovnoj školi „Jovan Popović" u Novom Sadu. Više puta je bio član komisije za pregledanje zadataka na opštinskom i okružnom takmičenju za učenike srednjih škola.

Član je naučnog projekta *Algebarske, logičke i kombinatorne metode sa primenama u teorijskom računarstvu* Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije. Koautor je dva naučna rada, čiji su rezultati izlagani na međunarodnih konferencija *AAA94 + NSAC 2017* u Novom Sadu, *AAA97* u Beču i *AAA98* u Drezdenu, kao i na Logičkom seminaru na Matematičkom institutu SANU u Beogradu i na seminaru *SLADIM+* na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom

Sadu. Bio je član organizacionog odbora na konferencijama *AAA90* i *AAA94 + NSAC 2017* organizovanim na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu.

Novi Sad, 27. oktobar 2019. Samir Zahirović

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Ključna dokumentacijska informacija

Redni broj:
RBR

Identifikacioni broj:
IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ

Vrsta rada: Doktorska disertacija
VR

Autor: Samir Zahirović
AU

Mentor: dr Ivica Bošnjak
MN

Naslov rada: Algebarska i kombinatorna svojstva grafova pridruženih stepeno-asocijativnim grupoidima
NR

Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP

Jezik izvoda: Srpski / engleski
JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP

Uže geografsko područje: Autonomna Pokrajina Vojvodina
UGP

Godina: 2020.
GO

Izdavač: Autorski reprint
IZ

Mesto i adresa: Departman za matematiku i informatiku, Prirodno–matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, Trg Dositeja Obradovića 4
MA

Fizički opis rada: 4/134/73/0/7/0/0
(broj poglavlja/strana/lit. citata/tabela/slika/grafika/priloga)
FO

Naučna oblast: Matematika
NO

Naučna disciplina: Teorija grupa, teorija grafova
ND

Predmetna odrednica/Ključne reči: Grupe, grafovi, obogaćeni stepeni graf, stepeni graf
PO

UDK:

Čuva se: Biblioteka Departmana za matematiku i informatiku, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
ČU

Važna napomena:
VN

Izvod:
IZ

Usmereni stepeni graf $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})$ grupe $\mathbf{G}$ uveli su Kelarev i Quinn [37] kao digraf sa skupom čvorova G u kome je $x \to y$ ako je y stepen elementa x, a stepeni graf $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ je odgovarajući prost graf, i njega su prvi proučavali Chakrabarty, Ghosh i Sen [17]. Obogaćeni stepeni graf $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ od $\mathbf{G}$, koji je uveden u [1], je prost graf sa istim skupom čvorova u kome su dva čvora susedna ako su oba stepeni nekog elementa te grupe.

U disertaciji su predstavljeni dokazi iz [12] i [73] da se, za konačnu stepeno-asocijativnu lupu $\mathbf{G}$ sa inverzima, $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})$, $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ i $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ međusobno određuju. Ovo povlači da sva tri navedena grafa pridružena konačnoj grupi u istoj meri određuju razne osobine te grupe, kao što su broj elemenata bilo kog reda i nilpotentnost te grupe. Dokazano je da, u slučaju torziono slobodne grupe u kojoj je svaki nejedinični element sadržan u jedinstvenoj maksimalnoj cikličnoj podgrupi, stepeni graf određuje usmereni stepeni graf, što je rezultat rada [14], i analogno je dokazano i za torziono slobodne grupe klase nilpotentnosti klase 2.

Pružen je dokaz da je svaki automorfizam stepenog grafa stepeno-asocijativne lupe sa inverzima automorfizam obogaćenog grafa. Dat je opis obogaćenih stepenih grafova konačnih Abelovih grupa. Prezentirano je nekoliko potrebnih uslova da graf bude obogaćeni stepeni graf neke konačne grupe, kao i algoritam koji za obogaćeni stepeni graf konačne nilpotentne grupe daje obogaćeni stepeni graf njene podgrupe Sylowa.

Komutirajući graf grupe je prost graf čiji je skup čvorova nosač grupe, i u kome su dva elementa susedna ako komutiraju. U disertaciji je predstavljen dokaz Bernharda Neumanna [54] da, ako komutirajući graf grupe nema beskonačan nezavisan skup, onda on nema ni proizvoljno velike konačne nezavisne skupove. Okarakterisane su nilpotentne grupe čiji stepeni graf nema beskonačni nezavisni skup, što je rezultat rada [1]. Prezentovan je dokaz Shitova [69] da je hromatski broj stepenog grafa stepeno-asocijativnog grupoida najviše prebrojiv, i dokazano je da je hromatski broj obogaćenog stepenog grafa stepeno-asocijativne lupe sa inverzima takođe najviše prebrojiv. Izložen je dokaz iz [1] da je stepeni graf svake grupe ograničenog eksponenta perfektan, i data je karakterizacija konačnih nilpotentnih grupa čiji je obogaćeni stepeni graf perfektan.

