УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

ИНТЕРДИСЦИПЛИНАРНЕДОКТОРСКЕ СТУДИЈЕ
ИСТОРИЈА И ФИЛОЗОФИЈА ПРИРОДНИХ НАУКА И
ТЕХНОЛОГИЈЕ

Стајка Б. Рајић

МАТЕМАТИКАИ МУЗИКА У ФУНКЦИЈИ ДЕЧЈЕГ РАЗВОЈА

докторска дисертација

Београд, 2019.

UNIVERZITET U BEOGRADU

INTERDISCIPLINARNE DOKTORSKE STUDIJE
ISTORIJA I FILOZOFIJA PRIRODNIH NAUKA I TEHNOLOGIJE

Stajka B. Rajić

MATEMATIKA I MUZIKA U FUNKCIJI DEČJEG RAZVOJA

doktorska disertacija

Beograd, 2019.

UNIVERSITY OF BELGRADE

INTERDISCIPLINARY DOCTORAL STUDIES
HISTORY AND PHILOSOPHY OF SCIENCE AND
TECHNOLOGY

Stajka B. Rajić

MATHEMATICS AND MUSIC IN THE FUNCTION OF CHILD DEVELOPMENT

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2019.

Ментори

Проф. др Весна Тодорчевић,редовни професор
Факултет организационих наука; виши научни сарадник, Математички институтСрпске Академије Наука и Умености, САНУ.

Проф. др Ивана Дробни, редовни профосор
Факултет музичке уметности, Универзитет уметности у Београду.

Чланови комисије

Проф. др Предраг Марковић, научни саветник
Институт за савремену историју.

Проф. др Алма Тасевска, ванредни професор
Филозофски факултет, Универзитет у Скопљу, Македонија, Педагошки институт.

Проф. др Ирина Деретић, ванредни професор
Филозофски факултет, Универзитет у Београду.

Датум одбране:

____

Посебну захвалност за израду докторске дисертације упућујем професорки, ментору, др Весни Тодорчевић која ме је својим предавањем на тему *Математичке основе музике* инспирисала и отворила врата ка новим сазнањима и идејама, те формирању тезе докторске дисертације. Уз несебичну помоћ и подршку професорка Тодорчевић, водила ме је кроз целокупни процес припреме и израде докторске дисертације. Уз сав академски ангажман и подршку током рада на изради дисертације, професорка Тодорчевић имала је ту, од изузетног значаја, посебну особину подстицања, охрабривања и истинске вере,да упорност, истраживање и темељан рад, воде кауспешној реализацији започете израде докторске дисертације.

Захвалност указујем и ментору проф. др Ивани Дробни, која ме је својом стручношћу упутила на квалитетну и стручнумузичко-педагошко-психолошку литературу и тиме омогућила да музички и педагошки део рада конципирам на академски стручном нивоу. Посебну захвалност указујем за њену изразиту академску прецизност, која је допринела да рад уоквирим у складу са високо постављеним академскимстандардима. Уколико сам у томе делом успела професорка, велико Вам хвала.

Захвалност дугујем и члановима комисије докторске дисертације проф. др Предрагу Марковићу, који је показао несебично поверење у мој академски рад од основних до докторских студија, проф. др Ирини Деретић, чији стручни и научни радови су ми приближили филозофска становишта разматрана у самој тези, као и проф. др Алми Тасевској, уз чију подршку и помоћ сам формулисала и реализовала педагошки и највећим делом методолошки део рада.

Хвала тиму из Мексика, Ерику Ролдан Роа, Ерики Ролдан Роа и Марији-Елени Ролдан Роа уз чију игру *Musical Monkeys*самимплементирала и реализовалатезом постављено емпиријскоистраживање.

Посебно хвала мојој породици, родитељима Милени и Бранимиру, сестри Катарини и сестри Неди, као и мојим најближим пријатељима, на стрпљењу, подршци и указаном ми поверењу да ћу испунити лична, академска, очекивања.

Највеће хвала Давиду и Анђелини, који су били инспирација и мотивацијаза писање овог рада.

Докторску дисертацију посвећујем својој тетки Љубици.

Математика и музика у функцији дечјег развоја

Апстракт

Математика и музика, антипод једна другој, од најстаријих периода људске цивилизације развијале су се кроз природу и у природи. И једна и друга област полазеод практичне потребе човека за премеравањем, пребројавањем, упоређивањем – математика; односно, песмом, ритмом, плесом – музика.

Указујући на историјски развој и филозофска становишта, како математике тако и музике, уочава се да су поменуте областипрешле пут од практичних делатности ка апстрактним дисциплинама науке и уметности. На том путу развоја, математика и музика, од самих почетака укрштале су своје теоријске основе и на тај начин међусобно допринеле формирању појединих математичких односно музичких закона и законитости. Ако би се теорија музике и/или дела великих уметникапосматрала оком математике, у њима би се пронашле математичке законитости, које су или биле основ за формирање музичких правила, или су, пак, и математика и музика у свом развоју прихватиле нека заједничка начела и принципе и по њима градиле своје теоријске основе. Кроз историјски развој,филозофска гледишта великих мислилаца, као и кроз указивање на конкретне примере везе математике и музике у раду се указује да су, иако априори неспојиве, математика и музика две дисциплине које се међусобно прожимају и међу којима постоји нераскидива веза.

Педагошки део рада који је обухватио и емпиријско истраживање, има за циљ да представи у којој мери примена конкретне математичко-музичке игре доприноси дечјем социјалном, емотивном и когнитивном развоју, те развоју социо-емотивних и когнитивних вештина деце узраста од осам до дванаест година старости. Повезивање математичких и музичких садржаја и њихово обликовање у дидактичку игру[1] идеја је водиља методолошког дела рада.Истраживање је спроведено у две интернационалне школе на територији Београда уз примену игре*Musical Monkeys*, а у сарадњи са тимом *MusicMath*из Мексика, који су и креатори поменуте игре.

[1]Дидактичка игра – сложена педагошка активност која омогућава савладавање одређених садржаја и знања, развој способности и доживљавање последица властитих поступака у игри (Bognar i Matijević, 1993).

Игра*Musical Monkeys*, одабрана је због своје интердисциплинарности, педагошке подобности, интерактивности, динамичности и иновативности.Резултати истраживања показали су да овакав приступ у раду са децом подстиче пажњу и мотивацију, активност и ангажовање у настави, захтева и подстиче критичко мишљење при решавању постављених математичких и/или музичких задатака, доприноси сарадњи, колаборацији, конструктивној комуникацији и тимском раду деце, уважавању мишљења других, проналажењу заједничке стратегије решења проблема, те поштовању правила игре, као и ентузијазму, осећању радости и међусобном уживању при реализацији постављених задатака. Добијени резултати потврђују да су деца повезала садржаје две области, математике и музикеи да је за њих, тај моменат био један у низу интересантних у самој игри... јер, питање је,како је заправо могуће повезати математику и музику?

Кључне речи:*математика, музика, историја и филозофија математике, историја и филозофија музике, однос математике и музике, дечја игра, социјални, емотивни и когнитивни развој*.

Научна област: Интердисциплинарне студије

Ужа научна област: Историја и филозофија природних наука и технологије

UDK:

Mathematics and Music in the Function of Child Development

Abstract

Mathematics and music, in a mutual antipodal position, have developed from the earliest periods of human civilisation through and within the nature. Both these areas start from the practical need of man to measure, build, count, compare in the case of mathematics, and song, rhythm and dance, in the case of music.

Pointing to the historic development and the philosophical stance of both mathematics and music, it is apparent that these areas have progressed from practical activities to abstract scientific and artistic disciplines. On this development path, mathematics and music have from the very beginning interweaved their theoretical foundations, thereby jointly contributing to formation of individual mathematical and musical laws and rules. If we were to view the theory of music and/or works of great musicians from a mathematical point of view, we would discover mathematical rules as a base for formation of musical patterns, or it could be concluded that both mathematics and music have introduced certain mutual principles in their respective courses of development, using these principles to build their theoretical foundations. Following the course of historical development, philosophical stances of great thinkers, while also pointing to concrete examples of links between mathematics and music, the paper aims to show that although a priori unrelatable, mathematics and music represent two mutually interconnected disciplines, with unbreakable bonds.

The pedagogical part of the paper included empirical research, aims to present the extent to which the application of the concrete mathematical and musical play contributes to the child’s social, emotional and cognitive development, as well as development of the social and emotional and cognitive skills in children aged eight to twelve. By connecting mathematical and musical contents and their shaping in a didactic play[2] is the guiding ide of the methodological part of the paper. The research was conducted in two international schools in Belgrade, using the play titled ‘Musical Monkeys’ and in collaboration with the *MusicMath* team from Mexico. The results of the research have shown that this kind of approach in working with children encourages

[2] Didactic play – a complex pedagogical activity which enables mastering if certain contents and knowledge, development of capabilities as well as an experience of consequences of own actions in the play (Bognar i Matijević,1993).

attention and motivation, activity and engagement, while requiring and encouraging critical thinking in solving the set mathematical and/or musical tasks, contributing to cooperation, collaboration, constructive communication and team work of children, appreciating others’ opinions, finding a joint strategy in problem solving, as well as respecting the rules of the game, developing enthusiasm, feeling of happiness and joy in working on the set tasks. The obtained results confirm that the children established connection between the mathematical and musical segments, reaching a culmination in a moment of interest within the play, because of the inevitable question – how can mathematics and music be connected?

Key words: *mathematics, music, history and philosophy of mathematics, relationship between mathematics and music, children’s play, social, emotional and cognitive development.*

Academic Expertise: Interdiscilinary studies
Field of Academic Expertise: History and Philosophy of Science and Technology

UDK:

САДРЖАЈ

„Alea iacta est”

Гај Јулије Цезар (Gaius Julius Caesar)

УВОД

Хармонија, склад, принципи, правила, апстрактност, лепота, креативност, генијалност, само су неке од речи које повезују две дисциплине описане и испреплетане у овом раду. Са једне стране математика као наука, а са друге музика као уметност, биле су инспирација за израду ове студије.

Још у давна времена, времена славних мислилаца иистакнутих филозофа и научника, постепено су се откривале законитости математике и музике и ове области су својим принципима градње као и својом важношћу за развој човека као појединца, али и друштвау целини, од најранијег периода људске цивилизације довођене у везу. Још су стари Грци музику сматрали неодвојивом од математике, астрономије и филозофије и управо са њима започиње нагласак и истраживање међусобних веза математике и музике.

У тексту који следи разматрају се историјске, филозофске и теоријске основе развоја математике и музике и указује на њихову међусобну повезаност кроз разне епохе људског друштва али и кроз схватања филозофа, научника и уметника.Даља разматрања усмерена су на педагошку проблематику и истраживање игре као једног од базичних феномена васпитања и образовања, које се проширује питањем могућности примене математичко-музичке игре у раду са децом, као и у којој мери, такав концепт рада може допринети социјалном, емотивном и когнитивном развоју детета.

Теоријски део рада обухвата четири поглавља.У првом се разматрају основна историјска и филозофска становишта развоја математике, од најстаријег периода људског друштва до двадесетог века, развој математике од практичне делатности до апстрактне научне дисциплине.Други део рада посвећен је анализи историјских и филозофских становиштаразвоја музикеод најстаријих цивилизација до периода двадесетог века, развоја музике као уметности, музичких облика и форми, као и анализиулоге музике у друштву кроз различите епохе друштвеног развоја. Трећи део рада спаја *неспојиво* – науку и уметност, конкретно математику и музику. У њему се излажу основе теоријских веза и односа математике као науке и музике као уметности, принципи, законитости и правила по којима су грађене и излажу се конкретни примери везе између две поменуте области. Кроз четврто поглавље презентује се педагошко-психолошко и развојно схватање дечје игре, игре као посебноног феномена, као и значај повезивања математике и музике кроз игру у функцији развоја, образовања и васпитања деце и младих. Четврто поглавље уједно је иувод у емпиријско истраживање и методолошки део рада, који приказује и анализира спроведено педагошко истраживање постављено предметом докторске дисертације.

У емпиријском делу представљен је методолошки оквир истраживања, предмет, циљ, задаци, хипотезе, план и ток спроведеног истраживања, а потом и обрада и анализаприкупљених резултата. Истраживање је спроведено применом дескриптивне методе уз технику посматрања и инструмент протокол посматрања, као и технику скалирања и инструмент скала процене. Анализарезултата приказана је у два вида:*квалитативни,*путем анализе спроведеног истраживања техником посматрања, којом се указује на дидактичко-методичке основе примењене игре, као и на утицај игре на подстицање дечјих социо-емотивних и когнитивних вештина уз опис тока и реализације саме игре у раду са децом и *квантитативни,*анализом спроведене технике скалирања и примењене скале процене. Квантитативни резултати представљени су кроз фреквенције и проценте добијених одговора деце на дефинисане ставове/тврдње са циљем да се укаже у којој мери се испитаници слажу са одређеном тврдњом. У квантитативној анализи наведени су одговори свих испитаника као и одговори испитаника посматрани према полу и према узрасту. За поједине тврдње примењен је статистички поступак процене*Хи-квадрат тест*[3] који указује да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима деце у зависности одпојединачних варијабли истраживања – реализације игре, пола или узраста деце чиме се умногоме доприноси подробнијем потврђивању или оповргавању постављених хипотеза.

Резултати спроведеног истраживања потврдили су постављене хипотезе и указали да примена, у овом случају математичко-музичке игре *Musical Monkeys*, подстиче пажњу, мотивацију и активност деце у раду, доприноси обнављању

[3]*Хи-на квадрат* тест примењен је код свих постављених тврдњи за једни или две од варијабли истраживања изузев код ставова који указују да ли игра подстиче на стваралаштво; у којој мери је остварена комуникација са водитељима игре и у којој мери су деца поштовала правила игре, с обзиром да су фреквенцијски и процентуални подаци за све варијабле у овим ставовима били доминатни у потврђивању или оповргавању дефинисаних ставова. *Хи-на квадрат* тест примењен је код свих осталих тврдњи за варијабле које процентуално указују на ниску разлику у добијеним одговорима испитаника.

одређених математичких и музичких садржаја и њиховом увежбавању и у великој мери подстиче развој социо-емотивних и когнитивних вештина деце.

I ТЕОРИЈСКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

1. ИСТОРИЈСКЕ И ФИЛОЗОФСКЕ ОСНОВЕ МАТЕМАТИКЕ

Проучавање историје ма које дисциплине или догађаја води ка јаснијем схватању и сагледавању концепата, суштине и значаја као и развојних промена, ступњева и напредовања током проласка кроз различите историјске, друштвене, научне и/или стилске епохе.

Историја математике као део целокупне историје и културе људског друштва, говори о настајању математичких појмова, теорема, доказа и проблема, као и о начину повезивања математичких знања са другим садржајима и дисциплинама.Изучавајући историју математике може се сазнати да је математика још од свог повоја била практична дисциплина, дисциплина чија су се знања примењивала у свакодневном животу човека старих цивилизација. Тумачећи историју математике сазнајемо како је текао пут од практичног ка апстрактном у погледу развоја математике као науке и посебне научне и теоријске дисциплине.„Историја математике излаже у којој мери суматематичке појаве и проблеми повезаниса праксом и свакодневним животом човека, било да су из ње настали или су настајали у људској глави и нашли примену у пракси"(Дејићи Михајловић, 2015, стр. 67).

Као свеопшта чињеница, поставља се развој математике из практичних потреба,потреба праксе човека старих цивилизација (земљорадња и пољопривреда), да би се столећима година математика развила до апстрактних појмова, појмова који се и данас изучавају (Dejić i Mihajlović, 2014, према Bertolino, 1979).У раним цивилизацијама решења разних математичких проблема налазила су се у емпиријским истраживањима док су у каснијим периодима људског друштва, за решавање истих, примењиване дедуктивне[4] теоријске методе (Dejić i Mihajlović,2014, према Karaduman, 2010).

[4]Дедукција представља закључивање од општег ка посебном, при чему се тврди да оно што важи у општем случају, важи за посебно и појединачно (Дејићи Егерић, 2006).

Појавом писма[5]створиле су се могућности записивања до тада искуствених, практичних математичких знања, која супостојала у периоду људског друштва када је математика била практична делатност, погодна за сналажење са већим количинама предмета.[6]Како истиче Салони (Saloni, 2010), математика постоји још од древних цивилизација Египћана и Вавилонца, који су је користили највише у практичне сврхе, али и развили основе математике.И поред тога математика није била проучавана као посебна наука све до Грчке Антике (600-300. године пре нове ере)(Saloni, 2010).

На основу наведеног јасно је да је развој математике текао од емпиријског ка апстрактном, од практичне људске делатности до математике као науке испуњене јасним доказима, законитостима и теоремама.

1.1. Основе математике старих цивилизација

1.1.1. МатематикаМесопотамије

Месопотамија, једна од најстаријих цивилизација људског друштва, формирана је у међуречју Тигра и Еуфрата наАрабијском полуострву.[7]Према археолошким истраживањима, долази се до података да су прва насеља на подручју тадашње Месопотамије настала око 10.000 година пре нове ере. Повољне климатске и географске одликеомогућиле су прелазак са номадског на пољопривредни начин живота и на развој трговине (Божић, 2010).

„Два епохална догађаја за развој светске цивилизације десиласу се на тлу Месопотамије...:настанак градова око 4.000. године пре нове ере и проналазак писма око 3.000 године пре нове ере" (Исто, стр.16).Сазнања до којих су долазилиМесопотамци – Сумерци и Вавилонци, записивали су на глиненим

---

[5]Прва најстарија писма била су сликовна писма – *пиктографско и идеографско*. За најстарије системско писмо сматра се сумерско *клинасто писмо*, настало на подручју Месопотамије у периоду око 3000. и 2000. године пре нове ере.

[6]„Прва математичка знања била су повезана са бројањем...Мерење, тежина, дужина и површина, па касније вероватно и запремина, настали су после бројања, када су се развили трговина и занатство. У том смислу је настанак математике више антрополошка него историјско-математичка чињеница јер људе који чине било какву, макар и најплменитију племенску заједницу, не можемо замислити без икаквих математичких знања" (Исто, стр. 8).

[7]На грчком језику *Месопотамија* дословно значи: *Земља између двеју река*.

плочицама, урезујући у њих трагове у циљу очувања открића и знања до којих сутоком времена дошли. Печењем глинених плочица ти давни записи постајали су сачувано сазнајно богатство Месопотамије, а тим поступком створено је *клинасто писмо*. Око 4000. године пре нове ере у долинама великих река Нила, Тигра и Еуфрата, разни симболи су писани на лишћу палми, глиненим таблама, кори или бамбусу и костима (Ravi and Syamal, 2014). „Сачуваних и дешифрованих плочица има око 50 000, а од тога су 150 са искључиво математичким текстом и око 200 разних бројевних таблица” (Унковић, 2012). Захваљујући сачуваним глиненим плочицама сачувани су трајњи сведоци месопотамске учености и њихових математичких достигнућа.[8]

Вавилонци су користили шездесетичнинумерички позициони бројевни систем (*Слика 1*) што указује да су уместо десет имали шездесет цифара за записивање бројева, тачније педесет и девет, јер све до3. века пре нове ере у Месопотамији нису знали за нулу.[9]

Како истиче Божић(Божић, 2010) у свом делу *Преглед историје и филозофије математике*, десет има само два права делитеља, а то су бројеви 2 и 5, док број шездесетима чак десет правих делитеља, што су бројеви: 2,3,4,5,6,10,12,15, 20 и 30. У складу са тимзакључује се да много више бројева у шездесетичном систему има коначну репрезентацију у односу на десетични бројевни систем(Божић, 2010).

Вавилонци су у раном периоду друштвеног развоја познавали основне рачунске операције. „Ако се пође од основних математичких операција, Вавилонци су множење свели на сабирање и множење потпуних квадрата бројева. За потребе дељења уводе обрнуте (реципрочне) бројеве па је дељење вршено као множење” (Унковић, 2012).Математички представљено за систем множења примењиван је следећи образац:

$$a \cdot b = \frac{((a+b)^2 - a^2 - b^2)}{2}$$

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a \div b)^2}{4}$$

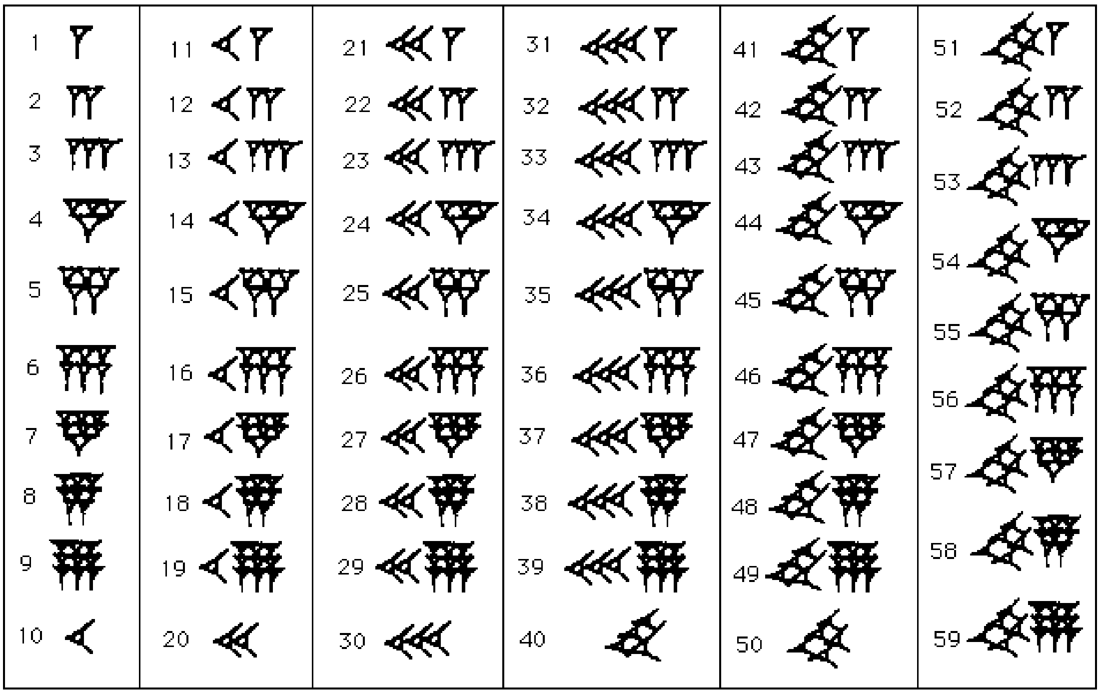
---

[8]Говорећи о математици старе Месопотамије подразумевамо открића Сумераца, Вавилонаца, Асираца, Акађана и других народа који су живели на овом подручју (Унковић, 2012).

[9]У Месопотамији је непознавање нуле све до трећег века пре нове ере биоизузетан недостатак и препрека за развој нумеричке математике.

Математички представљено за систем дељења Вавилонци су користили следеће правило:

$$a \cdot b = a\left(\frac{1}{b}\right)$$ [10]



Слика 1Вавилонски шездесетични бројевни систем[11]

Основ математичког знања Месопотамије биле су израђене и записане математичке таблице. До сада откривене таблице датирају још из 2000. године пре нове ере и оне садрже квадрате бројева од 1 до 59, тачније све цифре шездесетичног месопотамског система.

Једна глинена таблица из периода 1900 – 1600. године пре нове ере, *Плимптон 322*,[12] писана клинастим писмом, приказује табелу Питагориних (*Pythagoras from Samos*, живео око 582 – 481. гдине пре нов ере)тројки целих бројева a, b, c,односно бројева који задовољавају формулу:$a^2 + b^2 = c^2$.

[10]Да би се дата формула користила, потребне су таблице реципрочних вредности, односно таблице разломака са јединичним бројиоцем. Вавилонци су развили читав систем таблица које представљају први вид математичког научног и помоћног средства у операцијама са бројевима.

[11]Преузето са: http://www.wikiwand.com/sh/Vavilonski_brojevi

[12]Ова глинена плоча пронађена је 1922. године. Плочу је откупио Џорџ Адамс Плимптон, који ју је у својој колекцији завео под редним бројем 322. Отуда и назив глинене плоче*Плимптон 322.* Данас се *Плимптон 322* чува у Колумбија универзитету, у Америци.

Претпоставља се да јетаблица*Плимптон 322*служила за израчунавање једне од катета и хипотенузе правоуглог троугла изражене целим бројевима.[13]

„Друга таблица која се данас чува у Берлину, а пронађена је у вавилонском слоју месопотамске цивилизације,указује да се дијагонала правоугаоника чије су странице 40 и 10 израчунава по поступку: 40 + 10^2 / (2 · 40). Из наведеног се уочава познавање правила за апроксимативно израчунавање $\sqrt{a^2+b^2}$, као $a+\frac{b^2}{2a}$"(Божић, 2010, стр. 18).

„Трећа репрезентативна таблица из овог периода чува се у колекцији универзитета Јејл (Yele). На њој је приказан квадрат са уцртаним дијагоналама. Испод једне од страна пише „30", а изнад друге „42, 25, 35". Дуж исте дијагонале, стоји натпис„1, 24, 51, 10". Прецизније, пошто су Месопотамци писали у шездесетичном систему, не стоје ти децимални бројеви, већ одговарајуће ознаке на клинастом писму, за одговарајуће шездесетичне цифре. То значи да дуж дијагонале стоји број 1+$\frac{24}{60}$ + $\frac{51}{60^2}$ +$\frac{10}{60^3}$што је приближно1, 414213... и разликује се од $\sqrt{2}$ тек на седмом децималном месту" (Исто, стр.19).

Месопотамци су иза себе оставили и базичне историјске изворе на којима се заснивао даљи развој геометрије. Потреба за познавањем геометрије јавила се приликом разних премеравања, изградње зидина, насипа и канала. Сачуван је велики број планова земљаних поседа, подељених на троуглове, правоугаонике и трапезне области, као и планова грађевина, који су били основ за даљи развој математике и почетна и значајна знања из геометрије (Унковић, 2012).

Месопотамци су иза себе оставили значајан математички допринос сачуван на глиненим таблицама, које уједно представљају и изузетан писани историјски извор за каснија поколења и истраживање математичких знања најстаријих цивилизација.

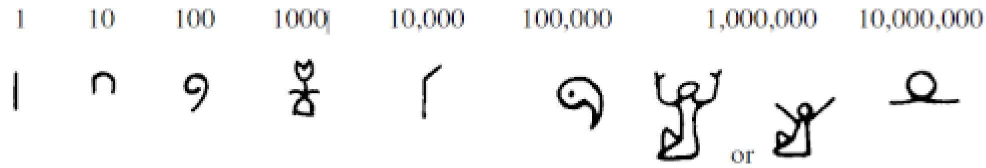
[13]Ова таблица се сматра првим, у историји, документом из теорије бројева (Божић, 2010, стр. 18).Вавилоњани су знали за Питагорину теорему, али код њих нигде нема ни помена о доказу Питагорине теореме.

1.1.2. Математика Старог Египта

Као и математика Месопотамије и математика древног Египта најпре је била окренута практичним питањима државне управе и пољопривреде. Стари Египћани вршили су изградњу грађевина, размену робе, поделу имања, мерење површине поља, мерење жита, одређивали су пропорције различитих величина и слично. Све тепрактичне активности условљавале су, априори, познавање и примену одређених математичких знања (Унковић, 2012).

За разлику од Месопотамије, Египћани су користили пиктографско, *хијерогливско писмо* (*Слика 2*)уместо линеарног, фонетског писма, а своја знања и достигнућа до којих су долазили записивали су,не на глиненим плочицама као Вавилонци, већ на папирусу.[14]

У погледу означавања бројева Египћани су употребљавали адитивни бројевни систем, налик систему записивања римских бројева што је допринело дасупоступци за извођење различитих математичких операција били веома сложени (Исто).



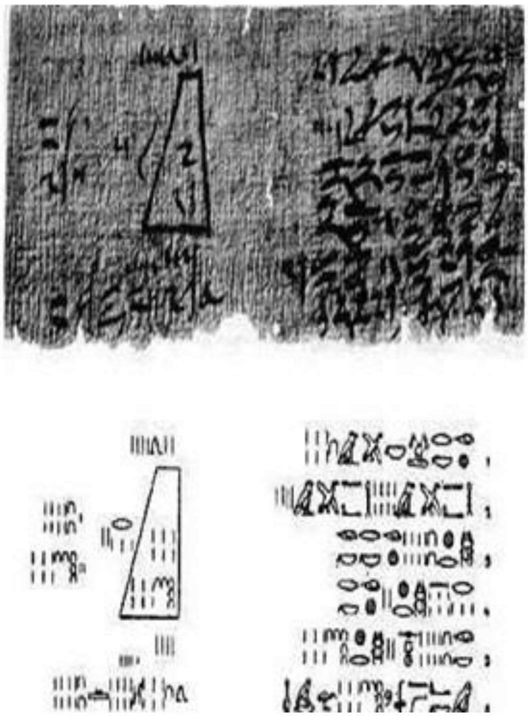
Слика 2 Египатски нумерички хијероглифи[15]

Као сачувани писани историјски извор из египатског периода, најзначајнији је *Рајндов папирус* из 1650. године пре нове ере. Овај математички спис, којипредставља најзначајнији споменик египатске математике, преписао је око 1850. године пре нове ере Ахмес(*Ahmes*), писар који је оставио своје име на преписаном материјалу, наглашавајући да он само преписује списстар око 200 година (Dunningtonand Neugebauer, 1936). *Рајндов папирус* је 1863. године предат Британском музеју и представља „детаљну студију о свим стварима, увид у све што постоји, знање о свим тајнама. Испоставило се да је то заправо упутство за

[14]Папирус – лист добијен ваљањем у води расквашених стабљика биљке папирус, које су веома богате целулозом. Египћани су папирус савијали у свитке дуге и по неколико метара.
[15]Преузето са: https://repozitorij.mathos.hr/islandora/object/mathos%3A26/datastream/PDF/view

администрирање једног пољопривредног друштва, односно приручник из примењене математике”(Божић, 2010, стр.22).

Нешто старији, а подједнако значајан папирус је *Московски папирус* (1850. година пре нове ере) који се данас чува у Москви. Други назив му је*Голеничевљев папирус*по имену грофа Голеничева који га је пренео у Москву(*Слика 3*, *Слика 4*).




Слика 3 Голеничевљев папирус[16]*Слика 4 Рајндов папирус*[17]

Када се говори о основним рачунским операцијама Египћани су сабирали сакупљањем истих симбола и претварањем десет симбола у један симбол, док се одузимње вршилотако што се одузимао – склањао одређени број симбола. Проблем је настајао када је требало одузети више симбола него што их је дато.

Из *Рајндовог папируса* сазнајемо како су Египћани множили. На пример ако желимо да помножимо бројеве 21 и 49, узимамо 49 и сабирамо га са самим собом(Божић, 2010; Dunnington and Neugebauer, 1936).Добијени резултат поново саберемо са самим собом и тако се формира следећа таблица (*Табела 1*):[18]

[16]Преузето из (Божић, 2010).
[17]Преузето из (Исто).
[18]Овај поступак је први пример бинарног система у историји математике (Исто).

Табела 1Поступак множења код Египћана

21	49
1	49
2	98
4	196
8	392
16	784

Не иде се даље од броја 16 јер је 32 > 21. Затим се уочава да је 21 = 16 + 4 +1, тако да се узимају бројеви на позицијама 1, 4 и 16 и сабирају се. Резултат добијеног сабирања је 1029 што је и резултат савременог множења бројева 21 и 49. Метода дељења сводила се на инверзну операцију операцији множења. У задатку 69. *Рајндовог папируса* указује се на технику дељења бројева 1120 и 80. Каже се „множи са 80 док не добијеш 1120” (Унковић, 2012)(*Табела 2*).

Табела 2Поступак дељења код Египћана

1	80
/ 10	800
/ 2	160
/ 4	320
800 + 320 = 1120	

Бројеви на позицији 10 и 4 сабирањем дају 1120, а њихов збир (10 + 4 = 14) заправо је резултат дељења задата два броја(Божић, 2010; Dunnington and Neugebauer, 1936).

Операцијом дељења Египћани су дошли и до разломака. У богатство њиховог математичког знања спада и познавање израчунавања запремине коцке, квадра, ваљка, пирамиде и других геометријских тела.

Египћани су приказали један интересантан и значајан принцип извођења рачунских операција, који је оставио писани траг за будуће генерације истраживача и научника, који су основне операције свели на знатно једноставније системе и принципе.

1.2. Математика античке Грчке

Темељ математике као науке постављен је у старој Грчкој у 6. веку пре наше ере. Стари Грци систематизовали су знања својих претходника, додали значајан број нових математичких резултата и поставили основ за развој касније математике (Bernuli, 1978).

Како наводе Дејић и Михаиловић, грчки научници не објашњавају само како нешто урадити уз применуматематичких знања, већ и зашто је то тако(Дејићи Михајловић, 2015).„Грчки филозофи инсистирали су на доказу, на аргументу – на логосној форми мишљења – док мит, за разлику од логоса[19] истини приступа сасвим непосредно настојећи да је саопшти у целовитом, јединственоми разоткривеном облику” (Kandić, 2017, str.15).

Према предањунајстарији грчки филозоф, астроном, математичар и филозоф био је Талес из Милета (*Θαλῆς ὁ Μιλήσιος*, живео око 625–545. године пре нове ере) (Ravi and Syamal, 2014). Талес је у то доба сматран мудрацем, једним од *седам великих*[20] који су се сматрали оснивачима своје културе. Легенда тврди да је управо Талес први доказао да: пречник полови круг; да су углови на основици једнакокраког троугла једнаки; да су наспрамни углови које формирају две праве које се секу једнаки; да је круг преполовљен својим пречником;да су стране једнакостраничних троуглова пропорционалне; да је троугао одређен једном страницом и угловима налеглим на ту страницу; да угао који се поклапа са пречником круга у било којој тачки у ободу је прав угао (Божић, 2010; Lučić, 2009; Ravi and Syamal, 2014).

[19]Усвојој књизи *Логос, Платон, Аристотел*, ауторка Ирина Деретић, наводи да се кроз филозофско тумачење појма *logos*, наилази на различита значења датог појма. *Logos*, као језик, разум, дефиниција, објашњење и реторички аргумент (Деретић, 2009).„Логос није искључиво језик, него и когнитивна способност којом стичемо и веровања и знања о свету и нама самима и која би требало да управља нашим унутрашњим животом и понашањем” (Деретић, 2009, стр. 391).

[20]*Седам мудраца* је заједнички назив за најстарије представнике грчке етичке филозофије који су своје мисли испољавали у облику сажетих изрека. Живели су у периоду између 620. и 550. године пре нове ере (Солон из Атине (*Solon*), Талес из Милета (*Thales*), Цилон из Спарте (*Chilon*), Питак (*Pittakos*) са Лезбоса, Бијант из Приене (*Bias*), Клеобул из Линдоса (*Cleobulus*) и Перијандар из Коринта (*Periandros*).

„Такође, Талес је заслужан за сазнање да је сума свих углова било ког троугла 180 степени”(Ravi and Syamal, 2014, str.50). Како истиче Лучић, Талес није могао доказати постављене тврдњевећ је само *приметио да оне важе*, ослањајући се на уверљивост слика којима их је илустровао”(Lučić, 2009, str. 17).

Грци су раздвајали аритметику,[21](од грчке речи *arithmos* – број)науку о мноштву и геометрију,[22] науку о величинама, тачније, о непрекидним, величинама. Геометрија дословно значи *мерење,премеравање земље* што указује да је старим Грцима математички извор био у практичној вештини.Било је потребно да прође неколико векова да се прихвати да обе области и аритметика и геометрија, припадају истој дисциплини – математици.

Иако се грчка традиција позива на Талеса и Питагору као осниваче грчке математике, за даљиразвој и достигнућа грчке математике, филозофије и науке заслужни су и чувени мислиоци и филозофи Платон (*Πλάτων*, живео око 428–348/347. године пре нове ере), Аристотел (*Ἀριστοτέλης*, живео око 384 – 322. године пре нове ере) и Сократ (*Σωκρᾰ́της*, живео око 470 – 399. године пре нове ере) (Saloni, 2010).

1.2.1. Питагорејскаматематикамисао

Изузетан утицај на развој математичке мисли и математике као науке имао је грчки мислилц Питагора (*Πυθαγόρας*) са Самоса(Burton, 2011).„Питагора је рођен у интелектуално узбудљивом времену, 6. век пре нове ере, које се одликује значајним и сензационалним напретком у најразличитијим културним, филозофским и научним областима. Може серећи да је то период који је у филозофији, књижевности, уметности и архитектури, као и у медицини и технологији, поставио темеље за процват грчке културе” (Riedweg, 2005, str.44).

Питагора је готово митска личност јер нема сачуваних чак ни преписаних Питагориних оригиналних текстова. Знање о Питагорином животу је оскудно, а

[21]Аритметика се може дефинисати као конкретно познавање целих бројева, рационалних бројева, ирационалнихбројева, реалних бројева и овладавања њиховом манипулацијом кроз апстрактне операције(Ravi and Syamal, 2014).

[22]„Геометрија у свом првобитном значењу представљала науку о фигурама, њиховом трансформисању, узајамном положају и размерама њихових делова” (Дејићи Егерић, 2006, стр. 74).

мало тога се може рећиса сигурношћу (Burton, 2011). Бавећи се математиком, филозофијом, астрономијом, физиком, музиком, историјом и многим другим наукама, Питагора оставља печат великог и свестраног мислиоца свога времена.

Све што о Питагори можемо дознати, сазнајемо из очуваних списа Платона и Аристотела, као и Питагориног следбеника Филолаја(*Φιλόλαος*, живеоу од 470-385. године пре нове ере). Најстарије сведочанство о Питагорејцима је Платоново дело *Дијалог о Федону,* а значајна сведочанства су и Филолајев спис *О природи* и Аристотелов спис *О небу* (*Метафизика*). Аристотел је наглашавао да је основна питагорејска догма *Све је број,* што се одређује као: број је начело и налази се у основи свега, саставни је део ствари; све ствари су сачињене од бројева. Са друге стране Филолај указује да су ограничено и неограничено у основи свега, а да је број оно на основу чега сазнајемо шта јесте.Питагорин бројтреба разликовати од Платоновог броја, јер код Платона се под бројем подразумева оно што је одвојено од ствари, док Питагора сматра да је број у основи свих ствари, не нека материја – ватра, вода, ваздух, већ број. Физичка тела сачињена су од појединачних јединица, јединице су бројеви и у том контексту, јединице (број) је у основи тих тела.[23]

Питагора је на Самосу стекао изузетно образовање. Са својих осамнаест или двадесет година Питагора је био у Милету, у време када су тамо живели Талес и његов ученик Анаксимандар (*Ἀναξίμανδρος*, живео око 610–547. године пре нове ере). Након боравка у оближњој Јонији, Питагора неко време борави у Сирији код феничанских мудраца,одакле прелази у Египат, у коме је живео у периоду између 535. и 520. године пре нове ере. У Египту јебио задивљен ритуалима египатских свештеника и управо име које је касније додељено његовим следбеницима потиче од речи *mathema*, што је био назив за врсту земље, коју су египатски свештеници користили у својимритуалима (Riedweg, 2005).

На својим путовањима Питагора је прикупио сва математичка знања која су постојала у тадашњем античком свету и са новим искуствима и знањима, вратио се на острво Самос (Geđ, 2008).„На Самосу оснива своју школу дословно названу *Полукруг (Питагорин полукруг)*” (Riedweg, 2005, str.10).Изван града у једној од пећина, направио је просторза проучавање своје филозофије, у којој је

[23]Према предавању проф. др Ирине Деретић, на семинару *Математика и музика*, Математички институт Београд, одржаном 1.4. 2019. године.

живео дању и ноћу, дискутујући о филозофским и математичким питањима са неколико својих сарадника (Isto).

Само неколико година касније Питагора напушта Самос и одлази у Кротон у Јужну Италију, где оснива политичку, религијску и филозофску школу. „Формирана од око три стотине младих аристократа, заједница је имала карактер братства и тајног друштва" (Burton, 2011, str.90).У Кротону долази до процвата Питагорине школе, која је стекла велики број следбеника. Према свом вођи и оснивачу школе Питагорини следбеници названи су Питагорејци. Предање говори да су Питагорини следбеници, сва своја научна, математичка и филозофска достигнућа, приписивала своме учитељу, Питагори (Bruckler, 2011). Постојала су два круга следбеника: унутрашњи круг називао се *математичари* (*mathematikoi*). Они су живели у заједници, придржавали се стриктних правила реда и нису имали личне поседе, док се спољни круг следбеника називао*акузматичари* (*akuzmatikoi),* живели су у својим кућама, имали су право на личну својину, а братство су посећивали само током дана.

Школа је тежила да регулише исхрану и начин живота својих чланова ида указује на заједнички метод образовања. Ученици су се усмеравали на четиринајважнија предметаучења: аритметику (аритметика, у смислу теорије бројева насупротрачунању), хармонију[24](музика), геометријуи астрономију.Овачетворострука подела знања постала је позната у средњем веку као *квадривијум*,којој је затим додан *тривиум* логике, граматике и реторике(Burton, 2011;Papadopoulos, 2002).

Саму питагорејску филозофију и њене следбенике, нијебило лако одредити и разграничити од оних који то нису, с обзиром да се елементи питагорејског учења могу препознати код готово свих пресократовских филозофа природе. У ужем смислу, питагорејску школу карактерисао је одређени скуп обичаја, етос, начин живљењаи по том специфичном етосу могли су се препознати прави Питагорејци (Kandić, 2017).

„Питагорина учења су се могла свести на следећа начела:

– да је на најдубљем нивоу свет по својој природи математички;

[24]Филолај,каже: *Хармонија настаје само из супротности. Хармонија је сједињавање разноврсне мешавине и сагласје различитог*. На истом месту читамо: *Музика је хармонично спајање супротности, довођења мноштва у јединство, сагласје разногласног* (Uzelac, 2005).

– да се филозофија може употребити за духовно прочишћење;
– да се душа може уздићи до јединства са божанским;
– да извесни симболи имају мистичко значење и
– да се сви припадници реда морају стриктно придржавати лојалности и тајности”(Божић, 2010, стр.51).

Једно од најзначајнијих резултата Питагорине школе било је откриће несамерљивости, односно откриће ирационалних бројева. Од тада па надаље неизоставна је спознаја да се не може свака дуж измерити (рационалним) бројем.

Настанак несамерљивости доводи се у везу са Питагорином теоријом хармоније. Спој безграничног и границе, оно што разграничава предмете и чини их раздвојеним је број (Uzelac, 2005).„Број је оно што омогућује да се једна ствар разликује од друге, а хармонија је сама структура ствари, оно захваљујући чему долази до идентитета безграничног и границе, па је управо захваљујући хармонији могућа спознаја и мишљење ствари” (Uzelac, 2005, str. 28).

Како истиче Братина, величине су самерљиве ако имају заједничку меру, а несамерљивеако се не може одредити никаква њиховазаједничка мера (Братина, 2015). „Могућност нумеричког изражавања размере између две величине крајњи је услов могућности њихове самерљивости, а то зависи од тога постоји ли заједничка мера међу њима”(Исто, стр.14). Када се говори о нумеричком односу, бројеви који изражавају тај однос увек су цели јер је античка грчка математика познавала само позитивне целе и позитивне рационалне бројеве.[25]

Већина истраживачасе слаже са ставом да је откриће несамерљивих вероватно најважнији интелектуални допринос за стварање теоријске математике у античкој Грчкој и да је оно подстакло низ истраживања која су следећа два века створила светску математику.

Питагорејцису прешли пут од практичног до апстрактног поимања појма броја.[26]„Корак од 2 маслине + 2 маслине = 4 маслине, до 2+2=4, је заправо велико

[25]Позитивни рационални бројеви представљани су као пропорције позитивних целих бројева.
[26]Број је основни математички појам. Број и бројање почињу несумљиво пре математике, пре заснивања математичких знања. Занимљиво је да је у свим језицима и културама света настала и остала разлика између бројева који означавају количину и бројева који означавају редослед. Тако сваки језик разликује број пет, као број предмета и пети, као редни број. Ипак све до краја 19. века та разлика у математици није уочена. Чињеница је да разлика међу бројевима који означавају количину и редних бројева у није све до настанка теорије скупова укључена у математичка разматрања, нити је изазвала било какве филозофске расправе.

достигнуће. Овде видимо да су Питагорејци из практичног схватања математике прешли у један виши ниво, ниво математичке апстракције"(Божић, 2010, стр.53).

Не само да се број може разумети као апстрактни појам, већ, према Питагорејцима, светом владају односи бројева и сви односи се могу свести на односе бројева.Питагора је до овог закључка дошао упоредним изучавањем геометрије, музике и астрономије. Уочио је да се планете крећу по одређеним путањама чији односи су бројеви; да се дан, ноћ и друге астрономске појаве смењују на основу бројевних односа; да односи дужина жица на музичком инструменту лири, утичу на фреквенцију тона који жице лире производе када осцилују.

„Овде треба истаћи да бројеви имају не само гносеолошки већ и онтолошки карактер: ако је бивствовање, целина свега што јесте одређена као *апеирон*, као нешто неограничено, онда је граница, облик (*eidos*), оно што спречава да се феномени расплину у неограниченом... Граница је принцип рашчлањивања, обликовања па управо зато одређено и неодређено (ограничено и неограничено) саздају број и све што се уопште може сазнати има број (односно меру, размер)" (Uzelac, 2005, str. 27).

Са гледишта античке математике Питагори се приписују следећа открића: Питагорина теорема (*Квадрат над хипотенузом једнак је збиру квадрата над катетама*), коју су Питагорејци приписивали Питагори, иако, није сасвим јасно да ли је Питагора дошао до овог доказа;[27] став да је збир углова у троуглу једнак збиру два права угла; разни резултати у конструисању геометријских фигура дате површине;познавање особина пет правилних полиедара (правилни тетраедар, коцка, октаедар, додекаедар и икосаедар), као и откриће несамерљивости, односно ирационалних бројева (Божић, 2010).

Ако се сагледа уопштено рад Талеса и Питагоре,стиче се утисак да је грчка математика од самих почетака била теоријска дисциплина, највише из разлога што постоји веома мали број сачуваних извора који говоре у корист постојања практичне грчке математике. Постоји само неколико десетина сачуваних абакуса

[27]Два века касније, Еуклиду својим *Елементима*, излаже доказ Питагорине теореме.

из периода петог и четвртог века пре нове ере, који илуструју пример практичне грчке математике.[28]

Прелаз из практичне ка теоријској математици догодио се, верује се, између 500. и 300. године пре нове ере, у периоду између великих имена развоја математичке мисли – Питагоре и Еуклида (*Εὐκλείδης*,живео око 325–265. године пре нове ере).

1.2.2. Филозофске основе Платона, Аристотелаи Сократа

Три светски значајна филозофа и мислиоца, Платон, Аристотел и Сократ, својим радом допринели су развоју не само филозофке и научне мисли, већ и развоју друштва у целини.

Платон је рођен у Атини у аристократској породици, са јаким социјалним везама у врховима атинског друштва. У периоду између 399 – 387. године пре нове ере, Платон путује по Египту и Сицилији. На Сицилији, где је питагорејска традиција још увек била доминантна, имао је прилике да упозна математику и питагорејско наслеђе у филозофији.

Године 387. пре нове ере, почиње да пише филозофска дела *Дијалоге*[29] и оснива школу, коју је назвао *Академија*. *Академијом* је управљао све до смрти. Првенствено отворена са циљем да се у њој обучавају и васпитавају грчке политичке вође, *Академија* се постепено орјентисала на опште образовање, стављајући у други план политички мотив. Платонова *Академија* постаје главно место окупљања најпознатијих филозофа и математичара тог времена.

На улазу у *Академију* је стајао натпис: *Нека нико ко не познаје геометрију не улази овде.* Сам натпис указује на значај који Платон и његови следбеници придају математици, постављајући је у саме темеље знања (Божић, 2010). Платон, оснивањем *Академије*, ствара нова правила учења, као и правила преношења математичких знања. Кроз свој рад и филозофију образовања залагао се да се у васпитању деце, посебно најмлађих, користи и игра(Унковић, 2012).

[28]Абакус је справа за рачунање, најстарија рачунска машина у историји, предак свих данашњих рачунских машина.

[29]*Дијалози* разматрају скоро сва релевантна филозофска питања. Платон у њима излаже метафизику, етику, математику, епистемологију, расправља о питањима атеизма и религије, бесмртности и политичке филозофије.

Према Платоновом учењу, првих десет година треба посветити изучавању аритметике, геометрије, астрономије и хармоније;[30] затим би следило пет година изучавања дијалектике, коју Платон одређује као вештину расправљања, постављања питања и давања одговора кроз које се стиже до суштине ствари. *Академија* је наставила да постоји и после Платонове смрти, све до 529. године, када ју је, појавом хришћанства, затворио император Јустинијан, као паганску институцију.

Платон је у свом учењу повезао математику, метафизику и епистемологију у везу која се назива *платонизам* и најстарији је математички филозофски правац. У основи *платонизма* је идеја идеалних објеката.У свим својим *Дијалозима*, Платон је инсистирао на логичкој строгости и прецизности и на логичкој дедукцији закључака из хипотеза.Платонистима, који су веровали да су бројеви апстрактни, нужно постојећи објекти, независни од људског ума, приписана су открића два начина доказивања, *метода анализе* и *метода синтезе*(Ravi and Syamal, 2014).

„Не може се тврдити да је Платон кроз *Дијалоге* увео аксиоматски метод, али јесте у систематској форми записао Сократово наслеђе које ће касније Аристотелуобличити у логику као посебну науку и тиме ствирити главно средство за систематско аксиоматско заснивање математике"(Божић, 2010, стр. 85).

„Како запажа Ирина Деретић у студији *О Платоновим митовима*, могућно је уочити унутрашњу блискост између Платоновог и митолошког начина мишљења, имајући у виду Платоново уверење да независно од материјалне чулно опажљиве стварности постоји и једна друга, постојана, непроменљива стварност, која је стварнија од оне емпиријске и која представља, у ствари, њену парадигму и узрок" (Kandić, 2017, str. 16, премаДеретић, 2014, стр. 15).

Аристотел је рођен у Стагири на Халкидикију, на северу Грчке, односно на југу Македоније у породици угледног лекара Македоније, тако да је од раног детињства подучаван медицини, а касније након очеве и мајчине смртии књижевности, реторици и поезији. У осамнаестој години постао је ученик, а

[30]Платон идеју хармоније повезује са музиком (Stojanović-Kutlača, 2016). У свом делу *Држава,* Платон наглашава да музика треба да створи хармоничну личност слободног човека и тако допринесе формирању идеалне државе. Хармонија је оно захваљујући чему се изједначавају безгранично и граница, захваљујући чему настаје структура ствари(Uzelac, 2005).

нешто касније и професор Платонове *Академије*. Ту је остао деветнаест година, све до Платонове смрти (Raviand Syamal, 2014; Ross, 2005).

Године 343. пре нове ере, на позив Филипа МакедонскогАристотел одлази на македонски двор да подучава Филиповог сина Александра Македонског и у Македонији остаје наредних седам година (Ross, 2005). Након извесног времена, 335. године пре нове ере, Аристотел се враћа у Атину и оснива школу, коју назива *Лицеј*.

Оно по чему се Аристотелов *Лицеј* разликовао од Платонове *Академије* јесте револунациорни метод рада. У оквиру *Лицеја* одржавале су се две врсте предавања: *јутарња* –посвећена науци и филозофији и *вечерња* –посвећена другим дисциплинама, посебно беседништву (Божић, 2010; Ross, 2005).

Од многих Аристотелових дела посебно су значајнадела из логикеорганизована у збирку под називом *Органон* (алат), коју чини пет целина: *Категорије, О интерпретацијама, Прва аналитика, Друга Аналитика, Топике и Софистичка оспоравања*. За логику су кључне *Прва и Друга Аналитика* (*Нижа и Виша*). У њима Аристотел систематизује и формализује основна логичка правила. Највећу пажњу обраћа на дедукцију и код њега се по први пут јављају *силогизми,*[31]који одговарају савременим правилима извођења закључака – из две премисе изводи се закључак. Приказано савременом математичком симболиком, извођење закључака из датих силогизама може се представити као:

За свако (G(x) → H (x))

<u>За свако (H(x) → M (x))</u>

За свако (G(x) → M(x))

У Аристотеловим *Аналитикама* можемо наћи и низ других логичких правила, која се у готово неизмењеном облику и данас сматрају основама у логици (Божић, 2010).

Сократиза себе није оставио ниједно написано дело, јер о свом раду и током свог рада ништа није записивао. Живећи у Атини, у њено златно доба[32]Сократ је био значајна јавна личност. Већина сазнања о Сократовом животу

[31]Силогизам је облик логичког, дедуктивног закључивања, којим се из два или више формираних судова, изводи нови суд, који омогућава заједнички појам у датим премисама.
[32]Златно доба Атине, које се некада назива и Периклеово доба, везује се за период Периклеове владавине. Перикле (495 – 429. год.пре. н. е.) је био најзначајнији лидер те грчке епохе. Златно

и делу долази из Платонових дела и писаних списа. На основу тога сазнајемо да је Сократ творац логичких метода, које касније постају основа било које логике и методологије науке. У своју методологију увео је *индуктивну аргументацију*[33] и *универзалне дефиниције*.[34] У закључивању се користио индукцијом[35]кроз своју хеуристичку методу.[36] Његова метода је подразумевала образовни концепт који укључује унакрсно испитивање између наставника и ученика.„Сазнање о таквој методи *питања и одговора*, долази првенствено из портрета карактера који се зове *Сократ*, у филозофским делима Платона и у мањем обиму из Ксенофанових (*Ξενοφάνης*)*Сократових разговора*, комедије Аристофана (*Αριστοφανης*) и списа Аристотела” (Gary, 2002, str. 1).

За каснији развој филозофије и науке веома је значајан Сократов метод, кроз који је увео појам хипотезе у научно мишљење. „Метод се састојао у томе да се започне са оним претпоставкама које делују као најистинитија хипотеза и да се затим разматрају логичке последице. Ако се наиђе на контрадикцију, постављена хипотеза се одбацује. Ако се не наиђе на контрадикцију, хипотеза се сматра потврђеном, али не и доказаном јер се доказ може извести само ако се дедукује иницијална хипотеза из неких већ прихваћених или општијих хипотеза”(Унковић, 2012, стр.12).

У сачуваним списима који говоре о Сократовом животу и делу,ретко се наилази на ставове да се Сократ интересовао и бавио математиком, али суњегове заслуге за утемељење математичке логике у каснијем периоду развоја науке непроцењиве. Осим поменутог, из Платонових деласазнаје се да је Сократ творац концепта *форми.* Према Платону, Сократ је истицао да сваки термин (попут *добро, лепо, човек*) означава један истоветан самом себи идеалан објекат, који је недоступан чулној перцепцији и спознатљив само мишљењем. Такав објекат

доба почиње средином века, по завршетку рата са Персијом, а завршава се пелопонетским ратом између Атине и Спарте.

[33]Индуктивна аргументација настала је као Сократова склоност да важење извесних исказа подупире упечатљивим примерима, парадигмама. Парадигма – школски пример – модел (Исто).

[34]Универзалне дефиниције су заправо Сократов покушај да прецизно формулише универзално важеће предикате (релације), што је касније прерасло у савремену логику.

[35]Индукција представља облик закључивања од појединачног ка општем.

[36]Метода којом предавач постављањем развојних питања, подстиче ученике, да самостално закључују о новом, коришћењем онога што већ знају.

Сократ назива *идеа, еидос, форма.* Бавећи се анализом појмова и њиховог значења, Сократ се одређеним делом сматра и оснивачем *епистемологије.*[37]

1.2.3. Математикагрчког класичног доба

Наледници Талеса и Питагоре били су тројица великих математичара класичног доба развоја грчке историје, науке и културе Архита из Тарента (*Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος*, живео око 428–347. године пре нове ере), Теетет (*Θεαίτητος, Theaítētos,* живео око 417 – 369. године пре нове ере) и Еудокс са Книда (*Εὔδοξος ὁ Κνίδιος*, живео око 400 – 347. године пре нове ере).

Архита из Тарентабио је антички грчкифилозоф, припадник питагорејске школе, вођа Питагорејаца у Таренту, државник, војни стратег, математичар, теоретичар музике, физичар и астоном. Највећи део свог интелектуалног живота посветио је математици и истраживању математичких појава и законитости. Дефинисао је хармонијску средину[38] и дао јој име(Ravi and Syamal, 2014).Приписује му се резултат по коме не постоји број који је геометријска средина између два броја који стоје у односу $(n + 1) : n$. Сматра се оцем механике као научне дисциплине, а у геометријска разматрања је увео концепт кретања (Isto). Бавећи се истраживањем фреквенција поставио је теорију звука.

Теетет Атинскиу свом раду највише се бавиоирационалностима и разним врстама ирационалних дужина. Приписује му се стварање, систематизовање и записивањетеорије полиедара, као и доказивање да постоји пет правилних полиедара (тетраедар, коцка (хексаедар), октаедар, додекаедар и икосаедар). „Њихова имена су изведена од грчких назива за бројеве страна одговарајућих полиедара: тетра – четири; окта – осам; икоси – двадесет; хекса – шест и додека – дванаест” (Чанак, 2009, стр. 53).

Еудокс из Книдосапознат је као отац теорије пропорција**.** Теорија пропорција, како ју је поставио Еудокс, постала је независна од проблема

[37]*Епистемологија* је филозофска дисциплина или теорија знања, која разматра питања: шта је то знање и на који начин сазнајемо; које су границе људског знања; шта се може сазнати и слично; грана филозофије која се бави природом, настанком и крајњим коренима људског знања.

[38] Хармонијска средина (H), представља средњу вредност која је реципрочна вредност аритметичке средине реципрочних вредности датих позитивних реалних бројева. За n вредности: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$,добија се према формули: $H = n/(1/a_1 + 1/a_2 + 1/a_3 + \ldots + 1/a_n)$.

несамерљивости са којим се суочила питагорејска математика. Еудокс разматра односе величина, тачније односе дужина. „Ти односи су једнаки са другим односима, са њима ступају у друге релације, без расправљања да лису дужине чији се односи изучавају самерљиве или не”(Божић, 2010, стр. 70).Како би решио проблем односа бројева и величина који не морају бити самерљиви, као и разних врста величина (дужина, површина и запремина) Еудокс уводи дефиницију[39] која гласи: *Величине су у међусобном могућем односу, ако једна умножена неким бројем, може превазићи другу*.[40]Другом дефиницијом уводи једнакост пропорција произвољних величина које су у могућем односу.[41]*Величине су у истом односу, прва према другој и трећа према четвртој, ако, када год се узму једнаки умношци прве и треће, као и једнаки умношци друге и четврте величине, први умношци су или већи или једнаки или мањи од других узетих у одговарајућем поретку.* Представљена дефиниција решава поређење односа свих величина без обзира да ли су дате величине самерљиве или не, тако што једнакост количника утврђује преко једнакости или неједнакости умножака тих величина бројевима. На тај начин Еудокс математику ослобађа потребе да се изјашњава о природи тих количника. То је уједно Еудоксов одговор на слом питагорејства, односно на појаву, несамерљивих[42](Ravi and Syamal, 2014). „Еудокс је показао да је површина круга пропорционална квадрату њеног пречника. Произвео је многе теореме у геометрији равни и унапредио логичку организацију доказа” (Isto, str.71).

1.2.4. Математика грчкехеленистичке епохе

УЗ. веку пре нове ере, Александрија је постала културни центар света, а тиме и математике(Burton, 2011). У периоду хеленизма, доба Александра Великог Македонског, а касније и након његове смрти, у време Птоломеја[43] 290. године

[39]У петој књизи Еуклидових *Елемената*, дефиниција 4.
[40]Еудоксова прва идеја била је да се површине и дужине, не могу поредити. Еудоксова аксиома саопштава да су дужина и површина (или запремина) „различие ствари”.
[41]Дефиниција 5. у петој књизи Еуклидових *Елемената.*
[42]„Проналазак несамерљивих је показао да икао сваком броју одговара нека величина (рецимо дуж), није тачно да свакој величини одговара цео (рационалан) број (рецимо дијагонали квадрата чија је страница 1)” (Божић, 2010, стр. 82).
[43] Птоломеј је био један од водећих генерала и постао је, након Александрове смрти, гувернер Египта, те тако завршио оснивање Александрије.

пре нове ере, Птоломеј је саградио нову школу, *Музеј (Museum).*Институција је име добила по *музама*, грчким богињама појединих уметности и вештина.*Музеум* је био установа слична Платоновој *Академији* или Аристотеловом *Лицеју*, а сматра се претечом данашњег универзитета (Isto).

У оквиру *Музеја* саграђена је *библиотека*у којој јеПтоломеј прикупљао све расположиве књиге и списетога доба. „Први значајан прилог*библиотеци* била је Аристотелова лична библиотека, коју је Птоломеј откупио од породице Александра Македонског (Isto; Божић, 2010).

Ова институција је убрзо постала репозиторијум готово целокупног знања на свету, а *Музеј*центар најзначајнијих интелектуалаца тога доба. „Водећи научници тога времена – научници, песници, уметници и писци – дошли су у Александрију, у новоосновани *Музеј* по позиву Птоломеја, који им је понудио гостопримство онолико дуго колико су желели да остану. У *Музеју* су имали слободно време за учење, приступ библиотеци, као и могућност да разговарају и размењују мишљења о разним питањима са другим стручњацима.Александријска библиотека, постала је репозиторијум највећег броја писаних дела тога времена, сакупљених широм света. Неки извјештаји говоре о главној збирци библиотеке, која је бројала око 500.000 дела, са додатних 200.000 у анексу који се звао *Серапеум*"(Burton, 2011, str. 141).

Најстарије и најцеловитије математичко дело настало у периоду између 4.и 3.века пре нове ере, а које је обједињавало дотадашња математичка знања, били су и филозофски и историјски гледано, Еуклидови *Елементи.*Еуклид је био један од најзначајнијих античких математичара.Предања говоре да је математичка знања стекао у Атини код Платонових ученика(Ravi and Syamal, 2014).О његовом животу се мало зна, али се верује да је био централна личност Александрије и александријске школе у којој је и подучавао.

Еуклидови *Елементи* садрже синтезу дотадашњих математичких знања, ранијих писаца. Дело је организовано у тринаест књига и садржи четиристотине шездесет и пет тврдњи грчке геометрије итеорија бројева.У својих тринаест књига Еуклид је систематизовао грчкотеоријско математичко знање, стечено и формирано у два века пре његове епохе. Еуклидов значајне огледа се толико удоприносу оригиналног материјала, колико у вештини којом је организоваомноштво независних математичких чињеницаранијих писаца и епоха. Основно у *Елементима* је заснивање геометрије на аксиоматским основама (Isto).

Свака књига Еуклидових елемената почиње дефиницијама[44]основних појмова који се разматрају у датој књизи, а након дефиниција следе дефинисане аксиоме и постулати.

„Еуклидови *Елементи* почивају на следећих пет аксиома:[45]

1. Ствари (предмети, објекти) које су једнаке трећој, једнаке су међусобом.
2. Ако се једнаке (величине) додају једнаким (величинама), резултати су једнаки.
3. Ако се једнаке (величине) одузму од једнаких (величина), резултати су једнаки.
4. Ствари (предмети, објекти) које се подударају међусобно једнаке су.
5. Целина је већа од свог дела.

Еуклидови постулати[46] су:

1. Може се повући (конструисати) права од једне до друге тачке.
2. Може се конструисати непрекидна ограничена права (дуж) на правој.
3. Може се конструисати круг са центром у датој тачки и датим полупречником.
4. Сви прави углови су међусобно једнаки.
5. Ако права сече две праве, и унутрашњи углови са једне стране праве која сече су мањи од збира два права угла онда се те две праве секу, са те стране праве која их пресеца" (Божић, 2010, стр. 96-97; Burton, 2011, str. 146).

Књиге од прве до четвртебаве се планиметријом – раванском геометријом. Пета књига излажеЕудоксовутеорију сразмера.Сматра се да је теорија пропорција, како је изложена у петој књизи Еуклидових *Елемената*, Еудоксова. У шестој књизи разматрају се особине сличних правоугаоних равних фигура, што представља уопштавање теорије подударности из прве књиге. Аритметиком, теоријом целих (природних) бројева Еуклид се бави у књигама седам, осам и девет; у литератури се наводи да највећи делови седме и скоро комплетна осма

[44]Дефиниција је реченица, исказ, којом се значење једног израза описује неким другим реченицама чије се значење претпоставља разумљивим.

[45]Аксиоми или општа сазнања су искази чија истинитост се не доводи у питање, нешто што је истинито и примењиво у свим наукама.

[46]Постулати су искази који се сматрају истинитим без доказивања, али у одређеној науци или дисциплини.

књига Еуклидових *Елемената* почивају на Архитовим резултатима. Десета књига излаже теорију ирационалности.Једанаеста, дванаеста и тринаеста књига, указују на геометрију простора (стереометрију). У једанаестој књизи разматрају се основне особине просторних фигура. Дванаеста књига разматра теореме о односима кругова, сфера и запремине пирамида и купа. Тринаеста књига показује како се свих пет правилних полиедара (тетраедар, коцка, октаедар, додекаедар и икосаедар) може уписати у сферу, што указује да су знања до којих је Теетет дошао, садржана у десетој и тринаестој књизи Еуклидових *Елемената*(Божић, 2010;Ravi and Syamal, 2014).

Други великангрчкехеленистичке епохе био је Архимед из Сиракузе (*Ἀρχιμήδης*, живео око 287–212.пре нове ере).Био је математичар, фиизичар и астроном. „Архимед је уз Њутна и Гауса, један од три највећа математичара која су икада живела и свакако један од највећих математичараАнтике”(Ravi and Syamal, 2014, str.78).Бавио се геометријом и развиоопшту методу зарешавање проблема израчунавања површине и запремине тела. Кроз свој метод Архимед је рачунао приближне вредности површине круга и сегмента параболе уписујући у њих полигоне са све већим бројем страница. Следећи те принципе дошао је и до изузетно прецизне апроксимације броја *Пи,* који се данас зове и *Архимедова константа*. „У математици га најбоље памте по Архимедовом аксиому, Архимедовом броју, Архимедовом парадоксу, Архимедовом својству и Архимедовој чврстоћи; међутим, био је поносан и на своје откриће методе проналажења запремине сфере; показао је да је обим кугле две трећине запремине најмањег цилиндра који га може садржати” (Isto, str. 79).

1.2.5. Математика„мрачног доба”

У доба Римљана правне и војне школе преузеле су примат над математиком и другим наукама. Математика се могла срeститек у робноновчаним трансакцијама које су људи обављали, али је она као наука и резултати до којих се дошло током ранијих епоха, у периоду такозваног „мрачног доба”била запостављена.

Најзначајнији педагог Римског царства био је Марко Фабије Квинтилијан (*Marcus Fabius Quintilianus*), којије живео на прелазу из првог у други век. Иза себе је оставио значајно педагошко дело *О образовању говорника*, у којем су представљени његови педагошки принципи. У својим педагошким ставовима излаже да у васпитању деце изузетно значајну улогу треба да има породица; залагао се да основно образовање буде широко доступно и поверено најбољим учитељима; сматрао је да деци прва сазнања треба представити кроз игру, као и да настава треба да буде прилагођена узрасту и индивидуалним способностима сваког појединца. Поред говорништва и књижевности у основно образовање уводи математику, геометрију и музику. Његов рад је имао огроман утицај на педагоге 15. и 16.века (Унковић, 2012).

*Мрачно доба*са становишта математике, траје до 16. века. Шеснаести век се узима за крај *Мрачног доба*, јер је тада у ренесансној Италији, дошло до процвата многих интелектуалних делатности, па и математике. У том периоду решена је и кубна једначина, што је први нови математички резултат, непознат достигнућима грчке математике.

У периоду од 5. до 8. века једини трагови писмености задржали су се у манастирима.Сачувани манускрипти показују да се целокупна математика раног средњег века сводила на четири основне рачунске операције (сабирање, одузимање, множење и дељење). Латински је постао и остао главни језик учених људи све до 18.века. Од 6. до 12.века скоро све школе у Западној Европи имале су за циљ обучавање свештеника и биле су блиско повезане са катедралама и манастирима.

1.3. МатематикаРенесансе

Први математичар препознатљив у европској историји после *Мрачног доба* је Леонардо Пизано Фибоначи (*Fibonacci – Leonardo of Pisa*, живео око 1170 – 1250. године). Фибоначи је познат по својој књизи: *Књига о абаку или Књига о рачунању (Liber Abbaci).*Фибоначи у овој књизи излаже индијско-арапски позициони децимални систем бележења бројева. У првом поглављу уводи цифре 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, као и нулу, што је од изузетног значаја за даљи развој математике. Затим упознаје читаоце са стандардним поступцима за множење и дељење које и данас користимо (Ravi and Syamal, 2014).

Фибоначи је 1220. године написао дело *Пракса геометрије (Practica geometria),*збирку корисних теорема из геометријеу којојуказује на низ метода за решавање практичних геометријских проблема. Познаат је и по свом низу бројева, који је назван *Фибоначијев низ*: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55... где је сваки број низа збир два претходна броја. Овај низ бројева нашао је примену у вероватноћи, геометрији, природи, музици (Isto).„Фибоначи је дао и веома елегантан доказ идентитета:

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$$ ” (Isto, str.119).

1.4. Математикаседамнаестог и осамнаестог века

О математичким достигнућима седамнаестог и осамнаестог века указује се кроз дела најистакнутијих математичара ове историјске и друштвене епохе.

Марин Мерсен (*Pére Marin Mersenne*, живео од 1588–1648. године)био је француски теолог, филозоф, математичар и теоретичар музике.У математици бавио се простим бројевима, покушавајући, неуспешно, да пронађе аналитичку формулу којим се они описују. „Доласком у Париз 1619. године, Мерсен је уочио да у Паризу недостаје формална образовна организација која би окупљала научнике и образовне људе. С тога је Мерсен направио свој *Манастир*, као место састнанка за оне који желе да размењују идеје и резултате до којих су дошли. У време када је објављивање техничких открића још лежало у будућности, Мерсен је служио каолична база података научних информација” (Bruner, 2011, str.499).У свом *Манастиру*окупио је око себе интелектуални круг састављен углавном од научне заједницеПариза(Isto).Марин Мерсен, често се називаоцем акустике. Аутор је неколико уговора о музици, укључујући*Harmonicorum Libri (1635)* и *Traité de l'Harmonie Universelle (1636)* (Saloni, 2010. према Papadopoulos 2002). „Мерсен говори о утилитарној моћи хармоније (*Utilite de l'harmonie*)” (Stojanović-Kutlača, 2016, str. 127).

Рене Декарт (*René Descartes*, живео од 1596-1650. године)био је најзначајнији француски филозоф, који је за собом оставио капитално математичко дело *Геометрија,* по коме данас и имамо декартовску геометрију, односно алгебраизовани приступ геометрији. „Декарт у њој повезује геометрију са алгебром, једном и заувек, оно на шта се стари Грци нису усуђивали.Свакој геометријској величини одговара број и обратно. Са геометријским величинама се може оперисати као са бројевима, дакле сасвим слободно. Тако се омогућава да се кроз алгебру препознају геометријски проблеми као корелисани иако би у геометријском руху они изгледали сасвим неповезани"(Божић, 2010, стр.184). Декарт је поставио основе данашњој алгебарској геометрији. „Остаје неоспорно да је тек од Декарта у потпуности разјашњена веза између геометријских објеката и алгебарских једначина, између осталог и одбацивањем принципа хомогености. Његова *Геометрија* извршилаје најдубљи утицај и историсјки дала замах аналитичкој геометрији" (Bernuli, 1978, str. 179).Декартова прва књига *Compendium Musicale (1618)* бавила се питањим музичке теорије(Papadopoulos, 2002).

Исак Њутн(*Sir Isaac Newton*, живео од 1642-1727. године, Енглеска). Студирао је право, али се окреће математици, физици, филозофији. „Иако су Еуклидови *Елементи* и даље били главна књига, Њутн се током студирања упознао и са радовима Декарта, Галилеја, Кеплера и других великана те епохе. На трећој години студија, он пише књигу под насловом *О неким филозофским питањима (Questiones Quaedam Philosophicae).* Сачуване белешке показују да он исправља, или даје нове доказе о сумацији редова, па чак критикује извесне Декартове омашке"(Божић, 2010, стр.190).У периоду између 1665 – 1667. године Њутн јепронашао интегрални и диференцијални рачун – скоро истовремено са Лајбницом, односно, неколико година раније, као и значајне механичке законе, а верује се и Закон гравитације. Њутнова основна орјентација на физику изнедрила је дела *Оптика* и *Математички принципи природне филозофије.* Његов телескоп постао је у Енглеској предмет националне гордости (Bernuli, 1978).

Готфрид Вилхелм фон Лајбниц (*Gottfried Wilhelm von Leibniz*, живео од 1646-1716. године, Немачка) није био задовољан Аристотеловом категоризацијом и методологијом и већ тада је почео да трага за принципима који леже у основи логичких истина, да би годинама касније схватио да се ради о математици, односно математичкој логици.

Осим математике и филозофије, Лајбниц се бавио и физиком. У оквиру физике истраживао је деловање и законитост сила. Имао је интересовања и удела у биологији, психологији, механици, медицини и другим областима (Isto). „Од Лајбница потиче тврђење – *Знам да свака наука, уколико је спекулативнија, утолико је и практичнија*. Сматрао је да једино логика може унети математичку егзактност и инвентивност у филозофију, у посебне науке, у технику и остале људске вештине” (Isto, str.183).У јесен 1661. године Готфрид Лајбниц постао је професор на Лајпцишком универзитету, а сер Исак Њутн, професор на универзитету у Кембриџу.

Проналазак калкулуса је вероватно најзначајнији интелектуални продор начињен у 17. веку. Њутн и Лајбниц су готово истовремено дошли до исте идеје. Око 1673. Лајбниц је упутио писмо једном од Њутнових сарадника по имену Олденбург, интересујући се за новије резултате Енглеске математике. Лајбниц се 1676. године посебно заинтересовао за Њутнове резултате и затражио од Олденбурга више података. Њутн је написао Олденбургу два писма о свом раду и затражио да преводи на Латински буду прослеђени Лајбницу(Божић, 2010; Ravi and Syamal, 2014).

Epistola Prior(13. јун 1676) садржала је резултате о биномној теореми, сумацији редоваи назнаку о постојању неког „метода”.*Epistola Posterior*(24. октобар 1676) садржала је расправу о бесконачним низовима, намерно прекинуту на месту на коме је требало да уследи објашњење мистериозног „метода”.

Често се говори да су Њутн и Лајбниц пронашли калкулус, али независно један од другога(Исто; Isto).

Леонард Ојлер (*Leonhard Euler*, живео од 1707-1783. године, Швајцарска). Ојлера скоро сви историчари математике називају „последњим ренесансним математичарем”, указујући да је вероватно последњи математичар у дотадашњој њеној историји који је познавао целокупну математику. Тешко је наћи област математике којој Ојлер није дао допринос.Ојлер је формирао аналитичку геометрију и тригонометрију у оном облику у којем је данас изучавамо. Први је увео тригонометријске функције синус и косинус. „Интегрисао је диференцијални и интегрални рачун у целовиту математичку дисциплинукоју данас називамо математичка анализа у увео готово све ознаке које данас користимо. Увео је ознаку$f(x)$за функцију, e за основу природних логаритама,iза квадратни корен из -1, ознаку pi, као и $\sum$ за коначну сумацију”(Божић, 2010, стр. 199).Ојлер је повезао теорију бројева и математичку анализу и тиме допринео теорији низова, редова и бесконачних производа. Истакао се у домену теорије апроксимација, коначних разлика и варијационог рачуна и практично засновао ове дисциплине у данашњем, савременом смислу.

1.5. Математикадеветнаестоги двадесетог века

Модерна математика која настаје крајем 19.века, не бави се само праксом, односно применом математике у различите сврхе, већ се стварају и теорије, као и нове гране теоријске математике. „Почетком и током 20. века јављају се многе апстрактне математичке теорије – алгебарске структуре (група, прстен, поље), структуре поретка (дефинисане релацијом поретка), тополошке структуре (околина, граница, непрекидност), програмирање, теорија алгоритама, теорија вероватноће, математичка статистика, оптимизација и друго.Ништа у математици није скоковито, једно следи из другог и само ако знамо историјски пут, знаћемо чиме се математика бави, шта изучава у садашњости и шта ће изучавати у будућности”(Дејић и Михајловић, 2015, стр.68).

Карл Фридрих Гаус (*Johann Carl Friedrich Gauss,* живео од 1777-1855.године, Немачка). Гаус је уз Ојлера, последњи математичар у историји за кога се може рећи да је познавао целокупну, тада познату математику. Гаус је делио убеђење да се математика мора односити на стварни свет. Још као дете показао је изузетне склоности ка математици, а када је његовом разреду учитељ задао задатак да саберу бројеве од 1 до 100, како би их што дуже упослио да раде, Гаус је пронашао формулу: $1 + 2 + \ldots + n = n (n + 1) / 2$, и одмах је записао тачан одговор (Ravi and Syamal, 2014).

У овом периоду долази до настанка нееуклидске геометрије – Николај Иванович Лобачевски (*Лобачевский Николай Иванович*, живео од 1792–1856, године, Русија). Лобачевски заступа став да нема ниједне математичке гране, ма колико она била апстрактна, која се не би могла применити на појаве стварног света (Bernuli, 1978).

Савремена математика настајала је кроз читав 19.век. „Појава математике ослобођене онтолошког притиска означава појаву савремене математике”(Божић, 2010, стр.220).Оснивач математичке логике је енглески математичар Џорџ Бул (*George Boole,*живео од 1815-1864. годне, Енглеска).Оснивач теорије скупова је немачки математичар Георг Кантор (*Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor,* живео од 1845-1918. године, Русија) (Исто).

Математика се током деветнаестог века развила до тада неслућених размера.Појава диференцијалног и интегралног рачуна, нееуклидске геометрије, анализе, алгебре, теорије алгебарских структура, која је започета теоријом група, а изнедрила се у изучавање произвољних скупова са било каквим операцијама. „Логика, која је до тада била само филозофска дисциплина, математизована је у најопштијем смислу. Теорија бројева је аксиоматизована први пут у историји математике поставши тиме формално-дедуктивна теорија попут геометрије"(Исто, стр. 240-241).

Карактеристике математике неке епохе, па тако и савремене математике, можемо схватити само довођењем у везу са математичким достигнућима из прошлости. Математика је била наука о просторним и количинским односима, али данас доминирају структуре и њен предмет изучавања је много шири. Појам граничне вредности и функција раније су везивани за математичку анализу, али су ти појмови данас премашили ту уску примену. Теорија мере и интеграције своје дубоке корене има у античкој математици (Дејић и Михајловић, 2015).

