

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Ђорђе М. Новковић

**МОДЕЛИРАЊЕ И НУМЕРИЧКИ
ПРОРАЧУНИ СТРУЈАЊА
НЕСТИШЉИВОГ ФЛУИДА У
ПРАВИМ КОНУСНИМ ДИФУЗОРИМА**

докторска дисертација

Београд, 2019.

UNIVERSITY OF BELGRADE
FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

Đorđe M. Novković

**MODELLING AND NUMERICAL
CALCULATIONS OF THE
INCOMPRESSIBLE FLOW IN A
STRAIGHT CONICAL DIFFUSERS**

Doctoral Dissertation

Belgrade, 2019.

МЕНТОР: др **Милан Лечић**, ред. проф.
Универзитет у Београду,
Машински факултет

МЕНТОР: др **Александар Тоћић**, ванр. проф.
Универзитет у Београду,
Машински факултет

ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ: др **Ђорђе Чантрак**, ванр. проф.
Универзитет у Београду,
Машински факултет

др **Маша Букуров**, ред. проф.
Универзитет у Новом Саду,
Факултет техничких наука

др **Никола Маричић**, ред. проф. у пензији
Универзитет у Приштини са привременим
седиштем у Косовској Митровици,
Факултет техничких наука у
Косовској Митровици

Датум одбране: 30.09.2019.

Мојим родитељима Милићу и Надежди.

Предговор

Ова докторска дисертација је израђена у сарадњи са наставницима и сарадницима Катедре за механику флуида Машинског факултета у Београду и представља резултат вишегодишњег теоријског истраживања анизотропности турбулентних вихорних струјања.

Током докторских студија на Машинском факултету у Београду, и током израде ове дисертације, остварио сам добру сарадњу са наставницима и сарадницима појединих катедри, стога бих овим путем хтео да им пренесем изразе своје захвалности.

Пре свега бих се захвалио Комисији за докторске студије на челу са проф. др Милосавом Огњановићем, на додели стипендије за докторске студије. Мојим менторима проф. др Милану Лечићу и проф. др Александру Ђоћићу и продекану проф. др Александру Симоновићу захваљујем на свим видовима подршке у најтежим периодима израде ове дисертације.

Колегиници др Јели Буразер, истраживачу сараднику Катедре за механику флуида, захваљујем на исказаној колегијалности, великој помоћи у руковању програмским алатима под оперативним системом Linux и корисним сугестијама при изради дисертације.

Своју захвалност бих овим путем изразио и проф. др Светиславу Чантраку редовном професору у пензији, за уступљене резултате експерименталног истраживања вихорног струјања у правом конусном дифузору. Ови експериментални резултати су искоришћени за валидацију нумеричких прорачуна струјања и чинили су окосницу израде ове дисертације.

Наставницима Катедре за хидрауличне машине и енергетске системе, проф. др Милошу Недељковићу и проф. др Ђорђу Чантраку, захваљујем на подршци приликом аплицирања за доделу стипендије за докторске студије и на остварењу доброј сарадњи.

Проф. др Николи Маричићу, редовном професору у пензији, Факултета техничких наука у Косовској Митровици, од којег сам научио прве појмове из Механике флуида, захваљујем на дугогодишњој доброј сарадњи и свеобухватној рецензији ове дисертације.

Колеги Милану Раковићу, асистенту Катедре за механику флуида, захваљујем на изради једног дела скриптова за цртање дијаграма у софтверу Python.

Посебну захвалност дугујем својој породици, ћерци Наталији и супрузи Сањи која је успела да издржи дуг и тежак период мог одсуства из породичног живота, иако јој је здравље било озбиљно нарушено.

Моделирање и нумерички прорачуни струјања нестипљивог флуида у правим конусним дифузорима

Резиме

У дисертацији је истраживано турбулентно вихорно и безвихорно струјање нестипљивог флуида у правим конусним дифузорима. Циљ ове докторске дисертације је побољшање тачности нумеричког прорачуна вихорног струјања у овом типу дифузора. Истраживање је спроведено нумеричким путем, применом софтвера отвореног кода - OpenFOAM, при чему је извршена имплементација два модела турбуленције у овај софтвер. Један од ових модела, Хамбин $k - \varepsilon$ модел је одавно познат научној јавности, док је други $k - \varepsilon$ diffuser развијен у оквиру рада на овој докторској дисертацији. Развијени модел турбуленције $k - \varepsilon$ diffuser је намењен за нумеричке прорачуне безвихорног и принудно-потенцијалног вихорног струјања у правим конусним дифузорима.

Спроведена је детаљна анализа RANS приступа моделирању турбуленције, са посебним освртом на моделе турбуленције који обухватају анизотропност поља турбулентне вискозности. Један од најсавременијих RANS модела турбуленције који обухвата анизотропност турбулентне вискозности и временску не-локалност турбулентних напона (Хамбин модел), имплементиран је у код софтвера OpenFOAM. Једначине овог модела су написане у поларно-цилиндричним координатама, па је за његову имплементацију у код софтвера OpenFOAM било неопходно имплементирати јединичне дијадне тензоре у основ кода OpenFOAM. Применом ових дијадних тензора, у софтвер OpenFOAM чији солвери раде у Декартовим координатама, имплементирани су једначине Хамбиних напона у поларно-цилиндричним координатама. Хамбин модел је послужио као основ за развијање и имплементацију новог модела $k - \varepsilon$ diffuser, који је у коду назван kEpsDif и који је намењен за прорачун вихорног и безвихорног струјања у правим конусним дифузорима. Основне карактеристике развијеног модела су анизотропност турбулентне вискозности и временска нелокалност турбулентних напона. Тестирање имплементираних модела турбуленције је извршено у четири различите струјне геометрије, при различитим врстама струјања. Тестирање имплементираних модела је извршено нумеричким прорачуном принудно-потенцијалног вихорног струјања у цеви. Том приликом су

результати прорачуна овим моделом упоређени са резултатима два линеарна ($k - \varepsilon$ и $k - \omega$ SST) и једног нелинеарног модела турбуленције (Lien cubic $k - \varepsilon$). Верификација поступка имплементације и валидација развијеног модела $k - \varepsilon$ diffuser је извршена тестирањем овог модела у три различите струјне геометрије при различитим врстама струјања. Тестирање је најпре извршено нумеричким прорачуном принудно-потенцијалног вихорног струјања у правом конусном дифузору при две различите јачине вихора. Том приликом су резултати добијени применом развијеног модела $k - \varepsilon$ diffuser упоређени са остала два коришћена модела турбуленције (стандардним $k - \varepsilon$ и Хамбиним $k - \varepsilon$ моделом). Након тога је развијени модел тестиран нумеричким прорачуном вихорног струјања у Клаусеновом дифузору, чиме је извршена контрола прилагодљивости овог модела различитим геометријским карактеристикама дифузора. Развијени модел турбуленције $k - \varepsilon$ diffuser има могућност идентификације врсте струјања у дифузору, тј. прави разлику између вихорног и безвихорног струјања. У случају да је струјање у дифузору безвихорно, активира се стандардни $k - \varepsilon$ модел, док се у случају вихорног струјања у дифузору прорачун врши помоћу развијеног $k - \varepsilon$ diffuser модела. Ова универзалност развијеног модела је тестирана на безвихорном струјању у Азадовом дифузору.

Сви прорачуни су извршени на тродимензионалним прорачунским мрежама. На оригиналан начин су приказани елипсоиди турбулентног напона у односу на сферични део турбулентног напона, који је дефинисан кинетичком енергијом турбуленције. Анализирани су међусобни утицаји поља напона и поља брзине у процесу моделирања вихорног турбулентног струјања у дифузорима и изложена је процедура развоја модела $k - \varepsilon$ diffuser.

Са новим модулима који су имплементирани у код OpenFOAM, а који обухватају математичко-програмерски поступак трансформације тензора из Декартових у поларно-цилиндричне координате и обрнуто, отворен је пут за имплементацију других модела у поларно-цилиндричним координатама и даље унапређење нумеричких прорачуна у струјним доменима цилиндричног облика.

Кључне речи: дифузор, вихорно струјање, тубулентни напон,
анизотропност, моделирање, OpenFOAM

Научна област: Машинство

Ужа научна област: Механика флуида

УДК број: 532.556:519.673(043.3)
532.556:004.42OpenFOAM(043.3)

Modelling and Numerical Calculation of The Incompressible Flow in a Straight Conical Diffusers

Abstract

In this dissertation a research regarding swirling and swirl-free turbulent flow of incompressible fluid is presented. The aim of this dissertation is an accuracy improvement of numerical calculation of swirling flow in this diffuser type. The research is performed numerically by OpenFOAM software, with two new implemented turbulence models. One of these models, Hamba's $k - \varepsilon$ is recently known in the research community, while the second one, $k - \varepsilon$ diffuser, is developed during the research in this dissertation. Developed $k - \varepsilon$ diffuser model is intended for numerical calculation of swirl-free and Rankine-vortex swirling flow in straight conical diffusers.

Detailed analysis of RANS based turbulence modeling methodology is presented, especially in terms of turbulence models with anisotropic turbulent viscosity field. One of the most modern RANS turbulence models, which include anisotropy of turbulent viscosity and time nonlocality of turbulent stresses (Hamba's turbulence model), is implemented in OpenFOAM software. Since equations of this model are written in cylindrical coordinates, in order to implement this model in OpenFOAM software, it was necessary to implement dyadic tensors in the basis of this software first. Using this dyadic tensors, Hamba's turbulent stresses equations in cylindrical coordinates are implemented in OpenFOAM code, whose solvers are written in Cartesian coordinates. The Hamba's model has been used as the basis for developing and implementing a new turbulence model $k - \varepsilon$ diffuser, which is designed for numerical calculations of swirl-free and Rankine-vortex swirling flow in straight conical diffusers. The basic characteristics of this new model are anisotropy of turbulent viscosity and time nonlocality of turbulent stresses. The implemented models are tested on four different geometries under different flow conditions. The Hamba's model is tested by numerical calculation of Rankine-vortex swirling flow in a straight pipe. The results obtained with this model are compared with results obtained by two linear ($k - \varepsilon$ and $k - \omega$ SST) and one non-linear (Lien cubic $k - \varepsilon$) turbulence models. Verification of the implementation process and validation of the developed model $k - \varepsilon$ diffuser are performed by testing this model in

three different flow geometries under different flow conditions. The model is firstly tested by numerical calculations of Rankine-vortex swirling flow in a straight conical diffuser, for two different swirl strengths. The results obtained during these tests by $k-\varepsilon$ diffuser model are compared with results obtained by other two used turbulence models (standard $k-\varepsilon$ and Hamba $k-\varepsilon$ model). After that, the model $k-\varepsilon$ diffuser is tested by numerical calculation of swirling flow in the Clausen diffuser as control of a possibility of using this model in diffusers with different geometrical characteristics. Developed model $k-\varepsilon$ diffuser has a possibility of flow type identification, i.e. it makes difference between swirl and swirl-free flow. In case of a swirl-free flow a standard $k-\varepsilon$ is activated, while in case of swirling flow, calculation is carried on by $k-\varepsilon$ diffuser model. This universality of developed $k-\varepsilon$ diffuser model is tested on a swirl-free flow conditions in Azad diffuser.

All calculations are performed on 3D computational meshes. An ellipsoid of turbulent stresses in respect to the spherical part of turbulent stresses, which is defined by turbulent kinetic energy, are presented in original manner. Mutual influences of stress and velocity fields are analysed in turbulent swirling flow in a straight conical diffusers and the procedure of $k-\varepsilon$ diffuser model development is presented.

The new implemented modules in OpenFOAM, which contain mathematical programming procedure for tensor transformations from Cartesian to cylindrical coordinates and reversely, give possibility for implementing other turbulence models in cylindrical coordinates and further improvement of numerical flow calculation in the cylindrical shape flow domains.

Key words: diffuser, swirling flow, turbulent stresses, anisotropy,
modeling, OpenFOAM

Scientific field in general: Mechanical Engineering

Scientific field in particular: Fluid mechanics

UDK number: 532.556:519.673(043.3)
532.556:004.42OpenFOAM(043.3)

Списак ознака

Латиничне ознаке

- x_i - координата тачке
- d_{ij} - компоненте девијатора тензора напона услед вискозности
- A_{ijklm} - компоненте тензора вискозности
- u_i - компонента вектора брзине
- \underline{u} - вектор брзине
- p - притисак
- p^* - кинематички притисак
- S_{ij} - компонента тензора брзине деформисања
- \underline{q} - тензор трансформације координата
- \underline{q}^T - транспоновани тензор трансформације координата
- q_{ij} - компоненте тензора трансформације координата
- \underline{I} - јединични тензор
- \underline{e}_i - јединични (базни) вектор координатне осе
- $\langle u_i \rangle$ - просечна компонента вектора брзине
- $\langle f_i \rangle$ - просечна компонента вектора запреминске силе
- $\langle d_{ij} \rangle$ - просечна компонента девијаторског дела тензора напона у флуиду
- N_i - компонента Бусинескове нормалне силе
- T_i - компонента Бусинескове смичуће силе
- K - запреминска турбулентна кинетичка енергија
- k - турбулентна кинетичка енергија
- h_B - Бусинескова карактеристична дужина
- u_B - Бусинескова карактеристична брзина
- $\langle S_{ij} \rangle$ - компоненте тензора просечне брзине деформисања
- $\langle \underline{S} \rangle$ - тензор просечне брзине деформисања
- \underline{T} - тензор турбулентне вискозности
- S'_{ij} - флукутирајући део компоненте тензора брзине деформисања
- u'_i - флукутирајући део компоненте вектора брзине
- p' - флукутирајући део струјног притиска

$\langle p \rangle$	- просечни статички притисак
ℓ_m	- Прантлов дужински размер
u^*	- Прантлов размер брзине
t_0	- временски размер турбулентне структуре
ℓ_0	- дужински размер турбулентне структуре
k_0	- размер ТКЕ турбулентне структуре
b_{ij}	- компоненте тензора анизотропности
\mathcal{D}_{ij}	- компоненте тензора турбулентне дифузије турбулентног напона
P'	- флукуација генерализаног притиска
$\langle W_{ij} \rangle$	- компоненте просечне угаоне брзине флуидног делића у инерцијалном координатном систему
$G^{(\lambda)}$	- λ -ти коефицијент тензорског полинома анизотропности
$\underline{T}^{(\lambda)}$	- λ -ти члан тензорског полинома анизотропности
\underline{b}	- тензор анизотропности турбулентног напона
$T_{ij}^{(\lambda)}$	- компоненте члана тензорског полинома анизотропности турбулентног напона
D	- коефицијент дифузије
c	- концентрација материје
h	- хеликоидност вихора
\underline{u}'	- флукуирајући део вектора брзине флуидног делића
G_{ij}	- Грине функције за флукуације брзине
$C_{\nu H}$	- константа Хамбиног $k - \varepsilon$ модела.
C_ν	- константа стандардног $k - \varepsilon$ модела.
m	- маса флуида
t	- време
a_{ij}	- компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона
h_{ij}	- компоненте Хамбиног тензора напона (Хамбини напони)
c_{ij}	- компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона модела $k - \varepsilon$ diffuser
b_{ij}	- компоненте тензора анизотропности
e_{ij}	- компоненте тензора анизотропности дисипације
H	- просечна хеликоидност
$\langle \underline{u} \rangle$	- просечни вектор брзине
C_τ	- константа Хамбиног временског размера
\underline{h}	- Хамбин тензор напона

- K_i - Хамбини коефицијенти турбулентне вискозности
 $\langle u_z \rangle_{sr}$ - средња аксијална брзина
 SwS - јачина вихора

Грчке ознаке

- σ_{ij} - компоненте тензора напона услед вискозности
 μ - динамичка вискозност
 δ_{ij} - компоненте јединичног тензора
 $\langle \sigma_{ij} \rangle$ - просечна компонента тензора напона у флуиду
 τ_{ij} - компонента тензора турбулентног напона
 $\underline{\underline{\tau}}$ - тензор турбулентног напона
 Λ - Бусинесков коефицијент
 ϵ - Бусинесков коефицијент просечне агитације
 μ_t - динамичка турбулентна вискозност
 μ_{eff} - ефективна динамичка вискозност
 ν_{ik} - компонента апроксимираног тензора турбулентне вискозности
 ν_t - кинематичка турбулентна вискозност
 ϵ - дисипација турбулентне кинетичке енергије
 ϵ_0 - размер дисипације ТКЕ турбулентне структуре
 τ_{ij} - компоненте тензора турбулентног напона
 $\langle \omega_{ij} \rangle$ - компоненте просечне угаоне брзине флуидног делића
 у непокретном координатном систему
 τ - временски размер турбуленције
 $\underline{\underline{\omega'}}$ - флукутирајући део вектора угаоне брзине флуидног
 делића у непокретном координатном систему
 ν_{ijklm} - компонента тензора кинематичке турбулентне вискозности
 $\langle \underline{\underline{\omega}} \rangle$ - просечни вектор угаоне брзине
 Ω_{sw} - угаона брзина вихора
 τ_H - Хамбин временски размер
 ν_{tH} - Хамбина турбулентна вискозност
 ω - турбулентна фреквенција
 ρ - густина флуида
 Δk - грешка моделирања турбулентне кинетичке енергије
 ν_{ijklm}^{NL} - компонента тензора нелокалне кинематичке турбулентне
 вискозности

Акроними

RANS	- Reynolds Averaged Navier–Stokes
DNS	- Direct Numerical Simulation
LEVM	- Linear Eddy Viscosity Model
NLEVM	- Nonlinear Eddy Viscosity Model
RSM	- Full Reynolds Stress Model
ARSM	- Algebraic Reynolds Stress Model
EARSM	- Explicit Algebraic Reynolds Stress Model
AEVM	- Anisotropic Eddy Viscosity Model
TKE	- Turbulent Kinetic Energy
JKK	- Једначина Количине Кретања

Називи модела турбуленције

kEpsilon	- стандардни $k - \varepsilon$ модел
kOmegaSST	- $k - \omega$ SST модел
LienCubicKE	- Lien cubic $k - \varepsilon$ модел
kEpsHam	- Хамбин $k - \varepsilon$ модел
kEpsDif	- модел $k - \varepsilon$ diffuser

Садржај

Предговор	v
Резиме	vi
Abstract	viii
Списак ознака	x
1 Увод	1
1.1 Настанак и развој правих конусних дифузора	2
1.2 Значај и примена правих конусних дифузора	5
1.3 Преглед релевантних постојећих истраживања	7
1.3.1 Теоријска и експериментална истраживања	7
1.3.2 Моделирање и нумерички прорачуни струјања	10
1.4 Мотивација за израду дисертације	20
2 Основне једначине изотермског струјања нестишљивог флуида 23	23
2.1 Закон о одржању масе - једначина континуитета	23
2.2 Закон о промени количине кретања - Навије-Стоксове једначине	24
2.3 Рејнолдсове једначине	25
2.4 Бусинескова хипотеза о турбулентним напонима	28
2.5 Утицај моделирања турбулентног напона на поља притиска и брзине	31
3 Моделирање турбулентних напона	34
3.1 Линеарни модели турбуленције	34
3.2 Стандардни $k - \varepsilon$ модел турбуленције	35
3.3 Нелинеарни модели турбуленције	44
3.4 Линеарни модели са анизотропном турбулентном вискозности	51
3.5 Хамбин $k - \varepsilon$ модел турбуленције	53
4 Развој модела $k - \varepsilon$ diffuser и имплементација у OpenFOAM	58
4.1 Трансформације тензора	58

4.2	Трансформација тензора турбулентног напона	61
4.3	Разлагање Хамбиног тензора напона	63
4.4	Имплементација Хамбиног тензора напона у код OpenFOAM	66
4.5	Развој и имплементација новог модела $k - \varepsilon$ diffuser	72
5	Резултати нумеричких прорачуна	78
5.1	Тестирање имплементације Хамбиног $k - \varepsilon$ модела на Стинбер- геновој цеви	78
5.1.1	Опис тестног примера и гранични услови	79
5.1.2	Параметри нумеричког прорачуна и конвергенција решења	83
5.1.3	Контрола бездимензијске координате y^+	85
5.1.4	Резултати прорачуна поља брзине	86
5.1.5	Расподела коефицијената турбулентне вискозности	89
5.1.6	Расподеле скаларних варијабли Хамбиног модела	92
5.1.7	Утицај коефицијента C_τ на тачност моделирања поља брзине	95
5.1.8	Резултати прорачуна поља турбулентног напона	97
5.2	Тестирање модела $k - \varepsilon$ diffuser на Чантраковом дифузору	105
5.2.1	Опис тестног примера	105
5.2.2	Тестирање и избор мреже	108
5.2.3	Контрола бездимензијске координате y^+	109
5.2.4	Резултати прорачуна поља брзине	110
5.2.5	Расподела коефицијената турбулентне вискозности	116
5.2.6	Резултати прорачуна поља турбулентног напона	121
5.3	Тестирање модела $k - \varepsilon$ diffuser на Клаусеновом дифузору	136
5.3.1	Опис тестног примера	136
5.3.2	Тестирање и избор мреже	138
5.3.3	Контрола бездимензијске координате y^+	140
5.3.4	Резултати прорачуна поља брзине	140
5.3.5	Расподела коефицијената турбулентне вискозности	144
5.4	Тестирање модела $k - \varepsilon$ diffuser на Азадовом дифузору	146
5.4.1	Опис тестног примера	146
5.4.2	Тестирање и избор мреже	149
5.4.3	Резултати прорачуна поља брзине	150
6	Закључак	153
	Литература	157
	Прилози	167

П.І - Трансформације чланова једначине ТКЕ	167
П.ІІ - Трансформације чланова једначине дисипације ТКЕ . . .	168
П.ІІІ - Додатак кода у хедер фајлу TensorTemplateI.H	170
П.ІV - Изворни код kEpsDif.C	172
П.V - Хедер фајл kEpsDif.H	191
Биографија аутора	194

1 Увод

Трансформација кинетичке енергије флуида у део потенцијалне енергије који се манифестује преко промене притиска има велики физички значај и широку техничку примену. Процес трансформације кинетичке енергије флуида у наведени део потенцијалне енергије изводи се у дифузору. Дифузор је дивергентна струјна цев једноставне геометрије са комплексном физиком струјања. Зависно од техничке примене, постоје прави и закривљени дифузори различитих облика попречног пресека. Висок ниво трансформације кинетичке енергије се остварује применом правих конусних дифузора, због чега они имају значајну техничку примену. Да би процес трансформације кинетичке енергије био што ефикаснији, режим струјања у дифузорима мора бити турбулентан, при великим вредностима Рејнолдсовог броја. У зависности од намене дифузора, турбулентно струјање у њему може бити стишљиво или нестишљиво, безвихорно или вихорно. Турбулентно струјање је мистериозан природни феномен који заокупља пажњу многих истраживача и који до данас није у потпуности расветљен. Вишедеценијски напори истраживача резултирали су појавом мање или више успешних модела турбуленције. Интензивни развој рачунарске технике омогућио је значајан прогрес у брзини извођења нумеричких операција. Сходно томе интензивирана је и примена нумеричких метода на решавање физичко-математичких модела турбуленције.

Енергетске перформансе дифузора, које се испољавају у виду ефекта трансформације енергије и степена корисности, зависе од типа струјања и облика дифузора. Појава турбулентног вихорног струјања у дифузору значајно утиче на ефекат трансформације енергије и степен корисности дифузора. Овакво струјање настаје суперпонирањем струјања у обимском правцу (око осе дифузора) и струјања у аксијалном правцу (дуж осе дифузора). Присутност струјања у обимском правцу - вихора значајно мења струјну слику у односу на безвихорно струјање, при чему перформансе дифузора зависе од интензитета вихора. Зависност енергетских перформанси дифузора од утицаја појаве вихорног струјања даје додатни значај истраживању вихорног струјања.

Истраживања вихорног струјања у цилиндричним цевима и правим конусним дифузорима су вршена на Машинском факултету у Београду током више деценија. Резултати тих истраживања су дати у радовима Бенишек [1], Ѓантрак [2], Vukašinović [3], Лечић [4], Тоћић [5], Чантрак [6], Тоћић [7], Илић [8]. Са инжењерске тачке гледишта, од интереса је ефикасно постизање оптималног облика дифузора, који за предвиђени режим струјања остварује врхунске енергетске перформансе. Одређивање оптималног облика дифузора, захтева тачне информације о струјној слици у дифузору датог облика. Дакле, проблем енергетске оптимизације облика дифузора се тако своди на проблем моделирања турбулентног струјања у дифузору. Истраживања у овом докторату обухватају моделирање и нумеричке прорачуне безвихорног и вихорног нестишљивог струјања у правим конусним дифузорима, с циљем да се оствари допринос у погледу тачнијег прорачуна струјне слике у правим конусним дифузорима.

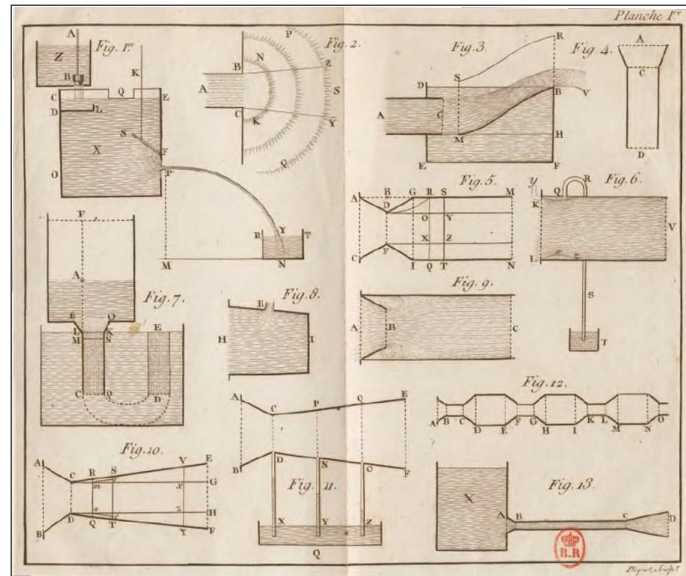
1.1 Настанак и развој правих конусних дифузора

Прве дивергентне струјне цеви налик данашњим дифузорима примењиване су за израду примитивних сигналних дувачких инструмената 1500 п.н.е. Постепено низструјно повећање попречног пресека цеви је тада коришћено искључиво у акустичке сврхе, за добијање ниских тонова великог интензитета. Тек крајем 18. века Venturi је уочио да такав облик струјне цеви производи



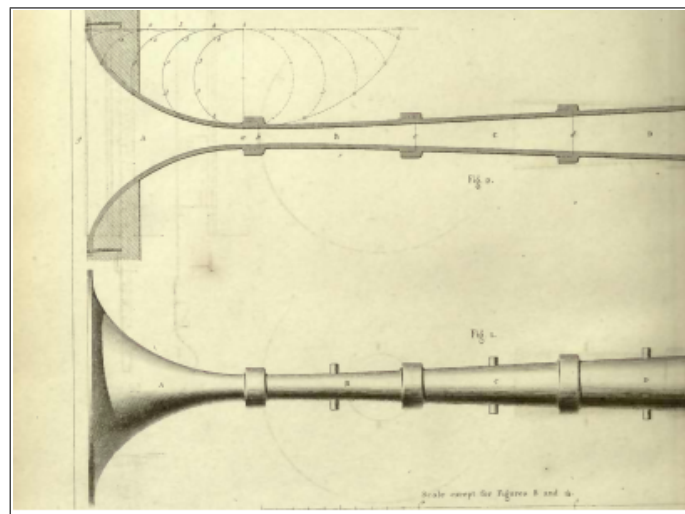
Слика 1.1: Ловачки рог као пример примене акустичких ефеката у дифузору, https://etc.usf.edu/clipart/14200/14255/hunt-horn_14255.htm.

ефекат убрзаног пражњења резервоара са водом и то је објавио у свом истраживању 1797. године [9]. Део оригиналних скица из овог Вентуријевог истраживања је приказан на Сл.1.2. Venturi је у својим експериментима мерио уздужну расподелу притиска у конвергентно-дивергентној струјној цеви применом пиезометарских цеви. При томе је уочио појаву потпритиска у уском грлу конвергентно-дивергентне струјне цеви.



Слика 1.2: Оригинални цртежи Вентуријевих експеримената [9].

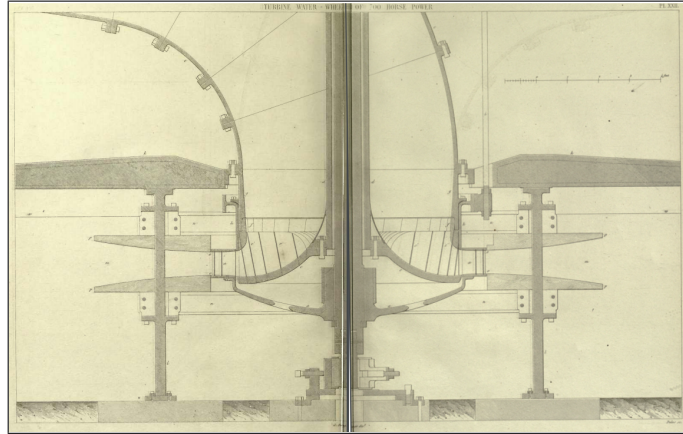
Tredgold је 1862. године сумирао Вентуријеве експерименте и описао је квантитативне ефекте примене конвергентне, дивергентне и цилиндричне цеви на ефекте пражњења резервоара са водом [10].



Слика 1.3: Прави конусни дифузор који је испитивао Francis [11].

Након ових почетних струјно-техничких примена дифузора уочене су и мо-

гућности њихове примене на повећање степена корисности струјних машина. Francis је 1868. године теоријски и експериментално истраживао хидрауличке појаве у правом конусном дифузору. Геометрија дифузора који је испитивао Francis приказана је на Сл.1.3.



Слика 1.4: Дифузорски ефекат у заколу TREMONT турбине [11].

Францисово истраживање из 1868. године је поред правог конусног дифузора обухватило и хидрауличку анализу TREMONT хидрауличне турбине која у свом заколу користи дифузорски ефекат. На Сл.1.4 се може видети дифузорско заколо TREMONT турбине, које заједно са радним колом формира проточни тракт турбине. Геометрија проточног тракта ове турбине има конвергентни улазни део слично геометрији конусног дифузора приказаног на Сл.1.3. Почетна Францисова истраживања представљала су основу за развој савремених реакцијских турбина. Францисов дугогодишњи рад је резултирао развојем и конструкцијом веома ефикасне реакцијске турбине са сложеном геометријом радног кола, која је у његову част названа Францисова турбина. Ова турбина има изузетно висок степен корисности и има значајно учешће у укупној светској производњи електричне енергије. Анализа геометрије и поступак пројектовања радног кола Францисове турбине помоћу рачунара изложен је, између осталог, и у раду Novković [12].

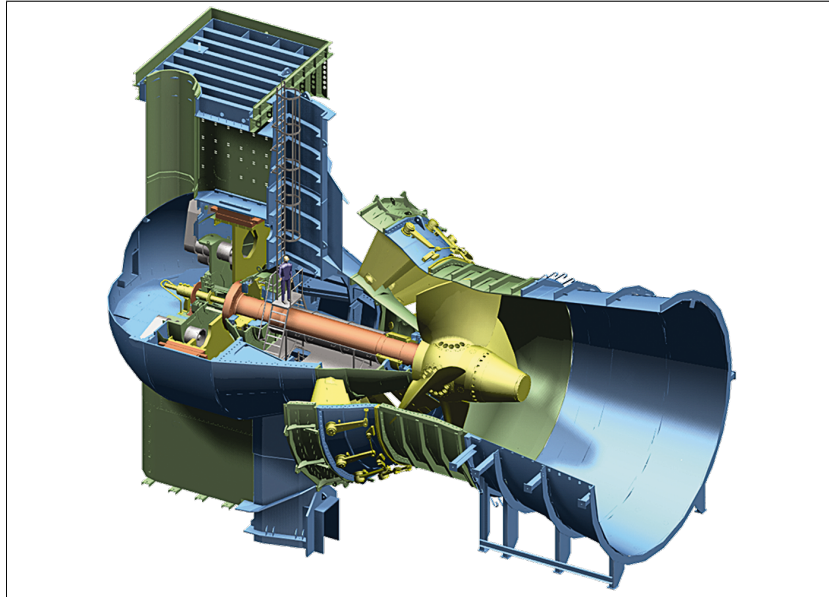
Након горе наведених почетних истраживања, прави конусни дифузори су истраживани применом напреднијих метода, помоћу којих је уочено да ови дифузори имају супериорније енергетске перформансе у односу на закривљене дифузоре некривног попречног пресека. Због изврских енергетских перформанси прави конусни дифузори имају широку струјно-техничку примену.

1.2 Значај и примена правих конусних дифузора

У многим случајевима струјања флуида у техници постоје значајни губици услед недовољног искоришћавања кинетичке енергије флуида. Неопходност струјања флуида да би се обавио неки користан технички рад има за последицу неискоришћавање дела кинетичке енергије флуида. У неким техничким процесима ниво неискоришћене кинетичке енергије значајно смањује степен корисности целог процеса. Спознајом овог феномена настала је потреба за изналажењем могућности његовог превазилажења. Примена дифузора је омогућила да се неискоришћена кинетичка енергија у неким техничким процесима значајно смањи. Дифузори се конструишу са идејом да се у њима неискоришћена кинетичка енергија флуида трансформише у део потенцијалне енергије који је употребљив у датом техничком процесу. Степен трансформације енергије у дифузору описује се коефицијентом притиска дифузора.

Највећи степен трансформације енергије имају прави конусни дифузори, али њихова примена није увек могућа, због чега се у техничким процесима често користе и закривљени дифузори некружног попречног пресека. На пример, иза радног кола хидрауличне турбине је, енергетски гледано, најповољније применити прави конусни дифузор. Међутим, примена правог конусног дифузора иза радног кола хидрауличне турбине је често ограничена расположивим вертикалним простором. Због тога се прибегава савијању и модификацији попречног пресека дифузора, како би се он сместио у расположиви вертикални простор иза радног кола турбине. Примена правих конусних дифузора у брзоходним цевним турбинама углавном нема просторних ограничења, јер се код ових турбина дифузор поставља хоризонтално иза радног кола турбине.

У прибранска хидроенергетска постројења уграђују се цевне турбине великих снага, због чега оне имају значајну процентуалну заступљеност у укупној светској производњи електричне енергије. На Сл.1.5 су илустративно приказане димензије једне такве цевне турбине у односу на димензије човека. Мала процентуална повећања степена корисности оваквих цевних турбина дају значајан пораст количине произведене електричне енергије. Ефикасност правог конусног дифузора се директно одражава на степен корисности турбине, стога је од интереса применити такав прави конусни дифузор са којим се постиже највећа снага турбине. Најзначајнији утицај на излазну снагу турбине имају централни угао ширења и дужина правог конусног дифузора. Са порастом ове две геометријске карактеристике правог конусног дифузора, струјање у дифузору се



Слика 1.5: Прави конусни дифузор цевне турбине НРР Iffezheim у Немачкој, <https://www.andritz.com/hydro-en/hydronews/hydro-news-29/hy-news-hn29-13-bulb-turbines-hydro>.

додатно компликује услед појаве одвајања граничног слоја од зидова дифузора. Тада долази до појаве локалног успоравања струје флуида у граничном слоју и локалног убрзавања струје изван граничног слоја. Ова појава повећава неравномерност расподеле брзине у излазном пресеку дифузора и доводи до смањења ефекта трансформације енергије у њему. У случају вихорног струјања, зависно од јачине вихора, смањује се могућност одвајања граничног слоја од зидова дифузора, услед израженог дејства центрифугалних запреминских сила у граничном слоју.

Уколико је вихор сувише јак, онда перформансе дифузора опадају, због пораста кинетичке енергије на излазу из дифузора. Наиме, јак вихор има значајну обимску компоненту брзине која значајно повећава кинетичку енергију у излазном попречном пресеку дифузора, што је енергетски неповољно. Поред тога, при интензивном вихорном струјању, повећава се дисипација кинетичке енергије. Висок ниво трансформације енергије се остварује у правом конусном дифузору са малим централним углом ширења (око 8°), уз присуство вихорног струјања са умереном јачином вихора. Пројектанти цевних хидрауличних турбина теже примени оваквог типа дифузора, у оној мери у којој то дозвољавају остали пројектни услови. Уколико се примени овакав тип дифузора, онда је у оптималном радном режиму цевне турбине ниво неискоришћене кинетичке енергије флуида на излазу из хидропостројења минималан. Изван оптималног радног режима постројења расте ниво неискоришћене кинетичке енергије флуида услед промене интензитета вихора генерисаног иза радног кола турбине.

1.3 Преглед релевантних постојећих истраживања

У правом конусном дифузору се постиже висок ниво трансформације кинетичке у притисну енергију флуида, због чега је овај тип дифузора постао неизоставан део савремених цевних турбина. Поред цевних турбина, струјно-технички и акустички ефекти правог конусног дифузора налазе примену код мотора са унутрашњим сагоревањем, у процесној и мерно-регулационој опреми, у музичким инструментима итд. Због значајне техничке примене и комплексности струјања, прави конусни дифузори су привукли пажњу многих истраживача. Постојећа истраживања струјања у правим конусним дифузорима се могу грубо поделити на 3 групе:

- Теоријска и експериментална истраживања у почетним фазама развоја и примене ових дифузора. Ова истраживања су вршена током прва три квартала 20. века.
- Моделирање и нумерички прорачуни струјања у дифузорима и њихова валидација експерименталним истраживањима струјног поља помоћу сонди са великим брзинама одзива. Ова истраживања су интензивно вршена током последњег квартала 20. века.
- Примена напредних нумеричких прорачуна турбулентног струјног поља у дифузорима употребом савремене рачунарске технике, и њихова валидација ласерским методама мерења физичких величина струјног поља. Ова истраживања се интензивно врше од почетка 21. века.

У почетним фазама развоја и примене дифузора, истраживачке анализе су се, у складу са могућностима расположиве мерне опреме, сводиле на мерења профила брзина, расподеле притиска и на испитивање енергетских карактеристика односно перформанси дифузора.

1.3.1 Теоријска и експериментална истраживања

Постоји широк спектар основних теоријских и експерименталних анализа перформанси правих конусних дифузора. Из ових основних анализа се могу издвојити радови: Gibson [13], Warner [14], Lyon [15], Cockrell and Markland [16], Petters [17], Patterson [18], Gourzhienko [19] и Squire [20].

Низструјно успоравање струје у дифузору поспешује стварање услова за појаву позитивног градијента притиска у близини зидова дифузора. Због тога,

код дужих конусних дифузора са већим угловима ширења, долази до појаве интензивног одвајања граничног слоја. Пеформансе правих конусних дифузора зависе од дебљине граничног слоја и физике струјања у граничном слоју. Ross and Robertson [21] су изложили емпиријску методу прорачуна низструјног пораста дебљине губитка импулса (енгл. *momentum thickness*) турбулентног граничног слоја са позитивним низструјним градијентом притиска, која се уз одређену модификацију може применити и на гранични слој у правим конусним дифузорима. Та модификација се односи на примену нормализоване дебљине губитка импулса. Нормализовање се врши дељењем дебљине губитка импулса локалним полупречником дифузора.

Утицај услова струјања у граничном слоју на улазу у прави конусни дифузор на ефекте трансформације енергије су истраживали Winternitz and Ramsay [22]. Они су показали да коефицијент притиска и степен корисности дифузора зависе од нормализоване дебљине губитка импулса у улазном пресеку дифузора, без обзира на улазну расподелу брзине при безвихорном струјању.

Robertson and Fraser [23] су истраживали промену дебљине граничног слоја при турбулентном безвихорном струјању, и услове под којима долази до појаве одвајања граничног слоја у правим конусним дифузорима. Они су струјно поље у дифузору поделили на спољашњу зону граничног слоја, чија се дебљина низструјно повећава, и унутрашње језгро са приближно потенцијалним струјањем, чији се пречник низструјно смањује на рачун пораста дебљине граничног слоја. Ово истраживање даје приказ утицаја Рејнолдсовог броја рачунатог за иницијалну дебљину губитка импулса и параметра растојања (рачунатог од улазног пресека у дифузор, у коме владају иницијални струјни параметри) на појаву одвајања граничног слоја у дифузору. Овде је такође показано да се Рејнолдсов број на улазу у дифузор може изразити као производ реципрочне вредности иницијалне нормализоване дебљине губитка импулса и двоструке вредности Рејнолдсовог броја рачунатог за иницијалну дебљину губитка импулса.

У раду Cockrell and Markland [24] је дат израз за приближно одређивање расподеле брзине у излазном пресеку правога конусног дифузора при безвихорном струјању са одвајањем граничног слоја. Експериментално истраживање перформанси правих конусних дифузора различитих централних углова ширења, при безвихорном струјању воде, извели су McDonald and Fox [25]. У овом истраживању су коришћени провидни пластични дифузори, што је омогућило примену једноставних метода за визуелизацију струјница и детекцију појаве одвајања граничног слоја. Ово истраживање је резултирало добијањем опсежне базе дијаграма и номограма, који дају одличан преглед перформанси ширег

спектра правих конусних дифузора, при условима безвихорног струјања нести-шљивог флуида и одвајања граничног слоја.

Истраживање утицаја вихорног струјања на перформансе правих конусних дифузора различитих углова ширења су извели такође McDonald and Fox [26]. У овом истраживању је, између осталог, дато и упоређивање коефицијента притиска при безвихорном и вихорном струјању, са идеалним коефицијентом притиска правога конусног дифузора. При томе је показано да умерени вихор повећава коефицијент притиска дифузора. За одређене вредности јачине вихора и геометријских параметара дифузора, у овом истраживању су добијене вредности коефицијента притиска које су врло близу идеалних вредности.

Паралелно са развојем мерних сонди са загрејаним влакнима настају и прва мерења турбулентног струјног поља у дифузорима са високом фреквенцијом аквизиције. Током последњег квартала 20. века неки истраживачи су мерили статистичке параметре у струјном пољу дифузора. У овом периоду су измерене и прве вредности Рејнолдсових напона у правом конусном дифузору. Та мерења представљају значајан напредак у односу на претходна мерења струјног поља помоћу Пито-Прантлових сонди и пиезометарских манометара. Опсежна мерења у безвихорном струјном пољу правога конусног дифузора, централног угла ширења 8° , применом мерне сонде са загрејаним влакнима је урадио Okwoubi [27]. Дискусија резултата овог мерења је изложена у раду Okwoubi and Azad [28]. Мерења статистичких параметара турбуленције на овом дифузору су у својим тезама радили: Lipka [29], Krueger [30], Hummel [31], Arora [32], Aulakh [33], Singh [34] и Derksen [35]. Сажет преглед резултата тридесетогодишњег експерименталног истраживања струјања у овом дифузору изложио је Azad [36].

Senno et al. [37] су истраживали утицај јачине вихора на процес трансформације енергије у правим конусним дифузорима. При томе су утврдили да се највећа вредност коефицијента притиска остварује у правом конусном дифузору централног угла ширења 8° уз присуство вихора умерене јачине. Nakamura et al. [38] су истраживали енергетске перформансе правих конусних дифузора у условима асиметричног улазног профила брзине. На излазном попречном пресеку ових дифузора су током експеримената монтиране цилиндричне цеви (енгл. *tailpipe*). При томе су изведени извесни закључци о утицају асиметрије улазног струјања и геометријских параметара дифузора на процес трансформације енергије у дифузору.

Мерења развитка турбулентног граничног слоја у условима вихорног струјања, у дифузору централног угла ширења 20° извели су Clausen et al. [39].

Табеларне вредности величина које су том приликом измерене су доступне у ERCOFTAC бази података и користе се за валидацију нумеричких прорачуна вихорног струјања у правом конусном дифузору. Kagunakaran and Gansen [40] су измерили профиле брзине и коефицијент притиска у правом конусном дифузору са централним углом ширења 5° применом сонде са лоптастим врхом и пет рупица.

Прогресивни развој рачунарске технике почетком 21. века резултирао је појавом моћних кластера, који због високе цене и ограничене дистрибуције још увек нису доступни мањим истраживачким институцијама. Примена оваквих рачунара је омогућила да се турбулентна струјања у правим конусним дифузорима решавају применом директне нумеричке симулације DNS (енгл. *Direct Numerical Simulation*) Навије-Стоксових једначина. Lee and Sung [41] су применили методу директне нумеричке симулације на безвихорно струјање у истом дифузору на коме је експериментална истраживања спровео Okwoubi [27]. DNS резултати су приближно исте тачности као и експериментална истраживања. Због тога се резултати које су добили Lee and Sung могу примењивати за валидацију нумеричких прорачуна, равноправно са експерименталним резултатима које је добио Okwoubi [27].

Ласерске методе мерења параметара струјног поља се интензивније користе од почетка 21. века. Илић [8] је применом ласер доплер анемометрије (LDA) мерио временски осредњено поље брзине при турбулентном вихорном струјању у правим конусним дифузорима различитих углова ширења. Експериментални резултати који су проистекли из горе наведених истраживања чине опширну базу података, која се може употребити за валидацију нумеричких прорачуна турбулентног безвихорног и вихорног струјања у правим конусним дифузорима.

1.3.2 Моделирање и нумерички прорачуни струјања

Турбулентно струјање у правим конусним дифузорима, као и већину турбулентних струјања у природи карактерише анизотропно стање турбулентних напона. Степен анизотропије турбулентних напона зависи од типа и класе анализираног струјања. Уколико се турбулентна струјања са анизотропним стањем турбулентних напона моделирају применом линеарних модела турбуленције LEVM (енгл. *Linear Eddy-Viscosity Models*), онда се у већини случајева добијају значајне грешке моделирања. Линеарно моделирање турбулентних напона заснива се на Бусинесковој хипотези [42] и примени скаларне турбулентне вискозности. Примена скаларне турбулентне вискозности захтева поклапање главних праваца тензора турбулентних напона и тензора просечних брзина де-

формисања. Уколико се ови правци не поклапају, онда се множењем главних вредности просечних брзина деформисања са турбулентном вискозности добијају тачне вредности главних турбулентних напона ако и само ако су тензори турбулентних напона и просечних брзина деформисања изотропни. Ова чињеница је главни разлог због кога линеарни модели турбуленције дају добре резултате само при турбулентном струјању са изотропним стањем турбулентних напона. Уколико је при турбулентном струјању стање турбулентних напона анизотропно онда се применом линеарних модела турбуленције добијају слаби резултати у предвиђању струјног поља. Низ постојећих истраживања моделирања и нумеричких прорачуна струјања у правим конусним дифузорима потврђује ову чињеницу. Део тих истраживања је овде изложен.

Yongsen et al. [43] су применом линеарног $k - \varepsilon$ модела турбуленције [44] урадили нумерички прорачун турбулентног безвихорног струјања у правом конусном дифузору. Централни угао ширења дифузора који су анализирали износи 8° , однос површина улазног и излазног пресека 4:1 и пречник на улазу 101,6 mm. Они су добили извесна одступања између нумеричког и експерименталног поља брзине у граничном слоју и централној зони дифузора. Слична одступања између нумеричког и експерименталног поља брзине на истом дифузору, применом линеарног $k - \varepsilon$ модела су добили Novković et al. [45]. Они су на овом дифузору упоредили и нумеричке прорачуне применом софтвера OpenFOAM и Ansys CFX, при чему су постигли добро слагање добијених резултата. У оба наведена случаја анализирано је безвихорно струјање у Азадовом дифузору који је експериментално истраживан од стране низа истраживача са Машинског факултета Универзитета у Манитоби.

Zhu and Shih [46] су на безвихорно струјање у овом дифузору применили сопствени нелинеарни $k - \varepsilon$ модел турбуленције који се заснива на нелинеарном моделирању турбулентних напона и претпоставци о изотропној турбулентној вискозности (енгл. *Nonlinear Eddy-Viscosity Model*) NLEVM. Zhu and Shih су постигли значајно боље слагање нумеричких и експериментално добијених резултата у граничном слоју и језгру дифузора. Како нелинеарни модели турбуленције адекватније описују анизотропију турбулентних напона, то наведени прорачуни потврђују извесно присуство анизотропије турбулентних напона у граничном слоју и језгру анализираних дифузора.

Armfield and Fletcher [47] су такође анализирани недостатке примене стандардног (линеарног) $k - \varepsilon$ модела на прорачун струјања у правим конусним дифузорима. Они су упоредили резултате добијене применом стандардног $k - \varepsilon$ модела и алгебарског напонског модела ARSM (енгл. *Algebraic Stress Model*).

Алгебарски напонски модел који су користили Armfield and Fletcher заснива се на концепту физичке апроксимације диференцијалних чланова пуног напонског модела. Ову апроксимацију је предложио Rodi [48]. Armfield and Fletcher су за експерименталну валидацију добијених нумеричких резултата користили тестни пример вихорног струјања у дифузору који су формирали Clausen et al. [39] и тестни пример безвихорног струјања у дифузору који су формирали Azad and Okwoubi [28]. При томе су закључили да линеарни $k - \varepsilon$ модел даје слабе резултате при вихорном струјању. Слабе резултате применом стандардног $k - \varepsilon$ модела на истом тестном примеру су добили и Novković et al. [49]. Алгебарски модел који су Armfield and Fletcher применили на тестни пример безвихорног струјања је дао боље резултате у предвиђању поља брзине, а слабије резултате у предвиђању поља турбулентних напона. Још слабије резултате у предвиђању турбулентних напона на истом тестном примеру су добили Novković et al. [50] применом стандардног $k - \varepsilon$ модела турбуленције.

На основу ових анализа може да се закључи да је при моделирању овог струјања лакше предвидети временски осредњено поље брзине него временски осредњено поље турбулентних напона. Поред тога, интересантна је чињеница да је постигнуто добро предвиђање брзинског поља, иако је предвиђање поља турбулентних напона слабо. Ово наводи на закључак да у Рејнолдсовим једначинама промене количине кретања поред турбулентних напона постоји и значајан уицај осталих динамичких ефеката на динамику овог струјања. Тачност нумеричког прорачуна поља брзине има круцијалан значај у предвиђању енергетских перформанси дифузора, те је стога повољно што је процес моделирања струјања у дифузорима тачнији у погледу предвиђања поља брзине.

Недостатак примене линеарних RANS модела на струјање са анизотропним стањем турбулентних напона је изложио Pore [51]. Pore је поставку линеарних RANS модела турбуленције тестирао на прорачуну хомогеног смицајног турбулентног струјања, које су применом специјалне струјно-техничке опреме формирали Sampragne et al. [52]. Pore је при томе анализирао карактеристике девијаторског дела тензора турбулентних напона моделираног применом линеарних и нелинеарних метода. У овом теоријском истраживању је изложен и развој девијаторског дела тензора турбулентног напона, односно тензора анизотропности у полином кинематичких тензора са непознатим скаларним коефицијентима. Изложени развој представља уопштење нелинеарних модела турбуленције.

Boynous [53] је урадио нумеричке прорачуне вихорног струјања у правим конусним дифузорима које су експериментално истраживали Clausen et al. [39].

Вонус је користио линеарне двоједначинске моделе $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ и истраживао је утицај избора солвера на брзину конвергенције и тачност добијеног решења. При томе је закључио да избор солвера, односно методе за решавање формираног система линеарних једначина, значајно утиче на брзину конвергенције решења, а незнатно на тачност добијеног решења. Одступања нумеричких од експерименталних резултата која је добио Вонус применом OpenFOAM софтвера су слична одступањима која су на истом тестном примеру добили Novković et al. [49] применом софтвера Ansys CFX. Како су Вонус [53] and Novković et al. [49] користили линеарне двоједначинске моделе турбуленције може да се закључи да је главни разлог појаве одступања између нумеричких и експерименталних резултата присуство значајних грешака моделирања, јер су применом различитих мрежа, различитих солвера, различитих софтвера, али истих модела турбуленције добијена слична одступања. У обе наведене анализе добијена су већа одступања низструјно у другој половини струјног поља дифузора. У овој зони струјног поља је нестационарност струјања изражена у већем степену. Како су Вонус и Novković et al. нумеричке прорачуне извели под претпоставком стационарног струјања, то примењена претпоставка о стационарности струјања може бити један од разлога појаве слабијих резултата у овој зони струјања. Нумерички прорачуни које су урадили Вонус [53] и Novković et al. [49] потврђују недостатке примене линеарних модела турбуленције на ви-хорно струјање.

Проблем ефикасног моделирања турбуленције RANS приступом потиче од немогућности затварања система парцијалних диференцијалних једначина транспорта турбулентних напона што је, између осталог, изложио и Novković [54]. Због тога се прибегава увођењу физичких апроксимација у појединим члановима ових једначина, како би се постављени систем затворио [7]. Дакле, проблем анизотропности турбулентних напона се RANS приступом не може егзактно решити, већ се моделирањем добијају приближна решења. Ако се увођење физичких претпоставки у поједине чланове система транспортних једначина за турбулентне напоне изврши тако да се добије упрошћен (али затворен) систем парцијалних диференцијалних једначина, онда такав систем чини математичку поставку пуног напонског модела турбуленције RSM (енгл. *Full Reynolds Stress Model*). Зависно од физике уведених претпоставки добијају се различите верзије пуног напонског модела турбуленције. Са теоријске тачке гледишта, пуни напонски модели имају највећи потенцијал у погледу тачности моделирања анизотропије турбулентних напона.

Нумеричке прорачуне струјања у правим конусним дифузорима применом

пет различитих модела турбуленције и коришћењем софтвера Ansys FLUENT су урадили Dhiman et al. [55]. Они су на тестном примеру безвихорног струјања [36] и тестном примеру вихорног струјања [39] тестирали четири линеарна двоједначинска модела и пуни напонски модел турбуленције чије податке нису навели у раду. При томе нису користили ниједан нелинеарни модел. На тестном примеру безвихорног струјања урадили су само нумерички прорачун коефицијента притиска, док су тестни пример вихорног струјања детаљније анализирали. На тестном примеру вихорног струјања постигли су боље резултате у предвиђању поља брзине и кофицијента притиска, а слабије резултате у предвиђању поља турбулентних напона. Добре резултате у предвиђању аксијалног профила брзине су постигли применом пуног напонског модела. Најбоље резултате у предвиђању поља турбулентних напона нису постигли применом пуног напонског модела, већ применом стандардног $k - \epsilon$ модела.

Примена пуних напонских модела турбуленције захтева нумеричко решавање система парцијалних диференцијалних једначина за напоне, што значајно усложњава математички модел динамике струјања, и често доводи до проблема са конвергенцијом решења [56]. Анализа коју су извели Dhiman et al. [55] потврђује ову чињеницу. Поред тога, не треба заборавити ни чињеницу да једначине пуног напонског модела нису егзактне, већ су емпиријске засноване на увођењу одређених упрошћења. Novković et al. [50] су за предвиђање турбулентних напона на тестном примеру безвихорног струјања у правом конусном дифузору применили LRR (Launder-Reese-Rodi) пуни напонски модел. Овде су такође добијена значајна одступања између нумеричких и експерименталних вредности поља турбулентних напона. У погледу предвиђања турбулентних напона стандардни $k - \epsilon$ модел је дао боље резултате од пуног напонског модела и у овој анализи. Novković et al. [50] су у овом раду уочили да постоји значајан утицај вредности ТКЕ на степен анизотропности турбулентних напона моделираних применом Бусинескове хипотезе. Турбулентна кинетичка енергија достиже максималне вредности на ивици спољашње зоне граничног слоја [41]. Novković et al. [50] су постигли најбоље слагање нумеричких и експерименталних резултата поља брзине управо у овој зони струјног поља.

Применом поступка директне нумеричке симулације Навије-Стоксових једначина добијају се најтачнији нумерички прорачуни турбулентног струјног тока. Међутим, примена овог поступка захтева анагажовање рачунарских ресурса који многоструко превазилазе ресурсе садашњих персоналних рачунара, чак и када се симулира турбулентно струјање у веома малом струјном домену и са малим вредностима Рејнолдсовог броја. Директне нумеричке симулације без-

вихорног струјања у правим конусним дифузорима централних углова ширења $2^\circ, 4^\circ$ и 8° су урадили Lee et al. [41]. Они су прорачуне применом DNS урадили на мрежи од 55600545 чворних тачака у распону Рејнолдсовог броја од 7500 до 15000. При томе су формирали базу података која се може искористити за валидацију нумеричких прорачуна добијених моделирањем турбулентног струјања.

Schoenmaker [57] је урадио нумерички прорачун на тестном примеру безвихорног струјања у правом конусном дифузору централног угла ширења 8° применом софтвера Ansys FLUENT. Schoenmaker је нумеричке прорачуне извео применом линеарног $k - \varepsilon$, линеарног $k - \omega$ [58] и RSM модела турбуленције, и добијене резултате је упоредио са DNS резултатима које су добили Lee et al [41]. Овде су најбољи резултати у предвиђању осредњеног поља брзине постигнути применом $k - \omega$ модела турбуленције, док су применом RSM и $k - \varepsilon$ модела добијени готово идентични резултати. Наведеном анализом је још једном показано да пуни напонски модел не остварује очекивано бољи резултат у односу на $k - \varepsilon$ модел турбуленције. У погледу предвиђања турбулентних напона низструјно од улазног пресека добијени су бољи резултати од резултата које су добили Novković et al. [50]. Треба истаћи да је Schoenmaker анализирао струјање при Рејнолдсовом броју који је десетоструко мањи од Рејнолдсовог броја струјања које су анализирали Novković et al. [50]. У обе ове анализе је добијено добро слагање напона у близини зида и у близини осе дифузора, а слабије на средини распона између осе и зида дифузора. Schoenmaker је показао да се применом $k - \varepsilon$ модела низструјно повећава одступање турбулентних напона, док је овај феномен мање изражен код $k - \omega$ модела турбуленције. Пуни напонски модел је и у овој анализи дао слабије предвиђање турбулентних напона од двоједначинског $k - \omega$ модела. Schoenmaker није физички анализирао утицаје појединих турбулентних напона на структуру и анизотропију тензора турбулентних напона.

На основу горе изложених истраживања може да се закључи да примена линеарних RANS модела турбуленције на струјања са анизотропним стањем турбулентних напона даје слабе резултате. Иако пуни напонски модели, теоријски гледано, имају значајан потенцијал у предвиђању анизотропије турбулентних напона, њиховом применом се често добијају резултати слабији од очекиваних. У већини изложених истраживања као разлог слабих резултата пуног напонског модела се углавном наводи сложен диференцијални облик једначина за напоне. У покушају да се превазиђе наведени недостатак пуних напонских модела увођене су одређене физичке апроксимације како би се избегао диференцијални

облик једначина пуног напонског модела. Тако су полазећи од пуних напонских модела настали алгебарски напонски модели турбуленције ARSM (енгл. *Algebraic Reynolds Stress Models*), код којих једначине за турбулентне напоне немају диференцијални већ алгебарски облик. Wolfgang Rodi се сматра пионером развоја алгебарских модела турбуленције [48].

Са друге стране линеарни модели турбуленције, с обзиром на претпоставку о изотропној турбулентној вискозности дају прилично добре резултате у одређеним класама турбулентних струјања. Извесни број истраживача је стога надоградњом линеарних модела покушавао ублажити проблем непоклапања главних праваца тензора турбулентног напона и главних праваца тензора просечних брзина деформисања. Надоградња линеарних модела турбуленције је вршена и са циљем да се ублажи прекомерна продукција турбулентне кинетичке енергије [59]. Тако су увођењем одређених хипотеза линеарне конститивне релације за турбулентне напоне проширене додавањем нелинеарних чланова [60, 51]. Полазну основу за овакав приступ је чинила аналогија између напонског стања вискоеластичних флуида и напонског стања турбуленције [61] и теорија примене тензорских полинома у механици континуума [62]. Ова методологија чини основу развоја нелинеарних модела турбуленције заснованих на примени турбулентне вискозности - NLEVM. John Lumley и Stephen Pope се сматрају пионирима развоја ових модела турбуленције [63]. Дакле, може се закључити да су се током низа година истраживања развиле две значајне тенденције у моделирању турбуленције RANS приступом. Прва, коју је поставио Rodi, односи се на упрошћавање диференцијалних пуних напонских модела, и друга, коју су поставили Lumley and Pope, подразумева надоградњу линеарних модела турбуленције додавањем нелинеарних чланова. Резултат прве тенденције у развоју RANS модела су ARSM модели турбуленције, а резултат друге тенденције су NLEVM модели турбуленције [64].

Под именом ARSM модели турбуленције се подразумевају имплицитни алгебарски напонски модели турбуленције, код којих су турбулентни напони имплицитно задани кроз систем алгебарских једначина. За разлику од ових модела, код NLEVM модела турбуленције турбулентни напони су задани експлицитно, због чега се не захтева решавање система алгебарских једначина по непознатим турбулентним напонима. Овакав приступ значајно смањује ангажовање рачунарских ресурса при нумеричким прорачунима и побољшава нумеричку стабилност.

Поред имплицитних напонских модела развијени су и експлицитни напонски модели EARSM, (енгл. *Explicit Algebraic Reynolds Stress Models*). Ови модели

су слични NLEVM моделима, јер су турбуленти напони и код ових модела експлицитно изражени. У погледу експлицитности и начина примене, EARSM модели и NLEVM модели су веома слични, али ипак између њих постоји значајна концепцијска разлика. Наиме, као што је већ наведено, NLEVM модели се заснивају на аналогiji између вискоеластичних и турбулентних напона, док се EARSM модели заснивају на упрошћавању диференцијалних једначина пуног напонског модела. Због тога у EARSM моделима постоји рефлексија структуре продукционог и редистрибутивног члана из пуног напонског модела, која значајно доприноси моделирању струјања са анизотропним стањем турбулентних напона [65].

EARSM моделе је развијао и тестирао изван број истраживача. При томе су формирана два концепта у погледу двоједначинског моделирања скаларних коефицијената ових модела. Први концепт се заснива на $k - \varepsilon$ приступу и налази ширу примену код унутрашњих струјања, док се други концепт заснива на $k - \omega$ приступу и налази ширу примену код спољашњег опструјавања објеката. Из истраживања према првом концепту се могу издвојити публикације: Gatski and Speziale [66], Xu and Speziale [67] и Jongen et al. [68]. Из постојећих истраживања према другом концепту се могу издвојити публикације: Wallin [69], Wallin and Johansson [70], Hellsten [71] и Menter et al. [72]. Mehdizadeh et al. [73] су тестирали моделе EARSM које су развили Wallin and Johansson [70] и Menter et al. [72] на тестним примерима унутрашњих струјања. Они су, између осталог, користили тестни пример асиметричног раванског дифузора у коме је измерено поље брзине и коефицијент притиска [74, 75]. При томе су EARSM модели дали значајно боље предвиђање коефицијента притиска од линеарног $k - \varepsilon$ модела.

Због тога што су имлицитно задани, ARSM модели пате од могуће лоше условљености система линеарних једначина, што може довести до слабе конвергенције или чак до постојања више решења [76]. Поред тога, ови модели су изведени на претпоставци о хомогеној турбуленцији, док се у пракси често примењују на нехомогену турбуленцију [76]. Због наведених недостатака имплицитних напонских модела, у широј примени су се углавном задржали EARSM и NLEVM модели турбуленције. NLEVM моделе су развијали многи истраживачи. Nisizima and Yoshizawa [77] су развили NLEVM $k - \varepsilon$ модел турбуленције, тако што су анизотропни део тензора Рејнолдсовог напона моделирали применом статистичке теорије апроксимације директне интеракције турбулентних структура (енгл. *DIA-Theory*). Ову теорију је развио амерички теоријски физичар Robert Kraichnan 1959. године. Nisizima и Yoshizawa [77] су развијени модел тестирали на турбулентном струјању у каналу и на Куетовом (енгл. *Couette*)

струјању. Показали су да се на овим струјањима може добро предвидети анизотропија турбулентних напона применом њиховог модела турбуленције.

Speziale је уочио да линеарни модели турбуленције не могу тачно описати струјања која се одвијају под доминантним утицајем разлике у нормалним турбулентним напонима, те је стога предложио сопствени NLEVM k - ε модел [78]. Модел који је предложио Speziale садржи у себи члан који описује продукцију тензора просечних брзина деформисања и који значајно утиче на моделирање анизотропије турбулентних напона. Поред тога, овај модел садржи и члан који укључује ефекат транспорта тензора просечних брзина деформисања. Speziale је развијени модел турбуленције тестирао на струјању у савијеној цеви правоугаоног попречног пресека. При томе је показао да његов модел описује анизотропију турбулентних напона и секундарна струјања у угловима правоугаоне савијене цеви адекватније од линеарног $k - \varepsilon$ модела.

Два претходно изложена модела припадају групи модела NLEVM који Бусинскову хипотезу проширују додавањем квадратичних чланова кинематичких тензора. Даљним развојем NLEVM модела формиран су NLEVM који поред квадратичних чланова садрже и кубне чланове кинематичких тензора. Ови модели су развијени с циљем да се опишу струјања са израженом закривљеношћу струјница (енгл. *streamline curvature*) укључујући и вихорна струјања. Craft et al. [79] су формирали NLEVM који садржи осам скаларних коефицијената и линеарне, квадратичне и кубне чланове кинематичких тензора. Форма NLEVM коју су поставили Craft et al. [79] сматра се општом формом NLEVM, из које се зависно од вредности скаларних коефицијената добијају различите верзије NLEVM модела турбуленције. Craft et al. [79] су калибрисали модел на тестним примерима турбулентног струјања у правом и закривљеном каналу. При томе је добијено добро слагање нумеричких и експерименталних резултата.

Suga [80] је изложио детаљан преглед развоја NLEVM до 1998. године. Развој ових модела је интензивирао у десетогодишњем периоду након појаве модела које су развили Speziale, Nisizima и Yoshizawa. Након овог периода долази до стагнације у развоју ових модела. Новије NLEVM моделе су развили Suga and Abe [81] и Wang and Thangam [82]. Модел који су развили Wang and Thangam је значајан, јер је развијен за моделирање вихорног струјања. Развијени модел је калибрисан на тестном примеру [83] вихорног струјања генерисаног вискозним ефектима при ротацији праве кружне цеви. При томе је добијено одлично слагање нумеричког и експерименталног профила аксијалне компоненте вектора брзине. У предвиђању профила обимске компоненте брзине добијени су слабији резултати. Турбулентни напони нису упоређивани.

