



UNIVERZITET U NOVOM SADU
FAKULTET TEHNIČKIH NAUKA
U NOVOM SADU



Lidija Rehlicki Lukešević

**O POSLEKRITIČNOM PONAŠANJU
ŠTAPA NA ELASTIČNOJ PODLOZI**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Novi Sad, 2019.



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ
ТЕХНИЧКИХ НАУКА
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Редни број, РБР:	
Идентификациони број, ИБР:	
Тип документације, ТД:	Монографска документација
Тип записа, ТЗ:	Текстуални штампани материјал
Врста рада, ВР:	Докторска дисертација
Аутор, АУ:	Лидија Рехлици Лукшевић
Ментор, МН:	др Бранислава Новаковић, др Марко Јанев
Наслов рада, НР:	О послекритичном понашању штапа на еластичној подлози
Језик публикације, ЈП:	Српски
Језик извода, ЈИ:	Српски / Енглески
Земља публикавања, ЗП:	Република Србија
Уже географско подручје, УГП:	Војводина
Година, ГО:	2019
Издавач, ИЗ:	Ауторски репринт
Место и адреса, МА:	Факултет техничких наука, Трг Доситеја Обрадовића 6, 21000 Нови Сад
Физички опис рада, ФО: (поглавља/страна/ цитата/табела/слика/графика/прилога)	10 / 85 / 32 / 0 / 18 / 0 / 0
Научна област, НО:	Машинско инжењерство
Научна дисциплина, НД:	Теорија стабилности еластичних штапова
Предметна одредница/Кључне речи, ПО:	Проста греда, Винклерова подлога, Стабилност, Двопараметарски бифуркациони проблем, Поступак редукције Љапунов-Шмита
УДК	
Чува се, ЧУ:	Библиотека ФТН, Нови Сад
Важна напомена, ВН:	



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ • ФАКУЛТЕТ
ТЕХНИЧКИХ НАУКА
21000 НОВИ САД, Трг Доситеја Обрадовића 6

КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

Извод, **ИЗ:**

У овом раду, анализирана је нелинеарна једначина деформације штапа која одговара двопараметарском бифуркационом проблему који произилази из анализе стабилности просте греде на еластичној подлози Винклеровог типа уз тако претпостављене параметре система да имамо два различита мода извијања за исту вредност критичне силе. Користећи Љапунов-Шмитову редуkcију, извршена је бифуркациона анализа нелинеарног проблема, којом је добијен број нетривијалних решења. Такође, извршена је бифуркациона анализа помоћу енергијског метода и одређена је енергија за свако бифуркационо решење. Решење са најмањом енергијом је оно које би се јавило у послекритичном стању. За специфичан избор параметара, бифуркационо решење у форми другог мода има најмању тоталну енергију. На крају су дати и нумерички резултати који илуструју дата решења.

Датум прихватања теме, **ДП:**

29. 05. 2019. године

Датум одбране, **ДО:**

Чланови комисије, **КО:**

Председник:

др Теодор Атанацковић

Члан:

др Драгослав Шумарац

Члан:

др Драган Т. Спасић

Потпис ментора

Члан, ментор:

др Бранислава Новаковић

Члан, ментор:

др Марко Јанев



UNIVERSITY OF NOVI SAD • FACULTY OF TECHNICAL
SCIENCES

21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number, ANO :	
Identification number, INO :	
Document type, DT :	Monograph publication
Type of record, TR :	Textual printed material
Contents code, CC :	PhD thesis
Author, AU :	Lidija Rehlicki Lukešević
Mentor, MN :	Branislava Novaković, PhD, Marko Janev, PhD
Title, TI :	On post-critical behavior of a beam on an elastic foundation
Language of text, LT :	Serbian
Language of abstract, LA :	Serbian / English
Country of publication, CP :	Republic of Serbia
Locality of publication, LP :	Vojvodina
Publication year, PY :	2019
Publisher, PB :	Author's reprint
Publication place, PP :	Faculty of Technical Sciences, Trg Dositeja Obradovića 6, 21000 Novi Sad
Physical description, PD : (chapters/pages/ref./tables/pictures/graphs/appendixes)	10 / 85 / 32 / 0 / 18 / 0 / 0
Scientific field, SF :	Mechanical engineering
Scientific discipline, SD :	Theory of stability of elastic rods
Subject/Key words, S/KW :	Simply supported beam, Winkler foundation, Stability, Two-parametar bifurcation problem, Lyapunov-Schmidt reduction
UC	
Holding data, HD :	Library of Faculty of technical sciences, Novi Sad
Note, N :	



UNIVERSITY OF NOVI SAD • FACULTY OF TECHNICAL
SCIENCES

21000 NOVI SAD, Trg Dositeja Obradovića 6

KEY WORDS DOCUMENTATION

Abstract, **AB**:

Subject of analysis in this paper is the nonlinear equilibrium equation corresponding to the two-parameter bifurcation problem arising in the stability analysis of an elastic simply supported beam on the Winkler type elastic foundation for the case when bimodal buckling occurs. We perform the bifurcation analysis of the nonlinear problem by using Lyapunov–Schmidt reduction, thus obtaining the number of the nontrivial solutions to the nonlinear problem and qualitatively characterizing the solution patterns. We also give the formulation of the problem and bifurcation analysis from the total energy viewpoint and determine the energy of each bifurcating solution. We assert that the solution with the smallest energy is the one that will be observed in the post-critical state. For specific choice of parameters, the bifurcating solution in the form of the second buckling mode has the smallest total energy. The numerical results illustrating the theory are also provided.

Accepted by the Scientific Board on, **ASB**:

May 29th, 2019

Defended on, **DE**:

Defended Board, **DB**:

President:

Teodor Atanacković, PhD

Member:

Dragoslav Šumarac, PhD

Member:

Dragan T. Spasić, PhD

Menthor's sign

Member, Menthor:

Branislava Novaković, PhD

Member, Menthor:

Marko Janev, PhD

Najsrdajnije se zahvaljujem akademiku Teodoru Atanackoviću na izuzetnoj pomoći i savetima u toku svih faza izrade ovog rada.

Posebnu zahvalnost dugujem mojim mentorima prof. dr Branislavi Novaković i dr Marku Janevu na ukazanom poverenju, ogromnoj podršci, znanju, strpljenju i bezuslovnoj pomoći.

Zahvalnost dugujem i prof. dr Draganu Spasiću na pomoći, korisnim savetima i sugestijama. Zahvaljujem se prof. dr Valentinu Glavardanovu i prof. dr Srboljubu Simiću zbog kojih sam zavolela mehaniku.

Zahvaljujem se prof. dr Srđanu Kisinu i kolegi Nebojši Raviću za pruženo znanje i iskustvo da teoriju realizujem u praksi.

Zahvaljujem se mom nastavniku matematike iz osnovne škole Božidaru Petroviću što me je na najbolji način uveo u svet matematike.

Veliko hvala svim mojim prijateljima i kolegama na podršci, a posebno kumi doc. dr Jeleni Veličković i kolegi Aleksandru Okuki na dodatnoj pomoći i savetima tokom pisanja ovog rada.

Najveću zahvalnost dugujem svojoj porodici, suprugu Marinku i kćerci Tatjani, kao i babi Jeleni i dedi Savi, a posebno mojim roditeljima, Ljiljani i Zvonimiru, koji su uvek bili uz mene i verovali u mene.

Lidija

*„Zahvalno srce je ne samo najveća vrlina,
nego i temelj svih vrlina“*

Ciceron

Sadržaj

1	Uvod	3
2	Osnovne jednačine ravanske deformacije štapa	7
2.1	Jednačine ravnoteže	7
2.2	Geometrijske relacije	10
2.3	Konstitutivne jednačine	10
2.4	Osnovne jednačine ravanske deformacije pravog, nestišljivog štapa	15
3	Metodi analize stabilnosti elastičnih štapova	17
3.1	Metod bliske ravnotežne konfiguracije (Ojlerov metod)	18
3.2	Energijski metod analize stabilnosti	22
3.3	Dinamički metod analize stabilnosti	23
4	Postupak redukcije Ljapunov-Šmita	25
4.1	Teorema o implicitnoj funkciji (slučaj konačno dimenzijskih prostora)	25
4.2	Postupak redukcije Ljapunov-Šmita za konačno dim. prostor	26
4.3	Teorema o implicitnoj funkciji (beskonačno dimenzijskih prostora)	30
4.4	Postupak redukcije Ljapunov-Šmita za beskonačno dim. prostor	31
5	Formulacija problema	36
5.1	Postavka problema	36
5.1.1	Osnovne jednačine ravanske deformacije zgloбно oslonjenog štapa na elastičnoj podlozi	36
5.2	Nelinearni problem	38
5.3	Linearizovani problem	40
6	Bifurkaciona analiza	46
6.1	Linearizovani operator	46
6.2	Primena postupka redukcije Ljapunov-Šmita	49

7	Verifikacija prethodne analize Energijskim metodom	62
8	Numerički rezultati	65
9	Zaključak i pravci daljeg istraživanja	76
10	Dodatak	78
	Literatura	82

1 Uvod

Teorija stabilnosti je jedna od najvažnijih oblasti mehanike obzirom da je analiza stabilnosti konstrukcije sastavni deo projektovanja konstrukcionih sistema ili njenih pojedinih elemenata u građevinarstvu, mašinstvu i ostalim tehničkim naukama. Proračun stabilnosti konstrukcija ima praktičnu primenu pri projektovanju, jer dobijeni rezultati mogu znatno uticati na uštede u količini materijala koji se ugrađuje, a takođe i na povećanje stepena sigurnosti konstrukcije. Na primer, početkom primene čelika u mašinstvu i građevinarstvu, analiza stabilnosti dobija sve veći značaj. Veliki broj elemenata u čeličnim konstrukcijama je izložen pritisku (stubovi, pritisnuti štapovi rešetkastih nosača, lučni nosači...), i kod najvećeg dela pritisnutih elemenata granična nosivost nije uslovljena kriterijumom nosivosti već kriterijumom stabilnosti. To proizilazi iz činjenice da je čelik materijal sa visokim mehaničkim karakteristikama ali i relativno skup, pa se čelični elementi izvode kao tankozidni što dovodi do problema stabilnosti kao što su bočno izvijanje i izbočavanje.

U teoriji stabilnosti za analizu se koriste elastični štapovi zbog jednostavnosti modela koji se mogu rešavati analitički. Zaključci do kojih se dolazi pri analizi stabilnosti elastičnih štapova predstavljaju bitne informacije i za ponašanje trodimenzijskih elastičnih tela.

Problem analize stabilnosti štapova na elastičnoj podlozi privlači pažnju istraživačke zajednice tokom mnogo godina i takvi štapovi se koriste veoma često kao model koji opisuje ponašanje nekih konstrukcija. Na primer, oni mogu dosta precizno opisati ponašanje temeljnih konstrukcija koji leže na deformabilnoj podlozi ili ponašanje stubova ukopanih u tlo. Takođe, primer ovakvog štapa je i pritisnut, gornji pojas rešetke, gde vertikalne možemo zameniti raspodeljenim reaktivnim pritiscima kontinualne elastične podloge. Takva analiza često zahteva i proračun kritične (bifurkacione) tačke i poslekritičnih ravnotežnih stanja. Istraživanje u ovoj oblasti se sprovodi u više pravaca. Jedan od njih je vezan za modeliranje linarno elastične podloge. Najstariji i najčešće korišćen model je formulisao Vinkler (Winkler) 1867. godine [30]. On pretpostavlja da je podloga ispod grede niz, međusobno neza-

visnih, linearno elastičnih, vertikalnih opruga koje se nalaze na malom rastojanju. To dovodi do toga da reakcija podloge u proizvoljnoj tački zavisi samo od deformacije u toj specifičnoj tački a ne zavisi od deformacije tačaka u okolini. Karakteristike podloge prema Vinklerovom modelu su opisane samo pomoću parametra μ koji predstavlja konstantu krutosti podloge. Iako model korišćen u ovom radu predstavlja najjednostavniji oblik elastične podloge, u praksi se on najčešće koristi kao model ponašanja tla. Jedan od prvih koji je koristio Vinklerov model elastične podloge je bio Hetenji [15]. Postoji mnogo radova koji se bave elastičnim štapovima na Vinklerovoj podlozi, sa raznim pretpostavkama u vezi tog modela ([26], [11] i [4]). Na primer, Olhoff i Seyranian [26] su analizirali bifurkaciju i poslekritično ponašanje za problem bimodalne optimizacije elastičnog stuba. Eisenberger i Clastornik [11] su analizirali vibracije i izvijanje grede na promenljivoj Vinklerovoj elastičnoj podlozi. Atanacković i Novaković [4] koristili su Pontrijaginov (Pontryagin) princip maksimuma da bi odredili optimalni oblik elastičnog pritisnutog štapa na Vinklerovoj podlozi. Poslekritično ponašanje Ojlerovog i Bekovog stuba oslonjenog na elastičnu podlogu je rađeno u radu autora B.N.Rao i G.V.Rao [28]. Ponašanje idealnog elastičnog štapa i štapa sa geometrijskim imperfekcijama oslonjenog na Vinklerovu podlogu nakon izvijanja su analizirali Kounadis i saradnici [21]. Često se koristi i takozvani Vinkler-Pasternak model podloge, u kom sila reakcije zavisi od deformacije u toj tački i drugog izvoda elastične linije grede u toj specifičnoj tački [27]. U radovima [23], [20] i [19] analizirano je ponašanje elastičnog štapa na takvoj podlozi. Pored gore navedenog, istraživači se bave proučavanjem i različitim vrsta konstitutivnih jednačina za grede. Interakciju Timošenko grede sa elastičnom podlogom, pod različitim pretpostavkama, je radio Obara [25]. Uslovi za postojanje višestrukih rešenja jednačina elastičnog štapa su analizirani u radovima [6] i [7]. Nedavno su analizirane i napukle grede kao i beskonačne grede na elastičnoj podlozi ([5] i [31], redom). Poslednjih godina kada nano tehnologija zauzima značajno mesto kako u nauci tako i u industriji, nano štapovi su u fokusu mnogih autora ([24], [32] i [22]).

Problem određivanja odnosa sila - pomeranje u poslekritičnom reži-

mu za nelinearne jednačine je bitan ali generalno težak problem. Zbog toga, veoma je bitno da se odredi odnos između odziva linearizovanog i nelinearnog problema. Kritične vrednosti parametara za koje štap, opisan partikularnim nelinearnim sistemom, postaje nestabilan su one za koje se javlja bifurkacija rešenja odgovarajućeg sistema. Postoji nekoliko mogućih slučajeva odziva, odnosno ponašanja nelinearnog sistema ([1], [14], [9]). Analiza veze između nelinearnog i linearizovanog problema pored ostalog daje i odgovor koji će se karakterističan tip, odnosno oblik bifurkacije javiti. Metoda zasnovana na postupku redukcije Ljapunov-Šmita ([14], [9]) je procedura kojom se određuje broj rešenja (kao i njihovo lokalno ponašanje) nelinearnog sistema diferencijalnih jednačina analizom odgovarajućeg redukovano sistema algebarskih jednačina. Ovo se često koristi kao osnova za analizu bifurkacije blizu kritičnih tačaka, kako za primarne ([3], [2]), tako i za sekundarne bifurkacije ([12], [13]). Ova metoda je lokalna metoda, što znači da može da se koristi za određivanje broja rešenja i njihovog ponašanja u okolini fiksirane sopstvene vrednosti linearizovanog problema. Olhoff i Seyranian [26] su analizirali bifurkacione i poslekritično ponašanje bimodalnog optimalnog stuba na elastičnoj podlozi, koristeći tehniku perturbacija. Bimodalan slučaj ili slučajevi gde se javljaju višestruki modovi izvijanja za istu kritičnu silu su od posebnog interesa i mogu da se jave u mnogim realnim problemima. Hussain ([16] i [17]) je stabilnost kubne aproksimacije jednačina ravnoteže elastičnog štapa na elastičnoj podlozi u bimodalnom slučaju analizirao korišćenjem postupka redukcije Ljapunov-Šmita odgovarajućeg energetskog funkcionala. Izydoreka i saradnici [18] su analizirali dvoparametarsku bifurkaciju ravnotežnog stanja elastične gede na deformabilnoj podlozi sa slobodnim levim krajem, gde je analiza zasnovana na konceptu Beouwerovog stepena.

U ovom radu će se analizirati slučaj potpuno nelinearne jednačine ravnoteže koje odgovaraju dvoparametarskom bifurkacionom problemu, na opštiji način u odnosu na do sada prisutne načine u literaturi. Pri tome će se analizirati stabilnost Bernuli-Ojlerove grede na Vinklerovoj podlozi, za slučaj kada geometrijska multiplikativnost para svojstvenih vrednosti može biti najviše dva. Tačnije, razmatraće se aksijalno

pritisnut, elastičan, nestišljiv štap, zglobno oslonjen na oba kraja i postavljen na Vinklerovoj podlozi uz tako pretpostavljene parametre problema, da imamo dva različita (ortogonalna) moda izvijanja za istu vrednost partikularne kritične sile. Analiziraće se ponašanje štapa u blizini tačke kritične sile za koju se javlja bimodalni slučaj. Izabraće se najniža kritična tačka za koju postoji bimodalni slučaj izvijanja. Kako bi se dobio broj netrivialnih rešenja za nelinearni problem i kvalitativno okarakterisali obrasci rešenja za taj slučaj, koristiće se postupak redukcije Ljapunov-Šmita. Dodatno, uradiće se procene L_2 norme za netrivialno rešenje. Takođe, uradiće se verifikacija dobijenih rezultata korišćenjem Energijskog metoda, pri kojoj će se koristiti Ricov metod minimizacije totalne energije sistema uz izbor Ricove baze sastavljene od rešenja linearizovanog problema.

Ovaj rad je podeljen na deset poglavlja. U drugom, trećem i četvrtom poglavlju su opisane teorijske podloge potrebne za rešavanje problema. U drugom poglavlju je prikazano izvođenje osnovnih jednačina ravanske deformacije štapa, koje predstavljaju i sam početak rešavanja problema. U trećem poglavlju su opisani različiti metodi koji se koriste za analizu stabilnosti štapa, dok se četvrto poglavlje bavi postupkom redukcije Ljapunov-Šmita. U petom poglavlju izvedene su nelinearne jednačine problema kao i jednačine linearizovanog problema. Bifurkaciona analiza pomoću postupka redukcije Ljapunov-Šmita izložena je u šestom poglavlju. Dobijene bifurkacione jednačine iz šestog poglavlja su u sedmom poglavlju verifikovane Energijskim metodom. Numerički rezultati su dati u osmom poglavlju. Deveto poglavlje je zaključak i pravci daljeg istraživanja dok je u desetom poglavlju prikazan dokaz Propozicije 2 korišćene u Poglavlju 6.

2 Osnovne jednačine ravanske deformacije štapa

Analiza stabilnost elastičnih štapova zahteva formulisanje osnovnih jednačine ravanske defomacije štapa u koje spadaju: jednačine ravnoteže, geometrijske relacije i konstitutivne jednačine [1].

2.1 Jednačine ravnoteže

Diferencijalne jednačine ravnoteže štapa se izvode za štap koji leži u ravni definisanoj osama \bar{x} i \bar{y} Dekartovog koordinatnog sistema. Pretpostavka je da se opterećenje štapa kao i vektori pomeranja svih tačaka štapa nalaze u toj istoj ravni. Štap je napravljen od materijala čije se ponašanje može opisati linearnom vezom napon-deformacija. Pošto se analiziraju konačne deformacije štapa, jednačine ravnoteže se moraju napisati za deformisano stanje. Da bi se analiza učinila lakšom, pretpostaviće se da štap, i pored toga što može biti izložen velikim deformacijama, u deformisanom stanju zadovoljava i sledeće uslove [1]:

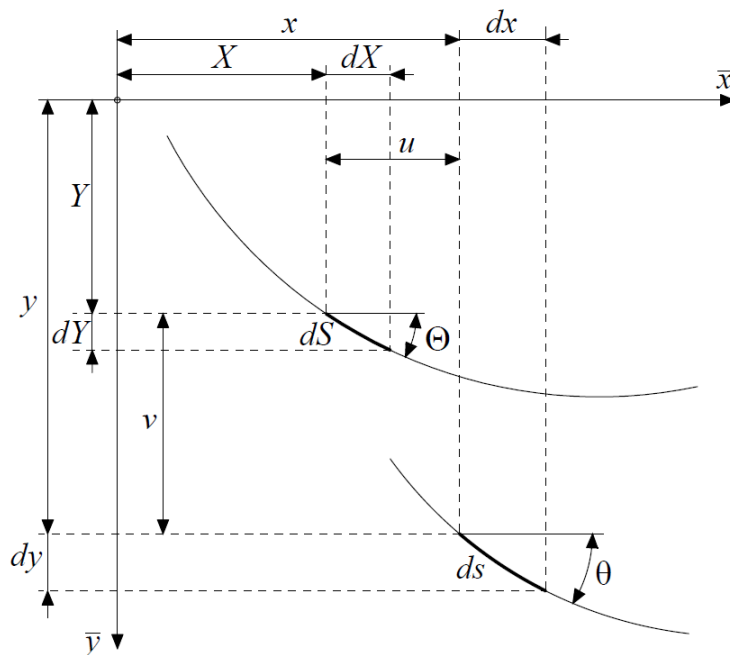
- a) Ravni preseki u nedeformisanom stanju ostaju ravni i u deformisanom stanju,
- b) Poprečni preseki štapa ne menjaju svoj oblik i veličinu,
- c) Poprečni preseki upravni na osu štapa u nedeformisanom stanju ostaju upravni i u deformisanom stanju.

Kasnije će se dodati i pretpostavka da je osa štapa nestišljiva, što vodi klasičnoj Bernuli-Ojlerovoj teoriji štapova.

Položaj proizvoljne tačke štapa će se odrediti preko Dekartovih koordinata pre deformacije i obeležiti sa X i Y . U nedeformisanom (osnovnom) stanju položaj te tačke je dat jednačinama

$$X = X(S), \quad Y = Y(S), \quad S \in [0, L], \quad (2.1)$$

gde je L ukupna dužina ose štapa, a S je lučna koordinata po osi štapa merena od njenog levog kraja.

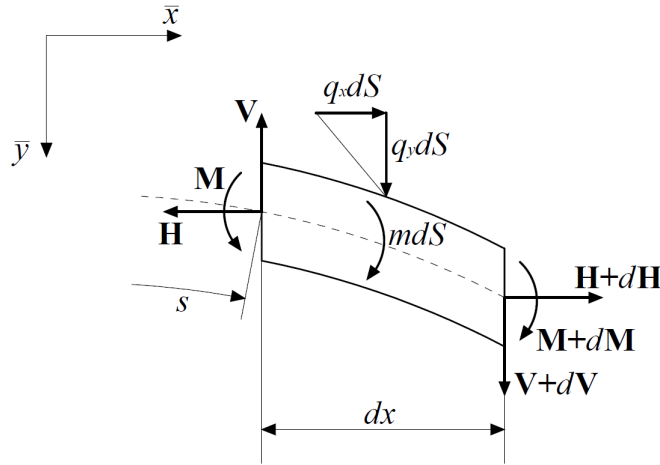


Slika 1: Osa štapa u nedeformisanom i deformisanom stanju

Komponente vektora pomeranja označene su sa u i v u pravcu \bar{x} i \bar{y} ose respektivno. Prema tome položaj proizvoljne tačke sa koordinatama X i Y prelazi u deformisanom stanju u položaj sa koordinatama x i y koje su povezane sa koordinatama X i Y preko vektora pomeranja na sledeći način:

$$x = X + u, \quad y = Y + v. \quad (2.2)$$

Posmatra se element štapa dužine dS u nenapregnutom stanju. U deformisanom stanju taj element štapa (Slika 2) će imati promenjenu dužinu, koja je obeležena sa ds i na njega će delovati sistem sila i spregova.