Изложено указује да је математика старе Грчке поставила темеље развоју савремених математичких области и дисциплина, да су многи каснији математичари, истражили и открили, математичке дисциплине, које су оставиле пун траг до данашњих дана и отвориле нове токове математичке мисли, засноване на дедуктивном и апстрактном мишљењу, те уопштавању доказа и теорема.

2. ИСТОРИЈСКЕ И ФИЛОЗОФСКЕ ОСНОВЕ РАЗВОЈА МУЗИКЕ

Од најранијег периода људске цивилизације музика[47] је богатила свакодневни део човековог живота. На почетку развоја музичког израза доминирало је вокално музичко изражавање, да би временом човек стварао инструменте којима је имитирао звуке из природе. Ти први, примитивни инструменти, подстакли су стварање сложенијих музичких инструмената и нових музичких облика у каснијим културно-историјским епохама. На самом почетку свог развоја, музика се уклапала у радне процесе људи, у заједничке друштвене манифестације, а у великој мери музика је довођена у везу са магијским обредима (Andreis, 1975). У магијском обреду, у везу се доводи тон, реч, покрет, мимика, те се може претпоставити да музика и плес (игра) имају заједничко порекло.„Музика настаје у колективу и због њега" (Isto, str.10; Ђурић, 2006). У првобитним заједницама, људи су певали радне песме и покрет везивали за врсту рада који су изводили, понављајући мелодијски образац, као и радни покрет. Музика се везује за свакодневни рад, колективне песме и плесове, да би се касније развиле и ратничке песме, погребне песме у част ратних жртава, песме које се певају у славу хероја и љубавне песме.

„Платон, кад говори о музици, увек има у виду њено етичко деловање будући да је музика (као уметност звука)[48] од одлучујућег значаја за образовање у држави, као што је музика, у највишем смислу значења те речи, одлучујућа за образовање државе будући да јој даје највише законе (*nomoi*). То етичко деловање музике у најтешњој вези је са појмовима *harmonia*и *rhythmos*[49]будући да они могу имати и морални карактер, па су зато пожељне само оне хармоније које изражавају*етос* честитог и мужевног човека" (Uzelac, 2005).

Као и код математике и у погледу развоја музике уочава се да се из музике засноване на колективним догађајима, раду, музике настале кроз природу и

[47]Музика припада временским уметностима, музичко збивање представља процес који се одвија у времену (Skovran iPeričić,1991).
[48]„Музика је уметност која се служи и исказује звуком" (Деспић, 1997, стр. 11).
[49]Ритам исказује временску димензију музике, трајну и временску организацију музике (Cohen, 2015). Ритам је, према Деспићу, једина самостална категорија у музици.Ритам изражава, међусобни однос низа звукова по трајању. Мелодија, хармонија (склад), облик, тоналитет, захтевају подлогу ритма, јер се испољавају у времену, а ритам је тај у коме се исказује музичко време. Ритам, у музичком смислу може да делује сам за себе – на пример у звуку неке удараљке, уз јачину и боју тог звука. Према неким теоријама о пореклу музике, ритам је њено извориште, основни, полазни чинилац (Деспић, 1971).

свакодневни живот, кроз различите епохе људског друштва, постепено развија музика као уметност, која је достигла висок ниво апстрактности.

2.1. Основе музике старих цивилизација

У циљу свеобухватнијег прегледа развоја музичке мисли,у раду се указује на музички израз најранијег периода у културно-историјском развоју друштва.

Музика првих цивилизација пратила је антагонистичку поделу друштва, владавина робовласничког друштвеног поретка и раздвајање социо-економског поретка на владајућу (повлашћену класу) и робове (потлачену класу). У погледу музике долази до разлике између музике владајуће, дворске културе и музике широкох народних маса; музика се повезује са дворским и верским церемонијама, велича владара, његова дела и слави божанства; музика народних слојева и даље је повезана са радним активностима и производним процесима, као и истицању духовних збивања – љубави, лепоте, природе (Andreis, 1975).

О музици старих цивилизација сазнаје се на основу историјских извора – „рељефа, скулптура и слика на гробницама, храмовима и палатама, на којима су приказани музичари, као и инструменти на којима су свирали”(Пејовић, 1991, стр.9).

2.1.1. Музика Месопотамије

Музика Месопотамије у највећој мери била је повезана са религијским обредима у којима се свакодневно примењивала. „Многе химне и црквене песме чији су се текстови сачували, наводе већ у наслову и инструмент који се употребљавао у извођењу” (Andreis, 1975, str. 27). Сачувани ликовни извори и писани споменици указују на инструменте које су Сумерци и Вавилонци користили – лире, харфе, чегртаљке, звечке, разни бубњеви, дугуљасте флауте, рогови и други жичани и дувачки инструменти.

Музика је пратила свакодневни живот древног човека, као саставни део славља, весеља, песама-игара и тужбалица (Пејовић, 1991).На подручју

Месопотамије, постепено се развио богат дворски живот. Музика се изводила на дворовима од стране великог броја учених музичара (Ђурић, 2006).

Вавилонци су музику доводили у везу са бројевима. Тако су бројеви 5 и 7 сматрани светим. Број пет означавао је број елемената из којих је створен свет, као и број главних планета; број седам означавао је дане у недељи, збир свих планета, збир свих музичара у храму и харфиста у дворској капели (Andreis, 1975; Пејовић, 1991).

2.1.2. Музика Старог Египта

Музика је у Старом Египту имала значајну улогу у свим круговима становништва. Углед учених музичара на дворовима био је такав, да су их сматрали фараоновим рођацима.Дворски свирачи су на инструментима пратили играче и певаче, забављајући фараона и великаше (Пејовић, 1991).

Египћани су употребљавали велики број инструмената – разне удараљке, чегртаљке (кастањете), разне фруле, веће и мање бубњеве, харфе, цитре и друге. Инструменти су имали важну улогу не само у дворском животу, већ и у свакодневним активностима и као пратња радова у пољу.

На основу сачуваних извора, верује се да су Египћани, као и Сумерци и Вавилонци познавали пентатоничку и хроматску лествицу.[50] Према Деспићу (Деспић, 1997)пентатоника је врста лествице од пет тонова у оквиру октаве.[51]Пејовић наводи да је пентатоника анхемитонска, односно лествица без полустепена, али понекада и са њима. Њен најстарији низ обухватао је тонове:

*еф, ге, а, це, де, (еф)*а постојали су и следећи:

ге, а, це, де, е, (ге)

а, це, де, е, ге, (а)

це, де, е, ге, а (це) (Пејовић, 1991).

[50]Лествица је у музици поступан низ тонова у распону октаве. Други назив за лествицу је скала (италијански scala – лествица, степенице) (Деспић, 1997).

[51]Октава –музички интервал између два тона чије су фреквенције нижег и вишег у односу 1:2. Октава обухвата распон од 12 полустепена или,дијатонски посматрано, седам степена – два полустепена и пет целих степена.

Хроматска лествица, пак садржи седам тонова, од којих су сви на полустепеним растојањима. Главни интервали[52] били су октава,квинта[53] и кварта.[54]Претпоставља се да су стари Египћани познавали и нотно писмо[55](Andreis, 1975).

Најстарије људске цивилизације познавале су пентатоничку лествицу, музику су изводили током свакодневних свечаности и обреда, а од инструмената су познавали: лире, харфе, чегртаљке, звечке, разне бубњеве, дугуљасте флауте, рогове и друге жичане и дувачке инструменте.

2.2. Музика античке Грчке

Врхунац музичке уметности старог доба проналазимоу античкој Грчкој. Најзначајније области интересовања старих Грка биле су филозофија, математика и музика.

Израз *Mousike techne* (од којег потиче и назив *музика*) у старој Грчкој није означавао само музику. У дословном преводу значио је *уметност муза,* а обухватао је инструменталну музику, певање и плес, што указује да су напев, реч и ритам чинили нераздвојну целину (Andreis, 1975). Музика је имала важну образовну улогу; њен циљ није био само да забави, већ и да утиче на духовни живот човека. Када се у Грчкој за некога говорило да је*musicos,* то је значило, не само да разуме језик музике, већ и да је свеопште образован.Према Гроуту, музика је уметност комбиновања вокалних и/или инструменталних звука, који производе лепоту форме и хармоније (Grout, 1973).

„Мишљење првих грчких мислилаца упућено је проблемимашто их намеће природа (*phisis*) и није случајно што кодњих, посебно код Питагорејаца, с којима и почиње мишљењемузике и њеног места у свету, музика добија

[52] Интервал – растојање између два тона по висини. Ако тонови наступају узастопно то је мелодијски интервал, а уколико тонови интервала звуче истовремено, то је хармонски интервал (сазвучје). Према Васиљевић (Vasiljević, 2006)интервали се односе на постављање тонских односа и растојања између тонова.

[53]Квинта – музички интервал који обухвата распон од петузастопних тонова. Пети тон од полазног, задатог тона.

[54]Кварта – музички интервал који обухвата распон од четири узастопна тона.

[55]Нотно писмо чине знаци за записивање музике. Развојем теорије музике усавршили су се и нотни знаци (ноте) за записивање различитих музичких дела. Нотно писмо чине нотни систем, ноте различитог трајања, музичке паузе, ознаке кључева и друго.

светско,космичко значење. Треба знати да тада, као и потом кодПлатона, појам музика има другачије значење него данас:њиме се означавају сва умећа која служе васпитању душе,а налазе се наспрам гимнастике (чији је циљ васпитање тела)" (Uzelac, 2005, str. 19).У Грчкој су сви важни догађаји били пропраћени музиком – венчања, погреби, пољски радови, верски обреди, јавне свечаности, игре, такмичења и друго.

Грци су музику посматрали са етичког гледишта, настојећи да утврде колико им она доноси добра, а колико лошег. Платон је рекао: „Што је у држави боља музика и држава ће бити боља" (Andreis, 1975).У Платоновим*Дијалозима,* музика је предмет учења о космичкој хармонији, али и битан елеменат васпитања у држави; уређеност државе, израз је хармоније која влада целином свега што јесте. Платон теоријску основу музике схвата као поредак хармоније и ритмова, којима додаје и мелодију као саставни део музике.„Појам музике код Платона има више значења; довољно је поменути да он термином музички (*mousicos*) означава образованог, а термином *amusicos*, необразованог човека; ако се притом зна да васпитање обухвата физичко васпитање тела и музичко образовање душе и да музичко образовање обухвата песме, митове, певање и музику уопште, јасно је зашто ће музика имати важну улогу у изградњи идеалне државе"(Uzelac, 2005, str.54).„У свом делу *Политика*, велики грчки филозоф Аристотел уз помоћ науке о опонашању указује на начин на који музика делује на вољу.[56] Према његовим речима, музика непосредно опонаша страсти, односно душевна стања:благост, љупкост, срџбу, умереност, храброст, али и њима супротна и друга стања и расположења" (Isto, str. 48). Према Аристотелу, ништа снажније не утиче на осећања од ритма и певања (Vasiljević, 2000).

2.2.1. Основе музичке теорије античке Грчке

Према доступним изворима, сматра се да су Грци на почетку развоја музичке теорије користили пентатонску лествицу, но ипак, темељ грчке музичке мисли је

[56]Аристотел продубљује свест о васпитној улози музике, наглашавајући да музика прочишћава осећања, изазива и подстиче ентузијазам и доприноси развоју слободног и племенитог духа (Stojanović-Kutlača, 2016).

тетрахорд[57](Wellesz, 1957).Спајањем два тетрахорда, као основног елемента грчке музике, настале су грчке лествице – дорска, фригијска и лидијска. „Све скале (према грчкој теорији) изграђене су од тетрахорда, односно из система од четири суседна тона(West, 1992).

Дорска лествица настајала је спајањем два тетрахорда, од којих сваки на крају има полустепен (степен – степен – полустепен); *фригијска* лествица настајала је спајањем два тетрахорда од којих сваки има полустепен у средини тетрахорда (степен – полустепен – степен); *лидијска* лествица настала је спајањем два тетрахорда од којих сваки има полустепен на почетку (полустепен – степен – степен) (Andreis, 1975; Wellesz, 1957).

Остале грчке лествице настајале су тако што се горњи тетрахорд у поменуте три лествице, пребацивао испод доњег или обратно, доњи тетрахорд се пребацивао изнад горњег. Тако настале лествице[58] задржавале су име лествице од које су настале, али се испред имена додавао префикс *хипо* или *хипер*(Andreis, 1975). Грци су сматрали да су дорски напеви мужевни, озбиљни и величанствени, да фригијски изражавају узбуђења и страсти, а лидијски бол.

Грци су развили свој систем нотације користећи два различита нотна писма – инструментално, које је означавало дијатонске тонове, словима састављеним из феничанске азбуке и вокално нотно писмо, састављено из грчког алфабета и које је означавало хроматске тонове, као и тонска трајања. „Ритам се ослањао на метрику текста вокалне музике, те с тога у инструменталном писму није могао да буде обележен” (Vasiljević, 2000, str. 8).

Најпознатији грчки инструменти били су жичани инструменти – лира и китара. Жице су биле једнаке дужине и свака од њих је могла произвести један тон чија је висина зависила од дебљине и напетости жице. Број жица се временом повећавао. На почетку то су били инструменти са пет до седам жица, а касније су

[57]Тетрахорд је низ од четири узастопна тонаод којих први и последњи чине интервал кварте. Врсту тетрахорда одређује однос и положај полустепена међу тоновима у датом тетрахорду. Полустепен се може наћи на крају, у средини или на почетку тетрахорда. У тетрахорду су само први и последњи тон били фиксирани, док су унутрашња, два тона могла мењати своју висину(Пејовић, 1991). Мењањем унутрашња два тона настала су три тонска рода – дијатонски (доњи тетрахорд дорске лествице); хроматски (висина другог тона у тетрахорду се снижавала за полустепен) и енхармонски (други тон се спуштао за степен, а трећи за интервал мањи од полустепена – четвртину степена).

[58]Грчких лествица је било девет, међутим, како се распоред полустепена и степена код неких лествица поклапао, стваран број различитих грчких лествица био је седам (Исто). У различитим културама широм света користе се различите лествице – скале (Despić, 1971).

забележене китаре са чак шеснаест и са осамнаест жица. Најважнији дувачки инструмент био је аулос – налик на данашњу обоу. „Инструменти којима су се Грци служили нису били снажни и нису давали могућности за извођење сложенијих композиција; махом су се користили лира и китара (побољшана лира), а ти инструменти су били до те мере једноставни да се њима свако могао служити” (Uzelac, 2005, str. 22).

Употреба појединих инструмената изнедрила је и различите грчке музичке облике:[59] китародија – соло певање уз китару, при чему је певач сам себе пратио на китари; аулодија – певање уз аулос, где један извођач свира, а други пева; чиста инструментална музика – у којој су главни инструменти били китара и аулос; хорска музика – збор (како се називала група певача) обухватао је од око 15 до 30 певача. Како је збор наступао у различитим догађајима издвојиле су се посебне врсте групног певања: трен – жалопојка, оплакивање; пеан – песма радости, најчешће посвећена Аполону; дитирамб – посвећен Дионису, богу вина. Из дитирамба се током времена развила трагедија; химне – свечане песме упућене боговима (Andreis, 1975).

У развоју грчке музике уочила су се два правца – *канонници* (Питагорејци), који су музику заснивали на акустичко-математичким принципима и доводили је у везу са пропорцијама бројева и *хармоници* (следбеници Аристоксена из Тарента, два века после Питагоре), који су сматрали да музика треба да се прима као естетски доживљај, а не путем математичких односа (Vasiljević, 2000).

Антична теорија музике,уопштено гледано, бавила се двема врстама музике: *спекулативне*, којој су припадале физичка музика (наука о односу звукова) и теоријска музика (наука о звуку, ритмика и метрика) и *практичне* музике, којој су припадале структурна и извођачка музика. Структурна се бавила грађењем и извођењем поезије, грађењем мелодија, ритмова, стихова, док се извођачка музика огледала у учењу о инструментима (органика), учењу о певању (одика) и учењу о сценском извођењу (хипокритика) (Uzelac, 2005).

Грчка музика изнедрила је дорску, јонску и фригијску лествицу, из којих су настајале нове засноване на распореду тетрахорда, развили су инструментално

[59]Музичке компоненте, пре свега ритам и мелодија, а код вишегласне музике и хармонија, потом динамика и друго, њихова организованост у поједине музичке фразе и целине, доводе до стварања различитих музичких облика (Skovran i Peričić,1991).

и вокално нотно писмо, а на основу најчешће употребљаваних инструмената у оквиру грчке музике (китаре и аулоса) развили су и музичке облике китародију и аулодију. Грци су уједно познавали теоријску и практичну музику и поставили су основе за даљи развој музичке теоријске мисли.

2.3. Музика Средњег века

На улогу, облике и значај музике у средњем веку (период од 5.до 15.века наше ере) умногоме је утицала појава хришћанства. Спиритуализација коју је хришћанство донело из темеља је изменила начин приказивања човека, као и тематику уметности посматрану у целини (Andreis, 1975; Ђурић, 2006).

Период средњег века окарактерисала је и промена друштвеног поретка. Робовласнички поредак замењује феудални,[60]који је на свој начин утицао на развој музике.Музика феудализма била је веома изразита и на дворовима и у граду и на селу. Током средњег века ојачао је утицај цркве, која постаје средиште писмености и знања што је допринело и развоју црквене музике. Црквено једногласје,[61] уметност трубадура, тековине вишегласја, развој музичке теорије и нотације, усавршавање инструмената, указују на развој музике средњег века, која ствара плодно тле за даљи развој музичке теорије, мисли и уметности (Andreis, 1975).

У псалмодијском певању[62]јављају се химне, значајна врста црквених песама намењених претежно верницима, а мање професионалним певачима. Химна, као важан музички облик средњег века, певала се у једном тоналитету, без пратње (Šmit, 2011). Осим химни, посебно место у средњовековној музици заузима црквено једногласно певање названо грегоријанско певање или

[60]Феудализам као друштвени поредак јавља се крајем 5.и почетком 6.века наше ере и траје до краја 18. века. У хијерархији феудализма, на врху пирамиде је владар – краљ, који има своје вазале, великаше којима додељује поједина подручја; краљеви вазали имају своје вазале и тако до дна пирамиде на којој се налазе кметови.

[61]У једногласној хришћанској музици издвајала су се два облика песама – псалмодичке (у којој реч доминира над тоном) и мелизмазичке (у којој тон доминира над речју)(Ђурић, 2006).

[62]Псалмодијско певање, представља облик извођења код којег се највећи број слогова у тексту, појединих реченичних и логичких целина изводи на истом тону. На један слог речи, долази један тон (Andreis, 1975).

грегоријански корал.[63] Грегоријански корал изражавао је музику повезану уз обреде римокатоличке цркве и изводио се кроз литургијско певање у главним црквеним службама. „Грегоријанско певање је службена литургијска музика у обредима римске католичке цркве. Састоји се од једногласне мелодије, коју на латински текст, певају мушки гласови, без инструменталне пратње”(Andreis, 1975, str. 85). Са друге стране сâм корал је безличан, објективан, изражава чулну и емоционалну лепоту, наспрам верског садржаја и текста (Isto, str. 85).

Временом извођење грегоријанског корала добило је различите облике: свештеник сâм изводи корално певање (*псалмодички соло*); свештеник пева неке делове текста, а завршне изводи хор (*респонзоријално певање*); сав литургијски текст изводи хор, подељен у две групе певача, које наизменично певају (*антитоничко певање*) (Skovran i Peričić, 1991).„Речитативне текстове изводио је обично солиста декламацијом већег броја слогова на једном тону или мелодијом малог обима (акцентус), а мелизматичне, односно мелодије са украсима – хор у смењивању са солистом или са другим хором. У певању званом концентус, на један слог текста долазио је већи број тонова” (Пејовић, 1991, стр. 48).Промене у певању грегоријанског корала условило је тропирање – уметање нових мелодијатекстова у одсеке грегоријанског певања. На тај начин настале су секвенце[64] и тропе[65] и први облици вишегласја.[66]

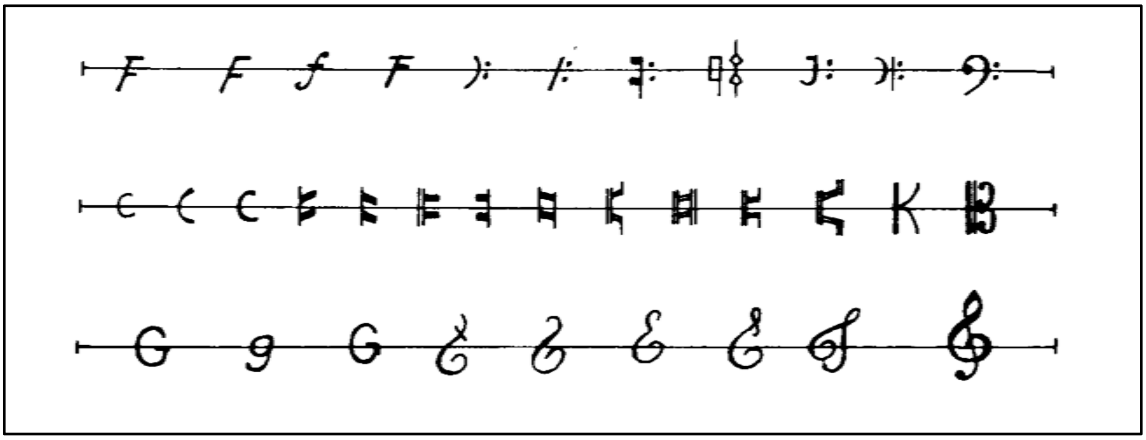
2.3.1. Основи музичке теорије средњег века

Први писани знакови за бележење тонова формирани су током средњег века. То су неуме (грчки, *neuma* – знак) знаци који датирају из 8.века, а који су настали из

[63]Грегоријански корал, прво велико музичко-уметничко остварење хришћанства, имао је значајну улогу у развоју музике у првим вековима развоја вишегласја (Skovrani Peričić, 1991).
[64]Према Пејовић (Пејовић, 1991), секвенце су се временом одвојиле од грегоријанског корала и постале самосталне. Велики утицај на њих су имале химне, народна музика, а добиле су и текст у строфама, као и периодичност мелодије. Изводиле су се антифоно или у дијалогу солисте и хора.
[65]Тропа, такође настаје уметањем текста или мелодија и одређује се као свака музичка или мелодијска парафраза и/ или варијанта (Исто).
[66]Вишегласје се развија постепено од 9.века. У дванаестом веку долази до појаве полифоније. Музичка дела почињу да се компонују у два и више гласова. Појава полифоније (вишегласја) у средњем веку донела је значајну новину у развоју музичке уметности и дала важну основу за развој музике наредних епоха. „Најстарији вид вишегласја је organum. Грегоријанском напеву додаје се, новнижи глас, они се крећу у паралелним квартама, обично почињући и завршавајући једнозвуком” (Skovran i Peričić, 1991, str. 315).

грчко-римских граматичких акцената (Пејовић, 1991). Током развоја неуматског писма, постојале су неуме без црте, које нису могле забележити висину тона и неуме са цртама, које су указивале на висину тона (*Слика 5*).

„Прва прекретница епохалног значења настала је у развоју нотације у тренутку када се увела прва црта... Она је заправо означавала уписивање три звука, једног на црти, другог испод црте, а трећег над њом. Тако су се могла тачно користити три тона”(Andreis, 1975, str.103).Та прва линија[67] за записивање тонова била је црвене боје и на њој се уписивао тон *еф (фа).* Временом се додаје друга линија, линија жуте боје (ређе зелене), која је означавала тон *це* (до). Касније се, између ове две линије додаје и црна линија на којој се бележио тон *а* (ла).Захваљујући Гвиду из Ареца (*Guido D'Arezzo,* око 995 – око 1050), музичком теоретичару, начињен је велики помак у записивању неума, додавањем четврте линије и одређивањем дефинитивног положаја неума на систему од четири линије и празнинама између њих. Ноте су се читале уз помоћ нотних кључева. Даљим развојем у 12.веку, облици нота добијају облик квадрата и ромба.



Слика 5 Нотација помоћу неума[68]

Према Пејовић, Гвидо из Ареца био је наставник дечјег хора катедрале у Арецу. Како би својим ученицима олакшао певање, „примењивао је солмизационе слогове за сваки тон у хексакорду”,[69]користећи за сваки од њих почетне слогове

[67] „Крајем 10. века уводи се прва линија, у ствари напета жица представљена на хартији, која је омогућавала фиксирање три тона, затим друга и трећа линија, увек различитих боја. Испод линије било је словом обележено који је тон на њој записан – f на црвеној, а c на жутој. Из ових слова су се касније развили одговарајући кључеви (на исти начин је касније настао g кључ”(Пејовић, 1991, стр.58). Cf. Пејовић, 1991, стр.57-58;Andreis, 1975, str. 103).
[68]Преузето из Пејовић, 1991, стр. 58.
[69]Хексакорд је низ од шест узастопних дијатонских тонова, са полустепеном између трећег и четвртог тона.

химне светог Јована. То су били слогови – *ut, re, mi, fa, sol, la*. „Назив за тон *си* настао је тек у 15.веку, а у 17.је*ut* замењено са*це*(Пејовић, 1991, стр.59).

Осим, раније поменутих музичких облика, током средњег века развија се и *мотет (motetus)* у 13. векуу Француској и један је од најзначајнијих полифоних облика средњег века. Мелодије добијају текст, певају се у више гласоваи постепено се изводе и изван црквених обреда, са текстовима на народном језику. Уз мотет значајна је и појава *баладе,* као музичког облика. Балада је најчешће била двогласна или трогласна и изводила се уз инструменталну пратњу (Andreis, 1975).

Музички инструментаријум средњег века обухвата разне врсте харфи – романску и готску; лауте, цитре, фидуле (најраспрострањенији жичани инструменти средњег века), блок-флауте, обое, хорне од животињских рогова, праве и савијене трубе,чегртаљке, звонца, бубњеве и друго.

Духовни карактер средњовековне музике,доминација вокалног стваралаштваи музике стваране за пратњу црквених хришћанских обреда, добила је нови дух и стил развојем нове стилске епохе – ренесансе, чија се музичка мисао развија крајем 14.и кроз 15.и 16.век.

2.4. Музика у доба Хуманизмаи Ренесансе

Период краја 14.и читав 15.и 16.век, обележило је доба ренесансе, доба препорода, поновног рађања, доба обнове, античке грчке уметности и усавршавање музике те формирање нових музичких облика, обогаћивање и усавршавање музичке теорије која је дала основе њеном даљем развоју у новим епохама које следе.

Током шеснаестог века музичка уметност добија све већи значај, што је илустровано употребом музике у свим значајним центрима тадашње Европе, али и кроз истицање важности музике за развој и образовање ученог човека (Andreis, 1975). Музика шеснаестог века у појединим земљама Европе – Француској, Италији, Немачкој, постепено јеразвијала националнимузички карактер.

Према Андреису, музика ренесансе[70]се испољава у три вида и то као: музика која се изводи у цркви и у оквиру свечаности посвећених владарима и дворовима; музика професионалних музичара племићког реда и музика широких народних слојева (Isto).

Ренесансна уметностпосебно се очитава у Италији, с краја петнаестог века, када долази до развоја разних музичких световних форми – *villota, frottola,*[71] *villanella, barzelleta, canzonetta, baletto*и друге. Музички облик вилоте, указивао је на италијанску полифонију, која се одликује једноставношћу, свежином и прозрачношћу. Вилота, као музички облик, била је полазна основа на којој ће се касније развити, током шеснаестог века, *мадригал,*[72] један од најзначајнијих музичких световних облика, вокалне полифоније у Европи и ренесансној Италији (Andreis, 1975).„Са становишта музичке садржајности мадригал доноси увек нову грађу, без понављања... Мадригал шеснаестог века у првој половини века је трогласан и четворогласан, а у другој петогласан"(Isto, str. 230; Skovran iPeričić 1991, str. 324).Текст мадригала био је на народном језику (пре свега италијанском), а тематика је била љубавна лирика, али се у њему сусрећу и елементи сатире, шале, политике, филозофије, па и религије. Док је мадригалнастојао да искаже емоционалност и експресивност, са друге стране јављају се представници *Римске школе,* Палестрина (*Giovani Pierluigi, Palestrina*), који су тежили што јаснијоји мирнијој полифонији, мелодијама мира и благости. Палестрина се сматра највећим представником не само Римске школе, већ и вокалне духовне полифоније. Он пише искључиво за хор и певање без инструменталне пратње, такозвано*а капела*(*a cappela*) певање.

Инструментална музика стиче самосталност током шеснаестог века и одваја се од вокалне музике. Формирала је своје музичке облике карактеристичне најпре за ренесансни период – *ричеркар, канцона, фантазија, токата, прелудиј* и

[70]Ренесансно раздобље музике не треба схватити као потпуно издвојену целину од наредне друштвено-културне епохе Барока. Барок, је свакако донео нове тежње, које стоје у оштрој супротности са музичким ставовима шеснаестог века, али се ипак у том веку у потпуности припремало тло за развој барокних музичких инструмената (Andreis, 1975).

[71]Фротола (*Frottola*)је музички облик у којем долази до премештања мелодијског тежишта на горњи глас.

[72]Треба разликовати мадригал, као музички облик који се јавио у 14. веку и који је писан за два до три гласа, од којих доњи може бити намењен инструменту. Све строфе код овог облика певале су се на исту мелодију, а свакој се придружује рефрен, са новом мелодијом (Skovran i Peričić 1991).

друге. Током 16. века јавља се и посебан облик нотације *tabulatura,*[73]која је служила записивању деоница за свирање на лаути[74] и оргуљама. Ипак такав систем нотације није био јединствен. Поред жичаних инструмената развијају се и инструменти са диркама – оргуље, клавичембало, клавикорд (претеча данашњег клавира); гудачки инструменти – виоле, лире; дувачки инструменти – фагот и флаута.

Када се говори о нотацији у доба ренесансе, до седамнаестог века задржано је записивање нота квадратног и облика ромба, а постојале су и ознаке и називи које су указивале на нотне вредности (Kite-Powell, 2007, str. 363). У свом делу *A Performer's Guide to Renaissance Music*, аутор указује на начин записивања нота и њихових вредности, те указује на њихове називе.[75]

2.5. Музика Барока

Барокни стил није наглашен у глобалној историји уметности јер се временски период када је процветао, период краја 17. и почетка 18. векапосматра као затворени временски период у којем су изражени различити уметнички правци и стилови. Барок се у литератури одређује и каозасебна грана или варијанта ренесансне уметности из које је настао. Барокна уметност настала је у доба дубоких религиозних, културних и друштвених немира (Klaus, 2009).

Барок је уметност римокатоличких и протестантских, дворских и грађанских кругова. У уметничком стварању испољава се монументалност, помпезност, патетика, китњаст стил, богато украшене цркве и грађевинесаакцентом на декоративним спољним ефектима (Andreis, 1975). Као основне принципе барокне уметности ауторка Стојановић-Кутлача, наводи „импровизацију, орнаментацију и полифонију”, наглашавајући „да је њихов

---

[73]„Табулатура је била специјална нотација, којом су исписиване инструменталне деонице – словима, бројевима и низом других знакова, нарочито на инструментима са диркама и на лутњи (лаути)” (Пејовић, 1991, стр. 78).
[74]Лаута је карактеристичан инструмент у доба ренесансе. За лауту су писана прва самостална инструментална дела. У шеснаестом веку најраспрострањенија је била лутња са шест жица. Касније се број жица повећавао. Нотација табулатуре за лутњу састојала се у томе што се на папиру повлачило онолико црта колико лутња има жица, а на тим линијама су се означавала места која требапритиснути прстима (Andreis, 1975).
[75]Cf. Kite-Powell, 2007, str.364.

заједнички корен у општој филозофској идеји – идеји хармоније"(Stojanović-Kutlača, 2016, str. 124).

У центар музичког изражавања стаје појединац као уметнички субјекат – виртуоз. Монодија добија превласт над полифонијом. Позорница постаје оквир нове музичке уметности, а опера нови музичко-сценски облик,карактерише барокну[76] музичку епоху.

Током раног барока (1580 – 1630) преовладава негативан став према полифонији и снажна субјективна интерпретација текста у слободном ритму, уз честе употребе дисонанци: хармонија је претонална и акорди нису сасвим тонално конципирани. Почињепостепено раздвајање вокалне и инструменталне музике, али вокална музика и даље имаводећи утицај. Током епохе средњег барока (1630 – 1680) развија се стил *белканто* у опери, кантатии ораторијуму, формирају се *дур* и *мол*, а вокална и инструментална музика су подједнако значајне. Током касног барока (1680 – 1730) тоналитет дура и мола потпуно је формиран, долази до стапањатоналне хармоније и технике полифоније. Појављује се концертни стил, а инструментална музика има већи утицај у односу на вокалну(Andreis, 1975; Пејовић, 1991).

„Опера,[77] музичко-сценско дело, постаје носилац барокног сјаја, његове величине и монументалности, његове раскоши и пренатрпаности украсних елемената..." (Andreis, 1975, str. 322).Овај музичко-сценски облик на позорници спаја тон и реч са глумом и декором. „То је сценско вокално-инструментално дело које се састоји од чинова, а чинови од сцена. Текст опере назива се *либрето*"(Skovran i Peričić, 1991, str. 332).Насталау Италији, одакле се развијала и у Француској, Немачкој, Аустрији и Енглеској.У седамнаестом веку изводила се са тачно утврђеним бројем појединачних ставова различитих по карактеру, броју извођача и темпу извођења.

[76]Барок је историјско-друштвена епоха која наглашава украс, орнаментику, монументалност, кићеност, помпезност. Барокна уметност пуна је патетичности, покрета, немира, смењивања динамике, тихо – гласно, смењивања светла и таме и супродстављања појединца маси. Солиста у опери или концерту ступа у први план истичући лична осећања – бол, радост, тугу, разочарања (Пејовић, 1991).
[77]Прву оперу, оперу *Дафне*, компоновао је Јакопо Пери (*Peri, Jacopo*) 1597. године, чија је музика изгубљена.

Током епохе барока развијају се нови музичко-вокални облици – *ораторијум,*[78]*кантата,*[79] као и музички-инструментални облици – *свита,*[80]*соната*[81]и*концерт.*[82]

Посебно место заузима мелодија која се изводи уз инструменталну пратњу, а важно обележје барока је и формирање оркестра у којем су водећи инструменти биле виолине, потом флауте, обое, виоле, виолончела и други инструменти.

Током барока издваја се *концентантни стил* –вокално и инструментално музицирање у коме се истиче надметање једног и другог начина извођења музике. Истичу се супротстављања једног гласа и инструмента насупрот другом гласу или инструменту или пак читавој групи гласова или инструмената (Andreis, 1975).

На почетку барокне епохе ритмика је била нестабилна, колебљива,са доста ритмичких слобода извођача, да би током барока и развоја музичке мисли дошло до учвршћивања ритма и ритмичких деоница, које су се крајем ове епохе усталиле у свом понављању и извођењу. У седамнаестом веку, посебно након 1650. почињу се употребљавати тактне црте, што умногоме доприноси бољој ритмичкојпрегледности и извођењу(Isto). „Такт се почиње осећати и управо то осећање такта је једна од значајних барокних музичких тековина” (Isto, str.326).

Музичка хармонија се утемељује током барокне епохе. Током периода касног барока дисонантне хармоније су у снажном порасту, а учвршћује се и нова тонално-хармонска концепција – дур/мол систем.[83]

---

[78]Ораторијум је музички облик који приказује драмску радњуван позорнице. У почетку је представљао само назив за две сродне музичке форме – једну која се изводила на латинском језику (oratorio latinno), углавном у цркви и обрађивала библијске мотиве и другу на народном, италијанском језику (oratorio volgare) – насталу изван цркве у којој се испољавало народно стваралаштво. Око 1640. назив *ораторијум*постаје јединствен за обе форме(Andreis, 1975; Пејовић, 1991). Опера и ораторијум седамнаестог века, долазе до новог израза, који је другачији од ренесансног.

[79]Кантата представља концертни вокални облик и испољава експресивни барокни стил. Најчешће је писана за један или неколико гласова и чембало (Andreis, 1975).

[80]Свита је музичко-инструментални облик који подразумева низ карактеристичних целина, где свака целина представља један плес. Писана је како за веће инструменталне саставе, тако и за појединачне инструменте (Andreis, 1975; Skovran i Peričić, 1991).

[81]Барокна соната писана је претежно за гудачке инструменте. Грађена је на основу дводелне симетрије, што се опажа како у распореду целина (спорији – брз – спорији – брз), тако и у њиховој унутрашњој конструкцији.

[82]Код концертне форме један инструмент се, аналогно монодији код вокалне музике где се један глас одвојио од осталих, издвојио од осталих инструмената и истицао индивидуалном музичком деоницом.

[83]Дурске и молске лествице биле су основа за стварање музичких дела у периоду од 17.до краја 19.века. На њиховој основи граде се и музичка дела данашњег доба. Основни тип дурске лествице је такозвани природни дур, чија грађа се састоји од целих и полустепена, при чему су полустепени

2.5.1. Барок – Рококо – Класика, 18.век

Културно-уметнички живот осамнаестог века био је под утицајем просветитељства. Његове присталице тежиле су ка природној религиозности, практичном моралу, ослањању на здрав разум, природност, слободу за сваког човека и једнака права за све.

У овом веку стварају Бах (*Johann Sebastian Bach*), Хендел(*Georg Friedrich Handel*),Хајдн (*Franz Joseph Haydn*), Моцарт (*Wolfgang Amadeus Mocart*), Бетовен (*Ludwig van Beethoven*) и други славни композитори и музичари. „Барок, рококо и класика исцрпљују оквир овог раздобља, сваки са својим хтењима, обележјима и представницима... међу њима се не може провести јасно разграничење и одредити где завршава барок, а где почиње рококо, односно класика"(Andreis, 1975, str.448).

Упоредо са касним бароком и делима његових највећих представника Бахаи Хендла, који у својим композицијама истичу сјај, грациозност, монументалност инструменталне и вокалне полифоније, јавља се такозвани *галантни стил,* нова монодија, галантна, кићена, грациозна, лака, која наглашава осећајност, а која је израсла из музичке мисли рококоа.[84]Са циљем што веће природности уметник кроз своја дела отворено исказује своја душевна стања. На тај начин, епоха рококоа се јавила током осамнаестог века и развијала упоредо са епохом барока(Andreis, 1975; Пејовић, 1991).

У музици осамнаестог века осећа се сродност између вокалне и инструменталне музике, што поставља темеље симфонијском, а касније и оперском оркестру (Andreis, 1975).

Крајем седамнаестог и током осамнаестог века развиле су се две врсте опера – озбиљна опера (*opera seria*), митолошког или историјског садржаја и комична опера (*opera buffa*), чија тематика је била заснована на садржајима из свакодневног живота или комедија (Пејовић, 1991). Озбиљна опера у Италији

између трећег и четвртог и седмог и првог ступња. Природни мол, чини лествица код које су полустепени између другог и трећег и петог и шестог ступња (Despić, 1971; Деспић, 1997).Постављањем одговарајућих полустепена, од било ког тона може се изградити дурска, односно молска лествица.

[84] Рококо је уметнички стил који је трајао у периоду између 1720. и 1780. године. Развио се у Француској, а потом се проширио на друге Европске земље Немачку, Аустрију, Италију, Шпанију и друге. Насупрот китњастом бароку, рококо је префињен. Одликује се сликовитошћу и богатством декоративних елемената.

одликовала се помпезношћу и сјајем и разликовала се од исте у Француској, где су кроз озбиљну оперу доминирали хорови и играчки ритам и Немачкој где се истицала изразита хармонска подлога. Са друге стране, комична опера налази се под утицајем народних мелодија. „Буфа је најближа рококоу, француска комична је сентиментална и осећајна, а немачка, својим касним настајањем, седамдесетих година осамнаестог века, наговештава прве класике” (Исто, стр.122).

Композитори друге половине осамнаестог века стварајући под утицајем рококоа и осећајног стила, наговестили су појаву првих класика. Јављају се нови музички облици *увертира,*[85]*класична соната,*[86]*симфонија,*[87]као и*класични концерт.*[88]

Током друге половине осамнаестог века долази до француске револуције, која је имала истакнут утицај на развој музике. Нагласак у музици је на химнама, које су певане у славу отаџбине, слободе и једнакости. Класицизам[89] доноси уравнотеженост облика и садржаја, рационалност и тежњу ка јасној линији. Мелодика више није била моторична и линеарна, већ симетрична и периодична. Најзаначајнији представници класичне музичке епохе били су Моцарт, Хајдни Бетовен (Andreis 1975; Пејовић, 1991;Ђурић, 2006). Класицизам као музички период обухватадругу половину осамнаестог и почетак деветнаестогвека.

2.6. Музика Романтизма и Импресионизма

Уметност и музика 19. и почетка 20.века, донела је велике стваралачке промене. Уметници кроз своја дела испољавају немерљив интензитет сопствених мисли и осећања. У музици се усавршавају технике стварања, формирају се нови музички

[85]Увертира је општи назив за уводну музичку деоницу пред оперу. Разликовале су се, крајем седамнаестог века, француска и италијанска увертира (Исто).
[86]Соната је формирана у другој половини осамнаестог века. Подразумева цикличну композицију, која је састављена од три става (брз, лаган, брз), или четири става (брз, лаган, менует, брз) (Исто).
[87]Симфонија је оркестарско дело које се састоји из три става. Први став је најчешће чинио сонатни облик (Исто).
[88]Концерт се од друге половине осамнаестог века односи на композицију за соло инструмент уз пратњу оркестра (Исто).
[89]Класицизам као уметнички правац појавио се у другој половини осамнаестог и почетком деветнаестог века. Одликује га уравнотеженост, формална једноставност и изражајна непосредност.

облици, а већ постојећи, формирани кроз претходне епохе, добили су своја нова обележја (Andreis, 1996; Ђурић, 2006).

На развој музике 19.века у највећој мери утицала је појава романтизма као стилског правца у уметности, како у књижевности тако и у ликовној уметности. Романтизам, као стилски правац наглашава осећања, занос, страст, субјективност и индивидуалност уметника. Уметнички стваралац је веома често разочаран у стварност, повлачи се у себе и своја осећањаи њих приказује у својим делима.Романтичари[90] су следили своје страсти, величали су претеривање, занимали су их лудило, снови, смрт, ноћ, природа. Музика се у великој мери доводила у везу са књижевношћу. Инспирацију за многа дела музичари романтичари су налазили управо у књижевним делима (Isto; Исто). Андреис, као четири основна извора романтичарске тематике наводи: утицај средњег века, егзотику, фантастику и природу.

Романтичари су значајан допринос дали стварању такозваних *малих форми,*[91]у које пре свега спадају *клавирска минијатура*[92] *и соло песма*.[93]

Романтизам је изнедрио и програмску музику,[94] у оквиру које доминира симфонијска поема.[95] Појављују се и нови облици опере: *херојско-легендарна* (која за теме налази народно-ослободилачке идеје тога доба); *фантастична* (садржаје проналази у фолклору и старим легендама); *лирска* (са наглашеним лирским и фантастичним елементима) (Isto; Исто). Деветнаестивекдоноси реформу опере Рихарда Вагнера (*Wagner Richard Wilhelm*), која се огледа у промени односа тона и речи, садржајне грађе и музике током музичко-сценског

[90]У романтизму уметник се издваја као више биће, биће које сасвим другачије реагује на спољни свет у односу на друге људе. Рађа се култ уметника, који се разликује од околине, све више се разликује од ње и повлачи се у себе и свој свет (Isto; Исто).
[91] За композиторе романтичаре значајно је то да су створили *мале форме*, које су израз њихове несталности и тренутних душевних стања.
[92]Клавирска минијатура представља инструменталну композицију малог обима кроз коју се доминантно изражавају осећања романтичара. Дело је славног композитора Робера Шумана(*Robert Schumann*)(Ђурић, 2006).
[93]Соло песма је изразито камерни облик. Карактеришу је интимност, уздржаност у изразу, одсуство спољњег сјаја, али управо с тога соло песма омогућава дубље тумачење поетског текста музиком (Skovrani Peričić, 1991, str.363). Посебан облик соло песме је *балада* – композиција писана на текст епског карактера.
[94]Програмска музика тежи да дочара неки конкретан садржај, визуелне представе, ток неког догађаја и слично. Такав музички облик, формулисан речима, назива се програм, а музика која гапрезентује, програмска музика. Композитори програм за своја програмска музичка дела налазе у природи, историји, личним осећањима, разним романима, лирским песмама, приповеткама, као и делима ликовних уметника (Isto).
[95]Симфонијска поема представља програмско, оркестарско дело у једном ставу (Isto).

дела. Мелодија добија шире оквире, слободнији ток, осећа се спонтаност мелодијске линије, са све сложенијом ритмичком подлогом. Повећава се оркестарски састав, у који улазе и неки ређе коришћени инструменти.

У доба романтизма буди се национална свест код многих народа Европе и настају бројне националне музичке школе. Многи композитори у својим делима користе фолклорне елементе и плесове свог народа(Ђурић, 2006). Само неки од великих композитора епохе романтизма били су Франц Шуберт (*Franz Schubert*), Роберт Шуман (*Robert Schumann*) и Рихард Вагнер. Утицај романтизма се преноси и на наредну фазу у периоду културно-историјског развоја и развоја стилских епоха.

Крајем 19.века развија се импресионизам као нова стилска епоха, која захвата својим развојем и почетак 20. века. Почетком свога развоја, импресионизам се развија упоредо са касним романтизмом. Музички импресионизам у себи носи противречна обележја. Са једне стране представља огранак романтизма, а са друге странеје његова супротност (Despić, 2014). Импресионизам је водио уметност ка индивидуалистичком субјективизму, ослањајући се на подручје програмског. Насупрот романтизма, импресионизам доводи до раздвајања додира широке публике са музичком уметношћу (Andreis, 1976). Импресионисти су показали склоност ка малим формама – *соло песми и клавирској минијатури.*

Музички облици су у највећој мери засновани на елементима програмности. Наглашава се субјективно виђење и доживљавање света и индивидуализам ствараоца, али док је романтичар активни учесник свога дела, импресиониста је посматрач спољног света, који озвучава своје утиске (импресије). Програм код импресиониста разликује се од програма код романтичара; импресионисти све што их инспирише приказују као лични доживљај, а не као стварно збивање. Приликом стварања импресионисти поједностављују мелодију и ритам, а тежиште стављају на музичку хармонију(Ђурић, 2006).

Импресионизам доноси промене у погледу хармоније. У избору сазвучја значајно место добијају чисте квинтекоришћене узастопно или наизменично са другим двозвуцима. За истицање звучности користили су се и интервали кварта и секунда (Despić, 2014).Као најизразитији представник епохе импресионизма у музици издваја се Клод Дебиси (*Claude Debussy*). На подручју хармоније, Дебиси је унео значајне новине. „Уз дур и мол, Дебиси интезивно користи прекомерни трозвук на основу којег даље гради прекомерни четворозвук и петозвук”(Andreis, 1976, str.122).Композитори у својим делима слободније користе хармонијуи отварају пут ка музици двадесетог века.

2.7. Музика 20.века

Музика 20. века одражава дух и темпо савременог начина живота. Током ове историјске и културне епохе, са аспекта музике, изразито је наглашен ритам, мелодија је слободна и сликовита, у компоновању се користе дисонантна сазвучја, атоналност, политоналност (употреба више тоналитета) и четврттонски систем (подела лествице на 24 полустепена), али се упоредо развијају и различити музички правци (Ђурић, 2006).

Акценат се ставља на инструменталну у односу на вокалну музику. Карактеристичан је већи број различитих стилова, већа је него икада разлика између музичких начела, тежњи, средстава и остварења појединачних стилских праваца.

У најопштијем сагледавању разноликости стилова музике 20. века, указује се на две супротно усмерене тенденције, авангардну и ретрогардну. Авангарнда тенденција представља тежњу ка откривањунових могућности, начина и средстава стваралаштва, док је ретрогардна окренута ка прошлости, настојећи да их обнови новим стваралачким искуствима и модерним музичким елементима. Као посебни стилскиправци издвајају се: експресионизами неокласицизам.

У својој првој фази експресионизам карактерише тежња ка исказивању експресије, атоналности и хроматизације. У другој, конструктивистичкој фази, музички експресионизам наслеђује сва изражајна средства и надограђује их новом композиционо-техничком методом – додекафонијом. Додекафонија[96] представља

[96]Додекафонијадванаесттонска музика, композициони поступак који се, покласичној Шенберговој (*Arnold Schönberg*) дефиницији, састоји у сталној и искључивој употреби низа састављеног од дванаест различитих тонова. Дванаесттонска техника се не везује на законе тоналитета и тиме условљене системе мола и дура.

систем од 12 тоновахроматске лествице које композитор одабере, а затим их у току композиције користи на одговарајуће начине. Експресионистички стил преноси узнемиреност, страх, све до хистерије и ужаса, који су се у делима експресиониста смењивали са горком иронијом и гротескном.

Преплитање различитих стилова окарактерисало је музику 20. века и дало основа за развој савремене музичке мисли, која се у самом почетку свог развоја карактерише појавом џеза на једној и рок музике на другој страни, да би у свом даљем развоју изнедрила читаву палету стилских и музичких жанрова и праваца (Ђурић, 2006).

Док експресионизам ставља нагласак на ново, неокласицизам се може дефинисати као повратак чистој музици. Музика се прегледно обликује, нагласак се ставља на мелодију, чврсту и организовану ритмику и јасну хармонију. Наслућују се и изводе класични музички облици – *соната*, *симфонија*, *камерна музика*, као и *полифоне форме*.

3. ФИЛОЗОФСКИ, ИСТОРИЈСКИ И ТЕОРИЈСКИ ОДНОС МАТЕМАТИКЕ И МУЗИКЕ

3.1. Историјске, филозофскеи теоријске основе односа математике и музике

Питањем односа математике и музике бавили су се од најранијег периода људске цивилизације велики филозофи, научници и уметници и свако од њих дао је значајан допринос уочавању математичких законитости у теорији музике. Још су стари грчки филозофи увиђали сличност и истраживали везе између две поменуте области. За време Старе Грчке музика је имала важно место у образовању свакодневног живота људи. Велики грчки филозофи указивали су на значај музике за развој човека и друштва. Платон је музици доделио важну улогу у образовању наглашавајући да музика доприноси изградњи унутрашње хармоније човека. „У питагорејској школи музика је била на истом нивоу као и аритметика, геометрија и астрономија. Музика је била наука звука и хармоније и често је занемаривана њена уметничка страна" (Beer, 1998).

Питагорејци су важну улогу давали музици и ритму. Они су уједно били и први музички писци.[97] Сматрали су да је наука о бројевима повезана са музичком хармонијом (Adžaga, 2012, str.102). Преко њих, Питагорејаца, математички систем је ушао у грчку музичку теорију.[98]Полазећи од резултата које су добили изучавајући хармонију у музици, Питагорејци су дошли до закључка да је у основи свега постојећег број и сматрали су да су принципи математике, принципи пре свега, те да се хармонија универзума заснива на хармоничним односима међу бројевима (Uzelac, 2005, str.27;Crocker, 1964). И у погледу савладавања математике и музике, неопходне су когнитивне операције[99] човека за њихово разумевање, те је истварање представа о појмовима који су мање или више апстрактни, заједничка основа две изучаване области.

[97]Први музички писци, Питагорејци, били су: Филолај, Дамон, Птоломеј и други (Vasiljević, 2000, str.7).
[98]О томе да су Питагорејци били први математичари сведочи нам Аристотел у својој *Метафизици,* у којој спомиње да су „Питагорејци први прихватили математику негујући је и напредујући у тој области"(Aristotel, 2007, str. 18).
[99] Когнитивне операције подразумевају поимање, сазнавање, схватање и мишљење које подразумева бројне мисаоне операције.

Питагора је још у Старој Грчкој развио теорију бројева и указао на тесну везу бројева и музичких тонова. Развио је учење о пропорцијамаи довео их у везу са музичким тоновима. Према Питагори, однос појединих бројева одређивао је одговарајући консонантни[100] или дисонантни[101] музички интервал. „Доминантну улогу имали су чисти интервали, тако да је естетско вредновање музике лежало на примени одређених консонантних интервала" (Vasiljević, 2000, str. 7).

Архитас (*Αρχύτας*) из Тарента, најзначајнији питагорејски теоретичар музике, указао је на поделу интервала у тонској лествици уз помоћ одговарајућих пропорција.Говорио је да у музици постоје три средине: аритметичка, геометријска и инверзна (хармонска) средина.Према аритметичкој (A), геометријској (G) и хармонској (H) средини за два реална броја a и b важи:

A (a,b) = (a + b) /2

G (a, b) = $\sqrt{a \cdot b}$

H (a,b) = 2ab/(a + b) (Чанак, 2009).

Такође, Архитас је приметио да серастојања која раздвајају узастопне хармонике, представљају разломцима 2/1, 3/2, 4/3, 5/4,... облика (n+1)/n (Gika, 1987, str.208).

Значајан допринос вези математике и музике дао је и Питагорин ученик Филолај. Филолај се сматра оснивачем теорије тетрахорда, а који се, касније, додавањем полустепена развио у хексакорд (Barker, 2007, str.263-268).

Френсис Ворејн (*Francis Warrain*) говорио је о вези музике и геометрије. Према Ворену музика је за време исто што и геометрија за простор. Готфрид Лајбниц (*Gottfried Wilhelm Freiherr (baron) von Leibniz*) је 1712. године писао: „Музика је вежба тајне аритметике и онај који се у њу упусти, не доживљава је као баратање бројевима"(Чанак, 2009, стр.7).

Истакнути уметник и сликар Василиј Кадински (*Василий Васильевич Кандинский*) истиче четири основна принципа која по њему доводе у везу математику и музику. Према Кадинском, конструкција, импровизација, интуиција и композиција, базични су принципи од којих у свом стваралаштву полазе и

[100]Консонанца (латински, *consonantia),* сагласје, складно звучање(Деспић, 1997, стр. 89).
[101]Дисонанца (латински, *dissonantia)*,несагласје, звучни несклад (Исто, стр.89).Појмови консонанца и дисонанца имају и објективно-акустичну и субјективно-психолошку основу, те се може довести у питање шта је за сваког појединца субјективно звучно за његово ухо.

математичар и музичар (Kandinski, 2004). Посматрано са аспекта математике и музике и за математичара и за музичара веома је важно на који начин ће конструисати своје дело – теорему или композицију.Импровизација у стварању осликава се кроз слободу ума и саставни је део музичке уметности, а уједно ивеома важна за математичаре јер добар математичар ствара слободним и стваралачким умом. Интуиција, као осећање предвиђања отвара путеве за нова истраживања и стврања како у науци, тако и у уметности, док композиција, осликава склад, грађу научног (математичког) и уметничког (музичког) дела(Манојловић и Рајић, 2017).

На тесну везу математике и музике указао је и Леонард Ојлер (*Leonhard Euler*) стварајући свој координатни систем који је, како истиче, по својој природи веома погодан за истраживања у математичкој анализи музике.„Његове координате су октавне, квинтне и терцне, а уласком у овај простор оживљавају поједине његове тачке и са свих страна допиру звуци и акорди" (Чанак, 2009, стр.7). На тај начин, у осамнаестом веку, математичар Леонард Ојлерстворио је основе математичке теорије музике, написавши, 1739. године, дело *Tentamen novae theoriae musicae(Покушај заснивања нове теоријемузике)* у којем указује на везу математике и музике и излаже своју теорију консонанце, по којој се у историји музичке теорије,најчешће памти. Ојлерово дело произилази из његових раних написа о музици и физици. Средишњи део расправе односи се на Ојлерово проучавање вибрација и звука, које указује да, што се више две вибрације подударају оне су више консонантне (Grant, 2013).Ојлерова теорија консонанце је теорија односа, заснована на идеји да су једноставнији односи вибрација консонантнији. Ојлер је све везе између звукова концептуализовао као везе између бројева. Према Ојлеру да би се утврдило колико су два звука заједничка, треба испитати однос њихових фреквенција. Међутим, Ојлерово дело *Tentamen novae theoriae musicae* није, у то доба, наишло на велики успех јер како теоретичари наводе дело је „садржавало превише математике за музичаре и превише музике за математичаре" (Grant, 2013, str. 245; Савић 2016).

Ојлер се тим својим настојањима прикључио тежњи коју су покренули математичари и научници Марин Мерсен (*Marin Mersenne*) и Рене Декарт (*René*

Descartes), који је увео координатни систем и тиме отворио пут Ојлеру, који је потпуно дефинисао формални музички простор (Савић, 2016).

Осећај за присуство математике у музици почео је да се губи са развојем природних наука и јасним диференцирањем науке од уметности. Данашње доба, иако и даље круто у подели, све више усваја потребу интеграције различитих природних и друштвених наука, те уметности у јединствену целину и уочавање и разумевање суштинских веза и односа међу њима. Отуда се отварају и нова научна питања. У смеру односа математике и музике, можемо се, за почетакзапитати – на који начин математика доприноси развоју музичке теорије и музичке мисли? Како се музички појмови и закони могу представити математичким законима, теоремама и формулама? У којим аспектима музика доприноси развоју математичке мисли и стваралаштва у једној апстрактној науци као што је математика?

3.1.1. Неке теоријске поставке математике и музике

Музика је идеалан облик уметности која је у великој вези са основама и законитостима математике. Везе између музике и математике су веома богате и укључују мелодију, ритам, интервале, скале, хармонију, подешавање и темпераменте. Ови музички концепти се односе на математичке концепте пропорције и нумеричке односе целих бројева, логаритме и аритметичке операције као и области алгебре, вероватноће, тригонометрије и геометрије (Song, et. al. 2013, према Beer, 1998;Harkleroad, 2006).

Савић (Савић, 2018)у свом раду указује на корелацију[102]садржаја наставематематике и музичке културе у млађим разредима основне школе. Истраживање спроведено у циљу овог рада указало је да ученици који су савладали разломке, лакше савладавају тонска трајања и њихове односе и обратно.Код разломака једно цело се дели на половине, четвртине, осмине. Исто важи и у музици, цела нота има своје одређено трајање и када се подели на половине, те две половине трајаће заједно као цела нота, што је једнако трајању

[102] Корелација у настави – функционално повезивање и усклађивање наставних садржаја из различитих наставних предмета, који су слични или се међусобно допуњују (Стојановић, 2014).

четири четвртине и осам осмина ноте и тако даље. У свом раду Савић, закључује да уколико су ученици усвојили знање о разломцима, лакше ће усвојити знање о трајањима тонова.

Први научник који је увео бројеве за обележавање тонских висина, где се *це* (до) означавало бројем 1, *де* (ре) бројем 2, *е* (ми) бројем 3, *еф* (фа) бројем 4, *ге*(сол), *а* (ла) бројем 6 и *ха* (си) бројем 7, био је француски књижевник, социолог и музичар Жан Жак Русо (*Rousseau, Jean Jacques*, 1712 – 1778)(Vasiljevic, 2000, str.19).„Умузичку педагогију се уводи бројчана нотација која је имала следбеникенарочито код француских цифериста. Цифиристи нису користили линијски систем већ само бројеве, уз додатно обележавање трајања тонова једноструким или вишеструкимцртама изнад бројева"(Дробни, 2009, стр. 46, према Vasiljević, 2006).

Музика се може представити помоћу координатног система при чему указујемо на везу Декартовог математичког координатног система и координантног система којим се може приказати музика, где музичку хоризонталу апсцису (x-оса), представљају нотна трајања и ритмичка кретања, а вертикалу осу, односно ординату (y-оса), представљају тонске висине. Према Васиљевић „обе координате делују заједно и једновремено... Музичку вертикалу, првенствено представљају тонске висине (дијатонска и хроматска), а хоризонталу ритмичка кретања"(Vasiljević, 2000, str.5).

Алгоритми[103] се такође користе и у музици и у математици. „Алгоритми се у музици користе на оним местима где примена низа правила или инструкција може довести до (квалитетног) решења. Алгоритме у музици срећемо приликом синтезе звука, семпловања,[104]препознавања музичких дела или компоновања. Ако претпоставимо да приликом компоновања композитор треба да предузме коначан број корака, где се наилази на јасна ограничења (број расположивих тонова, хармонија, математичке правилности ритма и темпа), јасно је да је компоновање музике у неком општем смислу заправо поштовање унапред дефинисаног низа правила, што и представља особину алгоритма" (Савић, 2016).

[103]Алгоритам представља низ јасно дефинисаних правила и корака које треба извршити да би се дошло до извршавања неког задатог проблема.
[104]Семпловање – узимање једног дела музичке композиције ради употребе у другим композцијама.

Математички појам оса симетрије[105] може се уочити у многим делима великих и славних композитора, који су компонујући своја дела, свесно или несвесно, употребили ову математичку законитост. „Појам симетрије, у најопштијем смислу те речи, везује се за пропорционалност,сразмеру сегмената музичког тока, као и њихову међусобну складност и уравнотеженост”(Sabo, 2012:55).Нарушавање пропорција се третира као одсуство симетрије и означава термином асиметрија (Isto, str.57).

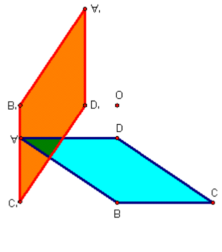
Према Бенсону (Benson, 2008, str. 296-304), симетријасе у музици може изразити понављањем неког ритма, мелодије или другог музичког обрасца. Сабо, Аница у свом раду указује и на дефиницију, која истиче да се симетрија може испољити као рефлексија, ротација[106] и транслација,[107] а које се међусобно могу комбиновати и прожиматистварајући сложене симетрије (Sabo,2012, str.58).

Као једноставан и уочљив пример музичке симетрије наводи се пример прва два такта Бетовенове *Оде радости,* код којесе уочава пример осе симетрије на три тона – *ми, фа, сол* (*Слика 6*).

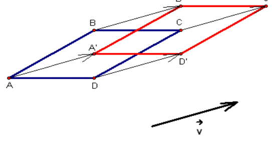
---

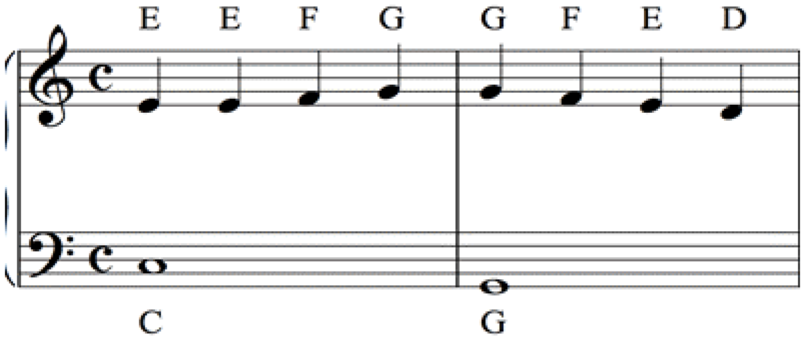
[105]Оса симетрије представља пресликавање фигура у геометрији. Пресликавање равни при којем се свака тачка A дате равни, пресликава у тачку A’, симетричну у односу на праву s те равни назива се симетријом у односу на праву (осу) s. Осна симетрија се другачије назива рефлексија (пресликавање). Cf.Weyl, 1980.

[106] Ротација је изометријска трансформацијапри којој за угао α око тачке O се пресликава произвољна тачка П у тачку П’. На слици испод, паралелограм је ротиран око тачке O за угао од 90º (Преузето са сајта https://profesorka.wordpress.com/2014/07/29/rotacija/, 29. 3. 2019).



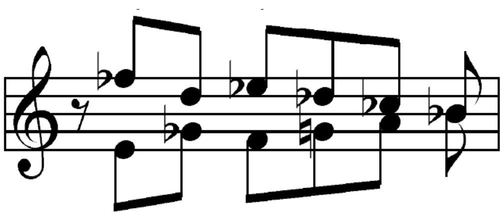
[107] Транслација је у геометрији изометријска трансформација при којој се свака тачка неког геометријског објекта помера за дати вектор (Преузето из Савић, 2016).



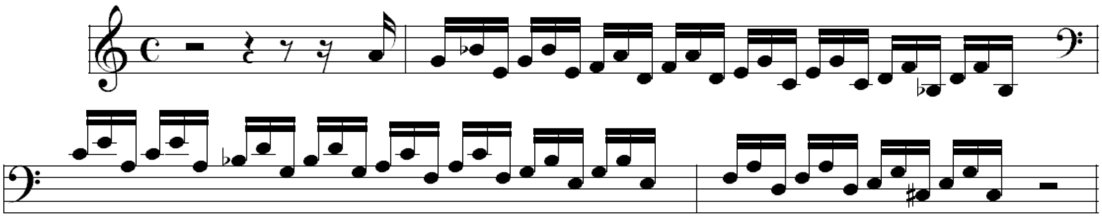


Слика 6 Пример осе симетрије на Бетовеновој Оди радости

У свом делу Бенсон наводи пример музичке симетрије на примеру *Петог гудачког квартета* (*Слика 7*) и транслације на Баховој *Токати у d-moll-у* (*Слика 8*).



Слика 7 Оса симетрије на Петом гудачком квартету Беле Бартока

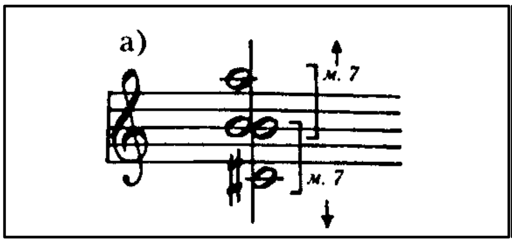


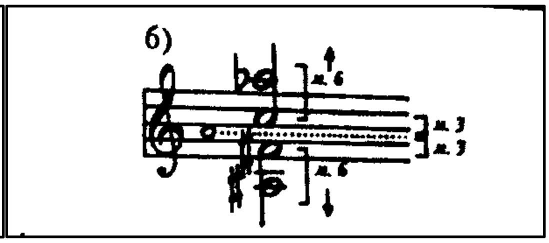
Слика 8Транслација на Баховој Токати и Фуги у d-moll-у

Као уочљив пример музичке транслације наводи се идео Бетовенове *Месечеве сонате*(*Слика 9*).

Слика 9 Пример транслације на Бетовеновој Месечевој сонати

Симетрија и инверзија огледају се и у погледу градње симетричних акорада.[108] Инверзија може да се гради од основног тона као осе симетрије (*Слика 10*), или се за осу узима неки трећи тон (*Слика 11*).[109]



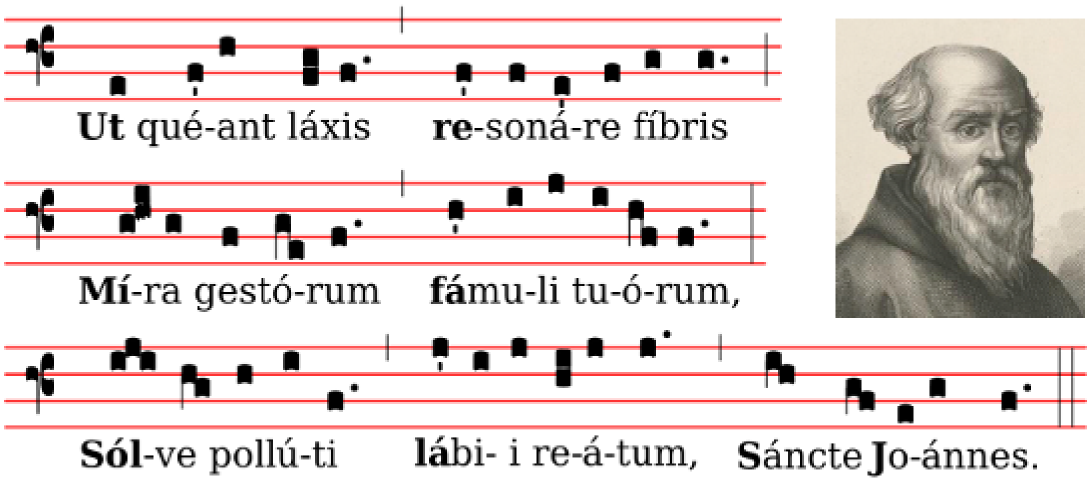


Слика 10 Симетрија у градњи акорда (а)Слика 11 Симетрија у градњи акорда (б)

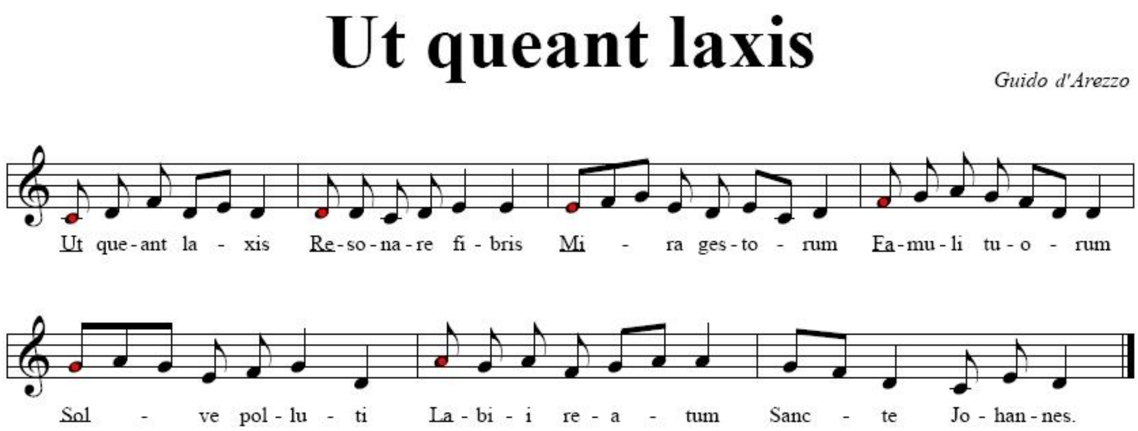
Веза математике и музике уочава се, како је већ поменуто, у историјском делу музике током средњег века. Први нотни знаци, у једној фази свога развоја, представљани су геометријским фигурама– квадратом и ромбом, а што илуструје пример химне Светом Јовану коју је Гвидо из Ареца користио за подучавање солмизације уз поређење са савременом нотацијом (*Слика 12, Слика 13*).

[108]Акорд је сазвучје од три или више тонова одсвираних у исто време. Терцни акорд гради се на основама интервала терце.
[109]Преузето саhttp://choirly.com/names-of-the-notes-ut-queant-laxis/, 24. 4. 2019.

Guido d’Arezzo – Ut queant laxis



Слика 12 Квадратна неуматска нотација[110]



Слика 13 Савремена нотација[111]

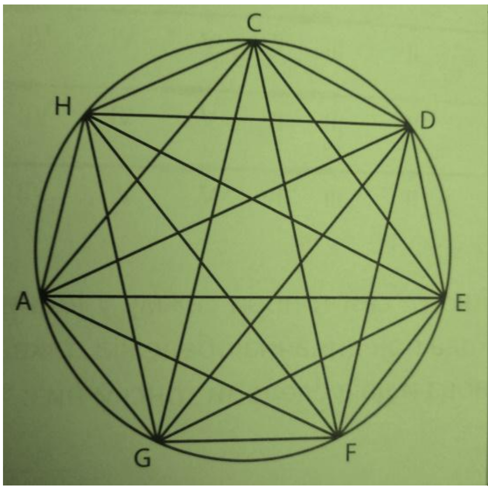
За даље указивање на везу математике и музике интересантно је приказати како се градња музичких акорадаможе геометријски приказати.

Ако се крене од музичких акорада терцне грађе на основним тоновима представиће се следеће терцно грађене трозвука: *це-е-ге*, *еф-а-це*,*ге-ха-де*– дурски трозвуци;*де-еф-а*, *е-ге-ха*, *а-це-е*– молски трозвуци и *ха-де-еф*– умањени трозвук. Ако би све тонове поменуте лествице равномерно расподелили по кружној линији, односно кружници, и међусобно их спојили, добијају се темена правилног

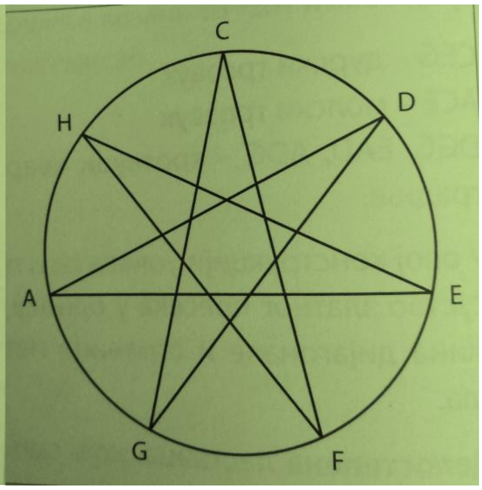
[110]Преузето са http://vps280516.ovh.net/html/Musika/Funciones/ut-queant-laxis-3.htm, 24. 4. 2019.
[111]Преузето из Andreis, 1975, str.107.

седмоугла. Посматрано према слици (*Слика 14*), дати трозвуци представљају седам подударних троуглова са једном заједничком страницом. Аналогно терцно грађеним трозвуцима, ако се укаже на седам терцно грађених четворозвука (*це-е-ге-ха* и *еф-а-це-е*– велики дурски; *де-еф-а-це, е-ге-ха-де*и *а-це-е-ге*– мали молски; *ге-ха-де-еф*– мали дурски и *ха-де-еф-а*– полуумањени четворозвук), на истој слици четворозвуци су геометријски приказани као седам подударних трапеза са две заједничке странице (Чанак, 2009).

Почетком 20. века, са теоријским променама у музици, јавила се и тежња ка формирању секундних акорада, који настају додавањем интервала секунде (једног или више) на основу терцно грађених акорада. Упоредо са тим, јавља се квартни акорд као самостална структура, настала слагањем квартних интервала. Посматрајући слику (*Слика 15*) геометријски се уочава да је седам секундних петозвука представљено као седам подударних петоуглова(*це-де-е-еф-ге, де-е-еф-ге-а, е-еф-ге-а-ха, еф-ге-а-ха-це, ге-а-ха-це-де, а-ха-це-де-е, ха-це-де-е-еф*), ако би се спојила темена једно за друго у низу*це-де, де-е, е-еф, еф-ге, ге-а, а-ха, ха-це,* док је седам квартних трозвука, представљено као седам подударних једнакокраких троуглова (Чанак, 2009).



Слика 14 Терцна градња акорда[112]



Слика 15 Акорди секунде и кварте[113]

112Преузето из Чанак, 2009, стр. 71.
113Преузето из Исто, стр. 78.

3.2. Математичке основе музичког ритма

„Музички ритам је трајањем и акцентима, одређен тонски ток”(Vasiljević, 1999,str. 81).Као одреднице музичког ритма, Зорислава Васиљевић у делу*Теорија ритма са гледишта музичке писмености*, наводи и следеће: „Ритам је назив за особитости тона и односа у тоновима, с обзиром на њихову дужину и распоред наглашавања (Vasiljević, 1999, str. 81); музички ритам је средство орјентације у времену, испуњено извесним музичким садржајем” (Vasiljević, 1999, str. 81).Ритам може бити равномеран – када се музички ток одвија у равномерном ритму, то јест у трајном пулсирању једнаких ритмичких јединица. Са друге стране, говори се о карактеристичном ритму, ритму који није равномеран и у којем се комбинују различите вредности ритмичких јединица и различите сразмере звучних трајања (Деспић, 1997). У литератури се среће подела на две основне категорије ритма, чије разлике су засноване на једнакости или неједанкости основних јединица удара, а то су: изоритам (једнако трајање ритмичких јединица) и метаритам (неједнако трајање ритмичких јединица) (Vasiljević, 2000; Дробни, 2014).

Ритам треба разликовати од ритмичког удара (ритмичког пулса или пулсације), који представља израз дејства неке силе која се догађа у времену. У низу удара, они који су јаче наглашени стварају акценатске слике помоћу којих се врши опажање метрике (Дробни, 2014, стр. 685).Математичкезаконитости у музици омогућавају да прецизним језиком опишемо метрику[114] и одвијање музичког дела, укључујући и временско протицање у њему.

Метар се одређује као мера музичког текста, средство опажања и записивања ритма, у односу на груписање основних удара и на њихову врсту; метар се одређује и као начин поделе музичког текста на тактове,[115] док је музичка метрика област која се бави проучавањем различитих облика груписања јединица мере,а који се разликују по броју јединица, њиховој јачини и трајању (Vasiljević, 1999).

Тактје у музичкој пракси почео у већој мери да се означава тек од седамнаестог века. Од тог доба представља најмању музичку целину насталу гру-

[114]Метрика омогућава груписање ритмичких јединица у веће целине и регулише однос нагласка у њима. Док је у ритму акценат на трајањима, у метрици је акценат на нагласцима (Деспић, 1997).

[115]„Такт је најмања целина нотног текста, настала бележењем груписаних тонова по акцентима; такт је део нотног текста обележен танким цртама” (Vasiljević, 1999, str. 83).

писањем тонова према акцентима, чиме је омогућена већа прегледност музичког тока. „Сачињавају га тактни делови, једнаки или неједнаки, који представљају временско трајање јединице бројања, односно ритмичког пулса. Како су облик и врста такта у тесној зависности од мере, делимо их на двосложне, тросложне, четворосложне и друго” (Дробни, 2014, стр. 795-796).

Мера[116] је број који нам говори колико ритмичких удара има у сваком такту и која је вредност ноте јединице мере, односноритмичких јединица у једном такту (Isto). „Мера у музици представља средство опажања и записивања ритма како у односу на груписање основних удара, тако и на њихову врсту”(Дробни, 2014, стр. 388). Исказује се разломком у којем горњацифра(бројилац, математички)одређује од колико јединица се такт састоји, а доња (именилац, математички) указује на конкретну нотну вредност (половину, четвртину, осмину, четвртину са тачком, шеснаестину са тачком и друго), која репрезентује такозвану јединицу бројања и број ритмичких честица (хронос–протоса) унутар ње (Дробни, 2014).

У том контексту, може се указати на везу математичког представљања разломка где горња цифра, бројилац, указује на број, колико делова целине смо издвојили, док доња цифра у разломку, именилац, именује целину, што може бити половина, четвртина, осмина, трећина, петина, шеснаестина, и друго.

Математичко-музичку везу можемо уочити и код поделе једног целог на делове: у математици једно цело дели се на две половине, половина на две четвртине, четвртина на две осмине, осмина на две шеснаестине и тако редом. Исти принцип примењује се у музици, ако посматрамо парну поделу целе ноте: цела нота садржи две половине, половина две четвртине, четвртина две осмине, осмина две шеснаестине и редом до најмањег трајања ноте, стодвадесетосмине(Деспић, 1997).