Поред нелинеарних модела турбуленције, који су настали као покушај да се анизотропија турбулентног напона опише нелинеарним математичким операцијама над кинематичким тензорима, развили су се и модели код којих се анизотропност турбулентног напона моделира помоћу анизотропног тензора турбулентне вискозности. Моделе турбуленције настале на оваквом приступу карактерише претпоставка о анизотропној турбулентној вискозности и претпоставка о линеарној вези између компоненти девијатора тензора турбулентног напона и компоненти тензора просечне брзине деформисања. Због тога се ови модели зову модели турбуленције са анизотропном турбулентном вискозности (енгл. *Anisotropic Eddy Viscosity Models*) AEVM. Наведени модели налазе примену код турбулентних струјања са израженом анизотропношћу тензора турбулентног напона, која се не може адекватно описати члановима вишег реда нелинеарних модела турбуленције. У таквим случајевима струјања се променом одређених коефицијената турбулентне вискозности постиже већи утицај на дату компоненту турбулентног напона од утицаја који се остварује међусобним узастопним множењима компоненти кинематичких тензора.

Истраживања AEVM су мање заступљена од истраживања NLEVM, због тога што се NLEVM ослањају на познати конститутивни закон за вискоеластични флуид, док се AEVM ослањају углавном на емпиријске изразе и експериментална истраживања. Општа дискусија о структури тензора турбулентне вискозности при турбулентном струјању са анизотропним стањем турбулентног напона је дата у раду Carati and Cabot [84]. У овом раду је изложена анализа која показује како симетрије тензора и симетрије струјног поља доприносе рапидном смањењу броја компоненти тензора турбулентне вискозности, који је у општем случају тензор 4 реда и има 81 компоненту. Примену концепта анизотропне турбулентне вискозности на нестационарно турбулентно струјање са израженим одвајањем граничног слоја су анализирали Bourguet et. all [85]. У овом истраживању је дат критички осврт на примену Бусинескове хипотезе у погледу утицаја прецењивања кинетичке енергије (енгл. *TKE overprediction*) на стање турбулентних напона. Моделирање анизотропности турбулентне вискозности је веома комплексан физички проблем, који један број истраживача врши применом експерименталних истраживања, док се изванредан број истраживача определио за теоријска истраживања.

Теоријска истраживања анизотропности турбулентне вискозности су повезана на феноменима нелокалног турбулентног преноса. Наиме, сви горе изложени модели припадају групи локалних модела турбуленције код којих се физичке величине струјања израчунавају локално у датој тачки струјног поља и датом

тренутку времена (енгл. *local turbulence models*). Ова група модела не узима у обзир евентуално постојање утицаја физичких величина у осталим тачкама струјног поља и у осталим тренутцима времена на физичке величине у датој тачки струјног поља и датом тренутку времена. Модели турбуленције са ефектима временске нелокалности (енгл. *temporal nonlocal effect*) у датој тачки струјног поља обухватају утицај физичких величина у прошлим тренуцима времена на физичке величине у датом тренутку времена. Ови модели се називају и моделима турбуленције са "историјским" ефектом (енгл. *history effect*), или модели са временским корелацијама физичких величина.

Најсавременији AEVM модел турбуленције који обухвата теоријско истраживање анизотропности турбулентне вискозности применом ефеката временски нелокалног турбулентног преноса је развио Hamba [65]. Овај модел је значајан за тему ове дисертације, јер је развијен с циљем да се у прорачун вихорног струјања у правој цеви кружног попречног пресека укључе ефекти временске нелокалности компоненти девијатора тензора турбулентног напона. На значајан утицај временске нелокалности на динамику вихорног струјања у правој кружној цеви је указао Steenbergen [86]. Hamba је утицај временске нелокалности обухватио између осталог и увођењем обимске компоненте просечне брзине струјања у скаларне коефицијенте модела. Уколико је струјање безвихорно онда је обимска компонента просечне брзине струјања једнака нули, и у том случају се овај модел своди на линеарни $k - \epsilon$ модел турбуленције. Овај модел има изражен утицај на анизотропност турбулентних напона при вихорном струјању, што је значајно за тему ове дисертације. При томе се уведени утицај на анизотропност турбулентних напона заснива на временској нелокалности, која је при вихорном струјању значајно изражена. Hamba је развијени модел калибрирао на тестном примеру вихорног струјања у правој цеви, који је формирао Steenbergen. При томе је постигао значајно боље резултате од резултата које дају постојећи линеарни модели турбуленције.

1.4 Мотивација за израду дисертације

У досадашњим изложеним истраживањима струјања нестишљивог флуида у правим конусним дифузорима изоловане су физичке појаве које неповољно утичу на перформансе правог конусног дифузора. Појава одвајања граничног слоја доводи до појаве макро вртлога, као нестационарне физичке појаве, која значајно смањује енергетске перформансе дифузора. Појава вихорног струјања у дифузору доприноси спречавању одвајања граничног слоја, услед значајног

присуства центрифугалних запреминских сила које делују на флуид у граничном слоју. Присуство вихорног струјања са великом јачином вихора значајно смањује укупну струјну енергију низструјно у зони око осе дифузора, што може резултирати настанком повратног струјања у овој зони струјног поља. Ова физичка појава доводи до стварања нестационарног вихорног језгра са променљивом фреквенцијом осциловања притиска, што ствара услове за појаву резонантних осцилација на покретним деловима хидроенергетског постројења. Овакве осцилације значајно смањују енергетску ефикасност, а често доводе и до хаварије хидроенергетског постројења. Теоријским, експерименталним и нумеричким истраживањима је утврђено да се високе енергетске перформансе остварују применом дифузора са централним углом ширења 8° при умереној јачини вихора. У таквим условима струјања присуство нестационарних струјних ефеката у дифузору је технички занемарљиво, због чега се ово струјање са инжењерског аспекта може сматрати стационарним струјањем.

Свако хидроенергетско постројење се пројектује за рад у оптималном радном режиму у коме владају стационарни услови струјања. Процес пројектовања је постао незамислив без примене рачунара. Помоћу рачунара се поред израде радионичке техничке документације и делова могу симуларати и радни услови хидроенергетског постројења за стационарни пројектни радни режим. У процесу нумеричких симулација пројектног радног режима могућа је брза измена одређеног конструктивног параметра у циљу повећања енергетске ефикасности, а затим и брза провера постигнутих резултата. Да би провера постигнутих резултата одговарала стварности, неопходно је да нумерички прорачун хидроенергетског постројења у стационарном пројектном радном режиму буде валидан. Да би наведени нумерички прорачун био валидан, непоходно је, између осталог, тачно нумерички прорачунати комплексно струјно поље у правом конусном дифузору.

У досадашњим нумеричким прорачунима који су овде изложени је утврђено да стандардни линеарни $k - \varepsilon$ модел турбуленције остварује добро предвиђање поља брзине и притиска у условима безвихорног струјања у правом конусном дифузору у коме нема одвајања граничног слоја. Као што је већ речено, један од главних циљева пројектовања хидроенергетског постројења је стационаран рад у пројектном радном режиму, због чега се избегава примена дифузора са израженим одвајањем граничног слоја. Поред тога, стандардни линеарни $k - \varepsilon$ модел је најшире коришћени модел турбуленције при инжењерским симулацијама струјања у остатку хидроенергетског постројења, односно у хидрауличној турбини. Дакле, са инжењерске тачке гледишта стандардни (линеарни) $k - \varepsilon$

модел је применљив на струјни домен целог хидроенергетског постројења у условима безвихорног струјања у дифузору. Међутим, изложеним постојећим истраживањима је показано да стандардни $k - \varepsilon$ модел даје слабо предвиђање поља брзине и притиска при вихорном струјању у дифузору. Стога овај модел није применљив на симулацију целог хидроенергетског постројења уколико је струјање у његовом дифузору вихорно. Модел турбуленције који развио Fujihira Hamba [65] остварује добре резултате при вихорном струјању у цеви, док се при безвихорном струјању може свести на стандардни линеарни $k - \varepsilon$ модел турбуленције.

Из изложених чињеница је проистекла и мотивација за израду ове дисертације с циљем да се Хамбин модел турбуленције имплементира у некомерцијални софтвер отвореног кода OpenFOAM и да се изврши рекалибрација овог модела на услове вихорног струјања у правим конусним дифузорима. На тај начин би се развио поузданији поступак нумеричког прорачуна хидроенергетског постројења. Развијени поступак прорачуна би био универзалан у смислу присуства вихорног или безвихорног струјања у прорачунском струјном домену и инваријантан у односу на резултате стандардног $k - \varepsilon$ модела у условима безвихорног струјања. На овај начин би се истим поступком прорачуна, тј. истим моделом турбуленције остварили бољи резултати при прорачуну вихорног струјања, при чему би се задржали постојећи добри резултати стандардног $k - \varepsilon$ модела при прорачуну безвихорног струјања. Поред тога, развијени прорачун би био доступан пројектантима без комерцијалних ограничења, јер би био имплементиран у оквиру некомерцијалног софтвера отвореног кода.

2 Основне једначине изотермског струјања нестишљивог флуида

Струјања нестишљивог флуида која су присутна у многим техничким уређајима се описују применом три основна физичка закона струјања: законом о одржању масе, законом о промени количине кретања и законом о одржању енергије. Како је тема ове дисертације изотермско струјање нестишљивог флуида у правим конусним дифузорима, то закон о одржању енергије флуида овде није коришћен. У дисертацији су коришћени закон о одржању масе и закон о промени количине кретања. Из ова два физичка закона проистичу основне једначине струјања нестишљивог флуида, које су коришћене за моделирање и нумеричке прорачуне струјања у овој дисертацији. Ова два закона су укратко изложена у наставку.

2.1 Закон о одржању масе - једначина континуитета

Закон о одржању масе материје подразумева непроменљивост масе у било ком физичко-хемијском процесу (струјање, хемијске реакције, топлотни процеси итд). У природи постоје разни хемијски процеси разградње материје при којима је збир маса појединих компоненти насталих таквом разградњом увек једнак почетној маси материје од које су ти процеси разградње започети. При струјању флуида, флуид као материја може да мења свој облик у простору, да се хемијски разграђује и да мења агрегатна стања, али му је маса увек константна, што се описује једначином о одржању масе

$$\frac{Dm}{Dt} = 0, \quad (2.1)$$

при чему је $\frac{D(\dots)}{Dt}$ материјални извод величине у загради.

Уколико при процесу струјања не постоје процеси хемијске разградње флуида и промене агрегатних стања, онда из закона о одржању масе (2.1), следи једначина континуитета за једнофазно струјање стишљивог флуида, која има следећи облик

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0. \quad (2.2)$$

Овај израз се за случај струјања нестишљивог флуида своди на следећу једначину

$$\nabla \cdot \underline{u} = 0. \quad (2.3)$$

Једначина (2.3) се применом индексне нотације може написати у следећем облику

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0. \quad (2.4)$$

2.2 Закон о промени количине кретања - Навије-Стоксове једначине

Природа кретања флуида у струјном пољу зависи, између осталог, и од размене количине кретања између флуидних делића. Физичка појава промене количине кретања флуидних делића услед међудејства њихових молекула се испољава у виду појаве молекуларне вискозности која може бити динамичка (μ) или кинематичка (ν). Струјно поље у коме флуидни делићи међусобно размењују количину кретања само под утицајем молекуларне вискозности се зове ламинарно струјно поље. Молекуларна вискозност је изотропна тензорска физичка особина флуида која, зависно од температуре флуида, може бити хомогена или нехомогена. Промена количине кретања флуидних делића у ламинарном струјном пољу дефинише се векторском једначином промене количине кретања

$$\rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = \rho \underline{f} + \nabla \cdot \underline{\sigma}, \quad (2.5)$$

која може да се напише у индексној нотацији, када даје следеће три једначине

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}; \quad (2.6)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

које се зову Навије-Стоксове једначине. У горњим једначинама f_i су компоненте вектора запреминских сила које делују на флуид, а σ_{ij} су компоненте тензора

напона у флуиду дефинисане Њутновом хипотезом о напонима према изразу

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} - \frac{2}{3}\mu\delta_{ij} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right). \quad (2.7)$$

Овај израз се при струјању нестишљивог флуида, сходно једначини континуитета (2.4) своди на следећу једначину

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu S_{ij} = -p\delta_{ij} + d_{ij}, \quad (2.8)$$

у којој је: δ_{ij} - Кронекеров симбол, S_{ij} - компонента тензора брзине деформисања и d_{ij} - компонента девијаторског дела тензора напона. Струјно поље у коме флуидни делићи размењују количину кретања под утицајем инерцијалног међудејства струјних структура различитих размера зове се турбулентно струјно поље, а струјање флуида у таквом струјном пољу се зове турбулентно струјање. Примена једначина (2.6) на турбулентно струјање захтева примену довољно ситне просторно-временске дискретизације струјног домена, која ће на адекватан начин обухватити просторно-временске карактеристике најситнијих турбулентних структура. Таквом дискретизацијом се свака турбулентна струјна структура дели на довољно мале подструктуре у којима се размена енергије може описати међумолекуларним деловањем. Овакав приступ доводи до веома сложеног просторно-временског математичког модела чије решавање за већину турбулентних струјања превазилази садашње техничке могућности рачунара.

2.3 Рејнолдсове једначине

Један од начина да се превазиђе проблем нумеричког решавања динамике целог спектра турбулентних структура је примена поступка временског осредњавања једначина (2.6) по целом спектру турбулентних структура. Овакав поступак рапидно смањује сложеност прорачуна турбулентног струјања, али се његовом применом значајно нарушава физичка тачност одређених аспеката прорачуна. Наведеним поступком се добијају временски осредњене једначине промене количине кретања

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + u_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = \langle f_i \rangle + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \sigma_{ij} \rangle}{\partial x_j}; \quad (2.9)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

које се зову Рејнолдсове једначине у част Осборна Рејнолдса који је први применио овај поступак [87]. Просечне компоненте тензора напона $\langle \sigma_{ij} \rangle$ добијене временским осредњавањем имају облик

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = -\langle p \rangle \delta_{ij} + \langle d_{ij} \rangle, \quad (2.10)$$

у коме компоненте девијаторског дела тензора напона

$$\langle d_{ij} \rangle = 2\mu \langle S_{ij} \rangle - \varrho \tau_{ij}, \quad (2.11)$$

укључују и напон непосредног инерцијалног међудејства флуидних делића. Због тога се компоненте девијаторског дела просечног напона у флуиду (2.11) разликују од компоненти тензора вискозног напона у флуиду датих изразом (2.8) за члан $(-\varrho \tau_{ij})$, у коме су

$$\tau_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle \quad (2.12)$$

компоненте тензора Рејнолдсовог или турбулентног напона. Тензор турбулентних напона је симетричан тензор другог реда дат следећим изразом

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

На основу израза (2.10) и (2.11) следи да је просечни напон у флуиду при турбулентном струјању дат изразом

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = -\langle p \rangle \delta_{ij} + 2\mu \langle S_{ij} \rangle - \varrho \tau_{ij}. \quad (2.14)$$

Механизам размене количине кретања флуидних делића при турбулентном струјању се не може свести само на вискозно и непосредно инерцијално локално међудејство флуидних делића. Наиме, при турбулентном струјању постоји и допринос промени количине кретања флуидних делића услед нелокалног међудејства читавих турбулентних структура, који још увек није физички расветљен. Заменом израза (2.14) у једначину (2.9) добијају се Рејнолдсове једначине

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + u_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = \langle f_i \rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2\nu \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}; \quad (2.15)$$

$i = 1, 2, 3,$

које заједно са временски осредњеном једначином континуитета

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad (2.16)$$

и граничним и почетним условима формирају систем од четири нелинеарне парцијалне диференцијалне једначине у којима фигурише десет непознатих физичких величина. У овим једначинама се појављује шест компоненти тензора турбулентног напона које представљају додатне непознате функције осредњених параметара струјања. Зависности турбулентних напона од осредњених параметара струјања није могуће физички егзактно дефинисати. Покушај извођења таквих израза из транспортних једначина за турбулентне напоне доводи до појаве нових непознатих величина, тако да се овај проблем не може затворити егзактним физичко-математичким поступком. Наведени проблем је познат под називом проблем затварања RANS једначина турбуленције (енгл. *turbulence closure problem*). У настојању да се превазиђе овај проблем развијен је процес моделирања компоненти тензора турбулентног напона са циљем да се пронађу такве математичке зависности компоненти тензора турбулентног напона које ће при нумеричким прорачунима турбулентних струјања дати најбоље резултате. Моделирање тензора турбулентног напона је сложен физичко-математички процес у коме се моделирањем формирају компоненте овог тензора и које одређују његове кључне особине попут једнозначности, инваријантности, анизотропности итд.

Тензор турбулентних напона једнозначно дефинише стање турбулентних напона у датој тачки струјног поља, независно од избора координатног система, због чега има особину инваријантности. Овај тензор дефинише тензорско поље турбулентних напона, које је у највећем броју случајева анизотропно поље. Због својства анизотропности, компоненте тензора турбулентног напона имају променљиве вредности при ротацији координатног система у датој тачки струјног поља. Главне вредности тензора турбулентног напона дефинишу степен анизотропности овог тензора, који зависи од вредности његових компоненти. Тензор турбулентног напона се применом поступка декомпозиције може разложити на изотропни и анизотропни део. Главне вредности изотропног дела тензора турбулентног напона су једнаке и формирају сферични део турбулентног напона, док су главне вредности анизотропног дела тензора напона међусобно разликују. На основу прорачуна главних вредности и главних праваца тензора турбулентног напона формира се елипсоид напона, који даје визуелни приказ степена анизотропности турбулентних напона, и који у струјном пољу мења свој облик

и положај. Моделирање турбулентног напона се своди на моделирање изотропног и анизотропног дела тензора турбулентног напона. За анализу степена анизотропности тензора турбулентног напона формира се тензор анизотропности турбулентног напона [51] који се дефинише као однос анизотропног и изотропног дела тензора напона према изразу

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{2k} = \frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{\langle u'_k u'_k \rangle} - \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad (2.17)$$

у коме су a_{ij} компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона које су дате изразом

$$a_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle - \frac{2}{3} k \delta_{ij}. \quad (2.18)$$

На основу компоненти овог тензора може да се изврши анализа степена анизотропности турбулентног струјања применом Ламлијевог троугла или Баричентричне мапе [5, 88]. Основу за моделирање компоненти тензора турбулентног напона применом RANS методологије чини Бусинескова хипотеза, која је укратко описана у наставку.

2.4 Бусинескова хипотеза о турбулентним напонима

Бусинеск (Boussinesq) је 1877. године поставио основе моделирања напона при турбулентном струјању, 20 година пре него што је Рејнолдс извео изразе за турбулентне напоне. Бусинескова теоријска анализа међудејства материје при турбулентном струјању је у суштини теорија непосредног инерцијалног међудејства флуидних делића и у извесној мери је аналогна молекуларно-кинетичкој теорији гасова. Темелје молекуларно-кинетичке теорије гасова је поставио Бернули 1738. године, а најзначајније доприносе овој теорији су дали Максвел и Болцман у периоду од 1860-1898. године. Бусинескова теорија о међудејству материје у турбулентном току је заснована на анализи непосредног међусобног дејства флуидних делића које он назива молекулима. Бусинеск је први применио временско осредњавање физичких величина струјања, које је затим применио на анализу динамичких појава при турбулентном струјању. Бусинескова временски осредњена (просечна) површинска сила је еквивалент турбулентном напону. Бусинеск је просечне површинске силе које делују на уочену елементарну контролну запремину флуида поделио на нормалне силе и

смичуће силе и теоријски је извео следеће изразе за њихово израчунавање [42]

$$N_1 = -p + 2\epsilon \frac{du}{dx}; \quad N_2 = -p + 2\epsilon \frac{dv}{dy}; \quad N_3 = -p + 2\epsilon \frac{dw}{dz}; \quad (2.19)$$

$$T_1 = \epsilon \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right); \quad T_2 = \epsilon \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right); \quad T_3 = \epsilon \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right). \quad (2.20)$$

У горњим једначинама са N_i су обележене нормалне просечне површинске силе, а са T_i су обележене смичуће просечне површинске силе. Индекси 1, 2 и 3 означавају силе у смеровима координатних оса x, y, z , док су u, v, w просечне компоненте вектора брзине. Нормалне просечне силе на елементарну контролну запремину сачињавају изотропни део нормалних површинских сила, чији је интензитет аритметичка средина тих сила

$$N = \frac{1}{3}(N_1 + N_2 + N_3) = -p + 2\epsilon \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right).$$

Уколико је струјање нестишљиво онда из горњег израза следи да је

$$N = -p. \quad (2.21)$$

Сходно уведеним претпоставкама о кретању молекула и у складу са молекуларно-кинетичком теоријом гасова, Бусинеск је претпоставио да је интензитет нормалних сила последица судара флуидних делића који се одвијају без трења. Због тога је Бусинеск нормалне силе свео на зависност од кинетичке енергије флуидног делића

$$N = -\frac{2}{3}K = -\frac{2}{3}\rho k, \quad (2.22)$$

што је аналогно израчунавању притиска гаса применом молекуларно-кинетичке теорије. Оваква претпоставка подразумева интензивне сударе флуидних делића у хомогеној турбуленцији.

Проблем моделирања смичућих сила, односно постојање трења при судару флуидних делића Бусинеск је решио применом аналогije са ламинарним струјањем. Бусинеск је изразе за смичуће силе извео временским осредњавањем тангенцијалних вискозних напона из Навије-Стоксових једначина. При томе је уместо молекуларне вискозности увео променљиви *коэффициент просечне агитације* ϵ који је последица нерегуларности турбулентног струјања. За израчунавање овог коэффициента Бусинеск је предложио израз

$$\epsilon = \rho g \Lambda h_{BV} u_B, \quad (2.23)$$

у коме је ρg јединична тежина флуида, h_B и u_B су карактеристична дужина и брзина, а Λ је коефицијент који зависи од карактеристичне дужине и брзине. За коефицијент ϵ је касније усвојен назив турбулентна вискозност.

Рејнолдс је 20 година после Бусинесковог истраживања [42] математички формулисао "просечне квадрате и производе релативног кретања", који су касније названи турбулентни напони. Могло би се рећи да је Рејнолдс систематизовао Бусинескове закључке о временској променљивости поља брзине при турбулентном струјању, иако није познато да ли је Рејнолдс читао Бусинескова истраживања. Иако су Бусинеск и Рејнолдс били савременици који су радили на сличним истраживањима изводећи веома сличне закључке, они се нису међусобно цитирали [89]. Они у својим истраживањима нису чак ни користили реч турбуленција, већ су користили различите комбинације речи које описују турбуленцију.

Сагласно Бусинесковој хипотези компоненте тензора турбулентног напона су дате следећим изразом

$$\tau_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2\nu_t \langle S_{ij} \rangle, \quad (2.24)$$

који је аналоган изразу за компоненте тензора напона услед вискозности у флуиду (2.8) и у коме су

$$a_{ij} = -2\nu_t \langle S_{ij} \rangle \quad (2.25)$$

компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона. Компоненте просечног укупног напона у флуиду се у складу са изразима (2.10), (2.11) и (2.24) израчунавају према изразу

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{ij} \rangle &= -\langle p \rangle \delta_{ij} + 2\mu \langle S_{ij} \rangle - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} + 2\mu_t \langle S_{ij} \rangle \\ &= -(\langle p \rangle + \frac{2}{3} \rho k) \delta_{ij} + 2\mu_{\text{eff}} \langle S_{ij} \rangle, \end{aligned} \quad (2.26)$$

у коме је $\mu_{\text{eff}} = \mu + \mu_t$ ефективна динамичка вискозност.

У доба када је уведена, Бусинескова хипотеза је представљала генијалан искорак у моделирању турбуленције, поготово ако се узме у обзир да се већина данашњих практичних инжењерских прорачуна турбулентних струјања врши управо применом ове хипотезе. Како је Бусинескова хипотеза проистекла из аналогије са напонима услед вискозности који су дефинисани линеарном везом између напона и брзина деформисања [90]

$$d_{ij} = A_{ijkm} \frac{\partial u_k}{\partial u_m}, \quad (2.27)$$

из које следи и једначина (2.8), то се сви модели турбуленције засновани на овој хипотези зову линеарни модели турбуленције. Основни недостатак Бусинескове хипотезе је претпоставка да две турбулентне структуре размењују количину кретања само локалним градијентним преносом у зони њиховог непосредног контакта, о чему ће бити више речи у једном од наредних параграфа.

2.5 Утицај моделирања турбулентног напона на поља притиска и брзине

При моделирању турбулентног струјања RANS методологијом, поља притиска и брзине се формирају под утицајем дејства просечног напона у флуиду. Компоненте тензора просечног напона у флуиду су дефинисане изразом (2.14) и значајно зависе од компоненти турбулентног напона. Компоненте тензора турбулентног напона се могу израчунати применом Бусинескове хипотезе према изразу (2.24), у коме је претпостављено да је турбулентна вискозност изотропна. Ако се претпостави да се стварна турбулентна вискозност може представити као анизотропан тензор другог реда дат изразом

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} & \nu_{13} \\ \nu_{21} & \nu_{22} & \nu_{23} \\ \nu_{31} & \nu_{32} & \nu_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

онда се може извршити извесна модификација Бусинескове хипотезе, која омогућава да се при моделирању делимично обухвати утицај анизотропије турбулентне вискозности на компоненте тензора турбулентног напона. Поред тога, може да се уведе и додатна модификација којом се коригује моделирање изотропног дела тензора турбулентног напона. Наиме, због претпоставке о локалном турбулентном преносу, Бусинескова хипотеза не обухвата адекватно утицај нелокалности на нормалне турбулентне напоне, односно на ТКЕ која формира изотропни део тензора турбулентног напона. Стварна ТКЕ се, између осталог, разликује од моделиране и због утицаја ове нелокалности. Сходно томе у тензор турбулентног напона могу да се уведу две наведене модификације, тако да он добија следећи облик:

$$\underline{\underline{\tau}} = \frac{2}{3}\rho(k + \Delta k)\underline{\underline{I}} - 2\underline{\underline{T}} \cdot \langle \underline{\underline{S}} \rangle, \quad (2.29)$$

при чему су компоненте тензора турбулентног напона дате изразом

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3}\rho(k + \Delta k)\delta_{ij} - 2\nu_{ik}\langle S_{kj} \rangle. \quad (2.30)$$

Ако је утицај нелокалности на ТКЕ занемарљив и ако је турбулентна вискозност изотропна, онда је $\Delta k = 0$, $\nu_{ik} = 0$ за $i \neq k$ и $\nu_{ik} = \nu_t$ за $i = k$, па се тада израз (2.30), своди на Бусинескову хипотезу дату изразом (2.24). Заменом ових компоненти напона у израз (2.26) добијају се компоненте просечног напона за случај анизотропне тубулентне вискозности и модификоване ТКЕ

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = - \left[\langle p \rangle + \frac{2}{3}\rho(k + \Delta k) \right] \delta_{ij} + 2\mu\langle S_{ij} \rangle + 2\mu_{ik}\langle S_{kj} \rangle.$$

За анализу утицаја појединих чланова последње једначине на поља притиска и брзине, потребно је ову једначину заменити у временски осредњене једначине промене количине кретања (2.9). Заменом се добијају следеће једначине промене количине кретања

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + u_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = & \langle f_i \rangle - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\langle p \rangle}{\rho} + \frac{2}{3}(k + \Delta k) \right] \delta_{ij} \\ & + 2\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \\ & + 2 \frac{\partial \nu_{ik}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \right) \\ & + 2\nu_{ik} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \right) \\ & i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Из једначина (2.31) могу да се изведу извесни закључци о моделирању поља притиска и поља брзине применом RANS методологије. Уочава се да компоненте тензора турбулентне вискозности ν_{ik} које дефинишу анизотропност турбулентне вискозности, представљају факторе у оним члановима парцијалних диференцијалних једначина у којима фигуришу градијенти просечних компоненти вектора брзине. Стога моделирање компоненти тензора турбулентне вискозности ν_{ik} има значајан утицај на тачност прорачуна поља брзине. Због тога се прави значајна грешка у моделирању поља брзине ако се за турбулентну вискозност која је у својој бити анизотропна претпостави да је изотропна. Поред тога, из једначине (2.31) се може закључити да моделирање ТКЕ има утицаја на поље брзине, али не у оној мери у којој то имају коефицијенти турбулентне вискозности. Наиме, моделирање ТКЕ тј. промена њене вредности нема изолован утицај на жељену

компоненту брзине, већ има извештан утицај на сваку од компоненти брзине. Уколико са на вредност ТКЕ дода нека вредност Δk која је константна у целом струјном пољу, онда из једначине (2.31) следи да то нема никаквог утицаја на поље брзине преко једначина промене количине кретања (ЈКК). Ова чињеница је запажена при моделирању и нумеричким прорачунима струјања у дифузорима који су у оквиру ове тезе урађени применом CFD кода OpenFOAM. Уколико вредност Δk за коју се промени ТКЕ није константна у струјном пољу, тада сходно једначинама (2.31) та промена кроз ЈКК има извештан утицај на све компоненте поља вектора брзине. Утицај нелокалности на ТКЕ је стохастичке природе, тако да грешка Δk моделирања ТКЕ није константна у струјном пољу. Овде треба навести и да извесни утицај вредности ТКЕ на поље брзине постоји и кроз моделску једначину за ТКЕ, о којој ће касније бити речи. Из једначина (2.31) се уочава да ТКЕ припада члану у коме фигурише просечни статички притисак, због чега се промена вредности ТКЕ директно одражава на вредност прорачунатог статичког притиска. У већини струјања у техници статички притисак је значајно већи од притиска који потиче од ТКЕ, односно од притиска који се развија услед присуства турбулентног струјања. Према томе, у већини техничких уређаја вредност ТКЕ има занемарљив утицај на поље статичког притиска.

3 Моделирање турбулентних напона

3.1 Линеарни модели турбуленције

Линеарни модели турбуленције подразумевају линеарну зависност између компоненти анизотропног дела тензора турбулентног напона и компоненти тензора просечних брзина деформисања, што је потпуно аналогно Њутновој хипотези о вискозним напонима која важи за ламинарна струјања. Линеарну везу између компоненти анизотропног дела тензора турбулентног напона и компоненти тензора просечних брзина деформисања даје Бусинескова хипотеза. Сви модели турбуленције засновани на Бусинесковој хипотези припадају линеарним моделима турбуленције. Код ових модела турбуленције моделира се само турбулентна вискозност и то под претпоставком да је она скаларна величина. У зависности од степена сложености моделирања турбулентне вискозности као скаларне физичке величине, постоје различите врсте линеарних модела турбуленције. Тако се линеарни модели турбуленције могу поделити на алгебарске, једноједначинске и двоједначинске моделе турбуленције. Алгебарски модели су они код којих је турбулентна вискозност позната функција неког просечног параметра струјања (нпр. бездимензијске координате y^+), те стога није потребно решавање додатних једначина да би се моделирала турбулентна вискозност. Код једноједначинских модела турбуленције решава се једна додатна транспортна једначина, помоћу које се моделира скалар турбулентне вискозности, док је код двоједначинских модела турбуленције у исту ту свху потребно решавати две транспортне једначине. Основни недостатак свих линеарних модела турбуленције је претпоставка о изотропној турбулентној вискозности. Турбулентна вискозност је у стварности анизотропна тензорска физичка величина која зависи од поља брзине. Уколико је стварно стање турбулентних напона изотропно, онда се такво стање напона добија и након нумеричког прорачуна турбулентног струјања било којим линеарним моделом турбуенције. Стога је

Бусинескова хипотеза валидна само за турбулентна струјања са изотропним стањем турбулентних напона. Оваква струјања су веома ретка у природи због чега линеарни модели турбуленције имају ограничену примену. Предност линеарних модела турбуленције се огледа у њиховој једноставности и стабилној конвергенцији решења при нумеричким прорачунима. У индустријским прорачунима турбулентних струјања најширу примену има линеарни двоједначински $k - \varepsilon$ модел турбуленције. Овај модел представља револуционаран искорак у моделирању турбуленције, због чега му је у овој дисертацији посвећена посебна пажња.

3.2 Стандардни $k - \varepsilon$ модел турбуленције

Први двоједначински модел турбуленције је развио Колмогоров 1942. године. Колмогоров је као променљиве користио енергију флукуација (b) и фреквенцију (ω) [91]. Harlow and Nakayama су 1968. године развили свој двоједначински модел турбуленције, при чему су за променљиве употребили турбулентну кинетичку енергију (k) и дисипацију (ε) [91]. Стандардни $k - \varepsilon$ модел турбуленције који се и сада најчешће користи предложили су Launder and Spalding 1974. године [44]. У овом моделу је претпостављено да се скаларна вредност турбулентне вискозности мења у зависности од нивоа турбулентне кинетичке енергије и нивоа дисипације турбулентне кинетичке енергије. Сходно томе промена турбулентне вискозности је сведена само на директну зависност од нормалних турбулентних напона који формирају турбулентну кинетичку енергију, док је директна зависност турбулентне вискозности од тангенцијалних турбулентних напона занемарена. Физички посматрано, ово значи да је размена енергије међудејством флуидних делића у овом моделу сведена само на директан утицај колинеарних флукуација брзина (преко нивоа ТКЕ), док је директан утицај ортогоналних флукуација брзина на турбулентну вискозност занемарен. Ова чињеница представља недостатак при моделирању турбулентних струјања са израженим утицајем тангенцијалних турбулентних напона, који значајно утичу на степен анизотропности турбулентних напона. Занемаривање директног утицаја тангенцијалних турбулентних напона на турбулентну вискозност је један од разлога због кога стандардни двоједначински $k - \varepsilon$ модел турбуленције даје слабе резултате у турбулентном струјном пољу са израженом анизотропности турбулентног напона. Ипак, главни разлог слабих резултата $k - \varepsilon$ модела у анизотропној турбуленцији је претпоставка о изотропној турбулентној вискозности, која је карактеристична за све линеарне моделе

турбуленције изузев AEVM модела. Зависност турбулентне вискозности од нивоа турбулентне кинетичке енергије и од нивоа дисипације је дата следећим изразом:

$$\nu_t = C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (3.1)$$

који се може добити применом димензијске анализе, или анализом физичких утицаја на феномен тубулентне вискозности. Тензор турбулентне вискозности код $k-\varepsilon$ модела турбуленције је изотропан тензор другог реда који има следећи облик

$$\underline{\underline{N}} = \begin{bmatrix} \nu_t & 0 & 0 \\ 0 & \nu_t & 0 \\ 0 & 0 & \nu_t \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

У складу са дефиницијом тензора $\underline{\underline{N}}$ анизотропни део тензора тубулентног напона може да се напише у облику:

$$\underline{\underline{a}} = -2 \underline{\underline{N}} \cdot \langle \underline{\underline{S}} \rangle, \quad (3.3)$$

из кога следе једначине компоненти овог тензора дате изразом (2.25). Да би се једначином (3.1) моделирала турбулентна вискозност потребне су две једначине: једна за турбулентну кинетичку енергију (k), друга за дисипацију (ε). Једначина за турбулентну кинетичку енергију се изводи егзактно из једначине материјалне промене количине кретања вискозног флуида поступком који је, између осталог, изложио и Novković [54]. Ова једначина има следећи облик

$$\begin{aligned} \frac{Dk}{Dt} = & -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\langle p'u'_j \rangle}{\rho} + \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i u'_j \rangle \right) - \langle u'_i u'_j \rangle \langle S_{ij} \rangle \\ & - 2\nu \left(\langle S'_{ij} S'_{ij} \rangle - \frac{\partial \langle S'_{ij} u'_i \rangle}{\partial x_j} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Применом Ајнштајнове конвенције о сабирању по неким индексима и услова симетрије турбулентних напона добија се да је

$$\langle u'_i u'_j \rangle \langle S_{ij} \rangle = \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}, \quad (3.5)$$

$$\langle S'_{ij} S'_{ij} \rangle - \frac{\partial \langle S'_{ij} u'_i \rangle}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.6)$$

Детаљан поступак извођења ових израза је дат у прилогу П.1. Заменом израза (3.5) и (3.6) у израз за материјалну промену турбулентне кинетичке енергије

(3.4) добија се следећа једначина

$$\frac{Dk}{Dt} = \underbrace{-\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}}_{P^k} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle u'_j \left(\frac{p'}{\rho} + \frac{1}{2} u'_i u'_j \right) \right\rangle}_{D_\tau^k} + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j}}_{D_\nu^k} - \underbrace{\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle}_{\varepsilon}, \quad (3.7)$$

у којој је је: P^k - продукција, D_τ^k - тубулентна дифузија флукуацијама притиска и флукуацијама брзина, D_ν^k - молекуларна дифузија и ε - дисипација. Једначина материјалне промене турбулентне кинетичке енергије (3.7) се може егзактно извести и из једначине материјалне промене турбулентних напона [92].

Једначина дисипације турбулентне кинетичке енергије се егзактно изводи из једначине материјалне промене количине кретања вискозног флуида на начин који је описан у наставку ове анализе.

На основу израза (2.8) компоненте тензора напона услед вискозности при струјању нестишљивог флуида могу да се напишу у облику

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.8)$$

Заменом овог израза у Навије-Стоксову једначину (2.6) добија се следећа једначина

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.9)$$

Ако се у овој једначини изврши разлагање струјних варијабли на просечни и флукуирајући део и ако се претпостави да запреминске силе не зависе од времена, онда се добија следећа једначина

$$\frac{\partial (\langle u_i \rangle + u'_i)}{\partial t} + (\langle u_j \rangle + u'_j) \frac{\partial (\langle u_i \rangle + u'_i)}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\langle p \rangle + p')}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 (\langle u_i \rangle + u'_i)}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.10)$$

Временским осредњавањем ове једначине по ансамблу добија се једначина

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.11)$$

Одужимањем једначине (3.11) од једначине (3.10) добија се Навије-Стоксова једначина флукуирајућих величина струјања

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \rangle = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad (3.12)$$

која се, због једначине континуитета за струјање нестишљивог флуида може

написати у следећем облику

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i u'_j - \langle u'_i u'_j \rangle) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (3.13)$$

Диференцирањем ове једначине по x_k добија се следећа једначина

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial t} \right) + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \langle u_j \rangle \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_k \partial x_j} \\ + \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} (u'_i u'_j - \langle u'_i u'_j \rangle) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_k \partial x_i} + \nu \frac{\partial^3 u'_i}{\partial x_k \partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Множењем горње једначине са $2\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right)$ и временским осредњавањем по ансамблу сваког сабирка како је то изложено у прилогу П.П, и затим сабирањем тако добијених чланова, добија се егзактна једначина материјалне промене дисипације ТКЕ

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & \underbrace{-\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right)}_{P_1^\varepsilon} + \underbrace{\left[-\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle \left(\frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} \right) \right]}_{P_2^\varepsilon} \\ & + \underbrace{\left[-\nu \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_k \partial x_j} \right]}_{P_3^\varepsilon} + \underbrace{\left[-2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle \right]}_{P_4^\varepsilon} + \underbrace{\left[-\nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle \right]}_{D_\tau^\varepsilon} \\ & + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j \partial x_j}}_{D_\nu^\varepsilon} + \underbrace{\left[-\frac{2}{\rho} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right\rangle \right]}_{D_p^\varepsilon} - \underbrace{2\nu^2 \left\langle \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle}_{E^\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Сваки члан ове једначине има свој физички смисао, тако да је у складу са анализом које су извели Kozuka et al. [93]:

P_1^ε - мешовита продукција дисипације,

P_2^ε - продукција дисипације градијентима просечних брзина,

P_3^ε - продукција дисипације градијентима брзина,

P_4^ε - турбулентна продукција дисипације,

D_τ^ε - дифузија дисипације турбуленцијом,

D_ν^ε - дифузија дисипације вискозношћу,

D_p^ε - дифузија дисипације притиском,

E^ε - дисипација дисипације.

Сходно Ричардсоновој (Richardson) теорији [94] о каскадном преносу турбулентне кинетичке енергије, промена дисипације је најизраженија у области најситнијих турбулентних структура, на чије кретање вискозност има доминан-

тан утицај. Због тога је промена дисипације најизраженија у граничном слоју, у коме постоје значајни утицаји вискозности на динамику струјања флуида. Kozuka et al. [93] су применом DNS методе нумерички истраживали промену појединих чланова у егзактној једначини материјалне промене дисипације (3.15) при струјању у граничном слоју канала. Егзактна једначина за турбулентну кинетичку енергију (3.7), поред ТКЕ садржи чланове са додатним непознатим величинама, због чега се не може самостално решавати. Исто важи и за егзактну једначину дисипације (3.15). Ове две једначине се не могу решавати ни као самосталан систем од две парцијалне диференцијалне једначине, јер и тај систем једначина поред ТКЕ и дисипације садржи додатне непознате чланове. Наведене једначине се могу решавати само у систему који обухвата и парцијалне диференцијалне једначине додатних непознатих чланова ових једначина. Као што се може видети, додатни непознати чланови ових једначина су функције просечних и флукутирајућих струјних варијабли. Сви додатни непознати чланови у једначинама (3.7) и (3.15) су функције осредњене у времену, односно просечне величине. Уколико се за моделирање турбулентног струјања нестишљивог флуида примењује RANS методологија, онда математички модел чине: временски осредњена једначина континуитета, Рејнолдсове једначине, једначине турбулентног модела и почетни и гранични услови струјања. Рејнолдсове једначине (2.15) се при анализи струјања нестишљивог флуида могу написати у облику

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + u_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\langle p \rangle}{\rho} \right) + 2\nu \frac{\partial \langle S_{ij} \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}; \quad (3.16)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

у коме се члан $(\langle p \rangle / \rho)$ дефинише као кинематички притисак $\langle p^* \rangle$ [J/kg]. Овим поступком се при прорачуну струјања нестишљивог флуида из Рејнолдсових једначина елиминише густина флуида, при чему се не нарушава физички смисао једначина. Математички модел струјања нестишљивог флуида чине:

* временски осредњена једначина континуитета

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad (3.17)$$

* Рејнолдсове једначине

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + u_j \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = f_i - \frac{\partial \langle p^* \rangle}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}; \quad (3.18)$$

$$i = 1, 2, 3,$$

које формирају систем од 4 парцијалне диференцијалне једначине у којима су непознате три компоненте просечне брзине ($\langle u_1 \rangle, \langle u_2 \rangle, \langle u_3 \rangle$), просечни кинематички притисак $\langle p^* \rangle$ и шест компоненти турбулентног напона τ_{ij} .

Дакле, систем који чине једначине (3.17) и (3.18) није затворен. Затварање овог система омогућава примена Бусинескове хипотезе, односно примена једначина (2.24) и (3.1) које дају:

* Бусинескове једначине за турбулентне напоне

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right); \quad (3.19)$$

$$i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3,$$

којих има укупно девет и од којих због симетрије тензора турбулентних напона остаје на располагању 6 независних једначина, које обезбеђују затварање система Рејнолдсових једначина. У овим једначинама се, као што се може видети, појављује позната константа C_ν и две нове непознате величине: турбулентна кинетичка енергија (k) и дисипација турбулентне кинетичке енергије (ε). Да би се систем који чине једначине (3.17), (3.18) и (3.19), затворио потребне су две допунске једначине. То су једначина за турбулентну кинетичку енергију и једначина за дисипацију турбулентне кинетичке енергије. При томе се за затварање постављеног система не могу употребити егзактна једначине за турбулентну кинетичку енергију (3.7) и егзактна једначина за дисипацију (3.15), јер ове једначине поред просечних компоненти вектора брзине садрже додатне непознате чланове. Дакле, егзактне једначине за турбулентну кинетичку енергију и дисипацију нису од директне користи за затварање постављеног математичког модела, али су од индиректне користи, јер служе као оријентир за формирање моделских једначина за турбулентну кинетичку енергију и дисипацију. Закључује се да у моделским једначинама за турбулентну кинетичку енергију могу фигурирати само просечне компоненте брзине и просечни кинематички притисак, јер само те величине фигуришу у постављеном математичком моделу састављеном од једначина (3.17), (3.18) и (3.19). У стандардном $k - \varepsilon$ моделу турбуленције који су предложили Launder and Spalding [44], у моделским једначинама за ТКЕ и дисипацију фигуришу просечне компоненте вектора брзине. Посматрањем чланова у егзактним једначинама за турбулентну кинетичку енергију и дисипацију уочавају се чланови који описују сличне физичке процесе у обе једначине. Ти физички процеси су: продукција, дифузија и деструкција (дисипација). Launder and Spalding су моделирали ове физичке процесе у склопу појединих чланова у предложеним моделским једна-

чинама за турбулентну кинетичку енергију и дисипацију. Они су предложили:

* моделску једначину за турбулентну кинетичку енергију

$$\frac{Dk}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{C_\nu k^2}{\sigma_k \varepsilon} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right]}_{D^k} + \underbrace{C_\nu \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}}_{P^k} - \underbrace{\varepsilon}_{E^k}, \quad (3.20)$$

* моделску једначину за дисипацију турбулентне кинетичке енергије

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{C_\nu k^2}{\sigma_\varepsilon \varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} \right]}_{D^\varepsilon} + \underbrace{C_{\varepsilon 1} C_\nu k \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}}_{P^\varepsilon} - \underbrace{C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k}}_{E^\varepsilon}, \quad (3.21)$$

при чему су калибрисањем модела одређене следеће вредности за константе модела: $C_\nu = 0,09$, $\sigma_k = 1$, $\sigma_\varepsilon = 1,3$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$ и $C_{\varepsilon 2} = 1,92$. Математички модел турбулентног струјања нестишљивог флуида сада чине једначине (3.17) до (3.21) и:

* почетни и гранични услови за струјне варијабле: $\langle p^* \rangle$, $\langle u_1 \rangle$, $\langle u_2 \rangle$, $\langle u_3 \rangle$, k и ε .

Постављени математички модел чини шест парцијалних диференцијалних једначина и то: једначина континуитета (3.17), три Рејнолдсове једначине (3.18), једначина за турбулентну кинетичку енергију (3.20) и једначина за дисипацију (3.21). Овај математички модел је сада затворен, јер садржи шест непознатих величина: $\langle p^* \rangle$, $\langle u_1 \rangle$, $\langle u_2 \rangle$, $\langle u_3 \rangle$, k и ε .

Концепт турбулентне вискозности се заснива на размени количине кретања турбулентних структура услед инерцијалног међудејства флуидних делића у тим турбулентним структурама. Размена енергије између турбулентних структура се одвија под дејством колинеарних и неколинеарних флукутирајућих брзина флуидних делића. Турбулентна кинетичка енергија обухвата само утицај колинеарних флукутирајућих брзина (временске корелације колинеарних флукутација). Због тога, сходно Бусинесковој хипотези изотропни део тензора турбулентног напона који се формира од ТКЕ не зависи од неколинераних флукутација брзина. Као што је већ наведено, један од главних недостатака стандардног $k - \varepsilon$ модела је моделирање турбулентне вискозности као скаларне величине. При томе се скаларна величина турбулентне вискозности моделира једначинама физичких процеса повезаних само са кинетичком енергијом турбуленције, односно са колинеарним флукутацијама брзина. Уколико су флукутирајуће брзине веће, утолико је већа и турбулентна кинетичка енергија, а самим тим је већа и размена енергије између турбулентних структура, односно турбулентна виско-

зност. Према овом концепту закључује се да је за моделирање турбулентне вискозности довољна само једначина турбулентне кинетичке енергије, па се поставља питање: зашто је у моделирање уведена и једначина дисипације? Одговор на ово питање следи из моделске једначине за турбулентну кинетичку енергију (3.20), у којој се појављује и дисипација као један од чланова. Поред дисипације се у једначини турбулентне кинетичке енергије појављују и продукциони и дифузиони члан, чије је моделирање знатно једноставније од дисипације, те стога нису потребне посебне једначине за моделирање ових чланова. Сада се поставља питање: зашто је дисипација уведена у израз за турбулентну вискозност ако је турбулентна кинетичка енергија већ описана чланом који укључује дисипацију? Одговор на ово питање произлази из једначина које физички описују феномен турбулентне вискозности. Почетком 20. века Prandtl је формирао сопствени физички модел турбулентне вискозности заснован на теорији о путањи мешања, на основу кога се турбулентна вискозност рачуна према изразу

$$\nu_t = \ell_m^2 \left| \frac{\partial \langle u_x \rangle}{\partial y} \right|. \quad (3.22)$$

На основу овог изрази закључује се да важи следећи израз за турбулентну вискозност

$$\nu_t \approx \ell_m^2 \left| \frac{\Delta u_x}{\Delta y} \right| = \ell_m \frac{\ell_m}{|\Delta t|} = \ell_m u^*, \quad (3.23)$$

у коме је ℓ_m – дужински, а u^* – брзински размер турбулентне размене.

Независно, Колмогоров (1942) и Prandtl (1945) су закључили да је боље да се брзински размер одређује применом турбулентне кинетичке енергије [95], према једначини

$$u^* = C k^{\frac{1}{2}}, \quad (3.24)$$

где је C бездимензијска константа. При великим вредностима Рејнолдсовог броја турбулентни ток може да садржи турбулентне структуре (вртлоге) великог брзинског размера (u_0), великог временског размера (t_0) и великог дужинског размера (l_0). Ове турбулентне структуре су уједно и извори кинетичке енергије турбулентног тока. Временски размер великих турбулентних структура може да се дефинише и као однос дужинског и брзинског размера према изразу

$$t_0 = \frac{l_0}{2u_0}.$$

Велике турбулентне структуре су извор кинетичке енергије турбулентног тока,

те стога имају и највећи размер турбулентне кинетичке енергије

$$k_0 = \frac{u_0^2}{2}.$$

У складу са Ричардсоном теоријом [94] о каскадном преносу енергије, турбулентне структуре великих размера губе кинетичку енергију у процесу каскадног преноса на турбулентне структуре мањих размера. Код $k - \varepsilon$ модела турбуленције се мера губитка кинетичке енергије великих турбулентних структура изражава дисипацијом турбулентне кинетичке енергије, односно променом турбулентне кинетичке енергије у времену. Стога је размер дисипације турбулентне кинетичке енергије великих турбулентних структура пропорционалан количнику размера турбулентне кинетичке енергије и временског размера тих структура

$$\varepsilon_0 = \frac{u_0^2}{2t_0} = \frac{u_0^3}{\ell_0}. \quad (3.25)$$

Форма израза (3.25) може да се примени и на остале турбулентне структуре мањих размера. Ако се израз (3.25) примени на турбулентне структуре за које важи Прантлова хипотеза о путањи мешања, онда се добија да је

$$\ell_m = \frac{u^{*3}}{\varepsilon}. \quad (3.26)$$

Заменом израза израза (3.24) у (3.26) добија се да је

$$\ell_m = C^3 \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}. \quad (3.27)$$

Коначно, заменом израза (3.27) и израза (3.24) у израз за турбулентну вискозност (3.23) добија се да је

$$\nu_t = C^4 \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (3.28)$$

одакле следи израз за израчунавање турбулентне вискозности (3.1) и одговор на постављено питање о присуству дисипације у изразу за турбулентну вискозност. Упоредивањем израза (3.1) са изразом (3.28) уочава се да је:

$$C = C_\nu^{\frac{1}{4}} \quad (3.29)$$

На основу израза (3.29) и израза (3.27) следи да је

$$\varepsilon = C_\nu^{\frac{3}{4}} \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\ell_m}. \quad (3.30)$$

Уочава се да је примена израза (3.1) проблематична у зонама турбулентног тока са приближно нултим вредностима дисипације (довољно далеко од зи-дова). При спољашњем опструјавању објеката често су нумеричким прорачу-нима струјања захваћене зоне са овако малим вредностима дисипације, што ограничава употребу стандардног $k - \varepsilon$ модела у овој класи струјања. При уну-трашњим струјањима, којима припада и струјање кроз прави конусни дифузор, растојања суседних зидова су таква да се при струјању углавном не стварају зоне са проблематично малим вредностима дисипације. Ово је један од разлога због кога је у овој дисертацији моделирање струјања у правим конусним дифу-зорима засновано на двоједначинском $k - \varepsilon$ приступу. Стандардни $k - \varepsilon$ модел турбуленције, који припада групи линеарних модела турбуленције, не даје до-бре резултате у зонама струјног поља са анизотропним стањем турбулентних напона. Због тога су у наставку анализирани и нелинеарни модели турбулен-ције од којих је један од савременијих нелинеарних $k - \varepsilon$ модела изабран као репрезентативан пример, на чијим је анализама изложена суштина нелинеарних модела турбуленције. Анализирани модел је значајан и због облика нелинеар-ног дела напона који је формиран при моделирању вихорног струјања.

3.3 Нелинеарни модели турбуленције

Линеарно моделирање анизотропног дела тензора турбулентног напона при-меном Бусинескове хипотезе даје слабе резултате у анизотропној турбуленцији. Анизотропност турбулентног струјања се процењује анализом тензора анизо-тропности [88] чије су компоненте дефинисане изразом (2.17). Из егзактне транспортне једначине турбулентних напона, која се изводи применом поступка изложеног, имеђу осталог, и у раду Novković [54], може се извести једначина

$$\begin{aligned} \frac{Db_{ij}}{Dt} = & \frac{1}{2k} \left(\mathcal{D}_{ij} - \frac{\tau_{ij}^K}{k} \mathcal{D} \right) - \frac{b_{ij}}{a_4} - a_3 \left(b_{ik} \langle S_{kj} \rangle + \langle S_{ik} \rangle b_{kj} - \frac{2}{3} b_{mn} \langle S_{mn} \rangle \delta_{ij} \right) \\ & + a_2 (b_{ik} \langle W_{kj} \rangle - \langle W_{ik} \rangle b_{kj}) - a_1 \langle S_{ij} \rangle + \frac{1}{\tau} a_5 \left(b_{ik} b_{kj} - \frac{1}{3} b_{mn} b_{nm} \delta_{ij} \right) - \frac{1}{\tau} e_{ij}, \quad (3.31) \end{aligned}$$

која представља једначину материјалне промене компоненти тензора анизо-тропности. Поступак извођења ове једначине су изложили Gatski and Jongen [64], а срж изложеног поступка се састоји у моделирању временске корелације производа флукуације притиска и флукуације брзине деформисања (енгл. *pressure-strain rate correlation*). Наведена корелација је члан једначине матери-јалне промене турбулентних напона. У једначини (3.31) која је имплицитног

карактера фигуришу немоделирани дифузиони чланови дати изразима

$$\mathcal{D}_{ij} = -\frac{1}{\rho} \left(\left\langle \frac{\partial(P'u'_j)}{\partial x_i} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial(P'u'_i)}{\partial x_j} \right\rangle \right) - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\langle u'_i u'_j u'_k \rangle - \nu \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} \right), \quad (3.32)$$

$$\mathcal{D} = \frac{\mathcal{D}_{ii}}{2} \quad (3.33)$$

и немоделирани члан анизотропности дисипације

$$e_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{2\varepsilon} - \frac{\delta_{ij}}{3}, \quad (3.34)$$

у коме је дисипација дефинисана изразима

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle, \quad (3.35)$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{ii}}{2}. \quad (3.36)$$

Поред тога, у једначини (3.31) се појављује величина $\langle W_{ij} \rangle$ која се при кретању флуида у непокретном координатном систему своди на просечну угаону брзину флуидног делића

$$\langle W_{ij} \rangle = \langle \omega_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right). \quad (3.37)$$

У једначини (3.31) фигурише и временски размер турбуленције

$$\tau = \frac{k}{\varepsilon}, \quad (3.38)$$

и константе $a_1 \dots a_5$ чије су вредности дате у раду [64].

Из једначине (3.31) се уочава да анизотропност турбулентних напона зависи од просечних компоненти кинематичких тензора, дифузије и дисипације. Ако се претпостави да се и дифузија и дисипација могу описати помоћу просечних компоненти кинематичких тензора, онда се на основу једначине (3.31) закључује да је анизотропност кинематичких турбулентних напона непозната функција следећег облика

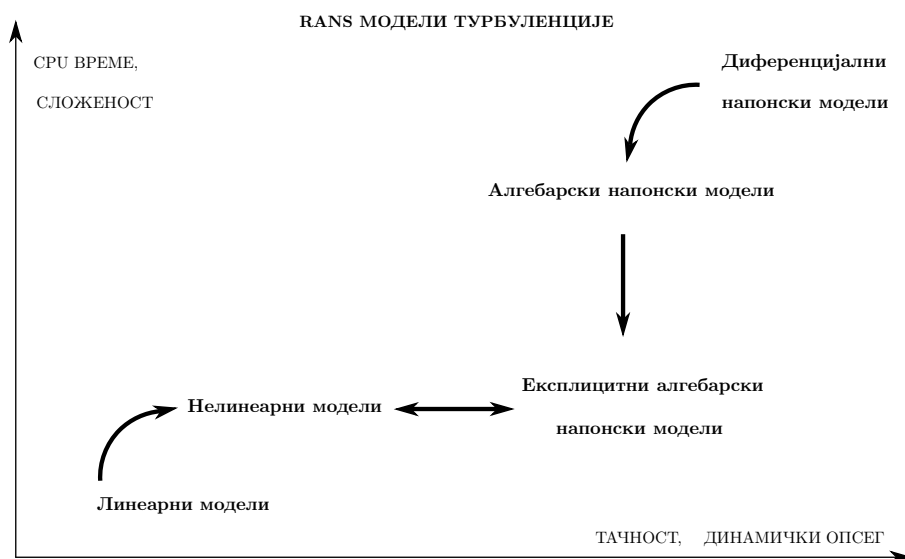
$$b_{ij} = f(\langle S_{kl} \rangle, \langle W_{mn} \rangle, \tau). \quad (3.39)$$

Суштина моделирања турбуленције алгебарским напонским моделима (ARSM), експлицитним алгебарским напонским моделима (EARSM) и нелинеарним моделима заснованим на турбулентној вискозности (NLEVM), огледа се у примени

различитих метода за одређивање компоненти тензора анизотропности.

Код ARSM модела турбуленције компоненте тензора анизотропности се моделирају имплицитном једначином која је слична једначини (3.31), при чему се материјални извод тензора анизотропности на левој страни једначине апроксимира одређеним алгебарским изразом [48].

Уколико се за моделирање компоненти тензора анизотропности користи израз у експлицитној форми (3.39) онда такви модели припадају групи EARSМ. Полазну основу у развоју EARSМ је поставио Pore [51] развојем израза (3.39) у полином у коме фигуришу компоненте кинематичких тензора. Уколико се за моделирање тензора анизотропности користи само део општег развоја који је формирао Pore и уколико се коефицијенти издвојеног дела општег развоја описују применом турбулентне вискозности, онда се из EARSМ модела добијају NLEVM модели турбуленције. Лепу илустрацију моделирања турбуленције применом RANS методологије су дали Gatski and Jongen [64]. Ова илустрација је и приказана на Сл.3.1.



Слика 3.1: Сложеност и ефикасност RANS модела турбуленције [64].

Развој функционалне зависности (3.31) у бесконачни полином, односно тензор анизотропности општег облика

$$\underline{\underline{b}} = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{\alpha_i=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{\beta_j=0}^{\infty} G_{\beta_1, \beta_2, \dots}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots} \langle \underline{\underline{S}} \rangle^{\alpha_1} \langle \underline{\underline{\omega}} \rangle^{\beta_1} \langle \underline{\underline{S}} \rangle^{\alpha_2} \langle \underline{\underline{\omega}} \rangle^{\beta_2} \dots \quad (3.40)$$

изложио је Pore [51]. У облику тензора анизотропности (3.40) коефицијенти $G_{\beta_1, \beta_2, \dots}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots}$ могу бити функције инваријанти тензора $\{ \langle \underline{\underline{S}} \rangle^{\alpha_1} \langle \underline{\underline{\omega}} \rangle^{\beta_1} \langle \underline{\underline{S}} \rangle^{\alpha_2} \langle \underline{\underline{\omega}} \rangle^{\beta_2} \dots \}$. У

запису $\langle \underline{S} \rangle^{\alpha_j}$, (α_j) је ознака за ред алгебарских операција над тензором \underline{S} . Тензорски полином (3.40) садржи бесконачну суму чланова у којима производи тензора иду до бесконачности, те стога тензорски полином у овом облику нема практичну примену. Применом Cayley-Hamilton теореме [96] зависност (3.40) се може свести на коначан тензорски полином чији се чланови изражавају коначним бројем алгебарских операција. Према овој теореме свака квадратна матрица задовољава сопствену карактеристичну једначину. Применом Cayley-Hamilton теореме тензорски полином (3.40) се своди на следећи облик [51]

$$\underline{b} = \sum_{\lambda=1}^{10} G^{(\lambda)} \underline{T}^{\lambda}, \quad (3.41)$$

при чему су $G^{(\lambda)}$ коефицијенти полинома у виду функција чији су аргументи инваријанте тензора $\underline{T}^{(\lambda)}$. Поступак израчунавања тензора \underline{T}^{λ} ; $\lambda = 1 \dots 10$, изложен је у раду [51]. Сви ови тензори су тензори другог реда, односно квадратне матрице трећег реда. Израз (3.41) може да се напише у индексној нотацији

$$b_{ij} = \sum_{\lambda=1}^{10} G^{(\lambda)} T_{ij}^{\lambda}, \quad (3.42)$$

Записивањем сваког од тензора \underline{T}^{λ} ; $\lambda = 1 \dots 10$ у индексној нотацији и њиховом заменом у тензорски полином (3.41) добија се следећи развијени облик компоненти тензора анизотропности [71]

$$\left. \begin{aligned} b_{ij} = & G^{(1)} \langle S_{ij} \rangle \\ & + G^{(2)} (\langle S_{ik} \rangle \langle \omega_{kj} \rangle - \langle \omega_{ik} \rangle \langle S_{kj} \rangle) \\ & + G^{(3)} (\langle S_{ik} \rangle \langle S_{kj} \rangle - (II_S) \delta_{ij} / 3) \\ & + G^{(4)} (\langle \omega_{ik} \rangle \langle \omega_{kj} \rangle - (II_{\omega}) \delta_{ij} / 3) \\ & + G^{(5)} (\langle \omega_{ik} \rangle \langle S_{kl} \rangle \langle S_{lj} \rangle - \langle S_{ik} \rangle \langle S_{kl} \rangle \langle \omega_{lj} \rangle) \\ & + G^{(6)} (\langle \omega_{ik} \rangle \langle \omega_{kl} \rangle \langle S_{lj} \rangle + \langle S_{ik} \rangle \langle \omega_{kl} \rangle \langle \omega_{lj} \rangle - 2(IV) \delta_{ij} / 3) \\ & + G^{(7)} (\langle \omega_{ik} \rangle \langle S_{kl} \rangle \langle \omega_{lp} \rangle \langle \omega_{pj} \rangle - \langle \omega_{ik} \rangle \langle \omega_{kl} \rangle \langle S_{lp} \rangle \langle \omega_{pj} \rangle) \\ & + G^{(8)} (\langle S_{ik} \rangle \langle \omega_{kl} \rangle \langle S_{lp} \rangle \langle S_{pj} \rangle - \langle S_{ik} \rangle \langle S_{kl} \rangle \langle \omega_{lp} \rangle \langle S_{pj} \rangle) \\ & + G^{(9)} (\langle \omega_{ik} \rangle \langle \omega_{kl} \rangle \langle S_{lp} \rangle \langle S_{pj} \rangle + \langle S_{ik} \rangle \langle S_{kl} \rangle \langle \omega_{lp} \rangle \langle \omega_{pj} \rangle - 2(V) \delta_{ij} / 3) \\ & + G^{(10)} (\langle \omega_{ik} \rangle \langle S_{kl} \rangle \langle S_{lp} \rangle \langle \omega_{pq} \rangle \langle \omega_{qj} \rangle - \langle \omega_{ik} \rangle \langle \omega_{kl} \rangle \langle S_{lp} \rangle \langle S_{pq} \rangle \langle \omega_{qj} \rangle), \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Лин. део} \\ \text{Нел. део (3.43)} \end{array}$$

при чему су

$$\begin{aligned}
(II_S) &= \langle S_{kl} \rangle \langle S_{lk} \rangle \\
(II_\omega) &= \langle \omega_{kl} \rangle \langle \omega_{lk} \rangle \\
(III_S) &= \langle S_{kl} \rangle \langle S_{lm} \rangle \langle S_{mk} \rangle \\
(IV) &= \langle S_{kl} \rangle \langle \omega_{lm} \rangle \langle \omega_{mk} \rangle \\
(V) &= \langle S_{kl} \rangle \langle S_{lm} \rangle \langle \omega_{mn} \rangle \langle \omega_{nk} \rangle
\end{aligned} \tag{3.44}$$

инваријанте просечних кинематичких тензора. Једначина (3.43) чини основу EARSM модела турбуленције. Да би се формирао EARSM модел потребно је на неки начин одредити коефицијенте полинома $G^{(1)} \dots G^{(10)}$. У зависности од поступка одређивања ових коефицијената настају различити EARSM модели турбуленције.

Основни поступак одређивања ових коефицијената, који се базира на теорији затварања проблема турбуленције моделима другог реда (енгл. *second-order closure theory*), изложио је Hellsten [71]. Овај поступак се састоји у формирању линеарног система једначина по непознатим константама $G^{(\lambda)}$ применом егзактне једначине материјалне промене турбулентних напона. Gatski and Speziale [66], Girimaji [97] и Wallin and Johansson [70] су изложили своје идеје за формирање EARSM модела турбуленције применом овог поступка.

Непознате константе $G^{(\lambda)}$ се могу одређивати и поступцима који се заснивају на теорији затварања проблема турбуленције моделима првог реда (енгл. *first-order closure theory*). У том случају израз (3.43) даје нелинеарне моделе турбуленције засноване на концепту турбулентне вискозности (NLEVM). Ако се тада турбулентна вискозност моделира двоједначинским моделима турбуленције онда се формирају двоједначински NLEVM (најчешће $k - \varepsilon$ типа).