Slika 2: Elementarni deo deformisane ose štapa

Jednačine ravnoteže za deo štapa prikazanom na Slici 2 su

$$\begin{aligned}
 \sum X_i &= H + dH - H + q_x dS = 0, \\
 \sum Y_i &= V + dV - V + q_y dS = 0, \\
 \sum M_D &= M - M - dM - m dS + (H + dH) dy \\
 &\quad - (V + dV) dx = 0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

gde su q_x i q_y komponente raspoređenog opterećenja po jedinici dužine u pravcu \bar{x} i \bar{y} ose, redom, a m su raspoređeni spregovi sila duž ose štapa. H i V su horizontalna i vertikalna komponenta glavnog vektora unutrašnjih sila u proizvoljnom preseku stuba u pravcu osa \bar{x} i \bar{y} , respektivno, a M je glavni moment savijanja unutrašnjih sila u proizvoljnom preseku štapa.

Sređivanjem sistema jednačina (2.3) dobija se sistem jednačina koji predstavlja jednačine ravnoteže štapa:

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dS} &= -q_x, & \frac{dV}{dS} &= -q_y, \\ \frac{dM}{dS} &= -V\frac{dx}{dS} + H\frac{dy}{dS} - m.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Sistemu jednačina ravnoteže (2.4) potrebno je sada još pridružiti geometrijske relacije i konstitutivne jednačine, što će biti prikazano u daljem tekstu.

2.2 Geometrijske relacije

Dilatacija ose štapa se može odrediti iz sledećeg izraza [1]:

$$\frac{ds}{dS} = \frac{dS + \Delta dS}{dS} = 1 + \varepsilon, \quad (2.5)$$

gde je ΔdS promena dužine elementa čija je originalna dužina dS a ε je dilatacija ose štapa. Uvodi se i uslov da je $-1 < \varepsilon < \infty$. Sa Slike 1, koristeći relaciju $ds = (1 + \varepsilon)dS$ i ugao θ između tangente na osu štapa u deformisanom stanju i ose \bar{x} , dobijaju se geometrijske relacije

$$\begin{aligned}dy &= d(Y + v) = ds \sin \theta = (1 + \varepsilon)dS \sin \theta, \\ dx &= d(X + u) = ds \cos \theta = (1 + \varepsilon)dS \cos \theta.\end{aligned}\quad (2.6)$$

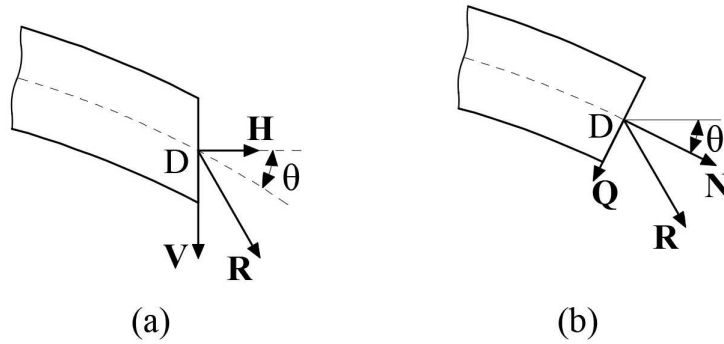
2.3 Konstitutivne jednačine

Konstitutivne jednačine su jednačine koje obuhvataju uticaje smicanja i kompresibilnosti ose štapa, tj. one povezuju H , V i M sa merama deformacije. Za meru deformacije uzeće se dilatacija (ε) i količnik između ugla rotacije poprečnog preseka i izduženja ose štapa (φ'). Ugao rotacije između poprečnih preseka φ je ugao između poprečnog preseka štapa u deformisanom i nedeformisanom stanju. Zbog pretpostavke c) iz 2.1 ovo je takođe ugao između tangente na osu štapa

u deformisanom i nedeformisanom stanju, tj. $\varphi = \theta - \Theta$. Odatle se za φ' dobija

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dS} = \frac{d\theta}{dS} - \frac{d\Theta}{dS}. \quad (2.7)$$

Prvo se dekomponuje presečna sila \mathbf{R} na pravac tangente na osu štapa i normale na nju. Odatle se, u proizvoljnoj tački D štapa, umesto H i V (Slika 3 (a)) uvodi normalna sila N i smičuća sila Q (Slika 3 (b)).



Slika 3: Dekompozicija presečne sile \mathbf{R} na (a) H i V komponente i (b) pravac tangente na osu štapa N i normale na nju Q

Sa slike 3 sledi:

$$\begin{aligned} N &= H \cos \theta + V \sin \theta, & Q &= V \cos \theta - H \sin \theta, \\ H &= N \cos \theta - Q \sin \theta, & V &= Q \cos \theta + N \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

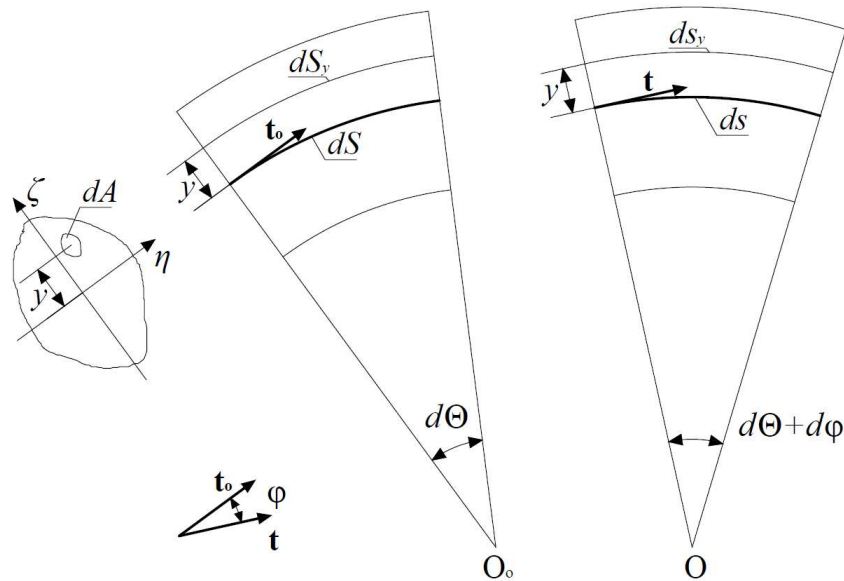
Konstitutivne jednačine su relacija konekcije N , Q i M sa merama deformacije φ' i ε , i trebaju biti određene na bazi ranije iznetih pretpostavki od a) do c). Da bi sistem jednačina bio određen potrebne su dve konstitutivne jednačine. Pretpostavlja se postojanje dve funkcije $N(\varphi', \varepsilon)$ i $M(\varphi', \varepsilon)$, takve da je $N = N(\varphi', \varepsilon)$ i $M = M(\varphi', \varepsilon)$. Funkcije su pretpostavljene tako da zadovoljavaju sledeće uslove [1]:

- 1) $N(\varphi', \varepsilon) \rightarrow +\infty$ kada dilatacija $\varepsilon \rightarrow \infty$,
- 2) $N(\varphi', \varepsilon) \rightarrow -\infty$ kada dilatacija $\varepsilon \rightarrow -1$,
- 3) $M(\varphi', \varepsilon) \rightarrow \pm\infty$ kada dilatacija $\varphi' \rightarrow \pm\infty$.

Iz definicije normalnog napona σ sledi

$$N = \int_A \sigma dA = E \int_A \varepsilon_z dA, \quad (2.9)$$

gde je A površina poprečnog preseka i gde smo koristili Hukov zakon $\sigma = E\varepsilon_z$, gde je E modul elastičnosti a ε_z je dilatacija proizvoljne tačke koja pripada poprečnom peseku. Da bi se odredilo ε_z posmatraće se element čija osa ima dizine dS i ds u nedeformisanom i deformisanom stanju, redom (videti Sliku 4).



Slika 4: Elementarni deo štapa u nedeformisanom i deformisanom stanju

Neka je R poluprečnik krivine elementa u nedeformisanom stanju.

Ugao između dva bliska poprečna preseka označiće se sa $d\Theta = dS/R$. Sa dS_y označiće se dužina vlakna na rastojanju y od glavne ose η poprečnog preseka A . Glavna osa η poprečnog preseka prolazi kroz težište poprečnog preseka. Tada sledi:

$$dS_y = (R + y)d\Theta = \left(1 + \frac{y}{R}\right) dS. \quad (2.10)$$

Kako je ugao φ ugao rotacije poprečnog preseka, on je takođe, na osnovu c) iz 2.1, ugao između tangenti na osu u deformisanom stanju (opisano vektorom \mathbf{t}) i nedeformisanom (opisano vektorom \mathbf{t}_0) stanju. Onda je ugao između dva bliska poprečna preseka u deformisanom stanju ($d\Theta + d\varphi$). Takođe, kako je $ds = (1 + \varepsilon)dS$, sledi

$$r(d\Theta + d\varphi) = (1 + \varepsilon)dS, \quad (2.11)$$

gde je r poluprečnik krivine ose stapa u deformisanom stanju.

Iz (2.11) sledi

$$r \left(\frac{dS}{R} + d\varphi \right) = (1 + \varepsilon)dS, \quad (2.12)$$

ili

$$r = \frac{1 + \varepsilon}{\frac{1}{R} + \varphi'}; \quad (\cdot)' = \frac{d}{dS}(\cdot). \quad (2.13)$$

Dužina vlakna koje je na rastojanju y od neutralne ose u njenom deformisanom stanju je

$$ds_y = (r + y)(d\varphi + d\Theta). \quad (2.14)$$

Koristeći (2.13) i (2.14) dobija se

$$ds_y = \left(1 + \varepsilon + \frac{y}{R} + y\varphi'\right) dS. \quad (2.15)$$

Tako da je dilatacija vlakna na rastojanju y od neutralne ose

$$\varepsilon_y = \frac{ds_y - dS_y}{dS_y} = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{y}{R}} + \frac{\varphi'}{1 + \frac{y}{R}}y. \quad (2.16)$$

Ubacivanjem (2.16) u (2.9) dobija se

$$N = E \int_A \left[\frac{\varepsilon}{1 + \frac{y}{R}} + \frac{\varphi'}{1 + \frac{y}{R}} y \right] dA. \quad (2.17)$$

Moment unutrašnjih sila na poprečnom preseku oko ose η postaje

$$M = \int_A \sigma y dA = E \int_A \left[\frac{\varepsilon y}{1 + \frac{y}{R}} + \frac{\varphi'}{1 + \frac{y}{R}} y^2 \right] dA. \quad (2.18)$$

Definisaće se sledeće geometrijske karakteristike poprečnog preseka

$$F^* = \int_A \frac{dA}{1 + \frac{y}{R}}, \quad S^* = \int_A \frac{y dA}{1 + \frac{y}{R}}, \quad I^* = \int_A \frac{y^2 dA}{1 + \frac{y}{R}}. \quad (2.19)$$

Koristeći (2.19) konstitutivne jednačine (2.17) i (2.18) se mogu napisati:

$$N = EF^* \varepsilon + ES^* \varphi', \quad M = ES^* \varepsilon + EI^* \varphi'. \quad (2.20)$$

Može se primetiti da za prav štap ($R = \infty$) važi $S^* = 0$ i $F^* = A$, kao i $I^* = I_\eta$, gde je I_η glavni moment inercije. Takođe može se videti da (2.20)₁ ne zadovoljava uslov $N \rightarrow -\infty$ za $\varepsilon \rightarrow -1$ iz ranije navedenih uslova. Odatle sledi da se (2.20) ne može koristiti za situaciju kada $\varepsilon \rightarrow -1$. Kako za ugao φ važi $\varphi = \theta - \Theta$, odatle sledi

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dS} = \frac{d\theta}{dS} - \frac{d\Theta}{dS} = \theta' - \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dS} - \frac{1}{R} = \kappa(1 + \varepsilon) - \frac{1}{R}, \quad (2.21)$$

gde je $\kappa = 1/r$ krivina ose štapa u defomisanom stanju. Zahtev da štap ne seče sam sebe, dovodi do toga da je $1/\kappa = (1 + \varepsilon)/(d\theta/ds)$ veće od polovine debljine štapa. Iz (2.20) i (2.21) se dobija

$$\begin{aligned} N &= EF^* \varepsilon + ES^* (\theta' - \kappa_0), \\ M &= ES^* \varepsilon + EI^* (\theta' - \kappa_0). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Jednačine (2.22) su konstitutivne jednačine štapa. Za prav štap jednačine (2.22) postaju

$$\begin{aligned} N &= EA\varepsilon, \\ M &= EI_\eta\theta' = EI_\eta(1 + \varepsilon)\kappa. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Na kraju, za štap sa neistegljivom osom ($\varepsilon = 0$) dobija se

$$M = EI_\eta\kappa, \quad (2.24)$$

što je dobro poznata Bernuli-Ojlerova relacija da je moment savijanja proporcionalan krivini ose štapa.

2.4 Osnovne jednačine ravanske deformacije pravog, nestišljivog štapa

Jednačine ravnoteže (2.4), geometrijske relacije (2.6) i konstitutivne jednačine (2.22) predstavljaju osnovne jednačine ravanske deformacije elastičnog štapa, prikazane kao:

$$\begin{aligned} H' &= -q_x, \\ V' &= -q_y, \\ M' &= -V(X' + u') + H(Y' + v') - m, \\ X' + u' &= (1 + \varepsilon) \cos \theta, \\ Y' + v' &= (1 + \varepsilon) \sin \theta, \\ N &= (H \cos \theta + V \sin \theta) = EF^*\varepsilon + ES^*(\theta' - \kappa_0), \\ M &= ES^*\varepsilon + EI^*(\theta' - \kappa_0). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Obzirom da se analiza sprovodi za slučaj pravog štapa, sa malim deformacijama (tako da je $\theta \ll 1$, $|u/L| \ll 1$, $|v/L| \ll 1$), i gde su zanemareni efekti kompresibilnosti ($\varepsilon = 0$), gornji sistem se može napisati kao:

$$\begin{aligned}
H' &= -q_x, & V' &= -q_y, \\
M' &= -V + H\theta - m, \\
u' &= 0, & v' &= \theta, \\
H + V\theta &= 0, & M &= EI_\eta\theta'.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Pretpostavlja se da je $m = 0$. Zatim, iz (2.26)₅ i (2.26)₇ sledi $M = EI_\eta y''$ (pošto je $Y = 0$, onda je $y = v$). Ako se to ubaci u (2.26)₃ dobija se:

$$(EI_\eta y'')' - Hy' = -V. \tag{2.27}$$

Diferenciranjem (2.27) i korišćenjem (2.26)₂ dobija se

$$(EI_\eta y'')'' - (Hy')' = -q_y, \tag{2.28}$$

što predstavlja linearizovanu jednačinu problema.

3 Metodi analize stabilnosti elastičnih štapova

Problem stabilnosti elastičnih štapova spada u grupu nelinearnih problema mehanike. Nelinearnost kod ovog problema može biti geometrijska (nelinearan odnos između deformacije i pomeranja), fizička (zbog nelinearnosti konstitutivnih jednačina) ili i jedna i druga. U osnovi ovog problema je činjenica da pod određenim uslovima rešenje nije jedinstveno, tj. pod istim graničnim uslovima i istim opterećenjem štap može da bude u ravnoteži u više različitih položaja. Proučavanje stabilnosti elastičnih štapova počelo je 1744. godine Ojlerovim radom u kome su određene granice stabilnosti aksijalno pritisnutih štapova sa različitim graničnim uslovima. Značajan doprinos u razvoju teorije stabilnosti dali su i Lagranž (koji je analizirao i poslekritično ponašanje) i S. Timošenko [29].

Opterećenje pri kojem će se javiti gubitak stabilnosti zavisi od dimenzija i geometrije konstrukcije kao i karakteristika materijala, posebno od vitkosti. Krutost materijala, koja zavisi od modula elastičnosti materijala, je jedno od najbitnijih svojstava koje utiče na kritično opterećenje. Nestabilnost konstrukcije je prema tome posledica geometrijske deformacije konstrukcije koja u proračun uvodi nelinearnost, zbog koje će se povećati naponi sračunati za početni nedeformisani oblik konstrukcije.

Uslovi ravnoteže i jednačine kretanja se pišu za početni, nedeformisani oblik konstrukcije, dok je za analizu gubitka stabilnosti konstrukcije potrebno napisati jednačine ravnoteže ili kretanja za deformisani oblik konstrukcije. Naime, ni jedan mehanički sistem nije stabilan ili nestabilan već samo neka njegova konfiguracija može biti stabilna ili nestabilna. Za analizu gubitka stabilnosti potrebno je opisati ponašanje štapa u poslekritičnoj oblasti, pri čemu se mora izvesti nelinearna relacija između pomeranja i deformacija.

Postoje tri osnovna pravca u razvoju koncepta stabilnosti: metod bliske ravnotežne konfiguracije i energetska metoda koji štap tretiraju kao statički sistem, kao i dinamički metod koji uvodi kretanje u analizu.

Sva tri metoda su ispod detaljnije opisana.

3.1 Metod bliske ravnotežne konfiguracije (Ojlerov metod)

L.Ojler (L. Euler) je još u XVIII veku postavio obrazac za izvi-janje stubova pri analizi stabilnosti i ovo je najstariji metod analize stabilnosti štapova. Pri analizi stabilnosti Ojler polazi od činjenice da rešenje problema elastičnosti pod datim uslovima nije jedinstveno, tj. pod istim graničnim uslovima i sa istim opterećenjem štap može biti u ravnoteži u više različitih položaja. Ovaj metod je zasnovan na sledećim definicijama stabilnosti i nestabilnosti ravnotežnog položaja [1]:

Definicija 1. Neki ravnotežni položaj I elastičnog tela je stabilan ako pri datom opterećenju i datim graničnim uslovima ne postoji ni jedan drugi bliski ravnotežni položaj II.

Definicija 2. Neki ravnotežni položaj I elastičnog tela je nestabilan ako u njegovoj blizini pri datom opterećenju i datim graničnim uslovima postoji bar još jedan bliski ravnotežni položaj II.

Prema ovoj metodi je pre svega potrebno opisati ravnotežni položaj štapa i on je određen koordinatama njegove ose. U ravnotežnom položaju I, čiju stabilnost ispitujemo, te koordinate moraju zadovoljavati jednačine ravnoteže, geometrijske relacije i konstitutivne jednačine. Ako u blizini konfiguracije I postoji neki drugi ravnotežni položaj, tj. ako je sistem nestabilan, onda i koordinate tačaka ose u položaju II moraju zadovoljavati iste jednačine. Iz ovoga proizilazi da se pitanje da li je neki ravnotežni položaj stabilan svodi na pitanje da li sistem jednačina koji se sastoji iz jednačina ravnoteže, geometrijskih relacija i konstitutivnih jednačina, ima jedno ili više rešenja. Drugim rečima, one vrednosti parametara u sistemu pri kojima dolazi do grananja – bifurkacije, su kritične vrednosti parametara pri kojima sistem gubi stabilnost.

Za analizu jednačina koje opisuje ravnotežu, suočavamo se sa problemom pronalaženja rešenja sistema nelinearnih jednačina oblika

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}(\xi), \lambda) = 0, \quad \xi \in (0, 1), \quad (3.1)$$

gde je $\mathbf{F} = (F_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ nelinearni operator, $\mathbf{y}(\xi) = (y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ traženo rešenje, a λ je parametar.

Jednačini (3.1) pridružuju se granični uslovi u obliku

$$\mathbf{B}(\mathbf{y}(\xi), \lambda) = 0, \quad (3.2)$$

gde $\xi_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$ i $\mathbf{B} = (B_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ je poznati operator. Prvo pitanje koje nas zanima u vezi sa problemom (3.1), (3.2) je da li za dato λ sistem ima rešenje. Ako rešenje postoji, onda se traži broj rešenja i zavisnost broja rešenja od λ . Od naročitog značaja je proces bifurkacije pri kome se jedno rešenje sistema (3.1), (3.2) deli i grana u dva ili više rešenja kada λ ima određene vrednosti koje se zovu tačke bifurkacije. Na primer, pretpostavlja se

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}, \lambda) = L_0\mathbf{y} - \lambda\mathbf{y} = 0, \quad (3.3)$$

gde je L_0 linearni kompaktni operator između nekih predefinisanih Banahovih funkcionalnih prostora tako da L_0 ima najviše prebrojivo mnogo karakterističnih vrednosti, \mathbf{y} je element Banahovog prostora Y i λ je skalarni parametar. Dalje se pretpostavlja da (3.2) ima formu

$$B_1(\mathbf{y}(0)) = \mathbf{y}(0) = 0, \quad B_2(\mathbf{y}(1)) = \mathbf{y}(1) = 0. \quad (3.4)$$

Očigledno je da sistem jednačina (3.3), (3.4) ima za svako λ trivijalno rešenje

$$\mathbf{y}(\xi) \equiv 0. \quad (3.5)$$

Pretpostavlja se sada da su određene sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije za L_0 koje odgovaraju graničnim uslovima (3.4). Neka \mathbf{y}_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ označava sopstvenu funkciju i $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ odgovarajuće sopstvene vrednosti (to pod pretpostavkom da je L_0 simetričan kada su i karakteristične vrednosti realne), tj.

$$L_0\mathbf{y}_i - \lambda_i\mathbf{y}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.6)$$

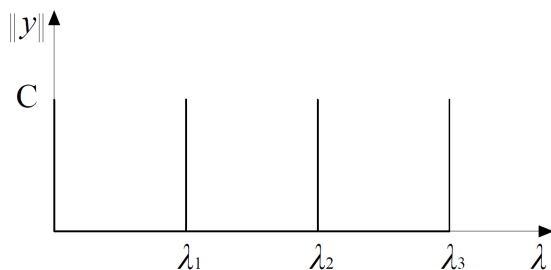
Dalje se pretpostavlja da je \mathbf{y}_i normiran tako da je

$$\|\mathbf{y}_i\| = 1, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

gde je $\|\cdot\|$ norma nad normiranim linearnim prostorom Y . Ako je C realna konstanta, tj. $C \in \mathbb{R}$ onda,

$$\mathbf{u}_i = C\mathbf{y}_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (3.8)$$

je takođe rešenje (3.3), (3.4). Može se primetiti da norma \mathbf{y}_i data sa (3.5) je $\|\mathbf{y}\| = 0$, dok norma \mathbf{u}_i data sa (3.8) je $\|\mathbf{u}_i\| = C, i = 1, 2, 3, \dots$ Na Slici 5 je prikazana zavisnost norme rešenja jednačina (3.3), (3.4) i λ . Sa Slike 5 se može zaljučiti da je rešenje $\mathbf{y} = 0$ za svako $\lambda = \lambda_i, i = 1, 2, 3, \dots$ grana i da za $\lambda = \lambda_i$ postoje dva rešenja $\mathbf{y} = 0$ i $\mathbf{y} = C\mathbf{y}_i$. To znači da su bifurkacione tačke $(0, \lambda_i) \in Y \times \mathbb{R}$.