На основу наведеног музички ритам обухвата основно парно дељење вредности по обрасцу:1:2:4:8:16:32:64:128, међутим, музика је изнедрила различите начине за исказивање и других могућих односа у трајању. Уколико се посматра подела равномерних ритмова на дводелне и троделне, закључује се да се

[116]Мера је ознака која се исписује у линијском систему иза музичког кључа и одређује врсту ритмичких јединица и нагласка у њима (Vasiljević, 1999; Vasiljević, 2006).

горње математичко уопштавање односи на дводелне ритмове.[117]Насупрот томе однос код троделних ритмова[118] био би: 1: 3: 6: 9: 12... и тако даље.

Из наведеног следи да само читање дужина трајања и односа у погледу трајања нота захтева основнопознавање математичких разломака. На тај начин се још једном издваја веза математике и музике као суштинска основа развоја теорије музичке уметности.

3.3. Аликвотни тонови

Покушавајући да одгонетну дефиницију појма „боја звука", аутори су дошли до одређења да се овај појам тумачи „као она особина звука по којој слух разликује и распознаје звукове исте јачине ако потичу из различитих извора – рецимо различитих музичких инструмената"(Деспић, 1997, стр.15). У објективном, акустичком смислу, разлике у боји звука настајууследразлике у треперењу разних звучних извора. Свако то треперење је сложено из више једновремених треперења у различитим фреквенцијама, при чему основно даје звук који се чује, док остала чине његове призвуке, односно аликвотне тонове, аликвоте.

За боју тона или звука одговорни су аликвотни тонови – виши хармоници, додатне учесталости које се чују истовремено са основним тоном, када се инструмент који га производи подстакне да вибрира. Звучни извор генерише звук са основном фреквенцијом као и призвуке – аликвотне тонове у односу на основни тон. Различити број присутних аликвота и њихова раличита јачина у склопу укупног звучања одређује боју звука.

„Сваки музички тон представља сложену звучну појаву. У звуку сваког тона садржани су и његови аликвотни тонови чије се фреквенције односе према основном тону у размери 1: 2: 3: 4: 5: 6: 7: 8: 9..."(Чанак, 2009, стр.9). У низу аликвотних тонова посебну важност имају октаве. Њихове фреквенције се односе као 1: 2: 4: 8: 16..., што указује да образују геометријску прогресију, чији је количник број 2.

[117]Дводел је основа за изградњу ритмова парне поделе (Vasiljević, 1999).
[118]Тродел је група од три једнака трајања и основа је за изградњу ритмова троделне поделе (Isto).

„Са једне стране, основни тон и његова октава нису идентични, а са друге, оба тона код човека побуђују квалитативно исти субјективни доживљај”(Исто, стр.11). Звук који чујемо је комплексан звук састављен од пуно чистих звукова. Наше чуло слуха раздваја комплексан звучни талас на спектар једноставних таласа. Боја људског гласа је због тога специфична: сваки човек производи свој „лични” спектар звучних таласа и када се препознаје нечији глас, заправо се детектује тај лични, специфични спектограм. На исти начин када се одсвира одређени тон на виолини, флаути, клавиру, људско ухо чује тонове исте висине али потпуно различите боје (Madaras, 2009).

Аликвоти се називају и парцијалним тоновима, односно парцијалима у односу на фреквенцију основног тона. Ако је основни тон фреквенције *f*, аликвотни тонови које стварају наши инструменти представљајуспектар тонова мање јачине чије су фреквенције целобројни умношци од *f*, тј. 2*f*, 3*f*, 4*f*, као и нецелобројни умношци основне фреквенције (Lixin, 2009). Према Питагорином закону малих бројева они тонови чије су фреквенције заступљене у спектру аликвотних тонова налазе се у хармонији са основним тоном.

3.4. Питагорина перцепција односа природног броја и музичког тона

Почеци теорије музике везују се за грчког математичара Питагору и његове следбенике Питагорејце. Према Питагориној филозофији математика и број су основ за сазнавање света. Бројеве треба разумети и као материју света и као начин да се он опише. Питагора је поставио математичке основе не само музике, већ и читавог свемира. Сматрао је како у целом свемиру влада ред бројева по којем се све креће и који најверније изражава суштину бића. Бројеви су стални и непроменљиви, а њихов склад скрива свет звукова и хармоније.

Питагорејци су сматрали да се хармонија универзума заснива на хармоничним односима међу бројевима. Открили су *Закон малих бројева*, који истиче да су два тона консонантна ако им фреквенције стоје у односу малих природних бројева. Према Питагори, музика је указивала на то да свемиром владају бројеви, посебно бројеви од један до четири (*tetraktis*) (Andreis, 1975). Питагорејци су сматрали да разумевање бројева пружа основ за разумевање духовног и физичког космоса, а како бројеви управљају музичким тоновима и ритмовима веровало се да и музика доприноси да се спозна тај склад космоса. Истражујући порекло и разлику у висини тонова, Питагора је извео експеримент на монокорду[119] (Madaras, 2009; Чанак, 2009;Wellesz, 1957).Жица је на једном крају учвршћена док је други крај преко котура оптерећен тегом који одржава стално исти напон жице. Питагорејци су мењали дужину жице и на основу тога запажали односе међу музичким тоновима и интервалима. Висина тона коју жица производи обрнуто је сразмерна дужини жице: што је жица краћа, то је тон виши. Установили су, на основу резултата, да када половимо жицу (однос 2:1) добија се тон за октаву виши од основног тона, ако жицу скратимо за једну трећину (однос 3:2) добија се квинта основног тона, а ако жицу скратимо за једну четвртину тон ће скочити за кварту (однос 4:3) (Andreis, 1975;Пејовић, 1991).

На основу изведеног ексепримента Питагорејци су дефинисали и однос висине тонова и њихових фреквенција. Ако је основни тон фреквенције *f*, октава основног тона је фреквенције 1/2*f* (јер је однос између основног тона и октаве 2:1); квинта основног тона биће фреквенције 3/2 *f* (јер је однос основног тона и квинте 3:2), док је фреквенција кварте 4/3 *f* (однос основног тона и кварте 4:3).

Интервали кварта, квинта и октава у питагорејској школи сматрани су консонантнима, односно интервалима који остављају утисак хармоничности, склада и реда. Насупрот томе секста (16:17) и терца (81:64) звучале су непријатно за ухо и сматране су дисонантима(Papadopoulos, 2002; Чанак, 2009; Budden, 1967).

До сада изложено, илуструје математичку заснованост музике онако како су је Питагора и његови следбеници посматрали и изучавали. Ипак даља истраживања су показала да је утицај између математике и музике реципрочан.

Доводећи у везу однос природног броја и музичких теоријских поставки, Питагорејци су допринели новим открићима у математичкој науци.„Полазећи од става да октави одговара однос 1:2 између дужина одговарајућих затегнутих жица, поставило се питање колика је дужина жице чији тон дели ту октаву на два једнака дела? Ако непознату дужину означимо са X, поставља се једначина

1 : X = X : 2, тј. $X^2 = 2$"(Madaras, 2009, str.5).

[119]Монокорд је инструмент код кога је преко резонантног корпуса квадратног облика затегнута једна жица. Притискајући жицу на средини и другим местима жице Монокорда, Питагора је дошао до полустепена – дијатонског и хроматског, који се разликују за најмањи звучни размак – кому.

Из дате једначине следи да је X = $\sqrt{2}$, што је ирационалан број, па је јасно зашто Питагорејци нису могли да запишу ту дужину као однос два природна броја. Откриће да тако једноставно дефинисана величина не може да се опише као однос два природна броја, проузроковало је, како је већ поменуто, праву кризу у питагорејској теоријибројева(Савић, 2016; Crocker, 1964).

Јасно се види да су Питагорејци до открића ирационалности броја$\sqrt{2}$ дошли израчунавајући један природан музички проблем, чиме се додатно истиче узајамна веза и однос са математиком. Како је однос до којег су Питагорејци пошли у представљању ирационалног броја $\sqrt{2}$, 1:2, даља математичка анализа, показује да важи и супротно: ирационалан број $\sqrt{2}$ може се изразити и само помоћу целих бројева 1 и 2.

$$\sqrt{2} = 1+ \sqrt{2} - 1 = 1+ (\sqrt{2} - 1) \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = 1+ \frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$\sqrt{2} + 1= 2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}}$$

$$\sqrt{2} = 1+ \frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}$$ (Pierre, 2017, str.494, Crocker, 1964).

Следи (Isto; Isto) да је бесконачни низ који дефинише ирациони број$\sqrt{2}$, заправо низ бројева 1,2,2,2 ... ако се скрате ове фракције почевши од одређеног ранга добија се апроксимација$\sqrt{2}$.

3.4.1. Питагорејски тонски систем – однос низа бројева и тонова

Тонски систем подразумева целокупни систем тонова који су у употреби у одређеној стилској музичкој епохи и сређен је акустичким или естетским принципима (Чанак, 2009). „Октавни оквир низа основних тонова поставио је основу и за целину тонског система, то јест целог распона тонских висина које налазе музичку примену.Према Деспићу тај распон обухвата осам октава и почетак девете, а оне се именују, почев од најдубље – субконтра, контра, велика, мала, прва, друга, трећа, четврта, пета...” (Деспић, 1997, стр.30-31).

Питагорејски тонски систем једноставно се изводи на основу добијених односа међу тоновима и њиховим фреквенцијама. „Основна чињеница је да сваком тону одговара један фреквенцијски број (број осцилација или трептаја у секунди) и да октавни тон има два пута већу фреквенцију него основни тон”(Чанак, 2009: 38).Ако фреквенцију тона *це*узмемо као основу, односно као број 1, једноставно се израчунавају и фреквенције осталих тонова *Це-дур* лествице.

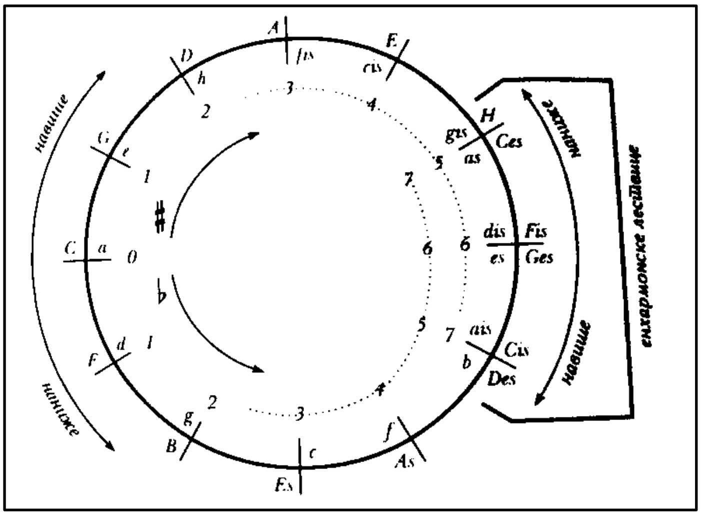
Наиме, Питагора је пошао од односа 3:2 и за основу узео интервал квинту. Свака лествица формирана је тако да сви интервали између тонова лествице представљају рационалне интервенције које укључују само премисе 2 и 3. Питагорејска скала настаје из подешавања сваког од интервала у узлазној секвенци тонова скале: 4 → 1 → 5 → 2 → 6 → 3 → 7 да буде у односу 3:2 (Wright, 2009).

На основу изложеног, ако пођемо од основног тона *це*, *Це-дур* лествице, *це* = 1; квинта од тона *це* у *Це-дур* лествици је тон *ге*, па је фреквенција тона *ге* 3/2; кварта од тона *це* је тон *еф* те је фреквенција тона *еф* 4/3. Даље фреквенције израчунавамо: *де* = (3/2) x (3/2) = 9/4, па октава на доле, *де*= (9/4) (1/2) = 9/8. Из овига следи да је*а* = (9/8) x (3/2) = 27/16, *е'* = (27/16) x (3/2) = 81/32, октава на доле*е* = (81/32) (1/2) = 81/64 и *ха* = (81/64) x (3/2) = 243/128(Papadopulos, 2002; Wright, 2009; Budden, 1967).

Табела 3Питагорина дијатонска скала

Редни број тона у лествици	1	2	3	4	5	6	7	8
Однос према броју 1	$\frac{1}{1}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{2}{1}$

Још је Питагора указао на квинтни круг (*Слика 16*) по коме се могу добијати тонске скале. Круг треба поделити на дванаест делова и уносити ознаке тонова (Wright,2009). Од сваког од наведених тонова можемо изградити дурску, односно молску лествицу, које се могу добити помоћу квинтног круга.Ако кренемо од тона *це* (*Це-дур* лествице), односно њој паралелне молске (*а-мол* лествице) и померимо се за квинту на горе градимо нову лествицу додавањем једне повисилице на седми тон нове лествице, односно снизилице, ако се од основног тона померамо на доле. Након 12 квинтних скокова поново долазимо до броја 1 чиме се квинтни круг затвара. Принцип по коме се сви тонови могу извести из једног низа квинти основа је питагорејског тонског система(Чанак, 2009; Wright,2009).



Слика 16 Квинтни круг[120]

Питагора је открио да је 12 квинтних скокова скоро исто као и итерација седам октава. Наведено можемо математички записати као:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{3^{12}}{2^{12}} = \frac{531441}{4096} \sim 129,75$$

$$2^7 = 128$$

Интервал између је: $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{2^7} = \frac{3^{12}}{2^{19}} = \frac{531441}{524228} \sim 1,01364$

Ово неслагање доводи до такозване *питагорејске коме*[121](Деспић, 1997, стр.121;Wright,2009, str. 129; Budden, 1967).

[120]Преузето из Деспић, 1997, стр. 108.

На основу наведеног питагорејски тонски систем математичкије перфектан у односу на почетни тон. Међутим, ако се промени тоналитет и за основни тон узме неки други тон долази до неслагања што значи да ако се пође од тона *це* и направи пун круг у квинтном кругу, поновни тон *це* није сасвим тачан *це* који је за седам октава виши од полазног. Његова фреквенција требала би бити 2^7 = 128 пута већа од полазне, а ако идемо 12 квинтних скокова, добијамо фактор $(3/2)^{12}$ = 129,75 (Budden, 1967; Madaras, 2009; Чанак, 2009).

Решење за овај проблем понудио је математичар Марин Мерсен својом једнакотемперованом скалом у којој сваки полустепен у свакој октави има однос фреквенција$\sqrt[12]{2}$. Користећитемперовану скалу композиције су се могле транспоновати из једног тоналитета у други, а да однос између тонова остане исти. На тај начин су се на било ком инструменту без додатног штимовања могле свирати композиције у свих 12 дурских и 12 молских тоналитета(Isto: Isto; Исто).

3.5. Математичке основе дијатонског тонског система

„Настанак дијатонске лествице[122] доводи се у везу са именом Дидимоса(*Δίδυμος*рођен 63. године пре нове ере). Ако се покретна кобилица на монокорду постави тако да осцилира четири петине дужине жице добија се велика терца. Реципрочна вредност 5/4 представља одговарајући фреквенцијски број. И управо интервал терце игра главну улогу у изградњи диајтонске лествице”[123](Чанак, 2009, стр.41). Дијатонске скале састоје се од интервала који у лествици никада нису већи од једног степена, нити мањи од полустепена (West, 1992).

[121]Ово одступање назива се у теорији музике *питагорејска кома,* а њом се бројчано изражава интервал између дванаесте квинте и седме октаве у односу на заједнички почетни, основни тон (Исто).

[122]Дијатонске лествице се могу поделити у три групе: различите дурске и молске лествице; модалне лествице (модуси) и лествице специфичне грађе (целостепена или умањена)Cf. Деспић, 1997, стр. 101.

[123]Ако се у лествици нижу само тонови различитог основног имена, а између тонова су размаци велике и мале секунде, односно дијатонски цели полустепени, таква лествица се назива дијатонска лествица. Ако су тонови на полустепеним растојањима, таква лествица назива се хроматском(Исто).

Полазећи од познатих фреквенција дефинисаних кроз питагорејски тонски систем, дефинишу се фреквенције основних музичких интервала дијатонске лествице.

Фреквенције тонова: f (*це*) = 1, f (*е*) = 5/4, f (*еф*) = 4/3, f (*ге*) = 3/2, f (*це'*) = 2. Из наведених фреквенција следи да је:

Мала секунда: f (*еф*) : f (*е*) = (4/3) : (5/4) = 16/15;

Септима: f (*це'*) : f (*ха*) = 2 : f (*ха*) = 16 : 15. Следи да је 16 f (*ха*) = 30, односно f (*ха*) = 15/8;

Секста: f (а) = f (*еф*) ·(5/4) = (4/3) · (5/4) = 5/3;

Велика секунда: f (*де*) : f (*це*) = f (*ге*) : f (*еф*). Даље следи: f (*де*) : 1 = (3/2) : (4/3), односно f (*де*) = 9/8.

На основу изложеног могу се представити тонови и фреквенције које тонови тонског система имају у односу на почетни тон. Дијатонски тонски систем могао би се приказати следећим фреквенцијама тонова за тонски систем: *це де е еф ге а ха це'*; фреквенције тонова у односу на почетни тон *це*: 1, 9/8, 5/4, 4/3, 3/2, 5/3, 15/8, 2. Фреквенције тонова у односу на нижи суседни тон биле би: 9/8, 10/9, 16/15, 9/8, 10/9, 9/8, 16/15”(Чанак, 2009, стр.41).

Поменуто је да је Архитрас, питагорејски теоретичар музике, истицао да постојетри средине у музици: аритметичка, геометријска и инверзна (хармонијска) средина. Архитрас (*Ἀρχύτας*) је интервале у музици делио уз помоћ одговарајућих пропорцијаформулишући следећу шему поделе интервала:

1:2

2:3 3:4

4:5 5:6 6:7 8:9 итд.

За a = 1 и b = 2 уз помоћ аритметичке и хармонске средине на једноставан начин се може изградити горе поменута лествица.

а (1, 2) = (1 + 2) / 2 = 3/2 (квинта)

ха (1,2) = 2 · 1 · 2 / (1 + 2) = 4/3 (кварта) *а* (1, 3/2) = (1 + 3/2) / 2 = 5/4 (терца)

а (4/3 + 2) / 2 = 5/3 (секста)

а (1, 5/4) = (1 + 5/4) / 2 = 9/8 (велика секунда)

ха (3/2, 15/8) = 5/3, следи 15/8 (септима) (Madaras, 2009;Чанак, 2009).

На основу истраживања математичке законитости музике дефинисани су релативни фреквенцијски бројеви за основне интервале, а на основу којих се може сагледати повезаност са дијатонском лествицом (октава (2 : 1), квината (3 : 2), кварта (4 : 3), велика терца (5 : 4), секста (5 : 3), секунда (9 : 8), што указује на повезаност са дијатонском лествицом.

Допринос питању изградње тонске лествице и утврђивању фреквенцијских односа међу интервалима дао је и Леонард Ојлер. Полазећи од дијатонског система у оквиру октаве Ојлер је сваком тону придружио по један број, при чему су сви бројеви облика $2^k \cdot 3^m \cdot 5^n$, где је m је из домена бројева {0, 1, 2, 3}, а n из домена бројева {0, 1, 2}. Ојлер је тоновима придружио следеће бројеве:

це: $2^7 \cdot 3$; *де*: $2^4 \cdot 3^3$;*е*: $2^5 \cdot 3 \cdot 5$; *еф*: $2^9 \cdot 1$; *ге*: $2^6 \cdot 3^2$; *а*: $2^7 \cdot 5$; *ха*: $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$; *це*': $2^8 \cdot 3$.

„Према Ојлеру општи израз $2^k \cdot 3^m \cdot 5^n$ представља карактеристику тонског система јер сви његови делиоци индукују тонове унутар сразмере 1 : 2 и испуњавају интервал октаве”(Чанак, 2009, стр. 46).Интервали према Ојлеровом бројном систему се дефинишу на следећи начин: секунда (*це*– *де*): $\frac{2^4 \cdot 3^3}{2^7 \cdot 3} = \frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8}$. Истим поступком за остале интервале добијамо вредности: терца (*це* – *е*) 5/4; кварта (*це* – *еф*) 4/3; квинта (*це* – *ге*) 3/2; секста (*це* – *а*) 5/3; септима (*це* – *ха*) 15/8; октава (*це* - *це*') 2” (Исто).

3.6. Математичке основе хроматске темпероване тонске лествице

Питање побољшања тонског система и прилагођавање тонске скале новијим захтевима у музици јавило се петнаест векова од појаве дијатонске скале. Да би се задовољио захтев инструменту са фиксираним положајем тонова да сви тонови који стоје на располагању буду у стању да преузму функцију основног тона, дошло је до стварања хроматске темпероване лествице.[124] По законитостима темпероване лествице, два тонска интервала су једнака ако су коефицијенти њихових фреквенција исти. Друга законитост темпероване лествице гласи: фреквенција која је равномерно распоређена на 12 тонских полустепена, треба да се по октавном закону дуплира (Чанак, 2009, стр. 47).

Оба захтева су задовољена ако је количник броја трептаја два суседна, произвољно изабрана тона $q = \sqrt[12]{2}$, одакле је $q^{12} = 2$. Тако се добија бројни низ $\sqrt[12]{2}^{n}$:

це 1, *цис* $\sqrt[12]{2}$, *де* $\sqrt[6]{2}$, *дис* $\sqrt[4]{2}$, *е* $\sqrt[3]{2}$, *еф* $\sqrt[12]{2^5}$, *фис* $\sqrt{2}$, *ге* $\sqrt[12]{2^7}$, *гис* $\sqrt[3]{2^2}$, *а* $\sqrt[4]{2^3}$, *аис* $\sqrt[6]{2^5}$, *ха* $\sqrt[12]{2^{11}}$, *це'* 2 (Исто).

Овај низ представља један логаритамски систем са основом $\sqrt[12]{2}$, а логаритми су експоненти 0, 1, 2, 3,... до 12 (Исто).

Са математичке, акустичке и техничке стране, темперованим принципом штимовања био је припремљен пут за велике клавирске композиторе и виртуозе 18, 19. и 20. века.

Хроматска лествица се јавља у два вида, различита по основи свог настанка, а не по својој структури: *хроматска дурска или молска лествица* – која је настала на основи дурске или молске лествице тако што се цели степени међу тоновима попуњавају хроматским варијантама појединих лествичних тонова; права, дванаесттонска хроматска лествица, која нема дијатонску основу већ се свих дванаест тонова унутар октаве сматрају потпуно равноправним члановима низа (Деспић, 1997).Ако се посматрају тонови на клавиру у оквиру једне октаве уочава се да се тонови различитог имена (на пример *цисидес*) звучно подударају. Таква звучна подударност назива се енхармонија и могућа је само у темперованом штимовању тонова[125] (Исто).

Са хроматском темперованом лествицом уоквирује се принцип средњих вредности. У дијатонској скали присутна је аритметичка средина. У хармонијском низу аликвотних тонова, хармонијска средина, док у хроматској темперованој

[124]Стварање темперованих система наметнуло се у историји музике као потреба практичног музицирања, јер се природни тонови не могу увек употребити у музици.
[125]Према систему темперованог штимовања распон октаве се дели равномерно на једнаке полустепене размаке, што у односу на природно штимовање даје акустички мањетачне тонске висине, али омогућава њихову двозначност, што даље доприноси слободној употреби свих тоналитета и њихово повезивање (Исто).

лествици доминира геометријска средина. Сваки члан фреквенцијског низа представља геометријску средину два суседна или два симетрична члана низа. На тај начин помоћу геометријске средине једноставно се може изградити цела темперована тонска лествица(Чанак, 2009).

На основу изложеног у досадашњем делу рада, потврђена је историјска веза математике и музике, а тиме и прва хипотеза постављена овом дисертацијом – ***Постоји нераскидива веза између математике и музике у виду научне заснованости (теорија музике умногоме се ослања на знања и законитости математике и обратно, музичка теорија основа је појединих математичких достигнућа и открића).*** У раду су изложене само полазне теоријске и научне основе ослањајући се на знања потекла из старе Антике и њихове закључке о односу математике и музике. Почетно теоријско проучавање односа математике и музике отвара нова питања, за даљу анализу њихових научних и теоријских веза и односа, која могу довести до нових сазнања у датој области.

4. МАТЕМАТИКА И МУЗИКА У ФУНКЦИЈИ ДЕЧЈЕГ РАЗВОЈА

4.1. Теоријске премисе

Када се говори о развоју, Требјешанин истиче да је развој „сукцесивни низ релативно трајних, повезаних, прогресивних и иреверзибилних промена (квантитативних и квалитативних) током живота... Појам развоја подразумева промене које су резултат сазревања и учења” (Trebješanin, 2008, str.407). Психички развој обухвата више различитих ступњева, од којих сваки има своје карактеристике. За потребе рада презентоваће се схватања двојице најзначајнијих представника развојно-психолошких теорија – Жана Пијажеа (*Jean Piaget*) – когнитивно-развојна теорија и Лава Виготског (*Лев Семёнович Выготский*) – културно-историјска теорија психичког развоја.

Док се Пијаже у процесу развоја ослањао на когнитивне процесе, Виготски је истицао друштвене и културне процесе који доприносе развоју (DeVries, 1997).

Пијаже је указао на низ различитих развојних ступњева, од рођења до адолесценције. Сваки од ових ступњева прелази један у други по утврђеном редоследу, у виду специфичних квалитативно-различитих развојних стадијума, који се само оквирно могу повезати са одређеним узрастима. „Сваки стадијум је преображавање претходног, кроз дететову самоиницијативну интеракцију са средином”(Radoš-Mirković, 2010, str. 233). Пијажеова теорија је у основи биологистичка јер наглашава да су основне когнитивне структуре, шеме и операције, урођени обрасци, а да се развој састоји у прилагођавању ових структура захтевима средине кроз процесе *асимилације*[126]и *акомодације.*[127]Равнотежу између процеса асимилације и акомодације омогућава тежња ка *равнотежи*, која представља свеопшти биолошки принцип. Осим

[126]Према Пијажеу, акомодација је процес усвајања нових когнитивних шема, односно, прилагођавање искуства или предмета већ постојећим стратегијама или концептима.

[127]Процес асимилације, према теорији Жана Пијажеа, представља промене постојећих образаца и шема у одговору на нова искуства или информације.

појмова *акомодација* и *асимилација*, у својој теорији, Пијаже користи и појмове *организација* и *адаптација*. Док се *организација* односи на способност појединца да организује и повеже своја искуства у јединствени систем, *адаптација* је процес који представља интеракцију са средином и извор менталног развоја.

„Пијажеов приказ когнитивног развоја тумачи се као онај који детету приписује, на почетку развоја, логичку неспособност, а адолесценту, у каснијим фазама развоја, логички капацитет" (Smith, 1985, str. 183). Он је развојне стадијуме детета поделио на: сензомоторни, од рођења до краја друге године (дете спознаје свет кроз чула и моторичке покрете); преоперационални, период од друге до седме године (појава симболичких представа и развој језика); следи фаза конкретних операција, узраст од седме до једанаесте године (појављује се логичка мисао, способност класификације објеката, догађаја и успостављање веза међу њима, као и развој способности обављања *реверзибилних операција*[128]); фаза формалних операција, од дванаесте године надаље (развој апстрактне мисли и дедукције у закључивању)(Роти Радоњић, 2002; Radoš-Mirković, 2010; Trebješanin, 2008).

Осим когнитивног развоја, Пијаже је велики акценат стављао на развој вршњачких односа и односа дете – одрасли и тиме допринео теорији социјалног развоја. Такве интеракције су кључне за изградњу социјалних и моралних осећаја, вредности и социјалних и интелектуалних компетенција детета (DeVries, 1997).

Културно-историјска теорија психичког развоја Лава Семјоновича Виготскогтежи да илуструје општу теорију развоја (онтогенетског и филогенетског) виших менталних функција, којиистиче да се сваки аспект менталног функционисања може разумети само разумевањем његовог порекла и историје. Када се бавио овом темом, аутор је отишао даље од уобичајеног фокуса психологакоји су се бавили питањем дечјег развоја; поред онтогенезе (развоја живота појединца), бавио се филогенезом (развојем врста) и социокултурном историјом.Осим тога његово теоријско схватање истиче давише или јединствено људско, ментално функционисање има порекло у социјалном окружењу, као и да

[128]Реверзибилне операције подразумевају способност сазнавања садржаја у једном смеру и способност да се мисаона операција врати у супротном смеру на почетну тачку. Према Пијажеу, реверзибилност је неопходна за обављање логичких операција.

је виши интелектуални рад подстакнут социокултурним развојним знацима у којима кључну улогу има људски говор, односно језик (Wertsch, 1988).

Виготски истиче да психички развој зависи превасходно од социо-културног развоја (Mirić, 2003, Trebješanin, 2008; Vigotski, 1996). „Могућност употребе културних средстава заснована је на човековој биолошки датој симболичкој способности[129] (Trebješanin, 2008, str. 244). Према аутору употребом спољних културних средстава, природне функције, као што је непосредно памћење, постепено се трансформишу у културне функције, као што је логичко мишљење и у психолошке системе. У својој теорији наводи појам *интериоризације*,који одређује као механизам уз помоћ којег спољашње, социјално, прелази у унутрашње, психичко (Trebješanin, 2008; Vigotski, 1996). Изузетно значајно његово схватање развоја и учења, огледа се у ставу да развој не треба да чека достизање новог развојног ступња, већ треба да подстиче на прелазак из ниже ка вишој фази, што Виготски наглашава у својој теорији *Зоне (проксималног) наредног развоја*[130](Isto; Isto).

У погледу тумачења развоја, Пијаже и Виготски истичу супротна становишта. Док се према Пијажеу развој одвија од индивидуалног ка социјалном, према Виготском развој тече од социјалног ка индивидуалном (Дејићи Егерић, 2006).

4.2. Игра као основ развоја

Према одређењу Жарка Требјешанина (Trebješanin, 2008) у делу *Речник психологије*, „игра представља вишезначан термин који обухвата различите и супротне појмове" (Isto, str.183). Са једне стране о игри се може говорити као о слободној, спонтаној, добровољној делатности, која нема неки практични циљ, већ се изводи из задовољства. Њено извођење прате осећања радости и

[129]„Симболичке способности, према Требјешанину, одређују се као, способност представљања помоћу симболичких средстава (реч, слика, мимика) нечег другог, што је различито од њих самих и што је одсутно"(Trebješanin, 2008, str.437).

[130]У културно-историјској теорији Лава Виготског, *Зона наредног развоја* означава потенцијални ниво до којег дете долази учењем. Оно што дете може да изведе самостално, спонтано, указује на његов тренутни ступањ развоја, док оне активности које дете може да реализује уз помоћ одраслих указују на дететов сутрашњи развој, на могућности детета које се налазе у зони наредног развоја (Isto).

задовољства. Аутордаље у свом одређењу појма игре наводи да постоје разне врсте игара: функционална, језичка, драмска, стваралачка, игра маште. „Игре се могу делити и на дечје и игре одраслих, на такмичарске и кооперативне, традиционалне и савремене и друге врсте игара”(Isto, str.183).Ипак, како аутор наводи, ниједна од многих теорија игара не успева да до краја обухвати и класификује облике и врсте игре. Поред слободне и спонтане игре, друга група игара су организована, унапред планирана, циљу усмерена делатност, која има своја јасна правила, одређен почетак, ток и завршетак, као што суразне друштвене, такмичарске и спортске игре (Isto).

И Емил Каменов, у свом делу *Дечја игра,* наводи да се феномен игре не може обухватити једном „операционалном дефиницијом” (Kamenov, 2009, str. 7).У тумачењу и одређењу појма игре издвајају се различита полазна гледишта – социолошко, антрополошко, педагошко, медицинско, еколошко, културно, развојно и друга(Kamenov, 2009; Тасевска, 2005; Whitebread, 2012).Рад ће приказати педагошко-психолошка и развојна гледишта игре као појма и указати на ставове појединих теоретичара који заступају схватања когнитивно-развојне теорије игре.[131]

За когнитивну теорију дечје игре значајно је да игру посматра као карактеристичну сајзнајну активност, која је од изузетног значаја за развојсимболичких функција (Kamenov, 2009).Пијаже игру одређује у функцији развоја когнитивних способности,[132]где „исти фактори који одређују интелектуални развој, одређују и развој игре”(Isto, str.11).Пијаже сматра да кроз игру деца стварају симболе помоћу којих сазнају стварност и уче. Игра подразумева активности које доприносе стварању симбола, а упоредо и развоју логичко-математичкихзнања (Nath and Szucs, 2014).

Указујући на разлику између дечје имитације и дечје игре, Пијаже говори о два процеса: процесу *акомодације* – имитације, као виду прилагођавања спољном свету и процесу*асимилације* – који је у свом целокупном облику игра. „За Пијажеа

[131]У свом докторском раду Тасевска наводи четири различита правца, научне теорије, које разматрају игру у функцији образовања: психоаналитичка теорија, когнитивно-развојна теорија, културно-еколошка теорија, развојна и компаративна теорија (Тасевска, 2005).
[132]Пијаже наводи три врсте игара: практичне игре, симболичке игре и игре са правилима и доводи их у везу са три облика интелигенције, сензомоторним, репрезентационим и рефлексивним (Исто).

игра је примена образаца стечених имитацијом на нове конкретне ситуације" (Kamenov, 2009, str. 12).

Виготски[133] такође сматра да је игра фаза у развоју сазнајних процеса детета и истиче да је игра машта, те тиме пут да дете осмисли и оживи емоције, вреднује своје друштвено искуство, односно начин сазнања. Према њему игра у развоју дететаима две функције: развој сазнајних способности и развој воље. У игри дете ствара замишљену ситуацију, која га одваја од стварности и тиме се умногоме доприноси развоју апстрактног мишљења (Isto). Аутор истиче да дечја игра доприноси и развоју способности симболичке репрезентације и способности да се контролишу сопствени когнитивни и емоционални процеси (Whitebread, 2012).

„Игра је природна активност у детињству, а дечја машта је значајан унутрашњи ресурс који се може користити за подстицање креативног мишљења, здравог самопоштовања и способности успешне интеракције са другима"(Plummer, 2008, str.13).Многи аутори поред утицаја на развој когнитивних способности указују да игра доприноси и развоју социјалних и емотивних способности код деце (Levy, 1978;Plummer, 2008; Whitebread, 2012). Игра доприноси подстицању здравог интелектуалног, емоционалног и социјалног развоја код деце (Whitebread, 2012).

ПремаWhitebread (Whitebread, 2012) дечје игре се могу сврстати у пет група:

- *физичке игре* (скакање, трчање, плесање, вожња бицикла, игра лоптом и друге). Аутори даље истичу да је ова врста дечјих игара повезана са развојем целог тела и координацијом руку и очију, а истовремено важна за изградњу снаге и издржљивости (Pellegrini and Smith, 1998).
- *игре са разним предметима* – као и код свих других врста игара, играње са предметима често укључује и друге врсте игре, јер оваква врста игре обухвата и физичке и манипулативне аспекте

[133]„Виготски је целокупан развој детета тумачио као процес интериоризације, што значи да је све оно што је у одређеном тренуткупостало психички квалитет човека (његов начин мишљења, маштања и доживљавања света, једном речи „његов унутрашњи план)било, једног претходног тренутка развоја, практична радња"(Kamenov, 2009, str.14).

развоја детета. Деца могу да граде од коцкица, слажу лего и слично и у тим играма деца се подстичу на размишљање и решавање проблема. Оваква врста игара доприноси развоју моторике, критичког мишљења и физичког развоја детета.

– *симболичке игре*, које подстичу развој симболичких система и изражавају се кроз цртање, сликање, говор, визуелне медије и подстичу децу да изразе своје емоције, искуства и осећања.
– *драмске игре*, које доприносе развоју социјалних компетенција детета, комуникацију, разумевању и схватању других и саморазумевању својих осећања и потреба.
– *игре са правилима* – спортске игре, шах, игре домина, карти, разне друштвене игре и друго.

Требјешанин у *Речнику психологије,* наводи следеће врсте игара: функционалне, језичке, драмске, стваралачке игре, игре маште, игре са правилима, симболичке игре, такмичарске и кооперативне игре, дечје игре и игре одраслих, спортке игре, друштвене игре и друге. Аутор сугерише да ниједна од многих теорија дечјих игара не успева да у потпуности обухвати класификацију игре, као комплексне и разноврсне активности (Trebješanin, 2008).

Игра као кључна компонента развоја и учења добила је значајно место у савременим облицима учења и подучавања. Савремено доба изнедрило је дигиталну врсту игре, која данас све више испуњава свет деце и младих. Како у слободно време у циљу забаве и разоноде, тако и у сврху учења и стицања нових знања и вештина, деца данас све више користе дигиталне игре.Истраживање спроведено 2010. године са децом основно-школског узраста у школама у Србији, које се односило на безбедност деце на Интернету и друштвеним мрежама, указало је и на активности које деца реализују путем дигиталних уређаја и глобалне мреже Интернета. Резултати су тада показали да од свих тестираних активности ученици у највећем проценту на Интернету играју дигиталне игре (50%, оценило поменуту активвност оценом 5, 13, 33% оценом 4, а само 10% је дало оцену један) (Рајић, 2012).Током 2018. године реализовано је још једно истраживање, за сада необјављено, у коме је учествовало три стотине осам ученика нижих разреда основних школа које указује на употребу дигиталних игара међу децом. Добијени резултати показују да у сто одсто испитаника, у мањој или већој мери, деца играју дигиталне игре и то највећим делом у циљу забаве и разоноде, али и у циљу разумевања и усвајања нових образовних садржаја. Иако су дигиталне игре и технологија све присутније међу децом, ова студија има за циљ да укаже на дидактичке игре које наставници, родитељи, деца и млади могу да реализују у реалном окружењу развијајући на тај начин социо-емотивне и когнитивне вештине.

4.2.1. Дидактичке игре

У научној литератури се веома често наилази на ставове аутора да игра представља специфичан начин учења деце и младих. „У оваквим ставовима аутори иду толико далеко да игру пореде са научним истраживањем, за које сматрају да представља њен продужетак у зрелом добу"(Копас-Вукашиновић, 2006, стр.175). Како истиче Копас-Вукашиновић, дидактичке игре[134] подстичу развој интелектуалних потенцијала деце и упоредо доприносе њиховом социјалном развоју.Дејићи Егерић истичу да су дидактичке игре оне игре које се користе у сврху образовања и васпитања, које захтевају интелектуалне активностии доприносе интелектуалном развоју (Дејић и Егерић, 2006).

У образовању се све више наглашава да се садржаји не могу учити страхом од ауторитета или казне и да је за успешно савладавање садржаја потребно пробудити интересе и ентузијазам код деце, употребом функционалних игара(Kamenov, 2009).

Каменов указује на васпитно-образовну вредност дечје игре, на мотивацију коју игра подстиче, као и на важност игре у социо-емотивном развоју детета. Према речима Каменова, у васпитно-образовном погледу вредност игре је у томе што игра одржава дечју пажњу на одређеним садржајима, а истовремено их мотивише да буду активни учесници у одређеним актовностима (Kamenov, 2009).

[134]„Дидактичке игре могу бити игре с утврђеним правилима, које пружају могућност договарања и усаглашавања пре почетка или у току игре, а могу подразумевати и прилагођавање утврђених правила дечијим потребама и могућностима или њихово креирање. Дечије искуство и креативност доприносе варирању игара. Игра тако постаје учење на озбиљан, забаван и интересантан начин"(Копас-Вукашиновић, 2006, стр. 178).

Игра доприноси подстицању и развоју перцептивно-моторних,[135] интелектуалних,[136]социо-емотивних,[137]као и способности комуникације и стваралаштва (Isto, премаVigotski, 1996). „Игра као друштвена активност пружа инзваредне могућности за развој социјалне свести код деце и изазивање позитивних емоција које делују интегративно на њихову личност" (Kamenov, 2009:36). Истраживања феномена игре указују на њен значај у погледу подстицања унутрашње мотивације детета, јачања самоконтроле, усмеравања пажње на одређену активност, као и подстицање афирмативних облика понашања (Levy, 1978).

Док се игра, дете истражује свет око себе, проналази нове начине и могућности поступања и деловања у различитим ситуацијама, које су веома често повезане са свакодневним животним искуствима деце. Игра подстиче децу да буду спремна да се у сваком моменту прилагоде промени, а истовремено их подстиче да користе различите изворе информација, да истражују, експериментишу, а све у циљу изналажења више могућих решења истог проблема(Barr, 2017).

Пламер (Plummer,2008) наглашава значај васпитно образовних игара за развој социо-емотивних способности деце и младих. Као најзначајније наводе се: самосвесност – способност детета да буде свесно својих осећања, мисли, личних потреба и сопственог понашања; самоконтрола – преузимање контроле над личним осећањима и размишљањима и начином њиховог испољавања, способност адекватног испољавања емоција; активно слушање – слушање и уважавање других, њиховог мишљења и конструктивна комуникација у размени мишљења; способност разумевања и препознавања различитих емоција других; способност

[135] Требјешанин у свом *Речнику психолошких термина* указује да су„моторне способности заправо мануелне способности (спретност прстију, координацијја покрета руку у времену и простору), способност брзог, снажног моторног реаговања ногама, рукама, прстима, главом..." (Trebješanin, 2008, str.285).

[136]Интелектуалне способности су „класа разноврсних менталних способности, којима је заједничко да се активирају приликом решавања проблема, који се не могу решити само помоћу сензорних и моторичких способности… Поистовећују се са когнитивним способностима способност памћења, мишљења, учења увиђањеми расуђивањем, односно интелигенцијом" (Isto, str.196; 222).

[137]Под социјалним способностима Требјешанин наводи: способност препознавања осећања и жеља других људи, способност схватања људских поступака, добра самоконтрола, способност лаког успостављања међуљудских односа, способност уважавања другачијег гледишта и решавање сукоба, способност вођења и управљања. Под емоционалним способностима наводи: способност саморазумевања, самоконтроле, способност емпатије (разумевања осећања других), способност успостављања складних међуљудских односа (Isto, str. 115; 452).

емпатије, сагледавања проблема из позиције друге особе и свесност потреба других; толеранција и поштовање различитости (Plummer, 2008).Он даље наводи листу вештина којима доприноси дидактичка игра, наводећи не само социо-емотивне већ и когнитивне вештине: развој вештине слушања; развој опсервације, способност праћења комплексних инструкција, развој меморије и памћења, способности решавања проблема, развој вештине сарадње, самоодговорности, развој лидерских вештина, подстицање упорности и истрајности током игровне активности, разумевање различитих функција игре, развој учења кроз спонтану активност и ангажовање, уочавање да учење може бити забавно, прихватање правила других постављених у игри, развој самопоштовања и поштовања других, разумевање толеранције, фер игре, емпатије, развијање осећаја за одговорност за сопствене поступке, разумевање емоција других, развој самопоуздања, поверења, подстицање стваралачког мишљења и друго (Isto, str.33-34).

Организована дечја игра, дидактички и методички конципирана, пружа могућност максималног ангажовања деце у разним наставним активностима. Уједно, игра доприноси стицању нових искустава, у односу на средину и вршњаке, али и вежбању и развијању способности. Интересовање деце за савладавање садржаја је повећано, прати се дечје задовољство и напредак у дечјем развоју (Ивић, 1997).

Из претходно наведеног, може се уопштити да спонтана дечја игра, као и дидактичка игра, умногоме доприносе дечјем социјалном, емотивном и когнитивном развоју.

4.3. Педагошко-психолошке основе математике и музике у функцији развоја

Полазећи од одређења математичких и музичких способности, као и активности и садржаја које деца усвајају у поменутим областима, указује се на неке специфичности које су заједничке и математици и музици у развојном и педагошком контексту.

Проучавање и савладавање садржаја и математике имузике нужно захтева од деце да ангажују своје интелектуалне способности, те мишљење које им омогућава да сазнају различите садржаје, врше упоређивања по сличности и различитости, успостављају односе међу објектима, групишу елементе по сличности, закључују и друго (Дејићи Егерић, 2006).

Термин музичка способност представља централну тачку између музичке подобности, односно потенцијала и музичког постигнућа, односно, учинка (Radoš-Mirković, 2010). Веома слично одређење наводи и бихевиориста Ландин (*Lundin*), који у оквиру музичких способности разликује потенцијал и научену вештину (Radoš-Mirković, 1998). У својој књизи *Psihologija muzike*, ауторка указује на најзначајније компоненте музичких способности посматрано са психолошког аспекта. Међу њима издваја: разликовање висине тонова, опажање и памћење мелодије, опажање и репродукција ритма, опажање хармоније, способност естетског процењивања, и друге компоненте музичких способности (на пример опажање тоналитета) (Radoš-Mirković, 2010).

И када се указује на математичке способности, аутори наглашавају да треба разликовати школске, за које нису потребне природне склоности ка математици и математичко-логичком мишљењу, од научних способности у основи којих лежи природна обдареност за комбинаторно, дедуктивно и индуктивно мишљење, коришћење математичке симболике, логичко закључивање, проналажење различитих и оригиналних решења датих математичких проблема, постављање нових проблема, извођење доказа, способност схватања узрока и последице, расуђивање о односима и везама међу објектима и друго(Дејић и Егерић, 2006). Истиче се и подела на алгоритамску, геометријску и логичку математичку способност, као и на способност рачунања, решавања проблемских математичких задатака (Denmark, 1980).

Генерално посматрано и математика и музика обухватају способности опажања, памћења, уочавања веза међу датим односима, еластичност и креативност мишљења; и у математици и у музици разликују се научене и природом дате способности. Док у музици дете усваја мелодију, ритам, тонске висине, хармонију, градњу тоналитета, акорада и друго, у математици обрађује почетне аритметичке, алгебарске, геометријске и садржаје мерења и мера(Дејић и Егерић, 2006; Radoš-Mirković, 2010).У спроведеном педагошком истраживању и примењеној математичко-музичкој игри са децом узраста од осам до дванаест година, акценат је стављен на математичке аритметичке[138]и гометријске[139] садржаје, а са друге стране, гледано на музички део, на ритам, ритмички пулс и музичко опажање.[140]У ту сврху,важно је истаћи да опажање ритма подстиче дечју меморију, памћење, опажање ритмичких целина, опажање акцентовања удара, метра, темпа, њиме се испитује афективно реаговање на ритам, док се истовремено доприноси развоју дечјих ритмичких способности (Radoš-Mirković, 2010).

Када се говори о доприносу учења математичких и музичких садржаја у интердисциплинарном[141] контексту у литератури се наилази на ставове да такав начин учења подстиче развојвишеструке интелигенције и да учење математике засновано на музичким активностима доприноси да деца која су склонија уметности и друштвеним наукама лакше усвајају математику, као и да се код њих истовремено развијају логичко-математичке и музичко-ритмичке способности. Интеграција музичких активности у садржаје математике може допринети лакшем разумевању појединих математичких концепата, јер деца уче у пријатном и подстицајномокружењу (Edelsonand Johnson, 2012; Shilling, 2002).

Када се комбинују, математика и музика, дете се ангажује не само у домену мишљења, већ иу свим другим доменима социјално-емоционалног, креативног, језичког и физичког развоја, чиме њихов спојдоприноси свестраном развоју детета (Church, 2001).

За потребе овог рада истражено је како једна математичко-музичка игра*Musical Monkeys* доприноси дечјем развоју, како когнитивном тако и емотивном и социјалном. Пре него методологија спроведеног истраживања буде

[138] У оквиру аритметичких садржаја, деца узраста до дванаест година (што је била горња граница узорка спроведеног истраживања), обрађују скуп природних бројева са нулом, основне аритметичке операције (сабирање, одузимање, множење и дељење), примењујући основне аритметичке законитости извођења основних операција.
[139] У оквиру геометријских садржаја деца се оспособљавају најпре да разликују геометријске фигуре и облике, затим да упознају својства одређених геометријских фигура и облика и да их по њима разликују, те на крају да уочавају особине фигура и облика, одређују њихове површине и друго.
[140]Деца се оспособљавају да разликују ритмички пулс од ритма и подстичу на музичко опажање и памћење.
[141] Интердисциплинарност се може одредити као интерактивно повезивање две или више дисциплина, прожимање њихових садржаја, концепата, теорија, вештина, података кроз јединствену активност.

презентована, може се указати на ставове аутора према математичким, односно музичким играма у функцији развоја и образовања.

Према ауторима математичке игре подстичу интелектуалну ангажованост, изискују памћење правила и познавање садржаја. Оне подстичу развој самоконтроле, правилног резоновања, брзог и адекватног интелектуалног реаговања(Karić, 2015). Подучавање математике коришћењем различитих, функционалних дидактичких стратегија (Songet. all, 2013)са циљем развијања концептуалног разумевања датих садржаја кроз употребу симулација, открића, изазова и игара, има потенцијал да смањи постојање математичке анксиозности и страха код деце(Song et. all, 2013).

Када се говори о музичким играма, аутори наводе да музичка игра делом као последица својих снажних друштвених и интерактивних карактеристика, подржава широк спектар развојних способности деце, укључујући способности везане за социјалну интеракцију, комуникацију, разумевање емоција, памћење, самоконтролу и креативност (Whitebread, 2012).„Кроз учешће у визуелним и тактилним искуствима, са додатним аудитивним и кинестетичким одговорима, ученик може једноставније и потпуније разумети одређену музичку идеју. Деца која играју игре представљају потенцијално моћно образовно оруђе јер када се ученицима даје слобода да истражују *како* и *зашто*се нешто догађа у оквиру одређеног музичког концепта, обрађени садржаји се природно и трајно задржавају у уму детета”(Hotchkiss and Athey, 1978, str. 49).

Кроз математичке и музичке игре деца самостално истражују одређене садржаје, код њих се буди радозналост за истраживањем и сазнавањем, те на тај начин трајније усвајају математичке и музичке концепте, а када се споје математика и музика и креира дидактичка математичко-музичка игра, исходи дечјег развоја и сазнања постају непроцењиво значајни.

II ЕМПИРИЈСКО ИСТРАЖИВАЊЕ

1. МЕТОДОЛОШКИ ОКВИР ИСТРАЖИВАЊА

1.1.Предмет истраживања

Априори посматрано наука и уметност, математика и музика, две су међусобно неспојиве образовне области. Ако пак проникнемо у основ и математике и музикеи темељније истражимо њихове зачетке као ињихову научну и теоријску поставку откривају нам се неслућене везе и упућујесе на значајан научни однос између њих. И математика и музика имају своја правила и законитости на којима почивају, и математиком и музиком прожима се хармонија, склад и симетрија, а као изразитавеза уочава се склоност ка радозналости, спонтаности и креативности у стварању обе поменуте области.

Подстицај за истраживање веза и односа математике и музике проналази се још код старих античких филозофа и мислилаца. Велики математичари и мислиоци као што су Питагора (*Pythagoras of Samos*), Готфрид Лајбниц (*Gottfried Leibniz*), Леонард Ојлер (*Leonhard Euler*) и многи други, који су не само осећали, него и утврдили везе и законитости између математике и музике, поставили су основ за даља истраживања, показавши по којим законитостима математике се формира и настаје теорија музике као и на који начин законитости музичке теорије доприносе развоју математичке мисли и математике као науке.

Полазећи од најранијег периода и зачетака тумачења веза и односа математике и музике преко мислилаца, филозофа и научника каснијих епоха развоја науке, уметности и друштва, покушали смо да одгонетнемо везу математике и музике и покажемо како су математика и музика чврсто повезане и неодвојиве области науке и уметности, као и на који начин својим прожимањем нам откривају нова сазнања у науци и уметности.

Предмет рада је указивање на нераскидиву везу теоријских основа математике и музике од најстаријих периода развоја друштва до данашњих дана, као и процена да ли и у којој мери примена савремене математичко-музичке игре, која илуструје спој науке и уметности и интердисциплинарност две априори неспојиве дисциплине, математике и музике, подстиче и доприноси развоју дечјих социо-емотивних и когнитивних вештина, знања и способности усмерених превасходно на целовити развој дечје личности.

На тај начин приближавамо се свету савременог приступа развоја и образовања деце и младих, а истовремено подстичемо развој и учење кроз игру, интердисциплинарност и стваралачку активност.

1.2.Циљеви и задаци истраживања

Општи циљ докторске дисертације је да се са историјског и филозофског аспекта темељније презентује теоријска веза развоја математике као науке и музике као уметности, њихових законитости и принципа на којима су засноване, као и да се дође до података о процени да ли и у којој мери се кроз примену интердисциплинарне математичко-музичке игре у раду са децом подстиче развој дечјих социо-емотивних и когнитивних вештина.

Рад као специфично посебне циљеве издваја:

- историјски преглед развоја математике и музике од најстаријих периода развоја друштва до данашњих дана;
- филозофски преглед развоја математике и музике од најстаријих периода развоја друштва до данашњих дана;
- приказ теоријских поставки, веза и основа математике и музике;
- применуматематичко-музичке игре у раду са децом узраста од 8 до 12 година старости;
- анализу и приказ резултата истраживања спроведеног са децом узраста од 8 до 12 година старости у циљу утврђивања, да ли и у којој мери математичко-музичка игра доприноси дечјемсоцио-емотивноми когнитивном развоју.

Из специфично посебних циљева дефинисани су задаци докторске дисертације:

- утврдити да ли и у којој мери постоји веза између историјске, филозофске, теоријске и научне заснованости математике и музике;

– испитати да ли и у којој мери математичко-музичка игра доприноси подстицању дечјег развоја у погледу социо-емотивних и когнитивних вештина;
– испитати да ли интердисциплинарност математике и музике, реализована кроз игру, доприноси обнављању и савладавању одређених садржаја математике и музике;
– утврдити у којој мери математичко-музичка игра подстиче дечју пажњу, активност и мотивисаност у раду;
– испитати да ли ће математичко-музичка игра подстаћи децу на решавање математичких и музичких проблема и задатака.

1.3.Хипотезе истраживања

На основу дефинисаног општег и специфичних циљева докторске дисертације, као и издвојених задатака формулисане су следеће хипотезе и очекивани резултати:

– постоји нераскидива веза између математике и музике у виду научне заснованости (теорија музике умногоме се ослања на знања и законитости математике и обратно, музичка теорија основа је појединих математичких открића и достигнућа);
– претпоставља се да ће интердисциплинарна математичко-музичка игра допринети дечјем когнитивном, социјалном и емотивном развоју (развоју вештина критичког мишљења, проблемског решавања проблема, сарадње, тимског рада, такмичарског духа, конструктивне комуникације, емпатије, позитивног става према раду и слично);
– претпоставља се да ће интердисциплинарна игровна активност математике и музике допринети савладавању и обнављању математичких и музичких садржаја код деце одређеног узраста;
– претпоставља се да ће кроз интердисциплинарну игровну активност математике и музике бити подстакнута дечја пажња, активност и мотивисаност у раду;

– претпоставља се да ће музичке активности игре подстаћи децу на активно решавање основних математичких проблема и задатака и обратно.

1.4.Узорак истраживања

Истраживање је спроведено у две школе на територији града Београда – ОШ „Руђер Бошковић” и ОШ „Креативно перо”, које истовремено реализују национални и интернационални образовно-васпитни програм. Узорком је обухваћеноукупно седам група испитаника од којих су, у свакој групи, реализоване по две радионице исте игре што указује на четрнаест реализованих радионица математичко-музичке игре. Прву реализацију игре пратило је сто двадесеторо деце распоређених у седам група различитог узраста и пола, а другу реализацију (услед одсуства одређеног броја деце) пратило је сто седам испитаника.

У ОШ „Креативно перо”истраживање је спроведено у три групе ученика/испитаника различитог узраста:

– ученици трећег разреда – у обе радионице учествовало је по 18 испитаника;
– ученици четвртог разреда – првој радионици присуствовао је 21 ученик, а другој радионици пет ученика мање, односно 16 ученика/испитаника;
– ученици петог разреда – у обе радионице учествовало је по 16 ученика/испитаника истраживања.

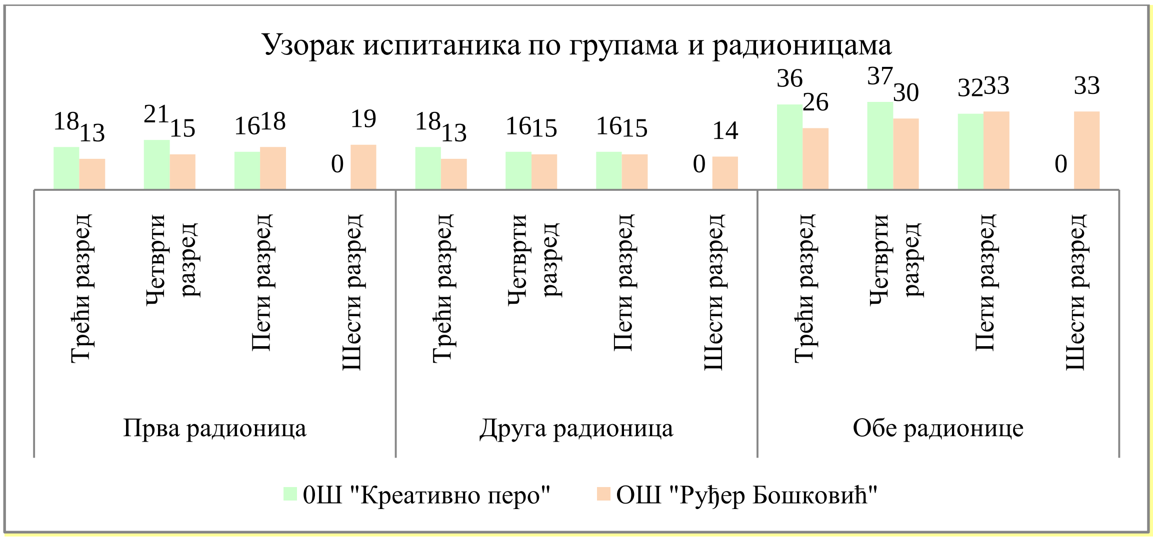
У ОШ „Руђер Бошковић” истраживањем су обухваћене четири групе испитаника различитог узраста:

– ученици трећег разреда –у обе радионице учествовало је по 13 ученика;
– ученици четвртог разреда – у обе радионице учествовало је по 15 ученика;
– ученици петог разреда – првој радионици присуствовало је 18 ученика, а другој три ученика мање, односно 15 ученика;
– ученици шестог разреда – првој радионици присуствовало је 19 ученика, а другој радионици пет ученика мање, односно 14 ученика/испитаника.

Узорак испитаника посматрано по тестираним групама и школама, представљен је табеларно и графички (*Табела 4, Графикон 1*). На основу формиране табеле уочава се да је у Основној школи „Креативно перо” учествовало сто пет испитаника (*f = 105*) испитаника, а у Основној школи „Руђер Бошковић”, сто двадесет два (*f = 122*) испитаника. Хоризонтално посматрано у целости током прве реализације игре учествовало је сто двадесет испитаника (*f= 120*), а током друге реализације сто седам испитаника (*f =107*).

Табела 4Узорак испитаника представљен по школама и групама испитаника

Радионица / Школа	Прва радионица		Друга радионица		Укупно	
ОШ „Креативноперо”	*f*	%	*f*	%	*f*	%
III разред	18	32,72	18	36.00	36	34,28
IV разред	21	38,18	16	32.00	37	35,23
V разред	16	29,09	16	32.00	32	30,47
Укупно	55	100%	50	100%	105	100%
ОШ „Руђер Бошковић”	*f*	%	*f*	%	*f*	%
III разред	13	20.00	13	22,80	26	21,31
IV разред	15	23.07	15	26,31	30	24,59
V разред	18	27.69	15	26,31	33	27,04
VI разред	19	29,63	14	24,56	33	27,04
Укупно	65	100%	57	100%	122	100%



Графикон 1 Узорак испитаника по групама и радионицама

Испитаници су након сваке реализације игре, попуњавали унапред формирану идефинисану скалу процене и на тај начин указивали на личне ставове које је игра у њима подстакла током прве и током друге реализације, као и након истраживања у целини. Анализирани су одговори испитаника у две школе након прве и након друге реализације игре истичући укупан број добијених одговора анализираних након обе реализације игре, а посматрано у свим групама испитаника (*f = 227*) (*Табела 5*).

Табела 5Узорак испитаника по школама и радионицама и одговори испитаника након обе реализације игре

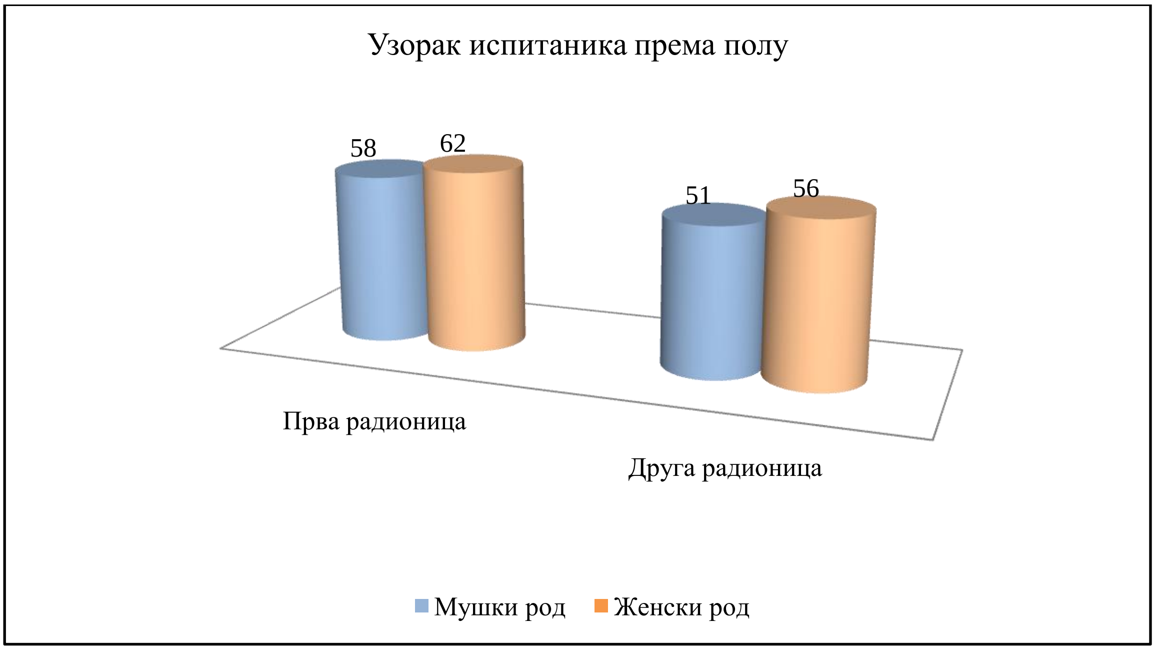
Радионица / Школа	Прва радионица (Узорак испитаника)		Друга радионица (Узорак испитаника)		Обе радионице (Одговори испитаника)	
ОШ „Креативно перо”	*f*	%	*f*	%	*f*	%
	55	45,83	50	46,72	105	46,25
ОШ „Руђер Бошковић”	*f*	%	*f*	%	*f*	%
	65	54,16	57	53,27	122	53,74
Укупно	*f*	%	*f*	%	*f*	%
	120	100.00	107	100.00	227	100.00

Табела 6Узорак испитаника и укупни одговори истраживања према полу испитаника

Радионице / Пол	Прва радионица (Узорак испитаника)		Друга радионица (Узорак испитаника)		Обе радионице (Одговори испитаника)	
Мушки пол	*f*	%	*f*	%	*f*	%
	58	53,21	51	46,78	109	48,01
Женски пол	*f*	%	*f*	%	*f*	%
	62	52,54	56	47,45	118	51,98
Укупно	*f*	%	*f*	%	*f*	%
	120	100.00	107	100.00	227	100.00

У циљу тумачења резултатаистраживања, посматрани су и одговори добијени према полу као и према узрасту испитаника, чиме су тестиране варијабле – радионица, пол и узраст испитаника. Узорак испитаника према полу, као и њихови одговори добијени након обе реализације игрепредстављенису табеларно *(Табела 6).*

Фреквенцијски гледано, у првој радионици учествовало је педесет осам дечака (f = *58*) и шездесет две девојчице (f = *62*), док је у другој реализацији, у истим групама, учествовао педесет један дечак (f = *51*) и педесет шест девојчица (f = *56*). Фреквенција испитаника оба пола је опала у другој реализацији игре услед неочекиваног одсуства деце из школе (*Графикон 2*).

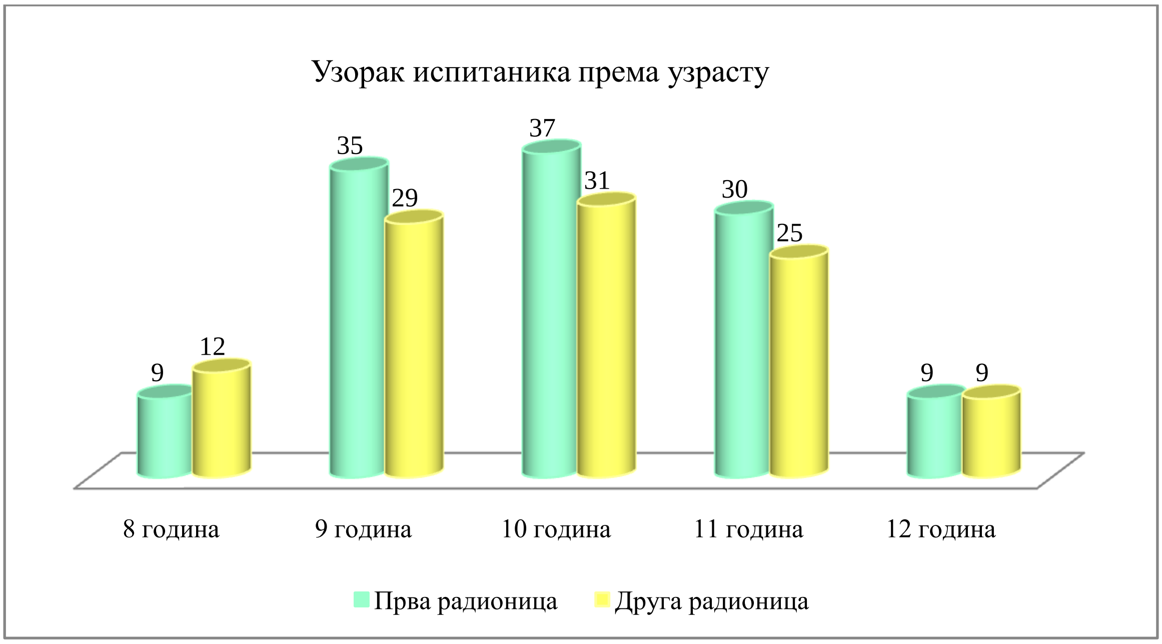


Графикон 2Узорак испитаника према полу

У циљу свеобухватније и потпуније анализе добијених резултата истраживања који ће допринети потврђивању или оповргавању постављених хипотеза посматрани су и анализирани одговори испитаника различитог узраста. Узорак одговора испитаника према узрасту, фреквенцијски и процентуално, представљени су табеларно (*Табела 7*) и графички (*Графикон 3*).

Табела 7Узорак испитаника и укупни одговори истраживања према узрасту испитаника

Радионице / Узраст	Прва радионица (Узорак испитаника)		Друга радионица (Узорак испитаника)		Обе радионице (Одговори испитаника)	
Узраст 8 година	*f*	%	*f*	%	*f*	%
	9	7.50	13	12,14	22	9,69
Узраст 9 година	*f*	%	*f*	%	*f*	%
	35	29,16	29	27,10	64	28,19
Узраст 10 година	*f*	%	*f*	%	*f*	%
	37	30,83	31	28,97	68	29,95
Узраст 11 година	*f*	%	*f*	%	*f*	%
	30	25.00	25	23,36	55	24,22
Узраст 12 година	*f*	%	*f*	%	*f*	%
	9	7,50	9	8,41	18	7.92
Укупно	*f*	%	*f*	%	*f*	%
	120	100.00	107	100.00	227	100.00



Графикон 3 Узорак испитаника према узрасту

1.5.Методе, технике и инструменти истраживања

У раду се примењује метода теоријске анализе са циљем да се теоријски расветли проблем истраживања и тиме омогући дефинисање предмета истраждвања, издвајање основних појмова, утврђивање циљева и постављање хипотеза истраживања. Теоријски су анализиране монографије, научни радови, стручни и научни чланци, речници, уџбеници и друга релевантна литература која се односи на тему рада.

За рад је од изузетног значаја и примена историјске методе којом се указује на настанак и развој, те различита историјска и филозофска гледишта основних појмова којима се теза бави. Упоређивање и разматрање различитих приступа истом проблему (питању односа математике и музике) посматрано кроз историју као и са аспекта схватања научника и мислилаца различитих временских епоха указује на применукомпаративно-историјске методе током писања рада.

За приказ емпириског истраживања, које је спроведено у циљу реализације педагошког истраживања,примењена је дескриптивна метода. Дескриптивна метода се у педагошким истраживањима углавном примењује у ситуацијама када желимо да дамо приказ тренутног стања у пракси, али да при том не останемо на површини, већ да одредимо суштину специфичних педагошких појава, као и везе и односе које постоје у оквиру тестираних појава.

У оквиру дескриптивне методе коришћена је техника посматрања, а као мерни инструмент употребљен је протокол посматрања (*Прилог1*). Осим технике посматрања у циљу подробнијег прикупљања података примењена је и техника скалирања, а као мерни инструмент за прикупљање података употребљена је скала процене (*Прилог 2*). Испитаници су попуњавали скалу сачињену од двадесет четири тврдње/става означавајући свој став у распону три нивоа процене – „нимало”, „делимично” и „потпуно” се слажем.

Резултати добијени техником посматрања изложени суу анализи резултата истраживања квалитативно (описно/дескриптивно), док су резултати добијени техником скалирања представљени квантитативно (процентуално и фреквенцијски приказано кроз табеле и графиконе).

Протокол посматрања коришћен је у циљу добијања директног увида у ток и реализацију математичко-музичке игре, понашање ученика током реализације игре, методички аспект игре, као и развојне карактеристике игре, а са циљем да се испита у којој мери примењена игра подстиче развој когнитивних и социо-емотивних вештина деце. Протоколом посматрања тестирани и испитани су:

1) Општи подаци о реализованој математичко-музичкој игри*Musical-Monkeys*:
– тема игре;
– садржина игре;
– циљ игре;
– задаци игре;
2) Методички аспекти математичко-музичке игре:
– интердисциплинарност игре;
– методе рада током реализације игре (метода усменог излагања, метода дијалога, самосталног рада деце, метода писане речи, илустративно-демонстративна метода, метода сценске комуникације, метода рада по слуху, метода учења из нотног текста);
– облици рада током реализације игре (фронтални, индивидуални, групни, рад у пару);
– вид/форма игре (сензомоторна, конструктивна, симболичка, функционална, имитативна, стваралачка, спонтана, такмичарска);
– компатибилност игре са ученичким предзнањима, интересовањима, узрастом испитаника;
– педагошка клима у групи током реализације игре (позитивна, подстицајна, стваралачка, изражена радна атмосвера, интерактивна);
– улога водитеља игре (медијатор, активни субјекат, мотиватор, ауторитарни субјекат, динамично вођење игре);
– улога деце током игре (активни субјекти, пасивни субјекти, следе инструкције, самоиницијативни, ангажовани, кооперативани);
– дидактичка средства и материјали коришћени у игри;

3) Развојни аспекти математичко-музичке игре:

– усмереност игре (на истраживачки рад, на усвајање чињеница, на критичко размишљање, на формирање ставова и вредности, на проблемско решавање задатака, на развој когнитивних и социо-емотивних вештина);
– подстицање и развој музичких вештина (опажање и схватање креирања и извођења музичког ритма);
– подстицање и развој математичких вештина (решавање аритметичких математичких задатака применом основних рачунских операција);
– подстицање и развој социјалних и емотивних вештина (сарадња и кооперација, тимски рад, уважавање мишљења друге деце, уважавање различитости, конструктивна комуникација, преузимање одговорности за свој рад, подстицање самосталности, самопоуздања, толеранције, истрајности и упорности у раду, подстицање радозналости и ентузијазма, мотивације, такмичарског духа, емпатије и друго);
– подстицање и развој когнитивних вештина испитаника (пажња, критичко мишљење, примена различитих стратегија у решавању проблема, решавање проблема, аналитичност, повезивање садржаја различитих дисциплина, концентрација).

Као помоћна техничка средствaза реализацију технике посматрања коришћени су камера и фотоапарат у циљу потпунијег (аудио и видео) посматрања и бележењатока игре.

Након посматрања примењена је техника скалирања са циљем утврђивања мишљења и процене испитаника, да ли је и у којој мери, реализована математичко-музичка игра допринела:

– дечјој мотивисаности за рад;
– активности и ангажованости у раду;
– обнављању одређених садржаја из математике и музике;
– решавању проблемских математичких задатака;
– примени различитих начина и стратегија за решавање задатих математичких и музичких проблема;
– повезивању математичких и музичких садржаја;
– сарадњи и кооперацији са другом децом;
– уважавању мишљења и ставова друге деце;

- тимском раду;
- подстицању такмичарског духа;
- међусобној комуникацији са другим учесницима као и са водитељима игре;
- подстицању радозналости и жеље за учествовањем;
- поштовању правила игре;
- преузимању одговорности за сопствени рад;
- упорности и истрајности у раду;
- концентрацији и пажњи током игре;

1.6.Време и ток истраживања

Теоријско истраживање на изради докторске дисертације започето је почетком 2018. године, док је педагошко истраживање реализовано током месеца децембра исте, 2018. године. Ток истраживања обухватао је неколико корака:

- прикупљање, преглед и проучавање доступних извора и литературе, као и постојећих истраживања, која се баве питањем односа математике и музике;
- прикупљање, преглед и проучавање доступних извора и литературе која се бави филозофским погледима и становиштима у погледу развоја математике и музике;
- прикупљање, преглед и проучавање доступних извора и литературе о значају игре на целокупан развој дечје личности и дечјихсоцио-емотивних и когнитивних вештина;
- успостављање међународне сарадње са организацијом *Musicand Math*из Мексика, разговор и анализа математичко-музичких игара које примењују у школама у Мексику и усаглашавање метода примене једне од њихових игара (игра *Musical Monkeys*) у раду са децом у Србији;
- примена математичко-музичке игре *Musical Monkeys* у раду са децом узраста од 8 до 12 година старости у Србији и реализација педагошког дела истраживања;
- приказ и анализа добијених резултата истраживања;
- закључна разматрања.

У оквиру педагошког истраживања спроведено је четрнаест радионица поменуте математичко-музичке игре у седам различитих група испитаника, са по две реализоване радионице у свакој групи испитаника. Истраживање је спроведено у две национално-интернационалне школе у циљу бољег разумевања вођења игре (игра је реализована на енглеском језику), а са идејом да у неком наредном периоду игру примењујемо у свакодневном раду са децом у Србији, прилагођено језику наше деце.

Радионице у ОШ „Креативно перо” организоване су и реализоване у временском периоду:

– 7. 12. 2018. Од 11:45 до 13:00h и 10. 12. 2018. Од 11:45 до 13:00h (група деце петог разреда),
– 7. 12. 2018. Од 11:00 - 11:45 и 10. 12. 2018. Од 11:00 - 11:45 (група деце четвртог разреда),
– 14. 12. 2018. Од 11:00 до 11:45 и 17. 12. 2018. Од 11:00 до 11:45 (група деце трећег разреда).

Радионице у ОШ „Руђер Бошковић” организоване су и реализоване увременском периоду:

– 11. 12. 2018. Од 15:00 до 15:45h и 11. 12. 2018. Од 14:00 до 14:45h (група деце трећег разреда),
– 6. 12. 2018. Од 14:15 до 15:00h и 11. 12. 2018. Од 15:00 до 15:45h (група деце четвртог разреда),
– 13. 12. 2018. Од 14:15 до 15:00h и 18. 12. 2018. Од 14:15 до 15:00h (група деце петог разреда),
– 13. 12. 2018. Од 14:15 до 15:00h и 18. 12. 2018. Од 14:00 до 14:45h (група деце шестог разреда).

2. РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА

Резултати спроведеног истраживања презентовани су квалитативно – подаци прикупљани техником посматрања, уз инструмент протокол посматрања и квантитативно – подаци добијени техником скалирања, уз инструмент скала процене.

Подаци прикупљени техником посматрања дескриптивно су представљени након сваке радионице и употпуњени видео снимцима и фотографијама на основу којих је допуњено излагање након сваке реализације посматрањаигре. Подаци свих радионица анализирани су и представљени применом дескриптивне методе описом резултата до којих се дошло, посматрањем и бележењем *протокола посматрања.*

Подаци добијени техником скалирања и применом инструмента скале процене представљени су квантитативно – графичкии табеларно, фреквенцијски и процентуално. Анализирани су подаци добијени на основу процене одговора испитаника у односу на цео узорак, као и на подузорке у погледу пола и узраста деце.У циљу утврђивања да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника на поједина питања у зависности од реализоване радионице (прва или друга реализација игре), узраста и/или пола испитаника употребљен је статистички поступак израчунавања *Хи-квадрат теста*[142], који утврђује да ли одређена варијабла (у спроведеном истраживању – време реализације игре, узраст или пол испитаника) утиче или не на исказе и ставове испитаника на тврдње дефинисане у скали процене, те на резултате истраживања и потврђивање односно оповргавање одређених, истраживањем, постављених хипотеза. Уколико се покаже да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања од граничних вредности за утврђени степен слободе, на нивоу значајности 0.05 и 0.01 према датој *табели граничних вредности*, за истраживањем формулисане ставове, став се потврђује и тиме доприноси потврђивању полазне, основне

[142]Статистичка анализа примењена је на све тврдње осим оних код којих су резултати били процентуално очигледни у потврђивању или оповргавању хипотеза у све три тестиране варијабле. Статистичка анализа код тврдњи код којих је примењена, примењена је за једну до две варијабле, које су процентуалним и фреквенцијским резултатима подстакли на проверу статистичке зависности, с обзиром да је разлика била уочљива у зависности од одређене варијабле.

хипотезе истраживања. У супротном, дефинисани став се оповргава чиме се основна хипотеза доводи у питање и може бити оповргнута(*Прилог 3*).

За добијање и израчунавање процената и статистичких вредности одговора испитаника,формирање табела и графикона коришћен је програм *MicrosoftOffice Excel 2010*.

2.1.**Анализа резултата истраживања на основу технике посматрања**

Како је већ поменуто у одељку *Методе, технике и инструменти посматрања* протокол посматрања коришћен је у циљу добијања директног увида у ток и реализацију игре, увид у понашање испитаника током игре, методичке аспекте игре, као и развојне карактеристике игре, а са циљем указивања у којој мери игра подстиче развој когнитивних и социо-емотивних вештина деце одређеног узраста.