Wang and Thangam [82] су развили NLEVM $k - \varepsilon$ типа за примену у вихорним струјањима, при чему су добили следеће вредности коефицијената G :

$$\begin{aligned}
G^{(1)} &= -C^{(1)} \frac{\nu_t}{k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)^{1/2}} & G^{(6)} &= C^{(6)} \frac{\nu_t \tau^2}{2k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)^{3/2}} \\
G^{(2)} &= C^{(2)} \frac{\nu_t \tau}{2k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)} & G^{(7)} &= C^{(7)} \frac{\nu_t \tau^3}{2k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)^2} \\
G^{(3)} &= C^{(3)} \frac{\nu_t \tau}{2k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)} & G^{(8)} &= C^{(8)} \frac{\nu_t \tau^3}{2k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)^2} \\
G^{(4)} &= C^{(4)} \frac{\nu_t \tau}{2k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)} & G^{(9)} &= C^{(9)} \frac{\nu_t \tau^3}{2k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)^2} \\
G^{(5)} &= C^{(5)} \frac{\nu_t \tau^2}{2k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)^{3/2}} & G^{(10)} &= C^{(10)} \frac{\nu_t \tau^4}{2k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)^{5/2}}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Непознате константе $C^{(1)} \dots C^{(10)}$ се одређују калибрисањем модела. Константа C има вредност 0,2 на основу истраживања Thangam et al. [98]. Заменом коефицијената (3.45) у израз (3.43) добија се прилично гломазан израз за израчунавање тензора анизотропности. Чланови вишег реда полинома усложњавају математички модел, а допринос ових чланова повећању тачности модела опада са порастом њиховог реда. Због тога су Wang and Thangam занемарили чланове полинома који имају више од три фактора кинематичких тензора и на тај начин су добили следећи израз за компоненте тензора анизотропности

$$\begin{aligned}
b_{ij} = & -C^{(1)} \frac{\nu_t}{k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)^{1/2}} \langle S_{ij} \rangle \\
& + C^{(2)} \frac{\nu_t \tau}{2k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)} (\langle S_{ik} \rangle \langle \omega_{kj} \rangle - \langle \omega_{ik} \rangle \langle S_{kj} \rangle) \\
& + C^{(3)} \frac{\nu_t \tau}{2k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)} (\langle S_{ik} \rangle \langle S_{kj} \rangle - (II_S) \delta_{ij} / 3) \\
& + C^{(4)} \frac{\nu_t \tau}{2k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)} (\langle \omega_{ik} \rangle \langle \omega_{kj} \rangle - (II_\omega) \delta_{ij} / 3) \\
& + C^{(5)} \frac{\nu_t \tau^2}{2k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)^{3/2}} (\langle \omega_{ik} \rangle \langle S_{kl} \rangle \langle S_{lj} \rangle - \langle S_{ik} \rangle \langle S_{kl} \rangle \langle \omega_{lj} \rangle) \\
& + C^{(6)} \frac{\nu_t \tau^2}{2k(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)^{3/2}} (\langle \omega_{ik} \rangle \langle \omega_{kl} \rangle \langle S_{lj} \rangle + \langle S_{ik} \rangle \langle \omega_{kl} \rangle \langle \omega_{lj} \rangle - 2(IV) \delta_{ij} / 3).
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Заменом горњег израза у израз (2.17) добија се израз за израчунавање компоненти анизотропног дела тензора турбулентног напона. Ако се у том изразу занемаре нелинеарни чланови, онда се он своди на следећу линеарну зависност

$$a_{ij} = -2C^{(1)} \frac{\nu_t}{(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)^{1/2}} \langle S_{ij} \rangle = -2\nu_t^* \langle S_{ij} \rangle, \tag{3.47}$$

која је слична Бусинесковој хипотези, односно изразу (2.25). Горњи израз се у односу на Бусинескову хипотезу разликује у начину израчунавања турбулентне вискозности, јер је сада

$$\begin{aligned}
\nu_t^* &= C^{(1)} \frac{\nu_t}{(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)^{1/2}}, \\
\left(\frac{\nu_t^*}{C^{(1)}} \right)^2 \frac{1}{\nu_t} &= \frac{\nu_t}{1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle}, \\
\left(\frac{\nu_t^*}{C^{(1)}} \right)^3 \frac{1}{\nu_t^2} &= \frac{\nu_t}{(1 + C\tau^2 \langle \omega_{ij} \rangle \langle \omega_{ij} \rangle)^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Утицај угаоне брзине флуидних делића на турбулентну вискозност може да се занемари ако се узме да је $C = 0$ и $C^{(1)} = 1$. Тада из првог израза (3.48) следи

да је $\nu_t^* = \nu_t$. Заменом израза (3.48) у израз (3.46) добија се компактнији израз Wang and Thangam нелинеарног $k - \varepsilon$ модела:

$$\begin{aligned}
b_{ij} = & -\frac{\nu_t^*}{k} \langle S_{ij} \rangle \\
& + C_1 \frac{\tau}{2k} \frac{\nu_t^{*2}}{\nu_t} (\langle S_{ik} \rangle \langle \omega_{kj} \rangle - \langle \omega_{ik} \rangle \langle S_{kj} \rangle) \\
& + C_2 \frac{\tau}{2k} \frac{\nu_t^{*2}}{\nu_t} (\langle S_{ik} \rangle \langle S_{kj} \rangle - (II_S) \delta_{ij} / 3) \\
& + C_3 \frac{\tau}{2k} \frac{\nu_t^{*2}}{\nu_t} (\langle \omega_{ik} \rangle \langle \omega_{kj} \rangle - (II_\omega) \delta_{ij} / 3) \\
& + C_4 \frac{\tau^2}{2k} \frac{\nu_t^{*3}}{\nu_t^2} (\langle \omega_{ik} \rangle \langle S_{kl} \rangle \langle S_{lj} \rangle - \langle S_{ik} \rangle \langle S_{kl} \rangle \langle \omega_{lj} \rangle) \\
& + C_5 \frac{\tau^2}{2k} \frac{\nu_t^{*3}}{\nu_t^2} (\langle \omega_{ik} \rangle \langle \omega_{kl} \rangle \langle S_{lj} \rangle + \langle S_{ik} \rangle \langle \omega_{kl} \rangle \langle \omega_{lj} \rangle - 2(IV) \delta_{ij} / 3).
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Ако се занемари утицај угаоне брзине флуидних делића на турбулентну вискозност, онда је као што је већ речено $\nu_t^* = \nu_t$, па се из горњег израза добија најчешће коришћени општи облик NLEVM модела турбуленције

$$\begin{aligned}
b_{ij} = & -\frac{\nu_t}{k} \langle S_{ij} \rangle \\
& + C_1 \frac{\tau}{2k} \nu_t (\langle S_{ik} \rangle \langle \omega_{kj} \rangle - \langle \omega_{ik} \rangle \langle S_{kj} \rangle) \\
& + C_2 \frac{\tau}{2k} \nu_t (\langle S_{ik} \rangle \langle S_{kj} \rangle - (II_S) \delta_{ij} / 3) \\
& + C_3 \frac{\tau}{2k} \nu_t (\langle \omega_{ik} \rangle \langle \omega_{kj} \rangle - (II_\omega) \delta_{ij} / 3) \\
& + C_4 \frac{\tau^2}{2k} \nu_t (\langle \omega_{ik} \rangle \langle S_{kl} \rangle \langle S_{lj} \rangle - \langle S_{ik} \rangle \langle S_{kl} \rangle \langle \omega_{lj} \rangle) \\
& + C_5 \frac{\tau^2}{2k} \nu_t (\langle \omega_{ik} \rangle \langle \omega_{kl} \rangle \langle S_{lj} \rangle + \langle S_{ik} \rangle \langle \omega_{kl} \rangle \langle \omega_{lj} \rangle - 2(IV) \delta_{ij} / 3).
\end{aligned} \tag{3.50}$$

У зависности од вредности константи $C_1 \dots C_5$, калибрисањем се може извршити прилагођавање општег облика NLEVM модела одређеној класи турбулентног струјања. Применом претходно изложеног поступка су настали бројни нелинеарни модели турбуленције, који у суштини боље описују анизотропност од линеарних модела. Ипак, за одређене класе струјања попут вихорног струјања, постоје изражени физички утицаји који нису адекватно обухваћени применом ових модела. Наиме, линеарни и претходно изложени нелинеарни модели турбуленције припадају групи модела који затварају проблем турбуленције анализом турбулентног струјања у датој тачки и датом тренутку времена (енгл. *single point closure models*). Овим моделима није обухваћен утицај стања флуида у

околним тачкама (енгл. *space nonlocality*) и утицај стања флуида у прошлим тренуцима времена (енгл. *temporal nonlocality* или *history effects*) на струјање у датој тачки и датом тренутку времена. Другим речима, занемарен је утицај нелокалне интеракције турбулентних струјних структура и анализа турбулентне размене је сведена само на локалну интеракцију турбулентних структура. Утицаји нелокалних ефеката на динамику турбулентног струјања описују се просторним и временским корелацијама и аутокорелацијама физичких величина, које су, између осталог, делимично описане и у раду Novković [54]. Основе утицаја нелокалних ефеката на поједине чланове егзактне једначине материјалне промене турбулентних напона је изложио Leschziner [99]. Утицаје нелокалних ефеката при турбулентном струјању је теоријски истраживао Kraichnan [100] применом статистичке теорије апроксимације директне интеракције турбулентних струјних структура, тј. применом DIA теорије (енгл. *Direct-Interaction Approximation*), коју је развио 1959. године [101]. Kraichnan је раду [102] применом ове теорије и Гринових функција извео имплицитне изразе за турбулентне напоне у којима фигуришу ефекти нелокалности. Robert Harry Kraichnan је био амерички теоријски физичар и један од последњих асистената Алберта Ајнштајна. Срж Краихнанове DIA теорије је концизно изложио Yoshizawa [103]. Наведена теорија се састоји у комбинованој примени пертурбационе експанзије и процедуре ренормализације на флукутирајући део једначине промене количине кретања преведен у таласно-временски домен применом Фуријеове трансформације. Новија истраживања нелокалних ефеката заснована на Краихнановој теоријској анализи је извео Hamba [104, 105].

3.4 Линеарни модели са анизотропном турбулентном вискозности

Основа ових модела турбуленције, који су ретки, је модификација Њутнове хипотезе о вискозним напонима, односно Њутнове конститутивне једначине (2.27). Наведена модификација подразумева претпоставку да се компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона могу изразити као линеарна комбинација просечних брзина деформисања, тј.

$$a_{ij} = \nu_{ijkm} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_m}. \quad (3.51)$$

За разлику од молекуларне вискозности, турбулентна вискозност се у великом броју случајева не може свести на изотропан тензор другог реда, као што је то

претпостављено у Бусинесковој хипотези. Физичка анализа и моделирање свих компоненти ν_{ijkm} тензора турбулентне вискозности је исувише захтеван поступак. Значајан утицај на анизотропију турбулентне вискозности се може постићи ако се претпостави да се тензор турбулентне вискозности може свести на анизотропан тензор другог реда. Ако се претпостави да се тензор турбулентне вискозности може свести на анизотропан тензор другог реда дат изразом (2.28), онда се линеарна зависност (3.51) може свести на следеће изразе

$$\underline{a} = -2 \underline{T} \cdot \langle \underline{S} \rangle; \quad a_{ij} = -2\nu_{ik} \langle S_{kj} \rangle. \quad (3.52)$$

Овакву претпоставку су користили Kobayashi and Yoda [106], при чему су претпоставили да је $\nu_{ik} = \nu_{ki}$, тј. да је тензор турбулентне вискозности симетричан тензор другог реда. Израз (3.52) представља значајно поједностављење изрази (3.51), које у одређеним случајевима струјања може дати добре резултате. Међутим, са инжењерске тачке гледишта, веза између анизотропног дела тензора турбулентног напона и просечних компоненти тензора брзине деформисања која је дата изразом (3.51), може се значајно упростити занемаривањем великог броја компоненти тензора турбулентне вискозности. При томе се могу задржати само оне компоненте тензора турбулентне вискозности које у датој класи струјања имају доминантан утицај. Променама вредности ових компоненти тензора турбулентне вискозности могу да се остваре значајни утицаји на компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона. Ови утицаји су ефикаснији од ефеката који се остварују увођењем нелинеарности у анизотропни део тензора турбулентних напона, применом чланова који садрже производе кинематичких тензора вишег реда. Променом вредности компоненти тензора турбулентне вискозности остварује се изражен утицај на анизотропни део тензора турбулентног напона, што омогућава значајне модификације степена анизотропности овог тензора. У овој чињеници се огледа срж предности линеарних модела турбуленције заснованих на концепту анизотропне турбулентне вискозности AEVM (енгл. *Anisotropic Eddy Viscosity Models*) у односу на NLEVM моделе турбуленције.

Уколико се моделирају струјања са веома израженом анизотропијом турбулентног напона, попут вихорних струјања, онда AEVM модели турбуленције имају значајну предност над нелинеарним моделима турбуленције. Овај закључак је између осталог потврђен и прорачунима који су урађени у оквиру ове дисертације. Најсавременијим AEVM моделима турбуленције припада и Хамбин $k - \varepsilon$ модел турбуленције који представља окосницу израде ове дисертације и који је детаљно описан у наставку.

3.5 Хамбин $k - \varepsilon$ модел турбуленције

Бусинескова хипотеза је аналогна стандардној хипотези дифузије градијентима концентрације (енгл. *gradient diffusion hypothesis*), односно првом Фиковом (Fick) закону [107], према коме је локални флуks материје пропорционалан локалној промени концентрације тј.

$$J(y) = -D \frac{\partial c}{\partial y}. \quad (3.53)$$

Смицајни турбулентни напон између две суседне турбулентне структуре је дат следећим изразом

$$\tau(y) = \mu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}. \quad (3.54)$$

Изрази (3.53) и (3.54) су аналогни и имају локални карактер. Хипотезе локалног карактера дају при турбулентном струјању добре резултате ако су размери турбулентних структура многоструко мањи од карактеристичних величина временски осредњеног турбулентног тока. Сви модели турбуленције засновани на хипотезама локалног карактера дају добре резултате само ако су карактеристични размери турбулентних структура којима се обавља турбулентни пренос неке физичке величине много мањи од растојања на коме су приметне промене градијената те исте физичке величине [108].

У већини турбулентних струјања настају такве турбулентне струјне структуре код којих наведени услови нису испуњени. Физичко-математичко моделирање утицаја међудејства таквих структура на динамику турбулентног струјања је сложен проблем услед њихове просторно-временске случајности. Различите турбулентне структуре имају различите степене просторно-временске случајности, што додатно усложњава њихово моделирање. При одвајању граничног слоја од зинова дифузора које углавном настаје при безвихорном струјању у дифузорима великих углова ширења, настају такве турбулентне структуре код којих је просторно-временска случајност изражена у великој мери.

Вихор је уређенија турбулентна струјна структура великих размера, код које је просторно-временска случајност просечних струјних варијабли изражена у мањој мери. При вихорним струјањима у техничким уређајима, вихор је углавном доминантна струјна структура која захвата главнину прорачунског домена и која има пресудан утицај на струјну слику. Наведене особине чине вихор погодним за теоријску анализу нелокалних ефеката применом одређених математичких алата Краихнаноуе DIA теорије [101]. Хамбино теоријско истраживање утицаја просторно-временске нелокалности је резултирало применом утицаја временске нелокалности на вихорно струјање.

При прорачуну вихорног струјања линеарним моделима турбуленције настаје проблем са прекомерном тубулентном вискозности (енгл. *eddy viscosity overprediction*) у вихорном језгру. Kobayashi and Yoda [106] су покушали превазићи недостатке примене стандардног $k - \varepsilon$ модела на вихорно језгро путем три основна правца деловања:

1. Модификацијом ε једначине,
2. Проширивањем Бусинескове хипотезе додатком нелинеарног члана,
3. Моделирањем турбулентне вискозности као анизотропног симетричног тензора другог реда.

Показали су да стандардни $k - \varepsilon$ модел даје слабе резултате у предвиђању профила аксијалне и обимске брзине у језгру вихора. Применом предложеног проширења Бусинескове хипотезе добили су незнатно бољи резултат. Значајно боље резултате су остварили применом моделирања тензора турбулентне вискозности. Тензор турбулентне вискозности се веома тешко теоријски моделира и углавном се његово теоријско моделирање своди на модел дијагоналног изотропног тензора другог реда. Kobayashi and Yoda су тензор турбулентне вискозности моделирали на основу експерименталних истраживања струјања у вихорном језгру које су извели Lilley and Chigier [109].

Yokoi and Yoshizawa су за нумерички прорачун вихорног струјања развили троједначински $k - \varepsilon - h$ модел турбуленције, у коме су поред турбулентне кинетичке енергије и дисипације користили и турбулентну хеликоидност (енг. *turbulent helicity*) дефинисану изразима

$$h = \langle \underline{u}' \cdot \underline{\omega}' \rangle; \quad \underline{\omega}' = \nabla \times \underline{u}'. \quad (3.55)$$

Тестирањем модела на вихорном струјању у цеви Yokoi and Yoshizawa [110] су применом развијеног модела постигли боље резултате у предвиђању профила обимске и аксијалне брзине. Новија истраживања ефеката турбулентне хеликоидности на прорачун вихорног струјања су извели Yoshizawa et al. [111] и Yokoi et al. [112]. Хеликоидност (3.55), и просечна хеликоидност

$$H = \langle \underline{u} \rangle \cdot \langle \underline{\omega} \rangle = 0; \quad \langle \underline{\omega} \rangle = \nabla \times \langle \underline{u} \rangle, \quad (3.56)$$

су величине које су карактеристичне за вихорна струјања, али се оне не појављују у једначини материјалне промене турбулентних напона [65]. Сходно томе тешко је проценити крајње могућности доприноса хеликоидности побољшању

тачности моделирања турбулентних напона. Због тога је Хамба напустио тенденцију примене хеликодности у моделирању турбулентних напона и потражио алтернативу у моделирању нелокалних ефеката. При вихорном струјању у цевима и дифузорима значајно је изражен утицај временске нелокалности [86]. Стога је Хамба своје најновије истраживање [65] усмерио на утицај временских нелокалних ефеката на смањење турбулентне вискозности у језгру вихора. При томе је извео егзактан израз за утицај нелокалности на компоненте тензора турбулентног напона [65]

$$\langle u'_i u'_j \rangle(x_1, x_2, x_3, t) = - \iiint_V dx'_1 dx'_2 dx'_3 \int_{-\infty}^t \nu_{ijkm}^{NL}(x_1, x_2, x_3, t; x'_1, x'_2, x'_3, t') dt' \frac{\partial \langle u_k \rangle(x'_1, x'_2, x'_3, t')}{\partial x'_m}. \quad (3.57)$$

Ако је турбулентно струјање такво да су нелокални ефекти занемарљиви, онда из горњег израза следи локални израз за тубулентне напоне [65]

$$\langle u'_i u'_j \rangle(x_1, x_2, x_3, t) = \nu_{ijkm} \cdot \frac{\partial \langle u_k \rangle(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_m}, \quad (3.58)$$

који је аналоган Њутновој хипотези о вискозним напонима, односно изразима (2.27) и (3.51). Ако је турбулентно струјање такво да су само просторни нелокални ефекти занемарљиви, онда се израз (3.57) своди на следећи израз

$$\langle u'_i u'_j \rangle(x_1, x_2, x_3, t) = \int_{-\infty}^t \nu_{ijkm}^{NL}(x_1, x_2, x_3, t; t') dt' \cdot \frac{\partial \langle u_k \rangle(x_1, x_2, x_3, t')}{\partial x_m}, \quad (3.59)$$

при чему је увек $t' < t$ јер се анализира утицај стања турбулентне структуре у прошлим тренуцима времена t' на стање турбулентне структуре у датом тренутку времена t . Нелокалност коефицијената турбулентне вискозности у изразу (3.57) Хамба је дефинисао следећим изразом

$$\nu_{ijkm}^{NL}(\underline{r}, t; \underline{r}', t') = \frac{(\langle u'_i(\underline{r}, t) G_{jk}(\underline{r}, t; \underline{r}', t') u'_m(\underline{r}', t') \rangle + \langle u'_j(\underline{r}, t) G_{ik}(\underline{r}, t; \underline{r}', t') u'_m(\underline{r}', t') \rangle)}{2},$$

при чему су $G_{ij}(\underline{r}, t; t')$ Гринове (Green) функције за флукуације брзине. Нелокална турбулентна вискозност обухвата допринос градијента просечне брзине у некој тачки (x'_1, x'_2, x'_3) и неком тренутку времена t' турбулентном напону у датој тачки (x_1, x_2, x_3) и датом тренутку времена t [105]. Израз (3.59) у коме је занемарен утицај просторне нелокалности представља допринос градијента просечне брзине у свим претходним тренуцима времена турбулентном напону у посма-

траном тренутку времена (енгл. *history effect*). Прорачун нелокалних ефеката у турбулентним напонима према изразу (3.59) уз употребу нелокалне турбулентне вискозности је сложен математички поступак услед појаве Гринових функција за флукуације компоненти брзине, које нису познате, а поступак њиховог одређивања кроз егзактну једначину транспорта турбулентних напона је веома сложен. Како једначина транспорта турбулентних напона служи као одредница за унапређење модела турбуленције првог реда, Хамба је претпоставио да се у овој једначини крије и временски нелокални утицај који може да унапреди моделе турбуленције првог реда. Применом горе изложених једначина које описују утицај временске нелокалности на турбулентне напоне, Хамба је добио зависност турбулентних напона од Гринових функција. Непознате Гринове функције које фигуришу у турбулентним напонима и које описују утицај временске нелокалности Хамба је одредио заменом турбулентних напона у упрошћене једначине транспорта турбулентних напона формиране за осносиметрично вихорно струјање у цеви. Изложеним поступком Хамба је дошао до експлицитних израза за компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона, које у себи садрже ефекат временске нелокалности и које имају следећи облик [65]

$$\begin{aligned}
h_{rr} &= -\frac{2\nu_{tH}}{1 + 4(\Omega_{sw}\tau_H)^2} \{2\Omega_{sw}\tau_H \langle S_{r\varphi} \rangle + [1 + 2(\Omega_{sw}\tau_H)^2] \langle S_{rr} \rangle + 2(\Omega_{sw}\tau_H)^2 \langle S_{\varphi\varphi} \rangle\}, \\
h_{r\varphi} &= -\frac{2\nu_{tH}}{1 + 4(\Omega_{sw}\tau_H)^2} (\langle S_{r\varphi} \rangle - \Omega_{sw}\tau_H \langle S_{rr} \rangle + \Omega_{sw}\tau_H \langle S_{\varphi\varphi} \rangle), \\
h_{rz} &= -\frac{2\nu_{tH}}{1 + (\Omega_{sw}\tau_H)^2} (\langle S_{rz} \rangle + \Omega_{sw}\tau_H \langle S_{\varphi z} \rangle), \\
h_{\varphi\varphi} &= -\frac{2\nu_{tH}}{1 + 4(\Omega_{sw}\tau_H)^2} \{-2\Omega_{sw}\tau_H \langle S_{r\varphi} \rangle + 2(\Omega_{sw}\tau_H)^2 \langle S_{rr} \rangle + [1 + 2(\Omega_{sw}\tau_H)^2] \langle S_{\varphi\varphi} \rangle\}, \\
h_{\varphi z} &= -\frac{2\nu_{tH}}{1 + (\Omega_{sw}\tau_H)^2} (-\Omega_{sw}\tau_H \langle S_{rz} \rangle + \langle S_{\varphi z} \rangle), \\
h_{zz} &= -2\nu_{tH} \langle S_{zz} \rangle.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

У овим изразима ν_{tH} је Хамбина турбулентна вискозност, τ_H је Хамбин временски размер, а Ω_{sw} је угаона брзина вихора. Ове величине су дате следећим изразима

$$\tau_H = C_\tau \frac{k}{\varepsilon}; \quad C_\tau = 0,182, \tag{3.61}$$

$$\nu_{tH} = \frac{2}{3} k \tau_H = C_{\nu H} \frac{k^2}{\varepsilon}, \tag{3.62}$$

$$\Omega_{sw} = \frac{\langle u_\varphi \rangle}{r}. \tag{3.63}$$

Из горњих израза следи да је

$$C_{\nu\text{H}} = \frac{2}{3}C_{\tau} = 0,12, \quad (3.64)$$

док је код стандардног $k - \varepsilon$ модела $C_{\nu} = 0,09$. Посматрањем Хамбиних једначина за компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона (3.60) уочава се да ове једначине дефинишу линеарну везу између анизотропног дела тензора турбулентног напона и просечних брзина деформисања у поларно-цилиндричним координатама. Према томе, Хамбин модел припада групи линеарних модела турбуленције, при чему због различитих вредности коефицијената који множе турбулентну вискозност овај модел има анизотропан тензор турбулентне вискозности, што значи да припада групи модела са анизотропном турбулентном вискозности (AEVM). У случају безвихорног струјања, када је ($\Omega_{\text{sw}} = 0$), коефицијенти турбулентне вискозности у Хамбиним једначинама (3.60) постају једнаки, па се тада овај модел своди на линеарни RANS модел са изотропном турбулентном вискозности, односно може да се сведе на стандардни $k - \varepsilon$ модел турбуленције. Да би се Хамбин $k - \varepsilon$ модел у безвихорном струјању свео на стандардни $k - \varepsilon$ модел, у овој дисертацији је усвојено да је $C_{\nu\text{H}} = C_{\nu} = 0,09$. Исту вредност за константу C_{ν} је усвојио и Хамба при провери модела на тестном примеру вихорног струјања у цеви који је формирао Steenbergen [86]. Поред тога, Хамба је при тестирању модела користио следећи израз за турбулентну вискозност

$$\nu_{\text{tH}} = C_{\nu} f_{\nu} \frac{k^2}{\varepsilon} = f_{\nu} \nu_t, \quad (3.65)$$

при чему је f_{ν} пригушна функција за турбулентну вискозност. Како би се Хамбин модел у безвихорном струјању свео на стандардни $k - \varepsilon$ модел у овом раду нису коришћене пригушне функције, због чега је узето да је $f_{\nu} = 1$, тако да је

$$\nu_{\text{tH}} = \nu_t. \quad (3.66)$$

Као што се може видети, Хамба је експлицитне једначине за компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона (3.60) извео у поларно цилиндричном координатном систему. Да би се ове једначине имплементирале у софтвер OpenFOAM чији су солвери програмирани за Декартове координате, неопходно је извршити трансформацију тензора напона из поларно-цилиндричних у Декартове координате. Имплементација поларно-цилиндрично базираног модела турбуленције у софтвер OpenFOAM је сложен математичко-програмерски поступак, који је детаљно изложен у следећем поглављу.

4 Развој модела $k - \varepsilon$ diffuser и имплементација у OpenFOAM

4.1 Трансформације тензора

Ако између скупа координата G неког физичког прорачунског домена и скупа координата G' истог тог физичког прорачунског домена постоји бијекција, односно обострано једнозначно пресликавање, онда свакој тачки (x_1, x_2, x_3) скупа координата G одговара једна и само једна тачка (x'_1, x'_2, x'_3) скупа координата G' . Тензор другог реда се у скупу координата G може написати као сума производа компоненти тензора и дијада базних вектора тих координата [54]

$$\underline{\underline{A}} = A_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j. \quad (4.1)$$

Аналогно томе за координате (x'_1, x'_2, x'_3) скупа координата G' важи

$$\underline{\underline{A}} = A'_{kl} \underline{e}'_k \otimes \underline{e}'_l, \quad (4.2)$$

при чему су $\underline{e}'_k, \underline{e}'_l$ базни вектори координата скупа G' . Из горње две једначине следи да је

$$A_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j = A'_{kl} \underline{e}'_k \otimes \underline{e}'_l. \quad (4.3)$$

Између базних вектора координата G и G' постоји следећа веза

$$\underline{e}_i = q_{ij} \underline{e}'_j, \quad (4.4)$$

$$\underline{e}'_i = q_{ji} \underline{e}_j. \quad (4.5)$$

Косинуси углова које базни вектори координата скупа G граде са базним векторима координата скупа G' су дати следећим изразом

$$q_{ij} = \underline{e}_i \cdot \underline{e}'_j = \cos \angle(\underline{e}_i, \underline{e}'_j) \quad (4.6)$$

и дефинишу се према следећој табели

	\underline{e}'_1	\underline{e}'_2	\underline{e}'_3
\underline{e}_1	q_{11}	q_{12}	q_{13}
\underline{e}_2	q_{21}	q_{22}	q_{23}
\underline{e}_3	q_{31}	q_{32}	q_{33}

Косинуси углова базних вектора формирају матрицу трансформације домена

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Заменом израза (4.5) у израз (4.3) добија се

$$\begin{aligned} A_{ij}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j &= A'_{kl}\underline{e}'_k \otimes \underline{e}'_l \\ &= A'_{kl}q_{mk}\underline{e}_m \otimes q_{nl}\underline{e}_n \\ &= q_{mk}q_{nl}A'_{kl}\underline{e}_m \otimes \underline{e}_n \\ &= q_{ik}q_{jl}A'_{kl}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j, \end{aligned}$$

одакле следи да је

$$A_{ij} = q_{ik}A'_{kl}q_{jl}. \quad (4.8)$$

Заменом израза (4.4) у израз (4.3) добија се

$$\begin{aligned} A'_{kl}\underline{e}'_k \otimes \underline{e}'_l &= A_{ij}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \\ &= A_{ij}q_{im}\underline{e}_m \otimes q_{jn}\underline{e}_n \\ &= q_{im}q_{jn}A_{ij}\underline{e}_m \otimes \underline{e}_n \\ &= q_{ik}q_{jl}A_{ij}\underline{e}_k \otimes \underline{e}_l, \end{aligned}$$

одакле следи да је

$$A'_{kl} = q_{ik}A_{ij}q_{jl}. \quad (4.9)$$

Изрази (4.8) и (4.9) дају бијективно пресликавање између компоненти тензора у скуповима координата G и G' . Ови изрази могу да се напишу у објектној форми тензора уколико се примене одређене трансформације унутрашњег производа тензора другог реда у индексној нотацији. Унутрашњи производ три тензора другог реда може да се напише у индексној нотацији, при чему важе следеће

релације

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} &= A_{ik} B_{kl} C_{lj}, \\ \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}^T &= A_{ik} B_{kl} C_{jl},\end{aligned}\quad (4.10)$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} &= A_{ki} B_{ij} C_{jl} \\ \underline{\underline{A}}^T \cdot \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}} &= A_{ik} B_{ij} C_{jl}.\end{aligned}\quad (4.11)$$

Упоредивањем израза (4.10) са изразом (4.8) закључује се да је

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{q}} \cdot \underline{\underline{A'}} \cdot \underline{\underline{q}}^T. \quad (4.12)$$

Исто тако, упоређивањем израза (4.11) са изразом (4.9) се добија да је

$$\underline{\underline{A'}} = \underline{\underline{q}}^T \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{q}}. \quad (4.13)$$

Овде треба истаћи да изрази (4.12) и (4.13) важе и за случај када се скуп координата G пресликава у скуп координата G' ротацијом Декартовог координатног система, јер се и у том случају ради о бијективном пресликавању. Ако су \underline{e}_i базни вектори Декартовог координатног система, а \underline{e}'_i базни вектори поларно-цилиндричног координатног система, онда важе следеће једначине

$$\begin{aligned}\underline{e}_x &= \cos \varphi \cdot \underline{e}'_r - \sin \varphi \cdot \underline{e}'_\varphi + 0 \cdot \underline{e}'_z, \\ \underline{e}_y &= \sin \varphi \cdot \underline{e}'_r + \cos \varphi \cdot \underline{e}'_\varphi + 0 \cdot \underline{e}'_z, \\ \underline{e}_z &= 0 \cdot \underline{e}'_r + 0 \cdot \underline{e}'_\varphi + 1 \cdot \underline{e}'_z,\end{aligned}\quad (4.14)$$

због чега је

$$\begin{aligned}q_{xr} &= \underline{e}_x \cdot \underline{e}'_r = \cos \varphi; & q_{x\varphi} &= \underline{e}_x \cdot \underline{e}'_\varphi = -\sin \varphi; & q_{xz} &= \underline{e}_x \cdot \underline{e}'_z = 0; \\ q_{yr} &= \underline{e}_y \cdot \underline{e}'_r = \sin \varphi; & q_{y\varphi} &= \underline{e}_y \cdot \underline{e}'_\varphi = \cos \varphi; & q_{yz} &= \underline{e}_y \cdot \underline{e}'_z = 0; \\ q_{zr} &= \underline{e}_z \cdot \underline{e}'_r = 0; & q_{z\varphi} &= \underline{e}_z \cdot \underline{e}'_\varphi = 0; & q_{zz} &= \underline{e}_z \cdot \underline{e}'_z = 1.\end{aligned}\quad (4.15)$$

На основу претходних израза се добијају следеће матрице трансформације

$$\underline{\underline{q}} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{q}}^T = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Сагласно једначини трансформације (4.13), било који тензор у поларно-цилиндричном координатном систему се може изразити помоћу тензора у Декартовом координатном систему, према једначини

$$\begin{bmatrix} A_{rr} & A_{r\varphi} & A_{rz} \\ A_{\varphi r} & A_{\varphi\varphi} & A_{\varphi z} \\ A_{zr} & A_{z\varphi} & A_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Слично томе, тензор у Декартовим координатама је могуће изразити помоћу тензора у поларно-цилиндричним координатама. Применом израза (4.12) добија се да је

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{rr} & A_{r\varphi} & A_{rz} \\ A_{\varphi r} & A_{\varphi\varphi} & A_{\varphi z} \\ A_{zr} & A_{z\varphi} & A_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

4.2 Трансформација тензора турбулентног напона

Да би се компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона, које је извео Хамба, примениле на прорачун вихорног струјања применом OpenFOAM софтвера, потребно је извршити одређене трансформације тензора турбулентног напона. Поступак трансформације тензора турбулентног напона из једног у други координатни систем има једну важну особину која се односи на изотропни део тензора и која је изложена у наставку.

Као што је претходно изложено, турбулентни напони у Декартовим координатама се могу изразити помоћу компоненти турбулентних напона у поларно-цилиндричним координатама. Полазећи од израза (2.18) добија се следећи израз за компоненте турбулентног напона у Декартовим координатама

$$\tau_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle = \frac{2}{3} k \delta_{ij} + a_{ij} \quad (4.19)$$

$$i = x, y, z; \quad j = x, y, z.$$

Овај израз може да се напише у облику следеће тензорске једначине

$$\underline{\underline{\tau}} = \frac{2}{3}k\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{a}}. \quad (4.20)$$

Множењем ове једначине са леве стране тензором $\underline{\underline{q}}^T$, а након тога са десне стране тензором $\underline{\underline{q}}$, тензор турбулентног напона се трансформише у поларно-цилиндричне координате

$$\underline{\underline{q}}^T \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{q}}^T \cdot \frac{2}{3}k\underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{q}} + \underline{\underline{q}}^T \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{q}}. \quad (4.21)$$

Како је

$$\underline{\underline{q}}^T \cdot \frac{2}{3}k \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{q}} = \frac{2}{3}k(\underline{\underline{q}}^T \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{q}}) = \frac{2}{3}k(\underline{\underline{q}}^T \cdot \underline{\underline{q}}) = \frac{2}{3}k\underline{\underline{I}}, \quad (4.22)$$

то је

$$\underline{\underline{q}}^T \cdot \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{\underline{q}} = \frac{2}{3}k\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{q}}^T \cdot \underline{\underline{a}} \cdot \underline{\underline{q}}, \quad (4.23)$$

одакле сагласно изразу (4.13) следи да је тензор турбулентног напона у поларно-цилиндричном координатном систему дат изразом

$$\underline{\underline{\tau}} = \frac{2}{3}k\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{h}}, \quad (4.24)$$

при чему је јединични тензор $\underline{\underline{I}}$ исти као у изразу (4.20), али сада тензори $\underline{\underline{\tau}}$ и $\underline{\underline{h}}$ садрже поларно-цилиндричне компоненте напона. Дакле, из израза (4.24) следи да се компоненте изотропног дела тензора напона не мењају при трансформацији координата. Израз (4.24) може да се напише у индексној нотацији

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3}k\delta_{ij} + h_{ij}, \quad (4.25)$$

$$i = r, \varphi, z; \quad j = r, \varphi, z.$$

Тензорска једначина (4.24) има следећи развијени облик

$$\begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\varphi} & \tau_{rz} \\ \tau_{\varphi r} & \tau_{\varphi\varphi} & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\varphi} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_{rr} & h_{r\varphi} & h_{rz} \\ h_{\varphi r} & h_{\varphi\varphi} & h_{\varphi z} \\ h_{zr} & h_{z\varphi} & h_{zz} \end{bmatrix}, \quad (4.26)$$

у коме се на компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона могу применити изрази (3.60) које је извео Хамба. Да би се изрази (3.60) написали у сажетијем облику погодно је увести следеће коефицијенте турбулентне вискозности

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{4(\Omega_{\text{sw}}\tau_{\text{H}})}{1 + 4(\Omega_{\text{sw}}\tau_{\text{H}})^2}; & K_2 &= \frac{2}{1 + 4(\Omega_{\text{sw}}\tau_{\text{H}})^2}; \\
K_3 &= \frac{2}{1 + (\Omega_{\text{sw}}\tau_{\text{H}})^2}; & K_4 &= \frac{2(\Omega_{\text{sw}}\tau_{\text{H}})}{1 + (\Omega_{\text{sw}}\tau_{\text{H}})^2}; \\
K_5 &= \frac{2(\Omega_{\text{sw}}\tau_{\text{H}})}{1 + 4(\Omega_{\text{sw}}\tau_{\text{H}})^2}; & K_6 &= \frac{4(\Omega_{\text{sw}}\tau_{\text{H}})^2}{1 + 4(\Omega_{\text{sw}}\tau_{\text{H}})^2}; \\
K_7 &= \frac{2 + 4(\Omega_{\text{sw}}\tau_{\text{H}})^2}{1 + 4(\Omega_{\text{sw}}\tau_{\text{H}})^2}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Применом ових коефицијената Хамбине једначине (3.60) се могу написати у облику:

$$\begin{aligned}
h_{rr} &= \nu_{\text{tH}}(-K_1\langle S_{r\varphi} \rangle - K_7\langle S_{rr} \rangle - K_6\langle S_{\varphi\varphi} \rangle), \\
h_{r\varphi} &= \nu_{\text{tH}}(-K_2\langle S_{r\varphi} \rangle + K_5\langle S_{rr} \rangle - K_5\langle S_{\varphi\varphi} \rangle), \\
h_{rz} &= \nu_{\text{tH}}(-K_3\langle S_{rz} \rangle - K_4\langle S_{\varphi z} \rangle), \\
h_{\varphi\varphi} &= \nu_{\text{tH}}(K_1\langle S_{r\varphi} \rangle - K_6\langle S_{rr} \rangle - K_7\langle S_{\varphi\varphi} \rangle), \\
h_{\varphi z} &= \nu_{\text{tH}}(K_4\langle S_{rz} \rangle - K_3\langle S_{\varphi z} \rangle), \\
h_{zz} &= -2\nu_{\text{tH}}\langle S_{zz} \rangle.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

4.3 Разлагање Хамбиног тензора напона

На основу израза (4.28) може да се формира Хамбин тензор напона који може да се разложи на два дела

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{h}} &= \nu_{\text{tH}} \begin{bmatrix} -K_1\langle S_{r\varphi} \rangle & -K_2\langle S_{r\varphi} \rangle & -K_3\langle S_{rz} \rangle - K_4\langle S_{\varphi z} \rangle \\ -K_2\langle S_{r\varphi} \rangle & K_1\langle S_{r\varphi} \rangle & K_4\langle S_{rz} \rangle - K_3\langle S_{\varphi z} \rangle \\ -K_3\langle S_{rz} \rangle - K_4\langle S_{\varphi z} \rangle & K_4\langle S_{rz} \rangle - K_3\langle S_{\varphi z} \rangle & -2\langle S_{zz} \rangle \end{bmatrix} \\
&+ \nu_{\text{tH}} \begin{bmatrix} -K_7\langle S_{rr} \rangle - K_6\langle S_{\varphi\varphi} \rangle & K_5\langle S_{rr} \rangle - K_5\langle S_{\varphi\varphi} \rangle & 0 \\ K_5\langle S_{rr} \rangle - K_5\langle S_{\varphi\varphi} \rangle & -K_6\langle S_{rr} \rangle - K_7\langle S_{\varphi\varphi} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Даљњим разлагањем овај тензор може да се напише у следећем облику

$$\underline{\underline{h}} = \nu_{\text{tH}} \begin{bmatrix} -K_1\langle S_{r\varphi} \rangle & -K_2\langle S_{r\varphi} \rangle & 0 \\ -K_2\langle S_{r\varphi} \rangle & K_1\langle S_{r\varphi} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& +\nu_{tH} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_3 \langle S_{rz} \rangle \\ 0 & 0 & K_4 \langle S_{rz} \rangle \\ -K_3 \langle S_{rz} \rangle & K_4 \langle S_{rz} \rangle & 0 \end{bmatrix} \\
& +\nu_{tH} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_4 \langle S_{\varphi z} \rangle \\ 0 & 0 & -K_3 \langle S_{\varphi z} \rangle \\ -K_4 \langle S_{\varphi z} \rangle & -K_3 \langle S_{\varphi z} \rangle & 0 \end{bmatrix} \\
& +\nu_{tH} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \langle S_{zz} \rangle \end{bmatrix} \\
& +\nu_{tH} \begin{bmatrix} -K_7 \langle S_{rr} \rangle & K_5 \langle S_{rr} \rangle & 0 \\ K_5 \langle S_{rr} \rangle & -K_6 \langle S_{rr} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& +\nu_{tH} \begin{bmatrix} -K_6 \langle S_{\varphi\varphi} \rangle & -K_5 \langle S_{\varphi\varphi} \rangle & 0 \\ -K_5 \langle S_{\varphi\varphi} \rangle & -K_7 \langle S_{\varphi\varphi} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.29}
\end{aligned}$$

Уочава се да је сада Хамбин тензор напона разложен на сабирке у којима фигуришу исте компоненте просечне брзине деформисања. То омогућава да се сваки од сабирака у претходној једначини напише у облику унутрашњег производа тензора коефицијената турбулентне вискозности и дијагоналног тензора припадне компоненте просечне брзине деформисања. Сходно томе, Хамбин тензор напона може да се напише у следећем облику

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{h}} &= \nu_{tH} \begin{bmatrix} -K_1 & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle S_{r\varphi} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle S_{r\varphi} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle S_{r\varphi} \rangle \end{bmatrix} \\
& +\nu_{tH} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_3 \\ 0 & 0 & K_4 \\ -K_3 & K_4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle S_{rz} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle S_{rz} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle S_{rz} \rangle \end{bmatrix} \\
& +\nu_{tH} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -K_4 \\ 0 & 0 & -K_3 \\ -K_4 & -K_3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle S_{\varphi z} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle S_{\varphi z} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle S_{\varphi z} \rangle \end{bmatrix} \\
& +\nu_{tH} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle S_{zz} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle S_{zz} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle S_{zz} \rangle \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\nu_{tH} \begin{bmatrix} -K_7 & K_5 & 0 \\ K_5 & -K_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle S_{rr} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle S_{rr} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle S_{rr} \rangle \end{bmatrix} \\
& +\nu_{tH} \begin{bmatrix} -K_6 & -K_5 & 0 \\ -K_5 & -K_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \langle S_{\varphi\varphi} \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle S_{\varphi\varphi} \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \end{bmatrix}. \tag{4.30}
\end{aligned}$$

Са дијагоналним тензорима дате компоненте тензора просечне брзине деформисања се може лако манипулисати у софтверу OpenFOAM, јер се ови тензори могу изразити помоћу јединичног тензора. У foam-extend-4.0 верзији софтвера OpenFOAM, која је коришћена у овој дисертацији, јединични тензор је дефинисан у оквиру хедер фајла `TensorTemplateI.H` чија је путања `/home/user/foam/foam-extend-4.0/src/foam/lnInclude/TensorTemplateI.H`. У овом фајлу су дефинисани и остали тензори који су коришћени за писање постојећих физичких једначина у одређеним класама овог софтвера. Проблем при имплементацији Хамбиног тензора напона (4.30) стварају тензори коефицијената турбулентне вискозности. Наиме, ове тензоре није могуће написати у коду применом постојећих тензора дефинисаних у хедер фајлу `TensorTemplateI.H`. Због тога је Хамбин тензор (4.30) додатно разложен применом јединичних дијада, при чему је добијен следећи облик овог тензора

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{h}} = \nu_{tH} & \left[\left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - K_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - K_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + K_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right) \cdot \langle S_{r\varphi} \rangle \underline{\underline{I}} \right. \\
& + \left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + K_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - K_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + K_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right) \cdot \langle S_{rz} \rangle \underline{\underline{I}} \\
& + \left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - K_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - K_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - K_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right) \cdot \langle S_{\varphi z} \rangle \underline{\underline{I}} \\
& + \left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + K_5 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + K_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - K_6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right) \cdot \langle S_{rr} \rangle \underline{\underline{I}} \\
& + \left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - K_5 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - K_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - K_7 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right) \cdot \langle S_{\varphi\varphi} \rangle \underline{\underline{I}} \\
& + \left(\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right) \cdot \langle S_{zz} \rangle \underline{\underline{I}} \Big]. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Да би се овако разложен Хамбин тензор напона могао имплементирати у софтвер OpenFOAM извршена је измена основног хедер фајла `TensorTemplateI.H` кода OpenFOAM. У овом фајлу је додат део кода који дефинише јединичне дијаде и који је изложен у Прилогу П.ИИ. Према овом додатку јединична дијада "ThreeTwo" је тензор другог реда дефинисан изразом

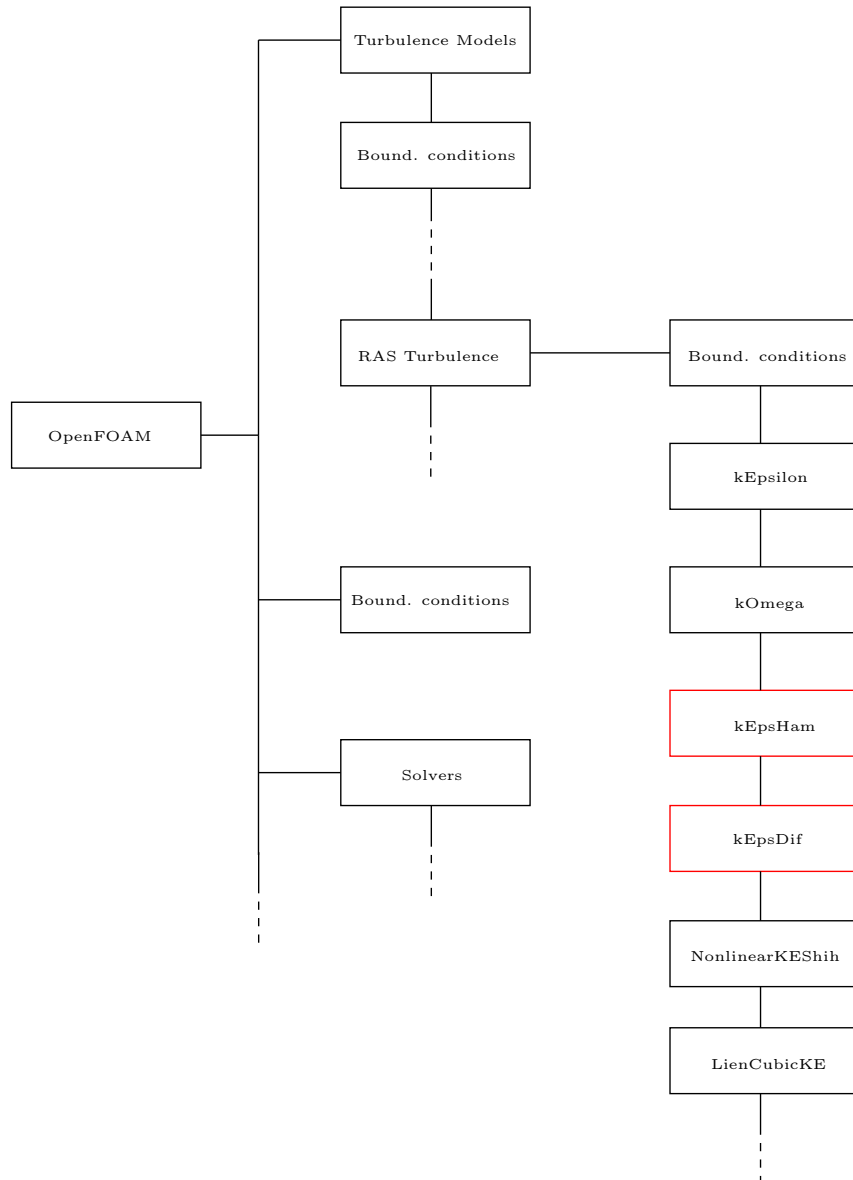
$$\text{ThreeTwo}(\text{tensor}::\text{one}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

За остале дијаде "OneOne", "OneTwo", "OneThree" итд. важе изрази аналогни изразу (4.32). Измена хедер фајла `TensorTemplateI.H` не захтева компајлирање, довољно је само сачувати измене у овом фајлу да би оне биле функционалне при раду софтвера.

4.4 Имплементација Хамбиног тензора напона у код OpenFOAM

Софтвер OpenFOAM је софтвер отвореног кода намењен нумеричком решавању система парцијалних диференцијалних једначина које описују физику континуума. За нумеричке прорачуне динамике флуида у овом софтверу се користи метода коначних запремина (енгл. *Finite Volume Method*) FVM, при чему се за дискретизацију прорачунског домена може користити структурирана или неструктурирана прорачунска мрежа. Метода коначних запремина подразумева примену физичких закона струјања у интегралном облику на сваку ћелију мреже. На тај начин се интегрални облици физичких закона струјања преводе у алгебарске облике у којима фигурише одређени број непознатих величина. Свака ћелија има одређени број непознатих физичких величина струјања. При томе суседне ћелије на контактним површима имају заједничке непознате величине, што значајно смањује укупан број непознатих величина на целој прорачунској мрежи. Непознате величине на ћелијама прорачунске мреже формирају систем линеарних алгебарских једначина, који се састоји од великог броја једначина. За непознате величине овог система једначина резервишу се меморијске локације у RAM меморији рачунара. Формирани систем једначина се може решавати директним или итеративним методама. У софтверу OpenFOAM се за прорачуне струјања нестишљивог флуида може применити итеративни SIMPLE алгоритам који је, између осталог, описао и Novković [12] и који је у овом раду коришћен у оквиру `simpleFoam` солвера.

Софтвер OpenFOAM се заснива на принципима објектно оријентисаног програмирања и представља скуп C++ библиотека које се, зависно од примене софтвера, могу међусобно повезивати на различите начине. Примена објектно оријентисаног програмског језика пружа одличне могућности за измену и надоградњу појединих модула овог софтвера. Сходно начелима објектно оријен-



Слика 4.1: Део структуре софтвера OpenFOAM са два нова модела.

тисаног програмирања одређене групе физичких једначина које чине физичко-математички модел струјања су у софтверу OpenFOAM испрограмиране у засебним модулима. Сходно томе, солвери и модели турбуленције представљају засебне модуле, који се у циљу нумеричког прорачуна струјања могу повезати на различите начине.

У модулу "Turbulence Models" су испрограмиране физичке једначине појединих модела турбуленције. Како је предмет овог рада имплементација новог модела турбуленције, то је неопходно да се изврши одређени програмерски захват у оквиру модула "Turbulence Models". У оквиру овог модула налази се подмодул који обухвата моделе турбуленције засноване на Рејнолдсовом приступу осредњавања Навије-Стоксових једначина и који се зове "RAS Turbulence". У овом подмодулу се налазе подмодули појединих модела турбуленције. Да би се у софтверу OpenFOAM имплементирао нови модел турбуленције потребно је додати нови подмодул који се састоји од изворног кода и хедер фајла. У изворном коду новог подмодула потребно је написати нове једначине за компоненте тензора турбулентног напона. Нове једначине је потребно написати тако да се нови модел турбуленције може повезати са постојећим солверима.

Једначина (4.24) и Хамбин тензор напона (4.31) дефинишу компоненте тензора турбулентног напона једног новог модела турбуленције, који не постоји у софтверу OpenFOAM. Међутим, у овом софтверу постоји низ модела турбуленције који се заснивају на сличној физичкој методологији. На пример у већини RAS модела турбуленције турбулентна вискозност је моделирана двоједначинским приступом. Хамба је такође при дефинисању компоненти тензора турбулентног напона користио двоједначински приступ, сличан приступу који је примењен код стандардног $k - \epsilon$ модела, који већ постоји у софтверу OpenFOAM. Како је Хамбина турбулентна вискозност дефинисана на сличан начин као и код стандардног $k - \epsilon$ модела, то је аутору овог рада као полазна основа за имплементацију Хамбиног модела послужила класа `kEpsilon.C`, која чини основу стандардног $k - \epsilon$ модела турбуленције. Због начина израчунавања турбулентне вискозности нови имплементирани модел је назван Хамбин $k - \epsilon$ модел турбуленције. Овом моделу је у коду додељен назив `kEpsHam`.

Поред тога, при имплементацији Хамбиног модела коришћени су одређени сегменти изворних кодова `NonlinearKEShik.C` и `LienCubicKE.C` постојећих нелинеарних модела турбуленције, пре свега делови кода који се односе на програмирање нелинеарних компоненти анизотропног дела тензора турбулентног напона. Због тога је у класи `kEpsHam.C` Хамбиним напонима у Декартовим координатама додељено име "nonlinStress". Дакле, имплементација Хамбиног модела је заснована на обједињавају делова кодова линеарних и нелинеарних модела турбуленције. Поступак имплементације Хамбиног модела додатно отежавају процеси трансформације компоненти тензора из поларно-цилиндричних у Декартове координате и обрнуто. Компоненте тензора турбулентног напона у Хамбином $k - \epsilon$ моделу турбуленције су написане у поларно-цилиндричним

координатама. Да би се ове једначине имплементирале у софтвер OpenFOAM потребно је извршити трансформацију тензора турбулентног напона (4.26) из поларно-цилиндричног у Декартов координатни систем. Као што је већ показано (при извођењу једначине (4.24)), изотропни део тензора турбулентног напона се не мења при трансформацији тензора напона из Декартовог у поларно-цилиндрични координатни систем. Може се доказати и да се изотропни део тензора турбулентног напона не мења ни приликом трансформације тензора турбулентног напона из поларно-цилиндричног у Декартов координатни систем. Доказ се изводи множењем једначине (4.24) са матрицама трансформације (4.16). Сходно томе, при трансформацији тензора турбулентног напона из једног у други координатни систем није потребно вршити трансформацију изотропног дела овог тензора, већ је потребно је извршити само трансформацију анизотропног дела тензора турбулентног напона. Трансформација Хамбиног тензора напона из поларно-цилиндричних у Декартове координате је у коду класе `kEpsHam.C` извршена командом

```
1 LTT_&(Hamba tensor)&RTT_
```

при чему је $LTT_ = \underline{\underline{q}}$ и $RTT_ = \underline{\underline{q}}^T$ (видети изразе (4.16)), а `(Hamba tensor)` је Хамбин тензор напона (4.31).

Компоненте просечне брзине деформисања у поларно-цилиндричном координатном систему нису дефинисане у софтверу OpenFOAM, а оне фигуришу у компонентама Хамбиног тензора (4.31). Због тога је ове компоненте тензора просечне брзине деформисања потребно изразити у функцији компоненти тензора просечне брзине деформисања у Декартовим координатама. Другим речима, потребно је тензор брзине деформисања из Декартових координата трансформисати у тензор брзине деформисања у поларно-цилиндричним координатама. Ова трансформација је у коду класе `kEpsHam.C` извршена командом

```
1 Ltt_&(symm(gradU))&Rtt_
```

при чему је сада $Ltt_ = \underline{\underline{q}}^T$ и $Rtt_ = \underline{\underline{q}}$ (видети изразе (4.16)), а `(symm(gradU))` је тензор просечне брзине деформисања у Декартовим координатама.

Као што се може видети у претходним наредбама су коришћени тензори трансформације координата, који такође не постоје у софтверу OpenFOAM. Због тога су ови тензори испрограмирани у оквиру изворног кода `kEpsHam.C`. Тензори трансформације координата су формиран сабирањем производа косинуса углова и јединичних дијада. Тако је на пример леви тензор трансформације `Ltt_` формиран следећим сетом наредби

```

1      Ltt_
2      (
3          CosPhi_*OneOne(tensor::one)+SinPhi_*OneTwo(tensor::one)
4          -SinPhi_*TwoOne(tensor::one)+CosPhi_*TwoTwo(tensor::one)
5          +ThreeThree(tensor::one)
6      ),

```

Истим поступком су формиран и остали тензори трансформације који се налазе у коду `kEpsHam.C`.

Треба још напоменути да цео изворни код `kEpsHam.C` мора имати променљиве које су изражене у Декартовим координатама, да би се могао повезати са остатком OpenFOAM кода који је написан у Декартовим координатама. Због тога су и вредности синуса и косинуса угла вектора положаја ћелије у мрежи изражене у функцији Декартових координата следећим сетом наредби

```

1      X_
2      (
3          mesh_.C().component(vector::X)
4      ),
5      Y_
6      (
7          mesh_.C().component(vector::Y)
8      ),
9      r_
10     (
11        sqrt(sqr(X_)+sqr(Y_))+rSmall_
12    ),
13    SinPhi_
14    (
15        Y_/r_
16    ),
17    CosPhi_
18    (
19        X_/r_
20    ),

```

Вектор просечне брзине је у солверима дефинисан преко компоненти вектора просечне брзине у Декартовим координатама, због чега је и угаона брзина вихора у изворном коду `kEpsHam.C` изражена у функцији компоненти вектора просечне брзине у Декартовим координатама следећим сетом наредби

```

1      Omega_
2      (
3          IOobject
4          (
5              "Omega",
6              runTime_.timeName(),
7              U_.db(),
8              IOobject::NO_READ,
9              IOobject::AUTO_WRITE

```

```

10     ),
11     mag(-Ux_()*SinPhi_+Uy_()*CosPhi_)/r_
12     ),

```

Изворни код Хамбиног модела `kEpsHam.C` и хедер фајл `kEpsHam.H` смештени су у модул `kEpsHam` који чини Хамбин $k - \varepsilon$ модел турбуленције и који ја на делу структурне шеме OpenFOAM софтвера додат на локацију која је уцртана на већ наведеној Сл. 4.1 на стр. 68 овог рада.

Изложеним поступцима је омогућен интегрисани рад имплементираниог модела и солвера у Декартовим координатама, иако је анизотропни део тензора турбулентног напона (Хамбин тензор напона) у изворном коду `kEpsHam.C` дефинисан помоћу компоненти напона у поларно-цилиндричним координатама. Овакав поступак омогућава да се нпр. променом вредности коефицијената (K_i) у компоненти напона утиче на одређену поларно-цилиндричну компоненту анизотропног дела тензора турбулентног напона, иако се цео прорачун динамике струјања, односно рад солвера одвија у Декартовим координатама. Деловање на изабрану поларно-цилиндричну компоненту напона није могуће извести у постојећим имплементираним моделима софтвера OpenFOAM чији су тензори турбулентног напона испрограмирани у Декартовим координатама. Због тога су Хамбин модел и овде изложени поступак његове имплементације значајни за сваку анализу струјања у којој је за моделирање напона погодније користити поларно-цилиндрични координатни систем, нпр. струјање у цевима, дифузорима, аксијалним турбинама итд. Наиме, изворни код `kEpsHam.C` и хедер фајл `kEpsHam.H` могу да послуже као програмерски шаблони за имплементацију компоненти анизотропног дела тензора напона било којег AЕVM или NLEVM модела турбуленције. Ово је значајно за моделирање и нумеричке прорачуне тубулентних струјања у струјним доменима цилиндричних облика, јер се измерени турбулентни напони у оваквим случајевима струјања приказују у поларно-цилиндричном координатном систему.

4.5 Развој и имплементација новог модела $k - \varepsilon$ diffuser

Хамба је развијени модел тестирао [65] на вихорном струјању у правој цеви упоређивањем профила брзина и турбулентних напона са експерименталним резултатима које је формирао Steenbegen [86]. При томе је у одређеним мерним пресецима постигао резултате који су бољи од резултата добијених применом стандардног $k - \varepsilon$ модела. Међутим, Хамба у својој анализи [65] није навео назив CFD кода који је користио при тестирању развијеног модела.

У овом раду су нумеричким прорачуном применом Хамбиног $k - \varepsilon$ модела имплементираног у OpenFOAM на истом тестном примеру постигнути исти ефекти које је нумеричким прорачуном постигао Хамба. На тај начин је потврђено да је Хамбин $k - \varepsilon$ модел тачно имплементиран у софтвер OpenFOAM.

При тестирању имплементираног Хамбиног $k - \varepsilon$ модела на вихорном струјању у правим конусним дифузорима, добијени су за нијансу лошији резултати од резултата добијених применом стандардног $k - \varepsilon$ модела. Због тога је низом нумеричких прорачуна и провера добијених резултата извршена измена одређених коефицијената у Хамбином $k - \varepsilon$ моделу. Нумерички прорачуни и провере добијених резултата су вршене на правом конусном дифузору који је експериментално истраживао Čantrak [2]. При томе су анализирана два режима вихорног струјања са различитом јачином вихора. На основу тога је добијена нова варијанта Хамбиног модела, која је у коду софтвера OpenFOAM названа `kEpsDif`. Ова варијанта Хамбиног модела добро покрива режиме турбулентног струјања у правим конусним дифузорима који се крећу у границама од безвихорног струјања до вихорног струјања са умереном јачином вихора, при вредностима Рејнолдсовог броја $150000 < Re < 450000$ оквирно.

Развијена варијанта Хамбиног модела је имплементирана у софтвер OpenFOAM помоћу подмодула `kEpsDif` у коме се налазе изворни код `kEpsDif.C` и хедер фајл `kEpsDif.H` који су дати у прилозима П.IV и П.V. У складу са AЕVM методологијом моделирања турбулентних напона, при анализи нумеричких резултата прорачуна је уочено да се одређени Хамбини коефицијенти турбулентне вискозности K_i издвајају по утицају на профиле брзина при вихорном струјању у правом конусном дифузору. При томе је уочено да је у језгру вихора неопходно остварити значајну разлику између коефицијената турбулентне вискозности који утичу на турбулентне напоне у аксијалном правцу и коефицијената турбулентне вискозности који утичу на турбулентне напоне у обимском правцу. Наведена разлика у коефицијентима турбулентне вискозности

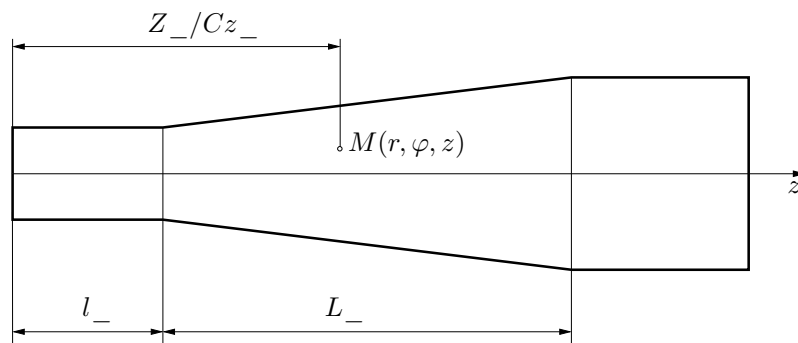
која се при вихорном струјању у дифузору остварује применом Хамбиног модела, није била довољна да се нумеричким прорачуном струјања на адекватан начин предвиде профили брзина у аксијалном и обимском правцу струјања. Анализом добијених резултата је уочено да на расподелу брзине у обимском правцу највећи утицај има деловање на компоненту $h_{r\varphi}$ Хамбиног тензора напона, моделирањем коефицијента K_2 . Смањивање вредности овог коефицијента у језгру вихора доводи до пораста вредности обимске брзине у језгру вихора. На расподелу аксијалне брзине у језгру вихора највећи утицај има деловање на компоненту напона h_{rz} моделирањем коефицијента K_3 . Међутим, како коефицијент K_3 , сагласно изразима (4.28), фигурише и у компоненти напона $h_{\varphi z}$, то се његовом променом неконтролисано нарушава вредност ове компоненте напона. Ова појава доводи до значајних проблема са конвергенцијом решења при нумеричком прорачуну. Да би се превазишао наведени проблем, промењен је назив коефицијента K_3 у компоненти напона h_{rz} . У моделу $k - \varepsilon$ diffuser овај коефицијент је назван K_8 . Из истог разлога је уведен коефицијент K_9 , како би се деловало само на напон $h_{\varphi\varphi}$.

Из Хамбиних једначина за компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона (3.60) се уочава да ове компоненте напона зависе од временског размера (τ_H) и угаоне брзине вихора (Ω_{sw}) у датој тачки струјног поља. То су два параметра струјања који, у односу на стандардни $k - \varepsilon$ модел, омогућавају додатни утицај на моделирање компоненти анизотропног дела тензора турбулентног напона. Ови параметри се у једначинама Хамбиних напона појављују као последица увођења временске нелокалности, односно као последица утицаја временски нелокалног турбулентног преноса између турбулентних структура. Из израза за коефицијенте турбулентне вискозности (4.27) се уочава да производ временског размера и угаоне брзине вихора у датој тачки струјног поља формира бездимензијски променљиви параметар, који је при имплементацији модела назван *параметар временске нелокалности* коефицијената турбулентне вискозности и коме је у коду додељен назив OT_- .