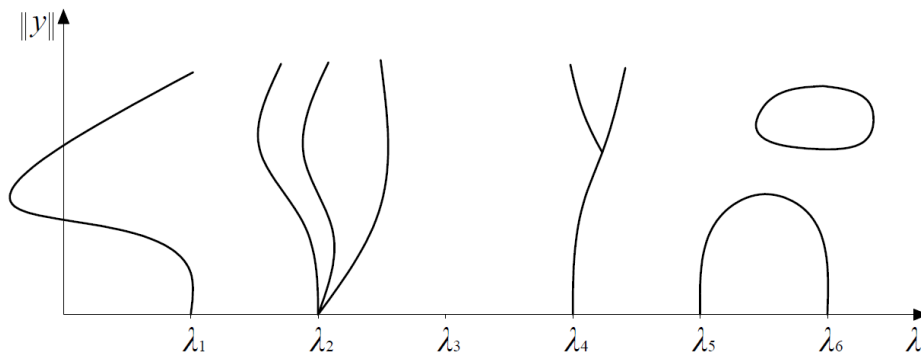


Slika 5: Bifurkacioni dijagram linearizovanog problema

Pretpostavlja se sada da je problem (3.3), (3.4) dobijen linearizacijom problema (3.1), (3.2). Grafički prikaz zavisnosti $\|\mathbf{y}\|$ od λ , koji se naziva dijagram odziva, za nelinearni problem (3.1), (3.2) može imati sledeće oblike prikazane na Slici 6.

Karakteristični slučajevi pokazani na Slici 6 su:

1. grane koje se javljaju kod pojedinih sopstvenih vrednosti linearizovanog problema mogu biti zakrivljene (λ_1)
2. može biti nekoliko grana koje se javljaju na jednoj sopstvenoj vrednosti linearizovanog problema (λ_2)



Slika 6: Bifurkacioni dijagram nelinearnog problema, dijagram odziva

3. može se desiti da nijedna grana nelinearnog problema ne polazi od sopstvene vrednosti linearizovanog problema (λ_3)

4. grana koja počine na sopstvenoj vrednosti linearizovanog problema može kasnije ponovo da se grana, tzv. sekundarna bifurkacija (λ_4)

5. dve grane linearizovanog problema mogu biti povezane (λ_5 i λ_6)

6. mogu se javiti grane koje ne polaze od sopstvenih vrednosti linearizovanog problema

U svakom konkretnom slučaju treba ispitati zavisnost između linearizovanog i nelinearnog problema, odnosno ispitati koji od šest karakterističnih slučajeva se javlja, što zahteva delikatnu matematičku analizu. Jedan od metoda za takvu analizu je i takozvani alternativni metod baziran na postupku redukcije Ljapunov-Šmita koji će kasnije biti opisan u Poglavlju 4. Treba napomenuti da su rezultati koje taj metod daje lokalni, tj važe isključivo u okolini λ_i , $i = 1, 2, 3, \dots$

3.2 Energijski metod analize stabilnosti

Energijski metod analize stabilnosti se definiše preko energijskog metoda stabilnosti mehaničkog sistema sa konačnim brojem stepeni slobode koji se zasniva na Lagranž-Dirihleovoj teoremi: "Ako u nekoj ravnotežnoj konfiguraciji (osnovnoj konfiguraciji) potencijalna energija konzervativnog mehaničkog sistema je minimalna (ima izolovan lokalni minimum) kada se uporedi sa susednom konfiguracijom, onda je ta osnovna konfiguracija stabilna". Na osnovu ovoga dobijena je sledeća definicija za slučaj elastičnih štapova [1]:

Definicija 3. Za elastični štap koji se nalazi pod dejstvom konzervativnog sistema sila u ravnotežnom položaju, kaže se da je u položaju stabilne ravnoteže ako i samo ako u tom položaju ukupna potencijalna energija sistema (spoljašnjih i unutrašnjih sila) ima slabi lokalni minimum u klasi virtualnih pomeranja koja zadovoljavaju geometrijska ograničenja.

Potencijalna energija elastičnog tela je izražena preko funkcionala. Pri korišćenju ovog metoda koristi se uslov iz varijacionog računa da ako je tačka stacionarnosti funkcionala lokalni minimum, onda je druga varijacija pozitivna.

Neka je položaj ravnoteže određen funkcijom $y_0(x)$. U položaju ravnoteže važi da je $\delta\Pi(y_0, \delta y) = 0$, pa je za postojanje slabog lokalnog minimuma neophodno da druga varijacija potencijala Π bude pozitivna. Položaj ravnoteže y_0 je stabilan ako je

$$\delta^2\Pi(y_0, \delta y) = \delta^2\Pi_0 > 0 \quad (3.9)$$

Položaj ravnoteže je nestabilan ako postoji bar jedno $\delta y = \delta\bar{y}$ takvo da je

$$\delta^2\Pi(y_0, \bar{y}) = \bar{\delta}^2\Pi_0 < 0 \quad (3.10)$$

Položaj indiferentne ravnoteže je onaj položaj za koji potencijalna energija neke bliske konfiguracije ima istu vrednost kao i u položaju y_0 . Tj. položaj ravnoteže je indiferentan ako prva varijacija najmanje

jedne specijalne druge varijacije (druge varijacije u specijalno izabranom pravcu) ima vrednost nula.

$$\delta\Pi(y_I, \delta y) = \delta\Pi_I = 0 \quad (3.11)$$

3.3 Dinamički metod analize stabilnosti

Ovo je konceptualno drugačiji metod od prva dva jer uvodi dinamički koncept u teoriju stabilnosti elastičnih tela. Prema ovom metodu, položaj ravnoteže nekog elastičnog tela je stabilan ako mali poremećaj u nekom početnom trenutku rezultira kretanjem u blizini početnog položaja ravnoteže [1].

Analiza stabilnosti elastičnih tela dinamičkim metodom se može vršiti na dva načina. Prema prvom načinu, koji se naziva i indirektni metod analize, razmatranja se baziraju na diferencijalnim jednačinama kretanja koje se javljaju kao posledica uvođenja poremećaja. Analizom rešenja tih jednačina kretanja sudi se o stabilnosti tela. Drugi način, koji se naziva i direktni metod ili drugi metod Ljapunova, se sastoji u kvalitativnoj analizi diferencijalnih jednačina kretanja koje opisuju kretanje koje je posledica poremećaja, a bez poznavanja rešenja tih jednačina. Prema ovome, drugi metod Ljapunova je opšti metod, jer daje mogućnost da se ispita i stabilnost sistema opisanih nelinearnim diferencijalnim jednačinama koje često nismo u mogućnosti da rešimo.

Mnogo češću primenu pri analizi stabilnosti imaju metod bliske ravnotežne konfiguracije i energijski metod, jer u tim metodama je potrebno poznavati samo konstitutivne jednačine elastostatike. Za dinamički metod analize stabilnosti potrebno je znati konstitutivne jednačine elastodinamike, pa se on ređe koristi, ali ga je moguće uvek primeniti. Za razliku od dinamičkog metoda koji je uvek primenljiv ostala dva metoda nisu primenljiva za sve sisteme. Energijski metod je primenljiv isključivo za konzervativne sisteme. U teoriji elastičnosti, unutrašnje sile uvek imaju potencijal, tako da je pitanje primene energijske metode svedeno na to da li spoljašnje sile, tj. opterećenja imaju potencijal. Metod bliske ravnotežne konfiguracije je primenljiv za sve

konzervativne sisteme, ali i za neke nekonzervativne sisteme.

U ovom radu biće primenjen metod bliske ravnotežne konfiguracije a kasnije i energijski metod za verifikaciju rezultata dobijenih prvim metodom.

4 Postupak redukcije Ljapunov-Šmita

Postupak redukcije Ljapunov-Šmita je procedura koja se koristi za redukciju beskonačno dimenzijskog (ili mnogo dimenzijskog) prostora na jednu dimenziju ili na neki nisko dimenzijski prostor. Najpre će se razmotriti procedura za konačno dimenzijski prostor, odnosno za slučaj sistema algebarskih jednačina, što će predstavljati osnovu za opštiji slučaj. Jedan o osnovnih alata za analizu predstavlja teorema o implicitnoj funkciji koji će prvi biti prikazan. U drugom delu će se razmotriti postupak redukcije Ljapunov-Šmita za beskonačno dimenzijski prostor [14].

4.1 Teorema o implicitnoj funkciji (slučaj konačno dimenzijskih prostora)

Teorema o implicitnoj funkciji za slučaj konačno dimenzijskih prostora se odnosi na sistem jednačina sledeće forme

$$f_i(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_k) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

koje zavise od k parametar α_j . Ova teorema daje dovoljan uslov koji garantuje da sistem (4.1) može da ima jedinstveno lokalno rešenje za (x_1, \dots, x_n) kao funkcije od parametara (α_j) . Primećuje se da je broj jednačina u (4.1) jednak broju nepoznatih.

Preformulisaće se jednačina (4.1) koristeći vektorsku notaciju. Neka je $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$, i $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{R}^n$. Onda (4.1) definiše preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ za koje se pretpostavlja da je s -puta diferencijabilno, gde je $1 \leq s \leq \infty$. Za bilo koje $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ neka $(df)_{x,\alpha}$ predstavlja $n \times n$ Jakobijan matricu

$$(df)_{x,\alpha} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, \alpha) \right)_{i,j=1,\dots,n}, \quad (4.2)$$

u okolini fiksne tačke $(x_0, \alpha_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$.

Teorema o implicitnoj funkciji. [14] Neka važe prethodna razmatranja. Pretpostavlja se da je $f(x_0, \alpha_0) = 0$ i da

$$\det(df)_{x_0, \alpha_0} \neq 0. \quad (4.3)$$

Onda postoji okolina U od x_0 u \mathbb{R}^n i V od α_0 u \mathbb{R}^k i funkcija $X : V \rightarrow U$ tako da jednačina (4.1) ima jedinstveno rešenje $x = X(\alpha)$, $\alpha \in V$. Štaviše, ako je f klase C^s takvo je i X . Tada važi

$$f(X(\alpha), \alpha) \equiv 0, \quad \alpha \in V \quad X(\alpha_0) = x_0. \quad (4.4)$$

4.2 Postupak redukcije Ljapunov-Šmita za konačno dimenzijski prostor

Posmatra se sistem n jednačina

$$\Phi_i(y, \alpha) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.5)$$

gde je $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatko preslikavanje. Posmatra se vektor $y = (y_1, \dots, y_n)$ kao nepoznatu koja treba da se reši preko (4.5), a $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ je vektor parametara. (Uobičajeno se misli da je α_0 bifurkacioni parametar λ , koji je izdvojen, dok su $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ pomoćni parametri. Pošto to ne komplikuje analizu, od samog starta smatraće se da ti pomoćni parametri mogu da postoje.) Pretpostaviće se da je $\Phi_i(0, 0) = 0$ i pokušaće se opisati rešenje tog sistema lokalno blizu originala. Neka je $(d\Phi)_{0,0}$ $n \times n$ Jakobijan matrica $(\partial\Phi_i/\partial y_j(0, 0))$. Ako je $\text{rank}(d\Phi)_{0,0} = n$, sledi iz teoreme o implicitnoj funkciji da (4.5) ima jedinstveno rešenje za y koje je u funkciji od α , u nekoj okolini $(y_0, \alpha_0) = (0, 0)$. Drugim rečima, ovo je nedegenerisani slučaj za koji se bifurkacija neće javiti. Ovde će se posmatrati minimalno degenerisan slučaj za koji važi

$$\text{rank}(d\Phi)_{0,0} = n - 1. \quad (4.6)$$

Dva proizvoljna izbora su potrebna da bi se postavila redukcija Ljapunov-Šmita, a za pogodnu skraćenicu će se usvojiti $L = (d\Phi)_{0,0}$. Moraju se izabrati komplementi vektorskog prostora M i N za $\mathcal{N}(L)$ i $\mathcal{R}(L)$, redom, pomoću kojih se dobija razdvajanje na

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{N}(L) \oplus M, \quad (4.7)$$

i

$$\mathbb{R}^n = N \oplus \mathcal{R}(L). \quad (4.8)$$

Iz pretpostavke (4.6) sledi da je $\dim \mathcal{R}(L) = n - 1$ i $\dim \mathcal{N}(L) = 1$, pa je $\dim M = n - 1$ i $\dim N = 1$. Neka E označava projekciju \mathbb{R}^n na $\mathcal{R}(L)$ gde je $\mathcal{N}(E) = N$. Komplementarna projekcija $I - E$ ima prostor slika (range) jednako sa N i jezgro (kernel) jednako sa $\mathcal{R}(L)$.

Za $u \in \mathbb{R}^n$ važi

$$u = 0 \text{ ako i samo ako } Eu = 0 \text{ i } (I - E)u = 0. \quad (4.9)$$

Zbog toga sistem jednačina (4.5) (tj. $\Phi(y, \alpha) = 0$) se može proširiti na ekvivalentan par jednačina

$$\begin{aligned} E\Phi(y, \alpha) &= 0, \\ (I - E)\Phi(y, \alpha) &= 0, \end{aligned} \quad (4.10)$$

Osnovna ideja postupka redukcije Ljapunov-Šmita je da (4.10)₁ može biti rešeno za $n - 1$ promenljivih y , a iz (4.10)₂ proizilazi jednačina za preostalu nepoznatu ako su vrednosti tih $n - 1$ promenljivih uvrštene u jednačinu (4.10)₂.

Proširiće se sada ta ideja. Prvo primenom teoreme o implicitnoj funkciji se pokaže da (4.10)₁ može da se rešiti za $n - 1$ promenljivih y . Zbog razdvajanja (4.7), bilo koji vektor $y \in \mathbb{R}^n$ može da se dekomponuje u formu $y = v + w$, gde $v \in \mathcal{N}(L)$, $w \in M$. (4.10)₁ će se napisati kao

$$E\Phi(v + w, \alpha) = 0. \quad (4.11)$$

Apstraktno posmatrano, smatra se da (4.11) definiše preslikavanje $F : \mathcal{N}(L) \times M \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathcal{R}(L)$, gde je

$$F(v, w, \alpha) = E\Phi(v + w, \alpha). \quad (4.12)$$

Pomoću pravila izvoda složene funkcije, diferencijal (4.11) u odnosu na w , dat je sa

$$E(d\Phi)_{0,0} = EL = L, \quad (4.13)$$

gde je prva jednakost sadržana u definiciji, a druga je zbog toga što je restrikcija projekcije E na $\mathcal{R}(L)$ identično preslikavanje. Pošto za restrikciju L na M

$$L_M : M \rightarrow \mathcal{R}(L), \quad (4.14)$$

važi da je $\mathcal{N}(L_M) = \{0\}$ sledi ja to L_M invertibilno. Iz teoreme o implicitnoj funkciji sledi da (4.10)₁ ima jedinstveno rešenje za $w \in M$ u okolini $(v_0, w_0) = (0, 0)$. Napisaće se to rešenje kao $w = W(v, \alpha)$, tako da $W : \mathcal{N}(L) \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow M$ zadovoljava

$$E\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) \equiv 0, \quad W(0, 0) = 0. \quad (4.15)$$

Ubacivanjem W u (4.10)₂ dobija se redukovano preslikavanje $\phi : \mathcal{N}(L) \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow N$ gde je

$$\phi(v, \alpha) = (I - E)\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha). \quad (4.16)$$

u nekoj okolini $v_0 = 0$.

Nule od $\phi(v, \alpha)$ su u "1-1" korespodenciji sa nulama od $\Phi(y, \alpha)$, tj.

$$\phi(v, \alpha) = 0 \quad \text{akko} \quad \Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) = 0. \quad (4.17)$$

Izborom eksplicitnih koordinata $\mathcal{N}(L)$ i N dobija se redukovano preslikavanje $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$. Naravno, ovo uvodi dodatni proizvoljni izbor u metod, nezavisno od izbora M i N u (4.7) i (4.8). Uvode se koordinate tim redom. Neka su v_0 i v_0^* ne nula vektori u $\mathcal{N}(L)$ i $\mathcal{R}(L)^\perp$, redom, gde je ortogonalni komplement uzet u odnosu na uobičajeni skalarni proizvod u \mathbb{R}^n .

Bilo koji vektor $v \in \mathcal{N}(L)$ može biti napisan u formi $v = xv_0$ gde $x \in \mathbb{R}$. Definiše se $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ sa

$$g(x, \alpha) = \langle v_0^*, \phi(xv_0, \alpha) \rangle. \quad (4.18)$$

tako da $\phi(xv_0, \alpha) \in N$, $g(x, \alpha) = 0$ akko $\phi(xv_0, \alpha) = 0$. Na taj način je nula od g takođe u "1-1" odnosu sa rešenjem $\Phi(y, \alpha) = 0$.

Treba napomenuti da ubacivanjem definicije od Φ (4.16) u (4.18), projekcija $(I - E)$ se može izostaviti, tj. dobija se

$$g(x, \alpha) = \langle v_0^*, \Phi(xv_0 + W(xv_0, \alpha), \alpha) \rangle. \quad (4.19)$$

Razlog za ovo pojednostavljenje je zbog $v_0^* \in \mathcal{R}(L)^\perp$, i za bilo koji vektor $V \in \mathbb{R}^n$, $EV \in \mathcal{R}(L)$, tako da $\langle v_0^*, EV \rangle = 0$. Stoga proizilazi jednačina:

$$\langle v_0^*, (I - E)V \rangle = \langle v_0^*, V \rangle. \quad (4.20)$$

Napomena. Koristi se frazu "redukovana funkcija" za označavanje obe funkcije, i $\phi(v, \alpha)$ i $g(x, \alpha)$. Obe funkcije sadrže istu informaciju, g je samo reprezentacija ϕ u specifičnim koordinatama. Za teorijsku analizu ϕ je podesnija, a za primenu je upotrebljivija g . Koristiće se ona koja je podesnija.

Postupak redukcije Ljapunov-Šmita se sumirano može prikazati u pet koraka [14]

Korak 1. Dekompozicija (4.7) i (4.8) početnog prostora na potprostore u direktnoj sumi u vezi sa operatorom L i dobijanje jednačine (4.10)

Korak 2. Korišćenje pomenute dekompozicije da bi se jednačina (4.10)₁ prikazala u obliku (4.11).

Korak 3. Pokazati da (4.10)₁ može biti rešena po svim osim po jednoj promenljivoj, koristeći teoremu o implicitnoj funkciji.

Korak 4. Uvrstiti rešenje (4.10)₁ u (4.10)₂ da bi se dobilo (4.16).

Korak 5. Izabrati koordinate za $\mathcal{N}(L)$ i $\mathcal{R}(L)^\perp$ da bi se dobilo (4.18).

Sušтина postupka redukcije Ljapunov-Šmita je u primeni teoreme o implicitnoj funkciji u situacijama gde to možda nije očigledno. Zbog

toga je Korak 3 fundamentalan za redukciju. Ostali koraci su pomoćni da bi izneli Korak 3.

4.3 Teorema o implicitnoj funkciji (beskonačno dimenzijskih prostora)

Prvo se mora definisati C^1 preslikavanje $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ između Banahovih prostora. Preslikavanje Φ se zove (Frechet-ovo) diferencijabilno u tački $u \in \mathcal{X}$ ako postoji ograničeni linearni operator $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ takav da važi

$$\|\Phi(u + v) - \Phi(u) - Lv\| = o(\|v\|), \quad (4.21)$$

za v u okolini tačke nula u \mathcal{X} . Linearni operator u (4.21) biće označen sa $(d\Phi)_u$, i nazvan diferencijal od Φ u tački u . Kaže se da je Φ u klasi C^1 ako je Φ diferencijabilno za svako $u \in \mathcal{X}$ i preslikavanje $u \mapsto d\Phi_u$ je neprekidno.

Neka je $\Phi : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ preslikavanje između Banahovih prostora u klasi C^1 . Neka $(d\Phi)_{u,v} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ označava diferencijal Φ (u odnosu samo na \mathcal{X}). Razmotriće se jednačina

$$\Phi(u, v) = 0, \quad (4.22)$$

u okolini neke fiksne tačke, npr $(0, 0)$, tako da $\Phi(0, 0) = 0$. Tada važi:

Teorema o implicitnoj funkciji za Banahove prostore. [14]
Neka je Φ definisano kao iznad i pretpostavlja se da $(d\Phi)_{0,0} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$ ima ograničenu inverziju. Onda (4.22) može da se reši lokalno za $u = \Psi(v)$, gde je $\Psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ preslikavanje iz klase C^1 .

4.4 Postupak redukcije Ljapunov-Šmita za beskonačno dimenzijski prostor

Postupak redukcije Ljapunov-Šmita za beskonačno dimenzijske prostore će biti prikazana kroz ranije navedenih pet koraka u prikazu postupka redukcije Ljapunov-Šmita za konačno dimenzijske prostore. Glavna poteškoća za proširenje prethodno opisane metode je u koraku 1, tj. u formiranju komplementa u beskonačno dimenzijskom prostoru. U tu svrhu će se predstaviti neki preliminarni koncepti [14].

Definicija 1. Neka su \mathcal{X} i \mathcal{Y} Banahovi prostori. Ograničen linearni operator $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ se zove *Fredholm* ako važe sledeća dva uslova:

- (i) $\mathcal{N}(L)$ je konačno dimenzijski podprostor od \mathcal{X} .
- (ii) $\mathcal{R}(L)$ je zatvoren podprostor od \mathcal{Y} sa konačnom kodimenzijom.

Definicija 2. Ako je L *Fredholm*, *indeks* od L je ceo broj

$$i(L) = \dim \mathcal{N}(L) - \text{codim } \mathcal{R}(L). \quad (4.23)$$

Sledeći rezultati sadrže glavnu informaciju koja će se koristiti kod Fredholm operatora.