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 26. jun 2019.
DP

Datum odbrane:
DO

Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Rozália Madarász Szilágyi, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Ivica Bošnjak, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, mentor
Član:	dr Petar Đapić, vanredni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Petar Marković, redovni profesor, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu
Član:	dr Jovanka Pantović, redovni profesor, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu

University of Novi Sad
Faculty of Sciences
Key words documentation

Accession number:
ANO

Identification number:
INO

Document type: Monograph type
DT

Type of record: Printed text
TR

Contents Code: Doctoral dissertation
CC

Author: Samir Zahirović
AU

Mentor: Dr. Ivica Bošnjak
MN

Title: Algebraic and Combinatorial Properties of Graphs Associated to Power-Associative Grupoids
TI

Language of text: Serbian
LT

Language of abstract: Serbian (Latin) / English
LA

Country of publication: Republic of Serbia
CP

Locality of publication: Autonomous Province of Vojvodina
LP

Publication year: 2020
PY

Publisher: Author's reprint
PU

Publ. place: Novi Sad, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, Trg Dositeja Obradovića 4
PP

Physical description: 4/134/73/0/7/0/0
(chapters/pages/literature/tables/pictures/graphics/appendices)
PD

Scientific field: Mathematics
SF

Scientific discipline: Group theory, graph theory
SD

Subject/Key words: Groups, graphs, the enhanced power graph, the power graph
SKW

UC:

Holding data: The Library of the Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
HD

Note:
N

Abstract:
AB

The directed power graph $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})$ of a group $\mathbf{G}$ was introduced by Kelarev and Quinn [37] as the digraph with its vertex set G in which $x \to y$ if y is a power of x. The power graph $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ is the underlying simple graph, and it was first studied by Chakrabarty, Ghosh and Sen [17]. The enhanced power graph $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ of $\mathbf{G}$, which was introduced in [1], is the simple graph with the same vertex set in which two vertices are adjacent if they are powers of one element.

In this thesis are presented the proofs from [12] and [73] that, for any power-associative loop $\mathbf{G}$ with inverses, $\vec{\mathcal{G}}(\mathbf{G})$, $\mathcal{G}(\mathbf{G})$ and $\mathcal{G}_e(\mathbf{G})$ determine each other. It follows that each of these three graphs associated to a finite group provides the same amount of information about the group, such as the number of elements of any order and nilpotency of the group. It is also proved that, in the case of a torsion-free group in which every non-identity element is contained in a unique maximal cyclic subgroup, the power graph determines the directed power graph, which is a result from [14], and the same is proved for torsion-free groups of nilpotency class 2.

It is proved that an automorphism of the power graph of a power-associative loop with inverses is an automorphism of the enhanced power graph. A description of enhanced power graphs of abelian groups is given. Several necessary conditions for a graph to be the enhanced power graph of a finite group are presented, as well as an algorithm which, given the enhanced power graph of a finite nilpotent group, constructs the enhanced power graph of the Sylow subgroup.

The commuting graph of a group is the simple graph whose vertex set is the universe of the group, and in which two elements are adjacent if they commute. In the thesis is presented the proof by Bernhard Neumann [54] that, if the commuting graph of a group doesn't have any infinite independent set, then there is a finite bound on cardinality of its independent sets. Nilpotent groups whose power graphs don't have any infinite independent set are characterized, which is a result from [1]. The proof of Shitov [69] that the chromatic number of the power graph of a power-associative groupoid is at most countable is presented, and it is proved that the chromatic number of the enhanced power graph of power-associative loops with inverses are at most countable too. The proof from [1] that the power graph of any group of finite exponent is presented, and finite nilpotent groups whose enhanced power graph is perfect are characterized.

Accepted by the Scientific Board on: June 26, 2019
ASB

Defended:
DE

Thesis defend board:
DB

President:	Dr. Rozália Madarász Szilágyi, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Dr. Ivica Bošnjak, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad, mentor
Member:	Dr. Petar Đapić, associate professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Dr. Petar Marković, full professor, Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Dr. Jovanka Pantović, full professor, Faculty of Technical Sciences, University of Novi Sad