Поред протокола посматрања, а у циљу прикупљања и анализе података коришћена су техничка средства – камера и фото-апарат помоћу којих су фотографисане и снимљене одређене игровне ситуацијекоје приказују дечју активност, пажњу, дечје емоције током игре, сарадњу, мотивисаност, кооперативност, као и друге социо-емотивне и когнитивне вештине подстицане током игре.

Резултати истраживања добијени применом протокола посматрања приказани су кроз три целине:

- општи подаци о математичко-музичкој игри;
- методички аспекти математичко-музичке игре;
- развојни аспекти математичко-музичке игре.

2.1.1. Општи подаци о математичко-музичкој игри *Musical Monkeys*

Назив игре:*Musical Monkeys*

Реализатори:Eric Roldan Roa, Maria Elena Roldan Roa, Erica RoldanRoa и наставници школе као волонтери у циљу евентуалне помоћи.

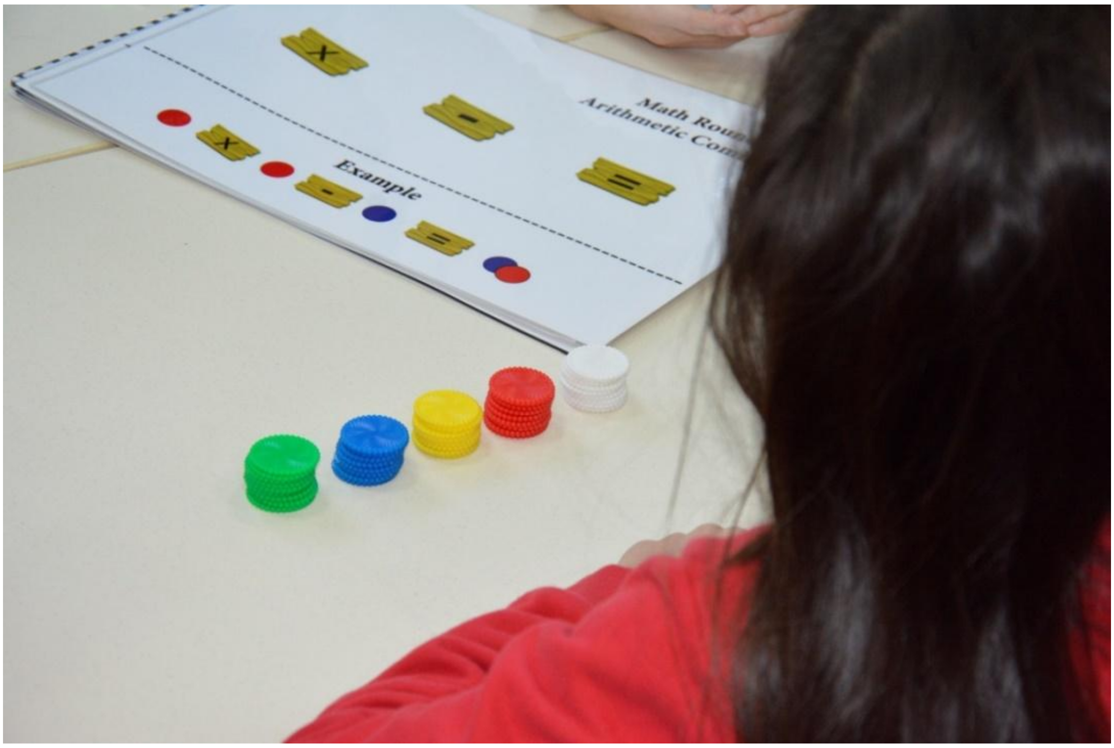
Образовање реализатора: Музичко и математичко образовање

Време трајања игре: 45 минута

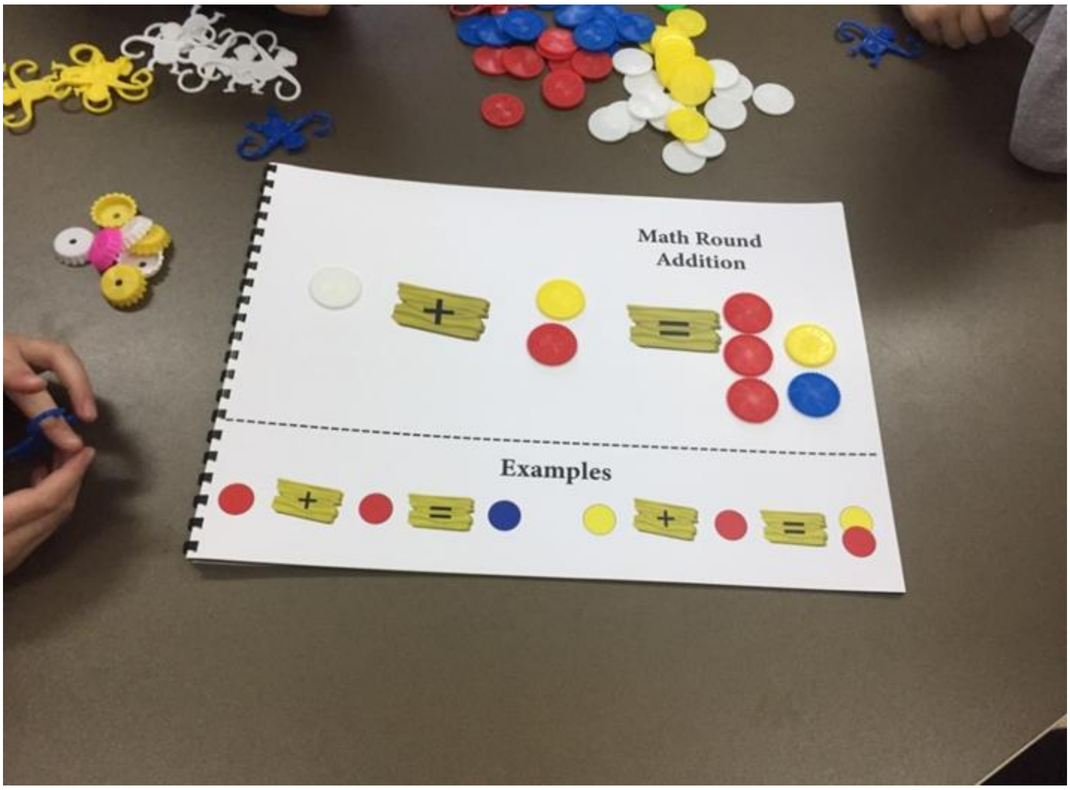
Тема игре:Решавање математичких и музичких задатака и повезивање садржаја математике и музике кроз игровнуинтердисциплинарну активност.

Садржај игре: Игра се састоји из два дела – математичког и музичког. Математички део односи се на решавање основних математичких проблема у циљу разумевања и примене основних рачунских операција (сабирање, одузимање, множење и дељење) и математичких односа веће од, мање од и једнако; разумевања и примене математичког правила редоследа рачунских операција у задатој једнакости, кроз одабир одговарајућих стратегија, а употребом жетона разних боја од којих сваки има унапред дефинисану бројну вредност.

Учесници игре имају задатак да запамте бројну вредност, која се односи на одређену боју жетона и током решавања задатака да повежу боју и број, како би решили задатак (зелени жетон број 1, жути жетон број 2, црвени жетон број 5, плави жетон број 10 и бели жетон број 20). Инструктор сваке групе испитаника задаје својој групи задатак жетонима попуњавајући таблу на којој је представљен математички задатак, а који, избором правих жетона (сваки задатак има могућност за избор различитих комбинација жетона како би се дошло до тачног решења, што води групу ка сарадњи, договору и проналажењу најефикасније и најједноставније стратегије решења) води успешно решеном задатку. Учесници добијају захтев да у временском периоду од три минута реше најмање три математичка задатка како би на крају математичког дела игре освојили *Saviour Monkey* фигуру. Ова фигура им омогућава да, у музичком делу игре, услед нетачно решеног задатка, уложе добијену фигуру за једну пазлу за формирање коцке, што је крајњи циљ игре. Уколико учесници не реше најмање три математичка задатка у оквиру задата три минута, у математичком делу, не освајају фигуру *Saviour Monkey*, што захтева да у музичком делу игре морајутачно решити задатак како би освојили тродимензиону фигуру – пазлу. Потребно је да до краја игре учесници (групе) освоје најмање шест тродимензионих пазли како би конструисали коцку и освојили игру.



Слика 17 Дидактички материјал за математички део игре



Слика 18 Дидактички материјал за математички део игре

Музички део игре усмерен је на развој слушне пажње и музичког памћења, на развој осећаја за ритам и ритмички пулс и ритмичко бројање на основу слушања разних звукова и помоћу геометријске фигуре правоугаоника. У музичком делу игре учесници добијају слику са геометријском фигуром правоугаоника на чијим теменима се налазе банане (једна, две, три и четири – редом по теменима), а на средини сваке странице правоугаоника нацртано је лишће. Деци се на примеру показује како треба пратити знаке дате на слици облика правоугаоника ритмичким бројањем – учесници броје ритмички пулс (*oneand two and three and four*). Свако теме правоугаоника је број, а средина сваке стране правоугаоника броји се као *and*. У музичком делу игре користе се фигуре мајмуна разних боја (зелена, жута, плава, црвена и бела). Свака боја фигуре представља одређени звук који инструктор произведи на свом музичком апарату *The Maschine.*[143] Инструктор задаје задатке различитог нивоа сложености у зависности од узраста и успешности група – узима једну, две или више фигура мајмуна у једној, две или више боја. Пре задавања ритма показује фигуру мајмуна одређене боје и свира звук који та боја фигуре представља и тако за сваку одабрану боју и звук. Деца броје ритмички пулс и ослушкују када се појављује одређени звук, повезују га са бојом фигуре мајмуна и постављају одговарајућу фигуру на место на слици облика правоугаоника, на коме је задати звук одсвиран. Циљ музичког дела игре је да учесници направе тачан распоред фигура по бојама, односно звуцима.

[143]Специјални музички, дигитални уређај, који укључује 2.0 софтвер са библиотеком различитих звукова – 8GB и са 45GB различитих инструмената и музичких ефеката. Уређај омогућава да се на брз, интуитиван и забаван начин креирају и презентују разни музички ритмови и мелодије. https://www.native-instruments.com/en/products/maschine/production-systems/maschine/

Слика 19 Дидактички материјал за музички део игре – уз математичке жетоне

Додатна активност музичког дела је део који носи назив *Noisy Monkey*, а чији задатак је да након формираног ритма од стране инструктора и учесника (слагања фигура одређених боја на одговарајућа места) се једним потезом, промени задати и формиран ритам (померањем једне фигуре на друго место на правоугаонику). Циљ је да у наредном свирању и извођењу деца прате ритам и исправе у складу са задатом променом, померајући одговарајућу фигуру, на ново, право место. Наиме, инструктор учесницима даје одређене картице са илустрацијама различитих мајмуна, а дете које извуче картицу са *Noisy Monkey* илустрацијом долази до инструктора и након постављања првог ритма и слагања одређених фигура мајмуна има задатак да помери једног мајмуна на неко друго место на правоугаонику што групе у додатном слушању треба да уоче и направе нов, тачан распоред. Први задати ритам се понавља и слуша три пута, од најспоријег до најбржег извођења, тако да деца имају могућност провере тачности решења, а ритам постављен у делу *Noisy Monkey*изводи се као четврти и не понавља се, те учесници немају могућност додатне провере.

Група која успешно реши музички део игре, како је поменуто кроз опис математичког дела, добија тродимензионалну пузлу за склапање завршне коцке.

Уколико су учесници погрешно решили музички задатак имају могућност, у циљу освајања пазле, да уложе фигуру *Saviour Monkey* из математичког дела игре и тако сакупе пазле потребне за освајање игре (конструисање коцке).

Игра се игра у неколико кругова (смењују се математички и музички део) тако да деца сакупе најмање шест делова пазли како би направила коцку. Ако сакупе и више делова стварају онолико коцки колико делова пазли имају. У том случају победник је група која је склопила највећи број коцки.

У оба дела игре, и математичком и музичком, пре него што инструктор групи подели *Saviour Monkey* или тродимензиону пазлу, односно провери тачност решења, он учеснике обавезно пита да ли верују у своје решење (*Do you trust?)* чиме се, уочавамо, умногоме подстиче дечје самопоуздање и сигурност за даљи рад и учествовање у игри.

Ток игре:На самом почетку игре инструктор учеснике распоређује у одговарајуће мање групе. Учесници су најпре поређани у колони један иза другог и инструктор их појединачно уводи у припремљен простор за игру и усмерава их којој групи припадају. По распореду група, инструктор представља свој тим и остале инструкторе и укратко описује садржај игре. Пре почетка игре децу пита за шта служи математика? (Неки од добијених одговора били су: „Да знаш да радиш ствари”; „да знаш да сабираш и одузимаш”; „да научиш доста ствари о бројевима”; „за много ствари”; „математика нам треба за све у животу”; „за размишљање”; „за посао” и слично). Инструктор потврђује дечје одговоре и додаје да њему математика служи за стварање разних ритмова и да користећи геометријске фигуре он ствара ритам. Након тога представља деци један од ритмова које изводи на свом музичком апарату *The Machine*, који ће бити коришћен и током реализације игре. Следи читање и објашњавање правила игре по групама. Инструктор позива по једно дете из сваке групе да прочита по једно правило игре. Када се правило прочита, следи дискусија и додатно објашњење правила да би деца у потпуности схватила и разумела предстојећу игру.

Слика 20 Простор за рад једне од група, са постављеним дидактичким материјалима и музичким уређајем „The Machine"

Демонстративном методом деци се показују табле са математичким задацима и укратко објашњава како се задаци решавају. Након тога инструктор прелази на демонстрирање музичког дела игре истичући да ће ритам представити користећи геометријску фигуру правоугаоник. Показује слику са правоугаоником који се користи у музичком делу и објашњава како се броји и на који начин ће се играти музички део игре. Инструктор даје пример једног звука који представља фигура плавог мајмуна. Деца се усмеравају да заједно са инструктором броје ритмички пулс пратећи означене тачке на правоугаонику и подстиче их да добро ослушну где ће се, на ком месту на правоугаонику одсвирати (појавити) задати звук, тако да на то место поставефигуру плавог мајмуна. До сада наведен опис тока игре односи се нањену почетну реализацију у свим тестираним групама.

Прве радионице обухватале су једноставније захтеве, како у области математике, тако и у области музике, док су потоње реализације у тестираним групама биле сложеније по захтевима. Уколико је одређена група показала изузетан успех у решавању математичких и/или музичких задатака, инструктор би задавао сложеније захтеве у математичком делу и комбиновао више различитих звукова у музичком делу игре. Тиме се истиче константна динамичност игре и усклађивање захтева са постигнућима и напретком учесника, чиме се доприноси сталном подстицању учесника ка решавању све тежих и компликованијих захтева, али и подстицања пажње, концентрације и активности у игри.

Циљ игре: Успешно решити што више математичких и музичких задатака у циљу освајања делова пазли за конструисање коцке и освајање игре.

Задаци игре: Повезивање математичких и музичких садржаја, савладавање и обнављање математичких и музичких садржаја, развојслушне пажње, музичко памћење, развој осећаја за конструктивно решавање математичких проблема, подстицање различитих стратегија приликом решавања задатих проблема, развој критичког мишљења, пажње и концентрације, развој вештина тимског рада, слушања и уважавања мишљења других, развој самопоуздања, проблемског решавања проблема, комуникације међу децом, подстицање ентузијазма, радозналости, мотивисаности за рад, активно учешће у раду и друго.

2.1.2. Методички аспекти математичко-музичке игре

Интердисциплинарност и мултидисциплинарност игре: Математичко-музичка игра *Musical Monkeys*повезује садржаје из математике и музике, а сама реализација игре у себи прожима елементепедагогије, психологије и методике рада, тако да се може потврдити да игра оправдава претпостављене карактеристике интердисциплинарности и мултидисциплинарности.

Методе рада примењене у реализацији игре:Посматрање примененаставних метода током реализације дате математичко-музичке игре довело је до закључка да је игра реализована применом општих наставних метода – методе усменог излагања, илустративно-демонстративне методе, методе дијалога, али је изостала метода самосталног рада.Посматрајући специјализоване методе наставе музике примењена је метода рада по слуху. Током игре нису употребљене метода писане речи, метода сценске комуникације, метода учења из нотног текста, као и метода рада са инструментима. На основу изложеног може се закључити да су одабране методе у складу са карактеристикама игре и тиме доприносе њеној функционалности и адекватној методичкој реализацији.

Облици рада примењени у реализацији игре: Током истраживања игра је реализована применом фронталног и групног облика рада. На радионицама нису примењивани индивидуални и рад у пару, иако је игра, у складу са својим карактеристикама погодна и за рад у пару, али и самостални рад ученика. Водитељи игре су за ово истраживање одабрали групни облик наставног рада. Фронтални облик, примењен је у уводу у игре, објашњавању правила, садржаја и концепције игре.

Вид игре: Према својој форми игра обухвата елементе сензомоторне игре (употреба разних жетона, фигура и манипулативни рад са њима); конструктивне игре (од деце се очекује да решавањем проблема направе одређен производ као финални циљ игре); симболичке игре (боја жетона симболизује одређени број, а боја фигуре мајмуна одређени звук који деца памте); функционалне (игра доприноси повезивању садржаја из различитих области и примену стечених знања и усвојених вештина у решавању проблема); спонтане (веома изражен спонтани рад деце), такмичарске (тимови се такмиче да освоје што више делова за конструисање коцке и тиме остваре победу у игри). Иако је истраживање спроведено техником скалирања указало да игра садржи елементе стваралаштва, посматрање је показало да је стваралачка форма присутна у веома малој димензији јер су ученици вођени кроз стварање различитих ритмова од стране инструктора, али нису имали задатке да стварају своје ритмове користећи дату слику правоугаоника и фигуре мајмуна, који би се касније извели на специјалном музичком апарату – инструменту и представили осталим учесницима.

Компатибилност игре са ученицима:Реализована математичко-музичкаигра у складу је са предзнањима и интересовањима ученика и у потпуности прилагођена одабраном узрасту испитаника. Посебност игре је што се може применити са децом узраста од осам до дванаест година (према спроведеном истраживању) с обзиром да се и математички и музички захтеви прилагођавају и усложњавају у складу са знањима и вештинама одређеног узраста деце. Млађој деци задају се једноставнији захтеви и постепено се усложњавају како са узрастом тако и са напретком сваке групе испитаника без обзира на узраст. Игра у потпуности одговара социјалном контексту у којем је реализована. Истраживање је показало да је игра у већој мери компатибилнија и применљивија са ученицима узраста девет, десет и једанаест година у односу на најстарији узраст испитаника (дванаест година) и најмлађи узраст испитаника (осам година).

Педагошка клима током игре: Током реализације игре у шест од седам тестираних група испитаника педагошка клима је била изразито позитивна, доминирала је подстицајна и радна атмосвера и изражена интеракција међу децом. Посматрањем се уочило да је најстарија група испитаника била пасивнија у раду, у односу на остале узрасте, и са мање ентузијазма прихватила игру.

Улога реализатора током игре: Током игре водитељи су имали изражену улогу медијатора, активногсубјекта, мотиватора и динамично су водили игру. Ауторитарни став није био присутан током реализације игре.

Улога деце током игре: Деца су током игре преузимала улогеактивног субјеката (неко – већина), пасивног субјеката (неко – једно до троје деце по радионици), ученика који следи инструкције (неко – већина), ученика који је самоиницијативан (неко – већина), ангажован (неко – већина), кооперативан (неко – већина).

Дидактичка средства и материјали коришћени током реализације игре:блок са илустрацијама које воде децу кроз игру, на којем су на првој страни написана правила и објашњење игре, а потом следе стране за постављање математичких задатака и једна страна са дизајнираним правоугаоником за решавање музичко-ритмичких диктата. Осим блока коришћени су жетони разних боја, свака боја је имала своју бројну вредност (*green is 1, yellow is 2, red is 5, blue is 10 and white is 20*), фигуре мајмуна у бојама жетона, затим чепови за чување решења (*Saviour Monkey*) и тродимензиони делови – пазле за уклапање и конструкцију завршних коцки. Инструктор је, као што је раније поменуто, користио специјалнни музички апарат који ствара различите звуке – *The Machine*.

На основу спроведеног посматрања и стеченог увида у методичке аспекте реализоване игре може се закључити да је игра у погледу метода, облика рада, дидактичких средстава, интердисциплинарности, по својој форми и улогама које су имали и водитељи и учесници игре, у потпуности одговорила на методичке захтеве једне функционалне и подстицајне игре за децу узраста од 8 до 12 година старости (тестирано овим истраживањем) што не оспорава чињеницу да се игра може применити и са децом млађег, односно старијег узраста од тестираног. На основу свега изложеног може се закључити да је постављен циљ игре – *успешно решити што више математичких и музичких задатака у циљу освајања делова пазли за конструисање коцке и освајање игре* – успешно остварен.

2.1.3. Развојни аспекти математичко-музичке игре

Резултати добијени техником посматрања, који указују на развојне аспекате реализоване математичко-музичке игре представљени су табеларно (*Табела 8*), а потом и изложени методом дескрипције.

Табела 8Развојни аспекти математичко-музичке игре „Musical Monkeys"

Усмереност игре	Нимало	Делимично	Потпуно
На истраживачки рад	✓		
На усвајање садржаја из математике и музике		✓	
На подстицање критичког размишљања			✓
На проблемско решавање задатака			✓
На формирање ставова и вредности			✓
На развој вештина и способности			✓
Подстицање и развој музичких вештина	Нимало	Делимично	Потпуно
Развој слушне пажње			✓
Развој осећаја за ритам			✓
Развој осећаја за мелодију	✓		
Музичко памћење			✓
Репродуковање ритмичких и мелодијских мотива		✓	
Способност за опажање различитих ритмичких целина			✓
Подстицање и развој математичких вештина	Нимало	Делимично	Потпуно
Решавање задатака из аритметике (основне рачунске операције, редослед рачунских операција, математички односи веће, мање и једнако)			✓
Решавање задатака из геометрије (геометријске		✓	

фигуре и тела)			
Подстицање и развој социјалних и емотивних вештина	Нимало	Делимично	Потпуно
Сарадња и кооперација			✓
Такмичарски дух			✓
Уважавање и поштовање мишљења друге деце			✓
Уважавање различитости			✓
Конструктивна комуникација			✓
Преузимање одговорности		✓	
Самопоуздање			✓
Подстицање упорности и истрајности у раду			✓
Подстицање радозналости и ентузијазма			✓
Подстицање мотивације за рад			✓
Подстицање самосталности		✓	
Подстицање емпатије			✓
Подстицање толеранције			✓
Подстицање и развој когнититивних вештина	Нимало	Делимично	Потпуно
Подстицање критичког мишљења			✓
Проблемско решавање задатака			✓
Повезивање садржаја и знања из различитих дисциплина			✓
Подстицање аналитичности у раду			✓
Подстицање пажње и концентрације			✓
Подстицање стваралаштва	✓		

На основу спроведеноги анализираног посматрања може се закључити да је игра у потпуности усмерена на подстицање критичког размишљања, на проблемско решавање задатака, на формирање ставова и вредности и на развој вештина и способности деце. Делимична усмереност игре на савладавање садржаја из математике и музике огледа се у томе да су кроз игру деца у већој мери примењивала већ усвојене садржаје из аритметике и геометрије и обнављала их кроз критичко мишљење и решавање проблемских захтева, док су у односу на музичке садржаје, методом слуха, обнављала ритам и увежбавала слушну пажњу и музичко памћење.

У погледу развоја музичких вештина истраживање је показао да игра у потпуности доприноси развоју слушне пажње и музичког памћења, развоју осећаја за ритам и способностима за опажање различитих ритмичких целина. Делимично је примењено репродуковање ритмичких мотива, а мелодијски садржаји, на основу реализованог посматрања, нису обухваћени игром.

Игра је усмерена на обнављање аритметичких математичких садржаја и примене основних рачунских операција (сабирање, одузимање, множење и дељење), обнављање и примену правила редоследа рачунских операција, док је делимично усмерена на обнављање садржаја који се односи на област геометрије.

Када се посматра утицај игре на развој социјалних и емотивних вештина испитаника, посматрање је потврдило да игра у потпуности подстиче сарадњу и кооперацију, такмичарски дух, уважавање и поштовање мишљења друге деце, уважавање различитости, конструктивну комуникацију, самопоуздање ученика, подстицање упорности и истрајности у раду, подстицање радозналости и ентузијазма, подстицање мотивације за рад, емпатије и толеранције. Делимично, игра доприноси преузимању одговорности и подстицању самосталности ученика.

Когнитивне вештине ученика подстакнуте су кроз подстицање критичког мишљења, проблемског решавања задатака, пажње и концентрације, повезивање садржаја из различитих дисциплина (математике и музике), аналитичности и кроз примену различитих стратегија у решавању постављених проблема.

2.1.4. Додатна запажања спроведеног посматрања – реализација игре по групама и радионицама

– *ОШ „Креативно перо”, пети разред*

Уобе радионице игра је вођена динамично са доста интеракције, сарадње и колаборације међу децом. Деца су била већином активни субјекти и веома радознала и мотивисана за игру.Услед позитивниог решења задатка, деца би показивала радост и срећу. Ова група ученика показала је изузетан успех у музичком делу игре, тако да је у сваком новом кругу добијала сложеније и захтевније музичкезадатке што их је подстицало на континуирану пажњу иконцентрацију али и допринело додатном активирању слушне пажње и музичког памћења. У првој радионици, математички део је реализован постављањем задатака са захтевом примене једне математичке операције, а музички део са једним до два различита звука, при чему су учесници добили информацију колико различитих звукова ће бити у игри и по колико пута ће се сваки задати звук појавити у креирању ритма.

Током друге радионице групи као целини се постављају захтевнији математички задаци који условљавају разумевање и примену математичког паравила о предности рачунских операција; комбинују се сабирање и одузимање, сабирање и множење, множење и дељење, дељење и одузимање, множење и одузимање и слично. Време решавања математичких задатака је ограничено на три минута, тако да деца поред размишљања како да реше проблем морају бити што ефикаснија како би за задато време могла да реше што више математичких задатака, а најмање три, да би била успешна у овом делу игре.

Слика 21 Математички део игре – сарадња и договор, критичко мишљење

Музички део друге радионице обухватао је два, а након тога и три различита звука. Задатак је отежан и тиме што се деци не говори колико пута ће се сваки од задатих звукова појавити у ритму, тако да деца треба додатно да пазе, да се концентришу и добро слушају. Уколико не успеју из првог пута да реше музички проблем, испитаници су показивали љутњу, незадовољство, али су се договарали да слушају у другом кругу, да прате и заједно исправе постављени ритам, ако су уочили грешку или нису сигурни у решење задатка.

Деца подељена у мање групе заједно су решавала задатке, договарала се, сарађивала, комуницирала, разматрала решења, помагала једна другој да уклопе боју и број у математичком делу игре и тако што успешнијереше постављен задатак, као и да поставе одговарајућу фигуру на правоугаоник на право место, место на којем чују одређени звук у музичком делу игре *Musical Monkeys*.

С обзиром на успех у решавању музичких задатака ова група испитаника на другој радионици добија и додатни захтев игре, део *Noisy Monkey*у музичком делу игре, који је за групу као целину био нови и мотивишући изазов за даљи рад и реализацију игре.

Слика 22 Музички део игре – сарадња, договор, слушна пажња

Деца су била мотивисана, узбуђена, радовала су се успешно решеном проблему, добијању делова пазли, сарађивала су, договарала се како да одаберу праве жетоне, заједно бројала ритмички пулс. Захтеви су били сложенији у складу са узрастом и динамичношћу игре, као и мотивацијом и пажњом коју су показала, током реализације игре. Игра је била спонтана, пратила је темпо рада групе у целини и прилагођавана је способностима испитаника у појединачним групама.[144]

– *ОШ „Креативно перо”, четврти разред*

У првом математичком делу игре, испитаници ове групе су сарађивали, договаралали се, заједно рачунали, међусобно се помагали у израчунавању вредности жетона, сабирали, одузимали, множили и делили заједно. Видно су се радовали успеху, а уколико дође до неуспешног решења задатка на лицима испитаника би се испољило незадовољство и туга. Група као целина била је веома активна и мотивисана. Посматрањем је забележено да троје деце од свих учесника ове групе није било активно и мотивисано за рад, док су остали у потпуности предано и активно учествовали у игри.

Слика 23 Кооперација, сарадња, договор, критичко мишљење, решавање проблема, тимски рад

У музичком делу игре деца су пажљиво слушала и концентрисала се на звуке које чују, групе су заједнички правиле стратегију како ће да прате

[144] Једна девојчица овог одељења већином је само посматрала рад своје групе, али је делимично и повремено учествовала у музичком делу игре, док се повлачила током реализације математичког дела.

постављање фигура, односно задатих звукова, ко ће да броји, ко да поставља коју боју фигуре, односно који звук и слично. Међусобно су делили улоге унутар групе у циљу успешнијег решавања задатака. Музички део игре реализован је најпре задавањем једног звука чији број понављања су деца унапред знала. Током друге радионице музички задатак за учеснике ове групе био је сложенији – задају се два звука где учесници унапред добијају информацију колико пута ће се који звук појавити. Након тога задатак се и даље усложњава, додаје се и трећи звук, а да при том деца унапред знају број понављања првог и другог, али не и трећег звука.

Слика 24 Сарадња и кооперација, развој слушне пажње и музичког памћења

У другом кругу музичког дела ова група испитаника добила је три различита звука са информацијом колико се пута понавља први звук (фигура белог мајмуна), али не и колико ће се пута појавити зелени и плави звук (други и трећи звук). Деца су потпуно концентрисана, свако у групи узима одређену боју фигуре, један учесник броји ритмички пулс, прати прстом делове фигуре правоугаоника, док остали држе у рукама фигуре одређених боја и одлучују заједнички где да их поставе током слушања.

– *ОШ „Креативно перо”, трећи разред*

Група као целина била је веома мотивисана и ангажована током игре. Од једноставнијих ка сложенијим захтевима у оба дела игреиспитаници су показивали све већи ентузијазам и жељу за успехом и тачно решеним задацима. У математичком делу игре групе су решавале задатке у складу са узрастом уз примену основних рачунских операција и односа „веће од”, „мање од” и „једнако”. Деца сарађујући повезују боју жетона са одговарајућим бројем, помажу једни другима – један ученик понавља која боја је који број, док остали скупљају жетоне да дођу до тачног решења. Током игре била је изражена тежња деце да се реше три задатка и добије *Saviour Monkey*. Посматрање је показало да и када тачно реше три задатка у низу (што је довољно за освајање *Savior Monkey*фигуре) деца се радују што су успела да освоје *Saviour Monkey*, али не одустају, већ се труде да реше још задатака и добију две или више*Saviour Monkey* фигуре и тако што пре освоје све потребне делове за склапање коцке. Кроз обе реализације игре у овој групи испитаника био је веома изражен тимски рад и сараднја међу испитаницима.

Слика 25 Сагледавање проблема, критичко мишљење, рачунање, проналажење стратегије решења

Музички део игре је за ову групу био веома изазован. Учесници су успели да од једног звука са информацијом о броју појављивања истог (фигуре одређене боје) преко два и три звука где немају информацију колико ће се пута одређени звук појављивати, дођу до примене и креирања ритма са четири различита звука у последњем музичком делу друге радионице.

Деца током игре сарађују, размењују мишљења, проверавају у понављању ритма своја решења, концентрисани су и пажљиво слушају. Уколико нису сигурни у постављени ритам преговарају шта треба да се уради да би успели да дођу до правог распореда звукова и тачног решења. С обзиром на активност, мотивисаност и успех који је група као целина показала, играли су и део *Noisy Monkey*.

Слика 26 Сарадња, мотививација, ангажовање, упорност, пажња

– *ОШ „Руђер Бошковић”, трећи разред*

Игра је вођена динамичноса доста интеракције и сарадње међу ученицима. Ученици су били већином активни субјекти, ангажовани, радознали и мотивисани за игру. Групе и услед грешке нису одустајале од игре већ суигру настављале са циљем да у наредном кругу исправе грешку и освоје игру – делове пазли потребне за склапање завршне коцке.[145]

Деца су била узбуђена, сарађивала су и договарала се током рада како да одаберу праве жетоне, како да дођу до тачног решења, заједнички су тражила стратегије за решавање задатака у музичком делу, заједно бројала ритмички пулс и договарала се где се која фигура мајмуна поставља на правоугаоник у задатим ритмовима.[146]

Слика 27 Критичко мишљење, решавање проблема, сарадња, ангажовање

Током радионице владала је позитивна клима у учионици. Математички и музички задаци били су у складу са узрастом ученика и показаним успехом током игре. Музички део игре реализован је са највише два различита звука у неколико

[145]Осећај среће и радости био је видно изражен на лицима деце када реше неки од задатих захтева у математичком или музичком делу игре, а осећај разочарања, туге и незадовољства, уколико су погрешили код неког од постављених задатка.
[146]Двоје деце је било делимично активно док су остали са ентузијазмом играли игру и показивали интересовање за новим задацима и захтевима у оба дела реализоване математичко-музичке игре.

понављања сваког од њих, али је изостао део *Noisy Monkey*, с обзиром да су деца у тој мери показала склоност и способност праћења музичког дела игре.

– *ОШ „Руђер Бошковић”, четврти разред*

Током обе реализације игре ученици четвртог разреда ОШ „Руђер Бошковић” били су активни, ангажовани, заинтересовани и мотивисани за игру. Испољили су радозналост и ентузијазам, као и радост приликом успешно решених задатака, али и осећај туге приликом неуспешно решених задатака. Сарадња и колаборација била је присутна током обе радионице у свим групама деце. Деца су се договарала како да реше проблем, уважавала су међусобна мишљења и са нестрпљењем чекала сваки нови круг игре.

Слика 28 Мотивација, ангажовање, сконцентрисаност на рад

Прва радионица реализована је кроз једноставније математичке и музичке захтеве, док је друга пред децу поставила сложеније и математичке и музичке захтеве. У музичком делу на крају друге радионице деца су добила задатак да поставе на правоугаоник фигуре мајмуна у три различите боје (три различита звука), при чему им водитељ игре указује само за један звук (боју мајмуна) колико пута ће се јавити током ритма док за остала два звука инструктор деци не говори број појављивања. На тај начин слушна пажња и музичко памћење деце је додатно ангажовано, као и пажња и концентрација уопштено.[147]

Слика 29 Сарадња, ентузијазам, активност у раду, пажња

– *ОШ „Руђер Бошковић”, пети разред*

Реализација игре у овој групи испитаника вођена је динамично са доста интеракције, сарадње и колаборације међу ученицима. Као група деца су била веома успешна у оба дела игре и математичком и музичком, тако да су се већ на првој радионици задавали тежи математички и музички захтеви – музички

[147]Један ученик посматране групе испитаника није био активан и мотивисан за игру, седео је и посматрао остале ученике и игру, док су остали у већој или мањој мери били активни, мотивисани и ангажовани.

захтави са три различита звука. За један звук водитељ говори колико пута ће се јавити у ритму, док за друга два не (захтев је отежан с обзиром на степен напредовања и рада целе групе). На првој радионици је с обзиром на мотивисаност и успех ученика, укључен и реализован и*Noisy Monkey* део, који је додатно мотивисао децу за учествовање.

Слика 30 Тимски рад, концентрација, анализа решења

Све појединачне групе ове групе испитаника биле су одличне, сарађивале су, договарале се, заједнички налазиле адекватне стратегије како да прате музички део игре, тако да су сви били успешни у оба дела игре, не само у једноставнијим, већ и у задацима веће сложености. Код ове групе испитаника у целини, истиче се брзина у раду, међусобно подстицање да брже размишљају, јер им је време за математички део задатака ограничено. Заједно рачунају и долазе до најуспешније стратегије за решење задатог математичког проблема. И током друге радионице група је била активна, пажљива, концентрисана, мотивисана и изузетно успешна у игри и решавању постављених задатака. Учесници су неретко мислили наглас, гласно се договарали и налазили заједничка решења за постављене математичко-музичке задатке. И у другој, као и у првој реализацији игре, испитаници су играли део *Noisy Monkey*, али и знатно сложенији музички захтев – четири различита звука (четири различите боје фигуре мајмуна) при чему им водитељ за два звука говори број понављања у ритму, док за друга два не и на тај начин код деце несвесно подстиче слушну пажњу и концентрацију.

Слика 31 Тимски рад, пажња, мотивисаност, упорност

– *ОШ „Руђер Бошковић”, шести разред*

Последња група испитаника на самом почетку прве реализације игре показала је незадовољство распоредом група. Током игре постепено нестаје почетно незадовољство и усмереност мисли на питање – ко је са ким у групи? Деца се постепено укључују у игру и фокусирају на рад и решавање задатих математичких и музичких задатака.

С обзиром на узраст ова група је добила сложеније математичке задатке, а музички захтеви су пратили темпо рада групе и постављани су у складу са напретком и претходно показаним успехом деце у реализацији музичког дела игре. Деца сарађују, заједнички налазе начине како да дођу до тачног решења у математичким зацима, броје жетоне и повезују боју жетона са бројем, рачунају и проверавају тачност решења.

Испитаници ове групе у целини били су делимично концентрисани и активни и слабо су се сналазили при решавању постављених задатака који су у потпуности у складу са њиховим узрастом, предзнањима и садржајима које су до сада реализовали и обрадили из математике и музике. Иако делом пасивни, уколико успешно реше задатак у музичком или математичком делу, испитаници су видно испољавали задовољство и радост. Двоје деце је било пасивније од осталих, већином су само посматрали игру и делимично учествовали у музичком делу.

Како су се смењивали математички и музички део, групе су биле све активније, али спорост у размишљању и решавање мањег броја математичких задатака, као и веома тешко сналажење у музичком делу игре није изостало ни у првој као ни у другој радионици у погледу ове групе испитаника.

У музичком делуученици праве стратегију како ће да испрате ритам, ко ће да држи коју боју фигуре мајмуна, ко ће да броји, ко да поставља који звук – боју фигуре мајмуна. Водитељ им након једног и два звука, задаје виши захтев, три звука и не говори колико пута ће се који звук у ритму јавити. Испитаници су активни, радују се ако победе, али од четири групе, у оба музичка дела, само две су биле успешне у реализацији постављених задатака. Током игре подстицали су једни друге у групама на рад и размишљање, на пример, уколико је неко био пасиванији и није учествовао у раду, други би га подстицали да заједно са њима решава задатке и допринесе раду и успеху групе.

Слика 32 Одушевљење, радост због направљњне коцке и освојене игре[148]

Група која је више сарађивала и озбиљније схватила игру била је у обе радионице успешнија. Мотивација и узбуђење нису били толико изражени током игре, пажња и концентрација је варирала, тако да су резултати и успех у оба дела били знатно слабији у односу на друге узрасте и тестиране групе.

2.1.5. Закључна разматрања на основу спроведене технике посматрања

На основу спроведеног посматрања можесе закључити да је игра, у већој или мањој мери, подстакла децу на активност, ангажовање, сарадњу, договор, колаборацију, на критичко и логичко мишљење и проблемско решавање задатака, на испољавање емоција – радост, тугу, разочарање, одушевљење, на ентузијазам и мотивисаност за игру, на уважавање мишљења друге деце, на развој пажње и концентрације, на повезивање различитих садржаја, на развој слушне пажње и

[148]За све употребљене фотографије у докторској дисертацији добијена је писмена дозвола родитеља деце која су приказана на фотографијама.

музичког памћења, спонтаност и ефикасност у раду што у потпуности указује на функционалност примене реализоване математичко-музичке игре*Musical Monkeys* у раду са децом основно-школског узраста од осам до дванаест година старости. Динамичност и интерактивност игре подстакла је децу на континуирану мотивисаност, пажњу и активност током игре.

Посматрано са аспекта веће функционалности и стваралачког вида игре може се предложити да на крају музичког дела или на крају игре у целини деца добију задатак да самостално, помоћу фигура, боја и звукова који одговарају одређеној боји, креирају свој замишљени ритмички образац на задатом правоугаонику и да кроз ритмичко бројање и свирање на специјалном инструменту *The Machine*одсвирају свој ритам другој деци, чиме би се допринело већем укључивању подстицања стваралаштва у концепцији игре.

Игра спроведена у овом истраживању само је почетни корак и подстрек за даља истраживања и осмишљавање нових математичко-музичких игара, које ће кроз утицај математике и музике допринети развоју дечјих когнитивних и социо-емотивних вештина, као и мотивисаности и ангажованости у свакодневном раду.

2.2.**Анализа резултата добијених техником скалирања**

Техником скалирања тежило се добијању одговора на питања која се односе на дечји когнитивни, емотивни и социјални развој, односно развој когнитивних и социо-емотивних вештина деце узраста од осам до дванаест година старости.

Деца су након сваке реализације игре (прве и другерадионице) попуњавала унапред формирану и дефинисану скалу процене са двадесет и четири става и три нивоа процене – „нимало”, „делимично” и „потпуно”. Изражавајући своје слагање за сваки став, одабиром једног од датих нивоа процене, деца су указивала у којој мери је и на који начин реализована игра утицала на њих. Као варијабле истраживања посматране су реализоване радионице игре, пол испитаника и узраст испитаника.

Анализа резултата скалирања представљена је квантитативно, формирањем графикона и табела, као и израчунавањем фреквенција и процената добијених одговора, за свако појединачно питање/тврдњуназначену у примењеном истраживачком инструменту скали процене. За утврђивање статистичке значајности добијених резултата на поједине тврдње примењен је статистички поступак израчунавања вредности *Хи-квадрат теста*.

2.2.1. Когнитивни и социо-емотивни развој деце

У циљу потврђивања или оповргавања постављене хипотезе – *Претпоставља се да ће интердисциплинарна математичко-музичка игра допринети дечјем когнитивном, социјалном и емотивном развоју (развоју вештина критичког мишљења, проблемског решавања проблема, сарадње, тимског рада, такмичарског духа, конструктивне комуникације, емпатије, толеранције,истрајности и упорности у раду, самопоуздању)*анализирани су одговори испитаника на следеће ставове:

1) Развој когнитивних вештина

– Током игре користио/-ла сам различите стратегије за решавање проблема;
– игра ме је подстакла на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике;
– током игре решавао/-ла сам проблемске математичке задатке;
– током игре математичке задатке решавао/-ла сам на различите начине;
– игра ме је подстакла на стваралаштво.

2) Развој социо-емотивних вештина

– Током игре сарађивао/-ла сам са другом децом у циљу решавања проблема;
– током игре слушао/-ла сам и уважавао/-ла сам мишљења друге деце;
– током игре подстакнут/-та сам на тимски рад;
– игра је подстакла такмичарски дух у мени;
– током игре комуницирао/-ла сам са другом децом у циљу договора;
– током игре комуницирао/-ла сам са водитељима игре;
– игра је у мени изазвала радозналост и жељу за учествовањем;
– поштовао/-ла сам правила игре;
– са задовољством сам учествовао/-ла у игри;
– игра ме је подстакла да преузмем одговорност за свој рад.

Да би се потврдила или оповргла постављена хипотеза пошло се од анализе добијених резултата, који су приказани табеларно и графички кроз проценте и фреквенције добијених одговора. У циљу даље анализе и доприноса постављеној хипотези за поједине тврдње приступило се и утврђивању да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника у зависности од времена реализоване радионице, пола и/или узраста испитаника, а у циљу приказа да ли време реализације игре, пол, односно узраст испитаника, утичу на добијене одговоре и резултате истраживања или су добијени резултати илустрација саме игре, њених карактеристика, концепције и садржине.

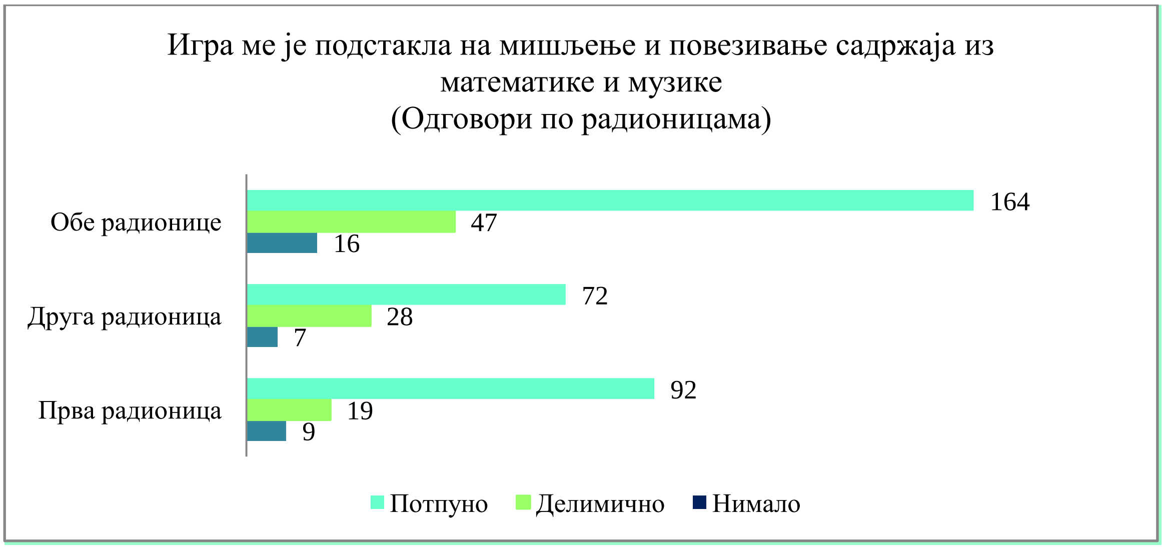
У циљу утврђивања у којој мери реализована математичко-музичка игра *Musical Monkeys*доприноси ***когнитивном развоју деце,*** полази се од анализе резултата добијених одговора испитаника на став који има за циљ да покаже*у којој мери реализована игра подстиче децу на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике.*

Према обрађеним подацима уочено је да је више од 50,00% одговора потврдило ниво „потпуно” (72,25%). Ниво „делимично” потврђује 20,70% одговора док 7,05% добијених одговора усмерава да игра „нимало” не подстиче на мишљење и повезивање математичких и музичких садржаја. Посматрајући резултате добијене након појединачних реализација игре и резултата свих прикупљених одговора истраживања (након обе радионице) уочава се да су добијени резултати међусобно усклађени. Висок проценат одговора који говори у прилог тврдњи да игра подстиче на мишљење и повезивање математичких и музичких садржаја води ка потврђивању дефинисаног става, а тиме и потврђивању опште постављене хипотезе истраживања (*Табела 9*).

Графички представљени подаци приказани у *Табели 9*илуструју фреквенције одговора испитаника након прве и након друге радионице као и фреквенције одговора у целини. Од укупног броја одговорадобијених истраживањем (f = *227*) чак сто шездесет четири одговора (f = *164*) указује на ниво „потпуно“ у скали процене, посматрано на тестирану прву тврдњу и тиме даје позитиван допринос закључку да је математичко-музичкаигра*Musical Monkeys* подстицала децу на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике (*Графикон 4*).

Табела 9Игра ме је подстакла на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике – одговори по радионицама

Игра ме је подстакла на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	9	19	92	120
	%	7,50	15,83	76,67	100
Друга радионица	*f*	7	28	72	107
	%	6,54	26,17	67,29	100
Обе радионице	*f*	16	47	164	227
	%	7,05	20,70	72,25	100



Графикон 4 Игра ме је подстакла на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике – одговори по радионицама

Како би се дошло до резултата да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника у односу на време реализације игре (прву и другу радионицу) односно утврдило да ли време реализације игре утиче на одговоре испитаника или су добијени одговори у потпуности условљени самом игром, израчуната је вредност χ2 теста (*Табела 10)*.

Табела 10Резултати χ2 теста – подстицање мишљења и повезивање математичко-музичких садржаја у игри – варијабла редослед радионице

fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe - ft)^2$	$\frac{(fe - ft)^2}{ft}$
9	8.45	0.54	0,29	0,03
19	24,84	-5,84	34,17	1,37
92	86,69	5,30	28,13	0,32
7	7,54	-0,54	0,29	0,04
28	22,15	5,84	34,17	1,54
72	77,30	-5,30	28,13	0,36
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			χ2 = 4,02

- Теоријске фреквенције израчунате су по формули: $ft = \frac{\sum fr \cdot \sum fk}{N}$
- Степен слободе израчунат је по формули: df = (r – 1) · (k – 1) = (2 – 1) · (3 – 1) = 1 · 2 = 2

На основу поређења добијене вредности χ2 = 4,02 са граничним χ2 вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 2, може се закључити да не постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника у зависности од времена реализације радионице с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања од утврђених граничних вредности. Добијени резултат подвлачи позитиван став да реализована математичко-музичка игра подстиче на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике.

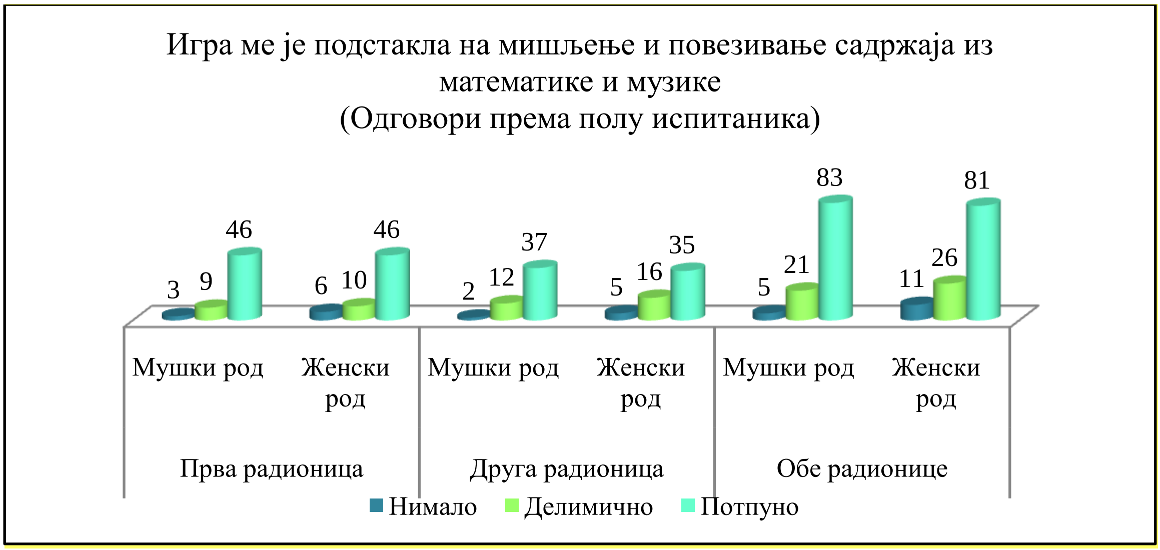
Даља анализа резултата истраживања за постављену тврдњу усмерена је на анализу одговора добијених према полу испитаника. Приказани су резултати на основу две истраживане варијабле, пол ученика и реализована радионица. Исто је примењено и за остале тестиране тврдње. Фреквенције и проценти прикупљених и анализираних одговора показују да више од педесет процената испитаника оба пола потврђује да игра потпуно подстиче на мишљење и повезивање математичко-музичких садржаја (*Табела 11).*

Табела 11Игра ме је подстакла на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике – одговори према полу испитаника

Игра ме је подстакла на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	3	9	46	58
		%	5,17	15,52	79,31	100
	Женски род	*f*	6	10	46	62
		%	9,68	16,13	74,19	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	2	12	37	51
		%	3,92	23,52	72,54	100
	Женски род	*f*	5	16	35	56
		%	8,93	28,57	62,50	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	5	21	83	109
		%	4,58	19,27	76,15	100
	Женски род	*f*	11	26	81	118
		%	9,32	22,04	68,64	100

Из приказане табеле може се уочити да је проценат испитаника мушког пола (76,15%) унеколико већи од процента одговора добијених од стране испитаника женског пола (68,64%), али у оба случаја процентуалне вредности добијених одговора потврђују дефинисану тврдњу.

Графички представљено (*Графикон 5*) уочава се да свега шест одговора ($f = 6$)подржава став да реализована игра „нимало" не доприноси и не подстиче на мишљење и повезивање математичко-музичких садржаја што је знатно мање од фреквенција одговора који указују на нивое „делимично" ($f = 47$) и „потпуно" ($f = 164$) у формираној скали процене.



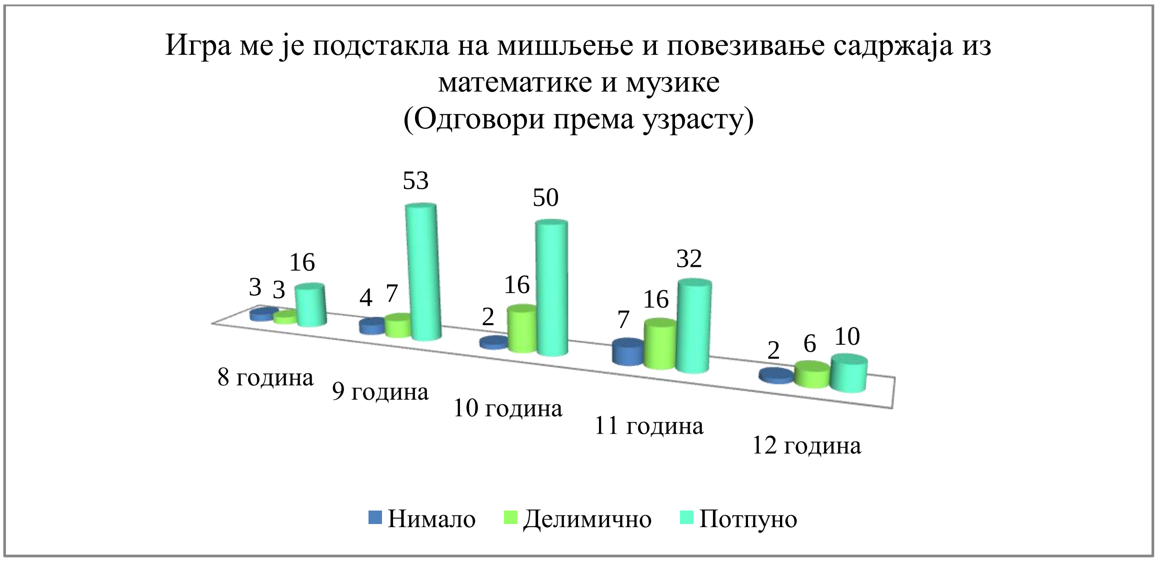
Графикон 5 Игра ме је подстакла на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике – одговори према полу испитаника

Уколико се посматра узорак одговора према узрасту деце као једне од варијабли спроведеног истраживања,уочава се да проценат одговора који потврђује дати ставопада са порастом узраста испитаника – испитаници узраста осам година (72,72%), испитаници узраста девет година (82,81%) и испитаници узраста десет година (73,53%). Код старијих узраста процентуално израчунате вредности датих одговора за исту тврдњу и исти ниво процене „потпуно” је нешто мањи – испитаници узраста једанаест година (58,18%) и најстарији узраст испитаника (дванаест година) – 55,55% (*Табела 12*).

Фреквенције одговора добијене према узрасту испитаника графички су представљене и потврђују да је највећа фреквенција одговора присутна за ниво „потпуно” у скали процене без обзира на узраст испитаника, што и са овог аспекта анализе добијених одговора потврђује став да реализована математичко-музичка игра доприноси подстицањумишљења и повезивању математичко-музичких садржаја током игре (*Графикон 6*).

Табела 12Игра ме је подстакла на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике – одговори према полу испитаника

Игра ме је подстакла на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	3	3	16	22
	%	13,64	13,64	72,72	100
Узраст 9 година	*f*	4	7	53	64
	%	6,25	10,94	82,81	100
Узраст 10 година	*f*	2	16	50	68
	%	2,94	23,53	73,53	100
Узраст 11 година	*f*	7	16	32	55
	%	12,73	29,09	58,18	100
Узраст 12 година	*f*	2	6	10	18
	%	11,11	33,34	55,55	100



Графикон 6 Игра ме је подстакла на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике – одговори према узрасту испитаника

Утврђивањем да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника у зависности од узраста израчуната је вредност *Хи-квадрат теста*, која је мања од назначених граничних вредности, чиме се потврђује да узраст испитаника не утиче на ставове и одговоре дате на тестирану тврдњу (*Табела 13*).

Табела 13Резултати χ2 теста – подстицање мишљења и повезивање математичко-музичких садржаја у игри – варијабла узраст ученика

fe	*ft*	(*fe* – *ft*)	$(fe-ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
3	1,74	1,26	1,57	0,90
3	4,65	-1,65	2,72	0,58
16	15,60	0,39	0,15	0,009
4	5,07	-1,07	1,15	0,22
7	13,53	-6,53	42,68	3,15
53	45,39	7,60	57,76	1,27
2	5,39	-3,39	11,50	2,13
16	14,37	1,62	2,62	0,18
50	48,22	1,77	3,13	0,06
7	4,36	2,63	6,91	1,58
16	11,62	4,47	19,09	1,64
32	39,00	-7,00	49,00	1,25
2	1,42	0,57	0,32	0,23
6	3,08	2,19	4,18	1,58
10	12,76	2,76	7,65	0,59
∑*fe* = 227	∑*ft*= 227			χ2 = 15,36

– Теоријске фреквенције израчунате су по формули: $ft = \frac{\sum fr \cdot \sum fk}{N}$

– Степен слободе израчунат је по формули:df = (r – 1) · (k – 1) = (5 – 1) · (3 – 1) = 4 · 2 = 8

На основу поређења израчунатог χ2 = 15,36 са граничним χ2 вредностима 15,507 на нивоу значајности 0.05 и 20,090 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе *df = 8*, може се закључити да не постоји статистички значајна разлика међу одговорима деце различитог узраста о ставу да игра подстиче на мишљење и повезивање математичко-музичких садржаја с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања од назначених граничних вредности.

На основу до сада изложеног може се уопштити да су резултати истраживања потврдили да реализована математичко-музичка игра доприноси повезивању математичких и музичких садржаја, а тиме, једним сегментом доприносии потврђивању постављене хипотезе истраживања.

Постављена хипотеза анализирана је и кроз питање *да ли су или не, током игреиспитаници били усмерени на решавање проблемских математичких задатака*. У *Табели 14* приказане су фреквенције и проценти добијених одговора након прве и друге радионице, као и одговори испитаника након обе реализоване радионице. Највећи проценат одговора – 72,25% указује да су деца током реализоване математичко-музичке игре у потпуности била усмерена на решавање проблемских математичких задатака. Од укупног броја одговора, 21,58% односи се на ниво „делимично" у скали процене, док 6,67% одговора указује да математичко-музичкаигра није подстицала на решавање проблемских математичких задатака.

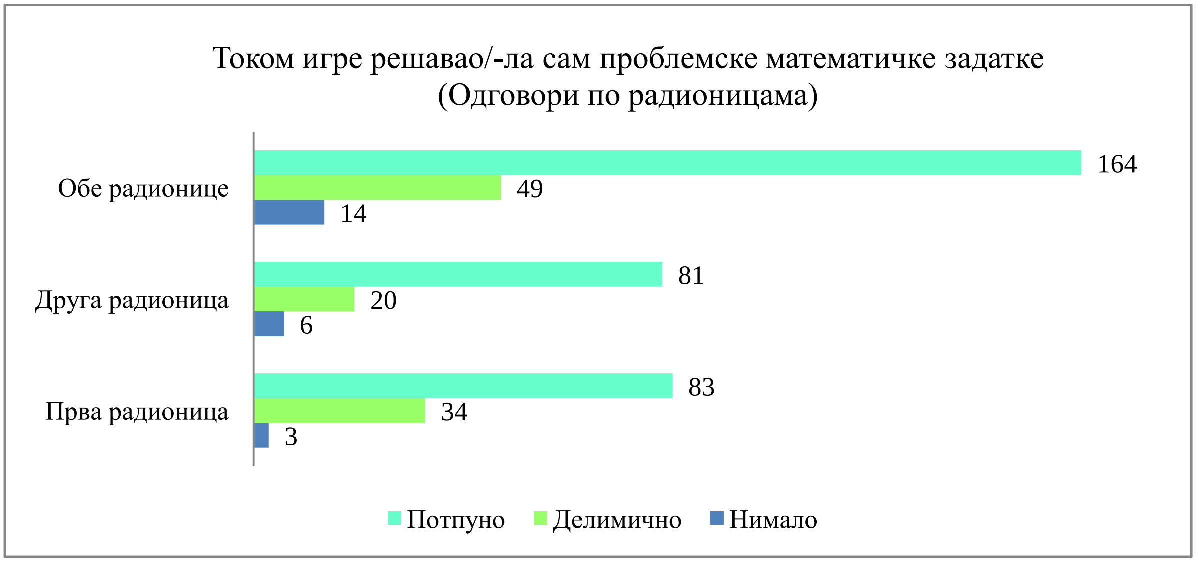
Табела 14Током игре решавао/-ла сам проблемске математичке задатке – одговори по радионицама

Током игре решавао/-ла сам проблемске математичке задатке		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	3	34	83	120
	%	2,50	28,34	69,16	100
Друга радионица	*f*	6	20	81	107
	%	5,60	18,70	75,70	100
Обе радионице	*f*	14	49	164	227
	%	6,67	21,58	72,25	100

Посматрано по радионицама, друга радионица указује на већи проценат одговора (75,70%) који потврђује ниво „потпуно" у скали процене за дати став, у односу на прву радионицу (69,16%), а истовремено и већи проценат одговора (5,60%) на став да игра „нимало" не подстиче на решавање проблемских задатака у односу на прву радионицу (2,50%).

Са аспекта одговора добијених у целини може се закључити да је игра подстицала решавање проблемских задатака, у већој или мањој мери, и током прве и током друге реализације игре.

Дати став потврђује и графички приказ фреквенција добијених одговора са ког се може уочити да од укупног броја добијених одговора након обе радионице (*f = 227)* сто шездесет четири одговора *(f=164)* доприноси ставу да игра „потпуно” подстиче на решавање проблемских математичких задатака, четрдесет девет*(f = 49)* да „делимично” подстиче, док свега четрнаест одговора*(f = 14)* има негативан став према датој тврдњи (*Графикон 7*).

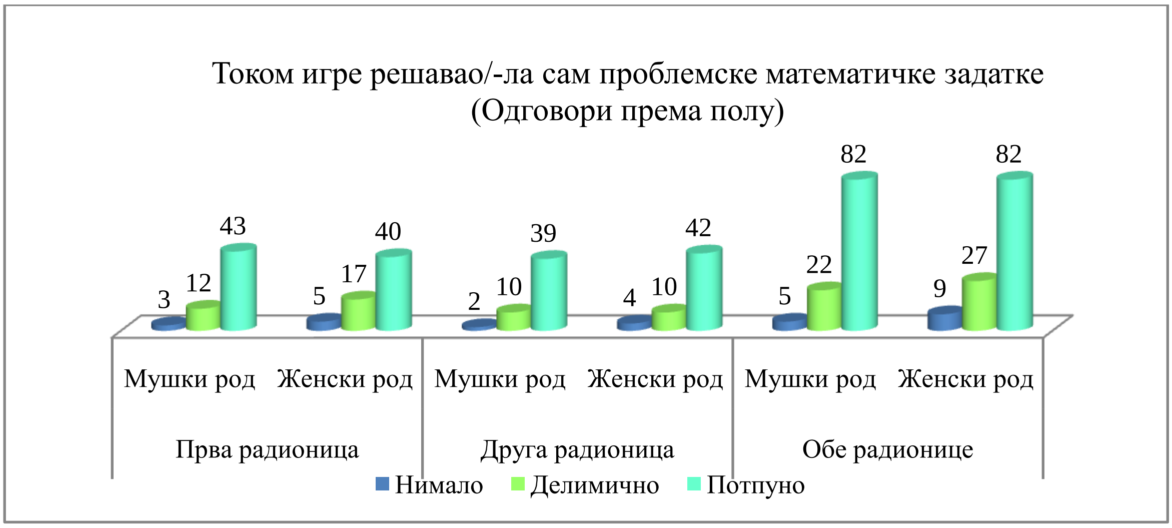


Графикон 7 Током игре решавао/-ла сам проблемске математичке задатке – одговори по радионицама

Анализа одговора испитаника у зависности од пола илуструје да су испитаници мушког пола доминантнији у одговорима који потврђују да их игра у потпуности подстиче на решавање проблемских математичких задатака (75,23%) у односу на испитанике женског пола (69,49%). Процентуално гледано (*Табела 15*) као и фреквенцијски (*Графикон 8*), разлика у одговорима испитаника различитог пола није знатно велика, а у оба случаја доприноси потврђивању постављеног става.

Табела 15Током игре решавао/-ла сам проблемске математичке задатке – одговори према полу испитаника

Током игре решавао/-ла сам проблемске математичке задатке			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	3	12	43	58
		%	5,17	20,69	74,14	100
	Женски род	*f*	5	17	40	62
		%	8,06	27,42	64,52	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	2	10	39	51
		%	3,92	19,61	76,47	100
	Женски род	*f*	4	10	42	56
		%	7,14	17,86	75,00	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	5	22	82	109
		%	4,59	20,18	75,23	100
	Женски род	*f*	9	27	82	118
		%	7,63	22,88	69,49	100



Графикон 8 Током игре решавао/-ла сам проблемске математичке задатке – одговори према полу испитаника

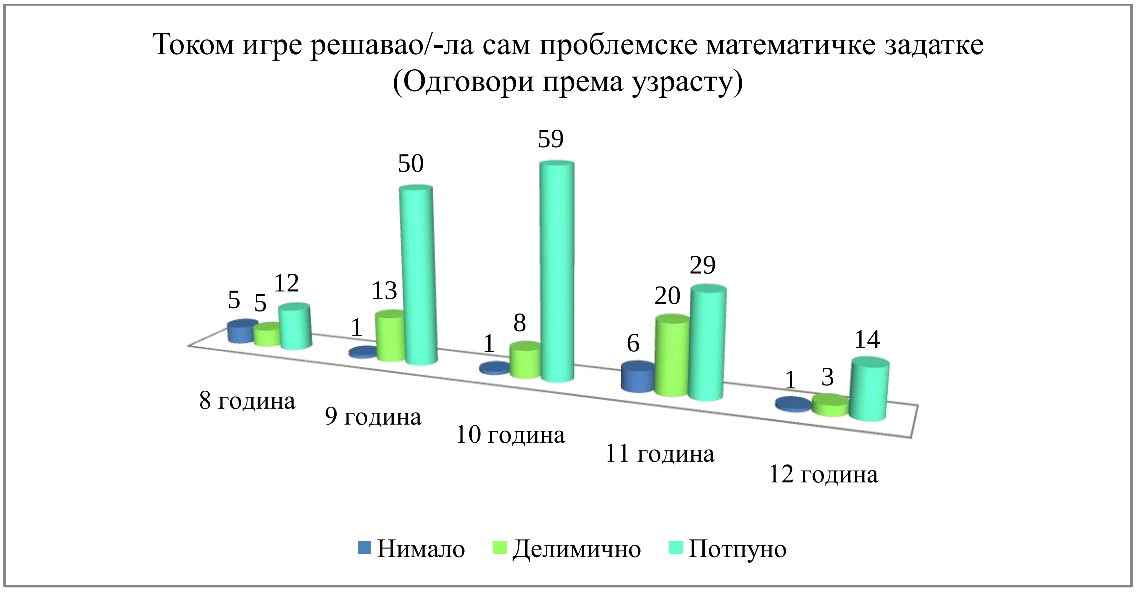
За анализу одговора на постављену тврдњу о решавању проблемских математичких задатака током игре формирана је табела са израчунатим фреквенцијама и процентима датих одговора на сва три нивоа процене „нимало”, „делимично”, „потпуно”, посматрано према узрасту испитаника (*Табела 16*).

Табела 16Током игре решавао/-ла сам проблемске математичке задатке – одговори према узрасту испитаника

Током игре решавао/-ла сам проблемске математичке задатке		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	5	5	12	22
	%	22,73	22,73	54,54	100
Узраст 9 година	*f*	1	13	50	64
	%	1,56	20,31	78,13	100
Узраст 10 година	*f*	1	8	59	68
	%	1,47	11,76	86,76	100
Узраст 11 година	*f*	6	20	29	55
	%	13,34	44,44	42,22	100
Узраст 12 година	*f*	1	3	14	18
	%	5,56	16,67	77,77	100

Подаци приказани графички и табеларно указују да највећи проценат деце узраста девет (78,13%), десет (86,76%) и дванаест година (77,77%) потврђује став да су током игре решавали проблемске математичке задатке, док деца узраста осам (54,54%) и једанаест година (42,22%) са најмањим процентом одговора учествују у потврђивању датог става.

Ако се посматра графички приказ табеларно изложених фреквеницијa,уочава се да су највеће фреквенције одговора које се односе на ниво „потпуно” присутне код деце свих тестираних узраста, што доприноси потврђивању тестираног става о решавању проблемских математичких задатака током реализоване игре (*Графикон 9*).



Графикон 9 Током игре решавао/-ла сам проблемске математичке задатке – одговори према узрасту испитаника

Осим наведеног за постављену тврдњу/став било је интересантно испитати да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима деце с обзиром на узраст и да ли су задаци током игре независно од узраста били, према испитаницима, проблемског карактера или не. У том циљу израчуната је вредност *Хи-квадрат теста*(*Табела 17*).

На основу поређења израчунатог$\chi2$ = 31,22са граничним $\chi2$ вредностима 15,507 на нивоу значајности 0.05 и 20,090 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 8, може се закључити да постоји статистички значајна разлика међу одговорима деце различитог узраста, с обзиром да је израчуната вредност $\chi2$ *теста* већа од назначених граничних вредности.

Без обзира на статистички значајну разлику, која указује да добијени одговори (посматрано према узрастуиспитаника) зависе од узраста испитаника, истраживање је показало да сваки тестирани узраст са више од 50,00% позитивних одоговора потврђује тестирани став и потврђује да игра, у мањој или већој мери, подстиче на решавање проблемских математичких задатака.

Табела 17Резултати χ2 теста– решавање проблемских математичких задатака – варијабла узраст ученика

fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe-ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
5	1,35	3,64	13,27	9,53
5	4,74	0,25	0,06	0,01
12	15,89	3,89	15,16	0,95
1	3,94	2,94	8,68	2,20
13	13,81	-0,81	0,66	0,05
50	46,23	3,76	14,15	0,30
1	4,19	-3,19	10,20	2,43
8	14,67	-6,67	44,60	3,03
59	49,12	9,87	97,46	1,98
6	3,39	2,60	6,80	2,00
20	11,87	8,12	66,06	5,56
29	39,73	-10,73	115,25	2,90
1	1,11	-0,11	0,01	0,01
3	3,88	-0,88	0,78	0,20
14	13,00	1	1	0,07
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			χ2 = 31,22

Да ли су и у којој мери, деца имала могућност да *математичке задатке решавају на различите начине, односно подстичу различите приступе решавању једног истог проблема*, став је који је анализиран у наставку реализације истраживања.

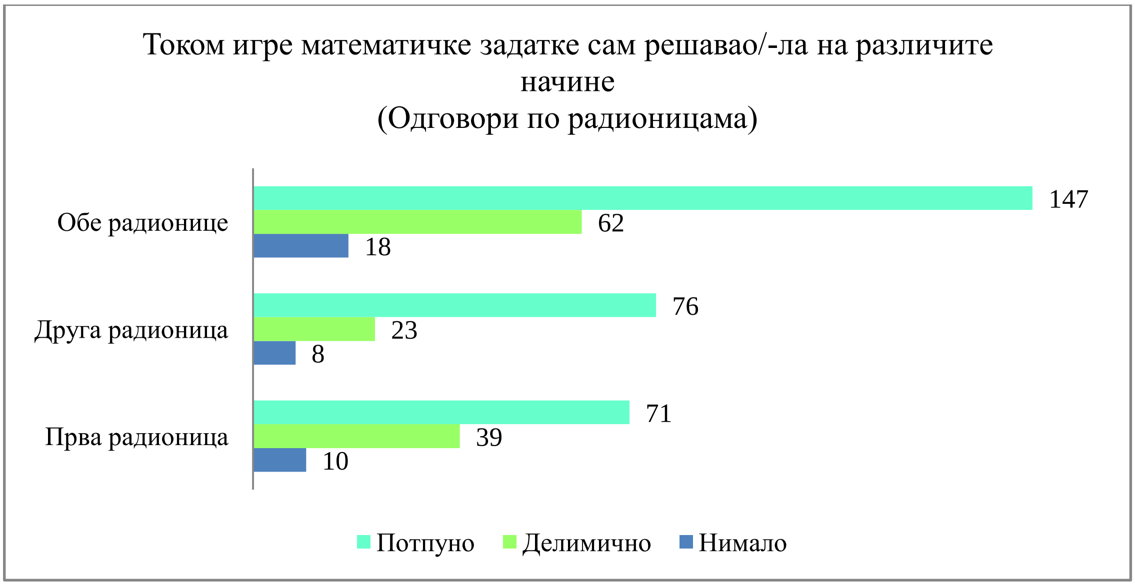
Из добијених и анализираних података уочава се да су одговори након друге радионице (71,03%) за ниво „потпуно”, бројнији у односу на одговоре посматрано према истом нивоу процене након прве радионице (59,17%). Сагледавањем целокупних одговора изразито већи проценат одговора испитаника (73,56%) указује да игра доприноси могућности решавања математичких задатака на различите начине, у односу на одговоре који указују да игра томе не доприноси (7,93%). Одговори који указују да игра „делимично” подстиче решавање математичких задатака на различите начине присутни су у 18,51%случајева (*Табела 18*).

С обзиром да постоји разлика у одговорима испитаника, датих након прве и друге реализације игре, може се претпоставити да су деца у другој радионици била сигурнија у правила и начин играња игре, као и могућност различитих начина за решавање постављених задатака, што је и допринело процентуално вишим одговорима након друге радионице.

Табела 18Током игре математичке задатке решавао/-ла сам на различите начине – одговори по радионицама

Током игре математичке задатке решавао/-ла сам на различите начине		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	10	39	71	120
	%	8,33	32,5	59,17	100
Друга радионица	*f*	8	23	76	107
	%	7,47	21,50	71,03	100
Обе радионице	*f*	18	62	147	227
	%	7,93	18,51	73,56	100

Графички представљени резултати показују да је након прве радионице фреквенција одговора на ниво „делимично” већа од фреквенције одговора у односу на исти ниво процене након друге реализације игре. Исти резултат је добијен и када се посматра фреквенција одговора након прве и друге радионице у погледу нивоа „нимало” (већи проценат одговора је након прве него након друге реализације игре). Међутим, када се посматрају фреквенције на ниво „потпуно”, резултати су обрнути, односно већа фреквенција одговора је након друге реализације игре (*Графикон 10*).Посматрано у целини добијени подаци потврђују постављени став и доприносе потврђивању постављене хипотезе истраживања.



Графикон 10 Током игре математичке задатке решавао/-ла сам на различите начине – одговори по радионицама

Услед постојања процентуалне разлике након прве и друге радионице, приступило се утврђивању да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника у зависности од времена реализације игре (редоследа у реализацији), односно да ли је редослед извођења игре утицао на одговоре испитаника у односу на постављену тврдњу (*Табела 19*).

Табела 19Резултати χ2 теста – математички задаци су решавани на различите начине током игре – варијабла редослед радионице

fe	*ft*	*(fe – ft)*	$(fe-ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
10	9,51	0,48	0,23	0,02
39	32,77	6,22	38,68	1,18
71	77,70	-6,70	44,89	0,57
8	8,48	-0,48	0,23	0,02
23	29,22	-6,22	38,68	1,32
76	69,29	6,70	44,89	0,64
∑*fe* = 227	∑*ft*= 227			χ2 = 3,75

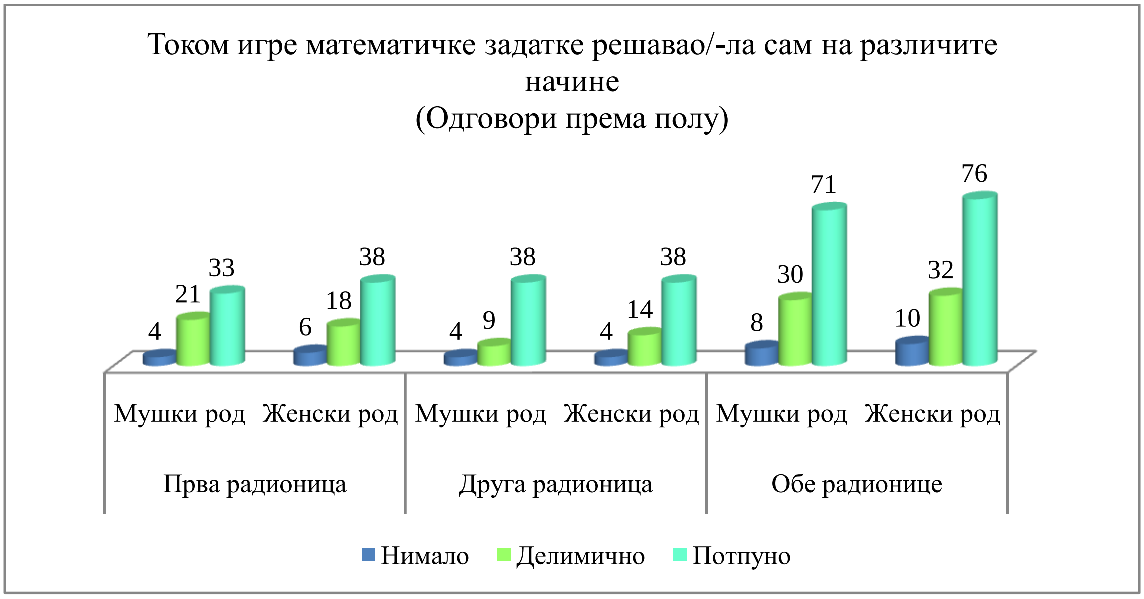
Израчунавањем χ2 теста за резултате добијени су следећи резултати: на основу поређења израчунатог χ2 = 3,75 са граничним χ2 вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 2, може се закључити да су одговори испитаника, на питање о различитим приступима решавања математичких задатака, независни у односу на редослед реализације игре (вредност *Хи-квадрат теста* мања је од утврђених граничних вредности).

Анализирајући резултате према полу испитаника уочава се да су испитаници оба пола показали позитиван став на дату тврдњу. Одговори након обе радионице указују да 65,14% дечака и 64,41% одговора девојчица подржава став да су током игре решавали математичке задатке на различите начине. И проценти који су усмерени на ниво процене „нимало”, слични су код дечака – 7,34% и код девојчица – 8,47% (*Табела 20*).