Propozicija 1. Ako je $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ Fredholm, onda postoje zatvoreni podprostori M i N od \mathcal{X} i \mathcal{Y} , respektivno, tako da

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \mathcal{N}(L) \oplus M, \\ \mathcal{Y} &= N \oplus \mathcal{R}(L). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Napomena. Usvaja se L da je Fredholm sa indeksom nula. Za takav operator, u (4.24)₂ važi da je $\dim \mathcal{N}(L) = \dim N$. Posebno, ako je $\mathcal{N}(L) = \{0\}$, onda je L "na" i "1-1" preslikavanje i stoga, pomoću teoreme o otvorenom preslikavanju, postoji ograničena inverzija L^{-1} . Odatle, se dobija sledeća posledica:

$$\text{Ako je } \mathcal{N}(L) = \{0\}, \text{ onda postoji ograničeni inverz za } L. \quad (4.25)$$

Za diferencijalne operatore koji se ovde razmatraju, \mathcal{X} i \mathcal{Y} su uglavnom podprostori Hilbertovog prostora $L^2(\Omega)$, gde je Ω ograničena oblast u \mathbb{R}^N . Ovaj prostor ima standardni skalarni proizvod

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u(\xi)v(\xi)d\xi. \quad (4.26)$$

Razmotriće se korišćenje ortogonalnih komplemenata u (4.24) tj.

$$\begin{aligned} (a) \quad M &= \mathcal{N}(L)^\perp, \\ (b) \quad N &= \mathcal{R}(L)^\perp, \end{aligned} \quad (4.27)$$

gde se za potprostor $S \subset \mathcal{Y}$ definiše

$$S^\perp = \{u \in \mathcal{Y} : \langle u, v \rangle = 0 \text{ za sve } v \in S\}. \quad (4.28)$$

Postori \mathcal{X} i \mathcal{Y} uglavnom nisu kompletni u odnosu na skalarni proizvod (4.26). Na primer, \mathcal{X} može biti $C^k(\Omega)$ i \mathcal{Y} može biti $C(\Omega)$, tj. prostori diferencijabilnih i kontinualnih funkcija, redom. Uglavnom, za beskonačno dimenzijski potprostor $S \subset \mathcal{Y}$, ne važi $\mathcal{Y} = S \oplus S^\perp$. Iako $S \cap S^\perp = \{0\}$, suma ne mora biti jednaka \mathcal{Y} , tj. može biti "premao" elemenata u S^\perp . Problem u takvim slučajevima je da "nedostajući" element leži u dualnom prostoru \mathcal{Y}^* , pre nego u \mathcal{Y} , kao što je zahtevano po definiciji za S^\perp . Ipak, dekompozicija $\mathcal{Y} = S \oplus S^\perp$ je validna u sledeća dva slučaja, koja opravdavaju (4.27):

Slučaj (a) - S je konačno dimenzijsko

Slučaj (b) - S je slika eliptičkog diferencijalnog operatora.

Kod Slučaja (a), kada $\dim S < \infty$, može se izvesti dekompozicija pomoću Gram-Šmitovog ortogonalizacionog procesa. Za Slučaj (b), uzimamo $\mathcal{X} \subset C^k(\Omega)$ i $\mathcal{Y} \subset C(\Omega)$, a diskusija je zasnovana na *Fredholmovoj alternativi*, tj. relaciji ([10]):

$$\mathcal{R}(L)^\perp = \mathcal{N}(L^*), \quad (4.29)$$

gde je L^* adjung od L . Formula (4.29) generalno vazi za linearne operatore, pod pretpostavkom da je ortogonalni komplement uzet u \mathcal{Y}^* a adjung je definisan kao operator $L^* : \mathcal{Y}^* \rightarrow \mathcal{X}^*$, za $f \in \mathcal{Y}^*$,

$L^*(f) = f \circ L \in \mathcal{X}^*$. Tada L^* ima sledeću interpretaciju (vidi [14]): $L^* : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ tako da za $u \in \mathcal{X}$, $v \in \mathcal{Y}$, $\langle Lu, v \rangle = \langle u, L^*v \rangle$. Za slučaj koji razmatramo, \mathcal{Y}^* je prostor generalizovanih funkcija (tj. distribucija). Ključna tačka pri dokazivanju Slučaja (b) je da je rešenje eliptičke diferencijalne jednačine regularno. Naime zbog eliptičke regularnosti eliptičkog diferencijalnog operatora (vidi [14]), važi $\mathcal{N}(L^*) \subset \mathcal{Y}$. Drugim rečima, $\mathcal{N}(L^*)$ se sastoji samo od funkcija. Posledica toga je da važi dekompozicija

$$\mathcal{Y} = \mathcal{R}(L) \oplus \mathcal{R}(L)^\perp. \quad (4.30)$$

Formula (4.29) omogućava poseban izbor N u (4.27)₂ koji je često mnogo pogodniji za primenu. Takođe, kada je L eliptični diferencijalni operator, iz (4.29) sledi da je kodimenzija za $\mathcal{R}(L)$ jednaka dimenziji za $\mathcal{N}(L^*)$. Odatle se za takve operatore koristi alternativna fomula za indeks:

$$i(L) = \dim \mathcal{N}(L) - \dim \mathcal{N}(L^*), \quad (4.31)$$

a ako je L simetričan ($L^* = L$) tada je $i(L) = 0$.

Neka je

$$\Phi : \mathcal{X} \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad \Phi(0, 0) = 0 \quad (4.32)$$

glatko preslikavanje između Banahovih prostora. Treba da se pomoću postupka redukcije Ljapunov-Šmita reši jednačina

$$\Phi(u, \alpha) = 0 \quad (4.33)$$

za u kao funkciju od α u blizini $(0, 0)$. Neka je L diferencijal od Φ na početku; u simbolima

$$Lu = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(hu, 0) - \Phi(0, 0)}{h}. \quad (4.34)$$

Pretpostavlja se da je L Fredholm indeksa nula.

Da bi se pojednostavila notacija kombinuje se bifurkacioni parametar λ i k pomoćnih parametara $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ u jedan vektor $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)$ gde je $\alpha_0 = \lambda$.

Treba se prisjetiti navedenih pet koraka, koji su prezentovani ranije za postupak redukcije Ljapunov-Šmita za konačno dimenzijske prostore (Poglavlje 4.2).

Korak 1. Razdvojiti prostore \mathcal{X} i \mathcal{Y} na sledeći način,

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \mathcal{N}(L) \oplus M, \\ \mathcal{Y} &= N \oplus \mathcal{R}(L).\end{aligned}\tag{4.35}$$

Korak 2. Podeliti (4.33) na ekvivalentne dve jednačine,

$$\begin{aligned}E\Phi(u, \alpha) &= 0, \\ (I - E)\Phi(u, \alpha) &= 0,\end{aligned}\tag{4.36}$$

gde je $E : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{R}(L)$ projekcija povezana sa razdvajanjem (4.35)₂.

Korak 3. Koristiće se (4.35)₁ da se napiše $u = v + w$, gde $v \in \mathcal{N}(L)$ i $w \in M$. Zatim će se primeniti teorema o implicitnoj funkciji da se reši (4.36)₁ za w kao funkciju v i α . To vodi do funkcije $W : \mathcal{N}(L) \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow M$ tako da

$$E\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha) \equiv 0.\tag{4.37}$$

Korak 4. Definiše se $\phi : \mathcal{N}(L) \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow N$ sa

$$\phi(v, \alpha) = (I - E)\Phi(v + W(v, \alpha), \alpha).\tag{4.38}$$

Korak 5. Izabere se baza v_1, \dots, v_n za $\mathcal{N}(L)$ i baza v_1^*, \dots, v_n^* za $\mathcal{R}(L)^\perp$. Definiše se $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sa

$$g_i(x, \alpha) = \langle v_i^*, \phi(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \alpha) \rangle.\tag{4.39}$$

Sada će se prodiskutovati kako se ovih pet koraka primenjuju za slučaj beskonačno dimenzijskih prostora.

Korak 1. Hipoteza da je L Fredholm garantuje da je razdvajanje (4.35) moguće. Pored toga, $\mathcal{N}(L)$ i N su konačno dimenzijski, a takođe je i M zatvoren.

Korak 2. To je notacija sa početka i nije potrebno diskutovati je.

Korak 3. Treba da se pokaže da je teorema o implicitnoj funkciji primenljiva. Izdvojiće se preslikavanje $F : \mathcal{N}(L) \times M \times \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathcal{R}(L)$ iz (4.36)₁; tj.

$$F(v, w, \alpha) = E\Phi(v + w, \alpha). \quad (4.40)$$

Diferencijal F u odnosu na w na početku je

$$EL = L. \quad (4.41)$$

Sada se može pokazati da pod navedenim pretpostavkama

$$L_M : M \rightarrow \mathcal{R}(L), \quad (4.42)$$

ima ograničenu inverziju. U konačno dimenzijskom slučaju to sledi jer je L_M uvek ograničeno i "1-1". Za slučaj Banahovih prostora, L_M je takođe "1-1" na zatvorenom M , ali dodatno je potrebna tehnička hipoteza da je $\mathcal{R}(L)$ zatvoren. Pošto je za L pretpostavljeno da je Fredholmov, samim tim $\mathcal{R}(L)$ zatvoren, pa pošto je i M zatvoren, sledi da postoji ograničen L_M^{-1} . Stoga, teorema o implicitnoj funkciji garantuje da (4.36)₁ može biti rešena za $w = W(v, \alpha)$.

Korak 4. To je notacija sa početka i nije potrebno diskutovati je.

Korak 5. U slučaju da je L eliptični i Fredholmov sa indeksom nula,

$$\dim \mathcal{N}(L) = \dim \mathcal{R}(L)^\perp, \quad (4.43)$$

i obe dimenzije su konačne. Prema tome baze za $\mathcal{N}(L)$ i $\mathcal{R}(L)^\perp$ sadrže isti broj vektora. Prethodno razmatranje je sumirano u sledećoj propoziciji:

Propozicija 2. Ako je linearizacija (4.33) Fredholm operator sa indeksom nula, onda je rešenje (4.33) (lokalno) u "1-1" odnosu sa rešenjem konačnog sistema

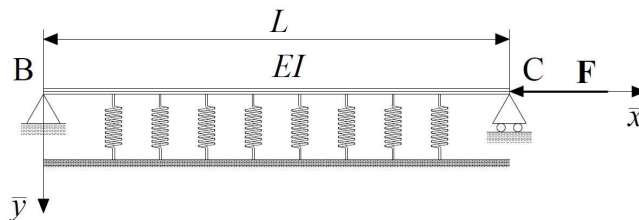
$$g_i(x, \alpha) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.44)$$

gde je g_i definisano sa (4.39).

5 Formulacija problema

5.1 Postavka problema

U radu će biti analiziran aksijalno opterećen štap, dužine L , zglobno oslonjen na oba kraja i oslonjen na elastičnoj podlozi Vinklerovog tipa. Štap je konstantnog poprečnog preseka, napravljen od homogenog, elastičnog, nestišljivog materijala, a dimenzije poprečnog preseka su mnogo manje od dužine štapa. Štap je opterećen koncentrisanom silom F na kraju C koja deluje u pravcu ose štapa u nedeformisanom položaju (Slika 7).



Slika 7: Štap na Vinklerovoj elastičnoj podlozi zglobno oslonjen na krajevima

Prvo će se izvesti osnovne jednačine ravanske deformacije datog štapa koristeći postupak opisan u Poglavlju 2.

5.1.1 Osnovne jednačine ravanske deformacije zglobno oslonjenog štapa na elastičnoj podlozi

Diferencijalne jednačine ravnoteže se izvode za štap koji leži u ravni definisanoj osama \bar{x} i \bar{y} Dekartovog koordinatnog sistema (Slika 7), gde se osa \bar{x} poklapa sa osom štapa.

Položaj proizvoljne tačke štapa u nedeformisanom (osnovnom) stanju je dat jednačinama:

$$X = S, \quad Y = 0, \quad S \in [0, L], \quad (5.1)$$

gde je L ukupna dužina štapa. Ta proizvoljna tačka se nalazi na rastojanju S od oslonca u tački B .

Kako su komponente vektora pomeranja označene sa u i v u pravcu \bar{x} i \bar{y} ose, tačke sa koordinatama X i Y prelaze u deformisanom stanju u tačke x i y koje su povezane sa koordinatama X i Y preko vektora pomeranja na sledeći način:

$$x = X + u, \quad y = Y + v. \quad (5.2)$$

Kristeći ranije izvedene jednačine ravnoteže (2.4), za analiziran štap sa Slike 7 dobijaju se sledeće jednačine ravnoteže:

$$\frac{dH}{dS} = 0, \quad \frac{dV}{dS} = -q_y, \quad \frac{dM}{dS} = -V \cos \theta + H \sin \theta, \quad (5.3)$$

gde je q_y komponenta raspoređenog opterećenja po jedinici dužine u pravcu \bar{y} ose, za koju važi: $q_y = -\mu y$, i gde je μ konstanta krutosti podloge koja definiše podlogu Vinklerovog tipa. H i V su komponente rezultantne sile u proizvoljnom poprečnom preseku u pravcu osa \bar{x} i \bar{y} , respektivno, M je glavni moment savijanja unutrašnjih sila u proizvoljnom preseku grede, a θ je ugao između tangente na osu grede i ose \bar{x} .

Koristeći jednačine (2.6) uz korekciju da je štap nestišljiv dobijaju se sledeće geometrijske relacije za problem sa Slike 7:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dS} &= \cos \theta, \\ \frac{dy}{dS} &= \sin \theta. \end{aligned} \quad (5.4)$$

I poslednja od potrebnih jednačina je konstitutivna jednačina (2.23) koja je ranije izvedena

$$M = EI\theta'. \quad (5.5)$$

gde je E modul elastičnosti, a I moment inercije poprečnog preseka.

Jednačine ravnoteže (5.3), geometrijske relacije (5.4) i konstitutivne jednačine (5.5) predstavljaju osnovne jednačine ravanske deformacije elastičnog štapa opterećenog horizontalnom silom u pravcu ose štapa i postavljenog na elastičnu podlogu Vinklerovog tipa prikazanog na Slici 7:

$$\begin{aligned} H' &= 0, & V' &= \mu y, & M' &= -V \cos \theta + H \sin \theta, \\ x' &= \cos \theta, & y' &= \sin \theta, \\ M &= EI\theta'. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Jednačine (5.6) predstavljaju osnovne jednačine Bernuli-Ojerove teorije savijanja štapova. Ovom sistemu treba pridružiti još i odgovarajuće granične uslove za dati štap koji su dati u sledećem obliku:

$$y(0) = y(L) = 0, \quad M(0) = M(L) = 0, \quad H(L) = -F. \quad (5.7)$$

5.2 Nelinearni problem

Rešavajući (5.6)₁ korišćenjem (5.7)₃ dobija se

$$H = -F. \quad (5.8)$$

Sistem jednačina (5.6) ima trivijalno rešenje za koje osa štapa ostaje prava i ono je:

$$\begin{aligned} H^0 &= -F, & V^0 &= 0, & M^0 &= 0, \\ x^0 &= S, & y^0 &= 0, & \theta^0 &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Moguće netrivialno rešenje je:

$$H = -F + \Delta H, \quad V = \Delta V, \quad M = \Delta M,$$

$$x = S + \Delta x, \quad y = \Delta y, \quad \theta = \Delta\theta, \quad (5.10)$$

gde je $\Delta(\cdot)$ operator poremećaja. Ako u sistem jednačina (5.6) uvrstimo (5.10) dobija se nelinearni sistem jednačina u obliku:

$$\begin{aligned} \Delta H' &= 0, \\ \Delta V' &= \mu\Delta y, \\ \Delta M' &= -\Delta V \cos \Delta\theta + (-F + \Delta H) \sin \Delta\theta, \\ \Delta x' &= \cos \Delta\theta - 1, \\ \Delta y' &= \sin \Delta\theta, \\ \Delta M &= EI\Delta\theta'. \end{aligned} \quad (5.11)$$

gde je $(\cdot)' = \frac{d}{ds}(\cdot)$. Integracijom (5.11)₁ dobija se $\Delta H = \text{const}$. Kako je $\Delta H(L) = 0$, sledi da je $\Delta H = 0$. Uvešće se sledeće bezdimenzijske veličine:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\Delta x}{L}, \quad \eta = \frac{\Delta y}{L}, \quad t = \frac{S}{L}, \\ \lambda_1 &= \frac{\mu L^4}{EI}, \quad \lambda_2 = \frac{FL^2}{EI}, \\ v &= \frac{\Delta V L^2}{EI}, \quad m = \frac{\Delta M L}{EI}, \end{aligned} \quad (5.12)$$

tada se smenom (5.12) u (5.11) dobija:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \lambda_1 \eta, \\ \dot{m} &= -v \cos \theta - \lambda_2 \sin \theta, \\ \dot{\eta} &= \sin \theta, \\ \dot{\zeta} &= \cos \theta - 1, \\ \dot{\theta} &= m, \end{aligned} \quad (5.13)$$

gde je $\dot{(\cdot)} = \frac{d(\cdot)}{dt}$. Granični uslovi koji odgovaraju sistemu jednačina (5.13) su:

$$\eta(0) = \eta(1) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}(1) = 0, \quad \zeta(0) = 0. \quad (5.14)$$

5.3 Linearizovani problem

Neka je $\tilde{\mathbf{y}} = [v \ m \ \eta \ \zeta \ \theta]^T \in (C^1([0, 1]))^5$. Sistem (5.13) formalno može da se napiše kao

$$M(\tilde{\mathbf{y}}, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v \\ m \\ \eta \\ \zeta \\ \theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 \eta \\ -v \cos \theta - \lambda_2 \sin \theta \\ \sin \theta \\ \cos \theta - 1 \\ m \end{bmatrix} = 0, \quad (5.15)$$

gde je M nelinearni operator $M : (C^1([0, 1]))^5 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow (C([0, 1]))^5$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$. Pored toga, uslovi (5.14) definišu zatvoren (i samim tim Banahov) potprostor \tilde{Y} Banahovog prostora $(C^1([0, 1]))^5$, za koji je sistem (5.15) formiran. Namera je da se prouči rešenje (5.15) za $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{\mathbf{y}} \in U \subset \tilde{Y}$, gde je U otvorena okolina $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \in \tilde{Y}$.

Posmatraće se linearizacija problema (5.15), uvođenjem Frešetovog izvoda od M , u odnosu na $\tilde{\mathbf{y}}$, za $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$. Kako je $M(\mathbf{0}, \lambda_1, \lambda_2) = 0$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, dobija se linearizovan (spektralni) problem

$$D_{\tilde{\mathbf{y}}} M(\mathbf{0}, \lambda_1, \lambda_2) = \tilde{B}(\lambda_1, \lambda_2) \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{0}, \quad \text{za } \tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{Y}, \quad (5.16)$$

gde je dejstvo linearnog operatora $\tilde{B}(\lambda_1, \lambda_2)$ na $\tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{Y}$ dato sa jednačinama:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \lambda_1 \eta, \\ \dot{m} &= -v - \lambda_2 \theta, \\ \dot{\eta} &= \theta, \\ \dot{\zeta} &= 0, \\ \dot{\theta} &= m, \end{aligned} \quad (5.17)$$

i graničnim uslovima (5.14). Treba primetiti da je neophodan uslov da problem (5.13), (5.14) ima netrivialno rešenje taj da linearizovani

problem (5.17), (5.14) ima netrivialno rešenje. Dovoljan uslov se ovde neće analizirati (videti [9] Poglavlje 3).

Koristeći (5.14)₃, iz (5.17)₄ dobija se $\zeta = 0$, tako da može da se pojednostavi problem $\tilde{B}(\lambda_1, \lambda_2) \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$, za $\tilde{\mathbf{y}} \in \tilde{Y}$, dat sa (5.17), (5.14), zanemarivanjem komponente ζ u $\tilde{\mathbf{y}}$. Prema tome posmatra se sledeći spektralni problem

$$B(\lambda_1, \lambda_2) \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} = [v \quad m \quad \eta \quad \theta]^T \in (C^1([0, 1]))^4, \quad (5.18)$$

sa graničnim uslovima

$$\eta(0) = \eta(1) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}(1) = 0, \quad (5.19)$$

gde je dejstvo linearnog operatora dato sa:

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \lambda_1 \eta, \\ \dot{m} &= -v - \lambda_2 \theta, \\ \dot{\eta} &= \theta, \\ \dot{\theta} &= m. \end{aligned} \quad (5.20)$$

U daljoj bifurkacionoj analizi korišćiće se redukovani nelinearni sistem

$$M(\mathbf{y}, \lambda_1, \lambda_2) \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (5.21)$$

sa \mathbf{y} kao iz (5.18).

Iz (5.20) dobija se ekvivalentan problem

$$\ddot{\eta} + \lambda_2 \dot{\eta} + \lambda_1 \eta = 0, \quad (5.22)$$

sa graničnim uslovima:

$$\eta(0) = \eta(1) = 0, \quad \ddot{\eta}(0) = \ddot{\eta}(1) = 0. \quad (5.23)$$

Treba primetiti da (5.22), (5.23) je dvoparametarski spektralni problem u formi $\mathbb{L}(\lambda_1, \lambda_2) \eta = 0$ sa

$$\mathbb{L}(\lambda_1, \lambda_2)(\cdot) = \overset{\dots}{(\cdot)} + \lambda_2 \overset{\ddot{\cdot}}{(\cdot)} + \lambda_1 (\cdot), \quad (5.24)$$

koji deluje u potprostoru $C^4([0, 1])$ ograničenom graničnim uslovima (5.23). Na osnovu teoreme o zatvorenom grafiku, on je ograničen na tom prostoru, a može se pokazati da je kompaktna ([10]) pa samim tim ima najviše prebrojivo mnogo karakterističnih vrednosti (λ_1, λ_2) .