Из једначина (4.27) се уочава да пораст вредности овог параметра смањује вредност свих коефицијената турбулентне вискозности, изузев коефицијента K_6 . Параметар OT_- при вихорном струјању у дифузору има приближно линеарну промену од нулте вредности на зиду дифузора до максималне вредности у оси дифузора. Сходно томе, максимално смањење вредности већине коефицијената турбулентне вискозности се према Хамбиним једначинама остварује у оси дифузора. При нумеричким прорачунима вихорног струјања у дифузору и контроли резултата расподеле компоненти вектора брзине, уочено је да ова

тенденција смањивања већине коефицијената турбулентне вискозности са порастом параметра OT_* није повољна. Наиме, низом нумеричких прорачуна и контроле добијених резултата је уочено да у језгру вихора треба додатно деловати на компоненту напона $h_{r\varphi}$, да би се добило боље слагање нумеричких и експерименталних резултата обимске брзине. Слично томе, да би се у језгру вихора постигло боље слагање нумеричких и експерименталних резултата аксијалне брзине, потребно је додатно деловати на компоненту напона h_{rz} . Под утицајем ових запажања формиран су нови изрази за израчунавање коефицијената K_2 и K_8 . Одступања између нумеричких и експерименталних вредности компоненти брзине су зависна положаја мерног пресека у дифузору. Због тога је у циљу постизања бољег слагања нумеричких и експерименталних резултата у моделу `kEpsDif` уведена зависност коефицијената K_2 и K_8 од бездимензијског аксијалног растојања од улазног пресека до дате тачке струјног домена. Ово растојање у изворном коду `kEpsDif.C` има ознаку Z_*/Cz_* и делује на коефицијенте K_2 и K_8 преко допунских коефицијената A_* и B_* .

Коефицијенти A_* и B_* су непрекидне функције које у прорачунском домену правог конусног дифузора мењају своје вредности у зависности од бездимензијског аксијалног растојања од улазног пресека до дате тачке струјног домена. Поред тога, као што се из кода може видети, коефицијенти A_* и B_* зависе од величина l_* и L_* . Оваквим приступом је употреба модела $k-\varepsilon$ diffuser ограничена само на струјне домене који се састоје из цилиндричне уводне цеви дужине l_* и дифузора дужине L_* и код којих се осе цеви и дифузора увек морају поклапати за z осом Декартовог координатног система (видети Сл.4.2). У складу са тим,



Слика 4.2: Карактеристичне коте право конусног дифузора.

развијени модел $k-\varepsilon$ diffuser је применљив само на струјање у правим конусним дифузорима и цевним хидрауличним турбинама, при чему треба строго водити рачуна о положају осе z и вредностима кота l_* и L_* . Наведени модел је развијен на основу анализа нумеричких резултата прорачуна на дифузору за који је $l_* = 90$ [mm] и $L_* = 932$ [mm] и који је експериментално истраживао Čantrak [2].

Зависност новоуведених коефицијената од бездимензијских геометријских параметара дифузора обезбеђује да се модел $k - \varepsilon$ diffuser може применити на било који дифузор. Ово су омогућиле наредбе из следећег листинга

```
1 bool kEpsDif::read()
2 {
3     if (RASModel::read())
4     {
5         Cmu_.readIfPresent(coeffDict());
6         C1_.readIfPresent(coeffDict());
7         C2_.readIfPresent(coeffDict());
8         sigmaEps_.readIfPresent(coeffDict());
9         l_.readIfPresent(coeffDict());
10        L_.readIfPresent(coeffDict());
11
12        return true;
13    }
14    else
15    {
16        return false;
17    }
18 }
```

Сходно овим наредбама, да би модел $k - \varepsilon$ diffuser био применљив на било који прави консусни дифузор, потребно је у оквиру библиотеке за измену стандардних коефицијената модела унети вредности за дужину l_* и дужину L_* изражену у метрима, за дифузор у којем се врши нумерички прорачун струјања. Развијени модел $k - \varepsilon$ diffuser је поред дифузора који је испитивао Čantrak [2] тестиран на дифузору који је експериментално истраживао Clausen [39] и на Азадовом дифузору који је експериментално истраживао Okwoubi [27]. При тестирању модела на Клаусеновом дифузору у део библиотеке RASProperties за корекцију коефицијената модела унете су вредности за l_* и L_* које су приказане у следећем листингу

```
1 kEpsDifCoeffs
2 {
3     l          0.50;
4     L          0.51;
5 }
```

При тестирању модела на Азадовом дифузору, унете су вредности

```
1 kEpsDifCoeffs
2 {
3     l          0.304;
4     L          0.7196;
5 }
```

Уколико се у библиотеци `RASProperties` не унесу одговарајуће димензије дифузора, онда овај модел неће обезбедити конвергенцију решења, или ће дати јако лоше резултате.

Као што је већ наведено, `Santrak` је експериментална истраживања извео за две јачине вихора. Током процеса развоја модела $k - \epsilon$ diffuser уочено је да тачност нумеричког прорачуна вихорног струјања у дифузору значајно зависи од јачине вихора. Стога је уведена зависност коефицијената K_2 и K_8 од јачине вихора на улазном пресеку у дифузор. Јачина вихора се у датом пресеку дифузора рачуна применом израза [7]

$$\theta = \frac{\int_0^R r \langle u_\varphi \rangle^2 \langle u_z \rangle dr}{\int_0^R r \langle u_z \rangle^3 dr}.$$

Множењем бројоца и имениоца овог израза са 2π добија се следећи израз

$$\theta = \frac{\int_A \langle u_\varphi \rangle^2 \langle u_z \rangle 2\pi r dr}{\int_A \langle u_z \rangle^3 2\pi r dr} \approx \frac{\sum_A \langle u_\varphi \rangle^2 \langle u_z \rangle \delta A_i}{\sum_A \langle u_z \rangle^3 \delta A_i}, \quad (4.33)$$

за нумеричко израчунавање јачине вихора у датом попречном пресеку дифузора. На основу израза (4.33) у изворном коду `kEpsDif.C` је додат део кода који нумерички рачуна јачину вихора на улазном пресеку дифузора. Јачини вихора на улазном пресеку дифузора је додељено име `SwS_` и њена вредност се у коду рачуна следећим сетом наредби

```

1 // Recalculating Inlet Swirl Strenght
2 label myinlet = mesh_.boundaryMesh().findPatchID("inlet");
3 const polyPatch& cPatch = mesh_.boundaryMesh()[myinlet];
4 const fvPatchVectorField& Uin = U().boundaryField()[myinlet];
5 const fvPatchScalarField& SinIN = SinPhi_.boundaryField()[myinlet];
6 const fvPatchScalarField& CosIN = CosPhi_.boundaryField()[myinlet];
7 const surfaceScalarField& magSf = mesh_.magSf();
8
9
10 float IFR = 0.0;
11 float IEFzDir = 0.0;
12 float IEFPhiDir = 0.0;
13 float IEFzDirSmall_ = 0.001;
14
15 forAll(cPatch, facei)
16 {
17     IFR += (Uin[facei].z())*magSf.boundaryField()[myinlet][facei];
18     IEFzDir += pow(Uin[facei].z(),3)*magSf.boundaryField()[myinlet][facei];
19     IEFPhiDir += sqrt(-Uin[facei].x()*SinIN[facei]+Uin[facei].y())

```



```

20         *CosIN[facei])*(Uin[facei].z())
21         *magSf.boundaryField()[myinlet][facei];
22     }
23
24     scalar t = time().value();
25     Info<<"t = "<<t<<endl;
26
27     if (t<3)
28     {
29         SwS_=SwirlCalc(IEFzDir,IEFPhiDir,IEFzDirSmall_);
30         Info<<"SwirlCalc = "<<SwS_<<endl;
31         std::ofstream out("SwS.txt");
32         out<<std::setprecision(3)<<SwS_;
33     }
34
35     else
36     {
37         std::ifstream in("SwS.txt");
38         float ss;
39         in>>ss;
40         Info<<"ss = "<<ss<<endl;
41         SwS_=ss;
42     }

```

У овом сету наредби је $IEFPhiDir = \sum_A \langle u_\varphi \rangle^2 \langle u_z \rangle \delta A_i$ и $IEFzDir = \sum_A \langle u_z \rangle^3 \delta A_i$. Променљива IFR је дефинисана математичким изразом $IFR = \sum_A \langle u_z \rangle \delta A_i$ и даје вредност запремиског протока флуида на улазу у дифузор. На крају изворног кода kEpsDif.C је додат следећи сет наредби

```

1 Info<<endl<<"You are using kEpsDif model:"<<endl;
2 Info<<endl<<l_<<endl;
3 Info<<L_<<endl;
4 Info<<Ctau_<<endl;
5 Info<<"InFlowRate = "<<IFR<<" m^3/s"<<endl;
6 Info<<"InEnFluxZdir = "<<IEFzDir<<" m^5/s^3"<<endl;
7 Info<<"InEnFluxPhiDir = "<<IEFPhiDir<<" m^5/s^3"<<endl;
8 Info<<"SwS = "<<SwS_<<endl<<endl<<endl;

```

Овај сет наредби омогућава:

- контролу унетих геометријских параметара дифузора,
- контролу параметара који се користе за прорачун јачине вихора,
- контролу јачине вихора,

исписивањем њихових вредности на монитору рачунара током сваке итерације. Развијени модел је приликом тестирања на расположивим тестним примерима радио подједнако стабилно при серијском и при паралелном процесирању, при чему је у свим случајевима тестирања остварена одлична конвергенција решења.

5 Резултати нумеричких прорачуна

Један од циљева ове докторске дисертације је побољшање тачности нумеричког прорачуна вихорног струјања у правим конусним дифузорима. У складу са тим, у претходној глави је објашњена процедура развоја и имплементације новог модела турбуленције $k - \varepsilon$ diffuser. Укратко, у код OpenFOAM је прво имплементиран Хамбин $k - \varepsilon$ модел турбуленције, који је намењен за прорачун вихорног струјања у цевима. Потом су извршене значајне модификације Хамбиног модела у циљу формирања новог модела турбуленције. У оквиру ове главе је најпре извршена провера правилне имплементације Хамбиног модела турбуленције на примеру вихорног струјања у цеви, а након тога је извршено тестирање и анализа резултата новог модела $k - \varepsilon$ diffuser на принудно-потенцијалном вихорном струјању у правом конусном дифузору, које је експериментално истраживао Čantrak [2]. Потом је извршено тестирање развијеног модела $k - \varepsilon$ diffuser на тестним примерима вихорног струјања у Клаусеновом и безвихорног струјања у Азадовом дифузору.

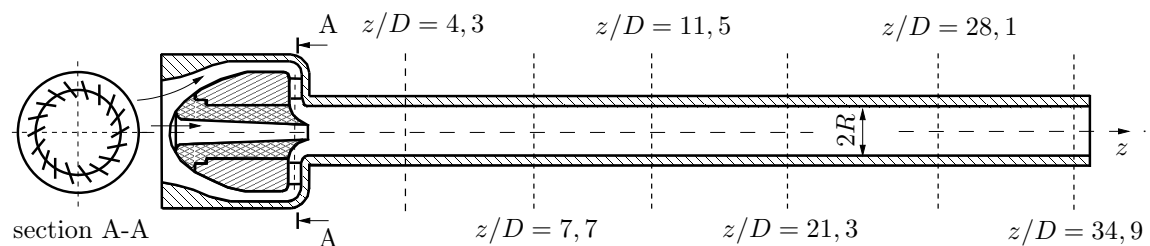
5.1 Тестирање имплементираниог Хамбиног $k - \varepsilon$ модела на Стинберговој цеви

Тачност поступка имплементације компоненти Хамбиног тензора напона у софтвер OpenFOAM је проверена на вихорном струјању у правој кружној цеви, које је експериментално истраживао Steenbergen [86]. При томе су нумерички и експериментално добијени резултати упоређени за случај принудно-потенцијалног вихорног струјања у правој кружној цеви. Хамба је изведене компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона свог модела тестирао на прорачуну наведеног вихорног струјања, при чему је делимично описао граничне услове које је користио, а податке о прорачунској мрежи и коришћеном софтверу није навео [65]. Поред тога, Хамба је турбулентну вискозност

моделирао применом $k - \varepsilon$ модела намењеног за мале вредности Рејнолдсовог броја. При томе је за моделирање турбулентне вискозности и дисипације користио између осталог и пригушне функције (енгл. *damping function*). Како је аутор ове дисертације имао намеру да се Хамбин модел турбуленције при безвихорном струјању сведе на стандардни $k - \varepsilon$ модел, то је у овој дисертацији турбулентна вискозност моделирана применом стандардног $k - \varepsilon$ модела турбуленције. Због недоступности података о софтверу, примењеној мрежи и граничним условима, као и због разлике у моделирању турбулентне вискозности, може се очекивати извесна разлика између резултата који је постигао Хамба и резултата које ће остварити аутор ове дисертације. Ипак, компоненте имплементираних тензора напона, које манифестују физички процес утицаја временске нелокалности на прорачун струјања, су исте у оба тестирања. Због тога се може очекивати да се при тестирању Хамбиног модела који је имплементиран у софтвер OpenFOAM у језгру вихора постигну исти физички утицаји на поље брзине које је постигао Хамба у својим прорачунима.

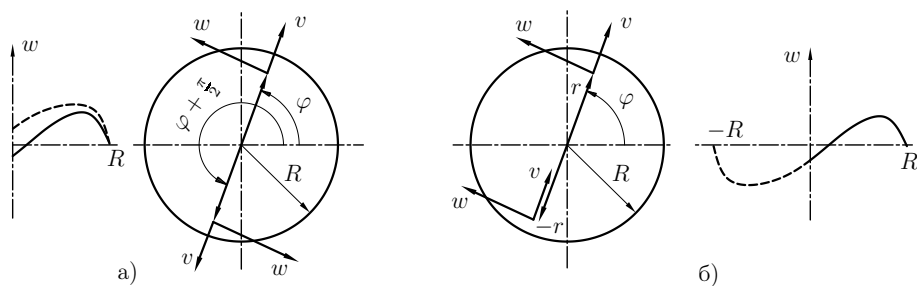
5.1.1 Опис тестног примера и гранични услови

Тестни пример вихорног струјања у правој цеви је формирао Стинберген применом испитне инсталације чији је главни део приказан на Сл.5.1 и која се састоји од цеви пречника $D = 2R = 70$ mm и генератора вихора. Генератор вихора је конвергентни струјни домен у који су радијално уграђене лопатице које омогућавају формирање принудно-потенцијалног вихора у цеви. При томе се један део струје флуида аксијално убрзигава у језгро вихора помоћу централне млазнице, како би се спречио настанак повратног струјања у језгру вихора. Стинберген је при испитивању као радни флуид користио воду.



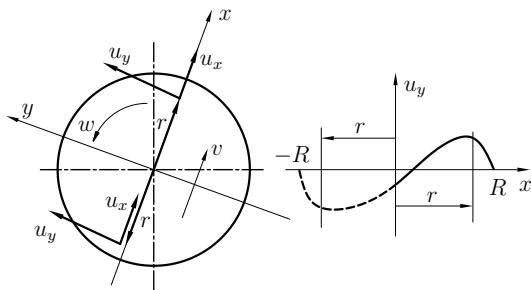
Слика 5.1: Главни део Стинбергене испитне инсталације [86].

Мерења је извео применом ласер доплер анемометрије (LDA) у више пресека низструјно од генератора вихора, као што је то приказано на Сл.5.1. При мерењима је користио модификовани поларно-цилиндрични координатни систем који је приказан на Сл.5.2. Као што се из Сл.5.2. може видети, Стинберген



Слика 5.2: Стинбергенов мерни координатни систем [86].

је за радијалну компоненту вектора брзине (u_r) користио ознаку ознаку (v), за обимску компоненту (u_φ) је користио ознаку (w), а за аксијалну компоненту (u_z) је користио ознаку (u). У Стинбергеновом модификованом координатном систему, који је приказан на Сл.5.2 б), ознаке за компоненте вектора брзине су исте али обимска и радијална компонента брзине у струјном домену мењају предзнаке при истом смеру вихора. Стинберген је у модификованом координатном систему користио негативне вредности за радијалну координату, што је математички неубичајено. Како би се избегла ова математичка неусаглашеност и евентуалне грешке при упоређивању нумеричких и експерименталних резултата, аутор овог рада је Декартов координатни систем поставио тако да се поклапа са осама Стинбергеновог модификованог координатног система. На

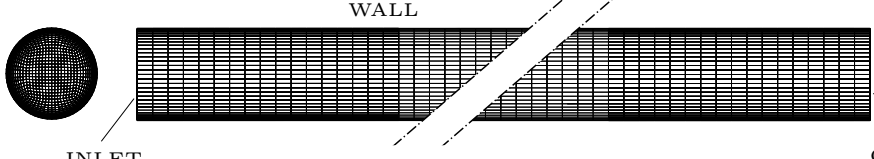





Слика 5.3: Координатни систем за упоређивање нум. и експ. резултата.

тај начин Стинбергеновој компоненти брзине (v) одговара компонента брзине (u_x), компоненти брзине (w) одговара компонента брзине (u_y), а компоненти брзине (u) одговара компонента брзине (u_z). При томе се, као што је то показано на Сл.5.3, координата (x) поклапа са Стинбергеновим радијалним правцем, координата (y) се поклапа са обимским правцем, а координата (z) се поклапа са аксијалним правцем.

Део струјног домена Стинбергенове испитне инсталације од пресека $z/D = 4,3$ до $z/D = 54,3$ је искоришћен за формирање тестног примера за проверу резултата нумеричког прорачуна струјања. При томе су значајне експерименталне вредности измерене у пресеку $z/D = 4,3$ јер су ове вредности

Табела Т.1: Мрежа и гранични услови Стинбергеновог тестног примера.



<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  INLET </div> <div style="text-align: center;">  WALL </div> <div style="text-align: center;">  OUTLET </div> </div>				
Тип мреже: Структурирана		Број ћелија: 307200		Дужина: $50D$
Радни флуид: Вода		$\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$	$\text{Re} = 300000$	$\langle u_z \rangle_{sr} = 4,286 \text{ m/s}$
-	U	p	k	ε
INLET	fixedValue; nonuniform List<vector>	zeroGradient;	fixedValue; nonuniform List<scalar>	fixedValue; nonuniform List<scalar>
WALL	fixedValue; uniform (0,0,0);	zeroGradient;	kqRWallFunction;	epsilonWallFunction;
OUTLET	zeroGradient;	fixedValue; uniform 0;	zeroGradient;	zeroGradient;

искоришћене за формирање граничних услова на улазном пресеку цеви. Дакле, између пресека $z/D = 4,3$ и $z/D = 54,3$ применом модула `blockMesh` софтвера `OpenFOAM` је формирана прорачунска мрежа. Карактеристике формиране мреже и гранични услови помоћу којих је извршен нумерички прорачун су приказани у табели Т.1. Гранични услов за брзину на улазном пресеку дифузора је формиран помоћу неуниформних листа вредности три компоненте вектора брзине које су измерене у пресеку $z/D = 4,3$. Гранични услов за ТКЕ (k) на улазном пресеку дифузора је формиран на основу измерених вредности нормалних напона. Гранични услов за дисипацију на улазном пресеку дифузора је формиран на основу измерене ТКЕ применом израза (3.30), при чему је претпостављено да је дужински размер $\ell_m = 0,02D$ оквирном проценом према расположивим препорукама [113], [114] и вредности Рејнолдсовог броја $\text{Re} = 300000$, за који је извршено ово тестирање. У табели Т.2 су дате вредности струјних варијабли на улазном пресеку цеви, односно у мерном пресеку $z/D = 4,3$ добијене скенирањем Стинбергенових дијаграма [86]. На основу података који су дати у табели Т.2, нумеричким интеграљењем је израчуната средња вредност турбулентне кинетичке енергије на улазном пресеку цеви $k_{sr} = 0,139 \text{ J/kg}$ и средња вредност интензитета вектора просечне брзине на улазном пресеку цеви $\langle u \rangle_{sr} = 4,271 \text{ m/s}$. На основу ових вредности је израчуната средња процентуална вредност интензитета турбуленције на улазном пресеку цеви $I_{sr} = 100\sqrt{\frac{2}{3}k_{sr}}/\langle u \rangle_{sr} = 7,13 \%$. Према табели Т.2 су формиране

Табела Т.2: Гранични услови на улазном пресеку Стинбергеневог цеви.

x [m]	$\langle u_r \rangle$ [m/s]	$\langle u_\varphi \rangle$ [m/s]	$\langle u_z \rangle$ [m/s]	p [Pa]	-	x [m]	k [J/kg]	ε [J/kg ^s]
-0.0350	0	0,000	0,000	zeroGradient		-0.0350	0,0000	0,0000
-0.0345	0	1,130	3,635			-0.0329	0,1426	6,3224
-0.0297	0	0,996	4,089			-0.0313	0,1278	5,3595
-0.0266	0	0,956	4,340			-0.0291	0,1204	4,9060
-0.0232	0	1,036	4,617			-0.0268	0,1163	4,6560
-0.0201	0	1,172	4,754			-0.0236	0,1104	4,3034
-0.0166	0	1,386	4,765			-0.0215	0,1092	4,2364
-0.0133	0	1,677	4,713			-0.0188	0,1129	4,4512
-0.0098	0	2,160	4,552			-0.0163	0,1248	5,1730
-0.0065	0	2,760	4,065			-0.0124	0,1621	7,6588
-0.0035	0	3,090	2,855			-0.0092	0,2372	13,556
-0.0013	0	2,182	1,753			-0.0053	0,4000	29,783
0.0002	0	0,966	1,230			-0.0026	0,5716	50,722
0.0022	0	-1,912	1,701			0.0002	0,5677	50,199
0.0044	0	-3,225	2,480			0.0031	0,5842	52,415
0.0660	0	-2,973	3,530			0.0061	0,4019	29,903
0.0100	0	-2,373	4,364			0.0096	0,2373	13,568
0.0130	0	-1,909	4,618			0.0127	0,1668	7,9946
0.0163	0	-1,560	4,765			0.0160	0,1423	6,2995
0.0198	0	-1,288	4,749			0.0192	0,1166	4,6751
0.0229	0	-1,094	4,624			0.0223	0,1031	3,8862
0.0264	0	-0,997	4,445			0.0263	0,1026	3,8586
0.0295	0	-0,938	4,230			0.0292	0,1129	4,4523
0.0345	0	-0,937	3,635			0.0328	0,1378	6,0052
0.0350	0	0,000	0,000			0.0350	0,0000	0,0000

листе вредности струјних варијабли на основу којих су постављени гранични услови на улазном пресеку цеви. При прорачуну применом `kOmegaSST` модела гранични услов за фреквенцију ω је формиран на основу вредности за ТКЕ применом израза:

$$\omega = C_\nu^{-\frac{1}{4}} \frac{\sqrt{k}}{\ell_m}. \quad (5.1)$$

Нумерички прорачуни струјања су извршени применом четири различита модела турбуленције, три постојећа у софтверу OpenFOAM и Хамбиног $k - \varepsilon$ модела који је у оквиру ове дисертације имплементиран у софтвер OpenFOAM. Од постојећих модела примењена су два LEVM ($k - \varepsilon$ и $k - \omega$ SST) и један NLEVM (Lien cubic $k - \varepsilon$). Наведени модели су примењени како би се показала предност Хамбиног AEVM модела у односу на LEVM и NLEVM моделе при прорачуну вихорног струјања у цеви. Тачност прорачуна поља брзине применом Хамбиног модела је зависна од Хамбиног временског размера (3.61), односно од вредности константе C_τ . При прорачуну овог тестног примера применом Хамбиног модела, урађено је више нумеричких прорачуна за различите вредности константе C_τ . При томе је вредност константе C_τ мењана преко дела библиотеке `RASProperties` датог у следећем листингу

```

1 kEpsHamCoeffs
2 {
3   Ctau          0.650;
4 }

```

Најбоље слагање нумеричких и експерименталних вредности поља брзине је добијено за вредност $C_\tau = 0,650$. На овом тестном примеру, при $Re = 50000$, Хамба је најбоље слагање резултата постигао са $C_\tau = 0,182$.

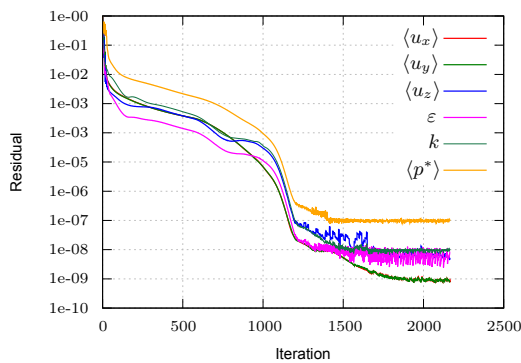
5.1.2 Параметри нумеричког прорачуна и конвергенција решења

Нумерички прорачуни струјања су извршени на радној станици HP-Z6-G4 применом паралелног процесирања на 16 процесорских језгара. Просечно време трајања прорачуна до достизања жељене тачности је за сваки од примењених модела износило приближно 10 min. При прорачуну су коришћене нумеричке шеме дискретизације приказане у табели Т.3.

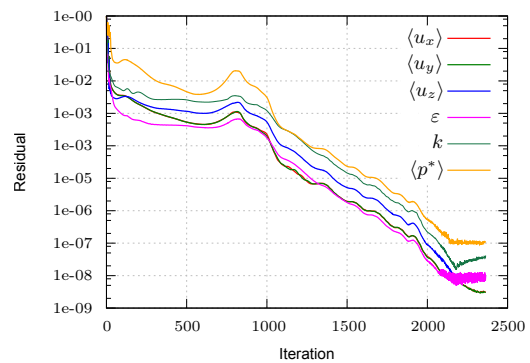
Табела Т.3: Шеме дискретизације коришћене у нумеричким прорачунима.

Величина	Схема дискретизације
ddtSchemes	steadyState
gradSchemes	Gauss linear
divSchemes	
div(phi,U)	Gauss linearUpwind Gauss
div(phi,k)	Gauss upwind
div(phi,ε)	Gauss upwind
div(phi,ω)	Gauss upwind
div((nuEff*dev(T(grad(U)))))	Gauss linear
div(nonlinearStress)	Gauss linear
div(nonlinStress)	Gauss linear
laplacianSchemes	Gauss linear corrected
interpolationSchemes	linear
snGradSchemes	corrected
fluxRequired	
default	no
p	p

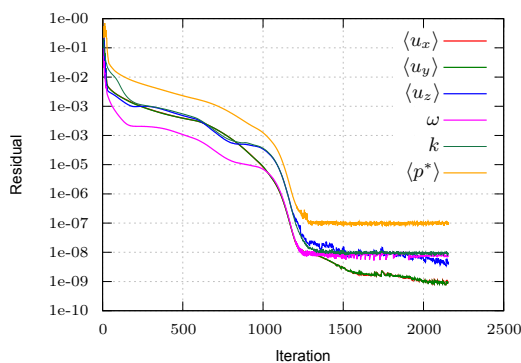
Како би се обезбедила што боља нумеричка стабилност прорачуна извршено је одговарајуће подешавање параметара солвера. За притисак је коришћен PCG солвер са DIC прекондиционером, док је за брзину и величине турбуленције коришћен smoothSolver са Гаус-Зајделовом методом за пригушивање компоненти високих фреквенција вектора грешке при итеративном прорачуну. Тачност прорачуна је задата, тако је вредност толеранције резидуала за поље притиска 10^{-7} , за поља брзине и величина турбуленције 10^{-8} . При томе је релативна толеранција за поље притиска подешена на 0,01, а за остале физичке величине на 0,1. При нумеричким прорачунима је за притисак и брзину коришћен подрелаксациони фактор 0,4, док је за ТКЕ и дисипацију коришћен подрелаксациони фактор 0,7. Са овим подешавањима и применом солвера simpleFoam је постигнута одлична конвергенција решења за сва четири коришћена модела турбуленције, као што је то приказано на Сл.5.4 - Сл.5.7.



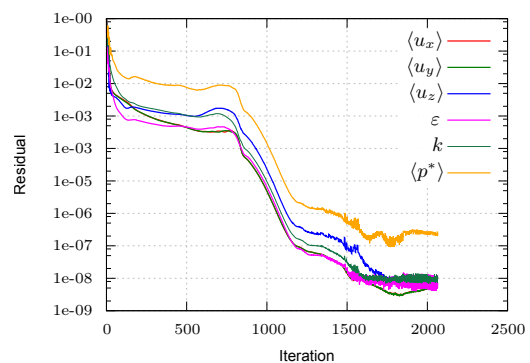
Слика 5.4: kEpsilon модел.



Слика 5.5: kEpsilonHem модел.



Слика 5.6: kOmegaSST модел.



Слика 5.7: LienCubicKE модел.

На основу тога може да се закључи да се анализирано струјање може добро апроксимирати увођењем претпоставке о његовој стационарности. Посматрањем дијаграма конвергенције решења уочава се да брзина конвергенције решења зависи од сложености модела турбуленције. Оба линеарна модела су бржије конвергирала. Брзине конвергенције имплементираниог Хамбиног $k - \varepsilon$

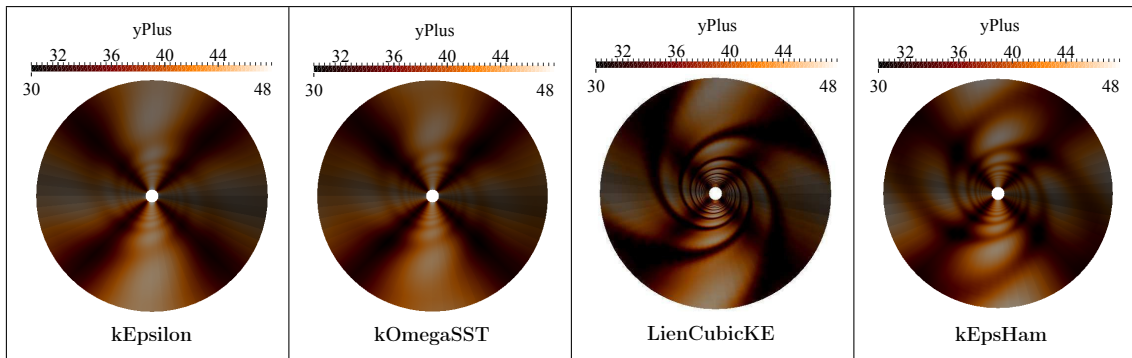
модела и постојећег нелинеарног Lien cubic $k - \varepsilon$ модела су сличне, јер ови модели имају сличну математичку сложеност. На усложњавање прорачуна применом имплементираниог Хамбиног $k - \varepsilon$ модела значајно утичу поступци трансформације тензора напона и тензора просечне брзине деформисања из једног у други координанти систем.

5.1.3 Контрола бездимензијске координате y^+

Као што се може видети у претходној табели Т.1, при нумеричком прорачуну струјања у близини зида су коришћене стандардне зидне функције. Да би се применом стандардних зидних фуункција постигли валидни резултати прорачуна препоручује се да бездимензијска координата y^+ дефинисана изразом

$$y^+ = \frac{u^* y}{\nu}, \quad (5.2)$$

буде у прописаним границама $30 < y^+ < 100$. Промена вредности y^+ добијена применом коришћених модела турбуленције је приказана на Сл.5.8.

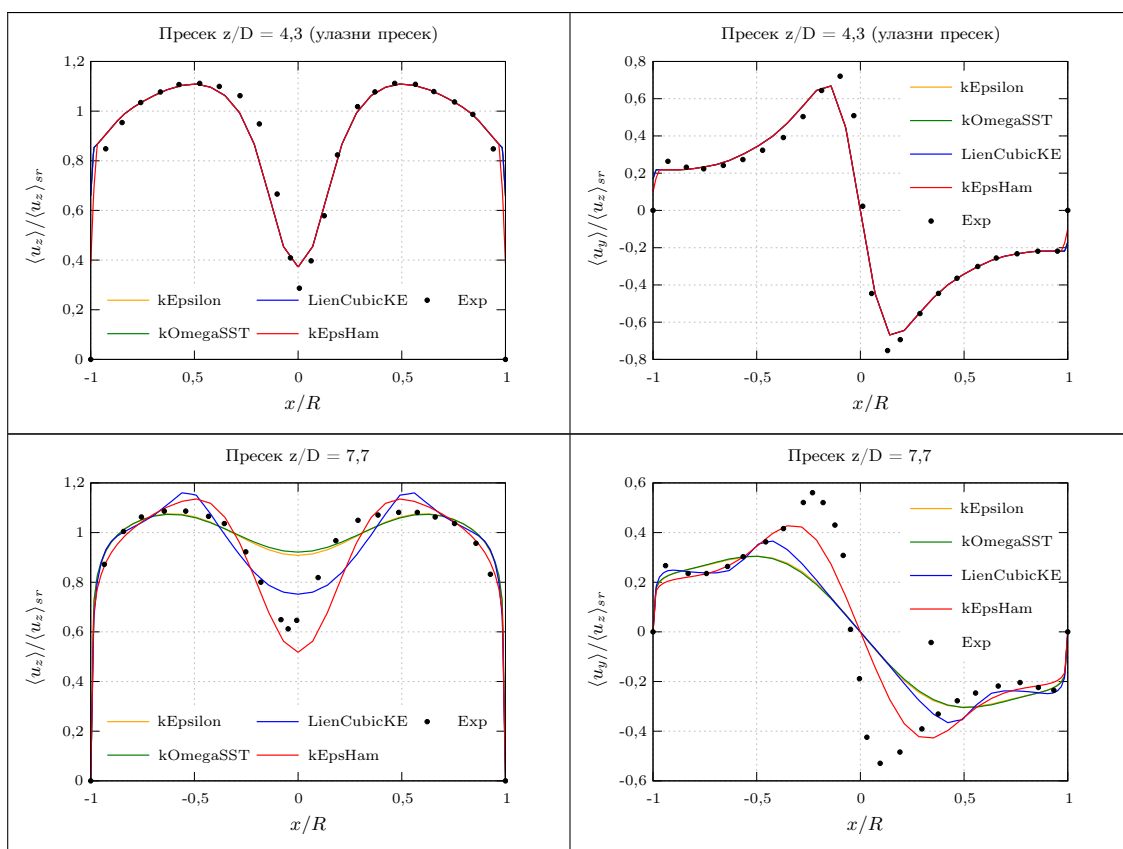


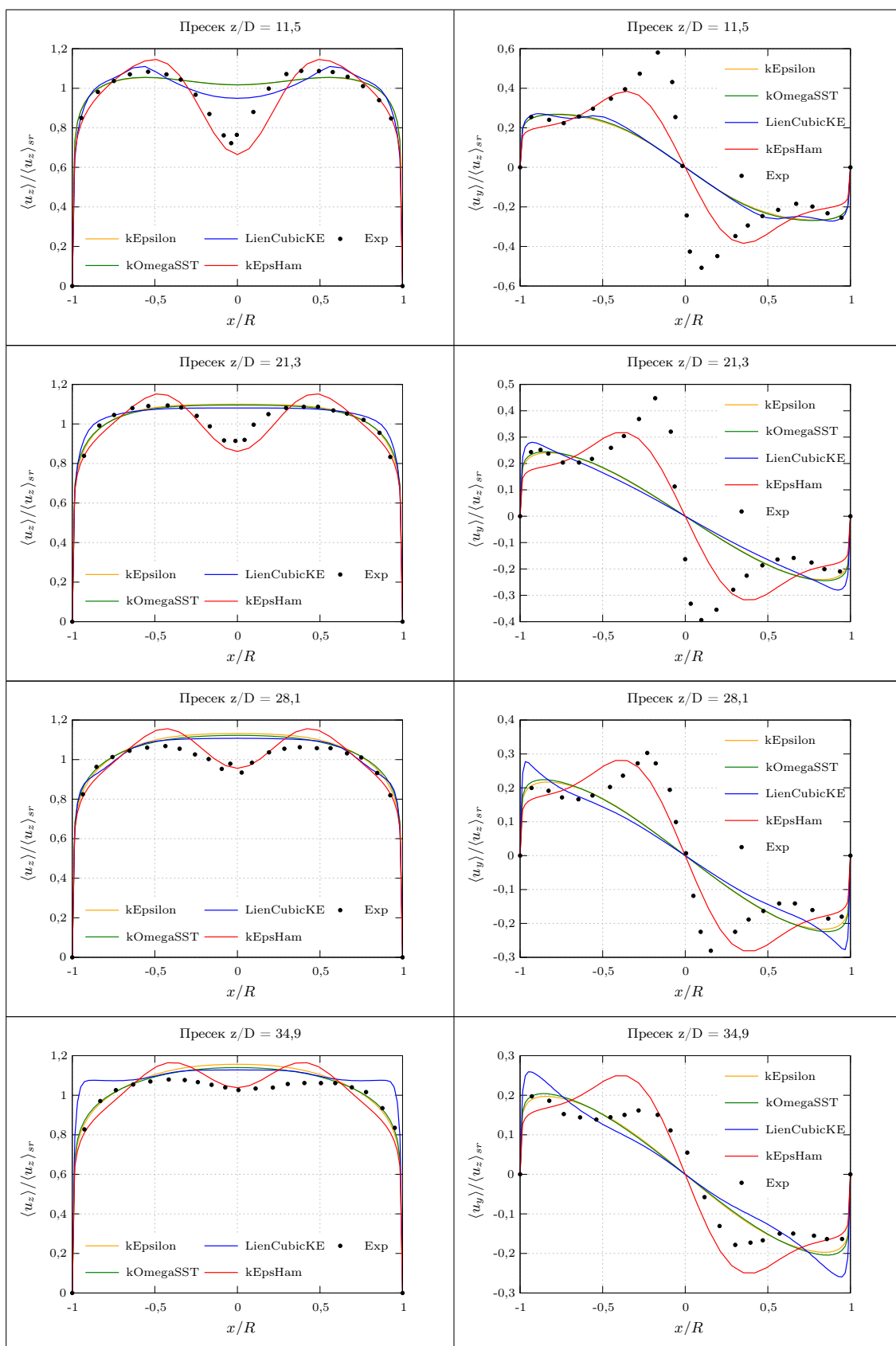
Слика 5.8: Расподела y^+ добијена различитим моделима турбуленције.

Као што се из Сл.5.8 може видети расподела бездимензијске координате y^+ се налази у прописаним границама, што значи да је дебљина првог слоја мреже у близини зида добро одређена. Посматрањем Сл.5.8 се уочава да нелинеарни модел Lien cubic $k - \varepsilon$ и имплементирани Хамбин $k - \varepsilon$ модел дају другачије расподеле бездимензијске координате y^+ од расподела које се добијају применом модела $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ SST. Раподела бездимензијске координате y^+ се код модела Lien cubic $k - \varepsilon$ и имплементираниог Хамбиног $k - \varepsilon$ модела поклапају са обликом струјница који се генерише вихорним струјањем.

5.1.4 Резултати прорачуна поља брзине

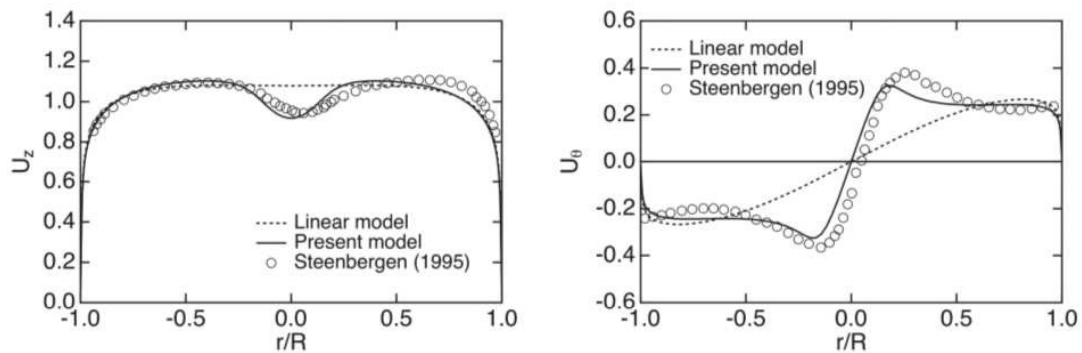
Нумеричким прорачуном струјања је добијено векторско поље брзине у струјном домену Стинбергеневог цеви. При томе је због физичке природе овог струјања вредност радијалне компоненте вектора просечне брзине струјања занемарљива, док аксијална и обимска компонента имају значајне вредности. Вредности ових компоненти брзине имају изражену промену у радијалном и аксијалном правцу, док је њихова промена у обимском правцу занемарљива. Због тога се ово струјање може добро апроксимирати увођењем претпоставке о осносиметричном струјању у меридијанској равни. Иако се ово струјање може сматрати осносиметричним струјањем, нумерички прорачуни струјања у овом раду су ипак извршени на тродимензионалној прорачунској мрежи. Резултати мерења поља брзине која је извео Стинберген недвосмислено показују да се струјање у овој цеви може добро апроксимирати претпоставком о осносиметричности поља брзине. Нумеричким прорачунима струјања у овој цеви добијене су аксијална и обимска компонента вектора просечне брзине струјања чије су расподеле у попречним пресецима цеви приказане на Сл.5.9.





Слика 5.9: Распoдела аксијалне и обимске компоненте брзине дуж x осе.

Посматрањем дијаграма на Сл.5.9 уочава се да Хамбин $k - \varepsilon$ модел даје боље резултате од осталих тестираних модела. При томе је предност Хамбиног $k - \varepsilon$ модела над линеарним моделима турбуленције значајније изражена. Нелинеарни модел Lien cubic $k - \varepsilon$ адекватније предвиђа поље брзине при овом струјању од линеарних модела $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ SST, али су резултати добијени применом Хамбиног $k - \varepsilon$ модела значајно бољи. Сличне ефекте у погледу адекватнијег предвиђања расподеле аксијалне и обимске брзине остварио је Хамба тестирањем модела у Стинберженовој цеви при $Re = 50000$. Хамба је при тестирању дао само резултате добијене нумеричким прорачуном струјања у пресеку $z/D = 11,5$ који су у изворном стању приказани приказани на Сл.5.10. Уочава се да вихор у Хамбином тестирању модела има позитиван математички



Слика 5.10: Хамбини резултати у пресеку $z/D = 11,5$ при $Re = 50000$ [65].

смер и да је супротно усмерен од вихора који је користио аутор ове дисертације и који има негативан математички смер. Негативан математички смер вихора који је користио аутор ове дисертације је у складу са Стинберженовим експерименталним истраживањем [86]. Разлог за појаву ове разлике у смеровима вихора лежи у чињеници да је Хамба своју теоријску анализу при извођењу једначина модела базирао на анализи вихора са позитивним математичким смером. Због тога се подразумева да је обимска брзина, односно угаона брзина вихора у Хамбиним једначинама за напоне (3.60) позитивна величина. Наведена претпоставка о вихору са позитивним математичким смером може да доведе до великих грешака у прорачуну, уколико се једначине (3.60) примене на вихор са негативним математичким смером. Наиме, из једначина (3.60) је очигледно да оне дају потпуно различите вредности напона за негативну вредност угаоне брзине вихора, што доводи до парадокса према коме је физика вихора зависна од смера вихора. Како би избегао проблем са негативном угаоном брзином вихора, Хамба је при свом тестирању променио смер Стинберженовог вихора. Да би се избегла зависност Хамбиног модела од смера вихора, аутор ове дисертације је угаону брзину вихора у коду рачунао помоћу

апсолутне вредности обимске брзине. На тај начин је задржана физичка суштина Хамбиних једначина за оба смера вихора. На тачност прорачуна динамике струјног поља применом Хамбиног $k - \varepsilon$ модела пресудан утицај имају Хамбини коефицијенти турбулентне вискозности. Због тога је од интереса приказати каква је промена ових коефицијената у анализираном струјном пољу.

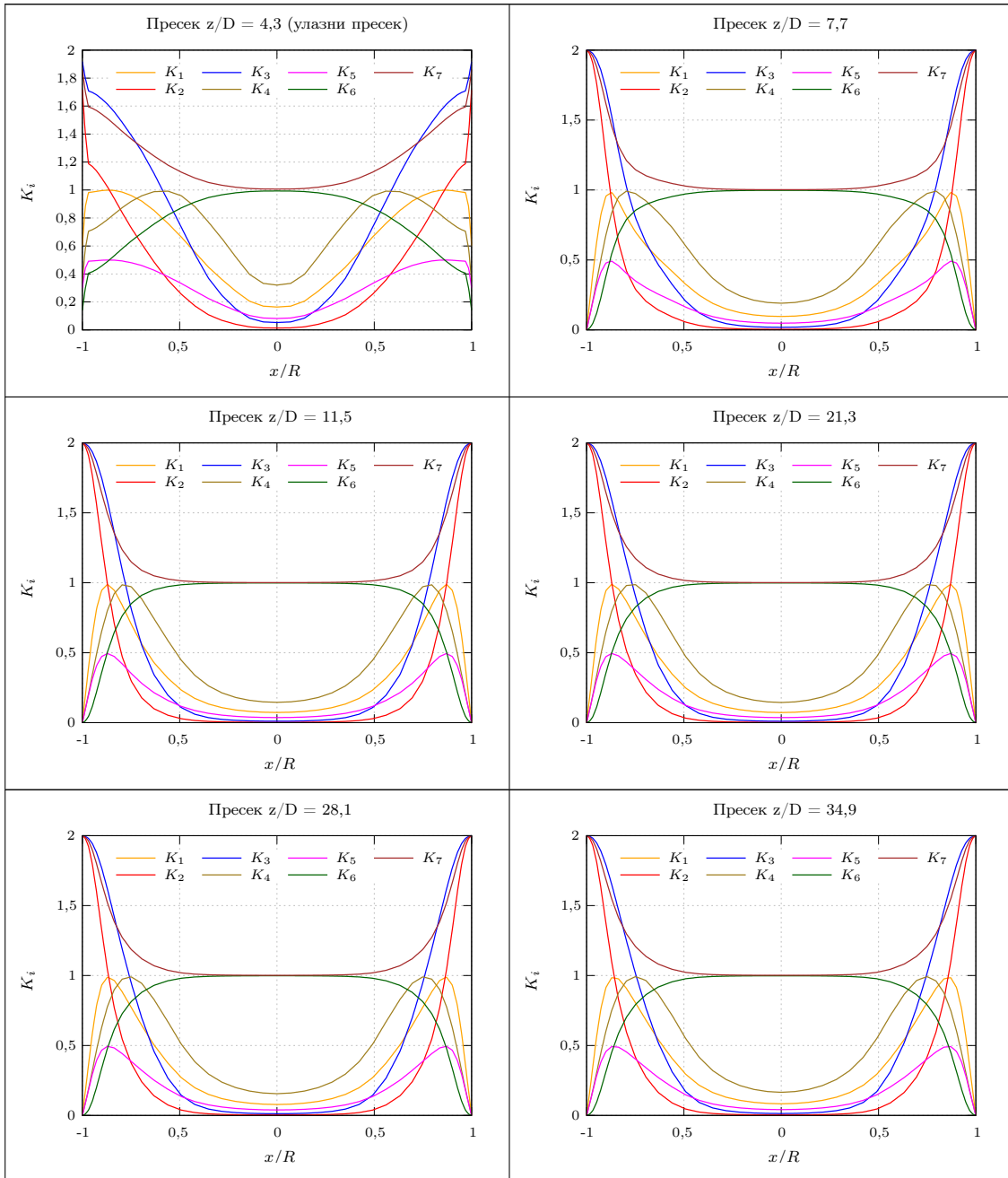
5.1.5 Расподела коефицијената турбулентне вискозности

Посматрањем израза за коефицијенте турбулентне вискозности (4.27) уочава се да су они зависни од угаоне брзине вихора и Хамбиног временског размера. Угаона брзина вихора је зависна од поља брзине, а Хамбин временски размер је зависан од поља ТКЕ и поља дисипације. На основу тога може да се закључи да су коефицијенти турбулентне вискозности скаларна бездимензијска поља. Ова поља имају значајан утицај на поље турбулентног напона, преко којег утичу на тачност нумеричког прорачуна динамике струјања. Да би се извели закључци о утицајима коефицијената турбулентне вискозности на прорачун динамике вихорног струјања, на следећој страници, на Сл.5.11, дати су дијаграми промене ових коефицијената добијени нумеричким порорачуном струјања у Стинбергеновој цеви. На основу ових дијаграма може да се изложи суштина утицаја Хамбиних једначина на моделирање физике вихорног струјања. Из једначина Хамбиних напона (4.28) и једначина коефицијената турбулентне вискозности (4.27), при безвихорном струјању ($\Omega_{sw} = 0$) се добијају једначине за компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона:

$$\begin{aligned}
 h_{rr} &= -K_7\nu_t\langle S_{rr} \rangle = -2\nu_t\langle S_{rr} \rangle = a_{rr}, \\
 h_{r\varphi} &= -K_2\nu_t\langle S_{r\varphi} \rangle = -2\nu_t\langle S_{r\varphi} \rangle = a_{r\varphi}, \\
 h_{rz} &= -K_3\nu_t\langle S_{rz} \rangle = -2\nu_t\langle S_{rz} \rangle = a_{rz}, \\
 h_{\varphi\varphi} &= -K_7\nu_t\langle S_{\varphi\varphi} \rangle = -2\nu_t\langle S_{\varphi\varphi} \rangle = a_{\varphi\varphi}, \\
 h_{\varphi z} &= -K_3\nu_t\langle S_{\varphi z} \rangle = -2\nu_t\langle S_{\varphi z} \rangle = a_{\varphi z}, \\
 h_{zz} &= -2\nu_t\langle S_{zz} \rangle = a_{zz},
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

које одговарају било којем линеарном RANS моделу турбуленције са изотропном турбулентном вискозности, односно одговарају моделима који се базирају на Бусинесковој хипотези о турбулентним напонима. У зависности од начина моделирања турбулентне вискозности у једначинама (5.3), проистекли су различити линеарни модели турбуленције ($k - \varepsilon$, $k - \omega$ итд.). На основу једначина (5.3) може да се закључи да на моделирање турбулентног струјања применом лине-

арних модела турбуленције утичу само коефицијенти K_2 , K_3 и K_7 који су под претпоставком изотропне турбулентне вискозности међусобно једнаки и имају бројну вредност 2. Посматрањем дијаграма на Сл.5.11 уочава се да Хамбин модел турбуленције за вихорно струјање има овакво стање ових коефицијената само на зиду цеви, где је угаона брзина вихора $\Omega_{sw} = 0$.



Слика 5.11: Расподела Хамбиних коефицијената у Стинбереновој цеви.

Дакле, на основу дијаграма на Сл.5.11, може да се закључи у чему је суштинска разлика у примени Хамбиног модела турбуленције и линеарних модела

турбуленције са изотропном турбулентном вискозности на прорачун вихорног струјања. Код линеарних модела турбуленције са изотропном турбулентном вискозности постоје само коефицијенти K_2 , K_3 и K_7 који су међусобно једнаки и у целом струјном домену и имају константну вредност 2. Код Хамбиног модела турбуленције ови коефицијенти имају значајну промену у радијалном правцу и смањују се идући од зида ка оси цеви. При томе, као што се може видети из једначина (5.3) коефицијент K_7 утиче само на напоне a_{rr} и $a_{\varphi\varphi}$. Полазећи од дефиниције брзина деформисања у поларно-цилиндричном координатном систему [115] ова два напона могу да се напишу у следећем облику:

$$a_{rr} = -K_7\nu_t \frac{\partial\langle u_r \rangle}{\partial r}, \quad (5.4)$$

$$a_{\varphi\varphi} = -K_7\nu_t \left(\frac{\langle u_r \rangle}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\langle u_\varphi \rangle}{\partial \varphi} \right). \quad (5.5)$$

Како је показано да се струјање у Стинбергеновој цеви може сматрати осносиметричним струјањем са занемарљивом радијалном брзином, то напони a_{rr} и $a_{\varphi\varphi}$ на десним странама горњих двеју једначина немају значајан утицај на динамику вихорног струјања. Сходно томе, са становишта линеарних модела турбуленције са изотропном турбулентном вискозности, односно са становишта једначина (5.3), коефицијент K_7 има значајно мањи утицај на моделирање динамике овог струјања од коефицијената K_2 и K_3 . На основу тога се закључује да са становишта линеарних модела турбуленције са изотропном турбулентном вискозности, пресудан утицај на моделирање вихорног струјања имају коефицијенти K_2 и K_3 , што ће бити показано и касније при нумеричким прорачунима струјања у правим конусним дифузорима. Промена вредности коефицијената K_2 и K_3 у језгру вихора утиче на припадне турбулентне напоне у језгру вихора, што има значајан утицај на моделирање поља брзине у вихорном језгру. Из дијаграма приказаних на Сл.5.11 се може уочити рапидно смањење вредности коефицијената K_2 и K_3 у језгру вихора које се добија применом Хамбиног $k - \varepsilon$ модела. Ако се на компоненте напона $a_{r\varphi}$ и a_{rz} примене изрази за брзине деформисања у поларно-цилиндричним координатама [115] онда се добија да је

$$a_{r\varphi} = -K_2\nu_t \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial\langle u_r \rangle}{\partial \varphi} + \frac{\partial\langle u_\varphi \rangle}{\partial r} - \frac{\langle u_\varphi \rangle}{r} \right), \quad (5.6)$$

$$a_{rz} = -K_3\nu_t \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\langle u_z \rangle}{\partial r} + \frac{\partial\langle u_r \rangle}{\partial z} \right). \quad (5.7)$$

Како је анализирано струјање осносиметрично, то је први члан у једначини (5.6) занемарљив, због чега може да се закључи да коефицијент K_2 има непо-

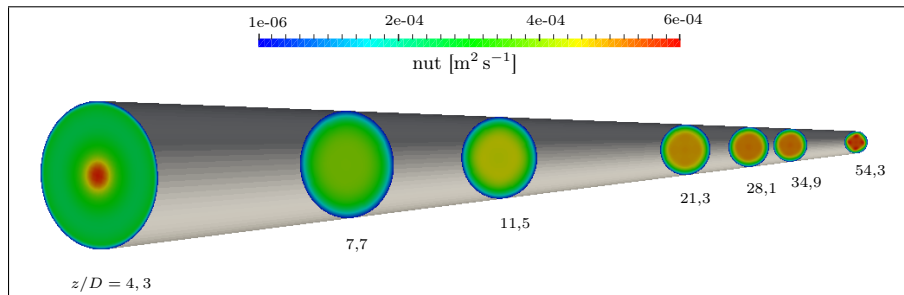
средан утицај на расподелу просечне брзине у обимском правцу. Ако се при анализираном струјању претпостави да је промена просечне радијалне брзине у аксијалном правцу занемарљива у односу на промену аксијалне брзине у радијалном правцу, онда из једначине (5.7) следи да коефицијент K_3 има директан утицај на расподелу просечне аксијалне брзине у радијалном правцу. Ова анализа је потврђена при моделирању наведених коефицијената у оквиру нумеричких прорачуна струјања у правим конусним дифузорима, који су касније изложени. Поред деловања на компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона преко коефицијената K_2 , K_3 и K_7 Хамбин модел турбуленције омогућава и додатно деловање на анизотропију турбулентних напона преко преостала четири коефицијента. Међутим, утицај ових коефицијента на динамику вихорног струјања је значајно мање изражен.

Промене Хамбиних напона су зависне од угаоне брзине вихора, Хамбиног временског размера и турбулентне вискозности. Свака од ових струјних варијабли представља скаларно поље од којег зависи тачност динамичког прорачуна вихорног струјног поља. Због тога су у наставку приказане промене ових скаларних поља добијене нумеричким прорачуном вихорног струјања у Стинбергеновој цеви.

5.1.6 Расподеле скаларних варијабли Хамбиног модела

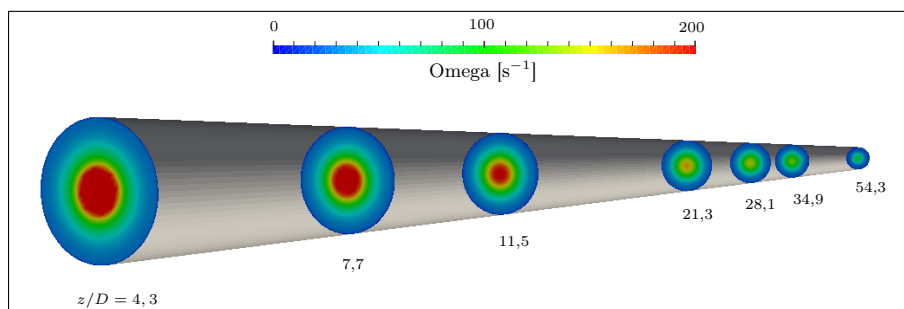
Моделирање турбулентне вискозности има значајан итицај на тачност моделирања тубулентног струјања. У овој дисертацији је изабрано да се скаларна вредност турбулентне вискозности у Хамбином $k - \varepsilon$ моделу моделира на исти начин као код стандардног $k - \varepsilon$ модела. Сходно томе турбулентна вискозност је дефинисана једначином (3.1) и једначинама (3.20) и (3.21). Промена скаларне вредности турбулентне вискозности добијена нумеричким прорачуном струјања у Стинбергеновој цеви помоћу Хамбиног $k - \varepsilon$ модела тубуленције је приказана на Сл.5.12. Посматрањем ове слике уочава се да турбулентна вискозност низструјно расте и да у језгру вихора има веће вредности него у близини зида цеви. Међутим, за ово струјање је најважнија чињеница да је турбулентна вискозност једнака у свим правцима уколико се она моделира као скаларна величина. Овакав начин моделирања турбулентне вискозности је због изражене анизотропије овог струјања јако неповољан. Овај недостатак се превазилази уколико се турбулентна вискозност моделира као анизотропан тензор, што је главна особина Хамбиног модела турбуленције. Хамбини коефицијенти множе скаларну вредност турбулентне вискозности, што омогућава корекцију вредности турбулентне вискозности у одређеним правцима струјања. Због

тога су Хамбини коефицијенти турбулентне вискозности зависни од праваца оса поларно-цилиндричног координатног система. На овај начин је омогућено моделирање анизотропије турбулентне вискозности у поларно-цилиндричном координатном систему. Поред зависности Хамбининих коефицијената од праваца



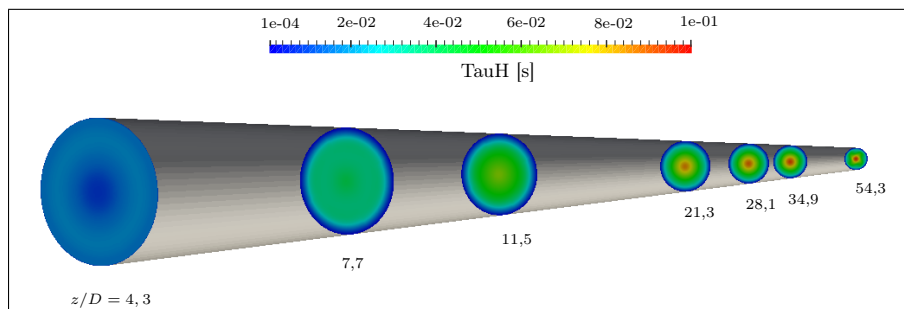
Слика 5.12: Турбулентна вискозност у контролним пресецима (kEpsHam).

оса поларно-цилиндричног координатног система, ови коефицијенти зависе и од угаоне брзине вихора и Хамбиног временског размера, што делимично омогућава додатни утицај на предвиђање појаве одумирања вихора. При томе је



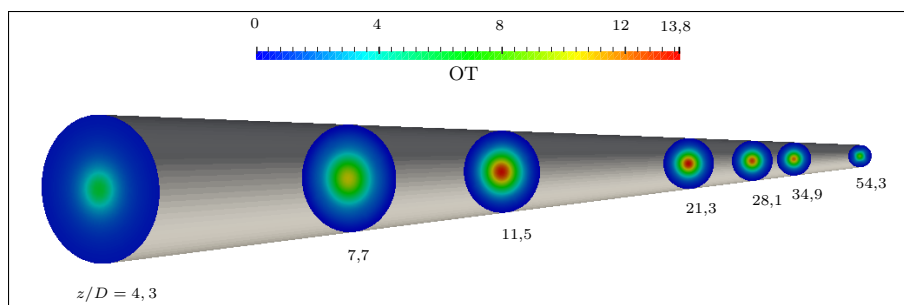
Слика 5.13: Угаона брзина вихора у контролним пресецима (kEpsHam).

јача важна угаона брзина вихора, јер она поред утицаја на предвиђање одумирања вихора омогућава рапидан утицај на турбулентну вискозност у датом попречном пресеку цеви. Промена угаоне брзине по попречном пресеку Стинбергеневог цеви добијена нумеричким прорачуном струјања је приказана на Сл.5.13. Хамба је при моделирању коефицијената турбулентне вискозности користио временски размер, који сагласно изразу (3.61) зависи од константе C_τ и који је у овој дисертацији назван Хамбин временски размер. Расподела Хамбиног временског размера у контролним пресецима Стинбергеневог цеви је приказана на Сл.5.14. Приметан је пораст временског размера турбулентних структура у низструјним пресецима цеви, што је повољно са становишта моделирања одумирања вихора. Посматрањем Сл.5.14 се уочава да турбулентне структуре у вихорном језгру имају знатно већи временски размер од турбулентних структура на периферном делу пресека цеви. У складу са једначинама



Слика 5.14: Хамбин временски размер у контролним пресецима.

(4.27) може да се закључи да на скаларна поља Хамбиних коефицијената најзначајнији утицај има бездимензијски параметар временске нелокалности ($\Omega_{sw}\tau_H$). Ова величина у коду `kEpsHam.C` има ознаку `OT_` и њена промена у контролним пресецима Стинбергеневог цеви је приказана на Сл.5.15.



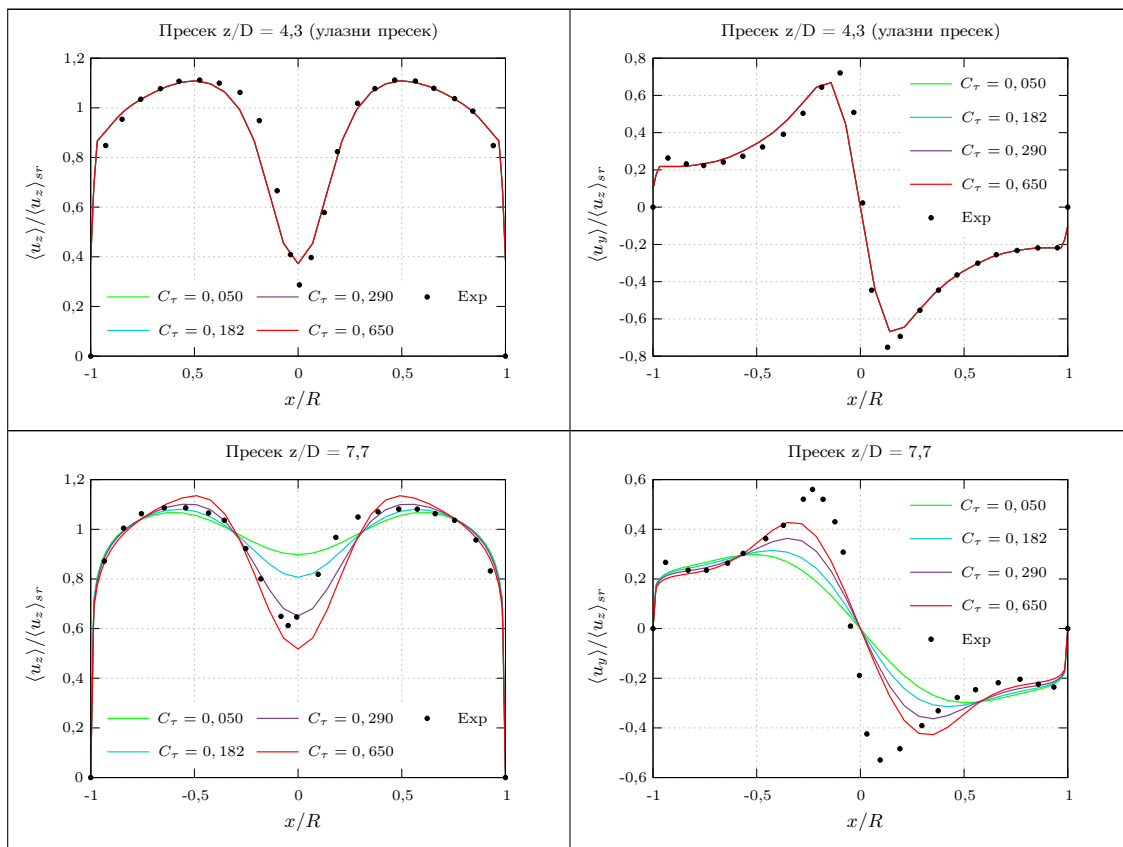
Слика 5.15: Параметар ($\Omega_{sw}\tau_H$) у контролним пресецима.