Табела 20Током игре математичке задатке решавао/-ла сам на различите начине – одговори према полу испитаника

Током игре математичке задатке решавао/-ла сам на различите начине			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	4	21	33	58
		%	6,90	36,20	56,90	100
	Женски род	*f*	6	18	38	62
		%	9,67	29,03	61,30	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	4	9	38	51
		%	7,84	17,65	74,51	100
	Женски род	*f*	4	14	38	56
		%	7,14	25,00	67,86	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	8	30	71	109
		%	7,34	27,52	65,14	100
	Женски род	*f*	10	32	76	118
		%	8,47	27,12	64,41	100

Интересантно је да су, посматрајући фреквенције добијених одговора код испитаника мушког пола, фреквенције одговора на ниво „делимично” након прве радионице, двадесет један дат одговор (*f = 21*),а након друге радионицесвега девет одговора (*f = 9*). Фреквенција одговора се смањује и код испитаника женског пола – након прве радионице*f* = 18, а након друге*f* = 14. Гледано у целини фреквенције одговора на ниво „делимично” код оба пола испитаника су приближно исте (дечаци –*f* = 30, девојчице – *f*=32 дата одговора) (*Графикон 11*).

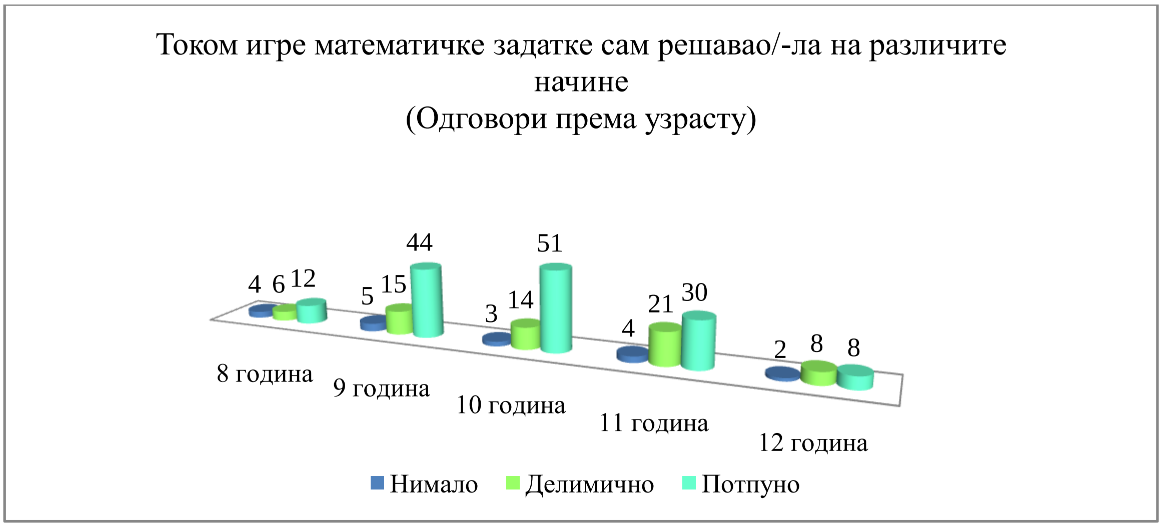


Графикон 11 Током игре математичке задатке решавао/-ла сам на различите начине – одговори према полу испитаника

Да би се утврдили резултати деце различитог узраста и њихови ставови на тврдњу да су током игре математичке задатке решавали на различите начине, формирана је табела фреквенција и процентуалних вредности (*Табела 21*) као и графикон фреквенција (*Графикон 12*). На основу добијених одговора и њихове анализе уочава се да је највећи проценат одговора усмерен на нивое „делимично” и „потпуно” у скали процене. Интересантно је да су најстарији испитаници спроведеног истраживања (деца узраста дванаест година) навела да их игра није подстакла да задатке решавају на различите начине са 1,12% одговора, док су најмлађи испитаници (деца узраста осам година) на исту тврдњу и ниво процене „нимало”дала 18,18% одговора.Са друге стране, најстарији и најмлађи испитаници за исту тврдњу за ниво „потпуно” на скали процене дали су мањи проценат одговора у односу на децу узраста девет и десет година.

Табела 21Током игре математичке задатке решавао/-ла сам на различите начине – одговори према узрасту испитаника

Током игре математичке задатке решавао/-ла сам на различите начине		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	4	6	12	22
	%	18,18	27,27	54,55	100
Узраст 9 година	*f*	5	15	44	64
	%	7,81	23,44	68,75	100
Узраст 10 година	*f*	3	14	51	68
	%	4,42	20,58	75,00	100
Узраст 11 година	*f*	4	21	30	55
	%	7,27	38,18	54,55	100
Узраст 12 година	*f*	2	8	8	18
	%	1,12	44,4	44,4	100



Графикон 12 Током игре математичке задатке решавао/-ла сам на различите начине – одговори према узрасту испитаника

Анализа свих добијених одговора показује да су деца током игре у највећој мери, „делимично” или „потпуно” решавала математичке задатке на различите начине чиме се постављени став потврђује и доприноси потврђивању основне хипотезе.

У циљу утврђивања да ли постоји статистички значајна разлика у односу на одговоре деце различитог узраста по питању дефинисаног става израчуната је вредност *$\chi 2$ теста* (*Табела 22*).

Табела 22Резултати χ2 теста – математички задаци су решавани на различите начине током игре – варијабла узраст ученика

fe	*ft*	$(fe - ft)$	$(fe - ft)^2$	$\dfrac{(fe - ft)^2}{ft}$
4	1,74	2,25	5,06	2,90
6	6,20	-0,20	0,04	0,006
12	14,05	-2,05	4,20	0,29
5	5,07	-0,07	0,0049	0,0009
15	18,04	-3,04	9,24	0,51
44	40,88	3,11	9,67	0,23
3	5,39	-2,39	5,71	1,06
14	19,17	-5,17	26,72	1,39
51	43,43	7,57	57,30	1,31
4	4,36	-0,36	0,13	0,03
21	15,50	5,5	30,25	1,95
30	35,13	-5,13	26,31	0,74
2	1,42	0,58	0,34	0,23
8	5,07	2,93	8,58	1,69
8	11,49	-3,49	12,18	1,06
∑*fe* = 227	∑*ft*= 227			χ2 = 13,39

На основу поређења израчунатог χ2 = 13,39са граничним χ2 вредностима 15,507 на нивоу значајности 0.05 и 20,090 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 8, може се закључити да не постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника различитог узраста, те да добијени одговори и резултати приказани након истраживања о ставу да игра подстиче на решавање математичких задатака на различите начине не зависе од узраста ученика већ од карактеристика реализоване игре (израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања је од назначених граничних вредности).

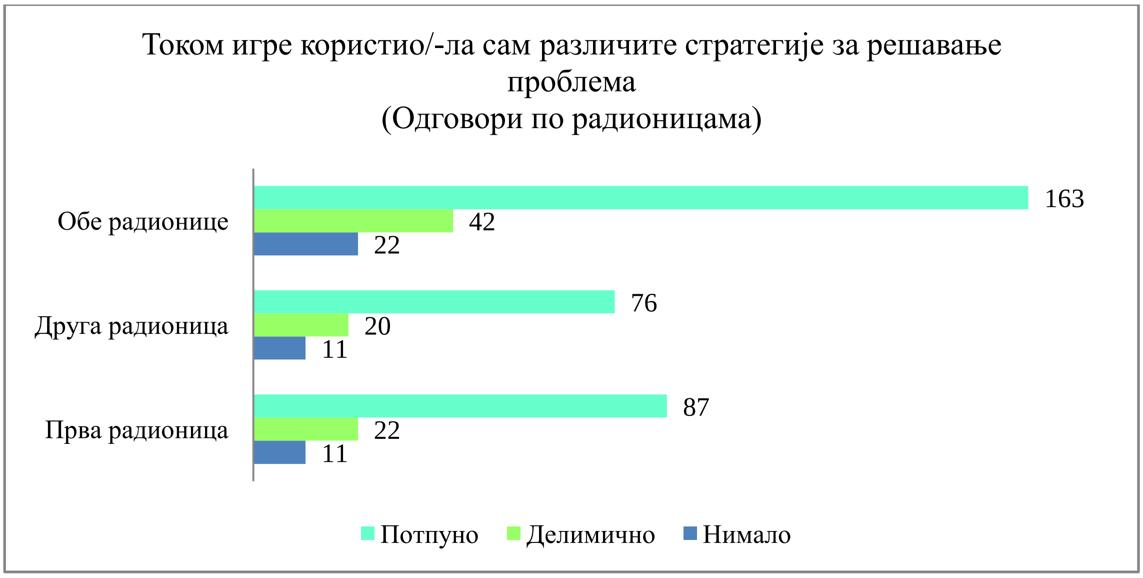
Став који доприноси или оповргава постављену хипотезу истраживања, која се односи на развој когнитивних вештина ученика је и *став о томе да ли су деца током реализоване математичко-музичке игре користила различите* *стратегије за решавање постављених како математичких, тако и музичких проблема.*

Добијени подаци показују да су деца током игре била подстакнута на примену различитих стратегија у решавању проблема и то 72,50% одговора након прве радионице, 71,03% одговора након друге радионице и 71,81% одговора посматрано у целини. Да је игра делимично подстакла на коришћење различитих стратегија током игре указује око 18% одговора (18,34% након прве радионице, 18,69% након друге и 18,50% одговора гледано у целини). Најнижи проценат одговора односи се на ниво „нимало” на скали процене, на који указује 9,96% одговора након обе радионице (*Табела 23*).

Табела 23Током игре користио/-ла сам различите стратегије за решавање проблема – одговори по радионицама

Током игре користио/-ла сам различите стратегије за решавање проблема		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	11	22	87	120
	%	9,16	18,34	72,50	100
Друга радионица	*f*	11	20	76	107
	%	10,28	18,69	71,03	100
Обе радионице	*f*	22	42	163	227
	%	9,69	18,50	71,81	100

Графички представљени резултати (*Графикон 13*) из *Табеле 20* потврђују претходну анализу резултата о ставу који се односи на коришћење различитих сттратегија при решавању математичких и музичких проблема током реализоване математичко-музичке игре.



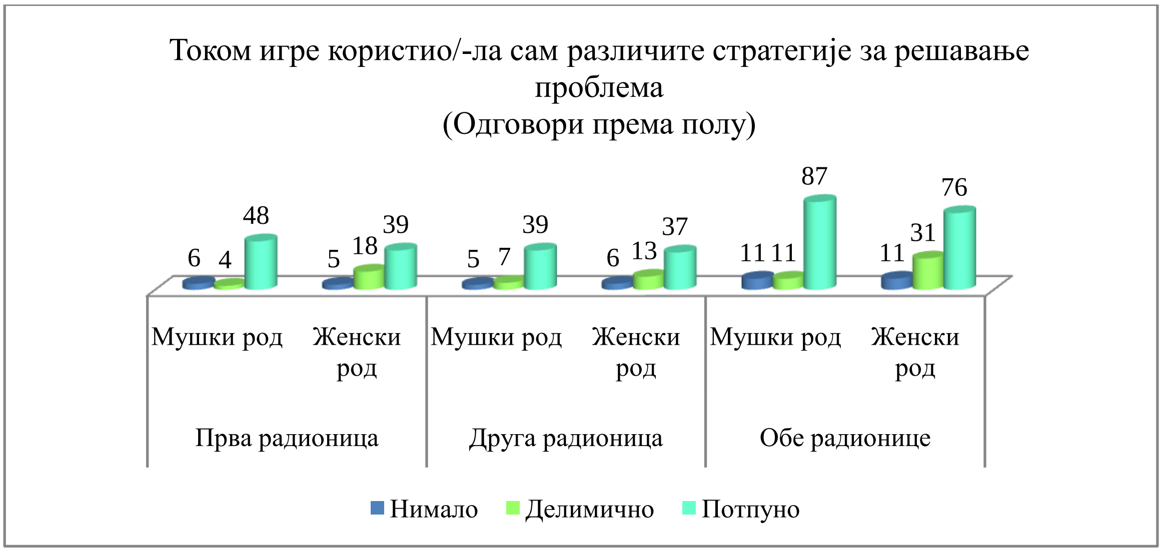
Графикон 13 Током игре користио/-ла сам различите стратегије за решавање проблема – одговори по радионицама

У погледу пола ученика већи проценат дечака (79,82%) у односу на девојчице (64,41%) потврђује да игра у потпуности доприноси подстицању примене различитих стратегија решавања математичко-музичких проблема, али и један и други пол испитаника потврђује дати став, с обзиром да су одговори оба пола изнад 50% од укупно добијених одговора. Свега 10,09% одговора дечака и 9,32% одговора девојчица истакло је да игра „нимало" не доприноси подстицању примене различитих стратегија у решавању проблемских математичко-музичких задатака (*Табела 24*).

Визуелнои графички представљене фреквенције испитаника оба пола из *Табеле 21,* потврђују постављени став без обзира на пол испитаника и/или реализовану радионицу (*Графикон 14*).

Табела 24Током игре користио/-ла сам различите стратегије за решавање проблема – одговори према полу испитаника

Током игре користио/-ла сам различите стратегије за решавање проблема			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	6	4	48	58
		%	10,35	6,89	82,76	100
	Женски род	*f*	5	18	39	62
		%	8,06	29,03	62,91	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	5	7	39	51
		%	9,80	13,72	76,48	100
	Женски род	*f*	6	13	37	56
		%	10,71	23,22	66,07	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	11	11	87	109
		%	10,09	10,09	79,82	100
	Женски род	*f*	11	31	76	118
		%	9,32	26,27	64,41	100



Графикон 14 Током игре користио/-ла сам различите стратегије за решавање проблема – одговори према полу испитаника

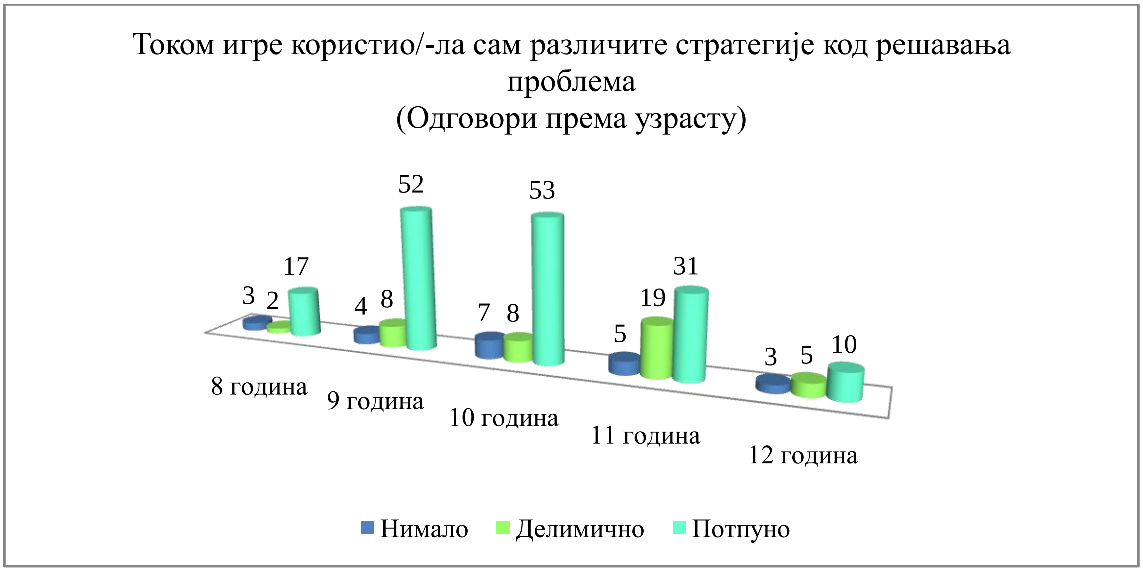
Истраживањем се даље приступило обради резултата добијених од испитаника различитог узраста (*Табела 25*). Интересантно је да се на основу изложених резултата може уочити да са порастом узраста опада проценат одговора који потврђују став да игра у потпуности подстиче на употребу различитих стратегија при решавању задатих проблема, међутим, проценат и фреквенције код свих узраста ученика иду у прилог подржавања постављеног става и доприносе потврђивању постављене хипотезе.

Табела 25Током игре користио-/ла сам различите стратегије за решавање проблема – одговори према узрасту испитаника

Током игре користио/-ла сам различите стратегије за решавање проблема		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	3	2	17	22
	%	13,63	9,09	77,28	100
Узраст 9 година	*f*	4	8	52	64
	%	6,25	12,50	81,25	100
Узраст 10 година	*f*	7	8	53	68
	%	10,29	11,76	77,95	100
Узраст 11 година	*f*	5	19	31	55
	%	9,09	34,55	56,36	100
Узраст 12 година	*f*	3	5	10	18
	%	16,67	27,78	55,55	100

Прикупљени и анализирани одговори у овом сегменту истраживања показују да сви узрасти осим најмлађег (узраст осам година) имају доминантне одговоре за нивое процене „делимично” и „потпуно” у односу на ниво „нимало”.

Посматрајући узраст испитаника од осам година старости, интересантно је да добијени одговори, такође показују да доминира ниво процене „потпуно”, али да је ниво „нимало” (*f* = *3*) доминантнији у одговорима од нивоа „делимично” (*f* = *2*)за дати тестирани став (*Графикон 15*).



Графикон 15 Током игре користио/-ла сам различите стратегије за решавање проблема –одговори према узрасту

Истражујући да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима деце различитог узраста на постављен став о примени разних стратегија у решавању проблема које игра поставља, дошло се до следећих резултата: на основу поређења израчунатог $\chi2$ = 18,35са граничним $\chi2$ вредностима 15,507 на нивоу значајности 0.05 и 20,090 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 8, може се закључити да постоји статистички значајна разлика међу децом различитог узраста о ставу који указује да ли игра подстиче на примену различитих стратегија у решавању проблема на нивоу значајности 0.05, док на нивоу значајности 0.01 не постоји статистички значајна разлика (*Табела 26*).

Табела 26Резултати χ2 теста –примена различитих стратегија за решавање проблема игре – варијабла узраст испитаника

fe	ft	$(fe-ft)$	$(fe-ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
3	2,13	0,87	0,75	0,35
2	4,07	-2,07	4,28	1,05
17	15,79	1,21	1,46	0,09
4	6,20	-2,20	4,84	0,78
8	11,84	-3,84	14,74	1,24
52	45,95	6,05	36,60	0,79
7	6,59	0,41	0,16	0,02
8	12,58	-4,58	20,97	1,66
53	48,82	4,18	17,47	0,35
5	5,33	-0,33	0,11	0,02
19	10,17	8,82	77,79	7,65
31	39,49	-8,79	77,26	1,95
3	1,74	1,26	1,58	0,91
5	3,33	1,67	2,78	0,83
10	12,92	-2,92	8,52	0,66
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			χ2 = 18,35

Узимајући у обзир целокупну анализу одговора добијених на став о примени различитих стратегија током решавања проблема у реализованој математичко-музичкој игри, без обзира на статистички значајну разлику која се показала на нивоу 0.05 у погледу одговора испитаника различитог узраста и даље се постављени став може потврдити, с обзиром да су сви одговори, без обзира на пол, узраст и реализовану радионицу, већи за ниво „потпуно” и „делимично” од педесет посто добијених одговора у односу на ниво „нимало”. Потврђивањем датог става доприноси се потврђивању постављене хипотезе истраживања.

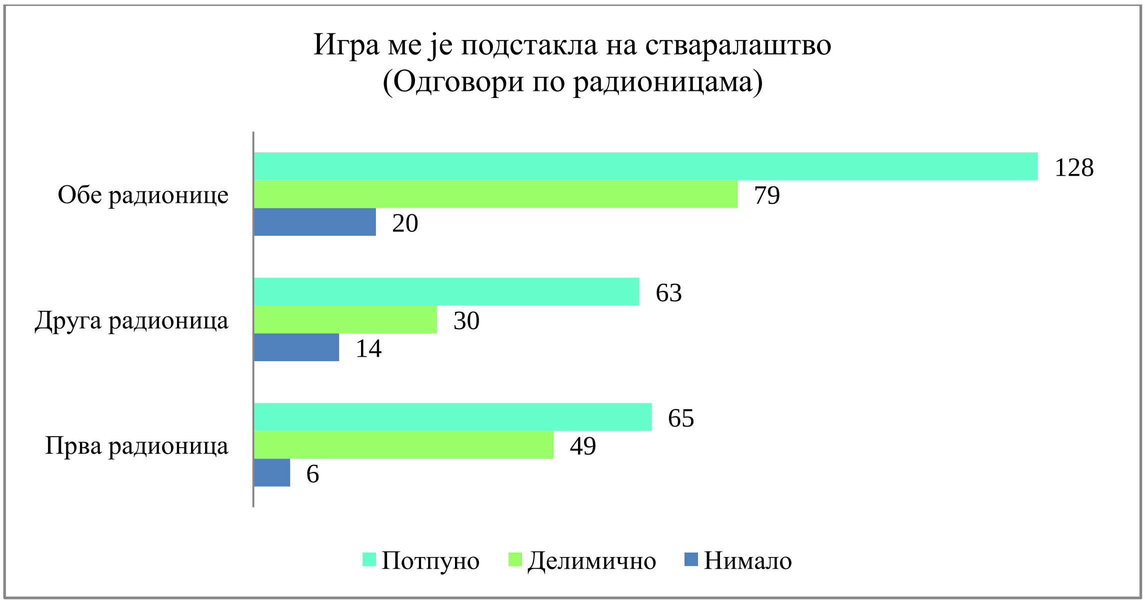
У којој је мери реализована математичко-музичка игра подстакла на стваралаштво приказано је процентуално и фреквенцијски у *Табели 27*. Како су резултати анализе посматрања показали да је подстицање на стваралаштво током игре било у најмањој мери присутно, тако и резултати добијени скалирањем дају сличне резултате.

На основу добијених одговора деце након истраживања, уочава се да 56,39% одговора указује да игра „потпуно” подстиче на стваралаштво, 34,80% одговора наводи да игра „делимично” подстиче на стваралаштво, док је 8,81% одговора усмерено на ниво „нимало”. Иако су проценти нешто нижи за ниво „потпуно” у скали процене у односу на друга два нивоа, у односу на до сада анализиране тврдње, одговори и даље прелазе 50,00% и иду у прилог постављеној тврдњи те основној хипотези истраживања.

Табела 27Игра ме је подстакла на стваралаштво – одговори по радионицама

Игра ме је подстакла на стваралаштво		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	6	49	65	120
	%	5,00	40,84	54,16	100
Друга радионица	*f*	14	30	63	107
	%	13,08	28,04	58,88	100
Обе радионице	*f*	20	79	128	227
	%	8,81	34,80	56,39	100

Фреквенције представљене на *Графикону 16* приказују висок ниво разлике у фреквенцијама добијеним на ниво да игра „потпуно” подстиче на стваралаштво (*f* = *128*) у односу на фреквенцију (*f* = *20*) која је усмерена на ниво „нимало” у односу на исти став.



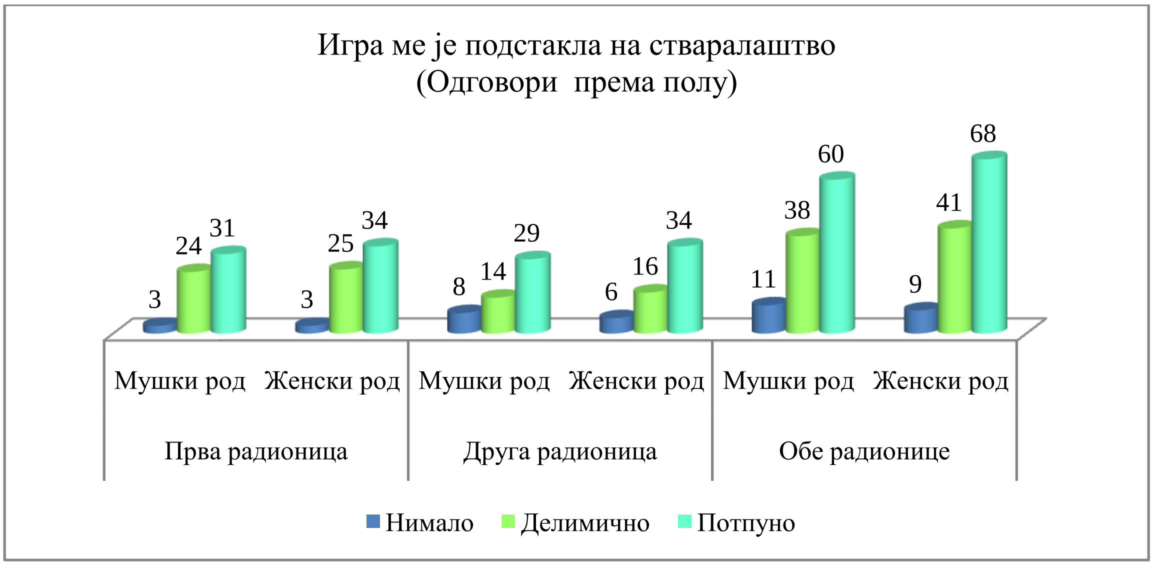
Графикон 16 Игра ме је подстакла на стваралаштво – одговори по радионицама

Табела 28Игра ме је подстакла на стваралаштво – одговори према полу испитаника

Игра ме је подстакла на стваралаштво			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	3	24	31	58
		%	5,17	41,38	53,45	100
	Женски род	*f*	3	25	34	62
		%	4,84	40,32	54,84	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	8	14	29	51
		%	15,67	27,45	56,86	100
	Женски род	*f*	6	16	34	56
		%	10,71	28,57	60,72	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	11	38	60	109
		%	10,09	34,86	55,05	100
	Женски род	*f*	9	41	68	118
		%	7,62	34,75	57,63	100

Анализирајући одговоре испитаника различитог пола, уочава се да већи проценат девојчица и након прве и након друге радионице, али и посматрајући одговоре у целини, наводи да реализована игра подстиче на стваралаштво у односу на одговоре које су изнели дечаци (девојчице – 57,63%, дечаци – 55,05%). У складу са тим, већи проценат одговора дечака у односу на одговоре девојчица указује да игра „нимало” не подстиче на стваралаштво (дечаци – 10,9%, девојчице – 7,62%). У погледу одговора који се односе на ниво „делимично”, интересантно је да су и дечаци и девојчице дали приближно исти проценат одговора (дечаци – 34,86%, девојчице – 34,75%) (*Табела 28*).

Графички приказане фреквенције одговора о подстицању стваралаштва дате су на *Графикону 17.* Графички је приказано да код оба пола, након сваке реализације игре, доминира ниво „потпуно”, чиме се и након анализе одговора према полу испитаника потврђује став о подстицању стваралаштва у игри.



Графикон 17 Игра ме је подстакла на стваралаштво – одговори према полу испитаника

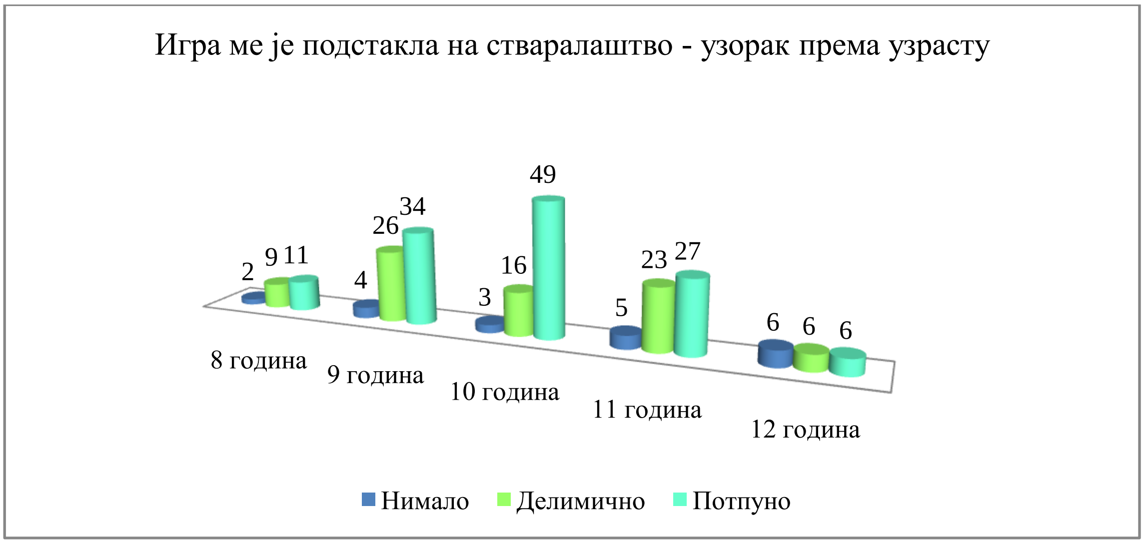
Анализирајући одговоре испитаника на основу узраста, уочава се да деца најстаријег узраста дају одговоре који су испод 50,00% укупних одговора на ниво „потпуно” као и за друга два нивоа процене (33,33%).

Да игра подстиче на стваралаштво највећи проценат добијен је од деце узраста десет година (72,06%), а уједно испитаници узраста десет година у најмањем проценту одговора указују на ниво „нимало”. Испитаници млађи и старији од овог узраста са високим процентима потврђују да игра „делимично” подстиче стваралаштво (око 40%) (*Табела 29*).

Табела 29Игра ме је подстакла на стваралаштво – одговори према узрасту испитаника

Игра ме је подстакла на стваралаштво		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	2	9	11	22
	%	9,09	40,91	50,00	100
Узраст 9 година	*f*	4	26	34	64
	%	6,25	40,62	53,13	100
Узраст 10 година	*f*	3	16	49	68
	%	4,42	23,52	72,06	100
Узраст 11 година	*f*	5	23	27	55
	%	9,09	41,82	49,09	100
Узраст 12 година	*f*	6	6	6	18
	%	33,33	33,33	33,34	100

Графички приказ података истиче да су код деце свих тестираних узраста највеће фреквенције одговора за ниво „потпуно", сем код најстаријег узраста, где јетај ниво подједнак са нивоима „делимично" и „нимало". Ако се тумаче одговори најстаријег узраста и они доприносе потврђивању основно постављене хипотезе јер су ниво „делимично" и „потпуно" гледано у целини фреквенцијски већи од одговора на ниво „нимало" (*Графикон 18*).



Графикон 18 Игра ме је подстакла на стваралаштво – одговори према узрасту испитаника

На основу свега наведеног и анализе добијених одговора на питања која су усмерена на истраживање у којој мери реализована математичко-музичка игра подстиче когнитивни развој деце, може се извести закључак, да је на сваки постављен став у овој категорији ставова, добијено највише одговора за нивое „потпуно” и „делимично” у односу на ниво „нимало”, на формираној скали процене што доприноси потврђивању постављених ставова и води ка потврђивању хипотезе истраживања.

На тврдњу да ли математичко-музичка игра доприноси подстицању мишљења и повезивања знања из математике и музике добијен је висок проценат позитивних одговора, без обзира на реализовану радионицу, узраст или пол деце. На тврдњу о доприносу решавања проблемских математичких задатака чак 72, 25% одговора указује да игра потпуно доприноси подстицању на решавање проблемских задатака. Да игра подстиче примену различитих стратегија у решавању постављених математичких и музичких проблема, потврђено је одговорима деце и након прве и након друге радионице, као и у погледу одговора у целини. Интересантно је да су на сва три наведена става (*Игра ме је подстакла на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике, Игра ме је подстакла на решавање проблемских математичких задатака* и *Игра ме је подстакла на примену различитих стратегија при решавању проблема*) одговори испитаника мушког пола, процентуално и фреквенцијски већи у односу на одговореиспитаника женског пола, што не умањује допринос одговора девојчица у погледу потврђивања основно постављене хипотезе. Уочава се и да са порастом узраста опада проценат одговора који потврђују став да игра у потпуности подстиче на решавање различитих стратегија при решавању задатих проблема, међутим проценати и фреквенције код свих узраста ученика иду у прилог подржавања постављеног става и доприносе потврђивању постављене хипотезе.

Најнижи ниво одговора усмерен је на став да реализована игра подстиче децу на стваралаштво, нарочито у погледу најстаријих испитаника (деца узраста дванаест година). Добијени одговори свих узраста и радионица, као и одговори добијени од испитаника различитог пола, крећу се око 50,00% за ниво „потпуно”, чиме се целокупним истраживањем и даље доприноси постављеној хипотези.

Анализом одговора деце на ставове који се односе на подстицање когнитивног развоја такође се могло закључити да су највећи проценти и фреквенције који потврђују постављену хипотезу код деце узраста девет и десет година, што може да доведе до закључка да је игра у свом датом облику, најпримењивија и највећи ефекат и утицај даје на овај узраст деце.

Изложено потврђује постављену хипотезу: ***Претпоставља се да ће интердисциплинарна математичко-музичка игра допринети дечјем когнитивном, социјалном и емотивном развоју (развоју вештина критичког мишљења, проблемског решавања проблема, сарадње, тимског рада, такмичарског духа, конструктивне комуникације, емпатије, позитивног става према раду)*** у делу који се односи на подстицање ***когнитивног развоја***, те критичког мишљења, проблемског решавања задатака и друго.

У циљу потпуног потврђивања горе наведене хипотезе, за део који се односи на ***<u>социо-емотивни развој деце</u>***, приступило се анализи одговора на следеће тврдње/ставове:

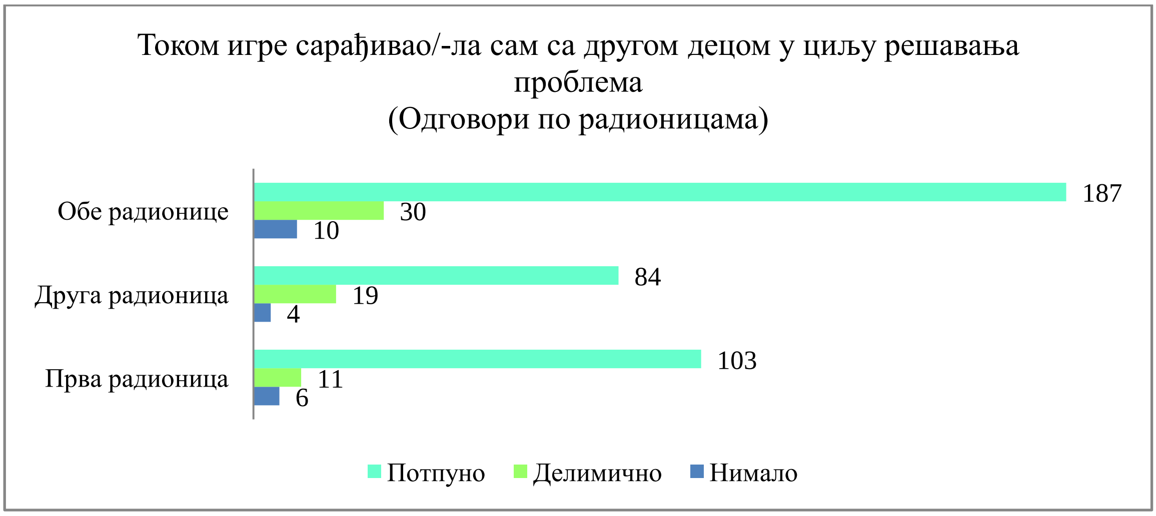
- токoм игре сарађивао/-ла сам са другом децом у циљу решавања проблема;
- током игре слушао/-ла сам и уважавао/-ла сам мишљења друге деце;
- током игре подстакнут/-та сам на тимски рад;
- игра је подстакла такмичарски дух у мени;
- током игре комуницирао/-ла сам са другом децом у циљу договора;
- током игре комуницирао/-ла сам са водитељима игре;
- игра је у мени изазвала радозналост и жељу за учествовањем;
- поштовао/-ла сам правила игре;
- са задовољством сам учествовао/-ла у игри;
- игра ме је подстакла да преузмем одговорност за свој рад.

У којој мери је реализована игра допринела сарадњи међу децом, а у циљу решавања постављених математичких и/или музичких задатакаизложено је у *Табели 30.*

Посматрајући формирану табелу уочава се да је проценат одговора након прве, као и након друге радионице веома висок за одговоре који потврђују да игра у потпуности подстиче на сарадњу и колаборацију. У анализи целокупних одговора уочава се да је тај проценат 82,37%, што је знатно више у односу на проценат 4,40% који се односи на став да игра „нимало” не доприноси сарадњи и колаборацији.

Табела 30Током игре сарађивао/-ла сам са другом децом у циљу решавања проблема – одговори по радионицама

Током игре сарађивао/-ла сам са другом децом у циљу решавања проблема		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	6	11	103	120
	%	5	9,16	85,84	100
Друга радионица	*f*	4	19	84	107
	%	3,74	17,76	78,50	100
Обе радионице	*f*	10	30	187	227
	%	4,40	13,23	82,37	100



Графикон 19 Током игре сарађивао/-ла сам са другом децом у циљу решавања проблема – одговори по радионицама

Графички приказани резултати одговора илуструју да су фреквенције које потврђују став (*f = 187*)у погледу свих одговора, знатно веће од фреквенција добијених на нивое „делимично” (*f* = *30*) и „нимало” (*f* = *10*) (*Графикон 19*).

Израчунавањем χ2 теста за резултате добијене на тврдњуда су деца током игре подстакнута на сарадњу и кооперацију независно од времена реализације игре добијени су следећи резултати – на основу поређења израчунатог $\chi 2$ = 3,70 са граничним $\chi 2$ вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 2, може се закључити да не постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника у зависности од времена реализације радионице, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања од утврђених граничних вредности (*Табела 31*).

Табела 31Резултати χ2 теста – игра подстиче на сарадњу и колаборацију – варијабла редослед реализације игре

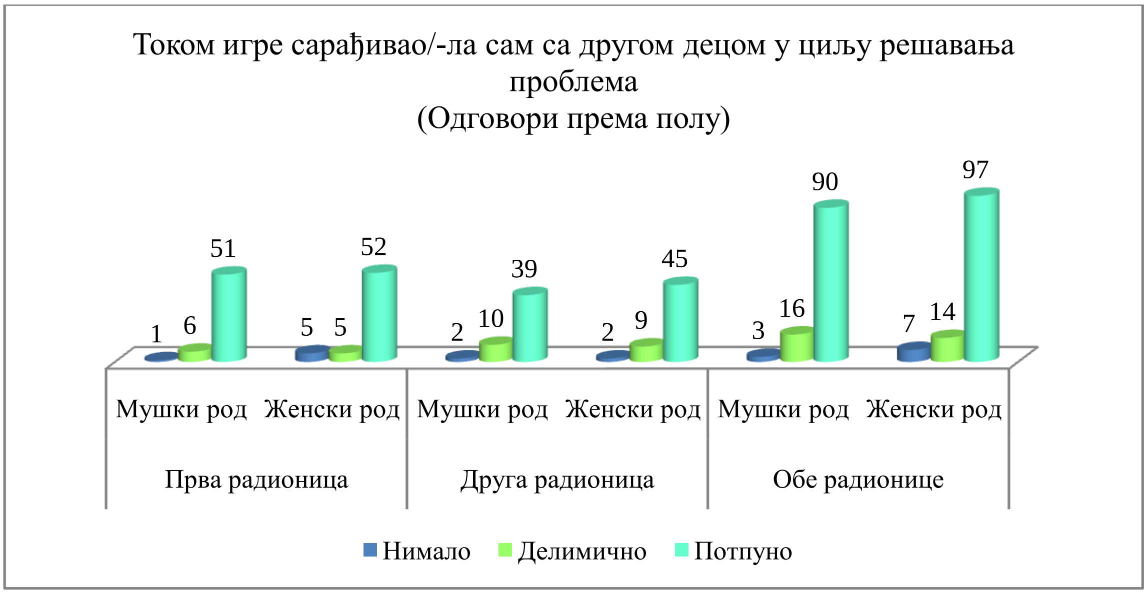
fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe-ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
6	5,28	0,72	0,51	0,09
11	15,85	-4,85	23,52	1,48
103	98,85	4,15	17,22	0,17
4	4,71	-0,71	0,50	0,10
19	14,14	4,86	23,61	1,67
84	88,14	-4,14	17,14	0,19
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			$\chi 2$ = 3,70

У циљу даљег доприноса спроведеном истраживању и потврђивању или оповргавању датог става, анализирани су одговори добијени од испитаника различитог пола (*Табела 32*). Резултати показују да су одговори и дечака и девојчица приближно једнаки у погледу процентуалних вредности не само након сваке од реализованих радионица, већ и у погледу одговора у целини. Чак 82,57% одговора дечака и 82,20% одговора девојчица износи позитиван став на тврдњу да их је реализована игра подстакла на сарадњу и кооперацију при решавању постављених задатака. Већи је проценат одговора девојчица (5,93%) у односу на одговоре дечака (2,75%) који подржава ниво „нимало” на скали процене, те указује да их игра није подстакла на сарадњу и кооперацију са другом децом. Међутим дати проценти су занемариво мањи у односу на процентуалне врендности нивоа „потпуно” скале процене.

Табела 32Током игре сарађивао/-ла сам са другом децом у циљу решавања проблема – одговори према полу испитаника

Током игре сарађивао/-ла сам са другом децом у циљу решавања проблема			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	1	6	51	58
		%	1,72	10,35	87,93	100
	Женски род	*f*	5	5	52	62
		%	8,06	8,06	83,88	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	2	10	39	51
		%	3,92	19,61	76,47	100
	Женски род	*f*	2	9	45	56
		%	3,57	16,07	80,35	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	3	16	90	109
		%	2,75	14,68	82,57	100
	Женски род	*f*	7	14	97	118
		%	5,93	11,87	82,20	100

Графички представљене фреквенције одговора за дату тврдњу указују да су и дечаци и девојчице потврдили став о потпуној сарадњи током игре чиме се доприноси потврђивању дефинисаног става, а тиме и потврђивању опште постављене хипотезе у погледу подстицања развоја социјалних вештина ученика (*Графикон 20*).



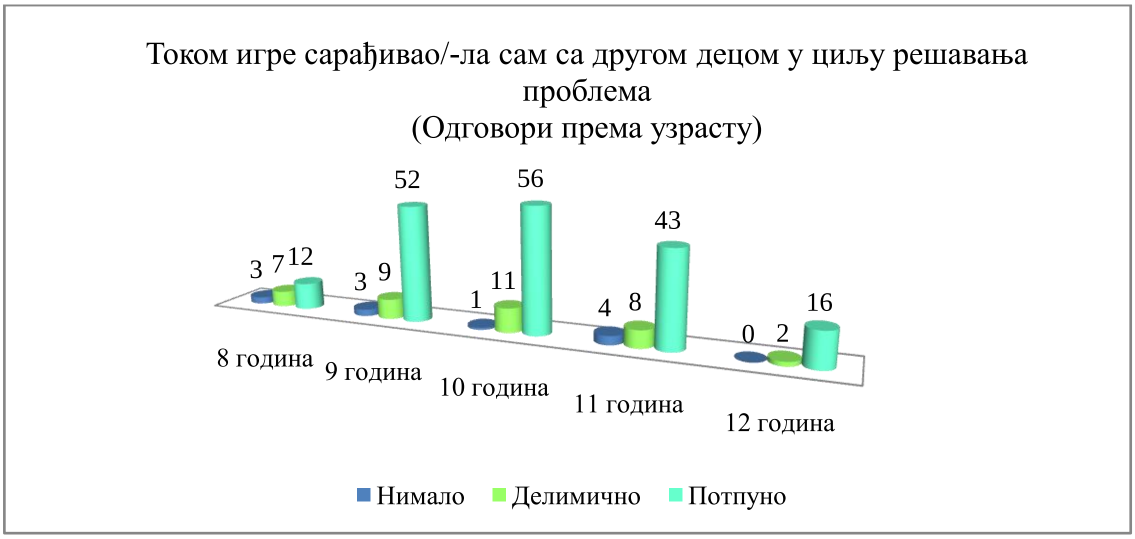
Графикон 20 Током игре сарађивао/-ла сам са другом децом у циљу решавања проблема – одговори према полу испитаника

Када је реч о узрасту испитаника најнижи проценат одговора који позитивно потврђује дату тврдњу уочава се код најмлађих испитаника (54,55%), док се код осталих узраста тај проценат креће између 78,00% и 88,00%, а највећи је код најстаријег узраста испитаника (88,88%) (*Табела 33*).

Табела 33Током игре сарађивао/-ла сам са другом децом у циљу решавања проблема – одговори према узрасту испитаника

Током игре сарађивао/-ла сам са другом децом у циљу решавања проблема		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	3	7	12	22
	%	13,63	31,82	54,55	100
Узраст 9 година	*f*	3	9	52	64
	%	4,69	14,06	81,25	100
Узраст 10 година	*f*	1	11	56	68
	%	1,47	16,18	82,35	100
Узраст 11 година	*f*	4	8	43	55
	%	7,27	14,55	78,18	100
Узраст 12 година	*f*	0	2	16	18
	%	0	11,12	88,88	100

Графички приказдобијених одговора илуструје да је без обзира на узраст испитаника највећа фреквенција одговора за ниво „потпуно” у датој скали процене, чиме се потврђује став да реализована игра доприноси сарадњи и колаборацији ученика и посматрано према узрасту ученика (*Графикон 2*1).



Графикон 21 Током игре сарађивао/-ла сам са другом децом у циљу решавања проблема – одговори према узрасту испитаника

Израчунавањем$\chi 2$ теста, у циљу утврђивања да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима ученика различитог узраста на тестирану тврдњу, добијени су следећи резултати – на основу поређења израчунатог $\chi 2$ = 12,53са граничним $\chi 2$ вредностима 15,507 на нивоу значајности 0.05 и 20,090 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 8може се закључити да не постоји статистички значајна разлика међу децом различитог узраста о ставу да ли игра подстиче на сарадњу са другом децом током реализације игре, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања од назначених граничних вредности (*Табела 34*).

На основу изложеног као и приказане анализе одговора испитаника и по радионицама и према полу испитаника, као и њиховог узраста, може се закључити да реализована математичко-музичка игра *Musical Monkeys* подстиче сарадњу међу децом при решавању постављених математичких и музичких задатака и проблема.

Табела 34Резултати χ2 теста – игра подстиче на сарадњу и колаборацију – варијабла узраст испитаника

fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe-ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
3	1,06	1,94	3,76	3,55
7	3,58	3,42	11,69	3,26
12	17,34	-5,34	28,51	1,64
3	3,10	-0,10	0,01	0,003
9	10,43	-1,43	2,04	0,19
52	50,46	1,54	2,37	0,05
1	3,29	-2,29	5,24	1,59
11	11,08	-0,08	0,0064	0,0005
56	53,62	2,38	5,66	0,10
4	2,66	1,34	1,79	0,67
8	8,96	-0,96	0,92	0,10
43	43,37	-0,37	0,13	0,003
0	0,87	-0,87	0,75	0,86
2	2,93	-0,93	0,86	0,29
16	14,19	1,81	3,27	0,23
∑*fe* = 227	∑*ft*= 227			χ2 = 12,53

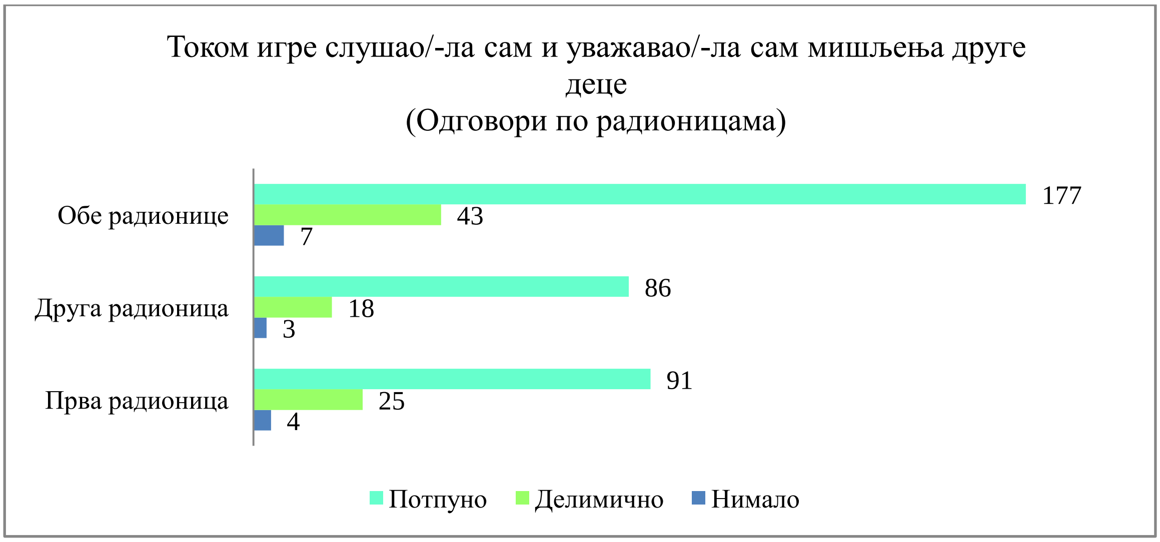
*У којој мери су деца уважавала и слушала мишљења друге деце током извођења математичко-музичке игре*Musical Monkeys, као и у којој мери је игра томе допринела, анализирано је како кроз тумачење одговора добијених након сваке појединачне реализације игре, тако и у погледу одговора у целини, одговора испитаника према полу и према узрасту.

Резултати одговора по радионицама показују да је математичко-музичка игра у највећој мери децу подстакла да слушају и уважавају мишљења друге деце чиме се истовремено подстиче и дечја међусобна толеранција. Свега 3,08% укупних одговора означило је да игра „нимало” не подстиче на међусобно слушање и уважавање, док 77,97% укупних одговора потврђује да игра „потпуно” доприноси подстицању међусобног слушања и уважавања. Одговори усмерени на ниво „делимично” обухватају 18,95% одговора (*Табела 35*).

Табела 35Током игре слушао/-ла сам и уважавао/-ла сам мишљења друге деце – одговори по радионицама

Током игре слушао/-ла сам и уважавао/-ла сам мишљења друге деце		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	4	25	91	120
	%	3,33	20,84	75,83	100
Друга радионица	*f*	3	18	86	107
	%	2,81	16,82	80,37	100
Обе радионице	*f*	7	43	177	227
	%	3,08	18,95	77,97	100

Графички представљени одговорипотврђују процентуално добијене резултате приказане и наведене у претходној табели. Од укупног броја добијених одговора након реализације истраживања (*f = 227*)сто седамдесет седам (*f =177*)потврђује ниво „потпуно” у скали процене, а свега седам (*f = 7*) испитаника потврђује ниво „нимало” на формираној скали процене (*Графикон 22*).



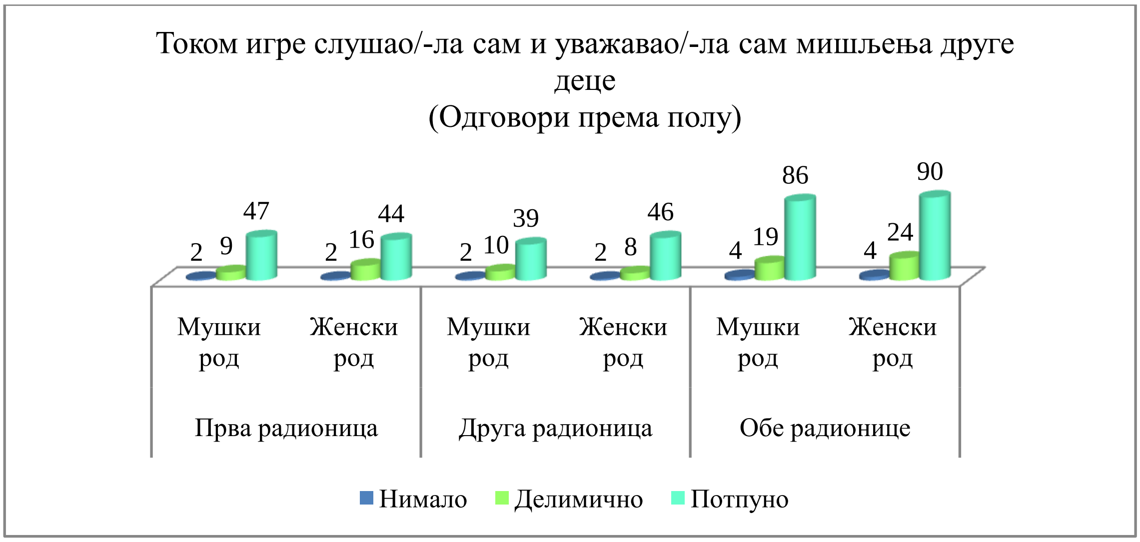
Графикон 22 Током игре слушао/-ла сам и уважавао/-ла сам мишљења друге деце – одговори по радионицама

Анализирајући одговоре према полу испитаника резултати показују да 79,82% испитаника мушког пола и 76,27% испитаника женског пола потврђује дати став о подстицању на уважавање и мишљење друге деце током реализације игре. Ниво „нимало” потврђује 2,75% дечака и 3,39% девојчица, чиме се без обзира на пол деце потврђује постављени став (*Табела 36*).

Табела 36Током игре слушао/-ла сам и уважавао/-ла сам мишљења друге деце – одговори према полу испитаника

Током игре слушао/-ла сам и уважавао/-ла сам мишљења друге деце			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	2	9	47	58
		%	3,45	15,52	81,03	100
	Женски род	*f*	2	16	44	62
		%	3,23	25,80	70,97	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	2	10	39	51
		%	3,92	19,61	76,47	100
	Женски род	*f*	2	8	46	56
		%	3,57	14,29	82,14	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	4	19	86	109
		%	2,75	17,43	79,82	100
	Женски род	*f*	4	24	90	118
		%	3,39	20,34	76,27	100

Графички приказ фреквенција из претходне табелеилуструје да фреквенције одговора за ниво „потпуно” доминирају у односу на друга два нивоа („делимично” и „нимало”), чиме се и даље потврђује постављени став (*Графикон 23*).



Графикон 23 Током игре слушао-/ла сам и уважавао/-ла сам мишљења друге деце – одговори према полу испитаника

Како би се потврдило да ли постоји или не статистички значајна разлика у одговорима деце према полу на став о подстицању на уважавање и слушање међусобног мишљењатоком реализоване игре, израчуната је вредност χ2 теста (*Табела 37*).

Табела 37Резултати χ2 теста – игра подстиче међусобно слушање и уважавање – варијабла редослед реализације игре

fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe-ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
4	3,84	0,16	0,02	0,006
19	20,64	-1,64	2,68	0,13
86	84,51	1,48	2,19	0,02
4	4,15	0,15	0,02	0,005
24	22,16	1,83	3,34	0,15
90	91,48	-1,48	2,19	0,02
∑*fe* = 227	∑*ft*= 227			χ2 = 0,33

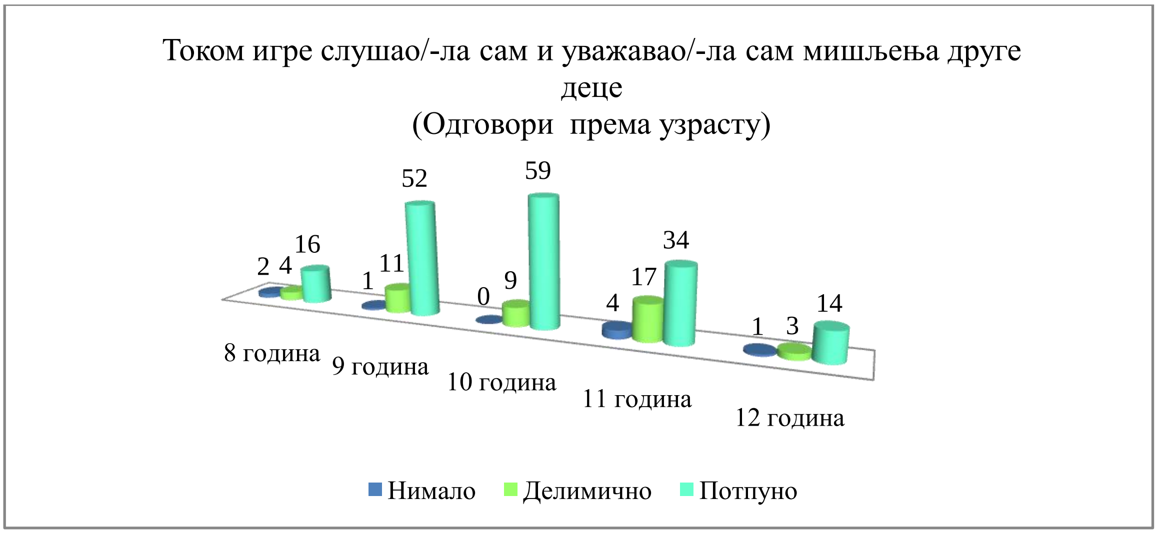
На основу поређења израчунатог χ2 = 0,33 са граничним χ2 вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе *df* = 2може се закључити да не постоји статистички значајна разлика у одговорима деце с обзиром на пол, односно да реализована игра подстиче на уважавање, толеранцију и међусобно слушање учесника игре, без утицаја варијабле која се односи на пол деце, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања од утврђених граничних вредности.

У анализи одговора деце према узрасту приказано процентуално (*Табела 38*) и фреквенцијски (*Грфикон 24*) постављени став се, такође, потврђује. Највећи проценат који потврђује постављену хипотезу уочава се код деце узраста десет година (86,77%) док је најмањи проценат (61,82%) код испитаника узраста једанаест година. Највећи проценат који указује да игра „нимало" не доприноси подстицању уважавања и мишљења друге деце присутан је код узраста од осам година – најмлађи испитаници (9,09%), док је најмањи проценат за исти ниво код деце узраста десет година (0,00%). Без обзира на процентуалне разлике у одговорима деце различитог узраста, сви добијени и анализирани одговори потврђују постављен став и присутни су уделом већим од 60,00% за сваки узраст.

Табела 38Током игре слушао/-ла сам и уважавао/-ла сам мишљења друге деце – одговори према узрасту испитаника

Током игре слушао/-ла сам и уважавао/-ла сам мишљења друге деце		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	2	4	16	22
	%	9,09	18,19	72,72	100
Узраст 9 година	*f*	1	11	52	64
	%	1,56	17,19	81,25	100
Узраст 10 година	*f*	0	9	59	68
	%	0	13,23	86,76	100
Узраст 11 година	*f*	4	17	34	55
	%	7,27	30,91	61,82	100
Узраст 12 година	*f*	1	3	14	18
	%	5,55	16,67	77,78	100

Графички приказ визуелно потврђује податке представљене у *Табели 38* и јасно показује да су фреквенције за све тестиране узрасте највеће за ниво „потпуно".



Графикон 24 Током игре слушао/-ла сам и уважавао/-ла сам мишљења друге деце – одговори према узрасту

Како би се утврдило да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима деце различитог узраста на дати став, односно да ли одговори деце зависе од узраста испитаника или од саме игре, израчуната је вредност χ2 теста на добијене резултате (*Табела 39*).

На основу поређења израчунатог χ2 = 14,14са граничним χ2 вредностима 15,507 на нивоу значајности 0.05 и 20,090 на нивоу значајности 0.01 за број степени слободе *df* = 8, може се закључити да не постоји статистички значајна разлика међу децом различитог узраста о ставу да игра подстиче на уважавање и мишљење друге деце у игри, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања од назначених граничних вредности.

Анализа и приказ добијених резултата потврђују постављени став – реализована математичко-музичка игра доприноси међусобном слушању и уважавању деце током игре, чиме се доприноси потврђивању постављене хипотезе истраживања.

Табела 39Резултати χ2 теста – игра подстиче међусобно слушање и уважавање – варијабла узраст испитаника

fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe - ft)^2$	$\frac{(fe - ft)^2}{ft}$
2	0,77	0,59	0,348	0,45
4	4,62	-0,62	0,38	0,08
16	16,96	-0,96	0,92	0,05
1	2,25	-1,25	1,56	0,70
11	12,40	-1,4	1,96	0,15
52	49,33	2,67	7,12	0,14
0	2,39	-2,39	5,71	2,39
9	13,18	-4,18	17,47	1,32
59	52,42	6,56	43,03	0,82
4	1,93	2,07	4,28	2,22
17	10,66	6,34	40,19	3,77
34	42,40	-8,4	70,56	1,66
1	0,63	0,37	0,13	0,21
3	3,48	-0,48	0,23	0,06
14	13,87	0,13	1,69	0,12
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			χ2 = 14,14

Посматрано према радионицама на основу добијених и анализираних одговоразакључује се да је *игра децу подстакла на тимски рад*. Од укупног броја добијених одговора 85,03% указује да игра у потпуности подстиче на тимски рад, а израчунати проценти, гледано по радионицама су веома слични – 83,34% одговора након прве и 86,92% одговора након друге радионице, који потврђују да реализована математичко-музичка игра подстиче на тимски рад (*Табела 40*).

Табела 40Током игре подстакнут/-та сам на тимски рад – одговори по радионицама

Током игре подстакнут/-та сам на тимски рад		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	2	18	100	120
	%	1,66	15,00	83,34	100
Друга радионица	*f*	1	13	93	107
	%	0,93	12,15	86,92	100
Обе радионице	*f*	3	31	193	227
	%	1,32	13,65	85,03	100

Графички представљени одговори по радионицама и у целини приказују добијене фреквенције одговора испитаника након сваке радионице и фреквенције свих добијених одговора спроведеног истраживања (*Графикон 25*). Са графикона се уочава да су фреквенције одговора највеће за ниво „потпуно”. Од укупно добијених фреквенција одговора након истраживања (*f = 227*)анализа одговора након обе реализације игре, показује да сто деведесет три одговора(*f = 193*) потврђује дати став, а тиме доприноси и потврђивању постављене хипотезе истраживања.

Графикон 25 Током игре подстакнут/-та сам на тимски рад – одговори по радионицама

Даљом анализом добијених података испитује се да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника након прве и након друге радионице, односно, да ли реализација игре утиче на одговоре испитаника или игра независно од реализације, по својој концепцији и садржини, подстиче на тимски рад и сарадњу приликом решавања постављених математичко-музичких задатака (*Табела 41*).

Табела 41Резултати χ2 теста – математичко-музичка игра подстиче тимски рад – варијабла редослед реализације игре

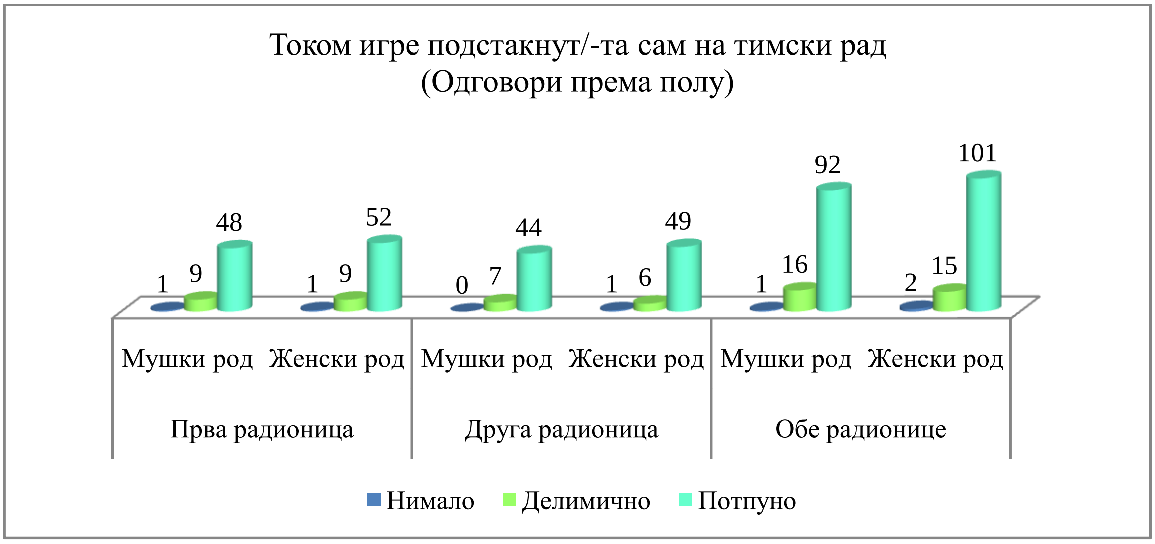
fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe-ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
2	1,58	0,42	0,17	0,11
18	16,38	1,62	2,62	0,16
100	85,02	14,62	213,74	2,51
1	1,41	-0,41	0,16	0,12
13	14,61	-1,61	2,59	0,17
93	90,97	2,03	4,12	0,04
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			$\chi2$ = 3,11

На основу поређења израчунатог $\chi2$ = 3,11 са граничним $\chi2$ вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01 за број степени слободе df = 2, може се закључити да не постоји статистички значајна разлика у одговорима ученика након обе реализације игре (с обзиром да је израчуната вредност *Хи-на квадрат теста* мања од утврђених граничних вредности), те да игра, својом концепцијом и организацијом подстиче на тимски рад.

Као и код анализе претходно дефинисаних тврдњи и за тврдњу која усмерава на тимски рад током игре истражени су и анализирани одговори испитаника гледано према полу и узрасту. Када је у питању узорак испитаника према полу, израчунате процентуалне вредности добијених одговора, показују да су деца, без обзира на пол, потврдила став о подстицању тимског рада кроз реализовану математичко-музичку игру. Одговори дечака, који потврђују дати став, присутни су у 84,40% укупних одговора, док је код девојчица тај проценат 85,60% (*Табела 42*).

Табела 42Током игре подстакнут/-та сам на тимски рад – одговори према полу испитаника

Током игре подстакнут/-та сам на тимски рад			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	1	9	48	58
		%	1,72	15,52	82,76	100
	Женски род	*f*	1	9	52	62
		%	1,61	14,52	83,87	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	0	7	44	51
		%	0	13,73	86,27	100
	Женски род	*f*	1	6	49	56
		%	1,79	10,71	87,50	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	1	16	92	109
		%	0,92	14,68	84,40	100
	Женски род	*f*	2	15	101	118
		%	1,69	12,71	85,60	100



Графикон 26 Током игре подстакнут/-та сам на тимски рад – одговори према полу испитаника

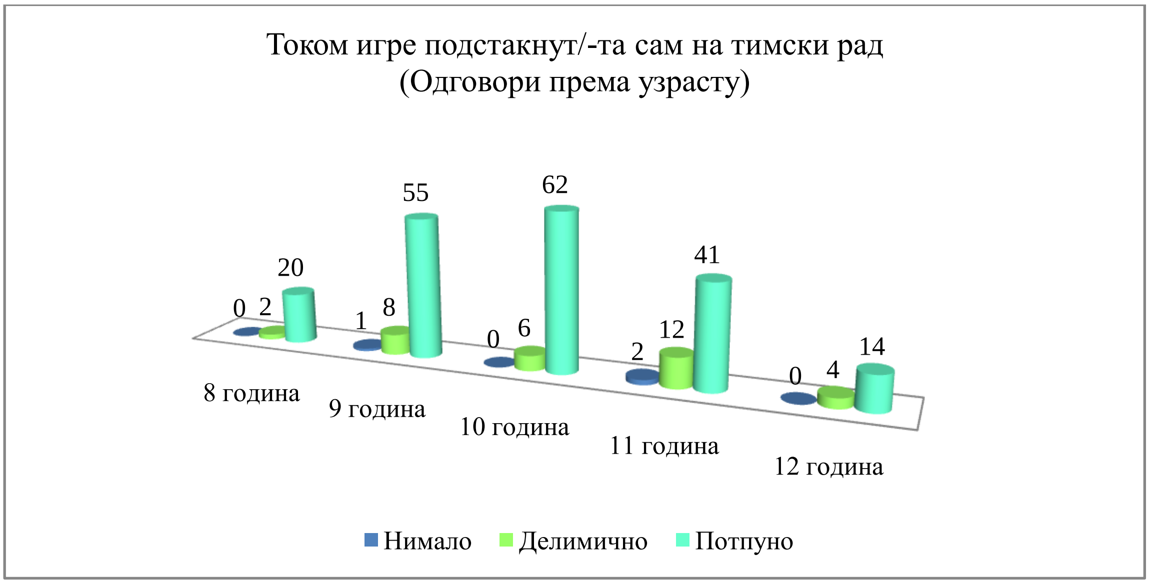
Фреквенције добијених одговора приказане су графички (*Графикон 26*). Са датог графикона уочава се да код оба пола испитаника, без обзира на реализацију игре доминирају фреквенције које потврђују степен процене „потпуно” када је у питању подстицање тимског рада током игре *Musical Monkeys*.

Анализа одговора испитаника различитог узраста доприноси даљем потврђивању поменутог става. Анализирани одговори приказани процентуално у погледу испитаника свих узраста, који потврђују ниво процене „потпуно” су изнад 75,00% од укупно добијених одговора(*игра потпуно подстиче на тимски рад*). Највећи проценат позитивних одовора уочава се код деце најмлађег узраста (99,10%) док је најмањи проценат за исти ниво процене, код деце најстаријег узраста (деца узраста једанаест – 77, 55% и дванаест година – 77, 77%). На основу тога може се извести закључак да са порастом узраста опада позитиван став да игра у потпуности подстиче на тимски рад, али се потврђивање датог става не доводи у питање, с обзиром да су процентуално израчунати одговори и најстаријих испитаника, веома високи када је у питању потврђивање датог става преко 77,00%. Интересантно је, међутим, да су испитаници најстаријег узраста, на ниво „нимало” (*игра нимало не подстиче тимски рад*), учествовали са 0,00% одговора, што је случај и када посматрамо процене испитаника узраста осам и десет година (*Табела 43*).

Табела 43Током игре подстакнут/-та сам на тимски рад – одговори према узрасту испитаника

Током игре подстакнут/-та сам на тимски рад		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	0	2	20	22
	%	0	9,09	99,10	100
Узраст 9 година	*f*	1	8	55	64
	%	1,56	12,50	85,94	100
Узраст 10 година	*f*	0	6	62	68
	%	0	8,83	91,17	100
Узраст 11 година	*f*	2	12	41	55
	%	3,64	21,81	74,55	100
Узраст 12 година	*f*	0	4	14	18
	%	0	22,23	77,77	100

Графички приказани резултати (фреквенције одгвора према узрасту) илуструју горе наведене резултате истраживања на тестирани став (*Графикон 27*).



Графикон 27 Током игре подстакнут/-та сам на тимски рад – одговори према узрасту испитаника

Математичко-музичка игра *Musical Monkeys* реализована је, током спроведеног истраживања као такмичарска игра. Игра се, пак, може играти самостално, уз вођство инструктора, у пару или по групама, али не мора искључиво бити такмичарског карактера. За реализацију спроведеног истраживања игра је реализована као такмичарска у циљу подстицања такмичарског духа код деце, додатне пажње, мотивације и активности у раду.

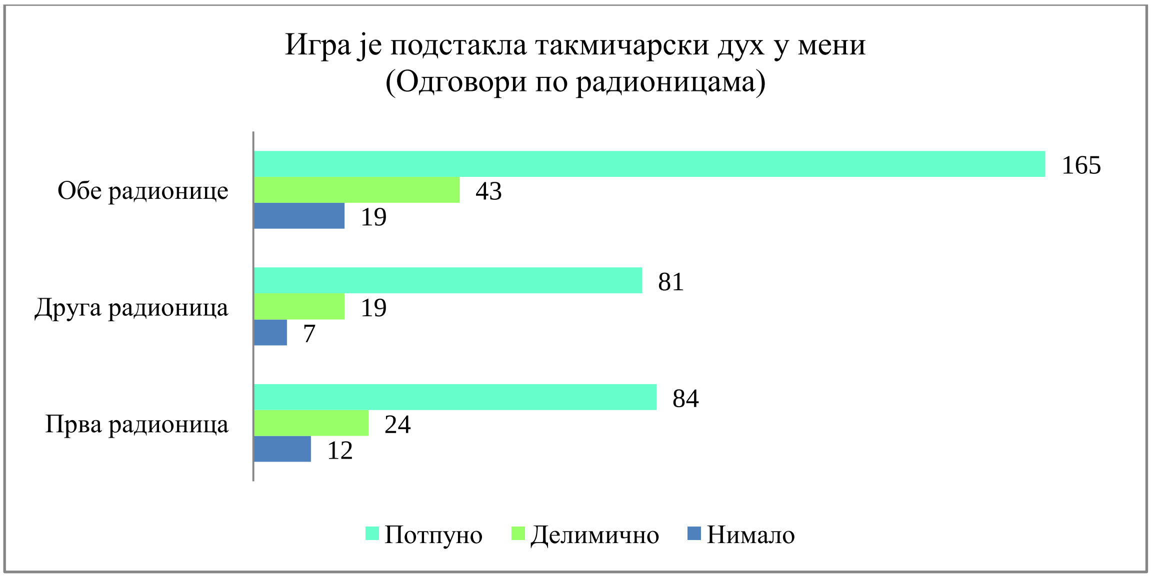
Резултати анализираних одговора испитаника након прве и друге реализације игре, као и одговора у целини показују да међу испитаницима доминира *позитиван став о подстицању такмичарског духа кроз реализовану игру*.

Резултати указују да 72,68% одговора од укупно добијених одговора истраживања након обе реализације игре, указује да игра подстиче такмичарски дух, 18,94% одговора потврђује степен процене „делимично” (игра делимично подстиче такмичарски дух), док се 8,37% одговора односи на став да реализована игра не подстиче такмичарски дух (*Табела 44*).

Табела 44Игра је подстакла такмичарски дух у мени – одговори по радионицама

Игра је подстакла такмичарски дух у мени		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	12	24	84	120
	%	10,00	20,00	70,00	100
Друга радионица	*f*	7	19	81	107
	%	6,54	17,76	75,70	100
Обе радионице	*f*	19	43	165	227
	%	8,37	18,94	72,68	100

Интересантно је да је проценат одговора који потврђује да игра у потпуности подстиче такмичарски дух већи након друге реализације игре (75,75%) у односу на одговоре дате након прве реализације игре (70,00%), док се сукцесивно смањује проценат одговора на нивое процене „делимично” и „нимало”. На основу изложеног може се закључити да су испитаници током друге реализације игре били сигурнији у правила, концепцију, начине решавања постављених задатака, а тиме се и више усмерили ка освајању игре и могућој победи у игри.



Графикон 28 Игра је подстакла такмичарски дух у мени – одговори по радионицама

Графички приказане фреквенције одговора испитаника, илуструју да од укупног броја добијених одговора (*f = 227*) сто шездесет и пет одговора (*f = 165*) потврђује да игра у потпуности подстиче такмичарски дух, а свега деветнаест одговора, да игра „нимало” не доприноси подстицању такмичарског духа (f = *19*) (*Графикон 28*).

Да би се показало да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника након прве и друге реализације игре, током анализе резултата, утврђена је вредност χ2теста на добијене одговоре. На основу поређења израчунатог χ2 = 1,18 са граничним χ2 вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 2, може се закључити да не постоји статистички значајна разлика у одговорима ученика у зависности од времена реализације игре односно, да независно од реализације игре, испитаници потврђују да игра подстиче такмичарки дух (израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања је од утврђених граничних вредности) (*Табела 45*).

Табела 45Резултат χ2 теста – игра подстиче такмичарски дух код деце – варијабла редослед реализације игре

fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe-ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
12	10,04	1,96	3,84	0,38
24	22,73	1,27	1,61	0,07
84	87,22	-3,22	10,36	0,11
7	8,95	-1,95	3,80	0,42
19	20,26	-1,26	1,58	0,07
81	77,77	3,23	10,43	0,13
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			χ2 = 1,18

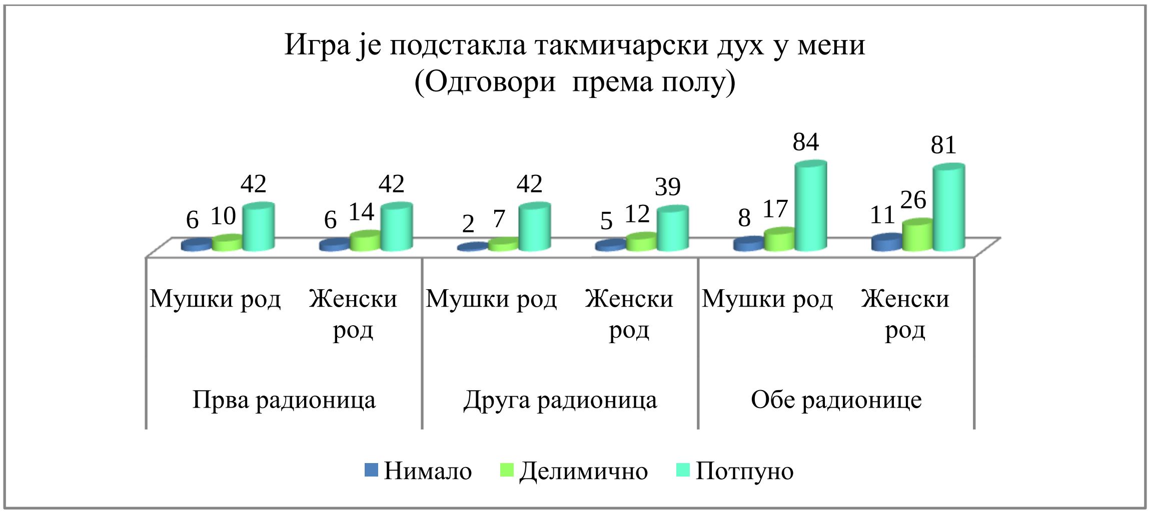
Израчунате процентуалне вредности одговора указују да су испитаници мушког пола у већем проценту потврдили ниво „потпуно” у скали процене (77,06%) у односу на испитанике женског пола (68,64%). Иста расподела мишљења уочава се и када посматрамо одговоре испитаника након прве (дечаци – 72,41%, девојчице – 67,74%) и након друге реализације игре (82,35% одговора дечаци, односно 69,64% одговора девојчице) (*Табела 46*).

Како процентуалне вредности одговора оба пола испитаника за ниво „потпуно” на скали проценепрелазе 65,00% укупних одговора постављен став о подстицању такмичарског духа се може потврдити. Томе доприноси и 22,04% одговора усмерених на ниво „делимично” и свега 9,32% одговора, који указују да реализована игра „нимало” не подстиче такмичарски дух.

Табела 46Игра је подстакла такмичарски дух у мени – одговори према полу испитаника

Игра је подстакла такмичарски дух у мени			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	6	10	42	58
		%	10,35	17,24	72,41	100
	Женски род	*f*	6	14	42	62
		%	9,68	22,58	67,74	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	2	7	42	51
		%	3,92	13,73	82,35	100
	Женски род	*f*	5	12	39	56
		%	8,93	21,43	69,64	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	8	17	84	109
		%	7,34	15,60	77,06	100
	Женски род	*f*	11	26	81	118
		%	9,32	22,04	68,64	100

Без обзира на разлику приказану у процентима када се говори о одговорима дечака и девојчица на разматрани став графички приказ фреквенција потврђује да су испитаници оба пола, независно од реализације игре потврдили став да игра доприноси подстицању такмичарског духа (*Графикон 29*).