Pristupa se rešavanju problema (5.22) i (5.23). Uvodeći smenu $\eta = ce^{rt}$ u (5.22) dobija se

$$cr^4 e^{rt} + \lambda_2 cr^2 e^{rt} + \lambda_1 ce^{rt} = 0, \quad (5.25)$$

iz koje sledi

$$r^4 + \lambda_2 r^2 + \lambda_1 = 0. \quad (5.26)$$

Rešavajući ovu kvadratnu jednačinu dobija se

$$(r^2)_{1,2} = \frac{-\lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1}}{2}. \quad (5.27)$$

Sa pretpostavkom da je $\lambda_2^2 - 4\lambda_1 \geq 0$ dobija se:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= \frac{-\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1}}{2} = -\left(\frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1}}{2}\right) < 0, \\ r_2^2 &= \frac{-\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1}}{2} = -\left(\frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1}}{2}\right) < 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Iz ovoga slede četiri rešenja:

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= i\sqrt{\frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1}}{2}} = i\delta_1, \\
 r_{12} &= -i\sqrt{\frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1}}{2}} = -i\delta_1, \\
 r_{21} &= i\sqrt{\frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1}}{2}} = i\delta_2, \\
 r_{22} &= -i\sqrt{\frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1}}{2}} = -i\delta_2.
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Na osnovu ovoga, rešenje početne jednačine (5.22) je

$$\eta = C_1 \cos \delta_1 t + C_2 \sin \delta_1 t + C_3 \cos \delta_2 t + C_4 \sin \delta_2 t. \tag{5.30}$$

Uvrštavanjem početnih uslova (5.23) u jednačinu (5.30) dobija se sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
 \eta(0) &= 0 \rightarrow C_1 + C_3 = 0, \\
 \dot{\eta}(0) &= 0 \rightarrow C_1 \delta_1^2 + C_3 \delta_2^2 = 0, \\
 \eta(1) &= 0 \rightarrow C_1 \cos \delta_1 + C_2 \sin \delta_1 + C_3 \cos \delta_2 + C_4 \sin \delta_2 = 0, \\
 \dot{\eta}(1) &= 0 \rightarrow C_1 \delta_1^2 \cos \delta_1 + C_2 \delta_1^2 \sin \delta_1 + C_3 \delta_2^2 \cos \delta_2 + C_4 \delta_2^2 \sin \delta_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

Rešavanjem determinante sistema dobija se

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \delta_1^2 & 0 & \delta_2^2 & 0 \\ \cos \delta_1 & \sin \delta_1 & \cos \delta_2 & \sin \delta_2 \\ \delta_1^2 \cos \delta_1 & \delta_1^2 \sin \delta_1 & \delta_2^2 \cos \delta_2 & \delta_2^2 \sin \delta_2 \end{vmatrix} = \\
 &= -(\delta_1^2 - \delta_2^2)^2 \sin \delta_1 \sin \delta_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Kako je

$$\delta_1^2 - \delta_2^2 = \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1}}{2} - \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1}}{2} = -\sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1}, \quad (5.33)$$

uvrštavanjem (5.33) u (5.32) rešenje determinante se dobija kao

$$-(\lambda_2^2 - 4\lambda_1) \sin \delta_1 \sin \delta_2 = 0, \quad (5.34)$$

iz čega se vidi da se dobijaju tri moguća rešenja te jednačine i to su:

$$\begin{aligned} (1) & \rightarrow \lambda_2^2 - 4\lambda_1 = 0 \rightarrow \lambda_2^2 = 4\lambda_1 \rightarrow \delta_1 = \delta_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{2}}, \\ (2) & \rightarrow \sin \delta_1 = 0 \rightarrow \delta_1 = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ (3) & \rightarrow \sin \delta_2 = 0 \rightarrow \delta_2 = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.35)$$

Iz (5.35)₂ sledi

$$n^2 \pi^2 = \frac{\lambda_2 - \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1}}{2}, \quad (5.36)$$

a iz (5.35)₃ sledi

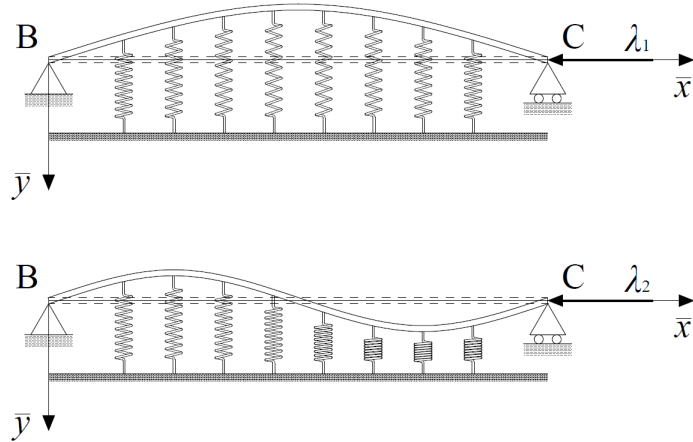
$$n^2 \pi^2 = \frac{\lambda_2 + \sqrt{\lambda_2^2 - 4\lambda_1}}{2}. \quad (5.37)$$

Rešavanjem (5.36) i (5.37) dolazi se do relacije između sopstvenih vrednosti $(\lambda_2)_n$, za fiksirano λ_1 (videti [8], Poglavlje 4.5):

$$(\lambda_2)_n = \frac{n^4 \pi^4 + \lambda_1}{n^2 \pi^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.38)$$

Zatim, izjednačavanjem $(\lambda_2)_1 = (\lambda_2)_2$, dobija se $\lambda_1 = 4\pi^4$, a iz toga sledi da je $(\lambda_2)_1 = (\lambda_2)_2 = 5\pi^2$. Naime, javlja se situacija da za jednu sopstvenu vrednost (t.j. kritičnu tačku)

$$\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2) = (4\pi^4, 5\pi^2), \quad (5.39)$$



Slika 8: Oblici deformacije štapa

postoje dva međusobno ortogonalna sopstvena vektora. Naime, vektori

$$\eta_1(t) = \sin \pi t, \quad \eta_2(t) = \sin 2\pi t, \quad t \in [0, 1], \quad (5.40)$$

čine ortonormiranu bazu za $\mathcal{N}(\mathbb{L}(\bar{\lambda}))$. Ova rešenja linearizovanog problema pokazuju da su moguća dva različita oblika deformacije (moda) štapa za iste vrednosti parametara λ_1 i λ_2 (Slika 8).

Prethodno opisana situacija predstavlja bimodalni slučaj. Kako je $(\lambda_2)_n \leq (\lambda_2)_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, kritična tačka (5.39) je najniža sopstvena vrednost za koju se javlja bimodalni slučaj.

U narednom poglavlju odrediće se oblici bifurkacija rešenja nelinearnog problema (5.13),(5.14) u kritičnoj tački (5.39).

6 Bifurkaciona analiza

6.1 Linearizovani operator

Kako smo rekli u Poglavlju 2 o metodu bliske ravnotežne konfiguracije, one vrednosti pri kojima dolazi do bifurkacije (granjanja) rešenja, odgovaraju kritičnim vrednostima parametara pri kojima sistem gubi stabilnost. Problem određivanja dijagrama odziva za nelinearne jednačine je generalno veoma složen matematički problem. Iz tog razloga, veoma je bitno naći vezu i za svaki konkretan slučaj ispitati zavisnost između linearizovanog i nelinearnog problema. Ispitivanjem ove zavisnosti dobija se i odgovor na pitanje koji oblik bifurkacije će se javiti. Jedan od metoda za takvu analizu je metod baziran na postupku redukcije Ljapunov-Šmita. Ovim postupkom se analiza broja rešenja sistema diferencijalnih jednačina svodi na analizu broja rešenja sistema algebarskih jednačina. Treba napomenuti i da su rezultati koje ovaj metod daje lokalni, tj. važe isključivo u okolini tačke bifurkacije.

Prvo će se ispitati odnos između nelinearnog i linearizovanog problema koji su dati sa (5.15), (5.14) i (5.20), (5.19) respektivno. Formulisaće se sledeća propozicija:

Propozicija 1. Fredholmov indeks operatora $B(\bar{\lambda})$, za $\bar{\lambda}$ dato u (5.39) čije delovanje je dato sa (5.20), je jednak nula.

Dokaz. Fredholmov indeks operatora $B(\bar{\lambda})$ je definisan kao

$$i(B(\bar{\lambda})) = \dim \mathcal{N}(B(\bar{\lambda})) - \text{codim } \mathcal{R}(B(\bar{\lambda})) \quad (6.1)$$

gde $\mathcal{N}(B(\bar{\lambda}))$ i $\mathcal{R}(B(\bar{\lambda}))$ predstavljaju nul prostor i prostor slika od $B(\bar{\lambda})$, respektivno. U prethodnom poglavlju je pokazano da je $\bar{\lambda}$ dato u (5.39) kritična tačka za $\mathbb{L}(\bar{\lambda})$ dato sa (5.24) sa odgovarajuća dva ortogonalna svojstvena vektora data sa (5.40), koji razapinju $\mathcal{N}(\mathbb{L}(\bar{\lambda}))$. Sada, koristeći (5.20), gde η razapinje (5.40), lako se dobija $\mathcal{N}(B(\lambda))$ kao potprostor od $(C^1([0, 1]))^4$.

Iz (5.40), dobija se

$$\eta = a_1 \sin \pi t + a_2 \sin 2\pi t, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad (6.2)$$

i kako je $\dot{\eta} = \theta$ iz (5.20), dobija se

$$\theta = a_1\pi \cos \pi t + a_2 2\pi \cos 2\pi t. \quad (6.3)$$

Kako je $\dot{\theta} = m$ iz (5.20), na osnovu prethodne jednačine (6.3) se dobija

$$m = -a_1\pi^2 \sin \pi t - a_2 4\pi^2 \sin 2\pi t. \quad (6.4)$$

Na kraju, na osnovu $\dot{m} = -v - \lambda_2\theta$ iz (5.20) i $\lambda_2 = 5\pi^2$ na osnovu (5.39), dobija se

$$\begin{aligned} v &= -\dot{m} - \lambda_2\theta = \\ &= a_1\pi^3 \cos \pi t + a_2 8\pi^3 \cos 2\pi t - \lambda_2(a_1\pi \cos \pi t + a_2 2\pi \cos 2\pi t) = \\ &= a_1\pi(\pi^2 - \lambda_2) \cos \pi t + a_2 2\pi(4\pi^2 - \lambda_2) \cos 2\pi t \\ &= -a_1 4\pi^3 \cos \pi t - a_2 2\pi^3 \cos 2\pi t. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Iz ovoga sledi da je potprostor $\mathcal{N}(B(\bar{\lambda}))$ razapet sa dva međusobno ortogonalna vektora:

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{bmatrix} -4\pi^3 \cos \pi t \\ -\pi^2 \sin \pi t \\ \sin \pi t \\ \pi \cos \pi t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2(t) = \begin{bmatrix} -2\pi^3 \cos 2\pi t \\ -4\pi^2 \sin 2\pi t \\ \sin 2\pi t \\ 2\pi \cos 2\pi t \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

što ujedno dokazuje da je $\dim \mathcal{N}(B(\bar{\lambda})) = 2$. Sa ciljem da se odredi $\text{codim } \mathcal{R}(B(\bar{\lambda}))$, koristiće se Fredholmova alternativa. Naime, kako su sve neophodne pretpostavke za $B(\bar{\lambda})$ zadovoljene, važi $\mathcal{R}(B(\bar{\lambda}))^\perp = \mathcal{N}(B^*(\bar{\lambda}))$, gde je sa $B^*(\bar{\lambda})$ označen formalni adjungovani operator $B(\bar{\lambda})$, definisan sa:

$$\langle B(\bar{\lambda})\mathbf{y}, \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{y}, B^*(\bar{\lambda})\mathbf{q} \rangle. \quad (6.7)$$

Ovde je za $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3, y_4]$ i $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ iz $(L^2([0, 1]))^4$, definisan skalarni proizvod u $(L^2([0, 1]))^4$ kao

$$\langle \mathbf{y}, \mathbf{q} \rangle = \sum_{i=1}^4 \langle y_i, q_i \rangle_{L^2([0,1])}, \quad (6.8)$$

gde $\langle y_i, q_i \rangle_{L^2([0,1])}$ označava skalarni proizvod od y_i, q_i u $L^2([0, 1])$. Napominje se da pošto je $B(\bar{\lambda})$ definisano na $(C^1([0, 1]))^4$ koji je gust u $(L^2([0, 1]))^4$, važi da je $B^*(\bar{\lambda})$ dobro definisano u smislu jedinstvenog proširenja na $(L^2([0, 1]))^4$ (videti [10]). Za proizvoljno $\mathbf{y} = [v, m, \eta, \theta] \in (C^1([0, 1]))^4$ i $\mathbf{q} = [q_v, q_m, q_\eta, q_\theta] \in (C^1([0, 1]))^4$, dobija se

$$\begin{aligned} \langle B(\bar{\lambda})\mathbf{y}, \mathbf{q} \rangle &= \int_0^1 [(\dot{v} - \lambda_1 \eta) q_v + (\dot{m} + v + \lambda_2 \theta) q_m \\ &\quad + (\dot{\eta} - \theta) q_\eta + (\dot{\theta} - m) q_\theta] dt. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Parcijalnom integracijom iz jednačine (6.9) se dobija

$$\begin{aligned} \langle B(\bar{\lambda})\mathbf{y}, \mathbf{q} \rangle &= \int_0^1 (-v \dot{q}_v - \lambda_1 \eta q_v - m \dot{q}_m + v q_m + \lambda_2 \theta q_m - \eta \dot{q}_\eta + \\ &\quad \theta q_\eta - \theta \dot{q}_\theta - m q_\theta) dt + v q_v \Big|_0^1 + m q_m \Big|_0^1 \\ &\quad + \eta q_\eta \Big|_0^1 + \theta q_\theta \Big|_0^1 \\ &= \int_0^1 [v (-\dot{q}_v + q_m) + m (-\dot{q}_m - q_\theta) + \\ &\quad \eta (-\dot{q}_\eta - \lambda_1 q_v) + \theta (-\dot{q}_\theta + \lambda_2 q_m - q_\eta)] dt + \\ &\quad + v q_v \Big|_0^1 + m q_m \Big|_0^1 + \eta q_\eta \Big|_0^1 + \theta q_\theta \Big|_0^1. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Prema ovome, elementi $\mathcal{N}(B(\bar{\lambda}))$ su rešenja sistema:

$$\begin{aligned} \dot{q}_v &= q_m, \\ \dot{q}_m &= -q_\theta, \\ \dot{q}_\eta &= -\lambda_1 q_v, \\ \dot{q}_\theta &= \lambda_2 q_m - q_\eta, \end{aligned} \quad (6.11)$$

sa graničnim uslovima:

$$q_v(0) = q_v(1) = 0, \quad q_\theta(0) = q_\theta(1) = 0. \quad (6.12)$$

Problem (6.11), (6.12) može da se transformiše u problem (5.19), (5.20), koristeći identifikaciju:

$$\begin{aligned} q_\theta &= m, \\ q_m &= -\theta, \\ q_\eta &= v, \\ q_v &= -\eta. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Iz ove jednačine (6.13), i koristeći jednačine (6.2), (6.3), (6.4) i (6.5) dobija se da je $\mathcal{N}(B^*(\bar{\lambda}))$ razapet sa sledeća dva međusobno ortogonalna vektora:

$$\mathbf{q}_1(t) = \begin{bmatrix} -\sin \pi t \\ -\pi \cos \pi t \\ -4\pi^3 \cos \pi t \\ -\pi^2 \sin \pi t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2(t) = \begin{bmatrix} -\sin 2\pi t \\ -2\pi \cos 2\pi t \\ -2\pi^3 \cos 2\pi t \\ -4\pi^2 \sin 2\pi t \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Koristeći Fredholmovu alternativu, dobija se da je $\dim \mathcal{N}(B^*(\bar{\lambda})) = \text{codim } \mathcal{R}(B(\bar{\lambda})) = 2$, tako da je Fredholmov index za $B(\bar{\lambda})$, za $\bar{\lambda}$ dato sa (5.39), jednak nula, čime je dokaz završen.

6.2 Primena postupka redukcije Ljapunov-Šmita

Pošto je Propozicija 1 dokazana, ona nam potvrđuje da Ljapunov-Šmitova redukcija može biti primenjena za nelinearni problem dat sa (5.13). U smislu Propozicije 2 iz Poglavlja 4 je, zbog pojednostavlji- vanja proračuna, isključeno (5.13)₄ što neće uticati niti promeniti aktuelnu bifurkacionu jednačinu. Na taj način dalja bifurkaciona analiza se nastavlja za jednačinu (5.21) u bifurkacionim tačkama $\bar{\lambda}$, datim sa

(5.39). Zamenom $\bar{\lambda}$ u (5.15) sa $\bar{\lambda} + \Delta\lambda$, za neko $\Delta\lambda = (\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, gde su $|\Delta\lambda_1|$ i $|\Delta\lambda_2|$ mali, dobija se

$$M(\mathbf{y}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda) = \mathbf{0}. \quad (6.15)$$

Kako je

$$M(\mathbf{y}, \bar{\lambda}) = \begin{bmatrix} \dot{v} - \bar{\lambda}_1 \eta \\ \dot{m} + v \cos \theta + \bar{\lambda}_2 \sin \theta \\ \dot{\eta} - \sin \theta \\ \dot{\theta} - m \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

jednačina (6.15) postaje

$$M(\mathbf{y}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda) = \begin{bmatrix} \dot{v} - \bar{\lambda}_1 \eta - \Delta\lambda_1 \eta \\ \dot{m} + v \cos \theta + \bar{\lambda}_2 \sin \theta + \Delta\lambda_2 \sin \theta \\ \dot{\eta} - \sin \theta \\ \dot{\theta} - m \end{bmatrix}. \quad (6.17)$$

Jednačina (6.15) se ekvivalentno može napisati kao

$$M(\mathbf{y}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda) = B(\bar{\lambda} + \Delta\lambda) \mathbf{y} + \mathcal{N}(\mathbf{y}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda) = \mathbf{0} \quad (6.18)$$

gde je

$$B(\bar{\lambda} + \Delta\lambda) = \begin{bmatrix} \dot{v} - \bar{\lambda}_1 \eta \\ \dot{m} + v + \bar{\lambda}_2 \theta \\ \dot{\eta} - \theta \\ \dot{\theta} - m \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

kao i

$$\mathcal{N}(\mathbf{y}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda) = \begin{bmatrix} -\Delta\lambda_1 \eta \\ -v - \bar{\lambda}_2 \theta + v \cos \theta + \bar{\lambda}_2 \sin \theta + \Delta\lambda_2 \sin \theta \\ \theta - \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.20)$$

Za Banahov potprostor $X = \{ \mathbf{y} = ([v, m, \eta, \theta]) \in (C^1([0, 1]))^4 \mid \eta(0) = \eta(1) = m(0) = m(1) = 0 \}$ od potprostora $(C^1([0, 1]))^4$, i $Y = (C^1([0, 1]))^4$, i kako je $B(\bar{\lambda})$ Fredholmov operator, sledi da postoje zatvoreni potprostori M i N od X i Y , respektivno, takvi da je:

$$\begin{aligned} X &= \mathcal{N}(B(\bar{\lambda})) \oplus M, \\ Y &= \mathcal{R}(B(\bar{\lambda})) \oplus N. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Kako je na osnovu Propozicije 1, Fredholmov indeks od $B(\bar{\lambda})$ nula, sledi $M = \mathcal{N}^\perp(B(\bar{\lambda}))$ i $N = \mathcal{R}^\perp(B(\bar{\lambda}))$. Kako (6.21)₁ važi, dobija se jedinstvena reprezentacija $\mathbf{y} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$, gde $\mathbf{v} \in \mathcal{N}(B(\bar{\lambda}))$, a $\mathbf{w} \in M$. Uvodeći projekcije $E : Y \rightarrow \mathcal{R}(B(\bar{\lambda}))$ i $(I - E) : Y \rightarrow \mathcal{R}^\perp(B(\bar{\lambda}))$, koje projektuju na $\mathcal{R}(B(\bar{\lambda}))$ i $\mathcal{R}^\perp(B(\bar{\lambda}))$ respektivno, jednačina (6.18) je ekvivalentna sa sledećim parom jednačina:

$$\begin{aligned} B(\bar{\lambda})\mathbf{w} - E\mathcal{N}(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \bar{\lambda}, \Delta\lambda) &= \mathbf{0}, \\ (I - E)\mathcal{N}(\mathbf{v} + \mathbf{w}, \bar{\lambda}, \Delta\lambda) &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

gde je korišćena činjenica da je

$$B(\bar{\lambda})\mathbf{y} = B(\bar{\lambda})(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = B(\bar{\lambda})\mathbf{w} \in \mathcal{R}(B(\bar{\lambda})). \quad (6.23)$$

Frešev izvod desne strane jednačine (6.22)₁, u odnosu na \mathbf{w} , u tački $(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ i $\Delta\lambda = (0, 0)$, je jednak $D_{\mathbf{w}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = EB(\bar{\lambda}) = B(\bar{\lambda})|_M$, gde $B(\bar{\lambda})|_M$ označava ograničenje $B(\bar{\lambda})$ na M . Dalje se pristupa analizi kao u Poglavlju 4. Naime kako je $B(\bar{\lambda})|_M : M \rightarrow \mathcal{R}(B(\bar{\lambda}))$ bijektivan i $\mathcal{R}(B(\bar{\lambda}))$ je zatvoren potprostor Banahovog prostora Y (pa samim tim takođe Banahov), koristeći teoremu otvorenog preslikavanja, dobija se da postoji ograničen $(B(\bar{\lambda})|_M)^{-1}$ i samim tim ograničen $(D_{\mathbf{w}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}))^{-1}$. Ovo nam omogućava da se može primeniti teorema o implicitnoj funkciji, da bi se razrešilo (6.22)₁ pod \mathbf{w} , tj. da se izrazi \mathbf{w} kao funkcija od \mathbf{v} i $\Delta\lambda$. Naime postoje okoline V i W od $\mathbf{0} \in X$ (koje odgovaraju \mathbf{v} i \mathbf{w} , respektivno) i funkcija $\mathcal{Y} : V \rightarrow W$, takva da je

$$\mathbf{w} = \mathcal{Y}(\mathbf{v}, \bar{\lambda}, \Delta\lambda), \quad \mathbf{v} \in V, \quad (6.24)$$

koja je Freše-diferencijabilna i koja zadovoljava $D_{\mathbf{v}}(\mathbf{0}, \Delta\lambda) = \mathbf{0}$. Zbog toga je $\mathcal{Y}(\mathbf{v}, \Delta\lambda) = \mathcal{O}(\|\mathbf{v}\|^2)$, gde je $\|\cdot\|$ norma dvodimenzionjskog prostora $\mathcal{N}(B(\bar{\lambda}))$. Ubacivanjem (6.24) u (6.22)₂, dobija se

$$(I - E)\mathcal{N}(\mathbf{v} + \mathcal{Y}(\mathbf{v}, \bar{\lambda}, \Delta\lambda), \bar{\lambda}, \Delta\lambda) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \in \mathcal{N}(B(\bar{\lambda})). \quad (6.25)$$

Propozicija 1 dokazuje da je $\text{codim } \mathcal{R}(B(\bar{\lambda})) = 2$. Pošto je $i(B(\bar{\lambda})) = 0$, koristeći Fredholmovu alternativu, tj. relaciju $\mathcal{R}(B(\bar{\lambda}))^\perp = \mathcal{N}(B^*(\bar{\lambda}))$, dobija se da je $\mathcal{R}(B(\bar{\lambda}))^\perp$ razapet sa dva međusobno ortogonalna vektora \mathbf{q}_1 i \mathbf{q}_2 koji su dati sa (6.14), tako da je (6.25) ekvivalentno sa:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_1, \mathcal{N}(\mathbf{v} + \mathcal{Y}(\mathbf{v}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda), \bar{\lambda} + \Delta\lambda) \rangle_{L^2([0,1])} &= 0, \\ \langle \mathbf{q}_2, \mathcal{N}(\mathbf{v} + \mathcal{Y}(\mathbf{v}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda), \bar{\lambda} + \Delta\lambda) \rangle_{L^2([0,1])} &= 0, \end{aligned} \quad (6.26)$$

gde je $C([0, T])$ gusto potopljen u $L^2([0, 1])$.