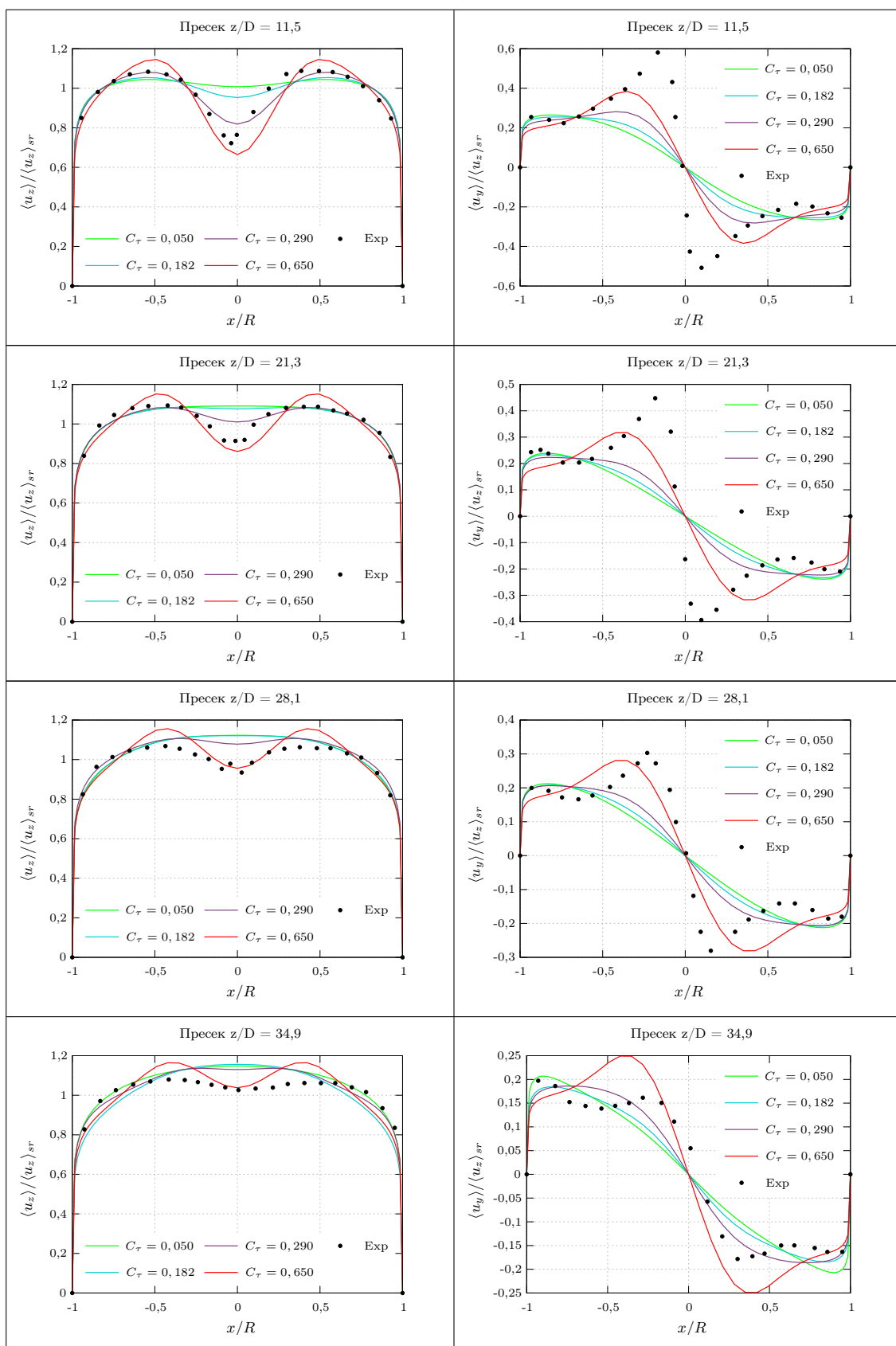
На основу једначина (4.27) и на основу Сл.5.15 се могу извести одређени закључци о утицају бездимензијског параметра ($\Omega_{sw}\tau_H$) на Хамбине коефицијенте турбулентне вискозности, који имају значајан утицај на моделирање динамике вихорног струјања. Приметно је да пораст вредности параметра ($\Omega_{sw}\tau_H$) у смеру од зида ка оси цеви узрокује смањење вредности већине Хамбиних коефицијената у истом том смеру.

Тачност прорачуна поља брзине применом Хамбиног $k - \varepsilon$ модела значајно зависи од процене Хамбиног временског размера односно од коефицијента C_τ . Због тога је у наставку урађена анализа утицаја овог коефицијента на тачност нумеричког прорачуна вихорног струјања.

5.1.7 Утицај коефицијента C_τ на тачност моделирања поља брзине

Коефицијент C_τ директно утиче на бездимензијски параметар временске нелокалности ($\Omega_{sw}\tau_H$), преко којег утиче на вредности Хамбиних коефицијената турбулентне вискозности. Другим речима, променом вредности коефицијента C_τ се моделира ниво утицаја временске нелокалности на динамику вихорног струјања, на начин који је установио Хамба својом физичко-математичком анализом. Да би се приказала моћ утицаја овог коефицијента на динамички прорачун вихорног струјања урађено је више нумеричких прорачуна струјања у Стинбергеновој цеви за различите вредности коефицијента C_τ . За све анализирание вредности коефицијента C_τ остварена је стабилна конвергенција решења са вредностима остатака мањим од 10^{-6} . Профили брзина добијени при варијацији коефицијента C_τ су приказани на Сл. 5.16. Из приложених дијаграма се може видети да вредност коефицијента C_τ има значајан утицај на тачност моделирања поља брзине. Поред тога, вредност овог коефицијента има утицаја и на нумеричку стабилност прорачуна. Горња граница вредности овог коефицијента при којој се примењеним шемама дискретизије и подешавањима солвера добија стабилна конвергенција решења, износи $C_\tau = 0,65$ за овај тестни пример.

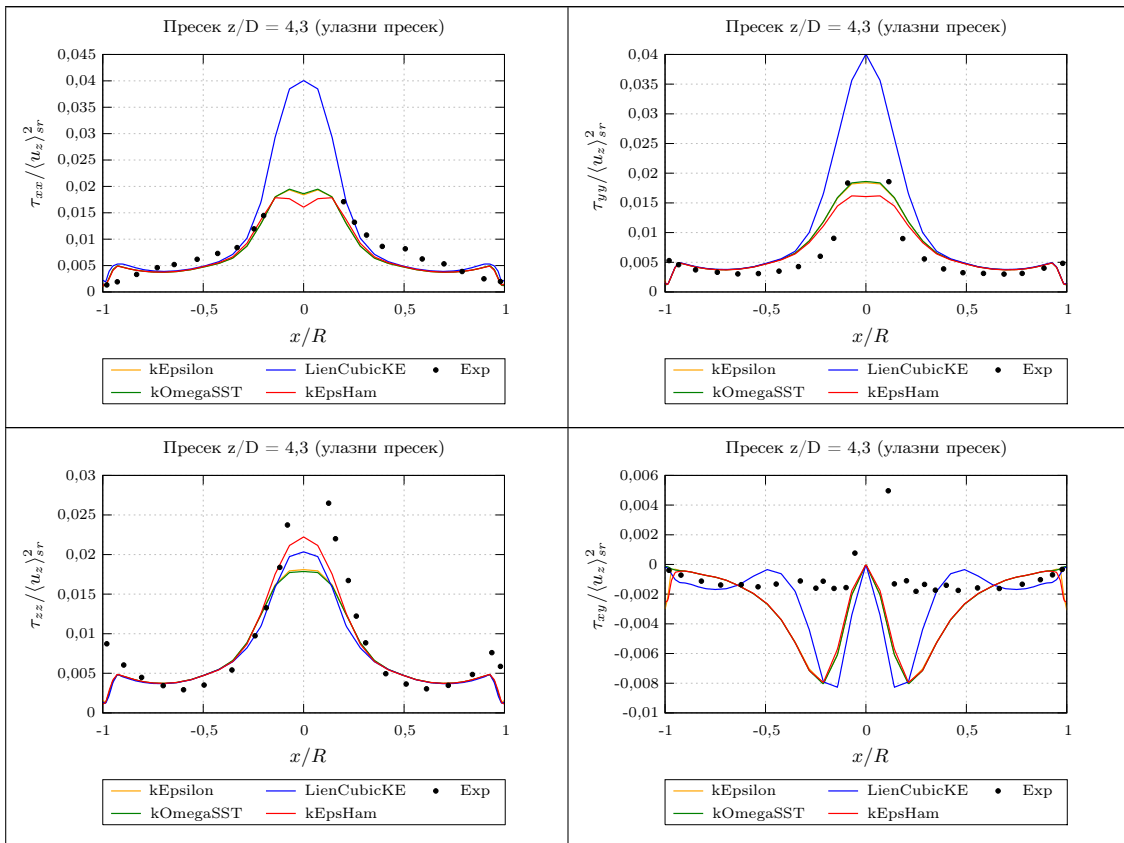


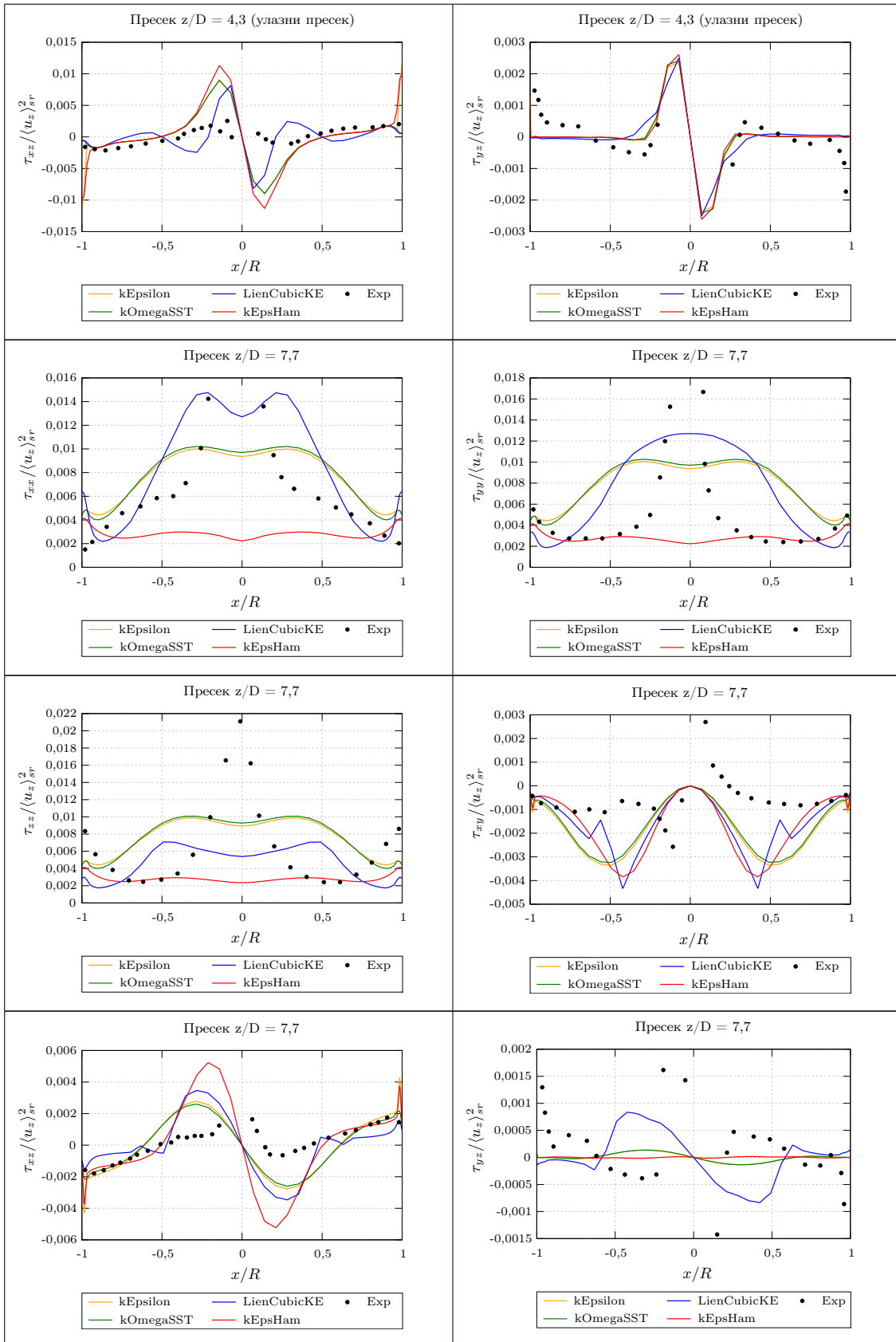


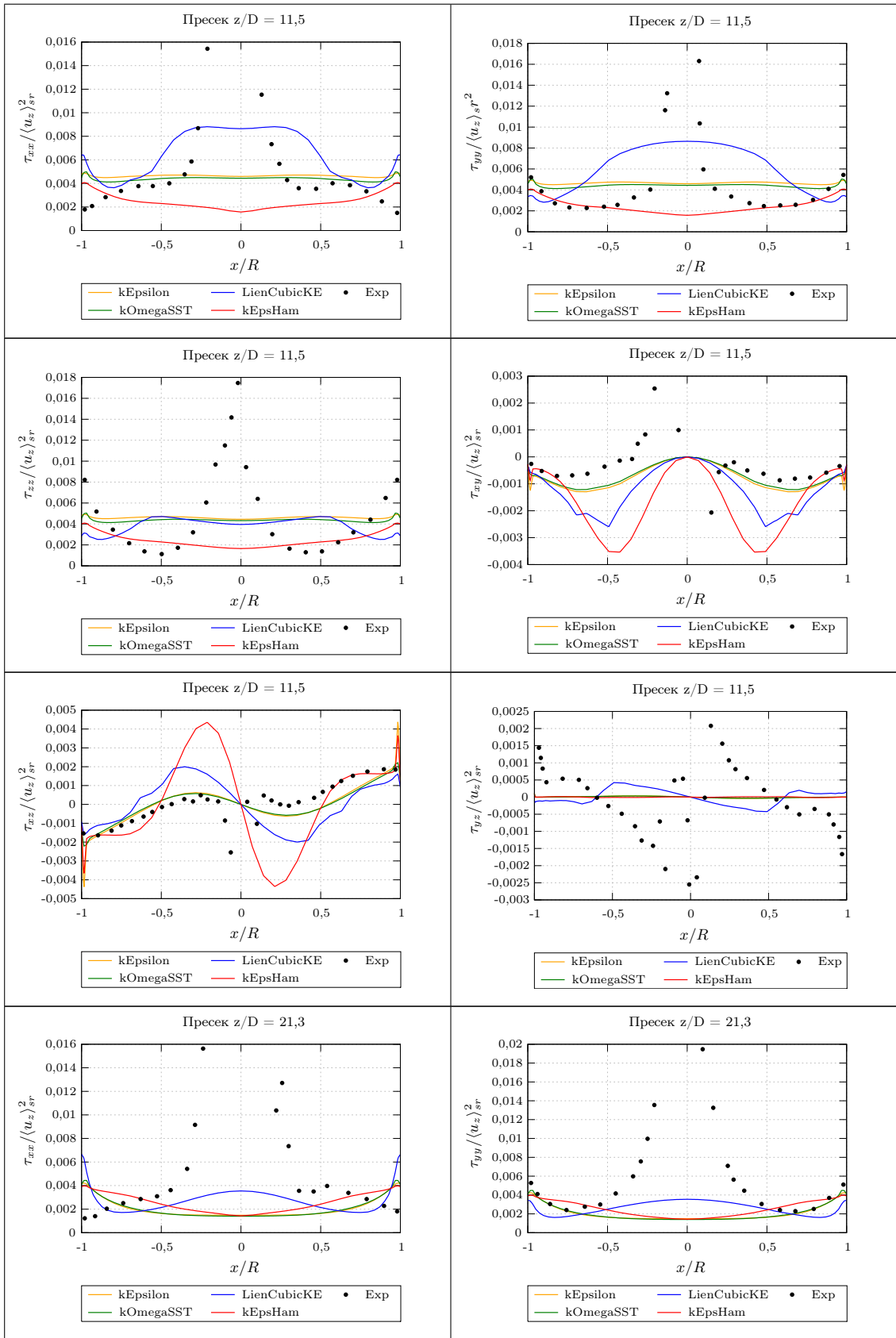
Слика 5.16: Утицај коефицијента C_τ на прорачун поља брзине.

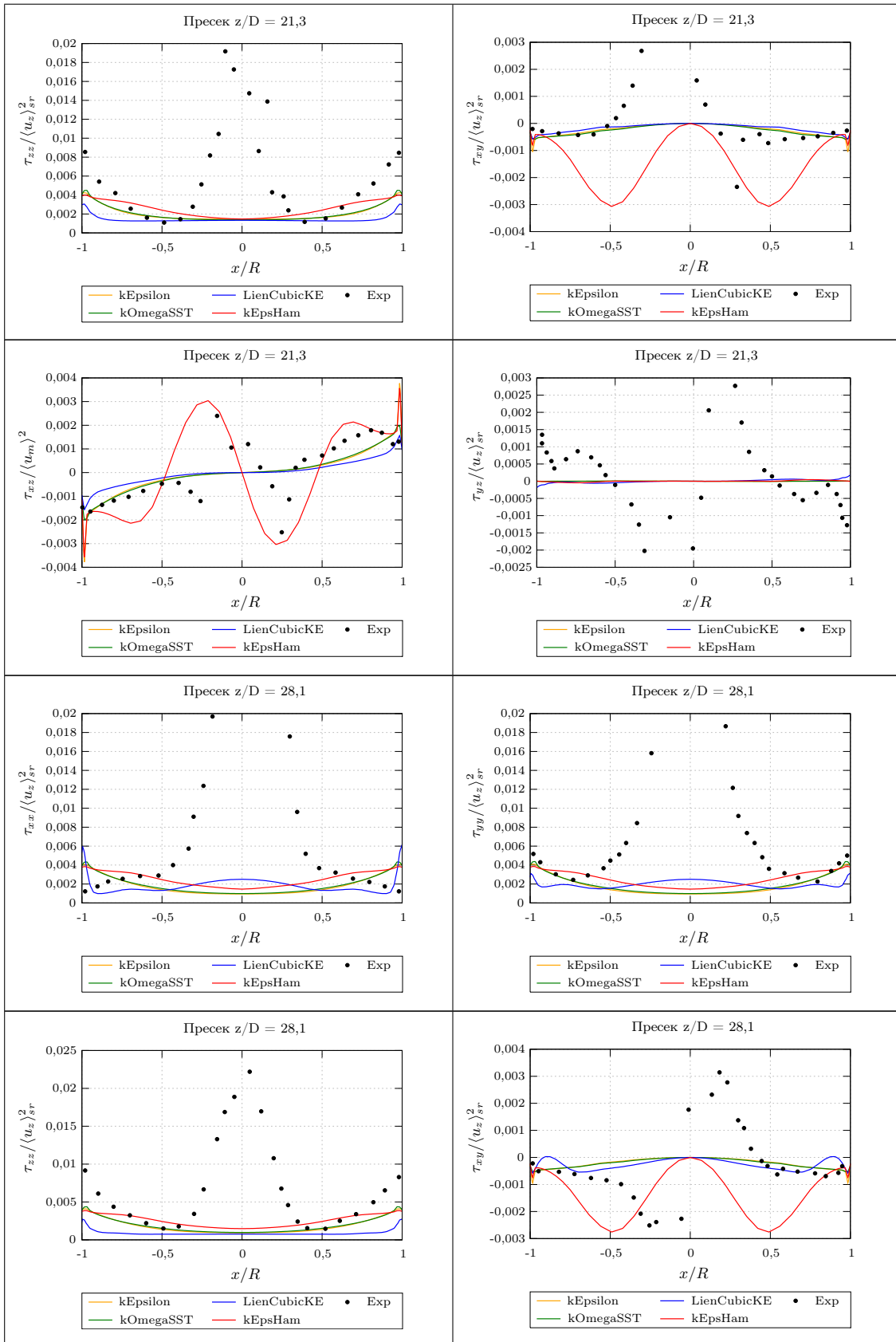
5.1.8 Резултати прорачуна поља турбулентног напона

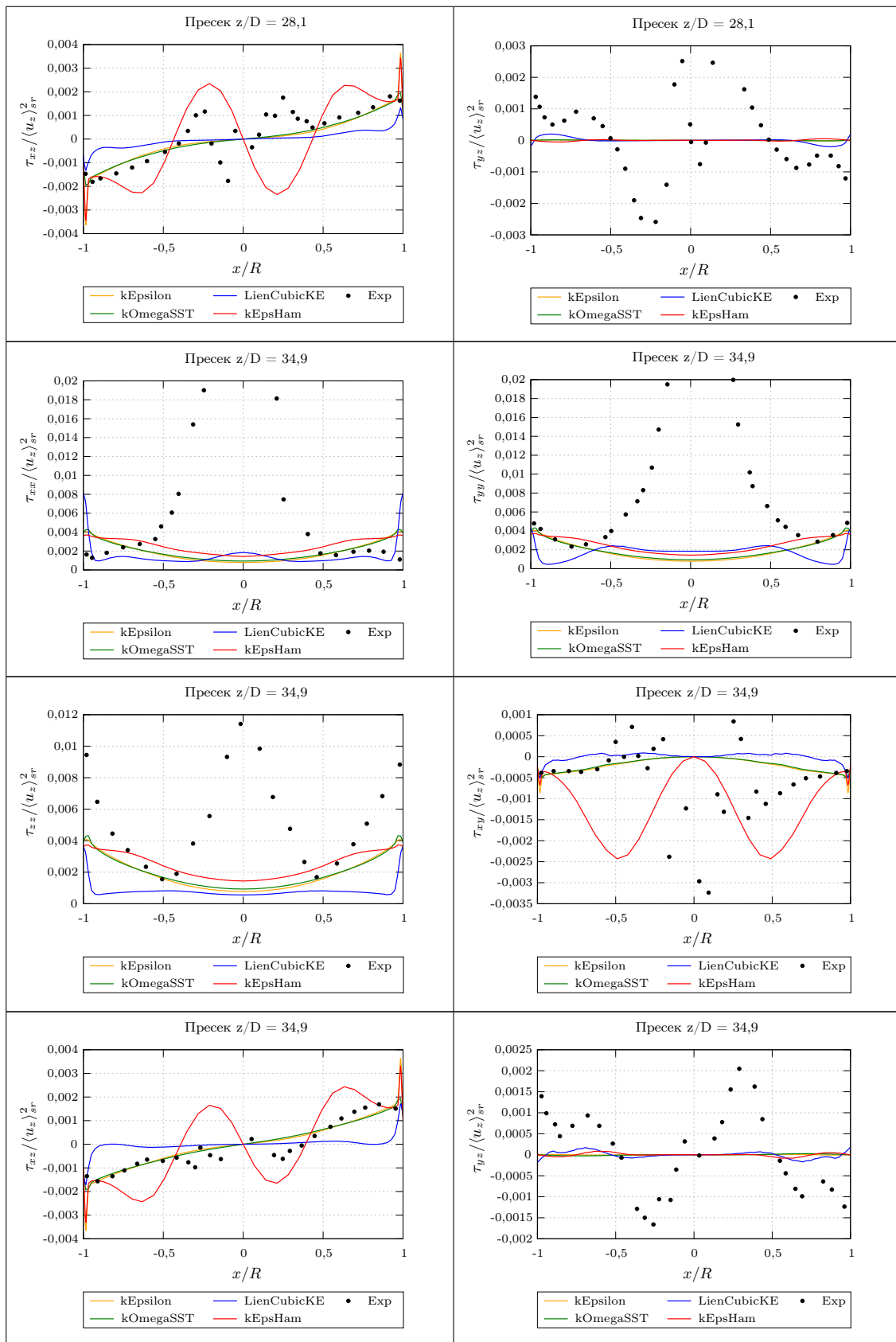
Моделирање турбулентног струјања применом RANS методологије је сложен физичко-математички поступак, који често у оквиру расположивих моделских једначина доводи до проблема у изолованом моделирању утицаја на одређена физичка поља. Једначине математичког модела струјања чине затворени систем парцијалних диференцијалних једначина у којима моделски захват над одређеним физичким пољем обично има нежељену рефлексију на неко друго физичко поље. Таква једна појава је изложена у наставку, а односи се на повезаност поља брзине и поља ТКЕ. Наиме, моделски захват који је Хамба применио у циљу утицаја на тачност прорачуна поље брзине у језгу вихора, има нежељену рефлексију на тачност прорачуна поља ТКЕ у језгру вихора. Нумеричким прорачунима струјања у Стинбергеновој цеви су добијена поља турбулентног напона, односно расподеле компоненти турбулентног напона по попречним пресецима цеви које су приказане на Сл.5.17. Из дијаграма приказаних на Сл.5.17 се може уочити да је нумеричким прорачуном применом Хамбиног модела турбуленције добијено значајно одступање нормалних турбулентних напона у језгру вихора. Сходно једначини (4.25) вредности нормалних турбулентних напона у великој мери зависе од вредности ТКЕ.











Слика 5.17: Турбулентни напони у Стинберговој цеви дуж x осе.

На основу израза (4.25) може да се одреди збир нормалних турбулентних напона Хамбиног модела турбуленције

$$\tau_{rr} + \tau_{\varphi\varphi} + \tau_{zz} = 2k + (h_{rr} + h_{\varphi\varphi} + h_{zz}) \quad (5.8)$$

Ако се у последњим једначинама примене изрази за Хамбине напоне (4.28), онда се добија да је

$$\tau_{rr} + \tau_{\varphi\varphi} + \tau_{zz} = 2k - \nu_{\text{тн}}[(K_6 + K_7)\langle S_{rr} \rangle + (K_6 + K_7)\langle S_{\varphi\varphi} \rangle + 2\langle S_{zz} \rangle]. \quad (5.9)$$

На основу израза за коефицијенте турбулентне вискозности (4.27) следи да је

$$K_6 + K_7 = 2, \quad (5.10)$$

тако да из израза (5.9) следи да је

$$\tau_{rr} + \tau_{\varphi\varphi} + \tau_{zz} = 2k - 2\nu_{\text{тн}}(\langle S_{rr} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle + \langle S_{zz} \rangle) \quad (5.11)$$

Сходно једначини континуитета $\text{div}\langle u \rangle = \langle S_{rr} \rangle + \langle S_{\varphi\varphi} \rangle + \langle S_{zz} \rangle = 0$ за струјање нестишљивог флуида у поларно-цилиндричном координатном систему, из једначине (5.11) се коначно добија да је збир нормалних турбулентних напона Хамбиног модела

$$\tau_{rr} + \tau_{\varphi\varphi} + \tau_{zz} = 2k, \quad (5.12)$$

што уједно представља и контролу нормалних напона Хамбиног модела, јер овај услов мора да испуњава сваки модел турбуленције. У складу са овом анализом из једначина (5.8) и (5.12) се стиче утисак да збир нормалних турбулентних напона, односно вредност ТКЕ при нумеричком прорачуну струјања Хамбиним моделом не зависи од Хамбиних напона. Међутим, Хамбини напони фигуришу у турбулентним напонима у Рејнолдсовим једначинама (3.18) и преко ових напона утичу на формирање поља брзине, а поље брзине кроз моделску једначину за ТКЕ (3.20) и дисипацију (3.21) утиче на вредност ТКЕ у струјном пољу.

Анализом карактеристика вихорног струјања у цеви могу да се изведу одређени закључци о утицају Хамбиних напона на вредност ТКЕ за ову класу струјања. Уколико се анализира стационарно вихорно струјање у цеви, онда се оно може сматрати осносиметричним струјањем због чега је $\frac{\partial(\dots)}{\partial\varphi} \approx 0$. Ако при стационарном вихорном струјању у цеви струјнице леже на површима коаксијалних цилиндара саосних са осом цеви, онда оне имају занемарљиву промену облика у радијалном правцу и тада је $u_r \approx 0$ и $\frac{\partial u_r}{\partial r} \approx 0$. Промена просечне аксијалне

брзине струјања дуж цеви је занемарљива у односу на промену просечне аксијалне брзине у радијалном правцу, због чега се може узети да је $\frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial z} \approx 0$. Наведена занемаривања величина имају за циљ да се из једначина за Хамбине напоне издвоје они коефицијенти турбулентне вискозности који имају доминантан утицај на вредност ТКЕ при анализираном струјању. На основу израза за просечне брзине деформисања у поларно-цилиндричном координатном систему [115] и под уведеним претпоставкама следи да је

$$\begin{aligned}\langle S_{rr} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial r} + \frac{\partial \langle u_r \rangle}{\partial r} \right) \approx 0, \\ \langle S_{\varphi\varphi} \rangle &= \frac{\langle u_r \rangle}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \langle u_\varphi \rangle}{\partial \varphi} \approx 0, \\ \langle S_{zz} \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial z} + \frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial z} \right) \approx 0.\end{aligned}\tag{5.13}$$

У складу са изразима за нормалне компоненте тензора брзине деформисања (5.13) и на основу израза за Хамбине напоне (4.28) се закључује да пресудан утицај на вредност ТКЕ при вихорном струјању имају коефицијенти K_1 , K_2 , K_3 и K_4 . Вредност ТКЕ зависи, између осталог, и од односа продукције и дисипације ТКЕ. У члановима једначине ТКЕ који моделирају продукцију и дисипацију фигуришу Хамбини напони и просечне брзине деформисања. У коду `kEpsHam.C` Хамбиног $k - \varepsilon$ модела турбуленције, продукциони члан у моделској једначини за ТКЕ се моделира следећом наредбом

```
1 // generation term
2 volScalarField G("RASModel::G", nut_*2*magSqr(symm(gradU))
3                 - (nonlinStress_ && gradU));
```

У складу са дефиницијом `nonlinStress_` напона у коду `kEpsHam.C`, продукциони члан из горњег листинга може да се напише у индексној нотацији у следећем облику

$$G = P^k = \nu_t 2 \langle S_{ij} \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - (h_{ij} + \nu_t 2 \langle S_{ij} \rangle) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = -h_{ij} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j},\tag{5.14}$$

при чему су h_{ij} Хамбини напони у Декартовим координатама. Израз за продукцију ТКЕ (5.14) се може написати у следећем тензорском облику

$$G = - \left(\begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{rr} & h_{r\varphi} & h_{rz} \\ h_{\varphi r} & h_{\varphi\varphi} & h_{\varphi z} \\ h_{zr} & h_{z\varphi} & h_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) : \text{grad} \langle \underline{u} \rangle.\tag{5.15}$$

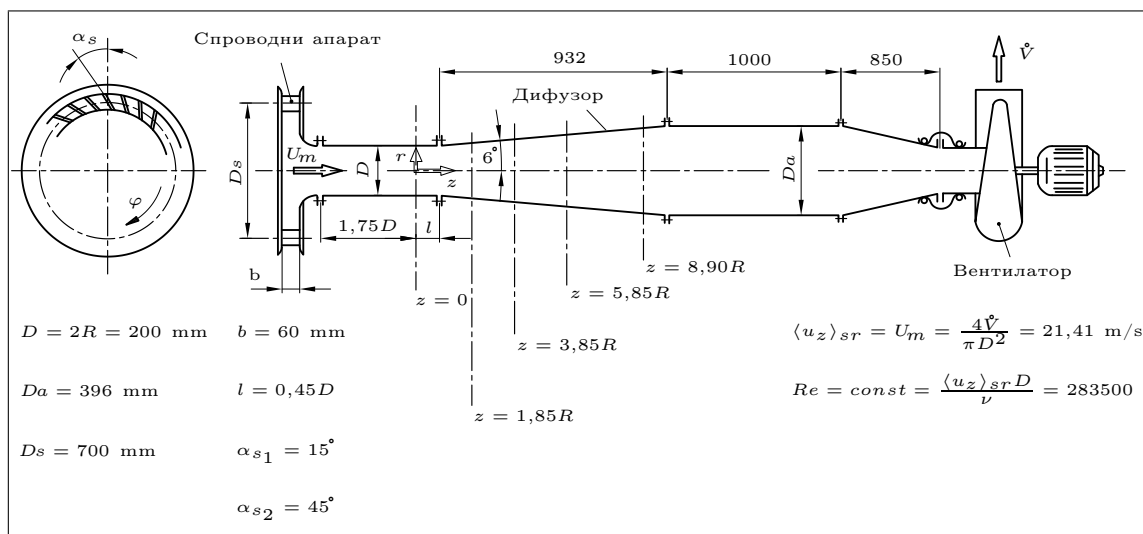
На основу израза (5.15) и на основу израза за Хамбине напоне (4.28), закључује се да је продукција ТКЕ зависна од коефицијената турбулентне вискозно-

сти, при чему се на основу претходне анализе издвајају утицаји коефицијената K_1 , K_2 , K_3 и K_4 . Као што се може видети из дијаграма промене коефицијената турбулентне вискозности који су дати на претходној Сл.5.11 ови коефицијенти у осци цеви имају вредности које су много мање од 2, што има за последицу рапидно смањење продукције ТКЕ у језгру дифузора. Смањењем продукције ТКЕ у језгру вихора, смањује се и вредност ТКЕ у језгру вихора, а самим тим се смањују и вредности нормалних турбулентних напона. Ова појава је изразито неповољна са аспекта моделирања вредности нормалних турбулентних напона у језгру вихора. Дакле, увођењем коефицијената турбулентне вискозности добијен је повољан утицај на обимску и аксијалну компоненту брзине у језгру вихора, али тај процес има нежељену рефлексију на вредност ТКЕ у зони осци цеви. Овом анализом је показано да највећи утицај на продукцију ТКЕ имају вредности коефицијената K_1 , K_2 , K_3 и K_4 . Како је ранијим анализама показано да коефицијенти K_2 , K_3 имају највећи утицај на моделирање поља брзине у обимском и аксијалном правцу, то остаје могућност да се модификацијама коефицијената на позицијама K_1 и K_4 у Хамбиним напонима (4.28) у извесној мери делује на продукцију ТКЕ, а да се при томе значајно не наруши тачност прорачуна поља брзине. Овакав захват је извршен у моделу `kEpsDif`, тако што је на једној позицији у тензору Хамбиних напона коефицијент K_1 , замењен новоуведеним коефицијентом K_9 .

5.2 Тестирање модела $k - \varepsilon$ diffuser на Чантраковом дифузору

5.2.1 Опис тестног примера

Експериментално истраживање вихорног струјања у правом конусном дифузору је извео проф. С. Чантрак, применом инсталације приказане на Сл.5.18.



Слика 5.18: Инсталација за испитивање вихорног струјања у дифузору [2].

Инсталација се састоји од генератора вихора, уводне цеви, дифузора, одводне цеви, конфузора и радијалног вентилатора. Генератор вихора је радијални спроводни апарат са регулишућим нагибом лопатица. Испитивање је изршено за два радна режима положаја лопатица спроводног апарата, при приближно истом запреминском протоку ваздуха. Мерења профила брзина и турбулентних напона су извршена помоћу сонде са загрејаним влакнима у пет мерних пресека. Први мерни пресек се налази у уводној цеви и дефинисан је координатом $z = 0$. Резултати мерења у овом пресеку, који су дати у табелама Т.4 и Т.5, искоришћени су као гранични услови на улазном пресеку нумеричког прорачунског домена.

На основу вредности датих у табелама, нумеричким интеграљењем су израчунате средње вредности ТКЕ на улазном пресеку и то посебно за сваку јачину вихора, односно за сваки од углова положаја лопатица спроводног апарата. Након тога су израчунате средње вредности интензитета вектора брзине на улазном и излазном пресеку за слабији и за јачи вихор. На основу ових вредности су израчунати средњи процентуални интензитети турбуленције

Табела Т.4: Гранични услови на улазу у дифузор при $\alpha_{s1} = 15^\circ$.

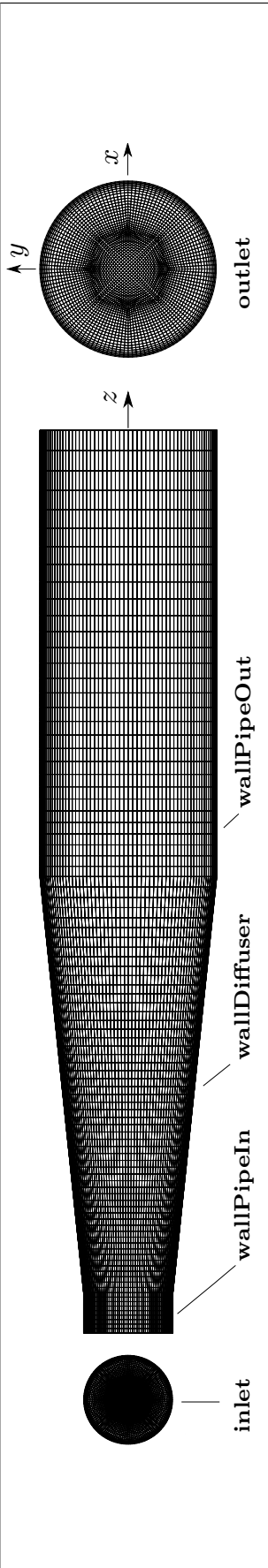
x/R	$\langle u_r \rangle$ [m/s]	$\langle u_\varphi \rangle$ [m/s]	$\langle u_z \rangle$ [m/s]	p [Pa]	k [J/kg]	ε [J/kgs]
0,10	0,17	5,870	6,220	zeroGradient	17,10	2905
0,15	0,30	7,970	9,890		23,90	4800
0,20	0,31	9,970	15,22		25,80	5383
0,25	0,65	10,93	19,43		19,75	3606
0,30	0,86	10,86	21,59		13,65	2072
0,35	0,83	10,24	22,61		8,250	973
0,45	0,79	9,220	22,88		3,380	255
0,58	0,69	8,110	22,87		1,640	86
0,72	0,71	6,830	22,75		1,590	82
0,85	0,42	6,170	22,54		2,160	130
0,92	-0,44	5,440	22,18		5,700	559
0,96	-1,92	5,020	17,93		10,40	1378
1,00	0,00	0,000	0,000		0,000	0

Табела Т.5: Гранични услови на улазу у дифузор при $\alpha_{s2} = 45^\circ$.

x/R	$\langle u_r \rangle$ [m/s]	$\langle u_\varphi \rangle$ [m/s]	$\langle u_z \rangle$ [m/s]	p [Pa]	k [J/kg]	ε [J/kgs]
0,05	-0,23	6,900	6,740	zeroGradient	38,20	9699
0,15	0,13	9,400	7,860		48,50	13875
0,25	-0,13	13,38	11,38		59,50	18854
0,35	-0,39	16,40	16,43		62,00	20054
0,40	-0,44	17,58	19,04		58,00	18145
0,45	-0,78	18,17	21,40		54,00	16301
0,50	-0,59	18,27	23,57		50,50	14742
0,55	-0,65	17,99	25,14		44,40	12133
0,65	-0,78	16,92	27,01		33,80	8072
0,75	-0,86	15,65	27,51		26,30	5541
0,85	-0,93	14,32	27,04		20,90	3911
0,96	-1,75	13,15	24,31		19,40	3497
1,00	0,00	0,000	0,000		0,000	0

за слабији вихор $I_{15} = 100\sqrt{\frac{2}{3}k_{sr}}/\langle u \rangle_{sr} = 100\sqrt{\frac{2}{3}4,672}/21,84 = 8,08 \%$ и за јачи $I_{45} = 100\sqrt{\frac{2}{3}k_{sr}}/\langle u \rangle_{sr} = 100\sqrt{\frac{2}{3}32,991}/27,18 = 17,25 \%$. Вредности дисипације на улазном пресеку у дифузор су израчунате на основу вредности ТКЕ применом израза (3.30), при чему је дужински размер одређен на исти начин као код Стинбергеновог тестног примера, јер ова два случаја струјања имају приближно исти Рејнолдсов број.

Табела Т.6: Мрежа и гранични услови Чантраковог дифузора.



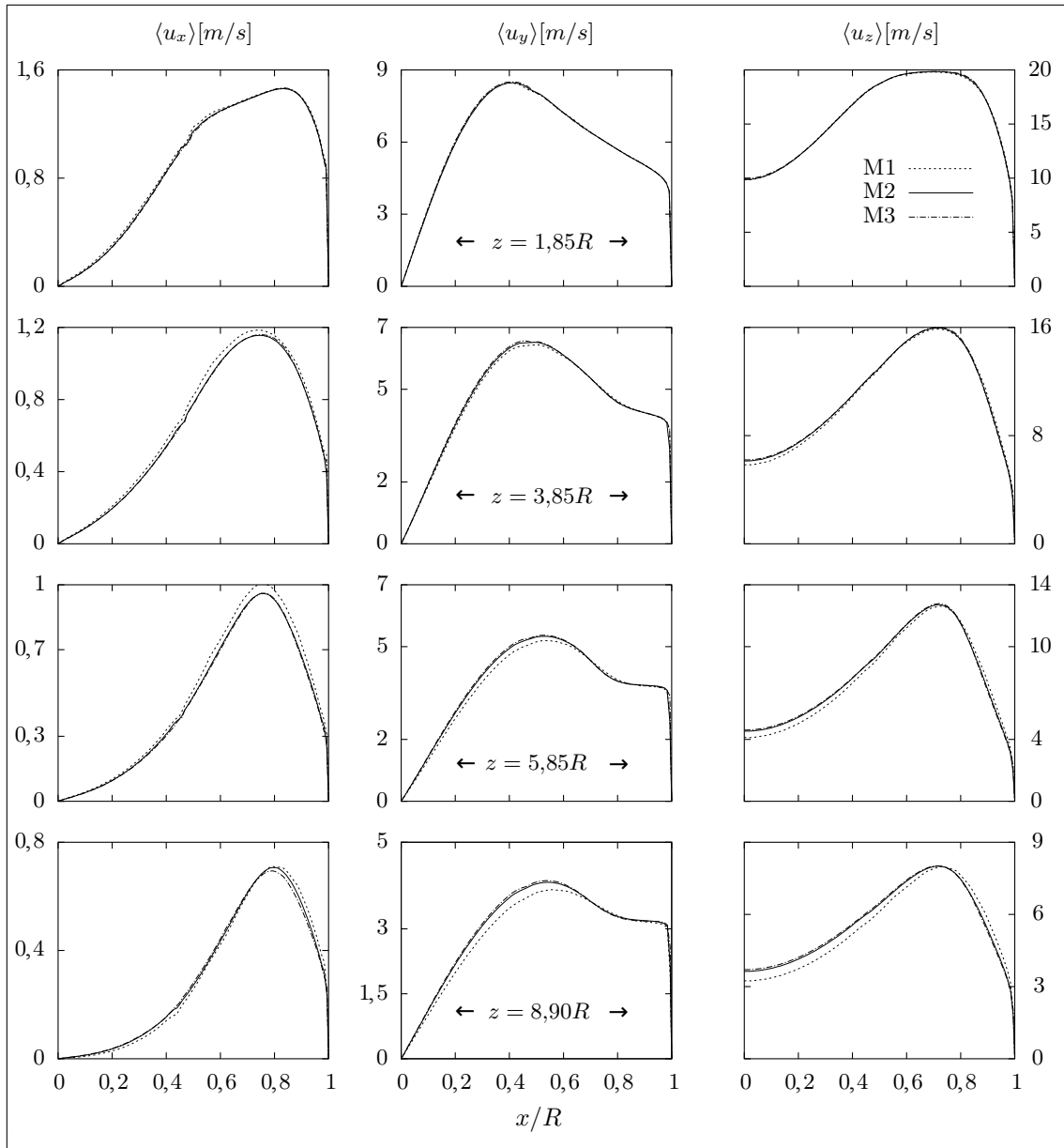
Радни флуид: Ваздух	$\nu = 1,53 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$	$\rho = 1,177 \text{ kg/m}^3$	$\text{Re} = 283500$
-	U	k	ϵ
inlet	fixedValue; nonuniform List<vector>	fixedValue; nonuniform List<scalar>	fixedValue; nonuniform List<scalar>
wallPipeIn	fixedValue; uniform (0,0,0);	zeroGradient;	epsilonWallFunction;
wallDiffuser	fixedValue; uniform (0,0,0);	zeroGradient;	epsilonWallFunction;
wallPipeOut	fixedValue; uniform (0,0,0);	zeroGradient;	epsilonWallFunction;
outlet	zeroGradient;	fixedValue; uniform 0;	zeroGradient;
Тип мреже 1: Структурирана	Број ћелија: 108108		Ознака: M1
Тип мреже 2: Структурирана	Број ћелија: 360960		Ознака: M2
Тип мреже 3: Структурирана	Број ћелија: 1082880		Ознака: M3

5.2.2 Тестирање и избор мреже

Прорачунски домен овог тестног примера се састоји од уводне цеви дужине 90 mm, од дифузора и од одводне цеви. У прорачунском домену су применом софтвера `blokMesh` формиране три различите блок структуриране прорачунске мреже, чије су карактеристике и гранични услови дати у претходној табели Т.6. При формирању мрежа је коришћена градација мреже у близини зида и у зони смичућег слоја вихора. Тестирање нумеричког прорачуна на зависност од броја ћелија мреже је извршено применом три мреже означене са М1, М2 и М3. Карактеристике ових мрежа су приказане у табели Т.6. Број ћелија мреже М2 формиран је тако што је подела мреже М1 дуж праваца координатних оса повећана за приближно 50%. На исти начин је формирана мрежа М3 рефинирањем мреже М2. Оваквим поступком рефинирања мреже број ћелија рефиниране мреже се повећа приближно $n = 1,5^3 \approx 3,4$ пута. За тестирање мреже је коришћен развијени модел турбуленције $k-\varepsilon$ `diffuser` намењен прорачуну струјања у правим конусним дифузорима, при чему је избор мреже извршен упоређивањем нумерички добијених поља брзине.

Енергетске перформансе дифузора незнатно зависе од радијалне брзине кроз посредан утицај ове брзине на аксијалну и обимску брзину струјања. Непосредан утицај радијалне компоненте вектора брзине на енергетске перформансе правог конусног дифузора је занемарљив. Због тога радијална компонента вектора брзине није анализирана у каснијим прорачунима струјања у овом дифузору. При тестирању мреже су извршени нумерички прорачуни за случај угла лопатица спроводног апарата $\alpha_{s1} = 15^\circ$, под претпоставком да је струјање у дифузору стационарно. При томе је коришћен `simpleFoam` солвер чији су параметри подешени на исти начин као при прорачуну струјања у Стинберженовој цеви. Коришћене су исте нумеричке шеме дискретизације као у Стинберженовом тестном примеру. При нумеричким прорачунима је постигнута стабилна конвергенција решења. Вредности остатака свих прорачунских струјних варијабли су биле мање од 10^{-6} . За међусобно упоређивање нумерички добијених поља брзине је коришћен Декартов координатни систем, чије су осе постављене на исти начин као што је то урађено код Стинберженовог тестног примера.

Резултати нумеричких прорачуна поља брзине су приказани на Сл.5.19. Као што се из Сл.5.19 може видети између мрежа М2 и М3 постоје незнатне разлике у прорачуну поља брзине, иако је број ћелија мреже М3 значајно већи од броја ћелија мреже М2. Због тога је за даљње прорачуне струјања у овом дифузору изабрана мрежа М2.

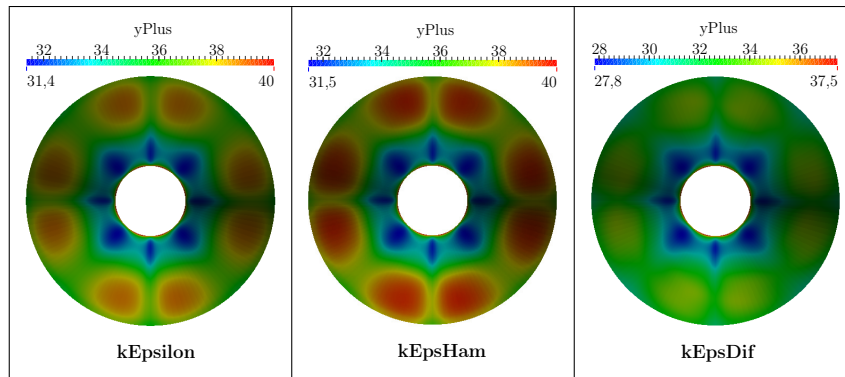


Слика 5.19: Тестирање мреже применом имплементiranог модела kEpsDif.

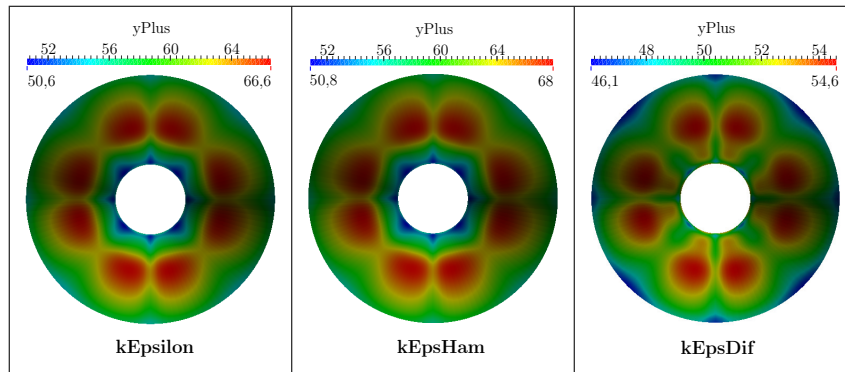
5.2.3 Контрола бездимензијске координате y^+

Прорачуни струјања у овом дифузору су урађени применом три различита модела турбуленције. Примењен је постојећи стандардни $k - \varepsilon$ модел, затим имплементирани Хамбин $k - \varepsilon$ модел и на крају имплементирани нови модел $k - \varepsilon$ diffuser намењен искључиво за прорачуне струјања у правим конусним дифузорима. При прорачунима је контролисана мрежа и вршене су корекције дебљине првог слоја мреже се све док бездимензијска координата y^+ није доведена у прописане границе, које су већ наведене у Стинберженовом тестном

примеру. Промене бездимензијске координате y^+ добијене нумеричким прорачунима су приказане на Сл.5.20 и Сл.5.21.



Слика 5.20: Бездимензијска координата y^+ на зиду дифузора при $\alpha_{s1} = 15^\circ$.



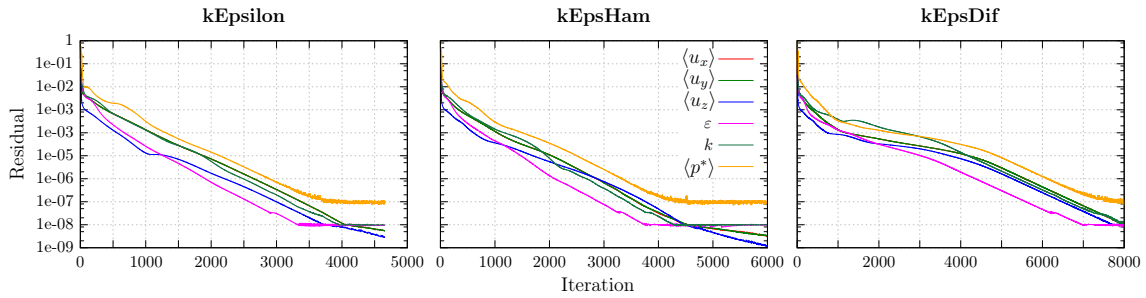
Слика 5.21: Бездимензијска координата y^+ на зиду дифузора при $\alpha_{s2} = 45^\circ$.

Посматрањем Сл.5.20 и Сл.5.21 уочава се да су при јачем вихору због пораста обимске брзине добијене веће вредности бездимензијске координате y^+ него при слабијем вихору. Ова појава настаје због тога што је коришћена иста мрежа за прорачун струјања при слабијем и при јачем вихору. На тај начин је избегнута конструкција додатне мреже за јачи вихор. При томе, као што се из Сл.5.21 може видети, постојећа мрежа испуњава услове за примену стандардних зидних функција, јер на овој мрежи, чак и при јачем вихору, бездимензијска координата y^+ има вредности које се налазе у прописаним границама.

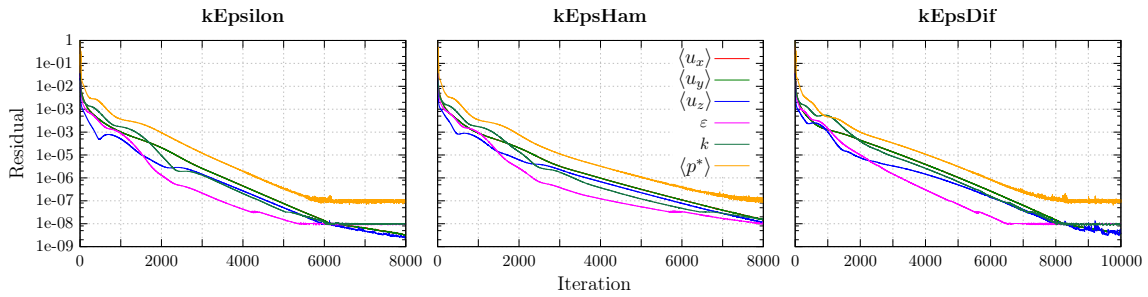
5.2.4 Резултати прорачуна поља брзине

Нумерички прорачун поља брзине у Чантраковом дифузору извршен је применом три различита модела турбуленције при две различите јачине вихора. При томе су параметри солвера и шеме дискретизације подешене на исти начин

као у Стинберженовом тестном примеру. Прорачуни су извршени на радној станици HP-Z6-G4 применом паралелног процесирања на 16 процесорских језгара. Сви случајеви прорачуна су стабилно конвергирали, при чему је постигнута захтевана тачност свих струјних варијабли са остацима коју су мањи од 10^{-6} . Дијаграми конвергенције решења за сваки од коришћених модела турбуленције су приказани на Сл.5.22 и Сл.5.23. Просечно време рада рачунара до достизања жељене тачности је износило приближно 60 минута.



Слика 5.22: Конвергенција решења при $\alpha_{s1} = 15^\circ$.



Слика 5.23: Конвергенција решења при $\alpha_{s2} = 45^\circ$.

Као што је већ наведено, на крају кода kEpsDif.C постоји сет наредби који омогућава контролу јачине вихора и запреминског протока флуида на улазном пресеку дифузора. Применом модела $k - \epsilon$ diffuser за случај угла лопатица спроводног апарата $\alpha_{s1} = 15^\circ$ добијени су излазни подаци дати у следећем листингу.

```

1 You are using kEpsDif model :
2
3 1 [0 0 0 0 0 0 0] 0.09
4 L [0 0 0 0 0 0 0] 0.932
5 Ctau [0 0 0 0 0 0 0] 0.182
6 InFlowRate = 0.647058367729 m^3/s
7 InEnFluxZdir = 307.94229126 m^5/s^3
8 InEnFluxPhiDir = 37.1114768982 m^5/s^3
9 SwS = 0.120999999344

```

Применом овог модела за случај угла лопатица спроводног апарата $\alpha_{s2} = 45^\circ$ добијени су излазни подаци дати у следећем листингу

```

1 You are using kEpsDif model :
2
3 1 [0 0 0 0 0 0 0] 0.09
4 L [0 0 0 0 0 0 0] 0.932
5 Ctau [0 0 0 0 0 0 0] 0.182
6 InFlowRate = 0.711441159248 m^3/s
7 InEnFluxZdir = 438.235900879 m^5/s^3
8 InEnFluxPhiDir = 172.324371338 m^5/s^3
9 SwS = 0.393000006676

```

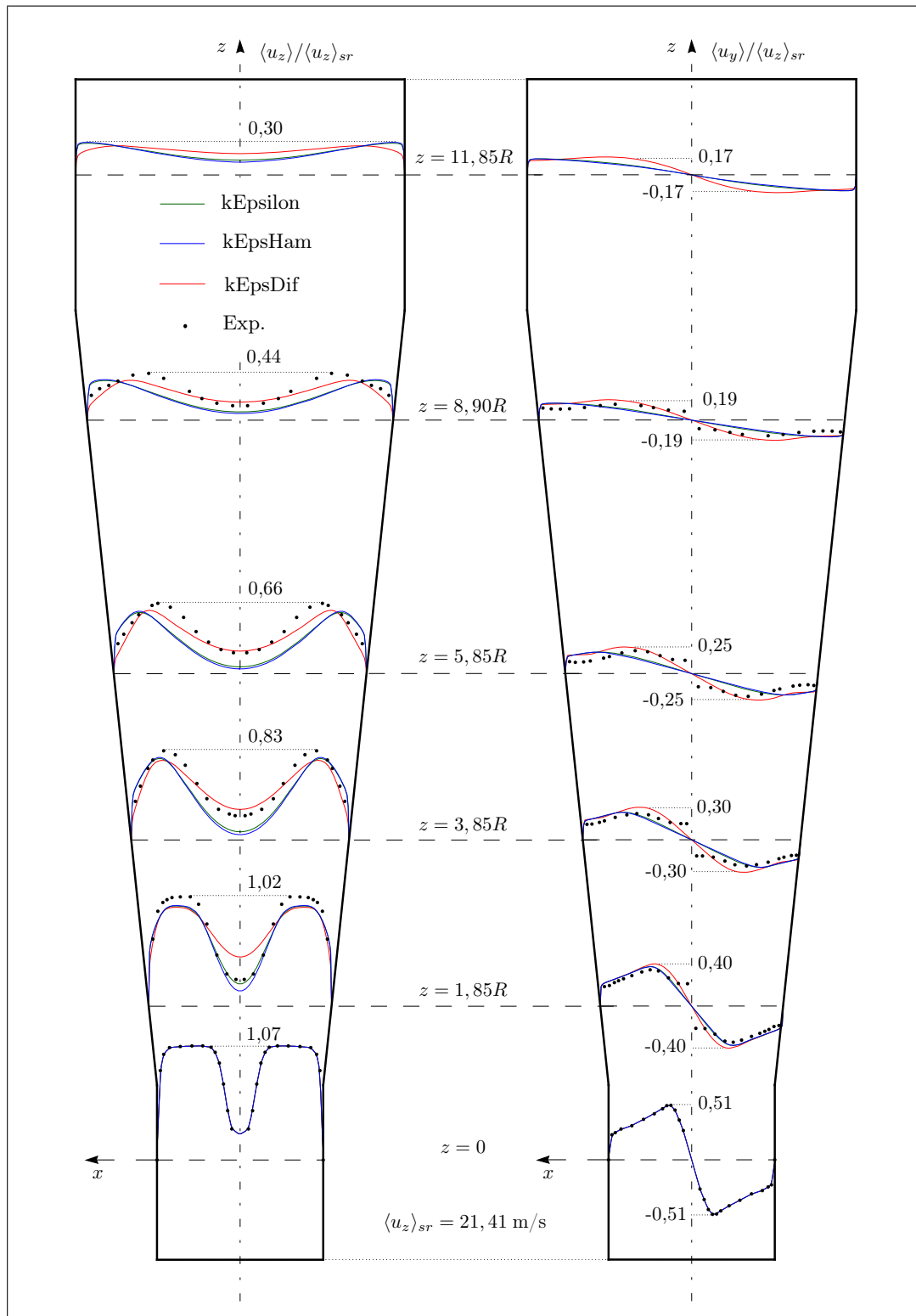
У ова два листинга јачина вихора има ознаку **SwS** и као што се може видети за већи угао нагиба лопатица спроводног апарата испитне инсталације добија се вихор са већом јачином вихора. Прорачуни струјања на овом тестном примеру су извршени између осталог и применом Хамбиног $k - \varepsilon$ модела турбуленције. При томе је коришћена константа $C_\tau = 0,182$, због тога што примена већих вредности ове константе није дала очекивано боље предвиђање поља брзине. При томе вредности $C_\tau > 0,35$ доводе до значајних проблема у стабилности нумеричког прорачуна и конвергенцији решења. Хамбин модел турбуленције је изведен под одређеним претпоставкама које важе за струјање у цевима, али не важе за струјање у дифузорима. Хамба је при извођењу својих израза за компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона претпоставио да је вихорно струјање у цеви такво да се вектор брзине може апроксимирати следећим изразом:

$$\langle \underline{u} \rangle = (0, \langle u_\varphi \rangle(r), \langle u_z \rangle(r)). \quad (5.16)$$

Међутим, у дифузору настаје вихорно струјање код кога је зависност компоненти брзине од аксијалног правца струјања, односно од координате z много израженија него код вихорног струјања у цеви. Због тога је вектор брзине при осносиметричном вихорном струјању у правом конусном дифузору дефинисан следећим изразом

$$\langle \underline{u} \rangle = (\langle u_r \rangle(r, z), \langle u_\varphi \rangle(r, z), \langle u_z \rangle(r, z)). \quad (5.17)$$

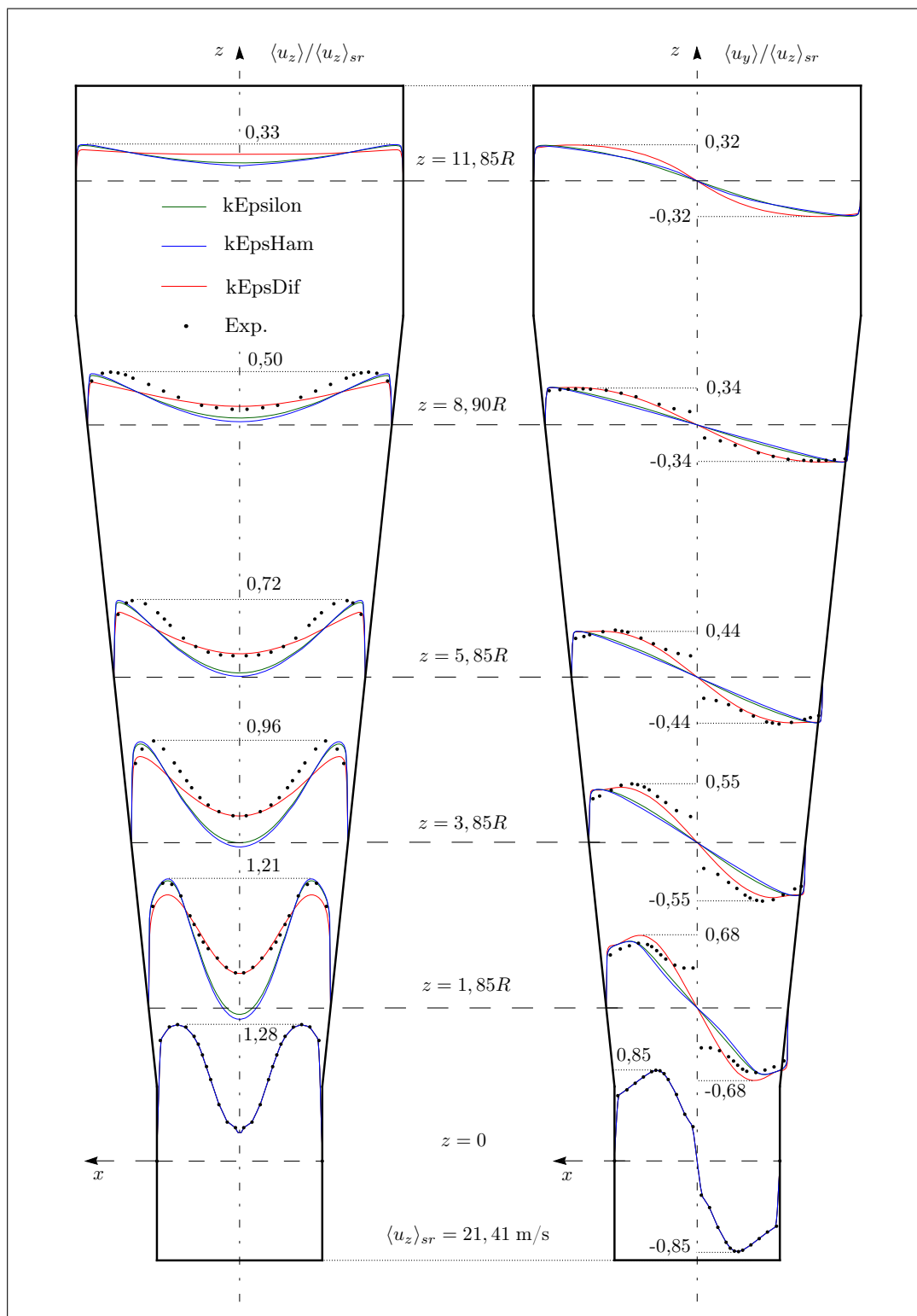
Ова чињеница представља главни разлог због којег Хамбин модел турбуленције даје слабе резултате уколико се примени на прорачун струјања у правим конусним дифузорима. Ипак, Хамбин модел чини добру основу за развој новог модела за вихорна струјања, зато што се турбулентна вискозност у овом моделу моделира као анизотропан тензор. Модификацијом издвојених најугицајнијих коефицијената Хамбиног модела развијен је модел $k - \varepsilon$ diffuser намењен прорачуну струјања у правим конусним дифузорима. Резултати нумеричког прорачуна поља брзине који су добијени применом различитих модела турбуленције су приказани на Сл.5.24 и Сл.5.25.



а) Аксијална брзина

б) Обимска брзина

Слика 5.24: Распoдела брзине у Чантраковом дифузору при $\alpha_{s1} = 15^\circ$.



а) Аксијална брзина

б) Обимска брзина

Слика 5.25: Расподела брзине у Чантраковом дифузору при $\alpha_{s2} = 45^\circ$.