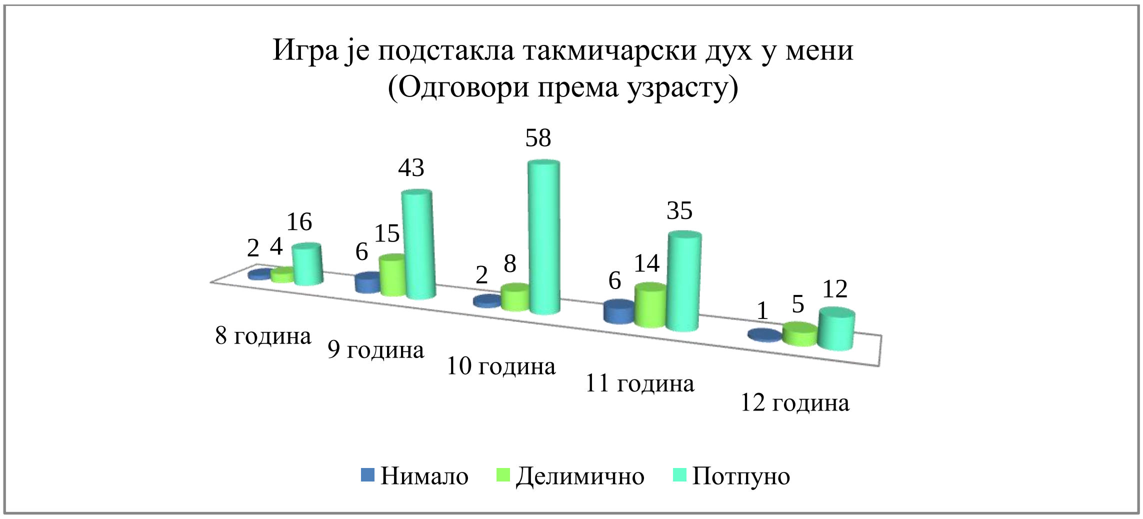


Графикон 29 Игра је подстакла такмичарски дух у мени – одговори према полу испитаника

Даљи ток истраживања усмерен је на анализу одговора испитаника различитог узраста на дати став. Добијене процентуалне и фреквенцијске вредности одговораиспитаника свих узраста указују да је највећи проценат/фреквенција одговора испитаника усмерен на ниво „потпуно”(*Табела 47*).

Табела 47Игра је подстакла такмичарски дух у мени – одговори према узрасту испитаника

Игра је подстакла такмичарски дух у мени		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	2	4	16	22
	%	9,09	18,18	72,73	100
Узраст 9 година	*f*	6	15	43	64
	%	9,38	23,44	67,18	100
Узраст 10 година	*f*	2	8	58	68
	%	2,94	11,76	85,30	100
Узраст 11 година	*f*	6	14	35	55
	%	10,90	25,46	63,64	100
Узраст 12 година	*f*	1	5	12	18
	%	5,55	27,78	66,67	100



Графикон 30 Игра је подстакла такмичарски дух у мени – одговори према узрасту испитаника

Највећи проценат одговора, који потврђује поменути ниво процене, уочава се код испитаника узраста десет година (85,30%), а најмањи код испитаника узраста једанаест година (63,64%). Графички приказ добијених одговора илуструје да су одговори код испитаникасвих узраста, фреквенцијски највећи за ниво „потпуно” на скали процене, чиме се став о подстицању на тимски рад кроз игру *Musical Monkeys*потврђује и у погледу узраста испитаника (*Графикон 30*).

Израчунавањем врености $\chi 2$ теста, и поређењем добијене вредности $\chi 2$ = 9,5 са граничним $\chi 2$ вредностима 15,507 на нивоу значајности 0.05 и 20,090 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе *df* = 8, може се закључити да не постоји статистички значајна разлика међу децом различитог узраста о ставу да игра подстиче такмичарски дух, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања од назначених граничних вредности. Без обзира на узраст испитаници потврђују постављени став и тиме доприносе потврђивању опште хипотезе истраживања.

Табела 48Резултати χ2 теста – игра подстиче такмичарски дух код деце – варијабла узраст испитаника

fe	ft	$(fe-ft)$	$(fe-ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
2	1,64	0,36	0,13	0,07
4	4,45	0,45	0,20	0,04
16	15,89	0,11	0,01	0,0006
6	4,79	1,21	1,46	0,30
15	12,96	2,04	4,16	0,32
43	46,23	-3,23	10,43	0,22
2	5,09	-3,09	9,54	1,87
8	13,77	5,77	33,29	2,41
58	49,12	-8,8	77,44	1,57
6	4,11	-1,88	3,53	0,85
14	11,14	2,86	8,17	0,73
35	39,73	4,73	22,37	0,56
1	1,34	-0,34	0,11	0,01
5	3,64	1,36	1,84	0,50
12	13.00	1	1	0,07
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			χ2 = 9,50

Да ли је и у којој мери током математичко-музичке игре *Musical Monkeys*подстакнута комуникација између учесника у игри, као и између учесника и водитеља игре, указаће резултати добијени на следеће две постављене тврдње истраживања:

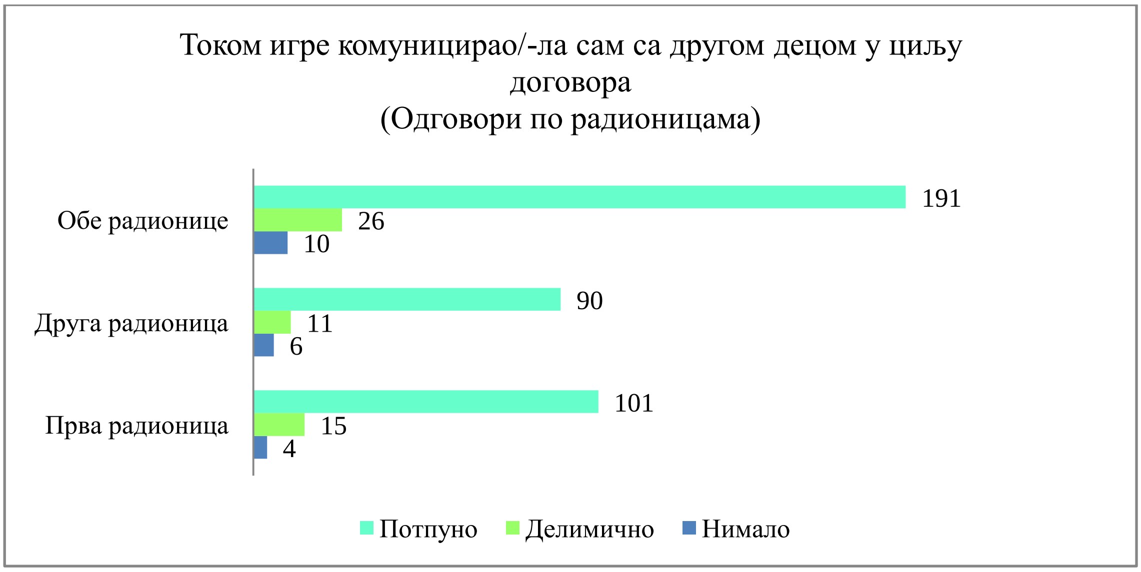
– *током игре комуницирао/-ла сам са другом децом у циљу договора;*
– *током игре комуницирао/-ла сам са водитељима игре.*

Према добијеним резултатима комуникација међу учесницима била је на високом нивоу с обзиром да 84,14% одговора указује да је током игре у потпуности била подстакнута комуникација међу децом у циљу договора и заједничког решавања постављених задатака. Према резултатима представљеним у табели процентуалне вредности одговора након прве (84,16%), након друге радионице (84,12%), као и након анализе свих добијених одговора (84,14%) су приближно једнаке и веома високе за ниво процене „потпуно”, што води ка потврђивању постављеног става (*Табела 49*).

Табела 49Током игре комуницирао/-ла сам са другом децом у циљу договора – одговори по радионицама

Током игре комуницирао/-ла сам са другом децом у циљу договора		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	4	15	101	120
	%	3,34	12,50	84,16	100
Друга радионица	*f*	6	11	90	107
	%	5,60	10,28	84,12	100
Обе радионице	*f*	10	26	191	227
	%	4,41	11,45	84,14	100

У складу са процентуално приказаним одговорима и фреквенције одговора након обе реализације игре, као и након сумирања целокупних резултата, потврђују постављен став и указују да је математичко-музичка игра подстицала учеснике на међусобну конструктивну комуникацију, а уједно и развој комуникацијских вештина деце (*Графикон 31*).



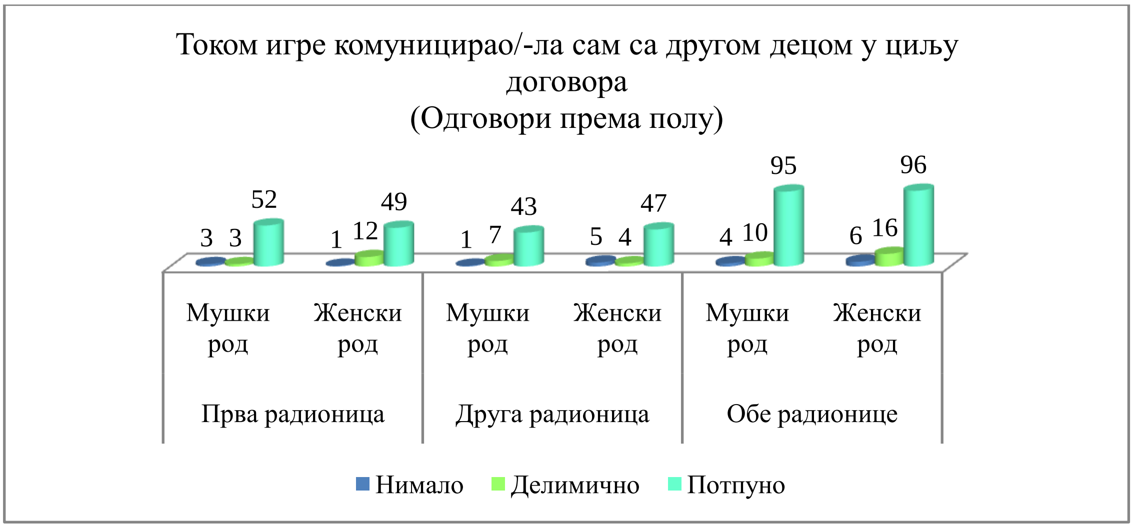
Графикон 31 Током игре комуницирао/-ла сам са другом децом у циљу договора – одговори по радионицама

Анализа резултата одговора испитаника различитог пола указује да је реализована игра у значајној мери подстицала на конструктивну комуникацију међу учесницима игре (87,16% мушки род и 81,37% одговора, женски род). Највећи проценат одговора на ниво „нимало” уочава се код девојчица након реализације друге радионице (8,93%). Такође, посматрајући одговоре у целини, испитаници женског пола су дали већи удео одговора на ниво „нимало” (5,08%) за дату тврдњу, у односу на испитанике мушког пола (3,67%) (*Табела 50*).

Табела 50Током игре комуницирао/-ла сам са другом децом у циљу договора – одговори према полу испитаника

Током игре комуницирао/-ла сам са другом децом у циљу договора			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	3	3	52	58
		%	5,17	5,17	89,66	100
	Женски род	*f*	1	12	49	62
		%	1,61	19,36	79,03	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	1	7	43	51
		%	1,96	13,73	84,31	100
	Женски род	*f*	5	4	47	56
		%	8,93	7,14	83,93	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	4	10	95	109
		%	3,67	9,17	87,16	100
	Женски род	*f*	6	16	96	118
		%	5,08	13,56	81,36	100

Са графикона фреквенција који приказује добијене и анализиране одговоре према полу испитаника, уочава седа без обзира на пол испитаника највећа фреквенција одговора оба пола потврђује да игра доприноси подстицању конструктивне комуникације (фреквенције за ниво „потпуно” доминантне су у односу на друга два нивоа процене – нивое „делимично” и „нимало”) (*Графикон 32*).

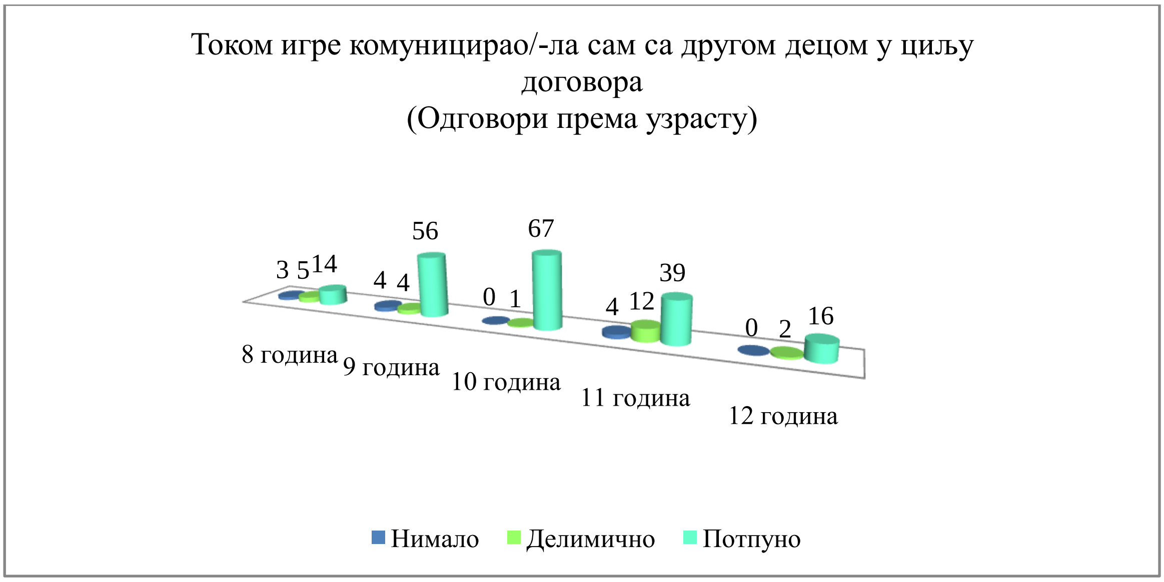


Графикон 32 Током игре комуницирао/-ла сам са другом децом у циљу договора –одговори према полу испитаника

Анализа одговора испитаника различитог узраста указује да најмлађи испитаници у најмањем броју одговора наводе да игра подстиче на комуникацију (63,64%). Остали узрасти ниво „потпуно" потврђују са преко 70,00% одговора, а највећи проценат се уочава код испитаника узраста десет година (98,53%) (*Табела 51*).

Табела 51Током игре комуницирао/-ла сам са другом децом у циљу договора – одговори према узрасту испитаника

Током игре комуницирао/-ла сам са другом децом у циљу договора		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	3	5	14	22
	%	13,64	22,72	63,64	100
Узраст 9 година	*f*	4	4	56	64
	%	6,25	6,25	87,50	100
Узраст 10 година	*f*	0	1	67	68
	%	0	1,47	98,53	100
Узраст 11 година	*f*	4	12	39	55
	%	7,27	21,82	70,91	100
Узраст 12 година	*f*	0	2	16	18
	%	0	11,12	88,88	100



Графикон 33 Током игре комуницирао-/ла сам са другом децом у циљу договора –одговори према узрасту испитаника

Графички представљене фреквенције за став – *током игре комуницирао/-ла сам са другом децом у циљу решавања проблема* – показују да су фреквенције код испитаника за ниво „потпуно” изнад фреквенција за друга два нивоа скале процене („делимично” и „нимало”) што потврђује дефинисани став посматрано и са аспекта узраста испитаника (*Графикон 33*).

У циљу утврђивања да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима/проценама испитаника различитог узраста на дату тврдњу, односно да ли узраст испитаника утиче на добијене резултате, израчуната је вредност χ2 теста (*Табела 52*).

На основу поређења израчунатог χ2 = 28,54 са граничним χ2 вредностима 15,507 на нивоу значајности 0.05 и 20,090 на нивоу значајности 0.01 за број степени слободе *df* = 8, може се закључити да узраст испитаника утиче на процену става, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* већа од назначених граничних вредности. Међутим и поред утврђене статистички значајне разлике у одговорима испитаника различитог узраста, с обзиром да су одговори свих узраста у мањој или већој мери, у највећем проценту потврдили ниво процене „потпуно”, став о подстицању међусобне комуникације остаје потврђен и са аспекта узраста испитаника.

Табела 52Резултати χ2 теста – игра је подстакла комуникацију међу децом у циљу договора – варијабла узраст испитаника

fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe - ft)^2$	$\frac{(fe - ft)^2}{ft}$
3	1,06	1,94	3,76	3,55
5	2,32	2,67	7,12	3,06
14	18,60	-4,60	21,16	1,13
4	3,10	0,90	0,81	0,26
4	6,76	-2,76	7,61	1,12
56	54,13	1,87	3,49	0,06
0	3,29	-3,29	10,82	3,28
1	7,18	-6,18	38,19	5,31
67	57,51	9,48	89,87	1,56
4	2,66	1,33	1,76	0,66
12	5,81	6,18	38,19	6,57
39	46,51	-7,51	56,40	1,21
0	0,87	-0,87	0,75	0,86
2	1,90	0,10	0,01	0,005
16	15,22	0,77	0,59	0,03
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			χ2 = 28,54

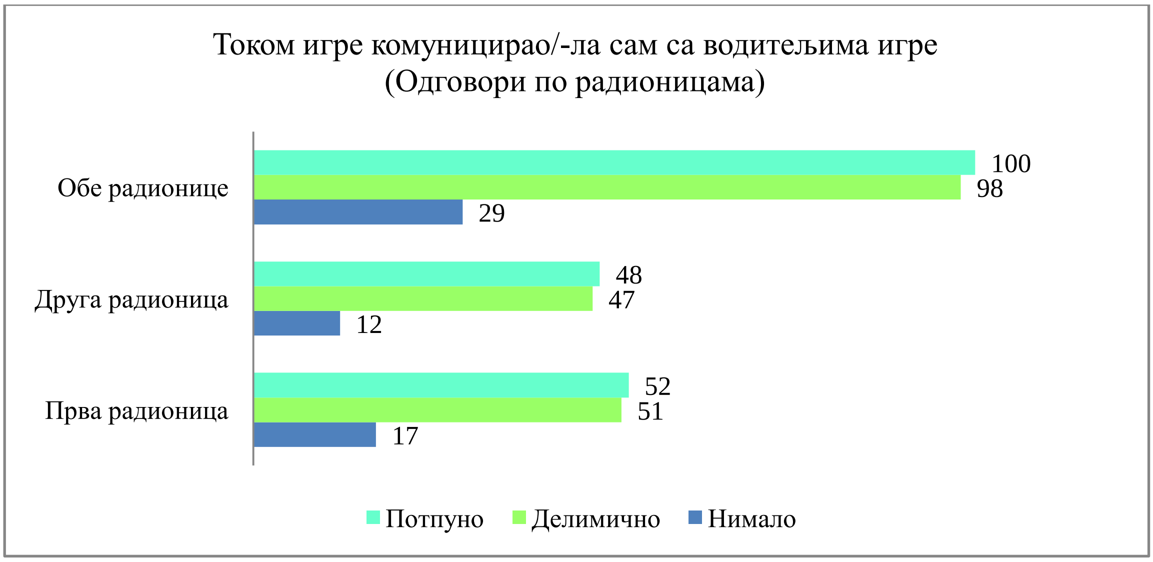
На основу података приказаних након реализоване технике посматрања уочава се да је комуникација учесника са водитељима игре била присутна код објашњавања правила игре, постављања задатака и захтева, појашњавања правила, постављања појединих питања око нејасноћа и добијања одговора, као и разговора током провере тачности решених математичких и музичких задатака. Континуиране комуникације (каква је владала међу учесницима игре у циљу сарадње и заједничког решења задатака) није било, али комуникација са водитељима игре, на одређеном нивоу, ипак није изостала.

Сличне резултате уочавамо и након спроведене технике скалирања. Посматрајући одговоре испитаника након радионица и одговора анализираних у целини, уочава се да између 43,00% и 44,00% одговора потврђује ниво „потпуно”. Иако веома низак проценат одговорау односу на до сада анализиране ставове истраживања истиче да је и код нивоа „делимично” присутан сличан проценат – између 42,00% и 43,00%, док је за ниво „нимало” проценат добијених одговора између 11,00% и 14,00% (*Табела 53*). Разматрајући добијене резултате, дефинисани став се потврђује, односно, може се закључити да игра доприноси комуникацији између учесника и водитеља игре, али да та комуникација није изражена на високом нивоу.

Табела 53Током игре комуницирао/-ла сам са водитељима игре – одговори по радионицама

Током игре комуницирао/-ла сам са водитељима игре		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	17	51	52	120
	%	14,16	42,50	43,34	100
Друга радионица	*f*	12	47	48	107
	%	11.22	43,93	44,85	100
Обе радионице	*f*	29	98	100	227
	%	12,77	43,18	44,05	100

Графички приказано јасно се уочава да ниво „делимично” и ниво „потпуно”иду „раме уз раме” односно, да је незнатна разлика уколико се сагледавају фреквенције одговора на задати став – ниво „потпуно”$f = 100$; ниво „делимично”$f = 98$. Фреквенције одговора које указују да игра не доприноси комуникацији између водитеља и учесника је $f = 29$, што је до сада највећа фреквенција одговора за ниво „нимало” у односу на претходно анализиране ставове, али недовољно велика фреквенција, да би оповргла дефинисани став (*Графикон 34*).



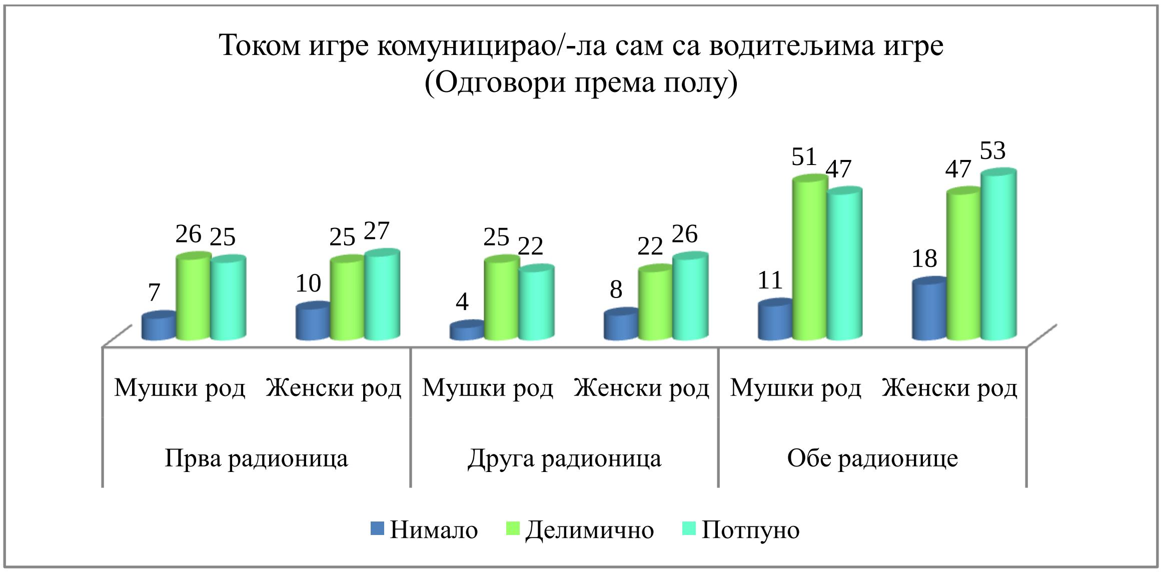
Графикон 34 Током игре комуницирао/-ла сам са водитељима игре – одговори по радионицама

Испитаници мушког пола потврђују да игра подстиче комуникацију са водитељима игре у 43,12% одговора. Процену нивоа „делимично” испитаници мушког пола потврђују са 46,79% одговора, док за ниво процене „нимало” наводе свега 10,09% одговора. Када посматрамо одговоре испитаника женског пола, уочава се да ниво „потпуно” потврђује 44,92%, ниво „делимично”39,83% одговора, док ниво „нимало”15,25% одговора испитаника. На основу изложеног потврђује се да испитаници женског пола у већој мери процењују да је током игре подстицана комуникација са водитељима игре у односу на испитанике мушког пола. У раскораку са тим, испитаници женског пола и на ниво процене „нимало” дају већи проценат одговора, у односу на испитанике мушког пола (*Табела 54*).

Добијени подаци представљени графички, показују да су испитаници оба пола дату тврдњу у највећој мери проценили кроз нивое „делимично” и „потпуно”, с тим да се са датог графикона уочава да је код испитаника мушког пола фреквенцијски већи ниво „делимично”, у односу на ниво процене „потпуно” док је, посматрано на узорак испитаника женског пола, ситуација обрнута (*Графикон 35*).

Табела 54Током игре комуницирао/-ла сам са водитељима игре – одговори према полу испитаника

Током игре комуницирао/-ла сам са водитељима игре			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	7	26	25	58
		%	12,07	44,83	43,10	100
	Женски род	*f*	10	25	27	62
		%	16,13	40,33	43,54	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	4	25	22	51
		%	7,84	40,02	43,14	100
	Женски род	*f*	8	22	26	56
		%	14,29	39,29	46,42	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	11	51	47	109
		%	10,09	46,79	43,12	100
	Женски род	f	18	47	53	118
		%	15,25	39,83	44,92	100



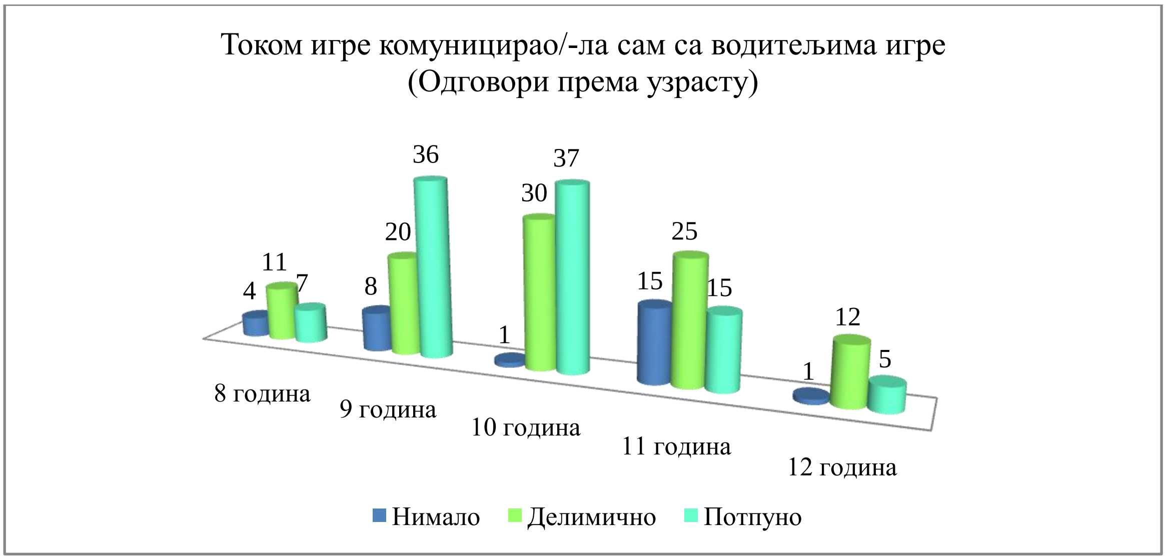
Графикон 35 Током игре комуницирао/-ла сам са водитељима игре – одговори према полу испитаника

Анализа одговора добијених од испитаника различитог узраста остаје умногоме доследна до сада добијеним резултатима анализираним на основу одговора по радионицама и одговорима добијеним у зависности од пола испитаника. Испитаници најмлађег узраста у 50,00% одговора указују да игра „делимично” доприноси комуникацији са водитељима игре, а исти проценат одговора најмлађих испитаника подељен је на нивое „потпуно” – 31,82% и „нимало” – 18,18%. Испитаници узраста девет и десет година са преко 50,00% одговора потврђују да је кроз игру потпуно присутна комуникација са водитељима игре – 56,25%, испитаници узраста девет година,54,41% испитаници узраста десет година. Насупрот томе најстарији испитаници са најмањим процентом одговора потврђују ниво процене „потпуно” – 27,27%, испитаници узраста једанаест година и 27,28%, испитаници узраста дванаест година. Са друге стране најстарији испитаници у највећем проценту одговора учествују на потврђивање нивоа процене „делимично” – 45,46%, испитаници једанаест година и 66,66% најстарији испитаници (*Табела 55*).

Табела 55Током игре комуницирао/-ла сам са водитељима игре – одговори према узрасту испитаника

Током игре комуницирао/-ла сам са водитељима игре		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	4	11	7	22
	%	18,18	50.00	31,82	100
Узраст 9 година	*f*	8	20	36	64
	%	12,50	31,25	56,25	100
Узраст 10 година	*f*	1	30	37	68
	%	1,47	44,12	54,41	100
Узраст 11 година	*f*	15	25	15	55
	%	27,27	45,46	27,27	100
Узраст 12 година	*f*	1	12	5	18
	%	5,56	66,66	27,78	100

Графички приказ добијених одговора према узрасту испитаника показује веома ниске фреквенције одговора за ниво процене „нимало” код испитаника узраста девет, десет и дванаест година, али и потврђује да су код свих тестираних узраста одговори на овај ниво процене најмањи (*Графикон 36*).



Графикон 36 Током игре комуницирао/-ла сам са водитељима игре – одговори према узрасту испитаиника

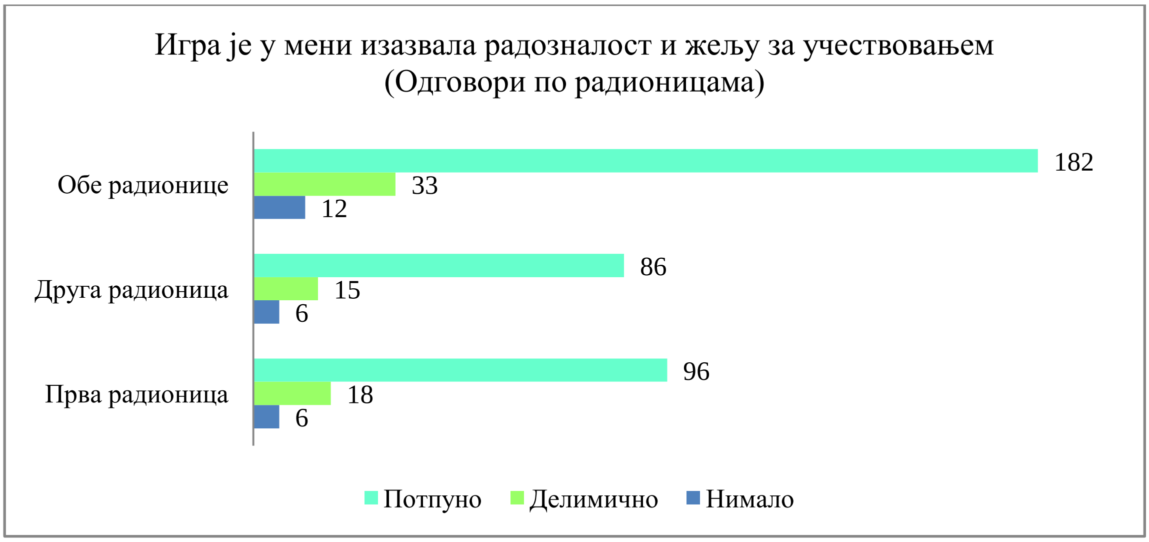
На основу свега изложеног, као и на основу изразито ниских фреквенција на ниво процене „нимало” у анализи ставова испитаника усмерених на тврдњу – *током игре комуницирао/-ла сам са водитељима игре* – постављена тврдња се потврђује и уједно доприноси потврђивању постављене хипотезе истраживања.

Када нека наставна или ненаставна активност, радионица или игра у раду са децом изазове радозналост и подстакне жељу за учествовањем, свакако се говори о подстицању емотивних вештина и емотивног развоја деце кроз игру и савладавање одређених садржаја. Један од ставова који је обухваћен спроведеним истраживањем је истав који треба да укаже *да ли је и у којој мери реализована игра подстакла код испитаника радозналост и жељу за учествовањем у игри.*

Посматрано по радионицма и одговорима датим у целини реализована игра у преко осамдесет одсто одговора „потпуно” подстиче дечју радозналост и жељу за учествовањем. Уколико се том проценту додају и проценти који говоре о „делимично” подстакнутој радозналости и жељи за учествовањем, долази се до податка да више од 90,00% одговора испитаника потврђује став да реализована игра, у мањој или већој мери, подстиче радозналост и жељу за учествовањем (*Табела 56*).

Табела 56Игра је у мени изазвала радозналост и жељу за учествовањем – одговори по радионицама

Игра је у мени изазвала радозналост и жељу за учествовањем		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	6	18	96	120
	%	5.00	15.00	85.00	100
Друга радионица	*f*	6	15	86	107
	%	5,61	14,02	80,37	100
Обе радионице	*f*	12	33	182	227
	%	5,28	14,54	80,18	100



Графикон 37 Игра је у мени изазвала радозналост и жељу за учествовањем – одговори по радионицама

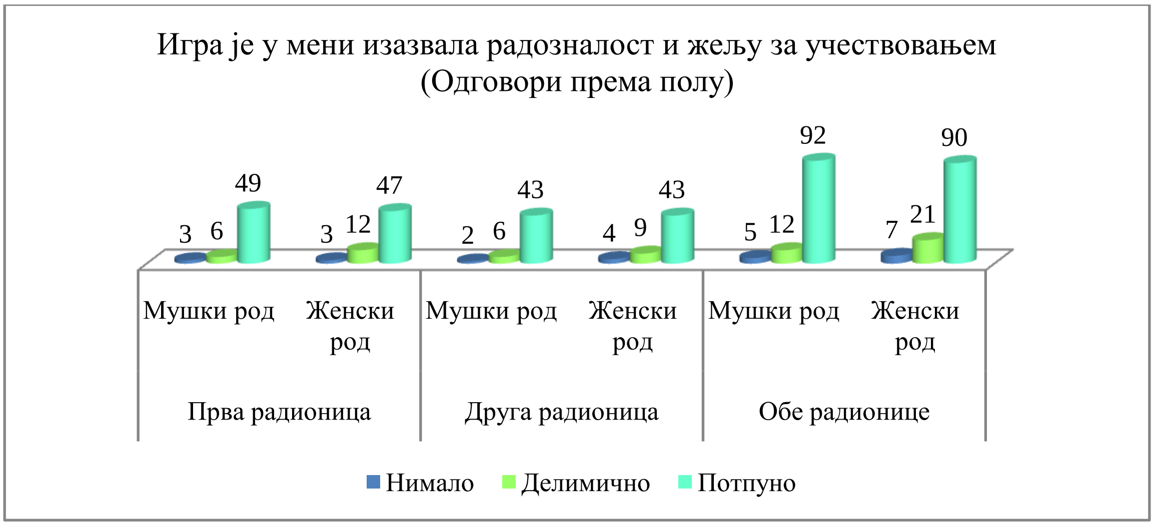
Графички приказане фреквенције одговора по радионицама и у целини показују и потврђују да је навећи број одговора позитиван и да потврђује постављени став. Од укупне фреквенције (*f = 227*) чак сто осамдесет два одговора указује на ниво „потпуно” (*f = 182*), тридесет три на ниво „делимично”(*f = 33*), а свега дванаест одговора на ниво процене „нимало” (*f = 12*) (*Графикон 37*).

Анализа одговора у погледу испитаника различитог пола презентује следеће резултате – незнатно већи број одговора испитаника мушког пола (84,40%) у односу на одговоре испитаника женског пола (76,27%) позитивно оцењује постављени став о подстицању радозналости и даље дечје жеље за учествовањем у математичко-музичкој игри (*Табела 57*).

Табела 57Игра је у мени изазвала радозналост и жељу за учествовањем – одговори према полу испитаника

Игра је у мени изазвала радозналост и жељу за учествовањем			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	3	6	49	58
		%	5,17	10,45	84,48	100
	Женски род	*f*	3	12	47	62
		%	4,85	19,35	75,80	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	2	6	43	51
		%	3,92	11,76	84,32	100
	Женски род	*f*	4	9	43	56
		%	7,15	16,07	76,78	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	5	12	92	109
		%	4,59	11,01	84,40	100
	Женски род	*f*	7	21	90	118
		%	5,93	17,80	76,27	100

Добијени одговори посматрано према полу испитаника и изражени кроз фреквенције приказани су графички (*Графикон 38*). Са приказаног графикона уочава се да без обзира на пол, као и на редослед извођења математичко-музичке игре доминирају фреквенције које потврђују ниво процене „потпуно”, чиме потврђују да је реализована математичко-музичка игра код испитаника оба пола подстакла радозналост и жељу за учествовањем.



Графикон 38 Игра је у мени изазвала радозналост и жељу за учествовањем – одговори према полу испитаника

У циљу утврђивања да ли постоји статистички значајна разлика у проценама испитаника различитог пола на дати став, израчуната је вредност χ2 теста (*Табела 58*).

Табела 58Резултат χ2 теста – игра доприноси радозналости и жељи за учествовањем – варијабла пол испитаника

fe	*ft*	(*fe* – *ft*)	$(fe - ft)^2$	$\frac{(fe - ft)^2}{ft}$
5	5,76	-0,76	0,57	0,10
12	15,84	-3,84	14,74	0,93
92	87,39	4,61	21,25	0,24
7	6,23	0,77	0,59	0,09
21	17,15	3,85	14,82	0,86
90	94,60	-4,6	21,16	0,22
∑*fe* = 227	∑*ft*= 227			χ2 = 2,44

На основу поређења израчунатог χ2 = 2,44 са граничним χ2 вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе *df* = 2, може се закључити да независно од пола испитаника игра својом динамиком, садржином и концептом подстиче радозналост и жељу за даљим учествовањем, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања од утврђених граничних вредности.

Посматрајући резултате добијене на основу анализе одговора добијених према узрасту испитаника интересантно је да свега 50,00% испитаника најстаријег узраста наводи да их игра „потпуно” подстиче на радозналост и жељу за учествовањем, 44,44% одговора потврђује да игра „делимично” подстиче на радозналост и жељу за учествовањем, док 5,56% одговора најстаријих испитаника означава ниво процене „нимало” за дати став. Највећи проценат позитивних одговора уочава се код испитаника узраста десет година – 89,81% за ниво „потпуно” и 10,92% одговора за ниво „делимично”, док са 0,00% одговора указују да игра „нимало” не подстиче њихову радозналост и жељу за учествовањем. Интересантно је да испитаници најмлађег узраста у високом проценту одговора указују да игра подстиче радозналост (72,72% одговора), а истовремено дају висок проценат одговора 13,64% који потврђује ниво процене „нимало” за дати став (*Табела 59*).

Табела 59Игра је у мени изазвала радозналост и жељу за учествовањем – одговори према узрасту испитаника

Игра је у мени изазвала радозналост и жељу за учествовањем		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	3	3	16	22
	%	13,64	13,64	72,72	100
Узраст 9 година	*f*	3	8	53	64
	%	4,69	12,50	82,81	100
Узраст 10 година	*f*	0	7	61	68
	%	0	10,29	89,71	100
Узраст 11 година	*f*	5	8	42	55
	%	9,09	14,55	76,36	100
Узраст 12 година	*f*	1	8	9	18
	%	5,56	44,44	50,00	100

Графички представљени добијени подаци указују да су испитаници свих узраста са највећим фреквенцијама одговора означили да игра „потпуно” подстиче радозналост и жељу за учествовањем, што заједно са свеобухватном анализом постављеног става, исти потврђује и тиме доприноси потврђивању постављене хипотезе истраживања (*Графикон 39*).

Графикон 39 Игра је у мени изазвала радозналост и жељу за учествовањем – одговори према узрасту испитаника

Поштовање правила игре један је од кључних момената када се говори о социјалном и емотивном развоју деце. Анализирајући одговоре добијене на став о поштовању правила игре, интересантно је да су испитаници гледано по редоследу реализације игре, према полу и према узрасту, у преко 90,00% одговора потврдили да суу потпуности поштовали правила игре*Musical Monkeys*. Изузетак су испитаници најстаријег узраста који су ову тврдњу потврдили са 83,33% одговора, што је и даље веома висок проценат одговора.

Изразито мали проценат одговора 1,32% указује да током игре испитаници нису „нимало” поштовали дефинисана правила игре, док 5,37% одговора потврђује да су деца „делимично” поштовала правила игре (*Табела 60*).

Табела 60Поштовао/-ла сам правила игре – одговори по радионицама

Поштовао/-ла сам правила игре		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	2	5	113	120
	%	1,67	4,17	94,16	100
Друга радионица	*f*	1	8	98	107
	%	0,93	7,47	91,60	100
Обе радионице	*f*	3	13	211	227
	%	1,32	5,73	92,95	100

Графички приказане фреквенције одговора по радионицама, као и одговора у целини потврђују дефинисани став. Од укупног броја добијених одговора (*f = 227*)две стотине једанаест одговора (*f = 211*) потврђује став да су испитаници поштовали правила игре у потпуности. Јасно се уочава са датог графикона и назначених фреквенција одговора да се постављени став може потврдити након обе реализације игре, као и након целокупне анализе добијених одговора (*Графикон 40*).

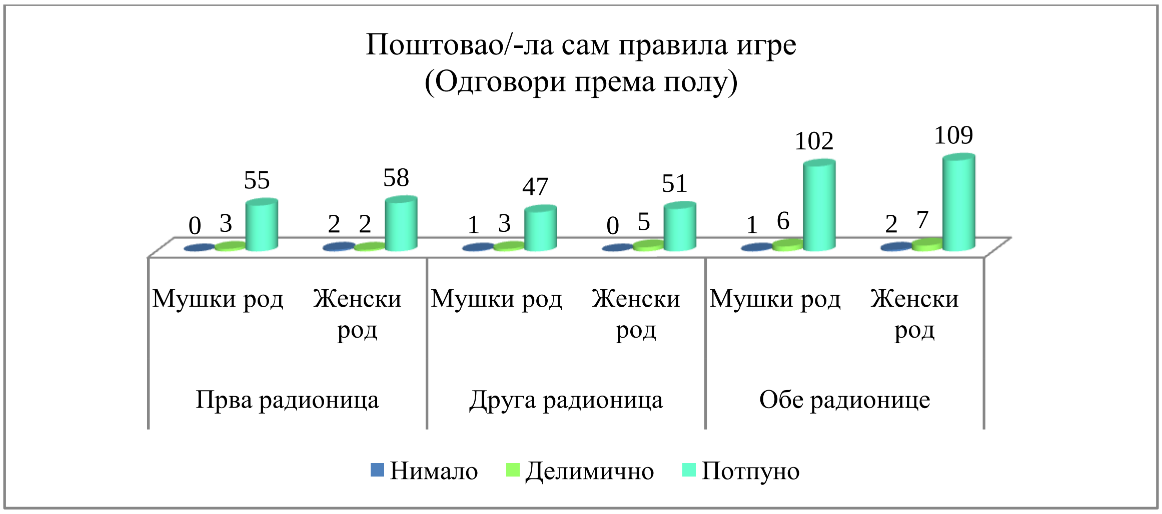
Графикон 40 Поштовао/-ла сам правила игре – одговори по радионицама

Независно од пола испитаника став о поштовању правила игре потврђује преко 90,00% одговора (испитаници мушког рода – 93,58%, а испитаници женског рода – 92,37%). Интересантно је да је проценат испитаника мушког пола након обе радионице и након истраживања у целини већи у односу на проценат испитаника женског пола, када се говори о нивоу процене „потпуно” (потпуно сам поштовао/-ла правила игре). Такође, уочава се да је проценат одговора испитаника женског рода који потврђује да су током игре „делимично” поштовали постављена правила, приметно виши након друге (8,93%)у односу на прву радионицу игре (3,23%). Насупрот томе, одговори испитаника женског пола, који потврђују ниво „нимало” мањи је након друге реализације игре (0,00%) у односу на прву реализацију игре (3,22%), док је код испитаника мушког пола обрнута ситуација – након прве реализације ниво „нимало” потврђен је са 0,00%, а након друге са 1,96% (*Табела 61*).

Табела 61Поштовао/-ла сам правила игре – одговори према полу испитаника

Поштовао/-ла сам правила игре			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	0	3	55	58
		%	0	5,17	94,83	100
	Женски род	*f*	2	2	58	62
		%	3,22	3.23	93,55	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	1	3	47	51
		%	1,96	5,89	92,15	100
	Женски род	*f*	0	5	51	56
		%	0	8,93	91,07	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	1	6	102	109
		%	0,92	5,50	93,58	100
	Женски род	*f*	2	7	109	118
		%	1,70	5,93	92,37	100

На основу приказаних процентуалних вредности добијених одговора формиран је графикон фреквенција, који потврђује дати став и указује да без обзира на пол испитаника став о поштовању правила током игре је потврђен са преко 90,00% добијених одговора (*Графикон 41*).



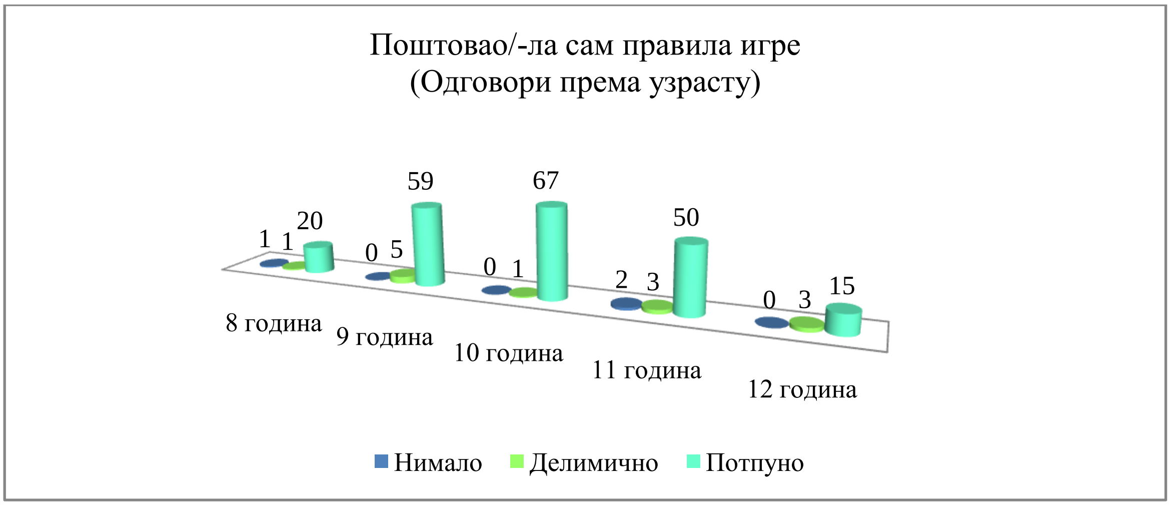
Графикон 41 Поштовао/-ла сам правила игре – одговори према полу испитаника

Испитаници свих узраста, изузев најстаријих испитаника, са преко деведесет процената одговора потврђују да су у потпуности поштовали правила игре. Међутим, ни проценат одговора најстаријих испитаника није занемарљив – 83,33% за ниво процене „потпуно", док за ниво „нимало" најстарији испитаници наводе 0,00% одговора. Највећи проценат позитивних одговора уочен је код испитаника узраста десет година – 98,53% и 0,00% за ниво процене „нимало" (*Табела 62*).

Табела 62Поштовао/-ла сам правила игре – одговори према узрасту испитаника

Поштовао/-ла сам правила игре		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	1	1	20	22
	%	4,55	4,55	90,90	100
Узраст 9 година	*f*	0	5	59	64
	%	0	7,81	92,19	100
Узраст 10 година	*f*	0	1	67	68
	%	0	1,47	98,53	100
Узраст 11 година	*f*	2	3	50	55
	%	3,64	5,45	90,90	100
Узраст 12 година	*f*	0	3	15	18
	%	0	16,67	83,33	100

У циљу потврђивања постављене тврдње у погледу узраста ученика конструисан је графикон са приказаним фреквенцијама одговора испитаника. На основу приказаних фреквенција и претходно указаних процентуалних вредности добијених одговора дефинисана тврдња се може потврдити, чиме се доприноси потврђивању опште постављене хипотезе (*Графикон 42*).



Графикон 42 Поштовао/-ла сам правила игре – одговори према узрасту испитаника

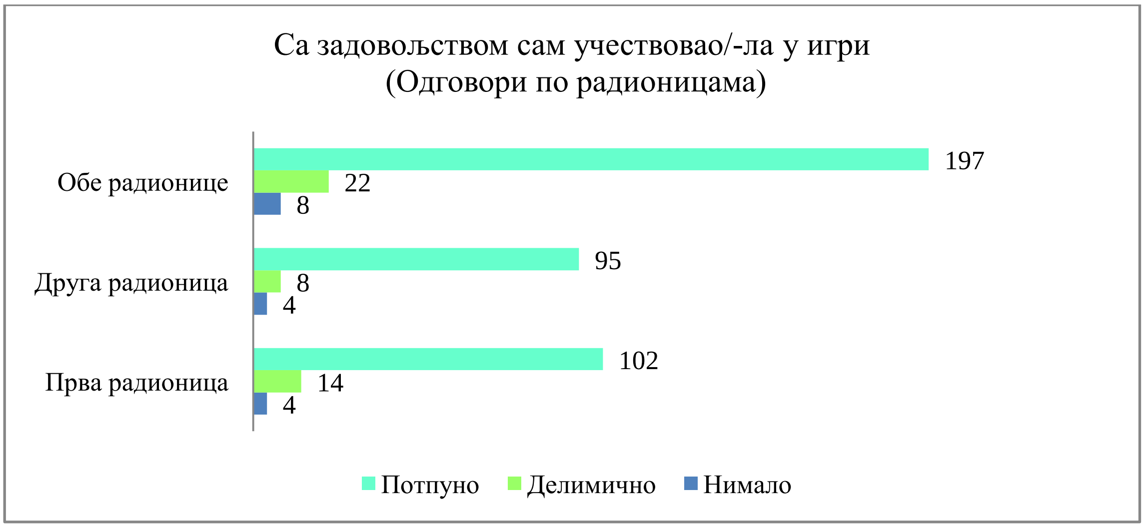
У којој мери је математичко-музичка игра*Musical Monkeys* допринела деци да током реализације и учествовања у игри уживају, указаће анализа резултата добијених на став дефинисан у скали процене –*Са задовољством сам учествовао/-ла у игри.*

Израчунате процентуалне вредности добијених одговора по радионицама и након обе реализације игре потврђују постављени став, с обзиром да су испитаници у преко 85,00% одговора потврдили да су са задовољством учествовали у игри (86,78%). Ниво процене „делимично” потврђује 9,70% одговора, док свега 3,52% одговора указује да учесници нису у игри учествовали са израженим задовољством (*Табела 63*).

Табела 63Са задовољством сам учествовао/-ла у игри – одговори по радионицама

Са задовољством сам учествовао/-ла у игри		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	4	14	102	120
	%	3,33	11,67	85,00	100
Друга радионица	*f*	4	8	95	107
	%	3,74	7,48	88,78	100
Обе радионице	*f*	8	22	197	227
	%	3,52	9,70	86,78	100

Фреквенције одговора испитаника приказане графички потврђују постављени став како након прве (*f = 102*) и друге реализације игре (*f = 95*), тако и након истраживања у целини (*f = 197*). Ако се упореди фреквенција свих анализираних одговора (*f = 227*)са фреквенцијом одговора који указују да су испитаници „потпуно” уживали током реализације игре (*f = 197*) са сигурношћу се може потврдити постављен и тестиран став (*Графикон 43*).

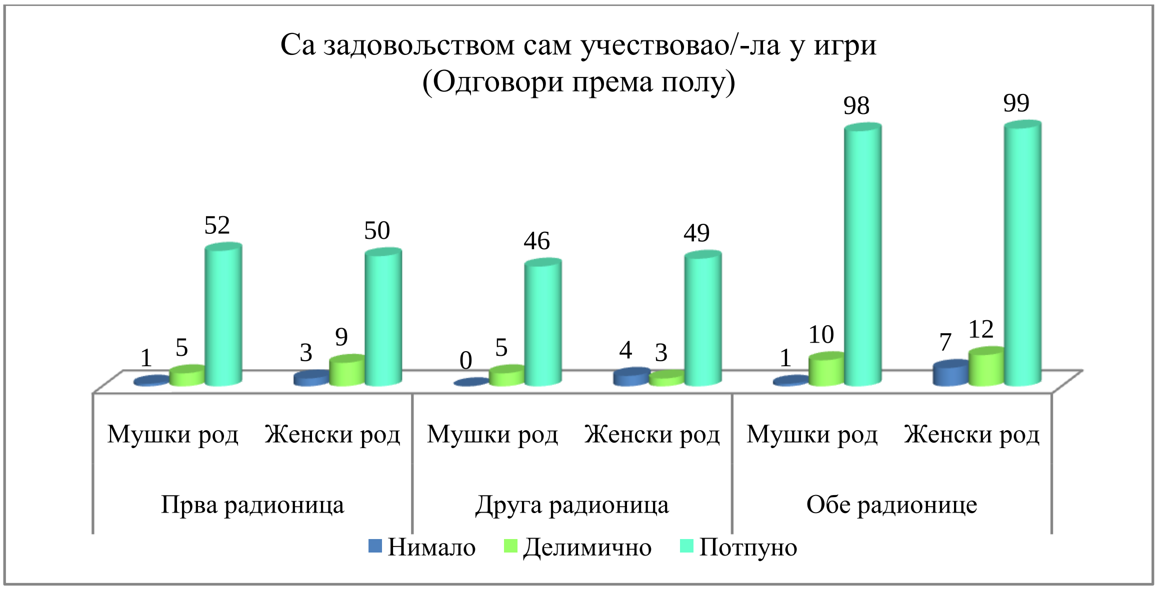


Графикон 43Са задовољством сам учествовао/-ла у игри – одговори по радионицама

Анализа одговора према полу испитаника процентуално не указује на значајну разлику у одговорима за два нивоа процене „делимично” и „потпуно”. На ниво „потпуно” дечаци дају 89,91% одговора, док девојчице 83,90% одговора. На ниво „делимично” дечаци дају 9,17% одговора, а девојчице 10,17%. Процентуална разлика се појављује када се посматрају одговори за ниво „нимало" – дечаци 0,92%, девојчице, знатно већи проценат одговора – 5,93% (*Табела 64)*.

Табела 64Са задовољством сам учествовао/-ла у игри – одговори према полу испитаника

Са задовољством сам учествовао/-ла у игри			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	1	5	52	58
		%	1,72	8,62	89,66	100
	Женски род	*f*	3	9	50	62
		%	4,84	14,51	80,65	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	0	5	46	51
		%	0	9,81	90,19	100
	Женски род	*f*	4	3	49	56
		%	7,14	5,36	87,50	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	1	10	98	109
		%	0,92	9,17	89,91	100
	Женски род	*f*	7	12	99	118
		%	5,93	10,17	83,90	100



Графикон 44Са задовољством сам учествовао/-ла у игри – одговори према полу испитаника

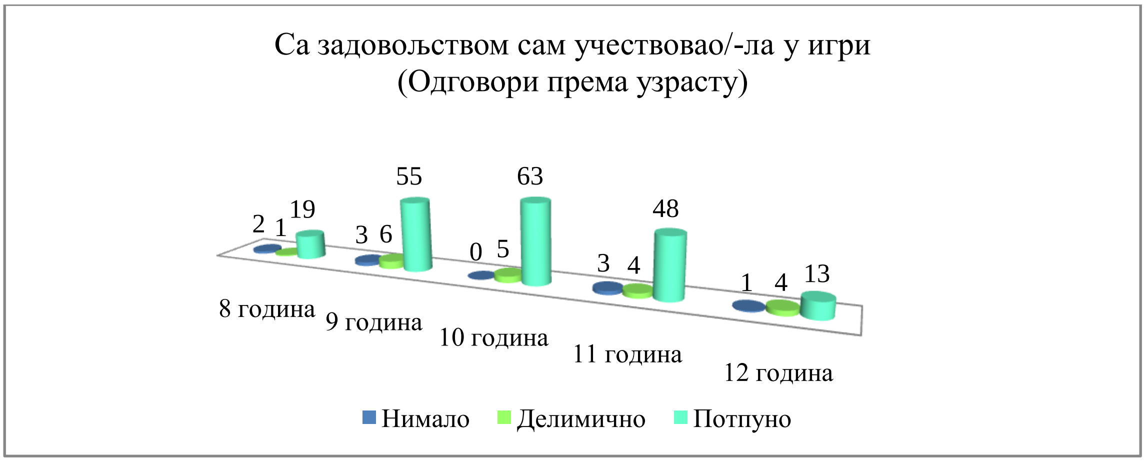
Грфички приказане фреквенције добијених одговора посматрано према полу испитаника потврђују претходно наведену анализу одговора усмерену на испитанике оба пола и потврђују постављени став да су учесници у највећем проценту са задовољством играли игру(*Графикон 44*).

Резултати анализирани према узрасту ученика потврђују став да су деца свих испитаних узрастаса задовољством учествовала у игри. Најмањи проценат за ниво „потпуно” у скали процене уочава се код најстаријих испитаника – узраст дванаест година – 72,22%, што је такође висок проценат у односу на проценте дате за друга два нивоа процене – „делимично” и „нимало”. Код свих осталих испитаника независно од узраста проценат одговора који потврђује дати став прелази преко 85,00%. Највећи проценат за ниво „потпуно” уочава се код испитаника узраста десет година (92,65%), који на ниво процене „нимало” дају 0,00% одговора (*Табела 65*).

Табела 65 Са задовољством сам учествовао/-ла у игри – одговори према полу испитаника

Са задовољством сам учествовао/-ла у игри		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	2	1	19	22
	%	9,09	4,55	86,36	100
Узраст 9 година	*f*	3	6	55	64
	%	4,69	9,38	85,93	100
Узраст 10 година	*f*	0	5	63	68
	%	0	7,35	92,65	100
Узраст 11 година	*f*	3	4	48	55
	%	5,45	7,27	87,28	100
Узраст 12 година	*f*	1	4	13	18
	%	5,56	22,22	72,22	100

Са формираног графикона фреквенција уочава се да сви узрасти у највећој мери потврђују постављени став, који указује да су учесници са задовољством учествовали у игри*Musical Monkeys* (*Графикон 45*).



Графикон 45Са задовољством сам учествовао/-ла у игри – одговори према узрасту испитаника

Да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника различитог узраста утврђено је израчунавањем вредности *χ2* теста (*Табела 66*).

Табела 66Резултати χ2 теста – игра је подстакла на задовољство у раду – варијабла узраст испитаника

fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe-ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
2	0,87	1,12	1,25	1,44
1	1,93	-0,93	0,86	0,44
19	19,18	-0,18	0,03	0,001
3	2,53	0,47	0,22	0,08
6	5,63	0,37	0,13	0,02
55	55,82	-0,82	0,67	0,01
0	2,69	-2,69	7,23	2,68
5	5,99	-0,99	0,98	0,16
63	59,31	3,69	13,61	0,22
3	2,18	0,82	0,67	0,30
4	4,84	-0,84	0,70	0,14
48	47,97	0,03	0,0009	0,00002
1	0,71	0,29	0,080	0,001
4	1,58	2,42	5,85	3,70
13	15,70	-2,70	7,29	0,46
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			χ2 = 9,65

На основу поређења израчунатог $\chi2 = 9{,}65$ са граничним $\chi2$ вредностима 15,507 на нивоу значајности 0.05 и 20,090 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе $df = 8$, може се закључити да не постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника различитог узраста по питању тестираног става, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста*, мања од назначених граничних вредности.

Анализа свих добијених одговора и у погледу целокупног узорка одговора, као и у погледу одговора добијених од испитаника различитог пола и узраста, потврђује дефинисани став и на тај начин доприноси потврђивању хипотезе спроведеног истраживања.

У којој мери игра*Musical Monkeys* подстиче на преузимање одговорности за свој рад тестирано је кроз добијене процене учесника игре на постављени став – *игра ме је подстакла да преузмем одговорност за свој рад*.

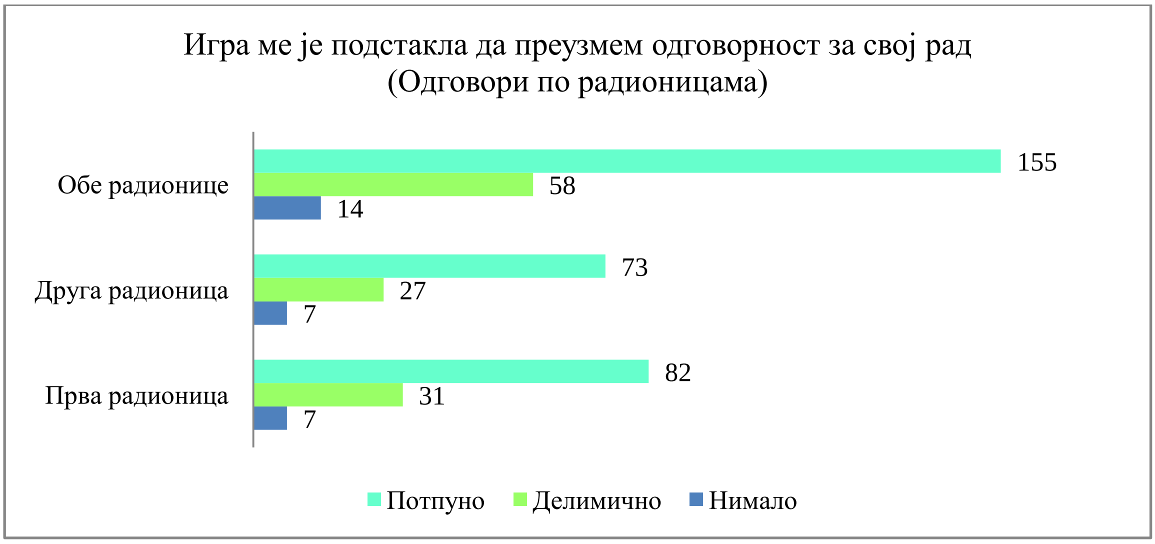
Резултати указују на следеће – након прве реализације игре 68,33% одговора потврђује да игра „потпуно” подстиче на преузимање сопствене одговорности током рада и реализације игре, а 68,23% одговора након друге радионице, што указује да разлика у одговорима након сваке реализације игре готово не постоји.

Табела 67Игра ме је подстакла да преузмем одговорност за свој рад – одговори по радионицама

Игра ме је подстакла да преузмем одговорност за свој рад		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	7	31	82	120
	%	5,84	25,83	68,33	100
Друга радионица	*f*	7	27	73	107
	%	6,54	25,23	68,23	100
Обе радионице	*f*	14	58	155	227
	%	6,16	25,56	68,28	100

Приближно исти проценат одговора уочава се и након анализе свих добијених одговора спроведеног истраживања 68,28%. Да су током игре били „делимично” подстакнути да преузму одговорност за свој рад испитаници су указали са приближно 25,00% одговора, док нешто више од 6,00% одговора указује да испитаници током игре нису били подстакнути да преузму одговорност за свој рад (*Табела 67)*.

Графички приказане фреквенције добијених одговора по радионицама потврђују дефинисани став, с обзиром да су фреквенције одговора за ниво „потпуно” више у односу на фреквенције друга два нивоа скале процене (*Графикон 46*).

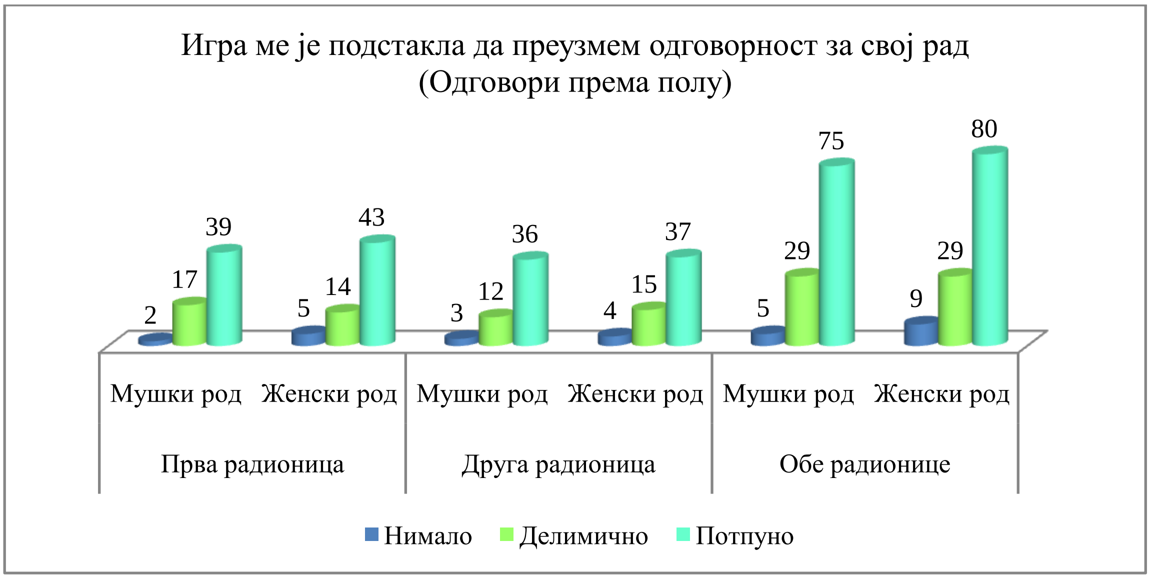


Графикон 46 Игра ме је подстакла да преузмем одговорност за свој рад – одговори по радионицама

Анализа одговора испитаника различитог пола указује да 68,80% испитаника мушког пола потврђује да је током игре „потпуно” преузело одговорност за свој рад, док је тај проценат одговора код испитаника женског пола 67,80%. Испитаници мушког пола у већем проценту (26,60%) потврђују ниво „делимично” у односу на испитанике женског пола (24,68%), док је за ниво процене „нимало” стање обратно, већи проценат испитаника женског пола потврђује овај ниво процене (7,62%) у односу на испитанике мушког пола (4,58%). На основу наведеног, може се закључити да су испитаници потврдили да су током игре, у мањој или већој мери, преузимали одговорност за свој рад, као и да је процентуална заступљеност одговора која потврђује дати став већа код испитаника мушког, у односу на испитанике женског пола (*Табела 68*).

Табела 68Игра ме је подстакла да преузмем одговорност за свој рад – одговори према полу испитаника

Игра ме је подстакла да преузмем одговорност за свој рад			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	2	17	39	58
		%	3,45	29,31	67,24	100
	Женски род	*f*	5	14	43	62
		%	8,07	22,58	69,35	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	3	12	36	51
		%	5,88	23,53	70,59	100
	Женски род	*f*	4	15	37	56
		%	7,15	26,78	66,07	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	5	29	75	109
		%	4,58	26,60	68,80	100
	Женски род	*f*	9	29	80	118
		%	7,62	24,58	67,80	100



Графикон 47 Игра ме је подстакла да преузмем одговорност за свој рад – одговори према полу испитаника

Израчунате фреквенције одговора испитаника оба пола приказане су графички и потврђују претходно наведену анализу добијених резултата истраживања на став о преузимању одговорности током реализоване математичко-музичке игре, а у погледу пола испитаника (*Графикон 47*).

Да ли и у којој мери постоје разлике у одговорима испитаника различитог узраста на тврдњу о преузимању одговорности за свој рад током игре показују резултати приказани процентуално, фреквенцијски, као и кроз утврђивање да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника различитог узраста на одговоре добијене за тестирану тврдњу.

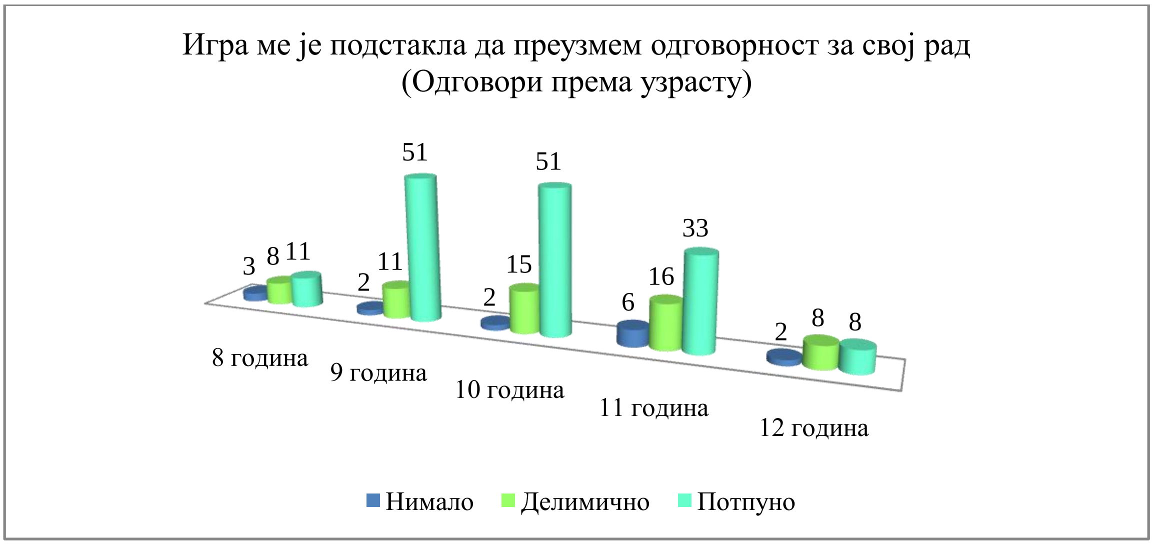
Табела 69Игра ме је подстакла да преузмем одговорност за свој рад – одговори према узрасту испитаника

Игра ме је подстакла да преузмем одговорност за свој рад		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	3	8	11	22
	%	13,64	36,36	50,00	100
Узраст 9 година	*f*	2	11	51	64
	%	3,13	17,19	79,68	100
Узраст 10 година	*f*	2	15	51	68
	%	2,94	22,06	75,00	100
Узраст 11 година	*f*	6	16	33	55
	%	10,91	29,09	60,00	100
Узраст 12 година	*f*	2	8	8	18
	%	11,12	44,44	44,44	100

Израчунавајући процентуалне вредности добијених одговора испитаника различитог узраста уочено је да је најмањи проценат одговора који потврђује ниво „потпуно” на скали процене за став да игра доприноси подстицању преузимања личне одговорности током игре, присутан код најстаријих испитаника (44, 44% одговора) и најмлађих испитаника (50,00% одговора). Највећи проценат одговора за ниво процене „потпуно” дају испитаници узраста девет (79,68%) и десет година старости (75,00%) (*Табела 69*).

Графички приказ добијених резултата указује да су фреквенције одговора свих испитаника, без обзира на узраст највеће код потврђивања нивоа процене

„потпуно”, што потврђује и сам ставда игра подстиче на преузимање одговорности током решавања захтева и задатака игре (*Графикон 48*).



Графикон 48 Игра ме је подстакла да преузмем одговорност за свој рад – одговори према узрасту испитаника

Да би се потпуније допринело потврђивању постављене тврдње те опште хипотезе истраживања, утврђено је да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника различитог узраста у односу на постављену тврдњу (*Табела 70*).

На основу поређења израчунатог $\chi 2$ = 5,79 са граничним $\chi 2$ вредностима 15,507 на нивоу значајности 0.05 и 20,090 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе *df* = 8, може се закључити да непостоји статистички значајна разлика међу децом различитог узраста о ставу дaматематичко-музичка игра подстиче на преузимање одговорности при раду и реализацији игре, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања од назначених граничних вредности.

Табела 70Резултати χ2 теста – игра подстиче на преузимање одговорности за рад – варијабла узраст испитаника

fe	Ft	$(fe - ft)$	$(fe - ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
3	1,45	1,55	2,40	1,65
8	5,62	2,38	5,66	1,00
11	14,92	-3,92	15,36	1,02
2	4,22	-2,22	4,92	1,67
11	16,35	-5,35	28,62	1,75
51	43,41	7,59	57,60	1,32
2	4,49	-2,49	6,20	1,38
15	17,37	-2,37	5,61	0,32
51	46,13	4,87	23,71	0,51
6	3,63	2,37	5,61	1,54
16	14,05	1,95	3,80	0,27
33	37,31	-4,31	18,57	0,49
2	1,18	0,82	0,67	0,56
8	4,60	3,40	11,56	2,51
8	12,21	-4,21	17,72	1,45
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			χ2 =5,79

На основу дате анализе одговора на тврдњу – *игра ме је подстакла да преузмем одговорност за сопствени рад*, тврдња се, у погледу добијених резултата може потврдити и тиме допринети потврђивању опште постављене хипотезе истраживања.

На основу свега наведеног и анализе добијених одговора на питања која су усмерена на истраживањеу којој мери реализована математичко-музича игра подстиче социо-емотивни развој и развој социјалних вештина деце, може се извести закључак да је на сваки постављен став у овој категорији ставова, добијено највише одговора за нивое „потпуно” и „делимично”, у односу на ниво „нимало”на формираној скали процене, што доприноси потврђивању постављених ставова и води ка потврђивању основне хипотезе истраживања.

На основу анализе ставова који указују на допринос развоју социјалних вештина деце/испитаника кроз реализовану математичко-музичку игру *Musical Monkeys*, као и допринос социо-емотивном развоју може се закључити да реализована игра у значајној мери доприноси подстицању сарадње и колаборације, без обзира на редослед и време реализације игре, пол као и узраст испитаника истраживања. Поред подстицања сарадње и колаборације, игра је допринела подстицању толеранције, међусобног уважавањаимишљења деце током решавања постављених математичких и/или музичких задатака, допринела је тимском раду и подстицању такмичарског духа. Према приказаним резултатима игра је допринела високом степену конструктивне комуникације међу учесницима игре, како у циљу договора, тако и у циљу налажења заједничког решења постављених математичких и музичких проблема, док је комуникација са водитељима игре такође била присутна али у знатно мањој мери, што је у складу са концепцијом саме игре. Став о подстицању радозналости и жеље за учествовањем у игри потврђен је, без обзира на редослед реализације игре, пол или узраст ученика. Најмањи проценат позитивних одговора на овај став уочава се код најстаријих испитаника, док је код испитаника осталих тестираних узраста назначени став потврђен са високим процентом одговора. Анализа одговора на питање о поштовању постављених правила игре показала је да су испитаници и гледано по редоследу реализације игре и према полу, као и према узрасту у преко 90,00% одговора указали да су у потпуности поштовали правила игре. Висок ниво потврђивања нивоа процене „потпуно" присутан је и за став/тврдњу да су испитаници са задовољством учествовала у игри. Када се посматра став о преузимању одговорности за свој рад током реализације игре добијени подаци потврђују да су испитаници током игре, у мањој или већој мери, преузимали одговорност за свој рад, као и да је процентуална заступљеност одговора која потврђује дати став већа код испитаника мушког, у односу на испитанике женског пола.

Подаци и добијени резултати истраживања у потпуности потврђују постављену хипотезу истраживања – ***Претпоставља се да ће интердисциплинарна математичко-музичка игра допринети дечјем когнитивном, социјалном и емотивном развоју (развоју вештина критичког***

мишљења, проблемског решавања проблема, сарадње, тимског рада, такмичарског духа, конструктивне комуникације, емпатије, позитивног става према раду).

2.2.2. Математичко-музичка игра доприноси обнављању одређених садржја из математике и музике

У циљу потврђивања или оповргавања постављене хипотезе – *Претпоставља се да ће интердисциплинарна игровна активност математике и музике допринети обнављању математичких и музичких садржаја код деце одређеног узраста* анализирани су одговори и ставови деце на следећа питања/тврдње:

- кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из математике;
- кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из музике;
- током игре изводио/-ла сам различите ритмове.

Да би се утврдило да ли и у којој мери игра доприносисавладавању и/или обнављању одређених садржаја из математике и музике анализирани су резултати одговора које су испитаници дали на став – *кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из математике.*

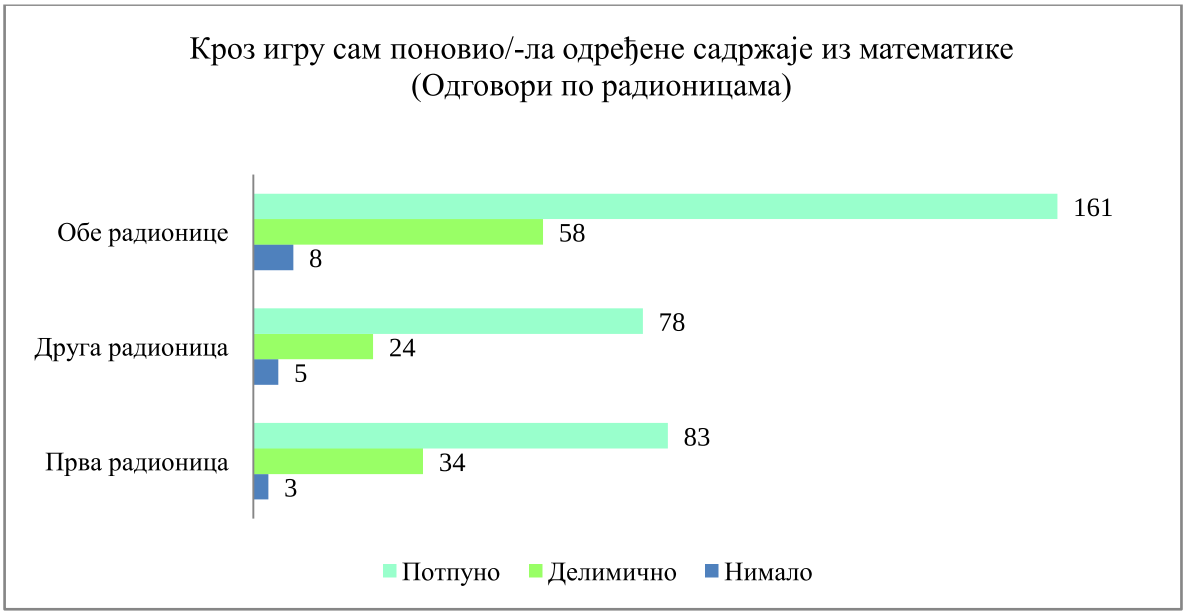
Анализа резултата посматрано по радионицама указује да 70,92% укупних одговора потврђује да се кроз игру обнављају садржаји из математике. Уколико се упоредеодговори након прве и друге реализације игре уочава се да су процентуалне вредности приближно једнаке, али да је већи проценат одговора на ниво „потпуно” у скали процене, након друге радионице. Интересантно је да веома низак проценат одговора гледано након радионица и у целини указује да игра „нимало” не доприноси обнављању математичких садржаја (3,52% одговора након обе радионице), док 22,55% одговора указује на „делимично” обнављање математичких садржаја током реализоване математичко-музичке игре (*Табела 71*).