Korišćenjem Tejlrorovog reda za funkcije sin i cos:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (6.27)$$

jednakost (6.20) se može napisati kao

$$\mathcal{N}(\mathbf{y}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda) = \begin{bmatrix} -\Delta\lambda_1\eta \\ -v(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2} + \dots) - \bar{\lambda}_2(\theta - \theta + \frac{\theta^3}{6} + \dots) + \Delta\lambda_2(\theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots) \\ \theta - \theta + \frac{\theta^3}{6} + \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

i sređivanjem se na kraju dobija

$$\mathcal{N}(\mathbf{y}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda) = \begin{bmatrix} -\Delta\lambda_1\eta \\ -v\frac{\theta^2}{2} - \bar{\lambda}_2\frac{\theta^3}{6} + \Delta\lambda_2\theta - \Delta\lambda_2\frac{\theta^3}{6} + \mathcal{O}(\theta^4) \\ \frac{\theta^3}{6} + \mathcal{O}(\theta^4) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Kako je $\mathbf{v} \in \mathcal{N}(B(\bar{\lambda}))$, može se napisati $\mathbf{v} = a_1\mathbf{y}_1 + a_2\mathbf{y}_2$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, gde su $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ definisane sa (6.6). Uvrštavanjem \mathbf{v} u (6.26) dobija se sistem bifurkacionih jednačina:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q}_1 \mathcal{N}(a_1\mathbf{y}_1 + a_2\mathbf{y}_2 + \mathcal{Y}(\mathbf{v}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda), \bar{\lambda} + \Delta\lambda) \rangle_{L^2([0,1])} &= 0; \\ \langle \mathbf{q}_2 \mathcal{N}(a_1\mathbf{y}_1 + a_2\mathbf{y}_2 + \mathcal{Y}(\mathbf{v}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda), \bar{\lambda} + \Delta\lambda) \rangle_{L^2([0,1])} &= 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Iz jednačina (6.18) i (6.20) sledi da važi antisimetrija

$$\begin{aligned} M(-\mathbf{y}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda) &= \begin{bmatrix} -\dot{v} + \bar{\lambda}_1\eta + \Delta\lambda_1\eta \\ -\dot{m} - v \cos \theta - \bar{\lambda}_2 \sin \theta - \Delta\lambda_2 \sin \theta \\ -\dot{\eta} + \sin \theta \\ -\dot{\theta} + m \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \dot{v} - \bar{\lambda}_1\eta - \Delta\lambda_1\eta \\ \dot{m} + v \cos \theta + \bar{\lambda}_2 \sin \theta + \Delta\lambda_2 \sin \theta \\ \dot{\eta} - \sin \theta \\ \dot{\theta} - m \end{bmatrix} \\ &= -M(\mathbf{y}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda). \end{aligned} \quad (6.31)$$

Na osnovu ove antisimetrije a prema [9], strana 263, važi sledeće

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\mathbf{v}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda) &= \mathcal{O}(a_1^3, a_2^3, a_1^2 a_2, a_2^2 a_1, a_1 a_2 \Delta\lambda_1, a_1 a_2 \Delta\lambda_2) \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta\lambda_1^2, \Delta\lambda_2^2, \Delta\lambda_1 \Delta\lambda_2), \end{aligned} \quad (6.32)$$

kada $a_1, a_2, \Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2 \rightarrow 0$. Naime, u ovom slučaju, uvrštavanjem (6.6) u (6.29) dobija se

$$\mathcal{N}(\mathbf{y}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}, \quad (6.33)$$

gde su:

$$\begin{aligned} a_1 &= -\Delta\lambda_1 \left((a_1 \sin \pi t + a_2 \sin 2\pi t) + \mathcal{O}(a_1^2 + a_2^2)^{\frac{3}{2}} \right), \\ a_2 &= \frac{1}{2} \left((a_1 4\pi^3 \cos \pi t + a_2 2\pi^3 \cos 2\pi t) + \mathcal{O}(a_1^2 + a_2^2)^{\frac{3}{2}} \right) \times \\ &\quad \left((a_1 \pi \cos \pi t + a_2 2\pi \cos 2\pi t) + \mathcal{O}(a_1^2 + a_2^2)^{\frac{3}{2}} \right)^2 - \\ &\quad \frac{5}{6} \pi^2 \left((a_1 \pi \cos \pi t + a_2 2\pi \cos 2\pi t) + \mathcal{O}(a_1^2 + a_2^2)^{\frac{3}{2}} \right)^3 + \\ &\quad \Delta\lambda_2 \left((a_1 \pi \cos \pi t + a_2 2\pi \cos 2\pi t) + \mathcal{O}(a_1^2 + a_2^2)^{\frac{3}{2}} \right) - \\ &\quad \frac{\Delta\lambda_2}{6} \left((a_1 \pi \cos \pi t + a_2 2\pi \cos 2\pi t) + \mathcal{O}(a_1^2 + a_2^2)^{\frac{3}{2}} \right)^3, \\ a_3 &= \frac{1}{6} \left((a_1 \pi \cos \pi t + a_2 2\pi \cos 2\pi t) + \mathcal{O}(a_1^2 + a_2^2)^{\frac{3}{2}} \right)^3, \\ a_4 &= 0, \end{aligned} \quad (6.34)$$

i nakon sređivanja dobija se

$$\mathcal{N}(\mathbf{y}, \bar{\lambda} + \Delta\lambda) = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

gde su:

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\Delta\lambda_1 a_1 \sin \pi t - \Delta\lambda_1 a_2 \sin 2\pi t + \mathcal{O}(a_1^2 + a_2^2)^{\frac{3}{2}}, \\
b_2 &= \frac{7}{6} a_1^3 \pi^5 \cos^3 \pi t + 4a_1^2 a_2 \pi^5 \cos^2 \pi t \cos 2\pi t + \\
&\quad 2a_1 a_2^2 \pi^5 \cos \pi t \cos^2 2\pi t - \frac{8}{3} a_2^3 \pi^5 \cos^3 2\pi t + \Delta\lambda_2 a_1 \pi \cos \pi t - \\
&\quad \Delta\lambda_2 a_2 2\pi \sin 2\pi t + \mathcal{O}(a_1^2 + a_2^2)^{\frac{3}{2}}, \\
b_3 &= \frac{1}{6} a_1^3 \pi^3 \cos^3 \pi t + a_1^2 a_2 \pi^3 \cos^2 \pi t \cos 2\pi t + \\
&\quad 2a_1 a_2^2 \pi^3 \cos \pi t \cos^2 2\pi t + \frac{4}{3} a_2^3 \pi^3 \cos^3 2\pi t + \mathcal{O}(a_1^2 + a_2^2)^{\frac{3}{2}}, \\
b_4 &= 0.
\end{aligned} \tag{6.36}$$

Smenom (6.14) u (6.35) a prema (6.30) dobijaju se dve bifurkacione jednačine:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 [-\sin \pi t (-\Delta\lambda_1 a_1 \sin \pi t - \Delta\lambda_1 a_2 \sin 2\pi t) - \\
&\quad \pi \cos \pi t (\frac{7}{6} a_1^3 \pi^5 \cos^3 \pi t + 4a_1^2 a_2 \pi^5 \cos^2 \pi t \cos 2\pi t + \\
&\quad 2a_1 a_2^2 \pi^5 \cos \pi t \cos^2 2\pi t - \frac{8}{3} a_2^3 \pi^5 \cos^3 2\pi t + \Delta\lambda_2 a_1 \pi \cos \pi t + \\
&\quad \Delta\lambda_2 a_2 2\pi \cos 2\pi t) - 4\pi^3 \cos \pi t (\frac{1}{6} a_1^3 \pi^3 \cos^3 \pi t + \\
&\quad a_1^2 a_2 \pi^3 \cos^2 \pi t \cos 2\pi t + 2a_1 a_2^2 \pi^3 \cos \pi t \cos^2 2\pi t + \\
&\quad \frac{4}{3} a_2^3 \pi^3 \cos^3 2\pi t)] dt = 0,
\end{aligned} \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 [-\sin 2\pi t(-\Delta\lambda_1 a_1 \sin \pi t - \Delta\lambda_1 a_2 \sin 2\pi t) \\
& -2\pi \cos 2\pi t(\frac{7}{6}a_1^3 \pi^5 \cos^3 \pi t + 4a_1^2 a_2 \pi^5 \cos^2 \pi t \cos 2\pi t + \\
& 2a_1 a_2^2 \pi^5 \cos \pi t \cos^2 2\pi t - \frac{8}{3}a_2^3 \pi^5 \cos^3 2\pi t + \Delta\lambda_2 a_1 \pi \cos \pi t + \\
& \Delta\lambda_2 a_2 2\pi \cos 2\pi t) - 2\pi^3 \cos 2\pi t(\frac{1}{6}a_1^3 \pi^3 \cos^3 \pi t + \\
& a_1^2 a_2 \pi^3 \cos^2 \pi t \cos 2\pi t + 2a_1 a_2^2 \pi^3 \cos \pi t \cos^2 2\pi t + \\
& \frac{4}{3}a_2^3 \pi^3 \cos^3 2\pi t)] dt = 0. \tag{6.38}
\end{aligned}$$

Sređivanjem integrala (6.37) i (6.38) na posletku se dobijaju jednačine:

$$\begin{aligned}
& c_1 a_1^3 + c_2 a_2^3 + c_3 a_1^2 a_2 + c_4 a_1 a_2^2 + c_5 \Delta\lambda_1 a_1 + \\
& c_6 \Delta\lambda_1 a_2 + c_7 \Delta\lambda_2 a_1 + c_8 \Delta\lambda_2 a_2 + h.o.t. = 0, \tag{6.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& d_1 a_1^3 + d_2 a_2^3 + d_3 a_1^2 a_2 + d_4 a_1 a_2^2 + d_5 \Delta\lambda_1 a_1 + \\
& d_6 \Delta\lambda_1 a_2 + d_7 \Delta\lambda_2 a_1 + d_8 \Delta\lambda_2 a_2 + h.o.t. = 0, \tag{6.40}
\end{aligned}$$

koje odgovaraju (6.30)₁ i (6.30)₂, respektivno, sa članovima višeg reda (h.o.t.) datim sa

$$\begin{aligned}
& h.o.t = \mathcal{O}(|\Delta\lambda_1| a_1^3, |\Delta\lambda_1| a_2^3) + \mathcal{O}(|\Delta\lambda_2| a_1^3, |\Delta\lambda_2| a_2^3) + \\
& \mathcal{O}(|\Delta\lambda_1|^2 a_1, |\Delta\lambda_1|^2 a_2) + \mathcal{O}(|\Delta\lambda_2|^2 a_1, |\Delta\lambda_2|^2 a_2) + \\
& \mathcal{O}(|\Delta\lambda_1| a_1^2 a_2, |\Delta\lambda_1| a_1 a_2^2) + \mathcal{O}(|\Delta\lambda_2| a_1^2 a_2, |\Delta\lambda_2| a_1 a_2^2) + \\
& \mathcal{O}(a_1^i a_2^j, i + j = 4), \tag{6.41}
\end{aligned}$$

i gde su $c_i, d_i, i = 1, \dots, 8$ odgovarajući integrali:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\frac{11}{6}\pi^6 \int_0^1 \cos^4 \pi t dt = -660.95, \\
c_2 &= -\frac{8}{3}\pi^6 \int_0^1 \cos \pi t \cos^3 2\pi t dt = 0, \\
c_3 &= -8\pi^6 \int_0^1 \cos^3 \pi t \cos 2\pi t dt = 0, \\
c_4 &= -10\pi^6 \int_0^1 \cos^2 \pi t \cos^2 2\pi t dt = -2400, \\
c_5 &= \int_0^1 \sin^2 \pi t dt = 0.5, \\
c_6 &= \int_0^1 \sin \pi t \sin 2\pi t dt = 0, \\
c_7 &= -\pi^2 \int_0^1 \cos^2 \pi t dt = -4.93, \\
c_8 &= -2\pi^2 \int_0^1 \cos \pi t \cos 2\pi t dt = 0, \tag{6.42}
\end{aligned}$$

kao i:

$$\begin{aligned}
d_1 &= -\frac{8}{3}\pi^6 \int_0^1 \cos^3 \pi t \cos 2\pi t dt = 0, \\
d_2 &= \frac{8}{3}\pi^6 \int_0^1 \cos^4 2\pi t dt = 961.39, \\
d_3 &= -10\pi^6 \int_0^1 \cos^2 \pi t \cos^2 2\pi t dt = -2400, \\
d_4 &= -8\pi^6 \int_0^1 \cos \pi t \cos^3 2\pi t dt = 0, \\
d_5 &= \int_0^1 \sin \pi t \sin 2\pi t dt = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_6 &= \int_0^1 \sin^2 2\pi t dt = 0.5, \\
d_7 &= -2\pi^2 \int_0^1 \cos \pi t \cos 2\pi t dt = 0, \\
d_8 &= -4\pi^2 \int_0^1 \cos^2 2\pi t dt = -19.74,
\end{aligned} \tag{6.43}$$

Kako su neki članovi nula, jednačine (6.39) i (6.40) postaju:

$$\begin{aligned}
c_1 a_1^3 + c_4 a_1 a_2^2 + c_5 \Delta \lambda_1 a_1 + c_7 \Delta \lambda_2 a_1 + h.o.t. &= 0, \\
d_2 a_2^3 + d_3 a_1^2 a_2 + d_6 \Delta \lambda_1 a_2 + d_8 \Delta \lambda_2 a_2 + h.o.t. &= 0,
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Kao što je pokazano u Dodatku (Poglavlje 10), a prema Posledici D.2, ako su uslovi (10.2) zadovoljeni za $\mu, \nu, p_1, p_2, q_1, q_2$ date u (10.11) i neke $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}$, $\alpha_2 \neq 0$, gde smo zadali pravac $\beta_1 = \alpha_1/\alpha_2$, onda su uslovi Teoreme 5.1 u [9] na strani 263 zadovoljeni za sistem (6.44). Kao posledica *h.o.t* u (6.44) može biti zanemareno a da to neće dovesti do promene broja rešenje niti njihovog ponašanja u okolini $(\Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2) = (0, 0)$. Prethodna analiza dokazuje sledeće:

Propozicija 2. Sistem bifurkacionih jednačina dat sa (6.30) za malo $a_1, a_2, \Delta \lambda_1, \Delta \lambda_2$, su kontaktno ekvivalentne sledećem sistemu jednačina:

$$\begin{aligned}
c_1 a_1^3 + c_4 a_1 a_2^2 + c_5 \Delta \lambda_1 a_1 + c_7 \Delta \lambda_2 a_1 &= 0, \\
d_2 a_2^3 + d_3 a_1^2 a_2 + d_6 \Delta \lambda_1 a_2 + d_8 \Delta \lambda_2 a_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{6.45}$$

gde su članovi višeg reda zanemareni. Takođe, vrednost koeficijenata c_i, d_i , je određena sa (6.42) i (6.43).

Neka je:

$$\begin{aligned}
C_1 &= c_1, C_2 = c_4, C_3 = c_5, C_4 = c_7, \\
D_1 &= d_2, D_2 = d_3, D_3 = d_6, D_4 = d_8,
\end{aligned} \tag{6.46}$$

tako da sistem jednačina (6.45) bude ekvivalentan sledećem sistemu:

$$\begin{aligned} a_1(C_1a_1^2 + C_2a_2^2 + C_3\Delta\lambda_1 + C_4\Delta\lambda_2) &= 0, \\ a_2(D_1a_2^2 + D_2a_1^2 + D_3\Delta\lambda_1 + D_4\Delta\lambda_2) &= 0. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Kada se zamene vrednosti za dobijene C_i, D_i u predhodne jednačine (6.47) dobije se:

$$\begin{aligned} a_1(-660.95a_1^2 - 2400a_2^2 + 0.5\Delta\lambda_1 - 4.93\Delta\lambda_2) &= 0, \\ a_2(961.39a_2^2 - 2400a_1^2 + 0.5\Delta\lambda_1 - 19.74\Delta\lambda_2) &= 0. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Može se primetiti da sistem (6.47) ima četiri slučaja za određivanje rešenja:

Prvi slučaj.

$$a_1 = a_2 = 0. \quad (6.49)$$

On odgovara trivijalnom rešenju za koji osa nosača ostaje prava.

Drugi slučaj.

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ D_1a_2^2 + D_2a_1^2 + D_3\Delta\lambda_1 + D_4\Delta\lambda_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Kako $D_1 \neq 0$, iz (6.50)₂ se dobija

$$a_2^{(1)(2)} = \pm \sqrt{\frac{-D_3\Delta\lambda_1 - D_4\Delta\lambda_2}{D_1}}, \quad (6.51)$$

i pošto iz (6.43) i (6.46) sledi da je $D_1 > 0$, što vodi do sledećeg dovoljnog uslova za postojanje bifurkacije:

$$D_3\Delta\lambda_1 + D_4\Delta\lambda_2 < 0. \quad (6.52)$$

Treći slučaj.

$$\begin{aligned} a_2 &= 0, \\ C_1 a_1^2 + C_2 a_2^2 + C_3 \Delta \lambda_1 + C_4 \Delta \lambda_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.53)$$

Kako $C_1 \neq 0$, iz (6.53)₂ se dobija

$$a_1^{(1)(2)} = \pm \sqrt{\frac{-C_3 \Delta \lambda_1 - C_4 \Delta \lambda_2}{C_1}}, \quad (6.54)$$

i pošto iz (6.42) i (6.46) sledi da je $C_1 < 0$, što vodi do sledećeg dovoljnog uslova za postojanje bifurkacije:

$$C_3 \Delta \lambda_1 + C_4 \Delta \lambda_2 > 0. \quad (6.55)$$

Četvrti slučaj.

$$\begin{aligned} C_1 a_1^2 + C_2 a_2^2 + C_3 \Delta \lambda_1 + C_4 \Delta \lambda_2 &= 0, \\ D_1 a_2^2 + D_2 a_1^2 + D_3 \Delta \lambda_1 + D_4 \Delta \lambda_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.56)$$

i pošto iz (6.42), (6.43) i (6.46) sledi da je $C_1 D_1 - C_2 D_2 < 0$, a koristeći (6.58) dobija se:

$$a_1^{(1)(2)} = \pm \sqrt{\frac{(C_2 D_3 - C_3 D_1) \Delta \lambda_1 + (C_2 D_4 - C_4 D_1) \Delta \lambda_2}{C_1 D_1 - C_2 D_2}}, \quad (6.57)$$

$$a_1^{(1)(2)} = \pm \sqrt{\frac{(C_3 D_2 - C_1 D_3) \Delta \lambda_1 + (C_4 D_2 - C_1 D_4) \Delta \lambda_2}{C_1 D_1 - C_2 D_2}}, \quad (6.58)$$

što dovodi do toga da su dovoljni sledeći uslovi za postojanje bifurkacije

$$\begin{aligned} (C_2 D_3 - C_3 D_1) \Delta \lambda_1 + (C_2 D_4 - C_4 D_1) \Delta \lambda_2 &< 0, \\ (C_3 D_2 - C_1 D_3) \Delta \lambda_1 + (C_4 D_2 - C_1 D_4) \Delta \lambda_2 &< 0. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Sada se u nejednačine dobijene iz prethodno razmatrana četiri slučaja mogu uvrstiti vrednosti dobijene za C_i, D_i . Prvi slučaj je trivijalan, a nakon uvrštavanja poznatih članova u preostala tri slučaja dobija se sledeće:

Iz (6.52) sledi:

$$0.5\Delta\lambda_1 - 19.74\Delta\lambda_2 < 0, \quad (6.60)$$

iz (6.55) sledi:

$$0.5\Delta\lambda_1 - 4.93\Delta\lambda_2 > 0, \quad (6.61)$$

dok iz (6.59) sledi:

$$\begin{aligned} -869.52\Delta\lambda_1 - 1215.15\Delta\lambda_2 &< 0, \\ -1680.70\Delta\lambda_1 + 52115.65\Delta\lambda_2 &< 0. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Da bi svi slučajevi bili zadovoljeni mora da važi sledeće:

$$31.01\Delta\lambda_2 < \Delta\lambda_1 < 39.48\Delta\lambda_2. \quad (6.63)$$

Napomena. Iz prethodne analize, sledi da je $(0, \bar{\lambda})$, $\bar{\lambda} = (4\pi^4, 5\pi^2)$ bifurkaciona tačka razmatranog nelinearnog problema, datog sa (5.13) i (5.14).

7 Verifikacija prethodne analize Energij-skim metodom

Energij-ski metod je baziran na ispitivanju osobina potencijalne energije. Prema Lagranž-Dirihleovoj teoremi: Položaj ravnoteže mehaničkog sistema na koga deluju potencijalne sile, je stabilan ako potencijalna energija sistema ima minimum u klasi virtualnih pomeranja koja zadovoljavaju geometrijska ograničenja.

Potencijalna energija elastičnog štapa se sastoji iz potencijalne energije spoljašnjih sila Π^e i potencijalne energije unutrašnjih sila Π^i , što se može napisati:

$$\Pi = \Pi^e + \Pi^i. \quad (7.1)$$

Potencijalna energija unutrašnjih sila Π^i u slučaju nestišljivog štapa iznosi:

$$\Pi^i = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{EI}{2} \int_0^L \frac{1}{\rho^2} dx = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{y''}{\sqrt{1-y'^2}} \right)^2 ds, \quad (7.2)$$

gde je M moment savijanja, EI krutost elastičnog štapa, ρ poluprečnik krivine elastične linije, a $y(x)$ kriva koja definiše elastičnu liniju.

Potencijalna energija spoljašnjih sila Π^e zavisi od pomeranja napadnih tačaka spoljašnjih sila. U ovom problemu data je sila F koja deluje u pravcu ose štapa te je njena potencijalna energija data sledećim izrazom:

$$\Pi_1^e = F\Delta, \quad (7.3)$$

gde je Δ , za nestišljiv štap

$$\begin{aligned} \Delta &= dx - \sqrt{dx^2 - dy^2} = dx - \sqrt{dx^2 \left(1 - \frac{dy^2}{dx^2} \right)} = \\ &= dx - dx\sqrt{1 - y'^2} = dx(1 - \sqrt{1 - y'^2}). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Još jedna potencijalna energija spoljašnjih sila je ona koju prave opruge i ona iznosi

$$\Pi_2^e = \frac{1}{2}ky^2. \quad (7.5)$$

Na posletku, dobija se izraz za totalnu potencijalnu energiju sistema

$$E_{pot} = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{y''}{\sqrt{1-y'^2}} \right)^2 ds + \int_0^L \frac{1}{2}ky^2 ds - \int_0^L F(1 - \sqrt{1-y'^2}) ds. \quad (7.6)$$

Prethodni izraz napisan u bezdimenzijskom obliku glasi:

$$E_{pot}(\eta, \Delta\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(\ddot{\eta}(t))^2}{1 - (\dot{\eta}(t))^2} dt + \frac{1}{2} \lambda_1 \int_0^1 (\eta(t))^2 dt - \lambda_2 \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - (\dot{\eta}(t))^2}) dt, \quad (7.7)$$

gde je $\lambda_i = \bar{\lambda}_i + \Delta\lambda_i$, gde je $\bar{\lambda}$ dato u (5.39), koji predstavlja funkcional $E_{tot, \Delta\lambda}(\cdot) : C^1([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$, parametrisan sa $\Delta\lambda \in \mathbb{R}$.