Дифузори приказани на Сл.5.24 и Сл.5.25. су нацртани применом софтвера Python у геометријској размери, при чему су истим софтвером на формираним геометријама дифузора уцртани дијаграми расподеле брзина, према табеларним вредностима које су добијене нумеричким прорачунима. Из дијаграма се може уочити да за оба режима струјања развијени модел $k - \varepsilon$ diffuser остварује боље резултате у предвиђању поља брзине у вихорном језгру у односу на стандардни $k - \varepsilon$ модел и Хамбин $k - \varepsilon$ модел, који дају веома сличне резултате за оба режима струјања. Посматрањем дијаграма се може уочити и да је за оба режима струјања проблематичан нумерички прорачун аксијалне брзине у потенцијалној зони вихора. Модификација коефицијента K_8 у овој зони струјања има занемарљив утицај на моделирање аксијалне брзине из разлога који је иложен у наставку. Изрази за компоненте анизотропног дела тензора турбулентног напона $k - \varepsilon$ diffuser модела турбуленције су формиран на основу израза за Хамбине напоне (4.28), и они имају следећи облик:

$$\begin{aligned}
c_{rr} &= \nu_{th}(-K_1\langle S_{r\varphi} \rangle - K_7\langle S_{rr} \rangle - K_6\langle S_{\varphi\varphi} \rangle), \\
c_{r\varphi} &= \nu_{th}(-K_2\langle S_{r\varphi} \rangle + K_5\langle S_{rr} \rangle - K_5\langle S_{\varphi\varphi} \rangle), \\
c_{rz} &= \nu_{th}(\boxed{-K_8\langle S_{rz} \rangle} - K_4\langle S_{\varphi z} \rangle), \\
c_{\varphi\varphi} &= \nu_{th}(K_9\langle S_{r\varphi} \rangle - K_6\langle S_{rr} \rangle - K_7\langle S_{\varphi\varphi} \rangle), \\
c_{\varphi z} &= \nu_{th}(K_4\langle S_{rz} \rangle - K_3\langle S_{\varphi z} \rangle), \\
c_{zz} &= -2\nu_{th}\langle S_{zz} \rangle.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

У складу са овим изразима и изразом (4.25), поларно-цилиндричне компоненте турбулентног напона у моделу $k - \varepsilon$ diffuser су дате изразом

$$\begin{aligned}
\tau_{ij} &= \frac{2}{3}k\delta_{ij} + c_{ij}, \\
i &= r, \varphi, z; \quad j = r, \varphi, z.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Најзначајнији утицај на расподелу аксијалне брзине у дифузору има компонента напона c_{rz} . На ову компоненту напона најзначајнији утицај има њена компонента $(c_{rz})_{Srz} = -\nu_{th}K_8\langle S_{rz} \rangle$, која сагласно изразима за просечне брзине деформисања у поларно-цилиндричним координатама [115] има облик

$$(c_{rz})_{Srz} = -\nu_{th}K_8\frac{1}{2}\left(\boxed{\frac{\partial\langle u_z \rangle}{\partial r}} + \frac{\partial\langle u_r \rangle}{\partial z}\right). \tag{5.20}$$

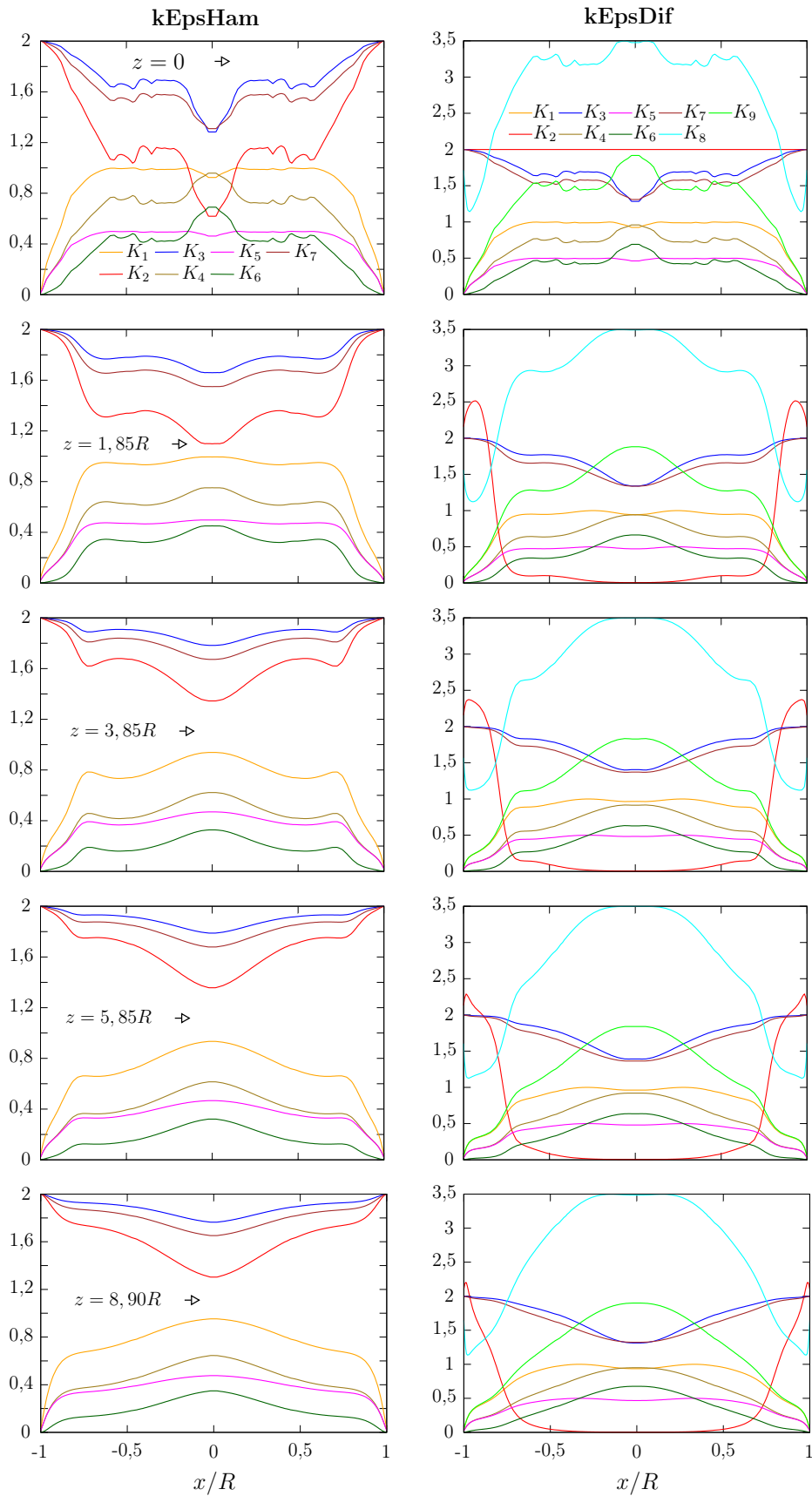
Како у потенцијалној зони вихора профили аксијалне брзине имају локални

максимум, то су у тим тачкама изводи аксијалне брзине по радијалној координати једнаки нули, те је стога у овим тачкама допринос промене аксијалне брзине $\frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r}$ напону τ_{rz} занемарљив, без обзира на вредност коефицијента K_8 . Изван ове зоне промена брзине $\frac{\partial \langle u_z \rangle}{\partial r}$ има доминантан утицај на формирање профила аксијалне брзине у дифузору.

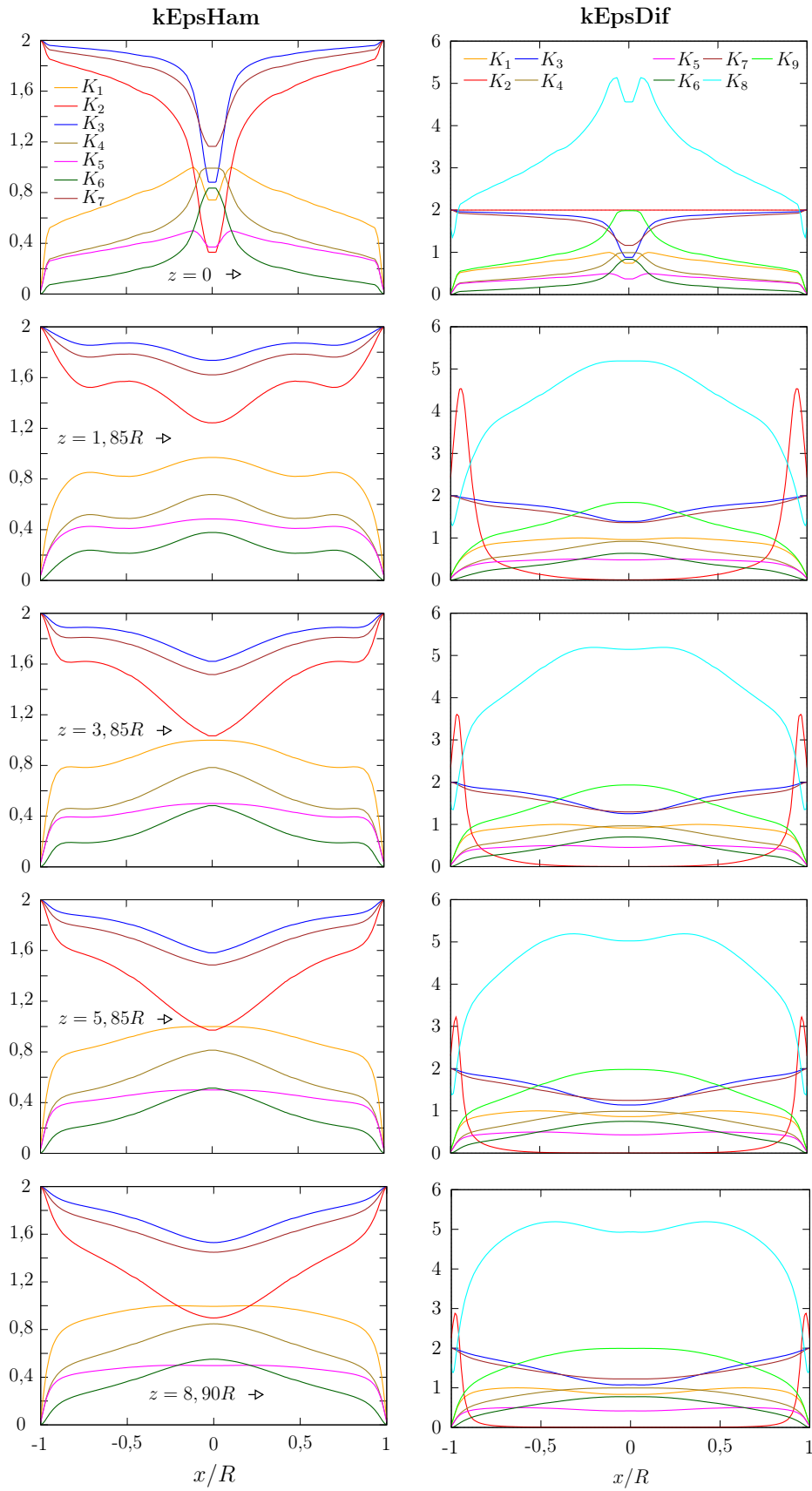
5.2.5 Расподела коефицијената турбулентне вискозности

Модел турбуленције $k - \varepsilon$ diffuser је развијен модификацијама одређених коефицијената Хамбиног модела турбуленције. Стога је од значаја урадити анализу расподеле коефицијената турбулентне вискозности $k - \varepsilon$ diffuser модела турбуленције. Расподела ових коефицијената у мерним пресецима Чантраковог дифузора при слабијем вихору је приказана на Сл.5.26, а за јачи вихор је приказана на Сл.5.27. Промена коефицијената стандардног $k - \varepsilon$ модела овде није приказана зато што, као што је то већ наведено, овај модел има само коефицијенте K_2 , K_3 и K_7 и они имају константну вредност 2 у целом струјном домену. Из дијаграма на Сл.5.26 и Сл.5.27 се јасно уочава разлика у моделирању коефицијената турбулентне вискозности између Хамбиног $k - \varepsilon$ модела и модела $k - \varepsilon$ diffuser. Модел $k - \varepsilon$ diffuser има два додатна коефицијента који су додати из потребе да се делује на коефицијенте K_1 и K_3 на одређеним позицијама у изразима за Хамбине напоне (4.28). При томе коефицијент K_8 мења коефицијент K_3 на позицији која има значајан утицај на расподелу аксијалне брзине у језгру вихора. Као што се из дијаграма може видети, вредност коефицијента K_8 има значајно веће вредности од коефицијента K_3 . Пораст вредности овог коефицијента је неопходан јер се повећањем турбулентне вискозности у језгу вихора и у меридијанској равни Orz , постиже неопходно повећање вредности аксијалне брзине у језгру вихора.

Из дијаграма датих на Сл.5.26 и Сл.5.27 се уочава да код модела $k - \varepsilon$ diffuser коефицијент K_2 у језгру вихора има значајно мање вредности него код Хамбиног $k - \varepsilon$ модела. Наведено смањење вредности коефицијента K_2 је неопходно како би се смањила турбулентна вискозност у језгру вихора у обимској равни $Or\varphi$ и самим тим постигло неопходно повећање обимске брзине у језгру вихора. Модификације коефицијената K_2 и K_3 су обезбедиле значајан утицај на прорачун поља брзине, што је резултирало бољим предвиђањем поља брзине које је добијено применом модела $k - \varepsilon$ diffuser. Коефицијент K_9 је у моделу $k - \varepsilon$ diffuser уведен с циљем да се делује на коефицијент K_1 на одређеној позицији у Хамбином тензору напона, како би се постигло боље предвиђање нормалног турбулентног напона $\tau_{\varphi\varphi}$.



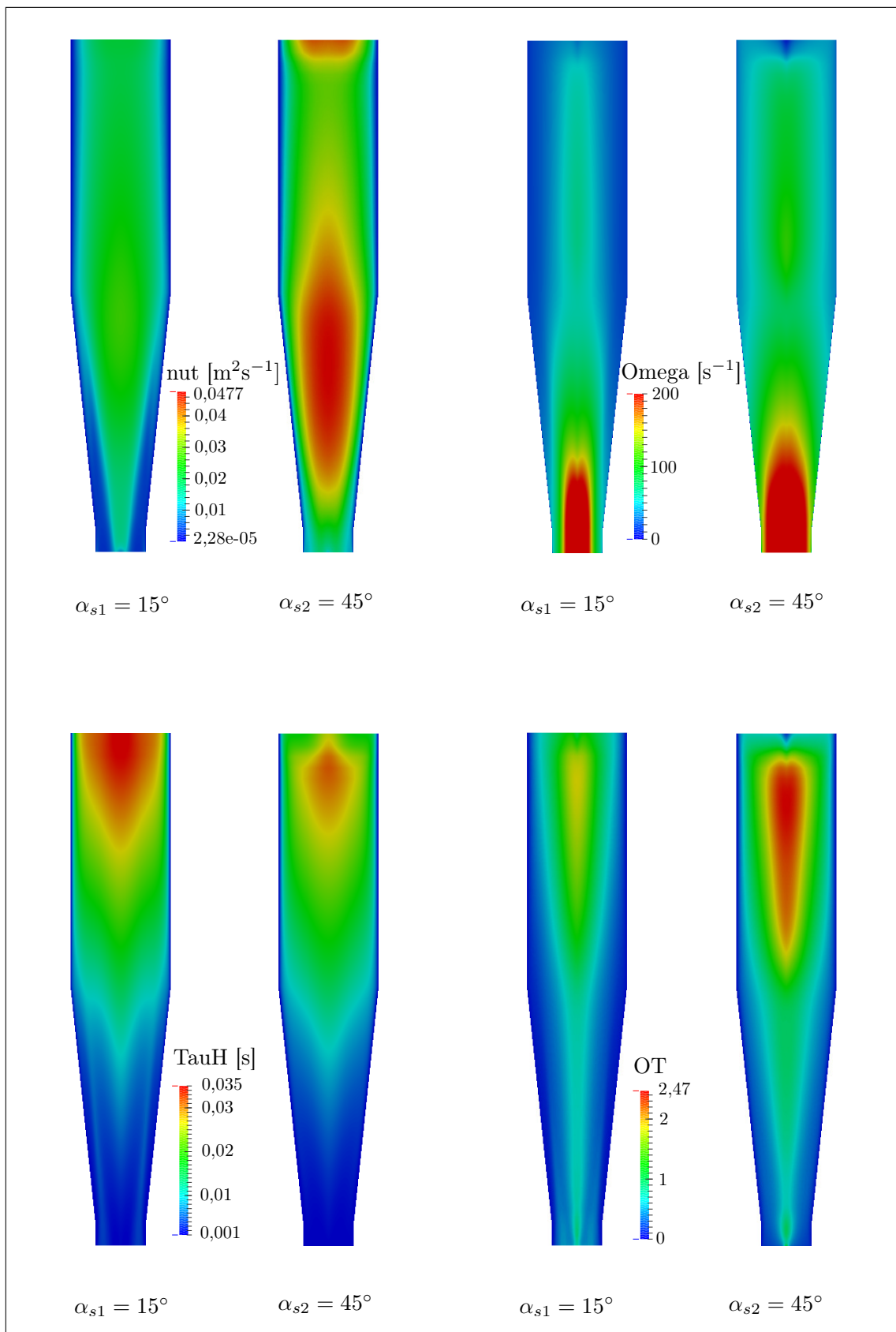
Слика 5.26: Коэффициенти K_i у Чантраковом дифузору при $\alpha_{s1} = 15^\circ$.



Слика 5.27: Коэффициенти K_i у Чантраковом дифузору при $\alpha_{s2} = 45^\circ$.

Из дијаграма датих на Сл.5.26 и Сл.5.27 се може видети да коефицијент K_9 има значајно веће вредности од коефицијента K_1 . Иако је овом модификацијом постигнут значајан утицај на вредности нормалног напона $\tau_{\varphi\varphi}$, њен утицај на прорачун поља брзине је занемарљив. Модификацијама смицајних турбулентних напона преко утицаја на коефицијенте K_2 и K_3 је постигнут значајан утицај на прорачун поља брзина, док је модификацијом нормалног турбулентног напона преко коефицијента K_1 постигнут безначајан утицај на прорачун поља брзине. Резултати ових утицаја на коефицијенте турбулентне вискозности следе из чињенице да моделирање смицајних турбулентних напона има пресудан утицај на тачност прорачуна поља брзине. На основу приложених дијаграма се може закључити да је при вихорном струјању у правим конусним дифузорима неопходно остварити значајну разлику између вредности турбулентне вискозности у меридијанској и обимској равни, да би се постигао тачнији нумерички прорачун поља брзине.

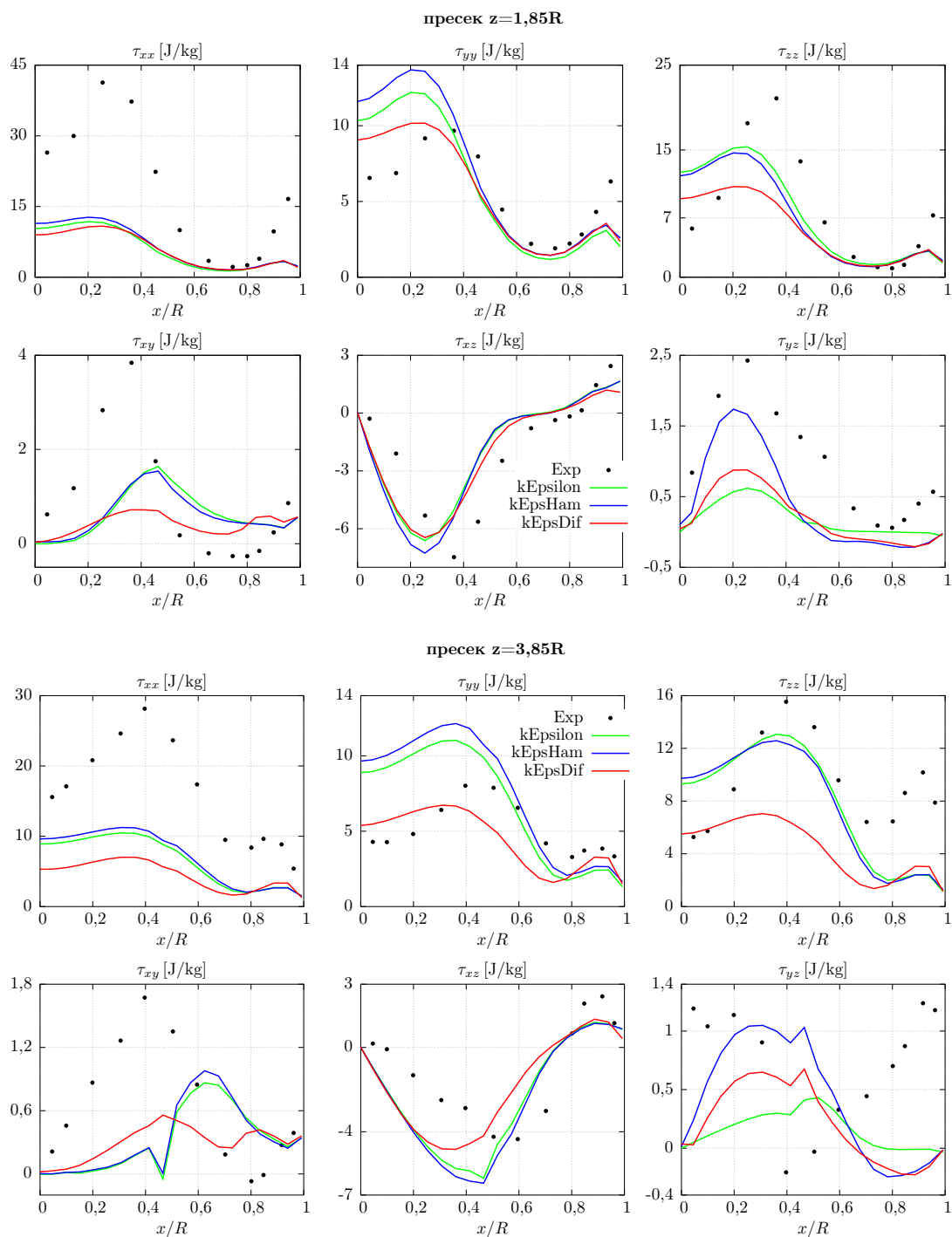
У имплементираним моделима `kEpsHam` и `kEpsDif`, корекција вредности турбулентне вискозности се врши множењем скаларне величине турбулентне вискозности коефицијентима који су зависни од оса поларно-цилиндричног координатног система. При томе се вредности ових коефицијената значајно разликују у вихорном струјном пољу. Расподела турбулентне вискозности (`nut`) у Чантраковом дифузору, која је добијена применом модела $k - \varepsilon$ diffuser, приказана је на Сл.5.28 за обе јачине вихора. Из слике се може видети да турбулентна вискозност има највеће вредности у централној зони овог дифузора и да има значајно веће вредности при већој јачини вихора. На Сл.5.28 су дате и расподеле угаоне брзине вихора (`Omega`), Хамбиног временског размера (`TauH`) и бездимензијског параметра временске нелокалности (`OT`). Из приложене слике се може видети да угаона брзина вихора ниструјно бржије опада у односу на Стинбергенову цев, што значи да у дифузору вихор бржије одумире. Поред тога, вредности угаоне брзине вихора при јачем вихору су значајно веће у целом струјном домену у односу на слабији вихор. Хамбин временски размер при већој јачини вихора има мање вредности него при слабијем вихору, што је последица уситњавања турбулентних структура и пораста вредности флукутирајућих брзина при јачем вихору. На крају се може видети и како се мења бездимензијски параметар временске нелокалности (`OT`) при струјању у овом дифузору. Уочава се да је промена овог параметра у радијалном правцу и низструјно слична промени која је добијена применом Хамбиног $k - \varepsilon$ модела у Стинбергеновој цеви, али се брзине промене параметра (`OT`) радијално и низструјно значајно разликују у односу на струјање у Стинбергеновој цеви.

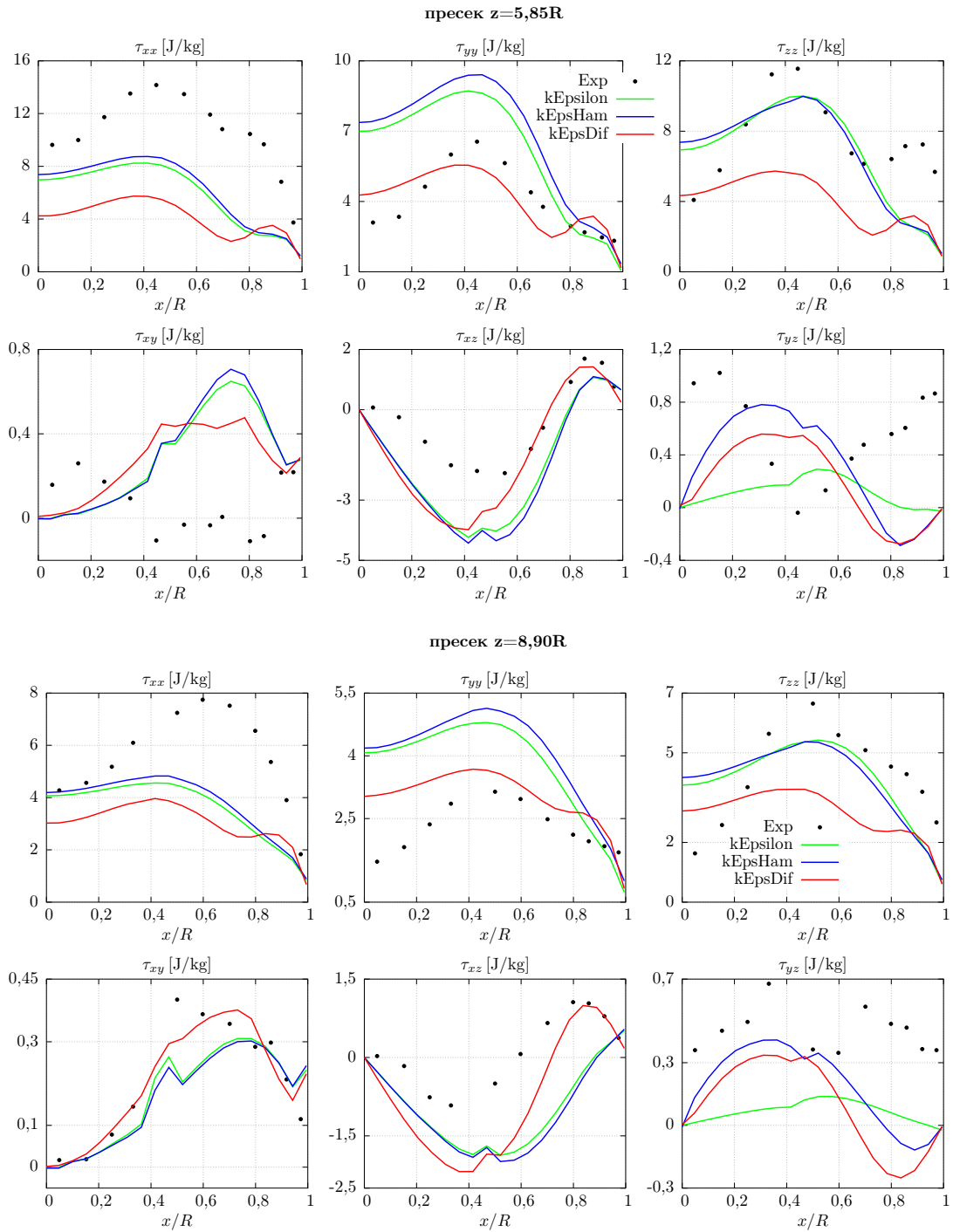


Слика 5.28: Распoдела карактеристичних параметара модела kEpsDif.

5.2.6 Резултати прорачуна поља турбулентног напона

Тачност прорачуна динамике турбулентног струјног поља у правим конусним дифузорима у највећој мери зависи од тачности моделирања поља турбулентног напона. Прорачунима струјања у Чантраковом дифузору су добијене вредности турбулентних напона које су приказане на дијаграмима на Сл.5.29.





Слика 5.29: Турбулентни напони при $\alpha_{s1} = 15^\circ$.

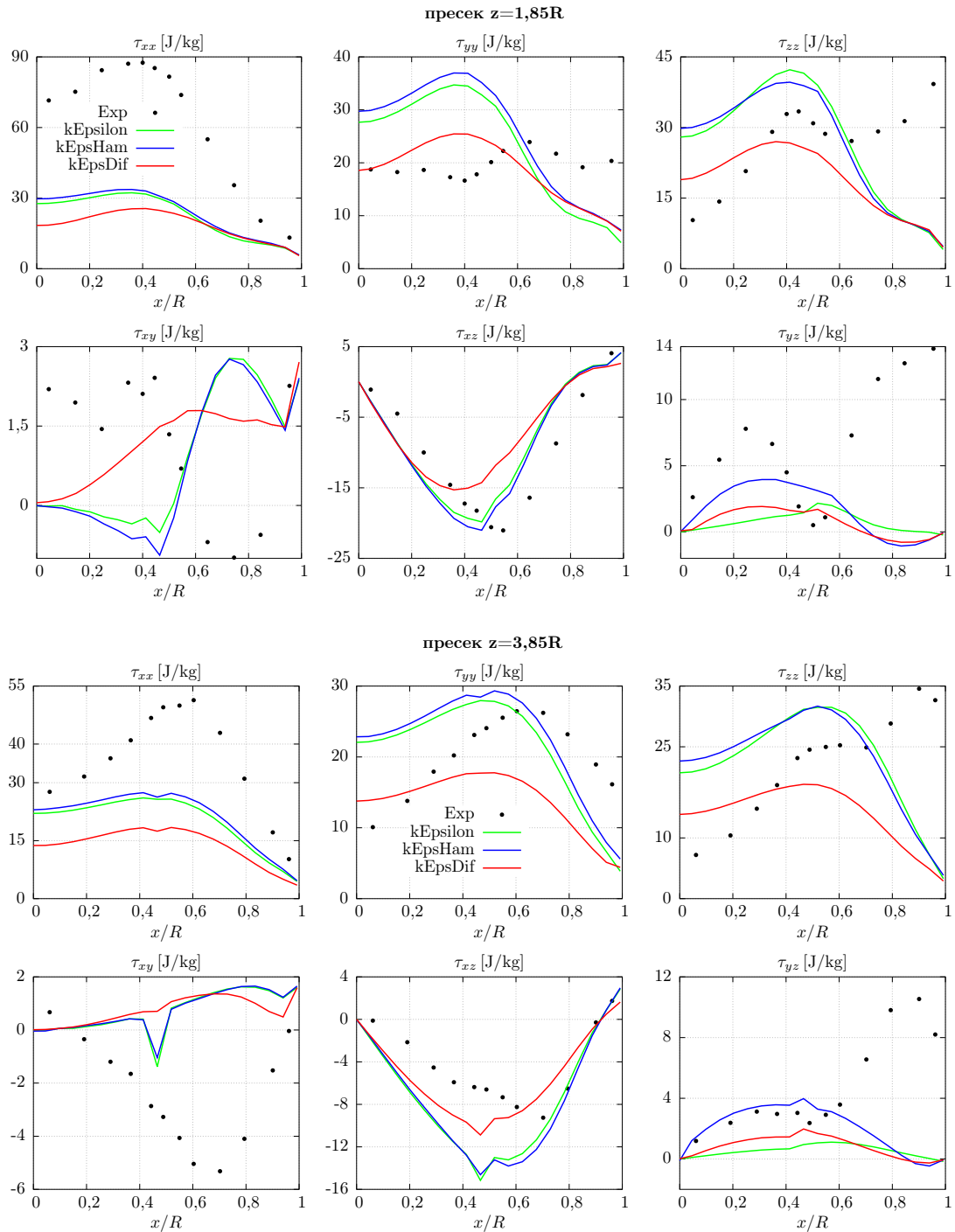
Посматрањем дијаграма расподеле напона на Сл.5.29 уочава се да постоји значајна разлика у вредностима турбулентних напона који су добијени применом модела $k - \epsilon$ diffuser у односу на турбулентне напоне који су добијени применом стандардног $k - \epsilon$ модела и Хамбиног $k - \epsilon$ модела. Пресудан утицај на формирање поља брзине у дифузору имају смицајни турбулентни напони $\tau_{r\varphi}$ и τ_{rz} који на овим дијаграмима одговарају напонима τ_{xy} и τ_{xz} респективно. Струк-

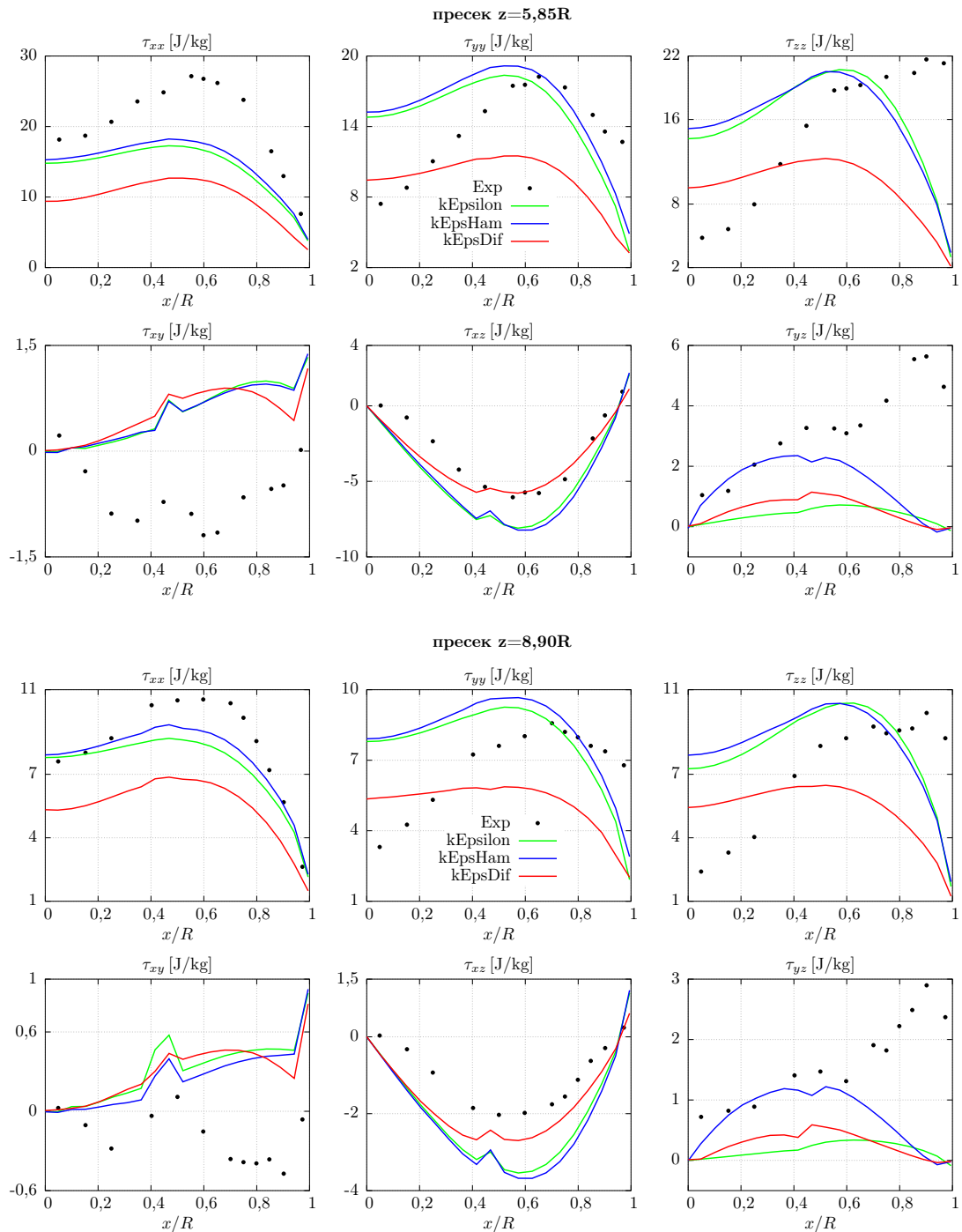
тура смицајног турбулентног напона $\tau_{r\varphi}$ значајно утиче на расподелу обимске брзине у дифузору. Деловањем на коефицијент K_2 значајно се мења структура тубулентног напона $\tau_{r\varphi}$. При томе се у језгру вихора смањивањем коефицијента K_2 са једне стране смањује напон $\tau_{r\varphi}$, док се са друге стране тај ефекат рефлектује на пораст градијента обимске брзине у радијалном правцу, што доводи до повећања напона $\tau_{r\varphi}$. Дакле, деловањем на коефицијент турбулентне вискозности K_2 се на изврстан начин врши прерасподела између утицаја коефицијента турбулентне вискозности и утицаја градијента брзине на вредност турбулентног напона $\tau_{r\varphi}$. Овом анализом је делимично објашњено зашто је рапидним смањивањем вредности коефицијента K_2 у језгру вихора (видети Сл.5.26), постигнуто боље предвиђање расподеле обимске брзине применом $k - \varepsilon$ diffuser модела (видети Сл.5.24 б)), иако при томе није дошло до значајних промена вредности турбулентног напона $\tau_{r\varphi}$, односно τ_{xy} у овој зони струјања (видети Сл.5.29 и Сл.5.30).

Слично претходној анализи, структура напона τ_{rz} значајно утиче на расподелу аксијалне брзине у радијалном правцу. При томе доминантан утицај на расподелу аксијалне брзине у радијалном правцу има коефицијент турбулентне вискозности K_8 . Деловањем на овај коефицијент врши се прерасподела утицаја турбулентне вискозности и градијента аксијалне брзине у радијалном правцу на вредност турбулентног напона τ_{rz} . Посматрањем дијаграма напона приказаних на Сл.5.29 и Сл.5.30 уочава се да деловање на коефицијенте турбулентне вискозности није значајно променило вредности напона τ_{rz} у језгру вихора. Међутим, променом вредности коефицијента K_8 у моделу $k - \varepsilon$ diffuser је остварено значајно деловање на расподелу утицаја турбулентне вискозности и градијента аксијалне брзине на формирање турбулентног напона τ_{rz} . Тако је повећање вредности коефицијента K_8 у моделу `kEpsDif` изазвало смањење градијента аксијалне брзине у радијалном правцу, што се може видети на Сл.5.24 а) и Сл.5.25 а). Ово смањење градијента аксијалне брзине је због једначине континуитета резултирало порастом вредности аксијалне брзине у језгру вихора у свим мерним пресецима овог дифузора.

Овим је уједно изложена и суштинска разлика између коефицијента K_3 у Хамбином $k - \varepsilon$ моделу који је дао добре резултате у Стинберженовој цеви и коефицијента K_8 у моделу $k - \varepsilon$ diffuser који је дао добре резултате у Чантраковом дифузору. При вихорном струјању у Стинберженовој цеви је потребно да је $K_3 < 2$ у језгру вихора, док је при вихорном струјању у Чантраковом дифузору потребно да је $K_8 > 2$ у језгру вихора. У овој чињеници се огледа главни разлог због кога Хамбин $k - \varepsilon$ модел не даје добре резултате при вихорном струјању у

правим конусним дифузорима. Из дијаграма приказаних на Сл.5.29 и Сл.5.30 се може видети да је применом модела $k - \varepsilon$ diffuser постигнуто боље слагање турбулентног напона $\tau_{\varphi\varphi}$, односно τ_{yy} у језгру вихора. То је код модела $k - \varepsilon$ diffuser постигнуто повећањем вредности коефицијента K_9 у језгру вихора, у односу на вредност коефицијента K_1 , који се на истој позицији налази у тензору напона Хамбиног $k - \varepsilon$ модела.





Слика 5.30: Турбулентни напони при $\alpha_{s1} = 45^\circ$.

Из дијаграма на Сл.5.29 и Сл.5.30 се уочава да је при овом струјању присутна значајна анизотропност нормалних турбулентних напона, која се не може на адекватан начин описати моделима турбуленције коју су овде примењени. У моделима који су овде примењени очигледно постоји проблем при моделирању утицаја нормалних компоненти анизотропног дела тензора турбулентног напона на његов изотропни део. Ово је комплексан проблем који има доминан-

тан утицај на моделирање анизотропности тензора турбулентног напона и који захтева дубљу анализу како би се нашло одговарајуће решење.

Анализа анизотропности тензора турбулентних напона је широко заступљена у истраживањима турбулентних струјања, због тога што LEVM модели турбуленције дају добре резултате само уколико је турбулентно струјање такво да је стање турбулентних напона приближно изотропно. Наведене анализе анизотропности се често свode само на математичке анализе степена анизотропности тензора напона. Тако се понекад стиче утисак да је за динамику турбулентних струјања значајно само стање анизотропности турбулентних напона. При томе се често наводи да се само турбулентна струјања са изотропним стањем турбулентних напона могу тачно прорачунати применом линеарне везе између напона и брзина деформисања. Међутим, ламинарна струјања нпр. могу бити изразито анизотропна, (нпр. струјање уља у цилиндричном клизном лежају) али се она могу тачно прорачунати применом Навије-Стоксових једначина, у којима је веза између напона и брзина деформисања линеарна.

Према томе, линеарност анизотропног дела тензора турбулентног напона није суштински проблем који нарушава тачност прорачуна турбулентних струјања са анизотропним стањем турбулентних напона. Основни разлог лоших резултата LEVM модела при прорачуну оваквих турбулентних струјања је велика нетачност моделирања анизотропности турбулентне вискозности. Када би се тачно моделирала анизотропност турбулентне вискозности онда би и LEVM модели турбуленције остваривали значајно боље резултате при моделирању турбулентних струјања са анизотропним стањем турбулентних напона. Међутим, како је моделирање анизотропности турбулентне вискозности веома сложено, то је тражено алтернативно решење у примени нелинарности при моделирању анизотропног дела тензора турбулентног напона ослањањем на једначине динамике вискоеластичних флуида.

Дугогодишњим истраживањима појаве анизотропности тензора напона развијене су методе за визуелизацију степена анизотропности тензора другог реда. Тако су настали Ламлијев троугао [116] и барицентрична мапа [117] који, у математичком смислу, дају концизан приказ степена анизотропности тензора напона. Међутим, Ламлијев троугао и барицентрична мапа не дају визуелни приказ положаја елипсоида напона у струјном пољу. Поред степена анизотропности тензора турбулентног напона, који се приказује применом Ламлијевог троугла и барицентричне мапе, динамика турбулентног струјања зависи и од положаја елипсоида турбулентних напона у струјном пољу. Због тога за приказ степена анизотропности турбулентних напона у овој дисертацији нису кориш-

ђени Ламлијев троугао и барицентрична мапа, већ је примењен поступак који поред визуелног приказа степена анизотропности даје и приказ геометријског положаја главних оса и геометријски приказ вредности главних напона тензора турбулентног напона. Поступак прорачуна који омогућава овакав приказ карактеристика поља турбулентног напона је образложен у наставку.

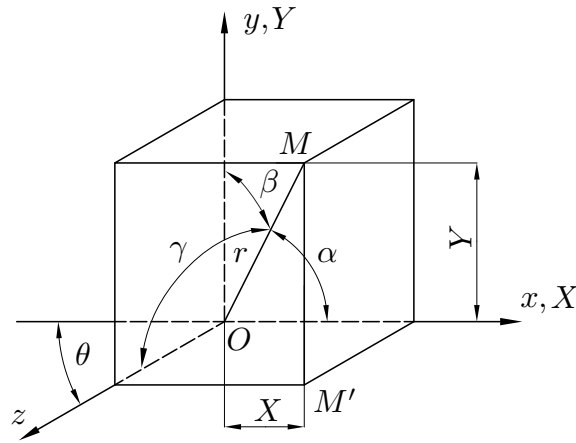
Прорачун главних турбулентних напона и прорачун углова праваца ових напона у анализираним тачкама струјног поља је у овом раду извршен помоћу кода написаног у софтверу Mathematica. Овај код је приказан на Сл.5.31.

```
(*-----*)
SetAttributes[verbose, HoldAll];
verbose@expr_ := Module[{res = expr}, If[res != Null, CellPrint@Cell[BoxData@ToBoxes@res,
  "Output", CellTags -> CellTags -> ToString@Unevaluated@lhs <> " =",
  ShowCellTags -> True]]];
HoldPattern@verbose@Set[lhs_, rhs_] := CellPrint@Cell[BoxData@ToBoxes[lhs = rhs],
  "Output", CellTags -> ToString@Unevaluated@lhs <> " =", ShowCellTags -> True];
$Pre = verbose;
(*-----*)
(*Aktivacija formata izlaza Shift+Enter OVDE->*)

(* EXP naponi -> x/R=0.10 *)
SetDirectory[NotebookDirectory[]]
IN = Import["../Exp/exp385.csv", "Table"]
i = 2 (*vrsta iz koje se ucitavaju podaci*)
Rzz = Part[IN[[i]], 4] (*ucitavanje 4 elementa i vrste*)
Rxx = Part[IN[[i]], 5] (* -//- *)
Ryy = Part[IN[[i]], 6] (* -//- *)
Rzx = Part[IN[[i]], 7] (* -//- *)
Ryz = Part[IN[[i]], 8] (* -//- *)
Rxy = Part[IN[[i]], 9] (* -//- *)
R = {{Rxx, Rxy, Rxz}, {Rxy, Ryy, Ryz}, {Rxz, Ryz, Rzz}} (*Formiranje tenzora napona*)
EigenValues = Eigenvalues[R] (*Izracunavanje glavnih napona*)
{a, b, c} = Eigenvectors[R] (*Formiranje glavnog vektora*)
{x, y, z} = {{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}} (*Formiranje ortova koord. sistema*)
aN = a / Norm[a] (*Formiranje orta glavnog pravca a*)
bN = b / Norm[b] (* -//- b*)
cN = c / Norm[c] (* -//- c*)
alpha1 = VectorAngle[aN, x] 180 / π
alpha2 = VectorAngle[aN, y] 180 / π
alpha3 = VectorAngle[aN, z] 180 / π
beta1 = VectorAngle[bN, x] 180 / π
beta2 = VectorAngle[bN, y] 180 / π
beta3 = VectorAngle[bN, z] 180 / π
gama1 = VectorAngle[cN, x] 180 / π
gama2 = VectorAngle[cN, y] 180 / π
gama3 = VectorAngle[cN, z] 180 / π
(*Aktivacija proracuna Shift+Enter OVDE->*)
```

Слика 5.31: Код у софтверу Mathematica за прорачун главних напона.

Из приложеног кода се може видети да у софтверу Mathematica постоје интегрисани програмски алати за прорачун главних вредности тензора, главних вектора и угла између два вектора. На овај начин је значајно убрзан прорачун карактеристика напонског стања у датој тачки струјног поља. У коду приказаном на Сл.5.31 је нпр. α компонента главног турбулентног напона $\tau_{(1)}$, а α_1 , α_2 и α_3 су углови које правац главног напона $\tau_{(1)}$ заклапа са осама Декартовог координатног система. По истој аналогiji је извршен прорачун и за преостала два главна турбулентна напона.



Слика 5.32: Пресликавање 3D координата у раван цртежа.

Када су овим прорачуном добијене вредности главних напона и главних праваца остао је проблем како приказати просторни положај главних напона у датој тачки струјног поља. Овај проблем је решен тако што је извршено пресликавање тродимензионалног простора у раван цртежа OXY , као што је то приказано на Сл.5.32. У складу са ознакама уведеним на Сл.5.32 ово пресликавање је извршено применом следеће две једначине

$$X = r \cos \alpha - (r \cos \gamma) \cos \theta \quad (5.21)$$

$$Y = r \cos \beta - (r \cos \gamma) \sin \theta. \quad (5.22)$$

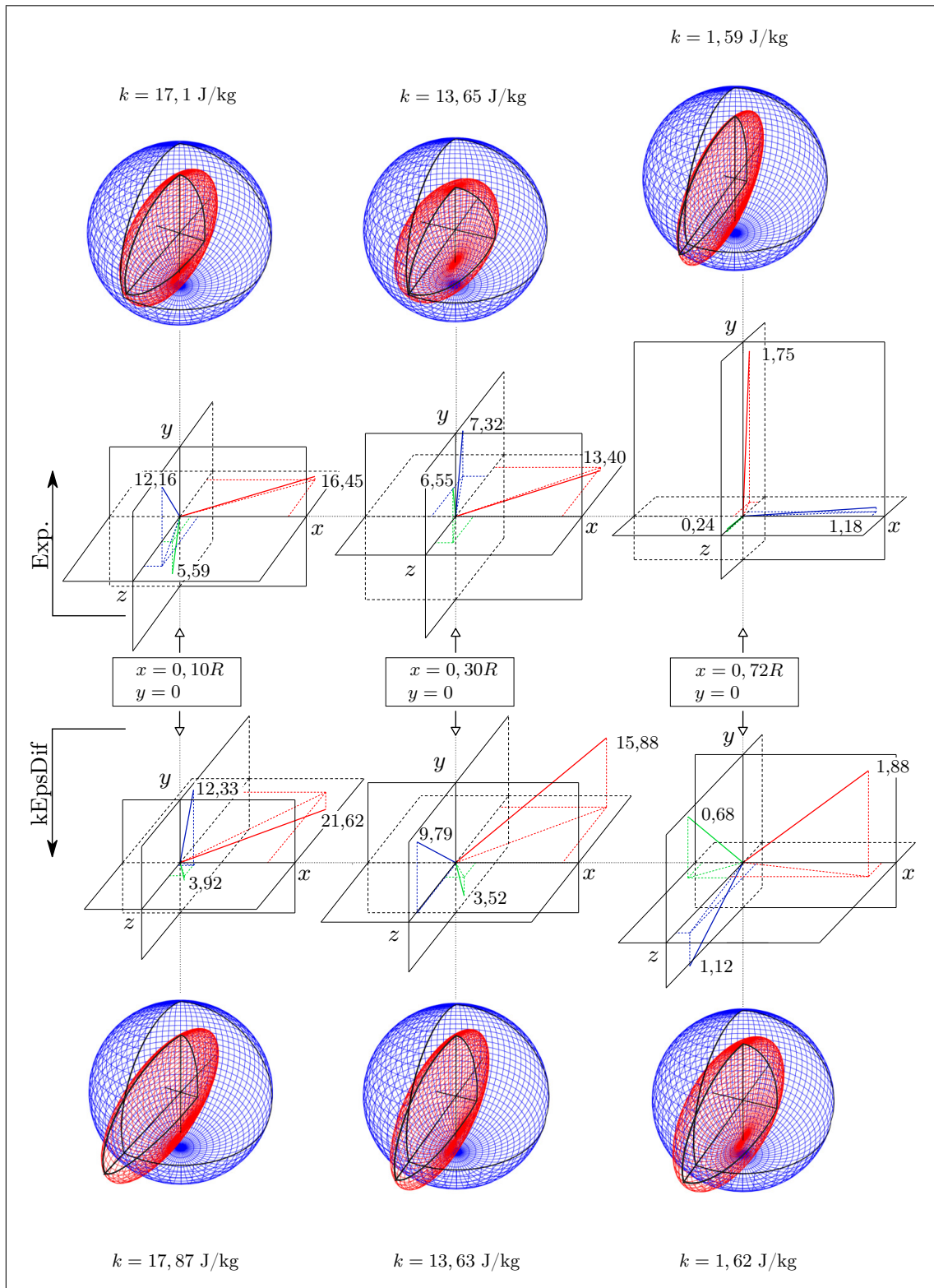
Применом једначина (5.21) и (5.22) свака линија у тродимензионалном простору може да се преслика у раван цртежа OXY . Применом једначина пресликивања (5.21) и (5.22) у софтверу Excel је извршено пресликавање линија октаната Декартовог координатног система у раван цртежа, чиме су добијени графички прецизни дијаграми тродимензионалног простора у равни цртежа. Истим поступком се положаји главних турбулентних напона у октантима Декартовог координатног система могу пресликати у раван цртежа. Тако је развијен поступак графичког приказа у софтверу Excel, који за унете вредности главних

напона и углова њихових праваца даје изванстан вид изометријског приказа положаја главних напона у тродимензионалном простору. Изложени поступак је омогућио да се у равни цртежа добије прецизан визуелни приказ положаја главних вектора турбулентних напона у струјном пољу.

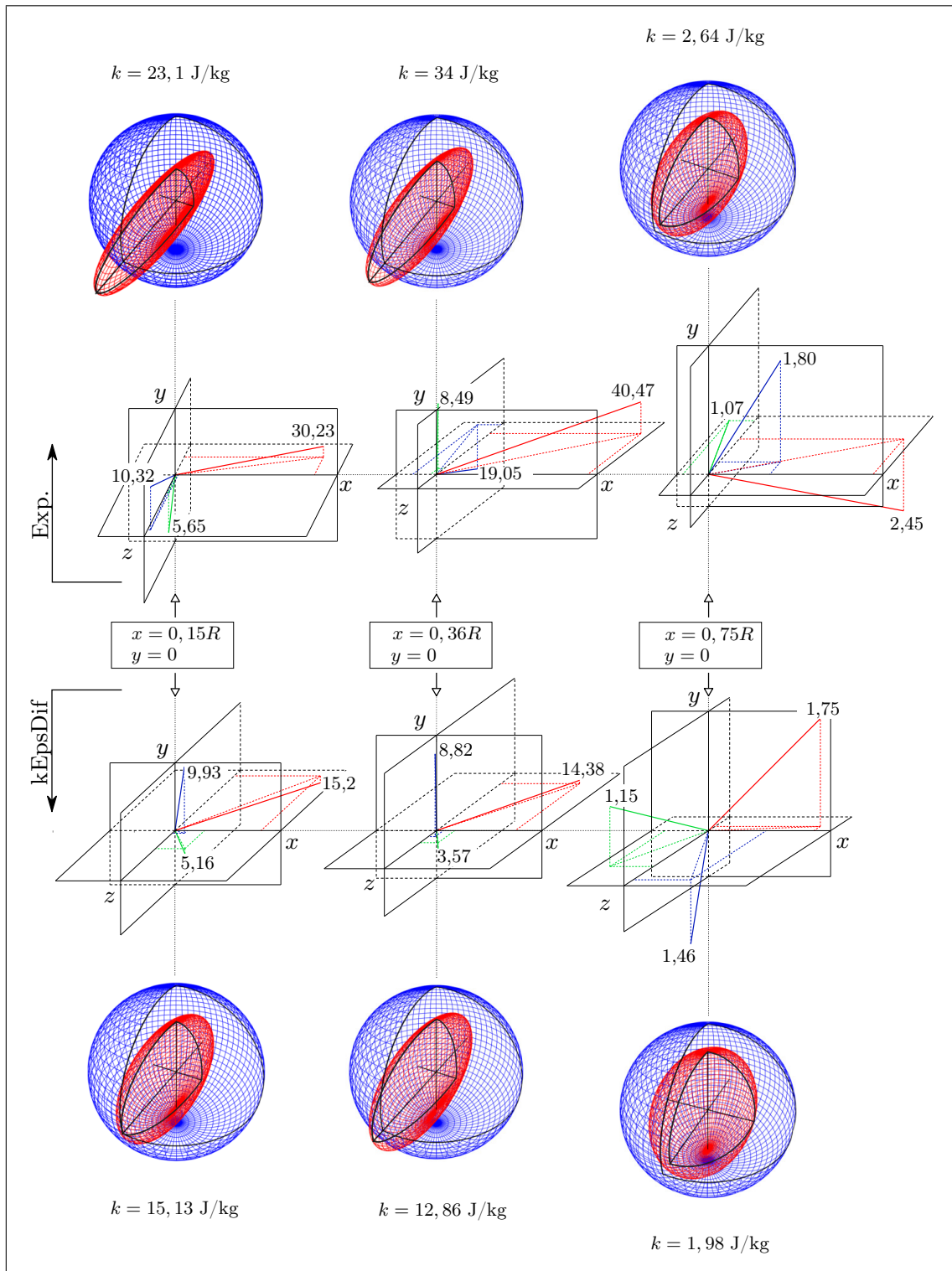
Применом овог поступка су добијени дијаграми положаја главних турбулентних напона у струјном пољу Чантраковог дифузора, који су приказани на Сл.5.33 - 5.37. При читавању нумеричких вредности напона изабрано је да оса x има радијални працац, оса y обимски працац, а оса z аксијални працац. У складу са овим начином постављања координатног система, закључује се да осе поларно-цилиндричног и Декартовог координатног система поклапају. Како се ово струјање може сматрати осносиметричним струјањем, то вредности турбулентних напона очитане оваквим приступом важе за поларно цилиндричне координате целог струјног домена. Као што се из дијаграма на приложеним сликама може видети, положаји главних турбулентних напона имају изразито нестабилан положај у струјном пољу, што додатно отежава процес моделирања овог струјања. Поред нестабилности положаја главних турбулентних напона ови напони имају и нестабилан интензитет, односно имају променљиву анизотропност у струјном пољу, која се може проценити применом Ламлијевог троугла или барицентричне мапе. Међутим, у овој дисертацији је за приказ анизотропности напона примењен другачији поступак.

У циљу боље визуелизације структуре изотропног и анизотропног дела турбулентног напона примењен је изванстан вид изометријског приказа елипсоида ових напона пресликавањем елипсоида у раван цртежа. У ту сврху аутору овог рада је био од користи код написан у програмском језику Јава и који се односи на тродимензионални графички приказ услова рефракције светлости у микроскопу. Наведени код је преузет са веб сајта произвођача микроскопа Olympus. Одређеним програмерским захватима извршен је низ модификација изворног Јава кода које су омогућиле да се добије леп тродимензионални графички приказ степена анизотропности и структуре поља турбулентног напона у изабраним тачкама струјног поља. Графички прикази степена анизотропности и структуре поља турбулентног напона при вихорном струјању у Чантраковом дифузору су приказани на Сл. 5.33 - 5.37. Овде треба истаћи да су величине полуоса елипсоида и величине полупречника сфере нацртани у одговарајућој размери, тако да свака од ових слика даје реалан приказ степена анизотропности и структуре поља турбулентног напона у изабраним тачкама струјног поља. Изложени вид изометријског приказа структуре турбулентног напона је сложенији од примене Ламлијевог троугла или барицентричне мапе, али се зато

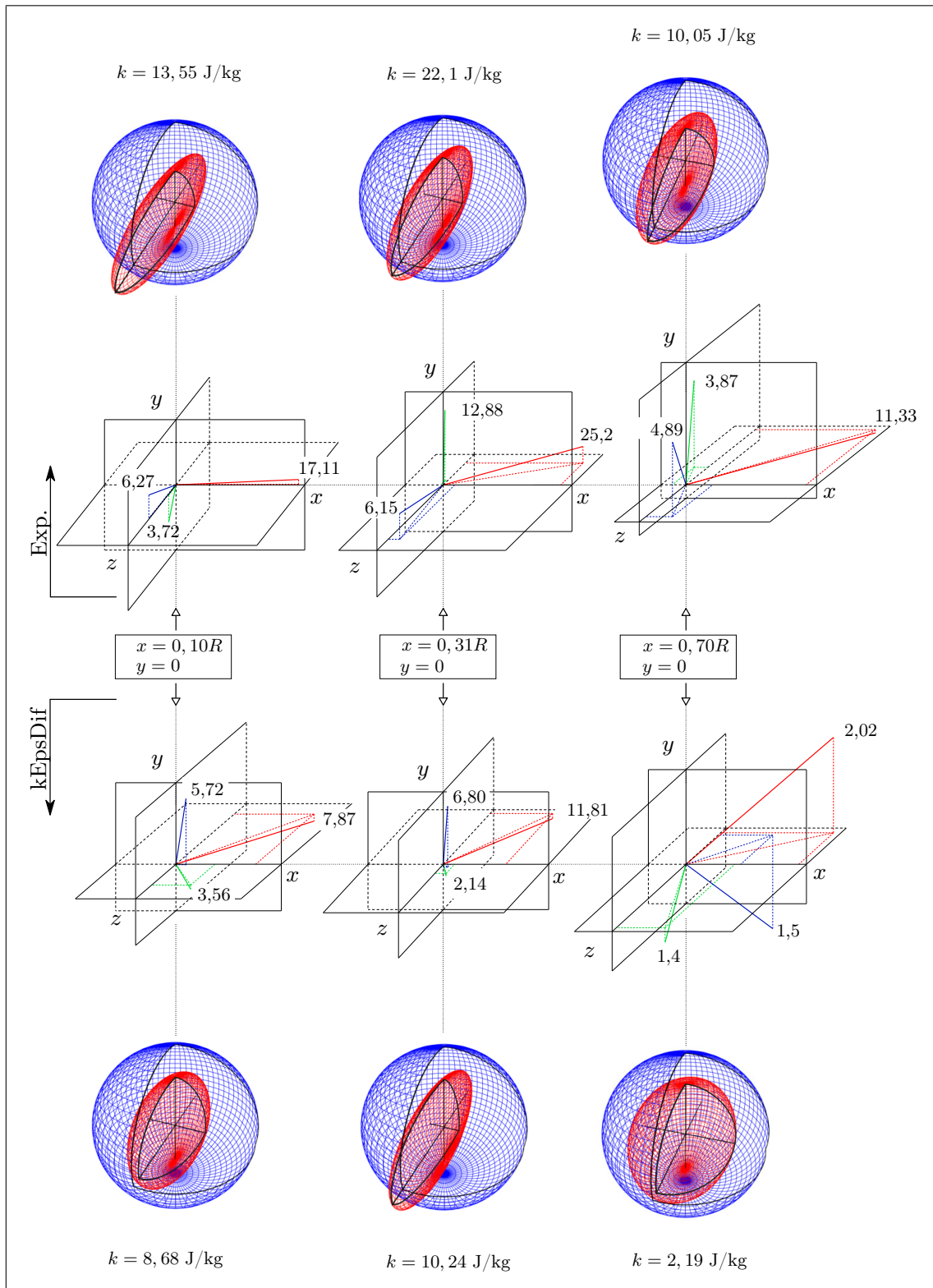
поред графичког приказа степена анизотропности добија увид у геометријски положај главних турбулентних напона у струјном пољу. Како изложени поступак приказа структуре поља турбулентног напона захтеван у смислу обраде и приказа резултата, то је у овом раду применом наведеног поступка урађена анализа напона само за струјање у Чантраковом дифузору при слабијем вихору. Елипсоиди који су приказани на Сл. 5.33 - 5.37 су дефинисани пољем турбулентног напона у датој тачки струјног поља, сфере су дефинисане пољем изотропног дела турбулентног напона, док је област између сфере и елипсоида дефинисана анизотропним делом тензорског поља турбулентног напона. Оваквим приказом се јасно може уочити какав је однос изотропног и анизотропног дела тензора турбулентног напона. На основу Сл.5.33 - 5.37 се може уочити да је однос изотропног и анизотропног дела турбулентног напона при овом струјању изразито неповољан, тј. да ово струјно поље карактерише велики степен анизотропности турбулентног напона. Због овакве структуре турбулентног напона, линеарни модели тубуленције дају слабу тачност при нумеричком прорачуну овог струјања. Из дијаграма се може приметити да се нумеричким прорачуном струјања може прилично добро предвидети степен анизотропности турбулентног напона, али се лоше предвиђају вредности интензитета главних турбулентних напона и њихов положај у струјном пољу.



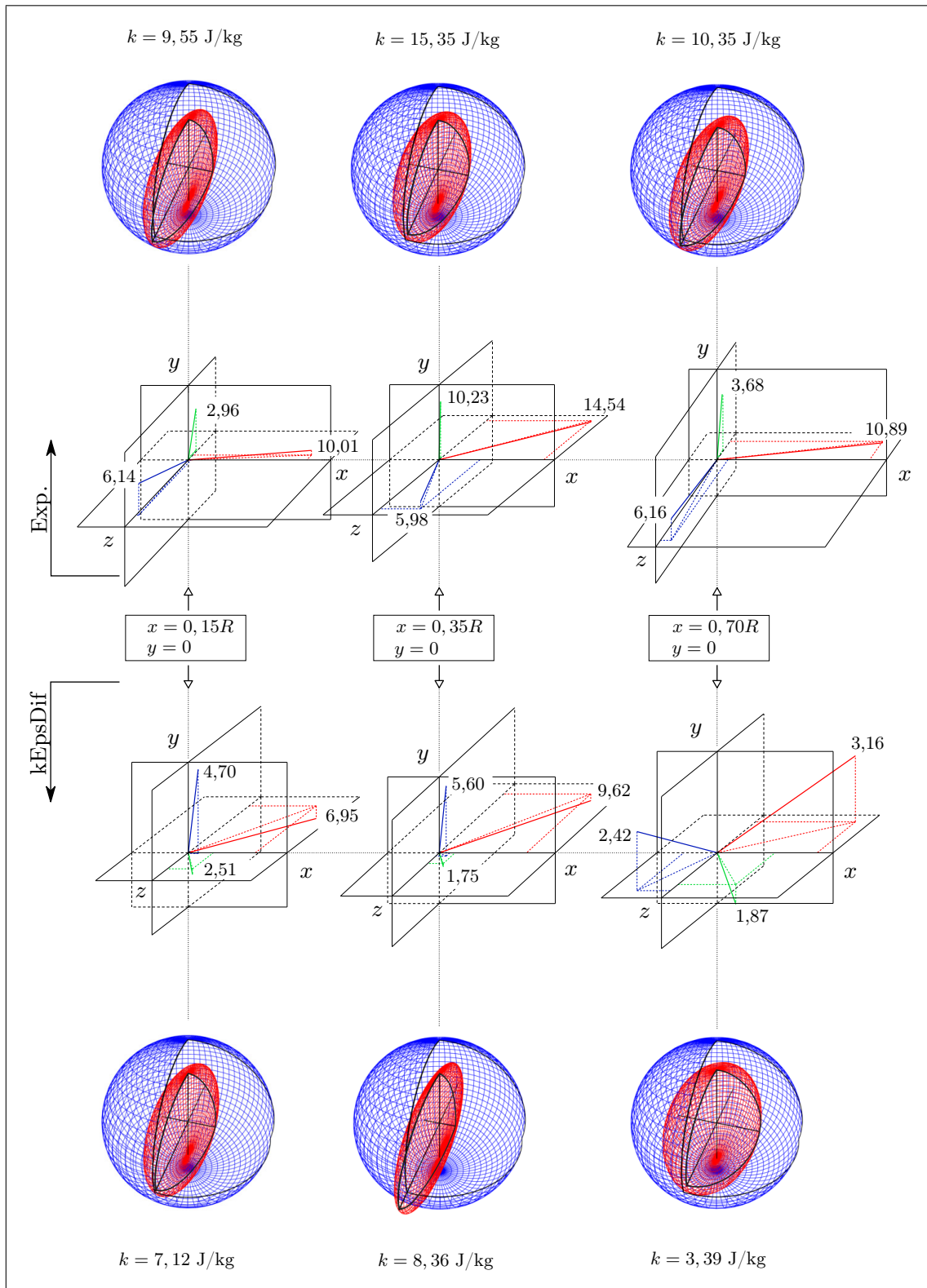
Слика 5.33: Елипсоиди турбулентних напона - ($z = 0, \alpha_{s1} = 15^\circ$).