Табела 71Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из математике – одговори по радионицама

Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из математике		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	3	34	83	120
	%	2,50	28,33	69,17	100
Друга радионица	*f*	5	24	78	107
	%	4,67	22,42	72,89	100
Обе радионице	*f*	8	58	161	227
	%	3,52	25,55	70,92	100

Добијене и анализиране фреквенције и проценти одговора испитаника потврђују да се кроз реализовану математичко-музичку игру обнављају одређени садржаји из математике.Графички представљене фреквенције одговора сликовито приказују да су највеће фреквенцијеи након прве и након друге реализације игре, као и након анализе одговора посматрано у целини, чиме се потврђује ниво „потпуно”на датој скали процене.

Посматрајући дати графикон уочава се да од укупне фреквенције добијених одговора (*f* = *227*) сто шездесет један одговор потврђује ниво „потпуно” (*f* = *161*), педесет осам одговора (*f* = *58*) ниво „делимично” и осам одговора (*f* = *8*) ниво „нимало”, што је веома низак проценат фреквенцијау односу на претходна два нивоа (*Графикон 49*). На основу приказаног може се закључити да су испитаници током игре у одређеној мери обнављали одређене математичке садржаје.



Графикон 49 Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из математике – одговори по радионицама

Израчунавањем вредности $\chi 2$ теста за резултате добијене на тврдњу о томе да ли су током игре деца поновила одређене садржаје из математике у погледу одговора након појединих реализација игре добијени су следећи резултати – на основу поређења израчунатог $\chi 2$ = 6,24 са граничним $\chi 2$ вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 2, може се закључити да постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника након прве и након друге реализације математичко-музичке игре, односно, указује се да добијени одговори зависе од реализације игре, на нивоу значајности 0.05, с обзиром да је израчуната вредност $\chi 2$ теста већа од дефинисане граничне вредности. Са друге стране на нивоу значајности 0.01не постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника, што потврђује да дати одговори нису условљени временским редоследом реализације игре, већ карактеристикама саме игре.

Табела 72Резултати χ2 теста – математичко-музичка игра доприноси обнављању математичких садржаја – варијабла редослед реализације игре

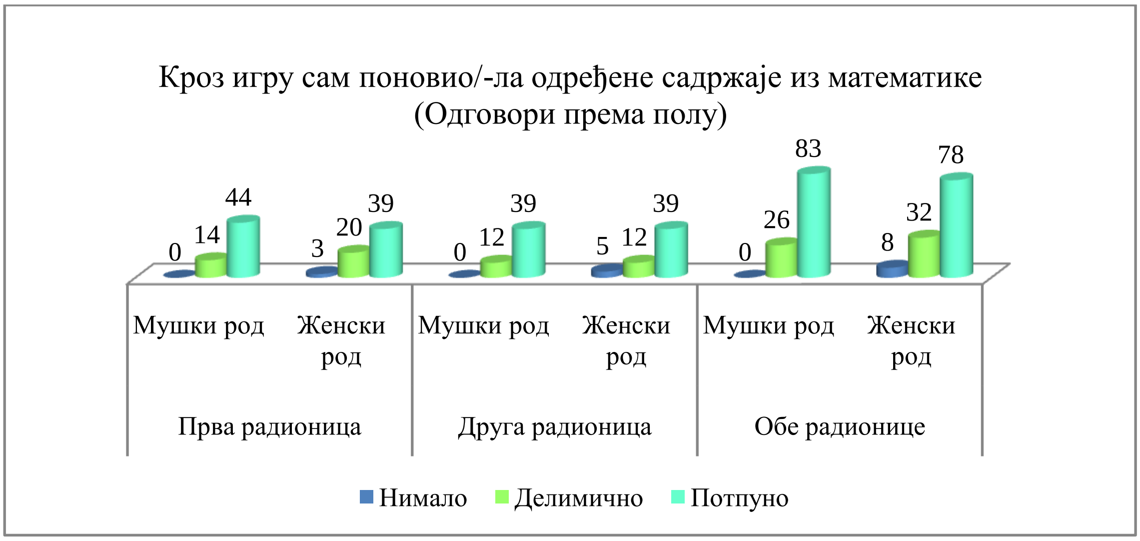
fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe-ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
3	1,05	1,95	3,80	3,62
34	30,66	3,34	11,15	0,36
83	85,11	-2,11	4,45	0,87
5	3,77	1,23	1,51	0,40
24	27,34	-3,34	11,15	0,40
78	75,88	2,12	4,49	0,59
$\sum fe = 227$	$\sum ft = 227$			$\chi2 = 6,24$

Даља анализа усмерена је на приказ и разматрање резултата одговораиспитаника различитог пола.

Табела 73Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из математике – одговори према полу испитаника

Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из математике			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	f	0	14	44	58
		%	0	24,14	75,86	100
	Женски род	f	3	20	39	62
		%	4,84	32,26	62,90	100
Друга радионица	Мушки род	f	0	12	39	51
		%	0	23,52	76,47	100
	Женски род	f	5	12	39	56
		%	8,93	21,43	69,64	100
Обе радионице	Мушки род	f	0	26	83	109
		%	0	23,85	76,15	100
	Женски род	f	8	32	78	118
		%	6,78	27,12	66,01	100

Графички приказ добијених фреквенција показује да ниво процене „потпуно” потврђује више испитаника оба пола у односу на друга два нивоа скале процене „делимично” и „потпуно”. Интересантно је да испитаници мушког пола након обе реализације игре, те сагледавањем добијених одговора у целини не дају ни један одговор којим се указује да се кроз реализовану игру не обнављају математички садржаји, док је тај ниво код девојчица, укупно гледано, потврђен са осам добијених одговора, од укупних две стотине двадесет и седам одговора добијенихистраживањем (*Графикон 50*).



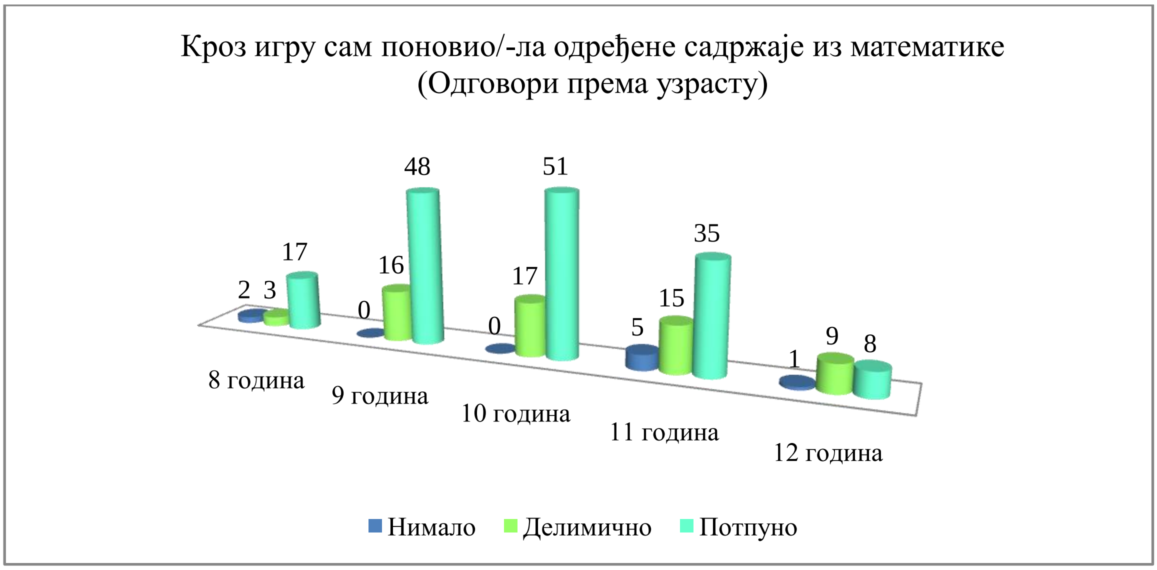
Графикон 50 Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из математике – одговори према полу испитаника

Анализа одговора посматрано према узрасту испитаника показује да деца млађег узраста (осам, девет и десет година старости) са изнад 75,00% потврђују да су кроз игру „потпуно” била подстакнута на обнављање математичких садржаја. Узраст испитаника од девет и десет година не наводи ни један одговор на ниво процене на став да кроз игру нису обнављали математичке садржаје, док најмлађи испитаници (осам година) ниво „нимало” потврђују са 9,09% одговора.

Најстарији испитаници дају мање од 50,00% одговора на ниво „потпуно”, док такође са 50,00% одговора указују да игра „делимично” доприноси обнављању математичких садржаја. Одговори најстаријих испитаника који потврђују да игра „нимало” не доприноси обнављању математичких садржаја износе 5,56% (*Табела 74*).

Табела 74Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из математике – одговори према узрасту

Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из математике		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	2	3	17	22
	%	9,09	13,64	77,27	100
Узраст 9 година	*f*	0	16	48	64
	%	0	25.00	75.00	100
Узраст 10 година	*f*	0	17	51	68
	%	0	25.00	75.00	100
Узраст 11 година	*f*	5	15	35	55
	%	9,09	27,27	63,64	100
Узраст 12 година	*f*	1	9	8	18
	%	5,56	50,00	44,44	100



Графикон 51 Кроз игру сам поновио-/ла одређене садржаје из математике – одговори према узрасту испитаника

На основу анализираних података закључује се да без обзира на узраст испитаници у највећој мери потврђују да их игра у потпуности или „делимично" подстиче на обнављање математичких садржаја, док је укупна фреквенција одговора испитаника која указује да игра не подстиче на обнављање математичких садржаја (f =7)што је у односу на целокупну фреквенцију одговора (f = 227)знатно нижа фреквенција (*Графикон 51*).

С обзиром да постоје приметне разлике у одговорима деце различитог узраста приступило се израчунавању χ2 теста у циљу утвђивања да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима деце различитог узраста према тестираном ставу (*Табела 75*).

Табела 75Резултати χ2 теста – математичко-музичка игра доприноси обнављању математичких садржаја – варијабла узраст испитаника

fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe - ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
2	0,77	1,23	1,51	1,96
3	5,81	-2,81	7,89	1,36
17	15,41	1,59	2,53	0,16
0	2,25	-2,25	5,06	2,25
16	16,91	-0,91	0,82	0,05
48	44,82	3,18	10,11	0,23
0	2,39	-2,39	5,71	2,39
17	17,97	0,97	0,94	0,05
51	47,62	3,38	11,42	0,24
5	1,94	3,06	9,39	4,83
15	14,54	0,46	0,21	0,01
35	38,52	-3,52	12,39	0,32
1	0,63	0,37	0,14	2,17
9	4,76	4,24	17,97	3,78
8	12,60	-4,6	21,16	1,68
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			χ2 = 21,44

На основу поређења израчунатог χ2 = 21,44 са граничним χ2 вредностима 15,507 на нивоу значајности 0.05 и 20,090 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 8, може се закључити да постоји статистички значајна разлика међу децом различитог узраста, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* већа од назначених граничних вредности на оба нивоа значајности.

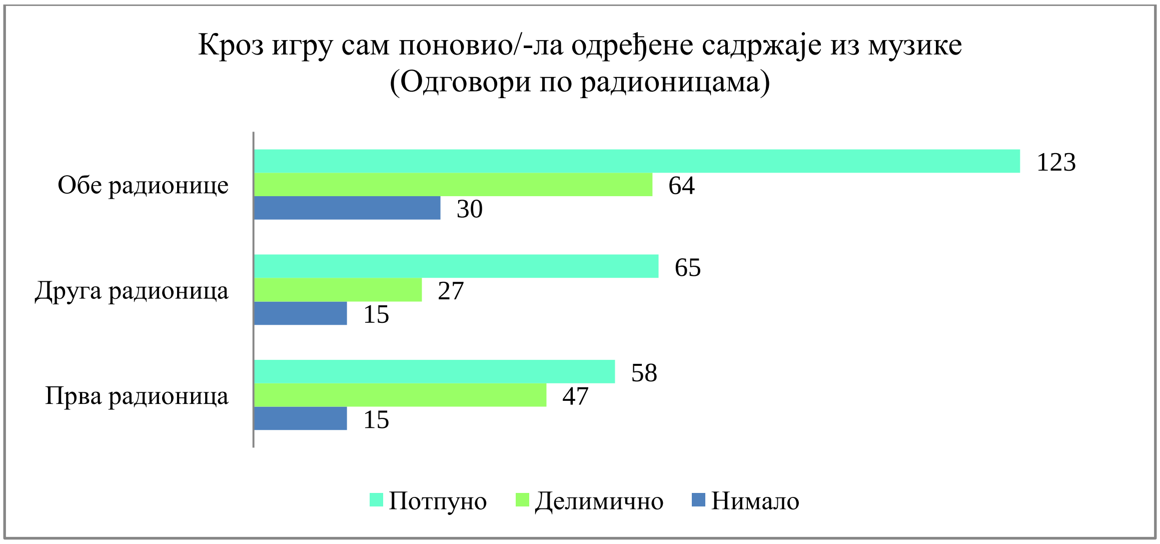
На основу наведеног уопштава се да су одговори испитаника различитог узраста утицали на одговоре на питање о обнављању математичких садржаја током игре и показује се да испитаници узраста девет, десет и једанаест година у највећој мери имају позитиван став о томе да игра доприноси обнављању математичких садржаја.

Без обзира на наведену статистички значајну разлику целокупна анализа става – да ли се кроз реализовану математичко-музичку игру обнављају садржаји из математике, посматранопо радионицама, на основу одговора у целини, на основу анализираних одговора према полу испитаника, па и одговора испитаника различитог узраста, који у већој или мањој мери (у зависности од узраста) позитивно оцењују дату тврдњу, дати став се може потврдити, али свакако треба истаћи, да постоји статистички заначајна разлика у одговорима деце различитог узраста.

У којој мери је реализована математичко-музичка игра допринела обнављању садржаја из музике указује анализа одговора испитаника приказана у *Табели 75*. Резултати потврђују да 54,18% одговора процењује да се кроз игру обнављају музички садржаји у потпуности, 32,16% одговора потврђује ниво „делимично”, док свега 13,22% одговора потврђује да игра „нимало” не доприноси обнављању музичких садржаја (*Табела 76*).

Табела 76Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из музике – одговори по радионицама

Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из музике		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	15	47	58	120
	%	12,50	39,16	48,34	100
Друга радионица	*f*	15	27	65	107
	%	14,01	25,24	60,75	100
Обе радионице	*f*	30	74	123	227
	%	13,22	32,60	54,18	100



Графикон 52 Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из музике – одговори по радионицама

Интересантан је податак да је већи проценат и фреквенција одговора испитаника која потврђује да се кроз реализовану математичко-музичку игру у потпуности обнављају музички садржаји након друге (60,75%), у односу на прву реализацију игре (48,34%). Супротно томе, за процену „делимично" већи проценат одговора је након прве (39,16%) у односу на другу реализацију игре (25,24%). Посматрајући процентуално приказане одговоре за ниво скале процене „нимало" показује се да након прве радионице испитаници овај ниво потврђују са 12,50% одговора, након друге реализације игре са 14,01%, док укупно гледано 13,22% одговора испитаника потврђује да игра „нимало" не доприноси обнављању музичких садржаја.

Са циљем визуелног приказа добијених фреквенција формиран је графикон фреквенција (*Графикон 52*). Са датог графикона се уочава да без обзира на редослед реализације игре доминирају одговори испитаника усмерени на став да игра у потпуности доприноси обнављању одређених музичких садржаја.

Израчунавањем вредности χ2 теста за резултате добијене на тврдњу да ли су деца током игре поновила одређене садржаје из музике, а у циљу утврђивања да ли редослед реализације игре утиче на добијене одговоре за дату тврдњу, излистали су се следећи резултати (*Табела 77*):

Табела 77Резултати χ2 теста – математичко-музичка игра доприноси обнављању музичких садржаја – варијабла редослед реализације игре

fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe-ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
15	15,85	-0,85	0,72	0,04
47	39,11	7,89	62,25	1,59
58	65,02	-7,02	49,28	0,75
15	14,14	0,86	0,74	0,05
27	34,88	-7,88	62,11	1,78
65	57,97	7,03	49,42	0,85
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			χ2 = 5,06

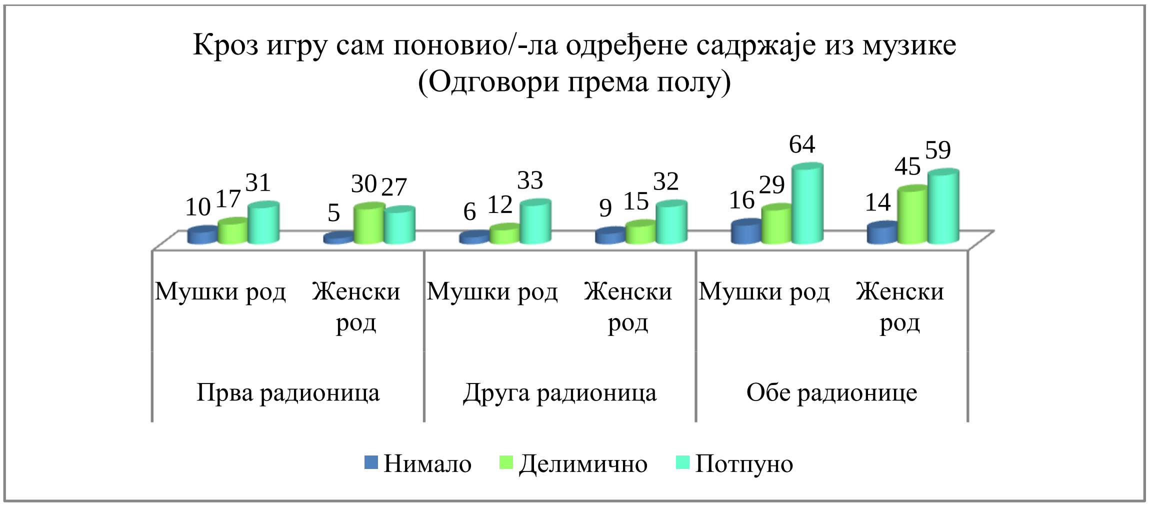
На основу поређења израчунатог χ2 = 5,06 са граничним χ2 вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 2, може се закључити да су независно од радионице деца дала потврдан став о обнављању садржаја из музике, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања од утврђених граничних вредности. Тиме се доприноси потврђивању става да не постоји статистички значајна разлика у одговорима ученика након прве и друге реализације игре за дати тестирани став.

Одговори испитаника посматрано према полу показују да већи проценат испитаника мушког пола даје потврдне одговоре на нивое „потпуно” и „делимично” у скали процене, који указују у којој мери игра доприноси обнављању садржаја из музике (58,71%, „потпуно”, 26,61%, „делимично”), у односу на испитанике женског пола (50,00%, „потпуно” и 38,14%„„делимично”). Интересантно је да је код нивоа процене „нимало” стање обрнуто – већи проценат испитаника мушког пола даје одговоре процентуално посматрано у 14,68% случајева, док испитаници женског пола на нивоу „нимало” учествују са 11,86% (*Табела 78*).

Табела 78Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из музике – одговори према полу испитаника

Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из музике			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	10	17	31	58
		%	17,24	29,31	53,45	100
	Женски род	*f*	5	30	27	62
		%	8.06	48,39	43,55	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	6	12	33	51
		%	11,76	23,53	64,51	100
	Женски род	*f*	9	15	32	56
		%	16,07	26,78	57,15	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	16	29	64	109
		%	14,68	26,61	58,71	100
	Женски род	*f*	14	45	59	118
		%	11,86	38,14	50,00	100

Графички приказ добијених фреквенција одговора испитаника различитог пола потврђује да реализована математичко-музичка игра *Musical Monkeys* у одређеној мери доприноси обнављању одређених музичких садржаја, с обзиром да су највеће фреквенције одговора оба пола усмерене на ниво „потпуно”. Са графикона се уочава да након прве радионице испитаници женског пола са мањим бројем одговора потврђују ниво „потпуно” (*f = 27*) у односу на ниво „делимично” (*f = 30*). Међутим, већ након друге радионице стање је промењено, тако да испитаници женског рода са тридесет два одговора (*f = 32*) потврђују ниво „потпуно”, док са петнаест одговора (*f = 15*) потврђују ниво „делимично”, што је умногоме већа фреквенцијска разлика у односу на одговоре након прве радионице, а која иде у прилог потврђивању датог става (*Графикон 53*).



Графикон 53 Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из музике – одговори према полу испитаника

Даља анализа приказује одговоре испитаника према узрасту, израчунате фреквенцијски и процентуално и приказнане у *Табели 79*.

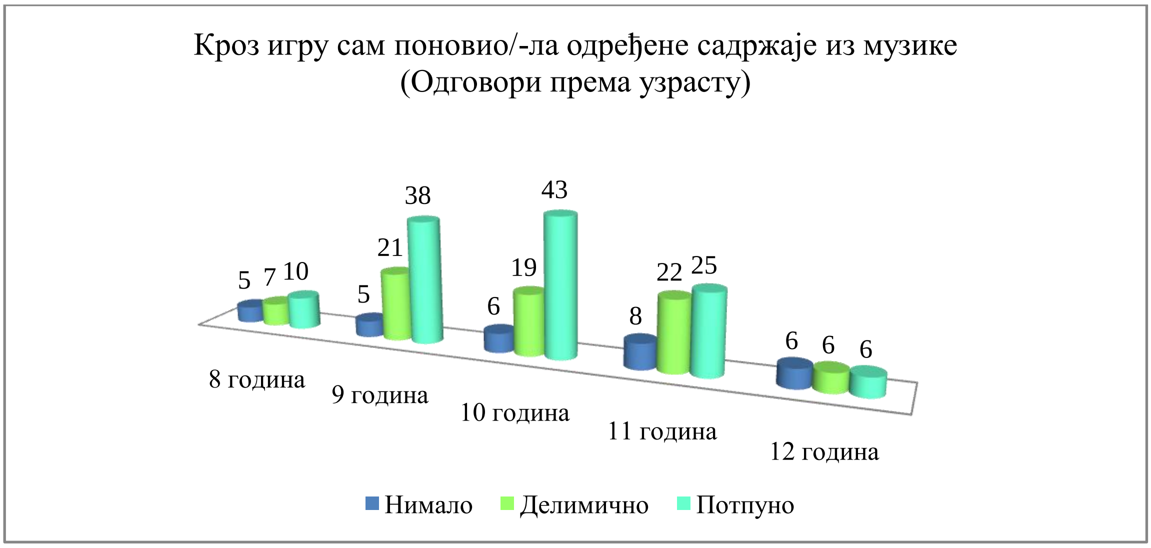
Табела 79Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из музике – одговори према узрасту испитаника

Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из музике		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	5	7	10	22
	%	22,73	31,82	45,45	100
Узраст 9 година	*f*	5	21	38	64
	%	7,81	32,81	59,38	100
Узраст 10 година	*f*	6	19	43	68
	%	8,82	27,94	63,24	100
Узраст 11 година	*f*	8	22	25	55
	%	14,55	40,00	45,55	100
Узраст 12 година	*f*	6	6	6	18
	%	33,34	33,33	33,33	100

Није занемарив проценат одговора посматрано за сваки узраст који указује да игра „нимало” не подстиче обнављање музичких садржаја (највећи је код испитаника најстаријег узраста 33,34%, затим код испитаника најмлађег узраста –

22,73%, а најмањи код испитаника узраста девет година – 7,81% и десет година старости – 8,82%. У складу са наведеним, испитаници најстаријег узраста 33,33% и најмлађег узраста 45,45% са најмањим процентом одговора потврђују да математичко-музичка игра доприноси обнављању одређених музичких садржаја.

Фреквенцијски приказ добијених одговора приказан је графички и показује да изузев код испитаника најстаријег узраста, код свих осталих узраста испитаника, фреквенције за ниво „потпуно” су изнад фреквенција за друга два нивоа процене. Са графикона се види и да је најнижа фреквенција одговора код свих узраста, сем најстаријег, где су фреквенције за сва три нивоа процене једнака (f = 6)дата за ниво процене „нимало” (*Графикон 54*).



Графикон 54 Кроз игру сам поновио/-ла одређене садржаје из музике – одговори према узрасту испитаника

Анализа добијених одговора потврђује став да реализована математичко-музичка игра доприноси обнављању музичких садржаја, али је интересантно нагласити да су одговори ученика с обзиром на узраст веома разнолики и да показују да најмлађи и најстарији испитаници са најмањим процентом одговора потврђују дефинисани став.

Израчунавањем χ2 теста, за резултате добијене на питање да ли су деца кроз игру поновила одређене музичке садржаје добијени су следећи резултати, утврђени према узрасту деце (*Табела 80*).

Табела 80Резултати $\chi 2$ теста – математичко-музичка игра доприноси обнављању музичких садржаја – варијабла узраст испитаника

fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe - ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
5	2,91	2,09	4,36	1,50
7	7,27	0,27	0,072	0,01
10	11,82	-1,82	3,31	0,28
5	8,46	-3,46	11,97	1,41
21	21,14	0,14	0,02	0,0009
38	34,40	3,6	12,96	0,37
6	8,98	-2,98	8,88	0,98
19	22,46	-3,46	11,97	0,53
43	36,54	6,46	41,73	1,14
8	7,26	0,74	0,55	0,07
22	18,17	3,83	14,67	0,80
25	29,56	-4,56	20,79	0,69
6	0,79	5,21	27,14	34,35
6	1,98	4,02	16,16	8,16
6	3,22	2,78	7,72	2,4
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			$\chi 2$ = 52,69

На основу поређења израчунатог $\chi 2$ = 52,69са граничним $\chi 2$ вредностима 15,507 на нивоу значајности 0.05 и 20,090 на нивоу значајности 0.01 за број степени слободе df = 8може се закључити да постоји статистички значајна разлика међу децом различитог узраста о ставу да ли игра подстиче обнављање садржаја из музике, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* већа од назначених граничних вредности.

Без обзира на наведену статистички значајну разлику уочену при анализи одговора испитаника различитог узраста, анализа свих добијених резултата истраживања, у односу на дати став и кроз радионице и према полу, као и узрасту ученика, говори у прилог потврђивања дефинисаног става, односно потврђује да су деца кроз игру имала могућност обнављања одређених музичких садржаја, чиме се доприноси и потврђивању опште постављене хипотезе истраживања.

Последња у низу тврдњи чија анализа указује да ли су или не деца током реализоване математичко-музичке игре, обнављала одређене математичко-музичке садржаје је *тврдња о извођењу различитих музичких ритмова од стране деце током реализације игре.*

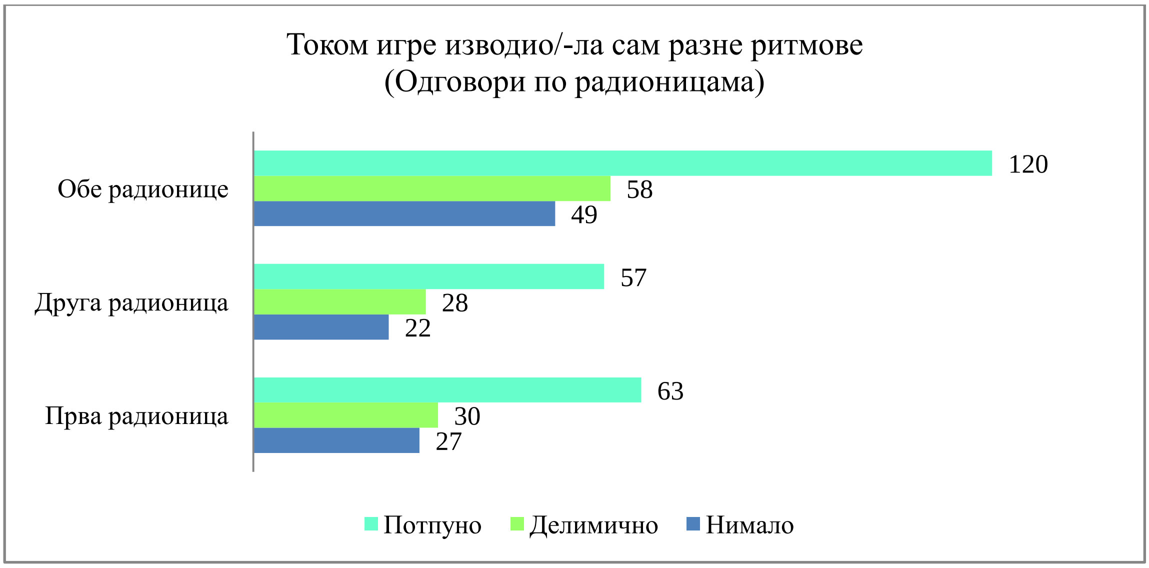
Посматрано на основу одговора испитаника након прве и друге реализације као и одговора у целини, резултати показују да око 52,00% –53,00% одговора испитаника потврђује став да се кроз игру изводи музички ритам означавањем нивоа „потуно”, око 25,00% – 26,00% одговора – потврђује ниво „делимично”, док око 21,00% – 22,00% одговора испитаника указује на ниво процене „нимало”, што је висок проценат одговора који указује да одређена активност током игре није „нимало” реализована у односу на претходно анализиране одговоре и тврдње обухваћене истраживањем (*Табела 81*).

Табела 81Током игре изводио/-ла сам разне ритмове – одговори по радионицама

Током игре изводио/-ла сам разне ритмове		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	27	30	63	120
	%	22,50	25,00	52,50	100
Друга радионица	*f*	22	28	57	107
	%	20,56	26,17	53,27	100
Обе радионице	*f*	49	58	120	227
	%	21,59	25,55	52,86	100

И заиста, након реализоване технике посматрања показало се да је извођење ритма током реализације игре било веома мало заступљено, односно, да је игра више усмерена и орјентисана на слушање и препознавање задатог ритма, те његово„записивање” на одређеној геометријској фигури – правоугаонику.

Посматрајући и анализирајући фреквенције добијених одговора формиран је графикон фреквенција, који без обзира на висок проценат одговора који потврђују да се ритам кроз игру није изводио или се „делимично” изводио, показује да је највећи број одговора за степен процене „потпуно” након обе реализације игре, као и након свих анализираних одговора, на основу чега се постављени став може потврдити (*Графикон 55*).



Графикон 55 Током игре изводио/-ла сам разне ритмове – одговори по радионицама

Израчунавањем χ2 теста и утврђивањем да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника у зависности од реализоване радионице за резултате добијене на тврдњу да ли су деца током игре изводила различите ритмове добијени су следећи резултати – на основу поређења израчунатогχ2 = 0,485 са граничним χ2 вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе *df* = 2, може се закључити да не постоји статистички значајна разлика у добијеним одговорима у зависности од реализоване радионице, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања од утврђених граничних вредности (*Табела 82*).

Табела 82Резултати χ2 теста– математичко-музичка игра доприноси извођењу различитих ритмова – варијабла редослед реализације игре

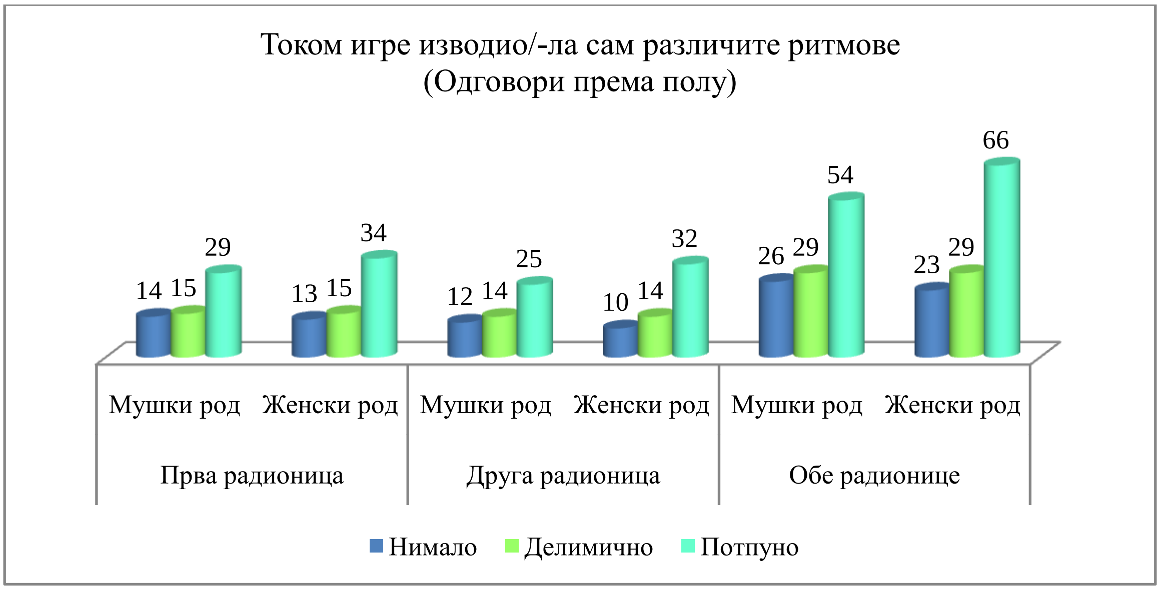
fe	*ft*	*(fe – ft)*	$(fe - ft)^2$	$\frac{(fe - ft)^2}{ft}$
27	25,90	1,09	1,20	0,04
30	30,66	0,66	0,43	0,01
63	63,43	0,43	0,18	0,002
22	25,25	-3,25	10,56	0,42
28	27,33	0,66	0,43	0,01
57	56,56	0,43	0,18	0,003
∑*fe* = 227	∑*ft*= 227			χ2 = 0,485

Даља анализа истог става усмерена је ка тумачењу одговора добијених од испитаника различитог пола. Резултати показују да испитаници женског пола (55,93%) у већем проценту одговора указују да се кроз игру изводе разни ритмови, у односу на испитанике мушког пола, који гледано у целини за исти ниво процене учествују са 49,54% одговора. Висок ниво процентуално изражених одговора на ниво „нимало” (кроз игру нису извођени разни ритмови – испитаници женског пола – 19,59%, испитаници мушког пола – 23,85%), доприноси закључку да се током игре музички ритам није у великој мери изводио. Томе доприносе и проценти одговора на ниво „делимично” (испитаници мушког пола – 26,61%, испитаници женског пола – 24,57%). Интересантно је да за оба поменута нивоа („нимало” и „делимично”) испитаници мушког пола учествују са већим процентом одговора, док је за ниво „потпуно” ситуација обрнута, већи проценат је дат, како је горе наведено, од испитаника женског пола (*Табела 83*).

Иако незанемариви проценти одговора испитаника оба пола који потврђују да се током игре нису изводили ритмови, проценат одговора који то оповргава је изнад 50,00% тако да се постављен став и у односу на одговоре испитаника према половима може потврдити.

Табела 83Током игре изводио/-ла сам разне ритмове – одговори према полу испитаника

Током игре изводио/-ла сам разне ритмове			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	14	15	29	58
		%	24,14	25,86	50,00	100
	Женски род	*f*	13	15	34	62
		%	20,97	24,19	54,84	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	12	14	25	51
		%	23,53	27,45	49,02	100
	Женски род	*f*	10	14	32	56
		%	17,86	25,00	57,14	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	26	29	54	109
		%	23,85	26,61	49,54	100
	Женски род	*f*	23	29	66	118
		%	19,50	24,57	55,93	100



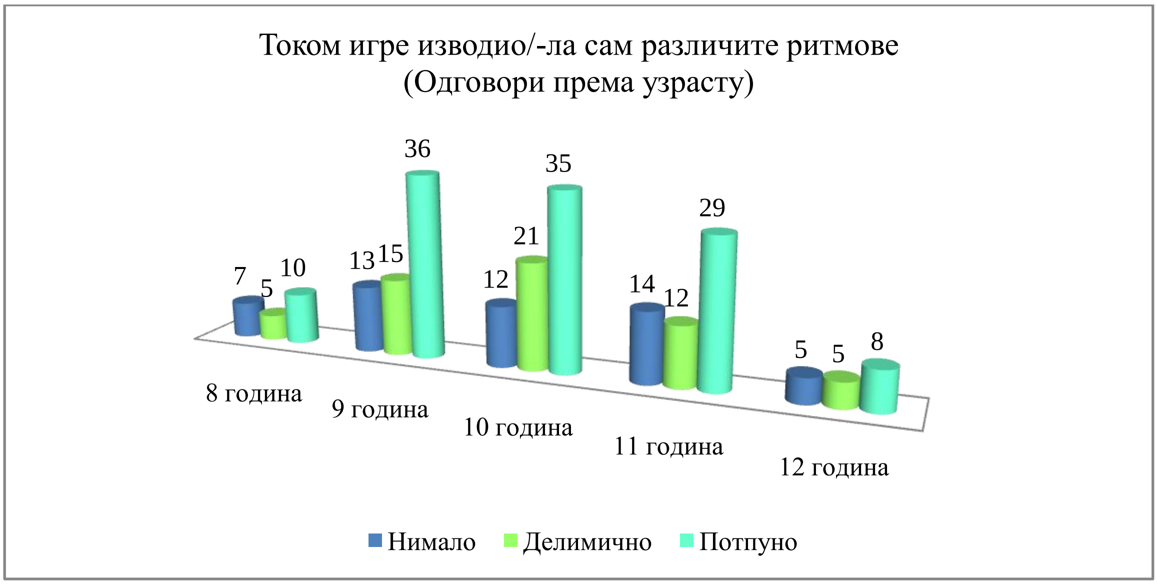
Графикон 56 Током игре изводио/-ла сам разне ритмове – одговори према полу испитаника

Дату тврдњу потврђују и одговори приказани графички где се уочава да без обзира на пол, фреквенције одговора испитаника који потврђују да су се током игре изводили различити ритмови су веће у односу на степен процене „нимало", који указује да се ритам током игре није изводио (*Графикон 56*).

Посматрајући и анализирајући одговоре према узрасту испитаника може се направити паралела са одговорима добијеним на ставове о обнављању садржаја из математике и музике. Најмлађи и најстарији испитаници за ниво процене „потпуно" дају најмањи број одговора, гледано процентуално и фреквенцијски, а у складу са тим и највећи број одговора на ниво „нимало" за тврдњу да су се током игре изводили различити ритмови (*Табела 84*). Фреквенцијски приказани одговори испитаника свих узраста, приказани графички, показују да је највећи број одговора за ниво „потпуно" на скали процене и тиме се постављени став и у погледу узраста ученика може потврдити (*Графикон 57*).

Табела 84Током игре изводио/-ла сам разне ритмове – одговори према узрастуиспитаника

Током игре изводио/-ла сам разне ритмове		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	7	5	10	22
	%	31,82	22,72	45,46	100
Узраст 9 година	*f*	13	15	36	64
	%	20,31	23,44	56,25	100
Узраст 10 година	*f*	12	21	35	68
	%	17,65	30,88	51,47	100
Узраст 11 година	*f*	14	12	29	55
	%	25,45	21,82	52,73	100
Узраст 12 година	*f*	5	5	8	18
	%	27,78	27,78	44,44	100



Графикон 57 Током игре изводио/-ла сам разне ритмове – одговори према узрасту испитаника

Израчунавањем$\chi 2$ теста у циљу указивања да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника различитог узраста када је у питању став о извођењу ритма током реализоване математичко-музичкеигре, дошло се до следећих резултата (*Табела 85*):

Табела 85Резултати χ2 теста – математичко-музичка игра доприноси извођењу различитих ритмова – варијабла узраст испитаника

fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe - ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
7	4,94	2,06	4,24	0,85
5	5,62	0,62	0,38	0,06
10	11,44	-1,44	2,07	0,18
13	14,37	-1,37	1,87	0,13
15	16,35	-1,35	1,82	0,11
36	33,26	2,74	7,50	0,23
12	15,27	-3,27	10,69	0,70
21	17,37	3,63	13,17	0,76
35	35,35	0,35	0,12	0,003
14	12,35	1,65	2,72	0,22
12	14,05	-2,05	4,20	0,30
29	28,59	0,41	0,16	0,005
5	4,04	0,96	0,29	23,04
5	4,59	0,41	0,17	0,03
8	9,35	-1,35	1,82	0,19
∑*fe* = 227	∑*ft*= 227			χ2 = 26,80

На основу поређења израчунатогχ2 = 26,80са граничним χ2 вредностима 15,507 на нивоу значајности 0.05 и 20,090 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 8, може се закључити да постоји статистички значајна разлика међу децом различитог узраста о ставу да ли су током игре изводили разне ритмове, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* већа од назначених граничних вредности.

На основу наведеног закључује се да су одговори испитаника различитог узраста утицали на одговоре на питање о извођењу ритма током игре и показује се да испитаници узраста девет, десет и једанаест година старости у највећој мери имају позитиван став на дату тврдњу, што је у складу и са одговорима надве претходно анализиране тврдње – савладавање и обнављање математичких и музичких садржаја.

Без обзира на наведену статистички значајну разлику уочену код одговора датих од испитаника различитог узраста анализа свих добијених резултата, кроз радионице, резултата добијених према полу испитаника, те узраста ученика, говори у прилог потврђивању дефинисаног става да су деца кроз игру изводила одређене ритмове, чиме се и кроз овај, као и претходна два става доприноси потврђивању опште постављене хипотезе истраживања – ***Претпоставља се да ће интердисциплинарна игровна активност математике и музике допринети савладавању и обнављању математичких и музичких садржаја код деце одређеног узраста.***

Интересантно је да и поред потврђивања постављене хипотезе, код анализе и презентовања резултата испитаника у погледу узраста на сва три става скале процене усмерена на потврђивање или оповргавање назначене хипотезе, постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника најстаријег и најмлађег узраста (осам и дванаест година), у односу на став испитаника узраста девет, десет и једанаест година. Овако добијени резултати, а доведени у везу и са претходним уопштавањима указују да је игра у већој мери прилагођена и концепцијски интересантнија деци узраста девет, десет и једанаест година, у односу на испитанике од осам и дванаест година старости.

2.2.3. Пажња, мотивација и ангажовање/активност деце током математичко-музичке игре

У циљу потврђивања или оповргавања постављене хипотезе – *Претпоставља се да ће кроз интердисциплинарну игровну активност математике и музике бити подстакнута дечја пажња, активност и мотивисаност у раду* анализирани су одговори и процене деце на следеће ставове/тврдње:

– током игре био/-ла сам мотивисан/-на за рад;
– током игре био-ла сам активан/-на и ангажован/-на;
– током игре био/-ла сам упоран/-на и истрајан/-на у раду;
– током игре био/-ла сам концентрисан/-на на игру.

Одговори деце на *питање/став о мотивисаности током игре* приказани су у *Табели 86.* Табела садржи резултате одговора ученика по радионицама – мотивисаност након прве и након друге радионице свих група, као и одговоре у целини, без обзира на реализовану радионицу.

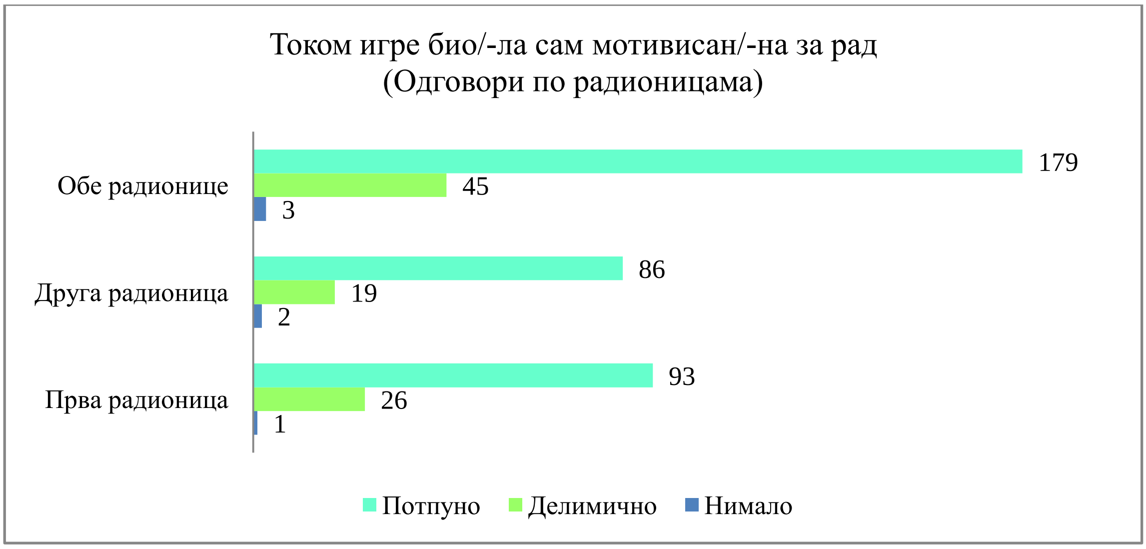
Табела 86Током игре био/-ла сам мотивисан/-на за рад –одговори по радионицама

Током игре био/-ла сам мотивисан/-на за рад		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	1	26	93	120
	%	0,84	21,66	77,50	100
Друга радионица	*f*	2	19	86	107
	%	1,87	17,76	80,37	100
Обе радионице	*f*	3	45	179	227
	%	1,32	19,82	78,86	100

На основу података датих у табели преко 50,00% ученика (77,50% након прве, 80,37% након друге и 78,86% у целокупној реализацији игре, навело је да је током игре било мотивисано за математичко-музичку игру *Musical Monkeys*. Изузетно мали проценат испитаника, свега 1,32% (гледано у целини), навело је да током игре није било мотивисано, док 19,82% одговора испитаника указује да их је игра „делимично" мотивисала.

Добијени и анализирани подаци на назначену тврдњу представљени су графички у циљу визуелног приказивања резултата. Графикон потврђује изузетну мотивисаност деце за игру, указујући да је сто седамдесет девет одговора испитаника (f = *179*) након обе радионицепотврдило ниво „потпуно", док је само три одговора (f = *3*) усмерено на ниво „нимало", када је у питању мотивација током реализације *Musical Monkeys* игре.

Са графикона се уочава да су и након прве и након друге радионице доминантни одговори који потврђују да је игра мотивисала децу за рад и учествовање у реализацији математичко-музичке игре (*Графикон 58*).



Графикон 58 Током игре био/ла сам мотивисан/на за рад – одговори по радионицама

Истраживањем се у циљу потврђивања постављене хипотезе тежило указати да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима деце након прве и након друге радионице, те да ли је тренутна мотивисаност, пажња и ангажовање ученика, као и време реализације игре (прва или друга радионица) утицало на одговоре ученика или је игра сама по себи, својој концепцији и садржини, мотивисала и ангажовала децу за реализацију игре. За добијање адекватних статистичких резултата израчуната је вредностје *Хи-квадрат теста*.

Израчунавањем χ2 теста за резултате добијене на питање о мотивисаности деце током игре добијени су следећи резултати (*Табела 87*):

Табела 87Резултати χ2 теста – мотивисаност ученика по радионицама – варијабла време реализације игре

Fe	*ft*	$(fe - ft)$	$(fe - ft)^2$	$\frac{(fe - ft)^2}{ft}$
1	1,58	-0,58	0,34	0,22
26	23,78	2,22	4,93	0,21
93	94,62	-1,62	2,62	0,03
2	1,41	0,59	0,35	0,25
19	21,21	-2,21	4,88	0,23
86	84,37	1,63	2,66	0,03
∑*fe* = 227	∑*ft*= 227			χ2 = 0,97

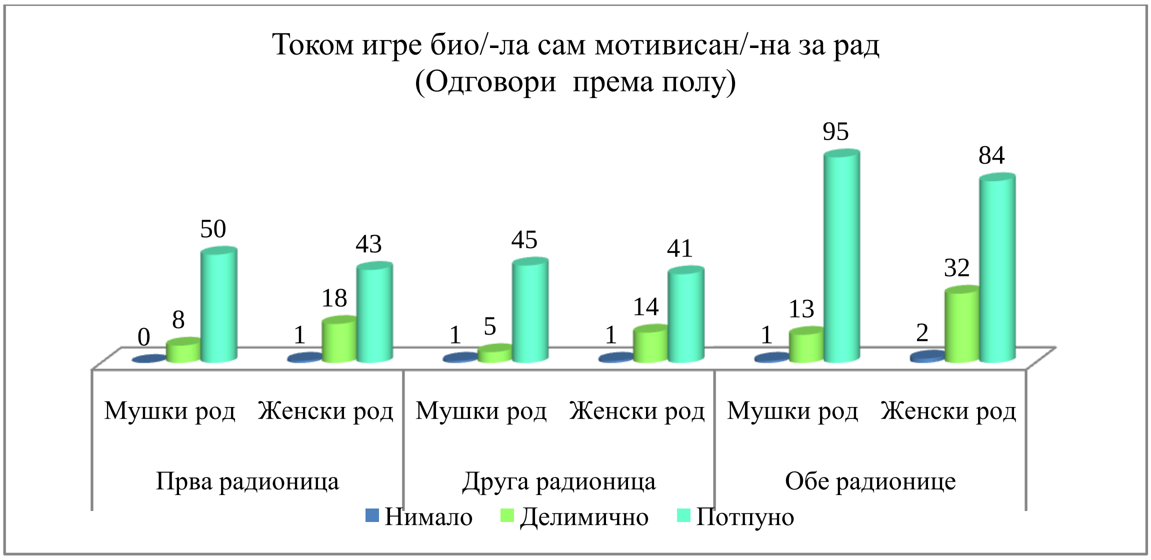
На основу поређења израчунатог $\chi 2$ = 0,97 са граничним $\chi 2$ вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе *df* = 2, може се закључити да је у обе радионице игра подстакла мотивисаност деце, односно, показана мотивисаност није условљена тренутном мотивисаношћу деце и одређеном реализацијом радионице, већ самом игром.

Како би се потпуније допринело потврђивању назначеног става, те постављеној хипотези истраживања, анализирани су подаци добијени од испитаника различитог пола. Подаци показују да 87,16% одговора добијених од деце мушког рода указује на потпуну мотивисаност током реализације игре, односно 71,19% одговора добијених од деце женског рода. Може се закључити да су дечаци били мотивисанији за игру у односу на девојчице, али је процентуална разлика у одговорима незнатна (*Табела 88*).

Табела 88Током игре био/-ла сам мотивисан/-на за рад – одговори према полу испитаника

Током игре био/-ла сам мотивисан/-на за рад			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	0	8	50	58
		%	0	13,80	86,20	100
	Женски род	*f*	1	18	43	62
		%	1,61	29,04	69,35	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	1	5	45	51
		%	1,97	9,80	88,23	100
	Женски род	*f*	1	14	41	56
		%	1,78	25,00	73,22	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	1	13	95	109
		%	0,92	11,92	87,16	100
	Женски род	*f*	2	32	84	118
		%	1,70	27,11	71,19	100

Графички приказ добијених резултата указује на веома низак степен одговора који се односи на ниво „нимало”, а усмерен је на став о мотивисаности деце током игре.



Графикон 59 Током игре био/-ла сам мотивисан/-на за рад – одговори према полу испитаника

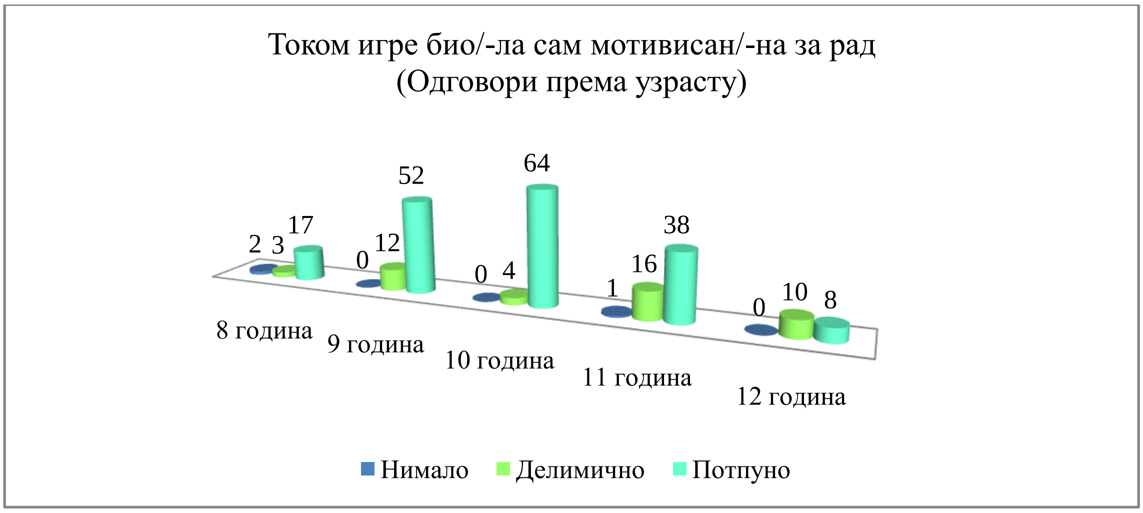
Од укупно две стотине седамдесет седам добијених одговора (f = *277*) након обе радионице, само три (f =*3*) указују да игра учеснике није мотивисала на рад, при том два одговора добијена су од испитаника женског и један одговор одиспитаника мушког рода. На основу до сада наведеног може се закључити да је игра била у великој мери мотивишућа за децу без обзира на пол, али и редослед радионица, што је и статистички потврђено (*Графикон 59*).

Табела 89Током игре био/-ла сам мотивисан/-на за рад – одговори према узрасту испитаника

Током игре био/-ла сам мотивисан/-на за рад		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	2	3	17	22
	%	9,09	13,64	77,27	100
Узраст 9 година	*f*	0	12	52	64
	%	0	18,75	81,25	100
Узраст 10 година	*f*	0	4	64	68
	%	0	5,89	94,11	100
Узраст 11 година	*f*	1	16	38	55
	%	1,82	29,09	69,09	100
Узраст 12 година	*f*	0	10	8	18
	%	0	55,56	44, 44	100

Анализа резултата одговора испитаника различитог узраста указује да је игра у највећој мери била мотивишућа за децу узраста десет (94,11%), девет (81,25%) и осам година (77,27%), док је нешто нижи проценат и фреквенција одговора на став *игра ме је потпуно мотивисала*,код деце узраста једанаест (69,09%) и дванаест година (44,44%). Интересантно је да код деце узраста од дванаест година, који су према приказаним фреквенцијама и процентима најмање били мотивисани за игру, нема одговора који указују да их игра „нимало” није мотивисала, док су сви одговори расподељени на нивое „делимично” (55,56% одговора) и „потпуно” (44,44% одговора) (*Табела 89*).

Приказано графички резултати илуструју да је од укупне фреквенције одговора (*f = 227*) свега шест (*f = 6*) одговора усмерено на ниво „нимало”, тридесет (*f = 30*) на ниво „делимично”, док су сви остали одговори (*f = 191*) усмерени на ниво „потпуно”, што доприноси потврђивању тестираног става и према испитаницима различитог узраста.



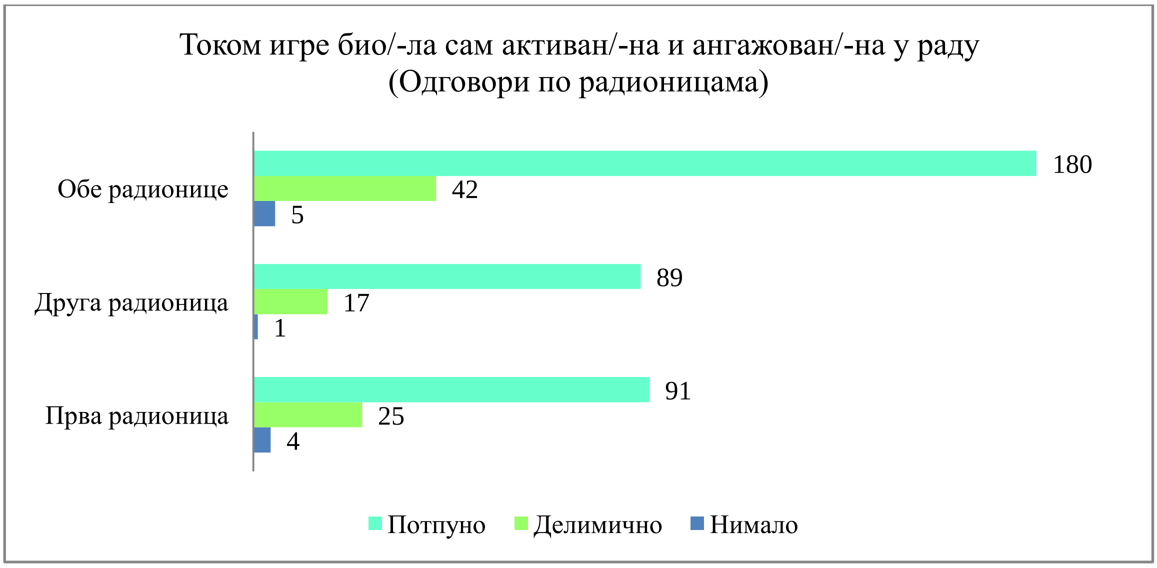
Графикон 60 Током игре био/-ла сам мотивисан/-на за рад – одговори према узрасту испитаника

Анализирајући добијене одговоре на *питање о активности и ангажовању деце током реализације математичко-музичке* игре добијени су следећи резултати – од укупног броја одговора деце 79,30% указује да су током игре била „потпуно” активна и ангажована, 18,50% да их је игра „делимично” ангажовала, док свега 2,20% наводи да их игра није „нимало” подстакла на активност и ангажовање. Интересантно је да су проценти одговора који потврђују дати став, виши у другој (83,17%) у односу на прву реализацију игре (75,83%) и обратно, проценат одговора који указује да игра није подстакла на активност и ангажовање учесника, опада у другој реализацији игре (0,93%) у односу на прву реализацију (3,34%) (*Табела 90*).

Табела 90Током игре био/-ла сам активан/-на и ангажован/-на – одговори по радионицама

Током игре био/-ла сам активан/-на и ангажован/-на		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	4	25	91	120
	%	3,34	20,83	75,83	100
Друга радионица	*f*	1	17	89	107
	%	0,93	15,90	83,17	100
Обе радионице	*f*	5	42	180	227
	%	2,20	18,50	79,30	100

Графички представљени резултати показују да су испитаници током обе радионице, као и у погледу датих одговора у целини, дали највећи број одговора на ниво „потпуно” на питање о активности и ангажовању током игре. Према представљеним фреквенцијама свега пет одговора ($f = 5$) је дато на ниво „нимало”, док је сто осамдесет одговора ($f = 180$) дато на ниво „потпуно”. Високе фреквенцијске разлике присутне су и у одговорима након прве и друге реализације игре (*Графикон 61*).



Графикон 61 Током игре био/-ла сам активан/-на и ангажован/-на – одговори по радионицама

Израчунавањем$\chi 2$ теста у циљу утврђивања да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника након прве и након друге реализације игре,добијени су следећи резултати – на основу поређења израчунатог$\chi 2$ = 2,61 са граничним $\chi 2$ вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе $df = 2$, може се закључити да не постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника након прве и друге радионице односно, показана активност и ангажованост није условљена тренутном активношћу деце, већ карактеристикама реализоване математичко-музичке игре (*Табела 91*).

Табела 91Резултати χ2 теста – активност и ангажовање ученика током математичко-музичке игре – варијабла време реализације игре

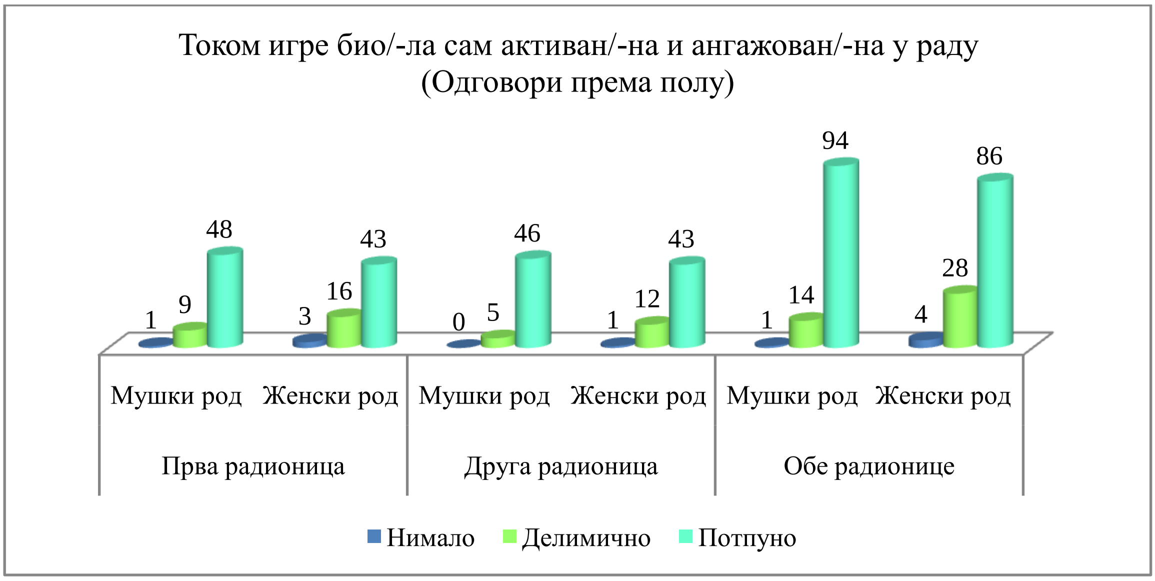
fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe - ft)^2$	$\frac{(fe - ft)^2}{ft}$
4	2,64	1, 36	1,85	0,70
25	22,20	2,80	7,84	0,35
91	95,15	-4,15	17,23	0,18
1	2,36	-1,36	1,84	0,78
17	19,80	-2,8	7,84	0,40
89	84,85	4,15	17,22	0,20
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			χ2 = 2,61

Посматрано према полу деце већи проценат одговора деце мушког пола (86,24%) у односу на одговоре деце женског пола (72,89%) потврдило је да их је игра у потпуности подстакла на активност и ангажовање. Према анализи претходног питања и добијених одговора, дечаци су такође показали и незнатно већу мотивисаност у раду током игре у односу на девојчице. Уколико посматрамо одговоре по радионицама резултат је исти, дечаци су у већој мери указали да их је игра подстакла на ангажовање и активност у односу на девојчице, али и једни и други дају више од 50,00% одговора, који потврђују да их математичко-музичка игра подстиче на активност и ангажовање, у односу на укупне одговоре добијене истраживањем на сва три нивоа процене (*Табела 92*).

Визуелни приказ добијених фреквенција одговора ученика према полу указује да се од укупног броја добијених одговора (*f = 227*)пет одговора (*f = 5*) односи на ниво „нимало” у погледу ангажовања и активности током игре, четрдесет два (*f = 42*) на ниво „делимично”, док сто осамдесет одговора (*f=180*) указује да игра у потпуности подстиче активност и ангажовање деце (*Графикон 62*).

Табела 92Током игре био/-ла сам активан/-на и ангажован/-на – одговори према полу испитаника

Токома игре био/-ла сам активан/-на и ангажован/-на			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	1	9	48	58
		%	1,73	15,52	82,75	100
	Женски род	*f*	3	16	43	62
		%	4,84	25,81	69,35	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	0	5	46	51
		%	0	9,81	90,19	100
	Женски род	*f*	1	12	43	56
		%	1,79	21,42	76,79	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	1	14	94	109
		%	0,91	12,85	86,24	100
	Женски род	*f*	4	28	86	118
		%	3,38	23,73	72,89	100



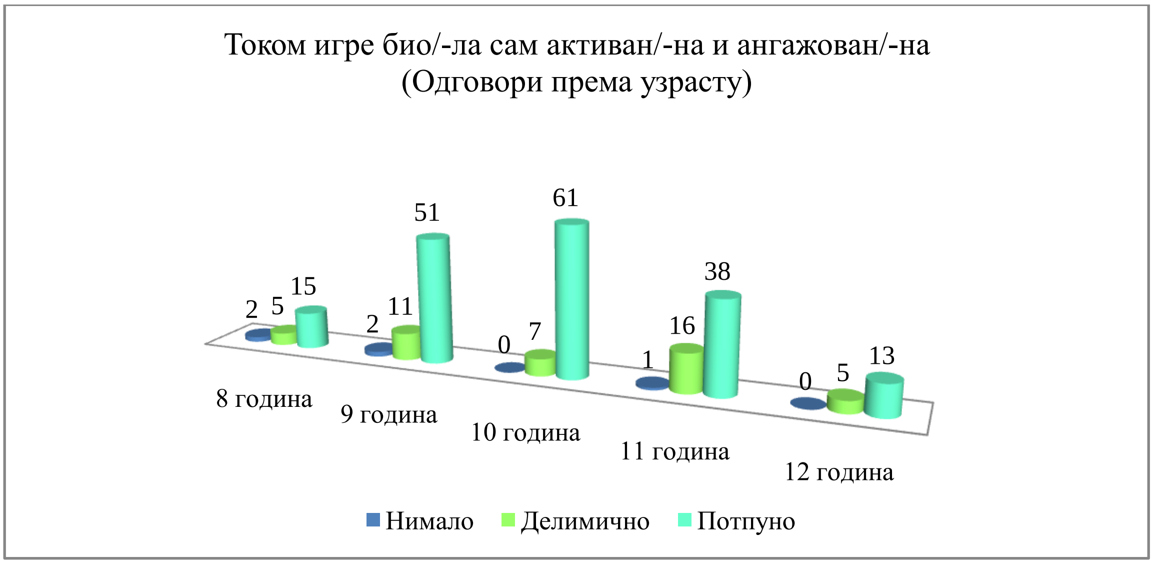
Графикон 62 Током игре био/-ла сам активан/-на и ангажован/-на – одговори према полу испитаника

Табела 93Током игре био/-ла сам активан/-на и ангажован/-на – одговори према узрасту испитаника

Током игре био/-ла сам активан/-на и ангажован/-на		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	2	5	15	22
	%	9,09	22,73	68,18	100
Узраст 9 година	*f*	2	11	51	64
	%	3,13	17,18	79,69	100
Узраст 10 година	*f*	0	7	61	68
	%	0	10,29	89,71	100
Узраст 11 година	*f*	1	16	38	55
	%	1,82	29,09	69,09	100
Узраст 12 година	*f*	0	5	13	18
	%	0	27,78	72,22	100

Посматрано према узрасту испитаника сви одговори, без обзира на узраст имају највећи проценат и фреквенцију који потврђују ниво „потпуно” када је у питању став о активности и ангажовању током игре. Највећи проценат одговора који указује да је игра допринела ангажовању и активности је код ученика узраста десет година (89,71%), затим следе ученици узраста девет година (79,69%), дванаест година (72,22%), једанаест година (69,09%), док су најмањи проценат одговора дали ученици узраста осам година (68,18%). Деца узраста десет и дванаест година не наводе да их игра није „нимало” ангажовала (0,00%), док 9,09% најмлађих испитаника (деца узраста осам година) наводи да их игра „нимало” није активирала и ангажовала у раду (*Табела 93*).

Добијени резултати представљени су графички и показују да код сваког тестираног узраста испитаника доминира ниво процене „потпуно”. Фреквенције свих узраста, дате на ниво процене „нимало” су изразито ниске код свих узраста испитаника – најмлађи испитаниции испитаници узраста девет година старости са по два одговора потврђују ниво „нимало”, испитаници узраста десет и дванаест година ниједним одговором не потврђују овај ниво процене (*f* = *0*), док испитаници узраста једанаест година, са само једним одговором (*f* = *1*), од укупно датих одговора, потврђују да игра не подстиче на активност и ангажовање (*Графикон 63*).



Графикон 63 Током игре био/-ла сам активан/-на и ангажован/-на – одговори према узрасту испитаника

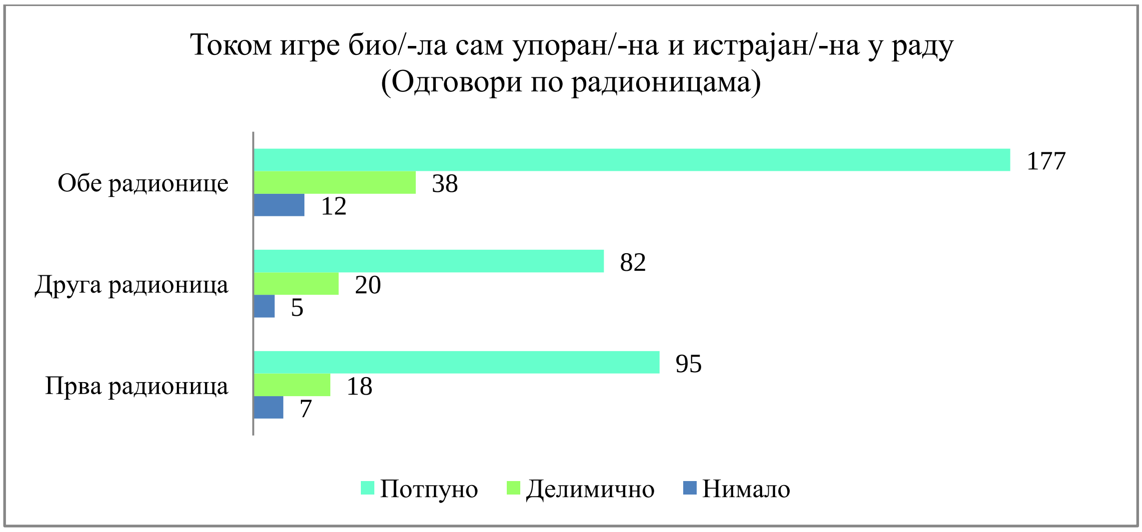
*На питање о истрајности и упорности ученика у раду,*добијени резултати истраживања указују да игра подстиче децу на истрајност и упорност, како у погледу одговора добијених након појединих радионица, тако и у односу на пол деце, њихов узраст и у односу анализираних одговора у целини.

Уколико посматрамо одговоре дате након прве, односно друге радионице, као и одговоре целокупног истраживања уочава се да 77,97% одговора испитаника потврђује да игра подстиче на истрајност и упорност у раду, док 5, 28% одговора указује да игра „нимало” не подстиче истрајност и упорност током реализације игре. Да реализована математичко-музичка игра „делимично” подстиче на истрајност и упорност деце истакнуто је у 16,75% одговора посматрано на основу укупно добијених одговора након обе реализације игре у свим тестираним групама (*Табела 94*).

Табела 94Током игре био/-ла сам упоран/-на и истрајан/-на у раду – одговори по радионицама

Током игре био/-ла сам упоран/-на и истрајан/-на у раду		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	7	18	95	120
	%	5,84	15,00	79,16	100
Друга радионица	*f*	5	20	82	107
	%	4,67	18,69	76,64	100
Обе радионице	*f*	12	38	177	227
	%	5,28	16,75	77,97	100

Добијене и израчунате фреквенције одговора испитаника представљене су графички и илуструју да у обе реализације игре, као и након спроведеног истраживања највећа фреквенција датих одговора доприноси потврђивању нивоа „потпуно”, а тиме и потврђивања дефинисаног и тестираног става (*Графикон 64*).



Графикон 64 Током игре био/-ла сам упоран/-на и истрајан/-на у раду – одговори по радионицама

Од укупно добијених фреквенција одговора након спроведеног истраживања (*f =227*) сто седамдесет седам одговора (*f = 177*) потврђује да игра у потпуности подстичеистрајност и упорност у раду, тридесет осам одговора (*f = 38*) указује на делимично подстицање, док дванаест одговора (*f = 12*) указује да игра не подстиче упорност и истрајност у раду, што је знатно нижа фреквенција у односу на фреквенцију која потврђује дати став.

Да би се утврдило да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника након две реализације игре израчуната је вредност χ2 теста (*Табела 95*).

Табела 95Резултати χ2 теста – упорност и истрајност у раду током математичко-музичке игре – варијабла време реализације игре

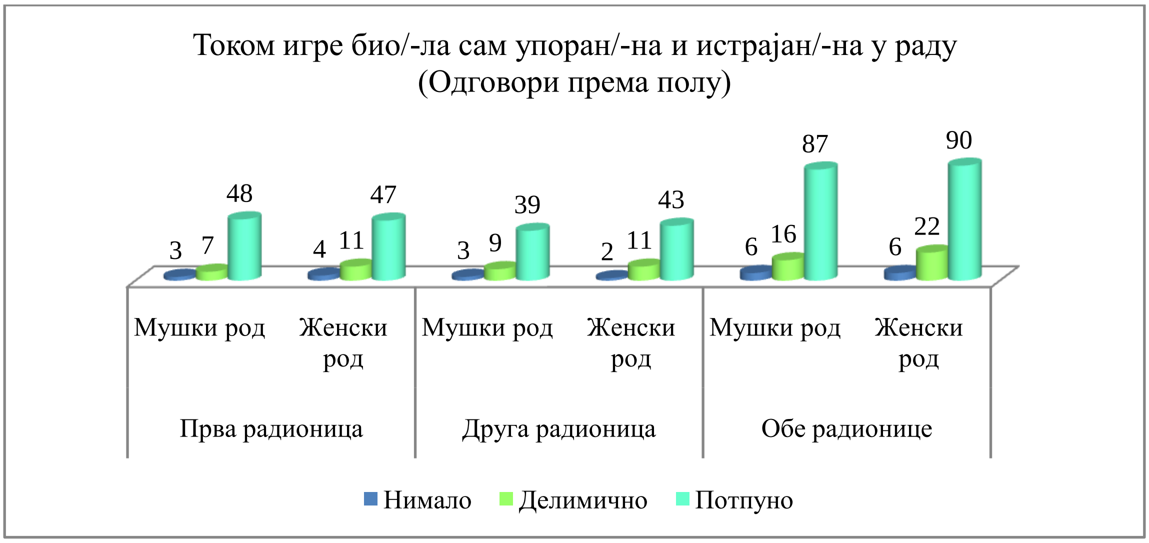
Fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe - ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
7	6,34	0,66	0,44	0,07
18	20,09	-2,09	4,36	0,22
95	93,56	1,44	2,07	0,02
5	5,66	-0,66	0,43	0,07
20	17,91	2,09	4,37	0,24
82	83,43	-1,43	2,04	0,02
∑*fe* = 227	∑*ft*= 227			χ2 = 0,64

На основу поређења израчунатог χ2 = 0,64 са граничним χ2 вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 2, може се закључити да не постоји статистички значајна разлика у одговорима деце након прве и друге реализације игре,односно, указује се да изражена упорност и истрајност у раду нису условљене тренутном упорношћу и истрајношћу деце или временом реализације игре, већ да их је игра својим карактеристикама, садржином и концепцијом подстакла на исте.

Даља анализа истраживања усмерена је на разматрање и анализу одговора испитаника различитог пола и узраста. Анализа резултата одговора према полу испитаника указује да је игра и дечаке и девојчице у највећој мери подстакла на истрајност и упорност током рада и да не постоји велики степен разлике у процентима испитаника мушког пола, који наводе да их игра у потпуности подстиче да буду истрајни и упорни у раду – 79,82% и девојчица – 76,27%. (*Табела 96*).

Табела 96Током игре био/-ла сам упоран/-на и истрајан/-на у раду – одговори према полу испитаника

Током игре био/-ла сам упоран/-на и истрајан/-на у раду			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	3	7	48	58
		%	5,17	12,07	82,76	100
	Женски род	*f*	4	11	47	62
		%	6,45	17,75	75,80	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	3	9	39	51
		%	5,88	17,65	76,47	100
	Женски род	*f*	2	11	43	56
		%	3,58	19,64	76,78	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	6	16	87	109
		%	5,50	14,68	79,82	100
	Женски род	*f*	6	22	90	118
		%	5,08	18,65	76,27	100



Графикон 65 Током игре био/-ла сам упоран/-на и истрајан/-на у раду – одговори према полу испитаника

Графички приказ добијених одговора илустративно приказује фреквенције одговора на питање о упорности и истрајности у раду. Са графикона се уочава да дванаест одговора потврђује став да игра не подстиче истрајност и упорност у раду (*f = 12*), тридесет осам одговора да игра „делимично” подстиче истрајност и упорност у раду (*f = 38*), док сто седамдесет седам одговора потврђује да игра у потпуности доприноси дечјој истрајности и упорности у раду (*f = 177*) *(Табела 97)*.

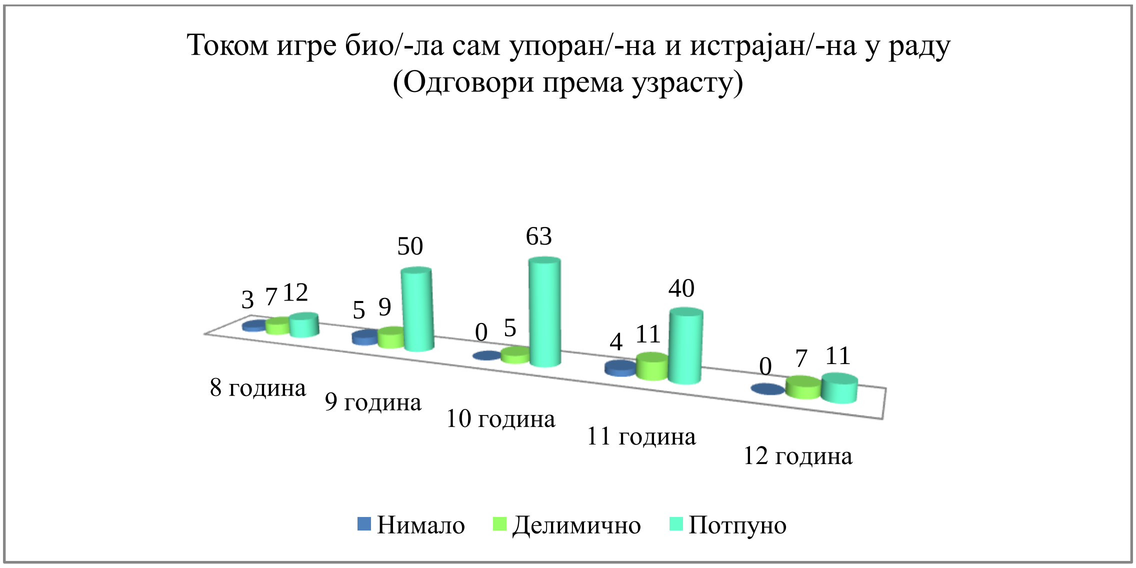
Анализа резултата истраживања гледано према узрасту испитаника и даље илуструје да више од 50,00% добијених одговора потврђује да игра „потпуно” подстиче истрајност и упорност током решавања постављених математичко-музичких задатака код деце.