Koristiće se Ritz-ova metoda za pronalaženje stacionarne tačke totalne potencijalne energije sistema koji odgovara kompletno nelinearnom problemu datom sa (5.13) i (5.14). Za $y_i, i = 1, 2$ dato sa (6.6) (ovo formira bazu $\mathcal{N}(B(\bar{\lambda}))$ linearnog operatora $B(\bar{\lambda})$), koristi se

$$(\eta_1, \eta_2) = (\sin \pi t, \sin 2\pi t), \quad (7.8)$$

kao Ritz-ova bazna funkcija. Korišćenjem sledećih razvoja u red:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \dot{\eta}^2} &= 1 + \dot{\eta}^2 + \dot{\eta}^4 + \dots, \text{ za } |\dot{\eta}| < 1, \\ \sqrt{1 - \dot{\eta}^2} &= 1 - \frac{1}{2}\dot{\eta}^2 - \frac{1}{8}\dot{\eta}^4 + \dots, \text{ za } |\dot{\eta}| < 1, \end{aligned} \quad (7.9)$$

i ubacivanjem istih u izraz za totalnu potencijalnu energiju sistema datu izrazom (7.7) dobija se

$$E_{pot}(\eta, \Delta\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\ddot{\eta}(t))^2 (1 + (\dot{\eta}(t))^2) dt + \frac{1}{2} \lambda_1 \int_0^1 (\eta(t))^2 dt - \frac{1}{2} \lambda_2 \int_0^1 \left((\dot{\eta}(t))^2 + \frac{1}{4} (\dot{\eta}(t))^4 \right) dt + h.o.t., \quad (7.10)$$

gde je $h.o.t. = \mathcal{O}(|\eta|^5)$. Uvrštavanjem

$$\eta(t) = a_1 \sin \pi t + a_2 \sin 2\pi t, \quad a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \quad (7.11)$$

u (7.10), dobija se totalna potencijalna energija sistema kao funkcija od $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$ i $\Delta\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$, tj. $E_{tot} = E_{tot}(a_1, a_2, \Delta\lambda)$. Potrebni uslovi za $(a_1^*, a_2^*) \in \mathbb{R}^2$ da bi se dobio lokalni minimum (7.10) su:

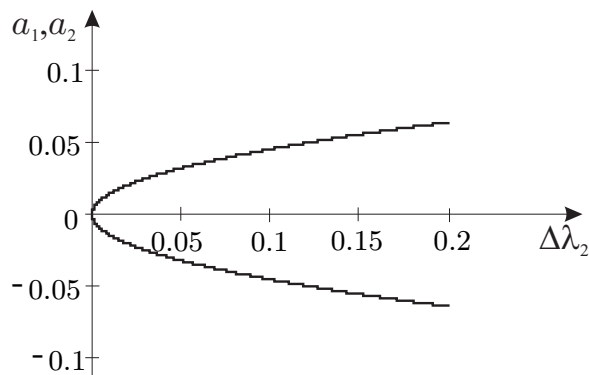
$$\frac{\partial}{\partial a_1} E_{tot}(a_1^*, a_2^*, \Delta\lambda) = 0, \quad (7.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial a_2} E_{tot}(a_1^*, a_2^*, \Delta\lambda) = 0. \quad (7.13)$$

Ovim se dobijaju iste jednačine kao što su dobijene u prethodnom poglavlju (6.39) i (6.40) sa $c_i, d_i, i = 1, \dots, 8$ datim u (6.42) i (6.43). Kao što su se i tamo zanemarili članovi višeg reda, zanemarivanjem istih ovde dobija se jednačina (6.47), tj. (6.48), koja je neophodan uslov za $(a_1^*, a_2^*) \in \mathbb{R}^2$ da bi se dobio lokalni minimum $E_{tot}(a_1, a_2, \Delta\lambda)$.

8 Numerički rezultati

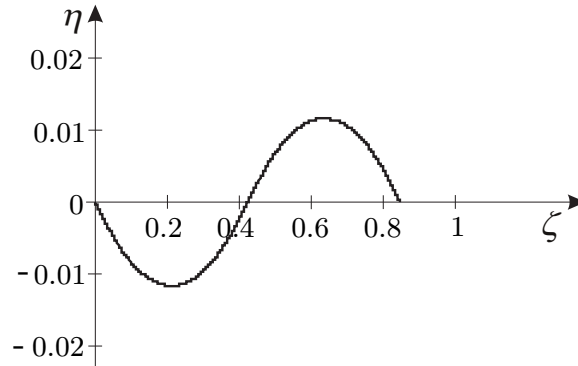
U ovom poglavlju će biti prikazani neki numerički rezultati koji ilustruju prethodno prikazanu teoriju. Prvo će biti prikazani numerički rezultati koji odgovaraju rešenju jednačina (6.48) za slučaj $\Delta\lambda_1 = 0$, $\Delta\lambda_2 > 0$. Iz uslova (6.52), (6.55) i (6.59), može se videti da za ovako izabrane $\Delta\lambda$ postoji samo drugi slučaj dat sa jednačinom (6.50), kojim se dobija poslekritični oblik u drugom modu. Na Slici 9, prikazan je bifurkacioni dijagram za pomenut slučaj, sa $\Delta\lambda_1 = 0$, $\Delta\lambda_2 \in [0, 0.2]$, na kome se može primetiti viljuškasta bifurkacija.



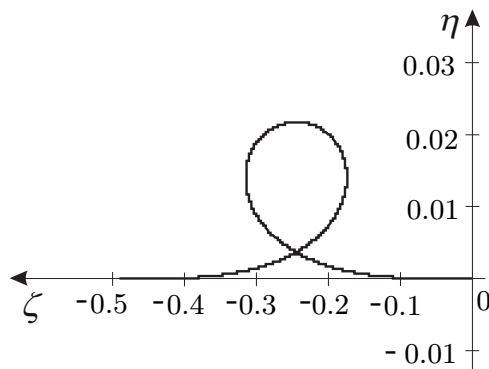
Slika 9: Bifurkacioni dijagram koji prikazuje $a_2^{(1)}$ i $a_2^{(2)}$ (y osa) koje su norme rešenja za slučaj određen (6.50) gde je izabrano $\Delta\lambda_1 = 0$, $\Delta\lambda_2 \in [0, 0.2]$

Na Slici 10 je prikazano rešenje problema (5.13) i (5.14), koje prikazuje poslekritični oblik u drugom modu, za $\Delta\lambda_1 = 0$, $\Delta\lambda_2 = 1$. Može se primetiti da za taj slučaj, $\beta_1 = \Delta\lambda_1/\Delta\lambda_2 = 0$, i pošto je $\mu = 3.63$, $p_1 = 7.54$, $p_2 = 5.2$, $q_1 = 0.0074$, $q_2 = 0.02$, uslovi (10.2) iz Dodatka (Poglavlje 10) su zadovoljeni.

Izolovano rešenje problema (5.13) i (5.14) je prikazano na Slici 11. Ono ne može biti "uhvaćeno" prethodno prikazanom analizom, ali numerička analiza sugerise da postoji za sve slučajeve $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2 \in \mathbb{R}$.



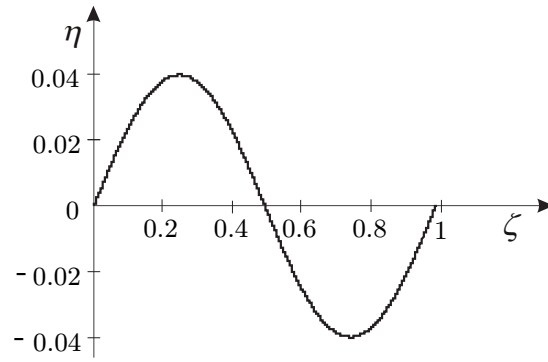
Slika 10: Dijagram za $\Delta\lambda_1 = 0$, $\Delta\lambda_2 = 1$ gde imamo oblik drugog moda



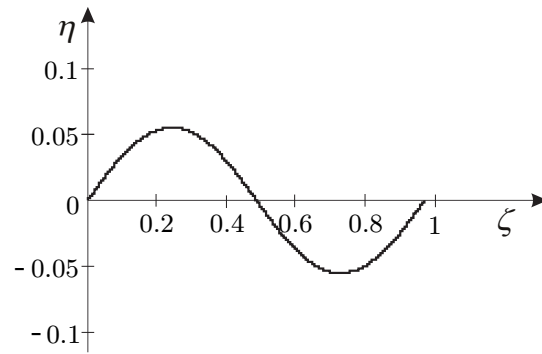
Slika 11: Izolovano rešenje za $\Delta\lambda_1 = 0$, $\Delta\lambda_2 = 1$

Dalje će se prezentovati poslekritični oblici za različite vrednosti $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

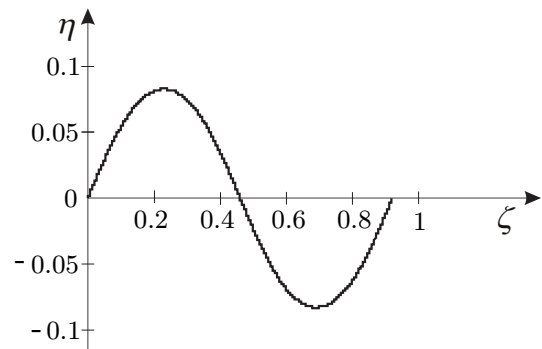
Na Slici 12 su prikazani poslekritični oblici koji odgovaraju rešenju (5.15) kada $(\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2)$ pripadaju liniji koja prolazi kroz tačke $(0, 0)$ i $(4\pi^4, 5\pi^2)$. Naime, to su vrednosti $(\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2) \in \{(0.789, 0.1), (1.578, 0.2), (3.945, 0.5)\}$. Može se videti da se duž te linije može pojaviti samo poslekritični oblik u drugom modu.



(a)



(b)



(c)

Slika 12: Dijagrami koji odgovaraju drugom modu za (a) $\Delta\lambda_1 = 0.789$ i $\Delta\lambda_2 = 0.1$, (b) $\Delta\lambda_1 = 1.578$ i $\Delta\lambda_2 = 0.2$, (c) $\Delta\lambda_1 = 3.945$ i $\Delta\lambda_2 = 0.5$

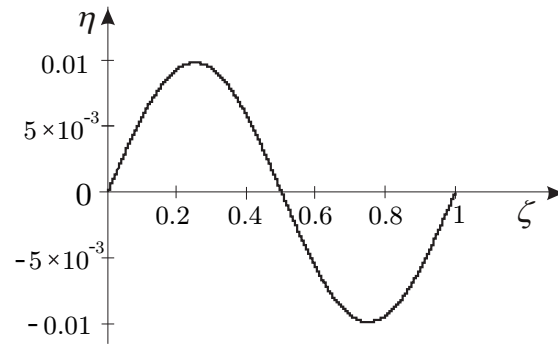
Napominje se da za pomenutu liniju je pravac $\beta_1 = \Delta\lambda_1/\Delta\lambda_2 = 7.89$ čime su uslovi (10.2) iz Dodatka (Poglavlje 10) zadovoljeni.

Na Slikama 13, 14 i 15 su prikazani poslekritični oblici koji odgovaraju rešenju (5.15) kada $(\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2)$ pripadaju liniji koja prolazi kroz tačku $(0, 0)$ sa koeficijentom direkcije jednakim 33.33. Naime, to su $(\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2) \in \{(1.0, 0.03), (2.0, 0.06), (5.0, 0.15)\}$. Duž te linije, sva tri, prvi, drugi i kombinacija prvog i drugom moda postoje. Primećuje se da je za pomenutu liniju pravac $\beta_1 = \Delta\lambda_1/\Delta\lambda_2 = 33.33$ čime su uslovi (10.2) iz Dodatka (Poglavlje 10) zadovoljeni. Na Slici 13 prikazan je dijagram za slučaj $\Delta\lambda_1 = 1.0, \Delta\lambda_2 = 0.03$, gde je pod (a) prikazan oblik drugog moda i $\zeta(1) = 0.99904858324$. Zatim pod (b) je kombinacija prvog i drugog moda a $\zeta(1) = 0.99856347172$. Poslednji dijagram (c) ima oblik prvog moda i $\zeta(1) = 0.9986899581$.

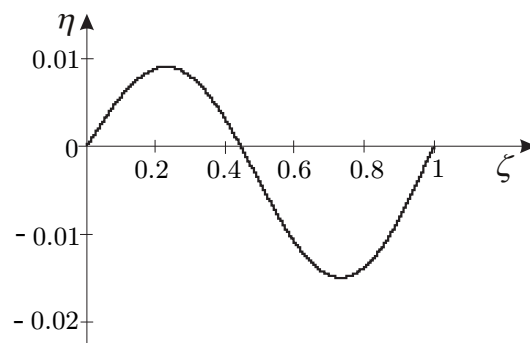
Dijagram prikazan na Slici 14 je za slučaj $\Delta\lambda_1 = 2.0, \Delta\lambda_2 = 0.06$, gde je pod (a) prikazan oblik drugog moda i $\zeta(1) = 0.9980868353$. Pod (b) je kombinacija prvog i drugog moda a $\zeta(1) = 0.9971353794$, dok pod (c) ima oblik prvog moda i $\zeta(1) = 0.99738755519$.

Dijagram prikazan na Slici 15 je za slučaj $\Delta\lambda_1 = 5.0, \Delta\lambda_2 = 0.15$, gde je pod (a) prikazan oblik drugog moda i $\zeta(1) = 0.99513875653$. Pod (b) je kombinacija prvog i drugog moda a $\zeta(1) = 0.99290091102$, dok pod (c) ima oblik prvog moda i $\zeta(1) = 0.99352559364$.

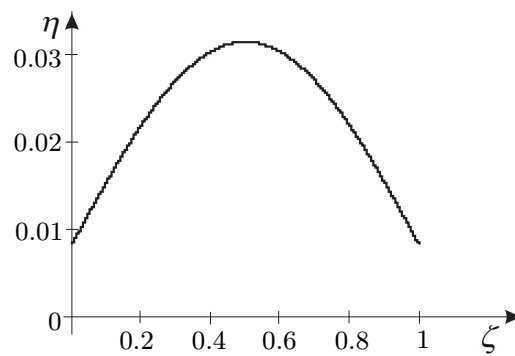
Tretiran je slučaj $\Delta\lambda_1 = 2.0, \Delta\lambda_2 = 0.06$, za koji su uslovi (6.52), (6.55) i (6.59) zadovoljeni, tako da postoje tri poslekritična rešenja, tj. oblika moda, i za sva tri moguća slučaja korišćen je princip minimuma potencijalne energije u želji da se odredi poslekritični oblik štapa koji će se stvarno dogoditi. Potencijalna energija koja odgovara nelinearnom problemu datom jednačinama (5.13) i (5.14) je data jednačinom (7.7). Sva tri rešenja bifurkiraju od trivijalnog. Prvo rešenje, prikazano na Slici 14 (a) ima osobinu $\eta(t) = -\eta(1-t)$. Drugo rešenje, prikazano na Slici 14 (b) ima osobinu $\eta(t) = \eta(1-t)$ dok treće rešenje prikazano na Slici 14 (c) nema osobine simetrije pošto je forme kao (7.11). Odgovarajuće energije za tri rešenja prikazana na Slici 14 su $E_{pot}^a = 0.0947$, $E_{pot}^c = 0.1293$, $E_{pot}^b = 0.1419$. Može se zaključiti, da poskriticni oblik koji odgovara drugom modu prikazanom na Slici 14 (a), će se dogoditi u realnoj situaciji s obzirom da ima najmanju energiju.



(a)

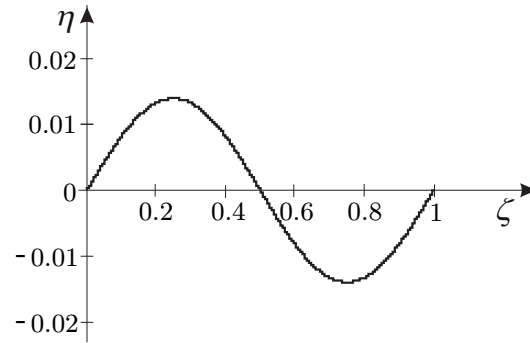


(b)

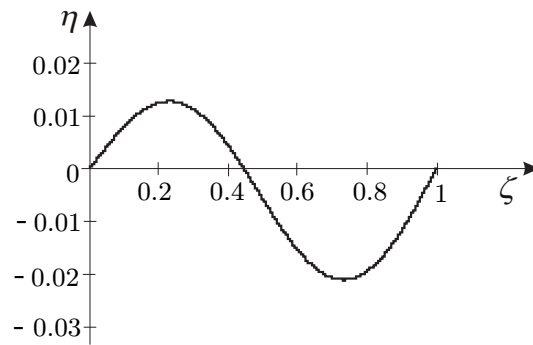


(c)

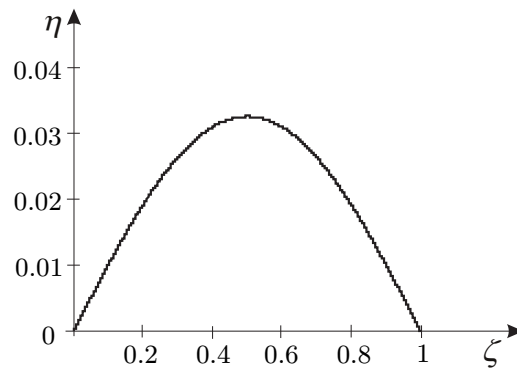
Slika 13: Dijagrami za $\Delta\lambda_1 = 1.0$ i $\Delta\lambda_2 = 0.03$ gde imamo (a) drugi mod, (b) kombinaciju prvog i drugog moda, (c) prvi mod



(a)

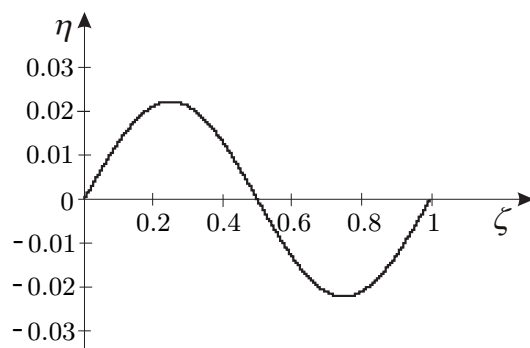


(b)

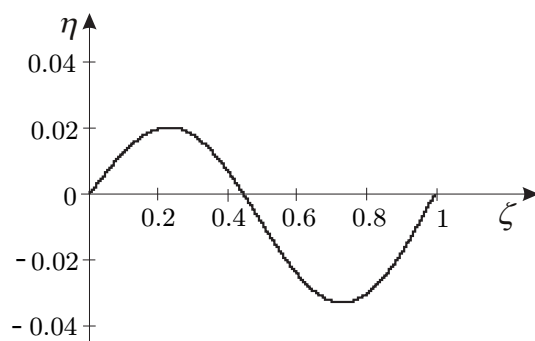


(c)

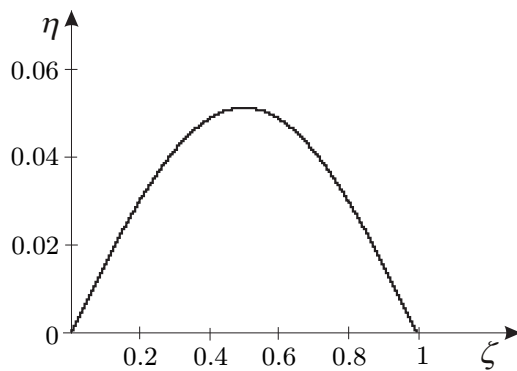
Slika 14: Dijagrami za $\Delta\lambda_1 = 2.0$ i $\Delta\lambda_2 = 0.06$ gde imamo (a) drugi mod, (b) kombinaciju prvog i drugog moda, (c) prvi mod



(a)



(b)



(c)

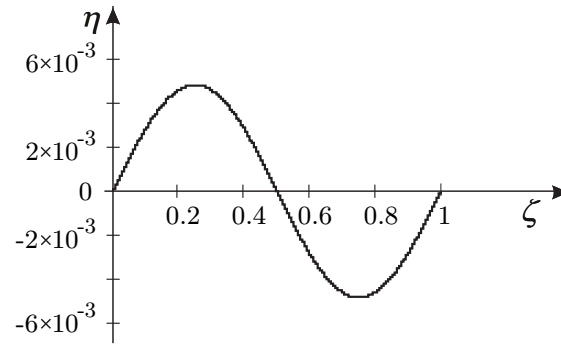
Slika 15: Dijagrami za $\Delta\lambda_1 = 5.0$ i $\Delta\lambda_2 = 0.15$ gde imamo (a) drugi mod, (b) kombinaciju prvog i drugog moda, (c) prvi mod

Izvršena je još jedna dodatna kontrola za slučaj kada sva tri moda postoje. Na Slikama 16, 17 i 18 su prikazani poslekritični oblici koji odgovaraju rešenju (5.15) kada $(\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2)$ pripadaju liniji koja prolazi kroz tačku $(0, 0)$ sa koeficijentom direkcije jednakim 35. Naime, to su $(\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2) \in \{(0.35, 0.01), (0.70, 0.02), (1.40, 0.04)\}$. Duž te linije, sva tri, prvi, drugi i kombinacija prvog i drugom moda postoje. Primećuje se da pomenuta linija ima pravac $\beta_1 = \Delta\lambda_1/\Delta\lambda_2 = 35$ čime su uslovi (10.2) iz Dodatka zadovoljeni. Na Slici 16 prikazan je dijagram za slučaj $\Delta\lambda_1 = 0.35$, $\Delta\lambda_2 = 0.01$, gde je pod (a) prikazan oblik drugog moda i $\zeta(1) = 0.99976963061$. Zatim pod (b) je kombinacija prvog i drugog moda a $\zeta(1) = 0.99948714097$. Poslednji dijagram (c) ima oblik prvog moda i $\zeta(1) = 0.99953141152$.

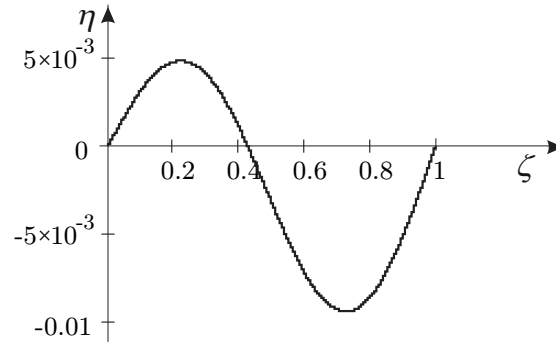
Dijagram prikazan na Slici 17 je za slučaj $\Delta\lambda_1 = 0.70$, $\Delta\lambda_2 = 0.02$, gde je pod (a) prikazan oblik drugog moda i $\zeta(1) = 0.99953827335$. Pod (b) je kombinacija prvog i drugog moda a $\zeta(1) = 0.99897535998$, dok pod (c) ima oblik prvog moda i $\zeta(1) = 0.99906378325$.

Dijagram prikazan na Slici 18 je za slučaj $\Delta\lambda_1 = 1.40$, $\Delta\lambda_2 = 0.04$, gde je pod (a) prikazan oblik drugog moda i $\zeta(1) = 0.99907257552$. Pod (b) je kombinacija prvog i drugog moda a $\zeta(1) = 0.99795501624$, dok pod (c) ima oblik prvog moda i $\zeta(1) = 0.99813139689$.

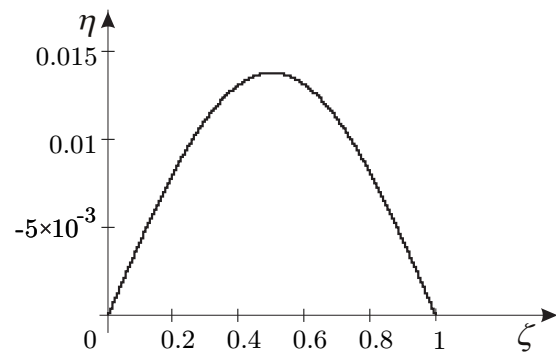
Tretiran je slučaj $\Delta\lambda_1 = 0.35$, $\Delta\lambda_2 = 0.01$, za koji su uslovi (6.52), (6.55) i (6.59) zadovoljeni, tako da postoje tri poslekritična rešenja, tj. oblika moda, i za sva tri moguća slučaja korišćen je princip minimuma potencijalne energije u želji da se odredi poslekritični oblik štapa koji će se stvarno dogoditi. Potencijalna energija koja odgovara nelinearnom problemu prikazanom jednačinama (5.13) i (5.14) je data jednačinom (7.7). Sva tri rešenja bifurkiraju od trivijalnog. Prvo rešenje, prikazano na Slici 16 (a) ima osobinu $\eta(t) = -\eta(1-t)$. Drugo rešenje, prikazano na Slici 16 (b) ima osobinu $\eta(t) = \eta(1-t)$ dok treće rešenje prikazano na Slici 16 (c) nema osobine simetrije pošto je forme kao (7.11). Odgovarajuće energije za tri rešenja prikazana na Slici 16 su $E_{pot}^a = 0.011357$, $E_{pot}^c = 0.023134$, $E_{pot}^b = 0.025314$. I ovde, kao i u prethodnom primeru, može se zaključiti, da poskritični oblik koji odgovara drugom modu prikazanom na Slici 16 (a), će se dogoditi u realnoj situaciji s obzirom da ima najmanju energiju.