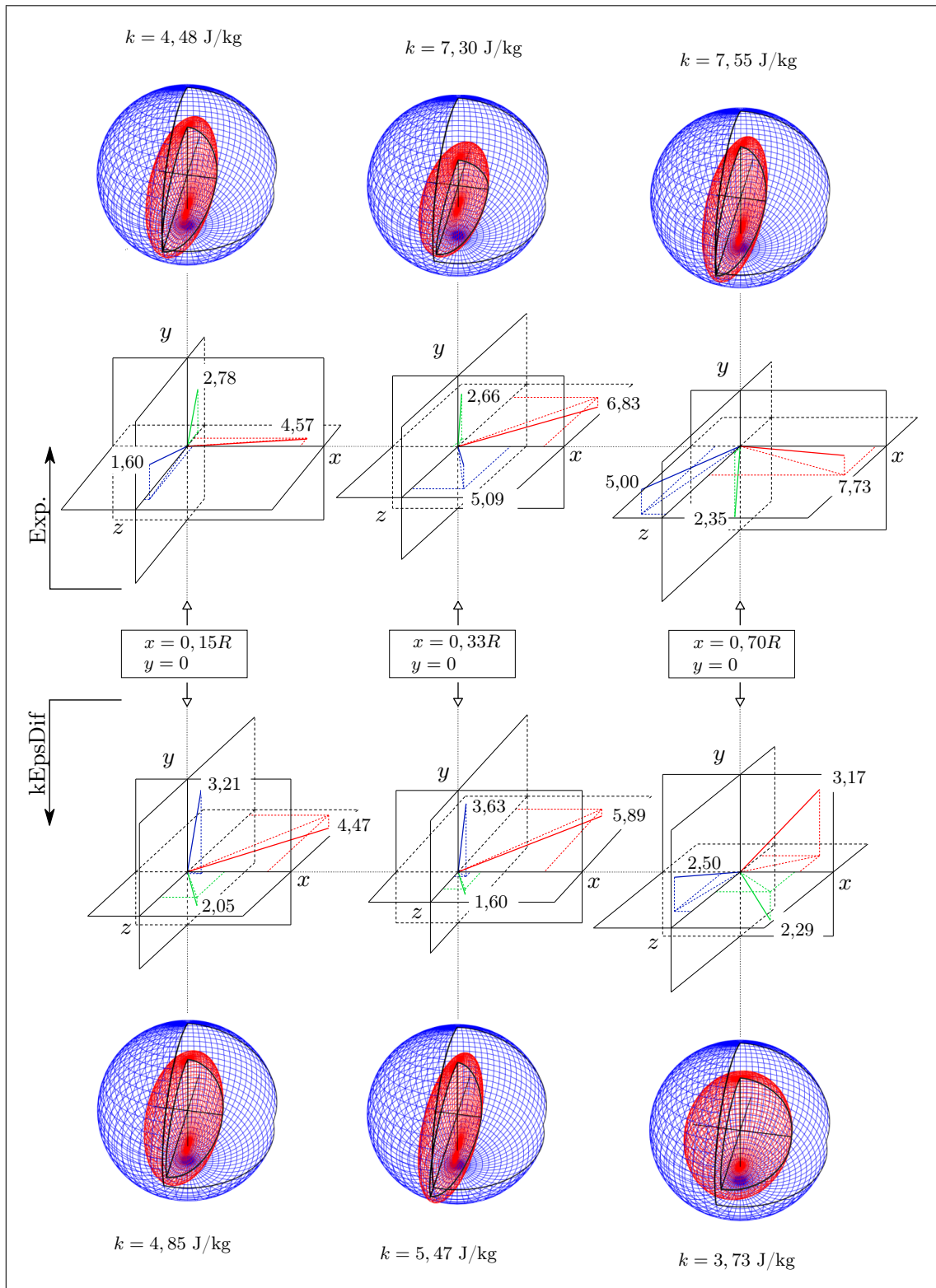
Слика 5.34: Елипсоиди турбулентних напона - ($z = 1,85R, \alpha_{s1} = 15^\circ$).



Слика 5.35: Елипсоиди турбулентних напона - ($z = 3,85R$, $\alpha_{s1} = 15^\circ$).



Слика 5.36: Елипсоиди турбулентних напона - ($z = 5,85R$, $\alpha_{s1} = 15^\circ$).

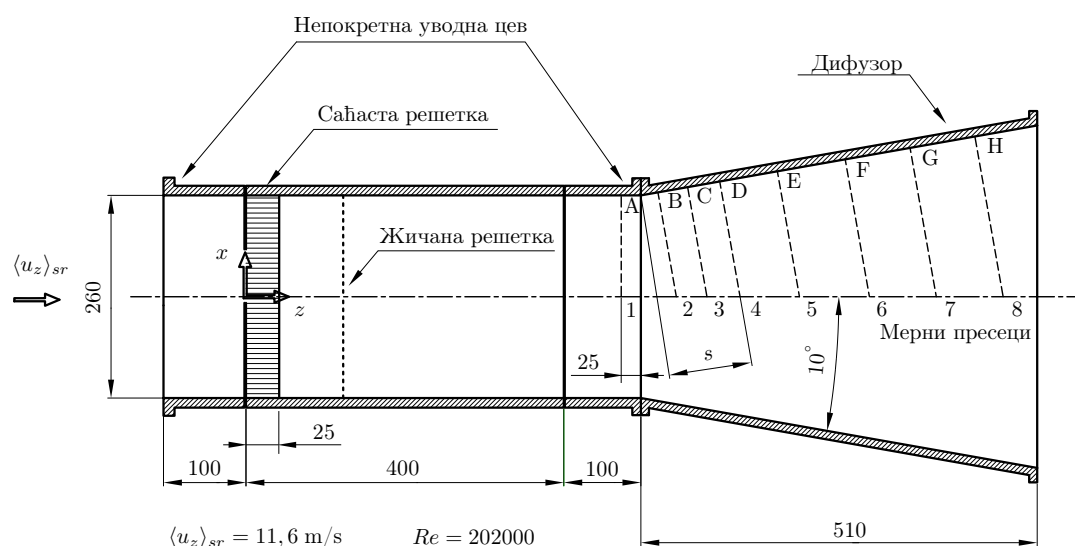


Слика 5.37: Елипсоиди турбулентних напона - ($z = 8,90R$, $\alpha_{s1} = 15^\circ$).

5.3 Тестирање модела $k - \varepsilon$ diffuser на Клаусеновом дифузору

5.3.1 Опис тестног примера

Овај дифузор је део ERCOFTAC базе тестних примера и формиран је на основу експерименталног истраживања који су извели Clausen et al. [39]. Експериментално истраживање је извршено применом инсталације која се састоји од уводне цеви и правог конусног дифузора, као што је то приказано на Сл.5.38. Уводна цев се састоји од непокретног дела и од покретног дела у који су уграђене алуминијумска саћаста решетка и жичана решетка. Ове решетке су чврсто спојене са покретним делом ротирајуће цеви. Суперпонирањем аксијалног струјања и утицаја ротације ових решетки, низструјно у уводној цеви дифузора се формира принудно вихорно струјање. При томе је расподела обимске брзине у радијалном правцу приближно једнака расподели обимске брзине која се добија при ротацији чврстог тела (енгл. *solid body rotation*). Дакле, у овом тестном примеру се физичке карактеристике вихора значајно разликују у односу на физичке карактеристике принудно-потенцијалног вихора, који је у свом истраживању применио Џантрак [2]. Поред тога геометрије ова два дифузора се разликују, што је значајно у смислу тестирања развијеног модела $k - \varepsilon$ diffuser на дифузору различите геометрије, јер турбуленти напони у овом моделу зависе од бездимензијских геометријских параметара дифузора.



Слика 5.38: Геометрија Клаусеновог дифузора [39].

Клаусен је применом сонде са загрејаним вланима извршио мерења профила

брзина и турбулентних напона у седам мерних пресека у дифузору и у једном мерном пресеку у уводној цеви. При томе су турбулентни напони мерени само у зони граничног слоја, док су компоненте вектора просечне брзине измерене по целом мерном пресеку. Турбулентни напони су овде мерени само у граничном слоју из разлога што је овде фокус експерименталног истраживања био утицај вихора на спречавање појаве одвајања граничног слоја. Геометријски параметри мерних пресека овог дифузора су дати у табели Т.7.

Табела Т.7: Координате мерних линија.

[mm]	A	B	C	D	E	F	G	H
<i>s</i>	-25	25	60	100	175	250	330	405
<i>x</i>	130	134,3	140,4	147	160,3	173,4	187,3	200,3
<i>z</i>	475	524,6	559,1	598,5	672,3	746,2	825	898,8
[mm]	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>s</i>	-25	25	60	100	175	250	330	405
<i>x</i>	0	0	0	0	0	0	0	0
<i>z</i>	475	548,3	583,8	624,5	700,6	776,8	858	934,2

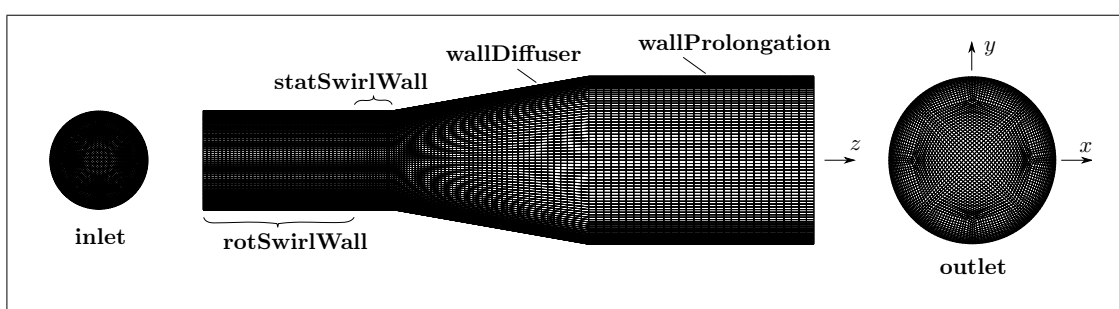
Због великог угла ширења, у овом дифузору при безвихорном струјању настаје одвајање граничног слоја [39]. Појава одвајања граничног слоја је овде спречена применом принудног вихорног струјања. Овакав тип вихорног струјања је са становишта спречавања одвајања граничног слоја повољнији од вихорног струјања принудно-потенцијалног типа. Обимска брзина принудно-потенцијалног вихора опада у потенцијалној зони вихора, што доводи до смањења центрифугалних запремиских сила у зони граничног слоја. Обимска брзина принудног вихора линеарно расте од осе ка зиду цеви, при чему у зони граничног слоја достиже максималну вредност. Због повољније расподеле обимске брзине, при принудном вихорном струјању се остварују веће центрифугалне запреминске силе које делују на флуид у граничном слоју, што значајно доприноси спречавању одвајања граничног слоја.

Услед разлике у расподели угаоне брзине принудног вихора у односу на принудно-потенцијални вихор, настаје значајна разлика у расподели коефицијента турбулентне вискозности у ова два типа вихора. Стога се не може очекивати да ће при принудном вихорном струјању имплементирани модели `kEpsHam` и `kEpsDif` остварити једнако добре резултате као при принудно-потенцијалном вихорном струјању.

5.3.2 Тестирање и избор мреже

На основу геометрије дифузора приказане на претходној Сл.5.38, формиран је прорачунски домен који се састоји од уводне цеви дужине 500 mm, од дифузора и од одводне цеви дужине 590 mm. Одводна цев је додата како би се избегли проблеми са постављањем граничних услова на излазном пресеку дифузора. У формираном прорачунском домену су генерисане три блок структуриране мреже чији су бројеви ћелија приказани у табели Т.8. Поступак рефинирања мреже је извршен на исти начин као код Чантраковог дифузора, при чему су формиране три блок структуриране мреже означене са М1, М2 и М3. Бројеви ћелија ових мрежа су дати у табели Т.8.

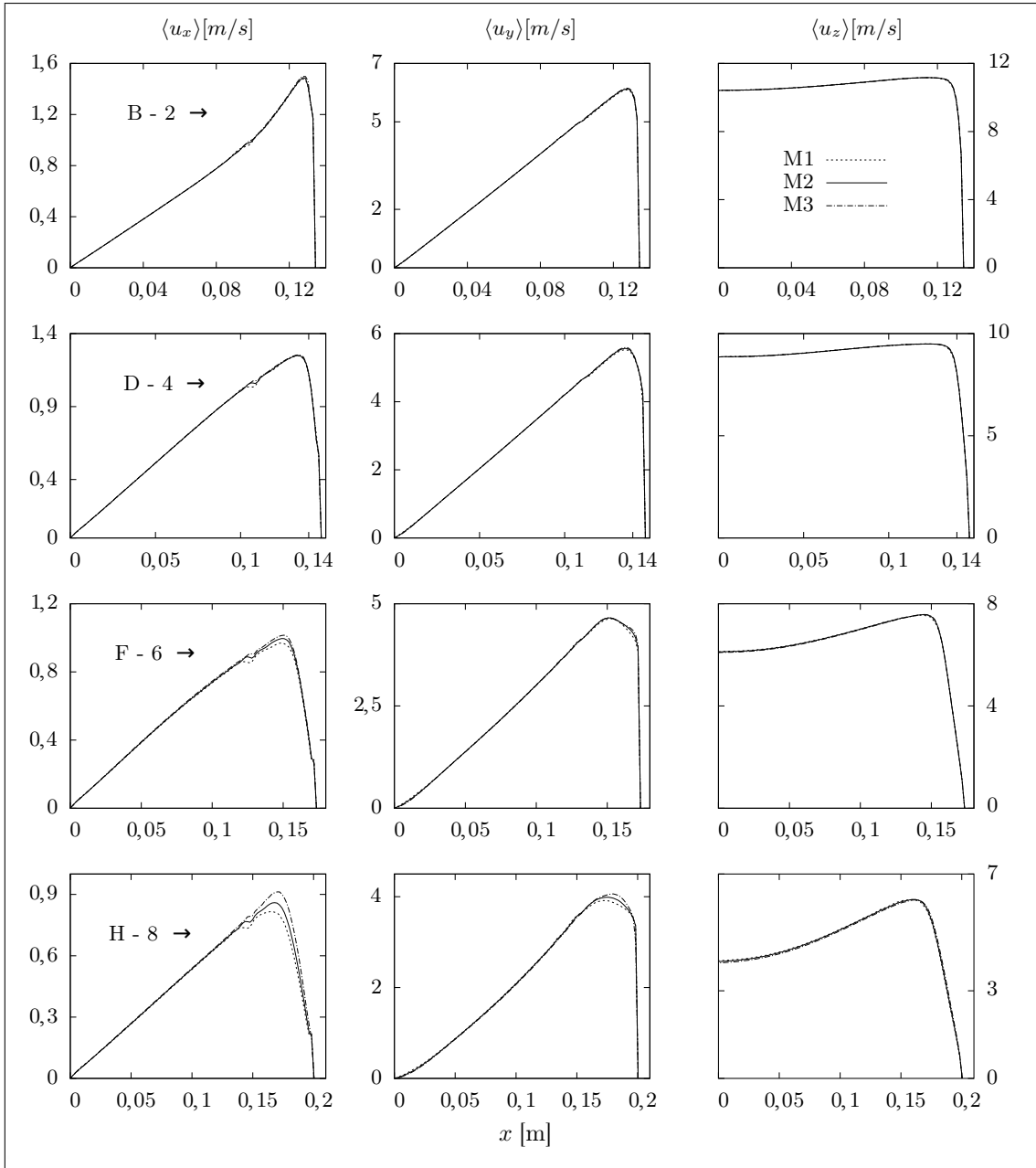
Табела Т.8: Мрежа и гранични услови Клаусеновог дифузора.



Радни флуид: Ваздух		$\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$	$\rho = 1,177 \text{ kg}/\text{m}^3$	Re = 202000
-	U	p	k	ε
inlet	fixedValue; nonuniform List<vector>	zeroGradient;	fixedValue; uniform 2;	fixedValue; uniform 36;
outlet	zeroGradient;	fixedValue; uniform 0;	zeroGradient;	zeroGradient;
wallProlongat.	fixedValue; uniform (0 0 0);	zeroGradient;	kqRWallFunction;	epsilonWallFunction;
wallDiffuser	fixedValue; uniform (0 0 0);	zeroGradient;	kqRWallFunction;	epsilonWallFunction;
statSwirlWall	fixedValue; uniform (0 0 0);	zeroGradient;	kqRWallFunction;	epsilonWallFunction;
rotSwirlWall	fixedValue; nonuniform List<vector>	zeroGradient;	kqRWallFunction;	epsilonWallFunction;
Тип мреже 1: Структурирана		Број ћелија: 149292		Ознака:М1
Тип мреже 2: Структурирана		Број ћелија: 491520		Ознака:М2
Тип мреже 3: Структурирана		Број ћелија: 1459200		Ознака:М3

У табели Т.8 су дати и гранични услови који су коришћени при прорачуну. Неуниформне листе вектора брзине у домену ротирајуће цеви су формиране

применом команде "addSwirlAndRotation". Помоћу ове команде се на домену ротирајуће цеви формира векторско поље брзине које је еквивалентно векторском пољу брзине при ротацији чврстог ваљка који око своје осе ротира угаоном брзином $\omega = 52,65 [s^{-1}]$. Тестирање мреже је извршено применом модела $k - \epsilon$ diffuser упоређивањем профила компоненти вектора просечне брзине у сваком другом мерном пресеку, као што је то приказано Сл.5.39.



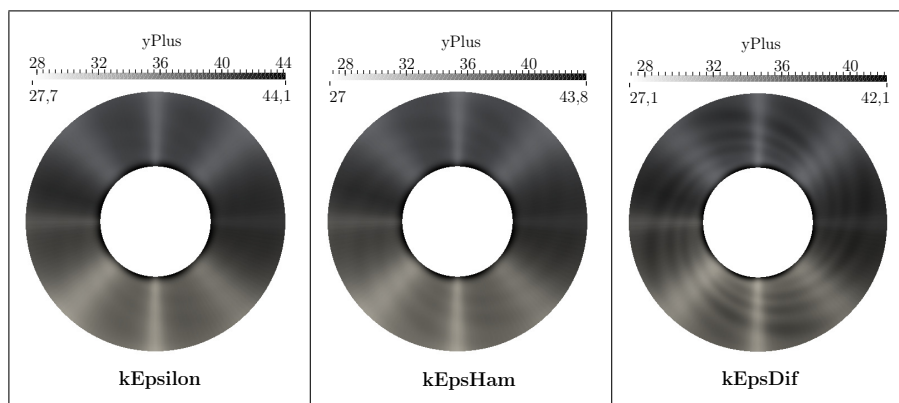
Слика 5.39: Тестирање мреже применом имплементираног модела $kEpsDif$.

На основу профила компоненти вектора брзине који су дати на Сл.5.39 уочава

се да разлика између добијених профила брзине није значајна. Због тога, као и због рационалног коришћења рачунарских ресурса, за даљње порорачуне је изабрана мрежа M2.

5.3.3 Контрола бездимензијске координате y^+

У овом дифузору су извршени прорачуни применом стандардног $k - \varepsilon$ модела и применом имплементираних модела `kEpsHam` и `kEpsDif`. При томе је за сваки од примењених модела турбуленције бездимензијска координата y^+ на зиду струјног домена била у прописаним границама. Расподеле бездимензијске координате y^+ на зиду дифузора добијене примењеним моделима турбуленције су приказане на Сл. 5.40.



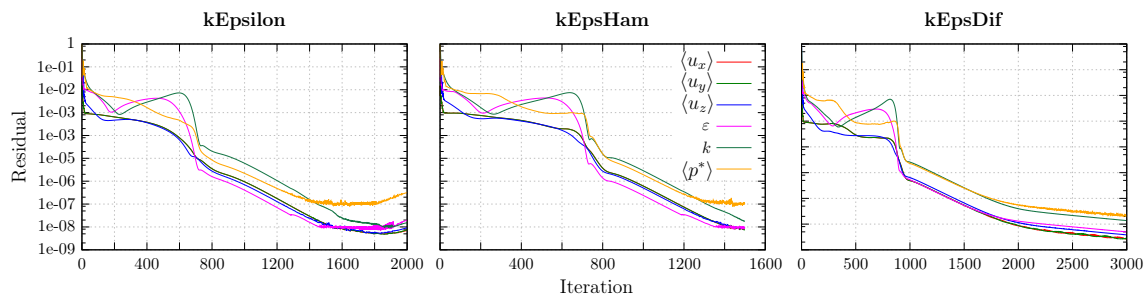
Слика 5.40: Бездимензијска координата y^+ на зиду Клаусеновог дифузора.

Из ове слике се може видети да је дебљина првог слоја мреже добро одређена и да се промена бездимензијске координате y^+ за сваки од примењених модела турбуленције налази у препорученим границама. Поред тога, из Сл.5.40 се може уочити и да имплементирани модели турбуленције `kEpsHam` и `kEpsDif` адекватније описују утицај вихорног струјања на бездимензијску координату y^+ од постојећег стандардног $k - \varepsilon$ модела турбуленције.

5.3.4 Резултати прорачуна поља брзине

Нумерички прорачуни струјања у овом дифузору су, као и у свим претходним случајевима, извршени под претпоставком да је струјање стационарно. Сходно томе, за прорачуне је примењен `simpleFoam` солвер. Прорачуни су и овом случају извршени на радној станици HP-Z6-G4 применом паралелног процесирања на 16 процесорских језгара. Параметри солвера и шеме

дискретизације су подешени на исти начин као при прорачунима струјања у Стинбергеновој цеви. Сви прорачуни су стабилно конвергирали, при чему је постигнут захтевани ниво тачности нумерички прорачунатих струјних варијабли. Време трајања сваког прорачуна износило је приближно 20 минута. Дијаграми конвергенције решења добијени применом различитих модела турбуленције приказани су на Сл.5.41.



Слика 5.41: Конвергенција решења у Клаусеновом дифузору.

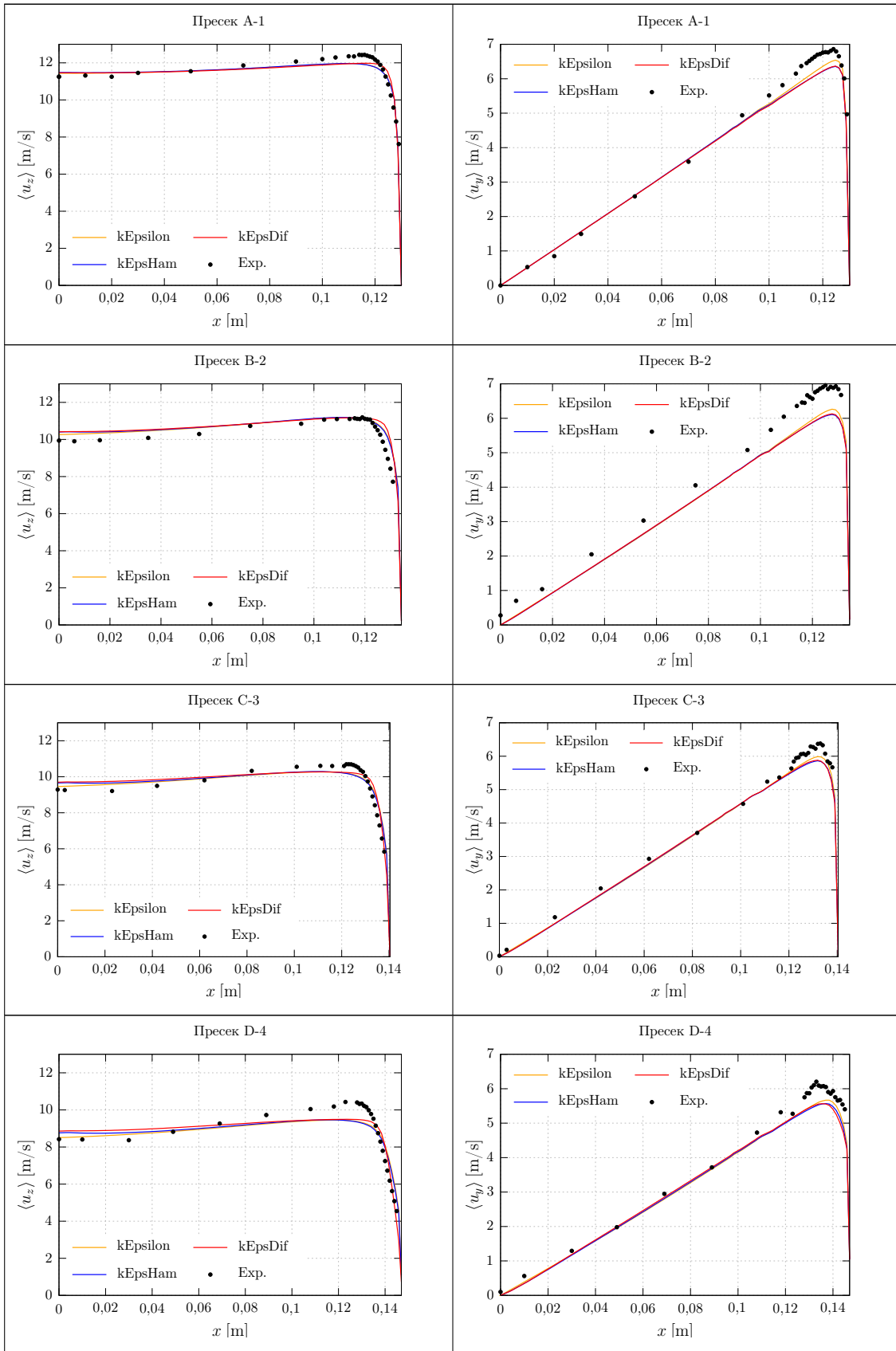
Пре почетка нумеричког прорачуна применом модела kEpsDif у библиотеци RASProperties су унети геометријски параметри овог дифузора како је то описано у параграфу 4.5. Применом $k - \varepsilon$ diffuser модела у овом дифузору је добијен испис карактеристичних величина $k - \varepsilon$ diffuser модела који је приказан у следећем листнигу

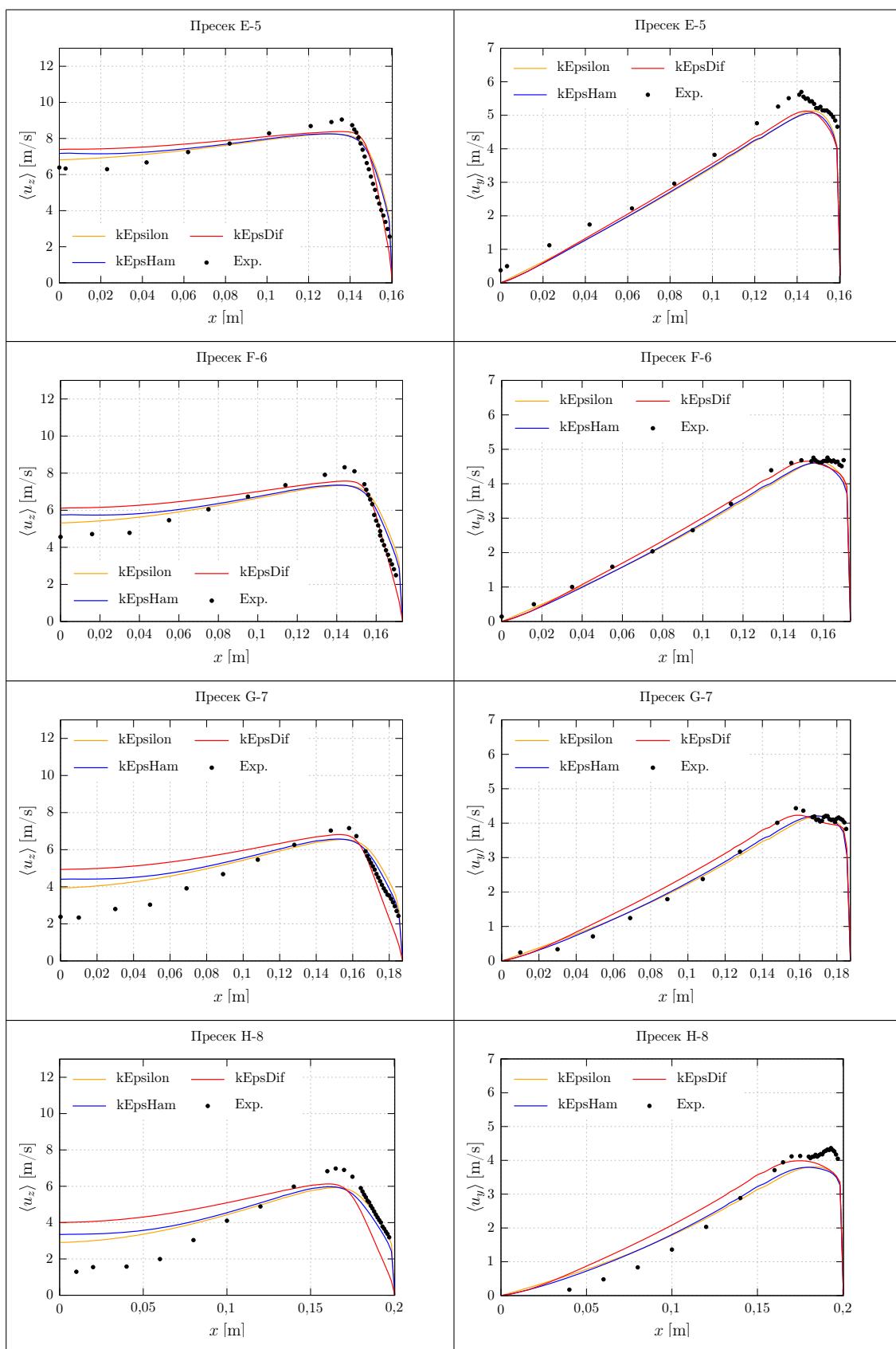
```

1 You are using kEpsDif model :
2
3 1 [0 0 0 0 0 0 0] 0.5
4 L [0 0 0 0 0 0 0] 0.51
5 Ctau [0 0 0 0 0 0 0] 0.182
6 InFlowRate = 0.615718722343 m^3/s
7 InEnFluxZdir = 82.8513870239 m^5/s^3
8 InEnFluxPhiDir = 14.4114284515 m^5/s^3
9 SwS = 0.173999994993

```

Из приложеног листинга се може видети да се јачина вихора у Клаусеновом дифузору налази између две вредности јачине вихора које је у свом дифузору применио Šantrak [2]. Нумеричким прорачунима су добијене расподеле аксијалне и обимске компоненте вектора брзине које су приказане на Сл.5.42. Из дијаграма приложених на овој слици се може видети да је генерално добијено добро слагање нумеричких и експерименталних резултата. Лошији резултати су добијени низструјно у мерним пресецима друге половине струјног домена овог дифузора. При томе је модел $k - \varepsilon$ diffuser дао нешто слабије резултате од остала два модела, јер је овај модел калибрисан на вихорном струјању са принудно-потенцијалним вихором, које се физички значајно разликује од вихорног струјања у овом дифузору.





Слика 5.42: Расподела аксијалне и обимске брзине дуж мерних линија.

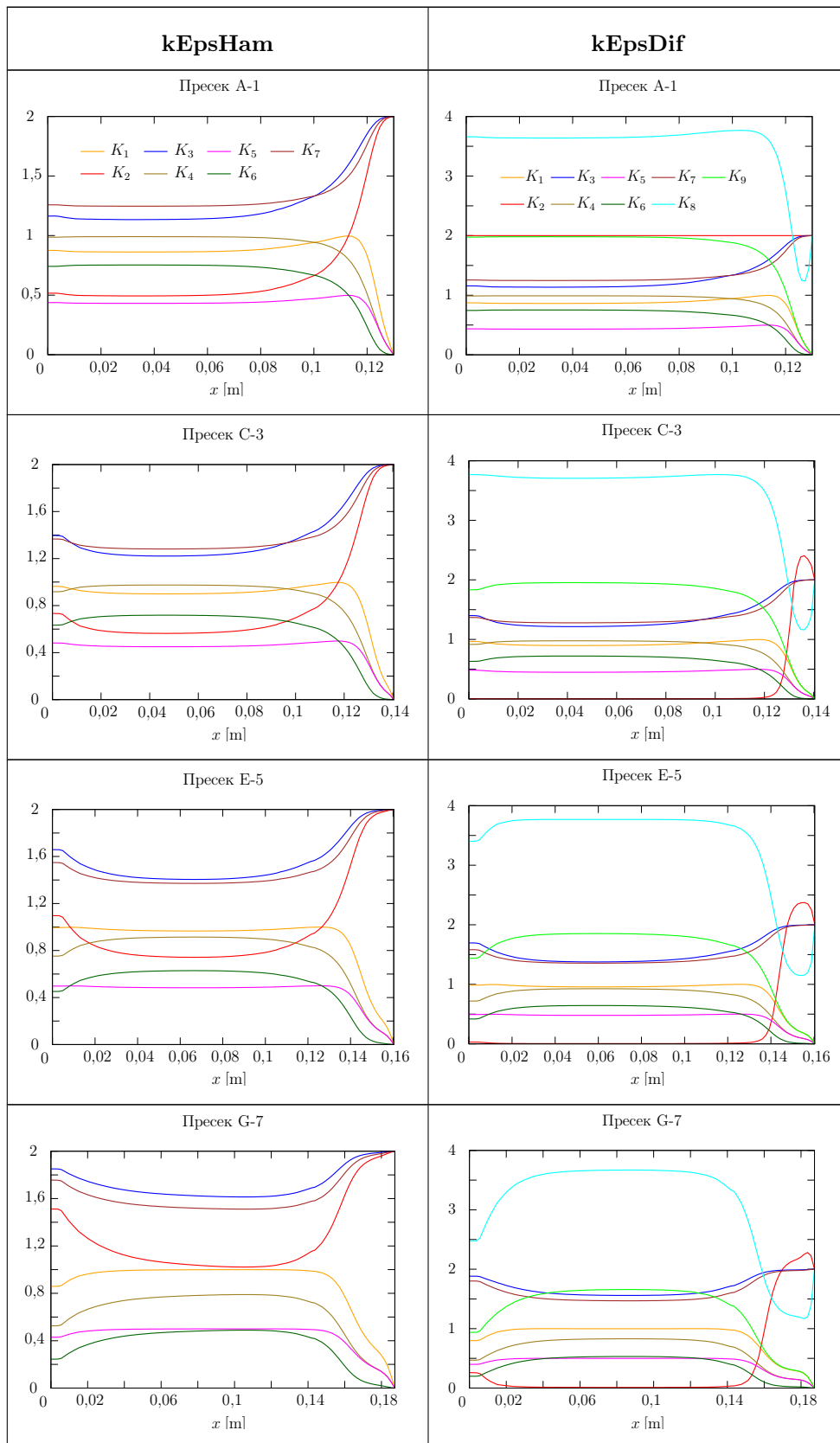
5.3.5 Расподела коефицијената турбулентне вискозности

Расподела коефицијената турбулентне вискозности у Клаусеновом дифузору која је добијена нумеричким прорачунима је приказана на Сл.5.43. Посматрањем дијаграма датих у овој табели се може уочити да се због физичке природе вихора расподеле коефицијената турбулентне вискозности у зони осе овог дифузора разликују у односу на расподеле добијене код Чантраковог дифузора. Ово је последица утицаја различите расподеле угаоне брзине вихора и Хамбиног временског размера у ова два случаја струјања.

Поред тога, и у овом случају струјања је присутна значајна разлика између коефицијената K_2 и K_8 у моделу $k - \varepsilon$ diffuser, што је слично као код примене овог модела на струјање у Чантраковом дифузору. Применом модела $k - \varepsilon$ diffuser на вихорно струјање у Клаусеновом дифузору се добијају веће вредности аксијалне брзине у зони око осе вихора у односу на остала два модела, што је слично ефектима који су постигнути на Чантраковом дифузору. Међутим, као што се из дијаграма приказаних на Сл.5.43 може видети ова појава је у овом случају струјања неповољна.

Слично стање је и са обимском брзином, јер се из дијаграма расподеле обимске брзине на Сл.5.43 може видети да су применом модела $k - \varepsilon$ diffuser и овде добијене нешто веће вредности обимске брзине у централној зони дифузора, слично као код Чантраковог дифузора. Овај ефекат је у овом случају струјања такође неповољан. На основу тога може да се закључи да модел $k - \varepsilon$ diffuser даје мало слабије резултате при прорачуну вихорног струјања у Клаусеновом дифузору, јер је калибрисан на другачијем типу вихорног струјања. Ипак и поред тога овај модел стабилно конвергира на овом случају струјања, иако су му неки од коефицијената зависни од геометрије дифузора.

Превасходни циљ тестирања модела $k - \varepsilon$ diffuser на овом дифузору је био провера стабилности рада модела на дифузору чија се геометрија разликује од геометрије Чантраковог дифузора на којој је овај модел и развијен.

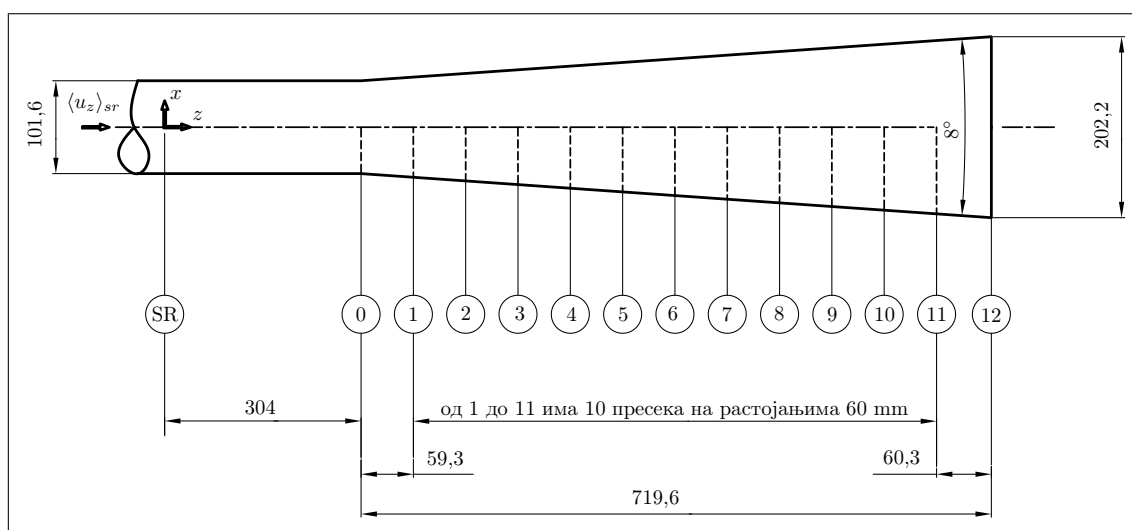


Слика 5.43: Распредела коефицијената K_i дуж мерних линија.

5.4 Тестирање модела $k - \varepsilon$ diffuser на Азадовом дифузору

5.4.1 Опис тестног примера

Овај тестни пример је настао на основу експерименталних истраживања безвихорног струјања у правом конусном дифузору која је урадио Okwoubi [27]. Геометрија дифузора у коме је истраживано струјање приказана је на Сл.5.44.



Слика 5.44: Геометрија и мерни пресеци Азадовог дифузора [27].

Мерења брзине струјања у овом дифузору су извршена применом сонде са загрејаним влакнима у десет мерних пресека низструјно почев од пресека 1, како је то приказано на Сл.5.44. Гранични услови за брзину су измерени у мерном пресеку SR који се налази у уводној цеви. Овај дифузор има мали угао ширења, што спречава појаву одвајања граничног слоја. Тестирање развијеног модела $k - \varepsilon$ diffuser на овом дифузору је извршено са циљем да се провери да ли овај модел при безвихорном струјању даје исте резултате као стандардни $k - \varepsilon$ модел, што је био један од циљева при формирању овог модела. Поред тога, геометрија овог дифузора се значајно разликује од геометрије Чантраковог дифузора на коме је развијен модел $k - \varepsilon$ diffuser. Стога се тестирањем модела $k - \varepsilon$ diffuser на овом дифузору може проверити и стабилност рада овог модела на дифузору различите геометрије. У условима безвихорног струјања, у којем је $\Omega_{sw} = 0$, из једначина за Хамбине коефицијенте (4.27) следи:

$$K_1 = 0; K_3 = 2; K_4 = 0; K_5 = 0; K_6 = 0; K_7 = 2, \quad (5.23)$$

док су коефицијенти K_2 , K_8 и K_9 дати следећим изразима

$$K_2 = \frac{2}{[1 + 16A(\Omega_{sw}\tau_H)^2]\{1 + 8B(\Omega_{sw}\tau_H)[(\Omega_{sw}\tau_H) - 0,4(SwS)^{1/4}]\}}, \quad (5.24)$$

$$K_8 = \frac{2 + \{16,74 + [10(SwS)]^{1,21}\}(\Omega_{sw}\tau_H)^2}{1 + 30(\Omega_{sw}\tau_H) + 70(\Omega_{sw}\tau_H)^3}, \quad (5.25)$$

$$K_9 = \frac{4(\Omega_{sw}\tau_H)}{[1 + (\Omega_{sw}\tau_H)^2]}. \quad (5.26)$$

Коефицијенти А и В су коефицијенти зависни од бездимензијских геометријских параметара дифузора и представљају изванстан вид емпиријског утицаја ширења дифузора на турбулентне напоне. Математичке зависности ових коефицијената су прилично сложене и дефинисане су у коду `kEpsDif.C` модела $k - \varepsilon$ diffuser (видети прилог П.IV). Из једначина (5.24) - (5.26) се може видети да је при безвихорном струјању

$$K_2 = 2; K_8 = 2; K_9 = 0. \quad (5.27)$$

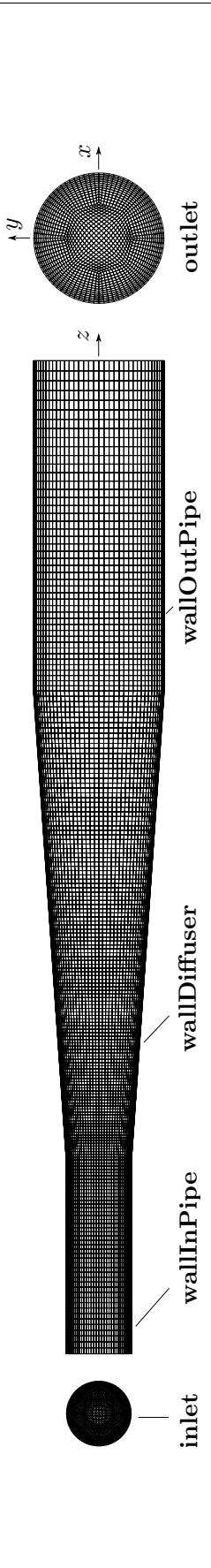
На основу вредности коефицијената датих изразима (5.23) - (5.27) се закључује да се при безвихорном струјању изрази (5.18) за напоне модела $k - \varepsilon$ diffuser сведе на једначине напона стандардног $k - \varepsilon$ модела у поларно-цилиндричним координатама (5.3). Сходно томе, прорачун безвихорног струјања применом модела $k - \varepsilon$ diffuser мора дати исте резултате као и стандардни $k - \varepsilon$ модел. Прорачун струјања у Азадовом дифузору је урађен применом стандардног $k - \varepsilon$ модела и модела $k - \varepsilon$ diffuser, како би се упоредили добијени резултати и на тај начин извршила још једна валидација поступка имплементације модела $k - \varepsilon$ diffuser у софтвер OpenFOAM. Уочава се да су коефицијенти K_2 и K_8 између осталог и непрекидне функције јачине вихора SwS , што значи да модел $k - \varepsilon$ diffuser покрива струјања у правим конусним дифузорима са јачином вихора у домену вредности вихора из тестних примера који су коришћени у овој дисертацији. Ове вредности јачина вихора су дате у табели Т.9.

Табела Т.9: Јачине вихора коришћених тестних примера.

-	Азад	Чантрак $\alpha_{s1} = 15^\circ$	Клаусен	Чантрак $\alpha_{s1} = 45^\circ$
SwS	0	0,121	0,174	0,393

На основу ове табеле може да се закључи да је развијени модел $k - \varepsilon$ diffuser применљив на праве конусне дифузоре са режимима струјања који се крећу од безвихорног струјања до вихорног струјања са јачином вихора $SwS = 0,5$.

Табела Т.10: Мрежа и гранични услови Азадовог дифузора.



Радни флуид: Ваздух	$\nu = 1,53 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$	$\rho = 1,177 \text{ kg/m}^3$	Re = 152000
-	U	k	ε
inlet	fixedValue; nonuniform List<vector>	fixedValue; uniform 2;	fixedValue; uniform 232;
wallInPipe	fixedValue; uniform (0,0,0);	zeroGradient;	epsilonWallFunction;
wallDiffuser	fixedValue; uniform (0,0,0);	zeroGradient;	epsilonWallFunction;
wallOutPipe	fixedValue; uniform (0,0,0);	zeroGradient;	epsilonWallFunction;
outlet	zeroGradient;	fixedValue; uniform 0;	zeroGradient;
Тип мреже 1: Структурирана	Број ћелија: 113680		Ознака: M1
Тип мреже 2: Структурирана	Број ћелија: 319200		Ознака: M2
Тип мреже 3: Структурирана	Број ћелија: 1023000		Ознака: M3

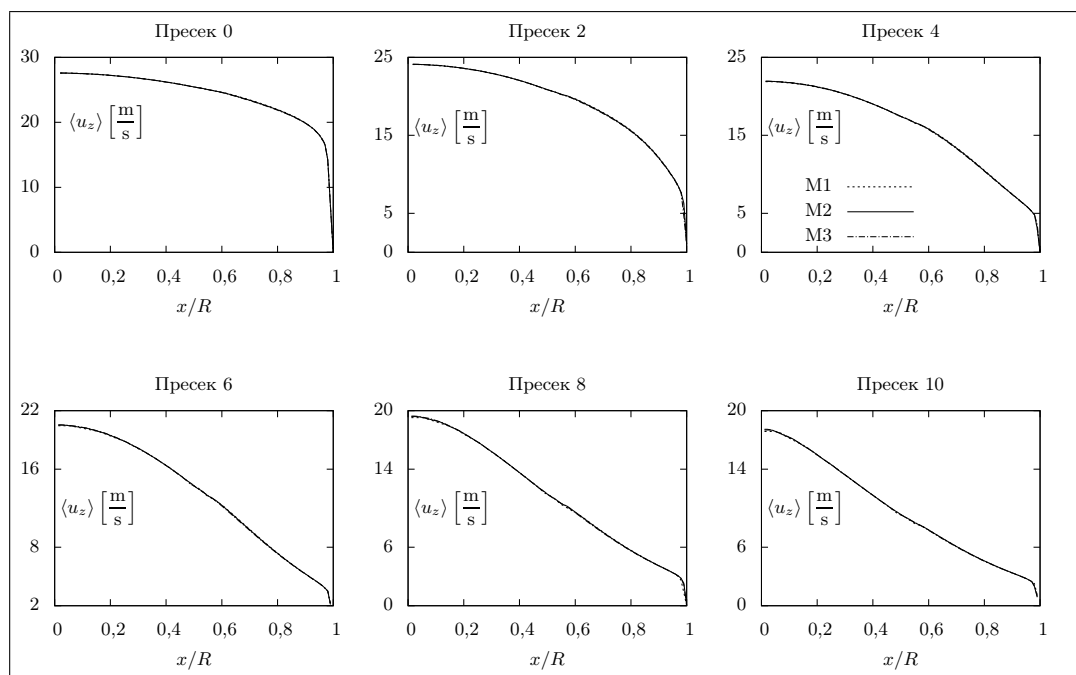
5.4.2 Тестирање и избор мреже

Тестирање мреже је и на овом тестном примеру извршено применом модела $k-\varepsilon$ diffuser, с циљем да се поред провере мреже провери и стабилност рада овог модела на различитим мрежама. Формиране, су три различите мреже означене са М1, М2 и М3 применом поступка који је изложен при формирању мрежа за Чантраков дифузор. Бројеви ћелија ових мрежа су дати у претходној табели Т.10. Нумерички прорачун је извршен при средњој брзини струјања у уводној цеви $\langle u_z \rangle_{sr} = 22,9 \text{ m/s}$, односно при Рејнолдсовом броју $Re = 152000$. Гранични услови за турбулентну кинетичку енергију и дисипацију на улазном пресеку су постављени под претпоставком о изотропној турбуленцији и под претпоставком да је интензитет турбуленције 5%. Тако је добијено да је

$$k = \frac{3}{2}(0,05 \cdot 22,9)^2 \approx 2 \text{ J/kg}, \quad (5.28)$$

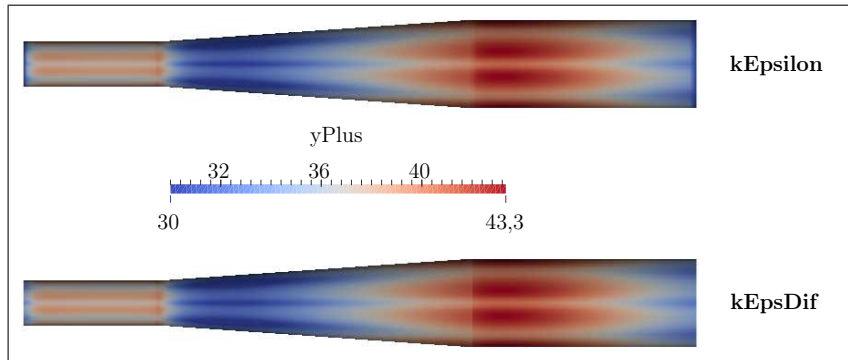
$$\varepsilon = \frac{C_\nu^{0,75} k^{1,5}}{\ell_m} = \frac{0,09^{0,75} 2^{1,5}}{0,02 \cdot 0,1} \approx 232 \text{ J/kg s}, \quad (5.29)$$

при чему је узето да дужински размер турбулентних структура на улазном пресеку цеви износи 2% од пречника уводне цеви, као што је то био случај и у претходним тестним примерима. Тестирање мреже је извршено провером вредности аксијалне компоненте вектора просечне брзине у шест мерних пресека, као што је то приказано на Сл.5.45.



Слика 5.45: Тестирање мреже Азадовог дифузора.

Остале две компоненте брзине нису анализирани, јер су њихове вредности при безвихорном струјању занемарљиве у односу на аксијалну брзину. На основу теста мреже може да се закључи да су добијене занемарљиве разлике у профилима брзине, те је стога за даљње прорачуне струјања у овом дифузору изабрана мрежа М2. При тестирању мреже овог дифузора извршена је и контрола бездимензијске координате y^+ која је приказана на Сл.5.46

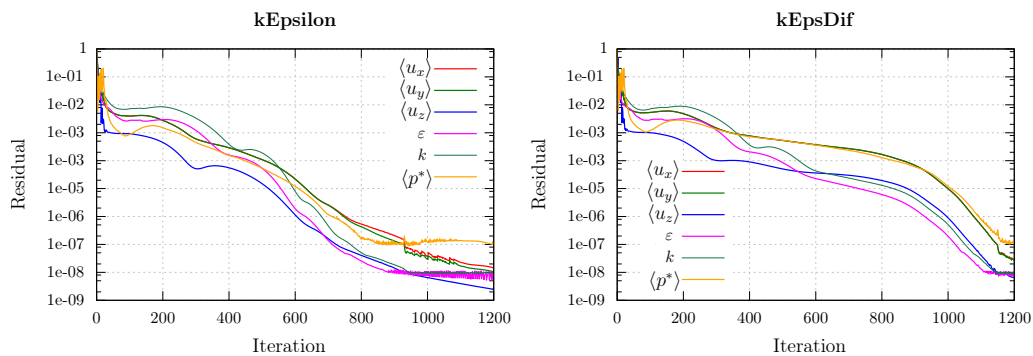


Слика 5.46: Бездимензијска координата y^+ на зиду Азадовог дифузора.

На основу Сл.5.46 закључује се да је дебелина првог слоја мреже добро одређена, јер се вредности бездимензијске координате налазе у прописаним границама.

5.4.3 Резултати прорачуна поља брзине

Нумерички прорачуни струјања су и у овом дифузору изведени применом simpleFOAM солвера, на истој радној станици и са истим подешавањима параметара солвера и шема дискретизације као што је то урађено при прорачуну вихорног струјања у Стинберженовој цеви. Прорачуни су извршени применом стандардног $k - \epsilon$ модела и модела $k - \epsilon$ diffuser, при чему је остварена стабилна конвергенција решења и достигнут је захтевани ниво тачности. Дијаграми конвергенције решења су приказани на Сл.5.47.



Слика 5.47: Конвергенција решења у Азадовом дифузору.

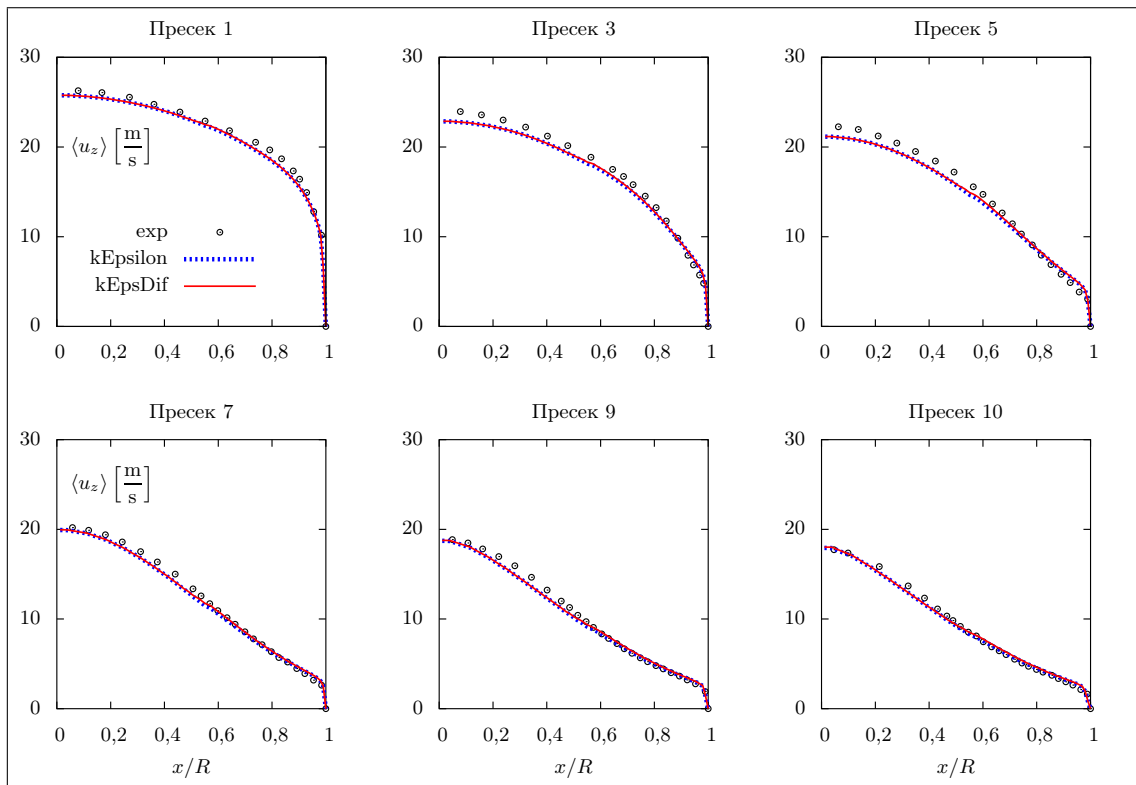
Овде су такође пре почетка прорачуна у библиотеци за измену стандардних коефицијената за модел $k - \varepsilon$ diffuser унети геометријски параметри овог дифузора. При прорачуну применом модела $k - \varepsilon$ diffuser добијен је испис карактеристичних величина који је приказан у следећем листингу

```

1 You are using kEpsDif model :
2
3 1 [0 0 0 0 0 0 0] 0.304
4 L [0 0 0 0 0 0 0] 0.7196
5 Ctau [0 0 0 0 0 0 0] 0.182
6 InFlowRate = 0.184493273497 m^3/s
7 InEnFluxZdir = 103.528831482 m^5/s^3
8 InEnFluxPhiDir = 0 m^5/s^3
9 SwS = 0

```

Из приложеног листинга се могу видети карактеристични геометријски параметри овог дифузора, затим нумерички израчунат запремински проток ваздуха и јачина вихора која у овом случају износи $SwS = 0$, јер се ради о безвихорном струјању. Резултати нумеричког прорачуна поља брзине у овом дифузору су приказани на Сл.5.48.



Слика 5.48: Расподеле аксијалне брзине у Азадовом дифузору.

Посматрањем дијаграма приказаних на Сл.5.48 уочава се да су резултати прорачуна безвихорног струјања у Азадовом дифузору применом стандардног

$k - \varepsilon$ модела и модела $k - \varepsilon$ diffuser потпуно исти. Ово је значајно због тога што се прорачун турбулентних напона у имплементираном моделу $k - \varepsilon$ diffuser одвија у поларно-цилиндричним координатама, док се код постојећег стандардног $k - \varepsilon$ модела прорачун турбулентних напона одвија у Декартовим координатама. Стога одлично слагање резултата приказано на Сл.5.48 представља још једну потврду да је имплементација модела $k - \varepsilon$ diffuser у софтвер OpenFOAM тачно урађена, односно да је у математичко-програмерском смислу прорачун турбулентних напона у поларно-цилиндричним координатама у овом моделу коректно постављен.

6 Закључак

Турбулентна вихорна струјања спадају у једну од најкомплекснијих класа струјања и имају велики значај и широку распрострањеност у техници и природи. У зависности од струјног простора у коме се развија овакав вид струјања, долази до додатног усложњавања струјања. Тако при турбулентном вихорном струјању у дифузорима услед низструјног пораста попречног пресека дифузора долази до успоравања струјања, при чему услед неравнотеже одговарајућих сила може доћи и до појаве одвајања граничног слоја.

Предмет ове докторске дисертације су нумерички прорачуни струјања у правим конусним дифузорима са циљем побољшања тачности нумеричких прорачуна турбулентног вихорног струјања применом савремених научних достигнућа. Прави конусни дифузори представљају неизоставан део цевних хидрауличних турбина, јер се у њима одвија поврат великог дела кинетичке енергије из флуида који напушта турбину. Оцена квалитета процеса трансформације енергије у дифузору се може извести савременим ласерским методама мерења струјних параметара. Међутим, ове методе су технички веома сложене, захтевају примену скупоцене мерне опреме и дуготрајна мерења. Због тога нумерички прорачуни струјања налазе своје место у процесу оцене квалитета процеса трансформације енергије у дифузорима.

На почетку ове дисертације је извршена анализа тренутног стања релевантних истраживања која обухватају анализе параметара турбулентног струјања које настаје у правим конусним дифузорима. Из ових истраживања се посебно истиче рад Fujihira Namba-е из 2017. године у којем је анализирано моделирање турбулентног вихорног струјања у цеви. У овом истраживању је развијен модел турбуленције који обухвата анизотропију турбулентне вискозности и временску нелокалност турбулентних напона, која је присутна у вихорном струјању. Предност Хамбиног модела турбуленције у односу на постојеће RANS моделе је детаљно обрађена у оквиру дисертације. При томе је урађена анализа линеарних модела турбуленције са изотропном турбулентном вискозности, нелинеарних модела и линеарних модела са анизотропном турбулентном вискозности.

Модел турбуленције који је развио Хамба је линеарни модел са анизотропном турбулентном вискозности и намењен је за прорачун вихорног струјања. Моделске једначине за турбулентне напоне овог модела су написане у поларно-цилиндричним координатама. Примена оваквих једначина за турбулентне напоне у софтверу OpenFOAM, чији солвери раде у Декартовим координатама је предствљала велики изазов. Решење овог проблема је један од оригиналних резултата ове докторске дисертације, јер су у основу кода OpenFOAM имплементирани модули који омогућавају да се тензори из Декартових координата трансформишу у поларно-цилиндричне координате и обрнуто. У основу кода OpenFOAM су имплементирани јединични дијадни тензори који су омогућили да се компликоване једначине за Хамбине напоне разложе на збир низа сабирака у којима фигуришу производи тензора просечних брзина деформисања и дијаде коефицијената турбулентне вискозности. На овај начин је формирана снажна основа за даљње унапређење моделирања турбуленције у цилиндричним струјним доменима, јер је омогућено локално деловање на одређену компоненту тензора турбулентних напона у поларно-цилиндричним координатама, што није изводљиво у случају да се прорачун турбулентних напона врши у Декартовим координатама.

Тачност поступка имплементације Хамбиног $k - \varepsilon$ модела турбуленције у код OpenFOAM је проверена на истом примеру вихорног струјања у цеви на којем је Хамба у свом раду тестирао успешност свог модела. При томе су постигнути исти ефекти деловања на поље брзине у вихорном језгру које је остварио и Хамба у свом раду. Поред тога, извршено је и упоређивање Хамбиног $k - \varepsilon$ модела са два линеарна ($k - \varepsilon$ и $k - \omega$ SST) и једним нелинеарним (Lien cubic $k - \varepsilon$) моделом турбуленције. Хамбин $k - \varepsilon$ модел је остварио значајно боље резултате у поређењу са наведеним RANS моделима, који већ постоје у софтверу OpenFOAM.

Још један оригиналан резултат ове докторске дисертације је развијање и имплементација новог модела турбуленције који је намењен за нумеричке прорачуне вихорног и безвихорног турбулентног струјања у правим конусним дифузорима. С обзиром на то да су коефицијенти који стварају анизотропију турбулентне вискозности калибрисани на принудно-потенцијалном вихорном струјању у правом конусном дифузору, овај модел је предвиђен за прорачуне у вихорном струјању овог типа. Развијени модел је назван $k - \varepsilon$ diffuser и има основу кода наслеђену од Хамбиног $k - \varepsilon$ модела.

Развијени модел поседује извесну универзалност у смислу примене на безвихорна и вихорна струјања у правим конусним дифузорима, обзиром да има

могућност предвиђања врсте струјања у дифузору. Ако је у дифузору безвихорно струјање, онда се прорачун изводи помоћу стандардног $k - \varepsilon$ модела, док се у случају вихорног струјања за моделирање турбуленције активирају једначине новог $k - \varepsilon$ diffuser модела. Ова особина $k - \varepsilon$ diffuser модела турбуленције је тестирана на примеру безвихорног струјања у Азадовом дифузору, при чему су добијени резултати упоређени са резултатима стандардног $k - \varepsilon$ модела турбуленције. На дијаграмима који су приказани у резултатима ове дисертације се види да се профили брзина добијени стандардним $k - \varepsilon$ моделом и $k - \varepsilon$ diffuser моделом преклапају у потпуности, и поред чињенице да се у моделу $k - \varepsilon$ diffuser турбулентни напони рачунају у поларно-цилиндричним, док се у стандардном $k - \varepsilon$ моделу напони рачунају у Декартовим координатама. Дакле, модел $k - \varepsilon$ diffuser се у условима безвихорног струјања аутоматски своди на стандардни $k - \varepsilon$ модел. Ово је још један значајан и оригиналан резултат ове дисертације, јер применом $k - \varepsilon$ diffuser модела није неопходно да корисник софтвера размишља какво је струјање присутно у прорачунском домену дифузора. Овај модел аутоматски врши проверу и активира одговарајући модел турбуленције за извођење нумеричког прорачуна струјања.

Поред универзалности $k - \varepsilon$ diffuser модела у смислу присуства безвихорног и вихорног струјања, на Азадовом дифузору је проверена и могућност овог модела да ради на дифузорима различитих геометријских карактеристика. Ово тестирање је извршено из разлога што су коефицијенти тубулентне вискозности модела $k - \varepsilon$ diffuser зависни од бездимензијских геометријских параметара правога конусног дифузора. С обзиром на одличне резултате који су већ наведени, очигледно је да је овај модел турбуленције применљив на било који прави конусни дифузор. Додатна провера је извршена и нумеричким прорачуном посебног типа вихорног струјања у Клаусеновом дифузору, који има значајно већи угао ширења. Резултати тестирања и на овом дифузору су на задовољавајућем нивоу.

Коначно, извршене су провере $k - \varepsilon$ diffuser модела на принудно-потенцијалном вихорном струјању у правом конусном дифузору, за које је овај модел и развијен. Како су коефицијенти турбулентне вискозности модела $k - \varepsilon$ diffuser зависни и од јачине вихора на улазу у дифузор, то је тестирана и могућност прилагођавања $k - \varepsilon$ diffuser модела различитим јачинама вихора које су присутне у струјном домену правога конусног дифузора. Модел $k - \varepsilon$ diffuser је са успехом, и квалитативно и квантитативно, предвидео повратни профил аксијалне брзине у језгру принудно-потенцијалног вихора у правом конусном дифузору. Поред тога, овај модел боље предвиђа појаву одумирања вихора у

односу на остала два коришћена модела. Упоредним приказом резултата стандардног $k-\varepsilon$, Хамбиног $k-\varepsilon$ и $k-\varepsilon$ diffuser модела уочава се надмоћ развијеног модела $k-\varepsilon$ diffuser при прорачуну турбулентног вихорног струјања у правом конусном дифузору. С обзиром на расположиве експерименталне резултате и спроведене нумеричке прорачуне, може се рећи да у правим конусним дифузорима развијени модел $k-\varepsilon$ diffuser остварује добре резултате у опсегу од безвихорног струјања до принудно-потенцијалног вихорног струјања са јачином вихора $0 \leq SwS \leq 0,5$ и при Рејнолдсовом броју $150000 < Re < 450000$.

У низу извршених нумеричких прорачуна применом развијеног модела $k-\varepsilon$ diffuser, остварена је добра стабилност рада овог модела при редном и паралелном процесирању на прорачунским мрежама са великом разликом у броју ћелија и при прорачуну струјних поља различите физичке комплексности. Развијени модел $k-\varepsilon$ diffuser даје боље резултате у предвиђању поља брзине у језгру вихора. Даљњи правац истраживања је усмерен на потенцијалну зону вихора у којој аксијална брзина има локални максимум и у којој нулти градијент аксијалне брзине у радијалном правцу ствара потешкоће у моделирању вредности аксијалне брзине.

Литература

- [1] М. Бенишек. *Вихорно струјање у правим кружним цевима*. Докторска дисертација, Машински факултет Универзитета у Београду, 1979.
- [2] S. Čantrak. *Experimentelle Untersuchungen statistischer Eigenschaften turbulenter drallbenhafteter Rohr- und Diffusorströmungen*. Dr.-Ing. Diss., Karlsruhe, 1981.
- [3] В. Vukašinić. *Turbulentni prenos i problemi njegovog modeliranja u vihornom strujanju*. Magistarska teza, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 1996.
- [4] М. Лечић. *Теоријско и експериментално истраживање турбулентних вихорних струјања*. Докторска дисертација, Машински факултет Универзитета у Београду, 2003.
- [5] А. Ђоћић. *Истраживање структуре нехомогене турбуленције применом инваријантне теорије*. Магистарска теза, Машински факултет Универзитета у Београду, 2007.
- [6] Ђ. Чантрак. *Анализа вртложног језгра и структуре турбуленције у правој цеви кружног попречног пресека иза кола аксијалног вентилатора применом PIV, LDA и HWA метода*. Докторска дисертација, Машински факултет Универзитета у Београду, 2012.
- [7] А. Ђоћић. *Моделирање и нумеричке симулације вихорног струјања*. Докторска дисертација, Машински факултет Универзитета у Београду, 2013.
- [8] Д. Илић. *Вихорно струјање у правим дифузорима кружног попречног пресека*. Докторска дисертација, Машински факултет Универзитета у Београду, 2013.
- [9] J. V. Venturi. *Recherches expérimentales sur le principe de la communication latérale du mouvement dans les fluides*. Houel et Ducros & Théophile Barrois, Paris, 1797.