Табела 97Током игре био/-ла сам упоран/-на и истрајан/-на у раду – одговори према узрасту испитаника

Током игре био/-ла сам упоран/-на и истрајан/-на у раду		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	3	7	12	22
	%	13,64	31,81	54,55	100
Узраст 9 година	*f*	5	9	50	64
	%	7,81	14,06	78,13	100
Узраст 10 година	*f*	0	5	63	68
	%	0	7,35	92,65	100
Узраст 11 година	*f*	4	11	40	55
	%	7,27	20,00	72,73	100
Узраст 12 година	*f*	0	7	11	18
	%	0	38,89	61,11	100

Као и у анализи претходних питања/ставова уочава се да је највећи проценат деце узраста десет година (92,65%), који потврђују претходно наведен исказ, затим узраст девет година (78,13%), једанаест година (72,73%), док се најмањи проценат одговора за ниво „потпуно” уочава код најстаријих испитаника, деце узраста дванаест година (61,11%) и најмлађих испитаника, деце узраста осам година (54,55%). Интересантно је да деца узраста дванаест година, која са веома ниским процентом у односу на друге узрасте потврђују да игра подстиче на упорност и истрајност у раду, на исти став са 0,00% одговора процењује да реализована игра „нимало” не подстиче на упорност и истрајност (*Табела 97*).

Графикон фреквенција илуструје следеће резултате – највећа фреквенција одговора на ниво „потпуно” на питање/став о истрајности и упорности у раду је код деце узраста десет година, што је у складу и са процентуално добијеним резултатом. Са графикона се уочава да су веома ниске фреквенције процене на ниво „нимало” код свих узраста испитаника, чиме се тестиран став и са овог аспекта може потврдити (*Графикон 66*).



Графикон 66 Током игре био/-ла сам упоран/-на и истрајан/-на у раду – одговори према узрасту испитаника

Подстицање пажње и концентрације током реализације математичко-музичке игре анализирано је и на основу процена деце на став – *током игре био/-ла сам концентрисан/-на у раду.*

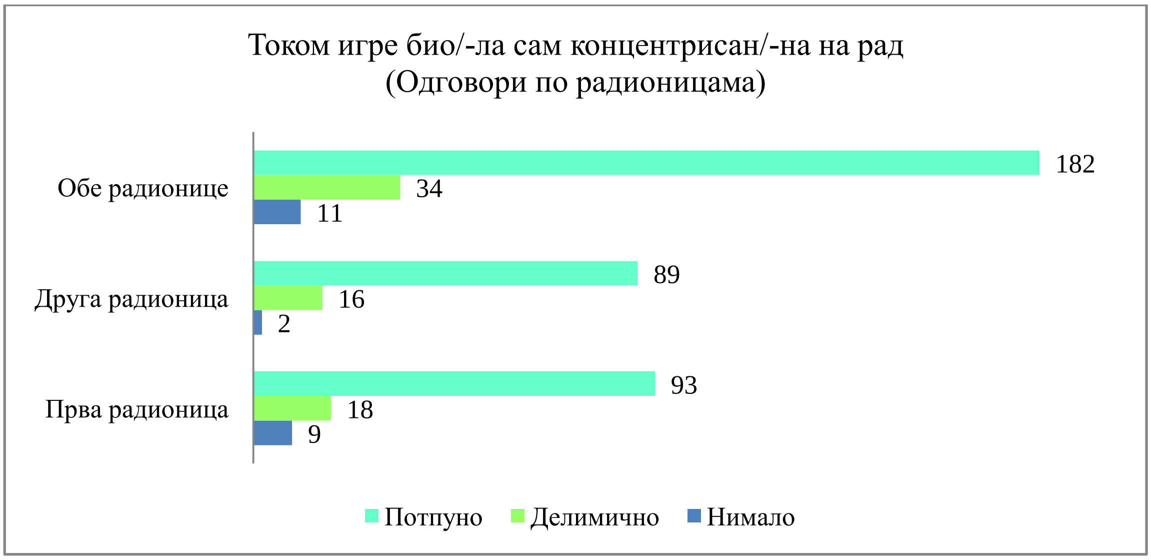
Да ли је пажња и концентрација зависила од радионице која је реализована или је сама игра без обзира на редослед реализације радионице, допринела пажњи и концентрацији ученика приказано је табеларно по радионицама, процентуално, али и утврђивањем статистичке значајности у погледу добијених одговора након прве и након друге реализације игре у свакој групи испитаника.

Фреквенције и израчунати проценти добијених одговора, након спроведеног истраживања, показују да 80,17% одговора потврђује да су деца током игре била у потпуности концентрисана.

На „делимичну” концентрацију током игре указује 14,98% од укупно добијених одговора, док 4,85% одговора потврђује ниво процене „нимало” на дефинисаној скали процене, који указује да деца током игре нису била концентрисана (*Табела 98*).

Табела 98Током игре био/-ла сам концентрисан/-на на рад – одговори по радионицама

Током игре био/-ла сам концентрисан/-на на рад		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	9	18	93	120
	%	7,5	15,00	77,5	100
Друга радионица	*f*	2	16	89	107
	%	1,87	14,95	83,18	100
Обе радионице	*f*	11	34	182	227
	%	4,85	14,98	80,17	100



Графикон 67 Током игре био/-ла сам концентрисан/-на на рад – одговори по радионицама

Графички приказдобијених одговора након сваке појединачне радионице и након одговора добијених у целини, показује да су без обзира на реализовану радионицу, као и у погледу анализе одговора у целини, највише фреквенције које потврђују ниво процене „потпуно” (игра је у потпуности подстакла пажњу и концентрацију)чиме се тестирани став може потврдити и допринети потврђивању основно постављене хипотезе. Од укупног броја одговора (*f = 227*) сто осамдесет два (*f = 182*) се односи на потпуну концентрисаност током игре, тридесет четири (*f = 34*) на делимичну, док једанаест одговора (*f = 11*) указује да деца током игре нису била концентрисана (*Графикон 67*).

Израчунавањем$\chi 2$ теста и утврђивањем да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника након прве и друге реализације игре у погледу њихове концентрације и пажње, добијени су следећи резултати – на основу поређења израчунатог $\chi 2 = 3{,}93$ са граничним $\chi 2$ вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе $df = 2$, закључује се да не постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника након појединачних реализација игре, чиме се доприноси ставу да је игра својом динамиком и садржајем, независно од времена реализације, подстакла концентрацију и пажњу деце и да су деца била концентрисана током обе реализације игре (*Табела 99*).

Табела 99Резултати χ2 теста – игра доприноси пажњи и концентрацији – варијабла редослед реализације игре

Fe	*ft*	$(fe - ft)$	$(fe - ft)^2$	$\frac{(fe - ft)^2}{ft}$
9	5,81	3,19	10,17	1,75
18	17,97	0,03	0,0009	0.000050
93	96,21	-3,21	10,34	0,10
2	5,19	3,19	10,17	1,96
16	16,02	-0,02	0,0004	0.000025
89	85,79	3,21	10,30	0,12
$\sum fe = 227$	$\sum ft = 227$			$\chi 2 = 3{,}93$

Анализа резултата одговора испитаника различитог пола указује да на највећи степен концентрације указују одговори испитаника мушког рода током друге реализације игре (92,16%), док најмањи степен процене истог нивоа (ниво„потпуно” у скали процене) потврђују одговори девојчица након прве реализације игре (67,74%).

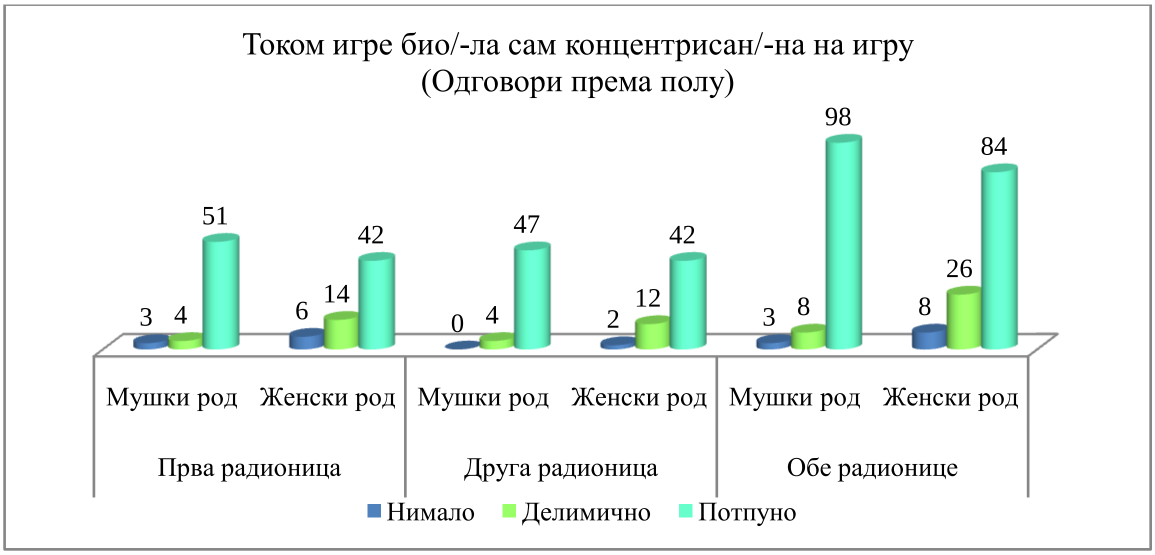
Гледано у целини дечаци су указали да игра „потпуно” подстиче на концентрацију – 89,91% одговора, док је тај проценат код девојчица 71,18%.

Испитаници мушког пола са 2,75% потврђују да игра не подстиче на концентрацију и пажњу (ниво процене „нимало” на датој скали процене), док испитаници женског пола исти ниво процене потврђују са 6,78%. Изражена је разлика у процентуалним вредностима испитаника мушког и женског пола када се потврђује степен процене који указује да игра „делимично” доприноси концентрацији – 7,34%, испитаници мушког пола и 22,04%, испитаници женског пола (*Табела 100*).

Табела 100Током игре био/-ла сам концентрисан/-на на игру – одговори према полу испитаника

Током игре био/-ла сам концентрисан/-на на игру			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	3	4	51	58
		%	5,17	6,89	87,94	100
	Женски род	*f*	6	14	42	62
		%	9,68	22,58	67,74	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	0	4	47	51
		%	0	7,84	92,16	100
	Женски род	*f*	2	12	42	56
		%	3,58	21,42	75,00	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	3	8	98	109
		%	2,75	7,34	89,91	100
	Женски род	*f*	8	26	84	118
		%	6,78	22,04	71,18	100

Представљено графички подаци који указују на концентрацију учесника различитог пола током реализације математичко-музичке игре показују да деведесет осам одговора испитаника мушког (*f = 98*)и осамдесет четири одговора испитаника женског пола (*f = 84*), потврђује да игра доприноси пажњи и концнтрацији,што је укупно сто осамдесет два одговора, у погледу укупно добијених одговора на дати ниво процене (*f = 182*). Када добијену фреквенцију упоредимо са фреквенцијом свих добијених одговора истраживања (*f = 227*) дефинисани став се може потврдити и са аспекта одговора испитаника различитог пола (*Графикон 68*).



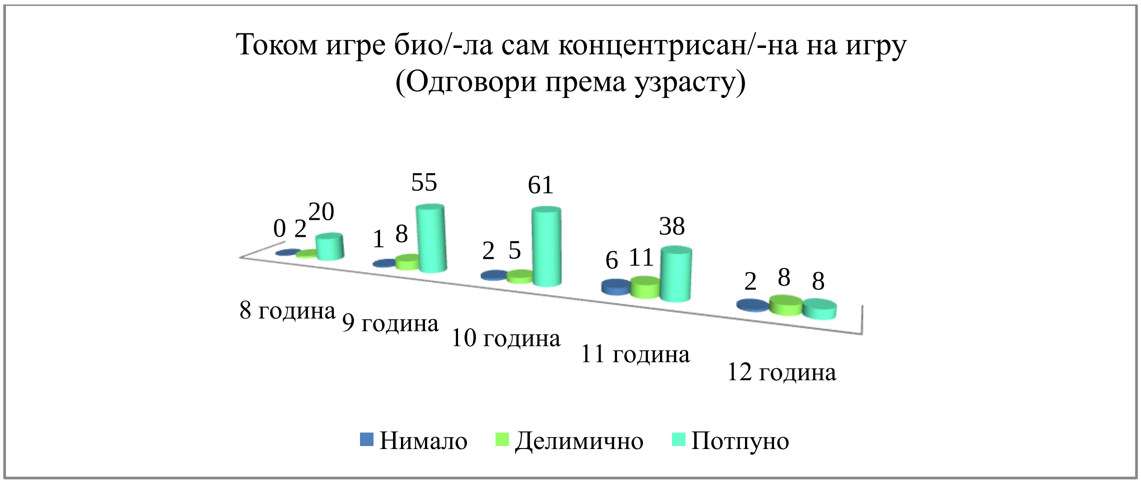
Графикон 68 Током игре био/-ла сам концентрисан/-на на рад – одговори према полу испитаника

Посматрано према узрасту испитаника подаци показују да концентрација током игре опада са узрастом – што је узраст испитаника старији то је концентрација током игре слабија. На основу формиране табеле фреквенцијских и процентуалних вредности одговора, добијених од испитаника различитог узраста, уопштава се да 90,91% одговора деце узраста осам година (најмлађи испитаници) указује на потпуну концентрисаност током игре, док исти ниво процене „потпуно” подржава свега 44,44% одговора испитаника старости дванаест година (најстарији испитаници). Исти проценат одговора деце узраста дванаест година указује да су деца током игре била „делимично”концентрисана, што свакако доводи до позитивног става према подстицању пажње и концентрације кроз реализовану математичко-музичку игру и код најстаријих испитаника. Испитаници узраста девет и десет година са преко 85,00% одговора потврђују дати ниво процене, док испитаници узраста једанаест година учествују са 69,09% одговора на дати став и ниво процене „потпуно” (*Табела 101*).

Табела 101Током игре био/-ла сам концентрисан/-на на игру – одговори према узрасту испитаника

Током игре био/-ла сам концентрисан/-на на игру		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	0	2	20	22
	%	0	9,09	90,91	100
Узраст 9 година	*f*	1	8	55	64
	%	1,56	12,50	85,94	100
Узраст 10 година	*f*	2	5	61	68
	%	2,94	7,35	89,71	100
Узраст 11 година	*f*	6	11	38	55
	%	10,91	20,00	69,09	100
Узраст 12 година	*f*	2	8	8	18
	%	11,12	44,44	44,44	100

На основу фреквенција приказаних графички и даље доминира узраст од девет и десет година, који својим одговорима у највећој мери указује да игра подстиче мотивацију, активност, те пажњу и концентрацију. Интересантно је да се одговори свих узраста, сем најстаријег, у овом истраживању на питање о концентрацији током игре, издвајају фреквенцијама одговора датих на ниво „потпуно” на скали процене, док се код најстаријег узраста испитаника уочава подједнака фреквенција одговора за два нивоа процене, „потпуно” и „делимично”. Интересантно је да од укупног броја одговора свих узраста (*f = 227*) свега једанаест одговора, посматрано по узрасту ученика (*f = 11*) указује на ниво „нимало”, што је веома ниска фреквенција гледано у целини, тако да се и са аспекта узраста ученика тестирана тврдња потврђује, а тиме доприноси и постављеној хипотези истраживања у целини (*Графикон 69*).



Графикон 69 Током игре био/-ла сам концентрисан/-на на игру – одговори према узрасту испитаника

На основу свега наведеног и анализе резултата истраживања добијених помоћу протокола посматрања, као и резултата добијених техником скалирања и применом скале процене, у циљу утврђивања одговора деце на подстицање мотивације, активности, пажње и концентрације током игре, може се закључити да без обзира на време реализације игре, као и на пол ученика и њихов узраст реализована математичко-музичка игра доприноси и подстиче мотивисаност, активност, ангажовање и пажњу деце, чиме је постављена хипотез истраживања – ***Претпоставља се да ће кроз интердисциплинарну игровну активност математике и музике бити подстакнута дечја пажња, активност и мотивисаност у раду,*** потврђена.

На основу изложеног и анализираних резултата и поред потврђене хипотезе дошло се до закључка да је игра у највећем степену била мотивишућа и да је у највећем степену подстакла на активност и пажњу децу узраста девет и десет година, као и децу узраста осам година, мада су проценти и фреквенције и код старијих узраста за сваки од наведених ставова који се односе на постављену хипотезу били присутни са око, или изнад, 50,00% одговора, што води ка потврђивању горе наведене хипотезе истраживања.

2.2.4. Математички задаци подстицали су на учествовање у музичком делу игре и обратно

У циљу потврђивања или оповргавања постављене хипотезе *Претпоставља се да ће музичке активности игре подстаћи децу на активно решавање основних математичких проблема и обратно* анализираи су одговори добијени на следеће две тврдње у скали процене:

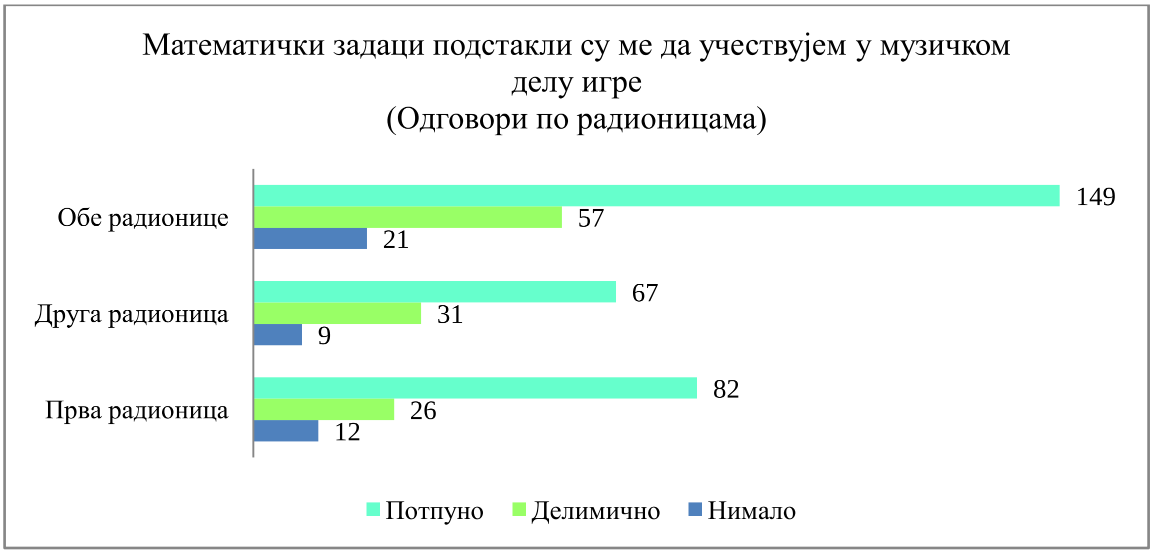
- математички задаци подстакли су ме да учествујем у музичком делу игре;
- музички део игре подстакао ме је да учествујем у математичком делу игре.

Анализа става – *математички задаци подстакли су ме да учествујем у музичком делу игре* – показује да су одговори испитаника са 65,54% потврдили да су кроз игру „потпуно” подстакнути да након математичких задатака решавају музичке задатке. Након прве радионице проценат одговора је 68,34%, а након друге радионице 62,62%, што указује на опадање потврдних процена испитаника, који и поред тога иду у прилог потврђивању постављеног става. Посматрајући ниво „делимично”, проценат одговора се повећава из прве (21,66%) у другу радионицу (28,97%), да би анализа одговора у целини показала да су испитаници са 25,11% потврдили да математички задаци „делимично” подстичу на решавање музичких захтева игре. Одговори који потврђују да математички део „нимало” не доприноси подстицању за учествовање у музичком делу, присутни су са 9,25% у погледу свих анализираних одговора истраживања (*Табела 102*).

Табела 102Математички задаци подстакли су ме да учествујем у музичком делу игре – одговори по радионицама

Математички задаци подстакли су ме да учествујем у музичком делу игре		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	12	26	82	120
	%	10,00	21,66	68,34	100
Друга радионица	*f*	9	31	67	107
	%	8,41	28,97	62,62	100
Обе радионице	*f*	21	57	149	227
	%	9,25	25,11	65,64	100

Графички приказ фреквенција добијених одговора испитаника након прве и друге реализације игре, као и након спроведеног истраживања, потврђује дати став и указује да су деца, решавањем математичких задатака, била подстакнута да даље учествују у игри и решавају и музичке захтеве и смењујући их и освајајући делове пазли за завршну коцку освоје целокупну игру (*Графикон 70*).



Графикон 70 Математички задаци подстакли су ме да учествујем у музичком делу игре – одговори по радионицама

Са графикона се уочава да од укупно обрађених одговора (f = *227*) сто четрдесет девет одговора (f = *149*) потврђује дати став, педесет седам (f = *57*) делимично потврђује, док двадесет један одговор (f = *21*) процењује да математички део игре не подстиче на учествовање у музичком делу игре.

У циљу утврђивања да ли постоји статистички значајна разлика у одговорима ученика након прве и након друге реализације игре израчуната је вредност $\chi 2$ теста за добијене резултате (*Табела 103*).

Табела 103Математички задаци подстакли су на учествовање у музичком делу игре – варијабла време реализације игре

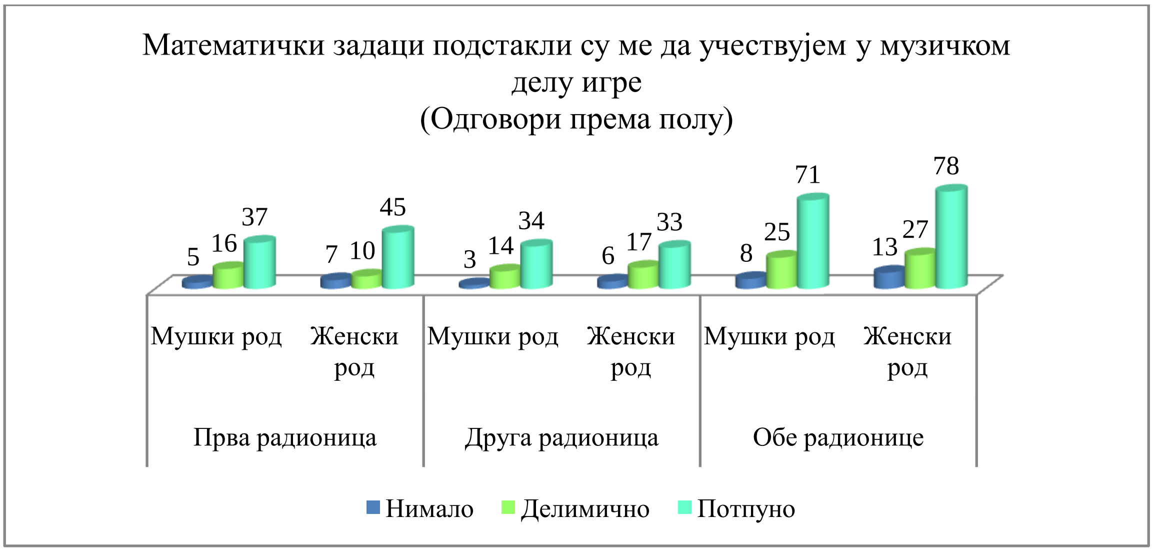
fe	ft	$(fe - ft)$	$(fe - ft)^2$	$\frac{(fe - ft)^2}{ft}$
12	11,10	0,89	0,79	0,07
26	30,13	-4,13	17,07	0,56
82	78,76	3,23	10,43	0,13
9	9,89	0,89	0,79	0,08
31	26,86	4,13	17,05	0,63
67	70,23	-3,23	10,45	0,14
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			$\chi 2$ = 1,16

На основу поређења израчунатог$\chi 2$ = 1,16 са граничним $\chi 2$ вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 2, може се закључити да не постоји статистички значајна разлика у одговорима ученика након прве и након друге реализације игре, с обзиром да је израчуната вредност *Хи-квадрат теста* мања од утврђених граничних вредности.

Анализирајући одговоре добијене од испитаника различитог пола уочава се да са приближно истим процентима датих одговора, испитаници оба пола потврђују да математички део игре мотивише и подстиче на учесвовање у музичком делу (65,13%, испитаници мушког пола и 66,10% испитаници женског пола). Интересантно је да је ниво процене испитаника мушког пола мањи у односу на процену испитаника женског пола након прве радионице, када је у питању потврђивање датог става, док је ситуација након друге радионице обрнута (*Табела 104*).

Табела 104Математички задаци подстакли су ме да учествујем у музичком делу игре – одговори према полу испитаника

Математички задаци подстакли су ме да учествујем у музичком делу игре			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	5	16	37	58
		%	8,62	27,59	63,79	100
	Женски род	*f*	7	10	45	62
		%	11,29	16,13	72,58	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	3	14	34	51
		%	5,88	27,45	66,67	100
	Женски род	*f*	6	17	33	56
		%	10,71	30,36	58,93	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	8	25	71	109
		%	7,34	22,93	65,13	100
	Женски род	*f*	13	27	78	118
		%	11,02	22,88	66,10	100



Графикон 71 Математички задаци подстакли су ме да учествујем у музичком делу игре – одговори према полу испитаника

Анализирајући податке, односно фреквенције добијених одговора, са датог графикона фреквенција који указује на одговоре испитаника различитог узраста, уочава се да су фреквенције за ниво „потпуно” и „делимично” више код оба пола испитаника и у обе радионице, у односу на фреквенције одговора за процену да математички део „нимало” не подстиче на учествовање у музичком делу игре. Тиме се и у погледу испитаника различитог пола дефинисани став потврђује (*Графикон 71*).

Добијени и анализирани одговори испитаника различитог узраста и даље потврђују тестирани став, али постоје изражене процентуалне разлике у добијеним одговорима. Највећи проценат потврдних одговора уочава се код испитаника узраста десет година (76,47%), код најмлађих испитаника (68,18%), као и код испитаника узраста девет година (67,19%). Код старијих узраста процена да математички део игре „потпуно” подстиче на учествовање у музичком делу опада – испитаници једанаест година старости – 54,55%, док најстарији испитаници дати ниво процене потврђују са свега 44, 44% одговора.

С обзиром да су приказане фреквенције и проценти одговора за ниво процене „нимало” веома ниски у односу на друга два нивоа, дата тврдња се и са аспекта испитаника различитог узраста може потврдити (*Табела 105*).

Табела 105Математички задаци подстакли су ме да учествујем у музичком делу игре – одговори према узрасту

Математички задаци подстакли су ме да учествујем у музичком делу игре		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	3	4	15	22
	%	13,64	18,18	68,18	100
Узраст 9 година	*f*	4	17	43	64
	%	6,25	26,56	67,19	100
Узраст 10 година	*f*	4	12	52	68
	%	5,88	17,65	76,47	100
Узраст 11 година	*f*	6	19	30	55
	%	10,90	34,55	54,55	100
Узраст 12 година	*f*	4	6	8	18
	%	22,23	33,33	44,44	100

Графички приказане фреквенције добијених одговора визуелно илуструју, највећи број добијених одговора код испитаника свих тестираних узраста, за ниво процене „потпуно”, што оправдава претходно уопштење о потврђивању тестираног става – математички део игре подстиче на учествовање у музичком делу игре (*Графикон 72*).

Графикон 72 Математички задаци подстакли су ме да учествујем у музичком делу игре – одговори према узрасту испитаника

Насупрот претходној тврдњи овај део истраживања и анализе одговора усмерен је на указивање *да ли иу којој мери музички део игре доприноси подстицању за учествовањем у математичком делу игре.*

Добијени подаци посматрано у целини, указују да музички део игре „потпуно” подстиче учеснике за учествовање у математичком делу, док свега 8,81% одговора указује да игра „нимало” не подстиче за учествовање у математичком делу. Интересантно је да проценти који потврђују дати став расту након прве радионице (64,16% након прве реализације игре потврђује дати став, а 72,90% одговора након друге реализације игре). Са друге стране, процентуалне вредности одговора који потврђују нивое процене „делимично” и „нимало”, опадају након прве реализације игре (*Табела 106*).

Табела 106Музички део игре подстакао ме је да учествујем у математичком делу игре – одговори по радионицама

Музички део игре подстакао ме је да учествујем у математичком делу игре		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	*f*	11	32	77	120
	%	9,17	26,27	64,16	100
Друга радионица	*f*	9	20	78	107
	%	8,41	18,69	72,90	100
Обе радионице	*f*	20	52	155	227
	%	8,81	22,91	68,28	100

Графички приказани резултати добијених фреквенција такође потврђују да музички део игре подстиче на учествовање у математичком делу. Од две стотине седамдесет седам одговора добијених након истраживања, сто педесет пет потврђује дати став, педесет два одговора делимично потврђује, док двадесет одговора указује да музички део игре не подстиче на учествовање у математичком делу игре.

Графикон 73 Музички део игре подстакао ме је да учествујем у математичком делу игре – одговори по радионицама

Израчуната вредност χ2 теста за резултате добијене на тврдњу да музички део игре подстиче на учествовање у математичком делу, указује да не постоји статистички значајна разлика у одговорима испитаника након прве и након друге реализације игре. Поређењем израчунатог$\chi 2$ = 2,21 са граничним $\chi 2$ вредностима 5,991 на нивоу значајности 0.05 и 9,210 на нивоу значајности 0.01, за број степени слободе df = 2, уочава се да је израчуната вредност мања од дефинисаних граничних вредности и уопштено је да статистичка разлика у добијеним одговорима не постоји (*Табела 107*).

Табела 107Музички део игре подстакао ме је да учествујем у математичком делу игре – варијабла време реализације игре

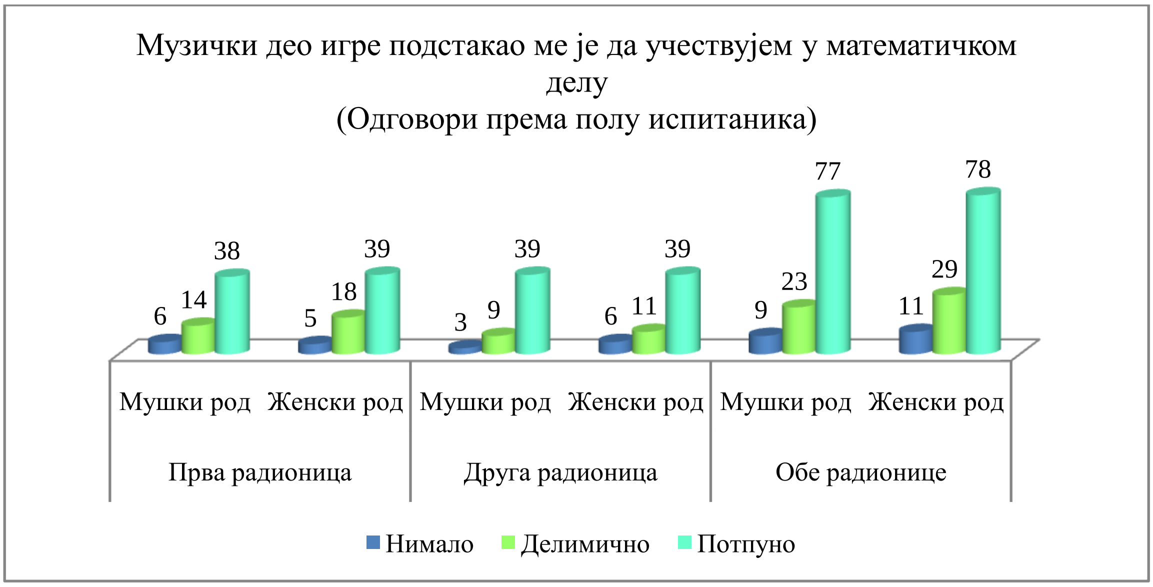
fe	Ft	$(fe - ft)$	$(fe-ft)^2$	$\frac{(fe-ft)^2}{ft}$
11	10,57	0,42	0,17	0,01
32	27,48	4,51	20,34	0,74
77	81,93	-4,93	24,30	0,29
9	9,42	-0,42	0,17	0,01
20	24,51	-4,51	20,34	0,83
78	73,06	4,93	24,30	0,33
$\sum fe$ = 227	$\sum ft$= 227			$\chi 2$ = 2,21

Према подацима добијеним од испитаника различитог пола тестирана тврдња је потврђена са 70,64% одговора испитаника мушког и 66,10% испитаника женског пола (*Табела 108*).

Графички приказане фреквенције илуструју да без обзира на радионицу и без обзира на пол испитаника доминирају фреквенције које потврђују да музички део игре, подстиче децу на учествовање у математичком делу, тако да се са аспекта пола испитаника, дата тврдња може потврдити, а тиме допринети потврђивању постављене хипотезе истраживања (*Графикон 74*).

Табела 108Музички део игре подстакао ме је да учествујем у математичком делу игре – одговори према полу испитаника

Музички део игре подстакао ме је да учествујем у математичком делу игре			Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Прва радионица	Мушки род	*f*	6	14	38	58
		%	10,34	24,14	65,52	100
	Женски род	*f*	5	18	39	62
		%	8,07	29,03	62,90	100
Друга радионица	Мушки род	*f*	3	9	39	51
		%	5,88	17,65	76,47	100
	Женски род	*f*	6	11	39	56
		%	10,72	19,64	69,64	100
Обе радионице	Мушки род	*f*	9	23	77	109
		%	8,26	21,10	70,64	100
	Женски род	*f*	11	29	78	118
		%	9,32	24,58	66,10	100

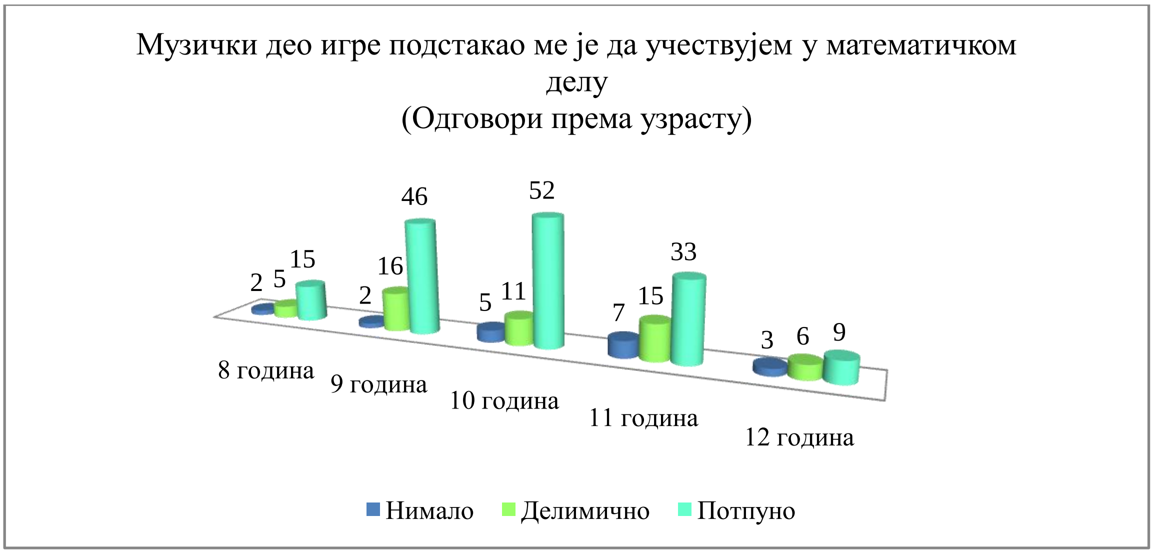


Графикон 74 Музички део игре подстакао ме је да учествујем у математичком делу игре – одговори према полу испитаника

Даља анализа одговора истраживања указује на процене испитаника различитог узраста када се говори о ставу да музички део игре подстиче на учествовање у решавању математичких захтева и у математичком делу игре. Најмањим процентом ниво „потпуно" потврђују најстарији испитаници, свега 50,00%, док је највећи проценат код испитаника узраста десет година – 76,47%. На основу добијених одговора указује се да испитаници млађег узраста у већој мери потврђују да музички део игре подстиче на учешће у математичком делу, у односу на испитанике старијег узраста (једанаест и дванаест година) (*Табела 109*).

Табела 109Музички део игре подстакао ме је да учествујем у математичком делу игре – одговори према узрасту испитаника

Музички део игре подстакао ме је да учествујем у математичком делу игре		Нимало	Делимично	Потпуно	Укупно
Узраст 8 година	*f*	2	5	15	22
	%	9,09	22,73	68,18	100
Узраст 9 година	*f*	2	16	46	64
	%	3,13	25,00	71,87	100
Узраст 10 година	*f*	5	11	52	68
	%	7,35	16,18	76,47	100
Узраст 11 година	*f*	7	15	33	55
	%	12,72	27,28	60,00	100
Узраст 12 година	*f*	3	6	9	18
	%	16,66	33,34	50,00	100



Графикон 75 Музички део игре подстакао ме је да учествујем у математичком делу игре – одговори према узрасту испитаника

Посматрајући графикон добијених фреквенција на дату тврдњу, а према анализи одговора испитаника различитог узраста, уочава се су фреквенције које потврђују да музички део потпуно подстиче на учествовање у математичком делу, највише код свих узраста испитаника, тако да се тестирани став, може и са овог аспекта анализе резултатапотврдити, а тиме допринети и потврђивању постављене хипотезе истраживања – ***Претпоставља се да ће музичке активности игре подстаћи децу на активно решавање основних математичких проблема и обратно.***

Овако добијени проценти испитаника у складу су са карактеристикама и садржином саме игре с обзиром да сваки успешно решени захтев и задатак у математичком делу игре доноси „џокер" одговарајућу фигуру *Saviour Monkey*, која се може уложити као „спас" уколико се погрешно реши музички део игре и на основу ње добије део пазле за завршну коцку. Међутим, ако се музички задатак тачно реши, учесници чувају*Saviour Monkey*фигуру, за неки од наредних кругова, а за успешно решен музички део добијају фигуру пазле. Тако се смењују математички и музички део и међусобно подстичу ученике да учествују у једном и другом делу у циљу што успешније реализације постављених задатака и освајања што више делова пазли за слагање најмање једне коцке и освајање игре *Musical Monkeys*.

2.2.5. Закључна разматрања на резултате добијене техником скалирања

На основу спроведене технике скалирања, као и на основу спроведеног посматрања закључује се да игра подстиче децу на активност, ангажовање, сарадњу, договор, колаборацију, на критичко и логичко мишљење и проблемско решавање проблема, на испољавање емоција – радост, тугу, разочарање, одушевљење, на ентузијазам и мотивисаност за игру, на уважавање мишљења друге деце, на развој пажње и концентрације, на повезивање различитих садржаја, на развој слушне пажње и музичког памћења, на спонтаност, упорност, истрајност и ефикасност у раду, што у потпуности указује на функционалност примене реализоване математичко-музичке игре у раду са децом основно-школског узраста од осам до дванаест година старости.

Анализа резултата техником скалирања представила је ставове испитаника на дефинисане тврдње скале процене, кроз које се дошло до меродавних резултата, који су потом потврђивали или оповргавали постављене хипотезе истраживања.

Спроведено скалирање је показало да су за све испитане тврдње деца независно од узраста и пола, фреквенцијски и процентуално гледано, највећим делом одговора потврдила ниво процене „потпуно" на дате тврдње и тиме допринела потврђивању постављених хипотеза истраживања.

Интересантно је да су резултати показали да испитаници у високом проценту одговора потврђују да их је игра подстакла на повезивање садржаја из математике и музике, на аналитичност и решавање проблема, на брзину у раду, критичко размишљање из чега се уопштава значај игре за когнитивни развој детета и подстицање развоја когнитивних вештина. Испитаници су без обзира на реализацију игре, на пол или узраст, са високим процентима потврдили да игра подстиче на сарадњу, кооперативни рад, на договор и уважавање мишљења других учесника током игре, на проналажење заједничког, а најуспешнијег решења проблема, на толеранцију. Такође указују да је игра побудила радозналост и жељу за учествовањем. Поштовање правила игре потврдило је око 90,00% добијених одговора, што охрабрује и уз претходно наведено, потврђује да је реализована математичко-музичка игра веома подстицајна када је у питању развој социо-емотивних вештина ученика, као и њихов социјални и емотивни развој.

Испитаници својим одговорима указују и на изражену мотивисаност и ангажовање током игре, жељу да се игра настави, жељу за успехом, те већу усмереност, пажњу и концентрацију током игре, што посматрано са развојног аспекта, такође доприноси подстицању и когнитивних и социјалних вештина деце. Подстицање слушне пажње и фокуса, конценрације током музичког дела, као и брзине, повезивања, симболике и примене одговарајућих дидактичких материјала у музичком делу игре, посматра се као веома функционално у погледу целокупног развоја дечје личности. Учење кроз игру, спонтаност и истинску жељу за савладавањем и решавањем постављених задатака је свакако учење које је применљиво, конструктивно и функционално.

Динамичност игре и стална смена математичких и музичких захтева, која је игром повезана кроз освајање појединих фигура, континуирано је подстицала децу да учествују и у једном и у другом делу игре, што су испитаници својим одговорима и потврдили.

На поједине тврдње уочава се статистички значајна разлика у одговорима испитаника различитог узраста, што је као и кроз претходну анализу технике посматрања, као и анализу фреквенцијски добијених одговора, показало да је игра, кроз ово истраживање, најприхватљивија и најприближнија испитаницима узраста девет, десет и једеанаест година. Међутим, значајна је њена примена и код деце млађег узраста, са усклађивањем захтева како су инструктори и водили игру кроз све групе испитаника.

За најстарије испитанике, априори гледано (мада и за све остале обухваћене истраживањем) додатак игри, који би се усмерио ка већој заступљености самосталног и/или групног креирања и извођења ритмова у музичком делу, те задавања математичких захтева у математичком делу, који такође подстичу на мишљење, може допринети већој укључености и заинтересованости за игру.

Још једном се може подвући да је реализована игра *Musical Monkeys*у великој мери показала функционалност, динамичност, интерактивност и интердисциплинарност у раду са децом, континуирано подстицала развој когнитивних и социо-емотивних вештина испитаника и без изузетка потврдила хипотезе истраживања, које су се односиле на методолошко-педагошки део рада.

Наглашава се да је игра узета као један од примера, који је имао за циљ да покаже да веза математике и музике креирана кроз образовну игровну активност, може допринети дечјем развоју и први је степеник за даља истраживања, креирања и примену математичко-музичких игара у раду са децом, не само млађег основно-школског, већ и предшколског и старијег основно-школског узраста.

ЗАКЉУЧАК

Студија показује да су везе између математике и музике присутне од најранијих периода људске цивилизације, да су се и математика и музика развијале од практичне делатности ка апстрактној дисциплини, укрштајући своје законитости и теоријске основе развоја. У Страрој Грчкој веровало се да математика и музика иду једна уз другу и да само у својој спрези доприносе свеобухватном образовању човека. Математика и музика стварају хармонију, склад, утичу на интелект, етос и осећања човека. Поставивши основе за даљи развој математике као научне дисциплине и музике као уметности, стара Грчка је незаобилазна степеница у разматрању настанка неких од најранијих математичких и музичких законитости. Рад се осврће на великане грчке епохе Питагору, Платона, Аристотела, Сократа, Архиту, Талеса, Еудокса, Еуклида и указује на њихов значајан допринос развоју математичке мисли, коју су константно доводили у везу са законитостима музике. У каснијем периоду развоја, истичу се великани попут Леонарда Ојлера, Декарта, Гауса, Њутна, Лајбница и других, који су допринели не само развоју нових математичких области, већ и указали на теоријску везу математике и музике у каснијим епохама људског друштвеног развоја.

Историјски и филозофски осврт на развој музичке уметности, указује на настанак првих тонских система, начина записивања нота, појаву различитих музичких облика, кроз стилске епохе од најранијих цивилизација, преко периода Грчке, Старог века, ренесансе, барока, рококоа, класицизма, романтизма, експресионизма и периода двадесетог века. Указује се на постепени прелаз са вокалног на вокално-инструментално и инструментално музицирање, са једногласја на полифоно извођење музичких дела, указује се на најзначајније музичке инструменте сваке епохе, који су свакако настајали и обухватали законитости науке математике, па и физике и акустике, посебно уколико се осврнемо на питање стварања звука.

Указивање на теоријске основе и односе математике и музике истиче се најпре Питагорин експеримент на монокорду који је показао однос међу тоновима и који је био полазна основа за стварање питагорејског тонског система.Указује се на развој дијатонске, а потом и хроматске лествице, на везу математике и музике кроз осу симетрије, транслацију, ротацију, логаритме, разломке, однос бројева и тонова, извођење ирационалних бројева кроз решавање једног музичког проблема и слично.

И музика и математика подстичу логичко мишљење, размишљање, повезивање, упоређивање, пажњу, надахнуће, памћење и без изузетка решавање сложених и апстрактних задатака, теорема, доказа, музичких дела, хармонија, компоновања и слично.

Посебан део рада усмерен је на педагошки део излагања и истраживања у којој мери, конкретна математичко-музичка игра може допринети дечјем развоју, развоју когнитивних и социо-емотивних вештина деце. Полазећи од одређења развоја и његовог схватања, указујући на игру као фундамент развоја, као и на аспекте дидактичких игара, направљен је увод у излагање спроведеног емпиријског истраживања и резултате добијене истим.

Резултати су показали да математичко-музичка игра *Musical Monkeys,* доприноси како когнитивном, тако и социо-емотивном развоју деце узраста од осам до дванаест година. Резултати су показали да реализована игра код деце подстиче пажњу, мотивацију, повећану активност у раду, критичко мишљење, проблемско решавање задатака, проналажење најадекватнијег решења проблема, а уједно доприноси и развоју сарадње међу децом, конструктивне комуникације, уважавања и поштовања мишљења других, поштовања правила игре, подстиче ентузијазам, радозналост у раду, емпатију, чиме се умногоме доприноси подстицању социо-емотивних вештина. На основу резултата истраживања може се подвући да математичко-музичка игра, добро осмишљена и конципирана, у раду са децом доприноси и подстиче развој свестране личности, истовремено ангажује и когнитивне и социјалне, као и емотивне способности и води ка холистичком приступу образовања и васпитања.

Радом су постављене и потврђене следеће хипотезе:

– постоји нераскидива веза између математике и музике у виду научне заснованости (теорија музике умногоме се ослања на знања и законитости математике и обратно, музичка теорија основа је појединих математичких открића и достигнућа);

– претпоставља се да ће интердисциплинарна математичко-музичка игра допринети дечјем когнитивном, социјалном и емотивном развоју (развоју вештина критичког мишљења, проблемског решавања проблема, сарадње, тимског рада, такмичарског духа, конструктивне комуникације, емпатије, позитивног става према раду и слично);
– претпоставља се да ће интердисциплинарна игровна активност математике и музике допринети савладавању и обнављању математичких и музичких садржаја код деце одређеног узраста;
– претпоставља се да ће кроз интердисциплинарну игровну активност математике и музике бити подстакнута дечја пажња, активност и мотивисаност у раду;
– претпоставља се да ће музичке активности игре подстаћи децу на активно решавање основних математичких проблема и задатака и обратно.

Теоријско и емпиријско истраживање потврдило је постављене хипотезе и указало на теоријску и емпиријску повезаност математике и музике, а такође нагласило да спој математичких и музичких садржаја кроз дидактичу математичко-музичку игру подстиче развој когнитивних, емотивних и социјалних вештина деце, а тиме отвара путеве за осмишљавање и креирање нових методички, дидактички, педагошки и садржајно подробних математичко-музичких игара које ће се примењивати у раду са децом различитог узраста.

Као **дaље препоруке** за примену тестиране игре у раду са децом, те нових математичко-музичких игара као значајне наводе се следеће активности:
– подстицање интердисциплинарности у презентовању и савладавању образовних садржаја;
– развијање компетенција наставника за савремени приступ у раду са децом;
– подстицање интерактивности и динамичности у креирању реализације наставних садржаја;
– подстицање деце на тимски рад, такмичарски дух, емпатију, самопоуздање, прузимање одговорности, критичко мишљење, решавање проблема, примену различитих стратегија при доласку до решења проблема, уважавање мишљења других, уважавање различитости и друго;

– препорука је и да се тестирана игра примени у школама у Србији, презентује студентима учитељског, васпитачког и педагошког усмерења како у Србији тако и ван Србијеи тиме представи савремен приступ раду, укаже на коришћена дидактичка средства, а тиме подстакну идеје студената за њихов будући рад са децом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Andreis, J. (1975). *Povijest glazbe.* Zagreb: Liber, Mladost.
2. Andreis, J. (1976). *Povijest glazbe*. Zagreb: Liber, Mladost.
3. Aristotel (2007). *Metafizika*. Beograd: Paidea.
4. Adžaga, E. (2012). Povezanost glazbe i matematike, *Matka*, br. 82, Zagreb.
5. Barker, A. (2007). *The science of harmonics in classical Greece.* New York: Cambridge University Press.
6. Barr, M. (2017). Video games can develop graduate skills in higher education students: A randomized trial, *Computer & Education*, Vol. 13, pp. 86-97.
7. Benson, D. (2008). *Music: A Mathematical offering.* Доступно на: http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/maths-music.html.
8. Bertolino, M. (1979). Uloga matematike u obrazovanju celovite ličnosti [Role of mathematics in education].У: Bertolino M. et all. (ed.). *Neki problemi savremenog matematičkog obrazovanja* (9-33). Beograd: Institute for Educational Research.
9. Божић, М. (2010). *Преглед историје и филозофије математике*. Београд: Завод за уџбенике.
10. Bognar, V.,i Matijević, M. (1993). *Didaktika.* Zagreb: Školska knjiga.
11. Bernuli, M. (1987). Matematika u tokovima istorije, *Ser. Mat. Fiz,* JII'o 602 – JIIo 633, str. 177-190. Beograd: Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu.
12. Beer, M. (1998). *How mathematics and music do relates to each other?* Brisbone: East Coast College.
13. Братина, В. (2015). *Математика у Платоновој филозофији, (докторска дисертација)*. Београд: Филозофски факултет.
14. Bruckler, F. M. (2011). *Matematički dvoboj.* Zagreb: Školska knjiga.
15. Budden, F. J. (1967). Modern Mathematics and Music, *The Mathematical Gazette,* Vol. 51, No. 377, pp. 204-215. The Mathematical Association.
16. Burton, D. (2011). *The history of Mathematics: An introduction*. New York: The McGraw-Hill.
17. Vasiljević, Z. (1999). *Teorija ritma sa gledišta muzičke pismenosti, drugo izdanje.* Beograd: Univerzitet Umetnosti u Beogradu.
18. Vasiljević, Z. (2000). *Metodika muzičke pismenosti.* Beograd: Akademija.
19. Vasiljević, Z. (2006). *Metodika muzičke pismenosti*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.
20. Vigotski, L. (1996). *Sabrana dela*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

21. Gary, A. S. (2002). *Does Socrates Have a Method? Rethinking the Elenchus in Plato's Dialogues and Beyond.* Pennsylvania: The Pennsylvania State University Press, University Park.

22. Gika, M. (1987). *Filozofija i mistika broja*. Novi Sad: Književna zajednica Novog Sada.

23. Grant, R. M. (2013). Leonhard Euler's Unfinished Theory of Rhythm, *Journal of Music Theory*, Vol. 57, No. 2, pp. 245-286. Duke University Press on behalf of the Yale University Department of Music.

24. Grout, D. J. (1973). *A history of western music*. London: J.M. Dent.

25. Geđ, D. (2008). *Papagajeva teorema*. Beograd: Geopoetika.

26. Дејић, М.,и Михајловић, А. (2015).Улога и значај историје математике у настави*, Годишњак учитељског факултета у Врању*, књига VI, УДК 51(091): 37.016, стр. 67-82. Врање: Педагошки факултет у Врању.

27. Dejić, M., iMihajlović, A. (2014). History of mathematics and teaching mathematics, *Teaching inovations*, Volume 27, Issue 3, pp. 15-30. Belgrade: Faculty of Education.

28. Дејић, М., и Егерић, М. (2006). *Методика наставе математике*. Јагодина: Учитељски факултет.

29. Denmark, T., and Kepner, H. (1980). Basic Skills in Mathematics: A Survey, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 11, No. 2, pp.104-123. National Council of Teachers of Mathematics.

30. Деретић, И. (2014). *Платонова филозофска митологија*. Београд: Завод за уџбенике.

31. Деретић, И. (2009). *Логос, Платон, Аристотел*. Београд: Плато.

32. Despić, D. (1971). *Teorija tonaliteta*. Beograd: Akademija muzičke umetnosti.

33. Деспић, Д. (1997). *Теорија музике*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

34. Despić, D. (2014). *Harmonija sa harmonskom analizom*. Beograd: Zavod za udžbenike.

35. DeVries, R. (1997). Piaget's Social Theory, *Educational Researcher*, Vol. 26, No. 2, pp. 4-17. American Educational Research Association.

36. Дробни, И. (2009). Наставна средства у педагогији музичке писмености, *Настава и васпитање*, бр. 58, стр. 45-54. Београд: Педагошки институт.

37. Дробни, И. (2014). Ритам (685), у: Лексикон образовних термина (ур. др Петар Пијановић). Београд: Учитељски факултет.

38. Дробни, И. (2014). Ритмички удар (685), у: Лексикон образовних термина (ур. др Петар Пијановић). Београд: Учитељски факултет.

39. Дробни, И. (2014). Мера у музици (388), у: Лексикон образовних термина (ур. др Петар Пијановић).Београд: Учитељски факултет.

40. Дробни, И. (2014). Такт (795-796), у: Лексикон образовних термина (ур. др Петар Пијановић). Београд: Учитељски факултет.
41. Dunnington, W., and Neugebauer, O. (1936). The History of Mathematics, *National Mathematics Magazine*, Vol. 11, No. 1, pp. 17-23. Mathematical Association of America.
42. Ђурић, О. (2006). *Водич кроз историју музике*. Београд: Агенција Доминанта. Војна штампарија.
43. Edelson, J., and Johnson,G. (2003). Music Makes Math Meaningful, *Childhood Education*, Vol. 80, Issue 2, pp. 65-70. Association for Childhood Education International.
44. Ивић, И. (1997). *Активно учење*. Београд: Институт за психологију.
45. Kandinski, V. (2004). *O duhovnom u umetnosti*. Beograd: IP ESOTHERIA.
46. Kandić, A. (2017). *Mit i nauka u Platonovom dijalogu Timaj, (doktorska disertacija)*. Beograd: Filozofski fakultet.
47. Karić, J. (2015). Matematičke igre, *Beogradska defektološka škola*, Vol. 21, No. 3, str. 81-89. Beograd: Univerzitet u Beogradu, Defektološki fakultet.
48. Karaduman, G. B. (2010). A sample study for classroom teachers addressing the importance of utilizing historyof math in math education. *Procedia Social and Behavioral Sciences*, Elsevier, 2, pp.2689–2693.
49. Kamenov,E.(2009). *Dečja igra*. Beograd: Zavod za udžbenike.
50. Klaus, C., and Charles, V. (2009). *Baroque Art*. New York: Parkstone International.
51. Kite-Powell, J. (2007). *A Performer's Guide to Renaissance Music, Second Edition*. Bloomington and Indianapolis: Indiana University Press.
52. Копас-Вукашиновић, Е. (2006). Улога игре у развоју деце предшколског и млађег основно-школског узраста, *Зборник института за педагошка истраживања*, Vol.38, бр.1, стр.174-189. Београд: Институт за педагошка истраживања.
53. Lixin, J., and Lingbin, P. (2009). Piano fundamental frequency estimation algorithm based on weighted least square method, in *Proc. nt. Forum Inf. Technol. Applicat, IFITA* ’09, Vol. 2, pp. 155–158.
54. Levy, J. (1978). *Play behavior*. New York: John Wiley & Sons.
55. Lučić, Z. (2009). *Ogledi iz istorije antičke geometrije*. Beograd: Službeni glasnik.
56. Madaras, R. (2009). *Matematika i muzika*. Novi Sad: Prirodno-matematički fakultet, departman za matematiku i informatiku.
57. Манојловић, В.,и Рајић, С. (2017). Математика и музика – спој науке и уметности. *Флогистон*, бр.25, стр.195-211. Београд: Музеј науке и технике.
58. Mirić, J. (2003). Alomorfni razvoj – vrhovna postavka teorije Vigotskog, *Psihologija*, Vol. 36 (4), str. 437-450. Beograd: Društvo psihologa Srbije.

59. Nath, S.,and Szucs, D. (2014).Construction play and cognitive skills associated with the development of mathematical abilities in 7-year-old children, *Learning and instruction*, Vol.32, pp.73-80.

60. Papadopoulos, A. (2002). Mathematics and music theory: from Pythagoras to Rameau, *The Mathematical Intelligencer*, Vol 24 (No 1), pp. 65-73.

61. Пејовић, Р. (1991). *Историја музике*. Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

62. Pellegriny, A., and Smith, P. (1998). Physical Activity Play: The Nature and Function of a Neglected Aspect of Play, *Child Development*, 69(3), pp.577-598. The Society for Research in Child Development, Inc.

63. Plummer, D. (2008). *Social Skills Games for Children*. London: Jessica Kingsley Publishers.

64. Pierre, S. (2017). Lagrange, Monge, Laplace, trois sénateurs mathématiciens du Premier empire, *Maître de Conférences en informatique*, Université de Corse, pp. 493-504.

65. Рајић, С. (2012). Безбедност деце на Интернету и друштвеним мрежама, *Иновације у настави*. бр. 2, год. 2012, стр. 69 – 79, Београд: Учитељски факултет.

66. Radoš-Mirković, K. (2010). *Psihologija muzike*. Beograd: Zavod za udžbenike.

67. Radoš-Mirković, K. (1998). *Psihologija muzičkih sposobnosti*. Beograd: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

68. Ravi, A., and Syamal, S. (2014). *Creators of Mathematical and Computational Sciences*. Swicerland: Springer International Publishing.

69. Riedweg, C. (2005). *Pythagoras: His Life, Teaching, and Influence*. Ithaca: Cornell University Press.

70. Ross, D. (2005). *Aristotle.* USA and Canada: Routledge.

71. Рот, Н.,и Радоњић, С. (2002). *Психологија.* Београд: Завод за уџбенике и наставна средства.

72. Sabo, A. (2012). *Ispoljavanje simetrije u muzičkom obliku – pitanja metodologije analize (doktorska disertacija),* Beograd: Univerzitet umetnosti.

73. Савић, Ј. (2016). *Корелација мисаоних активности ученика у настави математике и музичке културе у млађим разредима основне школе (мастер рад).* Београд: Учитељски факултет.

74. Савић, Ј. (2018). Повезаност математичких и музичких садржаја у нижим разредима основне школе, *Иновације у настави*, XXXI, бр.3, стр.124-139. Београд: Учитељски факултет.

75. Saloni, S. (2010). *An Exploration of the Relationship between Mathematics and Music.* UK: The University of Manchester, Manchester Institute for Mathematical Sciences.

76. Skovran, D.,i Peričić, V. (1991). *Nauka o muzičkim oblicima, sedmo izdanje*. Beograd: Univerzitet umetnosti u Beogradu.

77. Smit, L. (1985). Making Educational Sense of Piaget's Psychology, *Oxford Review of Education*, Vol. 11, No. 2, pp. 181-191. Taylor & Francis, Ltd.

78. Song, A., Capraro, M. M., and Tillman, D. (2013). Elementary Teachers Integrate Music Activities into Regular Mathematics Lessons: Effects on Students' Mathematical Abilities, *Journal for Learning through the Arts: A Research Journal on Arts Integration in Schools and Communities*, 9 (1), pp. 1-19. University of California.

79. Стојановић, А. (2014). *Корелација у настави*. У: Лексикон образовних термина, стр. 332-333. Београд. Учитељски факултет.

80. Stojanović-Kutlača, S. (2016). Principi barokne muzike – improvizacija, ornamentacija, polifonija, *Zbornik radova akademije Umetnosti*, br.4, str.122-132. Београд: Академија Уметности.

81. Shilling, W. (2002). Mathematics, music and movement Exploring concepts and connections, *Early Childhood Education Journal*, 29(3), pp. 179-184. Springer Nature Germany.

82. Тасевска, А. (2005). *Игровна активност као методски концепт во првот образовен циклус (докторска дисертација).* Скопље: Филозофски факултет.

83. Trebješanin, Ž. (2008). *Rečnik psihologije.* Beograd: Stubovi kulture.

84. Унковић, Б. (2012). *Математичко образовање кроз векове (мастер рад).* Београд: Математички факултет, Универзитет у Београду.

85. Uzelac, M. (2005*). Filozofija muzike*. Novi Sad: Silos.

86. Harkleroad, L. (2006). *The math behind the music*. Cambridge, UK: University Press.

87. Hotchkiss, G., and Athey, M. (1978). Music Learning Grows with Games, *Music Educators Journal*, Vol. 64, No. 8, pp. 48-51. Sage Publications, Inc. on behalf of MENC: The National Association for Music Education.

88. Cohen, D. (2015). *Music: It's Language, History, and Culture*. Brooklyn College, CUNY Academic Works.

89. Crocker, R. (1964). Pythagorean Mathematics and Music, *The Journal of Aesthetics and Art Criticism*, Vol. 22, No. 3, pp. 325-335. The American Society for Aesthetics.

90. Church, E. B. (2001). Math & Music: The Magical Connection, *Scholastic Parent & Child*, Vol. 8 Issue 3, pp. 50.

91. Чанак, М. (2009). *Математика и музика, истина и лепота: једна златна хармонијска нит*. Београд: Завод за уџбенике.

92. Šmit, K. (2011). *Sedamsto godina klasične muzike, muzička riznica od srednjeg veka do modernog doba*. Beograd: Mladinska knjiga.

93. Wellesz, E. (1957). *Ancient and Oriental Music*. London: Oxford University Press.

94. West, M. L. (1992). *Ancient Greek Music*. Oxsford, England: Clarendon Press.

95. Weyl, H. (1980). *Symmetry.* Pricenton: Princeton University Press.
96. Wertsch, J. (1988). PSYCHOLOGY: L. S. Vygotsky's "New" Theory of Mind, *The American Scholar*, Vol. 57, No. 1, pp. 81-89. The Phi Beta Kappa Society.
97. Wright, D. (2009). *Mathematics and musics.* USA: American Mathematical Society.
98. Whitebreard, D. (2012). *The importance of play.* Cambridge: University of Cambridge.

ПРИЛОЗИ

Прилог 1.

ПРОТОКОЛ ЗА ПОСМАТРАЊЕ РАЗВОЈА ДЕЧЈИХ ВЕШТИНА КРОЗ ИНТЕРДИСЦИПЛИНАРНУ МАТЕМАТИЧКО-МУЗИЧКУ ИГРУ

Назив школе: ____

Разред и одељење: ____

Број испитаника у групи: ____________________________________

Назив математичко-музички игре: ____________________________

Реализатори игре: ____

Образовање реализатора: ____________________________________

Време трајања игре: ____

Датум и време: ____

Место реализације: ____

1. ОПШТИ ПОДАЦИ О РЕАЛИЗОВАНОЈ МАТЕМАТИЧКО МУЗИЧКОЈ ИГРИ

Тема игре	
Садржина игре	
Циљ игре	
Задаци игре	

2. МЕТОДИЧКИ АСПЕКТИ РЕАЛИЗОВАНЕ МАТЕМАТИЧКО-МУЗИЧКЕ ИГРЕ

Интердисциплинарност игре	1. КАРАКТЕРИСТИКЕ МАТЕМАТИЧКО-МУЗИЧКЕ ИГРЕ	ДА	НЕ
	1.1. Игра обухвата само математичке садржаје и активности које се односе на математику		
	1.2. Игра обухвата само музичке садржаје и активности које се односе на музику		
	1.3. Игра обухвата и математичке и музичке садржаје и активности		
Методе рада у реализацији игре	2. МЕТОДЕ РАДА У РЕАЛИЗАЦИЈИ ИГРЕ		
	2.1.ОПШТЕ МЕТОДЕ РАДА	ДА	НЕ
	2.1.1. Метода усменог излагања		
	2.1.2. Метода дијалога		
	2.1.3. Метода самосталног рада		
	2.1.4. Метода писане речи		
	2.1.5. Илустративно-демонстративна метода		
	2.1.6. Метода сценске комуникације		
	2.2.СПЕЦИЈАЛНЕ, МУЗИЧКЕ, МЕТОДЕ РАДА	ДА	НЕ
	2.2.1. Метода рада по слуху		
	2.2.2. Метода учења из нотног текста		
	2.2.3. Метода рада са инструментима		
	3. ОБЛИЦИ РАДА У		

Облици рада током реализације игре	РЕАЛИЗАЦИЈИ ИГРЕ	ДА	НЕ
	3.1. Фронтални		
	3.2.Индивидуални		
	3.3.Групни		
	3.4.Рад у пару		
Вид игре	4. ВИДИГРЕ	ДА	НЕ
	4.1. Сензомоторна		
	4.2.Конструктивна		
	4.3.Симболичка		
	4.4.Сензомоторна		
	4.5.Имитативна		
	4.6.Стваралачка		
	4.7.Спонтана		
	4.8.Такмичарска		
Компатибилност игре са ученицима (њиховим предзнањима и интересовањима)	5. КОМПАТИБИЛНОСТ ИГРЕ СА УЧЕНИЦИМА	ДА	НЕ
	5.1.Предзнања		
	5.2.Интересовања		
	5.3.Узраст		
	5.4.Социјални контекст		
Педагошка клима током реализације игре	6. ПЕДАГОШКА КЛИМА ТОКОМ ИГРЕ	ДА	НЕ
	6.1.Позитивна клима		
	6.2.Подстицајна атмосвера		
	6.3.Изражено стваралаштво		
	6.4.Радна атмосвера		
	6.5.Интеракциија		
Улога реализатора/ водитеља током игре	7. УЛОГА РЕАЛИЗАТОРА ТОКОМ ИГРЕ	ДА	НЕ
	7.1.Медијатор		
	7.2.Активни субјекат		

	7.3.Мотиватор			
	7.4.Ауторитарни субјекат			
	7.5.Динамично-вођење игре			
Улога учесника/ деце током игре	8. УЛОГА УЧЕСНИКА/ДЕЦЕ ТОКОМ ИГРЕ	Нико	Сви	Неко
	8.1.Активни субјекат			
	8.2.Пасивни субјекат			
	8.3.Следи инструкције			
	8.4.Самоиницијатива			
	8.5.Ангажован			
	8.6.Кооперативан			
Дидактичка и техничка средства коришћена у игри				
Додатна запажања на спроведено посматрање				

2. РАЗВОЈНИ АСПЕКТИ РЕАЛИЗОВАНЕ МАТЕМАТИЧКО-МУЗИЧКЕ ИГРЕ

РАЗВОЈНИ АСПЕКТИ ИГРЕ	НИВО ПРОЦЕНЕ		
1. УСМЕРЕНОСТ ИГРЕ	Нимало	Делимично	Потпуно
1.1. На истраживачки рад			
1.2. На савладавање садржаја из математике и музике			
1.3. На критичко мишљење			
1.4. На проблемско решавање проблема			
1.5. На формирање ставова и вредности			
1.6. На развој вештина и способности			
1.7. Остало... ______ ______ ______			
2. ПОДСЦТИЦАЊЕ И РАЗВОЈ МУЗИЧКИХ ВЕШТИНА	Нимало	Делимично	Потпуно
2.1. Развој слушне пажње			
2.2. Развој осећаја за ритам			
2.3. Развој осећаја за мелодију			
2.4. Музичко памћење			
2.5. Препознавање и понављање задатих ритмичких мотива			
2.6. Развој способности опажања различитих ритмичких целина			
2.7. Остало... ______ ______ ______			

3. ПОДСТИЦАЊЕ И РАЗВОЈ МАТЕМАТИЧКИХ ВЕШТИНА	Нимало	Делимично	Потпуно
3.1. Решавање аритметичких задатака (примена основних рачунских операција, правила редоследа извођења рачунских операција, математичких појмова „веће од”, „мање од”)			
3.2. Решавање задатака из области геометрије (геометријски облици и фигуре – особине и карактеристике – препознавање и конструисање)			
4. ПОДСТИЦАЊЕ И РАЗВОЈ СОЦИО-ЕМОТИВНИХ ВЕШТИНА	Нимало	Делимично	Потпуно
4.1. Сарадња и кооперација			
4.2. Тимски рад			
4.3. Уважавање и поштовање мишљења друге деце/других учесника игре			
4.4. Конструктивна комуникације			
4.5. Преузимање одговорности			
4.6. Емпатија			
4.7. Самосталност у раду			
4.8. Самопоуздање			
4.9. Толеранција			
4.10. Упорност и истрајност у раду			
4.11. Радозналост и ентузијазам за рад			
4.12. Мотивација и ангажовање			
4.13. Такмичарски дух			
4.14. Остало...			

____________________ ____________________ ____________________			
5. ПОДСТИЦАЊЕ И РАЗВОЈ КОГНИТИВНИХ ВЕШТИНА	Нимало	Делимично	Потпуно
5.1. Критичко мишљење			
5.2. Проблемско решавање проблема			
5.3. Повезивање садржаја из различитих области			
5.4. Стваралаштво			
5.5. Пажња и концентрација			
5.6.Аналитичност у раду			
5.7. Остало... ____________________ ____________________ ____________________			
6. Ток и реализација игре –			
7. Додатна запажања –			

Прилог 2.

СКАЛА ПРОЦЕНЕ О РАЗВОЈУ ВЕШТИНА ДЕЦЕ ПРИ РЕАЛИЗАЦИЈИ МАТЕМАТИЧКО-МУЗИЧКЕ ИГРЕ

Драга децо,

Пред вама се налази низ тврдњи о математичко-музичкој игри *Musical Monkeys*, коју сте играли уз подршку инструктора игре. Ваш задатак је да, за сваку од наведених тврдњи, наведену у скали процене, означите ниво „нимало”, „делимично” или „потпуно” и укажете у којој мери се са одређеном тврдњом слажете или не. У одговарајући простор, за означавање одабраног нивоа процене, упишите знак X.

Овде нема тачних и нетачних одговора, сви одговори су добри, ако су искрени и заиста указују на оно што стварно мислите и осећате, након одигране игре.

Пол испитаника: __________________ Основна школа: ____________________

Узраст/ број година: _______________ Разред и одељење: __________________

СТАВ/ ТВРДЊА	НИВО ПРОЦЕНЕ		
	Нимало	Делимично	Потпуно
1. Игра ме је подстакла на мишљење и повезивање садржаја из математике и музике			
2. Током игре решавао/-ла сам проблемске математичке задатке			
3. Током игре математичке задатке сам решавао/-ла на различите начине			
4. Током игре користио/-ла сам различите стратегије код решавања проблема			
5. Игра ме је подстакла на стваралаштво			
6. Током игре сарађивао/-ла сам са другом децом у циљу решавања			

проблема			
7. Током игре слушао/-ла сам и уважавао/-ла мишљења друге деце			
8. Током игре подстакнут/-а сам на тимски рад			
9. Игра је подстакла такмичарски дух у мени			
10. Током игре комуницирао/-ла сам са другом децом у циљу решавања проблема			
11. Током игре комуницирао/-ла сам са водитељима игре			
12. Игра је у мени изазвала радозналост и жељу за учествовањем			
13. Поштовао/-ла сам правила игре			
14. Уживао/-ла сам у игри			
15. Игра ме је подстакла да преузмем одговорност за свој рад			
16. Кроз игру сам поновио/-ла одређенесадржаје из математике			
17. Кроз игру сам поновио/-ла одређенесадржаје из музике			
18. Током игре изводио/-ла сам разне ритмове			
19. Током игре био/-ла сам мотивисан/-на за рад			
20. Током игре био/-ла сам активан/-на и ангажован/-на у раду			
21. Током игре био/-ла сам упоран/-на и истрајан/-на у раду			
22. Током игре био/-ла сам концентрисан/-на на игру			

23. Математички задаци подсталки су ме да учествујем у музичком делу игре			
24. Музички део игре подстакао ме је да учествујем у математичком делу игре			

Прилог 3.

ТАБЕЛА ГРАНИЧНИХ ВРЕДНОСТИ НА НИВОИМА ЗНАЧАЈНОСТИ .05 И .01

df	.05	.01
1	3.841	6.635
2	5.991	9.210
3	7.815	11.341
4	9.488	13.277
5	11.070	15.086
6	12.592	16.812
7	14.067	18.475
8	15.507	20.090
9	16.919	21.666
10	18.307	23.209
11	19.675	24.725
12	21.026	26.217
13	22.362	27.688
14	23.685	29.141
15	24.996	30.578
16	26.296	32.000
17	27.587	33.409
18	28.869	34.805
19	30.144	36.191
20	31.410	37.566
21	32.6711	38.932
22	33.294	40.289
23	35.172	41.638
24	36.415	42.980
25	37.652	44.314
26	38.885	45.642
27	40.113	46.963
28	41.337	48.278
29	42.557	49.588
30	43.773	50.892

Прилог 4.

ПОПИС СЛИКА

Прилог 5.

ПОПИС ТАБЕЛА

Прилог 6.

ПОПИС ГРАФИКОНА

БИОГРАФИЈА АУТОРА

Стајка Б. Рајић, рођена је 02. марта 1985. године у Чачку, Република Србија, где је завршила основну школу, основну школу за музичко образовање, и гимназију (чачанска гимназија: природно-математички смер).

Основне и мастер студије завршила је најпре на *Учитељском факултету*, Универзитета у Београду, као студент генерације са просечном оценом 9.90 на основним и 10.00 на мастер студијама и стекла звање *професор разредне наставе* и звање *мастер учитељ*. Након Учитељског факултета уписује и завршава основне студије на *Факултету техничких наука*, Универзитета у Крагујевцу и стиче звање *инжењера информационих технологија* (просечна оцена 8.00) (где се кроз завршни рад бавила темом *о утицају дигиталних игара на дечји развој*) и мастер из области учења на даљину (просечна оцена 9.54).

Била је стипендиста Владе Републике Србије, стипендиста Учитељског факултета, Универзитета у Београду као и стипендиста општне града Чачка. Поводом дана Универзитета у Београду, 2009. године додељена јој је *Повеља универзитета* за изузетан успех током студирања, као студенту генерације Учитељског факултета, школске 2007/ 2008. године.

Од школске 2013/2014 године докоранткиња је на студијском програму *Историја и филозофија природних наука и технологије, интердисциплинарних докторских студија Универзитета у Београду*, где је успешно положила све предвиђене испите са просечном оценом 9.92 у предвиђеном, законском року.

Од 2012. до 2017. године радила је као наставник у Образовном систему „Руђер Бошковић" у Београду на интернационалним програмима основног образовања, *Cambridge Primary International* (*Science, Arts and Mathematics Teacher*) и *International Baccalaureate* (IB) програму као *PYP Teacher* (*Primary Years Program Teacher*). Била је ангажована и као координатор учења на даљину у оквируинтернационалне школе „Brook Hill International school" у Београду, као и креирању online курсева за потребе мастер студија *Факултета техничких наука* на предмету *Алати и технологије за учење на даљину*. У периоду 2011 – 2012. године била је ангажована као сарадник на програму *Методика наставе музичке културе* на Учитељском факултету у Београду. У периоду од 2008. до 2011. године радила је као професор разредне наставе у више београдских основних школа.

Аутор је и коаутор уџбеника *Народна традиција* за прва четири разреда основне школе у издању издавачке куће *Пчелица*(2017); едиције *Упознајмо српску традицију*, *Издаваче куће Пчелица (у припреми за штампу)*. Била је рецензент на уџбеницима из математике и музичке културе за први разред основне школе, 2018. године, у издању *Вулкан издаваштва*.

Од 2004 – 2016. била је активни члан *Академско-културно уметничког друштва* „Бранко Крсмановић”, Универзитета у Београду.

Публиковани научни радови из докторске дисертације

M23

Rajić, S. (2019). Mathematics and music game in function of child’s cognitive development, motivation and activity, *Early Child Development and Care*, Manuscript DOI: 10.1080/03004430.2019.1656620.

Доступно на: https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/03004430.2019.1656620

M53

Тодорчевић, В., **Рајић, С.** (2017). Математика и музика – спој науке и уметности, *Флогистон*, бр. 25, стр. 195 – 211. Београд: Музеј науке и технике.

M51

Рајић, С. (2012).Безбедност деце на Интернету и друштвеним мрежама, *Иновације у настави*. бр. 2, год. 2012, стр.69 – 79, Београд: Учитељски факултет.

У циљу бољег увида у научни рад кандидаткиње треба додати и следеће радове излагане на конференцијама и у научним часописима:

Rajić,**S.,**Todorčević, V. (2019). Mathematics and music in children’s development, *International conference, Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences - MACAS 2019*, McGill University, Montréal, Canada, on 18-20th of June 2019. (Formally accepted for presentation).

M52

Rajić, S., Madžarac, M. (2015). Video games as a form of distance learning systems, *Норма*, Часопис за теорију и праксу образовања и васпитања, бр. 2, стр. 249 – 260. Сомбор: Педагошки факултет.

М33

Rajić, S. (2013). Educational use of the podcast, *The fourth International Conference on e-Learning, Belgrade, September 2013*, pp. 90-95. (ISBN 978-86-912685-9-6).

М33

Rajić, S., Madžarac, M. (2013). Concept of online learning, *The fourth International Conference of Information technology and Educational development, Novi Sad, Jun 2013,* pp. 118 – 122. (ISBN 978-86-7672-203-7).

Већина научних радова је повезана са тематиком докторске дисертације, усмерена на образовање и савремене моделе образовања и учења, и чине солидну основу за израду докторског рада.

Изјава о ауторству

Име и презиме аутора Сајка Рајић

Број индекса 28/2013

Изјављујем

да је докторска дисертација под насловом

Математика и музика у функцији дечјег развоја

- резултат сопственог истраживачког рада;
- да дисертација у целини ни у деловима није била предложена за стицање друге дипломе према студијским програмима других високошколских установа;
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио/ла интелектуалну својину других лица.

Потпис аутора

У Београду, 09.09.2019.

Стојка Рајић

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора Стајка Рајић

Број индекса 28/2013

Студијски програм Историја и филозофија природних наука и технологије

Наслов рада Математика и музика у функцији дечјег развоја

Ментор проф. др Весна Тодорчевић, проф. др Ивана Дробњак

Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла ради похрањена у **Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду.**

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског назива доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис аутора

У Београду, 09.09.2019.

Стајка Рајић

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић" да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

Математика и музика у функцији дечјег развоја

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигиталном репозиторијуму Универзитета у Београду и доступну у отвореном приступу могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство (CC BY)

2. Ауторство – некомерцијално (CC BY-NC)

3. Ауторство – некомерцијално – без прерада (CC BY-NC-ND)

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима (CC BY-NC-SA)

5. Ауторство – без прерада (CC BY-ND)

6. Ауторство – делити под истим условима (CC BY-SA)

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци.
Кратак опис лиценци је саставни део ове изјаве).

Потпис аутора

У Београду, 09.09.2019.

Стојка Ђурић

324

1. **Ауторство**.Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. **Ауторство – некомерцијално**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. **Ауторство – некомерцијално – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. **Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. **Ауторство – без прерада**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. **Ауторство – делити под истим условима**. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.