(a)

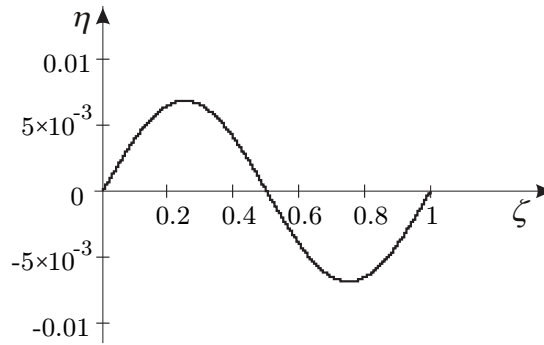


(b)

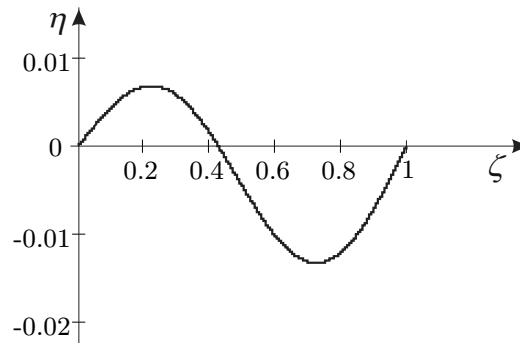


(c)

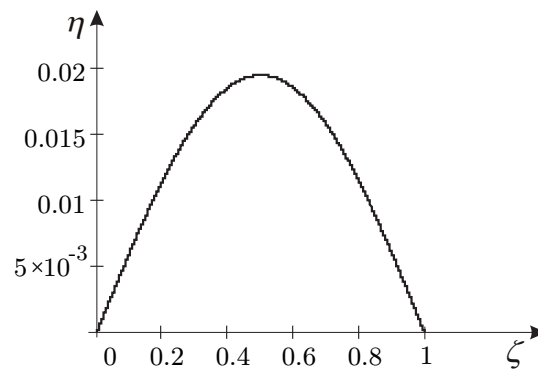
Slika 16: Dijagrami za $\Delta\lambda_1 = 0.35$ i $\Delta\lambda_2 = 0.01$ gde imamo (a) drugi mod, (b) kombinaciju prvog i drugog moda, (c) prvi mod



(a)

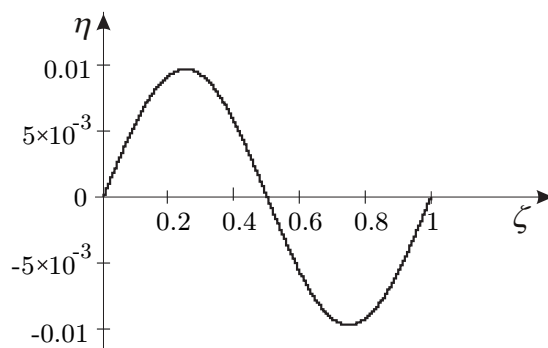


(b)

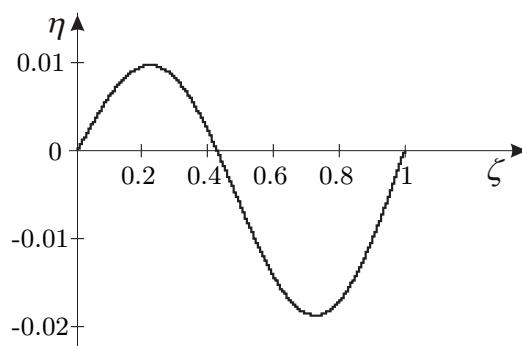


(c)

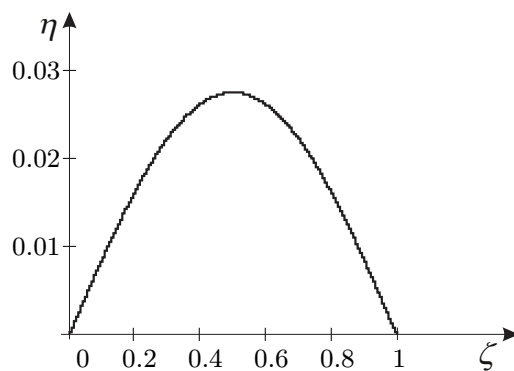
Slika 17: Dijagrami za $\Delta\lambda_1 = 0.70$ i $\Delta\lambda_2 = 0.02$ gde imamo (a) drugi mod, (b) kombinaciju prvog i drugog moda, (c) prvi mod



(a)



(b)



(c)

Slika 18: Dijagrami za $\Delta\lambda_1 = 1.40$ i $\Delta\lambda_2 = 0.04$ gde imamo (a) drugi mod, (b) kombinaciju prvog i drugog moda, (c) prvi mod

9 Zaključak i pravci daljeg istraživanja

U ovom radu, analizirana je nelinearna jednačina deformacije štapa koja odgovara dvoparametarskom bifurkacionom problemu. Taj problem prizilazi iz analize stabilnosti proste grede na elastičnoj podlozi Vinklerovog tipa uz tako pretpostavljene parametre sistema da postoje dva različita moda izvijanja za istu vrednost partikularne kritične sile. Koristeći postupak redukcije Ljapunov-Šmita, izvršena je bifurkaciona analiza nelinearnog problema. Takođe je izvršena i verifikacija bifurkacione analize pomoću energijske metode.

Na osnovu dobijenih rezultata u ovom radu, najvažniji zaključci su sledeći:

1. Za tačku $(\lambda_1, \lambda_2) = (4\pi^4, 5\pi^2)$, dobijena su dva rešenja linearizovanog sistema, tj. štap može da se deformiše u dva moda: prvi mod $\eta_1(t) = a_1 \sin \pi t$ i drugi mod $\eta_2(t) = a_2 \sin 2\pi t$. Uz to, i svaka linearna kombinacija ta dva rešenja je takođe rešenje linearizovanog sistema.

2. Određen je tačan broj nelinearnih rešenja za dati nelinearni problem. Nelinearni sistem ima rešenje $\eta(t) = a_1 \sin \pi t + a_2 \sin 2\pi t$, gde su a_1 i a_2 rešenja bifurkacionih jednačina (6.45), a ne samo proizvoljni elementi iz \mathbb{R} kao u slučaju linearizovanog sistema.

3. U Poglavlju 6, metodom bliske ravnotežne konfiguracije uz primenu postupka redukcije Ljapunov-Šmita, dobijene su bifurkacione jednačine koje su verifikovane Energijskim metodom prikazanom u Poglavlju 7.

4. Numerički je dobijen bifurkacioni dijagram (Slika 9) koji odgovara viljuškastoj bifurkaciji. Broj rešenja je tri.

5. Izolovano rešenje (Slika 11) se dobija numeričkom analizom i postoji za sve slučajeve $\Delta\lambda_1, \Delta\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

6. Određen je uslov (6.63) koji $\Delta\lambda_1$ i $\Delta\lambda_2$ moraju zadovoljiti i za koji će se javiti tri oblika izvijanja: prvi mod, drugi mod i kombinacija prvog i drugog moda.

7. Numeričkom analizom slučajeva kada $\Delta\lambda_1$ i $\Delta\lambda_2$ zadovoljavaju (6.63) za koje se jave sva tri oblika izvijanja, pokazano je da nelinearno rešenje u formi drugog moda ima najmanju potencijalnu energiju.

Stoga je to očekivani poslekritični oblik, tj. onaj oblik koji bi se javio u realnim uslovima.

Kako je za proučavanje izabran specijalan slučaj odnosa koeficijenta krutosti podloge i aksijalne sile, takav da se za istu kritičnu silu štap može deformisati u dva moda, analiza je pokazala da drugi mod ima najmanju potencijalnu energiju i samim tim najveću šansu pojave u realnoj situaciji. Ovo bi se moglo objasniti činjenicom da je štapu potrebno manje energije da se deformiše u drugom modu sa manjom amplitudom nego u prvom gde je amplituda veća.

U daljem radu mogli bi se analizirati i sledeći slučajevi:

1. Za analizu bi mogao da se usvoji štap sa stišljivom osom ($\varepsilon \neq 0$), pošto bi to bio bolji model za realne materijale koji se koriste u industriji. Za analizu stabilnosti ovakvog sistema koristio bi se neki drugi metod bifurkacije.

2. Drugi mogući pravac bi bio ispitivanje unilateralne podloge umesto usvojene Vinklerove podloge u ovom radu. Ovo bi bilo zanimljivo za analizu npr. temeljnih greda i realnije modeliranje tla kao elastične podloge koja prima samo zatezanje ali ne i pritisak.

10 Dodatak

U ovom poglavlju je prikazan dokaz Propozicije 2 korišćene u Poglavlju 6.

Neka je $C : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ označeno homogeno kubno preslikavanje i neka L_1, L_2 predstavljaju 2×2 realne matrice. Ovde će se pokazati da sistem dat jednačinama (6.44) zadovoljava dovoljne uslove, date u Teoremi 5.1 u [9] na strani 263, a koji su:

(H₁) $C(u) = 0$ sledi da $u = 0$.

(H₂) $\pm L_1 u + C(u) = 0$ sledi da $\det[\pm L_1 + \partial_u C(u)] \neq 0$.

(H₃) Ako se označi $h_{\pm}(\beta_1, u) = \pm \beta_1 L_1 u \pm L_2 u + C(u)$, $\Delta_{\pm}(\beta_1, u) = \det[\pm \beta_1 L_1 \pm L_2 + \partial_u C(u)]$, $\beta_1 \in \mathbb{R}$, onda važi da je $h_{\pm}(\beta_1, u) = 0$ odakle sledi da $\Delta_{\pm}(\beta_1, u) \neq 0$.

Odatle sledi sledeće:

Lema D.1. *Označiće se*

$$\begin{aligned} C(u) &= \begin{bmatrix} u_1^3 + \mu u_1 u_2^2 \\ u_2^3 - \nu u_1^2 u_2 \end{bmatrix}, & L_1 &= \begin{bmatrix} -p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{bmatrix}, \\ L_2 &= \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & -q_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{10.1}$$

gde je $u = [u_1, u_2]^T \in \mathbb{R}^2$, sa fiksiranim $\mu, \nu, p_1, p_2, q_1, q_2 > 0$. Ako su sledeći uslovi zadovoljeni:

$$\begin{aligned} 1 + \mu\nu &\neq 0, \\ p_1 &\neq \frac{p_2}{\nu}, \\ q_2 - \beta_1 p_2 &\neq \frac{\beta_1 p_1 - q_1}{\mu}, \\ \beta_1 p_1 - q_1 &\neq \frac{\beta_1 p_2 - q_2}{\nu}, \end{aligned} \tag{10.2}$$

onda su uslovi H_1, H_2 i H_3 zadovoljeni.

Dokaz. Prvo, uslov $C(u) = 0$ podrazumeva da je tačno jedna od sledećih linija zadovoljena:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_2 = 0, \\
 u_1 &= 0, \quad u_2^2 - \nu u_1^2 = 0, \\
 u_2 &= 0, \quad u_1^2 + \nu u_2^2 = 0, \\
 u_2^2 - \nu u_1^2 &= 0, \quad u_1^2 + \nu u_2^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{10.3}$$

Sada, $(10.3)_2$ vodi ka tome da je $u_1 = u_2 = 0$, što takođe proizilazi iz $(10.3)_3$. Iz jednačina $(10.3)_4$ se dobija $(1 + \mu\nu)u_1^2 = 0$, i ako pretpostavimo da $u_1 \neq 0$, dobiće se da je uslov H_1 ekvivalentan sa $(10.2)_1$. Dalje će se razmotriti uslov H_2 . Iz njega sledi da je $\pm L_1 u + C(u) = 0$ ekvivalentno sa jednačinama:

$$\begin{aligned}
 u_1(u_1^2 + \mu u_2^2 \mp p_1) &= 0, \\
 u_2(u_2^2 - \nu u_1^2 \pm p_2) &= 0,
 \end{aligned} \tag{10.4}$$

koje imaju realna rešenja ako i samo ako je tačno jedna od sledećih jednačina zadovoljena:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_2 = 0, \\
 u_1 &= 0, \quad u_2^2 = p_2, \\
 u_2 &= 0, \quad u_1^2 = p_1, \\
 u_1^2 + \mu u_2^2 \mp p_1 &= 0, \quad u_2^2 - \nu u_1^2 \pm p_2 = 0.
 \end{aligned} \tag{10.5}$$

Odmah se dobija da je neohodan uslov za postojanje rešenja za $(10.5)_4$ dat u $(10.2)_1$. Dalje se dobija:

$$\det[\pm L_1 + \partial_u C(u)] = (3u_1^2 + \mu u_2^2 \mp p_1)(3u_2^2 - \nu u_1^2 \pm p_2) + 4\mu\nu u_1^2 u_2^2. \tag{10.6}$$

Sada, iz (10.5)₄ sledi da je $\det [\pm L_1 + \partial_u C(u)] = 4(1 + \mu\nu)u_1^2 u_2^2$, tako da, kao što je pretpostavljeno da $u_1, u_2 \neq 0$ sledi da je

$$\det [\pm L_1 + \partial_u C(u)] \neq 0 \quad (10.7)$$

što je ekvivalentno sa (10.2)₁. Takođe, ako se pretpostavi (10.5)₂, dobija se da je $\det [\pm L_1 + \partial_u C(u)] \neq 0$ što je ekvivalentno sa $\mu p_2 \neq -p_1$, što je zadovoljeno pošto važi $\mu, p_1, p_2 > 0$. Ako se pretpostavi (10.5)₃, dobija se da je $\det [\pm L_1 + \partial_u C(u)] \neq 0$ ekvivalentna sa (10.2)₂.

Na kraju, razmotriće se još H_3 . Dobija se da je $h_{\pm}(\beta_1, u) = 0$ ekvivalentno sledećem sistemu:

$$\begin{aligned} u_1(u_1^2 + \mu u_2^2 \mp \beta_1 p_1 \pm q_1) &= 0, \\ u_2(u_2^2 - \nu u_1^2 \pm \beta_1 p_2 \mp q_2) &= 0, \end{aligned} \quad (10.8)$$

koji ima realna rešenja ako i samo ako je zadovoljna tačno jedna od sledećih jednačina:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 = 0, \\ u_1 &= 0, \quad u_2^2 - \nu u_1^2 \pm \beta_1 p_2 \mp q_2 = 0, \\ u_2 &= 0, \quad u_1^2 + \mu u_2^2 \mp \beta_1 p_1 \pm q_1 = 0, \\ u_2^2 - \nu u_1^2 \pm \beta_2 p_2 \mp q_2 &= 0, \quad u_1^2 + \mu u_2^2 \mp \beta_1 p_1 \pm q_1 = 0. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Neophodan uslov za postojanje rešenja (10.9)₄ je sadržan u (10.2)₁. Dalje se dobija

$$\begin{aligned} \Delta_{\pm}(\beta_1, u) &= (3u_1^2 + \mu u_2^2 \mp \beta_1 p_1 \pm q_1)(3u_2^2 - \nu u_1^2 \pm \beta_2 p_2 \mp q_2) + \\ &4\mu\nu u_1^2 u_2^2. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Odatle sledi da ako postoji rešenje (10.9)₄, onda važi $\Delta_{\pm}(\beta_1, u) = 4u_1^2 u_2^2 (1 + \mu\nu)$, odakle sledi da je $\Delta_{\pm}(\beta_1, u) \neq 0$ (obezbeđeno sa (10.2)₁). Ako su (10.9)₂ ili (10.9)₃ zadovoljeni, onda se dobija $\Delta_{\pm}(\beta_1, u) \neq 0$ ako i samo ako su uslovi (10.2)₃ i (10.2)₄ zadovoljeni redom. Ovim je dokaz završen.

Razmatrajući (6.42) i (6.43), i označavajući odnos dobijenih vrednosti na sledeći način:

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{c_4}{c_1}, & p_1 &= -\frac{c_5}{c_1}, & q_1 &= \frac{c_7}{c_1}, \\ \nu &= -\frac{d_3}{d_2}, & p_1 &= \frac{d_6}{d_2}, & q_1 &= \frac{d_8}{d_2},\end{aligned}\tag{10.11}$$

dobija se sistem jednačina (6.44) u formi

$$C(u) + \alpha_1 L_1 u + \alpha_2 L_2 u + h.o.t. = 0,\tag{10.12}$$

gde je

$$h.o.t = \mathcal{O}(\|u\| [|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_1 \alpha_2| + |\alpha_1| \|u\| + |\alpha_2| \|u\| + \|u\|^3]),\tag{10.13}$$

gde su C , L_1 i L_2 date u Lemi D.1. Ako uslovi (10.2) važe za neko $\beta_1 = \alpha_1/\alpha_2$, $\alpha_2 \neq 0$, onda je (10.2) zadovoljeno prema Lemi D.1. Odatle sledi da je taj dovoljan uslov, dat u Teoremi 5.1 u [9] na strani 263, zadovoljen za sistem jednačina (6.44), tj. važi sledeće:

Posledica D.2. *Postavljanjem (10.11) za sistem jednačina (6.44), i ako (10.2) važi za neko $\beta_1 = \alpha_1/\alpha_2$, $\alpha_2 \neq 0$, onda (6.44) zadovoljava dovoljne uslove H_1 , H_2 i H_3 .*

Literatura

- [1] T.M. Atanackovic, *Stability Theory of Elastic Rods*, World Scientific, River Edge, N.J. 1997
- [2] T.M. Atanackovic, *Stability of rotating compressed rod with imperfections*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Volume 101, Issue 03, May 1987, pp 593-607
- [3] T.M. Atanackovic, R.B. Margetic, J.M. Milidragovic, *On the stability of an elastic column positioned on an elastic half space*, Archive of Applied Mechanics 69, 1999, 94-104
- [4] T.M. Atanackovic, B.N. Novakovic, *Optimal shape of an elastic column on elastic foundation*, European Journal of Mechanics A/Solids 25, 2006, 154165
- [5] A.C. Batihan, F.S. Kadioglu, *Vibration analysis of a cracked beam on an elastic foundation*, Int. J. Str. Stab. Dyn. 16, 2016, 1550006-1550023
- [6] G. Bonanno, B. Di Bella, D. O'Regan, *Non-trivial solutions for nonlinear fourth-order elastic beam equations*, Comput. Math. Appl. 62, 2011, 1862-1869
- [7] G. Bonanno, B. Di Bella, *Infinitely many solutions for a fourth-order elastic beam equation*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. 18, 2011, 357-368
- [8] W.F. Chen, T. Atsuta, *Theory of Beam Columns Volume 1: In-Plane Behavior and Design*, J. Ross Publishing, 2008
- [9] S.N. Chow, J.K. Hale, *Methods of Bifurcation Theory*, Springer, New York, 1982

-
- [10] Y. Eidelman, V. Milman, A. Tzolomtis, *Funcional analysis: An Introduction*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2004
- [11] M. Eisenberger, J. Clastornik, *Vibrations and buckling of a beam on a variable Winkler elastic foundations*, Jurnal of Sound and Vibration, 1987, 115(2), 233-241
- [12] V.B. Glavardanov, R.B. Margetic, *Secondary bifurcation of compressible rod with spring-supports*, European Journal of Mechanics A/Solids 46, 2014, 72-83
- [13] V.B. Glavardanov, R.B. Margetic, M. Zigic, N. Grahovac, *Secondary bifurcation of a shearable rod with nonlinear spring supports*, Eur. J. Mech. A-Solid 66, 2017, 433-445
- [14] M. Golubitsky, D.G. Chaeffer, *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, Springer, New York, 1985
- [15] M. Hetenyi, *Beams on Elastic Foundations*, Ann Arbor, Michigan: University of Michigan Press, 1946
- [16] M.A.A. Hussain, *Two modes Bifurcation Solutions of Elastic Beams Equation with Nonlinear Approximation*, Communications in Mathematics and Applications, Volume 1, Number 2, 2010, pp. 123131
- [17] M.A.A. Hussain, *A Method for Finding Nonlinear Approximation of Bifurcation Solutions of Some Nonlinear Differential Equations*, Jurnal of Applied Mathematics Bioinformatics, vol. 3, no. 3, 2013, 173-186
- [18] M. Izydoreka, J. Janczewskaa, N. Waterstraatb, A. Zgorelskaa, *Bifurcation of equilibrium forms of an elastic rod on a two-parameter Winkler Foundation*, Nonlinear Anal. RWA 38, 2018, 451-463
- [19] S. Katz, S. Givli, *The post-buckling behavior of a beam constrained by springy walls*, J. Mech. Phys. Solids. 78, 2015, 443-466

-
- [20] N.D. Kien, *Postbuckling behaviour of beams on two-parameter elastic foundation*, International Journal of Structural Stability and Dynamics, Vol. 4, No. 1, 2004, 21-43
- [21] A.N. Kounadis, J.Mallis, A. Sbarounis, *Postbuckling analysis of columns resting on an elastic foundation*, Arch Appl Mech, 2006, 75:395404
- [22] M. Lembo, *Exact solution for post-buckling deformations of nanorods*, Acta. Mech. 228(6), 2017, 2283-2298
- [23] H. Matsunaga, *Vibrations and buckling of a deep beam-column on two-parameter elastic foundation*, Journal of Sound and Vibration, 1999, 228(2), 359-376
- [24] H.Mohammadi, M. Mahzoon, M. Mohammadi, M. Mohammadi, *Postbuckling instability of nonlinear nanobeam with geometric imperfection embedded in elastic foundation*, Nonlinear Dyn, 2014, 76:20052016
- [25] P. Obara, *Vibrations and stability of Bernoulli-Euler and Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation*, Archives of civil engineering, LX, 4, 2014
- [26] N. Olhoff, A.P.Seyranian, *Bifurcation and post-buckling analysis of bimodal optimum columns*, International Journal of Solids and Structures 45, 2008, 39673995
- [27] P.L. Pasternak, *On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants*, Gosudarstvennoe Izdatelstvo Literaturi po Stroitelstvu i Arkhitekture 45, 2008, 3967-3995
- [28] B.N. Rao, G.V. Rao, *Post-critical behaviour of Euler and Beck columns resting on an elastic foundation*, Journal of Sound and Vibration 276, 2004, 11501158
- [29] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, New York, 1961

-
- [30] E. Winkler, *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*, Dominicus, Prague, 1867
- [31] G. Yang, M.A. Bradford, *Antisymmetric post-buckling localization of an infinite column on a nonlinear foundation with softening*, Int. J. Str. Stab. Dyn. 15, 2015, 1540028-1540048
- [32] D. Zorica, N. Challamel, M. Janev and T.M. Atanackovic, *Buckling and postbuckling of a heavy compressed nanorod on elastic foundation*, J. Nanomech. Micromech. 7(3), 2017, 04017004-1-6