- [10] T. Tredgold. *Tracts on Hydraulics*. E. & F. N. SPON, London, 1862.
- [11] J. B. Francis. *Hydraulic Experiments*. TRÜBNER & CO, New York, 1868.
- [12] Đ. Novković. *Анализа геометрије и реконструкција радног кола ГАММ Francis турбине*. Семинарски рад на докторским студијама. Катедра за хидрауличне машине и енергетске системе, Машински факултет Универзитета у Београду, 2014.
- [13] A. H. Gibson. On the flow of water through pipes and passages having converging or diverging boundaries. *Proceedings of the Royal Society, A Mathematical Physical & Engineering Sciences*, (83):356–378, 1910.
- [14] E. P. Warner. The design of wind tunnels and wind tunnel propellers. *NASA Report*, (No. 73):5–24, 1919.
- [15] G. E. Lyon. Flow in conical draft tubes of varying angles. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, (43):1245–1258, 1922.
- [16] J. D. Cockrell and E. Markland. A review of incompressible diffuser flow. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, (35):286–292, 1929.
- [17] H. Petters. Conversion of energy in cross-sectional divergences under different conditions of inflow. *NASA Technical Memorandum*, (No.35):286–292, 1934.
- [18] G. N. Patterson. Modern diffuser design. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, (10):267–273, 1938.
- [19] G. A. Gourzhienko. The turbulent flow in diffusers of small divergence angle. *NASA Technical Memorandum*, (No. 1137):267–273, 1947.
- [20] H. B. Squire. Experiments on conical diffusers. *Aeronautical Research Council, Reports and Memoranda*, (No. 2751):1–20, 1950.
- [21] D. Ross and J. M. Robertson. An empirical method for calculation of the growth of a turbulent boundary layer. *Journal of the Aeronautical Sciences*, (21):355–359, 1954.
- [22] F. A. L. Winternitz and J. W. Ramsay. Effects of inlet boundary layer on pressure recovery, energy conversion and losses in conical diffusers. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, (61):116–124, 1957.
- [23] J. M. Robertson and H. R. Fraser. Separation prediction for conical diffusers. *ASME Journal of Basic Engineering*, (83):201–207, 1960.

- [24] J. D. Cockrell and E. Markland. The effects of inlet conditions on incompressible fluid flow through conical diffusers. *Journal of the Royal Aeronautical Society*, (66):51–52, 1962.
- [25] A. T. McDonald and R. W. Fox. An experimental investigation of incompressible flow in conical diffusers. *International Journal of Mechanical Sciences*, (8):125–139, 1966.
- [26] A. T. McDonald and R. W. Fox. Effects of swirling inlet on pressure recovery in conical diffusers. *AIAA Journal*, (9):2014–2018, 1971.
- [27] P. A. C. Okwoubi. *Turbulence in a Conical Diffuser With Fully Developed Flow at Entry*. PhD Thesis. The University of Manitoba, 1972.
- [28] P. A. C. Okwoubi and R. S. Azad. Turbulence in a conical diffuser with fully developed flow at entry. *Journal of Fluid Mechanics*, (57):603–622, 1973.
- [29] R. A. Lipka. *An Experimental Investigation of a Straight Conical Diffuser*. MSc Thesis. The University of Manitoba, 1968.
- [30] H. Krueger. *Turbulent Flow in a Straight Conical Diffuser*. MSc Thesis. The University of Manitoba, 1970.
- [31] R. H. Hummel. *Turbulence Structure in a Conical Diffuser*. PhD Thesis. The University of Manitoba, 1978.
- [32] S. C. Arora. *An Experimental Study of The Turbulent Kinetic Energy and Vorticity in a Conical Diffuser*. PhD Thesis. The University of Manitoba, 1978.
- [33] M. S. Aulakh. *Mean Strain Field in a Conical Diffuser With Fully Developed Flow at The Entry*. MSc Thesis. The University of Manitoba, 1980.
- [34] D. Singh. *Kinetic Energy Balance in a Conical Diffuser*. MSc Thesis. The University of Manitoba, 1981.
- [35] R. W. Derksen. *An Experimental Investigation of The Fluctuating Wall Shear Stresses in an Eight Degree Conical Diffuser*. PhD Thesis. The University of Manitoba, 1986.
- [36] R. S. Azad. Turbulent flow in a conical diffuser a review. *Experimental Thermal and Fluid Science*, (13):318–337, 1996.

- [37] Y. Senno, N. Kawaguchi, and T. Nagata. Swirl flow in conical diffusers. *Bulletin of the JSME*, 21(151):1729–1738, 1978.
- [38] I. Nakamura, K. Ishikawa, and Y. Furuya. Experiments on the conical diffuser performance with asymmetric uniform shear inlet flow (effect of tailpipe discharge). *Bulletin of the JSME*, 24(196):1729–1738, 1981.
- [39] P. D. Clausen, S. G. Koh, and D. H. Wood. Measurements of a swirling turbulent boundary layer developing in a conical diffuser. *Experimental Thermal and Fluid Science*, (6):39–48, 1993.
- [40] E. Karunakaran and V. Gansen. Mean flow field measurements in an axisymmetric conical diffuser with and without inlet flow distortion. *Indian Journal of Engineering & Materials Sciences*, 21(16):S1–S12, 2009.
- [41] J. Lee, S. J. Jang, and H. J. Sung. Direct numerical simulations of turbulent flow in a conical diffuser. *Journal of Turbulence*, (13):1–29, 2012.
- [42] J. Boussinesq. Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*, 23(1):1–680, 1877.
- [43] H. Yongsan, T. Kobayashi, and Y. Morinishi. Numerical prediction of turbulent flow in a conical diffuser using $k-\varepsilon$ model. *Acta Mechanica Sinica*, (8):117–126, 1992.
- [44] B. E. Launder and D. B. Spalding. The numerical computation of turbulent flows. *Computer methods in a applied mechanics and engineering*, (3):269–289, 1974.
- [45] Đ. Novković, J. Burazer, and A. Čović. Comparison of different cfd software performances in the case of an incompressible air flow through a straight conical diffuser. *Thermal Science*, 21(3):S863–874, 2016.
- [46] J. Zhu and T. H. Shih. *Calculations of Diffuser Flows With an Anisotropic $k-\varepsilon$ Model*. NACA Contractor Report. No.198418, 1995.
- [47] S. W. Armfield and C. A. J. Fletcher. Comparison of $k-\varepsilon$ and algebraic reynolds stress models for swirling diffuser flow. *Interantional Jouranal for Numerical Methods in Fluids*, 9:987–1009, 1989.
- [48] J. S. Bose. *Modelling Turbulence Anisotropy using Algebraic Reynolds Stress Models*. MSc Thesis, Queen's University Kingston, Ontario, Canada, 1997.

- [49] Đ. Novković, N. Maričić, and M. Jevtić. Numerical flow simulation in a conical diffuser. *Energija, Savez energetičara Srbije*, 18:234–240, 2016.
- [50] Đ. Novković, J. Burazer, A. Čočić, and M. Lečić. Numerical research of swirl-free flow in azad diffuser. *6th International Congress of Serbian Society of Mechanics, Turbulence Minisymposium, Mountain Tara, Serbia*, 6, June 19 - 21, 2017.
- [51] S. B. Pope. A more general effective-viscosity hypothesis. *Journal of Fluid Mechanics*, (72):331–340, 1975.
- [52] F. H. Campagne, V. G. Harris, and C. Corrsin. Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, (41):81–139, 1970.
- [53] O. Bonous. *Studies of the ERCOFTAC conical diffuser with OpenFOAM*. Research report 2008:05. Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2008.
- [54] Đ. Novković. *Osnovni pojmovi i izvodi iz teorije turbulentnih strujanja*. Seminarski rad na doktorskim studijama. Katedra za mehaniku fluida, Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu, 2012.
- [55] S. Dhiman, H. Foroutan, and S. Yavuzkurt. Simulation of flow trough conical diffusers with and without inlet swirl using cfd. *Proceedings of ASME-JSME-KSME Joint Fluids Engineering Conference 2011, Hamamatsu, Shizuoka, JAPAN*, July 24 - 29, 2011.
- [56] H. K. Versteeg and W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. PEARSON Prentice Hall, Glasgow, UK, 2007.
- [57] L. Schoenmaker. *Simulations of steady and oscillating flow in diffusers*. MSc Thesis. University of Technology, Delft, Netherlands, 2017.
- [58] D. C. Wilcox. A complete model of turbulence revisited. *AIAA 22nd Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, USA*, pages 1–18, January 9 - 12, 1984.
- [59] R. Bourguet, M. Braza, and G. Harran. Tensorial eddy-viscosity concept for the prediction of turbulent unsteady flows around bodies. *19ème Congres Français de Mécanique, Marseille, France*, août 24 - 28, 2009.
- [60] J. L. Lumley. Toward a turbulent constitutive relation. *Journal of Fluid Mechanics*, 41(2):413–434, 1970.

- [61] R. S. Rivlin. The relation between the flow of non-newtonian fluids and turbulent newtonian fluids. *Quarterly of Applied Mathematics*, 15(2):212–215, 1957.
- [62] A. J. M. Spencer and R. S. Rivlin. The theory of matrix polynomials and its application to the mechanics of isotropic continua. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 2(1):309–336, 1958.
- [63] F. B. Tehrani, A. M. Ahmar, M. Kiamansouri, and M. Jadidi. Investigation of various non-linear eddy viscosity turbulence models for simulating flow and pollutant dispersion on and around a cubical model building. *Building Simulation*, 8(2):149–166, 2015.
- [64] T. B. Gatski and T. Jongen. Nonlinear eddy viscosity and algebraic stress models for solving complex turbulent flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 36:655–682, 2000.
- [65] F. Hamba. History effect on the reynolds stress in turbulent swirling flow. *Physics of Fluids*, 29:025103–1–025103–11, 2017.
- [66] T. B. Gatski and C. G. Speziale. On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 254:59–78, 1993.
- [67] X.-H. Xu and C. G. Speziale. Explicit algebraic stress model of turbulence with anisotropic dissipation. *AIAA Journal*, 34(10):2186–2189, 1996.
- [68] T. Jongen, G. Mompean, and T. B. Gatski. Accounting for reynolds stress and dissipation rate anisotropies in inertial and non-inertial frames. *Physics of Fluids*, 10:678–684, 1998.
- [69] S. Wallin. *Engineering turbulence modelling for CFD with a focus on explicit algebraic Reynolds stress models*. Technical Reports. Royal Institute of Technology, Department of Mechanics, Stockholm, Sweden, 2000.
- [70] S. Wallin and A. Johansson. Explicit algebraic reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 403:89–132, 2000.
- [71] A. Hellsten. *New Two-Equation Turbulence Model for Aerodynamics Applications*. D.Sc. Thesis. Helsinki University of Technology, Department of Mechanical Engineering, Laboratory of Aerodynamics, Helsinki, Finland, 2004.

- [72] F. R. Menter, A. V. Garbaruk, and Y. Egorov. Explicit algebraic reynolds stress models for anisotropic wall-bounded flows. *Progress in Flight Physics*, 3:89–104, 2012.
- [73] O. Z. Mehdizadeh, L. Temmerman, B. Tartinville, and C. Hirsch. Applications of earms turbulence models to internal flows. *Proceedings of ASME Turbo Expo 2012, Copenhagen, Denmark*, (GT2012-68886):1–8, 2012.
- [74] E. M. Cherry, C. J. Elkins, and J. K. Eaton. Geometric sensitivity of three-dimensional separated flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 29:803–811, 2008.
- [75] E. M. Cherry, C. J. Elkins, and J. K. Eaton. Pressure measurements in a three-dimensional separated diffuser. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 30:1–2, 2009.
- [76] C. G. Speziale. Comparison of explicit and traditional algebraic stress models of turbulence. *AIAA Journal*, 35(9):1505–1509, 1997.
- [77] S. Nisizima and A. Yoshizawa. Turbulent channel and couette flows using an anisotropic k- ε model. *AIAA Journal*, (25):414–420, 1987.
- [78] C. G. Speziale. On non linear k- l nad k- ε models of turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, (178):459–475, 1987.
- [79] T. J. Craft, B. E. Launder, and K. Suga. Development and application of a cubic eddy-viscosity model of turbulence. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 17:108–115, 1996.
- [80] K. Suga. Recent developments in eddy viscosity modelling of turbulence. *R & D Review of Toyota CRDL*, 33(1):1–11, 1998.
- [81] K. Suga and K. Abe. Nonlinear eddy viscosity modelling for turbulence and heat transfer near wall and shear-free boundaries. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 21:37–48, 2000.
- [82] X. Wang and S. Thangam. Development and application of an anisotropic two-equation model for flows with swirl and curvature. *Journal of Applied Mechanics*, 73:397–404, 2006.
- [83] S. Imao, M. Itoh, and T. Harada. Turbulent characteristics of the flow in an axially rotating pipe. *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 17:444–451, 1996.

- [84] D. Carati and W. Cabot. Anisotropic eddy viscosity models. *Proceedings for the Summer Program 1996, Stanford University, CTR*, pages 249–258, 1996.
- [85] R. Bourguet, M. Braza, R. Perrin, and G. Harran. Anisotropic eddy-viscosity concept for strongly detached unsteady flows. *AIAA Journal*, 45(5):1145–1149, 2007.
- [86] W. Steenbergen. *Turbulent pipe flow with swirl*. Phd Thesis. University of Technology, Eindhoven, Netherlands, 1995.
- [87] O. Reynolds. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Transactions of the Royal Society of London A*, (186):123–164, 1895.
- [88] D. Radenković, J. Burazer, and Đ. Novković. Anisotropy analysis of turbulent swirl flow. *FME Transactions*, 42:19–25, 2014.
- [89] F. G. Schmitt. About boussinesq’s turbulent viscosity hypothesis: historical remarks and a direct evaluation of its validity. *Comptes Rendus Mécanique*, 9-10(335):617–627, 2007.
- [90] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1967.
- [91] C. D. Scott-Pomerantz. *The $k - \varepsilon$ Model in the Theory of Turbulence*. Phd Thesis. University of Pittsburgh, 2004.
- [92] I. B. Celik. *Introductory Turbulence Modelling*. West Virginia University, Mechanical & Aerospace Engineering Dept., Morgantown, 1999.
- [93] M. Kozuka, Y. Seki, and H. Kawamura. Dns of turbulent heat transfer in a channel flow with a high spatial resolution. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 30(3):514–524, 2009.
- [94] L. F. Richardson. *Weather prediction by numerical process, by Lewis F. Richardson*. Book. Cambridge, University Press, 1922.
- [95] S. B. Pope. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, Cornell University, New York, 2000.
- [96] G. Frobenius. Ueber lineare substitutionen und bilineare formen. *J. Reine Angew. Math.*, 84:1–63, 1878.

- [97] S. S. Girimaji. Fully-explicit and self-consistent algebraic reynolds stress model. *NASA Contractor Report*, (No. NAS1-19480):1–21, 1995.
- [98] S. Thangam, X. H. Wang, and Y. Zhou. Development of a turbulence model based on the energy spectrum for flows involving rotation. *Physics of Fluids*, 11(8):2225–2234, 1999.
- [99] M. Leschziner. *Statistical Turbulence Modelling for Fluid Dynamics - Demystified*. Book. Imperial College London, UK, 2015.
- [100] R. H. Kraichnan. Direct-interaction approximation for shear and thermally driven turbulence. *Physics of Fluids*, 21(7):1048–1062, 1964.
- [101] R. H. Kraichnan. The structure of isotropic turbulence at very high reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 5(4):497–543, 1959.
- [102] R. H. Kraichnan. Eddy viscosity and diffusivity: exact formulas and approximations. *Complex Systems*, (1):805–820, 1987.
- [103] A. Yoshizawa. *Hydrodynamic and Magnetohydrodynamic Turbulent Flows - Modelling and Statistical Theory*. Book. Institute of Industrial Science, University of Tokyo, Japan, 1998.
- [104] F. Hamba. Nonlocal expression for scalar flux in turbulent shear flow. *Physics of Fluids*, 16(5):1493–1508, 2004.
- [105] F. Hamba. Nonlocal analysis of the reynolds stress in turbulent shear flow. *Physics of Fluids*, (17):1–9, 2005.
- [106] T. Kobayashi and Morio Yoda. Modified $k - \varepsilon$ model for turbulent swirling flow in a straight pipe. *JSME Int. J.*, 30(259):66–71, 1987.
- [107] C. A. Terrence. *Essentials of Micro and Nanofluidics: With Applications to the Biological and Chemical Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [108] S. Corrsin. Limitations of gradient transport models in random walks and in turbulence. *Advances in Geophysics*, 18:25–60, 1975.
- [109] D. G. Lilley and N. A. Chigier. Nonisotropic turbulent stress distribution in swirling flows from mean value distributions. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 14:573–585, 1971.

- [110] N. Yokoi and A. Yoshizawa. Statistical analysis of the effects of helicity in inhomogeneous turbulence. *Physics of Fluids*, 2(5):464–477, 1993.
- [111] A. Yoshizawa, N. Yokoi, and S. Nisizima. Variational approach to a turbulent swirling pipe flow with the aid of helicity. *Physics of Fluids*, 13(8):2309–2319, 2001.
- [112] N. Yokoi, A. Yoshizawa, K. Itoh, and S. I. Itoh. A variational analysis of flow-reversal condition in a turbulent swirling pipe flow using the bulk-helicity concept. *Physics of Fluids*, 16(5):1186–1202, 2004.
- [113] G. K. Rajan J. M. Cimbala. Computational and theoretical analyses of the precessing vortex rope in a simplified draft tube of a scaled model of a francis turbine. *Journal of Fluid Engineering*, 139:1–12, 2017.
- [114] R. S. Resiga, S. Muntean, V. Hasmatuchi, I. Anton, and F. Avellan. Analysis and prevention of vortex breakdown in the simplified discharge cone of a francis turbine. *Journal of Fluids Engineering*, 132:1–15, 2010.
- [115] S. M. Čantrak. *Hidrodinamika*. IV Izdanje. Машински факултет Универзитета у Београду, 2005.
- [116] J. L. Lumley and G. Newman. The return to isotropy of homogeneous turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 82:161–178, 1977.
- [117] S. Banerjee, O. Ertunc, and F. Durst. Anisotropy properties of turbulence. *Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on APPLIED MATHEMATICS (MATH'08)*, Puerto De La Cruz, December 15 - 17, 2008.

Прилози

П.І - Трансформације чланова једначине ТКЕ

Сабирци једначине ТКЕ се трансформацијама њихових фактора које су изложене у овом прилогу могу превести у други облик.

$$\langle u'_i u'_j \rangle \langle S_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left(\langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) = \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j}. \quad (\text{П.І-1})$$

$$\begin{aligned} \langle S'_{ij} S'_{ij} \rangle - \frac{\partial \langle S'_{ij} u'_i \rangle}{\partial x_j} &= \left\langle S'_{ij} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) u'_i \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle \left(u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right\rangle \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\langle u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle \\ &= - \frac{1}{2} \left\langle u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle u'_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle u'_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u'_i u'_i}{2} \right) \right] \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial x_j \partial x_j}. \end{aligned} \quad (\text{П.І-2})$$

При извођењу израза (П.І-2) у првом кораку је искоришћен израз (П.І-1). У осталим корацима је примењена једначина континуитета за нестишљиво струјање

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0,$$

и особина $\langle k \rangle = k$ временски осредњених величина струјања.

П.П - Трансформације чланова једначине дисипације ТКЕ

$$\begin{aligned} \left\langle 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial t} \right) \right\rangle &= 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \left(\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle \right) \\ &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{П.П-1})$$

$$\begin{aligned} \left\langle 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle &= \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle \left(\frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} \right) \\ &= \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle \left(\frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} \right), \end{aligned} \quad (\text{П.П-2})$$

$$\left\langle 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \langle u_j \rangle \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle = \langle u_j \rangle \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle \right) = \langle u_j \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j}, \quad (\text{П.П-3})$$

$$\begin{aligned} \left\langle 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right\rangle &= \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} \right) \\ &= \nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right\rangle \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right), \end{aligned} \quad (\text{П.П-4})$$

$$\left\langle 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} u'_j \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle = \nu \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle \frac{\partial^2 \langle u_i \rangle}{\partial x_k \partial x_j}, \quad (\text{П.П-5})$$

$$\begin{aligned} \left\langle 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 (u'_i u'_j - \langle u'_i u'_j \rangle)}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle &= 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \left[\frac{\partial^2 (u'_i u'_j)}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{\partial^2 \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k \partial x_j} \right] \right\rangle \\ &= 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_k \partial x_j} \right] \right\rangle \\ &= 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \left\langle \frac{\partial^2 (u'_i u'_j)}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle \right\rangle \\ &= 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle + 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} u'_j \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle \\ &\quad - 2\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle u'_i \left\langle \frac{\partial^2 (u'_i u'_j)}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle \right\rangle \\ &= 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle + \nu \left\langle u'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle \\ &\quad + \nu \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \right\rangle - 2\nu \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u'_i \rangle \left\langle \frac{\partial^2 (u'_i u'_j)}{\partial x_k \partial x_j} \right\rangle \\ &= 2\nu \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right\rangle + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right\rangle, \end{aligned} \quad (\text{П.П-6})$$

$$\begin{aligned}
\left\langle 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_k \partial x_i} \right) \right\rangle &= -\frac{2}{\rho} \left\langle \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 p'}{\partial x_k \partial x_i} \right\rangle = -\frac{2}{\rho} \left\langle \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_k} \right) \right\rangle \\
&= -\frac{2}{\rho} \left\langle \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right) \right\rangle \\
&= -\frac{2}{\rho} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right\rangle, \tag{II.II-7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \nu \frac{\partial^3 u'_i}{\partial x_k \partial x_j \partial x_j} \right\rangle &= 2\nu^2 \left\langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \right\rangle \\
&= \nu^2 \left\langle 2 \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \right] \right\rangle \\
&= \nu^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2 \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \right] - 2 \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle \\
&= \nu^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \right] - 2 \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle \\
&= \nu \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \right\rangle - \left\langle 2\nu^2 \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle \\
&= \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j} \left\langle \left(\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) \right\rangle - 2\nu^2 \left\langle \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle \\
&= \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j \partial x_j} - 2\nu^2 \left\langle \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_k} \right\rangle. \tag{II.II-8}
\end{aligned}$$

П.ІІІ - Додатак кода у хедер фајлу TensorTemplateI.H

```
1 //***** My modifications *****/
2
3 //1-Return tensor with nonzero OneOne term
4 template <class Cmpt>
5 inline SymmTensor<Cmpt> OneOne(const Tensor<Cmpt>& t)
6 {
7     return SymmTensor<Cmpt>
8     (
9         t.xx(), (t.xy() - t.yx()), (t.xz() - t.zx()),
10        t.yy()-t.yy(), (t.yz() - t.zy()),
11        t.zz()-t.zz()
12    );
13 }
14 //2-Return tensor with nonzero TwoTwo term
15 template <class Cmpt>
16 inline SymmTensor<Cmpt> TwoTwo(const Tensor<Cmpt>& t)
17 {
18     return SymmTensor<Cmpt>
19     (
20        t.xx()-t.xx(), (t.xy() - t.yx()), (t.xz() - t.zx()),
21        t.yy(), (t.yz() - t.zy()),
22        t.zz()-t.zz()
23    );
24 }
25 //3-Return tensor with nonzero ThreeThree term
26 template <class Cmpt>
27 inline SymmTensor<Cmpt> ThreeThree(const Tensor<Cmpt>& t)
28 {
29     return SymmTensor<Cmpt>
30     (
31        t.xx()-t.xx(), (t.xy() - t.yx()), (t.xz() - t.zx()),
32        t.yy()-t.yy(), (t.yz() - t.zy()),
33        t.zz()
34    );
35 }
36 //4-Return tensor with nonzero OneTwo term
37 template <class Cmpt>
38 inline Tensor<Cmpt> OneTwo(const Tensor<Cmpt>& t)
39 {
40     return Tensor<Cmpt>
41     (
42        t.xx() - t.xx(), t.xy(), t.xz() - t.zx(),
43        t.yx() - t.yx(), t.yy() - t.yy(), t.yz() - t.yz(),
44        t.zx() - t.zx(), t.zy() - t.zy(), t.zz() - t.zz()
45    );
46 }
47 //5-Return tensor with nonzero OneThree term
48 template <class Cmpt>
49 inline Tensor<Cmpt> OneThree(const Tensor<Cmpt>& t)
```

```

50 {
51     return Tensor<Cmpt>
52     (
53         t.xx() - t.xx(), t.xy() - t.xy(),      t.xz()      ,
54         t.yx() - t.yx(), t.yy() - t.yy(), t.yz() - t.yz(),
55         t.zx() - t.zx(), t.zy() - t.zy(), t.zz() - t.zz()
56     );
57 }
58 //6-Return tensor with nonzero TwoOne term
59 template <class Cmpt>
60 inline Tensor<Cmpt> TwoOne(const Tensor<Cmpt>& t)
61 {
62     return Tensor<Cmpt>
63     (
64         t.xx() - t.xx(), t.xy() - t.xy(), t.xz() - t.xz(),
65         t.yx()      , t.yy() - t.yy(), t.yz() - t.yz(),
66         t.zx() - t.zx(), t.zy() - t.zy(), t.zz() - t.zz()
67     );
68 }
69 //7-Return tensor with nonzero TwoThree term
70 template <class Cmpt>
71 inline Tensor<Cmpt> TwoThree(const Tensor<Cmpt>& t)
72 {
73     return Tensor<Cmpt>
74     (
75         t.xx() - t.xx(), t.xy() - t.xy(), t.xz() - t.xz(),
76         t.yx() - t.yx(), t.yy() - t.yy(),      t.yz()      ,
77         t.zx() - t.zx(), t.zy() - t.zy(), t.zz() - t.zz()
78     );
79 }
80 //8-Return tensor with nonzero ThreeOne term
81 template <class Cmpt>
82 inline Tensor<Cmpt> ThreeOne(const Tensor<Cmpt>& t)
83 {
84     return Tensor<Cmpt>
85     (
86         t.xx() - t.xx(), t.xy() - t.xy(), t.xz() - t.xz(),
87         t.yx() - t.yx(), t.yy() - t.yy(), t.yz() - t.yz(),
88         t.zx()      , t.zy() - t.zy(), t.zz() - t.zz()
89     );
90 }
91 //9-Return tensor with nonzero ThreeTwo term
92 template <class Cmpt>
93 inline Tensor<Cmpt> ThreeTwo(const Tensor<Cmpt>& t)
94 {
95     return Tensor<Cmpt>
96     (
97         t.xx() - t.xx(), t.xy() - t.xy(), t.xz() - t.xz(),
98         t.yx() - t.yx(), t.yy() - t.yy(), t.yz() - t.yz(),
99         t.zx() - t.zx(),      t.zy()      , t.zz() - t.zz()
100    );
101 }
102
103 //***** My modifications *****/

```

II.IV - Изворни код kEpsDif.C

```
1 /*-----*\
2  ===== |
3  \\      /  F ield      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
4  \\      /  O peration  |
5  \\      /  A nd        | Copyright held by original author
6  \\      /  M anipulation |
7  -----
8 License
9  -----
10
11 /*-----*/
12
13 #include "kEpsDif.H"
14 #include "addToRunTimeSelectionTable.H"
15 #include "backwardsCompatibilityWallFunctions.H"
16
17 // * * * * * Static Data Members * * * * * //
18
19 namespace Foam
20 {
21     namespace incompressible
22     {
23         namespace RASModels
24         {
25
26             // * * * * * Static Data Members * * * * * //
27
28             defineTypeNameAndDebug(kEpsDif, 0);
29             addToRunTimeSelectionTable(RASModel, kEpsDif, dictionary);
30
31             // * * * * * Constructors * * * * * //
32
33             kEpsDif::kEpsDif
34             (
35                 const volVectorField& U,
36                 const surfaceScalarField& phi,
37                 transportModel& lamTransportModel
38             )
39             :
40             RASModel(typeName, U, phi, lamTransportModel),
41             Cmu_
42             (
43                 dimensioned<scalar>::lookupOrAddToDict
44                 (
45                     (
46                         "Cmu",
47                         coeffDict_,
48                         0.09
49                     )
50                 ),
51             Ctau_ // Hamba time scale coefficient
52             (
```



```

53     dimensioned<scalar>::lookupOrAddToDict
54     (
55         "Ctau",
56         coeffDict_,
57         0.182
58     )
59 ),
60 l_ // Inlet pipe lenght coeff. (eq. lenght in [m])
61 (
62     dimensioned<scalar>::lookupOrAddToDict
63     (
64         "l",
65         coeffDict_,
66         0.090
67     )
68 ),
69 L_ // Diffuser lenght coeff. (eq. lenght in [m])
70 (
71     dimensioned<scalar>::lookupOrAddToDict
72     (
73         "L",
74         coeffDict_,
75         0.932
76     )
77 ),
78 rSmall_
79 (
80     dimensionedScalar
81     (
82         "rSmall",
83         dimensionSet (0,1,0,0,0,0,0),
84         0.000001
85     )
86 ),
87 Cz_
88 (
89     dimensionedScalar
90     (
91         "Cz",
92         dimensionSet (0,1,0,0,0,0,0),
93         1.0
94     )
95 ),
96 SwS_ // Initial swirl strenght
97 (
98     0.25
99 ),
100 SwScr_ // Critical swirl strenght
101 (
102     0.001
103 ),
104 KL // Geometry coefficient
105 (
106     L_/0.932
107 ),
108 KIL // Geometry coefficient
109 (

```

```

110         (0.932+0.09)/(L_+1_)
111     ),
112     C1_
113     (
114         dimensioned<scalar>::lookupOrAddToDict
115         (
116             "C1",
117             coeffDict_,
118             1.44
119         )
120     ),
121     C2_
122     (
123         dimensioned<scalar>::lookupOrAddToDict
124         (
125             "C2",
126             coeffDict_,
127             1.92
128         )
129     ),
130     sigmaEps_
131     (
132         dimensioned<scalar>::lookupOrAddToDict
133         (
134             "sigmaEps",
135             coeffDict_,
136             1.3
137         )
138     ),
139     k_
140     (
141         IOobject
142         (
143             "k",
144             runTime_.timeName(),
145             U_.db(),
146             IOobject::NO_READ,
147             IOobject::AUTO_WRITE
148         ),
149         autoCreateK("k", mesh_)
150     ),
151     epsilon_
152     (
153         IOobject
154         (
155             "epsilon",
156             runTime_.timeName(),
157             U_.db(),
158             IOobject::NO_READ,
159             IOobject::AUTO_WRITE
160         ),
161         autoCreateEpsilon("epsilon", mesh_)
162     ),
163     nut_
164     (
165         IOobject
166         (

```

```

167         "nut",
168         runTime_.timeName(),
169         U_.db(),
170         IOobject::NO_READ,
171         IOobject::AUTO_WRITE
172     ),
173     autoCreateNut("nut", mesh_)
174 ),
175 X_ // declared in kEpsDif.H
176 (
177     mesh_.C().component(vector::X)
178 ),
179 Y_
180 (
181     mesh_.C().component(vector::Y)
182 ),
183 Z_
184 (
185     mesh_.C().component(vector::Z)
186 ),
187 r_
188 (
189     sqrt(sqr(X_)+sqr(Y_))+rSmall_
190 ),
191 SinPhi_
192 (
193     Y_/r_
194 ),
195 CosPhi_
196 (
197     X_/r_
198 ),
199 Ltt_ // Left transformation tensor
200 (
201     CosPhi_*OneOne(tensor::one)+SinPhi_*OneTwo(tensor::one)
202     -SinPhi_*TwoOne(tensor::one)+CosPhi_*TwoTwo(tensor::one)
203     + ThreeThree(tensor::one)
204 ),
205 Rtt_ // Right transformation tensor
206 (
207     CosPhi_*OneOne(tensor::one)-SinPhi_*OneTwo(tensor::one)
208     +SinPhi_*TwoOne(tensor::one)+CosPhi_*TwoTwo(tensor::one)
209     + ThreeThree(tensor::one)
210 ),
211 LTT_ // Left transformation tensor
212 (
213     CosPhi_*OneOne(tensor::one)-SinPhi_*OneTwo(tensor::one)
214     +SinPhi_*TwoOne(tensor::one)+CosPhi_*TwoTwo(tensor::one)
215     + ThreeThree(tensor::one)
216 ),
217 RTT_ // Right transformation tensor
218 (
219     CosPhi_*OneOne(tensor::one)+SinPhi_*OneTwo(tensor::one)
220     -SinPhi_*TwoOne(tensor::one)+CosPhi_*TwoTwo(tensor::one)
221     + ThreeThree(tensor::one)
222 ),
223 Omega_ // Swirl angular velocity

```

```

224 (
225     IObject
226     (
227         "Omega",
228         runTime_.timeName(),
229         U_.db(),
230         IObject::NO_READ,
231         IObject::AUTO_WRITE
232     ),
233     mag(-Ux_()*SinPhi_+Uy_()*CosPhi_)/r_
234 ),
235 TauH_ // Hamba time scale
236 (
237     IObject
238     (
239         "TauH",
240         runTime_.timeName(),
241         U_.db(),
242         IObject::NO_READ,
243         IObject::AUTO_WRITE
244     ),
245     Ctau_*k_/(epsilon_ + epsilonSmall_)
246 ),
247 OT_ // Time nonlocality parameter
248 (
249     IObject
250     (
251         "OT",
252         runTime_.timeName(),
253         U_.db(),
254         IObject::NO_READ,
255         IObject::AUTO_WRITE
256     ),
257     Omega_*TauH_
258 ),
259 A_ // Geometrical correction parameter of turb. viscous coeff.
260 (
261     IObject
262     (
263         "A",
264         runTime_.timeName(),
265         U_.db(),
266         IObject::NO_READ,
267         IObject::AUTO_WRITE
268     ),
269     (4+2*(1+(Z_/Cz_-1_-0.06*KL)/mag(Z_/Cz_-1_-0.06*KL))
270     -2*(1+(Z_/Cz_+1_+0.06*KL)/mag(Z_/Cz_+1_+0.06*KL)))*
271     2*sqrt((Z_/Cz_)*K1L)
272 ),
273 B_ // Geometrical correction parameter of turb. viscous coeff.
274 (
275     IObject
276     (
277         "B",
278         runTime_.timeName(),
279         U_.db(),
280         IObject::NO_READ,

```

```

281         IObject::AUTO_WRITE
282     ),
283     4+2*(1+(Z_/Cz_-1_-0.06*KL)/mag(Z_/Cz_-1_-0.06*KL))
284     -2*(1+(Z_/Cz_+1_+0.06*KL)/mag(Z_/Cz_+1_+0.06*KL))
285 ),
286 K1_
287 (
288     IObject
289     (
290         "K1",
291         runTime_.timeName(),
292         U_.db(),
293         IObject::NO_READ,
294         IObject::AUTO_WRITE
295     ),
296     4*(OT_)/(1+4*sqr(OT_))
297 ),
298 K2_
299 (
300     IObject
301     (
302         "K2",
303         runTime_.timeName(),
304         U_.db(),
305         IObject::NO_READ,
306         IObject::AUTO_WRITE
307     ),
308     2/(((1+A_*sqr(4*OT_))*(1+B_*8*OT_*(OT_-0.4*pow(SwS_,1./4))))))
309 ),
310 K3_
311 (
312     IObject
313     (
314         "K3",
315         runTime_.timeName(),
316         U_.db(),
317         IObject::NO_READ,
318         IObject::AUTO_WRITE
319     ),
320     2/(1+sqr(OT_))
321 ),
322 K4_
323 (
324     IObject
325     (
326         "K4",
327         runTime_.timeName(),
328         U_.db(),
329         IObject::NO_READ,
330         IObject::AUTO_WRITE
331     ),
332     2*(OT_)/(1+sqr(OT_))
333 ),
334 K5_
335 (
336     IObject
337     (

```

```

338         "K5",
339         runTime_.timeName(),
340         U_.db(),
341         IOobject::NO_READ,
342         IOobject::AUTO_WRITE
343     ),
344     2*(OT_)/(1+4*sqr(OT_))
345 ),
346 K6_
347 (
348     IOobject
349     (
350         "K6",
351         runTime_.timeName(),
352         U_.db(),
353         IOobject::NO_READ,
354         IOobject::AUTO_WRITE
355     ),
356     4*sqr(OT_)/(1+4*sqr(OT_))
357 ),
358 K7_
359 (
360     IOobject
361     (
362         "K7",
363         runTime_.timeName(),
364         U_.db(),
365         IOobject::NO_READ,
366         IOobject::AUTO_WRITE
367     ),
368     2*(1+2*sqr(OT_))/(1+4*sqr(OT_))
369 ),
370 K8_
371 (
372     IOobject
373     (
374         "K8",
375         runTime_.timeName(),
376         U_.db(),
377         IOobject::NO_READ,
378         IOobject::AUTO_WRITE
379     ),
380     (2+sqr((16.74+pow(10*SwS_,1.21))*OT_))/
381     (1+30*mag(OT_)+70*pow(mag(OT_),3))
382 ),
383 K9_
384 (
385     IOobject
386     (
387         "K9",
388         runTime_.timeName(),
389         U_.db(),
390         IOobject::NO_READ,
391         IOobject::AUTO_WRITE
392     ),
393     4*OT_/(1+sqr(OT_))
394 ),

```

```

395
396     gradU(fvc::grad(U_)), // DjN, 22/Aug/2018
397
398     nonlinStress_
399     (
400     "nonlinStress",
401     symm(nut_*symm(
402         LTT_&
403         (
404         (
405         ((
406         -K1_*OneOne(tensor::one)
407         -K2_*OneTwo(tensor::one)
408         -K2_*TwoOne(tensor::one)
409         +K9_*TwoTwo(tensor::one)
410         )
411         &
412         (
413         SrPhi_()*I
414         ))
415         +
416         ((
417         -K8_*OneThree(tensor::one)
418         +K4_*TwoThree(tensor::one)
419         -K8_*ThreeOne(tensor::one)
420         +K4_*ThreeTwo(tensor::one)
421         )
422         &
423         (
424         Srz_()*I
425         ))
426         +
427         ((
428         -K4_*OneThree(tensor::one)
429         -K3_*TwoThree(tensor::one)
430         -K4_*ThreeOne(tensor::one)
431         -K3_*ThreeTwo(tensor::one)
432         )
433         &
434         (
435         SPhiz_()*I
436         ))
437         +
438         ((
439         -2*ThreeThree(tensor::one)
440         )
441         &
442         (
443         Szz_()*I
444         ))
445         +
446         ((
447         -K7_*OneOne(tensor::one)
448         +K5_*OneTwo(tensor::one)
449         +K5_*TwoOne(tensor::one)
450         -K6_*TwoTwo(tensor::one)
451         )

```

```

452         &
453         (
454         Srr_()*I
455         ))
456         +
457         ((
458         -K6_*OneOne(tensor::one)
459         -K5_*OneTwo(tensor::one)
460         -K5_*TwoOne(tensor::one)
461         -K7_*TwoTwo(tensor::one)
462         )
463         &
464         (
465         SPhiPhi_()*I
466         ))
467         )
468         )
469         &RTT_
470         )
471
472         + nut_*twoSymm(fvc::grad(U_))
473     )
474 )
475
476 {
477     nut_ = Cmu_*sqr(k_)/(epsilon_ + epsilonSmall_);
478     nut_ = min(nut_, nuRatio()*nu());
479     nut_.correctBoundaryConditions();
480
481     printCoeffs();
482 }
483
484 // * * * * * Member Functions * * * * * //
485
486 tmp<volTensorField> kEpsDif::S_() const
487 {
488     return tmp<volTensorField>
489     (
490         new volTensorField
491         (
492             IObject
493             (
494                 "S_",
495                 runTime_.timeName(),
496                 U_.db(),
497                 IObject::NO_READ,
498                 IObject::NO_WRITE
499             ),
500             (Ltt_&symm(fvc::grad(U_))&Rtt_
501             )
502         );
503 }
504 tmp<volTensorField> kEpsDif::S() const
505 {
506     return tmp<volTensorField>
507     (
508         new volTensorField

```



```

509     (
510         IObject
511         (
512             "S",
513             runTime_.timeName(),
514             U_.db(),
515             IObject::NO_READ,
516             IObject::NO_WRITE
517         ),
518         (Ltt_&symm(gradU))&Rtt_
519     )
520 );
521 }
522 tmp<volScalarField> kEpsDif::SrPhi_() const
523 {
524     return tmp<volScalarField>
525     (
526         new volScalarField
527         (
528             IObject
529             (
530                 "SrPhi_",
531                 runTime_.timeName(),
532                 U_.db(),
533                 IObject::NO_READ,
534                 IObject::NO_WRITE
535             ),
536             S_()->component(symmTensor::XY)
537         )
538     );
539 }
540 tmp<volScalarField> kEpsDif::SrPhi() const
541 {
542     return tmp<volScalarField>
543     (
544         new volScalarField
545         (
546             IObject
547             (
548                 "SrPhi",
549                 runTime_.timeName(),
550                 U_.db(),
551                 IObject::NO_READ,
552                 IObject::NO_WRITE
553             ),
554             S_()->component(symmTensor::XY)
555         )
556     );
557 }
558 tmp<volScalarField> kEpsDif::SrZ_() const
559 {
560     return tmp<volScalarField>
561     (
562         new volScalarField
563         (
564             IObject
565             (

```

```

566         "Srz_",
567         runTime_.timeName(),
568         U_.db(),
569         IOobject::NO_READ,
570         IOobject::NO_WRITE
571     ),
572     S()->component(symmTensor::XZ)
573 )
574 );
575 }
576 tmp<volScalarField> kEpsDif::Srz() const
577 {
578     return tmp<volScalarField>
579     (
580         new volScalarField
581         (
582             IOobject
583             (
584                 "Srz",
585                 runTime_.timeName(),
586                 U_.db(),
587                 IOobject::NO_READ,
588                 IOobject::NO_WRITE
589             ),
590             S()->component(symmTensor::XZ)
591         )
592     );
593 }
594 tmp<volScalarField> kEpsDif::SPhiz_() const
595 {
596     return tmp<volScalarField>
597     (
598         new volScalarField
599         (
600             IOobject
601             (
602                 "SPhiz_",
603                 runTime_.timeName(),
604                 U_.db(),
605                 IOobject::NO_READ,
606                 IOobject::NO_WRITE
607             ),
608             S()->component(symmTensor::YZ)
609         )
610     );
611 }
612 tmp<volScalarField> kEpsDif::SPhiz() const
613 {
614     return tmp<volScalarField>
615     (
616         new volScalarField
617         (
618             IOobject
619             (
620                 "SPhiz",
621                 runTime_.timeName(),
622                 U_.db(),

```

```

623         IOobject::NO_READ,
624         IOobject::NO_WRITE
625     ),
626     S()->component(symmTensor::YZ)
627 );
628 };
629 }
630 tmp<volScalarField> kEpsDif::Szz_() const
631 {
632     return tmp<volScalarField>
633     (
634         new volScalarField
635         (
636             IOobject
637             (
638                 "Szz_",
639                 runTime_.timeName(),
640                 U_.db(),
641                 IOobject::NO_READ,
642                 IOobject::NO_WRITE
643             ),
644             S()->component(symmTensor::ZZ)
645         )
646     );
647 }
648 tmp<volScalarField> kEpsDif::Szz() const
649 {
650     return tmp<volScalarField>
651     (
652         new volScalarField
653         (
654             IOobject
655             (
656                 "Szz",
657                 runTime_.timeName(),
658                 U_.db(),
659                 IOobject::NO_READ,
660                 IOobject::NO_WRITE
661             ),
662             S()->component(symmTensor::ZZ)
663         )
664     );
665 }
666 tmp<volScalarField> kEpsDif::Srr_() const
667 {
668     return tmp<volScalarField>
669     (
670         new volScalarField
671         (
672             IOobject
673             (
674                 "Srr_",
675                 runTime_.timeName(),
676                 U_.db(),
677                 IOobject::NO_READ,
678                 IOobject::NO_WRITE
679             ),

```

```

680         S()->component(symmTensor::XX)
681     )
682 );
683 }
684 tmp<volScalarField> kEpsDif::Srr() const
685 {
686     return tmp<volScalarField>
687     (
688         new volScalarField
689         (
690             IOobject
691             (
692                 "Srr",
693                 runTime_.timeName(),
694                 U_.db(),
695                 IOobject::NO_READ,
696                 IOobject::NO_WRITE
697             ),
698             S()->component(symmTensor::XX)
699         )
700     );
701 }
702 tmp<volScalarField> kEpsDif::SPhiPhi_() const
703 {
704     return tmp<volScalarField>
705     (
706         new volScalarField
707         (
708             IOobject
709             (
710                 "SPhiPhi_",
711                 runTime_.timeName(),
712                 U_.db(),
713                 IOobject::NO_READ,
714                 IOobject::NO_WRITE
715             ),
716             S()->component(symmTensor::YY)
717         )
718     );
719 }
720 tmp<volScalarField> kEpsDif::SPhiPhi() const
721 {
722     return tmp<volScalarField>
723     (
724         new volScalarField
725         (
726             IOobject
727             (
728                 "SPhiPhi",
729                 runTime_.timeName(),
730                 U_.db(),
731                 IOobject::NO_READ,
732                 IOobject::NO_WRITE
733             ),
734             S()->component(symmTensor::YY)
735         )
736     );

```

```

737 }
738 tmp<volScalarField> kEpsDif::Ux_() const
739 {
740     return tmp<volScalarField>
741     (
742         new volScalarField
743         (
744             IOobject
745             (
746                 "Ux_",
747                 runTime_.timeName(),
748                 U_.db(),
749                 IOobject::NO_READ,
750                 IOobject::NO_WRITE
751             ),
752             U_.component(vector::X)
753         )
754     );
755 }
756 tmp<volScalarField> kEpsDif::Uy_() const
757 {
758     return tmp<volScalarField>
759     (
760         new volScalarField
761         (
762             IOobject
763             (
764                 "Uy_",
765                 runTime_.timeName(),
766                 U_.db(),
767                 IOobject::NO_READ,
768                 IOobject::NO_WRITE
769             ),
770             U_.component(vector::Y)
771         )
772     );
773 }
774 }
775 tmp<volSymmTensorField> kEpsDif::R() const
776 {
777     return tmp<volSymmTensorField>
778     (
779         new volSymmTensorField
780         (
781             IOobject
782             (
783                 "R",
784                 runTime_.timeName(),
785                 U_.db(),
786                 IOobject::NO_READ,
787                 IOobject::NO_WRITE
788             ),
789             ((2.0/3.0)*I)*k_ - nut_*twoSymm(fvc::grad(U_)) + nonlinStress_,
790             k_.boundaryField().types()
791         )
792     );
793 }

```

```

794 }
795 tmp<volSymmTensorField> kEpsDif::devReff() const
796 {
797     return tmp<volSymmTensorField>
798     (
799         new volSymmTensorField
800         (
801             IOobject
802             (
803                 "devRhoReff",
804                 runTime_.timeName(),
805                 U_.db(),
806                 IOobject::NO_READ,
807                 IOobject::NO_WRITE
808             ),
809             -nuEff()*dev(twoSymm(fvc::grad(U_))) + nonlinStress_
810         )
811     );
812 }
813 tmp<fvVectorMatrix> kEpsDif::divDevReff() const
814 {
815     return
816     (
817         fvc::div(nonlinStress_)
818         - fvm::laplacian(nuEff(), U_)
819         - fvc::div(nuEff()*dev(T(fvc::grad(U_))))
820     );
821 }
822 }
823 bool kEpsDif::read()
824 {
825     if (RASModel::read())
826     {
827         Cmu_.readIfPresent(coeffDict());
828         C1_.readIfPresent(coeffDict());
829         C2_.readIfPresent(coeffDict());
830         sigmaEps_.readIfPresent(coeffDict());
831         l_.readIfPresent(coeffDict());
832         L_.readIfPresent(coeffDict());
833
834         return true;
835     }
836     else
837     {
838         return false;
839     }
840 }
841 float SwirlCalc(float a, float b, float c)
842 {
843     float swst;
844     swst=b/(a+c);
845     return swst;
846 }
847 void kEpsDif::correct()
848 {
849     if (mesh_.changing())
850     {

```

```

851     bound(k_, k0_);
852     bound(epsilon_, epsilon0_);
853 }
854
855 RASModel::correct();
856
857 if (!turbulence_)
858 {
859     return;
860 }
861
862 gradU=fvc::grad(U_);
863
864 // generation term
865 volScalarField G("RASModel::G",
866                 nut_*2*magSqr(symm(gradU)) - (nonlinStress_ && gradU));
867
868 // Update epsilon and G at the wall
869 epsilon_.boundaryField().updateCoeffs();
870
871 // Dissipation equation
872 tmp<fvScalarMatrix> epsEqn
873 (
874     fvm::ddt(epsilon_)
875     + fvm::div(phi_, epsilon_)
876     + fvm::SuSp(-fvc::div(phi_), epsilon_)
877     - fvm::laplacian(DepsilonEff(), epsilon_)
878     ==
879     C1_*G*epsilon_/k_
880     - fvm::Sp(C2_*epsilon_/k_, epsilon_)
881 );
882
883 epsEqn().relax();
884
885 solve(epsEqn);
886 bound(epsilon_, epsilon0_);
887
888 // Turbulent kinetic energy equation
889 tmp<fvScalarMatrix> kEqn
890 (
891     fvm::ddt(k_)
892     + fvm::div(phi_, k_)
893     + fvm::SuSp(-fvc::div(phi_), k_)
894     - fvm::laplacian(DkEff(), k_)
895     ==
896     G
897     - fvm::Sp(epsilon_/k_, k_)
898 );
899
900 kEqn().relax();
901 solve(kEqn);
902 bound(k_, k0_);
903
904 // Recalculating viscosity
905 nut_ = Cmu_*sqr(k_)/(epsilon_ + epsilonSmall_);
906 nut_ = min(nut_, nuRatio()*nu());
907 nut_.correctBoundaryConditions();

```

```

908
909 // Recalculating Inlet Swirl Strenght
910 label myinlet = mesh_.boundaryMesh().findPatchID("inlet");
911 const polyPatch& cPatch = mesh_.boundaryMesh()[myinlet];
912 const fvPatchVectorField& Uin = U().boundaryField()[myinlet];
913 const fvPatchScalarField& SinIN = SinPhi_.boundaryField()[myinlet];
914 const fvPatchScalarField& CosIN = CosPhi_.boundaryField()[myinlet];
915 const surfaceScalarField& magSf = mesh_.magSf();
916
917
918 float IFR = 0.0;
919 float IEFzDir = 0.0;
920 float IEFPhiDir = 0.0;
921 float IEFzDirSmall_ = 0.001;
922
923 forAll(cPatch, facei)
924 {
925     IFR += (Uin[facei].z())*magSf.boundaryField()[myinlet][facei];
926     IEFzDir += pow(Uin[facei].z(),3)*magSf.boundaryField()[myinlet][facei];
927     IEFPhiDir += sqrt(-Uin[facei].x()*SinIN[facei]+Uin[facei].y()
928         *CosIN[facei])*(Uin[facei].z())
929         *magSf.boundaryField()[myinlet][facei];
930 }
931
932 scalar t = time().value();
933 Info<<"t = " <<t<<endl;
934
935 if (t<3)
936 {
937     SwS_=SwirlCalc(IEFzDir,IEFPhiDir,IEFzDirSmall_);
938     Info<<"SwirlCalc = " <<SwS_<<endl;
939     std::ofstream out("SwS.txt");
940     out<<std::setprecision(3)<<SwS_;
941 }
942
943 else
944 {
945     std::ifstream in("SwS.txt");
946     float ss;
947     in>>ss;
948     Info<<"ss = " <<ss<<endl;
949     SwS_=ss;
950 }
951
952 // Re-calculate Hamba coefficients
953 Omega_=mag(-Ux_()*SinPhi_+Uy_()*CosPhi_)/r_;
954 TauH_=Ctau_*k_/(epsilon_ + epsilonSmall_);
955
956 if (SwS_<SwScr_)
957 {
958     OT_=0;
959 }
960
961 else
962 {
963     OT_=Omega_*TauH_;
964 }

```



```

965
966     K1_=4*(OT_)/(1+4*sqr(OT_));
967     K2_=2/(((1+A_*sqr(4*OT_))*(1+B_*8*OT_*(OT_-0.4*pow(SwS_,1./4)))));
968     K3_=2/(1+sqr(OT_));
969     K4_=2*(OT_)/(1+sqr(OT_));
970     K5_=2*(OT_)/(1+4*sqr(OT_));
971     K6_=4*sqr(OT_)/(1+4*sqr(OT_));
972     K7_=2*(1+2*sqr(OT_))/(1+4*sqr(OT_));
973     K8_=(2+sqr((16.74+pow(10*SwS_,1.21))*OT_))/
974         (1+30*mag(OT_)+70*pow(mag(OT_),3));
975     K9_=4*OT_/(1+sqr(OT_));
976
977     // Re-calculate nonlinear stresses
978     nonlinStress_ =
979     symm(nut_*symm(
980         LTT_&
981         (
982         (
983         ((
984         -K1_*OneOne(tensor::one)
985         -K2_*OneTwo(tensor::one)
986         -K2_*TwoOne(tensor::one)
987         +K9_*TwoTwo(tensor::one)
988         )
989         &
990         (
991         SrPhi()*I
992         ))
993         +
994         ((
995         -K8_*OneThree(tensor::one)
996         +K4_*TwoThree(tensor::one)
997         -K8_*ThreeOne(tensor::one)
998         +K4_*ThreeTwo(tensor::one)
999         )
1000        &
1001        (
1002        Srz()*I
1003        ))
1004        +
1005        ((
1006        -K4_*OneThree(tensor::one)
1007        -K3_*TwoThree(tensor::one)
1008        -K4_*ThreeOne(tensor::one)
1009        -K3_*ThreeTwo(tensor::one)
1010        )
1011        &
1012        (
1013        SPhiz()*I
1014        ))
1015        +
1016        ((
1017        -2*ThreeThree(tensor::one)
1018        )
1019        &
1020        (
1021        Szz()*I

```


II.V - Хедер фајл kEpsDif.H

```
1 /*-----*\
2  ===== |
3  \\      /  F ield      | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox
4  \\      /  O peration  |
5  \\      /  A nd        | Copyright held by original author
6  \\      /  M anipulation |
7  -----*
8 License
9
10 -----
11
12 /*-----*\
13
14 #ifndef kEpsDif_H
15 #define kEpsDif_H
16 #include "RASModel.H"
17 // * * * * * //
18 namespace Foam
19 {
20 namespace incompressible
21 {
22 namespace RASModels
23 {
24 /*-----*\
25                                     Class kEpsDif Declaration
26 /*-----*\
27 class kEpsDif
28 :
29     public RASModel
30 {
31     // Private data
32     // Model coefficients
33         dimensionedScalar Cmu_;
34         dimensionedScalar Ctau_;
35         dimensionedScalar l_;
36         dimensionedScalar L_;
37         dimensionedScalar rSmall_;
38         dimensionedScalar Cz_;
39         float SwS_;
40         float SwScr_;
41         dimensionedScalar KL;
42         dimensionedScalar KLL;
43         dimensionedScalar C1_;
44         dimensionedScalar C2_;
45         dimensionedScalar sigmaEps_;
46     // Fields
47         volScalarField k_;
48         volScalarField epsilon_;
49         volScalarField nut_;
50         volScalarField X_;
51         volScalarField Y_;
52         volScalarField Z_;
```

```

53     volScalarField r_;
54     volScalarField SinPhi_;
55     volScalarField CosPhi_;
56     volTensorField Ltt_;
57     volTensorField Rtt_;
58     volTensorField LTT_;
59     volTensorField RTT_;
60     volScalarField Omega_;
61     volScalarField TauH_;
62     volScalarField OT_;
63     volScalarField A_;
64     volScalarField B_;
65     volScalarField K1_;
66     volScalarField K2_;
67     volScalarField K3_;
68     volScalarField K4_;
69     volScalarField K5_;
70     volScalarField K6_;
71     volScalarField K7_;
72     volScalarField K8_;
73     volScalarField K9_;
74     volTensorField gradU;
75     volSymmTensorField nonlinStress_;
76 public:
77     //- Runtime type information
78     TypeName("kEpsDif");
79     //- Constructors
80     //- Construct from components
81     kEpsDif
82     (
83         const volVectorField& U,
84         const surfaceScalarField& phi,
85         transportModel& transport
86     );
87     //- Destructor
88     virtual ~kEpsDif()
89     {}
90     //- Member Functions
91     //- Return the turbulence viscosity
92     virtual tmp<volScalarField> nut() const
93     {
94         return nut_;
95     }
96     //- Return the effective diffusivity for k
97     tmp<volScalarField> DkEff() const
98     {
99         return tmp<volScalarField>
100         (
101             new volScalarField("DkEff", nut_ + nu())
102         );
103     }
104     //- Return the effective diffusivity for epsilon
105     tmp<volScalarField> DepsilonEff() const
106     {
107         return tmp<volScalarField>
108         (
109             new volScalarField("DepsilonEff", nut_/sigmaEps_ + nu())

```

```

110     );
111 }
112 // - Return the turbulence kinetic energy
113 virtual tmp<volScalarField> k() const
114 {
115     return k_;
116 }
117 // - Return the turbulence kinetic energy dissipation rate
118 virtual tmp<volScalarField> epsilon() const
119 {
120     return epsilon_;
121 }
122
123 virtual tmp<volSymmTensorField> R() const;
124 virtual tmp<volTensorField> S() const;
125 virtual tmp<volScalarField> SrPhi() const;
126 virtual tmp<volScalarField> Srz() const;
127 virtual tmp<volScalarField> SPhiz() const;
128 virtual tmp<volScalarField> Szz() const;
129 virtual tmp<volScalarField> Srr() const;
130 virtual tmp<volScalarField> SPhiPhi() const;
131 virtual tmp<volTensorField> S_() const;
132 virtual tmp<volScalarField> SrPhi_() const;
133 virtual tmp<volScalarField> Srz_() const;
134 virtual tmp<volScalarField> SPhiz_() const;
135 virtual tmp<volScalarField> Szz_() const;
136 virtual tmp<volScalarField> Srr_() const;
137 virtual tmp<volScalarField> SPhiPhi_() const;
138 virtual tmp<volScalarField> Ux_() const;
139 virtual tmp<volScalarField> Uy_() const;
140
141 // - Return the effective stress tensor including the laminar stress
142 virtual tmp<volSymmTensorField> devReff() const;
143 // - Return the source term for the momentum equation
144 virtual tmp<fvVectorMatrix> divDevReff() const;
145 // - Solve the turbulence equations and correct the turbulence ←
146     viscosity
147 virtual void correct();
148 // - Read RASProperties dictionary
149 virtual bool read();
150 };
151 // * * * * *
152 } // End namespace RASModels
153 } // End namespace incompressible
154 } // End namespace Foam
155 // * * * * *
156 #endif
157 // *****

```

Биографија аутора

Ђорђе М. Новковић је рођен 17.06.1976. године у Карловцу, Р. Хрватска, СФРЈ. Основну школу завршио је 1990. године у Крстињи, Р. Хрватска, СФРЈ. Средњу техничку школу је завршио 1994. године у Војнићу у Републици српској крајини. Машински факултет у Бањој Луци у Републици Српској уписао је 1994. године. Због иселења из Републике српске крајине, студије је 1995. године наставио на Машинском факултету у Приштини, АП Косово и Метохија, Р. Србија. Током студија на Машинском факултету у Приштини био је студент генерације, тако да је 1997. године добио диплому "истакнути студент". Због иселења Машинског факултета из Приштине, студије је 1999. године наставио на Факултету техничких наука у Косовској Митровици. Због отежаних услова студирања, студије је завршио 2004. године на Одсеку за термотехнику и термоенергетику Факултета техничких наука у Косовској Митровици са просечном оценом 8,68 (осам и 68/100). Дипломски рад под насловом "*Проблем струјања уља у цилиндричном клизном лежају*" одбранио је из предмета Механика флуида са оценом 10 (десет).

Од 2005. до 2016. године био је запослен као асистент на Факултету техничких наука у Косовској Митровици. Држао је нумеричке вежбе из предмета Механика флуида, Хидрауличне и пнеуматске машине, Пумпе вентилатори и компресори, Хидропнеуматска техника и Механика. Од 2016. до 2018. године био је запослен као стручни сарадник-лаборант за материјале, механику и саобраћај на Факултету техничких наука у Косовској Митровици.

Од 01.11.2018. године је запослен на Машинском факултету у Београду, при Катедри за Механику флуида, као истраживач на пројекту TR35046 под називом "*Примена савремених мерних и прорачунских техника за изучавање струјних параметара вентилационих система на моделу енергетски изузетно ефикасног (пасивног) објекта*". Изабран је у истраживачко звање истраживач сарадник дана 01.06.2018. Аутор је или коаутор четири рада у часописима међународног и домаћег значаја (од тога један у часопису са импакт фактором (SCI листа)), шеснаест саопштења на међународним скуповима и домаћим скуповима са међународним учешћем. Учествовао је као истраживач у четири пројекта при Министарству просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије.

Говори енглески језик и активно се служи рачунаром. Користи програме MS Office, SolidWorks, Wolfram Mathematica, AutoCAD под оперативним системом Windows и програме LibreOffice, Texmaker, Gnuplot, Inkscape под оперативним системом Linux. Служи се C++ програмским језиком. Напредно користи CFD пакете ANSYS CFX, ICEM CFD, BladeGen, TurboGrid, DesignModeler, Meshing, WorkBench, под оперативним системом Windows. Напредно користи и CFD пакет OpenFOAM под оперативним системом Linux.

Ожењен је и отац је једног детета.

Прилог 1.

Изјава о ауторству

Потписани-а Ђорђе Новковић

број индекса D28/10

Изјављујем

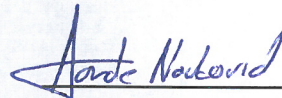
да је докторска дисертација под насловом

МОДЕЛИРАЊЕ И НУМЕРИЧКИ ПРОРАЧУНИ СТРУЈАЊА НЕСТИШЉИВОГ
ФЛУИДА У ПРАВИМ КОНУСНИМ ДИФУЗОРИМА

- резултат сопственог истраживачког рада,
- да предложена дисертација у целини ни у деловима није била предложена за добијање било које дипломе према студијским програмима других високошколских установа,
- да су резултати коректно наведени и
- да нисам кршио/ла ауторска права и користио интелектуалну својину других лица.

Потпис докторанда

У Београду, 16.08.2019.



Прилог 2.

Изјава о истоветности штампане и електронске верзије докторског рада

Име и презиме аутора _____ Ђорђе Новковић _____

Број индекса _____

Студијски програм _____

Наслов рада МОДЕЛИРАЊЕ И НУМЕРИЧКИ ПРОРАЧУНИ СТРУЈАЊА
НЕСТИШЉИВОГ ФЛУИДА У ПРАВИМ КОНУСНИМ ДИФУЗОРИМА

Ментор _____ др Милан Лечић ред. проф. _____

Ментор _____ др Александар Ђоћић ванр. проф. _____

Потписани/а _____ Ђорђе Новковић _____

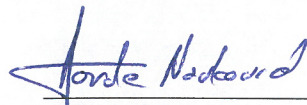
Изјављујем да је штампана верзија мог докторског рада истоветна електронској верзији коју сам предао/ла за објављивање на порталу **Дигиталног репозиторијума Универзитета у Београду**.

Дозвољавам да се објаве моји лични подаци везани за добијање академског звања доктора наука, као што су име и презиме, година и место рођења и датум одбране рада.

Ови лични подаци могу се објавити на мрежним страницама дигиталне библиотеке, у електронском каталогу и у публикацијама Универзитета у Београду.

Потпис докторанда

У Београду, 16.08.2019.



Прилог 3.

Изјава о коришћењу

Овлашћујем Универзитетску библиотеку „Светозар Марковић“ да у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду унесе моју докторску дисертацију под насловом:

МОДЕЛИРАЊЕ И НУМЕРИЧКИ ПРОРАЧУНИ СТРУЈАЊА НЕСТИШЉИВОГ ФЛУИДА У ПРАВИМ КОНУСНИМ ДИФУЗОРИМА

која је моје ауторско дело.

Дисертацију са свим прилозима предао/ла сам у електронском формату погодном за трајно архивирање.

Моју докторску дисертацију похрањену у Дигитални репозиторијум Универзитета у Београду могу да користе сви који поштују одредбе садржане у одабраном типу лиценце Креативне заједнице (Creative Commons) за коју сам се одлучио/ла.

1. Ауторство

2. Ауторство - некомерцијално

3. Ауторство – некомерцијално – без прераде

4. Ауторство – некомерцијално – делити под истим условима

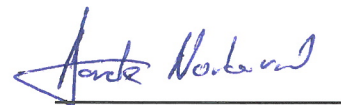
5. Ауторство – без прераде

6. Ауторство – делити под истим условима

(Молимо да заокружите само једну од шест понуђених лиценци, кратак опис лиценци дат је на полеђини листа).

Потпис докторанда

У Београду, 16.08.2019.



1. Ауторство - Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце, чак и у комерцијалне сврхе. Ово је најслободнија од свих лиценци.

2. Ауторство – некомерцијално. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела.

3. Ауторство - некомерцијално – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела. У односу на све остале лиценце, овом лиценцом се ограничава највећи обим права коришћења дела.

4. Ауторство - некомерцијално – делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца не дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада.

5. Ауторство – без прераде. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, без промена, преобликовања или употребе дела у свом делу, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела.

6. Ауторство - делити под истим условима. Дозвољавате умножавање, дистрибуцију и јавно саопштавање дела, и прераде, ако се наведе име аутора на начин одређен од стране аутора или даваоца лиценце и ако се прерада дистрибуира под истом или сличном лиценцом. Ова лиценца дозвољава комерцијалну употребу дела и прерада. Слична је софтверским лиценцама, односно лиценцама отвореног кода.